

صلى الله عليه وسلم



دانشکده مهندسی برق و رباتیک

رساله دکتری مهندسی کنترل

طراحی رؤیتگر برای دسته ای از سیستم‌های خطی تکین نامعین

نگارنده: سید محسن سعید جلالی

استاد راهنما

دکتر علی اکبرزاده کلات

شهریور ۱۳۹۹

شماره: ۱۷۶۵، ۲۰۰۷

تاریخ: ۹۹، ۷، ۲۹

ویرایش: —

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای/خانم سید محسن سعید جلالی دانشجوی دکتری رشته برق - کنترل به شماره

دانشجویی ۹۳۰۰۷۳۵ ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۳ در تاریخ ۱۳۹۹/۰۷/۲۹ از رساله نظری ■ / عملی □ خود با عنوان:

طراحی رهیتر برای دسته ای از سیستم های خطی تکین نامعین

دفاع و با اخذ نمره ۱۸،۹۴ ... به درجه: بسیار خوب نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ □

ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷ ✓

ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵ □

د) درجه قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد □

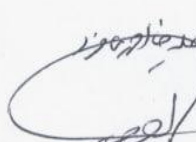
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد □

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
	دکتر دکتر البرز احمدی	استاد/ استادیار	د. (استاد)	
	دکتر	مشاور / مشاورین	—	
	دکتر فاطمه	استاد مدعو داخلی / خارجی	استاد	
	دکتر سید سعید کوهلی	استاد مدعو داخلی / خارجی	استاد	
	دکتر علی رضا الفی	استاد مدعو داخلی / خارجی	استاد	
	دکتر حماد زارعی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	دانشیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای/ خانم

سید محسن سعید جلالی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: 
تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: 

خداوند بزرگ را شاکرم که این اراده و توان را در من قرار داد تا بتوانم این رساله را به سرانجام برسانم و قدردان زحمات

تمام اساتید بزرگوار می باشم که در این دوره افتخار شاگردی آن ها را داشته ام. به طور ویژه از زحمات استاد ارجمندم

جناب آقای دکتر علی اکبر زاده کلات

که در این مدت بدون هیچ چشم داشتی بنده را مورد لطف و عنایت خود قرار دادند و سپاسگزارم.

همچنین از راهنمایی های ارزشمند جناب آقای دکتر محمد مهدی فاتح، جناب آقای دکتر علیرضا الفی و جناب آقای

دکتر سعید توکلی که زحمات و داور می رساله را پذیرفتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم بہ

ہمسرم

دل کرمی زندگی ام، پناہ خستگی ام و امید بودنم

و بہ نیما و کیان عزیز

و تقدیم بہ

روح پدر بزرگوار و مادر مہربانم

تعهدنامه

اینجانب سید محسن سعید جلالی دانشجوی دوره دکتری رشته کنترل دانشکده برق و رباتیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله طراحی رؤیتگر برای دسته ای از سیستم‌های خطی تکین نامعین تحت راهنمایی دکتر علی اکبرزاده کلات متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « *Shahrood University of Technology* » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این رساله، هدف توسعه روش‌های طراحی رؤیتگرهای مقاوم برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین نامعین است. رؤیتگر دینامیکی توسعه‌یافته به گونه‌ای طراحی شده است که بتواند نسبت به رؤیتگرهای تناسبی و تناسبی انتگرالی رفتار مناسب‌تری داشته باشد. همچنین در این روش، عدم قطعیت ساختاری می‌تواند در هر سه ماتریس سیستم یعنی ماتریس مشتق، ماتریس حالت و ماتریس ورودی وجود داشته باشد. نوآوری دیگر این روش، تخمین مشتق متغیرهای حالت سیستم تکین نامعین، علاوه بر خود متغیرهای حالت است. شرط وجود جواب و همگرایی رؤیتگر در حضور و عدم حضور اغتشاش خارجی، با استفاده از روش لیاپانوف و نامعادلات ماتریسی خطی اثبات می‌شود و با حل این نامعادلات، پارامترهای رؤیتگر بدست می‌آید. درنهایت با طراحی یک کنترل‌کننده فیدبک حالت می‌توان حلقه طراحی را برای مجاز شدن سیستم تکین کامل نمود.

کلمات کلیدی: سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین، رؤیتگرهای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین، سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین نامعین، کنترل بر پایه رؤیتگر.

1. S. M. Saeed Jalali, A. Akbarzadeh Kalat, "A Robust State Estimation for a Class of Uncertain Linear Time-invariant Descriptor Systems", *Asian Journal of Control*, vol. xx, pp. xxx-xxx, 2020

۲- س. م. سعید جلالی، ع. اکبرزاده کلات، "طراحی کنترل کننده مقاوم H_∞ بر پایه رؤیتگر
دینامیکی توسعه یافته برای سیستم های تکین نامعین در حضور اغتشاش"، مجله کنترل
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / دوره .. / شماره .. / صفحه ..-، سال ۱۳۹۹

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه

- ۱-۱) مقدمه ----- ۲
- ۲-۱) مروری بر تاریخچه سیستم‌های تکین و رؤیتگرها ----- ۴
- ۳-۱) اهداف رساله ----- ۹
- ۴-۱) ساختار ادامه رساله ----- ۱۰

فصل دوم: مروری بر سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین

- ۱-۲) نمایش سیستم‌ها به صورت تکین ----- ۱۲
- ۲-۲) مثال‌هایی از سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین ----- ۱۵
- ۲-۲-۱) سیستم‌های مقیاس بزرگ با اتصالات داخلی ----- ۱۵
- ۲-۲-۲) یک سیستم هیدرولیک ----- ۱۷
- ۳-۲-۲) مدل تکین یک سیستم الکتریکی: ----- ۲۰
- ۳-۲) اهمیت مدل‌سازی سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین ----- ۲۱
- ۱-۳-۲) مزایای مدل‌سازی تکین ----- ۲۱
- ۱-۳-۲-۱) سادگی مدل‌سازی به روش تکین ----- ۲۱
- ۲-۳-۲-۱) حفظ ماهیت فیزیکی متغیرها ----- ۲۲
- ۳-۳-۲-۱) دسترسی به اطلاعات کامل سیستم ----- ۲۲
- ۴-۳-۲-۱) تسهیل در مسئله شناسایی سیستم ----- ۲۲
- ۲-۳-۲) قابلیت‌های مدل‌سازی تکین ----- ۲۳
- ۱-۲-۳-۲) قابلیت بیشتر نمایش تکین ----- ۲۳
- ۲-۲-۳-۲) مدل کردن رفتار سیستم در مواجهه با شرایط اولیه ناسازگار ----- ۲۴
- ۳-۲-۳-۲) مدل‌سازی و بررسی رفتار سیستم در نقاط تکین ----- ۲۵
- ۴-۲) مفاهیم اساسی در سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین ----- ۲۶
- ۱-۴-۲) منظم بودن ----- ۲۷
- ۲-۴-۲) پایداری سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین ----- ۲۸
- ۳-۴-۲) خاصیت بدون ضربه بودن ----- ۲۹
- ۴-۴-۲) مجاز بودن ----- ۳۰
- ۵-۲) کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری ----- ۳۱

- ۳۱----- ۲-۵-۱) کنترل پذیری
- ۳۲----- ۲-۵-۲) رؤیت پذیری
- ۳۳----- ۲-۵-۱) رؤیت پذیری کامل:
- ۳۳----- ۲-۵-۲) رؤیت پذیری ضربه
- ۳۴----- ۲-۵-۳) پایدارپذیری
- ۳۴----- ۲-۵-۴) آشکارپذیری:

فصل سوم: طراحی رؤیتگر برای سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان تکین

- ۳۶----- ۳-۱) ساختار رؤیتگر تکین
- ۳۷----- ۳-۲) رؤیتگرهای تناسبی
- ۳۸----- ۳-۳) رؤیتگرهای تناسبی-انتگرالی
- ۴۰----- ۳-۴) اهمیت بخش انتگرال گیر در رؤیتگر:
- ۴۲----- ۳-۵) رؤیتگرهای دینامیکی توسعه یافته

فصل چهارم: طراحی رؤیتگر برای سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان تکین نامعین

- ۴۶----- ۴-۱) طراحی رؤیتگر تناسبی مقاوم برای سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان تکین نامعین
- ۴۷----- ۴-۱-۱) فرمول بندی مسئله
- ۴۹----- ۴-۱-۲) طراحی رؤیتگر
- ۵۴----- ۴-۱-۳) محاسبه پارامتری ماتریسهای رؤیتگر
- ۶۲----- ۴-۱-۴) مثال ۴-۱:
- ۶۸----- ۴-۱-۵) مثال ۴-۲:
- ۷۵----- ۴-۱-۶) جمع بندی
- ۷۵----- ۴-۲) طراحی رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته مقاوم برای سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان تکین نامعین در حضور اغتشاش
- ۷۵----- ۴-۲-۱) فرمول بندی مسئله
- ۷۸----- ۴-۲-۲) طراحی رؤیتگر
- ۸۲----- ۴-۲-۳) محاسبه پارامتری ماتریسهای رؤیتگر
- ۹۲----- ۴-۲-۴) مثال ۴-۳:
- ۹۶----- ۴-۲-۵) جمع بندی

فصل پنجم: طراحی کنترلکننده بر پایه رؤیتگر برای سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان تکین

- ۱۰۲----- ۵-۱) طراحی کنترلکننده تناسبی بر پایه رؤیتگر
- ۱۰۲----- ۵-۱-۱) طراحی رؤیتگر

- ۱۰۸----- طراحی کنترل کننده تناسبی بر پایه رُویتگر (۲-۱-۵)
- ۱۱۳----- مثال ۱-۵: (۳-۱-۵)
- ۱۱۵----- جمع بندی (۲-۵)
- ۱۱۶----- طراحی کنترل کننده تناسبی بر پایه رُویتگر (۳-۵)
- ۱۱۶----- بیان مسئله و طراحی رُویتگر: (۱-۳-۵)
- ۱۱۸----- طراحی کنترل کننده تناسبی - مشتقی بر پایه رُویتگر (۲-۳-۵)
- ۱۲۰----- جمع بندی (۳-۳-۵)

فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادات

- ۱۲۲----- نتیجه گیری (۱-۶)
- ۱۲۳----- پیشنهادات (۲-۶)
- ۱۲۶----- منابع

فهرست اشکال

- شکل (۱-۱): ساختار یک رؤیتگر----- ۶
- شکل (۱-۲): مدل تکین یک سیستم هیدرولیک----- ۱۷
- شکل (۲-۲): مدل تکین یک سیستم الکتریکی----- ۲۰
- شکل (۳-۲): ترکیب فیدبک دو سیستم دارای نمایش فضای حالت----- ۲۳
- شکل (۴-۲): ترکیب فیدبک دو سیستم دارای نمایش فضای حالت----- ۲۵
- شکل (۱-۴): مقایسه بین حالت‌های سیستم واقعی، حالت‌های تخمین زده شده توسط رؤیتگر ارائه شده و رؤیتگر تطبیقی مقاوم----- ۶۶
- شکل (۲-۴): مقایسه خطای تخمین بین رؤیتگر طراحی شده و رؤیتگر تطبیقی مقاوم----- ۶۷
- شکل (۳-۴): مدل الکتریکی مثال (۲-۴)----- ۶۹
- شکل (۴-۴): مقایسه بین مقادیر واقعی و تخمین حالت‌های مثال (۲-۴)----- ۷۲
- شکل (۵-۴): خطای تخمین رؤیتگر در مثال (۲-۴)----- ۷۴
- شکل (۶-۴): سیگنال اغتشاش خارجی در مثال (۳-۴)----- ۹۵
- شکل (۷-۴): مقایسه بین حالت‌های واقعی و تخمین آنها توسط GDO ، PO ، PIO و RAD در مثال (۳-۴)----- ۹۸
- شکل (۸-۴): مقایسه بین حالت‌های واقعی و تخمین آنها توسط GDO ، PO ، PIO و RAD در مثال (۳-۴)----- ۹۹
- شکل (۱-۵): حالت‌های سیستم کنترل شده توسط کنترل کننده تناسبی بر پایه رؤیتگر مقاوم که به صفر همگرا می شوند----- ۱۱۵

فهرست جداول

- جدول (۱-۴) ارزیابی خطا در رؤیتگرهای مختلف بر اساس معیار ISE ----- ۹۷

(۱) فصل اول

مقدمه

در تئوری کنترل مدرن، دو روش مدل سازی ریاضی برای روابط دینامیک، مدل ماتریس انتقال^۱ و مدل نمایش فضای حالت^۲ است. نمایش فضای حالت در اواخر سال ۱۹۵۰ و اوایل ۱۹۶۰ ارائه شد. این مدل در مقایسه با روش های موجود در آن زمان قابلیت های بیشتری داشت. توانایی در مدل سازی و تحلیل سیستم های متغیر با زمان و یا سیستم های غیرخطی و همچنین توانایی بررسی شرایط اولیه از مهم ترین برتری های روش مدل سازی فضای حالت در مقایسه با تابع انتقال است. همچنین تابع تبدیل فقط رابطه بین ورودی و خروجی سیستم را می دهد، در صورتی که نمایش فضای حالت اطلاعات کامل تری از جزئیات داخل سیستم را به ما می دهد. برای به دست آوردن مدل فضای حالت از یک سیستم واقعی، باید تعداد کافی از متغیرهای فیزیکی مانند سرعت، وزن، دما و یا شتاب را انتخاب کنیم به طوری که بتواند خصوصیات سیستم را بیان کند. به این متغیرها، متغیرهای حالت گفته می شود و با استفاده از روابط حاکم بر فرآیند و یا با استفاده از روش های مدل سازی، معادلات دینامیکی بین متغیرهای حالت سیستم استخراج می شود. به طور طبیعی این معادلات به صورت دیفرانسیلی و یا جبری هستند که مدل ریاضی سیستم را شکل می دهد. به سیستم هایی که در مدل آن ها معادلات جبری در کنار معادلات دیفرانسیلی به طور هم زمان ظاهر می شود سیستم های دیفرانسیلی - جبری^۳، سیستم های توصیفی^۴ و یا سیستم های تکین^۵ گفته می شود. این مدل نمایش سیستم ها در سال ۱۹۷۷ توسط لونبرگر^۶ مطرح گردید. وجود معادلات جبری برای مدل کردن محدودیت های استاتیکی در سیستم هایی که برخی از خواص فیزیکی آن ها را نمی توان توسط معادلات دینامیکی مرتبه اول مدل کرد، بسیار مفید است. این سیستم ها حالت کلی تری از نمایش فضای حالت سیستم های معمولی را ارائه می کنند [۲-۱]. تفکیک بیان محدودیت های جبری و محدودیت های

¹ Transfer Matrix

² State Space

³ Differential-Algebraic systems (DA)

⁴ Descriptor system

⁵ Singular system

⁶ Luenberger

دینامیکی بین متغیرهای فیزیکی سیستم (متغیرهای حالت سیستم) در بسیاری از سیستم‌ها مانند سیستم‌های مقیاس بزرگ^۱ بسیار مشکل است. همچنین در بسیاری از موارد شرایط خاصی بر سیستم حاکم می‌شود که برخی از معادلات دینامیکی به معادلات جبری تبدیل می‌شوند. به عنوان مثال عملکرد یک بازوی ربات موازی در قالب معادلات دینامیکی مدل می‌شود، ولی در بعضی حالت‌ها و شرایط، سیستم ربات تکین می‌شود و در این شرایط مدل سیستم در قالب معادلات جبری قرار می‌گیرد. به طور کلی مزایای سیستم‌های تکین را می‌توان به این صورت بیان کرد: سادگی مدل‌سازی به روش تکین، حفظ ماهیت فیزیکی متغیرها، دسترسی به اطلاعات کامل سیستم، تسهیل در مسئله شناسایی سیستم. با توجه به این مزیت‌ها کاربرد سیستم‌های توصیفی یا سیستم‌های تکین در تئوری و عمل رو به افزایش است. این نوع سیستم‌های به طور گسترده در فرآیندهای الکتریکی، شیمیایی، معدن، اقتصاد و همچنین در سیستم‌های مقیاس بزرگ مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۱-۳].

می‌دانیم که در طراحی سیستم‌های کنترل، فیدبک حالت بسیار پرکاربرد است [۱۰]. فیدبک حالت ما را قادر می‌سازد که قطب‌های سیستم را در هر مکان دلخواه جابجایی کنیم و به این ترتیب پاسخ حالت سیستم را متناسب با نیاز خود، تنظیم نماییم. البته فیدبک حالت نیاز به این دارد که تمام حالت‌های سیستم در دسترس باشد که متأسفانه همواره چنین نیست و در عمل همه حالت‌ها در دسترس نیستند [۱۲]. بنابراین فیدبک حالت نمی‌تواند مستقیم به کار گرفته شود. در این شرایط دو راه حل وجود دارد؛ اولی استفاده از فیدبک خروجی به جای فیدبک حالت، و دومی تخمین حالت‌های سیستم از روی سیگنال کنترل ورودی $u(t)$ و سیگنال خروجی $y(t)$ و سپس استفاده از آن‌ها در فیدبک حالت است. روش دوم به طور گسترده‌ای در پژوهش‌های مربوط به این موضوع مورد توجه قرار گرفته است و تحقیقات زیادی در تخمین حالت‌های سیستم‌های کنترل خطی معمولی و تکین انجام شده است [۱۳-۱۷].

¹ Large scale systems

تقریباً در تمام موارد مدل سیستم‌های مورد مطالعه با سیستم واقعی متفاوت است. این اختلاف تحت عنوان نامعینی مدل^۱ مورد توجه بسیاری از دانشمندان حوزه کنترل بوده است. تقریب ناشی از پارامترهای سیستم (نامعینی ساختاریافته) و یا دینامیک مدل نشده (نامعینی غیر ساختاریافته) می‌تواند از دلایل اصلی وجود نامعینی‌ها در سیستم‌های کنترل باشند. تحلیل پایداری سیستم‌های مدل شده بدون در نظر گرفتن نامعینی‌ها از واقعیت دور است چون یک سیستم مدل شده که از نظر تئوری پایدار است می‌تواند در عمل به دلیل وجود نامعینی به ناحیه ناپایدار کشیده شده و دچار اختلال شود. از این‌رو تحقیقات گسترده‌ای بر روی روش‌های تحلیل و بررسی سیستم‌های دارای عدم قطعیت انجام شده است.

موارد ذکر شده در بالا هر کدام به تنهایی می‌تواند زمینه یک تحقیق در حوزه مهندسی کنترل باشد و در بسیاری از سیستم‌ها، با همه این موارد به صورت توأم روبه‌رو هستیم [۱۸-۱۹]. در شرایطی که یک سیستم را به صورت تکین مدل کرده باشیم و اجزاء سیستم دارای عدم قطعیت باشند و بخواهیم حالت‌های سیستم را تخمین بزنیم، نیازمند یک روش جامع و سیستماتیک برای این کار هستیم. در این رساله هدف ارائه یک روش برای تخمین حالت‌ها و کنترل یک سیستم تکین دارای عدم قطعیت است. پیش از آن مروری داشته باشیم بر کارهایی که تاکنون در این حوزه انجام شده است.

۲-۱) مروری بر تاریخچه سیستم‌های تکین و رؤیتگرها

تحقیقات روی سیستم‌های تکین از دهه ۱۹۶۰ و اولین بار با مطالعه مدارهای الکتریکی و مدل‌سازی آن‌ها به صورت یک مدل تکین آغاز گردید. اولین کاربردهای آن در حل مسائل اغتشاشات تکین^۲ بود، چون در این مسائل کاهش درجه مدل منجر به ایجاد معادلات جبری-دیفرانسیلی می‌شد. در حل مسائل مذکور تعبیری برای معادلات تکین به صورت "معادلات جبری-دیفرانسیلی برای ساده‌سازی مسائل پیچیده‌تر" ارائه شد.

^۱ Model Uncertainties

^۲ Singular Perturbation

در دهه ۷۰ موضوع معادلات تکین غیرخطی و حل آن مورد توجه پژوهشگران محاسبات عددی و ریاضیات قرار گرفت. روش‌های عددی معادلات مانند فرمول‌های تفاضلی ^۱پسرو^۱ برای حل معادلات تکین تعمیم داده شد و کدهای اولیه رایانه‌ای نوشته شد.

در اواخر دهه ۷۰، تلاش‌های جدیدی در سه شاخه کنترل، روش‌های عددی و علوم ریاضی آغاز گردید و نسل جدیدی از محققین به مطالعه این نوع سیستم‌ها پرداختند و شاخه جدیدی از علم به نام سیستم‌های تکین شکل گرفت و تغییرات بنیادی در نگرش پژوهشگران ایجاد شد که در دهه ۸۰ نیز ادامه پیدا کرد. از محققین مطرح این دوره می‌توان به کمبل^۲ و لونبرگر^۳ اشاره کرد. تحلیل سیستم‌های تکین با استفاده از معکوس درزین^۴ توسط کمبل ارائه شد [۲۰] و سیستم‌های غیرخطی تکین مورد بررسی قرار گرفت. از نظر محققین این دوره، معادلات تکین دیگر ساده‌شده معادلات پیچیده‌تر با حذف نویزها یا دینامیک‌های سریع نبود، بلکه ایده جدیدی شکل گرفت که "معادلات اصلی سیستم‌های واقعی به‌صورت تکین است و مدل فضای حالت معمولی، ساده‌شده مدل تکین سیستم‌ها است".

دهه ۸۰ و ۹۰ دوران شکوفایی سیستم‌های تکین به‌عنوان یک شاخه جدید از علم و پژوهش‌های بنیادی در این حوزه است. معادلات تکین بیشتر موردتوجه علوم مهندسی قرار گرفت و برنامه‌های رایانه‌ای کاربردی برای استفاده مهندسان توسعه پیدا کرد. مسائل کلاسیک کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری برای سیستم‌های تکین توسعه داده شد و هم‌زمان با پیشرفت چشم‌گیر سیستم‌های رایانه‌ای و نرم‌افزاری شبیه‌سازی در این سال‌ها، سیستم‌های پیچیده‌تری با معادلات تکین طراحی، شبیه‌سازی و کنترل شد. بعضی از روش‌های کنترل از قبیل کنترل بهینه، و کنترل سیستم‌های تکین تأخیری در این بازه مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت. یکی از مهم‌ترین مسائلی که در این دوره به آن پرداخته شد موضوع طراحی رؤیتگر حالت برای سیستم‌های خطی غیر متغیر با زمان تکین است.

¹ Backward Differentiation Formulas

² Campbell

³ Luenberger

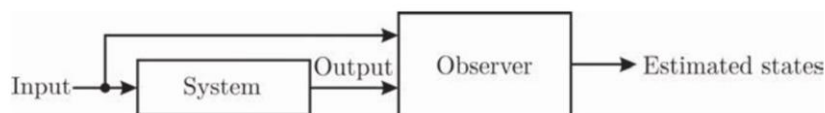
⁴ Drazin Inverse

شکل (۱-۱) ساختار یک رؤیتگر حالت را به صورت کلی نشان می دهد. این رؤیتگر حالت باید دو شرط ضروری زیر را داشته باشد.

الف) ورودی های رؤیتگر باید ورودی کنترلی و خروجی قابل اندازه گیری سیستم باشند.

ب) خروجی رؤیتگر باید به طور مجانبی به حالت های سیستم میل کند. به بیان ریاضی:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0 \quad (۱-۲)$$



شکل (۱-۱): ساختار یک رؤیتگر

مشابه سیستم های معمولی، رؤیتگرهای سیستم های تکین نیز به طور گسترده ای در کاربردهای مهندسی استفاده می شوند. روش های زیادی برای طراحی رؤیتگر برای سیستم های تکین خطی ارائه شده است.

در [۲۰-۲۲] رؤیتگرهای تناسبی^۱ مورد مطالعه قرار گرفته است. رؤیتگر سیستم تکین در دو بخش رؤیتگر سیستم های منظم^۲ [۲۳] و رؤیتگر سیستم های نامنظم^۳ [۲۴-۲۵] مورد مطالعه قرار گرفته اند. انواع مختلفی از رؤیتگرها مانند رؤیتگر لونبرگر [۲۶]، رؤیتگر تکین [۲۷]، در قالب رؤیتگرهای تناسبی ارائه شده اند. از مزیت های رؤیتگرهای تناسبی سادگی و تعداد کم پارامتر برای طراحی است ولی می دانیم که رؤیتگر تناسبی به شدت به عدم قطعیت در پارامترهای سیستم حساس است و خطای حالت مانا در آن ممکن است ایجاد شود [۳].

¹ Proportional observer

² Regular

³ Irregular

اولین رؤیتگر تناسبی - انتگرالی^۱ برای سیستم‌های خطی معمولی یک ورودی و یک خروجی در ۱۹۷۸ ارائه شد و سپس به سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی توسعه پیدا کرد [۱۹]. به دلیل اینکه این نوع رؤیتگر درجه آزادی بیشتری در مقایسه با رؤیتگرهای تناسبی در اختیار طراح قرار می‌داد، در مطالعات زیادی توسط محققان مورد استفاده قرار گرفت. رؤیتگرهای تناسبی - انتگرال باهدف افزایش دقت تخمین در حالت مانا، طراحی شده‌اند که نمونه‌هایی از آن را می‌توان در [۲۸-۳۱] دید. در سال‌های اخیر، دوآن و همکارانش روش طراحی پارامتری رؤیتگر تناسبی - انتگرالی را برای سیستم‌های خطی زمان پیوسته مطرح کردند که درجه آزادی بالاتر و راحتی بیشتری در طراحی سیستم ایجاد می‌کرد [۳۲]. مشابه سیستم‌های معمولی، رؤیتگرهای تناسبی - انتگرالی برای سیستم‌های تکین زمان پیوسته و زمان گسسته نیز توسعه یافته‌اند [۳۳-۳۶]. در [۳۷-۳۸] رؤیتگر لونبرگر با رتبه کامل و رتبه کاهش یافته برای سیستم‌های تکین غیر مربعی با ورودی نامعلوم طراحی و ارائه شد و رؤیتگر با رتبه کامل تناسبی - انتگرالی برای سیستم‌های تکین مربعی در [۳۹] مطرح شد. همچنین طراحی رؤیتگر برای سیستم‌های بدون نامعینی [۴۰] و سیستم‌های دارای نامعینی در [۴۱] دیده می‌شوند.

در [۴۲-۴۳] ساختار جدید رؤیتگر که رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته^۲ نامیده می‌شود برای سیستم‌های تکین خطی ارائه شد که ساختاری باقابلیت انعطاف بیشتر در مقایسه با رؤیتگرهای تناسبی و تناسبی - انتگرالی به ما می‌دهد.

در بسیاری از سیستم‌های عملی و تجربی، تمام ورودی‌های سیستم معلوم نیستند طراحی رؤیتگر برای سیستم‌های معمولی و تکین با ورودی نامعلوم در پژوهش‌های زیادی مانند [۳۷] [۴۲-۴۵]، مورد مطالعه قرار گرفته است. تخمین حالت‌ها با ورودی نامعلوم هنوز هم جزء مسائل سخت و

¹ Proportional- Integral observer

² Generalized Dynamic Observer

دشوار است. این دسته از رؤیتگرها به طور گسترده در حوزه تشخیص خطا مورد استفاده قرار گرفته است [۴۶].

برخی کاربردهای رؤیتگر برای سیستم‌های تکین را می‌توان در [۴۷] مشاهده کرد. در این مقاله مسئله تخمین هم‌زمان ورودی نامعلوم (اغتشاش) و حالت‌ها برای دسته‌ای از سیستم‌های زمان-گسسته غیرخطی ارائه شده است. نویسندگان یک روش طراحی رؤیتگر برای سیستم‌های غیرخطی لپشیتز و زمان گسسته معرفی کرده‌اند که در آن با رعایت فرضیاتی، مسئله تخمین را به یک مسئله تخمین حالت برای یک سیستم متغیر با پارامتر^۱ تبدیل کرده است.

در [۱۴] طراحی رؤیتگر برای سیستم تکین خطی و گسسته با زمان ارائه شد. در این مقاله نویسنده روش خود را به یک سیستم عملی که شامل سه تانک سیال هیدرولیک است اعمال کرده و حالت‌های سیستم را تخمین زده است. در این مقاله همچنین مقایسه‌ای بین مدل معمولی و تکین سیستم تانک هیدرولیک انجام شده و نشان داده شده است که تحلیل این سیستم با یک مدل معمولی با اشکال همراه است و مجبور هستیم از مدل تکین سیستم استفاده کنیم.

در ۱۹۹۳ مولر و هوو [۲۲] اهمیت رؤیت پذیری ضربه را در طراحی رؤیتگر سیستم تکین نشان دادند. [۴۴] طراحی رؤیتگر برای تشخیص و تخمین حالت‌های کانال‌های مخابراتی با ظرفیت محدود را به عنوان یک مدل تکین بررسی کرد.

دسته دیگری از پژوهش‌ها در این حوزه مربوط به سیستم‌های تکینی است که دارای عدم قطعیت هستند. این تحقیقات در دوشاخه انجام شده است. یک شاخه مربوط به سیستم‌های تکین با پارامترهای ثابت نامعلوم که نتیجه آن طراحی رؤیتگرهای تطبیقی است [۴۸] و دیگری مربوط به سیستم‌های تکین با نامعینی که نتیجه آن طراحی رؤیتگرهای مقاوم است.

¹ Linear Parameter-Varying (LPV)

رؤیتگرهای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین به دو شکل تکین و معمولی وجود دارند. در نوع رؤیتگر تکین ساختار رؤیتگر به صورت تکین در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر حالت‌های رؤیتگر به شکل یک معادله دینامیکی و استاتیکی است [۴۹-۵۰]. در رؤیتگرهای معمولی، برای تخمین حالت‌های یک سیستم تکین، ساختار رؤیتگر به صورت معمولی است. این دسته از رؤیتگرها به دلیل کارایی بالاتر، بیشتر مورد مطالعات قرار گرفته است.

۳-۱) اهداف رساله

وجود عدم قطعیت در سیستم‌های واقعی امری طبیعی و اجتناب‌ناپذیر است. زمانی که یک سیستم واقعی مدل‌سازی می‌شود، عدم قطعیت می‌تواند خود را در هر یک از بخش‌های سیستم مدل شده نشان بدهد. در مورد یک سیستم تکین، عدم قطعیت ممکن است در ماتریس مشتق، ماتریس سیستم، ماتریس ورودی و یا ماتریس خروجی ظاهر شود. از لحاظ تئوری این امکان وجود دارد که بتوانیم با انجام عملیات ریاضی عدم قطعیت را به بخش خاصی از سیستم منتقل کنیم. مثلاً با بازنویسی معادلات یک سیستم و تقسیم طرفین معادلات به ضرایب مشتق، ماتریس مشتق سیستم را بدون عدم قطعیت در نظر بگیریم. ولی این یک روش سیستماتیک و منظم نیست و در مورد سیستم‌هایی مقیاس بزرگ تکین که دارای عدم قطعیت هستند این روش عملاً غیرممکن است. در عمده تحقیقات مربوط به رؤیتگرهای سیستم‌های تکین، که در بخش قبلی به آن‌ها اشاره شد، عدم قطعیت فقط در یک یا دو بخش از سیستم وجود دارد. مثلاً در ماتریس سیستم یا ماتریس ورودی که این با واقعیتی که در سیستم‌های عملی وجود دارد دور است.

در این رساله هدف ارائه یک روش برای طراحی رؤیتگرهای سیستم تکین خطی است که عدم قطعیت می‌تواند در هر یک از بخش‌های ماتریس مشتق، ماتریس سیستم و ماتریس ورودی باشد. این کار هم با استفاده از رؤیتگر تناسبی و هم با استفاده از رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته انجام شده است.

همچنین طراحی کنترل کننده بر پایه رؤیتگر در این رساله مورد بررسی قرار گرفته است. در طراحی کنترل کننده هدف مجاز کردن یک سیستم تکین ناپایدار است با استفاده از رؤیتگر و فیدبک حالت.

۴-۱) ساختار ادامه رساله

در این رساله پس از مقدمه، در فصل دوم مروری بر سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین انجام می‌دهیم. مفاهیم اساسی فضای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین مانند کنترل پذیری و رؤیت پذیری را بررسی می‌کنیم و برخی قضایای مهمی که در ادامه مورد نیاز است ارائه می‌شود. در فصل سوم به بررسی انواع رؤیتگرهای سیستم‌های تکین خطی تغییرناپذیر بازمان می‌پردازیم. معرفی رؤیتگر تکین، رؤیتگر تناسبی، رؤیتگر تناسبی-انتگرالی و رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته مطرح و بررسی می‌شود. در فصل چهارم به بررسی طراحی رؤیتگر برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین نامعین می‌پردازیم. دو نوع رؤیتگر تناسبی و رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین دارای عدم قطعیت، در این بخش بررسی می‌شود و با مثال‌هایی روش پیشنهادی در این رساله را با روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم. در فصل پنجم کنترل کننده بر پایه رؤیتگر طراحی می‌شود و در انتها در فصل ششم نتیجه گیری و پیشنهادهایی برای ادامه کار در مراحل بعدی به خوانندگان عزیز داده می‌شود.

(۲) فصل دوم: مروری بر

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر

بازمان تکین

در این فصل هدف بررسی ساختار سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین است. پس از بررسی ساختار نمایش سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین، خواص اصلی این مدل نمایش را بررسی می‌کنیم.

۱-۲) نمایش سیستم‌ها به صورت تکین

در نمایش فضای حالت دودسته معادلات وجود دارد. یک دسته به معادلات حالت معروف هستند که به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۱]

$$f(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) = 0 \quad (۱-۲)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی است و دسته دیگر معادله خروجی است

$$g(x(t), u(t), y(t), t) = 0 \quad (۲-۲)$$

که $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی قابل اندازه‌گیری است. در هر دو معادله بالا f و g توابع برداری هستند. معادلات (۱-۲) و (۲-۲) نمایش فضای حالت برای یک سیستم دینامیک غیرخطی عمومی است. حالت خاصی از معادلات (۱-۲) و (۲-۲) می‌تواند به شکل زیر باشد

$$\begin{cases} E(t)\dot{x}(t) = H(x(t), u(t), t) \\ y(t) = J(x(t), \dot{x}(t), u(t), t) \end{cases} \quad (۳-۲)$$

به طوری که $t \geq t_0$ متغیر زمان است و $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $J \in \mathbb{R}^{p \times n}$ توابعی از $x(t)$ و $u(t)$ هستند. ماتریس $E(t)$ می‌تواند برای بازه‌ای از $t \geq t_0$ ویژه^۱ باشد. معادله (۳-۲) فرم کلی است که سیستم تکین غیرخطی نامیده می‌شود. زمانی که H و J توابع خطی و غیر متغیر بازمان باشند، معادله فوق به شکل زیر کاهش می‌یابد که به آن سیستم تکین خطی غیر متغیر بازمان^۲ گفته می‌شود [۱].

^۱ Singular

^۲ Linear Time-Invariant Singular System

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C_1x(t) + C_2\dot{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad (۴-۲)$$

در معادله بالا ماتریس‌های $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ، $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ و $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ماتریس‌های ثابت هستند که به ماتریس ضرایب نامیده می‌شوند. همان‌طور که از معادله بالا دیده می‌شود معادله خروجی ترکیب خطی متغیرهای حالت و مشتق متغیرهای حالت است. در بسیاری از کاربردهای عملی حالت‌ها و مشتق بعضی از حالت‌ها به‌طور مستقل قابل اندازه‌گیری است [۵۱]. در این صورت شکل خاصی از معادله (۴-۲) به صورت

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y_p(t) = C_px(t) + D_pu(t) \\ y_d(t) = C_d\dot{x}(t) + D_du(t) \end{cases} \quad (۵-۲)$$

خواهد بود. در معادله بالا ، $y_p(t) \in \mathbb{R}^{p_p}$ بردار خروجی تناسبی اندازه‌گیری شده ، $y_d(t) \in \mathbb{R}^{p_d}$ بردار خروجی مشتق و $C_p \in \mathbb{R}^{p_p \times n}$ ، $D_p \in \mathbb{R}^{p_p \times m}$ ، $C_d \in \mathbb{R}^{p_d \times n}$ و $D_d \in \mathbb{R}^{p_d \times m}$ ماتریس‌های ثابت و معلوم هستند است. همچنین سیستم فوق سیستم معمولی نامیده می‌شود اگر ماتریس E مربعی و ناویژه باشد. بخصوص اگر ماتریس E واحد باشد سیستم استاندارد معمولی را خواهیم داشت که به‌طور گسترده در مراجع مربوط به کنترل سیستم‌های خطی مورد بررسی قرار گرفته است. واضح است که هر سیستم معمولی را می‌توان به شکل استاندارد معمولی تبدیل کرد

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \\ y_p(t) = C_px(t) + D_pu(t) \\ y_d(t) = C_d\dot{x}(t) + D_du(t) \end{cases} \quad (۶-۲)$$

برای سیستم تکین (۵-۲) مفهومی به نام درجه دینامیکی تعریف می‌شود که برابر $n_0 = \rho(E)$ است. بدیهی است که برای سیستم معمولی خطی، درجه دینامیکی با رتبه سیستم n برابر است و برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین خطی درجه دینامیکی سیستم کمتر از مرتبه سیستم n است.

زوج ماتریس (E, A) را ماتریس‌های متناظر^۱ با سیستم (۵-۲) می‌گویند و ماتریس چندجمله‌ای متناظر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{(E,A)}(s) = sE - A \quad (۷-۲)$$

زمانی که سیستم تکین خطی (۵-۲) مربعی باشد، معادله

$$\det(sE - A) = 0 \quad (۸-۲)$$

معادله مشخصه سیستم نامیده می‌شود و هر s محدود که در معادله (۸-۲) صدق کند یک قطب محدود^۲ یا یک مقدار ویژه محدود^۳ سیستم، یا زوج ماتریس (E, A) است. مجموعه تمام مقادیر ویژه محدود زوج ماتریس (E, A) به صورت $\sigma(E, A)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(E, A) = \{\lambda | \lambda \in \mathbb{C}, \det(\lambda E - A) = 0\} \quad (۹-۲)$$

بدیهی است که اگر $E = I$ باشد، $\sigma(E, A) = \sigma(I, A)$ خواهد بود که بیانگر مقادیر ویژه A است که به شکل $\sigma(A)$ نمایش داده می‌شود.

در تحلیل سیستم‌ها عملی و طراحی سیستم کنترل، موارد بسیاری وجود دارد که نمایش سیستم در قالب (۵-۲) قرار می‌گیرد و امکان توصیف آن به صورت سیستم معمولی استاندارد وجود ندارد [۵۱]. به همین دلیل تحلیل این دسته از سیستم‌ها در دهه‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این سیستم‌ها به طور گسترده در زمینه‌های شیمی، معدن و سیستم‌های الکتریکی و مکانیکی وجود دارند [۱۶، ۷، ۵].

¹ Matrix pair associated

² Finite pole

³ Finite eigenvalue

۲-۲) مثال‌هایی از سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان تکین

۱-۲-۲) سیستم‌های مقیاس بزرگ با اتصالات داخلی^۱

دسته‌ای از سیستم‌های به هم پیوسته مقیاس بزرگ را با زیرسیستم‌های زیر در نظر بگیرید [۱۰]

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i a_i(t) \\ b_i(t) = C_i x_i(t) + D_i a_i(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (۱۰-۲)$$

به طوری که $x_i(t)$ ، $a_i(t)$ و $b_i(t)$ به ترتیب بردار حالت، ورودی و خروجی، برای زیرسیستم i ام

هستند. با تعریف:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}, a(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{bmatrix}, b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{bmatrix}, \quad (۱۱-۲)$$

و $C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_N)$ ، $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_N)$ ، $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_N)$ و

$D = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_N)$ ، معادله (۱۰-۲) به شکل بسته زیر قابل بازنویسی است.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Ba(t), \\ b(t) = Cx(t) + Da(t), \end{cases} \quad (۱۲-۲)$$

فرض می‌کنیم که ارتباطات داخلی بین زیرسیستم‌ها به صورت خطی و مطابق با الگوی زیر باشد:

$$\begin{cases} a(t) = L_{11}b(t) + L_{12}u(t) + R_{11}a(t) + R_{12}y(t), \\ y(t) = L_{21}b(t) + L_{22}u(t) + R_{21}a(t) + R_{22}y(t), \end{cases} \quad (۱۳-۲)$$

به طوری که $u(t)$ ورودی کلی سیستم مقیاس بزرگ، $y(t)$ خروجی اندازه‌گیری شده کلی سیستم

اصلی و $L_{ij}, R_{ij}, i, j = 1, 2$ ماتریس‌های ثابت هستند. حال با تعریف متغیرهای جدید به صورت:

$$x_e(t) = [x^T(t) \quad a^T(t) \quad b^T(t) \quad y^T(t)]^T, \quad y_e(t) = y(t), \quad (۱۴-۲)$$

معادلات (۱۲-۲) و (۱۳-۲) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

^۱ Large-Scale Systems with Interconnection

$$\begin{cases} E_e \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_e u(t), \\ y_e(t) = C_e x_e(t), \end{cases} \quad (۱۵-۲)$$

که در آن:

$$E_e = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_e = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & -I & 0 \\ 0 & R_{11} - I & L_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{21} & L_{21} & R_{22} - I \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{12} \\ L_{22} \end{bmatrix},$$

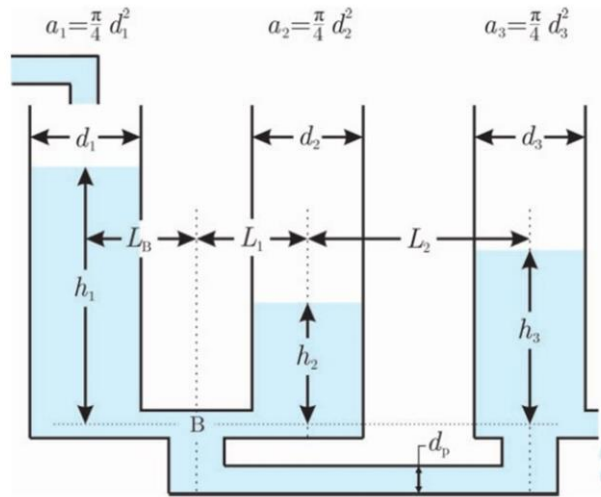
$$C_e = [0 \quad 0 \quad 0 \quad I]$$

است. ملاحظه می‌شود که ماتریس E_e ویژه است و سیستم به فرم معادلات (۵-۲) تبدیل شده است. نکته مهم در این مثال این است که معادلات حاکم بر زیرسیستم‌ها (۲-۱۰) به صورت دینامیک هستند و درواقع هر زیرسیستم به شکل یک سیستم معمولی استاندارد پیاده‌سازی شده است. در مقابل معادلات حاکم بر ارتباطات بین زیرسیستم‌ها (۲-۱۳) هیچ دینامیکی ندارد و فقط توسط معادلات جبری و استاتیکی به دست می‌آید.

اگر این مثال به یک سیستم کوچک با متغیرهای حالت کم اعمال شود، می‌توان از معادلات جبری برخی متغیرهای حالت را برحسب بقیه به دست آورد و در معادلات دینامیک قرارداد و با حذف معادلات جبری، به یک سیستم معمولی استاندارد رسید. ولی در مورد سیستم‌های پیچیده و بزرگ این کار ممکن است امکان‌پذیر نباشد و مجبور به بررسی سیستم به‌طور یکپارچه باشیم که در این حالات روش‌های تحلیل سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین برای بررسی سیستم (۲-۱۵) به کار خواهد آمد. البته لازم به ذکر است که در برخی موارد امکان به دست آمدن بعضی از حالت‌ها از روی بقیه حالت‌ها در معادلات جبری، به دلیل غیرخطی بودن سیستم و یا نداشتن پاسخ صریح غیرممکن باشد که در این شرایط نیز مجبور به بررسی سیستم در قالب یک سیستم دیفرانسیلی-جبری یا تکین خواهیم بود.

۲-۲-۲ یک سیستم هیدرولیک

در این مثال یک سیستم هیدرولیک را مطالعه خواهیم کرد که هدف آن بررسی تغییرات آب داخل سه مخزن است. ورودی آب به مخزن اول می‌ریزد و از مخزن سوم خروجی آب را خواهیم



شکل (۱-۲): مدل تکین یک سیستم هیدرولیک

داشت. شکل (۱-۲) این فرآیند را نشان می‌دهد. فشار کف مخزن ۱، ۲ و ۳ به ترتیب با p_1 ، p_2 و p_3 نمایش داده می‌شود. از انتهای مخزن ۱ به مخزن‌های ۲ و ۳ توسط یک لوله انشعاب در نظر گرفته شده است و فشار داخل این لوله با p_B مدل می‌شود. با استفاده از قانون جریان‌هاگن-پوازی^۱، میزان دبی بین مخزن‌ها و لوله انشعاب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} F_{1B} &= (p_1(t) - p_B(t)) \frac{\pi d_p^4}{128 \eta L_B}, \\ F_{B2} &= (p_B(t) - p_2(t)) \frac{\pi d_p^4}{128 \eta L_1}, \\ F_{B3} &= (p_B(t) - p_3(t)) \frac{\pi d_p^4}{128 \eta L_2}. \end{aligned} \quad (۱۶-۲)$$

^۱ Hagen-Poiseuille

که در آن η ضریب چسبندگی دینامیکی^۱، L_i ($i = 1, 2, B$) طول لوله‌ها و d_p قطر لوله است. تمام محلول خارج شده از مخزن ۱ باید وارد مخزن ۲ و ۳ شود. این محدودیت به صورت زیر نوشته می شود:

$$F_{1B} = F_{B2} + F_{B3}, \quad (۱۷-۲)$$

و فشار در هر یک از مخزن‌ها به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \rho g h_1(t), \\ p_2(t) &= \rho g h_2(t), \\ p_3(t) &= \rho g h_3(t). \end{aligned} \quad (۱۸-۲)$$

به طوری که h_i ($i = 1, 2, 3$) عمق هر یک از مخزن‌ها است، ρ چگالی مایع و g شتاب گرانش زمین است.

میزان ورود و خروج مایع از هر مخزن مستقیماً متناسب است با میزان تغییر ارتفاع مایع در آن. روابط زیر با استفاده تجزیه و تحلیل ذخیره جرم در سیال‌های غیر متراکم به دست می آید:

$$\begin{aligned} a_1 \dot{h}_1(t) &= -F_{1B} + F_{in}, \\ a_2 \dot{h}_2(t) &= F_{B2}, \\ a_3 \dot{h}_3(t) &= F_{B3} - \frac{a_3}{10} h_3(t). \end{aligned} \quad (۱۹-۲)$$

که a_1 ، a_2 و a_3 به ترتیب سطح عبور سیال در مخازن ۱، ۲ و ۳ هستند. F_{in} میزان دبی ورودی به مخزن ۱ است و بخش $\frac{a_3}{10} h_3(t)$ میزان خروجی مخزن ۳ را نمایش می دهد. اکنون با استفاده از معادلات (۱۶-۲) تا (۱۹-۲) نمایش فضای حالت سیستم هیدرولیک شامل سه مخزن با ارتباط داخلی را می توان به شکل زیر نوشت:

¹ Dynamic viscosity

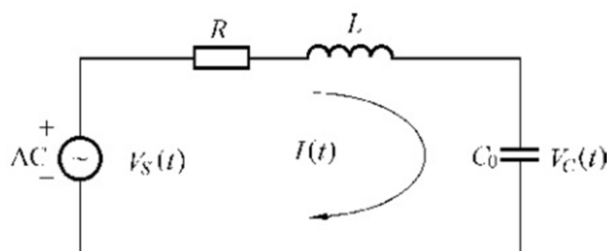
$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \\ \dot{h}_3(t) \\ \dot{p}_B(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \\ \dot{p}_3(t) \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-a_3}{10} & k_3 & 0 & 0 & -k_3 \\ -\rho g & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho g & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho g & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(k_1 + k_2 + k_3) & k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ p_B(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} \quad (20-2) \\
& + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{in}
\end{aligned}$$

که در آن $k_3 = \frac{\pi d_p^4}{128\eta L_2}$ و $k_2 = \frac{\pi d_p^4}{128\eta L_1}$ ، $k_1 = \frac{\pi d_p^4}{128\eta L_B}$ است.

ملاحظه می‌شود که معادله حالت بالا به صورت تکین است زیرا ماتریس E در آن دارای رتبه کامل نیست و یا بردار متغیرهای حالت یک بردار حداقلی نیست و در آن تعداد متغیرهای حالت از درجه دینامیکی سیستم بیشتر است. به عبارت دیگر بردار متغیرهای حالت تمام متغیرهای موردنیاز در تحلیل این فرآیند را شامل می‌شود و قید حداقل بودن تعداد آن که در فضای حالت سیستم‌های معمولی وجود دارد، در اینجا مدنظر نیست. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شده بود، در معادلات بالا می‌توان همه متغیرهای حالت را برحسب ارتفاع مایه درون مخازن نوشت و در این صورت سه معادله دینامیکی اول در (۲۰-۲) به مدل معمولی فضای حالت تبدیل می‌شد و پس از تعیین معادله حالت ارتفاع مخازن، بقیه متغیرهای موردنیاز را به دست آورد. ولی این اقدام نیازمند انجام عملیات دستی و غیر سیستماتیک در مدل‌سازی است که اگر تحلیل به صورت مدل سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین انجام شود نیازی به آن نیست.

۳-۲-۲ مدل تکین یک سیستم الکتریکی:

سیستم ساده الکتریکی شکل (۲-۲) که یک مدار RLC سری را نشان می‌دهد در نظر بگیرید [۱۰].
[۱]. برای این سیستم درجه ۲ در فضای حالت سیستم‌های استاندارد، ۲ متغیر حالت نیاز است که همان



شکل (۲-۲): مدل تکین یک سیستم الکتریکی

جریان حلقه $I(t)$ و ولتاژ خازن $V_C(t)$ است. ولی حالتی را در نظر بگیرید که در این سیستم هم‌زمان علاوه بر این دو متغیر، لازم باشد ولتاژ مقاومت $V_R(t)$ و ولتاژ سلف $V_L(t)$ نیز مورد مطالعه قرار گیرد. مجدداً بدیهی است که از روی دو متغیر $I(t)$ و $V_C(t)$ می‌توان پاسخ بقیه بخش‌های مدار را به دست آورد ولی هدف تحلیل و محاسبه پاسخ در یک مرحله است. معادلات زیر را می‌توان با تحلیل ساده‌ای از مدار به دست آورد:

$$\begin{aligned} L\dot{I}(t) &= V_L(t), \\ \dot{V}_C(t) &= \frac{1}{C_0}I(t), \\ RI(t) &= V_R(t), \\ V_L(t) + V_C(t) + V_R(t) &= V_S(t). \end{aligned} \quad (۲۱-۲)$$

با استفاده از معادلات بالا و همچنین تعریف بردار حالت و ورودی و خروجی به شکل

$$x = \begin{bmatrix} I(t) \\ V_L(t) \\ V_C(t) \\ V_R(t) \end{bmatrix}, \quad u = V_S(t), \quad y = V_C(t)$$

معادلات حالت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_0} & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad (2-22)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]x$$

که مدل نمایش تکین سیستم موردنظر است.

۳-۲ اهمیت مدل سازی سیستم های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین

امروزه علیرغم این حقیقت که مدل فضای حالت ابزاری کارآمد در بررسی سیستم های دینامیکی محسوب می گردد، کاربرد مدل های تکین توسعه قابل توجهی پیدا کرده است. دلیل این امر مزایا و قابلیت هایی است که مختص مدل تکین می باشند. در حقیقت مسائل مختلفی وجود دارد که حل و بررسی آنها با استفاده از مدل فضای حالت ممکن نیست و یا به کارگیری مدل تکین بر استفاده از مدل فضای حالت برتری دارد. در ادامه اشاره ای به مزایا و قابلیت های نمایش تکین و کاستی های نمایش فضای حالت، که انگیزه گروه های مختلفی از محققان در توسعه تئوری تکین گردیده اند، خواهیم داشت.

۳-۲-۱ مزایای مدل سازی تکین

۳-۲-۱-۱ سادگی مدل سازی به روش تکین

از اصلی ترین دلایل استفاده از تئوری تکین سادگی مدل سازی سیستم های دینامیکی مختلف توسط مدل های تکین است. در حقیقت نمایش تکین حاصل مدل سازی طبیعی سیستم است. با استفاده از مدل سازی به روش مدولار می توان برای هر سیستم دینامیکی صرف نظر از ابعاد و پیچیدگی های آن یک مدل تکین به دست آورد. در حالی که برای به دست آوردن نمایش فضای حالت باید معادلات سیستم را بر حسب حداقل تعداد متغیر لازم برای توصیف سیستم تنظیم و تعریف نمود. چه بسا که در مورد بسیاری از سیستم ها استخراج مدل فضای حالت دشوار، غیر عملی و حتی غیر ممکن باشد.

۲-۳-۱) حفظ ماهیت فیزیکی متغیرها

نمایش تکین معمولاً حاصل انتخاب متغیرهای فیزیکی مهم، یعنی متغیرهای که از دید طراح و مهندس سیستم دارای اهمیت و معنای خاصی هستند، به عنوان متغیرهای توصیف کننده سیستم می باشد. لذا با استفاده از نمایش تکین، محقق و طراح سیستم می تواند مطالعات و بررسی های موردنظرش را مستقیماً در قالب متغیرهای فیزیکی معنادار انجام دهد و تمرکز خود را بر روی مسئله مورد مطالعه حفظ کند [۵۲]. درحالی که در صورت استفاده از نمایش فضای حالت، ممکن است متغیرها معنای فیزیکی خود را ازدست داده و بررسی مستقیم تغییرات آنها امکان پذیر نباشد.

۲-۳-۱) دسترسی به اطلاعات کامل سیستم

در مدل تکین، افزون بر معادلات دیفرانسیلی، معادلات جبری نیز ظاهر می شوند که نمایانگر ساختار و قیود حاکم بر سیستم می باشند. در مواردی می توان این قیود را حذف کرد که نتیجه آن به دست آمدن نمایش فضای حالت می شود. لیکن این عمل می تواند منجر به از دست دادن بخشی از اطلاعات سیستم نیز گردد [۵۳-۵۴]. درواقع مدل سازی بخشی از رفتار سیستم که نمایش فضای حالت قابلیت آن را ندارد، در سایه اطلاعاتی است که افزونگی موجود در مدل تکین در اختیار می گذارد.

۲-۳-۱) تسهیل در مسئله شناسایی سیستم

در مسئله شناسایی سیستم، پارامترهای یک مدل از پیش تعیین شده به گونه ای تنظیم می گردند که بر دیتای به دست آمده از سیستم منطبق گردند. تحت شرایط دشوار شناسایی، نیاز است که مدل در نظر گرفته شده آن قدر عمومیت داشته باشد که بتواند تا حدودی نا یقینی در درجه دینامیکی سیستم و یا حتی نا یقینی در الگوی علیت را پوشش دهد. ساختار سیستم های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین غنای لازم برای این هدف را دارا هست درحالی که قالب های متعارف غیر تکین معمولاً چنین غنایی ندارند [۵۵].

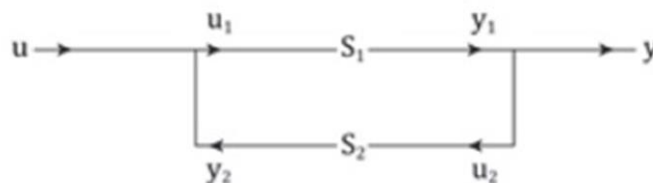
۲-۳-۲) قابلیت‌های مدل‌سازی تکین

در این بخش اشاره کوتاهی به برخی از قابلیت‌های مدل‌سازی تکین در مقابل مدل‌سازی فضای حالت سیستم‌های معمولی شده است.

۱-۲-۳-۲) قابلیت بیشتر نمایش تکین

سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین در توصیف پدیده‌های گوناگون قابلیت بیشتری نسبت به مدل فضای حالت دارند [۵۲]. به عبارت دیگر ممکن است سیستمی قابلیت نمایش در فضای حالت را نداشته باشد ولی می‌توان برای آن یک مدل تکین استخراج کرد. به عنوان مثال اتصال دو زیرسیستم S_1 و S_2 را مطابق شکل (۳-۲) در نظر بگیرید

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - u_1 \\ y_1 = x_1 + u_1 \end{cases}, \quad S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 - u_2 \\ y_2 = u_2 \end{cases}$$



شکل (۳-۲): ترکیب فیدبک دو سیستم دارای نمایش فضای حالت

سیستم حاصل از ترکیب فیدبک نشان داده شده یک مشتق گیر است و مدل آن توسط معادلات فضای حالت قابل نمایش نیست [۵۳]. درحالی که با در نظر گرفتن بردار متغیرهای حالت به صورت $x = [x_1 \quad u_1 \quad x_2 \quad u_2]^T$ می‌توان سیستم را به صورت مدل تکین نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]x$$

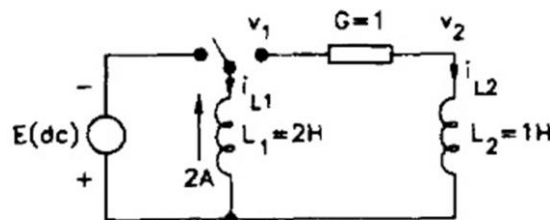
۲-۳-۲) مدل کردن رفتار سیستم در مواجهه با شرایط اولیه ناسازگار

از دیگر مواردی که در آن قابلیت‌های مدل تکین در مقابل عدم کارایی مدل فضای حالت می‌توان به آن اشاره کرد، مدل‌سازی پاسخ سیستم در مواجهه با شرایط اولیه ناسازگار است. مقادیر متغیرها در یک سیستم دینامیکی ممکن است تحت تأثیر عواملی مانند سوئیچ زنی، وقوع عیب، ورودی‌های خارجی و نظایر آن تغییر کرده و مقادیری اتخاذ کند که با ساختار سیستم سازگار نباشد. این مقادیر در لحظه وقوع تغییر، حکم حالت اولیه‌ای را پیدا می‌کند که با شرایط سیستم ناسازگار است. در این‌گونه موارد استفاده از مدل فضای حالت عادی در تحلیل رفتار سیستم مناسب نیست درحالی‌که مدل تکین به‌خوبی می‌تواند رفتار سیستم را در مواجهه با این شرایط توصیف کند. برای روشن شدن مطلب مثالی از [۵۶] آمده است. در مدار شکل (۲-۴) وصل شدن کلید، سلف L_1 با جریان عبوری $i_{L_1}(0) = 2A$ با سلف L_2 با جریان عبوری $i_{L_2}(0) = 0A$ باهم سری می‌شوند. اتصال سری این دو سلف قید $i_{L_1}(t) = -i_{L_2}(2)$ را بر جریان‌ها اعمال می‌کند درحالی‌که مقادیر اولیه جریان‌های در تضاد با این قید است. پاسخ سیستم به این ناسازگاری ایجاد یک تغییر ناگهانی در جریان‌ها و وقوع ضربه در مقادیر ولتاژهای دو سلف در لحظه کلیدزنی ($t = 0$) است و پس‌از آن ($t > 0$) شبکه به تعادل رسیده و رفتار عادی پیدا می‌کند. نمایش فضای حالت سیستم در لحظات پس از کلیدزنی ($t \geq 0$) به‌صورت $i_{L_1}(t) = -\frac{1}{3}i_{L_2}(t)$ هست. توسط این مدل نمی‌توان رفتار سیستم در لحظه سوئیچ ($t = 0$) را مدل نمود. چراکه در لحظه سوئیچ، قید $i_{L_1}(t) = -i_{L_2}(2)$ برقرار نیست ولیکن نمایش فضای حالت سیستم بر مبنای برقراری این قید به دست می‌آید. از سوی دیگر در این مثال مشاهده می‌شود که توسط تئوری تکین می‌توان این سیستم را مدل نمود و با استفاده از مدل تکین حاصل، پاسخ سیستم که دربردارنده ضربه‌ها و عکس‌العمل سیستم به شرایط اولیه ناسازگار است را به‌صورت سیستماتیک به دست آورد. علاوه بر آن به کمک تئوری تکین شرط عدم وقوع ضربه به‌صورت $i_{L_1}(0^-) = -i_{L_2}(0^-)$ به دست می‌آید. درواقع به کمک تئوری تکین می‌توان به‌صورت سیستماتیک، شرایط لازم برای جلوگیری از وقوع ضربه ناشی از شرایط اولیه ناسازگار را نیز به دست

آورد. این قابلیت نیز در زمره مزایا و قابلیت‌های نمایش تکین است که مدل فضای حالت فاقد آن هست. این مزیت به‌طور خاص در سیستم‌های با ابعاد وسیع، مانند شبکه‌های توزیع الکتریکی، می‌تواند بسیار مفید و کاربردی واقع شود.

۳-۲-۳-۲) مدل‌سازی و بررسی رفتار سیستم در نقاط تکین

قابلیت دیگر مدل‌های تکین که در فضای حالت فاقد آن هست، قابلیت مدل‌سازی رفتار سیستم در



شکل (۴-۲): ترکیب فیدبک دو سیستم دارای نمایش فضای حالت

نقاط تکین است. در سیستم‌های تکین نقاطی که در آن نقاط تئوری تابع ضمنی به‌منظور حل قیود جبری سیستم قابل‌اعمال نیست (به دلیل صفر شدن ماتریس ژاکوبین) را اصطلاحاً نقاط تکین می‌گویند. تغییرات پارامترهای سیستم به‌گونه‌ای که معادلات توصیف‌کننده سیستم به یکی از نقاط تکین برسد، می‌تواند منجر به ایجاد پدیده‌ای به نام "بایفورکیشن القاشده توسط سینگولاریتی"^۱ گردد. این پدیده که در شرایط واقعی می‌تواند عامل رفتارهای نامطلوبی در سیستم شود، در سیستم‌هایی مانند سیستم‌های قدرت و سیستم‌های بیولوژیکی و همچنین در رباتیک مورد مطالعه قرار گرفته است. به‌عنوان مثال قرار گرفتن یک ربات موازی در نقطه تکین می‌تواند باعث سوختن موتورهای آن شود چون هر دو موتور دقیقاً در تقابل با یکدیگر نیرو وارد می‌کنند و در نتیجه هیچ جابجایی در ربات اتفاق نمی‌افتد. بررسی و مطالعه این‌گونه سیستم‌های به‌صورت تکین می‌تواند این مشکل را برطرف نماید و زمانی که سیستم در نقاط تکین خود قرار می‌گیرد بر اساس تئوری تکین می‌تواند به کار خود ادامه دهد.

¹ Singularity Induced Bifurcation

در انتها ذکر این نکته ضروری است که در استفاده از مدل تکین، موضوعیت و اعتبار دلیل ذکر شده کاملاً وابسته به شرایط سیستم دینامیکی مورد مطالعه، امکانات در دسترس و هدف نهایی حل مسئله مورد نظر می‌باشد. به بیان روشن‌تر، همان‌گونه که در مدل‌سازی یک سیستم دینامیکی، انتخاب نوع مدل و میزان پیچیدگی آن تابعی از مسئله مورد نظر و ابزار موجود برای تحلیل آن مسئله می‌باشد، در انتخاب میان مدل تکین و نمایش فضای حالت معمول نیز میزان موضوعیت و اهمیت هر یک از دلایل ذکر شده باید با توجه به هدف مسئله سنجیده شود. به عنوان مثال در پایش یک شبکه الکتریکی در شرایط عادی، ممکن است استفاده از مدل فضای حالت با توجه به تئوری توسعه یافته در حوزه فضای حالت و نرم افزارهای موجود در این حوزه، بر استفاده از نمایش تکین سیستم ارجح باشد. لیکن برای بررسی پایداری همان سیستم و تأثیر تغییر پارامترهای سیستم بر پایداری گذرای سیستم، مدل فضای حالت پاسخگو نیازها نباشد. چراکه ممکن است با تغییرات پارامترها، سیستم به نقاط تکین خود برسد و رفتار نامطلوبی از خود نشان دهد. رفتاری که به خوبی توسط مدل تکین قابل مطالعه و بررسی می‌باشد.

البته در کاربرد مدل تکین باید به این نکته نیز توجه داشت که حوزه تئوری تکین در مقایسه با مدل فضای حالت کمتر توسعه یافته است. در واقع در حوزه تئوری تکین مسائل حل نشده بیشتری نسبت به حوزه فضای حالت وجود دارد که این موضوع ناشی از قدمت کمتر تئوری تکین می‌باشد. به همین ترتیب نرم افزارهای کاربردی کمتری نیز در زمینه شبیه سازی و تحلیل و طراحی سیستم‌های تکین موجود است. به عبارت دیگر در مقایسه با نمایش فضای حالت، می‌توان فقدان روش‌های تحلیل و طراحی کافی را نقطه ضعف مدل‌های تکین محسوب کرد [۵۷].

۴-۲) مفاهیم اساسی در سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان تکین

سیستم تکین زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (23-2)$$

به طوری که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار نیمه حالت^۱، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی و $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی قابل اندازه گیری است و ماتریس های $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ حقیقی هستند.

۲-۴-۱) منظم بودن^۲

تعریف [۱]: فرض کنید ماتریس های E و A ماتریس های مربعی باشند. خاصیت منظم بودن در سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان تکین تضمین کننده وجود و یکتایی پاسخ سیستم است. سیستم (۲۳-۲) منظم نامیده می شود اگر ثابت اسکالر $\lambda \in \square$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$\det(\lambda E - A) \neq 0 \quad (24-2)$$

باشد. یا به مفهوم مشابه چندجمله ای $\det(sE - A)$ مخالف صفر باشد که شرط آن کامل بودن رتبه ماتریس $(sE - A)$ است. در این حالت می گوئیم زوج (E, A) و یا ماتریس $(sE - A)$ منظم است.

نکته: در [۵۸] و [۵۹] نشان داده شده است که منظم بودن یک سیستم تکین، شرط ضروری برای طراحی روتگر نیست و به جای خاصیت منظم بودن که در بالا برای سیستم های مربعی تعریف شد می توان شرط $\rho_n[sE - A \quad BU(s) \quad Ex(0)] = \rho_n(\lambda E - A)$ را برای سیستم های مثلثی جایگزین کرد. به طوری که $\rho_n(\lambda E - A)$ رتبه ماتریس $(\lambda E - A)$ به ازای اکثر مقادیر $\lambda \in \square$ تعریف می شود و $U(s)$ تبدیل لاپلاس $u(t)$ است.

¹ Semi-State Vector

² Regularity

۲-۴-۲) پایداری سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان تکین

به‌خوبی می‌دانیم که پایداری از الزامات سیستم‌های کنترلی واقعی است. بنابراین تحلیل پایداری یکی از مهم‌ترین مباحث کنترل و طراحی یک سیستم کنترلی حلقه بسته پایدار از مباحث مهم در طراحی سیستم‌های کنترلی می‌باشد.

در سیستم‌های خطی تکین نیز مانند سیستم‌های خطی معمولی برای تحلیل پایداری شکل همگن معادلات را در نظر می‌گیریم:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2-25)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت و $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس‌های با ضرایب ثابت هستند. برای راحتی فرض می‌کنیم سیستم تکین، منظم باشد چون در این صورت یک پاسخ منحصر به فرد خواهیم داشت.

تعریف [۵۱]: سیستم خطی تکین منظم (۲-۲۳) پایدار است اگر و فقط اگر:

$$\sigma(E, A) \subset \mathbb{C}^- = \{s | s \in \mathbb{C}^-, \operatorname{Re}(s) < 0\}. \quad (2-26)$$

که در آن:

$$\sigma(E, A) = \{s | s \in \mathbb{C}, \det(sE - A) = 0\} \quad (2-27)$$

مجموعه قطب‌های محدود سیستم است.

بر اساس تعریف فوق یک قطب سیستم (۲-۲۵) و یا یک مقدار ویژه زوج ماتریس (E, A) پایدار نامیده می‌شود اگر مقدار حقیقی منفی داشته باشد، پایدار حاشیه‌ای^۱ گفته می‌شود اگر دارای مقدار حقیقی صفر باشد و ناپایدار است اگر دارای مقدار حقیقی مثبت باشد. به همین ترتیب سیستم (۲-۲۵) پایدار، پایدار حاشیه‌ای و یا ناپایدار گفته می‌شود.

¹ Critically Stable

۲-۴-۳) خاصیت بدون ضربه بودن^۱

باید بدانیم که در پاسخ حالت سیستم‌های خطی تکین ممکن است بخش ضربه ظاهر شود. وجود ضربه و یا مشتق آن در سیستم‌های عملی قابل پذیرش نیست چون این رفتارهای ضربه‌ای می‌تواند باعث اشباع شدن و یا حتی آسیب دیدن سیستم شود.

تعریف [۵۱]: اگر پاسخ حالت یک سیستم خطی تکین با ازای هر مقدار اولیه دلخواه، شامل ضربه نباشد با آن سیستم بدون ضربه گفته می‌شود. در ادامه قضیه‌ای آمده است که شرط بدون ضربه بودن در سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان تکین را بیان می‌کند.

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$E\dot{x} = Ax + Bu \quad (2-28)$$

که در آن $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ است. نشان داده می‌شود که ماتریس‌های ناویژه Q, P وجود دارند به گونه‌ای که

$$QEP = \text{diag}(I_{n'_1}, N), \quad QAP = \text{diag}(A_1, I_{n'_2}), \quad QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

و $n'_1 + n'_2 = n$ ، $B_1 \in \mathbb{R}^{n'_1 \times m}$ و $B_2 \in \mathbb{R}^{n'_2 \times m}$ باشد. N ماتریس پوچ توان^۲ از مرتبه h است و به صورت $N^h = 0$ تعریف می‌شود. همچنین $n'_1 = \rho(E)$ تعداد معادلات دیفرانسیلی و n'_2 تعداد معادلات جبری سیستم است. حال با استفاده از ماتریس‌های Q, P می‌توان یک سیستم هم‌ارز^۳ برای سیستم (۲-۲۸) به صورت زیر به دست آورد

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ N \dot{x}_2 = x_2 + B_2 u \end{cases} \quad (2-30)$$

^۱ Impulse-Free Property

^۲ Nilpotent

^۳ Restricted System Equivalence (R.S.E)

که به آن نمایش تجزیه استاندارد^۱ می‌گویند.

قضیه [۱]: سیستم خطی منظم تکین (۲-۲۸) یا (۲-۳۰) بدون ضربه است اگر و فقط اگر هر کدام

از شرایط زیر برقرار باشد:

الف) ماتریس پوچ توان در معادله (۲-۳۰) صفر باشد. ($N = 0$)

ب) اگر $\deg \det(sE - A) = \rho(E)$ که در آن $\rho[*]$ نمایانگر رتبه ماتریس است.

ج) سیستم به تعداد $\rho(E)$ قطب محدود داشته باشد.

د) $\rho \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} = n + \rho(E)$ (اثبات در [51]).

۲-۴-۴ مجاز بودن^۲

در سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین مفهومی خاص‌تر از مفهوم پایداری به نام مجاز بودن

وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف [۱]: زوج (E, A) مجاز است اگر سه شرط منظم بودن، بدون ضربه و پایدار بودن را

هم‌زمان داشته باشد. لم زیر می‌تواند مجاز بودن یک سیستم را به مفهوم دیگری به ما نشان دهد.

لم [۴۸]: سیستم (۲-۲۳) و یا زوج (E, A) مجاز است اگر و تنها اگر ماتریس ناویژه Θ وجود

داشته باشد به گونه‌ای که

$$E^T \Theta = \Theta E^T \geq 0 \text{ and } A^T \Theta + \Theta^T A < 0 \quad (۲-۳۱)$$

باشد.

¹ Standard Decomposition Form

² Admissibility

۵-۲) کنترل پذیری و رؤیت پذیری

۱-۵-۲) کنترل پذیری

برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین مفاهیم کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری کامل‌تر و جامع‌تر نسبت به سیستم‌های معمولی بررسی می‌شود. در [۵۱] چهار مفهوم کنترل‌پذیری کامل^۱، کنترل‌پذیری در دسترس^۲، کنترل‌پذیری ضربه^۳ و کنترل‌پذیری قوی^۴ را برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین ارائه کرده است. در ادامه به تعریف کنترل‌پذیری کامل خواهیم پرداخت و برای آشنایی با دیگر مفاهیم می‌توان به مرجع اصلی مراجعه کرد.

تعریف [۱]: سیستم کنترل خطی منظم تکین (۳۰-۲) کنترل‌پذیر کامل گفته می‌شود اگر برای هر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و $t_1 > 0$ و $w \in \mathbb{R}^n$ سیگنال کنترلی $u(t)$ عضو مجموعه تمام توابع پیوسته-تکه ای که تا مرتبه $h-1$ مشتق‌پذیر است، وجود داشته باشد به‌طوری‌که پاسخ سیستم (۳۰-۲) با شرایط اولیه $x(0) = x_0$ در رابطه $x(t_1, u, x_0) = w$ صدق کند.

این تعریف بیان می‌کند که تحت کنترل‌پذیری کامل، برای هر شرط اولیه دلخواه $x(0) = x_0$ همواره می‌توانیم یک سیگنال کنترلی پیدا کنیم که حالت‌های سیستم در زمان محدود از $x(0)$ به هر مقدار دلخواه در فضای $\mathbb{R}^n$ جابجا شوند.

سیستم (۳۰-۲) کنترل‌پذیر خواهد بود اگر قطب‌های آن به‌طور دلخواه تحت فیدبک حالت قابل جابجایی باشد. همچنین اثبات می‌شود که سیستم (۲۳-۲) کنترل‌پذیر است اگر داشته باشیم:

$$\rho[sE - A \quad B] = n, \quad \forall s \in \mathbb{R}, s \neq \infty \quad (۳۲-۲)$$

¹ Complete-controllability

² Reachable-controllability

³ Impulse-controllability

⁴ Strongly-controllability

۲-۵-۲) رؤیت پذیری

رؤیت پذیری نیز مانند کنترل پذیری در سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان تکین مفاهیم کامل‌تری دارد و مشابه قبل، چهار نوع رؤیت پذیری تعریف می‌شود. در این بخش به دو مورد رؤیت پذیری کامل^۱ و رؤیت پذیر ضربه^۲ که در مباحث مربوط به طراحی رؤیت‌گرها اهمیت دارند خواهیم پرداخت.

سیستم تکین و منظم زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (۳۳-۲)$$

این سیستم را می‌توان تحت تبدیلات همانندی توسط دو ماتریس ناویژه (P, Q) به دو زیرسیستم زیر تبدیل کرد.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \quad (۳۴-۲)$$

و

$$\begin{cases} N\dot{x}_2 = x_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases} \quad (۳۵-۲)$$

به طوری که $y = Cx = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 x_1 + C_2 x_2 = y_1 + y_2$ و

$$P^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, QEP = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, QAP = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, CP = [C_1 \ C_2] \quad (۳۶-۲)$$

به (۳۴-۲) زیرسیستم کند و به (۳۵-۲) زیرسیستم تند یا سریع گفته می‌شود.

^۱ Completely-Observability

^۲ Impulse-Observability

۲-۵-۲) رؤیت پذیری کامل:

تعریف [۱]: سیستم تکین و منظم (۳۳-۲) رؤیت پذیر کامل گفته می شود اگر شرط اولیه $x(0)$ بتواند به طور منحصر به فردی توسط اطلاعات خروجی $y(t), 0 \leq t < \infty$ از سیستم، قابل به دست آمدن باشد.

قضیه [۱]: سیستم تکین منظم (۳۳-۲) با زیرسیستم کند (۳۴-۲) و زیرسیستم سریع (۳۵-۲) را در نظر بگیرید. داریم:

الف) زیرسیستم کند (۳۴-۲) رؤیت پذیر کامل است اگر و تنها اگر:

$$\rho \left[\frac{sE - A}{C} \right] = n, \quad \forall s \in \mathbb{R}, s \neq \infty. \quad (۳۷-۲)$$

ب) زیرسیستم سریع (۳۵-۲) رؤیت پذیر کامل است اگر و تنها اگر:

$$\rho \left[\frac{E}{C} \right] = n \quad (۳۸-۲)$$

ج) سیستم (۳۳-۲) رؤیت پذیر کامل است اگر و تنها اگر شرایط (۳۷-۲) و (۳۸-۲) با هم وجود داشته باشند.

۲-۵-۲) رؤیت پذیری ضربه

تعریف [۱]: سیستم تکین و منظم (۳۳-۲) با زیرسیستم کند (۳۴-۲) و زیرسیستم سریع (۳۵-۲) رؤیت پذیر ضربه گفته می شود اگر بتوان از شرط $y_2(0) = 0$ نتیجه گرفت که $x_2(0) = 0$. رؤیت پذیری ضربه تضمین کننده این است که رفتاری ضربه ای در $x(t)$ به طور منحصر به فردی توسط اطلاعات رفتار ضربه ای در خروجی سیستم قابل به دست آمدن است. رؤیت پذیری کامل یک سیستم تکین روی بخش های با دامنه محدود پاسخ حالت بیان می شود در حالی که رؤیت پذیری ضربه روی بخش های ضربه که دارای دامنه نامحدود در پاسخ حالت هستند تمرکز می کند. لازم به ذکر است که برای سیستم های معمولی کنترل/رؤیت پذیری ضربه تعریف نمی شود.

قضیه [۱]: سیستم تکین منظم (۳۳-۲) رؤیت پذیر ضربه است اگر و فقط اگر:

$$\rho \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \rho(E) \quad (۳۹-۲)$$

۳-۵-۲ پایدارپذیری^۱

تعریف [۱]: سیستم (۲۳-۲) پایدار پذیر است اگر کنترل کننده فیدبک حالت $u(t) = Kx +$

$v(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $v(t)$ وجود داشته باشد تا سیستم حلقه بسته پایدار شود. بدیهی است

که اگر سیستم (۲۳-۲) پایدار باشد، پایدار پذیر نیز هست.

سیستم تکین منظم (۲۳-۲) پایدار پذیر است اگر و تنها اگر:

$$\rho[sE - A \quad B] = n, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+, s \neq \infty. \quad (۴۰-۲)$$

۴-۵-۲ آشکارپذیری^۲

آشکارپذیری مفهوم دوگان پایدار پذیری است. به عبارت دیگر سیستم (۲۳-۲) آشکار پذیر است اگر

سیستم دوگان آن یعنی (E^T, A^T, C^T, B^T) پایدار پذیر باشد.

تعریف [۱]: سیستم تکین منظم (۲۳-۲) آشکاری پذیر است اگر و تنها اگر:

$$\rho \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+, s \neq \infty \quad (۴۱-۲)$$

¹ Stabilizability

² Detectability

۳) فصل سوم:

طراحی رؤیتگر برای سیستم‌های

خطی تغییرناپذیر با زمان تکین

در این بخش ابتدا مروری بر رؤیتگرهای طراحی شده برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان تکین بدون نامعینی اشاره خواهیم کرد. پرکاربردترین آن‌ها مانند رؤیتگرهای تناسبی و تناسبی-انتگرالی را بررسی می‌کنیم و دلیل استفاده از بخش انتگرال گیر در رؤیتگرهای تناسبی-انتگرالی را خواهیم دید. همچنین توسعه این نوع رؤیتگرها به رؤیتگر دینامیکی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱-۳ ساختار رؤیتگر تکین

رؤیتگرهای حالت توصیفی^۱ یا تکین عموماً از اجزاء سیستم تشکیل می‌شوند با اضافه بخش‌هایی که تضمین کند که حالت‌های تخمین زده شده به حالت‌های واقعی همگرا شوند. به‌طور خاص یک‌ترم افزوده شده، اختلاف بین خروجی سیستم و خروجی رؤیتگر است که در یک ماتریس ضرب می‌شود [۵۱، ۵].

سیستم تکین زیر را در نظر بگیرید [۱۰]:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (۱-۳)$$

به‌طوری‌که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار نیمه حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی و $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی قابل اندازه‌گیری است و ماتریس‌های $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ حقیقی هستند. فرض می‌کنیم سیستم (۱-۳) منظم باشد و $\rho(E) < n$.

اگر سیستم (۱-۳) آشکار پذیر باشد، رؤیتگر زیر را داریم:

$$\begin{cases} E\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + G(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (۲-۳)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0 \quad \text{که}$$

اگر $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ خطای تخمین بین حالت‌های واقعی و حالت‌های تخمین زده شده

باشد، خواهیم داشت:

^۱ Descriptor State Observers

$$E\dot{e}(t) = (A - GC)e(t) \quad (3-3)$$

اگر $\rho(E) < n$ باشد، به (3-3) رؤیتگر حالت تکین گفته می‌شود و اگر $\rho(E) = n$ باشد، به آن رؤیتگر لوونبرگر^۱ می‌گویند.

۲-۳) رؤیتگرهای تناسبی

رؤیتگرهای تناسبی که شبیه رؤیتگر لوونبرگر است در مقالاتی مانند [۵، ۱۴، ۴۵] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در [۵۸] یک الگوریتم طراحی رؤیتگر تناسبی برای سیستم تکین ارائه شده است. این روش بر پایه تعریف جدیدی از رؤیت پذیری ضربه جزئی^۲ است.

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ Z(t) = Lx(t) \end{cases} \quad (4-3)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار نیمه حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی و $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی و $Z(t) \in \mathbb{R}^{p_L}$ برداری است که باید تخمین زده شود. $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ و $L \in \mathbb{R}^{p_L \times n}$ ماتریس‌های با ضرائب ثابت هستند.

تعریف: سیستم (4-3) با $u(t) = 0$ یا سه‌تایی (A, B, C) رؤیت پذیر ضربه جزئی برحسب L گفته می‌شود اگر و فقط اگر به ازای بدون ضربه بودن $Lx(t)$ در $t \geq 0$ ، $y(t)$ در $t \geq 0$ بدون ضربه باشد.

رؤیتگر با مرتبه کاهش یافته^۳ برای سیستم (4-3) به صورت زیر است:

¹ Luenberger Observer

² Partial Impulse Observability

³ Reduced order observer

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = N\xi(t) + F \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Hu(t) \\ \hat{Z}(t) = P\xi(t) + Q \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-3)$$

به طوری که $\xi(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$ حالت های رؤیتگر، $\hat{Z}(t) \in \mathbb{R}^{p_L}$ تخمین $Z(t)$ و $E^\perp E = 0$ است. حال

شرایط زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} i) \quad NTE - TA + F \begin{bmatrix} E^\perp A \\ C \end{bmatrix} &= 0 \\ ii) \quad [P \quad Q] \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} &= L \\ iii) \quad H &= TB \end{aligned} \quad (6-3)$$

ماتریس $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$ وجود دارد به طوری که $\varepsilon(t) = \xi(t) - TEx(t)$ که با مشتق گیری از آن و

معادله اول (5-3) داریم:

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + \left(NTE - TA + F \begin{bmatrix} E^\perp A \\ C \end{bmatrix} \right) x(t) + (H - TB)u(t) \quad (7-3)$$

و با به کارگیری معادله دوم (5-3) داریم:

$$Z(t) = P\varepsilon(t) + [P \quad Q] \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} x(t) \quad (8-3)$$

اگر شرایط (i) - (iii) معادله (6-3) برقرار باشند و N ماتریس پایدار باشد، آنگاه برای هر شرط

اولیه ای $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{Z}(t) - Z(t)) = 0$ خواهد بود. ماتریس های رؤیتگر که عبارت اند از P, H, F, N

و Q ، توسط معادلات سیلویستر (i) - (iii) به دست می آیند. بنابراین مسئله طراحی رؤیتگر به حل

معادله سیلویستر و پیدا کردن ماتریس های رؤیتگر کاهش می یابد.

۳-۳ رؤیتگرهای تناسبی - انتگرالی

اشکال رؤیتگرهای تناسبی عدم توانایی در صفر کردن خطای تخمین است. در رؤیتگرهای

تناسبی-انتگرالی وجود بخش انتگرالی می تواند این مشکل را حل کند. در سیستم های خطی

تغییرناپذیر بازمان تکین نیز مانند سیستم‌های معمولی بخش انتگرالی در طراحی رُویتگر بسیار
 پرکاربرد است.

[۳۷] یک روش طراحی رُویتگر تناسبی- انتگرالی برای سیستم تکین با ورودی نامعلوم معرفی کرد.
 سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Nd(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (۹-۳)$$

به‌طوری‌که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار نیمه حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ بردار ورودی
 نامعلوم و $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی است. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, E \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ و
 $N \in \mathbb{R}^{n \times n_d}$ ماتریس‌های ثابت هستند.

فرض کنید $\rho(N) = n_d$ و $\rho(C) = p$ و اینکه ماتریس ناویژه P وجود داشته باشد به‌گونه‌ای
 که:

$$P[E \quad N] = \begin{bmatrix} E_0 & N_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, PA = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix}, PB = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} \quad (۱۰-۳)$$

به‌طوری‌که $E_0 \in \mathbb{R}^{\rho \times n}$ است. بنابراین معادل سیستمی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 & N_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y_0(t) &= [C_0 \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۱۱-۳۰)$$

که در آن: $y_0 = \begin{bmatrix} -B_1 u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n-\rho}$ و $C_0 = \begin{bmatrix} A_1 \\ C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n-\rho) \times n}$.

برای سیستم تکین (۱۱-۳) رُویتگر تناسبی- انتگرالی به‌صورت زیر تعریف می‌شود [37]:

- i) $\dot{\xi}(t) = F\xi(t) + L_1 y_0(t) + L_2 y_0(t) + Ju(t) + T_1 N \hat{d}(t)$
- ii) $\dot{\hat{d}}(t) = L_3 (y_0(t) - \hat{y}_0(t))$
- iii) $\hat{x}(t) = M_1 \xi(t) + T_2 y_0(t)$
- iv) $\hat{y}_0(t) = C_0(t) \hat{x}(t)$

معادله (ii) در بالا نتیجه وجود حلقه انتگرالی در رُیتگر است که به معادله (i) اضافه شده است.

اکنون تعریف می‌کنیم $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ و $e_d(t) = d(t) - \hat{d}(t)$ و با این تعریف معادلات را

بر حسب خطای تخمین به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{e}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & T_1 N \\ -L_3 C_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ e_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1 A_0 - F T_1 E_0 - L_1 C_0 - L_2 C_0 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} T_1 B_0 - J \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12-3)$$

که $F = T_1 A_0 - L_2 C_0$ با قرار دادن $L_1 = F T_2$ و $J = T B_0$ ، خطای تخمین به طور مجانبی به

سمت صفر میل خواهد کرد اگر ماتریس $\begin{bmatrix} T_1 A_0 - L_2 C_0 & T_1 N \\ -L_3 C_0 & 0 \end{bmatrix}$ پایدار باشد. با بازنویسی این

ماتریس به صورت $\begin{bmatrix} T_1 A_0 & T_1 N \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 & 0 \end{bmatrix}$ مشاهده می‌شود که اگر زوج

$\left(\begin{bmatrix} T_1 A_0 & T_1 N \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \right)$ آشکار پذیر باشد، می‌توان ماتریس را توسط بهره پایدار کرد و

بدین وسیله با تعیین کردن ماتریس‌های مجهول رُیتگر طراحی می‌شود.

۴-۳ اهمیت بخش انتگرال گیر در رُیتگر:

در این بخش می‌خواهیم اهمیت بخش انتگرال گیر در رُیتگرهای تناسبی-انتگرالی را بررسی

کنیم.

سیستم تحت اغتشاش زیر مفروض است:

$$\begin{cases} E \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \partial(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (13-3)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار نیمه حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی

قابل اندازه‌گیری و $\partial(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار اغتشاش است.

اکنون رُیتگر تناسبی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = N\xi(t) + Fy(t) + Ju(t) \\ \hat{x}(t) = P\xi(t) + Qy(t) \end{cases} \quad (۱۴-۳)$$

به طوری که $\xi(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$ بردار حالت رؤینگر و $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار تخمین حالت های سیستم اصلی $x(t)$ است.

خطای تبدیل شده را به صورت $\varepsilon(t) = \xi(t) - TEx(t)$ تعریف می کنیم و با مشتق گیری از آن داریم:

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) - T\partial(t) + (NTE + FC - TA)x(t) + (J - TB)u(t) \quad (۱۵-۳)$$

با استفاده از تعریف $\varepsilon(t)$ و معادله دوم (۱۴-۳) می توانیم بنویسیم:

$$\hat{x}(t) = P\varepsilon(t) + [P \quad Q] \begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} x(t) \quad (۱۶-۳)$$

برای مستقل ساختن معادله از ورودی $u(t)$ و حالت $x(t)$ فرض می کنیم که:

$$\begin{aligned} a) \quad NTE + FC - TA &= 0 \\ b) \quad J &= TB \end{aligned}$$

و برای اینکه خطای تخمین به صورت $\hat{x}(t) - x(t)$ شود، فرض می کنیم که:

$$c) \quad [P \quad Q] \begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} = I$$

آنگاه با داشتن:

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) - T\partial(t) \quad (۱۷-۳)$$

و معادله (۱۶-۳) داریم:

$$\hat{x}(t) - x(t) = e(t) = P\varepsilon(t) \quad (۱۸-۳)$$

اگر اغتشاش را به صورت تابع پله یا به عبارتی با دامنه ثابت در نظر بگیریم می توانیم با تبدیل لاپلاس گرفتن، قضیه مقدار نهایی و چند عملیات ساده ریاضی، خطای حالت مانای تخمین را در رؤینگر تناسبی به صورت زیر به دست آوریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = (PN^{-1}T)dc \quad (۱۹-۳)$$

ملاحظه می‌شود که خطای تخمین فقط در حالتی صفر می‌شود که اغتشاش صفر باشد. به عبارتی دیگر رؤیتگر تناسبی نمی‌تواند در حضور اغتشاش تخمین را به درستی انجام دهد.

حال رؤیتگر تناسبی-انتگرالی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= N\xi(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \\ \dot{v}(t) &= y(t) - C\hat{x}(t) \\ \hat{x}(t) &= P\xi(t) + Qy(t) \end{aligned} \quad (۲۰-۳)$$

با استفاده از معادلات سیلویستر خطای تخمین به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$e(t) = P\varepsilon(t) \quad (۲۱-۳)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس و عملیات ریاضی خطای حالت مانای تخمین به صورت زیر خواهد شد:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\bar{E}(s) = -PN^{-1}(H \cdot \lim_{s \rightarrow 0} s\bar{V}(s) - T \cdot dc) \quad (۲۲-۳)$$

که در آن $\bar{V}(s)$ و $\bar{E}(s)$ به ترتیب تبدیل لاپلاس $v(t)$ و $e(t)$ و dc دامنه تابع پله‌ای اغتشاش است. در رابطه بالا ملاحظه می‌شود که با قرار دادن $H \cdot \lim_{s \rightarrow 0} s\bar{V}(s) = T \cdot dc$ می‌توان خطای تخمین را برابر صفر قرار داد.

می‌توان نتیجه گرفت که بخش انتگرالی در رؤیتگر تناسبی-انتگرالی می‌تواند اثر اغتشاش را در خطای تقریب در حالت مانا حذف کند

۵-۳ رؤیتگرهای دینامیکی توسعه یافته

رؤیتگر دینامیک توسعه یافته ابتدا توسط گودوین و میدلتون [۶۰] و سپس در [۶۱] تکمیل شد. در [۶۱] سیستم به صورت یک نگاشت از ورودی به حالت‌ها دیده شده و هدف رسیدن به خطای کوچک

تخمین در حضور یک تحریک پایا^۱ است. این روش اجازه می‌دهد که تأثیر دسته وسیعی از اغتشاش‌ها را روی سیستم نامی بررسی کنیم. در این روش رؤیتگر مانند یک فیلتر در نظر گرفته شده است که خطای دینامیک تخمین به‌عنوان یکی از پارامترهای طراحی فیلتر در حوزه فرکانس است و به‌گونه‌ای طراحی می‌شود که خطا کمینه شود.

سیستم تکین زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (۲۳-۳)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار نیمه حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی قابل‌اندازه‌گیری است. حال رؤیتگر دینامیک توسعه‌یافته برای سیستم (۲۷-۳) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} i) \quad \dot{\xi}(t) &= N\xi(t) + Hv(t) + F \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t) \\ ii) \quad \dot{v}(t) &= S\xi(t) + Lv(t) + M \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\ iii) \quad \hat{x}(t) &= P\xi(t) + Q \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۲۴-۳)$$

به‌طوری‌که $\xi(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$ بردار حالت رؤیتگر، $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$ یک بردار کمکی و $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار تخمین حالت‌های سیستم اصلی $x(t)$ است.

رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته انعطاف بیشتری نسبت به رؤیتگرهای تناسبی و تناسبی-انتگرالی دارد. به‌طوری‌که هرکدام آن‌ها می‌توانند حالت خاصی از رؤیتگرهای دینامیکی توسعه یافته باشد. ایده تجمیع دینامیک‌ها در ساختار رؤیتگر توسط گودوین [۶۱] ارائه شد.

در رؤیتگر (۲۴-۳) می‌توانیم با تنظیم ضرایب هر نوع رؤیتگر دلخواه را به دست آورد:

• اگر $L = 0$ و $M = 0, S = 0, H = 0$ باشد، به رؤیتگر تناسبی تبدیل خواهد شد.

¹ Persistent Excitation

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= N\xi(t) + F \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t) \\ \hat{x}(t) &= P\xi(t) + Q \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (25-3)$$

• برای $F = [0 \quad F_a], L = 0, M = 0, S = 0, H = 0$ و $Q = [0 \quad Q_a]$ آنگاه

رؤیتگر زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= N\xi(t) + F_a y(t) + Ju(t) \\ \hat{x}(t) &= P\xi(t) + Q_a y(t)\end{aligned}\quad (26-3)$$

که مدل رؤیتگر تناسبی برای سیستم تکین با ورودی نامعلوم استفاده می‌شود [۶۱].

• برای $S = -C, L = 0$ و $M = -C_1 Q + [0 \quad I]$ رؤیتگری که به دست می‌آید

عبارت است از:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= N\xi(t) + Hv(t) + F \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t) \\ \dot{v}(t) &= y(t) - C\hat{x}(t) \\ \hat{x}(t) &= P\xi(t) + Q \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (27-3)$$

که مدل رؤیتگر تناسبی-انتگرالی برای سیستم تکین با ورودی نامعلوم است.

تفاوت اصلی بین رؤیتگر تناسبی-انتگرالی و رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته در این است که در رؤیتگر تناسبی-انتگرالی یک ماتریس برای تنظیم خطای حالت مانای صفر وجود دارد ولی در رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته دو ماتریس برای این کار در اختیار داریم. به عبارت دیگر رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته درجه آزادی بیشتری دارد که می‌توان از آن برای تنظیم پارامترهای دیگری مانند جانمایی قطب در محل خاصی استفاده کرد.

(۴) فصل چهارم:

طراحی رُویتگر برای سیستم‌های

خطی تغییرناپذیر با زمان تکی

نامعین

تقریباً در تمامی فرآیندها، مدل سیستم‌های مورد مطالعه با سیستم واقعی متفاوت است و یا در بسیاری از پروسه‌ها، بخش‌هایی از سیستم وجود دارد که مقدار آن برای ما معلوم نیست. به‌طور کلی در حالت اول با سیستم‌هایی سروکار داریم که دارای عدم قطعیت یا نامعینی هستند و در حالت دوم با سیستم‌هایی کار می‌کنیم که دارای پارامترهای ثابت نامعلوم می‌باشند. وجود عدم قطعیت در سیستم‌های کنترل باعث ایجاد مشکلاتی در روش‌های ذکرشده در بخش‌های قبلی برای تخمین حالت‌های سیستم خواهد شد. به همین دلیل نیازمند روش‌هایی هستیم که بتواند حالت‌های یک سیستم دارای عدم قطعیت را تخمین بزند. روش تخمین حالت به‌صورت تطبیقی معمولاً برای سیستم‌های دارای پارامترهای ثابت نامعلوم به کار می‌رود. طراحی رُویتگر برای سیستم‌های نامعین معمولاً به روش‌های اشاره‌شده در کنترل مقاوم نیازمند است. در این بخش به طراحی رُویتگر تناسبی و دینامیکی توسعه‌یافته برای یک سیستم تکین خطی نامعین خواهیم پرداخت.

۴-۱) طراحی رُویتگر تناسبی مقاوم برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین نامعین

در این بخش طراحی رُویتگر مقاوم برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین نامعین را موردبررسی قرار می‌دهیم. در این سیستم‌ها نامعینی می‌تواند در هر سه ماتریس مشتق، ماتریس سیستم و ماتریس ورودی از معادلات فضای حالت سیستم وجود داشته باشد. روش طراحی بر این اساس است که ابتدا با تعریف جدیدی از متغیرهای حالت سیستم، آن را به سیستمی تبدیل می‌کنیم که ماتریس مشتق آن بدون نامعینی باشد. سپس رُویتگر تناسبی مناسبی را برای آن پیشنهاد می‌دهیم و شرایط لازم برای همگرایی رُویتگر را به شکل نامعادلات ماتریسی خطی^۱ بازنویسی خواهیم کرد و با حل این معادلات توسط جعبه‌ابزار یالمپ^۲ که به شکل یک افزونه در نرم‌افزار متلب وجود دارد ضرایب رُویتگر را به دست خواهیم آورد. ویژگی‌های مهم این روش را می‌توان به‌صورت زیر

برشمرد

^۱ Linear Matrix Inequality

^۲ YALMIP ToolBox

- در این روش نامعینی می‌تواند در هر سه ماتریس مشتق، ماتریس حالت و ماتریس ورودی سیستم وجود داشته باشد.

- در بسیاری از مطالعات انجام شده در این زمینه، فرض شده است که سیستم فقط دارای نامعینی باشد. در روش ارائه شده در این بخش، سیستم می‌تواند نامعین یا دارای پارامترهای ثابت نامعلوم باشد و در هر دو حالت امکان طراحی رهیتر با روش ارائه شده وجود دارد.

- در این روش علاوه بر حالت‌های سیستم، مشتق آن‌ها نیز تخمین زده می‌شود که این موضوع در سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان تکین خصوصاً در مواردی که سیستم نامعین است ارزشمند است.

۱-۴-۱) فرمول‌بندی مسئله

سیستم تکین خطی غیر متغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} E^* \dot{\chi}(t) &= A^* \chi(t) + B^* u(t) \\ y(t) &= C_1^* \chi(t) + C_2^* \dot{\chi}(t) \end{aligned} \quad (1-4)$$

که در آن $\chi(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ بردار نیمه حالت^۱، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ورودی معلوم، $y(t) \in \mathbb{R}^p$ خروجی قابل اندازه‌گیری و $E^* \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ ، $A^* \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ ، $B^* \in \mathbb{R}^{n_p \times m}$ ماتریس‌های ثابت و نامعلوم هستند. همچنین $C_1^* \in \mathbb{R}^{p \times n_p}$ ، $C_2^* \in \mathbb{R}^{p \times n_p}$ ماتریس‌های معلوم خروجی تعریف شده‌اند. فرض شده است که ماتریس مربعی E^* می‌تواند تکین باشد یعنی $\rho(E^*) \leq n_p$. همچنین فرض می‌شود که سیستم (۱-۴) منظم باشد یعنی $\det(sE^* - A^*) \neq 0$ که به این معنی است که سیستم (۱-۴) یک پاسخ منحصربه‌فرد دارد.

ماتریس‌های حقیقی، ثابت و معلوم $E_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ ، $A_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ و $B_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times m}$ را در نظر

بگیرید. معادله (۱-۴) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

¹ Semi- State Vector

$$(E_1 + \Delta E^*)\dot{\chi}(t) = (A_1 + \Delta A^*)\chi(t) + (B_1 + \Delta B^*)u(t) \quad (۲-۴)$$

$$y(t) = C_1^*\chi(t) + C_2^*\dot{\chi}(t)$$

که در آن $\Delta E^* = E^* - E_1$ ، $\Delta A^* = A^* - A_1$ و $\Delta B^* = B^* - B_1$ است. اکنون (۲-۴) می‌تواند

به صورت زیر بازنویسی شود

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\chi}(t) \\ \ddot{\chi}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I_{n_p} \\ A_1 & -E_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ \dot{\chi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta A^* & -\Delta E^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ \dot{\chi}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta B^* \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (۳-۴)$$

$$y(t) = [C_1^* \quad C_2^*] \begin{bmatrix} \chi(t) \\ \dot{\chi}(t) \end{bmatrix}$$

که می‌توانیم آن را به صورت فشرده، به شکل زیر داشته باشیم

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) \quad (۴-۴)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

به طوری که $B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_p} \\ A_1 & -E_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $E = \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta A^* & -\Delta E^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و همچنین $C = [C_1^* \quad C_2^*] \in \mathbb{R}^{p \times n}$

$\Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta B^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $n = 2n_p$ در آن $x(t) =$

$[\chi^T(t) \quad \dot{\chi}^T(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت جدید است که باید تخمین زده شود.

اکنون چند فرض زیر را ارائه می‌دهیم.

فرض ۱-۴) ΔA و ΔB نامعینی‌های محدود ساختاریافته هستند [۶۳] یعنی $\Delta A = M_A \Lambda_A N_A$ و

$\Delta B = M_B \Lambda_B N_B$ است به طوری که M_B, N_A, M_A و N_B ماتریس‌های معلوم و $\Lambda_A^T \Lambda_A \leq I$ و

$\Lambda_B^T \Lambda_B \leq I$ می‌باشد.

فرض ۲-۴) فرض شده است که سیستم (۴-۴) آشکار پذیر باشد. یعنی [۶۴]

$$\rho \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}^+ \quad (5-4)$$

به طوری که $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط است و $\mathbb{C}^+ = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) \geq 0\}$ نیم صفحه سمت راست مجموعه اعداد مختلط را نشان می دهد.

فرض ۳-۴ فرض شده است که سیستم (۴-۴) رؤیت پذیر ضربه باشد [۶۵] یا معادل آن

$$\rho \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \rho(E) = 3n_p \quad (6-4)$$

اکنون می خواهیم رؤیتگر پیشنهادی را برای تخمین حالت های سیستم (۴-۴) ارائه نماییم.

۲-۱-۴ طراحی رؤیتگر

رؤیتگر زیر را برای سیستم (۴-۴) در نظر بگیرید

$$\dot{\hat{\xi}}(t) = N\hat{\xi}(t) + Fy(t) + Ju(t) \quad (7-4)$$

$$\hat{x}(t) = \hat{\xi}(t) + Qy(t)$$

که در آن $\hat{\xi}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت رؤیتگر، $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ تخمین $x(t)$ و $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ، $J \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $Q \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ماتریس های نامعلومی هستند که باید به گونه ای تعیین شوند تا خطای

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0 \text{ یعنی در رؤیتگر صفر شود،}$$

قضیه زیر شرط لازم برای وجود و پایداری رؤیتگر (۷-۴) را به ما می دهد.

قضیه ۱-۴ با فرض اینکه ΔA و ΔB نامعینی های محدود ساختاریافته باشند و سیستم

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

آشکارپذیر باشد، آنگاه معادلات **دینامیکی**

$$\dot{\hat{\xi}}(t) = N\hat{\xi}(t) + Fy(t) + Ju(t)$$

$$\hat{x}(t) = \hat{\xi}(t) + Qy(t)$$

یک رؤیتگر مجانبی برای سیستم فوق است، یعنی $\hat{x}(t)$ به طور مجانبی به $x(t)$ میل می کند و یا $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ خواهد شد، اگر ماتریس مناسب T وجود داشته باشد تا شرایط زیر را برآورده کند.

$$NTE + FC - TA = 0 \quad (\text{الف})$$

$$J - TB = 0 \quad (\text{ب})$$

$$[I_n \quad Q] \begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} = I_n \quad (\text{ج})$$

(د) با در نظر گرفتن $\varepsilon(t) = \xi(t) - TEx(t)$ آنگاه معادله

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) - T\Delta A.x(t) - T\Delta B.u(t)$$

پایدار مقاوم باشد و شرط $\|G_{\varepsilon u}\|_{\infty} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|\varepsilon\|}{\|u\|} < \lambda$ را تأمین کند، به طوری که $G_{\varepsilon u}$ تابع

انتقال از ورودی $u(t)$ به سیگنال خطای $\varepsilon(t)$ ، و $\lambda > 0$ است.

اثبات: سیگنال خطا را به صورت $\varepsilon(t) = \xi(t) - TEx(t)$ در نظر می گیریم که $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ماتریس ثابت طراحی است. با گرفتن مشتق از خطای تخمین و استفاده از معادلات (۴-۴) و **Error!**

Reference source not found. داریم

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= N\varepsilon(t) + (NTE + FC - TA)x(t) + (J - TB)u(t) \\ &\quad - T\Delta A.x(t) - T\Delta B.u(t) \end{aligned} \quad (۸-۴)$$

که با استفاده از شرایط (الف) و (ب) می توانیم آن را به شکل زیر ساده کنیم

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) - T\Delta A.x(t) - T\Delta B.u(t) \quad (۹-۴)$$

اکنون اگر معادله بالا پایدار مقاوم باشد، یعنی شرط (د) برقرار باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \xi(t) = TEx(t) \quad \forall t \rightarrow \infty$$

با در نظر گرفتن (۹-۴) و معادله دوم رؤیتگر (۷-۴) داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \xi(t) - Qy(t))$$

با جایگذاری $y(t)$ از معادله خروجی سیستم در (۴-۴) و همچنین $\xi(t) = TEx(t)$ ، معادله فوق

به شکل زیر خواهد شد

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - TEx(t) - QCx(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) - [I_n \quad Q] \begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} x(t) \right)$$

با فرض برقراری شرط (ج)، طبق رابطه زیر، می‌توان نشان داد که خطای تخمین در رؤیتگر به

سمت صفر میل خواهد کرد

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) - [I_n \quad Q] \begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} x(t) \right) = 0 \quad (۱۰-۴)$$

اکنون فرآیند طراحی پارامترهای رؤیتگر را می‌توانیم به صورت زیر ارائه کنیم: ابتدا با استفاده از

شرایط (الف) و (ب) در قضیه (۱-۴)، یک حل پارامتری برای ماتریس‌های مجهول Q, T و J به دست

می‌آوریم. سپس بر اساس اینکه معادله دینامیکی (۹-۴) باید پایدار مجانبی باشد، باقی‌مانده

ماتریس‌های مجهول رؤیتگر را به دست می‌آوریم. پیش از آن چند تعریف و لم را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱-۴: فرض کنید $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times m}$ باشد. اگر $\rho(\Omega) = m$ باشد، آنگاه $\Omega^\dagger \in \mathbb{R}^{m \times n}$ وارون

چپ ماتریس Ω نامیده می‌شود که شرط $\Omega^\dagger \Omega = I$ را برآورده می‌کند. همچنین اگر $\rho(\Omega) = n$

باشد، آنگاه $\Omega^\dagger$ وارون راست ماتریس Ω است که شرط $\Omega \Omega^\dagger = I$ را ارضاء می‌کند. در هر دو حالت

وارون چپ و وارون راست، رابطه $\Omega \Omega^\dagger \Omega = \Omega$ برقرار است [۶۶].

تعریف ۲-۴: فرض کنید $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$ باشد. آنگاه مکمل متعامد^۱ S که با نماد $S^\perp$ نشان داده

می‌شود مجموعه‌ای از بردارهای عمود بر S هستند که بیشترین رتبه سطری ممکن را دارند

به طوری که $S^\perp S = 0$ باشد. بدیهی است که اگر رتبه سطری ماتریس S کامل باشد آنگاه $S^\perp = 0$.

لم ۱-۴: معادله غیر همگن زیر را در نظر بگیرید

¹ Orthogonal Complement

$$\tilde{A}X = \tilde{B} \quad (۱۱-۴)$$

که در آن $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ یک ماتریس ثابت، و $X \in \mathbb{R}^{m \times p}$ یک ماتریس مجهول است که باید تعیین شود. معادله (۱۱-۴) دارای جواب است اگر و فقط اگر ماتریس $\tilde{B}$ جزء فضای رنج ماتریس $\tilde{A}$ باشد، یا به عبارتی دیگر $\rho(\tilde{A}) = \rho[\tilde{A} \ \tilde{B}]$. در این حالت جواب عمومی معادله بالا به صورت زیر خواهد بود

$$X = \tilde{A}^+ \tilde{B} - (I - \tilde{A}^+ \tilde{A})Z \quad (۱۲-۴)$$

به طوری که $Z \in \mathbb{R}^{m \times p}$ یک ماتریس دلخواه است. به طور مشابه اگر معادله به صورت $X\tilde{A} = \tilde{B}$ باشد، شرط لازم و کافی برای وجود جواب این است که $\rho(\tilde{A}) = \rho \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}$. در این حالت نیز جواب عمومی معادله به صورت

$$X = \tilde{B}\tilde{A}^+ - Y(I - \tilde{A}\tilde{A}^+) \quad (۱۳-۴)$$

خواهد بود که در آن $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس دلخواه است [۶۷].

لم ۴۰-۲: ماتریس‌های ثابت H و D و ماتریس ثابت و متقارن S و همچنین ماتریس ثابت و نامعلوم $\Lambda(t)$ را در نظر بگیرید. اگر شرط $\Lambda(t)^T \Lambda(t) \leq I$ برقرار باشد، آنگاه دو نامعادله زیر با یکدیگر هم‌ارزش هستند [۶۸].

$$S + D\Lambda(t)H + H^T \Lambda(t)^T D^T < 0 \quad (۱۴-۴)$$

$$S + \alpha DD^T + \alpha^{-1} H^T H < 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad (۱۵-۴)$$

لم ۴-۳: (لم حذف^۱ [۶۹]) ماتریس‌های $\mathcal{C}, \mathcal{B}$ و ماتریس متقارن $\mathcal{D} = \mathcal{D}^T$ را در نظر بگیرید. در این حالت جملات زیر معادل یکدیگر هستند.

الف) حتماً ماتریسی مانند X وجود دارد به‌طوری‌که در نامعادله $BXC + (BXC)^T + \mathcal{D} < 0$ صادق باشد.

ب) دو شرط زیر همواره برقرار خواهد بود

$$\mathcal{C}^{T\perp} . \mathcal{D} . \mathcal{C}^{T\perp T} < 0$$

$$\mathcal{B}^\perp . \mathcal{D} . \mathcal{B}^{\perp T} < 0$$

در این حالت اگر r_c و r_b به ترتیب رتبه ماتریس‌های $\mathcal{C}$ و $\mathcal{B}$ باشند و $\mathcal{B}_l, \mathcal{B}_r$ و $\mathcal{C}_l, \mathcal{C}_r$ فاکتورهایی با رتبه کامل از $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ باشند به‌طوری‌که در $\mathcal{B} = \mathcal{B}_l \mathcal{B}_r$ و $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l \mathcal{C}_r$ صدق کنند، آنگاه ماتریس X در بخش (الف) از رابطه زیر به دست می‌آید

$$X = \mathcal{B}_r^\dagger \mathcal{K} \mathcal{C}_l^\dagger + \mathcal{Z} - \mathcal{B}_r^\dagger \mathcal{B}_r \mathcal{Z} \mathcal{C}_l \mathcal{C}_l^\dagger \quad (۱۶-۴)$$

به‌طوری‌که $\mathcal{Z}$ یک ماتریس دلخواه است و

$$\mathcal{K} = -\mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T \mathcal{V} \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \mathcal{V} \mathcal{C}_r^T)^{-1} + \mathcal{S}^{1/2} \mathcal{L} (\mathcal{C}_r \mathcal{V} \mathcal{C}_r^T)^{-1/2}$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T [\mathcal{V} - \mathcal{V} \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \mathcal{V} \mathcal{C}_r^T)^{-1} \mathcal{C}_r \mathcal{V}] \mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1}$$

هستند که در آن‌ها $\mathcal{L}$ یک ماتریس دلخواه است که $\|\mathcal{L}\|_2 < 1$ و $\mathcal{R}$ هر ماتریس دلخواه مثبت معین است که در شرط زیر صادق باشد

$$\mathcal{V} = (\mathcal{B}_r \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T - \mathcal{D})^{-1} > 0$$

لم ۴-۴: (لم باند محدود^۲) [۷۰-۷۲] سیستم نامعین خطی غیر متغیر بازمان زیر را در نظر بگیرید

^۱ Elimination Lemma

^۲ Bounded Real Lemma

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t),$$

$$y(t) = Cx(t)$$

به طوری که $\Delta B(t) = M\Sigma(t)N_2$, $\Delta A(t) = M\Sigma(t)N_1$ و $\Sigma^T(t)\Sigma(t) \leq I$ است. برای هر

$\lambda > 0$ اگر اعداد مثبت $\alpha_2 > 0, \alpha_1 > 0$ و ماتریس مثبت معین و متقارن P وجود داشته باشد

به گونه ای که نامعادلات ماتریسی خطی زیر برقرار باشد

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \alpha_1 N_1^T N_1 & PB & C^T & PM & PM \\ B^T P & -\lambda^2 I + \alpha_2 N_2^T N_2 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & -I & 0 & 0 \\ M^T P & 0 & 0 & -\alpha_1 I & 0 \\ M^T P & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 I \end{bmatrix} < 0$$

آنگاه سیستم فوق پایدار مقاوم است و شرط $\|G_{yu}\|_\infty < \lambda$ را ارضاء می کند که در آن G_{yu} تابع

انتقال از ورودی به خروجی است.

۳-۱-۴ محاسبه پارامتری ماتریس های رؤیتگر

در این بخش، شرط لازم برای وجود جواب و پایداری رؤیتگر (۷-۴) را ارائه خواهیم کرد. ابتدا یک

پاسخ پارامتری برای ماتریس های نامعلوم رؤیتگر (۷-۴) بر اساس شرایط (ب) و (ج) قضیه (۱-۴) به

دست می آوریم.

از شرط (ج) قضیه (۱-۴) داریم

$$[I_n \quad Q] \begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} = I_n \Rightarrow [T \quad Q] \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = I_n \quad (۱۷-۴)$$

با استفاده از فرض (۳-۴) روابط زیر را داریم

$$\rho \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = \rho(E) + \rho \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n_p + \rho \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = 3n_p$$

$$\Rightarrow \rho \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = 2n_p = n$$

بنابراین رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ کامل است. به عبارت دیگر با توجه به اینکه

$$\rho \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} E \\ C \\ I_n \end{bmatrix} = n \quad (۱۸-۴)$$

می توان نتیجه گرفت که I_n جزء فضای رنج $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ است و با استفاده از (۱-۴) معادله (۱۷-۴) دارای

جواب است و جواب عمومی آن را می توانیم به صورت زیر به دست آوریم

$$[T \quad Q] = I_n \Omega^\dagger - Z(I_{n+p} - \Omega \Omega^\dagger) \quad (۱۹-۴)$$

به طوری که $\Omega = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ تعریف می شود و $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n+p)}$ یک ماتریس دلخواه است.

روابط زیر را تعریف می کنیم

$$T_1 = \Omega^\dagger \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = (I_{n+p} - \Omega \Omega^\dagger) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۲۰-۴)$$

$$Q_1 = \Omega^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}, \quad Q_2 = (I_{n+p} - \Omega \Omega^\dagger) \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (۲۱-۴)$$

بنابراین حل پارامتری ماتریس های T و Q از رؤیتگر (۷-۴) به شکل زیر خواهد بود

$$T = T_1 - Z T_2 \quad (۲۲-۴)$$

$$Q = Q_1 - Z Q_2 \quad (۲۳-۴)$$

و با استفاده از شرط (ب) از قضیه (۱-۴) داریم

$$J = T B \quad (۲۴-۴)$$

تا این مرحله دو ماتریس Q و J را به صورت پارامتری به دست آورده ایم. در ادامه بقیه ضرایب

رؤیتگر را نیز تعیین خواهیم کرد.

از شرط (ج) قضیه (۱-۴) رابطه $TE = I_n - QC$ را داریم و با جایگذاری آن در شرط (الف) از

همان قضیه می توانیم بنویسیم

$$N(I_n - QC) + FC - TA = 0 \Rightarrow N + (F - NQ)C = TA$$

با تعریف $\tilde{F} = F - NQ$ و جایگذاری در معادله بالا داریم

$$N + \tilde{F}C = TA \Rightarrow [N \quad \tilde{F}] \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix} = TA \quad (25-4)$$

در این معادله چون رتبه $\begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$ کامل است پس حتماً TA جزء فضای رنج $\begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$ خواهد بود پس

می‌توان حل عمومی معادله را به شکل زیر بنویسیم

$$[N \quad \tilde{F}] = TA\Sigma^\dagger - Y(I_{n+p} - \Sigma\Sigma^\dagger) \quad (26-4)$$

که در آن $\Sigma = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$ تعریف شده است و $Y \in \mathbb{R}^{n \times (n+p)}$ یک ماتریس دلخواه است.

ماتریس T را از (22-4) در (26-4) قرار می‌دهیم

$$[N \quad \tilde{F}] = T_1 A \Sigma^\dagger - Z T_2 A \Sigma^\dagger - Y(I_{n+p} - \Sigma\Sigma^\dagger)$$

بنابراین

$$N = N_1 - ZN_2 - YN_3 \quad (27-4)$$

که در آن

$$N_1 = T_1 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, N_2 = T_2 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, N_3 = (I_{n+p} - \Sigma\Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28-4)$$

هستند. همچنین

$$\tilde{F} = \tilde{F}_1 - Z\tilde{F}_2 - Y\tilde{F}_3 \quad (29-4)$$

که در آن نیز پارامترهای لازم به صورت زیر قابل محاسبه هستند

$$\tilde{F}_1 = T_1 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}, \tilde{F}_2 = T_2 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}, \tilde{F}_3 = (I_{n+p} - \Sigma\Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (30-4)$$

بنابراین ماتریس F را می‌توان به صورت زیر به دست آورد

$$F = \tilde{F} + NQ = F_1 - ZF_2 - YF_3 \quad (۳۱-۴)$$

که به طور مشابه داریم

$$F_1 = T_1 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} Q \\ I_p \end{bmatrix}, F_2 = T_2 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} Q \\ I_p \end{bmatrix}, F_3 = (I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} Q \\ I_p \end{bmatrix} \quad (۳۲-۴)$$

اکنون برای تمام ماتریس‌های ضرایب رؤیتگر یک حل پارامتری به دست آورده‌ایم و برای آن‌ها پاسخی برحسب دو ماتریس دلخواه Z و Y داریم. برای برقراری شرط (د) از قضیه (۱-۴) لازم است که معادله (۹-۴) پایدار مجانبی باشد و برای آن کافی است ماتریس N یک ماتریس منفی معین باشد. دو پارامتر دلخواه Z و Y را برای منفی معین بودن ماتریس N در اختیار داریم و با تنظیم آن‌ها می‌توانیم به هدف موردنظر برسیم. با توجه به اینکه ماتریس Z در معادلات دیگری از تعیین پارامترها دخالت دارد، برای ساده شدن محاسبات آن‌ها برابر صفر در نظر می‌گیریم و تنظیم منفی معین بودن N را توسط ماتریس دلخواه Y انجام می‌دهیم. بنابراین در ادامه محاسبات $Z = 0$ فرض شده است. اکنون باید ماتریس دلخواه Y را به شکلی تعیین کنیم تا معادله (۹-۴) پایدار مقاوم باشد.

قضیه زیر شرط لازم برای پایدار مقاوم بودن رؤیتگر را ارائه می‌دهد.

قضیه ۴-۲: با فرض اینکه سیستم

$$E \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

آشکارپذیر و رؤیت پذیر ضربه باشد و ΔA و ΔB نامعینی‌های محدود ساختاریافته باشند، آنگاه

معادلات دینامیکی

$$\dot{\xi}(t) = N\xi(t) + Fy(t) + Ju(t)$$

$$\hat{x}(t) = \xi(t) + Qy(t)$$

حالت‌های سیستم فوق را تخمین می‌زند اگر اعداد اسکالر $\alpha_2 > 0, \alpha_1 > 0$ و ماتریس‌های ناویژه

P_2 و P_1 وجود داشته باشند تا نامعادلات ماتریسی خطی زیر برقرار باشند

$$E^T P_1 = P_1^T E \geq 0 \quad (۳۳-۴)$$

$$P_2 = P_2^T \geq 0 \quad (۳۴-۴)$$

$$\begin{cases} C^{T\perp} \cdot D \cdot C^{T\perp T} < 0 \\ B^{\perp} \cdot D \cdot B^{\perp T} < 0 \end{cases} \quad (۳۵-۴)$$

به‌طوری‌که

$$D = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & P_1^T B & P_1^T M_B & P_1^T M_A & N_A^T \\ 0 & \omega_3 & P_2^T M_A & P_2^T M_B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_A^T T^T P_2 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_B^T T^T P_2 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^T P_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I + 2\alpha_2 N_B^T N_B & 0 & 0 & 0 \\ M_B^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ M_A^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ N_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(2\alpha_1)^{-1} \end{bmatrix}$$

که در آن $\omega_1 = A^T P_1 + P_1^T A, \quad \omega_3 = N_1^T P_2 + P_2 N_1 + I$

و $B = [0 \quad -I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ و $C = [0 \quad N_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ است.

اثبات:

تابع لیاپانوف $V(t) = x^T E^T P_1 x + \varepsilon^T P_2 \varepsilon$ را در نظر بگیرید که در آن $E^T P_1 = P_1^T E \geq 0$ و

$P_2 = P_2^T \geq 0$ است. با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف $V(t)$ برحسب زمان و جاگذاری معادلات (۴-۴) و

(۹-۴) در آن داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{x}^T E^T P_1 x + x^T E^T P_1 \dot{x} + \varepsilon^T P_2 \dot{\varepsilon} + \varepsilon^T P_2 \dot{\varepsilon} \\ &= x^T (A^T P_1 + P_1^T A) x + 2x^T P_1^T \Delta A x + 2x^T P_1^T B u + 2x^T P_1^T \Delta B u \\ &\quad + \varepsilon^T (N^T P_2 + P_2^T N) \varepsilon - 2\varepsilon^T P_2 T \Delta A x - 2\varepsilon^T P_2 T \Delta B u \end{aligned}$$

با استفاده از این تابع لیاپانوف $V(t)$ معادله دینامیکی (۴-۹) پایدار مجانبی است اگر $\dot{V}(t) < 0$ با

استفاده از فرض (۴-۱) و لم (۴-۲) رابطه بالا به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) < 0 &\Leftrightarrow x^T(A^T P_1 + P_1^T A)x + 2x^T P_1^T \Delta A x + 2x^T P_1^T B u \\
 &+ 2x^T P_1^T \Delta B u + \varepsilon^T(N^T P_2 + P_2^T N)\varepsilon \\
 &- 2\varepsilon^T P_2^T \Delta A x - 2\varepsilon^T P_2^T \Delta B u < 0 \\
 &\Leftrightarrow x^T(A^T P_1 + P_1^T A)x + \varepsilon^T(N^T P_2 + P_2^T N)\varepsilon \\
 &+ 2x^T P_1^T B u \\
 &+ (\alpha_1^{-1} x^T P_1^T M_A M_A^T P_1 x + \alpha_1 x^T N_A^T N_A x) \\
 &+ (\alpha_1^{-1} \varepsilon^T P_2^T T M_A M_A^T T^T P_2 \varepsilon + \alpha_1 x^T N_A^T N_A x) \\
 &+ (\alpha_2^{-1} x^T P_1^T M_B M_B^T P_1 x + \alpha_2 u^T N_B^T N_B u) \\
 &+ (\alpha_2^{-1} \varepsilon^T P_2^T T M_B M_B^T T^T P_2 \varepsilon + \alpha_2 u^T N_B^T N_B u) \\
 &< 0
 \end{aligned} \tag{۴-۳۶}$$

اکنون با استفاده از لم (۴-۴) برای اینکه معادله دینامیکی (۴-۹) پایدار مجانبی باشد و همچنین

برای برآورده شدن شرط $\|G_{\varepsilon u}\|_{\infty} < \lambda$ معادله زیر باید برقرار باشد [۷۳]

$$\int_0^{\infty} [\varepsilon^T(t)\varepsilon(t) - \lambda^2 u^T(t)u(t) + \dot{V}(t)] < 0$$

و شرط لازم برای برقراری رابطه فوق این است که

$$[\varepsilon^T(t)\varepsilon(t) - \lambda^2 u^T(t)u(t) + \dot{V}(t)] < 0 \tag{۴-۳۷}$$

با به کارگیری $\dot{V}(t)$ از (۴-۳۶)، نامعادله فوق به یک نامعادله ماتریسی خطی به صورت زیر تبدیل

می شود:

$$[x^T \quad \varepsilon^T \quad u^T] \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & P_1^T B \\ 0 & \psi_2 & 0 \\ B^T P_1 & 0 & -\lambda^2 I + 2\alpha_2 N_B^T N_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \\ u \end{bmatrix} < 0 \tag{۴-۳۸}$$

که در آن

$$\psi_1 = A^T P_1 + P_1^T A + \alpha_1^{-1} P_1^T M_A M_A^T P_1 + \alpha_2^{-1} P_1^T M_B M_B^T P_1 + 2\alpha_1 N_A^T N_A \tag{۴-۳۹}$$

$$\psi_2 = N^T P_2 + P_2^T N + \alpha_1^{-1} P_2 T M_A M_A^T T^T P_2 + \alpha_2^{-1} P_2 T M_B M_B^T T^T P_2 + I \quad (40-4)$$

معادله (4-38) به این معنی است که نامعادله ماتریسی خطی زیر باید برقرار باشد.

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & P_1^T B \\ 0 & \psi_2 & 0 \\ B^T P_1 & 0 & -\lambda^2 I + 2\alpha_2 N_B^T N_B \end{bmatrix} < 0 \quad (41-4)$$

با به کارگیری لم شر¹ [74]، نامعادله ماتریسی بالا می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & P_1^T B & P_1^T M_B & P_1^T M_A & N_A^T \\ 0 & \omega_2 & P_2 T M_A & P_2 T M_B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_A^T T^T P_2 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_B^T T^T P_2 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^T P_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I + 2\alpha_2 N_B^T N_B & 0 & 0 & 0 \\ M_B^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ M_A^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ N_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(2\alpha_1)^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (42-4)$$

که در آن $\omega_1 = A^T P_1 + P_1^T A$ و $\omega_2 = N^T P_2 + P_2^T N + I$ است. توجه کنید که $N = N_1 - Y N_3$

و Y یک ماتریس نامعلوم است. با جاگذاری N در ω_2 و انجام چند عملیات ساده سازی، (4-42) را

می توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$BXC + C^T X^T B^T + D < 0 \quad (43-4)$$

که در آن $\mathcal{C} = [0 \quad N_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ و $\mathcal{B} = [0 \quad -I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

است و

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & P_1^T B & P_1^T M_B & P_1^T M_A & N_A^T \\ 0 & \omega_3 & P_2 T M_A & P_2 T M_B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_A^T T^T P_2 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_B^T T^T P_2 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^T P_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I + 2\alpha_2 N_B^T N_B & 0 & 0 & 0 \\ M_B^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ M_A^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ N_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(2\alpha_1)^{-1} \end{bmatrix}$$

¹ Schur Complement

همچنین $\omega_1 = A^T P_1 + P_1^T A$ و $\omega_3 = N_1^T P_2 + P_2 N_1 + I$ می‌باشد. ملاحظه می‌شود که ماتریس‌های ضرایب B و C معلوم هستند و در D ماتریس‌های P_1 ، P_2 و اسکالره‌ای α_1 و α_2 مجهول هستند و باید تعیین شوند. در (۴۳-۴) $X = P_2 Y$ در نظر گرفته شده است. اکنون می‌توانیم از لم (۳-۴) استفاده کنیم و با حذف متغیر X ، (۴۳-۴) را به دو نامعادله ماتریسی زیر تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} C^{T\perp} \cdot D \cdot C^{T\perp T} &< 0 \\ B^\perp \cdot D \cdot B^{\perp T} &< 0 \end{aligned} \quad (44-4)$$

و به این ترتیب اثبات قضیه (۲-۴) تمام می‌شود.

با حل نامعادلات ماتریسی خطی فوق و تعیین P_1 و P_2 می‌توان از لم (۳-۴) ماتریس X را به دست آورد و از آنجا ماتریس دلخواه نامعلوم Y از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$Y = P_2^{-1} X \quad (45-4)$$

اکنون ماتریس دلخواه Y به گونه‌ای تعیین شده است که رؤیتگر طراحی شده پایدار باشد و معادله دینامیکی (۹-۴) پایدار مجانبی باشد. با مشخص شدن Y می‌توانیم پارامترهای دیگر رؤیتگر مانند N و F را نیز از روابط (۲۷-۴) و (۳۱-۴) به دست آوریم.

الگوریتم زیر مراحل طراحی رؤیتگر برای یک سیستم تکین خطی با نامعینی در سه ماتریس مشتق، سیستم و ورودی را ارائه می‌کند.

الگوریتم ۴-۱:

گام اول: ماتریس‌های حقیقی، ثابت و معلوم $E_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ ، $A_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ و $B_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times m}$ را به دلخواه انتخاب کنید و ماتریس‌های $E, A, B, C, \Delta A$ و ΔB را به گونه‌ای تعیین کنید تا فرض‌های

(۲-۴) و (۳-۴) برقرار باشند. سپس ماتریس‌های $\Lambda_A, N_B, M_B, N_A, M_A$ و Λ_B را بر اساس فرض (۴-۴) (۱) به دست آورید.

گام دوم: ماتریس‌های Q, T و J را با به ترتیب با استفاده از روابط (۲۲-۴)، (۲۳-۴) و (۲۴-۴) محاسبه کنید.

گام سوم: نامعادلات ماتریسی خطی (۳۳-۴)، (۳۴-۴) و (۳۵-۴) را حل کنید تا ماتریس‌های P_1 و P_2 را به دست آورید. در این مرحله با توجه به اینکه ماتریس‌های P_1 و P_2 از حل نامعادله به دست می‌آیند و می‌توانند چندین جواب داشته باشند، باید به دنبال جوابی باشیم که به ازاء حداقل مقدار ممکن λ بدست آید.

گام چهارم: ماتریس‌های دلخواه $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ و $\mathcal{Z}$ را با توجه به محدودیت‌های ارائه‌شده در لم (۳-۴) تعیین کنید و سپس از معادله (۱۶-۴) ماتریس X را به دست آورید و پس‌از آن با استفاده از $Y = P_2^{-1}X$ ، ماتریس دلخواه Y را تعیین کنید.

گام پنجم: ماتریس‌های N و F را از روابط (۲۷-۴) و (۳۱-۴) به دست آورید.

گام ششم: رزیتگر را از روی ساختار آن در معادله (۷-۴) بسازید.

در ادامه چند مثال را ارائه می‌کنیم تا عملکرد الگوریتم فوق را در آن بررسی کنیم.

۴-۱-۴ مثال ۱-۴:

سیستم تکین زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} E^* \dot{\chi}(t) &= A^* \chi(t) + B^* u(t) \\ y(t) &= C_1^* \chi(t) + C_2^* \dot{\chi}(t) \end{aligned}$$

که در آن

$$E^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$C_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است و ورودی به صورت $u(t) = \sin(t)$ انتخاب شده است. در این مثال فرض شده است که

ضرایب E^*, A^* و B^* نامعلوم فرض شده اند. ماتریس های دلخواه مورد نیاز به شکل زیر انتخاب شده اند.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1.5 & -2.3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین بر اساس (۴-۴) مدل جدید سیستم به شکل زیر خواهد بود.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1.5 & -2.3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_A = 7.8 \times I, \quad M_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N_A = I, \quad N_B = I$$

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2564 & -0.1282 & -0.2564 & -0.1282 \\ -0.5769 & 0.0385 & 0.1282 & 0.2564 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_B = 1$$

به وضوح دیده می شود که فرض های (۴-۱) تا (۴-۳) برآورده می شود. برای ساده شدن فرض

می کنیم $Z = 0$ باشد و با استفاده از روابط (۴-۲۲)، (۴-۲۳) و (۴-۲۴) ماتریس های Q, T و J را

به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از قضیه (۴-۲) ماتریس های P_1 و P_2 را با حل نامعادلات ماتریسی خطی با در نظر

گرفتن ضرایب $\alpha_1 = 1$ و $\alpha_2 = 1.2$ به دست می آوریم. برای این کار از محاسبه گر^۱ موزک^۱ در

جعبه ابزار یالمپ استفاده کرده ایم.

¹ Solver

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.6578 & 0.0285 & 0 & 0 \\ 0.0285 & 0.4578 & 0 & 0 \\ 7.4529 & -8.453 & -1.1264 & -5.5693 \\ -4.5694 & 5.7841 & 1.5673 & 3.8601 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 212.41 & 0 & 59.22 & 0 \\ 0 & 238.83 & 0 & 0 \\ 59.22 & 0 & 315.42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 289.74 \end{bmatrix}$$

پارامترهای دیگر طراحی برای استفاده از لم (۴-۴) به صورت زیر انتخاب شده‌اند.

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & 6 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & 7 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس‌های نامعلوم N, Y و F را به ترتیب با استفاده از روابط (۴-۴۵)، (۴-۲۷) و (۴-۴)

(۳۱) به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$Y = \begin{bmatrix} 0.0378 & 0.0086 & 0.0512 & 0.0095 & -0.0604 & 0.0264 \\ 0.0531 & 0.0045 & 0.0121 & 0.0039 & 0.0431 & 0.0029 \\ 0.0208 & 0.0021 & 0.0432 & -0.0092 & 0.0903 & 0.0084 \\ 0.0341 & 0.0341 & 0.0059 & 0.0528 & 0.0098 & -0.0063 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} -0.4120 & 0 & 0.5461 & -0.0110 \\ -0.034 & -0.7843 & -0.9024 & -0.3496 \\ -0.3481 & -0.1156 & -0.8127 & -0.6101 \\ -0.07 & 0 & -0.07 & -0.5136 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.9 \\ -1.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نتایج شبیه‌سازی رؤیتگر طراحی شده برای سیستم در شکل‌های (۴-۱) و (۴-۲) قابل مشاهده است.

شرایط اولیه برای سیستم و رؤیتگر به صورت زیر انتخاب شده است.

$$x(0) = [1 \quad -1.5 \quad -0.75 \quad 0]^T, \quad \xi(0) = [0 \quad 0 \quad 0.55 \quad -0.92]^T$$

که با استفاده از رابطه (۴-۴) و (۴-۷) می‌توان شرایط اولیه را برای حالت‌های تخمین زده شده

به صورت زیر محاسبه کرد و در شکل (۴-۱) نیز قابل مشاهده است.

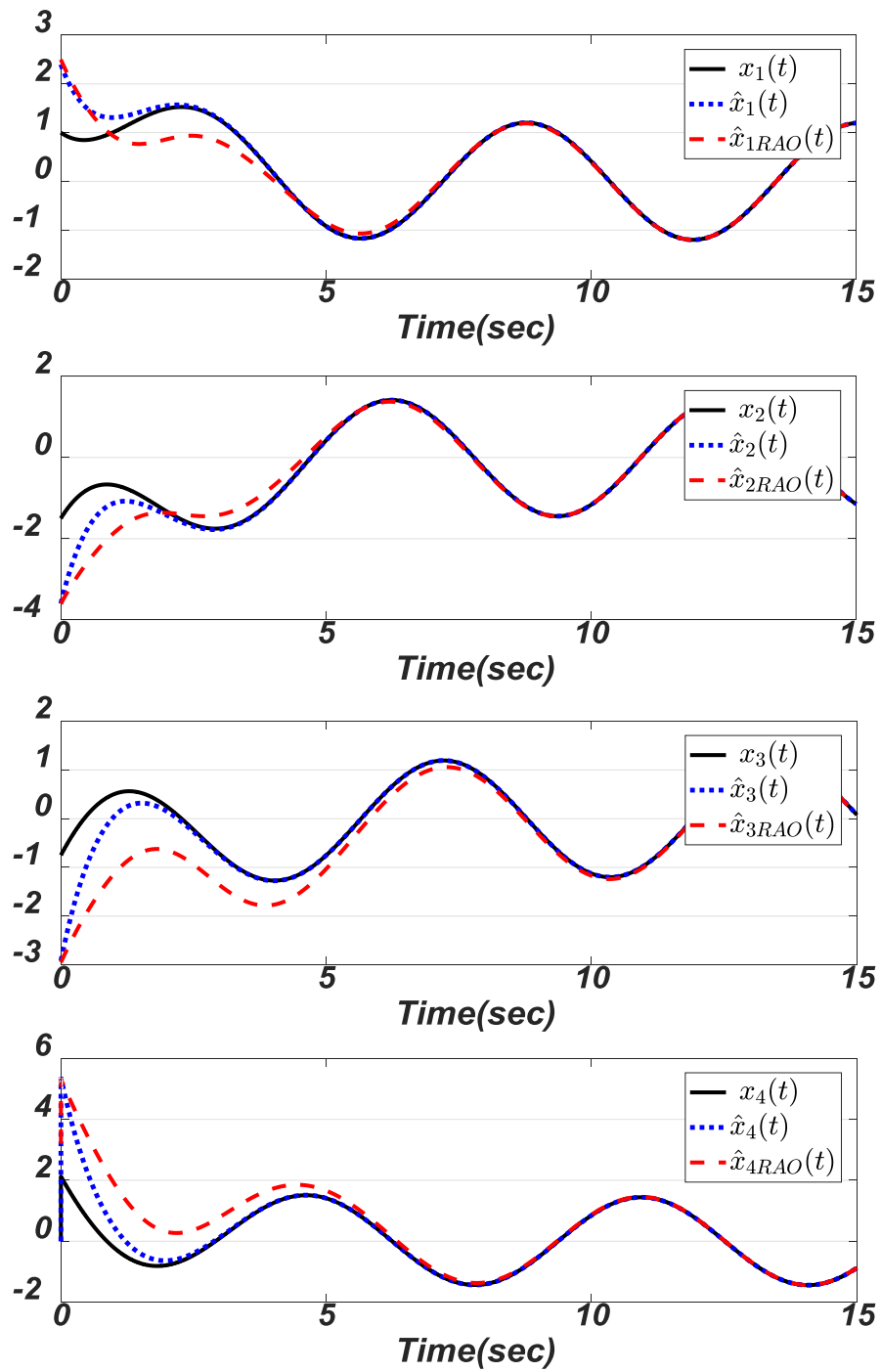
$$\hat{x}(0) = \xi(0) + Q C x(0) = [0 \quad 0 \quad 0.8 \quad -0.17]^T$$

برای بررسی بهتر عملکرد این رؤیتگر، مقایسه‌ای بین رؤیتگر طراحی شده با نتیجه یک مقاله دیگر [۴۸] انجام شده است. در [۴۸] یک رؤیتگر تطبیقی مقاوم برای سیستم‌های تکین با نامعینی در ماتریس‌های مشتق و سیستم و همچنین دارای بخش غیرخطی طراحی شده است. در این مثال بخش غیرخطی وجود ندارد و همچنین تفاوت دیگر این است که در مثال موردنظر ماتریس ورودی هم دارای عدم قطعیت است ولی در [۴۸] ماتریس ورودی ثابت و معلوم است. در روش RAO^1 معادله دینامیکی رؤیتگر در حالت خطی به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

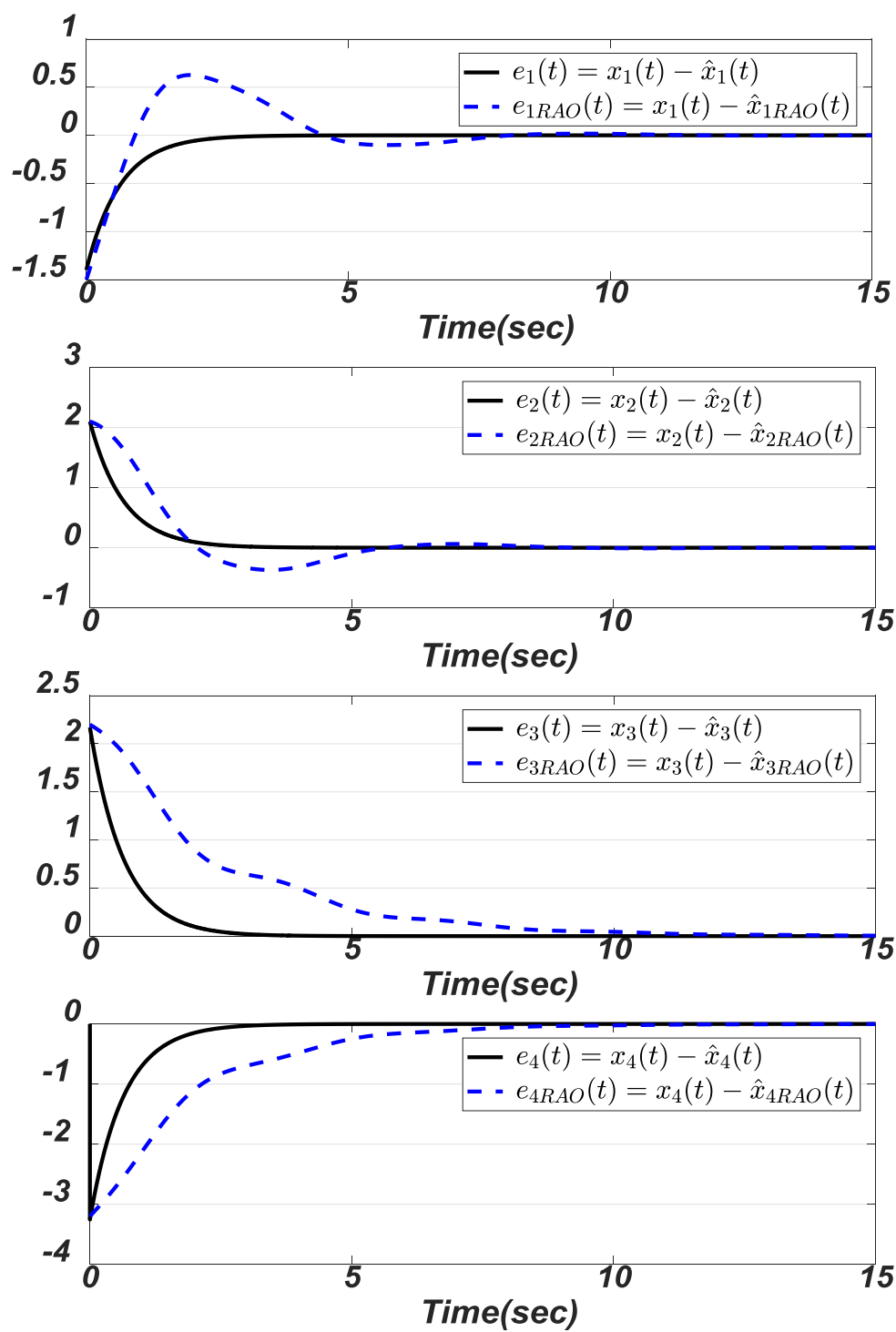
$$\dot{\xi}_{RAO} = N_{RAO}\xi_{RAO} + H_{RAO}u(t) + J_{RAO}y(t)$$

$$\dot{\hat{x}}_{RAO} = P_{RAO}\xi_{RAO} + F_{RAO}y(t)$$

¹ Robust Adaptive Observer



شکل (۴-۱): مقایسه بین حالت‌های سیستم واقعی، حالت‌های تخمین زده شده توسط رؤیتگر ارائه شده و رؤیتگر تطبیقی مقاوم



شکل (۴-۲): مقایسه خطای تخمین بین رؤیتگر طراحی شده و رؤیتگر تطبیقی مقاوم

که در آن ξ_{RAO} بردار حالت رؤیتگر و $P_{RAO}, J_{RAO}, H_{RAO}, N_{RAO}$ پارامترهای رؤیتگر هستند که با استفاده از لم ۴-۱ [۴۸] به صورت زیر به دست می آیند.

$$N_{RAO} = \begin{bmatrix} -0.20 & 0.22 \\ -0.25 & -0.17 \end{bmatrix}, H_{RAO} = \begin{bmatrix} 0.78 \\ -1.23 \end{bmatrix}, J_{RAO} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.13 \end{bmatrix}, P_{RAO} = \begin{bmatrix} 0.45 & -2.34 & 5.39 & -2.11 \\ -0.38 & -1.57 & 2.56 & -1.10 \end{bmatrix}, F_{RAO} = \begin{bmatrix} 1.98 & 0.01 & -0.59 & 0.02 \\ 1.01 & -1.01 & 2.32 & -1.73 \end{bmatrix}$$

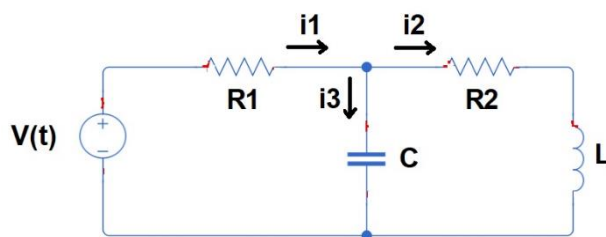
مقایسه بین عملکرد این دو رؤیتگر با مقادیر واقعی بردار حالت در شکل (۴-۱) قابل مشاهده است. ملاحظه می شود که به دلیل اینکه RAO امکان در نظر گرفتن نامعلومی ماتریس ورودی را ندارد عملکرد خوبی نیز ندارد. همچنین خطای تخمین در هر دو روش در شکل (۴-۲) دیده می شود و قابل تشخیص است که رؤیتگر ارائه شده سرعت بالاتری در تخمین نسبت به RAO دارد.

۴-۱-۵) مثال ۴-۲:

مدار الکتریکی شکل (۴-۳) را در نظر بگیرید که توسط ولتاژ $v(t)$ کنترل می شود. در این مدار $x_1 = v_c(t)$ ، $x_2 = i_1(t)$ و $x_3 = i_2(t)$ حالت های سیستم فرض شده اند. با توجه به اینکه سیستم مورد نظر دو عنصر ذخیره کننده انرژی دارد و ما در اینجا سه متغیر حالت برای آن اختیار کرده ایم پس مدل مدار الکتریکی یک مدل تکین خواهد شد که به صورت زیر هست.

$$\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -R_2 & 0 \\ 1/R_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/R_1 \end{bmatrix} V_s$$

مقادیر نامی سیستم عبارت اند از $C = 1000\mu F$ و $L = 1H, R_2 = 1k\Omega, R_1 = 1k\Omega$. همچنین فرض شده است که المان های R_1 و L به طور کامل معلوم نیستند و هرکدام ۵٪ نامعینی دارند. در این شرایط هر سه ماتریس مشتق، سیستم و ورودی نامعین خواهند شد که به شکل زیر است.



شکل (۳-۴): مدل الکتریکی مثال (۲-۴)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -0.001 & 0 & 0 \\ 1 & -1000 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.001 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.001 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_A = \sin(t)$$

$$N_A = [5 \times 10^{-5} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.05 \quad 0], \quad M_B = 1, \quad \Lambda_B = \sin(t),$$

$$N_B = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -5 \times 10^{-5}]$$

به توضوح دیده می شود که فرض های (۱-۴) تا (۳-۴) برآورده شده است. در نتیجه ماتریس های زیر

قابل محاسبه هستند.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.01 \\ 0.37 \\ 1.02 \end{bmatrix}$$

و با حل نامعادلات ماتریسی خطی قضیه (۲-۴) توسط محاسبه گر موزک در یالمیپ می توانیم

ماتریس های زیر را به دست آوریم.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 44.21 & 0.023 & 0.012 & 0 & 0 & 0 \\ 0.023 & 0.067 & 0.093 & 0 & 0 & 0 \\ 0.012 & 0.093 & 0.019 & 0 & 0 & 0 \\ 23.98 & 3.745 & 5.092 & 7.871 & 0.005 & 0.001 \\ 0.021 & -0.005 & 0.005 & -0.011 & 0.001 & 0 \\ -8.461 & 2.390 & -10.76 & -5.782 & 0.078 & -0.003 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 10.036 & 0 & 0 & 2.095 & 0 & 0 \\ 0 & 9.986 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.129 & 0 & 0 & 0 \\ 2.095 & 0 & 0 & 9.589 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10.786 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.786 \end{bmatrix}$$

با انتخاب پارامترهای طراحی مناسب و استفاده از لم (۴-۲)، ماتریس‌های نامعلوم N, Y و F را به

ترتیب با به کارگیری روابط (۴-۴۵)، (۴-۲۷) و (۴-۳۱) به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$Y = \begin{bmatrix} -52.03 & 0.20 & 0.09 & -49.73 & 157.27 & -98.45 & 51.37 & 94.62 & -150.62 \\ 0.61 & 0.58 & 0.57 & 1.16 & -0.83 & 1.98 & 0.09 & -0.57 & 1.91 \\ 0.19 & 0.29 & 0.79 & 0.19 & 0.09 & 1.06 & 0.28 & -0.29 & 0.79 \\ 27.42 & 0.72 & 0.31 & 29.11 & -83.04 & 52.08 & -26.34 & 0.51 & 80.00 \\ -12.71 & 0.57 & 0.51 & -11.95 & 38.97 & -21.91 & 12.91 & 23.88 & -35.82 \\ 52.58 & 0.28 & 0.30 & 55.38 & -155.97 & 96.75 & -50.77 & -100.79 & 155.65 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} -1.0523 & 0.4650 & -1.0836 & 0.0085 & -1.4257 & 1.5333 \\ 0.3977 & -4.9053 & -0.9964 & 0.6662 & 0.4215 & 0.2684 \\ 0.3951 & -0.3252 & -1.4553 & -0.3203 & 0.1053 & -0.0492 \\ 0.2833 & 0.4980 & 1.9839 & -1.1681 & 1.86174 & -1.0293 \\ -0.0036 & -0.2081 & -2.3696 & -0.3394 & -2.6280 & 1.3428 \\ 0.2949 & 2.2218 & 1.8680 & 0.1548 & 1.0849 & -2.4883 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1.01 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

شکل (۴-۴) حالت‌های سیستم و تخمین آن‌ها را نشان می‌دهد. شرایط اولیه عبارت است از

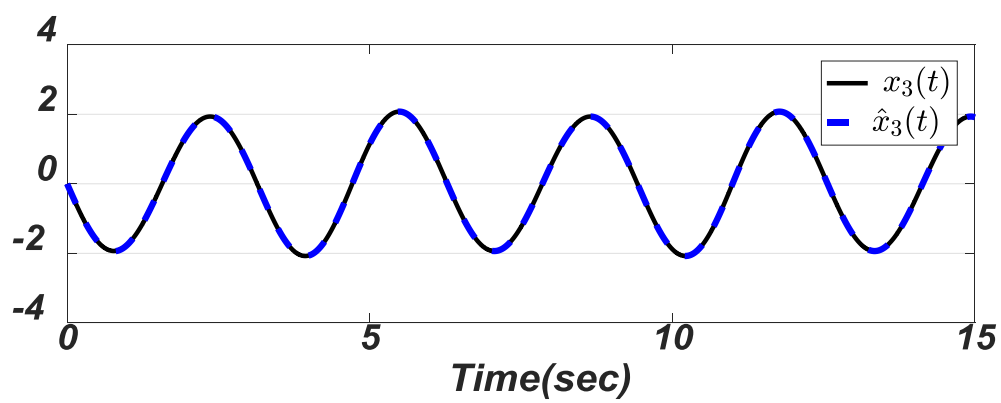
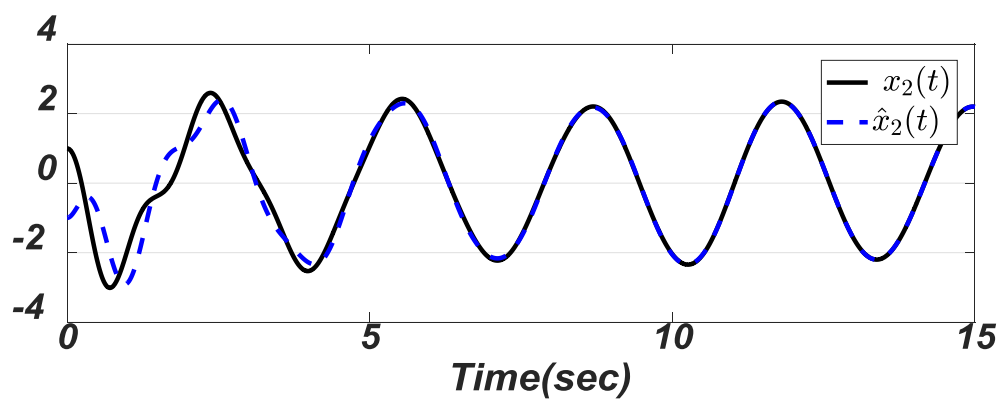
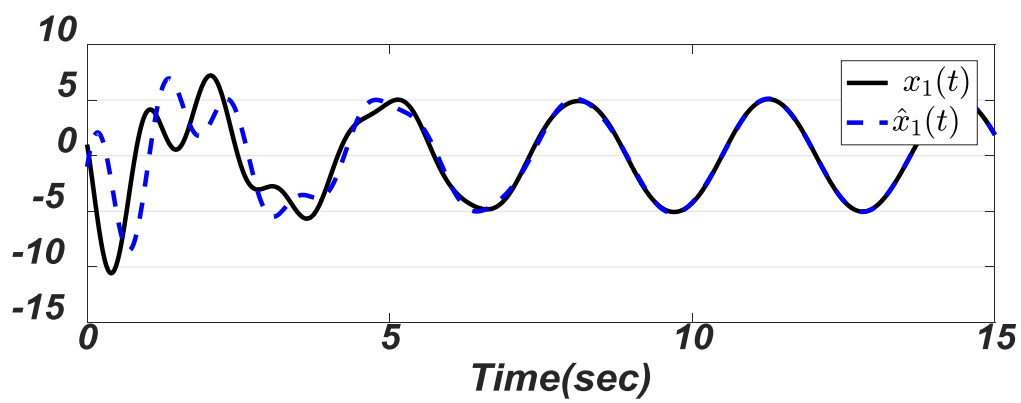
$$x(0) = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ و } \xi(0) = [-1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ لازم به ذکر است}$$

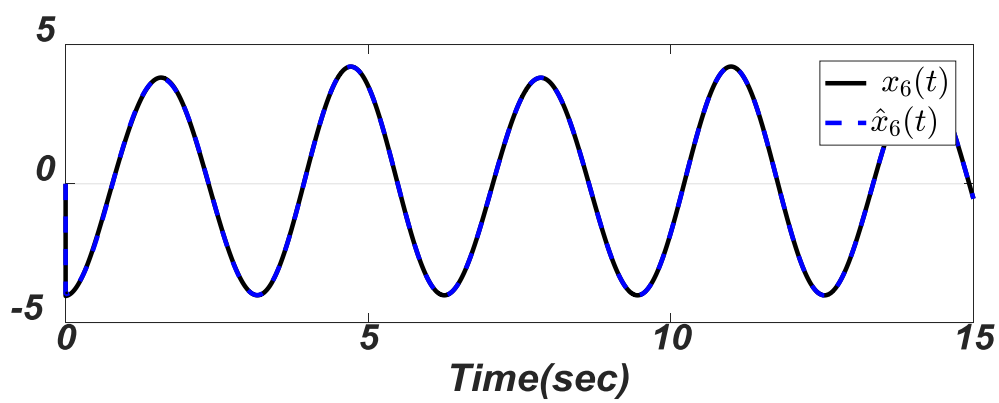
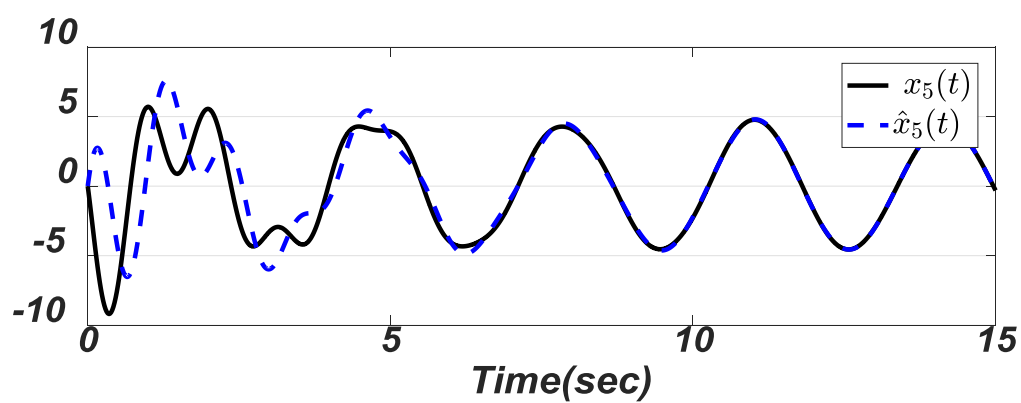
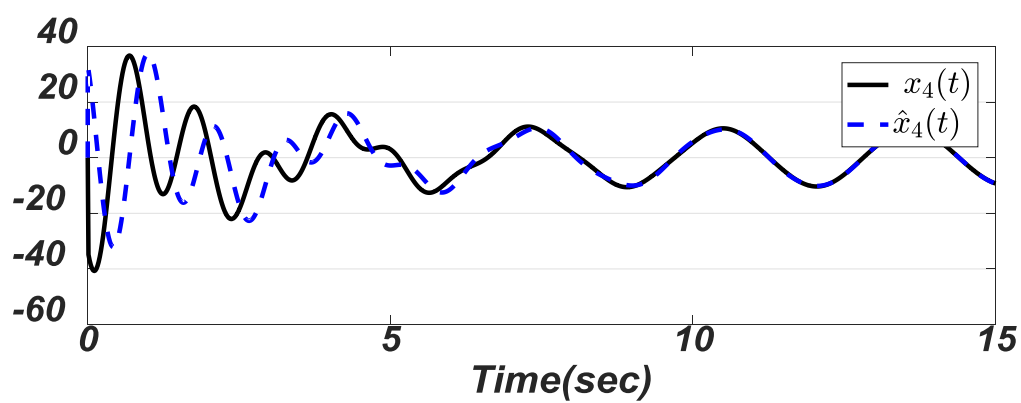
که حالت‌های سیستم در این مثال $x_1(t), x_2(t)$ و $x_3(t)$ هستند. همچنین $x_4(t), x_5(t), x_6(t)$ به

ترتیب، مشتق متغیرهای حالت‌های سیستم هستند که به بردار حالت اضافه شده‌اند. خطای تخمین را

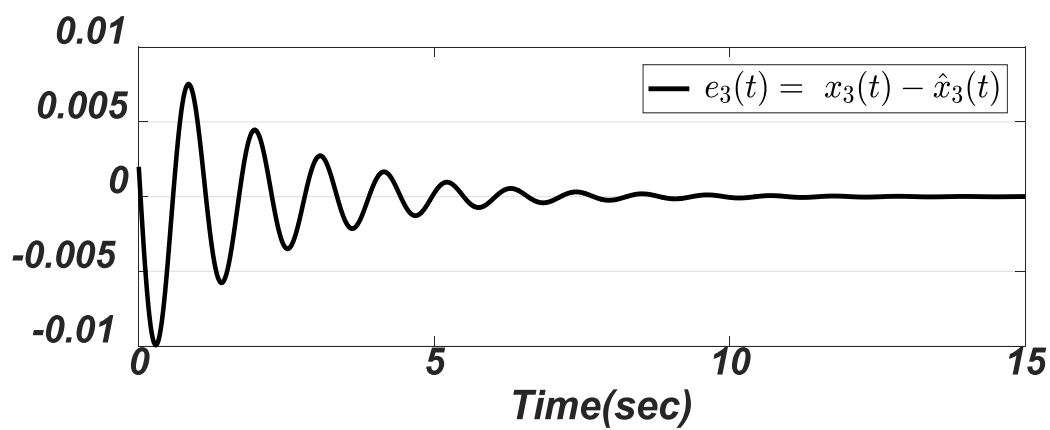
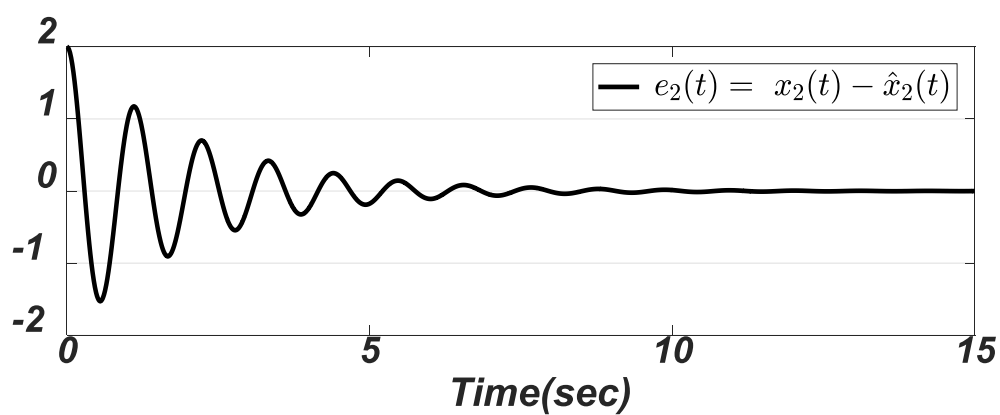
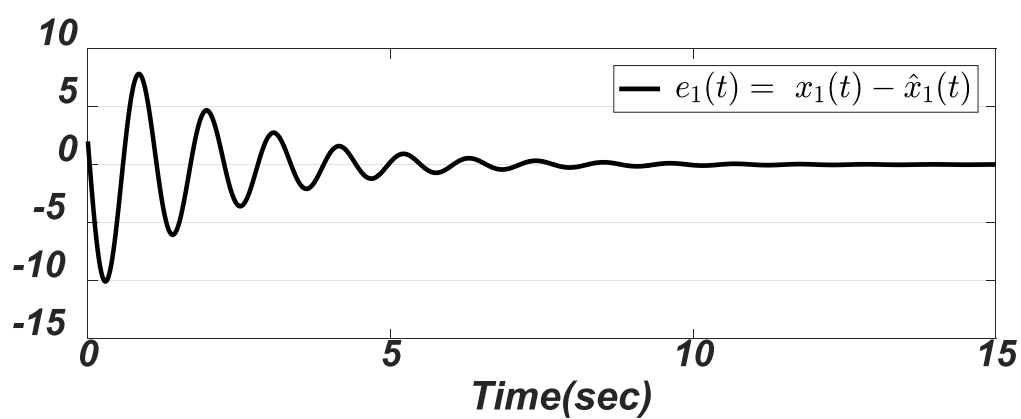
می‌توانیم در شکل (۴-۵) مشاهده کنیم. همان‌طور که دیده می‌شود تخمین حالت‌ها به مقدار واقعی

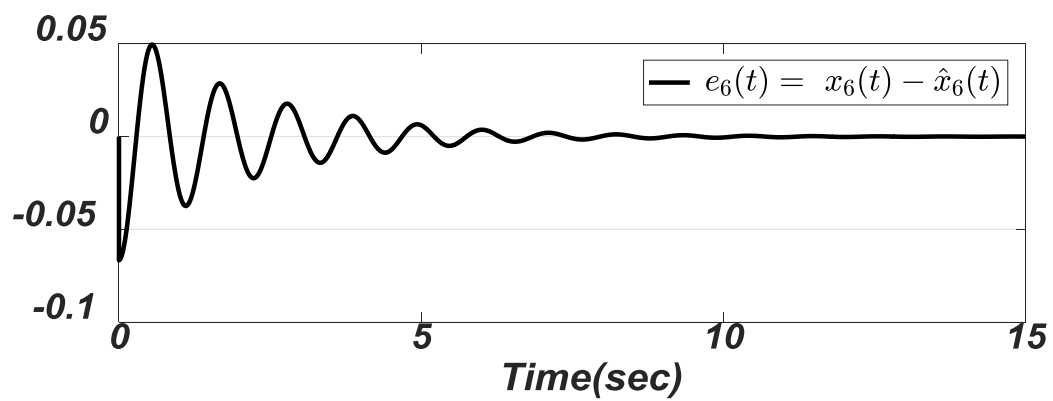
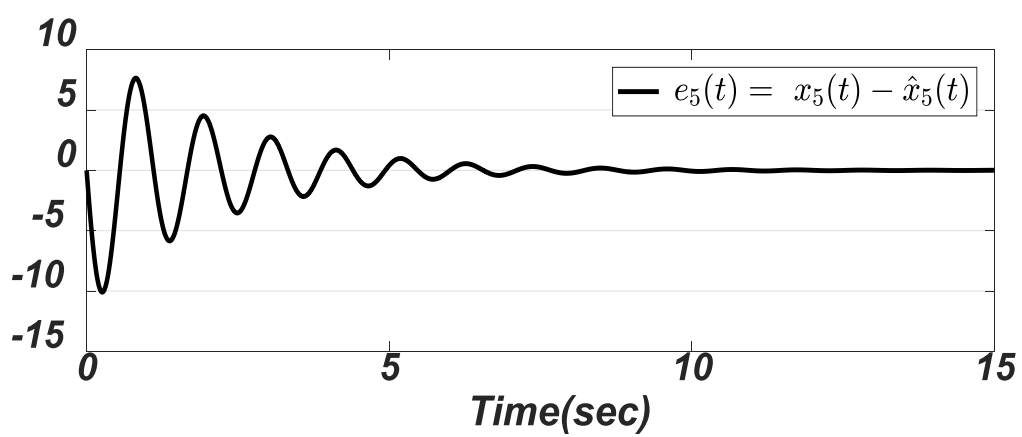
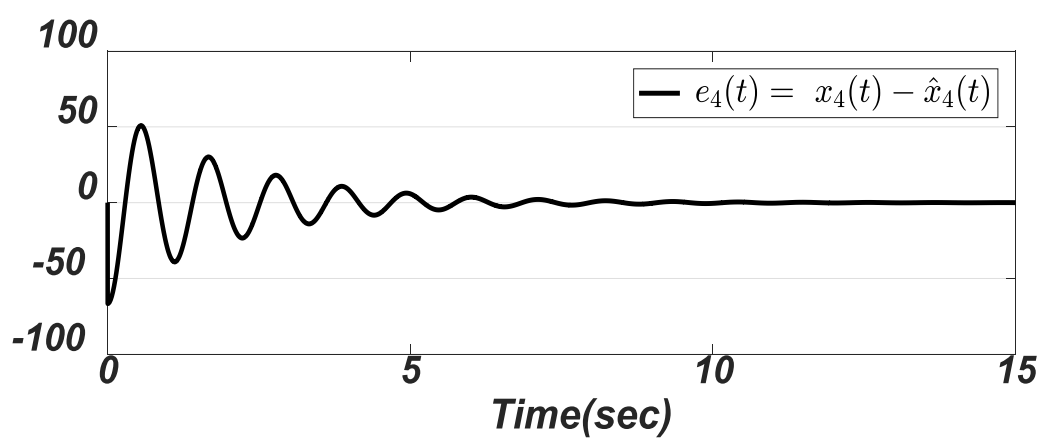
متغیرهای حالت همگرا شده‌اند.





شکل (۴-۴): مقایسه بین مقادیر واقعی و تخمین حالت‌های مثال





شکل (۴-۵): خطای تخمین رویتگر در مثال (۴-۲)

۴-۱-۶ جمع بندی

در این بخش یک روش طراحی رؤیتگر برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین نامعین ارائه شد. مزیت روش ارائه شده این است که هر سه ماتریس مشتق، سیستم و ورودی می‌تواند دارای عدم قطعیت باشد. همچنین در این روش علاوه بر حالت‌های سیستم، مشتق آن‌ها نیز تخمین زده می‌شود. ابتدا با انتخاب ماتریس‌های ثابت و معلوم مناسب، نامعینی را از روی ماتریس مشتق به ماتریس‌های سیستم و ورودی منتقل کردیم. سپس با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب، و تبدیل شرط همگرایی رؤیتگر به نامعادلات ماتریسی خطی و حل آن‌ها، ضرایب رؤیتگر تناسبی را به دست آوردیم. در انتها با حل دو مثال، عملکرد رؤیتگر ارائه شده را بررسی کردیم.

۴-۲ طراحی رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته مقاوم برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر

بازمان تکین نامعین در حضور اغتشاش

در این بخش به طراحی رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته برای سیستم تکین با نامعینی خواهیم پرداخت که عملکرد بهتری در مقایسه با رؤیتگر تناسبی و تناسبی-انتگرالی دارد. در این روش نامعینی پارامتری می‌تواند در ماتریس‌های مشتق، ماتریس سیستم و ماتریس ورودی باشد. در بیشتر رؤیتگرهای مشابه فرض بر این قرار داده شده که سیستم نامعین باشد، ولی در این روش ارائه شده، سیستم می‌تواند نامعین یا دارای پارامترهای ثابت نامعلوم باشد. ویژگی دیگر این روش ارائه شده برای طراحی رؤیتگر این است که علاوه بر تخمین حالت‌های سیستم، می‌تواند مشتق متغیرهای حالت را نیز تخمین بزند که در بسیاری از کاربردها می‌تواند مفید باشد.

۴-۲-۱ فرمول بندی مسئله

سیستم تکین خطی و غیر متغیر بازمان زیر را در حضور اغتشاش در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} E^* \dot{\gamma}(t) = A^* \gamma(t) + B^* u(t) + D_w^* w(t) \\ \gamma(t) = C_1^* \gamma(t) + C_2^* \dot{\gamma}(t) \end{cases}, \quad (46-4)$$

که در آن $\gamma(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ بردار نیمه حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی معلوم، $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ بردار ورودی اغتشاش، $\gamma(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی قابل اندازه گیری هستند. $A^* \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ ، $E^* \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ و $B^* \in \mathbb{R}^{n_p \times m}$ ماتریس های نامعین و $C_1^* \in \mathbb{R}^{p \times n_p}$ ، $C_2^* \in \mathbb{R}^{p \times n_p}$ و $D_w^* \in \mathbb{R}^{n_p \times n_w}$ ماتریس های ثابت و معلوم هستند. فرض شده است که ماتریس مربعی E^* تکین باشد، یعنی $\rho(E^*) \leq n_p$. همچنین فرض می شود که $\det(sE^* - A^*) \neq 0$ که به این معنی است که سیستم (46-4) منظم است یعنی برای آن یک پاسخ منحصر به فرد وجود دارد.

ماتریس های $A^* = A_1 + \Delta A^*$ ، $E^* = E_1 + \Delta E^*$ و $B^* = B_1 + \Delta B^*$ را در نظر بگیرید که در آن ها $E_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ ، $A_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ و $B_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times m}$ ماتریس های ثابت، حقیقی، معلوم و دلخواه هستند و ΔA^* ، ΔE^* و ΔB^* نامعینی های محدود ساختاریافته هستند.

بنابراین سیستم (46-4) می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\begin{cases} (E_1 + \Delta E^*) \dot{\gamma}(t) = (A_1 + \Delta A^*) \gamma(t) + (B_1 + \Delta B^*) u(t) + D_w^* w(t) \\ \gamma(t) = C_1^* \gamma(t) + C_2^* \dot{\gamma}(t) \end{cases}, \quad (47-4)$$

و با بازنویسی آن داریم

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I_{n_p} \\ A_1 & -E_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta A^* & -\Delta E^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} u(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta B^* \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ D_w^* \end{bmatrix} w(t), \\ \gamma(t) &= [C_1^* \quad C_2^*] \begin{bmatrix} \gamma \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (48-4)$$

و مدل فشرده آن به شکل زیر خواهد بود

$$\begin{cases} E \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + D_w w(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (49-4)$$

به طوری که $E = \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_p} \\ A_1 & -E_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

و $D_w = \begin{bmatrix} 0 \\ D_w^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ و $C = [C_1^* \ C_2^*] \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ماتریس‌های معلوم و ثابت هستند،

و $\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta A^* & -\Delta E^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $\Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta B^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ماتریس‌های نامعلوم هستند و

$x(t) = [\gamma^T(t) \ \dot{\gamma}^T(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت جدید است که باید توسط رؤینگر

تخمین زده شود. اگر سیستم (۴-۴۶) منظم باشد، به راحتی می‌توان نشان داد که سیستم (۴-۴۹) نیز

منظم است زیرا

$$\det(sE - (A + \Delta A)) = \det\left(s \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I_{n_p} \\ A^* & -E^* \end{bmatrix}\right) = \det(sE^* - A^*) \neq 0.$$

فرض ۴-۴ فرض شده است ΔA و ΔB نامعینی‌های محدود ساختاریافته باشند. در [۶۳] نشان

داده شده است که نامعینی‌های ΔA و ΔB می‌توانند به صورت $\Delta A = M_A \cdot \Lambda_A \cdot N_A$ و $\Delta B =$

$M_B \cdot \Lambda_B \cdot N_B$ در نظر گرفته شوند. اکنون اگر $\Lambda_A = I_n$ و $\Lambda_B = I_n$ باشند، آنگاه داریم

$$\begin{cases} \Delta A \leq M_A \cdot N_A \\ \Delta B \leq M_B \cdot N_B \end{cases} \quad (۵۰-۴)$$

اکنون این امکان وجود دارد که با استفاده از نامعادلات بالا، ماتریس‌های N_A و N_B را به گونه‌ای به

دست آوریم که $M_A = M_B = M_\Lambda$ باشد. بنابراین نامعینی‌های محدود ساختاریافته می‌توانند به شکل

زیر در نظر گرفته شوند.

$$\Delta A = M_\Lambda \cdot \Lambda_A \cdot N_A, \Delta B = M_\Lambda \cdot \Lambda_B \cdot N_B, \quad (۵۱-۴)$$

که در آن M_Λ ، N_A و N_B معلوم و $\Lambda_A^T \cdot \Lambda_A \leq I_n$ و $\Lambda_B^T \cdot \Lambda_B \leq I_n$ برقرار است.

فرض ۴-۵ فرض می‌شود که سیستم (۴-۴۹) آشکار پذیر باشد. یعنی

$$\rho \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+ \quad (۵۲-۴)$$

به طوری که $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط را نمایش می‌دهد و $\mathbb{C}^+ = \{s \in \mathbb{C}, \text{Re}(s) \geq 0\}$ نمایش‌دهنده مجموعه اعداد مختلط نیم صفحه سمت راست است.

فرض ۴-۶) فرض کنید که سیستم (۴-۴۹) رؤیت پذیر ضربه باشد، و یا معادل آن

$$\rho \begin{bmatrix} E \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix} = 2n_p = n, \quad (۴-۵۳)$$

که در آن ماتریس با رتبه کامل سطری $\Pi \in \mathbb{R}^{r \times n}$ به گونه‌ای تعیین می‌شود که $\Pi \begin{bmatrix} E & M_\Lambda & D_w \end{bmatrix} = 0$ برقرار باشد و در آن $r = n - \rho \begin{bmatrix} E & M_\Lambda & D_w \end{bmatrix}$.
با ضرب کردن طرفین معادله اول (۴-۴۹) در Π داریم

$$\Pi(E\dot{x}(t) - \Delta Ax(t) - \Delta Bu(t) - D_w w(t)) = \Pi(Ax(t) + Bu(t))$$

اکنون با جاگذاری ΔA و ΔB از (۴-۵۱) در بالا داریم

$$\Pi(E\dot{x}(t) - M_\Lambda(\Lambda_A N_A x(t) + \Lambda_B N_B u(t)) - D_w w(t)) = \Pi Ax(t) + \Pi Bu(t)$$

که می‌توانیم آن را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$\Pi \begin{bmatrix} E & M_\Lambda & D_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ -(\Lambda_A N_A x(t) + \Lambda_B N_B u(t)) \\ -w(t) \end{bmatrix} = \Pi Ax(t) + \Pi Bu(t)$$

بر اساس تعریفی که برای Π ارائه کردیم، یعنی $\Pi \begin{bmatrix} E & M_\Lambda & D_w \end{bmatrix} = 0$ ، سمت چپ معادله بالا برابر صفر خواهد شد و نتیجه خواهد داد

$$\Pi Ax(t) = -\Pi Bu(t). \quad (۴-۵۴)$$

این رابطه برای تعیین پارامترهای رؤیتگر در ادامه مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۴-۲-۲) طراحی رؤیتگر

رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته زیر را برای سیستم (۴-۴۹) در نظر بگیرید

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + H\theta(t) + F \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t),$$

$$\dot{\theta}(t) = S\zeta(t) + L\theta(t) + M \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad (55-4)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Q \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

به طوری که $\zeta(t) \in \mathbb{R}^q$ بردار حالت رُیتگر، $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ تخمین بردار حالت $x(t)$ و $N \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ، $M \in \mathbb{R}^{q \times (r+p)}$ ، $L \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ، $S \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ، $J \in \mathbb{R}^{q \times m}$ ، $F \in \mathbb{R}^{q \times (r+p)}$ ، $H \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ، $P \in \mathbb{R}^{n \times q}$ و $Q \in \mathbb{R}^{n \times (r+p)}$ ماتریس های نامعلوم هستند که باید به گونه ای تعیین شوند تا خطای تخمین رُیتگر به سمت صفر میل کند، یعنی $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$.

رُیتگر (55-4) یک رُیتگر دینامیکی عمومی است که رُیتگرهای تناسبی و تناسبی -انتگرالی حالت خاصی از آن هستند. به عنوان مثال اگر $H = 0, S = 0, L = 0$ و $M = 0$ در نظر گرفته شود آنگاه (55-4) به یک رُیتگر تناسبی تبدیل خواهد شد

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + F \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t), \quad (56-4)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Q \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

و اگر در آن $L = 0, S = -CP$ و $M = -CQ + [0 \quad I]$ جایگزین شود، رُیتگر تناسبی -

انتگرالی به دست خواهد آمد به صورت زیر

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + H\theta(t) + F \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t),$$

$$\dot{\theta}(t) = y(t) - C\hat{x}(t), \quad (57-4)$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Q \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

قضیه زیر شرط وجود و پایداری رُیتگر (55-4) را ارائه می کند.

قضیه 4-3) با فرض اینکه ΔA و ΔB نامعینی های محدود ساختاریافته باشند و سیستم

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + D_w w(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases},$$

آشکارپذیر باشد، آنگاه معادلات دینامیکی

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + H\theta(t) + F \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t),$$

$$\dot{\theta}(t) = S\zeta(t) + L\theta(t) + M \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Q \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

یک رؤیتگر مجانبی برای سیستم فوق است، یعنی $\hat{x}(t)$ به طور مجانبی به $x(t)$ میل می کند و یا

$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ خواهد شد، اگر ماتریس مناسب $T \in \mathbb{R}^{q \times n}$ وجود داشته باشد به گونه ای که

شرایط زیر برآورده شود

$$NTE - TA + F \begin{bmatrix} \Pi A \\ C \end{bmatrix} = 0 \quad (۱)$$

$$J - TB = 0 \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix} = I_n \quad (۳)$$

$$(۴) \quad \text{با در نظر گرفتن } \varepsilon(t) = \xi(t) - TEx(t) \text{ و } \mathbb{w} = [u(t)^T \quad w(t)^T]^T, \text{ معادله}$$

$$\dot{\psi}(t) = \begin{bmatrix} N & H \\ S & L \end{bmatrix} \psi(t) + \begin{bmatrix} -T\Delta A \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -T\Delta B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -TD_w \\ 0 \end{bmatrix} w(t),$$

پایدار مقاوم باشد و شرط $\|G_{\varepsilon\mathbb{w}}\|_{\infty} < \lambda$ را برآورده کند. به طوری که

$G_{\varepsilon\mathbb{w}} = [G_{\varepsilon u} \quad G_{\varepsilon w}]$ تابع انتقال از ورودیهای $u(t), w(t)$ به سیگنال خطای $\varepsilon(t)$ تعریف شده است و

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}, \lambda > 0 \text{ می باشد.}$$

اثبات:

سیگنال خطا را به صورت $\varepsilon(t) = \zeta(t) - TEx(t)$ در نظر بگیرید به طوری که $T \in \mathbb{R}^{q \times n}$ یک

ماتریس ثابت طراحی است. با مشتق گیری از رابطه سیگنال خطا و در نظر گرفتن معادلات (۴-۴۹) و

(۴-۵۵) داریم

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}(t) &= N\zeta(t) + H\partial(t) + F \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t) \\
&\quad - T((A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + D_w w(t)) \\
&= N(\varepsilon(t) + TEx(t)) + H\partial(t) + F \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t) \\
&\quad - T((A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + D_w w(t)).
\end{aligned}$$

با استفاده از (۵۴-۴) در رابطه فوق خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}(t) &= N\varepsilon(t) + H\partial(t) + \left(NTE - TA + F \begin{bmatrix} \Pi A \\ C \end{bmatrix} \right) x(t) \\
&\quad + (J - TB)u(t) - T\Delta Ax(t) - T\Delta Bu(t) - TD_w w(t),
\end{aligned} \tag{۵۸-۴}$$

اکنون اگر شرط (۱) و (۲) از قضیه (۳-۴) برقرار باشد، داریم

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + H\partial(t) - T\Delta A.x(t) - T\Delta B.u(t) - TD_w w(t), \tag{۵۹-۴}$$

با اعمال (۵۴-۴) به معادله سطر دوم رؤیتگر (۵۵-۴) رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\dot{\partial}(t) &= S(\varepsilon(t) + TEx(t)) + L\partial(t) + M \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\
&= S\varepsilon(t) + L\partial(t) + \left(M \begin{bmatrix} \Pi A \\ C \end{bmatrix} + STE \right) x(t),
\end{aligned} \tag{۶۰-۴}$$

و اکنون اگر شرط (۳) برقرار باشد، معادله بالا به صورت زیر خواهد شد

$$\dot{\partial}(t) = S\varepsilon(t) + L\partial(t), \tag{۶۱-۴}$$

با به کارگیری (۵۹-۴) و (۶۱-۴) به معادله دینامیکی زیر خواهید رسید

$$\dot{\psi}(t) = \begin{bmatrix} N & H \\ S & L \end{bmatrix} \psi(t) + \begin{bmatrix} -T\Delta A \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -T\Delta B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -TD_w \\ 0 \end{bmatrix} w(t), \tag{۶۲-۴}$$

که در آن $\psi(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \partial(t) \end{bmatrix}$ است.

حال اگر (۶۲-۴) پایدار مقاوم باشد (یعنی شرط (۵) برقرار باشد) آنگاه داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \zeta(t) = TEx(t), \quad \forall t \rightarrow \infty \tag{۶۳-۴}$$

و با استفاده از این معادله می‌توانیم داشته باشیم

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) - P\zeta(t) - Q \begin{bmatrix} -\Pi B u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \right) = \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) - P\zeta(t) - Q \begin{bmatrix} \Pi A \\ C \end{bmatrix} x(t) \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) - PTE x(t) - Q \begin{bmatrix} \Pi A \\ C \end{bmatrix} x(t) \right) = \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) - [P \quad Q] \begin{bmatrix} TE \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix} x(t) \right)\end{aligned}$$

که تحت شرط (۴) خطای تخمین رؤیتگر به صورت زیر برابر صفر خواهد شد

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) - [P \quad Q] \begin{bmatrix} TE \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix} x(t) \right) = 0. \quad (۴-۶۴)$$

و اثبات تمام است.

روال طراحی رؤیتگر (۴-۵۵) به این صورت خواهد بود. ابتدا بر اساس شرطهای (۱) تا (۴) از قضیه فوق، یک حل پارامتری برای ماتریس‌های نامعلوم Q, P, M, S, F, N, T و J به دست خواهیم آورد. سپس بر اساس اینکه معادله دینامیکی (۴-۶۲) باید پایدار مقاوم باشد، باقیمانده ماتریس‌های نامعلوم به دست خواهند آمد.

۴-۲-۳ محاسبه پارامتری ماتریس‌های رؤیتگر

در این بخش می‌خواهیم بر اساس شرطهای قضیه قبل، یک حل پارامتری برای ماتریس‌های رؤیتگر به دست آوریم.

قضیه ۴-۴) [۶۲] ماتریس با رتبه کامل سطری $R \in \mathbb{R}^{q \times n}$ را در نظر بگیرید که ماتریس

$$\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix}$$

را به ماتریس با رتبه کامل ستونی تبدیل می‌کند. آنگاه تحت فرض (۴-۶) و شرطهای (۱)

تا (۴) از قضیه (۴-۳) شکل عمومی ماتریس‌های نامعلوم Q, P, M, S, F, N, T و J در رؤیتگر (۴-۵۵) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$T = T_1 - Z_1 T_2$$

$$N = N_1 - Z_1 N_2 - Y_1 N_3$$

$$F = F_1 - Z_1 F_2 - Y_1 F_3$$

$$S = -Y_2 N_3$$

$$M = -Y_2 F_3$$

$$P = P_1 - Y_3 N_3$$

$$Q = Q_1 - Y_3 F_3$$

اثبات: شرط‌های (۳) و (۴) از قضیه (۳-۴) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} S & M \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \quad (۴-۶۵)$$

شرط لازم و کافی برای اینکه معادله فوق دارای یک جواب باشد این است که ماتریس $\begin{bmatrix} TE \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix}$ در

فضای رنج $\begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}$ باشد، و یا معدل آن

$$\rho \begin{bmatrix} TE \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} TE \\ \Pi A \\ C \\ I_n \end{bmatrix} = n \quad (۴-۶۶)$$

اکنون چون $\begin{bmatrix} TE \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix}$ دارای رتبه کامل ستونی است، ماتریس‌های $T \in \mathbb{R}^{q \times n}$ و $K \in \mathbb{R}^{q \times (r+p)}$

می‌توانند وجود داشته باشند به گونه‌ای که

$$TE + K \begin{bmatrix} \Pi A \\ C \end{bmatrix} = R$$

آنگاه

$$[T \quad K] \Omega = R \quad (۴-۶۷)$$

به طوری که $\Omega = \begin{bmatrix} E \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix}$ بر اساس فرض (۴-۶) رتبه کامل ستونی دارد. بنابراین بر اساس لم (۴-۱)

معادله فوق به صورت زیر دارای یک جواب است

$$[T \quad K] = R\Omega^\dagger - Z_1(I_{n+r+p} - \Omega\Omega^\dagger) \quad (۴-۶۸)$$

به طوری که $Z_1 \in \mathbb{R}^{q \times (n+r+p)}$ یک ماتریس دلخواه است. ماتریس های زیر را تعریف می کنیم

$$T_1 = R\Omega^\dagger \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = (I_{n+r+p} - \Omega\Omega^\dagger) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴-۶۹)$$

و

$$K_1 = R\Omega^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_{r+p} \end{bmatrix}, K_2 = (I_{n+r+p} - \Omega\Omega^\dagger) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{r+p} \end{bmatrix} \quad (۴-۷۰)$$

با استفاده از این تعاریف فوق، ماتریس های T و K به صورت زیر به دست می آیند

$$T = T_1 - Z_1 T_2 \quad (۴-۷۱)$$

و

$$K = K_1 - Z_1 K_2 \quad (۴-۷۲)$$

و با استفاده از شرط (۲) از قضیه (۴-۳) داریم

$$J = TB \quad (۴-۷۳)$$

با جاگذاری $TE = R - K \begin{bmatrix} \Pi A \\ C \end{bmatrix}$ در شرط (۱) قضیه (۴-۳) خواهیم داشت

$$N \left(R - K \begin{bmatrix} \Pi A \\ C \end{bmatrix} \right) + F \begin{bmatrix} \Pi A \\ C \end{bmatrix} = TA \Rightarrow NR + (F - NK) \begin{bmatrix} \Pi A \\ C \end{bmatrix} = TA$$

بنابراین داریم

$$[N \quad \tilde{K}] \begin{bmatrix} R \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix} = TA \Rightarrow [N \quad \tilde{K}] \Sigma = TA \quad (۷۴-۴)$$

به طوری که $\tilde{K} = F - NK$. اکنون با استفاده از لم (۱-۴) رابطه زیر را داریم

$$[N \quad \tilde{K}] = TA\Sigma^\dagger - Y_1(I_{q+r+p} - \Sigma\Sigma^\dagger) \quad (۷۵-۴)$$

به طوری که $\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix}$ یک ماتریس با رتبه کامل ستونی است و $Y_1 \in \mathbb{R}^{q \times (q+r+p)}$ یک ماتریس دلخواه است.

با بازنویسی (۷۵-۴) و استفاده از (۷۱-۴) نتیجه می دهد

$$[N \quad \tilde{K}] = T_1 A \Sigma^\dagger - Z_1 T_2 A \Sigma^\dagger - Y_1 (I_{q+r+p} - \Sigma \Sigma^\dagger)$$

آنگاه

$$N = N_1 - Z_1 N_2 - Y_1 N_3 \quad (۷۶-۴)$$

به طوری که

$$N_1 = T_1 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, N_2 = T_2 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, N_3 = (I_{q+r+p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۷۷-۴)$$

و

$$\tilde{K} = \tilde{K}_1 - Z_1 \tilde{K}_2 - Y_1 \tilde{K}_3 \quad (۷۸-۴)$$

که در آن

$$\tilde{K}_1 = T_1 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_{r+p} \end{bmatrix}, \tilde{K}_2 = T_2 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_{r+p} \end{bmatrix}, \tilde{K}_3 = (I_{q+r+p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{r+p} \end{bmatrix} \quad (۷۹-۴)$$

آنگاه F می تواند به صورت زیر محاسبه شود

$$F = \tilde{K} + NK = F_1 - Z_1 F_2 - Y_1 F_3 \quad (۸۰-۴)$$

که در آن

$$F_1 = T_1 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix}, F_2 = T_2 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix}, F_3 = (I_{q+r+p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix} \quad (۸۱-۴)$$

حال با استفاده از رابطه $TE = [I_q \quad -K] \begin{bmatrix} R \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \Pi A \\ C \end{bmatrix} = [0 \quad I_{r+p}] \begin{bmatrix} R \\ \Pi A \\ C \end{bmatrix}$ معادله (۴-۶۵)

می توان به شکل زیر نوشته شود

$$\begin{bmatrix} S & M \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & -K \\ 0 & I_{r+p} \end{bmatrix} \Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}$$

توجه کنید که $\begin{bmatrix} I_q & -K \\ 0 & I_{r+p} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_q & K \\ 0 & I_{r+p} \end{bmatrix}$ است و Σ رتبه کامل ستونی دارد. بنابراین

$$\begin{bmatrix} S & M \\ P & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \Sigma^\dagger - \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} (I_{q+r+p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} I_q & K \\ 0 & I_{r+p} \end{bmatrix} \quad (۸۲-۴)$$

به طوری که $Y_2 \in \mathbb{R}^{q \times (q+r+p)}$ و $Y_3 \in \mathbb{R}^{n \times (q+r+p)}$ ماتریس های دلخواه هستند. در نتیجه

ماتریس های Q, P, M, S می توانند به صورت زیر مشخص شوند.

$$S = -Y_2 (I_{q+r+p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$S = -Y_2 N_3 \quad (۸۳-۴)$$

$$M = -Y_2 (I_{q+r+p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$M = -Y_2 F_3 \quad (۸۴-۴)$$

$$P = \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} - Y_3 (I_{q+r+p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P = P_1 - Y_3 N_3 \quad (۸۵-۴)$$

$$Q = \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix} - Y_3 (I_{q+r+p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

(۸۶-۴)

$$Q = Q_1 - Y_3 F_3$$

اکنون تمام ماتریس‌های رؤیتگر به صورت پارامتری بر حسب چهار ضریب دلخواه Y_2, Y_1, Z_1 و Y_3 به دست آمده‌اند. برای ساده شدن روابط و با توجه به اینکه Z_1 و Y_3 تأثیری در روابط بعدی ندارند آن‌ها را برابر صفر فرض می‌کنیم یعنی $Y_3 = 0, Z_1 = 0$ و ماتریس‌های Y_2, Y_1 را به گونه‌ای به دست می‌آوریم تا معادله دینامیکی موجود در شرط (۵) از قضیه (۳-۴) پایدار مقاوم باشد.

قضیه زیر شرط لازم برای وجود و پایدار مقاوم بودن رؤیتگر (۴-۵۵) را ارائه می‌کند. پیش از آن توجه کنید که (۴-۶۲) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

(۸۷-۴)

$$\dot{\psi}(t) = \mathbb{A}\psi(t) + \mathbb{T}\Delta Ax(t) + \mathbb{T}\Delta Bu(t) + \mathbb{T}D_w w(t),$$

به طوری که $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} N & H \\ S & L \end{bmatrix}$ و $\mathbb{T} = \begin{bmatrix} -T \\ 0 \end{bmatrix}$. همچنین با استفاده از (۴-۷۶) و (۴-۸۳) داریم

(۸۸-۴)

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 - \mathbb{Y}\mathbb{A}_2,$$

که در آن $\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ و $\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & H \\ Y_2 & L \end{bmatrix}$ تعریف شده است.

ماتریس $\mathbb{Y}$ نامعلوم است و برای به دست آوردن آن لازم است که دو ضریب باقیمانده از رؤیتگر H و L و همچنین دو ضریب دلخواه Y_1 و Y_2 را به دست آوریم. قضیه زیر به ما کمک می‌کند تا ماتریس نامعلوم $\mathbb{Y}$ را تعیین کنیم.

قضیه ۴-۵ با فرض اینکه سیستم

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + D_w w(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases},$$

آشکارپذیر و رؤیت پذیر ضربه باشد و ΔA و ΔB نامعینی‌های محدود ساختاریافته باشند، آنگاه معادلات دینامیکی

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + H\partial(t) + F \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Ju(t),$$

$$\dot{\partial}(t) = S\zeta(t) + L\partial(t) + M \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) + Q \begin{bmatrix} -\Pi Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

حالت‌های سیستم فوق را تخمین می‌زنند اگر اسکالرهای $\alpha_4 > 0, \alpha_3 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 > 0$ و ماتریس‌های ناویژه $\mathbb{P}_2$ و $\mathbb{P}_1$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که نامعادلات ماتریسی خطی زیر برقرار باشد

$$E^T \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1^T E \geq 0, \quad (۸۹-۴)$$

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_2^T > 0, \quad (۹۰-۴)$$

$$\mathcal{C}^{T^\perp} \cdot \mathcal{D} \cdot \mathcal{C}^{T^\perp T} < 0, \quad (۹۱-۴)$$

$$\mathcal{B}^\perp \cdot \mathcal{D} \cdot \mathcal{B}^{\perp T} < 0, \quad (۹۲-۴)$$

به‌طوری‌که

$\mathcal{D}$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & 0 & 0 & 0 & \mathbb{P}_1^T B & \mathbb{P}_1^T M_\Lambda & \mathbb{P}_1^T M_\Lambda & N_A^T & \mathbb{P}_1^T D_w \\ 0 & \mathcal{D}_{22} & \mathbb{P}_2^T T M_\Lambda & \mathbb{P}_2^T T M_\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{P}_2^T T D_w \\ 0 & M_\Lambda^T T^T \mathbb{P}_2 & -\alpha_3 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_\Lambda^T T^T \mathbb{P}_2 & 0 & -\alpha_4 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^T \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{D}_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_\Lambda^T \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 I & 0 & 0 & 0 \\ M_\Lambda^T \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 I & 0 & 0 \\ N_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\alpha_1 + \alpha_3)^{-1} I & 0 \\ D_w^T \mathbb{P}_1 & D_w^T T^T \mathbb{P}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_{11} = A^T \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_1^T A, \quad \mathcal{D}_{22} = A_1^T \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_2 A_1, \quad \mathcal{D}_{55} = -\lambda^2 I + (\alpha_2 + \alpha_4) N_B^T N_B,$$

۹

$$\cdot \mathcal{B} = [0 \quad -I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathcal{C} = [0 \quad A_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

اثبات: تابع لیاپانوف $V(t) = x^T E^T \mathbb{P}_1 x + \psi^T \mathbb{P}_2 \psi$ را در نظر بگیرید که در آن $E^T \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2^T E \geq 0$ و $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_2^T > 0$ است.

با توجه به روابط (۴-۴۹) و (۴-۶۲) و با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف $V(t)$ نسبت به زمان، داریم

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{x}^T E^T \mathbb{P}_1 x + x^T E^T \mathbb{P}_1 \dot{x} + \dot{\psi}^T \mathbb{P}_2 \psi + \psi^T \mathbb{P}_2 \dot{\psi} \\ &= x^T (A^T \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_1^T A) x + 2x^T \mathbb{P}_1^T \Delta A x + 2x^T \mathbb{P}_1^T B u + 2x^T \mathbb{P}_1^T \Delta B u \\ &\quad + 2x^T \mathbb{P}_1^T D_w w + \psi^T (A^T \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_2^T A) \psi + 2\psi^T \mathbb{P}_2^T \Delta A x + 2\psi^T \mathbb{P}_2^T \Delta B u \\ &\quad + 2\psi^T \mathbb{P}_2^T D_w w,\end{aligned}$$

با تابع لیاپانوف تعریف‌شده $V(t)$ ، معادله (۴-۶۲) پایدار مجانبی است اگر $\dot{V}(t) < 0$ باشد.

به‌کارگیری فرض (۴-۴) و لم (۴-۲) می‌تواند مشتق تابع لیاپانوف را به‌صورت زیر برای ما بازنویسی کند

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) < 0 &\Leftrightarrow x^T (A^T \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_1^T A) x + 2x^T \mathbb{P}_1^T \Delta A x + 2x^T \mathbb{P}_1^T B u + 2x^T \mathbb{P}_1^T \Delta B u \\ &\quad + \psi^T (A^T \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_2^T A) \psi - 2\psi^T \mathbb{P}_2^T \Delta A x - 2\psi^T \mathbb{P}_2^T \Delta B u < 0 \\ &\Leftrightarrow x^T (A^T \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_1^T A) x + \psi^T (A^T \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_2^T A) \psi + 2x^T \mathbb{P}_1^T B u \\ &\quad + 2x^T \mathbb{P}_1^T D_w w + 2\psi^T \mathbb{P}_2^T D_w w + (\alpha_1^{-1} x^T \mathbb{P}_1^T M_\Lambda M_\Lambda^T \mathbb{P}_1 x + \alpha_1 x^T N_A^T N_A x) \\ &\quad + (\alpha_3^{-1} \psi^T \mathbb{P}_2^T T M_\Lambda M_\Lambda^T T^T \mathbb{P}_2 \psi + \alpha_3 x^T N_A^T N_A x) \\ &\quad + (\alpha_2^{-1} x^T \mathbb{P}_1^T M_\Lambda M_\Lambda^T \mathbb{P}_1 x + \alpha_2 u^T N_B^T N_B u) \\ &\quad + (\alpha_4^{-1} \psi^T \mathbb{P}_2^T T M_\Lambda M_\Lambda^T T^T \mathbb{P}_2 \psi + \alpha_4 u^T N_B^T N_B u) < 0.\end{aligned}$$

و با استفاده از لم (۴-۴) داریم

$$[x^T \quad \psi^T \quad u^T \quad w^T] \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \mathbb{P}_1^T B & \mathbb{P}_1^T D_w \\ 0 & \Phi_2 & 0 & \mathbb{P}_2^T D_w \\ B^T \mathbb{P}_1 & 0 & -\lambda^2 I + (\alpha_2 + \alpha_4) N_B^T N_B & 0 \\ D_w^T \mathbb{P}_1 & D_w^T T^T \mathbb{P}_2 & 0 & -\lambda^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \psi \\ u \\ w \end{bmatrix} < 0, \quad (۹۳-۴)$$

به‌طوری‌که

$$\Phi_1 = A^T \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_1^T A + \alpha_1^{-1} \mathbb{P}_1^T M_\Lambda M_\Lambda^T \mathbb{P}_1 + \alpha_2^{-1} \mathbb{P}_1^T M_\Lambda M_\Lambda^T \mathbb{P}_1 + (\alpha_1 + \alpha_3) N_A^T N_A, \quad (۹۴-۴)$$

$$\Phi_2 = A^T \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_2^T A + \alpha_3^{-1} \mathbb{P}_2^T T M_\Lambda M_\Lambda^T T^T \mathbb{P}_2 + \alpha_4^{-1} \mathbb{P}_2^T T M_\Lambda M_\Lambda^T T^T \mathbb{P}_2, \quad (۹۵-۴)$$

برای پایدار بودن سیستم با روش لیاپانوف لازم است شرط زیر برقرار باشد

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \mathbb{P}_1^T B & \mathbb{P}_1^T D_w \\ 0 & \Phi_2 & 0 & \mathbb{P}_2^T D_w \\ B^T \mathbb{P}_1 & 0 & -\lambda^2 I + (\alpha_2 + \alpha_4) N_B^T N_B & 0 \\ D_w^T \mathbb{P}_1 & D_w^T T^T \mathbb{P}_2 & 0 & -\lambda^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (96-4)$$

استفاده از مکمل شر می تواند معادله فوق را به شکل نامعادله ماتریسی زیر تبدیل کند

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{P}_1^T B & \mathbb{P}_1^T M_\Lambda & \mathbb{P}_1^T M_\Lambda & N_A^T & \mathbb{P}_1^T D_w \\ 0 & \omega_2 & \mathbb{P}_2^T T M_\Lambda & \mathbb{P}_2^T T M_\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{P}_2^T D_w \\ 0 & M_\Lambda^T T^T \mathbb{P}_2 & -\alpha_3 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_\Lambda^T T^T \mathbb{P}_2 & 0 & -\alpha_4 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^T \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & 0 & \omega_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_\Lambda^T \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 I & 0 & 0 & 0 \\ M_\Lambda^T \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 I & 0 & 0 \\ N_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\alpha_1 + \alpha_3)^{-1} I & 0 \\ D_w^T \mathbb{P}_1 & D_w^T T^T \mathbb{P}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (97-4)$$

که در آن $\omega_1 = A^T \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_1^T A$ ، $\omega_2 = A^T \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_2^T A$ و $\omega_3 = -\lambda^2 I + (\alpha_2 + \alpha_4) N_B^T N_B$

رابطه A را از فرمول (4-88) در ω_2 جایگزین می کنیم و خواهیم داشت

$$\omega_2 = (A_1^T \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_2^T A_1) + (-I)(\mathbb{P}_2 Y)(A_2) + (A_2^T)(\mathbb{P}_2 Y)^T (-I),$$

اکنون (4-97) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$BXC + C^T X^T B^T + D < 0, \quad (98-4)$$

که در آن $C = [0 \quad A_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ و

$$B = [0 \quad -I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \text{ است}$$

D

$$= \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 & \mathbb{P}_1^T B & \mathbb{P}_1^T M_\Lambda & \mathbb{P}_1^T M_\Lambda & N_A^T & \mathbb{P}_1^T D_w \\ 0 & D_{22} & \mathbb{P}_2^T T M_\Lambda & \mathbb{P}_2^T T M_\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{P}_2^T D_w \\ 0 & M_\Lambda^T T^T \mathbb{P}_2 & -\alpha_3 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_\Lambda^T T^T \mathbb{P}_2 & 0 & -\alpha_4 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^T \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_\Lambda^T \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 I & 0 & 0 & 0 \\ M_\Lambda^T \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 I & 0 & 0 \\ N_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\alpha_1 + \alpha_3)^{-1} I & 0 \\ D_w^T \mathbb{P}_1 & D_w^T T^T \mathbb{P}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_{11} = A^T \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_1^T A, \quad \mathcal{D}_{22} = \mathbb{A}_1^T \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_2 \mathbb{A}_1, \quad \mathcal{D}_{55} = -\lambda^2 I + (\alpha_2 + \alpha_4) N_B^T N_B,$$

به طوری که $X = \mathbb{P}_2 \mathbb{Y}$. بر اساس لم (۳-۴) معادله (۹۸-۴) به صورت زیر می تواند باشد

$$\mathcal{C}^{T^\perp} \cdot \mathcal{D} \cdot \mathcal{C}^{T^\perp T} < 0,$$

$$\mathcal{B}^\perp \cdot \mathcal{D} \cdot \mathcal{B}^{\perp T} < 0,$$

که نامعادلات ماتریسی خطی ارائه شده در قضیه را به ما نشان می دهد و به این شکل اثبات این قضیه تمام می شود.

پس از تعیین ماتریس های $\mathbb{P}_1$ و $\mathbb{P}_2$ از نامعادلات ماتریسی خطی قضیه بالا، ماتریس مجهول $\mathbb{Y}$ با استفاده از (۱۶-۴) و رابطه زیر به دست می آید

$$\mathbb{Y} = \mathbb{P}_2^{-1} X, \quad (۹۹-۴)$$

بنابراین ماتریس های نامعلوم L, H و ماتریس های دلخواه Y_1 و Y_2 می توانند معلوم شوند. در نهایت با استفاده از اثبات قضیه (۴-۴) باقیمانده ضرایب رؤیتگر محاسبه خواهند شد و رؤیتگر به دست خواهد آمد.

الگوریتم زیر مراحل به دست آوردن ضرایب رؤیتگر دینامیکی توسعه یافته برای سیستم تکین نامعین را به طور خلاصه بیان می کند.

الگوریتم:

گام اول: ماتریس های C, B, A, E و $\Delta B, \Delta A$ طبق تعاریفی که بعد از (۴۹-۴) آمده است به دست آورید به طوری که فرض های (۵-۴) و (۶-۴) برآورده شود. سپس مقادیر $\Lambda_A, N_B, N_A, M_\Lambda$ را بر اساس فرض (۴-۴) محاسبه کنید.

گام دوم: ماتریس با رتبه کامل سطری $\Pi \in \mathbb{R}^{r \times n}$ محاسبه کنید به طوری که $\Pi[E \quad M_\Lambda \quad D_w] = 0$ باشد.

گام سوم: ماتریس با رتبه کامل سطری $R \in \mathbb{R}^{q \times n}$ را تعیین کنید به طوری که $\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ PA \\ C \end{bmatrix}$ دارای رتبه کامل ستونی باشد.

گام چهارم: ماتریس‌های P, J, T و Q را به ترتیب از روی روابط $(۷۱-۴)$ ، $(۷۳-۴)$ ، $(۸۵-۴)$ و $(۴-۴)$ به دست آورید.

گام پنجم: نامعادلات ماتریسی خطی $(۸۹-۴)$ تا $(۹۲-۴)$ را حل کنید تا ماتریس‌های $\mathbb{P}_1$ و $\mathbb{P}_2$ تعیین شوند. در این مرحله با توجه به اینکه ماتریس‌های $\mathbb{P}_1$ و $\mathbb{P}_2$ از حل نامعادله به دست می‌آیند و می‌توانند چندین جواب داشته باشند، باید به دنبال جوابی باشیم که به ازاء حداقل مقدار ممکن λ بدست آید.

گام ششم: ماتریس X را با استفاده از $(۱۶-۴)$ به دست آورید و سپس با به کارگیری $\mathbb{Y} = \mathbb{P}_2^{-1}X$ ، ماتریس ضرایب مجهول $\mathbb{Y}$ را محاسبه کنید.

گام هفتم: با تجزیه ماتریس $\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & H \\ Y_2 & L \end{bmatrix}$ ، ماتریس‌های نامعلوم L, H و ماتریس‌های دلخواه Y_1 و Y_2 را به دست آورید.

گام هشتم: ماتریس‌های S, F, N و M را به ترتیب با استفاده از روابط $(۷۶-۴)$ ، $(۸۰-۴)$ ، $(۸۳-۴)$ و $(۸۴-۴)$ به دست آورید.

گام نهم: رؤیتگر $(۵۵-۴)$ را با استفاده از ضرایب محاسبه شده بسازید.

۴-۲-۴ مثال ۳-۴:

در این بخش با ارائه یک مثال عددی عملکرد الگوریتم فوق را در طراحی رؤیتگر نشان خواهیم داد.

سیستم تکین $(۴۶-۴)$ را با ماتریس‌های ضرایب زیر در نظر بگیرید

$$E^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^* = \begin{bmatrix} \delta_2 & \delta_3 & 0 \\ 0.1 & \delta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} \delta_5 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D_w^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به طوری که $\delta_5 = 0.3$ و $\delta_4 = 1, \delta_3 = 6.5, \delta_2 = -1, \delta_1 = -2.5$ فرض شده است

که هر کدام از آن ها دارای ۵٪ نامعینی می باشند. در این حالت هر سه ماتریس مشتق، ماتریس

سیستم و ماتریس ورودی نامعین خواهند بود و با استفاده از روابط (۴-۴۸) و (۴-۴۹) خواهیم داشت

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 6.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}, D_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

همچنین ماتریس خروجی به صورت C نمایش داده می شود.

نامعینی ماتریس ها را می توانیم با استفاده از رابطه (۴-۴۸) و فرض (۴-۴) به شکل زیر مدل کنیم

$$M_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 3.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.25 & 0 & 0 & 6.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_A = I_n \sin(t), \Lambda_B = I_n \sin(t).$$

به طوری که I_n ماتریس واحد با ابعاد n است. بدیهی است که فرض‌های (۴-۴)، (۵-۴) و (۶-۴)

برآورده می‌شوند.

ماتریس‌های P, Q, J می‌توانند به صورت زیر محاسبه شوند.

$$P = \begin{bmatrix} -0.23 & -1.35 \\ 0.09 & 0 \\ -1.22 & 0.45 \\ 0.87 & 1.81 \\ 2.06 & -0.39 \\ -0.70 & 0.12 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 2.16 & 0 & 0.24 & 0 \\ 0 & 0 & -0.16 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.57 & 1 & 0.07 \\ 1 & 2.3 & 2.13 & 0 & 0 \\ 0 & -0.15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.21 & 0 & 0 & -0.98 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.01 \\ 0.37 \\ 1.02 \end{bmatrix},$$

ماتریس‌های $\mathbb{P}_1$ و $\mathbb{P}_2$ با حل نامعادلات ماتریسی خطی در قضیه (۵-۴) با استفاده از حل‌کننده

موزک در جعبه ابزار یالمیپ به دست می‌آیند.

$$\mathbb{P}_1 = \begin{bmatrix} 2.7512 & 1.2574 & 0.5870 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.2574 & 1.8462 & 0.2245 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.5870 & 0.2245 & 1.2496 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.2518 & 0.8435 & 0.3255 & 1.2518 & 1.2587 & 0.2847 \\ 1.2518 & 1.2973 & -0.8915 & 0.2687 & 1.2584 & 0.0040 \\ 1.2510 & -1.2519 & -1.2169 & 1.2168 & 2.0197 & 2.0187 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} 2.196 & 0 & 0 & 2.225 \\ 0 & 0.854 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.516 & 0 \\ 2.225 & 0 & 0 & 4.187 \end{bmatrix}.$$

با انتخاب مناسب برای پارامترهای طراحی و استفاده از (۴-۴) و (۴۱-۴) ماتریس‌های $L, H, \mathbb{Y}$ و

ماتریس‌های دلخواه Y_2, Y_1 می‌توانند تعیین شوند.

$\mathbb{Y}$

$$= \begin{bmatrix} 1.2584 & 0.8512 & 21.8521 & 0.0125 & -0.0231 & 0.0364 & 0.402 & -3.2241 & -3.184 \\ -4.4184 & -0.0783 & -5.5262 & -0.0054 & 0.0060 & -0.0163 & -0.0487 & -2.097 & -3.254 \\ 2.0187 & 0.2411 & 6.8547 & 0.0221 & -0.2578 & 0.1058 & 0.3345 & -10.584 & -14.027 \\ -0.0084 & -0.0010 & -0.0032 & 0.0021 & 0.0002 & -0.0154 & -0.0268 & 3.0546 & -3.4057 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} -3.2241 & -3.184 \\ -2.097 & -3.254 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -10.584 & -14.027 \\ 3.0546 & -3.4057 \end{bmatrix},$$

سپس ماتریس‌های S, F, N و M را به ترتیب با استفاده از روابط (۴-۷)، (۴-۸)، (۴-۸۳) و

(۴-۸۴) به دست می‌آوریم

$$N = \begin{bmatrix} -4.5087 & -6.2522 \\ 1.0260 & -6.5487 \end{bmatrix},$$

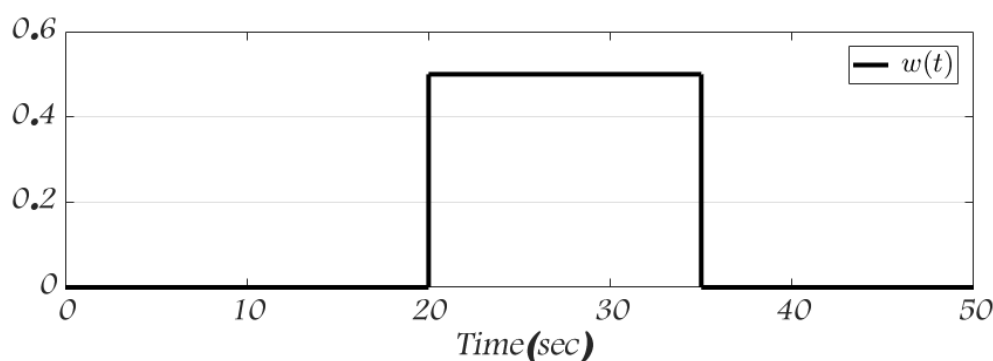
$$F = \begin{bmatrix} 0.0125 & -0.0105 & 2.9950 & 1.6927 & 0.6827 \\ 0.2891 & -1.6490 & 17.098 & 2.4980 & 0.1090 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} -0.6279 & -4.4037 \\ 2.0982 & -2.3149 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -0.012 & -1.0600 & 2.8712 & -0.0553 & 0.8621 \\ 0.2198 & -0.0970 & 0.0208 & -0.6900 & -0.010 \end{bmatrix}$$

برای ارزیابی بهتر مقایسه‌ای بین نتایج رؤیتگر ارائه‌شده در این بخش با رؤیتگر تطبیقی مقاوم که

در [۴۸] ارائه‌شده است، انجام داده‌ایم. اغتشاش خارجی اعمال‌شده به سیستم را می‌توان در شکل (۴-

۶) مشاهده کرد.



شکل (۴-۶): سیگنال اغتشاش خارجی در مثال

شکل (۴-۷) حالت‌های سیستم و تخمین آن‌ها توسط رؤیتگر مقاوم دینامیک توسعه‌یافته را در

حضور اغتشاش خارجی نمایش می‌دهد. همچنین تخمین حالت‌های سیستم با رؤیتگرهای تناسبی،

تناسبی انتگرالی و مقاوم تطبیقی نیز برای مقایسه نتایج آورده شده‌اند. به‌وضوح دیده می‌شود که رُیتگر دینامیکی

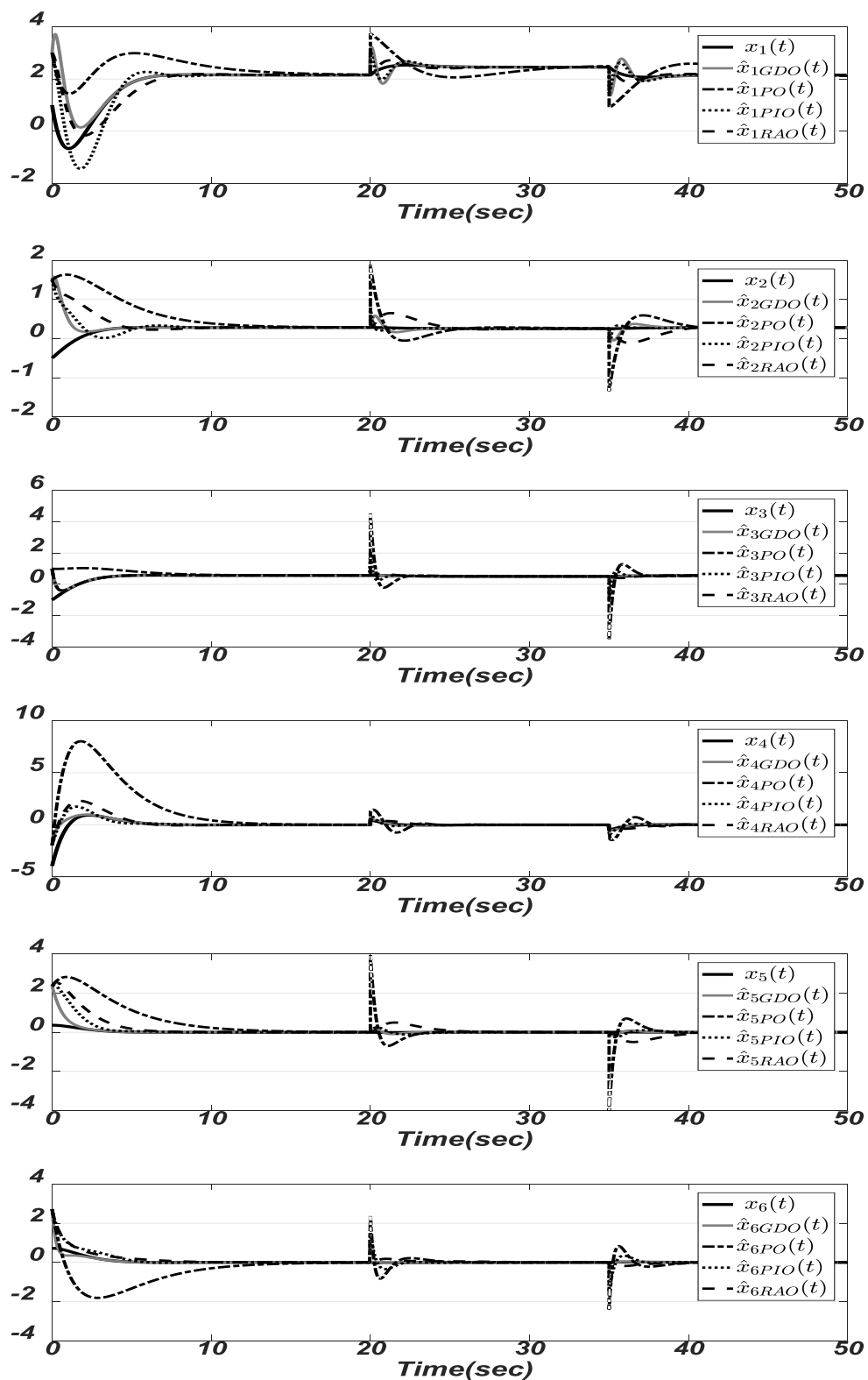
توسعه‌یافته عملکرد بهتری در مقایسه با رُیتگر تناسبی و رُیتگر تناسبی انتگرالی و مقاوم تطبیقی دارد. توجه کنید که حالت‌های سیستم $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ هستند و $x_4(t), x_5(t), x_6(t)$ مشتق‌های حالت‌ها هستند که به بردار حالت اصلی سیستم افزوده شده‌اند و بردار حالت جدید را تشکیل داده‌اند. خطای تخمین در رُیتگرهای مختلف در شکل (۴-۸) دیده می‌شود. همان‌طور که در شکل (۴-۸) دیده می‌شود، خطای تخمین همگرا به مبدأ است و خطای حالت مانای آن‌ها به صفر میل می‌کند. برای مشخص شدن تفاوت عملکرد رُیتگرهای مختلف، مقدار انتگرال مربع خطا (ISE) مربوط به هر رُیتگر در جدول (۴-۱) آمده است. مشاهده می‌شود که رُیتگر دینامیکی توسعه‌یافته خطای کمتری نسبت به دیگر رُیتگرهای بکار گرفته‌شده دارد.

۴-۲-۵) جمع‌بندی

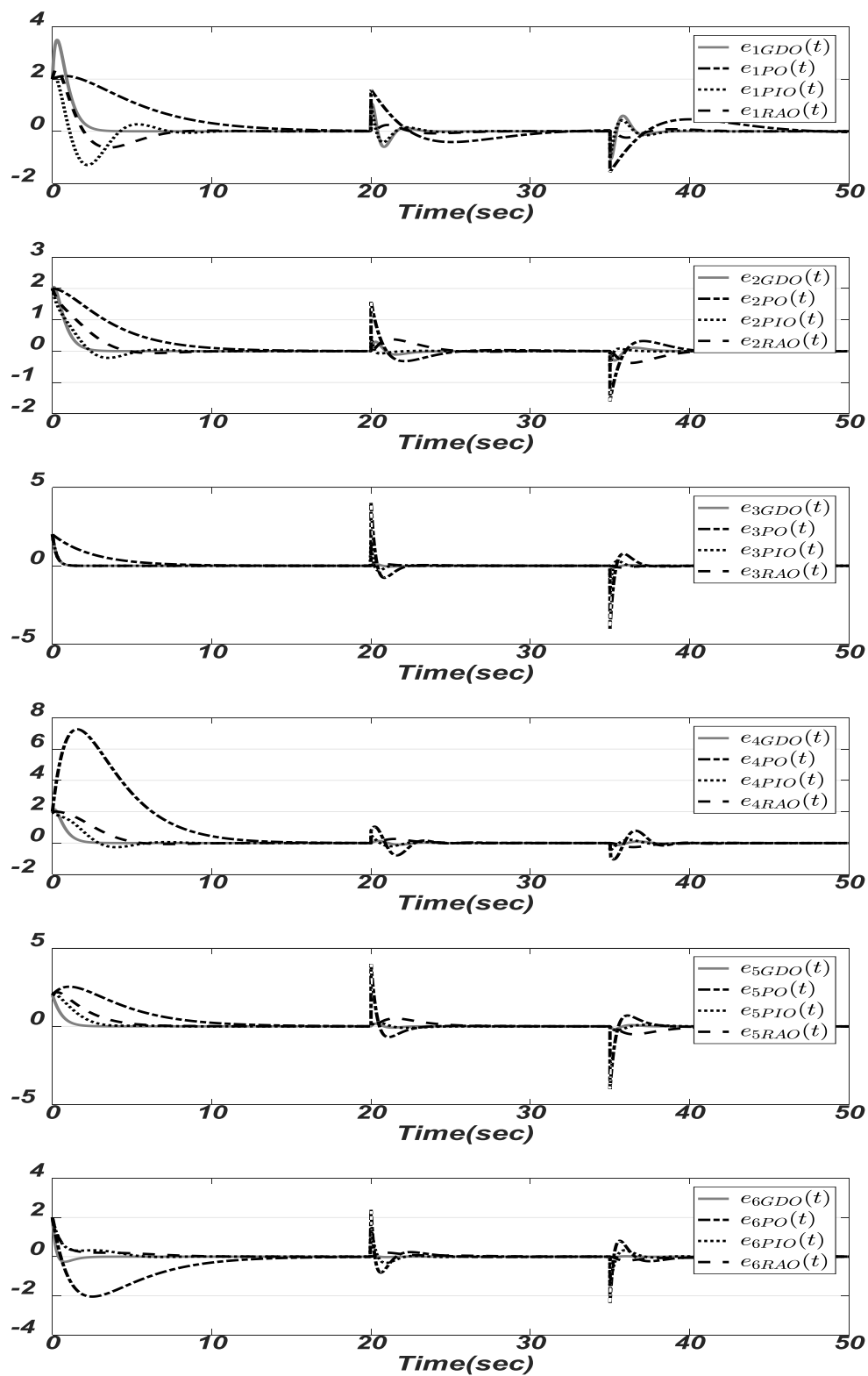
در این قسمت یک روش برای طراحی رُیتگر دینامیکی توسعه‌یافته مقاوم به همراه الگوریتم آن ارائه شد. وجود عدم قطعیت ساختاری در سه ماتریس مشتق، ماتریس سیستم و ماتریس ورودی از ویژگیهای این روش است. رُیتگر دینامیکی توسعه‌یافته مقاوم برای تخمین حالت‌های سیستم پیشنهاد شد که در مقایسه با رُیتگرهای تناسبی و تناسبی - انتگرالی قابلیت‌های بیشتری دارد. در این روش ابتدا سیستم نامعین، در حضور اغتشاش خارجی به سیستمی تبدیل می‌شود که ماتریس مشتق آن ثابت و معلوم است و نامعینی‌ها به ماتریس سیستم و ورودی منتقل می‌شود. سپس با انتخاب یک تابع لیاپانوف مناسب شرایط همگرایی رُیتگر به نامعادلات ماتریسی خطی تبدیل می‌شود و با حل این نامعادلات، ماتریس‌های رُیتگر تعیین می‌شوند. در ادامه با ارائه یک الگوریتم و یک مثال عملکرد این روش را مورد بررسی قرار دادیم.

جدول ۴-۱) ارزیابی خطا در رؤیتگرهای مختلف بر اساس معیار ISE

		نوع رؤیتگر			
		PO	PIO	RAO[۴۸]	GDO
خطای تخمین	$e_1(t)$	3.45	3.09	2.04	1.46
	$e_2(t)$	3.15	0.88	0.64	0.84
	$e_3(t)$	1.68	1.32	1.23	1.24
	$e_4(t)$	5.05	1.31	1.47	0.69
	$e_5(t)$	4.58	2.63	0.86	0.35
	$e_6(t)$	4.71	0.95	0.32	0.12



شکل (۴-۷): مقایسه بین حالت‌های واقعی و تخمین آنها توسط GDO، PO، PIO و RAD در مثال



شکل (۴-۸): مقایسه بین حالت‌های واقعی و تخمین آنها توسط GDO, PO, PIO و RAD در مثال

(۵) فصل پنجم:

طراحی کنترل کننده بر پایه

رؤیتگر برای سیستم‌های خطی

تغییرناپذیر با زمان تکین

در فصل قبلی طراحی چند مدل رؤیتگر را برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین نامعین ارائه کردیم. مهم‌ترین استفاده‌ای که از تخمین حالت‌های یک سیستم می‌توان کرد، طراحی کنترل‌کننده بر اساس تخمین حالت‌ها است. در روش‌های مختلفی که برای فیدبک حالت وجود دارد ضروری است که یا حالت‌های سیستم در دسترس باشند و یا تخمین آن‌ها امکان‌پذیر باشد. با استفاده از رؤیتگرهای فصل قبل این امکان وجود دارد که در سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین که دارای نامعلومی و یا نامعینی هستند، متغیرهای حالت را تخمین بزنیم. در این فصل چند روش برای طراحی کنترل‌کننده ارائه خواهیم کرد که بر پایه رؤیتگرهای فصل قبل ایجاد شده‌اند و می‌توانند سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین نامعین را در محدوده نامعینی قابل قبول، مجاز نگه‌دارند.

۵-۱) طراحی کنترل‌کننده تناسبی بر پایه رؤیتگر

در این بخش سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان تکین نامعین مورد بررسی قرار گرفته است و برای آن رؤیتگر و کنترل‌کننده طراحی شده است. نامعینی می‌تواند در ماتریس سیستم وجود داشته باشد. ابتدا برای سیستم یک رؤیتگر تناسبی طراحی شده است و شرایط وجود جواب برای رؤیتگر مورد بررسی قرار گرفته است. محاسبه بعضی از ضرایب رؤیتگر به صورت پارامتری به گونه‌ای انجام می‌شود که خطای تخمین به سمت صفر میل کند. سپس با استفاده از فیدبک حالت، کنترل‌کننده مناسب برای مجاز بودن سیستم تکین به آن اعمال می‌شود. شرایط وجود هم‌زمان جواب برای رؤیتگر و کنترل‌کننده با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب بررسی می‌شود. نامعادلات موجود با استفاده از روابط جبر خطی به نامعادلات ماتریسی خطی تبدیل می‌شوند و با حل این نامعادلات ضرایب مربوط به رؤیتگر و کنترل‌کننده به دست می‌آید. در انتها با ارائه یک مثال روش محاسبه بیان خواهد شد.

۵-۱-۱) طراحی رؤیتگر

سیستم تکین غیرمتغیر بازمان زیر را در نظر بگیرید:

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) \quad (۱-۵)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

به طوری که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی معلوم، $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی قابل اندازه گیری، $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ماتریس های ثابت و معلوم هستند و $\Delta A = M_A \cdot \Lambda(t) \cdot N_A$ ماتریس نامعینی محدود ساختاریافته است که در آن M_A و N_A ماتریس های معلوم و $\Lambda(t)^T \cdot \Lambda(t) \leq I$ است [۶۳]. E می تواند تکین باشد یعنی $\rho(E) \leq n$. همچنین فرض می کنیم $\det(sE - A) \neq 0$ این فرض به این معناست که سیستم (۱-۵) منظم است یعنی یک پاسخ منحصر به فرد دارد [۵۱].

فرض ۱-۵: فرض می کنیم سیستم (۱-۵) رؤیت پذیر ضربه باشد، به عبارت دیگر [۶۵]

$$\rho \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \rho(E) \quad (۲-۵)$$

و یا معادل آن رابطه زیر برقرار باشد:

$$\rho \begin{bmatrix} E \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (۳-۵)$$

که در آن $E^\perp$ یک ماتریس با رتبه کامل سطری است که در رابطه $E^\perp E = 0$ صدق می کند و در صورتی که $\rho(E) = r$ آنگاه $E^\perp \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ خواهد بود.

فرض ۲-۵: سیستم (۱-۵) یا سه تایی (E, A, B) کنترل پذیر است. به عبارت دیگر

$$\rho[sE - A \quad B] = n, \forall s \in \mathbb{C}, s \neq \infty \quad (۴-۵)$$

و همچنین $\rho[E \quad B] = n$.

در این بخش رؤیتگر تناسبی با درجه q را تعریف می کنیم که در آن $0 \leq q \leq n$ است. رؤیتگر

تناسبی یا لونبرگر را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{\xi}(t) = N\xi(t) + J \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Hu(t) \quad (5-5)$$

$$\hat{x}(t) = P\xi(t) + F \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

که در آن $\xi(t) \in \mathbb{R}^q$ بردار حالت رؤیتگر، $N \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ، $J \in \mathbb{R}^{q \times (n-r+p)}$ ، $H \in \mathbb{R}^{q \times m}$ ، $P \in \mathbb{R}^{n \times q}$ و $F \in \mathbb{R}^{n \times (n-r+p)}$ ماتریس‌های ثابتی هستند که باید از روی ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ به دست آیند. بردار $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ تخمین بردار حالت سیستم تکین (5-1) است که به ازاء هر شرط اولیه برای $x(0)$ و $\xi(0)$ و هر ورودی $u(t)$ خطای تخمین به صورت مجانبی به صفر میل می‌کند یا $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$.

قضیه زیر شرایط وجود جواب و پایداری رؤیتگر (5-5) را ارائه می‌کند.

قضیه 5-1: در صورتی که سیستم

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

رؤیت پذیر ضربه باشد و ΔA نامعینی محدود ساختار یافته باشد، معادلات دینامیکی

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= N\xi(t) + J \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Hu(t) \\ \hat{x}(t) &= P\xi(t) + F \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

یک رؤیتگر پایدار برای سیستم تکین فوق است به طوری که $\hat{x}(t)$ به طور مجانبی به $x(t)$ همگرا

می‌شود اگر ماتریس T وجود داشته باشد تا شرایط زیر را برآورده کند:

$$NTE + J \begin{bmatrix} E^\perp A \\ C \end{bmatrix} - TA = 0 \quad (1)$$

$$TB - H = 0 \quad (2)$$

$$PTE + F \begin{bmatrix} E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = I \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{معادله دینامیکی } \dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) - T\Delta A.x(t) \text{ پایدار مقاوم باشد.}$$

اثبات: سیگنال خطا را به صورت $\varepsilon(t) = \xi(t) - TEx(t)$ تعریف کنیم که در آن $T \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ماتریس ثابت طراحی است که بعداً مشخص می‌شود. با مشتق‌گیری از سیگنال خطا و استفاده از معادلات (۱-۵) و (۵-۵) خواهیم داشت:

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + \left(NTE + J \begin{bmatrix} E^\perp A \\ C \end{bmatrix} - TA \right) x(t) + (H - TB)u(t) - T\Delta A. x(t)$$

و با استفاده از شرایط ۱ و ۲ قضیه بالا می‌توان آن‌ها به صورت زیر به دست آورد:

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) - T\Delta A. x(t) \quad (۶-۵)$$

حال چنانچه شرط ۴ قضیه ۱ وجود داشته باشد، یعنی معادله دینامیک (۶-۵) پایدار مجانبی باشد آنگاه:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \xi(t) = TEx(t) \quad \forall t \rightarrow \infty \quad (۷-۵)$$

اکنون با تعریف سیگنال خطای تخمین و استفاده از رابطه (۷-۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) - P\xi(t) - F \begin{bmatrix} -E^\perp Bu(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(x(t) - PTEx(t) - F \begin{bmatrix} -E^\perp A \\ C \end{bmatrix} x(t) \right) \end{aligned}$$

و با استفاده از شرط ۳ قضیه (۱-۵) خواهیم داشت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(I - PTE - F \begin{bmatrix} -E^\perp A \\ C \end{bmatrix} \right) = 0$$

و اثبات تمام است. $\square$

در ادامه بر اساس شرط‌های ۱ تا ۳، جواب پارامتری برای تعدادی از ماتریس‌های نامعلوم در رزیتگر به دست خواهد آمد. سپس در بخش بعدی با تعریف کنترل‌کننده، شرطی را بررسی می‌کنیم تا معادله دینامیک خطای (۶-۵) پایدار مجانبی باشد و بر اساس آن باقیمانده ماتریس‌های نامعلوم رزیتگر و کنترل‌کننده را به دست می‌آوریم.

اکنون می‌خواهیم ماتریس‌های رؤیتگر را به صورت پارامتری تعیین کنیم تا شرایط ۱ تا ۳ قضیه ۱-۵ برآورده شود [۴۳].

فرض کنید $R \in \mathbb{R}^{q \times n}$ یک ماتریس با رتبه کامل سطری باشد که $\Sigma = \begin{bmatrix} R \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix}$ را تبدیل به ماتریسی با رتبه کامل ستونی می‌کند. همچنین $\Omega = \begin{bmatrix} E \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix}$ تعریف شده است.

شرایط ۱ و ۳ قضیه (۱-۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$[N \quad J] \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = TA \quad (۸-۵)$$

$$[P \quad F] \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = I_n \quad (۹-۵)$$

با استفاده از لم (۱-۴) شرط وجود جواب برای هر دو معادله (۸-۵) و (۹-۵) این است که

$$\rho \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \\ TA \\ I_n \end{bmatrix} = n$$

حال فرض می‌کنیم ماتریس T وجود دارد که $\rho \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = n$ آنگاه $\rho \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \\ R \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \\ R \end{bmatrix}$

n یعنی R در فضای رنج $\begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix}$ قرار دارد. به عبارت دیگر R ترکیب خطی از ستونهای $\begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix}$ است و

می‌توان آن‌ها به صورت زیر نوشت:

$$[I \quad L] \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = R \rightarrow [T \quad L] \begin{bmatrix} E \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = R$$

و با توجه به تعریف داریم:

$$[T \quad L]\Omega = R \quad (۱۰-۵)$$

می‌توان جواب عمومی معادله (۱۰-۵) را با استفاده از لم (۱-۴) به صورت زیر به دست آورد:

$$[T \quad L] = R\Omega^\dagger - Z(I_{2n+p-r} - \Omega\Omega^\dagger)$$

که $Z \in \mathbb{R}^{q \times (2n+p-r)}$ ماتریس دلخواه است. سپس داریم:

$$T = T_1 - ZT_2 \quad (۱۱-۵)$$

به طوری که:

$$T_1 = R\Omega^\dagger \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = (I_{2n+p-r} - \Omega\Omega^\dagger) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L = L_1 - ZL_2 \quad (۱۲-۵)$$

و

$$L_1 = R\Omega^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r+p} \end{bmatrix}, L_2 = (I_{2n+p-r} - \Omega\Omega^\dagger) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r+p} \end{bmatrix}$$

با مشخص شدن TE از رابطه $TE + L \begin{bmatrix} E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = R$ و جایگزینی آن در (۸-۵) داریم:

$$[N \quad J - NL] \begin{bmatrix} R \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = TA \rightarrow [N \quad J - NL]\Sigma = TA$$

که جواب عمومی آن به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$[N \quad J - NL] = TA\Sigma^\dagger - Y_1(I_{q+n-r+p} - \Sigma\Sigma^\dagger)$$

و با جاگذاری T در معادله بالا داریم:

$$N = N_1 - ZN_2 - Y_1N_3 \quad (۱۳-۵)$$

و

$$J = J_1 - ZJ_2 - Y_1J_3 \quad (۱۴-۵)$$

که در آن

$$N_1 = T_1 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, N_2 = T_2 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, N_3 = (I_{q+n-r+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$J_1 = T_1 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} L \\ I_{n-r+p} \end{bmatrix}, J_2 = T_2 A \Sigma^+ \begin{bmatrix} L \\ I_{n-r+p} \end{bmatrix}, J_3 = (I_{q+n-r+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} L \\ I_{n-r+p} \end{bmatrix}$$

و $Y_1 \in \mathbb{R}^{q \times (q+n-r+p)}$ ماتریس دلخواه است. به طور مشابه با حل معادله (۹-۵) خواهیم داشت:

$$P = P_1 - Y_2 N_3 \quad (۱۵-۵)$$

$$F = F_1 - Y_2 J_3 \quad (۱۶-۵)$$

که در آن $P_1 = \Sigma^+ \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$ و $F_1 = \Sigma^+ \begin{bmatrix} L \\ I_{n-r+p} \end{bmatrix}$ و $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times (q+n-r+p)}$ ماتریس دلخواه است.

مشاهده می شود که مسئله طراحی رؤیتگر به تعیین مقادیر ثابت و دلخواه Z ، Y_1 و Y_2 تبدیل شده است و پس از تعیین این مقادیر دلخواه می توان ضرایب رؤیتگر را تعیین نمود.

۲-۱-۵ طراحی کنترل کننده تناسبی بر پایه رؤیتگر

اکنون هدف طراحی کنترل کننده تناسبی است که با استفاده از حالت های تخمین زده شده توسط رؤیتگر به گونه ای عمل کند که سیستم تکین (۱-۵) در حالت حلقه بسته مجاز باشد. مجاز بودن در سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان تکین حالت کلی تری از پایداری را شامل می شود. با این معنی که سیستم (۱-۵) مجاز است اگر سه ویژگی داشته باشد. الف) منظم باشد. ب) پاسخ آن بدون ضربه باشد. ج) تمامی قطب های محدود آن در LHP باشد [۵۱، ۱۰]

سیستم تکین (۱-۵) با فیدبک حالت $u(t) = K \cdot \hat{x}(t)$ را در نظر بگیرید:

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + B.K.\hat{x}(t) \quad (17-5)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

با جاگذاری $\hat{x}(t)$ از رُیتگر (5-5) در معادله فیدبک حالت بالا، معادلات مربوط به کنترل کننده

به صورت زیر به دست می آید:

$$\dot{\xi}(t) = N\xi(t) + J \begin{bmatrix} -E^\perp B u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + H u(t) \quad (18-5)$$

$$u(t) = KP\xi(t) + KF \begin{bmatrix} -E^\perp B u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

با اعمال کنترل کننده به سیستم و استفاده از تعریف سیگنال خطای $\varepsilon(t)$ داریم:

$$E\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + BKP\varepsilon(t) + \Delta Ax(t) \quad (19-5)$$

اکنون قضیه ای را بررسی می کنیم که شرط لازم و کافی برای پایدار بودن معادله (5-6) و (5-19)

را به دست می آورد و با استفاده از آن می توان ماتریس های دلخواه و همچنین ضریب کنترل کننده را به دست آورد.

قضیه 5-2: فرض کنید سه تایی (E, A, B) کنترل پذیر و سه تایی (E, A, C) رُیت پذیر ضربه

باشند. آنگاه رُیتگر

$$\dot{\xi}(t) = N\xi(t) + J \begin{bmatrix} -E^\perp B u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + H u(t)$$

$$\hat{x}(t) = P\xi(t) + F \begin{bmatrix} -E^\perp B u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

و کنترل کننده $u(t) = K.\hat{x}(t)$ برای سیستم خطی غیر متغیر با زمان تکین

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

وجود دارد که سیستم حلقه بسته را مجاز کند، اگر ماتریس ناویژه X_1 و ماتریس متقارن و مثبت معین X_2 و اسکالرهایی $\alpha_1 > 0$ و $\alpha_2 > 0$ وجود داشته باشند تا نامعادلات ماتریسی خطی زیر برقرار باشند.

$$E^T X_1 = X_1^T E > 0$$

$$B^\perp (S^T A^T + AS + \alpha_1^{-1} M_A M_A^T) B^{\perp T} < 0$$

$$N_3^{T\perp} (P^T (S^T A^T + AS + \alpha_1^{-1} M_A M_A^T) P + (N_1^T X_2 + X_2^T N_1)) N_3^{T\perp T} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & BKP \\ P^T K^T B^T & \psi_2 \end{bmatrix} < 0$$

به طوری که:

$$\psi_1 = S^T A^T + AS + S^T K^T B^T + BKS + (\alpha_1 + \alpha_2) S^T N_A^T N_A S + \alpha_1^{-1} M_A M_A^T$$

9

$$\psi_2 = (N_1^T X_2 + X_2^T N_1) + \alpha_2^{-1} X_2^T T_1 M_A M_A^T T_1^T X_2 - N_3^T Y_X - Y_X^T N_3$$

اثبات: تابع لیپانوف منتخب را به صورت $V(x(t), \varepsilon(t)) = x^T E^T X_1 x + \varepsilon^T X_2 \varepsilon$ در نظر می گیریم. با مشتق گیری از آن و استفاده از معادلات دینامیکی (۵-۶) و (۵-۱۹) مشتق تابع لیپانوف را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \varepsilon) = & x^T (A^T X_1 + X_1^T A + K^T B^T X_1 + X_1^T BK) x + \varepsilon^T P^T K^T B^T X_1 x + \\ & x^T X_1^T BKP \varepsilon + x^T \Delta A^T X_1 x + x^T X_1^T \Delta A^T x + \varepsilon^T (N^T X_2 + X_2^T N) \varepsilon - x^T \Delta A^T T^T X_2 \varepsilon - \\ & \varepsilon^T X_2 T \Delta A x \end{aligned}$$

شرط پایداری و وجود جواب برای کنترل کننده این است که $\dot{V}(x, \varepsilon) < 0$ باشد. با این فرض محدودیت های لازم را برای پارامترهای سیستم به دست می آوریم. با توجه به اینکه نامعینی به صورت $\Delta A = M_A \cdot \Lambda(t) \cdot N_A$ در نظر گرفته شده است و با استفاده از لم (۴-۲) نامعادله زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) < 0 \Leftrightarrow x^T((A+BK)^T X_1 + X_1^T(A+BK))x + 2x^T P^T K^T B^T X_1 x + \\ \varepsilon^T(N^T X_2 + X_2^T N)\varepsilon + (\alpha_1^{-1} x^T X_1^T M_A M_A^T X_1 x + \alpha_1 x^T N_A^T N_A x) + \\ (\alpha_2^{-1} \varepsilon^T X_2^T T M_A M_A^T T^T X_2 \varepsilon + \alpha_2 x^T N_A^T N_A x) < 0\end{aligned}$$

نامعادله فوق را می‌توان به شکل ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} x^T & \varepsilon^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 & X_1^T B K P \\ P^T K^T B^T X_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} < 0$$

که در آن

$$\varphi_1 = ((A+BK)^T X_1 + X_1^T(A+BK)) + (\alpha_1 + \alpha_2)N_A^T N_A + \alpha_1^{-1} X_1^T M_A M_A^T X_1$$

و

$$\varphi_2 = (N^T X_2 + X_2^T N) + \alpha_2^{-1} X_2^T T M_A M_A^T T^T X_2$$

بنابراین $\dot{V}(x, \varepsilon) < 0$ است اگر

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & X_1^T B K P \\ P^T K^T B^T X_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (۲۰-۵)$$

با تعریف $S = X_1^{-1}$ و ضرب رابطه بالا از سمت راست در $\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ و از سمت چپ در $\begin{bmatrix} S^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & B K P \\ P^T K^T B^T & \varphi_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (۲۱-۵)$$

به‌طوری‌که:

$$\psi_1 = S^T A^T + A S + S^T K^T B^T + B K S + (\alpha_1 + \alpha_2) S^T N_A^T N_A S + \alpha_1^{-1} M_A M_A^T$$

اکنون با جاگذاری (۱۳-۵) در (۲۱-۵) و تعریف $Y_X = Y_1^T \cdot X_2$ و همچنین با صفر قرار دادن Z و

Y_2 برای ساده شدن محاسبات، (۲۱-۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & BKP \\ P^T K^T B^T & \psi_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (۲۲-۵)$$

که:

$$\psi_2 = (N_1^T X_2 + X_2^T N_1) + \alpha_2^{-1} X_2^T T_1 M_A M_A^T T_1^T X_2 - N_3^T Y_X - Y_X^T N_3$$

حال با استفاده از لم شور، (۲۲-۵) به نامعادله ماتریسی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{bmatrix} S^T A^T + AS + \alpha_1^{-1} M_A M_A^T & 0 & S^T N_A^T & 0 \\ 0 & N_1^T X_2 + X_2^T N_1 & 0 & X_2^T T_1 M_A \\ N_A S & 0 & \frac{-1}{\alpha_1 + \alpha_2} & 0 \\ 0 & M_A^T T_1^T X_2 & 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S^T K^T B^T + BKS & BKP & 0 & 0 \\ P^T K^T B^T & -N_3^T Y_X - Y_X^T N_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

معادله بالا می تواند در قالب زیر قرار گیرد:

$$\Psi + \mathbb{B} \mathbb{Y} \mathbb{C} + \mathbb{C}^T \mathbb{Y}^T \mathbb{B}^T < 0 \quad (۲۳-۵)$$

که در آن :

$$\Psi = \begin{bmatrix} S^T A^T + AS + \alpha_1^{-1} M_A M_A^T & 0 & S^T N_A^T & 0 \\ 0 & N_1^T X_2 + X_2^T N_1 & 0 & X_2^T T_1 M_A \\ N_A S & 0 & \frac{-1}{\alpha_1 + \alpha_2} & 0 \\ 0 & M_A^T T_1^T X_2 & 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{Y} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & Y_X^T \end{bmatrix}, \mathbb{C} = \begin{bmatrix} S & P & 0 & 0 \\ 0 & -N_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون با استفاده از لم (۳-۴) معادله (۲۳-۵) به دو نامعادله ماتریسی خطی زیر تبدیل می شود.

$$\begin{aligned}\mathbb{B}^\perp \Psi \mathbb{B}^{\perp T} &< 0 \\ \mathbb{C}^{T\perp} \Psi \mathbb{C}^{T\perp T} &< 0\end{aligned}\quad (24-5)$$

که:

$$\mathbb{B}^\perp = [B^\perp \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad \mathbb{C}^{T\perp} = [-N_3^T P^T S^{-T} \quad N_3^{T\perp} \quad 0 \quad 0]$$

و با جاگذاری در معادله (24-5) نامعادلات خطی ماتریسی زیر به دست می‌آید:

$$B^\perp (S^T A^T + AS + \alpha_1^{-1} M_A M_A^T) B^{\perp T} < 0 \quad (25-5)$$

$$N_3^{T\perp} (P^T (S^T A^T + AS + \alpha_1^{-1} M_A M_A^T) P + (N_1^T X_2 + X_2^T N_1)) N_3^{T\perp T} < 0 \quad (26-5)$$

با حل (25-5) ماتریس $S = X_1^{-1}$ به دست می‌آید و با قرار دادن آن در (26-5) حاصل X_2 نیز به دست می‌آید. اکنون با قرار دادن مقادیر فوق در (22-5)، Y_X و K قابل محاسبه خواهند بود. با استفاده از تعریف $Y_X = Y_1^T X_2$ مقدار ماتریس دلخواه Y_1 نیز به دست می‌آید و می‌توان باقیمانده ماتریس‌های ضرایب رؤیتگر و کنترل‌کننده را محاسبه کرد.

۳-۱-۵ مثال ۱-۵:

در این بخش با ارائه یک مثال عملکرد روش ذکرشده فوق را بررسی می‌کنیم. سیستم تکین زیر را در نظر بگیرید که در ماتریس سیستم، نامعینی وجود دارد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 1 \\ 0 & \delta_2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 1 \quad 0] u(t)$$

و در آن $\delta_1 = 1 \pm 0.1$ و $\delta_2 = 2 \pm 0.2$ است. در مقایسه با سیستم (۱-۵) داریم

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

محدود ناپایدار است و به همین دلیل مجاز نیست. حال می‌خواهیم با استفاده از طراحی یک

کنترل‌کننده بر پایه ریتگر سیستم حلقه بسته را مجاز کنیم. با توجه به ماتریس E داریم
 $E^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و به‌وضوح دیده می‌شود که فرض (۱-۴) و (۲-۴) صادق است. با انتخاب

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } q = 1 \text{ ماتریس‌های } \Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ را به دست}$$

می‌آوریم. با توجه به ماتریس نامعینی، $M_A = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $N_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ را محاسبه می‌کنیم. اکنون

با به‌کارگیری روابط (۱۱-۵) تا (۱۶-۵) و فرض اینکه $Z = 0, Y_2 = 0$ داریم

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0.33 \\ 0 & 0.66 \\ 0.5 & -0.33 \end{bmatrix} \text{ و } P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0.33 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0.66 & -0.33 & 0 \end{bmatrix}$$

می‌آید. اکنون $B^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم و با حل نامعادلات ماتریسی خطی (۲۵-۵)

ماتریس $X_1 = S^{-1} = \begin{bmatrix} 37.22 & 0 \\ 0 & 37.22 \end{bmatrix}$ و با حل (۲۶-۵) $X_2 = \begin{bmatrix} 12.56 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

سپس با به‌کارگیری نامعادله ماتریسی خطی (۲۲-۵) $K = 10^{15} \begin{bmatrix} -2.34 & -4.78 & -12 \end{bmatrix}$ و

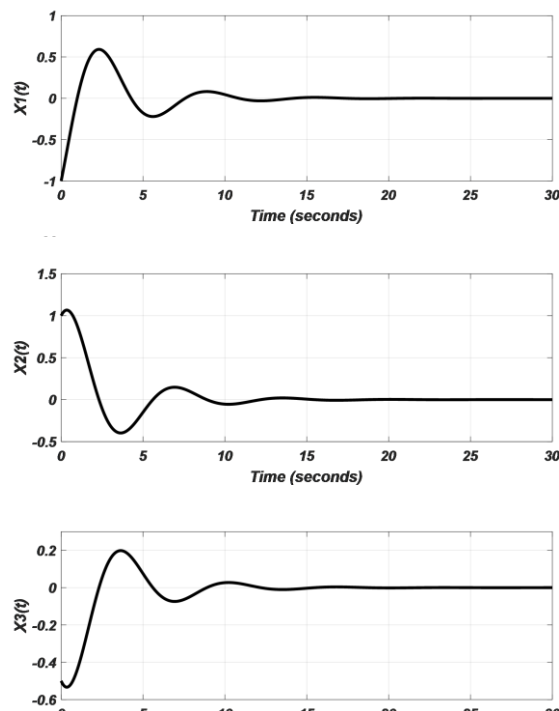
$$Y_X = 10^{15} \begin{bmatrix} 6.66 \\ 4.33 \\ 4.67 \end{bmatrix} \text{ به دست خواهد آمد. اکنون مقدار دلخواه } Y_1 \text{ که تضمین‌کننده پایداری ریتگر و}$$

صفر شدن خطای تخمین است به‌صورت $Y_1^T = Y_X \cdot X_2^{-1} = 10^{15} \begin{bmatrix} 5.31 \\ 3.45 \\ 3.72 \end{bmatrix}$ محاسبه می‌شود و با

استفاده از (۱۳-۵) و (۱۴-۵) باقیمانده ماتریس‌های ریتگر نیز محاسبه خواهد شد. شکل (۱-۵)

حالت‌های سیستم حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده تناسبی با بهره K را نشان می‌دهد و

همان‌طور که دیده می‌شود حالت‌های سیستم حلقه بسته به صفر همگرا هستند.



شکل (۵-۱): حالت‌های سیستم کنترل شده توسط کنترل کننده تناسبی بر پایه
رؤیتگر مقاوم که به صفر همگرا می شوند

۵-۲) جمع‌بندی

در این قسمت سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان تکین نامعین مورد بررسی قرار گرفته است و برای آن رؤیتگر و کنترل‌کننده طراحی شده است. نامعینی می‌تواند در ماتریس سیستم وجود داشته باشد. ابتدا برای سیستم یک رؤیتگر تناسبی طراحی شد و شرایط وجود جواب برای رؤیتگر مورد بررسی قرار گرفت. محاسبه بعضی از ضرایب رؤیتگر به صورت پارامتری به گونه‌ای انجام شد که خطای تخمین به سمت صفر میل کند. سپس با استفاده از فیدبک حالت، کنترل‌کننده مناسب برای مجاز بودن سیستم تکین به آن اعمال گردید. شرایط وجود هم‌زمان جواب برای رؤیتگر و کنترل‌کننده با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب بررسی شد و نامعادلات موجود با استفاده از روابط جبر خطی به نامعادلات ماتریسی خطی تبدیل گردید. با حل این نامعادلات ضرایب مربوط به رؤیتگر و کنترل‌کننده

به دست آمد. در انتها با ارائه یک مثال عملکرد این روش مورد بررسی قرار گرفت.

۵-۳) طراحی کنترل کننده تناسبی بر پایه رُویتگر

در این بخش روشی برای طراحی کنترل کننده تناسبی - مشتقی برای سیستم های توصیفی نامعین مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا با بازنویسی معادلات سیستم، سیستمی به دست آمده است که بردار حالت آن از بردار حالت و مشتق حالت های سیستم اصلی تشکیل شده است. سپس با طراحی یک رُویتگر تناسبی، حالت های سیستم جدید به گونه ای تخمین زده شده اند تا خطای تخمین به طور مجانبی به صفر میل کند. در حضور نامعینی که می تواند در ماتریس سیستم وجود داشته باشد، شرایط وجود جواب برای رُویتگر مورد بررسی قرار گرفته است. محاسبه بعضی از ضرایب رُویتگر به صورت پارامتری انجام می شود و سپس با استفاده از یک کنترل کننده تناسبی - مشتقی، کنترل کننده مناسب برای مجاز بودن سیستم توصیفی به آن اعمال می شود. شرایط وجود هم زمان جواب برای رُویتگر و کنترل کننده با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب بررسی شده است. نامعادلات موجود با استفاده از روابط جبر خطی به نامعادلات ماتریسی خطی تبدیل شده و با حل این نامعادلات ضرایب مربوط به رُویتگر و کنترل کننده به دست آمده است.

۵-۳-۱) بیان مسئله و طراحی رُویتگر:

سیستم توصیفی خطی غیرمتغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} E_1 \dot{\eta}(t) &= A^* \eta(t) + B_1 u(t) \\ y(t) &= C_1 \eta(t) + C_2 \dot{\eta}(t) \end{aligned} \quad (5-27)$$

به طوری که $\eta(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ بردار حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی معلوم، $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار

خروجی قابل اندازه گیری، $E_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ ، $A^* \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ ، $B_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times m}$ و $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_p}$ ، $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_p}$

$\mathbb{R}^{p \times n_p}$ ماتریس های ثابت و معلوم هستند. ماتریس سیستم می تواند نامعین باشد یعنی فرض شده

است $A^* = A_1 + \Delta A^*$ بطوریکه $A_1 \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$ و ΔA^* نامعینی محدود ساختاریافته است. ماتریس

مربعی E_1 می‌تواند تکین باشد یعنی $\rho(E_1) \leq n_p$ سیستم (۲۷-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E_1 \dot{\eta}(t) = (A_1 + \Delta A^*)\eta(t) + B_1 u(t) \quad (28-5)$$

$$y(t) = C_1 \eta(t) + C_2 \dot{\eta}(t)$$

و با ایجاد یک معادله دینامیکی کمکی، می‌توان سیستم را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_p} \\ A_1 & -E_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta A^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix}$$

اکنون با انتخاب بردار حالت جدید به صورت $x = [\eta^T \quad \dot{\eta}^T]^T \in \mathbb{R}^n$ ، معادله بالا به صورت فشرده

زیر خواهد شد:

$$E \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) \quad (29-5)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

که در آن $E = \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_p} \\ A_1 & -E_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و

$C = [C_1 \quad C_2] \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ماتریس‌های ثابت و معلوم هستند و $\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta A^* & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس

نامعینی محدود ساختاریافته است که $\Delta A = M_A \cdot \Lambda(t) \cdot N_A$ و در آن M_A و N_A ماتریس‌های معلوم

هستند و شرط $\Lambda(t)^T \cdot \Lambda(t) \leq I$ برقرار است [۶۳]. همچنین در معادلات فوق $n = 2n_p$ درجه

دینامیکی سیستم جدید است.

در این بخش رُیتگر تناسبی با درجه q را تعریف می‌کنیم که در آن $0 \leq q \leq n$ است. رُیتگر

تناسبی یا لونبرگر را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{\xi}(t) = N\xi(t) + J \begin{bmatrix} -E^\perp B u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + H u(t) \quad (30-5)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{\dot{\eta}} \end{bmatrix} = \hat{x}(t) = P\xi(t) + F \begin{bmatrix} -E^\perp B u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

که در آن $\xi(t) \in \mathbb{R}^q$ بردار حالت رؤیتگر، $N \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ، $J \in \mathbb{R}^{q \times (n-r+p)}$ ، $H \in \mathbb{R}^{q \times m}$ ، $P \in \mathbb{R}^{n \times q}$ و $F \in \mathbb{R}^{n \times (n-r+p)}$ ماتریس‌های ثابتی هستند که باید از روی ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ به دست آیند. بردار $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ تخمین بردار حالت سیستم توصیفی (۲۹-۵) است که به ازاء هر شرط اولیه برای $x(0)$ و $\xi(0)$ و هر ورودی $u(t)$ خطای تخمین به صورت مجانبی به صفر میل می‌کند یا

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$$

قضیه (۱-۵) شرایط وجود جواب و پایداری رؤیتگر (۳۰-۵) را ارائه می‌کند و با استفاده از روابط (۱۱-۵) تا (۱۶-۵) می‌توان پارامترهای رؤیتگر را به صورت پارامتری برحسب ثابت‌های دلخواه Z ، Y_1 و Y_2 به دست آورد.

۲-۳-۵ طراحی کنترل‌کننده تناسبی-مشتقی بر پایه رؤیتگر

اکنون هدف طراحی کنترل‌کننده تناسبی-مشتقی است که با استفاده از حالت‌های تخمین زده شده توسط رؤیتگر به گونه‌ای عمل کند که سیستم توصیفی (۲۹-۵) در حالت حلقه بسته مجاز باشد.

سیستم توصیفی (۲۹-۵) با فیدبک حالت تناسبی-مشتقی $u(t) = K_p \cdot \hat{\eta}(t) + K_d \cdot \dot{\hat{\eta}}(t)$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} E_1 \dot{\eta}(t) &= A^* \eta(t) + B_1 (K_p \cdot \hat{\eta}(t) + K_d \cdot \dot{\hat{\eta}}(t)) \\ y(t) &= C_1 \eta(t) + C_2 \dot{\eta}(t) \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از تعریف‌های بعد از رابطه (۲۹-۵) و جاگذاری بردار حالت جدید داریم:

$$u(t) = [K_p \quad K_d] \begin{bmatrix} \hat{\eta}(t) \\ \dot{\hat{\eta}}(t) \end{bmatrix} = K \cdot \hat{x}(t) \quad (۳۱-۵)$$

ملاحظه می‌شود که طراحی فیدبک حالت تناسبی-مشتقی برای سیستم (۲۷-۵) معادل طراحی یک کنترل‌کننده تناسبی برای سیستم (۲۹-۵) می‌باشد. به عبارت دیگر باید بهره استاتیک K را به گونه‌ای تعیین کنیم تا سیستم حلقه بسته زیر مجاز باشد.

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + B.K.\hat{x}(t) \quad (32-5)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

با جاگذاری $\hat{x}(t)$ از ر‌ؤیتگر (30-5) در معادله فیدبک حالت بالا، معادلات مربوط به کنترل کننده

به صورت زیر به دست می آید:

$$\dot{\xi}(t) = N\xi(t) + J \begin{bmatrix} -E^\perp B u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + H u(t) \quad (33-5)$$

$$u(t) = KP\xi(t) + KF \begin{bmatrix} -E^\perp B u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

ملاحظه می شود که دو معادله اخیر بالا شبیه معادلات (17-5) و (18-5) در بخش قبلی هستند

با این تفاوت که بهره استاتیک K برابر $[K_p \quad K_d]$ انتخاب شده است. پس مطابق روش قبلی با حل

نامعادلات ماتریسی خطی (22-5) می توانیم بهره استاتیک K را به دست آوریم.

ساختار کنترل کننده بر پایه ر‌ؤیتگر (33-5) برای کاربردهای عملی مناسب نیست زیرا همان طور

که در معادله دوم (33-5) دیده می شود سیگنال ورودی در هر دو طرف معادله وجود دارد. با محاسبه

ورودی از رابطه دوم معادله (33-5) می توان به شکل کاربردی تر آن به صورت زیر دست یافت.

$$\dot{\xi}(t) = N\xi(t) + \bar{J}y(t) + \bar{H}u(t) \quad (34-5)$$

$$u(t) = K\bar{P}\xi(t) + K\bar{F}y(t)$$

$$\bar{F} = \quad \text{و} \quad \bar{P} = \left[I_m + F \begin{bmatrix} E^\perp B \\ 0 \end{bmatrix} \right]^\dagger P \quad , \bar{H} = H + J. \begin{bmatrix} -E^\perp B \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \bar{J} = J. \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad \text{که در آن}$$

$$\left[I_m + F \begin{bmatrix} E^\perp B \\ 0 \end{bmatrix} \right]^\dagger F \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \text{ است.}$$

۵-۳-۳) جمع‌بندی

در این بخش روشی برای طراحی رؤیتگر و کنترل‌کننده تناسبی- مشتقی بر پایه رؤیتگر برای سیستم‌های توصیفی نامعین ارائه شده است. ابتدا با تعریف متغیرهای حالت جدید سیستم اصلی را بازنویسی کرده و شرط لازم و کافی برای وجود رؤیتگر سیستم توصیفی و کنترل‌کننده تناسبی- مشتقی به صورت نامعادلات ماتریسی خطی بیان شده است و پس از تعیین ضرایب رؤیتگر، کنترل‌کننده برای سیستم طراحی شده است تا سیستم حلقه بسته را مجاز نماید.

۶) نتیجه گیری و پیشنهادات

۶-۱) نتیجه گیری

کاربردهای وسیع سیستم‌های تکین در دهه‌های اخیر باعث تعمیم تکنیک‌های موجود در سیستم‌های معمولی به این سیستم‌ها شده است. از جمله این تکنیک‌ها، تخمین حالت‌های یک سیستم توسط رؤیتگر است. اگر بتوانیم حالت‌های یک سیستم تکین را به‌درستی تخمین بزنیم، امکان بهره‌گیری از فیدبک حالت و استفاده از کنترل‌کننده‌های بر پایه رؤیتگر برای آن‌ها به وجود می‌آید و امکان مجاز کردن سیستم‌های تکین فراهم می‌شود.

از سوی دیگر وجود نامعینی در سیستم‌های معمولی و تکین امری عادی است و تقریباً در تمامی موارد با سیستم‌هایی سروکار داریم که یا دارای پارامترهای ثابت نامعلوم و یا دارای پارامترهای نامعین هستند. وجود پارامترهای نامعین تخمین حالت سیستم‌ها توسط رؤیتگر را مشکل‌تر می‌کنند. عمده روش‌های موجود برای طراحی رؤیتگر سیستم‌های تکین، یا بدون نامعینی هستند و یا نامعینی را محدود به بخش خاصی از سیستم مانند ماتریس سیستم یا ماتریس ورودی کرده‌اند. در عمل اینکه دقیقاً مطمئن باشیم که نامعینی در کجای سیستم قرار دارد دور از واقعیت است. در این رساله تمرکز روی طراحی رؤیتگرهای مقاوم برای تخمین حالت سیستم‌هایی است که نامعینی می‌تواند در هر سه ماتریس مشتق، ماتریس سیستم و ماتریس ورودی باشد. پس از ارائه دو روش طراحی رؤیتگر مقاوم، کاربرد آن در فیدبک حالت برای مجاز کردن سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان تکین ناپایدار مورد بررسی قرار گرفته است. در این روش‌ها برای اطمینان از پایداری و همگرایی رؤیتگر، تابع لیاپانوف مناسبی انتخاب شده و شرط پایداری مقاوم برای رؤیتگر را با آن بررسی کرده‌ایم. در هر حالت، تابع لیاپانوف می‌تواند به نامعادلات ماتریسی خطی تبدیل شود. حل نامعادلات ماتریسی خطی با استفاده از قضایا و لم‌های مربوط به جبر خطی امکان‌پذیر می‌شود و با استفاده از جعبه‌ابزار یالمیپ که به‌عنوان یک افزونه به متلب اضافه می‌شود قابل انجام است. با حل نامعادلات ماتریسی خطی می‌توان به ضرایب رؤیتگر و کنترل‌کننده دست‌یافت.

در سیستم‌های معمولی بدون نامعینی، با داشتن متغیرهای حالت و یا تخمین آن‌ها و استفاده از معادلات حالت سیستم، می‌توان مشتق متغیرهای حالت را نیز در اختیار داشت. در سیستم‌های نامعین و یا تکین، این موضوع صادق نیست و داشتن متغیرهای حالت یا تخمین آن‌ها به معنی داشتن اطلاعات کامل از مشتق حالت‌های سیستم نیست. تخمین هم‌زمان مشتق متغیرهای حالت علاوه بر خود متغیرها از ویژگی‌های دیگر روش‌های مطرح‌شده در این رساله است که نتیجه آن در طراحی کنترل‌کننده تناسبی - مشتقی مورد استفاده قرار گرفته است.

۲-۶) پیشنهادات

در رساله پیش رو تخمین حالت در سیستم تکین نامعین انجام‌شده و نتیجه آن در طراحی دو نمونه کنترل‌کننده برای مجاز کردن یک سیستم تکین مورد استفاده قرار گرفت. موضوعات زیر را می‌توان به عنوان زمینه‌هایی برای تحقیق در تکمیل و ادامه این رساله پیشنهاد داد.

- طراحی رؤیتگر و کنترل‌کننده بر پایه رؤیتگر، برای سیستم‌های خطی غیر متغیر با زمان تکین نامعین، در شرایطی که ماتریس خروجی، ماتریس سیستم و ماتریس ورودی دارای عدم قطعیت باشند.
- توسعه روش ارائه شده در این رساله به سیستم‌های خطی غیر متغیر با زمان تکین که دارای تاخیر زمانی هستند.
- طراحی رؤیتگر مقاوم توسعه یافته برای سیستم‌های غیرخطی تکین.
- طراحی کنترل‌کننده‌هایی که بتوانند علاوه بر مجاز کردن سیستم، عملکرد آن را نیز بهبود بخشند و رفتار سیستم را متناسب با خواسته‌های موردنیاز تأمین کنند.

(٧) مراجع

- [1] G. R. Duan, Analysis and design of descriptor linear systems, Springer Science & Business Media, 2010.
- [2] N. F. Shamloo, A. A. Kalat and L. Chisci, "Indirect adaptive fuzzy control of nonlinear descriptor systems," *European Journal of Control*, vol. 51, no. 1, pp. 30-38, 2019.
- [3] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach, C. M. Astorga-Zaragoza and L. Boutat-Baddas, "Generalised dynamic observer design for Lipschitz non-linear descriptor systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 13, no. 14, pp. 2270-2280, 2019.
- [4] J. Chan, C. Tan, H. Trinh and M. Kamal, "State and fault estimation for a class of non-infinitely observable descriptor systems using two sliding mode observers in cascade," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 356, no. 5, pp. 3010-3029, 2019.
- [5] M. Darouach and L. Boutat, "Observers for a class of nonlinear singular systems," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 53, no. 11, pp. 2627-2633, 2008.
- [6] I. Zamani, M. Shafiee and A. Ibeas, "Exponential stability of hybrid switched nonlinear singular systems with time-varying delay," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 350, no. 1, pp. 171-193, 2013.
- [7] M. Darouach and M. Zasadzinski, "Data reconciliation in generalized linear dynamic systems," *AIChE journal*, vol. 37, no. 2, pp. 193-201, 1991.
- [8] J. Huang, W. Zhang, M. Shi, L. Chen and L. Yu, " H_∞ observer design for singular one-sided Lur'e differential inclusion system," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 354, no. 8, pp. 3305-3321, 2017.
- [9] F. L. Lewis, "A survey of linear singular systems," *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 5, no. 1, pp. 3-36, 1986.
- [10] Dai and Liyi, Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and Informatin Sciences, Berlin: springer, 1989.
- [11] C. Farhat and M. G  radin, "On the general solution by a direct method of a large- scale singular system of linear equations: application to the analysis of floating structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 41, no. 4, pp. 675-696, 1998.
- [12] R. Shahnazi and Q. Zhao, "Adaptive fuzzy descriptor sliding mode observer- based sensor fault estimation for uncertain nonlinear systems," *Asian Journal of Control*, vol. 18, no. 4, pp. 1478-1488, 2016.
- [13] M. Wang and T. Liang, "Adaptive Kalman filtering for sensor fault estimation and isolation of satellite attitude control based on descriptor systems," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 41, no. 6, pp. 1686-1698, 2019.

- [14] J. M. Araujo, P. R. Barros and C. E. Dorea, "Design of Observers With Error Limitation in Discrete-Time Descriptor Systems: A Case Study of a Hydraulic Tank System," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 20, no. 4, pp. 1041-1047, 2012.
- [15] D. G. Luenberger, "Observing state of linear system," *IEEE Trans. Military Electron*, Vols. MIL-8, no. 2, pp. 74-77, 1964.
- [16] M. Darouach and M. Boutayeb, "design of observers for descriptor systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 40, no. 7, pp. 1323-1327, 1995.
- [17] M. Hou and P. C. Muller, "Observer design for descriptor systems.," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 164-169., 1999.
- [18] Y. Han, Y. Kao and C. Gao, "Robust observer-based H_∞ control for uncertain discrete singular systems with time-varying delays via sliding mode approach," *ISA Transactions*, vol. 80, pp. 81-88, 2018.
- [19] X. T. Wang and H. H. Yu, "Generalized PI observer design for descriptor linear system," *Archives of Control Sciences* , vol. 29, no. 4, pp. 585-601, 2019.
- [20] M. Alma and M. Darouach, "Adaptive observers design for a class of linear descriptor systems," *Elsevier. Automatica*, vol. 50, no. 2, pp. 578-583, 2014.
- [21] M. Darouach, " H_∞ Unbiased Filtering for Linear Descriptor Systems via LMI," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 8, pp. 1966-1972, 2009.
- [22] P. C. Muller and M. Hou, "On the observer design for descriptor systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 11, pp. 1666-1671, 1993.
- [23] M. Manderla and U. Konigorski, "Design of causal state observers for regular descriptor systems," *European Journal of Control*, vol. 19, no. 2, pp. 104-112, 2013.
- [24] T. Boukhobza and F. Hamelin, "Observability analysis and sensor location study for structured linear systems in descriptor form with unknown inputs," *Automatica*, vol. 47, no. 12, pp. 2678-2683, 2011.
- [25] M. K. Gupta, N. K. Tomar and S. Bhaumik, "On observability of irregular descriptor systems," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 47, no. 1, pp. 376-379, 2014.
- [26] G. Zheng, D. Boutat and H. Wang, "A nonlinear Luenberger-like observer for nonlinear singular systems," *Automatica*, vol. 86, no. 1, pp. 11-17, 2017.
- [27] L. Chen, Y. Zhao, S. Fu, M. Liu and J. Qiu, "Fault estimation observer design for descriptor switched systems with actuator and sensor failures," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 66, no. 2, pp. 810-819, 2018.

- [28] Z. Gao, T. Breikin and H. Wang, "Discrete- time proportional and integral observer and observer- based controller for systems with both unknown input and output disturbances," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 29, no. 3, pp. 171-189, 2008.
- [29] Z. Gao and S. X. Ding, "Fault estimation and fault-tolerant control for descriptor systems via proportional, multiple-integral and derivative observer design," *IET Control Theory & Applications*, vol. 1, no. 5, pp. 1208-1218, 2007.
- [30] Z. Gao and D. W. Ho, "Proportional multiple-integral observer design for descriptor systems with measurement output disturbances," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 151, no. 3, pp. 279-288, 2004.
- [31] D. Koenig, "Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems: application to state and fault estimation," *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 50, no. 2, pp. 212-217, 2005.
- [32] G. R. Duan, G. P. Liu and S. Thompson, "Eigenstructure assignment design for proportional-integral observers: continuous-time case," *Control Theory and Applications*, vol. 148, no. 3, pp. 263-267, 2001.
- [33] A. G. Wu and G. R. Duan, "Design of PI observers for continuous-time descriptor linear systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, vol. 36, no. 6, pp. 1423-1431, 2006.
- [34] A. G. Wu, G. R. Duan, J. Dong and Y. M. Fu, "Design of proportional-integral observers for discrete-time descriptor linear systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 3, no. 1, pp. 79-87, 2009.
- [35] S. Marir, M. Chadli and D. Bouagada, "A novel approach of admissibility for singular linear continuous-time fractional-order systems," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 15, no. 2, pp. 959-964, 2017.
- [36] Y. Wang, V. Puig and G. Cembrano, "Set-membership approach and Kalman observer based on zonotopes for discrete-time descriptor systems," *Automatica*, vol. 93, no. 1, pp. 435-443, 2018.
- [37] D. Koenig and S. Mammar, "Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 47, no. 12, pp. 2057-2062, 2002.
- [38] H. S. Kim, T. K. Yeu and S. Kawaji, "Fault detection in linear descriptor systems via unknown input PI observer," *Transactions on control, automation and systems engineering*, vol. 3, no. 2, pp. 77-82, 2001.
- [39] H. S. Kim, S. B. Kim and S. Kawaji, "Design of PI observer for descriptor system," *Journal of Control, Automation and Systems Eng*, pp. 332-337, 1997.
- [40] J. Zhang, A. K. Swain and S. K. Nguang, "Robust sliding mode observer based fault estimation for certain class of uncertain nonlinear systems,"

- Asian Journal of Control, vol. 17, no. 4, pp. 1296-1309, 2015.
- [41] H. K. Alaei and A. Yazdizadeh, "Robust output disturbance, actuator and sensor faults reconstruction using H_∞ sliding mode descriptor observer for uncertain nonlinear boiler system," International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 16, no. 3, pp. 1271-1281, 2018.
 - [42] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach and C. M. Astorga-Zaragoza, " H_∞ dynamical observers design for linear descriptor systems. Application to state and unknown input estimation," European Journal of Control, vol. 26, no. 1, pp. 35-43, 2015.
 - [43] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach, C. M. Astorga-Zaragoza and L. Boutat-Baddas, "New dynamical observers design for linear descriptor systems," IET Control Theory & Applications, vol. 10, no. 17, pp. 2223-2232, 2016.
 - [44] L. Zhou and L. Gouping, "Detection and stabilization for discrete-time descriptor systems via a limited capacity communication channel," Elsevier Automatica, vol. 45, no. 10, p. 2272–2277, 2009.
 - [45] M. Mou and P. C. Muller, "Design of a class of Luenberger observers for descriptor systems," IEEE transactions on automatic control, vol. 40, no. 1, pp. 133-136, 1995.
 - [46] M. Darouach, "Complements to full order observer design for linear systems with unknown inputs," Elsevier Applied Mathematics Letters, vol. 22, no. 7, pp. 1107-1111, 2009.
 - [47] B. Boulkroune and M. Darouach, "A nonlinear observer design for an activated sludge wastewater treatment process," Elsevier Journal of Process Control, vol. 19, no. 9, pp. 1558-1565, 2009.
 - [48] E. Arefinia, H. A. Talebi and A. Doustmohammadi, "A robust adaptive observer for a class of singular nonlinear uncertain systems," International Journal of Systems Science, vol. 48, no. 7, pp. 1404-1415, 2017.
 - [49] Y. Ma and Y. Yan, "Observer-based H_∞ guaranteed cost control for uncertain singular time-delay systems with input saturation," International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 14, no. 5, pp. 1254-1261, 2016.
 - [50] Y. Ma and Y. Yan, "Observer- based H_∞ control for uncertain singular time- delay systems with actuator saturation," Optimal Control Applications and Methods, vol. 37, no. 5, pp. 867-884, 2016.
 - [51] G. R. Duan, analysis and Design of Descriptor Linear Systems, Springer, 2010.
 - [52] H. S. Wang, C. F. Yung and F. R. Chang, H-infinity Control for Nonlinear Descriptor Systems, vol. 326, Springer Science & Business Media, 2006.
 - [53] R. W. Newcomb and B. Dziurla, "Some circuits and systems applications of semistate theory," Circuits, Systems and Signal Processing, vol. 8, no. 3, pp. 235-260, 1989.

- [54] A. R. Bergen and D. J. Hill, "A structure preserving model for power system stability analysis," *IEEE transactions on power apparatus and systems*, vol. 1, pp. 25-35, 1981.
- [55] D. G. Luenberger, "Time-invariant descriptor systems. *Automatica*, 14(5), 473-480.," *Automatica*, vol. 14, no. 5, pp. 473-480, 1978.
- [56] J. Vlach, J. M. Wojciechowski and A. Opal, "Analysis of nonlinear networks with inconsistent initial conditions," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 42, no. 4, pp. 195-200, 1995.
- [57] P. C. Müller, "Descriptor systems: pros and cons of system modelling by differential-algebraic equations," *Mathematics and computers in simulation*, vol. 53, no. 4-6, pp. 273-279, 2000.
- [58] M. Darouach, "On the functional observers for linear descriptor systems," *Elsevier Systems & Control Letters*, vol. 61, no. 3, pp. 427-434, 2012.
- [59] J. Y. Ishihara and M. H. Terra, "Impulse controllability and observability of rectangular descriptor systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 6, pp. 991-994, 2001.
- [60] G. C. Goodwin and R. H. Middleton, "The class of all stable unbiased state estimators," *Systems & Control Letters*, vol. 13, no. 2, pp. 161-163, 1989.
- [61] H. J. Marquez, "A frequency domain approach to state estimation," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 340, no. 2, pp. 147-157, 2003.
- [62] M. Darouach, M. Zasadzinski and M. Hayar, "Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 41, no. 7, pp. 1068-1072, 1996.
- [63] X. Mao, N. Koroleva and A. Rodkina, "Robust stability of uncertain stochastic differential delay equations1," *Systems & Control Letters*, vol. 35, no. 5, pp. 325-336, 1998.
- [64] M. K. Gupta, N. K. Tomar and S. Bhaumik, "On detectability and observer design for rectangular linear descriptor systems," *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 4, no. 4, pp. 438-446, 2016.
- [65] E. L. Boukas, *Control of singular systems with random abrupt changes*, Springer Science & Business Media, 2008.
- [66] B. Zheng and R. B. Bapat, "Generalized inverse $A(2)T, S$ and a rank equation," *Applied mathematics and computation*, vol. 155, no. 2, pp. 407-415, 2004.
- [67] D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, Greg Tobin, 2006.
- [68] E. K. Boukas and Z. K. Liu, "Robust H_∞ filtering for polytopic uncertain time-delay systems with Markov jumps," *Computers & Electrical Engineering*, vol. 28, no. 3, pp. 171-193, 2002.
- [69] R. E. Skelton, T. Lwasaki and D. E. Griqoriadis, *A unified algebraic*

- approach to control design, CRC Press, 1997.
- [70] M. Chadi, P. Shi, Z. Feng and J. Lam, "New Bounded Real Lemma Formulation and Control for Continuous- Time Descriptor Systems," *Asian Journal of Control*, vol. 19, no. 6, pp. 2192-2198, 2017.
 - [71] W. Xie, "An equivalent LMI representation of bounded real lemma for continuous-time systems," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 1, no. 1, pp. 1-8, 2008.
 - [72] H. S. Wang, C. F. Yung and F. R. Chang, "Bounded real lemma and H_∞ control for descriptor systems," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 145, no. 3, pp. 316-322, 1998.
 - [73] F. Gao, W. Chen, M. Wu and J. She, "Robust H_∞ control of uncertain singular systems based on equivalent- input- disturbance approach," *Asian Journal of Control*, vol. xx, no. x, pp. xx-xx, 2019.
 - [74] S. Boed, L. EL Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, vol. 15, Society for industrial and applied mathematics, 1994.
 - [75] J. Tina, S. Ma and C. Zhang, "Unknown Input Reduced- order Observer Design for One- Sided Lipschitz Nonlinear Descriptor Markovian Jump Systems," *Asian Journal of Control*, vol. 21, no. 2, pp. 952-964, 2019.
 - [76] H. F. Ghavidel and A. A. Kalat, "Observer-based hybrid adaptive fuzzy control for affine and nonaffine uncertain nonlinear systems," *Neural Computing and Applications*, vol. 30, no. 4, pp. 1187-1202, 2018.
 - [77] M. Darouach, "On the functional observers for linear descriptor systems," *Systems & Control Letters*, vol. 61, no. 3, pp. 427-434, 2012.
 - [78] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach, L. Boutat-Baddas and C. M. Astorga-Zaragoza, "On Dynamic Observers Design for Descriptor Systems," in *New Trends in Observer-Based Control*, Academic Press, 2019, pp. 3-45.
 - [79] L. Zhou and G. Lu, "Detection and stabilization for discrete-time descriptor systems via a limited capacity communication channel," *Automatica*, vol. 45, no. 10, pp. 2272-2277, 2009.

Abstract:

In this thesis, robust observer design for uncertain linear time invariant singular systems is generalized. The generalized dynamic observer have better performance in contrast with the proportional and proportional-integral observers. Also, a robust state observer for the linear singular system is proposed while the system has parametric uncertainty in *the derivative*, *the system* and *the input* matrices of its state equations. Another novelty in this method is that in addition to the state variables, their derivatives are also estimated by the proposed observer. Sufficient conditions for the existence of response and observer's convergence are proved using the Lyapunov method and linear matrix inequalities, and parameters of the observer are obtained by solving these inequalities. Finally, the design loop can be completed by designing a state feedback controller to make admissible the singular system.

Keywords: Linear time invariant singular systems, Observer for linear time invariant singular systems, Uncertain linear time invariant singular systems, Observer based controller.



Shahrood University of Technology
Faculty of Electrical and Robotics Engineering
Ph.D. Thesis in Control Engineering

**Observer Design for a Class of Uncertain Linear
Singular Systems**

By: Seyed Mohsen Saeed Jalali

Supervisor:
Dr Ali Akbarzadeh Kalat

September 2020