

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد گرانی سنجی

استفاده از روش کوادرتیک در مدل سازی دو بعدی داده های گرانی به منظور ارائه یک -

مدل بهبود یافته

نگارنده: مرتضی علیزاده

اساتید راهنما :

دکتر علی نجاتی کلاته

دکتر امین روشندل کاهو

استاد مشاور:

دکتر محمد رضایی

بهمن ۱۳۹۵

تشکر و قدردانی

تقدیم به پدر و مادر عزیزتر از جانم که در تمام لحظات زندگی یار و پشتیبانم بوده‌اند.

تقدیم به همسر گرامی، برادر و خواهر گرامیم که معنی زندگی و فداکاری را از آنها آموختم.

تقدیم به استاد گرامی، دکتر علی نجاتی کلاته که با صبر و دلسوزی خود در این مسیر، استاد علم و عمل من بوده‌اند.

تقدیم به استاد گرامی، دکتر امین روشندل کاهو که پشتیبانی و عنایت ایشان در این مسیر، نقشی بسیار مهم در سرعت بخشیدن و به بار نشستن این اثر داشته است.

تقدیم به تمامی اساتید دانشکده معدن، نفت و ژئوفیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود که هیچگاه از کمک و مساعدت خویش دریغ نکرده‌اند.

تقدیم به تمامی دوستانم که همواره در این مسیر مایه دلگرمی من بوده‌اند.

با تشکر از دکتر محمد رضایی که با نکات ظریف خود ما را یاری نمودند.

تعهد نامه

اینجانب **مرتضی علیزاده** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ژئوفیزیک - گرایش گرانی سنجی دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه استفاده از روش کوادرتیک در مدلسازی دو بعدی داده های گرانی به منظور ارائه یک مدل بهبود یافته تحت راهنمایی دکتر علی نجاتی کلاته و دکتر امین روشندل کاهو و مشاوره دکتر محمد رضایی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

وارون سازی داده‌های گرانی یکی از مهمترین گام‌ها در تفسیر این داده‌ها است. هدف از این کار تخمین توزیع چگالی مدل نا شناخته زیر سطحی از طریق داده‌های اندازه‌گیری شده در سطح زمین است. مشکل اصلی در وارون سازی داده‌های حاصل از عملیات گرانی‌سنجی، عدم یکتایی جواب ناشی از وارون سازی داده‌های ژئوفیزیکی است. وارون سازی خطی داده‌های گرانی‌سنجی مسئله‌ای کم تعیین شده و بد حالت می‌باشد. تعیین پارامتر منظم سازی بهینه در وارون سازی داده‌های گرانی از اهمیت فراوانی برخوردار است. یکی از این روش‌ها، روش اعتبار سنجی متقاطع تعمیم یافته (GCV) است. در این پایان‌نامه از روش برنامه‌نویسی درجه دو (روش کوادرتیک) که یک روش بهینه‌سازی است استفاده شده است. این روش دارای سه الگوریتم، منطقه اعتماد، نقطه داخلی و مجموعه فعال می‌باشد. این سه الگوریتم از نظر مدت زمان اجرای وارون‌سازی و همچنین میزان پایداری هر یک از این الگوریتم‌ها در مقابل نوفه بررسی خواهند شد. به منظور اعتبار سنجی روش ارائه شده، از داده‌های گرانی حاصل از دو مدل مصنوعی و داده‌های گرانی معدن مسیو سولفید موبرون واقع در ایالت کبک کانادا استفاده شد.

کلمات کلیدی: مدل‌سازی، روش کوادرتیک، داده‌گرانی، موبرون، کانادا

فهرست

فصل اول

- کلیات..... ۱
- ۱-۱ مقدمه..... ۲
- ۲-۱ نقش ژئوفیزیک در اکتشاف ذخایر معدنی و هیدروکربور..... ۳
- ۳-۱ نقش روش‌های گرانی و مغناطیس در اکتشاف ذخایر معدنی و هیدروکربور..... ۴
- ۴-۱-۳ جایگاه گرانی‌سنجی در اکتشاف مواد معدنی و هیدروکربور..... ۴
- ۴-۳-۲ جایگاه روش مغناطیس‌سنجی در اکتشاف منابع هیدروکربور..... ۵
- ۴-۴-۱ چگالی و خودپذیری مغناطیسی در سنگ‌ها و کانی‌ها..... ۵
- ۴-۴-۱-۱ چگالی..... ۵
- ۴-۴-۲ خودپذیری مغناطیسی..... ۶
- ۵-۱ سابقه مطالعات انجام شده..... ۷
- ۶-۱ ضرورت انجام پایان‌نامه..... ۸
- ۷-۱ هدف از انجام پایان‌نامه..... ۸
- ۸-۱ ساختار پایان‌نامه..... ۹

فصل دوم

- معرفی مسائل وارون..... ۱۱
- ۱-۲ مقدمه‌ای بر مسائل وارون..... ۱۲
- ۱-۱-۲ مروری بر مفاهیم پایه‌ای در نظریه وارون..... ۱۲

- ۲-۲ فرمول بندی مسئله وارون..... ۱۵
- ۱-۲-۲ مسئله وارون خطی ۱۶
- ۲-۲-۲ تخمین‌های اندازه بردار خطا..... ۱۷
- ۳-۲ راه حل کمترین مربعات برای مسائل وارون خطی..... ۱۹
- ۴-۲ حل مسائل غیرخطی و تبدیل آنها به مسائل خطی..... ۲۰
- ۱-۴-۲ مسائل گسسته و پیوسته وارون..... ۲۲
- ۲-۴-۲ حل مسائل وارون گسسته خطی و برآورد شاخص‌های مدل ۲۳
- ۳-۴-۲ مشکلات مسائل وارون..... ۲۵
- ۵-۲ رده بندی مسائل وارون ۲۷
- ۱-۵-۲ مسائل وارون به طور دقیق تعیین شده ۲۸
- ۲-۵-۲ مسائل وارون فرامعین ۲۸
- ۳-۵-۲ مسائل وارون فرومعین..... ۲۹
- ۴-۵-۲ مسائل تعیین شده ترکیبی ۲۹

فصل سوم

- بهینه‌سازی..... ۳۳
- ۱-۳ بهینه‌سازی مسائل وارون ۳۴
- ۱-۱-۳ معادلات انتگرالی فرد هولم ۳۴
- ۲-۳ روش تجزیه مقادیر منفرد معمولی و تعمیم یافته (GSVD, GSV) ۳۶
- ۱-۲-۳ تجزیه مقادیر منفرد معمولی ۳۶

- ۳-۳ تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته ۳۷
- ۴-۳ اعتبارسنجی متقاطع تعمیم یافته (GCV) ۳۸
- ۵-۳ روش تیخونوف ۳۹
- ۱-۵-۳ انتخاب جواب مناسب ۴۱
- ۶-۳ حل کمترین مربعات ۴۱
- ۱-۶-۳ حل کمترین مربعات کم تعیین شده ۴۲
- ۲-۶ حل به روش مارکوارت لونبرگ ۴۲
- ۷-۳ حل تجزیه مقادیر منفرد به روش تیخونوف ۴۳
- ۸-۳ تیخونوف تعمیم یافته در فضای سوبولف ۴۶

فصل چهارم

- معرفی روش کوادرتیک ۴۹
- ۱-۴ مقدمه ۵۰
- ۲-۴ تئوری روش کوادرتیک ۵۰
- ۱-۲-۴ الگوریتم منطقه اعتماد ۵۲
- ۲-۲-۴ الگوریتم نقطه داخلی ۵۳
- ۳-۲-۴ الگوریتم منطقه فعال ۶۱

فصل پنجم

- استفاده از روش ارائه شده در وارون سازی داده‌های مصنوعی و واقعی ۶۱
- ۱-۵ مقدمه ۶۲

۲-۵	وارون سازی داده‌های مصنوعی	۶۲
۳-۵	بررسی هر سه الگوریتم روش کوادرتیک از نظر زمان اجرای برنامه	۶۷
۴-۵	بررسی پایداری سه الگوریتم روش کوادرتیک در مقابل نوفه	۷۰
۵-۵	وارون سازی داده‌های واقعی	۷۵
۱-۵-۵	وارون سازی داده‌های گرانی معدن مس موبرون در کانادا	۷۵
۶-۵	بحث و نتیجه‌گیری	۸۰

فصل ششم

نتیجه‌گیری و پیشنهادات	۸۱
۱-۶ مقدمه	۸۲
۲-۶ نتیجه‌گیری	۸۲
۳-۶ پیشنهادات	۸۳
۴-۶ منابع	۸۴

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۲: نمایش برازش کمترین مربعات یک خط راست ۱۸
- شکل ۲-۲: خط راست برازش شده به جفت‌های (z,d) ۱۹
- شکل ۳-۲: روش برازش کمترین مربعات به زوج نقاط ۲۴
- شکل ۴-۲: پارامتر جذب اشعه X ۳۰
- شکل ۱-۴: فلوچارت الگوریتم منطقه فعال ۵۶
- شکل ۲-۴: نمایش جهت و طول گام در الگوریتم منطقه فعال ۵۷
- شکل ۱-۵: مدل‌های مصنوعی متشکل از یک مکعب و دایک ۶۳
- شکل ۲-۵: نمایش وارون‌سازی داده‌های بدست آمده از مدل‌های مصنوعی ۶۳
- شکل ۳-۵: اعمال الگوریتم نقطه داخلی بر روی مدل‌های مصنوعی (با نوفه ۵ درصد) ۶۴
- شکل ۴-۵: اعمال الگوریتم منطقه اعتماد بر روی مدل‌های مصنوعی (با نوفه ۵ درصد) ۶۶
- شکل ۵-۵: اعمال الگوریتم منطقه فعال بر روی مدل‌های مصنوعی (با نوفه ۵ درصد) ۶۶
- شکل ۶-۵: اعمال سه الگوریتم بر روی مدل مصنوعی با تعداد ۴۵۰ پارامتر ۶۹
- شکل ۷-۵: نمایش سه الگوریتم روش کوادرتیک با نوفه ۲ درصد ۷۲
- شکل ۸-۵: نمایش سه الگوریتم روش کوادرتیک با نوفه ۵ درصد ۷۳
- شکل ۹-۵: نمایش سه الگوریتم روش کوادرتیک با نوفه ۱۰ درصد ۷۴
- شکل ۱۰-۵: نقشه باقیمانده بوگه معدن مس موبرون واقع در منطقه کبک-کانادا ۷۶
- شکل ۱۱-۵: منحنی بی‌هنجاری ناشی از داده‌های گرانی معدن مس موبرون در کانادا ۷۶
- شکل ۱۲-۵: نمایش حفاریهای انجام شده بر روی معدن مس موبرون در کانادا ۷۸
- شکل ۱۳-۵: نمایش روش کوادرتیک بر روی داده‌های معدن مس موبرون در کانادا ۷۹

فهرست جداول

- جدول ۵-۱: پارامترهای دو مدل مصنوعی متشکل از مکعب و دایک با تعداد ۱۴۰۰ پارامتر ۶۲
- جدول ۵-۲: زمان اجرای وارون سازی برای مدل مکعب و دایک با تعداد ۱۴۰۰ پارامتر ۶۷
- جدول ۵-۳: پارامترهای مدل مصنوعی متشکل از مکعب با تعداد ۴۵۰ پارامتر ۶۸
- جدول ۵-۴: زمان اجرای وارون سازی برای مدل مکعب و دایک با تعداد ۴۵۰ پارامتر ۶۹
- جدول ۵-۵: زمان اجراء سه الگوریتم روش کوادرتیک برای داده های معدن مس موبرون کانادا .. ۸۰

فصل اول

کلیات

بطور کلی ژئوفیزیک به مطالعه خصوصیات فیزیکی زمین و محیط اطراف آن می‌پردازد. مطالعات ژئوفیزیکی به کشف گیلبرت^۱ که زمین مانند یک مغناطیس غول پیکر عمل می‌کند، برمی‌گردد. اما اولین قدم در کاربرد این علم برای اکتشافات مواد معدنی به سال ۱۸۴۳ می‌رسد و زمانی که فونورده از تئودولیت مغناطیسی برای اندازه‌گیری تغییرات مغناطیسی برای اکتشاف توده‌های آهن استفاده نمود. به دنبال آن در سال ۱۸۷۹ رابرت تالن با تالیف کتاب کشف ذخایر آهن بوسیله روش‌های مغناطیسی قدم موثری در جهت کاربردی نمودن ژئوفیزیک اکتشافی برداشت [۱]. پس از آن تقاضای روز افزون بازار به فلزات و افزایش بی سابقه استفاده از نفت، گاز و مشتقات آنها در ابتدای قرن بیستم منجر به توسعه بسیاری از روش‌های ژئوفیزیکی گردید. از آنجایی که اکثر نهشته‌های کانی در زیر سطح زمین قرار دارد، آشکارسازی آنها به خواصی بستگی دارد که آنها را از محیط اطراف متمایز می‌سازد. روش‌هایی بر مبنای تغییرات خواص کشسانی سنگ‌ها توسعه پیدا کرد که توسط آنها می‌توان ساختارهای مربوط به نفت و گاز نظیر گسل‌ها، تاقدیس‌ها و ناودیس‌ها را تعیین کرد. تغییرات رسانندگی الکتریکی و جریان‌ات طبیعی وارد شده به زمین، تغییرات محلی گرانی، مغناطیس همگی اطلاعاتی را در مورد طبیعت ساختارهای زیرزمینی برای مهندسين فراهم می‌آورد و آنها را در تعیین محل‌های مناسب برای جست‌وجوی نهشته‌های زیر سطحی یاری می‌کند. به طور کلی می‌توان روش‌های ژئوفیزیکی را به دو گروه عمده تقسیم کرد: اول روش‌های چشمه طبیعی^۲ که تغییرات میدان طبیعی را اندازه می‌گیرند، مانند روش‌های گرانی سنجی، مغناطیس سنجی، پتانسیل خودزا و... دوم روش‌های چشمه مصنوعی که در آنها سیگنال‌هایی که بطور مصنوعی تولید شده‌اند، به درون زمین ارسال می‌شوند. سپس سیگنال‌های تغییر یافته توسط گیرنده‌های مناسب اندازه‌گیری می‌شوند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش مقاومت‌ویژه، اکتشافات لرزه نگاری و... اشاره کرد [۲].

^۱ Gilbert

^۲ Natural Source Methods

۲-۱ نقش ژئوفیزیک در اکتشاف ذخایر معدنی و هیدروکربور

تقاضای مداوم برای بهره‌برداری از فلزات و کانی‌ها و افزایش شدید مصرف هیدروکربورهای مانند نفت و گاز طبیعی، در طول پنجاه سال گذشته موجب توسعه بسیاری از روش‌های ژئوفیزیکی با دقت‌های زیاد برای آشکار سازی نهشته‌ها و ساختارهای غیر قابل رویت شده است.

در اوایل قرن بیستم پی‌جویی برای کانی‌های اقتصادی منحصر به رخنمون‌های سطحی سنگ‌های روی زمین محدود می‌شد و بدین ترتیب تمامی ذخایر مورد نیاز کشف و مورد بهره‌برداری قرار گرفته‌اند. امروزه برای کشف ذخایر جدید باید پی‌جویی را به زیر سطح زمین گسترش داد و این امر از نظر اقتصادی با اکتشافات ژئوفیزیکی امکان‌پذیر خواهد بود. با گذشت زمان و استفاده از ذخایر کم عمق موجود، راهی جز اکتشاف منابع عمیق‌تر باقی نمانده است. روش‌های ژئوفیزیکی برای افزایش کارایی زیر سطحی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. اگر چه کلیه اطلاعات حاصل از انواع روش‌های ژئوفیزیک سطحی را می‌توان با دقت بیشتری از روش‌های حفاری و نمونه‌گیری نیز بدست آورد، روش‌های حفاری حتی برای مطالعات اعماق کم بسیار کند و پرهزینه هستند. بنابراین، روش‌های ژئوفیزیکی برای بهینه‌سازی عملیات حفاری، و گاهی حتی برای حذف آن مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش‌های ژئوفیزیکی اکتشافی از دهه ۱۹۲۰ به بعد برای اکتشاف نفت و گاز به کار گرفته شده‌اند. در ابتدا، برای اکتشاف ذخایر هیدروکربوری روش‌های زمین‌شناسی سطحی بیشتر از روش‌های ژئوفیزیکی مورد استفاده قرار گرفتند، اما بعد از تمام شدن ذخایر سهل‌الحصول و قابل مشاهده در سطح زمین و آغاز اکتشافات ژئوفیزیکی مخازن عمیق، روش‌های زمین‌شناسی سطحی دیگر مانند قبل موفقیت آمیز نبودند. از آغاز دهه ۱۹۴۰ روش‌های ژئوفیزیکی به طور جدی در امر اکتشاف به کار گرفته شدند [۳]. در ابتدا روش گرانی سنجی، مغناطیس سنجی و لرزه جهت یافتن تله‌های ساختمانی نفتی به کار می‌رفتند اما امروزه از این روش‌ها به منظور تعیین محل حوضه‌های رسوبی و تعیین مشخصات ساختاری آن‌ها بکار می‌روند.

از آنجا که پایان نامه حاضر شامل مدل سازی داده های میدان پتانسیل و با تمرکز بر روی روش گرانی سنجی می باشد. بنابراین در این جا به نقش این روش ها در اکتشاف منابع زیر سطحی پرداخته خواهد شد.

۱-۳ نقش روش های گرانی و مغناطیس در اکتشاف ذخایر معدنی و هیدروکربور

۱-۳-۱ جایگاه گرانی سنجی در اکتشاف مواد معدنی و هیدروکربور

روش گرانی سنجی در ابتدا برای مکان یابی گنبد های نمکی در آمریکا و مکزیک و بعدها برای یافتن ساختار های زمین شناسی زیر سطحی از جمله تاقدیس ها در جنوب غرب آمریکا بکار گرفته شده است [۱]. امروزه نیز روش گرانی سنجی در شناسایی انواع مختلفی از ساختار های زیر سطحی که سهمی در تله انداختن مواد هیدروکربوری دارند به نحو موثری به کار برده می شود. تباین زیاد چگالی این ساختار ها با مواد اطراف خود منجر به شناسایی آن ها با روش گرانی سنجی می شود. به طوری که در بعضی مواقع تنها با همین روش می توان محل منبع بی هنجاری را کشف کرد [۱].

در اکتشاف نفت و مواد معدنی در یک منطقه اکتشاف نشده که هیچ نوع اطلاعات زمین شناسی از آن موجود نمی باشد، اولین سوالی که مطرح می باشد این است که آیا حوضه رسوبی به اندازه کافی بزرگ و ضخیم هست یا خیر؟ اگر شرایط زمین شناسی مناسب باشد بوسیله روش گرانی سنجی با سرعت نسبتا زیاد و هزینه کم می توان اطلاعات مفیدی را در این مورد به دست آورد. اکتشافات گرانی سنجی را می توان هم در خشکی و هم در دریا انجام داد. در اکتشاف مواد معدنی، روش گرانی سنجی معمولا به عنوان یک روش ثانویه برای تایید و تحلیل بیشتر آنومالی هایی که قبلا توسط روش های دیگر اکتشافی مشخص شده اند مورد استفاده قرار می گیرد [۲].

در اوایل قرن بیستم، برداشت های گرانی کاربرد فراوانی در اکتشافات نفت و گاز داشته است. امروزه این روش علاوه بر کاربرد گسترده در اکتشاف هیدروکربوری، کاربردهای دیگری نیز دارد. برداشت های میکروگرویتی در مقیاس های بسیار کوچک انجام گرفته و قابلیت تعیین حفره های زیرزمینی تا

قطر ۱ متر و در محدوده عمقی ۵ متر دارند [۲].

۱-۳-۲ جایگاه روش مغناطیسی سنجی در اکتشاف منابع هیدروکربور

مغناطیسی سنجی قدیمی ترین روش ژئوفیزیک کاربردی است، که در مطالعه میدان مغناطیسی طبیعی زمین، ویژگی مغناطیسی مواد معدنی و مقاطع زمین شناسی کاربرد دارد. در مقایسه با اغلب روش های ژئوفیزیکی، اندازه گیری های صحرایی این روش راحت و ارزان بوده و در مقیاس اکتشافی نیاز به اعمال تصحیح در داده ها نیست. در اکتشافات نفت و گاز در مناطقی که عملیات اکتشافی قبلی در آن صورت نگرفته بوسیله روش مغناطیسی سنجی می توان عمق سنگ بستر و وضعیت حوضه رسوبی را تخمین زد [۲]. روش های مغناطیسی کاربرد های متنوعی دارند و از بررسی های کوچک مقیاس (تعیین محل لوله ها و کابل ها در مناطق کم عمق و مطالعات مهندسی) تا برداشت های بزرگ مقیاس زمین شناسی ناحیه ای (بعنوان مثال در اکتشافات هیدروکربوری) مورد استفاده قرار می گیرد.

۱-۴-۱ چگالی^۱ و خودپذیری مغناطیسی^۲ در سنگ ها و کانی ها

روش های ژئوفیزیکی براساس مطالعه خصوصیات میدان های فیزیکی قابل انتشار در داخل زمین بنا شده اند، که مهمترین این میدان ها عبارتند از گرانی، مغناطیسی، الکترومغناطیسی و میدان های امواج لرزه ای. مقادیر مشاهده ای مربوط به هریک از این میدان ها بستگی به ویژگی های فیزیکی سنگ های در برگیرنده منطقه مورد مطالعه دارد. در روش های گرانی و مغناطیسی این خصوصیات عبارتند از چگالی و خود پذیری مغناطیسی. بنابراین در بخش بعدی به بررسی این کمیت ها در سنگ ها و کانی های مختلف پرداخته می شود.

۱-۴-۱ چگالی

سنگ های رسوبی به طور متوسط دارای چگالی کمتری نسبت به سنگ های آذرین و دگرگونی

^۱ density

^۲ Magnetic susceptibility

هستند. در این میان کمترین چگالی سنگ‌های رسوبی را کنگلومرا و ماسه سنگ دارند و پس از آنها به ترتیب شیل، سنگ آهک و دولومیت قرار دارند. دولومیت و شیل از لحاظ چگالی، یکنواخت‌ترین انواع سنگ‌ها می‌باشند. گستره چگالی در این سنگ‌ها تقریباً بین ۱,۵ تا ۳,۰ گرم بر سانتی متر مکعب می‌باشد [۲].

سنگ‌های آذرین به طور متوسط چگال‌تر از سنگ‌های رسوبی هستند. در میان سنگ‌های آتشفشانی، گدازه‌ها چگالی به نسبت کمی دارند، در حالی که سنگ‌های نفوذی چگالی بیشتری دارند. عموماً سنگ‌های آذرین بازی از انواع اسیدی چگال‌تر می‌باشند [۳]. تخلخلی که در تعیین چگالی سنگ‌های رسوبی بسیار موثر است، اهمیت چندانی در سنگ‌های آذرین و دگرگونی ندارد.

در مورد سنگ‌های دگرگونی یک قانون کلی وجود دارد. به‌طور معمول چگالی با درجه دگرگونی رابطه مستقیم دارد و با افزایش درجه دگرگونی چگالی افزایش می‌یابد. زیرا این عمل باعث پر شدن فضاهای خالی می‌شود.

۱-۴-۲ خودپذیری مغناطیسی

پذیرفتاری مغناطیسی سنگ‌ها، یک خاصیت بسیار مهم در اکتشافات مغناطیسی بوده و اهمیت آن مانند چگالی در اکتشافات گرانی سنجی می‌باشد. معمولاً سنگ‌هایی که دارای در صد قابل توجهی از کانی‌های فرو یا فری مغناطیس هستند، بیشترین پذیرفتاری مغناطیسی را دارند. سنگ‌های مغناطیسی تقریباً همیشه پلاریزاسیون خود را از میدان مغناطیسی زمین کسب می‌کنند ولی در بعضی موارد نادر ممکن است حاصل از رعد و برق باشد [۴]. معمولاً پلاریزاسیون مغناطیسی سنگ‌ها از نوع القایی بوده و جهت و مقدار آن تماماً توسط جهت و میدان مغناطیسی زمین تعیین می‌شود. بعضی دیگر از سنگ‌ها از خود مغناطیس باقیمانده نشان می‌دهند، که مربوط به میدان فعلی زمین نبوده بلکه مربوط به میدان مغناطیس گذشته زمین (هنگامی که این سنگ‌ها تشکیل شده‌اند) می‌باشند. اگر این سنگ‌ها از نوع آذرین باشند جهت مغناطیس شدن آنها همان جهت میدان مغناطیسی وقت زمین

خواهد بود. در این سنگ‌ها در اثر سرد شدن ماگما در دمای پایین‌تر از نقطه کوری^۱ گشتاورهای القایی خود را در جهت میدان مغناطیسی وقت زمین قرار می‌دهند و اگر جهت میدان زمین تغییر نماید، جهت گشتاورهای باقی مانده همواره در همان جهت اولیه باقی خواهد ماند، که به آن مغناطیس باقی مانده گویند. مغناطیس شدن ثانویه هنگامی پیش می‌آید که کانی‌های مغناطیسی اولیه در اثر دگرگونی متبلور شده‌اند و رشد مجدد یافته و جهت مغناطیسی جدیدی برای خود اختیار نموده‌اند، که همان جهت مغناطیسی وقت زمین می‌باشد. در نتیجه سنگ‌هایی که حاوی کانی‌های مغناطیسی هستند، ممکن است هم دارای پلاریزاسیون القایی و هم دارای پلاریزاسیون باقیمانده باشند[۴].

۵-۱ سابقه مطالعات انجام شده

مدل‌سازی دو و سه بعدی داده‌های گرانی می‌تواند اطلاعات مفیدی در مورد توده‌های مولد بی‌هنجاری بدست دهد[۶]. در روش مدل‌سازی خطی پارامترهای فیزیکی مدل تعیین می‌شوند به گونه‌ای که داده‌های تخمین زده شده با داده‌های مشاهده‌ای در حد یک خطای مجاز منطبق شوند. در صورتی که درصد انطباق به حد کافی بالا بود، پارامترهای مدل به عنوان پارامترهای توده مولد بی‌هنجاری انتخاب می‌شوند. مسائل وارون به تعیین خواص درون زمین با استفاده از یک مجموعه متناهی از مشاهدات ژئوفیزیکی می‌پردازند. وارون‌سازی، یک مسئله بد حالت^۲ می‌باشد، که برای حل این مسائل باید تابع هدف آن را کمینه کرد[۷]. روش برنامه‌سازی درجه دو یک روش بهینه‌سازی است که در حل مسائل وارون که داده‌ها تحت تاثیر نوفه قراردارند، به کار می‌رود. این روش دارای سه الگوریتم حل داخلی: ۱- نقطه داخلی^۳ ۲- منطقه اعتماد^۴ ۳- مجموعه فعال^۵ می‌باشد. روش برنامه‌سازی درجه دو (کوادر تیک) با مینیمم کردن یک تابع هدف به جواب بهینه می‌رسد. فیشر و هاوارد^۶

^۱ Curie point

^۲ Ill posed

^۳ Interior point

^۴ Trust region

^۵ Active set

^۶ Fesher and haward

[۸]، از این روش در تفسیر داده‌های گرانی در ژئوفیزیک استفاده کردند. آن‌ها زمین را به تعدادی بلوک تقسیم کرده و سپس برای هر بلوک چگالی متفاوتی قرار دادند. آن‌ها از قید باندگذاری بر روی چگالی استفاده نکردند. گالاردو^۱ در مدل‌سازی داده‌های گرانی و مغناطیس از روش کوادرتیک استفاده کرد و سپس با اعمال قید بر روی توزیع چگالی استفاده کرد [۹]. همچنین با فرض ثابت بودن هندسه زمین از توزیع چگالی استفاده و مسئله را به شکل خطی تبدیل کرد. سپس با استفاده از روش ذکر شده و با قید باندگذاری مسئله را حل کرده است

۶-۱ ضرورت انجام پایان نامه

مدل‌سازی یکی از مراحل تفسیر داده‌های ژئوفیزیکی می‌باشد، هرچه مدل‌سازی با کیفیت بیشتری انجام شود، اطلاعاتی که از داده‌های ژئوفیزیکی بدست می‌آید صحیح‌تر خواهد بود. همچنین از آنجایی که در مدل‌سازی زمان اجرای برنامه خیلی مهم است، همواره ارائه روشی که بتواند با صرف زمان کمتر نتیجه خوبی از مدل‌سازی بدهد مفید خواهد بود. در مسائل وارون تعداد پارامترهای مدل به شدت روی جواب ارائه شده و همچنین مدت زمان اجرای مدل‌سازی تاثیرگذار است. بنابراین در این پایان‌نامه به استفاده از روش کوادرتیک به همراه سه الگوریتم موجود در آن پرداخته می‌شود تا الگوریتمی که مدت زمان اجرای کمتری را در وارون‌سازی دارد بعنوان یک الگوریتم مناسب ارائه شود.

۷-۱ هدف از انجام پایان نامه

در این پایان‌نامه تلاش شد با استفاده از الگوریتم برنامه‌سازی درجه دو و به کار بردن هر سه الگوریتم حل داخلی بر روی داده‌های گرانی این الگوریتم‌ها را از نظر زمان اجرای برنامه و همچنین تاثیر گذاشتن باند بر روی توزیع چگالی و میزان پایداری در مقابل نوفه مورد بررسی قرار داده و با یکدیگر مقایسه شود. در این پایان‌نامه با استفاده از روش بهینه‌سازی تیخونف^۲ و انتخاب پارامتر

^۱ Gallardo

^۲ Tikhonove

منظم‌سازی مناسب با روش تعمیم اعتبار متقاطع^۱ (GCV) پارامتر مزبور را با دقت بیشتری انتخاب کرده تا جواب‌های حاصل از این روش به همگرایی خوبی برسند. در مسائل وارون و تکرارپذیر همواره پیدا کردن پارامتر منظم‌سازی که باعث همگرایی بهتر جواب‌ها شود مورد اهمیت بوده، روش‌های زیادی برای تعیین پارامتر منظم ساز وجود دارد. بطوری که در هر تکرار یک عدد برای پارامتر منظم ساز تعیین می‌شود و این عمل تا رسیدن جواب به یک همگرایی مطلوب ادامه دارد. در نهایت هدف از این پایان‌نامه مقایسه سه الگوریتم منطقه اعتماد، نقطه داخلی و مجموعه فعال از نظر مدت زمان اجرای وارون‌سازی و همچنین میزان پایداری هر یک در مقابل نوفه است.

۸-۱ ساختار پایان‌نامه

برای تحقق این روش زمین به تعدادی بلوک با ابعاد و چگالی یکسان تقسیم شده، سپس مسئله وارون، مدل‌سازی می‌شود. در گام بعدی مسئله کوادرتیک را به فرم ماتریس برداری شناخته شده مسائل وارون یعنی $d = Gm$ تبدیل می‌شود. در این فرمول G ماتریس کرنل، m تعداد پارامترهای مدل و d تعداد داده‌ها می‌باشد. از آنجایی که داده‌های برداشت شده در صحرا دارای مقداری نوفه می‌باشند، به داده‌های مصنوعی مقداری نوفه اضافه کرده و سپس روش را بر روی داده‌های دارای نوفه اعمال می‌شود. در پایان با استفاده از هر سه الگوریتم موجود در روش کوادرتیک به بررسی مقادیر مختلف پارامترهای مدل در ارتباط با مدل‌های مصنوعی و واقعی پرداخته خواهد شد. داده‌های واقعی استفاده شده در این پایان‌نامه مربوط به معدن مس موبرون واقع در ایالت کبک کانادا است. دلیل استفاده از این داده‌ها وجود حفاری‌های متعدد به منظور صحت سنجی مدل‌سازی می‌باشد. همچنین تمامی کدهای مربوط به این پایان‌نامه در برنامه متلب نوشته شده است. این پایان‌نامه در شش فصل تهیه و تنظیم شده است. در فصل اول مقدمه‌ای بر ژئوفیزیک و نقش آن در اکتشاف منابع هیدروکربوری و همچنین جایگاه گرانی‌سنجی و مغناطیس‌سنجی در این اکتشافات بیان شده است. در

^۱ Generalize cross validation

فصل دوم مقدمه‌ای بر مسائل وارون، معرفی و فرمول‌بندی این مسائل بیان شده است. در فصل سوم به بحث در مورد روش‌های بهینه‌سازی مسائل وارون، پایداری و عدم پایداری این مسائل در مقابل نوفه پرداخته شده است. در فصل چهارم به معرفی برنامه‌ساز درجه دو و همچنین سه الگوریتم موجود در این روش پرداخته شده است. در فصل پنجم اعمال روش برنامه‌ساز درجه دو بر روی داده‌های مصنوعی همچنین اعمال این روش بر روی داده‌های واقعی معدن مسیو سولفید واقع در منطقه کبک کانادا پرداخته شده است. در فصل ششم پس از نتیجه‌گیری پیشنهاداتی برای تحقیق بیشتر مطرح خواهد شد.

فصل دوم

معرفی مسائل وارون

۱-۲ مقدمه‌ای بر مسائل وارون

تئوری مسائل وارون مجموعه‌ای سازماندهی شده برای به دست آوردن اطلاعات مفید از زیر سطح زمین، براساس اطلاعات بدست آمده از مشاهدات است. تئوری وارون در مقابل تئوری پیشرو^۱ قرار دارد [۱۰]. در روش پیشرو یک مدل اولیه برای بی‌هنجاری گرانی براساس اطلاعات اولیه، شامل زمین‌شناسی و روش‌های تبدیلی فرض شده و اثر گرانی این مدل یا مدل‌های اولیه محاسبه شده و با آنومالی گرانی مشاهده‌ای مقایسه می‌شود و شاخص‌های مجهول مدل آنقدر تغییر می‌کنند تا بهترین برازش بین اثر گرانی مدل با آنومالی گرانی مشاهده‌ای به وجود آید. البته این تغییر شاخص‌ها می‌تواند به وسیله روش‌های محاسبه ایجاد اعداد اتفاقی نظیر مونت کارلو^۲ و الگوریتم ژنتیک^۳ هم انجام شود [۳]. در روش وارون اطلاعاتی از مدل اولیه که همان بی‌هنجاری ناشی از توده زیر زمینی باشد وجود ندارد و هدف، تعیین این اطلاعات یعنی شاخص‌های مجهول نظیر شکل هندسی و تباین چگالی بی‌هنجاری زیر زمین از روی داده‌های گرانی است. پس در واقع از روی جواب مدل که همان داده‌های گرانی در اینجا می‌باشد، می‌توان به خود مدل رسید. این فرایند به طور کلی در ژئوفیزیک به نام مسئله وارون^۴ خوانده می‌شود. بنا به آنچه که در تئوری پیشرو و تئوری وارون گفته شد، می‌توان گفت: [۱۱، ۱۲].

تئوری پیشرو: پیش بینی پارامترهای مدل ← مدل ← پیش‌بینی داده‌ها

تئوری وارون: داده‌ها ← مدل ← تخمین پارامترهای مدل

۱-۱-۲ مروری بر مفاهیم پایه‌ای در نظریه وارون

در اغلب مسائل وارون، توصیفی از داده‌ها به عنوان اولین گام برای فرمول‌بندی مسئله محسوب می‌شود. داده^۵: به مجموعه مقادیر به دست آمده طی یک اندازه‌گیری از شاخص‌های قابل مشاهده را

^۱ forward

^۲ Mont carlo

^۳ Genetic Algorithm

^۴ inversion

^۵Data

داده می‌گویند. از آنجایی که در بیشتر مسائل وارون، داده‌ها به صورت جدولی از مقادیر عددی هستند، یک بردار ابزار مناسبی برای نمایش آنها خواهد بود. این داده‌ها در واقع متعلق به مجموعه‌ای با نام فضای داده‌ها^۱ هستند [۱۱]. به عنوان مثال N اندازه‌گیری در یک تجربه مشخص به عنوان داده با یک بردار مانند d با طول N مشخص می‌شود:

$$d = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T \quad (1-2)$$

نماد T بیانگر ترانپوذه^۲ است.

شاخص‌های مدل: مجموعه مقادیر عددی که یک مدل خاص را شرح می‌دهند، پارامترهای مدل^۳ می‌نامند. این مجموعه را همانند مجموعه داده‌ها می‌توان توسط بردار m با طول M نشان داد [۱۱].

$$m = [m_1, m_2, \dots, m_n]^T \quad (2-2)$$

مدل^۴: اساس مسائل وارون بر آن است که داده‌ها و شاخص‌های مدل به نحوی با هم ارتباط دارند. این ارتباط مدل نامیده می‌شود. به طور معمول مدل یک یا چند فرمول است که انتظار است داده‌ها و شاخص‌های مدل از آن پیروی کنند. شاید چنین تعریفی از مدل، با هدف اصلی مسائل وارون که استخراج اطلاعات درونی یک سامانه فیزیکی از طریق مشاهده برخی شاخص‌های قابل مشاهده است، مغایر به نظر آید، اما باید توجه داشت آنچه که یک مسئله وارون با آن در ارتباط است، نه خود سامانه فیزیکی بلکه فرموله‌شدگی^۵ آن است [۱۰]. این فرموله‌شدگی بی‌تردید رابطه بین داده‌ها است [۱۳].

مسئله پیشرو: کشف قانون‌های فیزیکی که با داشتن مقادیر خاص برای شاخص‌های مدل، بتوان پیش‌بینی‌هایی در مورد پارامترهای قابل مشاهده انجام داد. مانند تولید پاسخ‌های مصنوعی از مدل‌های

^۱ Data space

^۲ transpose

^۳ Model parameter

^۴ Model

^۵ Formulation

ناهنجاری گرانش درون زمین، تولید لرزه‌نگاشت‌های مصنوعی از یک مدل الاستیک خاص و... است.

مسئله وارون: استفاده از نتایج برخی اندازه‌گیری‌ها از شاخص‌های قابل مشاهده، برای استخراج مقادیر واقعی شاخص‌های مدل، مانند توزیع چگالی مواد درون زمین با استفاده از مشاهدات میدان گرانش در سطح، برآورد شاخص‌های مدل الاستیک با استفاده از لرزه‌نگاشت‌های ثبت شده در سطح زمین و... می‌باشد [۳].

به عنوان مقایسه ساده بین مسائل پیشرو و مسائل وارون، تغییرات درجه حرارت با عمق مورد بررسی قرار گرفته است. اگر فرض شود که درجه حرارت به صورت خطی با عمق تغییر کند، می‌توان این تغییرات را به صورت رابطه خطی زیر نشان داد:

$$T(z) = az + b \quad (۳-۲)$$

اگر مقادیر a, b معلوم باشند، به آسانی می‌توان با قرار دادن مقدار عمق در سمت راست رابطه (۳-۲) درجه حرارت در آن عمق خاص را محاسبه کرد. این یک مسئله پیشرو است. اکنون حالت عکس را در نظر بگیرید فرض کنید a, b معلوم نبوده و مجموعه از داده به صورت درجه حرارت در اعماق مختلف در دست باشد. در این صورت و با این اطلاعات، بدست آوردن مقادیر a, b کاری دشوارتر خواهد بود [۱۳]. این مسئله یک مسئله وارون می‌باشد. مدل در اینجا رابطه (۳-۲) و شاخص‌های آن a, b هستند. اگر فرض شود که N اندازه‌گیری T_i در عمق z_i داخل زمین صورت گرفته باشد، مدل در این مورد یک معادله درجه دوم به صورت $T = a + bz + cz^2$ است در این مورد بردار داده‌ها و پارامترها بصورت زیر خواهند بود:

$$d = [T_1, T_2, \dots, T_N]^N \quad (۴-۲)$$

$$m = [a, b, c]^T \quad (۵-۲)$$

در این مسئله تعداد پارامترهای مدل سه عدد ($m=3$) است. فرض می‌شود داده‌ها معادلات زیر را برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned} T_1 &= a + bz_1 + cz_1^2 \\ T_2 &= a + bz_2 + cz_2^2 \\ &\vdots \\ T_N &= a + bz_N + cz_N^2 \end{aligned} \quad (6-2)$$

این معادلات را می‌توان به صورت یک معادله ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_N & z_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

این معادله ماتریسی فرم صحیح خطی $d = G(m)$ دارد. که در آن d داده‌های مدل و G ماتریس-کرنل^۱ و m پارامترهای مدل که در این مثال a, b, c هستند، می‌باشند [۱۲، ۱۳].

۲-۲ فرمول بندی مسئله وارون

مرحله اول در تمام مسائل وارون، توصیفی از داده‌ها می‌باشد. در بسیاری از مسائل داده‌ها بصورت مجموعه‌ای از مقادیر عددی است، که عناصر یک بردار را تشکیل می‌دهند [۱۳].

یکی از هدف‌های تئوری وارون، حل معادلات برای پارامترهای مدل یا بدست آوردن انواع جواب‌های ممکن و مطلوب با توجه به شرایط خاص یک مسئله است. به طور کلی $f(d|m) = 0$ می‌تواند شامل توابع پیچیده و غیرخطی از داده‌ها و پارامترهای مدل باشد [۱۳].

^۱ Kernel matrix

۱-۲-۲ مسئله وارون خطی

ساده ترین مسائل وارون مسائلی هستند که می توان آنها را با مجموعه ای از معادلات خطی به صورت $d = Gm$ بیان کرد. بنابراین این معادله شکلی از تابع معادله نظری وارون گسسته است. بسیاری از مسائل وارون مهم در علوم فیزیکی توسط این معادلات توصیف می شوند. در موارد دیگر می توان با استفاده از تقریب هایی مسئله را بصورت خطی در آورد و حل نمود. ماتریس G ، ماتریس کرنل داده یا ماتریس مشخصه مدل می باشد [۱۲].

تئوری وارون را می توان به سه دسته، تئوری وارون گسسته، تئوری وارون پیوسته^۱ که در برگیرنده داده های گسسته و توابع مدل پیوسته است و تئوری معادلات انتگرالی که داده ها و پارامترهای مدل هر دو توسط تابع پیوسته $d(x)$ و $m(x)$ نشان داده می شوند، تقسیم بندی نمود. x نماد متغیرهای مستقل مدل است [۱۳]. فرمول بندی های مربوط به تئوری وارون گسسته در رابطه (۸-۲)، تئوری وارون پیوسته در رابطه (۹-۲) و تئوری معادلات انتگرالی در رابطه (۱۰-۲) نشان داده شده است [۱۳].

$$d_i = \sum_{j=1}^M G_{ij} m_j \quad (۸-۲)$$

$$d_i = \int G_i(x) m(x) dx \quad (۹-۲)$$

$$d(y) = \int G(x, y) m(x) dx \quad (۱۰-۲)$$

داده های d_i همواره دارای طبیعت گسسته هستند و تئوری وارون با نتایج حاصل از داده های مشاهده ای مرتبط است. لذا باید هر دو مسئله وارون پیوسته و معادلات انتگرالی را با استفاده از تقریب های انتگرالی مانند فرمول های مربع سازی^۲ به مسائل وارون گسسته تبدیل کرد.

^۱Continuous inverse theory

^۲quadrature formula

۲-۲-۲ تخمین‌های اندازه بردار خطا

برای تعیین اندازه بردار خطا یک مسئله ساده، برازش یک خط مستقیم بر داده‌ها در نظر گرفته می‌شود شکل ۱-۲ این مسئله غالباً با روشی که کمترین مربعات^۱ نامیده می‌شود، حل می‌شود. در این روش سعی می‌شود پارامترهای مدل طوری انتخاب شوند که داده‌های پیش‌بینی شده d^{pre} تا حد امکان به داده‌های مشاهده شده d^{obs} نزدیک شود. برای هر مشاهده یک خطای پیش‌بینی یا عدم برازش^۲ تعریف می‌شود [۳].

$$e_i = d_i^{pre} - d_i^{obs} \quad (۱۱-۲)$$

بهترین برازش زمانی صورت می‌گیرد که پارامترهای مدل دارای کمترین خطای کل E باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (۱۲-۲)$$

خطای کل E یا مجموع مربعات خطاهای منفرد^۳ دقیقاً برابر مربع طول های هندسی از بردار e یا $E = e^T e$ است. روش تخمین کمترین مربعات با یافتن پارامترهای مدلی که دارای اندازه طول کمینه است، داده‌های تخمین زده شده یا d^{est} که فاصله هندسی مشاهدات گفته می‌شود، را برآورد می‌کند. قابل ذکر است که اگر چه طول هندسی، یک راه برای کمی کردن اندازه یا طول یک بردار است، اما تنها روش ممکن نیست. عبارت نرم^۴ برای ارجاع به اندازه ای از طول به کار می‌رود و با نماد $\|e\|$ نشان داده می‌شود، عبارت $\|e\|$ نرم بردار e است. اغلب نرم‌های به کار گرفته شده براساس مجموع

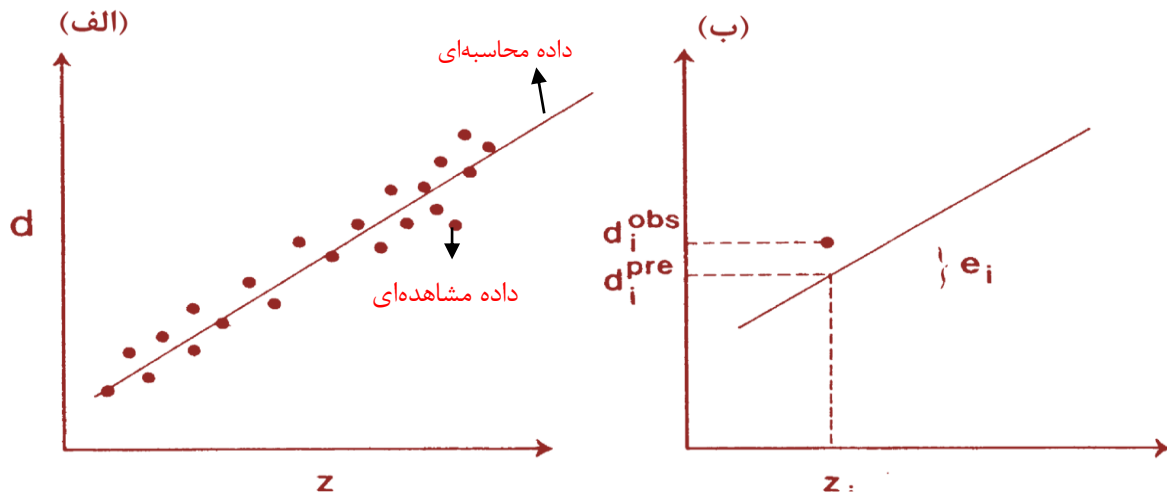
^۱Least square

^۲ Misfit

^۳ individual

^۴ Norm

توان عنصری از بردار است و L_n نام گرفته است، که n برابر توان است [۱۳].



شکل ۲-۱: الف) نمایش برازش کمترین مربعات یک خط راست بر داده‌ها را نشان می‌دهد. ب) نمایش میزان خطای اندازه‌گیری بین داده‌های محاسبه‌ای و داده‌های مشاهده‌ای [۱۲]

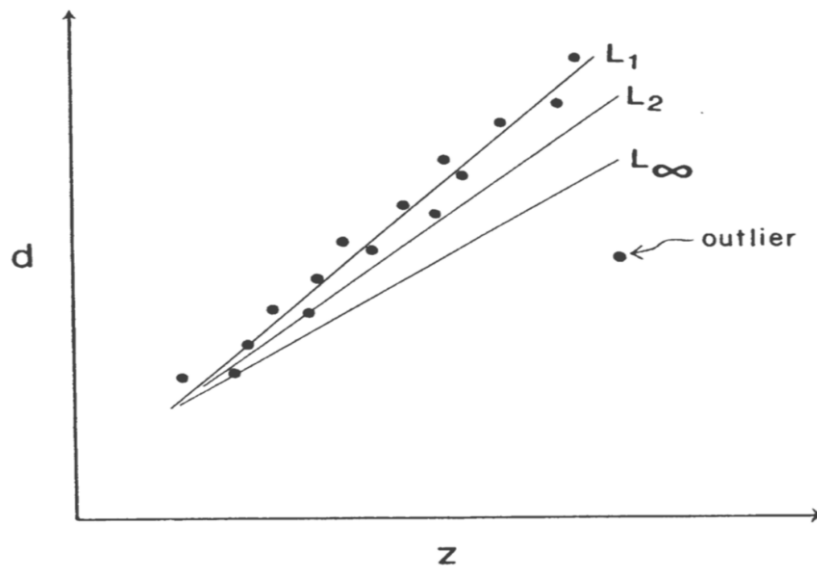
$$L_1: \|e\|_1 = \left[\sum_i |e_i|^1 \right] \quad (۱۳-۲)$$

$$L_2: \|e\|_2 = \left[\sum_i |e_i|^2 \right]^{1/2} \quad (۱۴-۲)$$

$$L_n: \|e\|_n = \left[\sum_i |e_i|^n \right]^{1/n} \quad (۱۵-۲)$$

نرم‌های مرتبه بالا بزرگترین وزن را به بزرگترین مولفه از e اختصاص می‌دهند. روش کمترین مربعات از نرم L_2 برای محاسبه طول استفاده می‌کند. اگر داده‌ها خیلی دقیق باشند، پیش‌بینی‌ای که به مقدار مشاهده‌ای نزدیک باشد، اهمیت بیشتری دارد. از نرم مرتبه بالا وقتی استفاده می‌شود که به خطاهای بالا، وزن بالایی داده شود. از طرف دیگر اگر داده‌ها در اطراف روند به طور وسیعی پراکنده شده باشند، روندی با کمترین خطای پیش‌بینی وجود ندارد. استفاده از نرم مرتبه پایین به خطاهای با اندازه‌های

مختلف وزن یکسانی می‌دهد [۱۳].



شکل ۲-۲: خط راست برازش شده به جفت‌های (z, d) که خطا تحت نرم‌های L_1 ، L_2 و L_∞ اندازه‌گیری شده است. نرم L_1 کمترین وزن را به نقطه بیرونی می‌دهد [۱۱].

۳-۲ راه حل کمترین مربعات برای مسائل وارون خطی

راه حل کمترین مربعات می‌تواند برای مسائل وارون خطی با رفتاری بسیار ساده گسترش یابد. چنانچه مشتقات خطا با در نظر گرفتن پارامترهایی که m_q نامیده می‌شود، محاسبه شوند و با قرار دادن نتایج برابر صفر، حل مسئله حاصل می‌شود [۱۱].

$$E = e^T e = (d - Gm)^T (d - Gm) \quad (۱۶-۲)$$

$$E = \sum_i^N \left[d_i - \sum_j^M G_{ij} m_j \right] \left[d_i - \sum_k^M G_{ik} m_k \right] \quad (۱۷-۲)$$

رابطه (۱۷-۲) را می‌توان به شکل رابطه (۱۸-۲) بازنویسی کرد

$$E = \sum_i^M \sum_k^M m_j m_k \sum_i^N G_{ij} G_{ik} - 2 \sum_i^M m_j \sum_i^N G_{ij} d_i + \sum_i^N d_i d_i \quad (۱۸-۲)$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتقات $\frac{\partial E}{\partial m_q}$ در رابطه (۱۹-۲) :

$$\frac{\partial E}{\partial m_q} = 0 = 2 \sum_k^M m_k \sum_i^N G_{jq} G_{ik} - 2 \sum_i^N G_{iq} d_i \quad (19-2)$$

در نهایت این معادله بصورت ماتریسی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$G^T G m - G^T d = 0 \quad (20-2)$$

کمیت $G^T G$ یک ماتریس $M \times M$ است و حاصلضرب بردار آن در m دارای طول M است. همچنین کمیت $G^T d$ یک بردار با طول M است. بنابراین یک معادله ماتریسی مربعی برای پارامترهای مدل مجهول است. با فرض اینکه $[G^T G]^{-1}$ وجود دارد، می‌توان برای حل مسئله وارون $Gm = d$ از راه حل کمترین مربعات رابطه (۱۸-۲) را نتیجه گرفت [۱۳].

۴-۲ حل مسائل غیر خطی و تبدیل آنها به مسائل خطی

گاوس پیشنهاد کرد که در بعضی از مسائل وارون، تابع برداری f نسبت به پارامترهای مدل m ، غیر خطی است و می‌توان آن را در همسایگی یک پارامتر اولیه m_0 با استفاده از بسط تیلور تقریب زد و به شکل معروف $d = Gm$ خطی سازی نمود. این روش، روش گرادیان نامیده می‌شود [۱۴].

$$f(d, m) = d - G(m) = 0 \quad (21-2)$$

شکل تابع غیر خطی مجزای f به صورت $d = f(m)$ است، بسط تیلور تابع $f(m)$ در فضای M بعدی را برای داده i ام به صورت معادله‌های (۲۲-۲) و (۲۳-۲) می‌توان تعریف کرد.

$$f_i(m) = f_i(m_0) + \sum_{j=1}^M \frac{\partial f_i}{\partial m_j} \Delta m_j \quad (22-2)$$

$$f_i(m) - f_i(m_0) = \sum_{j=1}^M \frac{\partial f_i}{\partial m_j} \Delta m_j \quad (23-2)$$

$$\Delta f_i = \sum_{j=1}^M \frac{\partial f_i}{\partial m_j} \Delta m_j \quad (24-2)$$

$$\Delta f_i = \sum_{j=1}^M j_{ij} \Delta m_j \quad (25-2)$$

معادله (۲۵-۲) برای یک داده به دست آمده است، در نتیجه شکل برداری رابطه به دست آمده برای N داده به صورت معادله (۲۶-۲) قابل تعریف است.

$$\Delta f_{(N \times 1)} = J_{(N \times M)} \Delta M_{(M \times 1)} \quad (26-2)$$

که مشابه با شکل معادله $d = Gm$ است که در مقایسه با آن، ΔM مانند m و Δf مانند d و J مانند G است. ماتریس J ، ماتریس مشتقات جزئی مرتبه اول یا ماتریس ژاکوبین نام دارد و با معادله ۲۷-۲ نشان داده می‌شود.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial m_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial m_m} \end{bmatrix} \quad (27-2)$$

Δf مانند Δd اختلاف بین بردار داده‌های مشاهده شده و بردار داده‌های محاسبه شده است و برابر است با:

$$\Delta d = d_{obs} - d_{pre} \quad (30-2)$$

Δm ، تغییرات بردار پارامترهاست، سپس به جای محاسبه m ها، تغییرات آنها را با استفاده از

روش‌های وارون خطی محاسبه می‌کنند. پس از آنکه Δm مرحله اول محاسبه شد، بردار پارامتر جدید برابر است با:

$$m_2 = m_1 + \Delta m_1 \quad (30-2)$$

و به طریق مشابه، وقتی که Δm برای مرحله n ام محاسبه می‌شود، مقدار نهایی بردار پارامترهای مدل از معادله (30-2) بدست می‌آید.

$$m_{(n+1)} = m_{(n)} + \Delta m_{(n)} \quad (30-2)$$

n تعداد دوره‌های تکرار است. زمانی دوره‌های تکرار متوقف می‌شود که مقادیر داده‌های محاسبه شده، در محدوده یک حد مشخص و تعیین شده به مقادیر داده‌های مشاهده‌ای نزدیک شوند و به پاسخ به دست آمده پاسخ بهینه می‌گویند. لازم به یاد آوری است که در این روش مدل اولیه باید موجود باشد یا بتوان حدس زد. سپس می‌توان با استفاده از رابطه پیشرو داده‌های محاسبه شده را با قرار دادن مقادیر پارامترهای اولیه در مدل به دست آورد [14].

۲-۴-۱ مسائل گسسته و پیوسته وارون

مسائل وارون در دو گروه عمده مسائل گسسته و مسائل پیوسته جای می‌گیرند [3]. در مسائل گسسته، تعداد شاخص‌ها محدود است، به عبارت دیگر بعد فضای مدل محدود خواهد بود. در مسائل پیوسته، بعد فضای مدل نامحدود است یعنی مدل به صورت تعداد شاخص‌های خاصی تعریف نشده بلکه به صورت یک فرم تابعی است. وجه اشتراک مهم این دو گروه آن است که در هر دو فضای داده‌ها با بعد محدود است، زیرا داده‌های مشاهده شده به صورت جدولی از اعداد و ارقام ثبت شده‌اند که هیچ‌گاه نمی‌توانند تعدادشان بی‌نهایت باشد. در بررسی مسائل پیوسته یکی از فرم‌های تابعی و در مسائل گسسته یکی از فرم‌های ماتریسی است. اگر چه بعضی از مسائل بنا به ماهیت خود پیوسته هستند، اما در حل، آنها ابتدا به صورت گسسته در می‌آیند و سپس به عنوان یک مسئله وارون گسسته حل

می شوند. برای حل مسائل وارون پیوسته، به حجم داده‌های زیاد نیاز است [۱۳]. این مسائل در هر صورت با عدم یکتایی^۱ شدیدی مواجه‌اند زیرا تعداد داده‌ها همواره از تعداد بی‌نهایت شاخص‌های مدل کمتر خواهد بود. همچنین از آنجایی که حل این مسائل دارای فرم‌های تابعی می‌باشند، مشکلات دشواری برای مسئله بوجود خواهد آمد. به همین جهت مسائل وارون ژئوفیزیکی نیز گرچه ممکن است بنا به ماهیت مسائلی پیوسته باشند، اما برای حل به صورت گسسته در آمده و حل خواهند شد. گسسته کردن یک توابع پیوسته همیشه یک تقریب است که اثراتی از عدم دقت در نظریه مسئله از خود بر جای می‌گذارد. با این وجود نظریه مسائل وارون گسسته جایگاه شروع خوبی برای مطالعه مسائل وارون به‌طور کلی است، زیرا این نظریه اصولاً بر نظریه بردارها و ماتریس‌ها بنا شده و با نظریه‌های پیچیده توابع و عملگرهای پیوسته سروکار ندارد. از سوی دیگر مسائل وارون به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم‌بندی می‌شوند، که در مسائل وارون خطی ارتباط بین شاخص‌های مدل و داده‌ها خطی است، در حالی که در مسائل غیر خطی این ارتباط خطی نبوده، اما قابل تبدیل به مسائل خطی با استفاده از روش‌هایی مانند بسط تیلور و گرادیان هستند. [۳]

۲-۴-۲ حل مسائل وارون گسسته خطی و برآورد شاخص‌های مدل

صورت کلی یک مسئله وارون خطی ژئوفیزیکی، به شرح ذیل می‌باشد:

$$d = Gm \quad (۳۱-۲)$$

که در این رابطه m معرف شاخص‌های مدل و d بیانگر داده‌های اندازه‌گیری شده است. معادله

(۳۲-۲) معرف دستگاهی از N معادله خطی نسبت به M شاخص مجهول است، یعنی:

$$d_i = \sum_{j=1}^M G_{ij} m_j \quad (۳۲-۲)$$

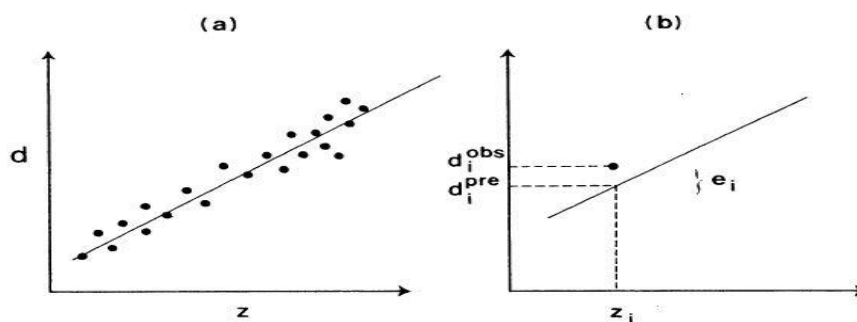
واژه جواب برای مسائل وارون معادله (۳۱-۲)، معادل با حل دسته‌ای از روابط خطی معادله (۳۲-۲)

^۲ Non uniqueness

نسبت به پارامترهای مجهول $m_1, m_2, m_3, \dots, m_M$ است. همچنین می توان بردار $d^p = [d_1^p, d_2^p, d_3^p, \dots, d_N^p]$ را به عنوان بردار داده های پیش بینی شده به صورت زیر تعریف کرد [۱۳].

$$d_i^p = \sum_{j=1}^M G_{ij} m_j \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2-33)$$

ساده ترین روش برای حل یک مسئله وارون خطی $d = Gm$ بر مبنای محاسبه اندازه شاخص های مدل و داده های پیش بینی شده است ($d^{pre} = Gm^{pre}$). دیده می شود که چگونه طول یا فاصله به حل یک مسئله وارون منجر می شود. به مسئله ساده برازش موجود در شکل ۲-۱۲-۳ برازش یک خط راست به مجموعه ای از داده ها توجه کنید.



شکل ۲-۱۲-۳ (a) روش برازش کمترین مربعات به زوج نقاط (b) تخمین خطای اندازه گیری بین d_i^{pre} و d_i^{obs} [۱۲].

این مسئله اغلب به روش کمترین مربعات^۱ حل می شود شاخص های مدل (عرض از مبدا و شیب خط) به گونه ای انتخاب می شوند که داده های پیش بینی شده^۲ و داده های مشاهده ای تا حد امکان از نظر فاصله به هم نزدیک باشند. برای هر داده مشاهده شده یک خطا یا عدم برازش به صورت زیر تعریف می شود:

^۱Least square

^۲Periodic data

$$e_i = d_i^{obs} - d_i^{pre} \quad (34-2)$$

بهترین خط، خطی است که مجموعه خطاها یعنی E ، کمینه مقدار خود را داشته باشد. که به صورت زیر تعریف می شود:

$$E = \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (35-2)$$

برای مشاهده اختلاف بین مشاهده و مقدار پیش بینی شده برابر است با:

$$e_i = d_i^{obs} - d_i^{pre} \quad (36-2)$$

خطای کل E (مجموع مربعات تک تک خطاها) به طور دقیق برابر مربع طول هندسی بردار e است:

$$E = e^T e \quad (37-2)$$

در واقع روش کمترین مربعات، با کمینه کردن فاصله هندسی میان داده‌های مشاهده‌ای و داده‌های پیش‌بینی شده، پارامترهای مدل یعنی خط برازش داده شده را به دست می‌آورد. روش مذکور از ساده‌ترین روش‌هایی است که اندازه‌گیری طول را به عنوان یک اصل اساسی در حل یک مسئله وارون استفاده می‌کند [۱۳].

۳-۴-۲ مشکلات مسائل وارون

در حل مسائل وارون اغلب سه پرسش مطرح است، که عبارتند از:

آیا برای مسئله وارون جواب یا جواب‌هایی وجود دارد یا خیر؟

آیا جواب حاصله یکتا^۱ است؟

^۱ Unique

آیا مدل به دست آمده پایدار^۱ است یا خیر؟

شرط وجود جواب، به فرمول بندی مسئله وارون مفروضی بستگی دارد. برای هر مسئله وارون باید از نظر فیزیکی تعدادی جواب خاص وجود داشته باشد، تا زمانی که ساختارهای زمین شناسی واقعی زمین بررسی می شوند. با این حال، از دیدگاه ریاضی هیچ مدل عددی شایسته ای از دسته ای از مدل های مفروض نمی تواند وجود داشته باشد که پاسخ حاصل از آن به طور کامل بر داده های مشاهده ای منطبق شود. [۱۰]

عدم یکتایی را می توان اینگونه بیان کرد که اگر فرض شود دو مدل متفاوت m_1 و m_2 داده یک سان d_0 را تولید کنند، یعنی:

$$\begin{aligned} G(m_1) &= d_0 \\ G(m_2) &= d_0 \end{aligned} \quad (۳۸-۲)$$

در این مسئله غیر ممکن به نظر می رسد که این دو مدل متفاوت را با داشتن یک داده مفروض بتوان از هم تفکیک کرد. این مورد نشان می دهد که چرا پرسش یکتایی جواب در مدل سازی وارون بسیار اهمیت دارد. پایداری جواب نیز در مسائل وارون، یک مسئله مهم به حساب می آید. داده های ژئوفیزیکی همواره مقداری نوفه (∂d) به همراه دارند، بر این اساس پرسشی که مطرح می شود این است که آیا اختلاف بین پاسخ مدل ها متفاوت از سطح نوفه داده ها بیشتر است یا خیر؟ بعنوان نمونه دو مدل متفاوت m_1 و m_2 می توانند دو داده متفاوت d_1 و d_2 را تولید کنند که به صورت زیر ارائه می شود:

$$\begin{aligned} G(m_1) &= d_1 \\ G(m_2) &= d_2 \end{aligned} \quad (۳۹-۲)$$

همچنین اگر فرض شود که این دو مدل خیلی متفاوت باشند تا زمانی که اختلاف بین داده ها در داخل

^۱ Stable

سطح نوفه^۱ ε برابر باشد با:

$$\|\delta m\| = \|m_1 - m_2\| > c \quad (2-40)$$

$$\|\delta d\| = \|d_1 - d_2\| < \varepsilon$$

که در آن $\varepsilon \ll c$ است. در این شرایط این امکان وجود دارد که این دو مدل را بتوان از داده‌های مشاهده‌ای، تفکیک کرد.

باتوجه به اهمیت طرح این سه پرسش در حل مسائل وارون، هادامارد^۲ ریاضیدان معروف فرانسوی این مسئله را مطرح کرد که یک مسئله ریاضی خاص، می‌تواند به طور صحیح فرمول بندی شود اگر هر سه پرسش مذکور جواب مثبت داشته باشند. بعبارتی یک مسئله عددی ریاضی به عنوان مسئله خوش حالت مطرح می‌شود، در صورتی که جواب آن موجود، یکتا و پایدار باشد. بنا به نظریه هادامارد یک مسئله وارون بد حالت خواهد بود اگر یکی از سه شرط مطرح شده یعنی وجود و یا عدم وجود جواب، یکتا بودن مسئله و پایدار بودن مسئله برقرار نباشد [۱۰].

اواسط قرن بیستم ریاضیدان روسی، تیخونوف^۳ اصول نظریه حل مسئله بد حالت را گسترش داد و توانست یک روش منظم سازی^۴ را در حل مسائل وارون که بر پایه تقریب مسئله بد حالت توسط تعدادی از مسائل خوش حالت بنا شده، ارائه دهد [۱۳].

۲-۵ رده بندی مسائل وارون

بسته به اینکه تعداد معادلات (L) برابر تعداد داده‌ها (N) و یا تعداد شاخص‌ها (M) و یا اینکه برابر هر دو باشد، چهار نوع مسئله وارون بوجود می‌آید. که از این نوع می‌توان مسائل به‌طور دقیق تعیین شده، مسائل وارون فرامعین، مسائل وارون فرو معین، مسائل تعیین شده ترکیبی را نام برد.

^۱ Noise

^۲ Hadamard

^۳ Tikhonov

^۴ Regularization

۲-۵-۱ مسائل وارون به طور دقیق تعیین شده

در اینگونه مسائل اطلاعات به طور دقیق برابر تعداد شاخص‌های مدل است ($M=N$). در این حالت تنها یک جواب برای مسئله وجود و مقدار خطای پیش بینی شده برای آن برابر صفر است. بنابراین ماتریس کرنل G مربعی است و دارای شرایط خوبی است، پس ماتریس وارون (G^{-1}) وجود دارد [۱۲]. با وجود مربعی بودن ماتریس G ، وارون سازی با مشکل مواجه می شود، زیرا ممکن است جواب‌های مسئله از نظر فیزیکی قابل قبول نباشد، بنابراین یک مسئله به طور دقیق تعیین شده، یک مسئله از نظر فیزیکی قابل قبول نباشد، بنابراین یک مسئله به طور دقیق تعیین شده، یک مسئله ریاضی محض است و در طبیعت پیش نمی آید، برای اینگونه مسائل داریم:

$$Gm = d \rightarrow m = G^{-1}d \quad (۲-۴۱)$$

۲-۵-۲ مسائل وارون فرامعین^۱

وقتی اطلاعات بسیار زیادی از سیستم نسبت به مجهولات (شاخص‌های مدل) در دست باشد، ($N > M$) سیستم فرامعین نامیده می شود. در اینگونه سیستم‌ها معادله $Gm = d$ حاوی اطلاعات کافی برای محاسبه جواب یکتا است در این مسائل برآزش داده‌های به دست آمده بر داده‌های واقعی دقیق نیست. چون شاخص‌ها به علت آرایش نامناسب داده‌ها یکسان تعیین نمی شوند و خطاها صفر نیستند، اما با توجه به اینکه به ازای خطاهای مختلف، بی نهایت جواب وجود دارد، جوابی را انتخاب می کنند که کمترین خطا را داشته باشد و برای آنکه جواب‌های به دست آمده از نظر فیزیکی قابل قبول باشند و ماتریس G شرایط مناسب را داشته باشد، می توان از کمترین مربعات استفاده کرد. البته مسائلی وجود دارند که با وجود اینکه ($N > M$) است فرامعین نبوده، بلکه فرو معین هستند [۱۰].

^۱ Over - determined

۲-۵-۳ مسائل وارون فرومعیین^۱

هنگامی که یک سیستم معادلات $Gm = d$ اطلاعات کافی درباره یکتایی شاخص‌های مدل ارائه نمی‌دهد، این مسئله به اصطلاح فرومعیین نام دارد. مسائل فرو معین وقتی اتفاق می‌افتند که تعداد مجهولات از تعداد داده‌ها بیشتر باشد یعنی $(N < M)$. که M تعداد مجهولات و N تعداد داده‌ها می‌باشد. مسائل فرو معین که دارای خطای پیش بینی شده غیر صفرند، مسائل ترکیبی تعیین شده^۲ نام دارند. همچنین مسائل فرو معین که دارای خطای پیش بینی شده غیر صفرند، مسائل فرومعیین مطلق^۳ نامیده می‌شوند. برای به دست آوردن m^{est} به عنوان جواب یک مسئله وارون فرو معین باید به دنبال امکانی که بتوان با دقت یکی از این بی‌نهایت جواب را با خطای پیش بینی صفر انتخاب کرد. به این منظور باید از اطلاعاتی استفاده شود که به طور مستقیم در سیستم معادلات خطی نیامده است، این اطلاعات اضافی اطلاعات اولیه^۴ نامیده می‌شود. اطلاعات اولیه به صورت‌های مختلف در مدل اعمال می‌شوند، اما در تمام موارد بیانگر ماهیت پاسخ‌ها هستند. برای مثال اگر هدف به دست آوردن مدل چگالی با عمق برای کره زمین باشد، بدون اندازه‌گیری و برداشت داده می‌دانیم که مقادیر چگالی‌ها باید اعداد مثبتی باشند، چون چگالی ذاتاً یک کمیت مثبت می‌باشد. از طرفی اگر درون زمین سنگی باشد، چگالی آن باید مقدارهای شناخته شده‌ای برای سنگ‌ها باشد. مثلاً بین $10 \frac{gr}{cm^3}$ تا $1 \frac{gr}{cm^3}$ اگر از این اطلاعات اولیه به هنگام حل مسئله وارون استفاده شود ممکن است به مقدار زیادی محدوده جواب‌های ممکن را کاهش یابد.

۲-۵-۴ مسائل تعیین شده ترکیبی

بیشتر مسائل وارون در موارد عملی نه به طور کامل فرامعین هستند نه به طور کامل فرومعیین. به

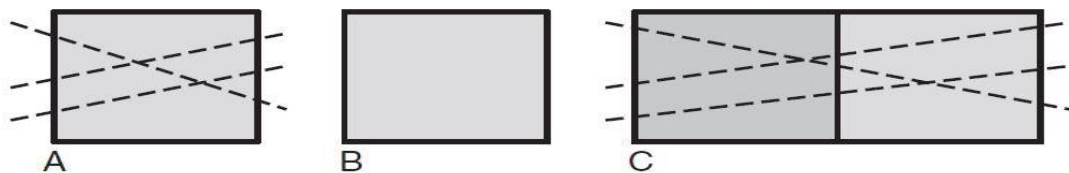
^۱ Under - determind

^۲ Mixed –determined problem

^۳ Purely underdetermined problem

^۴ Priori information

عنوان مثال در توموگرافی با اشعه x ممکن است از یک بلوک چندین پرتوی اشعه x عبور کند (شکل ۲-۴ a). در این صورت شاخص جذب اشعه x مربوط به آن بلوک به طور کاملاً فرامعین است. از طرفی شکل (۲-۴ b) بلوکی را نشان می‌دهد که هیچ گونه پرتویی عبور نمی‌کند. شاخص جذب برای این بلوک به طور کامل فرو معین است. در مقابل بلوک‌های زیادی وجود دارند که به طور مجزا حل نمی‌شوند، زیرا پرتوی x با زمان یکسان از آنها عبور کرده است. شکل C. برای اینگونه بلوک‌ها جذب متوسط یک شاخص کاملاً فرامعین است اما پارامتر جذب برای هر بلوک همچنان فرومعین است [۱۳].



شکل ۲-۴ a) پارامتر جذب اشعه X به طور کامل فرامعین است به دلیل اینکه اندازه‌گیری‌های شدت اشعه در طول سه مسیر مختلف صورت گرفته است. b) پارامتر جذب اشعه X به طور کامل فرو معین است، زیرا هیچ گونه اندازه‌گیری روی بلوک انجام نشده است. c) میانگین شاخص جذب اشعه در مورد دو بلوک به طور کامل فرامعین است، اما از آنجا که مسیر هر پرتوی X در هر بلوک دارای طول مساوی است، برای هر بلوک شاخص جذب اشعه همچنان فرو معین است [۱۳].

برای حل مسائل تعیین شده ترکیبی، به دو روش زیر عمل می‌شود:

۱- سیستم معادلات $Gm = d$ را به $G'm' = d'$ تبدیل می‌شود که مولفه‌ها m' دارای یک قسمت m^o به طور کامل فرامعین و یک قسمت m^u به طور کامل فرو معین است، در این صورت:

$$\begin{bmatrix} G^o o \\ o.G^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^o \\ m^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^o \\ d^u \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

در این روش، به ردیف‌های G' مربوط به داده‌های d' وزن بیشتری داده می‌شود تا نقش تعیین کننده بیشتری در تعیین شاخص‌های مدل داشته باشد. با این فرمول بندی می‌توان شاخص‌های فرامعین را با حل کمترین مربعات و شاخص‌های فرو معین را با حل کمینه طول بدست آورد.

۲- روش کمترین مربعات میرا (مارکوارت-لونبرگ)^۱: این روش خیلی معمول تر بوده و در حالتی قابل استفاده است که درجه کم تعیین شدگی یا بیش از حد تعیین شدگی، خیلی زیاد نباشد به این معنی که مسئله به شدت کم تعیین شده نباشد به عبارت دیگر تعداد پارامترهای مدل از تعداد داده‌ها خیلی کمتر نباشد. در اینجا به جای جداکردن شاخص‌ها، تابع هدف کمینه می‌شود که شامل خطای پیش بینی شده و طول پاسخ برای پارامترهای مدل است.

^۱Marquardt-levenburg damped least squares

فصل سوم

بهینه سازی

۱-۳ بهینه‌سازی مسائل وارون

در فصل قبل بیان شد که چنانچه یکی از سه شرط وجود یا عدم وجود جواب، یکتا بودن جواب و پایدار بودن مسئله برقرار نباشد، مدل دارای یک پایداری می‌باشد. برای اینکه بتوان معادله را از حالت ناپایدار به حالت پایدار درآورد روش‌های مختلفی وجود دارد که در این فصل به معرفی این روش‌ها پرداخته خواهد شد. به اینگونه مسائلی که دارای ناپایداری هستند به اصطلاح مسائل بد وضع گویند. جهت پایدار سازی انتخاب یک پارامتر مناسب می‌تواند به داشتن جواب بهتر راهنمایی کند که در این فصل به چگونگی نحوه انتخاب این پارامتر پرداخته خواهد شد.

۱-۱-۳ معادلات انتگرالی فرد هولم^۱

فرم معادله انتگرالی نوع اول به صورت زیر می‌باشد:

$$f(p) = \int_R s(Q) \psi(P, Q) dv \quad (۱-۳)$$

که $f(p)$ میدان پتانسیل در نقطه p است، $s(Q)$ کمیت فیزیکی مانند چگالی در Q و $\psi(P, Q)$ تابعی است که با قرار دادن هندسی نقطه اندازه‌گیری p و منشا در نقطه Q بستگی دارد. تساوی (۱-۳) ابزار راحتی است که با آن می‌توان تفاوت روش‌های پیشرو و معکوس را تعیین کرد [۳]. در روش پیشرو مسئله را به دو شکل کلی می‌توان بیان کرد. یا توزیع خواص فیزیکی را ثابت و توزیع خواص هندسی برر سی می‌شود و یا خواص هندسی ثابت و خواص فیزیکی برر سی خواهد شد. در روش پیشرو کمیت‌های s و ψ کمیت‌های معلوم هستند. انتگرال اول فرد هولم را محاسبه و سپس داده‌ها حاصل می‌شوند. در وارون سازی برای محاسبه کمیت فیزیکی (ψ) را ثابت در نظر گرفته، در اینصورت وارون سازی خطی است و اگر کمیت فیزیکی $s(Q)$ ثابت در نظر گرفته شود در این حالت وارون سازی غیر خطی است. مبحث دیگر در این مورد بررسی پایداری و یا ناپایداری می‌باشد. با توجه

^۱Fredholm

به معادله (۱-۳) در واقع داده‌ها حاصل ضرب یک تابع توزیع فیزیکی در یک تابع وزنی است. یعنی اگر تابع توزیع فیزیکی ما ناپایدار باشد و در یک تابع وزنی ضرب شود داده‌ها $f(p)$ خیلی هموارتر از کمیت فیزیکی $s(Q)$ خواهد شد. این تابع وزنی باعث می‌شود که داده‌ها $f(p)$ خیلی هموارتر از کمیت فیزیکی $s(Q)$ شود. بدین معنی که اگر در حد یک هزارم میلی گال نوفه به داده‌ها اضافه شود، با توجه به معادله (۱-۳) این مقدار نوفه در فضای مدل (فضای انتگرال) اضافه خواهد شد. حال با توجه به اینکه مقدار $s(Q)$ از قبل ناپایدار بوده، با افزوده شدن این مقدار نوفه بر کمیت ناپایدار $s(Q)$ ، این کمیت ناپایدارتر شده که در نتیجه معادله (۱-۳) به سمت ناپایداری پیش خواهد رفت [۳].

معادلات انتگرالی فردهولم نوع اول یک نمونه مسائل بد وضع هستند. اولین مرحله برای حل اینگونه مسائل گسسته سازی است. فرم گسسته آن‌ها بصورت زیر می‌باشد:

$$Ax = d, A \in R^{n \times n} \quad (2-3)$$

که در آن d بردار آلوده به نوفه می‌باشد یعنی

$$d = d_{tru} + e \quad (3-3)$$

که در آن d_{tru} داده‌های بدون نوفه می‌باشند. علاوه بر این مقداری نوفه که در معادله بالا با حرف e نشان داده شده است. در عمل مشکلی که در حل مسئله معکوس انتگرال فردهولم نوع اول وجود دارد، عدم اطلاع از تابع d در تمام نقاط فضا می‌باشد. چرا که عملاً تابع d در تعداد نقاط محدودی از فضا وجود دارد. به این ترتیب باید مسئله بد وضع را گسسته‌سازی کرد. لازم به ذکر است که از نظر ریاضی گسسته‌سازی خود نوعی پایدارسازی است. حتی پس از گسسته‌سازی مسائل بد وضع پاره‌ای از معادلات بدست آمده هنوز دارای خصوصیات معادلات بد وضع پیوسته قبلی می‌باشند، که به این ترتیب به معادله حاصل از گسسته‌سازی مسئله گسسته بد وضع گفته می‌شود. یکی از روشهای حل برای مسائل بد وضع استفاده از روش تجزیه مقادیر منفرد می‌باشد [۹].

۲-۳ روش تجزیه مقادیر منفرد معمولی و تعمیم یافته (GSVD, GSV)

یکی از مهمترین ابزارهای تفکیک و تجزیه در تسهیل حل دستگاه‌های بزرگ خطی، روش تجزیه مقادیر منفرد است. این روش، خود تعمیمی از روش تجزیه مقادیر ویژه اپراتورهای مربعی است، با این تفاوت که در این روش هر ماتریس با هر بعد را می‌توان به حاصل ضرب سه ماتریس که یکی از آنها قطری، و دو ماتریس دیگر نیز ماتریس‌های معکوس پذیر می‌باشد، تبدیل نمود. به عبارتی دیگر در این روش برای هر ماتریس با هر بعد دو ماتریس یافت می‌گردد. به طوری که با اعمال دو ماتریس یکی از چپ و دیگری از راست یک ماتریس قطری حاصل می‌شود. روش تجزیه مقادیر منفرد از آنجایی که به خوبی تمامی مشکلات موجود در ماتریس بد شرایط (حاصل از گسسته سازی مسئله بد وضع) را آشکار ساخته و خصوصیات کرنل همچون پیوستگی مقادیر منفرد، روند رو به صفر مقادیر منفرد و رفتار نوسانی بردارهای منفرد را در بردارد، ابزار بسیار مفید در تحلیل مستقیم مسائل بد وضع گسسته به شمار می‌رود [۱۵].

۱-۲-۳ تجزیه مقادیر منفرد معمولی

اگر معادله گسسته شده مسئله بدوضع $G(m) = d$ به صورت زیر باشد:

$$Ax = b, A \in R^{m \times n}, x \in R^n, b \in R^m \quad (۴-۳)$$

آنگاه یکی از ابزارهای کار با این مسئله روش تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A است. اگر فرض کنیم

که $m \geq n$ باشد. در این حالت تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به صورت ذیل خواهد بود:

$$A_{mn} = U_{mn} \sum_{nn} V_{nn}^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T \quad (۵-۳)$$

در معادله فوق $U_{mn} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ و $V_{nn} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ماتریس‌هایی با ستونهای ارتونرمال

است.

$$V^T V = I_{nm}, U^T U = I_{mn} \quad (۶-۳)$$

ستون های ماتریس های U و V را به ترتیب بردارهای منفرد چپ و راست ماتریس A می نامند. عناصر قطر اصلی ماتریس کرونکر (کرنل) غیر منفی بوده و غالباً به ترتیب ذیل قرار می گیرد:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0 \quad (۷-۳)$$

مقادیر قطر اصلی $\sum$ ، مقادیر منفرد ماتریس A و نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_n}$ عدد شرط ماتریس نامیده می شود. از روابط

$$A^T A = V^T \sum^T \sum V, A^T A = U \sum \sum^T U^T \quad (۸-۳)$$

دیده می شود که ماتریس A به شدت به تجزیه مقادیر ویژه ماتریس های $AA^T, A^T A$ وابسته است. این وابستگی یکتایی تجزیه مقادیر ویژه ماتریس های متقارن نتیجه می گردد [۱۳].

در ارتباط با مسائل بد وضع گسسته دو مشخصه اصلی برای تجزیه مقادیر منفرد اغلب یافت می گردد که به شرح زیر می باشد:

۱- مقادیر منفرد به تدریج بدون گسستگی به سمت صفر میل می کند و افزایش ابعاد A ، تعداد مقادیر منفرد کوچک را افزایش خواهد داد.

۲- در حالی که σ_i با افزایش اندیس کاهش می یابد بردارهای منفرد $\{u_i, v_i\}$ نیز با افزایش i مرتباً تغییر علامت می دهند.

۳-۳ تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته

همانطور که در روش تجزیه مقادیر منفرد گفته شد تجزیه مقادیر منفرد ماتریس ضرائب مجهولات دستگاه معادلات $Ax = b$ از طریق ستون های ماتریس $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ پایه ای برای فضای

جواب‌ها به وجود می‌آورد. می‌خواهیم بدانیم که آیا بردارهای $[V_i]$ پایه ای مناسب برای فضای جواب خواهند بود یا خیر؟ تاثیر انتخاب پایه ای برای فضای جواب، برای حل دستگاه‌های معادلات گسسته کوچک چندان محسوس نبوده، اما در حل دستگاه‌های معادلات پیوسته (انتگرالی) یا بعد نامتناهی و دستگاه‌های معادلات بزرگ گسسته حاصل از گسسته سازی معادلات انتگرالی، انتخاب یک پایه مناسب برای فضای جواب از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. در حل دستگاه‌های معادلات بدوضع گسسته اگر بردارها پایه مناسبی برای فضای جواب باشند آنگاه همگرایی مسئله به سمت جواب سریعتر شده و تاثیر مقادیر منفرد کوچکتر و بردارهای منفرد با نوسانات شدید بر روی جواب کاهش می‌یابد. از این رو در حل دستگاه‌های بدوضع گسسته، از ابزار تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته استفاده می‌شود چرا که در این روش می‌توان پایه فضای جواب را تغییر داد. اپراتور معکوس پذیر $L \in R^{n \times n}$ را در نظر بگیرید که بر روی فضای جواب اعمال گردیده و موجب تغییر پایه فضای جواب باشد (مانند تبدیل فوریه که برداری را از حوزه زمان به حوزه فرکانس می‌برد)

در این صورت هر بردار x در فضای جواب را می‌توان به صورت بردار x^L نوشت:

$$x^L = Lx \quad (9-3)$$

پس در حل دستگاه $Ax = b$ با انتخاب صحیح L می‌توان در حل مسائل تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته یک پایه مناسب برای فضای جواب‌ها تولید نمود.

۳-۴ اعتبارسنجی متقاطع تعمیم یافته (GCV)

تخمین مقدار ناشناخته نوفه مسئله‌ای است که در علم آمار بسیار زیاد مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از روش‌ها اعتبار سنجی متقاطع تعمیم یافته است. ایده اساسی این روش این می‌باشد که جواب خوب برای یک مسئله وارون سازی، جوابی است که بی جهت به هیچ داده‌ای حساس نیست. به این معنی که این جواب می‌تواند یک داده را به خوبی تخمین بزند حتی اگر آن داده برای محاسبه

مدل بکار نرفته باشد. به همین دلیل نام اعتبار سنجی بکار گرفته شده است. مقدار مناسب α مقداری است که تمام داده‌ها را به بهترین شکل تخمین بزند.

با استفاده از نقطه کمینه تابع اعتبار سنجی می‌توان مقدار α را تعیین نمود. این تابع را می‌توان طوری بیان نمود که برای حذف هر داده به یک حل صریح مسئله وارون نیاز نباشد. این رابطه بصورت زیر است [۱۶]:

$$GCV(\alpha) = \frac{\|d(\alpha) - d^{obs}\|_2^2}{(\text{trace}(I - C(\alpha)))^2} \quad (۱۰-۳)$$

که

$$C(\alpha) = G(G^T G + \alpha I_n)^{-1} G^T \quad (۱۱-۳)$$

و $d(\alpha)$ داده تخمین زده شده حاصل از وارون سازی تمام داده‌های مشاهده‌ای است. تابع GCV گاهی اوقات بر داده‌ها بیش برآزش دارد و گاهی اوقات مقدار کمینه نداشته، بنابراین جوابی ندارد. ولی بیشتر اوقات این روش خوب عمل می‌کند.

۳-۵ روش تیخونوف

روش منظم سازی تیخونوف یکی از روش‌های بهینه سازی می‌باشد که در حل مسائل بد وضع جهت منظم سازی مسائل بکار گرفته می‌شود. به نظر می‌رسد که این روش بتواند راه حل مناسبی برای تجزیه مقادیر منفرد و ماتریس کر نل ارائه دهد. در این بخش چگونگی فرمول بندی روش تیخونوف جهت استفاده بر روی سیستم معادلات خطی در حل مسائل وارون پرداخته خواهد شد. برای پایدار بودن جواب باید جواب‌ها وابستگی زیادی به نوفه نداشته باشند. روش تیخونوف ساده تر از روش منظم سازی تجزیه مقادیر منفرد می‌باشد. علاوه بر این یک فرمول برای این روش بیان کرده و سپس تاثیر وزن های مختلف با مقادیر متفاوت را بر روی مقادیر بزرگتر، مشاهده خواهد شد [۱۷].

در مورد سیستم‌های خطی می‌توان گفت:

$$d = Gm + \varepsilon \quad (۱۲-۳)$$

تیخونوف به منظور حل سیستم معادلات (۱۲-۳) برای حالتی که تعداد پارامترهای مدل از تعداد داده‌ها بیشتر باشد از کمینه سازی رابطه زیر استفاده کرد:

$$\phi_u = \langle c_g^{-1}(Gm - d), Gm - d \rangle + u \langle c_m^{-1}m, m \rangle \quad (۱۳-۳)$$

که c_g ماتریس واریانس یا کواریانس مشاهدات u پارامتر تنظیم کننده تیخونوف است. نتیجه کمینه کردن معادله (۱۳-۳) به روش تنظیم کننده تیخونوف معروف است. در این روش پارامترهای مدل بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$m = c_m G^T (G c_m G^T)^{-1} G \quad (۱۴-۳)$$

و ماتریس‌های وزنی بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$w_g = \frac{1}{\sigma_g^{-1}} c_g^{-1}, w_m = \frac{1}{\sigma_m^{-1}} c_m^{-1} \quad (۱۵-۳)$$

که σ_m, σ_g واریانس داده‌ها و پارامترها و c_m, c_g کواریانس داده‌ها و پارامترها می‌باشند. با جایگزینی معادله ۱۵-۳ در معادله ۱۴-۳ داریم:

$$m = w_m^{-1} G^T (G w_m^{-1} G^T + u \frac{\sigma_m^2}{\sigma_g^2} w_g^{-1})^{-1} G \quad (۱۶-۳)$$

مسئله انتخاب پارامتر تنظیم کننده به عنوان یک مسئله پایدار کننده در روند وارون سازی نباید کمترین تاثیر را داشته باشد.

۳-۵-۱ انتخاب جواب مناسب

در حل مسائل به روش کمترین مربعات، ممکن است بی نهایت جواب وجود داشته باشد. اگر داده‌ها حاوی نوفه باشند ممکن است برازش بین نقاط در حل این مسائل به خوبی اتفاق نیفتد. برای اینکه برازش خوبی بین داده‌ها و منحنی حاصل از داده‌های مدل اتفاق بیفتد باید معادله کمترین مربعات با نرم‌های پایین‌تر حل شود. به عبارتی دیگر بجای در نظر گرفتن نرم $\|Gm-d\|_2$ جهت برازش بهتر داده‌ها از $\|Gm-d\|_2 \leq \delta$ با نرم کمتر استفاده شود [۱۰]. اما سوالی که در اینجا مطرح می شود این است که چرا انتخاب جواب با نرم کمتر در برازش بین داده‌ها مناسب است؟ به این دلیل که در پایداری جواب هر خاصیتی غیر صفری می‌تواند جواب را به سمت ناپایداری سوق دهد و از آنجایی که داده‌های موجود همیشه خالی از نوفه نمی‌باشند به همین دلیل استفاده از نرم‌های کمتر در برازش بهتر داده‌ها مفید خواهد بود. در پایدارسازی خصوصیات از مدل که در برازش اهمیت ندارند حذف خواهند شد. به عبارتی دیگر انتخاب نرم کمتر در حل جواب‌ها به منظور دادن وزن بیشتر به داده‌هایی است که نسبت به خط برازش پراکنده نیستند. هرچه از نرم‌های بالاتری استفاده شود برازش منحنی بین داده‌های واقعی و داده‌های بدست آمده ناشی از مدل در نظر گرفته شده کمتر می‌باشد [۱۰]. ما سه نوع حل برای مسائل وارون داریم که در بخش زیر به آن می‌پردازیم.

۱- حل کمترین مربعات (least square)

۲- حل کمترین مربعات کم تعیین شده (damp least square)

۳- حل به روش مارکوارت لونبرگ (M.L)

۳-۶ حل کمترین مربعات

در این مسائل فرمول به شکل زیر می باشد

$$Gm = d \quad (۱۷-۳)$$

$$m_{tr} = [G]^{-1} d [G^T]$$

که در آن G ماتریس کرنل، d داده‌ها و G^T ترانهاد ماتریس کرنل می باشد. این فرمول در حل مسائلی بکار می‌رود که تعداد داده‌ها (N) از تعداد پارامترهای مدل (M) بیشتر باشد.

۳-۶-۱ حل کمترین مربعات کم تعیین شده

فرمولی که برای مسائل کمترین مربعات کم تعیین شده استفاده می‌شود:

$$\min \|Gm - d\|_2^2 + \alpha^2 \|m\|_2^2 \quad (۱۸-۳)$$

برای حل مسائل به این روش معادله به فرم زیر می باشد:

$$Gm = d \quad (۱۹-۳)$$

$$m_{tr} = [G^T G] d [G^T G]^{-1}$$

فرمول بالا در حل مسائلی بکار می رود که تعداد داده‌ها (N) از تعداد پارامترهای مدل (M) کمتر باشد به این مسائل، مسائل کم تعیین شده می گویند.

۳-۶-۲ حل به روش مارکوارت لونبرگ

برخی از پارامترهای ما کم تعیین شده و برخی بیش تعیین شده هستند ولی در عمل بیشتر مسائلی که ما با آن مواجه هستیم بصورت ترکیبی می باشد شکل کلی این فرم معادلات بصورت زیر می باشد:

$$m = (G^T G + \alpha^2 I)^{-1} G^T d \quad (۲۰-۳)$$

به این روش، روش کمترین مربعات میرا گویند. با توجه به این معادله تنها عملی که انجام می شود

این می باشد که مقدار α به قطر اصلی ماتریس $(G^T G)^{-1}$ اضافه شده است [۱۳].

۷-۳ حل تجزیه مقادیر منفرد به روش تیخونوف

معادله (۱۸-۳) را می‌توان معادل رابطه کمترین مربعات یعنی $d = Gm$ در نظر گرفت که بدین ترتیب معادله (۱۸-۳) بصورت زیر می‌باشد:

$$\min \left\| \begin{bmatrix} G \\ \alpha I \end{bmatrix} m - \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (21-3)$$

که α یک مقدار غیر صفر می‌باشد. معادله (۱۹-۳) تابع هدف روش تیخونوف می‌باشد که برای رسیدن به یک مدل مناسب باید آن را کمینه کرد. کمینه کردن تابع هدفی که این تابع عدم برازش داده‌ها را با شرطی دیگر مثل شرط های منظم سازی تیخونوف ترکیب می‌کند. در حل مسائل کمترین مربعات معادله (۱۹-۳) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} G^T \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ \alpha I \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} G^T \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22-3)$$

معادله (۲۲-۳) را می‌توان به شکل زیر باز نویسی کرد:

$$(G^T G + \alpha^2 I) m = G^T d \quad (23-3)$$

که I ماتریس متقارن، α پارامتر منظم ساز می‌باشد بنابراین داریم:

$$m_\alpha = G^T d (G^T G + \alpha^2 I)^{-1} \quad (24-3)$$

انتخاب درست پارامتر α بسیار مهم می‌باشد، هرچه پارامتر α با دقت بیشتری انتخاب شود جواب‌های حاصل از وارون سازی پایدارتر می‌باشند [۱۰].

کاربرد پارامتر منظم سازی در مدل سازی وارون سبب تعادل بین عدم برازش داده‌ها و عبارت منظم ساز در تابع هدف می‌شود. یکی از مسائل مهم در روش منظم سازی، از جمله روش تیخونوف انتخاب مقدار مناسب پارامتر منظم سازی است [۱۸].

روش های متعددی برای تخمین پارامتر منظم سازی در حل مسائل وارون خطی داده های ژئوفیزیکی وجود دارد [۱۵]. الدنبرگ و لی از روش تعمیم اعتبار متقاطع (GCV)^۱ استفاده کردند آنها دریافتند که با استفاده از روش (GCV) می توان به مقدار پارامتر مناسب نزدیک شد و تا حدودی سطح نوفه موجود در داده ها را تخمین زد و در نهایت با استفاده از روش های اصل اختلاف به پارامتر منظم سازی مناسب رسید [۱۹]. با این وجود روش اصل اختلاف زمانی به کار می رود که مقدار نوفه به خوبی در داده ها مشخص و مقادیر انحراف معیارها برای مقادیر نوفه معلوم باشد [۱۹].

با وجود اینکه این روش، روش خوبی برای انتخاب پارامتر منظم سازی است ولی ضمانتی برای اینکه همیشه پارامتر منظم سازی مناسبی بدست دهد، وجود ندارد. روش دیگری که برای انتخاب پارامتر منظم سازی وجود دارد، روش تیخونوف می باشد. این روش در وارون سازی سه بعدی داده های گرانی سنجی استفاده شده، نتایج بدست آمده نشان می دهد این روش، روش مناسبی برای تعیین پارامتر منظم سازی می باشد [۶]. الدنبرگ و لی برای وارون سازی از روش تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته (GSVD) استفاده کردند که این الگوریتم یک روش مستقیم در وارون سازی داده ها است. در صورتی که تعداد پارامترهای مدل زیاد باشد نمی توان از این الگوریتم استفاده کرد. مشکل اولیه در حل مسائل بدوضع گسسته کمبود رتبه عددی ماتریس ضرایب مجهولات و نامعین^۲ بودن مسئله، بدلیل مقادیر منفرد کوچک ماتریس ضرایب است. لذا لازم است که به منظور پایدار سازی مسئله، اطلاعاتی در خصوص جواب به مسئله اضافه گردد. یکی از روشهای حل دستگاه های معادلات بدوضع به صورت ذکر شده، روش تیخونوف بوده که معمول ترین روش در پایدار سازی مسائل بدوضع گسسته خصوصا حل مسائل معکوس محسوب می گردد. ایده روش یاد شده، تقریبا بطور همزمان، ولی مستقل، توسط فیلیپس^۳ و تیخونوف ارائه گردید. از نقطه نظر آماری این روش در زمره روش های بیزیین^۴ حل مسائل

^۱ Generalize cross validation

^۲ Underdetermined

^۳ Philips

^۴ Bayesian

معکوس محسوب شده و زمانی به کار می‌رود که، اطلاعات یا فرض اولیه‌ای از مجهولات در اختیار باشد. در روش تیخونوف همچون روش کمترین مربعات، فرض بر تصادفی بودن خطای مشاهدات و نرمال بودن تابع توزیع احتمال خطاها است. از این رو در این روش مانند روش کمترین مربعات به دنبال جوابی با کمترین مقدار باقی مانده‌ها می‌باشیم. اما حصول به چنین جوابی صرفاً با شرط کمترین مربعات در دستگاه‌های معادلات بدو ضلع گسسته به دلیل بد شرایطی اپراتور امکان پذیر نبوده، از این رو در روش تیخونوف همزمان با مینیم کردن نرم بردار باقی مانده‌ها، با حداقل نمودن ضمیمه‌ای از مجهولات، از بی کرانی جواب جلوگیری می‌گردد. لذا روش تیخونوف را در حالت جامع، می‌توان در قالب کمینه‌سازی تابع تیخونوف به صورت ذیل تعریف نمود.

$$F_{Tikhonov}(x, \lambda) = \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \Omega(x) \quad (25-3)$$

تابع Ω در معادله (25-3) با توجه به فرضیات و یا اطلاعات اولیه‌ای مجهولات مشخص می‌شود. لازم به ذکر است که به روش تیخونوف با تعریف تابع (25-3) روش تیخونوف "تعمیم یافته" نیز اطلاق می‌شود. غالباً در پایدار سازی مسائل بدو ضلع گسسته به روش تیخونوف تعمیم یافته، از مینیم کردن نرم ۲ جواب مسئله با تعریف تابع Ω به صورت ذیل استفاده می‌گردد:

$$\Omega(x) = \|Lx\|_2^2, L \in R^{p \times n} \quad (26-3)$$

با قرار دادن تابع Ω از معادله (26-3) در معادله (25-3) و مشتق گیری نسبت به مجهولات و مساوی صفر قرار دادن مشتقات جهت پایدار سازی در روش تیخونوف تعمیم یافته به صورت ذیل می‌رسیم:

$$A_\lambda = (A^T A + \lambda L^T L)^{-1} A^T \quad (27-3)$$

بنا به رابطه فوق اگر در تعریف تابع Ω ، $L = I_m$ باشد، آنگاه به روش تیخونوف استاندارد و یا بطور خلاصه روش تیخونوف با تابع تیخونوف به تعریف ذیل خواهیم رسید:

$$F_{Tikhonov}(x, \lambda) = \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2 \quad (28-3)$$

در بسیاری از مسائل کاربردی انتخاب نرم فضای هیلبرت (L_2) انتخاب بهینه بوده است [۱۵]. لذا در ادامه به معرفی روش تیخونوف تعمیم یافته در زیر فضای سوبولف به عنوان یک زیر فضای هیلبرتی در فضای L_2 خواهیم پرداخت.

۳-۸ تیخونوف تعمیم یافته در فضای سوبولف^۱

در روش تیخونوف از نرم فضای هیلبرت L_2 استفاده می شود که عمده ترین مزیت آن سادگی است. همان طور که ذکر شد، می توان از نرم ۲ یا نیم نرم مناسب استفاده کرد. عموماً در مسائل کاربردی، برای آنکه بتوان بر روی رفتار توابع مجهولات (مشتقات و تغییرات آن تا مرتبه خاص) کنترل بیشتری داشت، می توان از نیم نرم و یا نرم زیر فضای سوبولف (به عنوان یک زیر فضای هیلبرتی در L_2 که در آن مشتقات توابع تا مرتبه خاص انتگرال پذیرند) در روش تیخونوف تعمیم یافته بهره جست.

قبل از بحث در خصوص نرم سوبولف، به تعریف نیم نرم سوبولف پرداخته خواهد شد. به هر فضای برداری V که بتوان بر روی آن تابعی غیر منفی مانند ρ با سه شرط ذیل تعریف نمود یک فضای برداری نیم-نرم پذیر و به تابع ρ یک نیم نرم در فضای برداری V اطلاق می گردد:

$$\begin{aligned} 1 - \rho(v) &\geq 0, v \in V \\ 2 - \rho(\alpha v) &= |\alpha| \rho(v), v \in V, \alpha \in R \\ 3 - \rho(v+u) &\leq \rho(v) + \rho(u), v, u \in V \end{aligned} \quad (29-3)$$

در روش تیخونوف تعمیم یافته در اغلب موارد بجای تابع Ω از تقریب گسسته نیم-نرم سوبولف ρ_w به صورت زیر استفاده می شود:

^۱Sobolof

$$\int_a^b |f^{(K)}(x)|^2 dx = \|\Delta x^k L^{k,n} f\|_2^2 = \|Lf\|_2^2 \quad (30-3)$$

در معادله (30-3) $f_i = f(j\Delta x)$, $i=1,2,\dots,n$ بوده و ماتریس $L_{k,n}$ موسوم به اپراتور مشتق^۱ می‌باشد [۲۰]. استفاده از نرم گسسته شده سوبولف در روش تیخونوف تعمیم یافته معادل استفاده از ماتریس پایدار سازی L^{sob} به صورت ذیر است:

$$L^{sob} = \begin{bmatrix} \alpha_s L^s \\ \cdot \\ \alpha_1 L^1 \\ \alpha_0 L^0 \end{bmatrix} \quad (31-3)$$

استفاده از ماتریس پایدار سازی در روش تیخونوف تعمیم یافته با استفاده از ابزار تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته مستلزم کوچکتر یا مساوی بودن سطرهای ماتریس پایدارسازی نسبت به مجهولات مسئله است، که در ماتریس پایدار سازی L^{sob} ، این شرط برقرار نیست. لذا برای رفع این مشکل باید به جای ماتریس L^{sob} از ماتریس بالا مثلثی تجزیه آن استفاده نمود [۲۰].

^۱Derivative operator

فصل چهارم

معرفی روش کوادر تیک

۱-۴ مقدمه

در این فصل به تعریف تابع کوادرتیک^۱ و سه الگوریتم موجود در این روش که عبارتند از: ۱- الگوریتم نقطه داخلی^۲ ۲- الگوریتم منطقه اعتماد^۳ و الگوریتم مجموعه فعال^۴ پرداخته می شود و ضمن تعریف تابع مادر، شرایطی که بر هر کدام از این الگوریتم ها حاکم است، مورد بررسی قرار می گیرد.

۲-۴ تئوری روش کوادرتیک

فرم تابع مادر روش کوادرتیک به صورت معادله (۱-۴) می باشد:

$$q(x) = d^T x + \frac{1}{2} x^T H x : l \leq x \leq u \quad (1-4)$$

برای حل این تابع بر طبق روش های مدل سازی وارون باید این تابع کمینه^۵ شود [۲۱]. در معادله بالا H یک ماتریس متقارن $n \times n$ ، d و x بردارهایی هستند که متعلق به اعداد حقیقی می باشند ($x, d \in R$). مقادیر l و u قیدهای بالایی و پایینی مسئله می باشند. برای اینکه معادله (۱-۴) را بتوان حل کرد نیازمند یک سری شرایطی هستیم که بر روی مسئله قرار گیرد. به عبارتی شرایطی بکار گرفته می شود، تا بتوان جواب را محدود و به حالتی که مطلوب است، نزدیک کرد. این شرایط به شرح ذیل می باشند.

$$q(x) = d^T x + \frac{1}{2} x^T H x : l \leq x \leq u \quad (2-4)$$

$$A.x \leq b, A_{eq}.x = b_{eq}, l \leq x \leq u.$$

فرم کمترین مربعات برای رسیدن به معادله ۱-۴ بصورت زیر می باشد [۸]:

^۱Quadratic

^۲Interior point

^۳Trust region

^۴Active set

^۵minimum

$$\min \|Ax - b\|_2 \quad (3-4)$$

که در معادله (3-4) l قید پایین و u قید بالای مسئله می‌باشند. اگر در مسئله ای $n > m$ باشد، مسئله یک مسئله بیش تعیین شده است. که n تعداد داده‌ها و m تعداد پارامترها می‌باشد [۸]. با استفاده از رابطه (3-4) می‌توان به رابطه (2-4) که همان تابع کوادرتیک است دست یافت:

$$\min \|Ax - b\|_2, \quad l \leq x \leq u \quad (4-4)$$

با در نظر گرفتن راه حل کمترین مربعات میرا^۱ برای این مسئله و همچنین شرط اعمال شده و با توجه به مثبت بودن تابع $\|Ax - b\|_2$ معادله زیر بدست می‌آید:

$$\min \frac{1}{2} [(Ax - b)^T (Ax - b)], \quad l \leq x \leq u \quad (5-4)$$

و یا

$$\min \left[\frac{1}{2} x^T A^T A x - b^T A x + b^T b \right], \quad l \leq x \leq u \quad (6-4)$$

که در نهایت پس از ساده سازی معادله (5-4) داریم:

$$\min \left[\frac{1}{2} x^T H x - d^T x \right], \quad l \leq x \leq u \quad (7-4)$$

که در این معادله $H = A^T A$ ، یک ماتریس متقارن $n \times n$ می‌باشد. و $d = A^T b$ بردار n [۸].

الگوریتم های زیادی برای حل اینگونه معادلات وجود دارد. در این پایان نامه از روش کوادرتیک به همراه سه الگوریتم موجود در این روش استفاده شده است. سه الگوریتم موجود در روش کوادرتیک مورد بررسی قرار گرفته و شرایط موجود بر روی این سه الگوریتم شرح داده خواهد شد.

^۱Damp least squer

۴-۲-۱ الگوریتم منطقه اعتماد

روش تراست ریجن (منطقه اعتماد) یک روش بهینه سازی است و در اصطلاح به معنی زیر مجموعه‌ای از نقاط است که با یک معادله درجه دوم به تابع هدف نزدیک است. روش منطقه اعتماد به عنوان روش گام محدود شناخته شده است. در این روش با مقایسه نسبت جواب مورد نظر از تقریب مدل با جواب واقعی ناشی از مدل، جواب را مورد ارزیابی قرار می‌دهد. روش منطقه اعتماد در مقابل روش جستجوی خط با دو حس متفاوت بیان می‌شود. بدین معنی که: در روش منطقه اعتماد، در ابتدا اندازه گام و سپس جهت گام مشخص می‌شود، ولی در روش جستجوی خط در ابتدا جهت گام و سپس اندازه گام بیان می‌شود. روش منطقه اعتماد یک کلاس یا یک روش شناخته شده در بهینه سازی می‌باشد [۲۲].

برای درک چگونگی بهینه سازی به روش منطقه اعتماد، فرض کنید شما در یک نقطه x در فضای N بعدی هستید و می‌خواهید برای بهبود حرکت به یک نقطه با مقدار تابع پایین برسید. ایده اصلی این است که برای تقریب، یک تابع مانند f را با مقدار Q که نشان دهنده رفتار منطقی تابع f در فضای همسایگی N^1 برای نقطه x می‌باشد در نظر گرفت. این فضای همسایگی منطقه اعتماد می‌باشد. در روش منطقه اعتماد، تخمین برنامه ساز درجه دو (کوادریتیک) توسط دو ترم f و x بیان می‌شود. فضای همسایگی N معمولاً به شکل بیضی و یا دایره می‌باشد. شکل ریاضی الگوریتم منطقه اعتماد به شکل زیر می‌باشد:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} s^T H s + s^T g \mid \|Ds\| \leq \Delta \right\} \quad (۸-۴)$$

که g گرادیان f در جریان نقطه x است. H ماتریس متقارن هشین^۲ (ماتریس متقارن از مشتق دوم)، D ماتریس قطری، Δ مقدار مثبت می‌باشد. بهترین راه حل موجود برای حل معادله بالا بطور

^۱neighborhood

^۲Hessian matrix

معمول و شامل محاسبات یک سیستم مهندسی کامل و یک فرآیند نیوتن اعمال شده بصورت زیر می باشد:

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\|s\|} = 0 \quad (9-4)$$

در این حالت به فاکتورهای زیاده‌تری از H نیاز است. با این حال برای مسائل در مقیاس بزرگ به یک رویکرد متفاوت نیاز داریم مانند چند تقریب و یا استراتژی‌های اکتشافی [۲۳، ۲۴].

۴-۲-۲ الگوریتم نقطه داخلی

برنامه نویسی درجه دو (کوادریتیک) با روش‌های مختلفی حل شده است. روش نقطه داخلی برای حل مسائل خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش در مسائل با تعداد پارامترهای زیاد نیز به کار می‌رود. در حل مسائل خطی به روش نقطه داخلی، جواب‌هایی اهمیت دارند و مورد بررسی قرار می‌گیرند که در درون محدوده و روی مرز منطقه مورد مطالعه قرار گیرند. بنابراین در الگوریتم نقطه داخلی جواب‌هایی که خارج از محدوده مورد مطالعه قرار گیرند، بررسی نمی‌شوند. هر تکرار در این روش محاسباتی زمان‌بر است ولی ممکن است پیشرفت‌های زیادی در ارائه جواب بهینه بدست دهد [۲۳]. در حل مسائل به روش الگوریتم نقطه داخلی مراحل زیر انجام می‌شود:

الف: پیش و یا پس از حل مسئله

الگوریتم با حذف شروط غیر ضروری سعی در ساده سازی مسئله دارد، بعبارت دیگر این بخش به انجام وظایف زیر می‌پردازد:

۱- بررسی اینکه هر متغیر باید با مرز بالایی و پایینی برابر باشد (متغیرها خارج از بازه نباشند)، اگر چنین باشد بررسی انجام در غیر این صورت متغیر حذف شود.

۲- بررسی اینکه آیا هرگونه نابرابری خطی ناشی از یک متغیر^۱ می‌باشد، اگر چنین است متغیر

^۱variable

حفظ یا حذف شود.

۳- بررسی اینکه آیا ماتریس خطی دارای ردیف صفر می‌باشد، اگر چنین است ماتریس حفظ و یا ردیف حذف شود.

۴- بررسی اینکه آیا مرزها و محدودیت های خطی سازگار می‌باشند.

۵- بررسی اینکه هر متغیر به صورت یک شرط در تابع هدف خطی واقع می‌شود نه به عنوان یک محدودیت خطی، اگر این چنین است متغیرها در مرزهای مناسب خود حفظ شوند.

در این مرحله الگوریتم ممکن است نامحدود در نظر گرفته شود، در این صورت الگوریتم متوقف می‌شود. اگر الگوریتم در این مرحله جواب نداشته باشد مرحله بعدی را اجرا کرده تا جواب نهایی حاصل شود [۲۲].

ب: تولید نقطه اولیه

نقطه اولیه (X_0) برای این الگوریتم بدین صورت می‌باشد:

۱- مقدار اولیه X_0 برای ماتریس واحد $(n, 1)$ می‌باشد که n تعداد ردیف های ماتریس کرنل H است.

۲- برای حدود بالا (ub) و پایین (lb) اگر نقطه اولیه در بازه باند قرار داشته باشد: $(ub + lb) / 2$.

۳- در صورتی که یک کران موجود است نقطه اولیه انتخابی باید به مرز نزدیک باشد.

ج: پیش بینی جواب

در الگوریتم نقطه داخلی نقطه ای در نظر گرفته می‌شود که شرایط (KKT)^۱ زیر برقرار باشد:

^۱Karush-Kuhn-Tucker

$$Hx + c - A_{eq}^T y - A^T z = 0$$

$$Ax - b - s = 0$$

$$A_{eq} x - b_{eq} = 0$$

(۱۰-۴)

$$s_i z_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$s \geq 0$$

$$z \geq 0$$

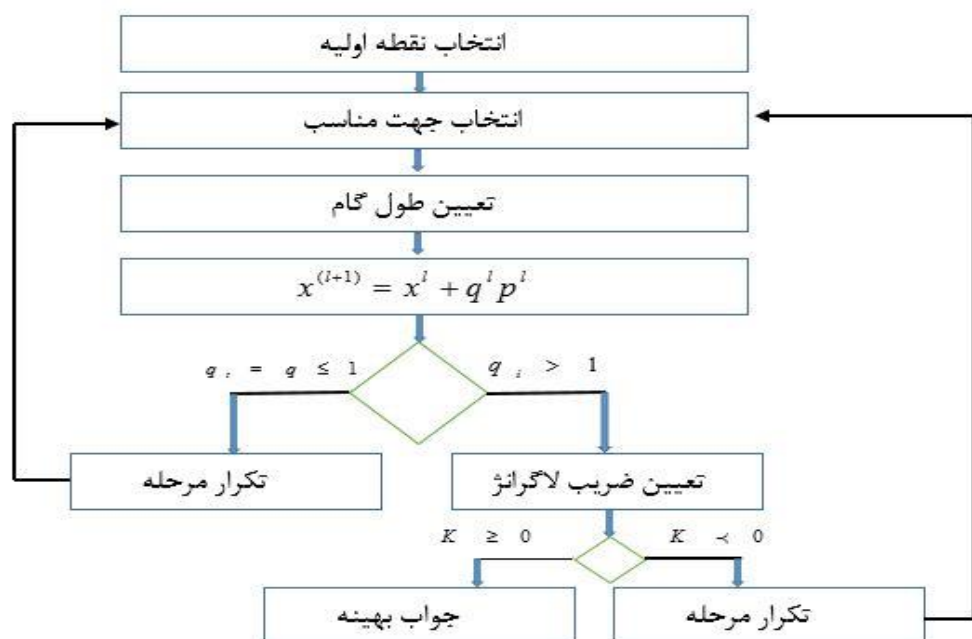
این شرایط معروف به کاروش-کوهن-توکر بوده که در آن، A : ماتریس نابرابری خطی توسعه یافته است، که شامل مرزهای خطی نابرابر می باشد. b : بردار خطی که شامل مرزها نیز می باشد. s : بردار تبدیل محدودیت نابرابر به برابر می باشد. z بردار ضریب لاگرانژ مربوط به s . y بردار ضریب لاگرانژ در ارتباط با محدودیت برابری. سپس با استفاده از روش نیوتن در پیدا کردن نقطه اولیه مناسب که تمامی شرایط ذکر شده را داشته باشد. در نهایت بعد از به دست آوردن نقطه مورد نظر الگوریتم متوقف شده و جواب بدست می آید.

۳-۲-۴ الگوریتم اکتیو ست (منطقه فعال)

در این بخش به بیان روش منطقه فعال پرداخته می شود ضمن اینکه این روش در مورد مسائل با تعداد پارامترهای متفاوت مورد استفاده قرار می گیرد. مسئله ای که در حل مسائل وارون با استفاده از الگوریتم منطقه فعال مطرح می باشد، این است که با افزایش تعداد پارامترها این الگوریتم با مشکل مواجه خواهد شد [۲۵]. الگوریتم منطقه فعال در برنامه نویسی درجه دو مانند روش سیمپلکس^۱ عمل می کند، که در تکرارها ممکن است از یک طرف منطقه به طرف دیگر آن انتقال یابد. در روش سیمپلکس اطلاعات مربوط به مدل وارد جداولی می شود که به آن ها تابلوهای سیمپلکس می گویند. در این روش هر تابلو معادل یک گوشه است. پس از اینکه تابلو نظیر یک گوشه ساخته شد سطح صفر آن تابلو بررسی می شود در این صورت دو حالت بوجود می آید: اول اینکه مقادیر سطح صفر همگی نامنفی اند. در این صورت گوشه مورد نظر بهینه است. دوم اینکه در سطح صفر مقادیر منفی وجود

^۱ Simplex method

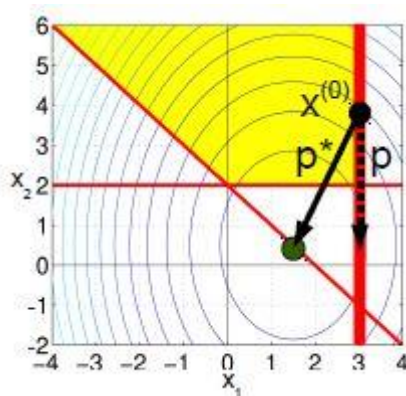
دارند. در اینصورت گوشه مورد نظر بهینه نیست و باید به گوشه مجاور بعدی رفت. در بهینه‌سازی مسائل ریاضی یک مسئله مهم کمینه کردن و یا بیشینه کردن تابع هدف می‌باشد [۲۶]. الگوریتم منطقه فعال بخش مهمی از تئوری بهینه‌سازی است که بر روی نتیجه نهایی تاثیر می‌گذارد. در این بخش به تشریح فرمول بندی این الگوریتم که یکی از روش‌های برنامه‌سازی درجه دو می‌باشد پرداخته خواهد شد. ایده‌ای که در این الگوریتم تکرار شونده وجود دارد (الگوریتم تکرار شونده به این معنی که در صورت اینکه شرایط حل الگوریتم برقرار نباشد تمامی مراحل الگوریتم تکرار خواهد شد) بدین صورت می‌باشد که از یک نقطه شروع می‌شود (نقطه‌ای مشخص) که این نقطه با توجه به اطلاعات اولیه مسئله مشخص خواهد شد. سپس از باندها یا قیود گذاشته شده پیروی کرده تا زمانی که تابع هدف کمینه شود. سپس یک نقطه بحرانی ($x^{(0)}$) را پیدا، و بعد شروع به یافتن جهت نقطه $p^{(0)}$ در نهایت میزان گام ($q^{(0)}$) مورد نظر برای هر تکرار مشخص می‌شود، فلوجارت الگوریتم اکتیو ست در شکل ۴-۱ نشان داده شده است.



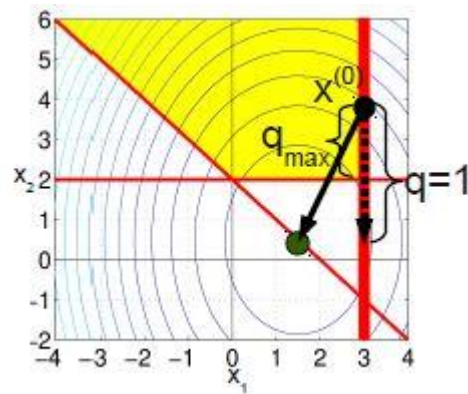
شکل ۴-۱: فلوجارت الگوریتم منطقه فعال که در آن مراحل و قیود حل مسئله بیان شده است [۲۷].

مطابق شکل ۴-۱ مشاهده می‌شود، عملکرد این الگوریتم منطقه فعال به این صورت است که پس از

انتخاب یک نقطه اولیه، جهت مناسب انتخاب می‌شود بدین ترتیب که جهت انتخابی به طرف داده‌هایی که مفید نیستند، نباشد. مرحله بعدی تعیین گام مورد نظر می‌باشد گام‌های انتخابی در الگوریتم منطقه فعال نباید با فواصل زیاد انتخاب شود به این دلیل که ممکن است یک سری اطلاعات مفید از دست برود بنابراین طول گام نیز مفید است. پس از انتخاب طول گام مناسب دو شرط بوجود می‌آید که اگر طول گام مورد نظر از مقدار یک کمتر باشد دوباره باید جهت دیگری را انتخاب کرد و اگر برای همه تکرارها مقدار طول گام از یک بزرگتر باشد وارد مرحله بعد که انتخاب ضریب بهینه سازی (لاگرانژ) می‌باشد، می‌شود که اگر این ضریب منفی باشد دوباره فلوچارت تکرار شده اما اگر این ضریب مثبت باشد جواب بهینه انتخاب می‌شود. در شکل ۲-۴ این بیان بصورت دیگری نمایش داده شده است.



(a)



(b)

شکل ۲-۴: نمایش جهت و طول گام در الگوریتم اکتیو ست (a) در این شکل p^* نشانگر نقطه کمینه، خطوط قرمز محدودیت $(x_1 \leq 3, x_2 \geq 2, x_1 + x_2 \geq 2)$ و منطقه مورد مطالعه که با رنگ زرد مشخص شده است. (b) طول گام بهینه $q=1$ انتخاب شده است، که نمیتوان این گام را انتخاب کرد به این دلیل که این مقدار شرایط محدودیت را نقض می‌کند [۲۷].

با توجه به شکل ۲-۴ دیده می‌شود که نقطه سبز رنگ، نقطه کمینه می‌باشد و (p^*) بردار غیر نرمال آن می‌باشد که نشانگر جهت نقطه اولیه است. در شکل (b) طول گام مینیمم $(q=1)$ نشان داده شده که نمی‌توان این طول گام را در نظر گرفت به این دلیل که شرایط محدودیت نقض می‌شود. با توجه به شکل ۲-۴ پس از انتخاب نقطه کمینه و طول گام مناسب چنانچه شرایط موجود محدودیت

های موجود در مسئله را تایید کند بر طبق شکل ۴-۱ الگوریتم وارد مرحله بعدی خواهد شد. با توجه به شکل ۴-۲ خطوط قرمز رنگ نشان داده شده اطلاعات اولیه می‌باشند. محدودیت‌های اعمال شده در الگوریتم منطقه فعال همان اطلاعات اولیه‌ای می‌باشند که برای حل مسئله در نظر گرفته شده است. الگوریتم منطقه فعال را می‌توان برای حل مسائل بهینه که به شکل درجه دو می‌باشند، استفاده نمود. شکل معادله کوادرتیک به صورت زیر می‌باشد:

$$Qp : \min \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad (۴-۱۱)$$

که دارای شرایط و محدودیت زیر می‌باشد

$$Ax = b \quad (۴-۱۲)$$

$$x \geq 0$$

شرایط کاروش-کوهن-توکر (KKT) برای مسئله بهینه سازی در روش کوادرتیک به شکل زیر است:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$Qx + c - A^T p - s = 0 \quad (۴-۱۳)$$

$$s \geq 0$$

$$x_j s_j = 0, j = 1, \dots, n$$

حل اینگونه مسائل به این شرط می‌باشد که n خیلی بزرگ باشد به این معنی که تعداد پارامترها خیلی بیشتر از تعداد داده‌ها است. بر طبق مشاهدات نشان داده می‌شود که تعداد بسیار کمی از متغیرها x_j در حالی که مطلوب است غیر صفر خواهند بود. یک راه حل عملی، فرض کنید اجزای بخش به صورت $x = (x_\beta, x_\eta)$ باشد که $x_\beta \geq 0$ و $x_\eta = 0$ در این بخش، تعداد عناصر β نسبت به η کوچک می‌باشند.

در این بخش داده‌ها برای مسئله باز نویسی شده‌اند. بنابراین :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{\beta\beta} & \dots & Q_{\beta\eta} \\ Q_{\eta\beta} & \dots & Q_{\eta\eta} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{\beta} & A_{\eta} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_{\beta} \\ c_{\eta} \end{bmatrix} \quad (14-4)$$

اکنون اگر حدس زده شود که تابع x_j ، $j \in \eta$ برای جواب بهینه صفر باشد. به همین دلیل می توان متغیرهای اضافی x_{η} را برای بررسی بیشتر حذف کرد. پس از آن تلاش برای حل مسئله کوچکتر خواهد بود. در نهایت پس از ساده سازی معادله ۴-۱۴ به شکل زیر می باشد:

$$\begin{aligned} Qp_{\beta} : & \frac{1}{2} x_{\beta}^T Q_{\beta\beta} x_{\beta} + c_{\beta}^T x_{\beta} \\ A_{\beta} x_{\beta} &= b \\ x_{\beta} &\geq 0 \end{aligned} \quad (15-4)$$

با توجه به معادله (۴-۱۵) تابع مادر روش کوادرتیک یعنی معادله (۴-۱۱) با استفاده از الگوریتم منطقه فعال بدست آمد.

فصل پنجم

استفاده از روش ارائه شده در وارون سازی داده‌های مصنوعی و واقعی

۵-۱ مقدمه

تمامی تئوری و الگوریتم‌های مطرح شده در فصل‌های گذشته در صورتی مفید است که در عمل برای داده‌های واقعی نتایج مطلوبی فراهم آورد. هدف این فصل این است که با استفاده از مدل‌های مصنوعی مختلف، توانایی روش‌های ارائه شده مورد آزمایش قرار گیرد. به منظور اعتبار سنجی الگوریتم ارائه شده، از داده‌های گرانی حاصل از یک مدل مصنوعی و داده‌های معدن مس موبرون واقع در ایالت کبک در کشور کانادا استفاده شد. نتایج حاصل بررسی و به تفسیر این نتایج با استفاده از اطلاعات زمین‌شناسی منطقه پرداخته شد.

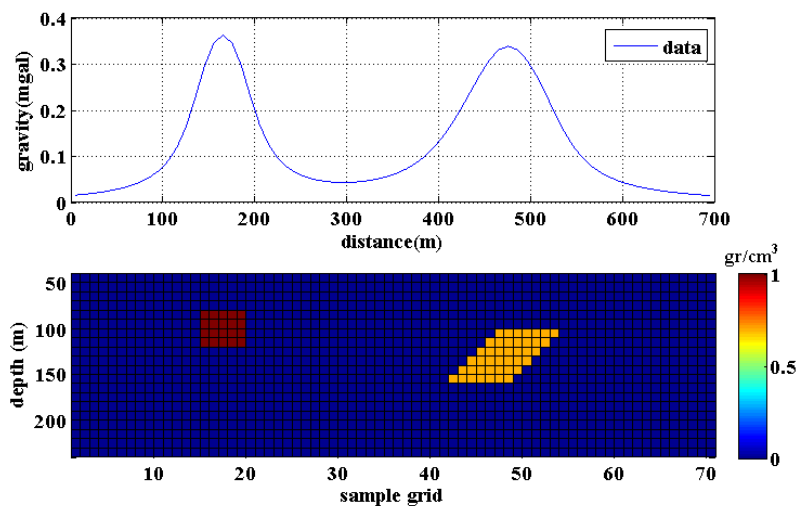
۵-۲ وارون‌سازی داده‌های مصنوعی

برای اینکه بتوان الگوریتم ارائه شده را بر روی داده‌های مصنوعی اعمال کرد، ابتدا زمین به تعدادی بلوک تقسیم شده است. مدل‌های مصنوعی استفاده شده در این پایان نامه دو مدل مکعب و دایک می‌باشند. در جدول ۵-۱ پارامترهای دو مدل مصنوعی نشان داده شده است. زیر سطح زمین به سلول‌های مکعبی به ابعاد ۱۰ متر تقسیم شده است. تعداد این سلول‌ها $700 = 10 \times 70$ است. ابتدا داده‌های حاصل از این مدل‌های مصنوعی توسط مدل‌سازی پیشرو تولید شد. سپس مقدار ۵ درصد نوفه تصادفی با توزیع نرمال به داده‌ها اضافه گردید. در نهایت وارون‌سازی داده‌ها با استفاده از روش کوادریک با وجود سه الگوریتم منطقه اعتماد، نقطه داخلی و منطقه فعال انجام گرفت.

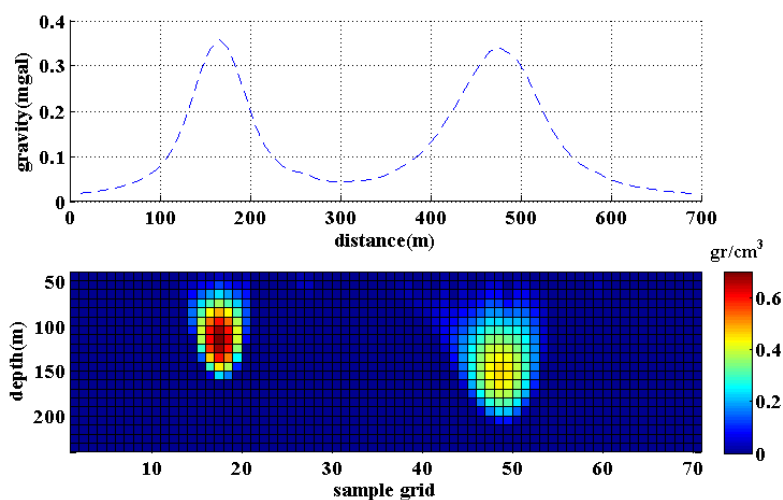
جدول ۵-۱: پارامترهای دو مدل مصنوعی متشکل از مکعب و دایک برای ۱۴۰۰ پارامتر

مدل	ابعاد	عمق سطح بالایی	اختلاف چگالی ($\frac{gr}{cm^3}$)
مکعب	۵×۴	۴۰	۱
دایک	۷×۶	۶۰	۰/۰۷

شکل ۵-۱ دو مدل مصنوعی در نظر گرفته شده را نشان می‌دهد. منحنی بی‌هنجاری ناشی از این دو مدل در این شکل نشان داده شده است، داده‌های بدست آمده در صحرا دارای مقداری نوفه می‌باشند به همین منظور مقداری نوفه در انجام وارون‌سازی به داده‌های مصنوعی اضافه شد.

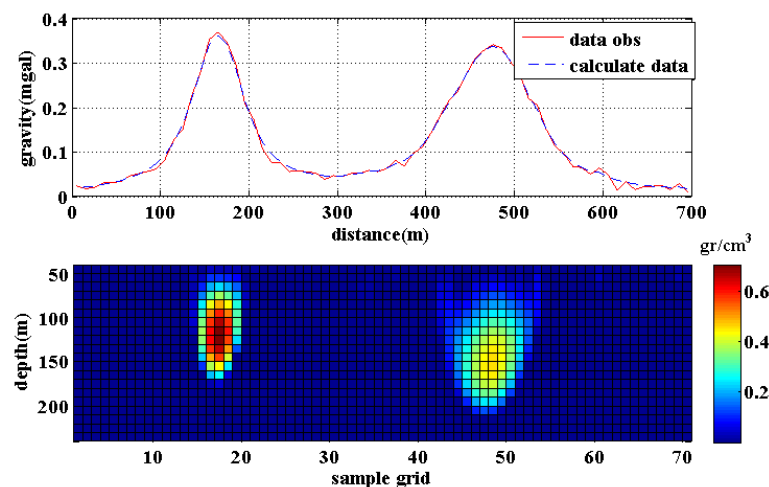


شکل ۵-۱: مدل‌های مصنوعی متشکل از یک مکعب و دایک و بی‌هنجاری ناشی از آنها در حالت بدون نوفه در مدل‌سازی وارون از داده‌ها استفاده می‌شود تا طی یک عملیات ریاضی به پارامترهای مسئله وارون دست یافت. شکل ۵-۲ نمایش وارون سازی داده‌های بدست آمده از مدل‌های مصنوعی شکل ۵-۱ می‌باشد.



شکل ۵-۲: نمایش وارون‌سازی داده‌های بدست آمده از مدل‌های مصنوعی متشکل از مکعب و دایک

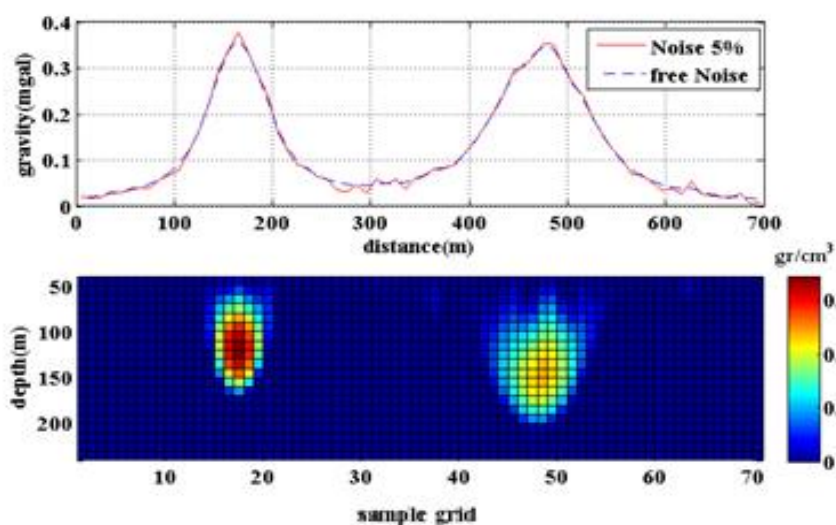
در این فصل هر سه الگوریتم موجود در روش کوادرتیک بر روی مدل‌های مصنوعی در نظر گرفته شده اعمال شده، سپس نتایج حاصل از این الگوریتم‌ها از نظر زمان اجرای برنامه و پایداری در مقابل نوفه با درصدهای مختلف مورد بررسی قرار گرفت. شکل ۳-۵ اعمال الگوریتم نقطه داخلی بر روی مدل‌های مصنوعی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۳-۵ محدوده مدل‌ها و شکل آنها به خوبی حفظ شده است که می‌توان این الگوریتم را بعنوان یک روش خوب در مدل‌سازی وارون در نظر گرفت. هنگام وارون‌سازی بلوک‌هایی که در سطح مش‌بندی قرار می‌گیرند دارای وزن بیشتری نسبت به بلوک‌هایی که در ردیف‌های بعدی قرار دارند، می‌باشند. به این ترتیب اگر یک مدل در نظر گرفته شود سپس وارون‌سازی انجام شود، مدلی که به دست می‌آید خیلی نزدیک به سطح است جهت جلوگیری از این اتفاق از یک ماتریس به نام ماتریس وزنی یا عمقی استفاده شده تا مدل وارون در محل واقعی خودش قرار گیرد. این ماتریس متناسب با عمق بلوک‌ها، وزن متفاوتی برای بلوک‌ها در نظر می‌گیرد. ماتریس عمقی به هر بلوکی که در اعماق بیشتری نسبت به سطح قرار می‌گیرد، متناسب با عمق هر بلوک وزن خواهد داد. باید توجه داشت که محور x سطح مش‌بندی انجام شده برحسب نمونه‌گیری اندازه گرفته شده می‌باشد لذا جهت تبدیل به مختصات متری باید در عدد ۱۰ که ابعاد هر بلوک است ضرب شوند ($70 \times 10 = 700$) که مقدار ۷۰۰ برحسب متر می‌باشد.



شکل ۳-۵: اعمال الگوریتم نقطه داخلی بر روی مدل‌های مصنوعی مکعب و دایک (با نوفه ۵ درصد)

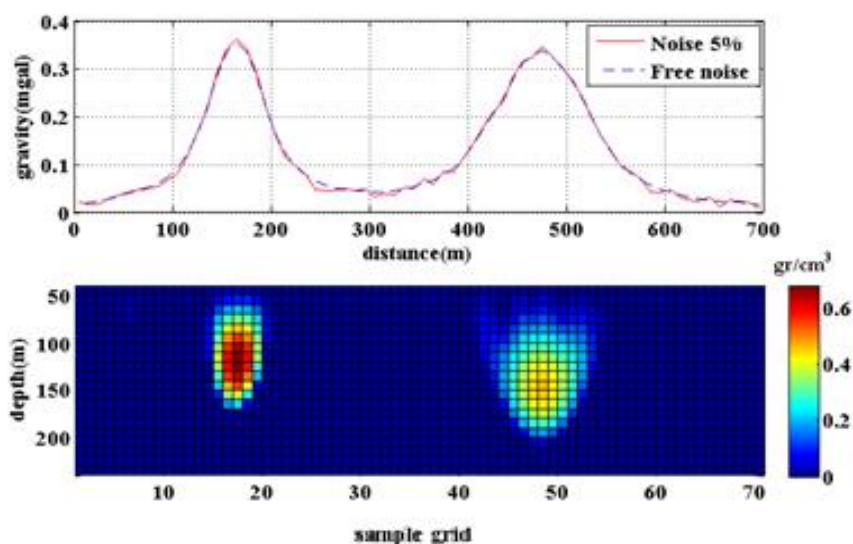
تمامی مراحل انجام شده در شکل ۳-۵ با برنامه نویسی در محیط نرم افزار متلب انجام گرفته است. با توجه به شکل ۳-۵ نتیجه می شود که الگوریتم نقطه داخلی شکل دایک را نتوانسته به خوبی نشان دهد. بنابراین سطوح شیبدار را نمی تواند به خوبی نشان دهد. ولی در مورد مدل مکعبی ضمن اینکه شکل از وضوح خوبی برخوردار می باشد ابعاد بلوک با نسبت خوبی تعیین شده و مدل بدست آمده در مقاطع شباهت مناسبی با مقاطع مدل مصنوعی دارد.

در بررسی انجام شده بر روی الگوریتم منطقه اعتماد با در نظر گرفتن مدل های مصنوعی بیان شده، نتایج به دست آمده در شکل ۴-۵ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۴-۵ محل مدل ها به خوبی نشان داده شده است. در اینجا نیز مدل دایک به خوبی در نتیجه وارون سازی به روش الگوریتم منطقه اعتماد ظاهر نشده است که می توان نتیجه را اینطور بیان کرد که سطوح شیبدار در الگوریتم منطقه اعتماد و همینطور الگوریتم نقطه داخلی به خوبی نشان داده نمی شوند. بطور کلی در مدل سازی وارون سازی سطوح شیبدار به سختی انجام می گیرد. همچنین با توجه به شکل ۳-۵ و شکل ۴-۵ و همچنین منحنی بی هنجاری آن ها مشاهده می شود هر دو الگوریتم نتوانسته اند تا حدودی در مقابل نوفه از خود پایداری نشان دهند که خود می تواند نوعی تفاوت بین این الگوریتم ها باشد. همچنین با توجه به شکل ها دیده می شود این پایداری بر روی منحنی بی هنجاری ناشی از مدل های مصنوعی، به هنگامی که بر روی مدل ها واقع می شود پایداری خوبی نشان داده است که علت را می توان در انتخاب پارامتر منظم سازی مناسب دانست.



شکل ۴-۵: اعمال الگوریتم منطقه اعتماد بر روی مدل‌های مصنوعی مکعب و دایک (با نوفه ۵ درصد)

الگوریتم بعدی که در وارون‌سازی به روش کوادرتیک بکار گرفته شده است، الگوریتم منطقه فعال می‌باشد شکل ۵-۵ الگوریتم منطقه فعال را نشان می‌دهد که بر روی مدل‌های مصنوعی اعمال شده است.



شکل ۵-۵: اعمال الگوریتم منطقه فعال بر روی مدل‌های مصنوعی دایک و مکعب (با نوفه ۵ درصد)

با توجه به شکل ۵-۵ الگوریتم منطقه فعال نیز مدل دایک را به خوبی وارون سازی نکرده است.

بنابراین می‌توان بیان کرد که روش کوادرتیک در مورد اشکال شیبدار به خوبی عمل نمی‌کند. در مورد میزان نوفه نیز می‌توان با توجه به شکل ۵-۵ در مقابل این درصد نوفه، منحنی بی‌هنجاری ناشی از داده‌های حاوی نوفه نسبت به منحنی که داده‌ها بدون نوفه می‌باشند تغییرات زیادی نداشته و منحنی تقریباً همواری را از خود نشان داده است. با توجه به شکل ۳-۵، شکل ۴-۵ و شکل ۵-۵ مشاهده می‌شود که روش کوادرتیک با هر سه الگوریتم موجود توانسته است برای مدل‌های مصنوعی وارون‌سازی قابل قبولی را ارائه دهد. پس تفاوت در چیست؟ در این فصل ضمن بررسی این سه الگوریتم نقاط ضعف و قوت هریک از این الگوریتم‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد تا نتیجه مطلوب در بکارگیری این روش دست یابد.

۳-۵ بررسی هر سه الگوریتم روش کوادرتیک از نظر زمان اجرای برنامه

در این بخش زمان اجرای هر سه الگوریتم را مورد بررسی قرار گرفته و آنها را از نظر اینکه کدامیک، از نظر زمان اجرای برنامه سریعتر یا دیرتر، به مدل پاسخ می‌دهند، مورد بررسی قرار خواهند گرفت. جدول ۲-۵ نشان دهنده تفاوت مدت زمان اجرا در هر سه الگوریتم می‌باشد.

جدول ۲-۵: زمان اجرای وارون‌سازی برای مدل مکعب و دایک با تعداد ۱۴۰۰ پارامتر

روش کوادرتیک	الگوریتم منطقه اعتماد	الگوریتم نقطه داخلی	الگوریتم منطقه فعال
مدت زمان اجرا (ثانیه)	۲۵	۳۷	۵۰

با توجه به جدول ۲-۵ دیده شد که الگوریتم منطقه فعال بیشترین مدت زمان اجرا و الگوریتم منطقه اعتماد کمترین زمان را به خود اختصاص داده است. در الگوریتم منطقه فعال با افزایش تعداد پارامترهای مدل زمان اجرای وارون‌سازی افزایش می‌یابد به این دلیل که وجود نوفه در داده‌ها سبب

ناپایداری شده در نتیجه عمل وارون‌سازی به زمان بیشتری نیاز خواهد داشت. در الگوریتم منطقه فعال با افزایش تعداد پارامترها، همچنین افزایش نوفه مسئله به سمت ناپایداری پیش رفته در نتیجه الگوریتم زمان بیشتری را صرف پایدار سازی مسئله خواهد کرد. می‌توان زمان اجرای وارون‌سازی را از نظر تعداد پارامترهای موجود در مسئله مورد بررسی قرار داد. بنابراین مسئله با در نظر گرفتن یک مدل ساده و تعداد پارامترهای کمتر را مورد بررسی قرار داده و نتایج بدست آمده از این مدل با مدل‌های مصنوعی بیان شده مقایسه شد. لذا جهت مقایسه مدت زمان اجرای وارون‌سازی در هر سه الگوریتم موجود در روش کوادرتیک، این عمل بر روی مدل مصنوعی دیگر که دارای تعداد پارامترهای کمتر نسبت به مدل اولیه است انجام شد. در جدول ۳-۵ پارامترهای این مدل مصنوعی نشان داده شده است.

جدول ۳-۵: پارامترهای مدل مصنوعی متشکل از مکعب با تعداد ۴۵۰ پارامتر

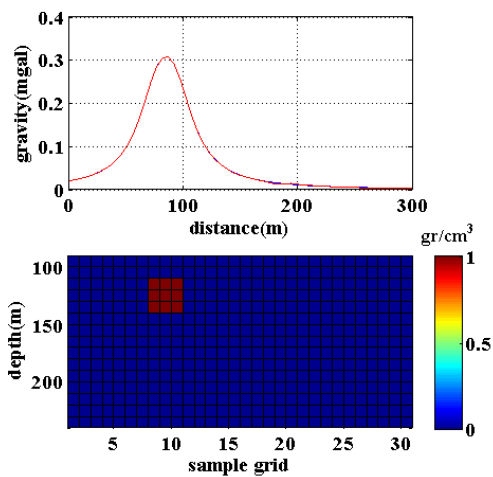
مدل مصنوعی	ابعاد	عمق سطح بالایی	اختلاف چگالی ($\frac{gr}{cm^3}$)
مکعب	$3 \times 3 = 9$	۲۰	۱

شکل ۳-۵ یک مدل مصنوعی متشکل از یک مکعب را نشان می‌دهد. در شکل ۳-۵ (الف): مدل مصنوعی در نظر گرفته شده با ۴۵۰ پارامتر نشان داده شده است. تعداد داده‌های این مدل ۹ و تعداد پارامترهای این مدل ۴۵۰ می‌باشد بنابراین مسئله یک مسئله کم تعیین شده است. در شکل ۳-۵ (ب): الگوریتم نقطه داخلی، شکل ۳-۵ (ج): اعمال الگوریتم منطقه اعتماد و شکل ۳-۵ (د): اعمال الگوریتم منطقه فعال بر روی مدل مصنوعی انجام شده است. مشاهده شد که تمامی این الگوریتم‌ها به خوبی ابعاد، مدل و موقعیت مدل مصنوعی را حفظ کرده‌اند. نتایج حاصل در جدول ۳-۵ زمان اجرای سه الگوریتم روش کوادرتیک برای مدل مصنوعی متشکل از یک مکعب با تعداد ۴۵۰ پارامترها نشان داده شده است. زمان اجرای الگوریتم‌ها بر حسب ثانیه است.

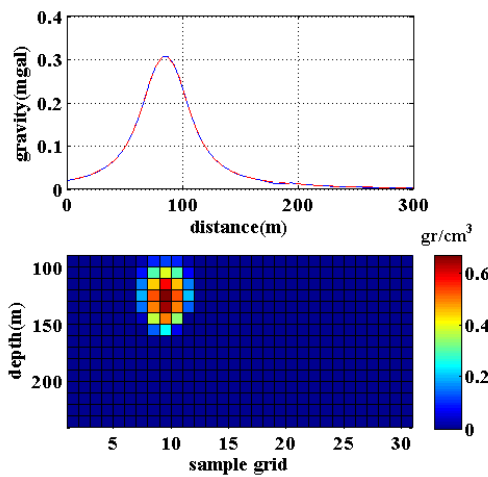
جدول ۴-۵: زمان اجرای وارون سازی برای مدل متشکل از یک مکعب و یک دایک با تعداد ۴۵۰ پارامتر

الگوریتم	منطقه اعتماد	نقطه داخلی	منطقه فعال
زمان اجرا (ثانیه)	۷	۱۷	۲۳

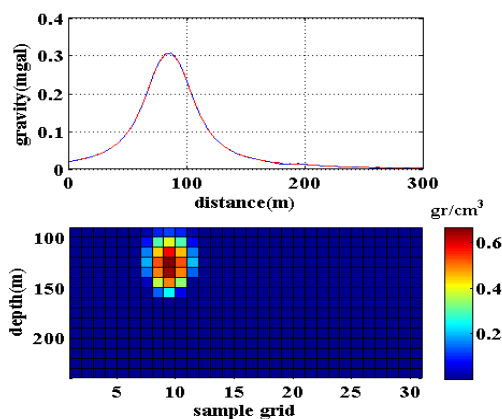
با توجه به مقایسه بین جدول ۲-۵ و جدول ۴-۵ مشاهده شد که در هر دو جدول الگوریتم منطقه فعال زمان بیشتری را نسبت به سایر الگوریتم‌ها به خودش اختصاص داده است.



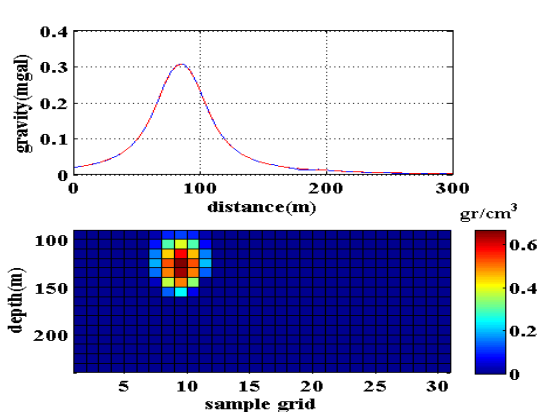
(الف) مدل مصنوعی



(ب) الگوریتم نقطه داخلی



(ج) الگوریتم منطقه اعتماد



(د) الگوریتم منطقه فعال

شکل ۵-۶: اعمال سه الگوریتم بر روی مدل مصنوعی متشکل از یک مکعب با تعداد ۴۵۰ پارامتر (الف) مدل مصنوعی، (ب) الگوریتم نقطه داخلی (ج) الگوریتم منطقه اعتماد (د) الگوریتم منطقه فعال

می‌توان علت را ناپایداری مسئله بیان کرد بعبارتی این الگوریتم در مسائل کم تعیین شده که تعداد پارامترها خیلی بیشتر از تعداد داده‌ها است با ناپایداری مواجه شده لذا به جهت پایداری نمودن وارون‌سازی به زمان بیشتری نیاز است. بنابراین زمان اجرای انجام وارون‌سازی مستقل از تعداد پارامترهای موجود در وارون‌سازی نیست. هرچه تعداد پارامترهای موجود در مسئله وارون‌سازی بیشتر باشد زمان بیشتری برای اجرای الگوریتم صرف خواهد شد.

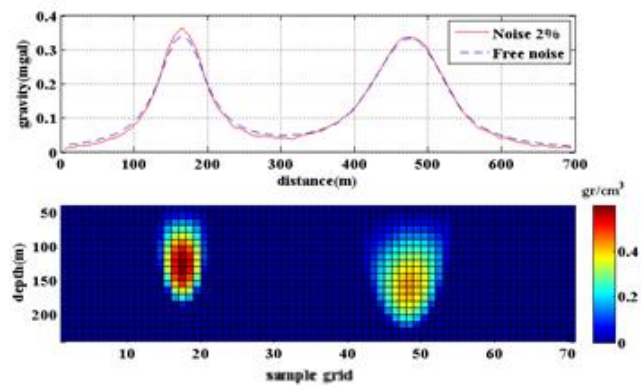
۴-۵ بررسی پایداری سه الگوریتم روش کوادرتیک در مقابل نوفه

مقایسه دوم که بین این الگوریتم‌ها صورت گرفت میزان پایداری این الگوریتم‌ها در مقابل نوفه بود. در این بخش الگوریتم‌های موجود در روش کوادرتیک را با اضافه کردن نوفه با درصدهای مختلف مورد مقایسه قرار داده، تا میزان پایداری هر یک از این الگوریتم‌ها نسبت به یکدیگر مورد بررسی قرار گیرد. با توجه به شکل ۵-۷ با دو درصد نوفه، شکل ۵-۸ با پنج درصد نوفه و شکل ۵-۹ با ده درصد نوفه مشاهده شد که این الگوریتم‌ها پایداری نسبتاً خوبی در مقابل نوفه دارند. در هر سه شکل با توجه به وجود نوفه با درصدهای متفاوت در داده‌های مصنوعی، مدل‌های مصنوعی به خوبی وارون‌سازی شده، بطوریکه محل و ابعاد مدل‌های مصنوعی به خوبی نمایش داده شده است. با مقایسه انجام شده بر روی این شکل‌ها مشاهده شد با افزایش میزان نوفه مسئله دارای ناپایداری شده است. در نتیجه منحنی حاصل از داده‌های دارای نوفه از منحنی داده‌های بدون نوفه فاصله گرفته است. در شکل ۵-۷ هر سه الگوریتم روش کوادرتیک نشان داده شده است. شکل (الف) الگوریتم نقطه داخلی، شکل (ب) الگوریتم منطقه اعتماد و شکل (ج) الگوریتم مجموعه فعال نشان داده شده است. با توجه به شکل (ج) مشاهده می‌شود که الگوریتم مجموعه فعال پایداری مناسبی در مقابل ۲ درصد نوفه از خود نشان داده است. به طوری که منحنی‌های بی‌هنجاری برازش خوبی با یکدیگر داشته‌اند. در مورد شکل ۵-۸ که این الگوریتم‌ها بر روی ۵ درصد نوفه انجام شده است. مشاهده شد در تمام الگوریتم‌های موجود منحنی بی‌هنجاری واقع بر روی مدل‌های مصنوعی دارای پایداری قابل ملاحظه‌ای می‌باشد. الگوریتم منطقه

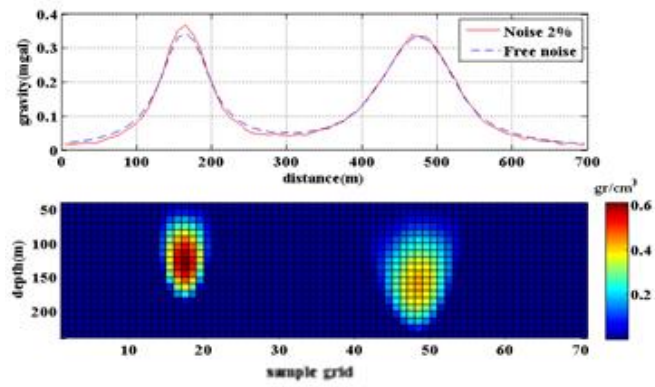
فعال در مقابل افزایش نوفه ناپایداری خواهد بود. و این ناپایداری بر روی وارون‌سازی اثر دارد. شکل ۹-۵ هر سه الگوریتم روش کوادرتیک بر روی مدل‌های با نوفه ۱۰ در صد اعمال شده است. مقایسه بین سه الگوریتم بکار گرفته شده بیان‌کننده میزان ناپایداری مسئله وارون و همچنین عدم برازش مطلوب بین منحنی‌های بی‌هنجاری نشان داده شده است. همچنین در الگوریتم منطقه فعال با افزایش نوفه با توجه شکل ۷-۵ وارون‌سازی به خوبی نشان نداده است.

باتوجه به نتایج ارائه شده در این بخش می‌توان الگوریتم‌های موجود در روش کوادرتیک را به شرح زیر تفسیر کرد. الگوریتم منطقه فعال در مورد داده‌ها با نوفه کمتر وارون‌سازی را نسبت به دو الگوریتم دیگر بهتر انجام داده است هرچند که مدت زمان اجرای وارون‌سازی بیشتری دارد. از طرفی با افزایش میزان نوفه و در نتیجه افزایش ناپایداری وارون‌سازی با این الگوریتم با مشکل مواجه خواهد شد. در مورد الگوریتم منطقه اعتماد و الگوریتم نقطه داخلی باید بیان کرد که وارون‌سازی توسط این دو الگوریتم به یک میزان بوده و تنها تفاوت موجود در مدت زمان اجرای وارون‌سازی می‌باشد که این مسئله با مقایسه دو جدول ۲-۵ و جدول ۴-۵ قابل بررسی خواهد بود.

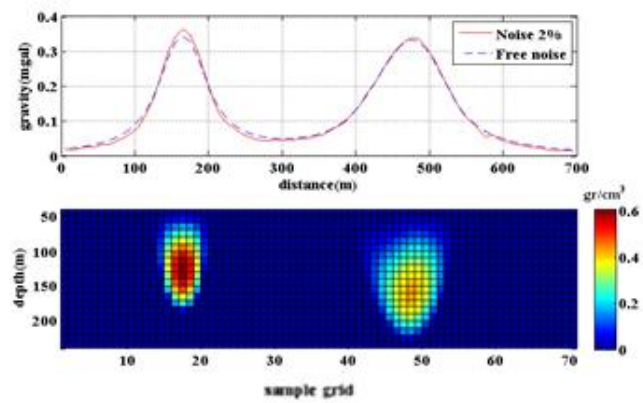
همچنین با مقایسه بین شکل ۸-۵ (الف) و شکل ۹-۵ (الف) مشاهده شد که با افزایش میزان نوفه الگوریتم نقطه داخلی پایداری خوبی از خود نشان داده است که این پایداری از منحنی حاصل از مدل‌های مصنوعی قابل شناسایی است. همچنین با مقایسه بین شکل ۷-۵ (ب)، شکل ۸-۵ (ب) و شکل ۹-۵ (ب) مشاهده می‌شود که با افزایش درصد نوفه، منحنی آنومالی حاصل از مدل‌های مصنوعی با بی‌هنجاری مواجه شده‌اند. اما وارون‌سازی به خوبی انجام گرفته است. در شکل ۷-۵ (ج)، شکل ۸-۵ (ج) و شکل ۹-۵ (ج) الگوریتم منطقه فعال نشان داده شده است. علت پایداری بسیار خوب این الگوریتم‌ها را می‌توان در انتخاب پارامتر منظم‌سازی مناسب دانست.



(الف)

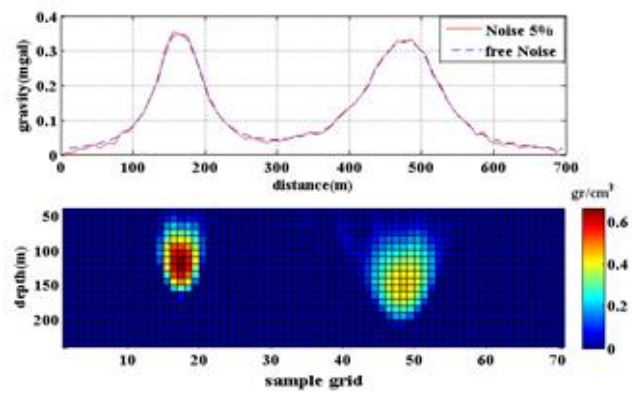


(ب)

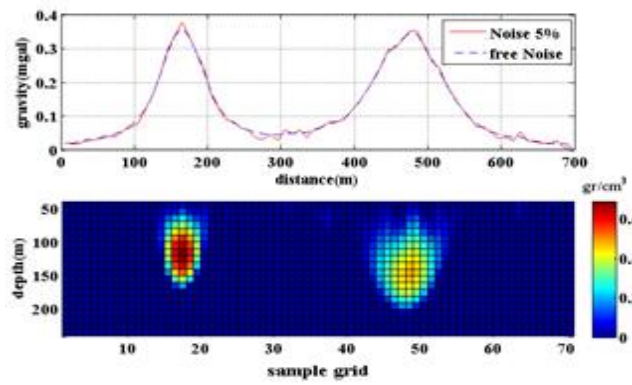


(ج)

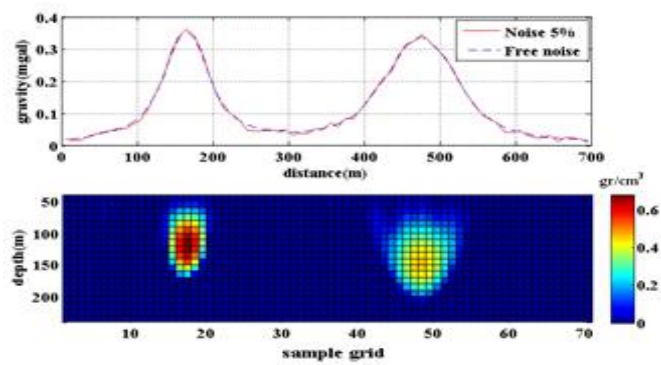
شکل ۵-۷: نمایش سه الگوریتم روش کوادرنیک با نوفه ۲ درصد. الف) الگوریتم نقطه داخلی ب) منطقه اعتماد ج) مجموعه فعال



(الف)

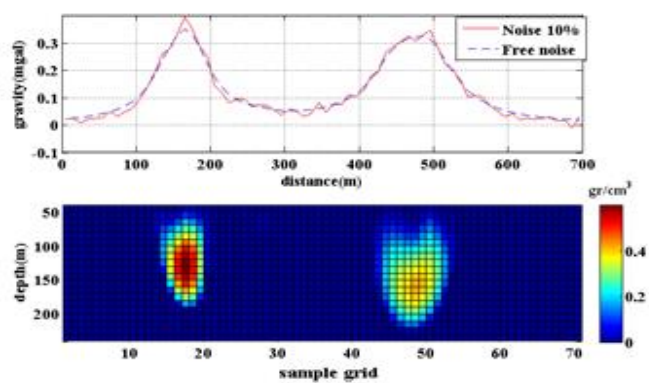


(ب)

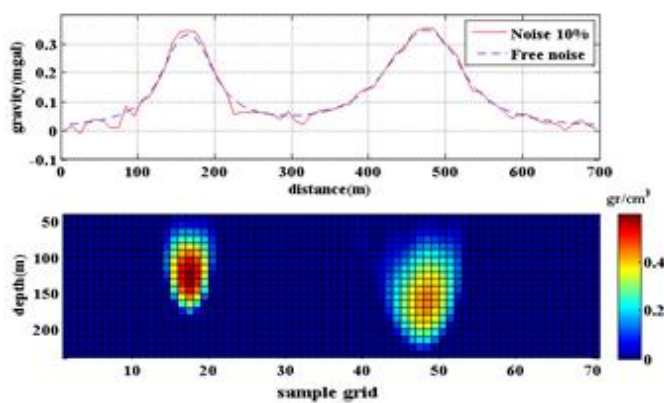


(ج)

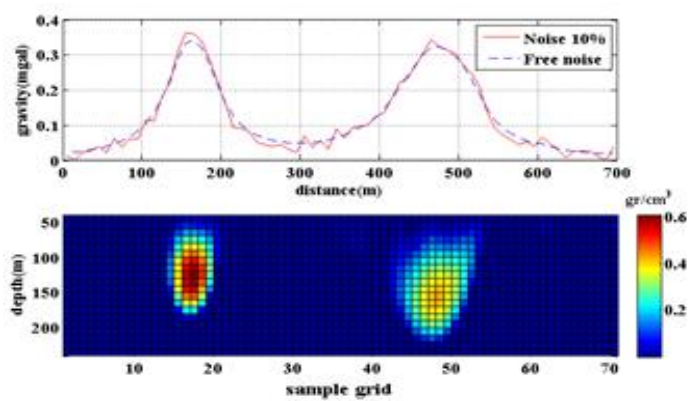
شکل ۵-۸: نمایش سه الگوریتم روش کوادریک با نوفه ۵ درصد. الف) نقطه داخلی ب) منطقه اعتماد ج) منطقه فعال



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۵-۹: نمایش سه الگوریتم روش کوادریک با نوفه ۱۰ درصد. (الف) نقطه داخلی (ب) منطقه اعتماد (ج) منطقه فعال

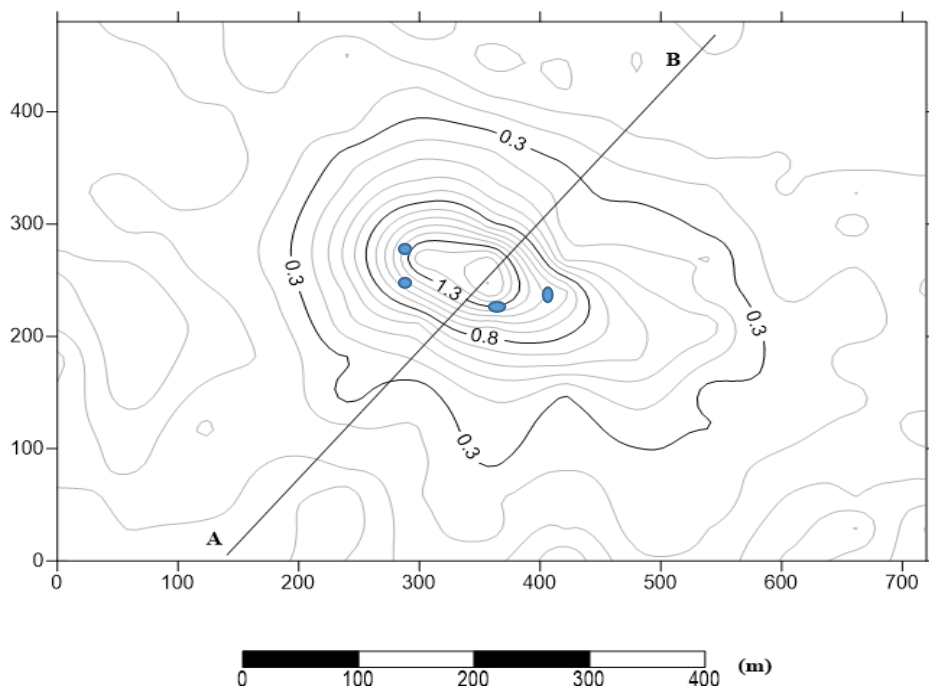
۵-۵ وارون سازی داده‌های واقعی

پس از اعمال روش کوادرتیک به همراه سه الگوریتم موجود بر روی مدل های مصنوعی انتخاب شده حال این الگوریتم ها را بر روی داده‌های واقعی انجام داده و سپس نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

۵-۵-۱ وارون سازی داده‌های گرانی معدن مسیو سولفید موبرون

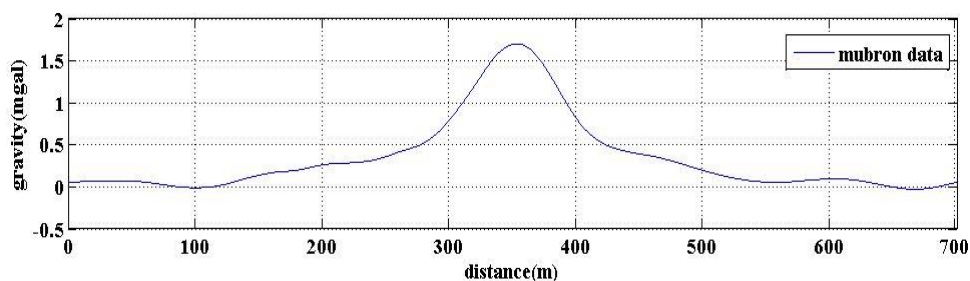
توده مسیو سولفید موبرون در نزدیکی شهر نوراندا در ایالت کبک کانادا واقع شده است. سنگ میزبان این توده معدنی از نوع سنگ‌های آتشفشانی پرکامبرین میانی می‌باشد. کانی سازی درون هاله سولفیدی متشکل از کانی پیریت به صورت توده‌ای و پراکنده به همراه مواد معدنی سولفیدی فلزات پایه با مقادیر کمی طلا و نقره می‌باشد. در این منطقه اندازه‌گیری مقدار گرانی روی نقاط ایستگاهی به فاصله ۳۰ متری بر روی پروفیل‌هایی به فواصل ۶۰ متری انجام شده است [۲۸].

شکل ۵-۱۰ نقشه باقیمانده بوگه معدن مس موبرون واقع در ایالت کبک کانادا را نشان می‌دهد پاره خط AB پروفیل انتخابی جهت اعمال و بررسی الگوریتم‌های روش کوادرتیک می‌باشد. علت انتخاب این پروفیل وجود حفاری‌هایی می‌باشد که در نزدیکی و وسط معدن مس موبرون صورت گرفته است به جهت اینکه نتایج داده‌های بدست آمده از این پروفیل را با داده‌های حفاری بتوان مورد مقایسه قرار داد. داده‌ها از شبکه‌ای به مختصات 30×60 در جهت طول و عرض اندازه‌گیری شده‌اند. در شکل ۵-۱۲ چند حفاری در نزدیکی و وسط معدن مس موبرون واقع در کانادا نشان داده است.



شکل ۵-۱۰: نقشه باقیمانده بوگه معدن مس موبرون واقع در منطقه کبک-کانادا [۲۴].

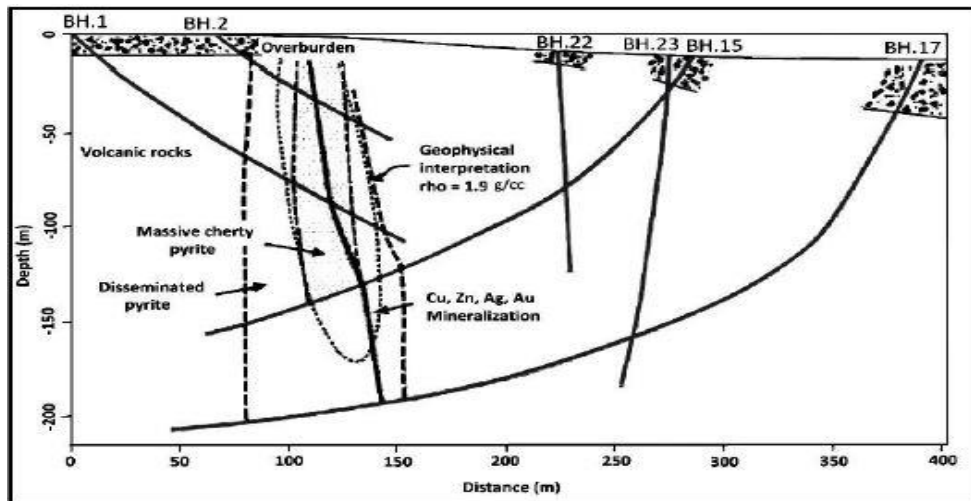
شکل ۵-۱۱ داده‌های گرانی بدست آمده معدن مس موبرون را بر روی پروفیل AB را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۱۱: منحنی بی‌هنجاری ناشی از داده‌های گرانی معدن مس موبرون بر روی پروفیل AB

جهت وارون سازی داده‌های واقعی معدن مس موبرون واقع در کانادا بعد از انتخاب یک پروفیل که دقیقاً از روی معدن مس موبرون می‌گذرد پس از ذخیره داده‌ها، آن‌ها را وارد نرم افزار متلب کرده و سپس سه الگوریتم روش کوادرتیک را بر روی داده‌های واقعی اعمال خواهد شد. زمانیکه از داده‌های واقعی استفاده می‌شود کمیت مهم وجود صحت در داده‌ها می‌باشد که باید قبل از بکارگیری تصحیحات مورد نیاز بر روی داده‌ها انجام شود. بنابراین ممکن است داده‌ها در هنگام استخراج داده مشکلاتی از قبیل وجود و یا عدم وجود داده نادرست بوجود بیاید به همین دلیل قبل از اعمال

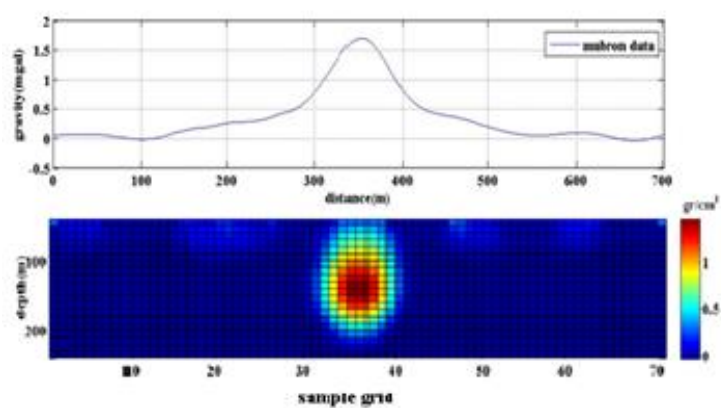
الگوریتم بر روی داده‌ها باید آن‌ها را مورد بررسی قرار داد و در صورت وجود داده نادرست آن را حذف کرد. با توجه به شکل ۵-۱۲ در نزدیکی و اطراف معدن مس موبرون چند عدد حفاری صورت گرفته است. موقعیت حفاری‌های انجام شده بر روی نقشه باقیمانده بوگه معدن مس موبرون شکل ۵-۱۰ نمایش داده شده است.



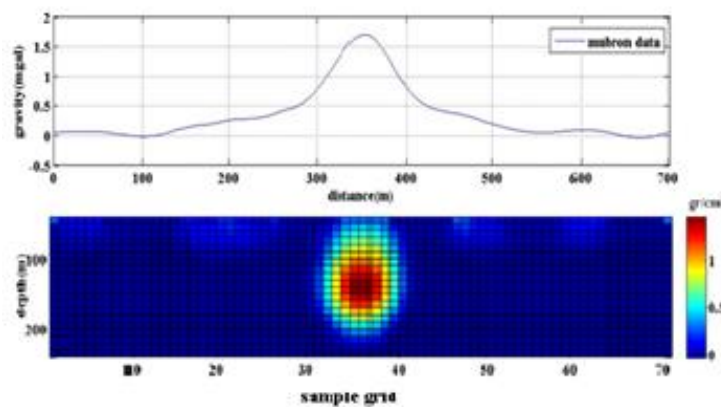
شکل ۵-۱۲: نمایش حفاری‌های انجام شده بر روی معدن مس موبرون واقع در ایالات کبک کانادا [۲۴]
 با توجه به شکل ۵-۱۲ مقطع قائمی که در مرکز واقع شده است همان توده سولفید مس معدن موبرون می‌باشد. در این راستای خط پروفیل چهار حفاری BH₁، BH₂، BH₁₅ و BH₁₇ صورت گرفته است [۲۴، ۲۹].

پروفیلی که در این پایان نامه استفاده شده بر روی شکل ۵-۱۰ نشان داده شده است. اکنون به بررسی روش بکار گرفته شده در این پایان نامه پرداخته خواهد شد و سپس نتیجه بدست آمده از پروفیل AB واقع در شکل ۵-۱۰ با اطلاعات بدست آمده از شکل ۵-۱۲ مورد مقایسه قرار خواهد گرفت. در ابتدا سه الگوریتم موجود بر روی داده‌های واقعی (داده‌های بدست آمده از معدن مس موبرون واقع در کانادا) اعمال شد و نتایج حاصل از هر یک مورد بررسی قرار گرفت. در شکل ۵-۱۳ هر سه الگوریتم بر روی داده‌های واقعی بدست آمده از روی پروفیل AB اعمال شده است. در شکل ۵-۱۱ منحنی بی‌هنجاری واقع بر روی داده‌های گرانی سنجی معدن مس موبرون را نشان داده است. در شکل ۵-۱۳ اعمال سه

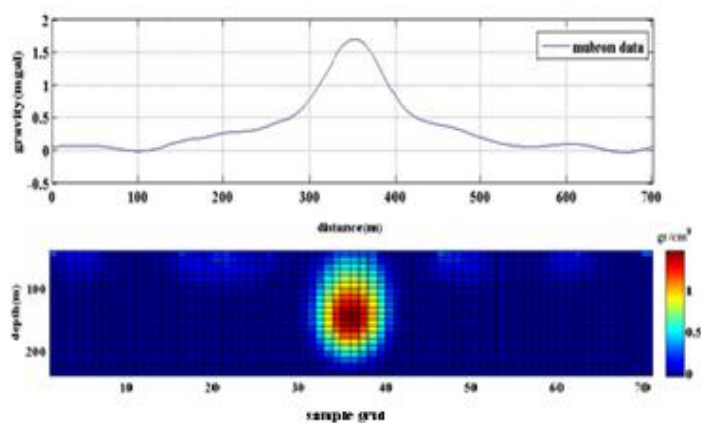
الگوریتم روش کوادرتیک بر روی داده‌های واقعی حاصل از پروفیل AB نشان داده شده است. همانطور که مشاهده شد هر سه الگوریتم به خوبی شکل معدن مس موبرون در کانادا را نمایش داده‌اند. محور x سطح مش‌بندی بر حسب تعداد نقاط نمونه برداری است که برای تبدیل به متر باید در ابعاد بلوک ضرب شود ($700 = 10 \times 70$). در شکل ۵-۱۳ محل معدن مس موبرون، همچنین عمق معدن با تقریب خوبی نشان داده شده است. همان‌طور که دیده شد این الگوریتم‌ها تغییرات اندکی نسبت به یکدیگر در وارون‌سازی داده‌های واقعی معدن مس موبرون واقع در منطقه کبک کانادا دارند. با توجه به شکل ۵-۱۳ میزان بیشینه گرویتی با توجه به منحنی بی‌هنجاری $1/7$ میلی‌گال می‌باشد از طرفی عمق توده تا پایین توده سولفیدی تقریباً در ۱۷۰ تا ۱۸۰ متری واقع شده است و عمق تا بالای آن کمتر از ۲۰ متر نشان داده می‌شود که با نتایج بدست آمده از شکل ۵-۱۲ همخوانی خوبی داشته است. بنابراین می‌توان وارون‌سازی به روش کوادرتیک را با توجه به نتایج بدست آمده مفید دانست و هر سه الگوریتم این روش را در وارون‌سازی دو بعدی داده‌های گرانی‌سنجی بکار برد. همچنین این داده‌ها در مقالات دیگر از جمله [۲۹، ۲۴، ۲۸] نیز استفاده شده است که تمام این مقالات نتایج حاصل در مورد عمق معدن مس موبرون را تایید می‌کنند. مدت زمان اجرای وارون‌سازی نیز برای هر سه الگوریتم موجود در روش کوادرتیک در نظر گرفته شده است. در این پایان‌نامه هر سه الگوریتم روش کوادرتیک از نظر مدت زمان اجرای وارون‌سازی مقایسه شد. نتایج مربوط به زمان اجرای وارون‌سازی توسط سه الگوریتم منطقه اعتماد، نقطه داخلی و مجموعه فعال در جدول ۵-۵ نشان داده شده است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۵-۱۳: نمایش سه الگوریتم روش کوادرتیک بر روی داده‌های واقعی معدن مس موبرون واقع در ایالت کبک کانادا.
 الف) اعمال الگوریتم منطقه اعتماد (ب) اعمال الگوریتم نقطه داخلی (ج) اعمال الگوریتم منطقه فعال

جدول ۵-۵ زمان اجرای وارون‌سازی حاصل از سه الگوریتم موجود در روش کوادرتیک را برای داده‌های واقعی توده مسیو سولفید معدن موبرون واقع در ایالت کبک کانادا را نشان می‌دهد.

جدول ۵-۵: نمایش زمان اجراء سه الگوریتم روش کوادرتیک برای داده‌های معدن مس موبرون در کانادا

نوع الگوریتم	منطقه اعتماد	نقطه داخلی	منطقه فعال
زمان اجراء (s)	۲۰	۲۶	۳۵

با توجه به جدول ۵-۵ مشاهده شد که الگوریتم منطقه فعال بیشترین و الگوریتم منطقه اعتماد کمترین زمان اجرای برنامه وارون‌سازی را به خود اختصاص داده‌اند. بنابراین می‌توان برای داده‌های واقعی بدست آمده حاصل از معدن مس موبرون واقع در ایالت کبک کانادا از بین سه الگوریتم موجود در روش کوادرتیک، الگوریتم منطقه اعتماد از نظر زمان اجرای وارون‌سازی و همچنین وارون‌سازی دو بعدی داده‌های گرانی معدن مس موبرون مناسب‌تر است. با توجه به نتایج ارائه شده هر سه الگوریتم توانسته‌اند به خوبی وارون‌سازی را انجام دهند. بنابراین می‌توان هر یک از الگوریتم‌های روش کوادرتیک را به طور جداگانه در مسائل وارون مورد استفاده قرار داد.

۵-۶ بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج بدست آمده مشاهده شد بکارگیری داده‌های معدن مس موبرون واقع در ایالت کبک کانادا و همچنین با توجه به شکل ۵-۱۲، روش بکار گرفته شده در این پایان‌نامه بخوبی توانسته است عمق توده مورد نظر را نشان دهد. با توجه به اینکه از این داده‌ها در مقاله [۲۴،۲۸،۲۹،۳۰] مورد استفاده قرار گرفته است. نتیجه بدست آمده برای معدن مس موبرون واقع در کانادا بدین صورت بوده که عمق تا بالای معدن مس موبرون را کمتر از ۲۰ متر و عمق تا پایین توده مس سولفید را بیشتر از ۲۰۰ متر تخمین زده‌اند. که این نتیجه با توجه به حفاری‌های انجام شده بین ۱۷ تا ۱۸۷ متر بیان شده است. بنابراین روش بکار گرفته شده در این پایان‌نامه بخوبی این مقدار عمق را تایید می‌کند. منبع اصلی داده‌های گرفته شده در این پایان‌نامه از مقاله [۲۸] بوده است.

فصل ششم

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این فصل به بیان نتایج بدست آمده در بکارگیری روش کوادرتیک به همراه هر سه الگوریتم موجود در آن جهت مدل سازی دو بعدی داده های گرانی سنجی بدست آمده از معدن مسیو سولفید در منطقه کبک کانادا پرداخته خواهد شد.

۶-۲ نتیجه گیری

هدف از این پایان نامه استفاده از روش کوادرتیک در مدل سازی دو بعدی داده های گرانی سنجی معدن مس موبرون واقع در ایالت کبک کانادا و همچنین مقایسه سه الگوریتم منطقه اعتماد، نقطه داخلی و منطقه فعال از نظر مدت زمان اجرای وارون سازی و همچنین پایداری درمقابل نوفه می باشد. با توجه به نتایج بدست آمده مشاهده شد که الگوریتم منطقه فعال بیشترین مدت زمان اجرای وارون سازی را نسبت به سایر الگوریتم ها به خود اختصاص داده است. در نتیجه افزایش تعداد پارامتر و همچنین اضافه شدن نوفه به داده ها این الگوریتم زمان بیشتری جهت پایداری کردن مسئله وارون نیاز دارد. در نتیجه مدت زمان اجرای وارون سازی افزایش خواهد یافت. الگوریتم منطقه فعال در حضور نوفه به میزان کم وارون سازی را به خوبی انجام داده و با افزایش تعداد پارامترها وارون سازی با مشکل مواجه خواهد شد. همچنین با توجه به نتایج گرفته شده الگوریتم منطقه اعتماد کمترین زمان را به خود اختصاص داده است. همچنین نشان داده شد که در الگوریتم منطقه اعتماد با افزایش تعداد پارامترها، وارون سازی به خوبی انجام خواهد گرفت. از طرفی با توجه به اینکه الگوریتم منطقه اعتماد در بین سایر الگوریتم های موجود زمان کمتری را صرف وارون سازی نموده است، این الگوریتم را می توان به عنوان الگوریتم مناسب انتخاب کرد. در مقابل ناپایداری نیز با توجه به این که انتخاب پارامتر منظم سازی مناسب توسط روش اعتبارسنجی متقاطع تعمیم یافته (GCV) صورت گرفته است. برای درصد نوفه کم الگوریتم منطقه فعال را با توجه به برآزش مناسب که بین منحنی های بی هنجاری وجود دارد، به عنوان الگوریتم مناسب می توان انتخاب کرد.

۳-۶ پیشنهادات

۱. پیشنهاد می‌شود روش کوادرتیک را به همراه هر سه الگوریتم موجود در این روش بر روی داده‌های سه بعدی گرانی‌سنجی نیز اعمال شود.
۲. روش کوادرتیک را بر روی داده‌هایی از قبیل مغناطیس‌سنجی، الکترو مغناطیس هوابرد و... نیز استفاده شود.
۳. در این پایان‌نامه تعیین پارامتر منظم‌سازی از روش اعتبار سنجی متقاطع تعمیم یافته (GCV) صورت گرفته است. تعیین این پارامتر از روش‌های دیگر مانند روش منحنی L_1 و روش اصل اختلاف نیز استفاده شود.

1. Dobrin, M.B. and C.H. Savit, Introduction to geophysical prospecting, 1988.
2. Telford, W.M., L.P. Geldart, and R.E. Sheriff, Applied geophysics. Vol. 1. 1990: Cambridge university press.
3. Blakely, R.J., Potential theory in gravity and magnetic applications. 1996: Cambridge University Press.
4. Blake, R., Potential Theory in Gravity & Magnetic Application. 1995, Cambridge University Press.
5. Afshar, A., 2D modeling of magnetic anomaly through feed forward neural network. Iranian Journal of Geophysics, 2010. 4(1): p.
6. Vatankhah, S., E. Ardestani, and M. Ashtari Jafari, A method for 2-dimensional inversion of gravity data .geophysic 2014, p. 33-23
۷. علی نجاتی کلاته و همکاران، مدل سازی وارون دوبعدی داده های گرانی. فیزیک زمین و فضا، ۲۰۰۵. ۳۱(۱).
8. Fisher, N.J. and L.E. Howard, Gravity interpretation with the aid of quadratic programming. Geophysics, 1980. 45(3): p. 419-403.
9. Gallardo-Delgado, L.A., M.A. Pérez-Flores, and E. Gómez-Treviño, A versatile algorithm for joint 3D inversion of gravity and magnetic data. Geophysics, 2003. 68(3): p. 949-959.
10. Aster, R.C., B. Borchers, and C.H. Thurber, Parameter estimation and inverse problems. Vol. 90. 2011: Academic Press.
11. Sambridge, M., W. Menke 1989.. International Geophysics Series Volume 45 . Geological Magazine, 1990. 127(04): p. 376-375.
12. Menke, W., Geophysical data analysis: Discrete inverse theory. Vol. 45. 2012: Academic press.
13. Menke, W., Geophysical data analysis: Discrete inverse theory Academic Press. San Diego California, 1998.
14. Meju, M.A., Geophysical data analysis: Understanding inverse problem theory and practice. Vol. 6. 1994: Society of Exploration Geophysicists.
15. Hansen, P.C., Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion. Vol. 4. 1998: Siam .

16. Wahba, G., Spline models for observational data. Vol. 59. 1990: Siam.
17. MacCarthy, J., B. Borchers, and R. Aster, Efficient stochastic estimation of the model resolution matrix diagonal and generalized cross-validation for large geophysical inverse problems. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2011. 116 (B10).
18. Li, Y. and D.W. Oldenburg, 3-D inversion of induced polarization data. *Geophysics*, 2000. 65(6): p. 1945-1931.
19. Li, Y. and D.W. Oldenburg, 3-D inversion of gravity data. *Geophysics*, 1998. 63(1): p. 119-109.
20. Johansen, T.A., On Tikhonov regularization, bias and variance in nonlinear system identification. *Automatica*, 1997. 33(3): p.446-441.
21. Li, Y. and D.W. Oldenburg, 3-D inversion of magnetic data. *Geophysics*, 1996. 61(2): p. 408-394.
22. Gould, N. and P.L. Toint, Preprocessing for quadratic programming. *Mathematical Programming*, 2004. 100(1): p. 132-95.
23. Byrd, R.H., M.E. Hribar, and J. Nocedal, An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 1999. 9(4): p. 900-877.
24. Grant, F. S., & West, G. F. 1965. "Interpretation theory in applied geophysics", McGraw-Hill.
25. Wright, S. and J. Nocedal, Numerical optimization. Springer Science, 1999. 35: p. 68-67.
26. Nocedal, J. and S. Wright, Numerical optimization. 2006: Springer Science & Business Media.
27. Roese-Koerner, L., I. Krasbutter, A constrained quadratic programming technique for data-adaptive design of decorrelation filters. in VII Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy. 2012.
28. Rezaie, M., A. Moradzadeh, and A. Nejati Kalate, 3D gravity data-space inversion with sparseness and bound constraints. *Journal of Mining and Environment*, 2015.
29. Kahoo, A.R., A.N. Kalateh, and F. Salajegheh, Interpretation of gravity data using 2-D continuous wavelet transformation and 3-D inverse modeling. *Journal of Applied Geophysics*, 2015. 121: p. 62-54.
30. Aghajani, H., Moradzadeh, A. and Zeng, H. (2009). Normalized full gradient of

gravity anomaly method and its application to the Mobrun sulfide body, Canada. World Applied Sciences Journal. 6 (3): 393-400.

31. Roy, L., B. Agarwal, and R. Shaw, A new concept in Euler deconvolution of isolated gravity anomalies. Geophysical Prospecting, 2000. 48(3): p. 559-575.

Abstract

Gravity data inversion is one of the most important steps in the interpretation of these data. The aim is to estimate the unknown model subsurface density distribution through the data measured at the earth's surface. The main problem in the inversion of the gravity data, geophysical data inversion is caused by lack of uniqueness of solutions. Linear inversion gravity data problem is determined low and ill posed. Determine the optimal regularization parameter inversion of gravity data is of great importance. One of these methods, is the method of generalized cross validation (GCV). In this thesis quadratic programming method (quadratic method), an optimization method is used. This method has three algorithms, is the trust region, the interior point and active set. The three inversion algorithms duration of implementation as well as the stability of each of these algorithms will be reviewed for noise. In order to validate the proposed method, the gravity data derived from synthetic and were used gravity data mobrun sulfide copper mine located in Quebec, Canada.

Key words: Modeling, quadratic method, gravity data, mobrun, Canada



Shahrood University of Technology

Faculty of Mining, Petroleum and Geophysics Engineering

M.Sc. Thesis in Gravimetry

**2D inversion of Gravity data using quadratic method in order to
provide an improved model**

By: Morteza Alizadeh

Supervisors:

Dr Ali Nejati Kalateh

Dr Amin Roshandel Kahoo

Advisor:

Dr Mohammad Rezaei

January 2017