بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی برق و رباتیک

رساله دکتری کنترل

تحلیل پایداری شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری در حضور تاخیر و کاربرد آن در پیش بینی سری زمانی

نگارنده: سید مهدی عابدی پهنه کلایی

استاد راهنما

دکتر علیرضا الفی

استاد مشاور

پرفسور تنریرو ماچادو

شهریور ۱۳۹۸

شماره: ۵۰۱/۱۲۹۵
تاریخ: ۹۸/۷/۲۶
ویرایش: ____

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای/ سیدمهدی عابدی پهنه کلایی دانشجوی دکتری رشته برق - کنترل به شماره دانشجویی ۹۴۰۰۷۳۵ ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۴ درتاریخ ۱۳۹۸/۰۶/۲۶ از رساله نظری ☒ / عملی ☐ خود با عنوان:

تحلیل پایداری شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری در حضور تأخیر و کاربرد آن در پیش بینی سری زمانی

دفاع و با اخذ نمره ۱۹/۳۴ به درجه: عالی نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑
ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷ ☐
ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵ ☐
د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر الفتی	استاد/ اساتید راهنما	دانشیار	
۲	دکتر ماهجادرو	مشاور/ مشاورین	استاد	عدم حضور
۳	دکتر ذکر- شوهنی	استاد مدعو ~~داخلی~~ / خارجی	استاد	
۴	دکتر خاتم	استاد مدعو داخلی / ~~خارجی~~	استاد	
۵	دکتر اکبرزاده	استاد مدعو داخلی / ~~خارجی~~	دانشیار	
۶	دکتر حدادظریف	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	دانشیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای/ خانم سیدمهدی عابدی پهنه کلایی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: علیرضا احمدی‌فرد

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

دانشگاه صنعتی شاهرود - دانشکده مهندسی برق و رباتیک

تقدیم به:

پدر و مادر فداکارم ، همسر مهربانم

و پسرم کی آرش

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" :

ازپدر و مادر عزیزم.؛ این دو معلم بزرگوارم؛ که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکترعلیرضا الفی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از استاد صبور و با اخلاق، جناب آقای پرفسور ماچادو که زحمت مشاوره این رساله را متقبل شدند و بدون مساعدت ایشان، این رساله به نتیجه مطلوب نمی رسید؛

و از استادان فرزانه و دلسوز که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

سید مهدی عابدی پهنه کلایی

شهریور ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **سید مهدی عابدی پهنه کلایی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **برق مهندسی برق و رباتیک** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تحلیل پایداری شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری در حضور تاخیر و کاربرد آن در پیش بینی سری زمانی** ، تحت راهنمایی **علیرضا الفی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود‘‘ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سید مهدی عابدی پهنه کلایی
شهریور ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این رساله، تحلیل پایداری شبکه عصبی انعکاس حالت[1] مرتبه کسری با ویژگی های متفاوت شامل تاخیر زمانی و عنصر ممریستیو در فضای حقیقی، مختلط و کواترنیون و کاربرد آن در پیش بینی سری زمانی ارائه می شود. علاوه بر این، پدیده آشوب نیز در چنین شبکه های عصبی بررسی می شود. ابتدا تحلیل پایداری میتگ‌ـ‌لفلر نقطه تعادل شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف انجام می شود. همچنین شروط تحقق رفتار آشوب در این شبکه ها تعیین می شود. سپس تحلیل پایداری یکنواخت نقطه تعادل برای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری با درنظر گرفتن تاخیر زمانی ثابت و چندگانه ارائه می شود. در ادامه، یک قانون تطبیق مبتنی بر گرادیان برای بهینه شدن پارامترهای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری زمان‌ـ‌گسسته پیشنهاد و برای پیش بینی سری زمانی بازار سهام استفاده می شود. در انتها، تحلیل پایداری مجانبی (مقاوم) شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون (مختلط) با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف در حضور تاخیر زمانی و عنصر ممریستیو انجام می شود. برای بیان اثربخشی نتایج، در هر بخش چندین مثال عددی شبیه سازی می شود.

کلمات کلیدی: شبکه عصبی دینامیکی مرتبه کسری، تاخیر زمانی، عنصر ممریستیو، تحلیل پایداری، شبکه انعکاس حالت، پیش بینی سری زمانی

[1] Echo State Neural Network (ESNN)

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Seyed Mehdi Abedi Pahnehkolaei, Alireza Alfi, J.A. Tenreiro Machado, Dynamic Stability Analysis of Fractional Order Leaky Integrator Echo State Neural Networks, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 47, pp. 328-337, 2017.

2. Seyed Mehdi Abedi Pahnehkolaei, Alireza Alfi, J.A. Tenreiro Machado, Uniform Stability of Fractional Order Leaky Integrator Echo State Neural Network with Multiple Time Delays, *Information Sciences*, vol. 418-419, pp. 703-716, 2017.

3. Seyed Mehdi Abedi Pahnehkolaei, Alireza Alfi, J.A. Tenreiro Machado, Chaos suppression in fractional systems using adaptive fractional state feedback control, *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 103, pp. 488-503, 2017.

4. Seyed Mehdi Abedi Pahnehkolaei, Alireza Alfi, J.A. Tenreiro Machado, Stability analysis of fractional Quaternion-Valued Leaky Integrator Echo State Neural Networks with multiple time-varying delays, *Neurocomputing*, vol. 331, pp. 388-402, 2019.

5. Seyed Mehdi Abedi Pahnehkolaei, Alireza Alfi, J.A. Tenreiro Machado, Delay independent robust stability analysis of delayed fractional quaternion-valued leaky integrator echo state neural networks with QUAD condition, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 359, pp. 278-293, 2019.

6. Seyed Mehdi Abedi Pahnehkolaei, Alireza Alfi, J.A. Tenreiro Machado, Delay-Dependent Stability Analysis of the QUAD Vector Field Fractional Order Quaternion-Valued Memristive Uncertain Neutral Type Leaky Integrator Echo State Neural Networks, *Neural Networks*, vol. 117, pp. 307-327, 2019.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مقدمه

پیشگفتار

در این فصل، در راستای بیان جزئیاتی از ایده اصلی این رساله، به سه موضوع مرور بر کارهای گذشته در حوزه شبکه های عصبی و البته شبکه عصبی مورد نظر، مفاهیم ریاضیات پایه و در نهایت، ضرورت انجام این رساله پرداخته می شود.

۱.۱ تاریخچه

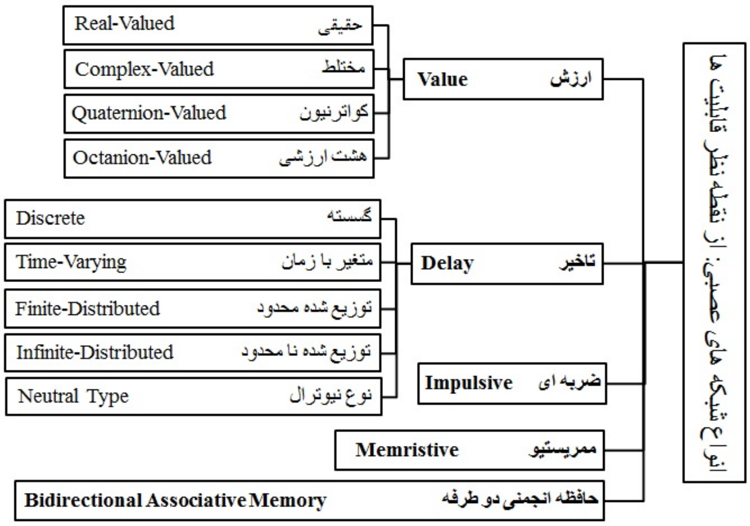
در این بخش، در ابتدا، توصیف مفصل از انواع تقسیم بندی های شبکه های عصبی از منظرهای متفاوت ارائه می شود تا بتوان به یک اطلاعات جامع از سمت و سوی موضوعات جذاب پژوهشی در این حوزه دست یافت. سپس به معرفی ویژگی ها و پیشرفت های انجام شده در رابطه با شبکه عصبی انعکاس حالت پرداخته می شود و در نهایت، مروری جامع بر روی تحلیل پایداری نقطه تعادل شبکه های عصبی مرتبه کسری انجام می شود تا مسیری که در این رساله طی خواهد شد، بطور کامل و شفاف توصیف شود.

۱.۱.۱ شبکه های عصبی

شبکه های عصبی که ایده اصلی آن برگرفته از شیوه کارکرد سیستم عصبی انسان برای پردازش داده ها و اطلاعات به منظور یادگیری و ایجاد دانش می باشد، را می توان به دو دسته استاتیکی و دینامیکی تفکیک کرد. در شبکه های عصبی استاتیکی همچون شبکه عصبی پرسپترون[۱] و شبکه عصبی شعاعی[۲] یک رابطه استاتیکی بین ورودی و خروجی برقرار است. در نقطه مقابل، شبکه های عصبی دینامیکی (زمان گسسته و زمان پیوسته) همچون المن[۳]، جردن[۴] و هاپفیلد[۵] قرار دارند که دارای حافظه می باشند و قابلیت مدلسازی انواع مختلفی از سیستم های دینامیکی پیچیده را دارند.
در کنار برتری شبکه های عصبی استاتیکی در نحوه ساده آموزش و سرعت همگرایی آموزش آنها، یکی از ضعف اصلی آنها عدم توانایی این شبکه های عصبی در مدلسازی دینامیک سیستم ها می باشد. از این رو، برای افزودن حافظه به شبکه های استاتیکی، از TDL[۶] روی ورودی استفاده شده است تا با توسعه فضای ورودی، ویژگی دینامیکی در شبکه های عصبی استاتیکی بطور صریح مدلسازی گردد. در نقطه مقابل، شبکه های عصبی بازگشتی (زمان– گسسته)

[1] Perceptron Neural Network
[2] Radial Basis Function Network
[3] Elman Neural Network
[4] Jordan Neural Network
[5] Hopfield Neural Network
[6] Tapped-Delay Lines

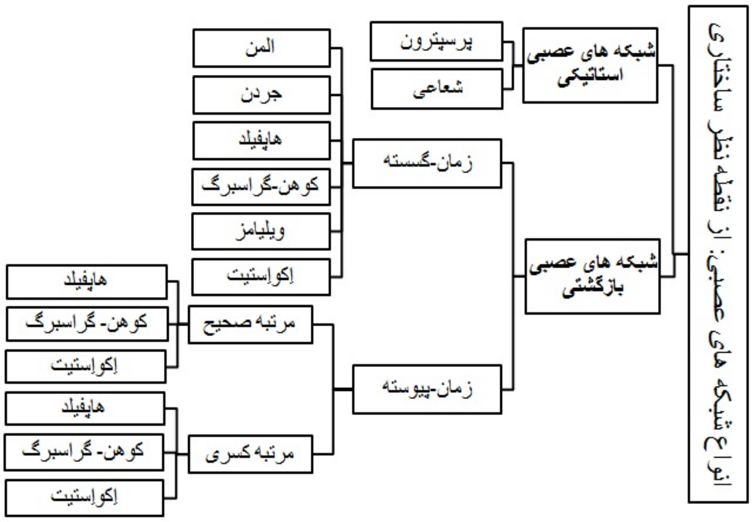
همچون شبکه عصبی بازگشتی المن، بازگشتی ویلیامز–زایپسر[1] و هاپفیلد قرار دارند که می توان آنها را در زمره اولین تلاش ها برای معرفی شبکه های عصبی دینامیکی (زمان–پیوسته) تلقی کرد. در این شبکه های عصبی، ویژگی دینامیکی به صورت تلویحی در ساختار شبکه عصبی گنجانده شد که در نتیجه آن، قابلیت های دینامیکی آنها نسبت به شبکه های عصبی پیشرو با ورودی تاخیریافته افزایش یافت. ولی روند آموزش آنها، به علت ساختار آنها، بسیار پیچیده تر می باشد. از این رو، بعنوان یک چالش پیش روی، سعی شده تا یک شبکه عصبی دینامیکی ارایه گردد که هم دارای ساختاری قوی و قابل انعطاف باشد و هم از آموزش ساده تری برخوردار باشد. محاسبات رزرویر[2] بعنوان یک متدولوژی نوین[3] برای مدلسازی سیستم های دینامیکی پیچیده که از شبکه های عصبی برگشتی بهره می گیرد، یکی از این راهکارها می باشد که در آن فقط وزن های خروجی شبکه عصبی نیاز به آموزش دارد [۱]. همزمان با تلاش



شکل ۱.۱: انواع قابلیت های افزوده شده به شبکه های عصبی

پژوهشگران برای بهبود ساختارهای شبکه عصبی، سعی شده است تا با چالش افزودن/افزوده شدن برخی ویژگی هایی که با الهام از سیستم های واقعی و البته برخی ملاحظات و محدودیت های پیاده سازی عملی به ساختار پایه شبکه های عصبی نیز مقابله شود. همه این موارد، پیچیدگی های دینامیکی به شبکه عصبی اضافه می کند که از بین انواع تحلیل دینامیکی این شبکه های عصبی، تحلیل پایداری اولین موضوعی است که مورد توجه قرار می گیرد. بنابراین از این حیث، همانطوری که در شکل (۱.۱) نشان داده شد، می توان این شبکه های عصبی را به شبکه های عصبی دینامیکی با تاخیر، شبکه های عصبی ممریستیو ، ضربه ای ، حافظه انجمنی دوطرفه و غیره دسته بندی کرد که در [۲]، یک بررسی جامعی بر روی ویژگی

[1] Williams-Zipser fully Recurrent Neural Network
[2] Reservoir Computing
[3] Novel Methodology

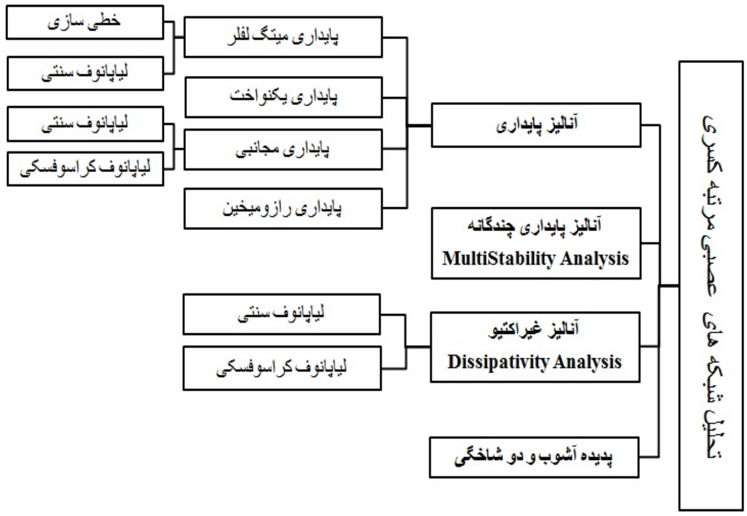


شکل ۲.۱: دسته بندی شبکه های عصبی از نقطه نظر ساختار

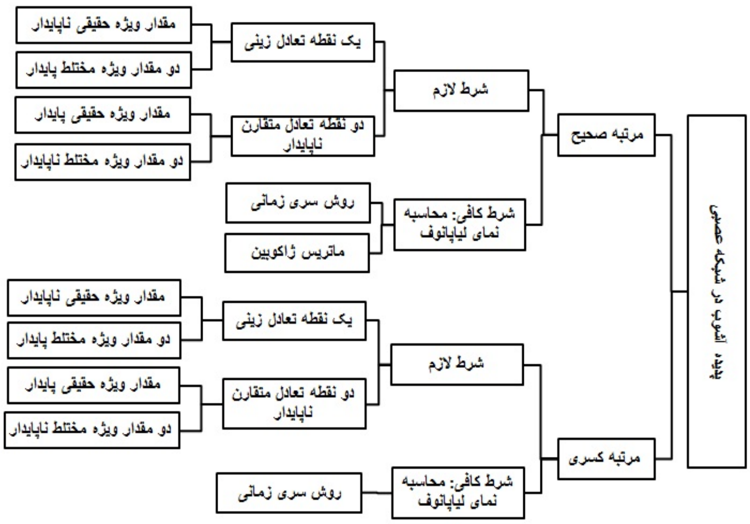
های دینامیکی انواع شبکه های عصبی بازگشتی مرتبه صحیح و روش های تحلیل پایداری نقطه تعادل با/بدون حضور انواع مختلفی از تاخیر انجام شده است. همچنین، در چند دهه گذشته، همزمان با شبکه های عصبی دینامیکی حقیقی با ویژگی های فوق که بصورت کلی به آن اشاره شد، شبکه های عصبی دینامیکی مختلط[1]، که تمامی حالت ها، وزن ها و توابع فعالسازی غیرخطی آن مختلط هستند، با کاربردهایی همچون اپتوالکترونیک، بینایی کامپیوتری، فیلترینگ و شبکه های عصبی کواترنیون[2] با کاربردهایی همچون فشرده سازی، پیش بینی و مدلسازی رشته باد ۳ـ بعدی و فیلتر کردن تطبیقی غیرخطی مورد توجه قرار گرفته اند. شکل (۱.۱) دسته بندی شبکه های عصبی از حیث ویژگی های جانبی را نشان می دهد.

در طی دهه اخیر، همزمان با رشد سریع حسابان مرتبه کسری در حوزه های مختلف علم، همچون کنترل، مدلسازی، پیش بینی و غیره بسیاری از پژوهشگران دریافته اند که حسابان کسری را می توان در حوزه شبکه های عصبی نیز بکار برد. از این رو، شبکه های عصبی دینامیکی زمان‌ـ پیوسته، خود به دو حوزه مرتبه صحیح و مرتبه کسری قابل تفکیک می باشند که دسته بندی شبکه های عصبی از منظر ساختار پایه آن، در شکل (۲.۱) آمده است. در فضای مرتبه صحیح، کارهای بسیار زیادی بر روی تحلیل دینامیکی و کاربرد شبکه عصبی هاپفیلد، کوهن‌ـ گراسبرگ[3] و انعکاس حالت به همراه ویژگی های مختلفی همچون تاخیر زمانی و ممریستیو و ضربه ای و غیره انجام شده است. در فضای مرتبه کسری نیز پژوهش هایی بر روی تحلیل دینامیکی و کاربرد شبکه های عصبی هاپفیلد و کوهن‌ـ گراسبرگ مرتبه

[1] Complex Neural Network
[2] Quaternion Neural Network
[3] Cohen-Grossberg Neural Network



شکل ۳.۱: انواع تحلیل دینامیکی شبکه های عصبی



شکل ۴.۱: تحلیل رفتار آشوبی در شبکه های عصبی

کسری به همراه ویژگی هایی همچون تاخیر و غیره در فضای حقیقی و مختلط و همچنین کواترنیون (البته به تعداد اندک) انجام شده است. ولی بر روی تحلیل دینامیکی (مشخصا تحلیل پایداری) و کاربرد شبکه عصبی دینامیکی انعکاس حالت مرتبه کسری، بعنوان یک ابزار در محاسبات رزرویر، با ویژگی هایی همچون تاخیر زمانی و ممریستیو در فضای حقیقی، مختلط و کواترنیون تاکنون پژوهشی گزارش نشده است. در نهایت، پژوهش های انجام شده بر روی تحلیل دینامیکی سیستم های غیرخطی همچون شبکه های عصبی در حوزه مرتبه کسری را می توان بصورت آنچه در شکل (۳.۱) نشان داده شده است، دسته بندی کرد. که از بین انواع مختلف آن، تحلیل پایداری (هدف اصلی در این رساله) با جزییات بیشتر دسته

بندی شد. همچنین، جزییات بیشتری از چگونگی تحلیل رفتار آشوبی در سیستم های غیر خطی همچون شبکه های عصبی در حوزه مرتبه صحیح و کسری در شکل (۴.۱) آمده است. در ادامه، با هدف ترسیم فضای این پژوهش، ابتدا به توصیف دقیق شبکه عصبی انعکاس حالت و مروری بر کارهای گذشته روی این شبکه عصبی پرداخته می شود. سپس، به طبقه بندی و مقایسه کارهای گذشته بر روی شبکه های عصبی دینامیکی مرتبه کسری در فضای حقیقی، مختلط و کواترنیون اشاره خواهد شد.

۲.۱.۱ شبکه عصبی انعکاس حالت

متدولوژی محاسبات رزرویر، که توسط جِیگِر[1] در سال ۲۰۰۱ بعنوان یک جایگزین برای شبکه های عصبی برگشتی مرسوم معرفی شده است، از شبکه های عصبی برگشتی استفاده می کند که معمولا شامل ۱) یک نسل شبکه های عصبی برگشتی و غیر ـ سازگار است که حالت های آن یک تبدیل غیرخطی از تاریخچه ورودی را برقرار می کند، و ۲) آموزش یک مدل غیر ـ برگشتی (معمولا خطی) که پاسخ مطلوب را از حالت های رزرویر استخراج می کند، می باشند. در نتیجه، روش آموزش روش محاسبات رزرویر می تواند بطور قابل ملاحظه ای ساده تر و سریعتر از روش هایی باشد که برای آموزش شبکه های عصبی برگشتی مرسوم بکار می روند. از این رو، لازم است تا به اندازه کافی اطلاعات مسئله در حالت های رزرویر وجود داشته باشد تا توسط مدل خطی در خروجی استخراج شود. با اینکه، این روش به علت زمان سریع آموزش و کارایی خوب آن در مقایسه با شبکه های عصبی مرسوم مورد توجه قرار گرفته است، این زمینه کاری همچنان در ابتدای مسیر تکامل قرار دارد و تحقیق روی طراحی رزرویر بهینه و روش استخراج اطلاعات در خروجی همچنان موضوعی است که جای کار دارد. در [۳] یک بررسی بر روی پیشرفت های اخیر روی روش محاسبات رزرویر و دسته بندی آنها انجام شده است.

ماشین حالت مایع[2] و شبکه انعکاس حالت[3] دو نوع از شبکه های محبوب هستند که در روش محاسبات رزرویر مورد توجه قرار گرفته اند. شبکه انعکاس حالت در ابتدا بصورت گسسته زیر تعریف شد.

$$\begin{aligned} x(n+۱) &= f\left(W^{in}u(n+۱) + Wx(n) + W^f y(n)\right) \\ y(n) &= g(W^{out}[x(n), u(n)]) \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

که $u(k) = (u_۱(n), u_۲(n), \cdots, u_K(n))$ واحدهای ورودی، $x(n) = (x_۱(n), x_۲(n), \cdots, x_N(n))$ واحدهای داخلی (حالت های رزرویر) و $y(n) = (y_۱(n), y_۲(n), \cdots, y_L(n))$ واحدهای خروجی می باشند. همچنین، ماتریس های W^{in}، W، W^f و W^{out}، به ترتیب، برای بیان ماتریس

[1] Jaeger
[2] Liquid state Machine
[3] Echo state Network

های وزن ورودی ها، اتصال های داخلی، اتصال واحدهای خروجی به واحدهای داخلی و اتصال واحدهای خروجی تعریف شدند.
چندین نشانه مختلف از پایداری مرتبط با شبکه عصبی انعکاس حالت وجود دارد که یکی از پایه ای ترین ویژگی پایداری این شبکه، ویژگی انعکاس حالت[1] می باشد. چندین رابطه ریاضی معادل این ویژگی توسط جیگِر ارائه شده است [۴]. مطابق با یکی از این روابط، یک شبکه عصبی انعکاس حالت دارای ویژگی انعکاس حالت می باشد اگر اثر شرایط اولیه آن با یک سرعت مستقل از ورودی، برای هر دنباله ورودی که از یک مجموعه متراکم[2] حاصل شود، از بین برود:

تعریف ۱.۱.۱. ([۴]) یک شبکه عصبی انعکاس حالت با حالت های رزرویر $x(t)$ دارای ویژگی انعکاس حالت می باشد اگر برای هر مجموعه متراکم $\mathbf{C} \subset \mathbb{R}^K$، یک دنباله $(\delta_h)_{h=0,1,2,\dots}$ بگونه ای وجود داشته باشد که برای هر دو شرایط اولیه $x(0)$ و $x'(0)$ و هر توالی پوچ $(\mathbf{u}(t))_{t=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{C}$ رابطه $||x(h) - x'(h)|| \leq \delta_h$ همواره برقرار باشد.

در [۵]، مقایسه ای بین ساختار شبکه انعکاس حالت با ساختار شبکه های دیگری ارائه شده است و نشان داده شد که شبکه انعکاس حالت ساختاری پیچیده تر و منعطف تر از بقیه دارد. هر چند، در [۶] نشان داده شد که شبکه انعکاس حالت، یک تقریبگر یکنواخت سراسری می باشد. شبکه انعکاس حالت در زمینه های مختلفی همچون پیش بینی سری زمانی [۷–۱۱]، فیلترینگ و کنترل [۱۲–۱۶]، تشخیص الگو دینامیکی [۱۷–۱۹] و مدلسازی سیستم [۲۰] بکار رفته است. محققان زیادی برای بهبود عملکرد این شبکه تلاش کرده اند. در [۸، ۹] بر روی بهبود معادله دینامیکی حالت های رزرویر کار شده است. در [۷، ۹، ۱۰، ۲۱–۲۶] بر روی بهبود روش آموزش شبکه تلاش هایی شده است. از بین بهبود هایی که روی ساختار شبکه انعکاس حالت انجام شده است، شبکه انعکاس حالت نشتی[3]، و شبکه انعکاس حالت تایم وراپینگ[4] دو مورد از محبوب ترین ها می باشند. در شبکه انعکاس حالت نشتی، یک واحد انتگرال نشتی به معادله دینامیکی رزرویر افزوده شده است [۸]. شبکه انعکاس حالت نشتی در حوزه زمان-پیوسته بصورت زیر تعریف شده است:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{1}{c}\left(-ax(t) + f(W^{in}u(t) + Wx(t) + W^{f}y(t))\right) \\
y(t) &= g(W^{out}[x(t), u(t)])
\end{aligned}
\tag{۲.۱}
$$

که اسکالرهای $c > 0$ و $a > 0$، به ترتیب، مشخص کننده ثابت زمانی شبکه انعکاس حالت نشتی و نرخ نشتی گره های (حالت های) رزرویر آن می باشند.
در این رساله، بر روی شبکه انعکاس حالت نشتی مرتبه کسری مطالعه خواهد شد که تعریف

---
[1] Echo state Property
[2] Compact Value Set
[3] Leaky Integrator Echo Estate Network
[4] Time-Wraping Invariant Echo Estate Network

آن در حوزه حسابان کسری بصورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} D^{\alpha}x(t) &= \frac{1}{c}\left(-ax(t) + f(W^{in}u(t) + Wx(t) + W^{f}y(t))\right) \\ y(t) &= g(W^{out}[x(t), u(t)]) \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

در ادامه، منظور از شبکه عصبی انعکاس حالت همان شبکه انعکاس حالت نشتی می باشد.

۳.۱.۱ مروری بر تحلیل پایداری نقطه تعادل شبکه عصبی مرتبه کسری

همانطور که بیان شد، ساختار شبکه های عصبی دینامیکی زمان پیوسته، به سه دسته هاپفیلد، کوهن- گراسبرگ و انعکاس حالت قابل تفکیک می باشند که، در اینجا، شبکه انعکاس حالت تنها شبکه ای است که به عنوان محاسبات رزرویر در کنار پیچیدگی کافی، از آموزش ساده ای برخوردار می باشد. پژوهش هایی که تاکنون در حوزه تحلیل دینامیکی شبکه های عصبی دینامیکی مرتبه کسری گزارش شده است، مربوط به شبکه هاپفیلد و کوهن- گراسبرگ مرتبه کسری می باشد. علاوه بر آن، با حفظ ساختار شبکه، ویژگی هایی همچون تاخیر، ممریستو، ضربه ای و غیره نیز به شبکه های عصبی افزوده شده است تا شبکه های عصبی قادر به مدلسازی بهتر این ویژگی های سیستم ها شوند و از بین انواع تحلیل های دینامیکی شبکه های عصبی، تحلیل پایداری نقطه تعادل و کاربرد آنها بیشتر مورد توجه واقع شده است. در [۲۷-۳۹] تحلیل پایداری نقطه تعادل شبکه هاپفیلد مرتبه کسری به همراه ویژگی هایی همچون تاخیر، ممریستو، ضربه ای و غیره بررسی شده است. در [۴۰-۴۴] نیز تحلیل پایداری نقطه تعادل شبکه کوهن- گراسبرگ مرتبه کسری به همراه ویژگی هایی همچون تاخیر انجام شده است.

از دیگر موضوعاتی که در کنار تحلیل پایداری و کاربرد شبکه های عصبی مطالعه می شود، شناسایی و کنترل پدیده آشوب در شبکه های عصبی دینامیکی است که در ادامه آن، مسائل کنترل و همزمانی با/ بدون نامعینی و اغتشاش نیز مورد توجه قرار گرفته است.

بر اساس دانش ما، گزارشی در رابطه با تحلیل دینامیکی شبکه های عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری ارائه نشده است، در این رساله به تحلیل دینامیکی این شبکه عصبی با/ بدون تاخیر و عنصر ممریستیو و به کاربرد این شبکه مرتبه کسری در پیش بینی سری زمانی پرداخته می شود.

در سال های اخیر، برای تحلیل داده های چند بعدی با استفاده از شبکه های عصبی، شبکه های عصبی مختلط/ کواترنیون معرفی شده است که در آن، کلیه وزن ها، حالت ها و توابع فعالسازی در فضای مختلط/ کواترنیون تعریف می شوند. شبکه های عصبی مختلط، حل برخی از مسایل که شبکه های عصبی حقیقی قادر به حل آنها نیستند را امکان پذیر کرده است. برای مثال، در [۴۵-۴۹] نشان داده شد که مسئله XOR و تشخیص مسئله تقارن را

نمی توان با یک نرون حقیقی حل کرد، اما این مسایل را می توان با یک نرون مختلط با مرزهای تصمیم گیری متعامد براحتی حل کرد که قدرت محاسبات نرون های مختلط را نشان می دهد. علاوه بر این، شبکه های عصبی مختلط با کاربردهایی همچون فیلترینگ، سنتز گفتار، تصویربرداری، بینایی کامپیوتری، سنجش از دور، دستگاه های کوانتومی، تجزیه و تحلیل فضایی دستگاه های عصبی فیزیولوژی و سیستم ها مورد توجه قرار گرفته است [۴۹–۵۵]. لذا، بعلت ویژگی های پیچیده و متفاوت و همچنین کاربردهای شبکه عصبی مختلط، لازم شد تا دینامیک آنها بطور عمیق مطالعه شود. در این راستا، کارهای زیادی بر روی تحلیل دینامیکی شبکه های عصبی مختلط به همراه ویژگی هایی همچون تاخیر و ممریستیو و غیره انجام شده است [۳۵، ۵۶–۶۰].

نتایج پژوهش های نشان می دهد که شبکه های عصبی کواترنیون بطور موفقیت آمیزی در کاربردهایی همچون فشرده سازی تصویر [۶۱، ۶۲]، دید در شب رنگ [۶۳]، پیشبینی باد ۳ـ بعدی [۶۴] و فیلتر کردن تطبیقی غیرخطی [۶۵] استفاده شده است. از این رو، افزودن ویژگی کواترنیون به شبکه های عصبی بعنوان یک سیستم فوقـ مختلط به عنوان یک موضوع تحقیقاتی جذاب مورد توجه قرار گرفته است [۳۰، ۶۶–۶۸]. در [۳۱، ۶۱–۶۳، ۶۹، ۷۰]، نشان داده شد که شبکه های عصبی کواترنیون یک ابزاری کارامدتری از شبکه های عصبی مختلط و یا حقیقی در مواجهه با مسایل چند بعدی[1] است. با این حال، شبکه عصبی کواترنیون بعلت ویژگی غیرـ تعاملی[2] ضرب کواترنیون از شبکه های عصبی مختلط پیچیده تر می باشد [۶۱]. تحلیل پایداری نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی مختلط و کواترنیون، بعلت پتانسیل آنها در کاربرد، حائز اهمیت می باشد. در حقیقت، همه فنون که برای تحلیل پایداری نقطه تعادل سیستم های کواترنیون/ مختلط بکار رفته اند را می توان به دو دسته مستقیم و غیر مستقیم دسته بندی کرد. در روش غیرمستقیم سیستم های کواترنیون، بدون در نظر گرفتن ویژگی غیرـ تعاملی در ضرب کواترنیون، سیستم ها به دو زیرـ سیستم مختلط یا چهار زیرـ سیستم حقیقی تجزیه می شوند. سپس آنالیز پایداری در فضای جدید با استفاده از توابع لیاپانوف و یا دیگر تکنیک ها انجام می شود [۶۸، ۷۱، ۷۲]. در روش مستقیم سیستم های کواترنیون، پایداری آنها بر مبنای ویژگی غیرـ تعاملی در ضرب کواترنیون و با استفاده از توابع لیاپانوف کراسونوفسکی [۳۷، ۶۶، ۷۳] و یا دیگر روش ها آنالیز می شود. علاوه بر روش تحلیل پایداری، توابع فعال سازی که در فضای کواترنیون بکار می روند، نیز موضوعی چالشی است. در این راستا، نیز می توان به سه روش مجزا برای آنالیز توابع فعالسازی اشاره کرد. اولین روش شامل جداسازی توابع فعالسازی به دو جزء مختلط و یا چهار جزء حقیقی می باشد [۶۸، ۷۱، ۷۲]. در دومین روش، توابع فعالسازی می بایست قیودی همچون لیپشیتز یا دیگر شروط پیوسته ای را برآورده سازند، بنابراین، نیازی به تفکیک توابع فعالسازی به دو جزء مختلط یا چهار جزء حقیقی نیست [۳۷، ۶۶، ۶۸، ۷۳]. هر یک از این دو روش، ضعف های خودش را دارند که منجر

[1] Multi-dimensional Problems
[2] Non-Commutativity

به محدودیت هایی روی توابع فعالسازی می شوند. در روش سوم، که در این رساله نیز از آن استفاده می شود، می توان از یک نگاشت روی توابع فعالسازی استفاده کرد که محدودیت های کمتری را اعمال می کند. در نهایت، باید بدانیم که در تحلیل سیستم های مختلط نیز می توان دسته بندی های مشابه با سیستم های کواترنیون ــ که در اینجا گفته شدــ انجام داد.

در پژوهش های زیادی بر روی رفتار و ویژگی های سیستم های مرتبه کسری در حضور تاخیر و عنصر ممریستیو در فضای حقیقی [۳۲–۳۴، ۷۰، ۷۴–۸۵]، مختلط [۳۵، ۳۶، ۵۶–۵۹، ۸۵–۹۱] و کواترنیون [۹۲] کار شده است. در [۵۷]، پایداری نقطه تعادل میتاگ‌ـ لفلر سراسری شبکه عصبی مختلط مرتبه کسری با حضور تاخیر گسسته و توزیع شده بحث شده است. در [۳۵، ۵۷، ۸۵، ۸۷]، آنالیز پایداری یکنواخت نقطه تعادل شبکه عصبی مختلط مرتبه کسری در حضور تاخیر انجام شده است. شبکه عصبی مختلط مرتبه کسری با استفاده از روش غیرمستقیم به دو شبکه عصبی حقیقی مرتبه کسری تجزیه شد و سپس آنالیز پایداری در فضای حقیقی انجام شد. در [۳۵، ۳۶، ۵۷–۵۹، ۸۵–۸۷، ۹۲]، تحلیل شبکه های عصبی مختلط و کواترنیون مرتبه کسری با توابع فعالسازی جداشدنی انجام شده است، که پیش از تحلیل، به ترتیب، توابع فعالسازی به دو و چهار جزء حقیقی تفکیک شده اند و در [۵۶–۵۸] نیز از توابع فعالسازی مختلط جدانشدنی استفاده شده است. در [۹۲]، نیز پایداری و همزمانی میتاگ‌ـ لفلر شبکه عصبی کواترنیون با نرون های آستانه ای خطی مطالعه شده است که در آن، توابع فعال سازی به چهار جزء حقیقی تفکیک شده است.

در سال های اخیر، عنصر ممریستیو برای توسعه شبکه های عصبی به نام شبکه های عصبی ممریستیو[1] بکار رفته است. ایده اصلی ممریستیو در ابتدا توسط آقایان چو و کانگ[2] در سال ۱۹۷۶ مطرح شد و از آن پس به عنوان یکی از عناصر پایه و اساسی سیستم های الکتریکی همچون مقاومت، خازن و سلف شناخته شد. شبکه های عصبی ممریستیو به اندازه کافی می تواند مغز انسان را که نمایانگر ویژگی های مهمی همچون ذخیره کننده بزرگ، قدرت پردازش موازی بالا، یادگیری موازی و حافظه می باشد، توصیف کند . پژوهش ها نشان می دهد که چنین شبکه های عصبی پتانسیل رفتاری بالایی در حوزه های حافظه انجمنی، بهینه سازی و تشخیص الگو دارند [۹۳]. به همین دلیل، اخیرا، در زمینه شبکه های عصبی ممریستیو مرتبه کسری در/بدون حضور تاخیر پژوهش هایی در فضای حقیقی [۳۲–۳۴، ۷۹–۸۵] و مختلط [۵۸، ۵۹، ۸۵–۸۸، ۹۱] گزارش شده است. با این وجود، هنوز در فضای مختلط پژوهشی انجام نشده است. بواسطه سرعت سوئیچینگ تجهیزات در پیاده سازی الکترونیکی، تاخیر زمانی یک پدیده متداول در عمل می باشد. همچنین یکی از عوامل اصلی است که بر دینامیک و پایداری شبکه های عصبی موثر می باشد و تاخیر ثابت، متغیر با زمان، نیوترال و توزیع شده انواع مختلفی از تاخیر می باشند. تاخیر ثابت، معمولا بعنوان یک تقریب خوب برای

[1] Memristive Neural Network
[2] Chua and Hang

جدول ۱.۱: مقایسه کارهای قبلی شبکه های عصبی مرتبه کسری در فضای حقیقی

	کارهای پیشین	ویژگی های مدل										روش آنالیز				نوع پایداری		
		نامعین	تاخیر				ممریستیو	تابع فعالسازی										
			ثابت	متغیر با زمان	نیوترال	توزیع شده		جداسازی	بدون جداسازی	توابع نگاشت	قیود	وابسته به تاخیر	مستقل از تاخیر	مستقیم	غیرمستقیم	پایداری لیاپانوف	پایداری زمان–محدود	پایداری یکنواخت
حقیقی	[۳۲]			√			√		√		L	√		√	N/A	√		
	[۳۳]		√				√		√		L		√	√	N/A	√		
	[۳۴]	√					√		√		L	N/A	N/A	√	N/A	√		
	[۴۱]								√		L	N/A	N/A	√	N/A	√		
	[۴۲]		√				√		√		B&L		√	√	N/A		√	
	[۴۳]		√						√		D	N/A	√	√	N/A	√		
	[۷۴]		√			√			√		L	√		√	N/A	√		
	[۷۵]								√		L	N/A	N/A	√	N/A	√		
	[۷۶]		√						√		L&IL		√	√	N/A			√
	[۷۷]	√							√		L&D	N/A	N/A	√	N/A		√	
	[۷۸]		√		√				√		L		√	√	N/A	√		
	[۷۹]		√	√			√		√		L	√		√	N/A		√	
	[۸۰]						√		√		G	N/A	N/A	√	N/A		√	
	[۸۱]						√		√		L	N/A	N/A	√	N/A	√		
	[۸۲]		√				√		√		L		√	√	N/A	√		
	[۸۵]			√			√		√		L		√	√	N/A			√
	[۸۳]		√				√		√		L	√		√	N/A		√	
	[۸۴]		√				√		√		L	√		√	N/A		√	
	کار حاضر	√		√	√		√		√		Q	√		√	N/A	√		
	L: شرط لیپشیتز، Q: $QUAD$، D: ناپیوسته، B: کراندار، C: پیوسته، I: معکوس، N/A: غیر قابل اجرا G: ناپیوسته برآورده کننده شرط رشد خطی																	

مدارهای ساده (در مدلسازی سیستم های فیدبک تاخیری) که تعداد اجزاء کم دارد، بکار می رود. با این حال، نرون های شبکه عصبی با خواص زمانی معمولا از طریق تعداد زیادی مسیر جذاب و از طریق آکسون با دیگران در ارتباط هستند. همچنین، شبکه های عصبی شامل تعداد زیادی کانال های موازی می باشند. بنابراین، در نظر گرفتن تاخیر های متغیر با زمان در ساختار شبکه عصبی در مدلسازی پدیده های دینامیکی از اهمیت بیشتری برخوردار می باشد. در [۹۴–۹۶]، تایید شد که معادلات دیفرانسیلی مرتبه صحیح در حضور تاخیر، قادر به نمایش مسائل عملی در حوزه علوم اعصاب[1]، سینتیک شیمیایی[2]، مدل های ترافیک[3]، دینامیک جمعیت[4]، برش فلز[5]، مدل های انتشار[6] و سیستم های VLSI می باشند. این کاملا واضح می باشد که سیستم های تاخیر دار دارای بعد نامحدود در طبیعت می باشند و با استفاده از تاخیر در مدل بهتر می توان دینامیک این سیستم ها را توصیف کرد [۹۷]. با این وجود، افزودن تاخیر به شکبه های عصبی می تواند منجر به رفتار نامطلوبی همچون نوسان، ناپایداری، آشوب گردد. بنابراین، زمان تاخیر در شبکه های عصبی بعنوان یک موضوع چالشی در حوزه تحلیل

[1]Neuroscience
[2]Chemical Kinetics
[3]Traffic Models
[4]Population Dynamics
[5]Metal cutting
[6]Propagation and diffusion Models

دینامیکی مورد توجه قرار گرفته است. اخیرا، پژوهش هایی در زمینه تحلیل پایداری نقطه تعادل شبکه های عصبی در حضور تاخیر ثابت مانند [۵۷،۵۸،۷۴،۷۶،۷۸،۷۹،۸۲–۸۴،۸۷]، تاخیر متغیر با زمان مانند [۳۲،۷۹،۸۵–۸۹]، تاخیر نیوترال [۷۸] و تاخیر توزیع شده [۵۷،۷۴] با استفاده از روش های مختلف همچون توابع لیاپانوف کراسوفسکی و نابرابری ماتریسی خطی (LMI) گزارش شده است. همه این پژوهش ها را می توان به دو دسته آنالیز پایداری نقطه

جدول ۲.۱: مقایسه کارهای قبلی شبکه های عصبی مرتبه کسری در فضای مختلط و کواترنیون

	کارهای پیشین	ویژگی های مدل										روش آنالیز				نوع پایداری		
			تاخیر					تابع فعالسازی										
		نامعین	ثابت	متغیر با زمان	نیوترال	توزیع شده	ممریستیو	جداسازی	بدون جداسازی	توابع نگاشت	قیود	وابسته به تاخیر	مستقل از تاخیر	مستقیم	غیرمستقیم	پایداری لیاپانوف	پایداری زمان محدود	پایداری یکنواخت
مختلط	[۳۵]		√					√			L		√		√			√
	[۳۶]		√					√			L		√		√	√		
	[۸۵]			√			√	√			L		√		√			√
	[۶۰]							√			L	N/A	N/A		√			√
	[۵۷]		√			√			√		L		√	√		√		
	[۵۷]		√			√		√			L	√			√			√
	[۵۶]								√		L	N/A	N/A	√		√		
	[۵۹]						√	√			L	N/A	N/A		√	√		
	[۵۸]	√	√				√	√			L		√		√	√		
	[۵۸]	√	√				√		√		L&B		√	√		√		
	[۸۶]			√			√	√			L	√			√			√
	[۸۷]		√	√			√	√			L	√			√		√	
	[۸۸]			√			√	√			L	√			√		√	
	کار حاضر	√		√	√		√			√	Q	√			√	√		
کواترنیون	[۹۲]							√			L	N/A	N/A		√	√		
	کار حاضر	√		√	√		√			√	Q	√			√	√		

L: شرط لیپشیتز، Q: $QUAD$، D: ناپیوسته، B: کراندار، C: پیوسته، I: معکوس، N/A: غیر قابل اجرا
G: ناپیوسته برآورده کننده شرط رشد خطی

تعادل وابسته به تاخیر مانند [۳۲، ۵۷، ۷۴، ۷۹، ۸۳، ۸۴، ۸۶–۸۸] و آنالیز پایداری نقطه تعادل مستقل از تاخیر مانند [۳۵، ۳۶، ۵۷، ۵۸، ۷۸، ۸۲، ۸۵] تفکیک کرد. البته، باید بدانیم که روش های مستقل از تاخیر، سختگیرانه تر از روش های وابسته با تاخیر می باشند و به حاشیه پایداری کوچکتری روی پارامترهای مدل منجر می شوند. در جدول های (۱.۱) و (۲.۱) نتایج مقایسه بین کارهای گذشته در این حوزه آورده شده است. این مقایسه از چند منظر نوع پایداری، نوع تاخیر و چگونگی مواجهه با تاخیر و ... در فضای حقیقی، مختلط و کواترنیون انجام شده است.

۲.۱ مفاهیم پایه

طراحی کنترل برای یک سیستم، همواره متاثر از آگاهی مان از قابلیت ها و محدودیت های سیستم تحت کنترل می باشد. لذا آگاهی از قواعد حاکم بر آن حوزه و البته ویژگی های آن سیستم، بسیار کارا می باشد. در راستای تحلیل دینامیکی سیستم ها، مبحث پایداری و

پایدارسازی اولین و مهمترین چالشی است که در کنار ویژگی های متعدد یک سیستم دینامیکی تحت کنترل مطرح می شود، چرا که سیستم های دینامیکی ناپایدار عموما نه تنها عملکرد مفیدی ندارد بلکه بالقوه خطرناک نیز هستند. از لحاظ کیفی، سیستمی را پایدار گویند که شروع به فعالیت آن از موقعیت نزدیک به نقطه کار مطلوب، باعث باقی ماندن دائمی در اطراف نقطه کار شود. می دانیم، درجه پیچیدگی تحلیل پایداری سیستم های دینامیکی به سرعت با تغییر مدل سیستم از خطی تغییر ناپذیر با زمان به خطی تغییر پذیر با زمان و غیرخطی افزایش می یابد. همچنین، پیچیدگی تحلیل آنها با حضور ویژگی هایی همچون تاخیر[۱]، ممریستیو[۲] و ضربه ای[۳] در سیستم ها افزوده می شود. روش های گوناگونی برای تحلیل پایداری و پایدارسازی سیستم های مرتبه صحیح و کسری وجود دارد که لازمه پرداختن به آنها، آشنایی با ریاضیات آن حوزه و ویژگی های آن سیستم ها می باشد. در این راستا، در ادامه به ۱) معرفی قضایا، لم ها و روابط ریاضی مورد استفاده در این رساله، ۲) معرفی ریاضیات حسابان کسری[۴] و ویژگی های سیستم مرتبه کسری، ۳) پایداری سیستم های مرتبه کسری و قضایای مرتبط با این حوزه پرداخته می شود.

۱.۲.۱ تعاریف، قضایا و لم های کاربردی ریاضی

در این بخش، به روابط ریاضی کاربردی که در این رساله استفاده شده است، در قالب تعاریف، قضایا و لم ها پرداخته خواهد شد.

نشانه گذاری فضای مسئله: در این رساله، مجموعه همه اعداد با ابعاد $m \times n$ در فضای کواترنیون[۵]، مختلط[۶]، حقیقی[۷] و صحیح[۸] با $\mathbb{H}^{m\times n}$، $\mathbb{C}^{m\times n}$، $\mathbb{R}^{m\times n}$ و $\mathbb{Z}^{m\times n}$ نمایش داده می شود. همچنین، مجموعه اعداد صحیح مثبت را با $\mathbb{Z}^+$، حقیقی مثبت را با $\mathbb{R}^+$، مختلط مثبت را با $\mathbb{C}^+$ و کواترنیوم مثبت را با $\mathbb{H}^+$ نمایش داده می شود. هر عدد کواترنیون $x \in \mathbb{H}^{m\times n}$ را می توان بصورت $x = x^{(R)} + x^{(I)}\imath + x^{(J)}\jmath + x^{(K)}\kappa$ نمایش داد که $x^{(R)}, x^{(I)}, x^{(J)}, x^{(K)} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ می باشند. نمادهای $\imath, \jmath$ و κ بردارهای یکه موهومی کواترنیوم می باشند که $\imath^2 = \jmath^2 = \kappa^2 = \imath\jmath\kappa = -1$، $\imath\jmath = -\jmath\imath = \kappa$، $\jmath\kappa = -\kappa\jmath = \imath$ و $\kappa\imath = -\imath\kappa = \jmath$ می باشند. همچنین، هر عدد مختلط $x \in \mathbb{C}^{m\times n}$ را می توان بصورت $x = x^{(R)} + x^{(I)}\imath$ نمایش داد که $x^{(R)}, x^{(I)} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ می باشند. نماد $\imath$ بردار یکه موهومی مختلط می باشد.

تعریف ۱.۲.۱. تابع پیوسته $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بر روی $\mathbb{R}$ لیپشیتز[۹] می باشد اگر برای هر $u, v \in \mathbb{R}$

[1] Time Delay
[2] Memristive
[3] Impulsive
[4] Fractional calculus
[5] Quaternion
[6] Complex
[7] Real
[8] Integer
[9] Lipschitz

ثابت مثبت لیپشیتز F وجود داشته باشد که

$$|f(u) - f(v)| \leq F\,|u - v| \tag{۴.۱}$$

تعریف ۲.۲.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ را $QUAD\left(\Delta^f, \omega^f\right)$ گوئیم اگر و تنها اگر

$$(x - \widetilde{x})^T \left[f\left(x, t\right) - f\left(\widetilde{x}, t\right)\right] - (x - \widetilde{x})^T\,\Delta^f\,(x - \widetilde{x}) \leq -\omega^f\,(x - \widetilde{x})^T\,(x - \widetilde{x})\,, \tag{۵.۱}$$

که $n \in \mathbb{Z}^+$ یک عدد صحیح مثبت، ω^f یک اسکالر حقیقی و مثبت، Δ^f یک ماتریس $n \times n$ و $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ دو نقطه مجزا در فضای ورودی تابع می باشند [۹۸].

نتیجه ۱.۲.۱. اگر تابع $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$، مطابق با تعریف (۲.۲.۱)، $QUAD\left(\Delta^f, \omega^f\right)$ باشد و $\widetilde{\Delta}^f = |\Delta^f - \omega^f \mathcal{I}|$ که $\mathcal{I}$ ماتریس همانی با ابعاد مناسب باشد، آنگاه

$$\left|f\left(x, t\right) - f\left(\widetilde{x}, t\right)\right| \leq \widetilde{\Delta}^f\,|x - \widetilde{x}| \Longleftrightarrow \left|f_h\left(x, t\right) - f_h\left(\widetilde{x}, t\right)\right| \leq \widetilde{\Delta}^f(h, :)\,|x - \widetilde{x}|\,.$$

لم ۱.۲.۱. برای هر دو بردار $a, b \in \mathbb{R}^n$، نابرابری

$$\pm\,۲a^T b \leq a^T Q a + b^T Q^{-۱} b \tag{۶.۱}$$

بازای هر ماتریس حقیقی مثبت معین $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ برقرار است که $n \in \mathbb{Z}^+$ می باشد.

لم ۲.۲.۱. برای هر ماتریس مثبت معین $\digamma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و تابع برداری $x : [t, t-\sigma] \rightarrow \mathbb{R}^n$، نابرابری زیر همیشه برقرار است [۲۸].

$$\left(\int_{t-\sigma}^{t} x^T(s)ds\right) \digamma \left(\int_{t-\sigma}^{t} x(s)ds\right) \leq \sigma \int_{t-\sigma}^{t} x^T(s) \digamma x(s)ds \tag{۷.۱}$$

که در آن $\sigma > ۰$ می باشد.

لم ۳.۲.۱. ([۲۹]): (مکمل شوور[1]) برای ماتریس های $\Omega_۱$، $\Omega_۲$ و $\Omega_۳$ که $\Omega_۱ = \Omega_۱^T$ و $\Omega_۲ > ۰$ می باشند، آنگاه رابطه $\Omega_۱ + \Omega_۳^T \Omega_۲^{-۱} \Omega_۳ < ۰$ برقرار است اگر و فقط اگر

$$\begin{bmatrix} \Omega_۱ & \Omega_۳^T \\ \Omega_۳ & -\Omega_۲ \end{bmatrix} < ۰ \qquad \text{or} \qquad \begin{bmatrix} -\Omega_۲ & \Omega_۳ \\ \Omega_۳^T & -\Omega_۱ \end{bmatrix} < ۰ \tag{۸.۱}$$

لم ۴.۲.۱. ([۹۹]) اگر $\Psi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع پیوسته ای باشد که شروط زیر را برآورده سازد:

۱) $\|\Psi(x)\|$ تزریقی[2] روی $\mathbb{R}^n$ باشد،

۲) اگر $\|x\|$ به سمت بینهایت میل کند، انگاه $\|\Psi(x)\|$ نیز به سمت بینهایت میل کند،

آنگاه $\Psi(x)$ یک هومومورفیسم[3] از فضای $\mathbb{R}^n$ می باشد.

---

[1] Schur complement

[2] Injective

[3] Homeomorphism

جبر اعداد مختلط و کواترنیون

در این بخش به برخی از لم ها، تعاریف کاربردی در حوزه اعداد مختلط و کواترنیون اشاره می شود. در این راستا، فرض می شود p و q دو نقطه مجزا در این فضا باشند.

لم ۵.۲.۱. فرض کنید p, q دو عدد کواترنیون، $p, q \in \mathbb{H}$، باشند آنگاه ضرب و جمع آنها بصورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned} pq &= p^{(R)}q^{(R)} - p^{(I)}q^{(I)} - p^{(J)}q^{(J)} - p^{(K)}q^{(K)} \\ &\quad + \left(p^{(R)}q^{(I)} + p^{(I)}q^{(R)} + p^{(J)}q^{(K)} - p^{(K)}q^{(J)}\right) \imath \\ &\quad + \left(p^{(R)}q^{(J)} - p^{(I)}q^{(K)} + p^{(J)}q^{(R)} + p^{(K)}q^{(I)}\right) \jmath \\ &\quad + \left(p^{(R)}q^{(K)} + p^{(I)}q^{(J)} - p^{(J)}q^{(I)} + p^{(K)}q^{(R)}\right) \kappa \\ &= (pq)^{(R)} + (pq)^{(I)} \imath + (pq)^{(J)} \jmath + (pq)^{(K)} \kappa. \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

و

$$p + q = p^{(R)} + q^{(R)} + \left(p^{(I)} + q^{(I)}\right) \imath + \left(p^{(J)} + q^{(J)}\right) \jmath + \left(p^{(K)} + q^{(K)}\right) \kappa. \tag{۱۰.۱}$$

لم ۶.۲.۱. با تعریف

$$\begin{aligned} &\Omega_{(R)} = \{(R,R), (I,I), (J,J), (K,K)\}, \quad \Omega_{(I)} = \{(R,I), (I,R), (J,K), (K,J)\}, \\ &\Omega_{(J)} = \{(R,J), (I,K), (J,R), (K,I)\}, \quad \Omega_{(K)} = \{(R,K), (I,J), (J,I), (K,R)\}, \\ &\widetilde{\Omega}_{(R)} = \{(۱,R,R), (-۱,I,I), (-۱,J,J), (-۱,K,K)\}, \\ &\widetilde{\Omega}_{(I)} = \{(۱,R,I), (۱,I,R), (۱,J,K), (-۱,K,J)\}, \\ &\widetilde{\Omega}_{(J)} = \{(۱,R,J), (-۱,I,K), (۱,J,R), (۱,K,I)\}, \\ &\widetilde{\Omega}_{(K)} = \{(۱,R,K), (-۱,I,J), (۱,J,I), (۱,K,R)\}, \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

آنگاه، رابطه (۱۲.۱) در ضرب دو عدد کواترنیون p و q برقرار می باشد.

$$(pq)^{(\rho)} \leq \sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}} \left|p^{(\Upsilon)}\right| \left|q^{(\Theta)}\right|. \tag{۱۲.۱}$$

که در آن $\rho, \Upsilon, \Theta \in \Omega = \{R, I, J, K\}$ می باشد.

اثبات: با استفاده از رابطه های (۹.۱) و (۱۱.۱)، داریم:

$$\begin{aligned}
(pq)^{(R)} &= p^{(R)}q^{(R)} - p^{(I)}q^{(I)} - p^{(J)}q^{(J)} - p^{(K)}q^{(K)} = \sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(R)}} \eta p^{(\Upsilon)}q^{(\Theta)},\\
(pq)^{(I)} &= p^{(R)}q^{(I)} + p^{(I)}q^{(R)} + p^{(J)}q^{(K)} - p^{(K)}q^{(J)} = \sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(I)}} \eta p^{(\Upsilon)}q^{(\Theta)},\\
(pq)^{(J)} &= p^{(R)}q^{(J)} - p^{(I)}q^{(K)} + p^{(J)}q^{(R)} + p^{(K)}q^{(I)} = \sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(J)}} \eta p^{(\Upsilon)}q^{(\Theta)},\\
(pq)^{(K)} &= p^{(R)}q^{(K)} + p^{(I)}q^{(J)} - p^{(J)}q^{(I)} + p^{(K)}q^{(R)} = \sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(K)}} \eta p^{(\Upsilon)}q^{(\Theta)}.
\end{aligned} \tag{۱۳.۱}$$

پس، برای هر $\rho \in \Omega = \{R, I, J, K\}$، رابطه زیر نتیجه می دهد.

$$\begin{aligned}
(pq)^{(\rho)} &= \sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}} \eta p^{(\Upsilon)}q^{(\Theta)},\\
&\leq \sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}} |\eta p^{(\Upsilon)}q^{(\Theta)}|,\\
&\leq \sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}} \left|p^{(\Upsilon)}\right|\left|q^{(\Theta)}\right|.
\end{aligned} \tag{۱۴.۱}$$

در اینجا، اثبات تکمیل می شود.

لم ۷.۲.۱. اگر نتایج بدست آمده در لم های (۵.۲.۱) و (۶.۲.۱) به فضای مختلط تعمیم یابد، یعنی فرض شود p و q دو عدد مختلط هستند، $p, q \in \mathbb{C}$، آنگاه براحتی می توان نشان داد که

$$\begin{aligned}
pq &= \left(p^{(R)}q^{(R)} - p^{(I)}q^{(I)}\right) + \left(p^{(R)}q^{(I)} + p^{(I)}q^{(R)}\right)\imath\\
p + q &= p^{(R)} + q^{(R)} + \left(p^{(I)} + q^{(I)}\right)\imath,\\
\Omega_{(R)} &= \{(R,R),(I,I)\}, \qquad \Omega_{(I)} = \{(R,I),(I,R)\}\\
\widetilde{\Omega}_{(R)} &= \{(۱,R,R),(-۱,I,I)\}, \qquad \widetilde{\Omega}_{(I)} = \{(۱,R,I),(۱,I,R)\}\\
(pq)^{(\rho)} &= \sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}} \eta p^{(\Theta)}q^{(\Upsilon)} \leq \sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}} \left|p^{(\Theta)}\right|\left|q^{(\Upsilon)}\right|, \rho \in \Omega = \{R, I\}.
\end{aligned} \tag{۱۵.۱}$$

تعریف ۳.۲.۱. برای $n \in \mathbb{Z}^+$، $\forall A, B \in \mathbb{H}^{n\times n}$ که $A = [a_{ij}]_{n\times n}$، $B = [b_{ij}]_{n\times n}$، $a_{ij} \in \mathbb{H}$، $b_{ij} \in \mathbb{H}$ و $i, j = ۱, ۲, \cdots, n$ اپراتور $\preceq$ بصورت زیر تعریف می شود [۶۶]:

۱) $a_{ij} \preceq b_{ij}$ اگر و تنها اگر $a_{ij}^{(\rho)} \leq b_{ij}^{(\rho)}$ برای هر $\rho \in \Omega = \{R, I, J, K\}$، برقرار باشد.

۲) $A \preceq B$ اگر و تنها اگر برای همه i, j رابطه $a_{ij} \preceq b_{ij}$ برقرار باشد.

همچنین، نتایج فوق در فضای مختلط نیز کاملا صادق می باشد.

تعریف ۴.۲.۱. برای $m,n \in \mathbb{Z}^+$، نگاشت خطی $\varphi(\cdot)$ از فضای کواترنیون/مختلط به فضای حقیقی بصورت زیر تعریف می شود:
۱) برای بردار $x \in \mathbb{H}^n$ و بردار $\hat{x} \in \mathbb{C}^n$

$$\varphi(x) = [x^{(R)}; x^{(I)}; x^{(J)}; x^{(K)}] \in \mathbb{R}^{4n}$$
$$\varphi(\hat{x}) = [x^{(R)}; x^{(I)}] \in \mathbb{R}^{2n} \tag{۱۶.۱}$$

۲) برای ماتریس $A \in \mathbb{H}^{m\times n}$ و برای ماتریس $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} A^{(R)} & -A^{(I)} & -A^{(J)} & -A^{(K)} \\ A^{(I)} & A^{(R)} & -A^{(K)} & A^{(J)} \\ A^{(J)} & A^{(K)} & A^{(R)} & -A^{(I)} \\ A^{(K)} & -A^{(J)} & A^{(I)} & A^{(R)} \end{bmatrix} \tag{۱۷.۱}$$

$$\varphi(B) = \begin{bmatrix} B^{(R)} & -B^{(I)} \\ B^{(I)} & B^{(R)} \end{bmatrix} \tag{۱۸.۱}$$

ملاحظه ۱.۲.۱. نگاشت خطی $\varphi(\cdot)$ که در تعریف (۴.۲.۱) ارایه شد، برای $\forall m,n,l \in \mathbb{Z}^+$، $\forall x,y \in \mathbb{H}^n$، $\forall \beta \in \mathbb{R}$، $A \in \mathbb{H}^{m\times n}$، $B \in \mathbb{H}^{m\times n}$ و $C \in \mathbb{H}^{n\times l}$ دارای ویژگی های زیر می باشد.

$$\begin{aligned} &\varphi(x \pm y) = \varphi(x) \pm \varphi(y); \quad \varphi(\beta x) = \beta\varphi(x) \\ &\varphi(A \pm B) = \varphi(A) \pm \varphi(B); \quad \varphi(\beta A) = \beta\varphi(A) \\ &\varphi(AC) = \varphi(A) \times \varphi(C); \quad \varphi(Ax) = \varphi(A)\varphi(x) \\ &\varphi^T(AC) = \varphi^T(C)\varphi^T(A) \\ &\|x\|^2 = \|\varphi(x)\|^2. \end{aligned} \tag{۱۹.۱}$$

همچنین، ویژگی های فوق برای هر x، y، A، B و C در فضای مختلط نیز کاملا برقرار می باشد.

۲.۲.۱ مروری بر حسابان کسری

سابقه طرح موضوع حسابان کسری به نامه نگاری دو دانشمند برجسته قرن ۱۷ باز می گردد، که در آن هوپیتال[1] در نامه ای به لایبنیز[2] در سال ۱۶۹۵ میلادی چنین سوالی را مطرح کرد: وقتی مشتق از مرتبه صحیح است مفهوم آن برای ما شناخته شده است، اگر مرتبه مشتق ۰/۵ باشد معنای شکل نوشتاری آن چیست؟ لایبنیز در پاسخ، آن را تضادی آشکار بیان می کند و به صورت پیشگویانه اعلام می کند که در آینده نتایج خوبی از آن استخراج خواهد شد [۱۰۰].

[1] L' Hopital
[2] Leibniz

از آن زمان تاکنون مطالعات گسترده ای به صورت محض و کاربردی بر روی حسابان کسری انجام گرفته و نتایج مطلوبی حاصل شده است. البته بحث حسابان کسری از دیدگاه ریاضی دور از ذهن نیست چرا که اعداد صحیح زیر مجموعه ی اعداد کسری هستند و طبعا می توان با استفاده از تعاریف مناسب ضمن حفظ خواص مرتبه مشتق، آن را به اعداد حقیقی نیز تعمیم داد.

مطالعات انجام شده نشان می دهد که گروهی از سیستم ها، ذاتا دارای دینامیک مرتبه کسری هستند از جمله برخی پدیده های الکترومغناطیسی [۱۰۱]، سیستم های الکترومکانیک [۱۰۲]، مهندسی پزشکی و بیولوژیکی [۱۰۳]، مواد و ویسکوالاستیک [۱۰۴]، انتشار حرارت [۱۰۵، ۱۰۶]، زمین شناسی [۱۰۷] و پدیده های دیگر [۱۰۸–۱۱۰] اشاره نمود.

برخی پژوهش ها نیز در زمینه مطالعه سیستم های مرتبه کسری در کنترل از جمله سیستم های نامعین [۳۴]، پردازش تصویر [۱۱۱]، سیستم های قدرت [۱۱۲] و پردازش سیگنال [۱۰۳] پرداخته اند و تعداد زیادی نیز به مبانی زیرشاخه ها و ارتباط این موضوع با سایر زمینه های علمی از جمله شناسایی [۱۱۳]، کنترل [۱۱۴، ۱۱۵]، بهینه سازی [۱۱۶–۱۱۸] و آشوب [۱۱۹] نیز می توان اشاره کرد.

تعریف تابع گاما

یکی از توابع معروف و پر کاربرد در حسابان کسری تابع گاما[1] می باشد. این تابع عموما با نماد $\Gamma(\cdot)$ نشان داده می شود و در واقع تعمیمی برای تابع فاکتوریل، به منظور بسط آن به حوزه اعداد حقیقی است.

$$\Gamma(z) \triangleq \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{۲۰.۱}$$

انتگرال موجود در تعریف فوق، به ازای مقادیر متغیر $z = x + \imath y, z \in \mathbb{C}$ که در آن قسمت حقیقی متغیر مثبت باشد، $Re(z) > 0$، همگرا می گردد. در ادامه به چند مورد از خواص این تابع پر کاربرد اشاره می شود [۱۲۰].

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \forall Re(\mathrm{z}) > 0, \tag{۲۱.۱}$$

$$\Gamma(z) \approx z^{-1} \quad \forall z \in (0,1), \tag{۲۲.۱}$$

$$\Gamma(z) = z! \quad \forall z \in \mathbb{Z}^{+}. \tag{۲۳.۱}$$

تابع میتاگ- لفلر

تابع میتاگ- لفلر[2] تابعی پر کاربرد در حوزه حسابان کسری است که در واقع تعمیم بسط تیلور تابع نمایی بوده و با توجه به جایگاه والای تابع نمایی در تئوری معادلات دیفرانسیل

[1] Gamma
[2] Mittag-Leffler

خطی نامتغیر با زمان در سیستم های مرتبه صحیح، اهمیت جایگاه تابع میتاگ ـ لفلر کاملا مشهود می گردد. این تابع به صورت زیر در حسابان کسری معرفی شده است.

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad \alpha>0,\beta>0. \tag{۲۴.۱}$$

این تابع به ازای مقادیر خاصی از پارامترهای α و β به توابع شناخته شده ای تبدیل می شود که به برخی از آنها مختصرا اشاره می شود [۱۲۰،۱۲۱].

$$E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z. \tag{۲۵.۱}$$

$$E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{z}\left(e^z-1\right). \tag{۲۶.۱}$$

$$E_{1,m}(z)=\frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^z-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right\},\quad m\in N. \tag{۲۷.۱}$$

توابع $cosh(z)$ و $sinh(z)$ را نیز می توان بر حسب تابع میتاگ ـ لفلر بیان کرد.

$$E_{2,1}\left(z^2\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cosh(z), \tag{۲۸.۱}$$

$$E_{2,2}\left(z^2\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\sinh(z)}{z}. \tag{۲۹.۱}$$

توابع $cos(z)$ و $sin(z)$ نیز از جمله توابعی هستند که می توان بر حسب این تابع پر کاربرد نمایش داد.

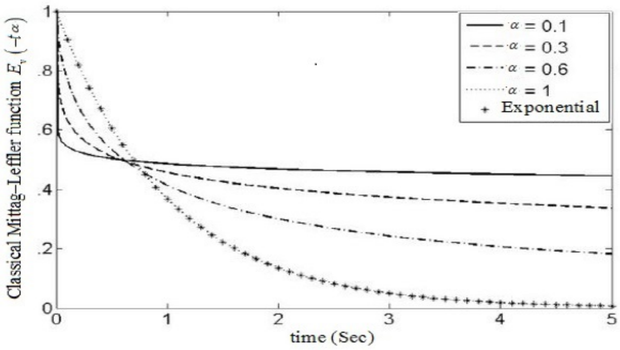
$$E_{2,1}\left(-z^2\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-z^2\right)^k}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}=\cos(z), \tag{۳۰.۱}$$

$$E_{2,2}\left(-z^2\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-z^2\right)^k}{\Gamma(2k+2)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\sin(z)}{z}. \tag{۳۱.۱}$$

در حالت خاص، وقتی $\beta=1$ باشد تابع میتاگ ـ لفلر تک پارامتری بدست می آید.

$$E_{\alpha,1}(z)=E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\quad \alpha>0. \tag{۳۲.۱}$$

تابع میتاگ ـ لفلر تک پارامتری E_α را می توان تعمیمی برای تابع نمایی e^z در نظر گرفت. شکل ۱ـ۲، تغییرات تابع میتاگ ـ لفلر $E_\alpha(-\alpha t)$ را به ازای مرتبه مشتق کسری، یعنی α، نشان می دهد.



شکل ۵.۱: تابع میتاگ- لفلر $E_\alpha(-\alpha t)$ به ازای تغییرات مرتبه مشتق

انتگرال مرتبه کسری

برای تعمیم مفهوم انتگرال به مرتبه های غیر صحیح می توان از فرمول کوشی استفاده کرد چرا که فرم معادلی را برای انتگرال تکراری از مرتبه n پیشنهاد می دهد [۱۲۰].

$$ {}_{t_\circ}I_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{t_\circ}^{t} (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{۳۳.۱} $$

که $t_\circ$ حد پایین انتگرال، t حد بالای انتگرال و n مرتبه انتگرال را مشخص می کند. بنابراین تعریف انتگرال مرتبه کسری برای تابع پیوسته $f(t)$ به صورت زیر است.

$$ {}_{t_\circ}I_t^\alpha f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_\circ}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \; t > a, \alpha \in \mathbb{R}^+. \tag{۳۴.۱} $$

همچنین به عنوان قرارداد، عملگر ${}_{t_\circ}I_t^\alpha$ وقتی که $\alpha = \circ$ است، به عنوان یک عملگر همانی ${}_{t_\circ}I_t^\circ f(t) = f(t)$ پذیرفته می شود. لازم به ذکر است که انتگرال مرتبه کسری، یک عملگر خطی است و خواص جمع پذیری و جابجایی پذیری را دارا می باشد.

مشتق مرتبه کسری

تعاریف متعددی برای مشتقات مرتبه کسری از جمله معروف ترین آنها ریمان- لیوویل[1]، کپوتو[2] و گرانوالد- لتنیکوف[3] ارائه شده است [۱۰۰، ۱۲۰، ۱۲۲].

تعریف ریمان- لیوویل

مشتق ریمان- لیوویل برای مشتق مرتبه کسری α و $n-1 \leq \alpha < n, \; n \in \mathbb{Z}^+$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$ {}_{t_\circ}^{RL}D_t^\alpha f(t) = D_{t_\circ}^n I_t^{n-\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_\circ}^{t} \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau,\right] \tag{۳۵.۱} $$

[1] Riemann-Leiouville
[2] Caputo
[3] Grunwald-Letnikov

طبق این تعریف، برای محاسبه مشتق مرتبه $\alpha \in \mathbb{R}^+$ یک تابع، ابتدا انتگرال گیری کسری از مرتبه $n-\alpha$ انجام می گیرد و پس از آن، n مرتبه مشتق گیری مرتبه صحیح انجام می شود. چنانچه $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ باشد، تعریف مشتق کلاسیک (مشتق مرتبه α ام صحیح)، حاصل می گردد. همچنین پیش زبر نویس RL، نمایانگر تعریف مشتق ریمان- لیوویل است.

تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه کسری با تعریف ریمان- لیوویل به صورت زیر است.

$$L\left\{{}_{\circ}^{RL}D_t^{\alpha}f(t)\right\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=\circ}^{n-1} s^k \left[{}_{\circ}^{RL}D_t^{\alpha-k-1}f(t)\right]\Big|_{t=\circ}. \qquad (۳۶.۱)$$

تعریف کپوتو

مشتق مرتبه کسری با تعریف کپوتو، از جمله تعاریف پرکاربرد در حوزه مهندسی است. اساس این تعریف نیز مانند تعریف ریمان- لیوویل، با به کارگیری مفهوم انتگرال مرتبه کسری شکل گرفته است. تفاوت این دو تعریف، در واقع در تقدم و تأخر در عملگرهای مشتق مرتبه صحیح و انتگرال مرتبه کسری است.

$$ {}_{t_\circ}^{C}D_t^{\alpha}f(t) = {}_{t_\circ}I_t^{n-\alpha}\, {}_{t_\circ}^{C}D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_\circ}^{t}\frac{\left[\frac{d^n}{dt^n}f(\tau)\right]}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau, \qquad (۳۷.۱)$$

که در آن پیش زبر نویس C، نمایانگر تعریف مشتق کپوتو است. تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه کسری کپوتو به صورت زیر است.

$$L\left\{{}_{\circ}^{C}D_t^{\alpha}f(t)\right\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=\circ}^{n-1} s^{\alpha-k-1}\left[\frac{d^k}{dt^k}f(\circ)\right]. \qquad (۳۸.۱)$$

در کاربردهای مهندسی، تعریف مشتق مرتبه کسری کپوتو به خاطر وجود تعبیر فیزیکی در شرایط اولیه ی آن، بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. در این رساله نیز، توجه خود را به این تعریف معطوف کرده و تمامی تحلیل ها و طراحی ها بر اساس این تعریف انجام می گیرد.

تعریف گرانوالد- لتنیکوف

مشتق کسری گرانوالد- لتنیکوف در واقع تعمیمی بر تعریف حدی مشتق است.

$$ {}_{t_\circ}^{GL}D_t^{\alpha}f(t) = \lim_{h\to\circ}\frac{\sum_{r=\circ}^{\left[\frac{t-t_\circ}{h}\right]}(-1)^r\begin{pmatrix}\alpha\\ r\end{pmatrix}f(t-rh)}{h^{\alpha}} \qquad (۳۹.۱)$$

که در آن، $\begin{pmatrix}\alpha\\ r\end{pmatrix}$ تابع ترکیب تعمیم یافته است. همچنین، پیش زبر نویس GL، نمایانگر تعریف مشتق گرانوالد- لتنیکوف است.

با توجه به ماهیت این تعریف، از مشتق مرتبه کسری گرانوالد- لتنیکوف در روش های عددی

محاسبه مشتق و همچنین گسسته سازی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری استفاده می شود. تبدیل لاپلاس مشتق کسری گرانوالد_ لتنیکوف به صورت زیر است.

$$L\left\{ {}_{0}^{GL}D_t^{\alpha} f(t) \right\} = s^{\alpha} F(s). \tag{۴۰.۱}$$

نتیجه ۲.۲.۱. [۱۲۳] فرض کنید $f(t)$ تابعی پیوسته و مشتق پذیر و $n-1 < \alpha < n$ باشد، آنگاه

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(f - t_0)^k. \tag{۴۱.۱}$$

اگر $1 > \alpha > 0$ باشد، آنگاه

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = f(t) - f(t_0). \tag{۴۲.۱}$$

مدل و نمایش سیستم های مرتبه کسری

معادله دیفرانسیل ناهمگن مرتبه کسری پیوسته در زمان با $u \in \mathbb{R}^p$ ورودی و $y \in \mathbb{R}^q$ خروجی سیستم به صورت زیر می باشد.

$$H\left({}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m} \right)(y_1, y_2, \ldots, y_q) = G\left({}_{t_0}^{C}D_t^{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n} \right)(u_1, u_2, \ldots, u_p). \tag{۴۳.۱}$$

که در آن $H(.)$ و $G(.)$ ترکیب قوانین عملگر مشتق مرتبه غیر صحیح را مشخص می کند.

برای سیستم یک ورودی و یک خروجی معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم به صورت زیر است.

$$H\left({}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m} \right)(y) = G\left({}_{t_0}^{C}D_t^{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n} \right)(u). \tag{۴۴.۱}$$

می توان رابطه زیر را برای ترکیب قوانین عملگر مشتق مرتبه کسری به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} H\left({}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m} \right) y &= \sum_{k=0}^{m} a_k D^{\alpha_k} y \\ G\left({}_{t_0}^{C}D_t^{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n} \right) u &= \sum_{k=0}^{n} b_k D^{\beta_k} u \end{aligned} \tag{۴۵.۱}$$

یکی از فرمهای معمول در معادلات دیفرانسیل کسری که توصیف کننده دسته ای از سیستم های کاربردی است، به صورت (۴۶.۱) می باشد.

$$a_m\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha_m} y + a_{m-1}\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha_{m-1}} y + \ldots + a_1\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha_1} y + a_0\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha_{m-1}} y = u. \tag{۴۶.۱}$$

چنانچه تمامی مرتبه های مشتق گیر در معادلات دیفرانسیل، مضارب صحیحی از مرتبه α باشند سیستم از نوع نسبی یا همسان[1] گویند و در غیر این صورت سیستم از نوع مرتبه غیر

[1] Commensurate-Order

نسبی یا غیر همسان[1] می باشد. شایان ذکر است چون تمرکز این رساله، بر روی سیستم هایی از نوع مرتبه همسان است به جز موارد ذکرشده، منظور از سیستم مرتبه کسری، سیستم با نوع مرتبه ی همسان است.

به طور کلی سیستم غیر خطی مرتبه کسری به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = f(x(t), t), \tag{۴۷.۱} $$

که در آن $f(x(t), t)$ تابع غیر خطی وابسته به شبه حالت های $x(t)$ است که برای سادگی آن را بردار حالت نامیده و با x نمایش می دهیم.
فرم کلی مدل سیستم های خطی مرتبه کسری همسان به صورت زیر است .

$$ \begin{aligned} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x &= Ax + Bu(t) \\ y(t) &= Cx + Du \end{aligned} \tag{۴۸.۱} $$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$، $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ و $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ ماتریس هایی با ابعاد مناسب هستند. با فرض صفر بودن شرایط اولیه، با اعمال اپراتور لاپلاس بر روی (۴۸.۱)، داریم.

$$ \begin{aligned} s^{\alpha}X(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned} \tag{۴۹.۱} $$

که در آن $X(s) = L(x), U(s) = L(u(t))$ و $Y(s) = L(y(t))$.
با حذف$X(s)$ از معادله (۴۹.۱) تابع تبدیل توصیف کننده $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ سیستم فوق به صورت (۵۰.۱) است.

$$ G(s) = C(s^{\alpha}I - A)^{-1}B + D \tag{۵۰.۱} $$

تابع تبدیل معادله توصیف کننده معادله (۴۴.۱) به صورت زیر است.

$$ G(s) = \frac{s^{\beta_n} + s^{\beta_{n-1}} + \ldots + s^{\beta_1} + s^{\beta_0}}{s^{\alpha_m} + s^{\alpha_{m-1}} + \ldots + s^{\alpha_1} + s^{\alpha_0}} \tag{۵۱.۱} $$

با فرض اینکه سیستم با مرتبه همسان α باشد، همواره رابطه زیر برقرار است.

$$ G(s) = \frac{Q(s^{\alpha})}{P(s^{\alpha})} \tag{۵۲.۱} $$

روش های حل معادله دیفرانسیل مرتبه کسری

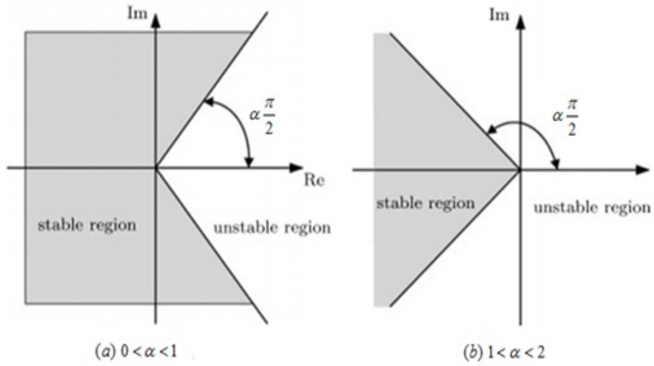
برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه کسری یا محاسبه پاسخ یک سیستم مرتبه کسری، روش های زیادی ارائه شده است. این روش ها را می توان به دو دسته روش های تقریب حوزه فرکانس و روش های عددی دسته بندی کرد. از بین روش های تقریب حوزه فرکانس می

[1] Non-Commensurate-Order

توان روش استالوپ [۱۲۴] و از بین روش های عددی نیز می توان روش الگوریتم بهبودیافته آدامز باشفورس مولتون [۱۲۵] را نام برد که دقت نسبتا خوبی دارند. یکی از نقص های بارز روش تقریب فرکانس استالوپ این است که در یک محدوده فرکانسی مشخصی طراحی می شود و استفاده از این روش مناسب سیستم های نوسانی می باشد. البته، استفاده از روش تقریب حوزه فرکانس، برای مثال روش استالوپ، در مدلسازی مرتبه کسری با استفاده از داده های یک سیستم کاربردی می باشد. در این رساله از روش عددی فوق بعلت دقت بالای آن، برای شبیه سازی سیستم مرتبه کسری استفاده خواهد شد. از طرفی دیگر، روش های عددی معمولا از حجم محاسبات بیشتری نسبت به روش های حوزه فرکانس برخوردار می باشد.

۳.۲.۱ پایداری سیستم های مرتبه کسری

به طور کلی سیستم مرتبه کسری با تابع تبدیل توصیف شده (۵۲.۱) پایدار ورودی کراندار-خروجی کراندار است اگر و تنها اگر $G(s)$ هیچ قطبی در ناحیه $|arg(s)| \leq \alpha\frac{\pi}{2}$ نداشته باشد [۱۰۰، ۱۲۶]. ناحیه پایداری برای سیستم های مرتبه کسری در شکل ۲-۳ نشان داده شده است.



شکل ۶.۱: ناحیه پایداری برای $۱ > \alpha > ۰$ و $۲ > \alpha > ۱$

تعریف ۵.۲.۱. [۱۲۷]: اگر تابع $f : [t_۰, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ پیوسته و محلا لیپشیتز نسبت به $x = [x_۱, x_۲, \cdots, x_n]^T$ باشد و $۰ < \alpha < ۱$ انگاه $x^* \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه تعادل سیستم دینامیکی مرتبه کسری

$$ {}_{t_۰}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = f(x(t), t) \qquad t \in [t_۰, +\infty) $$
$$ x(t_۰) = x_۰ \qquad x_۰ \in \mathbb{R}^n \qquad (۵۳.۱) $$

می باشد اگر و تنها اگر $f(t, x^*) = ۰$ برای $t \in [t_۰, +\infty]$ برقرار باشد.

قضیه ۱.۲.۱. [۱۲۸] سیستم مرتبه کسری کپوتو زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&{}_{t_\circ}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = f(x(t),t) \qquad t \in [t_\circ, +\infty) \\
&x(t_\circ) = x_\circ \qquad x_\circ \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
\tag{۵۴.۱}
$$

که $\alpha \in (\circ, 1)$ و تابع $f : [t_\circ, +\infty) \times \mho \to \mathbb{R}^n$ پیوسته تکه ای نسبت به t و محلا لیپشیتز نسبت به x روی $[t_\circ, +\infty) \times \mho$ می باشد که فضای $\mho \in \mathbb{R}^n$ شامل $x = \circ$ می باشد. سیستم (۵۴.۱) پایدار میتاگ_ لفلر می باشد اگر

$$
\|x(t)\| \leq \Big\{ m[x(t_\circ)] E_\alpha(-\lambda(t-t_\circ)^\alpha) \Big\}^b, \tag{۵۵.۱}
$$

که $t_\circ$ زمان اولیه، $\lambda > \circ$، $b > \circ$، $m(\circ) = \circ$ و $m(x) \geq \circ$ می باشد که $m(x)$ روی $x \in \mathbb{R}^n$ با ثابت لیپشیتز $m_\circ$ محلا لیپشیتز می باشد.

قضیه ۲.۲.۱. [۱۲۸] فرض کنید $x = \circ$ نقطه تعادل سیستم (۵۴.۱) باشد و $\mho \in \mathbb{R}^n$ یک فضایی باشد که شامل مبدا است. اگر یک تابع مشتق پذیر پیوسته ای همچون $V(x(t),t) :$ $[t_\circ, +\infty) \times \mho \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که محلا لیپشیتز نسبت به x باشد، آنگاه $x = \circ$ پایدار میتاگ_ لفلر است چنانچه

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 \|x\|^a \leq V(x(t),t) \leq \lambda_2 \|x\|^{ab}, \\
&{}_{t_\circ}^{C}D_t^{\alpha} V(x(t),t) \leq -\lambda_3 \|x\|^{ab},
\end{aligned}
\tag{۵۶.۱}
$$

که در آن $t \geq \circ$، $x \in \mho$، $\alpha \in (\circ, 1)$، λ_1، λ_2، λ_3، a و b ثابت های دلخواه مثبت می باشند. اگر این شروط برای کل فضای $\mathbb{R}^n$ برقرار باشد، آنگاه $x = \circ$ پایدار میتاگ_ لفلر سراسری است.

تعریف ۶.۲.۱. [۱۲۹، ۱۳۰]: (تابع کلاس $\mathbf{K}$) یک تابع پیوسته $\varrho : [\circ, t) \to [\circ, \infty)$ متعلق به دسته یا کلاس $\mathbf{K}$ است، اگر اکیدا صعودی بوده و $\varrho(\circ) = \circ$ باشد.

قضیه ۳.۲.۱. [۱۲۹، ۱۳۰] فرض کنید $x = \circ$ نقطه تعادل سیستم (۵۴.۱) باشد و $\mho \in \mathbb{R}^n$ یک فضایی باشد که شامل مبدا است. چنانچه $V(x(t),t) : [t_\circ, +\infty) \times \mho \to \mathbb{R}$ یک تابع لیاپانوف وجود داشته باشد، آنگاه نقطه تعادل سیستم پایدار مجانبی[1] است اگر

$$
\begin{aligned}
&\varrho_1(\|x\|) \leq V(x(t),t) \leq \varrho_2(\|x\|), \\
&{}_{t_\circ}^{C}D_t^{\alpha} V(x(t),t) \leq -\varrho_3(\|x\|),
\end{aligned}
\tag{۵۷.۱}
$$

که در آن ϱ_i، $i = 1,2,3$ توابع دسته $\mathbf{K}$ می باشند. اگر این شروط برای کل فضای $\mathbb{R}^n$ برقرار باشد، آنگاه $x = \circ$ پایدار مجانبی سراسری[2] است.

[1] asymptotically stable
[2] globally asymptotically stable

در [۱۲۸]، روش پايداري تعميم يافته ميتاگ_لفلر و روش پايداري تعميم يافته لياپانوف مرتبه كسري مطالعه گرديده است. در ابتداي اين مقاله، نويسندگان براي درك هر چه بيشتر گستره حسابان كسري نسبت به حسابان مرتبه صحيح، مثالي را مطرح كرده اند كه در آن خواننده به طور شهودي درك مى كند كه حسابان معمولى تنها حالت خاصى از حسابان كسري است. همچنين در اين مقاله درباره انرژي سيستم از ديدگاه لياپانوف بحث مفصلى ارائه شده است. به اين منظور، اثبات هاي ارائه شده كه كاهش انرژي فقط به حالت نمايى محدود نمى شود، بلكه حالت نمايى مى تواند تنها یک حالت خاص ازكاهش انرژي باشد.

قضيه ۴.۲.۱. [۱۲۸، ۱۳۱] نقطه تعادل سيستم مرتبه كسرى (۵۴.۱)، پايدار تعميم يافته ميتاگ_لفلر مى باشد اگر

$$\|x(t)\| \leq \Big\{m[x(t_\circ)](t-t_\circ)^{\alpha}E_{v,\text{۱}-\alpha}(-\lambda(t-t_\circ)^{\alpha})\Big\}^{b}, \tag{۵۸.۱}$$

كه $t_\circ$ زمان اوليه، $\alpha \in [\circ, \text{۱}-v]$، $\lambda > \circ$، $b > \circ$، $m(\circ) = \circ$ و $m(x) \geq \circ$ مى باشد كه $m(x)$ روى $x \in \mho \in \mathbb{R}^n$ با ثابت ليپشيتز $m_\circ$ محلا ليپشيتز مى باشد. اگر اين شروط براى كل فضاى $\mathbb{R}^n$ برقرار باشد، آنگاه نقطه تعادل سيستم، پايدار تعميم يافته ميتاگ_لفلر سراسرى است.

قضيه ۵.۲.۱. [۱۳۲] فرض كنيد $x = \circ$ نقطه تعادل سيستم (۵۴.۱) باشد و $\mho \in \mathbb{R}^n$ يک فضايى باشد كه شامل مبدا است. چنانچه $V(x(t),t) : [t_\circ, +\infty) \times \mho \to \mathbb{R}$ يک تابع مشتق پذير پيوسته و ليپشيتز نسبت به حالت هاى x باشد. آنگاه نقطه تعادل سيستم $x = \circ$ پايدار مجانبى است اگر

$$\begin{aligned} &W_\text{۱}(x) \leq V(x(t),t) \leq W_\text{۲}(x),\\ &{}^{C}_{t_\circ}D^{\alpha}_{t}V(x(t),t) \leq -W_\text{۳}(x), \end{aligned} \tag{۵۹.۱}$$

كه در آن W_i، $i = \text{۱,۲,۳}$ توابع پيوسته و مثبت معين بر روى $\mho$ مى باشند. اگر اين شروط براى كل فضاى $\mathbb{R}^n$ برقرار باشد، آنگاه $x = \circ$ پايدار مجانبى سراسرى است.

قضيه ۶.۲.۱. [۱۳۳] پاسخ سيستم ${}^{C}_{t_\circ}D^{\alpha}_{t}x(t) = f(x(t),t)$ پايدار است اگر براى هر $\epsilon > \circ$ وجود داشته باشد $\delta(t_\circ, \epsilon) > \circ$ به گونه اى كه براى هر دو پاسخ دلخواه $x(t, t_\circ, \Phi)$ و $x'(t, t_\circ, \Psi)$ به ازاى $t > t_\circ > \circ$ كه $\|\Phi(t) - \Psi(t)\| < \delta$ برقرار است، آنگاه $\|x(t) - x'(t)\| < \epsilon$ باشد. اگر δ وابسته به زمان نباشد، آنگاه سيستم به صورت يكنواخت پايدار[1] خواهد بود.

قضيه ۷.۲.۱. [۲۷] سيستم خطى مرتبه كسرى زير را در نظر بگيريد

$${}^{C}D^{\alpha}_{t}x(t) = -Ax(t) + Bx(t-\sigma) \tag{۶۰.۱}$$

كه $x \in \mathbb{R}^n$، $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\alpha \in (\circ, \text{۱})$، $\sigma \in \mathbb{R}^+$ مى باشد. اگر كليه مقادير ويژه ماتريس $A - B$، يعنى λ_iها بازاى كليه $i = \text{۱,۲,}\cdots, n$، بگونه اى باشد كه $|arg(\lambda_i)| > \alpha\frac{\pi}{\text{۲}}$ و معادله مشخصه

[1] Uniformly Stable

$det(\triangle(s)) = det(s^\alpha I + A - e^{s\sigma}B) = 0$ هیچ ریشه موهومی نداشته باشد، آنگاه نقطه تعادل سیستم خطی (۶۰.۱)، پایداری مجانبی سراسری می باشد. اگر $n = 1$ باشد آنگاه نقطه تعادل، پایدار مجانبی سراسری است اگر $A > B$.

لم ۸.۲.۱. [۱۲۷]: اگر $x(t) \in R^n$ باشد، به ازای $\alpha \in (0,1)$ و $t > t_0$ همواره نامساوی (۶۱.۱) برقرار است.

$$ {}^C_{t_0}D^\alpha_t \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leq \sum_{i=1}^{n} sgn(x_i(t)) \; {}^C_{t_0}D^\alpha_t x_i(t). \tag{۶۱.۱}$$

لم ۹.۲.۱. [۱۳۴]: اگر $x(t) \in R^n$ و P ماتریس مثبت معین باشد، به ازای $\alpha \in (0,1)$ و $t > t_0$ همواره نامساوی (۶۲.۱) برقرار است.

$$ \frac{1}{2} {}^C_{t_0}D^\alpha_t (x^T(t)Px(t)) \leq x^T(t)\, P \; {}^C_{t_0}D^\alpha_t x(t). \tag{۶۲.۱}$$

نتیجه ۳.۲.۱. با توجه به لم (۹.۲.۱)، برای هر تابع پیوسته و مشتق پذیر $x(t)$ و هر ثابت $\delta \in \mathbb{R}$، می توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} D^\alpha (x(t) - \delta)^2 &= D^\alpha (x^2(t) - 2\delta x(t) + \delta^2), \\ &\leq 2(x(t) - \delta) D^\alpha x(t), \end{aligned} \tag{۶۳.۱}$$

که $0 < \alpha < 1$ و $t \in [0, \infty)$ می باشد.

در لم زیر و اثبات آن، نشان داده می شود که اگر مشتق مرتبه کسری $0 < \alpha < 1$ تابع لیاپانوف پیشنهادی منفی باشد آنگاه مقدار تابع لیاپانوف به صفر همگرا خواهد شد.

لم ۱۰.۲.۱. تابع لیاپانوف مثبت زیر را در نظر بگیرید

$$ V(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left| x_i(t) \right|, \quad \mu_i > 0. \tag{۶۴.۱}$$

اگر رابطه $D^\alpha V(t) \leq -\lambda V(t)$ برای $t > 0$ ، ثابت مثبت λ و $0 < \alpha < 1$ برقرار باشد، آنگاه $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = 0$ و در نتیجه برای کلیه $i = 1, ..., n$ همواره $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = 0$ برقرار می باشد.

اثبات: تابع لیاپانوف رابطه (۶۴.۱) را در نظر بگیرید. حال، فرض کنید $D^\alpha V(t) \leq -\lambda V(t)$ برای $\lambda > 0$ برقرار باشد. آنگاه با استفاده از نتیجه (۲.۲.۱) و تعاریف مشتق و انتگرال کپوتو، می توان انتگرال کپوتو دو طرف رابطه $D^\alpha V(t) \leq -\lambda V(t)$ در بازه t_1 تا t_2 ($0 < t_1 < t_2$) را بصورت زیر محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} V(t_2) - V(t_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha - 1} D^\alpha V(\tau) d\tau, \\ &\leq \frac{-\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha - 1} V(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{۶۵.۱}$$

اگر V^{Max} ماکزیمم مقدار تابع مثبت $V(t)$ در بازه $t \in (t_1, t_2)$ باشد، یعنی $0 \leq V(t) \leq V^{Max}$، آنگاه

$$-\frac{\lambda V^{Max}}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2 - t_1)^{\alpha} \leq V(t_2) - V(t_1) \leq 0, \tag{۶۶.۱}$$

پس رابطه $V(t_2) \leq V(t_1)$ برای $t_1 < t_2$ برقرار می باشد. بنابراین $V(t)$ یک تابع مشتق پذیر غیر_افزایشی است و

$$V(t) \leq V(0). \tag{۶۷.۱}$$

در نتیجه $x_i(t)$ برای $t > 0$ محدود می باشد و همچنین عدد ثابت و مثبت M وجود دارد بگونه ای که $|D^{\alpha}V(t)| \leq M$. در ادامه، ثابت می کنیم که $\lim_{t\to\infty} V(t) = 0$.
فرض کنید برای $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots$ و $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$، یک مقدار ثابت دلخواه و مثبت ε وجود دارد بگونه ای که همواره $V(t_k) > \varepsilon$ برقرار است. حال، با تعریف $T = \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\varepsilon}{2M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$ و $t_k = kT$، رابطه زیر برای هر $t \in (t_k, t_{k+1})$ برقرار می باشد.

$$\begin{aligned} V(t) - V(t_k) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1} D^{\alpha}V(\tau)d\tau \geq \frac{-M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau \\ &\geq -\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t-t_k)^{\alpha} \\ &\geq -\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(T)^{\alpha} \\ &\geq -\frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{۶۸.۱}$$

چون $V(t_k) > \varepsilon$ می باشد، پس

$$V(t) \geq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{۶۹.۱}$$

با اعمال رابطه (۶۹.۱) در اولین فرض لم، یعنی $D^{\alpha}V(t) \leq -\lambda V(t)$، رابطه زیر بدست می آید.

$$D^{\alpha}V(t) \leq \quad -\lambda V(t) \quad \leq -\frac{\varepsilon}{2}\lambda. \tag{۷۰.۱}$$

با محاسبه انتگرال کپوتو از دو طرف رابطه $D^{\alpha}V(t) \leq -\lambda V(t)$ از $t \in (t_k, t_{k+1})$ تا 0، مشابه

آنچه در رابطه (۶۵.۱) انجام شد، آنگاه

$$
\begin{aligned}
&V(t)-V(0)\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,D^\alpha V(t)d\tau\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\alpha-1}\,D^\alpha V(t)d\tau+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1}\,D^\alpha V(t)d\tau+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-\tau)^{\alpha-1}\,D^\alpha V(t)d\tau+\int_{t_k}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\,D^\alpha V(t)d\tau\right\}\\
&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\lambda\right)\left\{\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau+\int_{t_k}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau\right\}\\
&\le-\frac{\varepsilon\lambda}{2\Gamma(\alpha+1)}\left\{(t_1)^\alpha+(t_2-t_1)^\alpha+\ldots+\left(t_k-t_{k-1}\right)^\alpha+(t-t_k)^\alpha\right\}\\
&\le-\frac{\varepsilon\lambda}{2\Gamma(\alpha+1)}\left\{T^\alpha+T^\alpha+\ldots+T^\alpha+(t-t_k)^\alpha\right\}\\
&\le-\frac{k\varepsilon\lambda T^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}
\tag{۷۱.۱}
$$

در نتیجه

$$
\lim_{t\to\infty}V(t)\le\lim_{k\to\infty}\left(V(0)-\frac{k\varepsilon\lambda T^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}\right),
\tag{۷۲.۱}
$$

رابطه فوق نشان می دهد که $\lim_{t\to\infty}V(t)\to-\infty$، اما این نتیجه با مثبت بودن تابع لیاپانوف، یعنی $V(t)\ge 0$، در تضاد می باشد. در نتیجه

$$
\lim_{t\to\infty}\ V(t)=0.
\tag{۷۳.۱}
$$

در اینجا، اثبات تکمیل می شود.

۳.۱ معرفی و ضرورت انجام رساله

محاسبات کسری یک ابزار ریاضی برای گسترش مرتبه مشتق به اعداد غیر صحیح است و چون ریاضیات زبان رسمی نظریه کنترل است، در مقالات و کتب پیشگامان این عرصه با پیوند زدن این مفهوم ریاضی به این نظریه، مزایای استفاده از گسترش مرتبه مشتق را در مدلسازی و روش های کنترلی نشان داده اند [۱۲۰]. این ابزار مسائل بسیاری را برای مهندسی از جمله شناسایی مدل های مرتبه کسری، تحلیل دینامیکی سیستم های مرتبه کسری و $\cdots$ را به وجود آورده است.

این رساله نیز با در نظر گرفتن توجهات چند دهه اخیر به سیستم های مرتبه کسری، سعی در پاسخ دادن به برخی از کاستی های موجود در زمینه پایداری و پایدارسازی شبکه های

عصبی دینامیکی مرتبه کسری دارد. در این رساله از تعریف مشتق کپوتو مرتبه کسری برای توصیف سیستم با تحقق فضای حالت استفاده می شود که دلیل انتخاب تعریف مشتق کپوتو، وجود مفهوم فیزیکی برای شرایط اولیه در این تعریف است.

۱.۳.۱ معرفی

یکی از ابزارهای قدرتمند برای مدلسازی و کنترل سیستم های دینامیکی، شبکه های عصبی دینامیکی هستند. از چالش های اصلی بکارگیری این شبکه های عصبی در این راستا، پیچیدگی محاسبات یا بار محاسباتی آموزش این شبکه ها و تضمین بهینگی این آموزش می باشد که معمولا همزمان با پیچیده شدن شبکه عصبی در جهت افزایش قابلیت ها و توانمندی های آن، بار محاسباتی افزوده می شود و احتمال دست یافتن به پارامترهای بهینه ـ طی روال آموزش ـ برای شبکه عصبی دینامیکی کاهش می یابد. یکی از راهکارهایی که اخیرا، معرفی شده است بکارگیری متدولوژی محاسبات رزرویر می باشد که در آن از شبکه های عصبی دینامیکی استفاده می شود که در مرحله آموزش آنها، فقط پارامترهای خروجی آن نیازمند آموزش می باشند. یکی از این شبکه ها، شبکه های عصبی انعکاس حالت می باشد. همواره، علاوه بر آموزش و کاربرد یک شبکه عصبی دینامیکی، تحلیل دینامیکی آن چالشی است که بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. چرا که، پایدار بودن آنها یکی از شروط اولیه برای اغلب کاربردهای آن می باشد.

۲.۳.۱ انگیزه

با توجه به توسعه پژوهش های سال های اخیر در حوزه سیستم های مرتبه کسری، لزوم استفاده از یک شبکه عصبی دینامیکی مرتبه کسری با پیچیدگی کافی و البته آموزش ساده، برای مدلسازای و کنترل این سیستم ها احساس می شود. هدف از این رساله، تحلیل دینامیکی شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری بعنوان یک ابزار جهت هموار شدن راه برای معرفی و البته کاربرد متدولوژی محاسبات رزرویر در حوزه سیستم های مرتبه کسری می باشد.

۳.۳.۱ اهداف

هدف اصلی در این رساله، تحلیل دینامیکی شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری و کاربرد آن در پیش بینی سری زمانی می باشد. همسو با این هدف، ۱) به تحلیل پایداری نقطه تعادل یکتای این شبکه تحت ویژگی هایی همچون تاخیر و ممریستیو در فضای حقیقی، مختلط و کواترنیون پرداخته می شود. ۲) بعلت محدودیت های پیاده سازی و اندازه گیری، همواره نیاز به تحلیل پایداری مقاوم نقطه تعادل یکتای سیستم ها نیز الزامی به نظر می باشد. لذا، دومین هدفی که دنبال می شود، تحلیل پایداری مقاوم نقطه تعادل یکتای این شبکه می باشد. ۳)

بررسی پدیده آشوب در شبکه های عصبی (هر سیستم غیر خطی) به عنوان یک نوع تحلیل دینامیکی همواره جذاب بوده است. در نتیجه، سومین هدفی که دنبال می شود، بررسی شروط لازم و کافی آشوب در این شبکه می باشد که در شکل (۴.۱) پیرامون این شروط بحث شده است. ۴) در نهایت، آخرین هدفی که در این راستا دنبال می شود استفاده از این شبکه عصبی برای پیش بینی سری زمانی (شاخص بازار سهام) می باشد که پارامترهای شبکه با استفاده از یک روش آموزش مبتنی بر گرادیان، بهینه می شوند تا دقت خوبی در پیش بینی سری زمانی بدست آید.

۴.۳.۱ روش های مورد استفاده

برای تحلیل پایداری نقطه تعادل سیستم های خطی و غیر خطی، عموما از روش های مبتنی بر تابع لیاپانوف استفاده می شود. در این رساله نیز از توابع لیاپانوف سنتی و همچنین از توابع لیاپانوف کراسوفسکی برای تحلیل پایداری و پایداری مقاوم این شبکه بازای ویژگی های مختلفی همچون تاخیر و ممریستیو استفاده می شود. همچنین، از یک روش مبتنی بر گرادیان برای بهینه سازی پارامترهای این شبکه با هدف پیش بینی و شناسایی ارائه می شود.

۵.۳.۱ ساختار رساله

در فصل اول این رساله به تاریخچه شبکه عصبی و سمت و سوی موضوعات جذاب در این حوزه اشاره شد، سپس به بیان قواعد و قضایای و لم ها و تعاریف ریاضی مورد نیاز پرداخته شد. و در نهایت، ضرورت و انگیزه مطالعه در حوزه تحلیل دینامیکی شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری شرح داده شد. در فصل دوم، دستاوردهای حاصل از تحلیل دینامیکی شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری در فضای حقیقی ارائه می شوند که شامل تحلیل پایداری میتگ_لفلر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری، تحلیل پدیده آشوب در این شبکه، تحلیل پایداری یکنواخت نقطه تعادل یکتای این شبکه در حضور تاخیر و در نهایت، کاربرد شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری زمان_گسسته برای پیش بینی سری زمانی (شاخص اقتصادی میانگین صنعتی داو جونز و شاخص S&P۵۰۰) بهمراه یک قانون تطبیق مبتنی بر گرادیان می باشند. این نتایج، در سه بخش مجزا شرح داده خواهد شد.

در فصل سوم، دستاوردهای حاصل از تحلیل دینامیکی شبکه مورد نظر در فضای کواترنیون ارائه می شوند که شامل تحلیل پایداری مجانبی نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت کواترنیون (و مختلط) مرتبه کسری در حضور تاخیر متغیر با زمان، تحلیل پایداری مجانبی مقاوم نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت کواترنیون (و مختلط) مرتبه کسری در حضور تاخیر متغیر با زمان و در نهایت، تحلیل پایداری مجانبی مقاوم نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت ممریستیو کواترنیون (و مختلط) مرتبه کسری در حضور

تاخیر متغیر با زمان و تاخیر نیوترال متغیر با زمان با استفاده از توابع لیاپانوف کراسوفسکی و حل مسئله LMI می باشند. هر کدام از این نتایج، در یک بخش مجزا شرح داده خواهد شد. در فصل چهارم این رساله، نتیجه گیری و پیشنهادات مطرح می شوند.

فصل ۲

تحلیل دینامیکی مستقل از تاخیر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری حقیقی

پیشگفتار

در این فصل، به تحلیل دینامیکی شبکه عصبی انعکاس حالت حقیقی مرتبه کسری شامل تحلیل پایداری میتاگ_لفلر نقطه تعادل یکتای آن، بررسی رفتار آشوبی و تحلیل پایداری یکنواخت نقطه تعادل یکتای شبکه در حضور تاخیر ثابت و در نهایت به پیش بینی سری زمانی با استفاده از این شبکه پرداخته می شود. در این راستا، در بخش اول، پایداری میتاگ_لفلر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری و پدیده آشوب در این شبکه آنالیز خواهد شد. در بخش دوم، تحلیل پایداری یکنواخت مستقل از تاخیر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری در حضور تاخیر ثابت مطالعه می شود. و در نهایت، در بخش سوم، برای پیش بینی سری زمانی بازار سهام با استفاده از این شبکه عصبی مرتبه کسری، یک روش آموزش تطبیقی ارائه می شود.

۱.۲ تحلیل دینامیکی نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری

در این بخش، ابتدا مدل شبکه انعکاس حالت در نظر گرفته شده با جزییات توصیف می شود و پس از آن، وجود و یکتایی نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی با استفاده از یک نگاشت انقباضی، بررسی می شود. سپس، پایداری نقطه تعادل یکتای شبکه، با بکاربردن یک تابع لیاپانوف اثبات و آنالیز می شود. و در نهایت، به بررسی پدیده آشوب در این شبکه عصبی مرتبه کسری پرداخته خواهد شد.

۱.۱.۲ توصیف مدل شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری

دینامیک زمان_پیوسته شبکه عصبی نشتی انعکاس حالت مرتبه کسری (FO-ESN) زیر را با n حالت رزرویر، با p ورودی و q خروجی در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\left(X(t)\right) &= -CX(t) + Af(W^{in}U + WX + W^{f}Y) + \mathcal{U}, \\ Y &= g(W^{out}\left[X;U\right]), \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

که در آن $X = [x_1, \cdots, x_n]^T$، $U = [u_1, \cdots, u_p]^T$ و $Y = [y_1, \cdots, y_q]^T$، به ترتیب، بردار حالت های رزرویر، ورودی خارجی و خروجی، بردار $f = [f_1, \cdots, f_n]^T$ توابع فعالسازی در رزرویرها و بردار $g = [g_1, \cdots, g_q]^T$توابع فعالسازی خروجی می باشند. توابع f_i و g_r برای $i = 1, 2, \cdots, n$ و $r = 1, 2, \cdots, q$ توابعی پیوسته و لیپشیتز (طبق تعریف ۱.۲.۱) با ثابت لیپشیتز F_i و G_r می باشند. نمادهای $W^{in} = [\cdot]_{n\times n}$، $W = [\cdot]_{n\times n}$، $W^{f} = [\cdot]_{n\times q}$ و $W^{out} = \left[W^{o}; W^{io}\right]_{q\times(n+p)}$ به

ترتیب ماتریس های وزن ورودی، حالت رزرویر، فیدبک و خروجی را نشان می دهند. همچنین، بخش $\mathcal{U} = [\mathcal{U}_۱, \mathcal{U}_۲, \cdots, \mathcal{U}_n]^T$ نیز بردار ورودی کمکی است که در نسخه اصلی این شبکه عصبی برابر صفر می باشد. ماتریس ثابت زمانی شبکه مورد نظر و ماتریس نرخ نشت[1] گره های (نودهای) حالت رزرویر، به ترتیب، برابر با $A^{-۱}$ و $A^{-۱}C$ هستند. ماتریس نرخ نشت، نرخی که حالت رزرویر ــ در حالتی که به شبکه متصل نیست ــ از وضعیت موجودش به حالت استراحت می رسد، را نشان می دهد.

نرخ نشتی و ثابت زمانی برای هر اجزای حالت رزرویر در کارهای گذشته بر روی شبکه عصبی انعکاس حالت در مرتبه صحیح، مقداری اسکالر و برای کلیه حالت های رزرویر یکسان بود [۴،۷، ۱۳۵]. در رابطه (۲.۱) نیز به اسکالر و یکسان بودن نرخ نشتی و ثابت زمانی اشاره شد. برخلاف کارهای گذشته، در شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری رابطه (۱.۲)، مفهوم نرخ نشتی و ثابت زمانی بصورت ماتریس تعریف شده است که می تواند ماتریس های قطری یا غیر قطری در نظر گرفته شود. بنابراین، مقادیر ویژه این ماتریس ها نقش نرخ نشتی و ثابت زمانی را ایفا می کنند.

۲.۱.۲ وجود و یکتایی نقطه تعادل

در این بخش، با استفاده از یک نگاشت انقباضی[2]، وجود و یکتایی نقطه تعادل شبکه عصبی مورد نظر بحث خواهد شد.

قضیه ۱.۱.۲. شبکه عصبی (۱.۲) یک نقطه تعادل یکتا دارد اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lambda_i = c_{ii} - \sum_{j=۱, j\neq i}^{n} \frac{\mu_j}{\mu_i} |c_{ji}| - \sum_{j=۱}^{n}\sum_{h=۱}^{n} \frac{\mu_h}{\mu_i} |a_{hj}| F_j \left(|w_{ji}| + \sum_{r=۱}^{q} \left| w_{jr}^{f} \right| G_r |w_{ri}^{o}| \right) > ۰, \qquad (۲.۲)$$

که $c_{ii} > ۰$، $\mu_i > ۰$، $\mu_j > ۰$ و $\mu_h > ۰$ می باشند.

اثبات: با توجه به تعریف (۵.۲.۱)، پاسخ X^* نقطه تعادل شبکه عصبی (۱.۲) می باشد اگر و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$-CX^* + Af(WX^* + W^f Y^*) + \mathcal{U} = ۰, \qquad (۳.۲)$$

که $Y^* = g(W^o X^*)$. در نتیجه، معادله iام از دستگاه معادله فوق برابر است با

$$\begin{aligned} &- c_{ii}x_i(t) - \sum_{j=۱, j\neq i}^{n} c_{ij}x_j(t) \\ &+ \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} f_j \left(\sum_{h=۱}^{n} w_{jh}x_h(t) + \sum_{r=۱}^{q} w_{jr}^{f} g_r \left(\sum_{l=۱}^{n} w_{rl}^{o} x_l(t) \right) \right) + \mathcal{U}_i = ۰. \end{aligned} \qquad (۴.۲)$$

[1] Leaking rate matrix
[2] Contraction Mapping

با تعریف نگاشت جدید $\psi : R^n \to R^n$ بصورت $c_{ii}x_i^* = \nu_i^*$، داریم:

$$\psi_i(\nu_i) = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_{ij}\frac{\nu_j(t)}{c_{ii}} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(\sum_{h=1}^{n} w_{jh}\frac{\nu_h(t)}{c_{hh}} + \sum_{r=1}^{q} w_{jr}^{f} g_r\left(\sum_{l=1}^{n} w_{rl}^{o}\frac{\nu_l(t)}{c_{ll}}\right)\right) + \mathcal{U}_i, \qquad (۵.۲)$$

که $\Psi(\nu) = [\psi_1(\nu_1), \cdots, \psi_n(\nu_n)]^T$ می باشد.

حال، با استفاده از نرم اقلیدس[1]، اثبات می شود که Ψ یک نگاشت انقباضی است. برای این کار، فرض کنید $\nu = [\nu_1, ..., \nu_n]^T$ و $\upsilon = [\upsilon_1, ..., \upsilon_n]^T$ دو پاسخ متفاوت و دلخواه شبکه باشند، آنگاه با تعریف نرم $\|\Psi(\nu) - \Psi(\upsilon)\|$ بصورت $\|\Psi(\nu) - \Psi(\upsilon)\| = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left|\psi_i(\nu_i) - \psi_i(\upsilon_i)\right|$ و با استفاده از رابطه (۵.۲)، نتیجه می شود که

$$\begin{aligned}
&\|\Psi(\nu) - \Psi(\upsilon)\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left\{ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} -c_{ij}\left(\frac{\nu_j}{c_{jj}} - \frac{\upsilon_j}{c_{jj}}\right) \right. \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(\sum_{h=1}^{n} w_{jh}\frac{\nu_h}{c_{hh}} + \sum_{r=1}^{q} w_{jr}^{f} g_r\left(\sum_{l=1}^{n} w_{rl}^{o}\frac{\nu_l}{c_{ll}}\right)\right) \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(\sum_{h=1}^{n} w_{jh}\frac{\upsilon_h}{c_{hh}} + \sum_{r=1}^{q} w_{jr}^{f} g_r\left(\sum_{l=1}^{n} w_{rl}^{o}\frac{\upsilon_l}{c_{ll}}\right)\right) \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left\{ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{|c_{ij}|}{c_{jj}} |\nu_j - \upsilon_j| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| F_j \left(\sum_{h=1}^{n} |w_{jh}| \frac{|\nu_h - \upsilon_h|}{c_{hh}} + \sum_{r=1}^{q} \left|w_{jr}^{f}\right| G_r \sum_{l=1}^{n} |w_{rl}^{o}| \frac{|\nu_l - \upsilon_l|}{c_{ll}}\right) \right\}. \qquad (۶.۲)
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\|\Psi(\nu) - \Psi(\upsilon)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mu_j \frac{|c_{ji}|}{c_{ii}} |\nu_i - \upsilon_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \mu_h \frac{|a_{hj}|}{c_{ii}} F_j \left(|w_{ji}| + \sum_{r=1}^{q} \left|w_{jr}^{f}\right| G_r |w_{ri}^{o}|\right) |\nu_i - \upsilon_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left\{ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\mu_j}{\mu i} |c_{ji}| + \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \frac{\mu_h}{\mu_i} |a_{hj}| F_j \left(|w_{ji}| + \sum_{r=1}^{q} \left|w_{jr}^{f}\right| G_r |w_{ri}^{o}|\right) \right\} \frac{|\nu_i - \upsilon_i|}{c_{ii}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \theta_i \frac{|\nu_i - \upsilon_i|}{c_{ii}}. \qquad (۷.۲)
\end{aligned}$$

[1] Euclidean Norm

با مقایسه روابط (۲.۲) و (۷.۲) نتیجه می شود که $\lambda_i = c_{ii} - \theta_i > 0$. آنگاه $c_{ii} > \theta_i > 0$ خواهد بود. پس

$$\begin{aligned} &\|\Psi(\nu) - \Psi(\upsilon)\| \leq \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i \left|\nu_i - \upsilon_i\right|, \\ &\|\Psi(\nu) - \Psi(\upsilon)\| \leq \|\nu - \upsilon\|, \end{aligned} \tag{۸.۲}$$

این نتیجه، به این معنی می باشد که Ψ یک نگاشت انقباضی است. از این رو، Ψ یک نقطه تعادل یکتای $\nu^* \in R^n$ دارد بگونه ای که $\Psi(\nu^*) = \nu^*$. به عبارت دیگر، $X^* = \left[\frac{\nu^*}{c_{11}}, \cdots, \frac{\nu^*}{c_{nn}}\right]^T$ یک نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی است.

۳.۱.۲ پایداری نقطه تعادل

در این بخش، با استفاده از تعریف یک تابع لیاپانوف، پایداری میتاگ_لفلر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری رابطه (۱.۲) تحلیل می شود.

قضیه ۲.۱.۲. شبکه عصبی (۱.۲) یک نقطه تعادل یکتای پایدار میتاگ_لفلر دارد اگر رابطه (۲.۲) برقرار باشد.

اثبات: فرض کنید X و X' دو پاسخ مجزای شبکه عصبی (۱.۲) هستند که تحت دو شرط اولیه متفاوت بدست آمده اند. پس

$$\begin{aligned} &e_i(t) = x_i(t) - x_i'(t), \quad i = 1, ..., n \\ &e_i(0) \neq 0 \end{aligned} . \tag{۹.۲}$$

با استفاده از معادلات شبکه عصبی، رابطه زیر به سادگی بدست می آیند:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\left(e_i(t)\right) = \sum_{j=1}^{n} -c_{ij} e_j(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Bigg\{ & f_j\left(\sum_{h=1}^{n} w_{jh} x_h(t) + \sum_{r=1}^{q} w_{jr}^{f} y_r(t)\right) \\ & - f_j\left(\sum_{h=1}^{n} w_{jh} x_h'(t) + \sum_{r=1}^{q} w_{jr}^{f} y_r'(t)\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

که

$$\begin{aligned} y_r(t) &= g_r\left(\sum_{l=1}^{n} w_{rl}^{o} x_l(t)\right), \\ y_r'(t) &= g_r\left(\sum_{l=1}^{n} w_{rl}^{o} x_l'(t)\right). \end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

با استفاده از تئوری وجود و یکتایی توابع دیفرانسیلی مرتبه کسری، برای $t \geq 0$ همواره $e_i(t) e_i(0) > 0$ برقرار می باشد [۱۳۶، ۱۳۷]. در نتیجه، دو حالت زیر را می توان در نظر گرفت:

حالت اول: اگر $e_i(0) > 0$ باشد آنگاه $e_i(t) > 0$ و در نتیجه

$$D^{\alpha}\left|e_i(t)\right| = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{e_i^{(1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau = D^{\alpha}\left(e_i(t)\right), \tag{۱۲.۲}$$

حالت دوم: اگر $e_i(0) < 0$ باشد آنگاه $e_i(t) < 0$ و در نتیجه

$$D^{\alpha}\left|e_i(t)\right| = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{e_i^{(1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau = -D^{\alpha}\left(e_i(t)\right). \tag{۱۳.۲}$$

از آنجا، داریم:

$$D^{\alpha}\left|e_i(t)\right| = sgn\left(e_i(t)\right) D^{\alpha}\left(e_i(t)\right). \tag{۱۴.۲}$$

که در اثبات نتیجه ارائه شده در لم (۸.۲.۱) بکار می آید. در ادامه، با تعریف تابع لیاپانوف بصورت زیر

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i\left|e_i(t)\right| \tag{۱۵.۲}$$

و با محاسبه مشتق مرتبه کسری تابع لیاپانوف فوق و سپس با استفاده از روابط (۱۰.۲) و (۱۱.۲) بصورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}
&D^{\alpha}\left(V(t)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu_i D^{\alpha}\left(\left|e_i(t)\right|\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i sgn\left(e_i(t)\right) D^{\alpha}\left(e_i(t)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mu_i sgn\left(e_i(t)\right)\left\{\sum_{j=1}^{n}-c_{ij}e_j(t) + \sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(f_j\left(\sum_{h=1}^{n}w_{jh}x_h(t) + \sum_{r=1}^{q}w_{jr}^{f}y_r(t)\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left. -f_j\left(\sum_{h=1}^{n}w_{jh}x'_h(t) + \sum_{r=1}^{q}w_{jr}^{f}y'_r(t)\right)\right)\right\}\\
&= -\sum_{i=1}^{n}\mu_i c_{ii} sgn\left(e_i(t)\right)e_i(t) - \sum_{i=1}^{n}\mu_i\sum_{j=1,j\neq i}^{n}c_{ij}sgn\left(e_i(t)\right)e_j(t)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\mu_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}sgn\left(e_i(t)\right)\left\{f_j\left(\sum_{h=1}^{n}w_{jh}x_h(t) + \sum_{r=1}^{q}w_{jr}^{f}y_r(t)\right)\right.\\
&\quad\left. - f_j\left(\sum_{h=1}^{n}w_{jh}x'_h(t) + \sum_{r=1}^{q}w_{jr}^{f}y'_r(t)\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

بنابراین،

$$
\begin{aligned}
&D^{\alpha}\left(V(t)\right)\\
&\leq -\sum_{i=۱}^{n}\mu_i c_{ii}\left|e_i(t)\right| + \sum_{i=۱}^{n}\mu_i \sum_{j=۱, j\neq i}^{n}\left|c_{ij}\right|\left|e_j(t)\right|\\
&\quad + \sum_{i=۱}^{n}\mu_i \sum_{j=۱}^{n}\left|a_{ij}\right| F_j\left(\sum_{h=۱}^{n}\left|w_{jh}\right|\left|e_h(t)\right| + \sum_{r=۱}^{q}\left|w_{jr}^{f}\right| G_r \sum_{l=۱}^{n}\left|w_{rl}^{o}\right|\left|e_l(t)\right|\right)\\
&\leq -\sum_{i=۱}^{n}\mu_i c_{ii}\left|e_i(t)\right| + \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱, j\neq i}^{n}\mu_i\left|c_{ij}\right|\left|e_j(t)\right|\\
&\quad + \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\sum_{h=۱}^{n}\mu_i\left|a_{ij}\right| F_j\left(\left|w_{jh}\right|\left|e_h(t)\right| + \sum_{r=۱}^{q}\left|w_{jr}^{f}\right| G_r\left|w_{rh}^{o}\right|\left|e_h(t)\right|\right)\\
&\leq -\sum_{i=۱}^{n}\mu_i c_{ii}\left|e_i(t)\right| + \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱, j\neq i}^{n}\mu_j\left|c_{ji}\right|\left|e_i(t)\right|\\
&\quad + \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\sum_{h=۱}^{n}\mu_h\left|a_{hj}\right| F_j\left(\left|w_{ji}\right|\left|e_i(t)\right| + \sum_{r=۱}^{q}\left|w_{jr}^{f}\right| G_r\left|w_{ri}^{o}\right|\left|e_i(t)\right|\right)\\
&\leq \sum_{i=۱}^{n}\mu_i\left\{-c_{ii} + \sum_{j=۱, j\neq i}^{n}\frac{\mu_j}{\mu_i}\left|c_{ji}\right| + \sum_{j=۱}^{n}\sum_{h=۱}^{n}\frac{\mu_h}{\mu_i}\left|a_{hj}\right| F_j(\left|w_{ji}\right| + \sum_{r=۱}^{q}\left|w_{jr}^{f}\right| G_r\left|w_{ri}^{o}\right|)\right\}\left|e_i(t)\right|\\
&\leq -\sum_{i=۱}^{n}\mu_i\lambda_i\left|e_i(t)\right|. \qquad (۱۷.۲)
\end{aligned}
$$

از این رو

$$D^{\alpha}\left(V(t)\right) \leq -\lambda V(t), \qquad (۱۸.۲)$$

که $\lambda = \min\left(\lambda_i\right)$. بدین ترتیب، با توجه به نتایج فوق و قضیه (۲.۲.۱) نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی پایدار مجانبی سراسری می باشد. همچنین، با توجه به لم (۱۰.۲.۱) مقدار $e_i(t)$ برای کلیه $i = ۱, ۲, \cdots, n$ به سمت صفر همگرا خواهد شد.

ملاحظه ۱.۱.۲. اگر ماتریس W^f در رابطه (۱.۲) برابر با صفر انتخاب گردد، آنگاه مسیر فیدبک در ساختار شبکه عصبی قطع می شود، در نتیجه دینامیک شبکه بصورت زیر بدست می آید:

$$D^{\alpha}\left(X(t)\right) = -CX(t) + Af(W^{in}U + WX) + \mathcal{U}. \qquad (۱۹.۲)$$

که کاملا واضح می باشد دینامیک رابطه فوق، شبیه دینامیک شبکه عصبی هاپفیلد مرتبه کسری است. در نتیجه، معیار پایداری بدست آمده قابل اعمال بر شبکه عصبی هاپفیلد مرتبه کسری می باشد. با این حال، بدون در نظر گرفتن ورودی خارجی و ورودی کمکی (U و $\mathcal{U}$)، می توان نتیجه گرفت که دینامیک (۱.۲) پیچیده تر از شبکه عصبی هاپفیلد می باشد. اگر ماتریس C بصورت قطری و ماتریس W برابر با ماتریس همانی در نظر گرفته شود، دینامیک

شبکه هاپفیلد استاندارد بدست می آید. در نهایت، با بکارگیری قضیه (۲.۱.۲)، می توان نتیجه گرفت که شبکه عصبی هاپفیلد مرتبه کسری دارای یک نقطه یکتای تعادل پایدار میتگ‐لفلر است اگر

$$\lambda_i = c_{ii} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\mu_j}{\mu_i} |c_{ji}| - \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \frac{\mu_h}{\mu_i} |a_{hj}| F_j |w_{ji}| > 0. \qquad (۲۰.۲)$$

با فرض قطری بودن ماتریس C و ماتریس همانی بودن ماتریس W می توان نتیجه گرفت که شبکه عصبی هاپفیلد مرتبه کسری دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار میتگ‐لفلر است اگر

$$\lambda_i = c_{ii} - \sum_{h=1}^{n} \frac{\mu_h}{\mu_i} |a_{hi}| F_i > 0 \qquad (۲۱.۲)$$

که با نتیجه گزارش شده در [۱۳۶] یکی است.

۴.۱.۲ نتایج شبیه سازی

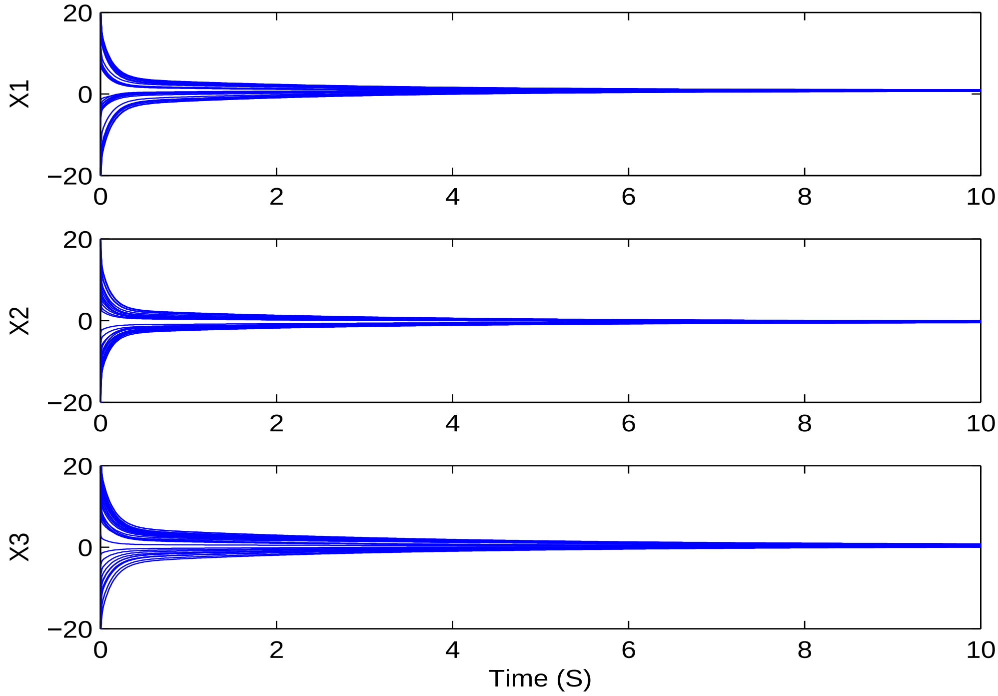
در این بخش، سعی می شود تا با استفاده از شبیه سازی عددی، برتری و کاربردی بودن نتایج تئوری بدست آمده ارزیابی شود. در شبیه سازی ها، رفتار پایدار شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری (۱.۲)، بازای پارامترها مشخص، پس از تائید پایداری نقطه تعادل یکتای شبکه با استفاده از نتایج تئوری، تحت شرایط اولیه مختلف نیز بررسی می شود.

مثال ۱.۱.۲. شبکه عصبی (۱.۲) با پارامترهای رابطه (۲۲.۲) را در نظر بگیرید. توابع فعالسازی یعنی f_i و g_r برابر با تابع تانژانت هایپربولیک ($tanh(\cdot)$) در نظر گرفته شد. نقطه تعادل شبکه عصبی برابر با $X^* = [0/9848 \quad -0/2631 \quad -0/5490]^T$ و در نتیجه آن $Y^* = [0/1309 \quad -0/0788]^T$ بدست آمده است. معیار پایداری با استفاده از رابطه (۲.۲)، برای این سیستم با استفاده از نتایج قضیه های (۱.۱.۲) و (۲.۱.۲)، برابر با $\lambda_1 = 0/585$ و $\lambda_2 = 0/154$ و $\lambda_3 = 0/255$ بدست آمده است. بنابراین نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی، پایدار میتگ‐لفلر سراسری می باشد.

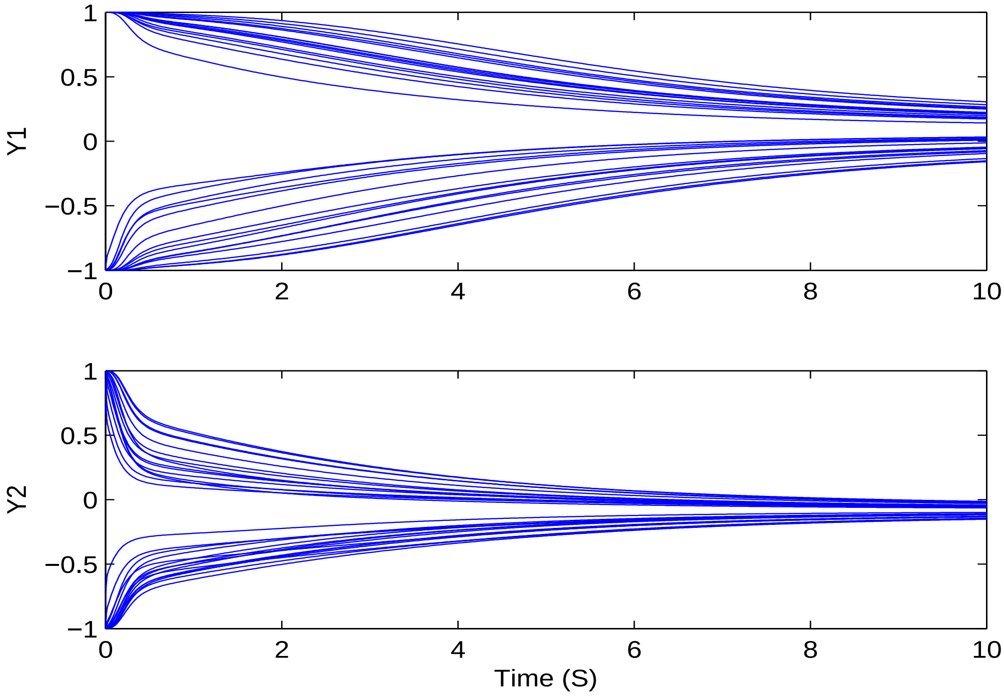
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0/2 & 0/1 \\ -0/1 & 3 & 0 \\ -0/1 & 0 & 1/5 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -0/1 & -0/2 & 0 \\ 0/8 & 0/7 & 0/5 \\ -0/2 & 1 & 0/3 \end{bmatrix},$$

$$W^f = \begin{bmatrix} 0/9 & 0/1 \\ 0 & 0/2 \\ 0/2 & -0/1 \end{bmatrix}, W^o = \begin{bmatrix} 0/1 & 0/5 & 0/3 \\ 0 & 0/3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (۲۲.۲)$$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/6 \\ 1 \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

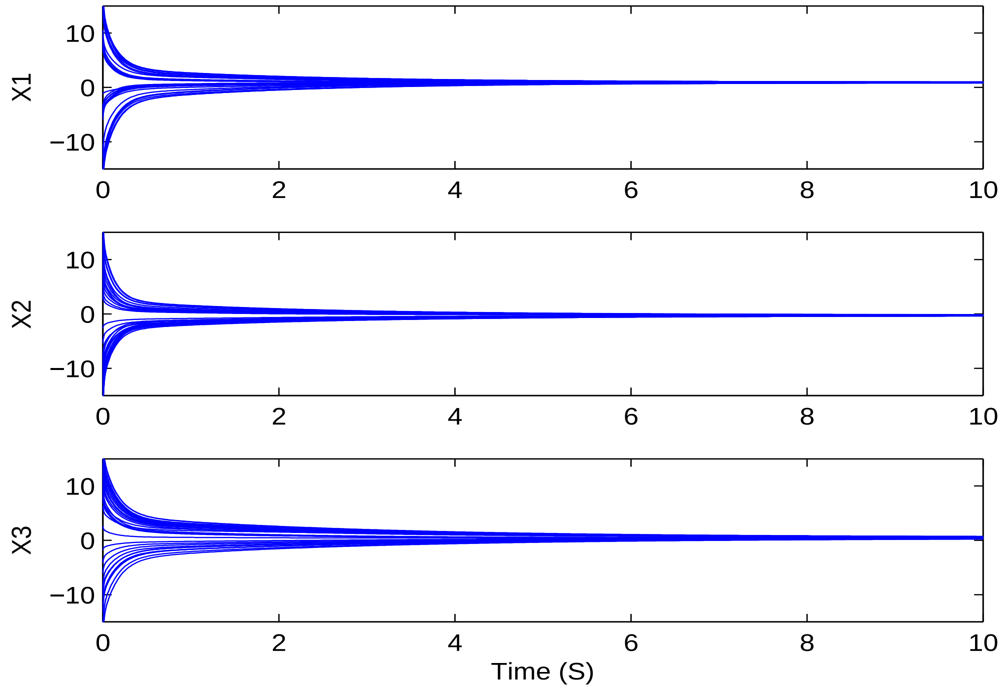


(آ) حالت ها

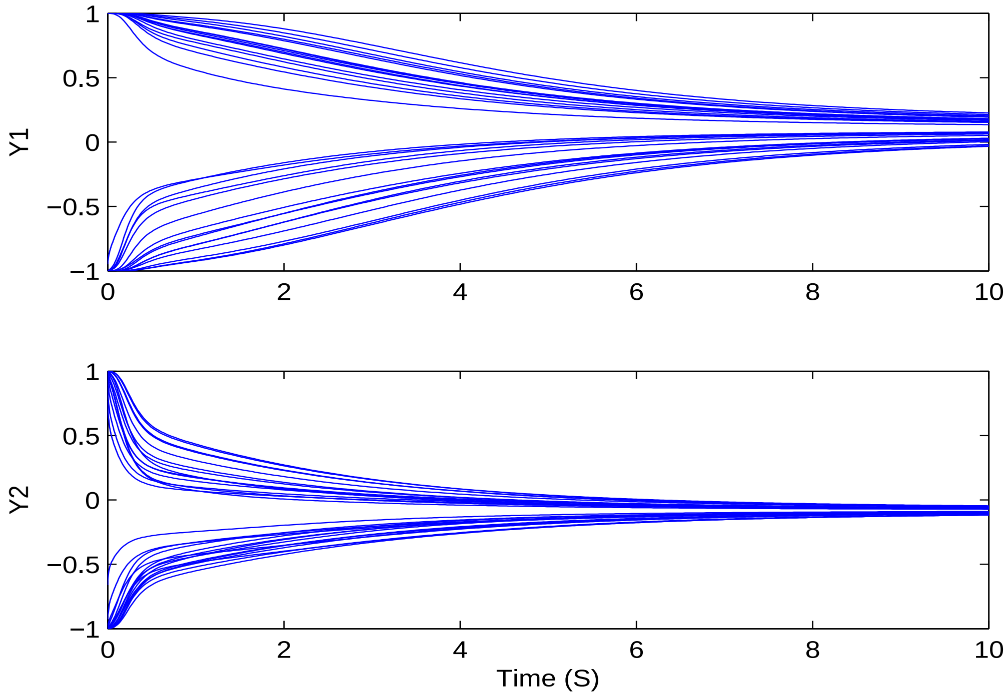


(ب) خروجی ها

شکل ۱.۲: پاسخ زمانی حالت ها و خروجی های مثال (۱.۱.۲) برای $\alpha =$ ۰/۳



(آ) حالت ها



(ب) خروجی ها

شکل ۲.۲: پاسخ زمانی حالت ها و خروجی های مثال (۱.۱.۲) برای $\alpha =$ ۰٫۵

در شکل های (۱.۲)، (۲.۲) خروجی ها و حالت های رزرویر شبکه عصبی با $n = ۳$، $q = ۲$ و $p = ۱$ در مرتبه های کسری متفاوت، $\alpha = \{۰/۵, ۰/۳\}$ و تحت شرایط اولیه متفاوت نشان داده شده است. این نتایج تاکید می کند که پاسخ های مختلف سیستم ناشی از شرایط اولیه متفاوت، همواره به نقطه تعادل یکتای ان همگرا می شوند.
خلاصه اینکه، بر طبق معیارهای پایداری بدست آمده، شبکه عصبی مرتبه کسری (۱.۲) با پارامترهای رابطه (۲۲.۲) دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار میتگ_لفلر است. نتایج شبیه سازی نیز نشان می دهد که پاسخ ها به یک نقطه تعادل همگرا می شوند و سرعت همگرایی پاسخ ها به نقطه تعادل یکتا نیز وابسته به مرتبه کسری یعنی α می باشد به طوری که با افزایش α سرعت همگرایی نیز افزوده می شود.

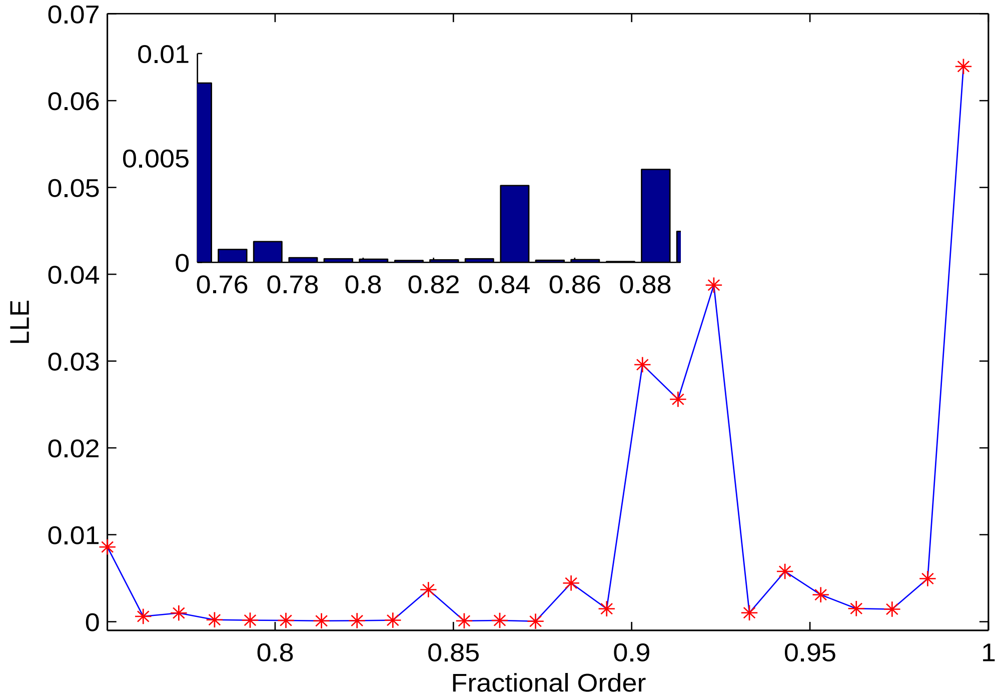
۵.۱.۲ آشوب در شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری

در سال های اخیر، شبکه های عصبی مرتبه کسری به یکی از حوزه های جذاب برای پژوهشگرانی بدل شد که به مفاهیم پایه و کاربرد حسابان کسری در حوزه های مختلف علاقمند هستند. در این راستا، بررسی پدیده آشوب و کنترل آن در این شبکه ها و کاربرد آن در حوزه های مختلف همچون مخابرات امن یکی از موضوعاتی می باشد که علاوه بر تحلیل پایداری و کاربرد آنها مورد توجه قرار گرفته است و کارهای زیادی در این حوزه انجام شده است. در این بخش، به بررسی پدیده آشوب در شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری رابطه (۱.۲) پرداخته می شود که در شکل (۴.۱) از فصل اول، به راهکارهای لازم برای تحلیل رفتار آشوبی در یک سیستم آشوبی اشاره شده است.

تحلیل رفتار آشوبی

برای تحلیل رفتار آشوبی در شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری رابطه (۱.۲)، مطابق با آنچه در شکل (۴.۱) از فصل اول به آن اشاره شد، می بایست شروط لازم و کافی جهت تحقق رفتار آشوبی در سیستم مورد نظر را بررسی کرد. شروط لازم تحقق رفتار آشوبی در این شبکه با ۳ متغیر حالت برابر است با داشتن یک نقطه تعادل زینی و دو نقطه تعادل متقارن ناپایدار می باشد. برای تحلیل زینی بودن و ناپایداری نقطه تعادل، ساده ترین راهکار استفاده از مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین در نقطه تعادل می باشد. برای این شبکه با ۳ متغیر حالت، عنصر سطر iام و ستون jام ماتریس ژاکوبین این سیستم آشوبی در نقطه تعادل X^* بصورت زیر بدست می آید:

$$J_{i,k} = -C(i,k) + \sum_{j=۱}^{n=۳} A(i,j) f'_j(\cdot) \left[W(j,k) + \sum_{h=۱}^{m=۲} \left(W^f(j,h) g'_h(\cdot) W^o(h,k) \right) \right], \quad (۲۳.۲)$$



شکل ۳.۲: بزرگ ترین نمای لیاپانوف شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری بازای مرتبه های مختلف، $\alpha \geq ۰/۷۵۳$

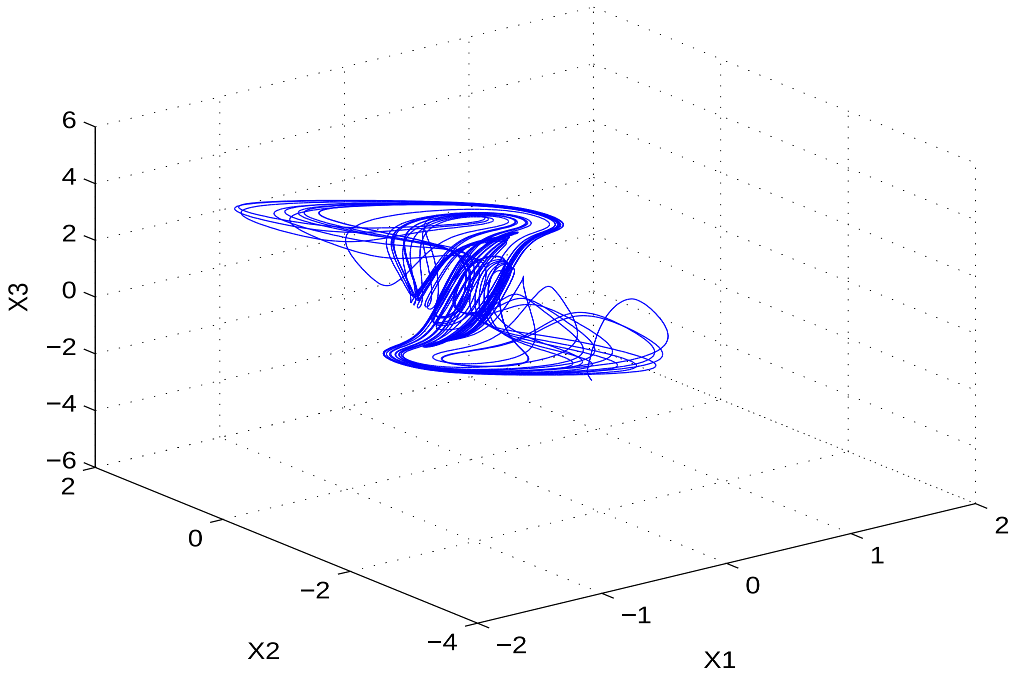
که $f'_j(\cdot) = f'_j(W(j,:)X^*W^f(j,:)g(W^oX^*))$ و $g'_h(\cdot) = g'_h(W^o(h,:)X^*)$ می باشند.
شرط کافی برای تحقق رفتار آشوبی در یک سیستم، محاسبه بزرگترین نمای لیاپانوف[1] می باشد. برای محاسبه بزرگترین نمای لیاپانوف می توان از دو روش ۱) روش سری زمانی ۲) روش استفاده از دینامیک مدل استفاده کرد. در این رساله، از روش سری زمانی ارائه شده در [۱۳۸] برای محاسبه بزرگ ترین نمای لیاپانوف استفاده می شود.

مثال ۲.۱.۲. شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری (۱.۲) با پارامترهای زیر را در نظر بگیرید.

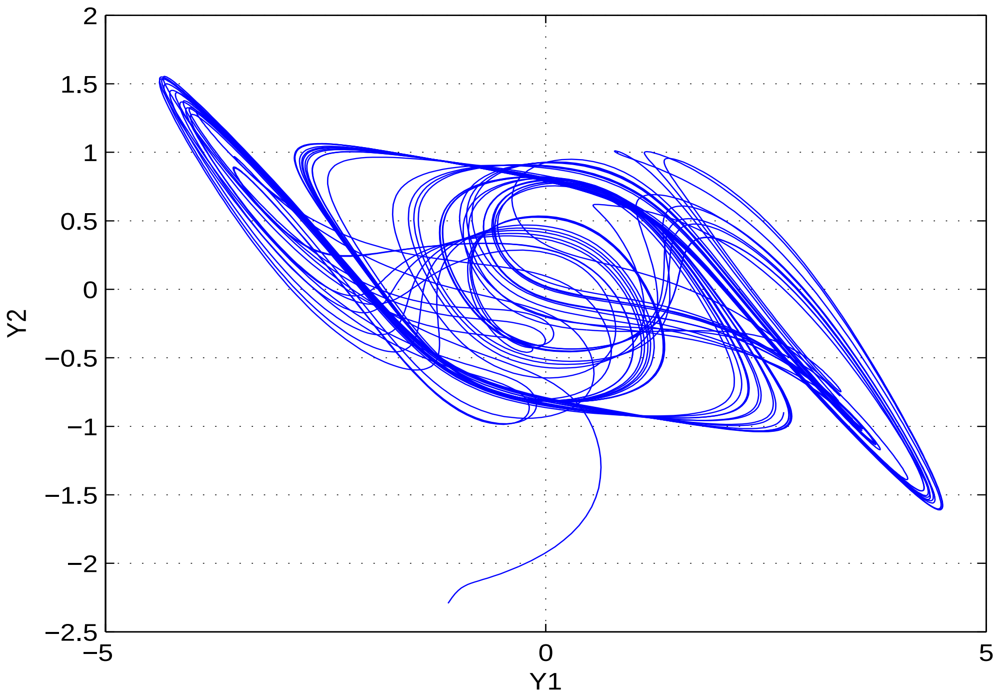
$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱/۲ & ۰/۱ \\ ۱/۸ & ۱/۷ & ۱/۱ \\ -۵ & -۰/۱ & ۱ \end{bmatrix}, \; W^o = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$
$$W = \begin{bmatrix} ۰/۶ & ۰/۱ & -۰/۵ \\ ۰/۱ & ۰/۳ & ۰ \\ -۰/۵ & -۰/۲ & ۰/۵ \end{bmatrix}, W^f = \begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ \\ ۰ & ۰/۵ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}, \tag{۲۴.۲}$$

شبکه با مشخصات فوق، دارای سه نقطه تعادل $X_1^* = [۰,۰,۰]$، $X_2^* = [-۰/۴۶, -۰/۴۲, ۳/۵۳]$

[1] Largest Lyapunov exponent (LLE)



(آ) حالت های رزروير



(ب) خروجی ها

شکل ۴.۲: رفتار آشوبی شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری بازای $\alpha = ۰/۹۹$

و $X_۳^* = [۰/۴۶, ۰/۴۲, -۳/۵۳]$ می باشد. مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین متناظر با نقطه تعادل $X_۱^*$ برابر است با $\lambda_{۱,۲} = -۰/۲۸۷۶ \pm ۲/۰۰۵۷۲\imath, \lambda_۳ = ۱/۴۲۵۲$. در نتیجه، نقطه تعادل $X_۱^*$ یک نقطه زینی[1] است. مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین متناظر با نقاط تعادل $X_۲^*$ و $X_۳^*$ برابر است با $\lambda_{۱,۲} = ۰/۴۲۸۳ \pm ۱/۰۴۷۷\imath, \lambda_۳ = -۰/۹۹۵۵$. چون ایندو نقطه تعادل، ناپایدار هستند، پس می توان نتیجه گرفت که شروط لازم برای تحقق رفتار آشوبی برقرار است.

همچنین، اگر $|arg(eig(J))| < \alpha\frac{\pi}{۲}$ برای حداقل دو مقدار ویژه برقرار باشد، آنگاه شروط لازم برای تحقق رفتار آشوبی در یک سیستم مرتبه کسری برقرار می باشد. بنابراین، حداقل مرتبه کسری متناسب برای این شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری برابر است با $\alpha = ۰/۷۵۳۰$. مقادیر بزرگترین نمای لیاپانوف بدست آمده از روش سری زمانی بازای $\alpha \geq ۰/۷۵۳۰$ در شکل (۳.۲) نمایش داده شد که نشان دهنده تحقق شروط لازم و کافی بازای $\alpha \geq ۰/۷۵۳۰$ در این شبکه می باشد. برای تایید این نتایج، رفتار آشوبی شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری (۱.۲) با پارامترهای داده شده در رابطه (۲۴.۲) و مرتبه کسری $\alpha = ۰/۹۹$ در شکل (۴.۲) نشان داده شد.

۲.۲ تحلیل پایداری یکنواخت مستقل از تاخیر نقطه تعادل شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری در حضور تاخیر

در این بخش، ابتدا توصیف شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری در حضور تاخیر ثابت و چندگانه با جزییات ارائه می شود و سپس وجود و یکتایی نقطه تعادل آن بررسی می شود و در نهایت، پایداری یکنواخت نقطه تعادل یکتای شبکه آنالیز می شود.

۱.۲.۲ توصیف مدل شبکه عصبی در حضور تاخیر ثابت

نمایش ماتریسی دینامیک پیوسته شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری در حضور تاخیر با $p \in \mathbb{Z}^+$ ورودی، $q \in \mathbb{Z}^+$ خروجی و $n \in \mathbb{Z}^+$ حالت رزرویر را می توان بصورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} D^\alpha X(t) &= -CX(t-\sigma^l) + Af\left(W^{in}U(t-\sigma^{in}) + WX(t-\sigma^d) + W^fY(t-\sigma^f)\right), \\ Y &= g(W^oX(t-\sigma^o) + W^{io}U(t-\sigma^{io})), \end{aligned} \tag{۲۵.۲}$$

که $X = [x_۱, \cdots, x_n]^T$، $U = [u_۱, \cdots, u_p]^T$ و $Y = [y_۱, \cdots, y_q]^T$ به ترتیب بردارهای حالت های رزرویر، ورودی و خروجی می باشند و معادله متناظر با iامین حالت رزرویر و rامین خروجی

[1] Saddle Point

بصورت رابطه زیر تعریف می شود.

$$D^{\alpha}x_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j(t-\sigma_{ij}^{l}) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j\Bigg\{\sum_{h=1}^{p} w_{jh}^{in}u_h(t-\sigma_{jh}^{in}) + \sum_{k=1}^{n} w_{jk}x_k(t-\sigma_{jk}^{d}) + \sum_{r=1}^{q} w_{jr}^{f}y_r(t-\sigma_{jr}^{f})\Bigg\},$$
$$y_r(t) = g_r\left(\sum_{s=1}^{n} w_{rs}^{o}x_s(t-\sigma_{rs}^{o}) + \sum_{m=1}^{p} w_{rm}^{io}u_m(t-\sigma_{rm}^{io})\right), \qquad (۲۶.۲)$$

که $i=1,2,...,n$ و $r=1,2,...,q$ می باشند.
بردار $f=[f_1,\cdots,f_n]^T$ توابع فعالسازی در رزرویرها و بردار $g=[g_1,\cdots,g_q]^T$ نیز شامل توابع فعالسازی خروجی می باشند. توابع f_i و g_r برای $i=1,2,\cdots,n$ و $r=1,2,\cdots,q$ توابعی پیوسته و لیپشیتز (طبق تعریف ۱.۲.۱) با ثابت لیپشیتز F_i و G_r می باشند. نمادهای $W^{in}=[\cdot]_{n\times n}$، $W=[\cdot]_{n\times n}$، $W^f=[\cdot]_{n\times q}$ و $W^{out}=\left[W^o;W^{io}\right]_{q\times(n+p)}$ به ترتیب ماتریس های وزن ورودی، حالت رزروير، فیدبک و خروجی را نشان می دهند. ماتریس ثابت زمانی شبکه مورد نظر و ماتریس نرخ نشت[1] حالت های رزروير، به ترتیب، برابر با A^{-1} و $A^{-1}C$ هستند. مقادیر ویژه ماتریس نرخ نشت، بیانگر همگرایی حالت های رزروير ــ در حالتی که به شبکه متصل نیستــ از وضعیت موجودش به حالت استراحت می باشند. نمادهای $\sigma^l=[\cdot]_{n\times n}$، $\sigma^{in}=[\cdot]_{n\times p}$، $\sigma^d=[\cdot]_{n\times n}$، $\sigma^f=[\cdot]_{n\times q}$، $\sigma^o=[\cdot]_{q\times n}$ و $\sigma^{in}=[\cdot]_{q\times p}$ به ترتیب تاخیر در ترم های نشت، ورودی، انتقال (حالت رزروير و فیدبک) و تاخیرهای ریداوت[2] (ورودی و حالت رزروير) می باشند. همانند بخش قبلی، نرخ نشتی و ثابت زمانی بصورت ماتریسی لحاظ شده است.
شرایط اولیه شبکه عصبی (۲۵.۲) به فرم $x_i(t)=\phi_i(t)\in\mathbb{R}$، $i=1,...,n$، $t\in[-\sigma_i,0]$ می باشد که نرم آن بصورت $\|\Phi(t)\|=\sum_{i=1}^{n} sup_{t\in(-\sigma_i,0]}\{e^{-t}|\phi_i(t)|\}$ تعریف می شود.

۲.۲.۲ وجود و یکتایی نقطه تعادل

قضیه ۱.۲.۲. شبکه عصبی (۲۵.۲) دارای یک نقطه تعادل یکتا می باشد اگر رابطه

$$\lambda_{max} = \max_{\forall i}\Bigg\{\frac{1}{c_{ii}}\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|c_{ji}| + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|F_j|w_{ji}| + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|F_j\sum_{r=1}^{q}\left|w_{jr}^{f}\right|G_r|w_{ri}^{o}|\Big)\Bigg\} \leq 1. \qquad (۲۷.۲)$$

برقرار باشد.

اثبات: با توجه به تعریف (۵.۲.۱)، پاسخ X^* نقطه تعادل شبکه عصبی (۲۵.۲) می باشد اگر

[1] Leaking rate matrix
[2] Readout delays

و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$-CX^* + Af\left(WX^* + W^f Y^*\right) = 0, \qquad (۲۸.۲)$$

که در آن $Y^* = g\left(W^o X^*\right)$ می باشد.در نتیجه، معادله iام از دستگاه معادله فوق بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} &- c_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_{ij}x_j(t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j\left(\sum_{k=1}^{n} W_{jk}x_k(t) + \sum_{r=1}^{q} w^f_{jr}g_r\left(\sum_{s=1}^{n} w^o_{rs}x_s(t)\right)\right) = 0. \end{aligned} \qquad (۲۹.۲)$$

با تعریف نگاشت جدید $\Psi : R^n \to R^n$ بصورت $c_{ii}x^*_i = \nu^*_i$، داریم:

$$\begin{aligned} \psi_i(\nu_i) = &- \sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_{ij}\frac{\nu_j(t)}{c_{jj}} \\ &+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j\left(\sum_{k=1}^{n} w_{jk}\frac{\nu_k(t)}{c_{kk}} + \sum_{r=1}^{q} w^f_{jr}g_r\left(\sum_{s=1}^{n} w^o_{rs}\frac{\nu_s(t)}{c_{ss}}\right)\right), \end{aligned} \qquad (۳۰.۲)$$

که $\Psi(\nu) = [\psi_1(\nu_1), \cdots, \psi_n(\nu_n)]^T$ می باشد.
حال، با استفاده از نرم اقلیدس[1]، اثبات می شود که Ψ یک نگاشت انقباضی است. برای این کار، فرض کنید $\upsilon = [\upsilon_1, ..., \upsilon_n]^T$ و $\nu = [\nu_1, ..., \nu_n]^T$ دو پاسخ متفاوت و دلخواه شبکه باشند، آنگاه با تعریف نرم $\|\Psi(\nu) - \Psi(\upsilon)\|$ بصورت $\|\Psi(\nu) - \Psi(\upsilon)\| = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left|\psi_i(\nu_i) - \psi_i(\upsilon_i)\right|$ و با استفاده از رابطه (۳۰.۲)، نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} &\|\Psi(\nu) - \Psi(\upsilon)\| \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} -c_{ij}\left(\frac{\nu_j}{c_{jj}} - \frac{\upsilon_j}{c_{jj}}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j\left(\sum_{k=1}^{n} w_{jk}\frac{\nu_k}{c_{kk}} + \sum_{r=1}^{q} w^f_{jr}g_r\left(\sum_{s=1}^{n} w^o_{rs}\frac{\nu_s}{c_{ss}}\right)\right) \\ &\qquad - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j\left(\sum_{k=1}^{n} w_{jk}\frac{\upsilon_k}{c_{kk}} + \sum_{r=1}^{q} w^f_{jr}g_r\left(\sum_{s=1}^{n} w^o_{rs}\frac{\upsilon_s}{c_{ss}}\right)\right)\Bigg\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{|c_{ij}|}{c_{jj}}\left|\nu_j - \upsilon_j\right| + \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, F_j\left(\sum_{k=1}^{n} |w_{jk}|\frac{|\nu_k - \upsilon_k|}{c_{kk}} + \sum_{r=1}^{q} |w^o_{rs}|\frac{|\nu_s - \upsilon_s|}{c_{ss}}\right)\Bigg\}. \end{aligned}$$
(۳۱.۲)

[1]Euclidean Norm

در نتیجه

$$\begin{aligned}
&\|\Psi(\nu)-\Psi(\upsilon)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{|c_{ij}|}{c_{jj}}|\nu_j-\upsilon_j| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \\
&\qquad \times F_j\left(\sum_{k=1}^{n}|w_{jk}|\frac{|\nu_k-\upsilon_k|}{c_{kk}} + \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{q}\left|w_{jr}^{f}\right|G_r\left|w_{rs}^{o}\right|\frac{|\nu_s-\upsilon_s|}{c_{ss}}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{|c_{ji}|}{c_{ii}}|\nu_i-\upsilon_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{kj}|}{c_{ii}}F_j|w_{ji}||\nu_i-\upsilon_i| \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{kj}|}{c_{ii}}F_j\left(\sum_{r=1}^{q}\left|w_{jr}^{f}\right|G_r\left|w_{ri}^{o}\right|\right)|\nu_i-\upsilon_i| \\
&\leq \max_{\forall i}\left\{\frac{1}{c_{ii}}\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|c_{ji}| + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|F_j|w_{ji}|\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|F_j\sum_{r=1}^{q}\left|w_{jr}^{f}\right|G_r\left|w_{ri}^{o}\right|\right)\right\}\sum_{i=1}^{n}|\nu_i-\upsilon_i| \\
&\leq \lambda_{max}\sum_{i=1}^{n}|\nu_i-\upsilon_i|. \qquad (۳۲.۲)
\end{aligned}$$

اگر $\lambda_{max} \leq 1$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
\|\Psi(\nu)-\Psi(\upsilon)\| &\leq \sum_{i=1}^{n}|\nu_i-\upsilon_i|, \\
\|\Psi(\nu)-\Psi(\upsilon)\| &\leq \|\nu-\upsilon\|, \qquad (۳۳.۲)
\end{aligned}$$

این نتیجه، نشان می دهد که Ψ در R^n یک نگاشت انقباضی است. از این روی، Ψ یک نقطه تعادل یکتای $\nu^* \in R^n$ دارد بگونه ای که $\Psi(\nu^*) = \nu^*$ برقرار می باشد. به عبارت دیگر، $X^* = \left[\frac{\nu_1^*}{c_{11}}, \cdots, \frac{\nu_n^*}{c_{nn}}\right]^T$ یک نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی (۲۵.۲) می باشد.

۳.۲.۲ پایداری نقطه تعادل

در این بخش، پایداری یکنواخت مستقل از تاخیر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی (۲۵.۲) تحلیل می شود.

قضیه ۲.۲.۲. نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی (۲۵.۲)، ذاتا[1] پایدار یکنواخت می باشد اگر نامعادله زیر برقرار باشد:

$$\Upsilon = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{c}_i + \overline{w}_i + \overline{w}_i^{o}\right) < 1, \qquad (۳۴.۲)$$

[1] intrinsical

در حالی که

$$\begin{aligned}
\bar{c}_i &= \max_{\forall j}\left(|c_{ij}|\right), j=1,\cdots,n,\\
\overline{w}_i &= \max_{\forall k}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\,|w_{jk}|\right), k=1,\cdots,n,\\
\overline{w}_i^o &= \max_{\forall s}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{q}|a_{ij}|\,F_j\left|w_{jr}^f\right|G_r\,|w_{rs}^o|\right), s=1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{۳۵.۲}$$

اثبات: فرض کنید $X(t)=[x_1(t),\cdots,x_n(t)]^T$ و $X'(t)=\left[x_1'(t),\cdots,x_n'(t)\right]^T$ دو پاسخ شبکه عصبی (۲۵.۲) با شرایط اولیه متفاوت $x_i(t)=\phi_i(t)\in\mathbb{R}$ و $x_i'(t)=\psi_i(t)\in\mathbb{R}$ برای $t\in[-\sigma_i,0]$ و $[i=1,2,\cdots,n]$ باشند.
با استفاده از دینامیک شبکه عصبی (۲۵.۲)، دینامیک خطای بین این دو پاسخ بصورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}
D^\alpha\left(x_i(t)-x_i'(t)\right) &= -\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\left(x_j(t-\sigma_{ij}^l)-x_j'(t-\sigma_{ij}^l)\right)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j\left(\sum_{k=1}^{n}w_{jk}x_k(t-\sigma_{jk}^d)+\sum_{r=1}^{q}w_{jr}^f y_r(t-\sigma_{jr}^f)\right)\\
&\quad-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j\left(\sum_{k=1}^{n}w_{jk}x_k'(t-\sigma_{jk}^d)+\sum_{r=1}^{q}w_{jr}^f y_r'(t-\sigma_{jr}^f)\right),\\
y_r(t) &= g_r\left(\sum_{s=1}^{n}w_{rs}^o x_s(t-\sigma_{rs}^o)\right),\\
y_r'(t) &= g_r\left(\sum_{s=1}^{n}w_{rs}^o x_s'(t-\sigma_{rs}^o)\right),\\
i &= 1,\cdots,n,\quad r=1,\cdots,q.
\end{aligned} \tag{۳۶.۲}$$

با استفاده از تعریف انتگرال مرتبه کسری ریمان رابطه (۳۴.۱) و نتیجه (۲.۲.۱)، رابطه زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
x_i(t)-x_i'(t) &= \phi_i(0)-\psi_i(0)\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\left(-\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\left(x_j(\tau-\sigma_{ij}^l)-x_j'(\tau-\sigma_{ij}^l)\right)\right.\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j\left\{\sum_{k=1}^{n}w_{jk}x_k(\tau-\sigma_{jk}^d)+\sum_{r=1}^{q}w_{jr}^f y_r(\tau-\sigma_{jr}^f)\right\}\\
&\quad\left.-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j\left\{\sum_{k=1}^{n}w_{jk}x_k'(\tau-\sigma_{jk}^d)+\sum_{r=1}^{q}w_{jr}^f y_r'(\tau-\sigma_{jr}^f)\right\}\right)d\tau.
\end{aligned} \tag{۳۷.۲}$$

در نتیجه، این بدین معنی می باشد که

$$
\begin{aligned}
&e^{-t}\left|x_i(t)-x'_i(t)\right| \\
&\leq e^{-t}\left|\phi_i(0)-\psi_i(0)\right|+\frac{e^{-t}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\Bigg\{\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\left|x_j(\tau-\sigma_{ij}^l)-x'_j(\tau-\sigma_{ij}^l)\right| \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\Big\{\sum_{k=1}^{n}|w_{jk}|\left|x_k(\tau-\sigma_{jk}^d)-x'_k(\tau-\sigma_{jk}^d)\right| \\
&\quad+\sum_{r=1}^{q}\left|w_{jr}^f\right|\left|y_r(\tau-\sigma_{jr}^f)-y'_r(\tau-\sigma_{jr}^f)\right|\Big\}\Bigg\}d\tau \\
&\leq e^{-t}\left|\phi_i(0)-\psi_i(0)\right|+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}e^{-t}\left|x_j(\tau-\sigma_{ij}^l)-x'_j(\tau-\sigma_{ij}^l)\right|d\tau \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\,|w_{jk}|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}e^{-t}\left|x_k(\tau-\sigma_{jk}^d)-x'_k(\tau-\sigma_{jk}^d)\right|d\tau \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\left|w_{jr}^f\right|G_r\,|w_{rs}^o| \\
&\quad\times\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}e^{-t}\left|x_s(\tau-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o)-x'_s(\tau-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o)\right|d\tau. \qquad (۳۸.۲)
\end{aligned}
$$

حال با تعریف $\overline{\gamma}=\tau-\sigma_{ij}^l$، $\widetilde{\gamma}=\tau-\sigma_{jk}^d$ و $\widehat{\gamma}=\tau-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o$ نتیجه زیر بدست می آید.

$$
\begin{aligned}
&e^{-t}\left|x_i(t)-x'_i(t)\right| \\
&\leq e^{-t}\left|\phi_i(0)-\psi_i(0)\right|+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\sigma_{ij}^l}^{t-\sigma_{ij}^l}(t-\overline{\gamma}-\sigma_{ij}^l)^{\alpha-1}e^{-t}\left|x_j(\overline{\gamma})-x'_j(\overline{\gamma})\right|d\overline{\gamma} \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\,|w_{jk}|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\sigma_{jk}^d}^{t-\sigma_{jk}^d}(t-\widetilde{\gamma}-\sigma_{jk}^d)^{\alpha-1}e^{-t}\left|x_k(\widetilde{\gamma})-x'_k(\widetilde{\gamma})\right|d\widetilde{\gamma} \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\left|w_{jr}^f\right|G_r\,|w_{rs}^o| \\
&\qquad\times\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o}^{t-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o}(t-\widehat{\gamma}-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o)^{\alpha-1}e^{-t}\left|x_s(\widehat{\gamma})-x'_s(\widehat{\gamma})\right|d\widehat{\gamma}. \qquad (۳۹.۲)
\end{aligned}
$$

پس

$$
\begin{aligned}
&e^{-t}\left|x_i(t)-x'_i(t)\right| \\
&\leq e^{-t}\left|\phi_i(0)-\psi_i(0)\right| \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\sigma_{ij}^l}^{t-\sigma_{ij}^l}(t-\overline{\gamma}-\sigma_{ij}^l)^{\alpha-1}e^{-(t-\overline{\gamma}-\sigma_{ij}^l)}e^{-\overline{\gamma}-\sigma_{ij}^l}\left|x_j(\overline{\gamma})-x'_j(\overline{\gamma})\right|d\overline{\gamma} \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\,|w_{jk}|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \int_{-\sigma_{jk}^d}^{t-\sigma_{jk}^d} (t-\widetilde{\gamma}-\sigma_{jk}^d)^{\alpha-1} e^{-(t-\widetilde{\gamma}-\sigma_{jk}^d)} e^{-\widetilde{\gamma}-\sigma_{jk}^d} \left|x_k(\widetilde{\gamma})-x_k'(\widetilde{\gamma})\right| d\widetilde{\gamma} \\
&+\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{n} |a_{ij}| F_j \left|w_{jr}^f\right| G_r \left|w_{rs}^o\right| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\
&\times \int_{-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o}^{t-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o} (t-\widehat{\gamma}-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o)^{\alpha-1} e^{-(t-\widehat{\gamma}-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o)} e^{-\widehat{\gamma}-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o} \left|x_s(\widehat{\gamma})-x_s'(\widehat{\gamma})\right| d\widehat{\gamma}.
\end{aligned}
\tag{۴۰.۲}
$$

با بسط انتگرال های سمت راست، نتیجه زیر بدست می آید.

$$
\begin{aligned}
&e^{-t}\left|x_i(t)-x_i'(t)\right| \\
&\le e^{-t}\left|\phi_i(0)-\psi_i(0)\right| \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}| \frac{e^{-\sigma_{ij}^l}}{\Gamma(\alpha)} \left\{\int_{t-\sigma_{ij}^l}^{t} (\overline{\theta})^{\alpha-1} e^{-\overline{\theta}} d\overline{\theta}\right\} sup_{t\in(-\sigma_{ij}^l,0]} \left(e^{-t}\left|\phi_j(t)-\psi_j(t)\right|\right) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}| \frac{e^{-\sigma_{ij}^l}}{\Gamma(\alpha)} \left\{\int_{0}^{t-\sigma_{ij}^l} (\overline{\theta})^{\alpha-1} e^{-\overline{\theta}} d\overline{\theta}\right\} sup_{t\in(0,t-\sigma_{ij}^l]} \left(e^{-t}\left|x_j(t)-x_j'(t)\right|\right) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ij}| F_j |w_{jk}| \frac{e^{-\sigma_{jk}^d}}{\Gamma(\alpha)} \left\{\int_{t-\sigma_{jk}^d}^{t} (\widetilde{\theta})^{\alpha-1} e^{-\widetilde{\theta}} d\widetilde{\theta}\right\} sup_{t\in(-\sigma_{jk}^d,0]} \left(e^{-t}\left|\phi_k(t)-\psi_k(t)\right|\right) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ij}| F_j |w_{jk}| \frac{e^{-\sigma_{jk}^d}}{\Gamma(\alpha)} \left\{\int_{0}^{t-\sigma_{jk}^d} (\widetilde{\theta})^{\alpha-1} e^{-\widetilde{\theta}} d\widetilde{\theta}\right\} sup_{t\in(0,t-\sigma_{jk}^d]} \left(e^{-t}\left|x_k(t)-x_k'(t)\right|\right) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}|a_{ij}| F_j \left|w_{jr}^f\right| G_r \left|w_{rs}^o\right| \\
&\qquad\times \frac{e^{-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o}}{\Gamma(\alpha)} \left\{\int_{t-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o}^{t} (\widehat{\theta})^{\alpha-1} e^{-\widehat{\theta}} d\widehat{\theta}\right\} sup_{t\in(-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o,0]} \left(e^{-t}\left|\phi_s(t)-\psi_s(t)\right|\right) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}|a_{ij}| F_j \left|w_{jr}^f\right| G_r \left|w_{rs}^o\right| \\
&\qquad\times \frac{e^{-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o}}{\Gamma(\alpha)} \left\{\int_{0}^{t-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o} (\widehat{\theta})^{\alpha-1} e^{-\widehat{\theta}} d\widehat{\theta}\right\} sup_{t\in(0,t-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o]} \left(e^{-t}\left|x_s(t)-x_s'(t)\right|\right),
\end{aligned}
\tag{۴۱.۲}
$$

که $\overline{\theta}=t-\overline{\gamma}-\sigma_{ij}^l$، $\widetilde{\theta}=t-\widetilde{\gamma}-\sigma_{jk}^d$ و $\widehat{\theta}=t-\widehat{\gamma}-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o$ در نظر گرفته شده اند.
چون $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ و $sup_{t\in(0,t-\beta]}(\cdot)\le sup_t(\cdot)$ برای هر $t>\beta$ برقرار است، آنگاه

$$
\begin{aligned}
&e^{-t}\left|x_i(t)-x_i'(t)\right| \\
&\le e^{-t}\left|\phi_i(0)-\psi_i(0)\right|+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\, sup_{t\in(-\overline{\sigma}_j^l,0]} \left(e^{-t}\left|\phi_j(t)-\psi_j(t)\right|\right) e^{-\sigma_{ij}^l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\,sup_{t\in(0,t-\overline{\sigma}_j^l]}\left(e^{-t}\left|x_j(t)-x'_j(t)\right|\right)e^{-\sigma_{ij}^l}\\
&+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\,|w_{jk}|\,e^{-\sigma_{jk}^d}sup_{t\in(-\overline{\sigma}_k^d,0]}\left(e^{-t}\left|\phi_k(t)-\psi_k(t)\right|\right)\\
&+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\,|w_{jk}|\,e^{-\sigma_{jk}^d}sup_{t\in(0,t-\overline{\sigma}_k^d]}\left(e^{-t}\left|x_k(t)-x'_k(t)\right|\right)\\
&+\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\left|w_{jr}^f\right|G_r\,|w_{rs}^o|\,e^{-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o}sup_{t\in(-\overline{\sigma}_s^{fo},0]}\left(e^{-t}\left|\phi_s(t)-\psi_s(t)\right|\right)\\
+\quad&\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\left|w_{jr}^f\right|G_r\,|w_{rs}^o|\,e^{-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o}sup_{t\in(0,t-\overline{\sigma}_s^{fo}]}\left(e^{-t}\left|x_s(t)-x'_s(t)\right|\right),
\end{aligned}
\tag{۴۲.۲}
$$

که در آن، $\overline{\sigma}_j^l=\max_{\forall i}\left\{\sigma_{ij}^l\right\}$، $\overline{\sigma}_k^d=\max_{\forall j}\left\{\sigma_{jk}^d\right\}$ و $\overline{\sigma}_s^{fo}=\max_{\forall j,r}\left\{\sigma_{jr}^f+\sigma_{rs}^o\right\}$ برقرار می باشند. از آنجا که $e^{-\sigma_{ij}^l}$، $e^{-\sigma_{jk}^d}$ و $e^{-\sigma_{jr}^f-\sigma_{rs}^o}$ (برای هر مقدار مثبت σ_{ij}^l، σ_{jk}^d ، σ_{jr}^f و σ_{rs}^o) مثبت و کوچکتر از یک هستند، پس

$$
\begin{aligned}
&e^{-t}\left|x_i(t)-x'_i(t)\right|\\
&\le e^{-t}\left|\phi_i(0)-\psi_i(0)\right|+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\,sup_{t\in(-\overline{\sigma}_j^l,0]}\left(e^{-t}\left|\phi_j(t)-\psi_j(t)\right|\right)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\,sup_{t\in(0,t-\overline{\sigma}_j^l]}\left(e^{-t}\left|x_j(t)-x'_j(t)\right|\right)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\,|w_{jk}|\right)sup_{t\in(-\overline{\sigma}_k^d,0]}\left(e^{-t}\left|\phi_k(t)-\psi_k(t)\right|\right)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,F_j\,|w_{jk}|\right)sup_{t\in(0,t-\overline{\sigma}_k^d]}\left(e^{-t}\left|x_k(t)-x'_k(t)\right|\right)\\
&\quad+\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{q}|a_{ij}|\,F_j\left|w_{jr}^f\right|G_r\,|w_{rs}^o|\right)sup_{t\in(-\overline{\sigma}_s^{fo},0]}\left(e^{-t}\left|\phi_s(t)-\psi_s(t)\right|\right)\\
&\quad+\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{q}|a_{ij}|\,F_j\left|w_{jr}^f\right|G_r\,|w_{rs}^o|\right)sup_{t\in(0,t-\overline{\sigma}_s^{fo}]}\left(e^{-t}\left|x_s(t)-x'_s(t)\right|\right).
\end{aligned}
\tag{۴۳.۲}
$$

با استفاده از رابطه (۳۵.۲)، می توان نتیجه گرفت که

$$
\begin{aligned}
&e^{-t}\left|x_i(t)-x'_i(t)\right|\\
&\le e^{-t}\left|\phi_i(0)-\psi_i(0)\right|+\overline{c}_i\sum_{j=1}^{n}sup_{t\in(-\overline{\sigma}_j^l,0]}\left(e^{-t}\left|\phi_j(t)-\psi_j(t)\right|\right)\\
&\quad+\overline{c}_i\sum_{j=1}^{n}sup_t\left(e^{-t}\left|x_j(t)-x'_j(t)\right|\right)+\overline{w}_i\sum_{k=1}^{n}sup_{t\in(-\overline{\sigma}_k^d,0]}\left(e^{-t}\left|\phi_k(t)-\psi_k(t)\right|\right)
\end{aligned}
$$

$$+\overline{w}_i \sum_{k=1}^{n} sup_t \left(e^{-t} \left|x_k(t) - x'_k(t)\right|\right) + \overline{w}_i^o \sum_{s=1}^{n} sup_{t\in(-\overline{\sigma}_s^{fo},0]} \left(e^{-t} \left|\phi_s(t) - \psi_s(t)\right|\right)$$
$$+\overline{w}_i^o \sum_{s=1}^{n} sup_t \left(e^{-t} \left|x_s(t) - x'_s(t)\right|\right). \qquad (۴۴.۲)$$

با انتخاب $\overline{\sigma}_i = \max_{\forall j,k,s} \left\{\overline{\sigma}_j^l, \overline{\sigma}_k^d, \overline{\sigma}_s^{fo}\right\}$، داریم:

$$e^{-t} \left|x_i(t) - x'_i(t)\right| \leq e^{-t} \left|\phi_i(0) - \psi_i(0)\right| + \left(\overline{c}_i + \overline{w}_i + \overline{w}_i^o\right) \left\|\Phi(t) - \Psi(t)\right\|$$
$$+ \left(\overline{c}_i + \overline{w}_i + \overline{w}_i^o\right) \left\|X(t) - X'(t)\right\|. \qquad (۴۵.۲)$$

با استفاده از روابط (۳۴.۲) و (۴۵.۲)، نتیجه زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}
&\left\|X(t) - X'(t)\right\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} sup_t \left(e^{-t} \left|x_i(t) - x'_i(t)\right|\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} sup_{t\in(-\overline{\sigma}_i,0)} \left(e^{-t} \left|\phi_i(t) - \psi_i(t)\right|\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{c}_i + \overline{w}_i + \overline{w}_i^o\right) \left\|\Phi(t) - \Psi(t)\right\| + \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{c}_i + \overline{w}_i + \overline{w}_i^o\right) \left\|X(t) - X'(t)\right\| \\
&\leq \left\|\Phi(t) - \Psi(t)\right\| + \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{c}_i + \overline{w}_i + \overline{w}_i^o\right) \left\|\Phi(t) - \Psi(t)\right\| + \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{c}_i + \overline{w}_i + \overline{w}_i^o\right) \left\|X(t) - X'(t)\right\| \\
&\leq \frac{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{c}_i + \overline{w}_i + \overline{w}_i^o\right)}{1 - \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{c}_i + \overline{w}_i + \overline{w}_i^o\right)} \left\|\Phi(t) - \Psi(t)\right\| \\
&\leq \left(\frac{1+\Upsilon}{1-\Upsilon}\right) \left\|\Phi(t) - \Psi(t)\right\|. \qquad (۴۶.۲)
\end{aligned}$$

از این رو، برای هر $\varepsilon > 0$ یک مقدار مثبت $\delta = \left(\frac{1-\Upsilon}{1+\Upsilon}\right)\varepsilon$ وجود دارد بگونه ای که اگر $\left\|\Phi(t) - \Psi(t)\right\| < \delta$ باشد آنگاه $\left\|X(t) - X'(t)\right\| < \varepsilon$ برقرار است. این نتیجه، نشان می دهد که پاسخ $X(t)$ پایدار یکنواخت می باشد.

ملاحظه ۱.۲.۲. ساختار شبکه عصبی انعکاس حالت، بصورت کلی شباهت بیشتری به ساختار شبکه عصبی هاپفیلد در مقایسه با شبکه کوهن_ گراسبرگ دارد. با این حال، برخی تفاوت ها بین این دو ساختار وجود دارد که عبارتند از: (۱) فیدبک خروجی تنها در ساختار شبکه عصبی انعکاس حالت بکار رفته است، (۲) مبتنی بر طبقه بندی ها ـ که نخستین بار در [۲] ارائه شده است_ شبکه عصبی انعکاس حالت یک شبکه عصبی استاتیک[1] است در حالیکه شبکه هاپفیلد یک شبکه عصبی محلی[2] است. در آنالیز دینامیکی سیستم های غیرخطی، ورودی سیستم ها معمولا برابر با صفر در نظر گرفته می شود و در نتیجه، تنها اختلاف اول بین این دو ساختار

[1]Static Neural Network
[2]Local Field Neural Network

شبکه عصبی در تحلیل دینامیکی باقی می ماند. بنابراین، بسادگی می توان نشان داد که اگر مسیر فیدبک قطع شود، یعنی ماتریس W^f برابر با صفر در نظر گرفته شود، نتایج بدست آمده را می توان برای آنالیز پایداری شبکه عصبی هاپفیلد بسط داد. یعنی ساختار زیر بدست خواهد آمد که ساختار شبکه هاپفیلد پیچیده در حضور تاخیر زمانی چندگانه می باشد:

$$D^{\alpha}\left(X(t)\right) = -CX(t-\sigma^{l}) + Af\left(W^{in}U(t-\sigma^{in}) + WX(t-\sigma^{d})\right). \qquad (۴۷.۲)$$

بر این اساس، معیار پایداری بدست آمده برای چنین شبکه عصبی قابل اجرا می باشد. از این روی، بدون در نظر گرفتن ورودی خارجی U، می توان نتیجه گرفت که رابطه (۴۷.۲) پیچیده تر از شبکه عصبی هاپفیلد استاندارد می باشد. چون در ساختار استاندارد، ماتریس C، ماتریس قطری و ماتریس W، ماتریس همانی هستند. در نتیجه، نتایج زیر می تواند بدست آید:

(۱) فرض کنید که $W^f = ۰$ باشد، با بکاربردن نتایج قضیه های (۱.۲.۲) و (۲.۲.۲)، شبکه عصبی هاپفیلد در حضور تاخیر چندگانه دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار یکنواخت می باشد اگر $\Upsilon < ۱$ و $\lambda_{max} \leq ۱$ برقرار باشد که

$$\begin{aligned}
&\overline{c}_i = \max_{\forall j}\left(|c_{ij}|\right), j = ۱, \cdots, n,\\
&\overline{w}_i = \max_{\forall k}\left(\sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|\, F_j\, |w_{jk}|\right), k = ۱, \cdots, n,\\
&\Upsilon = \sum_{i=۱}^{n}\left(\overline{c}_i + \overline{w}_i\right),\\
&\lambda_{max} = \max_{\forall i}\left\{\frac{۱}{c_{ii}}\left(\sum_{j=۱, j\neq i}^{n} |c_{ji}| + \sum_{j=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n} |a_{kj}|\, F_j\, |w_{ji}|\right)\right\}
\end{aligned} \qquad (۴۸.۲)$$

(۲) فرض کنید ماتریس C یک ماتریس قطری و ماتریس W یک ماتریس همانی باشد، شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری معادل شبکه هاپفیلد استاندارد در حضور تاخیر چندگانه می باشد.

ملاحظه ۲.۲.۲. اغتشاش ثابت d را در ساختار شبکه عصبی انعکاس حالت بصورت رابطه (۴۹.۲) در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}X(t) &= -CX(t-\sigma^{l}) + Af\left(W^{in}U(t-\sigma^{in}) + WX(t-\sigma^{d}) + W^{f}Y(t-\sigma^{f})\right) + d,\\
Y &= g(W^{o}X(t-\sigma^{o}) + W^{io}U(t-\sigma^{io})).
\end{aligned} \qquad (۴۹.۲)$$

اگر از نمایش فوق در قضیه های (۱.۲.۲) و (۲.۲.۲) استفاده شود، می توان به سادگی نشان داد که اغتشاش d اثری بر روی آنالیز پایداری ندارد و در نتیجه، معیارهای پایداری بدست آمده همچنان برقرار می باشند. علاوه بر این، اغتشاش ثابت d، در آنالیز وجود و یکتایی نقطه

تعادل، که در رابطه (۲۸.۲) به صورت $-CX^* + Af\left(WX^* + W^f Y^*\right) + d = 0$ ظاهر خواهد شد، اثری بر روی نتیجه نهایی یعنی روابط (۳۱.۲) و (۳۲.۲) نخواهد داشت. به عبارت دیگر، شرایط وجود نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی برقرار می باشد در حالی که اغتشاش ثابت منجر به جابجایی (تغییر) موقعیت نقطه تعادل یکتا در فضای $\mathbb{R}^n$ خواهد شد. در نهایت، می توان نتیجه گرفت که شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری تحت اغتشاش ثابت نیز دارای یک نقطه تعادل یکتا خواهد بود.

ملاحظه ۳.۲.۲. در این بخش، فرض شده است که کلیه توابع فعالسازی لیپشیتز پیوسته بر روی $\mathbb{R}$ هستند. البته، به علت ویژگی ذاتی نرون های عصبی، لازم است تا توابع فعالسازی همه نرون های میانی محدود یا دارای اشباع باشند. کاملا واضح است که این ویژگی توابع فعالسازی تضادی با ویژگی لیپشیتز پیوسته ندارد. از طرفی دیگر، ممکن است نرخ محدود کننده ها و همچنین خطا در محدود کننده ها روی ویژگی لیپشیتز محدود کننده ها، یعنی روی ثابت لیپشیتز، اثر بگذارد. بنابراین، ممکن است معیار پایداری و وجود نقطه تعادل یکتای بدست آمده در قضیه های (۱.۲.۲) و (۲.۲.۲) بواسطه این تغییر برآورده نشود. برای جبران این ضعف، می بایست آنالیز پایداری مقاوم انجام شود. از این روی، در شبیه سازی های این بخش، به این مورد در توابع فعالسازی پرداخته خواهد شد. نتایج نشان می دهد که پایداری بدست آمده بازای تغییرات کم روی توابع فعالسازی همچنان برقرار خواهد بود.

۴.۲.۲ نتایج شبیه سازی

برای ارزیابی اثربخشی نتایج بدست آمده، دو مثال عددی در نظر گرفته شد. از روش پیش بین-اصلاح کننده آدامز-باشفورث-مولتون[1] در همه شبیه سازی ها برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری در حضور تاخیر استفاده شده است [۱۳۹]. برای اینکار، سیستم (۲۵.۲) و (۴۹.۲) بصورت زیر در نظر گرفته شد:

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}X(t) &= -CX(t-\sigma^{l}) + Af\left(W^{in}U(t-\sigma^{in}) + WX(t-\sigma^{d}) + W^{f}Y(t-\sigma^{f})\right) + d(t), \\
&\qquad t \in [0,T],\ 0 < \alpha \leq 1, \\
Y &= g(W^{o}X(t-\sigma^{o}) + W^{io}U(t-\sigma^{io})), \quad t \in [-\tau, T], \\
X(t) &= \xi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \qquad (۵۰.۲)
\end{aligned}
$$

که $\xi(t)$ تابعی است که شرایط اولیه را تولید می کند و τ نیز ماکزیمم $\overline{\sigma}_i$ را نشان می دهد که در رابطه (۴۵.۲) تعریف و استفاده شد. زمان نمونه برداری روش عددی برابر با $h = 0/01$ انتخاب شد.

در مثال اول، رفتار پایدار شبکه عصبی (۲۵.۲) با دو خروجی و سه حالت رزرویر و در حضور

[1] Adams-Bashforth- Moulton Predictor-Corrector

تاخیر چندگانه بررسی می شود. همچنین، علاوه بر اثر مرتبه کسری متفاوت، شرایط اولیه مختلف و زمان تاخیر های مختلف، اثر خطا بر برروی توابع فعالسازی شبکه عصبی بررسی و تحلیل می شود. در مثال دوم، ملاحظات مثال قبلی بر روی یک شبکه عصبی هاپفیلد مرتبه کسری در حضور تاخیر چندگانه اعمال می شود و نتایج آن گزارش می شود. در این بخش، مقادیر شرایط اولیه متمایز حالت های رزروير بصورت یک نویز گوسی سفید در نظر گرفته خواهد شد، یعنی $\xi_i(t)$ نشان دهنده نویز گوسی سفید می باشد. در هر مثال سه تست انجام می شود. در تست ۱، نتایج حاصل از مرتبه های کسری متفاوت و چندین شرایط اولیه متفاوت در حضور اغتشاش ثابت نشان داده می شود و در تست ۲، نتایج حاصل از مرتبه های کسری مختلف، چندین شرایط اولیه و تاخیر زمانی بزرگ در حضور اغتشاش ثابت نشان داده می شود. و در نهایت، در تست ۳، اثر خطا در توابع فعالسازی و چندین شرایط اولیه در حضور اغتشاش ثابت نشان داده می شود.

مثال ۱.۲.۲. شبکه عصبی (۲۵.۲) را با پارامترهای (۵۱.۲) در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&C=\begin{bmatrix} ۰/۳ & ۰/۱ & ۰/۰۵ \\ ۰ & ۰/۲ & ۰/۱ \\ ۰/۲ & ۰ & ۰/۳ \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۱ \end{bmatrix},\\
&W^f=\begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰ \\ ۰ & -۰/۱ \\ ۰/۱ & -۰/۱ \end{bmatrix},\ W^o=\begin{bmatrix} ۰/۱ & -۰/۱ & ۰ \\ ۰/۱ & ۰/۱ & -۰/۱ \end{bmatrix},\\
&W=\begin{bmatrix} ۰/۱ & -۰/۱ & ۰ \\ ۰ & -۰/۱ & -۰/۱ \\ -۰/۱ & ۰ & ۰/۱ \end{bmatrix},\ \sigma^l=\begin{bmatrix} ۰ & ۵ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۳ \\ ۴ & ۱ & ۰ \end{bmatrix},\ \sigma^f=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۱ \\ ۱ & ۹ \end{bmatrix}\\
&\sigma^o=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۴ \end{bmatrix},\ \sigma^d=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۶ & ۳ & ۴ \\ ۶ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{۵۱.۲}
$$

همه توابع فعالسازی شبکه عصبی برابر با تانژانت هایپربولیک $tanh(\cdot)$ انتخاب شوند که در نتیجه، برای $j=۱,\cdots,n$ و $r=۱,\cdots,q$ مقادیر ثابت لیپشیتز F_j و G_r برابر با یک می باشند. با در نظر گرفتن پارامتر های فوق و با استفاده از نتایج قضیه های (۱.۲.۲) و (۲.۲.۲) مقادیر $\Upsilon=۰/۷۴۶۷$ و $\lambda_{max}=۰/۸۳۴$ بدست می آیند، پس مطابق با قضیه (۱.۲.۲) شبکه عصبی دارای یک نقطه تعادل یکتا می باشد و مطابق با قضیه (۲.۲.۲) این نقطه تعادل یکتا، پایدار یکنواخت می باشد. نقطه تعادل یکتا از نتایج شبیه سازی و همچنین از رابطه (۲۸.۲) برابر با $(۰,۰)$ بدست آمده است. در مرحله شبیه سازی، در هر سه تست، شرایط اولیه $X(۰)$ بصورت زیر در نظر گرفته شد.

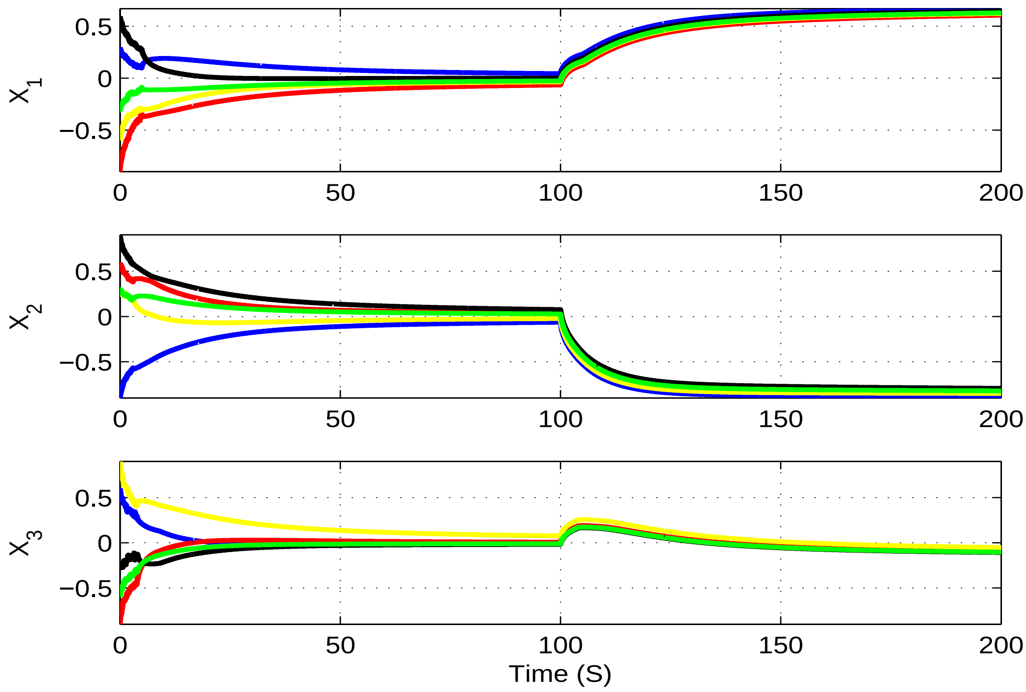
$$X(۰)=[۰/۳,-۰/۹,۰/۶;-۰/۹,۰/۶,-۰/۹;۰/۶,۰/۹,-۰/۳;-۰/۶,۰/۳,۰/۹;-۰/۳,۰/۳,-۰/۶]^T$$

تست ۱. در این تست، اغتشاش ثابت و برابر با $d = [۰/۵, -۰/۳, ۰/۴]^T$ برای $t \geq ۱۰۰$ ثانیه، مطابق با ملاحظه (۲.۲.۲)، اعمال شد. نتایج شبیه سازی ها که در شکل (۶.۲) برای مرتبه های کسری متفاوت $\alpha = \{۰/۷, ۰/۹\}$ و پنج شرایط اولیه مختلف $X(۰)$ گزارش شده است، نشان می دهد که در اثر اعمال اغتشاش، نقطه تعادل یکتا به موقعیت جدید $(X^*, Y^*) = ([۰/۶۹۶, -۰/۸۶, -۰/۱۴۹]^T, [۰/۱۵۴, -۰/۱۴]^T)$ جابجا می شود ولی، همگرایی پاسخ زمانی رزرویرها (حالت ها) و خروجی ها به نقطه تعادل، یعنی پایداری، در اثر اغتشاش تغییری نمی کند. پس اغتشاش d اثری روی پایداری ندارد.

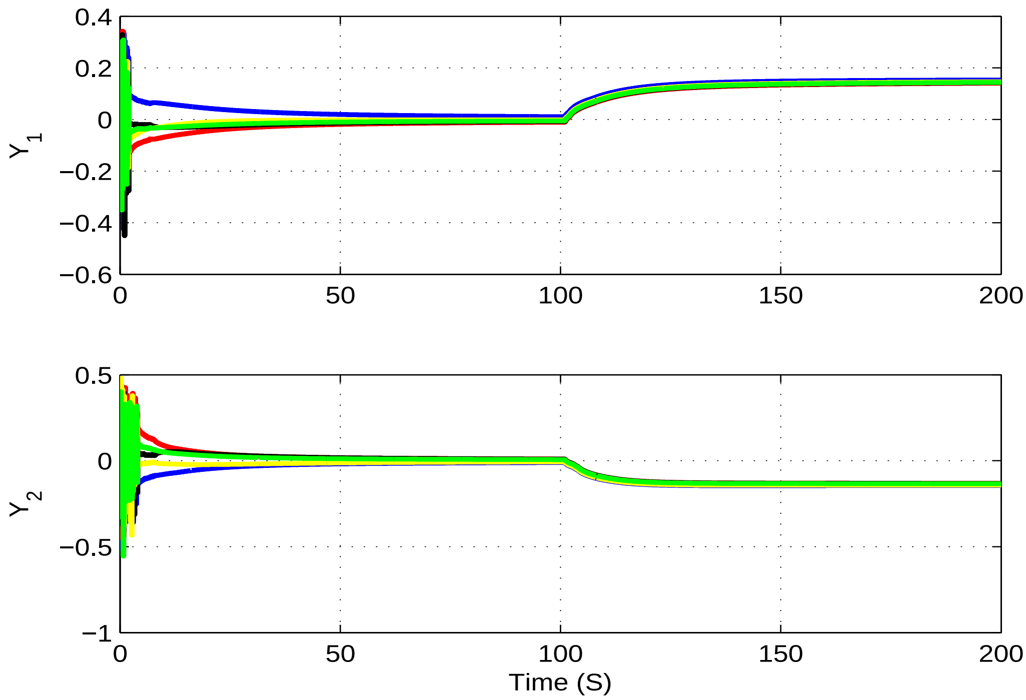
تست ۲. در این تست، برای نشان دادن اثر افزایش تاخیر، تاخیرهای شبکه عصبی به مقادیر $\sigma^l = [۱, ۱۰, ۴; ۴, ۱, ۶; ۸, ۲, ۱]$، $\sigma^d = [۲, ۴, ۲; ۱۲, ۶, ۸; ۱۲, ۱۰, ۴]$ و $\sigma^\circ = [۴, ۲, ۶; ۶, ۲, ۴]$ افزایش یافت. اغتشاش ثابت نیز، مطابق با ملاحظه (۲.۲.۲) برابر با $d = [۰/۵, -۰/۳, ۰/۴]^T$ برای $t \geq ۱۰۰$ ثانیه به شبکه عصبی اعمال شد. نتایج نشان می دهد که در اثر اعمال اغتشاش ثابت، موقعیت نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی به $X^* = [۰/۶۹۶, -۰/۸۶, -۰/۱۴۹]^T$ و $Y^* = [۰/۱۵۴, -۰/۱۴]^T$ تغییر یافت. پاسخ زمانی حالت های رزروير و خروجی های شبکه عصبی در شکل (۸.۲) برای مرتبه های کسری $\alpha = \{۰/۷, ۰/۹\}$ و پنج شرط اولیه متفاوت $X(۰)$ نشان داده شد.

تست ۳. در این تست، برای بررسی اثر خطا در محدود کننده ها و یا در توابع فعالسازی، مطابق با ملاحظه (۳.۲.۲)، فرض شده است که توابع فعال سازی بصورت $f_j(x) = g_r(x) = tanh(x) + ۰/۲e^{-|x|}sin(۱۰x)$ برای کلیه $j = ۱, \cdots, n$ و $r = ۱, \cdots, q$ می باشد. برای این توابع فعالسازی، ثابت لیپشیتز برابر با $F_j = G_r = ۳$ بدست می آید. با استفاده از پارامترهای شبکه، مقادیر ثابت لیپشیتز جدید و با استفاده از قضیه های (۱.۲.۲) و (۲.۲.۲)، مقادیر $\Upsilon = ۰/۹۸۶۷$ و $\lambda_{max} = ۰/۹۲۶$ بدست می آیند. این نتایج قضیه نشان می دهد که شرایط پایداری همچنان برقرار می باشد. همچنین اغتشاش ثابت، مطابق با ملاحظه (۲.۲.۲) برابر با $d = [-۰/۲, ۰/۳, -۰/۴]^T$ برای $t \geq ۵۰$ ثانیه به شبکه عصبی اعمال شد. نتایج شبیه سازی ها که در شکل (۹.۲) برای $\alpha = ۰/۹$ و پنج شرایط اولیه $X(۰)$ گزارش شده است، نشان می دهد که موقعیت نقطه تعادل یکتا به $(X^*, Y^*) = ([۰/۳۳۵, ۰/۶۸۱, ۰/۴۳۶]^T, [-۰/۰۶۷۴, -۰/۰۱۷۴]^T)$ تغییر کرد، در نتیجه اعمال اغتشاش، ولی همگرایی پاسخ زمانی رزرویرها (حالت ها) و خروجی های شبکه عصبی به نقطه تعادل تغییری نکرد. یعنی اغتشاش روی پایداری شبکه اثری ندارد.

مثال ۲.۲.۲. شبکه عصبی هاپفیلد پیچیده مرتبه کسری، مطابق با ملاحظه (۱.۲.۲) با پارامترهای رابطه (۵۲.۲) را در نظر بگیرید. کلیه توابع فعال سازی بصورت تابع تانژانت هایپربولیک $tanh(\cdot)$ در نظر گرفته شد. در نتیجه، ثابت لیپشیتز F_j و G_r برای $j = ۱, \cdots, n$ و $r = ۱, \cdots, m$ برابر با یک می باشد. با استفاده از رابطه (۴۸.۲) و نتایج قضیه های (۱.۲.۲) و (۲.۲.۲) برای این شبکه عصبی هاپفیلد مرتبه کسری در حضور تاخیر، مقادیر $\Upsilon = ۰/۵۰۳۳$

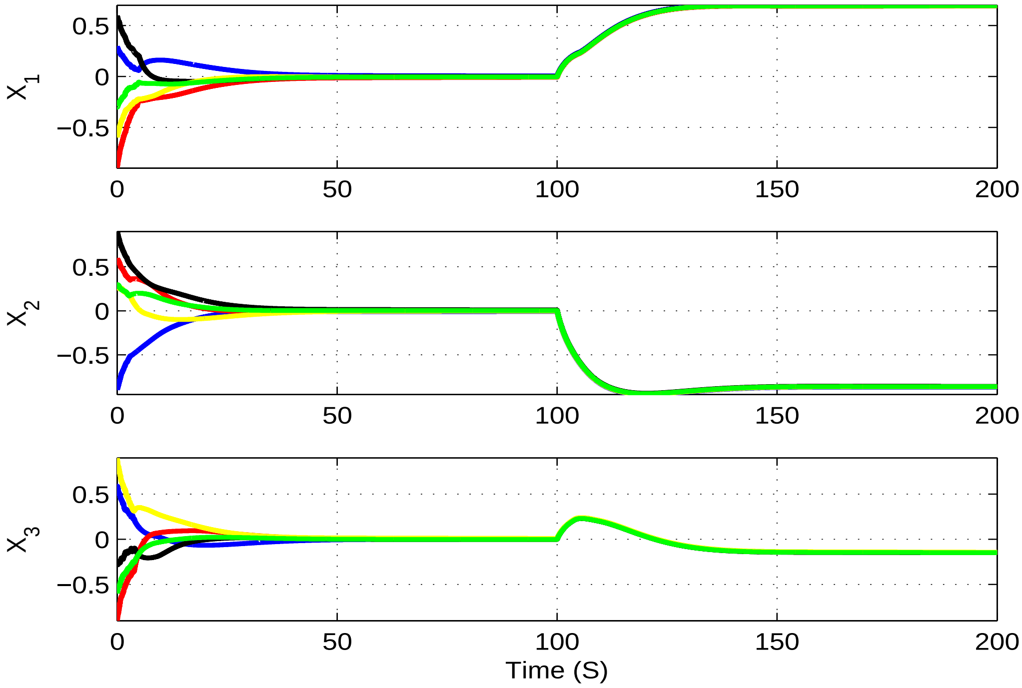


(آ) رزرویرها برای $\alpha = ۰/۷$

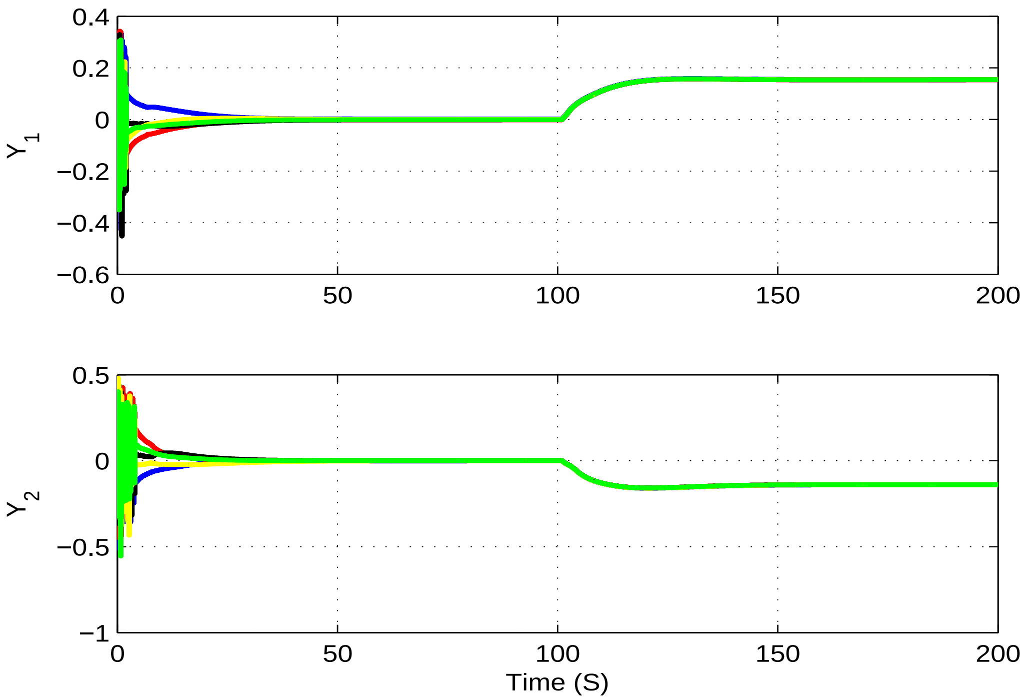


(ب) خروجی ها برای $\alpha = ۰/۷$

شکل ۵.۲: پاسخ زمانی حالت های رزرویر و خروجی ها در تست ۱ مثال (۱.۲.۲) با ۵ شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت برای $\alpha = ۰/۷$

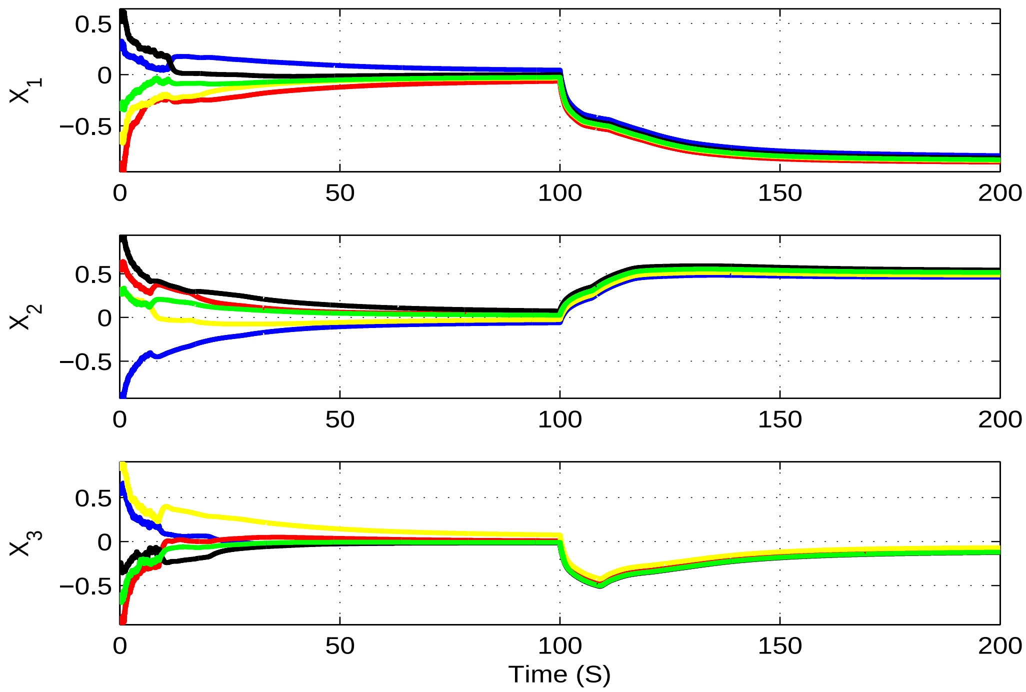


(آ) رزرویرها برای $\alpha = ۰/۹$

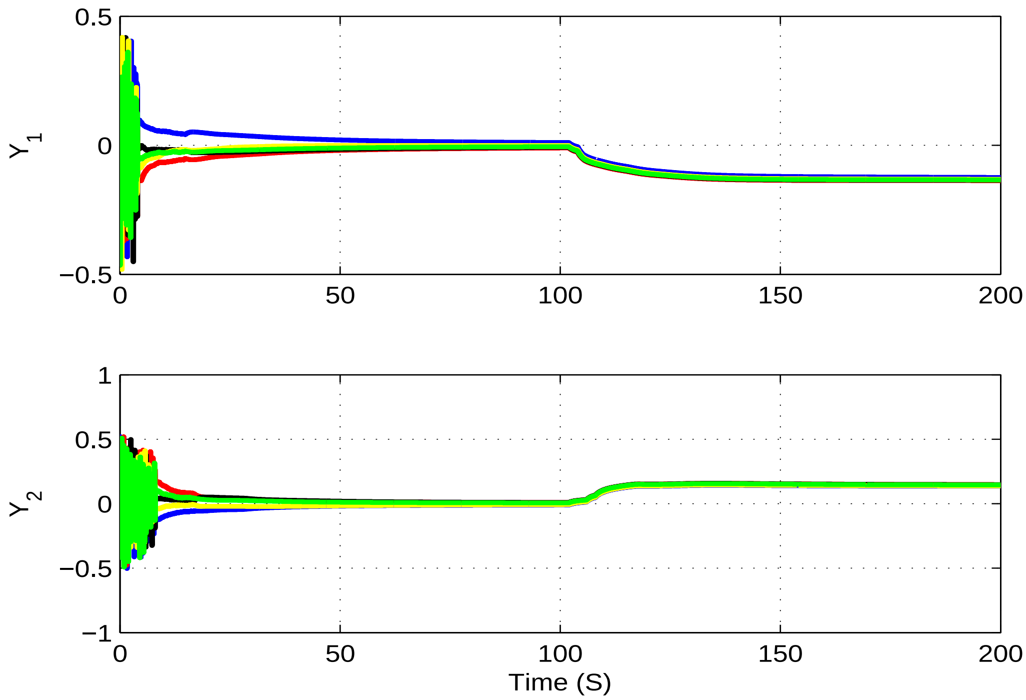


(ب) خروجی ها برای $\alpha = ۰/۹$

شکل ۶.۲: پاسخ زمانی حالت های رزروير و خروجی ها در تست ۱ مثال (۱.۲.۲) با ۵ شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت برای $\alpha = ۰/۹$

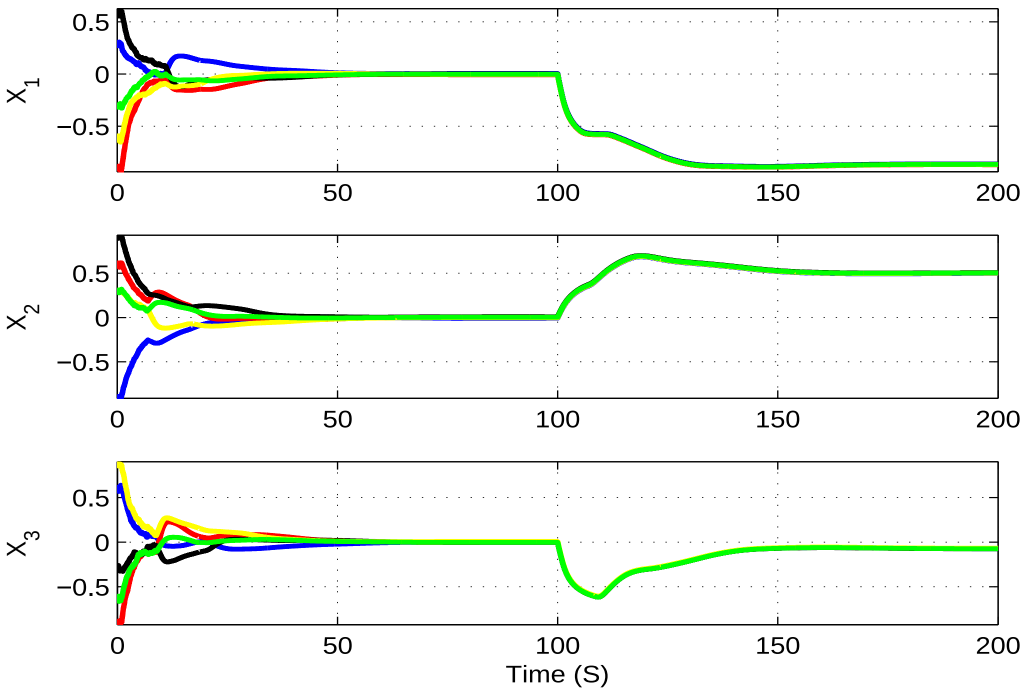


(آ) حالت های رزروير برای $\alpha = 0/7$

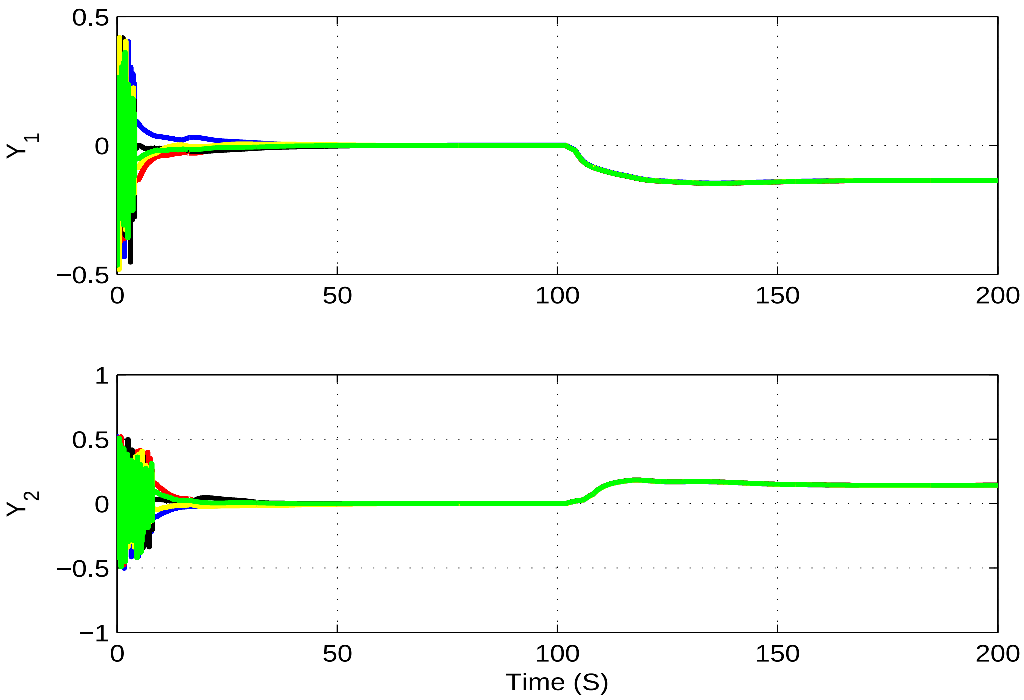


(ب) خروجی برای $\alpha = 0/7$

شکل ۷.۲: پاسخ زمانی حالت های رزروير و خروجی ها در تست ۲ مثال (۱.۲.۲) با ۵ شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت برای $\alpha = 0/7$

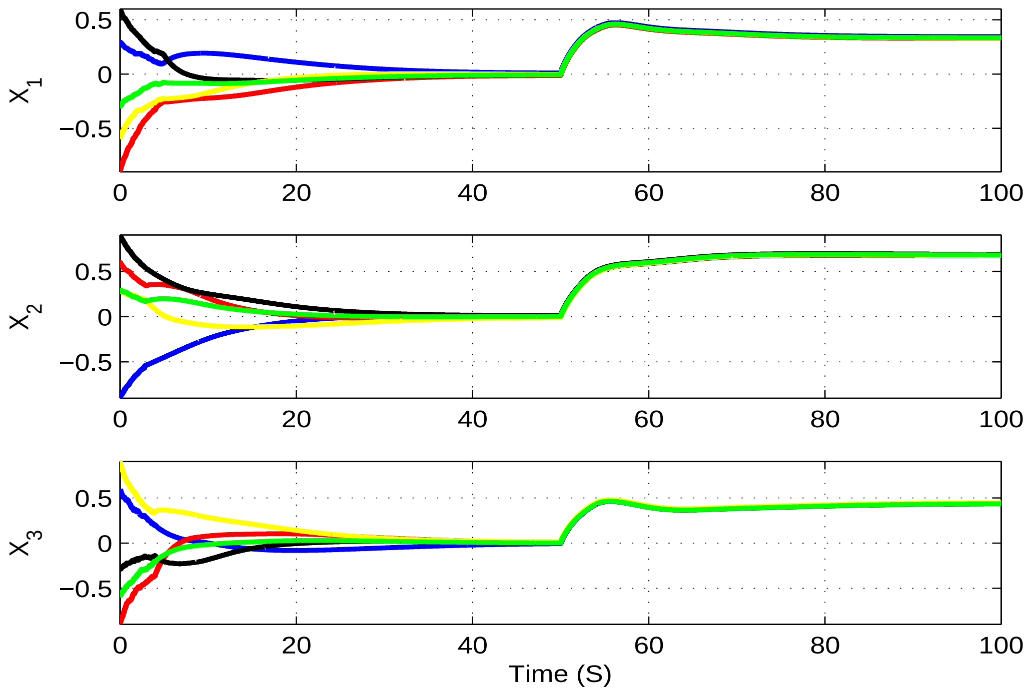


(آ) رزرویرها برای $\alpha = ۰/۹$

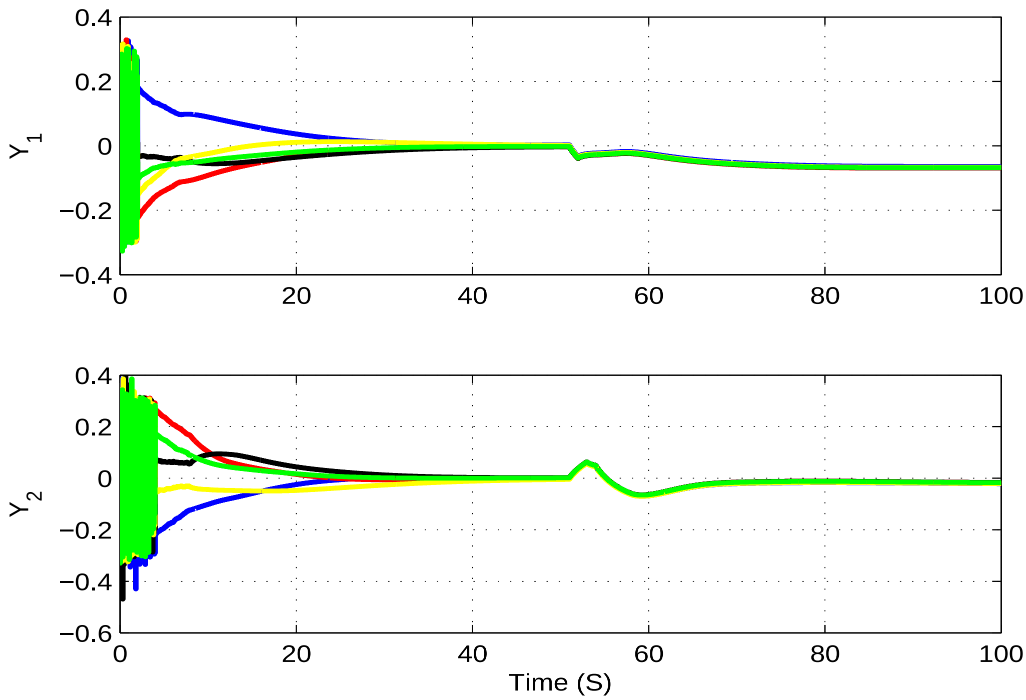


(ب) خروجی برای $\alpha = ۰/۹$

شکل ۸.۲: پاسخ زمانی حالت های رزروير و خروجی ها در تست ۲ مثال (۱.۲.۲) با ۵ شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت برای $\alpha = ۰/۹$



(آ) حالت های رزروير



(ب) خروجی ها

شکل ۹.۲: پاسخ زمانی حالت های رزروير و خروجی ها در تست ۳ مثال (۱.۲.۲) با ۵ شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت برای $\alpha = ۰/۹$

و $\lambda_{max} = ۰/۸۶۶$ بدست می آید. در نتیجه، شرایط این قضیه ها برقرار می باشد، یعنی شبکه عصبی دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار یکنواخت می باشد. نقطه تعادل این شبکه عصبی برابر با $(X^*, Y^*) = (۰, ۰)$ می باشد. در کلیه تست های این مثال، شرایط اولیه بصورت زیر در نظر گرفته شد.

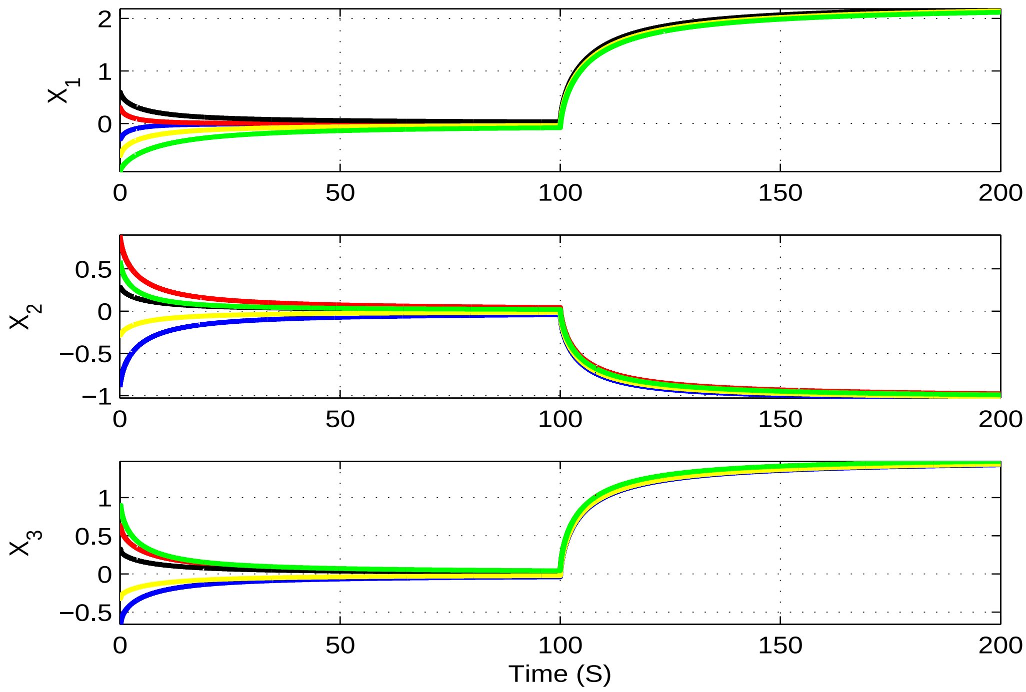
$$X(۰) = [-۰/۳, -۰/۹, -۰/۶; ۰/۳, ۰/۹, ۰/۶; ۰/۶, ۰/۳, ۰/۳; -۰/۶, -۰/۳, -۰/۳; -۰/۹, ۰/۶, ۰/۹]^T$$

$$\begin{aligned}
C &= \begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۰۴ & ۰/۰۵ \\ -۰/۰۱ & ۰/۳ & ۰/۰۴ \\ -۰/۰۴ & -۰/۰۴ & ۰/۳ \end{bmatrix}, \sigma^d = \begin{bmatrix} ۰/۴ & ۰/۳ & ۰/۱ \\ ۰/۲ & ۰/۴ & ۰/۲ \\ ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۱ \end{bmatrix}, \\
\sigma^o &= \begin{bmatrix} ۰/۳ & ۰/۴ & ۰/۵ \\ ۰/۳ & ۰/۹ & ۰ \end{bmatrix}, \ W = \begin{bmatrix} ۰/۳ & ۰ & ۰/۱ \\ ۰ & ۰/۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۳ \end{bmatrix}, \\
W^o &= \begin{bmatrix} ۰/۲ & -۰/۰۵ & ۰/۱۵ \\ ۰/۲۵ & ۰/۱۵ & ۰ \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} -۰/۰۵ & -۰/۰۳ & ۰/۰۶ \\ ۰/۰۴ & ۰/۰۵ & ۰/۰۲ \\ -۰/۰۴ & -۰/۰۲ & ۰/۰۸ \end{bmatrix}, \\
\sigma^l &= \begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰/۱ & ۰/۲ \\ ۰/۱ & ۰ & ۰/۳ \\ ۰/۴ & ۰/۱ & ۰/۲ \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{۵۲.۲}$$

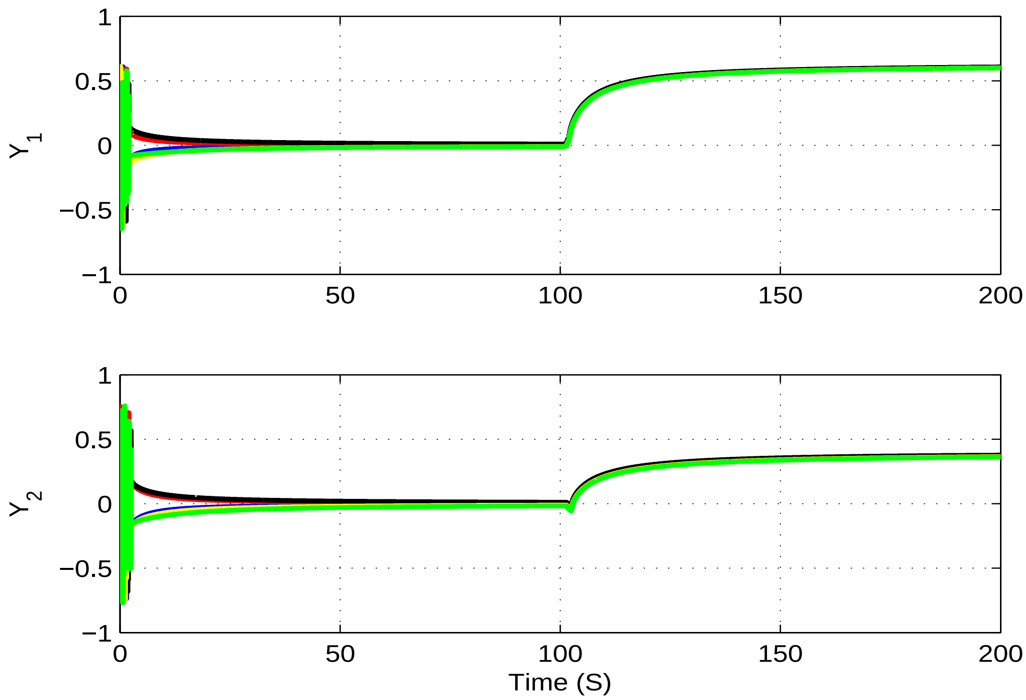
تست ۱. در این تست، اغتشاش ثابت و برابر با $d = [۰/۵, -۰/۳, ۰/۴]^T$ برای $t \geq ۱۰۰$ ثانیه، مطابق با ملاحظه (۲.۲.۲)، به این شبکه عصبی اعمال شد. نتایج شبیه سازی که در شکل (۱۱.۲) بازای مرتبه های کسری متفاوت $\alpha = \{۰/۷, ۰/۹\}$ و نقاط اولیه مختلف $X(۰)$ گزارش شده است، نشان می دهد که نقطه تعادل یکتا به موقعیت جدید $X^* = [۲/۳۰۳, -۱/۰۵۱/۵۳۷]^T$ و $Y^* = [۰/۶۳۱, ۰/۳۹۵]^T$ جابجا شد ولی اثری روی همگرایی پاسخ زمانی رزرویرها (حالت ها) و خروجی های شبکه عصبی به نقطه تعادل یکتای آن ندارد.

تست ۲. در این تست، برای نشان دادن اثر افزایش تاخیر بر پایداری شبکه عصبی، مقادیر تاخیر شبکه به $\sigma^l = [۱, ۱, ۲; ۱, ۰, ۳; ۴, ۱, ۲]$ ،$\sigma^d = [۴, ۳, ۱; ۲, ۴, ۲; ۳, ۴, ۱]$ افزایش یافت. همچنین اغتشاش ثابت، مطابق با ملاحظه (۲.۲.۲)، برابر با $d = [۰/۵, -۰/۳, ۰/۴]^T$ برای $t \geq ۱۰۰$ ثانیه به شبکه عصبی اعمال شد. نتایج شبیه سازی که در شکل (۱۳.۲) بازای مرتبه های کسری متفاوت $\alpha = \{۰/۷, ۰/۹\}$ و پنج شرایط اولیه مختلف $X(۰)$ گزارش شده است، نشان می دهد که موقعیت نقطه تعادل یکتا، در اثر اعمال اغتشاش، به موقعیت جدید $(X^*, Y^*) = ([۲/۳۰۳, -۱/۰۵; ۱/۵۳۷]^T, [۰/۶۳۱, ۰/۳۹۵]^T)$ تغییر یافت ولی همگرایی پاسخ ها و در نتیجه پایداری شبکه همچنان برقرار می باشد.

تست ۳. برای بررسی اثر خطا در محدود کننده ها و یا توابع فعالسازی شبکه عصبی،

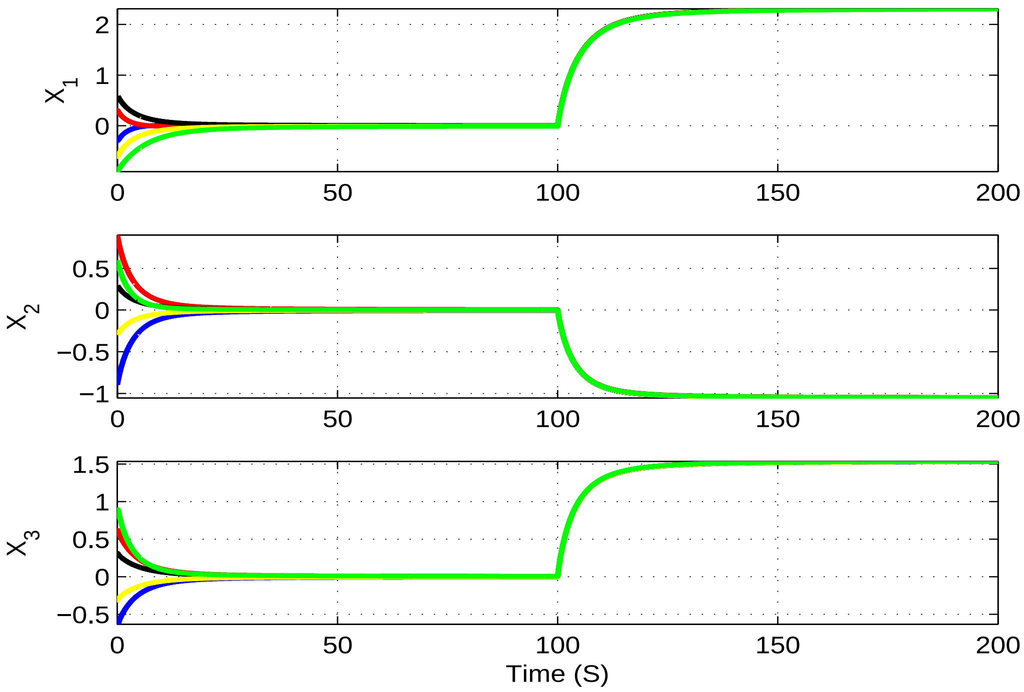


(آ) رزرویرها برای $\alpha = ۰/۷$

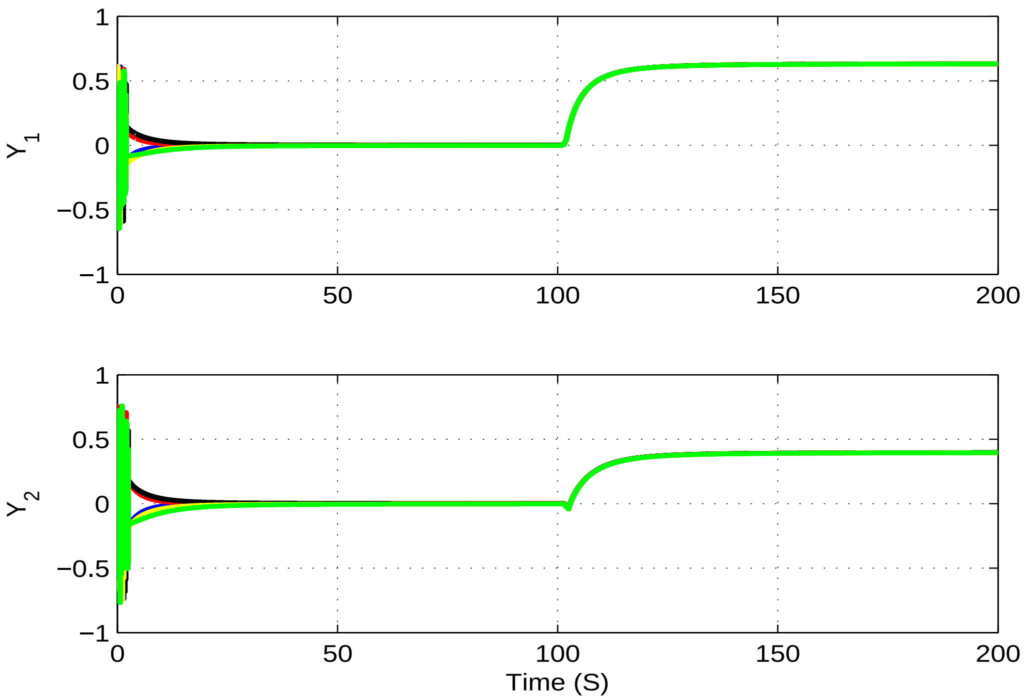


(ب) خروجی ها برای $\alpha = ۰/۷$

شکل ۲.۱۰: پاسخ زمانی حالت های رزرویر و خروجی ها در تست ۱ مثال (۲.۲.۲) با ۵ شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت برای $\alpha = ۰/۷$

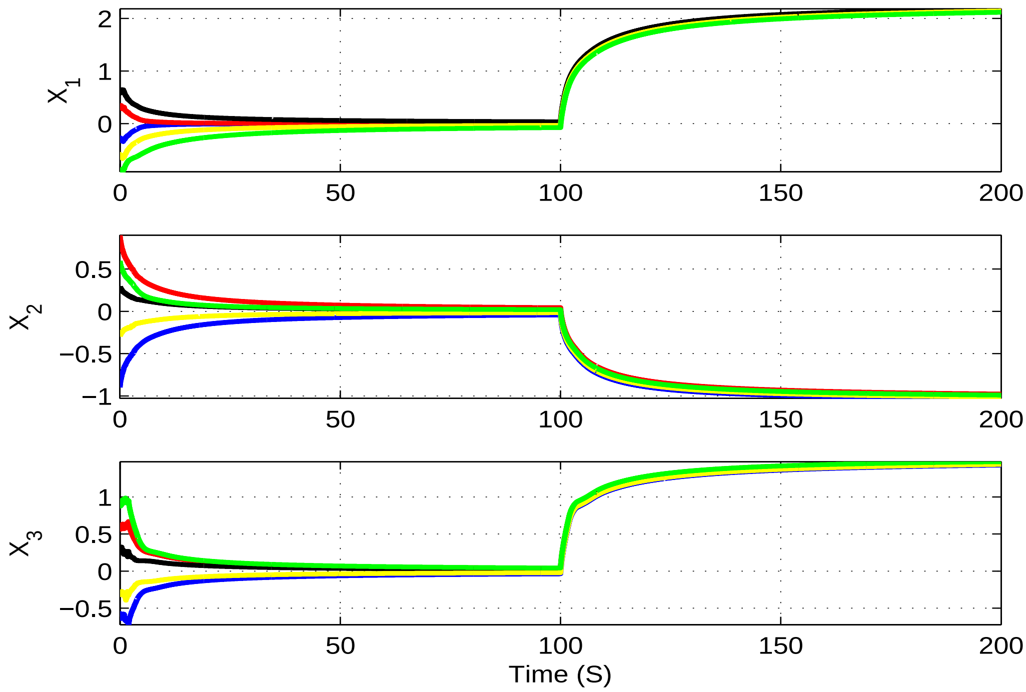


(آ) رزرویرها برای $\alpha = ۰/۹$

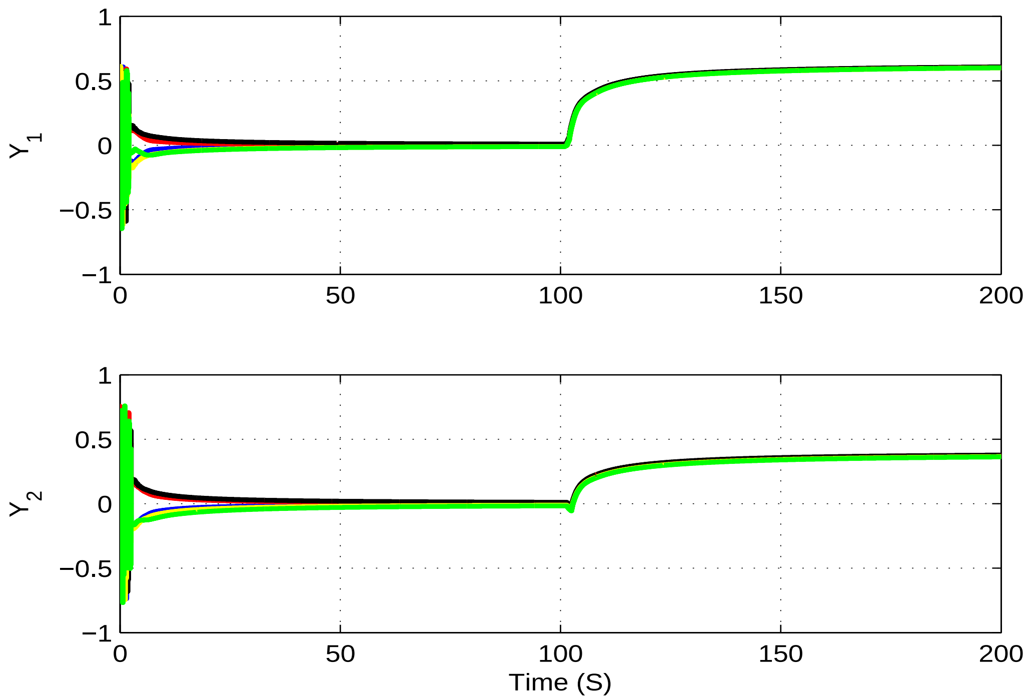


(ب) خروجی ها برای $\alpha = ۰/۹$

شکل ۱۱.۲: پاسخ زمانی حالت های رزرویر و خروجی ها در تست ۱ مثال (۲.۲.۲) با ۵ شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت برای $\alpha = ۰/۹$

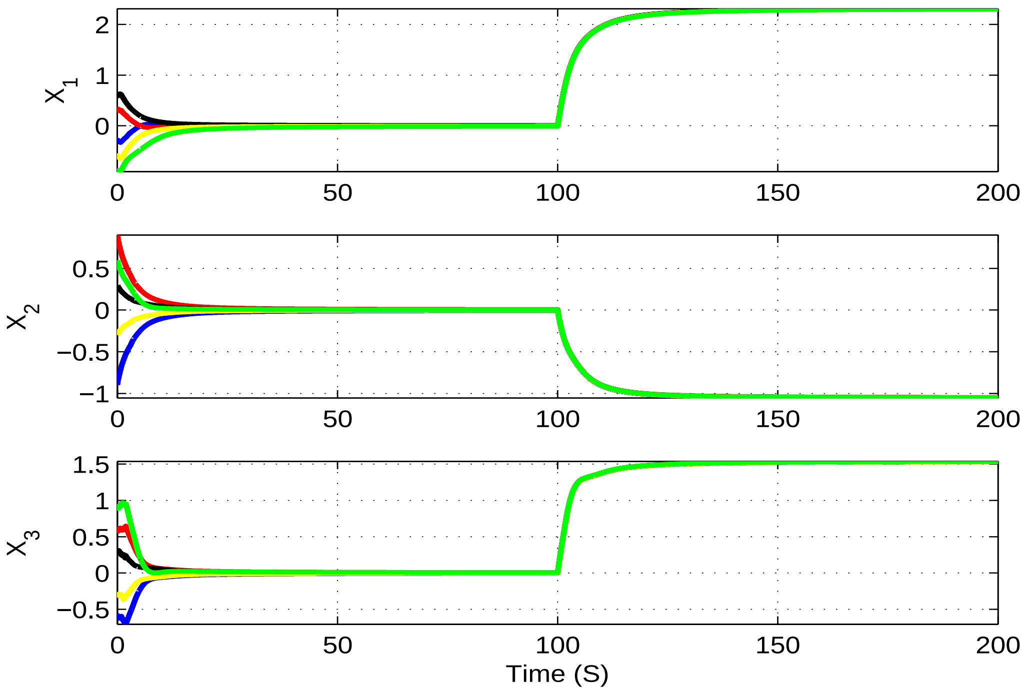


(آ) رزرویرها برای $\alpha = ۰/۷$

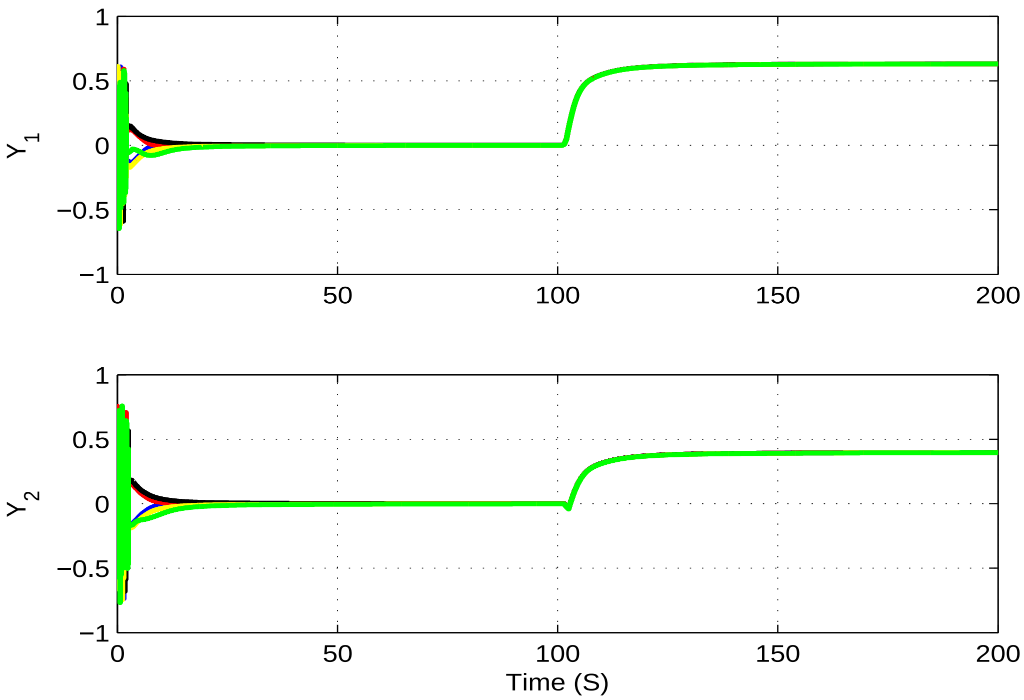


(ب) خروجی ها برای $\alpha = ۰/۷$

شکل ۱۲.۲: پاسخ زمانی حالت های رزرویر و خروجی ها در تست ۲ مثال (۲.۲.۲) با ۵ شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت برای $\alpha = ۰/۷$

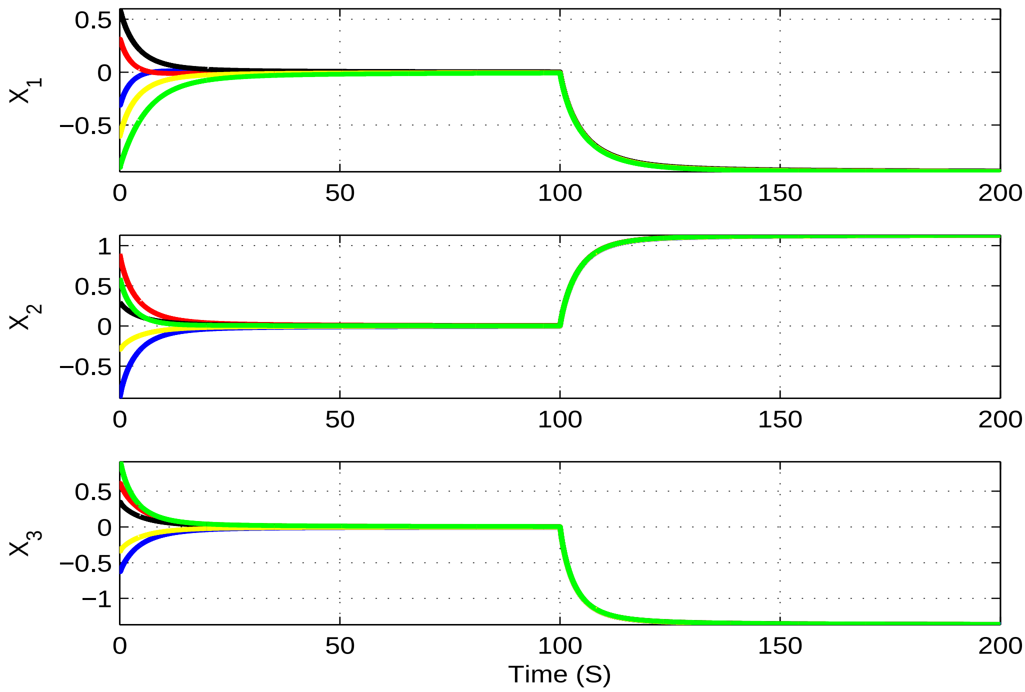


(آ) رزرویرها برای $\alpha = ۰/۹$

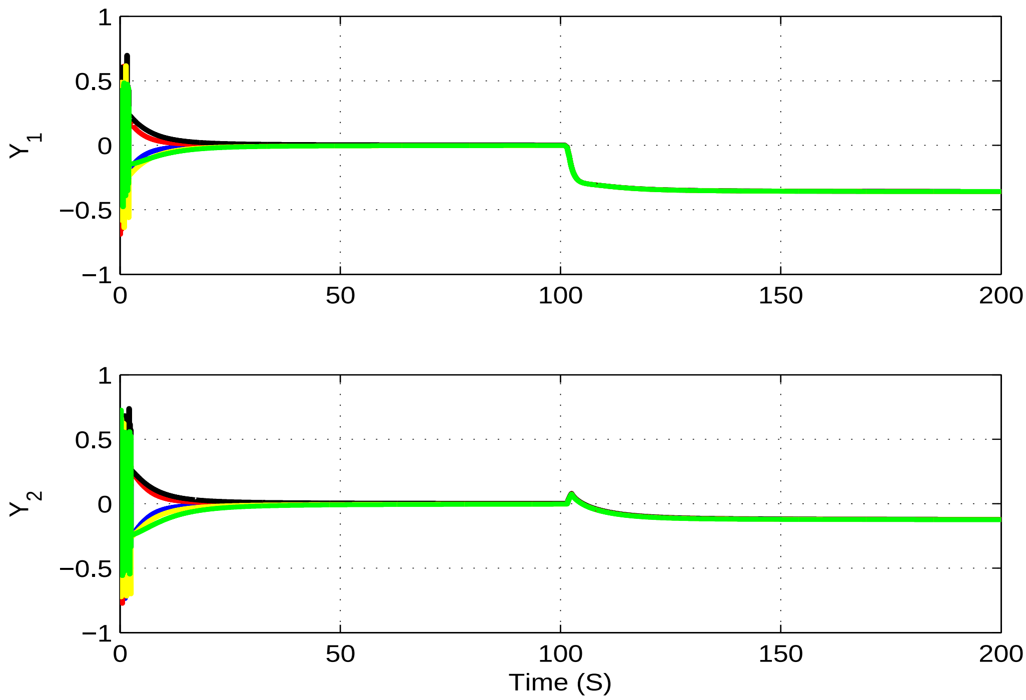


(ب) خروجی ها برای $\alpha = ۰/۹$

شکل ۱۳.۲: پاسخ زمانی حالت های رزرویر و خروجی ها در تست ۲ مثال (۲.۲.۲) با ۵ شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت برای $\alpha = ۰/۹$



(آ) رزرویرها



(ب) خروجی ها

شکل ۱۴.۲: پاسخ زمانی حالت های رزروير و خروجی ها در تست ۳ مثال (۲.۲.۲) با ۵ شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت برای $\alpha = ۰/۹$

مطابق با ملاحظه (۳.۲.۲)، فرض شد توابع فعال سازی برای $j = 1, \cdots, m$ ، $r = 1, \cdots, n$ به فرم $f_j(x) = G_r(x) = tanh(x) + 0/2e^{-|x|}sin(10x)$ باشند. برای توابع فعال سازی جدید، ثابت لیپشیتز برابر با ۳ $F_j = G_r =$ بدست می آیند. با استفاده از قضیه های (۱.۲.۲) و (۲.۲.۲)، مقادیر $\Upsilon = 0/998$ و $\lambda_{max} = 0/91$ بدست می آید. این نتایج نشان می دهد که معیارهای پایداری این شبکه عصبی برآورده شده است پس نقطه تعادل شبکه عصبی همچنان پایدار یکنواخت می باشد. اغتشاش ثابت، مطابق با ملاحظه (۲.۲.۲)، برابر با $d = [-0/2, 0/3, -0/4]^T$ برای $t \geq 50$ اعمال شد.نتایج شبیه سازی که بازای مرتبه کسری $\alpha = 0/9$ و شرایط اولیه متخلف $X(0)$ در شکل (۱۴.۲) گزارش شده است نشان می دهد که نقطه تعادل یکتا به مقدار جدید $X^* = [-0/942, 1/129, -1/362]^T$ و $Y^* = [-0/359, -0/124]^T$ تغییر می یابد ولی همگرایی پاسخ زمانی رزرویرها (حالت ها) و خروجی های شبکه عصبی و در نتیجه پایداری نقطه تعادل شبکه همچنان برقرار می باشد.

خلاصه اینکه، در بخش شبیه سازی نتایج دو مثال متفاوت تحت شرایط مختلف گزارش شد. در مثال اول، رفتار خروجی و حالت های رزروير شبکه عصبی تاخیردار بازای مرتبه های کسری متفاوت، شرایط اولیه متفاوت، اغتشاش ثابت، تاخیر متفاوت و خطا در توابع فعالسازی نشان داده شد. نتایج نشان می دهند که شبکه عصبی دارای یک نقطه تعادل یکتا می باشد ولی موقعیت آن تحت اغتشاش ثابت جابجا می شود. همچنین، نشان داده شد که سرعت همگرایی پاسخ ها به مقدار α و زمان تاخیر نیز وابسته است. در واقع، نتایج نشان می دهد که ۱) با افزایش α سرعت همگرایی پاسخ به نقطه تعادل یکتا افزایش می یابد، ۲) با افزایش تاخیر، سرعت همگرایی کاسته می شود، ۳) پایداری یکنواخت بدست آمده نسبت به خطای کوچک در توابع فعال سازی نیز مقاوم می باشد. در مثال دوم، مطابق با ملاحظه (۱.۲.۲) و با استناد به نتایج قضیه و شبیه سازی ها، نشان داده شد که می توان نتایج قضیه بدست آمده را برای تحلیل پایداری یکنواخت نقطه تعادل شبکه عصبی هاپفیلد مرتبه کسری تاخیردار بسط داد.

۳.۲ پیش بینی سری زمانی

به سیستم‌هایی که مقدار خروجی آنها در هر لحظه علاوه بر مقدار تحریک در آن لحظه، به مقادیر ما قبل نیز بستگی دارد، سیستم‌های پویا گفته می شود. در برخی از سیستم‌های پویا، رابطه ورودی_خروجی به گونه‌ای است که در آنها محرک خارجی قابل مشاهده نیستند، به این سیستم‌ها، سیستم‌های سری زمانی گفته می‌شود. فرآیندهای سری زمانی را می‌توان به سه طبقه خطی، تصادفی، آشوبگونه دسته‌بندی کرد و بر این اساس قابلیت پیش‌بینی در فرآیندهای خطی ممکن، در فرآیندهای تصادفی غیرممکن و در فرآیندهای آشوبگونه تاحدی

ممکن است. اساسا، سه روش عمده تحلیل R/S[1]، تحلیل تخمین بعد همبستگی[2] و تحلیل تخمین بزرگترین نمای لیاپانوف[3] به عنوان روش‌های آزمون پیش‌بینی‌پذیری یک سری زمانی استفاده می شود. همچنین، در جهت پیش‌بینی سری زمانی، سه رویکرد در انتخاب مدل مطرح مي‌باشد:

- با رویکرد روش‌هاي کلاسيك،
- با رویکرد هوش مصنوعي (عصبی، فازی و عصبی– فازی)،
- رویکرد ترکیبي.

مهمترین روش‌های کلاسیک روش هموارسازی نمایی همچون هموارسازی براون ساده و هموارسازی هولت، مدل‌های خطی همچون ARX[4] ، BJ[5]، ARMA[6] و ARMAX[7] و مدل های غیر خطی همچون ARCH[8] ، GARCH[9]، EGARCH[10] و IGARCH[11] می باشند. استفاده از مدل‌های شبکه عصبی، فازی و عصبی – فازی در پیش‌بینی سری زمانی بعلت خاصیت غیر خطی آن همواره مورد توجه قرار گرفته است. ساختارهای مختلفی برای شبکه های عصبی، فازی و عصبی– فازی ارائه و استفاده شده است که پرکاربردترین آن، ساختار MLP و شبکه های عصبی برگشتی در شبکه عصبی و مدل ممدانی در فازی و شبکه ANFIS بعنوان شبکه عصبی– فازی می‌باشد. در روش های ترکیبی، نیز معمولا سعی می شود تا مدلی برای ترکیب روش های کلاسیک و هوشمند ارائه شود. در این راستا، روش‌های زیادی توسط محقق‌های متفاوتی پیشنهاد شده است که نتیجه این تحقیق‌ها را می‌توان از سه دیدگاه دیگر مورد توجه قرار داد که عبارتند از:

- متغیرهای ورودی (متغیرهای مستقل)،
- متدلوژی خاص و پارامترهای مدل،
- معیار کارایی برای ارزیابی مدل.

تنوع متغیرهای ورودی معرفی شده، بسیار زیاد می‌باشد. حاصل مطالعه بر روی این تنوع ورودی ها، نشان می دهد که متغیرهای ورودی بکار رفته را می توان به چهار دسته داده های روزانه، متغیرهای اقتصادی و مالی، متغیرهای فنی و تکنیکی و متغیر های کلان اقتصادی تقسیم‌بندی کرد. از شاخص های میانگین متحرک ساده، میانگین متحرک موزون، میانگین متحرک نمایی، میانگین متحرک متغیر، میانگین متحرک مثلثی، شاخص قدرت نسبی، شاخص جریان پول، شاخص اندازه حرکت دینامیک، شاخص اندازه حرکت درون روزانه و شاخص

[1] Rescaled range analysis
[2] Correlation dimension estimate analysis
[3] Largest lyapunov exponent analysis
[4] Autoregressive exogenous model
[5] Box–Jenkins model
[6] Autoregressive–moving-average model
[7] Autoregressive moving average with exogenous inputs model
[8] Autoregressive conditional heteroskedasticity model
[9] Generalized ARCH model
[10] Exponential GARCH model
[11] Integrated GARCH model

ویلیامز به عنوان شاخص های تکنیکال (بنیادی) و از شاخص های نرخ تورم، نرخ برابری ارز، نرخ رشد اقتصادی، نرخ بهره بانکی و میزان اعتبارات بانکی می توان به عنوان متغیرهای کلان اقتصادی نام برد.

همچنین، کارهایی بسیار زیادی برای پردازش اولیه روی داده‌ها همانند نرمالیزه کردن داده ها، روش PCA[۱] و معدل Z[۲] و در حوزه تخمین پارامترهای مدل (بهینه سازی پارامترهای مدل) همچون روش های EBP[۳]، LM[۴]، PSO[۵] و SVM[۶] انجام شده است. و در نهایت، می توان به روش های زیادی برای ارزیابی مدل آموزش یافته در مسئله پیش بینی سری زمانی اشاره کرد که به بررسی مانده سیگنال ـ خطای پیش بینی و مقدار واقعی- در حوزه فرکانس و یا زمان پرداخته می شود. در این حوزه می توان به روش های AC[۷]، MAD[۸]، MAE[۹] ، MSE[۱۰] ، R^2 [۱۱]، RMSE[۱۲] اشاره کرد.

بازار سهام همواره بعنوان سیستمی با همبستگی طولانی و حافظه عمیق شناخته می شود. این ویژگی ها در سیستم های طبیعی و مصنوعی یافت می شوند و نتایج پژوهش ها نشان می دهد که این ویژگی ها به خوبی با استفاده از ابزار حساب دیفرانسیل کسری قابل مدل سازی می باشند. کارهای مختلفی در حوزه کاربرد محاسبات کسری در مدلسازی سیستم های انتشار[۱۳] [۱۴۰]، ویسکوالاستیسیته[۱۴] [۱۴۱]، مکانیک سیالات[۱۵] [۱۴۲]، پردازش سیگنال[۱۶] [۱۴۳]، دینامیک نسبی بازار سهام[۱۷] [۱۴۴] و غیره انجام شده است. لذا در این بخش، با استفاده از ترکیب محاسبات کسری و شبکه های عصبی تحت عنوان شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری به پیش بینی سری زمانی ناشی از بازار سهام همچون میانگین صنعتی داو جونز[۱۸] پرداخته می شود که پارامترهای آن بصورت آنلاین بروز خواهند شد.

در ادامه این بخش، روش پیش بینی و شناسایی تطبیقی مبتنی بر شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری تطبیقی برای مسئله پیش بینی سری زمانی ارائه خواهد شد. در ابتدا، مدل زمان گسسته این شبکه با هدف شناسایی یا پیش بینی تطبیقی توصیف خواهد شد. پس از آن، مطابق با تعریف (۱.۱.۱)،شرایط لازم برای تحقق ویژگی انعکاس حالت در مدل زمان

[1] Principal component analysis
[2] Z score
[3] Error backpropagation
[4] Lavenberg – Marquardt optimization algorithm
[5] Particle swarm optimization
[6] Support vector machines
[7] Autocorrelation
[8] Mean absolute deviation
[9] Mean absolute error
[10] Mean squared error
[11] Squared correlation
[12] Root mean square error
[13] Diffusion
[14] Viscoelasticity
[15] Fluid mechanics
[16] Signal Processing
[17] Relative Dynamics of Stock markets
[18] Dow Jones Industrial Average

گسسته این شبکه تحلیل خواهد شد. سپس، روش شناسایی تطبیقی مبتنی بر این شبکه پیشنهاد خواهد شد که در آن پارامترهای خروجی شبکه عصبی انعکاس حالت، مرتبه کسری معادلات رزروير و اسکالرهای مقیاس ماتریس های وزن های بکار رفته در معادلات رزروير بهینه خواهند شد. و در نهایت، نتایج شبیه سازی روش پیشنهادی در پیش بینی دو سری زمانی شاخص میانگین صنعتی داو جونز DJIA و شاخص S&P۵۰۰ با استفاده از ورودی های تکنیکال ارائه خواهد شد.

۱.۳.۲ شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری زمان گسسته

شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری زمان_ پیوسته زیر را در نظر بگیرید

$$D^{\alpha(t)}\left(X(t)\right) = -CX(t) + Af(W^{in}U + WX + W^{f}Y),$$
$$Y = g(W^{out}\left[X;U\right]), \qquad (۵۳.۲)$$

که در آن $X = [x_۱, \cdots, x_n]^T$، $U = [u_۱, \cdots, u_p]^T$ و $Y = [y_۱, \cdots, y_q]^T$، به ترتیب، بردار حالت های رزروير، ورودی و خروجی، بردار $\alpha(t) = \{\alpha_۱(t), \cdots, \alpha_n(t)\}$ مرتبه کسری متغیر با زمان معادله های رزروير، بردار $f = [f_۱, \cdots, f_n]^T$ توابع فعالسازی در رزرويرها و بردار $g = [g_۱, \cdots, g_q]^T$ توابع فعالسازی خروجی می باشند. توابع f_i و g_r برای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ و $r = ۱, ۲, \cdots, q$ توابعی پیوسته و لیپشیتز (طبق تعریف ۱.۲.۱) با ثابت لیپشیتز F_i و G_r می باشند. نمادهای $W^{in} = [\cdot]_{n\times n}$، $W = [\cdot]_{n\times n}$، $W^{f} = [\cdot]_{n\times q}$ و $W^{out} = \left[W^{o}; W^{io}\right]_{q\times(n+p)}$ به ترتیب ماتریس های وزن ورودی، حالت رزروير، فیدبک و خروجی را نشان می دهند. ماتریس ثابت زمانی شبکه مورد نظر و ماتریس نرخ نشت گره های (نودهای) حالت رزروير، به ترتیب، برابر با $A^{-۱}$ و $A^{-۱}C$ هستند. ماتریس نرخ نشت، نرخی که حالت رزروير _در حالتی که به شبکه متصل نیست_ از وضعیت موجودش به حالت استراحت می رسد، را نشان می دهد.

با استفاده از تعریف گرانوالد_ لتنیکوف، رابطه (۳۹.۱)، برای مشتق مرتبه کسری متغیر با زمان می توان شبکه عصبی رابطه (۵۳.۲) را، با زمان نمونه برداری T، بصورت یک نمایش فضای حالت مرتبه کسری متغیر با زمان گسسته زیر تقریب زد [۱۴۵]:

$$X_{k+۱} = \mathbf{T}_k\Big(-CX_k + Af(W^{in}U_k + WX_k + W^{f}Y_k)\Big) - \sum_{j=۱}^{k+۱}(-۱)^{j}\Upsilon_{j,k}X_{k+۱-j}$$
$$Y_k = g_k(W^{out}\left[X_k; U_k\right]), \qquad (۵۴.۲)$$

که

$$\mathbf{T}_k = diag\{T^{\alpha_۱,k}, \cdots, T^{\alpha_n,k}\} \qquad (۵۵.۲)$$

و

$$\Upsilon_{j,k} = diag\left\{\Upsilon^{1}_{j,k}, \cdots, \Upsilon^{i}_{j,k}, \cdots, \Upsilon^{n}_{j,k}\right\}, \quad \Upsilon^{i}_{j,k} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,k} \\ j \end{pmatrix}, i = 1, \cdots, n. \qquad (۵۶.۲)$$

و U_k، X_k و Y_k نمونه kام از سیگنال های ورودی، حالت های رزرویر و خروجی شبکه می باشند. همچنین برای هر $i = 1, \cdots, n$ و $j = 0, 1, 2, \cdots$ داریم:

$$\begin{aligned} &\Upsilon^{i}_{0,k} = 1, \\ &\Upsilon^{i}_{j,k} = \left(1 - \frac{\alpha_{i,k}}{j}\right)\Upsilon^{i}_{j-1,k} \end{aligned} \qquad (۵۷.۲)$$

نمایش گسسته فوق، بعلت نیاز به حافظه نامحدود آن، براحتی قابل پیاده سازی کامپیوتری یا سخت افزاری نیست. از انجا که مقدار $\Upsilon_{j,k}$ با افزایش j به سمت صفر میل می کند [۱۴۶]، پس می توان تنها از L تخمین گذشته یا حافظه برای پیش بینی استفاده کرد. با اعمال این ساده سازی بصورت رابطه (۵۸.۲)، که به اصل حافظه کوتاه معروف است، می توان براحتی از نمایش گسسته (۵۴.۲) با استفاده از تعداد حافظه محدود استفاده کرد [۱۴۵].

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \mathbf{T}_k\left(-CX_k + Af(W^{in}U_k + WX_k + W^f Y_k)\right) - \sum_{j=1}^{L}(-1)^j \Upsilon_{j,k} X_{k+1-j} \\ Y_k &= g_k(W^{out}\left[X_k; U_k\right]), \end{aligned} \qquad (۵۸.۲)$$

۲.۳.۲ ویژگی انعکاس حالت شبکه

شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری رابطه (۵۳.۲)، دارای ویژگی انعکاس حالت است اگر مفهوم ارائه شده در تعریف (۱.۱.۱) در آن صادق باشد که یک تفسیری از پایداری می باشد. بنابراین، در ادامه، به بررسی و استخراج یک شرط کافی برای تحقق ویژگی انعکاس حالت در شبکه عصبی مرتبه کسری رابطه (۵۳.۲) پرداخته خواهد شد.
با توجه به تعریف W^{out} و فرض خطی بودن تابع فعال سازی خروجی g، دینامیک حالت های رزرویر در رابطه (۵۸.۲) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= -\tilde{C}X_k + \tilde{A}f\left(W^{in}U_k + WX_k + W^f Y_k\right) - \sum_{j=1}^{L}(-1)^j \Upsilon_{j,k} X_{k+1-j} \\ &= -\tilde{C}X_k + \tilde{A}f\left(W^{in}U_k + WX_k + W^f(W^o X_k + W^{io}U_k)\right) - \sum_{j=1}^{L}(-1)^j \Upsilon_{j,k} X_{k+1-j} \\ &= -\tilde{C}X_k + \tilde{A}f\left(W^*_U U_k + W^*_X X_k\right) - \sum_{j=1}^{L}(-1)^j \Upsilon_{j,k} X_{k+1-j} \end{aligned} \qquad (۵۹.۲)$$

که $\tilde{C} = \mathbf{T}_k C$، $\tilde{A} = \mathbf{T}_k A$، $W^*_X = W + W^f W^o$ و $W^*_U = W^{in} + W^f W^{io}$ می باشند.

قضیه ۱.۳.۲. برای شبکه عصبی مرتبه کسری زمان_ گسسته رابطه (۵۹.۲)، اگر شرایط زیر تحقق یابد:

۱) تابع f_j، بازای $j = ۱, ۲, \cdots, n$، یک تابع لیپشیتز با ثابت F_j، مطابق با تعریف (۱.۲.۱) باشد و در نتیجه ماتریس قطری ثابت لیپشیتز بصورت $F = diag\{F_۱, F_۲, \cdots, F_n\}$ بدست می آید.

۲) تابع g یک تابع خطی باشد.

۳) $\delta_{\widehat{C}}^{max} + \delta_{\widehat{A}}^{max} + \sum_{j=۲}^{L} \delta_{j,k}^{max} < ۱$

آنگاه، این شبکه عصبی مرتبه کسری زمان گسسته (و با تقریب زمان پیوسته) دارای ویژگی انعکاس حالت می باشد، که $\delta_{\widehat{C}}^{max}$ بزرگ ترین مقدار ویژه ماتریس $\widehat{C} = \Upsilon_{۱,k} - \tilde{C}$، $\delta_{\widehat{A}}^{max}$ بزرگ ترین مقدار ویژه[1] ماتریس $\widehat{A} = \tilde{A}FW_X^*$ و $\delta_{j,k}^{max}$ نیز بزرگ ترین مقدار ویژه ماتریس $\Upsilon_{j,k}$ می باشند.

اثبات: برای دو حالت های رزروویر متفاوت X و X' داریم:

$$
\begin{aligned}
&||X_{k+۱} - X'_{k+۱}|| \\
&= || - \tilde{C}X_k + \tilde{A}f\Big(W_U^*U_k + W_X^*X_k\Big) - \sum_{j=۱}^{L}(-۱)^j \Upsilon_{j,k}X_{k+۱-j} \\
&\quad + \tilde{C}X'_k - \tilde{A}f\Big(W_U^*U_k + W_X^*X'_k\Big) + \sum_{j=۱}^{L}(-۱)^j \Upsilon_{j,k}X'_{k+۱-j}|| \\
&\leq ||(\Upsilon_{۱,k} - \tilde{C})X_k - (\Upsilon_{۱,k} - \tilde{C})X'_k|| + ||\tilde{A}f\Big(W_U^*U_k + W_X^*X_k\Big) - \tilde{A}f\Big(W_U^*U_k + W_X^*X'_k\Big)|| \\
&\quad + ||\sum_{j=۲}^{L}(-۱)^j \Upsilon_{j,k}X_{k+۱-j} - \sum_{j=۲}^{L}(-۱)^j \Upsilon_{j,k}X'_{k+۱-j}|| \\
&\leq \delta_{\widehat{C}}^{max}||X_k - X'_k|| + \delta_{\widehat{A}}^{max}||X_k) - X'_k)|| + \sum_{j=۲}^{L} \delta_{j,k}^{max}||X_{k+۱-j} - X'_{k+۱-j}||
\end{aligned}
\tag{۶۰.۲}
$$

اگر

$$\delta_{\widehat{C}}^{max} + \delta_{\widehat{A}}^{max} + \sum_{j=۲}^{L} \delta_{j,k}^{max} < ۱ \tag{۶۱.۲}$$

آنگاه، شبکه عصبی مرتبه کسری زمان گسسته (و با تقریب زمان پیوسته) دارای ویژگی انعکاس حالت می باشد. و در اینجا اثبات تکمیل می شود.

۳.۳.۲ الگوریتم آموزش تطبیقی پارامترهای شبکه

در این بخش، برای نشان دادن قدرت شناسایی و پیش بینی روش شناسایی پیشنهادی، فرض می شود سیستم غیر خطی دینامیکی زمان پیوسته

$$D^\alpha X(t) = AX_t + H(X_t, U_t), \tag{۶۲.۲}$$

[1] Maximal Singular Value

وجود دارد که X_t و U_t نشان دهنده حالت های سیستم و ورودی های سیستم، و تابع غیر خطی H نیز تابعی لیپشیتز می باشد.
فرض می شود سیستم رابطه (۶۲.۲) را می توان با استفاده از تنظیم پارامترهای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری زمان گسسته رابطه (۵۹.۲) مدل کرد.
حال، خطای خروجی شناسایی مدل e_k بصورت زیر تعریف می شود:

$$e_k = Y_k - Y_k^d \tag{۶۳.۲}$$

که Y_k خروجی مدل و Y_k^d خروجی مطلوب می باشد. در ادامه، الگوریتم آموزش پارامترهای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری برای بهینه سازی پارامترهای رزرویر و آموزش وزن های خروجی شبکه ارائه می شود.

بهینه سازی پارامترهای رزرویر

در پروسه شناسایی سیستم ناشناخته، اثر پارامترهای رزرویر شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری بر روی دقت شناسایی غیر قابل انکار می باشد، بنابراین برای رسیدن به دقت شناسایی و پیش بینی بهتر لازم می باشد تا پارامترهای رزرویر با دقت انتخاب (بهینه) شوند.
برای هر شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری زمان گسسته

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= -\tilde{C}X_k + \gamma\overline{A}f\Big(W^{in}U_k + WX_k + W^fY_k\Big) - \sum_{j=1}^{L}(-1)^j\Upsilon_jX_{k+1-j} \\ Y_k &= W^oX_k + W^{io}U_k = W^{out}[X_k;U_k] \end{aligned} \tag{۶۴.۲}$$

که

$$\Upsilon_j = diag\Big\{\Upsilon_j^1,\cdots,\Upsilon_j^i,\cdots,\Upsilon_j^n\Big\},\quad \Upsilon_j^i = \begin{pmatrix}\alpha_i\\ j\end{pmatrix}, i=1,\cdots,n. \tag{۶۵.۲}$$

و $\gamma = \delta_{\overline{A}}^{max}$، $\delta_{\tilde{A}}^{max} = 1$ و $\gamma\overline{A} = \tilde{A}$ می باشند، یک شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری زمان گسسته دیگری نیز وجود دارد که در آن $\gamma = 1$ می باشد و خروجی دقیقا یکسانی نیز دارند. معادلات این شبکه معادل، از تقسیم طرفین معادلات رابطه (۶۴.۲) بر γ بصورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma}X_{k+1} &= -\tilde{C}\frac{1}{\gamma}X_k + \overline{A}f\Big(W^{in}U_k + \gamma W\frac{1}{\gamma}X_k + W^fY_k\Big) - \sum_{j=1}^{L}(-1)^j\Upsilon_j\frac{1}{\gamma}X_{k+1-j} \\ Y_k &= \gamma W^o\frac{1}{\gamma}X_k + W^{io}U_k \end{aligned} \tag{۶۶.۲}$$

بدون از دست دادن کلیت، می توان رابطه فوق را بصورت زیر دوباره نویسی کرد:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= -\tilde{C}X_k + \overline{A}f\left(W^{in}U_k + \gamma W X_k + W^f Y_k\right) - \sum_{j=1}^{L}(-1)^j \Upsilon_j X_{k+1-j} \\ Y_k &= \gamma W^o X_k + W^{io}U_k \end{aligned} \tag{۶۷.۲}$$

اگر بپذیریم که W، همانند $\overline{A}$، شعاع طیفی واحد[1] دارد و اینکه ماتریس های وزن ورودی و فیدبک W^{in} و W^f نرمالیزه و ماتریس وزن نشتی $\tilde{C}$ قطری معین مثبت هستند، آنگاه

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= -\lambda_c\tilde{C}X_k + \overline{A}f\left(\lambda_{in}W^{in}U_k + \lambda_w W X_k + \lambda_f W^f Y_k\right) - \sum_{j=1}^{L}(-1)^j \Upsilon_j X_{k+1-j} \\ Y_k &= \tilde{W}^o X_k + W^{io}U_k \end{aligned} \tag{۶۸.۲}$$

که λ_c مقیاس ماتریس نشتی، λ_{in} مقیاس ماتریس ورودی، λ_w شعاع طیفی ماتریس وزن حالت های رزروير و λ_f مقیاس ماتریس فیدبک می باشند. صرفنظر از تعداد متغیرهای حالت رزروير n، که تعیین کننده ظرفیت شبکه می باشد، با تنظیم این چهار پارامتر می توان ویژگی های دینامیکی حالت های رزروير این شبکه را شکل داد.
در اینجا، هدف از آموزش شبکه رابطه (۶۸.۲) و در نتیجه شبکه (۵۸.۲)، محاسبه پارامترهای حالت های رزروير $\theta \in \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \lambda_c, \lambda_{in}, \lambda_w, \lambda_f\}$ می باشد، بگونه ای که معیار مربع خطای زیر حداقل شود و خروجی شبکه بتواند با خروجی واقعی بخوبی مطابقت کند.

$$J_{k+1} = \ ||Y_{k+1} - Y^d_{k+1}||^2. \tag{۶۹.۲}$$

در اینجا، پارامترهای θ با استفاده از یک روش گرادیان نزولی زیر بهینه خواهد شد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{k+1}}{\partial \theta} &= -e_{k+1}\left(W^o\frac{\partial X_{k+1}}{\partial \theta} + W^{io}\frac{\partial U_{k+1}}{\partial \theta}\right) \\ &= -e_{k+1}W^o\frac{\partial X_{k+1}}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{۷۰.۲}$$

[1]Unit Spectral Radius

چون $\frac{\partial U_{k+1}}{\partial \theta} = 0$ می باشد. با انتخاب $\chi_k = \lambda_{in} W^{in} U_k + \lambda_w W X_k + \lambda_f W^f Y_k$، مقادیر $\frac{\partial X_{k+1}}{\partial \theta}$ بصورت زیر بدست می آید:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X_{k+1}}{\partial \lambda_c} &= -\tilde{C} X_k - \lambda_c \tilde{C} \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_c} + \overline{A} f'(\chi_k).* \left(\lambda_w W \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_c} + \lambda_f W^f \tilde{W}^o \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_c} \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{L} (-1)^j \Upsilon_j \frac{\partial X_{k+1-j}}{\partial \lambda_c} \\
\frac{\partial X_{k+1}}{\partial \lambda_{in}} &= -\lambda_c \tilde{C} \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_{in}} + \overline{A} f'(\chi_k).* \left(W^{in} U_k + \lambda_w W \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_{in}} + \lambda_f W^f \tilde{W}^o \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_{in}} \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{L} (-1)^j \Upsilon_j \frac{\partial X_{k+1-j}}{\partial \lambda_{in}} \\
\frac{\partial X_{k+1}}{\partial \lambda_w} &= -\lambda_c \tilde{C} \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_w} + \overline{A} f'(\chi_k).* \left(W X_k + \lambda_w W \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_w} + \lambda_f W^f \tilde{W}^o \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_w} \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{L} (-1)^j \Upsilon_j \frac{\partial X_{k+1-j}}{\partial \lambda_w} \\
\frac{\partial X_{k+1}}{\partial \lambda_f} &= -\lambda_c \tilde{C} \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_f} + \overline{A} f'(\chi_k).* \left(\lambda_w W \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_f} + W^f \tilde{W}^o X_k + \lambda_f W^f \tilde{W}^o \frac{\partial X_k}{\partial \lambda_f} \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{L} (-1)^j \Upsilon_j \frac{\partial X_{k+1-j}}{\partial \lambda_f} \qquad (۷۱.۲)
\end{aligned}
$$

و برای هر α_i بازای $i = 1, 2, \cdots, n$ داریم:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X_{k+1}}{\partial \alpha_i} &= -\lambda_c \tilde{C} \frac{\partial X_k}{\partial \alpha_i} + \overline{A} f'(\chi_k).* \left(\lambda_w W \frac{\partial X_k}{\partial \alpha_i} + \lambda_f W^f \tilde{W}^o \frac{\partial X_k}{\partial \alpha_i} \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{L} (-1)^j \left(\frac{\partial \Upsilon_j}{\partial \alpha_i} X_{k+1-j} + \Upsilon_j \frac{\partial X_{k+1-j}}{\partial \alpha_i} \right) \qquad (۷۲.۲)
\end{aligned}
$$

که با استفاده از روابط (۵۶.۲) و (۵۷.۲)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Upsilon_j}{\partial \alpha_i} &= diag\left\{ 0, \cdots, \frac{\partial \Upsilon_j^i}{\partial \alpha_i}, \cdots, 0 \right\} \\
\frac{\partial \Upsilon_j^i}{\partial \alpha_i} &= -\frac{1}{j} \Upsilon_{j-1}^i + \left(1 - \frac{\alpha_i}{j} \right) \frac{\partial \Upsilon_{j-1}^i}{\partial \alpha_i} \qquad (۷۳.۲)
\end{aligned}
$$

که $\frac{\partial \Upsilon_0^i}{\partial \alpha_i} = 0$ می باشد.

در نهایت، با بکار بردن روابط فوق در رابطه (۷۰.۲)، می توان براحتی پارامترهای حالت های رزرویر را بصورت زیر بهینه کرد:

$$
\theta_{k+1} = \theta_k - \epsilon_{k+1} \frac{\partial J_{k+1}}{\partial \theta} \qquad (۷۴.۲)
$$

که ϵ_{k+1} بیانگر نرخ آموزش پارامترهای θ_k می باشد.

آموزش وزن های خروجی

در این قسمت، یک الگوریتم آموزش آنلاین بر پایه گرادیان برای آموزش پارامترهای وزن خروجی شبکه پیشنهاد می شود. هر چند در این حوزه، با هدف کاهش بار محاسباتی نسبت به روش های مبتنی بر روش شبه معکوس ماتریس و روش های آموزش مبتنی بر گرادیان و البته عبور از مشکل مینمم محلی در پروسه آموزش پارامترهای وزن خروجی، روش آموزش بر پایه تابع لیاپانوف ارائه شده است ولی در قانون آموزش ارائه شده، از اپراتور شبه معکوس استفاده شد که تضمینی برای ناویژه بودن ماتریس مربعی بکار رفته در اپراتور شبه معکوس ارایه نشده است [۱۴۷، ۱۴۸]. بنابراین، این روش آموزش مبتنی بر تابع لیاپانوف کاربردی نیست.
برای آموزش پارامترهای خروجی شبکه رابطه (۶۸.۲) و در نتیجه شبکه (۵۸.۲)، از روش گرادیان نزولی زیر استفاده می شود:

$$\frac{\partial J_{k+۱}}{\partial W^{out}_{k+۱}} = -e_{k+۱}[X_{k+۱}; U_{k+۱}]^T.$$

و در نهایت، با استفاده از رابطه (۷۴.۲)، رابطه آموزش وزن خروجی بصورت زیر بدست می آید:

$$W^{out}_{k+۱} = W^{out}_k + \epsilon_{k+۱} e_{k+۱}[X_{k+۱}; U_{k+۱}]^T, \qquad (۷۵.۲)$$

که $\epsilon_{k+۱}$ بیانگر نرخ آموزش وزن می باشد.

۴.۳.۲ نتایج شبیه سازی

در این بخش، از مدل زمان گسسته شبکه عصبی انعکاس حالت حقیقی مرتبه کسری رابطه (۵۸.۲) با قوانین آموزش روابط (۷۰.۲) تا (۷۵.۲) برای پیش بینی سری زمانی ناشی از بازار سهام استفاده می شود. برای نشان دادن کارایی روش شناسایی/ پیش بینی پیشنهادی، نتایج بکارگیری این روش در دو تست متفاوت، برای پیش بینی میانگین صنعتی داو جونز DJIA و شاخص S&P۵۰۰ ـ فهرستی است از ۵۰۰ سهام برتر در بازار بورس سهام نیویورک و نزدک ـ ارائه خواهد شد. برای این کار، از دو دسته متفاوت ورودی های تکنیکال در هر تست استفاده می شود که لیست ورودی های تکنیکال بکار رفته در جدول (۲.۲) آمده است. در هر دو تست، از یک مدل زمان گسسته رابطه (۵۸.۲) بازای تعداد نرون های رزروير $n = ۱۵$، عمق حافظه $L = ۱۰۰$، توابع فعالسازی رزروير تانژانت هایپربولیک $f(\cdot) = tanh(\cdot)$ و توابع فعالسازی خروجی خطی $g(\cdot) = ۱$ برای مدلسازی تطبیقی استفاده می شود.

مثال ۱.۳.۲. سری زمانی ناشی از قیمت تمام شده هر روز شاخص میانگین صنعتی داو جونز از دوم ژانویه سال ۱۹۹۰ تا سی و یکم می سال ۲۰۱۹ در شکل (۱۵.۲) نشان داده شده است. با

جدول ۱.۲: شاخص های تکنیکی بکار رفته و روابط آنها

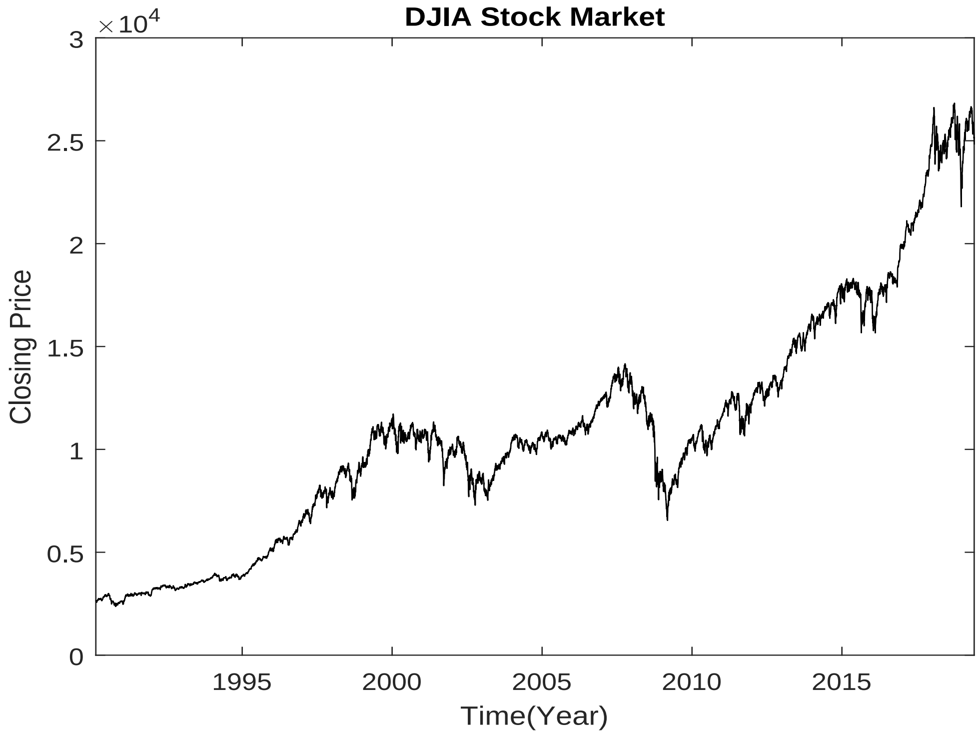
شاخص های تکنیکال (فنی)	فرمول
میانگین متحرک ساده (SMA)	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
میانگین متحرک نمایی (EMA)	$EMA_i = (x_i \times A) + (EMA_{i-1} \times (1-A))$
نوسان ساز انباشت / توزیع (ADO)	$\frac{(C.P-L.P)-(H.P-C.P)}{(H.P-LP)\times \text{حجم معاملات دوره تناوب}}$
نوسان ساز تصادفی (STO)	$\%k = \frac{C.P-L.L.P_k}{H.H.P_k-L.L.P_k} \times 100$ $\%D =$ میانگین متحرک ساده $\%k$ برای یک دوره تناوب
حجم تعادلی (OBV)	$OBV_i = \begin{cases} OBV_{i-1} + \text{حجم معاملات روز} & \text{if } C.P_i > C.P_{i-1}, \\ OBV_{i-1} - \text{حجم معاملات روز} & \text{if } C.P_i < C.P_{i-1}. \end{cases}$
ویلیامز R%	$\%R = \frac{H.H.P_n - C.P}{H.H.P_n - L.L.P_n} \times 100$
شاخص قدرت نسبی (RSI)	$RSI = 100 - \frac{100}{1+\frac{\text{سود کل}}{\text{ضرر کل}}}$
نرخ تغییر قیمت (PROC)	$\frac{C.P_i - C.P_{i-n}}{C.P_{i-n}}$
شتاب قیمت بالاترین هر روز (HPACC)	$\frac{H.P_i - H.P_{i-n}}{H.P_{i-n}}$

N تعداد روزها، x_i قیمت روز iام، $A = \frac{2}{N+1}$ فاکتور فراموشی ، C.P قیمت نهایی ، H.P بالاترین قیمت L.P کمترین قیمت ، $L.L.P_k$ کمترین L.P در دوره زمانی k ، $H.H.P_k$ بیشترین مقدار H.P در دوره زمانی k

انتخاب دو سناریو مختلف از شاخص های تکنیکال جدول (۲.۲) سعی شد تا مدل زمان گسسته شبکه عصبی انعکاس حالت حقیقی مرتبه کسری رابطه (۵۸.۲) بصورت تطبیقی آموزش یابد. برای اینکار، ابتدا پارامترهای وزن شبکه بر اساس آنچه در بخش های قبل گفته شد، بصورت تصادفی بگونه ای انتخاب شد که در شبکه پیشنهادی ویژگی انعکاس حالت، یعنی نتیجه قضیه (۱.۳.۲)، برقرار باشد. نتایج حاصل از این دو سناریو (تست ۱ و تست ۲) در جدول (۲.۲) گزارش شده است. همچنین، مقایسه بین مقادیر واقعی و پیش بینی قیمت سهام در شکل های (۱۶.۲) و (۱۷.۲) نشان داده شد.

جدول ۲.۲: شاخص های تکنیکی بکار رفته در مثال (۱.۳.۲) بعنوان ورودی شبکه مرتبه انعکاس حالت کسری

بازار سهام DJIA	متغیرهای ورودی	دوره زمانی آموزش(روز)	MPAE (%)	دوره زمانی تست(روز)	MPAE (%)
تست ۱	SMA۱۰, EMA۳۰, ADO, HPACC, STO, RSI۹, PROC۱۲, PROC۲۷	۶۳۸۲	۰/۹۵۴۲	۵۰۰	۱/۲۳۷۶
تست ۲	SMA۱۰, SMA۲۰, EMA۳۰, ADO, HPACC, STO, RSI۹, RSI۱۴, PROC۱۲, PROC۲۷, %R	۶۳۸۲	۰/۹۶۳۸	۵۰۰	۱/۱۲۵۶



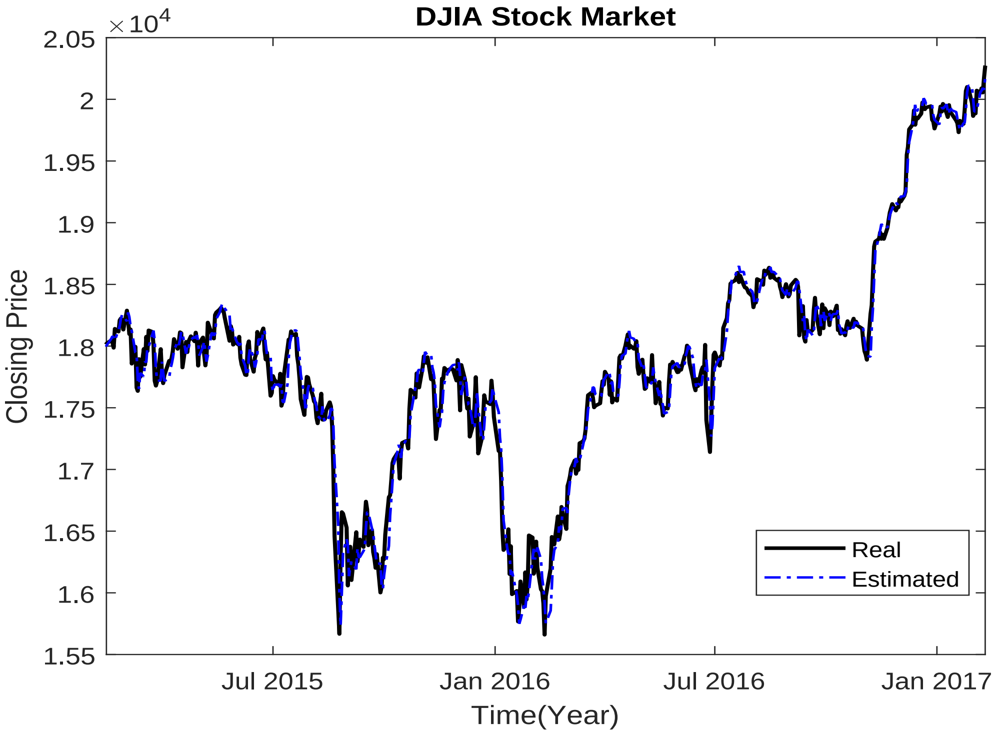
شکل ۱۵.۲: قیمت تمام شده هر روز شاخص میانگین صنعتی داو جونز

مثال ۲.۳.۲. سری زمانی ناشی از قیمت تمام شده هر روز شاخص S&P۵۰۰ از دوم ژانویه سال ۱۹۹۰ تا سی و یکم می سال ۲۰۱۹ در شکل (۱۸.۲) نشان داده شده است. با انتخاب دو سناریو مختلف از شاخص های تکنیکال جدول (۲.۲) سعی شد تا مدل زمان گسسته شبکه عصبی انعکاس حالت حقیقی مرتبه کسری رابطه (۵۸.۲) بصورت تطبیقی آموزش یابد. برای اینکار، ابتدا پارامترهای وزن شبکه بر اساس آنچه در بخش های قبل گفته شد، بصورت تصادفی بگونه ای انتخاب شد که در شبکه پیشنهادی ویژگی انعکاس حالت، یعنی نتیجه قضیه (۱.۳.۲)، برقرار باشد. نتایج حاصل از این دو سناریو (تست ۱ و تست ۲) در جدول (۳.۲) گزارش شده است. همچنین، مقایسه بین مقادیر واقعی و پیش بینی قیمت سهام در شکل های (۱۹.۲) و (۲۰.۲) نشان داده شد.

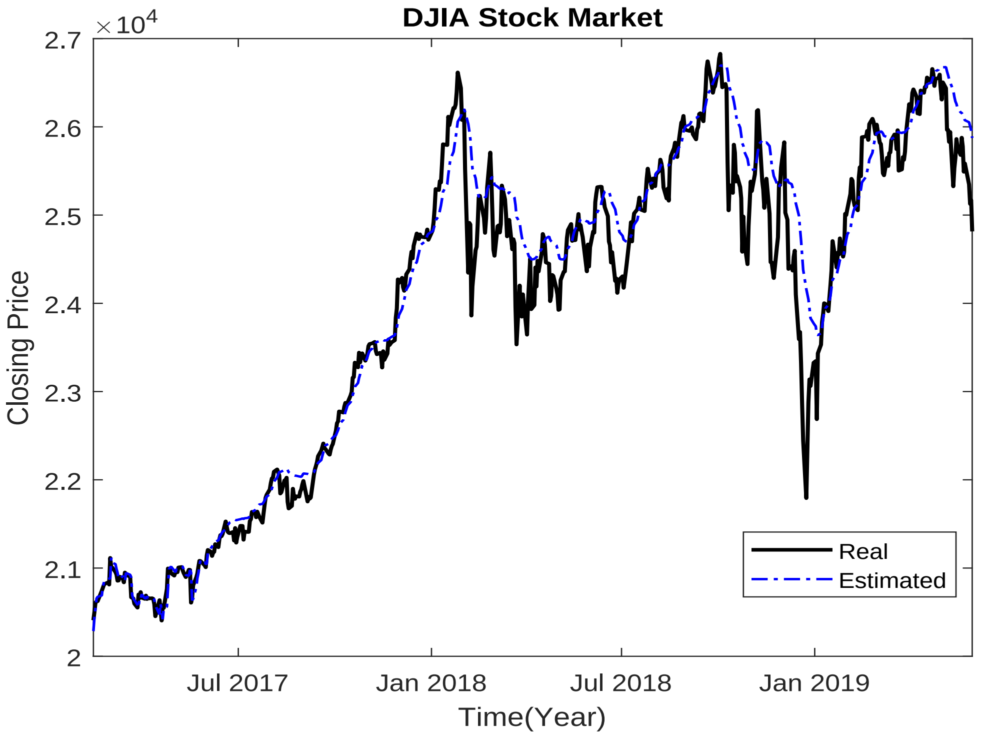
جدول ۳.۲: شاخص های تکنیکی بکار رفته در مثال (۲.۳.۲) بعنوان ورودی شبکه مرتبه انعکاس حالت کسری

بازار سهام S&P۵۰۰	متغیرهای ورودی	دوره زمانی آموزش(روز)	MPAE (%)	دوره زمانی تست(روز)	MPAE (%)
تست ۱	SMA۱۰, EMA۳۰, ADO, HPACC, STO, RSI۹, PROC۱۲, PROC۲۷	۳۸۸۲	۰/۹۹۳۸	۵۰۰	۰/۸۸۵۵
تست ۲	SMA۱۰, SMA۲۰, EMA۳۰, ADO, HPACC, STO, RSI۹, RSI۱۴, PROC۱۲, PROC۲۷, ٪R	۳۸۸۲	۱/۱۴۵۰	۵۰۰	۰/۹۷۰۲

نتایج فوق نشان می دهد که دقت مدل و روش آموزش پیشنهادی در پیش بینی سری

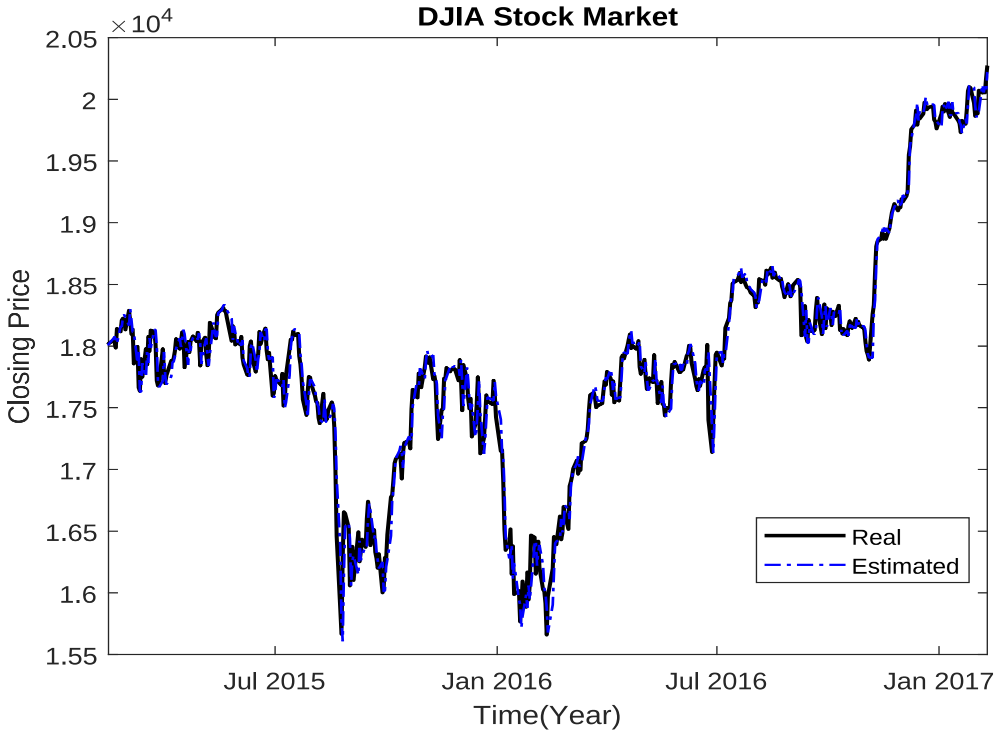


(آ) داده آموزش

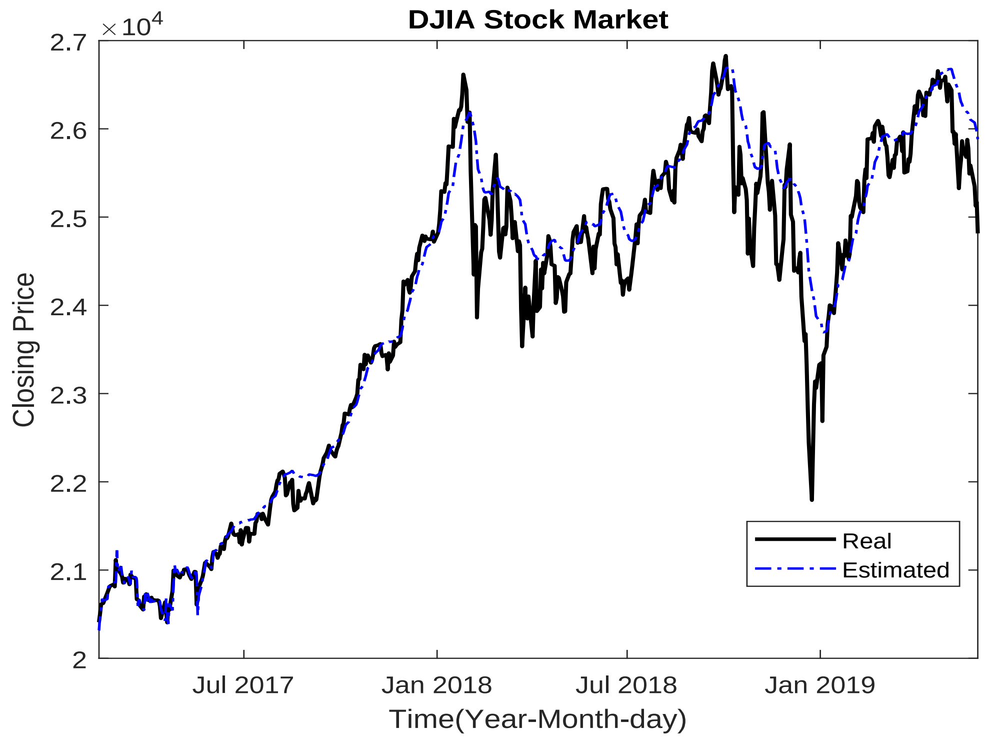


(ب) داده تست

شکل ۱۶.۲: مقایسه قیمت تمام شده هر روز واقعی (مشکی) و تخمین زده شده (آبی) شاخص میانگین صنعتی داو جونز تست ۱

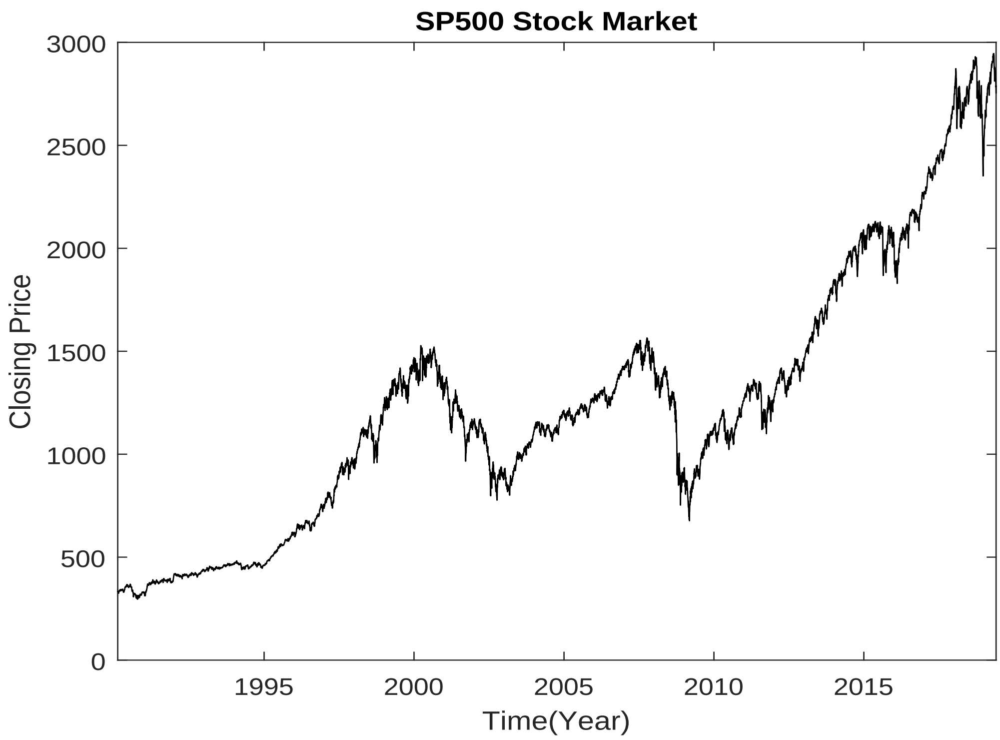


(آ) داده آموزش



(ب) داده تست

شکل ۱۷.۲: مقایسه قیمت تمام شده هر روز واقعی (مشکی) و تخمین زده شده (آبی) شاخص میانگین صنعتی داو جونز تست ۲

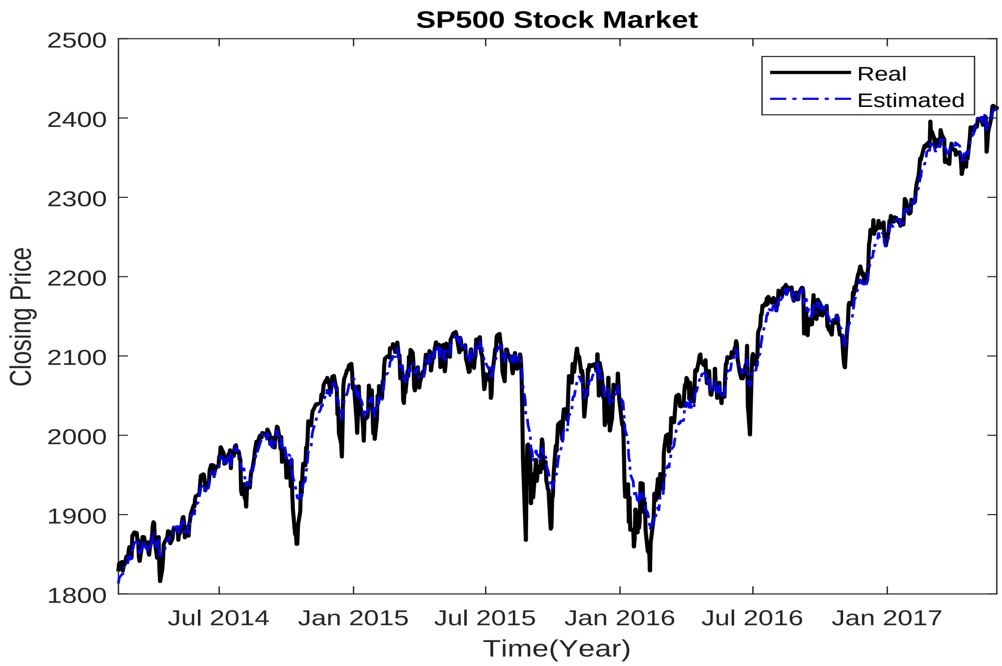


شکل ۱۸.۲: قیمت تمام شده هر روز شاخص S&P۵۰۰

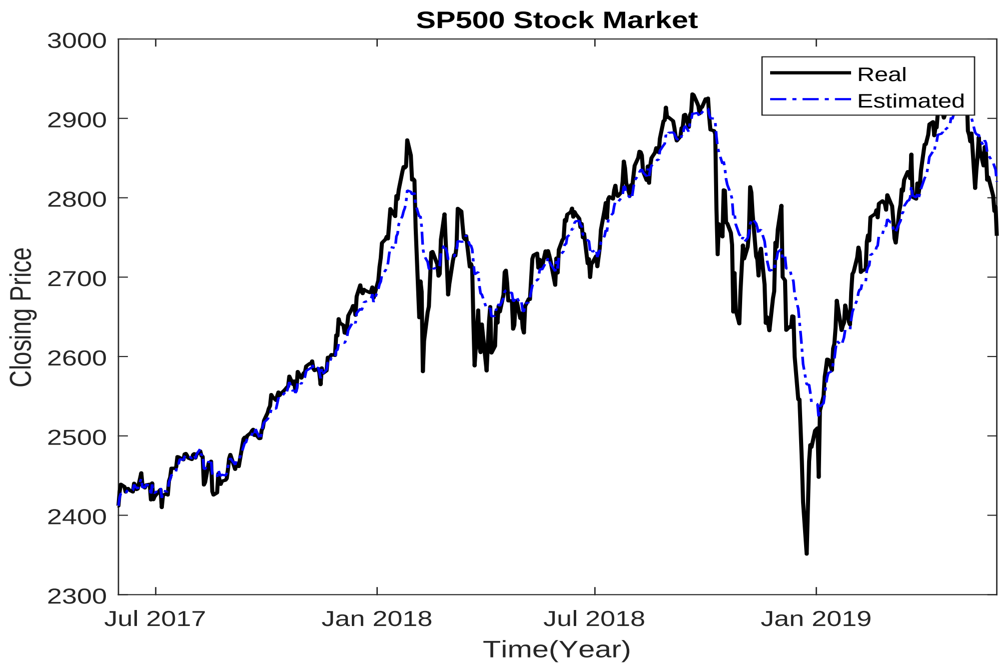
زمانی مناسب می باشد و با توجه به تعداد پارامترهای کمتر مدل پیشنهادی در مقایسه با مدل های شبکه عصبی برگشتی دیگر، همانطوری که در فصل های قبل به آن اشاره شد، از حجم محاسبات کمتری برخوردار می باشد.

جمع بندی

در این فصل، تحلیل دینامیکی شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری انجام شده است. در این راستا، ابتدا پایداری میتاگ‌ـ لفلر نقطه تعادل یکتای این شبکه و پدیده آشوب در این شبکه تحلیل شده است، سپس پایداری یکنواخت مستقل از تاخیر نقطه تعادل یکتای شبکه در حضور تاخیر ثابت و چندگانه آنالیز شده است. و در نهایت، به پیش بینی سری زمانی شاخص های میانگین صنعتی داو جونز DJIA و S&P۵۰۰ با استفاده از شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری تطبیقی و ورودی های تکنیکال پرداخته شد.

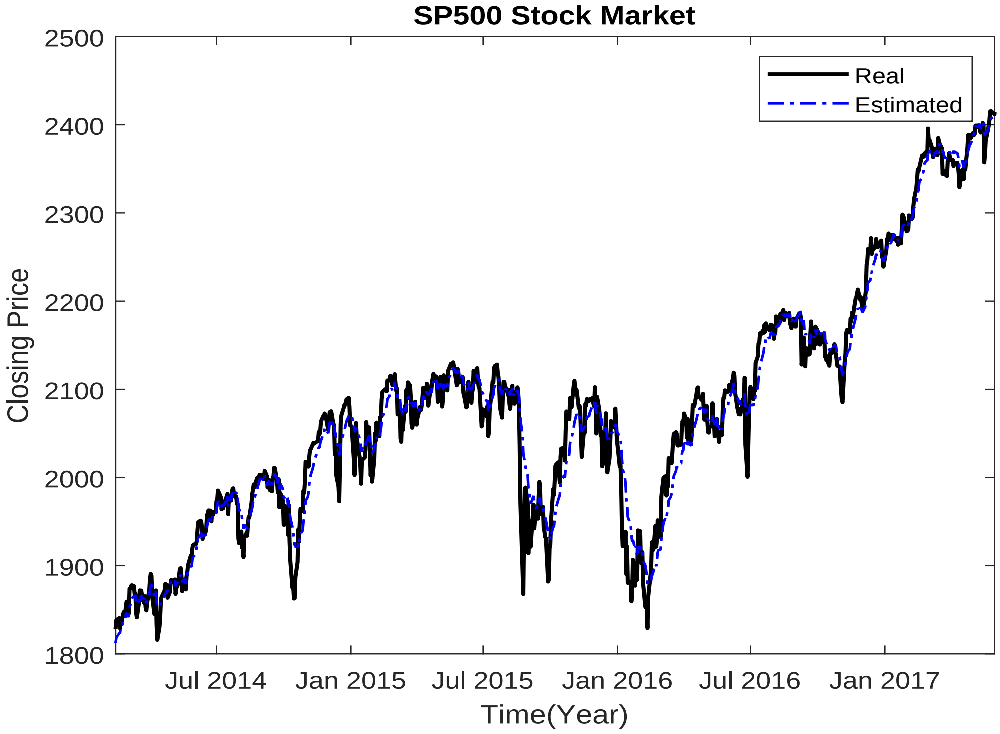


(آ) داده آموزش

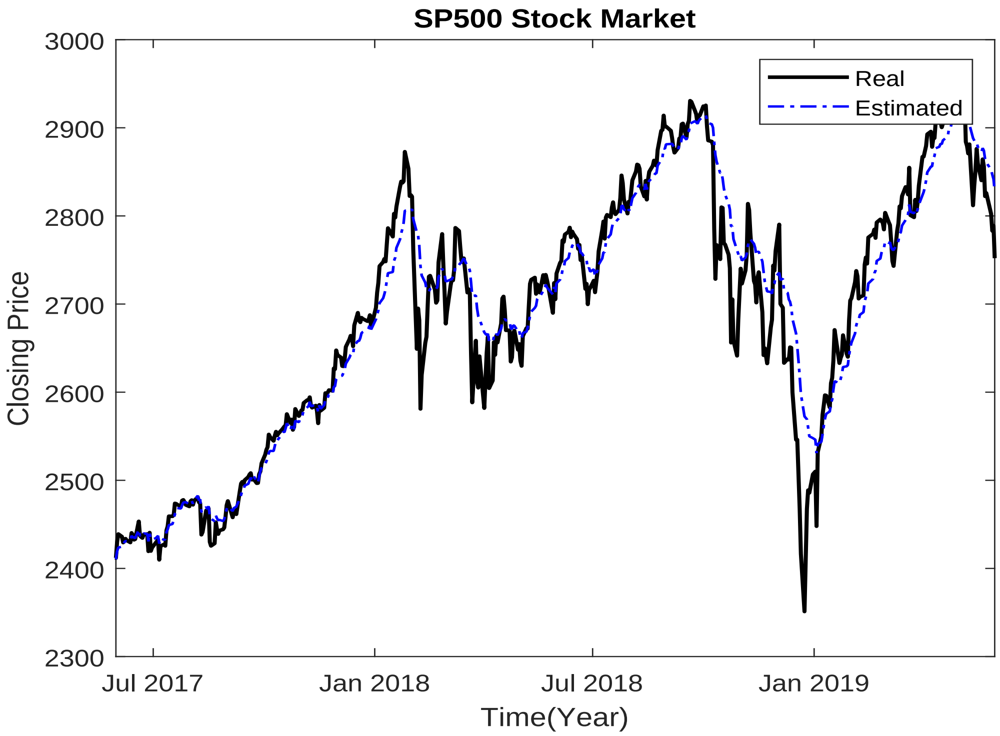


(ب) داده تست

شکل ۱۹.۲: مقایسه قیمت تمام شده هر روز واقعی (مشکی) و تخمین زده شده (آبی) شاخص S&P۵۰۰ تست ۱



(آ) داده آموزش



(ب) داده تست

شکل ۲۰.۲: مقایسه قیمت تمام شده هر روز واقعی (مشکی) و تخمین زده شده (آبی) شاخص S&P۵۰۰ تست ۲

فصل ۳

تحلیل پایداری شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری مختلط و کواترنیون

پیشگفتار

در این فصل، به تحلیل دینامیکی نقطه تعادل شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیوم و مختلط در حضور تاخیر و عنصر ممریستیو پرداخته می شود. در این راستا، ابتدا پایداری مجانبی مستقل از تاخیر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیوم در حضور تاخیر متغیر با زمان تحلیل می شود. سپس، پایداری مجانبی مقاوم مستقل از تاخیر آن آنالیز می شود. و در نهایت، تحلیل پایداری مجانبی مقاوم وابسته به تاخیر نقطه تعادل شبکه عصبی کواِستیت مرتبه کسری نامعین ممریستیو در حضور تاخیر متغیر با زمان و تاخیر نیوترال متغیر با زمان انجام می شود. همچنین، در هر بخش نشان داده می شود که این نتایج، قابل تعمیم به فضای مختلط می باشند.

۱.۳ تحلیل پایداری مجانبی مستقل از تاخیر نقطه تعادل شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون در حضور تاخیر متغیر با زمان

در این بخش، ابتدا دینامیک شبکه مورد نظر با جزییات توصیف می شود و سپس وجود و یکتایی نقطه تعادل شبکه عصبی بررسی می شود و در نهایت، آنالیز پایداری نقطه تعادل یکتای آن انجام می شود. برای تحلیل در فضای کواترنیون، بدون در نظر گرفتن ویژگی غیر–تعاملی[۱] ضرب کواترنیون که نتیجه قوانین همیلتن[۲] می باشد، از روش غیرمستقیم استفاده می شود، یعنی این شبکه عصبی کواترنیون به چهار شبکه عصبی حقیقی تجزیه می شود و سپس به آنالیز پایداری مستقل از تاخیر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی با توابع فعالسازی لیپشیتز پرداخته خواهد شد.

۱.۱.۳ توصیف مدل شبکه عصبی در حضور تاخیر متغیر با زمان

دینامیک شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون (FO-QVESNN) به همراه تاخیر متغیر با زمان با $n_i \in \mathbb{Z}^+$ ورودی، $n_o \in \mathbb{Z}^+$ خروجی و $n_r \in \mathbb{Z}^+$ حالت رزرویر را در نظر بگیرید. معادله متناظر با rامین حالت رزرویر و kامین خروجی را می توان بصورت رابطه (۱.۳) نوشت. که در آن $r = ۱,۲,\cdots,n_r$، $k = ۱,۲,\cdots,n_o$، $X = [x_۱,\cdots,x_{n_r}]^T \in \mathbb{H}^{n_r}$ و $Y = [y_۱,\cdots,y_{n_o}]^T \in \mathbb{H}^{n_o}$ بردارهای حالت های رزرویر، خروجی ها هستند و $\mathcal{U} = [\mathcal{U}_۱,\cdots,\mathcal{U}_{n_r}]^T \in \mathbb{H}^{n_r}$ و $u = [u_۱,\cdots,u_{n_i}]^T \in \mathbb{H}^{n_i}$ نشان دهنده ورودی خارجی و کمکی شبکه می باشند.

---
[1] Non-Commutativity
[2] Hamilton Rules

ماتریس های $W^{in} = [\cdot]_{n_r\times n_i} \in \mathbb{H}^{n_r\times n_i}$، $W^{out} = [W^o; W^{io}]_{n_o\times(n_r+n_i)} \in \mathbb{H}^{n_o\times(n_r+n_i)}$، $W = [\cdot]_{n_r\times n_r} \in \mathbb{H}^{n_r\times n_r}$ و $W^f = [\cdot]_{n_r\times n_o} \in \mathbb{H}^{n_r\times n_o}$ وزن های ورودی، خروجی، حالت های رزروير و فیدبک هستند. علاوه بر انها، نمادهای $A = [\cdot]_{n_r\times n_r} \in \mathbb{H}^{n_r\times n_r}$ و $C = [\cdot]_{n_r\times n_r} \in \mathbb{H}^{n_r\times n_r}$ بیانگر ثابت زمانی و ماتریس های نرخ نشتی شبکه در فضای کواترنیون هستند که A^{-1} ثابت زمانی و $A^{-1}C$ ماتریس نرخ نشتی می باشند. همچنین، ماتریس های $\sigma^l(t) = [\cdot]_{n_r\times n_r} \in \mathbb{R}^{n_r\times n_r}$، $\sigma^{in}(t) = [\cdot]_{n_o\times n_i} \in \mathbb{R}^{n_o\times n_i}$، $\sigma^d(t) = [\cdot]_{n_r\times n_r} \in \mathbb{R}^{n_r\times n_r}$ و $\sigma^f(t) = [\cdot]_{n_r\times n_o} \in \mathbb{R}^{n_r\times n_o}$ نشان دهنده تاخیر در عبارت های (ترم های) نشتی، ورودی و انتقال، از ترم های حالت های رزروير و فیدبک، می باشند. علاوه بر آنها، $\sigma^o(t) = [\cdot]_{n_o\times n_r} \in \mathbb{R}^{n_o\times n_r}$ و $\sigma^{in}(t) = [\cdot]_{n_o\times n_i} \in \mathbb{R}^{n_o\times n_i}$ نشان دهنده تاخیرهای ریداوت و وورودی به خروجی هستند.

$$\begin{aligned} D^\alpha\left(x_r(t)\right) = &-\sum_{h=1}^{n_r} c_{rh} x_h(t-\sigma^l_{rh}(t)) + \sum_{h=1}^{n_r} a_{rh} f_h \left(\sum_{j=1}^{n_i} w^{in}_{hj} u_j(t-\sigma^{in}_{hj}(t))\right. \\ &\left. + \sum_{l=1}^{n_r} w_{hl} x_l(t-\sigma^d_{hl}(t)) + \sum_{k=1}^{n_o} w^f_{hk} y_k(t-\sigma^f_{hk}(t))\right) + \mathcal{U}_r, \\ y_k(t) = & g_k\left(\sum_{s=1}^{n_r} w^o_{ks} x_s(t-\sigma^o_{ks}(t)) + \sum_{j=1}^{n_i} w^{io}_{kj} u_j(t-\sigma^{io}_{kj}(t))\right), \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

در اینجا، فرض می شود که بازای $h = 1,2,\cdots,n_r$، $l = 1,2,\cdots,n_r$ و $s = 1,2,\cdots,n_r$ وجود دارند مقادیر $\overline{\sigma}^l_r$ و $\overline{\sigma}^d_r$، $\overline{\sigma}^{of}_r$ که از $\overline{\sigma}^l_r = max_h\left(\sigma^l_{hr}(t)\right)$، $\overline{\sigma}^d_r = max_l\left(\sigma^d_{lr}(t)\right)$ و $\overline{\sigma}^{of}_r = max_{k,s}\left(\sigma^o_{kr}(t) + \sigma^f_{sk}(t)\right)$ بدست می آیند. همچنین، فرض می شود که عناصر قطری ماتریس تاخیر نشتی، صفر هستند یعنی $\sigma^l(i,i) = 0$ برای کلیه $i = 1,2,\cdots,n_r$. در نهایت، فرض می شود که توابع فعالسازی خروجی $g = [g_1,\cdots,g_{n_o}]^T : \mathbb{H}^{n_o} \to \mathbb{H}^{n_o}$ و حالت های رزروير $f = [f_1,\cdots,f_{n_r}]^T : \mathbb{H}^{n_r} \to \mathbb{H}^{n_r}$ بگونه ای هستند که هر f_h و g_k قابل تجزیه بصورت $f_h = f^{(R)}_h + f^{(I)}_h\imath + f^{(J)}_h\jmath + f^{(K)}_h\kappa$ و $g_k = g^{(R)}_k + g^{(I)}_k\imath + g^{(J)}_k\jmath + g^{(K)}_k\kappa$ می باشند که همه مولفه های توابع فعالسازی (یعنی $f^{(\rho)}_h$ و $g^{(\rho)}_k$ برای $\rho \in \Omega = \{R,I,J,K\}$) پیوسته و لیپشیتز هستند یعنی، مطابق با تعریف (۱.۲.۱)، ثابت های حقیقی و مثبت لیپشیتز $F^{(\rho)}_h$ و $G^{(\rho)}_k$ وجود دارند که برای هر دو پاسخ دلخواه $x(t)$ و $\widetilde{x}(t)$ روابط $\left|f^{(\rho)}_h\left(x^{(\rho)}_h(t)\right) - f^{(\rho)}_h\left(\widetilde{x}^{(\rho)}_h(t)\right)\right| \le F^{(\rho)}_h\left|x^{(\rho)}_h(t) - \widetilde{x}^{(\rho)}_h(t)\right|$ و $\left|g^{(\rho)}_k\left(x^{(\rho)}_k(t)\right) - g^{(\rho)}_k\left(\widetilde{x}^{(\rho)}_k(t)\right)\right| \le G^{(\rho)}_k\left|x^{(\rho)}_k(t) - \widetilde{x}^{(\rho)}_k(t)\right|$ صادق می باشند.

با استفاده از لم های (۵.۲.۱) و (۶.۲.۱)، معادله شبکه عصبی (۱.۳) را می توان بصورت زیر توصیف کرد.

$$D^\alpha\left(x^{(\rho)}_r(t)\right) = -\sum_{h=1}^{n_r}\left(\sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}} \eta c^{(\Theta)}_{rh} x^{(\Upsilon)}_h\left(t-\sigma^l_{rh}(t)\right)\right)$$

$$+\sum_{h=1}^{n_r}\left\{\sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta a_{rh}^{(\Theta)}f_h^{(\Upsilon)}\left(\sum_{l=1}^{n_r}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hl}^{(\widetilde{\Theta})}x_l^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{hl}^d(t)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hk}^{f(\widetilde{\Theta})}y_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{hk}^f(t)\right)\right)\right\}+\mathcal{U}_r^{(\rho)}$$
$$y_k^{\widetilde{\Upsilon}}(t)=g_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Upsilon})}}\widehat{\eta}w_{ks}^{o(\widehat{\Theta})}x_s^{(\widehat{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{ks}^o(t)\right)\right). \tag{۲.۳}$$

که در آن $r=1,2,\cdots,n_r$، $k=1,2,\cdots,n_o$ و $\rho,\Theta,\Upsilon,\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon},\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon}\in\Omega$ می باشند.

۲.۱.۳ وجود و یکتایی نقطه تعادل

در این بخش، با استفاده از یک نگاشت انقباضی وجود و یکتایی نقطه تعادل شبکه عصبی (۲.۳) اثبات می شود.

قضیه ۱.۱.۳. شبکه عصبی (۲.۳) دارای یک نقطه تعادل یکتا می باشد اگر $\lambda_r^{(\widehat{\rho})}$ داده شده در رابطه (۳.۳)، برای کلیه $r=1,2,\cdots,n_r$ و $\widehat{\rho}\in\Omega$ مقدار مثبت باشد.

$$\lambda_r^{(\widehat{\rho})}=c_{rr}^{(R)}-\sum_{\rho\in\Omega}\left(\sum_{(\Theta,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)},\rho\neq\widehat{\rho}}\mu_r\left|c_{rr}^{(\rho)}\right|+\sum_{h=1;h\neq r}^{n_r}\sum_{(\Theta,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_h}{\mu_r}\left|c_{hr}^{(\rho)}\right|\right.$$
$$+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{l=1}^{n_r}\frac{\mu_h}{\mu_r}\left|a_{hl}^{(\rho)}\right|F_l^{(\Upsilon)}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\left|w_{lr}^{(\widetilde{P})}\right|$$
$$\left.+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{k=1}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\sum_{s=1}^{n_r}\mu_h\left|a_{hs}^{(\rho)}\right|F_s^{(\Upsilon)}\left|w_{sk}^{f(\widetilde{\Theta})}\right|G_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\sum_{(\widehat{\Theta},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\widetilde{\Upsilon})}}\left|w_{kr}^{o(\widehat{\Theta})}\right|\right) \tag{۳.۳}$$

اثبات: با استفاده از تعریف (۵.۲.۱)، X^* یک نقطه تعادل شبکه عصبی (۲.۳) می باشد اگر برای هر $\rho\in\Omega$ و $r=1,2,\cdots,n_r$، X^* پاسخ معادله $D^\alpha x_r^{(\rho)}(t)=0$ باشد. بنابراین

$$0=-c_{rr}^{(R)}x_r^{(\rho)}(t)-\sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)},\Upsilon\neq\rho}\eta c_{rr}^{(\Theta)}x_r^{(\Upsilon)}(t)-\sum_{h=1,h\neq r}^{n_r}\sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta c_{rh}^{(\Theta)}x_h^{(\Upsilon)}(t)$$
$$+\sum_{h=1}^{n_r}\left\{\sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta a_{rh}^{(\Theta)}f_h^{(\Upsilon)}\left(\sum_{l=1}^{n_r}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hl}^{(\widetilde{\Theta})}x_l^{(\widetilde{\Upsilon})}(t)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hl}^{f(\widetilde{\Theta})}g_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Upsilon})}}\widehat{\eta}w_{ks}^{o(\widehat{\Theta})}x_s^{(\widehat{\Upsilon})}(t)\right)\right)\right\}+\mathcal{U}_r^{(\rho)}. \tag{۴.۳}$$

با در نظر گرفتن نگاشت انقباضی $\psi : \mathbb{H}^{n_r} \to \mathbb{H}^{n_r}$ که با رابطه $c_{rr}^{(R)} x_r^{*(\rho)} = \upsilon_r^{*(\rho)}$ تعریف می شود، داریم:

$$\begin{aligned}
&\psi_r^{(\rho)}\left(\upsilon_r^{(\rho)}\right)\\
&= -\sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)},\Upsilon\neq\rho} \eta c_{rr}^{(\Theta)} \frac{\upsilon_r^{(\Upsilon)}(t)}{c_{rr}^{(R)}} - \sum_{h=1,h\neq r}^{n_r} \sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}} \eta c_{rh}^{(\Theta)} \frac{\upsilon_h^{(\Upsilon)}(t)}{c_{hh}^{(R)}}\\
&\quad + \sum_{h=1}^{n_r} \left\{ \sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}} \eta a_{rh}^{(\Theta)} f_h^{(\Upsilon)} \left(\sum_{l=1}^{n_r} \sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}} \widetilde{\eta} w_{jk}^{(\widetilde{P})} \frac{\upsilon_k^{(\widetilde{\Upsilon})}(t)}{c_{ll}^{(R)}} \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + \sum_{k=1}^{n_o} \sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}} \widetilde{\eta} w_{hk}^{f(\widetilde{\Theta})} g_k^{(\widetilde{\Upsilon})} \left(\sum_{s=1}^{n_r} \sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Upsilon})}} \widehat{\eta} w_{ks}^{o(\widehat{\Theta})} \frac{\upsilon_s^{(\widehat{\Upsilon})}(t)}{c_{ss}^{(R)}} \right) \right) \right\} + \mathcal{U}_r^{(\rho)}, \qquad (۵.۳)
\end{aligned}$$

که $\Psi^{(\rho)}\left(\upsilon^{(\rho)}\right) = \left[\psi_1^{(\rho)}\left(\upsilon_1^{(\rho)}\right), \cdots, \psi_{n_r}^{(\rho)}\left(\upsilon_{n_r}^{(\rho)}\right)\right]^T$ می باشد. اگر برای دو پاسخ مجزا و دلخواه $\upsilon_{(\rho)} = \left[\upsilon_1^{(\rho)}, \cdots, \upsilon_{n_r}^{(\rho)}\right]^T$ و $\nu_{(\rho)} = \left[\nu_1^{(\rho)}, \cdots, \nu_{n_r}^{(\rho)}\right]^T$، نرم $||\Psi(\upsilon) - \Psi(\nu)||$ بصورت

$$||\Psi(\upsilon) - \Psi(\nu)|| = \sum_{r=1}^{n_r} \mu_r \sum_{\rho\in\Omega} \left|\psi_r^{(\rho)}\left(\upsilon_r^{(\rho)}\right) - \psi_r^{(\rho)}\left(\nu_r^{(\rho)}\right)\right|. \qquad (۶.۳)$$

تعریف شود، آنگاه

$$\begin{aligned}
&||\Psi(\upsilon) - \Psi(\nu)||\\
&= \sum_{r=1}^{n_r} \mu_r \sum_{\rho\in\Omega} \left|\psi_r^{(\rho)}\left(\upsilon_r^{(\rho)}\right) - \psi_r^{(\rho)}\left(\nu_r^{(\rho)}\right)\right|\\
&\leq \sum_{r=1}^{n_r} \sum_{\rho\in\Omega} \left\{ \sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega(\rho),\Upsilon\neq\rho} \mu_r \left|c_{rr}^{(\Theta)}\right| \frac{\left|\upsilon_r^{(\Upsilon)}(t) - \nu_r^{(\Upsilon)}(t)\right|}{c_{rr}^{(R)}} + \sum_{h=1,h\neq r}^{n_r} \sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}} \mu_r \left|c_{rh}^{(\Theta)}\right| \right.\\
&\quad \times \frac{\left|\upsilon_h^{(\Upsilon)}(t) - \nu_h^{(\Upsilon)}(t)\right|}{c_{hh}^{(R)}} + \sum_{h=1}^{n_r} \left(\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}} \left|a_{rh}^{(\Theta)}\right| F_h^{(\Upsilon)} \left(\sum_{l=1}^{n_r} \sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}} \mu_r \left|w_{hl}^{(\widetilde{\Theta})}\right| \right.\right.\\
&\quad \times \frac{\left|\upsilon_l^{(\widetilde{\Upsilon})}(t) - \nu_l^{(\widetilde{\Upsilon})}(t)\right|}{c_{ll}^{(R)}} + \sum_{k=1}^{n_o} \sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}} \left|w_{hk}^{f(\widetilde{\Theta})}\right| G_k^{(\widetilde{\Upsilon})} \sum_{s=1}^{n_r} \sum_{(\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\Omega_{(\widetilde{\Upsilon})}} \mu_r\\
&\quad \left.\left.\left. \times \left|w_{ks}^{o(\widehat{\Theta})}\right| \frac{\left|\upsilon_s^{(\widehat{\Upsilon})}(t) - \nu_s^{(\widehat{\Upsilon})}(t)\right|}{c_{ss}^{(R)}} \right)\right)\right\}\\
&\leq \sum_{r=1}^{n_r} \sum_{\rho\in\Omega} \left\{ \sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)},\Upsilon\neq\rho} \mu_r \left|c_{rr}^{(\Theta)}\right| \frac{\left|\upsilon_r^{(\Upsilon)}(t) - \nu_r^{(\Upsilon)}(t)\right|}{c_{rr}^{(R)}} + \sum_{h=1,h\neq r}^{n_r} \sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}} \mu_h \left|c_{hr}^{(\rho)}\right| \right.\\
&\quad \times \frac{\left|\upsilon_r^{(\Upsilon)}(t) - \nu_r^{(\Upsilon)}(t)\right|}{c_{rr}^{(R)}} + \sum_{h=1}^{n_r} \sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}} \sum_{l=1}^{n_r} \mu_h \left|a_{hl}^{(\Theta)}\right| F_l^{(\Upsilon)} \sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}} \left|w_{lr}^{(\widetilde{\Theta})}\right|
\end{aligned}$$

$$\times \frac{\left|\upsilon_r^{(\widetilde{\Upsilon})}(t)-\nu_r^{(\widetilde{\Upsilon})}(t)\right|}{c_{rr}^{(R)}} + \sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{k=1}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\sum_{s=1}^{n_r}\mu_h\left|a_{hs}^{(\Theta)}\right|F_s^{(\Upsilon)}\left|w_{sk}^{f(\widetilde{\Theta})}\right|G_k^{(\widetilde{\Upsilon})}$$
$$\times\sum_{(\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\Omega_{(\widetilde{\Upsilon})}}\left|w_{kr}^{o(\widehat{\Theta})}\right|\frac{\left|\upsilon_r^{(\widehat{\Upsilon})}(t)-\nu_r^{(\widehat{\Upsilon})}(t)\right|}{c_{rr}^{(R)}}\Bigg\}$$
$$\leq\sum_{r=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_r\Bigg\{\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)},\rho\neq\Upsilon}\left|c_{rr}^{(\Theta)}\right|+\sum_{\rho\in\Omega}\Bigg(\sum_{h=1,h\neq r}^{n_r}\sum_{(\Theta,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_h}{\mu_r}\left|c_{hr}^{(\Theta)}\right|$$
$$+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{l=1}^{n_r}\frac{\mu_h}{\mu_r}\left|a_{hl}^{(\Theta)}\right|F_l^{(\Upsilon)}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\left|w_{lr}^{(\widetilde{\Theta})}\right|+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{l=1}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}$$
$$\sum_{s=1}^{n_r}\frac{\mu_h}{\mu_r}\left|a_{hs}^{(\Theta)}\right|F_s^{(\Upsilon)}\left|w_{sk}^{f(\widetilde{\Theta})}\right|G_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\sum_{(\widehat{\Theta},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\widetilde{\Upsilon})}}\left|w_{kr}^{o(\widehat{\Theta})}\right|\Bigg)\Bigg\}\frac{\left|\upsilon_r^{(\widehat{\rho})}(t)-\nu_r^{(\widehat{\rho})}(t)\right|}{c_{rr}^{(R)}}$$
$$\leq\sum_{r=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_r\theta_r^{(\widehat{\rho})}\frac{\left|\upsilon_r^{(\widehat{\rho})}(t)-\nu_r^{(\widehat{\rho})}(t)\right|}{c_{rr}^{(R)}}. \tag{۷.۳}$$

با توجه به $\lambda_r^{(\widehat{\rho})}=c_{rr}^{(R)}-\theta_r^{(\widehat{\rho})}>0$، می توان نتیجه گرفت که

$$||\Psi(\upsilon)-\Psi(\nu)||\leq\sum_{r=1}^{n_r}\mu_r\sum_{\rho\in\Omega}\left|\upsilon_r^{(\rho)}-\nu_r^{(\rho)}\right|$$
$$||\Psi(\upsilon)-\Psi(\nu)||\leq||\upsilon-\nu||. \tag{۸.۳}$$

بنابراین، نگاشت $\psi:\mathbb{H}^{n_r}\to\mathbb{H}^{n_r}$ انقباضی است و در نتیجه، شبکه عصبی (۲.۳) دارای یک نقطه تعادل یکتا می باشد اگر (۳.۳) صادق باشد. در اینجا، اثبات تکمیل می شود.

□

۳.۱.۳ پایداری نقطه تعادل

در این بخش، پایداری مجانبی مستقل از تاخیر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون (۲.۳) تحلیل می شود. و سپس، پایداری میتاگ_لفلر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون بدون تاخیر آنالیز می شود. و در پایان، نشان داده می شود که این نتایج براحتی قابل تعمیم به فضای مختلط می باشد.

قضیه ۲.۱.۳. نقطه تعادل شبکه عصبی (۲.۳) پایدار مجانبی است اگر $\lambda_r^{(\widehat{\rho})}$، تعریف شده در رابطه (۳.۳)، بازای $r=1,2,\cdots,n_r$ و $\widehat{\rho}\in\Omega$ مثبت باشد.

اثبات: فرض کنید $x_r(t)=x_r^*$ برای $r=1,2,\cdots,n_r$، $h=1,2,\cdots,n_r$، $l=1,2,\cdots,n_r$، $k=1,2,\cdots,n_o$، $s=1,2,\cdots,n_r$ و $\sigma=max_r(\overline{\sigma}_r^l,\overline{\sigma}_r^d,\overline{\sigma}_r^{of})$ یک نقطه تعادل شبکه عصبی

باشد. با تغییر متغیر $x_r(t)=e_r(t)+x_r^*$، نقطه تعادل به مبدا انتقال می یابد. بنابراین معادله دینامیکی خطا بصورت رابطه (۹.۳) بدست می آید.

$$\begin{aligned}
&D^{\alpha}\left(e_r^{(\rho)}(t)\right)\\
&=-\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta c_{rh}^{(\Theta)}e_h^{(\Upsilon)}\left(t-\sigma_{rh}^{l}(t)\right)+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta a_{rh}^{(\Theta)}\\
&\times\Bigg\{f_h^{(\Upsilon)}\Bigg(\sum_{l=1}^{n_r}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hl}^{(\widetilde{\Theta})}\left(e_l^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{hl}^{d}(t)\right)+x_l^{*(\widetilde{\Upsilon})}\right)+\sum_{k=1}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hk}^{f(\widetilde{\Theta})}\\
&\times g_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Upsilon})}}\widehat{\eta}w_{ks}^{o(\widehat{\Theta})}\left(e_s^{(\widehat{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{ks}^{o}(t)-\sigma_{hk}^{f}(t)\right)+x_s^{*(\widehat{\Upsilon})}\right)\right)\Bigg)\\
&-f_h^{(\Upsilon)}\Bigg(\sum_{l=1}^{n_r}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hl}^{(\widetilde{\Theta})}x_l^{*(\widetilde{\Upsilon})}+\sum_{k=1}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hk}^{f(\widetilde{\Theta})}\\
&\times g_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Upsilon})}}\widehat{\eta}w_{ks}^{o(\widehat{\Theta})}\left(x_s^{*(\widehat{\Upsilon})}\right)\right)\Bigg)\Bigg\}. \qquad (۹.۳)
\end{aligned}$$

با انتخاب تابع لیاپانوف

$$V(t)=\sum_{r=1}^{n_r}\mu_r\sum_{p\in\Omega}\left|e_r^{(\rho)}(t)\right| \qquad (۱۰.۳)$$

و با استفاده از روابط (۹.۳) و لم (۸.۲.۱)، مشتق مرتبه کسری تابع لیاپانوف بصورت رابطه (۱۱.۳) بدست می آید.

$$\begin{aligned}
&D^{\alpha}V(t)\\
&=\sum_{r=1}^{n_r}\mu_r\sum_{\rho\in\Omega}sgn\left(e_r^{(\rho)}(t)\right)D^{\alpha}e_r^{(\rho)}(t)\\
&=\sum_{r=1}^{n_r}\mu_r\sum_{\rho\in\Omega}sgn\left(e_r^{(\rho)}(t)\right)\Bigg\{-\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta c_{rh}^{(\Theta)}e_h^{(\Upsilon)}\left(t-\sigma_{rh}^{l}(t)\right)\\
&\quad+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\eta,\Theta,\Upsilon)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta a_{rh}^{(\Theta)}\Bigg\{f_h^{(\Upsilon)}\Bigg(\sum_{l=1}^{n_r}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hl}^{(\widetilde{\Theta})}\left(e_l^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{hl}^{d}(t)\right)+x_l^{*(\widetilde{\Upsilon})}\right)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hk}^{f(\widetilde{\Theta})}g_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\Bigg(\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Upsilon})}}\widehat{\eta}w_{ks}^{o(\widehat{\Theta})}\left(e_s^{(\widehat{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{ks}^{o}(t)-\sigma_{hk}^{f}(t)\right)\right.\\
&\quad\left.+x_s^{*(\widehat{\Upsilon})}\right)\Bigg)\Bigg)-f_h^{(\Upsilon)}\Bigg(\sum_{l=1}^{n_r}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hl}^{(\widetilde{\Theta})}x_l^{*(\widetilde{\Upsilon})}+\sum_{k=1}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\Upsilon)}}\widetilde{\eta}w_{hk}^{f(\widetilde{\Theta})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times g_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(\sum_{s=۱}^{n_r}\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Upsilon})}} \widehat{\eta}\, w_{ks}^{o(\widehat{\Theta})}\left(x_s^{*(\widehat{\Upsilon})}\right)\right)\Bigg)\Bigg\}\Bigg\}\\
\leq &\sum_{r=۱}^{n_r}\mu_r\sum_{\rho\in\Omega}\Bigg\{\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)},\rho=\Upsilon} -sgn\left(e_r^{(\rho)}(t)\right)c_{rr}^{(\Theta)}e_r^{(\Upsilon)}(t)-\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)},\rho\neq\Upsilon} sgn\left(e_r^{(\rho)}(t)\right)c_{rr}^{(\Theta)}\\
&\times e_r^{(\Upsilon)}(t)\Bigg\}+\sum_{r=۱}^{n_r}\mu_r\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{h=۱,h\neq r}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in M_{(\rho)}}\left|c_{rh}^{(\Theta)}\right|\left|e_h^{(\Upsilon)}\left(t-\sigma_{rh}^{l}(t)\right)\right|+\sum_{r=۱}^{n_r}\mu_r\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{h=۱}^{n_r}\\
&\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\left|a_{rh}^{(\Theta)}\right|F_h^{(\Upsilon)}\sum_{l=۱}^{n_r}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\left|w_{hl}^{(\widetilde{\Theta})}\right|\left|e_l^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{hl}^{d}(t)\right)\right|+\sum_{r=۱}^{n_r}\mu_r\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{h=۱}^{n_r}\\
&\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\left|a_{rh}^{(\Theta)}\right|F_h^{(\Upsilon)}\sum_{k=۱}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\left|w_{hk}^{f(\widetilde{\Theta})}\right|G_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\sum_{s=۱}^{n_r}\sum_{(\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\Omega_{(\widetilde{\Upsilon})}}\left|w_{ks}^{o(\widehat{\Theta})}\right|\\
&\times\left|e_s^{(\widehat{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{ks}^{o}(t)-\sigma_{hk}^{f}(t)\right)\right| \qquad (۱۱.۳)
\end{aligned}
$$

که $sgn(\cdot)$ تابع علامت می باشد. بنابراین

$$
\begin{aligned}
&D^{\alpha}V(t)\\
&\leq\sum_{r=۱}^{n_r}\mu_r\sum_{\rho\in\Omega}\Bigg\{\sum_{(\Theta,\rho)\in\Omega_{(\rho)}}-c_{rr}^{(\Theta)}\left|e_r^{(\rho)}(t)\right|+\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)},\rho\neq\Upsilon}\left|c_{rr}^{(\rho)}\right|\left|e_r^{(\Upsilon)}(t)\right|\Bigg\}\\
&\quad+\sum_{r=۱}^{n_r}\mu_r\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{h=۱,h\neq r}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\left|c_{rh}^{(\Theta)}\right|\left|e_h^{(\Upsilon)}\left(t-\sigma_{rh}^{l}(t)\right)\right|+\sum_{r=۱}^{n_r}\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{h=۱}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\mu_r\\
&\quad\times\left|a_{rh}^{(\Theta)}\right|F_h^{(\Upsilon)}\sum_{l=۱}^{n_r}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\left|w_{hl}^{(\widetilde{\Theta})}\right|\left|e_l^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{hl}^{d}(t)\right)\right|+\sum_{r=۱}^{n_r}\mu_r\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{h=۱}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\left|a_{rh}^{(\Theta)}\right|\\
&\quad\times F_h^{(\Upsilon)}\sum_{k=۱}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\left|w_{hk}^{f(\widetilde{\Theta})}\right|G_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\sum_{s=۱}^{n_r}\sum_{(\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\Omega_{(\widetilde{\Upsilon})}}\left|w_{ks}^{o(\widehat{\Theta})}\right|\left|e_s^{(\widehat{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{ks}^{o}(t)-\sigma_{hk}^{f}(t)\right)\right|.\\
&\leq\sum_{r=۱}^{n_r}\sum_{\rho\in\Omega}\Bigg\{\sum_{(\Theta,\rho)\in\Omega_{(\rho)}}-\mu_r c_{rr}^{(\Theta)}\left|e_r^{(\rho)}(t)\right|+\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)},\rho\neq\Upsilon}\mu_r\left|c_{rr}^{(\Theta)}\right|\left|e_r^{(\Upsilon)}(t)\right|\Bigg\}\\
&\quad+\sum_{r=۱}^{n_r}\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{h=۱,h\neq r}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\mu_h\left|c_{hr}^{(\Theta)}\right|\left|e_r^{(\Upsilon)}\left(t-\sigma_{hr}^{l}(t)\right)\right|+\sum_{r=۱}^{n_r}\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{h=۱}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{l=۱}^{n_r}\mu_h\\
&\quad\times\left|a_{hl}^{(\Theta)}\right|F_l^{(\Upsilon)}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\left|w_{lr}^{(\widetilde{\Theta})}\right|\left|e_r^{(\widetilde{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{lr}^{d}(t)\right)\right|+\sum_{r=۱}^{n_r}\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{h=۱}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{k=۱}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\\
&\quad\sum_{s=۱}^{n_r}\mu_h\left|a_{hs}^{(\Theta)}\right|F_s^{(\Upsilon)}\left|w_{sk}^{f(\widetilde{\Theta})}\right|G_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\sum_{(\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\Omega_{(\widetilde{\Upsilon})}}\left|w_{kr}^{o(\widehat{\Theta})}\right|\left|e_r^{(\widehat{\Upsilon})}\left(t-\sigma_{kr}^{o}(t)-\sigma_{sk}^{f}(t)\right)\right|. \qquad (۱۲.۳)
\end{aligned}
$$

با فرض $\widehat{\rho}\in\Omega=\{R,I,J,K\}$ و $\sigma_r=max(\overline{\sigma}_r^{l},\overline{\sigma}_r^{d},\overline{\sigma}_r^{of})$ برای $r=۱,۲,\cdots,n_r$، داریم:

$$
\begin{aligned}
&D^{\alpha}V(t)\\
&\leq \sum_{r=۱}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_r\left\{-c_{rr}^{(R)}+\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{(\Theta,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)},\rho\neq\widehat{\rho}}\mu_r\left|c_{rr}^{(\Theta)}\right|\right\}\left|e_r^{(\widehat{\rho})}(t)\right|\\
&\quad+\sum_{r=۱}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_r\left\{\sum_{\rho\in\Omega}\left(\sum_{h=۱;h\neq r}^{n_r}\sum_{(\Theta,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_h}{\mu_r}\left|c_{hr}^{(\Theta)}\right|+\sum_{h=۱}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{l=۱}^{n_r}\frac{\mu_h}{\mu_r}\left|a_{hl}^{(\Theta)}\right|\right.\right.\\
&\quad\times F_l^{(\Upsilon)}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\left|w_{lr}^{(\widetilde{\Theta})}\right|+\sum_{h=۱}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{k=۱}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\sum_{s=۱}^{n_r}\mu_h\left|a_{hs}^{(\Theta)}\right|F_s^{(\Upsilon)}\left|w_{sk}^{f(\widetilde{\Theta})}\right|\\
&\quad\left.\left.\times G_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\sum_{(\widehat{\Theta},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\widetilde{\Upsilon})}}\left|w_{kr}^{o(\widehat{\Theta})}\right|\right)\right\}\sup_{\eta\in[۰,\sigma_r]}\left|e_r^{(\widehat{\rho})}(t-\eta)\right|\\
&\leq \sum_{r=۱}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_r\left(-\lambda_{۱r}^{(\widehat{\rho})}\left|e_r^{(\widehat{\rho})}(t)\right|+\lambda_{۲r}^{(\widehat{\rho})}\sup_{\eta\in[۰,\sigma_r]}\left|e_r^{(\widehat{\rho})}(t-\eta)\right|\right) \qquad (۱۳.۳)
\end{aligned}
$$

با توجه به قضیه (۷.۲.۱) و رابطه (۱۳.۳)، برای هر $۱>\alpha>۰$ نتیجه می گیریم که شبکه عصبی (۱.۳) دارای یک نقطه تعادل پایدار مجانبی است اگر $\lambda_{۱r}^{(\widehat{\rho})}>\lambda_{۲r}^{(\widehat{\rho})}>۰$. بنابراین، $V(t)\to ۰$ میل می کند و در نتیجه آن، $\left|e_r^{(\widehat{\rho})}(t)\right|\to ۰$ نیز برقرار است. کاملا واضح می باشد که $\lambda_r^{(\widehat{\rho})}=\lambda_{۱r}^{(\widehat{\rho})}-\lambda_{۲r}^{(\widehat{\rho})}>۰$ شرط رابطه (۳.۳) را تحقق می بخشد. از آنجا که تاخیر، اثری روی نتیجه بدست آمده ندارد، بخصوص اینکه در محاسبه شرط پایداری اثری ندارد، بنابراین نقطه تعادل، پایدار مجانبی مستقل از تاخیر می باشد.

□

نتیجه ۱.۱.۳. در معادله (۱۳.۳)، اگر $\lambda_{۲r}^{(\widehat{\rho})}$ و یا σ_r برای برخی از $r\in\{۱,۲,\cdots,n_r\}$ و $\widehat{\rho}\in\Omega$ برابر صفر باشد، آنگاه نمی توان از قضیه (۷.۲.۱) استفاده کرد. در نتیجه، نقطه تعادل این شبکه عصبی، پایدار مجانبی نیست در حالی که نقطه عادل همچنان پایدار می باشد.

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنید در شبکه عصبی (۱.۳)، تاخیر ها برابر صفر می باشند، آنگاه شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون دارای یک نقطه تعادل پایدار میتاگ_لفلر می باشد اگر $\lambda_r^{(\widehat{\rho})}$، تعریف شده در رابطه (۳.۳)، بازای $r=۱,۲,\cdots,n_r$ و $\widehat{\rho}\in\Omega$ مثبت باشد.

اثبات: با استفاده از رابطه (۹.۳) و تابع لیاپانوف $V(t)=\sum_{r=۱}^{n_r}\mu_r\sum_{\rho\in\Omega}\left|e_r^{(\rho)}(t)\right|$ و سپس

محاسبه مشتق مرتبه کسری تابع لیاپانوف، نتایج رابطه (۱۴.۳) و (۱۵.۳) بدست می آیند.

$$\begin{aligned}
&D^{\alpha}V(t)\\
&\le \sum_{r=1}^{n_r}\sum_{\rho\in\Omega}\left\{\sum_{(\Theta,\rho)\in\Omega_{(\rho)}} -\mu_r c_{rr}^{(\Theta)}\left|e_r^{(\rho)}(t)\right| + \sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)},\rho\neq\Upsilon}\mu_r\left|c_{rr}^{(\Theta)}\right|\left|e_r^{(\Upsilon)}(t)\right|\right\}\\
&\quad+\sum_{r=1}^{n_r}\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{h=1,h\neq r}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\mu_h\left|c_{hr}^{(\Theta)}\right|\left|e_r^{(\Upsilon)}(t)\right| + \sum_{r=1}^{n_r}\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{l=1}^{n_r}\mu_h\left|a_{hl}^{(\Theta)}\right|\\
&\quad\times F_l^{(\Upsilon)}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\left|w_{lr}^{(\widetilde{\Theta})}\right|\left|e_r^{(\widetilde{\Upsilon})}(t)\right| + \sum_{r=1}^{n_r}\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{jh=1}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{k=1}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\sum_{s=1}^{n_r}\mu_j\\
&\quad\times\left|a_{hs}^{(\Theta)}\right|F_s^{(\Upsilon)}\left|w_{sk}^{f(\widetilde{\Theta})}\right|G_k^{(\widetilde{\Upsilon})}\sum_{(\widehat{\Theta},\widehat{\Upsilon})\in\Omega_{(\widetilde{\Upsilon})}}\left|w_{kr}^{o(\widehat{\Theta})}\right|\left|e_r^{(\widehat{\Upsilon})}(t)\right|.\\
&\le \sum_{r=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_r\left\{-c_{rr}^{(R)}+\sum_{\rho\in\Omega}\left(\sum_{(\Theta,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)},\rho\neq\widehat{\rho}}\mu_r\left|c_{rr}^{(\Theta)}\right| + \sum_{h=1;h\neq r}^{n_r}\sum_{(\Theta,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_h}{\mu_r}\left|c_{hr}^{(\Theta)}\right|\right.\right.\\
&\quad+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{l=1}^{n_r}\frac{\mu_h}{\mu_r}\left|a_{hl}^{(\Theta)}\right|F_l^{(\Upsilon)}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\left|w_{lr}^{(\widetilde{\Theta})}\right| + \sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Theta,\Upsilon)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{k=1}^{n_o}\sum_{(\widetilde{\Theta},\widetilde{\Upsilon})\in\Omega_{(\Upsilon)}}\\
&\quad\left.\left.\sum_{s=1}^{n_r}\mu_h\left|a_{hs}^{(\Theta)}\right|F_s^{(\Upsilon)}\left|w_{sk}^{f(\widetilde{\Theta})}\right|G_k^{\widetilde{(\Upsilon)}}\sum_{(\widehat{\Theta},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\widetilde{\Upsilon})}}\left|w_{kr}^{o(\widehat{\Theta})}\right|\right)\right\}\left|e_r^{(\widehat{\rho})}(t)\right|
\end{aligned}$$

(۱۴.۳)

بنابراین

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}V(t) &\le -\sum_{r=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_r\lambda_r^{(\widehat{\rho})}\left|e_r^{(\widehat{\rho})}(t)\right|\\
&\le -\lambda_{min}\sum_{r=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_r\left|e_r^{(\widehat{\rho})}(t)\right|\\
&\le -\lambda_{min}V(t)
\end{aligned} \qquad (۱۵.۳)$$

که $\lambda_{min} = min_{i,\widehat{\rho}}\left(\lambda_i^{(\widehat{\rho})}\right)$ می باشد. رابطه (۱۵.۳) اثبات می کند که $V(t) = V(0)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_{min}t^{\alpha}\right)$ در حالی که $E_{\alpha,1}(z)$ تابع میتاگ_لفلر می باشد و برابر است با $E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$. در اینجا، اثبات تکمیل می شود.

□

نتیجه ۲.۱.۳. با توجه به نتایج بدست آمده در تئوری های (۱.۱.۳)، (۲.۱.۳) و (۳.۱.۳)، می توان نتیجه گرفت که در صورت تحقق شرط مثبت بودن $\lambda_r^{(\widehat{\rho})}$بازای $r = 1,2,\cdots,n_r$ و $\widehat{\rho}\in\Omega$ شبکه عصبی (۱.۳) همواره دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار می باشد و تاخیر نمی توان منجر به ناپایداری آن گردد.

ملاحظه ۱.۱.۳. در روند اثبات تئوری های (۱.۱.۳)، (۲.۱.۳) و (۳.۱.۳) بوضوح رویت می شود که ورودی کمکی، موقعیت نقطه تعادل شبکه عصبی را تغییر می دهد ولی تاثیری روی شرط پایداری و وجود نقطه تعادل یکتا ندارد. بنابراین، اگر اغتشاش ثابت را به همراه ورودی کمکی به شبکه عصبی اعمال شود، آنگاه اثری یکسان خواهد داشت.

ملاحظه ۲.۱.۳. با در نظر گرفتن، لم (۷.۲.۱)، براحتی می توان نشان داد که کلیه نتایج بدست آمده در تئوری های برای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری مختلط نیز صادق می باشد اگر فرض شود $\rho \in \Omega = \{R, I\}$ و

$$\Omega_{(R)} = \{(R,R), (I,I)\}, \qquad \Omega_{(I)} = \{(R,I), (I,R)\},$$
$$\widetilde{\Omega}_{(R)} = \{(1,R,R), (-1,I,I)\}, \qquad \widetilde{\Omega}_{(I)} = \{(1,R,I), (1,I,R)\}.$$

همچنین، این نتایج برای شبکه عصبی هاپفیلد مرتبه کسری مختلط/کواترنیون با/بدون تاخیر نیز قابل استفاده می باشند.

۴.۱.۳ نتایج شبیه سازی

در این بخش، سعی می شود تا با استفاده از شبیه سازی عددی، کارایی نتایج تئوری بدست امده اثبات گردد. برای اینکه بتوان از روش پیش بین_اصلاح کننده آدامز_باشفورث_مولتون[1] _که مناسب حل عددی معادلات دیفرانسیلی مرتبه کسری در حضور تاخیر می باشد_ استفاده کرد، نیاز است تا شبکه عصبی (۱.۳) به فرم رابطه (۱۶.۳) در نظر گرفته شود [۱۳۹].

$$\begin{aligned}
&D^{\alpha}\left(x_r(t)\right)\\
&= -\sum_{h=1}^{n_r} c_{rh} x_h\left(t-\sigma_{rh}^{l}\right) + \sum_{h=1}^{n_r} a_{rh} f_h\left(\sum_{j=1}^{n_r} w_{hj}^{in} u_j\left(t-\sigma_{hj}^{in}\right) + \sum_{l=1}^{n_r} w_{hl} x_l\left(t-\sigma_{hl}^{d}\right)\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{k=1}^{n_o} w_{hk}^{f} y_k\left(t-\sigma_{hk}^{f}\right)\right) + \mathcal{U}_r, \qquad t\in[0,T], 0<v<1\\
&y_k(t) = g_k\left(\sum_{s=1}^{n_r} w_{ks}^{o} x_s\left(t-\sigma_{ks}^{o}\right)\right), \qquad t\in[-\sigma,T],\\
&x(t) = \xi(t), \qquad t\in[-\sigma,0),
\end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

که σ بزرگترین تاخیری است که در حالت های رزروير رخ می دهد و $\xi(t)$ نیز تابعی است که شرایط اولیه سیستم را تولید می کند. در شبیه سازی ها، زمان نمونه برداری $\widetilde{h} = 0/002$ در نظر گرفته شد و همچنین، $\xi(t)$ در مثال های ۱ و ۳، بصورت یک رشته تصادفی توزیع

[1] Adams-Bashforth- Moulton Predictor-Corrector

شده یکنواخت کواترنیون[۱] و در مثال ۲ نیز بصورت یک رشته تصادفی توزیع شده یکنواخت مختلط[۲] فرض شد. در مثال های ۱ و ۲، در دو تست، اثر شرایط اولیه و تاخیر بر روی دو شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون و مختلط آنالیز می شود. در مثال ۳، در دو تست مجزا، از معیار پایداری بدست آمده در طراحی فیدبک حالت پایدار کننده برای یک شبکه عصبی ناپایدار تاخیردار استفاده می شود.

مثال ۱.۱.۳. شبکه عصبی رابطه (۱.۳) را با پارامترهای زیر در نظر بگیرید.

$$C = \begin{bmatrix} ۳ + ۰/۱\imath - ۰/۱\jmath + ۰/۲\kappa & ۰/۱ + ۰/۳\imath - ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa \\ ۰/۱ - ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa & ۳ - ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa \end{bmatrix},$$

$$W^f = \begin{bmatrix} ۰/۱ - ۰/۲\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۱\kappa \\ ۰/۲ + ۰/۳\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa \end{bmatrix}, W^o = \begin{bmatrix} ۰/۱ - ۰/۱\imath + ۰/۲\jmath - ۰/۱\kappa \\ ۰/۱ + ۰/۲\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۱\kappa \end{bmatrix}^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} ۰/۱ + ۰/۱\imath - ۰/۱\jmath + ۰/۲\kappa & ۰/۲ - ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۲\kappa \\ ۰/۱ - ۰/۱\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa & ۰/۱ + ۰/۱\imath - ۰/۱\jmath + ۰/۳\kappa \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} ۰/۱ - ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa & -۰/۱\imath + ۰/۲\jmath - ۰/۱\kappa \\ ۰/۱ + ۰/۲\imath - ۰/۱\jmath + ۰/۲\kappa & ۰/۲ + ۰/۱\imath - ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa \end{bmatrix},$$

$$\sigma^l(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۵ + ۰/۵\cos^۲(۰/۱t) \\ ۰/۲ + ۰/۲\sin^۲(t) & ۰ \end{bmatrix}, \ \mathcal{U} = \begin{bmatrix} ۹ + ۱\imath - ۰/۵\jmath + ۴\kappa \\ -۶ + ۵\imath + ۷\jmath - ۱\kappa \end{bmatrix},$$

$$d(t) = \begin{bmatrix} ۲ + ۲\imath + ۲\jmath + ۲\kappa \\ ۱ + ۱\imath + ۱\jmath + ۱\kappa \end{bmatrix}, \sigma^d(t) = \begin{bmatrix} ۰/۵ + ۰/۱\cos(t) & ۱ + ۰/۲\sin(t) \\ ۰/۳ + ۰/۲\sin(t) & ۰/۵ + ۰/۳\cos(t) \end{bmatrix},$$

$$\sigma^f(t) = \begin{bmatrix} ۱ + ۰/۵\sin(۰/۱t) \\ ۰/۵ + ۰/۲\cos(۰/۱t) \end{bmatrix}, \sigma^o(t) = \begin{bmatrix} ۰/۳ + ۰/۲\cos(۰/۱t) & ۰/۱ + ۰/۱\sin(۰/۱t) \end{bmatrix}.$$

که همه اجزاء توابع فعالسازی تانژانت هایپربولیک ($\tanh(\cdot)$) و مشتق کپوتو مرتبه $\alpha = ۰/۹$ هستند. بنابراین، برای کلیه $h = ۱,۲,\cdots,n_r$، $k = ۱,۲,\cdots,n_o$ و $\rho \in \Omega$، ثابت لیپشیتز $F_h^{(\rho)}$ و $G_k^{(\rho)}$ برابر با ۱ است.

با استفاده از تاخیر شبکه عصبی مقادیر $\overline{\sigma}^l = [۰/۴,۱]$، $\overline{\sigma}^d = [۰/۶,۱/۲]$ و $\overline{\sigma}^{of} = [۱/۸۴,۱/۷]$ و در نتیجه $۰ < ۱/۸۴ = \sigma_۱$ و $۰ < ۱/۷ = \sigma_۲$ بدست می آیند. با استفاده از پارامترهای شبکه عصبی و از نتایج تئوری (۱.۱.۳) مقادیر $\theta_۱^{(R)} = ۲/۸۶۶$، $\theta_۱^{(I)} = ۲/۸۵$، $\theta_۲^{(I)} = ۲/۸۷$، $\theta_۱^{(J)} = ۲/۸۵۲/۸۷$، $\theta_۱^{(J)} = ۲/۸۵$، $\theta_۱^{(K)} = ۲/۸۵۴$ و $\theta_۲^{(K)} = ۲/۸۹$ بدست می آیند. همچنین، با استفاده از نتایج تئوری (۲.۱.۳) مقادیر شروط پایداری برابر با $\lambda_۱^{(R)} = [۲/۶;۲/۶]$، $\lambda_۲^{(R)} = [۲/۴۶۶;۲/۴۹]$، $\lambda_۱^{(I)} = [۲/۶;۲/۶]$، $\lambda_۱^{(I)} = [۲/۶;۲/۶]$ و $\lambda_۲^{(K)} = [۲/۴۵۴;۲/۴۹]$ بدست می آیند. این نتایج اثبات می کند که $۰ < \lambda_{۲r}^{(\widehat{\rho})} < \lambda_{۱r}^{(\widehat{\rho})}$ برای $r = ۱,۲$ و $\widehat{\rho} \in \Omega$. در نهایت، با استفاده از این نتایج و تئوری (۳.۱.۳) مقادیر $\lambda^{(R)} = [۰/۱۳۴;۰/۱۱]^T$، $\lambda^{(I)} = [۰/۱۵;۰/۱۳]^T$،

[1] Uniformly Random Distributed Unit Quaternions
[2] Uniformly Random Distributed Unit Complexes

جدول ۱.۳: نقطه تعادل شبکه عصبی مثال (۱.۱.۳)، با/بدون اغتشاش ثابت $d(t)$

حالت های رزروير	نقطه تعادل یکتا	
	بدون اغتشاش $d(t)$ $(t \leq ۳۰$ ثانیه$)$	با اغتشاش $d(t)$ $(t > ۳۰$ ثانیه$)$
$x_۱$	$۳/۲ + ۰/۵۲\imath - ۰/۲\jmath + ۰/۸۸\kappa$	$۳/۹ + ۱/۲\imath + ۰/۵\jmath + ۱/۴\kappa$
$x_۲$	$-۲/۲ + ۱/۷\imath + ۲/۲\jmath - ۰/۱۵\kappa$	$-۱/۹۷ + ۲\imath + ۲/۴\jmath + ۰/۲\kappa$

$\lambda^{(J)} = [۰/۱۵; ۰/۱۳]^T$ و $\lambda^{(K)} = [۰/۱۴۶; ۰/۱۱]^T$ بدست می آیند. بنابراین، با استفاده از این نتایج و مطابق با تئوری (۱.۱.۳) و (۲.۱.۳) نتیجه می گیریم که شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون رابطه (۱.۳) با پارارمترهای فوق، دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار مجانبی مستقل از تاخیر می باشد.

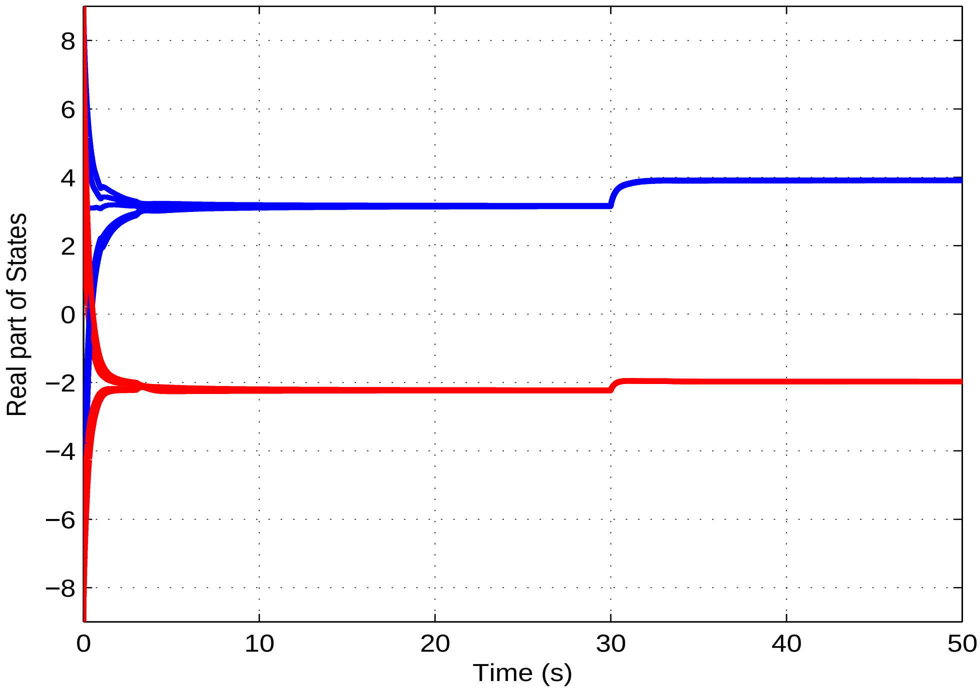
تست ۱: در این تست، شبیه سازی بازای پنج شرایط اولیه $x_۱(۰) = x_۲(۰) = b + b\imath + b\jmath + b\kappa$، که $b \in \{۳, -۹, ۶, -۶, ۹\}$ می باشند، انجام شد. همچنین عملکرد حالت های رزروير در حضور اغتشاش ثابت $d(t)$ که در لحظه $t = ۳۰$ ثانیه اعمال شد، در شبیه سازی ها بررسی شد. نتایج شبیه سازی ارایه شده در شکل (۱.۳) نشان می دهد که پاسخ ها بازای هر شرایط اولیه دلخواه به یک نقطه تعادل یکتا همگرا شده است. اگر چه، موقعیت نقطه تعادل در اثر اغتشاش تغییر می کند، ولی بر یکتایی و پایداری نقطه تعادل اثری ندارد. یعنی اغتشاش محدود منجر به ناپایداری نخواهد شد. موقعیت نقطه تعادل در/عدم حضور اغتشاش در جدول (۱.۳) گزارش شده است.

تست ۲: در این تست، اثر افزایش تاخیر، که در رابطه زیر آمده است، به همراه مواردی(شرایطی) که در تست ۱ در نظر گرفته شدند، بررسی می شود.

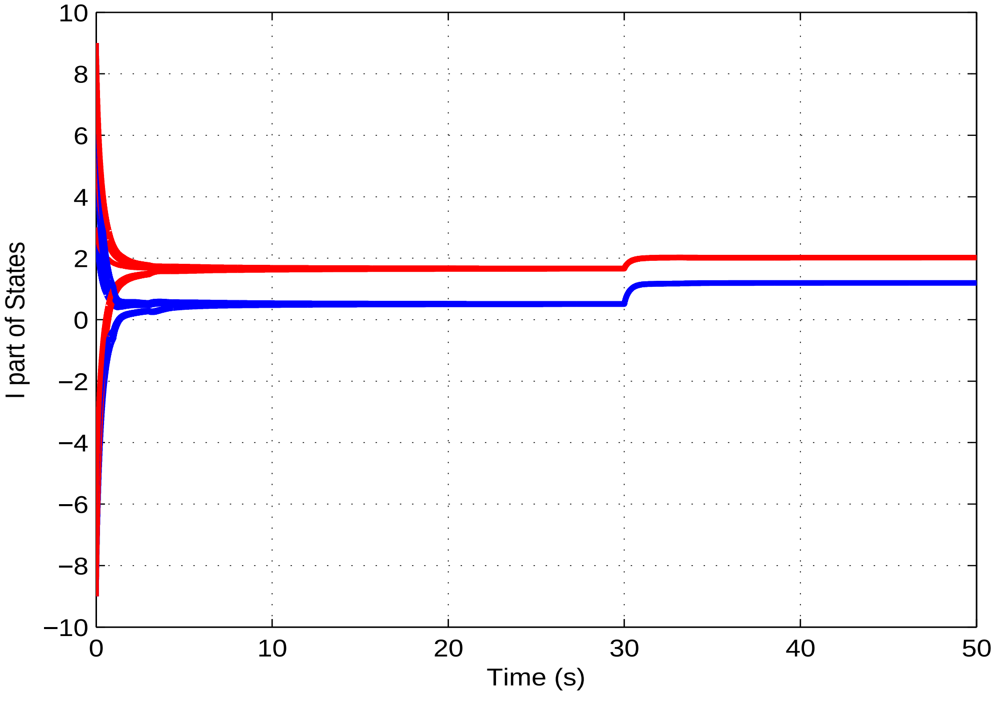
$$\sigma^l(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۸ + ۵\cos^۲(۰/۱t) \\ ۵ + ۸\sin^۲(۰/۱t) & ۰ \end{bmatrix}, \sigma^d(t) = \begin{bmatrix} ۸ + ۵\cos(t) & ۸ + ۷\sin(t) \\ ۸ + ۷\sin(t) & ۸ + ۵\cos(t) \end{bmatrix},$$
$$\sigma^o(t) = \begin{bmatrix} ۵ + ۳\sin(۰/۱t) & ۳ + ۲\cos(۰/۱t) \end{bmatrix}, \sigma^f(t) = \begin{bmatrix} ۴ + ۲\cos(۰/۱t) \\ ۵ + ۴\sin(۰/۱t) \end{bmatrix}.$$

برای تاخیر های جدید، مقادیر $\overline{\sigma}^l = [۱۲, ۱۲]$، $\overline{\sigma}^d = [۱۵, ۱۵]$ و $\overline{\sigma}^{of} = [۱۷, ۱۲/۴۷]$ و در نتیجه $\sigma_۱ = ۱۷ > ۰$ و $\sigma_۲ = ۱۵ > ۰$ بدست می آیند. نتایج شبیه سازی در شکل (۲.۳) نیز تائید می کنند که افزایش تاخیر در این شبکه عصبی روی پایداری مجانبی نقطه تعادل یکتای آن اثری ندارد. موقعیت نقطه تعادل شبکه عصبی تست ۲ نیز در/عدم حضور اغتشاش با نتایج گزارش شده در جدول (۱.۳) یکسان می باشد. با مقایسه نتایج تست ۱ و ۲، نتیجه می گیریم که با افزایش تاخیر سرعت همگرایی پاسخ ها کاهش یافته است.

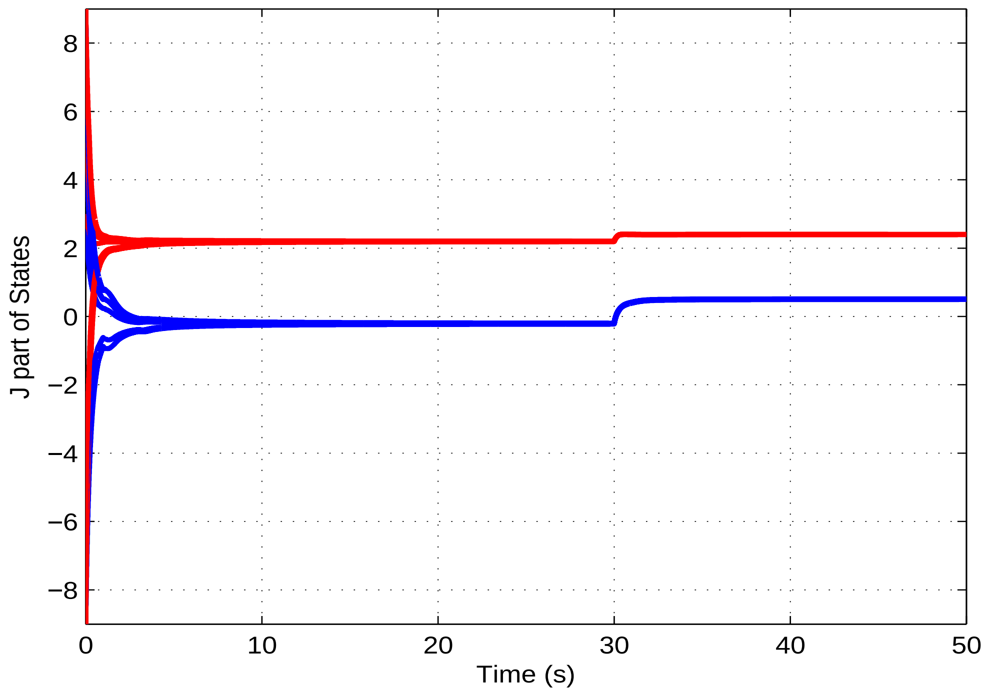
مثال ۲.۱.۳. شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری مختلط (۱.۳)، مطابق با ملاحظه



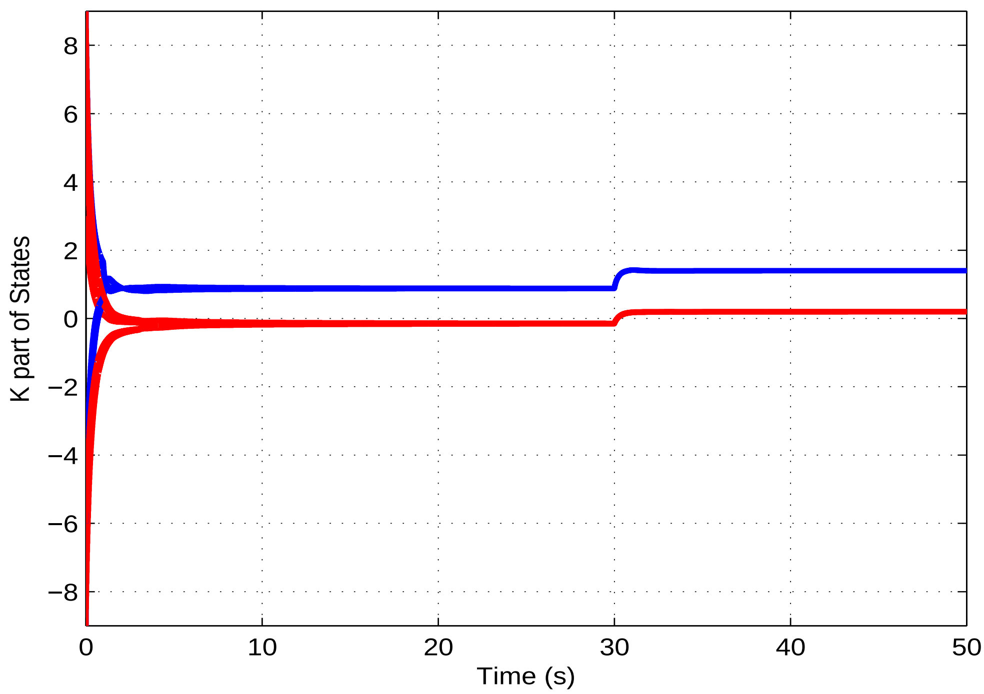
(آ) بخش حقیقی حالت های رزرویر



(ب) بخش $\imath$ حالت های رزرویر

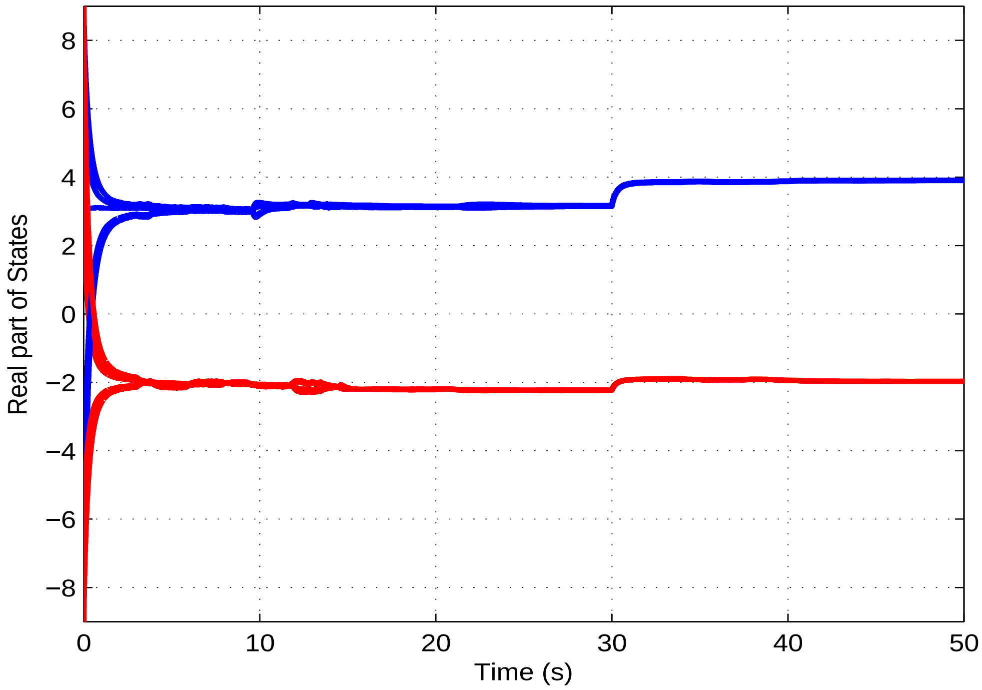


(ج) بخش $\jmath$ حالت های رزرویر

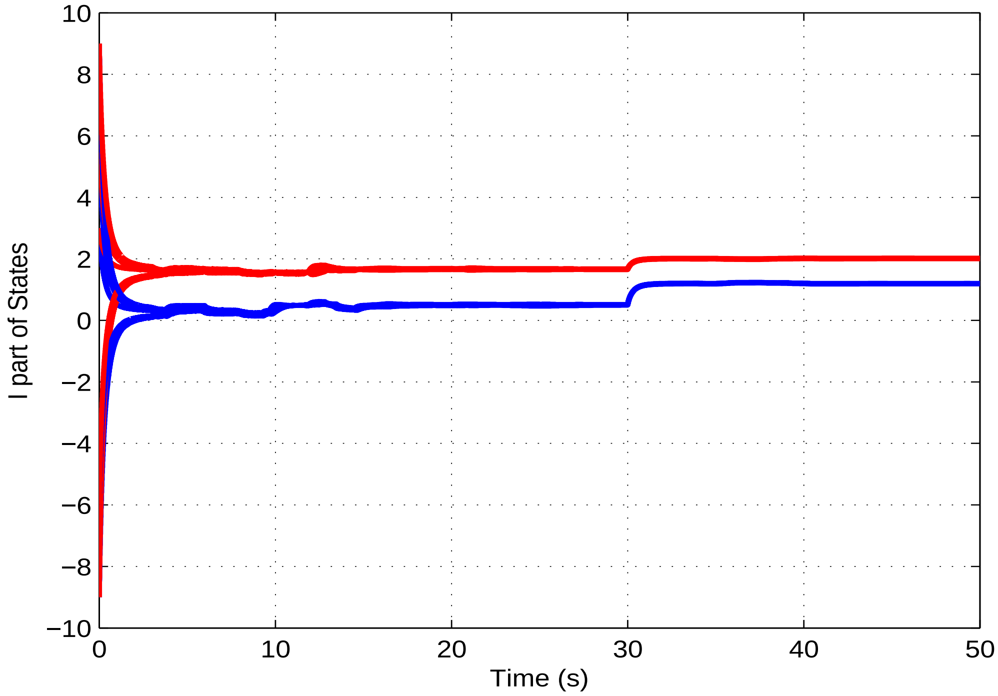


(د) بخش κ حالت های رزرویر

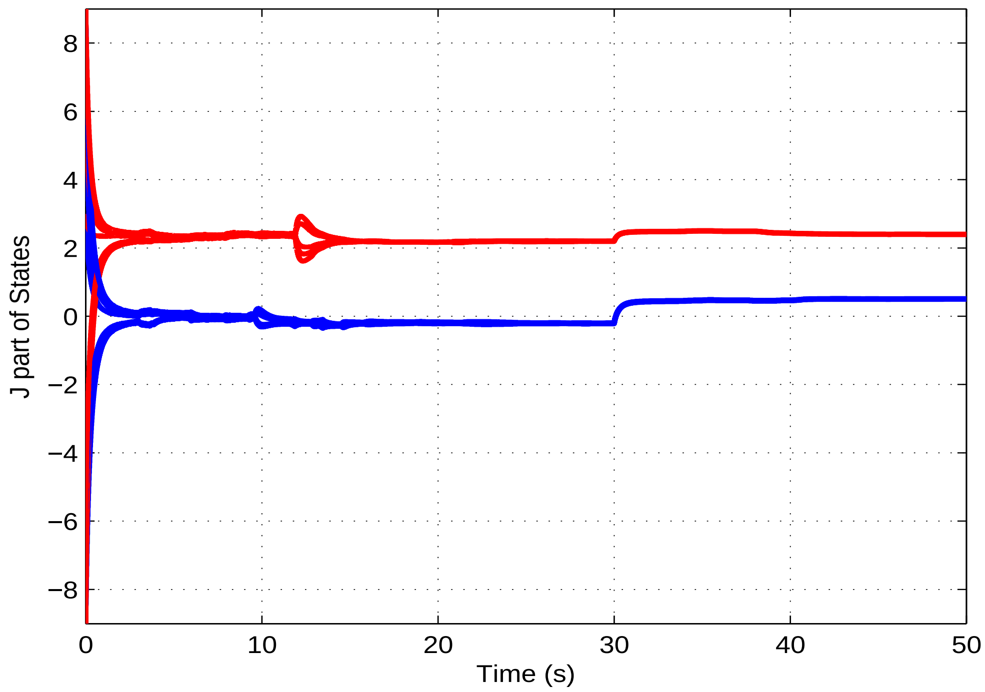
شکل ۱.۳: حالت های رزرویر مثال (۱.۱.۳) تست ۱ بازای شرایط اولیه متفاوت، x_1 (آبی) و x_2 (قرمز)



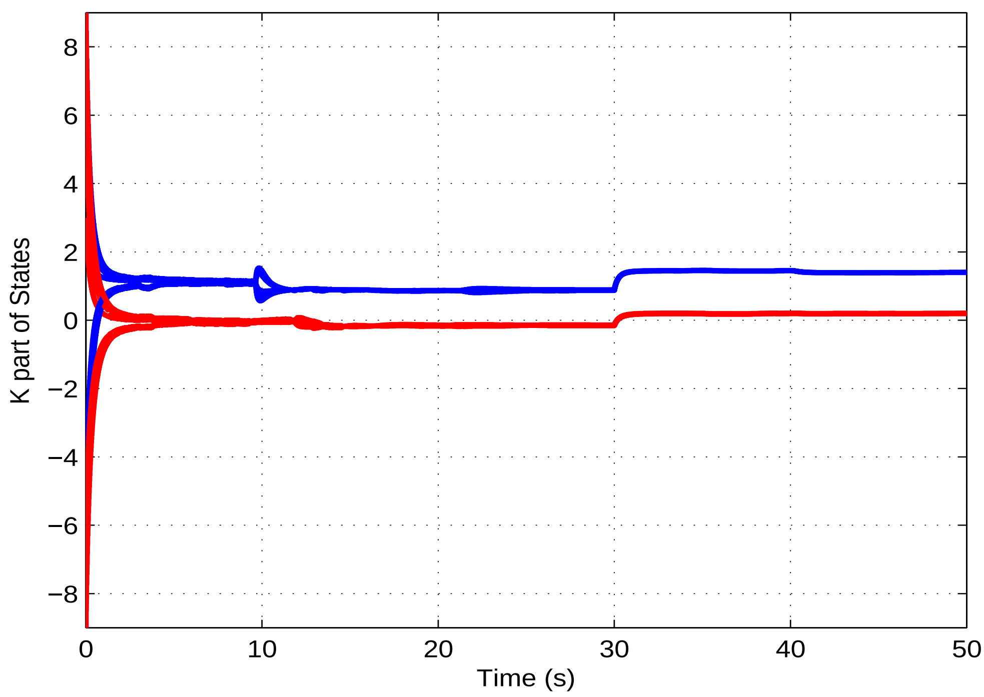
(آ) بخش حقیقی حالت های رزروير



(ب) بخش $\imath$ حالت های رزروير



(ج) بخش $\jmath$ حالت های رزرویر



(د) بخش κ حالت های رزرویر

شکل ۲.۳: حالت های رزرویر مثال (۱.۱.۳) تست ۲ بازای شرایط اولیه متفاوت، x_1 (آبی) و x_2 (قرمز)

(۳.۲.۳)، با پارامترهای زیر را در نظر بگیرید.

$$C=\begin{bmatrix} ۳/۸-۰/۵\imath & -۰/۱+۰/۲\imath \\ -۰/۵-۰/۳\imath & ۳/۵+۰/۴\imath \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} ۰/۴-۰/۵\imath & -۰/۱-۰/۳\imath \\ -۰/۵+۰/۴\imath & -۰/۲+۰/۲\imath \end{bmatrix},$$
$$W^f=\begin{bmatrix} -۰/۵+۰/۳\imath \\ ۰/۴-۰/۵\imath \end{bmatrix},\ W^o=\begin{bmatrix} -۰/۳+۰/۲\imath \\ ۰/۲-۰/۴\imath \end{bmatrix}^T, d(t)=\begin{bmatrix} ۲+۲\imath \\ ۱+۱\imath \end{bmatrix},$$
$$W=\begin{bmatrix} ۰/۲-۰/۳\imath & -۰/۴+۰/۳\imath \\ ۰/۱-۰/۳\imath & ۰/۱-۰/۱\imath \end{bmatrix}, \sigma^l(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۰/۵+۰/۴\cos(۰/۱t) \\ ۰/۲+۰/۱\sin(t) & ۰ \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{U}=\begin{bmatrix} -۴+۸\imath \\ -۶-۸\imath \end{bmatrix}, \sigma^d(t)=\begin{bmatrix} ۰/۲+۰/۴|\cos(۰/۲t)| & ۱+۰/۸|\sin(۰/۲t)| \\ ۰/۱+۰/۵|\sin(۰/۲t)| & ۰/۲+۰/۵|\cos(۰/۲t)| \end{bmatrix},$$
$$\sigma^f(t)=\begin{bmatrix} ۰/۱+۰/۵|\sin(۰/۵t)| \\ ۰/۲+۰/۵|\cos(۰/۵t)| \end{bmatrix}, \sigma^o(t)=\begin{bmatrix} ۰/۵|\cos(۰/۵t)| & ۰/۸|\sin(۰/۵t)| \end{bmatrix}.$$

که همه اجزاء توابع فعالسازی تانژانت هایپربولیک ($\tanh(\cdot)$) و مشتق کپوتو مرتبه $\alpha=۰/۸$ هستند. بنابراین، برای کلیه $h=۱,۲,\cdots,n_r$، $k=۱,۲,\cdots,n_o$ و $\rho\in\Omega=\{R,I\}$، ثابت لیپشیتز $F_h^{(\rho)}$ و $G_k^{(\rho)}$ برابر با ۱ است.

با استفاده از تاخیر شبکه عصبی مقادیر $\overline{\sigma}^l=[۰/۳,۰/۹]$، $\overline{\sigma}^d=[۰/۶,۱/۸]$ و $\overline{\sigma}^{of}=[۱/۲,۱/۴]$ و در نتیجه $\sigma_۱=۱/۲>۰$ و $\sigma_۲=۱/۸>۰$ بدست می آید. با استفاده از پارامترهای شبکه عصبی و از نتایج تئوری (۱.۱.۳) و ملاحظه (۳.۲.۳)، مقادیر $\theta_۱^{(R)}=۳/۶۰۲$، $\theta_۲^{(R)}=۳/۴۱۲$، $\theta_۱^{(I)}=۳/۵۹۸$ و $\theta_۲^{(I)}=۳/۴۲$ بدست می آیند. همچنین، با استفاده از نتایج تئوری (۲.۱.۳) و ملاحظه (۳.۲.۳)، مقادیر شروط پایداری برابر با $\lambda_۱^{(R)}=[۳/۳;۳/۱]$، $\lambda_۲^{(R)}=[۳/۱۰۲;۳/۰۱۲]$، $\lambda_۱^{(I)}=[۳/۳;۳/۱]$ و $\lambda_۲^{(I)}=[۳/۰۹۸;۳/۰۲]$ بدست می آیند. این نتایج اثبات می کند که $\lambda_{۱r}^{(\widehat{\rho})}>\lambda_{۲r}^{(\widehat{\rho})}>۰$ برای $r=۱,۲$ و $\widehat{\rho}\in\Omega$. در نهایت، با استفاده از این نتایج و تئوری (۳.۱.۳) و ملاحظه (۳.۲.۳)، مقادیر $\lambda^{(R)}=[۰/۱۹۸;۰/۰۸۸]^T$ و $\lambda^{(I)}=[۰/۲۰۲;۰/۰۸]^T$ بدست می آیند. بنابراین، با استفاده از این نتایج و مطابق با تئوری (۱.۱.۳) و (۲.۱.۳) نتیجه می گیریم که شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری مختلط رابطه (۱.۳) با پارامترهای فوق، دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار مجانبی مستقل از تاخیر می باشد.

تست ۱: در این تست، شبیه سازی بازای پنج شرایط اولیه $(x_۱(۰),x_۲(۰))\in\{(۳+۳\imath,۳+۳\imath)$, $(۵\imath,-۱-۵\imath)$, $(-۲+۲\imath,۲-\imath)$, $(-۵,-۵-۳\imath)$, $(-۷+\imath,۷+\imath)\}$ انجام شد.

همچنین عملکرد حالت های رزرویر در حضور اغتشاش ثابت $d(t)$ که در لحظه $t=۲۰$ ثانیه اعمال شد، در شبیه سازی ها بررسی شد. نتایج شبیه سازی ارایه شده در شکل (۳.۳) نشان می دهد که پاسخ ها بازای هر شرایط اولیه دلخواه به یک نقطه تعادل یکتا همگرا شده است. اگر چه، موقعیت نقطه تعادل در اثر اغتشاش تغییر می کند، ولی با یکتایی و پایداری نقطه تعادل تضادی ندارد. یعنی اغتشاش محدود منجر به ناپایداری نخواهد شد. موقعیت نقطه تعادل در/عدم حضور اغتشاش در جدول (۲.۳) گزارش شده است.

جدول ۲.۳: نقطه تعادل شبکه عصبی مثال (۲.۱.۳)، با/بدون اغتشاش ثابت $d(t)$

حالت های رزروير	نقطه تعادل یکتا	
	بدون اغتشاش $d(t)$ ($t \leq ۲۰$ ثانیه)	با اغتشاش $d(t)$ ($t > ۲۰$ ثانیه)
$x_۱$	$-۱/۲ + ۱/۸۵\imath$	$۰/۹ - ۲/۳\imath$
$x_۲$	$-۰/۷۱ + ۲/۴\imath$	$۱/۲۷ - ۱/۹۱\imath$

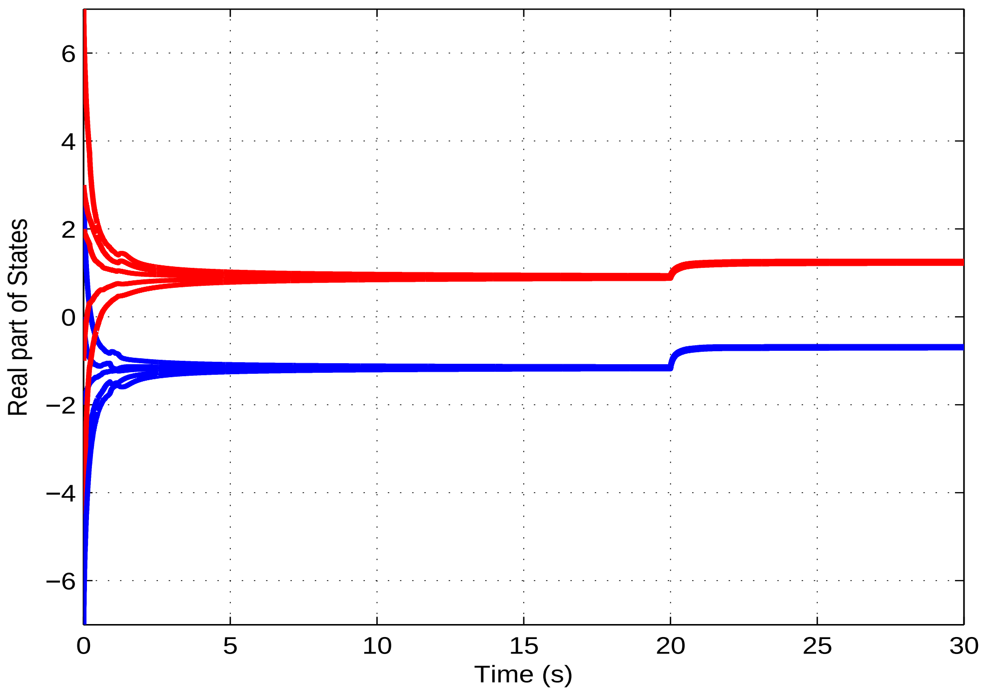
تست ۲: در این تست، اثر افزایش تاخیر، که در رابطه زیر آمده است، به همراه مواردی(شرایطی) که در تست ۱ در نظر گرفته شدند، بررسی می شود.

$$\sigma^d(t) = \begin{bmatrix} ۱ + ۲|\cos(۰/۲t)| & ۵ + ۴|\sin(۰/۲t)| \\ ۰/۵ + ۲/۵|\sin(۰/۲t)| & ۱ + ۲/۵|\cos(۰/۲t)| \end{bmatrix},$$
$$\sigma^l(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۲/۵ + ۲\cos(۰/۱t) \\ ۱ + ۰/۵\sin(t) & ۰ \end{bmatrix},$$
$$\sigma^o(t) = \begin{bmatrix} ۲/۵|\cos(۰/۵t)| & ۴|\sin(۰/۵t)| \end{bmatrix}, \sigma^f(t) = \begin{bmatrix} ۰/۵ + ۲/۵|\sin(۰/۵t)| \\ ۱ + ۲/۵|\cos(۰/۵t)| \end{bmatrix}.$$

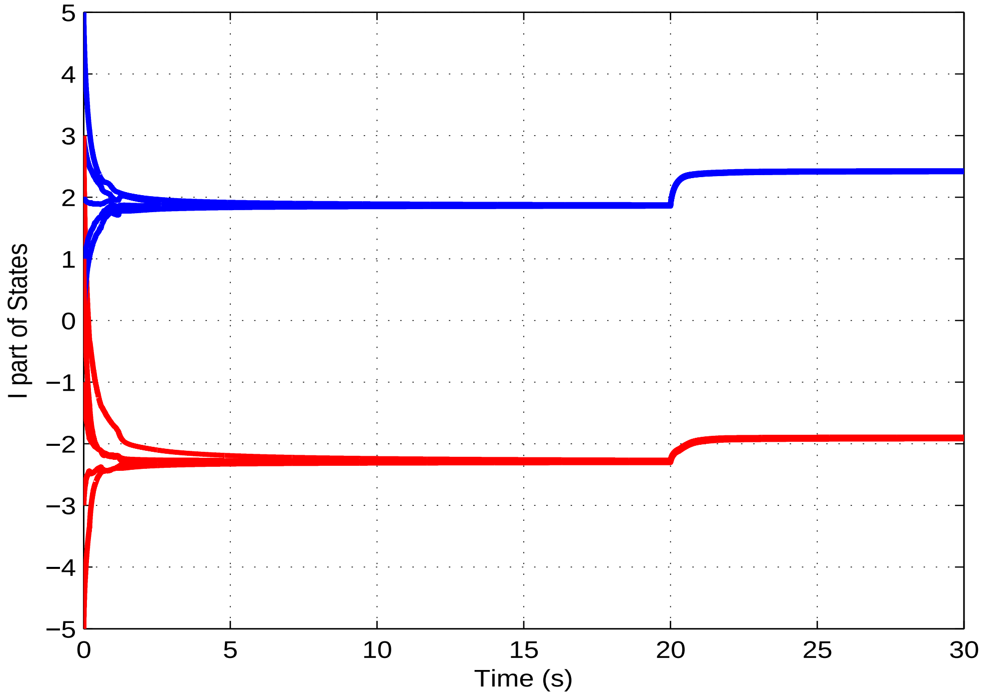
برای تاخیر های جدید، مقادیر $\overline{\sigma}^l = [۱/۵, ۴/۵]$، $\overline{\sigma}^d = [۳, ۹]$ و $\overline{\sigma}^{of} = [۶, ۷]$ و در نتیجه $۰ < ۶ = \sigma_۱$ و $۰ < ۹ = \sigma_۲$ بدست می آیند. نتایج شبیه سازی در شکل (۴.۳) نیز تائید می کنند که افزایش تاخیر در این شبکه عصبی روی پایداری مجانبی نقطه تعادل یکتای آن اثری ندارد. موقعیت نقطه تعادل شبکه عصبی تست ۲ نیز در/عدم حضور اغتشاش با نتایج گزارش شده در جدول (۲.۳) یکسان است. با مقایسه نتایج تست ۱ و ۲، نتیجه می گیریم که با افزایش تاخیر سرعت همگرایی پاسخ ها کاهش یافته است.

مثال ۳.۱.۳. شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون (۱.۳) با پارامترهای زیر را در نظر بگیرید.

$$C = \begin{bmatrix} ۰/۸ + ۰/۷\imath + ۰/۴\jmath - ۰/۳\kappa & -۰/۳ - ۰/۷\imath + ۰/۶\jmath - ۰/۳\kappa \\ ۰/۸ - ۰/۳\imath + ۰/۴\jmath - ۰/۳\kappa & -۰/۵ + ۰/۴\imath - ۰/۸\jmath + ۰/۱\kappa \end{bmatrix},$$
$$W^f = \begin{bmatrix} ۰/۱ - ۰/۴\imath - ۰/۲\jmath - ۰/۱\kappa \\ ۰/۳ + ۰/۱\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۳\kappa \end{bmatrix}, W^o = \begin{bmatrix} ۰/۳ - ۰/۳\imath - ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa \\ -۰/۳ + ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa \end{bmatrix}^T,$$
$$A = \begin{bmatrix} -۰/۲ - ۰/۳\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۱\kappa & -۰/۲ - ۰/۲\imath - ۰/۱\jmath + ۰/۲\kappa \\ -۰/۱ + ۰/۲\imath + ۰/۲\jmath - ۰/۳\kappa & ۰/۱ - ۰/۴\imath - ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa \end{bmatrix},$$
$$W = \begin{bmatrix} -۰/۴ - ۰/۱\imath - ۰/۱\jmath - ۰/۲\kappa & ۰/۱ + ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath - ۰/۴\kappa \\ -۰/۲ - ۰/۳\imath + ۰/۳\jmath - ۰/۱\kappa & ۰/۱ + ۰/۲\imath - ۰/۴\jmath - ۰/۱\kappa \end{bmatrix},$$
$$\sigma^l(t) = \begin{bmatrix} ۰ & \cos^۲(۰/۱t) \\ ۲\sin^۲(۰/۱t) & ۰ \end{bmatrix}, \mathcal{U} = \begin{bmatrix} -۳ - ۵\imath - ۷\jmath - ۹\kappa \\ ۲ + ۴\imath + ۶\jmath + ۸\kappa \end{bmatrix},$$

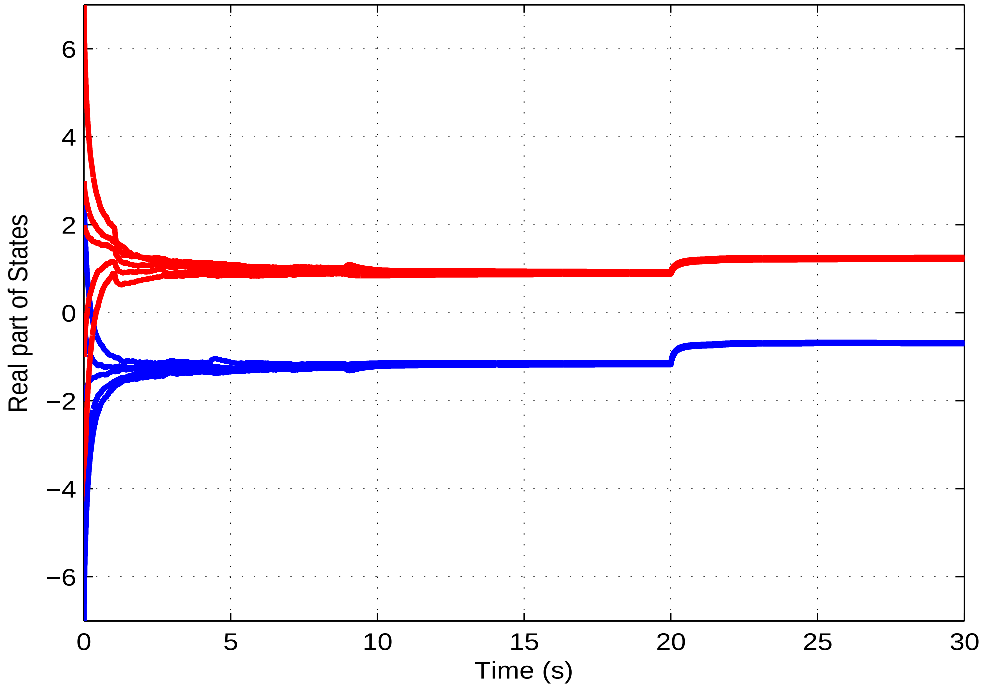


(آ) بخش حقیقی حالت های رزروير

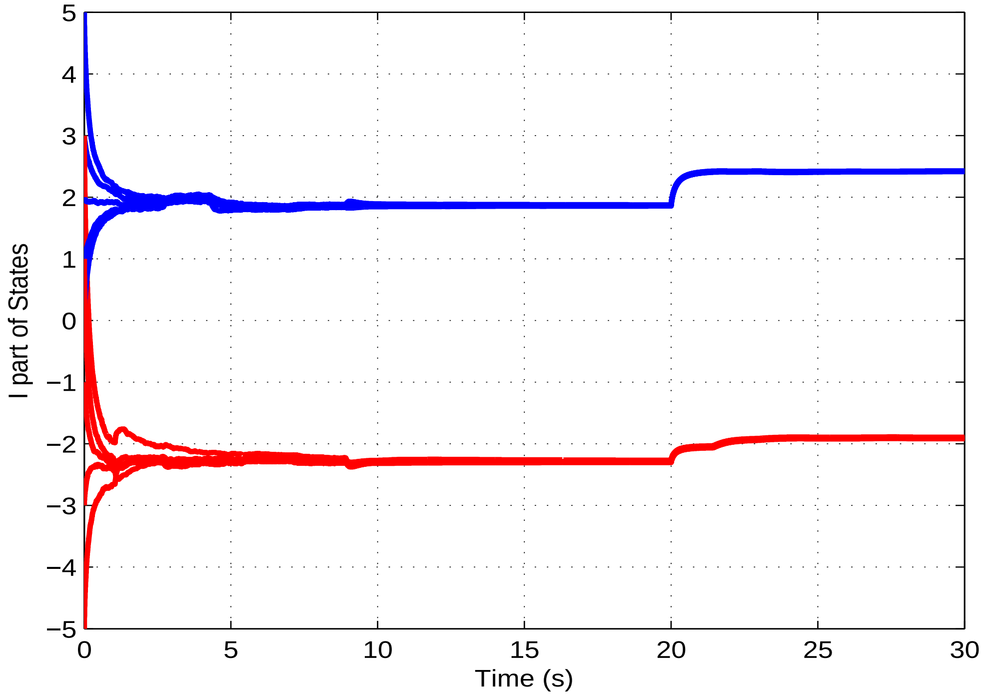


(ب) بخش $\imath$ حالت های رزروير

شکل ۳.۳: حالت های رزروير مثال (۲.۱.۳) تست ۱ بازای شرایط اولیه متفاوت، x_1 (آبی) و x_2 (قرمز)



(آ) بخش حقیقی حالت های رزروير



(ب) بخش $\imath$ حالت های رزروير

شکل ۴.۳: حالت های رزروير مثال (۲.۱.۳) تست ۲ بازای شرایط اولیه متفاوت، x_1 (آبی) و x_2 (قرمز)

جدول ۳.۳: نقطه تعادل شبکه عصبی مثال (۳.۱.۳)، با/بدون اغتشاش ثابت $d(t)$ در حضور کنترلر

حالت های رزروویر	نقطه تعادل یکتا	
	با اغتشاش $d(t)$ ($t > ۱۰$ ثانیه)	بدون اغتشاش $d(t)$ ($t \leq ۱۰$ ثانیه)
$x_۱$	$۰/۲۳ - ۰/۰۶\imath - ۰/۳\jmath - ۰/۱۹\kappa$	$-۰/۴۸ - ۰/۵۷\imath - ۰/۹۶\jmath - ۰/۹۴\kappa$
$x_۲$	$۰/۵۳ + ۱/۰۶\imath + ۱/۳۷\jmath + ۱/۲۹\kappa$	$۰/۲۴ + ۰/۷۶\imath + ۱/۰۳\jmath + ۰/۹۶\kappa$

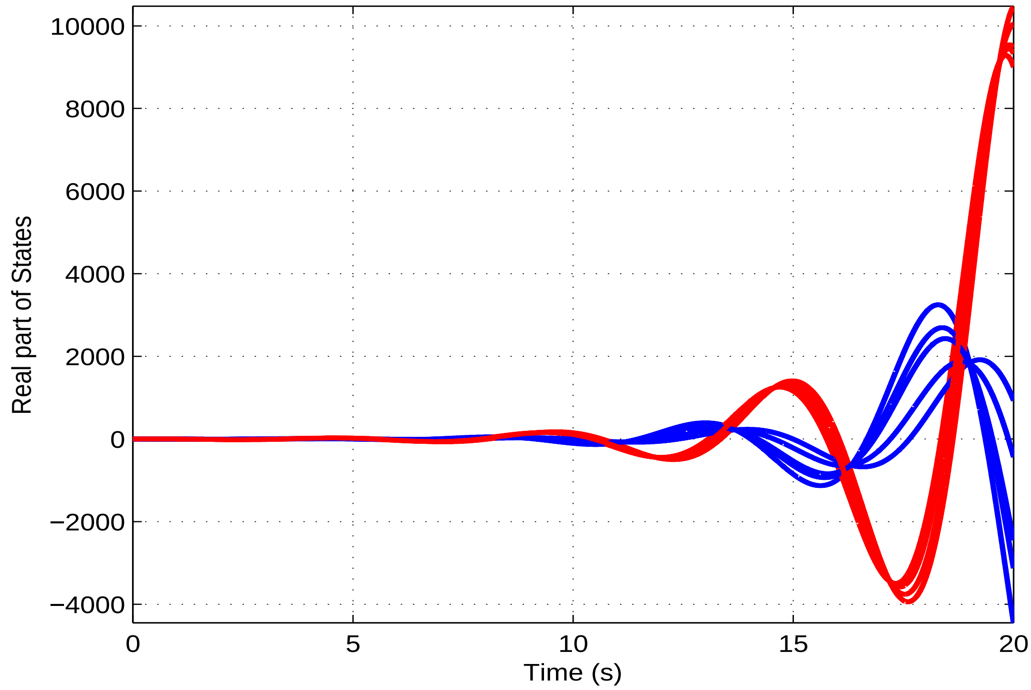
$$d(t) = \begin{bmatrix} ۵ + ۵\imath + ۵\jmath + ۵\kappa \\ ۳ + ۳\imath + ۳\jmath + ۳\kappa \end{bmatrix}, \sigma^d(t) = \begin{bmatrix} ۲ + \cos^۲(۰/۱t) & ۱ + \sin^۲(۰/۱t) \\ ۳ + \sin^۲(۰/۱t) & ۵ + ۴\cos^۲(۰/۱t) \end{bmatrix},$$
$$\sigma^f(t) = \begin{bmatrix} ۱ + ۳|\sin(۰/۱t)| \\ ۳ + ۲|\cos(۰/۱t)| \end{bmatrix}, \sigma^o(t) = \begin{bmatrix} ۲ + ۲|\cos(۰/۱t)| & ۱ + |\sin(۰/۱t)| \end{bmatrix}.$$

که همه اجزاء توابع فعالسازی تانژانت هایپربولیک ($\tanh(\cdot)$) و مشتق کپوتو مرتبه $\alpha = ۰/۷$ هستند. بنابراین، برای کلیه $h = ۱, ۲, \cdots, n_r$، $k = ۱, ۲, \cdots, n_o$ و $\rho \in \Omega$، ثابت لیپشیتز $F_h^{(\rho)}$ و $G_k^{(\rho)}$ برابر با ۱ است.

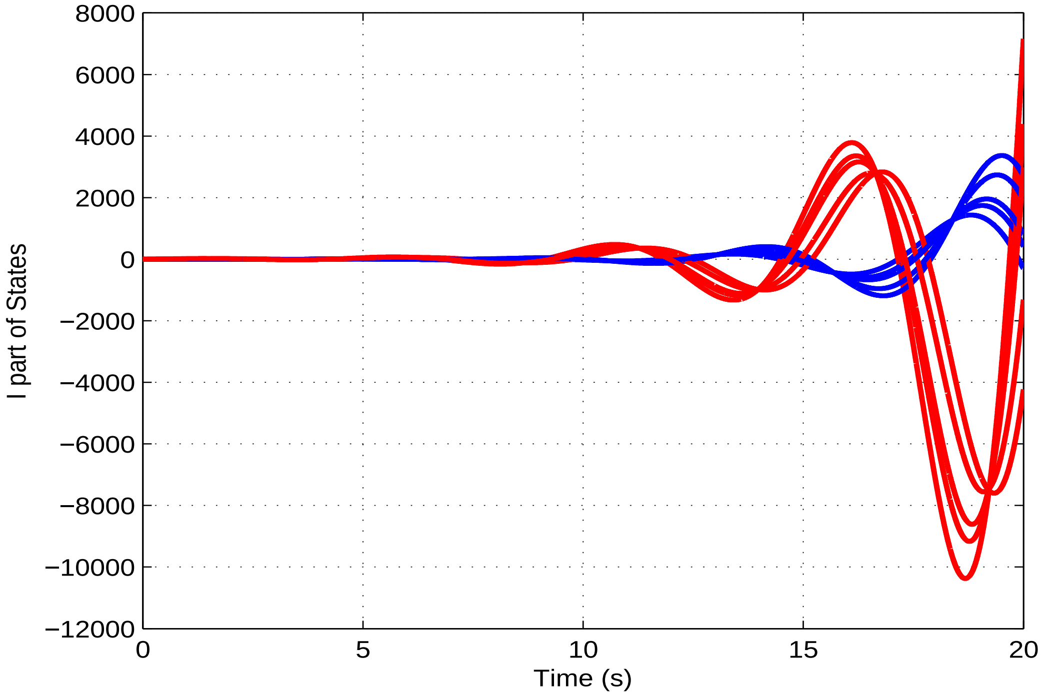
با استفاده از تاخیر شبکه عصبی مقادیر $\overline{\sigma}^l = [۲,۱]$، $\overline{\sigma}^d = [۴,۹]$، $\overline{\sigma}^{of} = [۹,۶/۲۴]$ و در نتیجه $۰ < ۹ = \sigma_۱$ و $۰ < ۹ = \sigma_۲$ بدست می آید. با استفاده از پارامترهای شبکه عصبی و از نتایج تئوری (۱.۱.۳) مقادیر $\theta_۱^{(R)} = ۷/۷۵۶$، $\theta_۲^{(R)} = ۷/۳۶۸$، $\theta_۱^{(I)} = ۷/۷۵۶$، $\theta_۲^{(I)} = ۷/۳۶۴$، $\theta_۱^{(J)} = ۷/۷۸۸$، $\theta_۲^{(J)} = ۷/۳۸۸$، $\theta_۱^{(K)} = ۷/۷۸۸$ و $\theta_۲^{(K)} = ۷/۳۹۲$ بدست می آیند. همچنین، با استفاده از نتایج تئوری (۲.۱.۳) مقادیر شروط پایداری برابر با $\lambda_۱^{(R)} = [-۰/۶; -۱/۸]$، $\lambda_۲^{(R)} = [۶/۳۵۶; ۶/۰۶۸]$، $\lambda_۱^{(I)} = [-۰/۶; -۱/۸]$، $\lambda_۲^{(I)} = [۶/۳۵۶; ۶/۰۶۴]$، $\lambda_۱^{(J)} = [-۰/۶; -۱/۸]$، $\lambda_۲^{(J)} = [۶/۳۸۸; ۶/۰۸۸]$، $\lambda_۱^{(K)} = [-۰/۶; -۱/۸]$ و $\lambda_۲^{(K)} = [۶/۳۸۸; ۶/۰۹۲]$ بدست می آیند. در نهایت، با استفاده از این نتایج و تئوری (۳.۱.۳) مقادیر $\lambda^{(R)} = [-۶/۹۵۶; -۷/۸۶۸]^T$، $\lambda^{(I)} = [-۶/۹۵۶; -۷/۸۶۴]^T$، $\lambda^{(J)} = [-۶/۹۸۸; -۷/۸۸۸]^T$ و $\lambda^{(K)} = [-۶/۹۸۸; -۷/۸۹۲]^T$ بدست می آیند. بنابراین، با استفاده از این نتایج و مطابق با تئوری (۱.۱.۳) و (۲.۱.۳) نمی توان در مورد پایداری نقطه تعادل احتمالی شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون رابطه (۱.۳) با پارامترهای فوق، نظری داد. در حالی که نتایج شبیه سازی در تست ۱ نشان دهنده ناپایداری شبکه می باشد.

تست ۱: در این تست، شبیه سازی بازای پنج شرایط اولیه $x_۱(۰) = x_۲(۰) = b + b\imath + b\jmath + b\kappa$، که $b \in \{۴, ۲, -۴, -۲, ۱\}$ می باشند، انجام شد. نتایج شبیه سازی ارایه شده در شکل (۵.۳) نشان می دهد که پاسخ ها بازای هر شرایط اولیه دلخواه به بینهایت میل می کند.

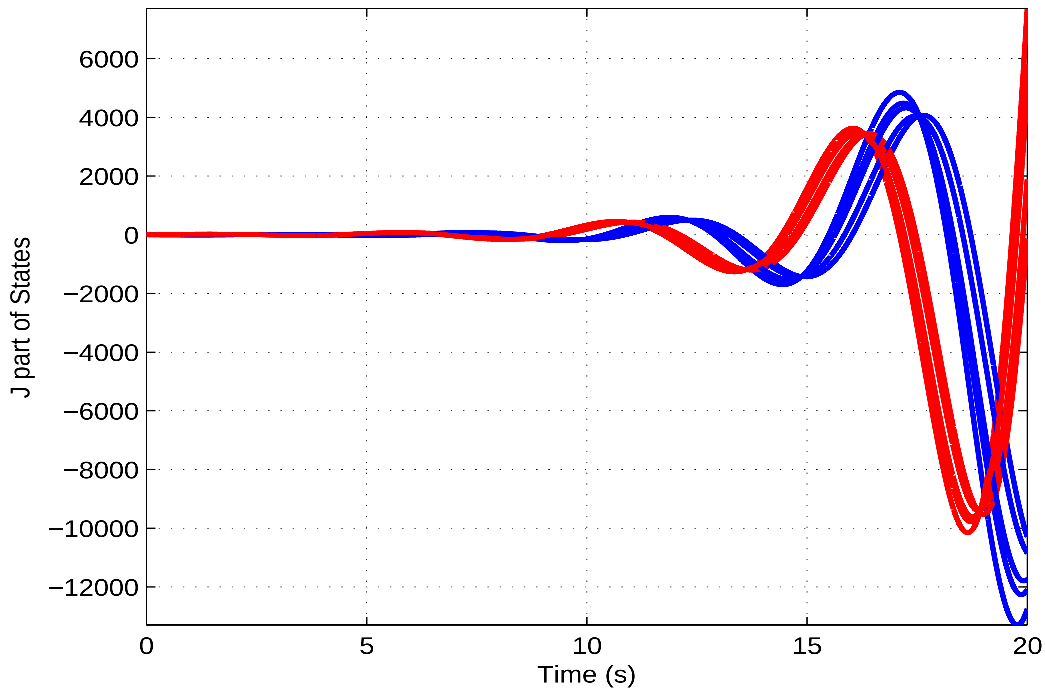
تست ۲: در این تست، یک کنترلر فیدبک حالت $\tilde{u}(t) = -\tilde{K}x(t)$ برای پایدار کردن نقطه تعادل یکتای سیستم حلقه بسته، مطابق با تئوری های (۱.۱.۳) تا (۳.۱.۳) طراحی شد. با در نظر گرفتن بهره فیدبک حالت $\tilde{K} = [۷, ۰; ۰, ۸]$ برای شبکه عصبی با پارامترهای فوق و شرط پایداری بیان شده در تئوری ها، مقادیر $\lambda_۱^{(R)} = [۶/۴; ۶/۲]$، $\lambda_۱^{(I)} = [۶/۴; ۶/۲]$، $\lambda_۱^{(J)} =$



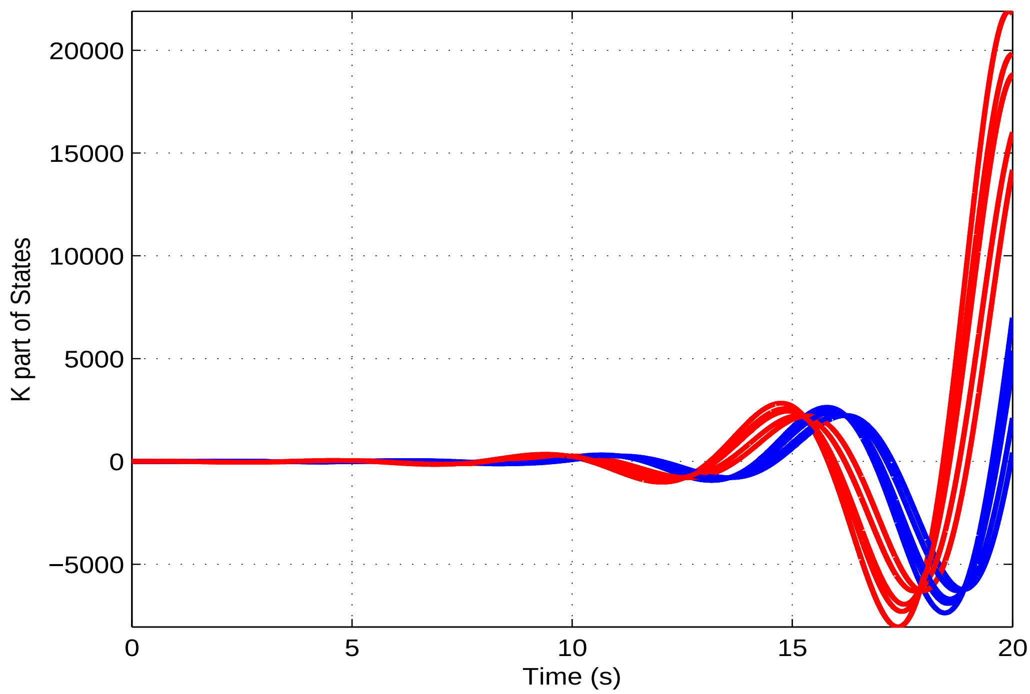
(آ) بخش حقیقی حالت های رزرویر



(ب) بخش $\imath$ حالت های رزرویر

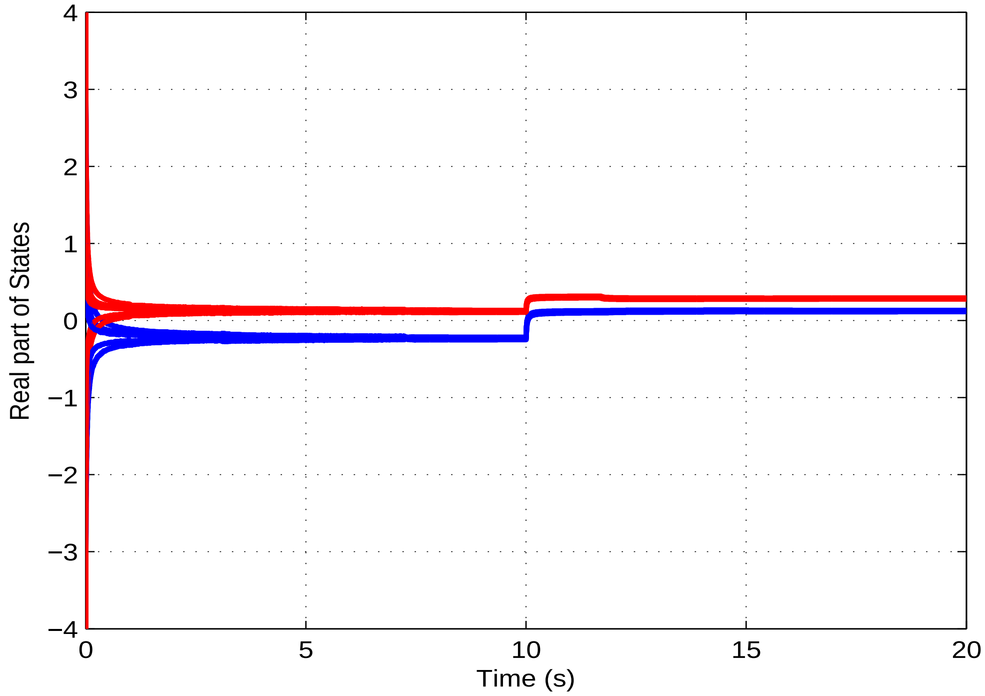


(ج) بخش $\jmath$ حالت های رزرویر

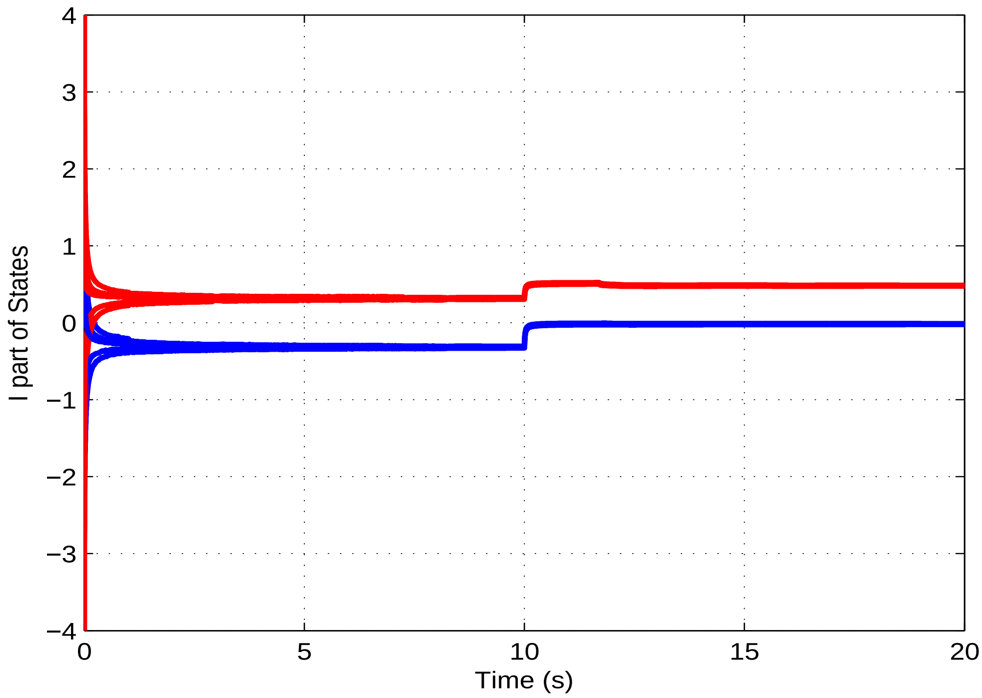


(د) بخش κ حالت های رزرویر

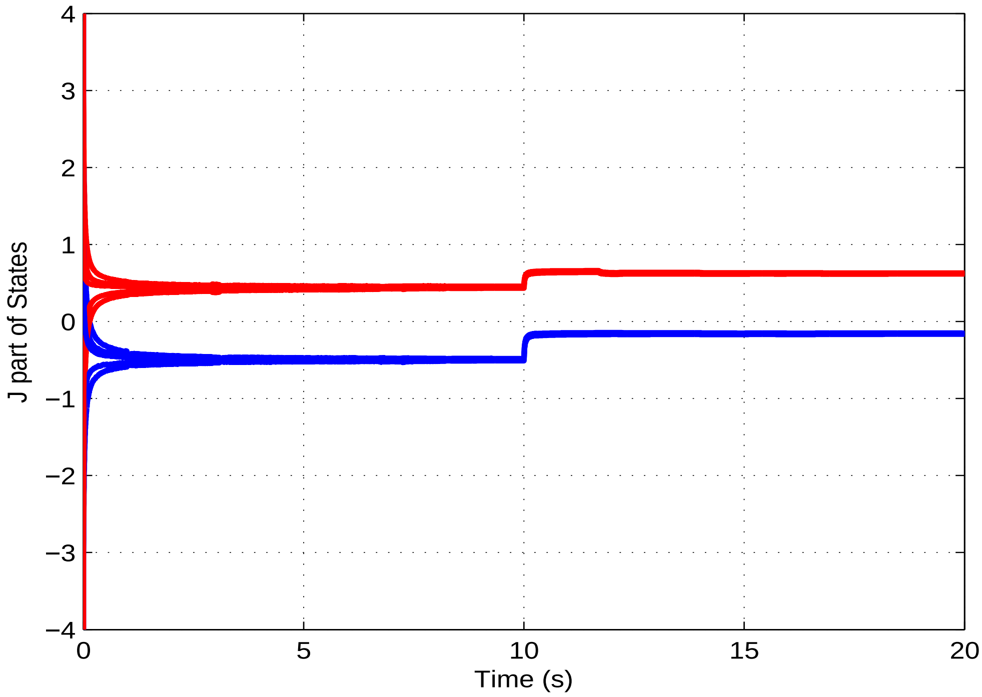
شکل ۵.۳: حالت های رزرویر مثال (۳.۱.۳) تست ۱ بازای شرایط اولیه متفاوت، x_1 (آبی) و x_2 (قرمز)



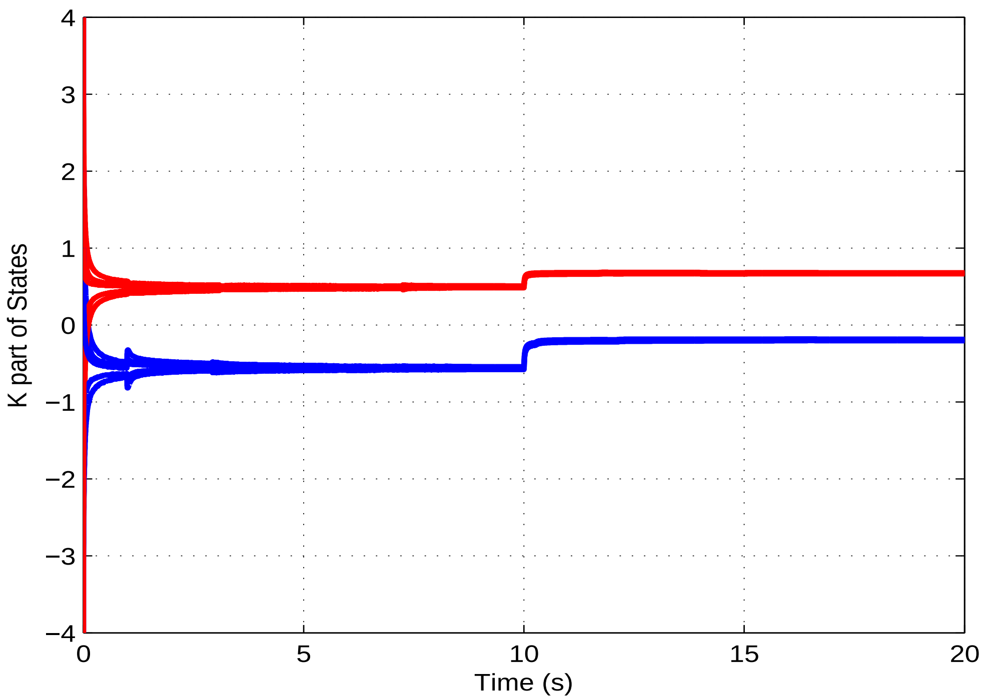
(آ) بخش حقیقی حالت های رزرویر



(ب) بخش $\imath$ حالت های رزرویر



(ج) بخش $\jmath$ حالت های رزروير



(د) بخش κ حالت های رزروير

شکل ۳.۶: حالت های رزروير مثال (۳.۱.۳) تست ۲ با کنترل کننده بازای شرایط اولیه متفاوت، x_1 (آبی) و x_2 (قرمز)

$[۶/۲;۶/۴]$ و $[۶/۲;۶/۴] = \lambda_{۱}^{(K)}$ بدست آمده اند. این نتایج نشان می دهد که $۰ < \lambda_{۲r}^{(\widehat{\rho})} < \lambda_{۱r}^{(\widehat{\rho})}$ برای کلیه $r = ۱,۲$ و $\widehat{\rho} \in \Omega$ برقرار می باشد و همچنین، مقادیر $\lambda^{(R)} = [۰/۰۴۴;۰/۱۳۲]^T$، $\lambda^{(I)} = [۰/۰۴۴;۰/۱۳۶]^T$، $\lambda^{(J)} = [۰/۰۱۲;۰/۱۱۲]^T$ و $\lambda^{(K)} = [۰/۰۱۲;۰/۱۰۸]^T$ بدست می آیند. بنابراین، سیستم حلقه بسته دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار مجانبی می باشد که تاخیر و شرایط اولیه و اغتشاش روی این عملکرد سیستم تاثیری ندارند که نتایج شبیه سازی ها در شکل (۶.۳) نشان داده شد. هر چند، در اثر اغتشاش موقعیت نقطه تعادل جابجا می شود ولی روی یکتایی و پایداری آن اثری ندارد.

خلاصه اینکه، نتایج شبیه سازی مثال های فوق تایید کننده نتایج تحلیلی بدست آمده برای پایداری نقطه تعادل شبکه عصبی کواترنیون و مختلط با/بدون تاخیر زمانی متغیر با زمان می باشد. این نتایج، نشان می دهند که شرایط اولیه و تاخیر و اغتشاش بر روی پایداری تاثیری ندارند. همچنین، نشان می دهد که از نتایج تئوری بدست آمده می توان براحتی برای طراحی کنترلر فیدبک حالت استفاده کرد. بنابراین، می توان گفت این نتایج تئوری بدست آمده قابل استفاده برای طراحی کنترل و همزمانی شبکه های عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون و مختلط آشوبی می باشد.

۲.۳ تحلیل پایداری مقاوم مستقل از تاخیر نقطه تعادل شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری در حضور تاخیر متغیر با زمان

در این بخش، به مطالعه بر روی وجود و یکتایی نقطه تعادل پایدار مجانبی مقاوم برای یک شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون در حضور تاخیر متغیر با زمان پرداخته خواهد شد که در توابع فعالسازی آنها شرط $QUAD$ برقرار می باشد. فرض شرط $QUAD$ بسیار جامع می باشد چون شامل شرط لیپشیتز و همچنین شرط field vector contracting می باشد. برای تحلیل نقطه تعادل این شبکه، ابتدا به وجود و یکتایی نقطه تعادل پرداخته می شود و سپس به پایداری مجانبی مقاوم نقطه تعادل یکتای بدست آمده پرداخته می شود.

۱.۲.۳ توصیف مدل شبکه عصبی در حضور تاخیر متغیر با زمان

دینامیک شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون (FO-QVESNN) به همراه تاخیر متغیر با زمان با $n_i \in \mathbb{Z}^+$ ورودی، $n_o \in \mathbb{Z}^+$ خروجی و $n_r \in \mathbb{Z}^+$ حالت رزرویر را در نظر بگیرید. معادله متناظر با jامین حالت رزرویر و kامین خروجی را می توان بصورت رابطه (۷۶.۳) نوشت. که در آن $j = ۱,۲,\cdots,n_r$، $k = ۱,۲,\cdots,n_o$، $X = [x_۱,\cdots,x_{n_r}]^T \in \mathbb{H}^{n_r}$ و $Y = [y_۱,\cdots,y_{n_o}]^T \in \mathbb{H}^{n_o}$ بردارهای حالت رزرویر، خروجی هستند و $\mathcal{U} = [\mathcal{U}_۱,\cdots,\mathcal{U}_{n_r}]^T \in$

$\mathbb{H}^{n_r}$ و $u = [u_1, \cdots, u_{n_i}]^T \in \mathbb{H}^{n_i}$ نشان دهنده ورودی خارجی و کمکی شبکه می باشند.

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}\left(x_j(t)\right) = &-\sum_{h=1}^{n_r} c_{jh} x_h(t-\sigma_{hj}^{l}(t)) + \sum_{h=1}^{n_r} a_{jh} f_h\Big(W^{in} \otimes u(t-\sigma^{in}(t)) \\
&+ W \otimes X(t-\sigma^{d}(t)) + W^{f} \otimes Y(t-\sigma^{f}(t))\Big) + \mathcal{U}_j, \\
y_k(t) = &\, g_k\left(W^{o} \otimes X(t-\sigma^{o}(t)) + W^{io} \otimes u(t-\sigma^{io}(t))\right),
\end{aligned}
\tag{۱۷.۳}
$$

ماتریس های $W^{io} = [w_{km}^{io}]_{n_o \times n_i} \in \mathbb{H}^{n_o \times n_i}$ ،$W^{in} = [w_{im}^{in}]_{n_r \times n_i} \in \mathbb{H}^{n_r \times n_i}$ وزن های ورودی و خروجی و $W^{f} = \left[w_{il}^{f}\right]_{n_r \times n_o} \in$ و $W = [w_{ij}]_{n_r \times n_r} \in \mathbb{H}^{n_r \times n_r}$ ،$W^{o} = [w_{kj}^{o}]_{n_o \times n_r} \in \mathbb{H}^{n_o \times n_r}$ $\mathbb{H}^{n_r \times n_o}$ وزن های حالت های رزروییر و فیدبک هستند. علاوه بر انها، ماتریس های $A = [a_{sh}]_{n_r \times n_r} \in \mathbb{H}^{n_r \times n_r}$ و $C = [c_{hj}]_{n_r \times n_r} \in \mathbb{H}^{n_r \times n_r}$ بیانگر ثابت زمانی و ماتریس های نرخ نشتی شبکه در فضای کواترنیون هستند که A^{-1} ثابت زمانی و $A^{-1}C$ ماتریس نرخ نشتی می باشند. همچنین، ماتریس های $\sigma^{l}(t) = [\cdot]_{n_r \times n_r} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ،$\sigma^{in}(t) = [\cdot]_{n_o \times n_i} \in \mathbb{R}^{n_o \times n_i}$ ، $\sigma^{d}(t) = [\cdot]_{n_r \times n_r} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ و $\sigma^{f}(t) = [\cdot]_{n_r \times n_o} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_o}$ نشان دهنده تاخیر در عبارت های (ترم های) نشتی، ورودی و انتقال، از ترم های حالت های رزروییر و فیدبک، می باشند که در این بخش، فرض می شود که مولفه قطری تاخیر نشتی، یعنی σ^{l} برابر صفر می باشد. علاوه بر آنها، $\sigma^{in}(t) = [\cdot]_{n_o \times n_i} \in \mathbb{R}^{n_o \times n_i}$ و $\sigma^{o}(t) = [\cdot]_{n_o \times n_r} \in \mathbb{R}^{n_o \times n_r}$ نشان دهنده تاخیرهای ریداوت و وورودی به خروجی هستند. همچنین، عملگر $\otimes$ که در رابطه (۱۷.۳) بکار رفته است بدین معنی است که مولفه های قطری حاصلضرب را باید در نظر گرفت. برای مثال، نتیجه $w^{in} \otimes u(t-\sigma^{in}(t))$ برابر با مولفه های قطری $w^{in}u(t-\sigma^{in}(t))$ است.
در نهایت، فرض می شود که توابع فعالسازی خروجی $g = [g_1, \cdots, g_{n_o}]^T : \mathbb{H}^{n_o} \to \mathbb{H}^{n_o}$ و حالت های رزروییر $f = [f_1, \cdots, f_{n_r}]^T : \mathbb{H}^{n_r} \to \mathbb{H}^{n_r}$ بگونه ای هستند که هر f_h و g_k قابل تجزیه بصورت $f_h = f_h^{(R)} + f_h^{(I)}\imath + f_h^{(J)}\jmath + f_h^{(K)}\kappa$ و $g_k = g_k^{(R)} + g_k^{(I)}\imath + g_k^{(J)}\jmath + g_k^{(K)}\kappa$ می باشند و مطابق با تعریف (۲.۲.۱)، مولفه های توابع فعالسازی $f^{(\rho)}$ و $g^{(\rho)}$ برای $\rho \in \Omega = \{R, I, J, K\}$ پیوسته و به ترتیب $QUAD\left(\Delta^{f^{(\rho)}}, \omega^{f^{(\rho)}}\right)$ و $QUAD\left(\Delta^{g^{(\rho)}}, \omega^{g^{(\rho)}}\right)$ هستند.
با استفاده از لم های (۵.۲.۱) و (۶.۲.۱)، معادله حاکم بر شبکه عصبی (۱۷.۳) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}\left(x_j^{(\rho)}(t)\right) = &-\sum_{h=1}^{n_r}\left(\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}} \eta c_{jh}^{(\Upsilon)} x_h^{(\Theta)}\left(t-\sigma_{hj}^{l}(t)\right)\right) \\
&+\sum_{h=1}^{n_r}\left\{\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}} \eta a_{jh}^{(\Upsilon)} f_h^{(\Theta)}\left(\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}} \widetilde{\eta} W^{(\widetilde{\Upsilon})} \otimes X^{(\widetilde{\Theta})}\left(t-\sigma^{d}(t)\right)\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}} \widetilde{\eta} W^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}} \otimes Y^{(\widetilde{\Theta})}\left(t-\sigma^{f}(t)\right)\Bigg)\Bigg\} + \mathcal{U}_j^{(\rho)}$$

$$y_k^{\widetilde{\Theta}}(t) = g_k^{(\widetilde{\Theta})}\left(\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Theta})}} \widehat{\eta} W^{o^{(\widehat{\Upsilon})}} \otimes X^{(\widehat{\Theta})}\left(t-\sigma^{o}(t)\right)\right), \tag{۱۸.۳}$$

که $\rho,\Upsilon,\Theta,\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta},\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta}\in\Omega$ می باشد.

فرض ۱.۲.۳. پارامترهای C، A، W، W^f و W^o شبکه عصبی رابطه (۱۷.۳) نامعین هستند و محدوده مجاز هر یک بصورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= [\check{C},\hat{C}] = \left\{C : \check{C} \preceq C \preceq \hat{C}, \quad \check{C},\hat{C}\in\mathbb{H}^{n_r\times n_r} \ \&\ \check{C}\preceq\hat{C}\right\},\\
\mathcal{A} &= [\check{A},\hat{A}] = \left\{A : \check{A} \preceq A \preceq \hat{A}, \quad \check{A},\hat{A}\in\mathbb{H}^{n_r\times n_r} \ \&\ \check{A}\preceq\hat{A}\right\},\\
\mathcal{W} &= [\check{W},\hat{W}] = \left\{W : \check{W} \preceq W \preceq \hat{W}, \quad \check{W},\hat{W}\in\mathbb{H}^{n_r\times n_r} \ \&\ \check{W}\preceq\hat{W}\right\},\\
\mathcal{W}^f &= [\check{W}^f,\hat{W}^f] = \left\{W^f : \check{W}^f \preceq W^f \preceq \hat{W}^f, \quad \check{W}^f,\hat{W}^f\in\mathbb{H}^{n_r\times n_o} \ \&\ \check{W}^f\preceq\hat{W}^f\right\},\\
\mathcal{W}^o &= [\check{W}^o,\hat{W}^o] = \left\{W^o : \check{W}^o \preceq W^o \preceq \hat{W}^o, \quad \check{W}^o,\hat{W}^o\in\mathbb{H}^{n_o\times n_r} \ \&\ \check{W}^o\preceq\hat{W}^o\right\},
\end{aligned} \tag{۱۹.۳}$$

که $\check{C}=[\check{c}_{hj}]_{n_r\times n_r}$، $\hat{C}=[\hat{c}_{hj}]_{n_r\times n_r}$، $\check{A}=[\check{a}_{sh}]_{n_r\times n_r}$، $\hat{A}=[\hat{a}_{sh}]_{n_r\times n_r}$، $\check{W}=[\check{w}_{ij}]_{n_r\times n_r}$، $\hat{W}=[\hat{w}_{ij}]_{n_r\times n_r}$، $\check{W}^f=[\check{w}^f_{il}]_{n_r\times n_o}$، $\hat{W}^f=[\hat{w}^f_{il}]_{n_r\times n_o}$، $\check{W}^o=[\check{w}^o_{kj}]_{n_o\times n_r}$ و $\hat{W}^o=[\hat{w}^o_{kj}]_{n_o\times n_r}$ می باشند. سپس، پارامترهای $\underline{c}_{jj}^{(R)}=\check{c}_{jj}^{(R)}$، $\overline{c}_{hj}^{(\rho)}=max\{|\check{c}_{hj}^{(\rho)}|,|\hat{c}_{hj}^{(\rho)}|\}$، $\overline{a}_{sh}^{(\rho)}=max\{|\check{a}_{sh}^{(\rho)}|,|\hat{a}_{sh}^{(\rho)}|\}$، $\overline{w}_{il}^{f^{(\rho)}}=max\{|\check{w}_{il}^{f^{(\rho)}}|,|\hat{w}_{il}^{f^{(\rho)}}|\}$، $\overline{w}_{ij}^{(\rho)}=max\{|\check{w}_{ij}^{(\rho)}|,|\hat{w}_{ij}^{(\rho)}|\}$ و $\overline{w}_{kj}^{o^{(\rho)}}=max\{|\check{w}_{kj}^{o^{(\rho)}}|,|\hat{w}_{kj}^{o^{(\rho)}}|\}$ بازای $i,j,h,s=۱,۲,\cdots,n_r$، $k,l=۱,۲,\cdots,n_o$ و $\rho\in\Omega=\{R,I,J,K\}$ تعریف می شوند.

ملاحظه ۱.۲.۳. با در نظر گرفتن فرض (۱.۲.۳)، محدوده های مجاز $\mathcal{C}$، $\mathcal{A}$، $\mathcal{W}$، $\mathcal{W}^f$ و $\mathcal{W}^o$ معرف یک فضای شدنی[۱] هستند که به جهت پارامترهای نامعین ناشی از اندازه گیری و پیاده سازی، شکل می گیرد.

۲.۲.۳ وجود و یکتایی نقطه تعادل

در این بخش، با استفاده از یک نگاشت انقباضی وجود و یکتایی نقطه تعادل شبکه عصبی (۱۷.۳) بررسی می شود.

قضیه ۱.۲.۳. شبکه عصبی رابطه (۱۷.۳) دارای یک نقطه تعادل یکتا برای هر نقطه درون محدوده شدنی می باشد اگر رابطه زیر برقرار باشد.

[1] Feasible Area

$$\lambda_j^{(\widehat{\rho})} = \underline{c}_{jj}^{(R)} - \sum_{\rho\in\Omega}\Bigg\{\sum_{(\Upsilon,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)},\widehat{\rho}\neq\rho}\overline{c}_{jj}^{(\Upsilon)} + \sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_h}{\mu_j}\overline{c}_{hj}^{(\Upsilon)} + \sum_{h=1}^{n_r}\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\overline{a}_{sh}^{(\Upsilon)}$$
$$\times\frac{\mu_s}{\mu_j}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\Bigg(\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\Theta)}}\overline{w}_{ij}^{(\widetilde{\Upsilon})} + \sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{(\widehat{\Upsilon},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\widetilde{\Theta})}}\sum_{l=1}^{n_o}\overline{w}_{il}^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}$$
$$\times\sum_{k=1}^{n_o}\widetilde{\Delta}^{g^{(\widetilde{\Theta})}}(l,k)\overline{w}_{kj}^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\Bigg)\Bigg\} > 0, \qquad (۲۰.۳)$$

که $\mu_h > 0$، $\mu_j > 0$ و $\mu_s > 0$ می باشد.

اثبات: با استفاده از تعریف (۵.۲.۱)، شبکه عصبی رابطه (۱۷.۳) دارای یک نقطه تعادل X^* می باشد اگر برای $\rho \in \Omega$ و $j = 1,\cdots,n_r$ رابطه $D^\alpha x_j^{(\rho)}(t) = 0$ صادق باشد. بنابراین، عبارت رابطه (۱۸.۳) را می توان بصورت زیر نوشت.

$$0 = -\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta c_{jj}^{(\Upsilon)}x_j^{(\Theta)}(t) - \sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta c_{jh}^{(\Upsilon)}x_h^{(\Theta)}(t) + \sum_{h=1}^{n_r}\Bigg\{\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta a_{jh}^{(\Upsilon)}$$
$$\times f_h^{(\Theta)}\Bigg(\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}}\widetilde{\eta}W^{(\widetilde{\Upsilon})}X^{(\widetilde{\Theta})}(t) + \sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}}\widetilde{\eta}W^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}$$
$$\times g^{(\widetilde{\Theta})}\Bigg(\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Theta})}}\widehat{\eta}W^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}X^{(\widehat{\Theta})}(t)\Bigg)\Bigg)\Bigg\} + \mathcal{U}_j^{(\rho)}$$
$$= -c_{jj}^{(R)}x_j^{(\rho)}(t) - \sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)},\Theta\neq\rho}\eta c_{jj}^{(\Upsilon)}x_j^{(\Theta)}(t) - \sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta c_{jh}^{(\Upsilon)}x_h^{(\Theta)}(t)$$
$$+\sum_{h=1}^{n_r}\Bigg\{\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta a_{jh}^{(\Upsilon)}f_h^{(\Theta)}\Bigg(\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}}\widetilde{\eta}W^{(\widetilde{\Upsilon})}X^{(\widetilde{\Theta})}(t)$$
$$\times\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}}\widetilde{\eta}W^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}g^{(\widetilde{\Theta})}\Bigg(\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Theta})}}\widehat{\eta}W^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}X^{(\widehat{\Theta})}(t)\Bigg)\Bigg)\Bigg\} + \mathcal{U}_j^{(\rho)}. \qquad (۲۱.۳)$$

با در نظر گرفتن نگاشت انقباضی $\psi : \mathbb{H}^{n_r} \to \mathbb{H}^{n_r}$ که با رابطه $c_{jj}^{(R)}x_j^{*(\rho)} = \nu_j^{*(\rho)}$ تعریف می شود، داریم:

$$\psi_j^{(\rho)}\left(\nu_j^{(\rho)}\right)$$
$$= -\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)},\Theta\neq\rho}\eta c_{jj}^{(\Upsilon)}\frac{\nu_j^{(\Theta)}(t)}{c_{jj}^{(R)}} - \sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta c_{jh}^{(\Upsilon)}\frac{\nu_h^{(\Theta)}(t)}{c_{hh}^{(R)}}$$

$$
+\sum_{h=1}^{n_r}\left\{\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta a_{jh}^{(\Upsilon)} f_h^{(\Theta)}\left(\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}}\widetilde{\eta} W^{(\widetilde{\Upsilon})}\left[\frac{\nu_1^{(\widetilde{\Theta})}(t)}{c_1^{(R)}},\cdots,\frac{\nu_{n_r}^{(\widetilde{\Theta})}(t)}{c_{n_r}^{(R)}}\right]^T\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}}\widetilde{\eta} W^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}} g^{(\widetilde{\Theta})}\left(\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Theta})}}\widehat{\eta} W^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\left[\frac{\nu_1^{(\widehat{\Theta})}(t)}{c_1^{(R)}},\cdots,\frac{\nu_{n_r}^{(\widehat{\Theta})}(t)}{c_{n_r}^{(R)}}\right]^T\right)\right)\right\}+\mathcal{U}_j^{(\rho)},
$$

(۲۲.۳)

که $\Psi^{(\rho)}\left(\nu^{(\rho)}\right)=\left[\psi_1^{(\rho)}\left(\nu_1^{(\rho)}\right),\cdots,\psi_{n_r}^{(\rho)}\left(\nu_{n_r}^{(\rho)}\right)\right]^T$ می باشد. اگر برای دو نقطه مجزا و دلخواه $\nu_{(\rho)}=\left[\nu_1^{(\rho)},\cdots,\nu_{n_r}^{(\rho)}\right]^T$ و $\upsilon_{(\rho)}=\left[\upsilon_1^{(\rho)},\cdots,\upsilon_{n_r}^{(\rho)}\right]^T$ نرم $||\Psi(\nu)-\Psi(\upsilon)||$ بصورت

$$
||\Psi(\nu)-\Psi(\upsilon)||=\sum_{j=1}^{n_r}\mu_j\sum_{\rho\in\Omega}\left|\psi_j^{(\rho)}\left(\nu_j^{(\rho)}\right)-\psi_j^{(\rho)}\left(\upsilon_j^{(\rho)}\right)\right|
$$

تعریف شود، آنگاه

$$
\begin{aligned}
&||\Psi(\nu)-\Psi(\upsilon)||\\
&=\sum_{j=1}^{n_r}\mu_j\sum_{\rho\in\Omega}\left|\psi_j^{(\rho)}\left(\nu_j^{(\rho)}\right)-\psi_j^{(\rho)}\left(\upsilon_j^{(\rho)}\right)\right|\\
&\le\sum_{j=1}^{n_r}\sum_{\rho\in\Omega}\left\{\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega(\rho),\Theta\neq\rho}\mu_j\left|c_{jj}^{(\Upsilon)}\right|\frac{\left|\nu_j^{(\Theta)}(t)-\upsilon_j^{(\Theta)}(t)\right|}{c_{jj}^{(R)}}+\sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\mu_j\left|c_{jh}^{(\Upsilon)}\right|\right.\\
&\quad\times\frac{\left|\nu_h^{(\Theta)}(t)-\upsilon_h^{(\Theta)}(t)\right|}{c_{hh}^{(R)}}+\sum_{h=1}^{n_r}\left(\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\left|a_{jh}^{(\Upsilon)}\right|\mu_j\left(\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{s=1}^{n_r}\left|w_{is}^{(\widetilde{\Upsilon})}\right|\right.\right.\\
&\quad\times\frac{\left|\nu_s^{(\widetilde{\Theta})}(t)-\upsilon_s^{(\widetilde{\Theta})}(t)\right|}{c_{ss}^{(R)}}+\mu_j\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{l=1}^{n_o}\left|w_{il}^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\right|\sum_{k=1}^{n_o}\widetilde{\Delta}^{g^{(\widetilde{\Theta})}}(l,k)\\
&\quad\left.\left.\left.\times\sum_{(\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\Omega_{(\widetilde{\Theta})}}\sum_{s=1}^{n_r}\left|w_{ks}^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\right|\frac{\left|\nu_s^{(\widehat{\Theta})}(t)-\upsilon_s^{(\widehat{\Theta})}(t)\right|}{c_{ss}^{(R)}}\right)\right)\right\}\\
&\le\sum_{j=1}^{n_r}\sum_{\rho\in\Omega}\left\{\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega(\rho),\Theta\neq\rho}\mu_j\left|c_{jj}^{(\Upsilon)}\right|\frac{\left|\nu_j^{(\Theta)}(t)-\upsilon_j^{(\Theta)}(t)\right|}{c_{jj}^{(R)}}+\sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\mu_j\left|c_{jh}^{(\Upsilon)}\right|\right.\\
&\quad\times\frac{\left|\nu_h^{(\Theta)}(t)-\upsilon_h^{(\Theta)}(t)\right|}{c_{hh}^{(R)}}+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\left|a_{jh}^{(\Upsilon)}\right|\left(\frac{\mu_s}{\mu_j}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\right.\\
&\quad\times\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{s=1}^{n_r}\left|w_{is}^{(\widetilde{\Upsilon})}\right|\frac{\left|\nu_s^{(\widetilde{\Theta})}(t)-\upsilon_s^{(\widetilde{\Theta})}(t)\right|}{c_{ss}^{(R)}}+\mu_j\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{l=1}^{n_o}\\
&\quad\left.\left.\left|w_{il}^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\right|\sum_{k=1}^{n_o}\widetilde{\Delta}^{g^{(\widetilde{\Theta})}}(l,k)\sum_{(\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\Omega_{(\widetilde{\Theta})}}\sum_{s=1}^{n_r}\left|w_{ks}^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\right|\frac{\left|\nu_s^{(\widehat{\Theta})}(t)-\upsilon_s^{(\widehat{\Theta})}(t)\right|}{c_{ss}^{(R)}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_j\sum_{\rho\in\Omega}\Bigg\{\sum_{(\Upsilon,\widehat{\rho})\in\Omega(\rho),\widehat{\rho}\neq\rho}\left|c_{jj}^{(\Upsilon)}\right| + \sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_h}{\mu_j}\left|c_{hj}^{(\Upsilon)}\right| \\
&+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\left|a_{sh}^{(\Upsilon)}\right|\frac{\mu_s}{\mu_j}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\Bigg(\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\Theta)}}\left|w_{ij}^{(\widetilde{\Upsilon})}\right| \\
&+\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{(\widehat{\Upsilon},\widehat{p})\in\Omega_{(\widetilde{\Theta})}}\sum_{l=1}^{n_o}\left|w_{il}^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\right|\sum_{k=1}^{n_o}\widetilde{\Delta}^{g^{(\widetilde{\Theta})}}(l,k)\left|w_{kj}^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\right|\Bigg)\Bigg\}\frac{\left|\nu_j^{(\widehat{\rho})}(t)-\upsilon_j^{(\widehat{\rho})}(t)\right|}{c_{jj}^{(R)}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_j\sum_{\rho\in\Omega}\Bigg\{\sum_{(\Upsilon,\widehat{\rho})\in\Omega(\rho),\widehat{\rho}\neq\rho}\overline{c}_{jj}^{(\Upsilon)} + \sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_h}{\mu_j}\overline{c}_{hj}^{(\Upsilon)} \\
&+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\overline{a}_{sh}^{(\Upsilon)}\frac{\mu_s}{\mu_j}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\Bigg(\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\Theta)}}\overline{w}_{ij}^{(\widetilde{\Upsilon})} \\
&+\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{(\widehat{\Upsilon},\widehat{p})\in\Omega_{(\widetilde{\Theta})}}\sum_{l=1}^{n_o}\overline{w}_{il}^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\sum_{k=1}^{n_o}\widetilde{\Delta}^{g^{(\widetilde{\Theta})}}(l,k)\overline{w}_{kj}^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\Bigg)\Bigg\}\frac{\left|\nu_j^{(\widehat{\rho})}(t)-\upsilon_j^{(\widehat{\rho})}(t)\right|}{\underline{c}_{jj}^{(R)}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_j\overline{\theta}_j^{(\widehat{\rho})}\frac{\left|\nu_j^{(\widehat{\rho})}(t)-\upsilon_j^{(\widehat{\rho})}(t)\right|}{\underline{c}_{jj}^{(R)}}. \qquad (۲۳.۳)
\end{aligned}$$

مطابق با رابطه (۲۳.۳)، ψ یک نگاشت انقباضی در فضای $\mathbb{H}^{n_r}$ می باشد اگر و تنها اگر $\lambda_j^{(\widehat{\rho})} = \underline{c}_{jj}^{(R)} - \overline{\theta}_j^{(\widehat{\rho})} > 0$ باشد. از این روی، می توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned}
&||\Psi(\upsilon)-\Psi(\nu)|| \leq \sum_{j=1}^{n_r}\mu_j\sum_{\rho\in\Omega}\left|\psi_j^{(\rho)}\left(\nu_j^{(\rho)}\right)-\psi_j^{(\rho)}\left(\upsilon_j^{(\rho)}\right)\right| \\
&||\Psi(\nu)-\Psi(\upsilon)|| \leq ||\nu-\upsilon||. \qquad (۲۴.۳)
\end{aligned}$$

در نتیجه شبکه عصبی رابطه (۱۷.۳) دارای یک نقطه تعادل یکتا برای هر نقطه درون فضای شدنی می باشد اگر رابطه (۲۰.۳) برقرار باشد. در اینجا، اثبات تکمیل می شود.
□

۳.۲.۳ پایداری مجانبی مقاوم نقطه تعادل

در این بخش، پایداری مجانبی مقاوم مستقل از تاخیر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی رابطه (۱۷.۳) تحلیل می شود.

قضیه ۲.۲.۳. با در نظر گرفتن فرض (۱.۲.۳)، شبکه عصبی رابطه (۱۷.۳) دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار مجانبی مقاوم برای هر نقطه درون محدوده شدنی می باشد اگر ثابت مثبت $\lambda_j^{(\widehat{\rho})}$ بگونه ای وجود داشته باشد که رابطه (۲۰.۳) برقرار باشد.

اثبات: فرض کنید که $y_k(t) = y_k^*$ و $x_j(t) = x_j^*$، به ترتیب، نقطه تعادل حالت های رزرویر و خروجی باشند که $j = ۱, \cdots, n_r$ و $k = ۱, \cdots, n_o$ می باشند. همچنین σ ماکزیمم زمان تاخیری است که در حالت های رزرویر رخ می دهد. با تعریف متغیر جدید $x_j(t) = e_j(t) + x_j^*$ و $y_k(t) = \widetilde{e}_k(t) + y_k^*$، نقطه تعادل به مبدا منتقل می شود، بنابراین، معادله دینامیکی خطا بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\left(e_j^{(\rho)}(t)\right) = &-\sum_{h=۱}^{n_r}\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta c_{jh}^{(\Upsilon)} e_h^{(\Theta)}\left(t-\sigma_{hj}^{l}(t)\right) + \sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\sum_{h=۱}^{n_r}\eta a_{jh}^{(\Upsilon)} \\ &\times\Bigg\{ f_h^{(\Theta)}\Bigg(\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}}\widetilde{\eta}\bigg(W^{(\widetilde{\Upsilon})}\otimes\left(e^{(\widetilde{\Theta})}\left(t-\sigma^{d}(t)\right)+W^{(\widetilde{\Upsilon})}X^{*(\widetilde{\Theta})}\right) \\ &+\widetilde{\eta}\left(W^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\otimes\widetilde{e}^{(\widetilde{\Theta})}\left(t-\sigma^{f}(t)\right)+W^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}Y^{*(\widetilde{\Theta})}\right)\bigg)\Bigg) \\ &-f_h^{(\Theta)}\Bigg(\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}}\widetilde{\eta}\left(W^{(\widetilde{\Upsilon})}X^{*(\widetilde{\Theta})}+W^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}Y^{*(\widetilde{\Theta})}\right)\Bigg)\Bigg\}, \end{aligned} \qquad (۲۵.۳)$$

که

$$\begin{aligned} \widetilde{e}_k^{(\widetilde{\Theta})}(t) = g_k^{(\widetilde{\Theta})}&\Bigg(\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Theta})}}\widehat{\eta}\left(W^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\otimes X^{(\widehat{\Theta})}\left(t-\sigma^{o}(t)\right)+W^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}X^{*(\widehat{\Theta})}\right)\Bigg) \\ &-g_k^{(\widetilde{\Theta})}\Bigg(\sum_{(\widehat{\eta},\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\widetilde{\Theta})}}\widehat{\eta}W^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}X^{*(\widehat{\Theta})}\Bigg). \end{aligned}$$

بنابراین، اگر رابطه (۲۰.۳) محقق شود و مبدا سیستم (۲۵.۳) پایدار مقاوم مجانبی باشد، آنگاه نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی (۱۷.۳) پایدار مقاوم مجانبی است. برای آنالیز پایداری مبدا سیستم (۲۵.۳)، تابع لیاپانوف زیر انتخاب می شود.

$$V(t) = \sum_{j=۱}^{n_r}\mu_j\sum_{\rho\in\Omega}\left|e_j^{(\rho)}(t)\right|. \qquad (۲۶.۳)$$

سپس، با استفاده از لم (۸.۲.۱) و معادله دینامیک خطای (۲۵.۳) و نتیجه (۱.۲.۱)، مشتق

مرتبه کسری تابع لیاپانوف $V(t)$ بصورت زیر بدست می آید:

$$
\begin{aligned}
&D^{\alpha}V(t)\\
&=\sum_{j=1}^{n_r}\mu_j\sum_{\rho\in\Omega} sgn\left(e_j^{(\rho)}(t)\right)D^{\alpha}e_j^{(\rho)}(t)\\
&=\sum_{j=1}^{n_r}\mu_j\sum_{\rho\in\Omega} sgn\left(e_j^{(\rho)}(t)\right)\Bigg\{-\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta c_{jh}^{(\Upsilon)}e_h^{(\Theta)}\left(t-\sigma_{hj}^{l}(t)\right)\\
&\quad+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\eta,\Upsilon,\Theta)\in\widetilde{\Omega}_{(\rho)}}\eta a_{jh}^{(\Upsilon)}\Bigg\{f_h^{(\Theta)}\Bigg(\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}}\widetilde{\eta}\left(w^{(\widetilde{\Upsilon})}\otimes e^{(\widetilde{\Theta})}\left(t-\sigma^{d}(t)\right)+w^{(\widetilde{\Upsilon})}q^{*(\widetilde{\Theta})}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad+\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}}\widetilde{\eta}\left(w^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\otimes\widetilde{e}^{(\widetilde{\Theta})}\left(t-\sigma^{f}(t)\right)+w^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}p^{*(\widetilde{\Theta})}\right)\Bigg)\\
&\quad-f_h^{(\Theta)}\Bigg(\sum_{(\widetilde{\eta},\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\widetilde{\Omega}_{(\Theta)}}\widetilde{\eta}\left(w^{(\widetilde{\Upsilon})}q^{*(\widetilde{\Theta})}+w^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}p^{*(\widetilde{\Theta})}\right)\Bigg)\Bigg\}\Bigg\}\\
&\le\sum_{j=1}^{n_r}\mu_j\sum_{\rho\in\Omega}\Bigg\{-sgn\left(e_j^{(\rho)}(t)\right)c_{jj}^{(\Upsilon)}e_j^{(\rho)}(t)-\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)},\Theta\neq\rho}sgn\left(e_j^{(\rho)}(t)\right)c_{jj}^{(\Upsilon)}e_j^{(\Theta)}(t)\\
&\quad+\sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\left|c_{jh}^{(\Upsilon)}\right|\left|e_h^{(\Theta)}\left(t-\sigma_{hj}^{l}(t)\right)\right|+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\left|a_{jh}^{(\Upsilon)}\right|\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,:)\\
&\quad\times\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\left|w^{(\widetilde{\Upsilon})}\right|\otimes\left|e^{(\widetilde{\Theta})}\left(t-\sigma^{d}(t)\right)\right|\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\left|a_{jh}^{(\Upsilon)}\right|\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,:)\\
&\quad\times\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\left|w^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\right|\widetilde{\Delta}^{g^{(\widetilde{\Theta})}}\sum_{(\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\Omega_{(\widetilde{\Theta})}}\left|w^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\right|\sup_{\eta\in[0,\overline{\sigma}^{of}]}\left|e^{(\widehat{\Theta})}(t-\eta)\right|\Bigg\},
\end{aligned}
\qquad (۲۷.۳)
$$

که $\sup_{\eta\in[0,\overline{\sigma}]}\left|e^{(\widehat{\Theta})}(t-\eta)\right|=\left[\sup_{\eta\in[0,\overline{\sigma}]}\left|e_1^{(\widehat{\Theta})}(t-\eta)\right|,\cdots,\sup_{\eta\in[0,\overline{\sigma}]}\left|e_{n_r}^{(\widehat{\Theta})}(t-\eta)\right|\right]^T$، $\overline{\sigma}^{of}=$ $\max_{k,r,s}\left(\sigma_{kr}^{o}(t)+\sigma_{sk}^{f}(t)\right)$ و n_r ,$s=1,\cdots$ می باشد. با انتخاب $\overline{\sigma}^{l}=\max_{j,h}\left(\sigma_{hj}^{l}(t)\right)$، $\overline{\sigma}^{d}=$

$\sigma = \max(\overline{\sigma}^l, \overline{\sigma}^d, \overline{\sigma}^{of})$ و $\max_{h,s}\left(\sigma^d_{hs}(t)\right)$، آنگاه

$$\begin{aligned}
&D^\alpha V(t)\\
&\le \sum_{j=1}^{n_r}\mu_j\sum_{\rho\in\Omega}\Bigg\{-c_{jj}^{(R)}\left|e_j^{(\rho)}(t)\right| + \sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)},\Theta\neq\rho}\left|c_{jj}^{(\Upsilon)}\right|\left|e_j^{(\Theta)}(t)\right| + \sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\left|c_{jh}^{(\Upsilon)}\right|\\
&\quad\times\sup_{\eta\in[0,\overline{\sigma}^l]}\left|e_h^{(\Theta)}(t-\eta)\right| + \sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\left|a_{jh}^{(\Upsilon)}\right|\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\left|w_{is}^{(\widetilde{\Upsilon})}\right|\\
&\quad\times\sup_{\eta\in[0,\overline{\sigma}^d]}\left|e_s^{(\widetilde{\Theta})}(t-\eta)\right| + \sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\left|a_{jh}^{(\Upsilon)}\right|\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{l=1}^{n_o}\left|w_{il}^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\right|\\
&\quad\times\sum_{k=1}^{n_o}\widetilde{\Delta}^{g^{(\widetilde{\Theta})}}(l,k)\sum_{(\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\Omega_{(\widetilde{\Theta})}}\sum_{s=1}^{n_r}\left|w_{ks}^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\right|\sup_{\eta\in[0,\overline{\sigma}^{of}]}\left|e_s^{(\widehat{\Theta})}(t-\eta)\right|\Bigg\},\\
&\le \sum_{j=1}^{n_r}\mu_j\sum_{\rho\in\Omega}\Bigg\{-\underline{c}_{jj}^{(R)}\left|e_j^{(\rho)}(t)\right| + \sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)},\Theta\neq\rho}\overline{c}_{jj}^{(\Upsilon)}\left|e_j^{(\Theta)}(t)\right| + \sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_h}{\mu_j}\\
&\quad\times\overline{c}_{hj}^{(\Upsilon)}\sup_{\eta\in[0,\overline{\sigma}^l]}\left|e_j^{(\Theta)}(t-\eta)\right| + \sum_{h=1}^{n_r}\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_s}{\mu_j}\overline{a}_{sh}^{(\Upsilon)}\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\overline{w}_{ij}^{(\widetilde{\Upsilon})}\\
&\quad\times\sup_{\eta\in[0,\overline{\sigma}^d]}\left|e_j^{(\widetilde{\Theta})}(t-\eta)\right| + \sum_{h=1}^{n_r}\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_s}{\mu_j}\overline{a}_{sh}^{(\Upsilon)}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{l=1}^{n_o}\overline{w}_{il}^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\\
&\quad\times\sum_{k=1}^{n_o}\widetilde{\Delta}^{g^{(\widetilde{\Theta})}}(l,k)\sum_{(\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\Omega_{(\widetilde{\Theta})}}\overline{w}_{kj}^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\sup_{\eta\in[0,\overline{\sigma}^{of}]}\left|e_j^{(\widehat{\Theta})}(t-\eta)\right|\Bigg\}.
\end{aligned}\tag{۲۸.۳}$$

بنابراین، با در نظر گرفتن $\widehat{\rho}\in\Omega$، نتیجه زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}
&D^\alpha V(t)\\
&\le \sum_{j=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_j\Bigg\{-\underline{c}_{jj}^{(R)} + \sum_{\rho\in\Omega}\sum_{(\Upsilon,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)},\rho\neq\widehat{\rho}}\overline{c}_{jj}^{(\Upsilon)}\Bigg\}\left|e_j^{(\widehat{\rho})}(t)\right| + \sum_{j=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_j\\
&\quad\times\sum_{\rho\in\Omega}\Bigg\{\sum_{h=1;h\neq j}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_h}{\mu_j}\overline{c}_{hj}^{(\Upsilon)} + \sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{s=1}^{n_r}\frac{\mu_s}{\mu_j}\overline{a}_{sh}^{(\Upsilon)}\\
&\quad\times\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\overline{w}_{ij}^{(\widetilde{\Upsilon})} + \sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{s=1}^{n_r}\frac{\mu_s}{\mu_r}\overline{a}_{sh}^{(\Upsilon)}\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\\
&\quad\times\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{l=1}^{n_o}\overline{w}_{il}^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\sum_{k=1}^{n_o}\widetilde{\Delta}^{g^{(\widetilde{\Theta})}}(l,k)\sum_{(\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\Omega_{(\widetilde{\Theta})}}\overline{w}_{kj}^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\Bigg\}\sup_{\eta\in[0,\sigma]}\left|e_j^{(\widehat{\rho})}(t-\eta)\right|\\
&\le \sum_{r=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_j\left(-\lambda_{1j}^{(\widehat{\rho})}\left|e_j^{(\widehat{\rho})}(t)\right| + \lambda_{2j}^{(\widehat{\rho})}\sup_{\eta\in[0,\sigma]}\left|e_j^{(\widehat{\rho})}(t-\eta)\right|\right)
\end{aligned}\tag{۲۹.۳}$$

با استفاده از قضیه (۷.۲.۱)، می توان نتیجه گرفت که اگر $\lambda_{1j}^{(\hat{\rho})} > \lambda_{2j}^{(\hat{\rho})} > 0$ برقرار باشد، آنگاه مبدا یک نقطه تعادل یکتای پایدار مجانبی مقاوم برای سیستم دینامیک خطا (۲۵.۳) می باشد. با این نتیجه، می توان گفت که $V(t) \to 0$ و در نتیجه $\left|e_j^{(\rho)}(t)\right| \to 0$ میل می کنند. همچنین، کاملا واضح می باشد که $\lambda_j^{(\hat{\rho})} = \lambda_{1j}^{(\hat{\rho})} - \lambda_{2j}^{(\hat{\rho})} > 0$ شرط رابطه (۲۰.۳) را برآورده می کند.

□

قضیه ۳.۲.۳. با در نظر گرفتن فرض (۱.۲.۳)، شبکه عصبی رابطه (۱۷.۳) بدون تاخیر، دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار میتاگ_ لفلر مقاوم برای هر نقطه درون محدوده شدنی می باشد اگر ثابت مثبت $\lambda_j^{(\hat{\rho})}$ بگونه ای وجود داشته باشد که رابطه (۲۰.۳) برقرار باشد.

اثبات: با در نظر گرفتن دینامیک خطا (۲۵.۳)، بدون در نظر گرفتن تاخیر، می توان گفت که نقطه تعادل شبکه عصبی (۱۷.۳) پایدار میتاگ_ لفلر مقاوم است اگر و تنها اگر مبدا یک نقطه تعادل پایدار میتاگ_ لفلر مقاوم برای سیستم دینامیک خطا (۲۵.۳) می باشد. برای آنالیز پایداری مبدا، تابع لیاپانوف $V(t) = \sum_{j=1}^{n_r} \mu_j \sum_{\rho\in\Omega} \left|e_j^{(\rho)}(t)\right|$ را در نظر می گیریم و سپس با محاسبه مشتق مرتبه کسری آن، داریم:

$$
\begin{aligned}
&D^{\alpha}V(t)\\
&\leq \sum_{j=1}^{n_r}\mu_j \sum_{\rho\in\Omega}\Bigg\{-\underline{c}_{jj}^{(R)}\left|e_j^{(\rho)}(t)\right| + \sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)},\Theta\neq\rho} \overline{c}_{jj}^{(\Upsilon)}\left|e_j^{(\Theta)}(t)\right| + \sum_{h=1,h\neq j}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_h}{\mu_j}\\
&\quad\times\overline{c}_{hj}^{(\Upsilon)}\left|e_j^{(\Theta)}(t)\right| + \sum_{h=1}^{n_r}\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_s}{\mu_j}\overline{a}_{sh}^{(\Upsilon)}\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\overline{w}_{ij}^{(\widetilde{\Upsilon})}\left|e_j^{(\widetilde{\Theta})}(t)\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_s}{\mu_j}\overline{a}_{sh}^{(\Upsilon)}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{l=1}^{n_o}\overline{w}_{il}^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\sum_{k=1}^{n_o}\widetilde{\Delta}^{g^{(\widetilde{\Theta})}}(l,k)\\
&\times\left.\sum_{(\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\Omega_{(\widetilde{\Theta})}}\overline{w}_{kj}^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\left|e_j^{(\widehat{\Theta})}(t)\right|\right\},\\
\leq&\sum_{j=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_j\left\{-\underline{c}_{jj}^{(R)}+\sum_{\rho\in\Omega}\sum_{(\Upsilon,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)},\rho\neq\widehat{\rho}}\overline{c}_{jj}^{(\Upsilon)}\right\}\left|e_j^{(\widehat{\rho})}(t)\right|+\sum_{j=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\sum_{\rho\in\Omega}\mu_j\\
&\times\left\{\sum_{h=1;h\neq j}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\widehat{\rho})\in\Omega_{(\rho)}}\frac{\mu_h}{\mu_j}\overline{c}_{hj}^{(\Upsilon)}+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{s=1}^{n_r}\frac{\mu_s}{\mu_j}\overline{a}_{sh}^{(\Upsilon)}\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widehat{\rho})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\overline{w}_{ij}^{(\widetilde{\Upsilon})}\right.\\
&+\sum_{h=1}^{n_r}\sum_{(\Upsilon,\Theta)\in\Omega_{(\rho)}}\sum_{s=1}^{n_r}\frac{\mu_s}{\mu_r}\overline{a}_{sh}^{(\Upsilon)}\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{i=1}^{n_r}\widetilde{\Delta}^{f^{(\Theta)}}(h,i)\sum_{(\widetilde{\Upsilon},\widetilde{\Theta})\in\Omega_{(\Theta)}}\sum_{l=1}^{n_o}\overline{w}_{il}^{f^{(\widetilde{\Upsilon})}}\sum_{k=1}^{n_o}\widetilde{\Delta}^{g^{(\widetilde{\Theta})}}(l,k)\\
&\times\left.\sum_{(\widehat{\Upsilon},\widehat{\Theta})\in\Omega_{(\widetilde{\Theta})}}\overline{w}_{kj}^{o^{(\widehat{\Upsilon})}}\right\}\left|e_j^{(\widehat{\rho})}(t)\right|. \qquad (۳۰.۳)
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}V(t)&\leq-\sum_{j=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_j\lambda_j^{(\widehat{\rho})}\left|e_j^{(\widehat{\rho})}(t)\right|\\
&\leq-\lambda_{min}\sum_{j=1}^{n_r}\sum_{\widehat{\rho}\in\Omega}\mu_j\left|e_j^{(\widehat{\rho})}(t)\right|\\
&\leq-\lambda_{min}V(t), \qquad (۳۱.۳)
\end{aligned}
$$

که $\lambda_{min}=min_{j,\widehat{\rho}}\left(\lambda_j^{(\widehat{\rho})}\right)>0$ می باشد. عبارت (۳۱.۳) اثبات می کند که تابع لیاپانوف بصورت $V(t)=V(0)E_{\alpha,1}\left(-\lambda_{min}t^{\alpha}\right)$ بسمت صفر میل می کند بطوری که $E_{\alpha,1}(z)$ تابع میتاگ‌ـ لفلر می باشد که برابر است با $E_{\alpha,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$. بنابراین، شبکه عصبی (۱۷.۳) دارای یک نقطه تعادل پایدار میتاگ‌ـ لفلر مقاوم می باشد. در اینجا، اثبات تکمیل می شود.

□

نتیجه ۱.۲.۳. با توجه به نتایج بدست آمده در تئوری های (۱.۲.۳)، (۲.۲.۳) و (۳.۲.۳)، می توان نتیجه گرفت که در صورت تحقق شرط مثبت بودن $\lambda_r^{(\widehat{p})}$ بازای $r=1,2,\cdots,n_r$ و $\widehat{p}\in\Omega$ شبکه عصبی (۱۷.۳) همواره دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار مقاوم می باشد و تاخیر نمی توان منجر به ناپایداری آن گردد.

ملاحظه ۲.۲.۳. در روند اثبات تئوری های (۱.۲.۳)، (۲.۲.۳) و (۳.۲.۳) بوضوح رویت می شود که ورودی کمکی، موقعیت نقطه تعادل شبکه عصبی را تغییر می دهد ولی تاثیری روی شرط پایداری و وجود نقطه تعادل یکتا ندارد. بنابراین، اگر اغتشاش ثابت را به همراه ورودی کمکی به شبکه عصبی اعمال شود، آنگاه اثری یکسان خواهد داشت.

ملاحظه ۳.۲.۳. با در نظر گرفتن، لم (۷.۲.۱)، براحتی می توان نشان داد که کلیه نتایج بدست آمده در تئوری های برای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری مختلط با تابع فعالسازی $QUAD$ نیز صادق می باشد اگر فرض شود $\rho \in \Omega = \{R, I\}$ و

$$\Omega_{(R)} = \{(R,R),(I,I)\}, \qquad \Omega_{(I)} = \{(R,I),(I,R)\},$$
$$\widetilde{\Omega}_{(R)} = \{(1,R,R),(-1,I,I)\}, \qquad \widetilde{\Omega}_{(I)} = \{(1,R,I),(1,I,R)\}.$$

همچنین، این نتایج برای شبکه عصبی هاپفیلد مرتبه کسری مختلط/کواترنیون با/بدون تاخیر و با تابع فعالسازی $QUAD$ نیز قابل استفاده می باشد.

ملاحظه ۴.۲.۳. تحلیل دینامیکی شبکه عصبی هاپفیلد کواترنیون مرتبه صحیح با استفاده از روش مستقیم و غیرمستقیم (تجزیه کردن) در [۳۷، ۶۵، ۱۴۹–۱۵۱] انجام شده است. همچنین، پایداری میتاگ_لفلر مسئله کنترل و همزمانی شبکه عصبی هاپفیلد کواترنیون مرتبه کسری با تابع فعالسازی آستانه خطی در [۹۲] انجام شده است. متفاوت به کارهای گذشته [۳۷، ۶۵، ۹۲، ۱۴۹–۱۵۱]، در این بخش، علاوه بر تحلیل پایداری میتاگ_لفلر مقاوم، به تحلیل پایداری مجانبی مقاوم مستقل از تاخیر شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری با تابع فعالسازی $QUAD$ پرداخته شد. همچنین، برخلاف کارهای گذشته، که ماتریس وزن نشتی C بصورت قطری و حقیقی لحاظ شدند یعنی $C(i,i) \in \mathbb{R}$ و $C(i,j) = 0$ برای $i \neq j$، در این بخش بصورت $C \in \mathbb{H}^{n_r \times n_r}$ در نظر گرفته شد.

۴.۲.۳ نتایج شبیه سازی

در این بخش، شبکه عصبی (۱۷.۳) با $0 < \alpha < 1$ را به فرم رابطه (۳۲.۳) در نظر می گیریم. سپس، برای شبیه سازی از روش پیش بین_اصلاح کننده آدامز_باشفورث_مولتون[1] برای حل عددی رابطه (۳۲.۳) استفاده شده است که یک روش مناسب برای حل معادلات دیفرانسیلی کسری با زمان تاخیر می باشد [۱۳۹].

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}\left(x_j(t)\right) &= -\sum_{h=1}^{n_r} c_{jh} x_h(t-\sigma_{hj}^{l}(t)) + \sum_{h=1}^{n_r} a_{jh} f_h\Bigg(w \otimes x(t-\sigma^{d}(t)) \\
&\quad + w^{f} \otimes y(t-\sigma^{f}(t))\Bigg) + \mathcal{U}_j, \qquad t \in [0,T], \\
y_k(t) &= g_k\left(w^{o} \otimes x(t-\sigma^{o}(t))\right), \qquad t \in [-\sigma, T], \\
x(t) &= \xi(t), \qquad t \in [-\sigma, 0), \qquad (۳۲.۳)
\end{aligned}$$

که σ بیانگر بزرگترین زمان تاخیری است که در حالت های رزرویر رخ می دهد و $\xi(t)$ نیز بیانگر تابعی است که شرایط اولیه را تولید می کند.

[1] Adams-Bashforth- Moulton Predictor-Corrector

در پیاده سازی روش عددی فوق، زمان نمونه برداری $\widetilde{h} = ۰/۰۰۲$ انتخاب شده است. شرایط اولیه حالت های رزرویر بصورت $x_j(t) = \xi_j(t)$ برای هر $j = ۱, \cdots, n_r$ و $t \in [-\sigma, ۰)$ می باشد که $\xi(t)$ بیانگر رشته کواترنیون ــ در مثال (۱.۲.۳)ــ و یا مختلط ــ در مثال (۲.۲.۳) ــ رندم توزیع شده یکنواخت می باشد. پایداری مجانبی مقاوم مستقل از تاخیر شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون در مثال (۱.۲.۳) و شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری مختلط ــ مطابق با ملاحظه (۳.۲.۳) ــ در مثال (۲.۲.۳) با استناد به نتایج تئوری و شبیه سازی بررسی می شود. در هر مثال، دو تست مختلف انجام می شود تا نشان داده شود که تغییر تاخیر اثری بر روی پایداری ندارد. همچنین، برخی از پارامترهای شبکه بصورت وابسته به زمان در فضای شدنی تغییر می کنند تا مقاوم بودن پایداری نیز بررسی شود. بنابراین تنها تفاوت دو تست در هر مثال، متفاوت بودن تاخیر می باشد که در تست دوم، تاخیر صفر در نظر گرفته شد.

مثال ۱.۲.۳. شبکه عصبی رابطه (۱۷.۳) با پارامترهای وزن متغیر با زمان درون فضای شدنی و پارامترهای وزن شکل دهنده فضای شدنی جدول (۴.۳)، ورودی کمکی $\mathcal{U} = [-۵-۴\imath+۵\jmath+۲\kappa; -۲+۴\imath-۲\jmath+۵\kappa]$، اغتشاش $d(t) = [۲+۲\imath+۲\jmath+۲\kappa; -۱-۱\imath-۱\jmath-۱\kappa]$ و $\alpha = ۰/۹$ را در نظر بگیرید که توابع فعالسازی غیرخطی $f_h(\cdot) : \mathbb{H}^{n_r} \to \mathbb{H}$ و $g_k(\cdot) : \mathbb{H}^{n_o} \to \mathbb{H}$ بصورت زیر می باشند:

$$f_h^{(\rho)}(x) = \sum_{j=۱}^{n_r} \alpha^{f^{(\rho)}}(h,j) x^{(\rho)}(j) + \beta^{f^{(\rho)}}(h,j) \sin(x^{(\rho)}(j))$$
$$g_k^{(\rho)}(\hat{x}) = \sum_{j=۱}^{n_o} \alpha^{g^{(\rho)}}(k,j) \hat{x}^{(\rho)}(j) + \beta^{g^{(\rho)}}(k,j) \tanh(\hat{x}^{(\rho)}(j))$$

که $x \in \mathbb{H}^{n_r}$ و $\hat{x} \in \mathbb{H}^{n_o}$ می باشند و همچنین

$$\begin{aligned}
\alpha^f = [&۰/۳ + ۰/۱\imath - ۰/۱\jmath - ۰/۲\kappa, -۰/۲ + ۰/۱\imath + ۰/۲\jmath - ۰/۳\kappa;\\
&- ۰/۱ - ۰/۲\imath - ۰/۳\jmath + ۰/۲\kappa, ۰/۲ + ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath - ۰/۱\kappa]\\
\beta^f = [&۰/۱ - ۰/۳\imath - ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa, ۰/۱ + ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۲\kappa;\\
&۰/۲ + ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath - ۰/۱\kappa, ۰/۱ - ۰/۲\imath - ۰/۲\jmath + ۰/۱\kappa]\\
\alpha^g = &۰/۵ - \imath - ۰/۵\jmath - \kappa, \quad \beta^g = -۱ + ۰/۵\imath + \jmath - ۰/۵\kappa.
\end{aligned}$$

بنابراین، با استفاده از تعریف (۲.۲.۱) و نتیجه (۱.۲.۱) داریم:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\Delta}^f| = [&۰/۴ + ۰/۲\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۲۵\kappa, ۰/۲۵ + ۰/۳\imath + ۰/۳\jmath + ۰/۳۵\kappa;\\
&۰/۱۵ + ۰/۲۵\imath + ۰/۳۵\jmath + ۰/۲۵\kappa, ۰/۳ + ۰/۲۵\imath + ۰/۱۵\jmath + ۰/۱۵\kappa]\\
|\widetilde{\Delta}^g| = [&۰/۵ + \imath + ۰/۵\jmath + ۱/۵\kappa]
\end{aligned}$$

در نهایت، با استفاده از پارامترهای فوق و شرط پایداری رابطه (۲۰.۳)، مقادیر ویژه بصورت $\lambda^{(R)} = [۰/۰۷۱۴; ۰/۰۱۴۶]$، $\lambda^{(I)} = [۰/۰۶۳۹; ۰/۰۱۶۶]$، $\lambda^{(J)} = [۰/۰۰۳۱; ۰/۰۴۳۴]$ و $\lambda^{(K)} = [۰/۰۳۲۹; ۰/۰۱۰۶]$ بدست می آیند. بنابراین، مطابق با تئوری های (۱.۲.۳)، (۲.۲.۳) و (۳.۲.۳)، شبکه عصبی مورد نظر دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار مقاوم مستقل از تاخیر می باشد. در ادامه، با هدف اثبات کارایی نتایج تحلیلی بدست آمده، به شبیه سازی شبکه عصبی مورد نظر ـ بصورت دو تست مجزا ۱ و ۲ـ با پارامترهای متغیر با زمان درون فضای شدنی پرداخته خواهد شد. پارامترهای شبکه عصبی در این دو تست، در جدول (۴.۳) آمده است.

تست ۱: در این تست، تاخیر شبکه عصبی بصورت زیر در نظر گرفته شد:

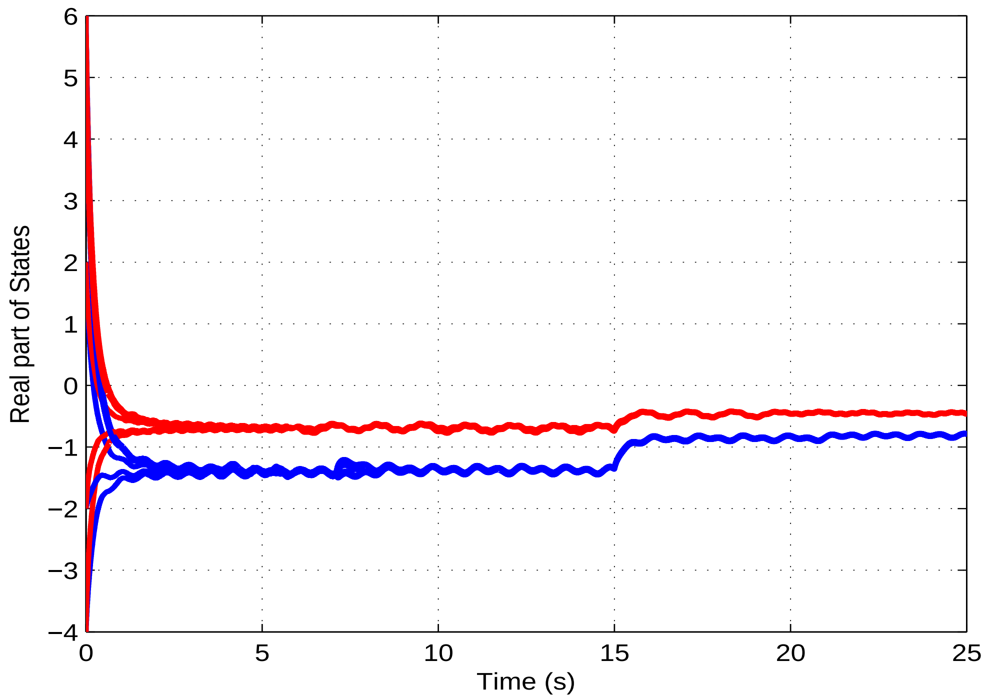
$$\sigma^l = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ + ۲/۵\cos(۰/۵t) \\ ۵ + ۲/۵\sin(۰/۵t) & ۰ \end{bmatrix}, \sigma^d = \begin{bmatrix} ۵ + ۵\cos^۲(t) & ۵ + ۲/۵\sin^۲(t) \\ ۵ + ۲/۵\sin(t) & ۵ + ۴\cos(t) \end{bmatrix},$$

$$\sigma^o = \begin{bmatrix} ۵ + ۲/۵\cos(۰/۵t) & ۵ + ۲/۵\sin(۰/۵t) \end{bmatrix}, \sigma^f = \begin{bmatrix} ۵ + ۲/۵\cos(۰/۵t) \\ ۵ + ۲/۵\sin(۰/۵t) \end{bmatrix}.$$

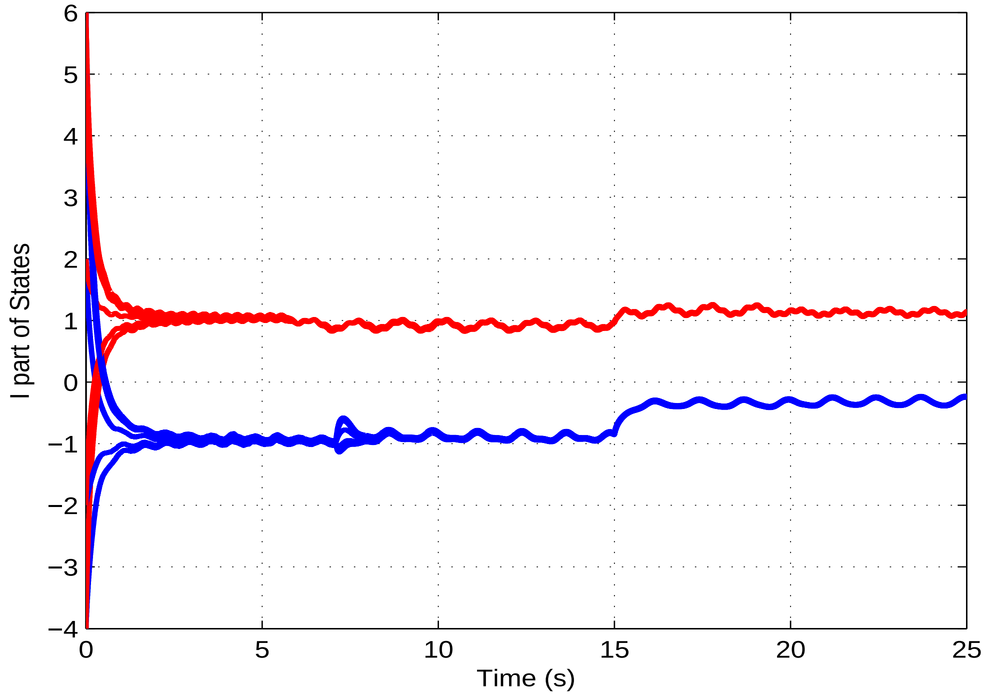
سپس، شبیه سازی با ۵ شرایط اولیه $[x_۱(۰); x_۲(۰)] = b + b\imath + b\jmath + b\kappa$، که $b \in \{۲, -۴,۶, -۲,۵; -۲,۵, -۴,۶, -۲\}$ می باشند، و در حضور اغتشاش $d(t)$، که برای $t \geq ۱۵$ اعمال شده است، انجام شده است. نتایج شبیه سازی در شکل (۷.۳) آمده است. این نتایج نشان می دهد که حالت های رزروپر در حالت ماندگار درون یک فضای محدود ـ که وابسته به پارامترهای نامعین متغیر به زمان می باشدـ باقی می ماند. همچنین، نشان می دهد که اغتشاش فقط منجر به جابجایی موقعیت نقطه تعادل می شود. پس مطابق با نتایج تئوری، نقطه تعادل شبکه عصبی، بازای هر نقطه درون فضای شدنی، پایدار مجانبی مقاوم می باشد.

تست ۲: در این تست، تاخیر برابر با صفر انتخاب شد و بقیه پارامترهای شبکه همانند تست قبل می باشد. نتایج بدست آمده از این تست در شکل (۸.۳) آمده است. این نتایج نشان می دهد که نقطه تعادل شبکه عصبی با اعمال اغتشاش تغییر می کند ولی همچنان پایدار می باشد و نشان می دهد که در حالت ماندگار، حالت های رزروپر درون یک فضای محدود باقی می ماند. بنابراین، مطابق با نتایج تئوری، شبکه عصبی مورد نظر بدون تاخیر دارای یک نقطه تعادل پایدار متیگ ـ لفلر مقاوم می باشد.

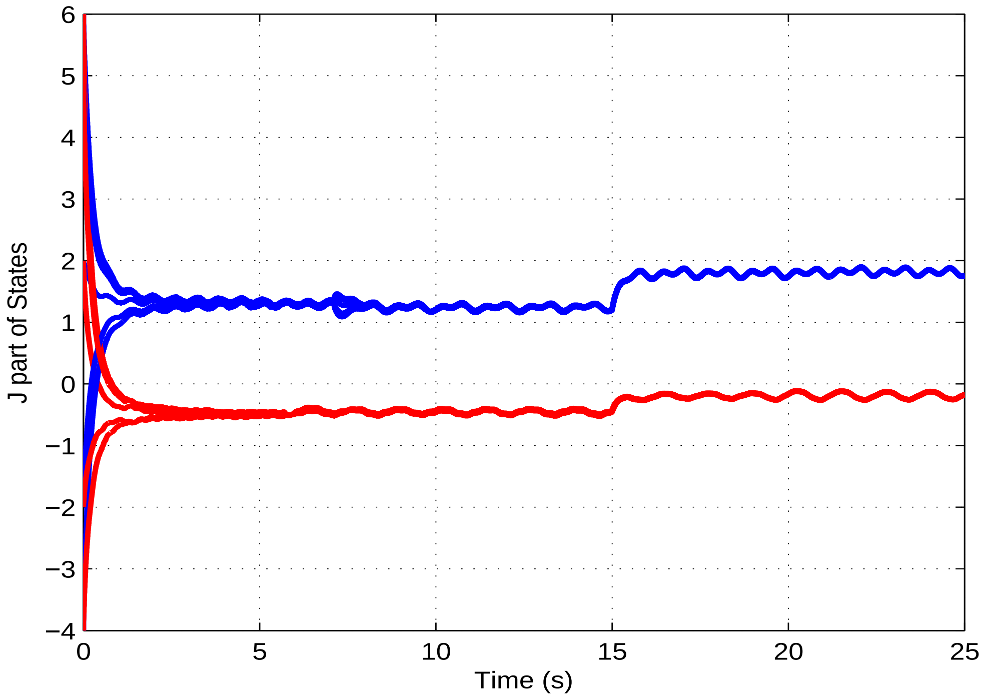
مثال ۲.۲.۳. شبکه عصبی کواِستیت مرتبه کسری مختلط با ساختار رابطه (۱۷.۳)، مطابق با ملاحظه (۳.۲.۳)، با $\alpha = ۰/۹$، پارامترهای وزن شکل دهنده فضای شدنی جدول (۵.۳)، پارامترهای وزن متغیر با زمان جدول (۵.۳)، ورودی کمکی $\mathcal{U} = [۵ - ۴\imath; -۲ + ۴\imath]$، اغتشاش $d(t) = [۲ + ۲\imath; ۴ - ۴\imath]$ و توابع فعالسازی غیر خطی $f_h(\cdot) : \mathbb{C}^{n_r} \to \mathbb{C}$ و $g_k(\cdot) : \mathbb{C}^{n_o} \to \mathbb{C}$ که



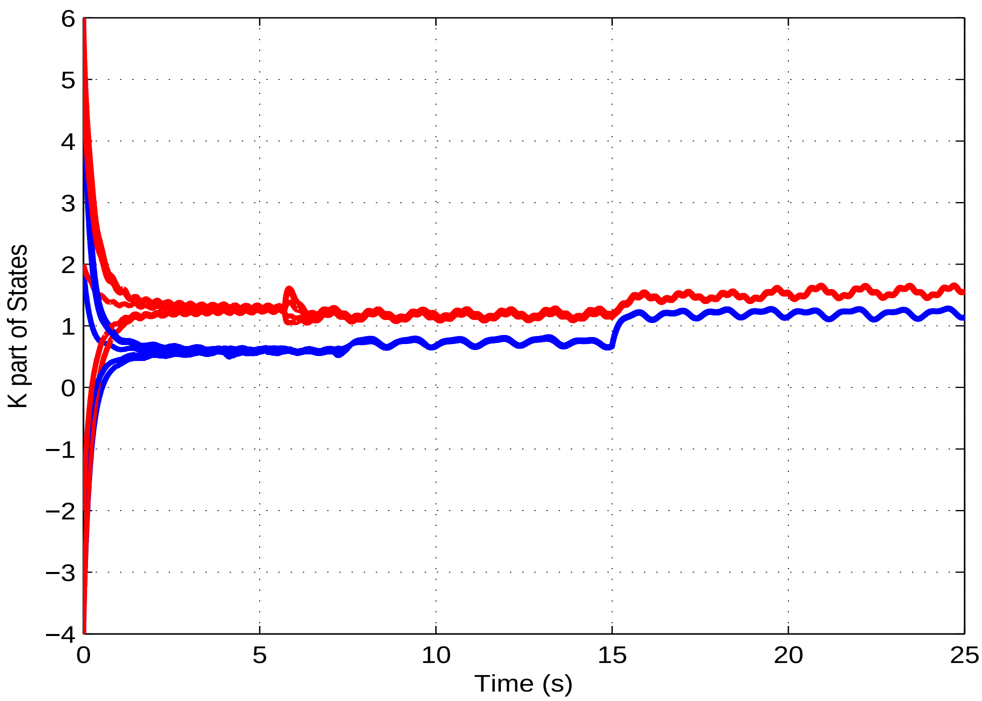
(آ) بخش حقیقی حالت های رزروير



(ب) بخش $\imath$ حالت های رزروير

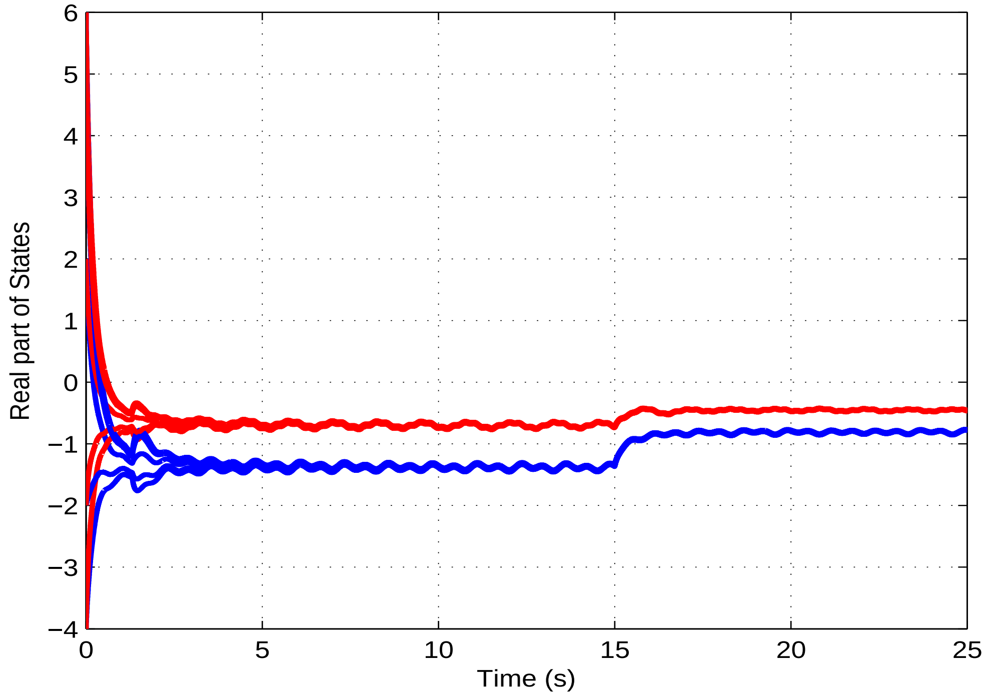


(ج) بخش J حالت های رزروير

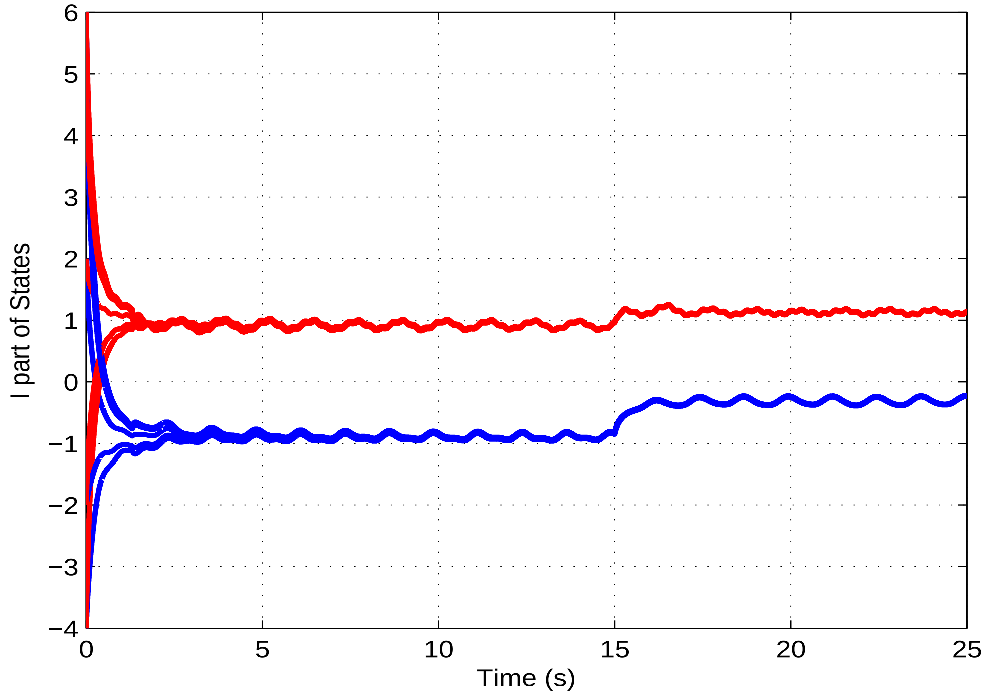


(د) بخش K حالت های رزروير

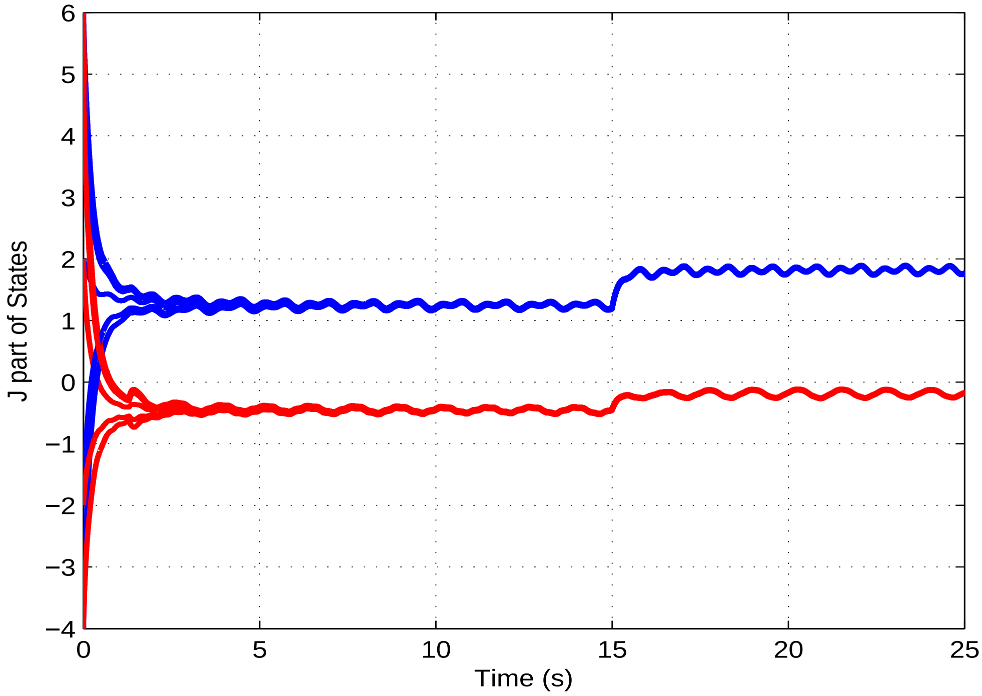
شکل ۷.۳: حالت های رزروير مثال (۱.۲.۳) تست ۱ بازای شرایط اولیه متفاوت، x_1 (آبی) و x_2 (قرمز)



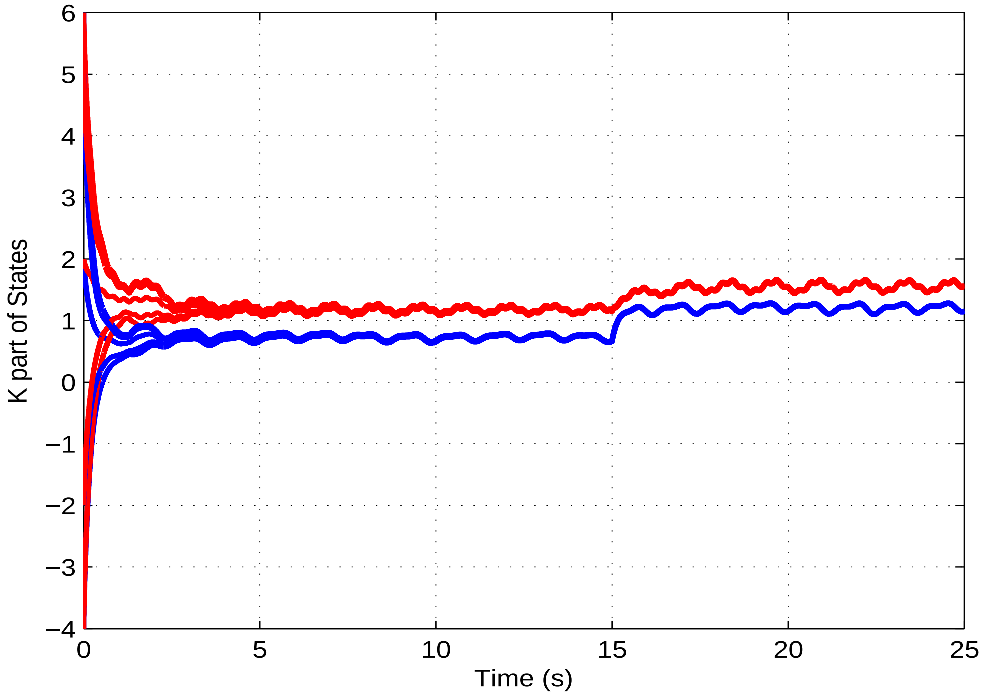
(آ) بخش حقیقی حالت های رزروير



(ب) بخش $\imath$ حالت های رزروير



(ج) بخش $\jmath$ حالت های رزرویر



(د) بخش κ حالت های رزرویر

شکل ۸.۳: حالت های رزرویر مثال (۱.۲.۳) تست ۲ بازای شرایط اولیه متفاوت، x_1 (آبی) و x_2 (قرمز)

جدول ۴.۳: پارامترهای شبکه عصبی مثال (۱.۲.۳)

پارامترهای وزن شکل دهنده فضای شدنی
$\hat{C} = \begin{bmatrix} ۴ + ۰/۳\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۲۵\kappa & ۰/۳ + ۰/۲\imath + ۰/۳\jmath + ۰/۳\kappa \\ ۰/۲ + ۰/۳\imath + ۰/۳\jmath + ۰/۲\kappa & ۴ + ۰/۳\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۴\kappa \end{bmatrix}$
$\check{C} = \begin{bmatrix} ۳/۵ - ۰/۳\imath - ۰/۲\jmath - ۰/۲\kappa & -۰/۳ - ۰/۲\imath - ۰/۳\jmath - ۰/۳\kappa \\ -۰/۲ - ۰/۳\imath - ۰/۳\jmath - ۰/۲\kappa & ۳/۵ - ۰/۳\imath - ۰/۲\jmath - ۰/۴\kappa \end{bmatrix}$
$\hat{A} = \begin{bmatrix} ۰/۲ + ۰/۲\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۳\kappa & ۰/۳ + ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa \\ ۰/۱ + ۰/۱\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۳\kappa & ۰/۲ + ۰/۲\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۲\kappa \end{bmatrix}$
$\check{A} = \begin{bmatrix} -۰/۲ - ۰/۲\imath - ۰/۲\jmath - ۰/۳\kappa & -۰/۳ - ۰/۲\imath - ۰/۱\jmath - ۰/۱\kappa \\ -۰/۱ - ۰/۱\imath - ۰/۲\jmath - ۰/۳\kappa & -۰/۲ - ۰/۲\imath - ۰/۲\jmath - ۰/۲\kappa \end{bmatrix}$
$\hat{W} = \begin{bmatrix} ۰/۲ + ۰/۲\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۲\kappa & ۰/۳\imath + ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۲\kappa \\ ۰/۱ + ۰/۲\imath + ۰/۳\jmath + ۰/۲\kappa & ۰/۱ + ۰/۱\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۱\kappa \end{bmatrix}$
$\check{W} = \begin{bmatrix} -۰/۲ - ۰/۲\imath - ۰/۲\jmath - ۰/۲\kappa & -۰/۳\imath - ۰/۲\imath - ۰/۱\jmath - ۰/۲\kappa \\ -۰/۱ - ۰/۲\imath - ۰/۳\jmath - ۰/۲\kappa & -۰/۱ - ۰/۱\imath - ۰/۲\jmath - ۰/۱\kappa \end{bmatrix}$
$\hat{W}^f = \begin{bmatrix} ۰/۱ + ۰/۱\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۲\kappa \\ ۰/۰۵ + ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa \end{bmatrix}$
$\check{W}^f = \begin{bmatrix} -۰/۱ - ۰/۱\imath - ۰/۲\jmath - ۰/۲\kappa \\ -۰/۰۵ - ۰/۲\imath - ۰/۱\jmath - ۰/۱\kappa \end{bmatrix}$
$\hat{W}^o = \begin{bmatrix} ۰/۲ + ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa & ۰/۱ + ۰/۱\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۲\kappa \end{bmatrix}$
$\check{W}^o = \begin{bmatrix} -۰/۲ - ۰/۲\imath - ۰/۱\jmath - ۰/۱\kappa & -۰/۱ - ۰/۱\imath - ۰/۲\jmath - ۰/۲\kappa \end{bmatrix}$
پارامترهای متغیر با زمان درون فضای شدنی
$C = \begin{bmatrix} ۳/۵ + ۰/۵\sin^۲(۵t) + ۰/۱\imath - ۰/۲\jmath + ۰/۱\kappa & -۰/۳ + ۰/۱\imath + ۰/۳\sin(۵t)\jmath + ۰/۲\kappa \\ -۰/۱ + ۰/۳\cos(۵t)\imath + ۰/۲\jmath - ۰/۲\kappa & ۳/۵ + ۰/۵\cos^۲(۱۰t) - ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath - ۰/۳\kappa \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} ۰/۲\sin(۱۰t) - ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۳\cos(t)\kappa & -۰/۳ + ۰/۲\sin(۵t)\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۱\cos(۲t)\kappa \\ -۰/۱ + ۰/۱\imath - ۰/۲\jmath + ۰/۳\sin(۵t)\kappa & -۰/۱ + ۰/۱\imath + ۰/۲\cos(۵t)\jmath - ۰/۲\kappa \end{bmatrix}$
$W = \begin{bmatrix} -۰/۱ + ۰/۲\sin(۴t)\imath - ۰/۲\jmath + ۰/۱\kappa & ۰/۳\cos(۵t) + ۰/۱\imath + ۰/۱\jmath - ۰/۱\kappa \\ -۰/۱ + ۰/۱\imath + ۰/۳\cos(۵t)\jmath - ۰/۲\kappa & -۰/۱ + ۰/۱\imath - ۰/۲\jmath + ۰/۱\cos(۵t)\kappa \end{bmatrix}$
$W^f = \begin{bmatrix} -۰/۱ - ۰/۱\imath + ۰/۲\sin(۵t)\jmath + ۰/۱\kappa \\ -۰/۰۵ + ۰/۲\cos(۱۰t)\imath + ۰/۱\jmath - ۰/۱\kappa \end{bmatrix}$
$W^o = \begin{bmatrix} ۰/۲\cos(۱۰t) + ۰/۲\sin(۵t)\imath + ۰/۱\jmath - ۰/۱\kappa & ۰/۱ - ۰/۱\imath + ۰/۲\sin(۱۰t)\jmath + ۰/۲\cos(۵t)\kappa \end{bmatrix}$

جزییات آن در زیر آمده است، را در نظر بگیرید.

$$f_h^{(\rho)}(x) = \sum_{j=۱}^{n_r} \alpha^{f^{(\rho)}}(h,j)x^{(\rho)}(j) + \beta^{f^{(\rho)}}(h,j)\sin(x^{(\rho)}(j))$$
$$g_k^{(\rho)}(\hat{x}) = \sum_{j=۱}^{n_o} \alpha^{g^{(\rho)}}(k,j)\hat{x}^{(\rho)}(j) + \beta^{g^{(\rho)}}(k,j)\tanh(\hat{x}^{(\rho)}(j))$$

که $x \in \mathbb{C}^{n_r}$، $\hat{x} \in \mathbb{C}^{n_o}$ و $\rho \in \{R, I\}$ می باشند و همچنین

$$\alpha^f = [0/5 + 0/4\imath, 0/5 + 0/4\imath; -0/5 - 0/5\imath, 0/5 + 0/3\imath], \quad \alpha^g = 1 - 0/5\imath$$
$$\beta^f = [0/2 - 0/5\imath, 0/5 + 0/5\imath; 0/5 - 0/5\imath, -0/8 + 0/5\imath], \quad \beta^g = -1 + \imath$$

بنابراین، با استفاده از تعریف (۲.۲.۱)، نتیجه (۱.۲.۱) و ملاحظه (۳.۲.۳)، داریم:

$$|\widetilde{\Delta}^f| = [0/7 + 0/8\imath, 1 + 0/8\imath; 0/65 + \imath, 0/7 + 0/6\imath], \quad |\widetilde{\Delta}^g| = [1 + 0/5\imath]$$

در نهایت، با استفاده از پارامترهای فوق، شرط پایداری رابطه (۲۰.۳) و ملاحظه (۳.۲.۳)، مقادیر ویژه بصورت $\lambda^{(R)} = [0/1106; 0/1889]$ و $\lambda^{(I)} = [0/1486; 0/0579]$ بدست می آیند. بنابراین، مطابق با تئوری های (۱.۲.۳)، (۲.۲.۳) و (۳.۲.۳)، شبکه عصبی مورد نظر دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار مقاوم مستقل از تاخیر می باشد. در ادامه، با هدف اثبات کارایی نتایج تحلیلی بدست آمده، به شبیه سازی شبکه عصبی مورد نظر ـ بصورت دو تست مجزا ۱ و ۲ـ با پارامترهای متغیر با زمان درون فضای شدنی پرداخته خواهد شد. پارامترهای شبکه عصبی در این دو تست، در جدول (۵.۳) آمده است.

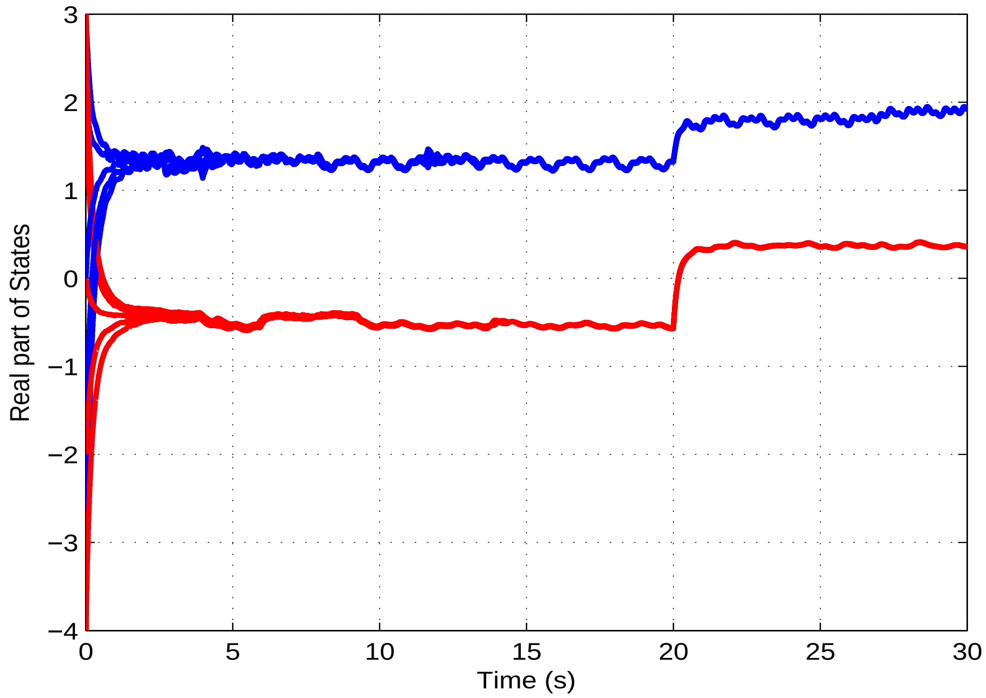
تست ۱: در این تست، تاخیر شبکه عصبی مختلط بصورت زیر در نظر گرفته شد:

$$\sigma^l = \begin{bmatrix} 0 & 8 + 6\cos(t) \\ 8 + 6\sin(t) & 0 \end{bmatrix}, \sigma^d = \begin{bmatrix} 8\cos^2(2t) & 4 + 4\sin^2(2t) \\ 8|\sin(2t)| & 5|\cos(2t)| \end{bmatrix},$$

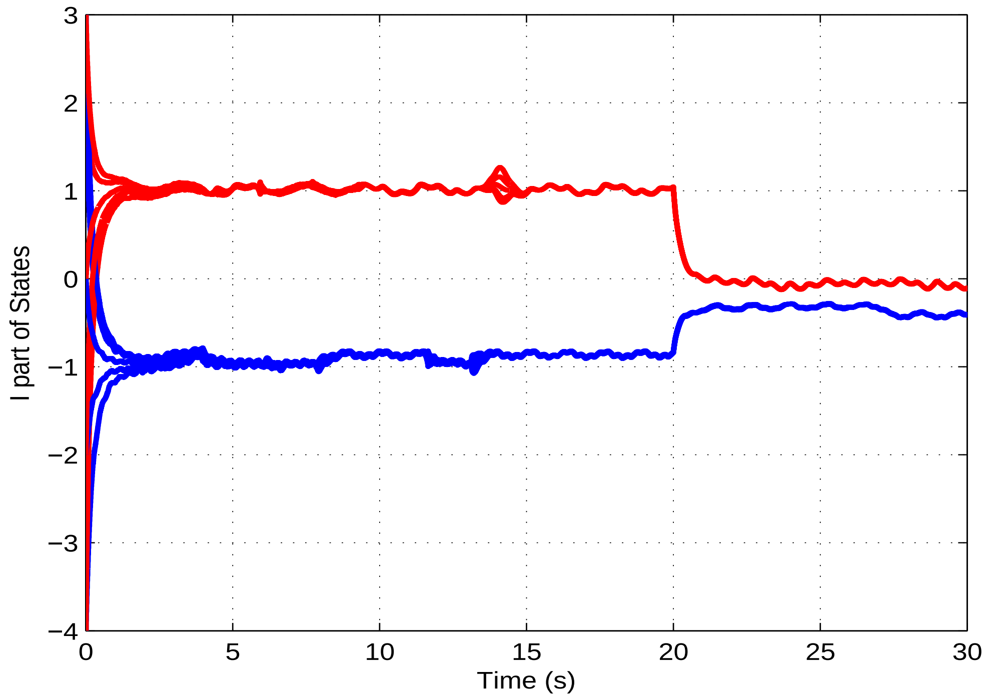
$$\sigma^o = \begin{bmatrix} 6|\cos(t)| & 8|\sin(t)| \end{bmatrix}, \sigma^f = \begin{bmatrix} 8|\cos(t)| \\ 5|\sin(t)| \end{bmatrix}.$$

سپس، شبیه سازی با ۵ شرایط اولیه $[q_1(0); q_2(0)] = b + b\imath$، که $b \in \{2, -4, 3, -2, 0; 2, -4, 3, -2, 0\}$ می باشند، و در حضور اغتشاش $d(t)$، که برای $t \geq 20$ اعمال شده است، انجام شده است. نتایج شبیه سازی در شکل (۹.۳) آمده است. این نتایج نشان می دهد که حالت های رزروير در حالت ماندگار درون یک فضای محدود ـ که وابسته به پارامترهای نامعین متغیر به زمان می باشدـ باقی می ماند. همچنین، نشان می دهد که اغتشاش فقط منجر به جابجایی موقعیت نقطه تعادل می شود. پس مطابق با نتایج تئوری، نقطه تعادل شبکه عصبی، بازای هر نقطه درون فضای شدنی، پایدار مجانبی مقاوم می باشد.

تست ۲: در این تست، تاخیر برابر با صفر انتخاب شد و بقیه پارامترهای شبکه همانند تست قبل می باشد. نتایج بدست آمده از این تست در شکل (۱۰.۳) آمده است. این نتایج نشان می دهد که نقطه تعادل شبکه عصبی با اعمال اغتشاش تغییر می کند ولی همچنان پایدار می باشد و نشان می دهد که در حالت ماندگار، حالت های رزروير درون یک فضای محدود باقی می ماند. بنابراین، مطابق با نتایج تئوری، شبکه عصبی مورد نظر بدون تاخیر دارای یک نقطه تعادل پایدار متیگ‌ـ لفلر مقاوم می باشد.

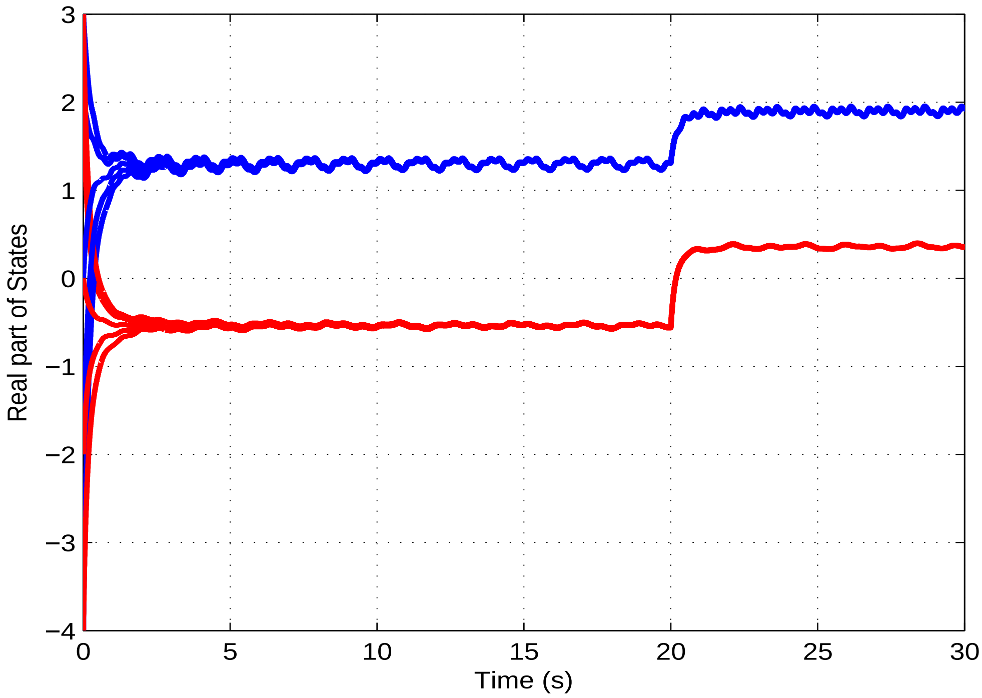


(آ) بخش حقیقی حالت های رزروير

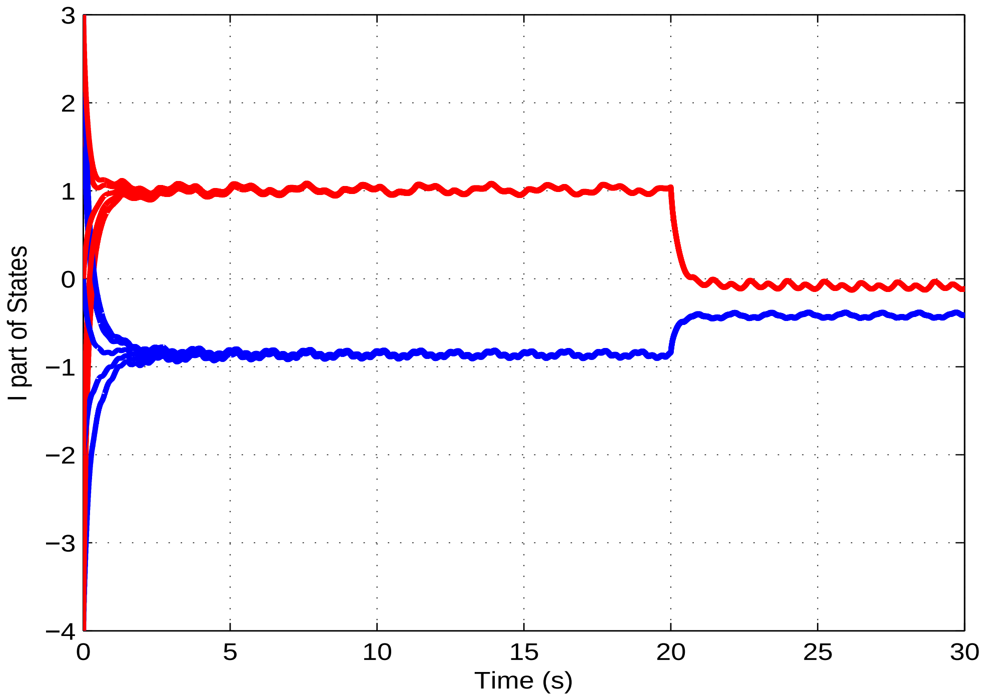


(ب) بخش $\imath$ حالت های رزروير

شکل ۹.۳: حالت های رزروير مثال (۲.۲.۳) تست ۱ بازای شرایط اولیه متفاوت، x_1 (آبی) و x_2 (قرمز)



(آ) بخش حقیقی حالت های رزرویر



(ب) بخش $\imath$ حالت های رزرویر

شکل ۱۰.۳: حالت های رزرویر مثال (۲.۲.۳) تست ۲ بازای شرایط اولیه متفاوت، x_1 (آبی) و x_2 (قرمز)

جدول ۵.۳: پارامترهای شبکه عصبی مثال (۲.۲.۳)

پارامترهای وزن شکل دهنده فضای شدنی

$$\check{C} = \begin{bmatrix} ۳/۵ - ۰/۵\imath & -۰/۵ - ۰/۳\imath \\ -۰/۳ - ۰/۴\imath & ۳/۸ - ۰/۵\imath \end{bmatrix} \qquad \hat{C} = \begin{bmatrix} ۴ + ۰/۵\imath & ۰/۵ + ۰/۳\imath \\ ۰/۳ + ۰/۴\imath & ۴/۵ + ۰/۵\imath \end{bmatrix}$$

$$\check{A} = \begin{bmatrix} -۰/۴ - ۰/۳\imath & -۰/۳ - ۰/۵\imath \\ -۰/۳ - ۰/۳\imath & -۰/۲ - ۰/۲\imath \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} ۰/۴ + ۰/۳\imath & ۰/۳ + ۰/۵\imath \\ ۰/۳ + ۰/۳\imath & ۰/۲ + ۰/۲\imath \end{bmatrix}$$

$$\check{W} = \begin{bmatrix} -۰/۲ - ۰/۲\imath & -۰/۳\imath - ۰/۲\imath \\ -۰/۳ - ۰/۲\imath & -۰/۱ - ۰/۳\imath \end{bmatrix} \qquad \hat{W} = \begin{bmatrix} ۰/۲ + ۰/۲\imath & ۰/۳\imath + ۰/۲\imath \\ ۰/۳ + ۰/۲\imath & ۰/۱ + ۰/۳\imath \end{bmatrix}$$

$$\check{W}^f = \begin{bmatrix} -۰/۲ - ۰/۲\imath \\ -۰/۱ - ۰/۲\imath \end{bmatrix} \qquad \hat{W}^f = \begin{bmatrix} ۰/۲ + ۰/۲\imath \\ ۰/۱ + ۰/۲\imath \end{bmatrix}$$

$$\check{W}^o = \begin{bmatrix} -۰/۲ - ۰/۲\imath & -۰/۳ - ۰/۳\imath \end{bmatrix} \qquad \hat{W}^o = \begin{bmatrix} ۰/۲ + ۰/۲\imath & ۰/۳ + ۰/۳\imath \end{bmatrix}$$

پارامترهای متغیر با زمان درون فضای شدنی

$$C = \begin{bmatrix} ۳/۵ + ۰/۵|\sin(۱۰t)| - ۰/۲\imath & -۰/۴ + ۰/۳\cos(۵t)\imath \\ ۰/۲ + ۰/۳|\sin(۵t)|\imath & ۴ + ۰/۲\cos(۳t) + ۰/۳\imath \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -۰/۳ + ۰/۲\sin(۵t)\imath & ۰/۲ + ۰/۴\cos(۱۰t)\imath \\ ۰/۱\sin(۴t) + ۰/۲\imath & ۰/۲\cos(۵t) + ۰/۱\imath \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} ۰/۲|\cos(۵t)| - ۰/۲\imath & ۰/۳|\sin(۵t)| + ۰/۱\imath \\ -۰/۱ + ۰/۲\cos(۵t)\imath & -۰/۱ + ۰/۳\cos(۵t)\imath \end{bmatrix}$$

$$W^f = \begin{bmatrix} -۰/۲ + ۰/۲\cos(۱۰t)\imath \\ ۰/۱\sin(۵t) - ۰/۲\imath \end{bmatrix}$$

$$W^o = \begin{bmatrix} -۰/۱ + ۰/۲\sin(۱۰t)\imath & ۰/۳\cos(۵t) - ۰/۲\imath \end{bmatrix}$$

خلاصه اینکه، نتایج شبیه سازی مثال های فوق تایید کننده نتایج تحلیلی بدست آمده برای پایداری نقطه تعادل شبکه عصبی کواترنیون با/بدون تاخیر زمانی متغیر با زمان می باشد. در مجموع، این نتایج نشان می دهند که شرایط اولیه و تاخیر و اغتشاش بر روی پایداری مجانبی/میتاگ_لفلر مقاوم نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون/مختلط تاثیری ندارند. همچنین، نشان می دهد که از نتایج تئوری بدست آمده می توان براحتی برای طراحی کنترلر فیدبک حالت استفاده کرد. بنابراین، می توان گفت این نتایج بدست آمده قابل استفاده برای طراحی کنترل و همزمانی مقاوم شبکه های عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون و مختلط آشوبی می باشد.

۳.۳ تحلیل پایداری مقاوم وابسته به تاخیر نقطه تعادل شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری نامعین ممریستیو در حضور تاخیر متغیر با زمان و تاخیر نیوترال

در این بخش، به مطالعه بر روی وجود و یکتایی نقطه تعادل پایدار مقاوم برای یک شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری نامعین ممریستیو کواترنیون در حضور تاخیر متغیر با زمان و تاخیر نیوترال[1] پرداخته خواهد شد که در توابع فعالسازی آنها شرط $QUAD$ برقرار می باشد. در ادامه، مواردی که به ترتیب انجام خواهند شد، عبارتند از ۱) توصیف دقیق شبکه عصبی مورد نظر، ۲) تحلیل وجود و یکتایی نقطه تعادل که به حل یک مسئله LMI [2] می انجامد، ۳) تحلیل پایداری مجانبی نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی که به حل یک مسئله LMI می انجامد، ۴) تحلیل پایداری مجانبی مقاوم نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی که به حل یک مسئله LMI می انجامد. بنابراین برای تحلیل پایداری (یا پایداری مقاوم) نقطه تعادل این شبکه می بایست دو مسئله LMI مجزا حل شوند.

۱.۳.۳ توصیف مدل شبکه عصبی در حضور تاخیر متغیر با زمان

شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری نامعین ممریستیو کواترنیون در حضور تاخیر متغیر با زمان و تاخیر نیوترال با $n_i \in \mathbb{Z}^+$ ورودی، $n_o \in \mathbb{Z}^+$ خروجی و $n_r \in \mathbb{Z}^+$ متغیر حالت رزرویر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}D^\alpha x(t) &= -(C_۱ + \Delta C_۱(t))x(t) + (A(x(t)) + \Delta A(t))f\left(W^{in}u(t) + Wx(t) + W^f y(t)\right)\\&\quad + (B(x(t)) + \Delta B(t))h\left(W^{in}u(t-\eta(t)) + Wx(t-\eta(t)) + W^f y(t-\eta(t))\right)\\&\quad + (C_۲ + \Delta C_۲(t))D^v x(t-\mu(t)) + \mathcal{U}\\y(t) &= g(W^o x(t) + W^{io}u(t)),\end{aligned} \tag{۳۳.۳}$$

که $x = [x_۱, \cdots, x_{n_r}]^T \in \mathbb{H}^{n_r}$ و $y = [y_۱, \cdots, y_{n_o}]^T \in \mathbb{H}^{n_o}$، به ترتیب، بردارهای حالت های رزرویر و خروجی شبکه می باشند و $\mathcal{U} = [\mathcal{U}_۱, \cdots, \mathcal{U}_{n_r}]^T \in \mathbb{H}^{n_r}$ و $u = [u_۱, \cdots, u_{n_i}]^T \in \mathbb{H}^{n_i}$ نیز بیانگر، به ترتیب، ورودی های خارجی و کمکی ان می باشند. توابع برداری $f = [f_۱, f_۲, \cdots, f_{n_r}]^T$ و $h = [h_۱, h_۲, \cdots, h_{n_r}]^T$ توابع فعالسازی $QUAD$ در مولفه های ممریستیو شبکه می باشند که مولفه iام، $i = ۱, ۲, \cdots, n_r$، این دو تابع بصورت $f_i : \mathbb{H}^{n_r} \to \mathbb{H}$ و $h_i :$

[1] Neutral-type delay
[2] Linear Matrix Inequality

$\mathbb{H}^{n_r} \to \mathbb{H}$ تعریف می شوند. همچنین، تابع برداری $g = [g_1, g_2, \cdots, g_{n_o}]^T$ تابع فعالسازی $QUAD$ خروجی شبکه می باشد که مولفه kام، $k = 1, 2, \cdots, n_o$، این تابع بصورت $g_k : \mathbb{H}^{n_o} \to \mathbb{H}$ تعریف می شود. ماتریس های $W^{in} = [w^{in}_{im}]_{n_r \times n_i} \in \mathbb{H}^{n_r \times n_i}$، $W^{io} = [w^{io}_{km}]_{n_o \times n_i} \in \mathbb{H}^{n_o \times n_i}$، $W^o = [w^o_{kj}]_{n_o \times n_r} \in \mathbb{H}^{n_o \times n_r}$، $W = [w_{ij}]_{n_r \times n_r} \in \mathbb{H}^{n_r \times n_r}$ و $W^f = \left[w^f_{il}\right]_{n_r \times n_o} \in \mathbb{H}^{n_r \times n_o}$ وزن های ورودی، خروجی، حالت های رزروير و فیدبک هستند. نماد $\eta(t)$ که قیود $0 \le \eta(t) \le \eta$ و $\dot{\eta}(t) \le \dot{\eta}$ را برآورده می سازد، نشان دهنده تاخیر متغیر با زمان در مولفه های ممریستیو است و نماد $\mu(t)$ که قیود $0 \le \mu(t) \le \mu$ و $\dot{\mu}(t) \le \dot{\mu}$ را برآورده می سازد، نشان دهنده تاخیر نیوترال متغیر با زمان است. عبارت های $C_1 + \Delta C_1(t) = [c_{1ij} + \Delta c_{1ij}]_{n_r \times n_r} \in \mathbb{H}^{n_r \times n_r}$، $A(x(t)) + \Delta A(t) = [a_{ij}(x(t)) + \Delta a_{ij}]_{n_r \times n_r} \in \mathbb{H}^{n_r \times n_r}$، $B(x(t)) + \Delta B(t) = [b_{ij}(x(t-\eta(t))) + \Delta b_{ij}]_{n_r \times n_r} \in \mathbb{H}^{n_r \times n_r}$ و $C_2 + \Delta C_2(t) = [c_{2ij} + \Delta c_{2ij}]_{n_r \times n_r} \in \mathbb{H}^{n_r \times n_r}$، به ترتیب، ماتریس های وزن نشتی، مولفه ممریستیو، مولفه ممریستیو تاخیردار و حالت های رزروير تاخیری نیوترال می باشند. نمادهای $a_{ij}(x(t))$ و $b_{ij}(x(t-\eta(t)))$ بیانگر وزن های کواترنیون مولفه های ممریستیو می باشند که مطابق با ویژگی های هیسترزیس[1] بصورت زیر تعریف شده اند [۱۵۲] و [۱۵۳].

$$a^{(\rho)}_{ij}(x(t)) = \begin{cases} \hat{a}^{(\rho)}_{ij} & |\chi^{(\rho)}_j(t)| < \zeta^{(\rho)}_j \\ \check{a}^{(\rho)}_{ij} & |\chi^{(\rho)}_j(t)| > \zeta^{(\rho)}_j \end{cases}$$

$$b^{(\rho)}_{ij}(x(t-\eta(t))) = \begin{cases} \hat{b}^{(\rho)}_{ij} & |\chi^{(\rho)}_j(t-\eta(t))| < \zeta^{(\rho)}_j \\ \check{b}^{(\rho)}_{ij} & |\chi^{(\rho)}_j(t-\eta(t))| > \zeta^{(\rho)}_j \end{cases}, \tag{۳۴.۳}$$

که $\rho \in \{R, I, J, K\}$ می باشد و تعیین کننده مولفه های حقیقی و موهومی $\hat{a}_{ij}, \check{a}_{ij}, \hat{b}_{ij}, \check{b}_{ij} \in \mathbb{H}$ می باشد. ثابت $\zeta_j \in \mathbb{H}^+$، که هر مولفه آن (حقیقی یا موهومی) حقیقی مثبت می باشد، پرش سوئیچینگ[2] می باشد به طوریکه $a_{ij}(\pm\zeta_j) = \hat{a}_{ij}$ یا $\check{a}_{ij}$ و $b_{ij}(\pm\zeta_j) = \hat{b}_{ij}$ یا $\check{b}_{ij}$ برقرار است. در این شبکه، تصمیم گیری سوئیچینگ[3]، $\chi(t) \in \mathbb{H}^{n_r}$، برابر با $\chi(t) = Wx(t) + W^f y(t) = Wx(t) + W^f g(W^o x(t))$ می باشد. بخش های $\Delta C_1(t)$، $\Delta A(t)$، $\Delta B(t)$ و $\Delta C_2(t)$ نیز، بخش های نامعینی کواترنیون نامشخص می باشند که بصورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} \Delta C_1(t) &= L_1 \Upsilon_1(t) E_1, \quad & \Delta A(t) &= L_2 \Upsilon_2(t) E_2, \\ \Delta B(t) &= L_3 \Upsilon_3(t) E_3, \quad & \Delta C_2(t) &= L_4 \Upsilon_4(t) E_4, \end{aligned} \tag{۳۵.۳}$$

که L_s و E_s برای هر $s = 1, 2, 3, 4$ ماتریس های کواترنیون ثابت مشخص با ابعاد مناسب هستند و $\Upsilon_s(t)$ ماتریس حقیقی متغیر با زمان و نامشخص می باشد که، با فرض همانی بودن ماتریس $\mathcal{I}$، شرط $\Upsilon^T_s(t)\Upsilon_s(t) \le \mathcal{I}$ را برآورده می سازند.

[1] Pinched Hysteresis Properties
[2] Switching Jump
[3] Switching Decision Making

ملاحظه ۱.۳.۳. در شبکه های عصبی مبتنی بر ممریستیو که تا به حال گزارش شده است، تصمیم گیری سوئیچینگ $\chi(t)$ وابسته به تنها یک متغیر حالت آن بوده است در حالیکه در این شبکه عصبی، تصمیم گیری سوئیچینگ به همه حالت های رزرویر، پارامترهای W و W^f شبکه عصبی و تابع فعالسازی $g(\cdot)$ وابسته است. بنابراین، دینامیک این شبکه عصبی رابطه (۳۳.۳) می تواند بسیار پیچیده تر از کارهای قبلی باشد.

فرض ۱.۳.۳. ماتریس های نامعینی کواترنیون نامشخص شبکه عصبی (۳۳.۳) و (۳۵.۳) بگونه ای هستند که در آنها، روابط $\underline{\Delta C_1} \preceq \Delta C_1(t) \preceq \overline{\Delta C_1}$، $\underline{\Delta A} \preceq \Delta A(t) \preceq \overline{\Delta A}$، $\underline{\Delta B} \preceq \Delta B(t) \preceq \overline{\Delta B}$ و $\underline{\Delta C_2} \preceq \Delta C_2(t) \preceq \overline{\Delta C_2}$ برقرار می باشد.

فرض ۲.۳.۳. توابع فعالسازی f، h و g به ترتیب توابعی $QUAD(\Delta^f,\omega^f)$ ، $QUAD(\Delta^h,\omega^h)$ روی $\mathbb{R}^{4n_r}$ و $QUAD(\Delta^g,\omega^g)$ روی $\mathbb{R}^{4n_o}$ می باشند. بنابراین، مطابق با تعریف (۲.۲.۱)، ماتریس های Δ^f، Δ^h و Δ^g با ابعاد مناسب و اسکالر های مثبت ω^f، ω^h و ω^g وجود دارند بگونه ای که

$$\begin{aligned}
&\left(\varphi(x)-\varphi(x'(t))\right)^T\left[\varphi(f(x(t)))-\varphi(f(x'(t)))\right]\\
&\qquad-\left(\varphi(x(t))-\varphi(x'(t))\right)^T\Delta^f\left(\varphi(x(t))-\varphi(x'(t))\right)\\
&\qquad\leq\omega^f\left(\varphi(x(t))-\varphi(x'(t))\right)^T\left(\varphi(x(t))-\varphi(x'(t))\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\varphi(x(t))-\varphi(x'(t))\right)^T\left[\varphi(h(x(t)))-\varphi(h(x'(t)))\right]\\
&\qquad-\left(\varphi(x(t))-\varphi(x'(t))\right)^T\Delta^h\left(\varphi(x(t))-\varphi(x'(t))\right)\\
&\qquad\leq\omega^h\left(\varphi(x(t))-\varphi(x'(t))\right)^T\left(\varphi(x(t))-\varphi(x'(t))\right)\\
&\left(\varphi(\hat{x}(t))-\varphi(\hat{x}'(t))\right)^T\left[\varphi(g(\hat{x}(t)))-\varphi(g(\hat{x}'(t)))\right]\\
&\qquad-\left(\varphi(\hat{x}(t))-\varphi(\hat{x}'(t))\right)^T\Delta^g\left(\varphi(\hat{x}(t))-\varphi(\hat{x}'(t))\right)\\
&\qquad\leq\omega^g\left(\varphi(\hat{x}(t))-\varphi(\hat{x}'(t))\right)^T\left(\varphi(\hat{x}(t))-\varphi(\hat{x}'(t))\right),
\end{aligned}\tag{۳۶.۳}$$

که $x,x'\in\mathbb{H}^{n_r}$ و $\hat{x},\hat{x}'\in\mathbb{H}^{n_o}$ می باشند.

ملاحظه ۲.۳.۳. با توجه به فرض (۲.۳.۳) و نتیجه (۱.۲.۱)، کاملا واضح می باشد که وجوددارند ماتریس های $\widetilde{\Delta}^f=|\Delta^f-\omega^f\mathcal{I}|$، $\widetilde{\Delta}^h=|\Delta^h-\omega^h\mathcal{I}|$ و $\widetilde{\Delta}^g=|\Delta^g-\omega^g\mathcal{I}|$ بطوریکه

$$\begin{aligned}
&\left|\varphi(f(x(t)))-\varphi(f(x'(t)))\right|\leq\widetilde{\Delta}^f\left|\varphi(x(t))-\varphi(x'(t))\right|\\
&\left|\varphi(h(x(t)))-\varphi(h(x'(t)))\right|\leq\widetilde{\Delta}^h\left|\varphi(x(t))-\varphi(x'(t))\right|\\
&\left|\varphi(g(\hat{x}(t)))-\varphi(g(\hat{x}'(t)))\right|\leq\widetilde{\Delta}^g\left|\varphi(\hat{x}(t))-\varphi(\hat{x}'(t))\right|.
\end{aligned}\tag{۳۷.۳}$$

بنابراین، برای $j = ۱,۲,\cdots,۴n_r$ و $k = ۱,۲,\cdots,۴n_o$ می توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned}
&\left|\varphi_j(f(x(t))) - \varphi_j(f(x'(t)))\right| \leq \widetilde{\Delta}^f\,(j,:)\left|\varphi(x(t)) - \varphi(x'(t))\right| \\
&\left|\varphi_j(h(x(t))) - \varphi_j(h(x'(t)))\right| \leq \widetilde{\Delta}^h\,(j,:)\left|\varphi(x(t)) - \varphi(x'(t))\right| \\
&\left|\varphi_k(g(\hat{x}(t))) - \varphi_k(g(\hat{x}'(t)))\right| \leq \widetilde{\Delta}^g\,(k,:)\left|\varphi(\hat{x}(t)) - \varphi(\hat{x}'(t))\right|.
\end{aligned} \qquad (۳۸.۳)$$

لم ۱.۳.۳. با در نظر گرفتن فرض (۲.۳.۳)، برای $x, x', \zeta \in \mathbb{H}^{n_r}$ و $i, j \in ۱,۲,\cdots,۴n_r$، اگر $f(\pm\zeta) = ۰$ صادق باشد آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}
&\left|co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x(t))])\right)\varphi_j(f(x(t)) - co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x'(t))])\right)\varphi_j(f(x'(t)))\right| \\
&\qquad \leq \left|\varphi_{ij}([a^*_{ij}])\right|\widetilde{\Delta}^f(j,:)\left|\varphi(x(t)) - \varphi(x'(t))\right|
\end{aligned} \qquad (۳۹.۳)$$

که $\left|\varphi_{ij}([a^*_{ij}])\right| = \max\{\left|\varphi_{ij}([\hat{a}_{ij}])\right|, \left|\varphi_{ij}([\check{a}_{ij}])\right|\}$ و $\left|\varphi_{ij}([b^*_{ij}])\right| = \max\{\left|\varphi_{ij}([\hat{b}_{ij}])\right|, \left|\varphi_{ij}([\check{b}_{ij}])\right|\}$ و $co\left(\varphi_{ij}(\cdot)\right)$ یک بسته از پوسته محدب از مجموعه [1] $\varphi_{ij}(\cdot)$ می باشد.

اثبات: با استفاده از فرض (۲.۳.۳)، سه حالت زیر می تواند رخ دهد:
حالت ۱: اگر $co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x(t))])\right) = co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x'(t))])\right) = \varphi_{ij}([\hat{a}_{ij}])$ رخ دهد، آنگاه

$$\begin{aligned}
&\left|co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x(t))])\right)\varphi_j(f(x(t))) - co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x'(t))])\right)\varphi_j(f(x'(t)))\right| \\
&= \left|\varphi_{ij}([\hat{a}_{ij}])\left(\varphi_j(f(x(t))) - \varphi_j(f(x'(t)))\right)\right| \\
&\leq \left|\varphi_{ij}([\hat{a}_{ij}])\right|\left|\varphi_j(f(x(t))) - \varphi_j(f(x'(t)))\right| \\
&\leq \left|\varphi_{ij}([\hat{a}_{ij}])\right|\widetilde{\Delta}^f\,(j,:)\left|\varphi(x(t)) - \varphi(x'(t))\right| \\
&\leq \left|\varphi_{ij}([a^*_{ij}])\right|\widetilde{\Delta}^f\,(j,:)\left|\varphi(x(t)) - \varphi(x'(t))\right|.
\end{aligned} \qquad (۴۰.۳)$$

حالت ۲: اگر $co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x(t))])\right) = co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x'(t))])\right) = \varphi_{ij}([\check{a}_{ij}])$ رخ دهد، آنگاه

$$\begin{aligned}
&\left|co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x(t))])\right)\varphi_j(f(x(t))) - co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x'(t))])\right)\varphi_j(f(x'(t)))\right| \\
&= \left|\varphi_{ij}([\hat{a}_{ij}])\left(\varphi_j(f(x(t))) - \varphi_j(f(x'(t)))\right)\right| \\
&\leq \left|\varphi_{ij}([\check{a}_{ij}])\right|\left|\varphi_j(f(x(t))) - \varphi_j(f(x'(t)))\right| \\
&\leq \left|\varphi_{ij}([\check{a}_{ij}])\right|\widetilde{\Delta}^f\,(j,:)\left|\varphi(x(t)) - \varphi(x'(t))\right| \\
&\leq \left|\varphi_{ij}([a^*_{ij}])\right|\widetilde{\Delta}^f\,(j,:)\left|\varphi(x(t)) - \varphi(x'(t))\right|.
\end{aligned} \qquad (۴۱.۳)$$

حالت ۲: اگر $co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x(t))])\right) = \varphi_{ij}([\hat{a}_{ij}])$ و $co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x'(t))])\right) = \varphi_{ij}([\check{a}_{ij}])$ رخ دهد،

[1] closure of the convex hull of set

آنگاه

$$\begin{aligned}
&\left|co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x(t))])\right)\varphi_j(f(x(t))) - co\left(\varphi_{ij}([a_{ij}(x'(t))])\right)\varphi_j(f(x'(t)))\right| \\
&= \left|\varphi_{ij}([\hat{a}_{ij}])\varphi_j(f(x(t))) - \varphi_{ij}([\check{a}_{ij}])\varphi_j(f(x'(t)))\right| \\
&\leq |\varphi_{ij}([\hat{a}_{ij}])|\left|\varphi_j(f(x(t))) - \varphi_j(f(\zeta(t)))\right| + |\varphi_{ij}([\check{a}_{ij}])|\left|\varphi_j(f(x'(t))) - \varphi_j(f(\zeta(t)))\right| \\
&\leq |\varphi_{ij}([\hat{a}_{ij}])|\,\widetilde{\Delta}^f(j,:)\left|\varphi(x(t)) - \varphi(\zeta(t))\right| + |\varphi_{ij}([\check{a}_{ij}])|\,\widetilde{\Delta}^f(j,:)\left|\varphi(x'(t)) - \varphi(\zeta(t))\right| \\
&\leq \left|\varphi_{ij}([a^*_{ij}])\right|\widetilde{\Delta}^f(j,:)\left|\varphi(x(t)) - \varphi(x'(t))\right|. \qquad (۴۲.۳)
\end{aligned}$$

بنابراین در هر سه حالت ممکن رابطه (۳۹.۳) برقرار است. در اینجا، اثبات تکمیل می شود.
□

ملاحظه ۳.۳.۳. با استفاده از لم (۱.۳.۳) و تعریف یک متغیر جدید $x(t) = x(t-\eta(t))$، نتیجه زیر کاملا واضح می باشد

$$\begin{aligned}
&|co\left(\varphi_{ij}([b_{ij}(x(t-\eta(t)))])\right)\varphi_j(h(x(t-\eta(t)))) \\
&\qquad -co\left(\varphi_{ij}([b_{ij}(x'(t-\eta(t)))])\right)\varphi_j(h(x'(t-\eta(t))))\right| \\
&\qquad \leq \left|\varphi_{ij}([b^*_{ij}])\right|\widetilde{\Delta}^h(j,:)\left|\varphi(x(t-\eta(t))) - \varphi(x'(t-\eta(t)))\right|. \qquad (۴۳.۳)
\end{aligned}$$

با استفاده از نگاشت خطی تعریف (۴.۲.۱) و ملاحظه (۱.۲.۱)، معادله حاکم بر شبکه عصبی (۳۳.۳) را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}
\varphi(D^\alpha x(t)) = &-\varphi(C_1 + \Delta C_1(t))\varphi(x(t)) + \varphi(A(x(t)) \\
&+ \Delta A(t))\varphi(f(W^{in}u(t) + Wx(t) + W^f y(t))) + \varphi(B(x(t)) + \Delta B(t)) \\
&\times \varphi(h(W^{in}u(t-\eta(t)) + Wx(t-\eta(t)) + W^f y(t-\eta(t)))) \\
&+ \varphi(C_2 + \Delta C_2(t))\varphi(D^\alpha x(t-\mu(t))) + \varphi(\mathcal{U}) \\
\varphi(y(t)) = &\ \varphi(g(W^o x(t) + W^{io}u(t))), \qquad (۴۴.۳)
\end{aligned}$$

که $\varphi(f(\cdot)) = [f^{(R)}(\cdot); f^{(I)}(\cdot); f^{(J)}(\cdot); f^{(K)}(\cdot)]$، $\varphi(h(\cdot)) = [h^{(R)}(\cdot); h^{(I)}(\cdot); h^{(J)}(\cdot); h^{(K)}(\cdot)]$، $\varphi(g(\cdot)) = [g^{(R)}(\cdot); g^{(I)}(\cdot); g^{(J)}(\cdot); g^{(K)}(\cdot)]$ و $\varphi(\mathcal{U}) = [\mathcal{U}^{(R)}; \mathcal{U}^{(I)}; \mathcal{U}^{(J)}; \mathcal{U}^{(K)}]$ ، مطابق با تعریف (۴.۲.۱) برقرار است.

با استفاده از تئوری maps set-valued [۱۵۴] و Inclusions Differential [۱۵۵، ۱۵۶]،

شبکه عصبی (۴۴.۳) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\varphi(D^\alpha x(t)) &\in -\varphi(C_۱+\Delta C_۱(t))\varphi(x(t))+\varphi(\widetilde{A}(t)\\&\quad+\Delta A(t))\varphi(f(W^{in}u(t)+Wx(t)+W^f y(t)))+\varphi(\widetilde{B}(t)+\Delta B(t))\\&\quad\times\varphi(h(W^{in}u(t-\eta(t))+Wx(t-\eta(t))+W^f y(t-\eta(t))))\\&\quad+\varphi(C_۲+\Delta C_۲(t))\varphi(D^\alpha x(t-\mu(t)))+\varphi(\mathcal{U})\\ \varphi(y(t)) &= \varphi(g(W^o x(t)+W^{io}u(t))),\end{aligned} \tag{۴۵.۳}$$

که $\widetilde{A}^{(\rho)}(t)=[co(\overline{a}_{ij}^{(\rho)},\underline{a}_{ij}^{(\rho)})]_{n_r\times n_r}$، $\widetilde{B}^{(\rho)}(t)=[co(\overline{b}_{ij}^{(\rho)},\underline{b}_{ij}^{(\rho)})]_{n_r\times n_r}$، $\overline{a}_{ij}^{(\rho)}=\max\{\hat{a}_{ij}^{(\rho)},\breve{a}_{ij}^{(\rho)}\}$، $\underline{a}_{ij}^{(\rho)}=\min\{\hat{a}_{ij}^{(\rho)},\breve{a}_{ij}^{(\rho)}\}$، $\overline{b}_{ij}^{(\rho)}=\max\{\hat{b}_{ij}^{(\rho)},\breve{b}_{ij}^{(\rho)}\}$ و $\underline{b}_{ij}^{(\rho)}=\min\{\hat{b}_{ij}^{(\rho)},\breve{b}_{ij}^{(\rho)}\}$ برای $i,j=۱,۲,\cdots,n_r$ و $\rho\in\{R,I,J,K\}$ برقرار می باشد. بنابراین

$$\begin{aligned}\varphi(D^\alpha x(t)) &= -\varphi(C_۱+\Delta C_۱(t))\varphi(x(t))\\&\quad+\varphi(A(t)+\Delta A(t))\varphi(f(W^{in}u(t)+Wx(t)+W^f y(t)))+\varphi(B(t)+\Delta B(t))\\&\quad\times\varphi(h(W^{in}u(t-\eta(t))+Wx(t-\eta(t))+W^f y(t-\eta(t))))\\&\quad+\varphi(C_۲+\Delta C_۲(t))\varphi(D^\alpha x(t-\mu(t)))+\varphi(\mathcal{U})\\ \varphi(y(t)) &= \varphi(g(W^o x(t)+W^{io}u(t))),\end{aligned} \tag{۴۶.۳}$$

که $A(t)\in\widetilde{A}(t)=[co(\overline{a}_{ij},\underline{a}_{ij})]_{n_r\times n_r}$ و $B(t)\in\widetilde{B}(t)=[co(\overline{b}_{ij},\underline{b}_{ij})]_{n_r\times n_r}$ می باشد.

۲.۳.۳ وجود و یکتایی نقطه تعادل

در این بخش، با استفاده از لم (۴.۲.۱)، وجود و یکتایی نقطه تعادل شبکه عصبی از طریق حل یک مسئله LMI بررسی می شود.

قضیه ۱.۳.۳. با در نظر گرفتن فرض های (۱.۳.۳) و (۲.۳.۳)، اگر ماتریس معین مثبت Λ و ماتریس های قطری مثبت $\widetilde{Q}_۱$ و $\widetilde{Q}_۲$ وجود داشته باشند بگونه ای که نابرابری ماتریسی خطی زیر تحقق یابد:

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Lambda\varphi(C_۱+\Delta\widetilde{C}_۱)-\Sigma_۱ & \Sigma_۲\\ * & \Sigma_۳\end{bmatrix}>۰, \tag{۴۷.۳}$$

که

$$\begin{aligned}\Sigma_۱ &= \Theta^T(\widetilde{\Delta}^f)^T\widetilde{Q}_۱^{-۱}\widetilde{\Delta}^f\Theta+\Theta^T(\widetilde{\Delta}^h)^T\widetilde{Q}_۲^{-۱}\widetilde{\Delta}^h\Theta\\ \Sigma_۲ &= [\Lambda\left|\varphi(A^*+\overline{\Delta A})\right|,\Lambda\left|\varphi(B^*+\overline{\Delta B})\right|]\\ \Sigma_۳ &= diag\{\widetilde{Q}_۱,\widetilde{Q}_۲\}\\ \Theta &= |\varphi(W)|+\left|\varphi(W^f)\right|\widetilde{\Delta}^g|\varphi(W^o)|\end{aligned}$$

و $A^* = [a^*_{ij}]_{n_r\times n_r}$، $a^{*(\rho)}_{ij} = \max\{|\hat{a}^{(\rho)}_{ij}|, |\breve{a}^{(\rho)}_{ij}|\}$، $B^* = [b^*_{ij}]_{n_r\times n_r}$، $b^{*(\rho)}_{ij} = \max\{|\hat{b}^{(\rho)}_{ij}|, |\breve{b}^{(\rho)}_{ij}|\}$، $\varphi_{ii}(\Delta\widetilde{C}_۱) = \varphi_{ii}(\underline{\Delta C}_۱)$ و $\varphi_{ij,i\neq j}(\Delta\widetilde{C}_۱) = \varphi_{ij}(\overline{\Delta C}_۱)$ می باشد، آنگاه شبکه عصبی (۴۶.۳) دارای یک نقطه تعادل یکتا برای هر نقطه در فضای شدنی خواهد بود.

اثبات: شبکه عصبی (۴۶.۳) با پارامترهای $C_۱ + \overline{\Delta C}_۱ \preceq \mathcal{C}_۱ \preceq C_۱ + \underline{\Delta C}_۱$، $A(t) + \underline{\Delta A} \preceq \mathcal{A}(t) \preceq A(t) + \overline{\Delta A}$، $B(t) + \underline{\Delta B} \preceq \mathcal{B}(t) \preceq B(t) + \overline{\Delta B}$ و $-C_۲ + \overline{\Delta C}_۲ \preceq -\mathcal{C}_۲ \preceq C_۲ + \underline{\Delta C}_۲$ را بصورت زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\varphi(D^\alpha x(t)) &= -\varphi(\mathcal{C}_۱)\varphi(x(t)) + \varphi(\mathcal{A}(t))\varphi(f(Wx(t) + W^f y(t)))\\ &\quad + \varphi(\mathcal{B}(t))\varphi(h(W^{in}u(t-\eta(t)) + Wx(t-\eta(t)) + W^f y(t-\eta(t))))\\ &\quad + \varphi(\mathcal{C}_۲)\varphi(D^\alpha x(t-\mu(t))) + \varphi(\mathcal{U})\\ \varphi(y(t)) &= \varphi(g(W^o x(t))).\end{aligned} \tag{۴۸.۳}$$

با استفاده از تعریف (۵.۲.۱)، شبکه عصبی (۴۸.۳) از نقطه نظر فیلیپوف[1] دارای یک نقطع تعادل یکتا می باشد، اگر و فقط اگر

$$\begin{aligned}\circ &= -\varphi(\mathcal{C}_۱)\varphi(x) + \varphi(\mathcal{A}(t))\varphi\left(f(Wx + W^f g(W^o x))\right)\\ &\quad + \varphi(\mathcal{B}(t))\varphi\left(h(Wx + W^f g(W^o x))\right) + \varphi(\mathcal{U}).\end{aligned} \tag{۴۹.۳}$$

در اینجا، نگاشت $\Psi\left(\varphi(x)\right) : \mathbb{R}^{۴n_r} \to \mathbb{R}^{۴n_r}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{aligned}\Psi\left(\varphi(x)\right) &= -\varphi(\mathcal{C}_۱)\varphi(x) + \varphi(\mathcal{A}(t))\varphi\left(f(Wx + W^f g(W^o x))\right)\\ &\quad + \varphi(\mathcal{B}(t))\varphi\left(h(Wx + W^f g(W^o x))\right) + \varphi(\mathcal{U}).\end{aligned} \tag{۵۰.۳}$$

بنابراین، مطابق با لم (۴.۲.۱)، نگاشت $\Psi\left(\varphi(x)\right)$ یک هومومورفیسم از $\mathbb{R}^{۴n_r}$ می باشد اگر دو شرط زیر تحقق یابد.

شرط ۱: نگاشت $\Psi\left(\varphi(x)\right)$ تزریقی باشد.

فرض کنید نگاشت $\Psi\left(\varphi(x)\right)$، تزریقی نیست. بنابراین، وجود دارد دو پاسخ x و x' با $\varphi(x) = \varphi(x')$ بگونه ای که $\Psi\left(\varphi(x)\right) = \Psi\left(\varphi(x')\right)$. پس

$$\begin{aligned}&-\varphi(\mathcal{C}_۱)\left(\varphi(x) - \varphi(x')\right) + \varphi(\mathcal{A}(t))\{\varphi\left(f(Wx + W^f g(W^o x))\right) - \varphi\left(f(Wx' + W^f g(W^o x'))\right)\}\\ &\quad + \varphi(\mathcal{B}(t))\{\varphi\left(f(Wx + W^f g(W^o x)\right) - \varphi\left(f(Wx' + W^f g(W^o x')\right)\} = \circ.\end{aligned} \tag{۵۱.۳}$$

با ضرب (از طرف چپ) معادله (۵۱.۳) در عبارت $\left(\varphi(x) - \varphi(x')\right)^T\Lambda$ و سپس با استفاده از لم

[1] Filippov's Sense

(۱.۲.۱)، تعریف (۴.۲.۱)، ملاحظه (۱.۲.۱) و لم (۱.۳.۳) داریم:

$$
\begin{aligned}
0 =& -\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)^T \Lambda\varphi(\mathcal{C}_1)\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)\\
&+\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)^T \Lambda\varphi(\mathcal{A}(t))\{\varphi\left(f(Wx+W^f g(W^o x))\right)-\varphi\left(f(Wx'+W^f g(W^o x'))\right)\}\\
&+\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)^T \Lambda\varphi(\mathcal{B}(t))\{\varphi\left(h(Wx+W^f g(W^o x))\right)-\varphi\left(h(Wx'+W^f g(W^o x'))\right)\}\\
\le& -\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)^T \Lambda\varphi(\mathcal{C}_1)\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)\\
&+\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)^T \Lambda\varphi(\mathcal{A}(t))\widetilde{Q}_1\varphi^T(\mathcal{A}(t))\Lambda^T\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)\\
&+\left\{\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)^T\left(|\varphi^T(W)|+|\varphi^T(W^o)|\left(\widetilde{\Delta}^g\right)^T|\varphi^T(W^f)|\right)\right\}\\
&\times\left(\widetilde{\Delta}^f\right)^T\widetilde{Q}_1^{-1}\widetilde{\Delta}^f\left\{\left(|\varphi(W)|+|\varphi(W^f)|\widetilde{\Delta}^g|\varphi^T(W^o)|\right)\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)\right\}\\
&+\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)^T \Lambda\varphi(\mathcal{B}(t))\widetilde{Q}_2\varphi^T(\mathcal{B}(t))\Lambda^T\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)\\
&+\left\{\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)^T\left(|\varphi^T(W)|+|\varphi^T(W^o)|\left(\widetilde{\Delta}^g\right)^T|\varphi^T(W^f)|\right)\right\}\\
&\times\left(\widetilde{\Delta}^h\right)^T\widetilde{Q}_2^{-1}\widetilde{\Delta}^h\left\{\left(|\varphi(W)|+|\varphi(W^f)|\widetilde{\Delta}^g|\varphi^T(W^o)|\right)\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)\right\}\\
\le& -\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)^T\left\{\Lambda\varphi(\mathcal{C}_1)-\Lambda\varphi(\mathcal{A}(t))\widetilde{Q}_1\varphi^T(\mathcal{A}(t))\Lambda^T-\Theta^T\left(\widetilde{\Delta}^f\right)^T\widetilde{Q}_1^{-1}\widetilde{\Delta}^f\Theta\right.\\
&\left.-\Lambda\varphi(\mathcal{B}(t))\widetilde{Q}_2\varphi^T(\mathcal{B}(t))\Lambda^T-\Theta^T\left(\widetilde{\Delta}^h\right)^T\widetilde{Q}_2^{-1}\widetilde{\Delta}^h\Theta\right\}\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)\\
\le& -\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)^T\left\{\Lambda\varphi(C_1+\Delta\widetilde{C}_1)-\Lambda\varphi(A(t)+\overline{\Delta A})\widetilde{Q}_1\varphi^T(A(t)+\overline{\Delta A})\Lambda^T\right.\\
&-\Theta^T\left(\widetilde{\Delta}^f\right)^T\widetilde{Q}_1^{-1}\widetilde{\Delta}^f\Theta-\Lambda\varphi(B(t)+\overline{\Delta B})\widetilde{Q}_2\varphi^T(B(t)+\overline{\Delta B})\Lambda^T\\
&\left.-\Theta^T\left(\widetilde{\Delta}^h\right)^T\widetilde{Q}_2^{-1}\widetilde{\Delta}^h\Theta\right\}\left(\varphi(x)-\varphi(x')\right)\\
\le& -\left(|\varphi(x)|-|\varphi(x')|\right)^T\Sigma\left(|\varphi(x)|-|\varphi(x')|\right),
\end{aligned}
\tag{۵۲.۳}
$$

که

$$
\begin{aligned}
\Sigma =& \Lambda\varphi(C_1+\Delta\widetilde{C}_1)-\Lambda|\varphi(A^*+\overline{\Delta A})|\widetilde{Q}_1|\varphi^T(A^*+\overline{\Delta A})\Lambda^T-\Lambda|\varphi(B^*+\overline{\Delta B})|\widetilde{Q}_2\\
&\times|\varphi^T(B^*+\overline{\Delta B})|\Lambda^T-\Theta^T(\widetilde{\Delta}^f)^T\widetilde{Q}_1^{-1}\widetilde{\Delta}^f\Theta-\Theta^T(\widetilde{\Delta}^h)^T\widetilde{Q}_2^{-1}\widetilde{\Delta}^h\Theta
\end{aligned}
$$

از معادله (۴۷.۳)، با استفاده از لم (۳.۲.۱) یعنی مکمل شوور و ویژگی های نابرابری ماتریسی نتیجه می گیریم:

$$
\begin{aligned}
0 <& \Lambda\varphi(C_1+\Delta\widetilde{C}_1)-\Lambda|\varphi(A^*+\overline{\Delta A})|\widetilde{Q}_1|\varphi^T(A^*+\overline{\Delta A})\Lambda^T-\Lambda|\varphi(B^*+\overline{\Delta B})|\widetilde{Q}_2\\
&\times|\varphi^T(B^*+\overline{\Delta B})|\Lambda^T-\Theta^T(\widetilde{\Delta}^f)^T\widetilde{Q}_1^{-1}\widetilde{\Delta}^f\Theta-\Theta^T(\widetilde{\Delta}^h)^T\widetilde{Q}_2^{-1}\widetilde{\Delta}^h\Theta.
\end{aligned}
\tag{۵۳.۳}
$$

مطابق با (۵۲.۳)، کاملا واضح می باشد که رابطه (۵۳.۳) در تناقض با رابطه (۵۱.۳) می باشد. از این رو، نگاشت $\Psi(\varphi(x))$ تزریقی می باشد.

شرط ۲: اگر $\|\varphi(x)\| \to \infty$ رخ دهد آنگاه $\|\Psi(\varphi(x))\| \to \infty$ تحقق می یابد.
از نابرابری رابطه (۵۳.۳) می توان نتیجه گرفت که مقدار کوچک $\epsilon > 0$ وجود دارد که رابطه زیر صادق باشد.

$$
\begin{aligned}
-\epsilon\mathcal{I}_{4n_r} \geq & -\Lambda\varphi(C_1 + \Delta\widetilde{C}_1) + \Lambda|\varphi(A^* + \overline{\Delta A})|\widetilde{Q}_1|\varphi^T(A^* + \overline{\Delta A})\Lambda^T + \Lambda|\varphi(B^* + \overline{\Delta B})|\widetilde{Q}_2 \\
& \times|\varphi^T(B^* + \overline{\Delta B})|\Lambda^T + \Theta^T(\widetilde{\Delta}^f)^T\widetilde{Q}_1^{-1}\widetilde{\Delta}^f\Theta + \Theta^T(\widetilde{\Delta}^h)^T\widetilde{Q}_1^{-1}\widetilde{\Delta}^h\Theta. \qquad (54.3)
\end{aligned}
$$

در واقع مشابه به رابطه (۵۲.۳)، می توان نتیجه گرفت که

$$
\begin{aligned}
&\varphi^T(x)\Lambda\left(\Psi(\varphi(x)) - \Psi(\varphi(0))\right) \\
&\quad \leq \varphi^T(x)\Big\{-\Lambda\varphi(C_1 + \Delta\widetilde{C}_1) + \Lambda|\varphi(A^* + \overline{\Delta A})|\widetilde{Q}_1|\varphi^T(A^*)|\Lambda^T + \Lambda|\varphi(B^* + \overline{\Delta B})|\widetilde{Q}_2 \\
&\quad \times|\varphi^T(B^* + \overline{\Delta B})|\Lambda^T + \Theta^T(\widetilde{\Delta}^f)^T\widetilde{Q}_1^{-1}\widetilde{\Delta}^f\Theta + \Theta^T(\widetilde{\Delta}^h)^T\widetilde{Q}_1^{-1}\widetilde{\Delta}^h\Theta\Big\}\varphi(x) \\
&\quad \leq -\epsilon\|\varphi(x)\|^2. \qquad (55.3)
\end{aligned}
$$

از رابطه (۵۵.۳) و نابرابر شوارتز[1]، نتیجه می گیریم که

$$
\frac{\epsilon\|\varphi(x)\|^2}{\|\Lambda\|} \leq \|\varphi(x)\|\left(\|\Psi(\varphi(x))\| + \|\Psi(\varphi(0))\|\right). \qquad (56.3)
$$

بنابراین، می توان نشان داد که اگر $\|\Psi(\varphi(x))\| \to \infty$ آنگاه $\|\varphi(x)\| \to \infty$.
در نهایت، با استفاده از لم (۴.۲.۱)، نگاشت $\Psi(\varphi(x))$ یک هومومورفیسم از $\mathbb{R}^{4n_r}$ می باشد. در نتیجه، شبکه عصبی مورد نظر دارای یک نقطه تعادل یکتا $\varphi(x^*)$ می باشد، بطوریکه $\Psi(\varphi(x)) = 0$ برقرار است. از این رو، شبکه عصبی رابطه (۴۶.۳) دارای نقطه تعادل یکتا x^* برای هر نقطه درون فضای شدنی می باشد. در اینجا، اثبات تکمیل می شود.
□

۳.۳.۳ پایداری نقطه تعادل

در این بخش، ابتدا به تحلیل پایداری مجانبی نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی بدون حضور نامعینی ها پرداخته می شود. سپس با بسط نتایج پایداری بدست آمده برای شبکه عصبی در حضور نامعینی ها، به تحلیل پایداری مجانبی مقاوم نقطه تعادل یکتای آن پرداخته خواهد شد.

قضیه ۲.۳.۳. با در نظر گرفتن فرض (۲.۳.۳)، شبکه عصبی نامی (۴۶.۳) دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار مجانبی است اگر رابطه (۴۷.۳) تحقق یابد و همچنین وجود داشته باشد ماتریس های معین مثبت P، R_1، R_2، R_3، R_4، S و Z ماتریس های قطری معین مثبت Q_1،

[1] Schwartz Inequality

Q_2، Q_3 و Q_4 بگونه ای که مسئله LMI زیر تحقق یابد.

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & 0 & \widetilde{P}_3^T\varphi(C_2) & S_{11}^T & 0 & S_{12} & \Pi_1 & 0 \\ * & \Xi_{22} & 0 & \widetilde{P}_4^T\varphi(C_2) & S_{12}^T & 0 & S_{22}^T & 0 & \Pi_2 \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & -(1-\dot{\eta})S_{11}^T & 0 & -(1-\dot{\eta})S_{12} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & -(1-\dot{\mu})S_{12}^T & 0 & -(1-\dot{\mu})S_{22}^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Z_{11} & -Z_{12} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Z_{22}-R_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -R_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Pi_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Pi_4 \end{bmatrix} < 0, \qquad (۵۷.۳)$$

که

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{81} & \cdots & P_{88} \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ * & S_{22} \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ * & Z_{22} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{P}_1 = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{13} & P_{15} & P_{17} \\ P_{31} & P_{33} & P_{35} & P_{37} \\ P_{51} & P_{53} & P_{55} & P_{57} \\ P_{71} & P_{73} & P_{75} & P_{77} \end{bmatrix}, \widetilde{P}_2 = \begin{bmatrix} P_{12} & P_{14} & P_{16} & P_{18} \\ P_{32} & P_{34} & P_{36} & P_{38} \\ P_{52} & P_{54} & P_{56} & P_{58} \\ P_{72} & P_{74} & P_{76} & P_{78} \end{bmatrix}, \qquad (۵۸.۳)$$

$$\widetilde{P}_3 = \begin{bmatrix} P_{21} & P_{23} & P_{25} & P_{27} \\ P_{41} & P_{43} & P_{45} & P_{47} \\ P_{61} & P_{63} & P_{65} & P_{67} \\ P_{81} & P_{83} & P_{85} & P_{87} \end{bmatrix}, \widetilde{P}_4 = \begin{bmatrix} P_{22} & P_{24} & P_{26} & P_{28} \\ P_{42} & P_{44} & P_{46} & P_{48} \\ P_{62} & P_{64} & P_{66} & P_{68} \\ P_{82} & P_{84} & P_{86} & P_{88} \end{bmatrix}$$

و

$$\Xi_{11} = -\varphi^T(C_1)\widetilde{P}_3 - \widetilde{P}_3^T\varphi^T(C_1) + \eta^2 Z_{11} + \Phi_4 + R_1,$$

$$\Xi_{12} = \widetilde{P}_1^T - \widetilde{P}_3^T - \varphi^T(C_1)\widetilde{P}_4 + \eta^2 Z_{12}$$

$$\Xi_{22} = \widetilde{P}_2 - \widetilde{P}_4 + \widetilde{P}_2^T - \widetilde{P}_4^T + \eta^2 Z_{22} + R_2 + \eta^2 R_3 + \mu^2 R_4, \quad \Xi_{33} = \Phi_5 - (1-\dot{\eta})R_1,$$

$$\Xi_{44} = -(1-\dot{\mu})R_2, \quad \Theta^T = |\varphi^T(W)| + |\varphi^T(W^o)|(\widetilde{\Delta}^g)^T|\varphi^T(W^f)|$$

$$\Phi_4 = \Theta^T(\Delta^f)^T\{Q_1^{-1} + Q_2^{-1}\}\Delta^f\Theta, \quad \Phi_5 = \Theta^T(\Delta^h)^T\{Q_3^{-1} + Q_4^{-1}\}\Delta^h\Theta$$

$$\Pi_1 = \left(\widetilde{P}_3^T|\varphi(A^*)| \quad \widetilde{P}_3^T|\varphi(B^*)|\right), \quad \Pi_2 = \left(\widetilde{P}_4^T|\varphi(A^*)| \quad \widetilde{P}_4^T|\varphi(B^*)|\right)$$

$$\Pi_3 = -diag\left(Q_1^{-1}, Q_3^{-1}\right), \quad \Pi_4 = -diag\left(Q_2^{-1}, Q_4^{-1}\right)$$

$$\xi(t) = \Big[\varphi(e(t)) \quad \varphi(\omega(t)) \quad \varphi(e(t-\eta(t))) \quad \varphi(\omega(t-\eta(t))) \quad \int_{t-\eta(t)}^{t}\varphi(e(s))ds$$
$$\int_{t-\eta(t)}^{t}\varphi(\omega(s))ds \quad \int_{t-\mu(t)}^{t}\varphi(\omega(s))ds\Big] \qquad (۵۹.۳)$$

اثبات: شبکه عصبی نامی، یعنی شبکه عصبی (۴۶.۳) بدون نامعینی را در نظر بگیرید که بصورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned}\varphi(D^\alpha x(t)) &= -\varphi(C_1)\varphi(x(t)) + \varphi(A(t))\varphi(f(Wx(t) + W^f y(t)))\\ &\quad + \varphi(B(t))\varphi(h(Wx(t-\eta(t)) + W^f y(t-\eta(t))))\\ &\quad + \varphi(C_2)\varphi(D^\alpha x(t-\mu(t))) + \varphi(\vartheta)\\ y(t) &= \varphi(g(W^o x(t)).\end{aligned} \tag{۶۰.۳}$$

اگر فرض کنید $x(t)$ و $x'(t)$ دو پاسخ مجزای این شبکه باشند، آنگاه دینامیک خطا $\varphi(e(t)) = \varphi(x(t) - x'(t)) = \varphi(x(t)) - \varphi(x'(t))$ بصورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}\varphi(D^\alpha e(t)) &= -\varphi(C_1)\varphi(e(t)) + \varphi(A(t))\{\varphi(f(Wx(t) + W^f y(t))) - \varphi(f(Wx'(t) + W^f y'(t)))\}\\ &\quad + \varphi(B(t))\Big\{\varphi(h(Wx(t-\eta(t)) + W^f y(t-\eta(t))))\\ &\quad - \varphi(h(Wx'(t-\eta(t)) + W^f y'(t-\eta(t))))\Big\} + \varphi(C_2)\varphi(D^\alpha e(t-\mu(t)))\\ y(t) &= \varphi(g(W^o x(t))\\ y'(t) &= \varphi(g(W^o x'(t)).\end{aligned} \tag{۶۱.۳}$$

فرض کنید که رابطه (۴۷.۳) تحقق یافته است. بنابراین نقطه تعادل شبکه عصبی نامی (۶۰.۳) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر مبدا برای سیستم (۶۱.۳) پایدار مجانبی باشد. با فرض $\varphi(D^\alpha e(t)) = \varphi(\omega(t))$، داریم:

$$\begin{aligned}0 &= -\varphi(\omega(t)) - \varphi(C_1)\varphi(e(t))\\ &\quad + \varphi(A(t))\{\varphi(f(Wx(t) + W^f y(t))) - \varphi(f(Wx'(t) + W^f y'(t)))\}\\ &\quad + \varphi(B(t))\Big\{\varphi(h(Wx(t-\eta(t)) + W^f y(t-\eta(t))))\\ &\quad - \varphi(h(Wx'(t-\eta(t)) + W^f y'(t-\eta(t))))\Big\} + \varphi(C_2)\varphi(\omega(t-\mu(t))).\end{aligned} \tag{۶۲.۳}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\varphi(D^{\alpha}E\widetilde{e}(t))=&\varphi\left(\begin{bmatrix}0 & I\\ -C_1 & -I\end{bmatrix}\right)\varphi(\widetilde{e}(t))\\&+\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\ A(t)\end{bmatrix}\right)\{\varphi(f(Wx(t)+W^fy(t)))-\varphi(f(Wx'(t)+W^fy'(t)))\}\\&+\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\ B(t)\end{bmatrix}\right)\Big\{\varphi(h(Wx(t-\eta(t))+W^fy(t-\eta(t))))\\&-\varphi(h(Wx'(t-\eta(t))+W^fy'(t-\eta(t))))\Big\}+\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\ C_2\end{bmatrix}\right)\varphi(\omega(t-\mu(t))),\end{aligned} \quad (۶۳.۳)$$

که $\widetilde{e}(t)=[e^T(t) \quad \omega^T(t)]^T$ و $E=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ می باشد.

در ادامه، تابع لیاپانوف کراسوفسکی (LKF) زیر تعریف می شود تا به انالیز پایداری مبدا برای شبکه عصبی (۶۱.۳) پرداخته شود.

$$V(t)=\sum_{r=1}^{7}V_r(t), \quad (۶۴.۳)$$

که

$$\begin{aligned}V_1(t)&=D^{\alpha-1}\Big(\varphi^T(\widetilde{e}(t))EP\varphi(\widetilde{e}(t))\Big)\\V_2(t)&=\int_{t-\eta(t)}^{t}\varphi^T(e(s))R_1\varphi(e(s))ds\\V_3(t)&=\int_{t-\mu(t)}^{t}\varphi^T(\omega(s))R_2\varphi(\omega(s))ds\\V_4(t)&=\eta\int_{-\eta}^{0}\int_{t+\tau}^{t}\varphi^T(\omega(s))R_3\varphi(\omega(s))dsd\tau\\V_5(t)&=\mu\int_{-\mu}^{0}\int_{t+\tau}^{t}\varphi^T(\omega(s))R_4\varphi(\omega(s))dsd\tau\\V_6(t)&=\eta\int_{-\eta}^{0}\int_{t+\tau}^{t}\begin{bmatrix}\varphi(e(s))\\ \varphi(\omega(s))\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ * & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(e(s))\\ \varphi(\omega(s))\end{bmatrix}dsd\tau\\V_7(t)&=\begin{bmatrix}\int_{t-\eta(t)}^{t}\varphi(e(s))ds\\ \int_{t-\mu(t)}^{t}\varphi(\omega(s))ds\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ * & S_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int_{t-\eta(t)}^{t}\varphi(e(s))ds\\ \int_{t-\mu(t)}^{t}\varphi(\omega(s))ds\end{bmatrix}.\end{aligned} \quad (۶۵.۳)$$

مشتق مرتبه صحیح تابع $V_1(t)$ بصورت زیر بدست می آید:

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}_1(t)\\
&= D^{\alpha}\Big(\varphi^T(\widetilde{e}(t))EP\varphi(\widetilde{e}(t))\Big)\\
&\leq 2\varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T D^{\alpha}E\varphi(\widetilde{e}(t))\\
&\leq \varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & I\\ -C_1 & -I\end{bmatrix}\right)\varphi(\widetilde{e}(t)) + \varphi^T(\widetilde{e}(t))\varphi^T\left(\begin{bmatrix} 0 & I\\ -C_1 & -I\end{bmatrix}\right)P\varphi(\widetilde{e}(t))\\
&\quad + 2\varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} 0\\ A(t)\end{bmatrix}\right)\\
&\quad \times\left\{\varphi(f(Wx(t)+W^f y(t))) - \varphi(f(Wx'(t)+W^f y'(t)))\right\}\\
&\quad + 2\varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} 0\\ B(t)\end{bmatrix}\right)\\
&\quad \times\left\{\varphi(f(Wx(t-\eta(t))+W^f y(t-\eta(t)))) - \varphi(f(Wx'(t-\eta(t))+W^f y'(t-\eta(t))))\right\}\\
&\quad + 2\varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} 0\\ C_2\end{bmatrix}\right)\varphi(\omega(t-\mu(t))). \qquad (۶۶.۳)
\end{aligned}
$$

با استفاده از عبارت (۵۸.۳)، داریم:

$$
\begin{aligned}
&\varphi^T(\widetilde{e}(t))\varphi^T\left(\begin{bmatrix} 0 & I\\ -C_1 & -I\end{bmatrix}\right)P\varphi(\widetilde{e}(t))\\
&\quad = \varphi^T\left(\begin{bmatrix} \omega(t)\\ -C_1 e(t)-\omega(t)\end{bmatrix}\right)P\varphi(\widetilde{e}(t))\\
&\quad = \varphi^T\left(\begin{bmatrix} \omega(t)\\ -C_1 e(t)-\omega(t)\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{18}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{81} & \cdots & P_{88}\end{bmatrix}\varphi\left(\begin{bmatrix} e(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}\right)\\
&\quad = \varphi^T(\omega(t))\begin{bmatrix}\Sigma_1\\ \Sigma_3\\ \Sigma_5\\ \Sigma_7\end{bmatrix} + \varphi^T(-C_1 e(t)-\omega(t))\begin{bmatrix}\Sigma_2\\ \Sigma_4\\ \Sigma_6\\ \Sigma_8\end{bmatrix}\\
&\quad = \varphi^T(\omega(t))\Big(\widetilde{P}_1\varphi(e(t))+\widetilde{P}_2\varphi(\omega(t))\Big) + \varphi^T(-C_1 e(t)-\omega(t))\Big(\widetilde{P}_3\varphi(e(t))+\widetilde{P}_4\varphi(\omega(t))\Big)\\
&\quad = \begin{bmatrix}\varphi(e(t))\\ \varphi(\omega(t))\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} -\varphi^T(C_1)\widetilde{P}_3 & -\varphi^T(C_1)\widetilde{P}_4\\ \widetilde{P}_1-\widetilde{P}_3 & \widetilde{P}_2-\widetilde{P}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(e(t))\\ \varphi(\omega(t))\end{bmatrix}, \qquad (۶۷.۳)
\end{aligned}
$$

که $\Sigma_i = [P_{i1} \quad P_{i3} \quad P_{i5} \quad P_{i7}]\varphi(e(t)) + [P_{i2} \quad P_{i4} \quad P_{i6} \quad P_{i8}]\varphi(\omega(t))$ برای $i = 1, 2, \cdots, 8$

صادق می باشد. مشابه به روال فوق، می توان اثبات کرد که

$$\varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} \circ & I \\ -C_۱ & -I \end{bmatrix}\right)\varphi(\widetilde{e}(t))$$
$$= \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\widetilde{P}_۳^T\varphi(C_۱) & \widetilde{P}_۱^T - \widetilde{P}_۳^T \\ -\widetilde{P}_۴^T\varphi(C_۱) & \widetilde{P}_۲^T - \widetilde{P}_۴^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix}. \quad (۶۸.۳)$$

همچنین

$$\varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} \circ \\ A(t) \end{bmatrix}\right) = \varphi^T\left(\begin{bmatrix} e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} P_{۱۱} & \cdots & P_{۱۸} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{۸۱} & \cdots & P_{۸۸} \end{bmatrix}^T \varphi\left(\begin{bmatrix} \circ \\ A(t) \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_۱ & \cdots & \widetilde{\Sigma}_۸ \end{bmatrix}\varphi\left(\begin{bmatrix} \circ \\ A(t) \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_۲ & \widetilde{\Sigma}_۴ & \widetilde{\Sigma}_۶ & \widetilde{\Sigma}_۸ \end{bmatrix}\varphi(A(t))$$
$$= \left(\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T + \varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\right)\varphi(A(t)), \quad (۶۹.۳)$$

که $\widetilde{\Sigma}_i = \varphi^T(e(t))[P_{i۱} \quad P_{i۳} \quad P_{i۵} \quad P_{i۷}]^T + \varphi^T(\omega(t))[P_{i۲} \quad P_{i۴} \quad P_{i۶} \quad P_{i۸}]^T$ برای $i = ۱,۲,\cdots,۸$ صادق می باشد. بطور مشابه، نتایج زیر نیز بدست می آید:

$$\varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} \circ \\ B(t) \end{bmatrix}\right) = \left(\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T + \varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\right)\varphi(B(t))$$
$$\varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} \circ \\ C_۲(t) \end{bmatrix}\right) = \left(\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T + \varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\right)\varphi(C_۲(t)). \quad (۷۰.۳)$$

با جایگزین کردن روابط (۶۷.۳) تا (۷۰.۳) در رابطه (۶۶.۳) و با فرض $\nu(t) = Wx(t) + W^f y(t)$ و $\upsilon(t) = Wx(t-\eta(t)) + W^f y(t-\eta(t))$، داریم:

$$\dot{V}_۱(t) \leq \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\varphi^T(C_۱)\widetilde{P}_۳ - \widetilde{P}_۳^T\varphi(C_۱) & \widetilde{P}_۱^T - \widetilde{P}_۳^T - \varphi^T(C_۱)\widetilde{P}_۴ \\ \widetilde{P}_۱ - \widetilde{P}_۳ - \widetilde{P}_۴^T\varphi(C_۱) & \widetilde{P}_۲ - \widetilde{P}_۴ + \widetilde{P}_۲^T - \widetilde{P}_۴^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix}$$
$$+ ۲\left(\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T + \varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\right)\varphi(A(t))\left\{\varphi(f(\nu(t)) - f(\nu'(t)))\right\}$$
$$+ ۲\left(\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T + \varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\right)\varphi(B(t))\left\{\varphi(h(\upsilon(t)) - h(\upsilon'(t)))\right\}$$
$$+ ۲\left(\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T + \varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\right)\varphi(C_۲(t))\varphi(\omega(t-\mu(t))). \quad (۷۱.۳)$$

اگر Q_i برای $i = ۱,۲,۳,۴$ ماتریس های مثبت و قطری باشند، پس

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_۱(t)\\
&\leq \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\varphi^T(C_۱)\widetilde{P}_۳ - \widetilde{P}_۳^T\varphi(C_۱) & \widetilde{P}_۱^T - \widetilde{P}_۳^T - \varphi^T(C_۱)\widetilde{P}_۴ \\ \widetilde{P}_۱ - \widetilde{P}_۳ - \widetilde{P}_۴^T\varphi(C_۱) & \widetilde{P}_۲ - \widetilde{P}_۴ + \widetilde{P}_۲^T - \widetilde{P}_۴^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix}\\
&\quad + \varphi^T(e(t))(\Phi_۲ + \Phi_۴)\varphi(e(t)) + \varphi^T(\omega(t))\Phi_۳\varphi(\omega(t)) + \varphi^T(e(t-\eta(t)))\Phi_۵\varphi(e(t-\eta(t)))\\
&\quad + ۲\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T\varphi(C_۲(t))\varphi(\omega(t-\mu(t))) + ۲\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\varphi(C_۲(t))\varphi(\omega(t-\mu(t))),
\end{aligned} \tag{۷۲.۳}$$

که

$$\begin{aligned}
\Phi_۲ &= \widetilde{P}_۳^T|\varphi(A^*)|Q_۱|\varphi^T(A^*)|\widetilde{P}_۳ + \widetilde{P}_۳^T|\varphi(B^*)|Q_۳|\varphi^T(B^*)|\widetilde{P}_۳\\
\Phi_۳ &= \widetilde{P}_۴^T|\varphi(A^*)|Q_۲|\varphi^T(A^*)|\widetilde{P}_۴ + \widetilde{P}_۴^T|\varphi(B^*)|Q_۴|\varphi^T(B^*)|\widetilde{P}_۴\\
\Phi_۴ &= \Theta^T(\widetilde{\Delta}^f)^T\{Q_۱^{-۱} + Q_۲^{-۱}\}\widetilde{\Delta}^f\Theta, \quad \Phi_۵ = \Theta^T(\widetilde{\Delta}^h)^T\{Q_۳^{-۱} + Q_۴^{-۱}\}\widetilde{\Delta}^h\Theta\\
\Theta &= |\varphi(W)| + |\varphi(W^f)|\widetilde{\Delta}^g|\varphi(W^o)|.
\end{aligned} \tag{۷۳.۳}$$

با استفاده از لم (۲.۲.۱)، مشتق مزتبه صحیح توابع $V_۲, V_۳, \cdots, V_۷$ بصورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_۲(t) &= \varphi^T(e(t))R_۱\varphi(e(t)) - (۱ - \dot{\eta}(t))\varphi^T(e(t-\eta(t)))R_۱\varphi(e(t-\eta(t)))\\
&\leq (e(t))R_۱\varphi(e(t)) - (۱ - \dot{\eta})\varphi^T(e(t-\eta(t)))R_۱\varphi(e(t-\eta(t)))
\end{aligned} \tag{۷۴.۳}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_۳(t) &= \varphi^T(\omega(t))R_۲\varphi(\omega(t)) - (۱ - \dot{\mu}(t))\varphi^T(\omega(t-\mu(t)))R_۲\varphi(\omega(t-\mu(t)))\\
&\leq \varphi^T(\omega(t))R_۲\varphi(\omega(t)) - (۱ - \dot{\mu}))\varphi^T(\omega(t-\mu(t)))R_۲\varphi(\omega(t-\mu(t)))
\end{aligned} \tag{۷۵.۳}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_۴(t) &= \eta^۲\varphi^T(\omega(t))R_۳\varphi(\omega(t)) - \eta\int_{t-\eta}^t \varphi^T(\omega(s))R_۳\varphi(\omega(s))ds\\
&\leq \eta^۲\varphi^T(\omega(t))R_۳\varphi(\omega(t)) - \left(\int_{t-\eta(t)}^t \varphi^T(\omega(s))ds\right) R_۳ \left(\int_{t-\eta(t)}^t \varphi(\omega(s))ds\right)
\end{aligned} \tag{۷۶.۳}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_۵(t) &= \mu^۲\varphi^T(\omega(t))R_۴\varphi(\omega(t)) - \mu\int_{t-\mu}^t \varphi^T(\omega(s))R_۴\varphi(\omega(s))ds\\
&\leq \mu^۲\varphi^T(\omega(t))R_۴\varphi(\omega(t)) - \left(\int_{t-\mu(t)}^t \varphi^T(\omega(s))ds\right) R_۴ \left(\int_{t-\mu(t)}^t \varphi(\omega(s))ds\right)
\end{aligned} \tag{۷۷.۳}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{۶}(t) &\leq \eta^{۲} \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_{۱۱} & Z_{۱۲} \\ * & Z_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix} \\
&\quad - \eta(t) \int_{t-\eta(t)}^{t} \begin{bmatrix} \varphi(e(s)) \\ \varphi(\omega(s)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_{۱۱} & Z_{۱۲} \\ * & Z_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(e(s)) \\ \varphi(\omega(s)) \end{bmatrix} ds \\
&\leq \eta^{۲} \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_{۱۱} & Z_{۱۲} \\ * & Z_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} \int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(e(s))ds \\ \int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(\omega(s))ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_{۱۱} & Z_{۱۲} \\ * & Z_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(e(s))ds \\ \int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(\omega(s))ds \end{bmatrix} \qquad (۷۸.۳)
\end{aligned}$$

$$\dot{V}_{۷}(t) \leq ۲ \begin{bmatrix} \int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(e(s))ds \\ \int_{t-\mu(t)}^{t} \varphi(\omega(s))ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{۱۱} & S_{۱۲} \\ * & S_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) - (۱-\dot{\eta})\varphi(e(t-\eta(t))) \\ \varphi(\omega(t)) - (۱-\dot{\mu})\varphi(\omega(t-\eta(t))) \end{bmatrix}. \qquad (۷۹.۳)$$

با جایگذاری نتایج (۷۲.۳) تا (۷۹.۳) در رابطه (۶۴.۳)، داریم:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \sum_{r=۱}^{۷} V_r(t) \\
&\leq \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\varphi^T(C_{۱})\widetilde{P}_{۳} - \widetilde{P}_{۳}^T\varphi(C_{۱}) + \eta^{۲} Z_{۱۱} & \widetilde{P}_{۱}^T - \widetilde{P}_{۳}^T - \varphi^T(C_{۱})\widetilde{P}_{۴} + \eta^{۲} Z_{۱۲} \\ \widetilde{P}_{۱} - \widetilde{P}_{۳} - \widetilde{P}_{۴}^T\varphi(C_{۱}) + \eta^{۲} Z_{۲۱} & \widetilde{P}_{۲} - \widetilde{P}_{۴} + \widetilde{P}_{۲}^T - \widetilde{P}_{۴}^T + \eta^{۲} Z_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) \\ \varphi(\omega(t)) \end{bmatrix} \\
&\quad + \varphi^T(e(t))\{\Phi_{۲} + \Phi_{۴} + R_{۱}\}\varphi(e(t)) + \varphi^T(\omega(t))\{\Phi_{۳} + R_{۲} + \eta^{۲} R_{۳} + \mu^{۲} R_{۴}\}\varphi(\omega(t)) \\
&\quad + \varphi^T(e(t-\eta(t)))\{\Phi_{۵} - (۱-\dot{\eta})R_{۱}\}\varphi(e(t-\eta(t))) \\
&\quad + ۲\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_{۳}^T\varphi(C_{۲}(t))\varphi(\omega(t-\mu(t))) + ۲\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_{۴}^T\varphi(C_{۲}(t))\varphi(\omega(t-\mu(t))) \\
&\quad - \left(\int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi^T(\omega(s))ds\right) R_{۳} \left(\int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(\omega(s))ds\right) \\
&\quad - \left(\int_{t-\mu(t)}^{t} \varphi^T(\omega(s))ds\right) R_{۴} \left(\int_{t-\mu(t)}^{t} \varphi(\omega(s))ds\right) \\
&\quad - \begin{bmatrix} \int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(e(s))ds \\ \int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(\omega(s))ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_{۱۱} & Z_{۱۲} \\ * & Z_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(e(s))ds \\ \int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(\omega(s))ds \end{bmatrix} \\
&\quad + ۲ \begin{bmatrix} \int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(e(s))ds \\ \int_{t-\mu(t)}^{t} \varphi(\omega(s))ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{۱۱} & S_{۱۲} \\ * & S_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(e(t)) - (۱-\dot{\eta})\varphi(e(t-\eta(t))) \\ \varphi(\omega(t)) - (۱-\dot{\mu})\varphi(\omega(t-\eta(t))) \end{bmatrix} \\
&\leq \xi^T(t)\Xi\xi(t), \qquad (۸۰.۳)
\end{aligned}$$

که

$$\Xi=\begin{bmatrix} \Xi_{11}+\Phi_2 & \Xi_{12} & 0 & \widetilde{P}_3^T\varphi(C_2) & S_{11}^T & 0 & S_{12}\\ * & \Xi_{22}+\Phi_3 & 0 & \widetilde{P}_4^T\varphi(C_2) & S_{12}^T & 0 & S_{22}^T\\ * & * & \Xi_{33} & 0 & -(1-\dot{\eta})S_{11}^T & 0 & -(1-\dot{\eta})S_{12}\\ * & * & * & \Xi_{44} & -(1-\dot{\mu})S_{12}^T & 0 & -(1-\dot{\mu})S_{22}^T\\ * & * & * & * & -Z_{11} & -Z_{12} & 0\\ * & * & * & * & * & -Z_{22}-R_3 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -R_4 \end{bmatrix} \qquad (۸۱.۳)$$

و

$$\begin{aligned} \Xi_{11}&=-\varphi^T(C_1)\widetilde{P}_3-\widetilde{P}_3^T\varphi^T(C_1)+\eta^2 Z_{11}+\Phi_4+R_1,\\ \Xi_{12}&=\widetilde{P}_1^T-\widetilde{P}_3^T-\varphi^T(C_1)\widetilde{P}_4+\eta^2 Z_{12}\\ \Xi_{22}&=\widetilde{P}_2-\widetilde{P}_4+\widetilde{P}_2^T-\widetilde{P}_4^T+\eta^2 Z_{22}+R_2+\eta^2 R_3+\mu^2 R_4,\\ \Xi_{33}&=\Phi_5-(1-\dot{\eta})R_1,\quad \Xi_{44}=-(1-\dot{\mu})R_2\\ \xi(t)&=\Big[\varphi(e(t)) \quad \varphi(\omega(t)) \quad \varphi(e(t-\eta(t))) \quad \varphi(\omega(t-\eta(t)))\\ &\qquad \int_{t-\eta(t)}^{t}\varphi(e(s))ds \quad \int_{t-\eta(t)}^{t}\varphi(\omega(s))ds \quad \int_{t-\mu(t)}^{t}\varphi(\omega(s))ds\Big] \end{aligned} \qquad (۸۲.۳)$$

با استفاده از مکمل شوور، می توان نتیجه گرفت که شبکه عصبی نامی () دارای نقطه تعادل یکتای پایدار مجانبی است اگر ماتریس های معین مثبت P، R_1، R_2، R_3، R_4، S و Z و ماتریس های قطری معین مثبت Q_1، Q_2، Q_3 و Q_4 وجود داشته باشند که مسئله LMI زیر را براورده سازند.

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & 0 & \widetilde{P}_3^T\varphi(C_2) & S_{11}^T & 0 & S_{12} & \Pi_1 & 0\\ * & \Xi_{22} & 0 & \widetilde{P}_4^T\varphi(C_2) & S_{12}^T & 0 & S_{22}^T & 0 & \Pi_2\\ * & * & \Xi_{33} & 0 & -(1-\dot{\eta})S_{11}^T & 0 & -(1-\dot{\eta})S_{12} & 0 & 0\\ * & * & * & \Xi_{44} & -(1-\dot{\mu})S_{12}^T & 0 & -(1-\dot{\mu})S_{22}^T & 0 & 0\\ * & * & * & * & -Z_{11} & -Z_{12} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -Z_{22}-R_3 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -R_4 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & \Pi_3 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Pi_4 \end{bmatrix}<0. \qquad (۸۳.۳)$$

از این رو، $\dot{V}(t)<0$ برقرار است اگر مسئله LMI فوق پاسخ داشته باشد. بنابراین، مبدا برای سیستم (۶۱.۳) و در نتیجه آن، نقطه تعادل سیستم نامی (۴۶.۳) پایدار مجانبی است. در اینجا، اثبات تکمیل می شود.

□

۴.۳.۳ پایداری مقاوم نقطه تعادل

در این بخش، با تعمیم نتایج بخش قبل برای شبکه عصبی نامعین به تحلیل پایداری مجانبی مقاوم شبکه عصبی مورد نظر پرداخته می شود.

قضیه ۳.۳.۳. با در نظر گرفتن فرض (۲.۳.۳)، شبکه عصبی نامعین (۴۶.۳) دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار مجانبی مقاوم است اگر رابطه (۴۷.۳) تحقق یابد و همچنین وجود داشته باشد ماتریس های معین مثبت P، R_1، R_2، R_3، R_4، S و Z و ماتریس های قطری معین مثبت Q_i برای $i = 1, 2, \cdots, 12$ بگونه ای که مسئله LMI زیر تحقق یابد.

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\Xi}_{11} & \Xi_{12} & 0 & \widetilde{P}_3^T\varphi(C_2) & S_{11}^T & 0 & S_{12} & \widetilde{\Pi}_1 & 0 \\ * & \Xi_{22} & 0 & \widetilde{P}_4^T\varphi(C_2) & S_{12}^T & 0 & S_{22}^T & 0 & \widetilde{\Pi}_2 \\ * & * & \widetilde{\Xi}_{33} & 0 & -(1-\dot{\eta})S_{11}^T & 0 & -(1-\dot{\eta})S_{12} & 0 & 0 \\ * & * & * & \widetilde{\Xi}_{44} & -(1-\dot{\mu})S_{12}^T & 0 & -(1-\dot{\mu})S_{22}^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Z_{11} & -Z_{12} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Z_{22}-R_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -R_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \widetilde{\Pi}_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \widetilde{\Pi}_4 \end{bmatrix} < 0, \qquad (84.3)$$

که

$$\begin{aligned} \widetilde{\Xi}_{11} &= \Xi_{11} + \Theta^T(\widetilde{\Delta}^f)^T\{\varphi^T(E_2)Q_5^{-1}\varphi(E_2) + \varphi^T(E_2)Q_6^{-1}\varphi(E_2)\}\widetilde{\Delta}^f\Theta \\ &\quad + \varphi^T(E_1)Q_5^{-1}\varphi(E_1) + \varphi^T(E_1)Q_6^{-1}\varphi(E_1), \\ \widetilde{\Xi}_{33} &= \Xi_{33} + \Theta^T(\widetilde{\Delta}^h)^T\{\varphi^T(E_3)Q_9^{-1}\varphi(E_3) + \varphi^T(E_3)Q_{10}^{-1}\varphi(E_3)\}\widetilde{\Delta}^h\Theta, \\ \widetilde{\Xi}_{44} &= \Xi_{44} + \varphi^T(E_4)\{Q_{11}^{-1} + Q_{12}^{-1}\}\varphi(E_4), \\ \widetilde{\Pi}_1 &= \Big(\widetilde{P}_3^T|\varphi(A^*)| \quad \widetilde{P}_3^T|\varphi(B^*)| \quad \widetilde{P}_3^T\varphi(L_1) \quad \widetilde{P}_3^T\varphi(L_2) \quad \widetilde{P}_3^T\varphi(L_3) \quad \widetilde{P}_3^T\varphi(L_4)\Big), \\ \widetilde{\Pi}_2 &= \Big(\widetilde{P}_4^T|\varphi(A^*)| \quad \widetilde{P}_4^T|\varphi(B^*)| \quad \widetilde{P}_4^T\varphi(L_1) \quad \widetilde{P}_4^T\varphi(L_2) \quad \widetilde{P}_4^T\varphi(L_3) \quad \widetilde{P}_4^T\varphi(L_4)\Big), \\ \widetilde{\Pi}_3 &= -diag\Big(Q_1^{-1}, Q_3^{-1}, Q_5^{-1}, Q_7^{-1}, Q_9^{-1}, Q_{11}^{-1}\Big), \\ \widetilde{\Pi}_4 &= -diag\Big(Q_2^{-1}, Q_4^{-1}, Q_6^{-1}, Q_8^{-1}, Q_9^{-10}, Q_{12}^{-1}\Big). \end{aligned} \qquad (85.3)$$

و دیگر پارامترهای معلوم با پارامترهای تئوری (۲.۳.۳) یکسان می باشد.

اثبات: فرض کنید که $x(t)$ و $x'(t)$ دو پاسخ متفاوت شبکه عصبی (۴۶.۳) می باشند. در نتیجه، دینامیک خطای $\varphi(x(t) - x'(t))$ بصورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} \varphi(D^\alpha e(t)) &= -\varphi(C_1 + \Delta C_1(t))\varphi(e(t)) \\ &\quad + \varphi(A(t) + \Delta A)\big\{\varphi(f(Wx(t) + W^f y(t))) - \varphi(f(Wx'(t) + W^f y'(t)))\big\} \\ &\quad + \varphi(B(t) + \Delta B)\Big\{\varphi(h(Wx(t-\eta(t)) + W^f y(t-\eta(t)))) \\ &\quad - \varphi(h(Wx'(t-\eta(t)) + W^f y'(t-\eta(t))))\Big\} + \varphi(C_2 + \Delta C_2)\varphi(D^\alpha e(t-\mu(t))) \\ y(t) &= \varphi(g(W^o x(t)) \\ y'(t) &= \varphi(g(W^o x'(t)). \end{aligned} \qquad (86.3)$$

فرض کنید شرط رابطه (۴۷.۳) برقرار باشد. بنابراین، نقطه تعادل شبکه عصبی نامعین (۴۶.۳) پایدار مجانبی مقاوم است اگر و تنها اگر مبدا برای سیستم (۸۶.۳) پایدار مجانبی مقاوم باشد. برای آنالیز پایداری مبدا، تابع لیاپانوف کراسوفسکی (۶۴.۳) و (۶۵.۳) پیشنهاد می شود. با فرض (۳۵.۳)، مشتق تابع لیاپانوف $V(t)$ روی شبکه عصبی رابطه (۴۶.۳)، داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq\ & \xi^T(t)\Xi\xi(t) + ۲\varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\Big\{\varphi\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ -L_۱\Upsilon_۱(t)E_۱ \end{bmatrix}\right)\varphi(\widetilde{e}(t)) \\ & + \varphi\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ L_۲\Upsilon_۲(t)E_۲ \end{bmatrix}\right)\{\varphi(f(Wx(t)+W^fy(t))) - \varphi(f(Wx'(t)+W^fy'(t)))\} \\ & + \varphi\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ L_۳\Upsilon_۳(t)E_۳ \end{bmatrix}\right) \\ & \times\{\varphi(h(Wx(t-\eta(t))+W^fy(t-\eta(t)))) - \varphi(h(Wx'(t-\eta(t))+W^fy'(t-\eta(t))))\} \\ & + \varphi\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ L_۴\Upsilon_۴(t)E_۴ \end{bmatrix}\right)\varphi(\omega(t-\mu(t)))\Big\}. \end{aligned} \tag{۸۷.۳}$$

با استفاده از رابطه (۵۸.۳)، مشابه با روابط (۶۹.۳) و (۷۰.۳)، می توان نشان داد که

$$\begin{aligned}\varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ -L_۱\Upsilon_۱(t)E_۱ \end{bmatrix}\right) &= \Big(\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T + \varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\Big)\varphi(L_۱\Upsilon_۱(t)E_۱) \\ \varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ L_۲\Upsilon_۲(t)E_۲ \end{bmatrix}\right) &= \Big(\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T + \varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\Big)\varphi(L_۲\Upsilon_۲(t)E_۲) \\ \varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ L_۳\Upsilon_۳(t)E_۲ \end{bmatrix}\right) &= \Big(\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T + \varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\Big)\varphi(L_۳\Upsilon_۳(t)E_۳) \\ \varphi^T(\widetilde{e}(t))P^T\varphi\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ L_۴\Upsilon_۴(t)E_۴ \end{bmatrix}\right) &= \Big(\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T + \varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\Big)\varphi(L_۴\Upsilon_۴(t)E_۴). \end{aligned} \tag{۸۸.۳}$$

با تعریف $\nu(t) = Wx(t) + W^fy(t)$ و $\upsilon(t) = Wx(t-\eta(t)) + W^fy(t-\eta(t))$، و با استفاده از (۸۷.۳) و (۸۸.۳)، داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq\ & \xi^T(t)\Xi\xi(t) - ۲\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T\varphi(L_۱\Upsilon_۱(t)E_۱)\varphi(e(t)) - ۲\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\varphi(L_۱\Upsilon_۱(t)E_۱)\varphi(e(t)) \\ & + ۲\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T\varphi(L_۲\Upsilon_۲(t)E_۲)\{\varphi(f(\nu(t))) - \varphi(f(\nu'(t)))\} \\ & + ۲\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_۴^T\varphi(L_۲\Upsilon_۲(t)E_۲)\{\varphi(f(\nu(t))) - \varphi(f(\nu'(t)))\} \\ & + ۲\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_۳^T\varphi(L_۳\Upsilon_۳(t)E_۳)\{\varphi(h(\upsilon(t))) - \varphi(h(\upsilon'(t)))\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_4^T\varphi(L_3\Upsilon_3(t)E_3)\{\varphi(h(\upsilon(t)))-\varphi(h(\upsilon'(t)))\}\\
&+2\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_3^T\varphi(L_4\Upsilon_4(t)E_4)\varphi(\omega(t-\mu(t)))\\
&+2\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_4^T\varphi(L_4\Upsilon_4(t)E_4)\varphi(\omega(t-\mu(t))).
\end{aligned}
\tag{۸۹.۳}
$$

اگر Q_i برای $i=1,2,\cdots,12$ ماتریس های قطری معین مثبت باشند، انگاه

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(t)\leq\ &\xi^T(t)\Xi\xi(t)\\
&+\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_3^T\varphi(L_1)Q_5\varphi^T(L_1)\widetilde{P}_3\varphi(e(t))+\varphi^T(e(t))\varphi^T(E_1)\varphi^T(\Upsilon_1(t))Q_5^{-1}\\
&\times\varphi(\Upsilon_1(t))\varphi(E_1)\varphi(e(t))+\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_4^T\varphi(L_1)Q_6\varphi^T(L_1)\widetilde{P}_4\varphi(\omega(t))\\
&+\varphi^T(e(t))\varphi^T(E_1)\varphi^T(\Upsilon_1(t))Q_6^{-1}\varphi(\Upsilon_1(t))\varphi(E_1)\varphi(e(t))\\
&+\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_3^T\varphi(L_2)Q_7\varphi^T(L_2)\widetilde{P}_3\varphi(e(t))+\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_4^T\varphi(L_2)Q_8\varphi^T(L_2)\widetilde{P}_4\varphi(\omega(t))\\
&+\{\varphi^T(f(\nu(t)))-\varphi^T(f(\nu'(t)))\}\varphi^T(E_2)\varphi^T(\Upsilon_2(t))Q_7^{-1}\\
&\times\varphi(\Upsilon_2(t))\varphi(E_2)\{\varphi(f(\nu(t)))-\varphi(f(\nu'(t)))\}\\
&+\{\varphi^T(f(\nu(t)))-\varphi^T(f(\nu'(t)))\}\varphi^T(E_2)\varphi^T(\Upsilon_2(t))Q_8^{-1}\\
&\times\varphi(\Upsilon_2(t))\varphi(E_2)\{\varphi(f(\nu(t)))-\varphi(f(\nu'(t)))\}\\
&+\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_3^T\varphi(L_3)Q_9\varphi^T(L_3)\widetilde{P}_3\varphi(e(t))+\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_4^T\varphi(L_3)Q_{10}\varphi^T(L_3)\widetilde{P}_4\varphi(\omega(t))\\
&+\{\varphi^T(h(\upsilon(t)))-\varphi^T(h(\upsilon'(t)))\}\varphi^T(E_3)\varphi^T(\Upsilon_3(t))Q_9^{-1}\\
&\times\varphi(\Upsilon_3(t))\varphi(E_3)\{\varphi(h(\upsilon(t)))-\varphi(h(\upsilon'(t)))\}\\
&+\{\varphi^T(h(\upsilon(t)))-\varphi^T(h(\upsilon'(t)))\}\varphi^T(E_3)\varphi^T(\Upsilon_3(t))Q_{10}^{-1}\\
&\times\varphi(\Upsilon_3(t))\varphi(E_3)\{\varphi(h(\upsilon(t)))-\varphi(h(\upsilon'(t)))\}\\
&+\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_3^T\varphi(L_4)Q_{11}\varphi^T(L_4)\widetilde{P}_3\varphi(e(t))+\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_4^T\varphi(L_4)Q_{12}\varphi^T(L_4)\widetilde{P}_4\varphi(\omega(t))\\
&+\varphi^T(\omega(t-\mu(t)))\varphi^T(E_4)\varphi^T(\Upsilon_4(t))Q_{11}^{-1}\varphi(\Upsilon_4(t))\varphi(E_4)\varphi(\omega(t-\mu(t)))\\
&+\varphi^T(\omega(t-\mu(t)))\varphi^T(E_4)\varphi^T(\Upsilon_4(t))Q_{12}^{-1}\varphi(\Upsilon_4(t))\varphi(E_4)\varphi(\omega(t-\mu(t))).
\end{aligned}
\tag{۹۰.۳}
$$

چون $\Upsilon_i(t)$ برای $i=1,2,3,4$ ماتریس های حقیقی است، پس $\varphi^T(\Upsilon_i(t))=\varphi(\Upsilon_i^T(t))$ و با توجه به ویژگی ماتریس $\Upsilon_i(t)$ می توان نتیجه گرفت که $\varphi^T(\Upsilon_i(t))\varphi(\Upsilon_i(t))=\varphi(\Upsilon_i^T(t)\Upsilon_i(t))=\mathcal{I}$ برقرار است. در نتیجه

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}(t)\\
&\leq\xi^T(t)\Xi\xi(t)\\
&\quad+\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_3^T\varphi(L_1)Q_5\varphi^T(L_1)\widetilde{P}_3\varphi(e(t))+\varphi^T(e(t))\varphi^T(E_1)Q_5^{-1}\varphi(E_1)\varphi(e(t))\\
&\quad+\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_4^T\varphi(L_1)Q_6\varphi^T(L_1)\widetilde{P}_4\varphi(\omega(t))+\varphi^T(e(t))\varphi^T(E_1)Q_6^{-1}\varphi(E_1)\varphi(e(t))\\
&\quad+\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_3^T\varphi(L_2)Q_7\varphi^T(L_2)\widetilde{P}_3\varphi(e(t))+\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_4^T\varphi(L_2)Q_8\varphi^T(L_2)\widetilde{P}_4\varphi(\omega(t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\{\varphi^T(f(\nu(t)))-\varphi^T(f(\nu'(t)))\}\varphi^T(E_2)Q_7^{-1}\varphi(E_2)\{\varphi(f(\nu(t)))-\varphi(f(\nu'(t)))\}\\
&+\{\varphi^T(f(\nu(t)))-\varphi^T(f(\nu'(t)))\}\varphi^T(E_2)Q_8^{-1}\varphi(E_2)\{\varphi(f(\nu(t)))-\varphi(f(\nu'(t)))\}\\
&+\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_3^T\varphi(L_3)Q_9\varphi^T(L_3)\widetilde{P}_3\varphi(e(t))+\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_4^T\varphi(L_3)Q_{10}\varphi^T(L_3)\widetilde{P}_4\varphi(\omega(t))\\
&+\{\varphi^T(h(\upsilon(t)))-\varphi^T(h(\upsilon'(t)))\}\varphi^T(E_3)Q_9^{-1}\varphi(E_3)\{\varphi(h(\upsilon(t)))-\varphi(h(\upsilon'(t)))\}\\
&+\{\varphi^T(h(\upsilon(t)))-\varphi^T(h(\upsilon'(t)))\}\varphi^T(E_3)Q_{10}^{-1}\varphi(E_3)\{\varphi(h(\upsilon(t)))-\varphi(h(\upsilon'(t)))\}\\
&+\varphi^T(e(t))\widetilde{P}_3^T\varphi(L_4)Q_{11}\varphi^T(L_4)\widetilde{P}_3\varphi(e(t))\\
&+\varphi^T(\omega(t-\mu(t)))\varphi^T(E_4)Q_{11}^{-1}\varphi(E_4)\varphi(\omega(t-\mu(t)))\\
&+\varphi^T(\omega(t))\widetilde{P}_4^T\varphi(L_4)Q_{12}\varphi^T(L_4)\widetilde{P}_4\varphi(\omega(t))\\
&+\varphi^T(\omega(t-\mu(t)))\varphi^T(E_4)Q_{12}^{-1}\varphi(E_4)\varphi(\omega(t-\mu(t)))\\
\le\ &\xi^T(t)\widetilde{\Xi}\xi(t),
\end{aligned}
\tag{۹۱.۳}
$$

که

$$
\widetilde{\Xi}=\begin{bmatrix}
\Lambda_{11} & \Xi_{12} & 0 & \widetilde{P}_3^T\varphi(C_2) & S_{11}^T & 0 & S_{12}\\
* & \Lambda_{22} & 0 & \widetilde{P}_4^T\varphi(C_2) & S_{12}^T & 0 & S_{22}^T\\
* & * & \Lambda_{33} & 0 & -(1-\dot{\eta})S_{11}^T & 0 & -(1-\dot{\eta})S_{12}\\
* & * & * & \Lambda_{44} & -(1-\dot{\mu})S_{12}^T & 0 & -(1-\dot{\mu})S_{22}^T\\
* & * & * & * & -Z_{11} & -Z_{12} & 0\\
* & * & * & * & * & -Z_{22}-R_3 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -R_4
\end{bmatrix}<0
\tag{۹۲.۳}
$$

و

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{11}=\ &\Xi_{11}+\Phi_2+\Theta^T(\widetilde{\Delta}^f)^T\{\varphi^T(E_2Q_5^{-1}\varphi(E_2)+\varphi^T(E_2Q_6^{-1}\varphi(E_2))\}\widetilde{\Delta}^f\Theta\\
&+\widetilde{P}_3^T\varphi(L_1)Q_5\varphi^T(L_1)\widetilde{P}_3+\varphi^T(E_1)\{Q_5^{-1}+Q_6^{-1}\}\varphi(E_1)+\widetilde{P}_3^T\varphi(L_2)Q_7\varphi^T(L_2)\widetilde{P}_3\\
&+\widetilde{P}_3^T\varphi(L_3)Q_9\varphi^T(L_3)\widetilde{P}_3+\widetilde{P}_3^T\varphi(L_4)Q_{11}\varphi^T(L_4)\widetilde{P}_3\\
\Lambda_{22}=\ &\Xi_{22}+\Phi_3+\widetilde{P}_4^T\varphi(L_1)Q_6\varphi^T(L_1)\widetilde{P}_4+\widetilde{P}_4^T\varphi(L_2)Q_8\varphi^T(L_2)\widetilde{P}_4\\
&+\widetilde{P}_4^T\varphi(L_3)Q_{10}\varphi^T(L_3)\widetilde{P}_4+\widetilde{P}_4^T\varphi(L_4)Q_{12}\varphi^T(L_4)\widetilde{P}_4\\
\Lambda_{33}=\ &\Xi_{33}+\Theta^T(\widetilde{\Delta}^h)^T\{\varphi^T(E_3)Q_9^{-1}\varphi(E_3)+\varphi^T(E_3)Q_{10}^{-1}\varphi(E_3)\}\widetilde{\Delta}^h\Theta\\
\Lambda_{11}=\ &\Xi_{44}+\varphi^T(E_4)\{Q_{11}^{-1}+Q_{12}^{-1}\}\varphi(E_4),
\end{aligned}
\tag{۹۳.۳}
$$

که Ξ_{11}، Ξ_{12}، Ξ_{22}، Ξ_{33}، Ξ_{44}، Φ_2، Φ_3، Θ و $\xi(t)$ در تئوری (۲.۳.۳) تعریف شده اند. با استفاده از مکمل شوور، می توان نتیجه گرفت که مبدا برای سیستم (۸۶.۳) پایدار مجانبی مقاوم است اگر رابطه (۸۷.۳) و (۸۸.۳) صادق باشد. در اینجا، اثبات تکمیل می شود.

□

ملاحظه ۴.۳.۳. در اثبات تئوری های (۱.۳.۳)، (۲.۳.۳) و (۳.۳.۳)، کاملا واضح می باشد که ورودی کمکی تنها موقعیت نقطه تعادل را تغییر می دهد و اثری روی وجود و یکتایی نقطه

تعادل و همچنین روی پایداری آن ندارد. بنابراین، اغتشاش ثابت که همانند ورودی کمکی به شبکه عصبی وارد می شود، اثری یکسان با ورودی کمکی دارد.

ملاحظه ۵.۳.۳. اگر تاخیرهای η و μ شبکه عصبی (۴۶.۳) ، ثابت با زمان باشند، آنگاه $\dot{\eta}(t) = \dot{\eta} = 0$ و $\dot{\mu}(t) = \dot{\mu} = 0$ می باشد. می توان نشان داد که نتایج بدست آمده در تئوری های (۱.۳.۳)، (۲.۳.۳) و (۳.۳.۳) با فرض $\dot{\eta} = \dot{\mu} = 0$ همچنان معتبر است.

ملاحظه ۶.۳.۳. شبکه عصبی رابطه (۳۳.۳) بدون ویژگی ممریستیو را در نظر بگیرید. پس شبکه عصبی رابطه (۴۴.۳) را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}
\varphi(D^{\alpha}x(t) &= -\varphi(C_1 + \Delta C_1(t))\varphi(x(t)) + \varphi(A + \Delta A(t))\varphi(f(W^{in}u(t) + Wx(t) + W^{f}y(t))) \\
&\quad + \varphi(B + \Delta B(t))\varphi(h(W^{in}u(t-\eta(t)) + Wx(t-\eta(t)) + W^{f}y(t-\eta(t)))) \\
&\quad + \varphi(C_2 + \Delta C_2(t))\varphi(D^{\alpha}x(t-\mu(t))) + \varphi(\vartheta) \\
\varphi(y(t)) &= \varphi(g(W^{o}x(t) + W^{io}u(t))),
\end{aligned} \tag{۹۴.۳}$$

که A و B ماتریس های ثابت در فضای $\mathbb{H}^{n_r \times n_r}$ می باشند.
اگر در تئوری های (۱.۳.۳)، (۲.۳.۳) و (۳.۳.۳) از A و B جایگزین A^* و B^* استفاده شود، بسادگی می توان اثبات کرد که نتایج این تئوری ها قابل استفاده برای شبکه عصبی رابطه (۹۴.۳) می باشد. در این راستا، تغییرات زیر باید در نتایج بدست آمده اعمال کرد:
۱) در تئوری (۱.۳.۳) باید از رابطه جدید $\Sigma_2 = [\Lambda\,|\varphi(A + \overline{\Delta A})|\,,\Lambda\,|\varphi(B + \overline{\Delta B})|]$ استفاده شود.
۲) در تئوری (۲.۳.۳) باید از روابط جدید

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \left(\widetilde{P}_3^T|\varphi(A)|,\ \widetilde{P}_3^T|\varphi(B)|\right) \\
\Pi_2 &= \left(\widetilde{P}_4^T|\varphi(A)|,\ \widetilde{P}_4^T|\varphi(B)|\right)
\end{aligned}$$

استفاده شود.
۳) در تئوری (۳.۳.۳) باید از رابطه جدید

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Pi}_1 &= \left(\widetilde{P}_3^T|\varphi(A)|,\ \widetilde{P}_3^T|\varphi(B)|,\ \widetilde{P}_3^T\varphi(L_1),\ \widetilde{P}_3^T\varphi(L_2),\ \widetilde{P}_3^T\varphi(L_3),\ \widetilde{P}_3^T\varphi(L_4)\right) \\
\widetilde{\Pi}_2 &= \left(\widetilde{P}_4^T|\varphi(A)|,\ \widetilde{P}_4^T|\varphi(B)|,\ \widetilde{P}_4^T\varphi(L_1),\ \widetilde{P}_4^T\varphi(L_2),\ \widetilde{P}_4^T\varphi(L_3),\ \widetilde{P}_4^T\varphi(L_4)\right)
\end{aligned}$$

استفاده شود.
در نهایت، می توان گفت که نتایج بدست آمده را می توان برای آنالیز دینامیکی شبکه عصبی انعکاس حالت نامعین مرتبه کسری کواترنیون با تابع فعال سازی $QUAD$ در حضور تاخیر متغیر با زمان بکار برد.

ملاحظه ۷.۳.۳. با بکارگیری تعاریف (۴.۲.۱) و (۳.۲.۱) و ملاحظه (۱.۲.۱) در فضای مختلط (حقیقی)، می توان نشان داد که همه نتایج فوق قابل استفاده برای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری مختلط می باشد. همچنین، می توان نشان داد که این نتایج برای آنالیز پایداری شبکه عصبی هاپفیلد مرتبه کسری کواترنیون/مختلط/حقیقی قابل کاربرد می باشد

۵.۳.۳ نتایج شبیه سازی

برای اثبات کارایی نتایج تئوری های (۱.۳.۳)، (۲.۳.۳) و (۳.۳.۳) مثال زیر در دو بخش انجام می شود. در بخش اول، مطابق با نتایج تئوری های (۱.۳.۳) و (۲.۳.۳)، پایداری نقطه تعادل شبکه عصبی نامی تحت شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت آنالیز می شود. در بخش دوم، مطابق با نتایج تئوری های (۱.۳.۳) و (۳.۳.۳)، پایداری مقاوم نقطه تعادل شبکه عصبی نامعین تحت شرایط اولیه متفاوت و اغتشاش ثابت تحلیل می شود.

مثال ۱.۳.۳. شبکه عصبی رابطه (۳۳.۳) با $\alpha = ۰/۹$ و توابع فعالسازی $f_j : \mathbb{H}^{n_r} \to \mathbb{H}$، $h_j : \mathbb{H}^{n_r} \to \mathbb{H}$ بصورت

$$
\begin{aligned}
f_j^{(R)}(x) &= \sum_{i=۱}^{n_r}\{۰/۱۵(|x_i^{(R)}| - \zeta_i^{(R)}) - ۰/۲\sin(|x_i^{(R)}| - \zeta_i^{(R)})\} \\
&\qquad + \sum_{i=۱}^{n_r}\{۰/۱(|x_i^{(I)}| - \zeta_i^{(I)}) + ۰/۱\tanh(|x_i^{(I)}| - \zeta_i^{(I)})\} \\
f_j^{(I)}(x) &= \sum_{i=۱}^{n_r}\{۰/۱۵(|x_i^{(I)}| - \zeta_i^{(I)}) - ۰/۲\sin(|x_i^{(I)}| - \zeta_i^{(I)})\} \\
&\qquad + \sum_{i=۱}^{n_r}\{۰/۱(|x_i^{(J)}| - \zeta_i^{(J)}) + ۰/۱\tanh(|x_i^{(J)}| - \zeta_i^{(J)})\} \\
f_j^{(J)}(x) &= \sum_{i=۱}^{n_r}\{۰/۱۵(|x_i^{(J)}| - \zeta_i^{(J)}) - ۰/۲\sin(|x_i^{(J)}| - \zeta_i^{(J)})\} \\
&\qquad + \sum_{i=۱}^{n_r}\{۰/۱(|x_i^{(K)}| - \zeta_i^{(K)}) + ۰/۱\tanh(|x_i^{(K)}| - \zeta_i^{(K)})\} \\
f_j^{(K)}(x) &= \sum_{i=۱}^{n_r}\{۰/۱۵(|x_i^{(K)}| - \zeta_i^{(K)}) - ۰/۲\sin(|x_i^{(K)}| - \zeta_i^{(K)})\} \\
&\qquad + \sum_{i=۱}^{n_r}\{۰/۱(|x_i^{(R)}| - \zeta_i^{(R)}) + ۰/۱\tanh(|x_i^{(R)}| - \zeta_i^{(R)})\} \\
h_j^{(R)}(x) &= \sum_{i=۱}^{n_r}\{۰/۱(|x_i^{(R)}| - \zeta_i^{(R)}) + ۰/۱\tanh(|x_i^{(R)}| - \zeta_i^{(R)})\} \\
&\qquad + \sum_{i=۱}^{n_r}\{۰/۱۵(|x_i^{(I)}| - \zeta_i^{(I)}) - ۰/۲\sin(|x_i^{(I)}| - \zeta_i^{(I)})\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
h_j^{(I)}(x) &= \sum_{i=1}^{n_r}\{0/1(|x_i^{(I)}|-\zeta_i^{(I)})+0/1\tanh(|x_i^{(I)}|-\zeta_i^{(I)})\}\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{n_r}\{0/15(|x_i^{(J)}|-\zeta_i^{(J)})-0/2\sin(|x_i^{(J)}|-\zeta_i^{(J)})\}\\
h_j^{(J)}(x) &= \sum_{i=1}^{n_r}\{0/1(|x_i^{(J)}|-\zeta_i^{(J)})+0/1\tanh(|x_i^{(J)}|-\zeta_i^{(J)})\}\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{n_r}\{0/15(|x_i^{(K)}|-\zeta_i^{(K)})-0/2\sin(|x_i^{(K)}|-\zeta_i^{(K)})\}\\
h_j^{(K)}(x) &= \sum_{i=1}^{n_r}\{0/1(|x_i^{(K)}|-\zeta_i^{(K)})+0/1\tanh(|x_i^{(K)}|-\zeta_i^{(K)})\}\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{n_r}\{0/15(|x_i^{(R)}|-\zeta_i^{(R)})-0/2\sin(|x_i^{(R)}|-\zeta_i^{(R)})\}
\end{aligned}$$

و تابع فعالسازی $g_k:\mathbb{H}^{n_o}\to\mathbb{H}$ بصورت زیر را در نظر بگیرید:

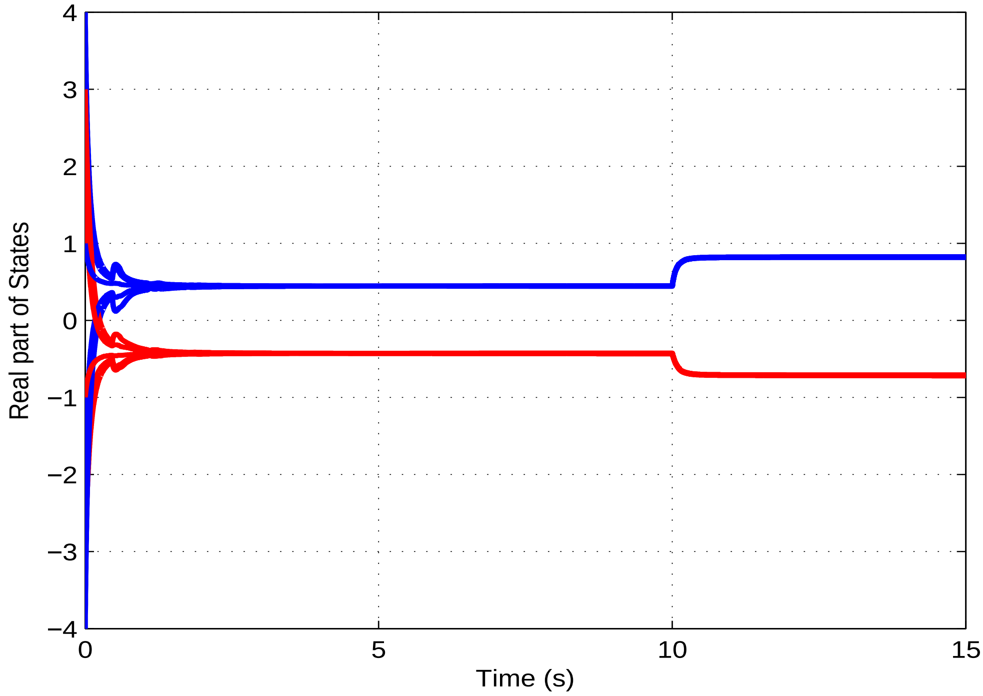
$$\begin{aligned}
g_k^{(R)}(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^{n_0}\{0/1\hat{x}_i^{(R)}+0/1\sin(\hat{x}_i^{(R)})+0/2\tanh(\hat{x}_i^{(I)})\},\\
g_k^{(I)}(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^{n_0}\{0/1\hat{x}_i^{(I)}+0/1\sin(\hat{x}_i^{(I)})+0/2\tanh(\hat{x}_i^{(J)})\}\\
g_k^{(J)}(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^{n_0}\{0/1\hat{x}_i^{(J)}+0/1\sin(\hat{x}_i^{(J)})+0/2\tanh(\hat{x}_i^{(K)})\},\\
g_k^{(K)}(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^{n_0}\{0/1\hat{x}_i^{(K)}+0/1\sin(\hat{x}_i^{(K)})+0/2\tanh(\hat{x}_i^{(R)})\},
\end{aligned}$$

که $x\in\mathbb{H}^{n_r}$، $\hat{x}\in\mathbb{H}^{n_o}$، $j=1,2,\cdots,n_r$ و $k=1,2,\cdots,n_o$ می باشد. بنابراین، مقادیر

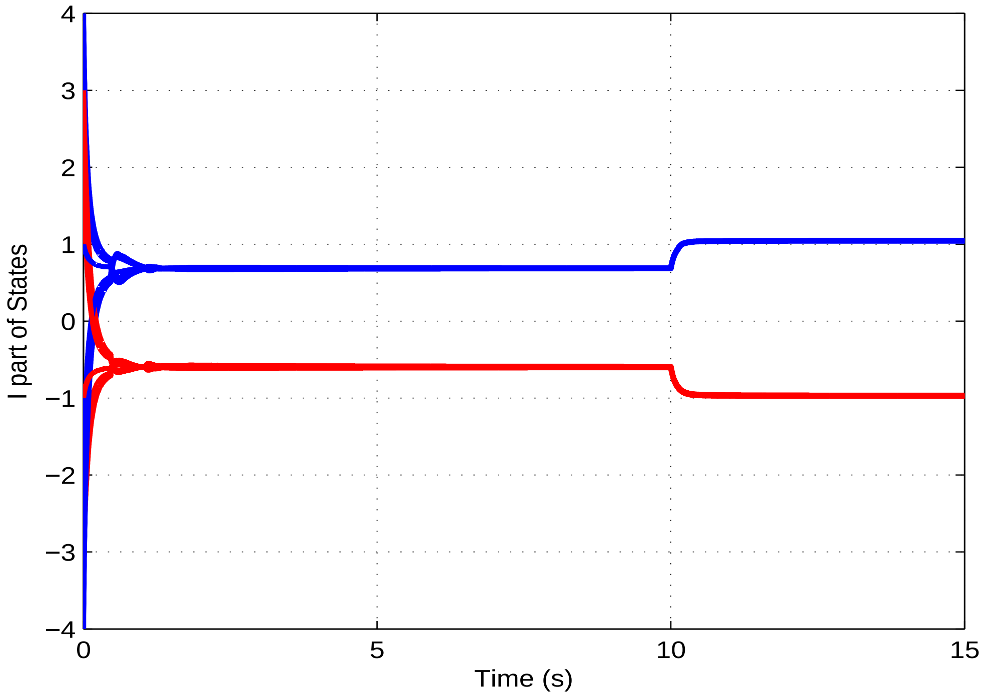
$$\widetilde{\Delta}^f=\widetilde{\Delta}^h=\begin{bmatrix}
0/2 & 0/2 & 0/2 & 0/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0/2 & 0/2 & 0/2 & 0/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0/2 & 0/2 & 0/2 & 0/2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0/2 & 0/2 & 0/2 & 0/2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0/2 & 0/2 & 0/2 & 0/2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0/2 & 0/2 & 0/2 & 0/2\\
0/2 & 0/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/2 & 0/2\\
0/2 & 0/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/2 & 0/2
\end{bmatrix}$$

و

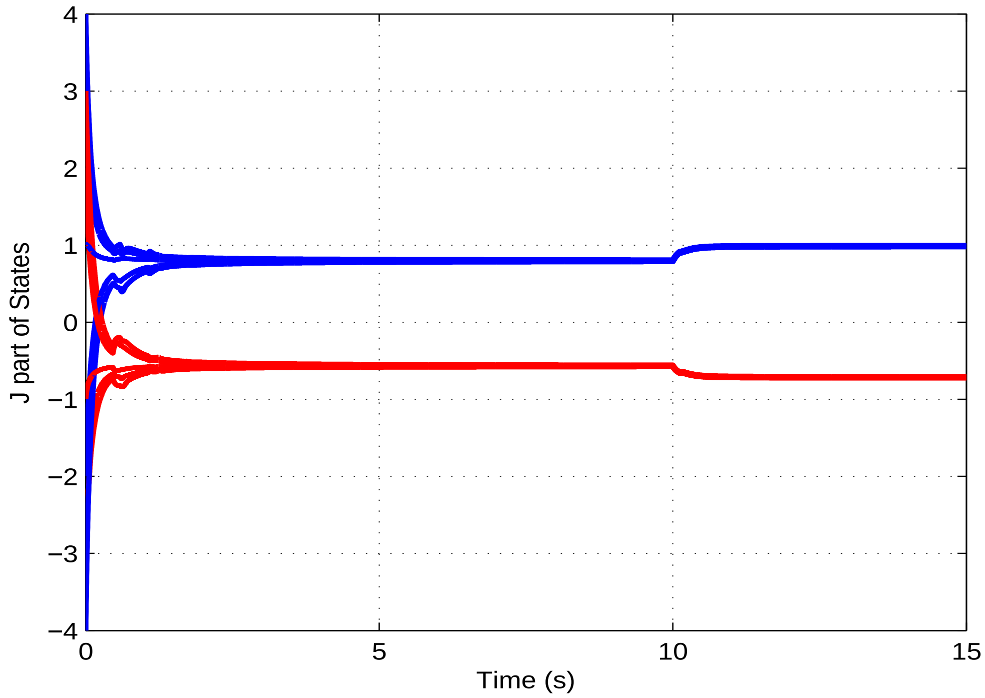
$$\widetilde{\Delta}^g=\begin{bmatrix}
0/2 & 0/2 & 0 & 0\\
0 & 0/2 & 0/2 & 0\\
0 & 0 & 0/2 & 0/2\\
0/2 & 0 & 0 & 0/2
\end{bmatrix}$$



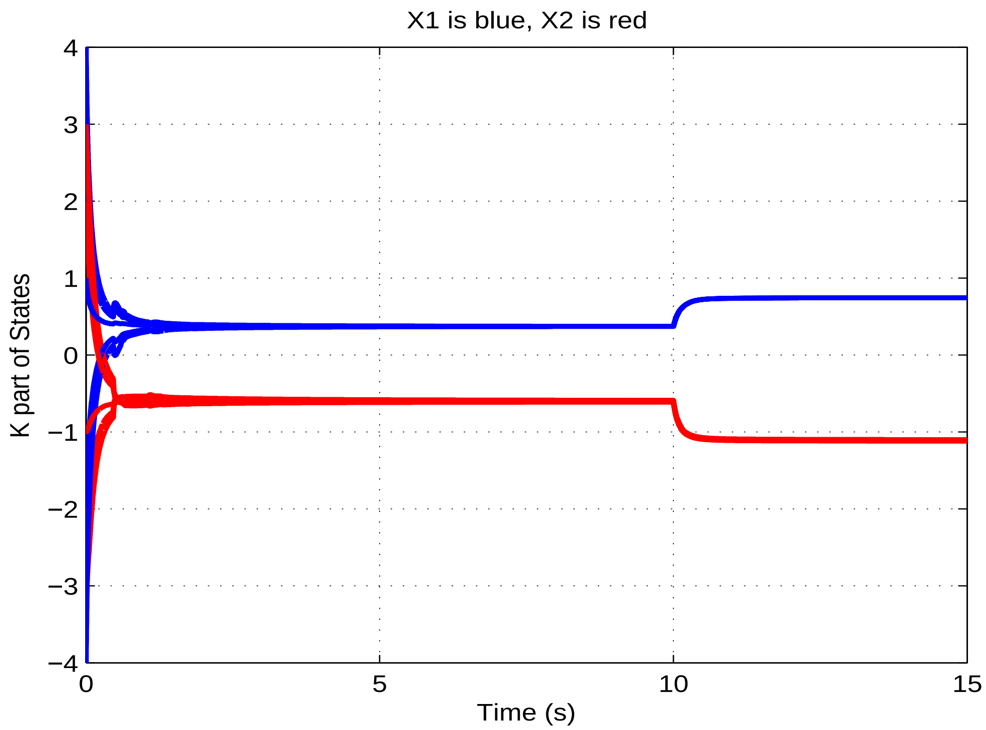
(آ) بخش حقیقی حالت های رزروير



(ب) بخش $\imath$ حالت های رزروير

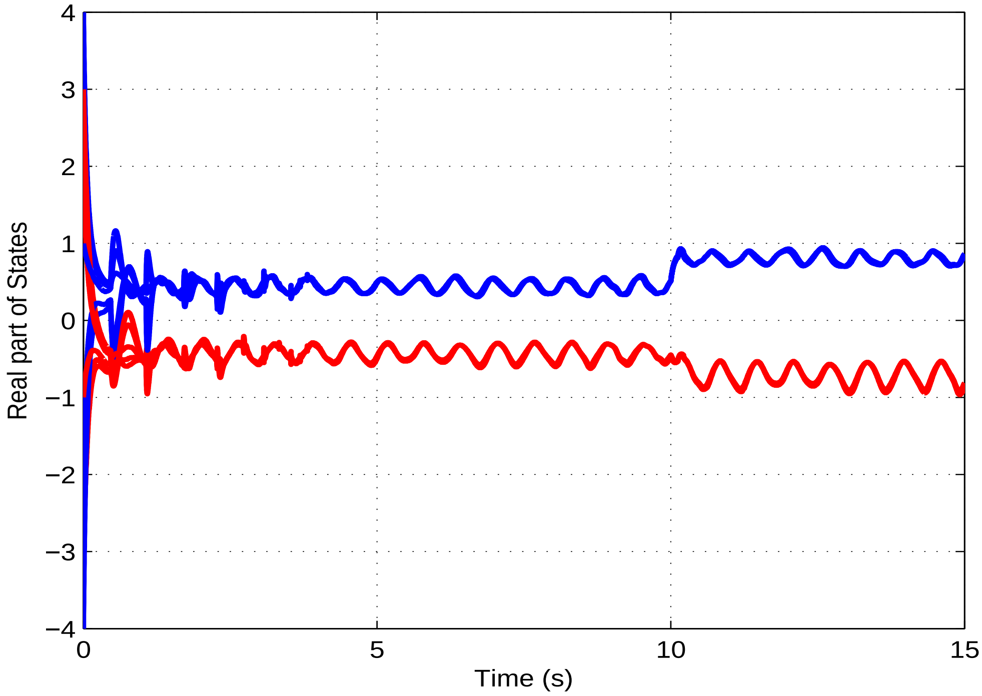


(ج) بخش $\jmath$ حالت های رزروير

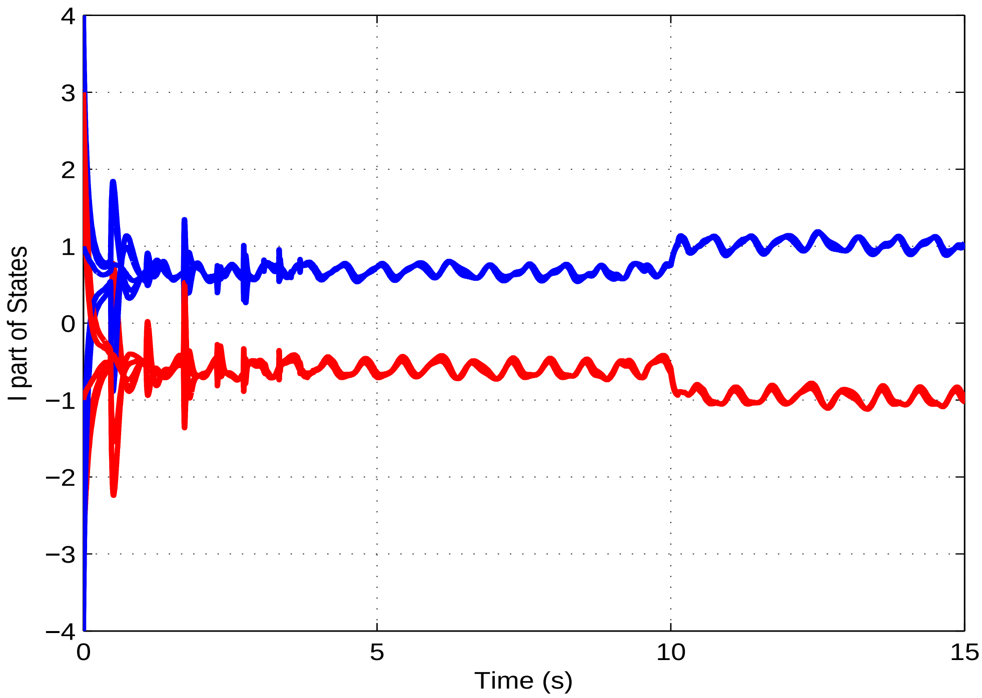


(د) بخش κ حالت های رزروير

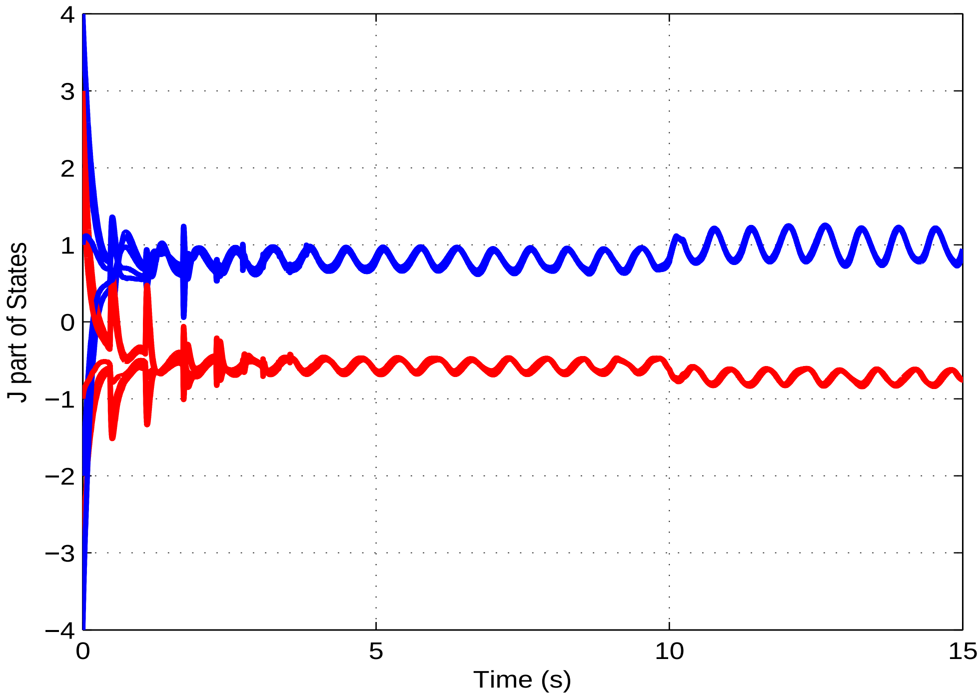
شکل ۱۱.۳: حالت های رزروير شبکه عصبی نامی مثال (۱.۳.۳) بازای شرایط اولیه متفاوت، $x_۱$ (آبی) و $x_۲$ (قرمز)



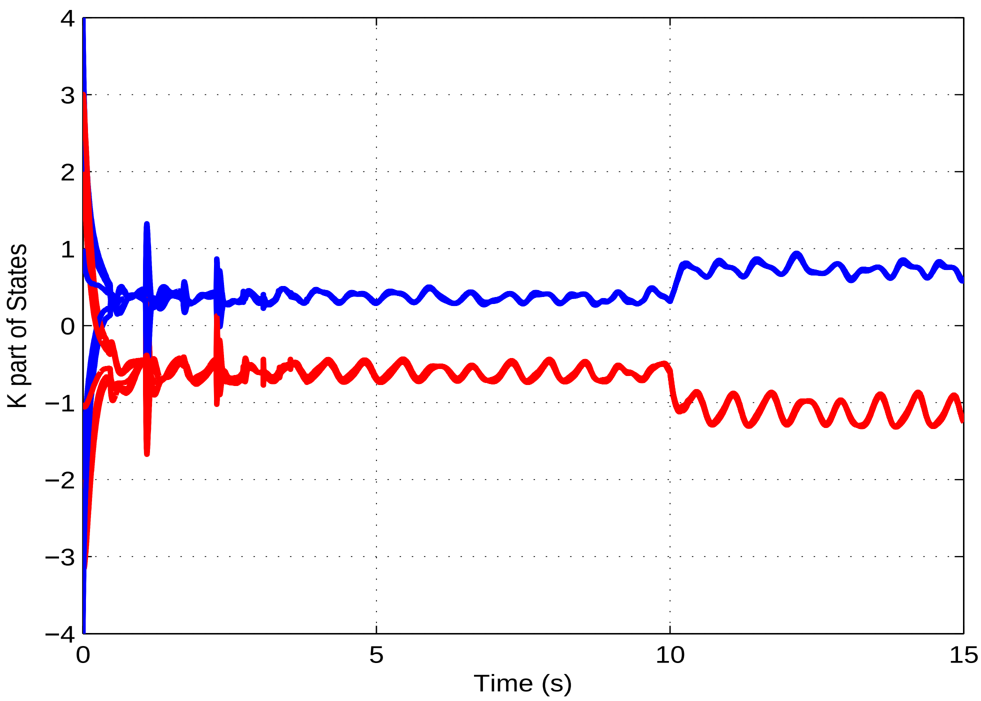
(آ) بخش حقیقی حالت های رزروبر



(ب) بخش $\imath$ حالت های رزروبر



(ج) بخش J حالت های رزروير



(د) بخش κ حالت های رزروير

شکل ۱۲.۳: حالت های رزروير شبکه عصبی نامعین مثال (۱.۳.۳) بازای شرایط اولیه متفاوت، x_1 (آبی) و x_2 (قرمز)

بدست می آیند. ماتریس های وزن خروجی، حالت های رزرویر و فیدبک برابر با

$$W = [-۰/۱ + ۰/۱\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۲\kappa, -۰/۱\jmath; ۰/۱, -۰/۲ + ۰/۱\imath - ۰/۲\jmath + ۰/۱\kappa]$$
$$W^f = [-۰/۱ - ۰/۱\imath + ۰/۲\jmath + ۰/۲\kappa; -۰/۱ - ۰/۲\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa]$$
$$W^o = [-۰/۱ - ۰/۱\imath + ۰/۱\jmath + ۰/۲\kappa, -۰/۲ + ۰/۱\imath - ۰/۱\jmath + ۰/۱\kappa]$$

، تاخیر های شبکه عصبی نیز برابر با $\mu(t) = ۰/۴ + ۰/۴\sin(t)$ و $\eta(t) = ۰/۴ + ۰/۴\cos(t)$ و پرش سوئیچینگ برابر با $\zeta = [۱ + \imath + ۲\jmath + ۲\kappa; ۱ + \imath + ۲\jmath + ۲\kappa]$ می باشند. همچنین، ورودی کمکی و اغتشاش ثابت نیز برابر با $\mathcal{U} = [۴ + ۴\imath + ۴\jmath + ۴\kappa; -۳ - ۳\imath - ۳\jmath - ۳\kappa]$ و $d(t) = [۴ + ۳\imath + \jmath + ۲\kappa; -۲ - ۳\imath - \jmath - ۴\kappa]$ می باشند. شرایط اولیه حالت های رزرویر به فرم $x_۰ = b + b\imath + b\jmath + b\kappa$ انتخاب شده اند که $b \in \{(۴; -۳), (۳; -۲), (-۴; ۳); (-۲; ۲), (۱; -۱)\}$ می باشد. بقیه پارامترهای وزن در جدول (۶.۳) آمده است.

ارزیابی کارایی نتایج برای شبکه عصبی نامی

با استفاده از پارامترهای شبکه عصبی نامی، ماتریس معین مثبت Λ و ماتریس های قطری مثبت $\widetilde{Q}_۱$ و $\widetilde{Q}_۲$ از حل مسئله LMI رابطه (۴۷.۳) بدست می آید که در پیوست (آ) گزارش شده است، از این رو می توان نتیجه گرفت که شبکه عصبی نامی یک نقطه تعادل یکتا دارد. همچنین، با استفاده از حل مسئله LMI رابطه (۵۷.۳) ماتریس های معین مثبت P، $R_۱$، $R_۲$، $R_۳$، $R_۴$، S، Z و ماتریس های قطری معین مثبت $Q_۱$، $Q_۲$، $Q_۳$، $Q_۴$ بدست می آیند که در پیوست (آ) گزارش شده است. بنابراین، این نتایج اثبات می کنند که شبکه عصبی نامی دارای یک نقطه تعادل یکتا پایدار مجانبی است.

شکل (۱۱.۳) نشان می دهد که شبکه عصبی نامی تحت شرایط اولیه مختلف و اعمال اغتشاش برای $t \geq ۱۰$ همچنان پایدار می باشد و همواره به نقطه تعادل همگرا می شود. همچنین، مطابق با ملاحظه (۴.۳.۳)، نشان می دهد که موقعیت نقطه تعادل بواسطه اغتشاش ثابت تغییر می کند درحالیکه پاسخ هم همچنان به نقطه تعادل همگرا می شوند. مختصات نقطه تعادل شبکه عصبی بعد/قبل از اغتشاش در جدول (۷.۳) گزارش شده است.

ارزیابی کارایی نتایج برای شبکه عصبی نامعین

در این بخش، ابتدا، مسئله LMI رابطه (۴۷.۳) حل شود تا وجود و یکتایی نقطه تعادل برای هر نقطه در فضای شدنی اثبات شود. نتیجه حل این مسئله LMI، ماتریس معین مثبت Λ و ماتریس های قطری معین مثبت $\widetilde{Q}_۱$ و $\widetilde{Q}_۲$ می باشند که در پیوست (ب) گزارش شده است. این نتایج نشان می دهد که شبکه عصبی نامعین برای هر نقطه درون فضای شدنی، نقطه تعادل یکتا دارد. سپس، مسئله LMI رابطه (۸۴.۳) حل شد و نتایج آن که ماتریس های معین مثبت P، $R_۱$، $R_۲$، $R_۳$، $R_۴$، S، Z و ماتریس های قطری معین مثبت Q_i برای

جدول ۶.۳: پارامترهای شبکه عصبی مثال (۱.۳.۳)

پارامترهای وزن مولفه های نشتی و تاخیر نیوترال
$C_{۱} = \begin{bmatrix} ۱۵ + ۰/۵\imath - ۰/۵\jmath - ۰/۴\kappa & ۷ - ۰/۳\imath + ۰/۳\jmath + ۰/۵\kappa \\ ۸ + ۰/۳\imath - ۰/۵\jmath + ۰/۵\kappa & ۱۵ - ۰/۷\imath + ۰/۲\jmath - ۰/۶\kappa \end{bmatrix}$
$C_{۲} = \begin{bmatrix} -۰/۱ + ۰/۱\jmath & -۰/۱ - ۰/۱\imath + ۰/۱\kappa \\ -۰/۱ - ۰/۱\imath - ۰/۱\kappa & -۰/۱ - ۰/۱\jmath - ۰/۱۳\kappa \end{bmatrix}$
$L_{۱} = \begin{bmatrix} ۰/۵ + ۰/۶\imath + ۰/۳\jmath + ۰/۲\kappa & ۰/۵ + ۰/۵\imath + ۰/۷\jmath + ۰/۵\kappa \\ ۰/۴ + ۰/۵\imath - ۰/۴\jmath + ۰/۵\kappa & ۰/۵ - ۰/۴\imath + ۰/۵\jmath - ۰/۴\kappa \end{bmatrix}$
$L_{۴} = \begin{bmatrix} ۰/۳ + ۰/۳\imath + ۰/۳\jmath + ۰/۳\kappa & ۰/۳ + ۰/۳\imath + ۰/۳\jmath + ۰/۳\kappa \\ ۰/۳ + ۰/۳\imath + ۰/۳\jmath + ۰/۳\kappa & ۰/۳ + ۰/۳\imath + ۰/۳\jmath + ۰/۳\kappa \end{bmatrix}$
$E_{۱} = \begin{bmatrix} ۰/۵ + ۰/۵\imath - ۰/۴\jmath - ۰/۴\kappa & ۰/۴ - ۰/۵\imath + ۰/۴\jmath + ۰/۵\kappa \\ -۰/۴ + ۰/۴\imath - ۰/۵\jmath + ۰/۵\kappa & ۰/۵ - ۰/۴\imath + ۰/۵\jmath - ۰/۴\kappa \end{bmatrix}$
$E_{۴} = \begin{bmatrix} ۰/۳ + ۰/۵\imath - ۰/۵\jmath - ۰/۵\kappa & ۰/۳ - ۰/۳\imath ۰/۳\jmath ۰/۳\kappa \\ ۰/۳ + ۰/۳\imath - ۰/۳\jmath + ۰/۳\kappa & ۰/۵ + ۰/۵\imath + ۰/۵\jmath + ۰/۵\kappa \end{bmatrix}$
$\Upsilon_{۴}(t) = \begin{bmatrix} \sin(۲t) & ۰ \\ ۰ & \cos(۲t) \end{bmatrix}$ ، $\Upsilon_{۱}(t) = \begin{bmatrix} \sin(۱۰t) & ۰ \\ ۰ & \cos(۱۰t) \end{bmatrix}$
ضرایب مولفه های ممریستیو
$\hat{A} = \begin{bmatrix} ۰/۵ - ۰/۲\imath + ۰/۸\jmath + ۰/۴\kappa & ۰/۳ - ۰/۵\imath + ۰/۸\jmath - ۰/۵\kappa \\ -۰/۶ - ۰/۸\imath - ۰/۴\jmath + ۰/۵\kappa & -۰/۵ + ۰/۸\imath + ۰/۶\jmath + ۰/۴\kappa \end{bmatrix}$
$\hat{B} = \begin{bmatrix} ۰/۸ - ۰/۵\imath + ۰/۵\jmath - ۰/۴\kappa & ۰/۵ - ۰/۸\imath + ۰/۴\jmath - ۰/۷\kappa; \\ ۰/۵ - ۰/۸\imath - ۰/۴\jmath - ۰/۵\kappa & -۰/۲ - ۰/۵\imath + ۰/۸\jmath + ۰/۵\kappa \end{bmatrix}$
$\breve{A} = \begin{bmatrix} -۰/۵ + ۰/۲\imath - ۰/۸\jmath - ۰/۴\kappa & -۰/۳ + ۰/۵\imath - ۰/۸\jmath + ۰/۵\kappa \\ ۰/۶ + ۰/۸\imath + ۰/۴\jmath - ۰/۵\kappa & ۰/۵ - ۰/۸\imath - ۰/۶\jmath - ۰/۴\kappa \end{bmatrix}$
$\breve{B} = \begin{bmatrix} -۰/۸ + ۰/۵\imath - ۰/۵\jmath + ۰/۴\kappa & -۰/۵ + ۰/۸\imath - ۰/۴\jmath + ۰/۷\kappa \\ -۰/۵ + ۰/۸\imath + ۰/۴\jmath + ۰/۵\kappa & ۰/۲ + ۰/۵\imath - ۰/۸\jmath - ۰/۵\kappa \end{bmatrix}$
$L_{۲} = \begin{bmatrix} ۰/۳ + ۰/۴\imath + ۰/۳\jmath + ۰/۴\kappa & ۰/۴ + ۰/۳\imath + ۰/۴\jmath + ۰/۳\kappa \\ ۰/۴ + ۰/۳\imath + ۰/۴\jmath + ۰/۳\kappa & ۰/۴ + ۰/۳\imath + ۰/۴\jmath + ۰/۳\kappa \end{bmatrix}$
$L_{۳} = \begin{bmatrix} ۰/۵ - ۰/۵\imath + ۰/۵\jmath + ۰/۴\kappa & ۰/۵ + ۰/۴\imath + ۰/۵\jmath + ۰/۵\kappa \\ ۰/۵ + ۰/۴\imath - ۰/۵\jmath + ۰/۵\kappa & ۰/۵ - ۰/۵\imath + ۰/۴\jmath - ۰/۵\kappa \end{bmatrix}$
$E_{۲} = \begin{bmatrix} ۰/۵ + ۰/۴\imath + ۰/۵\jmath + ۰/۴\kappa & ۰/۵ + ۰/۴\imath + ۰/۵\jmath + ۰/۴\kappa \\ ۰/۴ + ۰/۵\imath + ۰/۴\jmath + ۰/۵\kappa & ۰/۵ + ۰/۴\imath + ۰/۵\jmath + ۰/۴\kappa \end{bmatrix}$
$E_{۳} = \begin{bmatrix} ۰/۴ + ۰/۵\imath - ۰/۴\jmath + ۰/۵\kappa & ۰/۵ - ۰/۴\imath + ۰/۵\jmath - ۰/۴\kappa \\ ۰/۵ + ۰/۴\imath - ۰/۵\jmath + ۰/۴\kappa & ۰/۴ - ۰/۵\imath + ۰/۴\jmath + ۰/۵\kappa \end{bmatrix}$
$\Upsilon_{۳}(t) = \begin{bmatrix} \cos(۲t) & ۰ \\ ۰ & \sin(۲t) \end{bmatrix}$ ، $\Upsilon_{۲}(t) = \begin{bmatrix} \cos(۱۰t) & ۰ \\ ۰ & \sin(۱۰t) \end{bmatrix}$

جدول ۷.۳: نقطه تعادل شبکه عصبی مثال (۱.۳.۳)، با/بدون اغتشاش ثابت $d(t)$

حالت های رزروير	نقطه تعادل یکتا	
	با اغتشاش $d(t)$ ($t > ۱۰$ ثانیه)	بدون اغتشاش $d(t)$ ($t \leq ۱۰$ ثانیه)
$x_۱$	$۰/۸۲ + ۱/۰۵\imath + ۰/۹۹\jmath + ۰/۷۵\kappa$	$۰/۴۵ + ۰/۶۹\imath + ۰/۸\jmath + ۰/۳۷\kappa$
$x_۲$	$-۰/۷۱ - ۰/۹۷\imath - ۰/۷۲\jmath - ۱/۱۱\kappa$	$-۰/۴۳ - ۰/۶\imath - ۰/۵۷\jmath - ۰/۶۰\kappa$

$i = ۱, ۲, \cdots, ۱۲$ می باشند، در پیوست (ب) گزارش شده است. این نتایج نیز تایید می کنند که نقطه تعادل شبکه عصبی در فضای شدنی، پایدار مجانبی مقاوم می باشد.
شکل (۱۲.۳)، حالت های رزروير بازای شرایط اولیه متفاوت و اعمال اغتشاش ثابت برای $t \geq ۱۰$ ثانیه را نشان می دهد. این نتایج، نشان می دهد که حالت های رزروير شبکه عصبی نامعین (با پارامترهای متغیر با زمان) همواره در فضای محدودی پیرامون نقطه تعادل قرار دارد. بنابراین، نتایج شبیه سازی تایید کننده نتایج تئوری بدست آمده می باشد، یعنی شبکه عصبی نامعین دارای یک نقطه تعادل یکتای پایدار مجانبی مقاوم می باشد.

خلاصه اینکه، نتایج شبیه سازی مثال فوق تایید کننده نتایج تحلیلی بدست آمده برای پایداری مجانبی وابسته به تاخیر نقطه تعادل شبکه عصبی کواترنیون ممریستیو نامعین می باشد. این نتایج، نشان می دهند که شرایط اولیه و اغتشاش بر روی پایداری تاثیری ندارند. همچنین، نشان می دهد که بواسطه نامعینی متغیر با زمان، حالت های رزروير در یک محدوده ای پیرامون نقطه تعادل یکتا نوسان می کنند.

جمع بندی

در این فصل، پایداری شبکه عصبی مرتبه کسری کواترنیون در حضور نامعینی، تاخیر های متغیر با زمان و عنصر ممریستیو و بازای دو نوع مختلف از توابع فعال سازی مطالعه شده است. در این راستا، تحلیل پایداری مجانبی و پایداری مجانبی مقاوم مستقل از تاخیر نقطه تعادل یکتای شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون در حضور تاخیر متغیر با زمان انجام شده است. برای اثبات این پایداری، از مفهموم لیاپانوف مرتبه کسری استفاده شده است. در نهایت، پایداری مجانبی و پایداری مجانبی مقاوم وابسته به تاخیر شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری کواترنیون در حضور تاخیر متغیر با زمانف تاخیر نیوترال متغیر با زمان، عنصر ممریستیو با استفاده از توابع لیاپانوف کراسوفسکی و مفهوم پایداری لیاپانوف مرتبه صحیح آنالیز شده است. در هر بخش نیز، نتایج شبیه سازی غنی همسو با نتایج تئوری گزارش شده است تا کارایی نتایج بدست آمده را تایید کند.

فصل ۴

نتیجه گیری و پیشنهادات

پیشگفتار

در این فصل، خلاصه ای از کارهای انجام شده در این رساله به همراه پیشنهادات قابل انجام در آینده ارائه می شود.

۱.۴ نتیجه گیری

تحلیلی دینامیکی شبکه های عصبی برگشتی زمان- پیوسته و زمان- گسسته یکی از مسایل اصلی است که قبل از بکارگیری این شبکه ها در کاربردهای مختلف می بایست به آن پرداخت. لذا، در این رساله، تحلیل دینامیکی شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری همسان به همراه ویژگی هایی همچون تاخیر و ممریستیو با تعریف مشتق مرتبه کسری کپوتو و کاربرد این شبکه مرتبه کسری غیرهمسان در پیش بینی سری زمانی بازار سهام بررسی گردید. همچنین، بعلت نامعین بودن پارامترهای شبکه ناشی از خطای اندازه گیری و محدودیت های پیاده سازی به موضوع تحلیل پایداری مقاوم این شبکه نیز پرداخته شد. انتخاب تعریف مشتق کپوتو برای شبکه عصبی به علت نیاز به شرایط اولیه مرتبه صحیح برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه کسری و مفهوم فیزیکی برای این شرایط اولیه می باشد.
در راستای تحقق اهداف فوق، در فصل اول به ۱) مرور جامع بر حوزه های مختلف و جذاب تحلیل پایداری شبکه های عصبی مرتبه کسری، ۲) تعاریف و قضایای حوزه مرتبه کسری و قواعد، قضیه ها، لم ها و تعاریف ریاضی مورد نیاز، ۳) ضرورت و اهداف مطالعه در حوزه تحلیل دینامیکی شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری اشاره شد. در فصل دوم، تحلیل دینامیکی شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری همسان در فضای حقیقی در حضور انواع تاخیر مطالعه گردید. همچنین، به کاربرد شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری غیرهمسان زمان- گسسته در پیش بینی سری زمانی اشاره شد. و در فصل سوم، تحلیل پایداری شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری همسان در فضای کواترنیون و مختلط در حضور تاخیر و عنصر ممریستیو مطالعه گردید که این نتایج براحتی قابل تفسیر در فضای حقیقی می باشند. در این دو فصل، دستاوردهای حاصل از این رساله گزارش شدند.
لازم به ذکر است که تحلیل دینامیکی به صورت های مختلفی انجام می شود که تحلیل پایداری، آشوب و دوشاخگی مواردی از آن می باشند. در سیستم های مرتبه کسری، تحلیل پایداری بفرم های مختلفی انجام می شود. در این رساله با کمک قضایای لیاپانوف مرتبه کسری و همچنین لیاپانوف کراسوفسکی مرتبه صحیح دستاوردهای مختلفی از پایداری همچون پایداری میتاگ- لفلر، پایداری مجانبی با مفهوم لیاپانوف مرتبه کسری و پایداری مجانبی با مفهوم لیاپانوف مرتبه صحیح بدست آمده است.

۲.۴ پیشنهادات

تمرکز این رساله بر روی پایداری شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری، بعنوان ابزاری در متد محاسبات رزرویر، به همراه ویژگی های مختلفی همچون انواع تاخیر، عنصر ممریستیو مطالعه شده است. لذا، پیشنهادهای زیر در ادامه این پژوهش و با در نظر گرفتن مهمترین ویژگی این شبکه، یعنی آموزش ساده آن، در حوزه کاربرد این شبکه مطرح می شود.

۱) آموزش شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری با استفاده از روش های دیگر همچون کالمن مرتبه کسری و کاربرد آن در تشخیص بیماری ها و پیش بینی سری زمانی،

۲) شبکه عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری عمیق و کاربرد آن در تشخیص الگو، بیماری ها و پیش بینی سری زمانی.

۳) طراحی کنترلر عصبی انعکاس حالت مرتبه کسری تطبیقی برای سیستم های غیرخطی مرتبه کسری.

پیوست آ

نتایج حل مسئله LMI تئوری های (۱.۳.۳) و (۲.۳.۳) در مثال (۱.۳.۳)

$$\widetilde{Q}_{۱}^{-۱} = ۱/۱۶۵۱\, \mathcal{I}_{۸\times ۸}, \qquad \widetilde{Q}_{۲}^{-۱} = ۱/۱۶۵۱\, \mathcal{I}_{۸\times ۸}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} ۰/۱۲۵۰ & -۰/۰۵۸۹ & -۰/۰۱۶۴ & ۰/۰۰۳۰ & ۰/۰۱۰۴ & ۰/۰۳۱۸ & ۰/۰۴۵۴ & -۰/۰۴۳۹ \\ -۰/۰۶۴۰ & ۰/۱۲۶۴ & -۰/۰۲۴۷ & ۰/۰۳۱۷ & -۰/۰۱۷۹ & ۰/۰۱۶۷ & -۰/۰۴۱۳ & ۰/۰۵۴۱ \\ ۰/۰۱۸۵ & ۰/۰۱۲۴ & ۰/۱۲۳۵ & -۰/۰۵۹۵ & ۰/۰۲۶۱ & -۰/۰۲۶۲ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۲۱ \\ ۰/۰۲۸۴ & -۰/۰۱۶۷ & -۰/۰۶۱۲ & ۰/۱۲۴۴ & -۰/۰۵۳۹ & ۰/۰۵۰۲ & ۰/۰۲۴۷ & -۰/۰۰۵۳ \\ -۰/۰۴۳۲ & ۰/۰۴۵۴ & -۰/۰۲۵۲ & ۰/۰۴۷۴ & ۰/۱۲۴۵ & -۰/۰۶۲۲ & -۰/۰۳۶۰ & ۰/۰۳۹۳ \\ -۰/۰۳۸۴ & ۰/۰۲۷۷ & ۰/۰۴۰۷ & -۰/۰۲۷۵ & -۰/۰۵۳۲ & ۰/۱۱۹۷ & -۰/۰۲۶۴ & ۰/۰۴۶۱ \\ -۰/۰۲۲۹ & ۰/۰۳۲۱ & ۰/۰۲۳۴ & -۰/۰۱۸۷ & ۰/۰۲۳۹ & ۰/۰۰۸۲ & ۰/۱۴۱۳ & -۰/۰۹۳۵ \\ ۰/۰۵۸۹ & -۰/۰۴۶۴ & ۰/۰۱۰۴ & ۰/۰۰۶۴ & -۰/۰۰۴۰ & -۰/۰۱۸۵ & -۰/۰۲۵۸ & ۰/۱۰۷۹ \end{bmatrix}$$

$$Z_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۰/۳۱۵۵ & ۲۲/۴۰۶۸ & ۳۱/۲۱۵۲ & ۹/۱۱۲۳ & ۶۲/۵۷۹۹ & -۴۲/۵۹۹۵ & -۲۳/۵۵۳۴ & ۳۹/۶۵۹۱ \\ -۲۲/۴۰۸۹ & ۰/۳۱۶۱ & ۲۳/۵۰۹۳ & ۳۸/۷۶۶۰ & -۰/۸۸۷۰ & -۸/۰۴۲۵ & -۴۸/۸۲۹۰ & ۲۰/۴۳۲۳ \\ -۳۱/۲۱۹۱ & -۲۳/۵۱۲۷ & ۰/۳۱۵۶ & ۴۷/۱۹۲۵ & -۴۳/۱۵۹۶ & -۲۶/۷۷۴۵ & -۱۷/۷۴۶۴ & ۱۷/۰۳۹ \\ -۹/۱۱۶۴ & -۳۸/۷۶۹۷ & -۴۷/۱۹۴۸ & ۰/۳۱۵۸ & -۵۴/۸۷۲۴ & -۶۰/۱۰۲۴ & -۴۵/۱۳۴۴ & ۲۱/۴۸۳۸ \\ -۶۲/۵۸۴۰ & ۰/۸۸۳۲ & ۴۳/۱۵۶۵ & ۵۴/۸۶۷۸ & ۰/۳۱۵۷ & -۳۷/۷۳۹۳ & ۵۰/۶۵۴۶ & -۸/۹۰۱۹ \\ ۴۲/۵۹۵۷ & ۸/۰۳۹۲ & ۲۶/۷۷۰۰ & ۶۰/۰۹۹۱ & ۳۷/۷۳۶۸ & ۰/۳۱۶۱ & -۱۴/۲۴۲۸ & ۳۵/۲۴۳۹ \\ ۲۳/۵۵۰۳ & ۴۸/۸۲۴۹ & ۱۷/۷۴۲۳ & ۴۵/۱۳۰۵ & -۵۰/۶۵۸۴ & ۱۴/۲۳۹۳ & ۰/۳۱۵۸ & -۱۴/۴۲۹۷ \\ -۳۹/۶۶۳۸ & -۲۰/۴۳۵۲ & -۱۷/۰۴۲۹ & -۲۱/۴۸۷۱ & ۸/۸۹۷۹ & -۳۵/۲۴۷۸ & ۱۴/۴۲۷۲ & ۰/۳۱۶۱ \end{bmatrix}$$

$$Z_{۱۲} = \begin{bmatrix} ۰/۰۱۳۷ & -۰/۰۰۳۱ & -۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۰۳۵ & -۰/۰۰۲۲ & -۰/۰۰۲۳ & -۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۳۵ \\ -۰/۰۰۳۲ & ۰/۰۱۴۶ & -۰/۰۰۱۷ & -۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۰۳۲ & -۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۰۲۹ & -۰/۰۰۲۱ \\ -۰/۰۰۲۷ & -۰/۰۰۱۷ & ۰/۰۱۳۸ & -۰/۰۰۳۳ & -۰/۰۰۱۶ & -۰/۰۰۳۶ & -۰/۰۰۳۰ & -۰/۰۰۳۰ \\ -۰/۰۰۳۵ & -۰/۰۰۲۵ & -۰/۰۰۳۳ & ۰/۰۱۴۵ & -۰/۰۰۲۹ & -۰/۰۰۲۵ & -۰/۰۰۲۲ & -۰/۰۰۲۳ \\ -۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۳۲ & -۰/۰۰۱۶ & -۰/۰۰۲۹ & ۰/۰۱۳۶ & -۰/۰۰۲۹ & -۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۳۲ \\ -۰/۰۰۲۳ & -۰/۰۰۲۷ & -۰/۰۰۳۶ & -۰/۰۰۲۵ & -۰/۰۰۳۰ & ۰/۰۱۴۰ & -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۳۲ \\ -۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۲۹ & -۰/۰۰۳۱ & -۰/۰۰۲۲ & -۰/۰۰۲۲ & -۰/۰۰۱۹ & ۰/۰۱۲۸ & -۰/۰۰۲۷ \\ -۰/۰۰۳۵ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۳۱ & -۰/۰۰۲۲ & -۰/۰۰۳۲ & -۰/۰۰۳۱ & -۰/۰۰۲۸ & ۰/۰۱۴۳ \end{bmatrix}$$

$$Z_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۰/۱۶۸۶ & -۴۲/۷۱۸۶ & ۲۰/۰۰۷۶ & -۳۲/۸۹۳۷ & -۶/۲۴۵۷ & ۳۳/۸۲۶۵ & -۲۸/۱۷۸۹ & ۴۴/۴۳۴۳ \\ ۴۲/۶۹۰۳ & ۰/۱۶۸۵ & ۷۳/۹۰۳۹ & ۳۰/۹۷۷۵ & -۱۰/۵۲۲۹ & ۲۰/۳۴۲۶ & -۷۲/۸۳۳۲ & ۲۷/۹۹۲۸ \\ -۲۰/۰۱۶۲ & -۷۳/۹۱۲۱ & ۰/۱۶۸۸ & -۲۰/۰۱۶۹ & ۳۱/۹۶۹۹ & ۱۶/۶۵۲۱ & -۹۷/۲۹۷۱ & ۱/۲۵۲۳ \\ ۳۲/۸۸۴۵ & -۳۰/۹۸۶۰ & ۱۹/۹۸۸۳ & ۰/۱۶۸۲ & ۲۱/۲۲۲۸ & -۵۱/۰۸۹۷ & -۸/۷۳۶۰ & -۱۵/۷۹۰۱ \\ ۶/۲۳۶۳ & ۱۰/۵۱۳۸ & -۳۱/۹۷۶۳ & -۲۱/۲۳۲۷ & ۰/۱۶۸۲ & ۳۸/۴۲۰۲ & -۴۵/۶۵۷۸ & -۳۶/۰۷۵۷ \\ -۳۳/۸۳۵۴ & -۲۰/۳۴۹۵ & -۱۶/۶۶۳۶ & ۵۱/۰۸۱۸ & -۳۸/۴۴۷۱ & ۰/۱۶۷۲ & -۲۱/۴۴۱۳ & ۳۹/۷۱۰۶ \\ ۲۸/۱۷۲۵ & ۷۲/۸۲۳۳ & ۹۷/۲۸۸۱ & ۸/۷۲۷۷ & ۴۵/۶۴۹۳ & ۲۱/۴۳۲۳ & ۰/۱۶۷۸ & ۳۹/۲۶۱۴ \\ -۴۴/۴۴۵۸ & -۲۸/۰۰۰۴ & -۱/۲۶۱۵ & ۱۵/۷۸۲۰ & ۳۶/۰۶۷۵ & -۳۹/۷۱۹۹ & -۳۹/۲۸۸۴ & ۰/۱۶۷۳ \end{bmatrix}$$

$$S_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۰/۱۲۰۳ & -۰/۰۰۱۴ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۱۷ & -۰/۰۰۲۱ \\ -۰/۰۰۱۵ & ۰/۱۲۰۴ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۱۸ \\ -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۱۸ & ۰/۱۲۰۴ & -۰/۰۰۱۵ & -۰/۰۰۱۷ & -۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۱۹ \\ -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۵ & ۰/۱۲۰۲ & -۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۹ \\ -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۱۶ & -۰/۰۰۲۱ & ۰/۱۲۰۴ & -۰/۰۰۱۶ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۲۰ \\ -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۱۶ & ۰/۱۲۰۵ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۲۰ \\ -۰/۰۰۱۶ & -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۱۸ & ۰/۱۲۰۵ & -۰/۰۰۱۶ \\ -۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۶ & ۰/۱۲۰۵ \end{bmatrix}$$

$$S_{۱۲} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۳۵ & -۰/۰۰۱۳ & -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۱۳ \\ -۰/۰۰۱۱ & ۰/۰۰۳۶ & -۰/۰۰۰۳ & -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۰۳ & -۰/۰۰۰۴ & -۰/۰۰۰۱ \\ -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۰۷ & ۰/۰۰۳۴ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۱۴ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۰۷ \\ -۰/۰۰۱۱ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۱۲ & ۰/۰۰۳۷ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۰۳ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۰۸ \\ -۰/۰۰۰۴ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۰۲ & -۰/۰۰۰۳ & ۰/۰۰۳۴ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۰۵ \\ -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۱۰ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۱۱ & ۰/۰۰۳۶ & -۰/۰۰۰۳ & -۰/۰۰۰۸ \\ -۰/۰۰۰۳ & -۰/۰۰۰۳ & -۰/۰۰۱۰ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۰۷ & ۰/۰۰۳۴ & -۰/۰۰۰۹ \\ -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۰۴ & -۰/۰۰۱۰ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۱۰ & ۰/۰۰۳۵ \end{bmatrix}$$

$$S_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۰/۰۹۴۳ & -۰/۰۰۹۹ & -۰/۰۰۲۸ & -۰/۰۰۳۲ & -۰/۰۰۳۱ & -۰/۰۰۳۵ & -۰/۰۰۱۷ & -۰/۰۰۵۰ \\ -۰/۰۰۹۹ & ۰/۰۹۲۶ & -۰/۰۰۲۳ & -۰/۰۰۲۷ & -۰/۰۰۲۳ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۷ & -۰/۰۰۲۲ \\ -۰/۰۰۲۸ & -۰/۰۰۲۳ & ۰/۰۹۴۳ & -۰/۰۱۰۱ & -۰/۰۰۱۹ & -۰/۰۰۴۹ & -۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۰۲۳ \\ -۰/۰۰۳۲ & -۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۱۰۱ & ۰/۰۹۲۲ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۲۴ & -۰/۰۰۳۲ & -۰/۰۰۲۶ \\ -۰/۰۰۳۲ & -۰/۰۰۲۳ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۷ & ۰/۰۹۳۸ & -۰/۰۰۹۴ & -۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۰۲۶ \\ -۰/۰۰۳۵ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۴۹ & -۰/۰۰۲۴ & -۰/۰۰۹۴ & ۰/۰۹۱۶ & -۰/۰۰۲۸ & -۰/۰۰۲۸ \\ -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۱۶ & -۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۰۳۳ & -۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۰۲۸ & ۰/۰۹۳۵ & -۰/۰۰۹۶ \\ -۰/۰۰۵۰ & -۰/۰۰۲۲ & -۰/۰۰۲۳ & -۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۰۲۶ & -۰/۰۰۲۸ & -۰/۰۰۹۶ & ۰/۰۹۱۲ \end{bmatrix}$$

$$R_{۱} = \begin{bmatrix} ۰/۴۰۱ & -۶۳/۹۷ & -۹/۵۲ & ۰/۷۰ & -۵۰/۲۲ & ۱۶/۴۸ & -۹۴/۶۷ & ۲۳/۰۴ \\ ۶۴/۰۶ & ۰/۴۱ & ۶۱/۳۲ & -۱۹۶/۶۳ & -۱۸۲/۶۴ & -۲۴۳/۸۷ & -۱۶۷/۳۹ & ۱۱/۲۴ \\ ۹/۵۹ & -۶۱/۲۴ & ۰/۴۰ & ۰/۷۳ & -۱۳۵/۱۸ & ۸۹/۸۱ & ۱۲۳/۰۰ & -۴۸/۶۹ \\ -۰/۶۲ & ۱۹۶/۷۲ & -۰/۶۵ & ۰/۴۱ & -۴۸/۰۹ & -۲۵۰/۷۲ & ۹۳/۰۶ & -۱۲۴/۷۸ \\ ۵۰/۲۸ & ۱۸۲/۷۲ & ۱۳۵/۲۵ & ۴۸/۱۶ & ۰/۴۰ & -۱۷۰/۳۱ & ۱۷۳/۳۸ & -۳۰۲/۷۶ \\ -۱۶/۴۱ & ۲۴۳/۹۶ & -۸۹/۷۳ & ۲۵۰/۸۱ & ۱۷۰/۳۹ & ۰/۴۱ & ۴۳۲/۷۲ & -۹۲/۳۹ \\ ۹۴/۷۴ & ۱۶۷/۴۶ & -۱۲۲/۹۴ & -۹۲/۹۸ & -۱۷۳/۳۱ & -۴۳۲/۶۴ & ۰/۴۰ & ۶۰/۵۷ \\ -۲۲/۹۷ & -۱۱/۱۵ & ۴۸/۷۷ & ۱۲۴/۸۷ & ۳۰۲/۸۴ & ۹۲/۴۸ & -۶۰/۴۹ & ۰/۴۱ \end{bmatrix}$$

$$R_{۲} = \begin{bmatrix} ۰/۲۵۵ & -۹۰/۰۰۲ & -۱۴۲/۲۸ & ۱۳/۸۵ & -۳۵/۹۸ & -۱۰۰/۳۲ & ۱۶/۳۱۲ & -۵۹/۰۶ \\ ۸۹/۹۴ & ۰/۲۵۷ & -۱۴/۲۶ & ۶۳/۵۴۹ & -۲۶/۴۷ & ۴۲/۲۵ & ۸۶/۰۷ & ۳۸/۳۰ \\ ۱۴۲/۲۶ & ۱۴/۲۴ & ۰/۲۶ & -۱۳۶/۹۳۹ & ۳۴/۰۶ & -۳/۸۸ & ۳۶/۱۳ & -۵۴/۸۷ \\ -۱۳/۸۷ & -۶۳/۵۷ & ۱۳۶/۸۷ & ۰/۲۵۶ & -۱۲۹/۲۸ & -۶۱/۱۸ & ۷۰/۸۶ & -۴/۶۰ \\ ۳۵/۹۶ & ۲۶/۴۵ & -۳۴/۰۶۹ & ۱۲۹/۲۵ & ۰/۲۵۳ & -۹۰/۱۸ & ۱۳۳/۸۴ & -۷۱/۸۶ \\ ۱۰۰/۳۰ & -۴۲/۲۶ & ۳/۸۶۱ & ۶۱/۱۶۵ & ۹۰/۱۱۷ & ۰/۲۵۴ & ۷۷/۳۸ & ۸۳/۷۶ \\ -۱۶/۳۲ & -۸۶/۱۰ & -۳۶/۱۴۶ & -۷۰/۸۸ & -۱۳۳/۸۶ & -۷۷/۴۰ & ۰/۲۵۳ & ۲۷/۴۳ \\ ۵۹/۰۴ & -۳۸/۳۲ & ۵۴/۸۵۲ & ۴/۵۸۱ & ۷۱/۸۴ & -۸۳/۷۸ & -۲۷/۴۹ & ۰/۲۵۵ \end{bmatrix}$$

$$R_{۳} = \begin{bmatrix} ۰/۱۶۸ & ۹۶/۴۱۵ & ۴/۰۹۷ & ۱۶/۶۲ & ۲۹/۲۸ & -۷۲/۰۲ & ۴۳/۳۰ & ۱۶/۹۷ \\ -۹۶/۴۴۳ & ۰/۱۶۷۷ & -۲/۷۱ & ۱۳/۲۹ & -۱۱۳/۹۲ & -۱۰/۹۵ & -۳۸/۰۴ & -۴۲/۰۱ \\ -۴/۱۰۶ & ۲/۶۹۸ & ۰/۱۷ & -۴۹/۷۸ & ۸۵/۸۰ & ۹۲/۸۲ & ۸۷/۱۱ & ۶۲/۱۱ \\ -۱۶/۶۳ & -۱۳/۳۰ & ۴۹/۷۵ & ۰/۱۶۸ & -۸۳/۶۸ & ۵۳/۴۶ & ۰/۹۵۶ & ۷۷/۷۶ \\ -۲۹/۲۹ & ۱۱۳/۹۱ & -۸۵/۸۱ & ۸۳/۶۷ & ۰/۱۶۷۵ & -۱۲/۸۷ & ۱۱۴/۸۸ & ۲۳/۰۸ \\ ۷۲/۰۱ & ۱۰/۹۵ & -۹۲/۸۳ & -۵۳/۴۶ & ۱۲/۸۴ & ۰/۱۶۶ & -۹۶/۰۵ & ۶۲/۴۲ \\ -۴۳/۳۱ & ۳۸/۰۳ & -۸۷/۱۲ & -۰/۹۷ & -۱۱۴/۸۹ & ۹۶/۰۳۶ & ۰/۱۶۷ & ۴۲/۴۷ \\ -۱۶/۹۸ & ۴۲/۰۱ & -۶۲/۱۲ & -۷۷/۷۷ & -۲۳/۰۹ & -۶۲/۴۳ & -۴۲/۵۰ & ۰/۱۶۶۵ \end{bmatrix}$$

$$R_{۴} = \begin{bmatrix} ۰/۲۶۱۶ & -۱۵/۶۷ & -۱۵۲/۱۰ & ۵۳/۵۰ & ۷۷/۴۳ & ۸/۸۷۸ & ۱۹/۷۹ & ۲۲/۵۱ \\ ۱۵/۶۳ & ۰/۲۶۱۸ & ۴۰/۲۰ & ۵۹/۸۷ & -۸۸/۱۸ & -۸۰/۵۹ & ۳۴/۲۹ & ۷/۴۵ \\ ۱۵۲/۰۹ & -۴۰/۲۱ & ۰/۲۶۲ & ۱۵۵/۷۴ & ۹/۱۸۷ & -۷/۲۵ & ۱۴۵/۷۰ & ۲۵/۳۲ \\ -۵۳/۵۱ & -۵۹/۸۹ & -۱۵۵/۷۸ & ۰/۲۶۲ & -۴۸/۳۷ & -۱۰۲/۷۷ & -۴۲/۳۳ & ۲/۳۷۴ \\ -۷۷/۴۵ & ۸۸/۱۷ & -۹/۱۹۷ & ۴۸/۳۶ & ۰/۲۶۱ & ۹/۷۴ & -۷۳/۴۳ & -۱۱۸/۲۱ \\ -۸/۸۹ & ۸۰/۵۹ & ۷/۲۳۱ & ۱۰۲/۷۵ & -۹/۷۸ & ۰/۲۶۰ & -۲۷/۶۸ & -۳۴/۲۶ \\ -۱۹/۷۹ & -۳۴/۳ & -۱۴۵/۷۲ & ۴۲/۳۲۲ & ۷۳/۴۲ & ۲۷/۶۷ & ۰/۲۶۱ & -۲۶/۳۷ \\ -۲۲/۵۳ & -۷/۴۶ & -۲۵/۳۳ & -۲/۳۸۶ & ۱۱۸/۲۰ & ۳۴/۲۵ & ۲۶/۳۲ & ۰/۲۶۰۲ \end{bmatrix}$$

$$Q_{۱}^{-۱} = ۰/۲۸۲۲\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \qquad Q_{۲}^{-۱} = ۰/۲۹۱۵\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \qquad Q_{۳}^{-۱} = ۰/۲۷۳۲\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \qquad Q_{۴}^{-۱} = ۰/۲۸۲۴\, \mathcal{I}_{۸\times۸}$$

$$P=\begin{bmatrix}
0.833 & 0.076 & -0.359 & 0.013 & -0.299 & -0.254 & 0.014 & 0.007 & 0.284 & 0.251 & -0.004 & -0.006 & 0.187 & -0.370 & 0.008 & 0.006\\
0.183 & 0.874 & 0.017 & -0.364 & -0.174 & 0.065 & 0.006 & -0.003 & -0.008 & 0.019 & 0.007 & 0.007 & -0.295 & 0.178 & 0.01 & -0.005\\
0.042 & -0.024 & 0.077 & -0.028 & 0.008 & 0.007 & 0.009 & 0.012 & -0.008 & -0.008 & -0.019 & -0.018 & 0.004 & 0.009 & -0.027 & 0.027\\
-0.0150 & 0.045 & -0.034 & 0.074 & 0.003 & -0.001 & 0.008 & -0.013 & 0.006 & 0.005 & 0.001 & -0.002 & 0.004 & -0.006 & 0.023 & -0.025\\
0.227 & 0.18 & -0.006 & -0.001 & 0.832 & 0.034 & -0.359 & 0.015 & 0.123 & -0.314 & 0.009 & 0.001 & -0.232 & -0.154 & 0.008 & 0.011\\
0.1 & -0.142 & 0.002 & 0.011 & 0.218 & 0.878 & 0.015 & -0.364 & -0.37 & 0.138 & 0.014 & -0.004 & -0.021 & -0.036 & -0.003 & 0.004\\
-0.006 & -0.005 & -0.012 & -0.016 & 0.042 & -0.021 & 0.077 & -0.026 & 0.002 & 0.004 & -0.022 & 0.02 & 0.006 & 0.006 & 0.009 & 0.003\\
0.003 & 0.007 & -0.012 & 0.008 & -0.017 & 0.044 & -0.036 & 0.073 & 0.006 & -0.002 & 0.027 & -0.022 & -0.002 & 0.003 & -0.006 & -0.001\\
-0.292 & -0.113 & 0.01 & 0.001 & -0.152 & 0.3 & 0.001 & -0.002 & 0.838 & 0.056 & -0.365 & 0.023 & -0.056 & 0.062 & 0.01 & 0\\
-0.2830 & -0.145 & 0.012 & 0.004 & 0.206 & -0.232 & 0.002 & 0.011 & 0.19 & 0.878 & 0.017 & -0.368 & -0.011 & 0.262 & 0.004 & -0.006\\
0.003 & 0 & 0.011 & -0.003 & -0.003 & -0.008 & 0.019 & -0.034 & 0.045 & -0.016 & 0.076 & -0.026 & 0.004 & -0.001 & -0.001 & -0.006\\
0.01 & 0.005 & 0.012 & 0.002 & 0.004 & 0.01 & -0.027 & 0.021 & -0.021 & 0.042 & -0.033 & 0.073 & 0 & -0.005 & 0.001 & -0.021\\
-0.2660 & 0.221 & 0.003 & 0.001 & 0.119 & -0.025 & 0.001 & 0.008 & 0.022 & 0.016 & -0.003 & -0.001 & 0.808 & -0.059 & -0.366 & 0.031\\
0.274 & -0.225 & -0.004 & 0.013 & 0.051 & -0.004 & -0.001 & 0.002 & -0.213 & -0.378 & 0.014 & 0.014 & 0.313 & 0.9 & 0.008 & -0.367\\
0.001 & -0.006 & 0.027 & -0.030 & 0.003 & 0.007 & -0.012 & 0 & -0.005 & -0.003 & -0.005 & -0.01 & 0.049 & -0.01 & 0.078 & -0.019\\
-0.001 & 0.01 & -0.035 & 0.022 & -0.004 & -0.002 & -0.006 & -0.003 & 0.011 & 0.012 & 0.005 & 0.018 & -0.028 & 0.039 & -0.042 & 0.072
\end{bmatrix}$$

پیوست ب

نتایج حل مسئله LMI تئوری های (۱.۳.۳) و (۳.۳.۳) در مثال (۱.۳.۳)

$$\widetilde{Q}_1^{-1} = 1.5406\,\mathcal{I}_{8\times 8}, \qquad \widetilde{Q}_2^{-1} = 1.6131\,\mathcal{I}_{8\times 8}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.2533 & -0.1253 & -0.0665 & -0.0074 & 0.0277 & 0.0664 & 0.0837 & -0.0667 \\ -0.1506 & 0.2734 & -0.0255 & 0.0278 & 0.0537 & 0.0583 & -0.1691 & 0.0595 \\ 0.0317 & 0.0118 & 0.2766 & -0.1218 & -0.2255 & -0.2783 & 0.2721 & 0.1662 \\ 0.0206 & -0.0214 & -0.1036 & 0.2888 & -0.3297 & -0.1235 & 0.2012 & 0.1816 \\ -0.0629 & -0.0495 & 0.1862 & 0.2662 & 0.2828 & -0.0846 & -0.2525 & -0.1429 \\ -0.0966 & -0.0079 & 0.3065 & 0.1338 & -0.1462 & 0.2851 & -0.2530 & -0.0942 \\ -0.0932 & 0.1564 & -0.2934 & -0.2033 & 0.2025 & 0.2092 & 0.2983 & -0.1387 \\ 0.0757 & -0.0282 & -0.2090 & -0.1640 & 0.1458 & 0.1077 & -0.1009 & 0.2727 \end{bmatrix}$$

$$Z_{11} = \begin{bmatrix} 0.078 & 621.41 & -52.12 & 154 & -31.87 & -108.55 & -49.01 & 113.50 \\ -621.41 & 0.0774 & -210.85 & 97.09 & -169.44 & -26.47 & 24.19 & 9.781 \\ 52.12 & 210.84 & 0.0778 & -193.98 & -57.38 & -49.20 & -12.76 & 116.71 \\ -154.0 & -97.09 & 193.98 & 0.0775 & -315.95 & -48.83 & -186.48 & -93.22 \\ 31.87 & 169.43 & 57.37 & 315.94 & 0.077 & 133.17 & 223.64 & -94.92 \\ 108.55 & 26.47 & 49.19 & 48.82 & -133.17 & 0.079 & -223.40 & -88.25 \\ 49.01 & -24.19 & 12.75 & 186.48 & -223.64 & 223.40 & 0.0778 & -32.22 \\ -113.51 & -9.79 & -116.72 & 93.20 & 94.92 & 88.25 & 32.22 & 0.0784 \end{bmatrix}$$

$$Z_{۱۲} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۱۵ & -۰/۰۰۱۳ & -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۰۱ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۰۴ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۰۹ \\ -۰/۰۰۱۳ & ۰/۰۰۱۷ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۱۰ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۰۶ \\ -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۱۳ & ۰/۰۰۱۵ & -۰/۰۰۱۳ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۱۲ \\ -۰/۰۰۰۱ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۱۳ & ۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۰۲ & -۰/۰۰۰۶ \\ -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۱۰ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۰۸ & ۰/۰۰۱۷ & -۰/۰۰۱۱ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۰۱ \\ -۰/۰۰۰۴ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۱۲ & ۰/۰۰۱۶ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۰۷ \\ -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۰۲ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۱۲ & ۰/۰۰۱۷ & -۰/۰۰۱۲ \\ -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۰۱ & -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۱۳ & ۰/۰۰۱۶ \end{bmatrix}$$

$$Z_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۰/۰۳۹۰ & ۵۴۹/۱۴ & -۰/۵۷ & -۲۴۸/۳۰ & ۱۴۵/۵۱ & ۱۲۰/۳۶ & ۱۲/۸۷ & ۱۸۷/۲۲ \\ -۵۴۹/۱۵ & ۰/۰۳۹۱ & ۱۹/۲۵ & ۱۰/۸۳ & ۲۱۳/۹۵ & ۷۳/۹ & ۲۸۴/۶۶ & -۸۶/۲۳ \\ ۰/۵۶۳۴ & -۱۹/۲۵ & ۰/۰۳۹ & ۱۷۴/۲۶ & -۱۹/۱۷۳ & ۲۴/۵۲ & -۶۶/۸۶ & -۱۲۶/۷۴ \\ ۲۴۸/۳۰ & -۱۰/۸۳ & -۱۷۴/۲۷ & ۰/۰۳۹ & ۲۹۸/۳۲ & ۴۰/۰۹۱ & ۲۵/۵۷ & -۲۲/۹۳ \\ -۱۴۵/۵۱ & -۲۱۳/۹۵ & ۱۹/۱۷ & -۲۹۸/۳۲ & ۰/۰۳۹ & -۱۱۱/۵۹ & ۳۰/۲۱ & ۴۶/۹۵ \\ -۱۲۰/۳۶ & -۷۳/۹۰ & -۲۴/۵۲ & -۴۰/۰۹۴ & ۱۱۱/۵۸ & ۰/۰۳۹ & -۲۰۸/۷۰ & ۲۵۵/۹۹ \\ -۱۲/۸۷ & -۲۸۴/۶۶ & ۶۶/۸۶ & -۲۵/۵۷۱ & -۳۰/۲۲ & ۲۰۸/۶۹ & ۰/۰۳۹ & ۲۰/۶۱ \\ -۱۸۷/۲۳ & ۸۶/۲۳ & ۱۲۶/۷۳ & ۲۲/۹۳ & -۴۶/۹۵ & -۲۵۵/۹۹ & -۲۰/۶۱۸ & ۰/۰۳۹ \end{bmatrix}$$

$$S_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۰/۰۲۹۳ & ۰/۰۰۰۳ & -۰/۰۰۱۱ & -۰/۰۰۱۱ & -۰/۰۰۱۳ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۱۱ \\ ۰/۰۰۰۳ & ۰/۰۲۸۸ & -۰/۰۰۱۷ & -۰/۰۰۱۶ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۱۳ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۲ \\ -۰/۰۰۱۱ & -۰/۰۰۱۸ & ۰/۰۲۹۱ & ۰/۰۰۰۱ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۱۳ & -۰/۰۰۱۵ \\ -۰/۰۰۱۱ & -۰/۰۰۱۶ & ۰/۰۰۰۱ & ۰/۰۲۸۹ & -۰/۰۰۲۱ & -۰/۰۰۱۱ & -۰/۰۰۱۳ & -۰/۰۰۱۳ \\ -۰/۰۰۱۳ & -۰/۰۰۱۸ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۲۱ & ۰/۰۲۸۷ & ۰/۰۰۰۱ & -۰/۰۰۱۴ & -۰/۰۰۱۲ \\ -۰/۰۰۱۰ & -۰/۰۰۱۳ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۱۱ & ۰/۰۰۰۱ & ۰/۰۲۹۵ & -۰/۰۰۱۵ & -۰/۰۰۱۲ \\ -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۲۰ & -۰/۰۰۱۴ & -۰/۰۰۱۴ & -۰/۰۰۱۵ & -۰/۰۰۱۵ & ۰/۰۲۹۱ & ۰/۰۰۰۱ \\ -۰/۰۰۱۱ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۱۴ & -۰/۰۰۱۳ & -۰/۰۰۱۲ & -۰/۰۰۱۲ & ۰/۰۰۰۲ & ۰/۰۲۹۳ \end{bmatrix}$$

$$S_{۱۲} = ۱۰^{-۳} \cdot \begin{bmatrix} ۰/۲۷۲۵ & -۰/۴۸۷۸ & -۰/۳۷۷۸ & ۰/۲۹۵۲ & -۰/۴۲۹۷ & -۰/۱۶۱۶ & -۰/۲۷۲۹ & -۰/۶۶۳۴ \\ -۰/۳۱۹۱ & ۰/۳۹۴۳ & -۰/۰۰۶۲ & -۰/۲۰۹۸ & -۰/۱۳۶۱ & ۰/۰۶۰۳ & ۰/۰۹۷۴ & ۰/۴۴۲۸ \\ ۰/۰۱۳۹ & -۰/۶۳۱۶ & ۰/۳۲۳۹ & -۰/۳۸۲۴ & -۰/۳۴۶۳ & -۰/۶۱۲۲ & ۰/۱۰۵۳ & -۰/۰۶۶۷ \\ -۰/۳۰۰۲ & -۰/۰۷۷۳ & -۰/۲۶۱۲ & ۰/۴۹۴۷ & ۰/۰۰۰۴ & ۰/۴۹۲۳ & -۰/۱۳۹۱ & -۰/۲۰۴۶ \\ ۰/۰۲۹۶ & -۰/۱۰۵۷ & ۰/۱۰۶۹ & ۰/۳۶۳۴ & ۰/۳۴۱۶ & -۰/۲۷۶۶ & -۰/۳۱۲۰ & ۰/۲۷۸۸ \\ -۰/۲۷۰۸ & -۰/۳۴۰۴ & -۰/۴۱۵۵ & -۰/۶۲۲۲ & -۰/۳۶۳۳ & ۰/۴۷۷۷ & ۰/۰۰۱۶ & -۰/۲۷۴۱ \\ ۰/۰۱۰۴ & ۰/۲۱۷۹ & -۰/۳۶۴۳ & -۰/۱۷۷۲ & ۰/۰۴۹۹ & -۰/۴۷۰۳ & ۰/۴۱۵۱ & -۰/۳۵۷۲ \\ -۰/۴۴۳۵ & -۰/۷۲۷۷ & -۰/۱۱۲۸ & ۰/۰۱۷۷ & -۰/۳۱۶۵ & ۰/۰۰۸۵ & -۰/۲۶۴۲ & ۰/۴۲۹۳ \end{bmatrix}$$

$$S_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۰/۰۱۹۷ & -۰/۰۰۳۵ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۰۱ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۰۱ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۱۵ \\ -۰/۰۰۳۵ & ۰/۰۱۹۸ & -۰/۰۰۱۵ & -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۱۶ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۰۷ \\ -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۱۵ & ۰/۰۱۹۸ & -۰/۰۰۳۵ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۱۴ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۱۷ \\ -۰/۰۰۰۱ & -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۳۵ & ۰/۰۱۹۷ & -۰/۰۰۰۶ & -۰/۰۰۰۸ & ۰/۰۰۰۰ & -۰/۰۰۰۸ \\ -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۱۶ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۰۵ & ۰/۰۱۹۹ & -۰/۰۰۳۴ & -۰/۰۰۰۷ & ۰/۰۰۰۰ \\ -۰/۰۰۰۱ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۱۵ & -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۳۴ & ۰/۰۱۹۶ & -۰/۰۰۱۶ & -۰/۰۰۰۹ \\ -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۰۵ & -۰/۰۰۰۹ & ۰/۰۰۰۰ & -۰/۰۰۰۸ & -۰/۰۰۱۶ & ۰/۰۱۹۹ & -۰/۰۰۳۵ \\ -۰/۰۰۱۵ & -۰/۰۰۰۷ & -۰/۰۰۱۷ & -۰/۰۰۰۸ & ۰/۰۰۰۰ & -۰/۰۰۰۹ & -۰/۰۰۳۴ & ۰/۰۱۹۶ \end{bmatrix}$$

$$R_{۱} = ۱۰^{۳} \cdot \begin{bmatrix} ۰/۰۰۰۱ & ۰/۰۲۷۵ & ۰/۹۰۹۵ & ۰/۲۳۹۳ & ۰/۵۹۷۳ & ۰/۴۰۶۸ & ۰/۳۹۲۴ & -۰/۰۸۸۱ \\ -۰/۰۲۷۵ & ۰/۰۰۰۱ & -۳/۰۹۵۱ & -۰/۶۷۵۷ & ۰/۲۰۵۳ & -۱/۹۴۷۱ & ۰/۵۲۱۷ & ۰/۲۶۳۶ \\ -۰/۹۰۹۵ & ۳/۰۹۵۱ & ۰/۰۰۰۱ & ۰/۴۹۹۴ & -۰/۵۱۸۶ & ۰/۲۸۲۲ & -۱/۱۱۸۰ & -۰/۸۴۸۳ \\ -۰/۲۳۹۳ & ۰/۶۷۵۸ & -۰/۴۹۹۳ & ۰/۰۰۰۱ & ۲/۳۱۵۲ & ۰/۲۱۴۸ & ۱/۵۵۳۹ & -۱/۱۵۲۷ \\ -۰/۵۹۷۲ & -۰/۲۰۵۳ & ۰/۵۱۸۶ & -۲/۳۱۵۲ & ۰/۰۰۰۱ & ۱/۰۸۴۲ & -۰/۸۶۷۱ & -۰/۱۶۹۶ \\ -۰/۴۰۶۷ & ۱/۹۴۷۲ & -۰/۲۸۲۱ & -۰/۲۱۴۸ & -۱/۰۸۴۱ & ۰/۰۰۰۱ & -۰/۴۴۲۷ & ۰/۲۸۵۶ \\ -۰/۳۹۲۴ & -۰/۵۲۱۷ & ۱/۱۱۸۰ & -۱/۵۵۳۹ & ۰/۸۶۷۲ & ۰/۴۴۲۸ & ۰/۰۰۰۱ & -۰/۷۸۵۱ \\ ۰/۰۸۸۱ & -۰/۲۶۳۵ & ۰/۸۴۸۳ & ۱/۱۵۲۷ & ۰/۱۶۹۷ & -۰/۲۸۵۵ & ۰/۷۸۵۲ & ۰/۰۰۰۱ \end{bmatrix}$$

$$R_{۲} = ۱۰^{۳} \cdot \begin{bmatrix} ۰/۰۰۰۱ & -۴/۵۲۹۶ & -۰/۶۰۹۴ & -۰/۰۶۸۱ & ۰/۹۶۷۸ & ۰/۴۵۴۵ & ۰/۸۰۲۸ & ۱/۰۳۶۹ \\ ۴/۵۲۹۶ & ۰/۰۰۰۲ & ۱/۵۹۶۹ & -۰/۶۹۰۶ & ۱/۵۰۸۳ & ۰/۱۰۰۸ & ۰/۱۱۲۵ & -۰/۰۴۵۰ \\ ۰/۶۰۹۴ & -۱/۵۹۶۹ & ۰/۰۰۰۱ & ۰/۹۱۷۳ & ۰/۶۱۱۱ & ۴/۰۷۰۰ & ۱/۱۸۹۷ & ۷/۲۴۸۹ \\ ۰/۰۶۸۱ & ۰/۶۹۰۶ & -۰/۹۱۷۴ & ۰/۰۰۰۲ & -۰/۲۹۶۷ & -۰/۴۸۳۲ & -۴/۹۲۳۰ & -۰/۰۳۵۸ \\ -۰/۹۶۷۸ & -۱/۵۰۸۳ & -۰/۶۱۱۱ & ۰/۲۹۶۶ & ۰/۰۰۰۱ & ۲/۱۲۰۵ & ۰/۲۳۷۴ & -۰/۰۳۹۳ \\ -۰/۴۵۴۶ & -۰/۱۰۰۸ & -۴/۰۷۰۰ & ۰/۴۸۳۲ & -۲/۱۲۰۶ & ۰/۰۰۰۲ & -۰/۲۵۲۳ & -۰/۰۰۴۹ \\ -۰/۸۰۲۸ & -۰/۱۱۲۵ & -۱/۱۸۹۷ & ۴/۹۲۲۹ & -۰/۲۳۷۴ & ۰/۲۵۲۳ & ۰/۰۰۰۱ & ۴/۰۵۶۶ \\ -۱/۰۳۶۹ & ۰/۰۴۵۰ & -۷/۲۴۸۸ & ۰/۰۳۵۸ & ۰/۰۳۹۳ & ۰/۰۰۴۹ & -۴/۰۵۶۷ & ۰/۰۰۰۲ \end{bmatrix}$$

$$R_{۳} = \begin{bmatrix} ۰/۰۳۸۹ & ۴۰۳/۱۷۴ & -۱۶۰/۷۷ & ۱۴۷/۸۵ & ۲۱۲/۴۰ & ۲۸۴/۷۲ & -۹۷/۷۸ & -۱۵۴/۰۴ \\ -۴۰۳/۱۸ & ۰/۰۳۹ & ۲۲۱/۸۲ & ۵۲۸/۰۴ & -۵۵/۸۹ & ۱۶۸/۱۹ & ۱۰۲/۷۳ & -۱۳۶/۱ \\ ۱۶۰/۷۶ & -۲۲۱/۸۲ & ۰/۰۳۹ & -۱۳۱/۲۲ & ۲۳۷/۰۵ & ۱۹۹/۰۴ & -۱۵/۳۹ & ۵۵/۷۷ \\ -۱۴۷/۸۵ & -۵۲۸/۰۴ & ۱۳۱/۲۱ & ۰/۰۴ & ۱۵۷/۶۴ & -۳۶/۸۲ & -۵۵/۴۵ & ۱۱۴/۴ \\ -۲۱۲/۴۰ & ۵۵/۸۹ & -۲۳۷/۰۶ & -۱۵۷/۶۵ & ۰/۰۴ & -۴۰۳/۰۷ & -۲۴۷/۲۵ & ۴۱/۹۲ \\ -۲۸۴/۷۲ & -۱۶۸/۱۹ & -۱۹۹/۰۵ & ۳۶/۸۱ & ۴۰۳/۰۶ & ۰/۰۴ & ۸۰۱/۲۲ & -۲۱۶/۸۳ \\ ۹۷/۷۸ & -۱۰۲/۷۳ & ۱۵/۳۹ & ۵۵/۴۵ & ۲۴۷/۲۵ & -۸۰۱/۲۳ & ۰/۰۴ & ۴۷۲/۰۴ \\ ۱۵۴/۰۴ & ۱۳۶/۱ & -۵۵/۷۸ & -۱۱۴/۴۱ & -۴۱/۹۳ & ۲۱۶/۸۳ & -۴۷۲/۰۵ & ۰/۰۳۹ \end{bmatrix}$$

$$R_{۴} = ۱۰^{۳} \cdot \begin{bmatrix} ۰/۰۰۰۱ & -۰/۰۳۰۳ & -۰/۳۰۳۳ & -۰/۰۶۵۷ & ۰/۵۵۳۲ & -۰/۴۰۳۵ & -۰/۴۸۲۸ & ۰/۳۹۹۴ \\ ۰/۰۳۰۳ & ۰/۰۰۰۱ & ۱/۴۷۰۰ & ۰/۳۳۷۰ & ۰/۱۰۷۴ & ۰/۹۶۵۰ & -۰/۵۵۷۴ & -۰/۱۸۳۶ \\ ۰/۳۰۳۳ & -۱/۴۷۰۰ & ۰/۰۰۰۱ & ۰/۳۸۹۹ & ۰/۲۸۰۲ & ۰/۲۳۰۵ & ۰/۸۸۶۲ & -۰/۵۱۹۷ \\ ۰/۰۶۵۷ & -۰/۳۳۷۰ & -۰/۳۸۹۹ & ۰/۰۰۰۱ & ۰/۹۱۵۹ & -۰/۰۷۴۰ & ۰/۱۷۷۴ & -۰/۰۹۶۲ \\ -۰/۵۵۳۲ & -۰/۱۰۷۴ & -۰/۲۸۰۲ & -۰/۹۱۶۰ & ۰/۰۰۰۱ & ۰/۱۳۹۳ & -۰/۵۰۷۶ & -۰/۱۷۹۵ \\ ۰/۴۰۳۵ & -۰/۹۶۵۰ & -۰/۲۳۰۵ & ۰/۰۷۴۰ & -۰/۱۳۹۳ & ۰/۰۰۰۱ & ۰/۲۸۱۴ & -۰/۵۱۳۸ \\ ۰/۴۸۲۸ & ۰/۵۵۷۴ & -۰/۸۸۶۲ & -۰/۱۷۷۴ & ۰/۵۰۷۶ & -۰/۲۸۱۴ & ۰/۰۰۰۱ & -۰/۰۷۶۱ \\ -۰/۳۹۹۴ & ۰/۱۸۳۶ & ۰/۵۱۹۷ & ۰/۰۹۶۲ & ۰/۱۷۹۵ & ۰/۵۱۳۸ & ۰/۰۷۶۱ & ۰/۰۰۰۱ \end{bmatrix}$$

$$Q_{۱}^{-۱} = ۰/۰۸۵۹\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \quad Q_{۲}^{-۱} = ۰/۰۷۷۹\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \quad Q_{۳}^{-۱} = ۰/۰۸۱۷\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \quad Q_{۴}^{-۱} = ۰/۰۷۴۲\, \mathcal{I}_{۸\times۸}$$

$$Q_{۵}^{-۱} = ۰/۰۶۵۲\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \quad Q_{۶}^{-۱} = ۰/۰۶۳۷\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \quad Q_{۷}^{-۱} = ۰/۰۷۴۵\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \quad Q_{۸}^{-۱} = ۰/۰۷۶۳\, \mathcal{I}_{۸\times۸}$$

$$Q_{۹}^{-۱} = ۰/۰۷۶۷\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \quad Q_{۱۰}^{-۱} = ۰/۰۷۳۴\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \quad Q_{۱۱}^{-۱} = ۰/۰۲۴۸\, \mathcal{I}_{۸\times۸}, \quad Q_{۱۲}^{-۱} = ۰/۰۲۶۰\, \mathcal{I}_{۸\times۸}$$

$$P = \begin{bmatrix}
0.265 & 0.047 & -0.136 & 0.006 & -0.024 & -0.016 & -0.004 & 0.004 & -0.004 & -0.035 & -0.007 & 0.022 & 0.022 & -0.021 & 0.005 & -0.005 \\
0.066 & 0.279 & 0.008 & -0.142 & -0.018 & 0.010 & -0.002 & 0.008 & 0.007 & -0.009 & -0.02 & 0.011 & -0.041 & 0.007 & 0.003 & 0.001 \\
0.027 & -0.016 & 0.019 & -0.006 & -0.001 & 0.001 & -0.001 & 0 & 0.001 & -0.001 & -0.002 & -0.003 & 0.003 & -0.002 & -0.002 & 0 \\
-0.016 & 0.027 & -0.005 & 0.020 & 0.003 & 0.007 & 0 & -0.001 & 0.005 & 0.005 & 0.002 & 0 & 0.003 & 0.004 & 0 & -0.002 \\
0.003 & -0.006 & 0.007 & -0.002 & 0.262 & 0.032 & -0.135 & 0.006 & 0.009 & -0.028 & 0.003 & -0.003 & -0.023 & 0.014 & 0.01 & -0.019 \\
-0.004 & -0.035 & 0.005 & -0.006 & 0.078 & 0.282 & 0.009 & -0.143 & -0.036 & 0.018 & 0.002 & 0.002 & -0.038 & -0.013 & 0.023 & -0.008 \\
0.003 & 0.001 & 0 & -0.001 & 0.027 & -0.017 & 0.019 & -0.005 & 0.001 & -0.002 & -0.001 & 0.001 & 0.002 & 0.004 & 0.001 & 0.001 \\
0.004 & 0 & -0.001 & 0 & -0.015 & 0.027 & -0.006 & 0.02 & 0.003 & 0.005 & -0.001 & -0.002 & 0.001 & 0.001 & -0.003 & -0.001 \\
-0.015 & 0.028 & 0.009 & -0.018 & -0.032 & 0.001 & 0 & 0.006 & 0.264 & 0.044 & -0.136 & 0.008 & -0.032 & -0.015 & -0.002 & 0.004 \\
-0.046 & -0.015 & 0.021 & -0.007 & 0.013 & -0.039 & 0.001 & 0.001 & 0.066 & 0.280 & 0.008 & -0.142 & -0.016 & 0.02 & -0.001 & 0.007 \\
0.003 & 0.006 & 0 & 0 & 0.002 & 0.006 & 0 & -0.002 & 0.028 & -0.015 & 0.019 & -0.005 & 0 & 0.003 & 0 & 0 \\
-0.002 & 0 & -0.002 & -0.001 & 0.002 & -0.001 & -0.001 & 0.001 & -0.017 & 0.026 & -0.005 & 0.02 & 0.001 & 0.004 & 0 & -0.002 \\
-0.039 & 0.005 & -0.001 & 0.005 & 0 & -0.042 & -0.006 & 0.02 & 0.012 & 0 & 0.006 & -0.002 & 0.265 & 0.039 & -0.136 & 0.005 \\
0.008 & -0.032 & 0.001 & 0.002 & 0.020 & -0.009 & -0.019 & 0.01 & -0.014 & -0.046 & 0.005 & -0.004 & 0.072 & 0.279 & 0.01 & -0.143 \\
0 & 0.005 & 0.001 & -0.003 & 0.001 & -0.002 & -0.002 & -0.002 & 0.003 & 0.001 & -0.001 & -0.002 & 0.027 & -0.017 & 0.019 & -0.005 \\
0.004 & 0.001 & -0.001 & 0 & 0.006 & 0.005 & 0.001 & 0 & 0.003 & 0 & -0.001 & 0.001 & -0.015 & 0.027 & -0.006 & 0.02
\end{bmatrix}$$

مراجع

[1] Mantas Lukoševičius and Herbert Jaeger. Reservoir computing approaches to recurrent neural network training. *Computer Science Review*, 3(3):127–149, 2009.

[2] Huaguang Zhang, Zhanshan Wang, and Derong Liu. A comprehensive review of stability analysis of continuous-time recurrent neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 25(7):1229–1262, 2014.

[3] Gouhei Tanaka, Toshiyuki Yamane, Jean Benoit Héroux, Ryosho Nakane, Naoki Kanazawa, Seiji Takeda, Hidetoshi Numata, Daiju Nakano, and Akira Hirose. Recent advances in physical reservoir computing: a review. *Neural Networks*, 2019.

[4] Herbert Jaeger. The “echo state” approach to analysing and training recurrent neural networks-with an erratum note. *Bonn, Germany: German National Research Center for Information Technology GMD Technical Report*, 148:34, 2001.

[5] NJ De Vos. Echo state networks as an alternative to traditional artificial neural networks in rainfall–runoff modelling. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(1):253–267, 2013.

[6] Lyudmila Grigoryeva and Juan-Pablo Ortega. Echo state networks are universal. *Neural Networks*, 108:495–508, 2018.

[7] Herbert Jaeger, Mantas Lukoševičius, Dan Popovici, and Udo Siewert. Optimization and applications of echo state networks with leaky-integrator neurons. *Neural networks*, 20(3):335–352, 2007.

[8] Shu-Xian Lun, Xian-Shuang Yao, Hong-Yun Qi, and Hai-Feng Hu. A novel model of leaky integrator echo state network for time-series prediction. *Neurocomputing*, 159:58–66, 2015.

[9] Mantas Lukoševicius, Dan Popovici, Herbert Jaeger, Udo Siewert, and Residence Park. Time warping invariant echo state networks. *International University Bremen, Tech. Rep*, 2006.

[10] Min Han and Meiling Xu. Predicting multivariate time series using subspace echo state network. *Neural Processing Letters*, 41(2):201–209, 2015.

[11] Ali Deihimi and Hemen Showkati. Application of echo state networks in short-term electric load forecasting. *Energy*, 39(1):327–340, 2012.

[12] Seong Ik Han and Jang Myung Lee. Precise positioning of nonsmooth dynamic systems using fuzzy wavelet echo state networks and dynamic surface sliding mode control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60(11):5124–5136, 2012.

[13] Seong Ik Han and Jang Myung Lee. Fuzzy echo state neural networks and funnel dynamic surface control for prescribed performance of a nonlinear dynamic system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(2):1099–1112, 2013.

[14] Guoqiang Li, Peifeng Niu, Weiping Zhang, and Yang Zhang. Control of discrete chaotic systems based on echo state network modeling with an adaptive noise canceler. *Knowledge-Based Systems*, 35:35–40, 2012.

[15] Ganesh Kumar Venayagamoorthy. Online design of an echo state network based wide area monitor for a multimachine power system. *Neural Networks*, 20(3):404–413, 2007.

[16] Changqing Yuan, Junfeng Li, Zhidong Deng, and Hexi Baoyin. ESN neural networks robust attitude tracking control for multi-body spacecraft [j]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 8, 2008.

[17] Mark Skowronski and John Gregory Harris. Noise-robust automatic speech recognition using a predictive echo state network. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 15(5):1724–1730, 2007.

[18] Mark Skowronski and John Gregory Harris. Automatic speech recognition using a predictive echo state network classifier. *Neural networks*, 20(3):414–423, 2007.

[19] Matthew Hernandez Tong, Adam D Bickett, Eric Michael Christiansen, and Garrison W Cottrell. Learning grammatical structure with echo state networks. *Neural networks*, 20(3):424–432, 2007.

[20] Shu-xian Lun, Shuo Wang, Ting-ting Guo, and Cun-jiao Du. An I–V model based on time warp invariant echo state network for photovoltaic array with shaded solar cells. *Solar Energy*, 105:529–541, 2014.

[21] Yu Peng, Hong Wang, Jianmin Wang, Datong Liu, and Xiyuan Peng. A modified echo state network based remaining useful life estimation approach. In *2012 IEEE Conference on Prognostics and Health Management*, pages 1–7. IEEE, 2012.

[22] Yanbo Xue, Le Yang, and Simon Haykin. Decoupled echo state networks with lateral inhibition. *Neural Networks*, 20(3):365–376, 2007.

[23] Levy Boccato, Amauri Lopes, Romis Attux, and Fernando José Von Zuben. An extended echo state network using volterra filtering and principal component analysis. *Neural Networks*, 32:292–302, 2012.

[24] Georg Holzmann and Helmut Hauser. Echo state networks with filter neurons and a delay&sum readout. *Neural Networks*, 23(2):244–256, 2010.

[25] Jun Zhao, Xiaoliang Zhu, Wei Wang, and Ying Liu. Extended kalman filter-based elman networks for industrial time series prediction with gpu acceleration. *Neurocomputing*, 118:215–224, 2013.

[26] Ying Liu, Quanli Liu, Wei Wang, Jun Zhao, and Henry Leung. Data-driven based model for flow prediction of steam system in steel industry. *Information sciences*, 193:104–114, 2012.

[27] Hu Wang, Yongguang Yu, Guoguang Wen, Shuo Zhang, and Junzhi Yu. Global stability analysis of fractional-order Hopfield neural networks with time delay. *Neurocomputing*, 154:15–23, 2015.

[28] Jin Zhu, Qingling Zhang, and Chunyu Yang. Delay-dependent robust stability for Hopfield neural networks of neutral-type. *Neurocomputing*, 72(10-12):2609–2617, 2009.

[29] Xuyang Lou and Baotong Cui. New LMI conditions for delay-dependent asymptotic stability of delayed Hopfield neural networks. *Neurocomputing*, 69(16-18):2374–2378, 2006.

[30] Toshifumi Minemoto, Teijiro Isokawa, Haruhiko Nishimura, and Nobuyuki Matsui. Quaternionic multistate Hopfield neural network with extended projection rule. *Artificial Life and Robotics*, 21(1):106–111, 2016.

[31] Teijiro Isokawa, Haruhiko Nishimura, Naotake Kamiura, and Nobuyuki Matsui. Associative memory in quaternionic Hopfield neural network. *International Journal of Neural Systems*, 18(02):135–145, 2008.

[32] Jiejie Chen, Boshan Chen, and Zhigang Zeng. Global uniform asymptotic fixed deviation stability and stability for delayed fractional-order memristive neural networks with generic memductance. *Neural Networks*, 98:65–75, 2018.

[33] Lingzhong Zhang and Yongqing Yang. Different impulsive effects on synchronization of fractional-order memristive BAM neural networks. *Nonlinear Dynamics*, 93(2):1–18, 2018.

[34] Shuxin Liu, Yongguang Yu, Shuo Zhang, and Yuting Zhang. Robust stability of fractional-order memristor-based Hopfield neural networks with parameter disturbances. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 509:845–854, 2018.

[35] Rajan Rakkiyappan, Jinde Cao, and Gunasekaran Velmurugan. Existence and uniform stability analysis of fractional-order complex-valued neural networks with time delays. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 26(1):84–97, 2015.

[36] Gunasekaran Velmurugan, Rajan Rakkiyappan, Vaitheeswaran Vembarasan, Jinde Cao, and Ahmed Alsaedi. Dissipativity and stability analysis of fractional-order complex-valued neural networks with time delay. *Neural Networks*, 86:42–53, 2017.

[37] Zhengwen Tu, Jinde Cao, Ahmed Alsaedi, and Tasawar Hayat. Global dissipativity analysis for delayed quaternion-valued neural networks. *Neural Networks*, 89:97–104, 2017.

[38] Limin Wang, Qiankun Song, Yurong Liu, Zhenjiang Zhao, and Fuad Eid Alsaadi. Global asymptotic stability of impulsive fractional-order complex-valued neural networks with time delay. *Neurocomputing*, 243:49–59, 2017.

[39] Liguang Wan and Ailong Wu. Multistability in Mittag-Leffler sense of fractional-order neural networks with piecewise constant arguments. *Neurocomputing*, 286:1–10, 2018.

[40] Yunquan Ke and Chunfang Miao. Stability analysis of fractional-order Cohen–Grossberg neural networks with time delay. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(6):1102–1113, 2015.

[41] Liguang Wan and Ailong Wu. Mittag-Leffler stability analysis of fractional-order fuzzy Cohen-Grossberg neural networks with deviating argument. *Advances in Difference Equations*, 2017(1):308, 2017.

[42] Mingwen Zheng, Lixiang Li, Haipeng Peng, Jinghua Xiao, Yixian Yang, and Hui Zhao. Finite-time stability and synchronization for memristor-based fractional-order Cohen-Grossberg neural network. *The European Physical Journal B*, 89(9):204, 2016.

[43] Anbalagan Pratap, Ramachandran Raja, Jinde Cao, Cheepeng Lim, and Ovidiu Bagdasar. Stability and pinning synchronization analysis of fractional order delayed cohen–grossberg neural networks with discontinuous activations. *Applied Mathematics and Computation*, 359:241–260, 2019.

[44] C Rajivganthi, Fathalla Ali Rihan, Shanmugam Lakshmanan, and P Muthukumar. Finite-time stability analysis for fractional-order Cohen–Grossberg BAM neural networks with time delays. *Neural Computing and Applications*, 29(12):1309–1320, 2018.

[45] Hiroyuki Aoki and Yukio Kosugi. An image storage system using complex-valued associative memories. In *Proceedings 15th International Conference on Pattern Recognition. ICPR-2000*, volume 2, pages 626–629. IEEE, 2000.

[46] Danchi Jiang. Complex-value recurrent neural networks for global optimization of beamforming in multi-symbol mimo communication systems. 2007.

[47] Donq Liang Lee. Improvements of complex-valued hopfield associative memory by using generalized projection rules. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(5):1341–1347, 2006.

[48] Wei Zhou and Jacek M Zurada. Discrete-time recurrent neural networks with complex-valued linear threshold neurons. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 56(8):669–673, 2009.

[49] Akira Hirose. Recent progress in applications of complex-valued neural networks. In *International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing*, pages 42–46. Springer, 2010.

[50] Jin Hu and Jun Wang. Global stability of complex-valued recurrent neural networks with time-delays. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 23(6):853–865, 2012.

[51] Martin Bohner, Vadrevu Sree Hari Rao, and Suman Sanyal. Global stability of complex-valued neural networks on time scales. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 19(1-2):3–11, 2011.

[52] Ziye Zhang, Chong Lin, and Bing Chen. Global stability criterion for delayed complex-valued recurrent neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 25(9):1704–1708, 2013.

[53] Tao Fang and Jitao Sun. Stability of complex-valued recurrent neural networks with time-delays. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 25(9):1709–1713, 2014.

[54] Xiaoyu Liu, Kangling Fang, and Bin Liu. A synthesis method based on stability analysis for complex-valued hopfield neural network. In *2009 7th Asian Control Conference*, pages 1245–1250. IEEE, 2009.

[55] Akira Hirose. *Complex-valued neural networks: theories and applications*, volume 5. World Scientific, 2003.

[56] Shuai Yang, Juan Yu, Cheng Hu, and Haijun Jiang. Quasi-projective synchronization of fractional-order complex-valued recurrent neural networks. *Neural Networks*, 104:104–113, 2018.

[57] Swati Tyagi, Syed Abbas, and Mokhtar Hafayed. Global Mittag–Leffler stability of complex valued fractional-order neural network with discrete and distributed delays. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 65(3):485–505, 2016.

[58] Yuting Zhang, Yongguang Yu, and Xueli Cui. Dynamical behaviors analysis of memristor-based fractional-order complex-valued neural networks with time delay. *Applied Mathematics and Computation*, 339:242–258, 2018.

[59] Wenting Chang, Song Zhu, Jinyu Li, and Kaili Sun. Global Mittag–Leffler stabilization of fractional-order complex-valued memristive neural networks. *Applied Mathematics and Computation*, 338:346–362, 2018.

[60] Peng Wan and Jigui Jian. Global mittag-leffler boundedness for fractional-order complex-valued cohen–grossberg neural networks. *Neural Processing Letters*, pages 1–19, 2019.

[61] Teijiro Isokawa, Tomoaki Kusakabe, Nobuyuki Matsui, and Ferdinand Peper. Quaternion neural network and its application. In *International Conference on Knowledge-Based and Intelligent Information and Engineering Systems*, pages 318–324. Springer, 2003.

[62] Lincong Luo, Hao Feng, and Lijun Ding. Color image compression based on quaternion neural network principal component analysis. In *2010 International Conference on Multimedia Technology*, pages 1–4. IEEE, 2010.

[63] Hiromi Kusamichi, Teijiro Isokawa, Nobuyuki Matsui, Yuzo Ogawa, and Kazuaki Maeda. A new scheme for color night vision by quaternion neural network. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Autonomous Robots and Agents*, volume 1315. Citeseer, 2004.

[64] Clive Cheong Took, Goran Strbac, Kazuyuki Aihara, and Danilo Mandic. Quaternion-valued short-term joint forecasting of three-dimensional wind and atmospheric parameters. *Renewable Energy*, 36(6):1754–1760, 2011.

[65] Bukhari Che Ujang, Clive Cheong Took, and Danilo P Mandic. Quaternion-valued nonlinear adaptive filtering. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 22(8):1193–1206, 2011.

[66] Xiaofeng Chen, Zhongshan Li, Qiankun Song, Jin Hu, and Yuanshun Tan. Robust stability analysis of quaternion-valued neural networks with time delays and parameter uncertainties. *Neural Networks*, 91:55–65, 2017.

[67] Yang Liu, Dandan Zhang, Jianquan Lu, and Jinde Cao. Global μ-stability criteria for quaternion-valued neural networks with unbounded time-varying delays. *Information Sciences*, 360:273–288, 2016.

[68] Yang Liu, Dandan Zhang, Jungang Lou, Jianquan Lu, and Jinde Cao. Stability analysis of quaternion-valued neural networks: decomposition and direct approaches. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 29(9):4201–4211, 2018.

[69] Nobuyuki Matsui, Teijiro Isokawa, Hiromi Kusamichi, Ferdinand Peper, and Haruhiko Nishimura. Quaternion neural network with geometrical operators. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 15(3, 4):149–164, 2004.

[70] Xiaofeng Chen, Qiankun Song, and Zhongshan Li. Design and analysis of quaternion-valued neural networks for associative memories. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, pages 1–10, 2017.

[71] Hanqi Shu, Qiankun Song, Yurong Liu, Zhenjiang Zhao, and Fuad E Alsaadi. Global μ-stability of quaternion-valued neural networks with non-differentiable time-varying delays. *Neurocomputing*, 247:202–212, 2017.

[72] Jin Hu, Chunna Zeng, and Jun Tan. Boundedness and periodicity for linear threshold discrete-time quaternion-valued neural network with time-delays. *Neurocomputing*, 267:417–425, 2017.

[73] Xiaofeng Chen, Lianjie Li, and Zhongshan Li. Robust stability analysis of quaternion-valued neural networks via LMI approach. *Advances in Difference Equations*, 2018(1):131–151, 2018.

[74] Hai Zhang, Renyu Ye, Song Liu, Jinde Cao, Ahmad Alsaedi, and Xiaodi Li. LMI-based approach to stability analysis for fractional-order neural networks with discrete and distributed delays. *International Journal of Systems Science*, 49(3):537–545, 2018.

[75] Shuo Zhang, Yongguang Yu, and Junzhi Yu. LMI conditions for global stability of fractional-order neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 28(10):2423–2433, 2017.

[76] Ruoxia Li, Jinde Cao, Ahmad Alsaedi, and Fuad Alsaadi. Stability analysis of fractional-order delayed neural networks. *Nonlinear Anal., Model. Control*, 22(4):505–520, 2017.

[77] Zhixia Ding, Zhigang Zeng, and Leimin Wang. Robust finite-time stabilization of fractional-order neural networks with discontinuous and continuous activation functions under uncertainty. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 29(5):1477–1490, 2018.

[78] Hai Zhang, Renyu Ye, Jinde Cao, and Ahmed Alsaedi. Delay-independent stability of Riemann–Liouville fractional neutral-type delayed neural networks. *Neural Processing Letters*, 47(2):1–16, 2017.

[79] A Pratap, Ramachandran Raja, Jinde Cao, Grienggrai Rajchakit, and Fuad Eid Alsaadi. Further synchronization in finite time analysis for time-varying delayed fractional order memristive competitive neural networks with leakage delay. *Neurocomputing*, 317:110–126, 2018.

[80] Xiaofan Li, Jian-an Fang, Wenbing Zhang, and Huiyuan Li. Finite-time synchronization of fractional-order memristive recurrent neural networks with discontinuous activation functions. *Neurocomputing*, 316:284–293, 2018.

[81] Ailong Wu and Zhigang Zeng. Global Mittag–Leffler stabilization of fractional-order memristive neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 28(1):206–217, 2017.

[82] Liping Chen, Jinde Cao, Ranchao Wu, José António Tenreiro Machado, António Lopes, and Hejun Yang. Stability and synchronization of fractional-order memristive neural networks with multiple delays. *g*, 94:76–85, 2017.

[83] Mingwen Zheng, Lixiang Li, Haipeng Peng, Jinghua Xiao, Yixian Yang, and Hui Zhao. Finite-time projective synchronization of memristor-based delay fractional-order neural networks. *Nonlinear Dynamics*, 89(4):2641–2655, 2017.

[84] Mingwen Zheng, Lixiang Li, Haipeng Peng, Jinghua Xiao, Yixian Yang, Yanping Zhang, and Hui Zhao. Finite-time stability and synchronization of memristor-based fractional-order fuzzy cellular neural networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 59:272–291, 2018.

[85] Rajan Rakkiyappan, Gunasekaran Velmurugan, and Jinde Cao. Stability analysis of memristor-based fractional-order neural networks with different memductance functions. *Cognitive neurodynamics*, 9(2):145–177, 2015.

[86] Jiejie Chen, Boshan Chen, and Zhigang Zeng. Global asymptotic stability and adaptive ultimate Mittag-Leffler synchronization for a fractional-order complex-valued memristive neural networks with delays. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 11(99):1–17, 2018.

[87] Limin Wang, Qiankun Song, Yurong Liu, Zhenjiang Zhao, and Fuad E Alsaadi. Finite-time stability analysis of fractional-order complex-valued memristor-based neural networks with both leakage and time-varying delays. *Neurocomputing*, 245:86–101, 2017.

[88] Rajan Rakkiyappan, Gunasekaran Velmurugan, and Jinde Cao. Finite-time stability analysis of fractional-order complex-valued memristor-based neural networks with time delays. *Nonlinear Dynamics*, 78(4):2823–2836, 2014.

[89] Rajan Rakkiyappan, Gunasekaran Velmurugan, and Jinde Cao. Stability analysis of fractional-order complex-valued neural networks with time delays. *Chaos, Solitons & Fractals*, 78:297–316, 2015.

[90] Rajan Rakkiyappan, Karunakarakurup Udhayakumar, Gunasekaran Velmurugan, Jinde Cao, and Ahmed Alsaedi. Stability and hopf bifurcation analysis of fractional-order complex-valued neural networks with time delays. *Advances in Difference Equations*, 2017(1):225–250, 2017.

[91] Hongzhi Wei, Ruoxia Li, Chunrong Chen, and Zhengwen Tu. Stability analysis of fractional order complex-valued memristive neural networks with time delays. *Neural Processing Letters*, 45(2):379–399, 2017.

[92] Xujun Yang, Chuandong Li, Qiankun Song, Jiyang Chen, and Junjian Huang. Global Mittag-Leffler stability and synchronization analysis of fractional-order quaternion-valued neural networks with linear threshold neurons. *Neural Networks*, 105:88–103, 2018.

[93] Illiani Carro-Pérez, Carlos Sánchez-López, and Hugo G González-Hernández. Experimental verification of a memristive neural network. *Nonlinear Dynamics*, 93(4):1–18, 2018.

[94] Jacke Hale and Sjoerd Verduyn Lunel. Strong stabilization of neutral functional differential equations. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 19(1 and 2):5–23, 2002.

[95] Jacke Hale. Theory of functional differential equations. 1977. *New York, Spring-Verleg*, 1977.

[96] Long Cheng, Zeng-Guang Hou, Min Tan, et al. A neutral-type delayed projection neural network for solving nonlinear variational inequalities. *IEEE transactions on circuits and systems. II, Express Briefs*, 55(8):806–810, 2008.

[97] Mark Balas and Susan Frost. Normal form for linear infinite-dimensional systems in Hilbert space and its role in direct adaptive control of distributed parameter systems. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, pages 1501–1516, 2017.

[98] Pietro DeLellis, Mario di Bernardo, and Giovanni Russo. On QUAD, Lipschitz, and contracting vector fields for consensus and synchronization of networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 58(3):576–583, 2011.

[99] Jiye Zhang, Yoshihiro Suda, and Hisanao Komine. Global exponential stability of cohen–grossberg neural networks with variable delays. *Physics Letters A*, 338(1):44–50, 2005.

[100] Shantanu Das. *Functional fractional calculus.* Springer Science & Business Media, 2011.

[101] Oliver Heaviside. *Earthquake theory*, volume 3. Cosimo, Inc., 2008.

[102] Mihailo Lazarević, Petar Mandić, Boško Cvetković, Tomislav Šekara, and Budimir Lutovac. Some electromechanical systems and analogies of mem-systems integer and fractional order. In *2016 5th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO)*, pages 230–233. IEEE, 2016.

[103] Todd Freeborn. A survey of fractional-order circuit models for biology and biomedicine. *IEEE Journal on emerging and selected topics in circuits and systems*, 3(3):416–424, 2013.

[104] Klas Adolfsson, Mikael Enelund, and Peter Olsson. On the fractional order model of viscoelasticity. *Mechanics of Time-dependent materials*, 9(1):15–34, 2005.

[105] Yurii Zinovévich Povstenko. Fractional heat conduction equation and associated thermal stress. *Journal of Thermal Stresses*, 28(1):83–102, 2004.

[106] Yurii Zinovévich Povstenko. Fractional heat conduction equation and associated thermal stresses in an infinite solid with spherical cavity. *Quarterly journal of mechanics and applied mathematics*, 61(4):523–547, 2008.

[107] António Lopes, José António Tenreiro Machado, Carla MA Pinto, and Alexandra MSF Galhano. Fractional dynamics and MDS visualization of Earthquake phenomena. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(5):647–658, 2013.

[108] José António Tenreiro Machado. Fractional dynamics in the Rayleigh's piston. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 31(1):76–82, 2016.

[109] Dumitru Baleanu, José António Tenreiro Machado, and Albert Luo. *Fractional dynamics and control*. Springer Science & Business Media, 2011.

[110] José António Tenreiro Machado, António Cardoso Costa, and Maria Dulce Quelhas. Fractional dynamics in DNA. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(8):2963–2969, 2011.

[111] Qi Yang, Dali Chen, Tiebiao Zhao, and YangQuan Chen. Fractional calculus in image processing: a review. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 19(5):1222–1249, 2016.

[112] Seyed Abbas Taher, Masoud Hajiakbari Fini, and Saber Falahati Aliabadi. Fractional order PID controller design for LFC in electric power systems using imperialist competitive algorithm. *Ain Shams Engineering Journal*, 5(1):121–135, 2014.

[113] Mulinti Sivarama Krishna, Siuli Das, Karabi Biswas, and Bhaswati Goswami. Fabrication of a fractional order capacitor with desired specifications: a study on process identification and characterization. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 58(11):4067–4073, 2011.

[114] Yan Li, YangQuan Chen, and Igor Podlubny. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag–Leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5):1810–1821, 2010.

[115] Mahsan Tavakoli-Kakhki and Mohammad Haeri. Fractional order model reduction approach based on retention of the dominant dynamics: Application in IMC based tuning of FOPI and FOPID controllers. *ISA transactions*, 50(3):432–442, 2011.

[116] Mahmoud Zaky and José António Tenreiro Machado. On the formulation and numerical simulation of distributed-order fractional optimal control problems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 52:177–189, 2017.

[117] Yashar Mousavi and Alireza Alfi. Fractional calculus-based firefly algorithm applied to parameter estimation of chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 114:202–215, 2018.

[118] Esmat Sadat Alaviyan Shahri, Alireza Alfi, and José António Tenreiro Machado. Fractional fixed-structure H∞ controller design using augmented lagrangian particle swarm optimization with fractional order velocity. *Applied Soft Computing*, 77:688–695, 2019.

[119] Hai Peng Ren and Guanrong Chen. Control chaos in brushless DC motor via piecewise quadratic state feedback. In *International Conference on Intelligent Computing*, pages 149–158. Springer, 2005.

[120] Igor Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volume 198. Elsevier, 1998.

[121] Arakaparampil M Mathai and Hans Joachim Haubold. *Special functions for applied scientists*, volume 4. Springer, 2008.

[122] Jatmj Sabatier, Ohm Parkash Agrawal, and José António Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus*, volume 4. Springer, 2007.

[123] Duarte Valério, Juan Trujillo, Margarita Rivero, José António Tenreiro Machado, and Dumitru Baleanu. Fractional calculus: A survey of useful formulas. *The European Physical Journal Special Topics*, 222(8):1827–1846, 2013.

[124] Alain Oustaloup, Francois Levron, Benoit Mathieu, and Florence M Nanot. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(1):25–39, 2000.

[125] Kai Diethelm and Neville J Ford. Analysis of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 265(2):229–248, 2002.

[126] Ivo Petráš. *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation.* Springer Science & Business Media, 2011.

[127] Anatolii Aleksandrovich Kilbas, Hari Mohan Srivastava, and Juan Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. Elsevier Science Limited, 2006.

[128] Yan Li, YangQuan Chen, and Igor Podlubny. Mittag–Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45(8):1965–1969, 2009.

[129] Jean-Jacques Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[130] Hassan K Khalil and Jessy W Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.

[131] Jiejie Chen, Zhigang Zeng, and Ping Jiang. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks. *Neural Networks*, 51:1–8, 2014.

[132] Hadi Delavari, Dumitru Baleanu, and Jalil Sadati. Stability analysis of Caputo fractional-order nonlinear systems revisited. *Nonlinear Dynamics*, 67(4):2433–2439, 2012.

[133] Liping Chen, Yi Chai, Ranchao Wu, Tiedong Ma, and Houzhen Zhai. Dynamic analysis of a class of fractional-order neural networks with delay. *Neurocomputing*, 111:190–194, 2013.

[134] Norelys Aguila-Camacho, Manuel Duarte-Mermoud, and Javier A Gallegos. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(9):2951–2957, 2014.

[135] Chunyang Sheng, Jun Zhao, Ying Liu, and Wei Wang. Prediction for noisy nonlinear time series by echo state network based on dual estimation. *Neurocomputing*, 82:186–195, 2012.

[136] Juan Yu, Cheng Hu, and Haijun Jiang. α-stability and α-synchronization for fractional-order neural networks. *Neural Networks*, 35:82–87, 2012.

[137] Anatolii Aleksandrovich Kilbas, Hari Mohan Srivastava, and Juan J Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. Elsevier Science Limited, 2006.

[138] Michael Rosenstein, James John Collins, and Carlo De Luca. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 65(1-2):117–134, 1993.

[139] Sachin Bhalekar and Varsha Daftardar-Gejji. A predictor-corrector scheme for solving nonlinear delay differential equations of fractional order. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 1(5):1–9, 2011.

[140] Yury Luchko. Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 351(1):218–223, 2009.

[141] Om P Agrawal. Formulation of euler–lagrange equations for fractional variational problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 272(1):368–379, 2002.

[142] Shaher Momani and Zaid Odibat. Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics. *Physics Letters A*, 355(4-5):271–279, 2006.

[143] Manuel Duarte Ortigueira. *Fractional calculus for scientists and engineers*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2011.

[144] JA Tenreiro Machado and António M Lopes. Relative fractional dynamics of stock markets. *Nonlinear Dynamics*, 86(3):1613–1619, 2016.

[145] Concepcion A Monje, YangQuan Chen, Blas M Vinagre, Dingyu Xue, and Vicente Feliu-Batlle. *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media, 2010.

[146] Keith Oldham and Jerome Spanier. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, volume 111. Elsevier, 1974.

[147] Zhihong Man, Hong Ren Wu, Sophie Liu, and Xinghuo Yu. A new adaptive backpropagation algorithm based on lyapunov stability theory for neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(6):1580–1591, 2006.

[148] Xianshuang Yao, Zhanshan Wang, and Huaguang Zhang. Prediction and identification of discrete-time dynamic nonlinear systems based on adaptive echo state network. *Neural Networks*, 113:11–19, 2019.

[149] Jack Chou. Quaternion kinematic and dynamic differential equations. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 8(1):53–64, 1992.

[150] Manchun Tan, Yunfeng Liu, and Desheng Xu. Multistability analysis of delayed quaternion-valued neural networks with nonmonotonic piecewise nonlinear activation functions. *Applied Mathematics and Computation*, 341:229–255, 2019.

[151] Zhengwen Tu, Yongxiang Zhao, Nan Ding, Yuming Feng, and Wei Zhang. Stability analysis of quaternion-valued neural networks with both discrete and distributed delays. *Applied Mathematics and Computation*, 343:342–353, 2019.

[152] Yuting Zhang, Yongguang Yu, and Xueli Cui. Dynamical behaviors analysis of memristor-based fractional-order complex-valued neural networks with time delay. *Applied Mathematics and Computation*, 339:242–258, 2018.

[153] José António Tenreiro Machado. Fractional generalization of memristor and higher order elements. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(2):264–275, 2013.

[154] Jean-Pierre Aubin and Hélène Frankowska. *Set-valued analysis*. Springer Science & Business Media, 2009.

[155] Jean-Pierre Aubin and Arrigo Cellina. *Differential inclusions: set-valued maps and viability theory*, volume 264. Springer Science & Business Media, 2012.

[156] Aleksei Fedorovich Filippov. Differential equations with discontinuous right-hand side. *Matematicheskii sbornik*, 93(1):99–128, 1960.

Abstract

The goal of this thesis is to analyze the stability of Fractional Order Echo State Neural Networks (FO-ESNN) with different properties, including time delay, memristive element in real, complex and quaternion spaces and its application in time series prediction. Besides, chaos behavior of such NN is discussed. First, the Mittag-Leffler stability of the NN equilibrium point is studied. Besides, the chaos phenomenon of this type of NN is discussed. Then, the uniform stability of the equilibrium point of such NN with constant and multiple time delays is investigated. In the follow-up, a gradient based-adaptive law is proposed for optimizing the FO-ESNN parameters', which is applied for time series prediction in stock market. Finally, the (robust) asymptotic stability of unique equilibrium point of the FO quaternion- and complex-valued ESNN with time delays and memristive elements is studied. In each part, simulation results with some numerical examples are provided to demonstrate the effectiveness of the theoretical results.

Keywords: Fractional Order Dynamic Neural Network, Time Delay, Memristive Elements, Stability Analysis, Echo State Network.

Faculty Of Electrical and Robotic Engineering

PhD Thesis in Control engineering

Stability Analysis of Fractional Order Echo State Neural Network with Time Delay and Its Application in Time Series Forecasting

By: Seyed Mehdi Abedi Pahnehkolei

Supervisor:

Dr. Alireza Alfi

Advisor:

Professor J. Tenreiro Machado

September 2019