بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی برق و رباتیک

گروه کنترل

طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری کانفورمال برای سیستم‌های آفین

نگارنده: سارا حقیقت نیا

استاد راهنما:

آقای دکترحیدر طوسیان شاندیز

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

شهریور ۱۳۹۸

شماره : ۱۲۹۴/د.ت.۲
تاریخ : ۹۸/۶/۲۶
ویرایش : —

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای/خانم **سارا حقیقت نیا** دانشجوی دکتری رشته **برق - کنترل** به شماره دانشجویی **۹۳۰۰۴۷۵** ورودی **مهر** ماه سال **۱۳۹۳** درتاریخ **۱۳۹۸/۰۶/۲۶** از رساله **نظری** ■ / **عملی** □ خود با عنوان :

طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه کسری کانفورمال برای سیستمهای آفین

دفاع و با اخذ نمره ۱۸/۲۱۲ به درجه : بسیار خوب نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ □	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷ ☑
ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹– ۱۵ □	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد □
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد □	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
	دکتر طوسیان شاندیز	استاد/ اساتید راهنما	دانشیار	[signature]
	دکتر —	مشاور/ مشاورین	—	[signature]
	دکتر موسوی	استاد مدعو داخلی / خارجی	استاد	[signature]
	دکتر الفی	استاد مدعو داخلی / خارجی	دانشیار	[signature]
	دکتر حداد ظریف	استاد مدعو داخلی / خارجی	دانشیار	[signature]
	دکتر صدرنیا	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	دانشیار	[signature]

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای/ خانم **سارا حقیقت نیا** بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: [signature]

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: [stamp: دانشکده مهندسی برق و رباتیک]

تقدیم به دو فرشته مهربان زندگی‌ام

پدر و مادر عزیزتر از جانم

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس **خداوند مهربان** را که هرچه دارم از لطف و رحمت اوست. به پایان رساندن این رساله جز به لطف و عنایت **خداوند مهربان**، میسر نبود.

از **پدر و مادر عزیزم** که در زندگی، همیشه عاشقانه و فداکارانه از من حمایت کردند و مشوق من در مسیر علم و دانش بودند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم. از **همسر عزیزم** بخاطر همه همراهی‌ها و صبوری‌هایش از صمیم قلب سپاسگزارم.

از استاد بزرگوار، **جناب آقای دکتر حیدر طوسیان شاندیز** که زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند، خالصانه تشکر می نمایم . از **همه اساتید عزیزم** که در مسیر علم ودانش راهنما من بودند، نهایت قدردانی و تشکر را دارم.

تعهد نامه

اینجانب سارا حقیقت نیا دانشجوی دوره دکتری رشته مهندسی برق گرایش کنترل دانشکده مهندسی برق و رباتیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری کانفورمال برای سیستم‌های آفین تحت راهنمائی دکتر حیدر طوسیان شاندیز متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « *Shahrood University of Technology* » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این رساله کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری مبتنی بر مشتق جدید کانفورمال طراحی گردیده‌اند. همچنین روش مستقیم پایداری لیاپانوف براساس مشتق کانفورمال ارائه شده است. از مزایای اصلی مشتق کانفورمال شباهت آن با مشتقات مرتبه-صحیح و دارا بودن بسیاری از ویژگی‌های مشتقات مرتبه صحیح، که سایر تعاریف مشتق مرتبه-کسری آنها را برآورده نمی‌کنند و در نتیجه، سادگی در محاسبات می‌باشد. با توجه به مزایای این تعریف، استفاده از آن در طراحی کنترل کننده-ها، دریچه‌ای تازه در زمینه کنترل مرتبه-کسری خواهد گشود. در این رساله، ابتدا به منظور بررسی پایداری کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری کانفورمال پیشنهادی، روش مستقیم پایداری لیاپانوف بر اساس مشتق کانفورمال ارائه شده است. در ادامه سه نوع کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری جدید مبتنی بر مشتق کانفورمال پیشنهاد گردیده است. در طراحی این کنترل کننده‌ها صفحات لغزش جدید و توابع کلیدزنی نوین پیشنهاد شده‌اند. روش‌های پیشنهادی ارائه شده در این رساله علاوه بر سادگی در محاسبات طراحی کنترل کننده بخاطر استفاده از مشتق کانفورمال، قادر به بهبود مشخصه‌های کنترلی نظیر افزایش سرعت همگرایی، کاهش تلاش کنترلی و کاهش وزوز می-باشند. همچنین نتایج شبیه سازی تایید کننده کارایی مناسب کنترل کننده‌های پیشنهادی و عملکرد قابل قبول در مواجهه با عدم قطعیت‌های موجود در مدل سیستم و بهبود مشخصه‌های کنترلی می-باشند.

کلمات کلیدی: سیستم‌های غیر خطی آفین، کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری، مشتق مرتبه-کسری کانفورمال، پایداری لیاپانوف.

فهرست مقالات مستخرج از رساله

1. Conformable Fractional Order Sliding Mode Control for a Class of Fractional Order Chaotic Systems, International Journal of Industrial Electronics, Control and Optimization, 2, 3, 177-188, 2019.

2. Design of Fractional Order Sliding Mode Controller for Chaos Suppression of Atomic Force Microscope System, Iranian Journal of Electrical and Electronic Engineering (IJEEE), 02, 222–228, 2019..

3. Design of Nonlinear Conformable Fractional-Order Sliding Mode Controller for a Class of Nonlinear Systems, Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 2019.

4. Using Conformable Fractional Order Operators in the Design of Sliding Mode Controller, 2nd National Seminar on Control and Optimization Shahrood University of Technology 15-16 Novambere, 2018.

5. Design of Fractional Order Sliding Mode Controller for a class of nonlinear systems, 2nd National Seminar on Control and Optimization Shahrood University of Technology 15-16 Novambere , 2018.

۶. طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه کسری برای سیستم آشوب لورنز، دومین سمینار ملی ملی کنترل و بهینه سازی، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱۳۹۷.

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه

۱-۱-   تاریخچه مختصری از محاسبات مرتبه-کسری----------------------------------۲

۱-۲-   مروری بر کارهای گذشته---۳

۱-۳-   نوآوری‌های مهم رساله---۹

۱-۴-   مروری بر ساختار رساله---۹

فصل دوم: محاسبات مرتبه-کسری

۲-۱- مقدمه--۱۲

۲-۲- توابع اولیه عملگرهای مرتبه-کسری--------------------------------------۱۲

۲-۲-۱- تابع گاما--۱۲

۲-۲-۲- تابع میتاگ لفلر--۱۳

۲-۳- مشتق و انتگرال مرتبه-کسری--۱۴

۲-۳-۱ انتگرال مرتبه-کسری ---۱۴

۲-۳-۲ مشتق مرتبه-کسری ریمان لیویل--------------------------------------۱۴

۲-۳-۳ مشتق مرتبه-کسری کاپوتو--۱۵

۲-۳-۴ مشتق مرتبه-کسری گرانوالد-لینیکوف ---۱۵

۲-۴- ویژگی‌های مشتقات مرتبه-کسری متداول---۱۶

۲-۴-۱ تبدیل لاپلاس مشتقات مرتبه-کسری با تعاریف متداول---------------------------------۱۷

۲-۵ مشتق و انتگرال مرتبه-کسری کانفورمال و ویژگی‌های آنها-------------------------------۱۸

۲-۵-۱ تعاریف مشتق و انتگرال مرتبه-کسری کانفورمال-----------------------------------۱۸

۲-۵-۲ ویژگی های مشتق مرتبه-کسری کانفورمال---۱۹

۲-۵-۲-۱ تبدیل لاپلاس مشتق کانفورمال---۲۰

۲-۵-۲-۲- قاعده لایبنیتز---۲۰

۲-۵-۳-۳ قاعده زنجیره‌ای برای مشتق کانفورمال--۲۱

۲-۵-۴- مشتق مرتبه-کسری کانفورمال برخی از توابع مشخص---------------------------------۲۲

۲-۵-۵ مزایای مشتق کانفورمال--۲۳

فصل سوم: پایداری سیستم‌های مرتبه-کسری

۳-۱- مقدمه---۲۶

۳-۲- پایداری سیستم‌های مرتبه-کسری با تعاریف متداول -----------------------------۲۶

۳-۲-۱ پایداری سیستم‌های مرتبه-کسری خطی بر اساس تعاریف متداول------------------------۲۶

۳-۲-۲ پایداری سیستم های غیرخطی مرتبه-کسری متداول-------------------------------۲۸

۳-۲-۳-۱ پایداری میتاگ-لفلر---۲۸

۳-۲-۳-۲ پایداری میتاگ-لفلر تعمیم یافته--۲۸

۳-۲-۴- روش مستقیم لیاپانوف مرتبه-کسری با تعاریف متداول------------------------۲۹

۳-۳ پایداری مرتبه-کسری کانفورمال---۳۰

۳-۳-۱-پایداری سیستم‌های خطی مرتبه-کسری کانفورمال -----------------------------۳۰

۳-۳-۲-روش مستقیم پایداری لیاپانوف مرتبه-کسری تعمیم یافته با تعریف کانفورمال---------۳۱

فصل چهارم: طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری کانفورمال

۴-۱- مقدمه--۳۶

۴-۲- کنترل کننده مد لغزشی--۳۶

۴-۲-۱- طراحی کنترل کننده مد لغزشی --۳۷

۴-۲-۲- مزایا و معایب کنترل کننده مد لغزشی--۳۹

۴-۳- طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتیه-کسری کانفورمال ---------------------------۴۰

۴-۳-۱- کنترل کننده مد لغزشی مرتیه-کسری برای گروهی از سیستم‌های کانفورمال---------۴۱

۴-۳-۱-۱-طراحی کنترل کننده برای گروهی از سیستم های کانفورمال با n ورودی کنترلی----
۴۱

۴-۳-۱-۲ طراحی کنترل کننده برای گروهی از سیستم های کانفورمال با یک ورودی کنترلی---
۵۱

۴-۳-۲ طراحی کنترل کننده برای گروهی از سیستم‌ها با یک ورودی کنترلی----------------۵۴

۴-۳-۳ طراحی کنترل کننده برای یک حالت خاص از سیستم‌ها --------------------------۶۰

فصل پنجم : نتایج شبیه سازی

۵-۱- مقدمه--۶۸

۵-۲- کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری برای گروهی از سیستم‌های کانفورمال -----------۶۸

۵-۳- کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری برای گروهی از سیستم‌های مرتبه-کسری -------۸۵

۵-۴- کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری کانفورمال برای سیستم میکروسکوپ اتمی-------۹۳

فصل ششم : نتیجه گیری و پیشنهادات

۶-۱ نتیجه گیری--۱۰۰

۶-۲پیشنهادات---۱۰۱

فهرست شکل‌ها

شکل ۵-۱: پاسخ سیستم آشوبی لورنز مرتبه-کسری کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۲) و مرجع [۲۷]، الف)-پ) متغیرهای حالت x(t)، y(t) و z(t)، ت) سیگنال کنترلی u(t)، ث) سطح لغزش---۷۱

شکل ۵-۲: پاسخ سیستم آشوبی لورنز مرتبه-کسری کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۲) و مرجع [۲۹]، الف)-پ) متغیرهای حالت x(t)، y(t) z(t)، ت) سیگنال کنترلی u(t)--۷۴

شکل ۵-۳: پاسخ سیستم آشوبی لوتکا-ولترا مرتبه-کسری کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۶) و مرجع [۲۹]، الف)-ب) متغیرهای حالت x(t)، y(t) و z(t)، پ) سیگنال کنترلی u(t)--۷۷

شکل ۵-۴: پاسخ سیستم آشوبی دافینگ-هولمز مرتبه-کسری کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۶) و مرجع [۸۹]، الف)-ب) متغیرهای حالت x(t) و y(t) ؛ پ) سیگنال کنترلی u(t)، ت) سطح لغزش---۸۰

شکل ۵-۵: پاسخ سیستم ژیروسکوپ کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۱۰) و مرجع [۳۰]، الف)-ب) متغیرهای حالت x(t) و y(t) ؛ پ) سیگنال کنترلی u(t) ت) سطح

لغزش--
--------------۸۳

شکل ۵-۶: پاسخ سیستم ژیروسکوپ کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۱۳)، الف)-ب) متغیرهای حالت $x_1(t)$، $x_2(t)$ ، پ) سیگنال کنترلی $u(t)$ ----------------۸۷

شکل ۵-۷: پاسخ سیستم جرم و فنر کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۱۷) و کنترل کننده طراحی شده الف)-ب) متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ پ) سیگنال کنترلی $u(t)$ --۸۹

شکل ۵-۸: پاسخ سیستم آرنئودو کنترل شده الف)-ب) متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ، پ) سیگنال کنترلی $u(t)$------------------------------- -----------------------------------۹۲

شکل ۵-۹: پاسخ سیستم میکروسکوپ اتمی کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۲۶) و کنترل کننده طراحی شده براساس مرجع های [۳۰] و [۸۸] ، الف)-ب) متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ازای کنترل کننده (۵-۱۶) و کنترل کننده بر اساس [۳۰]، پ)-ت) متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ازای کنترل کننده (۵-۱۴) و کنترل کننده بر اساس [۸۸] ، ث) سیگنال کنترلی $u(t)$ کنترل کننده طراحی شده بر اساس [۳۰] ، [۸۸] و (۵-۱۵)------------------۹۷

فهرست جداول

جدول ۵-۱ معیارهای عملکرد --۸۴

فصل اول

مقدمه

۱-۱ تاریخچه مختصری از محاسبات مرتبه-کسری

حدود ۳۰۰ سال پیش حسابان مرتبه-کسری برای اولین بار توسط هوپیتال مورد توجه قرار گرفت. هوپیتال نظر لایبنیتز را در مورد مشتق با مرتبه $\frac{1}{2}$ پرسید. نظر لایبنیتز این بود که "این موضوع منجر به تناقض بزرگی می‌شود، اما بعدها نتایج مفیدی خواهد داشت". از آن زمان تا کنون حسابان کسری مورد توجه ریاضیدانان و محققان قرار گرفت و تا کنون پژوهشگران زیادی در حوزه حسابان کسری مطالعه و تحقیق نموده‌اند [۱-۲]. یکی از مهمترین کاربردهای حسابان کسری، در زمینه مدلسازی سیستم‌ها می‌باشد که بطور گسترده‌ای مورد استقبال دانشمندان قرار گرفته است. در واقع مدل مرتبه-صحیح حالت خاصی از مدل مرتبه-کسری می‌باشد و با استفاده از مدل مرتبه-کسری می‌توان با دقت بیشتری سیستم را توصیف نمود. تا کنون تعاریف متعددی برای مشتقات مرتبه-کسری ارائه شده است که از معروفترین آنها می توان به تعریف کاپوتو و ریمان- لیوویل و گرانوالد-لتنیکوف اشاره کرد[۲-۴]. این تعاریف علی رغم داشتن مزایای متعدد، دارای برخی معایب نیز می-باشند. مهمترین اشکال آنها پیچیدگی در محاسبات است. همچنین، برخی از ویژگی‌های مشتقات مرتبه-صحیح نظیر قاعده زنجیره‌ای[1]، مشتق گیری از تقسیم[2] و قاعده لایبنیتز[3] برای آنها برقرار نمی-باشند. از دیگر اشکالات، مخالف صفر بودن برخی تعاریف مانند مشتق ریمان لیویل، برای مقادیر ثابت می‌باشد[۵-۶]. لذا برای غلبه بر این محدودیت‌ها، خلیل[4] و همکارانش در سال ۲۰۱۴ یک تعریف جدید از مشتق مرتبه-کسری به نام مشتق مرتبه-کسری کانفورمال[5] معرفی نمودند. مشتق کانفورمال، ضمن داشتن مزایای حسابان کسری، سبب سادگی در محاسبات شده و مشابه با مشتق کلاسیک

---

[1] Chain Rule
[2] quotient.
[3] Leibniz Rule
[4] khalil
[5] Conformable fractional order derivative

است و فاقد معایب مذکور، می‌باشد [۶]. لذا این مشتق بشدت مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است که در ادامه به بررسی برخی از مقالات ارائه شده در این زمینه، خواهیم پرداخت.

۱-۲ مروری بر کارهای گذشته

با توجه به اینکه بسیاری از سیستم‌های موجود در طبیعت دارای دینامیک‌های مرتبه-کسری هستند، کاربرد محاسبات کسری در مدلسازی باعث ایجاد مدل‌های دقیقتر با تطابق بیشتر بر سیستم‌هایی نظیر سیستم‌های حرارتی [۷] گردیده است. حتی برای برخی از سیستم‌ها ، مدل‌های مرتبه-صحیح مناسب نمی‌باشند از جمله می‌توان به امپدانس‌های کسری که توسط خازن‌هایی که برای این هدف ساخته می‌شوند، اشاره نمود [۸]. همچنین استفاده از حسابان کسری سبب افزایش درجه آزادی در مدلسازی می‌گردد که افزایش انعطاف پذیری در طراحی، بهبود بهینه سازی و برازش بهتر پارامترها را نتیجه می‌دهد [۹]. بنابراین حسابان کسری به عنوان تعمیمی از حسابان مرتبه-صحیح با وجود پیچیدگی در محاسبات در دهه‌های اخیر بطور گسترده‌ای در زمینه‌های مدلسازی و کنترل سیستم‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. در دهه اخیر، حسابان کسری در مقالات متعددی در زمینه‌های مختلف، از جمله مدلسازی مرتبه-کسری سیستم‌های آشوبی نظیر سیستم آرنئودو [۶] و گنسیوتس [۷] و نیز مدلسازی و تحلیل مدارات و قطعات الکتریکی [۹-۱۱]، سیستم‌های زیستی[۱۲] و اقتصادی [۱۳] مورد استفاده قرار گرفته است که سبب نتایج بهتری نسبت به مدلسازی بر اساس مشتقات مرتبه-صحیح شده است.

در حوزه کنترل نیز در واقع کنترل کننده‌های مرتبه-صحیح حالت خاصی از مرتبه-کسری می‌باشند و استفاده از حسابان کسری، بدلیل افزایش تعداد پارامترهای قابل تنظیم و نیز امکان برقراری مصالحه بین مزایا و معایب استفاده از مشتق و انتگرال در طراحی کنترل کننده‌ها، سبب بهبود عملکرد کنترلی می‌گردد. در نتیجه، در حالت کلی استفاده از کنترل کننده‌های متناظر مرتبه-کسری مناسبتر از نوع

[6] Arneodo's system
[7] Genesio–Tesi's system

مرتبه- صحیح است. نمونه‌هایی از این کاربرد، مراجع [۱۴]، که با روش فرکانسی در حوزه کنترل از حسابان کسری استفاده نموده‌اند، می‌باشند. همچنین، می‌توان به کنترل کننده تناسبی- انتگرالی- مشتق گیر[8] مرتبه-کسری ارائه شده در [۱۵]، اشاره نمود.

کنترل کننده مد لغزشی (SMC) روشی موثر و مورد توجه پژوهشگران در حوزه کنترل مقاوم، برای کنترل سیستم‌ها همراه با عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات می‌باشد. کنترل کننده مد لغزشی برای اولین بار در [۱۶] مطرح گردید. این روش دارای مزایای زیادی از جمله ویژگی مقاوم بودن بالا در برابر عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات، پایداری تضمین شده، طراحی و پیاده سازی ساده می‌باشد. کنترل کننده مد لغزشی ترمینال بطور گسترده‌ای مورد استقبال محققان قرار گرفته است. که از جمله کاربردهای آن می‌توان به کاربرد در کنترل سیستم‌های زیستی نظیر کنترل تومور سرطانی [۱۷]، سیستم‌های قدرت [۱۸]، کنترل ربات‌ها [۱۹] و نظایر آن‌ها اشاره نمود. یکی از اشکالات این روش، سرعت همگرایی پایین است. اگرچه این مشکل با افزایش بهره کنترلی قابل حل است اما این راه حل سبب اشباع سیگنال‌های ورودی می‌شود [۱۹-۲۰]. عدم پایداری مجانبی در زمان محدود، از دیگر مشکلات کنترل کننده مد لغزشی کلاسیک می‌باشد. بهترین راه حل استفاده از کنترل کننده مد لغزشی با سطح لغزش غیر خطی می‌باشد که کنترل کننده مد لغزشی ترمینال گویند[۲۰]. سطح لغزش بر مبنای دینامیک‌های خطا تعریف می‌شود. در کنترل مد لغزشی، در واقع هدف رساندن و نگه داشتن دینامیک‌ها بر روی سطح لغزش است زیرا در این سطح پایداری سیستم تضمین می‌گردد و همچنین در این مرحله عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات تاثیری بر رفتار سیستم نخواهند داشت. اشکال کنترل مد لغزشی ترمینال، سرعت همگرایی پایین برای زمانیکه حالت اولیه سیستم از نقطه تعادل بسیار دور باشد، است. برای حل این مشکل از کنترل کننده‌های مد لغزشی ترمینال سریع استفاده می‌شود. مد لغزش ترمینال سریع بصورت ترکیبی از تابع خطی و تابع ترمینال است [۲۱]. پژوهشگران زیادی به ارائه صفحات لغزش غیر خطی جدید برای طراحی کنترل کننده مد لغزشی بازمان محدود همگرایی و

---

8 Proportional-integral-derivative

با هدف افزایش سرعت همگرایی، پرداخته‌اند و همچنان طراحی کنترل کننده مد لغزشی غیرخطی با همگرایی زمان محدود، برای بهبود مشخصه‌های کنترلی از جمله زمان همگرایی مورد توجه پژوهشگران می‌باشد. به منظور رفع پدیده تکین[۹]، کنترل کننده‌های مد لغزشی غیر تکین[۱۰] ارائه شده‌اند [۲۲]. در مرجع [۲۳]، با در نظر گرفتن مشکل تکین و بهبود سرعت همگرایی یک کنترل کننده جدید ترمینال سریع غیر تکین ارائه شده است. در سال‌های اخیر، روش‌های جدیدی برای حل مشکل وزوز[۱۱] و پدیده تکین ارائه شده است که می‌توان به کنترل کننده‌های مرتبه کامل اشاره نمود [۲۴].

طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-صحیح برای سیستم‌های مرتبه-کسری و یا طراحی کنترل کننده مد لغزشی بر مبنای دینامیک‌های مرتبه-کسری سبب ورود به بحث کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (FOSMC) می‌شود [۲۵]. در دهه‌های اخیر، کنترل کننده مدلغزشی مرتبه-کسری بشدت مورد توجه محققان گرفته است. . در مرجع [۲۶]، یک کنترل کننده مرتبه-کسری مد لغزشی ترمینال جدید برای سیستم مرتبه-صحیح طراحی شده است به طوریکه سبب افزایش سرعت همگرایی و افزایش دقت ردیابی نسبت به مشتق مرتبه-صحیح گردیده است. همچنین، می‌توان به کابردهای مختلفی نظیر کنترل سیستم‌های آشوبی [۲۷-۲۸]، ردیابی سیگنال خروجی [۲۹]، بهبود عملکرد کنترلی کنترل کننده مد لغزشی [۳۰-۳۱] ، کنترل ربات‌ها [۳۲]، اشاره نمود. طراحی کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری می‌توانند عملکرد کنترلی را نسبت به نوع مرتبه-صحیح بهبود دهند که افزایش سرعت همگرایی و عملکرد مقاوم بالاتر در برابر عدم قطعیت‌ها از جمله این مزایا هستند [۳۳]. با وجود مزایای حسابان کسری و کاربرد آن در طراحی کنترل کننده‌ها، کاربرد آن در حوزه کنترل، سبب پیچیدگی محاسباتی در طراحی کنترل کننده و همچنین دشواری در اثبات قضایای پایداری می‌گردد. از دلایل این پیچیدگی‌ها می‌توان به پیچیدگی در محاسبات تعاریف ارائه

[9] singularity
[10] nonsingular
[11] Chattering

شده برای آن‌ها و نیز عدم برقراری بسیاری از روابط پرکاربرد که برای مشتقات مرتبه-صحیح برقرارند، اشاره نمود[۶] و [۳۴]. به عنوان مثال قاعده مشتق زنجیره‌ای رابطه‌ای پرکاربرد در بررسی پایداری سیستم‌ها با روش لیاپانوف می‌باشد که برای حسابان مرتبه-کسری برقرار نمی‌باشد. لذا با توجه به معایب ذکر شده برای مشتقات مرتبه-کسری از جمله ناکارامدی تعاریف ارائه شده برای بدست آوردن راه‌حل‌های تحلیلی و ایجاد تقریب‌های عددی پیچیده، تعریف جدید مشتق مرتبه-کسری به نام مشتق مرتبه-کسری کانفورمال باعث می‌شود ضمن استفاده از مزایای مشتقات مرتبه-کسری برای توصیف دقیقتر و ایجاد درجه آزادی بیشتر برای طراحی کنترل کننده‌ها و در نتیجه ایجاد امکان بهبود در مدلسازی سیستم‌ها و طراحی کنترل کننده‌ها، تا حد زیادی معایب تعاریف ارائه شده و مورد استفاده در حوزه مهندسی نیز برطرف شوند. همانطور که اشاره شد، این تعریف قابل مقایسه با مشتق کلاسیک و دارای محاسبات ساده می‌باشد. از جمله کاربردهای مشتق کانفورمال کاربردهای فیزیکی نظیر، معادله حرارت[۱۲]، مکانیک نیوتن[۱۳]، معادله برگر[۱۴] و غیره می باشند. برای عملگرهای مرتبه-کسری کانفورمال، ویژگی‌های اصلی مشتقات کلاسیک نظیر ضرب ، قانون زنجیره ای، قضیه‌های مقدار میانگین و رول[۱۵] و غیره برقرار هستند.

با توجه به مزایای قابل توجه مشتق کانفورمال، در سال‌های اخیر بشدت مورد توجه محققان قرار گرفته است و علاقه پژوهشگران برای اثبات ویژگی‌های جدیدتر و کاربردهای بیشتر روز به روز افزایش یافته است. از جمله مزایای مشتق کانفورمال می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

۱- مهمترین مزیت مشتق کانفورمال، سادگی محاسباتی است.

۲- در تعاریف متداول برای مشتقات مرتبه-کسری تعاریفی نظیر ریمان لیویل، برای اعداد ثابت نظیر C، مشتق مخالف صفر است، در حالیکه مشتق کانفورمال برای اعدد ثابت، صفر است.

[12] Heat equation
[13] Newonian mechanics
[14] Burger's equation
[15] Rolle and Mean Value Theorems

۳- همه تعاریف مشتقات مرتبه-کسری در رابطه مشتق‌گیری از تقسیم دو تابع صادق نمی‌باشند. در صورتیکه، این قاعده برای مشتق کانفورمال برقرار است.

$$T^{\alpha}(f/g)=\frac{g.T^{\alpha}f-f.T^{\alpha}g}{g^{2}} \qquad (۱-۱)$$

۴- قاعده زنجیره‌ای برای همه تعاریف مشتتقات مرتبه-کسری برقرار نمی باشد. اما برای تعریف کانفورمال برقرار بوده و بصورت زیر می‌باشد:

$$T^{\alpha}(fog)(t)=T^{\alpha}f(g(t)).T^{\alpha}g(t).g(t)^{\alpha-1}=t^{1-\alpha}g'(t)f'(g(t)) \qquad (۲-۱)$$

۵- قاعده لایبنیتز برای مشتق مرتبه-کسری بر قرار نیست. در صورتیکه برای مشتق مرتبه-کسری کانفورمال از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$T^{\alpha}(f(t).g(t))=(T^{\alpha}f(t))g(t)+f(t).(T^{\alpha}(g(t))) \qquad (۳-۱)$$

۶- تابع میتاگ-لفلر نقش مهمی را به عنوان یک تابع نمایی تعمیم یافته در حسابان کسری ایفا می‌کند. در حالیکه تابع نمایی $e^{\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}$ برای محاسبات مرتبه-کسری کانفورمال مورد استفاده است و منتاظر با حالت کلاسیک می‌باشد.

۷- تبدیل لاپلاس کانفورمال متناظر با حالت کلاسیک و مرتبه-صحیح می‌باشد[۳۵].

۸- برای برخی از توابع که براساس سایر مشتقات مرتبه-کسری، دارای بسط سری توانی تیلور حول برخی از مقادیر مشخص نمی‌باشند، با استفاده از تعریف مشتق کانفورمال، می‌توان بسط سری توانی تیلور برای آنها را بدست آورد [۳۵].

در [۳۵-۳۷]، برخی از ویژگی‌های اساسی مشتق و انتگرال مرتبه-کسری با کمک مشتق مرتبه-کسری کانفورمال بررسی شده است. در مرجع [۳۵]، براساس مشتق کانفورمال، مفاهیمی نظیر قاعده زنجیره‌ای، توابع نمایی کانفورمال، بسط سری توانی تیلور ، تبدیل لاپلاس و حل معادلات دیفرانسیل مرتبه-کسری کانفورمال با استفاده از تبدیل لاپلاس ارائه گردیده است. همچنین توانایی مشتق کانفورمال در ارائه بسط تیلور برای توابعی که براساس سایر تعاریف مشتقات مرتبه-کسری در نقاطی

که فاقد بسط تیلور هستند، نشان داده است. خلیل و ابو حامد راه حل انواع مختلف معادلات کانفورمال گرما را در [۳۸] بررسی نموده‌اند و همچنین سری فوریه و کاربردهای آن در [۳۹] معرفی شده است. در مرجع [۴۰]، برای برخی از معادلات دیفرانسیل کانفورمال از جمله معادله موج که دارای حل‌های عددی و یا خیلی طولانی هستند، با استفاده از سری فوریه کسری، حل‌های جالب و ساده ارائه شده است. در مرجع [۴۱]، مشتقات جزئی کانفورمال و ویژگی‌های آنها و همچنین قضیه استوک کانفورمال [۱۶] و قضیه گرین کانفورمال[۱۷] در ارتباط با مشتقات کلاسیک ارائه شده است. در مرجع [۴۲]، حل معادله گرما با استفاده از مشتقات مرتبه-کسری کانفورمال و بدون نیاز به حل عددی ارائه گردیده است. در [۴۳]، راه حل معادله کانفورمال موج بررسی شده است. در مقاله [۴۴]، حل معادله مرتبه-کسری کانفورمال حرارت ارائه شده و مقایسه‌ای بین راه حل‌های موجود برحسب مشتق مرتبه-کسری گرانوالد لیتنیکوف و راه حل برحسب مشتق مرتبه-کسری کانفورمال صورت گرفته است. در این مقاله، نتایج محاسباتی موفقیت آمیز بودن فرمولبندی کانفورمال را در توصیف رفتار فرآیند حرارتی، نشان می‌دهند. همچنین، حل بر اساس مشتق کانفورمال، می‌تواند توسط یک روش تحلیلی مستقیم بدون نیاز به هرگونه محاسبات عددی و هرگونه محدودیتی در فرمولبندی مساله، بدست آید. بدین ترتیب در این مقاله مزیت مشتق کانفورمال در راه حل معادله حرارت نسبت به مشتق گرانوالد-لیتنیکوف در حل معادله حرارت نشان داده شده است. در [۴۵]، دینامیک مواد کشسان به کمک مشتق مرتبه-کسری کانفورمال مورد بررسی قرار گرفته است. در [۴۶]، رویکرد متفاوتی به کمک تغییر متغیر برای حل معادلات با مشتقات جزیی کانفورمال استفاده شده است. در [۴۷] دو روش تغییر متغیر برای حل معادلات با مشتقات جزیی مرتبه-کسری کانفورمال ارایه گردیده است. در [۴۸]، رویکردی متفاوت برای حل معادلات با مشتقات جزئی همراه با شرایط اولیه مرتبه-کسری کانفورمال به کمک روش‌های تجزیه آدومیان و هموتوپی ارایه شده است. در [۴۹]، معادلات نیوتنی در فیزیک با رویکرد حسابان مرتبه-کسری با مشتق کسری کانفورمال مجددا مدل سازی وحل

[16] conformable Stokes' theorem
[17] conformable Green's theorem

شده‌اند. در [۵۰]، یک جواب تصادفی برای معادلات کوشی مرتبه-کسری کانفورمال ارایه شده است. تا کنون مقالات بسیار کمی در زمینه پایداری و مدلسازی براساس مشتق مرتبه-کسری کانفورمال ارائه شده است [۵۱-۵۲]. و همچنین کاربرد این تعریف جالب و ساده در حوزه کنترل موضوعی بسیار جدید است. در [۵۳]، حل معادلات انتگرالی مرتبه-کسری با شرایط مرزی به کمک تعریف مشتق کسری کانفورمال بررسی شده است. در [۵۴]، قضیه وجود تبدیل لاپلاس کانفورمال بیان شده است .

۱-۳ – نوآوری های مهم مساله

نوآوری‌های اساسی مساله در این رساله به شرح زیر می باشند:

۱- توسعه و بکارگیری روش مستقیم پایداری لیاپانوف مرتبه-کسری بر اساس تعریف مشتق مرتبه-کسری کانفورمال

۲- به کارگیری مشتق کانفورمال در طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری برای سیستم‌های غیر خطی آفین در حضور اغتشاشات و عدم قطعیت‌ها

۳- پیشنهاد کنترل کننده جدید مرتبه-کسری کانفورمال برای سیستم‌های غیر خطی آفین مرتبه-کسری در حضور اغتشاشات و عدم قطعیت‌ها

۴- پیشنهاد کنترل کننده مدلغزشی مرتبه-کسری جدید برای گروهی از سیستم‌های غیر خطی آفین مرتبه-صحیح در حضور اغتشاشات و عدم قطعیت‌ها

۵- بهبود مشخصه‌های کنترلی نظیر افزایش سرعت همگرایی، کاهش وزوز و کاهش تلاش کنترلی

۱-۴ مروری بر ساختار رساله

ساختار کلی این رساله به شرح زیر است:

در فصل دوم توابع اولیه عملگرهای کسری، تعاریف انتگرال و مشتق مرتبه-کسری و ویژگی‌های آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این مفاهیم، معایب آنها، بررسی و ضرورت تعریف مشتق جدید کانفورمال بیان شده است.

قضایای اساسی پایداری سیستم‌های مرتبه-کسری در فصل سوم مورد بررسی قرار گرفته است. سپس قضیه پایداری لیاپانوف در روش مستقیم بر اساس تعریف مشتق مرتبه-کسری کانفورمال مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

فصل چهارم به معرفی و بررسی مزایا و معایب روش کنترل مد لغزشی و طراحی کنترل کننده‌های مرتبه-کسری غیر خطی پیشنهادی پرداخته شده است.

در فصل پنجم، نتایج حاصل از شبیه سازی کنترل کننده‌های پیشنهادی بر روی سیستم‌های غیرخطی آفین مختلف مرتبه-صحیح و مرتبه-کسری با تعاریف متداول و تعریف کانفورمال، شبیه سازی شده است و مقایسه بین روش پیشنهادی با روش‌های ارائه شده، انجام شده است.
در فصل آخر نیز نتایج و پیشنهادات ارائه گردیده است.

فصل دوم

محاسبات مرتبه-کسری و ویژگی‌های آن

۲-۱ مقدمه

در این فصل، تعاریف ضروری و برخی از توابع مهم در حسابان کسری، از جمله تعاریف متداول ارائه شده برای مشتق و انتگرل مرتبه-کسری و نیز بطور خاص مشتقات مرتبه-کسری کانفورمال مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. همچنین برخی ویژگی‌های اساسی تعاریف رایج مشتقات مرتبه-کسری و نیز مشتق مرتبه-کسری کانفورمال بیان شده است.

۲-۲ توابع اولیه عملگرهای مرتبه-کسری

در این بخش، توابع مهم و پرکاربرد عملگرهای مرتبه-کسری ارائه می‌شوند.

۲-۲-۱ تابع گاما

یکی از توابع پرکاربرد و معروف در حسابان کسری تابع گاما می‌باشد که در ادامه تعریف شده است[۲]:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \qquad (۲-۱)$$

در واقع این تابع همان تعمیم تابع فاکتوریل می‌باشد. به طوریکه به ازاء $\mathrm{Re}(z)>0$ همگرا می‌شود و تحلیلی می‌باشد.

برای $\mathrm{Re}(z)>0$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (۲-۲)$$

برای $z=1$، $\Gamma(1)$ داریم:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = 1 \qquad (۲-۳)$$

با توجه به رابطه (۲-۳)، با محاسبه تابع گاما برای اعداد طبیعی می‌توان تابع فاکتوریل را بصورت زیر بدست آورد.

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1!\\
&\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2!\\
&\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3!'\\
&\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!,\quad n\in N
\end{aligned}
\tag{۴-۲}
$$

۲-۲-۲ تابع میتاگ لفلر

یکی دیگر از توابع مهم و اساسی در حسابان کسری، تابع میتاگ لفلر[۱۸] می‌باشد که در واقع همان تعمیم تابع نمایی است. این تابع بصورت زیر تعریف می‌شود [۲].

$$
E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \tag{۵-۲}
$$

به طوریکه $z,\alpha\in C$ و $\mathrm{Re}(\alpha)>0$.

فرم تعمیم یافته دو پارامتری تابع میتاگ لفلر بصورت زیر می‌باشد:

$$
E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{۶-۲}
$$

به طوریکه $z,\alpha,\beta\in C$، $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ و $\mathrm{Re}(\beta)>0$.

همچنین تابع میتاگ لفلر تعمیم یافته[۱۹] سه پارامتری بصورت زیر می باشد [۲].

$$
E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{z^k}{k!} \tag{۷-۲}
$$

در حالیکه $z,\alpha,\beta,\gamma\in C$، $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ و $\mathrm{Re}(\beta)>0$.

از رابطه (۲-۷)، برای بدست آوردن برخی از تبدیل لاپلاس‌های مهم مرتبط با توابع میتاگ-لفلر می-توان استفاده نمود.

---

[18] Mittag-Leffler
[19] Generalized Mittag-Leffler

۲-۳ مشتق و انتگرال مرتبه-کسری

در محاسبات کسری، تا کنون تعاریف متعددی برای مشتقات مرتبه-کسری ارائه شده است که در واقع این تعاریف تعمیمی از مشتقات مرتبه-صحیح می‌باشند. از بین این تعاریف، سه تعریف معروف و پرکاربرد عبارتند از، تعریف ریمان لیویل[۲۰] *(RL)* ، گرانوالد لیتنیکوف[۲۱] *(GL)* و تعریف کاپوتو[۲۲] (Caputo).

۲-۳-۱ انتگرال مرتبه-کسری

برای تابع پیوسته $f(t)$با در نظر گرفتن تعریف ریمان-لیویل، انتگرال مرتبه-کسری بصورت زیر می-باشد [۵۶]:

$$D_{0,t}^{-\alpha} f(t) = I_{0,t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \qquad (۲-۸)$$

در حالیکه $\alpha \in R^+$ و عملگر $D_{0,t}^{-\alpha}$ نماد انتگرال مرتبه-کسری از مرتبه α و در بازه $[0,t]$ می‌باشد.

۲-۳-۲ مشتق مرتبه-کسری ریمان لیویل

برای تابع $f(t)$ و با در نظر گرفتن $m-1 \le \alpha < m \in Z^+$ و m کوچکترین عدد صحیح بزرگتر مساوی α، مشتق مرتبه- کسری ریمان-لیویل بصورت زیر تعریف می‌گردد [۵۶]:

$$_{RL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} D_{0,t}^{-(m-\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}} d\tau \qquad (۲-۹)$$

---

[20] Riemann-Liouville
[21] Grunwald-Letnikov
[22] Caputo

۲-۳-۳ مشتق مرتبه-کسری کاپوتو

مشتق مرتبه-کسری کاپوتو از مرتبه α به طوریکه $m-1<\alpha<m$ و m کوچکترین عدد صحیح بزرگتر مساوی α است، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$_{C}D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}d\tau \qquad (۲-۱۰)$$

مشتق کاپوتو در ترتیب اعمال عملگرهای مشتق مرتبه-صحیح و انتگرال مرتبه-کسری با مشتق ریمان-لیویل تفاوت دارد که در نتیجه اشکال اصلی مشتق مرتبه-کسری ریمان لیویل مربوط به تعیین شرایط اولیه، در تعریف کاپوتو بر طرف می‌شود. در مشتق مرتبه-کسری ریمان لیویل برای تعیین شرایط اولیه باید رابطه $[D_{0,t}^{\alpha-k-1}f(t)]_{t=0}$ تعیین گردد که تفسیر فیزیکی و محاسبه آن دشوار و گاهی غیرممکن است[۵۶]. در صورتیکه در مشتق کاپوتو تعیین شرایط اولیه مشابه به مشتق مرتبه-صحیح است. همچنین بر خلاف سایر تعاریف متداول مشتقات مرتبه-کسری، مشتق مرتبه-کسری کاپوتو برای یک عدد ثابت صفر است. همچنین در حالت کلی داریم:

$$_{C}D_{0,t}^{\alpha}f(t)\neq {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}f(t) \qquad (۲-۱۱)$$

۲-۳-۴ مشتق مرتبه-کسری گرانوالد لتنیکوف

مشتق مرتبه-کسری گرانوالد-لتنیکوف با مرتبه-کسری α و $m-1\leq\alpha<m\in Z^{+}$، بصورت زیر تعریف می‌شود[۵۶]:

$$_{GL}D_{0,t}^{\alpha}f(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{k}(0)t^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{f^{m}(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}}d\tau \qquad (۲-۱۲)$$

در واقع تعریف اصلی مشتق گرانوالد-لیتنیکوف بر اساس تعریف حدی مشتق، بصورت زیر تعریف می-شود:

$$ {}_{GL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ ,nh=t}} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \binom{\alpha}{r} f(t-rh) \qquad (۲-۱۳) $$

با توجه به اینکه برای گروهی از توابع که دارای مشتقات پیوسته می‌باشند، تعاریف گرانوالد-لیتنیکوف و ریمان لیوویل معادل هستند[۵۶]، لذا در این رساله با فرض به اندازه کافی نرم بودن تابع *f(t)*، مشتق گرانوالد لتنیکوف و ریمان لیویل معادل هم در نظر گرفته می‌شوند و تمرکز برمشتقات کاپوتو و ریمان لیویل و مشتق کانفورمال به عنوان تعریف جدید قرار دارد. این مشتقات را به ترتیب با نمادهای ${}_{C}D^{\alpha}$ ، ${}_{RL}D^{\alpha}$ و T^{α} نمایش می‌دهیم.

۲-۴ ویژگی‌های مشتقات مرتبه-کسری متداول

برای تعاریف متداول مشتقات مرتبه-کسری نظیر کاپوتو، ریمان لیویل ویژگی‌های زیر برقرار است.

خاصیت ۲-۱ (خاصیت خطی)

الف- مشتق ریمان لیویل

$$ {}_{RL}D^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda\, {}_{RL}D^{\alpha}(f(t)) + {}_{RL}D^{\alpha}(g(t)) \qquad (۲-۱۴) $$

به طوریکه λ یک عدد ثابت است.

ب- مشتق کاپوتو

$$ {}_{C}D^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda\, {}_{C}D^{\alpha}(f(t)) + {}_{C}D^{\alpha}(g(t)) \qquad (۲-۱۵) $$

درحالیکه λ یک عدد ثابت باشد.

خاصیت ۲-۲ (رابطه بین مشتقات مرتبه-کسری متداول) [۵۶].

الف- برای توابعی بصورت $f(t) \in C^{m}[0,t]$ ، رابطه زیر برای آنها برقرار است.

$$ {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) = {}_{GL}D_{0,t}^{\alpha} f(t) \qquad (۲-۱۷) $$

ب- همچنین برای توابعی بصورت $f(t) \in C^{m}[0,\infty)$ و $m-1<\alpha<m\in Z^{+}$، داریم:

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}f(t)={}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^{k}}{k!}f^{(k)}(0)\right) \quad (۱۸-۲) $$

خاصیت ۲-۳ (خاصیت توالی عملگر مشتق و انتگرال مرتبه-کسری) [۵۶].

به ازای $f(t)\in C^{m}[0,\infty)$ و $m-1<\alpha<m\in Z^{+}$، می‌توان نوشت:

الف- تعریف کاپوتو

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}D_{0,t}^{-\alpha}f(t)=f(t) \quad (۱۹-۲) $$

$$ D_{0,t}^{-\alpha}\,{}_{C}D_{0,t}^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^{k}}{k!}f^{(k)}(0) \quad (۲۰-۲) $$

ب- تعریف ریمان لیویل

$$ {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}D_{0,t}^{-\alpha}f(t)=f(t) \quad (۲۱-۲) $$

$$ D_{0,t}^{-\alpha}\,{}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}f(t)=f(t)-[D_{0,t}^{\alpha-k}f(t)]_{t=0}\frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \quad (۲۲-۲) $$

خاصیت ۲-۴ (خاصیت مشتق گیری از عدد ثابت) [۵۶].

به ازای هر عدد ثابت C :

الف- برای تعریف کاپوتو داریم :

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}C=0 \quad (۲۳-۲) $$

ب- برای تعریف ریمان لیویل داریم:

$$ {}_{RL}D_{0,t}^{\alpha}C=\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} \quad (۲۴-۲) $$

لازم به ذکر است مقدار این دو مشتق در لحظات اولیه صفر نبوده اما در حالت دائمی باهم برابرند.

۲-۴-۱- تبدیل لاپلاس مشتقات مرتبه-کسری با تعاریف متداول

برای $n-1<\alpha<n$ ، تبدیل لاپلاس برای مشتقات مرتبه –کسری بصورت زیر تعریف می‌شود.

الف- مشتق ریمان لیویل

$$L\{_{RL}D^{\alpha}f(t)\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{k}[D^{\alpha-k-1}f(t)]_{t=0} \tag{۲-۲۵}$$

ب- مشتق کاپوتو

$$L\{_{C}D_{*}^{\alpha}f(t)\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0)|_{t=0} \tag{۲-۲۶}$$

۲-۵ مشتق و انتگرال مرتبه-کسری کانفورمال و ویژگی‌های آنها

با توجه به معایب محاسبات مرتبه-کسری، تعریف جدیدی به نام مشتق مرتبه-کسری کانفورمال در سال ۲۰۱۴ ارائه شد. این تعریف دارای محاسبات ساده است و همچنین برخی از ویژگی‌های عملگرهای مرتبه-صحیح، که مشتقات مرتبه-کسری متداول ندارند، را دارا می‌باشد.

۲-۵-۱ تعاریف مشتق و انتگرال مرتبه-کسری کانفورمال

تعریف۲-۱ (مشتق مرتبه-کسری کانفورمال) برای تابع $f:[0\ \infty)\to R$. مشتق مرتبه-کسری کانفورمال تابع f از مرتبه α بصورت زیر تعریف می‌شود [۶].

$$T^{\alpha}(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} \tag{۲-۲۷}$$

برای هر $t>0$ و $\alpha\in(0,1)$.

اگر تابع f مشتق پذیر مرتبه α در بازه $(0,a)$ باشد و $a>0$ و $\lim_{t\to 0^{+}}f^{(\alpha)}(t)$ وجود داشته باشد، رابطه زیر تعریف می‌شود :

$$f^{(\alpha)}(0)=\lim_{t\to 0^{+}}f^{(\alpha)}(t) \tag{۲-۲۸}$$

همچنین، اگر تابع f مشتق پذیر و $\alpha\in(0,1]$ باشد، داریم:

$$T^{\alpha}(f)(t)=t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t) \qquad (۲-۲۹)$$

برای اثبات (۲-۲۹) ،اگر فرض شود $h=\varepsilon t^{1-\alpha}$ باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$T^{\alpha}(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{ht^{\alpha-1}}$$
$$=t^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t) \qquad (۲-۳۰)$$

تعریف۲-۲ (انتگرال مرتبه-کسری کانفورمال) انتگرال مرتبه-کسری کانفورمال بصورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$I_{t_0}^{\alpha}(f)(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx \qquad (۲-۳۱)$$

۲-۵-۲ ویژگی‌های مشتق مرتبه-کسری کانفورمال

برخی از ویژگی‌های مهم مشتقات مرتبه-کسری کانفورمال بصورت زیر می‌باشند [۳۵،۴۱،۶]:

خاصیت ۲-۵ (خاصیت خطی)

$$T^{\alpha}(\lambda f(t)+g(t))=\lambda T^{\alpha}f(t)+T^{\alpha}g(t) \qquad (۲-۳۲)$$

به طوریکه λ عدد ثابت است.

خاصیت ۲-۶ (مشتق عدد ثابت)

برای $f(t)=c$ و c عدد ثابت ، داریم:

$$T^{\alpha}f(t)=0 \qquad (۲-۳۳)$$

خاصیت ۲-۷ (خاصیت توالی عملگر مشتق و انتگرال مرتبه-کسری)[۶].

برای هر تابع پیوسته f در دامنه I_{t_0} و به ازای $t>t_0$ و $\alpha\in[0,1)$ ، داریم [۶] :

$$T_{t_0}^{\alpha}(I_{t_0}^{\alpha}(f))(t)=f(t) \qquad (۲-۳۴)$$

اگر $t>t_0$ و $\alpha\in(0,1)$ و f مشتق پذیر مرتبه αام در بازه $[t_0,\infty)$ باشد، داریم [۳۵]:

$$I_{t_0}^{\alpha}T_{t_0}^{\alpha}f(t)=f(t)-f(t_0) \qquad (۳۵-۲)$$

خاصیت ۲-۸ (خاصیت توزیع پذیری)

برای هر $a,b\in R$ داریم:

$$T^{\alpha}(af+bg)=aT^{\alpha}(f)+bT^{\alpha}(g) \qquad (۳۶-۲)$$

خاصیت ۲-۹ (خاصیت مشتق گیری از ضرب دو تابع)

$$T^{\alpha}(f.g)=f.T^{\alpha}(g)+g.T^{\alpha}(f) \qquad (۳۷-۲)$$

خاصیت ۲-۱۰ (خاصیت مشتق گیری از تقسیم دو تابع)

$$T^{\alpha}(f/g)=\frac{gT^{\alpha}(f)+fT^{\alpha}(g)}{g^{2}} \qquad (۳۸-۲)$$

۲-۵-۲-۱ تبدیل لاپلاس مشتق کانفورمال [۵۱]

$$L\{T^{\alpha}f(t).\}=sF^{\alpha}(s)-f(0) \qquad (۳۹-۲)$$

به طوریکه $0<\alpha<1$ و $f(t)$ تابعی مشتق پذیر و حقیقی و $F^{\alpha}(s)=L\{f((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})\}(s)$ باشد

۲-۵-۲-۲ قاعده لایبنیتز[۲۳]

برای مشتق کانفورمال، قاعده لایبنیتز بصورت زیر ارائه شده است[۵].

$$T^{\alpha}(f(t).g(t))=(T^{\alpha}f(t))g(t)+f(t).(T^{\alpha}(g(t))) \qquad (۴۰-۲)$$

به طوریکه $0<\alpha<1$ و $f(t)$ و $g(t)$ مشتق پذیر باشند.

---

[23] Leibniz rule

۲-۵-۲-۳ قاعده زنجیره‌ای برای مشتق کانفورمال [24] [۳۵]

$$T^{\alpha}(fog)(t) = T^{\alpha} f(g(t)).T^{\alpha} g(t).g(t)^{\alpha-1} = t^{1-\alpha} g'(t) f'(g(t)) \qquad (۲-۴۱)$$

قضیه ۲-۱ (قضیه رول[25] برای توابع مشتق پذیر مرتبه-کسری کانفورمال) [۶]

اگر $a > 0$ و $f:[a,b] \to R$ در شرایط زیر صادق باشد، آنگاه وجود دارد $C \in (a,b)$، به طوریکه $f^{\alpha}(C) = 0$.

۱. f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد.

۲. f مشتق پذیر مرتبه α باشد، بطوریکه $\alpha \in (0,1)$.

۳. $f(a) = f(b)$.

قضیه ۲-۲ (مقدار میانگین برای توابع مشتق پذیر مرتبه-کسری کانفورمال)[۶]

فرض کنید $\alpha > 0$ و $f:[a,b] \to R$ به طوریکه دارای شرایط زیر باشد.

۱- f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد.

۲- f به ازای مقادیری از α به طوریکه $\alpha \in (0,1)$ از مشتقپذیر مرتبه α باشد.

آنگاه، وجود دارد C و $C \in (a,b)$ ، به طوریکه $f^{(\alpha)}(C) = \dfrac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha} b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha} a^{\alpha}}$.

گزاره ۲-۱ . فرض کنید $f:[a,b] \to R$ و به ازای مقادیری از α به طوریکه $\alpha \in (0,1)$، مشتق پذیر مرتبه α باشد،

الف- اگر f^{α} در بازه $[a,b]$ کراندار باشد به طوریکه $a > 0$، آنگاه f بطور یکنواخت، در بازه $[a,b]$ پیوسته است و بنابراین f کراندار است.

ب- اگر f^{α} در بازه $[a,b]$ کراندار باشد و در نقطه a پیوسته باشد، آنگاه f بطور یکنواخت[26] ، در بازه $[a,b]$ پیوسته است، و بنابراین f کراندار است [۶].

[24] Chain rule
[25] Rolle 's Theorem

تعریف ۲-۳ (تبدیل لاپلاس کانفورمال)

فرض کنید $0<\alpha\leq 1$ باشد و $f:[0,\infty)\to R$ تابع حقیقی باشد. تبدیل لاپلاس مرتبه α تابع f با مقدار اولیه t_0، بصورت زیر تعریف می شود [۳۵و ۵۴]:

$$L_{t_0}^{\alpha}\{f(t)\}(s)=F_{t_0}^{\alpha}(s)=\int_{t_0}^{\infty}e^{-s\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}}f(t)d_{\alpha}(t,t_0)=\int_{t_0}^{\infty}e^{-s\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}}f(t)(t-t_0)^{\alpha-1}dt \qquad (۴۲-۲)$$

که این تعریف را بر حسب تعریف لاپلاس معمولی، می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$F_{t_0}^{\alpha}(s)=L\{f(t_0+(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})\}(s) \qquad (۴۳-۲)$$

به طوریکه $L\{g(t)\}(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}g(t)\,dt$.

۲-۵-۴ مشتق مرتبه-کسری کانفورمال برخی از توابع مشخص

مشتق مرتبه-کسری کانفورمال برخی از توابع مشخص به صورت زیر می‌باشد [۶].

۱- $T^{\alpha}(t^{p})=pt^{p-\alpha}$ برای هر $p\in R$

۲- $T_{\alpha}(c)=0$، به طوریکه c یک عدد ثابت باشد

۳- $T^{\alpha}(e^{cx})=cx^{1-\alpha}e^{cx},\quad c\in R$

۴- $T^{\alpha}(\sin bx)=bx^{1-\alpha}\cos bx$ و $b\in R$

۵- $T^{\alpha}(\cos bx)=-bx^{1-\alpha}\sin bx, b\in R$

۶- $T^{\alpha}(\frac{1}{\alpha})t^{\alpha}=1$

۷- $T^{\alpha}(\sin\frac{1}{\alpha}t^{\alpha})=\cos\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$

۸- $T^{\alpha}(\cos\frac{1}{\alpha}t^{\alpha})=-\sin\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$

---
[26] Uniformly

۹- $T^{\alpha}(e^{\frac{1}{\alpha}t}) = e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}$

۲-۵-۵ مزایای مشتق کانفورمال

همانطور که قبلا اشاره شد، با توجه به معایب مشتقات مرتبه-کسری متداول نظیر عدم برقراری قاعده زنجیره‌ای و لایبنیتز [۴۹]، عدم وجود خاصیت‌هایی نظیر مشتق‌گیری از تقسیم[۲۷]، از مزایای مشتق کانفورمال می‌توان به حذف معایب مذکور ، سادگی محاسباتی و نقش مهم آن در ساده کردن تحلیل-ها، اشاره نمود [۲]. بنابراین مزایای مهم مشتق کانفورمال را می‌توان بصورت زیر جمعبندی کرد.

۱- مشتق کانفورمال دارای محاسبات ساده می‌باشد.

۲- مشتق کانفورمال برای اعدد ثابت صفر است.

۳- رابطه مشتق‌گیری از تقسیم دو تابع برای مشتق کانفورمال برقرار است.

$$T^{\alpha}(f/g) = \frac{g.T^{\alpha} f - f.T^{\alpha} g}{g^2} \qquad (۲-۴۵)$$

۴- قاعده زنجیره‌ای برای تعریف مشتق کانفورمال برقرار بوده و بصورت زیر می‌باشد:

$$T^{\alpha}(fog)(t) = T^{\alpha} f(g(t)) T^{\alpha} g(t).g(t)^{\alpha-1} = t^{1-\alpha} g'(t) f'(g(t)) \qquad (۲-۴۶)$$

۵- قاعده لایبنیتز که برای مشتق مرتبه-کسری بر قرار نبوده و بخاطر ایجاد کران نامحدود سبب افزایش تعداد جملات شده که خود سبب پیچیدگی در محاسبات می‌شود [۳۴]. در صورتیکه برای مشتق مرتبه-کسری کانفورمال از رابطه (۲-۴۰) قابل محاسبه است.

۶- مشابه مشتقات مرتبه-صحیح، تابع نمایی $e^{\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}$ برای محاسبات مرتبه-کسری کانفورمال استفاده می‌گردد [۳۵].

[27] quotient.

۷- تبدیل لاپلاس براساس مشتقات کسری کانفورمال مشابه با حالت کلاسیک ارائه شده است[۳۵].

۸- امکان نوشتن بسط سری توانی تیلور برای برخی از توابع حول برخی از مقادیر مشخص که دارای بسط سری تیلور بر اساس سایر تعاریف مشتقات مرتبه-کسری نیستند، را فراهم می-کند[۳۵].

فصل سوم

پایداری سیستم‌های مرتبه-کسری

۳-۱ مقدمه

در این فصل پایداری سیستم‌های مرتبه-کسری بر اساس تعاریف رایجی که تا کنون برای مشتقات مرتبه-کسری ارائه شده است با تمرکز بر تعریف پرکاربرد کاپوتو و همچنین بر اساس تعریف مشتق مرتبه-کسری کانفورمال مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، برخی از قضایای مهم مربوط به پایداری سیستم‌های مرتبه-کسری خطی و غیر خطی و با تمرکز بر سیستم‌های غیر خطی ارائه شده است. قضایا و تحلیل‌های پایداری ارائه شده، بررسی و تحلیل پایداری سیستم‌های غیر خطی در این فصل براساس مراجع [۵۱، ۵۵ و ۵۹- ۶۴ و ۹۰] می‌باشد. همچنین بطور مجزا پایداری براساس قضیه لیاپانوف و بر اساس مشتق مرتبه-کسری کانفورمال ارائه شده است. در نهایت نتایج بدست آمده از این فصل برای طراحی کنترل کننده مرتبه-کسری در فصل آینده مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۳-۲ پایداری سیستم‌های مرتبه-کسری با تعاریف متداول

در این بخش پایداری سیستم‌های مرتبه-کسری بر اساس تعاریف مشتقات متداول بررسی می-گردد.

۳-۲-۱ پایداری سیستم‌های مرتبه-کسری خطی بر اساس تعاریف متداول

با توجه به کاربرد گسترده کاپوتو در بین تعاریف متداول ارائه شده در حوزه مهندسی، تمرکز بر تعریف کاپوتو می‌باشد.

سیستم خطی مرتبه-کسری با ورودی صفر زیر را در نظر بگیرید:

$$ {}_{C}D_{0,t}^{\alpha} x(t) = Ax(t) \qquad (۳-۱)$$

که در آن $0<\alpha<1$، $x\in R^{n}$ و $A\in R^{n\times n}$ و شرایط اولیه آن بصورت $x(0)=x_0$ می‌باشد. این سیستم پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر نامعادله زیر به ازای تمامی مقادیر ویژه ماتریس A برقرار باشد [۵۹]:

$$\left|\arg\left(eig\left(A\right)\right)\right|>\alpha\pi/2 \qquad (۳-۲)$$

همچنین این سیستم پایدار است، اگر و تنها اگر، در رابطه (۳-۳) صادق باشد و مقادیر ویژه ای که در رابطه $\left|\arg(eig(A))\right|=\frac{\alpha\pi}{2}$ برقرار هستند متناظر با یک بردار ویژه مستقل باشند.

$$\left|\arg\left(eig\left(A\right)\right)\right|\geq\alpha\pi/2 \qquad (۳-۳)$$

سیستم نامتناسب[۲۸] زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}_C D^{\alpha_1}x_1(t)=a_{11}x_1(t)+\ldots+a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ {}_C D^{\alpha_1}x_n(t)=a_{n1}x_1(t)+\ldots+a_{nn}x_n(t) \end{cases} \qquad (۳-۴)$$

اگر $\alpha_i=\frac{v_i}{u_i}$ به طوریکه v_i و u_i نسبت بهم اول باشند، در نظر بگیریم، معادله مشخصه سیستم (۳-۴) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta(\lambda)=\left|\lambda^{K\alpha_i}I-A\right| \qquad (۳-۵)$$

که در آن K کوچکترین مضرب مشترک مقادیر u_i است. اگر تمامی ریشه‌های معادله $\det\left(\Delta(\lambda)\right)=0$ در رابطه زیر صادق باشند، سیستم پایدار مجانبی است [۵۵، ۶۰، ۹۰].

$$\left|\arg(\lambda)\right|>\pi/2K \qquad (۳-۶)$$

ملاحظه ۳-۱ پایداری برای سیستم‌های خطی مرتبه-کسری با تعریف مشتق ریمان لیویل مشابه مشتق کاپوتو قابل بررسی می‌باشد.

[28] Incommensurate

۳-۲-۳ پایداری سیستم‌های غیرخطی مرتبه-کسری با تعاریف متداول

سیستم مرتبه-کسری زیر با تابع تکه‌ای پیوسته در t و لیپشیتز محلی در x بر روی بازه $[t_0 \ \infty] \times D$ را در نظر بگیرید:

$$ {}_C D^{\alpha}_{t_0,t} x(t) = f(x,t) \qquad (۳-۷) $$

به طوریکه $\alpha \in (0,1)$، $x(t_0)$ شرایط اولیه ، x_{eq} نقطه تعادل و $f(t):[t_0,\infty] \times D \to R^n$ در حالیکه $D \in R^n$ ناحیه‌ای که مبدا را در بر می‌گیرد، باشند.

تعریف ۳-۱ (نقطه تعادل): نقطه تعادل سیستم (۳-۷) با تعریف مشتق کاپوتو از رابطه $f(t, x_{eq}) = 0$ بدست می‌آید. [۶۴].

۳-۲-۳-۱ پایداری میتاگ-لفلر

سیستم (۳-۷) را در نظر بگیرید، اگر نامساوی زیر برقرار باشد، پاسخ حاصل از حل معادله سیستم، پایدار میتاگ-لفلر است [۶۳].

$$ \|x(t)\| \le \{ p[x(t_0)] E_0(-\lambda (t - t_0)^{\alpha}) \}^{b} \qquad (۳-۸) $$

که در آن $0 \ge \lambda$، $0 < b$، $p(0)=0$ ، $p(x) \ge 0$ و در ناحیه $x \in B \in R^n$ لیپشیتز (با ثابت p_0) است.

۳-۲-۳-۲ پایداری میتاگ-لفلر تعمیم یافته

سیستم (۳-۷) به ازای $\alpha \in (0,1)$ در نظر بگیرید. اگر جواب مربوط به معادله این سیستم در رابطه زیر صادق باشد، به طوریکه $-\alpha < \gamma \le 1-\alpha$، $0 \ge \lambda$، $b > 0$ و $p(0)=0$ و $p(x) \ge 0$ در ناحیه $x \in B \in R^n$ لیپشیتز (با ثابت p_0) باشند، پایدار میتاگ-لفلر تعمیم می‌باشد [۶۴].

$$ \|x(t)\| \le \{ p[x(t_0)](t - t_0)^{-\gamma} E_{\alpha,1-\gamma}(-\lambda (t - t_0)^{\alpha}) \}^{b} \qquad (۳-۹) $$

ملاحظه ۳-۲ پایداری توانی در واقع حالت خاصی از پایداری میتاگ-لفلر است. اگر در شرط پایداری میتاگ-لفلر تعمیم یافته، $\lambda = 0$ شود، آنگاه شرط پایداری میتاگ-لفلر تعمیم یافته بصورت رابطه (۳-۱۰) تبدیل می‌شود که به آن پایداری توانی[۲۹] گویند [۶۴].

$$\|x(t)\| \le [\frac{p[x(t_0)]}{\Gamma(1-\gamma)}]^b (t-t_0)^{-\gamma b} \qquad (۱۰-۳)$$

به طوریکه $-\alpha < \gamma \le 1-\alpha$، $b>0$ و $p(0)=0$ و $p(x)\ge 0$ در ناحیه $x \in B \in R^n$ لیپشیتز (با ثابت p_0) باشند.

ملاحظه ۳-۳ پایداری میتاگ-لفلر و پایداری میتاگ-لفلر تعمیم یافته بیان کننده پایداری مجانبی می‌باشند [۶۴].

۳-۲-۴ روش مستقیم لیاپانوف مرتبه-کسری با تعاریف متداول

روش مستقیم لیاپانوف مرتبه-کسری بر اساس روش ارائه شده برای مرتبه-صحیح می‌باشد. با استفاده از این روش، پایداری میتاگ-لفلر برای سیستم‌های مرتبه-کسری را می‌توان بررسی نمود.

قضیه ۳-۱ فرض کنید $x = 0$ یک نقطه تعادل سیستم مرتبه-کسری غیر خود گردان[۳۰] (۳-۷) باشد، اگر برای تابع لیاپانوف $V(t,x(t)):[0,\infty]\times D \to R$ به ازای $\beta \in (0,1)$، $t \ge 0$، $x \in D$ روابط زیر برقرار باشد، نقطه تعادل، پایدار میتاگ-لفلر همه جایی است.

$$\gamma_1(\|x\|) \le V(t,x((t)) \le \gamma_2(\|x\|) \qquad (۱۱-۳)$$

$$cD^{\beta}_{t_0,t}V(t,x(t)) \le -\gamma_3(\|x\|) \qquad (۱۲-۳)$$

به طوریکه ناحیه $D \in R^n$ مبدا مختصات را در برگیرد و تابع لیاپانوف $V(t,x(t))$ مشتق پذیر، پیوسته و لیپشیتز محلی در x بوده و γ_i $(i=1,2,3)$ ثابت‌های اختیاری مثبت می‌باشند [۶۳-۶۴].

---

[29] Power stability
[30] Non- Autonomous

ملاحظه ۳-۴ اگر فرض‌های قضیه فوق برای کل فضا R^n برقرار باشند، نقطه تعادل سیستم (۳-۷) پایدار همه جایی است.

ملاحظه ۳-۵ قضیه ۳-۱ برای سیستم مرتبه-کسری با تعریف مشتق ریمان لیوویل نیز بر قرار است.

۳-۳ پایداری مرتبه-کسری کانفورمال

در این بخش پایداری مرتبه-کسری بر اساس تعریف کانفورمال ارائه می‌شود.

۳-۳-۱ پایداری سیستم‌های خطی مرتبه-کسری کانفورمال

با توجه به جدید بودن تعریف مشتق کانفورمال، مقالات کمی به تحلیل پایداری سیستم‌هایی با دینامیک‌های مرتبه-کسری کانفورمال پرداخته‌اند. دراین بخش تحلیل پایداری سیستم‌های مرتبه-کسری کانفورمال خطی بر اساس [۵۱]، ارائه شده است.

سیستم مرتبه-کسری خطی با ورودی صفر زیر را در نظر بگیرید:

$$T^{\alpha} x(t) = Ax(t), \qquad (۳-۱۳)$$

برای $t>0$ و در حالیکه $x \in R^n$، ماتریس $A \in R^{n \times n}$، با شرایط اولیه $x(0)=x_0$ در حالیکه $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ ، $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n]$ و $0 < \alpha_i \leq 1$ برای $i = 1,2,..., n$.

تعریف ۳-۲ جواب معادله دیفرانسیل سیستم مرتبه-کسری کانفورمال خطی (۳-۱۳) پایدار است اگر برای هر مقدار اولیه x_0، $0 < \varepsilon$ وجود داشته باشد به طوریکه $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ برای همه $t > t_0$ باشد. اگر ضمن اینکه پایدار است، رابطه $\|x(t)\| \rightarrow \varepsilon$ به ازای $t \rightarrow \infty$ نیز برقرار باشد، سیستم پایدار مجانبی گفته می‌شود [۵۱].

قضیه ۳-۲– حل معادله سیستم مرتبه-کسری کانفورمال (۳-۱۳)، بصورت زیر می‌باشد [۵۱]:

$$x(t) = x_0 e^{\frac{1}{\alpha} A t^{\alpha}}, \qquad (۳-۱۴)$$

به طوریکه فرض می‌شود جواب آن در بازه $(0,\infty)$ مشتق پذیر می‌باشد.

تعریف ۳-۳ اگر همه مقادیر ویژه ماتریس A، در رابطه زیر صادق باشد، ماتریس A، پایدار هرویتز[۳۱] است [۵۱].

$$|\arg(\lambda(A))| > \frac{\pi}{2} \qquad (۱۵-۳)$$

اگر برای همه مقادیر ویژه ماتریس A رابطه زیر برقرار باشد، سیستم را شبه-پایدار[۳۲] گویند [۵۱].

$$|\arg(\lambda(A))| \geq \frac{\pi}{2} \qquad (۱۶-۳)$$

ملاحظه ۳-۶- اگر یک مقدار ویژه نظیر λ_0 وجود داشته باشد به طوریکه $|\arg(\lambda_0)| < \frac{\pi}{2}$ باشد، سیستم (۳-۱۳) ناپایدار است [۵۱].

ملاحظه ۳-۷- اگر ماتریس A دارای مقدار ویژه صفر باشد، سیستم (۳-۱۳)، ناپایدار است [۵۱].

قضیه ۳-۴- حل معادله سیستم مرتبه-کسری کانفورمال (۳-۱۳)، پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر ماتریس A پایدار هرویتز باشد و سیستم (۳-۱۳) پایدار است اگر و تنها اگر ماتریس A شبه پایدار باشد [۵۱].

قضیه ۳-۵- اگر همه ریشه‌های $\det(\Delta(s)) = 0$ دارای قسمت‌های حقیقی منفی باشند، آنگاه سیستم (۳-۱۳)، پایدار مجانبی است [۵۱].

۳-۳-۲ روش مستقیم پایداری لیاپانوف مرتبه-کسری تعمیم یافته با تعریف کانفورمال

در این بخش، روش مستقیم لیاپانوف مرتبه-کسری تعمیم یافته بر اساس تعریف مشتق مرتبه-کسری کانفورمال مورد بررسی قرار گرفته است.

سیستم ورودی صفر زیر را در نظر بگیرید:

---

[31] Hurwitz stable
[32] quasi-stable

$${}_{t_0}T^{\alpha}(x(t)) = f(t, x(t)) \qquad (۳-۱۷)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ و $x \in R^n$ می‌باشد .

تعریف ۳- ۴ (نقطه تعادل) ثابت x_{eq} یک نقطه تعادل سیستم دینامیکی (۳-۱۷) است، اگر و تنها اگر $_{t_0}T^{\alpha} x_{eq} = f(t, x_{eq}) = 0$ باشد.

ملاحظه ۳-۸ در ادامه بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم مبدا مختصات نقطه تعادل باشد.

با توجه به [۳۵]، حل معادله (۳-۱۷) با شرایط اولیه $x(t_0) = x_0$، بصورت زیر است:

$$L_{\alpha}^{t_0}\{x(t)\}(s) = \frac{x_0}{s-\lambda}, \qquad (۳-۱۸)$$

$$x(t) = x_0 e^{\lambda \frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}} \qquad (۳- ۱۹)$$

تعریف ۳-۵ (پایدار نمایی کانفورمال) سیستم (۳-۱۷) پایدار نمایی کانفورمال است اگر شرط زیر برقرار باشد.

$$\|x(t)\| \le k\|x(t_0)\| e^{-\lambda \frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}} \qquad (۳-۲۰)$$

به طوریکه $k, \lambda > 0$

قضیه ۳-۶- فرض کنید $x = 0$ یک نقطه تعادل سیستم مرتبه-کسری غیر خود گردان[۳۳] (۳-۱۷) باشد. اگر تابع $V(t, x(t))$ پیوسته و مشتق پذیر مرتبه α باشد و $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times D \to R$ وجود داشته باشد به طوریکه در شرایط زیر صادق باشد، نقطه تعادل پایدار نمایی کانفورمال است.

$$c_1 \|x\|^{a} \le V(t, x(t)) \le c_2 \|x\|^{ab}, \qquad (۳-۲۱)$$

[33] Non- Autonomous

$$ {}_{t_0}T_t^{\alpha} V(t, x(t)) \leq -c_3 \|x\|^{ab} \qquad (۳-۲۲) $$

به طوریکه $t \geq t_0 \geq 0$ ، $x \in D$، $\alpha \in (0,1)$ و a,b ، c_1, c_2, c_3 اعداد مثبت دلخواه باشند. اگر فرض‌های قضیه فوق برای کل فضا R^n برقرار باشند، نقطه $x = 0$ بطور همه جایی پایدار نمایی کانفورمال است.

اثبات: طبق رابطه (۳-۲۱)، داریم:

$$ V(t, x(t)) \leq c_2 \|x\|^{ab} \rightarrow \frac{V(t, x(t))}{c_2} \leq \|x\|^{ab} \rightarrow -\|x\|^{ab} \leq -\frac{V(t, x(t))}{c_2} \qquad (۳-۲۳) $$

با ضرب طرفین رابطه فوق در c_3، رابطه زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$ -c_3 \|x\|^{ab} \leq -c_3 \frac{V(t, x(t))}{c_2} \qquad (۳-۲۴) $$

با توجه به (۳-۲۲) ، خواهیم داشت:

$$ {}_0T_t^{\alpha} V(t, x((t)) \leq -c_3 \|x\|^{ab} \leq -\frac{c_3}{c_2} V(t, x(t)) \qquad (۳-۲۵) $$

در نهایت خواهیم داشت:

$$ {}_0T_t^{\alpha} V(t, x((t)) \leq -c_3 c_2^{-1} V(t, x(t)) \qquad (۳-۲۶) $$

اگر تابع نامنفی $M(t)$ وجود داشته باشد، به طوریکه:

$$ {}_0T_t^{\alpha} V(t, x((t)) + M(t) = -c_3 c_2^{-1} V(t, x(t)) \qquad (۳-۲۷) $$

با اعمال تبدیل لاپلاس به رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$ sV(s) - V(t_0) + M(s) = -c_3 c_2^{-1} V(s) \qquad (۳-۲۸) $$

پس از ساده سازی رابطه (۳-۲۸) خواهیم داشت:

$$ V(s) = \frac{V(t_0) - M(s)}{s + \frac{c_3}{c_2}} \qquad (۳-۲۹) $$

به طوریکه $V(s) = L_{\alpha}^{t_0}\{V(t, x(t))\}$.

در نهایت با اعمال عکس تبدیل لاپلاس، داریم [۳۵]:

$$V(t) = V(t_0)\, e^{(\frac{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha})} - M(t) * e^{(\frac{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha})} \qquad (۳۰-۳)$$

با توجه به اینکه، جملات $e^{(\frac{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha})}$ و $M(t)$ توابعی نامنفی هستند، لذا می‌توان (۳-۳۰) را بصورت زیر نوشت:

$$V(t) \le V(t_0)\, e^{(\frac{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha})} \qquad (۳۱-۳)$$

با توجه به (۳-۲۲) داریم:

$$\|x(t)\| \le [\frac{V(t_0)}{c_1} e^{(\frac{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha})}]^{\frac{1}{a}} \qquad (۳۲-۳)$$

با در نظر گرفتن $h = \frac{V(t_0)}{c_1} = \frac{V(t_0, x(t_0))}{c_1} \ge 0$، داریم:

$$\|x(t)\| \le [h e^{(\frac{-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha})}]^{\frac{1}{a}} \qquad (۳۳-۳)$$

بنابراین با توجه به اینکه $h \ge 0$ است، می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ است.

فصل چهارم

طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری کانفورمال

۴-۱ مقدمه

عدم دقت در پارامترهای مدل سیستم و نیز ساده سازی مدل سیستم دو علت اصلی ایجاد نامعینی در مدل می‌باشند. نامعینی‌ها را می‌توان به دو دسته ساختاری (پارامتری) و غیرساختاری (دینامیک‌های مدل نشده) تقسیم نمود. عدم دسترسی به مدل دقیق از سیستم در بسیاری از کاربردهای عملی و نیز محاسبه مدل‌های غیر دقیق بدلیل وجود نامعینی‌ها و عدم قطعیت‌ها، ضرورت استفاده از روش‌های کنترلی در حضور نامعینی‌ها را آشکار می‌سازد. کنترل مقاوم و کنترل تطبیقی دو روش قدرتمند برای کنترل سیستم‌ها در حضور نامعینی‌ها می‌باشند. کنترل مد لغزشی یکی از معروفترین و ساده‌ترین روش‌های کنترل مقاوم است که کارایی زیادی در زمینه‌های مختلف دارد. برای بهبود عملکرد این کنترل کننده‌ها، کنترل کننده‌های مد لغزش ترمینال، توسعه یافتند. دو مزیت اصلی کنترل کننده مد لغزشی ترمینال، زمان محدود همگرایی دینامی‌های خطا و کاهش زمان همگرایی می‌باشد. در این فصل، ابتدا کنترل مد لغزشی (SMC) که حالت خاصی از کنترل ساختار متغیر است و نحوه طراحی کنترل کننده مد لغزشی کلاسیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس، کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری معمولی (FOSMC) و کنترل کننده مد لغزشی ترمینال (TSMC) معرفی می‌شوند. در ادامه کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری با استفاده از مشتق جدید و ساده کانفورمال برای سیستم‌های غیر خطی آفین مرتبه-کسری و مرتبه-صحیح طراحی می‌گردد.

۴-۲ کنترل کننده مد لغزشی

کنترل کننده مد لغزشی یک ابزار کنترلی قدرتمند برای کنترل سیستم‌ها در حضور عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات است. در طراحی کنترل کننده مد لغزشی کلاسیک یک سطح لغزش بصورت رابطه خطی از دینامیک‌های خطا و با در نظر گرفتن ویژگی‌های مطلوبی نظیر پایدار مجانبی طراحی می‌شود به

طوریکه دینامیک‌های خطا پس از رسیدن به این سطح، روی سطح لغزیده و بطور مجانبی به سمت مبدا حرکت کنند. هدف کنترل کننده، رساندن متغیرهای حالت از هر شرایط اولیه به سطح لغزش و نگهداشتن آنها بر روی سطح می‌باشد. بر همین اساس، طراحی کنترل کننده مد لغزشی معمولی دارای دو فاز اصلی رسیدن[۳۴] به سطح لغزش و لغزش[۳۵] بر روی سطح می‌باشد. در فاز رسیدن خاصیت مقاومت پذیری وجود ندارد و در برابر نویز و اغتشاش تاثیر پذیر می‌باشد لذا مسیر های حالت خطا باید به سطح لغزش رسانده شوند [۶۵-۶۶]. پس از مرحله رسیدن، حالت‌های سیستم برروی سطح لغزش می‌لغزند و در آن می‌مانند، در این مرحله، سیستم دارای خاصیت مقاومت پذیری همراه با عملکرد مناسب در برابر اغتشاش سازگار است[۶۵]. در این مرحله نویز و اغتشاش و سایر نامعینی‌ها بی تاثیر هستند.

۴-۲-۱ طراحی کنترل کننده مد لغزشی

سیستم غیرخطی تک ورودی زیر را در نظر بگیرید [۷۱]:

$$x^{(n)}(t) = f(X,t) + g(X)u(t) \qquad (۲-۴)$$

در حالیکه $X=[x,\dot{x},...,x^{(n-1)}]^T$ بردار حالت سیستم است؛ $f(X,t)$ و $g(X)\neq 0$ توابعی کاملا مشخص نیستند و همراه با عدم قطعیت با کران محدود می‌باشند، $x(t)$ متغیر حالت سیستم و $u(t)$ ورودی کنترلی می‌باشند.

همانطور که گفته شد، هدف از طراحی کنترل کننده مد لغزشی صفر کردن خطا و یا بعبارت دیگر رساندن بردار حالت X به بردار مرجع X_d ($X_d = [x_d, \dot{x}_d, ..., x_d^{n-1}]^T$) است. برای رسیدن به این هدف باید دینامیک‌های خطا را به سطح لغزش رساند و بر روی سطح، محدود نمود.

مراحل طراحی کنترل کننده مد لغزشی را می‌توان به سه مرحله اصلی تقسیم تمود:

---

[34] Reaching Phase
[35] Sliding Phase

الف- طراحی سطح لغزش: سطح لغزش بر اساس خطای ردیابی ($e_i = x_i - x_{id}$) طراحی می‌شود. این سطح دارای ویژگی‌های مطلوبی نظیر پایداری مجانبی، توانایی دفع اغتشاش، توانایی ردیابی می-باشد [۶۷]. در حالت کلی و کلاسیک سطح لغزش بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$s(t) = (\frac{d}{dt} + \lambda)^{n-1} E, \tag{۳-۴}$$

به طوریکه $E = X - X_d = [e, \dot{e}, .., e^{(n-1)}]^T$ و λ مقدار ثابت مثبت است.

با توجه به پایدار مجانبی بودن دینامیک خطا بر روی سطح، دینامیک‌های خطا روی سطح لغزیده و بصورت مجانبی به صفر میل می‌کنند.

ب- محاسبه قانون کنترل معادل: قانون کنترل معادل از برابر صفر قرار دادن مشتق صفحه لغزش در عدم حضور اغتشاش و عدم قطعیت محاسبه می‌شود.

ج- تعیین قانون کنترل تصحیح کننده: به منظور حفظ ویژگی مقاومت در برابر نویز و اغتشاش، از قانون کنترل تصحیح کننده برای بازگرداندن متغیرهای حالت به سطح لغزش وقتی از روی سطح خارج می‌شوند، استفاده می‌شود. در حالت معمول و ساده از تابع علامت برای این منظور استفاده می-گردد.

در واقع قانون کنترل در کنترل کننده مد لغزشی از دو قسمت کنترل معادل[۳۶] و کنترل تصحیح کننده[۳۷] تشکیل شده است [۶۸].

بهره کلیدزنی باید به گونه‌ای تعیین گردد که رسیدن به سطح لغزش را تضمین کند. با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف، قانون کنترل تصحیح کننده بصورت زیر بدست می‌آید. با انتخاب تابع لیاپانوف مربعی بصورت $V(t) = \frac{1}{2} s^2(t)$، شرط پایداری برای سیستم (۴-۲)، عبارتست از:

---

[36] Eqivalent Control
[37] Corrective Control

$$\dot{V}(t)=\frac{1}{2}s(t)\dot{s}(t)\leq -\eta|s(t)| \qquad \eta>0 \tag{۶-۴}$$

که با ساده سازی رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\dot{s}(t)\leq -\eta\ sign\ (s(t)) \tag{۷-۴}$$

رابطه فوق را شرط رسیدن به سطح لغزش گویند.

۴-۲-۲مزایا و معایب کنترل کننده مد لغزشی

از مزایای این روش می‌توان به قدرت آن در تضمین پایداری و مقاومت پذیری بالا به عنوان دو مساله مهم در کنترل و نیز عملکرد خوب کنترلی در حالت تعقیب حتی برای سیستم‌های غیر خطی و ساده سازی طراحی کنترل کننده مد لغزشی اشاره نمود[۶۹-۷۱]. از جمله معایب آن می‌توان به پدیده وزوز، نیاز به اطلاع از کران‌های نامعینی‌های سیستم، کند بودن سرعت همگرایی متغیرهای حالت سیستم در فاز رسیدن برای حالتیکه از سطح لغزش فاصله زیادی دارند، اشاره نمود [۶۵-۶۶ و ۶۹-۷۱].

ناپیوستگی سیگنال کنترل و در نتیجه کلیدزنی مداوم آن در اطراف سطح لغزش سبب نوسانات شدید می‌شود که به این پدیده وزوزگویند. پدیده وزوز سبب افزایش فعالیت‌های کنترلی، تحریک دینامیک-های مدل نشده فرکانس بالا سیستم، افزایش امکان ناپایداری سیستم و سبب تلفات حرارتی و تخریب قطعات مکانیکی در سیستم و در نتیجه موجب پایین آمدن عملکرد سیستم می‌شود [۷۲]. برای حذف پدیده وزوز روش‌های مختلفی وجود دارد: یکی از معروفترین این روش‌ها، روش تقریب پیوسته است. این روش با ایجاد یک لایه مرزی باریک در اطراف سطح لغزش، سبب هموار شدن سیگنال کنترل می‌گردد. اما اشکال اصلی این روش،کاهش دقت کنترلی و خطای حالت ماندگار است[۶۹-۷۱و۷۳]. با استفاده از منطق فازی در تعیین دامنه در لایه مرزی می‌توان پدیده وزوز را بهبود بخشید اما این روش سبب کند شدن سیستم تحت کنترل می‌شود [۷۴]. روش دیگر، استفاده از کنترل مد

لغزشی مرتبه بالا می‌باشد که سبب کاهش وزوز می‌گردد. اما این روش در حضور دینامیک های مزاحم قادر به حل پدیده وزوز نمی‌باشد، زیرا در این روش وجود دینامیک‌های مزاحم سبب افزایش درجه نسبی سیستم شده و در نتیجه وزوز بوجود می‌آید و همچنین طراحی کنترل کننده را با در نظر گرفتن مساله همگرایی دشوار می‌کند [۷۵]. به روش جایگزینی ترم لغزشی با تقریبگرهای عدم قطعیت و اغتشاش از نوع فازی، عصبی و غیره به عنوان یک روش موثر دیگر در حل مشکل وزوز می-توان اشاره نمود [۷۶].

۴-۳ طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری کانفورمال

استفاده از حسابان مرتبه-کسری در طراحی کنترل کننده‌ها، سبب افزایش درجه آزادی در طراحی شده و در نتیجه می‌تواند عملکرد کنترلی را بهبود بخشد. طراحی اولین کنترل کننده مرتبه-کسری در سال ۱۹۸۸ توسط اوستالوپ ارائه شد. کنترل کننده مد لغزشی با سطح لغزش مرتبه-کسری و همچنین کنترل کننده مد لغزشی طراحی شده برای سیستم‌های مرتبه-کسری را کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری گویند [۲۵]. کنترل کننده مدلغزشی مرتبه-صحیح برای سیستم مرتبه-کسری نیز می‌توان طراحی نمود این نوع کنترل کننده‌ها گرچه در برابر اغتشاش مقاوم هستند اما همچنان مشکل وزوز در آنها وجود دارد[۷۷]. در مراجع [۷۸-۷۹]، کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری با قانون کنترل مرتبه-کسری و سطح کلیدزنی جدید که در آن از مشتق مرتبه-کسری تابع علامت استفاده شده، طراحی گردیده که مشکل وزوز حل شده است. طراحی کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری بطور گسترده‌ای مورد توجه محققان قرار گرفته است و تا کنون کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری بسیاری با صفحات لغزش متعددی ارائه شده است[۸۰-۸۶].

با توجه به مزایای مشتق مرتبه-کسری کانفورمال که در فصل دوم اشاره شد، در این رساله، مشتق مرتبه-کسری کانفورمال در طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری مورد استفاده قرار گرفته است. در ادامه، سه کنترل کننده مد لغزشی غیر خطی مرتبه-کسری کانفورمال جدید برای سیستم-

های غیر خطی آفین مرتبه-کسری و مرتبه-صحیح طراحی شده است. نوآوری این کنترل کننده‌ها در استفاده از مشتق مرتبه-کسری کانفورمال و نیز پیشنهاد سطوح لغزش جدید یا قانون کنترل تصحیح کننده نوین و یا هر دو مورد می‌باشد. همچنین برای تضمین پایداری از قضیه پایداری لیاپانوف مرتبه-کسری بر اساس مشتق کانفورمال و مرتبه-صحیح استفاده شده است. نتایج حاصل از شبیه سازی کنترل کننده‌های پیشنهادی برای سیستم‌های متعدد با کلاس‌های متفاوت که در فصل پنجم نشان داده شده‌اند، کارایی و مزایای کنترل کننده‌های طراحی شده را تایید می‌کنند.

تعریف ۴-۱ (سیستم آفین) : سیستم‌های غیر خطی که در ورودی خطی هستند. فرم کلی سیستم‌های آفین تک ورودی-تک خروجی بصورت زیر می باشد:

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) \qquad (۴-۸)$$

به طوریکه $f(x)$ و $g(x)$ توابع غیر خطی ، x متغیر حالت سیستم و $u(t)$ ورودی کنترلی می‌باشد.

۴-۳-۱- کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری برای گروهی از سیستم‌های کانفورمال

در این بخش کنترل کننده‌های مرتبه-کسری کانفورمال جدید برای گروهی از سیستم‌های مرتبه-کسری کانفورمال طراحی شده است.

۴-۳-۱-۱ طراحی کنترل کننده برای گروهی از سیستم‌های کانفورمال با n ورودی کنترلی

در این بخش یک کنترل کننده مرتبه-کسری کانفورمال جدید برای گروهی از سیستم‌های مرتبه-کسری تعریف شده با معادله (۴-۹)، طراحی می‌گردد[۷۷].

$$\begin{cases} T^{\alpha} x_1(t) = f_1(X,t) + w_1(X,t) + g_1(X)u_1(t) \\ \vdots \\ T^{\alpha} x_n(t) = f_n(X,t) + w_n(X,t) + g_n(X)u_n(t) \end{cases} \qquad (۹-۴)$$

به طوریکه $i = 1,.., n$ ، $f_i(X,t) \in R,$ و $g_i(X) \neq 0$ توابعی غیرخطی، $X = [x_1,..., x_n]^T$ بردار حالت سیستم، $|w_i(X,t)| \leq W_i$ عدم قطعیت و اغتشاش و $u_i(t)$ ورودی کنترلی باشند.

سطوح لغزش جدید به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$s_i(t) = a_i x_i(t) + b_{i1} T^{-\alpha} \tanh(b_{i2} x_i(t)) + c_{i1} T^{-\alpha} \tanh(c_{i2} T^{\beta} x_i(t)), \quad i = 1,...,n \qquad (۱۰-۴)$$

به طوریکه $a_i, b_{i1}, b_{i2}, c_{i1}, c_{i2}$ ضرایب ثابت و $\alpha, \beta \in (0,1)$ باشند.

قضیه ۴-۱- دینامیک‌های مد لغزش پیشنهادی حاصل از (۴-۱۰)، پایدار مجانبی بوده و به نقطه تعادل صفر همگرا می‌باشند.

اثبات: با توجه به اینکه، هنگامیکه متغیرهای حالت به سطوح لغزش می‌رسند، داریم $s_i(t) = 0, \quad i = 1,..,n$، خواهیم داشت.

$$a_i x_i(t) + b_{i1} T^{-\alpha} \tanh(b_{i2} x_i(t)) + c_{i1} T^{-\alpha} \tanh(c_{i2} T^{\beta} x_i(t)) = 0, \quad i = 1,.., n \qquad (۱۱-۴)$$

با اعمال مشتق کانفورمال به دو طرف (۴-۱۱)، دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} T^{\alpha} x_1(t) = -\{[\frac{b_{11}}{a_1} \tanh(b_{12} x_1(t)) + \frac{c_{11}}{a_1} \tanh(c_{12} T^{\beta} x_1(t))]\} \\ T^{\alpha} x_2(t) = -\{[\frac{b_{21}}{a_2} \tanh(b_{22} x_2(t)) + \frac{c_{21}}{a_2} \tanh(c_{22} T^{\beta} x_2(t))]\} \\ \vdots \\ T^{\alpha} x_n(t) = -\{[\frac{b_{n1}}{a_n} \tanh(b_{n2} x_n(t)) + \frac{c_{n1}}{a_n} \tanh(c_{n2} T^{\beta} x_n(t))]\} \end{cases} \qquad (۱۲-۴)$$

رابطه (۴-۱۲) دینامیک‌های مد لغزش پیشنهاد شده را نمایش می‌دهد. رابطه فوق را بر اساس تعریف مشتق کانفورمال، بصورت (۴-۱۳) می‌توان بدست آورد:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -t^{\alpha-1}\{[\frac{b_{11}}{a_1}\tanh(b_{12}x_1(t)) + \frac{c_{11}}{a_1}\tanh(c_{12}T^{\beta}x_1(t))]\} \\ \dot{x}_2(t) = -t^{\alpha-1}\{[\frac{b_{21}}{a_2}\tanh(b_{22}x_2(t)) + \frac{c_{21}}{a_2}\tanh(c_{22}T^{\beta}x_2(t))]\} \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = -t^{\alpha-1}\{[\frac{b_{n1}}{a_n}\tanh(b_{n2}x_n(t)) + \frac{c_{n1}}{a_n}\tanh(c_{n2}T^{\beta}x_n(t))]\} \end{cases} \qquad (۱۳-۴)$$

به منظور اثبات پایداری مجانبی سیستم (۴-۱۳)، تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n}|x_i| \qquad (۱۴-۴)$$

با مشتق گیری از دو طرف رابطه فوق، داریم:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(x_i(t))\dot{x}_i(t) \qquad (۱۵-۴)$$

بنابراین با جایگذاری (۴-۱۳) در (۴-۱۵)، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^{n}[\operatorname{sgn}(x_i)(-t^{\alpha-1}(\frac{b_{i1}}{a_i}\tanh(b_{i2}x_i(t)) + \frac{c_{i1}}{a_i}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t)))] \\ &\le \sum_{i=1}^{n}[t^{\alpha-1}(-\frac{b_{i1}}{a_i}|\tanh(b_{i2}x_i(t))| + \frac{c_{i1}}{a_i}|\tanh(c_{i1}T^{\beta}x_i(t))|)] \\ &\le \sum_{i=1}^{n}t^{\alpha-1}(-\frac{b_{i1}}{a_i}|\tanh(b_{i2}x_i(t))| + \frac{c_{i1}}{a_i}) \end{aligned} \qquad (۱۶-۴)$$

با توجه به شرط پایداری $\dot{V}(t)\le 0$ و رابطه (۴-۱۶)، دینامیک‌های مد لغزش پایدار هستند اگر رابطه (۴-۱۷)، برقرار باشد.

$$\sum_{i=1}^{n} t^{\alpha-1}\left(-\frac{b_{i1}}{a_i}\left|\tanh(b_{i2}x_i(t))\right| + \frac{c_{i1}}{a_i}\right) \le 0 \qquad (۱۷\text{-}۴)$$

پس از ساده کردن (۴-۱۷)، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} t^{\alpha-1}\frac{c_{i1}}{a_i} \le \sum_{i=1}^{n} t^{\alpha-1}\frac{b_{i1}}{a_i}\left|\tanh(b_{i2}x_i(t))\right| \le \sum_{i=1}^{n} t^{\alpha-1}\frac{b_{i1}}{a_i} \qquad (۱۸\text{-}۴)$$

در نتیجه با انتخاب مناسب پارامترها به طوریکه $\sum_{i=1}^{n} c_{i1} \le \sum_{i=1}^{n} b_{i1}$ باشد، $\dot{V}(t) \le 0$ خواهد بود.

برای بدست آوردن قوانین کنترل معادل، کافیست از سطوح لغزش (۴-۱۰) در غیاب عدم قطعیت و اغتشاش مشتق گرفته و با برابر صفر قرار دادن مشتق بدست آمده، قوانین کنترل معادل را بدست - آوریم. لذا با توجه به (۴-۹) و (۴-۱۰)، خواهیم داشت:

$$T^{\alpha}s_i(t) = a_i f_i(X,t) + a_i.g_i(X).u_i(t) + b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t)) = 0 \qquad (۱۹\text{-}۴)$$

قوانین کنترل معادل حاصل بصورت زیر می‌باشد:

$$u_{eqi}(t) = -\frac{1}{a_i.g_i(X)}[a_i f_i(X,t) + b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t))] \qquad (۲۰\text{-}۴)$$

با تابع کلیدزنی $u_{swi}(t) = -\frac{k_i}{g_i(X)}.\tanh(n.s_i(t))$ ، قانون کنترلی بصورت (۴-۲۱) خواهد شد:

$$u_i(t) = -\frac{1}{a_i.g_i(X)}[a_i f_i(X,t) + b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t))] - \frac{k_i}{g_i(X)}.\tanh(n.s_i(t)) \qquad (۲۱\text{-}۴)$$

گزاره ۴-۱: برای تابع پیوسته $g(t)$ و عدد مثبت a، داریم:

$$\operatorname{sgn}(g(t)).\tanh(a.g(t)) = \left|\tanh(a.g(t))\right| \qquad (۲۲\text{-}۴)$$

اثبات:

$$\begin{cases} if \quad g(t)\geq 0 \to \tanh(a.g(t))\geq 0 \to \operatorname{sgn}(g(t)).\tanh(g(t)) = 1.\tanh(a.g(t))\geq 0 \\ if \quad g(t)< 0 \to \tanh(a.g(t))< 0 \to \operatorname{sgn}(g(t)).\tanh(g(t)) = -1.\tanh(a.g(t))> 0 \end{cases} \qquad (۲۳-۴)$$

در نتیجه برای تابع $g(t)$ و $0<a$ داریم:

$$sign(g(t)).\tanh(a.g(t)) = \left|\tanh(a.g(t))\right| \qquad (۲۴-۴)$$

قضیه ۴-۲- مسیرهای حالت سیستم کنترل شده تحت کنترل کننده پیشنهادی و با انتخاب بهره $W_i + \frac{\eta}{a_i.} \leq k_i$، در زمان محدود به سطح لغزش $s_i(t)=0$ همگرا خواهند شد.

اثبات: تابع لیاپانوف $V(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} s_i^2(t)$ را در نظر بگیرید، به طوریکه با اعمال مشتق مرتبه-کسری کانفورمال به تابع پیشنهادی داریم:

$$\begin{aligned} T^{\alpha}V(t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(T^{\alpha}s_i(t)s_i(t)) \\ &= [\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(X,t) + a_i w_i(X,t) + a_i.g_i(X).u_i(t) \\ &+ b_{i1}\tanh(b_{i2}(x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t))].s_i(t) \end{aligned} \qquad (۲۵-۴)$$

با جایگذاری سیگنال کنترلی در معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T^{\alpha}V(t) &= \sum_{i=1}^{n} T^{\alpha}s_i(t))s_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n}[(a_i f_i(X,t) + a_i w_i(X,t) \\ &+ a_i.g_i(X).\{-\frac{1}{a_i.g_i(X)}[a_i f_i(X,t) + b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) \\ &+ c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t))] - \frac{k_i}{g_i(X)}.\tanh(n.s_i(t))\} \\ &+ b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t))).s_i(t)] \end{aligned} \qquad (۲۶-۴)$$

با توجه به کران بالا عدم قطعیت و اغتشاش، داریم:

$$
\begin{aligned}
T^{\alpha}V(t) &= \sum_{i=1}^{n}(T^{\alpha}s_i(t))s_i(t)) \\
&\le \sum_{i=1}^{n}[a_i f_i(X,t) + a_i W_i + a_i.g_i(X).\{-\frac{1}{a_i.g_i(X)}[a_i f_i(X,t) + b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) \\
&+ c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t)) - .k_i.\frac{1}{g_i(X)}.\tanh(n.s_i(t))\} \\
&+ b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t)).s_i(t)]
\end{aligned}
\tag{۲۷-۴}
$$

با ساده سازی نامساوی فوق، خواهیم داشت:

$$
T^{\alpha}V(t) \le \sum_{i=1}^{n}(a_i W_i|s_i(t)| - [k_i.a_i.\tanh(n.s_i(t))]s_i(t))
\tag{۲۸-۴}
$$

با توجه به شرط پایداری، داریم:

$$
[a_i W_i|s_i(t)| - [k_i.a_i.\tanh(\ n.s_i(t))]\ s_i(t)] \ \le\ -\eta\ |s_i(t)|
\tag{۲۹-۴}
$$

با ساده کردن (۴-۲۹)، خواهیم داشت:

$$
[a_i W_i - [k_i.a_i.\tanh(n.s_i(t))]\mathrm{sgn}(s_i(t))] \le -\eta
\tag{۳۰-۴}
$$

با توجه به گزاره ۴-۱، داریم:

$$
[a_i W_i - k_i.a_i.|\tanh(n.s_i(t))|] \le -\eta
\tag{۳۱-۴}
$$

با توجه به (۴-۳۱)، داریم:

$$
a_i W_i + \eta \le k_i.a_i.|\tanh(n.s_i(t))| \le k_i.a_i
\tag{۳۲-۴}
$$

در نتیجه برای $W_i + \frac{\eta}{a_i.} \le k_i$، $T^{\alpha}V_i(t) \le -\eta|s_i(t)|$ است و بنابراین حالت‌های سیستم کنترل شده به سطح لغزش $s(t) = 0$ همگرا می‌شوند.

برای محاسبه زمان محدود رسیدن با توجه به شرط [رسیدن]، داریم:

$$T^{\alpha} V_i(t) = s_i(t) T^{\alpha} s_i(t) < -\eta |s_i(t)| \quad (۴-۳۳)$$

$$\frac{s_i(t)}{|s_i(t)|} T^{\alpha} s_i(t) < -\eta \quad (۴-۳۴)$$

با ساده کردن رابطه (۴-۳۴)، خواهیم داشت:

$$\operatorname{sgn}(s_i(t)).T^{\alpha} s_i(t) < -\eta \quad (۴-۳۵)$$

در ادامه، دو حالت قابل بررسی است.

$$\operatorname{sgn}(s_i(t)).T^{\alpha} s_i(t) = \begin{cases} T^{\alpha} s_i(t) \le -\eta, & s_i(t) > 0 \\ -T^{\alpha} s_i(t) < -\eta, & s_i(t) < 0 \end{cases} \quad (۴-۳۶)$$

اعمال انتگرال مرتبه-کسری کانفورمال به دو طرف نامساوی (۴-۳۶)، رابطه (۴-۳۷) را نتیجه می دهد:

$$\begin{cases} {}^{t_{ir}}_{0}T^{-\alpha} T^{\alpha} s_i(t) \le -T^{-\alpha}\eta = \int_0^{t_{ri}} -\frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}} d\tau, & s_i(t) > 0 \\ -{}^{t_{ri}}_{0}T^{-\alpha} T^{\alpha} s_i(t) < -T^{-\alpha}\eta = \int_0^{t_{ri}} -\frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}} d\tau, & s_i(t) < 0 \end{cases} \quad (۴-۳۷)$$

با توجه به (۴-۳۷)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} [s_i(t)]_0^{t_{ri}} = 0 - s_i(0) \le \int_0^{t_{ri}} -\frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}} d\tau = -\frac{\eta}{\alpha}(t_{ri})^{\alpha}, & s_i(t) > 0 \\ -[s_i(t)]_0^{t_{ir}} = 0 - s_i(0) > \int_0^{t_{ri}} \frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}} d\tau = \frac{\eta}{\alpha}(t_{ri})^{\alpha}, & s_i(t) < 0 \end{cases} \quad (۴-۳۸)$$

پس از ساده کردن رابطه (۴-۳۸)، رابطه (۴-۳۹) بدست می‌آید.

$$\begin{cases} 0 - s_i(0) \le -\frac{\eta}{\alpha} t_{ri}^{\alpha}, \quad t_{ri} \le \left(\frac{\alpha s_i(0)}{\eta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & s_i(t) > 0 \\ (0 - s_i(0)) > \frac{\eta}{\alpha} t_{ri}^{\alpha}, \quad t_{ri} < \left(\frac{-\alpha s_i(0)}{\eta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & s_i(t) < 0 \end{cases} \quad (۴-۳۹)$$

در نهایت زمان رسیدن هر متغیر حالت بصورت زیر بدست می آید:

$$t_{ri} \le (\frac{|\alpha s_i(0)|}{\eta})^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (۴۰-۴)$$

زمان رسیدن کل برای حالت‌های سیستم تحت کنترل کننده پیشنهادی بصورت $t_r = \max\{t_{r1},..., t_{rn}\}$ می‌باشد.

قضیه ۴-۳- متغیرهای حالت سیستم کنترل شده تحت کنترل کننده (۴-۲۱)، در زمان محدود به صفر همگرا خواهند شد.

اثبات: تابع لیاپانوف را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$V(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2(t) \qquad (۴۱-۴)$$

با مشتق گرفتن از تابع لیاپانوف (۴-۴۱) داریم:

$$\begin{aligned} T^{\alpha}V(t) &= \sum_{i=1}^{n}[a_i(x_i(t)f_i(X,t) + x_i(t)w_i(X,t) + x_i(t)g_i(X)u_i(t))] \\ &\le \sum_{i=1}^{n}[a_i(x_i(t)f_i(X,t) + |x_i(t)|W_i \\ &+ x_i(t)g_i(X)\{-\frac{1}{a_i.g_i(X)}[a_i f_i(X,t) + b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) \\ &+ c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t))] - \frac{k_i}{g_i(X)}\tanh(ns_i(t))\} \end{aligned} \qquad (۴۲-۴)$$

پس از ساده کردن معادلات (۴-۴۲) و با توجه به کران بالا تابع تانژانت هایپربولیک، داریم:

$$T^{\alpha}V(t) \le \sum_{i=1}^{n}[|x_i(t)|(a_iW_i + c_{i1}) + a_i|x_i(t)|k_i - b_{i1}x_i(t).\tanh(b_{i2}x_i(t))] \qquad (۴۳-۴)$$

با توجه به شرط پایداری، اگر رابطه (۴-۴۴) برقرار باشد، نامساوی $T^{\alpha}V(t) \le \sum_{i=1}^{n} -\eta|x_i(t)|$ برقرار می‌باشد و حالت‌های سیستم کنترل شده به صفر همگرا خواهند شد.

$$|x_i(t)|(a_iW_i + c_{i1} + a_ik_i) - x_i(t)b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) \le -\eta|x_i(t)| \qquad (۴۴-۴)$$

پس از ساده سازی خواهیم داشت:

$$(a_iW_i + a_ik_i + c_{i1}) - a_ib_{i1}\,\mathrm{sgn}(x_i(t))\tanh(b_{i2}x_i(t)) \le -\eta \qquad (۴۵-۴)$$

در نهایت داریم:

$$(a_iW_i + a_ik_i + c_{i1}) - b_{i1}\left|\tanh(b_{i2}x_i(t))\right| \le -\eta \qquad (۴۶-۴)$$

با ساده کردن (۴-۴۶)، داریم:

$$(a_iW_i + a_ik_i + c_{i1}) + \eta \le b_{i1} \qquad (۴۷-۴)$$

در نهایت، خواهیم داشت:

$$c_{i1} \le b_{i1} - a_iW_i - a_ik_i - \eta \qquad (۴۸-۴)$$

در نهایت اگر $c_{i1} \le b_{i1} - a_iW_i - a_ik_i - \eta$ سیستم بطور مجانبی همگرا است.

توجه: نتایج بدست آمده برای سیستم مرتبه-صحیح نیز قابل تعمیم است.

زمان همگرایی متغیرهای حالت بصورت زیر بدست می‌آید:

با توجه به روابط (۴-۴۳) و (۴-۴۴) داریم:

$$a_ix_i(t)T^{\alpha}x_i(t) \le -\eta\left|x_i(t)\right| \qquad (۴۹-۴)$$

با اعمال مشتق کانفورمال داریم:

$$a_ix_i(t)\left(t^{1-\alpha}\frac{dx_i(t)}{dt}\right) \le -\eta\left|x_i(t)\right| \qquad (۵۰-۴)$$

در نتیجه داریم:

$$a_i x_i(t)(\frac{dx_i(t)}{-\eta\left|x_i(t)\right|}) \geq t^{\alpha-1}dt \qquad (۴-۵۱)$$

با توجه به ($\mathrm{sgn}(x_i(t)) = \frac{x_i(t)}{\left|x_i(t)\right|}$)، داریم:

$$t^{\alpha-1}dt \leq \frac{a_i}{-\eta}\mathrm{sgn}(x_i(t))dx_i(t) \qquad (۴-۵۲)$$

پس از انتگرال‌گیری از دو طرف (۴-۵۲)، خواهیم داشت:

$$\int_{t_r}^{t_r+t_s} t^{\alpha-1}dt \leq \frac{a_i}{-\eta}\int_{x_i(t_r)}^{x_i(t_r+t_s)}\mathrm{sgn}(x_i(t))dx_i(t) \qquad (۴-۵۳)$$

در نتیجه، داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha}t_s^{\alpha} \leq \frac{a_i}{-\eta}\int_{x_i(t_r)}^{x_i(t_r+t_s)} dx_i(t) & x_i(t) \geq 0 \\ \frac{1}{\alpha}t_s^{\alpha} \leq \frac{a_i}{-\eta}\int_{x_i(t_r)}^{x_i(t_r+t_s)} -dx_i(t) & x_i(t) \leq 0 \end{cases} \qquad (۴-۵۴)$$

پس از اعمال انتگرال، رابطه (۴-۵۴) بدست می‌آید:

$$\begin{cases} t_s^{\alpha} \leq \frac{\alpha a_i}{-\eta}[0 - x_i(t_r)] & x_i(t) \geq 0 \\ t_s^{\alpha} \leq \frac{\alpha a_i}{-\eta}[-0 + x_i(t_r)] & x_i(t) \leq 0 \end{cases} \qquad (۴-۵۵)$$

با ساده کردن (۴-۵۵)، داریم:

$$\begin{cases} t_s \leq [\frac{\alpha a_i}{\eta}x_i(t_r)]^{\frac{1}{\alpha}} & x_i(t) \geq 0 \\ t_s \leq -[\frac{\alpha a_i}{\eta}x_i(t_r)]^{\frac{1}{\alpha}} & x_i(t) \leq 0 \end{cases} \qquad (۴-۵۶)$$

در نهایت زمان همگرایی بصورت زیر می‌باشد:

$$t_s \le [\frac{\alpha a_i}{\eta}|x_i(t_r)|]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (۵۷-۴)$$

۴-۳-۱-۲ طراحی کنترل کننده برای گروهی از سیستم‌های کانفورمال با یک ورودی کنترلی

گروهی از سیستم‌های مرتبه-کسری کانفورمال آفین بصورت زیر را در نظر بگیرید [۵۱-۵۲،۹۲،۶۷] :

$$\begin{cases} T^{\alpha} x_i(t) = f_i(X,t) \quad i=1,\dots,n-1 \\ \vdots \\ T^{\alpha} x_n(t) = f_n(X,t) + w(X,t) + g(X)u(t) \end{cases} \qquad (۵۸-۴)$$

به طوریکه $f_i(X,t)$ و $g(X) \neq 0$ توابعی غیر خطی باشند و $X = [x_1,\dots, x_n]^T$ بردار حالت سیستم، $w(X,t)$ عدم قطعیت و اغتشاش به طوریکه $|w(X,t)| \le W$ می باشند.

سطح لغزش جدید به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x_i(t) + b_{i1} T^{-\alpha} \tanh(b_{i2} x_i(t)) + c_{i1} T^{-\alpha} \tanh(c_{i2} T^{\beta} x_i(t))) \qquad (۵۹-۴)$$

به طوریکه $a_i, b_{i1}, b_{i2}, c_{i1}, c_{i2}, \quad i=1,\dots,n$ ضرایب ثابت و $\alpha, \beta \in (0,1)$ باشند.

برای بدست آوردن قانون کنترل معادل، کافیست از سطح لغزش (۴-۵۹) در غیاب عدم قطعیت و اغتشاش مشتق گرفته و با برابر صفر قرار دادن مشتق بدست آمده، قانون کنترل معادل را بدست آوریم. لذا خواهیم داشت:

$$T^{\alpha} s(t) = a_n f_n(X,t) + a_n.g(X).u(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i f_i(X,t) + \sum_{i=1}^{n} [b_{i1} \tanh(b_{i2} x_i(t)) + c_{i1} \tanh(c_{i2} T^{\beta} x_i(t))] = 0 \qquad (۶۰-۴)$$

قانون کنترل معادل حاصل بصورت زیر می باشد:

$$u_{eq}(t) = -\frac{1}{a_n.g(X)} [\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(X,t) + b_{i1} \tanh(b_{i2} x_i(t)) + c_{i1} \tanh(c_{i2} T^{\beta} x_i(t))] \qquad (۶۱-۴)$$

اگر تابع کلیدزنی را بصورت $u_{sw}(t) = -\frac{k}{g(X)}.\tanh(n.s(t))$ در نظر بگیرید، قانون کنترلی پیشنهادی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$u(t) = -\frac{1}{a_n.g(X)} [\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(X,t) + b_{i1} \tanh(b_{i2} x_i(t)) + c_{i1} \tanh(c_{i2} T^{\beta} x_i(t))] - \frac{k}{g(X)}.\tanh(n.s(t)) \qquad (۶۲-۴)$$

قضیه ۴-۴- مسیرهای حالت سیستم کنترل شده تحت کنترل کننده پیشنهادی و با انتخاب مناسب k، به طوریکه $W + \frac{\lambda}{a_n} \leq k$، در زمان محدود به صفحه لغزش $s(t)=0$ همگرا خواهند شد.

اثبات: تابع لیاپانوف $V(t) = \frac{1}{2} s^2(t)$ را در نظر بگیرید. با اعمال مشتق مرتبه-کسری کانفورمال از تابع پیشنهادی داریم:

$$\begin{aligned} T^{\alpha} V(t) &= T^{\alpha} s(t)).s(t) \\ &= [a_n f_n(X,t) + a_n w(X,t) + a_n.g(X).u(t) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} a_i f_i(X,t) + \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \tanh(b_{i2}(x_i(t)) + c_{i1} \tanh(c_{i2} T^{\beta} x_i(t))].s(t) \end{aligned} \qquad (۶۳-۴)$$

با جایگذاری سیگنال کنترلی در معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
T^{\alpha}V(t) &= T^{\alpha}s(t))s(t) \\
&= s(t)[\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(X,t) + a_n w(X,t) - a_n.g(X).\{\frac{1}{a_n.g(X)}[\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(X,t) \\
&+ b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_1(t))] - k.\frac{1}{g(X)}.\tanh(n.s(t))\} \\
&+ \sum_{i=1}^{n}(b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t)))]
\end{aligned}
\qquad (۶۴-۴)
$$

با توجه به کران بالا عدم قطعیت و اغتشاشات، داریم:

$$
\begin{aligned}
T^{\alpha}V(t) &\le [\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(X,t) + a_n W - a_n.g(X).\{\frac{1}{a_n.g(X)}[\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(X,t) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}(b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t))) \\
&- k.\frac{1}{g(X)}.\tanh(n.s(t))\} + \sum_{i=1}^{n}(b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t)))]s(t)
\end{aligned}
\qquad (۶۵-۴)
$$

پس از ساده سازی نامساوی فوق، شرط پایداری $T^{\alpha}V(t) \le -\lambda|s(t)|$ برقرار است، اگر:

$$
(a_n W.|s(t)| - [k.a_n.\tanh(n.s(t))].s(t)) \le -\lambda|s(t)| \qquad (۶۶-۴)
$$

در نتیجه داریم. $W - k.|\tanh(n.s(t))| \le -\frac{\lambda}{a_n}$

لذا با انتخاب مناسب k، با توجه به شرط $W + \frac{\lambda}{a_n} \le k$، حالت‌های سیستم کنترل شده به سطح لغزش $s(t)=0$ همگرا می‌شوند.

برای محاسبه زمان محدود رسیدن با توجه به شرط رسیدن، داریم:

$$
T^{\alpha}V(t) = s(t)T^{\alpha}s(t) < -\eta\,|s(t)| \qquad (۶۷-۴)
$$

$$\frac{s(t)}{|s(t)|}T^{\alpha}s(t) < -\eta \qquad (۴-۶۸)$$

با ساده کردن رابطه (۴-۶۸)، خواهیم داشت:

$$\operatorname{sgn}(s(t)).T^{\alpha}s(t) < -\eta \qquad (۴-۶۹)$$

در ادامه، دو حالت قابل بررسی است.

$$\operatorname{sgn}(\ s(t)).T^{\alpha}s(t) = \begin{cases} T^{\alpha}s(t) < -\eta, & s(t) > 0 \\ -T^{\alpha}s(t) < -\eta, & s(t) < 0 \end{cases} \qquad (۴-۷۰)$$

اعمال انتگرال مرتبه-کسری کانفورمال از دو طرف نامساوی فوق، نتیجه می دهد:

$$\begin{cases} {}^{t_r}_{0}T^{-\alpha}T^{\alpha}s(t) < -T^{-\alpha}\eta = \int_{0}^{t_r} -\frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}}d\tau, & s(t) > 0 \\ -{}^{t_r}_{0}T^{-\alpha}T^{\alpha}s(t) < -T^{-\alpha}\eta = \int_{0}^{t_r} -\frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}}d\tau, & s(t) < 0 \end{cases} \qquad (۴-۷۱)$$

با توجه به (۴-۷۱)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} [s(t)]_0^{t_r} = 0 - s(0) < \int_{0}^{t_r} -\frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}}d\tau = -\frac{\eta}{\alpha}(t_r)^{\alpha}, & s(t) > 0 \\ -[s(t)]_0^{t_r} = s(0) - 0 < \int_{0}^{t_r} -\frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}}d\tau = -\frac{\eta}{\alpha}(t_r)^{\alpha}, & s(t) < 0 \end{cases} \qquad (۴-۷۲)$$

پس از ساده کردن رابطه (۴-۷۲)، رابطه (۴-۷۳) بدست می‌آید.

$$\begin{cases} 0 - s(0) < -\frac{\eta}{\alpha}(t_r)^{\alpha}, \quad t_r < (\frac{\alpha s(0)}{\eta})^{\frac{1}{\alpha}}, s(t) > 0 \\ s(0) - 0 < -\frac{\eta}{\alpha}(t_r)^{\alpha}, \quad t_r < (-\frac{\alpha s(0)}{\eta})^{\frac{1}{\alpha}}, s(t) < 0 \end{cases} \qquad (۴-۷۳)$$

در نهایت زمان رسیدن بصورت زیر بدست می آید:

$$t_r \le [\frac{|\alpha s(0)|}{\eta}]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (۷۴-۴)$$

توجه: نتایج بدست آمده برای سیستم مرتبه-صحیح نیز قابل تعمیم است.

۴-۳-۲ طراحی کنترل کننده برای گروهی از سیستم‌ها با یک ورودی کنترلی

گروهی از سیستم‌های آفین را بصورت زیر در نظر بگیرید [۲۹-۳۰، ۸۸]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= x_{i+1}(t) \qquad i = 1,2,3,\dots,n-1 \\ \dot{x}_n(t) &= g(x,t) + w(x,t) + u(t) \end{aligned} \qquad (۷۵-۴)$$

به طوریکه، $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ بردار حالت سیستم، اغتشاش و عدم قطعیت سیستم بصورت $|w(X,t)| \le W$ و $u(t)$ سیگنال ورودی کنترل می‌باشد.

در ادامه طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری پیشنهادی ارائه می‌گردد.

سطح لغزش بصورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$s(t) = c_n T^{-\gamma}(\dot{x}_n(t)) + \sum_{i=1}^{n} c_{i-1}.T^{-\gamma} x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i.T^{-\gamma} \tanh(b_i x_i(t))] \qquad (۷۶-۴)$$

به طوریکه، k_i, c_i, b_i مقادیر ثابت باشند. با توجه به اینکه در فاز رسیدن، وقتی متغیرهای حالت سیستم به سطح لغزش می‌رسند، $s(t)=0$ است، خواهیم داشت.

پس از اعمال مشتق کانفورمال به (۴-۷۶)، داریم:

$$c_n \dot{x}_n(t) + \sum_{i=1}^{n} c_{i-1} x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i \tanh(b_i x_i(t)) = 0 \qquad (۷۷-۴)$$

از رابطه (۴-۷۷)، می‌توان (۴-۷۸) را نتیجه گرفت:

$$\dot{x}_n(t) = -\frac{1}{c_n}[\sum_{i=1}^{n} c_{i-1}x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i \tanh(b_i x_i(t))] \qquad (۷۸-۴)$$

براساس معادلات (۴-۷۵) و (۴-۷۸) دینامیک‌های مد لغزشی بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t), \qquad i = 1,..., n-1 \\ \dot{x}_n(t) = -\frac{1}{c_n}[\sum_{i=1}^{n} c_{i-1}x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i \tanh(b_i x_i(t))] \end{cases} \qquad (۷۹-۴)$$

قضیه ۴-۵- دینامیک‌های مد لغزش (۴-۷۹) پایدار هستند.

اثبات- تابع لیاپانوف را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i |x_i(t)| + |x_n(t)| \qquad (۸۰-۴)$$

به طوریکه، $a_i , \quad i = 1,2,.., n$ اعداد ثابت مثبت باشند. مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی بصورت زیر می‌باشد:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \operatorname{sgn}(x_i)\dot{x}_i(t) + \operatorname{sgn}(x_n)\dot{x}_n(t) \qquad (۸۱-۴)$$

بر اساس معادله (۴-۸۱)، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \operatorname{sgn}(x_i)\dot{x}_i(t) + \operatorname{sgn}(x_n(t))(-\frac{1}{c_n}[\sum_{i=1}^{n} c_{i-1}x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i \tanh(b_i x_i(t))]) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i \operatorname{sgn}(x_i(t)).x_{i+1}(t) - \frac{1}{c_n}\operatorname{sgn}(x_n(t))[\sum_{i=1}^{n} c_{i-1}x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i \tanh(b_i x_i(t))] \end{aligned} \qquad (۸۲-۴)$$

با توجه به اینکه، $\operatorname{sgn}(x_i).x_i = |x_i|$، $\operatorname{sgn}(x_j).x_i \le |x_i|, \quad i \ne j$، $\operatorname{sgn}(x_i).\tanh(x_i) = |\tanh(x_i)|$ و $\operatorname{sgn}(x_j).\tanh(x_i) \le |\tanh(x_i)|, \quad i \ne j$ خواهیم داشت.

$$\dot{V}(t)=\sum_{i=1}^{n-1} a_i \operatorname{sgn}(x_i(t))x_{i+1}-\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^{n} c_{i-1}\operatorname{sgn}(x_n(t))x_i(t)-\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^{n} k_i \operatorname{sgn}(x_n(t))\tanh(b_i x_i(t))$$
$$\le \sum_{i=1}^{n-1} a_i|x_{i+1}(t)|+\frac{1}{c_n}(\sum_{i=1}^{n-1} c_{i-1}|x_i(t)|)-\frac{c_{n-1}}{c_n}|x_n(t)|+\frac{1}{c_n}(\sum_{i=1}^{n-1} k_i|\tanh(b_i x_i(t))|$$
$$-\frac{k_n}{c_n}|\tanh(b_n x_n(t))|) \tag{۴-۸۳}$$

پس از ساده کردن معادله فوق، خواهیم داشت:

$$\dot{V}(t)\le \frac{c_0}{c_n}|x_1(t)|+(a_1+\frac{c_1}{c_n})|x_2(t)|+..+(a_{n-2}+\frac{c_{n-2}}{c_n})|x_{n-1}(t)|+a_{n-1}|x_n(t)|$$
$$-\frac{c_{n-1}}{c_n}|x_n(t)|+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k_i}{c_n}|\tanh(b_i x_i(t))|-\frac{k_n}{c_n}|\tanh(b_n x_n(t))| \tag{۴-۸۴}$$

اگر $b \ge \max\{\frac{c_0}{c_n},(a_1+\frac{c_1}{c_n}),\ldots,(a_{n-2}+\frac{c_{n-2}}{c_n}),a_{n-1}\}$ باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{c_0}{c_n}|x_1(t)|+(a_1+\frac{c_1}{c_n})|x_2(t)|+..+(a_{n-2}+\frac{c_{n-2}}{c_n})|x_{n-1}(t)|+a_{n-1}|x_n(t)|\le b(|x_1(t)|+..+|x_n(t)|)$$

بنابراین، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\dot{V}(t)\le b\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|-\frac{c_{n-1}}{c_n}|x_n(t)|+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k_i}{c_n}|\tanh(b_i x_i(t))|-\frac{k_n}{c_n}|\tanh(b_n x_n(t))| \tag{۴-۸۵}$$

رابطه، $\dot{V}(t)\le 0$ بر قراراست، اگر:

$$b\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|-\frac{c_{n-1}}{c_n}|x_n(t)|+\sum_{i=1}^{n}\frac{K}{c_n}|\tanh(b_i x_i(t))|-\frac{k_n}{c_n}|\tanh(b_n x_n(t))|\le 0 \tag{۴-۸۶}$$

به طوریکه، $K \ge \max k_i$ است. لذا با انتخاب مناسب پارامترها به طوریکه $|b|\le\frac{c_{n-1}}{c_n}$ و $K\le k_n$ باشد، رابطه $\dot{V}(t)\le 0$ برقرار است و دینامیک‌های مد لغزش (۴-۷۹) پایدار خواهند بود.

برای بدست آوردن قانون کنترل معادل، مشتق مرتبه-کسری سطح لغزش را در غیاب اغتشاش و عدم قطعیت، برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$T^{\gamma} s(t) = c_n \dot{x}_n(t) + \sum_{i=1}^{n} [c_{i-1} x_i(t) + k_i \tanh(b_i x_i(t))] = 0 \qquad (۸۷-۴)$$

با توجه به رابطه (۴-۷۹) ، داریم:

$$c_n(g(x,t) + u(t))) = -\sum_{i=1}^{n} [c_{i-1} x_i(t) + k_i \tanh(b_i x_i(t))] \qquad (۸۸-۴)$$

در نتیجه قانون کنترل معادل بصورت زیر بدست می‌آید.

$$u_{eq}(t) = -\frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^{n} [c_{i-1} x_i(t) + k_i \tanh(b_i x_i(t))] - g(x,t) \qquad (۸۹-۴)$$

همچنین قانون کنترل کلیدزنی بصورت زیر پیشنهاد می شود.

$$u_{sw}(t) = -k(t).\tanh(n_1.s(t)) \qquad (۹۰-۴)$$

به طوریکه $k(t) = k_{sw}.\tanh^2(n_2 T^{\gamma}.s(t))$، در نهایت قانون کنترل که عبارتست از مجموع کنترل معادل و کنترل کلیدزنی، بصورت زیر بدست می‌آید.

$$u(t) = -\frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^{n} [c_{i-1} x_i(t) + k_i \tanh(b_i x_i(t))] - g(x,t) - k(t).\tanh(n_1.s(t)) \qquad (۹۱-۴)$$

قضیه ۴-۶- مسیرهای حالت سیستم کنترل شده تحت کنترل کننده پیشنهادی به صفحه لغزش $s(t)=0$ در زمان محدود همگرا خواهند شد.

اثبات: تابع لیاپانوف $V(t) = \frac{1}{2}s^2(t)$ را در نظر بگیرید. پس از اعمال مشتق، خواهیم داشت:

$$T^{\gamma} V(t) = s(t).[c_n \dot{x}_n(t) + \sum_{i=1}^{n} c_{i-1} x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i \tanh(b_i x_i(t))] \qquad (۹۲-۴)$$

با توجه به (۴-۷۹) و (۴-۹۱) ، خواهیم داشت:

$$T^{\gamma} V(t) = s(t).[c_n w(x,t) - c_n k(t).\ \tanh(n_1 s(t)).] \qquad (۹۳-۴)$$

با توجه به کران بالا عدم قطعیت و اغتشاشات، داریم:

$$T^{\gamma} V(t) \le |s(t)|.c_n W - s(t).[c_n .k(t).\ \tanh(n_1 s(t))] \qquad (۹۴-۴)$$

بر اساس شرط رسیدن، داریم:

$$c_n W .|s(t)| - s(t).[c_n .k(t).\ \tanh(n_1 s(t))] \le -\eta\ |s(t)| \qquad (۹۵-۴)$$

پس از ساده کردن معادله فوق، خواهیم داشت.

$$c_n W - \operatorname{sgn}(s(t)).\ c_n .k(t).\tanh(n_1 s(t)) < -\eta \qquad (۹۶-۴)$$

در نهایت داریم:

$$c_n W - c_n |\tanh(n_1 .s(t))|.k(t) \le -\eta \qquad (۹۷-۴)$$

لذا با برقراری شرط $(W + \frac{\eta}{c_n}) \le |k(t)|$، به طوریکه $|k(t)| = k_{sw}$، حالت‌های سیستم کنترل شده به سطح لغزش $s(t)=0$ همگرا می‌شوند.

برای محاسبه زمان محدود رسیدن با توجه به شرط رسیدن، داریم:

$$T^{\alpha} V(t) = s(t) T^{\alpha} s(t) < -\eta\, |s(t)| \qquad (۹۸-۴)$$

$$\frac{s(t)}{|s(t)|} T^{\alpha} s(t) < -\eta \qquad (۹۹-۴)$$

با ساده کردن رابطه (۴-۹۹)، خواهیم داشت:

$$\operatorname{sgn}(s(t)).\ T^{\alpha} s(t) < -\eta \qquad (۱۰۰-۴)$$

در ادامه، دو حالت قابل بررسی است.

$$\operatorname{sgn}(s(t)).T^{\alpha}s(t)=\begin{cases}T^{\alpha}s(t)<-\eta, & s(t)>0\\ -T^{\alpha}s(t)<-\eta, & s(t)<0\end{cases} \tag{۱۰۱-۴}$$

اعمال انتگرال مرتبه-کسری کانفورمال از دو طرف نامساوی فوق، نتیجه می دهد:

$$\begin{cases}{}_{0}^{t_r}T^{-\alpha}T^{\alpha}s(t)<-T^{-\alpha}\eta=\int_0^{t_r}-\frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}}d\tau, & s(t)>0\\ -{}_{0}^{t_r}T^{-\alpha}T^{\alpha}s(t)<-T^{-\alpha}\eta=\int_0^{t_r}-\frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}}d\tau, & s(t)<0\end{cases} \tag{۱۰۲-۴}$$

با توجه به (۴-۱۰۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}[s(t)]_0^{t_r}=0-s(0)<\int_0^{t_r}-\frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}}d\tau=-\frac{\eta}{\alpha}(t_r)^{\alpha}, & s(t)>0\\ -[s(t)]_0^{t_r}=s(0)-0<\int_0^{t_r}-\frac{\eta}{\tau^{1-\alpha}}d\tau=-\frac{\eta}{\alpha}(t_r)^{\alpha}, & s(t)<0\end{cases} \tag{۱۰۳-۴}$$

پس از ساده کردن رابطه (۴-۱۰۳)، رابطه (۴-۱۰۴) بدست می‌آید.

$$\begin{cases}0-s(0)\le-\frac{\eta}{\alpha}(t_r)^{\alpha}, \quad t_r\le(\frac{\alpha s(0)}{\eta})^{\frac{1}{\alpha}} & s(t)>0\\ s(0)-0<-\frac{\eta}{\alpha}(t_r)^{\alpha}, \quad t_r<(-\frac{\alpha s(0)}{\eta})^{\frac{1}{\alpha}} & s(t)<0\end{cases} \tag{۱۰۴-۴}$$

در نهایت زمان رسیدن بصورت زیر بدست می آید:

$$t_r\le(\frac{|\alpha s(0)|}{\eta})^{\frac{1}{\alpha}} \tag{۱۰۵-۴}$$

۴-۳-۳ طراحی کنترل کننده برای یک حالت خاص از سیستم‌ها

گروهی از سیستم‌های آفین مرتبه دوم را بصورت زیر در نظر بگیرید [۲]:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = f(X,t) + w(X,t) + g(X).u(t) \qquad (۴-۱۰۶)$$

به طوریکه، $X = [x_1, x_2]^T$ بردار حالت سیستم، اغتشاش و عدم قطعیت سیستم بصورت $|w(X,t)| \le W$ و $u(t)$ ورودی کنترلی می‌باشد.

در ادامه طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری جدید ارائه می‌گردد.

سطح لغزش بصورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$S(t) = T^{-\alpha}\{m_0(\dot{x}_2(t)) + m_1.x_1(t) + k(t).\tanh(p.x_2(t)) + b_1 \tanh(g(t))\} \qquad (۴-۱۰۷)$$

به طوریکه، $g(t) = \sum_{i=1}^{2}(c_i.x_i(t) + a_i T^{-\gamma_i}.x_i(t))$ ، $k(t) = k_1 \tanh^2(\sum_{i=1}^{2} T^{-q} x_i(t))$ و $\alpha, q \in (0,1)$ می‌-باشند. پس از اعمال مشتق کانفورمال داریم:

$$T^{\alpha}\ S(t) = m_0\dot{x}_2(t) + m_1.x_1(t) + k(t).\tanh(p.x_2(t)) + b_1 \tanh(g(t)) \qquad (۴-۱۰۸)$$

با توجه به اینکه در فاز رسیدن، وقتی متغیرهای حالت سیستم به سطح لغزش می‌رسند، $s(t) = 0$ است. پس از اعمال مشتق کانفورمال ، داریم:

$$m_0\dot{x}_2(t) + m_1.x_1(t) + k(t).\tanh(p.x_2(t)) + b_1 \tanh(g(t)) = 0 \qquad (۴-۱۰۹)$$

از رابطه (۴-۱۰۹)، می‌توان (۴-۱۱۰) را نتیجه گرفت:

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{m_0}\{m_1.x_1(t) + k(t).\tanh(p.x_2(t)) + b_1 \tanh(g(t))\} \qquad (۴-۱۱۰)$$

براساس معادلات (۴-۱۰۶) و (۴-۱۱۰) دینامیک‌های مد لغزشی بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{1}{m_0}\{m_1.x_1(t) + k(t).\tanh(p.x_2(t)) + b_1 \tanh(g(t))\} \end{cases} \qquad (۱۱۱-۴)$$

قضیه ۴-۷- دینامیک‌های مد لغزش (۴-۱۱۱) پایدار هستند.

اثبات- تابع لیاپانوف را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$V(t) = \frac{1}{2}(x_2^2(t) + \frac{m_1}{m_0}.x_1^2(t)) \qquad (۱۱۲-۴)$$

به طوریکه m_0 و m_1 اعداد ثابت مثبت هستند. با اعمال مشتق به تابع لیاپانوف، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= x_2(t).\dot{x}_2(t) + \frac{m_1}{m_0}x_1(t).\dot{x}_1(t) \\ &= x_2(t).[-\frac{1}{m_0}\{m_1.x_1(t) + k(t).\tanh(p.x_2(t)) + b_1 \tanh(g(t))\}] + \frac{m_1}{m_0}x_1(t)x_2(t) \end{aligned} \qquad (۱۱۳-۴)$$

پس از ساده سازی (۴-۱۱۳)، رابطه (۴-۱۱۴) بدست می‌آید.

$$\dot{V}(t) = x_2(t).[-\frac{1}{m_0}(k(t).\tanh(p.x_2(t)) + b_1 \tanh(g(t)))] \qquad (۱۱۴-۴)$$

با توجه به کران عدم قطعیت‌ها و توابع تانژانت هایپربولیک، داریم:

$$\dot{V}(t) \le \frac{1}{m_0}|x_2(t)|b_1 - k(t)|x_2(t)||\tanh(p.x_2(t))| \qquad (۱۱۵-۴)$$

لذا با انتخاب مناسب مقادیر پارامترها، به طوریکه شرط زیر برقرار باشد، سیستم پایدار خواهد بود:

$$\frac{1}{m_0}b_1 \le |k(t)| \le k_1 \qquad (۱۱۶-۴)$$

برای بدست آوردن قانون کنترل معادل، مشتق مرتبه-کسری سطح لغزش را در غیاب اغتشاش و عدم قطعیت، برابر صفر قرار می‌دهیم. در نتیجه قانون کنترل معادل بصورت زیر بدست می‌آید.

$$u_{eq}(t) = -\frac{1}{m_0.g(X)}\{m_0 f(X,t) + m_1 x_1(t) + k_{sw}(t).\tanh(p.x_2(t)) + b_1 \tanh(g(t))\} \quad (۱۱۷-۴)$$

همچنین قانون کنترل کلیدزنی بصورت زیر پیشنهاد می شود.

$$u_r(t) = -g^{-1}(X).k_{sw}(t).\tanh(a_4 s(t)) \quad (۱۱۸-۴)$$

به طوریکه $k_{sw}(t) = k_s.\left|\tanh(a_1.s(t) + a_2.T^{\alpha}s(t) + a_3.T^{-\alpha}s(t))\right|$ است. در نهایت قانون کنترل که عبارتست از مجموع کنترل معادل و کنترل کلیدزنی، بصورت زیر بدست می‌آید.

$$u(t) = g^{-1}(X)[-\frac{1}{m_0.}\{m_0 f(X,t) + m_1 x_1(t) + k(t).\tanh(p.x_2(t)) + b_1 \tanh(g(t))\} - k_{sw}(t).\tanh(a_4 s)] \quad (۱۱۹-۴)$$

قضیه ۴-۸- متغیرهای حالت سیستم کنترل شده توسط کنترل کننده پیشنهادی با بهره $W + \frac{\eta}{m_0} \le k_s$ به سطح لغزش s(t)=0 در زمان محدود همگرا می‌شوند.

اثبات- با توجه به تابع لیاپانوف $V(t) = \frac{1}{2}s^2(t)$ و با توجه به قضیه پایداری لیاپانوف، شرط رسیدن زیر را در نظر بگیرید.

$$T^{\alpha}V_{SMC}(t) = S(t).T^{\alpha}S(t) \le -\eta|s(t)| \quad (۱۲۰-۴)$$

بر اساس رابطه (۴-۱۰۸) ، خواهیم داشت:

$$T^{\alpha}V_{SMC}(t)=S(t).T^{\alpha}S(t)=S(t)[m_0 f(X,t)+m_0 w(X,t)+m_0 g(X)u(t) \\ +m_1.x_1(t)+k(t).\tanh(p.x_2(t))+b_1\tanh(g(t))] \qquad (۱۲۱-۴)$$

با جایگذاری ورودی کنترل (۴-۱۱۹)، داریم:

$$T^{\alpha}V_{SMC}(t)=S(t)[m_0 f(X,t)+m_0 w(X,t)+g(X)m_0[-\frac{1}{g(X)m_0}\{m_0 f(X,t) \\ +m_1x_1(t)+k(t)\tanh(p.x_2(t))+b_1\tanh(g(t))\} \\ -\frac{k_{sw}(t)}{g(X)}\tanh(a_4 s)]+m_1.x_1(t)+k(t).\tanh(p.x_2(t))+b_1\tanh(g(t))]$$

(۱۲۲-۴)

با ساده کردن (۴-۱۲۲)، رابطه زیر بدست می‌آید.

$$T^{\alpha}V_{SMC}(t)\le[(m_0|s(t)|W-m_0k_{sw}(t).s(t).\tanh(a_4.s(t))] \qquad (۱۲۳-۴)$$

بر اساس رابطه (۴-۱۲۳) و با توجه به شرط رسیدن، داریم:

$$m_0(W|s(t)|-k_{sw}(t)s(t)\tanh(a_4.s(t))\le-\eta|s(t)| \qquad (۱۲۴-۴)$$

شرط پایداری برای رابطه (۴-۱۲۴) را بصورت زیر می‌توان بدست آورد:

$$W+\frac{\eta}{m_0}\le k_{sw}(t).|\tanh(a_4.s(t))|\le|k_{sw}(t)| \qquad (۱۲۵-۴)$$

در نتیجه به ازای $W+\frac{\eta}{m_0}\le|k_{sw}(t)|$ حالت‌های سیستم به سطح لغزش همگرا خواهند شد.

برای محاسبه زمان رسیدن حالت‌ها به سطح لغزش، شرط رسیدن زیر را در نظر بگیرید:

$$T^{\alpha}V(t)=s(t)T^{\alpha}s(t)\le-\eta|s(t)| \qquad (۱۲۶-۴)$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق، داریم:

$$s(t).t^{1-\alpha}\frac{ds(t)}{dt}\le-\eta|s(t)| \qquad (۱۲۷-۴)$$

$$\frac{s(t)}{|s(t)|}ds(t) \le -\eta t^{\alpha-1}dt \qquad (۱۲۸-۴)$$

رابطه فوق بصورت زیر ساده می‌شود.

$$\int_{s(0)}^{s(t_r)} sign(s(t))ds(t) \le -\frac{\eta}{\alpha}t_r^{\ \alpha} \qquad (۱۲۹-۴)$$

برای رابطه فوق دو حالت زیر قابل بررسی است.

$$t_r \le \begin{cases} [-\frac{\alpha}{\eta}.(0-s(0))]^{\frac{1}{\alpha}} & s(t)>0 \\ [\frac{\alpha}{\eta}.(0-s(0))]^{\frac{1}{\alpha}} & s(t)<0 \end{cases} \qquad (۱۳۰-۴)$$

در نتیجه داریم:

$$t_r \le (\frac{\alpha}{\eta}|s(0)|)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (۱۳۱-۴)$$

طبق رابطه (۴-۱۳۱)، زمان محدود رسیدن بدست می‌آید.

فصل پنجم

نتایج شبیه سازی

۵-۱- مقدمه

در این فصل، به منظور نمایش عملکرد و قابلیت‌های کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری، نتایج شبیه سازی کنترل کننده‌های طراحی شده در فصل پنجم بر روی سیستم‌های غیر خطی نمایش داده می‌شوند. سیستم‌های مختلفی از جمله سیستم‌های زیستی، کلاس‌هایی از سیستم‌های آشوبی و برخی از سیستم‌های کاربردی مورد بررسی قرار گرفته اند. پارامترهای کنترلی با استفاده از روش آزمون و خطا، بدست آمده‌اند. در تعیین پارامترهای کنترلی با استفاده از روش آزمون و خطا، معیارهای عملکرد کنترلی مناسب در نظر گرفته شده است و با تغییر هر پارامتر با ثابت نگهداشتن پارامترهای دیگر، اثر آن بر عملکرد کنترلی بررسی شده و در نهایت با لحاظ کردن تاثیر همه پارامترها در کنار هم و مصالحه بین اثرات مثبت و منفی آنها، بهترین حالت از بین حالت‌های بوجود آمده، انتخاب گردیده است.

۵-۲- کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری برای گروهی از سیستم‌های کانفورمال

کنترل کننده پیشنهادی در ۵-۲-۱ برای کلاسی ازسیستم‌های مرتبه-کسری کانفومال ارائه شده است که قابل تعمیم به سیستم‌های مرتبه-صحیح نیز می‌باشد. به منظور ارزیابی کنترل کننده پیشنهادی، دو سیستم مرتبه-کسری کانفورمال لورنز و لوتکا-ولترا انتخاب شده‌اند. همچنین از سیستم ژیروسکوپ مرتبه-صحیح برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی بر روی سیستم‌های مرتبه-صحیح استفاده شده است.

مثال ۵-۲-۱- سیستم آشوبی لورنز مرتبه-کسری زیر را در نظر بگیرید[۵۲]:

$$T^{\alpha} x(t) = -a(x(t) - y(t)) + \Delta f(X,t) + d(t) + u(t)$$
$$T^{\alpha} y(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \qquad (۱-۵)$$
$$T^{\alpha} z(t) = -bz(t) + x(t)y(t)$$

به طوریکه $X = [x, y, z]^T$ و $a=10,\ r=28,\ b=\frac{8}{3}$ ، ، $\alpha = 0.98$ ، $|d(t)| = |0.1\cos(t)| \le 0.1$ و $|\Delta f(X,t)| = |0.1 - 0.1\sin(\pi x)| \le 0.2$ و شرایط اولیه متغیرهای حالت بصورت $x(0)=1,\ \ y(0)=1,\ \ z(0)=1$ باشند. با توجه به طراحی انجام شده در فصل ۴، کنترل کننده پیشنهادی برای سیستم (۵-۱)، بصورت (۵-۲) می‌باشد:

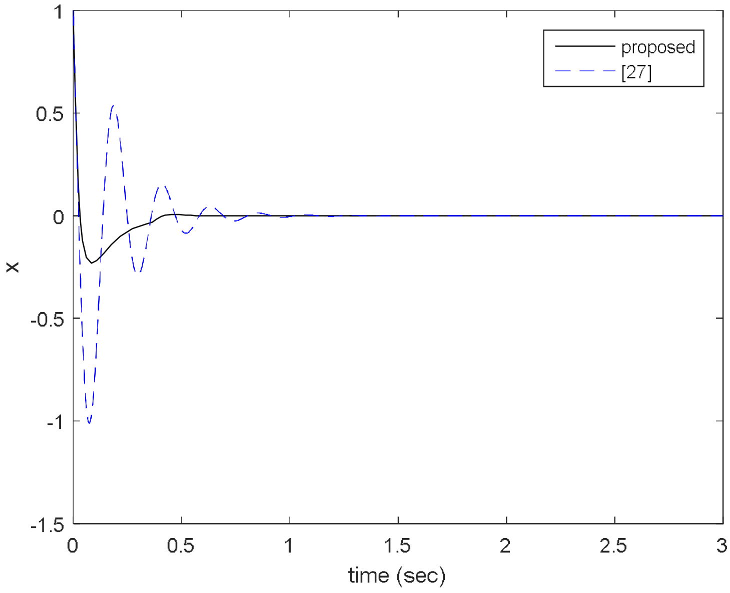
$$u(t) = -\frac{1}{a_1.g(X)}\sum_{i=1}^{3}[a_i f_i(X,t) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t)) + b_{i1}\tanh(b_{i2}x_i(t))] - \frac{k}{g(X)}.\tanh(n.s(t)) \qquad (۵-۲)$$

به طوریکه پارامترهای کنترل کننده، با روش آزمون و خطا، بصورت زیر تعیین گردیده‌اند.

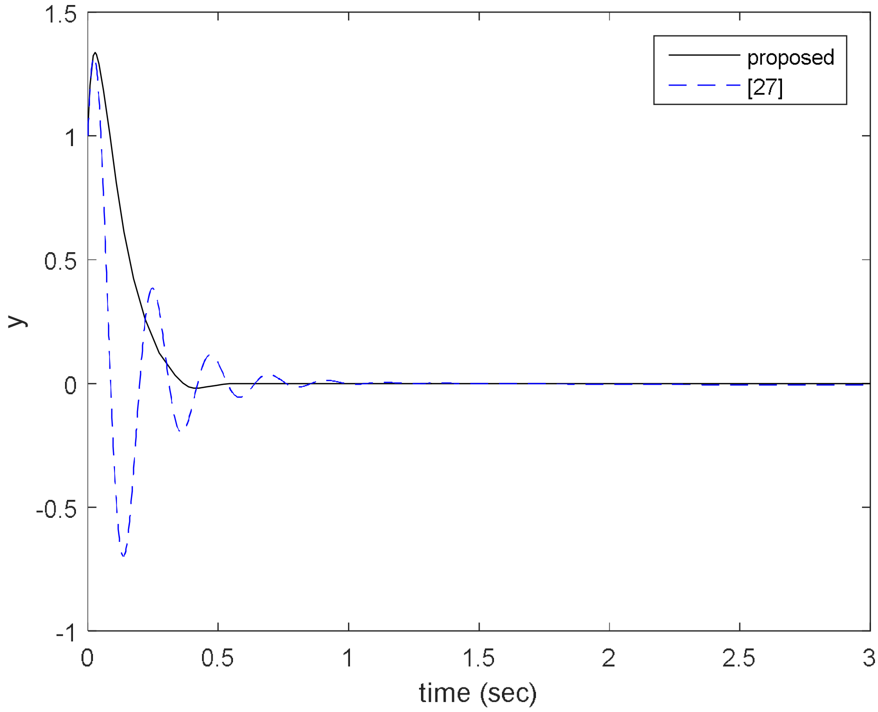
$$a_1 = 1.8 \quad a_2 = 2.3, \quad a_3 = 0.1, \quad b_{11} = 1.8 \quad b_{21} = 0.001, \quad b_{31} = 0.3 \quad b_{12} = 30, \quad b_{22} = 0.01,$$
$$b_{32} = 50, \quad c_{11} = 0.01 \quad c_{21} = 2, \quad c_{22} = 50 \quad c_{31} = 0.01, \quad k = 20.2, \quad \beta = 0.17$$

نتایج حاصل از شبیه سازی روش پیشنهادی در شکل ۵-۱ نشان داده شده‌اند و با نتایج مرجع [۲۷] مقایسه گردیده‌اند. کنترل کننده طراحی شده در مرجع [۲۷]، بر اساس سطح لغزش (۵-۳) می‌باشد.

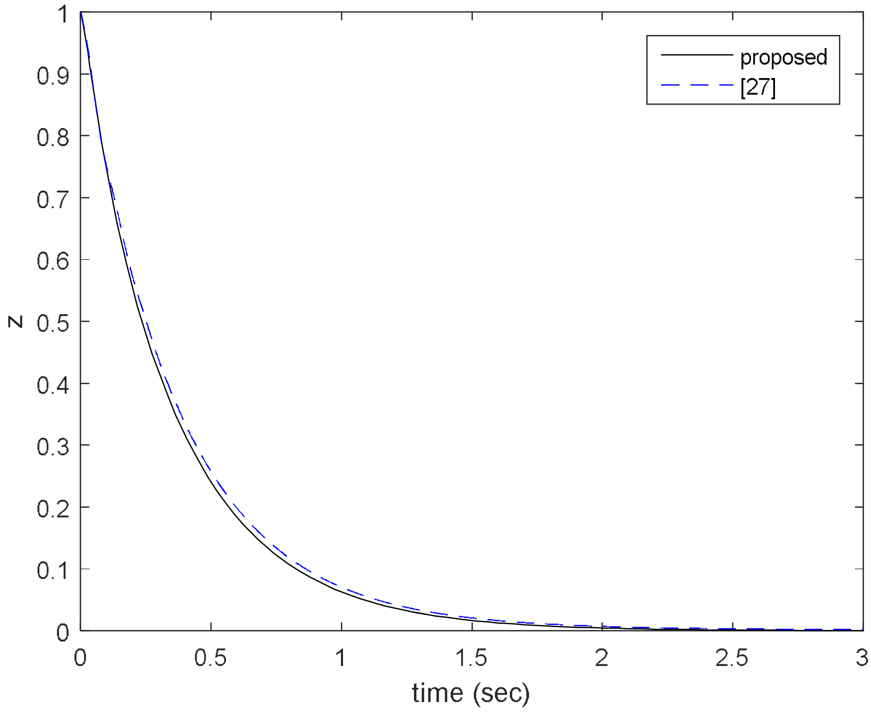
$$s(t) = {}_C D^{q-1}x(t) + D^{-1}(y(t)g(X,t) + z(t)h(X,t) + \alpha x(t)) \qquad (۳-۵)$$


proposed
[27]
x
time (sec)
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

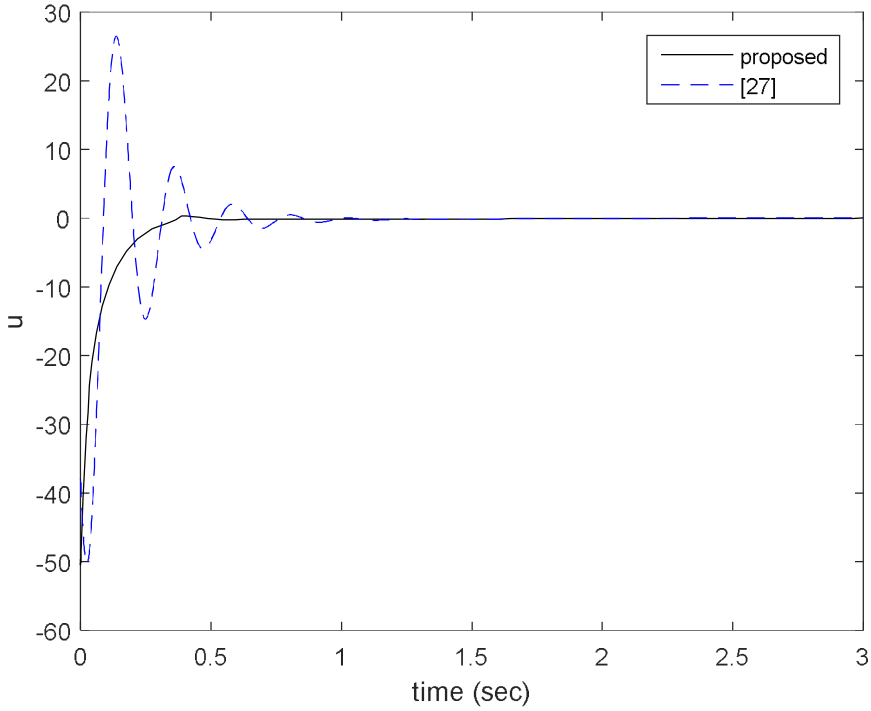
(الف)


proposed
[27]
y
time (sec)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

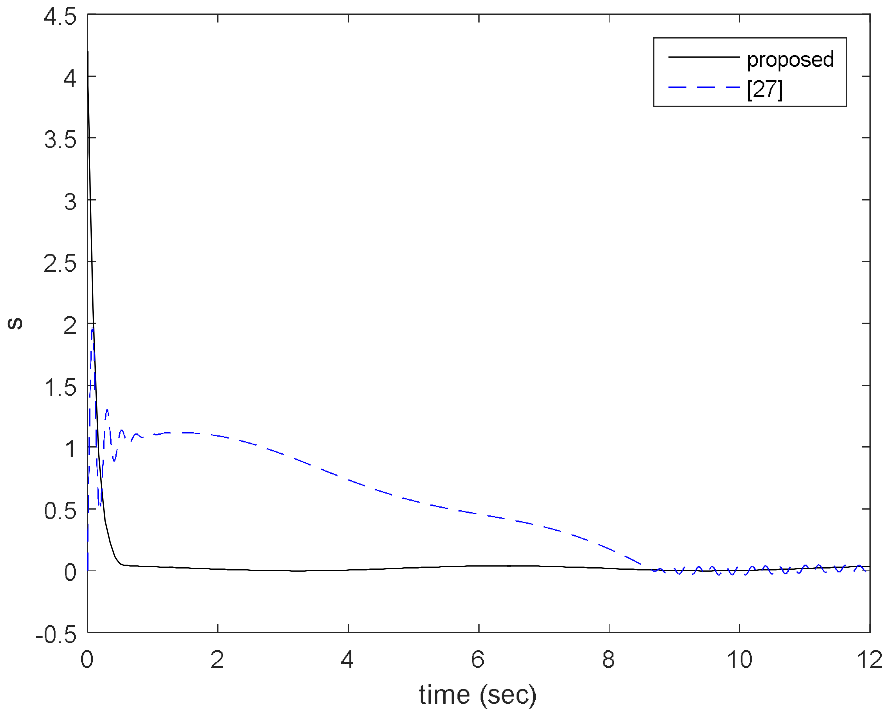
(ب)



(پ)



(ت)



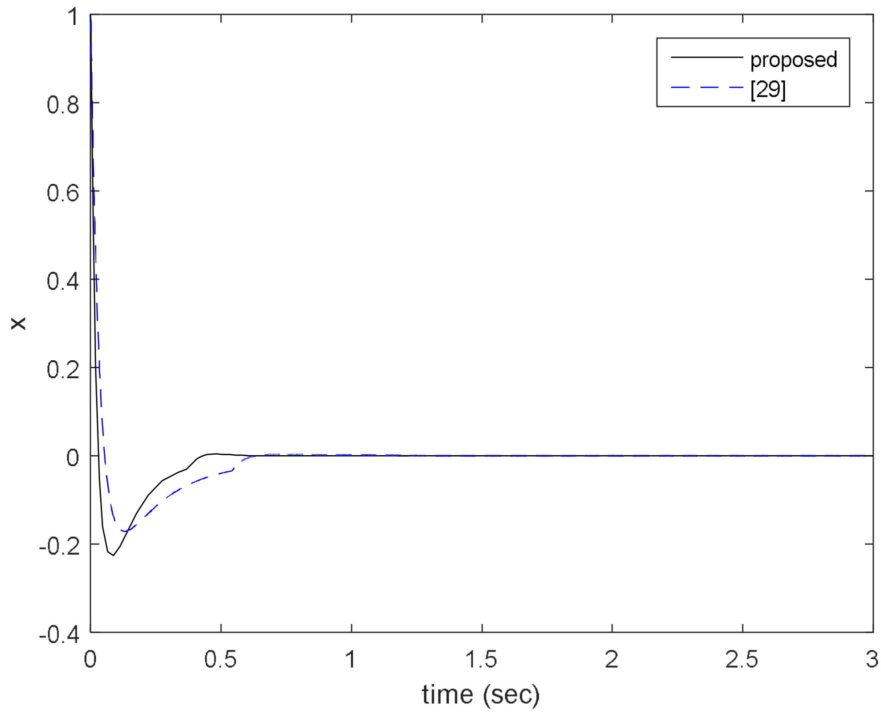
(ث)

شکل ۵-۱) پاسخ سیستم آشوبی لورنز مرتبه-کسری کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۲) و مرجع [۲۷]، الف)-پ) متغیرهای حالت x(t)، y(t) و z(t)، ت) سیگنال کنترلی u(t)، ث) سطح لغزش

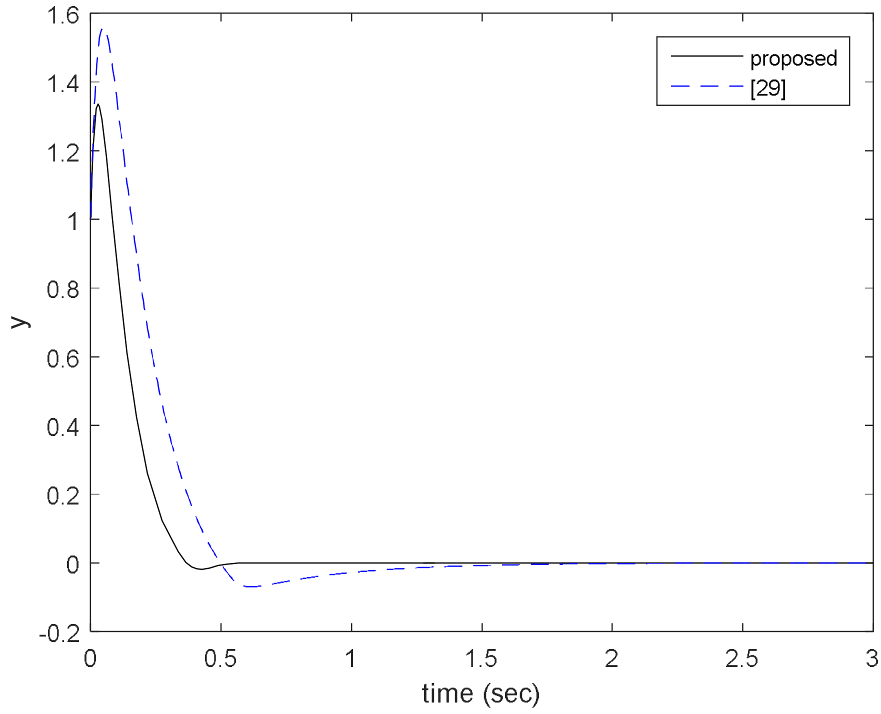
در شکل ۵-۱، عملکرد مطلوب کنترل کننده پیشنهادی در مقایسه با کنترل کننده طراحی شده بر اساس مرجع [۲۷]، مشاهده می‌گردد. نتایج شبیه سازی تاثیر موارد در نظر گرفته شده در طراحی صفحه پیشنهادی و تابع کلیدزنی مورد استفاده را نشان می‌دهند که طبق انتظار، بهبود عملکرد پاسخ گذرا، افزایش سرعت همگرایی، رفع مشکل احتمال اشباع و کاهش تلاش کنترلی، مشاهده می‌گردد.

نتایج حاصل از شبیه سازی کنترل کننده پیشنهادی بر سیستم مذکور با نتایج حاصل از شبیه سازی کنترل کننده طراحی شده براساس مرجع [۲۹]، که سطح لغزش آن بصورت زیر است، در شکل ۵-۲ نشان داده شده اند.

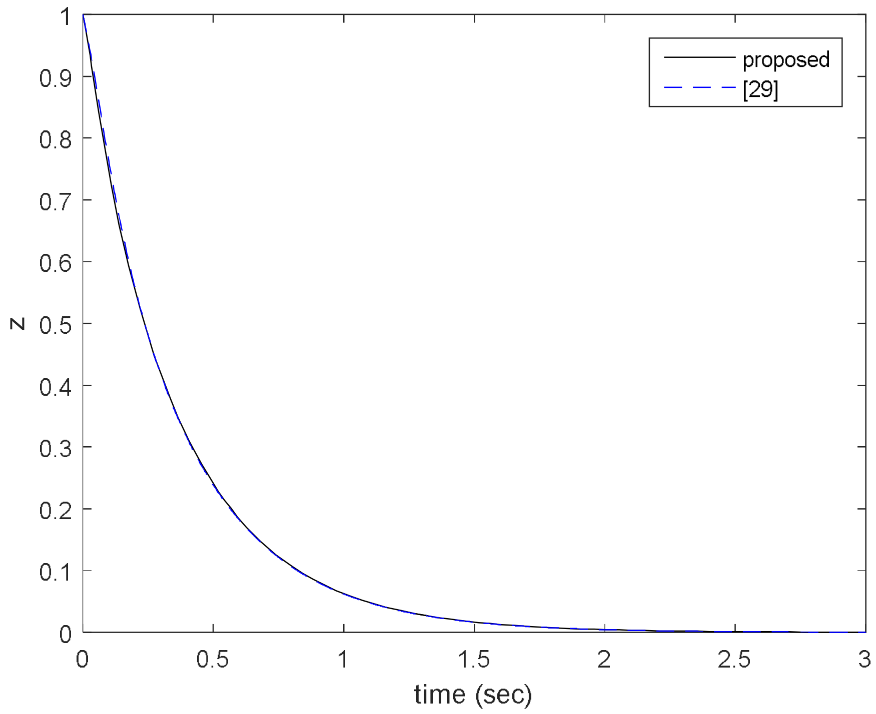
$$s(t) = 7\ x(t) + 2.2\,y(t) + 3.5\,z(t) \qquad (۵-۴)$$


proposed
[29]
x
time (sec)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

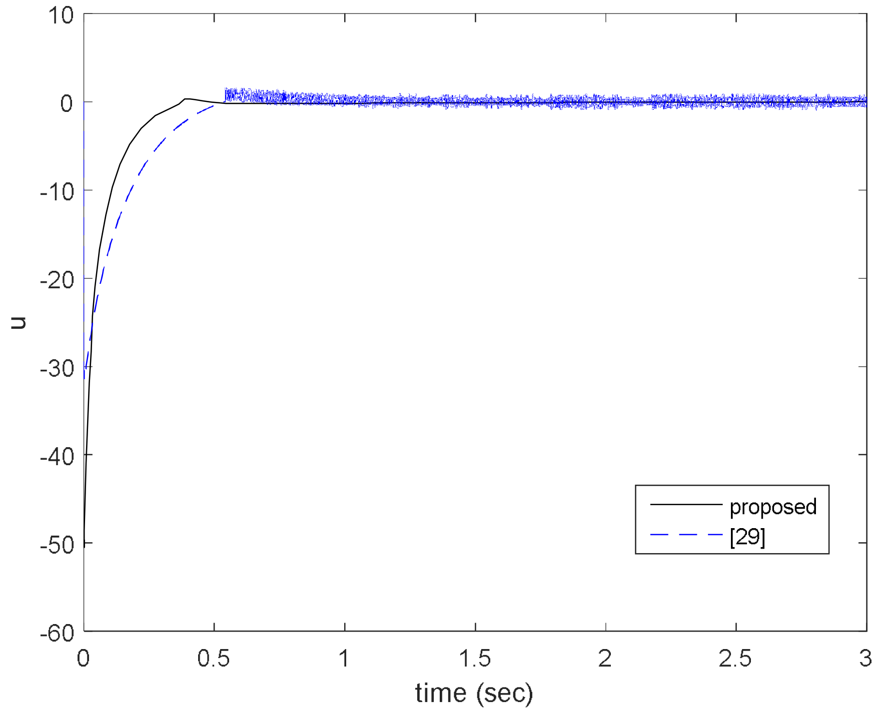
(الف)


proposed
[29]
y
time (sec)
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

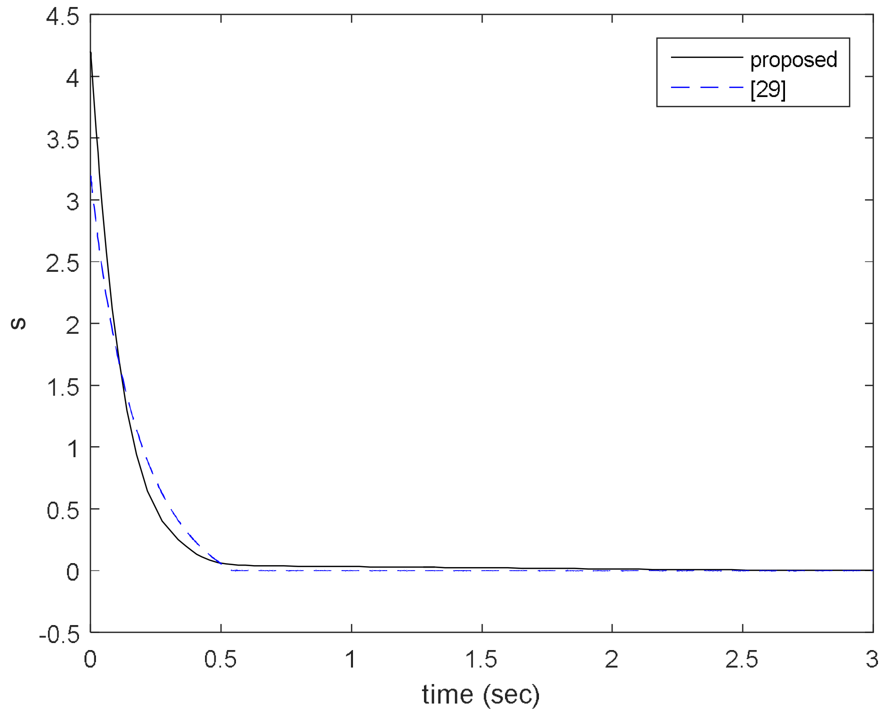
(ب)



(پ)



(ت)



(ت)

شکل ۵-۲) پاسخ سیستم آشوبی لورنز مرتبه-کسری کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۲) و مرجع [۲۹]، الف)-پ) متغیرهای حالت x(t)، y(t) و z(t)، ت) سیگنال کنترلی u(t)، (ث)سطح لغزش

با توجه به قسمت‌های (الف) تا (پ) در شکل ۵-۲، که رفتار متغیرهای حالت سیستم کنترل شده را نشان می‌دهند، افزایش سرعت همگرایی روش پیشنهادی نسبت به روش ارائه شده در مرجع [۲۹] مشاهده می‌شود و همچنین در قسمت (ت)، سیگنال کنترلی نشان داده شده است که کاهش قابل توجه پدیده وزوز ملاحظه می‌گردد. همچنین در قسمت (ت)، پاسخ زمانی سطح لغزش، بهبود را نسبت به مرجع [۲۹]، نشان می‌دهد.

مثال ۵-۲-۲ سیستم مرتبه-کسری لوتکا-ولترا زیر را در نظر بگیرید [۵۱]:

$$\begin{aligned} T^{\alpha_1} x(t) &= x(t)(r - ax(t) - by(t)) \\ T^{\alpha_1} y(t) &= y(t)(-d + cx(t)) \end{aligned} \qquad (۵-۵)$$

به طوریکه $X = [x_1 \;\; x_2]^T$ بردار حالت سیستم، $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ باشند. طبق مرجع [۵۱]، به ازای پارامترهای زیر، سیستم ناپایدار می باشد:

$$r = 1, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad c = 4, \; d = 2$$

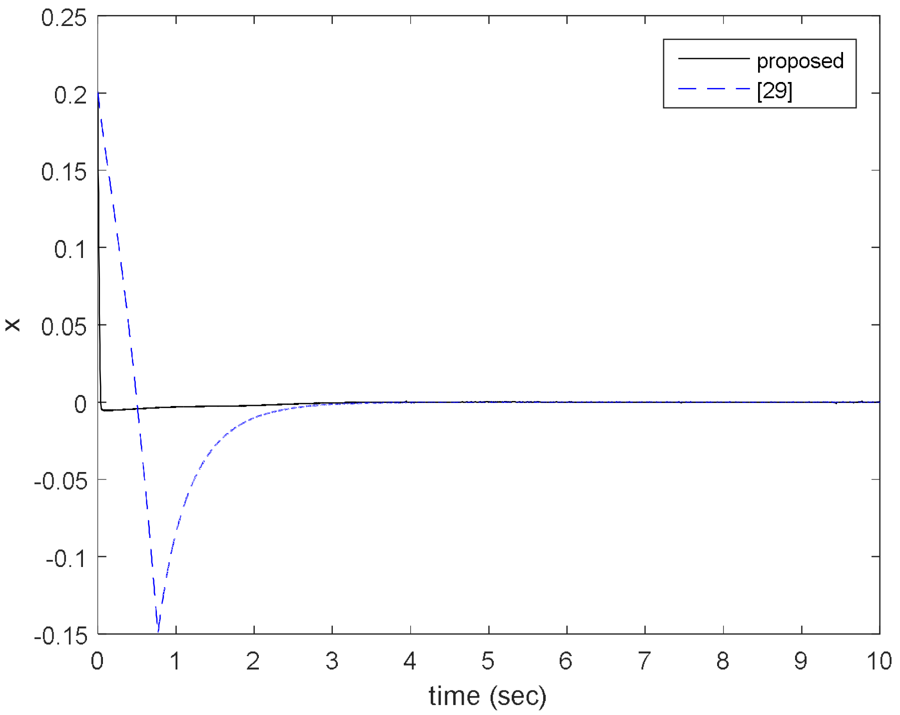
به طوریکه $|\Delta f(X,t)| = |0.1 - 0.1\sin(\pi x)| \le 0.2$ و $|d(t)| = |0.1\cos(t)| \le 0.1$ و شرایط اولیه $x(0) = 0.2, \quad y(0) = 0.8$ می باشند. کنترل کننده پیشنهادی طراحی شده در فصل قبل برای سیستم (۵-۵) بصورت زیر می‌باشد:

$$u(t) = -\frac{1}{a_1.g(X)}[\sum_{i=1}^{2} a_i f_i(X,t) + b_{i1}\tanh(b_{i2} x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2} T^{\beta} x_i(t))] - \frac{k}{g(X)}.\tanh(n.s(t)) \quad (۵\text{-}۶)$$

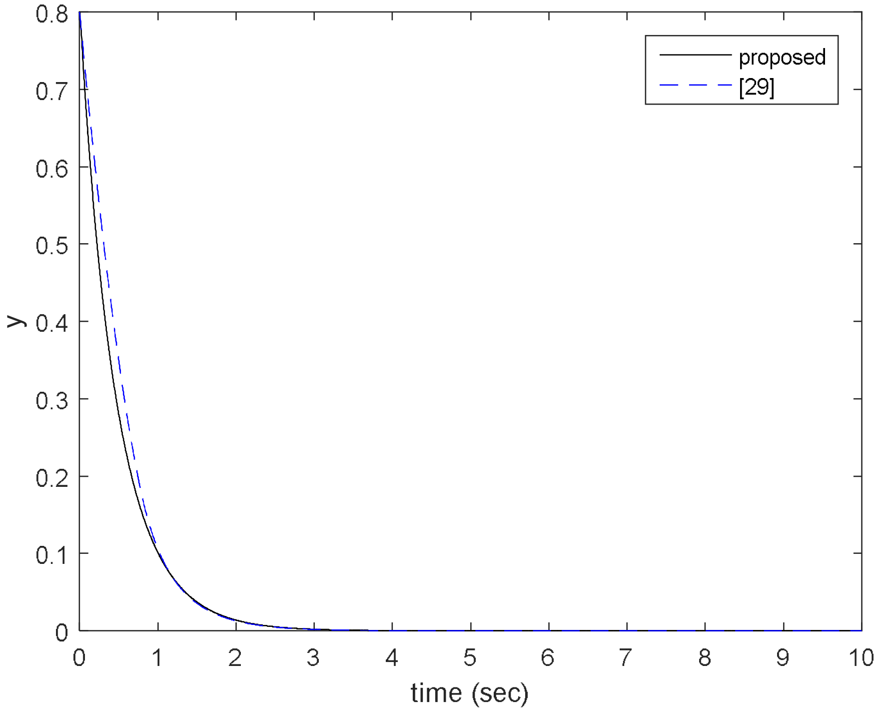
با استفاده از روش آزمون و خطا پارامترهای کنترلی بصورت زیر در نظر گرفته شده اند:

$a_1 = 20, \quad a_2 = 0.1, \quad b_{11} = 1.7, \quad b_{21} = 0.01, \quad b_{12} = 50, \quad b_{22} = 0.01, \quad c_{11} = 0.01, \quad c_{21} = 0.4, \quad c_{22} = 100$
$k = 4.5, \quad \beta = 0.17,$

نتایج حاصل از اعمال کنترل کننده پیشنهادی با کنترل کننده طراحی شده بر اساس مرجع [۲۹]، در شکل ۵-۳ نشان داده شده است

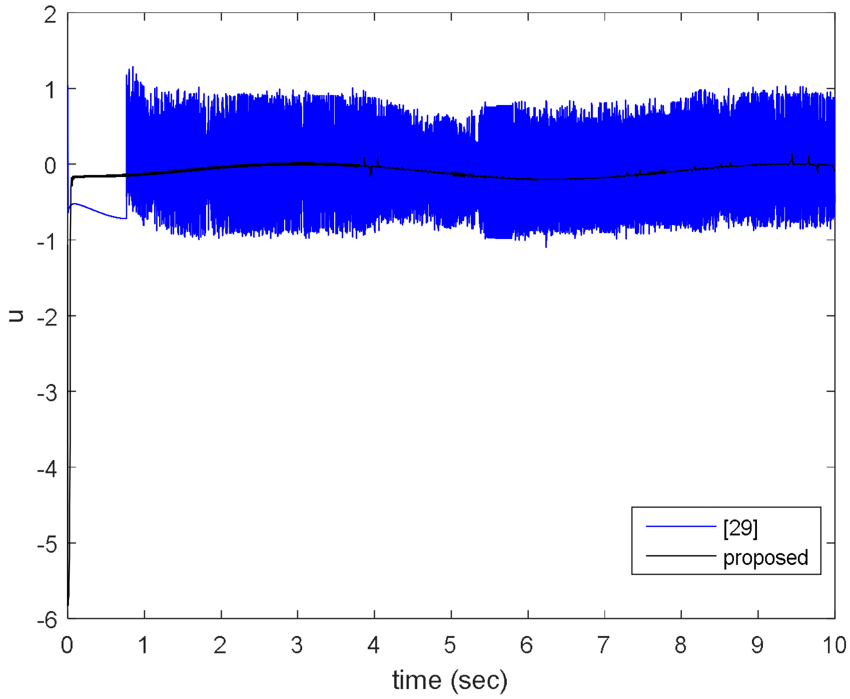


(الف)



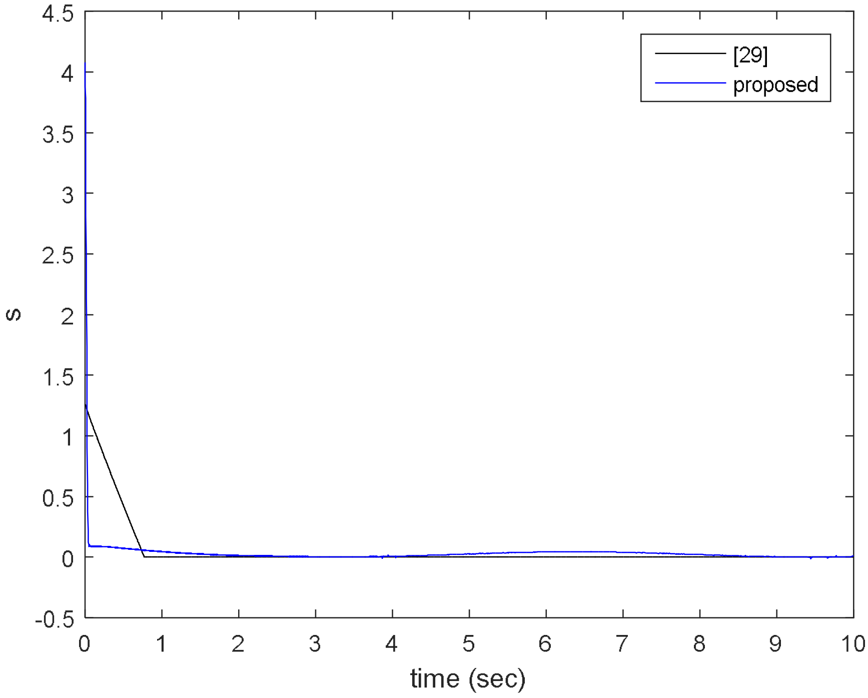
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
y
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
time (sec)
proposed
[29]

(ب)



2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
u
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
time (sec)
[29]
proposed

(پ)



(ث)

شکل ۵-۳) پاسخ سیستم آشوبی لوتکا-ولترا مرتبه-کسری کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۶) و مرجع [۲۹]، الف)-ب) متغیرهای حالت x(t)، y(t) ، پ) سیگنال کنترلی u(t)، ت) سطح لغزش

با توجه به شکل ۵-۳، بهبود عملکرد پاسخ گذرا، رفع احتمال مشکل اشباع، افزایش سرعت همگرایی از مزایای کنترل کننده پیشنهادی در مقایسه با مرجع [۲۹]، است. کاهش قابل توجه وزوز و بهبود تلاش کنترلی در قسمت (ت)، مشاهده می‌شود. همچنین با توجه به پاسخ صفحه لغزش در قسمت (ث)، برتری روش پیشنهادی نسبت به مرجع [۲۹]، واضح است.

مثال ۵-۲-۳- سیستم دافینگ-هولمز[۳۸] زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= -0.3y(t) - x^3(t) + \Delta f(X,t) + d(t) + u(t) \end{aligned} \qquad (۵-۷)$$

[38] Duffing forced-oscillation

به طوریکه $X=[x_1\ x_2]^T$ بردار حالت سیستم، $|\Delta f(X,t)|=|0.4\sin(0.1t)|\le 0.04$ و $|d(t)|=|0.07+0.05\sin(t)|\le 0.12$ و پارامترهای کنترلی با استفاده از روش آزمون و خطا بدست آمده‌اند.

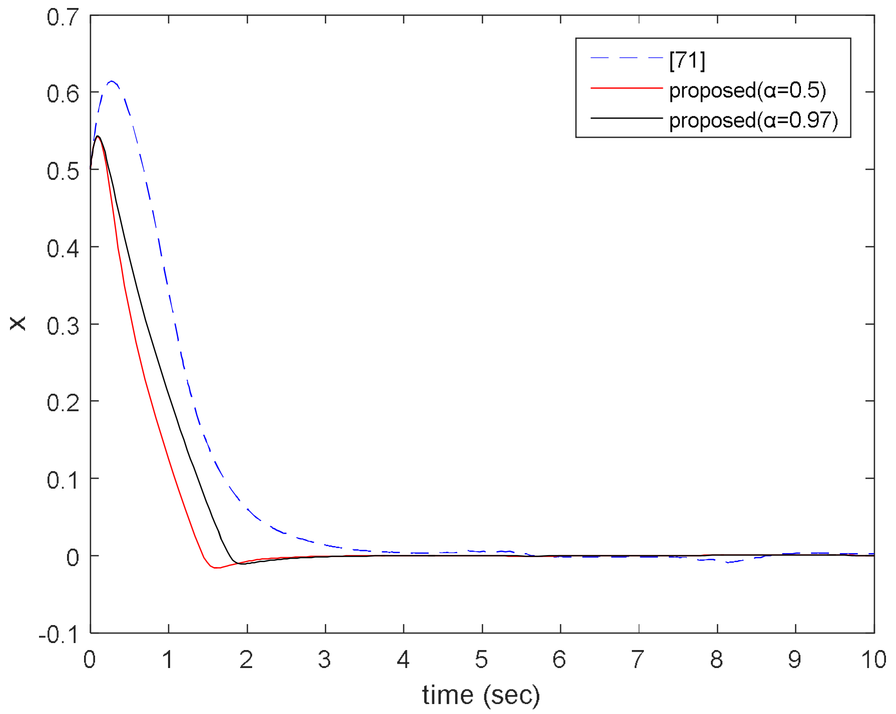
$m=0.01,\quad a_1=5.5,\quad a_2=1.2,\quad b_{11}=1.32,\quad b_{21}=0.001,\ b_{11}=40,\quad b_{22}=0.001,\ c_{11}=0.001,$

$c_{21}=0.75,\quad c_{22}=50,\quad \alpha=0.97,\quad \beta=0.17,\quad k=6.$

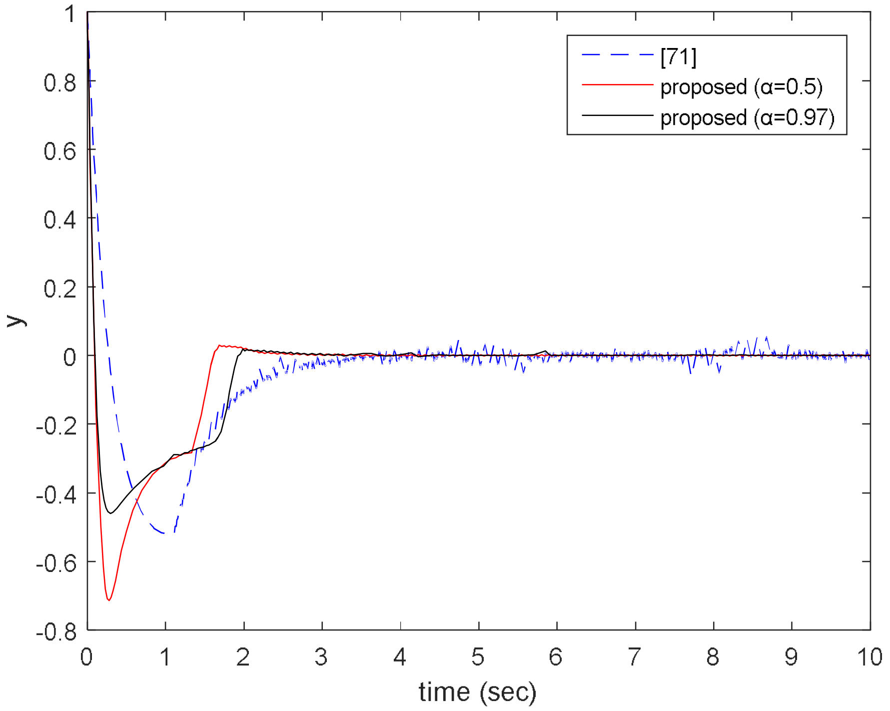
به منظور بررسی بیشتر برای $\alpha=0.5$ نیز، کنترل کننده را طراحی نمودیم. نتایج حاصل از اعمال کنترل کننده در مقایسه با کنترل کننده طراحی شده بر اساس [۷۱] و [۸۹]، در شکل ۵-۴ نشان داده شده اند:

$$s(t)=1.5\dot{x}_1(t)+1.2x_2(t) \qquad (۵-۸)$$

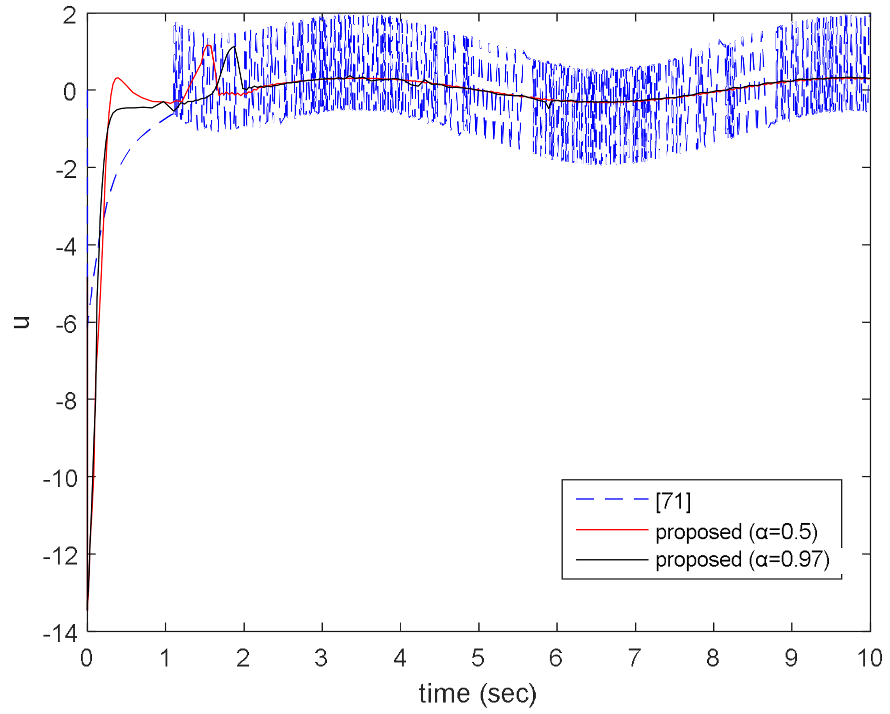
نتایج شبیه سازی در شکل (۵-۹)، عملکرد مقاوم کنترل کننده طراحی شده را نشان می‌دهد.



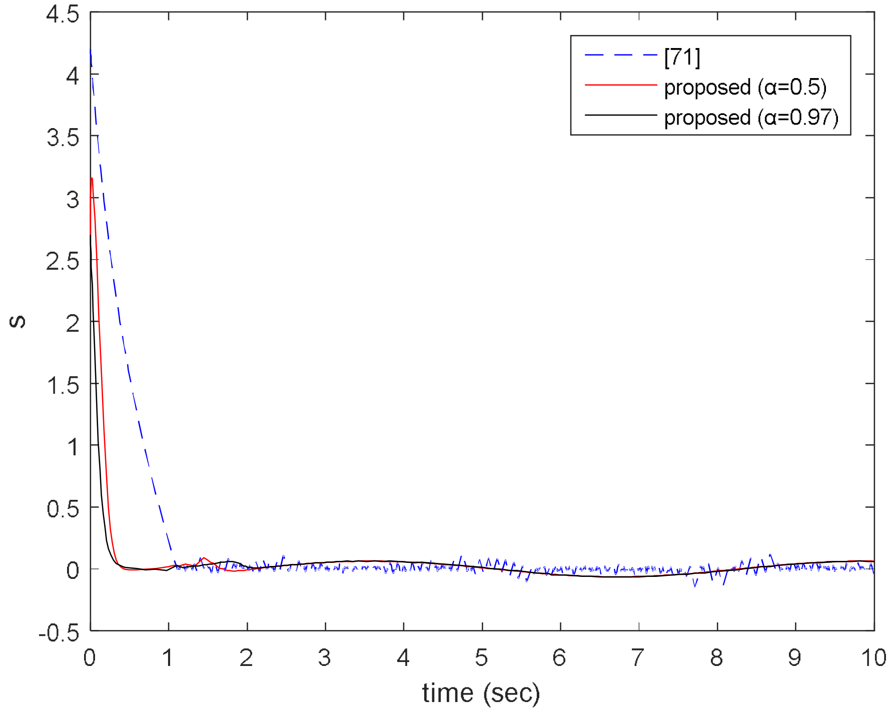
(الف)


[71]
proposed (α=0.5)
proposed (α=0.97)
y
time (sec)

(ب)


[71]
proposed (α=0.5)
proposed (α=0.97)
u
time (sec)

(پ)



(ت) سطح لغزش

شکل ۵-۴) پاسخ سیستم آشوبی دافینگ-هولمز مرتبه-کسری کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۶) و مرجع [۷۱]، الف)-ب) متغیرهای حالت x(t) و y(t) ؛ پ) سیگنال کنترلی u(t)، ت) سطح لغزش

نتایج حاصل از شبیه سازی، مزیت کنترل کننده پیشنهادی نسبت به روش ارائه شده در مرجع [۷۱]، را نشان می‌دهند. بهبود عملکرد کنترلی از جمله افزایش سرعت همگرایی و کاهش وزوز از مزایای روش پیشنهادی در مقایسه با کنترل کننده کلاسیک مرجع [۷۱] است.

مثال ۵-۲-۴- سیستم ژیروسکوپ زیر را در نظر بگیرید [۳۰ -۲۹]:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
&\dot{x}_2(t) = -100\frac{(1-\cos(x_1))^2}{\sin^3(x_1)} - 0.5x_2(t) \\
&\qquad - 0.05x_2^3(t) + \sin(x_1(t)) + 35.5\sin(25t)\sin(x_1(t)) + \Delta f(X,t) + d(X,t) + u(t)
\end{aligned} \tag{۵-۹}$$

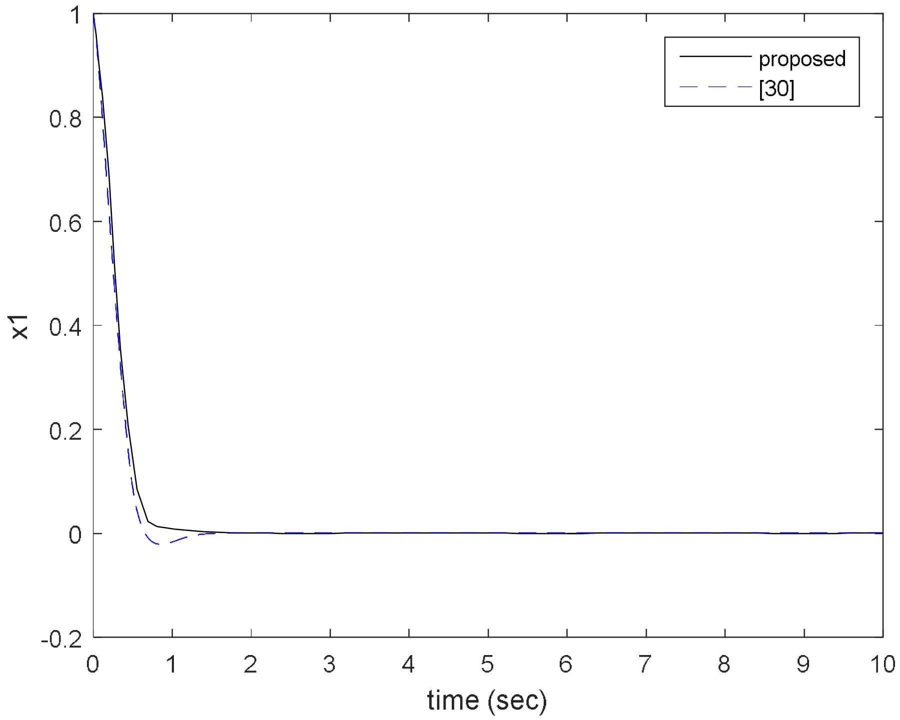
به طوریکه $X = [x_1 \;\; x_2]^T$ بردار حالت سیستم، $\Delta f(X,t) + d(t) = 0.25\cos(2\pi t)x_2 + 0.1\sin(2t)$ و k=4.95 باشند. برای کنترل سیستم کنترل کننده پیشنهادی زیر بکار گرفته شده است:

$$u(t) = -\frac{1}{a_1.g(X)}[\sum_{i=1}^{2} a_i f_i(X,t) + b_{i1}\tanh(b_{i1}x_i(t)) + c_{i1}\tanh(c_{i2}T^{\beta}x_i(t))] - \frac{k}{g(X)}.\tanh(n.s(t))$$ (۵-۱۰)

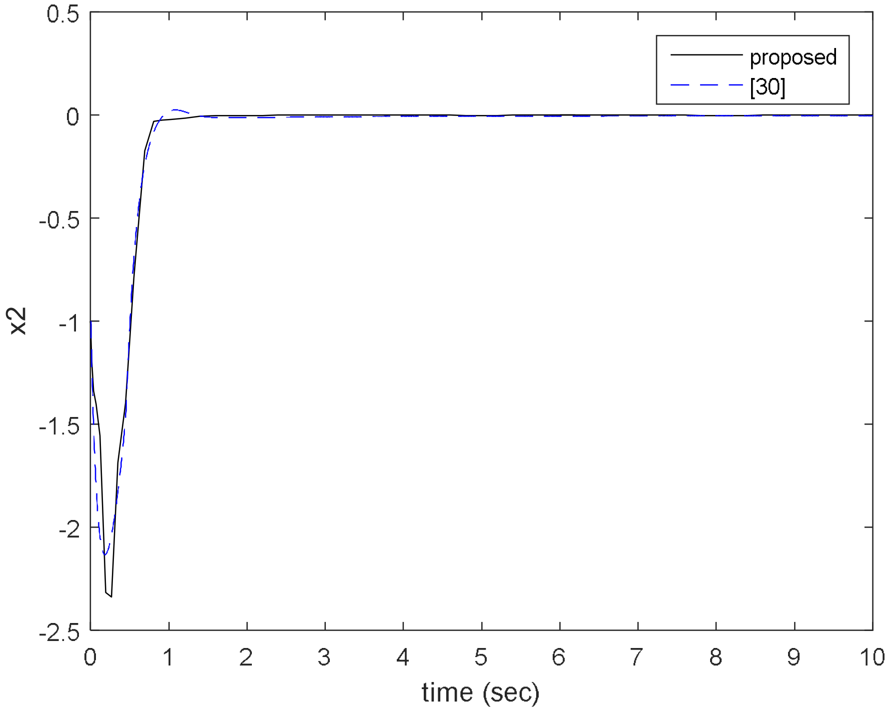
پارامترهای کنترل کننده با استفاده از روش آزمون و خطا و با توجه به شروط بدست آمده از قضایای پایداری اثبات شده در فصل چهارم، بصورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$m=0.01,\quad a_1=19,\quad a_2=1.5,\qquad b_{11}=0.38,\quad b_{21}=0.001,\quad c_{21}=0.9,$$
$$b_{11}=2.5,\quad b_{22}=0.001,\quad c_{22}=3,\quad \alpha=0.97,\quad \beta=0.17$$

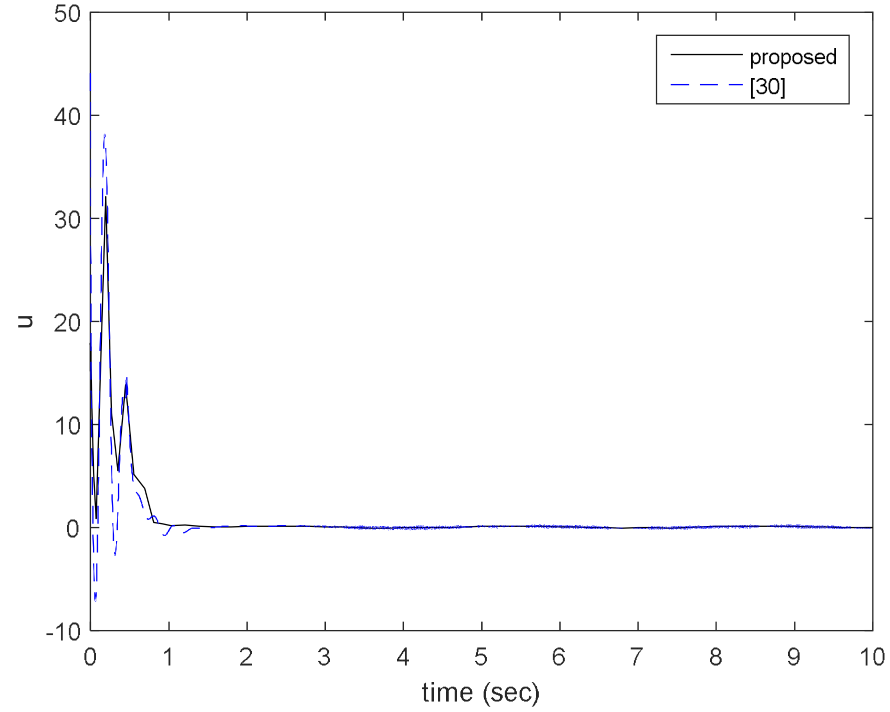
پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم در قسمت (الف)-(ب)، ورودی کنترلی در قسمت (پ) و پاسخ صفحه لغزش در قسمت (ت) در شکل ۵-۵ نشان داده شده‌اند. نتایج شبیه سازی بیان کننده برتری کنترل کننده پیشنهادی نسبت به کنترل کننده طراحی شده بر اساس مرجع [۳۰] می‌باشند.



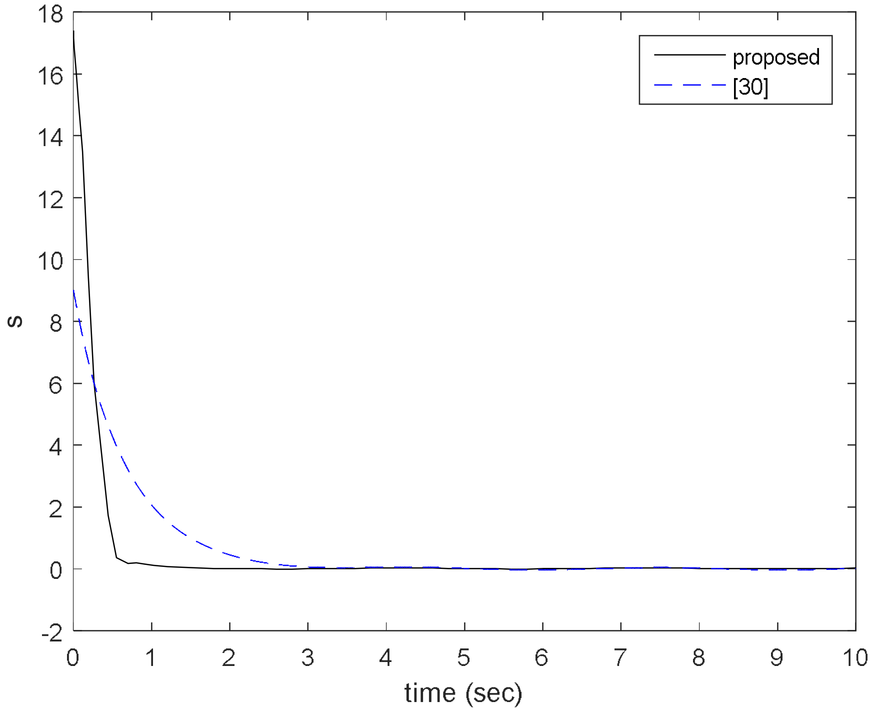
(الف)


0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
x2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
time (sec)
proposed
[30]

(ب)


50
40
30
20
10
0
-10
u
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
time (sec)
proposed
[30]

(پ)



(ت)

شکل ۵-۵) پاسخ سیستم ژیروسکوپ کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۱۰) و مرجع [۳۰]، الف)-ب) متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ؛ پ) سیگنال کنترلی $u(t)$ ت) سطح لغزش

نتایج شبیه سازی، بهبود عملکرد کنترلی از جمله افزایش سرعت همگرایی و کاهش دامنه تلاش کنترلی در لحظات اولیه را نسبت به روش ارائه شده در [۳۰] را نشان می‌دهند.

عملکرد کنترل کننده پیشنهادی، همچنین با استفاده از معیارهای IAE و ISV که بصورت زیر می-باشند، ارزیابی شده است که نتایج آن در جدول ۵-۱ نشان داده شده است. نتایج حاصل از ارزیابی، برتری روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

$$IAE = \int_0^t |e(t)| dt \tag{۵-۱۱}$$

$$ISV = \int_0^t u^2(t) dt \tag{۵-۱۲}$$

جدول ۵-۱ معیارهای عملکرد

سیستم‌ها	روش‌های کنترلی	معیارخطا IAE_x	معیارخطا IAE_y	معیارخطا IAE_z	معیارخط ISV۱
سیستم مرتبه-کسری لورنز	روش پیشنهادی	0.0511	0.1896	0.3529	68.8
	مرجع [27]	0.1669	0. 1936	0.3734	181.4
	مرجع [29]	0.06826	0.3545	0.3707	77.29
سیستم لوتکا-ولترا	روش پیشنهادی	0.011	0.3862	---	2.761
	مرجع [29]	0.138	0. 4326	---	2. 253
سیستم دافینگ-هولمز	روش پیشنهادی	0.4742	0.6243	---	16.41
	مرجع [89]	0.7704	0.8386	---	48.02
سیستم ژیروسکوپ	روش پیشنهادی	0.24	1.08	---	84.67
	مرجع [30]	0.28	1.08	---	152.8

در جدول ۵-۱، نماد IAE_x، IAE_y و IAE_z به ترتیب معیارهای خطا مربوط به سه متغیر حالت سیستم x و y و z می‌باشند. همانطور که مشاهده می‌گردد، این معیارها و همچنین معیارISV برای روش پیشنهادی نسبت به سایر روش‌ها در مراجع ذکر شده در جدول، بهبود یافته‌اند.

۵-۳- کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری برای گروهی از سیستم‌های مرتبه-کسری

مثال ۵-۳-۱ سیستم ژیروسکوپ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -100\,\frac{(1-\cos(x_1(t)))^2}{\sin^3(x_1(t))} - 0.5x_2(t) - 0.05x_2^3(t) + \sin(x_1(t))\\ &\quad + 35.5\sin 25t\sin(x_1(t)) + \Delta g(x,t) + d(x,t) + u(t)\end{aligned} \qquad (۵-۱۳)$$

به طوریکه $\Delta g(x,t) + d(x,t) = 0.25\cos(2\pi t)x_2 + 0.1\sin(2t)$ عدم قطعیت و اغتشاش باشد.

سطح لغزش پیشنهادی بصورت زیر طراحی شده است.

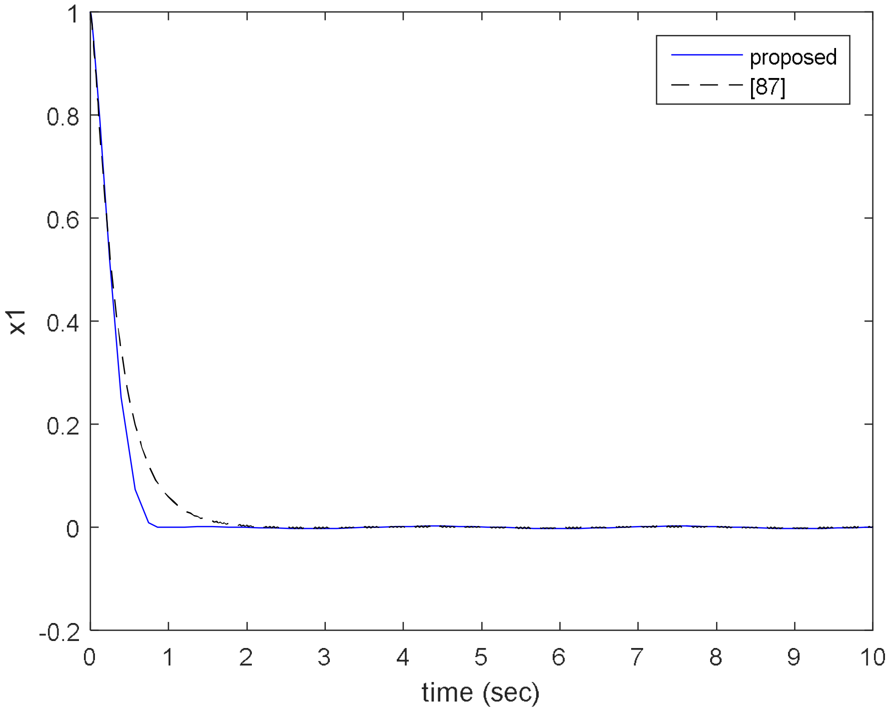
$$s(t) = T^{-\gamma}[c_2\dot{x}_2(t) + \sum_{i=1}^{2} c_{i-1}x_i(t)c_1x_2(t) + k_i \tanh(b_i x_i(t))] \qquad (۱۴-۵)$$

کنترل کننده طراحی شده در فصل قبل برای سیستم (۵-۱۳) بصورت زیر می‌باشد.

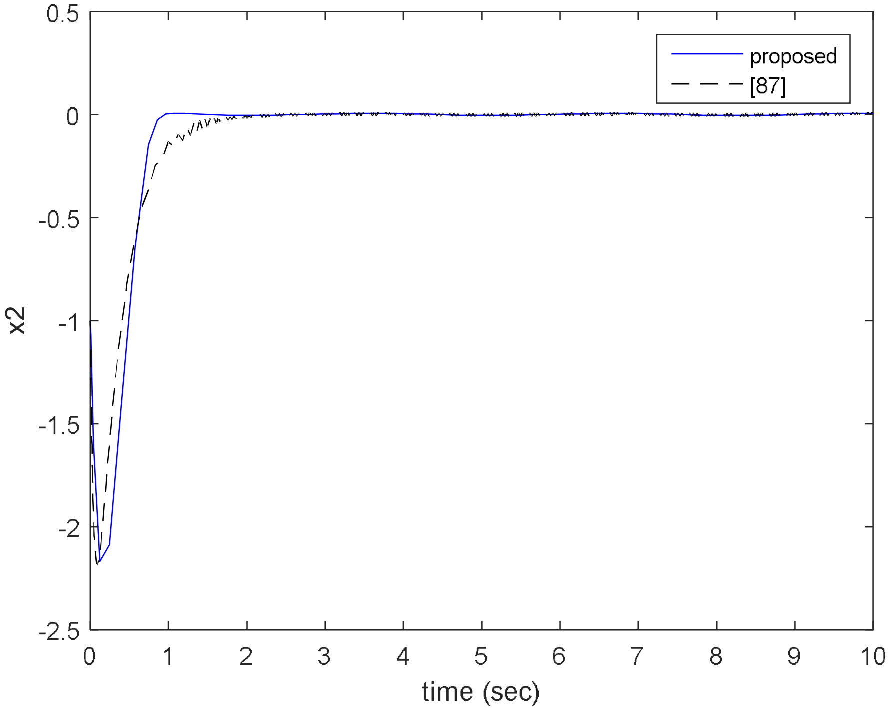
$$u(t) = -\frac{1}{c_2}[\sum_{i=1}^{2} c_{i-1}x_i(t) + k_i \tanh(b_i x_i(t))] - g(x,t) - k(t).[\tanh(n_1.\, s(t))] \qquad (۱۵-۵)$$

به طوریکه $k(t) = k_{sw}.\tanh^2(n_2.T^{\gamma}s(t))$ می‌باشد. پارامترهای کنترل کننده نیز عبارتند از $c_1 = 0.08,\ c_2 = 0.01,\ c_0 = 0.27$ $\gamma = 0.97$ ، $b_1 = 10$, $b_2 = 10$. شرایط اولیه بصورت $(x_1(0), x_2(0)) = (1, -1)$ می‌باشند که از روش آزمون و خطا تعیین شده‌اند.در شکل ۵-۶ نتایج حاصل از اعمال کنترل کننده پیشنهادی بر سیستم مورد نظر در مقایسه با نتایج حاصل از اعمال کنترل کننده طراحی شده در مرجع [۸۷]، که صفحه لغزش (۵-۱۶) می‌باشد، نمایش داده شده‌اند.

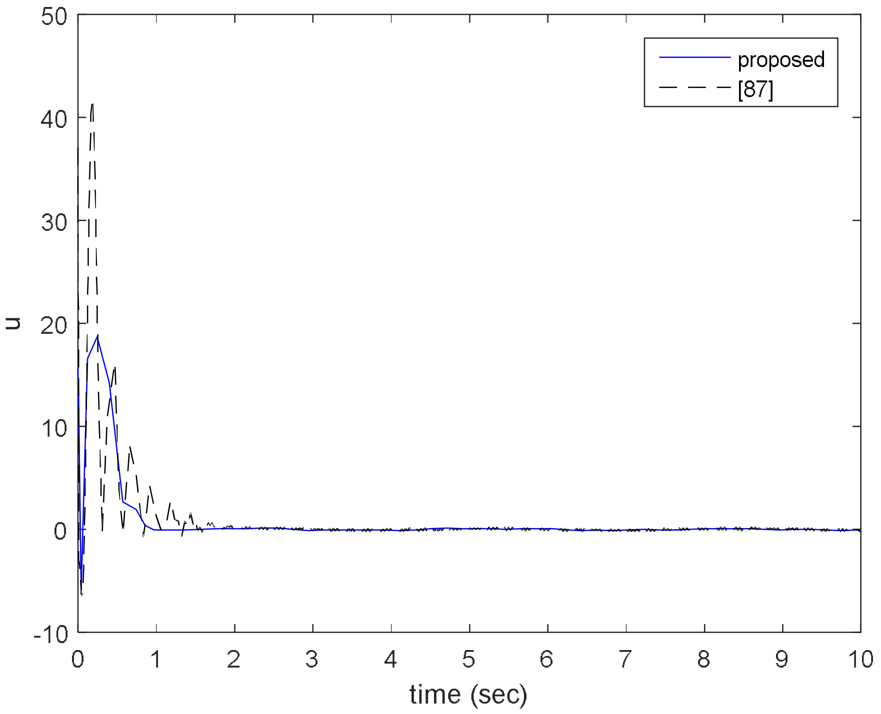
$$s(t) = \dot{x}_2(t) + \alpha x_1(t) + \beta x_1^{q/p}(t) \qquad (۱۶-۵)$$


proposed
[87]
x1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
time (sec)

(الف)


proposed
[87]
x2
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
time (sec)

(ب)



(پ)

شکل ۵-۶) پاسخ سیستم ژیروسکوپ کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۱۳)،
الف)-ب) متغیرهای حالت $x_1(t)$، $x_2(t)$ ، پ) سیگنال کنترلی $u(t)$

قسمت (الف)- (ب)، پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم کنترل شده و قسمت (پ)، سیگنال کنترلی را نشان می‌دهد. نتایج حاصل از مقایسه روش پیشنهادی و کنترل کننده مرجع [۸۷]، افزایش سرعت همگرایی و بهبود تلاش کنترلی را نشان می‌دهند.

مثال ۵-۳-۲ سیستم جرم و فنر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -0.45\frac{x_1(t)}{m} - 0.45\frac{x_1^3(t)}{m} - 0.15\sin(7\pi t)\frac{x_2(t)}{m} - 0.15\sin(7\pi t)\frac{x_2(t)|x_2(t)|}{m} \\
&\quad + \frac{1}{m}u(t) + w(x, t)
\end{aligned} \tag{۵-۱۷}$$

به طوریکه عدم قطعیت و اغتشاش عبارت‌اند از:

$$w(x,t) = -0.25\sin(5\pi t)\frac{x_1(t)}{m} - 0.25\sin(5\pi t))\frac{x_1^3(t)}{m} + 0.05 + 0.25\sin(3\pi t) - 0.15\sin(7\pi t)\frac{x_2(t)}{m} - 0.15\sin(7\pi t)\frac{x_2(t)|x_2(t)|}{m}$$

سطح لغزش پیشنهادی بصورت زیر طراحی شده است.

$$s(t)=c_2T^{-\gamma}\dot{x}_2(t)+\sum_{i=1}^{2}c_{i-1}T^{-\gamma}x_i(t)+T^{-\gamma}k_i\ \tanh(b_ix_i(t))] \qquad (۱۸-۵)$$

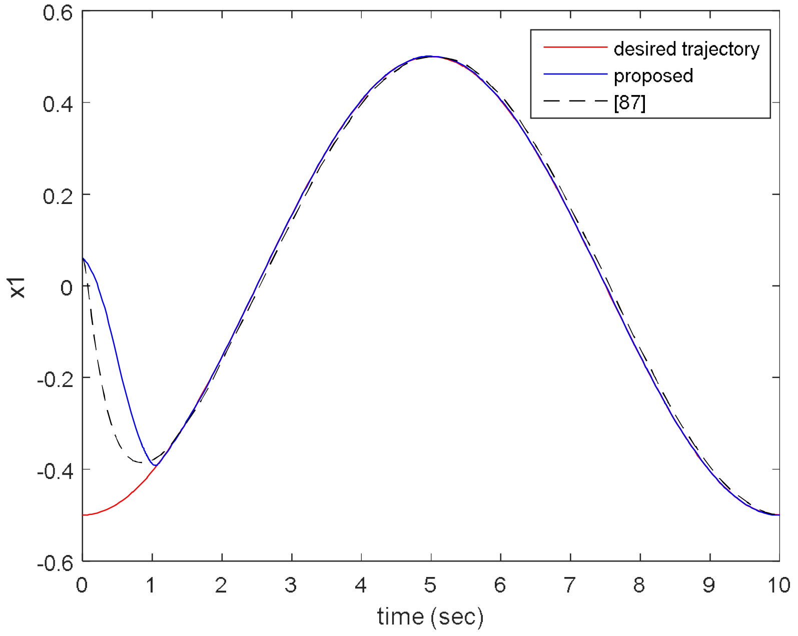
کنترل کننده طراحی شده در فصل قبل برای سیستم (۵-۱۷) بصورت زیر می‌باشد.

$$u(t)=-\frac{1}{c_2}[\sum_{i=1}^{2}c_{i-1}x_{2\setminus i}(t)+k_i\tanh(\ b_ix_i(t))]-g(x,t)-k(t).[\tanh\ \ (n_1.\ s(t))] \qquad (۱۹-۵)$$

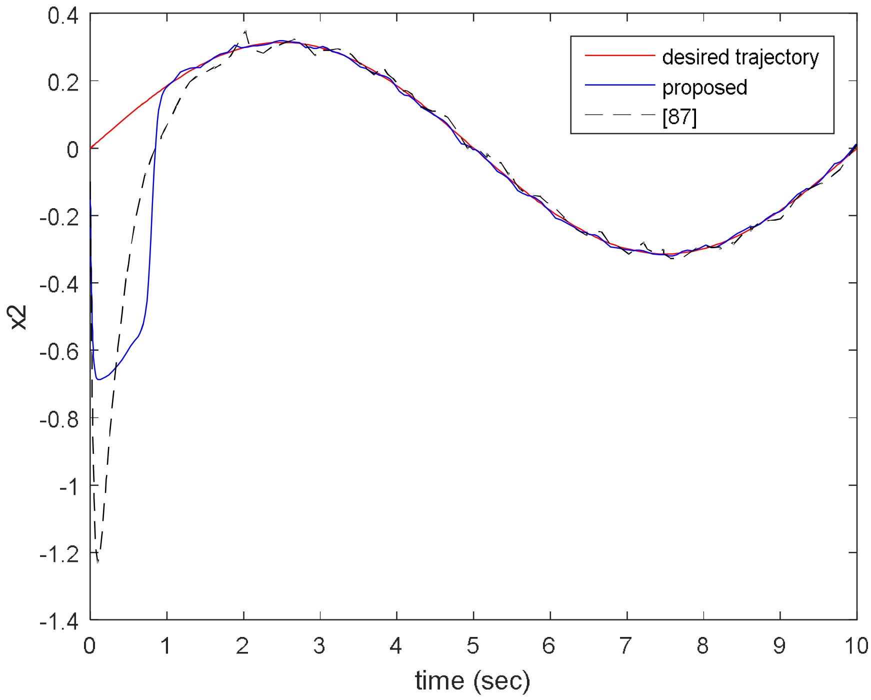
به طوریکه $k(t)=k_{sw}.\tanh^2(n_2.T^{\gamma}s(t))$ می‌باشد. پارامترهای کنترل کننده نیز عبارتند از $c_0=0.05,\ \ c_1=0.03,\ \ c_2=0.01,\ \ \gamma\ =\ 0.9\ \ b_1=30,\ \ b_2=15,$ ، $k_1=4.4,\ \ k_2=4.4$. شرایط اولیه بصورت $(x_1(0),x_2(0))\ =\ (1,-1)$ می‌باشند.

در شکل ۵-۷ نتایج حاصل از اعمال کنترل کننده پیشنهادی بر سیستم مورد نظر در مقایسه با کنترل کننده طراحی شده در مرجع [۸۷]، که صفحه لغزش آن بصورت (۵-۲۰) است، نمایش داده شده‌اند.

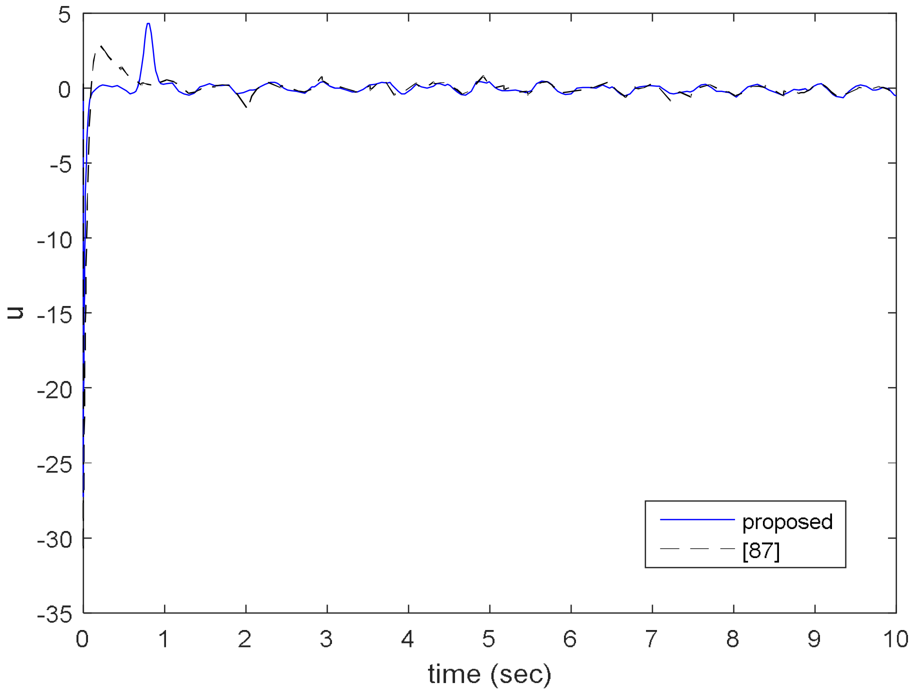
$$s(t)=\dot{x}_2(t)+\alpha x_1(t)+\beta x_1^{q/p}(t) \qquad (۲۰-۵)$$



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۵-۷) پاسخ سیستم جرم و فنر کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۱۷)،
الف)-ب) متغیرهای حالت $x_1(t)$، $x_2(t)$ ، پ) سیگنال کنترلی $u(t)$

نتایج حاصل از مقایسه روش پیشنهادی با روش ارائه شده در مراجع [۸۷]، در شکل ۵-۷ نمایش داده شده اند. با توجه به شکل‌های قسمت‌های (الف) و (ب) بهبود عملکرد و دقت ردیابی و افزایش سرعت همگرایی، از مزایای روش پیشنهادی نسبت به مرجع [۸۷]، می‌باشند.

مثال ۵-۳-۳ سیستم مرتبه-کسری آرنئودو زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} D^{\gamma} x_1(t) &= x_2(t) \\ D^{\gamma} x_2(t) &= x_3(t) \\ D^{\gamma} x_3(t) &= 5.5x_1(t) + x_1^3(t) - 3.5x_2(t) - x_3(t) + \Delta \mathrm{g(x, t)} + \mathrm{d(x, t)} + \mathrm{u(t)} \end{aligned} \qquad (۵\text{-}۲۱)$$

به طوریکه $\Delta g(x,t) + d(x,t) = 0.1x_3\cos(t) + 0.1\sin(t)$ عدم قطعیت و اغتشاش باشد.

سطح لغزش پیشنهادی بصورت زیر طراحی شده است.

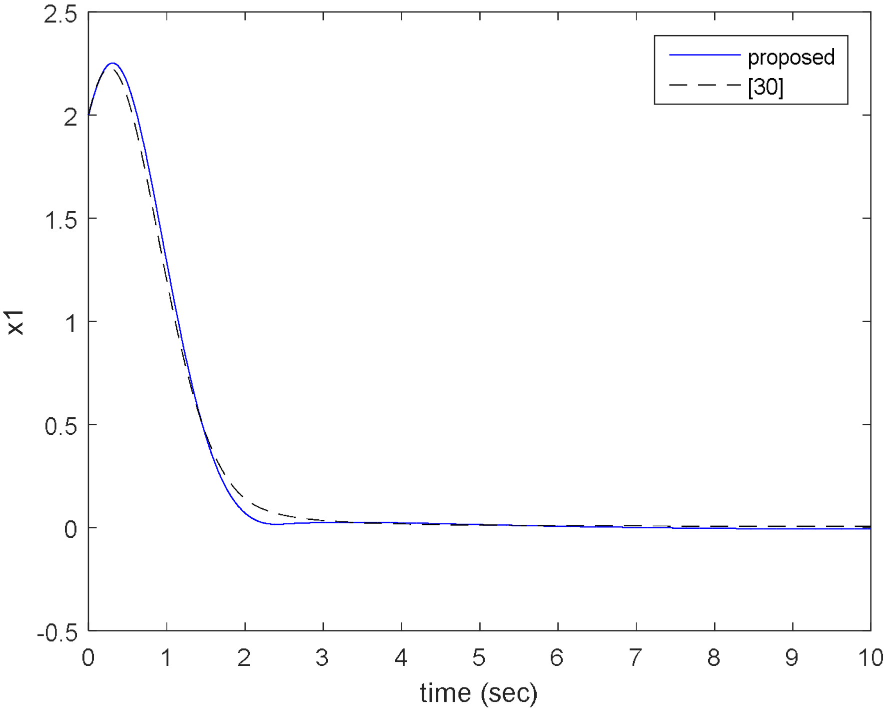
$$s(t) = T^{-\gamma}[c_3 D^{\gamma} x_3(t) + \sum_{i=1}^{3} c_{i-1} x_i(t) + T^{-\gamma}(\sum_{i=1}^{3} k_i \tanh(b_i x_i(t)))] \qquad (۵\text{-}۲۲)$$

کنترل کننده طراحی شده در فصل قبل برای سیستم (۵-۲۱) بصورت زیر می‌باشد.

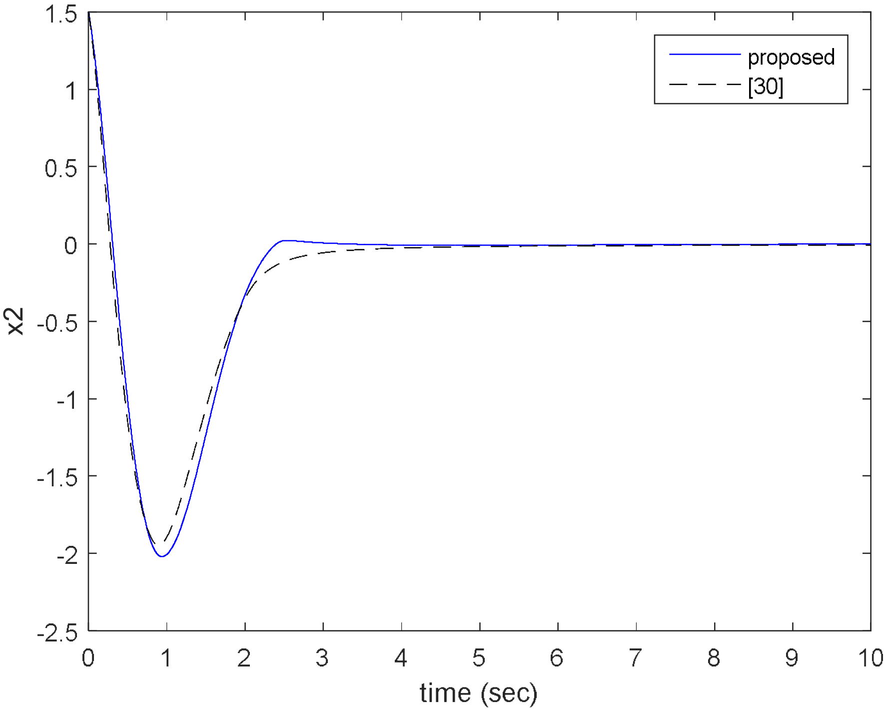
$$u(t) = -\frac{1}{c_3}[\sum_{i=1}^{3} c_{i-1} x_i(t) + k_i \tanh(b_i x_i(t))] - g(x,t) - k(t).[\tanh(n_1.s(t))] \qquad (۵\text{-}۲۳)$$

به طوریکه $k(t) = k_{sw}.\tanh^2(n_2.T^{\gamma} s(t))$ می‌باشد. پارامترهای کنترلی بدست آمده از روش آزمون و خطا، نیز عبارتند از $c_0 = 5.4$, $c_1 = 7.7$, $c_2 = 2.5$, $c_3 = 0.9$, $k_1 = 1.15$, $k_2 = 0.9$, $k_3 = 0.8$ $\gamma = 0.98$ $b_1 = 12$, $b_2 = 20$, $b_3 = 35$ و $k_{sw} = 1.56$. شرایط اولیه بصورت $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2, 1.5, -3)$ می‌باشند.

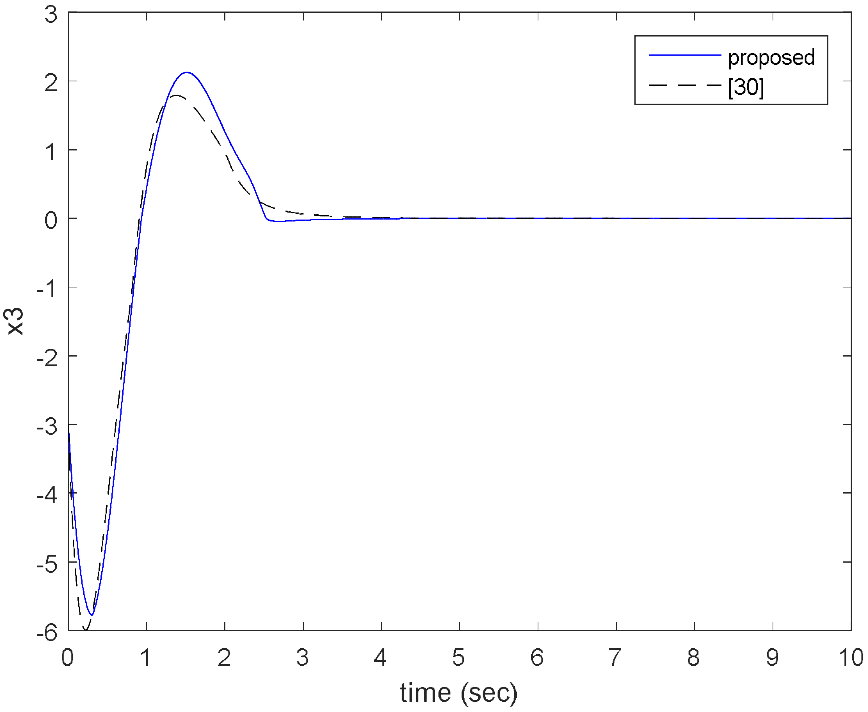
در شکل ۵-۸ نتایج حاصل از اعمال کنترل کننده پیشنهادی بر سیستم مورد نظر در مقایسه با نتایج مرجع [۳۰]، نمایش داده شده‌اند.



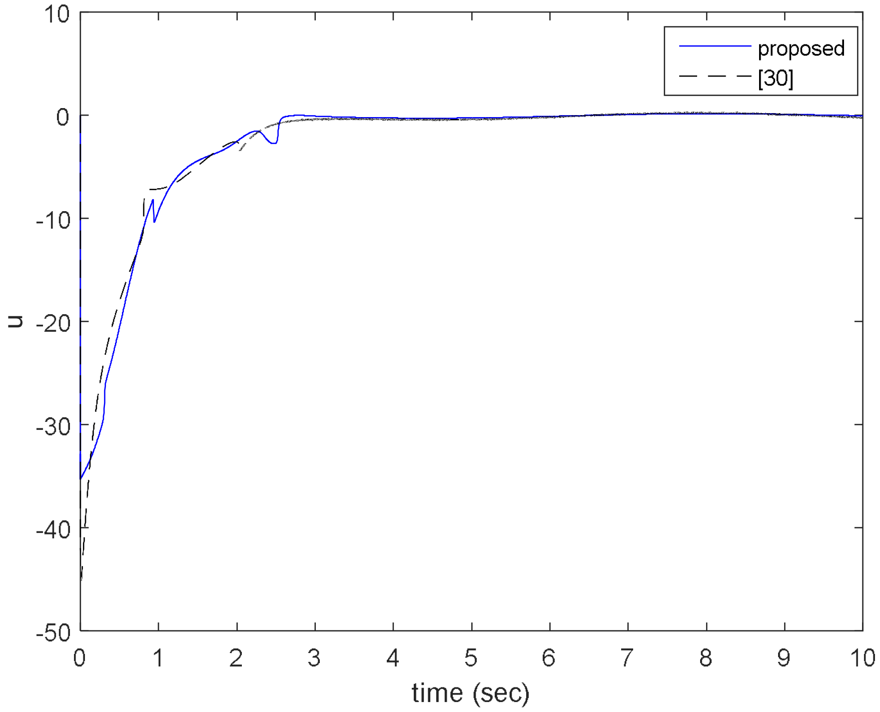
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل ۵-۸) پاسخ سیستم آرنئودو کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۲۱)،
الف)-پ) متغیرهای حالت $x_1(t)$، $x_2(t)$، و $x_3(t)$، ت) سیگنال کنترلی $u(t)$

نتایج حاصل از مقایسه روش پیشنهادی با روش ارائه شده در مرجع [۳۰]، در شکل ۵-۸ نمایش داده شده است. با توجه به نتایج شبیه سازی می‌توان بهبود عملکرد کنترلی از جمله کاهش دامنه تلاش کنترلی در لحظات اولیه را در مقایسه با مرجع [۳۰] ملاحظه نمود.

۵-۴- کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری برای سیستم میکروسکوپ اتمی

میکروسکوپ اتمی وسیله‌ای است که برای نمایش توپولوژی سطوح و کاربردهای تحلیل سطح در مقیاس‌های خیلی کوچک استفاده می‌شود. این سیستم در شرایط خاص از خود رفتار آشوبناک نشان می‌دهد. در مرجع [۸۵]، یک مدل ریاضی برای سیستم میکروسکوپ اتمی ارائه شده است. با توجه به مرجع [۸۵]، مدل ریاضی میکروسکوپ اتمی را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f(X,t) + \Delta f(X,t) + d(t) + u(t) \end{aligned} \qquad (۵-۲۴)$$

به طوریکه $X(t) = [x_1(t), x_2(t)]$، $d(t) = 0.2\sin(0.5t)$

$f(X,t) = -a_1 x_1(t) + \dfrac{a_1 a_2}{(x_1(t) + z(t))^2} + a_3(a_4 \cos t - a_5 x_2(t))$ و

$\Delta f(X,t) = 0.1\sin(4\pi x_1(t)).\sin(4\pi x_2(t))$ و پارامترهای سیستم بصورت

$a_1 = \dfrac{4}{27},\quad a_2 = 1.2,\quad a_3 = 1,\quad a_4 = -2.9,\quad a_5 = 0.1,$ و $z = 2.5$ هستند.

سطح لغزش پیشنهادی بصورت زیر طراحی شده است.

$$s(t) = T^{-\alpha}\{m_0 \dot{x}_2(t) + m_1.x_1(t) + k(t).\tanh(p.x_2(t)) + b_1\tanh(g(t))\} \qquad (۵-۲۵)$$

به طوریکه $g(t) = \sum_{i=1}^{2}(c_i.x_i(t) + a_i T^{-\gamma_i}.x_i(t))$ و $k(t) = k_1 \sum_{i=1}^{2} T^{-q} x_i(t)$ می‌باشند.

کنترل کننده طراحی شده در فصل قبل برای سیستم میکروسکوپ اتمی بصورت زیر می‌باشد:

$$u(t) = -\frac{1}{m_0}\{m_0 f(t) + m_1 x_1(t) + K \tanh(p.x_2(t)) + b_1 \tanh(Y)\} - k(t)\tanh(a_4 s) \quad (۲۶-۵)$$

پارامترهای کنترل کننده که از روش سعی و خطا تعیین گردیده اند، عبارتند از $c_1 = 0.1,\ c_2 = 11.1$

$a_2 = 1.5,\quad a_3 = 0.495$ ، $\alpha = 0.13$ ، $a_1 = 0.96,$ ، $m_1 = 0.01884,\quad m_0 = 0.0691$ ، $c_3 = 0.4\quad c_4 = 14,$

$p = 10..5$ ، $a_{c3} = 0.1,$ ، $a_{c2} = 5.75,$ ، $a_{c1} = 1.7,$ ، $k = 0.8,\quad k_1 = 1,\quad b_1 = 0.45,$ و $q = 0.1$.

ورودی کنترلی در $t = 50$ اعمال می شود. شرایط اولیه بصورت $[x_1(0)\ x_2(0)] = [0,\ 0]^T$ می‌باشند.

در شکل ۵-۹ نتایج حاصل از اعمال کنترل کننده طراحی شده با روش های کنترلی ارائه شده در مراجع [۳۰] و [۸۸]، مقایسه می‌گردد. مطابق کنترل کننده طراحی شده بر اساس [۸۸]، قانون کنترلی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u(t) = -f(X,t) - 7\,\mathrm{sgn}\, x_2(t)|x_2(t)|^{\frac{1}{5}} - 10 x_1^{\frac{1}{10}}(t) + u_n(t) \quad (۲۷-۵)$$

بطوریکه

$$f(t) = -a_1 x_1 + \frac{a_1 a_2}{(x_1 + z)^2} + a_3(a_4 \cos\tau - a_5 x_2)$$

و $\dot{u}_n(t) + 0.1 u_n(t) = v(t),\quad v(t) = -10\,\mathrm{sgn}(s(t))$ و طبق بر اساس مرجع [۳۰]، کنترل کننده طراحی شده بصورت زیر می‌باشد.

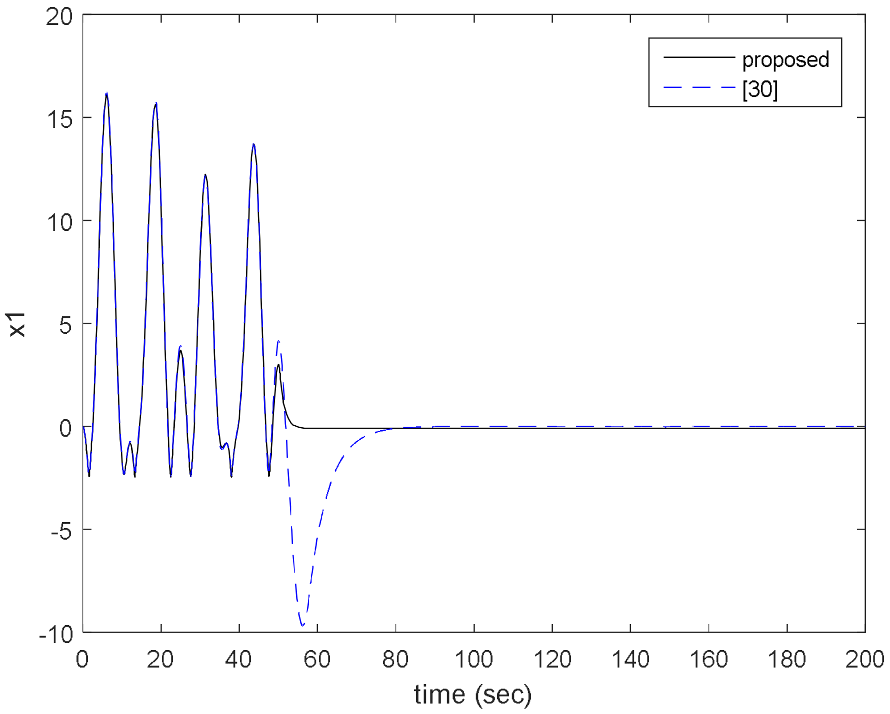
$$u(t) = -f(X,t) - g_2(t) - 2 z_2^{1/5}(t) - 0.01\frac{s(t)}{|s(t)| + \delta} - 0.2 s(t) \quad (۲۸-۵)$$

به طوریکه

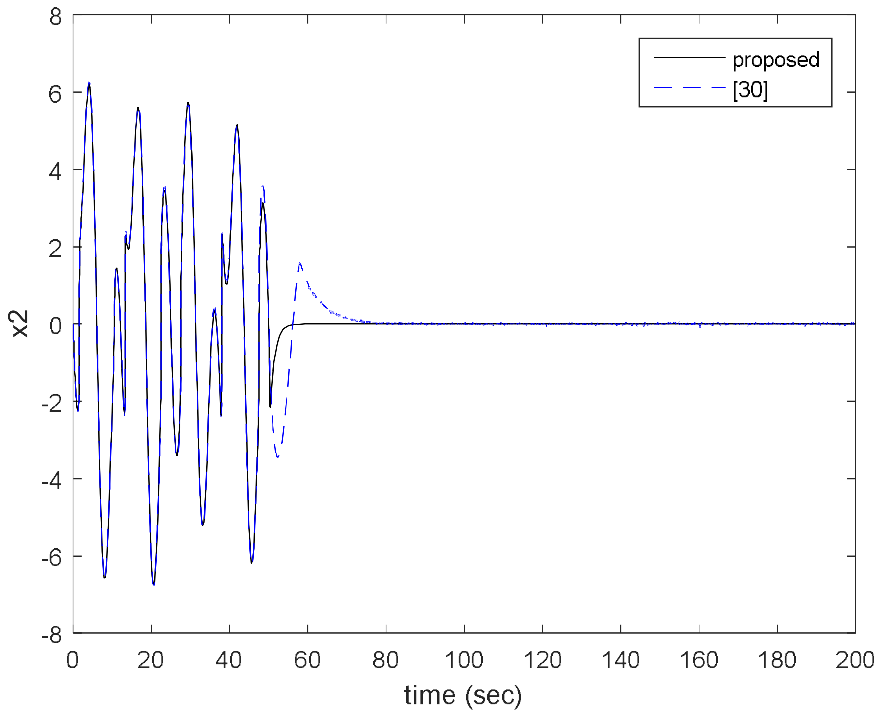
$$f(X,t) = -a_1 x_1(t) + \frac{a_1 a_2}{(x_1(t) + z(t))^2} + a_3(a_4 \cos t - a_5 x_2(t))$$

و $g_2(t) = b_1(-b_1[(-b_1 z_1(t)) + z_2(t)])$ و $b_1 = 0.2$.

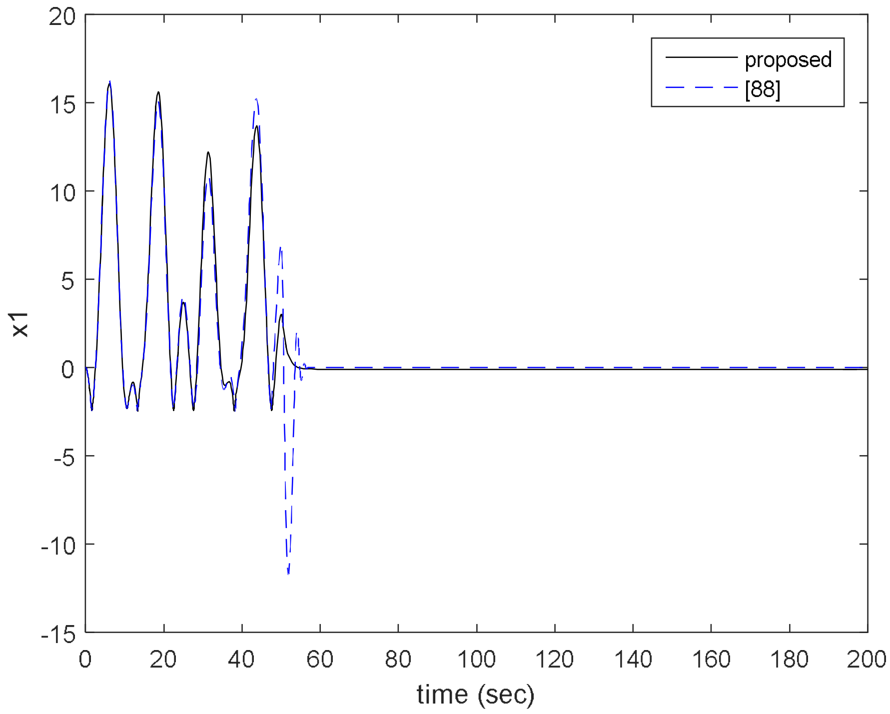
نتایج حاصل از مقایسه روش پیشنهادی با روش‌های ارائه شده در مراجع [۳۰] و [۸۸]، در شکل ۵-۷ نمایش داده شده اند.



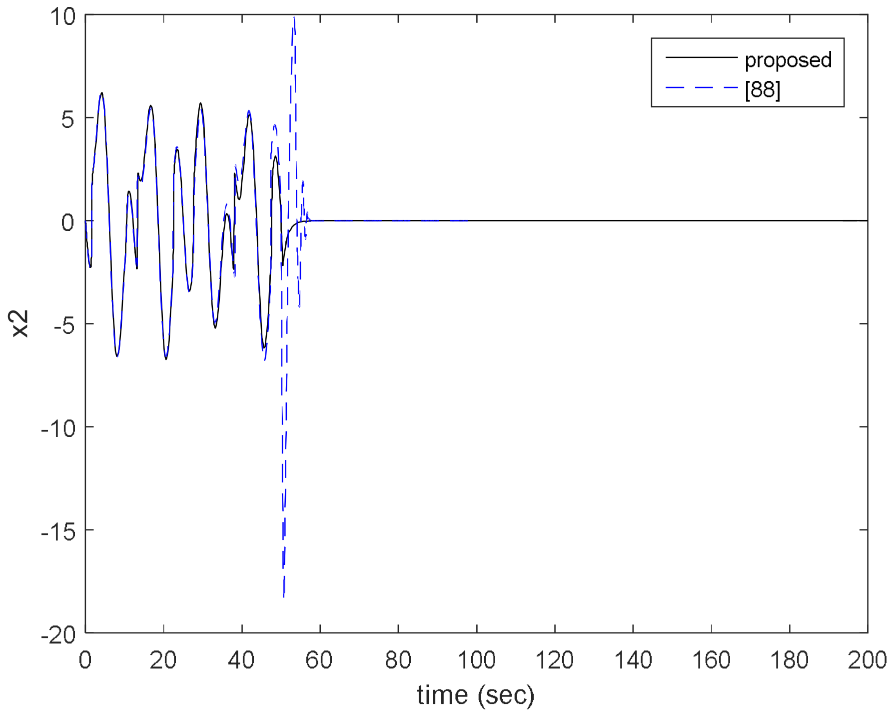
(الف)



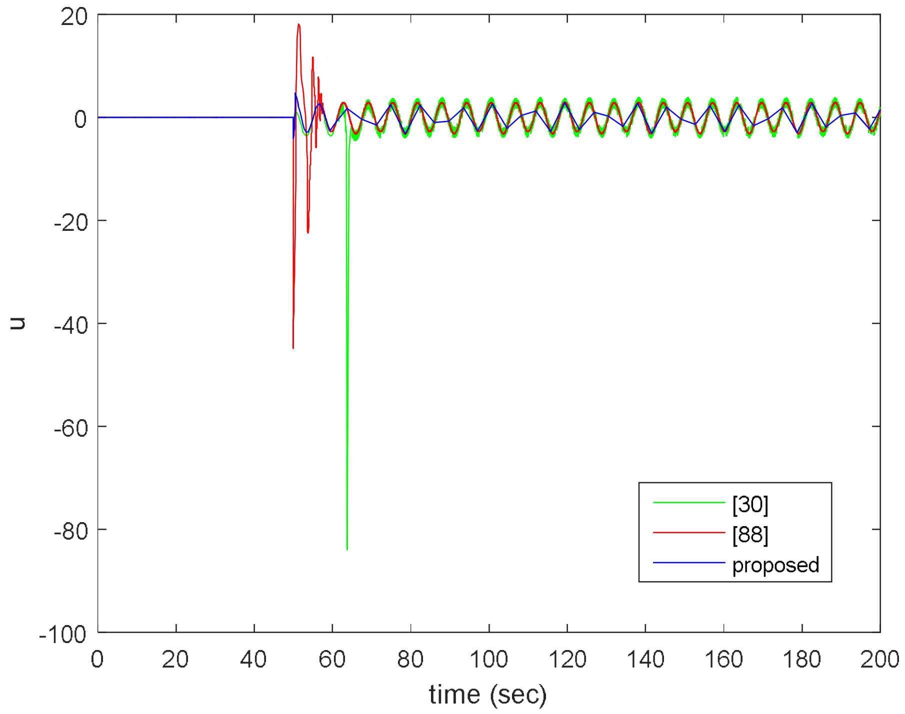
(ب)


proposed
[88]
x1
time (sec)
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200

(پ)


proposed
[88]
x2
time (sec)
10
5
0
-5
-10
-15
-20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200

(ت)



(ث)

شکل ۵-۹) پاسخ سیستم میکروسکوپ اتمی کنترل شده به ازای کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه-کسری (۵-۱۴) و کنترل کننده طراحی شده براساس مرجع های [۳۰] و [۸۸] ، الف)-ب) متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ازای کنترل کننده (۵-۲۶) و کنترل کننده بر اساس [۳۰] ، پ)-ت) متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ازای کنترل کننده (۵-۱۴) و کنترل کننده بر اساس [۸۸] ، ث) سیگنال کنترلی $u(t)$ کنترل کننده طراحی شده بر اساس [۳۰] ، [۸۸] و (۵-۱۴)

همانطور که مشاهده می‌شود پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم کنترل شده در مقایسه با نتایج حاصل از اعمال کنترل کننده مرجع [۳۰]، در قسمت‌های (الف)-(ب) و در مقایسه با نتایج حاصل از کنترل کننده مرجع [۸۸]، در قسمت‌های (پ)-(ت)، نشان داده شده است. همچنین سیگنال کنترلی حاصل از روش پیشنهادی با دو مرجع دیگر، در قسمت (ث) مقایسه شده است. بهبود پاسخ گذرا، افزایش سرعت همگرایی و بهبود تلاش کنترلی از جمله کاهش تلاش کنترلی و کاهش پدیده وزوز از مزایای روش پیشنهادی بوده و نتایج حاصل از شبیه سازی برتری کنترل کننده طراحی شده را نشان می‌هند.

فصل ششم

نتیجه گیری و پیشنهادات

۶-۱ نتیجه گیری

در این رساله، طراحی کنترل کننده مد لغزشی مرتبه-کسری بر مبنای مشتق کانفورمال برای سیستم‌های غیر خطی آفین مرتبه-صحیح و مرتبه-کسری با کران عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات معین مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور بررسی پایداری در طراحی کنترل کننده، ابتدا روش مستقیم پایداری لیاپانوف مبتنی بر مشتق مرتبه-کسری کانفورمال، ارائه و اثبات گردیده است. بر اساس قضیه اثبات شده برای روش مستقیم پایداری لیاپانوف مبتنی بر مشتق کانفورمال، سه نوع کنترل کننده مد لغزشی مرتبه کسری کانفورمال جدید برای کلاس‌های مختلفی از سیستم‌های آفین در فصل چهارم، پیشنهاد شده است. در این کنترل کننده‌ها صفحات غیرخطی و توابع کلید زنی مرتبه کسری کانفورمال جدید با در نظر گرفتن مسائل مهم مطرح در طراحی کنترل کننده‌ها از جمله سرعت همگرایی، دقت ردیابی، تلاش کنترلی به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که عملکرد کنترلی را تا حد ممکن بهبود بخشند. صفحه لغزش کنترل کننده اول، یک صفحه غیرخطی انتگرالی می‌باشد که به گونه‌ای طراحی شده است که مشکلات رایج در صفحات انتگرالی از جمله عملکرد پاسخ گذرا و اشباع را بهبود بخشد. صفحه لغزش در کنترل کننده دوم و سوم از خانواده صفحات لغزش انتگرال ترمینال سریع است که برای بهبود سرعت همگرایی و عین حال کاهش خطای حالت ماندگار و افزایش دقت ردیابی طراحی شده است. توابع سوئیچینگ پیشنهادی با ضرایب متغیر با زمان سبب بهبود عملکرد ورودی کنترلی گردیده‌اند. پارامترهای کنترلی از روش آزمون و خطا و با در نظر گرفتن معیارهای عملکرد مناسب پاسخ کنترلی طراحی شده‌اند. تجربیات حاصل از اعمال روش آزمون و خطا، به ما نشان داد که در تعیین پارامترهای کنترلی برای مقایسه عملکرد کنترل کننده‌های پیشنهادی مبتنی بر مشتق کانفورمال با کنترل کننده‌های پیشنهاد شده در مراجع دیگر مبتنی بر مشتقات متداول، بهترین پارامترهای بدست آمده در این روش برای هرکدام از روش‌های کنترلی، جهت مقایسه باهم، استفاده گردد. با توجه به مزایای مشتق کانفورمال، استفاده از مشتق مرتبه-کسری کانفورمال سبب سادگی در

محاسبات شده است. برای ارزیابی عملکرد کنترل کننده‌های پیشنهادی، کنترل کننده‌های طراحی شده به سیستم‌های مختلف اعمال و با استفاده ازنرم فزار متلب شبیه سازی گردیدند. نتایج شبیه سازی‌ها عملکرد مقاوم و مناسب قوانین کنترلی و بهبود مشخصه‌های کنترلی از جمله افزایش سرعت همگرایی، کاهش تلاش کنترلی، افزایش دقت کنترلی و کاهش پدیده وزوز را نشان می‌دهند.

۶-۲ پیشنهادات

برای تحقیقات آینده، موارد زیر پیشنهاد می‌گردند:

۱- توسعه کاربردهای کنترل کننده‌های پیشنهادی بر روی کلاس‌های دیگری از سیستم‌ها

طراحی کنترل کننده مد لغزشی ارائه شده در این رساله را می‌توان برای سیستم‌های کاربردی متعدد دیگری گسترش نمود. به عنوان مثال، برای کلاس‌هایی از سیستم‌های آشوبناک می‌توان توسعه داد و در حوزه کنترل آشوب و سنکرونسازی سیستم‌های آشوبناک استفاده نمود.

۲- طراحی انواع دیگر کنترل کننده‌ها بر اساس مشتق مرتبه-کسری کانفورمال

با توجه به جدید بودن این تعریف و تمرکز این رساله تنها بر روی طراحی کنترل کننده‌های مد لغزشی، می توان از این تعریف جدید در طراحی سایر کنترل کننده‌ها نیز استفاده نمود.

۳- استفاده از الگوریتم‌های بهینه سازی هوشمند برای بدست آوردن پارامترهای بهینه کنترل کننده‌های پیشنهادی

با توجه به اینکه پارامترهای کنترلی بدست آمده برای کنترل کننده‌های پیشنهادی بر اساس روش آزمون و خطا می‌باشند، جهت صرفه جویی در زمان طراحی و تضمین بدست آوردن پارامترهای بهینه، استفاده از الگوریتم‌های بهینه سازی هوشمند برای تعیین پارامترها، پیشنهاد می‌گردد.

فهرست منابع

منابع و مراجع

[1] Monje, C. A., Chen Y. Q., Vinagre B. M., Xue D. and Feliu V. (2010), "**Fractional-order Systems and Control Fundamentals and Applications**". Springer-Verlag, London.

[2] Podlubny I. (1999), "**Fractional Differential Equations**". Academic Press, New York.

[۳] کنسپسیون آ.مونجه، دینگیو ژو، یانگ کو آن چن، بلس ام ویناگر، وینستنه فلیو، (**۱۳۹۳**) **اصول و کاربردهای کنترل کننده ها و سیستم های مرتبه کسری**، مترجمین دکتر حیدر طوسیان شاندیز و مهندس حسین اسراری، چاپ اول، انتشارات دانشگاه شاهرود.

[4] Miller K.S., Ross B. (**2008**), "**An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential**", Princeton University Press.

[5] Gholami Y., Ghanbari K. (**2017**), "New class of conformable derivatives and applications to differential impulsive systems", **SeMA**, **75**, **2**, pp **305–333**

[6] Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M. (**2014**), "A new definition of fractional derivative", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, **264**, pp **65–70**.

[7] Aribi A., Farges C., Aoun M., Melchior P., Najar S., and Abdelkrim M. N. (**2014**), “Fault detection based on fractional order models: Application to diagnosis of thermal systems,” **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, **19**, **10**, pp **3679–3693**.

[8] Podlubny I. (**2007**), "Fractional calculus: A Mathematical Tool from the past for present Engineers", **IEEE Industrial Electronics Magazine**, summer, pp **35-39**.

[9] Radwan, A. G. (**2012**), "Stability analysis of the fractionl order RLC circuit", **Journal of fractional Calculus and Applications**, **3**, **1**, pp. **1-15**.

[10] Luo Y., Chen Y. Q. and Pi Y. (**2011**), "Experimental study of fractional order proportional derivative controller synthesis for fractiona order systems", **Mechatronics**, **21**, pp **204-214**.

[11] Fouda M. E. and . Radwan G. (**2013**), "On the fractional-order memristor model", **Journal of Fractional Calculus and Applications**,**4**, **1**, pp **1-7**.

[12] Petras I. and Magin R. L. (**2011**), "Simulation of drug uptake in a two compartmental fractional model for a biological system", **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, **16**, pp **4588-4595**.

[13] Datsko B. Y. and Gafiychuk V. V. (**2011**), "Chaotic dynamics in Bonhoffer-van der Pol fractional reaction-diffusion system", **Signal Processing**, **91**, **3**, pp **452-460**.

[14] Oustaloup A., Levron F., Nanot F., Mathieu B., (**2000**), "Frequency band complex non integer differentiator: characterization and synthesis", **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, **47**, **1**, pp **25-40**.

[15] Podlubny, I. **(1999)**, "Fractional-order systems and PIλDμ controllers". **IEEE Transactions on Automatic Control**, **44**, pp **208–214**.

[16] Vadim I. U. (**1977**), "Survey paper variable structure systems with sliding modes", **The IEEE Transactions on Automatic Control**, **22**, **2**, pp **212-222**.

[17] Pourhashemi Shahri A., Haghighatnia S., Kardehi Moghaddam R., Kobravi H.R. (**2017**), "Control the tumour growth via sliding mode control **", International Journal of Medical Engineering and Informatics**, **9**, **2**, pp **101-109**.

[18] Vrdoljak K. , Perić N. , Petrović I. (**2010**) ," Sliding mode based load-frequency control in power systems", **Electric Power Systems Research**, **80**, **5**, pp **514-527**.

[19] Zhihong M., Paplinski A., Wu H. (**1994**), "A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators", **The IEEE**

Transactions on Automatic Control, **39**, **12**, pp **2464-2469**.

[20] He J., Zheng X., Wang W. (2012), "Terminal sliding mode control for buck converter with chaos", Power Electronics and Motion Control Conference , Harbin, China, pp 1532-1535.

[21] Yu X., Zhihong M. (**2002**), "Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems", **The IEEE Transaction on Circuits and Systems: Fundemental Theory and Applications**, **49**, **2**, pp **261-264**.

[22] Yang L. and Yang J. (**2011**), "Nonsingular fast terminal sliding-mode control for nonlinear dynamical systems ", **Int. J. Robust. Nonlinear Control**, **21**, pp **1865–1879**.

[23] YORGANCIOĞLU F., REDIF S. (**2019**), " Fast nonsingular terminal decoupled sliding-mode control utilizing time-varying sliding surfaces ", **Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences**, **27**, pp.**1922 – 1937**.

[24] Akbari K., Rezaie B., and Khari S. (**2019**), "Designing Full-Order Sliding Mode Controller Based on ANFIS Approximator for Uncertain Nonlinear Chaotic Systems", **International Journal of Industrial Electronics, Control and Optimization**,. **2**,. **1**, pp. **39-46.**

[25] Valerio D. (2012), "**Introducing fractional sliding mode control**" II Encontrode Jovens Investigadors do LAETA, Porto.

[26] S. Dadras, H.R. Momeni (**2012**), " Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty", **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat** 17 , pp **367–377**.

[27] Yuan J., Shi B., Ji W. (**2013**), "Adaptive Sliding Mode Control of a Novel Class of Fractional Chaotic Systems", **Hindawi Publishing Corporation Advances in Mathematical Physics**, **2013**, Article ID 576709, pp **1-13**.

[28] Hosseinnian S.H., Ghaderi R, Ranjbar N A., Mahmoudian M., Momani S. (**2010**), "Sliding mode synchronization of an uncertain fractional order chaotic system" , **Computers & Mathematics with Applications**, **59**, **5**, pp **1637-16-43**.

[29] Binazadeh T., Shafiei M.H. (**2013**), "Output tracking of uncertain fractional-order nonlinear systems via a novel fractional-order sliding mode approach", **Mechatronics**, **23**, pp. **888–892**.

[30] Majidabad S. S., Shandiz H. T., Hajizadeh A., and Tohidi H. (**2015**), "Robust block control of fractional order systems via nonlinear sliding mode techniques," **Control Eng. Appl. Informatics**, **17**, **1**.

[31] Di-Yi C., Yu-Xiao L., Xiao-Yi M., and Run-Fan Z. (**2011**), "No-chattering sliding mode control in a class of fractional-order chaotic system", **Chinese Physics B, 20**, **12**.

[32] Guo Y.and Ma B.L. (**2017**), "Global sliding mode with fractional operators and application to control robot manipulators", **Journal International Journal of Control**, **DOI:** https://doi.org/10.1080/00207179.2017.1398417**,** pp**. 1-24.**

[33] Tang Y., Zhang X., Zhang D., Zhao G., and Guan X. (**2013**), "Fractional order sliding mode controller design for antilock braking systems," **Neurocomputing**, **111**, pp **122–130**.

[34] Tarasov V. E. (**2013**), "No Violation of the Leibniz Rule. No Fractional Derivative"**,** **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, **18(11)**, pp. **2945-2948**.

[35] Abdeljawad T. (**2015**), "On Conformable Fractional Calculus", **J. Comput. Appl. Math.**, **279**, pp **57-66**.

[36] Benaoumeur B. and Torres Delfim F. M. (**2017**), "Existence of solution to a local fractional nonlinear differential equation", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, **312**, pp **127-133**.

[37] Benkhettou N., Hassani S. and Torres Delfim F. M. (**2016**), "A conformable fractional calculus on arbitrary time scales", **Journal of king saud university-science**, **28**, pp **93-98**.

[38] Abu Hammad I., Khalil R. (**2014**), "Conformable Fractional Heat Differential Equation", **Int. J. Pure Appl. Math., 94**, **2**, pp **215-221**.

[39] Abu Hammad I., Khalil R. (**2014**), "Fractional Fourier Series with Applications", **Am. J. Comput. Appl. Math**., **4**, **6**, pp **187-191**.

[40] Khalil_R., Abu-Shaab H. (**2015**), "Solution of Some Conformable Fractional Differential Equations", ***Int.J. Pure Appl. Math***., **103**, **4**, pp **667-673**.

[41] Atangana a., Baleanu D., and Alsaedi A. (**2015**)," New properties of conformable derivative", **Open Math**. **13**, **1**, pp **889–898**.

[42] Çenesiz Y.and Kurt A. (**2015**), "The New Solution of Time Fractional Wave Equation with Conformable Fractional Derivative Definition", **Journal of New Theory**, **7**, pp **79-85**.

[43] Çenesiz Y. and Kurt A. (**2015**), "The Solution of Time and Space Conformable Fractional Heat Equations with Conformable Fourier Transform, **Acta Univ. Sapientia, Mathematica**, **7**, **2**, pp **130-140**.

[44] AVCI D., İSKENDER EROĞLU B.B, ÖZDEMİR N. (**2017**), "Coformable Heat Equation on a Radial Symmetric Plate", **THERMAL SCIENCE**, **21**, **2**, pp **819-826**.

[45]_Chung W., Hassanabadi H. (**2017**), "Dynamics of a particle in a viscoelastic medium with conformable derivative", **Int J Theor Phys, 56,** pp **851-862**.

[46] Ghomanjani F., Farahi M.H. and Vahidian Kamyad A., "Numerical solution of some linear optimal control systems with pantograph delays", **IMA journal of mathematical control and information**, **32**, **2**, pp **225-243**.

[47] Kaplan M. (**2017**) , "Applications of two reliable methods for solving a nonlinear conformable time-fractional equation", **Opt Quant Electron**, **49**, pp **312**.

[48] Romero L., Cerutti R., and k-Weyl D. G. (**2012**), "Fractional Integral", **Int. Journal of Math. Analysis**, **6**.

[49] Sang chung W. (**2015**), "Fractional newton mechanics with conformable fractional derivative", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, **290**, pp **150-158**.

[50] Cenesiz Y., Kurt A., and Nane E. (**2017**), "Stochastic solutions of conformable fractional cauchy problems", **statistics and probability letters**, **124**, **C**, pp **126-131**.

[51] Rezazadeh H., Aminikhah H., and Refahi Sheikhani A.H. (**2017**), "Stability Analysis of Conformable Fractional Systems**", Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization**, **7**, **1**, pp **13-32**.

[52] He S., Sun K., Mei X., Yan B., Xu S. (**2017**), "Numerical analysis of a fractional-order chaotic system based on conformable fractional-order derivative", **Eur. Phys. J. Plus**, pp **132- 136**.

[53] Asawasamrit S., Ntouyas S., Thiramanus P., Tariboon J. (**2016**), "Periodic boundary value problems for impulsive conformable fractional integro-differential equations", **Boundary Value Problems**, **2016**, **122,** pp **1-18**.

[54] Özkan O, Kurt A. (2018), "The analytical solutions for conformable integral equations and integro-differential equations by conformable Laplace transform ", Opt Quant Electron, 50, PP. 81

[55] Ivo Petr´aˇs, (**2009**), "Stability of Fractional-Order Systems with Rational Orders ", Fractional Calculus & Applied Analysis, **12**, **3**, pp **269-298**.

[56] Li C., Deng W. (**2007**), "Remarks on fractional derivatives", **Applied Mathematics and Computattion**, **187**, pp **777-784**.

[57] Li C., Qian D., and Chen Y. Q. (**2011**), "On Riemann-Liouville and caputo Derivatives", **Hindawi Publishing Corporation, DiscreteDynamics in Nature and Society**, doi:10.115/2011/562494.

[58] Li C. and Deng W. (**2007**), "Remarks on fractional derivatives" Applied Mathematics and Computation, **187**, pp **777–784**.

[59] Matignon D. (1996)," Stability results on fractional differential equations with applications to control processing", in: Proceedings of Computational Engineering in Systems and Application Multiconference, 2, IMACS, IEEE-SMC, pp 963-968.

[60] Deng W., Li C., Lu J. (**2007**), "Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays", **Nonlinear Dynam**. **48**, pp **409–416**.

[61] Ahmed E., El-Sayed A.M.A., El-Saka H.A.A., "Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional order predator–prey and rabies models", **J. Math. Anal. Appl.**, **325**, pp **542–553.**

[62] Tavazoei M. S., Haeri M. (**2008**), "Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems", **Physica D: Nonlinear Phenomena**, **237**, **20**, pp **2628–2637**.

[63] Li Y., Chen Y. Q., Podlubny I. (**2009**), "Mittag-Leffler stability of fractional-order nonlinear dynamic systems", **Automatica**, **45**, pp **1965-1969**.

[64] Li Y., Chen Y. Q., Podlubny I. (**2010**), "Stability of fractiona-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability", **Computers and Mathematics with Applications**, **59**, pp **1810-1821**.

[65] Gao W. and Hung J. C. (**1993**), "Variable structure control of nonlinear systems: a new approach", **IEEE Trans. Industrial Elec.**, **40**, **1**, pp **45-55**.

[66] Yorgancioglu F., Komurcugil H. (**2010**), "Decoupled sliding-mode controller based on time-varying sliding surfaces for fourth-order systems", **Expert Systems with Applications**, **37**, pp **6764–6774**.

[67] Yin C., Zhong S.M., Chen W.F. (**2012**), "Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems", **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, **17**, pp **356–366**.

[68] Ramirez H. S. and Morles E. C. (**1995**), "A sliding mode strategy for adaptive learning in adalines", **IEEE Trans. Circuits Syst**. **I**, **42**, pp **1001-1012**.

[69] Piltan F., Sulaiman N., Rashidi M., Tajpaikar Z., Ferdosali P. (2011), "Design and Implementation of Sliding Mode Algorithm: Applied to Robot Manipulator-A Review", **International Journal of Robotics and Automation (IJRA)**, **2**, **5**, pp. **265-282**.

[70] Perruquetti W. and Pierre-Barbot J. (2002), "**Sliding mode control in engineering**", Marcel Dekker, New york.

[71] Slotine J.-J. E. and Li W. (1991), "**Applied nonlinear control**", Prentice-hall, New Jersey.

[72]_ Su J.-P. and Wang C.-C. (**2002**), "Complementary sliding control of non-linear systems", **Int. J. Contr**., **75**, **5**, pp **360-368**.

[73] Lee H., Kim E., Kang H J., Park M. (**2001**), "A new sliding-mode control with fuzzy boundary layer, Fuzzy Sets and Systems", **Fuzzy Sets and Systems**, **120**, pp. **135–143**.

[74] Yang L., ZHang Y., Chen X. (**2009**), "Sliding Mode Control with Fuzzy Boundary Layer for a Class of Uncertain Nonlinear Systems", **Journal of System Simulation**, **21**, **22**, pp **7262-7265**.

[75] Laghrouche S., Plestan F. and Glumineau A. (**2007**), "Higher order sliding mode control based on integral slidingmode", **Automatica, 43**, pp. **531–537**.

[76] Yu X. and Kaynak O. (**2009**), "Sliding-Mode Control with Soft Camputing: A Survey", **IEEE Trans. On Industrial Electronics**, **56**, **9**.

[77] Aghababa MP (**2013**), "Design of a chatter-free terminal sliding mode controller for nonlinear fractional-order dynamical systems". **Int J Control**, **86**, **10**, pp **1744–56**.

[78] Ma D., Lin H., and Li B. (2017),"_Chattering-Free Sliding-Mode Control for Electromechanical Actuator with Backlash Nonlinearity" , **Journal of Electrical and Computer Engineering**, **2017**, Article ID 6150750, pp **1-8**.

[79] Mobayen S. (**2015**), "An adaptive chattering-free pid sliding mode control based on dynamic sliding manifolds for a class of uncertain nonlinear systems", **Nonlinear Dyn**, **82**,**1**, pp **1–8**.

[80] Wang J., Shao C., Chen Y.Q. (**2018**), "Fractional order sliding mode control via disturbance observer for a class of fractional order systems with mismatched disturbance", **Mechatronics**, **53**, pp **8–19**.

[81] Efe M. O. (**2013**), "A sufficientcondition for checking the attractiveness of a sliding manifold in fractional order sliding mode control", **Asian Journal of Control**, **15**, **4**, pp **1-5**.

[82] Feia J.,Lu C. (2018), "Adaptive fractional order sliding mode controller with neural estimator", **Journal of the Franklin Institute**, **355**, **5**, pp **2369-2391**.

[83] Binazadeh T. and Shafiei M. H. (**2013**), "Output tracking of uncertain fractional-order nonlinearsystems via a novel fractional-order sliding mode approach", **Mechatronics**, 23, 7, pp **888-892**

[84] Faieghi M R. , Delavari H., Baleanu D. (**2013**), "A note on stability of sliding mode dynamics in suppression of fractional-order chaotic systems", **Computers and Mathematics with Applications**, **66**, pp. **832–837**.

[85] Wanga C. C., Pai N.S. , Yau HT. (**2010**), "Chaos control in AFM system using sliding mode control by backstepping design", **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, **15**, **741–751**.

[86] Aghbaba M.P. and Borjkhani M. (**2014**), "Chaotic Fractional-Order Model for Muscular Blood Vessel and its Control via Fractional Control Scheme", **Complexity**, **20**, **2**, pp **37–46**.

[87] Yu S., Yu X., and Zhihong M. (2000), "Robust Global Terminal Sliding Mode Control of SISO Nonlinear Uncertain Systems", Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.00CH37187).

[88] Feng Y., Han F., and Yu X. (**2014**), "Chattering free full-order sliding-mode control," **Automatica**, **50**, **4**, pp **1310–1314**.

[89] Abolmasoumi A. H., Khosravinejad S. (**2015**), "Chaos Control in Memristor-based Oscillators Using Intelligent Sliding Mode Control", **Journal of Engineering Science and Technology Review Special Issue on Synchronization and Control of Chaos: Theory, Methods and Applications**, **8** , **2**, pp **192 – 197**.

[90] Li C.P. and Zhang F.R. (**2011**), "A survey on the stability of fractional differential equations", **Eur. Phys. J. Special Topics ,193**, pp **27–47** .

[91] Aghababa M P. (**2015**), "A fractional sliding mode for finite-time control scheme with application to stabilization of electrostatic and electromechanical transducers", **Applied Mathematical Modelling**, **39**, pp **6103–6113.**

[92] Fateh M M. , Alfi A. , Moradi M., Modarres H., (**2009**) " Sliding mode control of lorenz chaotic system on a moving fuzzy surface ", **IEEE EUROCON 2009**, pp. **964-970.**

[93] Yan Wang, (**2018**) "Dynamic analysis and synchronization of conformable fractional-order chaotic systems", **Eur. Phys. J. Plus**, **133**, pp. **481-501.**

Abstract

In this thesis, fractional order sliding mode controllers based on conformable derivative are designed. In addition, Lyapunov's direct method based on conformable fractional order derivative is presented. One of the most advantages of conformable fractional order derivative is simple calculation due to similarity to integer one and having some of its properties which other definitions can not satisfied. With respected to the above benefits, application of conformable derivative in control design has proposed a new idea in control engineering. First, in order to investigate the stability of proposed controllers, Lyapunov's direct method based on conformable derivative is presented. In the following, three typs of new fractional order sliding mode controllers based on conformable derivatives are proposed. The designed controllers contain novel sliding surfaces as well as new switiching functions. They can improve the control performance such as increasing convergence speed, chattering reduction, decreasing control effort and simplifying calculation. Also, the simulation results confirm the effectiveness of the proposed controllers.

Keywords: Nonlinear affine systems, Fractional order sliding mode controller, Conformable fractional order derivative, Lyapunov stability.

Shahrood
University of
Technology

Faculty of Electrical and Robotic Engineering

Design of Conformable Fractional Order Sliding Mode Controller for Affine Systems

By: Sara Haghighatnia

Supervisor:

Dr. Heydar Toosian Shandiz

September 2019