

الحمد لله الذي
خلقنا من
الحمم



دانشکده مهندسی برق

گروه مهندسی برق - کنترل

رساله

برای دریافت درجه دکتری تخصصی در رشته مهندسی برق - کنترل

عنوان:

کنترل و تشخیص خطای مقاوم برای سیستم‌های مرتب‌به‌کسری خطی

نگارنده:

محمد عظیمی

استاد راهنما:

دکتر حیدر طوسی‌ان شاندیز

زمستان ۱۴۰۰

شماره: ۱۸۶۴، ۵۰۲

تاریخ: ۱۳، ۱۱، ۱۴

ویرایش: —

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

فرم شماره ۱۱: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(تعیین درجه نمره رساله برای ورودی‌های ۹۴ و سال‌های قبل از آن)

بدینوسیله گواهی می‌شود آقای محمد عظیمی دانشجوی دکتری رشته برق به شماره دانشجویی ۹۲۴۶۳۹۵

ورودی بهمن ماه سال ۱۳۹۲ در تاریخ ۱۴۰۰/۱۱/۱۳ از رساله نظری / عملی ☐ / ☐ خود با عنوان:

کنترل و تشخیص خطای مقاوم برای سیستم‌های کسری

دفاع و با اخذ نمره ۳۹ و ۱۷ به درجه: خیلی خوب نائل گردید.

☒ الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵	☐ د) مردود: کمتر از ۱۵

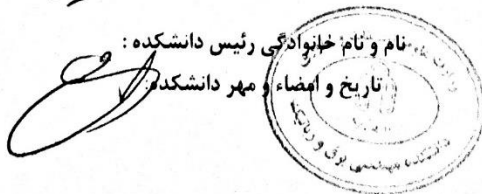
ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	استاد راهنمای اول	دکتر طوسی‌ان شاندیز	دانشیار	
۲	استاد راهنمای دوم	دکتر		
۳	استاد مشاور اول	دکتر		
۴	استاد مشاور دوم	دکتر		
۵	استاد مدعو خارجی	دکتر آسمانی	دانشیار	
۶	استاد مدعو داخلی	دکتر اکبرزاده	دانشیار	
۷	استاد مدعو داخلی	دکتر الفی	استاد	
۸	نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر حداد	دانشیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای محمد عظیمی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقديم

؛

خانواده عزيزم

و

هرآنکه می اندیشد.

تشکر و قدردانی

اکنون که به یاری پروردگار بزرگ موفق به پایان این رساله شده‌ام و وظیفه خود دانسته که نهایت سپاسگزاری را از تمامی عزیزانی که در این راه به من کمک کرده اند را به عمل آورم:

در آغاز از زحمات استاد دانشمند جناب آقای دکتر حیدر طوسی‌ان شاذلی که در این راه علمی بام من، همفر بودند، صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم.

از زحمات اساتید بزرگوار دانشکده برق گروه کنترل و دانشگاه صنعتی شاهرود و گروه کنترل دانشگاه تربیت مدرس تهران که مطالب علمی بسیاری به من آموختند، قدردانی می‌کنم.

از جناب آقای دکتر اکبرزاده، دکتر الفی، دکتر حداد و دکتر آسمانی که زحمات و داورای این رساله را به عهده داشتند سپاس فراوان دارم.

از همسر من بخاطر تحمل سختی راه و همراه بودن بام من،

از فرزندانم که نور چشم من هستند،

از پدر مرحومم که سختی کشید تا ماد آسایش باشیم،

از مادام بخاطر یک عمر زحمات برای ما و دعاهای شبانه روزی در حق ما،

از برادران و خواهران عزیزم که در همه لحظات در کنار من بودند،

و از دوست عزیزم دکتر حسین سلوپی نژاد

بسیار سپاسگزارم

تهدنامه

اینجانب محمد عظیمی دانشجوی دوره دکتری رشته برق گرایش کنترل دانشکده برق دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله کنترل و تشخیص خطای مقاوم برای سیستم‌های مرتبه کسری خطی تحت راهنمایی دکتر حیدر طوسی‌ان شاندیز متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

1400-12-10

تاریخ



امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

طراحی آشکارساز خطا برای سیستم‌های مرتبه کسری خطی تغییر ناپذیر با زمان، در این رساله ارائه شده است. در طراحی از روش آشکارسازی خطا بر اساس مدل استفاده شده است، که در سیستم‌های صنعتی بسیار پر کاربرد است. این روش با تولید سیگنال باقیمانده، که از مقایسه اندازه‌گیری‌ها و محاسبات بر پایه روابط تحلیلی سیستم بدست می‌آید؛ عملکرد غیر طبیعی سیستم را نمایان می‌کند. برای کمینه کردن اثر ورودی‌های نامعلوم و نامعینی‌ها بر روی سیگنال باقیمانده و حساس‌سازی هر چه بیشتر این سیگنال به خطا، با استفاده از معیار ترکیبی H_-/H_∞ مسأله تشخیص خطا تبدیل به یک مسأله کنترل بهینه مقاوم شده است، سپس حل مسأله در قالب نابرابری ماتریسی خطی ارائه می‌شود. در مرحله بعد، با یکی کردن واحد کنترل‌کننده و واحد آشکارساز خطا، طراحی واحد کنترل‌کننده-آشکارساز خطا برای سیستم‌های مرتبه کسری انجام شده است. مزیت این ترکیب، کاهش پیچیدگی فرآیند طراحی و کاهش اثرات متقابل نامطلوب احتمالی این دو واحد بر روی یکدیگر است. طراحی بر این اساس که، آشکارساز خطا یک مشاهده‌گر و کنترل‌کننده یک کنترل‌کننده بر پایه مشاهده‌گر است، انجام شده است. سپس با استفاده از معیار بهینه‌سازی ترکیبی H_-/H_∞ شروط لازم برای حل مسأله در قالب نابرابری‌های ماتریسی خطی برای سیستم مرتبه کسری در حضور ورودی-های خارجی از جمله اغتشاش و نویز ارائه می‌شود. در پایان جهت بررسی نتایج طراحی، شبیه‌سازی در نرم افزار متلب برای مدل یک سیستم واقعی و یک سیستم فرضی انجام شده است.

کلید واژه: سیستم‌های مرتبه کسری ، آشکارسازی خطا، کنترل خطا، نامساوی‌های ماتریسی خطی، کنترل و آشکارسازی خطا بطور همزمان.

لیست مقالات مستخرج از رساله

- 1- Mohammad Azimi , Heydar Toossian Shandiz, “Simultaneous Fault Detection and Control Design for Linear Fractional-Order Systems, Iranian Journal of Science and Technology,” Transactions of Electrical Engineering volume 44, pages485–494 (2019).
- 2- Mohammad Azimi, Heydar Toossian Shandiz, “An LMI approach to Mixed H_{∞}/H_2 - Fault Detection Observer Design for Linear Fractional-Order Systems, ” TELKOMNIKA Telecommunication, Computing, Electronics and Control Vol 19, No 6: December 2021.
- 3- Mohammad Azimi; Heydar Toossian Shandiz, “Simultaneous fault detection and control design for robots with linear fractional-order model, 2018 6th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM).
- 4- Mohammad Azimi; Heydar Toossian Shandiz, “Fault Detection Design for fractional-order systems,” The 2ND National Seminar on Control and Optimization, 16 november 2018 in shahrood, IRAN.

فهرست مطالب

فهرست علائم و نشانه‌ها.....	۵
فهرست شکل‌ها.....	۵
فصل ۱- مقدمه.....	۱
۱-۱- پیشگفتار.....	۲
۱-۲- پیشینه تحقیق.....	۳
۱-۳- اهداف رساله.....	۹
۱-۴- ساختار رساله.....	۱۰
فصل ۲- آشکارسازی خطا.....	۱۱
۲-۱- مقدمه.....	۱۲
۲-۲- انواع خطا در سیستم‌ها.....	۱۲
۲-۳- روش مدل کردن خطاها.....	۱۵
۲-۴- روش‌های آشکارسازی خطا.....	۱۵
۲-۵- تولید سیگنال باقیمانده.....	۱۸
۲-۶- آشکارسازی خطا مبتنی بر معیارهای کنترل مقاوم.....	۱۹
۲-۶-۱- آشکارسازی خطا مبتنی بر معیار H^∞	۱۹
۲-۶-۲- آشکارسازی خطا مبتنی بر معیار H	۲۱
۲-۷- نتیجه گیری.....	۲۱
فصل ۳- سیستم با دینامیک مرتبه کسری.....	۲۳
۳-۱- مقدمه.....	۲۴
۳-۲- تاریخچه.....	۲۴
۳-۳- مفاهیم اولیه.....	۲۶
۳-۴- مدل‌سازی سیستم با دینامیک مرتبه کسری همراه با خطا و ورودی نامعلوم.....	۲۷
۳-۴-۱- توصیف سیستم با دینامیک مرتبه کسری.....	۲۷
۳-۴-۲- توصیف سیستم با دینامیک مرتبه کسری با ورودی نامعلوم.....	۲۹
۳-۴-۳- مدل‌سازی خطا در سیستم با دینامیک مرتبه کسری.....	۲۹

۳۰	۵-۳	قضایای بنیادین
۳۰	۳-۵-۱	قضایای پایداری
۳۱	۳-۵-۲	نقاط تعادل
۳۲	۳-۶	مرور کارهای گذشته برای آشکارسازی خطا در سیستم‌های مرتبه کسری
۳۲	۳-۷	نتیجه‌گیری
۳۳	۴	فصل ۴- مقدمات ریاضی پژوهش
۳۴	۴-۱	مقدمه
۳۴	۴-۲	نابرابری‌های ماتریسی خطی
۳۴	۴-۲-۱	تاریخچه
۳۵	۴-۲-۲	تحدب
۳۶	۴-۲-۳	مسائل LMI
۳۷	۴-۳	لم‌های و قضایای کاربردی
۳۷	۴-۳-۱	لم‌های پایداری سیستم مرتبه کسری
۳۸	۴-۳-۲	لم معروف یا کابویچ ، پوپوف و کالمن
۳۹	۴-۳-۳	لم‌های کراندار حقیقی مربوط به کارآیی H^∞
۳۹	۴-۳-۴	لم تصویرسازی
۴۰	۴-۴	نرم افزارهای حل نامساوی‌های ماتریس خطی
۴۱	۴-۵	نتیجه‌گیری
۴۳	۵	فصل ۵- طراحی آشکارساز خطای مقاوم برای سیستم‌های مرتبه کسری
۴۴	۵-۱	مقدمه
۴۴	۵-۲	بیان مسأله
۴۶	۵-۳	طراحی واحد آشکارساز خطا
۵۰	۵-۴	ارزیابی سیگنال باقیمانده
۵۱	۵-۵	شبیه‌سازی
۵۱	۵-۵-۱	شبیه‌سازی یک سیستم عددی
۵۲	۵-۵-۲	شبیه‌سازی یک سیستم عملی
۵۷	۵-۷	نتیجه‌گیری فصل
۵۹	۶	فصل ۶- کنترل و آشکارسازی خطای مقاوم برای سیستم‌های مرتبه کسری
۶۰	۶-۱	مقدمه
۶۰	۶-۲	بیان مسأله
۶۲	۶-۳	طراحی واحد کنترل و آشکارساز خطا
۶۳	۶-۳-۱	کمینه کردن اثر اغتشاش و ورودی‌های ناشناخته بر خروجی
۶۵	۶-۳-۲	کمینه کردن اثر خطا بر خروجی اندازه‌گیری شده

۶۶	۳-۳-۶	کمینه کردن اثر اغتشاش و ورودی‌های ناشناخته بر سیگنال باقیمانده
۶۷	۴-۳-۶	بیشینه کردن اثر خطا بر سیگنال باقیمانده
۶۹	۴-۶	حل مسأله بهینه سازی محدب برای طراحی واحد کنترل و آشکارساز خطا
۷۰	۵-۶	ارزیابی سیگنال باقیمانده
۷۰	۶-۶	شبیه سازی
۷۵	۷-۶	نتیجه گیری
۷۷	فصل ۷	نتیجه گیری و پیشنهادات
۷۸	۱-۷	نتیجه گیری
۷۹	۲-۷	پیشنهادهات
۷۹	۱-۲-۷	گسترش برای سیستم‌های مرتبه کسری با درجه $1 < \alpha < 2$
۷۹	۲-۲-۷	طراحی واحد آشکارساز-کنترل کننده برای سیستم‌های مرتبه کسری دارای عدم قطعیت
۷۹	۳-۲-۷	طراحی واحد آشکارساز-کنترل کننده برای سیستم‌های مرتبه کسری تأخیری
۷۹	۴-۲-۷	طراحی واحد آشکارساز-کنترل کننده برای سیستم‌های مرتبه کسری گسسته
۸۱	فهرست مراجع	

فهرست علائم و نشانه‌ها

عنوان	علامت اختصاری
نرم P	$\ \cdot\ _p$
عملگر مشتق-انتگرال گیر	D_t^α
مشتق کسری ریمن-لیوویل	${}_R D_t^\alpha$
تابع گاما	$\Gamma(z)$
مشتق کسری گرانوالد - لتنیکوف	${}_L D_t^\alpha$
مشتق کسری کاپوتو	${}_C D_t^\alpha$
فضای اقلیدسی n بعدی	R^n
مجموعه ماتریس های حقیقی $p \times n$	$R^{p \times n}$
معادله ماتریس مشخصه	$\Delta(\lambda)$
در دستگاه مختصات قطبی زاویه‌ای بین محور حقیقی مثبت و خط واصل نقطه Z به نقطه مبدأ می‌باشد	$arg(z)$
ترانهاد مزدوج ماتریس	A^*
$A + A^*$	$sym(A)$
$A + A^T$	$herm(A)$
ترانهاد ماتریس	A^T
مجموعه ماتریس های هرمیتی مختلط $n \times n$	H_n
ماکزیمم مقدار تکین X	σ_{max}
ضرب کرونکر	$\otimes$

فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه
شکل ۱-۱- روشهای تشخیص خطا	۴
شکل ۲-۱- دسته‌بندی روشهای تشخیص خطا برپایه مدل بر اساس فنون تولید مانده	۵
شکل ۱-۲- انواع خطا	۱۳
شکل ۲-۲- انواع خطای حسگر [۹۰]	۱۴
شکل ۳-۲- انواع خطاهای محرک با نمایش سیگنالی [۹۰]	۱۴
شکل ۴-۲- ساختار آشکارسازی خطا مبتنی بر مدل	۱۷
شکل ۵-۲- اصول کار یک سیستم تولید باقیمانده	۱۸
شکل ۶-۲- بلوک جعبه‌های فیلتر پیشنهادی برای آشکارسازی خطا	۲۰
شکل ۱-۳- دانشمندان مشهور در زمینه حسابان کسری	۲۵
شکل ۲-۳- بلوک جعبه‌های فضای حالت سیستم کسری LTI	۲۸
شکل ۳-۳- ناحیه پایداری سیستم کسری برای $0 < \alpha < 1$	۳۱
شکل ۱-۴- شکل سمت چپ محدب، شکل وسط و راست غیر محدب	۳۶
شکل ۱-۵- طرح کلی آشکارساز خطا بر اساس مشاهده‌گر	۴۵
شکل ۲-۵- سیگنال خطا و اغتشاش	۵۱
شکل ۳-۵- مقادیر ویژه سیستم خطای (۳-۵)	۵۱
شکل ۴-۵- سیگنال باقیمانده	۵۲
شکل ۵-۵- سیستم گرمایی نیمکت حرارتی دو میله‌ای	۵۲
شکل ۶-۵- سیگنال خروجی θ_1 و تخمین آن	۵۵
شکل ۷-۵- سیگنال خروجی θ_2 و تخمین آن	۵۵
شکل ۸-۵- سیگنال خروجی θ_3 و تخمین آن	۵۶
شکل ۹-۵- سیگنال خروجی θ_4 و تخمین آن	۵۶
شکل ۱۰-۵- سیگنال باقیمانده r_1	۵۷
شکل ۱۱-۵- سیگنال باقیمانده r_2	۵۷
شکل ۱-۶- ارزیابی سیگنال باقیمانده	۷۰
شکل ۲-۶- مقادیر ویژه سیستم حلقه باز	۷۱
شکل ۳-۶- سیگنال خطا و سیگنال اغتشاش	۷۲
شکل ۴-۶- سیگنال خروجی اندازه‌گیری شده	۷۲
شکل ۵-۶- سیگنال باقیمانده	۷۳

- شکل ۶-۶- سگنال خروجی قابل سنجش با اثر نویز و خطا ۷۳
- شکل ۶-۷- سیگنال باقیمانده با اثر خطا و نویز ۷۴
- شکل ۶-۸- تابع ارزیاب باقیمانده ۷۴
- شکل ۶-۹- تابع ارزیاب باقیمانده با خطا و بدون خطا ۷۵

فصل ۱- مقدمه

۱-۱- پیشگفتار

طبق گزارشات، بروز خطا در صنایع مختلف از جمله پتروشیمی ها و هواپیماها، باعث میلیاردها دلار خسارت مالی و در مواردی تلفات جانی نیز شده است. بررسی ها نشان می دهد که در صورت تشخیص خطای زود هنگام، به مراتب مشکلات کمتری ایجاد می شد و شاید جان انسان ها به خطر نمی افتاد. بنابراین شناسایی و تشخیص سریع خطا در سیستم ها، بخصوص سیستم های شیمیایی، راکتور هسته ای، هواپیما و حمل و نقل سریع از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

بالا بردن کیفیت سیستم ها توسط شرکت های مختلف در بازار رقابتی امروز، تقاضای مصرف کنندگان برای هر چه بهتر شدن عملکرد آنها، انتظار برای بازدهی بالا، نیاز به عملکرد دقیق سیستم و ایمن کردن سیستم-هایی که مستقیماً با جان انسان ها سر و کار دارند، باعث شده است که سیستم ها از زیر سیستم های مختلف تشکیل شوند و هر روز، قطعات مختلف به اجزاء داخلی آنها افزوده شود، به عبارت ساده تر سیستم های در طول زمان بسیار پیچیده شده اند. کاملاً روشن است که پیچیده تر شدن سیستم، احتمال رخ دادن خطا را بیشتر می کند. اگر خطایی در زیربخش های یک سیستم ایجاد شود و به هر دلیلی نادیده گرفته شود، به مرور زمان این خطا نه تنها به خود زیر سیستم، بلکه مانند یک ویروس می تواند به بخش های دیگر سیستم نیز آسیب رسانده و آنها را دچار از کارافتادگی و توقف کند. این موضوع، بی شک باعث خسارت های مالی و جانی بسیار خواهد شد. اگر بتوان در سیستم ها، خطاها را زود شناسایی کرد و عکس العمل به موقع انجام داد، در درجه اول از خود سیستم محافظت شده است؛ سپس از آسیب رساندن سیستم معیوب به قسمت های دیگر نیز جلوگیری بعمل آمده است.

بعنوان مثال، کم بادی چرخ اتومبیل یک خطا در سیستم اتومبیل است؛ با آن که هنوز از اتومبیل می توان استفاده کرد اما باد چرخها از حالت استاندارد خارج شده است. با رفع به موقع این خطا که با هزینه ناچیزی انجام می شود، می توان از خرابی چرخ ها و از کار افتادن اتومبیل که هزینه بیشتری را در بر خواهد داشت، جلوگیری کرد.

طبق تعریف، شاخص ایمنی^۱ توانایی و ظرفیت یک سیستم در جلوگیری از خطر برای انسانها، تجهیزات یا محیط اطراف است. قابلیت اطمینان^۲ یک سیستم، عملکرد استاندارد طبق شرایط مفروض در یک محدوده مشخص و در یک دوره زمانی تعیین شده است [۱]. با توجه به این تعاریف، یکی از راهکارهای افزایش شاخص های ایمنی و قابلیت اطمینان سیستم، آشکارسازی به موقع خطا و رفع آن است.

از سال ۱۹۷۰ میلادی تشخیص خطا^۳ موضوع بسیاری از تحقیقات بوده است که نتایج آنها اکنون بصورت مقاله و کتاب در دسترس است. با توجه به اهمیت موضوع در دهه اخیر، تشخیص خطا به عنوان یک شاخه مهم از نظریه کنترل و مهندسی معرفی شده است و با کوشش محققان، فنون های کاربردی و ایده های نو برای آن، ابداع شد.

¹ Safety

² Reliability

³ Fault detection

از سوی دیگر، در اواخر قرن بیستم بعد از ارائه شدن روشهای حل معادلات دیفرانسیل کسری که کمک شایانی به نمایان شدن مزایای حسابان کسری کرد، دانشمندان از علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی و غیره به آن روی آوردند. در مبحث مهم مدلسازی خیلی از سیستم‌های مهندسی و فرآیندهای فیزیکی بسیار دقیق‌تر با دینامیک مرتبه کسری مدلسازی شده‌اند. علاوه، با کمک این علم برای بعضی از سیستم‌ها با معادلات پیچیده، نمایش ساده‌تری ارائه شد. از نقاط قوت و مزایای دیگر این دانش، فراهم ساختن ابزار قدرتمند در تشریح خواص ذاتی و حافظه‌ای فرآیندها است.

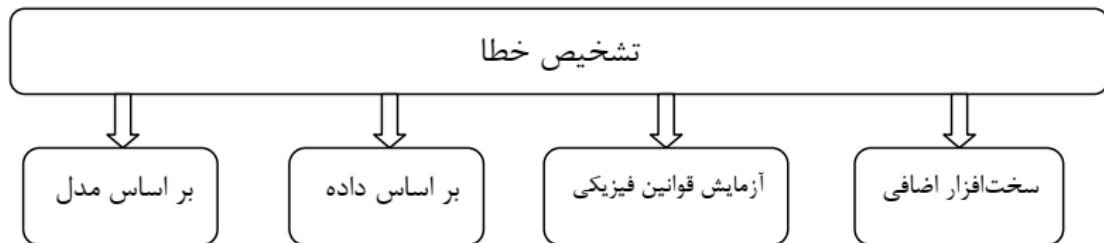
در نظریه کنترل، دانشمندان توانستند با کنترل سیستم‌های کسری و همچنین ساختن کنترل‌کننده‌های کسری با امکان دسترسی به نقاط کنترلی بیشتر، به نقطه کنترلی مطلوب‌تر دسترسی پیدا کنند و از ابزار قدرتمند این دانش استفاده کنند. البته با توجه به مباحث ریاضی جدید و متفاوت در محاسبات کسری، تمام بحث‌های ارائه شده در علوم مختلف از جمله نظریه کنترل، نیاز به اثبات جدید دارند. در حقیقت حسابان کسری در مبحث کنترل، راهی نو با روشهای نوین و کنترل‌کننده‌های جدید را به جهانیان معرفی کرده است.

تا به امروز بحث‌های پایه‌ای از سیستم‌های کسری، مورد بررسی قرار گرفته‌اند و قضایای درباره پایداری، کنترل‌کننده‌ها، کنترل مقاوم، کنترل تطبیقی، آشوب و دیگر مباحث ارائه شده است؛ اما هنوز موضوعات زیادی در رابطه با این سیستم‌ها برای تحقیق وجود دارند که بعنوان مثال می‌توان به موضوع آشکارسازی و کنترل خطا در سیستم‌های کسری اشاره کرد. با توجه به اهمیت آشکارسازی خطا در سیستم‌ها و توجه به این نکته که امروزه برای بسیاری از سیستم‌های واقعی و کاربردی از معادلات کسری استفاده می‌شود، پرداختن به موضوع آشکار سازی خطا برای سیستم‌ها با دینامیک مرتبه کسری یک ضرورت غیر قابل انکار است.

۱-۲- پیشینه تحقیق

بیان سیر و توسعه تاریخی روش‌های آشکارسازی و کنترل خطا، به دلیل پراکندگی آنها در کتاب‌ها و تحقیقات گوناگون، دشوار است. برای نمونه استفاده از جوهر و علامت‌گذاری کپی‌های ثبت شده از عملکرد سیستم برای نظارت بر سیستم، در اوایل سال ۱۹۳۵ میلادی رایج بوده است. همچنین روش‌های آشکارسازی مبتنی بر مدل سیگنال، همزمان با ساخت فیلترها و اسیلوسکوپ‌ها ابداع شد. با ایده‌ی جایگزینی خودکار قطعه معیوب با قطعه پشتیبان در هنگام پدیدار شدن خطا، روش کاربردی دیگری بنام استفاده از حسگرها و عملگرهای جایگزین برای قسمت‌های مهم و حیاتی سیستم؛ مورد استفاده قرار گرفت. به عنوان مثال برای قطعات مهم و حیاتی هواپیما، این روش با در نظر گرفتن سه قطعه جایگزین برای هنگام خطا، استفاده می‌شد. این روش دو مشکل اساسی داشت؛ اول اینکه باعث بالا رفتن هزینه‌ها می‌شد؛ دوم، قابل اجرا نبودن در بسیاری از سیستم‌ها بود. اختراع میکرو کامپیوترها در سال ۱۹۷۱ میلادی تحولی عظیم در جهان ایجاد کرد که طبیعتاً، سیستم‌های صنعتی نیز از آن بهره‌مند شدند. از سال ۱۹۷۵ میلادی همزمان با بکارگیری میکروها در سیستم‌های صنعتی، توسعه غیر قابل باور روش‌های آشکارسازی و کنترل خطا آغاز شد.

شکل (۱-۱) به طور کلی روشهای آشکارسازی خطا را نشان داده است. برای مطالعه بیشتر در مورد هر یک از این روشها، می‌توان به مرجع [۱] که سیر پیشرفت روش‌های آشکارسازی خطا را مورد بررسی دقیق قرار داده است، مراجعه کرد.



شکل ۱-۱- روشهای تشخیص خطا

از اوایل دهه ۱۹۷۰ میلادی مطالعه روش تشخیص خطا بر اساس مدل، درست زمانی که مباحث نظری درباره طراحی مشاهده‌گرها^۱ شدت گرفت، شروع شد. برد و جانسون اولین روش تشخیص خطا بر اساس مشاهده‌گر که فیلتر تشخیص عیب^۲ نامیده می‌شد را پیشنهاد دادند. اولین کتاب با موضوع روش‌های تشخیص خطا بر اساس مدل در سال ۱۹۸۹ میلادی توسط پتن^۳ و همکارانش نوشته شد [۲]. این کتاب برای تشخیص خطا بر استفاده از مشاهده‌گر و روش فضای برابری مشترک^۴ متمرکز شده است و سالها بعنوان تنها مرجع با موضوع تشخیص خطا بوده است.

در نیمه دوم دهه ۱۹۸۰ میلادی همزمان با توسعه روش‌های تشخیص و جداسازی ورودی‌های ناشناخته^۵، طراحی سیستم باقیمانده برای تشخیص خطا در سیستم با ورودی ناشناخته، توجه بسیاری را بخود جلب کرد. ونبرگ و فرانک در سال ۱۹۸۷ توانستند اولین سیستم تولید باقیمانده^۶ برای ورودی‌های ناشناخته را ارائه دهند [۳]. در دهه ۱۹۹۰ میلادی دانشمندان با ابداع روش تبدیل مسئله تشخیص خطا به مسئله کنترل مقاوم با استفاده از شاخص بهینه‌سازی^۷ H_∞ و H_2 ، گامی بزرگ برداشتند [۴].

امروزه سیستم‌های آشکارسازی خطا مبتنی بر مدل به صورت قابل توجهی در صنایع مختلف از جمله هواپیمایی، رباتیک، انتقال شبکه برق و موارد دیگر بکار می‌روند و محققان روش‌های گوناگون را برای تشخیص خطا مبتنی بر مدل از جمله روش‌های مبتنی بر مدل‌های معین، مدل‌های تصادفی و فیلتر کالمن ابداع کردند. کاربرد عملی این روش در صنعت، برتری و بالا بودن میزان کارایی آن را نسبت به سایر روش‌ها نشان می‌دهد. نکته قابل توجه در پیاده سازی آشکارسازی خطا مبتنی بر مدل، داشتن یک مدل ریاضی از سیستم مانند مدل فضای حالت یا تابع تبدیل است. از اوایل دهه ۹۰ میلادی یکی از زیر شاخه‌های آشکارسازی خطا مبتنی بر مدل که به روش آشکارسازی خطا مبتنی بر رویکرد فیلتر مشهور است، مورد توجه قرار گرفت. در این

¹ Observer

² Failure detection filter

³ Patton

⁴ Common parity space

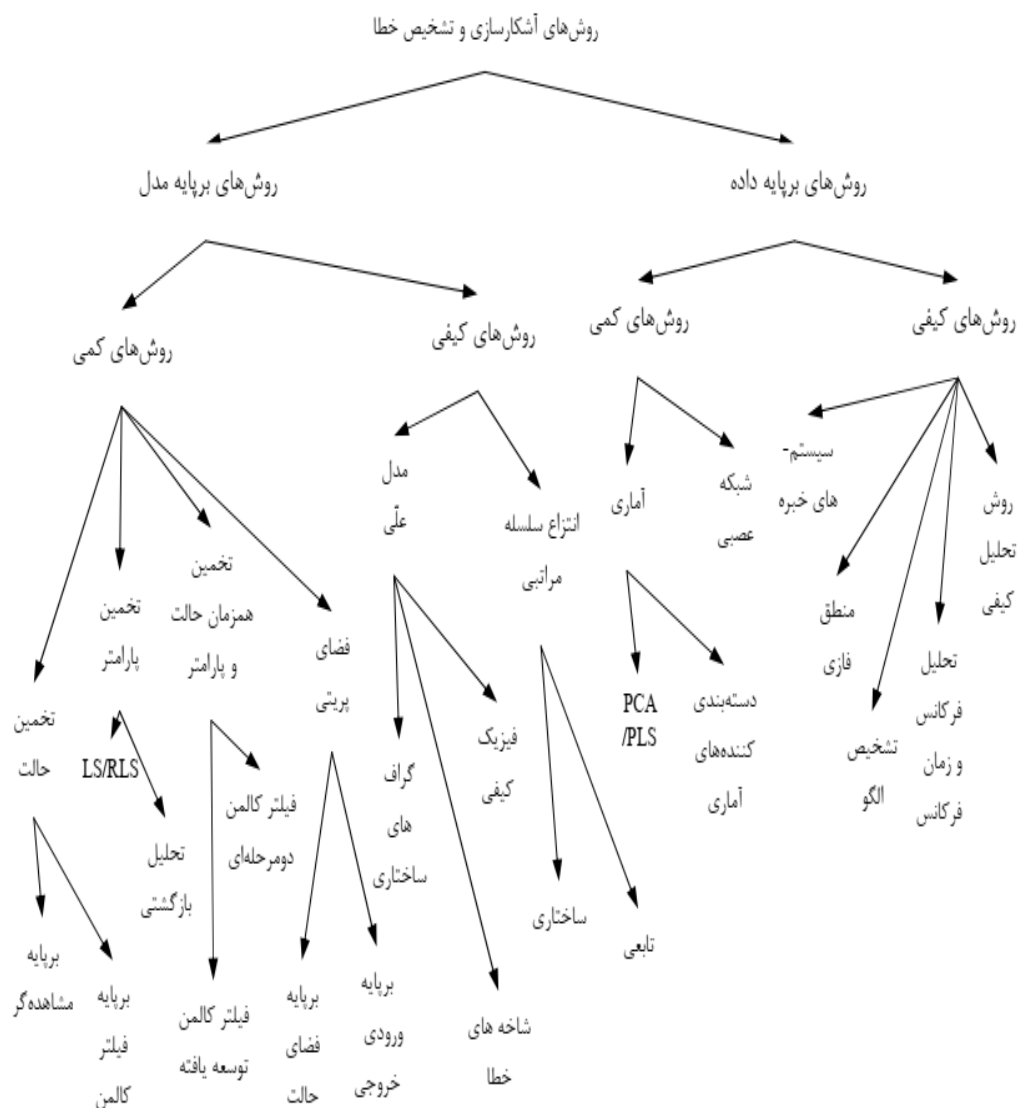
⁵ Unknown input decoupling control methods

⁶ Residual Generation

⁷ Optimization index

روش، جایگزینی مدل فرآیند با مشاهده گر باعث بدست آوردن یک تخمین بهینه از خروجی سیستم و افزایش قوام در برابر ورودیهای خارجی مانند اغتشاش شده است [۵-۸].

با پی بردن به اهمیت بالای تشخیص خطا در سیستم؛ تشخیص خطا به عنوان یک شاخه از نظریه کنترل معرفی شد. در دهه های اخیر، توسعه روش های تشخیص خطا شتاب بیشتری گرفته است و روش های جدید برای آن ابداع شده است [۹-۱۱]. برای نمونه در آشکارسازی خطا با استفاده از مدل های سیگنال، روش مبتنی بر تبدیل فوریه سریع، روش مبتنی بر تبدیل موجک، روش مبتنی بر آنتروپی، روش تحلیل کپستروم^۱ و غیره پیشنهاد شده است. شکل (۱-۲) دسته بندی روش های تشخیص خطا برپایه مدل بر اساس فنون تولید مانده را نشان می دهد.



شکل ۱-۲- دسته بندی روش های تشخیص خطا برپایه مدل بر اساس فنون تولید مانده

^۱ Cepstrum

با اضافه شدن بخش آشکار سازی خطا علاوه بر بخش کنترل به سیستم، مشکلاتی مانند بزرگ شدن سیستم و تداخل این بخش‌ها با یکدیگر پیش آمد. در این راستا، در اواخر دهه هشتاد میلادی موضوع کنترل و آشکار سازی خطا به صورت همزمان^۱ بیان شد و سپس به سرعت تعمیم داده شد [۱۲-۱۵]. این ایده، با یکی کردن واحد کنترل و آشکار ساز گامی بزرگ در کوچک کردن و ساده سازی سیستم‌ها، همچنین جلوگیری از تداخل بخش کنترل و بخش آشکار سازی خطا بر عملکرد یکدیگر، برداشته است. یکی از چالش‌های بزرگ برای ایده‌ی یکی کردن واحد کنترل و تشخیص خطا علاوه بر شناسایی خطا و تولید سیگنال کنترل، مقاوم بودن در مقابل ورودی‌های نویز و اغتشاش است.

به طور کلی برای طراحی این واحد باید موارد زیر را مد نظر قرار داد:

۱- حفظ پایداری و کنترل سیستم

۲- آشکار سازی سریع خطا

۳- مقاوم بودن سیستم در برابر ورودی‌های خارجی از جمله نویز و اغتشاش، بطوری که خطا بعنوان ورودی‌های خارجی در نظر گرفته نشود و آلامی اشتباهی مبنی بر وجود خطا تولید نشود. این مورد در طراحی آشکار ساز بسیار پر اهمیت است زیرا، مقاوم نبودن سیستم باعث بیهوده بودن طراحی و ناکارآمدی سیستم آشکار ساز خواهد شد.

راه حلی که محققان در ابتدا برای طراحی کنترل و آشکار سازی خطا مقاوم به صورت همزمان در نظر گرفتند، استفاده از معیارهای کنترل مقاوم مانند H_∞ و H_2/H_∞ بود [۱۶، ۱۷]. با معرفی معیار کارایی H_- در سال ۱۹۹۶ یک روش کاربردی و کارآمد دیگر برای این طراحی بکارگرفته شد [۱۸-۲۷].

از طرف دیگر، حسابان کسری بعد از سیصد سال از مطرح شدن و مطالعات محض نظری فقط در شاخه‌های ریاضیات، توانست وارد دنیای مهندسی و کاربردی شود.

“What if the order will be $1/2$?”

این پرسش که در سی‌ام سپتامبر سال ۱۶۹۵ توسط هوپیتال^۲ مطرح شد، سرآغاز انقلابی در مبحث مشتق و انتگرال در ریاضیات شد و تولد شاخه‌ای جدید از علم ریاضیات، که حسابان کسری^۳ نام نهاده شد را، نوید داد. حسابان کسری را می‌توان این طور تعریف کرد: تعمیم درجه انتگرال و مشتق کلاسیک برای همه اعداد حقیقی نه فقط اعداد صحیح. با اینکه مفهوم عملگر غیر صحیح موضوعی با ریشه تاریخی بیش از سیصد سال بود اما، اولین جلسه‌ی بحث و بررسی کاربرد آن در شاخه‌های دیگر علوم، در سال ۱۹۷۴ میلادی در شهر نیوهایون^۴ از ایالت کنتیکت آمریکا برگزار شد. با وجود برگزاری این رویداد، اما رویکردها نسبت به استفاده از محاسبات کسری زیاد تغییر نکرد. در اواخر قرن بیستم با ارائه شدن روش‌های حل معادلات دیفرانسیل کسری کار بر روی سیستم مرتبه کسری توجه بسیاری از افراد را بخود جلب کرد.

¹ Simultaneous Fault Detection and Control

² L'Hôpital

³ Fractional calculus

⁴ New Haven

اگر چه، در سالیان دور تصور سیستم‌های واقعی با دینامیک مرتبه کسری و استفاده از معادلات کسری در صنعت، دور از ذهن و شاید غیر قابل تصور بود، سرانجام با تلاش فراوان دانشمندان، بعضی سیستم‌های واقعی بصورت مرتبه کسری مدل شدند و از کنترل کننده‌های مرتبه کسری در صنعت استفاده شد. با توجه به اینکه یکی از مزایای دیگر سیستم‌های مرتبه کسری حافظه طولانی مدت آنهاست، هم اکنون این مزیت به عنوان ابزاری مفید در راستای استفاده از حسابان کسری نیز کاربرد فراوان دارد.

بصورت خلاصه در نوشتار زیر بعضی از کاربردهای این علم در عمل آورده شده است.

- کاربرد در مهندسی برق:

- ۱- مدلسازی موتورهای الکتریکی و ترانسفورماتور بصورت دینامیک کسری [۲۸-۳۱].
 - ۲- در مدارهای الکتریکی بعنوان فرکتانس^۱ که عنصر الکتریکی با مدل مرتبه کسری است و ویژگی‌هایی بینابین خازن و مقاومت را دارد. دو نمونه معروف آن فرکتانس درختی [۳۲] و فرکتانس زنجیری [۳۳، ۳۴] هستند.
 - ۳- مدلسازی اتصال مقاومت-سلف-خازن^۲ از یک خط انتقال [۳۵].
 - ۴- مدلسازی رسانایی گرمایی به عنوان یک فرآیند با استفاده از معادلات کسری که به شکل مناسب‌تری نسبت به مدل‌های مرتبه صحیح، بیان می‌شود [۳۶].
- کاربرد در الکتروشمیایی: مدلسازی باتری‌ها و پیل‌های سوختی [۳۷-۳۹].
 - کاربرد در مهندسی حرارتی^۳: مدلسازی و شناسایی سیستم‌های گرمایی [۴۰-۴۲].
 - کاربرد در مکانیک:
- ۱- کار بر روی عایق ارتعاش و تعلیق با استفاده از معادلات کسری [۴۳-۴۴].
 - ۲- مدلسازی فشار دینامیک بر سطح مواجهه جریان آب در یک سد ساختار داخلی متخلخل [۴۵].
- کاربرد در نظریه کنترل سیستم‌ها:
- ۱- طراحی کنترل کننده‌های کسری [۴۶-۴۷].
 - ۲- شناسایی سیستم [۴۸].
 - ۳- کنترل مقاوم [۴۹].
- الکترومغناطیس: بیان بعضی از مسائل الکترومغناطیس بصورت معادلات کسری [۵۰، ۵۱].
 - شیمی و فیزیک:

¹ Fractance

² RLC

³ Thermal engineering

۱- در رابط فرکتال^۱ بین یک فلز و یک واسطه یونی جریان با مشتق کسری ولتاژ، متناسب است [۵۲].

۲- در نظریه خازن کسری با سطح الکترودهای ناهموار، تناسب جریان عبوری از خازن با مشتق غیرصحیح از ولتاژ [۵۳].

۳- مدلسازی بصورت دینامیک کسری از حافظه موجود در دی الکتریک های خازن [۵۴].

۴- بیان پدیده واپاشی^۲ غیرعادی در واسطه های ناهمگن با معادلات مرتبه کسری [۵۵، ۵۶].

۵- دینامیک مرتبه کسری برای فرکانس های زاویه ای کوچک در تقابل الکتروود-الکتروتایپ که از مقدار امپدانس متناسب با توان غیرصحیح فرکانس نشأت می گیرد [۵۷، ۵۸].

• زیست شناسی:

۱- بیان غشاء سلول بصورت مرتبه کسری در ارگانیزم زیستی [۵۹].

۲- مدلسازی مرتبه کسری از رفتار نورونهای ساقه مغز [۶۰].

• اقتصاد: مدلسازی مرتبه کسری بعضی از بازارها سیستم های اقتصادی رایج [۶۱].

• مدلسازی ریاضی مواد ویسکوالاستیک با استفاده گسترده از مشتقات مرتبه کسری

[۶۲-۶۴].

مرجع [۶۵] مثالهای قابلی از کاربردهای عملی مدلسازی مرتبه کسری را نشان داده است. علاوه بر اینها، کاربردهای حسابان مرتبه کسری در بسیاری از زمینه های دیگر مانند پردازش سیگنال (آنالیز نویز، فیلتر، باسازی و ترمیم) [۶۶]، پردازش تصویر [۶۷]، کنترل خودکار [۶۸] و روباتیک [۶۹، ۷۰] دیده شده است.

یکی از زمینه هایی پر کاربرد ریاضیات کسری، مهندسی کنترل سیستم میباشد که از این دانش، به عنوان یک ابزار قدرتمند برای طراحی سیستم های کنترلی و پیاده سازی آن در صنعت و کاربردهای عملی استفاده کرده است. بعنوان مثال می توان از کنترل کننده های تی-آی-دی^۳ [۷۱]، مجموعه کنترل کننده های کرون^۴ [۷۲-۷۴]، کنترل کننده های تناسبی-انتگرالی-مشتقی^۵ کسری [۷۵، ۷۶]، کنترل کننده های بهینه کسری [۷۷] و کنترل کننده های تطبیقی کسری [۷۸، ۷۹] نام برد. در مرجع [۸۰] به منظور پیاده سازی سیستم های ناپایدار در حالت حلقه باز، از یک کنترل کننده مرتبه کسری استفاده کرده است. در عمل کنترل کننده های کسری برای استفاده در کاربردهای مختلفی نظیر کنترل کانالهای مرکزی آبی [۸۱، ۸۲]، کنترل عملگرهای هیدرولیکی [۸۳]، کنترل دور و سرعت سیستم های الکترومکانیکی [۸۴]، کنترل بازوی ربات ها چند پایه [۸۵]، کنترل تبدیل کننده الکترونیک قدرت [۸۶] و کاهش لرزش و ارتعاشات در اتومبیل [۸۷] نیز بکار گرفته شده اند.

¹ Fractal interface

² Anomalous diffusion

³ Tunable tilt-integral derivative (TID) controller

⁴ CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier, meaning Non-Integer-Order Robust Control)

⁵ Proportional-integral-derivative controller (PID controller or three-term controller)

مقایسه کاربرد ریاضیات کسری با ریاضیات معمول در زمینه‌های مختلف علوم نظری و عملی نشان می‌دهد که، استفاده و کاربرد ریاضیات کسری در آغاز راه است. مطابق بررسی‌های صورت گرفته، در مقوله استفاده و کاربرد حسابان کسری موارد زیر قابل تأمل است:

۱- در بحث مدلسازی، با وجود اینکه در موارد بسیاری مدل مرتبه کسری دقیق‌تر است، اما هنوز در عمل از مدل غیر کسری استفاده می‌شود.

۲- در موضوع کنترل‌کننده‌ها، طراحی‌های بسیار قوی درباره کنترل‌کننده‌های تناسبی^۱-انتگرالی^۲ - مشتق‌گیر^۳ انجام شده است، اما هنوز کار بروی این موضوعات و کنترل‌کننده‌های دیگر مانند کنترل مقاوم، تطبیقی، فازی و شبکه‌های عصبی ادامه دارد.

۳- تا به امروز، مقالات کمی درباره کار بر روی سیستم‌های غیر خطی با استفاده از ریاضیات کسری منتشر شده است.

۴- تحقیقات بر روی سیستم‌های تأخیر مرتبه کسری هنوز در ابتدای راه است.

۱-۳- اهداف رساله

همگام با استفاده روزافزون از حسابان کسری در شاخه‌های مختلف علوم و آشکارشدن مزایای آن، موضوع طراحی آشکارساز خطا، همچنین موضوع کنترل و آشکارساز خطا بصورت همزمان برای سیستم‌های مرتبه کسری نامتغیر با زمان خطی، در این رساله بررسی می‌شود. قابل ذکر است که تعمیم مسأله‌ی آشکار سازی خطا به سیستم‌های کسری، مربوط به سالهای اخیر است و تعداد محدودی پژوهش در این موضوع انجام شده است، مثلاً نویسندگان در [۸۸] روش فضای برابری برای آشکارسازی خطا در سیستم‌های مرتبه کسری را مورد مطالعه قرار داده‌اند؛ همچنین تشخیص خطا برای سیستم‌های گرمایی که با مدل کسری مدلسازی شده اند در [۸۹] ارائه شده است.

اهداف ذیل در این پژوهش مد نظر است:

۱- برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان مرتبه کسری که خطاهای حسگر، عملگر و مدل بر آن وارد شده و تحت تأثیر ورودی‌های خارجی مانند نویز و اغتشاش است، واحد آشکارساز خطا طراحی شود.

۲- طراحی واحد کنترل‌کننده - آشکارساز برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان کسری که خطاهای

حسگر، عملگر و مدل بر آن وارد شده و تحت تأثیر ورودی‌های خارجی مانند نویز و اغتشاش است.

۳- بیان مسأله در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی

¹ Proportional

² PI

³ PID

۱-۴- ساختار رساله

در ادامه‌ی این پژوهش، در فصل دوم، مطالب پایه درباره خطا و آشکارساز خطا، بیان خواهد شد. در فصل سوم به معرفی و بررسی سیستم‌های مرتبه کسری پرداخته می‌شود. در فصل چهارم، تعاریف و مقدمات ریاضی برای کمک به حل مسأله ارائه می‌شود. در فصل پنجم، آشکارساز خطا برای سیستم‌های مرتبه کسری تغییرناپذیر با زمان خطی، طراحی و نتایج بصورت نامساوی‌های ماتریسی خطی بیان خواهد شد؛ سپس برای اثبات درستی روش ارائه شده، با استفاده از نرم افزار متلب شبیه‌سازی بروی یک سیستم گرمایی واقعی و همچنین یک سیستم فرضی انجام خواهد گرفت. در فصل ششم، یک واحد کنترل کننده-آشکارساز خطا برای سیستم‌های مرتبه کسری تغییرناپذیر با زمان خطی طراحی خواهد شد. در نهایت، در فصل هفتم نتیجه‌گیری و پیشنهادات ارائه می‌شود.

فصل ۲- آشکارسازی خطا

۲-۱- مقدمه

امروزه مبحث تشخیص خطا در سیستم‌ها، بخصوص با روی کار آمدن سیستم‌های پیشرفته و پیچیده بسیار مورد توجه قرار گرفته است. از آنجا که خطاها می‌توانند برای کارکرد طبیعی و درست سیستم مشکلاتی ایجاد کنند و در نهایت باعث توقف کل سیستم شوند، تشخیص سریع و رفع آنها در سیستم، عملکرد بهتر سیستم را به ارمغان خواهد آورد. می‌توان گفت پالایش سیستم، تشخیص خطا و کنترل آن از مهمترین اجزای سیستم کنترل امروزی می‌باشند.

به طور کلی خطا^۱ بصورت زیر تعریف شده است [۱]:

انحراف پیش بینی نشده و اتفاقی از یکی از خواص ساختاری سیستم که باعث کار کردن سیستم در حالت غیر دلخواه و غیر طبیعی می‌شود و در صورت اتفاق افتادن آن، مشخصات مدنظر برای عملکرد سیستم یا اجزاء آن مشاهده نمی‌شود.

اگر در سیستم‌ها خطاها به موقع شناسایی و رفع نگردد، باعث خرابی^۲ و از کارافتادگی آنها خواهند شد. طبق تعریف خرابی عبارت است از:

وقفه‌ی دائمی در عملکرد مورد انتظار از سیستم. بنابراین خرابی یا نقص یک اتفاق غیر قابل جبران^۳ است که نیاز به تعمیر و بازسازی دارد. در نتیجه، با ایجاد خرابی یا نقص در سیستم باید آن را خاموش کرد و برای تعمیر و بازسازی اقدام شود.

در این فصل انواع خطاهای که می‌تواند در سیستم‌ها رخ دهند، همچنین روشهای آشکارسازی آنها مورد بحث و بررسی قرار خواهند گرفت.

۲-۲- انواع خطا در سیستم‌ها

در دسته‌بندی خطاها محل وقوع خطا و ماهیت خطا نقش مهمی دارند. بر این اساس دانشمندان رشته نظریه کنترل، انواع خطاهای سیستم را طبق شکل (۲-۱)، به سه دسته زیر تقسیم کرده‌اند [۸].

۱- خطای سیستمی^۴

۲- خطای حسگر^۵

۳- خطای عملگر^۶

¹ Fault

² Failure

³ Irrecoverable

⁴ Plant faults

⁵ Sensor faults

⁶ Actuator faults



شکل ۱-۲: انواع خطا

در ادامه به بررسی دقیق‌تر این نوع خطاها می‌پردازیم.

۱- خطاهای سیستمی یا دینامیک مدل:

این دسته از خطاها وجود نقص در سیستم را نشان می‌دهند و بر سوء عملکرد^۱ آن دلالت دارند. اثر این نوع خطا، تغییر خواص دینامیکی ورودی-خروجی سیستم است.

۲- خطاهای حسگر:

این نوع خطاها، مستقیماً^۲ در فرآیند اندازه‌گیری ایجاد می‌شود. موقعی که در کار حسگر اختلال یا وقفه ایجاد می‌شود و حسگر بدرستی کار نمی‌کند، این نوع خطا اتفاق می‌افتد. این خطاها، باعث قطع شاخه ارتباطی بین سیستم و کنترل‌کننده و یا باعث انتقال اطلاعات بصورت ناقص خواهد شد.

خطاهای حسگر بصورت زیر دسته‌بندی شده‌اند [۹۰].

الف- خطای بایاس: در اثر ایجاد اختلاف، بین مقدار اندازه‌گیری شده و مقدار واقعی بوجود می‌آید.

ب- خطای افزایش یا کاهش حساسیت در طول زمان: اختلاف میان مقداری که حسگر اندازه‌گیری می‌کند با مقدار واقعی، به مرور زمان بیشتر شده که اصطلاحاً^۳ به آن، خطای دریفت^۲ نیز می‌گویند.

ج- خطای کاهش دقت: نشان می‌دهد که نویز در کار حسگر ایجاد اختلال کرده و سیگنال‌های اندازه‌گیری آلوده به نویز شده‌اند.

د- خطای ارسال همیشگی یک عدد ثابت: حسگر مقدار ثابتی را به جای مقادیر واقعی ارسال می‌کند که به آن خطای فریزینگ^۳ نیز می‌گویند.

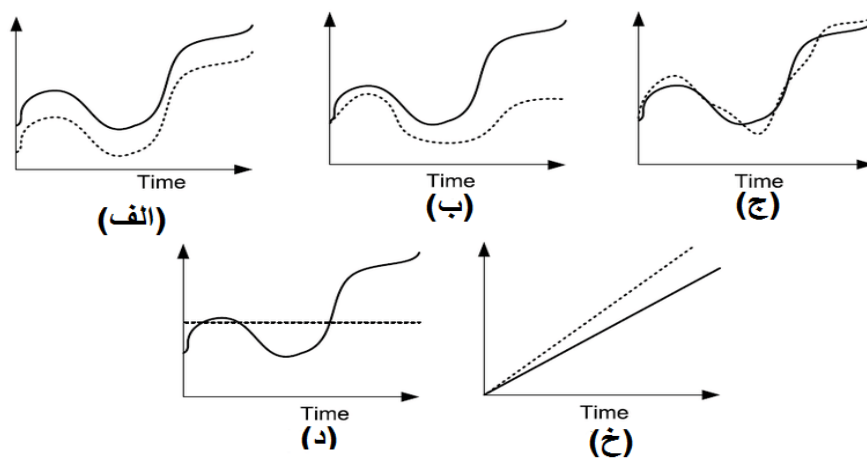
خ- خطای کالیبراسیون یا واسنجی: این خطا در اثر کالیبره کردن غلط ادوات واسطه‌ای تبدیل اطلاعات به سیگنال ولتاژ یا جریان در حسگرها پیش می‌آید.

شکل (۲-۲) انواع خطاهای حسگر را بصورت سیگنال نشان می‌دهد.

^۱ Malfunctions

^۲ Drift

^۳ Freezing



شکل ۲-۲- انواع خطای حسگر [۹۰]

۳- خطای عملگر:

خطا در عملگر باعث اختلال در تأثیر کار کنترل کننده بر روی سیستم می شود. به طور کلی این نوع خطا به چهار دسته تقسیم می شود [۹۰]:

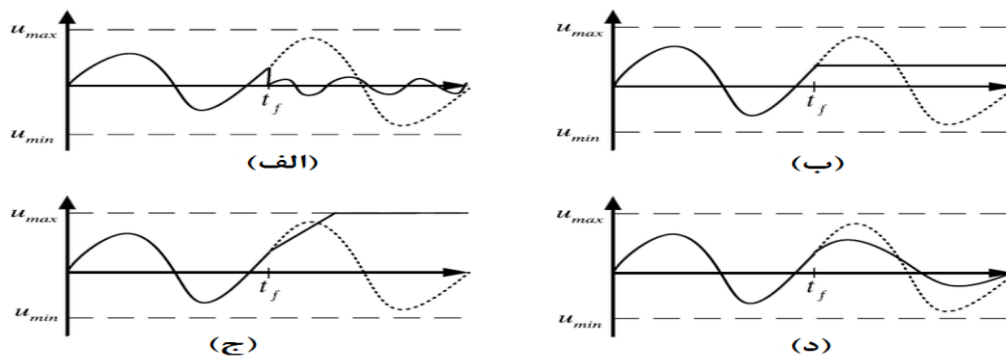
الف- خطای شناور^۱: با رخ دادن این نوع خطا، محرک خود به خود عمل می کند.

ب- گیر کردن در یک موقعیت^۲: اگر محرک به سیگنالهای کنترلی پاسخ ندهد بعلت گیر کردن در یک موقعیت، این نوع خطا ایجاد می شود [۹۱].

ج- خطای هارد آور^۳: محرک از حالت عکس العمل طبیعی خارج شده و خیلی سریع به حالت کمینه یا بیشینه سطح کنترلی خود می رسد.

د- خطای کاهش کارایی^۴

در شکل (۲-۳) این نوع خطاها را بصورت سیگنالی می توان دید.



شکل ۲-۳: انواع خطاهای محرک با نمایش سیگنالی [۹۰]

^۱ Float

^۲ Lock-in-place

^۳ Hard over

^۴ Los of effectiveness

۲-۳- روش مدل کردن خطاها

بعد از بررسی انواع خطا، موضوع مهم مدل کردن آن بصورت ریاضی برای استفاده در معادلات دینامیکی فرآیند است. رویکردهای متفاوتی برای چگونه اضافه شدن خطا به مدل سیستم وجود دارد که دو روش معروف مدل کردن خطا عبارتند از [۹۲]:

۱- مدل خطای ضرب شونده

در این حالت خطا به صورت تغییرات ناگهانی در پارامترهای سیستم ظاهر می‌شود.

۲- مدل خطای جمع شونده

در این مدل خطا به صورت ورودی ناشناخته به معادلات سیستم اضافه می‌شود. به طور مثال برای یک نوع سیستم خطی با معادلات فضای حالت زیر [۹۲]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (۱-۲)$$

جهت مدل کردن خطا با روش جمع شونده، بصورت زیر عمل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + B(u(t) + f_a(t)) + B_p f_p(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) + B_s f_s(t) \end{cases} \quad (۲-۲)$$

که f_a و f_p و f_s به ترتیب معرف خطای محرک، سیستم و حسگر می‌باشد. B_p بیانگر ماتریس خطای مدل و B_s ماتریس‌های توزیع خطاهای حسگر هستند.

۲-۴- روشهای آشکارسازی خطا

بطور کلی مباحث موجود در زمینه‌ی خطا، به دو بخش تشخیص خطا و کنترل تحمل پذیری خطا تقسیم شده است [۹۳].

۱- تشخیص خطا^۱: این مبحث شامل چهار هدف تعیین نوع و اندازه خطا، محل وقوع و زمان رخ دادن آن است. در واقع این مبحث شامل موارد زیر می‌باشد:

الف) آشکارسازی خطا^۲: آشکارسازی، اولین قدم در تشخیص خطا همچنین، ساده‌ترین شکل از تشخیص خطا است که با ایجاد یک منطق دودویی، آلام رخ دادن خطا را در سیستم به صدا درخواهد آورد.

^۱ Fault identification

^۲ Fault detection

ب) ایزولاسیون یا جداسازی خطا^۱: فهمیدن محل رخ دادن خطا بسیار مهم و حیاتی است. با تشخیص اینکه کدام یک از حسگرها، عملگرها و یا اجزای داخلی فرآیند دچار مشکل شده‌اند می‌توان سریع به آن رسیدگی کرد. در ایزولاسیون خطا این مهم انجام می‌شود. در صنعت برای آشکارسازی و جداسازی خطا از یک سیستم پالایش معروف به اف-دی-آی^۲ استفاده می‌شود.

ج) شناسایی خطا : گام بعدی تخمین اندازه و رفتار متغیر با زمان خطا است. به عبارت ساده‌تر دستیابی به زمان وقوع و بزرگی خطا، هدفی است که می‌توان با شناسایی خطا به آن دست یافت. البته این مورد زیاد در سیستم‌ها ضروری نبوده؛ زیرا به محض مشاهده خطا، در صورت امکان سیستم را خاموش می‌کنند و یا به سرعت به رفع آن اقدام می‌کنند.

۲- کنترل تحمل پذیر خطا^۳: طراحی کنترل کننده برای حفظ پایداری و کارایی در صورت رخ دادن خطاها در سیستم است.

از اوایل دهه‌ی هفتاد میلادی، آشکارسازی خطا مبتنی بر مدل فرآیند و آشکارسازی خطا مبتنی بر داده یا سیگنال که از روشهای اصلی تشخیص خطا بودند، بسیار مورد توجه قرار گرفتند. در آشکارسازی خطا مبتنی بر داده، اساس آشکارسازی خطا داده‌های موجود در سیستم است. این روش مناسب سیستمی است که دانشی در مورد ساختار آن موجود نمی‌باشد و بکار بردن این روش در سیستم‌های صنعتی ابعاد وسیع، بسیار خوب و کارآمد بوده است.

با داشتن دانش درباره سیستم تحت بررسی، می‌توان با روش آشکارسازی خطا مبتنی بر مدل فرآیند اقدام به طراحی سیستم تشخیص خطا کرد. با توجه به سرعت و کارایی این روش، استفاده عملی آن در تشخیص خطا برای سیستم‌های صنعتی و کاربردی مانند کنترل وسایل نقلیه، سیستم‌های رباتیک، سیستم‌های قدرت و سیستم‌های کنترل صنعتی بسیار فراوان است. مراحل طراحی یک سیستم آشکارساز خطا مبتنی بر مدل فرآیند را می‌توان بصورت زیر بیان کرد [۹۳]

۱- طراحی یک سیستم تولید باقیمانده^۴: سیگنال تولید شده از مقایسه اندازه‌گیری‌ها و محاسبات بر پایه روابط تحلیلی سیستم بدست می‌آید. طراحی سیستم باقیمانده باید طوری باشد که در سیگنال باقیمانده اثر سیگنال مزاحم، مانند اغتشاش و عدم قطعیت‌های موجود در مدل حذف شده و از طرف دیگر سیگنال خطا به خوبی نمایان شود.

۲- بهینه‌سازی سیگنال باقیمانده: هدف افزایش حساسیت سیستم نسبت به خطا و آشکارسازی خطاهای موجود در سیستم به بهترین وجه است. در این راستا مولد باقیمانده بگونه‌ای بهینه‌سازی می‌شود که اثر سیگنال‌های اغتشاشات و عدم قطعیت‌های موجود در سیستم بر روی سیگنال باقیمانده کمینه شود.

¹ Fault isolation

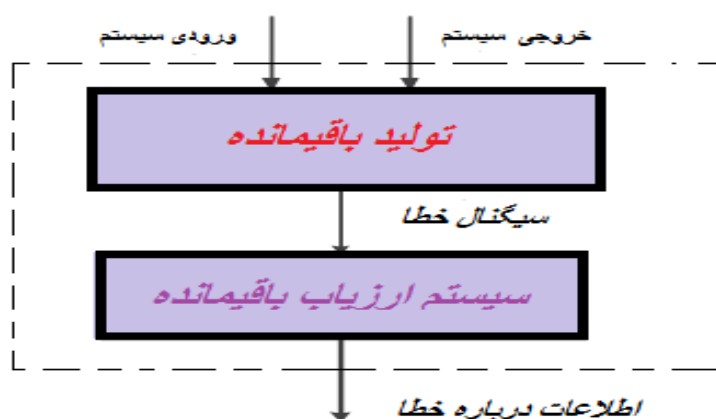
² Fault Detection and Isolation (FDI)

³ Fault tolerant control (FTC)

⁴ Residual generation

۲-۵- تولید سیگنال باقیمانده

هدف از تولید سیگنال باقیمانده، مشخص کردن عملکرد غیر طبیعی سیستم اصلی با مقایسه عملکرد مدل سیستم است. به دلیل اینکه باقیمانده اثر مستقیم بر روی کارایی سیستم تشخیص خطا دارد، بحث تولید باقیمانده در میان محققان بسیار مورد توجه است و روش‌های گوناگونی در این زمینه ابداع شده است. از جمله این روش‌ها روش مبتنی بر فضای برابری^۱، روش تخمین پارامتر، روش فاکتورگیری و روش مبتنی بر فیلتر^۲ را می‌توان نام برد. هر چند روشهای تولید باقیمانده متفاوت است اما اصول کار در همه یکسان است (شکل ۲-۵).



شکل ۲-۵: اصول کار یک سیستم تولید باقیمانده

با توجه به مطالعات و بررسی‌های انجام شده، در این رساله برای آشکارسازی خطا از روش مبتنی بر ریتگر که یکی از زیر مجموعه‌های روش مبتنی بر مدل است، استفاده خواهد شد. این روش با جایگزینی ریتگر بجای فیلتر در روش مبتنی بر فیلتر ابداع شد و طبق نتایج بررسی‌ها، بسیار کارآمد، ساده در پیاده‌سازی و با عملکرد خوب در تشخیص خطا است. در این روش ریتگر لیونبرگر برای یک ساختار معین و ریتگر کالمن برای یک ساختار تصادفی قابل استفاده است. در این روش ایده اصلی از توانایی ساخت دوباره خروجی سیستم از حالات تخمین زده شده در یک ریتگر نشأت گرفته شده است و سیگنال باقیمانده با بازسازی دوباره خروجی‌ها یا یک زیرمجموعه از سیگنال‌های قابل اندازه‌گیری سیستم تحت بررسی تولید خواهد شد. این سیگنال، به عنوان مقایسه بین خروجی سیستم واقعی و ریتگر شناخته می‌شود. قابل ذکر است که در این روش، طراحی مولدهای باقیمانده عموماً^۱ به طراحی ریتگر خروجی تبدیل می‌شود. شاید در نگاه اول این روش ساده فرض شود ولی در عمل، بنا به دلایل متعددی نظیر زیاد بودن نامعینی‌ها که مدلسازی را سخت می‌کند، همچنین تحلیل افزونگی یا تحلیل نرم افزاری روشی پیچیده است.

با توجه به وجود اثر ورودی نامعلوم و نامعینی مدلسازی معمولاً^۲ سیگنال باقیمانده $r(t)$ قاعده‌ی:

$$r(t) = 0 \Rightarrow \text{خطا} \Rightarrow \text{آلارم}$$

$$r(t) \neq 0 \Rightarrow \text{بدون خطا}$$

^۱ Parity Relation based Residual Generator

^۲ Fault Detection Filter

را برقرار نمی‌کند. بنابراین مرحله بعد در طراحی، ساخت یک واحد تصمیم‌گیر^۱ است تا در این واحد، به ارزیابی سیگنال باقیمانده برای تشخیص خطا از سیگنال‌های دیگر پرداخته شود. با تولید یک سیگنال آستانه و مقایسه آن با تابع ارزیابی باقیمانده سیستم آشکارسازی خطا کامل خواهد شد. در این راستا تابع ارزیابی باقیمانده $(J(\tau))$ نوعاً^۲ می‌تواند به صورت زیر انتخاب شود [۸]:

$$J(\tau) = \|r(t)\|_2 = \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau r^T(t) r(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-2)$$

τ نشان دهنده محدوده زمانی تشخیص خطا است که بعلاوه کشف خطا در حداقل زمان ممکن، باید طول پنجره ارزیابی τ محدود می‌باشد. پس از تعیین تابع ارزیابی و با توجه به آن حد آستانه خطا باید تعیین شود. انتخاب آستانه (J_{th}) به صورت زیر منطقی به نظر می‌رسد [۸]:

$$J_{th} = \sup_{f \neq 0, d \in L_2} \|r(t)\|_2 \quad (4-2)$$

حال می‌توان خطا را توسط رابطه منطقی زیر آشکار کرد:

$J(\tau) > J_{th} \Rightarrow$ خطا $\Rightarrow$ بصدای آژیر هشدار وقوع خطا

$J(\tau) \leq J_{th} \Rightarrow$ عدم وجود خطا

۲-۶- آشکارسازی خطا مبتنی بر معیارهای کنترل مقاوم

در عمل اتفاق افتاده است که وجود ورودی‌های ناشناخته، ورودی‌های کنترل و عدم قطعیت‌های مدل در بسیاری از سیستم‌های صنعتی، باعث اثر نامطلوب و مخرب بر روی سیستم آشکارساز خطا شده‌اند. اگر در طراحی دقت نشود این ورودی‌ها، توسط سیستم آشکارساز به عنوان خطا در نظر گرفته خواهد شد و می‌تواند باعث بصدای آژیر هشدارهای اشتباه و گمراه کننده شود. اشتباه دیگری که توسط آشکارساز خطا می‌تواند رخ دهد این است که سیستم آشکارساز خطا را به عنوان اغتشاش ببیند، آنگاه هشدارهای اعلام نخواهد شد. یکی از راهکارهایی که برای حل این مشکلات پیشنهاد شده است و هم اکنون در بسیاری از سیستم‌ها عملی اجرا می‌شود، بکارگیری فنون‌های بهینه‌سازی برای آشکارسازی خطا و استفاده از مباحث کنترل مقاوم در زمینه‌ی طراحی فیلترهای آشکارساز خطا است. با این راهکارها مسئله طراحی فیلتر آشکارساز خطا برای سیستمی که حساسیت بالا نسبت به خطا داشته باشد، تبدیل به یک مسئله بهینه‌سازی می‌شود. در این راستا در مقالات موجود، معیارهای گوناگونی در قالب نرم‌های مختلف نظیر H_∞ و H_2 و معیار H_- برای حل مسأله مطرح شده‌اند که در این مرحله، به بررسی آنها می‌پردازیم.

۲-۶-۱- آشکارسازی خطا مبتنی بر معیار H_∞

قابلیت اعتماد و درست کار کردن یک سیستم تشخیص خطا که به مقاوم بودن سیستم نسبت به نامعینی‌ها و اغتشاشات بستگی دارد، از عوامل اصلی طراحی محسوب می‌شود. یکی از روشهای پیشنهادی برای قوام

^۱ Decision Making

سیستم آشکارساز، تبدیل مسأله تشخیص خطای مقاوم به یک مسأله استاندارد H_∞ است. اگر $T(s)$ یک تابع تبدیل سره بوده و قطبی بر روی محور موهومی نداشته باشد، آنگاه نرم ∞ آن به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۶]:

$$\|T\|_\infty = \sup_{\substack{\sigma \\ w \in R}} (T(jw)) \quad (5-2)$$

یعنی سوپریمم بیشینه مقدار تکین پاسخ فرکانسی سیستم نرم H_∞ تابع تبدیل است که، برابر با فاصله مبدأ تا دورترین نقطه روی نمودار نایکوئیست^۱ $T(s)$ می‌باشد. به عبارتی بیشترین مقدار که در منحنی اندازه بود^۲ اتفاق می‌افتد نرم H_∞ تابع تبدیل است. به بیان دیگر بزرگترین بهره سیستم در صورت تحریک با سیگنال ورودی هارمونیک است.

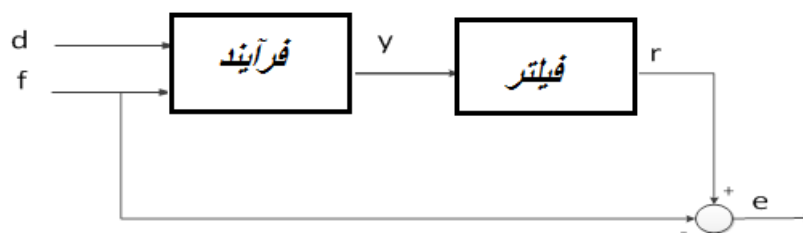
اگر انرژی یا نرم L_2 ورودی و خروجی قابل اندازه‌گیری باشد و بتوان بهره ورودی-خروجی را برای سیگنال ورودی با انرژی یا توان محدود اندازه‌گیری کرد، می‌توان شاخص عملکرد H_∞ را بکار برد.

سیستم خطی زیر مفروض است [۹۴].

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + B_c f_c(t) + B_d d(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) + B_s f_s(t) + D_d d(t) \end{cases} \quad (6-2)$$

که ماتریس‌های B_c و B_s بترتیب بیانگر ماتریس‌های توزیع خطاهای مدل و حسگر هستند. همچنین f_c و f_s به ترتیب معرف خطاهای محرک و حسگر می‌باشند. فیلتر آشکارساز خطا مطابق شکل (۶-۲) است. خطای تخمینی e برابر است با اختلاف باقیمانده r با سیگنال خطا $f(t)$.

$$e(t) = r(t) - f(t) \quad (7-2)$$



شکل ۶-۲- بلوک جعبه‌ای فیلتر پیشنهادی برای آشکارسازی خطا

که برای آشکارسازی خطا، فیلتر باید طوری طراحی شود که انرژی خطای تخمینی $\|e\|_{L_2}$ را نسبت به اغتشاش تعمیم یافته، $w = [d(t)^T \quad f(t)^T]^T$ کمینه کند. یا به عبارتی:

$$\min_F \sup_{w \in L_2 - \{0\}} \frac{\|r(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} < \gamma, \gamma > 0 \quad (8-2)$$

به بیانی دیگر، طبق رابطه (۸-۲) نرم H_∞ از تابع تبدیل T_{we} بین خطای تخمین زده شده و اغتشاش تعمیم یافته، باید کمینه شود. پس مسأله آشکارسازی خطا را می‌توان اینطور تعریف کرد:

^۱Nyquist

^۲ Bode Diagram

پیدا کردن فیلتر H_∞ بطوری که شرایط زیر را ارضاء کند:

$$\|T_{we}\| < \gamma \quad (9-2)$$

که γ یک عدد اسکالر مثبت است.

۲-۶-۲. آشکارسازی خطا مبتنی بر معیار H_-

در فرآیند طراحی سیستم تشخیص خطا در عین کمینه کردن اثر ورودی‌های نامعلوم و نامعینی‌های بر روی سیگنال باقیمانده باید حساس‌سازی هر چه بیشتر این سیگنال به خطا نیز انجام شود. از طرفی این دو هدف در برابر هم قرار دارند و بهبود یکی سبب انحراف دیگری می‌شود. راه حل پیشنهادی مطرح شده، یک طراحی چند منظوره با استفاده از یکی از معیارهای کارآیی H_∞/H_2 , H_∞/H_∞ و H_∞/H_- است تا بتواند مصالحه مناسب بین حساسیت سیستم و قوام سیستم را برقرار کند. در این میان معیار کارآیی H_∞/H_- از سایر موارد بیشتر مورد مطالعه قرار گرفت و در شرایط یکسان، پاسخ بهتری نسبت به سایر موارد در عمل از خود نشان داده است.

اگر $T(s)$ یک تابع تبدیل سره بوده و قطبی بر روی محور موهومی نداشته باشد، شاخص بهینه سازی H_- به صورت زیر تعریف می‌شود [۹۵]:

$$\|T(s)\|_{[-0, \bar{\omega}]} = \inf_{\omega} \sigma [T(j\omega)] \quad (10-2)$$

که $\bar{\omega}$ کران فرکانسی معلوم و σ کمترین مقدار تکین سیستم می‌باشد. در واقع این شاخص اینگونه بیان می‌شود که نسبت انرژی ورودی سیستم (خطا) به انرژی خروجی سیستم بیشینه شود. واضح است که این شاخص عکس مسئله‌ی H_∞ می‌باشد.

با توجه به مطالب گفته شده، در این رساله طراحی آشکارساز خطای مقاوم با استفاده از روش بهینه سازی H_∞/H_- انجام خواهد شد. در نتیجه در طراح آشکارساز باید:

- ۱- حساسیت باقیماند نسبت به اغتشاش کمینه شود و اغتشاش خطا فرض نشود. پس می‌توان این شرط را بصورت کارآیی H_∞ بیان کرد.
- ۲- حساسیت باقیماند نسبت به سیگنال خطا بیشینه شود. این شرط عکس مسئله H_∞ است که با کارآیی H_- قابل بیان است.

۲-۷- نتیجه گیری

در این فصل با بررسی انواع خطا در سیستم و روش‌های تشخیص خطا، توانستیم رهیافت حل مسأله برای آشکارسازی خطا در سیستم مرتبه کسری را با انتخاب نوع مدل کردن خطا و روش تشخیص خطا پیدا کنیم.

با توضیحات داده شده در این فصل، با انتخاب مدل کردن خطا بصورت جمعی و استفاده از روش بهینه سازی H_{∞}/H_{-} در فصول بعد به حل مسأله می پردازیم.

فصل ۳- سیستم پادینامیک مرتبه کسری

۳-۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، حسابان مرتبه کسری بعثت مزایای بسیاری از جمله، انعطاف‌پذیری^۱ و ایجاد شرایط برای مدلسازی مناسب و بهتر در بعضی سیستم‌ها بخصوص سیستم‌های پیچیده، مورد توجه بسیاری از محققان در رشته‌های مختلف قرار گرفته‌اند. در این فصل به ارائه تاریخچه، مفاهیم و قضیه‌های اولیه در بحث پایداری برای سیستم‌هایی با دینامیک مرتبه کسری پرداخته خواهد شد و بعضی از لم‌ها و قضیه‌هایی که در طراحی آشکارساز به ما کمک می‌کنند، مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

۳-۲- تاریخچه

حسابان کسری یک موضوع علمی جدید با سابقه قدیمی تلقی می‌شود. حسابان کسری در سال ۱۶۹۵ میلادی، با نوشتن نامه‌ای از سوی هوپیتال^۲ به لایبنز^۳ با این سوال که "اگر مرتبه مشتق $\frac{1}{p}$ باشد چه اتفاقی خواهد افتاد؟" مطرح شد. لایبنز پاسخ داد: "این یک تناقض آشکار است اما یک روز نتایج مفید برای آن قابل تصور است." این سؤال، این حدث و گمان سر آغاز مبحث نوین در علم ریاضیات شد [۹۶]. مبحث مرتبه کسری، تعمیم یافته مشتق و انتگرال مرسوم است و زیبایی آن در این است که، مشتق (یا انتگرال) می‌تواند هر عدد حقیقی باشد [۹۷-۹۸].

پس از سیصد سال از مطرح شدن حسابان کسری، سرانجام دانشمندان پی بردن که این مبحث یک موضوع ریاضیات محض نیست، بلکه بسیاری از مسائل علوم مختلف را می‌توان با حسابان کسری بیان نمود و حل کرد. مراجع [۹۹-۱۰۰] از عوامل ذیل برای باقیماندن حسابان کسری در حد موضوع ریاضی محض و کاربردی نشدن آن در علوم دیگر، در مدت بیش از سیصد سال نام برده‌اند.

۱- فقدان یک تعریف مشخص و ساده برای موضوع

۲- نداشتن راه حل برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

۳- تعریف نامشخص برای انتگرال کسری در مسائل مختلف

پس از پیدایش حسابان کسری، این مسأله جذابیت بسیار زیادی برای دانشمندان داشته است. طبق نوشته های مرجع [۱۰۱] اوایل در سال ۱۷۳۰ میلادی بیان کرد که، با وجود آن که نمی‌توان برای حسابان کسری تعبیر فیزیکی خاصی در نظر گرفت اما، با تعمیم ریاضیات صحیح می‌توان به صورت نظری بدان دست یافت. لاپلاس در سال ۱۸۱۲ میلادی توانست یک تعریف برای نوع خاصی از مشتق کسری ارائه دهد. در ۱۸۲۲ میلادی، فوریه با تعمیم رابطه فوریه به مشتق کسری آن قدم بزرگی برای توسعه علمی حسابان کسری برداشت. بسط تیلور در سال ۱۸۴۷ میلادی توسط ریمن به حوزه سیستم‌های مرتبه کسری تعمیم یافت. گریر توانست در سال ۱۸۵۹ میلادی با استفاده از مشتق کسری تابع نمایی مفهوم مشتق سینوس و کسینوس را به مشتق مرتبه

¹ Flexibility

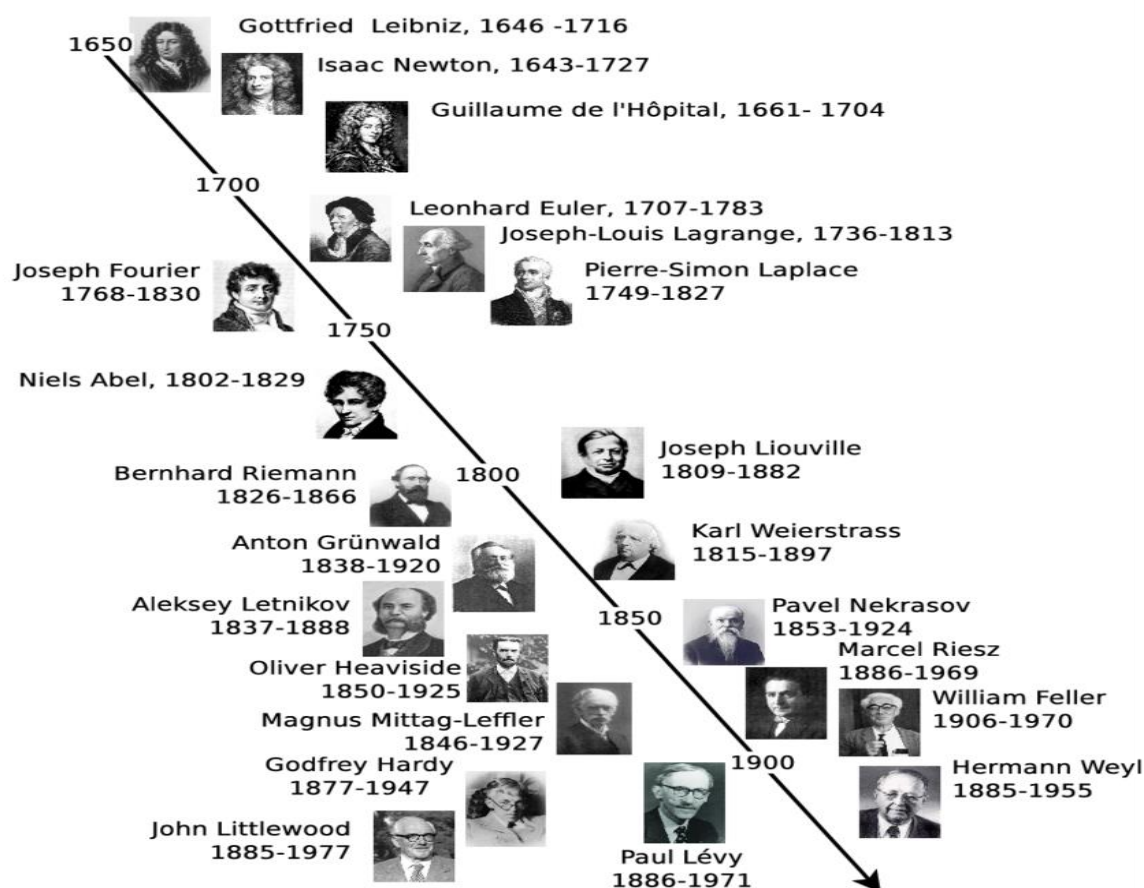
² Hopital

³ Leibniz

کسری آنها گسترش دهد. لتنیف در سال ۱۸۶۸ میلادی برای نماد عملگر مرتبه کسری D^q رابطه‌ی زیر را اثبات کرد [۱۰۱].

$$[D^q D^p f(x)] = [D^{q+p}]f(x) \quad (۱-۳)$$

با تلاش لوران در سال ۱۸۸۴ میلادی رابطه‌ی انتگرال کوشی به حالت مرتبه کسری گسترش یافت. در اوایل قرن نوزدهم ریمن و لیوویل^۱ توانستند یک نوع تعریف برای مشتق کسری ارائه دهند. شکل (۱-۳) فهرستی از دانشمندان مشهور که از سال ۱۶۵۰ تا ۱۹۷۷ میلادی در زمینه حسابان کسری کار کرده‌اند، نشان می‌دهد.



شکل ۱-۳- دانشمندان مشهور در زمینه حسابان کسری

برای اولین بار یک شیمیدان (کیت اولدهام^۲) و یک ریاضیدان (جروم اسپانییر^۳) که همکاری مشترک خود را از سال ۱۹۶۸ میلادی آغاز کرده بودند؛ در سال ۱۹۷۴ میلادی کتاب محاسبات کسری را منتشر کردند [۱۰۱]. در این کتاب، به مسأله انتقال جرم و گرما از نگاه نیمه انتگرالها^۴ و نیمه مشتق‌ها^۵ نیز پرداخته شده است. این کتاب به درستی منشأ آغاز دوران جدید از کاربرد حسابان کسری است. در سال ۱۹۸۷ میلادی کتابی بعنوان

¹ Reimann-Liouville

² Keith Oldham

³ Jerome Spanier

⁴ semi-integrals

⁵ semi-derivatives

« مشتق و انتگرال کسری: کاربرد و نظری » به زبان روسی منتشر شد و سپس در سال ۱۹۹۳ به انگلیسی ترجمه شد. از این کتاب بعنوان دائرة المعارف حسابان کسری نام برده می شود [۱۰۲].

از دهه هفتاد میلادی به بعد، حسابان کسری هدف بسیاری از کنفرانس ها و رساله های تخصصی بوده است و دانشمندان علوم مختلف از جمله علوم مهندسی و فیزیک ، توجه زیادی به این علم نشان دادند. امروزه، مجموعه کتاب ها ، مقالات و متون اختصاص داده شده به حسابان کسری و کاربردهای آن، شامل هزاران عنوان است و انتظار می رود این فهرست در سال های آینده، رشد بیشتری پیدا کند.

۳-۳- مفاهیم اولیه

عملگر مشتق-انتگرال گیر^۱، که ترکیبی از دو عملگر مشتق گیر و انتگرال گیر است و با نماد D_t^α شناخته می شود، توسط رابطه زیر تعریف می شود [۱۰۱].

$$D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_t^\cdot (d\tau)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

برخلاف تعریف مشتق در ریاضیات مرسوم، دانشمندان برای مشتقات مرتبه کسری تعاریف مختلفی ارائه داده اند که، هر کدام دارای مزایا و معایبی هستند. در اینجا به چند مورد از مهمترین آنها اشاره می شود [۱۰۳].

تعریف مشتق کسری ریمن-لیوویل بر اساس انتگرال کوشی بیان شده است و طبق روابط زیر است [۱۰۴]:

$${}_R D_t^\alpha = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3-3)$$

که $n-1 < \alpha < n$ و $n \in N$ و $\Gamma(\cdot)$ نیز تابع گاما است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (4-3)$$

از مزایای تعریف مشتق کسری ریمن-لیوویل می توان به ساده بودن آن و در نتیجه مناسب بودن برای محاسبات اشاره کرد .

تعریف مشتق کسری گرانوالد - لتنیکوف^۲ طبق روابط (۵-۳) است [۱۰۵].

$${}_L D_t^\alpha = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{t-a}{N} \right]^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f\left(t - j \left[\frac{t}{N} \right]\right). \quad (5-3)$$

این رابطه یک حافظه بلند مدت از مشتق را می دهد.

¹ Differ-integral

² Grundwald-Letnikov

در نهایت، تعریف کاپوتو^۱ طبق (۶-۳) است [۱۰۶]:

$${}_c D_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \quad (6-3)$$

که $m \in N$ و $m-1 < \alpha < m$

مزیت‌های مهم تعریف مشتق کسری کاپوتو نسبت به دو روش قبلی ساده بودن تبدیل لاپلاس برای آن و مشتق صفر اعداد ثابت است. تبدیل لاپلاس در این تعریف به صورت زیر است [۱۰۶]:

$$L\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0) \quad (7-3)$$

برای استفاده از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری در مدلسازی سیستم‌ها، نیاز به تعریف مشتق مرتبه کسری که شرایط اولیه‌ای آن تفسیر فیزیکی دارند، است. هر چند مشتق ریمان - لیویل در ریاضیات محض کاربرد بسیار دارد و نقش اساسی در معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری ایفا می‌کند، متأسفانه شامل شرایط اولیه‌ای است که از لحاظ فیزیکی تعبیر خاصی برای سیستم ندارد. برعکس شرایط اولیه در مشتق کاپوتو معادل با شرایط اولیه معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح است. تفاوت دیگر مشتق ریمان - لیویل و کاپوتو این است که مشتق کاپوتوی یک عدد ثابت صفر است اما، برای تعریف ریمان - لیویل می‌تواند صفر نباشد. این تفاوت‌های مشتق ریمان - لیویل و کاپوتو باعث شد که در این رساله از تعریف مشتق کاپوتو برای معادلات دینامیک کسری سیستم استفاده شود.

۳-۴- مدلسازی سیستم با دینامیک مرتبه کسری همراه با خطا و ورودی نامعلوم

داشتن دانشی از سیستم برای طراحی سیستم تشخیص خطای مبتنی بر مدل، نیازمند توصیف مناسبی از سیستم است که اثر خطا و ورودی نامعلوم مانند اغتشاش و نویز نشان دهد.

۳-۴-۱- توصیف سیستم با دینامیک مرتبه کسری

بر اساس دینامیک سیستم، انواع مختلفی از مدل سیستم برای توصیف فرآیند در جهت تأمین اهداف کاربردی، می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در میان آنها مدل سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان که به مدل خطی تغییرناپذیر با زمان^۲ معروف است یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین این مدل‌ها است. اگر $u(t) \in R^k$ ورودی و $y(t) \in R^m$ خروجی سیستم باشد، رابطه ورودی خروجی یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان نامی^۳ مرتبه کسری که به تابع تبدیل معروف است، بصورت (۸-۳) است [۱۰۳]:

^۱ Caputo

^۲ Linear time-invariant (LTI)

^۳ مدل نامی به مدل سیستم در حالت بدون ورودی نامعلوم در حالت بدون خطا

$$Y = G_u(s) U(s) \quad (۸-۳)$$

معادلات دینامیکی یک سیستم مرتبه کسری خطی تغییر ناپذیر با زمان را می‌توان به صورت معادلات (۳-۹) نشان داد [۱۰۳]:

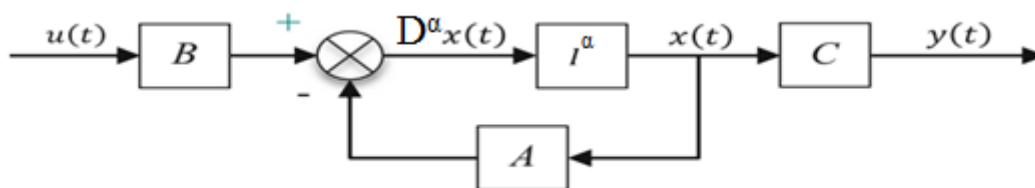
$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha_1} x_1}{dt^{\alpha_1}} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{d^{\alpha_2} x_2}{dt^{\alpha_2}} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \frac{d^{\alpha_n} x_n}{dt^{\alpha_n}} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (۹-۳)$$

که در آن $x \in R^n$ حالت‌های سیستم است و α_i مرتبه غیر صحیح مشتق در توصیف دینامیک حالت i ام است. برای $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ سیستم متناسب^۱ کسری نام دارد و برای $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$ سیستم نامتناسب^۲ کسری خوانده می‌شود.

شکل استاندارد توصیف فضای حالت سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان کسری نامی به صورت (۳-۱۰) نوشت می‌شود.

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (۱۰-۳)$$

که $0 < \alpha < 1$ درجه سیستم کسری، $x(t) \in R^n$ بردار حالت، $y(t) \in R^p$ خروجی سیستم و $A \in R^{n \times n}$ ماتریس حالت، $B \in R^{n \times l}$ ماتریس ورودی، $C \in R^{p \times n}$ ماتریس خروجی و $D \in R^{p \times l}$ ماتریس انتقال است. بلوک جعبه‌ای فضای حالت رابطه (۳-۱۰) بصورت شکل (۳-۲) قابل ترسیم است.



شکل ۳-۲- بلوک جعبه‌ای فضای حالت سیستم کسری LTI

مدل تابع تبدیل سیستم مرتبه کسری خطی تغییر ناپذیر با زمان با استفاده از تعریف کاپوتو با استفاده از تبدیل لاپلاس بصورت (۳-۱۱) است:

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= Ax + Bu \Rightarrow s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow \\ X(s) &= (s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1}s^{\alpha-1}x(0), \\ x(0) &= 0 \Rightarrow X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1}BU(s), \end{aligned} \quad (۱۱-۳)$$

^۱Commensurate

^۲Incommensurate

و برای خروجی سیستم داریم

$$Y = CX(s) + DU(s) \Rightarrow Y = (s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \quad (12-3)$$

که در نهایت مدل تابع تبدیل بصورت (13-3) بدست می آید.

$$Y = G(s)U(s), G(s) = (s^\alpha I - A)^{-1}B + D \quad (13-3)$$

معادلات حالت یک سیستم مرتبه کسری غیرخطی تغییرناپذیر با زمان، به صورت (14-3) است.

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha_1} x_1}{dt^{\alpha_1}} = f(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{d^{\alpha_2} x_2}{dt^{\alpha_2}} = f(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{d^{\alpha_n} x_n}{dt^{\alpha_n}} = f(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (14-3)$$

۳-۴-۲- توصیف سیستم با دینامیک کسری با ورودی نامعلوم

برای مدل (3-8) با ورودی های ناخواسته شامل اغتشاشات محیط، تغییرات ناخواسته فرآیند تحت بررسی و نویز فرآیند، رابطه ورودی و خروجی را بصورت زیر می توان نوشت:

$$Y = G_u(s)U(s) + G_d(s)d(s) \quad (15-3)$$

که $d(s)$ ورودی اغتشاش است. مدل فضای حالت سیستم (15-3) بصورت معادلات (3-16) است [32].

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu + B_d d(t) \\ y = Cx + Du + D_d d(t) \end{cases} \quad (16-3)$$

که α درجه سیستم مرتبه کسری، $x(t) \in R^n$ بردار حالت، $u(t) \in R^k$ ورودی کنترل، $y(t) \in R^r$ خروجی سیستم و $d(t)$ ورودی ناخواسته است. $A \in R^{n \times n}$ ماتریس حالت، $B \in R^{n \times k}$ ماتریس ورودی، $B_d \in R^{n \times p}$ ماتریس ورودی ناخواسته مانند اغتشاش، $C \in R^{r \times n}$ ماتریس خروجی، $D \in R^{k \times p}$ ماتریس انتقال و $D_d \in R^{r \times p}$ ماتریس انتقال ورودی ناخواسته است.

معمولاً در نمایش های دیگری از سیستم، اغتشاشات محیط و نویز وارد شده به فرآیند بصورت جداگانه به معادلات سیستم اضافه می شوند.

$$Y = G_u(s)U(s) + G_d(s)d(s) + n(s) \quad (17-3)$$

که عموماً " $n(s)$ نویز سفید با میانگین صفر و واریانس $\sum_{\mathfrak{N}} = \text{dig}(\sigma_1, \dots, \sigma_{k_{\mathfrak{N}}})$ فرض می شود.

۳-۴-۳- مدل سازی خطا در سیستم با دینامیک مرتبه کسری

همانطور که در فصل قبل بیان شد، مدل خطای جمع شونده یکی از شاخص ترین روش های مدل کردن خطا است. در این روش، تمام خطاهای ممکن را به صورت بردار $f(s)$ در نظر می گیرند و بصورت رابطه (3-18) به سیستم با دینامیک کسری اضافه می شود [113].

$$Y = G_u(s) U(s) + G_d(s) d(s) + G_f(s) f(s) \quad (۱۸-۳)$$

بر این اساس، تحقق فضای حالت از مدل کامل سیستم، شامل ورودی نامعلوم و خطا به صورت زیر است [۱۱۳].

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu + B_d d(t) + B_f f(t) \\ y = Cx + Du + D_d d(t) + D_f f(t) \end{cases} \quad (۱۹-۳)$$

که α درجه سیستم مرتبه کسری، $x(t) \in R^n$ بردار شبه حالت^۱، $u(t) \in R^k$ ورودی کنترل، $y(t) \in R^r$ خروجی سیستم و $A \in R^{n \times n}$ ماتریس حالت، $B \in R^{n \times k}$ ماتریس ورودی، $B_d \in R^{n \times p}$ ماتریس ورودی ناخواسته مانند اغتشاش، $B_f \in R^{n \times q}$ ماتریس ورودی خطا $C \in R^{r \times n}$ ماتریس خروجی، $D_d \in R^{r \times p}$ ماتریس انتقال، $D_f \in R^{r \times q}$ ماتریس انتقال خطا است. سیستم تحت تأثیر ورودی ناخواسته مانند اغتشاش $d(t) \in R^p$ و ورودی خطای $f(t) \in R^q$ قرار دارد.

همچنین تابع تبدیل بین خروجی سیستم و خطا را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$G_{yf}(s) = C(S^\alpha I - A)^{-1} B_f + D_f \quad (۲۰-۳)$$

۳-۵- قضایای بنیادین

۳-۵-۱- قضایای پایداری

پایداری در سیستم‌های با دینامیک مرتبه کسری مطابق سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان غیر کسری، بستگی به موقعیت قطب‌ها در صفحه مختلط^۲ دارد.

لم ۳-۱ [۱۰۷]: پایداری ورودی محدود- خروجی محدود^۳: یک سیستم خطی با دینامیک مرتبه کسری متناسب را که، بصورت معادلات زیر توصیف می‌شود، در نظر بگیرید.

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad (۲۱-۳)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ ، $x \in R^n$ ، $y \in R^p$ و $A \in R^n$. این سیستم پایدار است اگر و تنها اگر نامعادله (۲۲-۳) به ازای تمامی مقادیر ویژه ماتریس A برقرار باشد [۱۲۴]. در شکل (۳-۳) ناحیه پایداری را می‌توان دید.

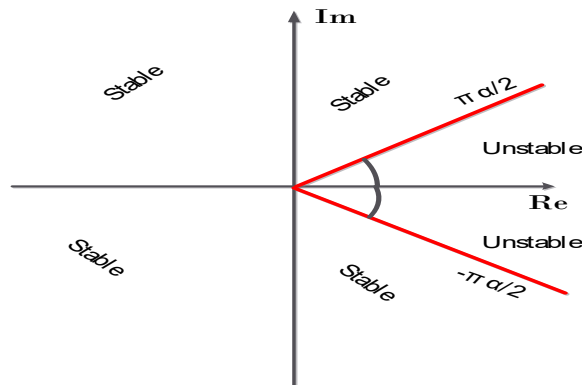
$$|\arg(\text{eig}(A))| > \frac{\pi}{2} \alpha \quad (۲۲-۳)$$

^۱ pseudo state

^۲ Complex plane or z-plane

^۳ BIBO

به شرطی که مقادیر ویژه بحرانی ماتریس A که شرط $\arg(\lambda) = \frac{\pi}{2}\alpha$ را ارضا می کنند تکرر هندسی^۱ یک داشته باشند.



شکل ۳-۳: ناحیه پایداری سیستم کسری برای $0 < \alpha < 1$

برای سیستم نامتناسب (۳-۹)، $\Delta(\lambda)$ معادله ماتریس مشخصه بصورت زیر تعریف می شود [۱۰۸].

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{M\alpha_1} - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda^{M\alpha_2} - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda^{M\alpha_n} - a_{nn} \end{pmatrix} \quad (۳-۲۳)$$

که اگر $v_i = \frac{\alpha_i}{u_i}$ باشد بطوری که در آن u_i و α_i نسبت به هم اولند، آنگاه M بزرگترین مضرب مشترک مقادیر u_i است. سیستم (۳-۹) پایدار است اگر تمامی ریشه های معادله $\det(\Delta(\lambda)) = 0$ شرط زیر را ارضا کنند [۱۰۸].

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2}M \quad (۳-۲۴)$$

۳-۵-۲- نقاط تعادل

برای سیستم متناسب (۳-۲۵) که در آن $0 < \alpha < 1$ و $x \in R^n$ است، نقاط تعادل این سیستم با حل معادله (۳-۲۶) به دست می آیند [۱۰۹].

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x) \quad (۳-۲۵)$$

$$f(x) = 0 \quad (۳-۲۶)$$

قضیه ۳-۱: نقاط تعادل سیستم (۳-۲۵) پایدار محلی است اگر برای همه مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین $J = \partial f / \partial x$ رابطه (۳-۲۷) برقرار باشد. [۱۰۹]:

$$|\arg(\lambda)| > \frac{v\pi}{2} \quad (۳-۲۷)$$

¹ Geometric multiplicity

توجه شود نقاط تعادل برای سیستم مرتبه کسری نامتناسب (۳-۱۴) با حل معادلات زیر مشخص می‌شوند:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (28-3)$$

قضیه ۳-۲. اگر تابع f تکه‌ای پیوسته از مرتبه دو باشد، آنگاه نقطه تعادل $x = x^*$ پایدار مجانبی است اگر به ازای تمامی مقادیر ریشه‌های معادله (۳-۲۹)، رابطه (۳-۳۱) برقرار باشد [۱۱۰].

$$\det(\text{diag}([\lambda^{Mv_1} \lambda^{Mv_2} \dots \lambda^{Mv_n}]) - J) = 0 \quad (29-3)$$

که عبارت $\text{diag}([m_1 m_2 \dots m_n])$ نشانگر یک ماتریس $n \times n$ به صورت زیر است:

$$\text{diag}([m_1 m_2 \dots m_n]) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad (30-3)$$

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2M} \quad (31-3)$$

۳-۶- مرور کارهای گذشته برای آشکارسازی خطا در سیستم‌های مرتبه کسری

با وجود اینکه آشکارساز خطا برای انواع سیستم‌ها طراحی شده است، اما تعمیم مسئله آشکارسازی خطا به سیستم‌های مرتبه کسری مربوط به سال‌های اخیر است. نویسندگان در مرجع [۱۱۱] که در سال ۲۰۱۱ میلادی در یک کنفرانس ارائه دادند، مقایسه بین سیگنال باقیمانده کسری و غیرکسری را مورد مطالعه قرار داده‌اند. موضوع کنترل خطا برای سیستم‌های مرتبه کسری خطی دارای عدم قطعیت با مرتبه مشتق $1 \leq v < 2$ در مقابل خطای عملگر، در مرجع [۱۱۲] در سال ۲۰۱۲ مطالعه شده است. مقاله بعدی با موضوع تشخیص خطا در سیستم‌های کسری با کاربرد در سیستم‌های گرمایی در سال ۲۰۱۴ میلادی منتشر شد [۱۱۳]. در این مقاله ابتدا برای یک سیستم گرمایی واقعی مدل دینامیکی کسری بدست می‌آورند و سپس با استفاده از دو روش به آشکارسازی خطا می‌پردازد، روش اول روش تعمیم یافته فضایی برابری پویا^۱ و روش دوم آشکارساز با مشاهده گر لیونبرگ است.

۳-۷- نتیجه‌گیری

در این فصل پس از بیان تاریخچه حسابان کسری به مطالعه انواع تعاریفات مشتقات کسری پرداخت شد. سپس با بررسی‌های لازم، روش مناسب برای مدلسازی کسری در این رساله انتخاب شد. در ادامه با بیان مفاهیم اولیه و لم‌های پایداری در مبحث استفاده از حسابان کسری در نظریه کنترل، در آینده برای حل مسأله از این لم‌ها استفاده خواهد شد.

¹ The generalized dynamic parity space method

فصل ۴- مقدمات ریاضی پژوهش

۴-۱- مقدمه

طیف وسیعی از مسائل مطرح شده در سیستم‌ها و نظریه کنترل، به مسائل بهینه‌سازی محدب^۱ و شبه-محدب^۲ برحسب نابرابری‌های ماتریسی خطی^۳ تبدیل شده است تا با روش‌های عددی مناسب قابل حل باشند. با پیشرفت سریع نرم افزارهای حل کننده نابرابری‌های ماتریسی خطی در سالهای اخیر، استفاده از آنها در حل مسائل نظریه کنترل بسیار مورد توجه قرار گرفته است. هم اکنون ابداع روش‌هایی جهت تبدیل مسائل مختلف کنترلی به نامساوی‌های ماتریسی خطی، یکی از موضوعات مورد توجه است که محققان زیادی بر روی آن کار می‌کنند.

۴-۲- نابرابری‌های ماتریسی خطی

۴-۲-۱- تاریخچه

استفاده از نابرابری‌های ماتریسی خطی در تحلیل مسائل سیستم‌های دینامیکی بیش از صد سال قدمت دارد. آقای لیاپانوف^۴ برای اولین بار در سال ۱۸۹۰ میلادی، استفاده از نابرابری‌های ماتریسی خطی برای تحلیل پایداری سیستم‌های پویا را که اکنون بنام لم لیاپانوف معروف است، ارائه کرد. او نشان داد که معادله دیفرانسیل [۱۱۴]:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (۱-۴)$$

پایدار است اگر و فقط اگر یک ماتریس مثبت معین مانند P وجود داشته باشد بطوری که:

$$A^T P + PA < 0 \quad (۲-۴)$$

به رابطه (۲-۴) که حالت خاصی از نابرابری‌های ماتریسی خطی است، نابرابری لیاپانوف نسبت به ماتریس P گفته می‌شود. روش پیشنهادی لیاپانوف برای حل این مسأله بدین صورت است که، ابتدا یک ماتریس دلخواه مانند $Q = Q^T > 0$ در نظر گرفته می‌شود. در صورت پایدار بودن سیستم (۱-۴) ماتریس مثبت معین P پیدا خواهد شد که معادله $A^T P + PA = -Q$ برقرار باشد.

در دهه ۱۹۴۰ میلادی، لور^۵ و پاستنیکف^۶ افرادی بودند که روشهای لیاپانوف را به مهندسی کنترل اعمال نمودند و اقدام به استفاده از روشهای لیاپانوف، بر روی برخی از مسائل عملی مهندسی کردند [۱۱۵]. در اوایل روزهای دهه ۱۹۶۰ میلادی، یاکابویچ^۷، پوپوف^۸ و کالمن^۹ توانستند با ارائه لم معروف کالمن، یاکابویچ و

^۱ Convex optimization

^۲ quasiconvex

^۳ Linear matrix inequality

^۴ Lyapunov

^۵ Lur'e

^۶ Postnikov

^۷ Yakubovich

^۸ Popov

^۹ Kalman

پوپوف^۱ (KYP) به موفقیت بزرگی دست یابند. این لم روشی ساده و پرکاربرد برای کاهش حل نابرابری‌های ماتریسی خطی در مسئله لور ارائه می‌دهد [۱۱۶]. در نیمه دوم دهه ۱۹۶۰ به اهمیت این لم و تعمیم‌های آن پی برده شد و مورد مطالعه بیشتری قرار گرفت [۱۱۷-۱۱۸].

در سال ۱۹۷۱، محققان به ابداع روش‌هایی جدید برای حل نابرابری‌های ماتریسی خطی از جمله روش مستقیم، روش‌های گرافیکی و روش‌هایی که با حل معادلات لیاپانوف یا ریکاتی امکانپذیر بود، پرداختند. کارمارکر^۲ در سال ۱۹۸۴ روش سودمند نقطه داخلی^۳ در حل نابرابری‌های ماتریسی خطی را پیشنهاد داد [۱۱۹]. در سال ۱۹۸۶ میلادی پیتانسکی^۴ و اسکوردینسکی^۵ توانستند با تبدیل مسئله تعمیم داده شده لور به یک مسئله بهینه سازی محدب برحسب نابرابری‌های ماتریسی خطی از روش بیضوی^۶ برای حل آن استفاده کنند. با ارائه این روش، بسیاری از مسائل مطرح شده در نظریه کنترل به صورت مسائل بهینه سازی محدب^۷ قابل طرح شدند [۱۲۰]. پس از آن در سال ۱۹۸۸ نستروف^۸ و نمیروفسکی^۹ به توسعه روش نقطه داخلی را برای بکارگیری مستقیم در حل مسائل محدب بر حسب نابرابری‌های ماتریسی خطی همت گماردند [۱۲۱].

۴-۲-۲- تعذب

از آنجا که محدب^{۱۰} بودن هم برای مجموعه‌ها و هم برای تابع‌ها قابل تعریف است، در اینجا به بررسی تعریف محدب بودن برای هر دو می‌پردازیم.

تعریف تعذب بودن برای تابع [۱۲۲]:

تابع اسکالر $f: R^n \rightarrow R$ محدب است اگر به ازای هر $x, y \in S$ و هر $\alpha, \beta \geq 0$ که $\alpha + \beta = 1$ باشد، داشته باشیم:

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) \quad (3-4)$$

که اگر مشتق دوم یک تابع مشتق‌پذیر مثبت باشد، رابطه فوق برقرار است [۱۲۲].

تعریف تعذب برای مجموعه [۱۲۲]: مجموعه S محدب است اگر به ازای هر $x, y \in S$ و هر $\alpha, \beta \geq 0$ که $\alpha + \beta = 1$ باشد، داشته باشیم:

$$\alpha x + \beta y \in S \quad (4-4)$$

به بیان ساده‌تر، یک مجموعه محدب است اگر پاره خطی که دو نقطه از مجموعه را به هم وصل می‌کند، متعلق به مجموعه باشد (شکل ۴-۱).

¹ Kalman-Yakubovich-Popov lemma

² Karmarkar

³ Interior point methods

⁴ Pytaniskii

⁵ Scorodinskii

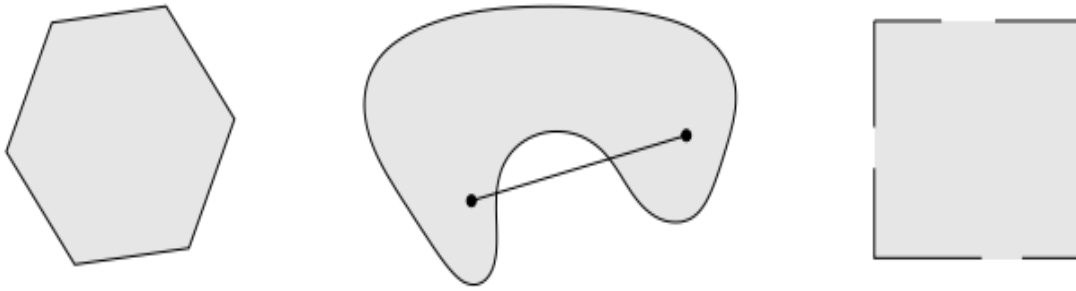
⁶ Ellipsoid

⁷ Convex optimization

⁸ Nestrov

⁹ Nemirovskii

¹⁰ Convex



شکل ۴-۱: شکل سمت چپ محدب، شکل وسط و راست غیر محدب

ناحیه‌ی داخل یک مستطیل یا دایره و نوارهای عمودی و افقی در R^2 نمونه‌هایی از مجموعه‌های محدب هستند.

تعریف پوسته‌ی محدب^۱: برای نقاط p_i که $i = 1, \dots, N$ پوسته محدب $Co(p_1, \dots, p_N)$ به صورت زیر بیان می‌شود [۱۲۲]:

$$Co(p_1, \dots, p_N) = \{\sum_{i=1}^N \delta_i p_i : \delta_i \geq 0 \text{ for all } i \text{ and } \sum_{i=1}^N \delta_i = 1\}. \quad (۴-۵)$$

۴-۲-۳- مسائل نابرابری‌های ماتریسی خطی

تعریف نابرابری ماتریسی خطی [۱۲۲]: رابطه (۴-۶) یک نامساوی ماتریسی خطی را نشان می‌دهد.

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (۴-۶)$$

که در آن $x \in R^m$ و $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ برداری از مقادیر حقیقی و نامعلوم است که به عنوان متغیرهای تصمیم‌گیری در نظر گرفته می‌شود و $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$, $i = 1, \dots, m$ ماتریس‌های حقیقی و متقارن^۲ هستند.

قضیه ۴-۱ (مکمل‌شور) [۱۲۲]: نامساوی (۴-۷) که در آن $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ و $S(x)$ نسبت به x نمودار خطی^۳ است معادل است با نابرابری ماتریسی خطی رابطه (۴-۸).

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (۴-۷)$$

$$\begin{aligned} R(x) &> 0, \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T &> 0, \end{aligned} \quad (۴-۸)$$

با کمک مکمل‌شور، می‌توان بعضی از نامعادلات غیرخطی را بصورت نابرابری‌های ماتریسی خطی نوشت. در ادامه، برخی از مسائل محدب و نیمه محدب که بصورت نابرابری‌های ماتریسی خطی بیان شده‌اند، بررسی

^۱ Convex Hull

^۲ Symmetric

^۳ Affine

می‌شوند.

۱- مسائل امکان پذیری نابرابری‌های ماتریسی خطی :

یک مسئله امکان پذیری محدب^۱ یا مسئله LMI (LMIP)^۲ یافتن یک x^{feas} است، بطوری که $F(x^{feas}) > 0$ باشد. در صورت موجود نبودن هیچ x^{feas} حل LMI غیر ممکن^۳ است [۱۲۲].

۱- مسائل مقدار ویژه:

مسئله مقدار ویژه^۴ که به مسئله EVP معروف است، بصورت یک مسئله بهینه‌سازی محدب طبق رابطه (۴-۹) بیان می‌شود [۱۲۲].

$$\begin{aligned} \text{Min } \lambda \\ \text{Subject to } \lambda I - A(x) > 0, B(x) > 0 \end{aligned} \quad (9-4)$$

در این رابطه A و B ماتریس‌های متقارنی هستند که به صورت نمو خطی، به متغیر بهینه‌سازی x وابسته می‌باشند.

رابطه (۴-۱۰) بیان دیگر مسائل مقدار ویژه است که هدف آن، کمینه کردن یک تابع خطی با یک قید نامساوی ماتریسی خطی است.

$$\begin{aligned} \text{Min } c^T x \\ \text{Subject to } F(x) > 0 \end{aligned} \quad (10-4)$$

که F تابع نمو خطی از x است.

۴-۳- لَم‌های و قضایای کاربردی

۴-۳-۱- لَم‌های و قضایای پایداری سیستم کسری

قضیه ۴-۲ [۱۲۳]: سیستم خطی تغییر ناپذیر کسری با معادلات حالت بصورت زیر مفروض است:

$$\begin{cases} D^{\alpha} x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (11-4)$$

که در اینجا $0 < \alpha < 1$ درجه سیستم کسری، $x(t) \in R^n$ بردار حالت، $y(t) \in R^p$ خروجی سیستم و $A \in R^{n \times n}$ ماتریس حالت، $B \in R^{n \times l}$ ماتریس ورودی، $C \in R^{p \times n}$ ماتریس خروجی و $D \in R^{p \times l}$ ماتریس انتقال است. این سیستم پایدار ورودی محدود- خروجی محدود^۵ است، اگر و تنها اگر $\exists X \in R^{n \times n} > 0$ بطوریکه:

¹ Convex feasibility problem

² LMI Problem

³ Infeasible

⁴ The eigenvalue problem (EVP)

⁵ Bounded-Input Bounded-Output (BIBO)

$$(rX + \bar{r}\bar{X})^T A^T + A(rX + \bar{r}\bar{X}) < 0, r = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} \quad (۱۲-۴)$$

قضیه ۳-۴ [۱۲۴]: سیستم کسری (۱۱-۴) با مرتبه $1 < \alpha < 2$ پایدار است، اگر و تنها اگر $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$

$$\begin{bmatrix} (A'P + PA) \sin(v\frac{\pi}{2}) & (A'P - PA) \cos(v\frac{\pi}{2}) \\ (PA - A'P) \cos(v\frac{\pi}{2}) & (A'P + PA) \sin(v\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} < 0 \quad \text{بطوریکه:} \quad (۱۳-۴)$$

۴-۳-۲- لم معروف یاکابویچ ، پوپوف و کالمن

این لم بین نابرابری دامنه فرکانس^۱ برای تابع تبدیل و نابرابری ماتریس خطی برای تحقق فضای حالت، تعادل برقرار می‌کند و توسط این لم کارآیی H_∞ به صورت نامساوی‌های ماتریس خطی بیان می‌شود.

لم ۱-۴ (لم یاکابویچ ، پوپوف و کالمن (KYP)^۲) [۱۲۵]: برای تابع تبدیل $G(s)$ با تحقق فضای حالت $[A, B, C, D]$ بیان‌های زیر معادل می‌باشند:

الف- ماتریس A هرویتز^۳ و $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma$ می‌باشد.

ب- وجود دارد ماتریس $X = X^T > 0$ به طوری که نامساوی ماتریسی خطی (۱۴-۴) برآورده شود.

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (۱۴-۴)$$

ج- ماتریس $X = X^T > 0$ وجود دارد به طوری که نامساوی ماتریسی خطی (۱۵-۴) را برآورده سازد.

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T C & XB + C^T D \\ B^T X + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (۱۵-۴)$$

قابل توجه اینکه، نامساوی (۱۴-۴) نسبت به C خطی است در حالی که، نامساوی (۱۵-۴) نسبت به C غیرخطی است.

لم تعمیم یافته یاکابویچ ، پوپوف و کالمن بصورت زیر است:

لم ۲-۴ [۱۲۶]: با داشتن ماتریسهای $\psi, \Phi \in H_2, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \theta \in H_{(n+m)}$ و مجموعه $\Lambda(\Phi, \Psi)$ که بصورت (۱۶-۴) تعریف می‌شود:

$$\Lambda(\Phi, \Psi) \triangleq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \right\} \quad (۱۶-۴)$$

اگر:

(۱) برای $H(\lambda) \triangleq (\lambda I_n - A)^{-1} B$ رابطه زیر برقرار باشد:

^۱ Frequency domain inequality (FDI)

^۲ Kalman Yakubovich Popov lemma

^۳ Hurwitz

$$\begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_m \end{bmatrix}^* \theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_m \end{bmatrix} < 0 \forall \lambda \in \Lambda \quad (۱۷-۴)$$

(۲) ماتریسهای $P, Q \in H_n$ و $Q > 0$ وجود داشته باشند بطوریکه:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{bmatrix} + \theta < 0 \quad (۱۸-۴)$$

(۲) $\Leftarrow$ (۱) یعنی اگر رابطه (۱۸-۴) برقرار باشد رابطه (۱۷-۴) نیز برقرار است. در صورتی که مجموعه

$\Lambda(\Phi, \Psi)$ نشان‌دهنده یک منحنی در صفحه مختلط باشد، آنگاه (۱) $\Leftarrow$ (۲)

لم ۳-۴ [۱۲۷]: اگر مجموعه $\Lambda(\Phi, \Psi)$ در لم (۴-۵) با مجموعه:

$$\Upsilon(\Phi, \Psi) \triangleq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ I \end{bmatrix} \geq 0 \right\} \quad (۱۹-۴)$$

جایگزین شود، رابطه (۱۷-۴) برای $\forall \lambda \in \Upsilon$ برقرار است اگر، ماتریس های $Q > 0$ و $P > 0$ وجود داشته باشند بطوریکه رابطه (۱۸-۴) برقرار باشد.

۴-۳-۳- لم های کراندار حقیقی مربوط به کارآیی H_∞

این لم ها، محاسبات اصلی نرم ها را بصورت نامساوی های ماتریسی خطی کاهش می دهد تا در یک روش محاسباتی کارآمد، اجرا شود.

لم ۴-۴ [۱۲۷]: برای سیستم مرتبه کسری با تابع تبدیل $G(s) = C(S^\alpha I - A)^{-1}B + D$,

$\|G(s)\|_{H_\infty} < \gamma$ اگر ماتریس های $P > 0$ و $Q > 0$ وجود داشته باشند، به طوری که نامساوی ماتریسی خطی زیر را برآورده سازند.

$$\begin{bmatrix} \text{sym}(AX) & * & * \\ CX & -\gamma I & * \\ B^T & D^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (۲۰-۴)$$

جایی که $X = e^{j\theta} P + e^{-j\theta} Q, \text{ if } 0 < \alpha < 1, \theta = \frac{\pi}{2}(1 - \alpha)$ است.

لم ۵-۴ [۱۲۷]: سیستم (۱۱-۴) با تابع تبدیل $G(s) = C(S^\alpha I - A)^{-1}B + D$ پایدار است اگر و فقط

اگر $\|G(s)\|_{H_\infty}$ محدود باشد.

۴-۳-۴- لم تصویرسازی

لم زیر که به لم تصویرسازی^۱ معروف است در رسیدن به اهداف این رساله، نقش مهمی ایفا می کند.

لم ۶-۴ (لم تصویرسازی) [۱۲۸]: برای ماتریس متقارن $Z \in R_m$ و دو ماتریس U و V با بعد ستونی m ، یک ماتریس X با ساختار دلخواه وجود دارد بطوری که:

¹ Projection lemma

$$U^T X V + V^T X^T U + Z < 0 \quad (۲۱-۴)$$

اگر و تنها اگر

$$\begin{cases} N_U^T Z N_U < 0 \\ N_V^T Z N_V < 0 \end{cases} \quad (۲۲-۴)$$

در اینجا N_U و N_V ماتریس‌های دلخواهی هستند که، ستون‌های آنها پایه‌هایی برای فضای پوچی ماتریسهای U و V می‌باشند.

لم ۷-۴ [۱۲۹]: فرض کنید ماتریسهای $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ که $\text{rank}(B) = m$ و $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس متقارن هستند، ماتریس $\hat{X} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ وجود خواهد داشت بطوریکه $XB = B\hat{X}$ اگر و فقط اگر:

$$X = U \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} U^T \quad (۲۳-۴)$$

که در اینجا $X_{22} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ و همچنین $X_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ است.

۴-۴- نرم افزارهای حل نابرابری‌های ماتریس خطی

بعد از تبدیل مسائل به فرم نابرابری‌های ماتریس خطی، گام مهم بعدی انتخاب نرم افزار مناسب برای حل آنها توسط رایانه است. تا به امروز نرم افزارهای مختلفی متشکل از دو بخش جهت حل نابرابری ماتریس خطی طراحی شده‌اند که این دو بخش عبارتند از:

۱- بخش تجزیه کننده^۱ یا توصیف‌گر:

این بخش از نرم افزار توانایی تعریف نابرابری ماتریس خطی برای نرم افزار متلب را می‌دهد تا آنها توسط نرم افزارهای حل کننده تشخیص داده شوند. می‌توان به LMILAB و YALMIP بعنوان یک نرم افزار تجزیه-کننده متداول اشاره نمود [۱۳۰-۱۳۱].

۲- بخش حل کننده

بعد از تعریف نابرابری‌های ماتریس خطی توسط بخش اول نرم افزار حل کننده، این بخش با استفاده از الگوریتم‌های عددی به حل مسأله نابرابری‌های ماتریس خطی می‌پردازد. از جمله نرم افزارهای حل کننده معروف نیز می‌توان به LMILAB، SDPT3 [۱۳۲]، Sedumi [۱۳۳] و PENBMI [۱۳۴] اشاره کرد.

از آنجا که نرم افزارهای حل کننده قابلیت همخوانی با همه نرم افزارهای توصیف‌گر را ندارند، باید دقت لازم را در انتخاب تجزیه کننده و حل کننده داشت. انتخاب این نرم افزارها با توجه به توانایی‌ها و ویژگی‌های خاص نرم افزار و کاربرد مورد نظر کاربر صورت می‌گیرد. مثلاً برای حل مسائل برنامه ریزی نیمه معین (SDP)^۲ نرم افزار LMILAB طراحی شده است، اما با آن می‌توان، به حل مسائل معادلات خطی، مسائل تابع هدف

^۱ Parser

^۲ Semi-Definite Programming

مربعی محدب، مسائل برنامه ریزی مخروطی مرتبه دوم (SOCP)^۱ و برنامه ریزی خطی (LP)^۲ پرداخت. مثال بعدی نرم افزار PENBMI است که برای حل مسائل نابرابری‌های ماتریسی دوطبقی (BMI)^۳، LP و SDP به طور خاص در نظر گرفته شده است.

۴-۵- نتیجه

یکی از اهداف مهم در این پژوهش، تبدیل مسئله طراحی آشکارساز خطا به مسئله بهینه‌سازی محدب^۴ بر حسب نامساوی‌های ماتریسی خطی است. از مباحث مطرح شده در این فصل، برای تحلیل ریاضی مسئله استفاده خواهد شد و لم‌های ارائه شده در اینجا، کمک شایانی برای رسیدن به اهداف مورد نظر پژوهش خواهند کرد.

^۱ Second Order Cone Programming

^۲ Linear Programming

^۳ Bilinear Matrix Inequality

^۴ Convex optimization

فصل ۵- طراحی آشکارساز خطای مقاوم برای سیستم‌های مرتبه کسری

۵-۱- مقدمه

در این فصل، برای یک سیستم کسری نامتغیر با زمان خطی، آشکارساز خطا بر اساس روش مبتنی بر مشاهده گر طراحی خواهد شد. به منظور آشکارسازی خطا از رویکرد H_- استفاده خواهد شد. برای کاهش اثر اغتشاش و ورودی های ناخواسته دیگر بر روی سیستم آشکارساز از معیار بهینه سازی H_∞ استفاده می شود. با این راهکار مسأله طراحی آشکارساز خطا تبدیل به یک مسأله ی چند منظوره ی H_∞/H_- می شود. در ادامه نتایج بدست آمده به صورت شرط کافی و در قالب نامساوی های ماتریسی خطی ارائه شده است. در پایان، نتایج بدست آمده بر روی یک سیستم واقعی و یک سیستم فرضی در محیط نرم افزار متلب شبیه سازی خواهد شد.

۵-۲- بیان مسأله

سیستم خطی با معادلات دینامیکی مرتبه کسری مطابق (۵-۱) مفروض است [۱۳۵].

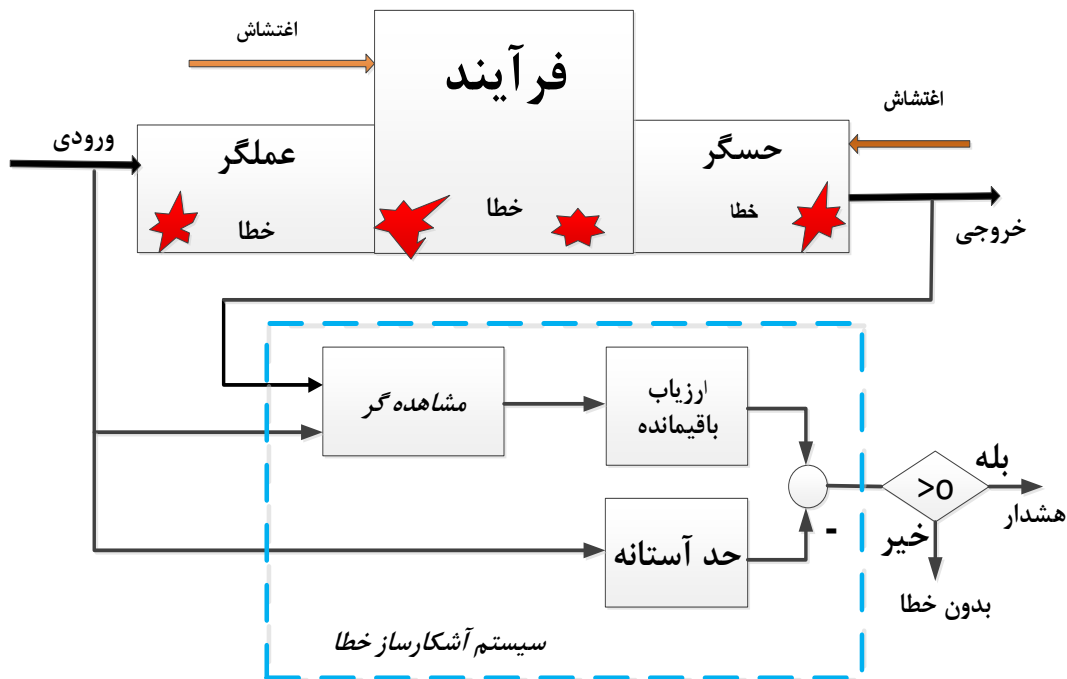
$$G : \begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_d d(t) + B_f f(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_d d(t) + D_f f(t) \\ x(t) = x(0) \quad t \in [-h_1, 0] \end{cases} \quad (5-1)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ درجه سیستم کسری، $x(t) \in R^n$ بردار شبه حالت^۱، $u(t) \in R^k$ ورودی کنترل، $y(t) \in R^r$ خروجی سیستم و $A \in R^{n \times n}$ ماتریس حالت، $B \in R^{n \times k}$ ماتریس ورودی، $B_d \in R^{n \times p}$ ماتریس ورودی ناخواسته مانند اغتشاش، $B_f \in R^{n \times q}$ ماتریس ورودی خطا، $C \in R^{r \times n}$ ماتریس خروجی، $D_d \in R^{r \times p}$ ماتریس انتقال، $D_f \in R^{r \times q}$ ماتریس انتقال و $D \in R^{r \times k}$ ماتریس انتقال خطا است. $x(0)$ شرایط اولیه سیستم در بازه زمانی $t \in [-h_1, 0]$ ، $h_1 > 0$ است. سیستم تحت تأثیر ورودی ناخواسته مانند اغتشاش $d(t) \in R^p$ و ورودی خطای $f(t) \in R^q$ قرار دارد.

توجه ۵-۱: همان طور که در فصل های قبل توضیح داده شد، این نحوه مدلسازی خطا در برگیرنده خطاهای سیستم، عملگر و حسگر است.

توجه ۵-۲: در سیستم مرتبه کسری بردار حالت $x(t)$ با بردار حالت در سیستم با معادلات دیفرانسیل معمول فرق دارد. در معادلات دیفرانسیل معمول حالت در زمان t شامل کلیه اطلاعات برای پیش بینی رفتار آینده سیستم به شرط مشخص بودن ورودی آینده است، اما در سیستم مرتبه کسری بنا به تعریف مشتق کسری برای پیش بینی رفتار آینده سیستم، علاوه بر داشتن حالت سیستم در زمان t ، به مقادیر حالت های سیستم در زمانهای $[0, t]$ نیاز است، به همین علت در سیستم مرتبه کسری به جای استفاده از واژه بردار حالت از واژه بردار شبه حالت استفاده می شود [۱۳۶].

¹ Pseudo state



شکل ۵-۱- طرح کلی آشکارساز خطا بر اساس مشاهده گر

شکل ۵-۱ طرح کلی آشکارسازی خطا بر اساس مشاهده گر را نشان می دهد. در این روش واحد آشکارساز خطا، یک مشاهده گر لیونبرگ بصورت زیر است:

$$F: \begin{cases} D^\alpha \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \\ r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \\ \hat{x}(t) = \phi(t) \quad t \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (2-5)$$

که در آن $\hat{x}(t) \in R^n$ بردار تخمین شبه حالت، $r(t) \in R^r$ سیگنال باقیمانده و $L \in R^{n \times r}$ بهره مشاهده گر است. با تعریف خطا بصورت $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ و تلفیق سیستم (۵-۱) با واحد آشکارساز (۵-۲) معادله دینامیکی خطا بصورت (۵-۳) بدست می آید.

$$\begin{cases} D^\alpha e(t) = (A - LC)e(t) + (B_d - LD_d)d(t) + (B_f - LD_f)f(t) \\ r(t) = Ce(t) + D_d d(t) + D_f f(t) \end{cases} \quad (3-5)$$

بعد از بدست آوردن معادله دینامیکی خطا، باید راهکاری برای برقراری شروط زیر پیدا کرد.

۱- سیستم خطا (۵-۳) پایدار باشد.

برای برآورده شدن این شرط، رزیتگر (۵-۲) باید طوری طراحی شود که، طبق رابطه (۳-۲۲)

$$|Arg(spec(A - LC))| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad [124]$$

۲- کمینه کردن اثر ورودی های ناخواسته مثل اغتشاش بر روی سیگنال باقیمانده.

این شرط با استفاده از معیار بهینه سازی H_∞ بصورت زیر بیان می شود:

$$\sup \frac{\|r(t)\|_2}{\|d(t)\|_2} < \gamma, \gamma > 0 \quad (4-5)$$

۳- پیشینه کردن اثر خطا بر سیگنال باقیمانده

به منظور بالا بردن حساسیت سیستم آشکار ساز نسبت به خطا با کمک گرفتن از معیار بهینه سازی H_- برای حل مسأله خواهیم داشت:

$$\inf \frac{\|r(t)\|_2}{\|f(t)\|_2} > \beta, \beta > 0 \quad (5-5)$$

با توجه به معیار کارایی (۴-۵) و (۵-۵) مسأله طراحی آشکارسازی خطا به یک مسأله بهینه سازی چند منظوره H_∞/H_- تبدیل خواهد شد.

تعریف ۱-۵: نرم H_∞ برای تابع تبدیل G_{yd} سیستم (۱-۵) برابر است با [۱۲۷]:

$$\|G_{yd}\|_{H_\infty} := \sup_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} \bar{\sigma}(G_{yd}(s)) \quad (6-5)$$

۳-۵- طراحی واحد آشکارساز خطا

با توجه به تبدیل مسأله طراحی آشکارسازی خطا به مسأله بهینه سازی چند منظوره H_∞/H_- ، در ادامه شرایط کافی آنالیز پایداری برای سیستم خطا (۳-۵) با در نظر گرفتن معیار کارایی (۴-۵) و (۵-۵) بدست می‌آید. قضیه (۱-۵) شرایط کافی آنالیز پایداری برای سیستم خطا (۳-۵) را با در نظر گرفتن معیار کارایی (۴-۵)، به شکل قیود نامساوی ماتریسی خطی بیان می‌کند.

قضیه ۱-۵: سیستم (۳-۵) پایدار است و معیار کارایی (۴-۵) برای $\gamma > 0$ تضمین خواهد شد اگر، ماتریس‌های معین P_1 و Q_1 ، همچنین ماتریس‌های X و N وجود داشته باشند، بطوری که نامساوی‌های ماتریسی خطی زیر برقرار باشند:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Her}(\Pi) + C^T C & E_2 & \Omega + C^T D_d \\ * & -\lambda(X + X^T) & \lambda \Omega \\ * & * & D_d^T D_d - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (7-5)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Pi &= A^T X - C^T N^T \\ \Omega &= X^T B_d - N D_d \\ E_2 &= \lambda \Pi - X^T + \bar{r} P_1 + r Q_1, \lambda > 0 \\ r &= e^{j\theta}, \theta = (1 - \alpha) \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (8-5)$$

و بهره رویتگر طبق رابطه (۹-۵) بدست می‌آید.

$$L = X^{-T}N \quad (9-5)$$

اثبات قضیه (۱-۵): طبق تعریف (۱-۵) برای سیستم افزوده (۳-۵) داریم:

$$\|G_{rd}\|_{H_\infty} := \sup_{Re(s) \geq 0} \bar{\sigma}(G_{rd}(s)) = \sup_{Re(s) \geq 0} \bar{\sigma}(C(s^{\alpha}I - A_{cl})B_{cl} + D_d) \quad (10-5)$$

که در آن:

$$A_{cl} = A - LC, B_{cl} = B_d - LD_d \quad (11-5)$$

طبق معیار کارایی (۴-۵):

$$\begin{aligned} \sup \frac{\|r(t)\|_2}{\|d(t)\|_2} < \gamma, \gamma > 0 &\Leftrightarrow \|G_{rd}(s)\|_{H_\infty} < \gamma \\ &\Leftrightarrow G_{rd}(s)G_{rd}^*(s) - \gamma^2 I < 0, \quad \forall Re(s) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_m \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_m \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda(\Phi, \Psi) \end{aligned} \quad (12-5)$$

که $\lambda(\omega) \triangleq e^{-j\frac{\pi}{2}\alpha}\omega^\alpha$ و $H(\lambda) \triangleq (\lambda I_n - A_{cl})^{-1}B_{cl}$ است. مجموعه $\Lambda(\Phi, \Psi)$ طبق رابطه (۴-۱۶) تعریف شده است. با این شرایط Θ برابر است با:

$$\Theta = \begin{bmatrix} C^T C & C^T D_d \\ D_d^T C & D_d^T D_d - \gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (13-5)$$

طبق لم ۴-۱، اگر، ماتریسهای $P_1, Q_1 \in H_n$ و $Q_1 > 0$ وجود داشته باشند بطوریکه:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl} & B_{cl} \end{bmatrix}^T (\Phi \otimes P_1 + \Psi \otimes Q_1) \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl} & B_{cl} \end{bmatrix} + \Theta < 0 \quad (14-5)$$

آنگاه برقراری رابطه (۱۴-۵) رابطه (۱۲-۵) را نتیجه می‌دهد. که در آن Φ و Ψ را بصورت (۵-۱۵) خواهد بود.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \bar{r} \\ r & 0 \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} 0 & r \\ \bar{r} & 0 \end{bmatrix}, \quad (15-5)$$

نامساوی (۱۴-۵) را می‌توان بشکل $N_U^T Z N_U < 0$ درآورد، اگر ماتریسهای N_U و Z طبق (۵-۱۶) باشند.

$$Z = \begin{bmatrix} C^T C & \bar{r}P_1 + rQ_1 & C^T D_d \\ rP_1 + \bar{r}Q_1 & 0 & 0 \\ D_d^T C & 0 & D_d^T D_d - \gamma^2 I \end{bmatrix}, N_U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl} & B_{cl} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (16-5)$$

همچنین رابطه $N_V^T Z N_V < 0$ صادق است اگر:

$$N_V = \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \\ -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \rightarrow V = [I \quad \lambda I \quad 0] \quad (17-5)$$

با توجه به نتایج لم (۴-۶) نامساوی $N_U^T Z N_U < 0$ نامساوی $U^T X V + V^T X^T U + Z < 0$ را نتیجه می‌دهد. اگر مقادیر بدست آمده در (۱۶-۵) و (۱۷-۵) را برای ماتریسهای Z, N_V و N_U جایگزین کنیم، داریم:

$$Z + \begin{bmatrix} A_{cl}^T \\ -I \\ B_{cl}^T \end{bmatrix} [X \quad \lambda X \quad 0] + \begin{bmatrix} X^T \\ \lambda X^T \\ 0 \end{bmatrix} [A_{cl} \quad -I \quad B_{cl}] < 0 \quad (18-5)$$

پس از انجام محاسبات ضرب و جمع ماتریسی برای رابطه (18-5) و جایگزینی $N = X^T L$ ، رابطه (5-7) بدست خواهد آمد.

در ادامه، قضیه (5-2) شرایط کافی آنالیز پایداری برای سیستم افزوده (5-3) را با در نظر گرفتن معیار کارایی (5-5) به فرم قیود نامساوی‌های ماتریسی خطی تبدیل می‌کند.

قضیه 5-2: اگر ماتریس‌های معین P_2 و Q_2 ، همچنین ماتریس‌های X و N وجود داشته باشند بطوری که، نامساوی‌های ماتریسی خطی زیر برای $\beta > 0$ برقرار باشد، آنگاه برای سیستم (5-3) معیار کارایی تعریف شده در (5-5) تضمین می‌شود.

$$\begin{bmatrix} Her(\Pi) - C^T C & E_2 & \Omega - C^T D_f \\ * & -\lambda(X + X^T) & \lambda\Omega \\ * & * & -D_f^T D_f + \beta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (19-5)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Pi &= A^T X - C^T N^T, \\ \Omega &= X^T B_f - N D_f \\ E_2 &= \lambda \Pi - X^T + \bar{r} P_2 + r Q_2, \\ r &= e^{j\theta}, \theta = (1 - \alpha) \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (20-5)$$

همچنین بهره رؤیتگر از رابطه (5-9) بدست می‌آید. □

اثبات:

روش اثبات این قضیه بسیار شبیه به قضیه (5-1) است، اما جزئیات مهمی دارد که در نتیجه روش اثبات بصورت کامل بیان می‌شود. طبق تعریف (5-1) برای سیستم خطا (5-3) داریم:

$$\|G_{rf}\|_{H_\infty} := \sup_{Re(s) \geq 0} \bar{\sigma}(G_{rf}(s)) = \sup_{Re(s) \geq 0} \bar{\sigma}(C(s^\alpha I - A_{cl})B_{fcl} + D_f) \quad (21-5)$$

که در آن:

$$A_{cl} = A - LC, B_{fcl} = B_f - LD_f \quad (22-5)$$

طبق معیار کارایی (5-5):

$$\begin{aligned} \inf \frac{\|r(t)\|_2}{\|f(t)\|_2} > \beta, \beta > 0 &\Leftrightarrow \|G_{rf}(s)\|_{H_\infty} > \beta \\ &\Leftrightarrow \beta^2 I - G_{rf}(s)G_{rf}^*(s) < 0 \quad \forall Re(s) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_m \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_m \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda(\Phi, \Psi) \end{aligned} \quad (23-5)$$

که $\lambda(\omega) \triangleq e^{-j\frac{\pi}{2}\alpha}\omega^\alpha$ و $H(\lambda) \triangleq (\lambda I_n - A_{cl})^{-1}B_{fcl}$ است. مجموعه $\Lambda(\Phi, \Psi)$ طبق رابطه (۴-۱۶) تعریف شده است. همچنین:

$$\theta = \begin{bmatrix} -C^T C & -C^T D_f \\ -D_f^T C & D_f^T D_f - \beta^2 I \end{bmatrix}, \quad (24-5)$$

با تعیین Φ و Ψ بصورت:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \bar{r} \\ r & 0 \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} 0 & r \\ \bar{r} & 0 \end{bmatrix}, \quad (25-5)$$

و بکارگیری لم ۴-۱، اگر ماتریسهای $P_2, Q_2 \in H_n$ و $Q_2 > 0$ وجود داشته باشند، بطوریکه:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl} & B_{fcl} \end{bmatrix}^T (\Phi \otimes P_2 + \Psi \otimes Q_2) \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl} & B_{fcl} \end{bmatrix} + \theta < 0 \quad (26-5)$$

آنگاه برقراری رابطه (۲۶-۵) را نتیجه می‌دهد. با انتخاب ماتریسهای Z و N_U بصورت:

$$Z = \begin{bmatrix} -C^T C & \bar{r}P_2 + rQ_2 & -C^T D_f \\ rP_2 + \bar{r}Q_2 & 0 & 0 \\ -D_f^T C & 0 & D_f^T D_f - \beta^2 I \end{bmatrix}, N_U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl} & B_{cl} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (27-5)$$

رابطه (۲۶-۵) را می‌توان بشکل $N_U^T Z N_U < 0$ درآورد. همچنین رابطه $N_V^T Z N_V < 0$ صادق است اگر:

$$N_V = \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \\ -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \rightarrow V = [I \quad \lambda I \quad 0] \quad (28-5)$$

با توجه به نتایج لم (۴-۶) و در نظر گرفتن $N_U^T Z N_U < 0$ و $N_V^T Z N_V < 0$ پس نامساوی (۲۹-۵) تضمین می‌شود.

$$U^T X V + V^T X^T U + Z < 0 \quad (29-5)$$

با جایگزینی ماتریسهای Z ، N_V و N_U از روابط (۲۷-۵) و (۲۸-۵) در رابطه (۲۹-۵) داریم:

$$\begin{bmatrix} -C^T C & \bar{r}P_2 + rQ_2 & -C^T D_f \\ rP_2 + \bar{r}Q_2 & 0 & 0 \\ -D_f^T C & 0 & D_f^T D_f - \beta^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{cl}^T \\ -I \\ B_{fcl}^T \end{bmatrix} [X \quad \lambda X \quad 0] \\ + \begin{bmatrix} X^T \\ \lambda X^T \\ 0 \end{bmatrix} [A_{cl} \quad -I \quad B_{fcl}] < 0 \quad (30-5)$$

پس از انجام محاسبات ضرب و جمع ماتریسی برای رابطه (۳۰-۵) و جایگزینی $N = X^T L$ رابطه

(۱۹-۵) بدست خواهد آمد. $\square$

هدف اصلی این بخش، طراحی آشکارساز خطایی بود که بتواند شرایط کافی آنالیز پایداری برای سیستم خطای (۳-۵) را با در نظر گرفتن معیار کارایی (۴-۵) و (۵-۵) ایجاد کند.

با تلفیق قضایای (۱-۵) و (۲-۵)، در نتیجه (۱-۵)، به یک مسأله بهینه‌سازی چند منظوره می‌رسیم، که اهداف کمینه کردن اثر ورودی‌های ناخواسته مثل اغتشاش بر روی سیگنال باقیمانده برای مقاوم بودن سیستم

آشکارساز و بیشینه کردن اثر خطا بر سیگنال باقیمانده به منظور بالا بردن حساسیت سیستم آشکار ساز نسبت به خطا، را برآورده کند.

نتیجه ۵-۱: به ازای γ در نظر گرفته شده، یک جواب امکانپذیر برای مسأله بهینه‌سازی چند منظوره‌ی H_{∞}/H_{-} به منظور طراحی آشکارساز خطا برای سیستم (۵-۱) از حل مسأله بهینه‌سازی محدب زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \max_{X, P_1, P_2, Q_1, Q_2, N} \beta \\ & s. t. (\delta - \gamma), (\delta - 19) \end{aligned} \quad (5-31)$$

اثبات: با در نظر گرفتن قضیه های قضیه (۵-۱) و قضیه (۵-۲) به طور همزمان، این نتیجه بدست خواهد آمد. □

۵-۴- ارزیابی سیگنال باقیمانده

مرحله مهم بعدی پس از طراحی واحد آشکارساز خطا، ارزیابی سیگنال باقیمانده است. در این راستا یک تابع ارزیابی باقیمانده ($J_L(r)$) تعریف شده و مقدار آن با یک حد آستانه ($J_{th} > 0$) مقایسه می‌شود. تابع ارزیابی باقیمانده و حد آستانه نوعاً "میتواند به صورت روابط (۵-۳۲) و (۵-۳۳) انتخاب شوند [۸]:

$$J_L(r) = \|r(t)\|_2 = \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} r^T(t) r(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5-32)$$

$$J_{th} = \sup_{f \neq 0, d \in l_2} \|r(t)\|_2 \quad (5-33)$$

τ نشان دهنده محدوده زمانی تشخیص خطا است که بعلاوه کشف خطا در حداقل زمان ممکن، باید طول پنجره ارزیابی τ محدود می‌باشد. با توجه به تضمین کارایی (۵-۴) می‌توان حد آستانه را بصورت (۵-۳۴) نوشت [۲۶].

$$J_{th} = \frac{\delta \gamma}{\sqrt{\tau}} \quad (5-34)$$

که δ یک عدد مثبت مشخص با شرط $\|d(t)\|_2 < \delta$ است. اگر:

خطا $\Rightarrow$ بصدا در آمدن هشدار وقوع خطا $J_L(r) > J_{th}$

عدم وجود خطا $\Rightarrow J_L(r) \leq J_{th}$

۵-۵- شبیه سازی

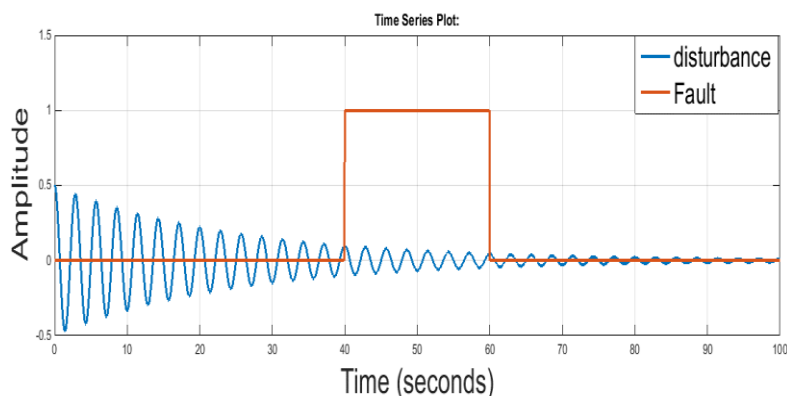
در این بخش شبیه سازی نتایج بر روی یک سیستم عددی و یک سیستم واقعی، با استفاده از نرم افزار متلب انجام می شود.

۵-۵-۱- شبیه سازی یک سیستم عددی

سیستم (۵-۱) را با ماتریس های زیر در نظر بگیرید:

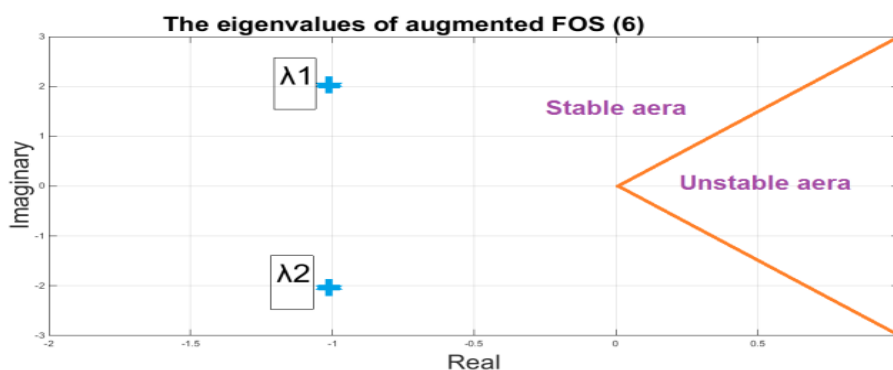
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C = [0.1 \quad 0], D_d = 0.2, D_{f1} = 2.2, \alpha = 0.5$$

اغتتشاش خارجی وارد شده به سیستم سیگنال $d(t) = 0.5 \exp(-0.04t) \cos(0.7\pi t) u(t)$ است. سیگنال خطا، یک پالس با دامنه یک در محدوده زمانی ۴۰ تا ۶۰ ثانیه مطابق شکل ۵-۲ به سیستم وارد می شود.



شکل ۵-۲- سیگنال خطا و اغتشاش

مقادیر ویژه سیستم خطا (۵-۳) در شکل ۵-۳ نمایش داده شده است.

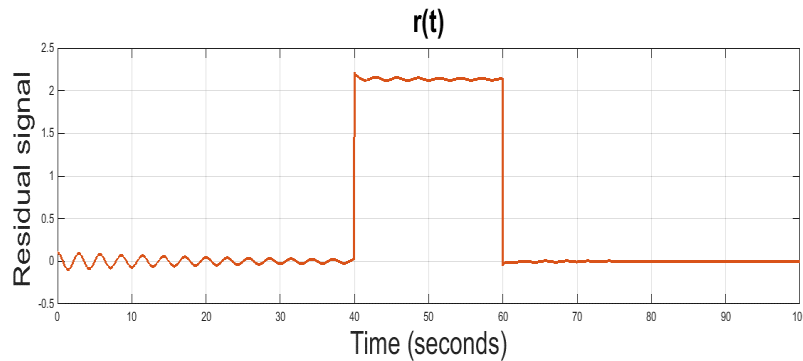


شکل ۵-۳- مقادیر ویژه سیستم خطای (۵-۳)

مسأله بهینه سازی (۵-۳۱) با استفاده از نرم افزار متلب برای این سیستم حل شده و نتایج زیر بدست آمده است.

$$\gamma = 2.44, \quad \beta = 4.3177, \quad L = [0.0845 \quad 0.0157]^T,$$

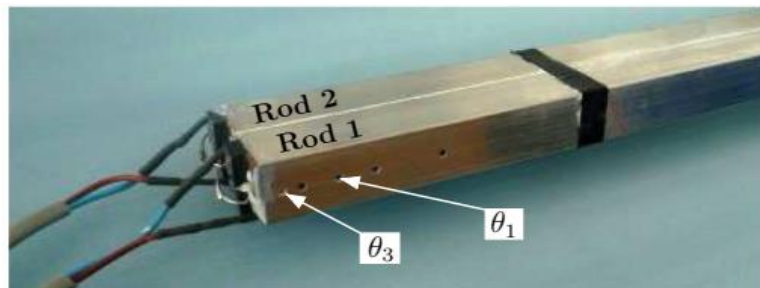
هدف این فصل، طراحی آشکارساز خطا با مشخصه کاهش اثر اغتشاش و بالا بردن حساسیت سیستم نسبت به رخ دادن خطا، بوده است. در شکل با رسم سیگنال باقیمانده کاملاً^۱ مشخص است که به این مهم دست یافته است.



شکل ۵-۴- سیگنال باقیمانده

۵-۵-۲- شبیه سازی یک سیستم عملی

یک سیستم گرمایی واقعی با نام نیمکت حرارتی دو میله‌ای^۱ که در مرجع [۸۹] آورده شده است، برای شبیه سازی قضایای اثبات شده در این فصل، انتخاب شده است. همانطور که در شکل (۵-۵) مشاهده می شود، این سیستم گرمایی، تشکیل شده از دو میله آلومینیومی که با چسب حرارتی به هم متصل شده اند.



شکل ۵-۵- سیستم گرمایی نیمکت حرارتی دو میله‌ای

این سیستم، یک سیستم یک ورودی چند خروجی^۲ است که، ورودی آن ولتاژ $V_r(t)$ و خروجی آن دماهای $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ و θ_4 هستند. رفتار حرارتی میله^۳ شماره (۱) بصورت روابط (۵-۳۵) و (۵-۳۶) است:

$$\theta_1 = \mathcal{L}^{-1}[G_{13}] * \theta_3 \quad (۵-۳۵)$$

$$\theta_3 = \mathcal{L}^{-1}[G_{V3}] * V_r(t) \quad (۵-۳۶)$$

رفتار حرارتی میله شماره ۲ طبق روابط (۵-۳۷) و (۵-۳۸) است.

$$\theta_2 = \mathcal{L}^{-1}[G_{42}] * \theta_4 \quad (۵-۳۷)$$

$$\theta_4 = \mathcal{L}^{-1}[G_{V4}] * V_r(t) \quad (۵-۳۸)$$

^۱ Two rods thermal bench

^۲ Single Input Multi Output(SIMO)

^۳ Rod

که در آن مقادیر عددی توابع انتقال بصورت روابط (۳۹-۵) تا (۴۲-۵) شناسایی شده است.

$$G_{V3}(s) = \frac{-348.5s^{0.5} + 319.9}{1840s^{1.5} - 130s + 485.7s^{0.5} + 1} = \frac{b_1^{V3}s^{0.5} + b_0^{V3}}{a_3^{V3}s^{1.5} + a_2^{V3}s + a_1^{V3}s^{0.5} + a_0^{V3}} \quad (39-5)$$

$$G_{31}(s) = \frac{1.1587}{2.367s^{0.5} + 1} - 0.1599 = \frac{b_0^{31}}{a_1^{31}s^{0.5} + a_0^{31}} + D_{31} \quad (40-5)$$

$$G_{V4}(s) = \frac{-299.5s^{0.5} + 260.7}{6472s^{1.5} - 300.2s + 453.2s^{0.5} + 1} = \frac{b_1^{V4}s^{0.5} + b_0^{V4}}{a_3^{V4}s^{1.5} + a_2^{V4}s + a_1^{V4}s^{0.5} + a_0^{V4}} \quad (41-5)$$

$$G_{42}(s) = \frac{1.6361}{0.5415s^{0.5} + 1} - 0.6372 = \frac{b_0^{42}}{a_1^{42}s^{0.5} + a_0^{42}} + D_{42} \quad (42-5)$$

با توجه به روابط بالا فرم مشاهده‌پذیر سیستم را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} D^\alpha \begin{bmatrix} \zeta_4(t) \\ \zeta_5(t) \\ \theta_4(t) \end{bmatrix} = A_{V4} \begin{bmatrix} \zeta_4(t) \\ \zeta_5(t) \\ \theta_4(t) \end{bmatrix} + B_{V4}V_r(t) \\ \theta_4(t) = C_{V4} \begin{bmatrix} \zeta_4(t) \\ \zeta_5(t) \\ \theta_4(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (43-5)$$

$$\begin{cases} D^\alpha \zeta_3(t) = \frac{-a_0^{31}}{a_1^{31}} \zeta_3(t) + \frac{b_0^{31}}{a_1^{31}} \theta_3(t) = A_{31}\zeta_3(t) + B_{31}\theta_3(t) \\ \theta_1(t) = \zeta_3(t) + D_{31}\theta_3(t) \end{cases} \quad (44-5)$$

$$\begin{cases} D^\alpha \zeta_6(t) = \frac{-a_0^{42}}{a_1^{42}} \zeta_6(t) + \frac{b_0^{42}}{a_1^{42}} \theta_4(t) = A_{42}\zeta_6(t) + B_{42}\theta_4(t) \\ \theta_2(t) = \zeta_6(t) + D_{42}\theta_4(t) \end{cases} \quad (45-5)$$

بطوریکه:

$$A_{Vi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-a_0^{Vi}}{a_3^{Vi}} \\ 1 & 0 & \frac{-a_1^{Vi}}{a_3^{Vi}} \\ 0 & 1 & \frac{-a_1^{Vi}}{a_3^{Vi}} \end{bmatrix}, \quad B_{Vi} = \begin{bmatrix} \frac{b_0^{Vi}}{b_3^{Vi}} \\ \frac{b_1^{Vi}}{b_3^{Vi}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{Vi} = [0 \quad 0 \quad 1]; \quad i = 3, 4. \quad (46-5)$$

نمایش فضای حالت این سیستم طبق رابطه (۴۷-۵):

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (47-5)$$

بطوری که :

$$A = \begin{bmatrix} A_{V3} & 0 & 0 & 0 \\ B_{31}C_{V3} & A_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{V4} & 0 \\ 0 & 0 & B_{42}C_{V4} & A_{42} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{V3} \\ 0 \\ B_{V4} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (48-5)$$

$$C = \begin{bmatrix} D_{31}C_{V3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{V3} & 0 & D_{41}C_{V4} & 1 \\ 0 & 0 & C_{V4} & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0. \quad (49-5)$$

متغیرهای حالت و خروجی این سیستم بترتیب بصورت (50-5) و (51-5) است.

$$x(t) = [\zeta_1(t) \ \zeta_2(t) \ \theta_3(t) \ \zeta_3(t) \ \zeta_4(t) \ \zeta_5(t) \ \theta_4(t) \ \zeta_6(t)] \quad (50-5)$$

$$y(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \theta_3(t) \ \theta_4(t)] \quad (51-5)$$

سیستم کسری (51-5) را با پارامترهای زیر فرض کنید:

$$AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.2640 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.0707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4895 & -0.4225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.0700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.0464 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0214 & -1.8467 \end{bmatrix}.$$

$$B = 0, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \quad D_d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_f = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.1599 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6372 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

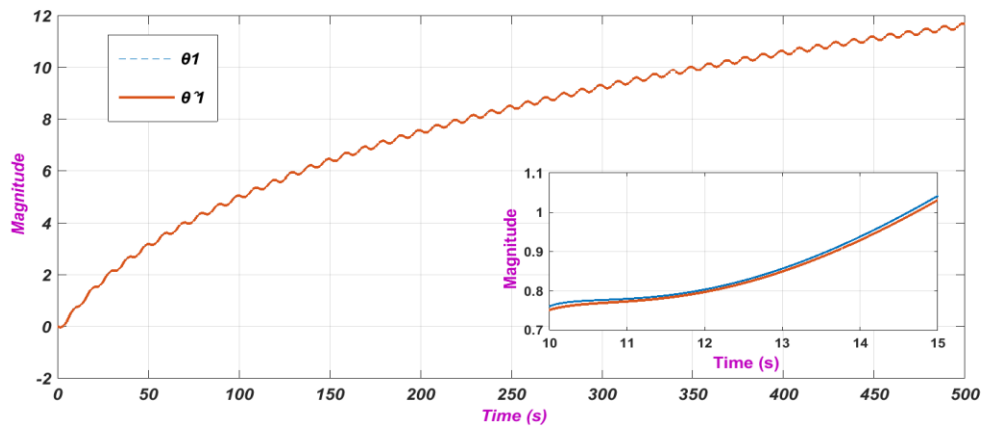
که سیگنال ورودی اغتشاش بصورت $d(t) = 0.5 \exp(-0.4t) \cos(0.7\pi t) u(t)$ است و سیگنال خطا یک پالس با دامنه یک است که، در محدوده زمانی ۴۰ تا ۶۰ ثانیه به سیستم وارد می شود (شکل (52-5)).

با استفاده از نرم افزار متلب مسأله بهینه سازی (۳۱-۵) حل شده و مقادیر β ، γ و L طبق رابطه (۵۲-۵) بدست آمده است.

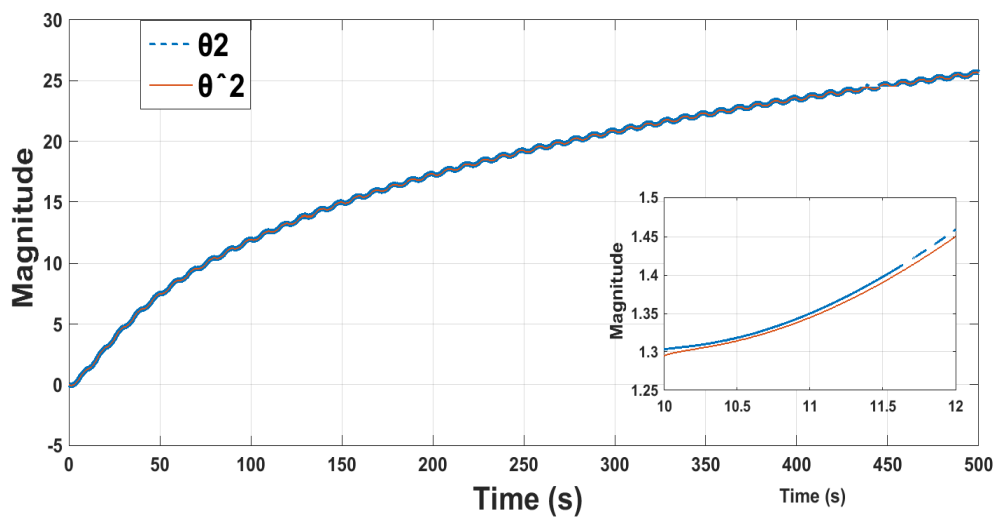
$$\beta = 71.8540, \quad \gamma = 0.0328$$

$$L = \begin{bmatrix} 1.0011 & 0 & 2.1735 & 0 \\ 0.0012 & 0 & 3.2501 & 0 \\ -0.0009 & 0 & 2.9924 & 0 \\ -0.0040 & 0 & 0.2422 & 0 \\ 0 & 0.0010 & 0 & 0.9972 \\ 0 & 0.0002 & 0 & 2.5353 \\ 0 & 0.0043 & 0 & 2.6462 \\ 0 & -0.8542 & 0 & 3.5680 \end{bmatrix} \quad (52-5)$$

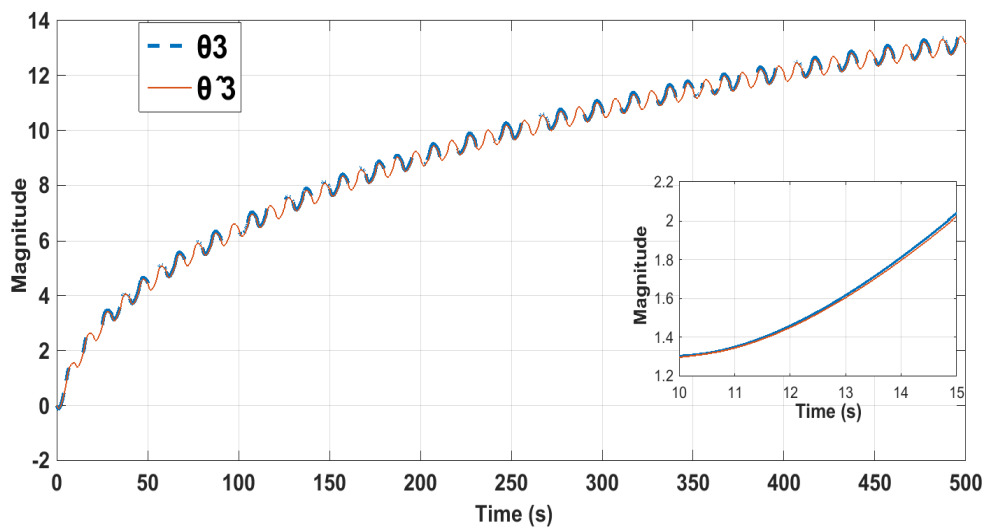
در شکل‌های (۶-۵) تا (۹-۵) سیگنال‌های خروجی و سیگنال‌های تخمین زده شده برای آنها رسم شده‌اند.



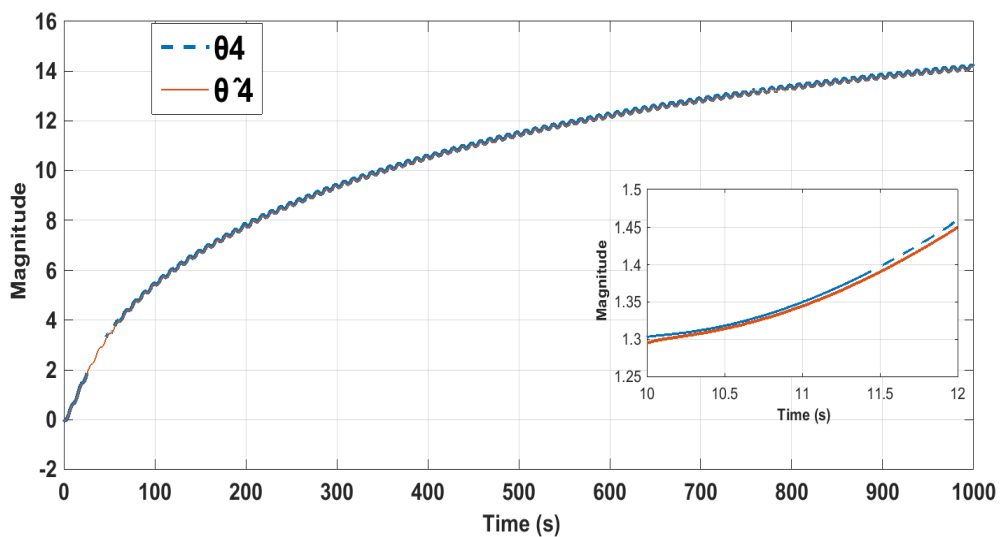
شکل ۵-۶- سیگنال خروجی θ_1 و تخمین آن



شکل ۵-۷- سیگنال خروجی θ_2 و تخمین آن



شکل ۵-۸- سیگنال خروجی θ_3 و تخمین آن

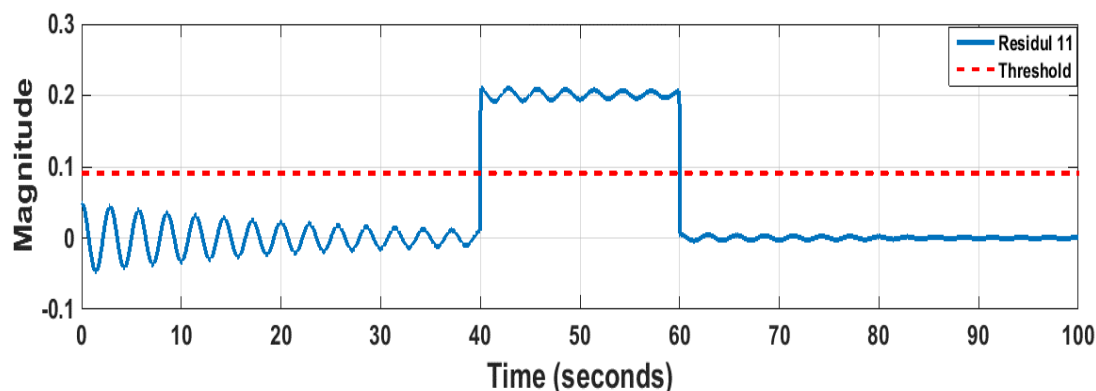


شکل ۵-۹- سیگنال خروجی θ_4 و تخمین آن

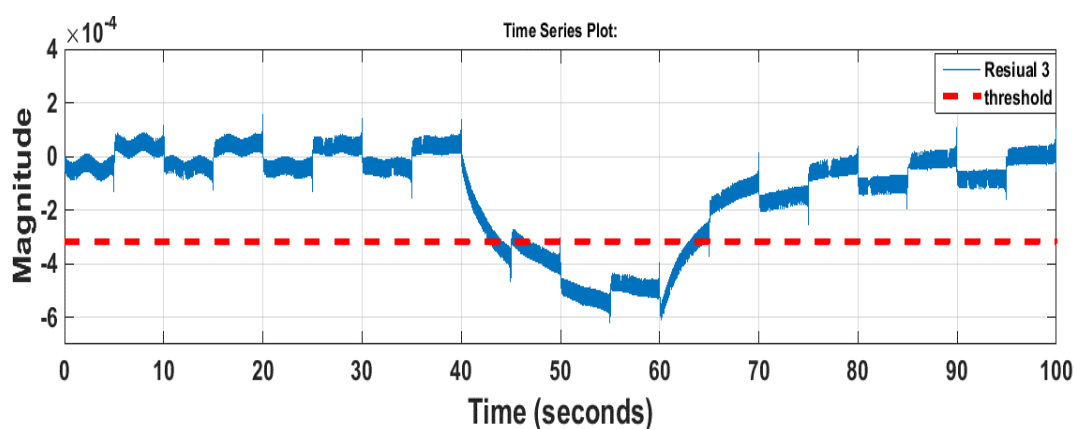
همانطور که مشاهده می‌شود، مقدار بدست آمده برای بهره مشاهده‌گر یک مقدار بسیار خوب است که، توانسته است با خطای بسیار کم خروجی را تخمین بزند.
با استفاده از رابطه‌ی (۵-۳۴) داریم:

$$J_{thr3} = -0.00021620 \text{ و } J_{thr1} = 0.0908$$

شکل (۵-۱۰) و شکل (۵-۱۱) سیگنال باقیمانده را در حضور خطا نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌شود؛ طراحی توانسته است حساسیت سیستم آشکارساز را نسبت به خطا افزایش دهد و از طرف دیگر آن را، در مقابل ورودی‌های ناخواسته مانند اغتشاش مقاوم سازد.



شکل ۵-۱۰- سیگنال باقیمانده r_1



شکل ۵-۱۱- سیگنال باقیمانده r_2

۵-۶- نتیجه گیری فصل

در این فصل، با بکارگیری روش آشکارساز خطا بر اساس مشاهده گر، آشکارساز خطا برای یک سیستم کسری نامتغیر با زمان خطی طراحی شده است. برای بالا بردن حساسیت سیستم نسبت به خطا از شاخص بهینه سازی H_- و برای مقاوم ساختن سیستم آشکارساز نسبت به ورودی های خارجی مانند اغتشاش، شاخص بهینه سازی H_∞ استفاده شده است. با این راهکار، مسأله طراحی آشکارساز تبدیل به حل یک مسأله بهینه سازی چند منظوره H_∞/H_- شد و با تبدیل شرایط مسأله طراحی بصورت نامساوی های ماتریسی کسری، شرایط حل پذیری فراهم شده است.

فصل ۶- کنترل و آشکارسازی خطای مقاوم برای سیستم‌های مرتبه کسری

۶-۱- مقدمه

گزینه کاربردی مناسب برای کاهش پیچیدگی سیستم و فرآیند طراحی برای سیستم‌هایی که آشکارساز خطا به آن اضافه می‌شود، یکی کردن واحد کنترل کننده و واحد آشکارساز است. ترکیب این دو واحد، کاهش متقابل اثرات نامطلوب احتمالی این دو واحد بر یکدیگر را نیز به ارمغان خواهد آورد. در این فصل، به طراحی واحد کنترل کننده-آشکارساز خطا برای یک سیستم کسری نامتغیر با زمان خطی در برابر خطاهای حسگر، خطاهای محرک و خطاهای سیستمی در حضور ورودی‌های خارجی از جمله نویز و اغتشاش پرداخته خواهد شد. با توجه به کارایی بسیار بالای روش آشکارسازی خطا بر اساس رؤیتگر برای سیستم‌های واقعی و کاربرد آن در صنعت، این روش برای طراحی بکار گرفته شده است. واحد کنترل کننده-آشکارساز بر این اساس که، سیستم آشکارساز خطا یک مشاهده گر و سیستم کنترل یک کنترل کننده بر پایه مشاهده گر است، طوری طراحی خواهند شد که بتوانند دو سیگنال که سیگنال باقیمانده و کنترل نامیده می‌شوند، تولید کند. سیستم بوسیله سیگنال کنترل پایدار خواهد شد و سیگنال باقیمانده، خطاهای ایجاد شده در سیستم را آشکار خواهد ساخت. برای حل مسأله با استفاده از معیار ترکیبی H_-/H_∞ ، در عین کمینه کردن اثر ورودی‌های نامعلوم و نامعینی‌های مدلسازی بر روی سیگنال باقیمانده، بالا بردن حساسیت این سیگنال نسبت به خطا نیز محقق خواهد شد. با در نظر گرفتن این موضوع که بیان مسائل مطرح شده در تئوری کنترل، در قالب مسائل محدب به شکل نامساوی‌های ماتریسی خطی دارای مزایای فراوانی است؛ نتایج بدست آمده بصورت نامساوی‌های ماتریسی خطی، برای سیستم در حضور اغتشاش ارائه می‌شود و قیود جدیدی در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی بدست می‌آید. در پایان طراحی، نتایج بدست آمده بر روی یک مثال عددی شبیه سازی خواهد شد.

۶-۲- بیان مسأله

سیستم خطی نامتغیر با زمان با معادلات کسری مطابق (۶-۱) را در نظر بگیرید.

$$G: \begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_d d(t) + B_f f(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_d d(t) + D_f f(t) \\ z(t) = Ex(t) + F_d d(t) + F_f f(t) \\ x(t) = \phi(t) \quad t \in [-h_1, 0] \end{cases} \quad (۶-۱)$$

در اینجا $0 < \alpha < 1$ درجه سیستم کسری، $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار شبه حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ورودی کنترل، $y(t) \in \mathbb{R}^r$ خروجی سیستم و $z(t) \in \mathbb{R}^t$ خروجی کنترلی است. ماتریسهای $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $D_f \in \mathbb{R}^{r \times q}$ و $B_d \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ، $B_f \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ، $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ، $D_d \in \mathbb{R}^{r \times p}$ ماتریسهای ثابت هستند. $x(0)$ شرایط اولیه سیستم در بازه زمانی $[-h_1, 0]$ است که $h_1 \in \mathbb{R}$ ، $0 < h_1$.

سیستم تحت تأثیر ورودی ناخواسته مانند اغتشاش $d(t) \in \mathbb{R}^p$ و ورودی خطای $f(t) \in \mathbb{R}^q$ قرار دارد. یادآوری می‌شود که این نحوه مدلسازی خطا، در بر گیرنده خطاهای سیستم، عملگر و حسگر است.

واحد کنترل کننده - آشکارساز خطا به منظور دستیابی به هدف کنترلی سیستم و آشکارسازی خطا بصورت همزمان، برای سیستم (۱-۶) بفرم معادلات زیر که در اصل آشکارساز یک مشاهده گر لیونبرگ است، در نظر گرفته می شود.

$$\begin{cases} D^\alpha \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + Lr(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \\ r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \\ u(t) = K\hat{x}(t) \\ \hat{x}(t) = \varphi(t) \quad t \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (2-6)$$

که $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار تخمین شبه حالت و $r(t) \in \mathbb{R}^r$ سیگنال باقیمانده است. ماتریس $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ بهره کنترل کننده و ماتریس $L \in \mathbb{R}^{n \times r}$ بهره مشاهده گر است که باید تعیین شوند.

با تعریف بردار شبه حالت جدید بصورت $\xi^T = [x(t)^T \quad e(t)^T]$ که در آن $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ است و تلفیق سیستم (۱-۶) با واحد آشکارساز (۲-۶) سیستم افزوده زیر بدست می آید.

$$G: \begin{cases} D^\alpha \xi(t) = \tilde{A}\xi(t) + \tilde{B}_d d(t) + \tilde{B}_f f(t) \\ r(t) = \tilde{C}\xi(t) + D_d d(t) + D_f f(t) \\ z(t) = \tilde{E}\xi(t) + F_d d(t) + F_f f(t) \end{cases} \quad (3-6)$$

که در آن:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} B_d \\ B_d - LD_d \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_f = \begin{bmatrix} B_f \\ B_f - LD_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [0 \quad C], \quad \tilde{E} = [E \quad 0],$$

برای سیستم حلقه بسته (۳-۶) تابع تبدیل برای خروجی سیگنال باقیمانده $r(t)$ و ورودی های خطا $f(t)$ برابر است با:

$$G_{rf}(s) = \tilde{C}(S^\alpha I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}_f + D_f \quad (4-6)$$

همچنین، تابع تبدیل برای خروجی سیگنال باقیمانده $r(t)$ و اغتشاش $d(t)$ برابر است با:

$$G_{rd}(s) = \tilde{C}(S^\alpha I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}_d + D_d \quad (5-6)$$

از طرفی، تابع تبدیل این سیستم برای خروجی اندازه گیری شده $z(t)$ و ورودی های خطا $f(t)$ طبق رابطه (۶-۶) است.

$$G_{zf}(s) = \tilde{E}(S^\alpha I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}_f + F_f \quad (6-6)$$

و تابع تبدیل این سیستم برای خروجی اندازه گیری شده $z(t)$ و اغتشاش $d(t)$ برابر است با:

$$G_{zd}(s) = \tilde{E}(S^\alpha I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}_d + F_d \quad (7-6)$$

برای تکمیل فرآیند طراحی واحد کنترل کننده - آشکارساز خطای مقاوم، برآورده کردن اهداف زیر ضروری است:

۱- پایدار سازی سیستم حلقه بسته:

باید سیستم حلقه بسته (۳-۶) پایدار^۱ باشد. برای دستیافتن به این هدف، طبق رابطه (۳-۲۲) باید $\left| \operatorname{Arg} \left(\operatorname{spec}(\tilde{A}) \right) \right| > \alpha \frac{\pi}{2}$ شود [۱۲۴].

۲- مقاوم سازی سیستم حلقه بسته برابر ورودی های ناخواسته

سیستم حلقه بسته (۳-۶) باید مقاوم در برابر ورودی های ناخواسته، از جمله اغتشاش و نویز باشد. با کمک معیار بهینه سازی H_∞ این موضوع بصورت (۶-۸) بیان می شود.

$$\sup \frac{\|z(t)\|_2}{\|d(t)\|_2} < \gamma_1, \gamma_1 > 0 \quad (۶-۸)$$

۳- مقام سازی خروجی کنترلی در برابر خطا

برای رسیدن به این هدف باید معیار کارایی (۶-۹) برقرار شود.

$$\sup \frac{\|z(t)\|_2}{\|f(t)\|_2} < \gamma_2, \gamma_2 > 0 \quad (۶-۹)$$

۴- مقاوم سازی سیگنال باقیمانده در برابر ورودی های ناخواسته مثل اغتشاش

مقاوم بودن سیستم آشکارساز و جلوگیری از به صدا درآمدن آلام های اشتباه در اثر تشخیص ورودی های ناخواسته بعنوان خطا، از دیگر اهداف طراحی است. این هدف با استفاده از معیار بهینه سازی H_∞ بصورت زیر توصیف می شود:

$$\sup \frac{\|r(t)\|_2}{\|d(t)\|_2} < \gamma_3, \gamma_3 > 0 \quad (۶-۱۰)$$

۵- بالا بردن حساسیت سیستم آشکار ساز نسبت به خطا

به منظور بالا بردن حساسیت سیستم آشکار ساز نسبت به خطا، باید اثر خطا بر سیگنال باقیمانده کمینه شود. با کمک گرفتن از معیار بهینه سازی H_- این هدف بصورت (۶-۱۱) قابل بیان است.

$$\inf \frac{\|r(t)\|_2}{\|f(t)\|_2} > \beta, \beta > 0 \quad (۶-۱۱)$$

۶-۳- طراحی واحد کنترل و آشکارساز خطا

در بخش قبل توانستیم مسأله طراحی واحد کنترل و آشکارسازی خطا را بصورت یک مسأله بهینه سازی چند منظوره H_∞/H_- بیان کنیم؛ در ادامه فرآیند حل مسأله، با توجه به مزایای استفاده از نامساوی های ماتریسی خطی در حل مسائل نظریه کنترل، حل این مسأله در قالب آنها بیان خواهد شد.

¹ stability

۱-۳-۶ - کمینه کردن اثر اغتشاش و ورودی‌های ناشناخته بر خروجی

قضیه (۱-۶) معیار بهینه سازی H_∞ که طبق رابطه (۸-۶) بیان قوام سیستم (۳-۶) در برابر ورودی‌های ناشناخته و اغتشاش است، در قالب نامساوی ماتریسی خطی توصیف خواهد کرد.

قضیه ۱-۶: برای $\gamma_1 > 0$ و $\lambda > 0$ ، سیستم افزوده (۳-۶) پایدار است و معیار کارایی تعریف شده در (۸-۶) تضمین خواهد شد، اگر ماتریس‌های معین مثبت P_1 و Q_1 ، همچنین ماتریس‌های X_1 ، X_2 ، $\hat{X}_1$ ، M و N وجود داشته باشند بطوری که نامساوی ماتریسی خطی (۱۲-۶) برقرار باشد.

$$\begin{bmatrix} Her(\Pi) + \Xi_1 & \Xi_2 & \Omega + \Xi_3 F_d \\ * & -\lambda(X + X^T) & \lambda\Omega \\ * & * & F_d^T F_d - \gamma_1^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (12-6)$$

که در آن

$$\Xi_1 = [E^T \quad 0] \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \Xi_3 = [E \quad 0]^T, \Omega = \begin{bmatrix} X_1^T B_d \\ X_2^T B_d - N^T D_d \end{bmatrix}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} A^T X_1 + M^T B^T & 0 \\ -M^T B^T & A^T X_2 - C^T N^T \end{bmatrix}, X = diag(X_1, X_2),$$

$$\Xi_2 = \lambda \Pi - X^T + \bar{r} P_1 + r Q_1, r = e^{j\theta}, \theta = (1 - \alpha) \frac{\pi}{2},$$

همچنین بهره مشاهده‌گر و بهره کنترلگر از رابطه (۱۳-۶) بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} L &= X_2^{-T} N \\ K &= \hat{X}_1^{-T} M \end{aligned} \quad (13-6)$$

اثبات قضیه ۱-۶:

برای سیستم افزوده (۳-۶) داریم:

$$\|G(s)_{zd}\|_{H_\infty} \triangleq \sup_{Re(s) \geq 0} \bar{\sigma}(G(s)_{zd}) = \sup_{Re(s) \geq 0} \bar{\sigma}(\tilde{E}(S^\alpha I - A)^{-1} \tilde{B}_d + F_d) \quad (14-6)$$

با توجه به نامساوی (۸-۶) می‌توان نوشت:

$$\|G(s)_{zd}\|_{H_\infty} < \gamma_1 \Leftrightarrow G(s)_{zd} G(s)_{zd}^* - \gamma_1^2 I < 0, \forall Re(s) \geq 0 \quad (15-6)$$

با در نظر گرفتن $\lambda(\omega) \triangleq e^{-j\frac{\pi}{2}\alpha} \omega^\alpha$ و $\lambda^*(\omega) = e^{j\frac{\pi}{2}\alpha} \omega^\alpha = (j\omega)^\alpha$ ، رابطه (۱۵-۶) را می‌توان بصورت نامساوی (۱۶-۶) نوشت.

$$\begin{bmatrix} H(\lambda(\omega)) \\ I_m \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda(\omega)) \\ I_m \end{bmatrix} < 0, \forall \lambda \in \Lambda \quad (16-6)$$

که $H(\lambda(\omega)) \triangleq (\lambda(\omega) I_n - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}_d$ است.

Λ طبق رابطه (۱۶-۴) بصورت $\Lambda(\Phi, \Psi) \triangleq \left\{ \lambda \in C \left| \begin{bmatrix} \lambda(\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda(\omega) \\ I \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} \lambda(\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda(\omega) \\ I \end{bmatrix} \geq 0 \right. \right\}$ تعریف شده است. با این توضیحات Θ طبق رابطه (۱۷-۶) خواهد بود.

$$\Theta = \begin{bmatrix} \tilde{E}^T \tilde{E} & \tilde{E}^T F_d \\ F_d^T \tilde{E} & F_d^T F_d - \gamma_1^2 I \end{bmatrix} \quad (۱۷-۶)$$

اگر $Q_1 > 0$ و $\exists P_2, Q_1$ ، طبق لم ۴-۲ رابطه (۶-۱۶) را می توان با بصورت نامساوی (۶-۱۸) نوشت:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B}_d \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P_1 + \Psi \otimes Q_1) \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B}_d \end{bmatrix} + \Theta < 0 \quad (۱۸-۶)$$

که Φ و Ψ را بصورت (۶-۱۹) می توان در نظر گرفت:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \bar{r} \\ r & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۹-۶)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & r \\ \bar{r} & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون نامساوی (۶-۱۸) را می توان بصورت $N_U^T Z N_U < 0$ نوشت، اگر N_U و Z بصورت (۶-۲۰) فرض شوند.

$$Z = \begin{bmatrix} \tilde{E}^T \tilde{E} & \bar{r} P_1 + r Q_1 & \tilde{E}^T F_d \\ r P_1 + \bar{r} Q_1 & 0 & 0 \\ F_d^T \tilde{E} & 0 & F_d^T F_d - \gamma_1^2 I \end{bmatrix} \quad (۲۰-۶)$$

$$N_U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B}_d \\ 0 & I \end{bmatrix} \rightarrow U = [\tilde{A} \quad -I \quad \tilde{B}_d]$$

با توجه به نتایج لم ۴-۶ و در نظر گرفتن $N_V^T Z N_V < 0$ می توان نوشت:

$$U^T X V + V^T X^T U + Z < 0 \quad (۲۱-۶)$$

که در اینجا:

$$N_V = \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \\ -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \rightarrow V = [I \quad \lambda I \quad 0] \quad (۲۲-۶)$$

در اینجا N_U و N_V ماتریس های دلخواهی هستند که، ستون های آنها پایه هایی برای فضای پوچی ماتریسهای U و V می باشند.

با جایگذاری روابط (۶-۲۰) و (۶-۲۲) در رابطه (۶-۲۱) نامساوی (۶-۲۳) حاصل خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}^T \tilde{E} & \bar{r} P_1 + r Q_1 & \tilde{E}^T F_d \\ r P_1 + \bar{r} Q_1 & 0 & 0 \\ F_d^T \tilde{E} & 0 & F_d^T F_d - \gamma_1^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}^T \\ -I \\ \tilde{B}_d^T \end{bmatrix} [X \quad \lambda X \quad 0] \\ + \begin{bmatrix} X^T \\ \lambda X^T \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{A} \quad -I \quad \tilde{B}_d] < 0 \quad (۲۳-۶)$$

با تجزیه X بصورت $X = \text{diag}(X_1, X_2), X_i \in R^{n \times n}, i = 1, 2$ و پس از انجام محاسبات ضرب و جمع ماتریسی بر روی نامساوی (۶-۲۳)، نامساوی (۶-۲۴) حاصل خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} Her(\Delta) + \Xi_1 & \Xi_2 & \Omega + \Xi_3 F_d \\ * & -\lambda(X + X^T) & \lambda\Omega \\ * & * & F_d^T F_d - \gamma_1^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (24-6)$$

که در اینجا:

$$\begin{aligned} \Xi_2 &= \lambda\Pi - X^T + \bar{r}P_1 + rQ_1, & \Xi_3 &= [E \quad 0]^T, \\ \Omega &= \begin{bmatrix} X_1^T B_d \\ X_2^T B_d - N^T D_d \end{bmatrix}, & \Delta &= \begin{bmatrix} A^T X_1 + K^T B^T X_1 & 0 \\ -K^T B^T X_1 & A^T X_2 + C^T L^T X_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

به علت وجود جمله‌های $K^T B^T X_1$ و $C^T L^T X_2$ که دو متغیر مجهول در یکدیگر ضرب شده‌اند، هنوز نامساوی (۲۴-۶) به شکل نامساوی ماتریسی خطی نیست. برای تبدیل نامساوی (۲۴-۶) به فرم نامساوی ماتریسی خطی لازم است $X_1 = U \begin{bmatrix} X_{11} & \cdot \\ \cdot & X_{22} \end{bmatrix} U^T$ تجزیه شود. حال فرض کنیم ماتریس $B \in R^{m \times n}$ یک ماتریس با رتبه ستونی کامل باشد، آنگاه یک تجزیه مقدار تکین برای این ماتریس به صورت $B = U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T$ وجود دارد که $\Sigma \in R^{m \times n}$ یک ماتریس قطری با مقادیر مثبت است. همچنین $U \in R^{n \times n}$ و $V \in R^{m \times m}$ ماتریس‌های یکانی هستند. با بکارگیری لم (۷-۴) بطوریکه $\hat{X}_1 = V \Sigma^{-1} X_{11} \Sigma V^T$ و $\hat{X}_1 B^T = V \Sigma^{-1} X_{11}^{-1} \Sigma V^T$ بدست می‌آید. حال تغییر متغیرهای $N^T = L^T X_2$ و $M^T = K^T \hat{X}_1$ را تبدیل به نامساوی (۲۴-۶) خواهد شد و اثبات کامل می‌شود. □

۶-۳-۲- کمینه کردن اثر خطا بر خروجی اندازه‌گیری شده

با برقراری معیار کارایی (۹-۶) کمینه کردن اثر خطا بر روی خروجی اندازه‌گیری شده سیستم (۳-۶) تضمین خواهد شد. قضیه (۲-۶) این معیار کارایی بهینه سازی H_∞ را بصورت نابرابری ماتریسی خطی بیان خواهد کرد.

قضیه ۲-۶: برای $\gamma_2 > 0$ و $\lambda > 0$ ، اگر ماتریس‌های معین مثبت P_2 و Q_2 ، همچنین ماتریس‌های X_1 ، X_2 ، $\hat{X}_1$ ، M و N وجود داشته باشند بطوری که نامساوی (۲۵-۶) برقرار باشد، سیستم افزوده (۳-۶) پایدار است و معیار کارایی تعریف شده در (۹-۶) تضمین خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} Her(\Pi) + \Xi_1 & \Xi_2 & \Omega + \Xi_3 F_f \\ * & -\lambda(X + X^T) & \lambda\Omega \\ * & * & F_f^T F_f - \gamma_2^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (25-6)$$

که در اینجا:

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= [E^T \quad 0] \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Xi_3 = [E \quad 0]^T, \quad \Omega = \begin{bmatrix} X_1^T B_f \\ X_2^T B_f - N^T D_d \end{bmatrix}, \\ \Pi &= \begin{bmatrix} A^T X_1 + M^T B^T & 0 \\ -M^T B^T & A^T X_2 - C^T N^T \end{bmatrix}, \quad X = diag(X_1, X_2), \end{aligned}$$

$$\Xi_2 = \lambda\Pi - X^T + \bar{r}P_2 + rQ_2 \quad r = e^{j\theta}, \theta = (1 - \alpha)\frac{\pi}{2},$$

بهره مشاهده گر و بهره کنترلگر توسط رابطه (۶-۱۳) محاسبه خواهند شد.

اثبات قضیه ۶-۲: برای سیستم افزوده (۶-۳) تابع تبدیل خروجی اندازه گیری شده به ورودی خطا برابر است با $G(s)_{zf} = \tilde{E}(S^\alpha I - A)^{-1}\tilde{B}_f + F_f$ ، در نتیجه $\|G(s)_{zf}\|_{H_\infty}$ بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\|G(s)_{zf}\|_{H_\infty} \triangleq \sup_{Re(s) \geq 0} \bar{\sigma}(G(s)_{zf}) = \sup_{Re(s) \geq 0} \bar{\sigma}(\tilde{E}(S^\alpha I - A)^{-1}\tilde{B}_f + F_f) \quad (۶-۲۶)$$

در این صورت $\Theta = \begin{bmatrix} \tilde{E}^T \tilde{E} & \tilde{E}^T F_f \\ F_f^T \tilde{E} & F_f^T F_f - \gamma_1^2 I \end{bmatrix}$ خواهد بود. با توضیحات داده شده، Z و N_U از رابطه (۶-۲۷) بدست خواهد آمد.

$$Z = \begin{bmatrix} \tilde{E}^T \tilde{E} & \bar{r}P_2 + rQ_2 & \tilde{E}^T F_f \\ \bar{r}P_2 + \bar{r}Q_2 & 0 & 0 \\ F_f^T \tilde{E} & 0 & F_f^T F_f - \gamma_2^2 I \end{bmatrix} \quad (۶-۲۷)$$

$$N_U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B}_f \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

با جایگذاری این عناصر جدید، بقیه مراحل اثبات درست مانند مراحل اثبات قضیه (۶-۱) است؛ که برای اجتناب از تکرار، آن را ادامه نمی دهیم. □

۶-۳-۳- کمینه کردن اثر اغتشاش و ورودی های ناشناخته بر سیگنال

باقیمانده

یک کار اساسی و بسیار ضروری در فرآیند طراحی آشکار ساز خطا در سیستم های واقعی، لحاظ کردن اثر اغتشاش و ورودی های ناخواسته است تا، از آلارم های اشتباهی که در اثر تشخیص ورودی های ناخواسته و اغتشاش بعنوان خطا بوجود می آیند، جلوگیری کرد. در قضیه (۶-۳) معیار بهینه سازی (۶-۱۰) بصورت نابرابری ماتریس خطی بیان خواهد شد.

قضیه ۶-۳: برای $\gamma_3 > 0$ و $\lambda > 0$ ، سیستم افزوده (۶-۳) پایدار است و معیار کارایی تعریف شده در (۶-۱۰) تضمین خواهد شد، اگر ماتریس های معین مثبت P_3 و Q_3 ، همچنین ماتریس های X_1 ، X_2 ، $\hat{X}_1$ ، M و N وجود داشته باشند، بطوری که نامساوی (۶-۲۸) برقرار باشد.

$$\begin{bmatrix} Her(\Pi) + \Xi_1 & \Xi_2 & \Omega + \Xi_3 D_d \\ * & -\lambda(X + X^T) & \lambda\Omega \\ * & * & D_d^T D_d - \gamma_3^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (۶-۲۸)$$

بطوریکه

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} 0 & C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}, \Xi_3 = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}^T, \Omega = \begin{bmatrix} X_1^T B_d \\ X_2^T B_d - N^T D_d \end{bmatrix}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} A^T X_1 + M^T B^T & 0 \\ -M^T B^T & A^T X_2 - C^T N^T \end{bmatrix}, X = \text{diag}(X_1, X_2)$$

$$\Xi_2 = \lambda \Pi - X^T + \bar{r} P_3 + r Q_3, r = e^{j\theta}, \theta = (1 - \alpha) \frac{\pi}{2}.$$

بهره مشاهده گر و بهره کنترلگر توسط طبق (۶-۱۳) محاسبه خواهند شد.

اثبات قضیه ۶-۳: راه حل اثبات این قضیه نیز مانند قضیه های قبل است، فقط باید $\|G(s)_{rd}\|_{H_\infty}$ را بصورت زیر تعریف کرد.

$$\|G(s)_{rd}\|_{H_\infty} \triangleq \sup_{\text{Re}(s) \geq 0} \bar{\sigma}(G(s)_{rd}) = \sup_{\text{Re}(s) \geq 0} \bar{\sigma}(\tilde{C}(S^\alpha I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}_d + D_d) \quad (۶-۲۹)$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \Theta &= \begin{bmatrix} \tilde{E}^T \tilde{E} & \tilde{E}^T D_d \\ D_d^T \tilde{E} & D_d^T D_d - \gamma_3^2 I \end{bmatrix} \\ Z &= \begin{bmatrix} \tilde{E}^T \tilde{E} & \bar{r} P_3 + r Q_3 & \tilde{E}^T D_d \\ r P_3 + \bar{r} Q_3 & 0 & 0 \\ D_d^T \tilde{E} & 0 & D_d^T D_d - \gamma_3^2 I \end{bmatrix} \\ N_U &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B}_d \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۶-۳۰)$$

با ادامه مسیر اثبات قضایای قبل، اثبات کامل خواهد شد. $\square$

۶-۳-۴- بیشینه کردن اثر خطا بر سیگنال باقیمانده

نامساوی (۶-۱۱) با استفاده از معیار بهینه سازی H_- ، راهکاری برای بالا بردن حساسیت سیستم آشکارساز نسبت به خطای ایجاد شده نشان می دهد. با تبدیل این معیار بهینه سازی بشکل نابرابری ماتریس خطی در قضیه (۶-۴) طراحی سیستم آشکارساز ادامه خواهد یافت.

قضیه ۶-۴: سیستم افزوده (۶-۳) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس های معین مثبت P_4 و Q_4 ، همچنین ماتریس های $X_1, X_2, \hat{X}_1, M$ و N وجود داشته باشند بطوری که نامساوی (۶-۳۱) برقرار باشند، معیار کارایی تعریف شده در (۶-۱۱) برای $\beta > 0$ و $\lambda > 0$ تضمین خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} \text{Her}(\Pi) - \Xi_1 & \Xi_2 & \Omega - \Xi_3 D_f \\ * & -\lambda(X + X^T) & \lambda \Omega \\ * & * & -D_f^T D_f + \beta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (۶-۳۱)$$

که در اینجا:

$$\Xi_1 = [0 \quad C^T] \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}, \Xi_3 = [0 \quad C]^T, \Omega = \begin{bmatrix} X_1^T B_f \\ X_2^T B_f - N^T D_f \end{bmatrix},$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} A^T X_1 + M^T B^T & 0 \\ -M^T B^T & A^T X_2 - C^T N^T \end{bmatrix}, X = \text{diag}(X_1, X_2),$$

$$\Xi_2 = \lambda \Pi - X^T + \bar{r} P_4 + r Q_4, r = e^{j\theta}, \theta = (1 - \alpha) \frac{\pi}{2},$$

اثبات قضیه ۴-۶: معیار بهینه سازی H_- برای سیستم افزوده (۳-۶) را می توان بصورت زیر گسترش داد [۱۳۷]:

$$\|G(s)_{rf}\|_-^{[0-\infty)} \triangleq \inf_{\omega \in [0, \bar{\omega})} \underline{\sigma}(G(s)_{rf}) = \inf_{\omega \in [0, \bar{\omega})} \underline{\sigma}(\tilde{C}(S^{\alpha}I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}_f + D_f) \quad (۳۲-۶)$$

با توجه به معیار کارایی (۱۱-۶) داریم:

$$\|G(s)_{rf}\|_-^{[0-\infty)} > \beta \Leftrightarrow G(s)_{rf} G(s)_{rf}^* - \beta^2 I > 0, \quad (۳۳-۶)$$

اگر $H(\lambda) \triangleq (\lambda I_n - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}_f$ ، نامساوی (۳۳-۶) را می توان بصورت (۳۴-۶) نوشت.

$$\begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_m \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_m \end{bmatrix} < 0, \forall \lambda \in \Lambda \quad (۳۴-۶)$$

که Λ طبق (۱۶-۴) تعریف شده است. با توجه به نامساوی (۳۳-۶)، ماتریس Θ در نامساوی (۳۴-۶) بصورت (۳۵-۶) محاسبه خواهد شد.

$$\Theta = \begin{bmatrix} -\tilde{C}^T \tilde{C} & -\tilde{C}^T D_f \\ -D_f^T \tilde{C} & -D_f^T D_f + \beta^2 I \end{bmatrix} \quad (۳۵-۶)$$

با انتخاب $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \bar{r} \\ \bar{r} & 0 \end{bmatrix}$ و $\Psi = \begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix}$ ، (۳۴-۶) را می توان بصورت نامساوی (۳۶-۶) نوشت.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B}_d \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P_4 + \Psi \otimes Q_4) \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B}_d \end{bmatrix} + \Theta < 0 \quad (۳۶-۶)$$

اگر N_U و Z را بصورت (۳۷-۶) فرض کنیم، نامساوی (۳۶-۶) را می توان بصورت $N_U^T Z N_U < 0$ نوشت.

$$Z = \begin{bmatrix} -\tilde{C}^T \tilde{C} & \bar{r} P_4 + r Q_4 & -\tilde{C}^T D_f \\ r P_4 + \bar{r} Q_4 & 0 & 0 \\ -D_f^T \tilde{C} & 0 & -D_f^T D_f + \beta^2 I \end{bmatrix} \quad (۳۷-۶)$$

$$N_U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{B}_d \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

با محاسبه $N_V = \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \\ -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \rightarrow V = [I \quad \lambda I \quad 0]$ و نتایج لم (۶-۴) و در نظر گرفتن $N_V^T Z N_V < 0$

می توان نوشت:

$$U^T X V + V^T X^T U + Z < 0 \quad (۳۸-۶)$$

که با جایگذاری رابطه (۳۷-۶) در رابطه (۳۸-۶) نامساوی (۳۹-۶) حاصل خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} -\tilde{C}^T \tilde{C} & \bar{r}P_4 + rQ_4 & -\tilde{C}^T D_f \\ rP_4 + \bar{r}Q_4 & 0 & 0 \\ -D_f^T \tilde{C} & 0 & -D_f^T D_f + \beta^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}^T \\ -I \\ \tilde{B}_d^T \end{bmatrix} [X \quad \lambda X \quad 0] + \begin{bmatrix} X^T \\ \lambda X^T \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{A} \quad -I \quad \tilde{B}_d] < 0 \quad (39-6)$$

با تجزیه $X = \text{diag}(X_1, X_2)$, $X_i \in R^{n \times n}$, $i = 1, 2$ و انجام محاسبات برای نامساوی (39-6) نامساوی (40-6) حاصل خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} \text{Her}(\Delta) - \Xi_1 & \Xi_2 & \Omega - \Xi_3 D_f \\ * & -\lambda(X + X^T) & \lambda\Omega \\ * & * & -D_f^T D_f + \beta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (40-6)$$

که در اینجا:

$$\Xi_1 = [0 \quad C^T] \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}, \Xi_3 = [0 \quad C]^T, \Xi_2 = \lambda\Delta - X^T + \bar{r}P_4 + rQ_4,$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} X_1^T B_f \\ X_2^T B_f - N^T D_f \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} A^T X_1 + K^T B^T X_1 & 0 \\ -K^T B^T X_1 & A^T X_2 + C^T L^T X_2 \end{bmatrix},$$

با تجزیه $X_1 = U \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} U^T$ بصورت $X_1 = U \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} U^T$ و با بکارگیری لم (4-7) و تعریف $\hat{X}_1 = V \Sigma^{-1} X_{11} \Sigma V^T$ که $B^T X_1 = \hat{X}_1 B^T$ و $\hat{X}_1^{-1} = V \Sigma^{-1} X_{11}^{-1} \Sigma V^T$ است، با تغییر متغیرهای $N^T = L^T X_2$ و $M^T = K^T \hat{X}_1$ اثبات کامل می‌شود. □

۶-۴- حل مسأله بهینه سازی محدب برای طراحی واحد کنترل و آشکارساز خطا

هدف اصلی این بخش، طراحی واحد کنترل و آشکارساز خطایی است که بطور همزمان چهار معیار کارایی (۸-۶) تا (۱۱-۶) برآورده شوند. قضایای (۶-۱) تا (۶-۴) هر کدام جداگانه شروط لازم برای حل هر یک از معیارها را بصورت نابرابری ماتریس خطی بیان کردند. با تلفیق این چهار قضیه می‌توان به یک مسأله بهینه سازی چند منظوره رسید که، تمام اهداف مورد نظر در طراحی را پوشش دهد.

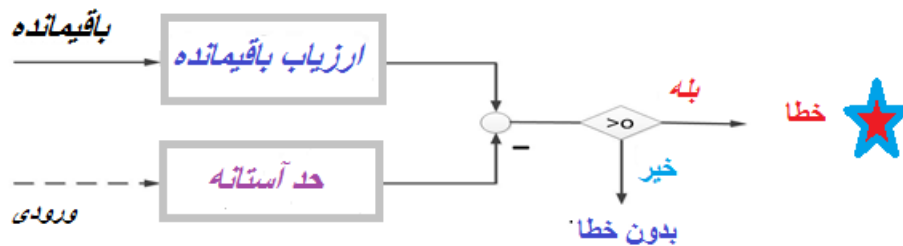
نتیجه ۶-۱: برای γ_1, γ_2 و γ_3 مشخص شده، یک جواب امکان پذیر برای مسأله بهینه سازی چند منظوره H_- / H_∞ به منظور طراحی آشکارساز خطا برای سیستم افزوده (۶-۳)، از حل مسأله بهینه سازی محدب (۶-۴) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \max \quad \beta \\ & X_1, X_2, P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, N, M \\ & s. t \quad (6-12), (6-24), (6-27), (6-30) \end{aligned} \quad (41-6)$$

اثبات نتیجه ۱-۶: این نتیجه از تلفیق قضایای (۱-۶) تا (۴-۶) بسادگی بدست می‌آید. □

۵-۶- ارزیابی سیگنال باقیمانده

گام بعدی بسیار مهم در طراحی واحد آشکارساز خطا، ارزیابی سیگنال باقیمانده است. برای رسیدن به این هدف، یک تابع ارزیابی باقیمانده تعریف شده و مقدار آن با یک حد آستانه ($J_{th} > 0$) مقایسه می‌شود (شکل (۱-۶)).



شکل ۱-۶- ارزیابی سیگنال باقیمانده

تابع ارزیابی باقیمانده نوعاً "میتواند به صورت (۴۲-۶) انتخاب شود.

$$J(t) = \left(\theta^{-1} \int_0^\theta r^T(s)r(s)ds \right)^{1/2} \quad (42-6)$$

که در اینجا θ بازه زمانی آشکارسازی خطا است. برای محاسبه حد آستانه داریم:

$$J_{th} = \sup_{\substack{f(t)=0 \\ d(t) \in L_2}} J(t) \quad (43-6)$$

اگر خروجی تابع ارزیاب باقیمانده ($J(t)$) از حد آستانه (J_{th}) کوچکتر باشد، خطایی در سیستم مشاهده نشده و آلارمی نخواهیم داشت. اما اگر $J(t)$ از J_{th} بزرگتر شود، خطا در سیستم ایجاد شده و آلارمها بصدا در خواهد آمد.

$$\begin{aligned} J(t) &\leq J_{th} \Rightarrow \text{No alarms (No fault)} \\ J(t) &> J_{th} \Rightarrow \text{Alarm (Fault detected)} \end{aligned}$$

۶-۶- شبیه سازی

سیستم (۱-۶) را با مقادیر زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, C = [0.1 \quad 0], E = [0 \quad 0.1], B = [0.2, 0]^T, D = 0, \\ B_d &= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, D_d = D_f = 0.2, F_f = F_d = 0.1, \end{aligned}$$

شکل (۲-۶) مقادیر ویژه سیستم حلقه باز را نشان می‌دهد. با توجه به ناحیه پایداری، این سیستم ناپایدار است. سیگنال اغتشاش خارجی وارد شده به سیستم را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$d(t) = 0.1 \exp(-0.4k) \cos(0.03\pi k) \quad (۴۴-۶)$$

سیگنال خطا، یک پالس با دامنه یک در محدوده زمانی ۴۰ تا ۶۰ ثانیه به سیستم وارد می شود مطابق شکل (۳-۶). با حل مسأله بهینه سازی محدب (۴۱-۶) به کمک فضای شبیه سازی متلب، تجزیه کننده Yalmip و تحلیلگر SDPT3 برای $\alpha = 0.5$, $\lambda = 1$ و $x(0) = [0 \ 0]^T$ مقادیر:

$$\gamma_1 = 1.7017, \gamma_2 = 1.7874, \gamma_3 = 1.1944, \beta = 0.0836$$

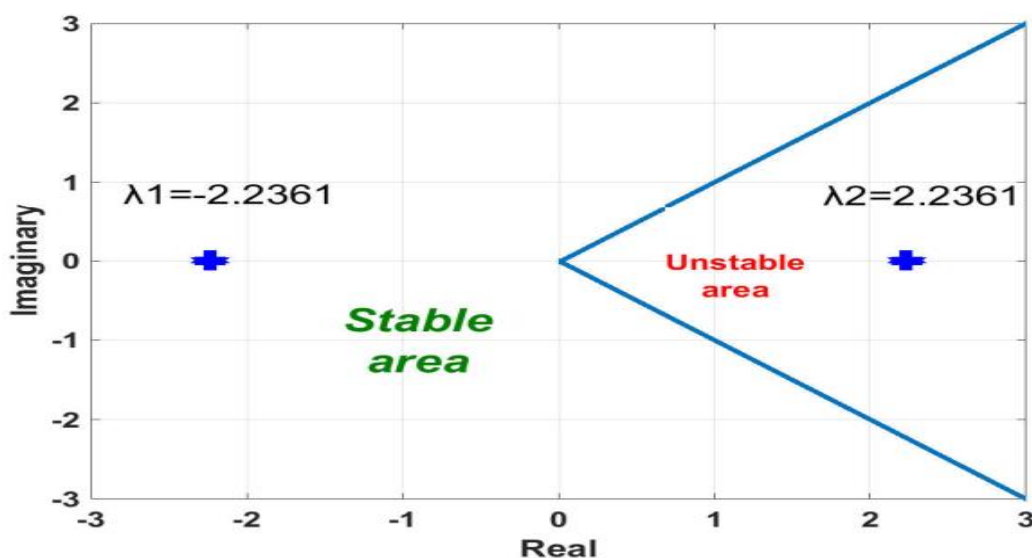
بدست خواهد آمد. بهره کنترلگر و بهره مشاهده گر بدست آمده عبارتند از:

$$L = \begin{bmatrix} 50.1036 \\ 13.6360 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -61.3024 \\ -10 \end{bmatrix}$$

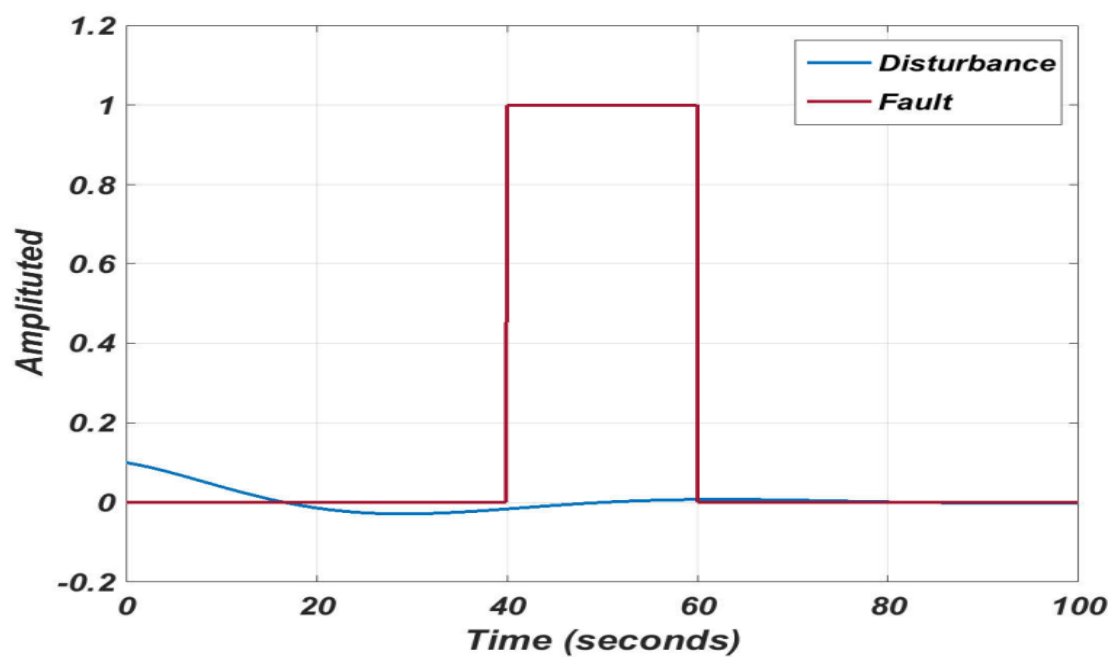
مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته با بهره ی کنترلگر و بهره ی مشاهده گر بالا بصورت زیر خواهد بود.

$$[-7.7635, -0.9987, -5.3648, -0.7668]$$

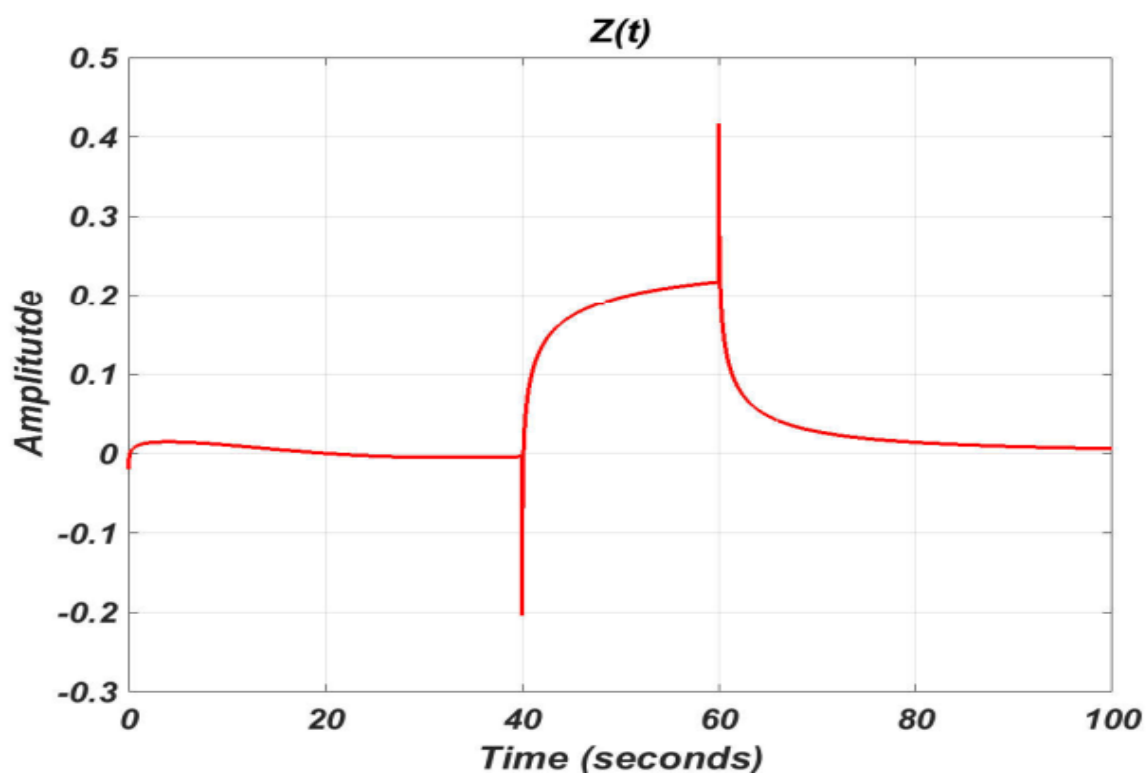
شکلهای (۴-۶) و (۵-۶) بترتیب سیگنال خروجی اندازه گیری شده و سیگنال باقیمانده را نمایش می دهند.



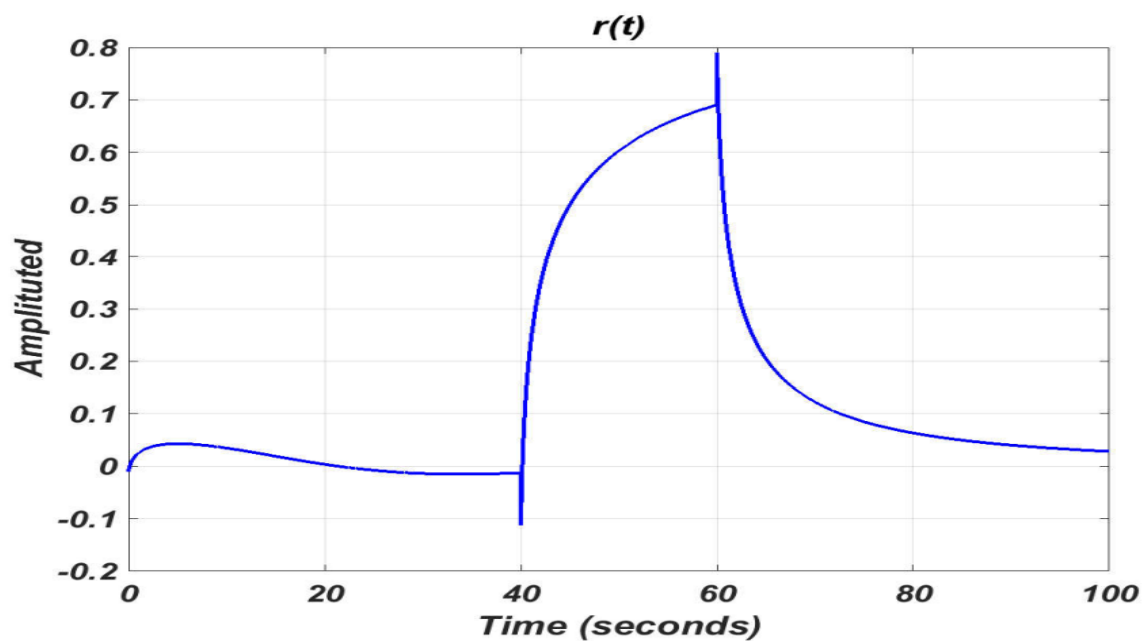
شکل ۲-۶- مقادیر ویژه سیستم حلقه باز



شکل ۳-۶- سیگنال خطا و سیگنال اغتشاش

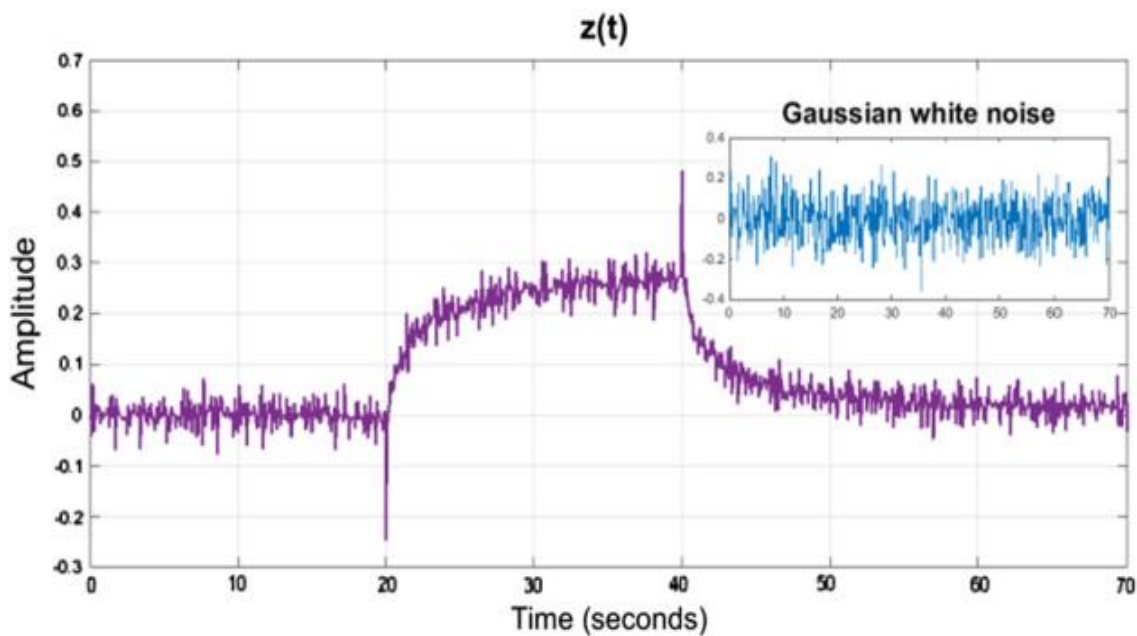


شکل ۴-۶- سیگنال خروجی اندازه گیری شده

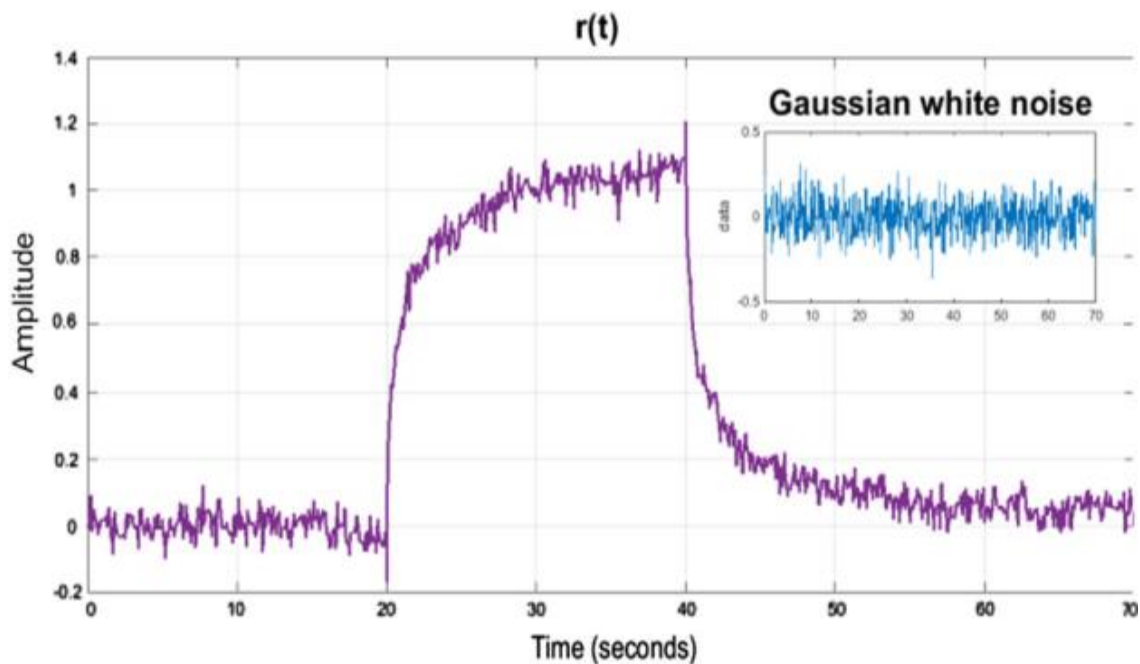


شکل ۶-۵- سیگنال باقیمانده

در ادامه شیه سازی را با جایگزین کردن نویز سفید $d(t) = 0.01w(t)$ بجای اغتشاش انجام می دهیم، جایی که $w(t)$ یک نویز سفید با انرژی محدود است. شکل (۶-۶) و شکل (۷-۶) خروجی اندازه گیری شده و سیگنال باقیمانده را در برابر اثر نویز و خطا بر سیستم نشان می دهد.

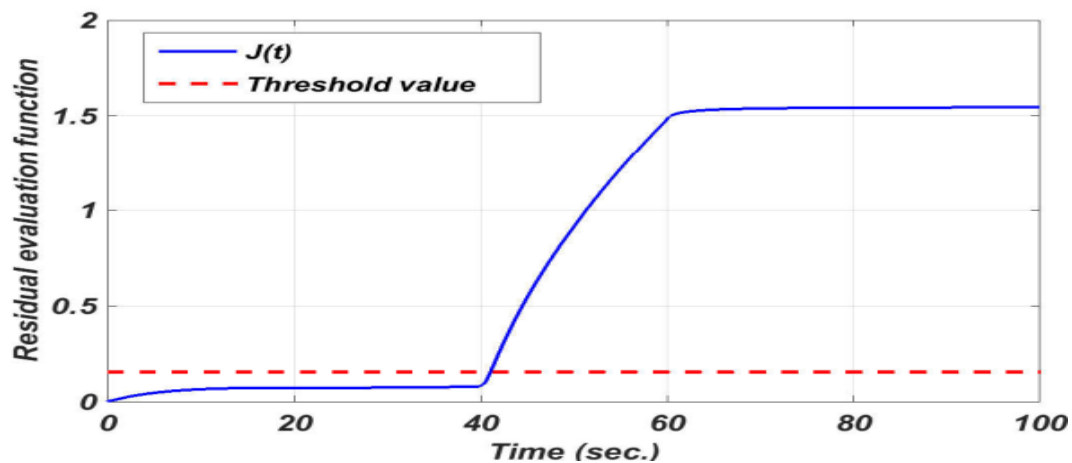


شکل ۶-۶- سگنال خروجی قابل سنجش با اثر نویز و خطا

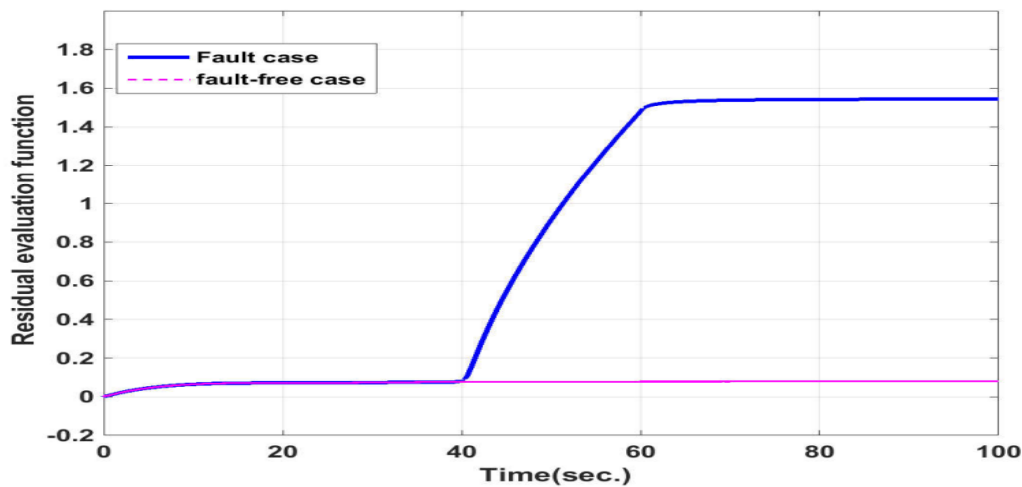


شکل ۶-۷- سیگنال باقیمانده با اثر خطا و نویز

برای دیدن سرعت تشخیص خطا و کیفیت سیستم تشخیص خطا باید در این قسمت از شبیه سازی از رابطه‌ها (۴۲-۶) و (۴۳-۶) کمک بگیریم. شکل (۸-۶) تابع ارزیاب باقیمانده $J(t)$ و حد آستانه تشخیص خطا (J_{thr}) که با استفاده از رابطه (۴۳-۶) مقدار آن $J_{thr} = 0.1517$ بدست آمده است، نشان می‌دهد. کاملاً قابل تشخیص است که بعد از حدود سه ثانیه بعد از وقوع خطا آلارم‌ها بصدا در خواهند آمد. مقایسه بین تابع ارزیاب باقیمانده در سیستم با خطا و بدون خطا در شکل (۹-۶) آورده شده است.



شکل ۶-۸- تابع ارزیاب باقیمانده



شکل ۶-۹- تابع ارزیاب باقیمانده با خطا و بدون خطا

۶-۷- نتیجه گیری

در این فصل با یکی کردن واحدهای کنترل و آشکارسازی خطا واحدی بنام واحد کنترل_آشکارساز خطا طراحی شد. ادغام این دو واحد، گامی بزرگ در کاهش حجم و بزرگی سیستم است. همچنین توانستیم بسیاری از معیارهای کارایی و نیز محدودیت هایی همچون قید بر روی سیگنال کنترل و خروجی را در قالب نامساوی های ماتریسی خطی مطرح کنیم. در نهایت، نتایج بدست آمده برای یک سیستم شبیه سازی شد و نتایج طراحی در نرم افزار متلب مورد بررسی قرار گرفت.

فصل ۷- نتیجه گیری و پیشنهادات

۷-۱- نتیجه گیری

در این رساله، در مرحله اول طراحی آشکارساز خطا برای سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه کسری انجام شده است. سپس در مرحله بعد به طراحی واحد کنترل کننده-آشکارساز خطا برای این سیستم با هدف یکی کردن واحد کنترل کننده و واحد آشکارساز خطا در راستای کاهش پیچیدگی فرآیند طراحی، همچنین کاهش متقابل اثرات نامطلوب احتمالی این دو واحد بر یکدیگر پرداخته شده است. به همین منظور، در فصل اول تاریخچه‌ای از آشکارسازی خطا در سیستم‌ها و بیان اهمیت موضوع، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. انواع خطا، نقد و ارزیابی شیوه‌های نوین در زمینه آشکارسازی خطا و انتخاب روش طراحی، در فصل دوم ارائه شده است. در فصل سوم به معرفی و بررسی سیستم‌های کسری پرداخته شده است. در فصل چهار تعاریف و مقدمات ریاضی برای فهم بهتر مطالب اصلی، ارائه شده است.

در فصل پنجم، برای یک سیستم کسری نامتغیر با زمان خطی، آشکارساز خطا بر اساس روش مبتنی بر مشاهده گر طراحی شده است. به منظور آشکارسازی خطا و بالا بردن حساسیت سیستم نسبت به خطا از رویکرد H_{∞} استفاده شده است. برای مقاوم ساختن سیستم آشکارساز و کاهش اثر اغتشاش و ورودی‌های ناخواسته دیگر بر روی آن، معیار بهینه سازی H_{∞} بکار گرفته شده است. با این تفاسیر، مسأله طراحی آشکارساز خطا در این پژوهش تبدیل به یک مسأله‌ی چند منظوره‌ی H_{∞}/H_{∞} شده است. همچنین نتایج بدست آمده به صورت شرط کافی و در قالب نابرابری ماتریس خطی ارائه گردیده است.

در فصل ششم، به طراحی واحد کنترل کننده-آشکارساز خطا برای یک سیستم مرتبه کسری نامتغیر با زمان خطی در برابر خطاهای سیستمی، خطاهای حسگرها و محرک‌ها یا عملگرها، در حضور ورودی‌های خارجی از جمله نویز و اغتشاش پرداخته شده است. واحد کنترل کننده-آشکارساز بر این اساس که، آشکارساز خطا یک مشاهده گر و کنترل کننده یک کنترل کننده بر پایه مشاهده گر است طراحی شده است. در ادامه با استفاده از معیار ترکیبی H_{∞}/H_{∞} شروط لازم برای حل مسأله با صورت ریاضی بیان می شود. در عین کمینه کردن اثر ورودیهای نامعلوم و نامعینی‌های مدلسازی بر روی سیگنال باقیمانده، بالا بردن حساسیت این سیگنال نسبت به خطا نیز مد نظر بوده است. سپس طراحی کنترل کننده-آشکارساز خطا در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی، برای سیستم مرتبه کسری در حضور اغتشاش ارائه شده است و قیود جدیدی در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی بدست آمده است.

۲-۷- پیشنهادات

برای ادامه‌ی این پژوهش، موارد زیر پیشنهاد می‌شود:

۱-۲-۷ طراحی برای سیستم‌های مرتبه کسری با درجه $1 < \alpha < 2$

آنچه که در این رساله بررسی شد سیستم‌های مرتبه کسری با درجه $0 < \alpha < 1$ بود. با گسترش طراحی برای سیستم مرتبه کسری با درجه $1 < \alpha < 2$ با یک موضوع جدید و جالب روبرو خواهیم شد.

۲-۲-۷ طراحی واحد آشکارساز-کنترل کننده برای سیستم‌های کسری خطی دارای عدم قطعیت

به دست آوردن یک مدل دقیق از سیستم در بسیاری از موارد کار دشواری است. لذا، در مدلسازی از عدم قطعیت استفاده می‌شود. در نظر گرفتن عدم قطعیت در مدل، نیاز به طراحی جدید برای واحد سیستم آشکارساز-کنترل کننده دارد و می‌تواند زمینه‌ی مناسب برای پژوهش جدیدی باشد.

۳-۲-۷ طراحی واحد آشکارساز-کنترل کننده برای سیستم‌های مرتبه کسری تأخیری

به دلیل اینکه بسیاری از پروسه‌ها ذاتاً دارای پدیده تأخیر می‌باشند، بهتر است سیستم‌ها را با در نظر گرفتن تأخیر، برای مدلسازی هر چه دقیقتر مدل کرد تا، هرچه بیشتر رفتاری شبیه به پدیده‌های طبیعی داشته باشند. با توجه به گسترش استفاده از سیستم‌های مرتبه کسری تأخیری، می‌توان طراحی آشکارساز خطا برای این سیستم‌ها را آغاز کرد.

۴-۲-۷ طراحی واحد آشکارساز-کنترل کننده برای سیستم‌های مرتبه کسری گسسته

آشکارساز خطا در سیستم‌های گسسته مرتبه کسری تاکنون استفاده نشده است. با توجه به استفاده فراوان از سیستم‌های گسسته، می‌توان به طراحی آشکارساز خطا در سیستم‌های گسسته پرداخت.

- [1] R. Isermann, Fault-Diagnosis systems, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [2] R.J. Patton, R. Frank, Fault Diagnosis in Dynamic Systems, Theory and Applications. Prentice-Hall, Englewood Cliffs ,1989.
- [3] J. Wünnenberg, P.M. Frank, Sensor Fault Detection via Robust Observers. Springer, 1987.
- [4] X. Ding, P.M. Frank, , Frequency domain approach and threshold selector for robust modelbased fault detection and isolation, In: Proc. of the 1st IFAC Symp. SAFEPROCESS,1991.
- [5] A. Casavola, D. Famularo and G. Franze, "A robust deconvolution scheme for fault detection and isolation of uncertain linear systems: An LMI approach, Automatica," vol. 41, no. 8, pp. 1463–1472, Aug. 2005.
- [6] Z. Mao and B. Jiang, "Fault identification and fault-tolerant control for a class of networked control systems, " Int. J. Innov. Comput., Inf. Control, vol. 3, no. 5, pp. 1121–1130, May 2007.
- [7] S. Simani, C. Fantuzzi and Ron J. Patton, Model-based Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Identification Techniques, Springer-Verl, 2003.
- [8] P. M. Frank, and S. Ding, "Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems, " J. Process Control, vol. 7, no. 6, pp. 403–424, Dec. 1997.
- [9] V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, K. Yin and S.N. Kavuri, "A review of process fault detection and diagnosis part I: quantitative model-based methods, " Computers and Chemical Engineering 27 (3) (2003) 293–311
- [10] Y. Zhang and J. Jiang, "Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems, " Annual Reviews in Control 32 (2) (2008) 229–252
- [11] L.H. Chiang, E. Russell and R.D. Braatz, Fault Detection and Diagnosis in Industrial Systems, Springer Verlag, London, 2001
- [12] Q. Gao, D. Dong, I. R. Petersen andS. X. Ding, " Design of a Discrete-Time Fault-Tolerant Quantum Filter and Fault Detector, " IEEE Transactions on Cybernetics, Volume: 51, Issue: 2, 2021.
- [13] D. Mohapatra, B. Subudhi and R. Daniel, "Real-time sensor fault detection in Tokamak using different machine learning algorithms, " Fusion Engineering and Design, Volume 151, February 2020.
- [14] h. Thakral and D. Bansal, "Novel high functionality fault tolerant ALU," TELKOMNIKA Telecommunication, Computing, Electronics and Control Vol. 18, No. 1, pp. 234-239, February 2020,
- [15] Y. Li and Sh. Zhou, "A New Instantaneous Wavelet Bicoherence for Local Fault Detection of Rotating Machinery, " IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Volume: 69 , Issue: 1 , Jan. 2020.
- [16] Khosrowjerdi, M.J, Nikoukhah, R and Safari-Shad. N, "A mixed H_2/H_∞ approach to simultaneous fault detection and control, " Automatica, 40, pp. 261–267, 2004.
- [17] D. Zhai, J. Dong, et al, "Simultaneous H_2/H_∞ fault detection and control for networked systems with application to forging equipment, " Signal Process., 125, pp. 203–215, 2016.
- [18] X-J. Li and G-H. Yang, "Dynamic observer-based robust control and fault detection for linear systems, " IET Control Theory & Applications , Volume: 6 , Issue: 17 , Nov. 15, 2012.
- [19] Davoodi, M.R., Talebi, H.A., and Momeni, H.R, "A novel simultaneous fault detection and control approach based on dynamic observer, " Int. J. Innov. Comput. Inf. Control, 8, pp. 4915–4930, 2012.
- [20] H. Yang, H. Luo, O. Kaynak and S. Yin, " Adaptive SMO-Based Fault Estimation for Markov Jump Systems With Simultaneous Additive and Multiplicative Actuator Faults, " IEEE Systems Journal, Volume: 15, Issue: 1,2021.
- [21] H. V. Dao ,D. Th. Tran, and K. K. Ahn, "Active Fault Tolerant Control System Design for Hydraulic Manipulator With Internal Leakage Faults Based on Disturbance Observer and Online Adaptive Identification, " IEEE Access, Volume: 9 , 2021.

- [22] Sh. Li, Y. Chen and J. Zhan, "Simultaneous observer-based fault detection and event-triggered consensus control for multi-agent systems," *Journal of the Franklin Institute*, Volume 358, Issue 6, Pages 3276-3301, April 2021.
- [23] Davoodi, M.R., Meskina, N., and Khorasani, Kh, "Simultaneous fault detection and consensus control design for a network of multi-agent systems," *Automatica*, 66, pp. 185–194, 2016.
- [24] L.P. Carvalho, A.M. Deoliveira and O.L.V. Costa, "H₂/H_∞ Simultaneous Fault Detection and Control for Markov Jump Linear Systems with Partial Observation," *IEEE Access*, Page(s): 11979 - 11990, 06 January 2020.
- [25] Soltani, H., Naoui, S., Aitouche, A., et al, "Robust simultaneous fault detection and control approach for time-delay systems," *IFAC*, 48, pp. 1244–1249, 2015.
- [26] Hossein Shokouhi-Nejad, Amir Rikhtehgar Ghiasi and Mohammad Ali Badamchizadeh, "Robust simultaneous finite-time control and fault detection for uncertain linear switched systems with time-varying delay," *IET Control Theory Appl*, Vol. 11 Iss. 7, pp. 1041-1052, 2017.
- [27] M. Hou and R.J. Patton, "An LMI approach to H-/H_∞ fault detection observers," *UKACC International Conference on Control*, Control '96, p. 305 – 310, 1996.
- [28] M. Huang, Y. Deng, H. Li and J. Wang, "Torque Ripple Suppression of PMSM Using Fractional-Order Vector Resonant and Robust Internal Model Control," *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, Volume: 7, Issue: 3, 2021.
- [29] C. Yang, N. Verbeek, F. Xia, Y. Wang and K. Y. Toumi, "Modeling and Control of Piezoelectric Hysteresis: A Polynomial-Based Fractional Order Disturbance Compensation Approach," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Volume: 68, Issue: 4, 2021.
- [30] R. Mondal and J. Dey, "Performance Analysis and Implementation of Fractional Order 2-DOF Control on Cart-Inverted Pendulum System," *IEEE Transactions on Industry Applications*, Volume: 56, Issue: 6, 2020.
- [31] D. Yousri, D. Allam, M. Eteiba, D. Yousri, D. Allam and M. Eteiba, "Parameters Identification of Fractional Order Permanent Magnet Synchronous Motor Models Using Chaotic Meta-Heuristic Algorithms," *Mathematical Techniques of Fractional Order Systems Advances in Nonlinear Dynamics and Chaos (ANDC)*, Pages 529-558, 2018.
- [32] M. Nakagawa and K. Sorimachi, "Basic characteristics of a fractance device," *IEICE Trans, Fundamentals E75-A (12)*, 1814–1819, 1992.
- [33] K.B. Oldham and C.G. Zoski, "Analogue instrumentation for processing polarographic data," *J. Electroanal. Chem.* 157, 27–51, 1983.
- [34] T. Anwar, P. Kumam and Ph, "Thounthong, Fractional Modeling and Exact Solutions to Analyze Thermal Performance of Fe₃O₄-MoS₂-Water Hybrid Nanofluid Flow Over an Inclined Surface With Ramped Heating and Ramped Boundary Motion," *IEEE Access*, Volume: 9, 2021.
- [35] G. Chen and G. Friedman, "An RLC interconnect model based on Fourier analysis," *IEEE Trans. Comput. Aided Des. Integr. Circuits Syst.* 24 (2), 170–183, 2005.
- [36] V.G. Jenson and G.V. Jeffreys, "Mathematical Methods in Chemical Engineering," second ed, Academic Press, New York, 1977.
- [37] M. Yu, et al., "Fractional-order modeling of lithium-ion batteries using additive noise assisted modeling and correlative information criterion," *Journal of Advanced Research*, Volume 25, Pages 49-56, September 2020.
- [38] H. M, R. Xiong, H. Zheng, Y. Chang and Z. Chen, "A novel fractional order model based state-of-charge estimation method for lithium-ion battery," *Applied Energy* Volume 207, Pages 384-393, 2017.
- [39] S. Mohajer, J. Sabatier, P. Lanusse and O. Cois, "A Fractional-Order Electro-Thermal Aging Model for Lifetime Enhancement of Lithium-ion Batteries," *IFAC-PapersOnLine* Volume 51, Issue 2, 2018.
- [40] M. Pan, L. Zheng, F. Liu, C. Liu and X. Chen, "A spatial-fractional thermal transport model for nanofluid in porous media," *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, Volume 53, January 2018, Pages 622-634
- [41] M. Długosz and P. Skrzuch, "The application of fractional-order models for thermal process modelling inside buildings," *Journal of Building Physics*, 2016.
- [42] A. Narang, S.L. Shah and T. Chen, "Continuous-time model identification of fractional-order models with time delays," *IET Control Theory & Applications*, Volume 5, Issue 7, p. 900 – 912, 5 May 2011.
- [43] Wang, H.P. Ghazally, I.Y. Mustafa and Y. Tian, "Model-free fractional-order sliding mode control for an active vehicle suspension system," *Advances in Engineering Software* Volume 115, 452-461, 2018.
- [44] V. Kumar, K. P. S. Rana, J. Kumar and P. Mishra, "Self-tuned robust fractional order fuzzy PD controller for uncertain and nonlinear active suspension system," *Neural Computing and Applications*, Volume 30, Issue 6, pp 1827–1843, 2018.
- [45] A. Oustaloup, "From fractality to non integer derivation through recursivity, a property common to these two concepts: a fundamental idea for a new process control strategy, in: *Proceeding of the 12th IMACS World Congress*, Paris, vol. 3, pp. 203–208, July 1988,

- [46] I. N. Doye, Kh. N. Salama, Taous-Meriem Laleg-Kirati, "Robust fractional-order proportional-integral observer for synchronization of chaotic fractional-order systems," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, Volume: 6, Issue: 1, January 2019.
- [47] M.Jain, A.Rani, N. Pachauri, V.Singh and A. P. Mitta, "Design of fractional order 2-DOF PI controller for real-time control of heat flow experiment," *Engineering Science and Technology, an International Journal* Volume 22, Issue 1, Pages 215-228, February 2019.
- [48] M.Jain, A.Rani, N. Pachauri, V.Singh and A. P. Mitta, "Design of fractional order 2-DOF PI controller for real-time control of heat flow experiment," *Engineering Science and Technology, an International Journal* Volume 22, Issue 1, Pages 215-228, February 2019.
- [49] J. Tian, R. Xiong and Q. Yu, "Fractional-Order Model-Based Incremental Capacity Analysis for Degradation State Recognition of Lithium-Ion Batteries," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Volume: 66, Issue: 2, Feb. 2019.
- [50] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, Chelsea, New York, 1971.
- [51] N. Engheta, "On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism," *IEEE Trans. Antennas Propag.* 44 (4), 554–566, 1996.
- [52] A. Le Mehaute, *Les Geometries Fractales*, Editions Hermes, Paris, France, 1990.
- [53] R. de Levie, *Fractals and rough electrodes*, *J. Electroanal. Chem.* 281-1–21, 1990.
- [54] S. Westerlund, *Dead matter has memory! (capacitor model)*, *Phys. Scrip.* 43 (2), 174–179, 1991.
- [55] V.E. Arkhincheev, *Anomalous diffusion in inhomogeneous media: Some exact results*, *Model. Meas. Contr. A* 26 (2) - 11–29, 1993.
- [56] A.M.A. El-Sayed, *Fractional-order diffusion-wave equation*, *Int. J. Theor. Phys.* 35 (2), 311–322, 1996.
- [57] M. Ichise, Y. Nagayanagi and T. Kojima, "An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode process," *J. Electroanal. Chem.* 33, 253–265, 1971.
- [58] T. Kaplan, L.J. Gray and S.H. Liu, "Self-affine fractal model for a metal-electrolyte interface," *Phys. Rev. B* 35 (10), 5379–5381, 1987.
- [59] K.S. Cole, "Electric conductance of biological systems," in: *Proc. Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol.*, Cold Spring Harbor, New York, pp. 107–116, 1993.
- [60] T.J. Anastasio, *The fractional-order dynamics of brainstem vestibule-oculomotor neurons*, *Biol. Cybern.* 72, 69–79, 1994.
- [61] N. Laskin, *Fractional market dynamics*, *Physica A* 287, 482–492, 2000.
- [62] R.L. Bagley and R.A. Calico, "Fractional order state equations for the control of visco-elastically damped structures," *J. Guidance Control Dyn.* 14, 304–311, 1991.
- [63] Ch. Friedrich and H. Braun, "Linear viscoelastic behavior of complex behavior of complex polymeric materials: a fractional calculus approach," *Acta Polym.* 46, 385–390, 1995.
- [64] Y.A. Rossikhin and M.V. Shitikova, "Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass system," *Acta Mech.* 120, 109–125, 1997.
- [65] R. Hilfer (Ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific Pub Co, Singapore, 2000.
- [66] B. Mandelbrot, J.W. Van Ness, *Fractional brownian motions, fractional noises and applications*, *SIAM Rev.* 10 (4), 422–437, 1968.
- [67] A. Oustaloup, *La Derivation Non Entiere: Theorie, Synthese et Applications*, Editions Hermes, Paris, France, 1995.
- [68] R.Trivedi and P. K.Padhy, "Design of Indirect Fractional Order IMC Controller for Fractional Order Processes," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, Volume: 68, 2021.
- [69] H. Linares, Ch. Baillot, A. Oustaloup and Ch. Ceyral, "Generation of a fractal ground: Application in robotics," in: *International Congress in IEEE-SMC CESA'96 IMACS Multiconf*, Lille, July 1996.
- [70] F.B.M. Duarte and J.A.T. Macado, "Chaotic phenomena and fractional-order dynamics in the trajectory control of redundant manipulators," *Nonlinear Dyn.* 29, 315–342, 2002.
- [71] B. J. Lune, *Three-parameter tunable tilt-integral derivative (TID) controller*, US Patent US5371 670, 1994.
- [72] A. Oustaloup, J. Sabatier and P. Lanusse, "From fractal robustness to CRONE control," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 2, pp. 1-30, 1999.
- [73] A. Oustaloup, X. Moreau, and M. Nouillant, "The CRONE suspension," *Control Engineering Practice*, "vol. 4, pp. 1101-1108, 1996.

- [74] O. Altet, X. Moreau, M. Moze, P. Lanusse, and A. Oustaloup, "Principles and Synthesis of Hydractive CRONE Suspension," *Nonlinear Dynamics*, vol. 38, pp. 435-459, 2004.
- [75] S. E. Hamamci, "An Algorithm for Stabilization of Fractional-Order Time Delay Systems Using Fractional-Order PID Controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, pp. 1964-1969, 2007.
- [76] S. E. Hamamci, "Stabilization using fractional-order PI and PID controllers," *Nonlinear Dynamics*, vol. 51, pp. 329-343, 2008.
- [77] B. M. Vinagre and V. Feliu, "Optimal Fractional Controllers for Rational Order Systems: A Special Case of the Wiener-Hopf Spectral Factorization Method," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, pp. 2385-2389, 2007.
- [78] B. M. Vinagre, I. Petráš, I. Podlubny and Y. Q. Chen, "Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control," *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, pp. 269-279, 2002.
- [79] S. Ladaci and A. Charef, "On fractional adaptive control," *Nonlinear Dynamics*, vol. 43, pp. 365-378, 2006.
- [80] M. S. Tavazoei and M. Haeri, "Chaos control via a simple fractional-order controller," *Physics Letters A*, vol. 372, pp. 798-807, 2008.
- [81] V. Feliu-Batlle, R. R. Perez, and L. S. Rodriguez, "Fractional robust control of main irrigation canals with variable dynamic parameters," *Control Engineering Practice*, vol. 15, pp. 673-686, 2007.
- [82] V. Feliu-Batlle, R. Rivas Pérez, F. J. Castillo García, and L. Sanchez Rodriguez, "Smith predictor based robust fractional order control: Application to water distribution in a main irrigation canal pool," *Journal of Process Control*, vol. 19, pp. 506-519, 2009.
- [83] V. Pommier, R. Musset, P. Lanusse and A. Oustaloup, "Study of two robust controls for a hydraulic actuator," *European Control Conference*, Cambridge, UK, 2003.
- [84] J. Sabatier, S. Poullain, P. Latteux, J. L. Thomas, and A. Oustaloup, "Robust speed control of a Low damped electromechanical system based on CRONE control: application to a four mass experimental test bench," *Nonlinear Dynamics*, vol. 38, pp. 383-400, 2004.
- [85] M. F. Silva, J. A. T. Machado, and A. M. Lopes, "Fractional-order control of a hexapod robot," *Nonlinear Dynamics*, vol. 38, pp. 417-433, 2004.
- [86] A. J. Calderon, B. M. Vinagre, and V. Feliu, "Fractional-order control strategies for power electronic buck converters," *Signal Processing*, vol. 86, pp. 2803-2819, 2006.
- [87] X. Moreau, C. Ramus-Serment, and A. Oustaloup, "Fractional differentiation in passive vibration control," *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, pp. 343-362, 2002.
- [88] M. Aoun, A. aribi, S. Najar and A. N. Rabdelkrim , "On the fractional systems' fault detection : A comparison between fractional and rational residual sensitivity," *8th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices*, 2011.
- [89] A. Aribi , C. Farges, M Aoun ,P. Melchior, S. Najar and M. N. Abdelkrim, "Fault detection based on fractional order models: Application to diagnosis of thermal systems," *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 19, 3679-3693, 2014.
- [90] Boškovic JD, Mehra RK, "Fault Diagnosis and Fault Tolerance for Mechatronic Systems," *Recent Advances, chapter Failure Detecton, Identficaton and Reconfiguraton in Flight Control*. SpringerVerlag, 2002
- [91] H. M. Nahim, R. Younes, H. Shraim and M. Ouladsine, "Oriented review to potential simulator for faults modeling in diesel engine," *Journal of Marine Science and Technology* · December 2015.
- [92] Ron J. Patton, Paul M. Frank and Robert N.Clark , *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems* , London, Springer, 2000.
- [93] Steven X. Ding, *Model-Based Fault Diagnosis Techniques Design Schemes and Algorithms and Tools*, Second Edition , © Springer-Verlag London 2008, 2013.
- [94] E. G. Nobrega, M. o.Abdalla, and K. M. Grigoriadis, "LMI-Based Filter Design for Fault Detection and Isolation," *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control* Sydney, Australia, 2000.
- [95] Liu, J., Wang, J. L., & Yang, G. H. (2003b). "An LMI approach to worst case analysis for fault detection observers," *In Proceedings of the American control conference*, Denver, USA, pp. 2985-2990, 2003.
- [96] A. A. Kilbas, H. M. Sivastava, and J. J. Trujillo, "Theory and applicatons of fractional differential equation," *Amsterdam, Netherlands, Elsevier*, 2006.
- [97] Riemann. B, *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, chapter XIX-Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, Druck und Verlag von B.G. Teubner, pp 331-344, 1876.
- [98] Liouville. J, *Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques*, *J Ecole Polytech* 13, 21,71-162, 2009

- [99] Y. Chen, I. Petráš, and D. Xue, "Fractional Order Control – A Tutorial," presented at the 2009 American Control Conference, St. Louis, MO, USA, 2009.
- [100] R. E. Gutiérrez, J. M. Rosário and J. T. Machado, "Fractional Order Calculus: Basic Concepts and Engineering Applications," *Mathematical Problems in Engineering*, vol 19 p, 2010.
- [101] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, Ch. 1, p.p. 2-13, 1974.
- [102] S. G. Samko and A.A. Kilbas, Marichev, *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, USA : Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [103] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
- [104] Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI (1993) *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. Gordon and Breach Science, Yverdon-les-Bains, 1993.
- [105] A. V. Letnikov, Theory of differentiation of arbitrary order. *Mat Sb* 3:1–68, 1868.
- [106] M. Caputo, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, *Geophys J Roy Astron Soc* 13:529–539, 1967.
- [107] D. Matignon, "Stability results on fractional differential equations with applications to control processing, in: *Proceedings of Computational Engineering in Systems and Application Multiconference*," vol. 2, IMACS, IEEE-SMC, pp. 963_968, 1996.
- [108] W. Deng, C. Li and J. Lu, "Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays," *Nonlinear Dynam.* 48, 409–416, 2007.
- [109] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, H.A.A. El-Saka, Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional order predator–prey and rabies models, *J. Math. Anal. Appl.* 325, 542–553, 2007.
- [110] M. S. Tavazoei, M. Haeri, Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems, *Physica D* 237 2628–2637, 2008.
- [111] M. Aoun, A. Aribi, S. Najar and M. N. Abdelkrim, "On the fractional systems' fault detection A comparison between fractional and rational residual sensitivity," 2011 8th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices, 2011.
- [112] H. Shen¹, X. Song², Z. Wang, "Robust fault-tolerant control of uncertain fractional-order systems against actuator faults," *IET Control Theory Appl*, Vol. 7, Iss. 9, pp. 1233–1241, 2013.
- [113] A. Aribi, et al. "Fault detection based on fractional order models: Application to diagnosis of thermal systems," *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 193679–3693, 2014.
- [114] A.M. Lyapunov, *Probleme general de la stabilite du mouvement*, *Annals of Mathematic Studies*, vol. 17, Princeton University press, 1947.
- [115] A.I. Lur'e, "Some Nonlinear Problems in the Theory of Automatic Control," *H. M. Stationery Off., London*, 1957, Russian, 1951.
- [116] V. A. Yakubovich. "The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory." *Soviet Mathematics*, In Russian, vol. 3, pp. 620-623, 1961.
- [117] G. Zames, "On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Part II: Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, pp. 465-476, 1966.
- [118] I.W. Sandberg, "A frequency-domain condition for the stability of feedback systems containing a single time-varying nonlinear element," *Bell Systems Technology Journal*, vol. 43, no. 3, 1964.
- [119] N. Karmarkar, "A new polynomial-time algorithm for linear programming," *Combinatorica*, vol. 4, no. 4, pp. 373-395, 1984.
- [120] E.S. Pyatnitskii, and V.I. Skorodinskii, "A criterion of absolute stability of non-linear sampled-data control systems in the form of numerical procedures," *Automation and Remote Control*, vol. 47, no. 9, pp. 1190-1198, 1986.
- [121] Y.U. Nesterov, and A. Nemirovskii, *Interior point polynomial methods in convex programming: Theory and Applications*, SIAM, 1993.
- [122] S. Boyd et al., "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory", Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [123] C. Farges, M. Moze and J. Sabatier, "Pseudo state feedback stabilization of commensurate fractional order systems," *Automatica* 46(10):1730–1734, 2010.
- [124] J. Sabatier, M. Moze and C. Farges, "LMI Stability conditions for fractional order systems," *Comput Math Appl* 9:1594–1609, 2010b.

- [125] C. Scherer, and S. Weiland, Linear Matrix Inequalities in Control, November 16, 2004.
- [126] T. Iwasaki, S. Hara, “Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, no. 1, pp. 41–59, 2005
- [127] S. Liang, Y.-H. Wei, J.-W. Pan, Q. Gao, and Y. Wang, Bounded real lemmas for fractional order systems, International Journal of Automation and Computing, Vol.12, No.2, 192-198, 2015
- [128] P. Gahinet and P. Apkarian, “A linear matrix inequality approach to H_∞ control,” Int. J. Robust Nonlinear Control, vol. 4, no. 4, pp. 421_448, 1994.
- [129] L. Liu and X. Liu, Ch. Man, “Delayed observer-based H_∞ control for networked control systems, Neurocomputing,” 179, pp. 101–109, 2016.
- [130] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub and M. Chilali, “The LMI control toolbox,” in Proc. 33rd CDC, vol. 3, Florida, USA, pp. 2038-2041, 1994.
- [131] J. Löfberg, “YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB,” in Proc. CACSD. Conf, Taipei, Taiwan, pp. 284-289, 2004.
- [132] K. C. Toh, M. J. Todd and R. H. Tutuncu, “SDPT3: A MATLAB software for semidefinite quadratic linear programming”, Optimization Methods and Software Volume 11, 1999 - Issue 1-4: Interior Point Methods (CD supplement with software). Guest Editors: Florian Potra, Cornelis Roos and Tamas Terlaky
- [133] Y. Labit, D. Peaucelle, and D. Henrion, “SEDUMI INTERFACE 1.02: a tool for solving LMI problems with SEDUMI,” in Proc. CACSD. Conf, Glasgow, Scotland, pp. 272-277, 2002.
- [134] M. Kočvara and M. Stingl. PENNON—a code for convex nonlinear and semidefinite Programming, Optimization Methods and Software, 8(3):317–333, 2003.
- [135] W. Zhong, J. Lu1, ,Y. Miao, “ Fault detection observer design for fractional-order systems,” 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC), 2017.
- [136] A. Monje, Y.Q.Chen, B. M. Vinagre , D. Xue and V. Feliu, Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications, Library of Congress Control Number: 2010934759, © Springer-Verlag London Limited 2010.
- [137] J. Liu, J.L. Wang and G. H. Yang, “An LMI approach to minimum sensitivity analysis with application to fault detection,” Automatica, 41(11), 1995–2004.

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

Actuator faults	خطا های محرک یا عملگر
Actuators	عملگر
Affine	نمواً خطی
Anomalous diffusion	پدیده واپاشی
Asymptotically stability	پایدار مجانبی
Bilinear Matrix Inequality	نابرابری‌های ماتریسی دوخطی
Bounded-Input Bounded-Output (BIBO)	پایداری ورودی محدود- خروجی محدود
Cepstrum	کپستروم
Commensurate	متناسب
Common parity space	فضای برابری مشترک
Complex plane or z-plane	صفحه مختلط
Convex	محدب
Convex feasibility problem	مسئله امکان پذیری محدب
Convex Hull	پوسته ی محدب
Convex optimization	بهینه سازی محدب
Decision Making	واحد تصمیم گیر
Detection Filter	روش مبتنی بر فضای برابری
Differ-integral	انتگرال متفاوت
Ellipsoid	بیضوی
Failure	خرابی
Failure detection filter	فیلتر تشخیص عیب
Fault	خطا
Fault detection	آشکار سازی خطا
Fault detection	تشخیص خطا
Fault identification	تشخیص خطا
Fault isolation	جداسازی خطا
Fault tolerant control	کنترل تحمل پذیر خطا

Faults	خطاهای سیستمی
Flexibility	انعطاف پذیری
Float	شناور
Fractal interface	رابط فرکتال
Fractional calculus	محاسبات کسری
Frequency domain inequality (FDI)	نابرابری دامنه فرکانس
Geometric multiplicity	تکرر هندسی
Hurwitz	هرویتز
Incommensurate	نامتناسب
Infeasible	غیر ممکن
Interior point method	روش نقطه داخلی
Irrecoverable	غیر قابل جبران
Kalman	کالمن
Kalman-Yakubovich-Popov lemma	کالمن، یاکابوویچ و پوپوف
Karmarkar	کارمارکر
Linear matrix inequality	نابرابری‌های ماتریسی خطی
Linear Programming	برنامه ریزی خطی
Lock- in- place	گیر کردن در یک موقعیت
Los of effectiveness	کاهش کارایی
Lur'e	لور
Lyapunov	لیاپانوف
Nemirovskii	نمیروفسکی
Nestrov	نستروف
Observer	مشاهده گر
Optimization index	شاخص بهینه سازی
Parity Relation based Residual Generator	تولید باقیمانده بر اساس رابطه برابری
Parser	توصیفگر
Polyhedron	چند وجهی
Polytop	چندتایی
Popov	پوپوف
Postnikov	پاستنیکف
Process faults	خطای فرآیند

Pseudo state	شبه حالت
Project lemma	لم تصویرسازی
Reliability	قابلیت اطمینان
Residual evaluation	ارزیاب باقیمانده
Residual Generation	تولید باقیماند
Rod	میله
Scorodinskii	اسکورودینسکی
Second Order Cone Programming	برنامه ریزی مخروطی مرتبه دوم
Semi-Definite Programming	برنامه ریزی نیمه معین
Semi-derivatives	نیمه مشتق‌ها
Semi-integrals	نیمه انتگرال‌ها
Sensor faults	خطاهای حسگر
Simultaneous Fault Detection and Control	کنترل و آشکارسازی خطا به صورت همزمان
Single Input Multi Output(SIMO)	یک ورودی، چند خروجی
Solver	حل کننده
Symmetric	متقارن
Symptotically stability	پایدار مجانبی
The bounded real lemmas corresponding to	لمهای کراندار حقیقی مربوط به
The generalized dynamic parity space method	روش تعمیم یافته فضایی برابری پویا
Thermal engineering	مهندسی حرارتی
Thermal system	سیستم گرمایی
Two rods thermal bench	نیمکت حرارتی دو میله ای
Unknown input decoupling control methods	روشهای کنترل جداسازی ورودی ناشناخته
Yakubovich	یاکوبوویچ

Abstract

In this thesis, we design a new robust fault detection for linear time-invariant fractional-order systems (FOSs) assumed to be affected by sensor, actuator and process faults as well as disturbances. The observer-based method was employed to solve the problem, where the detector is an observer. The problem was transformed into the mixed H_∞/H_- robust optimization problem to make the system disturbance-resistant on one hand and fault-sensitive on the other hand. Then, sufficient conditions were obtained to solve the problem in the LMI mode. Finally, the effectiveness and superiority of the method were demonstrated by simulating the solutions on a single-input multi-output thermal testing bench.

In another part of this thesis we propose the analysis and design scheme of simultaneous fault detection and control (SFDC) for linear continuous-time fractional-order systems (FOSs). In essence, this simultaneous design unifies both the control and the detection modules into a single unit that is called the controller/detector unit. This unit is designed such that it generates two signals, namely the residual and the control signal. The system can be stabilized using the control signal, and the residual signals can be detected fault based on model-based fault detection and isolation (FDI) algorithms. The SFDC module should be designed so that the effects of faults and disturbances on the residual signals are maximized and minimized, respectively. To this end, the SFDC problem is formulated as the mixed H_-/H_∞ optimization problem. Stability and fault detection are both considered through certain performance indices, and new sufficient conditions in the form of linear matrix inequalities (LMIs) are obtained. Finally, some simulation examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed design method.

Keywords: Fault Detection, Norms, Fractional-order systems (FOSs) Linear matrix inequality (LMI), observer, H_∞/H_- robust optimization.



Shahrood University of
Technology

Faculty of Electrical Engineering

Ph.D. Thesis in Electrical Engineering, Control System Theory

Title

Control and Robust Fault Detection for Fractional-Order Systems

By: **Mohammad Azimi**

Supervisor:
Dr. Heydar Toossian Shandiz

January 2022