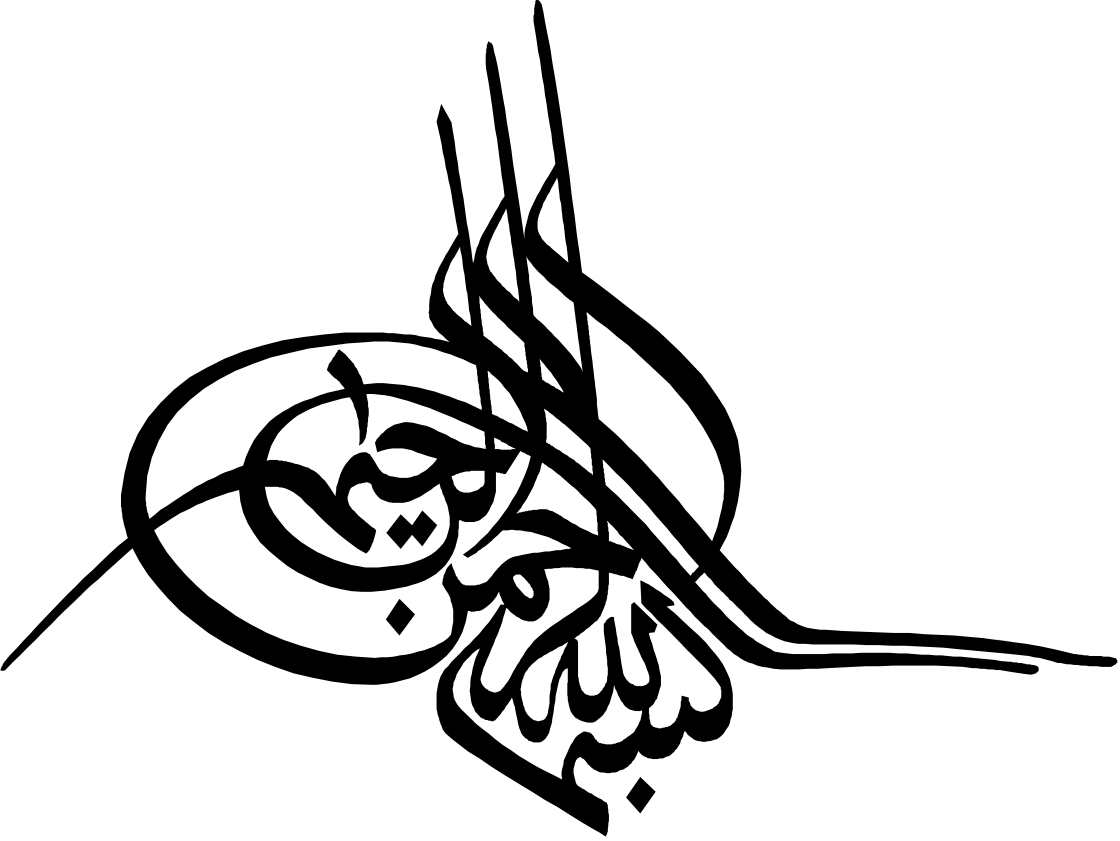






دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک

گروه استخراج معدن

مدل سازی نحوه رشد و اتصال ترک ها در محیط های سنگی با روش عددی بدون

مش گالرکین و اعتبارسنجی آن با مطالعات آزمایشگاهی

دانشجو: حسین میرزائی نصیرآباد

اساتید راهنما:

رضا کاکایی

بهروز حسنی

استاد مشاور:

سید محمد اسماعیل جلالی

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

تیر ۱۳۸۸

تقدیم به:

پدر بزرگوارم، مادر مهربانم

و خواهران عزیزم

تشکر و قدردانی

بدین وسیله از زحمات تمامی عزیزانی که همواره حامی و پشتیبان اینجانب در راستای تکمیل علم و دانش بوده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم. در ابتدا از زحمات آقایان دکتر کاکایی و دکتر حسنی که هدایت و راهنمایی این رساله را بر عهده داشتند، و همچنین از زحمات آقای دکتر جلالی که همواره از راهنمایی‌های ایشان به عنوان استاد مشاور بهره‌مند بودم، تشکر می‌کنم.

از آقایان دکتر عطایی مدیر محترم گروه استخراج، دکتر دولتی رئیس دانشکده معدن، دکتر سرشکی عضو هیات علمی دانشکده معدن دانشگاه شاهرود که همواره حامی اینجانب بودند، قدردانی می‌کنم. از آقایان دکتر نادر فردین، دکتر بهنام فردوسی، دکتر مجید میرزایی، دکتر سهیل محمدی و دکتر احمد رمضان‌زاده به خاطر راهنمایی‌های گرانبه‌داشتان سپاسگزارم. از آقایان دکتر شریعتی، دکتر قزوینیان و مهندس سیف‌الدین موسی‌زاده که شرایط استفاده از آزمایشگاه دانشگاه‌های شاهرود (دانشکده مکانیک)، تربیت مدرس و ارومیه را برای اینجانب فراهم کردند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

از آقای مهندس نادر زیاری که اینجانب را چندین ماه در تهیه نمونه‌های آزمایشگاهی یاری کردند، و همچنین از آقایان مهندس احسانپور کارشناس کارگاه مکانیک و مهندس کلانتری مسئول آزمایشگاه خواص بتن دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود، مهندس شیخانی کارشناس آزمایشگاه مکانیک سنگ دانشگاه تربیت مدرس و مهندس ساعی کارشناس آزمایشگاه مکانیک سنگ دانشکده فنی دانشگاه ارومیه به خاطر همکاری‌های ارزشمندشان قدردانی می‌کنم. از کارشناسان دانشکده معدن آقای شاه‌حسینی و آقای کبیریان به خاطر تلاش‌های همیشگی‌شان تشکر می‌کنم.

در نهایت از حمایت و دلگرمی دوستان صمیمی آقایان احمد آریافر، مهرداد سلیمانی، حمید آقاجانی، خداکرم غریبی، محمود نوروزی، نسیم آل علی، محمد بیطرفان، بهشاد جدیری، مسعود زارع، رضا مکائیل و ... کمال تشکر را دارم.

اینجانب حسین میرزائی نصیرآباد تایید می‌نمایم که مطالب مندرج در این رساله، نتیجه تحقیقات خودم بوده و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن ذکر شده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این رساله، متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد.

تیر ۱۳۸۸

چکیده

امروزه مکانیک شکست سنگ در حوزه‌های مختلف از قبیل تحلیل پایداری سازه‌های زیرزمینی و سطحی، شکست هیدرولیکی، تعیین تنش‌های برجا، استحصال انرژی زمین گرمایی و مدل‌سازی شکست وابسته به زمان سنگ کاربرد فراوانی دارد. در مکانیک شکست سنگ برای مطالعه نحوه رشد و اتصال ترک‌ها از روش‌های مختلف تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی استفاده می‌شود. در مسایل با هندسه و بارگذاری پیچیده عمدتاً از روش‌های عددی نظیر المان محدود و المان مرزی استفاده می‌گردد. این روش‌ها در تحلیل مسائل مکانیک شکست با مشکلاتی درگیرند که به ماهیت مش‌بندی آن‌ها مربوط می‌شود. برای غلبه بر این مشکلات، روش‌های بدون مش متعددی نظیر روش بدون مش گالرکین ابداع شده که در زمینه‌های مختلف مهندسی کاربرد موفقیت آمیزی داشته است. روش مذکور برای مدل‌سازی رشد و اتصال شکستگی‌های سنگ استفاده نشده است. بنابراین در این تحقیق با استفاده از روش عددی بدون مش گالرکین شکستگی‌های محیط‌های سنگی مدل‌سازی شده و مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها بررسی شده است. در کاربرد روش عددی بدون مش گالرکین، از توابع پایه خطی و تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم برای تشکیل توابع شکل، از ضرایب لاگرانژ برای اعمال شرایط مرزی مساله، از شبکه انتگرال‌گیری و تربیع گوس برای محاسبه انتگرال‌ها و از معیار رویت‌پذیری برای مدل‌سازی ترک‌ها استفاده شده است.

با در نظر گرفتن مثال‌های مختلف با هندسه متفاوت نمونه و ترک‌ها تحت انواع بارگذاری‌ها (کششی، فشاری، برشی) بردار جابجایی و تانسور کرنش و تنش در دامنه محیط ترک‌دار تعیین و با روش‌های مختلف ضرایب تمرکز تنش محاسبه شده است. مقایسه نتایج روش بدون مش گالرکین با روش المان محدود و روش‌های تحلیلی حاکی از این است که نتایج این روش از دقت خوبی برخوردار است.

دو معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش موضعی ارزیابی شده و معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش بعنوان معیار مناسب برای مطالعه رشد ترک انتخاب شده است. سپس مکانیزم رشد ترک در نمونه‌های مکعبی و دیسکی حاوی یک ترک شیب‌دار و مکانیزم رشد و اتصال

ترک‌ها در نمونه‌های مکعبی حاوی دو ترک شیبدار به ازای مقادیر مختلف طول و شیب خط واصل دو ترک، تحت بار فشاری مطالعه شده است. در تمامی مراحل مدل‌سازی با روش بدون مش گالرکین، الگوریتم‌های لازم تهیه و برنامه‌های کامپیوتری آنها در محیط MATLAB کدنویسی شده است.

طول خط واصل دو ترک در الگوی کلی انشعاب و اتصال ترک‌ها تاثیری ندارد و فقط با افزایش آن میزان تنش لازم برای انشعاب ترک‌ها افزایش می‌یابد. شیب خط واصل دو ترک در انتشار و اتصال ترک‌ها تاثیر بسزایی داشته و الگوی انتشار و اتصال ترک‌ها را کنترل می‌کند. برای شیب‌های مختلف چهار نوع اتصال: برشی، برشی - کششی، کششی - کششی و کششی مشاهده شد.

برای اعتبارسنجی نتایج عددی روش بدون مش گالرکین مطالعات آزمایشگاهی متعددی صورت گرفته است. بدین منظور مصالح گچی بعنوان مواد ترد شبه سنگی انتخاب و با استفاده از قالب و صفحات فولادی نازک، نمونه‌های ترک‌دار از جنس گچ تهیه گردیده است. با آزمایش‌های مختلف خواص مکانیکی مصالح گچی از قبیل: مقاومت فشاری تک محوری، مقاومت کششی، ضریب ارتجاعی، نسبت پواسون، چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی تعیین شده‌اند. چهار سری نمونه: نمونه‌های مکعبی حاوی یک ترک شیب‌دار، نمونه‌های دیسکی حاوی یک ترک شیب‌دار، نمونه‌های مکعبی حاوی دو ترک شیب‌دار با طول متغیر خط واصل و نمونه‌های مکعبی حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب متغیر خط واصل تهیه شده و تحت بار فشاری قرار داده شده‌اند. مقایسه کمی و کیفی نتایج عددی و آزمایشگاهی بیانگر این است که نتایج روش بدون مش گالرکین از دقت مطلوبی برخوردارند و روش مذکور در تحلیل مسایل مکانیک شکست سنگ از قابلیت بالایی برخوردار است.

کلمات کلیدی: مکانیک شکست سنگ، روش بدون مش گالرکین، ضرایب تمرکز تنش، معیار رشد ترک، اتصال ترک‌ها، مطالعه آزمایشگاهی رشد ترک،

عنوان مقالات مستخرج از رساله دکتری

مقالات ژورنالی:

- Hossein Mirzaei, Reza Kakaie, Behrooz Hassani, Seyed Mohammad Esmail Jalali, Numerical Evaluation of Stress Intensity Factors in Jointed rock medium by the M-Integral Method, Journal of Geology and Mining Research (JGMR), Published.
- حسین میرزائی نصیرآباد، رضا کاکایی، بهروز حسنی، سید محمد اسماعیل جلالی، ارزیابی معیارهای شکست مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و مولفه‌های تنش برای پیش‌بینی جهت انتشار ترک در محیط‌های سنگی، مجله علمی پژوهشی مهندسی معدن، پذیرفته شده به شرط تصحیح.
- Hossein Mirzaei, Reza Kakaie, Behrooz Hassani, Seyed Mohammad Esmail Jalali, Numerical Modelling of Fracture Propagation in Jointed Rock Medium Using Element Free Galerkin Method, Int. J. World Applied Sciences Journal, Accepted with revision.

مقالات چاپ شده در کنفرانس‌های بین‌المللی:

- Mirzaei Nasirabad Hossein; Reza Kakaie; Behroz Hassani, 2008. Numerical Determination of Tension Mode Stress Intensity Factor in Jointed Rock Medium Using Stress Extrapolation Method, 8 - th International Scientific Conference on Modern Management of Mine Producing, Geology and Environmental Protection, 16 - 20 June 2008, Bulgaria.
- Mirzaei Nasirabad Hossein; Reza Kakaie; Behroz Hassani, 2008. Determination of Stress Intensity Factors for Jointed Brittle Rock Medium Using Element Free Galerkin Method, 5th Asian Rock Mechanics Symposium (ARMS5), 24-26 November 2008 Tehran, Iran.

مقالات چاپ شده در کنفرانس‌های ملی:

- میرزائی نصیرآباد حسین، کاکائی رضا؛ بهروز حسنی، تعیین ضریب تمرکز تنش مود کششی شکستگی‌های سنگ با استفاده از روش بدون مش گالرکین و برون‌یابی جابجائی، دومین کنفرانس مهندسی معدن ایران، تهران- آبان ۱۳۸۷.
- میرزائی نصیرآباد حسین، کاکائی رضا؛ بهروز حسنی، مکانیسم انتشار و اتصال ترک‌ها در محیط‌های سنگی ترد تحت اثر بارهای فشاری، پنجمین کنفرانس زمین‌شناسی مهندسی و محیط زیست ایران، تهران- اسفند ۱۳۸۶.

- میرزائی نصیرآباد حسین، کاکائی رضا؛ بهروز حسنی، نادر فردین، تعیین میدان تنش‌ها و جابجائی‌ها در محیط اطراف سازه‌های زیرزمینی با استفاده از روش بدون مش گالرکین، سومین کنفرانس مکانیک سنگ ایران، تهران- مهرماه ۱۳۸۶.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل ۱ - مقدمه
۱	۱ - ۱ - کلیات
۴	۲ - ۱ - ضرورت انجام پایان نامه
۵	۳ - ۱ - هدف از انجام پایان نامه
۶	۴ - ۱ - فرضیات پایان نامه
۷	۵ - ۱ - سازماندهی پایان نامه
۹	فصل ۲ - مبانی مکانیک شکست
۹	۱ - ۲ - مقدمه
۹	۲ - ۲ - حالات مختلف رشد ترک
۱۰	۳ - ۲ - میدان تنش و تغییر مکان در نوک ترک
۱۲	۴ - ۲ - ضریب تمرکز تنش
۱۴	۵ - ۲ - پارامترهای مکانیک شکست
۱۴	۱ - ۵ - ۲ - ضرایب تمرکز تنش
۱۵	۲ - ۵ - ۲ - چقرمگی شکست
۱۵	۱ - ۵ - ۲ - چقرمگی شکست مود کششی (مود I)
۱۶	۲ - ۵ - ۲ - چقرمگی شکست مود برشی (مود II)
۱۷	۶ - ۲ - محاسبه ضرایب تمرکز تنش
۱۷	۱ - ۶ - ۲ - روش برون یابی تنش
۱۸	۲ - ۶ - ۲ - روش برون یابی جابجائی
۲۰	۳ - ۶ - ۲ - روش انتگرال J
۲۴	۱ - ۳ - ۶ - ۲ - رابطه ضرایب تمرکز تنش با مولفه های انتگرال J
۲۵	۱ - ۳ - ۶ - ۲ - روش انتگرال اندرکنش M
۲۷	۲ - ۳ - ۶ - ۲ - تعیین ضرایب تمرکز تنش با روش انتگرال M
۲۸	۷ - ۲ - معیارهای رشد ترک
۲۹	۱ - ۷ - ۲ - معیار حداکثر تنش مماسی
۳۰	۲ - ۷ - ۲ - معیار حداکثر نرخ رهایش انرژی کرنشی
۳۱	۳ - ۷ - ۲ - معیار حداقل دانسیته انرژی کرنشی
۳۲	۸ - ۲ - نتیجه گیری

۳۴	فصل ۳ - مروری بر مطالعات قبلی
۳۴	۳ - ۱ - مقدمه
۳۴	۳ - ۲ - مطالعات تحلیلی
۳۵	۳ - ۲ - ۱ - مطالعه راثو و همکارانش
۳۷	۳ - ۲ - ۲ - مطالعات گلشنی
۴۲	۳ - ۳ - مطالعات عددی
۴۳	۳ - ۳ - ۱ - مطالعات شن
۴۴	۳ - ۳ - ۱ - ۱ - معیار شکست شن
۴۵	۳ - ۳ - ۱ - ۲ - نتایج حاصل از مدل عددی شن
۴۸	۳ - ۳ - ۲ - مطالعات بوبت و انشتین
۵۰	۳ - ۳ - ۱ - ۲ - نتایج حاصل از مطالعات عددی بوبت و انشتین
۵۵	۳ - ۳ - ۳ - مطالعات تانگ و همکارانش
۵۶	۳ - ۳ - ۱ - ۳ - نتایج حاصل از مطالعات عددی تانگ
۵۸	۳ - ۳ - ۴ - مطالعات کمنی
۶۰	۳ - ۴ - مطالعات آزمایشگاهی
۶۰	۳ - ۴ - ۱ - مطالعات شن
۶۴	۳ - ۴ - ۲ - مطالعات وُنگ و همکارانش
۷۱	۳ - ۴ - ۳ - مطالعات ناصر الشایه
۷۵	۳ - ۴ - ۴ - مطالعات ساگونگ و بوبت
۷۸	۳ - ۵ - نتیجه‌گیری
۸۰	فصل ۴ - روش عددی بدون مش گالرکین
۸۰	۴ - ۱ - مقدمه
۸۱	۴ - ۲ - روش المان محدود
۸۲	۴ - ۳ - مقایسه روش‌های بدون مش با روش المان محدود
۸۴	۴ - ۴ - مروری بر روش‌های بدون مش
۸۶	۴ - ۴ - ۱ - تابع تقریب
۸۶	۴ - ۴ - ۱ - ۱ - تابع تقریب روش هیدرودینامیک ذره‌ای نرم شده
۸۷	۴ - ۴ - ۱ - ۲ - تابع تقریب روش ذره‌ای باز تولید کرنل
۸۷	۴ - ۴ - ۱ - ۳ - تابع تقریب روش بدون مش گالرکین
۸۸	۴ - ۴ - ۱ - ۴ - تابع تقریب روش‌های جزءبندی واحد
۸۹	۴ - ۴ - ۲ - گسسته‌سازی معادلات تقریب

۸۹	۴ - ۴ - ۳ - روش‌های محاسبه انتگرال‌ها
۹۰	۴ - ۴ - ۴ - اعمال شرایط مرزی
۹۱	۴ - ۴ - ۵ - کاربرد روش‌های بدون مش
۹۱	۴ - ۵ - روش بدون مش گالرکین
۹۲	۴ - ۵ - ۱ - نمایش نقاط بدون مش
۹۳	۴ - ۵ - ۲ - تشکیل توابع شکل
۹۳	۴ - ۵ - ۲ - ۱ - تقریب حداقل مربعات متحرک
۹۵	۴ - ۵ - ۲ - ۲ - توابع پایه و توابع وزن
۹۷	۴ - ۵ - ۳ - شکل ضعیف گالرکین برای مسائل الاستواستاتیک
۹۸	۴ - ۵ - ۴ - اعمال شرایط مرزی
۹۹	۴ - ۵ - ۵ - تعیین میدان جابجایی، کرنش و تنش
۱۰۰	۴ - ۵ - ۶ - انتگرال‌گیری عددی
۱۰۲	۴ - ۵ - ۷ - مدلسازی ناپیوستگی‌های هندسی در روش بدون مش گالرکین
۱۰۵	۴ - ۶ - کاربردهای روش بدون مش گالرکین در زمینه مکانیک شکست
۱۰۷	۴ - ۷ - نتیجه‌گیری

فصل ۵ - مدلسازی ترک‌ها در محیط‌های سنگی با استفاده از روش عددی بدون مش گالرکین

۱۰۸	۵ - ۱ - مقدمه
۱۰۹	۵ - ۲ - پیاده سازی روش بدون مش گالرکین برای مدلسازی شکستگی‌های سنگ
۱۰۹	۵ - ۲ - ۱ - آرایش گره‌ها
۱۱۰	۵ - ۲ - ۲ - پارامترهای تشکیل تابع شکل
۱۱۱	۵ - ۲ - ۳ - انتگرال‌گیری عددی
۱۱۲	۵ - ۲ - ۴ - محاسبه ضرایب تمرکز تنش
۱۱۲	۵ - ۲ - ۴ - ۱ - محاسبه ضرایب تمرکز تنش در حالت مود کششی خالص
۱۱۴	۵ - ۲ - ۴ - ۲ - محاسبه ضرایب تمرکز تنش در حالت مود ترکیبی
۱۱۴	۵ - ۳ - تعیین میدان جابجایی و میدان تنش در محیط‌های سنگی درزه‌دار
۱۱۵	۵ - ۳ - ۱ - نمونه حاوی ترک افقی مرکزی تحت بار کششی
۱۱۸	۵ - ۳ - ۲ - نمونه حاوی ترک‌های متعدد با طول و راستای دلخواه تحت بار فشاری
۱۱۹	۵ - ۴ - محاسبه ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک‌های محیط‌های سنگی
۱۲۱	۵ - ۴ - ۱ - نمونه حاوی ترک افقی مرکزی تحت بار کششی
۱۲۴	۵ - ۴ - ۲ - نمونه حاوی ترک افقی لبه‌ای تحت بار برشی
۱۲۶	۵ - ۴ - ۳ - نمونه حاوی ترک شیب‌دار تحت بار فشاری

۱۲۹	۵ - ۵ - ارزیابی معیارهای شکست
۱۳۰	۵ - ۵ - ۱ - معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش
۱۳۱	۵ - ۵ - ۲ - معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش
۱۳۲	۵ - ۵ - ۳ - نمونه سنگی حاوی ترک لبه‌ای تحت بار برشی
۱۳۴	۵ - ۵ - ۴ - نمونه سنگی حاوی ترک شیب‌دار تحت بار فشاری
۱۳۷	۵ - ۶ - مدلسازی عددی رشد ترک در محیط سنگی ترد
۱۳۸	۵ - ۶ - ۱ - مدل‌سازی رشد ترک شیب‌دار در نمونه مستطیلی
۱۴۱	۵ - ۶ - ۱ - ۱ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک با شیب ۱۵ درجه
۱۴۱	۵ - ۶ - ۱ - ۲ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک با شیب ۳۰ درجه
۱۴۲	۵ - ۶ - ۱ - ۳ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک با شیب ۴۵ درجه
۱۴۳	۵ - ۶ - ۱ - ۴ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک با شیب ۶۰ درجه
۱۴۳	۵ - ۶ - ۱ - ۵ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک با شیب ۷۵ درجه
۱۴۵	۵ - ۶ - ۲ - مدل‌سازی رشد ترک شیب‌دار در نمونه دیسکی
۱۴۶	۵ - ۶ - ۲ - ۱ - رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک با شیب ۱۵ درجه
۱۴۶	۵ - ۶ - ۲ - ۲ - رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک با شیب ۳۰ درجه
۱۴۶	۵ - ۶ - ۲ - ۳ - رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک با شیب ۴۵ درجه
۱۴۷	۵ - ۶ - ۲ - ۴ - رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک با شیب ۶۰ درجه
۱۴۷	۵ - ۶ - ۲ - ۵ - رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک با شیب ۷۵ درجه
۱۴۹	۵ - ۷ - مدل‌سازی عددی رشد و اتصال ترک‌ها در محیط سنگی ترد
۱۵۲	۵ - ۷ - ۱ - مطالعه عددی تاثیر طول خط واصل دو ترک بر مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها
۱۵۶	۵ - ۷ - ۲ - مطالعه عددی تاثیر شیب خط واصل دو ترک بر مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها
۱۵۶	۵ - ۷ - ۲ - ۱ - مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۴۵ درجه
۱۵۷	۵ - ۷ - ۲ - ۲ - مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۶۰ درجه
۱۵۸	۵ - ۷ - ۲ - ۳ - مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۷۵ درجه
۱۵۹	۵ - ۷ - ۲ - ۴ - مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۱۰۵ درجه
۱۶۰	۵ - ۷ - ۲ - ۵ - مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۱۲۰ درجه
۱۶۳	۵ - ۸ - نتیجه‌گیری

فصل ۶ - مطالعه آزمایشگاهی انشعاب، انتشار و اتصال درزه‌ها در مواد شبه سنگی و اعتبارسنجی مطالعات عددی

۱۶۵	۶ - ۱ - مقدمه
۱۶۵	۶ - ۲ - تهیه نمونه‌های آزمایشگاهی
۱۶۶	۶ - ۲ - ۱ - ابعاد هندسی نمونه‌ها

۱۶۶	۶-۲-۲ - جنس نمونه‌های آزمایشگاهی
۱۶۷	۶-۲-۳ - قالب ساخت نمونه‌های آزمایشگاهی
۱۶۸	۶-۲-۴ - نحوه ایجاد ترک در نمونه‌ها
۱۷۰	۶-۲-۵ - آماده‌سازی نمونه‌ها برای بارگذاری
۱۷۰	۶-۳-۳ - تعیین پارامترهای مکانیکی و مقاومتی مصالح تشکیل دهنده نمونه‌ها
۱۷۱	۶-۳-۱ - تعیین مقاومت فشاری تک‌محوری، ضریب ارتجاعی و نسبت پواسون
۱۷۴	۶-۳-۲ - تعیین چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی
۱۷۶	۶-۳-۳ - تعیین مقاومت کششی مصالح
۱۷۹	۶-۴ - مطالعه آزمایشگاهی مکانیزم رشد ترک در نمونه‌های مکعبی حاوی یک ترک تحت بار فشاری
۱۸۰	۶-۴-۱ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۱۵ درجه
۱۸۱	۶-۴-۲ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۳۰ درجه
۱۸۲	۶-۴-۳ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه
۱۸۵	۶-۵ - مطالعه آزمایشگاهی مکانیزم رشد ترک در نمونه‌های دیسکی ترک‌دار تحت بار فشاری
۱۹۰	۶-۶ - مطالعه آزمایشگاهی مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک
۱۹۱	۶-۶-۱ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک با طول متغیر خط واصل
۱۹۲	۶-۶-۱-۱ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۱۰ میلی‌متر
۱۹۴	۶-۶-۱-۲ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۱۵ میلی‌متر
۱۹۵	۶-۶-۱-۳ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۱۸ میلی‌متر
۱۹۷	۶-۶-۱-۴ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر
۱۹۸	۶-۶-۱-۵ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۲۵ میلی‌متر
۱۹۹	۶-۶-۱-۶ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۳۰ میلی‌متر
۲۰۴	۶-۶-۲ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک با شیب متغیر خط واصل
۲۰۵	۶-۶-۱-۲ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۴۵ درجه
۲۰۶	۶-۶-۲-۲ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۶۰ درجه
۲۰۸	۶-۶-۲-۳ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۷۵ درجه
۲۰۹	۶-۶-۲-۴ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۱۰۵ درجه
۲۱۱	۶-۶-۲-۵ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۱۲۰ درجه
۲۱۴	۶-۷ - نتیجه‌گیری

فصل ۷ - نتایج و پیشنهادات ۲۱۶

۲۱۶	۷-۱ - مقدمه
۲۱۷	۷-۲ - نتایج تحقیق
۲۲۰	۷-۳ - ارزیابی مطالعات عددی و آزمایشگاهی

۲۲۱

۷ - ۴ - پیشنهادات

۲۲۲

پیوست الف

۲۲۴

منابع

فهرست شکل‌ها

صفحه	عنوان
۱۰	شکل (۱-۲): سه مود اصلی انتشار ترک
۱۱	شکل (۲-۲): ترک در یک صفحه به ابعاد بینهایت تحت بار کششی دو محوره یکنواخت
۱۲	شکل (۳-۲): تنش الاستیک σ_y در نوک ترک
۱۶	شکل (۴-۲): مود کششی خالص
۱۶	شکل (۵-۲): مود برشی خالص
۱۸	شکل (۶-۲): نقاط مورد استفاده در روش برون‌یابی تنش و رگرسیون خطی بر مقادیر K^* برای تعیین ضریب تمرکز تنش
۱۹	شکل (۷-۲): نقاط مورد استفاده در روش برون‌یابی جابجائی و رگرسیون خطی بر مقادیر K^* برای تعیین ضریب تمرکز تنش
۲۰	شکل (۸-۲): درزه در یک محیط سنگی قبل و بعد از رشد
۲۱	شکل (۹-۲): منحنی بسته دلخواه حول نوک ترک
۲۲	شکل (۱۰-۲): مسیر انتگرال‌گیری برای یک ترک دلخواه و موقعیت دستگاه‌های مختصات محلی X_1X_2 و مرجع XY
۲۴	شکل (۱۱-۲): مسیر انتگرال‌گیری به شکل مستطیل که اضلاع آن به موازات دستگاه مختصات مرجع قرار گرفته‌اند
۲۶	شکل (۱۲-۲): میدان کمکی برای ضرایب تمرکز تنش
۳۰	شکل (۱۳-۲): رشد بی‌نهایت کوچک با زاویه θ نسبت به ترک اصلی
۳۵	شکل (۱-۳): ترک شیبدار تحت بارگذاری محوری (الف) بار فشاری (ب) بار کششی
۳۶	شکل (۲-۳): مکان هندسی معیار شکست جدید راثو
۳۷	شکل (۳-۳): نمونه سنگ حاوی تعداد زیادی ریزترک
۳۸	شکل (۴-۳): یک ریز ترک تحت تنش کششی محلی
۳۹	شکل (۵-۳): تجزیه مسئله اصلی
۴۴	شکل (۶-۳): المان کوچک اضافه شده به انتهای المان و شبیه‌سازی رشد ترک
۴۵	شکل (۷-۳): مراحل رشد ترک در یک نمونه حاوی ترک شیبدار. (a) ترک اولیه (b) و (c) انشعاب و انتشار ترک‌های کششی (مود I) (d) انشعاب و رشد ترک‌های برشی
۴۶	شکل (۸-۳): شبیه‌سازی فرایند اتصال دو ترک بسته در حالت $\alpha = 45^\circ$ ، $\beta = 60^\circ$
۴۷	شکل (۹-۳): شبیه‌سازی فرایند اتصال دو ترک بسته در حالت $\alpha = 45^\circ$ ، $\beta = 90^\circ$
۴۸	شکل (۱۰-۳): شبیه‌سازی فرایند اتصال دو ترک بسته در حالت $\alpha = 45^\circ$ ، $\beta = 105^\circ$
۴۹	شکل (۱۱-۳): معیار رشد و انتشار ترک. (الف) ناحیه پلاستیک (ب) انتشار ترک (ج) فرمول‌بندی ریاضی (د) پوش شکست
۵۱	شکل (۱۲-۳): هندسه نمونه مورد استفاده در مطالعات بوبت و انشتین
۵۲	شکل (۱۳-۳): مراحل رشد و اتصال درزه‌ها در حالتی که $\beta = 30^\circ$ ، $s = a$ ، $c = 2a$
۵۳	شکل (۱۴-۳): مراحل رشد و اتصال درزه‌ها در حالتی که $\beta = 45^\circ$ ، $s = 0$ ، $c = 2a$
۵۴	شکل (۱۵-۳): مراحل رشد و اتصال درزه‌ها در حالتی که $\beta = 45^\circ$ ، $s = a$ ، $c = 2a$

- شکل (۳-۱۶): مراحل رشد و اتصال درزه‌ها در حالتی که $c = 2a$, $s = a$, $\beta = 45^\circ$ ۵۴
- شکل (۳-۱۷): معیار مقاومت و مقاومت باقی مانده برای المان‌ها ۵۵
- شکل (۳-۱۸): هندسه نمونه مورد استفاده در مطالعات تانگ ۵۶
- شکل (۳-۱۹): هندسه مدل‌های مطالعه کم‌نی ۵۹
- شکل (۳-۲۰): هندسه نمونه‌های ترک‌دار مورد استفاده در مطالعات شن ۶۱
- شکل (۳-۲۱): سیستم بارگذاری و مونیتورینگ آزمایش اتصال ترک‌ها ۶۱
- شکل (۳-۲۲): ترتیب انشعاب، انتشار و اتصال ترک‌ها زمانی که زاویه شیب خط واصل ترک‌ها ۴۵ و ۶۰ درجه است ۶۲
- شکل (۳-۲۳): فرایند اتصال ترک‌ها زمانی که زاویه شیب β ۷۵ و ۹۰ درجه است ۶۳
- شکل (۳-۲۴): اتصال ترک‌ها توسط ترک‌های پره‌ای وقتی شیب خط واصل ۱۰۵ یا ۱۲۰ درجه است ۶۳
- شکل (۳-۲۵): مشخصات هندسی نمونه حاوی سه ترک ۶۵
- شکل (۳-۲۶): نحوه ایجاد ترک در نمونه‌ها با لایه‌های فولادی ۶۶
- شکل (۳-۲۷): لایه‌های فولادی با زبری‌های متفاوت برای ایجاد ترک. لایه بالائی و پائینی به ترتیب ضریب اصطکاک ۰/۶ و ۰/۷ در سطح ترک ایجاد می‌کنند ۶۶
- شکل (۳-۲۸): سیستم بارگذاری با کنترل جابجائی ۶۷
- شکل (۳-۲۹): مودهای مختلف اتصال ترک در نمونه‌های حاوی دو ترک ۶۸
- شکل (۳-۳۰): مود اتصال ترک در نمونه‌های حاوی سه ترک با ۱۶ ترکیب مختلف از پارامترها ۶۹
- شکل (۳-۳۱): ۶ الگوی متفاوت اتصال ترک‌ها که در نمونه‌های حاوی ۲ ترک مشاهده می‌شوند ۷۰
- شکل (۳-۳۲): نمونه استفاده شده در مطالعات آزمایشگاهی ناصر الشایه ۷۱
- شکل (۳-۳۳): نمونه‌های CSNBD تحت بارگذاری فشاری قطری ۷۲
- شکل (۳-۳۴): نمونه‌های CSNBD بعد از شکست ۷۲
- شکل (۳-۳۵): زاویه ایجاد ترک ۷۳
- شکل (۳-۳۶): تصاویر اسکن میکروسکوپ الکترونی از سطوح شکسته نمونه‌های CSNBD با بزرگ نمائی ۷۴
- ۱۰۰۰
- شکل (۳-۳۷): نمونه حاوی ترک‌های متعدد. الف) نمای کلی ب) هندسه ترک‌ها ۷۵
- شکل (۳-۳۸): الگوی رشد ترک در نمونه‌های ترک‌دار ۷۶
- شکل (۳-۳۹): ترک‌های کششی پره‌ای که از نوک درزه رشد می‌کنند ۷۶
- شکل (۳-۴۰): ترک‌های برشی ثانویه که از نوک درزه رشد می‌کنند ۷۶
- شکل (۳-۴۱): حالات مختلف رشد و اتصال ترک در نمونه‌های حاوی دو درزه تحت بار فشاری تک‌محوری ۷۷
- شکل (۳-۴۲): حالات مختلف رشد و اتصال ترک در نمونه‌های حاوی ۱۶ درزه تحت بار فشاری تک‌محوی ۷۸
- شکل (۴-۱): تفاوت بین روش‌های تقریب و درونیابی ۸۳
- شکل (۴-۲): مقایسه توابع شکل در روش المان محدود و روش‌های بدون مش ۸۴
- شکل (۴-۳): شکل‌های مورد استفاده برای حوزه تاثیر گره I ۸۶
- شکل (۴-۴): توزیع گره‌ها در یک جسم حاوی ترک که با روش بدون مش مدل شده است ۹۲
- شکل (۴-۵): الف) توزیع گره‌ها در دامنه مسئله و حوزه تاثیر آنها. ب) گره‌های واقع در حوزه تاثیر گره ۹۴
- X_I
- شکل (۴-۶): شکل کیفی تابع وزن ۹۶
- شکل (۴-۷): ساختار سلولی برای تربیع در EFGM و حوزه نقاط تربیع ۱۰۰

- شکل (۴-۸): استفاده از شبکه انتگرال‌گیری در روش بدون مش گالرکین، روش انتگرال‌گیری عددی تربیع
گوس
- شکل (۴-۹): فلوچارت روش بدون مش گالرکین
- شکل (۴-۱۰): حوزه تاثیر گره‌های I و J که در مجاورت درزه واقع شده‌اند
- شکل (۴-۱۱): مدلسازی ریاضی معیار قابلیت دید
- شکل (۵-۱): توزیع گره‌ها در دامنه نمونه‌های ترک‌دار. (الف) نمونه حاوی ترک افقی. (ب) توزیع گره‌ها در دامنه نمونه حاوی ترک افقی. (الف) نمونه حاوی ترک شیب‌دار. (ب) توزیع گره‌ها در دامنه نمونه حاوی ترک شیب‌دار.
- شکل (۵-۲): شبکه سلول‌ها در روش شبکه انتگرال‌گیری، گره‌ها در گوشه‌های سلول‌های مربعی
- شکل (۵-۳): آرایش گره‌ها در روش‌های برون‌یابی تنش و جابجایی؛ (الف) آرایش گره‌ها در خط جلوی ترک در روش برون‌یابی تنش (ب) آرایش گره‌ها در خط پشت ترک در روش برون‌یابی جابجایی
- شکل (۵-۴): مسیر انتگرال J در پیرامون ترک افقی؛ (الف) آرایش گره‌ها در دامنه نمونه حاوی ترک افقی و در مسیر انتگرال J. (ب) آرایش گره‌ها در مسیر انتگرال J
- شکل (۵-۵): مسیر انتگرال M در پیرامون ترک شیب‌دار؛ (الف) آرایش گره‌ها در دامنه نمونه حاوی ترک افقی و در مسیر انتگرال J. (ب) آرایش گره‌ها در مسیر انتگرال M.
- شکل (۵-۶): نمونه حاوی درزه افقی مرکزی تحت بار کششی. (الف) هندسه مساله (ب) آرایش گره‌ها در دامنه مساله
- شکل (۵-۷): مولفه‌های جابجایی و تنش در دامنه نمونه حاوی ترک افقی تحت بار کششی.
- شکل (۵-۸): تغییرات مولفه‌های تنش در طول خط افق برحسب فاصله از نوک درزه برای دو روش بدون مش گالرکین و روش تحلیلی
- شکل (۵-۹): نمونه حاوی ترک‌های متعدد با طول و راستای دلخواه.
- شکل (۵-۱۰): مولفه‌های جابجایی و تنش در دامنه نمونه حاوی ترک‌های متعدد تحت بار فشاری.
- شکل (۵-۱۱): تعیین ضریب تمرکز تنش با روش برون‌یابی تنش
- شکل (۵-۱۲): تعیین ضریب تمرکز تنش با روش برون‌یابی جابجایی
- شکل (۵-۱۳): توزیع گره در دامنه مسئله و مسیرهای مختلف اندازه‌گیری انتگرال J. (الف) مسیر و جهت انتگرال J و آرایش گره‌ها در روی آن (ب) سه مسیر مختلف انتگرال J
- شکل (۵-۱۴): نمونه حاوی یک درزه افقی لبه‌ای که تحت بارگذاری برشی قرار گرفته است (الف) هندسه نمونه. (ب) آرایش گره‌ها در دامنه مساله (ج) مسیر انتگرال M
- شکل (۵-۱۵): مولفه‌های تنش در دامنه نمونه حاوی ترک لبه‌ای تحت بار برشی.
- شکل (۵-۱۶): نمونه حاوی یک درزه افقی لبه‌ای که تحت بارگذاری برشی قرار گرفته است (الف) هندسه نمونه. (ب) آرایش گره‌ها در دامنه مساله (ج) مسیر انتگرال M.
- شکل (۵-۱۷): مولفه‌های جابجایی و تنش در دامنه نمونه حاوی ترک شیب‌دار تحت بار فشاری
- شکل (۵-۱۸): تشریح معیار شکست مبتنی بر مولفه‌های تنش
- شکل (۵-۱۹): پیش‌بینی جهت رشد ترک در نمونه حاوی ترک لبه‌ای. (الف) مراحل مختلف رشد ترک و زاویه انتشار آن نسبت به خط افق. (ب) شکل شماتیک مسیر رشد ترک شیب‌دار
- شکل (۵-۲۰): پیش‌بینی جهت رشد ترک در نمونه حاوی ترک شیب‌دار تحت بار فشاری. (الف) مراحل مختلف رشد ترک و زاویه انتشار آن نسبت به خط قائم. (ب) شکل شماتیک پیش‌بینی

- عددی مسیر رشد ترک شیبدار. ج) مسیر رشد ترک در یک نمونه گچی با ابعاد $20 \times 10 \times 3$ سانتی متر مکعب و حاوی ترک شیبدار با شیب 45° درجه و بطول ۲ سانتیمتر
- شکل (۵-۲۱): حالت‌های رشد ترک در مود کششی خالص؛ (الف) نمونه حاوی ترک تحت بارگذاری نقطه‌ای (ب) نمونه حاوی ترک افقی تحت بار کششی
- شکل (۵-۲۲): صفحه حاوی درزه شیبدار مرکزی تحت بار فشاری تک‌محوری
- شکل (۵-۲۳): فلوچارت برنامه کامپیوتری مدلسازی رشد ترک در حالت مود ترکیبی با روش بدون مش
- گالریکین و معیار مولفه‌های تنش موضعی
- شکل (۵-۲۴): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی در نمونه حاوی ترک با شیب 45° درجه
- شکل (۵-۲۵): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی در نمونه حاوی ترک با شیب 30° درجه
- شکل (۵-۲۶): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی در نمونه حاوی ترک با شیب 45° درجه
- شکل (۵-۲۷): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی در نمونه حاوی ترک با شیب 60° درجه
- شکل (۵-۲۸): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی در نمونه حاوی ترک با شیب 75° درجه
- شکل (۵-۲۹): مقدار تنش منجر به شروع رشد ترک برای مقادیر مختلف شیب ترک
- شکل (۵-۳۰): مقدار زاویه انشعاب ترک‌های کششی برای مقادیر مختلف شیب ترک
- شکل (۵-۳۱): نمونه دیسکی حاوی ترک مرکزی شیبدار تحت بارگذاری فشاری متمرکز
- شکل (۵-۳۲): زاویه انشعاب ترک نسبت به امتداد ترک اصلی
- شکل (۵-۳۳): مکانیزم و مسیر رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک شیبدار به ازای مقادیر مختلف شیب ترک
- شکل (۵-۳۴): مقدار تنش منجر به شروع رشد ترک برای مقادیر مختلف شیب ترک
- شکل (۵-۳۵): مقدار زاویه انشعاب ترک‌های کششی برای مقادیر مختلف شیب ترک
- شکل (۵-۳۶): نمونه حاوی دو ترک شیبدار تحت بار فشاری تک‌محوری. شیب ترک‌ها α ، شیب خط واصل دو ترک β و طول خط واصل l می‌باشد
- شکل (۵-۳۷): مولفه‌های جابجایی و تنش در دامنه نمونه حاوی ترک افقی تحت بار کششی
- شکل (۵-۳۸): انشعاب ترک‌های کششی از انتهای ترک‌های اصلی تحت بار فشاری. (الف) انشعاب همزمان ترک‌های کششی از انتهای ترک در امتداد تقریباً عمود بر راستای ترک‌ها (ب) زوایای انشعاب ترک‌های کششی نسبت به خط افق
- شکل (۵-۳۹): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل 90° درجه
- شکل (۵-۴۰): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل 45° درجه
- شکل (۵-۴۱): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل 60° درجه
- شکل (۵-۴۲): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل 75° درجه
- شکل (۵-۴۳): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل 105° درجه
- شکل (۵-۴۴): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل 120° درجه

- شکل (۵-۴۵): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با طول خط واصل ۲۰ میلی متر و شیب خط واصل ۱۲۰ درجه
- شکل (۵-۴۶): تنش انشعاب ترک‌های کششی به ازای مقادیر مختلف شیب دو ترک
- شکل (۵-۴۷): تنش اتصال ترک‌های اصلی به ازای مقادیر مختلف شیب دو ترک
- شکل (۵-۴۸): حالت‌های مختلف اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک شیبدار
- شکل (۶-۱): شکل هندسی نمونه‌های مورد استفاده در مطالعات آزمایشگاهی
- شکل (۶-۲): قالب ساخت نمونه آزمایشگاهی مکعبی
- شکل (۶-۳): نحوه ایجاد ترک در نمونه‌های آزمایشگاهی
- شکل (۶-۴): برش دو انتهای نمونه برای تهیه سطوح موازی
- شکل (۶-۵): قالب مورد استفاده برای تهیه نمونه‌های استوانه‌ای
- شکل (۶-۶): نمونه‌های تهیه شده برای آزمایش فشاری تک‌محوره
- شکل (۶-۷): دستگاه آزمایش فشاری تک‌محوره (آزمایشگاه مکانیک سنگ دانشگاه تربیت مدرس)
- شکل (۶-۸): ثبت بار وارد بر نمونه، جابجائی طولی و جابجائی جانبی در هر لحظه از بارگذاری
- شکل (۶-۹): نمونه‌های مورد استفاده در آزمایش فشاری سه‌محوره
- شکل (۶-۱۰): دستگاه آزمایش فشاری سه‌محوره و نمونه گچی در داخل سلول هوک
- شکل (۶-۱۱): نتایج آزمایش فشاری سه‌محوره و تعیین عرض از مبدا و شیب خط پوش
- شکل (۶-۱۲): تست برزلی برای اندازه‌گیری کشش غیر مستقیم
- شکل (۶-۱۳): نمونه‌های مورد استفاده برای آزمایش کشش غیر مستقیم
- شکل (۶-۱۴): نمونه گچی تحت آزمایش کشش غیر مستقیم
- شکل (۶-۱۵): نمونه‌های آزمایشگاهی حاوی یک ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه و طول ۱۵ میلی‌متر
- شکل (۶-۱۶): دستگاه بارگذاری مورد استفاده برای نمونه‌های حاوی یک ترک شیبدار
- شکل (۶-۱۷): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک اصلی در نمونه حاوی ترک شیبدار با شیب ۱۵ درجه و طول ۱۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۱۸): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک اصلی در نمونه حاوی ترک شیبدار با شیب ۳۰ درجه و طول ۱۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۱۹): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک اصلی در نمونه حاوی ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه و طول ۱۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۲۰): شکست مستقل از ترک نمونه‌های حاوی ترک با شیب بیشتر از ۴۵ درجه
- شکل (۶-۲۱): نمونه‌های دیسکی حاوی ترک مرکزی با شیب متغیر
- شکل (۶-۱۲): بارگذاری فشاری نمونه‌های دیسکی با دستگاه INSTRON و با سلول بار به ظرفیت ۲۵ کیلونیوتن
- شکل (۶-۲۳): شکست نمونه‌های دیسکی حاوی ترک با شیب متغیر تحت بار فشاری
- شکل (۶-۲۴): مقایسه مقدار بار منجر به رشد کامل ترک در مدل‌های عددی با بار منجر به شکست نمونه‌های دیسکی آزمایشگاهی
- شکل (۶-۲۵): مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی پیش بینی زاویه انشعاب ترک‌های جدید از نوک ترک اصلی
- شکل (۶-۲۶): دستگاه بارگذاری INSTRON مورد استفاده برای بارگذاری نمونه‌های حاوی دو ترک
- شکل (۶-۲۷): نمونه‌های آزمایشگاهی حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی‌متر و با

مقدار متغیر طول خط واصل دو ترک

- شکل (۶-۲۸): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۲۹): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌های موجود و اتصال ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۳۰): کرنش نمودار نمودار حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۳۱): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۳۲): نمودار تنش - کرنش نمودار حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۳۳): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۸ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۳۴): نمودار تنش - کرنش نمودار حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۸ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۳۵): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها، اتصال ترک‌ها و گسیختگی نمونه در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۲۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۳۶): نمودار تنش - کرنش نمونه حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۲۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۳۷): رشد ترک‌های کششی و برشی و اتصال ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۲۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۳۸): نمودار تنش - کرنش نمودار نمونه حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۲۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۳۹): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۳۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۴۰): نمودار تنش - کرنش نمودار حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۳۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۶-۴۱): نتایج عددی و آزمایشگاهی انشعاب، اتصال و گسیختگی نمونه حاوی دو ترک با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی‌متر، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر
- شکل (۶-۴۲): مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی بار منجر به شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی
- شکل (۶-۴۳): نمونه‌های آزمایشگاهی حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی‌متر و با

مقدار متغیر شیب خط واصل دو ترک

- شکل (۴۴-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۴۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۴۵-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۴۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۴۶-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌ها در نمونه گچی حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۶۰ درجه تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۴۷-۶): نمودار تنش - کرنش نمودار نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی‌متر، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۶۰ درجه تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۴۸-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌ها در نمونه گچی حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۷۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۴۹-۶): نمودار تنش - کرنش نمودار نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی‌متر، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۷۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۵۰-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌ها در نمونه گچی حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۱۰۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۵۱-۶): نمودار تنش - کرنش نمودار نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی‌متر، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۱۰۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۵۲-۶): رشد ترک‌های کششی نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌ها در نمونه گچی حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۱۲۰ درجه تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۵۳-۶): نمودار تنش - کرنش نمودار نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی‌متر، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۱۲۰ درجه تحت بار فشاری تک محوری
- شکل (۵۴-۶): انواع اتصال ترک‌ها در مطالعات آزمایشگاهی رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک
- شکل (۵۵-۶): مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی تنش متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی

فهرست جدول‌ها

صفحه	عنوان
۵۱	جدول (۱-۳): مودهای مختلف اتصال ترک در نمونه‌های حاوی دو ترک
۵۷	جدول (۲-۳): حالت‌های مختلف اتصال ترک در نمونه‌های حاوی سه ترک
۵۸	جدول (۳-۳): اندرکنش مولفه‌های برشی و نرمال تنش و مودهای اتصال
۶۴	جدول (۴-۳): الگوهای رشد و اتصال ترک‌ها به ازای مقادیر مختلف α و β
۶۵	جدول (۵-۳): خواص ژئومکانیکی نمونه‌های مورد استفاده در مطالعات ونگ
۹۶	جدول (۱-۴): برخی از توابع وزن مورد استفاده در روش بدون مش گالرکین
۱۲۴	جدول (۱-۵): مقادیر انتگرال J در مسیرهای مختلف به ازای تعداد گره متفاوت
۱۲۴	جدول (۲-۵): مقایسه نتایج روش‌های مختلف برای محاسبه ضریب تمرکز تنش کششی
۱۲۶	جدول (۳-۵): ضرایب تمرکز تنش به ازای مقادیر مختلف اندازه مسیر انتگرال‌گیری
۱۲۸	جدول (۴-۵): نتایج عددی و تحلیلی ضرایب تمرکز تنش به ازای مقادیر مختلف شیب ترک
۱۳۲	جدول (۵-۵): مقادیر ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک در مراحل مختلف رشد آن
۱۳۳	جدول (۶-۵): مقایسه نتایج دو معیار در پیش‌بینی جهت رشد ترک
۱۳۵	جدول (۷-۵): مقدار حداکثر تنش مماسی و جهت رشد در مراحل مختلف رشد ترک
۱۵۴	جدول (۸-۵): زوایای انشعاب ترک‌های کششی از چهار نوک ترک‌ها $l = 20 \text{ mm}$
۱۵۵	جدول (۹-۵): تنش انشعاب و اتصال ترک‌ها به ازای مقادیر مختلف طول خط واصل دو ترک
۱۶۶	جدول (۱-۶): ابعاد هندسی نمونه مکعب مستطیل مورد استفاده در مطالعات قبلی
۱۶۷	جدول (۲-۶): مواد مورد استفاده در مطالعات قبلی و نسبت آنها در ترکیب نهایی نمونه
۱۷۳	جدول (۳-۶): نتایج حاصل از آزمایش فشاری تک محوری
۱۷۵	جدول (۴-۶): نتایج آزمایش فشاری سه‌محوری
۱۷۸	جدول (۵-۶): نتایج آزمایش کشش غیر مستقیم جهت تعیین مقاومت کششی
۱۷۸	جدول (۶-۶): خواص مکانیکی مصالح گچی مورد استفاده در مطالعات آزمایشگاهی
۱۸۳	جدول (۷-۶): مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی زاویه انشعاب ترک‌های کششی
۱۸۸	جدول (۸-۶): میزان بار شکست و زاویه انشعاب ترک‌های کششی برای مقادیر مختلف شیب ترک
۲۰۱	جدول (۹-۶): بار شروع ناپایدار رشد ترک‌ها و بار گسیختگی نمونه برای مقادیر مختلف طول خط واصل دو ترک
۲۰۲	جدول (۱۰-۶): مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی زاویه انشعاب ترک‌های کششی از نوک ترک‌های اصلی
۲۱۲	جدول (۱۱-۶): بار شروع ناپایدار رشد ترک‌ها و بار گسیختگی نمونه برای مقادیر مختلف شیب خط واصل دو ترک

فهرست علائم اختصاری

نصف طول ترک	a
بردار ضرایب مجهول	$a(x)$
ماتریس ممان	A
نیروهای حجمی	b
ماتریس مشتقات توابع شکل	B
چسبندگی	C
شعاع حوزه تاثیر	dm
المان خطی در مرز مساله	ds
المان حجم	dv
تانسور ارتجاعی	D
ضریب ارتجاعی	E
بردار نیروهای خارجی	f
تابع زاویه	$f(\theta)$
تابع زاویه	$g(\theta)$
نرخ رهايش انرژی کرنشی	G
مقدار بحرانی نرخ رهايش انرژی کرنشی	G_c
فضای سوبولوف مرتبه صفر	H^0
فضای سوبولوف مرتبه یک	H^1
انتگرال مستقل از مسیر J	J
ماتریس سختی	K
ضریب تمرکز تنش مود کششی	K_I
ضریب تمرکز تنش مود برشی	K_{II}
چقرمگی شکست مود کششی	K_{IC}
چقرمگی شکست مود برشی	K_{IIC}
ضریب تمرکز تنش کمکی مود کششی	K_I^{aux}
ضریب تمرکز تنش کمکی مود برشی	K_{II}^{aux}
نرم خطا	L_2
تعداد جمله‌های تابع پایه	m
انتگرال اندرکنش	M

بردار نرمال رو به بیرون مرز مساله	$\vec{n}$
تعداد گره در دامنه مساله	n
تابع درونیاب لاگرانژ	$N_I(s)$
تابع پایه چند جمله‌ای	$P(x)$
فاصله شعاعی در مختصات قطبی	r
شعاع حوزه تاثیر	r_0
طول کمان در مرز مساله	s
دانسیتة انرژی کرنشی	S
مقدار بحرانی دانسیتة انرژی کرنشی	S_c
نیروی سطحی داده شده در مرز مساله	$\bar{t}$
تابع مجهول	$u(x)$
تقریب تابع مجهول	u^h
میدان جابجایی کمکی	u^{aux}
مقدار تابع مجهول در گره i ام	u_i
جابجائی داده شده در مرز مساله	$\bar{u}$
جابجائی در راستای افقی	u_x
جابجائی در راستای قائم	u_y
تابع وزن	$w(x - x_i)$
چگالی انرژی کرنشی	W
مختصات گره‌ها در دامنه مسئله	x
گره i ام در دامنه مسئله	x_i
شیب ترک	α
شیب خط واصل دو ترک	β
مرز مسئله	Γ
مرزی که در آن نیروی سطحی مشخص است	Γ_t
مرزی که جابجائی در آن مشخص است	Γ_u
دامنه مسئله	Ω
زاویه اصطکاک داخلی	ϕ
تابع شکل	$\phi(x)$
ضریب لاگرانژ	λ
ضریب ارتجاعی برشی	μ

ضریب پواسون	ν
زاویه در مختصات قطبی	θ
تانسور تنش	σ
تانسور تنش کمکی	σ^{aux}
مقاومت کششی	σ_t
تانسور کرنش	ε
تانسور کرنش کمکی	ε^{aux}
عملگر گرادیان متقارن	∇_s
عملگر دیورژانس	$\nabla \cdot$
تابع آزمون	δv

فصل اول

مقدمه

۱-۱ - کلیات

امروزه سازه‌های مهندسی زیادی برای انواع کاربری‌ها در حوزه مهندسی معدن و عمران احداث می‌شوند. در حوزه مهندسی معدن، ذخایر معدنی نزدیک به سطح زمین با معدنکاری سطحی و با احداث پله‌های متعدد و ذخایر عمیق با روش‌های استخراج زیرزمینی و با حفر انواع بازکننده‌ها استخراج می‌شوند. در حوزه مهندسی عمران برای انواع کاربری‌ها از جمله راه‌سازی، سیستم فاضلاب شهری، راه‌آهن، مسیرهای عبور لوله‌ها، حمل و نقل، انتقال آب، نصب ترانسفورماتورها و توربین‌های برق آبی و ... به حفر ترانشه‌ها و شیروانی‌های سطحی و به انواع فضاهای زیرزمینی نظیر تونل‌ها، چاه‌ها و مغارها که عمدتاً در محیط‌های سنگی واقع می‌شوند، نیاز است. هر یک از این پروژه‌ها با هزینه‌های هنگفتی همراه بوده و برای تکمیل آنها به چندین سال وقت نیاز است. لذا این پروژه‌ها حتماً باید در مدت زمان بهره‌برداری از آنها پایدار بمانند. این محیط‌ها به خاطر اهمیت‌شان به ضریب ایمنی بالایی نیاز دارند و لازم است از انواع سیستم‌های نگهداری استفاده شود. برای طراحی مهندسی سیستم‌های نگهداری و برای جلوگیری از تحمیل هزینه اضافی به پروژه، اطلاع دقیق از رفتار مکانیکی محیط ساختگاه پروژه یک ضرورت است.

در حالت کلی یک محیط سنگی بکر نبوده و به خاطر انواع فعالیت‌های تکتونیکی ریزترک‌ها، ترک‌ها، شکستگی‌ها و ناپیوستگی‌های زیادی در آن بوجود می‌آیند. این ناپیوستگی‌ها رفتار مکانیکی توده سنگ را به شدت تحت تاثیر قرار می‌دهند. مقاومت مکانیکی یک توده سنگ تابع گسترش ناپیوستگی‌های آن در ماده سنگ است. در واقع شکست سنگ درزه‌دار موقعی اتفاق می‌افتد که

درزه‌ها گسترش پیدا کرده و بهم متصل شوند. بنابراین لازم است در مطالعه مقاومت توده‌سنگ‌ها، تاثیر ناپیوستگی‌های موجود در آنها مورد توجه دقیق قرار گیرد.

یکی از حوزه‌های علم مکانیک که بطور موثر می‌تواند در مطالعه مقاومت توده سنگ، مقاومت درزه‌های سنگ و بررسی پایداری ماده سنگ بین درزه‌های سنگ کمک کند، علم مکانیک شکست^۱ است. مکانیک شکست یکی از علوم مهندسی است که با آن پدیده شکست بررسی شده و روش‌های طراحی برای عملکرد مطمئن سازه ارائه می‌شود. این علم دارای کاربردهای بسیار گسترده‌ای در طراحی قطعات سازه‌های مربوط به زمینه‌های مختلف مانند صنایع نیروگاهی، خودروسازی، کشتی‌سازی و ... است. بطوریکه گفته می‌شود امروزه دست کم ۸۰ درصد از طراحی در این زمینه‌ها بر اساس دانش مکانیک شکست انجام گرفته و یا لاقلاً سازه‌های طراحی شده با روش‌های دیگر، به منظور اطمینان از ایمنی و کارائی لازم با روش‌های مکانیک شکست مورد بررسی و آزمایش قرار می‌گیرند.

از دیدگاه مکانیک شکست سنگ، پایداری یک محیط سنگی درزه‌دار تحت انواع بارگذاری‌ها به انتشار یا عدم انتشار شکستگی‌های آن بستگی دارد. وقتی محیط سنگی درزه‌دار تحت بارگذاری قرار می‌گیرد، در نوک شکستگی‌های آن تمرکز تنش بوجود آمده و بسته به میزان چقرمگی^۲ سنگ ممکن است شکستگی‌ها گسترش یافته و با اتصال آن‌ها محیط سنگی گسیخته شود.

در مکانیک شکست برای بررسی انتشار یا عدم انتشار درزه یا ترک‌ها و تعیین جهت انتشار آنها، از معیارهای مختلفی استفاده می‌شود. این معیارها عموماً روابطی ریاضی بین عوامل محرک (مخرب) نظیر مولفه‌های تنش یا ضرایب تمرکز تنش و عوامل مقاومتی (بازدارنده) مثل مقاومت کششی، مقاومت برشی و چقرمگی شکست مواد می‌باشند. بنابراین در تحلیل مسائل مکانیک شکست ابتدا معیار شکست مناسب انتخاب شده و سپس پارامترهای مورد نیاز این معیار، محاسبه می‌شوند. نهایتاً با ارزیابی معیار شکست، رشد یا عدم رشد ترک یا ترک‌ها مشخص می‌شود و در صورت بروز پدیده رشد ترک، شرایط انتشار آن نیز تعیین می‌شود.

1 – Fracture Mechanics
2 - Toughness

عوامل مقاومتی مثل چقرمگی شکست، مقاومت کششی و یا چسبندگی جزء خواص مواد بوده و با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی تعیین می‌شوند. برای محاسبه عوامل مخرب مثل ضرایب تمرکز تنش از روش‌های مختلف مانند روش‌های تجربی، روش‌های تحلیلی و روش‌های عددی استفاده می‌شود. روش‌های تجربی مثل فتوالاستیسیته و کالیبراسیون نرمی معمولاً پر هزینه و زمان‌بر بوده و فقط به نمونه‌های ساده از نظر هندسی و بارگذاری قابل اعمال است. روش‌های تحلیلی نیز فقط در مدل‌هایی با هندسه و بارگذاری ساده توسعه داده شده‌اند. بنابراین در مدل‌های با هندسه و بارگذاری پیچیده عمدتاً از روش‌های عددی نظیر روش المان محدود و المان مرزی استفاده می‌شود. اگر چه روش المان محدود در طیف وسیعی از کاربردهای مهندسی موفقیت‌های بزرگی داشته است، ولی در برخورد با مسائل مکانیک شکست با مشکلاتی همراه است که به ماهیت مش‌بندی آن مربوط می‌شود. در مدل‌سازی انتشار ترک با مرزهای متحرک در صورت استفاده از روش المان محدود به خاطر تغییرات هندسی، مش‌بندی مکرر لازم است که هم هزینه محاسباتی خیلی بالایی دارد و هم در انتقال متغیرهای حالت از مش قدیم به مش جدید مشکلات زیادی بوجود می‌آید. روش المان مرزی در مقایسه با روش المان محدود از این مزیت برخوردار است که فقط مرزها و ترک‌ها مش‌بندی می‌شوند و با گسترش ترک، تغییر مش‌بندی راحت‌تر است ولی برای بدست آوردن مولفه‌های تنش و جابجایی در سایر نقاط دامنه، محاسبات اضافی لازم است. همچنین این روش فقط برای مواد الاستیک قابل استفاده است.

برای غلبه بر این مشکلات، روش‌های بدون مش متعددی نظیر هیدرودینامیک ذره‌ای نرم شده^۱، روش ذره‌ای تولید مجدد کرنل^۲، روش بدون مش گالرکین^۳، روش بدون مش محلی پترو-گالرکین^۴ و ... توسعه داده شده است. جنبه مشترک همه روش‌های بدون مش این است که متغیرهای میدان را بطور

1 - Smooth Particle Hydrodynamics
2 - Reproducing Kernel Particle Method
3 - Element Free Galerkin Method (EFGM)
4 - Meshless Local Petrov-Galerkin

داخلی بر مبنای تعدادی از گره‌های گسسته ارزیابی می‌کنند و به اتصالات از پیش تعریف شده گره‌ها نیاز ندارند.

در حوزه مکانیک شکست سنگ ابتدا روش المان محدود برای مدل‌سازی شکستگی‌های سنگ و مطالعه عددی رشد ترک‌ها در محیط‌های سنگی بکار گرفته شد ولی با توجه به محدودیت آشکار این روش در مدل‌سازی تغییرات هندسی مسائل ترک، کاربرد روش المان مرزی گسترش یافت. علی‌رغم تقلیل مش‌بندی در روش المان مرزی، هنوز مشکل مش‌بندی به طور کامل حل نشده و این روش با محدودیت‌های دیگری هم همراه است. با این وجود به نظر می‌رسد با توجه به ماهیت محیط‌های سنگی و تعدد شکستگی‌های آن، روش‌های بدون مش نظیر روش بدون مش گالرکین، از قابلیت خوبی در تحلیل این مسائل برخوردار باشند.

۱-۲ - ضرورت انجام پایان‌نامه

همانطور که اشاره شد انواع فعالیت‌های مهندسی معدن با محیط‌های سنگی سروکار دارند که در اغلب موارد این محیط‌ها درزه‌دار بوده و پایداری آن به گسترش این درزه‌ها وابسته است که خود تابعی از وضعیت ناپیوستگی‌های توده‌سنگ و نوع و میزان بار اعمالی می‌باشند. در برخی از این فعالیت‌ها مثل تامین پایداری پله‌ها و دیواره‌ها در معادن روباز و فضاهای حفر شده در معادن زیرزمینی، هدف جلوگیری از رشد درزه‌ها و شکست محیط سنگی است و در برخی از فعالیت‌ها مانند چالزنی، حفاری مکانیزه و خردایش سنگ در مرحله کانه‌آرایی، هدف رشد شکستگی‌ها و گسیختگی سنگ است. در هر صورت اطلاع از رفتار توده‌سنگ درزه‌دار و مکانیزم رشد و اتصال شکستگی‌های آن ضروری می‌باشد که در حوزه مکانیک شکست سنگ مطالعه می‌گردد. علاوه بر این در سایر فعالیت‌های مربوط به مکانیک سنگ نظیر شکست هیدرولیکی، تعیین تنش‌های برجا، پیش‌بینی زلزله، نفوذ ماگما، تکتونیک صفحه‌ای، استحصال انرژی زمین‌گرمایی از سنگ، انتقال سیال از توده‌سنگ درزه‌دار و مدل‌سازی شکست وابسته به زمان سنگ (پایداری بلند مدت انبار باطله‌های هسته‌ای) اصول مکانیک

شکست کاربرد ویژه‌ای دارند. لذا مطالعه و تحلیل مسائل مکانیک شکست سنگ ضروری است. به خاطر محدودیت روش‌های تجربی و تحلیلی، برای مدل‌سازی مسائل مکانیک شکست سنگ بایستی از روش‌های عددی استفاده کرد و با توجه به مشکلات روش‌های مبتنی بر مش مثل روش المان محدود و المان مرزی در برخورد با مسائل مکانیک شکست و پتانسیل بالای روش‌های بدون مش بخصوص روش بدون مش گالرکین در تحلیل این مسائل، لازم است مسائل مکانیک شکست سنگ (توزیع میدان تنش و کرنش در محیط‌های سنگی درزه‌دار، محاسبه پارامترهای مکانیک شکست نظیر ضرایب تمرکز تنش و مطالعه رشد درزه) با استفاده از یک روش بدون مش مدل‌سازی گردد. تاکنون روش‌های بدون مش در حوزه مکانیک شکست سنگ استفاده نشده است لذا ضرورت دارد برای تحلیل مسائل شکست سنگ کارائی این روش‌ها نیز ارزیابی گردد. با توجه به کاربرد گسترده و موفقیت آمیز اخیر روش بدون مش گالرکین، در این پایان‌نامه مسائل مکانیک شکست سنگ با استفاده از این روش مدل‌سازی شده است.

۱ - ۳ - هدف از انجام پایان‌نامه

هدف کلی این پایان‌نامه تحلیل و مدل‌سازی دو بعدی مسائل مکانیک شکست سنگ با استفاده از روش عددی بدون مش گالرکین و مطالعه آزمایشگاهی تاثیر هندسه ترک یا ترک‌ها در رفتار مکانیکی نمونه‌های ترک‌دار است. این هدف کلی با انجام فرآیندهای زیر تامین می‌گردد.

- بکارگیری روش بدون مش گالرکین برای تعیین مولفه‌های جابجایی، میدان کرنش و میدان تنش در محیط‌های سنگی درزه‌دار با هندسه دلخواه محیط و شکستگی‌های آن تحت انواع بارگذاری‌ها (کششی، فشاری، برشی، بار نقطه‌ای و فشاری دو محوره)
- محاسبه ضرایب تمرکز تنش در حالت مود کششی خالص، مود برشی خالص و مود ترکیبی با استفاده از میدان جابجایی، کرنش و تنش بدست آمده

- ارزیابی معیار شکست‌های مختلف (معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش موضعی) و انتخاب معیار مناسب
 - مطالعه رشد ترک با هدف تعیین مود انتشار ترک (مود کششی یا مود برشی)، وضعیت انتشار (رشد پایدار یا ناپایدار)، جهت انتشار و میزان بار خارجی در زمان رشد ترک
 - مطالعه اتصال ترک‌ها با هدف تعیین مکانیزم اتصال دو ترک
 - اعتبار سنجی نتایج روش بدون مش گالرکین؛ بدین منظور نتایج این روش در مراحل تعیین میدان تنش و جابجایی و محاسبه ضرایب تمرکز تنش با استفاده از مثال‌های متعدد با نتایج روش عددی المان محدود و روش‌های تحلیلی موجود ارزیابی می‌شود. در مرحله مدلسازی رشد ترک‌ها و اتصال آنها، نتایج مطالعه عددی با استفاده از مطالعات آزمایشگاهی مختلف اعتبارسنجی می‌گردد.
- در تمامی مراحل مطالعات عددی از جمله بکارگیری و پیاده‌سازی روش بدون مش گالرکین، استفاده از روش‌های مختلف برای تعیین ضرایب تمرکز تنش و مدل‌سازی انشعاب، انتشار و اتصال ترک‌ها الگوریتم‌های لازم تهیه و برنامه‌های کامپیوتری مربوط در محیط MATLAB کدنویسی می‌شوند.
- لازم به ذکر است مطالعات آزمایشگاهی علاوه بر ارزیابی نتایج عددی روش بدون مش گالرکین، بطور مستقل تاثیر هندسه ترک یا ترک‌ها را در رفتار شکست نمونه ترک‌دار نمایان می‌سازند. در مطالعات آزمایشگاهی دو سری نمونه حاوی یک ترک (نمونه‌های مکعبی و نمونه‌های دیسکی) و دو سری نمونه حاوی دو ترک در نظر گرفته می‌شوند.

۱ - ۴ - فرضیات پایان‌نامه

ماهیت مدلسازی عددی ایجاب می‌کند که مطالعه عددی هر پدیده‌ای با برخی ساده‌سازی‌ها و فرضیات همراه باشد. بنابراین در این پایان‌نامه نیز مسائل مکانیک شکست سنگ با فرضیات زیر تحلیل شده است:

- محیط همگن و همسانگرد
- محیط سنگی ترد و شکننده
- حالت دو بعدی
- حالت تنش صفحه‌ای
- درزه‌ها باز و دارای سطوح بدون تماس

۱ - ۵ - سازماندهی پایان‌نامه

این پایان‌نامه در هفت فصل تدوین شده است:

در فصل اول؛ هدف از انجام پایان‌نامه، ضرورت انجام آن، فرضیات مطالعه و ساختار پایان‌نامه بیان شده است.

در فصل دوم، مبانی علم مکانیک شکست و پارامترهای مهم در مطالعه پدیده شکست مواد، روش‌های محاسبه ضرایب تمرکز تنش و معیارهای شکست متداول در مکانیک شکست توضیح داده می‌شود. در فصل سوم، به مطالعات مختلف انجام شده در حوزه مکانیک شکست سنگ پرداخته می‌شود. این مطالعات در سه دسته تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی بطور کامل بررسی می‌شود.

در فصل چهارم، با مقدمه‌ای بر روش المان محدود و بررسی تفاوت آن با روش‌های بدون مش، تاریخچه و ساختار روش‌های مختلف بدون مش بطور مختصر مرور می‌گردد. سپس روش بدون مش گالرکین بطور کامل با جزئیات تشریح و نحوه مدل‌سازی شکستگی‌های سنگ با روش بدون مش گالرکین توضیح داده می‌شود.

در فصل پنجم، ابتدا روند پیاده‌سازی روش بدون مش گالرکین برای مدل‌سازی شکستگی‌های سنگ توصیف، سپس با در نظر گرفتن مثال‌های مختلفی از نمونه‌های سنگی ترک‌دار با هندسه متفاوت نمونه و ترک تحت انواع بارگذاری‌ها، میدان تنش و جابجایی و نیز ضرایب تمرکز تنش (با روش‌های مختلف) محاسبه و نتایج روش بدون مش گالرکین با نتایج روش المان محدود و روش‌های تحلیلی

مقایسه می‌شود. در مرحله بعد با چند مثال دو معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و مولفه‌های تنش موضعی ارزیابی و معیار شکست مناسب انتخاب می‌گردد. در ادامه این فصل رشد ترک شیب‌دار در نمونه‌های مکعبی و دیسکی تحت بار فشاری با معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش تحلیل، سپس فرایند رشد، اتصال و گسیختگی نمونه در نمونه‌های حاوی دو ترک شیب‌دار به ازای مقادیر مختلف طول و شیب خط واصل دو ترک با روش بدون مش گالرکین و معیار مولفه‌های تنش مدل‌سازی و ارزیابی می‌شود.

در فصل ششم، مطالعات آزمایشگاهی انجام شده ارائه می‌گردد. ابتدا نحوه تهیه نمونه‌های مختلف آزمایشگاهی توصیف، سپس نحوه تعیین پارامترهای مکانیکی و مقاومتی مصالح تشکیل دهنده نمونه‌ها بیان می‌شود. در مرحله بعد نتایج بارگذاری فشاری نمونه‌های مکعبی و دیسکی حاوی یک ترک ارائه و نتایج آزمایشگاهی با نتایج عددی مقایسه می‌گردد. در ادامه نتایج بارگذاری فشاری دو سری نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار؛ سری اول برای مطالعه تاثیر طول خط واصل دو ترک و سری دوم برای مطالعه تاثیر شیب خط واصل دو ترک بر مکانیزم رشد، اتصال و گسیختگی نمونه ارائه و سپس با نتایج مطالعات عددی مقایسه می‌شود.

در پایان در فصل هفتم، نتایج کلی پایان‌نامه و پیشنهادات ارائه شده برای مطالعات بعدی بیان می‌شود.

فصل دوم

مبانی مکانیک شکست

۲ - ۱ - مقدمه

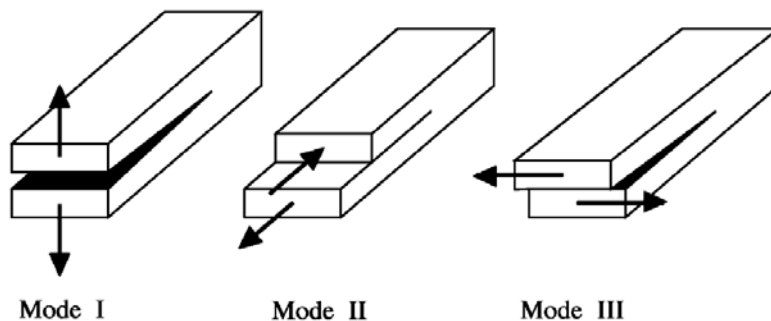
علی‌رغم رفاه و آسایشی که دانش فنی برای بشر بوجود آورده است متأسفانه شکست ناگهانی و غیر منتظره بعضی سازه‌های مهندسی خسارات مالی و جانی فراوانی را در بر داشته است. در بررسی علل شکست، محققین دریافته‌اند که طراحی بسیاری از این سازه‌ها بر مبنای تئوری ارتجاعی و مقاومت مصالح درست بوده است و عامل شکست ترک‌هایی بوده است که در سازه وجود داشته و یا در حین کار ایجاد شده است. تجزیه و تحلیل این سازه‌ها بر مبنای دو علم فوق‌الذکر موفقیت‌آمیز نبوده است لذا در دهه دوم قرن بیستم علم جدیدی بنام مکانیک شکست توسط گریفیث پایه‌گذاری شد که تجزیه و تحلیل سازه‌ها را بر مبنای وجود ترک در آنها بررسی می‌کند.

در این فصل مبانی علم مکانیک شکست و کمیت‌های اساسی این حوضه بطور مختصر توضیح داده می‌شود. بدین منظور حالت‌های مختلف انتشار ترک، میدان‌های جابجایی و تنش در نوک ترک، پارامترهای مکانیک شکست (ضرایب تمرکز تنش و چقرمگی شکست مواد)، روش‌های محاسبه ضرایب تمرکز تنش (برون‌یابی جابجایی، برون‌یابی تنش، انتگرال I ، انتگرال M) و معیارهای رشد ترک تشریح شده است.

۲ - ۲ - حالات مختلف رشد ترک

همانطور که در شکل (۱-۲) مشهود است یک ترک می‌تواند به سه طریق تحت تنش واقع شده و گسترش یابد؛ مود I یا مود بازشدگی متداول‌ترین فرم گسیختگی در اثر رشد ترک است. در این مود سطوح ترک نسبت به صفحات بطور عمود برهم در جهت مخالف یکدیگر تغییر مکان می‌دهند. مود II

یا مود برشی که دو سطح ترک نسبت به هم در جهت عمود بر خط نوک ترک می‌لغزند و مود III یا مود پارگی که لغزش دو صفحه ترک در جهتی به موازات خط پروفیل ترک اتفاق می‌افتد.



شکل (۱-۲): سه مود اصلی انتشار ترک (Chang et al., 2002).

۲ - ۳ - میدان تنش و تغییر مکان در نوک ترک

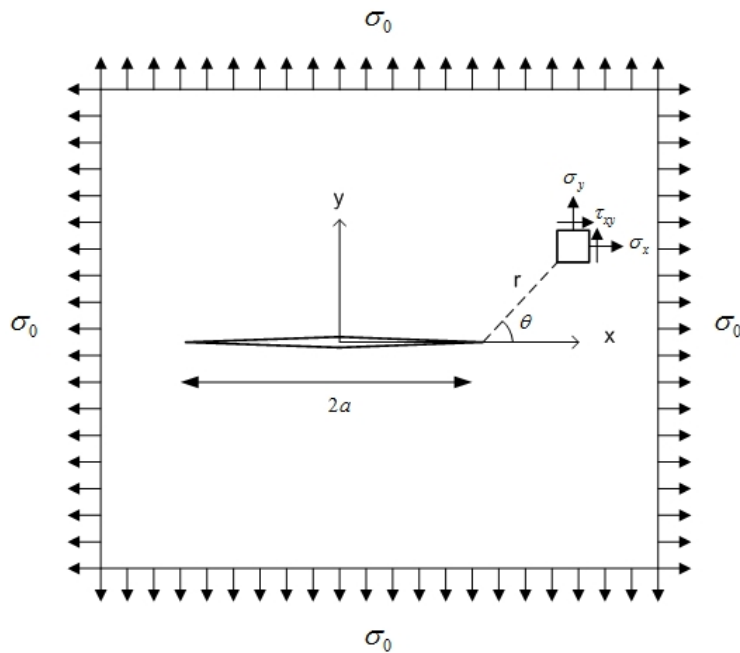
اولین گام در بررسی یک ترک، تحلیل تنش قطعه ترک‌دار است که توسط آن بررسی رشد ترک و در نتیجه حساسیت قطعه به ترک امکان پذیر می‌شود. برای حل مسائل ترک و تعیین میدان تنش و تغییر مکان در مجاورت نوک ترک، دو راه‌حل تحلیلی کلاسیک توسط وسترگارد^۱ (۱۹۳۹) و ویلیامز^۲ (۱۹۵۲) ارائه شده است. راه‌حل وسترگارد آسان بوده و عموماً این راه‌حل مورد استفاده قرار می‌گیرد (Saouma, 2000). اگر مطابق شکل (۲-۲) یک ترک نوع اول به طول $2a$ در یک صفحه با ابعاد بی‌نهایت در حالت تنش مسطح در نظر گرفته شود و همچنین ماده تشکیل دهنده این جسم نیز همگن و همسانگرد فرض گردد، میدان تنش ارتجاعی در نوک ترک بر مبنای راه‌حل وسترگارد بصورت بسط تیلور زیر خواهد بود (قاجار، ۱۳۸۱):

$$= c_1 \left(\frac{r}{a} \right)^{-1/2} f_{1ij}(\theta) + c_2 \left(\frac{r}{a} \right)^0 f_{2ij}(\theta) + c_3 \left(\frac{r}{a} \right)^{1/2} f_{3ij}(\theta) + \dots \quad (۱-۲)$$

یا:

$$\sigma_{ij} = \frac{c_1}{\sqrt{r}} f_{ij}(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{(n-1)/2} f_{nij}(\theta) \quad (۲-۲)$$

1 - Westergaard
2 - Williams



شکل (۲-۲): ترک در یک صفحه به ابعاد بینهایت تحت بار کششی دو محوری یکنواخت

در مجاورت نوک ترک ($r \ll a$) می‌توان از جملات مرتبه بالا صرف‌نظر کرد و معادلات را بصورت زیر نوشت:

$$\sigma_{ij} = \frac{c_1}{\sqrt{r}} f_{ij}(\theta) \quad (۳-۲)$$

که در آن (r, θ) مختصات قطبی المان بوده و c_1 بصورت زیر تعریف می‌شود:

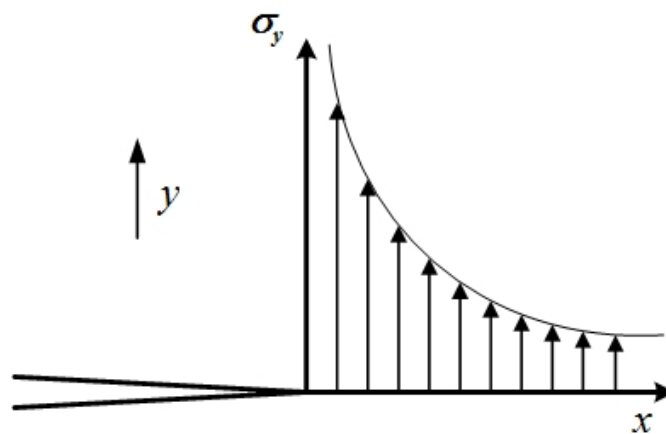
$$c_1 = \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2}} \quad (۴-۲)$$

بنابراین معادلات تنش و جابجایی برای ترک نوع اول بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (۵-۲)$$

همانطور که انتظار می‌رود در حالت ارتجاعی، تنش‌ها متناسب با تنش خارجی σ_0 بوده و با ریشه دوم اندازه ترک و با عکس ریشه دوم r تغییر می‌کنند. وقتی که r بسمت صفر میل می‌کند مقادیر تنش از

فرمول‌های فوق بسمت بی‌نهایت میل می‌کنند. به عبارت دیگر در نوک ترک تابع تنش تکین می‌باشد که باید به طریقی رفع شود. توزیع تنش σ_y بر حسب r برای $\theta = 0$ در شکل (۳-۲) رسم شده است. برای مقادیر زیاد r تنش σ_y بسمت صفر میل می‌کند در صورتیکه باید بسمت σ میل کند. علت این است که این معادلات فقط برای یک ناحیه مشخص اطراف نوک ترک صادق است. هر یک از معادلات (۵-۲) جمله اول یک سری می‌باشند. در مجاورت نوک ترک جمله اول سری توزیع تنش را با تقریب خوبی نشان می‌دهد. زیرا جملات بعدی (جمله دوم به بعد) در مقایسه با جمله اول کوچک می‌باشند. بنابراین با افزایش r مقدار جمله اول سری کوچک شده و نمی‌توان از جملات بعدی صرف‌نظر کرد. با در نظر گرفتن جملات بعدی مقدار σ_y صفر نشده بلکه برابر σ خواهد شد.



شکل (۳-۲): تنش ارتجاعی σ_y در نوک ترک (فاجار، ۱۳۸۱)

۲-۴ - ضریب تمرکز تنش

مفهوم ضریب تمرکز تنش را اروین^۱ (۱۹۵۷) معرفی کرد. با استفاده از این کمیت توزیع تنش در نوک ترک قابل بیان است. ضریب تمرکز تنش به دو عامل تنش وارد بر جسم و طول ترک بستگی دارد. این ضریب برای ترک نوع اول با K_I نشان داده می‌شود. بنابراین معادلات (۵-۲) بر حسب این کمیت به صورت زیر خواهد بود (جاویدراد، ۱۳۸۳):

1 - Ervin

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (6-2)$$

که در آن $K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ است. میدان تغییر مکان نیز برای ترک مود I با معادلات زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned}u &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ v &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}\quad (7-2)$$

با این توصیف روابط تنش و تغییر مکان در ترک‌های مود II نیز به صورت زیر خواهد بود:

مود II :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ u &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ v &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}\quad (8-2)$$

با استفاده از روابط تبدیل، معادلات تنش برای مودهای I و II در مختصات قطبی به صورت زیر

خواهند بود (جاویدراد، ۱۳۸۳):

مود I :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (9-2)$$

مود II :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right)\end{aligned}\quad (۱۰-۲)$$

در مکانیک شکست الاستیک خطی، وقتی بارگذاری اعمال شده ترکیبی از مودها را تولید نماید، با ترکیب خطی مودها می‌توان میدان تنش و تغییر مکان را برای آن مود ترکیبی محاسبه نمود. برای نمونه حاوی ترک شبیدار تحت کشش تک‌محوری معادلات تنش و تغییر مکان در مختصات دکارتی و قطبی در پیوست (الف) ارائه شده است (جاویدراد، ۱۳۸۳).

۲-۵ - پارامترهای مکانیک شکست

برای تحلیل مسائل مکانیک شکست و مطالعه رشد ترک، پارامترهای ضرایب تمرکز تنش (K) و ضرایب تمرکز تنش بحرانی (چقرمگی شکست مواد) در قالب معیارهای شکست کاربرد ویژه‌ای دارند. بنابراین ابتدا مفهوم این پارامترها و سپس نحوه محاسبه آنها بیان می‌شود.

۲-۵-۱ - ضرایب تمرکز تنش

بیشتر سازه‌ها دارای ناپیوستگی‌های هندسی از جمله سوراخ، شکاف، ترک و غیره می‌باشند. اگر شکل هندسی این ناپیوستگی‌ها کاملاً معلوم باشد، می‌توان ضریبی به عنوان ضریب تمرکز تنش را به گونه‌ای محاسبه کرد که بر اساس آن بتوان تنش موضعی را بر حسب تنش اسمی اعمالی بر سازه، در اطراف آن ناپیوستگی‌ها محاسبه نمود. به این ضریب، ضریب تمرکز تنش هندسی می‌گویند و آن را با نماد K نمایش می‌دهند. ضریب تمرکز تنش (با واحد $\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$) به هر دو عامل تنش وارده به سازه در دوردست (σ) و هندسه سازه (شامل طول ترک a) بستگی دارد. بنابراین سطح بارگذاری روی ترک بر حسب ضریب شدت تنش قابل بیان است و از این حیث این ضریب شبیه تنش می‌باشد. چون

هر قطعه‌ای که تحت بار قرار می‌گیرد در واقع تا سطح مشخصی تنش در آن ایجاد می‌شود، یک قطعه ترک دار نیز که تحت بار واقع می‌گردد تا سطح معینی ضریب تمرکز تنش در آن ایجاد می‌شود.

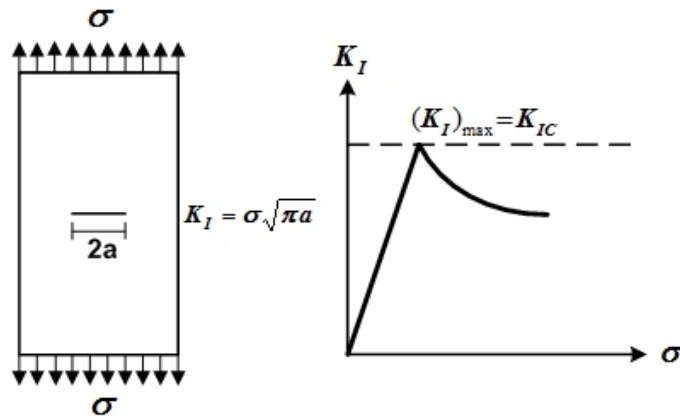
۲- ۵- ۲- چقرمگی شکست

چقرمگی شکست یا استحکام ماده در مقابل شکست به میزان توانایی ماده جهت تحمل بارهای وارده در حضور یک ترک اطلاق می‌گردد. برای موادی که رفتار ارتجاعی خطی دارند، این خاصیت معمولاً بر حسب کمیتی بنام مقدار بحرانی ضریب تمرکز تنش بیان می‌شود که در یک درجه حرارت معین تابعی از ضخامت قطعه ترک‌دار است (جاویدراد، ۱۳۸۳).

۲- ۵- ۲- ۱- چقرمگی شکست مود کششی (مود I)

مطابق شکل (۲-۴) برای یک صفحه به ضخامت واحد با یک ترک مرکزی بطول $2a$ که تحت بار کششی یکنواخت قرار گرفته است، مقدار ضریب تمرکز تنش از رابطه $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ قابل محاسبه می‌باشد.

با افزایش تنش اعمالی، مقدار ضریب تمرکز تنش نیز افزایش می‌یابد. ولی از آنجائی که هر ماده دارای تحمل محدودی است (همانند تنش تسلیم (σ_{ys}) که در واقع حد تحمل قطعه نرم در مقابل تنش وارده و یا تنش گسیختگی که حد نهائی تحمل ماده ترد است)، منطقی است که حد تحملی برای ضریب تمرکز تنش موجود باشد که بتوان آنرا از مشخصات ماده دانست. در حالت مود کششی مقدار حداکثر ضریب تمرکز تنش (ضریب تمرکز تنش بحرانی) را چقرمگی شکست مود I نامیده و با نماد K_{IC} نشان می‌دهند.

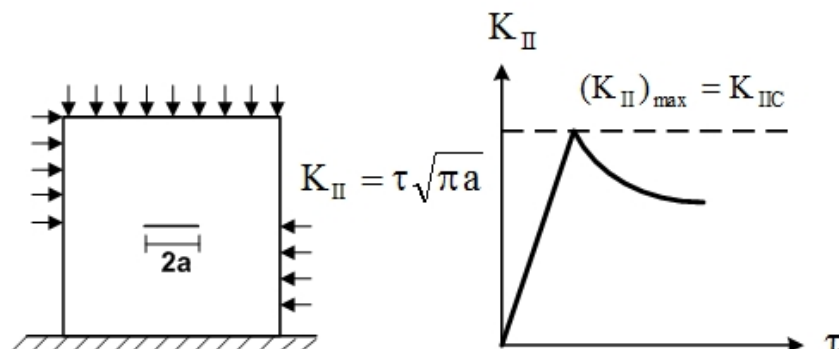


شکل (۴-۲): مود کششی خالص (جاویدراد، ۱۳۸۳)

به همین ترتیب فاکتور تمرکز تنش بحرانی یا چقرمگی شکست در مود II را با K_{IIC} نشان می‌دهند. فاکتور تمرکز تنش مواد مختلف با استفاده از روش‌های مختلف آزمایشگاهی اندازه‌گیری می‌شود (جاویدراد، ۱۳۸۳).

۲ - ۵ - ۲ - چقرمگی شکست مود برشی (مود II)

چنانچه مطابق شکل (۵-۲) ترک در یک جسم در حالت مود برشی خالص قرار بگیرد، ضریب تمرکز تنش از رابطه $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$ قابل محاسبه است. با افزایش تنش برشی اعمالی بر جسم، ضریب تمرکز تنش برشی نیز افزایش می‌یابد. حداکثر ضریب تمرکز تنش برشی که منجر به رشد ترک می‌شود، جز خواص مواد بوده و ضریب تمرکز تنش بحرانی یا چقرمگی شکست مود برشی (مود II) نامیده می‌شود.



شکل (۵-۲): مود برشی خالص (Rao et al., 2003)

۲ - ۶ - محاسبه ضرایب تمرکز تنش

روش‌های موجود برای محاسبه ضرایب تمرکز تنش به سه دسته؛ روش‌های تجربی، روش‌های تحلیلی و روش‌های عددی تقسیم می‌شوند. روش‌های تجربی مثل فتوالاستیسیته و کالیبراسیون نرمی معمولاً پر هزینه و زمان بر بوده و فقط به نمونه‌های ساده از نظر هندسی و بارگذاری قابل اعمال است (جاویدراد، ۱۳۸۳). روش‌های تحلیلی نیز فقط در مدل‌هایی با هندسه و بارگذاری ساده توسعه داده شده‌اند. بنابراین در مدل‌های با هندسه و بارگذاری پیچیده عمدتاً از روش‌های عددی نظیر روش المان محدود و المان مرزی استفاده می‌شود. برای محاسبه ضریب تمرکز تنش با یک روش عددی، ابتدا میدان تنش‌ها و جابجائی‌ها در حوالی نوک ترک تعیین شده و ضریب تمرکز تنش محاسبه می‌گردد. برای محاسبه ضریب تمرکز تنش از روش‌های مستقیم نظیر برون‌یابی تنش و برون‌یابی جابجائی و روش‌های غیر مستقیم نظیر انتگرال J ، انرژی گریفیث و مشتق سختی استفاده می‌شود (Banks and Sherman, 1986).

۲ - ۶ - ۱ - روش برون‌یابی تنش

در روش برون‌یابی تنش، ضرایب تمرکز تنش (K) با برون‌یابی مولفه‌های تنش در صفحه جلوی ترک ($\theta = 0$) بدست می‌آید (Sanford, 2003). با استفاده از معادلات وسترگارد برای توزیع تنش و جابجائی در حوالی نوک ترک (معادلات ۲-۶)، در خط جلوی ترک ($\theta = 0$) تنش‌های نرمال عمودی و برشی بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}(r, 0) &= \frac{K_I^*}{\sqrt{2\pi r}} \\ \tau_{xy}(r, 0) &= \frac{K_{II}^*}{\sqrt{2\pi r}}\end{aligned}\quad (۱۱-۲)$$

با استفاده از روابط بالا ضرایب تمرکز تنش بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

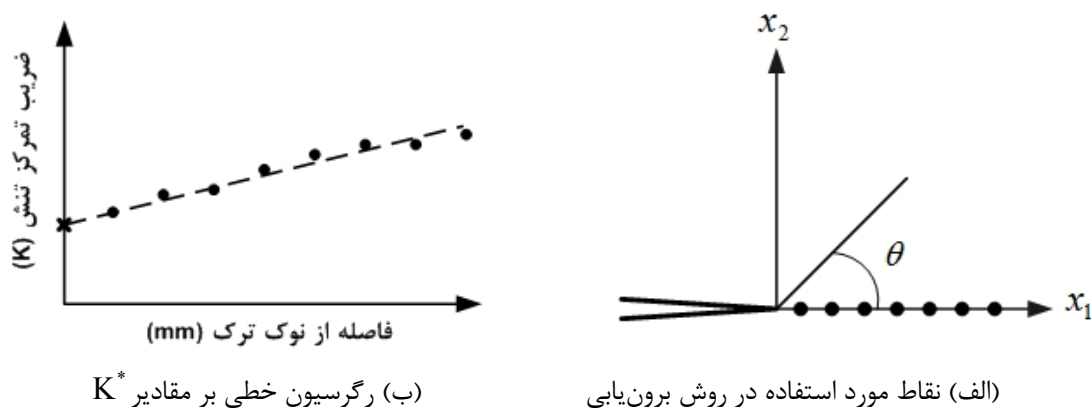
$$\begin{aligned}K_I^* &= \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, 0) \\ K_{II}^* &= \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, 0)\end{aligned}\quad (۱۲-۲)$$

در روش برون‌یابی تنش، مولفه‌های تنش (σ_{yy}, τ_{xy}) در نقاط مشخصی در طول یک شعاع معلوم در نوک ترک (معمولاً $\theta = 0$) با استفاده از روش‌های عددی تعیین می‌شود (شکل ۲-۶-الف) و با استفاده از روابط (۲-۱۲) مقادیر K^* در نقاط مورد نظر محاسبه می‌گردد. در واقع با محاسبه مقادیر K^* ، تابعی برای K بر حسب فاصله r بدست می‌آید. مقدار این تابع در $r = 0$ منجر به مقدار K می‌شود (روابط ۲-۱۳). یعنی با رگرسیون خطی بر مقادیر K^* بدست آمده، خطی برازش می‌شود و در نهایت از تقاطع این خط با محور قائم ($r = 0$) ضرایب تمرکز تنش تعیین می‌شوند (شکل ۲-۶-ب).

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} K_I^*$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} K_{II}^*$$

(۲-۱۳)



شکل (۲-۶): نقاط مورد استفاده در روش برون‌یابی تنش و رگرسیون خطی بر مقادیر K^* برای تعیین ضریب تمرکز تنش

۲ - ۶ - روش برون‌یابی جابجائی

در روش برون‌یابی جابجائی، ضریب تمرکز تنش (K) با برون‌یابی مولفه‌های جابجائی در صفحه پشت ترک بدست می‌آید (جاویدراد، ۱۳۸۳). با استفاده از معادلات وسترگارد برای توزیع تنش و جابجائی در حوالی نوک ترک (معادلات ۲-۷)، در خط پشت ترک ($\theta = \pi$) مولفه‌های افقی و قائم جابجائی بصورت زیر خواهد بود:

$$u(r, \pi) = \frac{K_{II}^*}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (2 - 2\nu)$$

$$v(r, \pi) = \frac{K_I^*}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (2 - 2\nu) \quad (۱۴-۲)$$

با استفاده از روابط بالا ضرایب تمرکز تنش به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

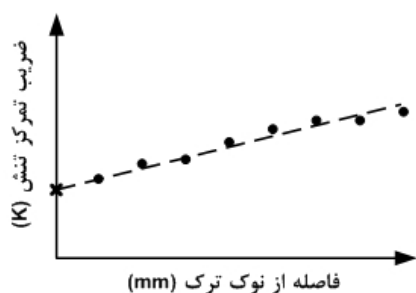
$$K_I^* = \left(\frac{\mu}{2 - 2\nu} \right) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot v(r, \pi)$$

$$K_{II}^* = \left(\frac{\mu}{2 - 2\nu} \right) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot u(r, \pi) \quad (۱۵-۲)$$

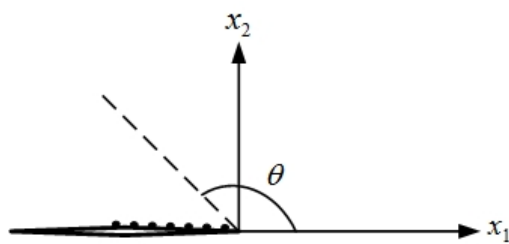
در این روش، مولفه‌های جابجایی (u, v) در نقاط مشخصی (شکل ۷-۲ الف) در خط پشت ترک با استفاده از روش‌های عددی تعیین می‌شود و با استفاده از روابط (۱۵-۲) مقادیر K^* در $(\theta = \pi)$ با استفاده از روش‌های عددی تعیین می‌شود و با استفاده از روابط (۱۵-۲) مقادیر K^* در نقاط مورد نظر محاسبه می‌گردد. با محاسبه مقادیر K^* ، تابعی برای K بر حسب فاصله r بدست می‌آید. مقدار این تابع در $r = 0$ مقدار K را مشخص می‌کند (روابط ۱۶-۲). بدین منظور با رگرسیون خطی بر مقادیر K^* به دست آمده، خطی برازش می‌شود و از تقاطع این خط با محور قائم $(r = 0)$ ضرایب تمرکز تنش تعیین می‌شوند (شکل ۷-۲ ب).

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} K_I^*$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} K_{II}^* \quad (۱۶-۲)$$



(ب) رگرسیون خطی بر مقادیر K^*



(الف) نقاط مورد استفاده در روش برون‌یابی جابجایی

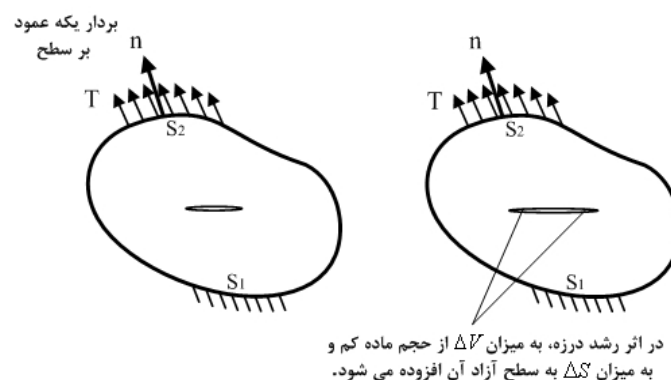
شکل (۷-۲): نقاط مورد استفاده در روش برون‌یابی جابجایی و رگرسیون خطی بر مقادیر K^* برای تعیین ضریب تمرکز تنش مود کششی

۲ - ۶ - ۳ - روش انتگرال J

روش انتگرال J اولین بار بطور مستقل توسط چربانوف^۱ (۱۹۶۷) و رایس^۲ (۱۹۶۸) پیشنهاد شد. این انتگرال روشی برای بیان تنش و کرنش ایجاد شده در نوک ترک است و در ابتدا برای محاسبه میزان رهایی انرژی کرنشی مواد همگن ارتجاعی خطی یا غیر خطی فارغ از نیروهای جسمی و تنش‌های اولیه در حالت دو بعدی معرفی گردید. ولیکن این روش قدرتمند هم اکنون برای مواد الاستوپلاستیک گسترش داده شده و همچنین جداسازی این کمیت برای مودهای مختلف نیز امکان پذیر گردیده است.

یک محیط سنگی حاوی درزه که مطابق شکل (۲-۸) دارای تغییر مکان پیش فرض $\bar{u}$ در مرز S_1 و نیروهای گسترده T در مرز S_2 است، در نظر گرفته می‌شود. اگر سطح آزاد این جسم S و حجم آن V بوده و در اثر گسترش درزه، حجم آن به میزان ΔV کاهش و سطح آزاد آن به اندازه ΔS افزایش یابد، در اثر رشد ترک تغییر انرژی پتانسیل جسم برابر تفاضل انرژی کرنشی ماده جدا شده از جسم و کار لازم برای ایجاد سطح جدید ترک است و به صورت زیر بیان می‌شود (جاویدراد، ۱۳۸۳). این تغییر در انرژی پتانسیل کمیتی منفی می‌باشد.

$$-\Delta U = \int_{\Delta V} W.dV - \int_{\Delta S} T.\Delta u.dS \quad (2-17)$$



شکل (۲-۸): درزه در یک محیط سنگی قبل و بعد از رشد (جاویدراد، ۱۳۸۳)

1- Cherepanov
2- Rice

که در آن W چگالی انرژی کرنشی بوده و برابر است با:

$$W = \int \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} \quad (۱۸-۲)$$

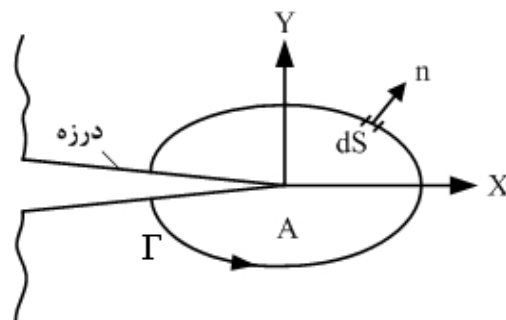
در رابطه بالا σ تانسور تنش و ϵ تانسور کرنش است. رابطه (۱۷-۲) در حالت دو بعدی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$-\Delta U = \int_{\Delta A} W \cdot dA - \int_{\Delta S} T \cdot \Delta u \cdot dS \quad (۱۹-۲)$$

که در آن ΔS و ΔA به ترتیب مرز جدید ایجاد شده و سطح ماده خارج شده جهت ایجاد رشد ترک می‌باشد. برای مرز Γ حول نوک ترک که دارای سطح محصور A است (شکل ۹-۲)، حد رابطه (۱۹-۲) را برای رشد بسیار کوچک ترک به صورت زیر می‌توان نوشت (جاویدراد، ۱۳۸۳):

$$-\frac{\partial U}{\partial a} = \iint_A \frac{\partial W}{\partial a} dx \cdot dy - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial a} dS \quad (۲۰-۲)$$

در سیستم مختصات نشان داده شده در شکل (۹-۲) da را با dx جایگزین نموده و با استفاده از قضیه گرین برای تبدیل انتگرال دو بعدی به انتگرال روی خط، رابطه (۲۰-۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:



شکل (۹-۲): منحنی بسته دلخواه حول نوک ترک

$$-\frac{\partial U}{\partial a} = \iint_A \frac{\partial W}{\partial x} dx \cdot dy - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial x} dS \quad (۲۱-۲)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial a} = \int_{\Gamma} \left[W \cdot dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dS \right] \quad (۲۲-۲)$$

$-\frac{\partial U}{\partial a}$ را با نماد J نشان داده شده و انتگرال J بصورت زیر تعریف می‌شود (جاویدراد، ۱۳۸۳):

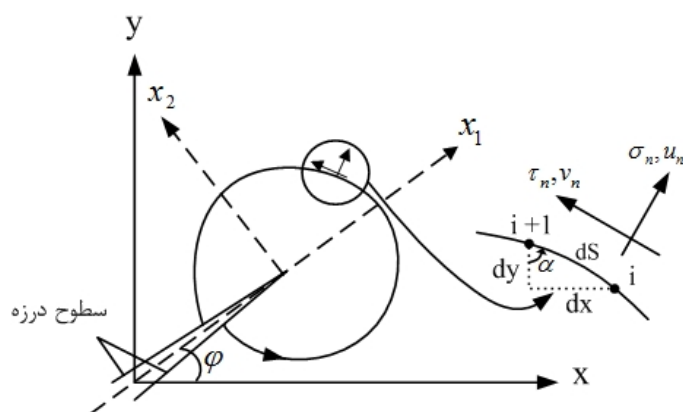
$$J = \int_{\Gamma} \left[W \cdot dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dS \right] \quad (2-23)$$

خاصیت مستقل از مسیر بودن انتگرال J از اهمیت زیادی برخوردار است. علت اصلی آن در این است که می‌توان با اطلاعات موجود در منطقه‌ای نسبتاً دور از نوک ترک، انرژی موجود در نوک ترک را برای هر دو مواد ارتجاعی خطی و غیر خطی محاسبه کرد.

در حالت کلی (مود ترکیبی)، انتگرال J دو مولفه دارد که از معادله زیر محاسبه می‌شوند:

$$J_k = \int_{\Gamma} (W n_k - t_j u_{j,k}) ds, \quad k=1, 2 \quad (2-24)$$

باید توجه شود که معادله مذکور در دستگاه مختصاتی بدست آمده که یکی از محورهاهای آن در امتداد ترک واقع شده است و این در حالی است که گاهی شرایط مساله ایجاب می‌کند که تنش‌ها و تغییر مکان‌ها را در دستگاه مختصاتی محاسبه شود که بر دستگاه مورد بحث منطبق نیست. مطابق شکل (۲-۱۰) یک ترک مورب دلخواه در یک جسم دو بعدی و با فرض همگن بودن مواد در نظر گرفته می‌شود (نورین، ۱۳۷۵).



شکل (۲-۱۰): مسیر انتگرال‌گیری برای یک ترک دلخواه و موقعیت دستگاه‌های مختصات محلی $x_1 x_2$ و مرجع XY (نورین، ۱۳۷۵).

در حالت دو بعدی مولفه J_1 و J_2 بر حسب بردار جابجایی و میدان تنش و کرنش در نقاط روی مسیر انتگرال‌گیری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$J_1 = \int_{\Gamma} W(-\sin \varphi dx + \cos \varphi dy) - \int_{\Gamma} \sigma_x \varepsilon_x \cos \varphi dy - \sigma_y \varepsilon_y \sin \varphi dx + \tau_{xy} \varepsilon_y \sin \varphi dy - \tau_{xy} \varepsilon_x \cos \varphi dx + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} \cos \varphi dy - \tau_{xy} \varepsilon_{xy} \sin \varphi dx + (\sigma_x \sin \varphi - \tau_{xy} \cos \varphi) \frac{\partial u}{\partial y} dy - (\sigma_y \cos \varphi - \tau_{xy} \sin \varphi) \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (25-2)$$

$$J_2 = -\int_{\Gamma} W(\cos \varphi dx + \sin \varphi dy) + \int_{\Gamma} \sigma_x \varepsilon_x \sin \varphi dy + \sigma_y \varepsilon_y \cos \varphi dx - \tau_{xy} \varepsilon_x \sin \varphi dx - \tau_{xy} \varepsilon_y \cos \varphi dy + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} \sin \varphi dy - \tau_{xy} \varepsilon_{xy} \sin \varphi dx + (\sigma_x \cos \varphi - \tau_{xy} \sin \varphi) \frac{\partial u}{\partial y} dy - (\sigma_y \sin \varphi - \tau_{xy} \cos \varphi) \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (26-2)$$

اما با توجه به اینکه

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (27-2)$$

چنانچه $dx = 0$ باشد، آنگاه $du = \frac{\partial u}{\partial y} dy$ و اگر $dy = 0$ باشد، آنگاه $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx$ خواهد بود بنابراین

مسیر انتگرال گیری اگر مانند شکل (۲-۱۱) مستطیل (یا مربع) شکل بوده و اضلاع آن به موازات محورهای دستگاه مختصات مرجع xy واقع شده باشد، آنگاه روابط (۲-۲۵) و (۲-۲۶) را می توان به شکل ساده زیر نوشت (نورین، ۱۳۷۵):

برای مسیر افقی:

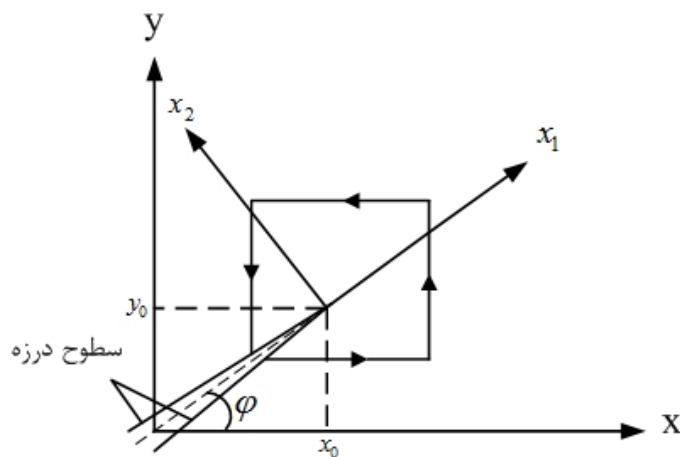
$$J_1 = \int_{\Gamma} [(-W + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \sin \varphi + \tau_{xy} \varepsilon_x \cos \varphi] dx + [\sigma_y \cos \varphi - \tau_{xy} \sin \varphi] dv \quad (28-2)$$

$$J_2 = \int_{\Gamma} [(-W + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \cos \varphi - \tau_{xy} \varepsilon_x \sin \varphi] dx - [\sigma_y \sin \varphi + \tau_{xy} \cos \varphi] dv$$

برای مسیر قائم:

$$J_1 = \int_{\Gamma} [(W - \sigma_x \varepsilon_x - \tau_{xy} \gamma_{xy}) \cos \varphi + \tau_{xy} \varepsilon_y \sin \varphi] dy - [\sigma_x \sin \varphi - \tau_{xy} \cos \varphi] du$$

$$J_2 = \int_{\Gamma} [(-W + \sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \sin \varphi - \tau_{xy} \varepsilon_y \cos \varphi] dy - [\sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi] du \quad (29-2)$$



شکل (۱۱-۲): مسیر انتگرال گیری به شکل مستطیل که اضلاع آن به موازات دستگاه مختصات مرجع قرار گرفته‌اند (نورین، ۱۳۷۵).

در روابط فوق برای حالت الاستیک خطی W از رابطه زیر حساب می‌شود (نورین، ۱۳۷۵):

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \quad (۳۰-۲)$$

روابط (۲۸-۲) و (۲۹-۲) را می‌توان بطور عددی روی گره‌های مدل مش گالرکین (و یا نقاط انتگرال گیری گوس) که روی مسیر انتگرال گیری قرار می‌گیرند، محاسبه نمود.

۲ - ۶ - ۳ - ۱ - رابطه ضرایب تمرکز تنش با مولفه‌های انتگرال J

بعد از محاسبه مولفه‌های انتگرال J (J_1, J_2) با استفاده از روابط زیر می‌توان ضرایب تمرکز تنش مود I و II را تعیین کرد (Brighenti, 2005).

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (۳۱-۲)$$

$$J_2 = \frac{2K_I K_{II}}{E'}$$

$$\begin{cases} E' = E/(1-\nu^2) & \text{For plane strain} \\ E' = E & \text{For plane stress} \end{cases} \quad (۳۲-۲)$$

که در آن K_I و K_{II} به ترتیب ضرایب تمرکز تنش مودهای I و II، E ضریب ارتجاعی و ν نسبت پواسون می‌باشند. استفاده از معادله (۳۱-۲) برای شکست مود ترکیبی به مشکلات مربوط به تجزیه

فاکتورهای تمرکز تنش مود I و II منجر می‌شود. بنابراین برای استخراج ضرایب تمرکز تنش از مولفه-های انتگرال J از روش‌های تجزیه مولفه‌ها و انتگرال اندرکنش M استفاده می‌شود (Brighenti, 2005).

۲ - ۳ - ۶ - روش انتگرال اندرکنش M

انتگرال اندرکنش M از انتگرال مستقل از مسیر J برای اجسام الاستیک ترک‌دار مشتق می‌شود (Sutradhar and Paulino, 2004). فرمول‌بندی انتگرال M برای محاسبه ضرایب تمرکز تنش ارائه می‌شود. همانطور که اشاره شد، انتگرال مستقل از مسیر J به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (W \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j d\Gamma, \quad (33-2)$$

که در آن $W = \int_0^{\epsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ دانسیته انرژی کرنشی، n_j بردار نرمال رو به بیرون کنتور Γ می‌باشد. اگر دو میدان مستقل مجاز در نظر گرفته و کرنش‌ها و تنش‌های میدان واقعی و میدان کمکی به ترتیب با (u, ϵ, σ) و $(u^{aux}, \epsilon^{aux}, \sigma^{aux})$ نشان داده شوند، انتگرال J میدان‌های مضاعف (واقعی و کمکی) به صورت زیر می‌تواند نوشته شود.

$$J^s = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux}) (\epsilon_{ik} + \epsilon_{ik}^{aux}) \delta_{lj} - (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux}) (u_{i,1} + u_{i,1}^{aux}) \right\} n_j d\Gamma. \quad (34-2)$$

این انتگرال به راحتی به صورت زیر تجزیه می‌شود (Sutradhar and Paulino, 2004).

$$J^s = J + J^{aux} + M. \quad (35-2)$$

که در آن J از رابطه (33-2) محاسبه می‌شود. J^{aux} به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J^{aux} = \int_{\Gamma} (W^{aux} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}^{aux}) n_j d\Gamma \quad (36-2)$$

که در آن

$$W^{aux} = \int_0^{\epsilon_{ij}^{aux}} \sigma_{ij}^{aux} d\epsilon_{ij}^{aux}, \quad (37-2)$$

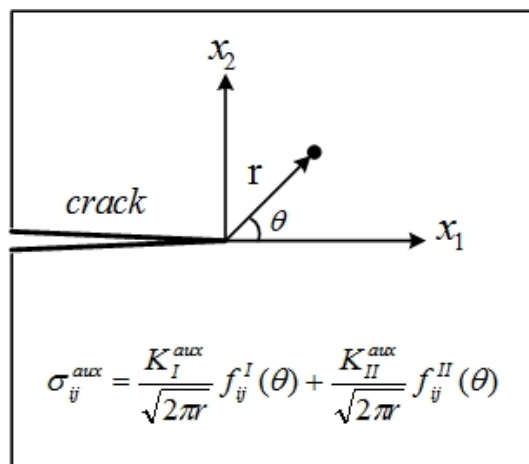
M انتگرال اندرکنش است که عبارت‌های حاصلضرب میدان‌های واقعی و کمکی را در بر می‌گیرد که به صورت زیر تعریف می‌شود (Sutradhar and Paulino, 2004).

$$M = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux} + \sigma_{ik}^{aux} \varepsilon_{ik}) \delta_{lj} - (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}) \right\} n_j d\Gamma. \quad (38-2)$$

انتگرال M فقط عبارات اندرکنش را در بر می‌گیرد و مستقیماً برای حل مود ترکیبی مسائل مکانیک شکست بکار می‌رود.

ضرایب تمرکز تنش مود ترکیبی را با تعریف مناسب میدان‌های کمکی، می‌توان از انتگرال اندرکنش، معادله (۳۸-۲)، استخراج کرد. مطابق شکل (۱۲-۲) مبدا مختصات دکارتی محلی و مختصات قطبی در نوک ترک واقع می‌شوند. مطابق شکل (۱۲-۲) میدان تنش‌های فرعی (بر حسب مختصات قطبی) به صورت زیر بیان می‌شود (Sutradhar and Paulino, 2004).

$$\sigma_{ij}^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta), \quad (39-2)$$



شکل (۱۲-۲): میدان کمکی برای ضرایب تمرکز تنش (Sutradhar and Paulino, 2004).

توابع زاویه $f_{ij}(\theta)$ در رابطه (۳۹-۲) به صورت زیر تعریف می‌شوند (Sutradhar and Paulino, 2004):

$$\begin{aligned}
f_{11}^I(\theta) &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\
f_{11}^I(\theta) &= -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right), \\
f_{22}^{II}(\theta) &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\
f_{22}^{II}(\theta) &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\
f_{12}^I(\theta) &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\
f_{11}^I(\theta) &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{۴۰-۲}$$

میدان‌های کمکی جابجائی متناظر به صورت زیر بیان می‌شوند (Sutradhar and Paulino, 2004):

$$u_i^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^I(\theta) + \frac{K_{II}^{aux}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^{II}(\theta) \quad i=1,2 \tag{۴۱-۲}$$

که در آن μ مدول برشی و K_I^{aux} و K_{II}^{aux} ضرایب تمرکز تنش کمکی موده‌های I, II می‌باشند. توابع زاویه $g_i(\theta)$ به صورت زیر داده شده‌اند.

$$\begin{aligned}
g_1^I(\theta) &= \frac{1}{4} \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right], \\
g_1^{II}(\theta) &= \frac{1}{4} \left[(2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right], \\
g_2^I(\theta) &= \frac{1}{4} \left[(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right], \\
g_2^{II}(\theta) &= -\frac{1}{4} \left[(2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right].
\end{aligned} \tag{۴۲-۲}$$

۲ - ۶ - ۳ - تعیین ضرایب تمرکز تنش با روش انتگرال M

همانطور که بحث شد، رابطه بین انتگرال J و ضرایب تمرکز تنش در موده‌های I, II (K_I, K_{II}) به صورت زیر بیان شده است (Sutradhar and Paulino, 2004).

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \tag{۴۳-۲}$$

که در رابطه (۳۲-۲) داده شده است. با توجه به روابط (۳۵-۲) و (۴۳-۲) خواهیم داشت:

$$J^s = \frac{(K_I + K_I^{aux})^2 + (K_{II} + K_{II}^{aux})^2}{E'} = J^{aux} + J + M \quad (44-2)$$

که در آن

$$J^{aux} = \frac{(K_I^{aux})^2 + (K_{II}^{aux})^2}{E'} \quad (45-2)$$

و

$$M = \frac{2}{E'} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}). \quad (46-2)$$

ضریب تمرکز تنش مود I با قرار دادن $K_I^{aux} = 1.0$ و $K_{II}^{aux} = 0.0$ در رابطه (46-2) بصورت زیر محاسبه می‌گردد (Sutradhar and Paulino, 2004).

$$K_I = \frac{E'}{2} M (K_I^{aux} = 1.0, K_{II}^{aux} = 0.0). \quad (47-2)$$

بطور مشابه، ضریب تمرکز تنش مود II با قرار دادن $K_I^{aux} = 0.0$ و $K_{II}^{aux} = 1.0$ در رابطه (46-2) به صورت زیر تعیین می‌شود (Sutradhar and Paulino, 2004).

$$K_{II} = \frac{E'}{2} M (K_I^{aux} = 0.0, K_{II}^{aux} = 1.0). \quad (48-2)$$

انتگرال M در روابط (47-2) و (48-2) با استفاده از رابطه (38-2) محاسبه می‌شود و میدان‌های کمکی در روابط (39-2) و (41-2) داده شده‌اند.

۲ - ۷ - معیارهای رشد ترک

در کاربردهای عملی برای مطالعه رشد ترک و تعیین جهت رشد آن عموماً از سه تئوری پایه استفاده می‌شود (Xiangqiao, 2006). این تئوری‌ها عبارتند از: تئوری حداکثر تنش مماسی، تئوری حداکثر نرخ رهايش انرژی کرنشی و تئوری حداقل دانسیته انرژی کرنشی. در این قسمت فرمول‌بندی این سه معیار توضیح داده می‌شود.

۲- ۷- ۱- معیار حداکثر تنش مماسی

تئوری حداکثر تنش مماسی بعنوان اولین معیار شکست در حالت مود ترکیبی توسط اردوغان و سی^۱ در سال ۱۹۶۳ ارائه شد (Erdogan and Sih, 1963). این معیار بر پایه آگاهی از وضعیت تنش در حوالی نوک ترک در مختصات قطبی استوار است. بر مبنای این معیار زمانی که حداکثر تنش مماسی ($\sigma_{\theta\max}$) به مقدار بحرانی ثابت مواد برسد، ترک از نوک آن و در یک راستای شعاعی در صفحه‌ای عمود بر راستای بزرگترین کشش ($\sigma_{\theta\max}$) منتشر می‌شود. راستای انتشار با زاویه θ_0 مشخص می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد که σ_{θ} وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که $\tau_{r\theta} = 0$ باشد. در حالت مود ترکیبی طبق رابطه (الف-۲) به صورت زیر بیان می‌شود (پیوست الف):

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (۴۹-۲)$$

پس خواهیم داشت:

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta_0}{2} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta_0}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta_0}{2} \right) = 0 \quad (۵۰-۲)$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\theta_0}{2} [K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1)] = 0$$

این معادله دو جواب دارد:

$$\theta_0 = \pm \pi \quad \text{غیر قابل قبول} \quad (۵۱-۲)$$

$$[K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1)] = 0 \quad (۵۲-۲)$$

با حل معادله دوم، راستای انتشار ترک، θ_0 به صورت زیر بدست می‌آید (Saouma, 2000):

$$\tan \frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \quad (۵۳-۲)$$

$$\Rightarrow \theta_0 = 2 \arctan \left(\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right)$$

همانطور که اشاره شد ترک زمانی رشد می‌کند که حداکثر تنش مماسی به مقدار بحرانی برسد:

$$\sigma_{\theta \max} \sqrt{2\pi r} = K_{IC} \quad (54-2)$$

از رابطه (الف-۲) داریم:

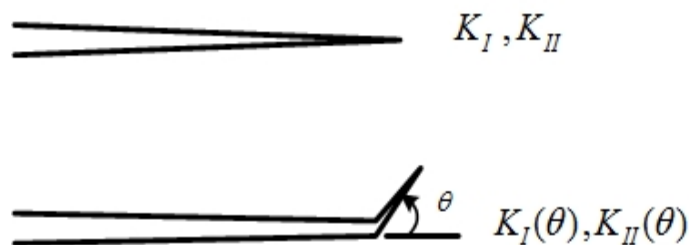
$$\sigma_{\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (55-2)$$

پس معیار شکست بصورت زیر در می آید (Saouma, 2000):

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right] = K_{IC} \quad (56-2)$$

۲ - ۷ - ۲ - معیار حداکثر نرخ رهايش انرژی کرنشی

این مدل اولین بار در سال ۱۹۶۳ توسط اردوغان و سی ارائه شد ولی با مشکلات ریاضی غیر قابل حل مواجه شد. هوسین^۱ و همکارانش در سال ۱۹۷۴ این مساله را حل کردند (Hussain et al., 1974). آنها یک رشد بی نهایت کوچک را با زاویه θ نسبت به ترک اصلی در نظر گرفتند (شکل ۲-۱۳) و ضرایب تمرکز تنش این وضعیت را بر حسب ضرایب تمرکز تنش ترک اصلی بدست آوردند (Hussain et al., 1974).



شکل (۲-۱۳): رشد بی نهایت کوچک با زاویه θ نسبت به ترک اصلی (Hussain et al., 1974)

$$\begin{Bmatrix} K_I(\theta) \\ K_{II}(\theta) \end{Bmatrix} = \left(\frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \right) \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta}{\pi} \\ \frac{\theta}{\pi} \end{pmatrix}^{\frac{\theta}{2\pi}} \begin{Bmatrix} K_I \cos \theta + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \\ K_{II} \cos \theta - \frac{1}{2} K_I \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (57-2)$$

$$G(\theta) = \frac{1}{E'} (K_I^2(\theta) + K_{II}^2(\theta)) \quad (58-2)$$

1 - Hussain

$$G(\theta) = \frac{4}{E'} \left(\frac{1}{3 + \cos^2 \theta} \right)^2 \left(\frac{1 - \frac{\theta}{\pi}}{1 + \frac{\theta}{\pi}} \right)^{\frac{\theta}{2\pi}} \quad (59-2)$$

$$\left[(1 + 3 \cos^2 \theta) K_I^2 + 8 \sin \theta \cos \theta K_I K_{II} + (9 - 5 \cos^2 \theta) K_{II}^2 \right]$$

بر مبنای این معیار ترک در راستایی (θ_0) گسترش می‌یابد که مقدار G حداکثر باشد و ترک زمانی شروع به رشد می‌کند که $G_{\max}$ یا $G(\theta_0)$ به مقدار بحرانی G_C برسد (Saouma, 2000):

$$G(\theta) = G_C \quad (60-2)$$

که در آن

$$G_C = \frac{K_{IC}^2}{E} \quad (61-2)$$

در رابطه بالا K_{IC} چقرمگی شکست مود I سنگ و E ضریب ارتجاعی می‌باشد.

۲-۷-۳ - معیار حداقل دانسیته انرژی کرنشی

این معیار توسط سی در سال ۱۹۷۴ ارائه شده و بیانگر این است که ترک از نوک آن و در راستایی (θ_0) منتشر می‌شود که دانسیته انرژی کرنشی در یک فاصله بحرانی حداقل مقدار است و زمانی رشد ترک شروع می‌شود که این حداقل مقدار به مقدار بحرانی برسد (Sih, 1973; 1974). دانسیته انرژی کرنشی dW در واحد حجم dV عبارت است از (Saouma, 2000):

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2\mu} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (62-2)$$

که در آن μ ضریب ارتجاعی برشی می‌باشد. در حالت دو بعدی این معادله بصورت زیر در می‌آید.

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{4\mu} \left[\frac{\kappa+1}{4} (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 2(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \right] \quad (63-2)$$

که در حالت کرنش مسطح $\kappa = 4 - 3\nu$ و در حالت تنش مسطح $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ می‌باشد.

با استفاده از راه‌حل وسترگاد برای صفحه ترک‌دار با ابعاد بی‌نهایت و جایگزینی تنش‌ها در معادله بالا،

خواهیم داشت (Saouma, 2000):

$$\frac{\partial W}{\partial V} = \frac{1}{r_0 \pi} (a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2) = \frac{S(\theta)}{r_0} \quad (۶۴-۲)$$

که

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16\mu} [(1 - \cos \theta)(\kappa - \cos \theta)] \\ a_{12} &= \frac{\sin \theta}{16\mu} [2 \cos \theta - (\kappa - 1)] \\ a_{22} &= \frac{1}{16\mu} [(\kappa + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)] \end{aligned} \quad (۶۵-۲)$$

این مدل بر مبنای فرضیات زیر است (Saouma, 2000):

- راستای رشد ترک به سمت نقطه‌ای است که فاکتور دانسیته انرژی کرنشی در مقایسه با سایر نقاط اطراف، حداقل باشد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} &> 0 \end{aligned} \quad (۶۶-۲)$$

- فرض بر این است ترک زمانی رشد می‌کند که $S_{\theta_{min}}$ به مقدار بحرانی S_C برسد. S_{Cr} از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$S_C = \frac{2(\kappa - 1)K_{IC}^2}{16\mu\pi} \quad (۶۷-۲)$$

۲ - ۸ - نتیجه‌گیری

پایداری سازه‌های ترک‌دار به رشد یا عدم رشد ترک‌ها وابسته است. در مکانیک شکست انتشار یا عدم انتشار ترک‌ها و تعیین چگونگی انتشار و جهت انتشار آنها با استفاده از معیارهای شکست مختلفی مطالعه می‌شود. یک معیار شکست در واقع رابطه‌ای ریاضی بین پارامترهای مخرب و پارامترهای مقاومتی محیط ترک‌دار است. بنابراین تعیین پارامترهای مخرب و پارامترهای مقاومتی برای ارزیابی شرایط رشد ترک در قالب یک معیار شکست ضروری است. پارامترهای مخرب در مکانیک شکست مولفه‌های تانسور تنش و فاکتورهای تمرکز تنش مودهای مختلف در حوالی نوک ترک می‌باشند. در

مدل‌های با هندسه ساده این پارامترها با روابط تحلیلی محاسبه می‌شوند ولی در مدل‌های پیچیده، ابتدا با بکارگیری یک روش عددی مناسب میدان تنش و جابجایی در دامنه مساله تعیین و سپس با روش‌هایی که بحث شد ضرایب تمرکز تنش محاسبه می‌شوند. پارامترهای مقاومتی در مکانیک شکست بطور عام خصوصیات ژئومکانیکی مثل چسبندگی (c)، زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) و مقاومت کششی مواد و بطور خاص چقرمگی شکست موده‌های مختلف مواد (در حالت دو بعدی K_{IIC}, K_{IC}) و میزان رهایی انرژی کرنشی بحرانی در موده‌های مختلف (G_{IIC}, G_{IC}) بوده و با روش‌های آزمایشگاهی تعیین می‌شوند.

فصل سوم

مروری بر مطالعات قبلی

۳ - ۱ - مقدمه

همانطور که اشاره شد هدف از انجام این تحقیق مدل سازی عددی شکستگی های سنگ و مطالعه انشعاب و انتشار ترک، اتصال ترک ها و نهایتاً گسیختگی نمونه ترکدار است که با استفاده از مطالعات آزمایشگاهی صحت مطالعات عددی ارزیابی می شود. از آنجائیکه مطالعه تحقیقات قبلی به فهم مسائل مکانیک شکست سنگ کمک می کند و کاربرد بهینه روش های موجود و ارائه ایده های جدید را امکان پذیر می سازد لذا در این فصل مطالعات مختلف انجام شده برای بررسی مکانیسم رشد و اتصال شکستگی های سنگ با استفاده از اصول مکانیک شکست توضیح داده شده است. در هر یک از این مطالعات روش ها و شرایط خاصی در نظر گرفته شده و نتایج خاصی بدست آمده است. مطالعات مختلف را می توان به سه دسته مطالعات تحلیلی، مطالعات عددی و مطالعات آزمایشگاهی تقسیم کرد. در ادامه در قالب این تقسیم بندی تحقیقات انجام شده بطور مختصر مورد بحث قرار می گیرد.

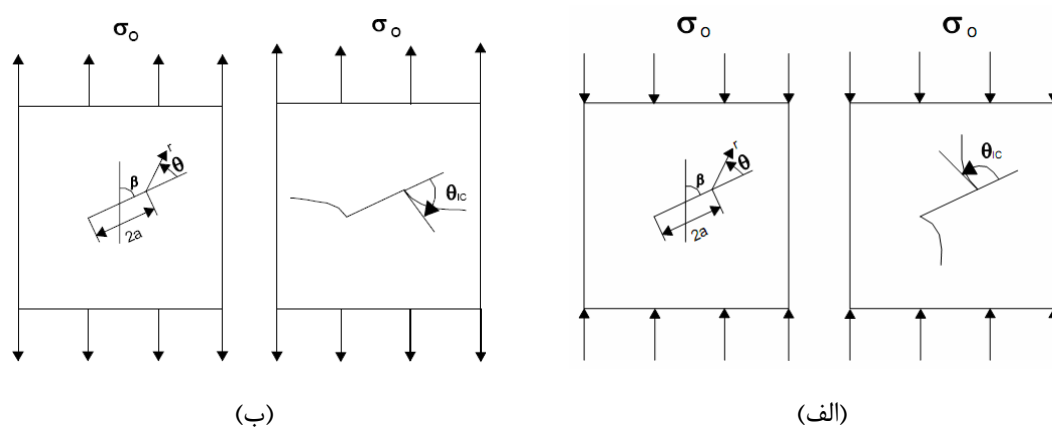
۳ - ۲ - مطالعات تحلیلی

مطالعات تحلیلی مختلف در حوضه مکانیک شکست عمدتاً به تعیین ضرایب تمرکز تنش یا کمیت های انرژی در نوک ترک پرداخته و فقط مرحله اول رشد ترک را تحلیل می کنند. این مطالعات در مسائلی با هندسه و بارگذاری ساده توسعه داده شده و با فرضیات محدود کننده همراه هستند و با رشد اولیه ترک و تغییر هندسه مسئله اعتبار خود را از دست می دهد. محیط های سنگی با تعداد ترک های دلخواه و هندسه پیچیده مطالعات تحلیلی در این زمینه را با دشواری های جدی مواجه می سازد. با این

وجود مطالعات ارزشمند کاچانوف^۱ در تحلیل میدان تنش در محیط‌های الاستیک حاوی ترک‌های متعدد و تحلیل اندرکنش ترک‌ها و اتصال آنها را می‌توان به حوزه مکانیک شکست سنگ تعمیم داد (Kachanov, 1985; 1994; 2003). به خاطر دلایل ذکر شده مطالعات تحلیلی اندکی در ارزیابی مکانیک شکست سنگ و بررسی نحوه رشد شکستگی‌های سنگ صورت گرفته است که در ادامه به دو مورد اشاره می‌گردد.

۳-۲-۱ - مطالعه رانو و همکارانش

در این مطالعه رانو و همکارانش مکانیسم رشد و زاویه انشعاب ترک را در نمونه حاوی یک ترک افقی تحت بارگذاری کششی و برشی و نمونه حاوی ترک شیبدار تحت بار کششی و فشاری مطالعه کرده و نتیجه‌گیری کرده‌اند که در این حالت‌ها ترک فقط در مود کششی رشد می‌کند (Rao et al., 2003). حالت بارگذاری کششی و فشاری نمونه حاوی ترک شیبدار در شکل (۳-۱) نشان داده شده است.



شکل (۳-۱): ترک شیبدار تحت بارگذاری محوری (الف) بار فشاری (ب) بار کششی (Rao et al., 2003).

در این مطالعه به ازای مقادیر مختلف زاویه شیب ترک (β)، زاویه احتمالی انتشار ترک کششی (θ_{IC})، ضرایب تمرکز تنش بدون بعد به ازای θ_{IC} ، زاویه احتمالی انتشار ترک برشی (θ_{IIC})، ضرایب تمرکز تنش بدون بعد به ازای θ_{IIC} و نسبت ضرایب تمرکز تنش ماکزیمم مودهای برشی و کششی برای دو حالت بارگذاری کششی و فشاری محاسبه شده است. رانو و همکارانش با ارزیابی معیارهای شکست

1- Kachanov

کلاسیک، معیار شکست جدیدی ارائه داده‌اند. این معیار بر مبنای تحلیل‌های نظری برای شکست مود ترکیبی سنگ‌های ترد ارائه شده است و بر پایه تغییرات ضرایب تمرکز تنش $K_I(\theta)$ و $K_{II}(\theta)$ بر حسب زاویه انتشار ترک θ در بازه -180° تا $+180^\circ$ و به ازای انواع بارگذاری‌ها استوار است. بسته به این که یکی از ضرایب تمرکز تنش $K_{I\max}$ یا $K_{II\max}$ زودتر به مقدار بحرانی خود K_{IC} یا K_{IIC} برسد، شکست مود I در راستای θ_I یا شکست مود II در راستای θ_{II} رخ می‌دهد. بنابراین این معیار به صورت زیر نوشته می‌شود:

برای شکست مود I:

$$\frac{K_{II\max}}{K_{I\max}} < 1, \quad K_{I\max} = K_{IC}, \quad \text{at } \theta_{IC} \quad (1-3)$$

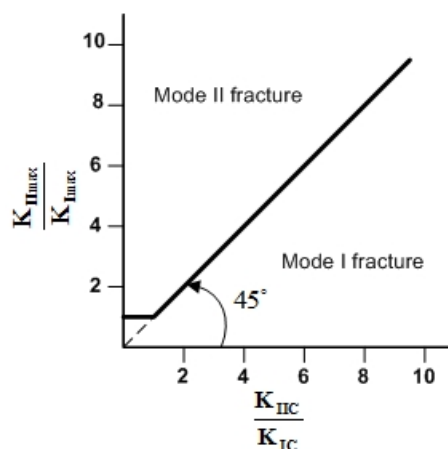
or

$$1 < \frac{K_{II\max}}{K_{I\max}} < \frac{K_{IIC}}{K_{IC}}, \quad K_{I\max} = K_{IC}, \quad \text{at } \theta_{IC} \quad (2-3)$$

و برای شکست مود II:

$$\frac{K_{II\max}}{K_{I\max}} > \frac{K_{IIC}}{K_{IC}}, \quad K_{II\max} = K_{IIC}, \quad \text{at } \theta_{IIC} \quad (3-3)$$

مکان هندسی معیار شکست جدید راثو در شکل (۲-۳) نشان داده شده است.

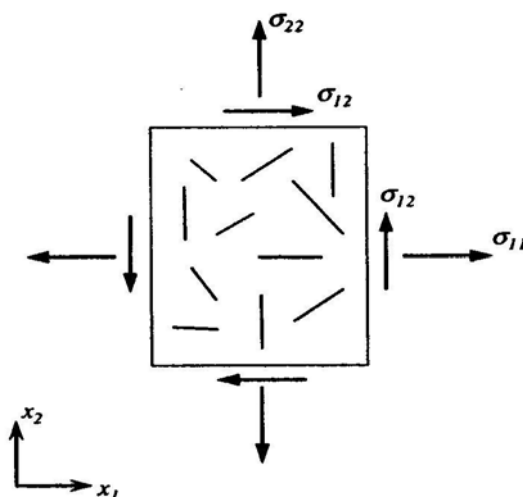


شکل (۲-۳): مکان هندسی معیار شکست جدید راثو (Rao et al., 2003)

اعتبار این مطالعه به نمونه‌های حاوی یک ترک و تحت شرایط بارگذاری ساده محدود است. با فرض اینکه معیار ارائه شده به محیط‌های حاوی ترک‌های متعدد قابل تعمیم باشد، چالش اصلی در این شرایط، محاسبه ضرایب تمرکز تنش است که با روش‌های تحلیلی قابل محاسبه نیست. بایستی توجه کرد که رابطه (۳-۳) قبلاً توسط ملین ارائه شده است (Dobroskok et al. 2006; Melin, 1986). ملین نوع مود شکست را از مقایسه نسبت ضرایب تمرکز تنش مود برشی به مود کششی با نسبت ضرایب تمرکز تنش بحرانی مود برشی به مود کششی تعیین کرده است. بر این اساس اگر رابطه (۳-۳) برقرار باشد مود رشد ترک برشی و در غیر اینصورت مود رشد ترک کششی خواهد بود.

۳ - ۲ - ۲ - مطالعات گلشنی

گلشنی^۱ برای تحلیل فرآیند رشد ترک در یک میدان دو بعدی یک مدل تحلیلی میکرومکانیکی ارائه داد (Golshani et al., 2006). همانطور که در شکل (۳-۳) نشان داده شده، محورهای مختصات عمومی به صورت x_i ($i=1,2$) در نظر گرفته شده و اندازه نمونه کوچک است ولی به اندازه کافی بزرگ فرض شده که حاوی تعداد زیادی از ریز ترک‌ها باشد. این میدان که المان حجم نمونه نامیده می‌شود، مطابق شکل زیر تحت میدان تنش σ_{11} ، σ_{22} و σ_{12} قرار گرفته است.



شکل (۳-۳) : نمونه سنگ حاوی تعداد زیادی ریز ترک (Golshani et al., 2006).

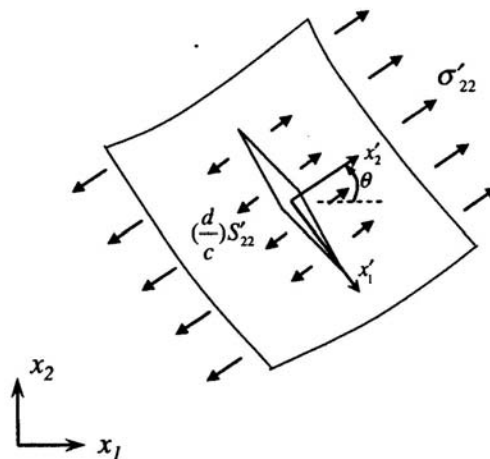
1- Golshani

در این مطالعه فرض بر این است که هر ریز ترک بالقوه به طول $2c_0$ ، وقتی که تحت افزایش تنش تفاضلی قرار می‌گیرد، رشد می‌کند و به یک ریز ترک باز به طول $2c$ تبدیل می‌شود. نیروی پیش برنده، تنش محلی کششی σ'_1 است که بر سطح ترک عمود است. σ'_1 به صورت زیر تعریف می‌شود (شکل ۴-۳):

$$\sigma'_1 = \sigma'_{22} + f(c).S'_{22} \quad (4-3)$$

علامت پریم بیانگر سیستم مختصات محلی است. یعنی سنجش نسبت به محورهای مختصات محلی x'_i ($x' = 1, 2$) صورت می‌گیرد. در رابطه مذکور S'_{22} تنش انحرافی نسبت به محور محلی x'_2 است:

$$S'_{22} = \sigma'_{22} - \frac{\sigma'_{kk}}{2} \quad (5-3)$$



شکل (۴-۳): یک ریز ترک تحت تنش کششی محلی (Golshani et al., 2006).

که در آن: σ'_{22} ، تنش نرمال وارد بر سطح ترک است که از تنش‌های فشاری بارگذاری شده ناشی می‌شود (توجه شود که تنش کششی مثبت فرض می‌شود). $f(c).S'_{22}$ تنش کششی است که اثرات ناهمواریهای سطح را منعکس می‌کند و اندازه آن متناسب با تنش انحرافی S'_{22} فرض شده است. $f(c)$ ضریب تناسبی است که فقط به c وابسته است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$f(c) = \frac{d}{c} \quad (6-3)$$

در این رابطه d یک مقیاس طول تئپیک از مواد، مثل اندازه دانه‌ها می‌باشد. با استفاده از تنش کششی محلی از معادله (۳-۴) می‌توان ضریب تمرکز تنش را برای شکست نوع اول به صورت زیر بدست آورد (Golshani et al., 2006):

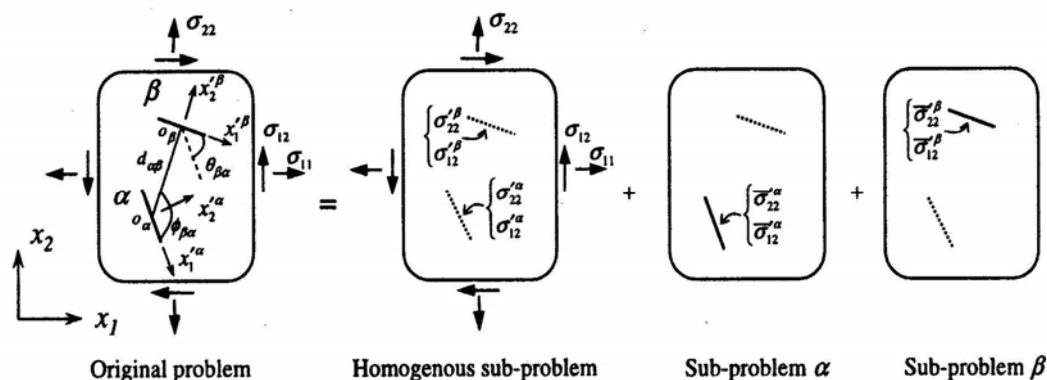
$$K_I = \sqrt{\pi c} [\sigma'_{22} + f(c).S'_{22}] \quad (۷-۳)$$

یک معیار برای قانون رشد مستقل از زمان ترک برحسب سطح شکست ($F = 0$) به صورت زیر بیان می‌شود (Golshani et al., 2006):

$$F = K_I - K_{IC} = \sqrt{\pi c} [\sigma'_{22} + f(c).S'_{22}] - K_{IC} = 0 \quad (۸-۳)$$

که K_{IC} استحکام شکست مود I است. معادله (۳-۸) قانون رشد ریز ترک نامیده می‌شود، که با آن طول $2c$ ریز ترک باز بعنوان تابعی از تنش‌های اعمالی کنترل می‌شود. استحکام شکست K_{IC} ممکن است قبل و بعد از اینکه $2\hat{c}$ به $2c$ رسید، متفاوت باشد. اگر لازم باشد می‌توانیم از مقادیر متفاوت استفاده کنیم. برای سادگی فرض شده که در طی بارگذاری K_{IC} ثابت می‌ماند.

معادله (۳-۸) بدون توجه به وجود ریز ترک‌های باز مجاور فرمول‌بندی شده است، طوریکه کاربرد آن بایستی به مراحل اولیه تغییر شکل غیر الاستیک محدود شود که اندرکنش بین ریز ترک‌های باز مهم نیست. گلشنی برای ارزیابی اندرکنش الاستیک بین ریز ترک‌ها از روش شبه کشش استفاده کرده است. برای بیان اصول روش ابتدا یک صفحه نامحدود با دو ریز ترک باز α و β (نه ریز ترک پتانسیل) به طول‌های $2c_\alpha$ و $2c_\beta$ را در نظر بگیرید که تحت میدان تنش قرار گرفته است (شکل ۳-۵):



شکل (۳-۵): تجزیه مسئله اصلی (Golshani et al., 2006).

دو سیستم مختصات x_1^{α} و x_1^{β} ($i = 1, 2$) بکار گرفته شده، طوری که مبدا آنها o_{α} و o_{β} بترتیب در مرکز ریز ترک‌های باز α و β واقع شده‌اند. باید توجه داشت که محورهای x_2^{α} و x_2^{β} عمود بر سطوح ریز ترک‌های باز در نظر گرفته شده‌اند. علائم شکل (۳-۵) عبارتند از:

$d_{\alpha\beta}$: فاصله بین مبدا دو ریز ترک باز α و β

$\theta_{\beta\alpha}$: زاویه شیب x_2^{α} نسبت به x_2^{β}

$\phi_{\beta\alpha}$: زاویه بین محور x_1^{α} و راستای $o_{\alpha}o_{\beta}$

مسئله مرزی اصلی به سه مسئله فرعی تجزیه شده است؛ مسئله فرعی همگن و دو مسئله فرعی α و β (شکل ۳-۵). در مسئله فرعی همگن هیچ ریز ترک بازی وجود ندارد و صفحه تحت همان میدان تنش σ_{11} ، σ_{22} و σ_{12} مسئله اصلی قرار گرفته است. در مسئله فرعی α یک ریز ترک باز α در جسم نامحدود تحت میدان تنش صفر قرار گرفته است. تنش‌های $\bar{\sigma}_{22}^{\alpha}$ و $\bar{\sigma}_{22}^{\alpha'}$ بعنوان ترکشن^۱ بر سطح ریز ترک باز α اعمال شده‌اند. بطور مشابه تنش‌های $\bar{\sigma}_{22}^{\beta}$ و $\bar{\sigma}_{22}^{\beta'}$ نیز بر سطح ریز ترک باز β در مسئله فرعی β اعمال شده‌اند. در مسئله مرزی اصلی، در سطح ریز ترک باز α ، تنش‌ها بایستی صفر باشد. این ضرورت بوسیله معادلات زیر تامین می‌شود:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22}^{\alpha} + \sigma_{22}^{\alpha} + \sigma_{22}^{Pa} &= 0 \\ \bar{\sigma}_{12}^{\alpha} + \sigma_{12}^{\alpha} + \sigma_{12}^{Pa} &= 0\end{aligned}\quad (۳-۹)$$

که در آن σ_{12}^{α} و σ_{22}^{α} تنش‌هایی هستند که میدان تنش در موقعیت ریز ترک α ، در مسئله فرعی همگن بوجود می‌آورد و کمیت‌های σ_{22}^{Pa} و σ_{12}^{Pa} که شبه ترکشن نامیده می‌شوند، تنش‌هایی هستند که در موقعیت ریز ترک α در مسئله فرعی β وجود دارند. شبه ترکشن‌ها بایستی طوری تعیین شوند که کلیه شرایط مرزی در مسئله اصلی تامین شوند. برای تضمین شرایط مستقل از ترکشن در سطح ریز ترک باز، با استفاده از تابع تنش مختلط مسخلی شیولی^۲، می‌توان یک معادله (که معادله سازگاری نامیده می‌شود) به صورت زیر بدست آورد:

1- Traction
2- Muskhelishvili

$$\{\sigma'^{P\alpha}\} = [\gamma'^{\alpha\beta}] (\{\sigma'^{\beta}\} + \{\sigma'^{P\beta}\}) \quad (۱۰-۳)$$

که

$$\{\sigma'^{P\alpha}\} = \{\sigma'_{11}{}^{P\alpha}, \sigma'_{22}{}^{P\alpha}, \sigma'_{12}{}^{P\alpha}\}^T \quad (۱۱-۳)$$

$$\{\sigma'^{\beta}\} = \{\sigma'_{11}{}^{\beta}, \sigma'_{22}{}^{\beta}, \sigma'_{12}{}^{\beta}\}^T$$

و

$$[\gamma'^{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} \left(\frac{c_{\beta}}{d_{\alpha\beta}} \right) \begin{bmatrix} a_1 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{c_{\beta}} \right) \right] & a_1 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{c_{\beta}} \right) \right] & a_4 \\ a_2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{c_{\beta}} \right) \right] & a_2 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{c_{\beta}} \right) \right] & a_5 \\ a_3 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{c_{\beta}} \right) \right] & a_3 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{c_{\beta}} \right) \right] & a_6 \end{bmatrix} \quad (۱۲-۳)$$

که $\{\sigma'^{\beta}\}$ تنش در مسئله فرعی همگن در موقعیت ریز ترک β است که از میدان تنش اصلی ناشی می‌شود و پارامترهای اضافی a_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) بر حسب کمیت‌های هندسی شکل (۳-۵) به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos 2\phi_{\alpha\beta} - \cos 2(2\phi_{\alpha\beta} - \theta_{\alpha\beta}) + \cos 2(\phi_{\alpha\beta} - \theta_{\alpha\beta}), \\ a_2 &= \cos 2\phi_{\alpha\beta} - \cos 2(2\phi_{\alpha\beta} - \theta_{\alpha\beta}) + \cos 2(\phi_{\alpha\beta} - \theta_{\alpha\beta}), \\ a_3 &= \sin(2\phi_{\alpha\beta} - \theta_{\alpha\beta}) + \sin 2(2\phi_{\alpha\beta} - \theta_{\alpha\beta}), \\ a_4 &= \sin 2\phi_{\alpha\beta} - \sin 2(2\phi_{\alpha\beta} - \theta_{\alpha\beta}), \\ a_5 &= \sin 2\phi_{\alpha\beta} + \sin 2(2\phi_{\alpha\beta} - \theta_{\alpha\beta}), \\ a_6 &= \cos 2(2\phi_{\alpha\beta} - \theta_{\alpha\beta}), \end{aligned} \quad (۱۳-۳)$$

در معادله (۱۰-۳) فقط دو ریز ترک باز را در نظر گرفته شده است. در واقعیت تعداد خیلی زیادی از ریز ترک‌های باز در جسم توزیع شده‌اند. وقتی تمامی مسائل فرعی در نظر گرفته شوند، معادله سازگاری (۱۰-۳) برای ریز ترک‌های باز بعنوان یک معادله انتگرال عمومیت می‌یابد. با در نظر گرفتن تاثیر اندرکنش، معیار شکست معادله (۸-۳) براحتی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$F(\sigma', \sigma'^P, c) = \sqrt{\pi c} \left[(\sigma'_{22} + \sigma'^P_{22}) + f(c) \left(\frac{(\sigma'_{22} + \sigma'^P_{22}) - (\sigma'_{11} + \sigma'^P_{11})}{2} \right) \right] - K_{IC} = 0 \quad (14-3)$$

گلشنی معادلات حاکم را با استفاده از روش عددی المان محدود حل کرده و نتایج را بر روی سنگ گرانیت تست کرده است (Golshani et al., 2006).

در این مطالعه بکارگیری اصول تئوریک جهت تحلیل محیط سنگی درزه‌دار به یکسری معادلات پیچیده منجر شده است. که اولاً با رشد اولیه ترک و تغییر هندسه مسئله معادلات حاکم بایستی مجدداً ساخته شوند و ثانیاً حل این معادلات به یک روش عددی مثل روش المان محدود نیاز دارد.

۳ - ۳ - مطالعات عددی

روش عددی المان محدود در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی از جمله مکانیک سنگ کاربردهای موفقیت‌آمیزی داشته است. ولی بخاطر ماهیت خاص مسائل انتشار ترک و مشکلات و پیچیدگی‌های مربوط به مش‌بندی این روش، علی‌رغم کاربردهای اولیه این روش در مدل‌سازی انتشار و اتصال ترک‌های سنگ (Ing Raffea and Manu, 1984; Ing Raffea et al., 1987; Tasdemir et al., 1990; Bocca et al., 1998; Reyes and Einstein, 1991) در سالهای اخیر برای مدل‌سازی مسائل ترک عمدتاً از روش المان مرزی استفاده شده است (Chan et al., 1990; Pollard et al., 1990; Shen et al., 1994; Scavia, 1995; Bobet and Einstein, 1998; Vasarhelyi and Bobet, 2000; Dobroskok et al., 2005; Fatehi et al., 2006).

در این قسمت ابتدا دو کاربرد متفاوت از روش المان مرزی برای مدل‌سازی رشد و اتصال ترک‌ها در محیط‌های سنگی بطور مختصر بیان می‌شود. سپس یک تحقیق با کاربرد المان محدود برای مطالعه اتصال ترک‌ها در نمونه حاوی سه ترک شرح داده شده و نهایتاً یک کاربرد ویژه از روش المان مجزا توضیح داده شده است.

۳ - ۳ - ۱ - مطالعات شن

بوتانگ شن^۱ در سال ۱۹۹۳ مکانیک شکست ماده سنگ ما بین درزه‌ها^۲ را بصورت عددی و آزمایشگاهی تحلیل کرده است (Shen, 1993). وی نحوه رشد و اتصال ترک‌ها را با استفاده از روش عددی المان مرزی در نمونه‌های حاوی دو ترک باز و بسته مطالعه کرده است. در این مطالعه بسته به میزان بارگذاری، رفتار شکست سنگ به سه فاز تقسیم شده است: (۱) در تنش‌های پائین شکستگی‌های سنگ فقط تغییر شکل لغزشی دارند؛ (۲) در تنش‌های متوسط ناپیوستگی‌ها تحت لغزش و انتشار ناپیوستگی مود I قرار می‌گیرند؛ (۳) در تنش‌های بالا ماده سنگ مابین ناپیوستگی‌ها شکسته شده و ناپیوستگی‌های سنگ به هم می‌پیوندند. شن از روش جابجائی ناپیوستگی (DDM)^۳ که یک روش المان مرزی می‌باشد، استفاده کرده است. این روش ابتدا توسط کراچ^۴ در سال ۱۹۷۶ ارائه شد و سپس بطور گسترده در مکانیک سنگ و مکانیک شکست بکار گرفته شد (Fatehi et al., 2006). مزیت روش جابجائی ناپیوستگی بر سایر روش‌های المان مرزی این است که ناپیوستگی را بدون در نظر گرفتن جدایش بین سطوح شکست، مستقیماً بصورت المان شکست در نظر می‌گیرد. در این روش بعد از فرمول‌بندی مسئله و حل معادلات حاکم، پارامترهای جابجائی ناپیوستگی D_n و D_s مستقیماً بدست می‌آیند. با استفاده از این پارامترها ضرایب تمرکز تنش مود I و II از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$K_I = \frac{E}{8\pi(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{d}} D_n \quad (15-3)$$

$$K_{II} = \frac{E}{8\pi(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{d}} D_s$$

که در آن E ضریب ارتجاعی، ν نسبت پواسون است.

برای محاسبه میزان رهائش انرژی کرنشی در موده‌های I و II (G_I و G_{II}) در جهت دلخواه θ از رابطه زیر استفاده می‌شود (شکل ۳-۶).

1- Shen

2- Rock Bridge

3- Discontinuity Displacement Method

4- Kruch

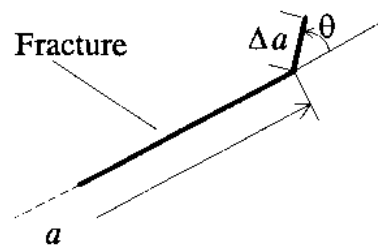
$$G(\theta) = \frac{\partial W}{\partial \theta} \approx \frac{[W(a + \Delta a) - W(a)]}{\Delta a} \quad (۱۶-۳)$$

که در آن W انرژی کرنشی ارتجاعی، Δa طول المان کوچک رشد ترک، $W(a + \Delta a)$ انرژی کرنشی بعد از رشد و $W(a)$ انرژی کرنشی قبل از رشد می باشد.

انرژی کرنشی در یک جسم الاستیک خطی از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (۱۷-۳)$$

که در آن σ و ε به ترتیب تانسور تنش و کرنش و V حجم جسم است.



شکل (۳-۶): المان کوچک اضافه شده به انتهای المان و شبیه سازی رشد ترک (Shen, 1993)

۳-۳-۱-۱- معیار شکست شن

شن معتقد است از معیارهای موجود، معیار حداکثر تنش کششی فقط تنش کششی را در نظر می گیرد و شکست مود II را نمی تواند پیش بینی کند و معیار G (حداکثر نرخ رهائش انرژی کرنشی) و S (حداقل دانسیته انرژی کرنشی) در شرایط بارگذاری فشاری نتایج اشتباهی را در بر دارند. وی با تصحیح معیار G معیار F را معرفی و بکار گرفت. فاکتور بی بعد F به صورت زیر تعریف می شود.

$$F(\theta) = \frac{G_I(\theta)}{G_{IC}} + \frac{G_{II}(\theta)}{G_{IIC}} \geq 1 \quad (۱۸-۳)$$

که در آن $G_I(\theta)$ میزان کاهش انرژی کرنشی به ازای جابجایی بازشدگی، $G_{II}(\theta)$ میزان کاهش انرژی کرنشی به ازای جابجایی برشی، G_{IC} انرژی سطحی مود I و G_{IIC} انرژی سطحی مود II هستند. بر مبنای این معیار ترک در راستای $\theta = \theta_0$ تحت شرایط زیر گسترش می یابد:

$$F(\theta = \theta_0) = \text{Maximum}$$

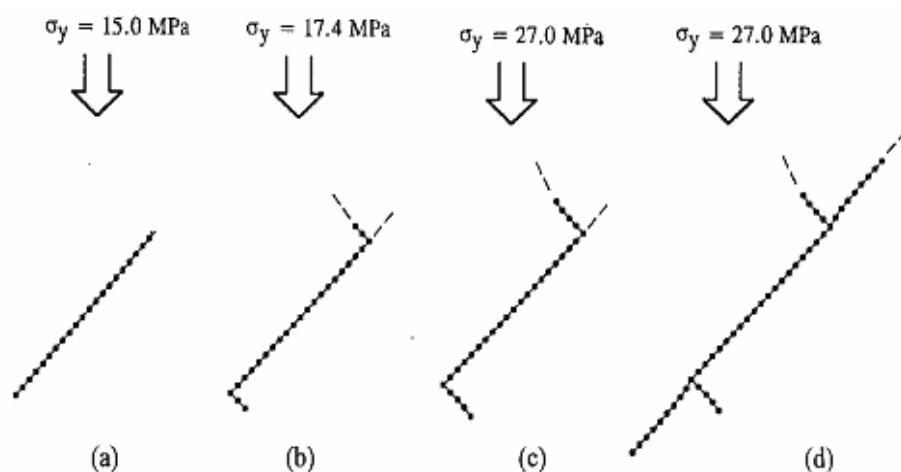
(۱۹-۳)

$$F(\theta_0) \geq 1$$

یعنی ترک در راستایی که مقدار F حداکثر باشد، گسترش می‌یابد و زمانی ترک رشد می‌کند که مقدار F بزرگتر از یک باشد. در این معیار در نمودار $F(\theta)$ دو نقطه ماکزیمم وجود دارد. یک نقطه برای شکست مود I و یک نقطه برای شکست مود II. با مقایسه این دو مقدار نوع مود شکست مشخص می‌شود. مقدار F مربوط به هر مود بیشتر باشد، مود متناظر با آن اتفاق می‌افتد.

۳ - ۱ - ۲ - نتایج حاصل از مدل عددی شن

شن تحلیل عددی خود را با استفاده از توزیع تنش‌ها و معیار F انجام داده است. بر مبنای مطالعات شن روند انتشار یک ترک شیبدار تحت بارگذاری فشاری در شکل (۷-۳) نشان داده شده است. بعد از اینکه مقدار بار فشاری به حد مشخصی رسید، از دو نوک درزه، ترک‌های کششی در راستای عمود بر امتداد درزه منشعب و رشد می‌کنند (شکل ۷-۳-b و c) و سپس ترک‌های برشی نیز در راستای خود درزه از دو نوک آن شروع به رشد می‌کنند (شکل ۷-۳-d).



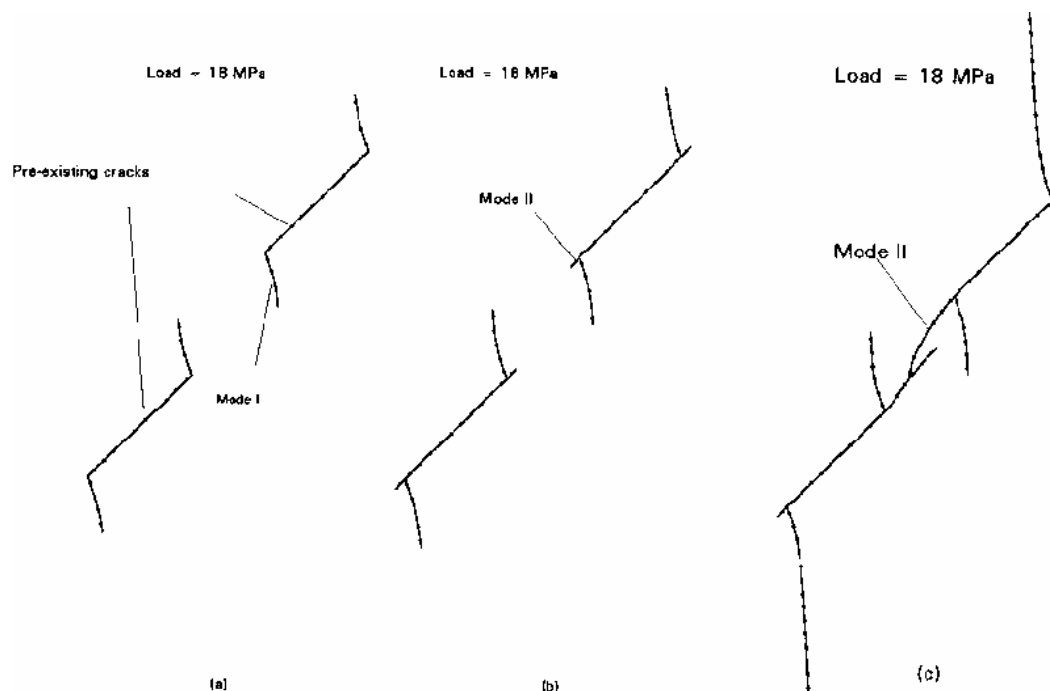
شکل (۷-۳): مراحل رشد ترک در یک نمونه حاوی ترک شیبدار. (a) ترک اولیه (b) و (c) انشعاب و انتشار ترک‌های

کششی (مود I) (d) انشعاب و رشد ترک‌های برشی (مود II) (Shen, 1993).

مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک، به ازای مقادیر مختلف شیب ترک (α) و شیب خط واصل دو ترک (β) برای دو نوع ترک باز و بسته توسط شن مورد مطالعه قرار گرفته است. که نتایج چند نمونه در ادامه ارائه می‌شود (Shen, 1993).

• حالت اول: $\alpha = 45^\circ$ ، $\beta = 60^\circ$ و ترک‌ها بسته

برای این حالت مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها مطابق شکل (۸-۳) می‌باشد. ابتدا ترک‌های کششی از دو نوک درزه‌ها رشد کرده و در مرحله بعد ترک‌های برشی نیز از دو انتهای درزه‌ها شروع به رشد می‌کنند و نهایتاً با اتصال ترک‌های برشی اتصال درزه‌ها صورت می‌گیرد (Shen, 1993).



شکل (۸-۳): شبیه‌سازی فرایند اتصال دو ترک بسته در حالت $\alpha = 45^\circ$ ، $\beta = 60^\circ$ (Shen, 1993).

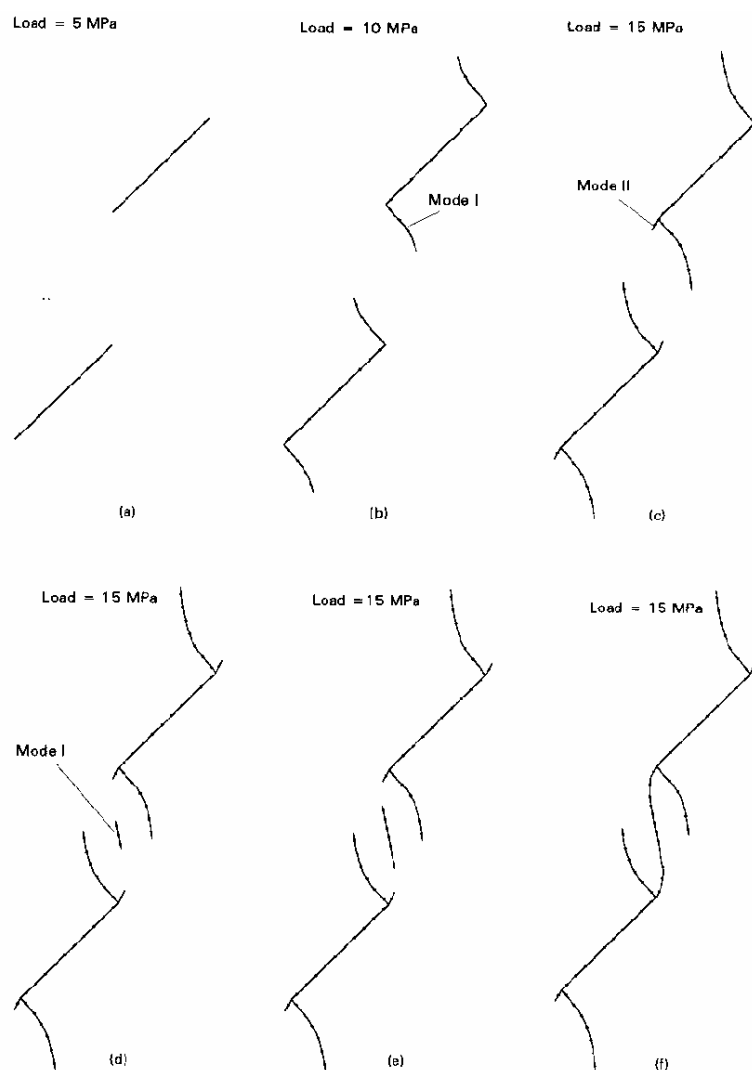
• حالت دوم: $\alpha = 45^\circ$ ، $\beta = 90^\circ$ و ترک‌ها بسته

برای این حالت مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها مطابق شکل (۹-۳) می‌باشد. ابتدا ترک‌های کششی از نوک درزه‌ها رشد می‌کنند، سپس ترک‌های برشی از نوک دو درزه شروع به رشد می‌کنند، در مرحله بعد از مرکز خط واصل دو درزه ترک برشی جدیدی بطور قائم بوجود آمده و بسمت ترک‌های برشی

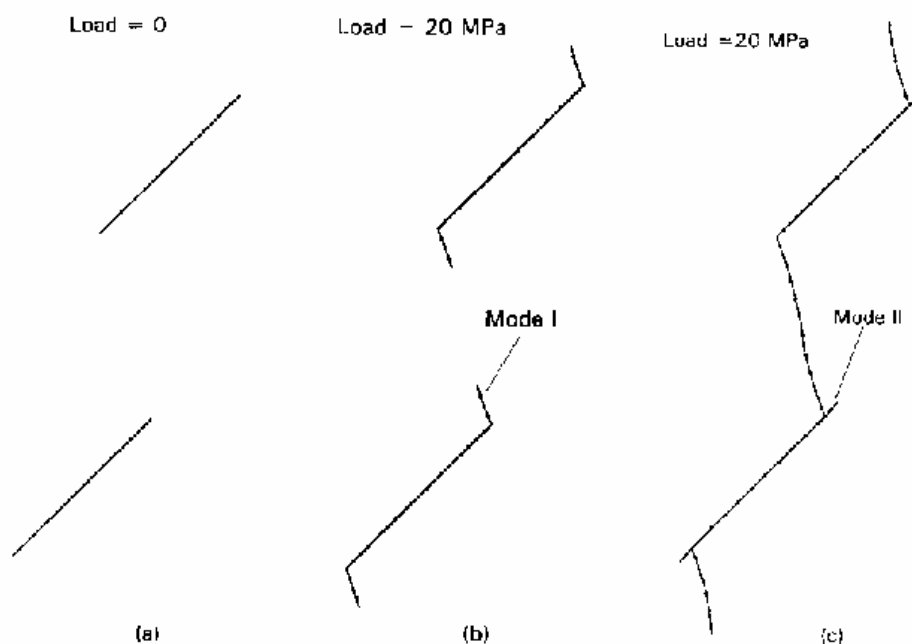
قبلی منشعب شده از نوک درزه‌ها، گسترش می‌یابد، نهایتاً با اتصال ترک‌های برشی اتصال درزه‌ها صورت می‌گیرد (Shen, 1993).

• حالت سوم: $\alpha = 45^\circ$ ، $\beta = 105^\circ$ و ترک‌ها بسته

برای این حالت مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها مطابق شکل (۳-۱۰) می‌باشد. ابتدا ترک‌های کششی از نوک درزه‌ها رشد می‌کنند. در مرحله بعد ترک‌های برشی از دو نوک دو درزه شروع به رشد کرده و نهایتاً با اتصال ترک‌های کششی اتصال درزه‌ها صورت می‌گیرد (Shen, 1993).



شکل (۳-۹): شبیه‌سازی فرایند اتصال دو ترک بسته در حالت $\alpha = 45^\circ$ ، $\beta = 90^\circ$ (Shen, 1993).



شکل (۳-۱۰): شبیه سازی فرایند اتصال دو ترک بسته در حالت $\beta = 105^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ (Shen, 1993).

۳ - ۲ - مطالعات بوبت و انشتین

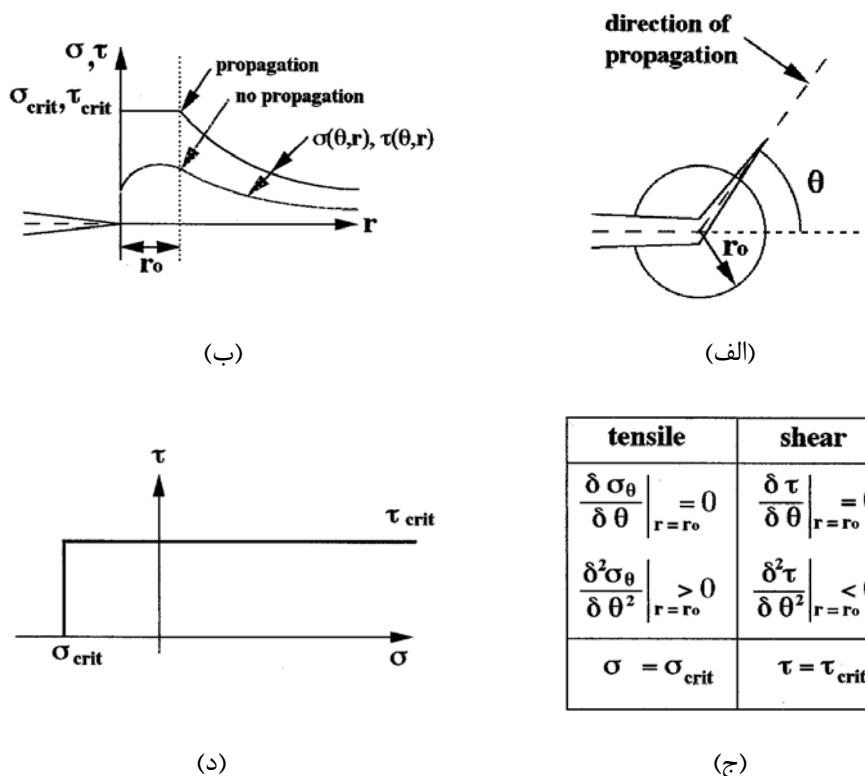
بوبت و انشتین^۱ (Bobet and Einstein, 1998) با استفاده از روش عددی المان مرزی ترکیبی غیر مستقیم^۲، مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها را در نمونه‌های حاوی دو درزه تحت بار فشاری تک‌محوره و دو محوره بررسی کرده‌اند. آنها با اعتقاد بر اینکه معیار F ارائه شده توسط شن و مدل شکست ریس^۳ و انشتین (Einstein and Reyes, 1990) از قابلیت کافی برای تولید نتایج مشابه آزمایشات برخوردار نیستند، معیار جدیدی مبتنی بر مولفه‌های تنش ارائه کرده‌اند. این معیار بجای ضرایب تمرکز تنش بر اساس وضعیت تنش موضعی نسبت به مقاومت مواد پایه ریزی شده است. بطور ویژه در این معیار فرض شده تنش و راستای ایجاد ترک‌های کششی به حداکثر تنش کششی مماسی و تنش و راستای ایجاد ترک‌های برشی به حداکثر قدرمطلق تنش برشی در اطراف نوک ترک بستگی دارد. از آنجائیکه تنش‌ها در ناحیه خیلی نزدیک به نوک ترک ($r \rightarrow 0$) خیلی بزرگتر از مقاومت مواد هستند (از لحاظ

1- Bobet and Einstein

2- Hybridized Indirect Boundary Element Method

3- Reyes

ریاضی آنها در $r = 0$ بسمت بی‌نهایت میل می‌کنند.) بایستی یک زون پلاستیک در اطراف نوک ترک وجود داشته باشد. برای معیار رشد ترک و به عنوان یک تقریب اولیه یک زون پلاستیک یا هسته به شکل استوانه در نظر گرفته شده، که مرکز آن در نوک ترک و شعاع آن برابر r_0 جزء خواص مواد است (شکل ۳-۱۱-الف). شعاع ناحیه پلاستیک در انواع بارگذاری‌ها (فشاری تک‌محوره، فشاری دو محوره و یا کشش) متفاوت است. در این معیار تنش‌های مماسی و برشی در مرز ناحیه پلاستیک ($r = r_0$) بعنوان مرجع جهت مقایسه با مقاومت مواد مورد استفاده قرار گرفته است. بر مبنای این معیار اگر تنش‌ها کمتر از مقاومت مواد باشند، ترک رشد نخواهد کرد؛ ولی اگر یکی از تنش‌های مرجع بیشتر از مقاومت مواد باشد، ترک کششی یا برشی تولید می‌شود. شکل (۳-۱۱-ب) دو حالت ممکن انتشار یا عدم انتشار ترک را نشان می‌دهد. شکل (۳-۱۱-ج) فرم ریاضی این معیار را نشان می‌دهد که بصورت زیر بیان می‌شود (Bobet and Einstein, 1998).



شکل (۳-۱۱): معیار رشد و انتشار ترک. الف) ناحیه پلاستیک ب) انتشار ترک ج) فرمول‌بندی ریاضی د) پوش شکست. (Bobet and Einstein, 1998)

- ترک کششی در راستای عمود بر راستایی منتشر می‌شود که تنش مماسی حداقل باشد (توجه شود که طبق قرارداد علامت تنش کششی منفی است، پس برای بدست آوردن حداکثر تنش مماسی شرایط مینیمم لازم است). این راستا زاویه انشعاب ترک، θ مشخص می‌کند. بنابراین:

$$\left. \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right|_{r=r_0} = 0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{r=r_0} > 0. \quad (20-3)$$

- ترک کششی زمانی رشد می‌کند که تنش کششی مماسی به مقدار بحرانی (که از خواص مواد است) برسد.

$$(\sigma_\theta)_{\min} \big|_{r=r_0} = (\sigma_\theta)_{\text{critical}} \big|_{r=r_0} = \sigma_{\text{crit}}. \quad (21-3)$$

- ترک برشی در راستایی (θ) منتشر می‌شود که قدرمطلق تنش برشی به حداکثر باشد، بنابراین:

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right|_{r=r_0} = 0 \quad \text{and} \quad \left. \frac{\partial^2 |\tau|}{\partial \theta^2} \right|_{r=r_0} < 0. \quad (22-3)$$

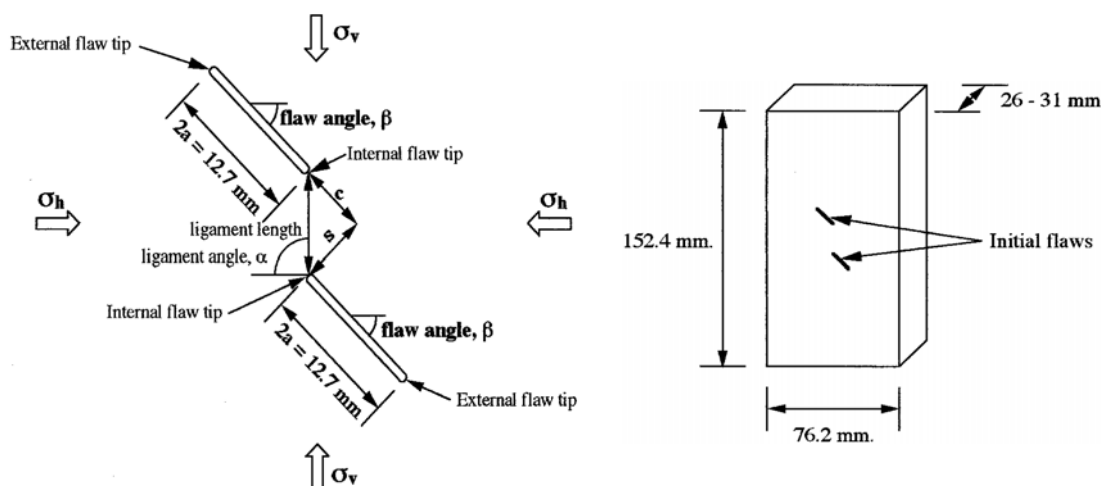
- ترک برشی زمانی رشد می‌کند که حداکثر تنش برشی به مقدار بحرانی (که از خواص مواد است) برسد.

$$(\tau_\theta)_{\max} \big|_{r=r_0} = (\tau_\theta)_{\text{critical}} \big|_{r=r_0} = \tau_{\text{crit}}. \quad (23-3)$$

بنابراین در این معیار سه پارامتر σ_{crit} مقاومت کششی، τ_{crit} مقاومت برشی و r_0 شعاع زون پلاستیک لازم است که r_0 علاوه بر جنس مواد به نوع بارگذاری هم وابسته است. شکل (۳-۱۱-د) پوش شکست متناظر با این معیار را نشان می‌دهد. بوبت و انشتین مطالعات عددی خود را با انجام آزمایشات مختلف ارزیابی کرده‌اند که بعداً ارائه می‌شود.

۳ - ۲ - ۱ - نتایج حاصل از مطالعات عددی بوبت و انشتین

هندس نمونه مورد استفاده در این مطالعه در شکل (۳-۱۲) نشان داده شده است. در این مطالعه برای هر دو حالت بارگذاری تک‌محوره و دو‌محوره مطابق جدول (۳-۱) سه الگوی اتصال تشخیص داده شده است.



(الف) نمای کلی نمونه مورد استفاده (ب) جزئیات آرایش ترک‌ها در نمونه

شکل (۳-۱۲): هندسه نمونه مورد استفاده در مطالعات بوبت و انشتین (Bobet and Einstein, 1998).

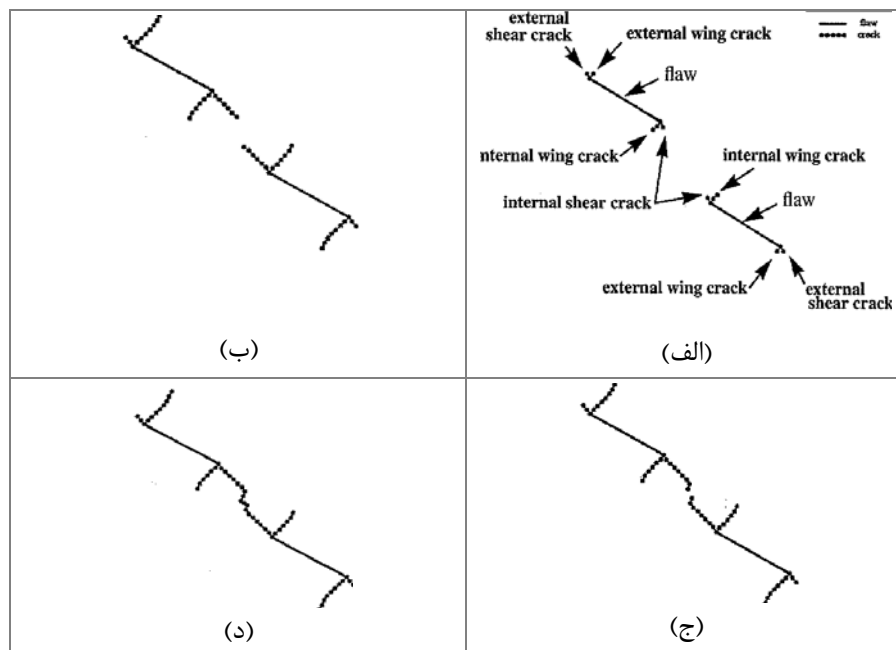
جدول (۳-۱): مودهای مختلف اتصال ترک در نمونه‌های حاوی دو ترک (Bobet and Einstein, 1998)

نوع	شکل شماتیک اتصال	توصیف اتصال	مود اتصال
۱		رشد ناپایدار ترک‌های برشی داخلی تا زمان اتصال	مود I
۲		رشد ترک‌های برشی از نوک داخلی درزه‌ها و اتصال آنها با ترک کششی	مود II
۳		نوار برشی با ترک‌های کششی کوچک پله‌ای	مود III

نتایج حاصل از بارگذاری فشاری تک‌محوره به ازای مقادیر مختلف زاویه شیب ترک‌ها (β)، فاصله‌داری (s) و پیوستگی (c) بحث می‌شود (شکل ۳-۱۱ را ببینید). فاصله‌داری و پیوستگی بر حسب a نصف طول ترک بیان می‌شوند.

• حالت اول: $\beta = 30^\circ$ ، $s = a$ ، $c = 2a$

مراحل رشد ترک در این حالت در شکل (۳-۱۳) نشان داده شده است. دو نوع ترک کششی (پره‌ای) و برشی از نوک درزه‌ها رشد می‌کنند. ترک‌های کششی تقریباً عمود بر راستای درزه‌ها و ترک‌های برشی تقریباً در امتداد درزه‌ها منتشر می‌شوند. ترک‌ها از نوک درزه‌ها منشعب شده و ابتدا بصورت پایدار و نهایتاً بصورت ناپایدار رشد می‌کنند. ترک‌های منشعب از چهار نوک درزه‌ها بطور همزمان گسترش می‌یابند. در این حالت اتصال از بهم پیوستن ترک‌های برشی اتفاق می‌افتد.

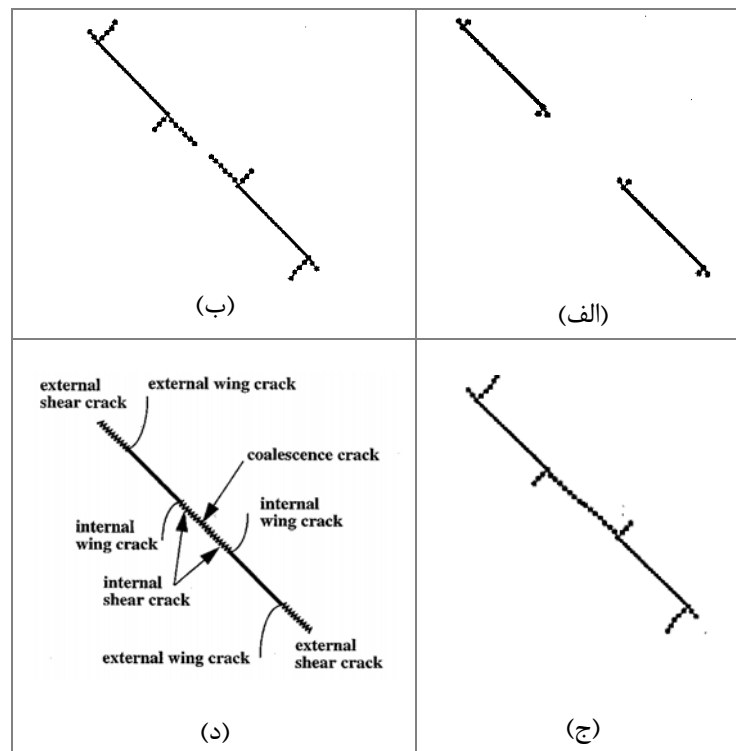


شکل (۳-۱۳): مراحل رشد و اتصال درزه‌ها در حالتی که $\beta = 30^\circ$ ، $s = a$ ، $c = 2a$ (Bobet and Einstein, 1998).

• حالت دوم: $\beta = 45^\circ$ ، $s = 0$ ، $c = 2a$

مراحل رشد ترک در این حالت در شکل (۳-۱۴) نشان داده شده است. در این حالت نیز از نوک درزه‌ها ترک‌های کششی و برشی رشد می‌کنند ولی به خاطر افزایش زاویه شیب درزه‌ها، میزان بار

منجر به انتشار ترک‌های پره‌ای و همچنین زاویه انشعاب این ترک‌ها افزایش می‌یابد. باز هم اتصال از بهم پیوستن ترک‌های برشی اتفاق می‌افتد. اتصال درزه‌ها از نوع اتصال I می‌باشد (جدول ۳-۱).



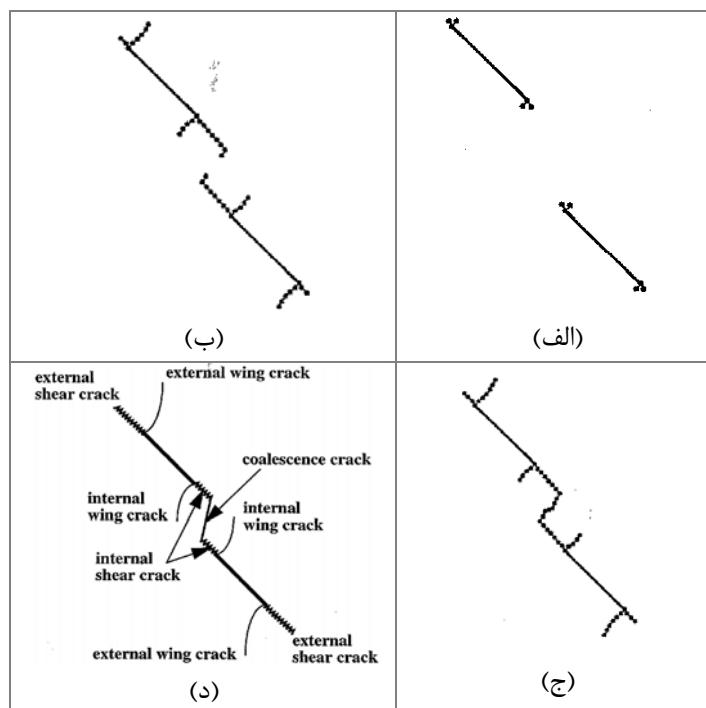
شکل (۳-۱۴): مراحل رشد و اتصال درزه‌ها در حالتی که $c = 2a$, $s = 0$, $\beta = 45^\circ$ (Bobet and Einstein, 1998)

• حالت سوم: $c = 2a$, $s = a$, $\beta = 45^\circ$

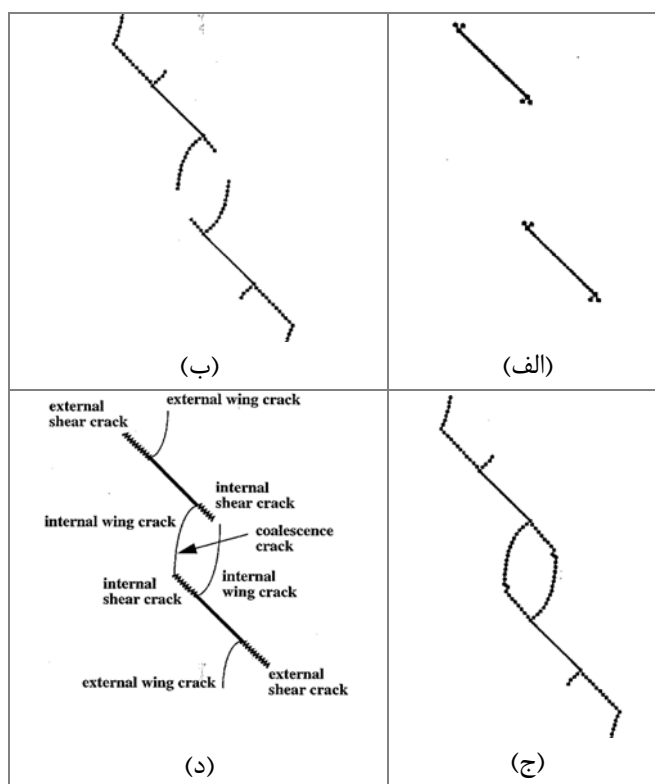
مراحل رشد ترک در این حالت در شکل (۳-۱۵) نشان داده شده است. همانند حالت‌های قبلی ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها رشد می‌کنند. اتصال درزه‌ها از نوع اتصال II می‌باشد (جدول ۳-۱).

• حالت چهارم: $c = 2a$, $s = a$, $\beta = 45^\circ$

مراحل رشد ترک در این حالت در شکل (۳-۱۶) نشان داده شده است. ابتدا ترک‌های کششی، سپس ترک‌های برشی از نوک درزه‌ها رشد کرده و نهایتاً با بهم پیوستن ترک‌های کششی و برشی منشعب شده از دو انتهای داخلی درزه‌ها، اتصال درزه‌ها اتفاق می‌افتد. اتصال درزه‌ها از نوع اتصال III می‌باشد.



شکل (۳-۱۵): مراحل رشد و اتصال درزه‌ها در حالتی که $c = 2a$ ، $s = a$ ، $\beta = 45^\circ$ (Bobet and Einstein, 1998)



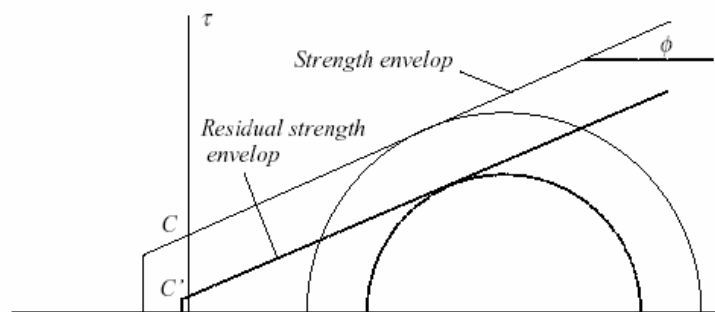
شکل (۳-۱۶): مراحل رشد و اتصال درزه‌ها در حالتی که $c = 2a$ ، $s = a$ ، $\beta = 45^\circ$ (Bobet and Einstein, 1998)

۳ - ۳ - ۳ - مطالعات تانگ و همکارانش

تانگ^۱ و همکارانش در سال ۲۰۰۱ با استفاده از برنامه عددی RFPA^{2D} مکانیزم رشد و حالت‌های اتصال ترک‌ها را در نمونه‌های حاوی سه درزه تحت بار فشاری تک‌محوره شبیه‌سازی کرده‌اند (Tang et al., 2001). RFPA^{2D} یک برنامه عددی بر پایه یک مدل شکست الاستیک است. شکست در مدل بصورت کاهش در خواص الاستیکی مواد شبیه سازی شده است که بوسیله ترک‌ها ایجاد می‌شود. بنابراین توسعه شکست با فرض شکست ایزوتروپ بصورت زیر توصیف شده است:

$$E' = (1 - D)E, \quad (24-3)$$

که در معادله مذکور $D = 1 - \sigma / (E\alpha)$ پارامتر آسیب بوده که به تارخچه بارگذاری وابسته است و توسط معیار شکست تعیین می‌شود. برای سادگی مسئله برای تمام المان‌ها ضریب پواسون ثابت فرض شده است. مطالعات نشان داده این پارامتر در نتایج مدل سازی تاثیری ندارد (Tang et al., 2001). مواد الاستیک شبیه سازی شده با پارامترهای E, ν ، با استفاده از روش المان محدود مش بندی می‌شود تا توزیع تنش در هر المان در نتیجه بارگذاری مدل محاسبه گردد. تانگ به جای استفاده از اصول مکانیک شکست که انتشار شکستگی با استفاده از چقرمگی شکست کنترل می‌شود و به فاکتور شدت تنش در نوک ترک وابسته است، از یک روش شکست المان برای دنبال کردن ایجاد و انتشار ترک استفاده کرده است. در این مطالعه همانطور که در شکل (۳-۱۷) نشان داده شده از معیار شکست کولمب استفاده شده است.



شکل (۳-۱۷): معیار مقاومت و مقاومت باقی مانده برای المان‌ها (Tang et al., 2001)

1- Tang

$$F = (C + \sigma \tan \phi) - \tau, \quad (25-3)$$

$$\sigma_3 \leq -\sigma_1,$$

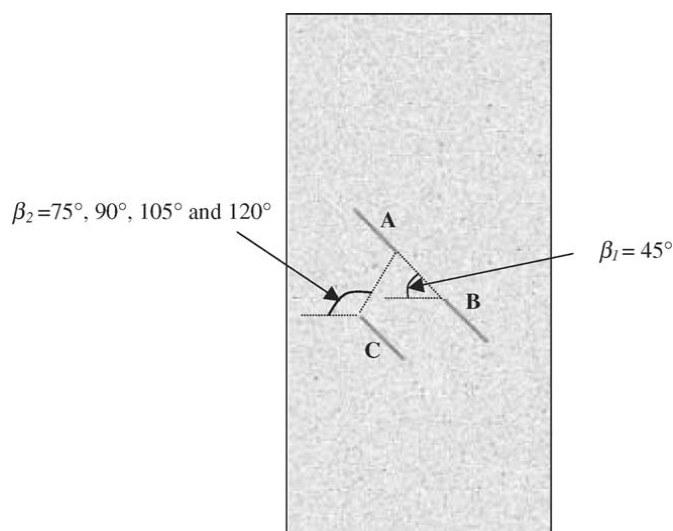
فرض شده که بعد از شکست المان، صفحه شکست مطابق شکل (۳-۱۷) به صفحه مقاومت باقی مانده تغییر خواهد کرد. بنابراین:

$$F' = (C' + \sigma \tan \phi) - \tau, \quad (26-3)$$

$$\sigma_3 \leq -\sigma'_1,$$

که در آن $C' = \lambda C$ ، $\sigma'_1 = \lambda \sigma_1$ و $\lambda = 0-1$ ضریب مقاومت است.

هندس نمونه مورد استفاده در این مطالعه در شکل (۳-۱۸) نشان داده شده است. نمونه حاوی سه ترک بوده که با A، B و C نامگذاری شده‌اند. شیب تمامی ترک‌ها ۴۵ درجه می‌باشد. زاویه خط واصل دو ترک A و B (β_1) مقدار ثابت ۴۵ درجه در نظر گرفته شده و زاویه خط واصل دو ترک A و C (β_2) از ۷۵ تا ۱۲۰ با تغییرات ۱۵ درجه‌ای متغیر است.



شکل (۳-۱۸): هندسه نمونه مورد استفاده در مطالعات تانگ (Tang et al., 2001)

۳-۳-۱ - نتایج حاصل از مطالعات عددی تانگ

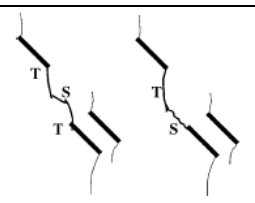
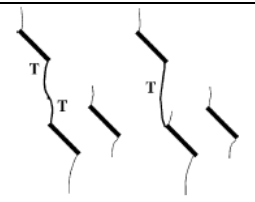
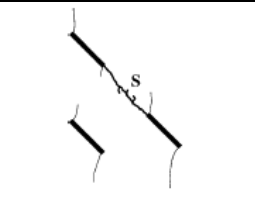
نتایج مطالعات تانگ و همکارانش بیانگر اینست که دو نوع ترک از انتهای درزه‌ها منشعب می‌شوند؛ ترک‌های کششی (T) و ترک‌های برشی یا ثانویه (S). ترک‌های کششی با یک زاویه نسبت به درزه‌ها

منتشر شده و به سمت راستی بارگذاری متمایل می‌شوند. ترک‌های ثانویه در امتداد درزه‌ها یا تقریباً هم امتداد آنها رشد می‌کنند.

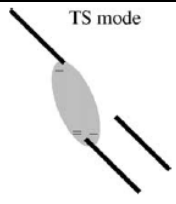
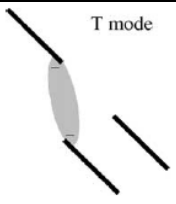
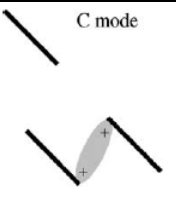
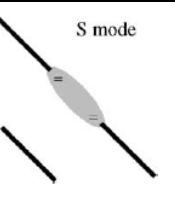
در این تحقیق چهار نوع اتصال ترک تشخیص داده شده است. مود کششی (T)، مود تراکمی (C)، مود برشی (S) و مود ترکیب کشش و برش (TS). مود تراکمی (C) اساساً از بهم پیوستن ترک‌های کوچک کششی به شکل یک باند برشی تشکیل می‌گردد. مودهای مختلف اتصال ترک به ازای مقادیر متفاوت (β_2) در جدول (۲-۳) نشان داده شده است.

تانگ مودهای اتصال ترک‌ها را در ارتباط با اندرکنش میدان تنش‌ها دانسته و اندرکنش مولفه‌های برشی و نرمال تنش را در تناظر با مودهای اتصال بصورت جدول (۳-۳) نشان داده است.

جدول (۲-۳): حالت‌های مختلف اتصال ترک در نمونه‌های حاوی سه ترک (Tang et al., 2001)

نوع	شکل شماتیک اتصال	توصیف اتصال	مود اتصال
$(\beta_2 = 75^\circ)$		اتصال ترک کششی پره‌ای و ترک برشی ثانویه	مود TS
$(\beta_2 = 90^\circ)$		اتصال ترک‌های کششی	مود T
$(\beta_2 = 105^\circ)$		نوار برشی با ترک‌های کششی کوچک پله‌ای	مود C
$(\beta_2 = 120^\circ)$		ترک کششی خالص	مود S

جدول (۳-۳): اندرکنش مولفه‌های برشی و نرمال تنش و موده‌های اتصال (Tang et al., 2001)

زاویه β_2	75°	90°	105°	120°
اندرکنش میدان تنش و مسیر اتصال	TS mode 	T mode 	C mode 	S mode 

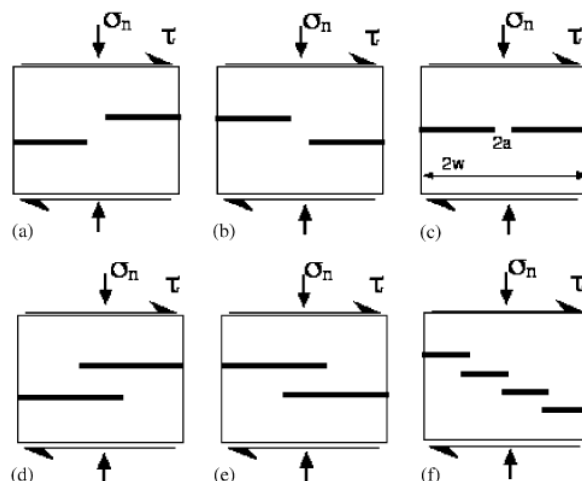
بر مبنای این مطالعه همیشه اتصال ترک بین دو ترک اتفاق می‌افتد و این اتصال بین جفت ترکی که تنش اتصال کمتر باشد، بوقوع می‌پیوندد. اگر تنش اتصال بین جفت ترک‌ها یکسان باشد، موده‌های کشش (T) و ترکیب کشش و برش (TS) بر موده‌های برشی غالب هستند.

۳ - ۳ - ۴ - مطالعات کمینی

کمینی^۱ شکست وابسته به زمان ماده سنگ ما بین ناپیوستگی‌ها را در توده سنگ مطالعه کرده است (Kemeny, 2005). بر طبق این مدل ماده سنگ ما بین ناپیوستگی‌ها چسبندگی مناسبی به ناپیوستگی‌ها می‌دهد و این چسبندگی بخاطر شکست وابسته به زمان ماده سنگ بین درزه‌ها، خود وابسته به زمان است. بر این مبنا برای چسبندگی درزه یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول تشکیل شده و این معادله برای مدل کردن شکست توده‌سنگ به برنامه عددی المان مجزای UDEC^۲ اعمال می‌شود (Kemeny, 2005). در این مطالعه بسته به هندسه ناپیوستگی‌ها و ماده‌سنگ ما بین آنها و شرایط بارگذاری، ماده سنگ ما بین ناپیوستگی‌ها به دو دسته اتساعی و فشاری تقسیم شده و مکانیزم شکست آنها بر مبنای رشد ترک توصیف شده است.

برخی از مدل‌های ساده کمینی در شکل (۳-۱۹) نشان داده شده است. بعنوان مثال در مدل (c) دو درزه به طول $w - a$ که در یک راستای افقی واقع شده‌اند، در نظر گرفته شده است و بوسیله ماده‌سنگی به عرض $2a$ از هم جدا شده‌اند. این مدل تحت تنش‌های فشاری و برشی قرار گرفته است.

1 - Kemeny
2- Universal Distinct Element Code



شکل (۳-۱۹): هندسه مدل‌های مطالعه کمینی (Kemeny, 2005)

ماده سنگ ما بین ناپیوستگی‌ها با رشد ترک‌های برشی که در امتداد موازی درزه‌ها گسترش می‌یابد، می‌شکند. فرایند شکست وابسته به زمان ماده سنگ ما بین ناپیوستگی‌ها با استفاده از رشد بحرانی توسط کمینی مدل گردید. با استفاده از این مدل برای چسبندگی ناپیوستگی بعنوان تابعی از زمان، یک معادله دیفرانسیل استنتاج شده است:

$$C'_o(t) = \frac{K_{IIC} \sqrt{A} \left[\frac{2w(\tau - \sigma_n \tan \phi)}{K_{IIC} \sqrt{\pi a}} \right]^{\frac{n}{2}}}{2w} \quad (27-3)$$

که در آن K_{IIC} چقرمگی شکست مود II، A و n پارامترهای رشد ترک، $2w$ فاصله بین ماده سنگ ما بین ترک‌ها (شکل ۳-۱۹-۱۹)، τ و σ_n تنش‌های برشی و نرمال در امتداد درزه‌ها، ϕ زاویه اصطکاک درزه‌ها و $2a$ عرض ماده سنگ مابین درزه‌ها می‌باشد. در صورت ثابت بودن تنش‌های برشی و نرمال نسبت به زمان، با انتگرال‌گیری از معادله دیفرانسیل بالا، یک راه‌حل فرم بسته^۱ برای چسبندگی درزه به صورت تابعی از زمان بدست می‌آید:

$$C_o(t) = \frac{K_{IIC} \sqrt{\pi} \left[a_o^{1+\frac{n}{2}} - \left(1 + \frac{n}{2}\right) A t \left[\frac{2w(\tau + \sigma_n \tan \phi)}{K_{IIC} \sqrt{\pi}} \right]^n \right]^{\frac{1}{2+n}}}{2w} \quad (28-3)$$

1- Closed Form

که در آن $2a_0$ ضخامت اولیه ماده سنگ ما بین ناپیوستگی‌ها در زمان $t = 0$ می‌باشد. در این مطالعه کمّی میزان کاهش عرض ماده‌سنگ ما بین درزه‌ها را از حل معادله دیفرانسیل زیر بدست آورده است.

$$a'(t) = -A \left[\frac{2w(\tau - \sigma_n \tan \phi)}{K_{IC} \sqrt{\pi a(t)}} \right]^n \quad (29-3)$$

که در آن $a(t)$ کاهش وابسته به زمان عرض ماده‌سنگ مابین درزه‌ها و A و n ثابت‌های ماده هستند. کمّی معادله فوق را با استفاده از معادله اولر حل کرده است. در این مدل در هر گام ابتدا چسبندگی ناشی از وجود ماده‌سنگ ما بین درزه‌ها از معادله (۲۸-۳) مشخص شده و سپس مولفه‌های تنش تعیین می‌شود و از حل اولر معادله (۲۹-۳) میزان کاهش عرض ماده‌سنگ محاسبه و عرض جدید مشخص می‌شود. این روال ادامه می‌یابد تا ماده‌سنگ گسیخته گردد.

در این مطالعه مدل‌های ساده در نظر گرفته شده است و بدیهی است در شرایط واقعی و در مسائلی با هندسه پیچیده این مدل ابتکاری قابل کاربرد نخواهد بود.

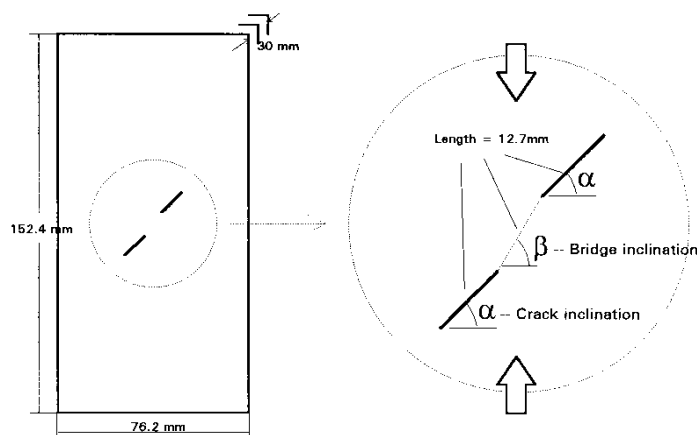
۳ - ۴ - مطالعات آزمایشگاهی

در این قسمت سه مطالعه آزمایشگاهی صورت گرفته در حوزه مکانیک شکست ارائه می‌گردد.

۳ - ۴ - ۱ - مطالعات شن

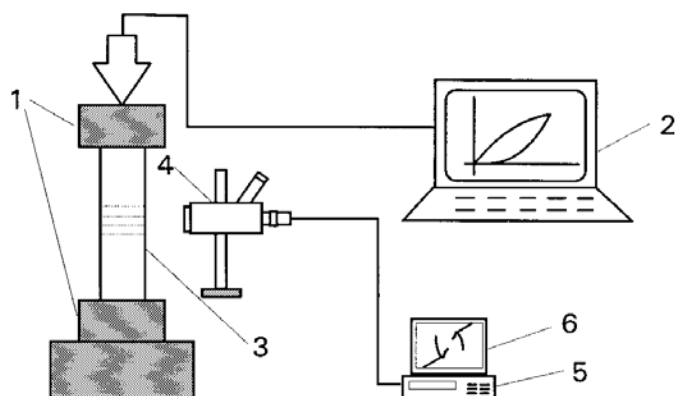
بوتانگ شن در سال ۱۹۹۳ برای مطالعه مکانیک شکست ماده‌سنگ ما بین ناپیوستگی‌ها، مکانیسم رشد و اتصال ترک‌ها را بر روی نمونه‌های حاوی دو ترک تحت آزمایش فشاری تک محوره بطور آزمایشگاهی نیز بررسی نمود (شن، ۱۹۹۳). جنس نمونه‌ها از گچ، آب و سلیت بوده که بترتیب با نسبت وزنی ۱۶۵، ۷۰ و ۲ باهم ترکیب شده‌اند. ابعاد نمونه‌ها $۱۵۲/۴ \times ۷۶/۲ \times ۳۰$ میلی متر مربع بوده و در مرکز آنها دو ترک بطول $۱۲/۷$ میلی‌متر ایجاد شده است. طول ماده سنگ ما بین ترک‌ها نیز $۱۲/۷$ میلی‌متر می‌باشد (شکل ۳-۲۰). در این مطالعه دو نوع ترک: ترک باز (بدون

تماس سطوح ترک) و ترک بسته (با سطوح تماسی و اصطکاک) در نظر گرفته شده است. ترک‌های باز در واقع شیارهایی هستند که با برداشتن صفحات فولادی بعد از سخت شدن نمونه گچی ایجاد می‌شوند و ترک‌های بسته با کشیدن صفحات نازک پلی‌اتیلن در طی سفت شدن نمونه ایجاد می‌شوند.



شکل (۳-۲۰): هندسه نمونه‌های ترکدار مورد استفاده در مطالعات شن (Shen, 1993)

برای بررسی اثر زاویه شیب ترک‌ها (α) و شیب خط واصل ترک‌ها (β) در نوع مود شکست و میزان باری که ترک‌ها بهم می‌پیوندند، آزمایشات مختلفی توسط شن انجام شد. بدین منظور وی زاویه شیب ترک‌ها را ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه و شیب خط واصل ترک‌ها را از ۴۵ تا ۱۲۰ با تغییرات ۱۵ درجه‌ای در نظر گرفت. همچنین در طی آزمایش فرایند شکست توسط میکروسکوپ و ویدئو ثبت گردید (شکل ۳-۲۱).

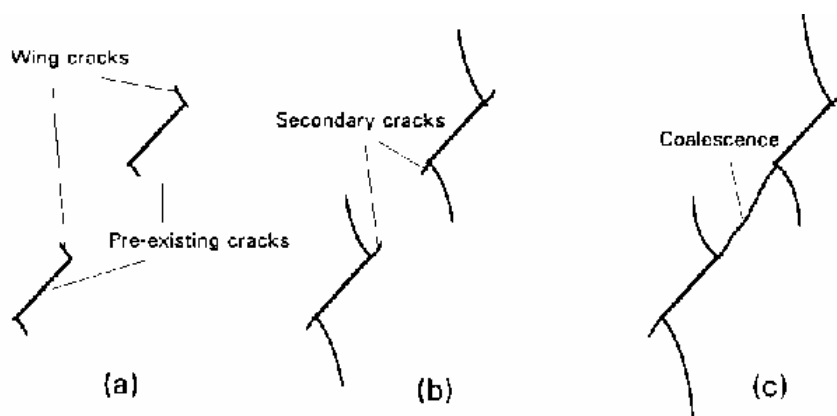


شکل (۳-۲۱): سیستم بارگذاری و مونیتورینگ آزمایش اتصال ترک‌ها (Shen, 1993)

بر مبنای این مطالعه ترک‌ها با دو مود کششی و برشی گسترش می‌یابند. ترک‌هایی که با مود کششی رشد می‌کنند، ترک پره‌ای و ترک‌هایی که با مود برشی رشد می‌کنند، ترک ثانویه نامیده شده است. در آزمایشات مختلف بسته به مقدار α و β اتصال ترک‌ها از بهم پیوستن ترک‌های پره‌ای یا ترک‌های ثانویه و یا از ترکیب آنها اتفاق افتاده است. برای ترک‌های باز و بسته موجود، مسیر رشد ترک‌های پره‌ای متفاوت است. در ادامه نتایج آزمایشگاهی شِن ارائه می‌شود.

• حالت اول: زاویه شیب خط واصل دو ترک β ، ۴۵ و ۶۰ درجه

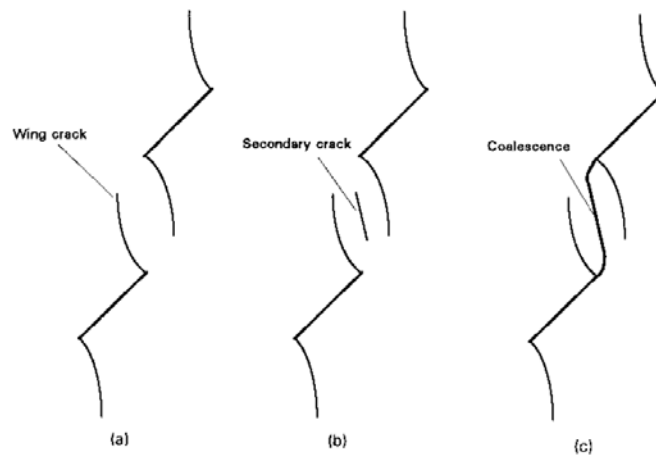
برای این حالت روند انشعاب، انتشار و اتصال ترک‌ها در شکل (۳-۲۲) نشان داده شده است. ابتدا ترک‌های پره‌ای از نوک ترک‌ها منشعب می‌شوند (شکل ۳-۲۲-a) سپس ترک‌های ثانویه از نوک ترک‌ها منشعب شده و رشد می‌کنند (شکل ۳-۲۲-b). در نهایت ترک‌های برشی داخلی رشد کرده و بهم می‌رسند و اتصال ترک‌ها توسط دو ترک ثانویه صورت می‌گیرد (شکل ۳-۲۲-c).



شکل (۳-۲۲): ترتیب انشعاب، انتشار و اتصال ترک‌ها زمانی که زاویه شیب خط واصل ترک‌ها ۴۵ و ۶۰ درجه است (Shen, 1993).

• حالت دوم: زاویه شیب خط واصل دو ترک β ، ۷۵ و ۹۰ درجه

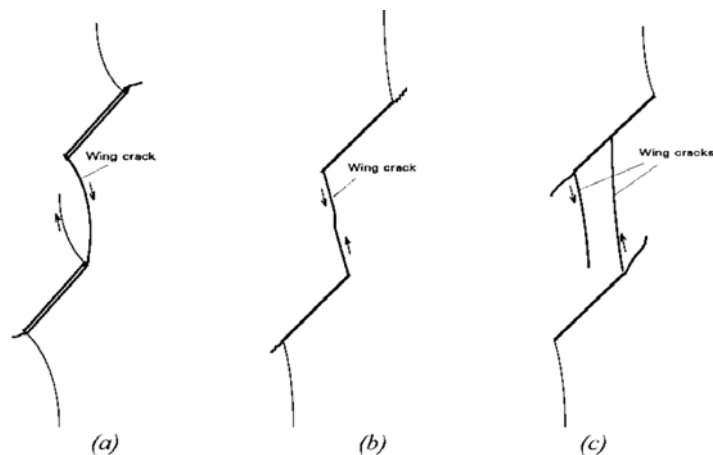
وقتی که زاویه β ، ۷۵ و ۹۰ درجه باشد، باز هم با وجود رشد ترک‌های پره‌ای از نوک ترک‌ها، اتصال ترک‌ها از نوع مود برشی می‌باشد. ولی ترک‌های ثانویه نه از نوک ترک‌ها بلکه از مرکز ماده سنگ ما بین ترک‌ها شروع می‌شود (شکل ۳-۲۳).



شکل (۳-۲۳): فرایند اتصال ترک‌ها زمانی که زاویه شیب β ۷۵ و ۹۰ درجه است (Shen, 1993).

• حالت سوم: زاویه شیب خط واصل دو ترک β ، ۱۰۵ و ۱۲۰ درجه

وقتی که ترک‌های اولیه همپوشان هستند، زاویه شیب β ، ۱۰۵ و ۱۲۰ درجه می‌باشد و اتصال ترک‌ها بوسیله ترک‌های پره‌ای صورت می‌گیرد (شکل ۳-۲۴). وقتی شیب خط واصل دو ترک ۱۰۵ درجه و ترک‌ها باز باشند، ترک پره‌ای منشعب از یک ترک به نوک ترک قبلی متصل می‌شود (شکل ۳-۲۴-a). وقتی شیب خط واصل دو ترک ۱۰۵ درجه و ترک‌ها بسته باشند، ترک پره‌ای منشعب از نوک داخلی یک ترک به ترک دیگر متصل می‌شود (شکل ۳-۲۴-b). در واقع ترک‌های باز باعث رشد ترک‌های پره‌ای کاملاً خمیده و ترک‌های بسته باعث رشد ترک‌های پره‌ای مستقیم می‌شوند. وقتی شیب خط واصل ۱۲۰ درجه است، ترک پره‌ای منشعب از یک ترک به ترک دیگر متصل می‌شود.



شکل (۳-۲۴): اتصال ترک‌ها توسط ترک‌های پره‌ای وقتی شیب خط واصل ۱۰۵ یا ۱۲۰ درجه است (Shen, 1993).

نتایج الگوهای رشد و اتصال ترک‌ها در آزمایشات مختلف شن در جدول (۳-۴) درج شده است.

جدول (۳-۴): الگوهای رشد و اتصال ترک‌ها به ازای مقادیر مختلف α و β (Shen, 1993)

α / β	$30^\circ / 45^\circ$	$45^\circ / 45^\circ, 60^\circ$ $60^\circ / 45^\circ, 60^\circ$	$45^\circ / 75^\circ$ $60^\circ / 75^\circ$	$45^\circ / 90^\circ$ $60^\circ / 90^\circ$	$45^\circ / 105^\circ$ $60^\circ / 105^\circ$	$45^\circ / 120^\circ$
ترک‌های باز	 no coalescence	 secondary "shear" crack	 secondary shear/tensile crack	 secondary shear/tensile crack	 wing crack	 wing crack
ترک‌های بسته	 secondary "shear" crack	 secondary "shear" crack	 secondary shear/tensile crack	 secondary shear crack + wing crack	 wing crack	 other crack

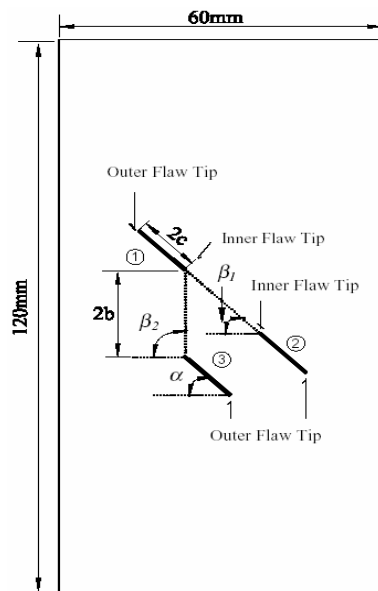
همانطور که مشاهده می‌شود وقتی که زاویه شیب خط واصل (β) از مقادیر کمتر ($60^\circ \leq$) تا مقادیر بیشتر ($90^\circ \geq$) تغییر می‌کند، مکانیزم اتصال برای هر دو ترک باز و بسته خیلی متفاوت است. بسته به مقدار (β)، ترک‌های ثانویه (برشی) از نوک ترک‌ها یا از وسط ماده سنگ ما بین منشعب می‌شوند و شیب ترک و نوع آن (باز یا بسته) در نوع مود شکست تاثیر کمتری دارند.

۳ - ۴ - ۲ - مطالعات وُنگ و همکارانش

وُنگ^۱ و همکارانش در سال ۲۰۰۱ مکانیسم شکست، مقاومت نهایی و الگوی اتصال ترک‌ها را در نمونه‌های شبه سنگی حاوی دو و سه ترک موازی اصطکاکی تحت بار فشاری به طور آزمایشگاهی تحقیق کرده‌اند (Wong et al., 2001). در این مطالعه ابعاد نمونه‌ها $120 \times 60 \times 25$ میلی‌متر مکعب، طول ترک $2c = 12 \text{ mm}$ و فاصله ترک‌ها $2b = 20 \text{ mm}$ انتخاب شد. مشخصات هندسی و وضعیت قرارگیری ترک‌ها در نمونه‌های حاوی سه ترک در شکل (۳-۲۵) نشان داده شده است. مطابق شکل ترک‌ها با شماره های ۱، ۲ و ۳ مشخص شده‌اند. در نمونه‌های حاوی دو ترک، از ترک سوم صرف‌نظر

1- Wong

شده است. برای مطالعه تاثیر هندسه ترک‌ها بر مکانیزم اتصال ترک‌ها، زاویه شیب ترک‌ها (α) برابر ۴۵ و ۶۰ درجه، زاویه خط واصل ترک ۱ و ۲ (β_1) برابر ۴۵ درجه و زاویه خط واصل ترک ۳ و ۱ (β_2) از ۷۵ تا ۱۲۰ با تغییرات ۱۵ درجه‌ای متغیر در نظر گرفته شده است (شکل ۳-۲۵).



شکل (۳-۲۵): مشخصات هندسی نمونه حاوی سه ترک (Wong et al., 2001)

آنها در ترکیب مواد مدلسازی از باریت، ماسه، پلاستر و آب به ترتیب با نسبت جرمی ۲ : ۴ : ۱ : ۱/۵ استفاده نمودند. خواص ژئومکانیکی نمونه‌های مورد استفاده در جدول (۳-۵) درج شده است.

جدول (۳-۵): خواص ژئومکانیکی نمونه‌های مورد استفاده در مطالعات ونگ (Wong et al., 2001)

مقاومت کششی	مقاومت فشاری	ضریب اصطکاک داخلی	ضریب پواسون	مدول الاستیسیته
MPa	MPa			GPa
۰/۳۵	۲/۰۹	۰/۶ – ۰/۷	۰/۱۹	۰/۳۳

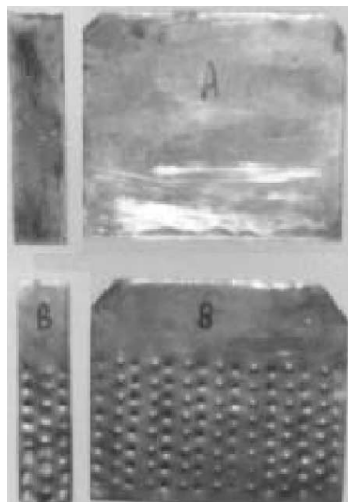
در این مطالعه ترک‌ها با قرار دادن صفحات فولادی ضد زنگ در قالب و برداشتن آنها در طی تشکیل نمونه ایجاد شده‌اند. این روش کار در شکل (۳-۲۶) نشان داده شده است.



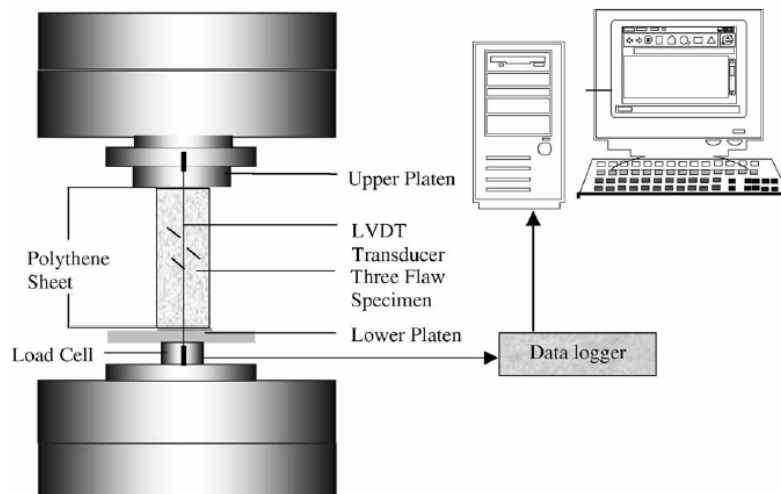
شکل (۳-۲۶): نحوه ایجاد ترک در نمونه ها با صفحات فولادی (Wong et al., 2001)

زبری‌های متفاوت سطح ترک‌ها با تعداد سوراخ‌های موجود در صفحات فولادی صاف ایجاد شده‌اند. این مورد در شکل (۳-۲۷) نشان داده شده است.

آزمایشات فشاری تک محوری در ماشین بارگذاری Wykeham Farrance WF – 5562s انجام شده است. این ماشین کنترل بار است که با نرخ متوسط 0.002 KN/s بارگذاری می‌کند. در این آزمایشات بارگذاری یک نمونه تا شکست آن حدود ۲۵ تا ۳۰ دقیقه طول کشیده است. در جلو و عقب نمونه دو جابجایی‌سنج نصب شده تا تغییر شکل قائم نمونه را ثبت کنند. سیستم بارگذاری مطالعات وُنگ در شکل (۳-۲۸) نشان داده شده است. در زیر صفحه پائینی یک سلول بار با ظرفیت 5 KN قرار داده شده است.



شکل (۳-۲۷): لایه‌های فولادی با زبری‌های متفاوت برای ایجاد ترک. لایه بالایی و پائینی به ترتیب ضریب اصطکاک 0.6 و 0.7 در سطح ترک ایجاد می‌کنند (Wong et al., 2001).



شکل (۳-۲۸): سیستم بارگذاری با کنترل جابجائی (Wong et al., 2001)

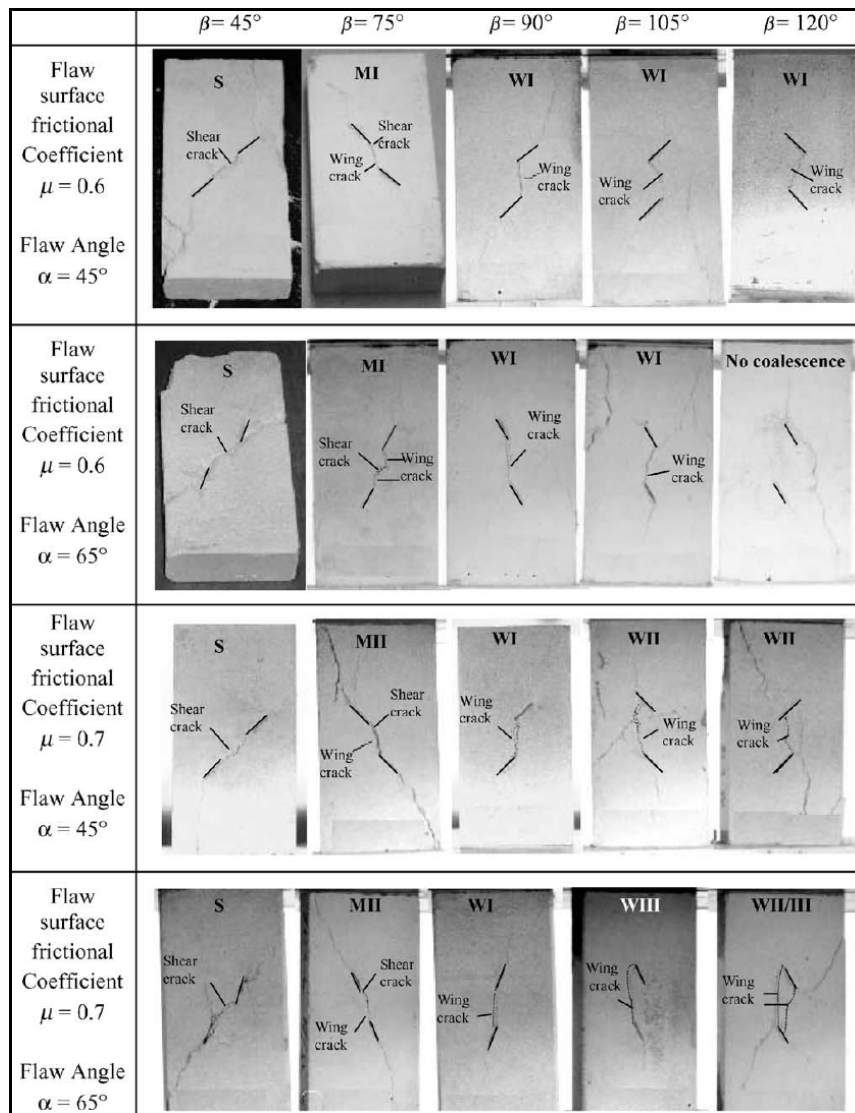
برای کاهش اصطکاک بین نمونه و صفحات بارگذاری دو تکه صفحه فلزی قرار داده شده است. تمامی بارها و جابجائی‌های ثبت شده با استفاده از یک ثبت^۱ مدل KYOWA UCAM – 5B منتقل شده و در کامپیوتر ذخیره شده است.

وُنگ و همکارانش به این نتیجه رسیده‌اند که برای نمونه‌های حاوی دو ترک، سه مود اتصال ترک در ناحیه ما بین ترک‌ها وجود دارد. کشش پره‌ای، برشی و ترکیب کشش و برش. برای مقایسه الگوهای اتصال ترک در نمونه‌های حاوی ۲ و ۳ ترک، در اشکال (۳-۲۹) و (۳-۳۰) تمامی الگوها برای مقادیر مختلف زاویه شیب ترک ($\alpha = 45^\circ \text{ and } 60^\circ$)، زاویه شیب خط واصل ما بین ترک‌ها ($\beta_1 = 45^\circ, \beta_2 = 75^\circ - 120^\circ$) و ضریب اصطکاک ($\mu = 0.6 \text{ and } 0.7$) گزارش داده شده است.

نماد S مود برشی اتصال ترک، نمادهای MI, MII مود ترکیب برش و کشش و نمادهای WI, WII مود کششی اتصال ترک را نشان می‌دهند. در اتصال نوع S اتصال بین لبه دو ترک در راستای نسبتاً موازی با ترک صورت می‌گیرد. در اتصال MI ترک‌های پره‌ای منشعب شده که از لبه ترک‌های قبلی ایجاد می‌شوند، در وسط ناحیه ما بین دو ترک بصورت برشی متصل می‌شوند. در مود MII ترک پره‌ای با ترک برشی که از لبه ترک قبلی دوم ظاهر شده، متصل می‌شود. در اتصال نوع WI

1- Data Logger

یک اتصال ساده بین ترک‌های پره‌ای می‌باشد. WII از اتصال ترک پره‌ای منشعب از ترک اول با ترک قبلی دیگر بوجود می‌آید. WIII از اتصال ترک پره‌ای منشعب از ترک اول با لبه بیرونی ترک دوم بوجود می‌آید. این نمادها بطور واضح در شکل (۳-۳۱) نشان داده شده‌اند.



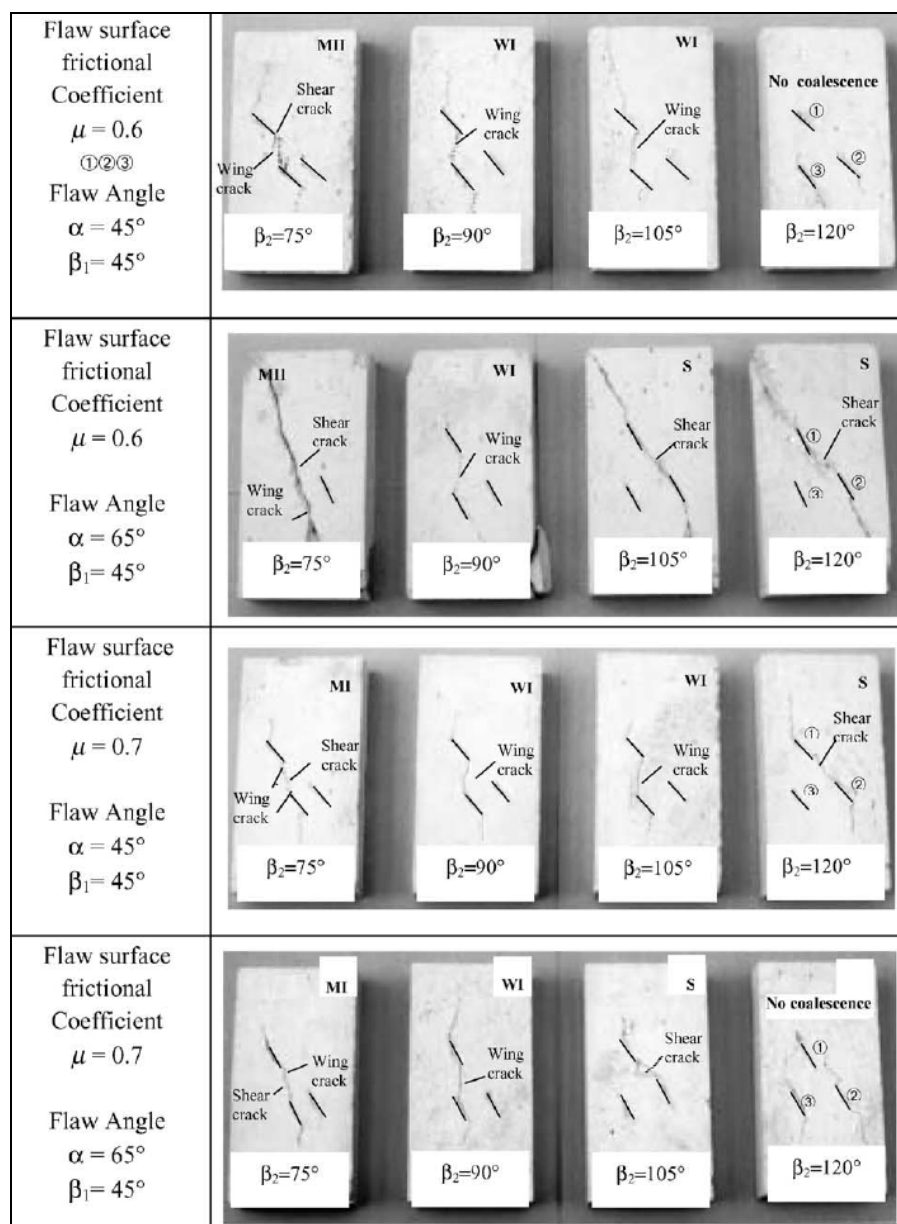
شکل (۳-۲۹): مودهای مختلف اتصال ترک در نمونه‌های حاوی دو ترک (Wong et al., 2001)

در این مطالعه در نمونه‌های حاوی ۳ ترک، برخلاف نمونه‌های حاوی ۲ ترک، به ازای $\beta_2 = 120^\circ$ اتصال ترک مشاهده نمی‌شود و فقط به ازای $\beta_1 = 45^\circ$ اتصال ترک‌ها اتفاق می‌افتد (شکل ۳-۳۰).

مشاهدات آزمایشگاهی نشان می‌دهد که در ۱۴ مورد از ۱۶ نمونه با مشخصات هندسی مشخص،

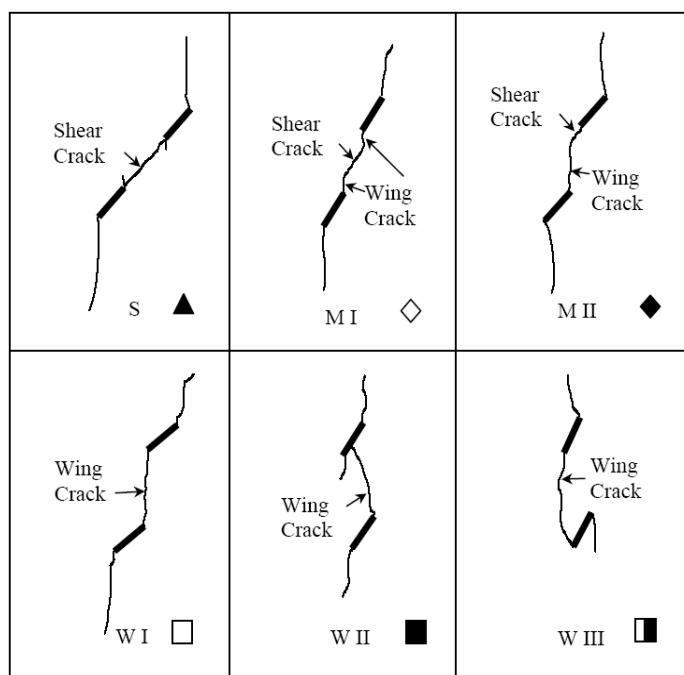
اتصال ترک‌ها اتفاق می‌افتد. در فرایند رشد ترک ۳ حالت ممکن است مطرح شود:

- حدوداً در ۲۷٪ نمونه‌ها ابتدا در لبه دو ترک (۱ و ۲ و یا ۳) ترک‌های کششی (ترک‌های پره‌ای) ایجاد می‌شوند و در مرحله بعد از ترک سوم ترک پره‌ای انتشار می‌یابد. مهم نیست که ابتدا کدام ترک پره‌ای منتشر می‌شود، اتصال ترک فقط بین دو ترک (ترک‌های ۱ و ۳) اتفاق می‌افتد.



شکل (۳-۳): مود اتصال ترک در نمونه‌های حاوی سه ترک با ۱۶ ترکیب مختلف از پارامترها (Wong et al., 2001)

- حدوداً در ۶۰٪ نمونه‌ها ترک‌های پره‌ای فقط از دو ترک موجود (۱ و ۲ یا ۱ و ۳) ایجاد می‌شوند بدون اینکه از ترک سوم ترک پره‌ای منتشر شود. و اتصال نهائی ترک‌ها نیز شامل ترک سوم نمی‌شود.
- در ۱۳٪ بقیه، ترک‌های پره‌ای از هر ۳ ترک در زمان یکسانی ایجاد می‌شوند؛ ولی در شکست نمونه هیچ اتصال ترکی مشاهده نمی‌شود.



شکل (۳-۳۱): ۶ الگوی متفاوت اتصال ترک‌ها که در نمونه‌های حاوی ۲ ترک مشاهده می‌شوند (Wong et al., 2001).

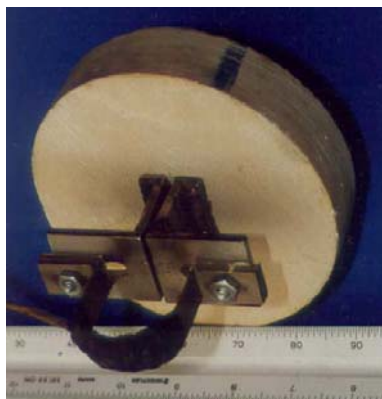
شکل (۳-۳۰) جنبه بسیار مهمی را تشریح می‌کند که اتصال ترک فقط بین دو ترک اتفاق می‌افتد. بین ترک‌های ۱ و ۲ یا بین ترک‌های ۱ و ۳ و هرگز بین ترک‌های ۲ و ۳ اتفاق نمی‌افتد. نتایج نهایی این مطالعه از مقایسه مشاهدات آزمایشگاهی نمونه‌های حاوی ۳ ترک با نمونه‌های حاوی ۲ ترک، به صورت زیر می‌باشد.

- اتصال ترک فقط بین دو ترک (نه سه ترک) اتفاق می‌افتد.
- مکانیسم رشد ترک به تنش اتصال جفت ترک‌ها بستگی دارد. اتصال ترک همیشه بین جفتی از ترک‌ها که تنش اتصال کمتر است، اتفاق می‌افتد.

- وقتی که مقدار تنش اتصال جفت ترک‌ها خیلی بهم نزدیک باشد (حدود ۵٪ اختلاف)، مودهای ترکیبی و کشش نسبت به مود برشی، همیشه مهمترین مود هستند.
- مقدار ضریب اصطکاک μ بر پروسه اتصال ترک‌ها تاثیرگذار است.
- مقاومت فشاری تک‌محوری نمونه‌های ترک‌دار به تعداد کلی ترک موجود در نمونه بستگی ندارد و به فقط به تعداد ترک‌هایی که در تشکیل زون برشی شرکت می‌کنند، بستگی دارد.

۳ - ۴ - ۳ - مطالعات ناصر الشایه

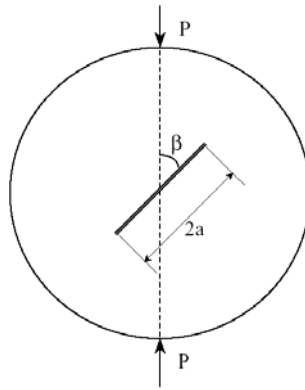
ناصر الشایه^۱ در سال ۲۰۰۵ مکانیسم انتشار ترک و مسیر رشد آن را در حالت مود ترکیبی بطور آزمایشگاهی بر روی نمونه‌های سنگ آهک بررسی کرده است (Al-Shayea, 2005). این مطالعه تنها موردی است که تاکنون بر روی سنگ طبیعی صورت گرفته است. در این آزمایشات با مغزه‌گیری از بلوک‌های سنگی و با استفاده از دستگاه مدور پر سرعت، دیسک‌هایی با قطر ۹۸ و ۸۴ میلیمتر و با ضخامت ۲۲ میلیمتر تهیه شده است (شکل ۳-۳۲). سپس با استفاده از سیم برش الماسه به ضخامت ۰/۲۵ میلیمتر در مرکز هر دیسک شکاف مستقیمی بطول ۳۰ میلیمتر ($a/R = 0.3$) در هر نمونه ایجاد گردیده است. در این حالت نوک ترک بشکل نیم دایره و با شعاع ۰/۱۲۵ میلیمتر بوده و همچنین یک جابجایی سنج ترک با قابلیت اندازه‌گیری گسترش ترک در دهانه ترک به سطح نمونه چسبانده شده بود.



شکل (۳-۳۲): نمونه استفاده شده در مطالعات آزمایشگاهی ناصر الشایه (Al-Shayea, 2005)

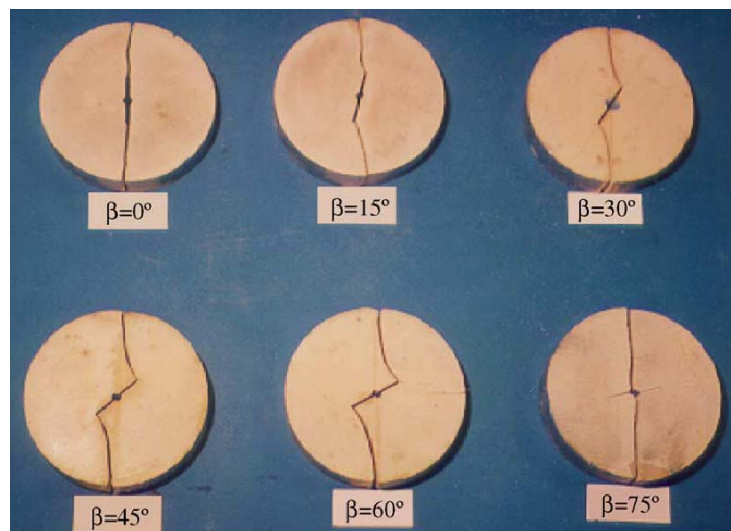
1- Naser Al-Shayea

برای مطالعه زاویه انتشار ترک و مسیر رشد آن بر روی نمونه‌های سنگ آهک، نمونه‌های دیسک برزیلی با شکاف مرکزی مستقیم (CSNBD) با زوایای مختلف شیب ترک استفاده شد که به طور قطری بارگذاری شده‌اند (شکل ۳-۳۳).



شکل (۳-۳۳): نمونه‌های CSNBD تحت بارگذاری فشاری قطری (Al-Shayea, 2005)

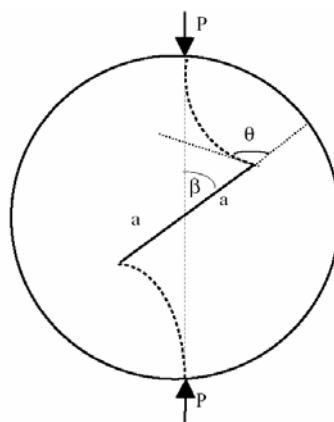
ایجاد ترک دو مولفه را شامل می‌شود: نقطه ایجاد ترک (محل) و زاویه ایجاد ترک (راستا). در اغلب موارد نقطه ایجاد ترک نوک شکاف یا ترک می‌باشد. وقتی مقدار بار فشاری از حد مشخصی تجاوز کرد، ترک‌ها در نوک شکاف ایجاد شده و در راستای مسیر خمیده‌ای به نقاط محل اعمال بار در مرز نمونه امتداد می‌یابند. وقتی ترک‌های در حال انتشار به مرزهای بالائی و پائینی نمونه می‌رسند، نمونه شکسته و همانطوری که در شکل (۳-۳۴) نشان داده شده، به دو تکه تقسیم می‌شوند.



شکل (۳-۳۴): نمونه‌های CSNBD بعد از شکست (Al-Shayea, 2005)

طبق مطالعات الشایه، برای نمونه‌هایی که زاویه بین امتداد شکاف و امتداد بارگذاری (β) 60° درجه و کمتر از آن باشد، ترک در لبه شکاف ایجاد می‌شود. ولی برای نمونه‌هایی با زاویه β برابر 75° درجه، ترک از لبه شکاف ایجاد نمی‌شود. این پدیده برای نمونه‌هایی با اندازه‌های مختلف و در شرایط مختلف دما و فشار محصور کننده، صادق است. بنابراین برای مقادیر بیشتر β (بیش از 60° تا 75° درجه) نمونه‌ها بجای مود چقرمگی شکست، در مود کشش شکسته می‌شوند. زاویه انتشار ترک مطابق شکل (۳-۳۵) زاویه‌ای است که امتداد ترک از جهت اصلی شکاف منشعب می‌شود.

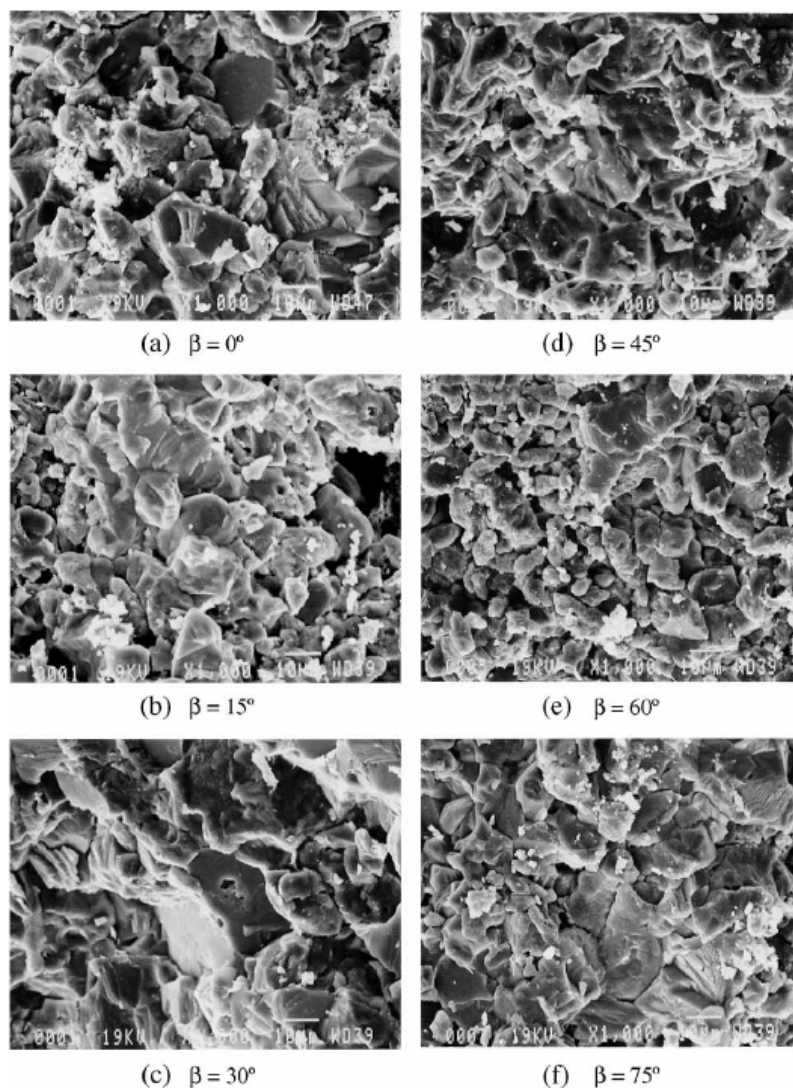
طبق نتایج الشایه زاویه انتشار ترک به ازای مقادیر کمتر β به مقدار زیادی به پارامتر درجه تیزی نوک ترک بستگی دارد. این پارامتر به صورت نسبت شعاع انحنا در نوک ترک به نصف طول ترک (p/a) بیان می‌شود. در نمونه‌های مطالعاتی الشایه پارامتر p/a برابر $0.008 = 0.125/15$ است. به ازای مقادیر بیشتر β ($\beta > 30^\circ$) درجه تیزی نوک ترک بر زاویه انتشار ترک تاثیر قابل توجهی ندارد.



شکل (۳-۳۵): زاویه ایجاد ترک (Al-Shayea, 2005)

الشایه در مطالعات آزمایشگاهی خود از تصاویر اسکن میکروسکوپ الکترونی (SEM) استفاده و با آنالیز سطح شکست نمونه‌های CSNBD، نوع مود شکست آنها را به ازای زوایای مختلف β تعیین کرد. به ازای $\beta = 0^\circ$ میکروگراف نشان می‌دهد که سطح ترک خورده، طبیعت زبر و خشن دارد و بین دانه‌ها مرزهای تیزی بوجود آمده که این بیانگر شکست مد بازشدگی خالص است. به ازای $\beta = 15^\circ$ میکروگراف نشان می‌دهد که سطوح ترک خورده حاوی دانه‌های شکافته شده زبر است که در مرز

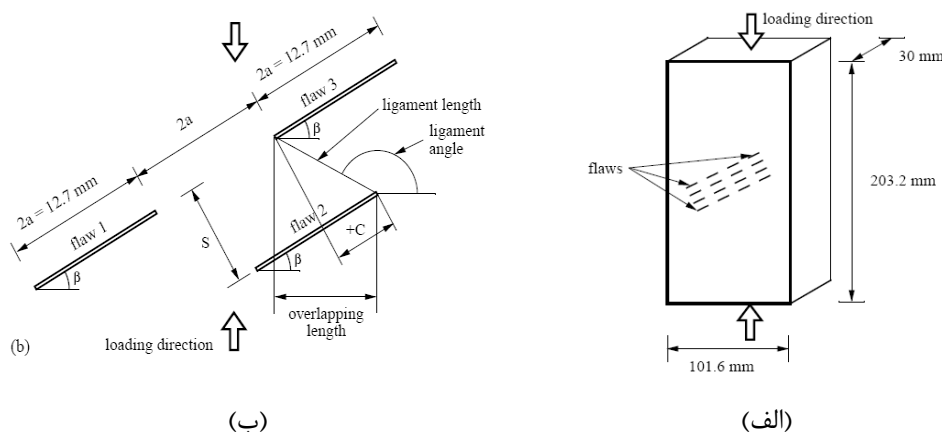
دانه‌ها مقداری خردشدگی وجود دارد و شکست از ترکیب موده‌های بازشدگی و برشی ایجاد شده است. به ازای $\beta = 30^\circ$ میکروگراف نشان می‌دهد که بین مرز دانه‌ها خرد شدگی وجود دارد چرا که شکست ناشی از مد برشی خالص است. به ازای $60^\circ, 45^\circ$ سطح ترک خورده ظاهر دانه‌ای کمتری را نشان می‌دهد که بخاطر ترکیب لغزش و فشار سایش و خردشدگی دانه‌ها زیاد است. این وضعیت در $\beta = 60^\circ$ شدیدتر است. به ازای $\beta = 75^\circ$ نمونه در راستای خط قطری بارگذاری شکسته می‌شود. در این حالت میکروگراف همانند حالت $\beta = 0^\circ$ است که بیانگر اینست که سطح شکست تحت تاثیر تنش‌های کششی خالص ایجاد شده است (۳-۳۶).



شکل (۳-۳۶): تصاویر اسکن میکروسکوپ الکترونی از سطوح شکسته نمونه‌های CSNBD با بزرگ نمایی ۱۰۰۰ (Al-Shayea, 2005)

۳ - ۴ - ۴ - مطالعات ساگونگ و بوبت

ساگونگ^۱ و بوبت^۲ در سال ۲۰۰۲ مکانیسم رشد و اتصال ترک را در نمونه‌های حاوی ۲، ۳ و ۱۶ ترک تحت بار فشاری تک محوره بطور آزمایشگاهی بررسی نمودند (Sagong and Bobet, 2002). هدف اصلی آنها این بوده که آیا می‌توان الگوی رشد و اتصال ترک در نمونه‌های حاوی دو ترک را به نمونه‌های حاوی ۳ و ۱۶ ترک تعمیم داد. جنس نمونه‌های مورد استفاده ترکیب گچ، آب و خاک دیاتومیت می‌باشد که نسبت جرمی آب به گچ ۰/۴ و آب به خاک دیاتومیت ۰/۳۵ استفاده شده است. ابعاد نمونه‌های مورد استفاده $30 \times 101.6 \times 203.2$ میلی‌متر مکعب و طول ترک‌ها ۱۲/۷ میلی‌متر می‌باشد (شکل ۳-۳۷-الف). هندسه ترک‌ها در نمونه حاوی ترک‌های متعدد با جزئیات کامل در شکل (۳-۳۷-ب) نشان داده شده است.



شکل (۳-۳۷): نمونه حاوی ترک‌های متعدد. الف) نمای کلی ب) هندسه ترک‌ها (Sagong and Bobet, 2002)

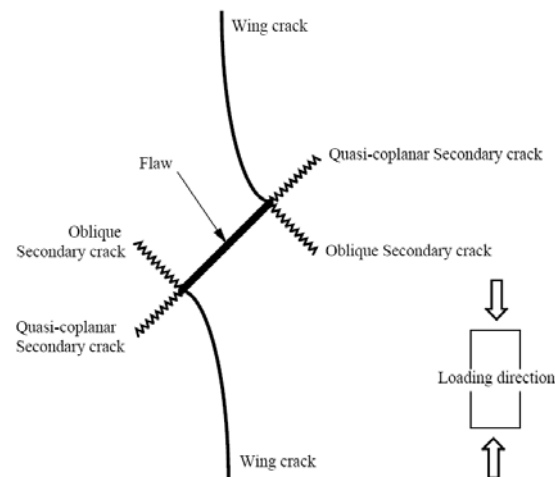
نتایج این مطالعه بصورت زیر خلاصه می‌شود:

- دو نوع ترک از انتهای درزه‌ها رشد می‌کنند؛ ترک‌های پره‌ای و ترک‌های ثانویه. ترک‌های پره‌ای ترک‌های کششی هستند که عمدتاً از انتهای ترک‌های موجود و بصورت انحنادار بسمت راستی حداکثر فشار گسترش می‌یابند و پایدار هستند. ترک‌های ثانویه ترک‌های برشی هستند که همیشه از انتهای ترک‌های قبلی گسترش می‌یابند و در ابتدا بطور پایدار رشد می‌کنند. این ترک‌ها ممکن است

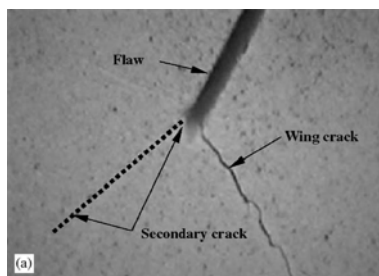
1- Sagong
2- Bobet

بطور ناپایدار رشد کرده و باعث اتصال گردند. این دو نوع ترک در شکل (۳۸-۳) بطور شماتیک و در اشکال (۳۹-۳) و (۴۰-۳) نشان داده شده است.

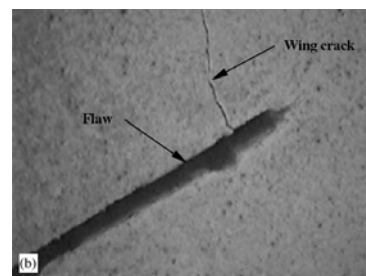
- دو حالت برای امتداد ترک‌های برشی وجود دارد. هم‌راستا یا تقریباً هم‌راستا با درزه و امتداد انحنادار نسبت به درزه (شکل ۳۸-۳).



شکل (۳۸-۳): الگوی رشد ترک در نمونه‌های ترکدار (Sagong and Bobet, 2002)

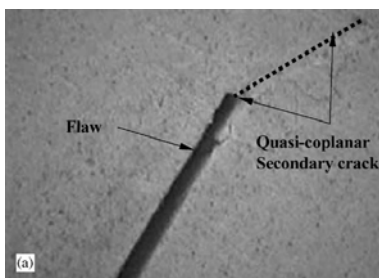


شیب درزه ۶۰ درجه

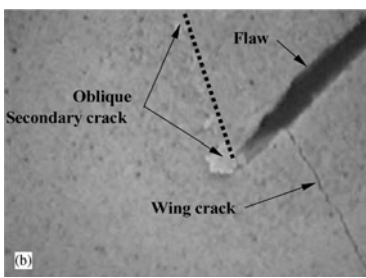


شیب درزه ۳۰ درجه

شکل (۳۹-۳): ترک‌های کششی پره‌ای که از نوک درزه رشد می‌کنند (Sagong and Bobet, 2002).



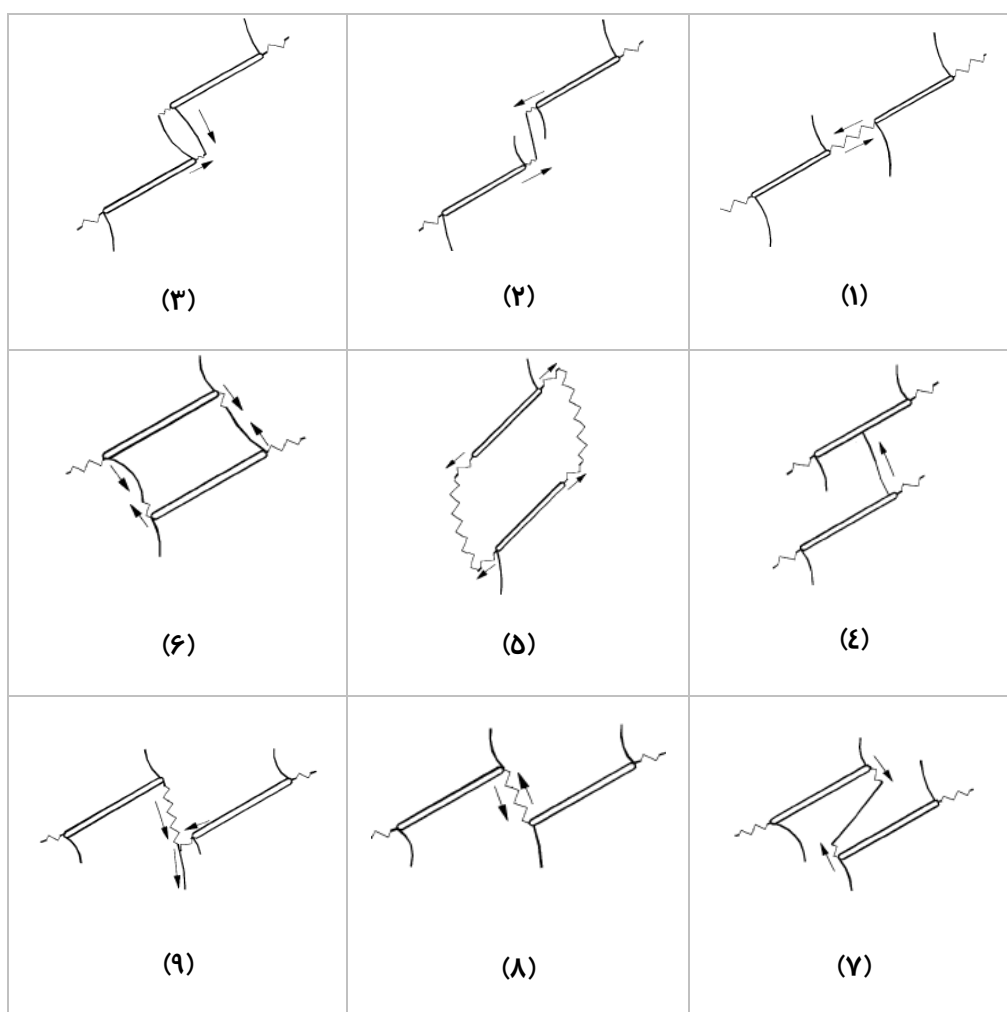
شیب درزه ۶۰ درجه



شیب درزه ۴۵ درجه

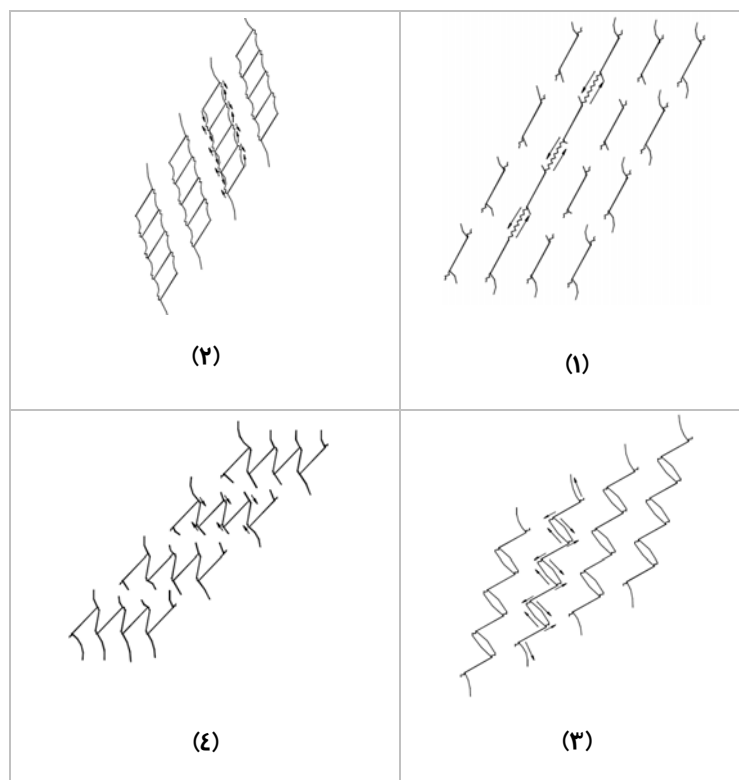
شکل (۴۰-۳): ترک‌های برشی ثانویه که از نوک درزه رشد می‌کنند (Sagong and Bobet, 2002).

- مقدار تنشی که به ازای آن ترک‌های کششی و برشی شروع به رشد می‌کنند، به هندسه درزه‌ها بستگی دارد. این مقدار با افزایش شیب درزه‌ها، فاصله‌داری و نسبت همپوشانی افزایش و با افزایش تعداد درزه‌ها، کاهش می‌یابد.
- برای ۹ حالت از آرایش درزه‌ها در نمونه‌های حاوی دو درزه، مکانیزم رشد و اتصال درزه‌ها در شکل (۳-۴۱) نشان داده شده است. ترک‌های کششی با خط پررنگ و ترک‌های برشی بصورت زیگزالی نمایش داده شده است.



شکل (۳-۴۱): حالات مختلف رشد و اتصال ترک در نمونه‌های حاوی دو درزه تحت بار فشاری تک‌محوری (Sagong and Bobet, 2002)

در نمونه‌های حاوی ۱۶ درزه، اتصال درزه‌ها عموماً بصورت ستونی اتفاق می‌افتد (حالات ۱، ۲ و ۳ در شکل ۳-۴۲).



شکل (۳-۴۲): حالات مختلف رشد واتصال ترک در نمونه‌های حاوی ۱۶ درزه تحت بار فشاری تک‌محوی (Sagong and Bobet, 2002).

۲- ۵ - نتیجه‌گیری

در این فصل اغلب مطالعات انجام شده برای تحلیل مسائل مکانیک شکست سنگ بطور مختصر مرور و توضیح داده شد. این مطالعات به سه دسته تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی تقسیم شدند. مطالعات تحلیلی یا تحت شرایط هندسی و بارگذاری ساده ارائه شده‌اند و یا خیلی پیچیده می‌باشند که در هر دو حالت کاربرد آنها برای حل مسائل واقعی اغلب امکان‌پذیر نیست.

از بین روش‌های مورد بحث، روش‌های عددی بیشترین کاربرد را در تحلیل مسائل انتشار ترک در محیط‌های سنگی داشته‌اند. این روش‌ها نیز هر یک از مزایا و معایب خاصی برخوردارند ولی در مدلسازی شرایط هندسی و شرایط بارگذاری متغیر از انعطاف خیلی خوبی برخوردار هستند. این روش‌ها در صورت برنامه نویسی و پیاده‌سازی صحیح و تعریف دقیق پارامترهای موثر و انتخاب معیار شکست مناسب قادرند مکانیزم رشد ترک را با کمترین هزینه مدلسازی و پیش بینی نمایند. دسته سوم، مطالعات آزمایشگاهی از بالاترین اعتبار برخوردار بوده و عموماً صحت نتایج روش‌های تحلیلی و

عددی با نتایج این روش‌ها ارزیابی می‌گردد. علی‌رغم این مزیت اصلی، مطالعات آزمایشگاهی نیازمند دستگاه‌های آزمایشگاهی دقیق بوده و تهیه نمونه‌های آزمایشگاهی با شرایط یکسان برای بدست آوردن نتایج تکرار پذیر سخت می‌باشد و انجام این نوع مطالعات به زمان خیلی زیادی نیاز دارد.

فصل چهارم

روش عددی بدون مش گالرکین

۴ - ۱ - مقدمه

برای مدل‌سازی و تحلیل مسائل مختلف مهندسی عموماً از روش‌های تحلیلی و روش‌های عددی استفاده می‌شود. روش‌های تحلیلی برای مدل‌هایی با هندسه و بارگذاری ساده توسعه داده شده‌اند. در مدل‌هایی با هندسه و بارگذاری پیچیده عمدتاً از روش‌های عددی نظیر روش المان محدود و المان مرزی استفاده می‌شود. روش‌های مبتنی بر مش المان محدود و المان مرزی در برخورد با مسائل انتشار ترک با مشکلاتی مواجه هستند که به ماهیت مش‌بندی آن‌ها مربوط می‌شود. برای غلبه بر این مشکلات، روش‌های بدون مش متعددی نظیر هیدرودینامیک ذره‌ای نرم شده^۱ (SPH)، روش ذره‌ای تولید مجدد کرنل^۲، روش بدون مش گالرکین^۳ (EFGM)، روش بدون مش پترو گالرکین^۴ محلی و... توسعه یافته است. جنبه مشترک روش‌های بدون مش این است که متغیرهای میدان را بطور داخلی بر مبنای تعدادی از گره‌های گسسته ارزیابی می‌کنند و به اتصالات از پیش تعریف شده گره‌ها نیاز ندارند. از آنجائیکه گره‌ها در دامنه مسئله بدون ساختار هستند، لذا می‌توانند حرکت کنند، اضافه شوند و یا بطور آزاد حذف شوند. بنابراین در روش‌های بدون مش، مشکلات مربوط به روش المان محدود و المان مرزی بر طرف شده است.

از آنجا که در ابداع و توسعه روش‌های بدون مش، روش المان محدود تاثیر بسزایی داشته و اطلاع از این روش برای فهم بهتر اغلب روش‌های بدون مش ضروری است، لذا در این فصل ابتدا روش المان محدود بطور مختصر توضیح داده شده و تفاوت آن با روش‌های بدون مش بحث می‌شود. سپس

1- Smooth Particle Hydrodynamic (SPH)
2- Reproducing Kernel Particle Method
3- Element Free Galerkin Method (EFGM)
4- Meshless Local Petro-Galerkin

تاریخچه و ساختار کلی روش‌های بدون مش مرور شده و روش بدون مش گالرکین با جزئیات کامل شرح داده می‌شود. در مرحله بعد نحوه مدل‌سازی ناپیوستگی‌های هندسی نظیر ترک‌ها با روش بدون مش گالرکین توضیح داده می‌شود. در نهایت کاربردهای قبلی روش بدون مش در حوزه مکانیک شکست بیان می‌شود.

۴ - ۲ - روش المان محدود

در روش المان محدود، محیط‌های پیوسته واقعی یا اجسامی که به شکل جامد، مایع یا گاز هستند، بصورت مجموعه‌های مرکب از تقسیمات کوچک بنام اجزای محدود نمایش داده می‌شوند. این اجزا بصورتی در نظر گرفته می‌شوند که در نقاط مشترک معینی بنام نقاط گره‌ای یا گره‌ها به هم متصل می‌باشند. این گره‌ها معمولاً بر روی مرزهایی که المان را به المان‌های مجاور متصل می‌کنند، در نظر گرفته می‌شوند. از آنجا که تغییرات واقعی متغیر میدان (مانند جابجائی، تنش، دما، فشار یا سرعت) در داخل این محیط پیوسته، مجهول است، فرض می‌شود که تغییرات متغیر میدان در داخل یک المان محدود را می‌توان بوسیله یک تابع ساده تقریب زد. این توابع تقریبی (که توابع درونیاب نیز نامیده می‌شوند) بر حسب مقادیر متغیرهای میدان در گره‌ها تعریف می‌شوند. وقتی معادلات میدان (مانند معادلات تعادل) برای تمامی محیط پیوسته نوشته می‌شود، مجهولات جدید، مقادیر متغیر میدان در گره‌ها خواهند بود. با حل معادلات میدان (که عموماً به شکل معادلات ماتریسی هستند) مقادیر گره‌ای متغیر میدان بدست خواهد آمد. با پیدا کردن این مجهولات، توابع تقریبی، متغیر میدان را در سراسر مجموعه المان‌ها تعریف می‌کنند.

حل مسائل عمومی محیط‌های پیوسته بوسیله روش المان محدود همیشه از یک فرایند منظم مرحله به مرحله پیروی می‌کند. با توجه به مسائل سازه‌ای استاتیکی روش مرحله به مرحله را می‌توان بصورت زیر نام برد (Zienkiewicz and Taylor, 2000):

- گسسته سازی دامنه مساله مورد نظر
- استنتاج معادلات المان برای اجزای محدود نوعی در شبکه المان‌ها

- جمع کردن معادلات المان‌ها برای بدست آوردن معادلات کلی تعادل

- اعمال شرایط مرزی مساله

- حل معادلات اسمبل شده

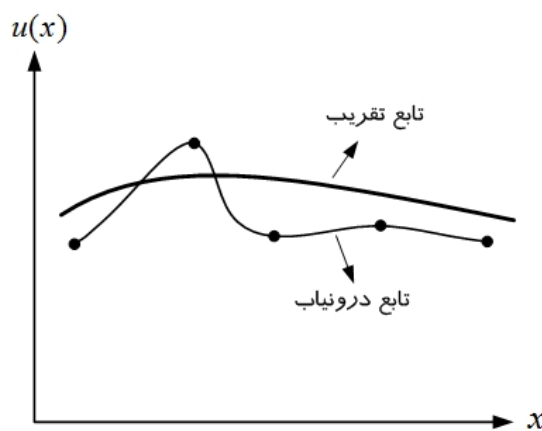
- تحلیل نتایج

اگر چه روش المان محدود در طیف وسیعی از کاربردهای مهندسی موفقیت‌های بزرگی داشته است، ولی در برخورد با مسائلی که شامل تغییر شکل‌های خیلی زیادی هستند و یا در مسائل انتشار ترک با مشکلاتی درگیر است که به ماهیت مش‌بندی آن مربوط می‌شود (Liu and Tu, 2002). در مواردی مثل حرکت سیالات که با تغییر شکل‌های بزرگ همراه هست ممکن است کاربرد روش المان محدود به خاطر اغتشاش مش با نتایج دقیقی همراه نباشد و یا در مواردی مثل انتشار ترک که مرزها متحرک و متغیر هستند، در صورت استفاده از روش المان محدود به خاطر تغییرات هندسی، مش‌بندی مکرر لازم است که هم از نظر محاسباتی خیلی وقت‌گیر است و هم در انتقال متغیرهای حالت از مش قدیم به مش جدید مشکلات عدیده بوجود می‌آید (Liu and Shi, 2003).

۴ - ۳ - مقایسه روش‌های بدون مش با روش المان محدود

از لحاظ مفهومی تفاوت اساسی موجود میان روش‌های المان محدود و روش‌های بدون مش ناشی از تفاوت میان مفاهیم تقریب و درونیابی است. فرض کنید که در دامنه یک مساله در نقاطی خاص (نقاط پایه) مقدار جواب مساله موجود ولی در دیگر نقاط مقدار مساله مجهول باشد و بخواهیم جواب کلی را به صورت یک میدان یا تابع در تمامی نقاط دامنه به دست آوریم. اگر قید شده باشد که تابع داده شده از مقادیر نقاط پایه عبور کند، نتیجه به دست آمده را درونیابی می‌گویند ولی اگر تولید تابع نرمی از میان مقادیر پایه مورد نظر باشد و لزومی برای عبور از روی خود نقاط پایه در آن وجود نداشته باشد، غالباً نتیجه را تقریب می‌گویند. حال اگر در یک مساله در تعدادی از نقاط که نقاط پایه هستند مقادیر تابع تقریب زننده موجود باشد و به کمک یک تابع تقریب زننده بخواهیم ناپیوستگی موجود بین مقادیر را رفع کنیم. در روش المان محدود دامنه مساله به قطعاتی با هندسه ساده تفکیک

می‌شود. در هر یک از این اجزا با استفاده از مقادیر موجود در نقاط پایه آن محدوده، با انتخاب یک روش مناسب یک تابع درونیاب ایجاد می‌شود. بدین ترتیب این تابع لزوماً می‌بایست از مقادیر نقاط پایه عبور کند. در روش‌های بدون مش کل دامنه حل مساله به عنوان یک المان در نظر گرفته می‌شود اما چون در این محدوده تعداد نقاط پایه بسیار زیاد است با انتخاب معیاری مناسب تابع تقریب زننده از بین مقادیر پایه عبور داده می‌شود و لازم نیست حتماً تابع از روی مقادیر موجود عبور کند (مجیدزاده، ۱۳۸۶). در شکل (۱-۴) تفاوت بین تابع درونیابی و تابع تقریب نشان داده شده است.



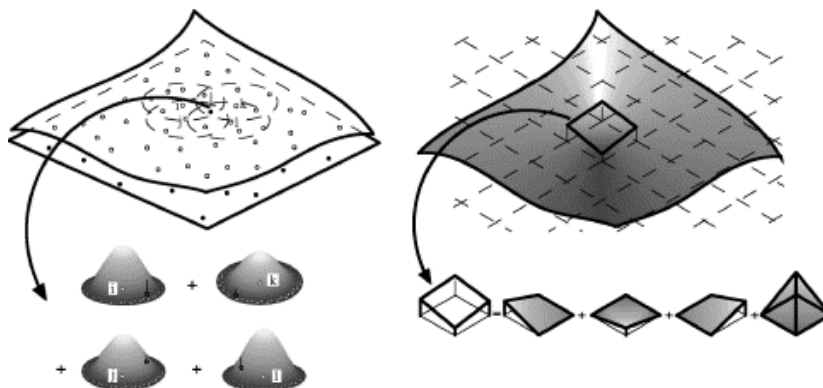
شکل (۱-۴): تفاوت بین روش‌های تقریب و درونیابی (مجیدزاده، ۱۳۸۶)

از لحاظ ساختاری نیز تفاوت بین روش المان محدود و روش‌های بدون مش با توجه به فرم توابع شکل آنها کاملاً مشخص می‌گردد (Karutz et al., 2002). به طوریکه در توابع شکل روش المان محدود، تابع شکل مربوط به هر گره باید در آن گره مقدار واحد را داشته باشد و در باقی نقاط مقدار صفر را اتخاذ نماید که این امر باعث می‌شود مقدار تقریب زده شده با مقدار واقعی یکسان گردد. ولی در روش‌های بدون مش که از تقریب زننده‌های حداقل مربعات متحرک استفاده می‌کنند، این شرط ارضا نمی‌گردد که این مساله باعث ایجاد مشکلاتی در اینگونه ساختارها می‌گردد.

نکته مهم در روش‌های بدون مش امکان تسهیل آنالیز خطا و دقت در سازگارسازی شبکه در مسایل با مرزها و ناپیوستگی‌های متحرک می‌باشد. به عنوان مثال در مسایل مربوط به گسترش ترک، می‌توان به تعداد دلخواه نقاط فراوان حول نوک ترک اضافه کرد تا ضرایب تمرکز تنش با دقت مطلوبی محاسبه

گردد. نکته مثبت دیگر روش‌های بدون مش اینست که بر خلاف روش المان محدود که تغییر دادن یک المان باعث تغییر المان‌های مجاور می‌شود (که این مطلب نیز خود باعث تغییر اساسی در ساختار کلی مش می‌گردد) در این روش‌ها برای افزودن هر تعداد نقاط دلخواه برای بالا بردن دقت در تحلیل مساله، نیاز به هیچگونه تغییر در دیگر موارد ساختار شبکه نمی‌باشد.

از طرف دیگر در این دو روش تفاوت اساسی بین توابع شکل تخمین زننده نتایج وجود دارد به صورتی که در روش المان محدود عموماً از توابع شکل خطی استفاده می‌گردد در صورتی که در روش‌های بدون مش توابع شکل دارای درجات بالاتری از چند جمله‌ای‌ها می‌باشند و گاهی از توابع شکل نمایی استفاده شده است که نتایج قابل قبولی از خود نشان داده‌اند. در شکل (۴-۲) توابع شکل مربوط به دو روش و چگونگی تاثیر آنها بر تقریب در یک نقطه نشان داده شده است.



شکل (۴-۲): مقایسه توابع شکل در روش المان محدود و روش‌های بدون مش (Karutz et al., 2002).

یکی دیگر از مزایای روش‌های بدون مش این است که محاسبه پارامترها در نقطه‌ای دلخواه از دامنه مساله نسبت به روش المان محدود راحت‌تر است.

۴ - ۴ - مروری بر روش‌های بدون مش

ابداع روش‌های بدون مش به سال ۱۹۷۷ بر می‌گردد که لوسی^۱ و نیز جینگولد و موناگان^۲ برای مدلسازی پدیده‌های بدون مرز فیزیک نجوم نظیر انفجار ستارگان و توده گرد و غبار، روش

1- Lucy

2- Gingold and Monaghan

هیدرودینامیک ذره‌ای نرم شده را پیشنهاد دادند (Chen et al., 2006). سپس افراد مختلف در ابعاد گوناگون این روش‌ها را توسعه داده و روش‌های بدون مش مختلفی ارائه کردند. این روش‌ها عبارتند از: روش هیدرودینامیک ذره‌ای نرم شده (Monaghan, 1982, 1988, 1992)، روش تفاضل محدود تعمیم یافته^۱ (Liszka and Orkisz, 1980)، روش المان پراکنده^۲ (Nayroles et al., 1992)، روش ذره در سلول^۳ (Sulsky et al., 1992)، روش گالرکین موجک^۴ (Qian and Weiss, 1993)، روش ذره‌ای تولید مجدد کرنل (Liu et al., 1995)، روش بدون مش گالرکین (Belytschko et al., 1994)، روش جزءبندی واحد^۵ (Babuska and Melenk, 1995)، توده‌های^۶ Hp (Duarte and Oden, 1996)، روش نقطه محدود^۷ (Onate et al., 1996)، روش بدون مش یاگاوا و فوروکاوا^۸ (Yagawa and Furukawa, 2000)، روش بدون مش انتگرال مرزی محلی، روش بدون مش محلی پترو-گالرکین (Atluri and Zhu, 1999; Zhu, 2000)، روش‌های چند مقیاسی^۹ (Liu et al., 2000).

جنبه‌های اساسی روش‌های بدون مش که آنها را از همدیگر متمایز می‌سازد، عبارتند از :

- ساختن تابع تقریب

- گسسته‌سازی و تشکیل معادلات گسسته تقریب

- اعمال شرایط مرزی

- محاسبه انتگرال‌ها

- کاربرد روش

روش‌های مختلف بدون مش ماهیت یکسانی داشته و فقط در برخی از جنبه‌های فوق‌الذکر باهم تفاوت دارند. در ادامه این جنبه‌ها برای روش‌های مختلف بطور مختصر توضیح داده می‌شود.

3- Generalized Finite Difference Method

4- Diffuse Element Method

5- Particle in Cell Method

6- Wavelet Galerkin Method

7- Partition of Unity

8- Hp Clouds

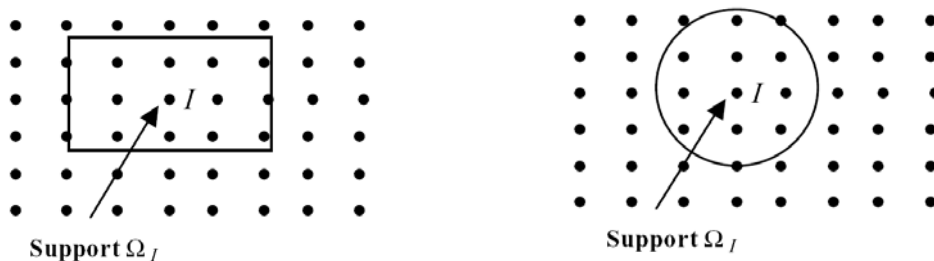
9- Finite Point Method

10- Yagawa and Furukawa

11- Multiscale Methods

۴ - ۴ - ۱ - تابع تقریب

روش‌های بدون مش تقریب‌ها را کاملاً بر حسب گره‌ها می‌سازند. تابع تقریب خصیصه اصلی یک روش بدون مش است. تابع وزن که نقش مهمی در کارائی این روش‌ها بازی می‌کند، در تمامی روش‌های بدون مش بکار می‌رود. ساپورت^۱ تابع وزن که حوزه تاثیر یک گره نیز نامیده می‌شود، یک خصوصیت محلی به روش‌های بدون مش می‌دهد. تابع وزن در حوزه تاثیر غیر صفر و در خارج از آن صفر می‌باشد. همانطور که در شکل (۳-۴) نشان داده شده، عموماً از حوزه تاثیر دایره‌ای یا مستطیل شکل استفاده می‌شود (Chen et al., 2006). در ادامه تابع تقریب روش‌های هیدرودینامیک ذره‌ای نرم شده (SPH)، روش ذره‌ای باز تولید کرنل (RKPM)، روش بدون مش گالرکین (EFGM) و روش جزءبندی واحد بیان می‌شود.



شکل (۳-۴): شکل‌های مورد استفاده برای حوزه تاثیر گره I (Chen et al., 2006).
 الف) شکل دایره‌ای
 ب) شکل مستطیلی

۴ - ۴ - ۱ - تابع تقریب روش هیدرودینامیک ذره‌ای نرم شده

در روش SPH برای تابع ساده $u(x)$ در دامنه Ω تقریب کرنل بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$u^h(x) = \int w(x-y, h) u(y) d\Omega_y \quad (1-4)$$

که در آن $u^h(x)$ تابع تقریب، $w(x-y, h)$ کرنل یا تابع وزن و h اندازه شعاع تاثیر می‌باشد. شکل گسسته این تابع با تربیع عددی به صورت زیر در می‌آید (Chen et al., 2006):

$$u^h(x) = \sum_I w(x-x_I) u_I \Delta V_I = \sum_I \phi_I(x) u_I \quad (2-4)$$

1- Support

که ΔV_I حجم (در حالت سه بعدی)، سطح (در حالت دو بعدی) و یا طول (در حالت یک بعدی) متناظر با گره I و $\phi_I(x) = w(x - x_I)\Delta V_I$ تابع شکل تقریب است.

۴ - ۱ - ۲ - تابع تقریب روش ذره‌ای باز تولید کرنل

لیو^۱ و همکارانش در توسعه روش RKPM در دو حالت گسسته و پیوسته یک تابع تصحیح به صورت زیر برای کرنل‌ها پیشنهاد دادند (Chen et al., 2006).

$$u^h(x) = \int C(x, x-y) \Phi_\alpha(x-y) u(y) d\Omega_y \quad (3-4)$$

که در آن $C(x, x-y)$ تابع تصحیح نامیده می‌شود که با اعمال شرایط باز تولید بدست می‌آید و α پارامتر تاخیر تابع کرنل $\Phi_\alpha(x-y)$ است. با انجام انتگرال‌گیری عددی شکل گسسته زیر بدست می‌آید:

$$u^h(x) = \sum_I \Phi_I(x, x-x_I) u(x_I) \Delta V_I = \sum_I \phi_I(x) u_I \quad (4-4)$$

۴ - ۱ - ۳ - تابع تقریب روش بدون مش گالرکین

نیرولز^۲ و همکارانش در سال ۱۹۹۲ برای حل عددی مسائل مقدار مرزی، گسسته‌سازی خاصی را معرفی کردند (Chen et al., 2006). در روش آنها برای توسعه معادلات گالرکین فقط یکسری گره و توصیف مرز لازم است. درونیاب‌ها چندجمله‌ای‌هایی هستند که با تقریب حداقل مربعات بر مقادیر گرهی برازش شده‌اند. این تقریب ابتدا به نام حداقل مربعات متحرک^۳ (MLS) شناخته نشده و المان‌های پراکنده نامیده شده است و روش بعنوان روش المان محدود تعمیم یافته یاد شده است. بلیچکو^۴ و همکارانش این روش خاص گسسته‌سازی را حداقل مربعات متحرک (MLS) اسم برده و این روش را تصحیح کردند و آنرا روش بدون مش گالرکین (EFGM) نامیدند (Chen et al., 2006). در تقریب MLS، درونیاب تابع $u(x)$ در دامنه Ω بصورت زیر تعریف شده است:

1- Liu
2- Nayroles
3- Moving Least Square
4- Belytschko

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) \equiv p^T(x) a(x) \quad (5-4)$$

که در آن $p_i(x)$ توابع پایه، m تعداد جملات در تابع پایه و $a_i(x)$ ضرایبی که تابعی از مختصات فضایی x هستند. عموماً از توابع پایه خطی و درجه دوم استفاده می‌شود. ضرایب $a_i(x)$ با انجام برازش حداقل مربعات وزن‌دار بر تقریب محلی بدست می‌آیند که با مینیمم کردن تفاضل تقریب محلی و تابع محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} J &= \sum_I w(x - x_I) [u^h(x, x_I) - u(x_I)]^2, \\ &= \sum_I w(x - x_I) \left[\sum_i p_i(x_I) a_i(x) - u(x_I) \right]^2, \end{aligned} \quad (6-4)$$

$$= (Pa - u)^T W(x) (Pa - u),$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = A(x)a(x) - B(x)u = 0. \quad (7-4)$$

تابع تقریب $u^h(x)$ را می‌توان بر حسب توابع شکل و مقادیر گرهی نوشت:

$$u^h(x) = \sum_I \phi_I^k(x) u_I. \quad (8-4)$$

در ادامه این تقریب بطور کامل توضیح داده می‌شود.

۴ - ۱ - ۴ - تابع تقریب روش‌های جزءبندی واحد

بابوشکا^۱ و ملنک^۲ و نیز دورات^۳ و اودن^۴ نشان داده‌اند که توابع MLS تابع PU را در بر می‌گیرد. بنابراین تمامی روش‌هایی که از MLS استفاده می‌کنند، نمونه‌های خاصی از روش PU هستند. آنها این قریب‌ها را بسط داده و توابع تقریب جدیدی ارائه دادند. بابوشکا و ملنک تابع تقریب زیر را پیشنهاد کردند (Chen et al., 2006):

$$u^h(x) = \sum_{I=1} \phi_I^0(x) (a_{0I} + a_{1I}x + \dots + a_{kI}x^k + b_{1I} \sinh nx + b_{2I} \cosh nx), \quad (9-4)$$

1- Babuska
2- Melenk
3- Duarte
4- Oden

که $\phi^0(x)$ تابع شفارد^۱ یا تقریب مرتبه صفر است. ضرایب b_{2I} و b_{1I} ، a_{kI} ضرایب مجهول تقریب هستند که با استفاده از روش گالرکین یا باهم گذاری^۲ تعیین می‌شوند. دورات و اودن از مفهوم PU در یک روش خیلی عمومی استفاده کردند. تابع تقریب آنها به صورت زیر است:

$$u^h(x) = \sum_I \phi_I^k(x) \left(u_I + \sum_{i=1}^m b_{iI} q_i(x) \right). \quad (10-4)$$

در این تابع $q_i(x)$ می‌تواند تابع پایه تک جمله‌ای از هر مرتبه‌ای بالاتر از k و یا تک جمله‌ای مرتبه بالا باشد.

۴ - ۴ - ۲ - گسسته سازی معادلات تقریب

در اکثر روش‌های بدون مش برای گسسته سازی معادلات از روش باهم گذاری و روش گالرکین استفاده شده است. روش باهم گذاری در روش SPH برای گسسته سازی بکار گرفته شده است. معادلات گسسته تقریب با اعمال معادلات تقریب بر مجموعه‌ای از گره‌های داخلی بدست آمده‌اند. معادلات بدست آمده فقط مجموعه‌ای از معادلات جبری بر حسب متغیرهای مجهول هستند. بطور وضوح این روش ساده و سریع است ولی از مشکل ناپایداری برخوردار است. بدین منظور روش‌هایی نظیر تثبیت با استفاده از ذرات تنش^۳ و ویسکوزیته^۴ ارائه شده است (Chen et al., 2006).

در گسسته سازی با روش گالرکین به شکل ضعیف^۵ معادله دیفرانسیل یا اصل متغیری^۶ نیاز است. روش‌های EFGM، توده‌های HP، PU و RKPM برای بدست آوردن معادلات گسسته تقریب از روش گالرکین استفاده کرده‌اند.

۴ - ۴ - ۳ - روش‌های محاسبه انتگرال‌ها

در روش‌هایی که معادلات گسسته با روش گالرکین بدست آمده‌اند، انتگرال گیری عددی با استفاده از

1- Shepard Function
2- Collocation Procedure
3- Stress particles
4- Viscosity
5- Weak Form
6- Variational Principle

روش‌های تربیع سلول^۱ (تربیع المان) و انتگرال‌گیری گرهی صورت می‌گیرد. در روش تربیع سلول با در نظر گرفتن یک شبکه زمینه در دامنه مسئله و نقاط تربیع در هر سلول از شبکه، انتگرال‌ها در نقاط تربیع بطور عددی محاسبه می‌شوند. در این روش مشکلات مربوط به تخصیص حجم وجود ندارد و نرخ همگرایی بطور قابل توجهی می‌تواند از روش المان محدود بیشتر باشد. عیب روش این است که روش کاملاً بدون مش نیست و هزینه محاسباتی آن بالاست. در روش انتگرال‌گیری گرهی، انتگرال‌گیری فضایی در روش گالرکین فقط با ارزیابی انتگرال‌های شکل ضعیف در نقاط گرهی محاسبه می‌شوند و نیازی به ساختار سلول‌ها یا مش زمینه نیست و روش کاملاً بدون مش است. این روش سریع می‌باشد ولی با مشکل ناپایداری فضایی مواجه است. در ادامه روش انتگرال‌گیری با تربیع سلول توضیح داده خواهد شد.

۴ - ۴ - ۴ - اعمال شرایط مرزی

در روش‌های بدون مش توابع شکل بر خلاف روش المان محدود و روش المان مرزی شرایط دلتای کرونکر^۲ را نمی‌توانند تامین کنند ($\Phi_I(x_I) \neq \delta_{II}$) و اعمال شرایط مرزی اساسی (دریشت^۳) همانند تکنیک‌های محاسباتی کلاسیک سر راست نیست (Chen et al., 2006). به عبارت دیگر در این روش-ها شرایط مرزی با نوشتن ساده $\hat{u} = \bar{u}$ اعمال نمی‌شوند و به روش خاصی نیاز است. بنابراین اعمال شرایط مرزی بر متغیر وابسته یکی از مهمترین مشکلات در پیاده‌سازی روش‌های بدون مش است. در روش‌های بدون مش برای اعمال شرایط مرزی از روش‌های مختلفی نظیر ضرایب لاگرانژ، قواعد متغیری تصحیح یافته، روش‌های جریمه، آشفتگی لاگرانژی، روش ترتیب نقاط و کوپلینگ با روش المان محدود استفاده می‌شود (Chen et al., 2006; Gunter and Liu, 1998). از بین روش‌های بالا، روش ضرایب لاگرانژ دقیق‌ترین روش برای اعمال شرایط مرزی دریشت است؛ هر چند، این روش پر هزینه‌ترین روش نیز است.

1- Cell Quadrature

2- Kronecker Delta Condition

3- Dirichlet

۴ - ۴ - ۵ - کاربرد روش‌های بدون مش

همانطور که اشاره شد فلسفه ابداع و بکارگیری روش‌های بدون مش به مشکلات روش المان محدود در حل برخی از مسائل خاص مربوط می‌شود که از ماهیت مش‌بندی آن ناشی می‌شود. این مسائل خاص که روش‌های بدون مش در تحلیل آنها از پتانسیل بالایی برخوردارند، عبارتند از: تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ، مکانیک شکست و انتشار ترک، شبیه‌سازی سازه‌های پوسته‌ای نازک، آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی طراحی شکل، مطالعات میکرومکانیک.

۴ - ۵ - روش بدون مش گالرکین

روش بدون مش گالرکین یکی از متداول‌ترین روش‌های بدون مش است. این روش یک روش با ثبات و دارای ارتباط واضحی با روش‌های المان محدود است. در بسیاری از کاربردها، EFGM دارای نرخ همگرایی زیاد و در مدلسازی مرزهای متغیر کارایی زیادی نشان داده است (Liu, 2002). روش بدون مش گالرکین در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی از جمله تحلیل صفحات نازک (Krysl and Belytschko, 1996)، تحلیل فرآیند شکل دادن فلز (Alfaro et al., 2006)، تحلیل حساسیت شکل و بهینه‌سازی شکل (Bobaru and Mukhejee, 2001)، تحلیل مسائل خزش (Hagihara et al., 2003)، تعیین میدان الکترومغناطیس (Singoski et al., 2000) تحلیل مسائل در محیط‌های فرومغناطیس (Bottauscio, et al., 2006) و تحلیل حرارتی زودگذر (Singh et al., 2007) کاربردهای موفقیت آمیزی داشته است. بنابراین در این مطالعه این روش برای تحلیل مسائل رشد ترک در محیط‌های سنگی بکار گرفته شده است. لذا در این قسمت این روش بطور کامل توضیح داده می‌شود.

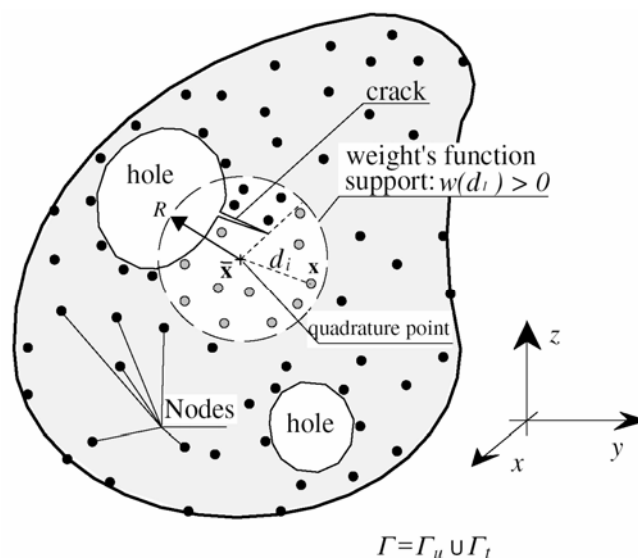
روش EFGM بعنوان یک روش ذره‌ای بدون مش فقط به تعریف مجموعه‌ای از نقاط گرهی نیاز دارد که در داخل میدان مسئله و مرز آن پراکنده می‌شوند. توابع شکل با استفاده از تقریب حداقل مربعات متحرک (MLS) ساخته می‌شوند که در هر نقطه گرهی و حوزه تاثیر آن ایجاد می‌شوند. با وجود این

EFGM برای جمع کردن ماتریس‌های سیستم که از شکل ضعیف^۱ گالرکین مشتق شده‌اند، به المان‌های زمینه نیاز دارد که در عمل به آسانی بدست می‌آیند. در EFGM شرایط مرزی اولیه را نمی‌توان به طور مستقیم اعمال کرد و در عوض این شرایط مرزی با ضرایب لاگرانژ یا روش‌های جریمه اعمال می‌شوند (Liu, 2002).

در ادامه اجزای روش بدون مش گالرکین توضیح داده می‌شود.

۴-۵-۱ - نمایش نقاط بدون مش

در این روش دامنه مساله با استفاده از مجموعه‌ای از گره‌های مدل‌سازی می‌شود. این نقاط گرهی در دامنه حل مساله و مرزهای آن پراکنده می‌شوند. دانسیته گره‌ها با دقت لازم روش عددی و منابع محاسباتی موجود کنترل می‌شود. این نقاط می‌توانند بطور غیر یکنواخت توزیع شوند و در نواحی که شکل دامنه مساله متغیر باشد و یا متغیر وابسته تغییرات زیادی داشته باشد، تعداد نقاط زیادی در نظر گرفته می‌شود. در این روش نحوه توزیع اولیه گره‌ها، یک مساله جدی نیست. به عنوان مثال در شکل (۴-۴) توزیع گره‌ها در یک محیط حاوی سوراخ و ترک نشان داده شده است.



شکل (۴-۴): توزیع گره‌ها در یک جسم حاوی ترک که با روش بدون مش مدل شده است (Brighenti, 2005).

۴ - ۵ - ۲ - تشکیل توابع شکل

هدف یک تابع شکل، تقریب متغیر وابسته با استفاده از مقادیر آن در نقاط گرهی در دامنه مساله است. در روش‌های المان محدود توابع شکل با استفاده از شبکه‌ای از المان‌ها ساخته می‌شوند. برای روش‌های بدون مش چالش‌ها عبارتند از: ساختن توابع شکل فقط با استفاده از نقاط گرهی در دامنه مسئله و بدون اتصال گره‌ها، تامین شرایط اساسی سازگاری در دامنه مساله، توزیع اختیاری گره‌ها جهت انطباق آسان گره‌ها، پایداری و سازگاری جهت تضمین همگرایی عددی، حوزه تاثیر متراکم برای کارایی و دقت محاسباتی و خاصیت تابع کروئکر برای اعمال شرایط مرزی اساسی (اولیه). برای ساختن توابع شکل در EFGM از تقریب حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود. این تقریب در دامنه مساله، متغیر وابسته را به صورت پیوسته و نرم و با سازگاری مطلوب تقریب می‌زند. در واقع روش بدون مش گالرکین دو جنبه اساسی دارد: ساختن تقریب بدون مش با استفاده از تکنیک حداقل مربعات متحرک و تقریب عددی معادلات حاکم با فرمول‌بندی شکل ضعیف گالرکین. فرمول‌بندی روش بدون مش گالرکین بر اساس فرمول‌بندی بلیچکو و همکارانش بصورت زیر است (Belytschko et al., 1994):

۴ - ۵ - ۲ - ۱ - تقریب حداقل مربعات متحرک

اگر $u(x)$ متغیر میدان در حوزه Ω و u^h تقریب محلی آن باشد، طبق مطالعات لنکستر و سالکاسکاس^۱ (Lancaster and Salkauskas, 1981)، تقریب محلی u^h به صورت ضرب داخلی بردار چند جمله‌ای پایه $P(x)$ و بردار ضرایب $a(x)$ بیان می‌شود:

$$u^h = P^T(x).a(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x)a_i(x) \quad (11-4)$$

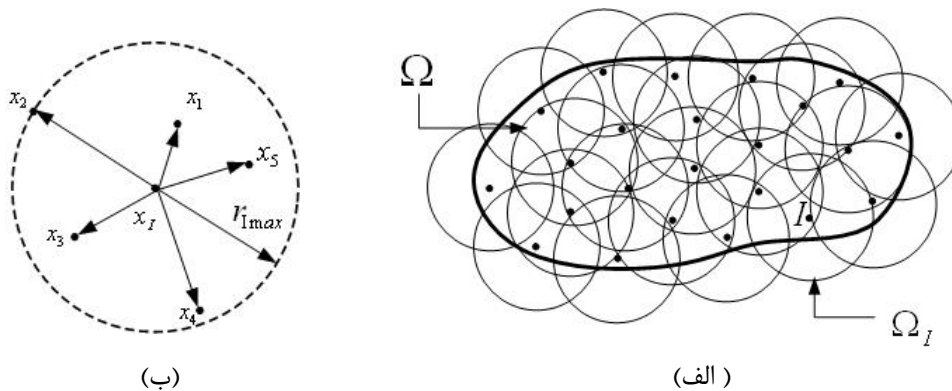
که در آن m تعداد جمله‌ها در توابع پایه چند جمله‌ای است. در مسائل دو بعدی عموماً از توابع پایه خطی $P^T = (1, x, y)$ استفاده می‌شود. اگر مقادیر x_i ، $i = 1, \dots, n$ در مجموعه‌ای از گره‌ها معلوم

1- Lancaster and Salkauskas

باشد، بردار $a(x)$ را می‌توان با مینیمم کردن نرم خطای L_2 گسسته و وزن دار بدست آورد. نرم خطای L_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J = \sum_{i=1}^n w(x, x_i) [u^h(x_i) - u_i]^2 \quad (۱۲-۴)$$

که در آن $w(x - x_i)$ تابع وزن است که در حوزه تاثیر گره i ام تعریف می‌شود، همچنین u_i مقدار گرهی در نقطه x_i و n تعداد گره‌ها در حوزه تاثیر نقطه x است. در شکل (۴-۵-الف) گره‌های توزیع شده در دامنه یک مسئله به همراه حوزه تاثیر گره‌ها از جمله گره I نشان داده شده و در شکل (۴-۵-ب) شعاع تاثیر گره x_I به همراه گره‌های واقع در حوزه تاثیر آن مشاهده می‌شود.



شکل (۴-۵): (الف) توزیع گره‌ها در دامنه مسئله و حوزه تاثیر آنها. (ب) گره‌های واقع در حوزه تاثیر گره x_I (Belytschko et al., 1996).

ثابت بودن تغییرات J نسبت به $a(x)$ ، به حل $a(x)$ می‌انجامد. پس خواهیم داشت:

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)u \quad (۱۳-۴)$$

که در آن

$$[A(x)]_{IJ} = \sum_{i=1}^n w(x, x_i) p_I(x_i) p_J(x_i), \quad I, J = 1, 2, \dots, m, \quad (۱۴-۴)$$

$$[B(x)]_{IJ} = w(x, x_J) p_I(x_J), \quad J = 1, 2, \dots, n, \quad I = 1, 2, \dots, m. \quad (۱۵-۴)$$

$$u^T = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (۱۶-۴)$$

ماتریس A معمولا ماتریس گشتاور نامیده می‌شود. با جایگزینی $a(x)$ در معادله (۱۱-۴) خواهیم داشت:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i \quad (۱۷-۴)$$

تابع شکل $\phi_i(x)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^n p_j(x) (A^{-1}(x) B(x))_{ji} \quad (۱۸-۴)$$

بایستی توجه شود که تابع شکل بدست آمده شرایط دلتای کرونکر را تامین نمی‌کند ($\phi_i(x_i) \neq 1$) و $\phi_i(x_j) \neq 0$.

۴ - ۵ - ۲ - ۲ - توابع پایه و توابع وزن

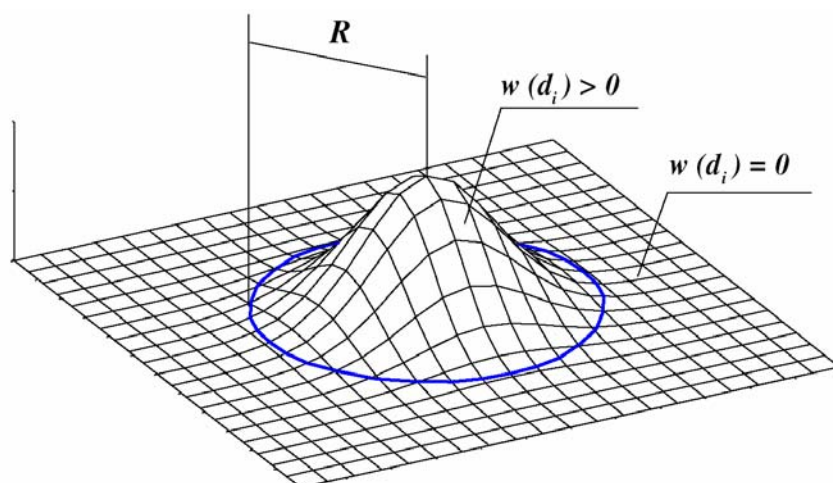
استفاده از توابع پایه $p(x)$ که شامل عبارات مخصوصی نظیر توابع تکین باشد، سازگاری تقریب و دقت نتایج را تضمین می‌کند (Chen et al., 2006). بطور نمونه توابع پایه تک جمله‌ای کامل عبارتند از:

$$p_{(m=3)}^T = \{1, x, y\} \quad (۱۹ - ۴)$$

$$p_{(m=6)}^T = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$$

توابع وزن $w(x - x_I)$ نقش تاثیر گرهی را داشته و در ساختن تقریب حداقل مربعات متحرک تاثیر خیلی مهمی دارند. آنها برای تضمین راه حل منحصر بفرد برای $a(x)$ بایستی مثبت باشند؛ برای اعمال مناسب تاثیر همسایگی مقدار آنها بایستی با افزایش فاصله $d_I = |x - x_I|$ ، کاهش یابد؛ و آنها بایستی تضمین کنند که وقتی x حرکت می‌کند، گره‌ها بطور تدریجی فاصله را تاثیر دهند طوری که توابع شکل MLS شرایط سازگاری را تامین کنند.

بطور تئوری توابع وزن هر تابعی می‌توانند باشند بشرطی که مثبت باشند و همراه با مشتقات‌شان تا مرتبه مورد نظر پیوسته باشند. این توابع بایستی مثبت ($w(x - x_I) > 0$ در حوزه تاثیر $d\Omega$)، متراکم ($w(x - x_I) = 0$ در بیرون از $d\Omega$) و واحد ($\sum_I w(x - x_I) = 1$) باشند (شکل ۴-۶).



شکل (۴-۶): شکل کیفی تابع وزن (Brighenti, 2005)

در کاربرد روش بدون مش گالرکین از توابع وزن مختلف نظیر تابع مخروطی، تابع گویا، تابع چندجمله‌ای، تابع نمایی و تابع اسپلاین مرتبه سوم استفاده می‌شود. ضابطه توابع وزن و پارامترهای آنها در جدول (۴-۱) نشان داده شده است.

جدول (۴-۱): برخی از توابع وزن مورد استفاده در روش بدون مش گالرکین (Chen et al., 2006)

تابع وزن	عبارت تابع	پارامترها
مخروطی	$w(s) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{s}{R}\right)^{2k} & \text{if } s \leq R \\ 0 & \text{if } s \geq R \end{cases}$	k, R
گویا	$w(s) = \frac{1}{[(1/\varepsilon)^{1/p} - 1] \cdot (s/R)^2 + 1]^2}$	ε, p, R
چند جمله‌ای (درجه ۴)	$w(s) = \begin{cases} 1 - 6(s/r)^2 + 8(s/r)^3 - 3(s/r)^4 & \text{if } s \leq R \\ 0 & \text{if } s \geq R \end{cases}$	R
نمایی	$w(s) = \begin{cases} \frac{e^{-(s/c)^{2k}} - e^{-(R/c)^{2k}}}{1 - e^{-(R/c)^{2k}}} & \text{if } s \leq R \\ 0 & \text{if } s \geq R \end{cases}$	c, k, R
اسپلاین مرتبه سوم	$w(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 & \text{if } s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \text{if } \frac{1}{2} < s < 1 \\ 0 & \text{if } s \geq 1 \end{cases}$	-

از این توابع، تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم در مطالعات مختلف بکار گرفته شده و ضابطه آن بصورت تابع چند جمله‌ای درجه سوم زیر است:

$$w(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 & \text{if } s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \text{if } \frac{1}{2} < s < 1 \\ 0 & \text{if } s \geq 1 \end{cases} \quad (۴ - ۲۰)$$

که در آن پارامتر وزن $s = \frac{|x - x_I|}{r_0}$ فاصله نرمالیزه شده و r_0 شعاع حوزه تاثیر است. همچنین

$r = \frac{d_I}{d_{ml}}$ شعاع نرمال شده از I امین گره مورد نظر است و اندازه شعاع تاثیر d_{ml} به صورت زیر حساب می‌شود:

$$d_{ml} = d_{max} c_I \quad (۴ - ۲۱)$$

که d_{max} پارامتر مقیاس و فاصله c_I با جستجوی تعداد کافی از گره‌های مجاور تعیین می‌شود تا ماتریس A در معادله (۴-۱۶) عادی باشد یعنی در هر نقطه از میدان معکوس پذیر باشد. این مسئله انطباق خاص توزیع نقاط گرهی را آسان می‌سازد.

۴ - ۵ - ۳ - شکل ضعیف گالرکین برای مسائل الاستواستاتیک

معادلات حاکم بر مسائل الاستواستاتیک در دامنه Ω که با مرز Γ محدود شده است، به صورت زیر می‌باشد (Martin, 2005):

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (۴-۲۲)$$

که شرایط مرزی زیر بر آن اعمال می‌شوند:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u, \\ \sigma_{ij} \cdot n_j &= \bar{t}_j \quad \text{on } \Gamma_{ti} \end{aligned} \quad (۴-۲۳)$$

در روابط بالا σ تانسور تنش، b نیروهای حجمی، $\bar{u}$ جابجائی داده شده در مرز Γ_u ، $\bar{t}$ نیروی سطحی داده شده در مرز و n بردار نرمال رو به بیرون مرز مسئله است.

۴ - ۵ - ۴ - اعمال شرایط مرزی

همانطور که اشاره شد در روش بدون مش گالرکین شرایط مرزی اساسی با استفاده از روش‌های مختلفی نظیر ضرایب لاگرانژ، روش جریمه، ترکیب با المان محدود و... اعمال می‌شوند (Chen et al., 2006). در این مطالعه برای اعمال شرایط مرزی اساسی از روش ضرایب لاگرانژ استفاده شده است. با فرض توابع آزمون $u(x) \in H^1$ (متعلق به فضای سوبولف^۲ رسته یک) و ضرایب لاگرانژ $\lambda \in H^0$ (متعلق به فضای سوبولف رسته صفر) برای تمام توابع آزمون می‌توان نوشت (Belytschko et al., 1994):

$$\delta v(x) \in H^1, \delta \lambda \in H^0 \quad (24-4)$$

در این صورت اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla_s v^T) : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta v^T \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta v^T \cdot \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta^T \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta v^T \cdot \lambda d\Gamma = 0 \quad (25-4)$$

$$\forall \delta v \in H^1, \delta \lambda \in H^0$$

معادله فوق معادله تعادل (۲۲-۴) و شرایط مرزی (۲۳-۴) را اقناع می‌کند. در معادله فوق $\nabla_s v^T$ قسمت متقارن ∇v^T و H^0 و H^1 به ترتیب فضای سوبولوف مرتبه صفر و یک هستند.

بایستی توجه داشت که توابع آزمون شرایط مرزی اساسی را اقناع نمی‌کنند و این شرایط با ضرایب لاگرانژ اعمال می‌شوند. برای بدست آوردن معادلات گسسته از معادله شکل ضعیف (۲۵-۴)، راه حل تقریبی u و تابع آزمون δv طبق معادله (۱۷-۴) ساخته شده و به همراه توابع درونیاب لاگرانژ در معادله (۲۵-۴) جایگزین می‌شوند. ضریب لاگرانژ λ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda(x) = N_I(s)\lambda_I, \quad x \in \Gamma_u \quad (26-4)$$

$$\delta \lambda(x) = N_I(s)\delta \lambda_I, \quad x \in \Gamma_u$$

که در آن $N_I(s)$ تابع درونیاب لاگرانژ و s طول کمان در راستای مرز مساله است. معادلات گسسته نهایی بصورت زیر بدست می‌آیند (Belytschko et al., 1994):

1- Trial function
2- Sobolov

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (27-4)$$

ماتریس‌ها و بردارها در معادله فوق به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[\mathbf{K}]_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega \quad (28-4)$$

$$\mathbf{G}_{ik} = - \int_{\Gamma_u} \phi_i N_k d\Gamma \quad (29-4)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \Phi_I \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (30-4)$$

$$\mathbf{q} = - \int_{\Gamma_u} N_k \bar{u} d\Gamma \quad (31-4)$$

که

$$[\mathbf{B}]_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (32-4)$$

$$\mathbf{N}_k = \begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \quad (33-4)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \text{for plane stress} \quad (34-4)$$

در معادله (۳۲-۴) علامت کاما بیانگر مشتق جزئی نسبت به متغیر مشخص شده است (بعنوان مثال $\phi_{i,x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x}$) و E و ν به ترتیب ضریب ارتجاعی و نسبت پواسون مواد مورد نظر هستند. در روابط بالا ماتریس $\mathbf{K}$ ماتریس سختی می‌باشد که از لحاظ ساختاری مشابه ماتریس سختی در روش المان محدود می‌باشد.

۴ - ۵ - ۵ - تعیین میدان جابجایی، کرنش و تنش

بعد از محاسبه انتگرال‌های (۲۸-۴) تا (۳۱-۴) و حل معادله (۲۷-۴)، بردار $\mathbf{u}$ (مولفه‌های افقی و قائم جابجایی) بدست می‌آیند. با تعیین بردار جابجایی، تانسور کرنش نیز از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T] \quad (7-5)$$

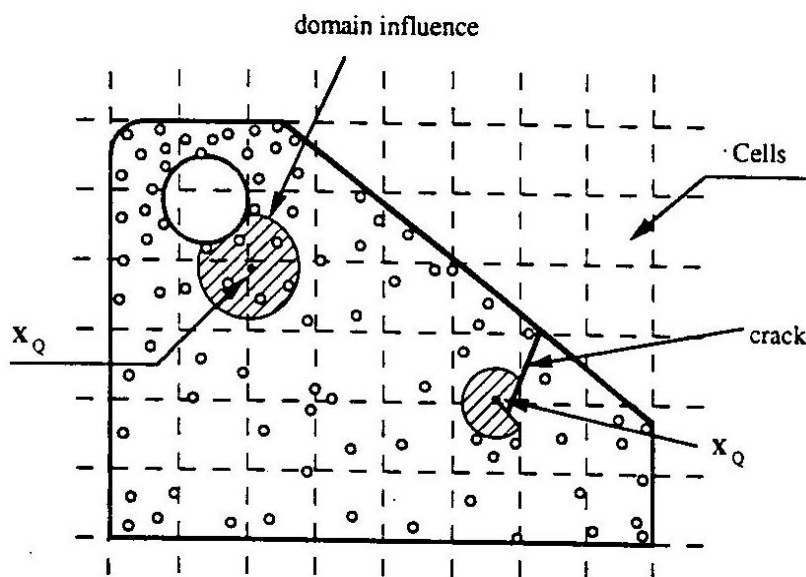
که در آن ε تانسور کرنش، ∇u ماتریس گرادیان جابجایی و $(\nabla u)^T$ ترانهاده ماتریس گرادیان جابجایی است با تعیین تانسور کرنش، تانسور تنش نیز از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \quad (7-5)$$

که در آن σ تانسور تنش و D خواص ماده بوده و با معادله (۴-۳۴) تعریف می‌شود:

۴ - ۵ - ۶ - انتگرال گیری عددی

برای محاسبه ماتریس‌های روابط (۴-۲۵) تا (۴-۲۸) از انتگرال گیری عددی استفاده می‌شود. در روش‌های بدون مش ذره‌ای برای انتگرال گیری روش‌های مختلفی وجود دارد که عبارتند از: انتگرال گیری گرهی، انتگرال گیری نقاط تنش و شبکه انتگرال گیری^۱. در روش بدون مش گالرکین می‌توان از دو روش انتگرال گیری گرهی و شبکه انتگرال گیری استفاده کرد که شبکه انتگرال گیری کاربرد زیادی دارد. در این روش انتگرال‌ها بر روی المان‌های شبکه زمینه و بر اساس ساختار تربیع (مربع سازی) محاسبه می‌شوند (شکل ۴-۷).



شکل (۴-۷): ساختار سلولی برای تربیع در EFGM و حوزه نقاط تربیع (Belytschko, 1994).

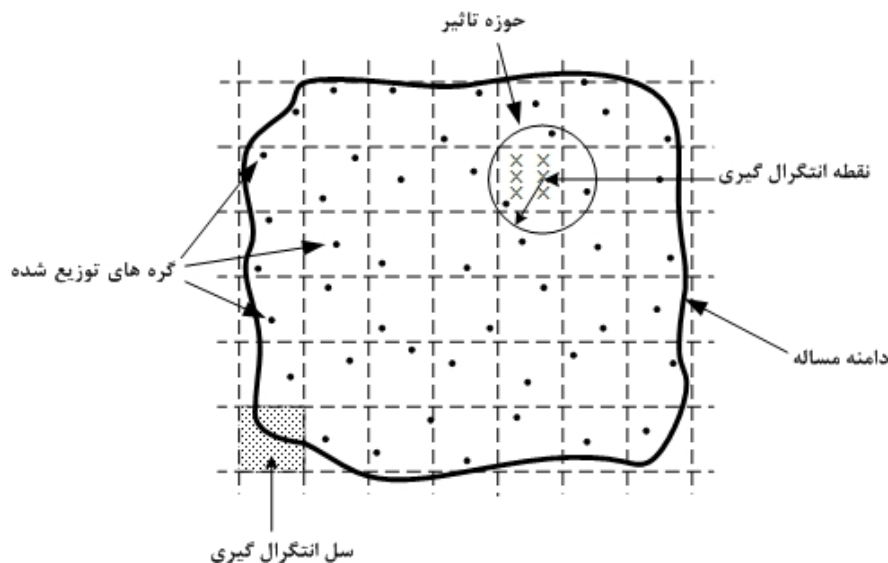
حوزه تاثیر دو نقطه نمونه نیز در شکل (۷-۴) نشان داده شده است. همانطور که می‌توان دید، حوزه تاثیر یک نقطه هرگز از میان مرزها گسترش نمی‌یابد. بنابراین برای یک نقطه تربیع مجاور یک ترک، حوزه تاثیر x_Q محدود به نقاط x_I ای است که بدون قطع کردن مرزهای دامنه مسئله می‌توانند به x_Q متصل شوند.

هر چند در روش انتگرال‌گیری با شبکه‌بندی استفاده از یک شبکه در پیاده سازی روش بدون مش گالرکین، برای محاسبه انتگرال‌ها لازم است ولی در طی فرایند شبیه سازی نیازی به شبکه‌بندی مجدد دامنه نمی‌باشد و محاسبات انجام شده در این روش کاملاً مستقل از شکل این شبکه انتگرال‌گیری می‌باشد. این شبکه تنها به عنوان یک شبکه زمینه در روش‌های بدون مش کاربرد دارد و با تعریف معمول در روش‌های المان محدود کاملاً متفاوت می‌باشد. این خصیصه هنگامی که هندسه مساله دائماً در حال تغییر باشد، بسیار مفید است. یکی از مزایای این نوع شبکه‌بندی این است که با توجه به این که در روش‌های تحلیل عددی بیشتر از انتگرال‌گیری عددی گوس استفاده می‌کنند و چون در روش‌های بدون مش شبکه انتگرال‌گیری مستقل از دیگر پارامترها می‌باشد، بنابراین به راحتی می‌توان از توابع گوس با درجات بالاتر استفاده کرد که این مساله باعث ایجاد دقت بیشتر در موارد ضروری می‌گردد. تعداد نقاط گوس در هر سلول از شبکه به تعداد گره در آن المان بستگی دارد (Belytschko, 1994). توزیع گره‌ها در دامنه مساله، شبکه انتگرال‌گیری، نقاط گوس (نقاط انتگرال‌گیری) و حوزه تاثیر نقطه انتگرال‌گیری در شکل (۸-۴) نشان داده شده است.

همانطور که می‌توان دید، سلول‌ها مستقل از گره‌ها هستند و با یک الگوی منظم در دو بعد توزیع شده‌اند. سلول‌ها به دو منظور بکار می‌روند؛ تشخیص گره‌هایی که در یک نقطه تربیع در نرم L_2 سهمیم هستند و فراهم کردن یک ساختار برای تربیع عددی معادلات (۴-۲۵) تا (۴-۲۸). در هر سلول، تربیع گوس استفاده می‌شود و تعداد نقاط تربیع به تعداد گره‌ها در یک سل بستگی دارد. معمولاً از تربیع گوس $n_Q \times n_Q$ استفاده می‌شود (Belytschko, 1994) که:

$$n_Q = \sqrt{m} + 2 \quad (۴-۳۲)$$

که در آن m تعداد گره‌ها در هر سل است.



شکل (۴-۸): استفاده از شبکه انتگرال گیری در روش بدون مش گالرکین، روش انتگرال گیری عددی تربیع گوس

یک مسئله مهم تعداد سلول‌های مورد استفاده است. بلیچکو و همکارانش (Belytschko, 1994) در

محاسبات‌شان از $m_c \times m_c$ سلول استفاده کرده‌اند، که

$$m_c = \sqrt{n_N} \quad (۴-۳۳)$$

که در آن n_N تعداد کل گره‌ها است.

با توجه به توضیحات ارائه شده، مراحل مختلف تحلیل یک مساله الاستواستاتیک با استفاده از روش

بدون مش گالرکین بصورت یک فلوچارت در شکل (۴-۹) نشان داده شده است.

۴ - ۵ - ۷ - مدلسازی ناپیوستگی‌های هندسی در روش بدون مش گالرکین

در روش بدون مش گالرکین برای مدلسازی ناپیوستگی‌های هندسی مانند لبه‌های خارجی و داخلی،

ترک‌ها، سوراخ‌ها و غیره معیارهای مختلفی نظیر معیار قابلیت دید^۱، معیار انکسار^۲ و معیار شفافیت^۳

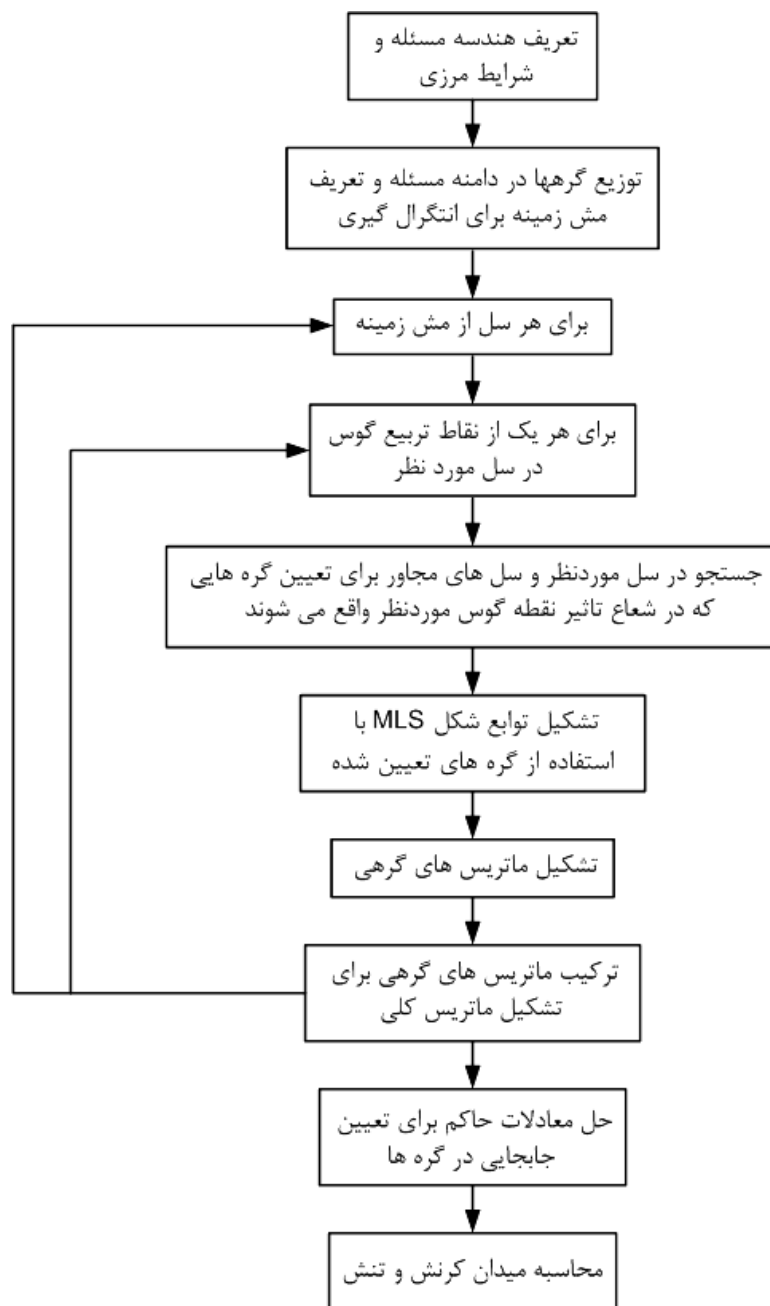
بکار گرفته می‌شوند (Belytschko, 1996). در این مطالعه از معیار قابلیت دید استفاده شده است. در

این روش مطابق شکل (۴-۹)، هر مرز هندسی مثل لبه‌های خارجی یا داخلی، ترک‌ها، سوراخ‌ها و ...

2 - Visibility criterion

3 - Diffraction criterion

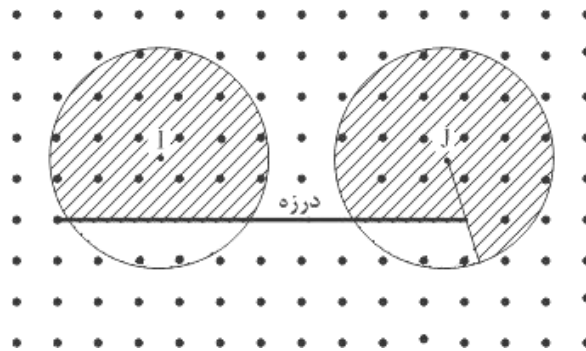
4 - Transparency criterion



شکل (۴-۹): فلوچارت روش بدون مش گالرکین (Liu, 2002).

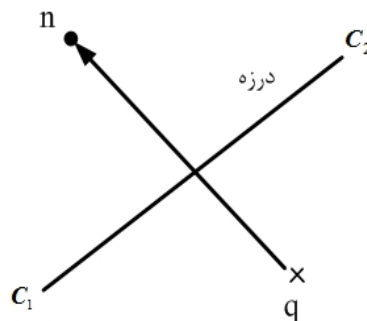
بعنوان یک سطح تیره در نظر گرفته می‌شود. برای ساختن توابع شکل یک گره، حوزه تاثیر آن مشخص می‌شود و به هر یک از گره‌های واقع در حوزه آن، خطی وصل می‌شود. چنین خط مستقیمی می‌تواند بعنوان یک اشعه نور تصور شود. اگر اشعه گره‌ای، یک سطح تیره مثل مرز جسم و یا ناپیوستگی داخلی را در بر گیرد (قطع کند)، اشعه مورد نظر و گره متناظر آن حذف شده و در حوزه تاثیر شامل نمی‌شود. بعنوان مثال اگر یک ناپیوستگی هندسی مثل درزه را در نظر بگیریم، شعاع تاثیر

دو گره I و J که در نزدیکی درزه واقع شده‌اند، با استفاده از معیار قابلیت دید به صورت سطوح هاشورخورده در شکل (۹-۴) نشان داده شده است.



شکل (۹-۴): حوزه تاثیر گره‌های I و J که در مجاورت درزه واقع شده‌اند (Brighenti, 2005).

بنابراین در مدلسازی ترک، بر مبنای این معیار اگر خط واصل بین نقطه انتگرال‌گیری و گرهی که در حوزه تاثیر آن واقع شده، خط درزه را قطع کند، گره مورد نظر بایستی از مجموعه گره‌های واقع در حوزه تاثیر حذف گردد. مدل ریاضی تشخیص این مساله با توجه به شکل (۱۰-۴) به صورت زیر است:



شکل (۱۰-۴): مدلسازی ریاضی معیار قابلیت دید

در شکل مذکور نقاط ابتدا و انتهای خط ترک با C_1 و C_2 ، نقطه انتگرال‌گیری با q و گره واقع در شعاع تاثیر q با n نشان داده شده است. معادله پارامتری خط راست واصل بین C_1 و C_2 بر حسب مختصات این نقاط بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} x = x_{C_1} + \lambda_1 \Delta x_1 \\ y = y_{C_1} + \lambda_1 \Delta y_1 \end{cases} \quad (۵-۶)$$

که در آن λ_1 متغیر پارامتری و Δx_1 و Δy_1 بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x_{C_2} - x_{C_1} \\ \Delta y_1 &= y_{C_2} - y_{C_1}\end{aligned}\quad (6-5)$$

در معادلات بالا x_{C_1} و y_{C_1} مختصات نقطه C_1 و x_{C_2} و y_{C_2} مختصات نقطه C_2 می‌باشند. از طرف دیگر معادله پارامتری خط راست واصل بین q و n بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} x = x_q + \lambda_2 \Delta x_2 \\ y = y_q + \lambda_2 \Delta y_2 \end{cases}\quad (6-5)$$

که در آن λ_2 متغیر پارامتری و Δx_2 و Δy_2 بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\Delta x_2 &= x_n - x_q \\ \Delta y_2 &= y_n - y_q\end{aligned}\quad (6-5)$$

در معادلات بالا x_q و y_q مختصات نقطه q و x_n و y_n مختصات نقطه n می‌باشند.

اگر دو خط $c_1 c_2$ و qn همدیگر را قطع کنند، می‌توان معادلات دو خط را باهم مساوی قرار داد و λ_1 و λ_2 را بصورت زیر بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(\Delta x_1 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_1)} \begin{bmatrix} \Delta y_2 (x_q - x_{c1}) - \Delta x_2 (y_q - y_{c1}) \\ \Delta y_1 (x_q - x_{c1}) - \Delta x_1 (y_q - y_{c1}) \end{bmatrix}\quad (7-5)$$

اگر دو خط همدیگر را قطع کنند شرایط زیر بایستی برقرار باشد:

$$0 < \lambda_1 < 1 \quad \text{و} \quad 0 < \lambda_2 < 1 \quad (8-5)$$

۴ - ۶ - کاربردهای روش بدون مش گالرکین در زمینه مکانیک شکست

همانطور که اشاره شد روش عددی المان محدود در تحلیل مسائل مکانیک شکست با مشکلاتی همراه است که به ماهیت مش بندی آن مربوط است و برای رفع این مشکلات روش‌های بدون مش متعددی از جمله روش بدون مش گالرکین ارائه شده است. بنابراین این روش در حوزه مکانیک شکست کاربردهای فراوانی داشته است. در ادامه به برخی از این مطالعات اشاره می‌شود.

بلیچکو که روش بدون مش گالرکین را برای اولین بار ارائه کرده است، در سال ۱۹۹۷ با استفاده از این روش مسائل مکانیک شکست ارتجاعی را تحلیل کرد و اجزای مختلف این روش و روش‌های مختلف مدل‌سازی ترک را ارزیابی کرد. وی با در نظر گرفتن مثال‌های متعددی میدان تنش و ضرایب

تمرکز تنش را در دامنه نمونه‌های ترک‌دار محاسبه و در چند مورد رشد ترک را مطالعه نمود (Belytschko, 1997).

سوکومار^۱ در سال ۱۹۹۷ با استفاده از روش بدون مش گالرکین ترک لبه‌ای را در حالت مود کششی خالص و به صورت سه بعدی مدل‌سازی کرد و ضریب تمرکز تنش مود کششی را محاسبه نمود (Sukumar et al., 1997).

بلیچکو در سال ۲۰۰۰ با استفاده از روش بدون مش گالرکین شکست دینامیکی بتن را مطالعه کرد. وی با استفاده از مدل زون فرآیند شکست^۲، شکست بتن را مدل‌سازی و در نمونه‌های خمشی سه نقطه‌ای ارزیابی کرد (Rabczuk et al., 2000).

رائو^۳ و رحمان^۴ در سال ۲۰۰۱ با ترکیب روش بدون مش گالرکین و المان محدود مسائل مکانیک شکست را در حالت دو بعدی مدل‌سازی کردند و در نمونه‌های حاوی یک ترک لبه‌ای و ترک شبیدار تحت بار کششی و برشی ضرایب تمرکز تنش را محاسبه و رشد ترک را مطالعه کردند (Rao and Rahman, 2001).

رابزک^۵ و بلیچکو در سال ۲۰۰۳ با استفاده از روش بدون مش گالرکین رشد ترک را در مواد با خاصیت کرنش نرمی مدل‌سازی کردند (Rabczuk and Belytschko, 2003). آنها برای مدل‌سازی ترک با روش بدون مش از معیار رویت‌پذیری و برای انتگرال‌گیری عددی از انتگرال‌گیری گرهی با نقاط تنش استفاده کردند. آنها در مطالعه خود رشد یک ترک لبه‌ای را در یک تیر تحت بار استاتیکی و دینامیکی تحلیل کردند.

بریجنتی در سال ۲۰۰۵ با استفاده از روش بدون مش گالرکین برای سه مثال از مسائل سه بعدی: ترک لبه‌ای تحت کشش، ترک شبیدار تحت کشش و ترک دیسکی در داخل جسم مکعبی شکل، ضرایب تمرکز تنش مود کششی و برشی را محاسبه نمود (Brighenti, 2005).

1- Sukumar

2- fracture process zone

3- Rao

4- Rahman

۵- Rabczuk

چن و همکارانش در سال ۲۰۰۶ با استفاده از روش بدون مش گالرکین رشد ترک واحد را در محیط-های چند فازي مدل سازی کردند. آنها به عنوان مثال یک نمونه بتنی با سه فاز در نظر گرفتند و رشد ترک لبه‌ای را در آن مطالعه کردند (Chen et al., 2006).

سیمکینز^۱ و لی^۲ در سال ۲۰۰۶ با استفاده از روش بدون مش گالرکین شکست تغییر شکل پذیر ترمودینامیکی^۳ را مدل سازی مطالعه و به عنوان مثال یک صفحه مستطیلی حاوی یک ترک مرکزی افقی را تحت بار کششی محوری مطالعه کردند (Simkins and Li, 2006).

۴ - ۷ - نتیجه گیری

همانطور که در این فصل بحث شد روش‌های مبتنی بر مش مثل روش المان محدود در تحلیل مسائل انتشار ترک به خاطر تغییرات متوالی هندسه مساله با مشکلات مش بندی مکرر مواجه هستند و برای غلبه بر این مشکلات در دهه‌های اخیر روش‌های بدون مش مختلفی ارائه شده است. از بین این روش‌ها، روش بدون مش گالرکین در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی از جمله مکانیک شکست کاربرد موفقیت آمیزی داشته و در این پایان نامه برای تحلیل مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در محیط‌های سنگی بکار گرفته می‌شود.

1- Simkins

2- Li

3- Thermo-Mechanical Ductile Fracture

فصل پنجم

مدلسازی رشد ترک‌ها در محیط‌های سنگی با استفاده از روش عددی بدون مش گالرکین

۵ - ۱ - مقدمه

هدف از تحلیل شکستگی‌های توده سنگ با استفاده از مکانیک شکست، مطالعه پایداری یا ناپایداری و یا مطالعه رشد یا عدم رشد این شکستگی‌ها تحت بارگذاری اعمالی می‌باشد. بر مبنای اصول مکانیک شکست این مطالعه با استفاده از برخی از معیارهای شکست امکان‌پذیر است. برای بکارگیری هر یک از معیارهای شکست، تعیین بردار جابجائی، تانسورهای کرنش و تنش، ضرایب تمرکز تنش موده‌های مختلف و یا کمیت‌های انرژی لازم است. در مسائل عملی با هندسه و بارگذاری پیچیده استفاده از یک روش عددی برای تعیین پارامترهای ذکر شده اجتناب ناپذیر است. تحلیل عددی کلاسیک مسائل مکانیک شکست سه مرحله اساسی را در بر می‌گیرد:

- تعیین میدان جابجائی، کرنش و تنش در دامنه مساله با استفاده از یک روش عددی مناسب
- محاسبه پارامترهای مکانیک شکست نظیر ضرایب تمرکز تنش، نرخ رهایش انرژی کرنشی، مولفه‌های انتگرال J و غیره.
- بکارگیری معیار شکست مناسب جهت بررسی رشد ترک و تعیین جهت رشد آن.

در این فصل با در نظر گرفتن مثال‌های مختلف، با هندسه و بارگذاری‌های متفاوت، هر یک از سه مرحله بالا بطور کمی بحث و تحلیل می‌گردد. از اینرو نحوه بکارگیری روش بدون مش گالرکین برای مدلسازی محیط‌های سنگی درزه‌دار توضیح داده می‌شود. ابتدا جزئیات پیاده‌سازی روش و مقادیر پارامترهای مورد استفاده بطور مختصر شرح داده می‌شود. سپس نحوه تعیین میدان جابجایی، میدان تنش و ضرایب تمرکز تنش با در نظر گرفتن مثال‌های مختلف برای نمونه‌هایی با هندسه متفاوت و

تحت بارگذاری‌های مختلف ارائه شده و نتایج روش بدون مش گالرکین با نتایج روش‌های تحلیلی و نتایج روش المان محدود مقایسه می‌شود. در مرحله بعد دو معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و مبتنی بر مولفه‌های تنش برای بررسی رشد یا عدم رشد ترک و تعیین جهت انتشار آن ارزیابی شده و با در نظر گرفتن دو مثال مزایا و معایب این دو معیار بحث و معیار مناسب انتخاب می‌شود. در نهایت با استفاده از معیار انتخابی ابتدا مکانیزم رشد ترک در نمونه‌های حاوی یک ترک (یا درزه) شبیدار تحت بار فشاری مطالعه می‌گردد، سپس مکانیزم انشعاب، انتشار و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک شبیدار به ازای مقادیر مختلف طول خط واصل دو ترک و شیب خط واصل دو ترک بررسی می‌گردد. با توجه به اینکه در فصل بعد نتایج روش بدون مش گالرکین در تحلیل انشعاب و رشد ترک در نمونه‌های حاوی یک ترک و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک بطور آزمایشگاهی ارزیابی و صحت این نتایج بررسی خواهد شد، لذا در انتهای این فصل با در نظر گرفتن یک مثال، نتایج دو روش بدون مش گالرکین و روش المان مرزی در تحلیل مکانیزم انشعاب، رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک باهم مقایسه می‌گردد.

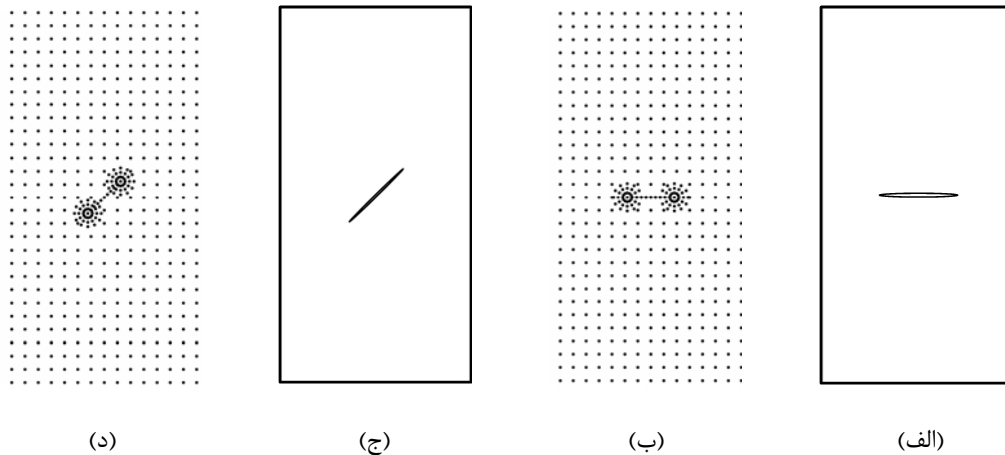
۵ - ۲ - پیاده سازی روش بدون مش گالرکین برای مدلسازی شکستگی‌های سنگ

در کاربردهای عملی بکارگیری مناسب یک روش عددی و بدست آوردن نتایج دقیق مستلزم آن است که مراحل پیاده‌سازی روش بطور صحیح اجرا شده و پارامترهای موثر در آن روش بطور مناسب انتخاب گردد. در ادامه مراحل مختلف اجرای روش بدون مش گالرکین و تعیین پارامترهای آن در مدلسازی محیط‌های سنگی ترک‌دار توضیح داده می‌شود.

۵ - ۲ - ۱ - آرایش گره‌ها

در روش بدون مش گالرکین دامنه مساله با استفاده از مجموعه‌ای از گره‌ها مدلسازی می‌شود. این نقاط گرهی در دامنه حل مساله و مرزهای آن پراکنده می‌شوند. در این مطالعه در نمونه‌های حاوی درزه، گره‌ها در حوالی نوک درزه بصورت شعاعی، در روی سطوح درزه بطور خطی با تراکم بالا و در

سایر نقاط بصورت شبکه مربعی منظم توزیع می‌شوند. برای مثال آرایش گره‌ها در نمونه‌های مستطیلی حاوی ترک افقی و شیبدار در شکل (۵-۱) نشان داده شده است.



شکل (۵-۱): توزیع گره‌ها در دامنه نمونه‌های ترک‌دار (الف) نمونه حاوی ترک افقی (ب) توزیع گره‌ها در دامنه نمونه حاوی ترک افقی (ج) نمونه حاوی ترک شیبدار (د) توزیع گره‌ها در دامنه نمونه حاوی ترک شیبدار

۵ - ۲ - ۲ - پارامترهای تشکیل تابع شکل

در روش بدون مش گالرکین برای تشکیل توابع شکل از تقریب حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود. لازم است پارامترهای این تقریب بطور مناسب انتخاب گردد. در این مطالعه همانند اکثر مطالعات دو بعدی از تابع خطی زیر بعنوان تابع پایه استفاده شده است.

$$P^T = \{1, x, y\} \quad (۵ - ۱)$$

همچنین از بین توابع وزن موجود، تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم انتخاب شده است که ضابطه آن بصورت زیر می‌باشد.

$$w(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 & \text{if } s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \text{if } \frac{1}{2} < s < 1 \\ 0 & \text{if } s \geq 1 \end{cases} \quad (۵ - ۲)$$

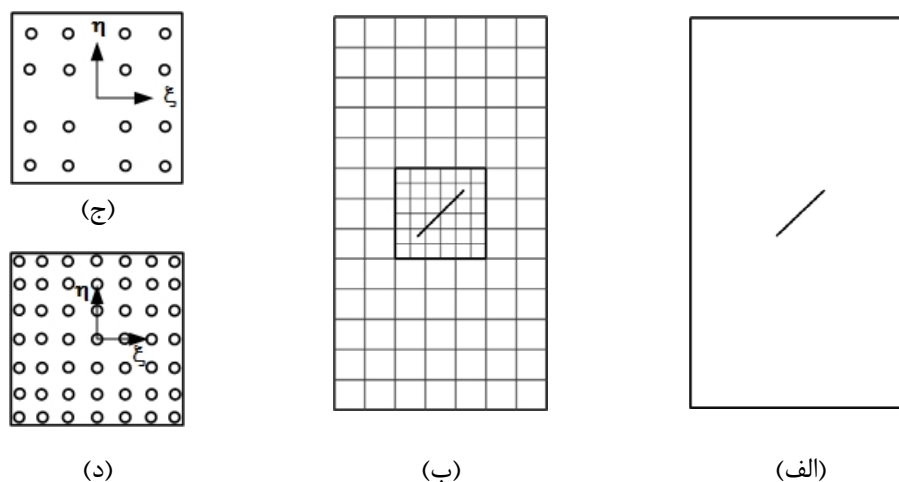
که در آن پارامتر وزن $s = \frac{|x - x_I|}{r_0}$ فاصله نرمالیزه شده و r_0 شعاع حوزه تاثیر و برابر $r_0 = d_{\max} \times s$

است. s پارامتر مقیاس بوده و برابر فاصله گره‌ها در آرایش مربعی انتخاب می‌شود و پارامتر $d_{\max}$ با

جستجوی تعداد کافی از گره‌های مجاور تعیین می‌شود تا ماتریس A در معادله (۴-۱۶) عادی باشد. در این مطالعه مقدار این پارامتر برابر $1/7$ تا 2 در نظر گرفته شده که نتایج دقیقی را تولید می‌کند.

۵ - ۲ - ۳ - انتگرال‌گیری عددی

همانطور که اشاره شد برای انتگرال‌گیری عددی از روش شبکه انتگرال‌گیری استفاده می‌شود که نیازمند یک شبکه زمینه است. در این مطالعه برای مدل‌سازی نمونه ترک‌دار از یک شبکه که بر دامنه مساله منطبق است، استفاده می‌شود. چیدمان سلول‌ها در این شبکه نامنظم است. در حوالی ترک سلول‌ها با ابعاد کوچک و در سایر قسمت‌های نمونه ابعاد بزرگ در نظر گرفته می‌شود. عموماً سلول‌های بزرگ منطبق بر آرایش مربعی گره‌ها انتخاب می‌شوند. برای مثال یک نمونه حاوی ترک شیبدار و شبکه انتگرال‌گیری متناظر با آن به ترتیب در اشکال (۵-۲-الف) و (۵-۲-ب) نشان داده شده است.



شکل (۵-۲): شبکه سلول‌ها در روش شبکه انتگرال‌گیری، گره‌ها در گوشه‌های سلول‌های مربعی هستند.

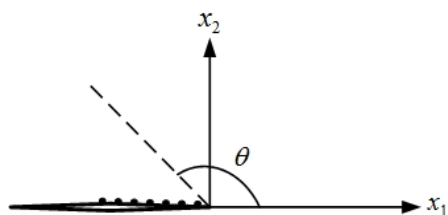
در این روش انتگرال‌ها بروی سلول‌های زمینه و بر اساس ساختار تربیع محاسبه می‌شوند. در هر سلول انتگرال‌گیری تربیع گوس انجام می‌شود. تعداد نقاط گوس به تعداد گره در یک سلول بستگی دارد. در مدل‌سازی نمونه ترک‌دار در قسمت آرایش مربعی گره‌ها از تربیع 4×4 (شکل ۵-۲-ج) و در حوالی نوک ترک که دانسیته گره‌ها بالا است از تربیع 7×7 استفاده شده است (شکل ۵-۲-د).

۵- ۲- ۴ - محاسبه ضرایب تمرکز تنش

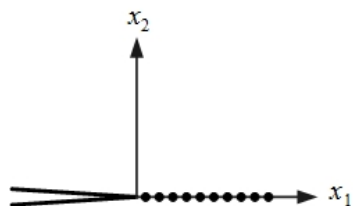
در فصل چهارم از بین روش‌های موجود برای محاسبه ضرایب تمرکز تنش، روش‌های برون‌یابی تنش، برون‌یابی جابجایی، انتگرال J و انتگرال M توضیح داده شدند. از بین این روش‌ها، روش برون‌یابی تنش پایین‌ترین دقت را داراست و امروزه استفاده نمی‌شود. دقت روش برون‌یابی جابجایی نیز پایین است. همچنین بکارگیری این روش‌ها در شرایط هندسی و بارگذاری پیچیده، سخت‌تر است. بنابراین در این مطالعه برای محاسبه ضریب تمرکز تنش مود کششی خالص از انتگرال مستقل از مسیر J و برای محاسبه ضرایب تمرکز تنش مود ترکیبی از انتگرال اندرکنش M استفاده می‌شود. با این وجود در ادامه با استفاده از مثالی نتایج روش‌های برون‌یابی نیز ارزیابی می‌شود. روابط مربوط به این روش‌ها در فصل دوم ارائه شده و فقط نحوه بکارگیری این روش‌ها توضیح داده می‌شود.

۵- ۲- ۴- ۱ - محاسبه ضرایب تمرکز تنش در حالت مود کششی خالص

مود کششی خالص حالتی است که در آن به خاطر تقارن هندسه نمونه ترکدار و تقارن بارگذاری، در نوک ترک فقط تمرکز تنش کششی بوجود می‌آید. بنابراین ضریب تمرکز تنش مود برشی K_{II} صفر است. برای استفاده از روش برون‌یابی تنش، بعد از تحلیل مساله و تعیین بردار جابجایی و میدان تنش در گره‌ها، در خط جلوی ترک مطابق شکل (۵-۳-الف) تعداد مشخصی نقطه (۱۰ نقطه) با فاصله کم (مثلاً ۰/۱ میلی‌متر) در نظر گرفته و مولفه نرمال تنش در این نقاط با استفاده از مقادیر گرهی تعیین می‌گردد سپس با استفاده از معادلات (۲-۲۴) تا (۲-۲۶) ضریب تمرکز تنش مود کششی در نوک ترک بدست می‌آید. به همین ترتیب در روش برون‌یابی جابجایی نیز در خط پشت ترک مطابق شکل (۵-۳-ب) تعدادی نقطه با فاصله کم مشخص شده و مولفه قائم جابجایی در این نقاط با استفاده از مقادیر گرهی تعیین می‌گردد و با استفاده از معادلات (۲-۲۷) تا (۲-۲۹) ضریب تمرکز تنش مود کششی محاسبه می‌شود.



(ب) آرایش گره‌ها در خط پشت ترک در
روش برون‌یابی جابجایی



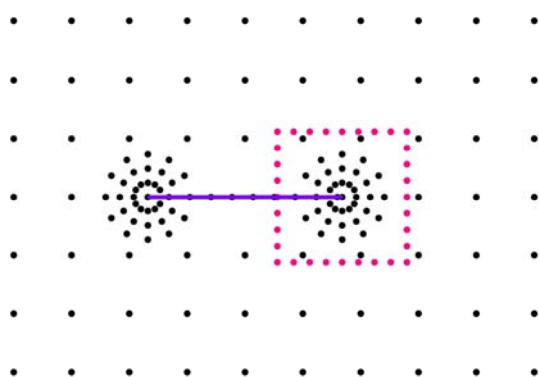
(الف) آرایش گره‌ها در خط جلوی ترک در
روش برون‌یابی تنش

شکل (۳-۵): آرایش گره‌ها در روش‌های برون‌یابی تنش و جابجایی برای محاسبه ضریب تمرکز تنش

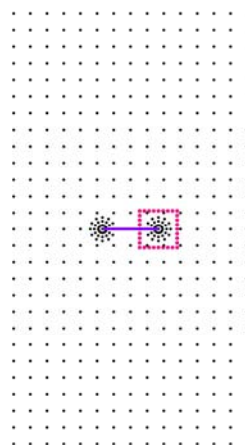
در صورت استفاده از کمیت‌های انتگرالی، با توجه به اینکه ضریب تمرکز تنش مود برشی K_{II} صفر می‌باشد، ضریب تمرکز تنش مود کششی K_I با استفاده از انتگرال J و از رابطه زیر محاسبه می‌گردد و نیازی به انتگرال M نیست.

$$J_I = \frac{K_I^2}{E'} \quad (۳-۵)$$

در این مطالعه برای محاسبه عددی انتگرال J ، در پیرامون ترک، مطابق شکل (۴-۵) از مسیر مربعی شکل استفاده می‌شود که این مسیر از خط زیر ترک شروع و به خط بالایی ترک منتهی می‌شود. در شکل (۴-۵-الف) آرایش گره‌ها در دامنه نمونه حاوی ترک افقی و همچنین در مسیر انتگرال J و در شکل (۴-۵-ب) آرایش گره‌ها در روی مسیر انتگرال‌گیری نشان داده شده است که با فاصله ثابتی از هم قرار دارند.



(ب) آرایش گره‌ها در مسیر انتگرال J

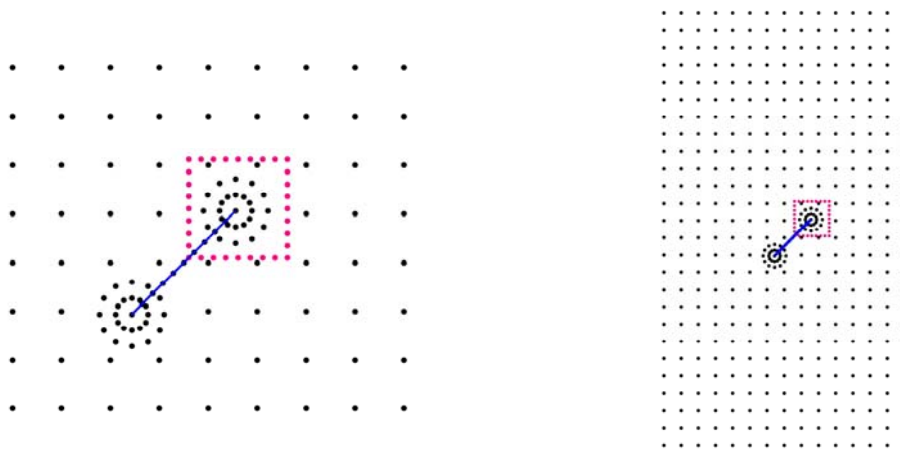


(الف) آرایش گره‌ها در دامنه نمونه حاوی ترک افقی و در
مسیر انتگرال J

شکل (۴-۵): مسیر انتگرال J در پیرامون ترک افقی

۵ - ۲ - ۴ - ۲ - محاسبه ضرایب تمرکز تنش در حالت مود ترکیبی

در حالت مود ترکیبی در نوک ترک تمرکز تنش مود کششی و برشی بوجود می‌آید و به خاطر مشکلات تفکیک K_I و K_{II} بجای انتگرال J از انتگرال M استفاده می‌شود و ضرایب تمرکز تنش با استفاده از روابط (۷۵-۲) و (۷۶-۲) محاسبه می‌شود. مسیر انتگرال M همانند مسیر انتگرال J است. در شکل (۵-۵) مسیر انتگرال M در یک نمونه حاوی ترک شیبدار که شرایط مود ترکیبی بوجود می‌آید، نشان داده شده است.



(ب) آرایش گره‌ها در مسیر انتگرال M

(الف) آرایش گره‌ها در دامنه نمونه حاوی ترک شیبدار و

در مسیر انتگرال M

شکل (۵-۵): مسیر انتگرال M در پیرامون ترک شیبدار

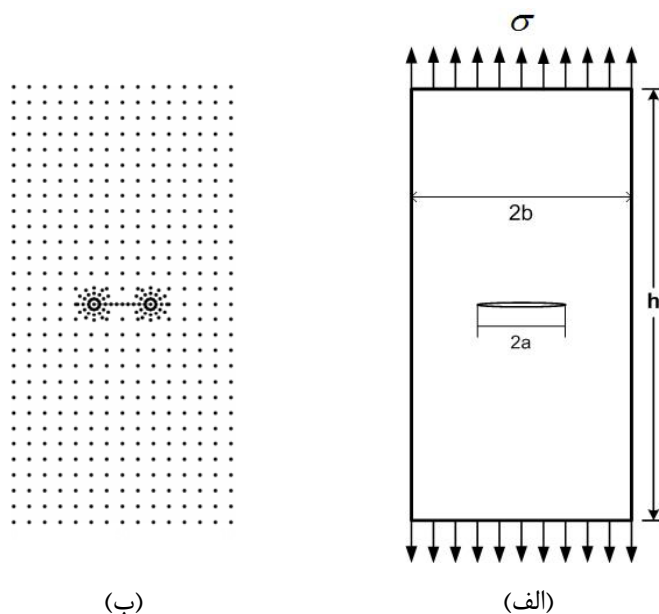
۵ - ۳ - تعیین میدان جابجایی و میدان تنش در محیط‌های سنگی درزه‌دار

تعیین میدان جابجایی‌ها و تنش‌ها مهمترین مرحله در تحلیل مسائل مکانیک شکست است. از آنجا که در ادامه برای تحلیل تمام مثال‌ها با هندسه‌های مختلف و تحت انواع بارگذاری‌ها میدان جابجایی و تنش محاسبه و نشان داده خواهد شد لذا در این قسمت دو مثال ارائه می‌گردد. در مثال اول برای یک نمونه حاوی درزه افقی مرکزی تحت بار کششی، میدان جابجایی و تنش تعیین و نتایج آن با نتایج روش‌های تحلیلی مقایسه می‌گردد و سپس برای اینکه قابلیت روش بدون مش در تحلیل مسایل با

تعداد ترک‌های دلخواه مشخص گردد، یک مثال حاوی ۱۰ ترک با طول و راستای‌های متفاوت تحت بار فشاری در نظر گرفته شده و میدان جابجایی و تنش تعیین و نشان داده می‌شود.

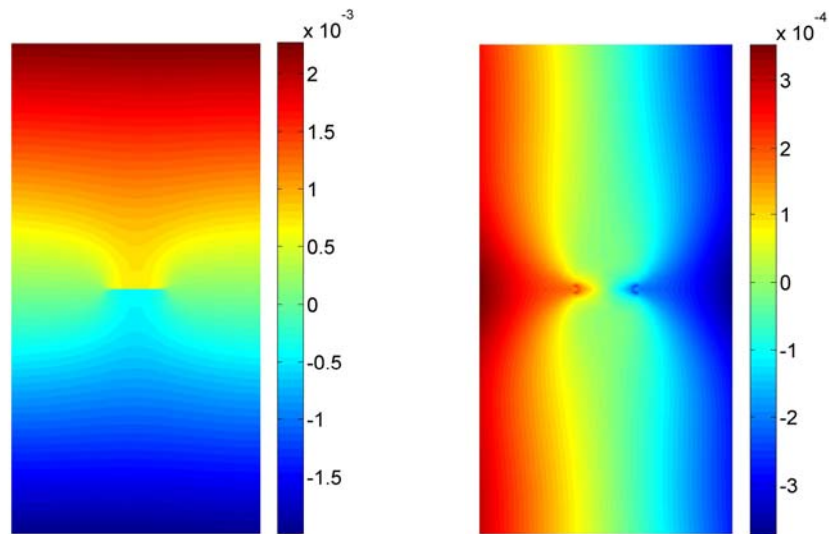
۵ - ۳ - ۱ - نمونه حاوی ترک افقی مرکزی تحت بار کششی

در این مثال نمونه‌ای سنگی به ابعاد 200×100 میلی‌متر مربع که در مرکز آن درزه‌ای افقی به طول ۲۴ میلی‌متر قرار دارد، مطابق شکل (۵-۶-الف) در نظر گرفته شده است و از دو طرف تحت تنش کششی ۱ مگاپاسکال قرار گرفته است. ضریب الاستیسیته و پواسون این نمونه به ترتیب برابر $72/4$ گیگاپاسکال و $0/3$ می‌باشد.



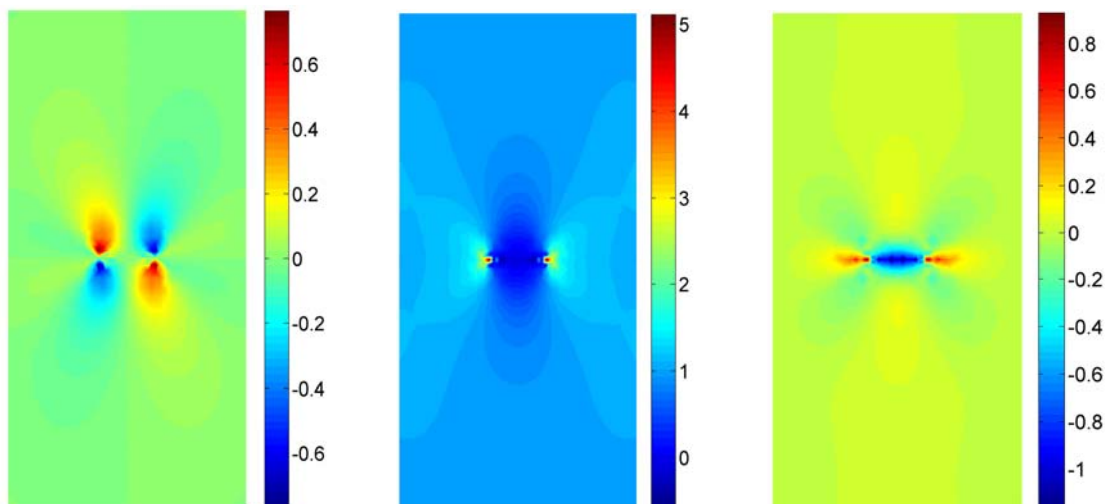
شکل (۵-۶): نمونه حاوی درزه افقی مرکزی تحت بار کششی. (الف) هندسه مساله (ب) آرایش گره‌ها در دامنه مساله

برای مدلسازی نمونه مذکور، گره‌ها مطابق شکل (۵-۶-ب) در دامنه مساله توزیع و با استفاده از روش بدون مش گالرکین مولفه‌های جابجایی و تنش تعیین گردید که نتایج آن در شکل‌های (۵-۷-الف) تا (۵-۷-ه) ارائه شده است.



(ب) مولفه قائم بردار جابجایی (mm)

(الف) مولفه افقی بردار جابجایی (mm)



(ه) مولفه برشی تنش (MPa)

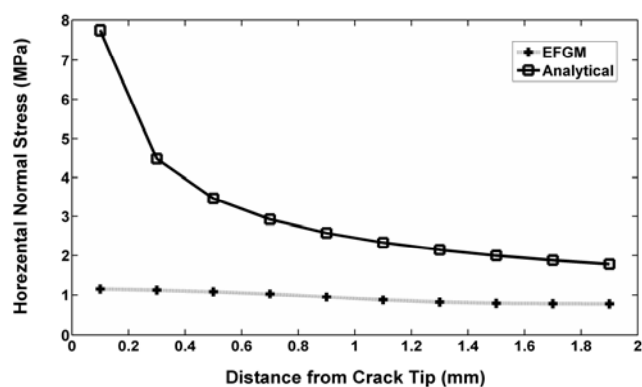
(د) مولفه قائم تنش نرمال (MPa)

(ج) مولفه افقی تنش نرمال (MPa)

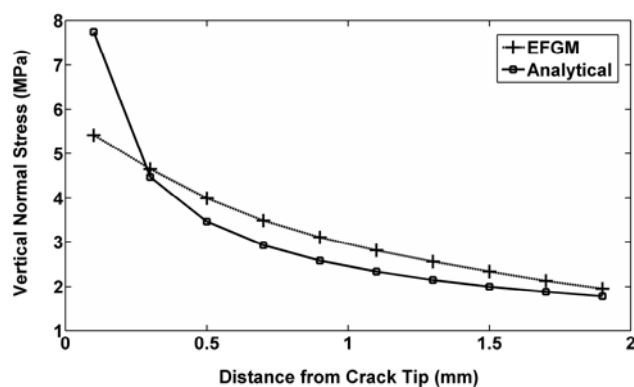
شکل (۵-۷): مولفه‌های جابجایی و تنش در دامنه نمونه حاوی ترک افقی تحت بار کششی

برای ارزیابی نتایج روش بدون مش گالرکین، مولفه‌های تنش در طول خط افق بر حسب فاصله از نوک درزه، با دو روش بدون مش گالرکین و روش تحلیلی محاسبه و در اشکال (۵-۸-الف) تا (۵-۸-ج) نشان داده شده است. همانطور که در فصل دوم توضیح داده شد، در روش تحلیلی از روابط زیر استفاده می‌شود.

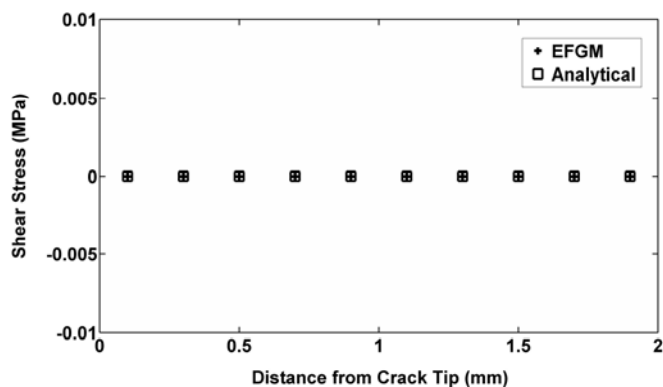
$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (4-5)$$



(الف) تغییرات تنش σ_x



(ب) تغییرات تنش σ_y



(ج) تغییرات تنش τ_{xy}

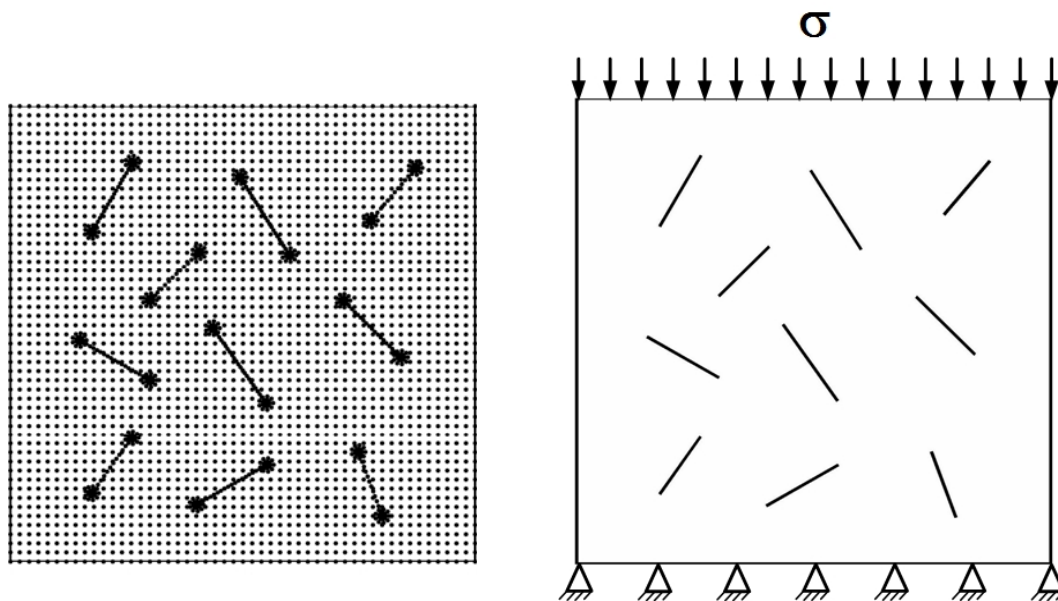
شکل (۵-۸): تغییرات مولفه‌های تنش در طول خط افق برحسب فاصله از نوک ترک برای دو روش بدون مش گالرکین و روش تحلیلی

همانطور که در فصل دوم بحث شد، وقتی که r (فاصله از نوک ترک) بسمت صفر میل می‌کند مقادیر تنش از فرمول‌های فوق بسمت بی‌نهایت میل می‌کنند. به عبارت دیگر در نوک ترک تابع تنش تکین^۱ می‌باشد. بنابراین در این مقایسه مقدار r از $0/1$ تا 2 میلی‌متر در نظر گرفته شده است. مطابق شکل (۸-۵) نتایج دو روش در پیش بینی مولفه‌های σ_y و τ_{xy} تطابق خیلی خوبی باهم داشته ولی در پیش بینی مولفه σ_x اختلاف زیادی باهم دارند. با توجه به روابط (۴-۵) به ازای $\theta = 0$ ضابطه σ_x و σ_y یکسان می‌شود در حالیکه توزیع این دو مولفه در نوک ترک متفاوت است و به نظر می‌رسد نتایج عددی σ_x معتبر بوده و مقدار آن در نوک ترک $1/2$ مگاپاسکال بوده و با فاصله از نوک ترک به صفر میل می‌کند (شکل ۸-۵ الف). در این مثال مطابق شکل (۸-۵ ب) در $0/1$ میلی‌متری نوک ترک در خط ترک مقدار تنش σ_y برابر $5/2$ مگاپاسکال بوده و با فاصله گرفتن از نوک ترک این مولفه به مقدار 1 مگاپاسکال میل می‌کند. تنش τ_{xy} در راستای خط ترک برای هر دو روش برابر صفر بدست می‌آید (شکل ۸-۵ ج).

۵ - ۳ - ۲ - نمونه حاوی ترک‌های متعدد با طول و راستای دلخواه تحت بار فشاری

در این مثال نمونه‌ای سنگی به ابعاد 200×200 میلی‌مترمربع که در آن 10 درزه با طول و راستای‌های دلخواه قرار داده شده، مطابق شکل (۹-۵) در نظر گرفته شده است. این نمونه روی تکیه‌گاه قرار داده شده و از قسمت بالا تحت تنش فشاری 10 مگاپاسکال قرار گرفته است. ضریب الاستیسیته و پواسون این نمونه بترتیب برابر 50 گیگاپاسکال و $0/25$ می‌باشد. برای مدلسازی این نمونه، گره‌ها مطابق شکل (۹-۵ ب) در دامنه مساله توزیع و با استفاده از روش بدون مش گالرکین مولفه‌های جابجائی و تنش تعیین گردید که نتایج آن در شکل‌های (۹-۵-۱۰ الف) تا (۹-۵-۱۰ هـ) ارائه شده است.

1- Singularity



(ب) توزیع گره‌ها در دامنه نمونه ترک‌دار

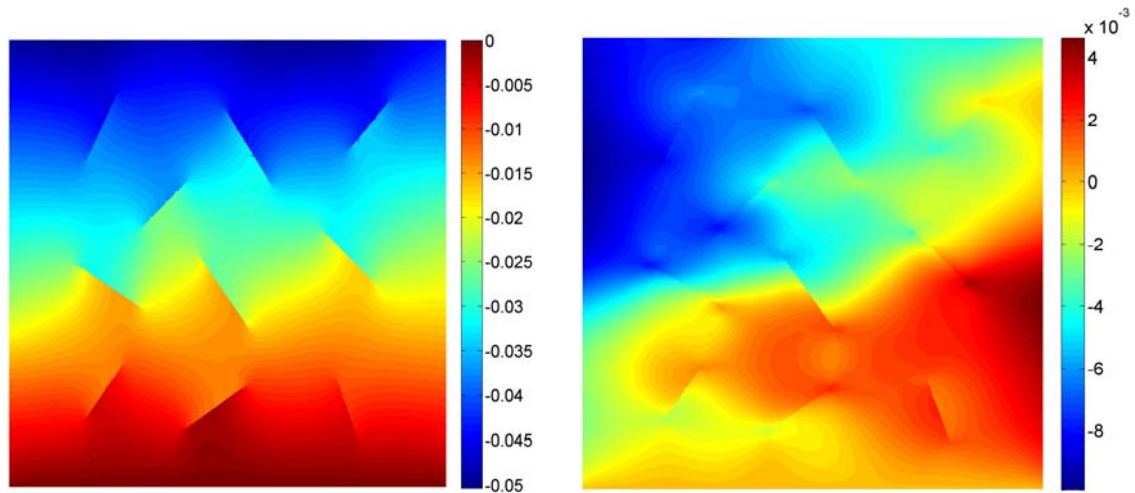
(الف) نمونه حاوی ترک‌های متعدد

شکل (۵-۹): نمونه حاوی ترک‌های متعدد با طول و راستای دلخواه

هدف از ارائه این مثال این است که نشان داده شود روش بدون مش گالرکین قادر است راحت‌تر از سایر روش‌های عددی تعداد دلخواهی از ترک‌ها را با طول و راستاهای متفاوت مدلسازی کند. این قابلیت به خاطر طبیعت محیط‌های سنگی درزه‌دار که حاوی درزه‌های متعددی هستند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

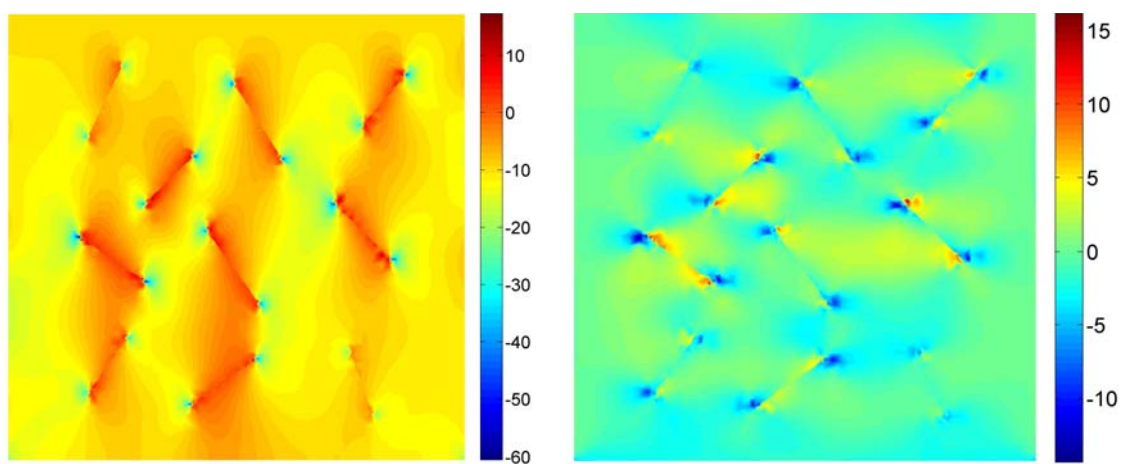
۵ - ۴ - محاسبه ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک‌های محیط‌های سنگی

همانطور که اشاره شد ضریب تمرکز تنش مهمترین پارامتر در مکانیک شکست بوده و قادر است میدان و توزیع تنش را در حوالی نوک ترک برحسب بار اعمالی و اندازه و شکل ترک بیان نماید و همچنین در قالب معیارهای شکست برای تحلیل رشد یا عدم رشد ترک‌ها و ارزیابی جهت رشد آنها بکار گرفته شود. در این قسمت با در نظر گرفتن چند مثال در حالت مود کششی خالص و مود ترکیبی، ابتدا با استفاده از روش بدون مش گالرکین میدان جابجایی و تنش محاسبه و با استفاده از این نتایج و با بکارگیری روش‌های مختلف محاسبه ضرایب تمرکز تنش، این پارامترها تعیین و نتایج حاصل با نتایج سایر روش‌های عددی یا تحلیلی مقایسه شده است.



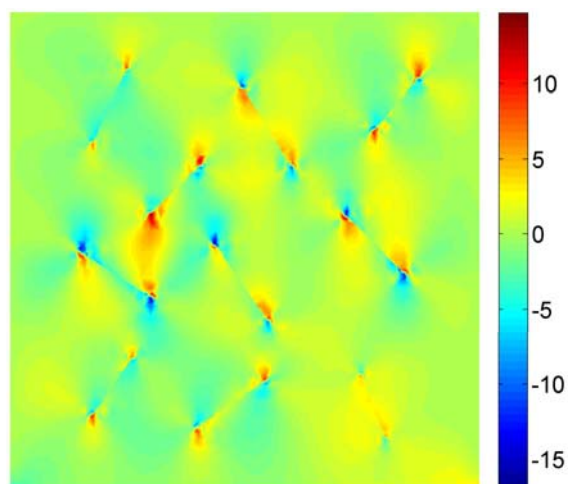
(الف) مولفه افقی بردار جابجایی (mm)

(ب) مولفه قائم بردار جابجایی (mm)



(ج) مولفه افقی تنش نرمال (MPa)

(د) مولفه قائم تنش نرمال (MPa)



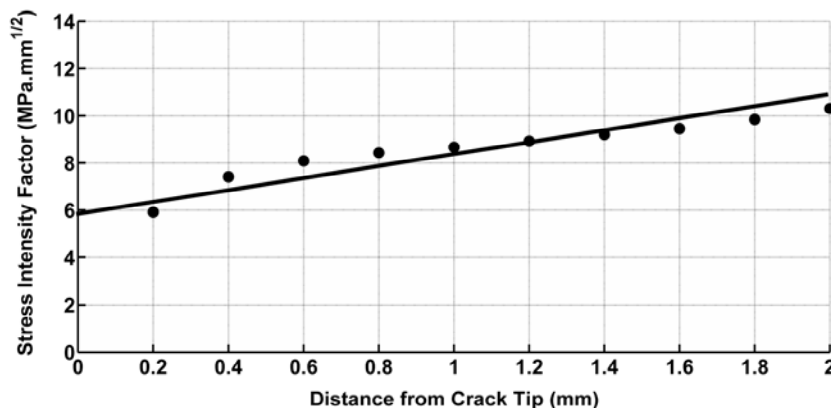
(ه) مولفه برشی تنش (MPa)

شکل (۵-۱۰): مولفه‌های جابجایی و تنش در دامنه نمونه حاوی ترک‌های متعدد تحت بار فشاری

۵-۴-۱ - نمونه حاوی ترک افقی مرکزی تحت بار کششی

در مثال ارائه شده در قسمت (۵-۳-۱) با استفاده از روش بدون مش گالرکین، میدان جابجایی و تنش در دامنه نمونه‌ای به ابعاد 200×100 میلی‌مترمربع و حاوی درزه افقی مرکزی به طول ۲۴ میلی‌متر تحت بار کششی ۱ مگاپاسکال تعیین شده است. در این قسمت برای این نمونه ضریب تمرکز تنش مود کششی در نوک ترک با سه روش برون‌یابی تنش، برون‌یابی جابجایی و انتگرال J محاسبه و با نتایج روش المان محدود و روش تحلیلی مقایسه می‌گردد.

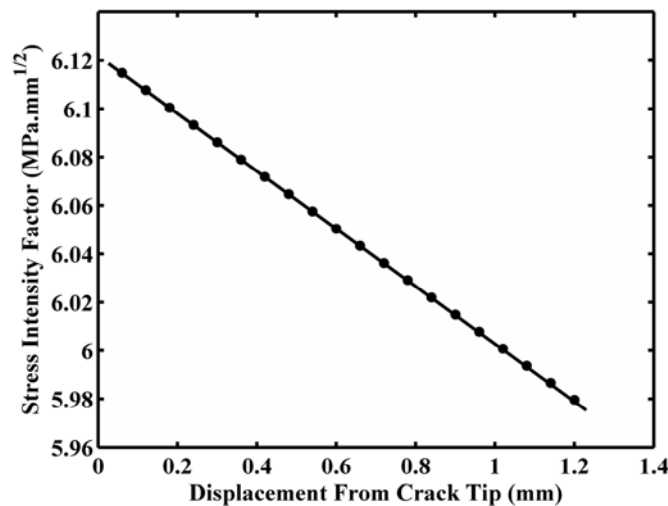
برای محاسبه ضریب تمرکز تنش مود I با روش برون‌یابی تنش، مولفه قائم تنش σ_y در دامنه مساله لازم است (شکل ۵-۷-ب). با استفاده از مقادیر این مولفه تنش در نقاط روی خط جلوی ترک (شکل ۵-۳-الف)، عبارت $K_I^* = \sigma_y \sqrt{2\pi r}$ در این نقاط محاسبه گردیده و بصورت تابعی از فاصله از نوک ترک روی نموداری نشان داده شده است (شکل ۵-۱۱). سپس خطی بر این نقاط برازش و عرض از مبدا این خط بعنوان ضریب تمرکز تنش تعیین گردیده است. مطابق شکل (۵-۱۱) ضریب تمرکز تنش مود I با این روش $5.88 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}$ بدست آمده است.



شکل (۵-۱۱): تعیین ضریب تمرکز تنش با روش برون‌یابی تنش

برای محاسبه ضریب تمرکز تنش مود I با روش برون‌یابی جابجایی، مولفه قائم بردار جابجایی در دامنه مساله باید تعیین گردد (شکل ۵-۷-ب). با استفاده از این نتایج همانطور که توضیح داده شد، (K_I^*) به صورت تابعی از فاصله از نوک ترک در خط پشت ترک تعیین و با استفاده از رگرسیون خطی

بهترین خط بر این داده‌ها رسم گردید. از تقاطع این خط با محور قائم مختصات ضریب تمرکز تنش بدست آمد. شکل (۵-۱۲) روش برون‌یابی جابجائی را نشان می‌دهد. با استفاده از این روش ضریب تمرکز تنش برابر با $6/12 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}$ بدست آمد.



شکل (۵-۱۲): تعیین ضریب تمرکز تنش با روش برون‌یابی جابجائی

با استفاده از رابطه تحلیلی موجود برای تعیین ضریب تمرکز تنش در صفحه تحت کشش با ترک مرکزی، این کمیت به صورت زیر محاسبه می‌شود (جاویدراد، ۱۳۸۳):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left(\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b} \right)^{1/2} \quad (5-5)$$

$$K_I = (1) \sqrt{12\pi} \left(\frac{100}{12\pi} \tan \frac{12\pi}{100} \right)^{1/2} = 6.29 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}$$

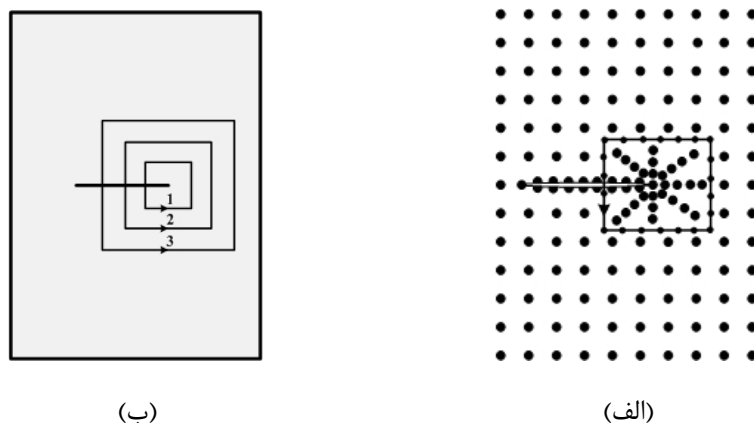
علی آبادی نیز این مساله را حل کرده و برای محاسبه ضریب تمرکز تنش رابطه زیر را ارائه کرده است (Aliabadi MH and Lopez, 1996):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[1 + 0.043 \left(\frac{a}{b} \right) + 0.491 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 7.125 \left(\frac{a}{b} \right)^3 - 28.403 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 59.583 \left(\frac{a}{b} \right)^5 - 65.278 \left(\frac{a}{b} \right)^6 + 29.762 \left(\frac{a}{b} \right)^7 \right] \quad (5-6)$$

با استفاده از این رابطه مقدار ضریب تمرکز تنش مود I برابر $6/63$ محاسبه می‌شود.

جاوید راد با استفاده از مدل المان محدود و با دو روش برون‌یابی جابجائی‌ها و برون‌یابی تنش‌ها این مثال را حل کرده است. مقدار ضریب تمرکز تنش با روش برون‌یابی مولفه تنش σ_y ، برابر ۶ و با برون‌یابی مولفه قائم جابجائی برابر ۶/۶ بدست آمده است (جاویدراد، ۱۳۸۳).

برای محاسبه ضریب تمرکز تنش با روش انتگرال J ، در مجاورت نوک ترک یک کنتور انتخاب شده است. این کنتور مطابق شکل (۵-۸-الف و ب) از صفحه پائین ترک شروع شده و به صفحه بالائی آن منتهی می‌شود. بعد از انتخاب مسیر انتگرال J ، روی مسیر یکسری گره در نظر گرفته شد و بر مبنای مسیر انتخاب شده و رابطه (۲-۵۱) مقدار انتگرال J محاسبه و با استفاده از رابطه (۲-۲۵) ضریب تمرکز تنش مود $I(K_I)$ تعیین گردیده است. برای محاسبه انتگرال رابطه (۲-۵۳) از بردار جابجایی و تانسور تنش محاسبه شده در مثال قسمت (۵-۳-۱) استفاده شده است.



شکل (۵-۱۳): توزیع گره در دامنه مسئله و مسیرهای مختلف اندازه‌گیری انتگرال J . (الف) مسیر و جهت انتگرال J و آرایش گره‌ها در روی آن (ب) سه مسیر مختلف انتگرال J

در مدل بدون مش گالرکین برای محاسبه ضریب تمرکز تنش با انتگرال J ، مطابق شکل (۵-۱۳-ب) از سه مسیر و در هر مسیر از تعداد گره‌های متفاوت (۳۳، ۴۹ و ۶۵ گره) استفاده شده است. نتایج مقادیر ضریب تمرکز تنش در مسیرهای مختلف و به ازای تعداد گره متفاوت در جدول (۵-۱) درج شده است. نتایج این جدول بخوبی نشان می‌دهد که مقدار انتگرال J در ۳ مسیر مختلف و به ازای تعداد متفاوت گره‌ها تقریباً یکسان است و این کمیت مکانیک شکست همانطور که بحث شد، مستقل از مسیر می‌باشد. همچنین در هر یک از مسیرها، با تغییر تعداد گره‌ها جواب انتگرال J تقریباً ثابت

می‌ماند. در جدول (۵-۱) مقدار $6/73$ بیشترین فراوانی را دارد بنابراین مقدار انتگرال J برابر $6/73$ در نظر گرفته می‌شود.

جدول (۵-۱): مقادیر انتگرال J در مسیرهای مختلف به ازای تعداد گره متفاوت

تعداد گره	K_I (MPa $\sqrt{\text{mm}}$) مسیر (۱)	K_I (MPa $\sqrt{\text{mm}}$) مسیر (۲)	K_I (MPa $\sqrt{\text{mm}}$) مسیر (۳)
۳۳	$6/72$	$6/74$	$6/78$
۴۹	$6/73$	$6/74$	$6/76$
۶۵	$6/73$	$6/73$	$6/76$

نتایج روش‌های مختلف برای این مثال در جدول (۵-۲) درج شده است.

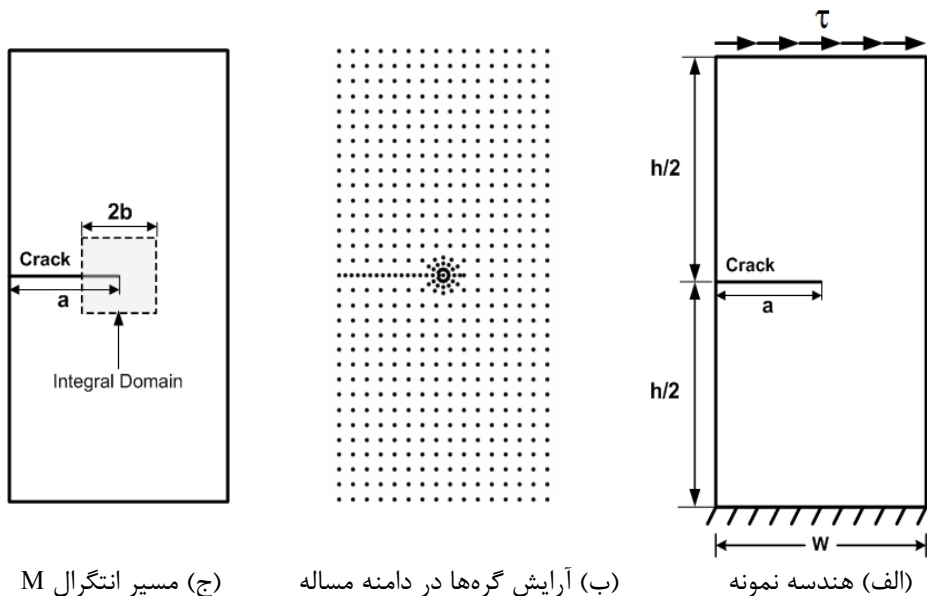
جدول ۵-۲: مقایسه نتایج روش‌های مختلف برای محاسبه ضریب تمرکز تنش کششی (MPa $\sqrt{\text{mm}}$)

برون‌یابی تنش با روش بدون مش گالرکین	برون‌یابی جابجایی با روش بدون مش گالرکین	راه‌حل تحلیلی	راه‌حل علی‌آبادی	برون‌یابی تنش با المان محدود	برون‌یابی جابجایی با المان محدود
۵/۸۸	$6/12$	$6/29$	$6/63$	۶	$6/6$

مقایسه نتایج روش بدون مش گالرکین با روش‌های تحلیلی و روش المان محدود مبین این است که نتایج این روش از دقت مطلوبی برخوردار است.

۵ - ۴ - ۲ - نمونه حاوی ترک افقی لبه‌ای تحت بار برشی

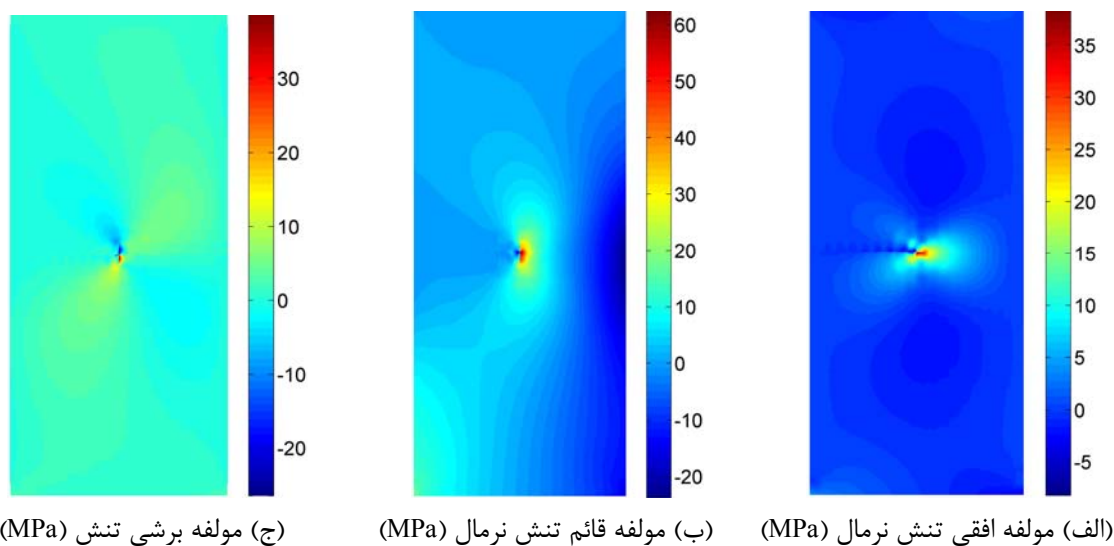
در این مثال مطابق شکل (۵-۱۴-الف) نمونه‌ای به ابعاد 160×70 میلی‌متر مربع که حاوی ترک لبه‌ای و افقی به طول ۳۵ میلی‌متر است، در نظر گرفته می‌شود. نمونه مذکور از قسمت پایین به تکیه‌گاه ثابت متصل و از قسمت بالا تحت تنش برشی ۱ مگاپاسکال قرار گرفته است. ضریب الاستیسیته و پواسون این نمونه به ترتیب برابر ۳۰ گیگاپاسکال و ۰/۲۵ می‌باشند. برای مدلسازی با روش بدون مش گالرکین مطابق شکل (۵-۱۴-ب) گره‌ها در اطراف نوک ترک به صورت شعاعی و در سایر نقاط دامنه بطور شبکه مربعی منظم (31×16 گره) توزیع شده‌اند.



(الف) هندسه نمونه (ب) آرایش گره‌ها در دامنه مساله (ج) مسیر انتگرال M

شکل (۵-۱۴): نمونه حاوی یک درزه افقی لبه‌ای که تحت بارگذاری برشی قرار گرفته است.

با بکارگیری روش بدون مش گالرکین و حل معادلات حاکم، مولفه‌های تنش در دامنه این مساله تعیین و در شکل (۵-۱۵) نشان داده شده است.



(الف) مولفه افقی تنش نرمال (MPa) (ب) مولفه قائم تنش نرمال (MPa) (ج) مولفه برشی تنش (MPa)

شکل (۵-۱۵): مولفه‌های تنش در دامنه نمونه حاوی ترک لبه‌ای تحت بار برشی

با توجه به اینکه شرایط مود ترکیبی بر این مساله حاکم است، بنابراین ضرایب تمرکز تنش بایستی با روش انتگرال M محاسبه شوند. برای تعیین ضرایب تمرکز تنش با روش انتگرال M، مسیر انتگرال مطابق شکل (۵-۱۴-ج) به شکل مربع انتخاب شده است. سه مقدار متفاوت برای اندازه ضلع مسیر

انتگرال گیری انتخاب شده و روی هر یک از این مسیرها ۳۰ گره در نظر گرفته شده است. نتایج در جدول (۳-۵) درج شده است.

جدول (۳-۵): ضرایب تمرکز تنش به ازای مقادیر مختلف اندازه مسیر انتگرال گیری

اندازه نسبی مسیر انتگرال گیری (b/a)	ضریب تمرکز مود کششی K_I (MPa.cm ^{1/2})	ضریب تمرکز مود برشی K_{II} (MPa.cm ^{1/2})
۰/۳	۳۲/۳۷	۴/۳۳
۰/۴	۳۴/۳۸	۴/۳۵
۰/۵	۳۶/۱۲	۴/۴۳

با توجه به جدول (۳-۵) نتایج ضرایب تمرکز تنش بدست آمده از مسیرهای مختلف انتگرال گیری تقریباً یکسان است و بیانگر مستقل از مسیر بودن انتگرال M است.

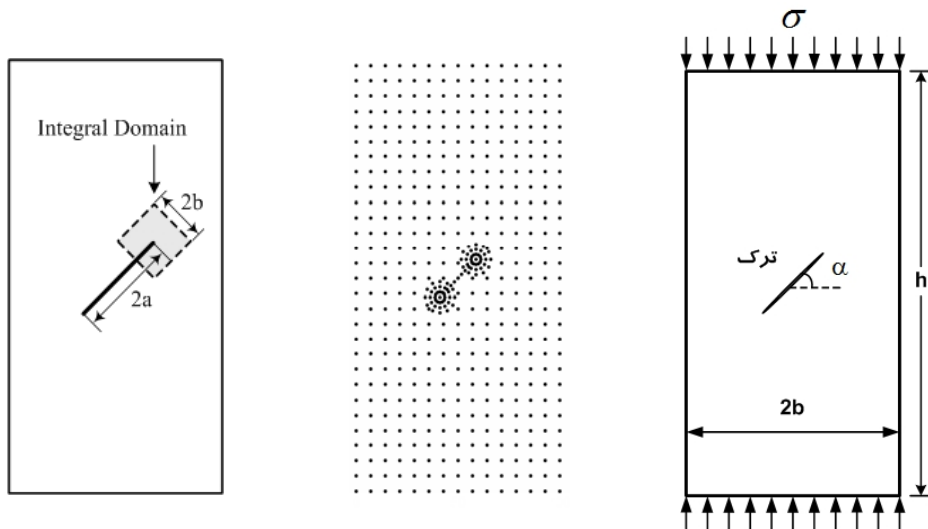
این مثال توسط ویلسون^۱ با روش المان محدود حل شده است (Rao and Rahman, 2003). در این مطالعه مقدار ضریب تمرکز تنش کششی و برشی به ترتیب برابر $34 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}$ و $4/55 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{mm}}$ محاسبه شده است. مقایسه نتایج روش بدون مش گالرکین و نتایج روش المان محدود نشان می دهد که دقت نتایج روش بدون مش گالرکین مطلوب است.

همچنین مقایسه نتایج دو مثال ارائه شده نشان می دهد که تفاوت نتایج انتگرال M در مسیرهای مختلف نسبت به انتگرال J به خاطر تعریف توابع کمکی در روش انتگرال M بیشتر است.

۵-۴-۳ - نمونه حاوی ترک شیب دار تحت بار فشاری

در این مثال نمونه ای به ابعاد 200×100 میلی مترمربع که در مرکز آن درزه ای به طول ۲۰ میلی متر و با شیب α درجه قرار دارد، مطابق شکل (۵-۹-الف) در نظر گرفته شده است. این نمونه از دو طرف (بالا و پایین) تحت تنش فشاری ۱۰ مگاپاسکال قرار گرفته است. ضریب ارتجاعی و نسبت پواسون این نمونه نیز به ترتیب برابر ۵۰ گیگاپاسکال و ۰/۲۵ می باشد.

1- Wilson



شکل (۵-۱۶): (الف) هندسه نمونه (ب) آرایش گره‌ها در دامنه مساله (ج) مسیر انتگرال M

شکل (۵-۱۶): نمونه حاوی یک درزه شیبدار لبه‌ای که تحت بارگذاری برشی قرار گرفته است.

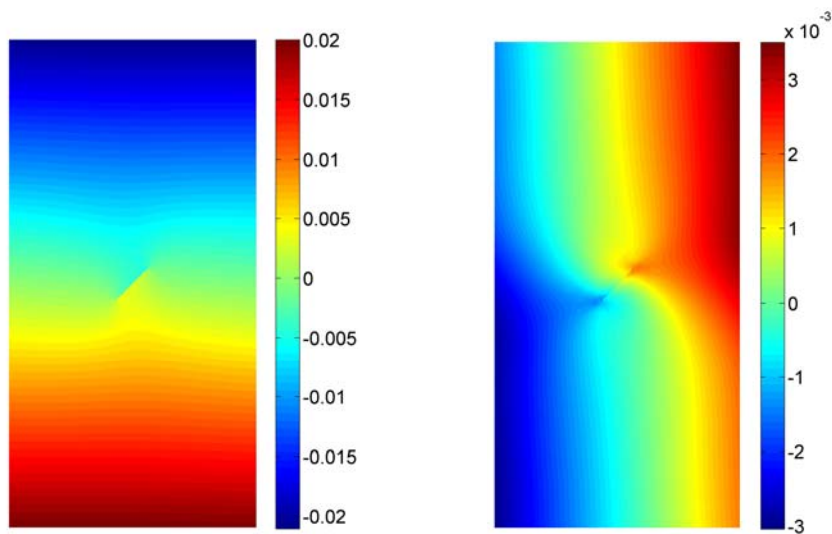
برای مدل‌سازی این مساله با روش بدون مش گالرکین، مطابق شکل (۵-۱۶-ب) در حوالی نوک ترک گره‌ها با آرایش شعاعی و در سایر نقاط دامنه مساله با آرایش مربعی 20×40 توزیع شده‌اند. برای $\alpha = 45^\circ$ درجه میدان جابجایی و تنش تعیین و در شکل (۵-۱۷) نشان داده شده‌اند.

در این مثال در نوک ترک تمرکز تنش‌های کششی و برشی بوجود می‌آید. بنابراین شرایط مود ترکیبی حاکم بوده و برای تعیین ضرایب تمرکز تنش بایستی از روش انتگرال M استفاده نمود. برای محاسبه انتگرال M مطابق شکل (۵-۱۶-ج) از مسیر مربعی شکل استفاده شده است. به ازای $b = 0.5a$ (b نصف ضلع مسیر انتگرال‌گیری و a نصف طول ترک) برای زوایای شیب 30° ، 45° و 60° درجه مقادیر ضرایب تمرکز تنش کششی و برشی محاسبه و در جدول (۵-۴) درج شده است. در این جدول این مقادیر با نتایج روش تحلیلی مقایسه شده‌اند. برای محاسبه ضرایب تمرکز تنش به روش تحلیلی از روابط زیر استفاده شده است (Xiangqiao, 2004).

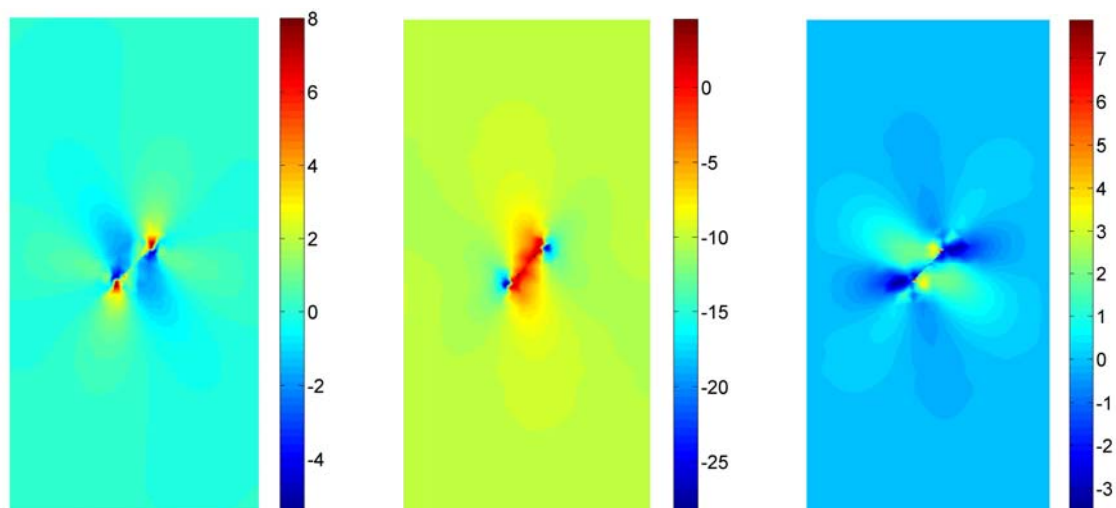
$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sin^2 \alpha \quad (5-7)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \alpha \cos \alpha$$

که در آن σ بار اعمالی، a نصف طول ترک است.



(الف) مولفه افقی بردار جابجایی (mm) (ب) مولفه قائم بردار جابجایی (mm)



(ج) مولفه افقی تنش نرمال (MPa) (د) مولفه قائم تنش نرمال (MPa) (ه) مولفه برشی تنش (MPa)

شکل (۵-۱۷): مولفه‌های جابجایی و تنش در دامنه نمونه حاوی ترک شبیدار تحت بار فشاری

جدول (۵-۴): نتایج عددی و تحلیلی ضرایب تمرکز تنش به ازای مقادیر مختلف شیب ترک

روش تحلیلی		روش بدون مش گالرکین		زاویه شیب ترک (درجه)
K_{II} (MPa.cm ^{1/2})	K_I (MPa.cm ^{1/2})	K_{II} (MPa.cm ^{1/2})	K_I (MPa.cm ^{1/2})	
۷/۶۷	۱۳/۲۹	۷/۳۷	۱۳/۲۵	۳۰
۸/۸۶	۸/۸۶	۸/۹۵	۸/۹۵	۴۵
۷/۶۷	۴/۴۳	۷/۸۳	۴/۱۳	۶۰

۵ - ۵ - ارزیابی معیارهای شکست

برای مدلسازی رشد ترک در یک محیط سنگی لازم است ابتدا معیار شکست مناسبی انتخاب شود. در فصل دوم اشاره شد که در اکثر مطالعات مکانیک شکست سه معیار کلاسیک شامل حداکثر تنش مماسی، حداکثر نرخ رهايش انرژی کرنشی (معیار G) و حداقل دانسیته انرژی کرنشی (معیار S) بکار گرفته می‌شوند. این معیارها انتشار ترک در مود کششی را تحت بارگذاری فشاری و کششی به درستی می‌توانند پیش‌بینی نمایند؛ ولی قادر به شبیه‌سازی رشد ترک در مود برشی نیستند (Bobet and Einstein, 1998; Tang et al., 2001; Vasarhelyi and Bobet, 2003). لذا این

معیارها حداقل به تنهایی قادر نیستند مسائل انتشار ترک را بطور صحیح تحلیل نمایند.

در تحلیل مسائل مکانیک شکست سنگ، بطور ویژه چهار معیار شکست توسط شن، ریس و انشتین (Reyes and Einstein, 1991)، بوبت و انشتین (Bobet and Einstein, 1998) و دوبروسکوک (Dobroskok et al., 2005) ارائه شده است که در دو معیار آخر از مفهوم ثابتی استفاده شده و شکل یکسانی دارند. شن با تصحیح معیار G و با استفاده از پارامترهای مقاومتی معیار F را ارائه داده است. بوبت و انشتین معتقدند این معیار نتایج آزمایشگاهی آنها را تایید نمی‌کند. آنها همچنین معتقدند معیار ریس و انشتین نیز با نتایج آزمایشگاهی سازگار نیست (Bobet and Einstein, 1998).

بوبت و انشتین در معیار پیشنهادی خود بجای استفاده از ضرایب تمرکز تنش، از مولفه‌های تنش موضعی استفاده کرده‌اند و در نقاطی با فاصله مشخص از نوک ترک (r_0) مولفه‌های تنش کششی و برشی را ارزیابی و رشد ترک را بررسی کرده‌اند. مساله قابل تامل در این معیار تعیین مقدار r_0 است که جزء خواص مواد بحساب می‌آید و حتی بسته به نوع بارگذاری کششی، فشاری تک‌محوره و یا فشاری دو محوره متفاوت می‌باشد. دوبروسکوک نیز با الهام از مطالعات بوبت و انشتین برای تشخیص نوع مود رشد ترک (کششی یا برشی) از مولفه‌های تنش موضعی استفاده کرده است (Dobroskok et al., 2005).

مطالعه معیارهای مختلف ارائه شده نشانگر این است که این معیارها یا مبتنی بر کمیت‌های انرژی نظیر ضرایب تمرکز تنش و یا مبتنی بر مولفه‌های تنش موضعی هستند.

۵ - ۵ - ۱ - معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش

شکل کلی معیار شکست مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش به صورت زیر است (Saouma, 2000) :

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^\lambda + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}}\right)^\mu = 1 \quad (۸-۵)$$

که در آن K_I و K_{II} ضرایب تمرکز تنش و K_{IC} و K_{IIC} چقرمگی شکست یا ضرایب تمرکز تنش بحرانی و λ و μ ضرایب وابسته به خواص مواد هستند. مقادیر $\lambda = \mu = 2.25$ بهترین برازش را با نتایج آزمایشگاهی داشته‌اند (Ayatollahi and Aliha, 2007). رابطه فوق رشد یا عدم رشد ترک را مشخص می‌کند. در صورت رشد ترک با استفاده از روابط زیر نوع حالت رشد آن (کششی یا برشی) مشخص می‌گردد (Melin, 1986).

$$\frac{K_{II}}{K_I} < \frac{K_{IIC}}{K_{IC}} \quad \text{مود کششی} \quad (۹-۵)$$

$$\frac{K_{II}}{K_I} > \frac{K_{IIC}}{K_{IC}} \quad \text{مود برشی}$$

اگر ترک در مود کششی رشد کند جهت رشد آن با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شود (Saouma, 2000) :

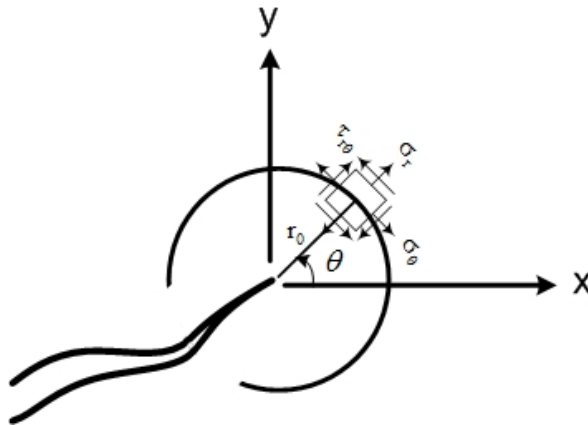
$$\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right) \quad (۱۰-۵)$$

که در آن θ زاویه‌ای است که مرکز آن در نوک ترک واقع شده و نسبت به امتداد خط ترک در جلوی آن اندازه‌گیری می‌شود. اگر ترک در مود برشی رشد کند جهت رشد آن را می‌توان با روش راثو تعیین کرد (Rao et al., 2003). ترک برشی عموماً در راستای خود ترک منشعب و رشد می‌کند.

۵ - ۲ - معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش

در این معیار مطابق شکل (۵-۱۸) روی محیط دایره‌ای به مرکز نوک ترک و به شعاع کوچک (شعاع

زون پلاستیک مواد) مولفه‌های تنش مماسی (σ_θ) و تنش برشی ($\tau_{r\theta}$) محاسبه می‌شوند.



شکل (۵-۱۸): تشریح معیار شکست مبتنی بر مولفه‌های تنش

با استفاده از مولفه‌های تنش و پارامترهای مقاومتی، یعنی تنش مماسی بحرانی (مقاومت کششی) و

تنش برشی بحرانی (مقاومت برشی)، معیار فوق بصورت زیر بیان می‌شود (Bobet and Einstein, 1998):

(1998):

در شرایط رشد ترک در مود کششی:

$$(\sigma_\theta)_{\min}|_{r=r_0} = (\sigma_\theta)_{\text{critical}}|_{r=r_0} = \sigma_{\text{crit}} \quad (5-11)$$

در شرایط رشد ترک در مود برشی:

$$(\tau_{r\theta})_{\max}|_{r=r_0} = (\tau_{r\theta})_{\text{critical}}|_{r=r_0} = \tau_{\text{crit}} \quad (5-12)$$

در این معیار در هر وضعیت از شرایط هندسی و بارگذاری، دو مولفه کششی و برشی تنش در نقاط

مختلف محیط دایره (شکل ۵-۱۸) محاسبه شده و مقادیر حداکثر این مولفه تعیین می‌گردد. هر یک

از مولفه‌ها که زودتر به مقدار بحرانی خود برسد، ترک در مود متناظر آن رشد می‌کند و جهت رشد

ترک در راستایی خواهد بود که مقدار تنش حداکثر است. با استفاده از دو مثال قابلیت و مزایا و

معایب دو معیار ذکر شده توضیح داده می‌شود.

۵ - ۳ - نمونه حاوی ترک لبه‌ای تحت بار برشی

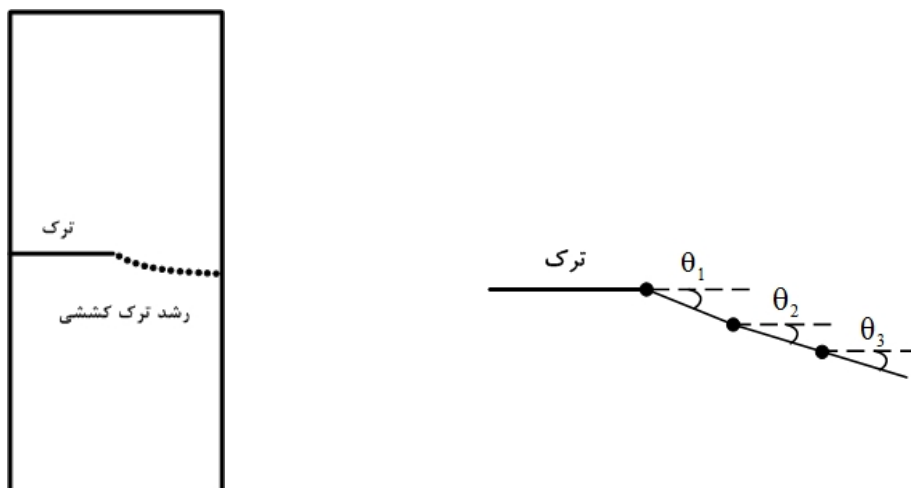
مثال مربوط به نمونه حاوی ترک لبه‌ای تحت تنش برشی که در قسمت (۵-۴-۲) بحث شد، در نظر گرفته می‌شود. در این مثال (شکل ۵-۱۴) نمونه‌ای فرضی به ابعاد ۱۶۰×۷۰ میلی‌مترمربع که حاوی ترک لبه‌ای و افقی به طول ۳۵ میلی‌متر است و از قسمت پایین به تکیه‌گاه ثابت متصل و از قسمت بالا تحت تنش برشی قرار گرفته است. بعد از مدل‌سازی و حل دستگاه معادلات حاکم بر مساله، تانسور کرنش و تنش محاسبه شده‌اند. مولفه‌های تانسور تنش در دامنه این مساله به ازای تنش برشی ۱ مگاپاسکال در شکل (۵-۱۵) نشان داده شده است.

با استفاده از دو معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و مبتنی بر مولفه‌های تنش، سه مرحله از رشد این ترک ارزیابی می‌شود. با رشد ترک و تغییر هندسه مساله، ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک نیز تغییر می‌کند. برای سه مرحله از رشد ترک ضرایب تمرکز تنش به ازای مقدار ثابت تنش برشی اعمالی ۱ مگاپاسکال محاسبه شده و در جدول (۵-۵) درج شده است. با توجه به اینکه ضریب تمرکز تنش کششی خیلی بیشتر از ضریب تمرکز تنش برشی است، ترک در هر سه مرحله در مود کششی رشد می‌کند. افزایش طول ترک در هر مرحله ۵ میلی‌متر در نظر گرفته شده است.

جدول (۵-۵): مقادیر ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک در مراحل مختلف رشد آن

مراحل رشد ترک	$K_I \text{ (MPa.cm}^{1/2}\text{)}$	$K_{II} \text{ (MPa.cm}^{1/2}\text{)}$
مرحله اول رشد	۳۵/۳۸	۴/۲۵
مرحله دوم رشد	۴۶/۴۸	۹/۶۷
مرحله سوم رشد	۵۳/۴۴	۱۳/۵

همانطور که جدول (۵-۵) نشان می‌دهد با رشد ترک به ازای مقدار ثابت تنش اعمالی بر نمونه، ضرایب تمرکز تنش افزایش می‌یابند یعنی ترک در حالت ناپایدار رشد می‌کند. مطابق شکل (۵-۱۹-الف)، در هر مرحله از رشد ترک، زاویه رشد ترک نسبت به خط افق اندازه‌گیری می‌شود.



(الف) مراحل مختلف رشد ترک و زاویه انتشار آن نسبت به خط افق (ب) شکل شماتیک مسیر رشد ترک شیبدار

شکل (۵-۱۹): پیش‌بینی جهت رشد ترک در نمونه حاوی ترک لبه‌ای

جهت رشد ترک در معیار ضرایب تمرکز تنش از رابطه (۵-۱۱) تعیین می‌شود. در معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش نیز در هر سه مرحله تنش کششی در نوک ترک بیشتر از تنش برشی است و ترک در این معیار نیز با مود کششی رشد می‌کند. در معیار مذکور جهت رشد ترک راستایی است که تنش کششی در نوک ترک ماکزیمم است. با استفاده از دو معیار ذکر شده زاویه رشد ترک برای سه مرحله از انتشار ترک پیش‌بینی شده و در جدول (۵-۶) نشان داده شده است.

جدول (۵-۶): مقایسه نتایج دو معیار در پیش‌بینی جهت رشد ترک

معیار شکست	θ_1 (درجه)	θ_2 (درجه)	θ_3 (درجه)
معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش	۱۴	۳۶	۵۲
معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش	۱۹	۱۶	۱۶

برای این مثال مسیر صحیح رشد ترک بطور شماتیک در شکل (۵-۱۹-ب) نشان داده شده است و بیانگر این است که با رشد ترک در هر مرحله زاویه ترک نسبت به خط افق کاهش یافته و در نهایت به صفر می‌رسد (Rao and Rahman, 2003). بنابراین مقایسه نتایج جدول (۵-۶) با شکل (۵-۱۹-ب) نشان می‌دهد که پیش‌بینی معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش صحیح بوده و نتایج معیار ضرایب تمرکز تنش فقط در مرحله اول رشد ترک معتبر است. دلیل این مسئله این است که ضابطه

تعیین زاویه رشد در معیار ضرایب تمرکز تنش (رابطه ۵-۱۰) از روابط تحلیلی (۲-۲۲) منتج شده است و این روابط برای حالت ساده و اولیه بسط داده شده‌اند و وقتی ترک رشد می‌کند و حالت غیر خطی پیدا می‌کند و هندسه مساله تغییر می‌کند، روابط مذکور صحت خود را از دست می‌دهند.

۵ - ۴ - ۵ - نمونه سنگی حاوی ترک شیبدار تحت بار فشاری

مثال مربوط به نمونه حاوی ترک شیبدار تحت بار فشاری که در قسمت (۵-۴-۳) بحث شد، در نظر گرفته می‌شود. در این مثال (شکل ۵-۱۶) نمونه‌ای به ابعاد 100×200 میلی‌متر مربع که حاوی ترک مرکزی و شیبدار به طول ۲۰ میلی‌متر و شیب ۴۵ درجه است و از دو طرف تحت تنش فشاری قرار گرفته است. بعد از مدل‌سازی و حل معادلات، تانسور کرنش و تنش محاسبه شده‌اند. مولفه‌های تانسور تنش در دامنه این مساله به ازای تنش برشی ۱۰ مگاپاسکال در شکل (۵-۱۷) نشان داده شده است.

در این مثال با استفاده از نتایج مدل‌سازی بدون مش گالرکین و معیار ضرایب تمرکز تنش مود انشعاب ترک کششی بوده و با استفاده از رابطه (۵-۱۰) مقدار زاویه رشد ترک نسبت به خط ترک ۹۰ درجه پیش‌بینی می‌شود یعنی ترک عمود بر راستای خود از دو نوک آن گسترش می‌یابد. با همان نتایج، معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش نیز مود انشعاب ترک را کششی و زاویه رشد آن را ۸۸ درجه پیش‌بینی می‌کند که تقریباً همان نتیجه معیار ضرایب تمرکز تنش است.

با رشد ترک، هندسه خطی ترک کاملاً تغییر می‌کند و در این شرایط دقت ضرایب تمرکز تنش محاسبه شده (با روش انتگرال M) با توجه به مقادیر مولفه‌های تنش در حوالی نوک ترک قابل قبول نیست. لازم به ذکر است در مطالعات مختلف با روش انتگرال M به تعیین ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک با هندسه غیر خطی و پیچیده پرداخته نشده است. همچنین علاوه بر مشکل محاسبه ضرایب تمرکز تنش، بخاطر تغییر هندسه مساله و عدم اعتبار رابطه (۵-۱۰)، تعیین جهت صحیح رشد ترک نیز مشکل می‌باشد. برخلاف معیار ضرایب تمرکز تنش، معیار مبتنی بر مولفه تنش از هندسه

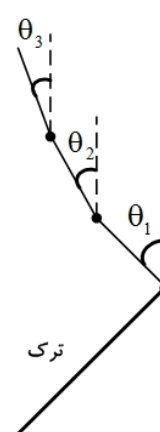
ترک مستقل بوده و مقدار زاویه رشد را در مراحل مختلف رشد بطور صحیح پیش‌بینی می‌کند. برای سه مرحله از رشد ترک و برای نوک بالایی ترک (شکل ۵-۲۰-الف) مقدار حداکثر تنش مماسی (کششی) در نوک ترک و زاویه بین راستای حداکثر تنش مماسی و راستای قائم (جهت رشد ترک نسبت به راستای قائم) تعیین و در جدول (۵-۷) درج شده است. در هر سه مرحله مقدار تنش اعمالی بر نمونه ۱۰ مگاپاسکال بوده و افزایش طول ترک در هر مرحله ۵ میلیمتر در نظر گرفته شده است.

جدول (۵-۷): مقدار حداکثر تنش مماسی و جهت رشد در مراحل مختلف رشد ترک

مراحل رشد ترک	حداکثر تنش مماسی (MPa)	زاویه رشد ترک نسبت به راستای قائم (θ)
مرحله اول رشد	۱۲/۸	۴۳
مرحله دوم رشد	۹/۲	۳۳
مرحله سوم رشد	۵/۲۵	۴

همانطور که از جدول (۵-۷) مشاهده می‌شود با رشد ترک به ازای مقدار ثابت تنش اعمالی بر نمونه، مقدار حداکثر تنش مماسی کاهش می‌یابد یعنی ترک در حالت پایدار رشد می‌کند و برای رشد بیشتر ترک نیاز است تنش اعمالی بر نمونه افزایش یابد. برای مثال مذکور مسیر رشد پیش‌بینی شده با معیار مولفه‌های تنش بطور شماتیک در شکل (۵-۲۰-ب) نشان داده شده است. در این مثال مسیر رشد ترک مستقل از جنس نمونه است و به هندسه مساله وابسته است. برای ارزیابی نتایج پیش‌بینی مدل بدون مش گالرکین و معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش، یک نمونه از جنس گچ و با هندسه این مثال تهیه و تحت بار فشاری قرار گرفت. برای تهیه نمونه گچی از مخلوط گچ و آب با نسبت اختلاط ۳ به ۲ استفاده شد و ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه و بطول ۲ سانتی‌متر با قرار دادن یک صفحه نازک فولادی در داخل دوغاب گچ ایجاد شد. مسیر رشد ترک در این نمونه گچی تحت بار فشاری در شکل (۵-۲۰-ج) نشان داده شده است. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود مسیر رشد ترک در نمونه گچی انطباق بسیار خوبی با پیش‌بینی مدل عددی و معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش دارد. این مقایسه بیانگر این است که جنس مصالح در مسیر رشد ترک تاثیر نداشته و فقط بر میزان باری که

منجر به رشد ترک می‌گردد، موثر است. لازم به ذکر است که در این مثال علاوه بر رشد ترک‌های کششی، ترک‌های برشی نیز بعد از رشد ترک‌های کششی از نوک ترک اصلی منشعب می‌شوند. که معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش در پیش‌بینی این ترک‌ها نیز با محدودیت جدی روبروست ولی همانطور که بعداً بحث خواهد شد معیار مولفه‌های تنش موضعی این نوع ترک‌ها را نیز بطور مطلوب پیش‌بینی می‌کند.

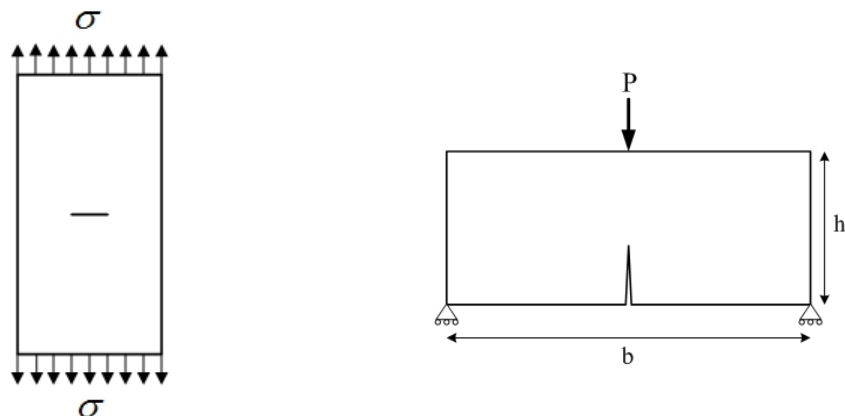


الف) مراحل مختلف رشد ترک و زاویه انتشار آن نسبت به خط قائم
 ب) شکل شماتیک پیش‌بینی عددی مسیر رشد ترک شبیدار
 ج) مسیر رشد ترک در یک نمونه گچی ترک‌دار با ابعاد $3 \times 10 \times 20$ سانتی متر مکعب
 شکل (۵-۲۰): پیش‌بینی جهت رشد ترک در نمونه حاوی ترک شبیدار تحت بار فشاری

مقایسه نتایج پیش‌بینی دو معیار مذکور در تحلیل مثال‌ها با نتایج مطالعات عددی و آزمایشگاهی موجود بیانگر این است که معیار ضرایب تمرکز تنش فقط مرحله اول رشد را بدرستی پیش‌بینی نموده و قادر نیست بقیه مراحل را بدرستی پیش‌بینی کند. حال آنکه نتایج معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش در هر دو مثال و در تمامی مراحل رشد ترک از دقت خوبی برخوردار است. بنابراین در ادامه برای مدلسازی عددی انتشار و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی یک و دو ترک شبیدار تحت بار فشاری از معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش موضعی استفاده خواهد شد.

۵ - ۶ - مدل سازی رشد ترک در محیط های سنگی ترد

همانطور که بحث شد معیار مبتنی بر مولفه های تنش موضعی در مقایسه با معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش مناسب تر است. لذا در ادامه با استفاده از این معیار، رشد ترک در محیط های سنگی ترد مطالعه می شود. در حالات خاصی که هندسه محیط سنگی ترک دار و شرایط بارگذاری مثل نمونه های شکل (۵-۲۱) متقارن باشند، پتانسیل رشد ترک در حالت مود کششی خالص (مود I) بوجود می آید.



(الف) نمونه حاوی ترک تحت بارگذاری نقطه ای (ب) نمونه حاوی ترک افقی تحت بار کششی

شکل (۵-۲۱): حالت های رشد ترک در مود کششی خالص

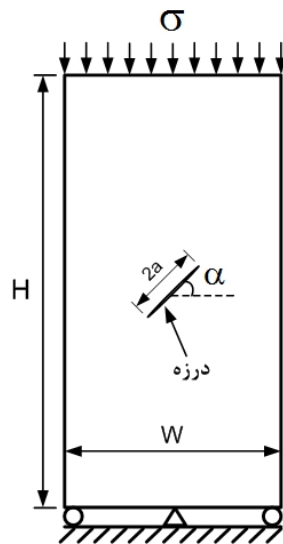
در این حالت بکارگیری معیار شکست ساده بوده و از هر یک از دو معیار بحث شده می توان استفاده کرد. در صورت استفاده از معیار ضریب تمرکز تنش بحرانی، چنانچه ضریب تمرکز تنش مود کششی در نوک ترک از ضریب تمرکز تنش کششی بحرانی یا چقرمگی شکست مود کششی سنگ تجاوز کند، ترک در محیط سنگی رشد می کند. در صورت استفاده از معیار مولفه تنش کششی، اگر ماکزیمم تنش کششی در نوک ترک (در محیط زون پلاستیک) از مقاومت کششی مصالح تجاوز کند، ترک شروع به رشد می کند. در حالت مود کششی خالص مسیر رشد ترک مشخص و در راستای خود ترک بوده و رشد ترک ناپایدار می باشد.

در حالت مود ترکیبی پتانسیل رشد ترک در هر دو حالت کششی و برشی وجود دارد. در ادامه رشد ترک در حالت مود ترکیبی با استفاده از معیار مبتنی بر مولفه های تنش تحلیل می شود. بنابراین ابتدا

رشد ترک شیبدار در نمونه‌های مکعبی و دیسکی و سپس رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک مدل‌سازی می‌شود.

۵ - ۶ - ۱- مدل‌سازی رشد ترک شیبدار در نمونه مستطیلی

برای مطالعه رشد ترک در حالت مود ترکیبی، مطابق شکل (۵-۲۲) صفحه‌ای مستطیلی به ابعاد 200×100 میلی‌متر مربع که حاوی یک ترک شیبدار مرکزی بطول $2a = 15 \text{ mm}$ و با شیب متغیر است، تحت بار فشاری در نظر گرفته می‌شود.

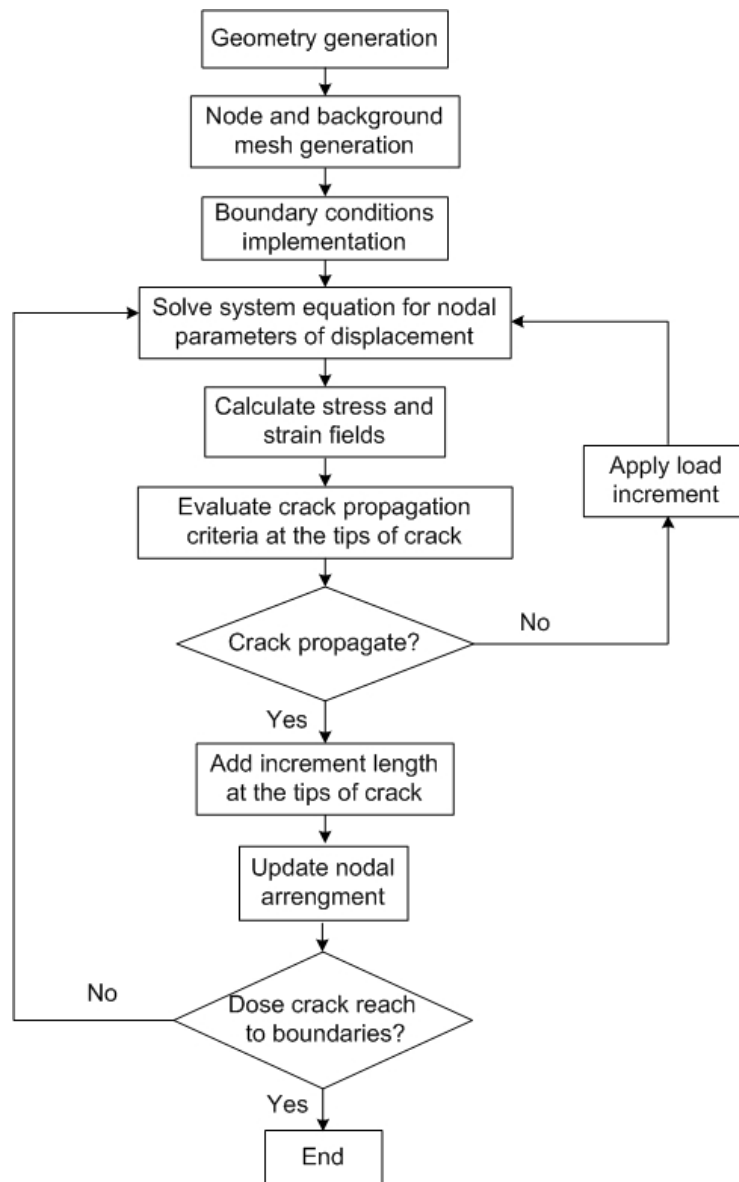


شکل (۵-۲۲): صفحه حاوی ترک شیبدار مرکزی تحت بار فشاری تک‌محوری

در ادامه به ازای مقادیر مختلف شیب ترک: 15° ، 30° ، 45° ، 60° و 75° درجه، مکانیزم انشعاب، رشد و گسیختگی نمونه بررسی می‌گردد. برای تهیه برنامه کامپیوتری مدل‌سازی رشد ترک در نمونه حاوی یک ترک شیبدار از الگوریتم شکل (۵-۲۳) استفاده شده و برنامه‌های کامپیوتری لازم در محیط MATLAB کدنویسی شده است.

مطابق فلوچارت مذکور مراحل مختلف تحلیل رشد ترک به صورت زیر می‌باشد:

- تعریف هندسه مساله: ابتدا هندسه نمونه ترک‌دار و هندسه ترک (طول و شیب) تعریف می‌شود.



شکل (۵-۲۳): فلوچارت برنامه کامپیوتری مدلسازی رشد ترک در حالت مود ترکیبی با روش بدون مش گالرکین و معیار مولفه‌های تنش موضعی

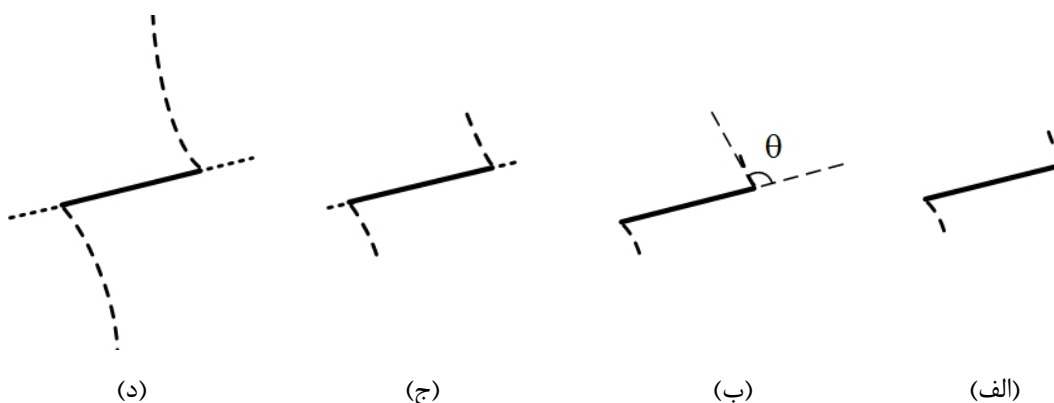
- توزیع گره‌ها و تعیین شبکه زمینه: در مرحله بعد با توجه به هندسه نمونه و ترک، گره‌ها در دامنه مساله توزیع و با توجه به آرایش گره‌ها، شبکه انتگرال‌گیری در زمینه دامنه مساله تعریف می‌شود.
- اعمال شرایط مرزی: در این مرحله شرایط مرزی مساله تعریف می‌گردد. قسمت‌هایی از مرز مساله که تحت بار خارجی و یا متصل به تکیه‌گاه است، مشخص می‌شود.

- حل معادلات تعادل سیستم و تعیین بردار جابجایی در گره‌ها: در این مرحله با استفاده از روابط موجود، دستگاه معادلات تعادل حاکم بر مساله تشکیل و حل می‌شود. با حل دستگاه معادلات، بردار جابجایی در گره‌ها به دست می‌آید.
 - محاسبه میدان‌های کرنش و تنش: با استفاده از بردار جابجایی و خواص مکانیکی مصالح (ضریب ارتجاعی و نسبت پواسون) میدان کرنش و میدان تنش در گره‌های توزیع شده، محاسبه می‌شود.
 - ارزیابی امکان رشد ترک از نوک ترک اصلی: در این مرحله با استفاده از معیار شکست انتخابی امکان رشد ترک از دو نوک آن ارزیابی و در صورت رشد ترک، جهت رشد آن تعیین می‌گردد.
- اگر با توجه به شرایط هندسی و بارگذاری، بر اساس معیار شکست، عوامل مقاوم در نوک ترک بیشتر از عوامل مخرب باشد، ترک نمی‌تواند رشد کند؛ اگر با توجه به شرایط هندسی و بارگذاری، عوامل مخرب در نوک ترک بیشتر از عوامل مقاوم باشد، ترک شروع به رشد می‌کند.
- اگر ترک رشد نکند، به میزان بار اعمالی بر نمونه مقداری اضافه شده و مراحل بالا دوباره تکرار می‌گردد.
 - اگر ترک رشد کند، به اندازه مشخصی در راستای تعیین شده به طول ترک افزوده می‌شود. با توجه به افزایش طول ترک و تغییر هندسه مساله، تغییرات لازم در آرایش گره‌ها اعمال می‌شود.
 - ارزیابی گسیختگی نمونه: در این مرحله بعد از اعمال تغییرات هندسی مرحله قبل، موقعیت هندسی دو نوک ترک کنترل می‌شود. اگر چنانچه نوک ترک‌های منشعب شده از دو نوک ترک اصلی به مرزهای نمونه برسند، نمونه گسیخته شده و حل مساله تمام می‌شود. در غیر این صورت بعد از افزایش طول ترک، مراحل بالا دوباره تکرار می‌شود.
- با توجه به اینکه در فصل بعد مطالعات آزمایشگاهی انجام شده برای اعتبارسنجی مطالعات عددی، توضیح داده خواهد شد بنابراین برای مدل‌سازی عددی از خواص مکانیکی مصالح مورد استفاده در مطالعات آزمایشگاهی (مصالح گچی) استفاده می‌شود. بدین منظور در مطالعات عددی، ضریب ارتجاعی و نسبت پواسون بترتیب برابر $33/3 \text{ GPa}$ و $0/19$ ، مقاومت کششی $3/17 \text{ MPa}$ و چسبندگی

مواد $5/32 \text{ MPa}$ در نظر گرفته می‌شود. در ادامه نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی به روش بدون مش گالرکین برای زوایای مختلف شیب ترک آورده شده است.

۵ - ۶ - ۱ - ۱ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک با شیب ۱۵ درجه

در نمونه حاوی ترک با شیب ۱۵ درجه، تا زمانی که تنش فشاری اعمالی کمتر از $3/73$ مگاپاسکال است، ترک رشد نمی‌کند ولی وقتی تنش فشاری به $3/73$ مگاپاسکال می‌رسد، ابتدا ماکزیمم تنش کششی به مقاومت کششی غلبه کرده و ترک کششی با زاویه 106 درجه نسبت به امتداد ترک شروع به رشد می‌کند (شکل ۵-۲۴-الف). بعد از انشعاب ترک‌های کششی، ترک برشی نیز در امتداد ترک اصلی منشعب می‌شود (شکل ۵-۲۴-ب). با افزایش بار فشاری وارد بر نمونه، ترک‌های کششی به رشد پایدار خود ادامه می‌دهند و راستای آنها به راستای بارگذاری متمایل می‌شود (شکل ۵-۲۴-ج).

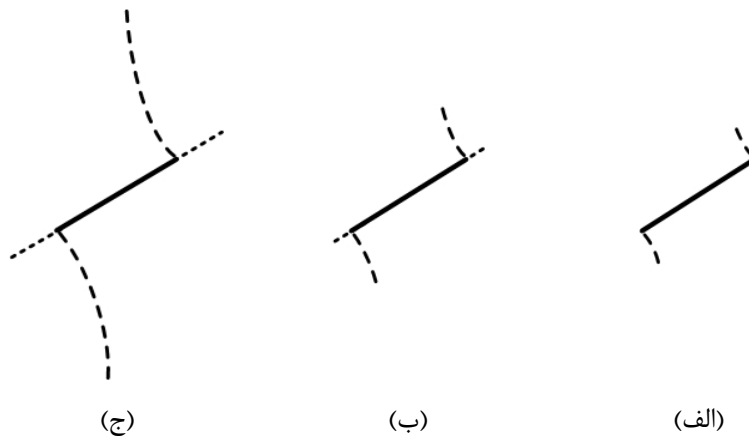


شکل (۵-۲۴): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی در نمونه حاوی ترک با شیب ۱۵ درجه

۵ - ۶ - ۱ - ۲ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک با شیب ۳۰ درجه

در نمونه حاوی ترک با شیب ۳۰ درجه، تا زمانی که تنش فشاری اعمالی بر نمونه کمتر از $3/36$ مگاپاسکال است، ترک رشد نمی‌کند ولی وقتی تنش فشاری به $3/36$ مگاپاسکال می‌رسد، ابتدا ترک کششی با زاویه 90 درجه نسبت به امتداد ترک شروع به رشد می‌کند (شکل ۵-۲۵-الف). بعد از انشعاب ترک‌های کششی، ترک‌های برشی نیز از دو نوک ترک اصلی منشعب شده و در امتداد آن

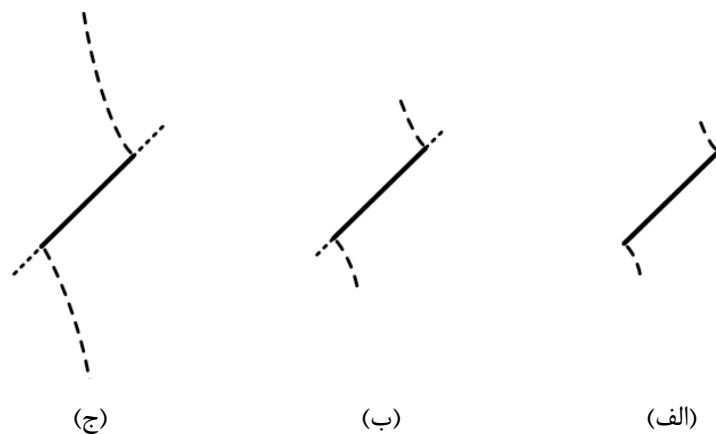
رشد می‌کند (شکل ۵-۲۵-ب). با افزایش بار فشاری وارد بر نمونه، ترک‌های کششی به رشد پایدار خود ادامه می‌دهند و راستای آنها به راستای بارگذاری متمایل می‌شود (شکل ۵-۲۴-ج).



شکل (۵-۲۵): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی در نمونه حاوی ترک با شیب ۳۰ درجه

۵ - ۶ - ۱ - ۳ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک با شیب ۴۵ درجه

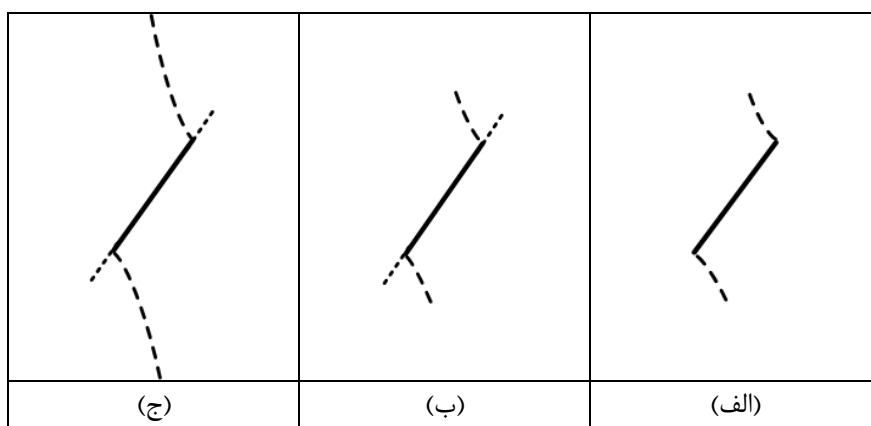
در نمونه حاوی ترک با شیب ۴۵ درجه، تا زمانی که تنش فشاری اعمالی کمتر از $3/12$ مگاپاسکال باشد، ترک رشد نمی‌کند ولی وقتی تنش فشاری به $3/12$ مگاپاسکال می‌رسد، ابتدا ترک کششی با زاویه ۸۳ درجه نسبت به امتداد ترک شروع به رشد می‌کند (شکل ۵-۲۶-الف). بعد از انشعاب ترک‌های کششی، ترک‌های برشی نیز از نوک ترک اصلی و در امتداد آن منشعب و رشد می‌کند (شکل ۵-۲۶-ب). با افزایش بار فشاری اعمالی ترک‌های کششی منشعب شده به رشد پایدار خود ادامه می‌دهند و راستای آنها به راستای بارگذاری متمایل می‌شود (شکل ۵-۲۶-ج).



شکل (۵-۲۶): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی در نمونه حاوی ترک با شیب ۴۵ درجه

۵ - ۶ - ۱ - ۴ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک با شیب ۶۰ درجه

در نمونه حاوی ترک با شیب ۶۰ درجه، تا زمانی که تنش فشاری اعمالی کمتر از ۴/۲۳ مگاپاسکال است، ترک رشد نمی‌کند ولی وقتی تنش فشاری به ۴/۲۳ مگاپاسکال می‌رسد، ابتدا ترک‌های کششی با زاویه ۶۱ درجه نسبت به امتداد ترک شروع به رشد می‌کنند (شکل ۵-۲۷-الف). سپس ترک‌های برشی در امتداد ترک اصلی منشعب می‌شوند (شکل ۵-۲۷-ب). با افزایش بار اعمالی بر نمونه، ترک‌های کششی به رشد پایدار خود ادامه داده و راستای آنها به راستای بارگذاری متمایل می‌شود (شکل ۵-۲۷-ج).

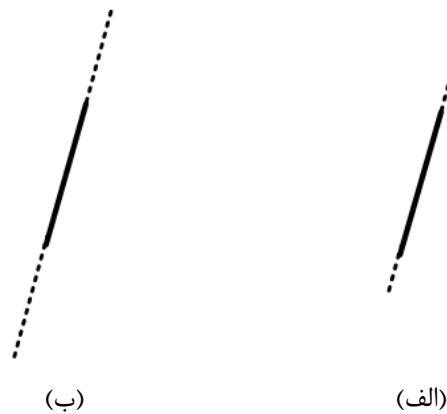


شکل (۵-۲۷): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی در نمونه حاوی ترک با شیب ۶۰ درجه

۵ - ۶ - ۱ - ۵ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک با شیب ۷۵ درجه

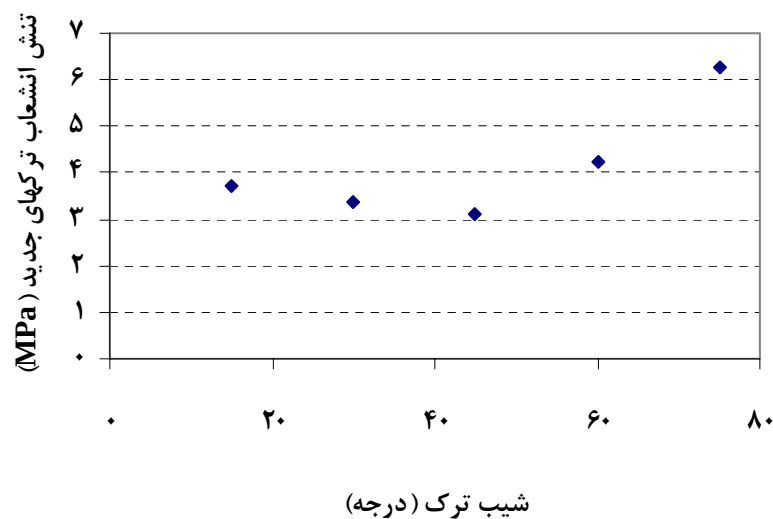
در نمونه حاوی ترک با شیب ۷۵ درجه، تا زمانی که تنش فشاری اعمالی کمتر از ۶/۲۷ مگاپاسکال باشد، ترک رشد نمی‌کند ولی وقتی تنش فشاری به ۶/۲۷ مگاپاسکال می‌رسد، ابتدا ماکزیمم تنش برشی به مقاومت برشی غلبه کرده و ترک برشی منشعب و در امتداد ترک شروع به رشد می‌کند (شکل ۵-۲۸-الف). بعد از این مرحله ترک‌های برشی در همان امتداد به طور ناپایدار رشد کرده و به مرز نمونه می‌رسند و باعث گسیختگی نمونه می‌شوند (شکل ۵-۲۸-ب). لازم به توضیح است در این مدل‌سازی سطوح ترک‌های جدید ایجاد شده به صورت صاف و بدون اصطکاک در نظر گرفته شده

است ولی در عمل بین سطوح ترک‌های جدید اصطکاک وجود دارد و ممکن است باعث اختلاف در نتایج گردد.



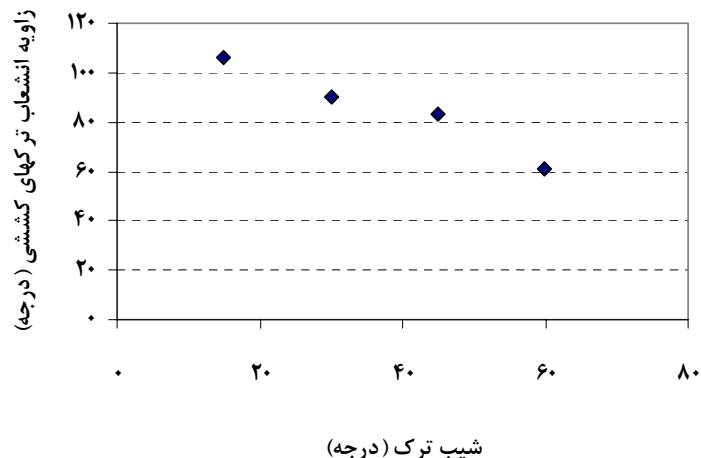
شکل (۵-۲۸): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی در نمونه حاوی ترک با شیب ۷۵ درجه

نمودار شکل (۵-۲۹) مقدار بار شروع رشد ترک در نمونه مستطیلی را به صورت تابعی از زاویه شیب ترک نشان می‌دهد. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود شیب ۴۵ درجه کمترین مقاومت و شیب ۷۵ درجه بیشترین مقاومت را در برابر رشد ترک دارند.



شکل (۵-۲۹): مقدار تنش منجر به شروع رشد ترک برای مقادیر مختلف شیب ترک

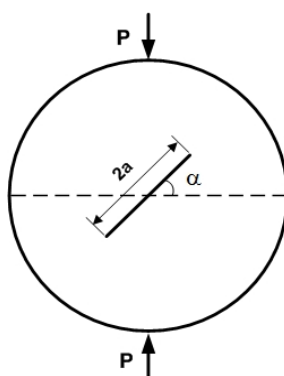
نمودار شکل (۵-۳۰) نیز مقدار زاویه انشعاب ترک‌های کششی را به صورت تابعی از زاویه شیب ترک نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که ترک با شیب ۷۵ درجه در مود برشی شروع به رشد می‌کند. نمودار مذکور نشان می‌دهد که با افزایش شیب ترک، زاویه انشعاب ترک‌های کششی کاهش می‌یابد.



شکل (۵-۳۰): مقدار زاویه انشعاب ترکهای کششی نسبت به امتداد ترک برای مقادیر مختلف شیب ترک

۵-۶-۲ - مدل سازی رشد ترک شیب دار در نمونه دیسکی

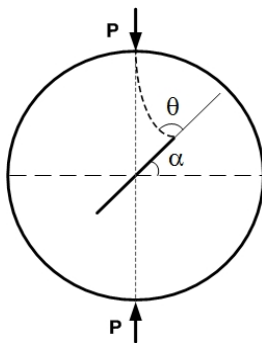
در حوزه مکانیک شکست سنگ نمونه دیسکی حاوی ترک شیب دار (شکل ۵-۳۱) در مطالعات متعدد عددی و آزمایشگاهی برای مطالعه تاثیر هندسه ترک در مکانیزم رشد آن (Al-Shayea, 2005)، تعیین چقرمگی شکست سنگها (Soo et al., 2002; Liu et al., 2007) و ... بکار گرفته شده است. بنابراین در این مطالعه این نمونه انتخاب و رفتار شکست آن به ازای مقادیر مختلف شیب ترک (۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۷۵ درجه) مطالعه شده است. قطر نمونه ۷۵ میلیمتر و طول ترک $2a = 22/5$ میلی متر در نظر گرفته شده است.



شکل (۵-۳۱): نمونه دیسکی حاوی ترک مرکزی شیب دار تحت بارگذاری فشاری متمرکز

در مدل سازی عددی از همان خواص مکانیکی نمونه های مکعبی استفاده شده است. با استفاده از روش بدون مش گالرکین و معیار مبتنی بر مولفه های تنش و با بکارگیری الگوریتم شکل (۵-۲۳)، زاویه

انشعاب ترک جدید، نوع ترک انشعابی، میزان بار منجر به انشعاب ترک و مسیر رشد ترک تعیین می‌گردد. زاویه انشعاب ترک θ در شکل (۳۲-۵) نشان داده شده است. در ادامه نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی به روش بدون مش گالرکین برای زوایای مختلف شیب ترک آورده شده است.



شکل (۳۲-۵) زاویه انشعاب ترک نسبت به امتداد ترک اصلی

۵ - ۶ - ۲ - ۱ - رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک با شیب ۱۵ درجه

برای نمونه با شیب ۱۵ درجه وقتی بار فشاری متمرکز به $2/7$ کیلو نیوتن می‌رسد، از دو نوک ترک، ترک‌های کششی با زاویه ۱۰۶ درجه نسبت به امتداد ترک منشعب می‌شوند و در طی رشد ناپایدار راستای آنها به راستای بارگذاری متمایل می‌گردد (شکل ۳۳-۵ الف).

۵ - ۶ - ۲ - ۲ - رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک با شیب ۳۰ درجه

برای نمونه با شیب ۳۰ درجه وقتی بار فشاری متمرکز به $1/73$ کیلو نیوتن می‌رسد، از دو نوک ترک، ترک‌های کششی با زاویه ۸۶ درجه نسبت به امتداد ترک منشعب می‌شوند و در طی رشد ناپایدار راستای آنها به راستای بارگذاری متمایل می‌گردد (شکل ۳۳-۵ ب).

۵ - ۶ - ۲ - ۳ - رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک با شیب ۴۵ درجه

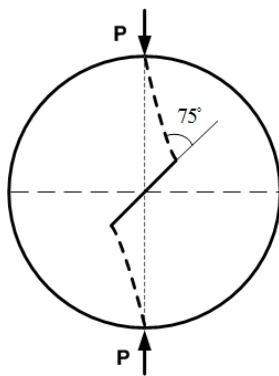
برای نمونه با شیب ۴۵ درجه وقتی بار فشاری متمرکز به $1/43$ کیلو نیوتن می‌رسد، از دو نوک ترک، ترک‌های کششی با زاویه ۷۵ درجه نسبت به امتداد ترک منشعب می‌شوند و در طی رشد ناپایدار راستای آنها به راستای بارگذاری متمایل می‌گردد (شکل ۳۳-۵ ج).

۵ - ۶ - ۲ - ۴ - رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک با شیب ۶۰ درجه

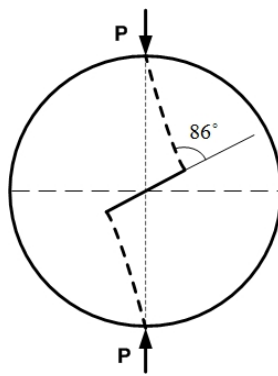
برای نمونه با شیب ۶۰ درجه وقتی بار فشاری متمرکز به ۱/۲۸ کیلو نیوتن می‌رسد، از دو نوک ترک، ترک‌های کششی با زاویه ۶۱ درجه نسبت به امتداد ترک منشعب می‌شوند و در طی رشد ناپایدار راستای آنها به راستای بارگذاری متمایل می‌گردد (شکل ۵-۳۳-د).

۵ - ۶ - ۲ - ۵ - رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک با شیب ۷۵ درجه

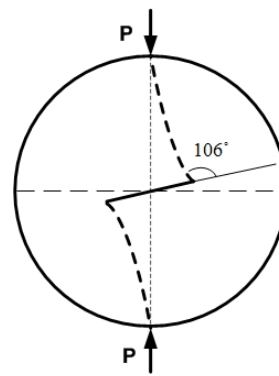
برای نمونه با شیب ۷۵ درجه وقتی بار فشاری متمرکز به ۲/۰۵ کیلو نیوتن می‌رسد، از دو نوک ترک، ترک‌های کششی با زاویه ۳۱ درجه نسبت به امتداد ترک منشعب می‌شوند و در طی رشد ناپایدار راستای آنها به راستای بارگذاری متمایل می‌گردد (شکل ۵-۳۳-ه).



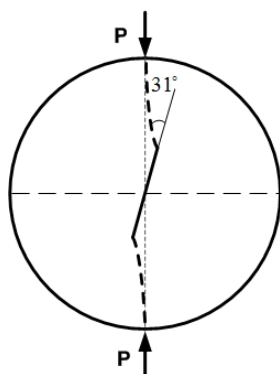
(ج)



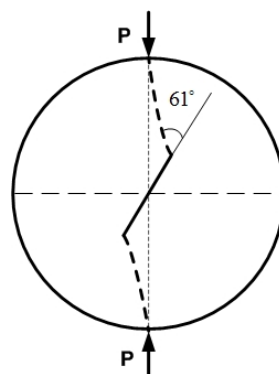
(ب)



(الف)



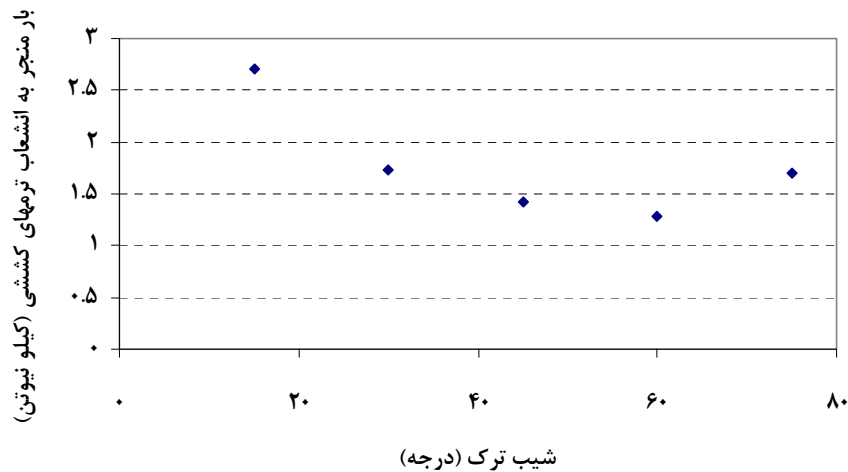
(ه)



(د)

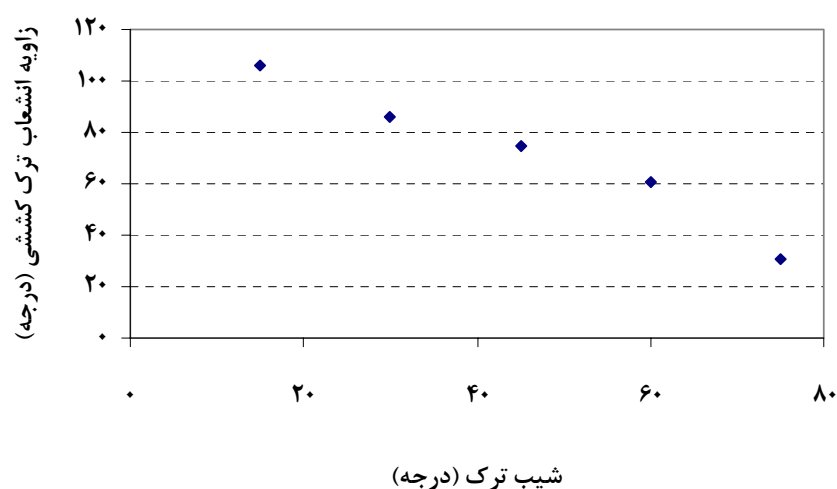
شکل (۵-۳۳): مکانیزم و مسیر رشد ترک در نمونه دیسکی حاوی ترک شیب‌دار به ازای مقادیر مختلف شیب ترک

نمودار شکل (۳۴-۵) مقدار بار منجر به انشعاب ترک‌های کششی را به صورت تابعی از زاویه شیب ترک نشان می‌دهد.



شکل (۳۴-۵): مقدار تنش منجر به شروع رشد ترک برای مقادیر مختلف شیب ترک

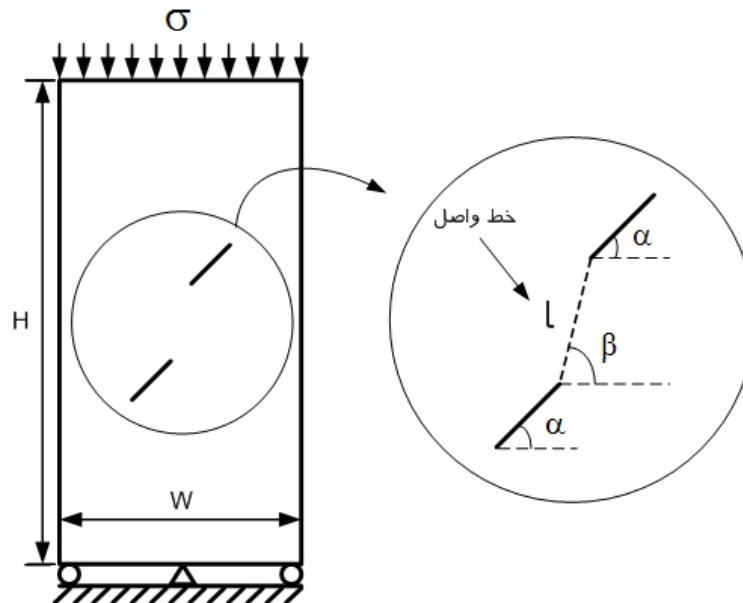
بر مبنای نتایج حاصل شده، شیب ۱۵ درجه بیشترین مقاومت و شیب ۶۰ درجه کمترین مقاومت را در برابر رشد ترک دارا هستند. نمودار شکل (۳۵-۵) نیز مقدار زاویه انشعاب ترک‌های کششی را به صورت تابعی از زاویه شیب ترک نشان می‌دهد. نتایج بیانگر این است که با افزایش شیب ترک میزان زاویه انشعاب ترک‌های کششی کاهش می‌یابد.



شکل (۳۵-۵): مقدار زاویه انشعاب ترک‌های کششی برای مقادیر مختلف شیب ترک در نمونه‌های دیسکی

۵ - ۷ - مدل سازی عددی رشد و اتصال ترک ها در محیط سنگی ترد

برای مطالعه رشد و اتصال ترک ها تحت بار فشاری تک محوره مطابق شکل (۵-۳۶) نمونه ای مستطیلی با طول $H = 200$ و عرض $W = 100$ که حاوی دو ترک شیبدار با شیب $\alpha = 45^\circ$ درجه و بطول ۱۵ میلی متر است، در نظر گرفته شده است.



شکل (۵-۳۶): نمونه حاوی دو ترک شیبدار تحت بار فشاری تک محوری

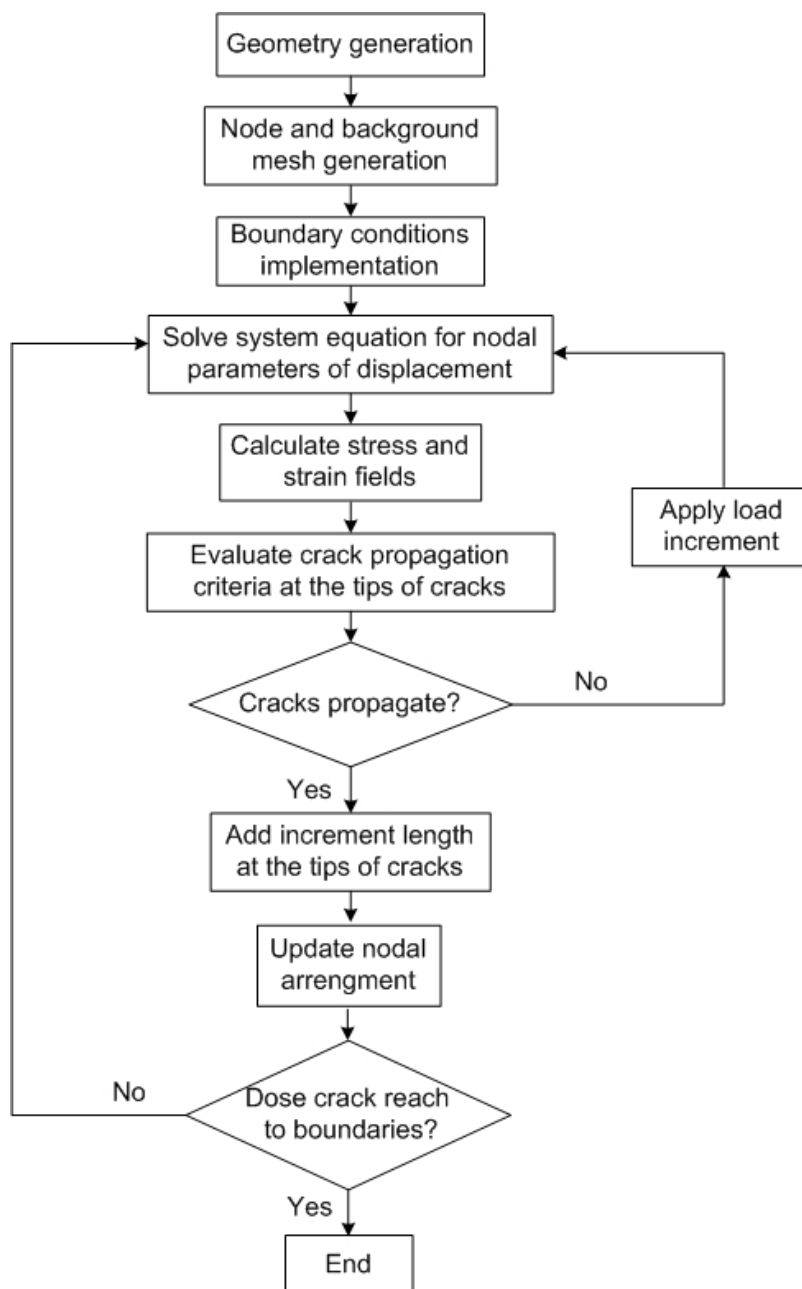
هندس و آرایش ترک ها بر مکانیزم رشد و اتصال آنها و میزان بار متناظر با هر یک از این مراحل تاثیر می گذارد، بنابراین در این قسمت تاثیر دو پارامتر هندسی شیب خط واصل دو ترک و طول خط واصل دو ترک در مکانیزم انشعاب ترک های جدید (مود ترک های منشعب شده و زوایای انشعاب ترک ها)، میزان بار انشعاب این ترک ها، مکانیزم اتصال ترک های اصلی و میزان بار منجر به اتصال بررسی می شود. دو پارامتر طول خط واصل دو ترک (l) و شیب خط واصل دو ترک (β) در شکل (۵-۳۶) نشان داده شده است.

برای مدل سازی نمونه های حاوی دو ترک، با استفاده از روش عددی بدون مش گالرکین میدان تنش در دامنه مساله تعیین و با استفاده از معیار مبتنی بر مولفه های تنش رشد و اتصال ترک ها مطالعه

می‌شود. برای مدل‌سازی رشد و اتصال ترک‌ها از الگوریتم شکل (۵-۳۷) استفاده شده و برنامه‌های کامپیوتری لازم در محیط MATLAB کدنویسی شده است.

مطابق فلوچارت مذکور مراحل مختلف تحلیل رشد ترک به صورت زیر می‌باشد:

- تعریف هندسه مساله: ابتدا هندسه نمونه ترک‌دار و هندسه ترک (طول و شیب) تعریف می‌شود.



شکل (۵-۳۷): فلوچارت برنامه کامپیوتری مدل‌سازی رشد و اتصال ترک‌ها با روش بدون مش گالرکین و معیار مولفه‌های تنش موضعی

- توزیع گره‌ها و تعیین شبکه زمینه: در مرحله بعد با توجه به هندسه نمونه و ترک‌ها، گره‌ها در دامنه مساله توزیع و با توجه به آرایش گره‌ها، شبکه انتگرال‌گیری در زمینه دامنه مساله تعریف می‌شود.
- اعمال شرایط مرزی: در این مرحله شرایط مرزی مساله تعریف می‌گردد. قسمت‌هایی از مرز مساله که تحت بار خارجی و یا متصل به تکیه‌گاه است، مشخص می‌شود.
- حل معادلات تعادل سیستم و تعیین بردار جابجایی در گره‌ها: در این مرحله با استفاده از روابط موجود، دستگاه معادلات تعادل حاکم بر مساله تشکیل و حل می‌شود. با حل دستگاه معادلات، بردار جابجایی در گره‌ها به دست می‌آید.
- محاسبه میدان‌های کرنش و تنش: با استفاده از بردار جابجایی و خواص مکانیکی مصالح (ضریب ارتجاعی و نسبت پواسون) میدان کرنش و میدان تنش در گره‌های توزیع شده، محاسبه می‌شود.
- ارزیابی امکان رشد ترک‌ها از نوک ترک‌های اصلی: در این مرحله با استفاده از معیار شکست انتخابی امکان رشد ترک‌های کششی و برشی از دو نوک ترک‌های اصلی ارزیابی و در صورت رشد ترک‌ها، جهت رشد آن‌ها تعیین می‌گردد.
- اگر با توجه به شرایط هندسی و بارگذاری، بر اساس معیار شکست، عوامل مقاوم در نوک ترک‌ها بیشتر از عوامل مخرب باشد، ترک‌ها نمی‌تواند رشد کنند؛ اگر با توجه به شرایط هندسی و بارگذاری، عوامل مخرب در نوک ترک‌ها بیشتر از عوامل مقاوم باشد، ترک‌ها شروع به رشد می‌کنند.
- اگر ترک‌ها رشد نکنند، به میزان بار اعمالی بر نمونه مقداری اضافه شده و مراحل بالا دوباره تکرار می‌گردد.
- اگر ترک‌ها رشد کنند، در راستای تعیین شده به اندازه مشخصی به طول ترک‌ها افزوده می‌شود. با توجه به افزایش طول ترک‌ها و تغییر هندسه مساله، تغییرات لازم در آرایش گره‌ها اعمال می‌شود.

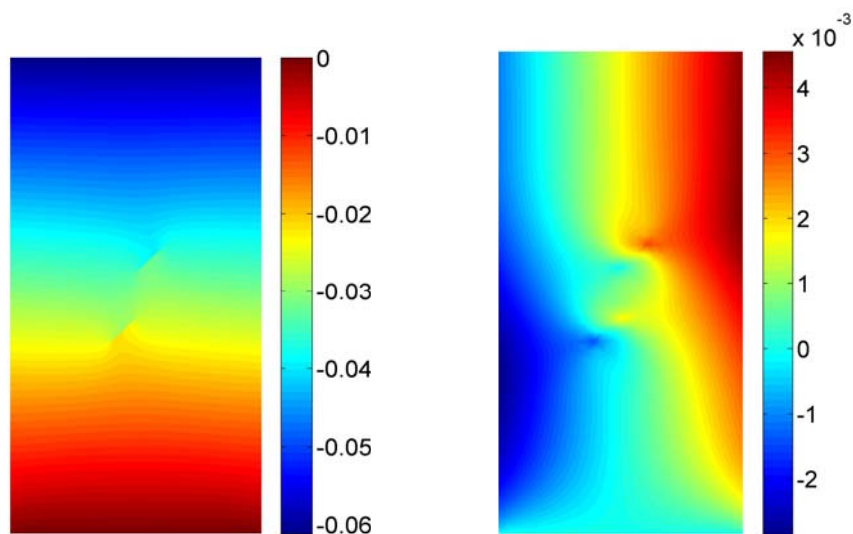
- ارزیابی گسیختگی نمونه: در این مرحله بعد از اعمال تغییرات هندسی مرحله قبل، موقعیت هندسی نوک ترک‌ها کنترل می‌شود. اگر چنانچه نوک ترک‌های منشعب شده از نوک ترک‌های اصلی به مرزهای نمونه برسند، نمونه گسیخته شده و حل مساله تمام می‌شود. در غیر این صورت بعد از افزایش طول ترک‌ها، مراحل بالا دوباره تکرار می‌شود.

۵ - ۷ - ۱ - مطالعه عددی تاثیر طول خط واصل دو ترک بر مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها

برای مطالعه تاثیر طول خط واصل دو ترک بر مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها، نمونه‌هایی با دو ترک شیب‌دار به طول ۱۵ میلی‌متر و با شیب ۴۵ درجه که شیب خط واصل آنها $\beta = 90^\circ$ درجه می‌باشد در نظر گرفته شده است و به ازای مقادیر مختلف طول خط واصل (۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰ میلی‌متر)، نحوه رشد و اتصال ترک‌ها با استفاده از معیار مولفه‌های تنش تحت تنش فشاری بررسی شده است. در این نمونه‌ها ضریب ارتجاعی و نسبت پواسون محیط سنگی به ترتیب ۳/۳۳ گیگاپاسکال و ۰/۱۹ در نظر گرفته شده است.

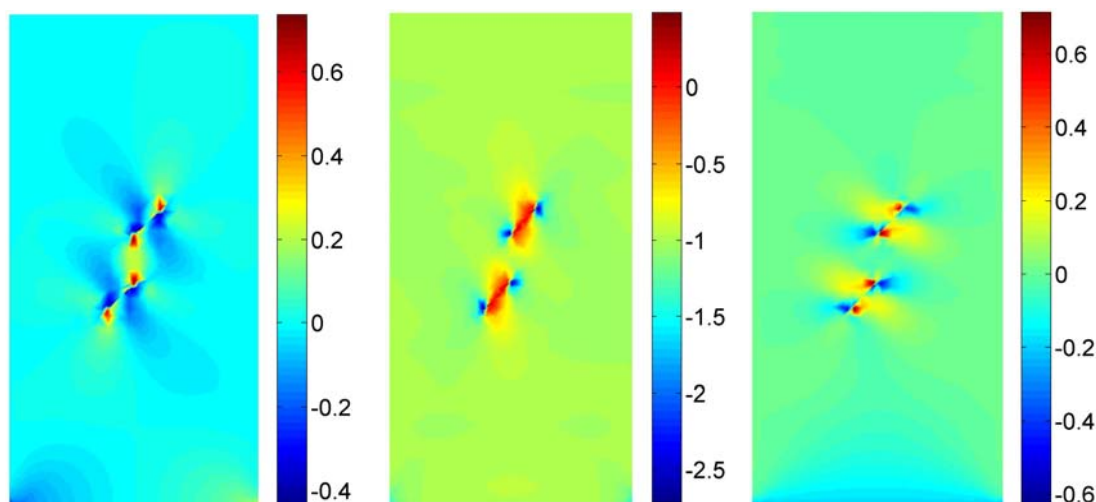
ابتدا برای نمونه حاوی دو ترک با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر توزیع مولفه‌های تنش در دامنه نمونه تعیین و روند رشد و اتصال ترک‌ها با جزئیات توضیح داده می‌شود و سپس برای سایر مقادیر طول خط واصل، نتایج ارائه می‌گردد. برای این نمونه (حاوی دو ترک بطول ۱۵ میلی‌متر با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر) به ازای بار فشاری یک مگاپاسکال مولفه‌های جابجایی و تنش در دامنه نمونه با روش عددی بدون مش گالرکین تعیین شده و در شکل (۵-۳۸) نشان داده شده است.

همانطور که در شکل مذکور دیده می‌شود با اعمال بار فشاری بر نمونه، در دو نوک هر دو ترک تمرکز تنش بوجود می‌آید و پتانسیل رشد ترک در هر دو مود کششی و برشی وجود دارد.



(ب) مولفه قائم جابجایی (mm)

(الف) مولفه افقی جابجایی (mm)



(ه) مولفه برشی تنش (MPa)

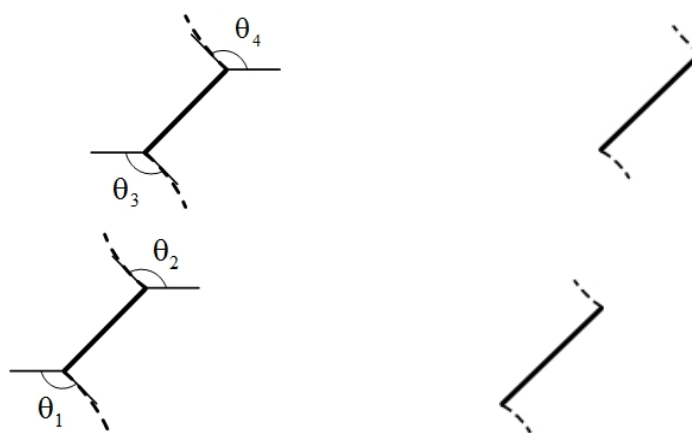
(د) مولفه قائم تنش نرمال (MPa)

(ج) مولفه افقی تنش نرمال (MPa)

شکل (۵-۳۸): مولفه‌های جابجایی و تنش در دامنه نمونه حاوی ترک افقی تحت بار کششی

برای نمونه مذکور مقاومت کششی برابر $3/17$ مگاپاسکال و مقاومت برشی برابر $5/32$ مگاپاسکال فرض شده و روند رشد ترک‌ها با معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش موضعی مدل‌سازی شده است. در نمونه مذکور تا زمانی که بار فشاری اعمالی بر دو سطح نمونه کمتر از $2/57$ مگاپاسکال باشد، مقدار تنش‌های کششی و برشی در نوک ترک‌ها کمتر از مقاومت کششی و برشی نمونه است و ترک رشد نمی‌کند. وقتی تنش فشاری اعمالی از $2/57$ مگاپاسکال تجاوز کند، ابتدا تنش کششی در نوک ترک بر مقاومت کششی غلبه کرده و از چهار نوک دو ترک ترک‌های کششی منشعب می‌شوند (شکل

۵-۳۹-الف). ترک‌های کششی تقریباً در راستای عمود بر امتداد ترک‌ها (۸۴ درجه) منشعب شده و رشد می‌کنند. زاویه انشعاب ترک‌های کششی از نوک ترک‌ها نسبت به خط افق در شکل (۵-۳۹-ب) نشان داده شده و مقادیر کمی آنها در جدول (۵-۸) درج شده است. زاویه انشعاب ترک کششی از نوک پایینی ترک پایین با θ_1 ، زاویه انشعاب ترک کششی از نوک بالایی ترک پایین با θ_2 ، زاویه انشعاب ترک از نوک پایینی ترک بالا با θ_3 و زاویه انشعاب ترک از نوک بالایی ترک بالا با θ_4 نشان داده شده است.



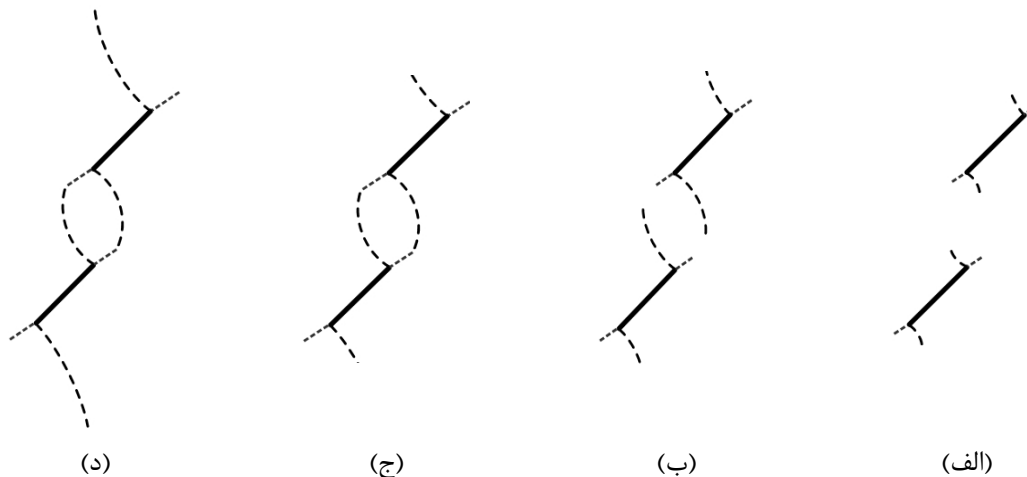
(الف) انشعاب همزمان ترک‌های کششی از انتهای ترک (ب) زوایای انشعاب ترک‌های کششی نسبت به خط افق
شکل (۵-۳۹): انشعاب ترک‌های کششی از انتهای ترک‌های اصلی تحت بار فشاری

جدول (۵-۸): زوایای انشعاب ترک‌های کششی از چهار نوک ترک‌ها $l = 20 \text{ mm}$

θ_4	θ_3	θ_2	θ_1	مرحله رشد ترک
۱۲۷	۱۳۱	۱۳۱	۱۲۷	مرحله اول

بعد از رشد ترک‌های کششی، ترک‌های برشی نیز از نوک ترک‌ها شروع به رشد می‌کنند. ترک‌های برشی تقریباً در امتداد ترک‌های اصلی منشعب می‌شوند (شکل ۵-۴۰-الف). با افزایش بار فشاری خارجی ترک‌های کششی منشعب شده به رشد خود ادامه داده و راستای آنها به راستای بار اعمالی یعنی راستای قائم متمایل می‌گردد (شکل ۵-۴۰-ب). بعد از انشعاب ترک‌های کششی، ترک‌های برشی نیز از نوک دو ترک و تقریباً در راستای آنها منشعب شده و رشد می‌کنند. با افزایش بار اعمالی

ترک‌های کششی و برشی به رشد خود ادامه می‌دهند تا اینکه به ازای بار ۴/۴ مگاپاسکال مطابق شکل (۵-۴۰) اتصال ترک‌ها صورت می‌گیرد. بعد از اتصال ترک‌های اصلی، ترک‌های کششی خارجی به طور ناپایدار رشد می‌کنند و به مرز نمونه رسیده و باعث گسیختگی آن می‌شوند.



شکل (۵-۴۰): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۹۰ درجه

برای سایر مقادیر طول خط واصل دو ترک: ۱۰، ۱۵، ۲۵ و ۳۰ مکانیزم انشعاب، رشد و اتصال ترک‌ها و نهایتاً گسیختگی نمونه ترک‌دار مثل نمونه مذکور می‌باشد و فقط مقادیر کمی تنش انشعاب و اتصال ترک‌ها متفاوت هستند. بنابراین برای این نمونه‌ها، نتایج کلی مدل‌سازی در جدول (۵-۹) درج شده است.

جدول (۵-۹): تنش انشعاب و اتصال ترک‌ها به ازای مقادیر مختلف طول خط واصل دو ترک

طول خط واصل (mm)	تنش انشعاب ترک‌ها (MPa)	تنش اتصال ترک‌ها (MPa)
۱۰	۲/۰۶	۲/۴۲
۱۵	۲/۲	۳
۲۰	۲/۴۶	۴/۳
۲۵	۲/۶	۴/۳۸
۳۰	۲/۹۶	۴/۵۶

لازم به ذکر است که تغییر پارامتر هندسی طول خط واصل دو ترک در الگوی کلی رشد و اتصال ترک‌ها تاثیری ندارد و فقط با افزایش این پارامتر میزان تنش منجر به انشعاب ترک‌های جدید و تنش اتصال ترک‌ها اصلی افزایش می‌یابد.

باید توجه داشت که در مدل‌سازی عددی مقدار رشد ترک در هر مرحله از رشد ۴ میلی‌متر در نظر گرفته شده است. بنابراین برای مقادیر کمتر طول خط واصل، در مراحل اول انشعاب و رشد، نوک ترک‌های جدید به هم نزدیک شده و اتصال ترک‌ها صورت می‌گیرد.

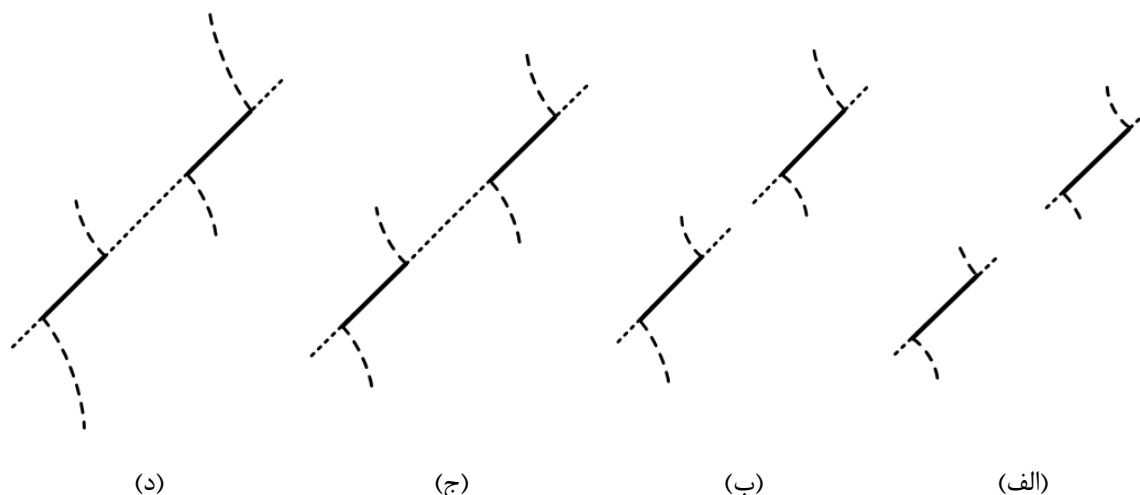
۵ - ۷ - ۲ - مطالعه عددی تاثیر شیب خط واصل دو ترک بر مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها

در این قسمت تاثیر پارامتر هندسی شیب خط واصل دو ترک بر مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها مطالعه می‌گردد. بدین منظور نمونه‌هایی با دو ترک شیبدار به طول ۱۵ میلی‌متر، با شیب ۴۵ درجه، با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و با شیب خط واصل متغیر ۴۵، ۶۰، ۷۵، ۹۰، ۱۰۵ و ۱۲۰ درجه در نظر گرفته شده و مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها بررسی می‌شود. در ادامه نتایج عددی رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک برای مقادیر مختلف شیب خط واصل ارائه می‌شود.

۵ - ۷ - ۲ - ۱ - مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۴۵ درجه

در این حالت با اعمال بار فشاری در دو نوک هر دو ترک تمرکز تنش بوجود می‌آید. تا زمانی که بار فشاری اعمالی کمتر از ۲/۲۷ مگاپاسکال است مقدار تنش‌های کششی و برشی در نوک ترک‌ها کمتر از مقاومت کششی و برشی نمونه است و ترک‌ها رشد نمی‌کنند. وقتی تنش فشاری اعمالی از ۲/۲۷ مگاپاسکال تجاوز کند از نوک ترک‌ها، ترک‌های کششی در راستای تقریباً عمود بر راستای ترک‌های موجود (با زاویه ۸۴ درجه نسبت به امتداد ترک‌ها) و ترک‌های برشی تقریباً در امتداد ترک‌های اصلی منشعب می‌شوند (شکل ۵-۴۱-الف). ترک‌های برشی منشعب از نوک داخلی ترک‌های اصلی به طور ناپایدار در امتداد ترک‌های اصلی به رشد خود ادامه می‌دهند (شکل ۵-۴۱-ب). این ترک‌ها به هم رسیده و باعث اتصال ترک‌های اصلی می‌شوند (شکل ۵-۴۱-ج). بعد از اتصال ترک‌ها، ترک‌های

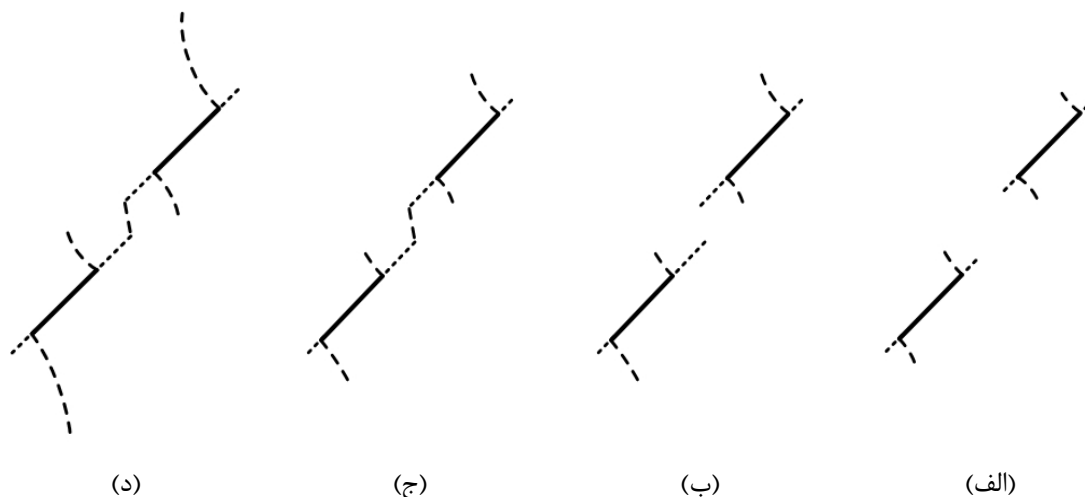
کششی خارجی به طور ناپایدار به رشد خود ادامه داده تا به مرز بالایی و پایینی نمونه رسیده و باعث گسیختگی نمونه شوند (شکل ۵-۴۱-د).



شکل (۵-۴۱): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با طول خط واصل ۲۰ میلی متر و شیب خط واصل ۴۵ درجه

۵ - ۷ - ۲ - ۲ - مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۶۰ درجه

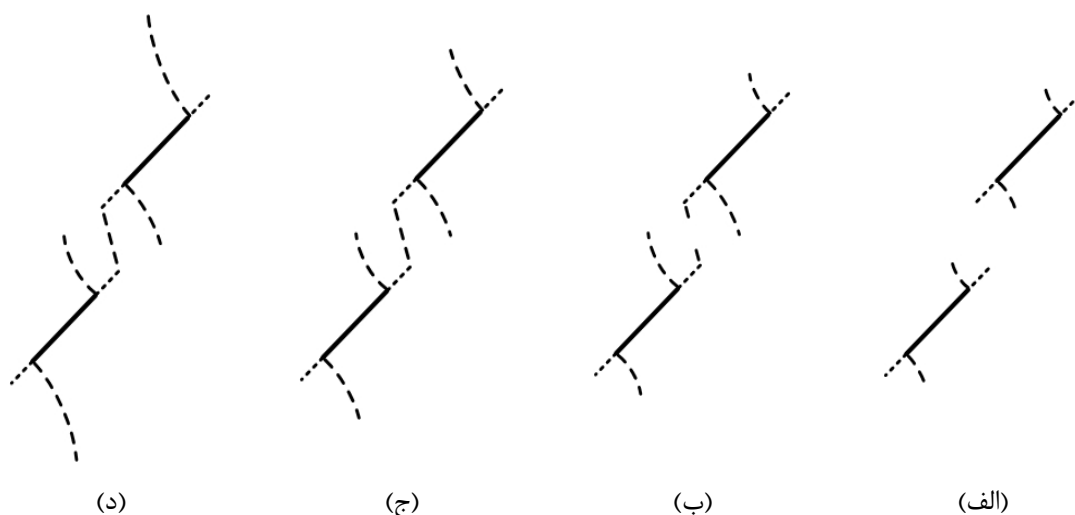
در این نمونه با اعمال بار فشاری در دوردست، در دو نوک هر دو ترک تمرکز تنش بوجود می‌آید. تا زمانی که بار فشاری اعمالی کمتر از $2/33$ مگاپاسکال است مقدار تنش‌های کششی و برشی در نوک ترک‌ها کمتر از مقاومت کششی و برشی نمونه است و ترک‌ها رشد نمی‌کنند. وقتی تنش فشاری اعمالی از $2/33$ مگاپاسکال تجاوز کند از نوک ترک‌ها، ترک‌های کششی در راستای تقریباً عمود بر راستای ترک‌های موجود (با زاویه ۸۴ درجه نسبت به امتداد ترک‌ها) و ترک‌های برشی تقریباً در امتداد ترک‌های اصلی منشعب می‌شوند (شکل ۵-۴۲-الف). ترک‌های برشی منشعب از نوک داخلی ترک‌های اصلی به طور ناپایدار در امتداد ترک‌های اصلی به رشد خود ادامه می‌دهند (شکل ۵-۴۲-ب). با افزایش بار فشاری اعمالی به ۳ مگاپاسکال ترک‌های برشی منشعب از نوک داخلی ترک‌های اصلی با مکانیزم کشش به هم متصل می‌شوند (شکل ۵-۴۲-ج). بعد از اتصال ترک‌ها، ترک‌های کششی خارجی به طور ناپایدار به رشد خود ادامه داده تا به مرز بالایی و پایینی نمونه رسیده و باعث گسیختگی نمونه شوند (شکل ۵-۴۲-د).



شکل (۵-۴۲): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با طول خط واصل ۲۰ میلی متر و شیب خط واصل ۶۰ درجه

۵ - ۷ - ۲ - ۳ - مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۷۵ درجه

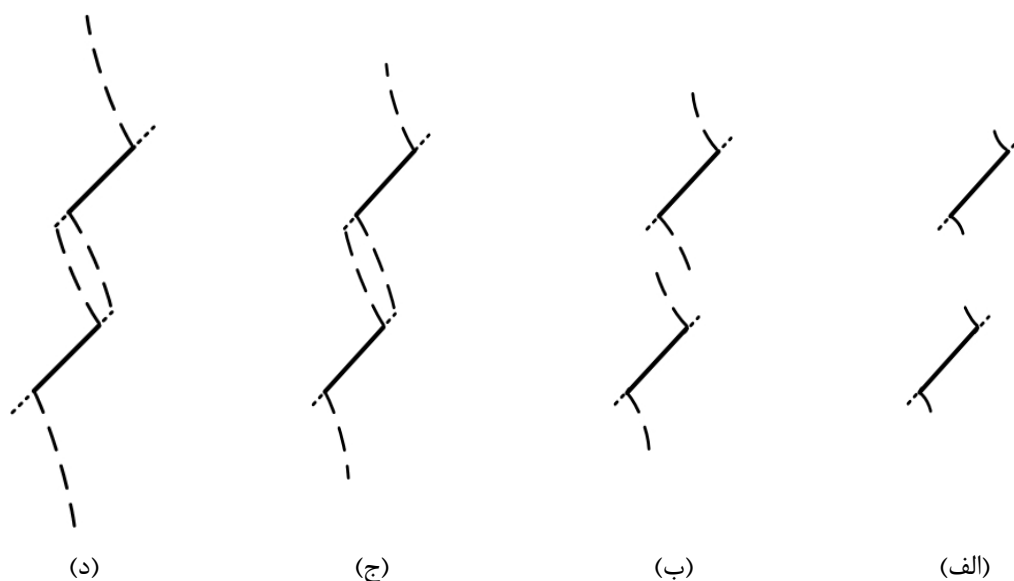
در این نمونه با اعمال بار فشاری در دوردست، در دو نوک هر دو ترک تمرکز تنش بوجود می‌آید. تا زمانی که بار فشاری اعمالی کمتر از $2/43$ مگاپاسکال است مقدار تنش‌های کششی و برشی در نوک ترک‌ها کمتر از مقاومت کششی و برشی نمونه است و ترک‌ها رشد نمی‌کنند. وقتی تنش فشاری اعمالی از $2/43$ مگاپاسکال تجاوز کند از نوک ترک‌ها، ترک‌های کششی در راستای تقریباً عمود بر راستای ترک‌های موجود (با زاویه ۸۴ درجه نسبت به امتداد ترک‌ها) و ترک‌های برشی تقریباً در امتداد ترک‌های اصلی منشعب می‌شوند (شکل ۵-۴۲-الف). ترک‌های برشی منشعب از نوک داخلی ترک‌های اصلی به طور ناپایدار در امتداد ترک‌های اصلی به رشد خود ادامه می‌دهند (شکل ۵-۴۲-ب). وقتی بار فشاری وارد بر نمونه به $3/15$ مگاپاسکال می‌رسد، ترک‌های برشی داخلی به هم رسیده و باعث اتصال ترک‌های اصلی می‌شوند (شکل ۵-۴۲-ج). بعد از اتصال ترک‌ها، ترک‌های کششی خارجی به طور ناپایدار به رشد خود ادامه داده تا به مرز بالایی و پایینی نمونه رسیده و باعث گسیختگی نمونه شوند (شکل ۵-۴۲-د).



شکل (۴۳-۵): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیبدار با طول خط واصل ۲۰ میلی متر و شیب خط واصل ۷۵ درجه

۵ - ۷ - ۲ - ۴ - مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۱۰۵ درجه

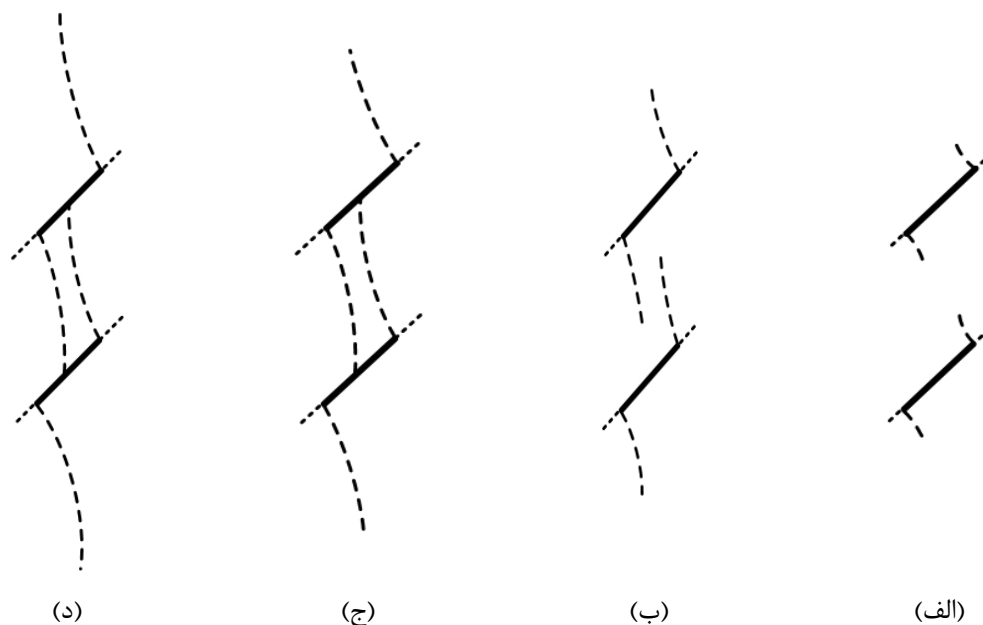
در نمونه با شیب خط واصل ۱۰۵ درجه وقتی بار فشاری اعمالی به ۲/۹۲ مگاپاسکال می‌رسد، از نوک ترک‌ها، ترک‌های کششی و برشی شروع به رشد می‌کنند. ترک‌های کششی در راستای تقریباً قائم (۸۳ درجه) نسبت به امتداد ترک‌های اصلی و ترک‌های برشی تقریباً در امتداد ترک‌های اصلی منشعب می‌شوند (شکل ۴۴-۵ الف). با افزایش بار فشاری اعمالی ترک‌های کششی به رشد پایدار خود ادامه می‌دهند و راستای آنها بتدریج به راستای بارگذاری متمایل می‌گردد (شکل ۴۴-۵ ب). وقتی بار فشاری به ۴/۷ مگاپاسکال می‌رسد، ترک‌های کششی داخلی منشعب شده از نوک هر ترک به ترک برشی داخلی منشعب شده از نوک ترک دیگر رسیده و باعث اتصال ترک‌ها می‌شوند (شکل ۴۴-۵ ج). بعد از اتصال ترک‌ها، ترک‌های کششی خارجی به طور ناپایدار به رشد خود ادامه داده و به مرز بالایی و پایینی نمونه می‌رسند و باعث گسیختگی نمونه می‌شوند (شکل ۴۴-۵ د). بنابراین در این نمونه اتصال دو ترک از ترکیب ترک‌های کششی و برشی منشعب از نوک داخلی ترک‌ها صورت می‌گیرد.



شکل (۵-۴۴): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۱۰۵ درجه

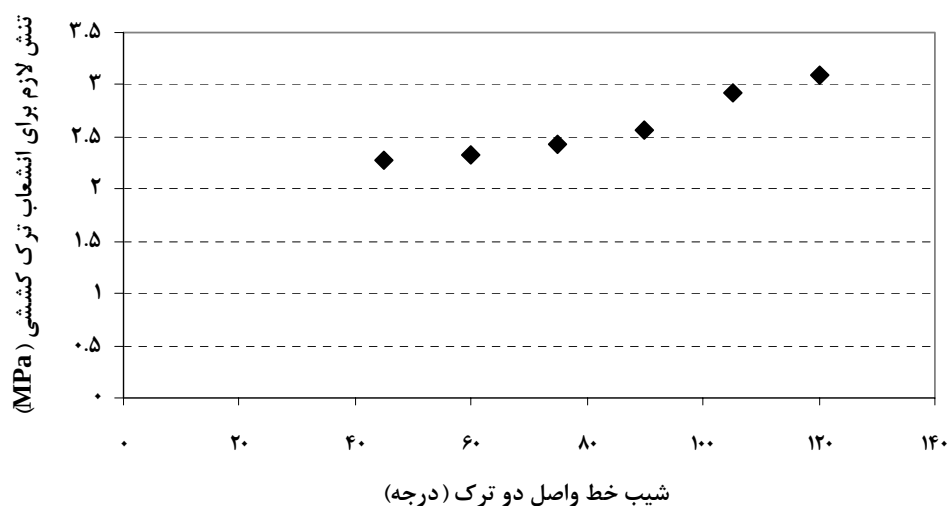
۵ - ۷ - ۲ - ۵ - مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۱۲۰ درجه

در نمونه با شیب خط واصل ۱۲۰ درجه وقتی بار فشاری اعمالی به ۳/۱ مگاپاسکال می‌رسد، از نوک ترک‌ها، ترک‌های کششی و برشی شروع به رشد می‌کنند. ترک‌های کششی در راستای تقریباً قائم (۸۳) درجه نسبت به امتداد ترک‌های اصلی منشعب می‌شوند و ترک‌های برشی تقریباً در امتداد ترک‌های اصلی منشعب می‌شوند (شکل ۵-۴۵-الف). با افزایش بار فشاری اعمالی ترک‌های کششی به رشد پایدار خود ادامه می‌دهند و راستای آنها بتدریج به راستای بارگذاری متمایل می‌گردد (شکل ۵-۴۵-ب). با افزایش بار فشاری اعمالی ترک‌های کششی به رشد پایدار خود ادامه می‌دهند و راستای آنها بتدریج به راستای بارگذاری متمایل می‌گردد (شکل ۵-۴۵-ب). وقتی بار فشاری وارده به ۵ مگاپاسکال می‌رسد، ترک‌های کششی منشعب شده از نوک داخلی هر ترک به نقطه وسطی ترک مقابل می‌رسد و باعث اتصال ترک‌های اصلی می‌شود (شکل ۵-۴۵-ج). بعد از اتصال ترک‌ها، ترک‌های کششی خارجی به رشد ناپایدار خود ادامه داده تا به مرزهای بالایی و پایینی نمونه برسند و باعث گسیختگی نمونه شوند (شکل ۵-۴۵-د).

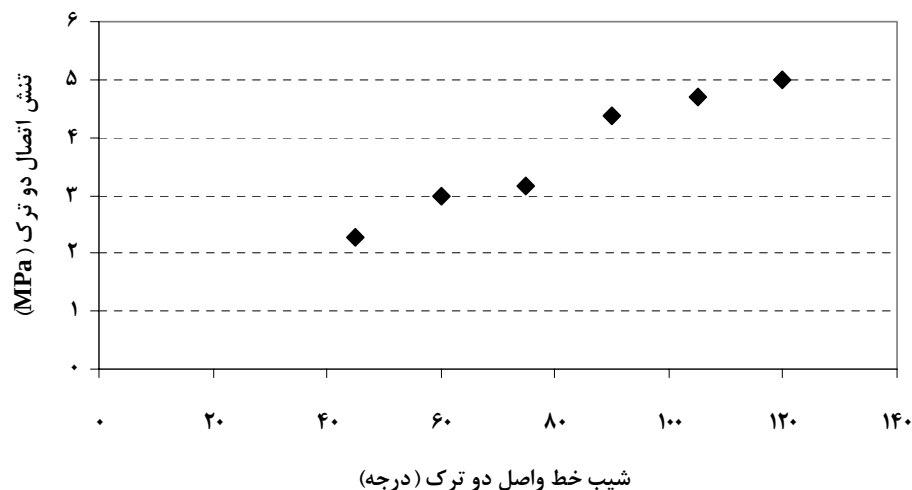


شکل (۵-۴۵): مراحل رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۱۲۰ درجه

بسته به شیب خط واصل دو ترک مقدار تنش منجر به انشعاب ترک‌های کششی و تنش اتصال ترک‌ها متفاوت می‌باشد. شکل‌های (۵-۴۶) و (۵-۴۷) به ترتیب مقادیر تنش انشعاب ترک‌های کششی و تنش اتصال ترک‌های اصلی را بر حسب شیب خط واصل دو ترک نشان می‌دهند.



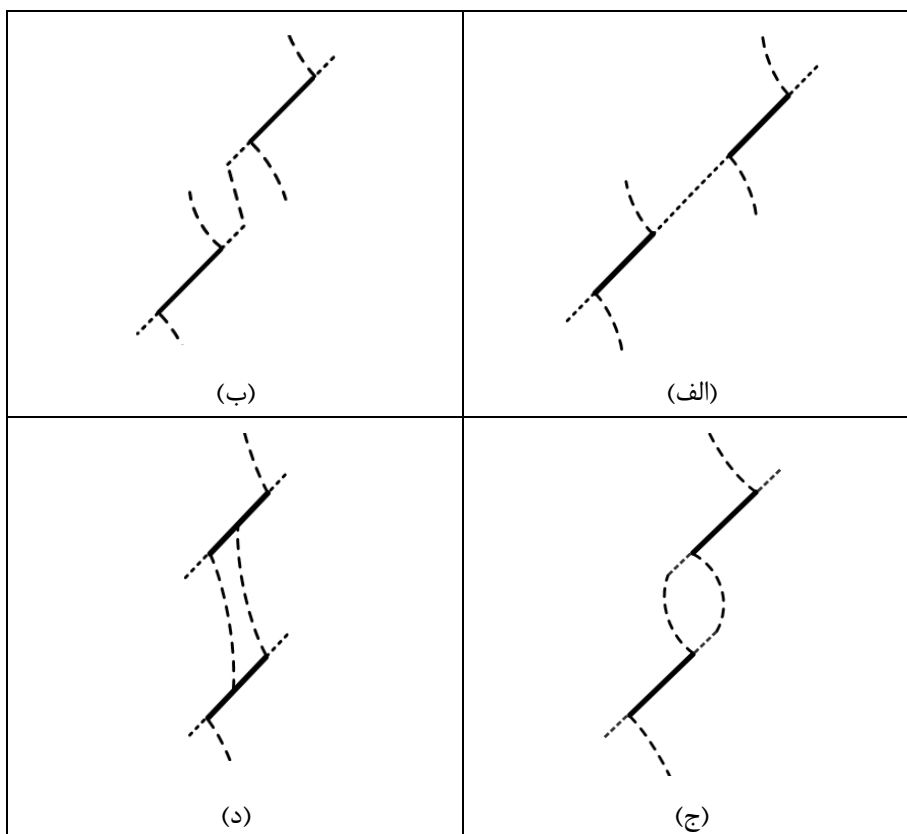
شکل (۵-۴۶): تنش انشعاب ترک‌های کششی به ازای مقادیر مختلف شیب دو ترک



شکل (۴۷-۵): تنش اتصال ترک‌های اصلی به ازای مقادیر مختلف شیب دو ترک

با توجه به شکل (۴۶-۵) با افزایش شیب خط واصل دو ترک، تنش لازم برای انشعاب ترک‌های جدید افزایش می‌یابد. همچنین مطابق شکل (۴۷-۵) با افزایش شیب خط واصل تنش لازم برای اتصال ترک‌ها نیز افزایش می‌یابد. همانطور که از شکل (۴۷-۵) مشاهده می‌شود تنش اتصال شیب‌های کمتر از ۹۰ درجه تفاوت قابل توجهی با مقادیر شیب‌های بیشتر دارند. دو دلیل برای این مساله قابل تصور است. اولاً برای مقادیر شیب کمتر اتصال از نوع برش یا ترکیب برش و کشش می‌باشد. همانطور که قبلاً اشاره شد ترک‌های برشی به طور ناپایدار و ترک‌های کششی به صورت پایدار رشد می‌کنند. ثانیاً در این تحقیق ترک‌ها به صورت باز و سطوح ترک صاف فرض شده است یعنی از چسبندگی و اصطکاک بین سطوح ترک‌ها چشم‌پوشی شده است در حالی که اصطکاک بین سطوح جدید ایجاد شده در نتایج مدل‌سازی موثر است.

به ازای مقادیر مختلف شیب دو ترک، چهار نوع مکانیزم اتصال ترک مشاهده شد: اتصال برشی، اتصال برشی - کششی، اتصال کششی - برشی و اتصال کششی. چهار حالت مذکور در شکل (۴۸-۵) نشان داده شده است.



شکل (۵-۴۷): حالت‌های مختلف اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک شیب‌دار

۵ - ۸ - نتیجه‌گیری

در این فصل با استفاده از برنامه‌های کامپیوتری تهیه شده بر مبنای روش بدون مش گالرکین، میدان جابجایی و تنش و نیز ضرایب تمرکز تنش در دامنه محیط‌های سنگی با هندسه و شرایط بارگذاری دلخواه محاسبه شد. مقایسه نتایج حاصل با نتایج سایر روش‌های عددی (المان محدود) و تحلیلی نشان داد که نتایج روش بدون مش گالرکین از دقت مطلوبی برخوردار است.

دو معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش موضعی ارزیابی شدند و معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش برای مدل‌سازی عددی رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی یک و دو ترک شیب‌دار تحت بار فشاری استفاده گردید.

با استفاده از روش بدون مش گالرکین و معیار انتخابی، مکانیزم رشد ترک در نمونه‌های مکعبی و دیسکی مطالعه شد. در نمونه‌های مکعبی برای شیب کمتر از ۶۰ درجه تحت بار فشاری از نوک

ترک‌ها دو نوع ترک کششی و برشی منشعب می‌شود که ترک‌های کششی تقریباً در راستای عمود بر ترک منشعب شده و در طی رشد پایدار راستای آن‌ها به راستای بار اعمالی متمایل می‌شود و ترک‌های برشی تقریباً در امتداد ترک رشد می‌کنند. به ازای شیب ۷۵ درجه فقط ترک‌های برشی از نوک ترک منشعب و در امتداد ترک به طور ناپایدار رشد می‌کنند. برای شیب‌های ۱۵، ۳۰ و ۴۵ درجه، مطالعات آزمایشگاهی نیز انجام شد که شکل کیفی رشد ترک در مطالعات آزمایشگاهی و عددی تطابق خوبی باهم دارند.

در نمونه‌های دیسکی به ازای مقادیر مختلف شیب فقط ترک‌های کششی منشعب و به طور ناپایدار رشد می‌کنند. برای نمونه‌های مختلف مقدار تنش منجر به انشعاب ترک‌های کششی و زاویه انشعاب ترک‌های کششی بررسی شد. برای ارزیابی نتایج عددی، مطالعات آزمایشگاهی مشابه انجام شد. مقادیر بار منجر به انشعاب ترک‌های کششی و زاویه انشعاب این ترک‌ها در مطالعات عددی و آزمایشگاهی تطابق خوبی نشان دادند.

در ادامه مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک با روش عددی مدل‌سازی شد. ابتدا به ازای مقادیر مختلف طول خط واصل نحوه رشد و اتصال ترک‌ها مطالعه شد. نتایج نشان داد این پارامتر هندسی در الگوی کلی رشد و اتصال ترک‌ها تاثیری نداشته و فقط با افزایش آن تنش لازم برای انشعاب و اتصال ترک‌ها افزایش می‌یابد. سپس به ازای مقادیر مختلف شیب خط واصل دو ترک، نحوه رشد و اتصال ترک‌ها مطالعه شد برای شیب‌های مختلف چهار نوع اتصال: برشی، برشی - کششی، کششی - برشی و کششی مشاهده شد.

فصل ششم

مطالعه آزمایشگاهی انشعاب، انتشار و اتصال ترک‌ها در مواد شبه سنگی و اعتبار سنجی

مطالعات عددی

۶- ۱ - مقدمه

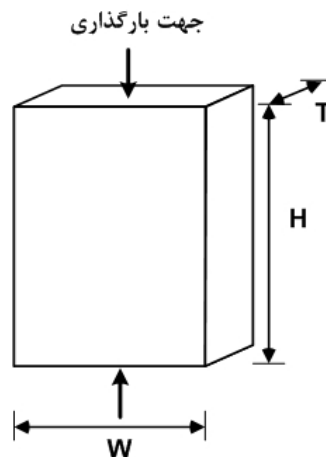
در فصل قبل مکانیزم انشعاب، انتشار و اتصال ترک‌ها در محیط‌های سنگی ترد با استفاده از مدل‌سازی عددی بدون مش مطالعه گردید. در هر یک از مدل‌ها با توجه به شرایط هندسی خاص ترک، میزان تنش منجر به رشد، انتشار و اتصال ترک‌ها تعیین و بحث شد. در این فصل برای اعتبار سنجی نتایج مدل‌سازی عددی، مدل‌های ساخته شده مجدداً به طور آزمایشگاهی شبیه‌سازی شده و نتایج آزمایشگاهی حاصل با نتایج عددی مقایسه شده است. به خاطر محدودیت‌های آزمایشگاهی، نمونه‌های آزمایشگاهی فقط تحت بارگذاری فشاری تک‌محوری بررسی شده‌اند. ابتدا نحوه تهیه نمونه‌ها و تعیین خواص مکانیکی آنها توضیح داده شده و سپس نتایج حاصل از بارگذاری نمونه‌ها ارائه شده است. در نهایت نتایج مطالعات عددی و آزمایشگاهی باهم مقایسه شده‌اند.

۶- ۲ - تهیه نمونه‌های آزمایشگاهی

برای تهیه نمونه‌های آزمایشگاهی لازم است ابعاد هندسی نمونه و ترک (یا ترک‌ها) تعیین و جنس نمونه و مواد لازم برای ساخت آن مشخص شود. همچنین قالب مناسب برای ساخت نمونه‌ها و ابزار لازم برای ایجاد ترک با طول، ضخامت و شیب مورد نظر در نمونه تهیه شده، فراهم گردد. در ادامه مراحل تهیه نمونه حاوی یک و دو ترک و ابزارهای بکار رفته توضیح داده می‌شود.

۶- ۲- ۱- ابعاد هندسی نمونه‌ها

در اکثر مطالعات آزمایشگاهی مکانیک شکست سنگ از نمونه‌های مکعب مستطیل شکل استفاده می‌شود (شکل ۶-۱). بنابراین برای این مطالعه نیز نمونه‌های مکعب مستطیل انتخاب شده است. ابعاد مکعب مستطیل مورد استفاده در برخی از مطالعات انجام شده در جدول (۶-۱) درج شده است.



شکل (۶-۱): شکل هندسی نمونه‌های مورد استفاده در مطالعات آزمایشگاهی

جدول (۶-۱): ابعاد هندسی نمونه مکعب مستطیل مورد استفاده در مطالعات قبلی

محقق	H (ارتفاع) (mm)	W (عرض) (mm)	T (ضخامت) (mm)
ساگونگ و بوبت	۲۰۳/۲	۱۰۱/۶	۳۰
وونگ و همکاران	۱۲۰	۶۰	۲۵
شن	۱۵۲/۴	۷۶/۲	۳۰

با توجه به ابعاد مورد استفاده در مطالعات قبلی، در این مطالعه ارتفاع نمونه ۲۰۰، عرض نمونه ۱۰۰ و ضخامت نمونه ۳۰ میلی‌متر در نظر گرفته شده است.

۶- ۲- ۲- جنس نمونه‌های آزمایشگاهی

با توجه به اینکه در مطالعات عددی از اصول مکانیک شکست الاستیک خطی استفاده شده است، بنابراین لازم است نمونه‌های آزمایشگاهی حتی‌الامکان رفتار ارتجاعی و ترد داشته باشند. برای انتخاب جنس نمونه ابتدا مواد مورد استفاده در تحقیقات قبلی مطالعه شد. جدول (۶-۲) مواد مورد استفاده

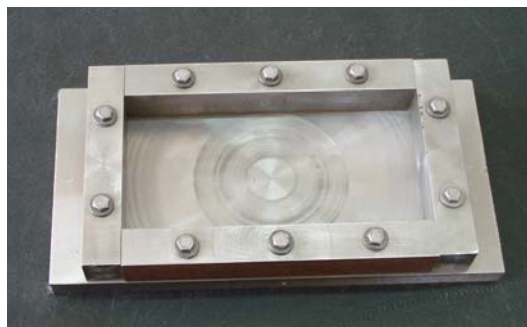
در برخی از مطالعات قبلی و نسبت آنها در ترکیب نهایی نمونه را نشان می‌دهد. سپس رفتار شکست ترکیبات مختلفی از مواد مطالعه گردید. بدین منظور نمونه‌هایی از جنس ترکیبات گوناگون نظیر گچ - سیلیس، گچ - سیمان، گچ - آب، سیمان - آب، سیمان - پودر سنگ و سیمان سفید - پودر سنگ با نسبت‌های وزنی مختلف تهیه شده و تحت بارگذاری قرار گرفت. با مطالعه نحوه شکست این نمونه‌ها، نهایتاً ترکیب گچ - آب به عنوان ترکیب مناسب جهت تهیه نمونه‌های آزمایشگاهی انتخاب شد. نسبت وزنی مناسب برای مواد این ترکیب (گچ و آب) به ترتیب ۳ به ۲ انتخاب شد.

جدول (۲-۶): مواد مورد استفاده در مطالعات قبلی و نسبت آنها در ترکیب نهایی نمونه

محقق	مصالح	نسبت مواد در ترکیب نهایی
ساگونگ و بوبت	سنگ گچ، آب و سیلیس	نسبت آب به ژئوپس برابر ۰/۴ نسبت آب به سیلیس برابر ۳۵
وونگ و همکاران	سولفات باریم طبیعی، ماسه، گچ و آب	با نسبت وزنی ۲ : ۴ : ۱ : ۱/۵
شن	گچ و آب	-

۶ - ۲ - ۳ - قالب ساخت نمونه‌های آزمایشگاهی

برای تهیه نمونه‌های مکعب مستطیلی، قالب نشان داده شده در شکل (۲-۶-الف) ساخته شده و مورد استفاده قرار گرفته است. همانطور که در شکل مشخص است یک صفحه ثابت فولادی با سطح صاف به عنوان وجه پایینی در نظر گرفته شده و چهار وجه جانبی توسط پیچ و مهره به این صفحه متصل شده‌اند. چهار وجه جانبی بطور مجزا از صفحه اصلی در شکل (۲-۶-ب) مشخص شده است. وجه بالایی قالب باز بوده و برای تهیه نمونه دوعاب مطابق شکل (۲-۶-ج) از این قسمت داخل قالب ریخته می‌شود.



(الف) شمای کلی قالب تهیه نمونه‌های آزمایشگاهی



(ب) نحوه باز شدن وجه‌های قالب برای جدایش مناسب نمونه از قالب



(ج) نحوه ریختن دوغاب از قسمت بالای قالب

شکل (۶-۲): قالب ساخت نمونه آزمایشگاهی مکعبی.

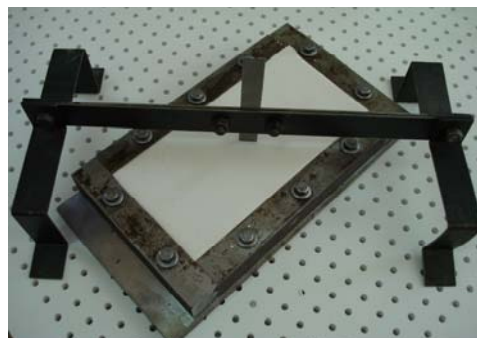
۶ - ۲ - ۴ - نحوه ایجاد ترک در نمونه‌ها

با توجه به اینکه در مطالعه عددی ترک‌ها بصورت باز مدل‌سازی شده‌اند بنابراین در نمونه‌های آزمایشگاهی ترک باز ایجاد شده است. بدین منظور مطابق شکل (۶-۳-الف) قبل از ریختن دوغاب در داخل قالب یک صفحه نازک فلزی با ضخامت ناچیز ($0/4$ میلی‌متر) و با طولی برابر طول ترک مورد نظر در داخل قالب قرار داده می‌شود و بعد دوغاب ریخته می‌شود (۶-۳-ب). برای تنظیم دقیق

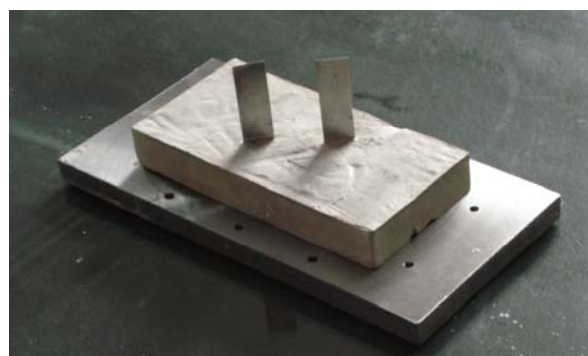
مرکزیت ترک و تامین دقیق شیب مورد نظر برای ترک از سازوکار خاصی استفاده شده است که در شکل (۳-۶-الف) نمایان است. بعد از گیرش اولیه نمونه، صفحه فلزی موردنظر از داخل نمونه بیرون کشیده می‌شود. شکل (۳-۶-ج) قالب حاوی دوغاب با وجه‌های باز شده را به همراه صفحات فلزی جهت ایجاد ترک نشان می‌دهد.



(الف) نحوه تنظیم صفحه فلزی در داخل قالب برای ایجاد ترک با شیب مشخص



(ب) سازوکار بکار رفته برای تنظیم دقیق مرکزیت و شیب ترک و دوغاب گچ

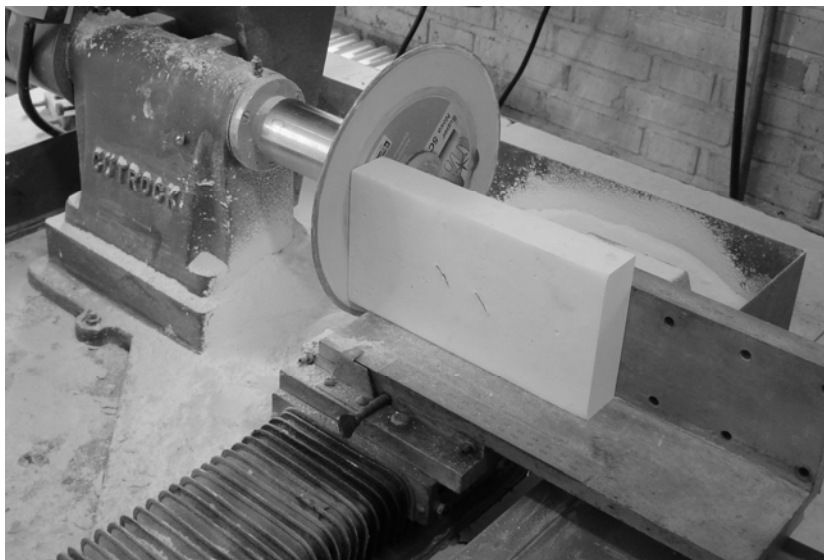


(ج) قالب حاوی نمونه با وجه‌های باز شده به همراه صفحات فلزی جهت ایجاد ترک

شکل (۳-۶): نحوه ایجاد ترک در نمونه‌های آزمایشگاهی

۶- ۲- ۵ - آماده‌سازی نمونه‌ها برای بارگذاری

بعد از ساخت نمونه‌ها با استفاده از قالب تهیه شده، نمونه‌ها به مدت ۳ روز در اون با دمای ۵۰ درجه سانتیگراد قرار داده می‌شود تا آب خود را پس داده و خشک و ترد گردد. سپس برای اینکه سطوح نمونه صاف و باهم موازی شوند، دو طرف نمونه‌ها مطابق شکل (۴-۶) با استفاده از دستگاه برش به اندازه ۵ میلی‌متر برش داده می‌شود. بنابراین طول نمونه آماده شده ۱۹ سانتی‌متر شده و این مقدار در مدل‌سازی عددی در نظر گرفته می‌شود.



شکل (۴-۶): برش دو انتهای نمونه برای تهیه سطوح موازی

۶- ۳ - تعیین پارامترهای مکانیکی و مقاومتی مصالح تشکیل دهنده نمونه‌ها

همانطور که اشاره شد هدف از مطالعات آزمایشگاهی، اعتبارسنجی نتایج مدل‌سازی عددی است. بنابراین لازم است در مطالعات عددی و آزمایشگاهی خواص مکانیکی یکسانی برای مواد در نظر گرفته شود. در مدل‌سازی عددی برای تعیین بردار جابجایی و میدان تنش و کرنش و مطالعه رشد و اتصال ترک‌ها از خواص مکانیکی مصالح استفاده می‌شود. لذا لازم است خواص مکانیکی مصالح تشکیل دهنده نمونه‌های آزمایشگاهی تعیین شود. با آزمایش‌های مختلف خواص مکانیکی مصالح گچی از قبیل: مقاومت فشاری تک محوری، مقاومت کششی، ضریب ارتجاعی، نسبت پواسون، چسبندگی و

زاویه اصطکاک داخلی تعیین شده‌اند. در ادامه آزمایش‌های مذکور توضیح داده می‌شود. برای انجام آزمایش‌ها و تعیین پارامترهای مکانیکی لازم است نمونه‌ها با استاندارد انجمن بین المللی مکانیک سنگ (ISRM) تهیه شوند. بدین منظور برای تعیین پارامترهای مکانیکی فوق الذکر از نمونه‌های استوانه‌ای با قطر ۵۴ میلیمتر و با طول ۱۱۰-۱۳۰ میلیمتر استفاده شده که این نمونه‌ها با استفاده از قالب شکل (۵-۶) تهیه شده‌اند.



شکل (۵-۶): قالب مورد استفاده برای تهیه نمونه‌های استوانه‌ای

۶ - ۳ - ۱ - تعیین مقاومت فشاری تک‌محوری، ضریب ارتجاعی و نسبت پواسون

برای تعیین مقاومت فشاری تک‌محوره، ضریب ارتجاعی و نسبت پواسون نمونه‌های گچی، مطابق شکل (۶-۶) نمونه‌های استوانه‌ای با قطر ۵۴ میلی‌متر و طول ۱۲۵ تا ۱۳۰ میلی‌متر تهیه و تحت بارگذاری فشاری تک‌محوری قرار گرفته‌اند.

آزمایش فشاری تک‌محوری با استفاده از دستگاه HEICO در آزمایشگاه مکانیک سنگ دانشگاه تربیت مدرس انجام شده است (شکل ۶-۷).

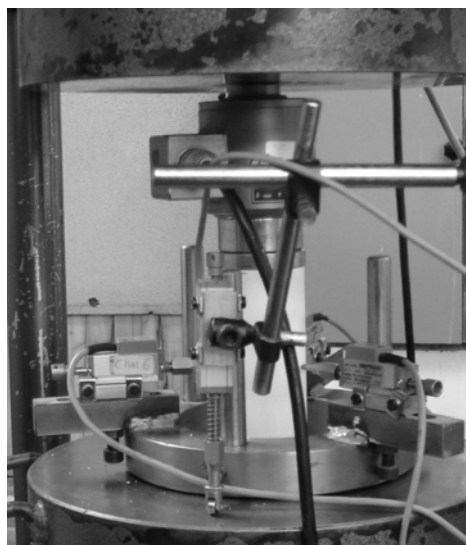
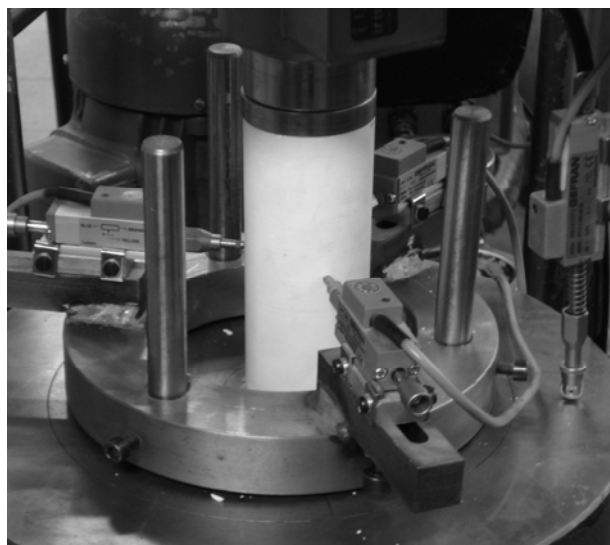


شکل (۶-۶): نمونه‌های تهیه شده برای آزمایش فشاری تک‌محوره



شکل (۶-۷): دستگاه آزمایش فشاری تک‌محوره (آزمایشگاه مکانیک سنگ دانشگاه تربیت مدرس)

مطابق شکل (۶-۸-الف) در هر لحظه از بارگذاری میزان بار وارده بر نمونه از طریق سلول بار ثبت شده است. همچنین مطابق شکل (۶-۸-ب) با استفاده از یک جابجائی‌سنج تغییرات طولی و با استفاده از سه جابجائی‌سنج جانبی نمونه استوانه‌ای نیز ثبت شده است.



(ب) سه جابجائی سنج جانبی در اطراف نمونه

(الف) جابجایی سنج در راستای طولی نمونه

شکل (۶-۸): ثبت بار وارد بر نمونه، جابجائی طولی و جابجائی جانبی در هر لحظه از بارگذاری

با استفاده از بار لحظه شکست نمونه، مقاومت فشاری تک‌محوری و با استفاده از منحنی تنش - کرنش طولی و منحنی تنش - کرنش جانبی مقادیر ضریب ارتجاعی و نسبت پواسون محاسبه شده است. نتایج آزمایش فشاری تک‌محوری و پارامترهای اندازه‌گیری شده برای شش نمونه در جدول (۶-۳) درج شده است.

جدول (۶-۳): نتایج حاصل از آزمایش فشاری تک محوری

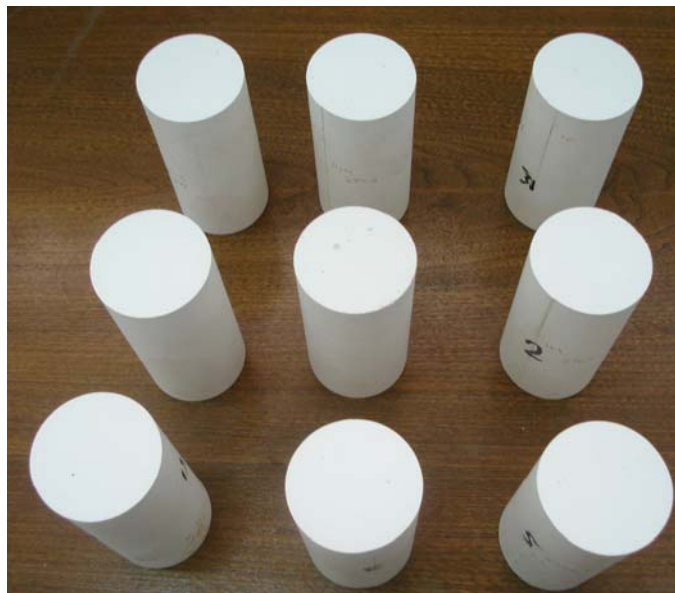
شماره نمونه	مقاومت فشاری (MPa)	ضریب ارتجاعی (GPa)	ضریب پواسون
۱	۱۴/۵	۳/۷۳	۰/۲۱
۲	۱۵	۳/۳۲	-
۳	۱۵/۵	۳	-
۴	۱۷	۳/۶	-
۵	۱۶/۶	۳/۳۹	۰/۱۷
۶	۱۶/۱	۳/۶۴	۰/۱۹۶

با توجه به نتایج بدست آمده از این آزمایش‌ها، مقدار متوسط مقاومت فشاری تک‌محوره برابر ۱۵/۷ مگاپاسکال، مقدار متوسط ضریب ارتجاعی برابر ۳/۳۳ گیگاپاسکال و مقدار متوسط نسبت پواسون برابر

۰/۱۹ به دست آمده است و برای مدل‌سازی عددی مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های گچی بکار گرفته شده است.

۶-۳-۲ - تعیین چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی

برای تعیین چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی مصالح مورد استفاده از آزمایش فشاری سه‌محوری استفاده شده است. بدین منظور از نمونه‌های استوانه‌ای با قطر ۵۴ میلی‌متر و طول ۱۱۱-۱۱۳ میلی‌متر استفاده شده است (شکل ۶-۹). این آزمایش با استفاده از دستگاه فشاری سه‌محوری ELE در دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه ارومیه انجام شده است (شکل ۶-۱۰).



شکل (۶-۹): نمونه‌های مورد استفاده در آزمایش فشاری سه‌محوره

برای انجام این آزمایش ۴ تست انجام شد که مقادیر فشار جانبی و تنش محوری منجر به شکست نمونه در جدول (۶-۴) نشان داده شده است. با استفاده از نتایج این جدول و روش پیشنهادی انجمن بین‌المللی مکانیک سنگ برای تعیین مقاومت فشاری سه‌محوری (ISRM, 1978)، ضریب چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی بصورت زیر تعیین شده‌اند.



(الف) دستگاه آزمایش فشاری سه‌محوره



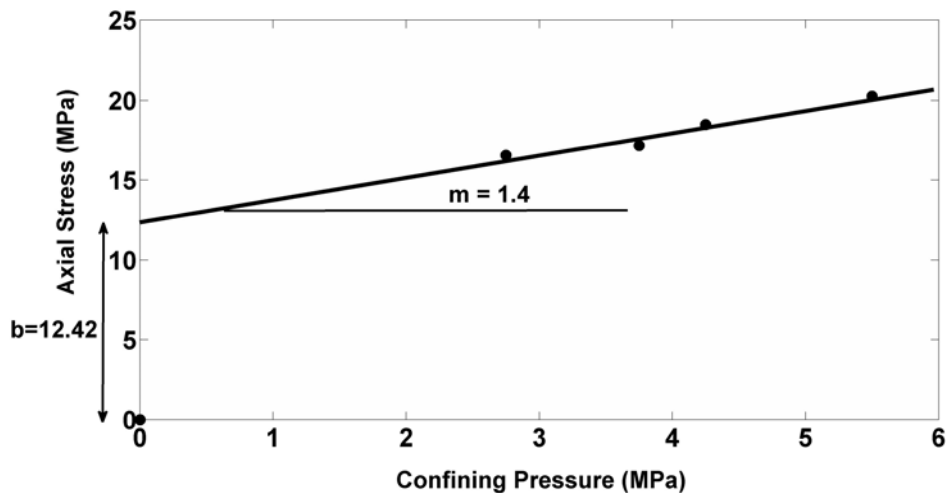
(ب) نمونه گچی در داخل سلول هوک

شکل (۶-۱۰): دستگاه آزمایش فشاری سه‌محوره و نمونه گچی در داخل سلول هوک

جدول (۴-۶): نتایج آزمایش فشاری سه‌محوره

شماره نمونه	فشار جانبی (MPa)	تنش محوری (MPa)
۱	۲/۷	۱۶/۵۶
۲	۳/۷	۱۷/۱۷
۳	۴/۲	۱۸/۴۸
۴	۵/۵	۲۰/۲۷

ابتدا نتایج آزمایش مطابق شکل (۱۱-۶) در نظر گرفته شده و با استفاده از رگرسیون خطی بهترین خط بر این داده‌ها برازش شده است. مطابق شکل مقدار شیب (m) و عرض از مبدا (b) این خط به ترتیب برابر ۱/۴ و ۱۲/۴۲ محاسبه گردیده است.



شکل (۱۱-۶): نتایج آزمایش فشاری سه‌محوره و تعیین عرض از مبدا و شیب خط پوش

با تعیین شیب و عرض از مبدا خط برازش شده و با استفاده از روابط زیر، زاویه اصطکاک داخلی (ϕ) و چسبندگی (c) مصالح گچی بترتیب برابر ۱۰ درجه و ۵/۳ مگاپاسکال محاسبه شده است.

$$\phi = \arcsin \frac{m-1}{m+1} \quad (۱-۶)$$

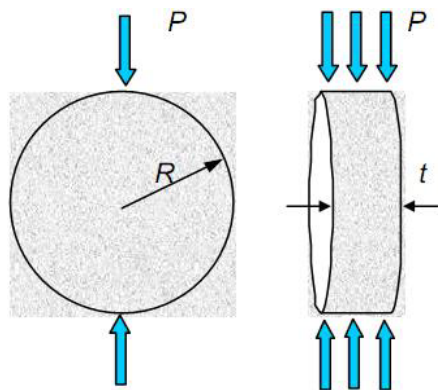
$$C = b \frac{1 - \sin \phi}{2 \cos \phi} \quad (۲-۶)$$

۶ - ۳ - ۳ - تعیین مقاومت کششی مصالح

برای تعیین مقاومت کششی نمونه‌ها از آزمایش کشش غیر مستقیم (آزمایش برزیلی) استفاده شده است. در این آزمایش نمونه‌های استوانه‌ای با نسبت طول به قطر ۰/۵ تا ۰/۷۵ مطابق شکل (۱۲-۶) تحت بارگذاری فشاری قرار گرفته و مقاومت کششی از رابطه زیر محاسبه شده است.

$$\sigma_t = \frac{P}{\pi R t} \quad (۳-۶)$$

که در آن: σ_t مقاومت کششی، P بار شکست، R شعاع نمونه و t ضخامت استوانه می‌باشند.



شکل (۶-۱۲): تست برزلی برای اندازه‌گیری کشش غیر مستقیم

برای انجام این آزمایش مطابق شکل (۶-۱۳) از نمونه‌هایی با قطر ۵۴ میلیمتر و ضخامت ۳۰ - ۳۳ میلیمتر استفاده شده است. در این آزمایش طبق استاندارد ISRM از فک‌های انحنادار استفاده شده است (شکل ۶-۱۴).



شکل (۶-۱۳): نمونه‌های مورد استفاده برای آزمایش کشش غیر مستقیم

نمونه‌های مذکور تحت آزمایش برزلی قرار داده شده و میزان بار شکست ثبت شده است. نتایج این آزمایش و مقاومت کششی محاسبه شده برای نمونه‌های مختلف در جدول (۶-۵) نشان داده شده است.



شکل (۶-۱۴): نمونه گچی تحت آزمایش کشش غیر مستقیم

جدول (۶-۵): نتایج آزمایش کشش غیر مستقیم جهت تعیین مقاومت کششی

شماره نمونه	قطر نمونه (mm)	ضخامت نمونه (mm)	بار شکست (KN)	مقاومت کششی (MPa)
۱	۵۴	۳۱/۵	۸/۸	۳/۲۴
۲	۵۴	۳۲	۸/۸	۳/۱۹
۳	۵۴	۳۳	۸/۴	۲/۹۶
۴	۵۴	۳۲	۸/۸	۳/۱۹
۵	۵۴	۳۲/۵	۹/۲	۳/۲۸

با توجه به مقادیر جدول (۶-۵) مقدار متوسط مقاومت کششی مصالح گچی برابر ۳/۱۷ مگاپاسکال برآورد می‌شود.

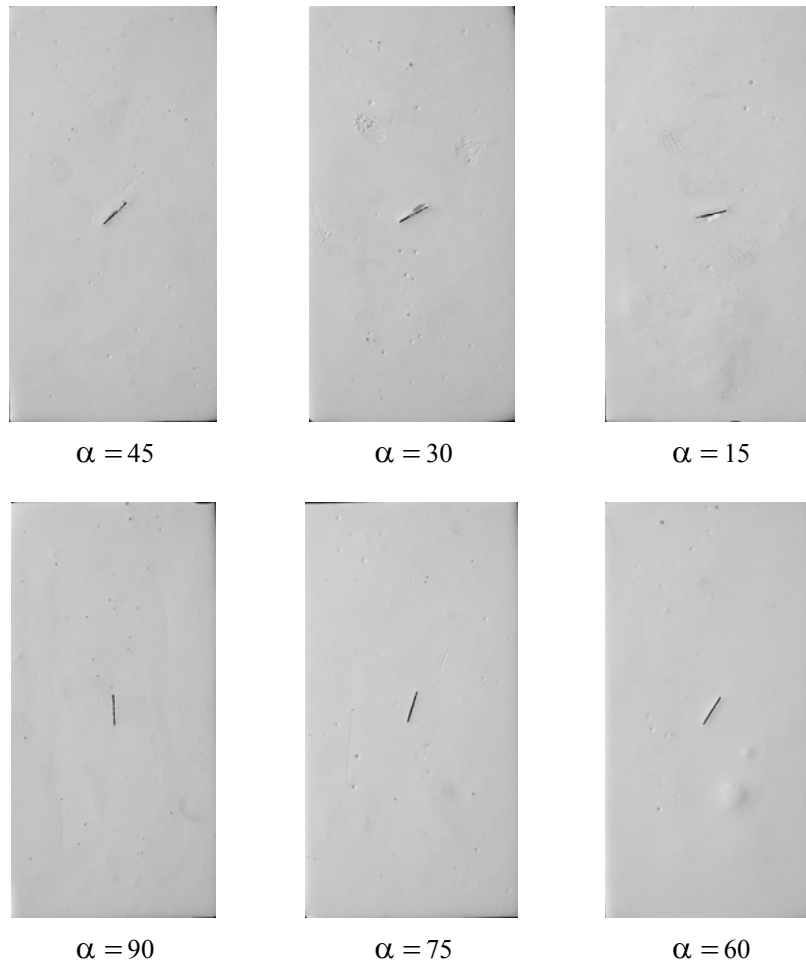
با انجام آزمایش‌های فوق الذکر خواص مکانیکی مصالح گچی مورد استفاده در مطالعات آزمایشگاهی پیش رو در جدول (۶-۶) درج شده است.

جدول (۶-۶): خواص مکانیکی مصالح گچی مورد استفاده در مطالعات آزمایشگاهی

مقاومت فشاری تک محوری	مقاومت کششی (مگاپاسکال)	ضریب ارتجاعی (گیگاپاسکال)	ضریب پواسون	چسبندگی (مگاپاسکال)	زاویه اصطکاک داخلی (درجه)
۱۵/۷ مگاپاسکال	۳/۱۷	۳/۳۳	۰/۱۹	۵/۳۲	۱۰

۶ - ۴ - مطالعه آزمایشگاهی مکانیزم رشد ترک در نمونه‌های مکعبی حاوی یک ترک

برای مطالعه مکانیزم انشعاب و رشد ترک در نمونه‌های مکعبی حاوی یک ترک شیبدار، نمونه‌های گچی حاوی ترک شیبدار بطول ۱۵ میلی‌متر با شیب‌های مختلف صفر، ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۷۵ و ۹۰ درجه ساخته شده است. این نمونه‌ها در شکل (۶-۱۵) نشان داده شده است.



شکل (۶-۱۵): نمونه‌های آزمایشگاهی حاوی یک ترک شیبدار با شیب‌های مختلف

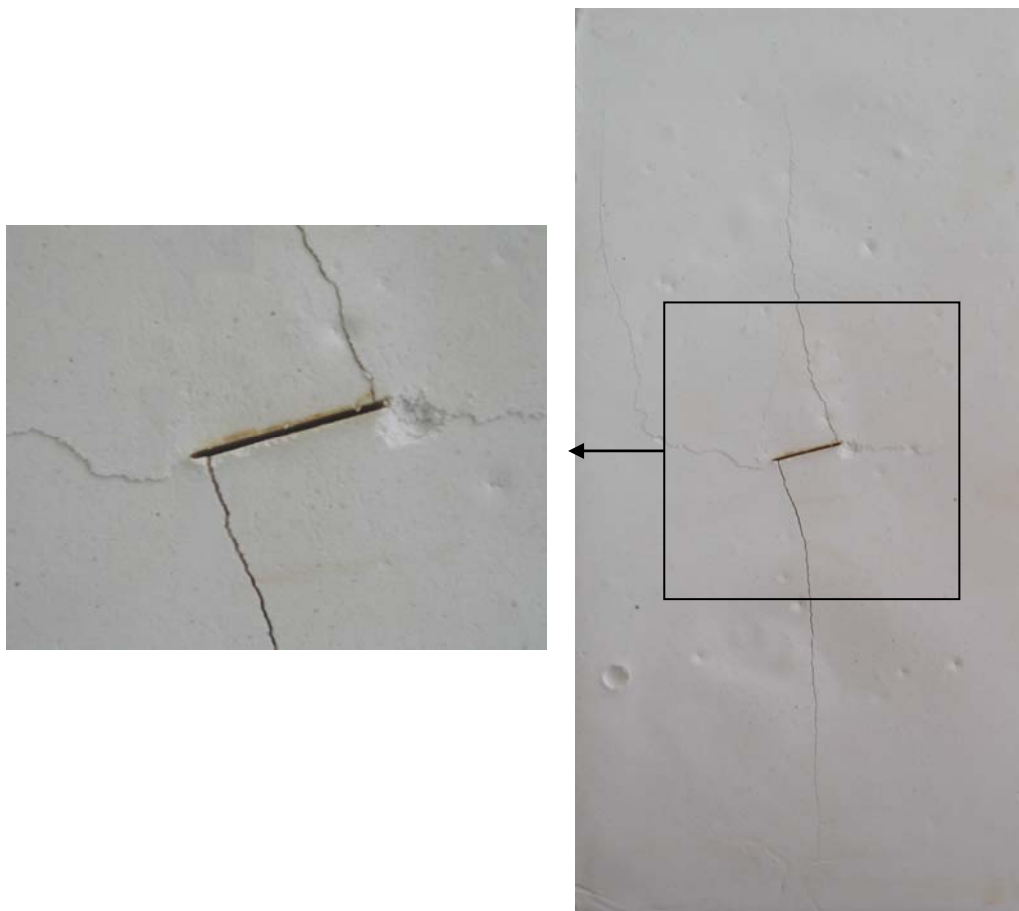
این نمونه‌ها تحت بارگذاری فشاری قرار گرفته و رفتار شکست آنها مشاهده شده است. این آزمایش‌ها در آزمایشگاه دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است (شکل ۶-۱۶). در ادامه برای هر یک از نمونه‌ها مکانیزم انشعاب و رشد ترک و نهایتاً گسیختگی آن توضیح داده شده است.



شکل (۶-۱۶): دستگاه بارگذاری مورد استفاده برای نمونه‌های حاوی ترک شیب‌دار

۶ - ۴ - ۱ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۱۵ درجه

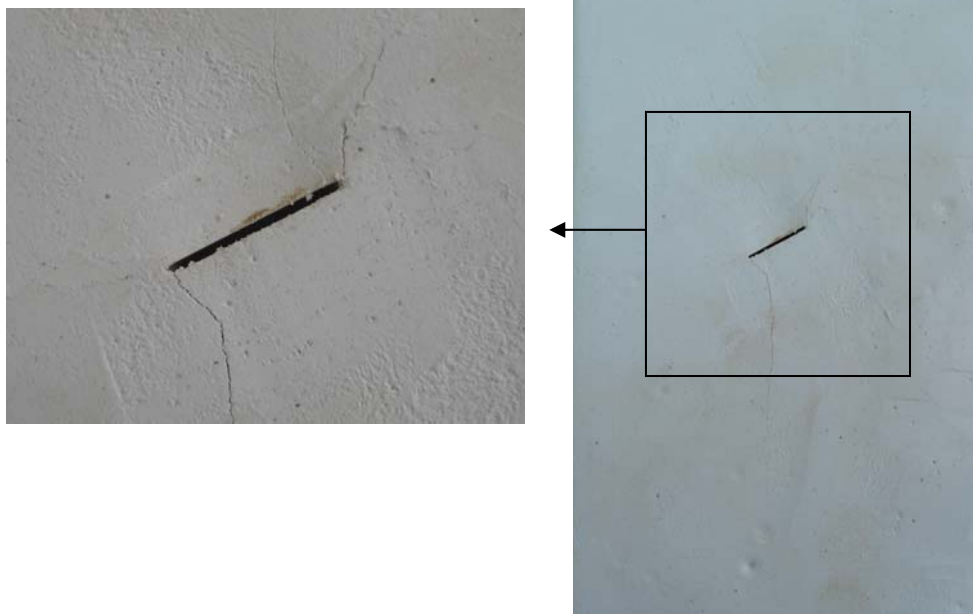
برای نمونه حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۱۵ درجه، وقتی بار فشاری اعمالی به حد مشخصی می‌رسد (تشخیص و ثبت مقدار دقیق بار منجر به انشعاب ترک فقط با نصب کرنش سنج در سطح نمونه امکان‌پذیر است که متأسفانه در این مطالعه در دسترس نبود)، ابتدا ترک‌های کششی از دو نوک ترک موجود منشعب می‌شوند. این ترک‌ها ابتدا بصورت پایدار و سپس بصورت ناپایدار رشد می‌کنند. این ترک‌ها با راستای تقریباً قائم (۱۰۰ درجه) نسبت به امتداد ترک منشعب شده و راستای آنها بتدریج به راستای بارگذاری متمایل می‌شود. بعد از انشعاب ترک‌های کششی از دو نوک ترک و در حین رشد آنها، ترک‌های برشی نیز از دو نوک ترک شروع به رشد می‌کنند. شکل (۶-۱۷) نمونه حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۱۵ درجه را نشان می‌دهد که بارگذاری شده و مسیر رشد ترک‌های کششی و برشی در آن مشهود است.



شکل (۶-۱۷): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک اصلی در نمونه حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۱۵ درجه و طول ۱۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

۶-۴-۲ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۳۰ درجه

برای نمونه حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۳۰ درجه شکل کیفی رشد ترک‌های کششی و برشی مانند نمونه قبلی می‌باشد یعنی وقتی بار فشاری اعمالی به حد مشخصی می‌رسد، ابتدا ترک‌های کششی و سپس ترک‌های برشی از دو نوک ترک موجود منشعب و رشد می‌کنند. ترک‌های کششی با راستای تقریباً قائم (۹۵ درجه) نسبت به امتداد ترک منشعب شده و راستای آنها بتدریج با راستای بارگذاری متمایل می‌شود ولی راستای دقیق انشعاب ترک‌های برشی در سطح نمونه قابل مشاهده نیست (شکل ۶-۱۸).



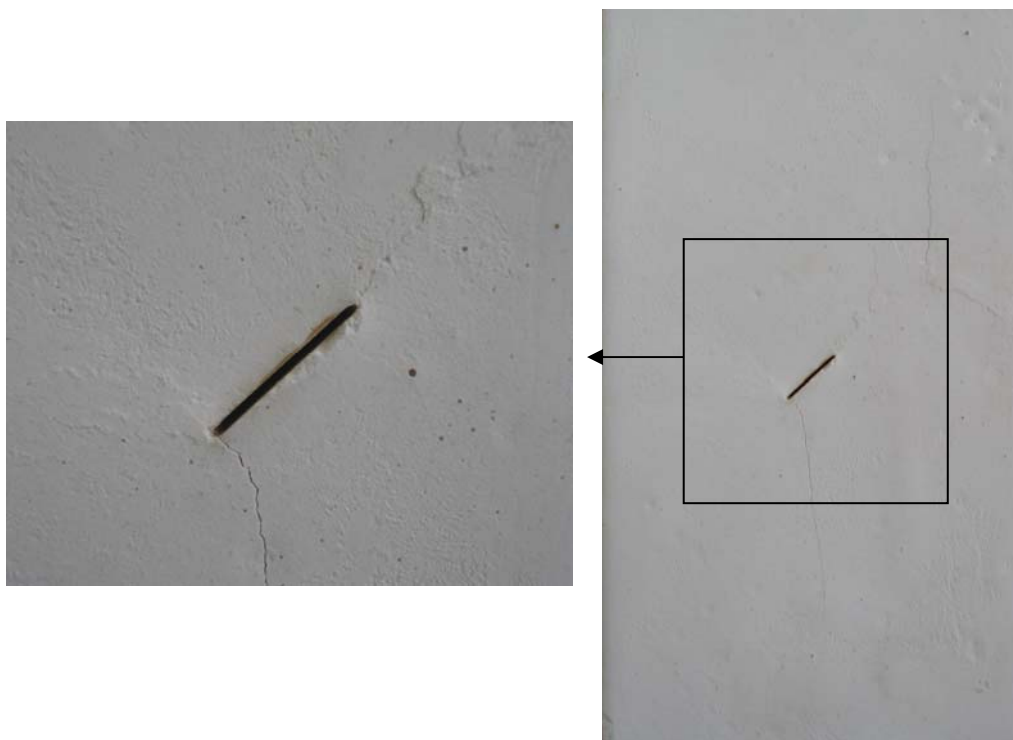
شکل (۶-۱۸): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک اصلی در نمونه حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۳۰ درجه و طول ۱۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

۶-۴-۳ - رشد ترک در نمونه حاوی ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه

در نمونه حاوی ترک با شیب ۴۵ درجه نیز مطابق شکل (۶-۱۹) الگوی رشد ترک‌های کششی و برشی و گسیختگی نمونه مثل نمونه‌های قبل می‌باشد. در این نمونه ترک‌های کششی با زاویه تقریباً قائم (۹۰ درجه) نسبت به امتداد ترک منشعب می‌شوند.

در فصل پنجم مکانیزم رشد ترک در نمونه‌های حاوی یک ترک شیب‌دار به ازای مقادیر مختلف شیب با روش بدون مش گالرکین مدل‌سازی شده است. در مدل‌های عددی مذکور خواص مکانیکی نمونه‌های آزمایشگاهی مورد استفاده در این فصل، بکار گرفته شده‌اند. بنابراین برای ارزیابی نتایج مدل‌سازی عددی فصل پنجم، نتایج عددی و آزمایشگاهی باهم مقایسه می‌گردد. در نمونه‌های با شیب ترک ۱۵، ۳۰ و ۴۵ درجه شکل کلی رشد ترک‌های کششی و برشی و گسیختگی نمونه مطابقت خوبی با نتایج عددی دارد ولی به خاطر کمبود امکانات مقادیر تنش منجر به انشعاب ترک در مطالعات آزمایشگاهی

با مقادیر مطالعات عددی قابل مقایسه نیست. بنابراین فقط مقادیر زاویه انشعاب ترک‌های کششی در مطالعات عددی و آزمایشگاهی برای سه نمونه مذکور در جدول (۶-۷) مقایسه شده است.

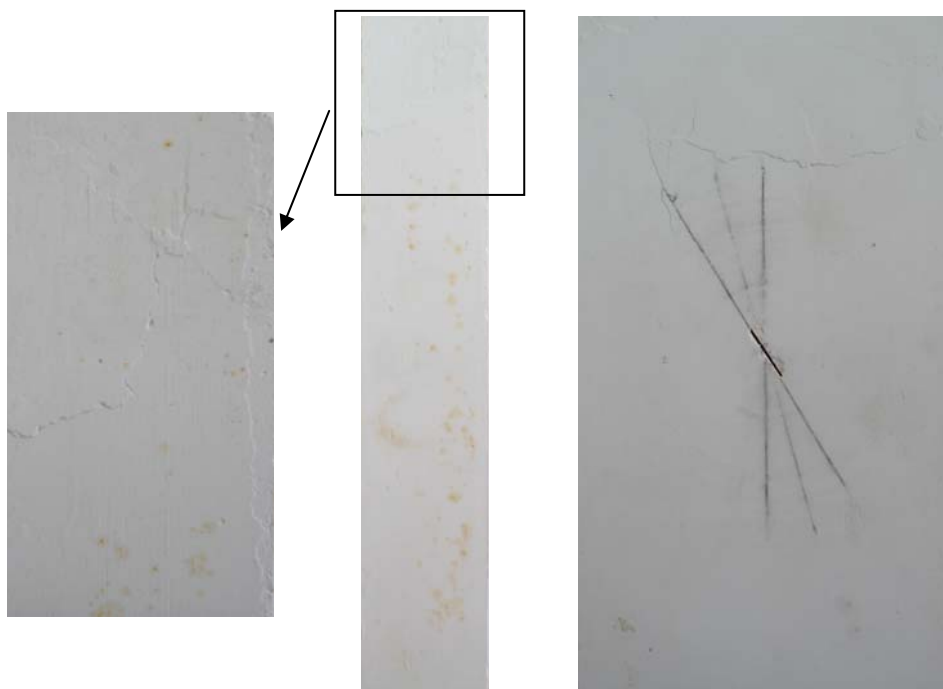


شکل (۶-۱۹): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک اصلی در نمونه حاوی ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه و طول ۱۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

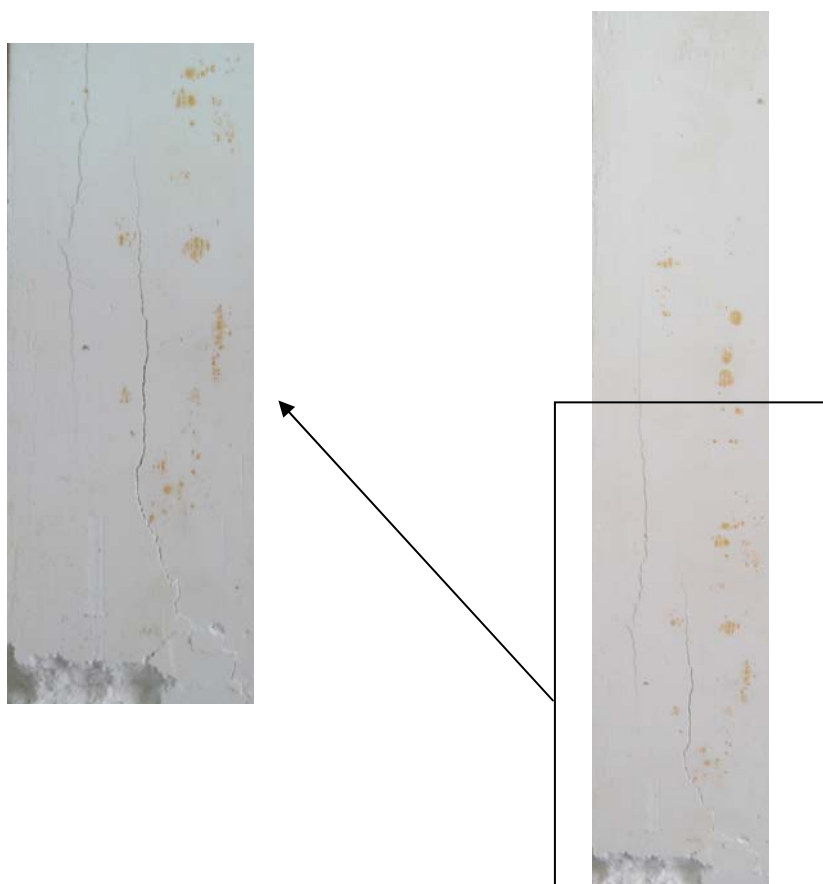
جدول (۶-۷): مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی زاویه انشعاب ترک‌های کششی

شیب ترک	۱۵ درجه	۳۰ درجه	۴۵ درجه
نتایج عددی زاویه انشعاب ترک‌های کششی	۱۰۵	۱۰۰	۹۵
نتایج آزمایشگاهی زاویه انشعاب ترک‌های کششی	۱۰۰	۹۵	۹۰

در نمونه‌های حاوی ترک با شیب بیشتر از ۴۵ درجه، برخلاف نتایج مطالعات عددی، در آزمایش‌های مکرر شکست نمونه‌ها از نوک ترک مشاهده نگردید و نمونه‌ها به شکل دیگری شکستند که عموماً شکست در وجه‌هایی که در تماس با صفحات بارگذاری هستند، اتفاق می‌افتد. در شکل (۶-۲۰) دو مورد از این نوع شکست نشان داده شده است.



(الف) شکست نمونه از وجه بالایی و به شکل گوه‌ای



(ب) شکست نمونه در راستای طولی

شکل (۶-۲۰) شکست مستقل از ترک نمونه‌های حاوی ترک با شیب بیشتر از ۴۵ درجه

۶ - ۵ - مطالعه آزمایشگاهی مکانیزم رشد ترک در نمونه‌های دیسکی ترک‌دار تحت بار

فشاری

برای مطالعه تاثیر هندسه ترک (شیب ترک) در رفتار شکست نمونه ترک‌دار، نمونه‌های دیسکی با قطر ۷۵ میلی متر، ضخامت ۳۰ تا ۳۲ میلی متر و با ترک مرکزی به طول ۲۲/۵ میلی متر با زوایای مختلف شیب ترک (صفر، ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۷۵ و ۹۰ درجه) مطابق شکل (۶-۲۱) تهیه شد.



شکل (۶-۲۱): نمونه‌های دیسکی حاوی ترک مرکزی با شیب متغیر

نمونه‌های تهیه شده در آزمایشگاه دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود با استفاده از دستگاه فشاری INSTRON با سلول بار به ظرفیت ۲۵ کیلونیوتن تحت بار فشاری قرار گرفتند و رفتار شکست آنها ثبت شد (شکل ۶-۲۲). در شکل (۶-۲۳) وضعیت نمونه‌ها بعد از شکست نشان داده شده است.

نمونه دیسکی بدون ترک تحت بار فشاری همان آزمایش برزیلی بوده و نمونه با مکانیزم کشش غیر مستقیم و در راستای قائم می‌شکند (شکل ۶-۲۳-الف). این نمونه تحت بار فشاری ۷/۹ کیلو نیوتن می‌شکند.



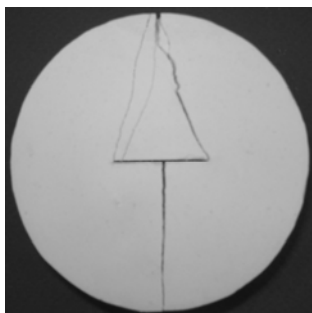
شکل (۶-۲۲): بارگذاری فشاری نمونه‌های دیسکی با دستگاه INSTRON و با سلول بار به ظرفیت ۲۵ کیلونیوتن

در نمونه دیسکی با ترک افقی، تحت بار فشاری ابتدا یک ترک از وسط ترک اصلی منشعب شده و به مرز پایینی می‌رسد. سپس ترک دیگری از نوک ترک اصلی منشعب و به مرز بالایی می‌رسد (شکل ۶-۲۳-ب). این نمونه تحت بار $2/98$ کیلو نیوتن می‌شکند.

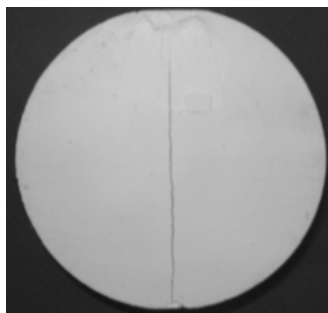
در نمونه دیسکی ترک‌دار با شیب 15° درجه، تحت بار فشاری از نزدیکی دو نوک ترک (نه دقیقاً نوک ترک)، ترک‌های کششی با زاویه 112° درجه نسبت به امتداد ترک منشعب و به مرزهای بالایی و پایینی می‌رسند (شکل ۶-۲۳-ج). این نمونه تحت $2/79$ کیلو نیوتن می‌شکند.

در نمونه دیسکی ترک‌دار با شیب 30° درجه، تحت بار فشاری از دو نوک ترک، ترک‌های کششی با زاویه 93° درجه نسبت به امتداد ترک منشعب و به مرزهای بالایی و پایینی می‌رسند (شکل ۶-۲۳-د). این نمونه تحت $1/75$ کیلو نیوتن می‌شکند.

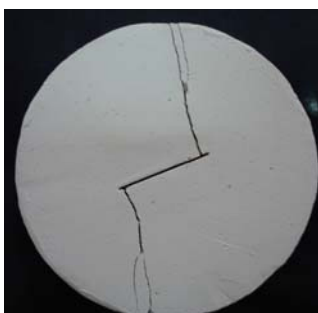
در نمونه دیسکی ترک‌دار با شیب 45° درجه، تحت بار فشاری از دو نوک ترک اصلی، ترک‌های کششی با زاویه 80° درجه نسبت به امتداد ترک منشعب و به مرزهای بالایی و پایینی می‌رسند (شکل ۶-۲۳-ه). این نمونه تحت بار فشاری $1/45$ کیلو نیوتن می‌شکند.



(ب) نمونه حاوی ترک افقی



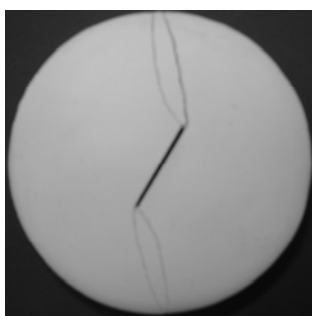
(الف) نمونه بدون ترک



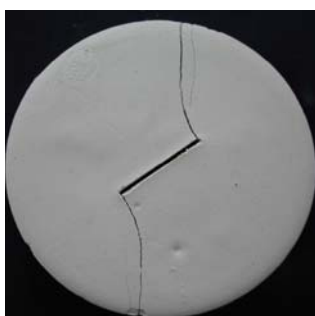
(د) نمونه حاوی ترک با شیب ۳۰ درجه



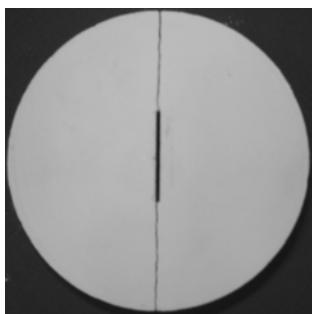
(ج) نمونه حاوی ترک با شیب ۱۵ درجه



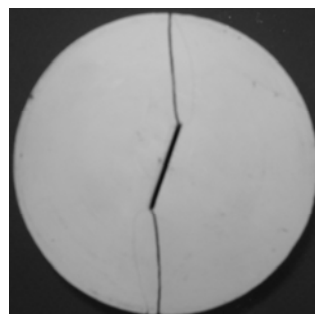
(و) نمونه حاوی ترک با شیب ۶۰ درجه



(ه) نمونه حاوی ترک با شیب ۴۵ درجه



(ح) نمونه حاوی ترک با شیب ۹۰ درجه



(ز) نمونه حاوی ترک با شیب ۷۵ درجه

شکل (۶-۲۳): شکست نمونه‌های دیسکی حاوی ترک با شیب متغیر تحت بار فشاری

در نمونه دیسکی ترک‌دار با شیب ۶۰ درجه تحت بار فشاری از دو نوک ترک، ترک‌های کششی با زاویه ۶۵ درجه نسبت به امتداد ترک منشعب و به مرزهای بالایی و پایینی می‌رسند (شکل ۶-۲۳-و). این نمونه تحت ۱/۷۵ کیلو نیوتن می‌شکند.

در نمونه دیسکی ترک‌دار با شیب ۷۵ درجه تحت بار فشاری از دو نوک ترک، ترک‌های کششی با زاویه ۳۴ درجه نسبت به امتداد ترک منشعب و به مرزهای بالایی و پایینی می‌رسند (شکل ۶-۲۳-ز). این نمونه تحت ۲/۰۵ کیلو نیوتن می‌شکند.

نمونه دیسکی با ترک قائم تحت بار فشاری همانند نمونه بدون ترک با مکانیزم کشش غیر مستقیم و در راستای قائم می‌شکند (شکل ۶-۲۳-ح). این نمونه تحت ۲/۲۸ کیلو نیوتن می‌شکند.

مقدار بار شکست نمونه‌های ترک‌دار و زاویه انشعاب ترک‌های کششی از نوک ترک اصلی برای مقادیر مختلف شیب ترک در جدول (۶-۸) درج شده است.

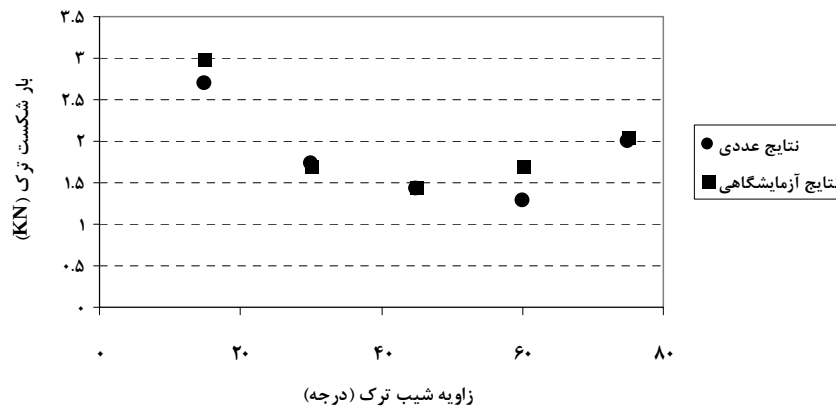
جدول (۶-۸): میزان بار شکست و زاویه انشعاب ترک‌های کششی برای مقادیر مختلف شیب ترک

زاویه ترک	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰
بار شکست (KN)	۲/۷۹	۱/۷	۱/۴۵	۱/۷۵	۲/۰۵	۲/۲۸
زاویه انشعاب (درجه)	۱۱۲	۹۳	۸۰	۶۵	۳۴	۰

با توجه به اینکه نمونه دیسکی بدون ترک تحت بار ۷/۹ کیلو نیوتن شکسته است، نتایج جدول (۶-۸) بیانگر این است که وجود ترک مرکزی با طول یک سوم قطر دیسک، بسته به شیب ترک حدود ۶۰ تا ۸۰ درصد مقاومت نمونه را کاهش می‌دهد و شیب ترک در میزان کاهش مقاومت تاثیر بسزایی دارد.

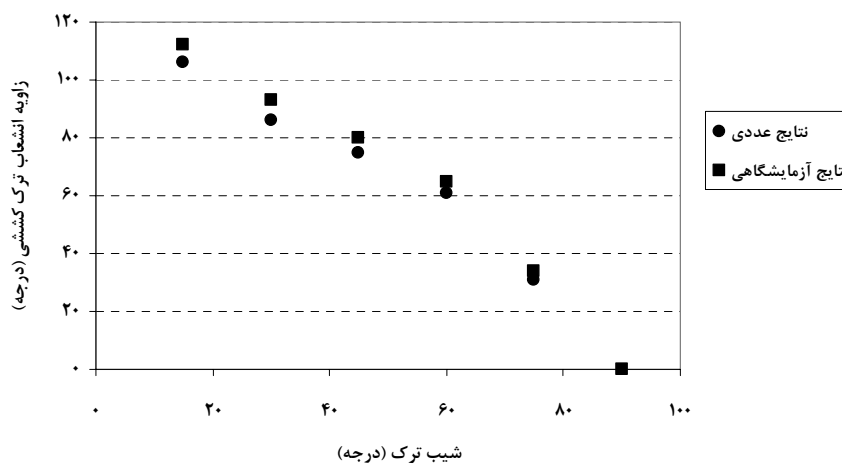
با در دست داشتن مشخصات مکانیکی و هندسی نمونه‌های دیسکی فوق، این نمونه‌ها در فصل قبل با روش بدون مش گالرکین نیز مدل‌سازی شده و میزان بار منجر به رشد ترک و زاویه انشعاب ترک‌های جدید از نوک ترک اصلی به ازای مقادیر مختلف شیب ترک تعیین گردیده است. برای ارزیابی و

مقایسه نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی، مقدار بار منجر به رشد ترک در مدل‌های عددی با بار منجر به شکست نمونه‌های آزمایشگاهی در نمودار شکل (۶-۲۴) باهم مقایسه شده‌اند.



شکل (۶-۲۴): مقایسه مقدار بار منجر به رشد ترک در مدل‌های عددی با بار شکست نمونه‌های دیسکی آزمایشگاهی

نتایج عددی پیش بینی زاویه انشعاب ترک‌های جدید از نوک ترک اصلی با مقادیر آزمایشگاهی اندازه‌گیری شده در نمودار (۶-۲۵) با هم مقایسه شده‌اند.



شکل (۶-۲۵): مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی پیش بینی زاویه انشعاب ترک‌های جدید از نوک ترک اصلی

مقایسه نتایج مطالعات آزمایشگاهی و عددی رفتار شکست نمونه‌های دیسکی ترکدار بیانگر این است که نتایج روش بدون مش گالرکین مطلوب بوده و از دقت خوبی برخوردار است.

۶ - ۶ - مطالعه آزمایشگاهی رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک

همانطور که در فصل قبل بحث شد در مکانیسم رشد، اتصال و گسیختگی نمونه‌های حاوی دو ترک و میزان باری که برای هر یک از این مراحل لازم است، پارامترهای هندسی مختلف از جمله شیب خط واصل و طول خط واصل دو ترک موثر هستند. این دو پارامتر در شکل (۵-۸) نشان داده شدند. در این قسمت تاثیر این دو پارامتر به صورت آزمایشگاهی مطالعه می‌گردد. برای مطالعه آزمایشگاهی مکانیزم رشد، اتصال و شکست نمونه‌های حاوی دو ترک شیبدار در محیط‌های ترد، دو سری نمونه گچی حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه و با طول‌های مختلف خط واصل و زوایای مختلف شیب خط واصل ساخته شده و تحت بار فشاری تک محوری روند رشد و اتصال ترک‌ها بررسی گردیده است. بارگذاری نمونه‌های حاوی دو ترک با استفاده از دستگاه بارگذاری INSTRON در آزمایشگاه دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است (شکل ۶-۲۶). در ادامه نتایج حاصل ارائه می‌گردد.



شکل (۶-۲۶): دستگاه بارگذاری INSTRON مورد استفاده برای بارگذاری نمونه‌های حاوی دو ترک

۶ - ۶ - ۱ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک با طول متغیر خط واصل

برای مطالعه آزمایشگاهی تاثیر پارامتر هندسی طول خط واصل دو ترک بر مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها، مطابق شکل (۶-۲۷) یک سری نمونه حاوی دو ترک با طول‌های ثابت ۱۵ میلی‌متر، شیب ثابت ۴۵ درجه، شیب ثابت خط واصل ۹۰ درجه و طول متغیر خط واصل ۱۰، ۱۵، ۱۸، ۲۰، ۲۵ و ۳۰ میلی‌متر از جنس گچ ساخته شده است. این نمونه‌ها تحت بار فشاری قرار داده شده و رفتار شکست آنها ثبت شده است. در ادامه نتایج حاصل ارائه می‌گردد.

		
طول خط واصل ۱۰ میلی‌متر	طول خط واصل ۱۵ میلی‌متر	طول خط واصل ۱۸ میلی‌متر
		
طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر	طول خط واصل ۲۵ میلی‌متر	طول خط واصل ۳۰ میلی‌متر

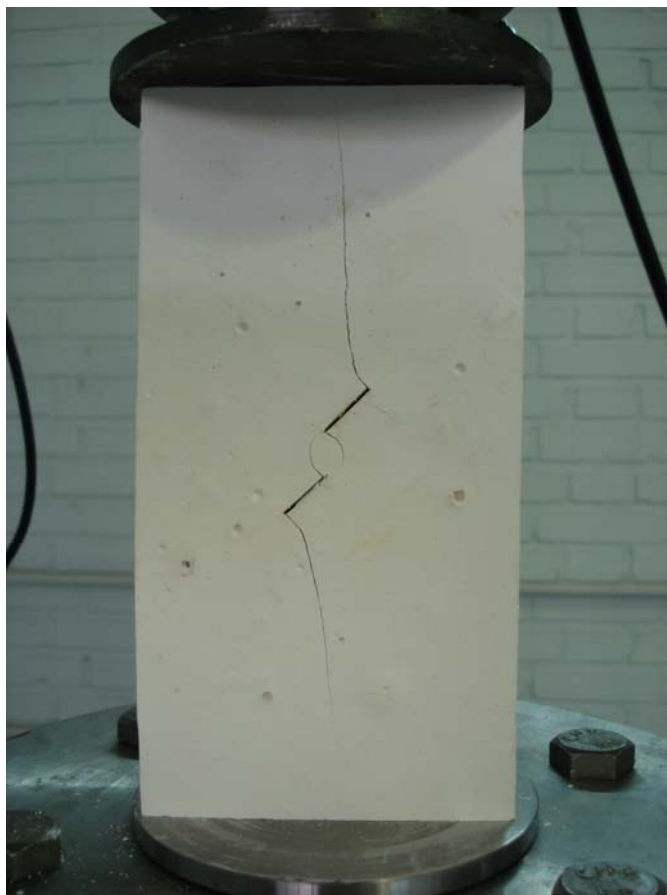
شکل (۶-۲۷): نمونه‌های آزمایشگاهی حاوی دو ترک شیبدار مقدار متغیر طول خط واصل دو ترک

۶ - ۶ - ۱ - ۱ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۱۰ میلی متر

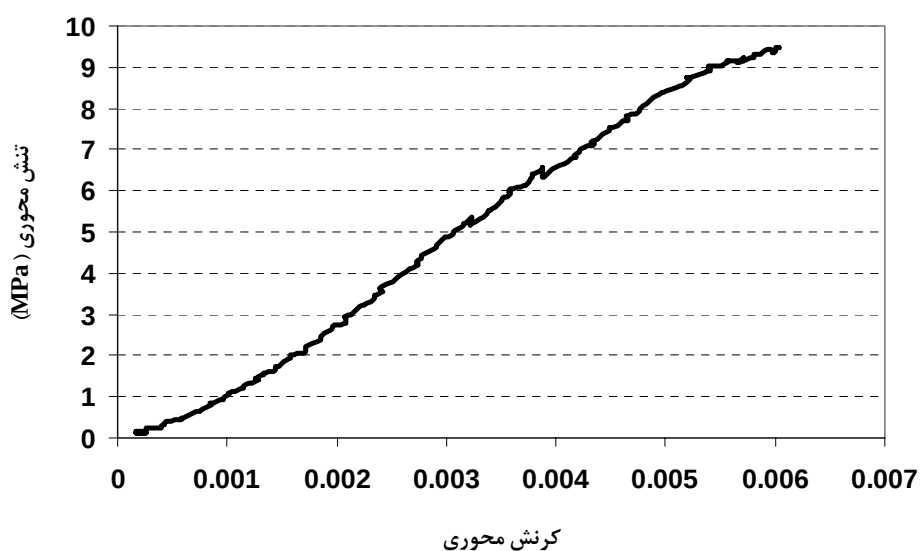
برای نمونه با طول خط واصل ۱۰ میلی‌متر با اعمال بارگذاری مطابق شکل (۶-۲۸) ابتدا از دو نوک هر دو ترک، ترک‌های کششی با راستای تقریباً عمود بر راستای ترک‌های موجود منشعب و با افزایش بار اعمالی رشد می‌کنند. راستای این ترک‌ها در حین رشد به راستای بارگذاری متمایل می‌شوند (شکل ۶-۲۸). با رشد ترک‌های کششی از نوک هر دو ترک، ترک‌های برشی نیز تقریباً در راستای ترک‌ها منشعب شده و رشد می‌کنند. همانطور که از شکل مذکور مشاهده می‌شود، راستای ترک‌های برشی همانند ترک‌های کششی واضح نیستند. ترک‌های برشی و کششی منشعب شده از دو نوک داخلی ترک‌ها رشد کرده و به هم می‌رسند. بعد از اتصال ترک‌ها، رشد ترک‌های کششی منشعب شده از دو نوک خارجی ترک‌ها ناپایدار شده و به ازای بار فشاری اعمالی مشخصی این ترک‌ها سریع رشد کرده و به مرزهای نمونه می‌رسند (شکل ۶-۲۹). نمودار تنش - کرنش این نمونه در شکل (۶-۳۰) نشان داده شده است. در طی آزمایش بعد از اتصال ترک‌ها و شروع مرحله ناپایدار رشد ترک‌های کششی، در منحنی بار افت محسوسی مشاهده می‌شود که این افت در منحنی تنش - کرنش کاملاً مشهود است. این افت با تنش ۵/۲۵ مگاپاسکال متناظر است. بنابراین مقدار تقریبی تنش منجر به رشد ناپایدار ترک‌های کششی برابر ۵/۲۵ مگاپاسکال است.



شکل (۶-۲۸): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها



شکل (۶-۲۹): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌های موجود و اتصال آن‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

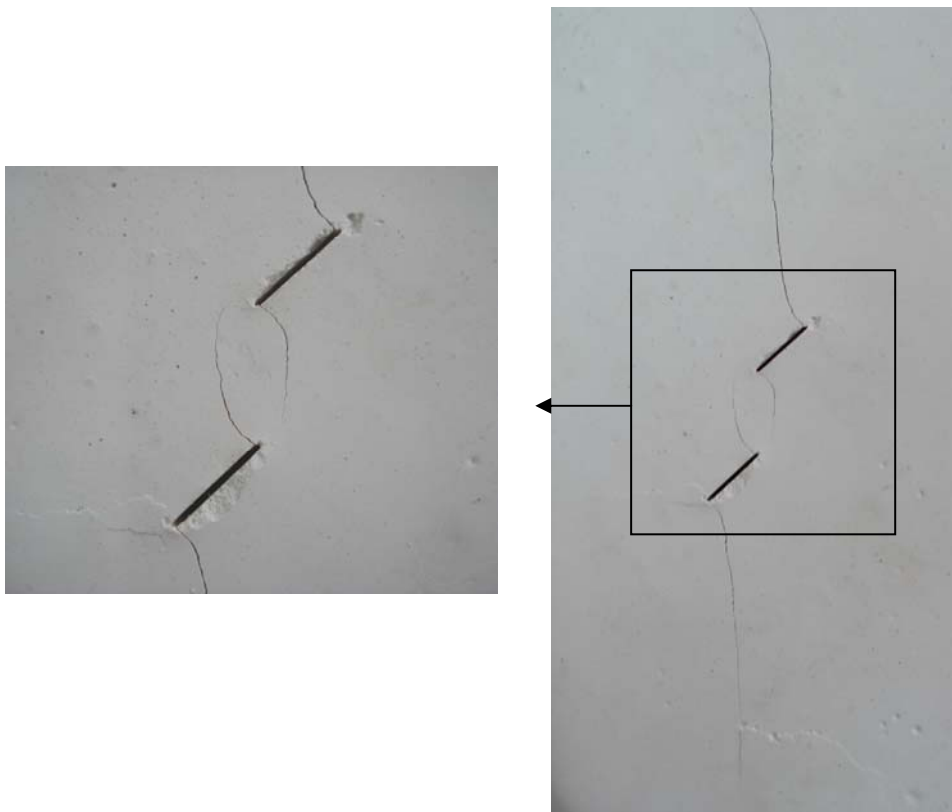


شکل (۶-۳۰): نمودار تنش - کرنش نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

مکانیزم انشعاب، رشد و اتصال ترک‌ها و نحوه گسیختگی تمامی نمونه‌ها با طول خط واصل مختلف یکسان می‌باشد. تنها تفاوت این است که با افزایش طول خط واصل، ترک‌های کششی منشعب از نوک داخلی ترک‌ها سریع‌تر به راستای بارگذاری متمایل می‌شوند. در ادامه برای بقیه نمونه‌ها نحوه رشد ترک‌ها کششی و برشی و مکانیزم اتصال ترک‌ها و گسیختگی نمونه بصورت شکل نشان داده شده و بار متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی خارجی با نمودار تنش - کرنش ارائه می‌گردد.

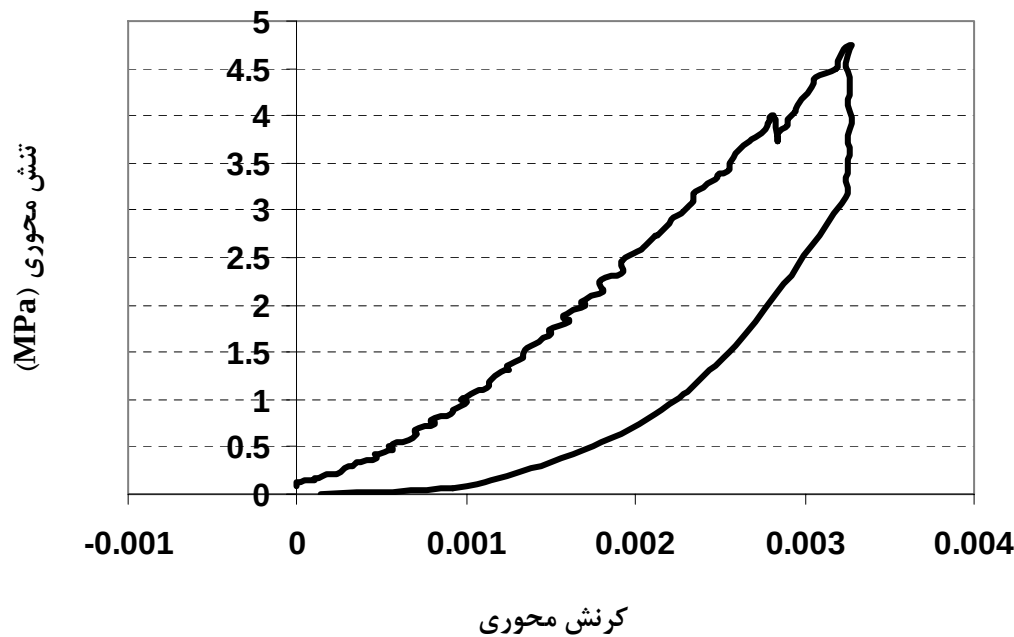
۶ - ۶ - ۱ - ۲ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۱۵ میلی متر

برای نمونه با طول خط واصل ۱۵ میلی‌متر با اعمال بارگذاری فشاری، شکل کلی رشد ترک‌های کششی و برشی، اتصال ترک‌ها و گسیختگی نمونه به صورت شکل (۶-۳۱) می‌باشد.



شکل (۳۱-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

در این نمونه نیز همانند نمونه قبلی با اعمال بارگذاری ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها رشد کرده و باعث اتصال ترک‌های اصلی می‌شوند (شکل ۶-۳۱-ب). نمودار تنش - کرنش این بارگذاری در شکل (۶-۳۲) نشان داده شده است. مقدار تقریبی بار متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی برابر ۴ مگاپاسکال می‌باشد.

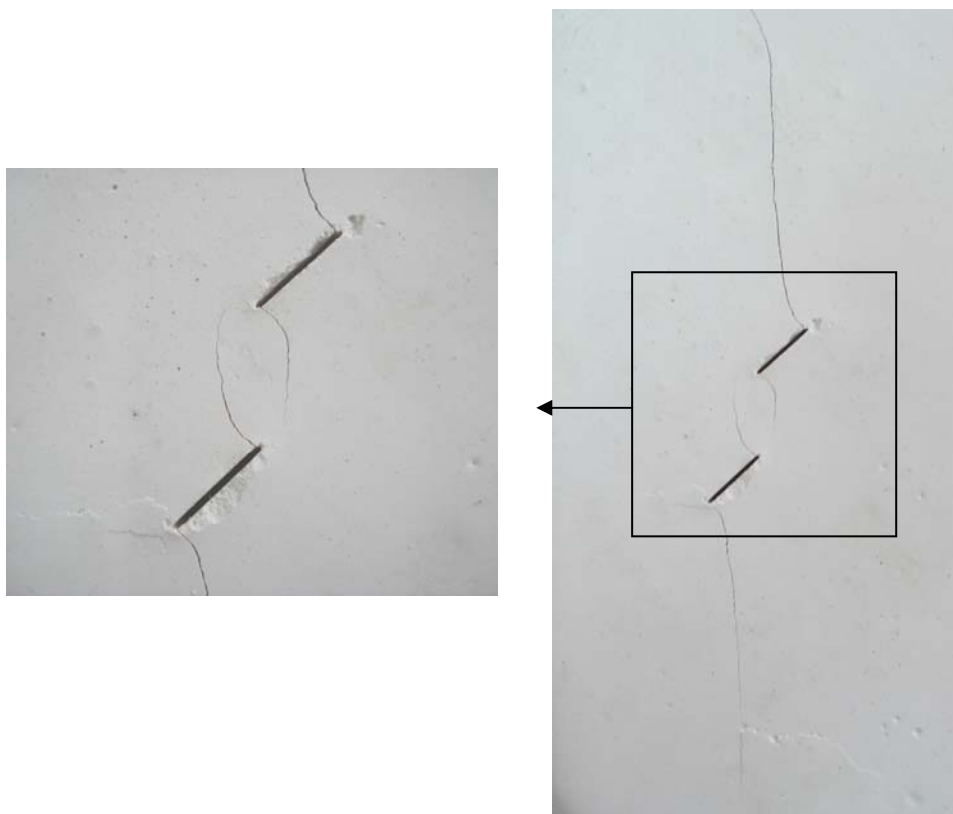


شکل (۶-۳۲): نمودار تنش - کرنش نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

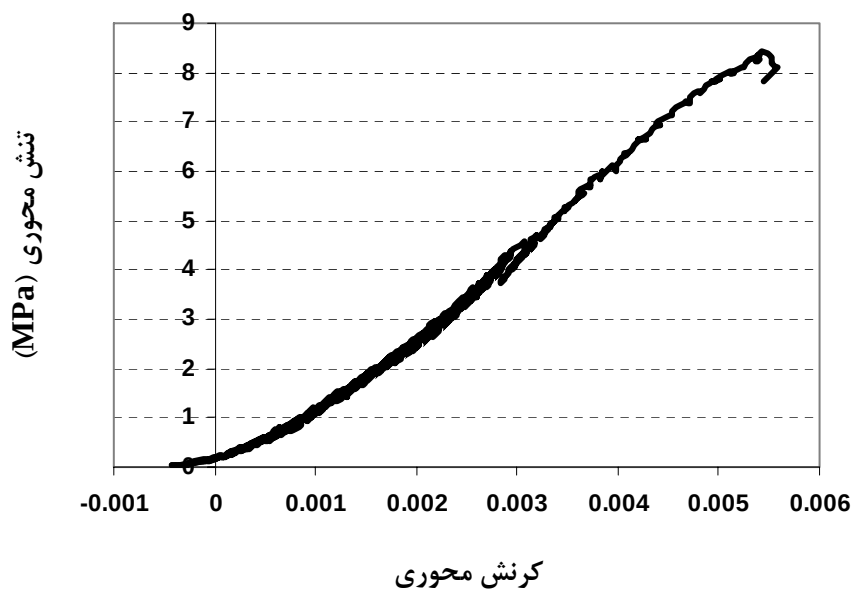
لازم به توضیح است که در این نمونه بعد از اتصال ترک‌ها و شروع رشد ناپایدار ترک‌ها، بار اعمالی به نمونه برداشته شد که در منحنی تنش - کرنش نمایان است.

۶ - ۶ - ۱ - ۳ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۱۸ میلی متر

برای نمونه با طول خط واصل ۱۸ میلی متر رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌های اصلی در شکل (۶-۳۳) و نمودار تنش - کرنش در شکل (۶-۳۴) نشان داده شده است. مقدار تقریبی بار متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی برابر ۴/۵۶ مگاپاسکال می‌باشد.



شکل (۳۳-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۸ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

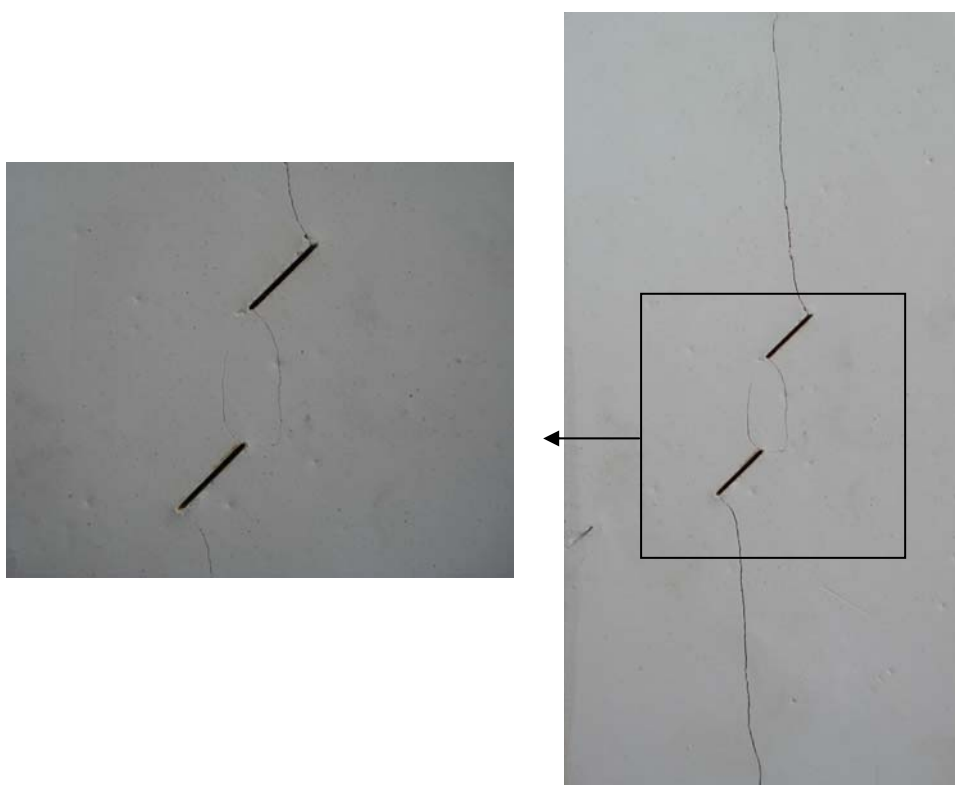


شکل (۳۴-۶): نمودار تنش - کرنش نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۱۸ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

در این نمونه نیز الگوی رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها، اتصال ترک‌ها و نحوه گسیختگی نمونه شبیه نمونه‌های قبلی می‌باشد.

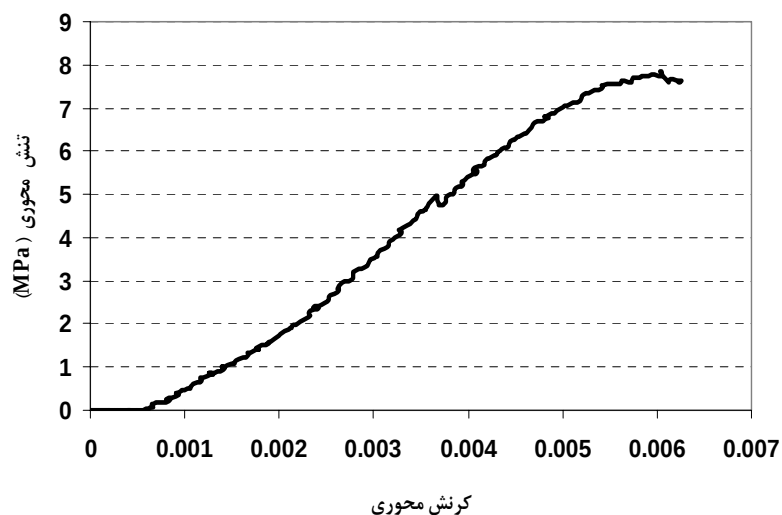
۶-۶-۱-۴ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۲۰ میلی متر

برای نمونه با طول خط واصل ۲۰ میلی متر با اعمال بارگذاری ترک‌های کششی و برشی به صورت شکل (۳۵-۶) رشد کرده و بهم متصل می‌شوند.



شکل (۳۵-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها، اتصال ترک‌ها و گسیختگی نمونه در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۲۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری.

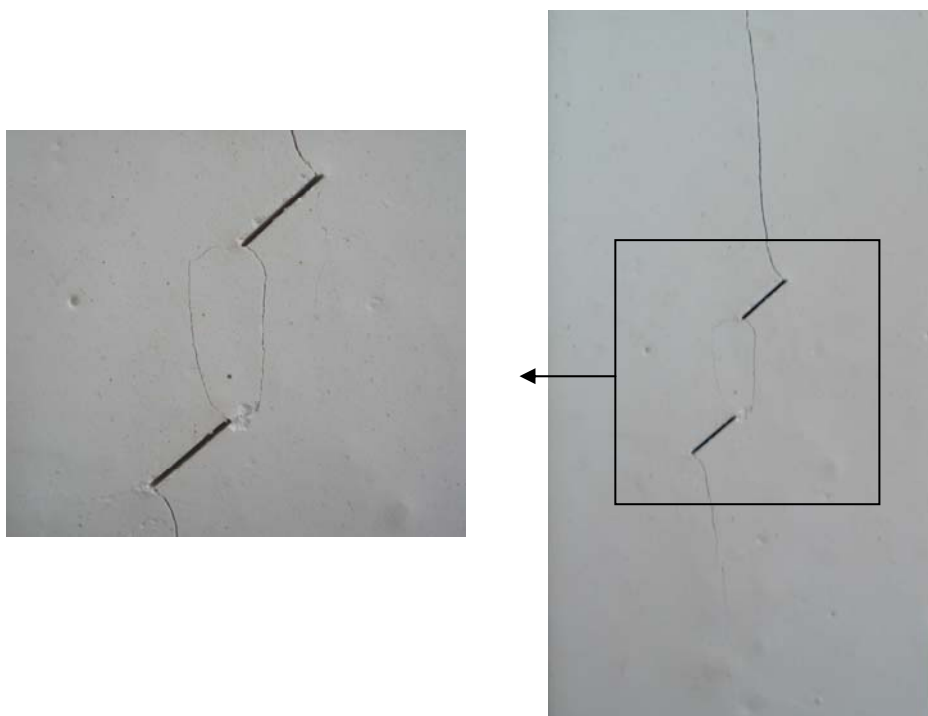
نمودار تنش - کرنش این نمونه در شکل (۳۶-۶) نشان داده شده که مقدار تقریبی بار متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی برابر ۴/۹۷ مگاپاسکال می‌باشد.



شکل (۶-۳۶): نمودار تنش - کرنش نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۲۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

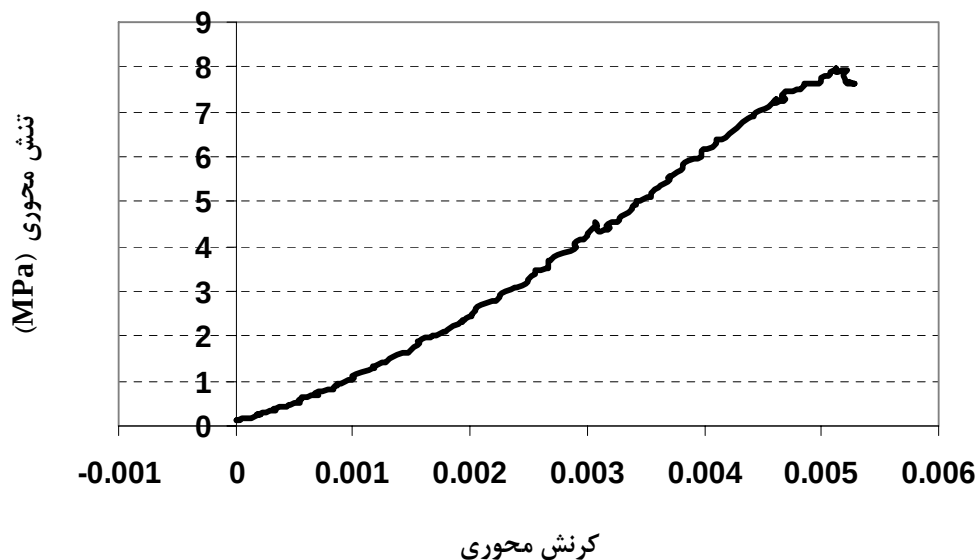
۶ - ۶ - ۱ - ۵ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۲۵ میلی متر

برای نمونه با طول خط واصل ۲۵ میلی متر با اعمال بارگذاری ترک‌های کششی و برشی به صورت شکل (۶-۳۷) رشد کرده و بهم متصل می‌شوند.



شکل (۶-۳۷): رشد ترک‌های کششی و برشی و اتصال ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۲۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

نمودار تنش - کرنش این بارگذاری در شکل (۳۸-۶) نشان داده شده و مقدار بار متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی برابر ۴/۵۲ مگاپاسکال می‌باشد.

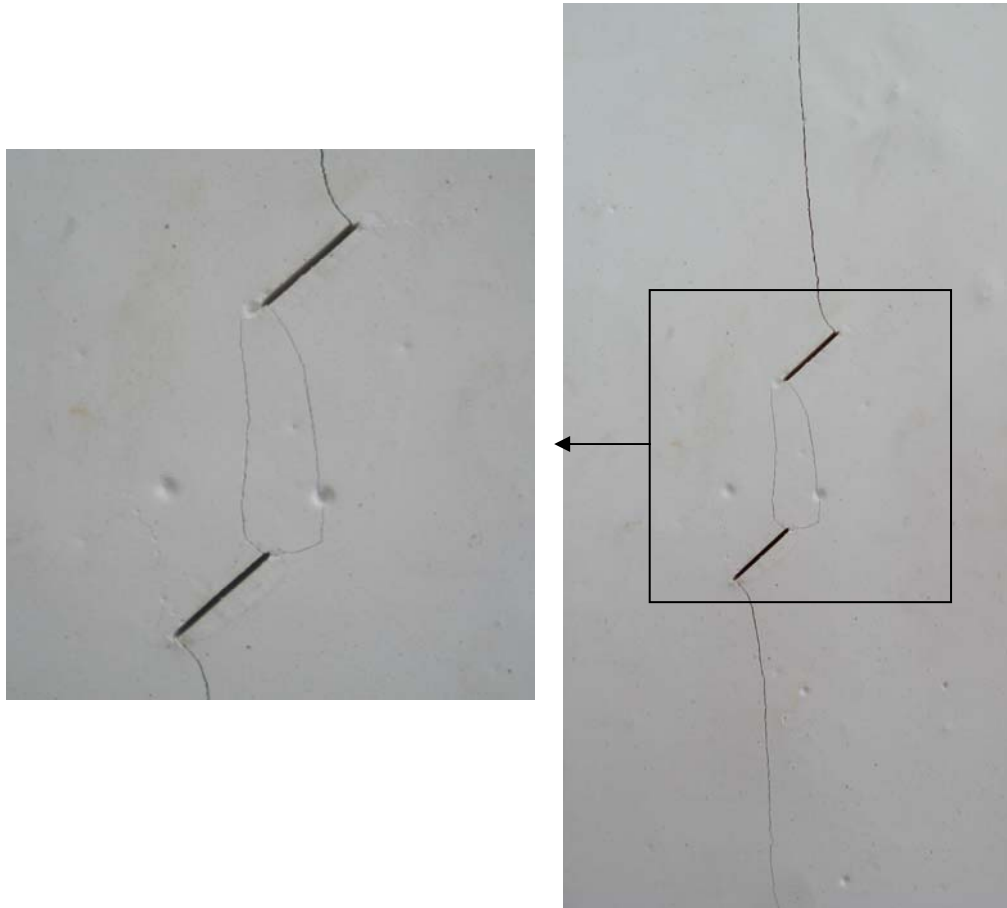


شکل (۳۸-۶): نمودار تنش - کرنش نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۲۵ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

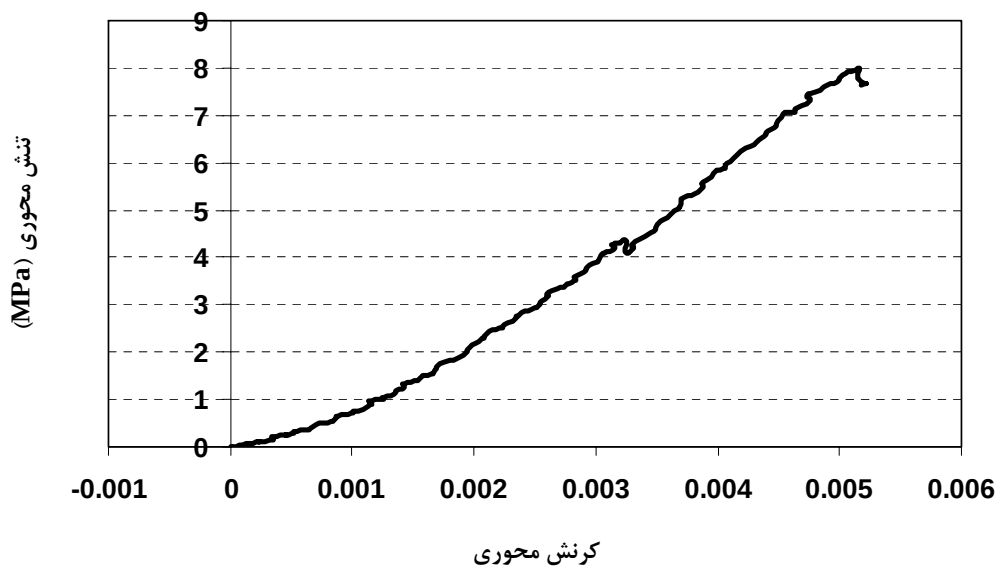
۶-۱-۶ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با طول خط واصل ۳۰ میلی متر

برای نمونه با طول خط واصل ۳۰ میلی متر با اعمال بارگذاری فشاری ترک‌های کششی و برشی به صورت شکل (۳۹-۶) رشد کرده و بهم متصل می‌شوند. در این نمونه به دلیل افزایش طول خط واصل راستای ترک‌های کششی منشعب شده، بعد از انشعاب، سریع تر از نمونه‌های قبلی به راستای بارگذاری متمایل می‌گردد.

نمودار تنش - کرنش این نمونه در شکل (۴۰-۶) نشان داده شده و مقدار بار متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی برابر ۴/۳۴ مگاپاسکال می‌باشد.



شکل (۶-۳۹): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۳۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری



شکل (۶-۴۰): نمودار تنش - کرنش نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۳۰ میلی متر تحت بار فشاری تک محوری

همانطور که مشاهده گردید شکل کلی انشعاب ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها، اتصال ترک‌ها و گسیختگی نمونه‌ها برای تمامی نمونه‌های حاوی دو ترک با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و با طول خط واصل متغیر یکسان بوده و از الگوی یکسانی تبعیت می‌کنند. یعنی در تمامی نمونه‌ها تحت بارگذاری از نوک ترک‌ها ابتدا ترک‌های کششی در راستای تقریباً عمود بر راستای ترک‌ها و سپس ترک‌های برشی تقریباً در راستای ترک‌ها منشعب شده و در طی افزایش بار فشاری رشد می‌کنند. با رشد این ترک‌ها، ترک‌های کششی و برشی منشعب شده از نوک داخلی ترک‌ها به هم می‌رسند و باعث اتصال ترک‌های اصلی می‌شوند. بعد از اتصال ترک‌ها، ترک‌های کششی منشعب شده خارجی به طور ناپایدار رشد کرده و به مرزهای بالایی و پایینی نمونه می‌رسند تا نمونه گسیخته گردد. بنابراین تغییر طول خط واصل دو ترک در الگو انشعاب و رشد ترک‌های کششی و برشی و اتصال ترک‌های اصلی و نهایتاً گسیختگی نمونه تاثیری ندارد.

در مطالعات آزمایشگاهی فقط زمان شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی خارجی و بار نهایی گسیختگی نمونه از نمودار تنش - کرنش ثبت می‌شود. برای مقادیر مختلف طول خط واصل دو ترک این مقادیر در جدول (۹-۶) درج شده است.

جدول (۹-۶): بار شروع رشد ناپایدار ترک‌ها و بار گسیختگی نمونه برای مقادیر مختلف طول خط واصل دو ترک

طول خط واصل (mm)	۱۰	۱۵	۱۸	۲۰	۲۵	۳۰
بار شروع رشد ناپایدار ترک‌ها (MPa)	۵/۲۵	۴/۰	۴/۵۶	۴/۹۷	۴/۵۲	۴/۳۴
بار گسیختگی نمونه (MPa)	۹/۴۸	-	۸/۴۳	۷/۸۴	۷/۹۷	۷/۹۹

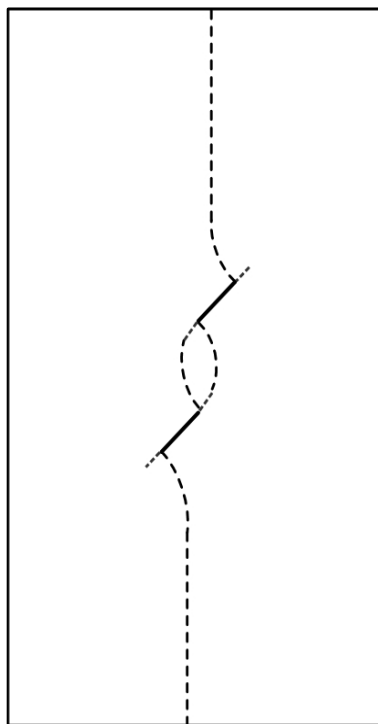
نمونه‌های آزمایشگاهی که در این قسمت با مقادیر متغیر طول خط واصل دو ترک مطالعه شده‌اند، در فصل پنجم بطور عددی مدل‌سازی شده و تحلیل شده‌اند. برای اعتبارسنجی نتایج عددی روش بدون مش گالرکین، نتایج حاصل از مطالعات عددی و آزمایشگاهی مکانیزم انشعاب، اتصال و گسیختگی

نمونه‌های حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل متغیر در ادامه باهم مقایسه می‌گردد.

برای نمونه با خط واصل ۲۰ میلی‌متر مکانیزم رشد، اتصال و گسیختگی نمونه با مدل‌سازی عددی و تست آزمایشگاهی در شکل (۶-۴۱) نشان داده شده است.



(ب)



(الف)

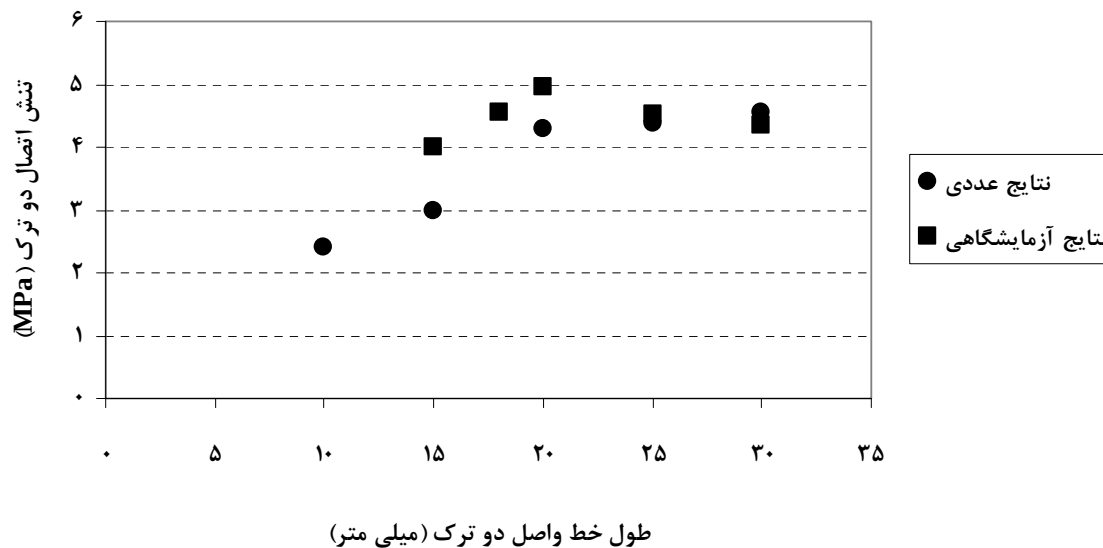
شکل (۶-۴۱): نتایج عددی و آزمایشگاهی انشعاب، اتصال و گسیختگی نمونه حاوی دو ترک با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی‌متر، شیب خط واصل ۹۰ درجه و طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر

همچنین برای این نمونه مقدار پیش بینی عددی زاویه انشعاب ترک‌های کششی و مقدار اندازه‌گیری شده آزمایشگاهی این زاویه‌ها در جدول (۶-۱۰) با هم مقایسه شده‌اند.

جدول (۶-۱۰): مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی زاویه انشعاب ترک‌های کششی از نوک ترک‌های اصلی

روش	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
عددی	۱۲۷	۱۳۱	۱۳۱	۱۲۷
آزمایشگاهی	۱۳۳	۱۳۰	۱۳۰	۱۲۹

در مطالعات عددی نیز مقدار بار منجر به شروع رشد ناپایدار ترک‌ها برای مقادیر مختلف طول خط واصل دو ترک ثبت گردید. این پارامترها در مطالعات آزمایشگاهی نیز از روی نمودار تنش - کرنش‌ها تعیین شده و در نمودار شکل (۴۲-۶) با نتایج عددی مقایسه شده‌اند.

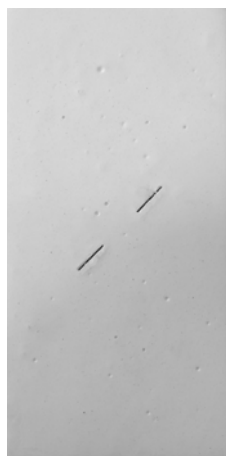


شکل (۴۲-۶): مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی بار منجر به شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی

اشکال (۴۱-۶) و (۴۲-۶) و مقادیر ثبت شده در جدول (۶-۱۰) نشان می‌دهد که نتایج عددی و آزمایشگاهی تطابق خوبی باهم دارند. لازم به ذکر است داده‌های آزمایشگاهی بر خلاف نتایج عددی روند مشخصی را نشان نمی‌دهند که این مساله به ماهیت مطالعات آزمایشگاهی مربوط می‌شود.

۶ - ۶ - ۲ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک با شیب متغیر خط واصل

برای مطالعه آزمایشگاهی تاثیر پارامتر هندسی شیب خط واصل دو ترک بر مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها، مطابق شکل (۴۳-۶) یک سری نمونه حاوی دو ترک با طول‌های ثابت ۱۵ میلی‌متر، شیب ثابت ۴۵ درجه، طول ثابت خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب متغیر خط واصل ۴۵، ۶۰، ۷۵، ۹۰، ۱۰۵ و ۱۲۰ درجه از جنس گچ تهیه شده است. این نمونه‌ها تحت بار فشاری قرار داده شده و رفتار شکست آنها ثبت شده است. در ادامه نتایج حاصل ارائه می‌گردد.



$\beta=45^\circ$



$\beta=60^\circ$



$\beta=75^\circ$



$\beta=90^\circ$



$\beta=105^\circ$



$\beta=120^\circ$

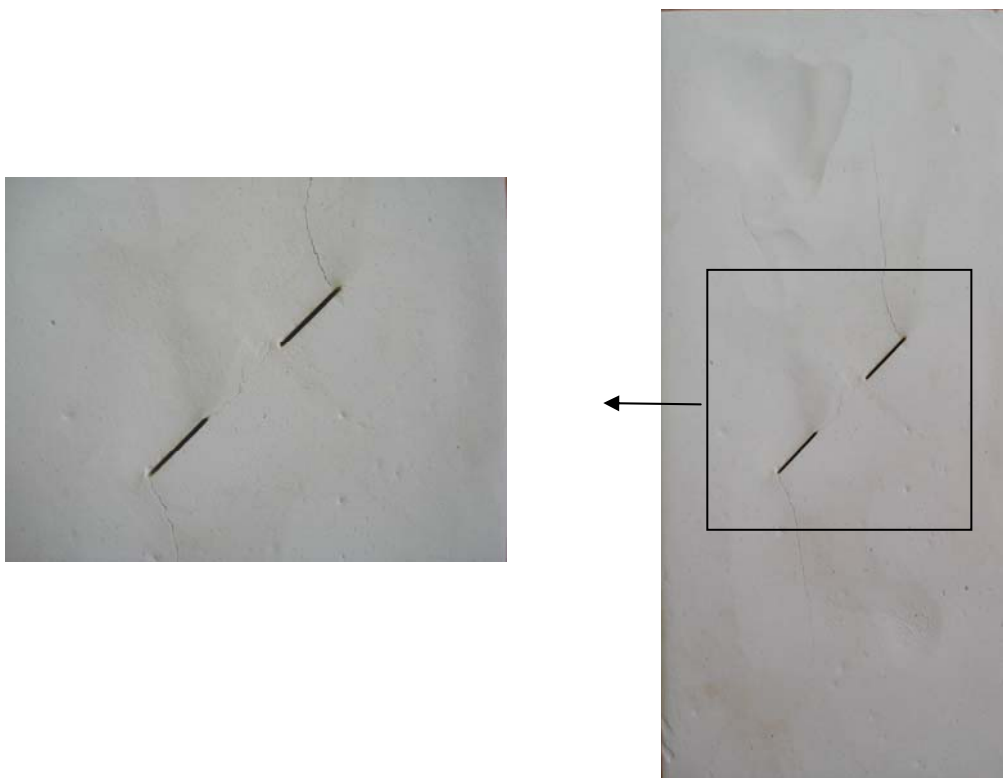
شکل (۴۳-۶): نمونه‌های آزمایشگاهی حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی‌متر و با مقدار متغیر شیب خط واصل دو ترک

۶ - ۶ - ۲ - ۱ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۴۵ درجه

مکانیزم انشعاب، انتشار و اتصال ترک‌ها برای دو نمونه و حاوی دو ترک شیب‌دار با طول ۱۵ میلی‌متر، شیب خط واصل ۴۵ درجه و طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر در شکل‌های (۴۴-۶) و (۴۵-۶) نشان داده شده است. مطابق شکل‌های مذکور از دو نوک هر دو ترک، ترک‌های برشی و ترک‌های کششی منشعب می‌شوند. ترک‌های برشی در راستای تقریبی ترک‌های اصلی و ترک‌های کششی با راستای تقریباً عمود بر راستای ترک‌های موجود منشعب می‌شوند. راستای ترک‌های کششی در حین رشد به راستای بارگذاری متمایل می‌شوند. با اعمال بارگذاری و رشد ناپایدار ترک‌های برشی این ترک‌ها به هم رسیده و باعث اتصال ترک‌های اصلی می‌شوند. بعد از اتصال ترک‌ها، ترک‌های کششی خارجی بطور ناپایدار رشد کرده و به مرزهای نمونه می‌رسند و باعث گسیختگی نمونه می‌گردند. در این نمونه اتصال از نوع برشی است.



شکل (۴۴-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۴۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری

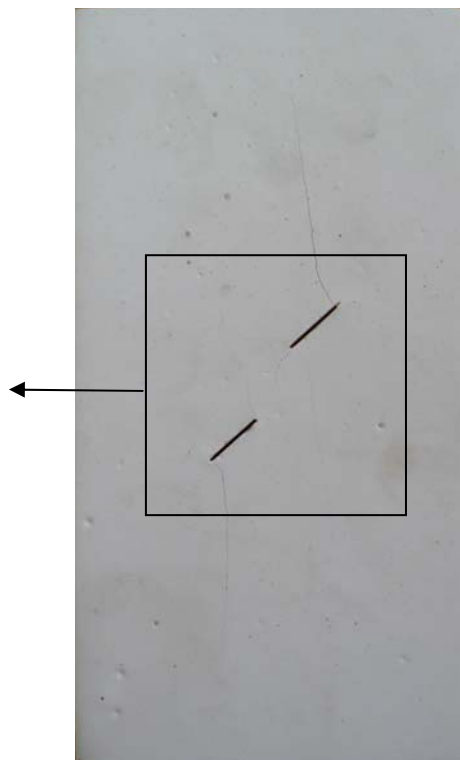


شکل (۴۵-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها در نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۴۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری

در آزمایش دو نمونه مذکور از دستگاه بارگذاری متفاوتی استفاده شد که به خاطر مقاومت کم نمونه‌های گچی، امکان رسم نمودار تنش - کرنش این نمونه‌ها در دستگاه مورد استفاده وجود نداشت.

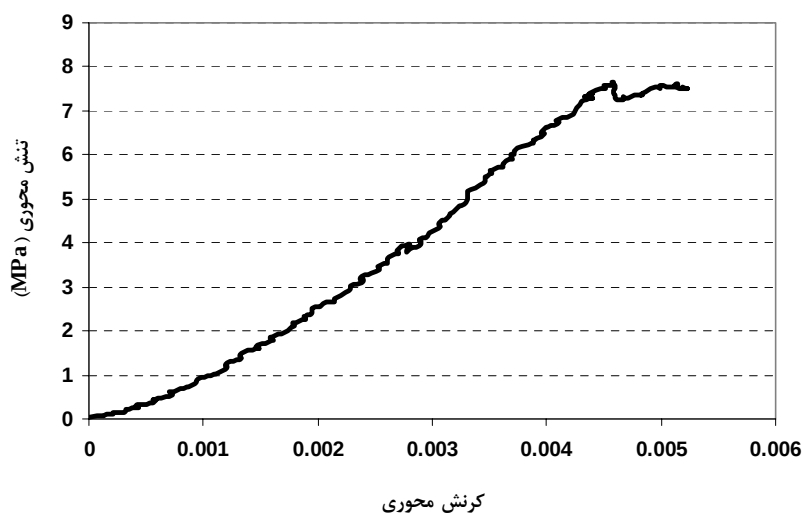
۶ - ۲ - ۲ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۶۰ درجه

برای نمونه با شیب خط واصل ۶۰ درجه نحوه انشعاب ترک‌های کششی و برشی از نوک‌های داخلی و خارجی ترک‌ها در شکل (۴۶-۶) نشان داده شده است. همانطور که از شکل مذکور مشاهده می‌شود، از دو نوک داخلی، ترک‌های برشی در راستای ترک‌های اصلی و ترک‌های کششی در راستای عمود بر ترک‌ها منشعب شده‌اند. در دو نوک خارجی نیز ترک‌های کششی منشعب شده عمود بر راستای ترک‌های اصلی بوده ولی ترک‌های برشی از راستای ترک‌های اصلی مقداری منحرف شده‌اند. با افزایش بارگذاری، ترک‌های برشی منشعب شده از دو نوک داخلی با مکانیزم کشش به هم می‌رسند و باعث اتصال دو ترک اصلی می‌شوند. در واقع اتصال از نوع برشی - کششی است.



شکل (۴۶-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌ها در نمونه گچی حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۶۰ درجه تحت بار فشاری تک محوری

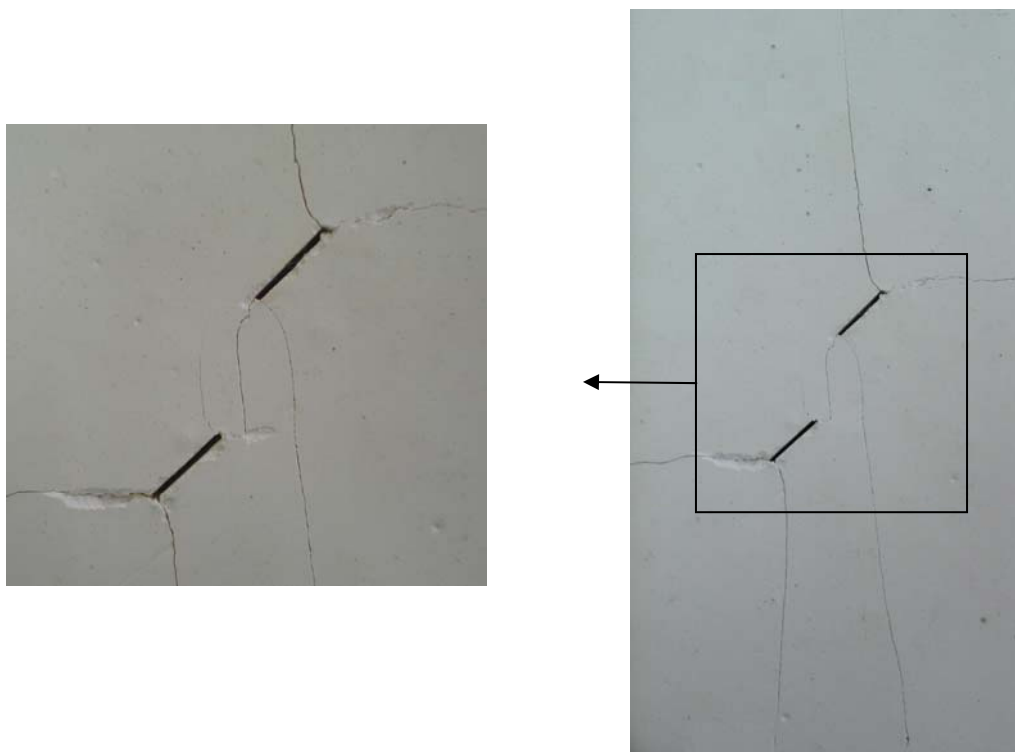
نمودار تنش - کرنش این نمونه در شکل (۴۷-۶) نشان داده شده است. در این نمودار مقدار تقریبی تنش متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی ۳/۹۲ مگاپاسکال است.



شکل (۴۷-۶): نمودار تنش - کرنش نمودار نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی‌متر، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۶۰ درجه تحت بار فشاری تک محوری

۶ - ۲ - ۳ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۷۵ درجه

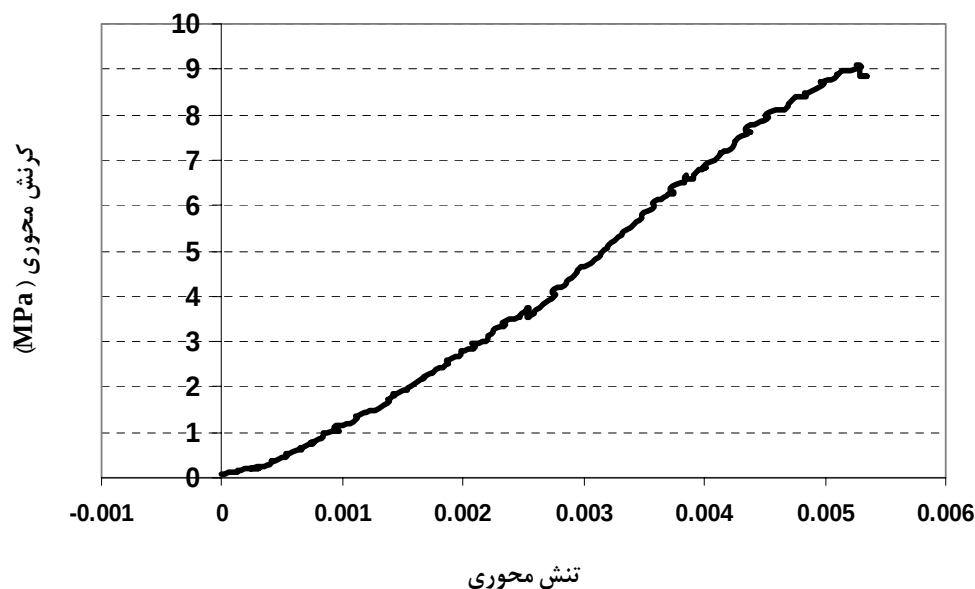
برای نمونه با شیب خط واصل ۷۵ درجه نیز همانند شیب خط واصل ۶۰ درجه ابتدا از نوک ترک‌ها، ترک‌های کششی و برشی شروع به رشد می‌کنند، سپس با افزایش بارگذاری، ترک‌های برشی منشعب شده از دو نوک داخلی با مکانیزم کشش به هم رسیده و باعث اتصال دو ترک اصلی می‌شوند.



شکل (۴۸-۶): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌ها در نمونه گچی حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۷۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری

نمودار تنش - کرنش این نمونه در نمودار (۴۹-۶) نشان داده شده است. در این نمودار مرحله بعد از اتصال ترک‌ها و زمان شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی به طور تقریبی با $3/73$ مگاپاسکال متناظر است.

مکانیزم انشعاب، انتشار و اتصال ترک‌ها و گسیختگی نمونه برای نمونه حاوی دو ترک با شیب خط واصل ۹۰ درجه در قسمت (۴-۱-۶-۶) بحث شده است. در این نمونه اتصال ترک‌ها از نوع کششی - برشی بدست آمد.

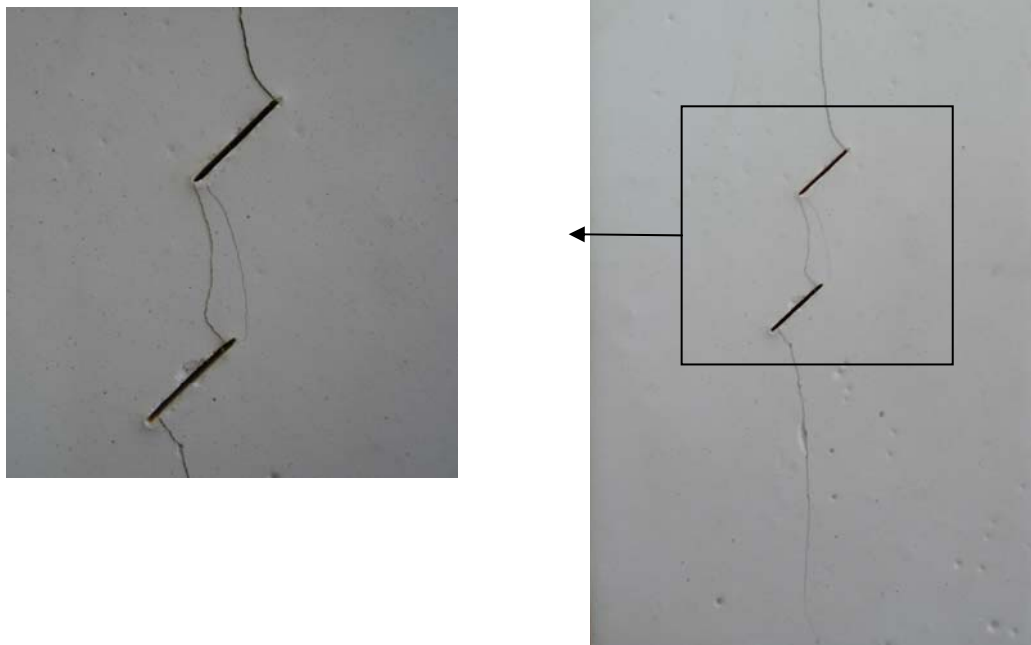


شکل (۶-۴۹): نمودار تنش - کرنش نمودار نمونه حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی متر، طول خط واصل ۲۰ میلی متر و شیب خط واصل ۷۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری

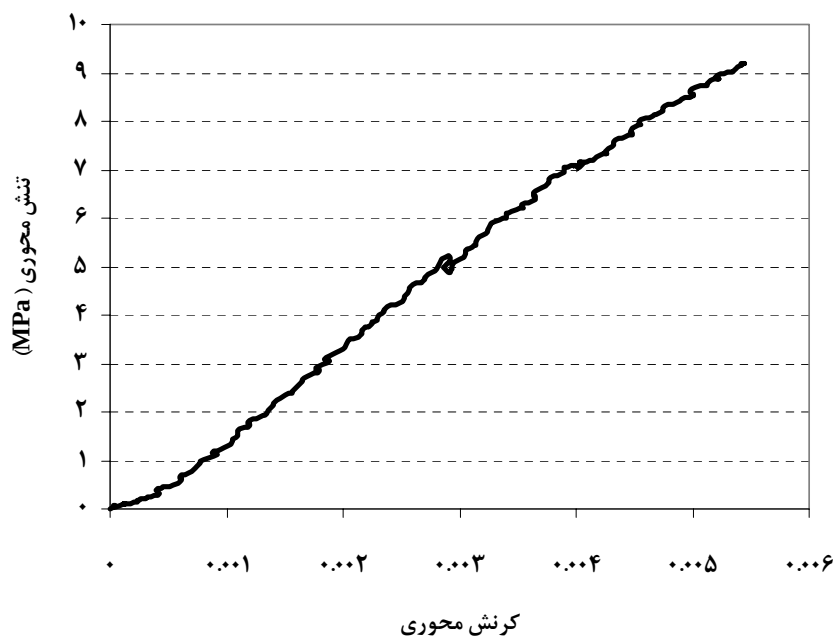
۶ - ۶ - ۲ - ۴ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۱۰۵ درجه

برای نمونه با شیب خط واصل ۱۰۵ درجه نحوه انشعاب ترک‌های کششی از نوک داخلی و خارجی ترک‌ها در شکل (۶-۵۰) نشان داده شده است. همانطور که از شکل مذکور مشاهده می‌شود، با اعمال بارگذاری، از نوک ترک‌ها، ترک‌های کششی در راستای عمود بر امتداد ترک‌ها منشعب و رشد می‌کنند. با رشد ترک‌های کششی، ترک‌های برشی نیز به طور جزئی رشد می‌کنند. با به هم رسیدن ترک‌های کششی و برشی اتصال ترک‌ها صورت می‌گیرد. در این نمونه رشد ترک‌های برشی از نوک داخلی ترک‌ها در مقایسه با نمونه با شیب خط واصل ۹۰ درجه نامحسوس است ولی وجود دارد. نوع اتصال این نمونه نیز مانند شیب خط واصل ۹۰ درجه، کششی - برشی است.

نمودار تنش - کرنش این نمونه در شکل (۶-۵۱) نشان داده شده است. در این نمودار مقدار تقریبی تنش متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی ۴/۹۵ مگاپاسکال است.



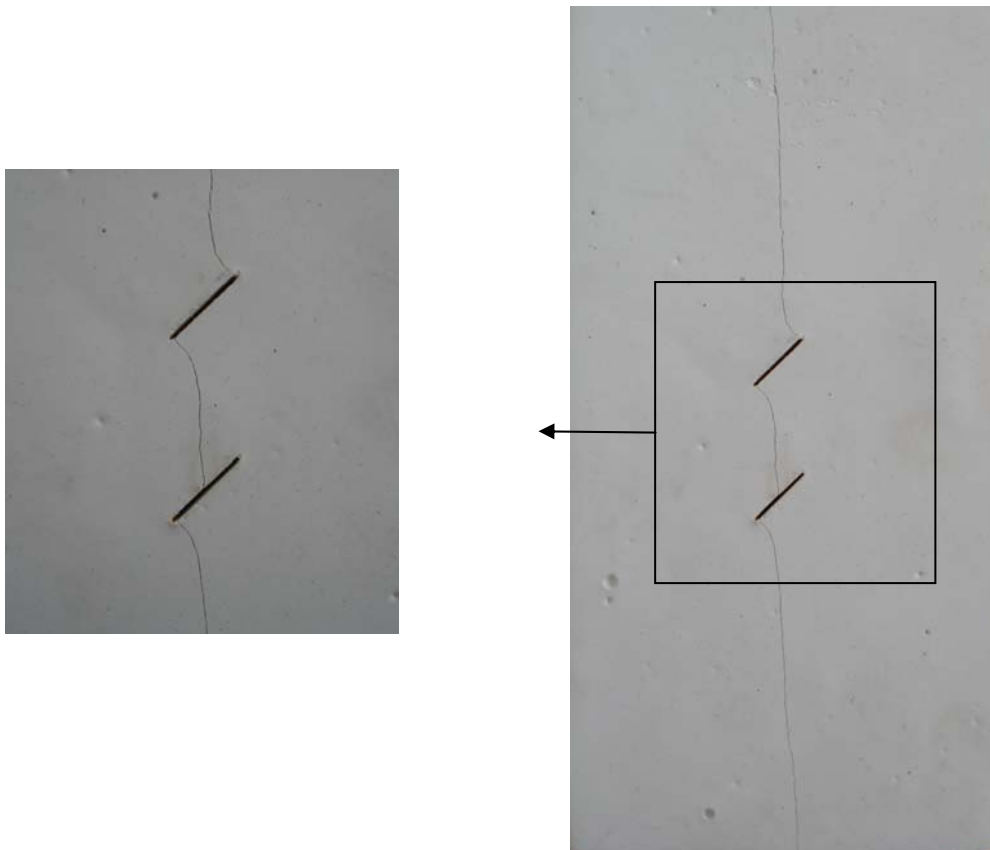
شکل (۶-۵۰): رشد ترک‌های کششی و برشی از نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌ها در نمونه گچی حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۱۰۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری



شکل (۶-۵۱): نمودار تنش - کرنش نمودار نمونه حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی‌متر، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۱۰۵ درجه تحت بار فشاری تک محوری

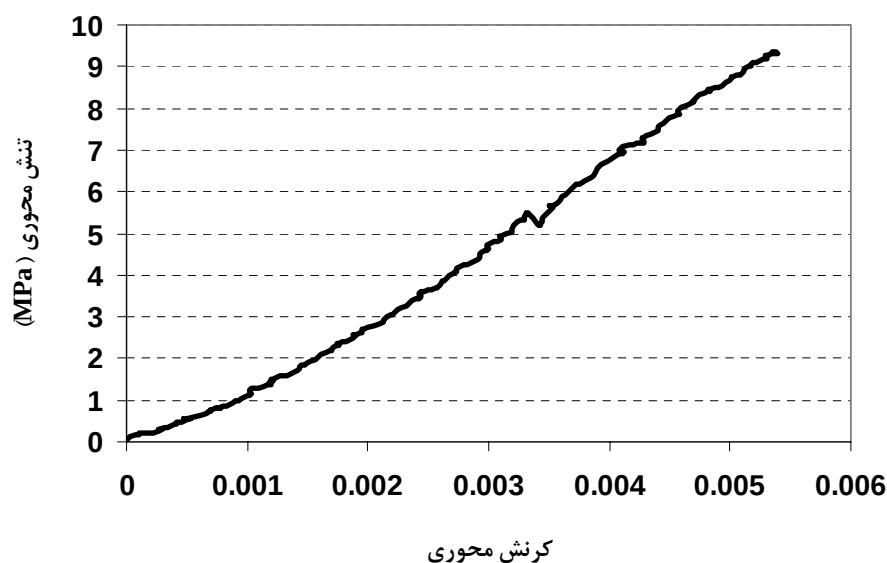
۶ - ۶ - ۲ - ۵ - رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه با شیب خط واصل ۱۲۰ درجه

برای نمونه با شیب خط واصل ۱۲۰ درجه نحوه انشعاب ترک‌های کششی از نوک‌های داخلی و خارجی ترک‌ها در شکل (۵۲-۶) نشان داده شده است. در این نمونه با اعمال بار فشاری فقط انشعاب ترک‌های کششی در نوک ترک‌های اصلی قابل مشاهده است. با افزایش بارگذاری ترک‌های کششی بویژه ترک‌های کششی داخلی رشد کرده و ترک کششی منشعب از یک ترک به وسط ترک دیگر رسیده و باعث اتصال ترک‌ها شده است. اتصال ترک در این نمونه از نوع کششی است.



شکل (۵۲-۶): رشد ترک‌های کششی نوک ترک‌ها و اتصال ترک‌ها در نمونه گچی حاوی دو ترک شیب‌دار با شیب ۴۵ درجه، طول خط واصل ۲۰ میلی‌متر و شیب خط واصل ۱۲۰ درجه تحت بار فشاری تک محوری

نمودار تنش - کرنش این نمونه در شکل (۵۳-۶) نشان داده شده است. در این نمودار مقدار تقریبی تنش متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی ۵/۴۹ مگاپاسکال است.



شکل (۵۳-۶): نمودار تنش - کرنش نمودار نمونه حاوی دو ترک شیبدار با شیب ۴۵ درجه، طول ۱۵ میلی متر، طول خط واصل ۲۰ میلی متر و شیب خط واصل ۱۲۰ درجه تحت بار فشاری تک محوری

در مطالعات آزمایشگاهی فقط مقدار تقریبی تنش شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی خارجی و بار نهایی گسیختگی نمونه از نمودار تنش - کرنش ثبت شده است. برای مقادیر مختلف شیب خط واصل دو ترک این مقادیر در جدول (۱۳-۶) درج شده است. نتایج ثبت شده در جدول مذکور نشان می‌دهد که با افزایش شیب خط واصل، مقدار بار لازم برای اتصال ترک‌ها افزایش می‌یابد.

جدول (۱۱-۶): بار شروع ناپایدار رشد ترک‌ها و بار گسیختگی نمونه برای مقادیر مختلف شیب خط واصل دو ترک

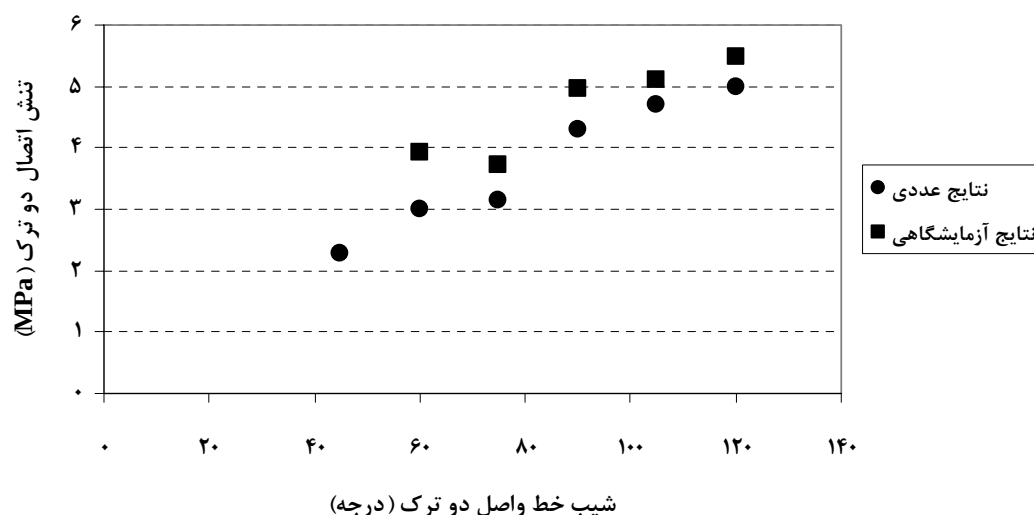
شیب خط واصل (درجه)	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰	۱۰۵	۱۲۰
بار شروع رشد ناپایدار ترک‌ها (MPa)	-	۳/۹۲	۳/۷۳	۴/۹۷	۵/۱۲	۵/۴۹
بار گسیختگی نمونه (MPa)	۸	۷/۷	۹/۰۵	۷/۸۴	۸/۹	۹/۲

مطالعات آزمایشگاهی نشان می‌دهد شیب خط واصل دو ترک در انتشار و اتصال ترک‌ها تاثیر بسزایی داشته و الگوی انتشار و اتصال ترک‌ها را کنترل می‌کند. برای شیب‌های مختلف چهار نوع اتصال: برشی، برشی - کششی، کششی - برشی و کششی مشاهده می‌شود. این چهار مود اتصال در شکل (۵۴-۶) نشان داده شده است.



شکل (۶-۵۴): انواع اتصال ترک‌ها در مطالعات آزمایشگاهی رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک

نمونه‌های آزمایشگاهی که در این قسمت با مقادیر متغیر شیب خط واصل دو ترک مطالعه شده‌اند، در فصل پنجم بطور عددی مدل‌سازی شده و تحلیل شده‌اند. در مطالعات عددی نیز مقدار بار منجر به شروع رشد ناپایدار ترک‌ها برای مقادیر مختلف شیب خط واصل دو ترک ثبت گردیده است. همانطور که اشاره شد مقدار تقریبی این پارامترها در مطالعات آزمایشگاهی نیز از روی نمودار تنش - کرنش نمونه‌ها تعیین شده است. نتایج عددی و آزمایشگاهی تنش متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی در شکل (۶-۵۵) با هم مقایسه شده‌اند. نمودار (۶-۵۵) نشان می‌دهد که دقت نتایج روش عددی بدون مش گالرکین مطلوب است..



شکل (۶-۵۵): مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی تنش متناظر با شروع رشد ناپایدار ترک‌های کششی

۶-۷ - نتیجه‌گیری

در این فصل برای اعتبارسنجی مطالعات عددی رشد و اتصال ترک‌ها، نمونه‌های آزمایشگاهی مشابه تهیه و بارگذاری شدند. برای مقایسه نتایج مطالعات عددی و آزمایشگاهی، لازم بود خواص مکانیکی مصالح گچی مورد استفاده در نمونه‌های آزمایشگاهی، در مدل‌سازی عددی استفاده شود، بنابراین خواص مکانیکی این مصالح از قبیل ضریب ارتجاعی، نسبت پواسون، مقاومت فشاری تک محوری، مقاومت کششی، چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی با استفاده از انواع آزمایش‌ها تعیین شدند.

چهار سری نمونه تهیه و بارگذاری شدند و نتایج حاصل با نتایج عددی مقایسه شدند. در سری اول مکانیزم رشد ترک در نمونه‌های مکعبی با یک ترک شیب‌دار مطالعه و زاویه انشعاب ترک‌های کششی با نتایج عددی مقایسه شد. در سری دوم، نمونه‌های دیسکی حاوی یک ترک شیب‌دار بررسی و بار منجر به رشد ترک و زاویه انشعاب ترک‌های کششی با نتایج عددی متناظر مقایسه شدند. در سری سوم مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های مکعبی حاوی دو ترک شیب‌دار با طول متغیر خط واصل مطالعه و با نتایج عددی مقایسه شد. تغییر طول خط واصل در الگوی کلی رشد ترک بی تاثیر است. در نهایت در سری چهارم مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های مکعبی حاوی دو ترک

شیبدار با شیب متغیر خط واصل بررسی شد. در این قسمت نیز همانند مطالعات عددی چهار نوع اتصال مشاهده شد.

مقایسه کمی و کیفی نتایج عددی و آزمایشگاهی نشان می‌دهد که الگوی انشعاب، انتشار و اتصال ترک‌ها و در نهایت گسیختگی نمونه در مطالعات عددی و آزمایشگاهی تطابق خوبی با هم دارند.

فصل هفتم

نتایج و پیشنهادات

۷ - ۱ - مقدمه

در این تحقیق مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در محیط‌های سنگی به طور عددی و آزمایشگاهی مطالعه شد. برای مدل‌سازی عددی ترک‌ها از روش عددی بدون مش گالرکین استفاده شد. در کاربرد روش عددی بدون مش گالرکین، از توابع پایه خطی و تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم برای تشکیل توابع شکل، از ضرایب لاگرانژ برای اعمال شرایط مرزی مساله، از شبکه انتگرال‌گیری و تربیع گوس برای محاسبه انتگرال‌ها و از معیار رویت‌پذیری برای مدل‌سازی ترک‌ها استفاده گردید.

با استفاده از مدل‌های عددی، ابتدا ضرایب تمرکز تنش در نوک ترک‌ها برای حالت‌های مختلف هندسه ترک و بارگذاری، تعیین و با نتایج سایر روش‌های عددی و تحلیلی مقایسه گردید. در مرحله بعد معیارهای مختلف رشد ترک توصیف و دو معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش موضعی ارزیابی شدند و معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش به عنوان معیار مناسب انتخاب گردید.

در مرحله بعد با استفاده از معیار انتخابی، مکانیزم رشد ترک در نمونه‌های مستطیلی و دیسکی حاوی یک ترک شیب‌دار به ازای مقادیر مختلف شیب ترک و همچنین مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های مستطیلی حاوی دو ترک به ازای مقادیر مختلف دو پارامتر هندسی طول خط واصل و شیب خط واصل با روش بدون مش گالرکین و معیار انتخابی مدل‌سازی شد.

در تمامی مراحل مدل‌سازی با روش بدون مش گالرکین، الگوریتم‌های لازم تهیه و برنامه‌های کامپیوتری آنها در محیط MATLAB کدنویسی شد.

در ادامه صحت و اعتبار مطالعات عددی فوق با مطالعات آزمایشگاهی متعددی ارزیابی شد. به این منظور چهار سری نمونه؛ نمونه‌های مکعبی حاوی یک ترک با شیب متغیر، نمونه‌های دیسکی حاوی یک ترک با شیب متغیر، نمونه‌های مکعبی حاوی دو ترک با طول متغیر خط واصل و نمونه‌های مکعبی حاوی دو ترک با شیب متغیر خط واصل تهیه شد و تحت بار فشاری تک محوری مکانیزم رشد ترک و اتصال ترک‌ها در این نمونه‌ها بررسی گردید.

برای مقایسه نتایج مطالعات عددی و آزمایشگاهی، لازم بود خواص مکانیکی مصالح گچی مورد استفاده در نمونه‌های آزمایشگاهی، در مدل‌سازی عددی استفاده شود، بنابراین خواص مکانیکی این مصالح از قبیل ضریب ارتجاعی، نسبت پواسون، مقاومت فشاری تک محوری، مقاومت کششی، چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی با استفاده از انواع آزمایش‌ها تعیین شدند. در ادامه نتایج حاصل از هر یک از مراحل فوق ارائه می‌شود.

۷-۲- نتایج تحقیق

نتایج حاصل از مطالعات عددی و آزمایشگاهی در این تحقیق به صورت زیر ارائه می‌گردد:

- با استفاده از برنامه‌های کامپیوتری تهیه شده بر مبنای روش بدون مش گالرکین، میدان جابجایی و تنش در دامنه محیط‌های سنگی با هندسه و شرایط بارگذاری دلخواه و با تعداد ترک دلخواه قابل محاسبه است. در دو مثال میدان جابجایی و تنش در دامنه نمونه‌هایی با هندسه متفاوت ترک و تحت شرایط مختلف بارگذاری محاسبه شدند. در یک مورد مولفه‌های تنش با نتایج روش تحلیلی مقایسه گردید که نشان داد نتایج روش بدون مش گالرکین معتبر است. سپس با در نظر گرفتن یک مثال در حالت مود کششی خالص، ضریب تمرکز تنش مود کششی با روش‌های مختلف

مختلف
برون‌یابی

برون‌یابی جابجایی، انتگرال $\bar{I}$ محاسبه و با نتایج سایر روش‌ها مقایسه گردید که نتایج روش بدون مش گالرکین با روش‌های تحلیلی و روش المان محدود مطابقت خوبی داشت. برای حالت مود

ترکیبی در دو مثال ضرایب تمرکز تنش با استفاده از انتگرال M محاسبه و با نتایج تحلیلی و روش المان محدود مقایسه گردید که نتایج روش بدون مش در مقایسه با سایر روش‌ها از دقت خوبی برخوردار است.

- دو معیار مبتنی بر ضرایب تمرکز تنش و معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش موضعی توصیف و با استفاده از دو مثال ارزیابی شدند. مقایسه نتایج پیش‌بینی دو معیار مذکور در تحلیل مثال‌ها با نتایج مطالعات عددی و آزمایشگاهی موجود بیانگر این است که معیار ضرایب تمرکز تنش فقط مرحله اول رشد را بدرستی پیش‌بینی نموده و قادر نیست بقیه مراحل را بدرستی پیش‌بینی کند. حال آنکه نتایج معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش در هر دو مثال و در تمامی مراحل رشد ترک از دقت خوبی برخوردار است. بنابراین برای مدل‌سازی عددی رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی یک و دو ترک شیبدار تحت بار فشاری از معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش موضعی استفاده گردید.

- با استفاده از روش بدون مش گالرکین و معیار مبتنی بر مولفه‌های تنش، مکانیزم رشد ترک در نمونه‌های مکعبی و دیسکی مطالعه شد. در نمونه‌های مکعبی برای شیب کمتر از 60° درجه تحت بار فشاری از نوک ترک‌ها دو نوع ترک کششی و برشی منشعب می‌شود که ترک‌های کششی تقریباً در راستای عمود بر ترک منشعب شده و در طی رشد پایدار راستای آن‌ها به راستای بار اعمالی متمایل می‌شود و ترک‌های برشی تقریباً در امتداد ترک رشد می‌کنند. به ازای شیب 75° درجه فقط ترک‌های برشی از نوک ترک منشعب و در امتداد ترک به طور ناپایدار رشد می‌کنند. برای شیب‌های 15° ، 30° و 45° درجه، مطالعات آزمایشگاهی نیز انجام شد که شکل کیفی رشد ترک در مطالعات آزمایشگاهی و عددی تطابق خوبی باهم دارند.

- در نمونه‌های دیسکی به ازای مقادیر مختلف شیب فقط ترک‌های کششی منشعب و به طور ناپایدار رشد می‌کنند. برای نمونه‌های مختلف مقدار تنش منجر به انشعاب ترک‌های کششی و زاویه انشعاب ترک‌های کششی بررسی شد. برای ارزیابی نتایج عددی، مطالعات آزمایشگاهی

مشابه انجام شد. مقادیر بار منجر به انشعاب ترک‌های کششی و زاویه انشعاب این ترک‌ها در مطالعات عددی و آزمایشگاهی تطابق خوبی نشان دادند.

- در ادامه مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های حاوی دو ترک با روش عددی مدل‌سازی شد. ابتدا به ازای مقادیر مختلف طول خط واصل نحوه رشد و اتصال ترک‌ها مطالعه شد. نتایج نشان داد این پارامتر هندسی در الگوی کلی رشد و اتصال ترک‌ها تاثیری نداشته و فقط با افزایش آن تنش لازم برای انشعاب و اتصال ترک‌ها افزایش می‌یابد. سپس به ازای مقادیر مختلف شیب خط واصل دو ترک، نحوه رشد و اتصال ترک‌ها مطالعه شد برای شیب‌های مختلف چهار نوع اتصال: برشی، برشی - کششی، کششی - برشی و کششی مشاهده شد.

- برای اعتبارسنجی مطالعات عددی رشد و اتصال ترک‌ها، نمونه‌های آزمایشگاهی مشابه تهیه و بارگذاری شدند. در سری اول از نمونه‌ها آزمایشگاهی با طول متغیر خط واصل، الگوی رشد و اتصال ترک‌ها برای تمامی نمونه‌ها (۶ نمونه) یکسان بدست آمد که تکرارپذیری نتایج این قسمت از مطالعه آزمایشگاهی را به خوبی نشان می‌دهد. الگوی رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های آزمایشگاهی و عددی کاملاً مشابه بوده و نتایج دو روش برای تنش اتصال ترک‌ها تطابق مطلوبی باهم دارند.

- در سری دوم از نمونه‌ها با شیب متغیر خط واصل نیز، الگوی کلی رشد و اتصال ترک‌ها در نمونه‌های آزمایشگاهی و عددی مشابه، کاملاً یکسان بوده و تنش اتصال ترک‌ها در مدل‌سازی عددی و آزمایشگاهی اختلاف کمی دارند. در هر دو سری از نمونه‌های حاوی دو ترک، ترک‌های کششی و برشی منشعب از نوک ترک‌ها کاملاً مشهود است و تشخیص نوع مود اتصال ترک‌ها بطور واضح راحت است. در مطالعات آزمایشگاهی نیز برای شیب‌های مختلف چهار نوع اتصال: برشی، برشی - کششی، کششی - برشی و کششی مشاهده شد.

- با توجه به نتایج مطلوب روش بدون مش گالرکین و مزایایی از قبیل پیاده‌سازی و برنامه‌نویسی راحت‌تر، این روش می‌تواند به عنوان یک ابزار مناسب در حوزه مکانیک شکست سنگ بکار رود.

۷ - ۳ - ارزیابی مطالعات عددی و آزمایشگاهی

در این مطالعه همانند کاربردهای متعدد روش بدون مش گالرکین، برای انتگرال گیری عددی از شبکه انتگرال گیری استفاده شد. در این روش در پس زمینه دامنه مساله مورد بحث یک شبکه سلولی به ظاهر مستقل از آرایش گره ها در نظر گرفته می شود که ابعاد سلول های آن و مرتبه تربیع گوس در هر یک از سلول ها در نتایج روش تاثیر قابل توجهی دارد. از طرفی ابعاد سلول ها و مرتبه تربیع گوس تابعی از آرایش و دانسیته گره ها هستند. بنابراین ایده بدون مش بدون روش عددی به طور کامل تحقق نمی یابد. به خاطر همین مساله با رشد ترک و تغییر هندسه مساله، اضافه شدن گره های جدید به دامنه مساله در هر مرحله از رشد ترک بر دقت نتایج تاثیر گذار است.

در این مطالعه ترک ها به صورت باز و سطوح ترک صاف فرض شده است یعنی بین سطوح ترک ها چسبندگی و اصطکاکی وجود ندارد. در عمل وقتی ترک ها رشد می کنند سطوح جدید ایجاد شده کاملاً صاف نیستند و بین سطوح ترک ها اصطکاک وجود دارد بنابراین فرض مذکور معتبر نیست و این مساله در نتایج تاثیر می گذارد.

در مطالعات آزمایشگاهی لازم است با استفاده از دوربین فیلم برداری مخصوص، فرآیند انشعاب، رشد و اتصال ترک ها به طور دقیق ثبت شود و همچنین لازم است با استفاده از کرنش سنج هایی که در سطح نمونه چسبیده می شوند، مقدار دقیق تنش منجر به انشعاب و اتصال ترک ها تعیین گردد. در این تحقیق امکانات مذکور در دسترس نبود و فقط با استفاده از افت نسبی در منحنی تنش - کرنش که با مرحله اتصال ترک ها متناظر است، مقدار تنش اتصال ترک ها به طور تقریبی مشخص گردید.

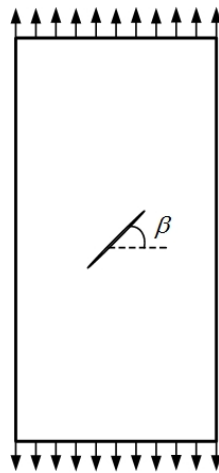
۷ - ۴ - پیشنهادات

با توجه به نتایج و تجارب حاصل از این تحقیق و ارزیابی روش ها و مدل های مورد استفاده، پیشنهادات زیر برای تکمیل شدن موضوع تحقیق در طرح ها و پروژه های تحقیقاتی بعدی ارائه می شود:

- برای به دست آوردن نتایج دقیق‌تر با روش بدون مش گالرکین، اجزای تشکیل دهنده آن بایستی بهینه شود. به عنوان مثال اخیراً برای بهبود نتایج این روش به جای توابع پایه خطی از توابعی که عبارات مثلثاتی دارند، استفاده می‌شود.
- در مدل‌سازی رشد ترک با روش بدون مش گالرکین، حذف و اضافه کردن گره‌ها در فرآیند رشد ترک به طور نظم یافته انجام شود تا امکان تبدیل کدهای تهیه شده به نرم‌افزار امکان‌پذیر باشد.
- قابلیت معیارهای شکست دیگر نظیر معیارهای مبتنی بر کمیت‌های انرژی و ضرایب تمرکز تنش به طور دقیق ارزیابی گردد.
- ترک‌ها به صورت بسته و با سطوح دارای اصطکاک مطالعه شوند.
- مکانیزم رشد ترک‌ها در نمونه‌های حاوی سه یا چند ترک به طور عددی یا آزمایشگاهی مطالعه شود.
- در مطالعات آزمایشگاهی علی‌رغم کمبود امکانات، اولاً هندسه و آرایش متفاوت ترک‌ها از جمله شیب ترک‌ها، هم‌پوشانی ترک‌ها و ... مطالعه شود. ثانیاً در صورت تامین امکانات لازم، مکانیزم رشد و اتصال ترک‌ها تحت سایر انواع بارگذاری‌ها مانند بار فشاری دو محوره، بار برشی و ... به طور آزمایشگاهی بررسی شود.

پیوست الف: میدان تنش و تغییر مکان در حالت مود ترکیبی (I و II)

در مکانیک شکست الاستیک خطی، وقتی بارگذاری اعمال شده ترکیبی از مودها را تولید نماید، با ترکیب خطی مودها می‌توان میدان تنش و تغییر مکان را برای آن مود ترکیبی محاسبه نمود. بنابراین برای نمونه حاوی ترک شیبدار تحت کشش تک‌محوری (شکل الف-۱) معادلات تنش و تغییر مکان در مختصات دکارتی و قطبی به ترتیب به صورت زیر خواهد بود (جاویدراد، ۱۳۸۳):



شکل (الف-۱): نمونه حاوی ترک شیبدار تحت کشش تک‌محوری

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)\end{aligned}\quad (\text{الف-۱})$$

$$\begin{aligned}u &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ v &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_\theta &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
\tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right)
\end{aligned}
\tag{الف-۲}$$

بدیهی است اگر چنانچه هندسه محیط و ترک‌های آن و یا شرایط بارگذاری پیچیده باشد، تعیین میدان جابجایی و تنش با روابط تحلیلی امکان‌پذیر نبوده و لازم است یک روش عددی مناسب به کار گرفته شود.

منابع:

- جاویدراد ف، (۱۳۸۳) "مکانیک شکست و کاربرد آن در مهندسی" چاپ اول، انتشارات صنایع هوا فضا، تهران، ۴۴۸ ص.
- قاجار ر، (۱۳۸۱) "مقدمه‌ای بر مکانیک شکست" جلد اول، چاپ اول، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، ۲۵۴ ص.
- مجیدزاده م، (۱۳۸۶)، پایان‌نامه ارشد: "آنالیز ترک در صفحه مستطیلی FGM به روش بدون المان گالرکین"، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- نورین م، (۱۳۷۵)، پایان‌نامه ارشد: "تحلیل مسائل ترک با استفاده از انتگرال J در حالت I و حالت ترکیبی I & II در صفحات متجانس و غیر متجانس"، دانشکده مکانیک، دانشگاه تهران
- Alfaro I. Yvonnet J. Cueto E. Chinesta F. and Doblare M. (2006) "Meshless methods with application to metal forming" **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** 195, pp 6661-6675.
- Aliabadi M.H. and Lopez M.H. (1996) "Database of stress intensity factors" Computational Mechanics Publications.
- Al-Shayea N. (2005) "Crack propagation trajectories for rocks under mixed mode I-II fracture" **Engineering Geology**, 81, pp 84– 97.
- Ayatollahi M.R. and Aliha M.R.M. (2007) "Fracture toughness study for a brittle rock subjected to mixed mode I/II loading" **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, vol. 44, no 4, pp 617-624.
- Banks S.L. and Sherman D. (1986) "Comparison of methods for calculating stress intensity factors with quarter-point elements", **International Journal of Fracture**, 32, pp 127-140.
- Belytschko T. Lu Y. and Gu L. (1994) "Element-free Galerkin methods" **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 37, pp 229-256.
- Belytschko T. Lu Y.Y. Gu L. and Tabbara M. (1995) "Element- free Galerkin methods for static and dynamic fracture" **Int J Solids Struct.**, 32, pp 2547–2570.
- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. and Krysl P. (1996) "Meshless methods: an overview and recent developments", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, Vol. 139: pp 3–47.
- Belytschko T. (1997) "Crack Propagation by the Element Free Galerkin Method" Department of Civil Engineering Northwestern University Evanston.
- Belytschko T. Organ D. and Gerlach C. (2000) "Element-free Galerkin methods for dynamic fracture in concrete" **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 187, pp 385-399.

Brighenti R. (2005) "Application of the element-free Galerkin meshless method to 3-D fracture mechanics problems" **Engineering Fracture Mechanics**, 72, pp 2808-2820.

Bobaru F. and Mukhejee S. (2001) "Shape sensitivity analysis and shape optimization in planar elasticity using the element-free Galerkin method" **Comput Meth Appl Mech Engng.**, 190, pp 4319-37.

Bobet A. and Einstein H.H. (1998) "Numerical modeling of fracture coalescence in a model rock material" **Int. J. Fract.**, 92, pp 221-252.

Bocca P. Carpinteri A. and Valente S. (1990) "Size effects in the mixed mode crack propagation: softening and snap-back analysis" **Engineering Fracture Mechanics**. 35, pp 159-170.

Chan H.C.M. Li V. and Einstein H.H (1990) "A hybridized displacement discontinuity and indirect boundary element method to model fracture propagation" **International Journal of Fracture**. 45, pp 263-282.

Chang S. H. Lee C. And Jeon S. (2002) "Measurement of rock fracture toughness under modes I and II and mixed-mode conditions by using disc-type specimens" **Engineering Geology**. 66, pp 79-97.

Chen J.S. and Wang H.P. (2000) "New boundary condition treatments in mesh-free computation of contact problems" **Comput Meth Appl Mech Engng.**, 187, pp 441-68.

Chen Y. Lee J. and Eskandarian A. (2006) "Meshless Methods in Solid Mechanics", Springer, New York, p 200.

Chen Y.P., Eskandarian A., Oskard M. And Lee J.D. (2006), "Meshless simulation of crack propagation in multiphase materials", **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, 45, pp: 13–17.

Cherepanov C.P. (1967) "Crack propagation in continuous media", **Appl. Math. Mech**. 31, pp 476-488.

Cingoski V., Miyamoto N. and Yamashita H., (2000), "Hybrid Element-Free Galerkin-Finite Element Method for Electromagnetic Field Computations" **IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS**, 36, no 4, pp 1543-1547.

Dobroskok A. Ghassemi A. and Linkov A. (2005) "Extended structural criterion for numerical simulation of crack propagation and coalescence under compressive loads" **International Journal of Fracture**, 133, pp 223-246.

Donning B.M. and Liu W.K. (1998) "Meshless methods for shear-deformable beams and plates" **Comput Meth Appl Mech Engng.**, 152, pp 47-71.

Erdogan F. and Sih G.C. (1963) "On the crack extension in plates under plane loading and Transverse shear" **Journal of Basic Engineering**, 85, pp 519-527.

Fatehi M.M. Hosseini Nasab H. and Kohsary A.H. (2006) "On the uses of special crack tip elements in numerical rock fracture mechanics", **International Journal of Solids and Structures**, 43, pp 1669-1692.

Gri th A.A. (1921) “The phenomena of rupture and flow in solids”, Roy Soc Lond, Series A, 221, pp 163-98.

Golshani A. Okui Y. Oda M., Takemura T. (2006) “A micromechanical model for brittle failure of rock and its relation to crack growth observed in triaxial compression tests of granite” **Mechanics of Materials**, 38, pp 287-303.

Gunter F.C. and Liu W.K. (1998) “Implementation of boundary conditions for meshless methods” **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, 163 (1-4), pp 205-230.

Hagihara S. Tsunori M. Ikeda T. and Miyazaki N. (2003) “Element-free Galerkin method using directed graph and its application to creep problems” **Computational mechanics**. 31, no 6, pp 489-495.

Hussain M. Pu S. and Underwood J. (1974) “Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode ii”, **ASTM**, STP 560, pp 2-28.

Irwin, G. (1957) “Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate” Transactions ASME, J. **Appl. Mech.**

Ingraffea A.R. and Manu C. (1984) “Stress intensity factor computation in three dimensions with quarter point elements” **International Journal of Numerical Methods in Engineering**. 15, pp 1427-1445.

Ingraffea A.R. (1987) “Theory of crack initiation and propagation in rock”, In: Atkinson, B.K. (Ed.), *Fracture Mechanics of Rock*, Geology Series. Academy Press, New York, pp 71-110, pp 151-208.

Kachanov M. (1985) “A simple technique of stress analysis in elastic solids with many cracks” **International Journal of Fracture**, 28, pp 11-19.

Kachanov M. (1994) “Elastic Solids with Many Cracks and Related Problems” **Advances in Applied Mechanics**, Academic Press, pp 256-426.

Kachanov M. (2003) “On the problems of crack interactions and crack coalescence” **International Journal of Fracture**, 120, pp 537-543.

Karutz H. Chudoba R. and Kratzig W.B. (2002) “Automatic adaptive generation of a coupled finite element/element-free Galerkin discretization”, **Finite Elements in Analysis and Design**, 38, pp 1075-1091.

Kemeny J. (2005) “Time-dependent drift degradation due to the progressive failure of rock bridges along discontinuities”, **Rock Mecha Rock Sci** , 42, pp 35-46.

Krysl P. and Belytschko T. (1996) “Analysis of thin shells by the element-free Galerkin method”, **Int J Solids Struct.**, 33, pp 3057-80.

Lancaster P and Salkauskas K. (1981) “Surface generated by moving least square methods” **Math Comput.**, 37, pp 141-58.

Li S. and Liu W.K. (2002) “Meshfree and particle methods and their applications” **Appl Mech Rev.**, 55, no 1, pp 1-34.

- Liu H. Y. Kou S. Q. Lindqvist P. A. and Tang C. A. (2007) "Numerical Modelling of the Heterogeneous Rock Fracture Process Using Various Test Techniques" **Rock Mech. Rock Engng.**, 40 (2), pp 107-144.
- Liu H. and Shi P. (2003) "Meshfree Particle Method", Proceedings of the Ninth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), 2-Volume Set: 1-8.
- Liu G.R. (2002) "Mesh free methods: moving beyond finite element method", CRC Press LLC.
- Liu G.R. and Tu Z.H. (2002) "An adaptive procedure based on background cells for meshless methods" **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 191, pp 1923-1943.
- Martin H. (2005) "Elasticity: Theory, Application, and Numerics", Elsevier Inc.
- Melin, S. (1986), "When does a crack grow under mode II conditions?" **Int. J. Fract.**, 30, pp 103-114.
- Mughieda O. and Karasneh I. (2006) "Coalescence of offset rock joints under biaxial loading", **Geotechnical and Geological Engineering**, 24, pp 985-999.
- Pollard D.D., Zeller S., Olson J. and Thomas A. (1990) "Understanding the process of jointing in brittle rock masses", Proceedings: 31st US Symposium on Rock Mechanics, A.A. Balkema, Rotterdam, pp 447-454.
- Rabczuk T. and Belytschko T.(2003) "An adaptive continuum/discrete crack approach for meshfree particle methods" **Latin American journal of solids and structures**, 1, pp 141-166.
- Rao B.N. and Rahman S. (2003) "Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials" **Engng Fract Mech.**, 70, pp 1-27.
- Rao Q. Sun Z. Stephansson O. Li C. and Stillborg B. (2003) "Shear fracture (Mode II) of brittle rock" **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, 40, pp 355-375.
- Reyes O. and Einstein H.H. (1991) "Failure mechanism of fractured rock - A fracture coalescence model", Proceedings 7th International Congress of Rock Mechanics. 1, pp 333-340.
- Rice J.R. (1968) "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks" **J. Appl. Mech.**, 35, pp 379-386.
- Sagong M. and Bobet A. (2002) "Coalescence of multiple flaws in a rock-model material in uniaxial compression" **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, 39, pp 229-241.
- Sanford R.J. (2003) "**Principle of Fracture Mechanics**", First edition, Prentice Hall, Inc., USA.
- Saouma V.T. (2000) "Lecture Notes in: FRACTURE MECHANICS", Dept. of Civil Environmental and Architectural Engineering University of Colorado, CVEN-6831.

Scavia C. (1995) "A method for the study of crack propagation in rock structures" **Géotechnique**, 45(3), pp 447-463.

Shen B., (1993) "Mechanics of fractures and intervening bridges in hard rock", Doctoral thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Division of Engineering Geology.

Shen B. and Stephansson O. (1994) "Modification of the G-criterion for crack propagation subjected to compression" **Engineering Fracture Mechanics**, 47(2), pp 177-189.

Simkins D. C. and Li S. (2006) "Meshfree simulations of thermo-mechanical ductile fracture" **Comput. Mech.**, 38, pp 235-249.

Sih G.C. (1973) "Some basic problems in fracture mechanics and new concepts" **Eng Fract Mech**, 5, pp 365-77.

Sih G.C. (1974) "Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems" **Int. J. Fracture**, 10, pp 305-321.

Sukumar N. Moran B. Black T. and Belytschko T. (1997) "An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics" **Computational Mechanics**, 20, pp 170-175.

Sutradhar A. and Paulino G.H. (2004) "Symmetric Galerkin boundary element computation of T-stress and stress intensity factors for mixed-mode cracks by the interaction integral method" **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 28, pp 1335-1350.

Tang C.A. Lin P. Wong R.H.C. and Chau K.T. (2001) "Analysis of crack coalescence in rock-like materials containing three flaws Part II: numerical approach" **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, 38, pp 925-939.

Tasdemir M.A. Maji A.K. and Shah S.P. (1990) "Crack propagation in concrete under compression" **Journal of Engineering Mechanics**, 116(5), pp 1058-1076.

Tsunori M., Hagihara S., Ebina A., Kasa S., Ikeda T. and Miyazaki N. (2004) "Calculation of mixed mode stress intensity factors for crack propagation using element free Galerkin method", European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS, pp 1-8.

VaÂsaÂrhelyi B. and Bobet A. (2000) "Modeling of Crack Initiation, Propagation and Coalescence in Uniaxial Compression" **Rock Mech. Rock Engng.**, 33 (2), pp 119-139.
Westergaard H. (1939) "Bearing pressures and cracks" **J. Appl. Mech.**

Williams M. (1952) "Stress singularities from various boundary conditions in angular corners of plates in extension" **Jour. of Applied Mechanics**, ASME 19 (4), pp 526-528.

Wong R.H.C. Chau K.T. Tang C.A. and Lin P. (2001) "Analysis of crack coalescence in rock-like materials containing three flaws-Part I: experimental approach" **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, 38, pp 909-924.

Xiangqiao Y. (2006) "Stress intensives and propagation of mixed-mode cracks" **Engineering Failure Analysis**, 13, pp 1022-1027.

Yang S., Ni G., Cardoso J. R., Ho S. L., and Machado J. M. (2003) “A Combined Wavelet-Element Free Galerkin Method for Numerical Calculations of Electromagnetic Fields”, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, 39, NO. 3, pp 1413-1416.

Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. (2000). “The Finite Element Method”, Volume 1: The Basis, Fifth edition, Butterworth Heinemann.

Abstract

Rock fracture mechanics are widely used in different fields such as stability analysis of surface and underground spaces, hydraulic fracturing, in situ stress determination, rock geothermal energy extraction and time-dependent rock failure. In rock fracture mechanics, the propagation and coalescence of cracks are studied by analytical, numerical or experimental methods. In problems with complex geometry and loadings, a numerical method such as finite element or boundary element method is commonly used. These methods encounter mesh-related difficulties in dealing with fracture mechanics problems. To overcome these difficulties, a number of meshless methods such as element free Galerkin method (EFGM) have been developed. These methods have been applied successfully in various engineering fields. The EFGM has not been used to model the rock fracture propagation and coalescence until now. In this study, the EFGM is employed to model the rock fractures and to investigate the propagation and coalescence mechanisms. In implementation of the EFGM; the linear base function together with the cubic spline weight function is used to construct the shape functions, Lagrange multipliers method is applied to enforce the boundary conditions, the background cell and Gauss quadrature is employed to evaluate numerical integrals and the visibility criterion is used to model the cracks. A number of examples with different specimen and crack geometry under various loads (tension, compression and shear) are considered and the stress intensity factors are calculated by different techniques. Comparison of the EFGM results with the results of finite element and analytical methods indicated that the EFGM generates accurate results for stress intensity factors. Two crack propagation criteria; based on stress intensity factors and local stress components are evaluated by two examples, and the stress based criterion is selected to simulate crack propagation. By this criterion the crack propagation mechanism in cubic and disk specimens with an inclined crack and the coalescence mechanism of two inclined cracks in cubic specimens for different amounts of the length and inclination of the connection line of two cracks are studied. In different stages of the EFGM modeling, the required algorithms are prepared and the computer codes are programmed in MATLAB.

The length of the connection line between two cracks has no effect on the crack propagation and coalescence pattern, only by the increasing of this length, the initiation and coalescence stress increases. The inclination of the connection line has important

role and controls the propagation and coalescence pattern. For different connection line inclinations, four coalescence mode including shear, shear – tension, tension – shear and tension modes are predicted by the use of numerical modeling.

To verify the numerical results of EFGM, various experimental investigations are carried out. In experimental studies, pre-cracked specimens are prepared from gypsum. The mechanical properties of gypsum samples such as axial compressive strength, tension strength, elasticity module, Poison ratio, cohesion and friction angle are determined with different laboratory tests. Four set of specimens: cubic specimens containing an inclined crack, disk specimens containing an inclined crack, cubic specimens containing two inclined crack with variable connection line length and cubic specimens containing two inclined crack with variable connection line inclination are prepared and subjected to uniaxial compressive load. Qualitative and quantitative comparisons of the numerical and experimental results show that the element free Galerkin method has good accuracy and this method is capable to analyze rock fracture mechanics problems.

Keywords: Rock fracture mechanics, Element free Galerkin method, Stress intensity factors, Crack propagation criterion, cracks coalescence, Experimental study of crack propagation.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mining, Petroleum and Geophysics

**Numerical Modeling of Crack Propagation and Coalescence
in Rock Mediums by the Element Free Galerkin Method and
Verification with Experimental Investigations**

Hossein Mirzaei Nasirabad

Supervisors:

Reza Kakaie

Behrooz Hassani

Advisor:

Seyed Mohammad Esmaeil Jalali

July 2009