

سورة الفجر



دانشکده مهندسی برق و رباتیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی کنترل

طراحی کنترل کننده مرتبه کسری برای سیستم مرتبه کسری انسولین-گلوکز

نگارنده: پریسا تورانی

استاد راهنما

دکتر حیدر طوسی‌ان شاندیز

مهر ۱۳۹۶

شماره ۰۱۵۱۱
تاریخ: ۸۲/۷/۸۹

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای پریسا تورانی با شماره

دانشجویی ۹۴۰۴۷۱۴ رشته مهندسی برق کنترل گرایش کنترل تحت عنوان: طراحی کنترل کننده مرتبه کسری

برای سیستم مرتبه کسری انسولین - گلوکز که در تاریخ ۱۳۹۶/۰۷/۱۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه

صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: <u>خیلی خوب</u>)	☒ مردود
نوع تحقیق: ☒ نظری	☐ عملی

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر طوبی ساندز	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر حمید ذریف	دانشیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر علی زاراه زرم	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر الفی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به:

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام زمینی ام است فرشته‌هایی که از خواسته

هایشان گذشتند سختی‌ها را به جان خریدند تا من در این جایگاه بایستم.

به استوارترین تکیه‌گاهم، دستان پر مهر پدر عزیزتر از جانم

به سنگ صبور زندگیم، نگاه پر مهر مهربانترینم، مادر مهربانم

و فداکارترین خواهر همیشه همراهم

کران سنگ تر از این ارزان نداشتیم که تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم غبار خستگی‌تان را بزداید.

بوسه بر دستان پرمهرتان

تقدیر و تشکر:

شکریان نثار ایزدمنان که توفیق را نصیب راہم ساخت تا این پایان نامہ را بہ پایان برسانم.

و سپاس بی کران از ہمراہی، صبر و اعتماد استاد فرہیختہ و کرامت قدرم جناب آقای دکتر حیدر طوسیٰ شاذیزک کہ در این مدت با

حسن خلق، راہنمایی ہای دلوزانہ و حمایت ہای بی دینشان راہ را برای بہ ثمر رسیدن این پژوهش ہموار کردند. باشد کہ این

کمترین بخشی از زحمات ایشان را پاس گوید.

ہمچنین با افتخار از جناب دکتر حسین قلی زادہ نرم و جناب دکتر علیرضا الفی کہ داوری این پایان نامہ را بر عہدہ داشتند

بی نہایت پاسکزارم.

تعهد نامه

اینجانب **پریسا تورانی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی برق کنترل دانشکده مهندسی برق و رباتیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه طراحی کنترل کننده مرتبه کسری برای سیستم مرتبه کسری

انسولین – گلوکز تحت راهنمایی **دکتر حیدر طوسی**ان شاندیز متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

در این پایان نامه با به کارگیری مدل مینیمال برگمان جهت توصیف دینامیک سیستم غیرخطی انسولین-گلوکز، کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری با هدف تنظیم پایدار سطح گلوکز خون در کمترین زمان ممکن، ارائه می شود. نتایج شبیه سازی نشان می دهد استفاده از مشتقات کسری در نظریه مود لغزشی ضمن حفظ عملکرد مقاوم کنترل کننده مود لغزشی صحیح در برابر اغتشاش و تغییر پارامترها، زمان همگرایی حالت های سیستم به مقدار مطلوب را کاهش داده و موجب بهبود عملکرد کنترل کننده می شود.

کلمات کلیدی: سیستم غیرخطی انسولین-گلوکز، مدل مینیمال برگمان، کنترل کننده مود لغزشی،

کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری

فهرست مطالب:

فصل ۱: آشنایی با بیماری دیابت	۱
۱-۱ مقدمه	۲
۲-۱ معرفی سیستم انسولین-گلوکز	۳
۱-۲-۱ دیابت نوع ۱	۴
۲-۲-۱ دیابت نوع ۲	۵
۳-۱ راهبردهای کنترلی	۵
۱-۳-۱ کنترل حلقه باز	۵
۲-۳-۱ کنترل حلقه بسته	۶
۴-۱ پمپ انسولین	۷
۵-۱ مروری بر مدل‌های سیستم انسولین-گلوکز	۸
۱-۵-۱ مدل به شکل معادلات دیفرانسیل معمولی	۹
۲-۵-۱ مدل به شکل معادلات دیفرانسیل تاخیری	۱۰
۳-۵-۱ مدل به شکل معادلات دیفرانسیل انتگرالی	۱۰
۴-۵-۱ مدل مینیمال برگمان	۱۰
۶-۱ مروری بر روش‌های کنترل حلقه بسته سیستم تنظیم انسولین-گلوکز	۱۳
۷-۱ بیان مساله	۱۳
۸-۱ هدف و ساختار کلی پایان‌نامه	۱۴
۹-۱ جمع‌بندی	۱۴
فصل ۲: مقدمه‌ای بر حسابان کسری	۱۵
۱-۲ مقدمه	۱۶
۲-۲ تعاریف و مقدمات حسابان کسری	۱۶

۱۷	۱-۲-۲ تابع گاما
۱۷	۲-۲-۲ تابع میتاگ-لفلر
۱۸	۳-۲-۲ انتگرال مرتبه کسری
۱۸	۴-۲-۲ مشتق مرتبه کسری
۱۹	۱-۴-۲-۲ مشتق گرانوالد لتنیکوف
۱۹	۲-۴-۲-۲ مشتق ریمان لیوویل
۲۰	۳-۴-۲-۲ مشتق کاپاتو
۲۱	۵-۲-۲ سیستم متناسب
۲۱	۶-۲-۲ تقریب المان‌های کسری
۲۱	۱-۶-۲-۲ تقریب استالوپ
۲۲	۲-۶-۲-۲ تقریب کرون
۲۲	۷-۲-۲ پایداری
۲۳	۱-۷-۲-۲ پایداری سیستم مرتبه کسری خطی
۲۴	۲-۷-۲-۲ پایداری سیستم مرتبه کسری غیرخطی
۲۴	۸-۲-۲ انواع کنترل‌کننده مرتبه کسری
۲۵	۱-۸-۲-۲ کنترل‌کننده تناسبی-انتگرالی-مشتق‌گیر کسری
۲۶	۲-۸-۲-۲ کنترل‌کننده تی-آی-دی کسری
۲۶	۳-۸-۲-۲ کنترل‌کننده پیش‌فاز-پس‌فاز مرتبه کسری
۲۷	۴-۸-۲-۲ کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه کسری
۲۷	۳-۲ جمع‌بندی
۲۹	فصل ۳: کنترل مود لغزشی
۳۰	۱-۳ مقدمه

۳-۲	سطح لغزش	۳۰
۳-۳	پدیده لرزش	۳۱
۳-۳-۱	کاهش پدیده لرزش	۳۲
۳-۴	طراحی کنترل کننده مود لغزشی	۳۲
۳-۵	مود لغزشی دینامیک	۳۴
۳-۶	مود لغزشی نهایی	۳۵
۳-۶-۱	مود لغزشی نهایی نرمال	۳۶
۳-۶-۲	مود لغزشی نهایی غیرمنفرد	۳۸
۳-۶-۳	مود لغزشی نهایی سریع	۳۹
۳-۷	مود لغزشی مرتبه بالا	۴۰
۳-۸	شبیه سازی	۴۱
۳-۹	رفتار فرد سالم	۴۱
۳-۱۰	الگوریتم سوپرتویستینگ	۴۳
۳-۱۰-۱	نتایج شبیه سازی با الگوریتم سوپرتویستینگ	۴۴
۳-۱۱	روش مود لغزشی کلاسیک	۴۷
۳-۱۱-۱	نتایج شبیه سازی کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک پیشنهادی	۴۸
۳-۱۲	روش گام به عقب	۵۲
۳-۱۲-۱	نتایج شبیه سازی کنترل کننده مود لغزشی گام به عقب	۵۵
۳-۱۳	روش مود لغزشی ترمینال گام به عقب	۶۰
۳-۱۳-۱	نتایج شبیه سازی کنترل کننده مود لغزشی ترمینال گام به عقب پیشنهادی	۶۲
۳-۱۴	جمع بندی	۶۴
فصل ۴:	کنترل کننده مرتبه کسری	۶۷

۱-۴	مقدمه	۶۸
۲-۴	انتخاب کنترل کننده کسری	۶۸
۳-۴	انتخاب تعریف کاپاتو	۶۹
۴-۴	طراحی کنترل کننده	۷۰
۱-۴-۴	کنترل کننده مود لغزشی کسری	۷۰
۱-۱-۴-۴	نتایج شبیه سازی	۷۲
۲-۴-۴	کنترل کننده مود لغزشی کسری پیشنهادی	۷۷
۱-۲-۴-۴	نتایج شبیه سازی	۷۸
۵-۴	مدل با معادلات دیفرانسیل کسری	۸۱
۶-۴	کنترل کننده مود لغزشی کسری پیشنهادی برای سیستم کسری	۸۲
۱-۶-۴	نتایج شبیه سازی	۸۵
۷-۴	جمع بندی	۹۰
۹۱	فصل پنجم: نتایج و پیشنهادها	
۱-۵	نتیجه گیری	۹۲
۲-۵	پیشنهادها	۹۳
۹۴	پیوست	
۹۵	منابع و مراجع	

فهرست اشکال:

- شکل ۱-۱: طرح کلی سیستم انسولین-گلوکز ۴
- شکل ۱-۲: شمای کلی کنترل حلقه باز سیستم انسولین-گلوکز ۶
- شکل ۱-۳: شمای کلی کنترل حلقه بسته سیستم انسولین-گلوکز ۷
- شکل ۱-۴: طرح کلی مدل مینیمال برگمان ۱۲
- شکل ۲-۱: ناحیه پایداری سیستم مرتبه کسری ۲۳
- شکل ۲-۲: مقایسه کنترل کننده مرتبه صحیح با مرتبه کسری ۲۶
- شکل ۱-۳: سطح لغزش ۳۱
- شکل ۲-۳: پدیده لرزش ۳۱
- شکل ۳-۳: مسیر الگوریتم فراپیشی در صفحه فاز ۴۰
- شکل ۴-۳: سطح گلوکز خون فرد سالم ۴۲
- شکل ۵-۳: سطح گلوکز خون فرد سالم در حضور اغتشاش ۴۳
- شکل ۶-۳: سطح گلوکز خون با الگوریتم سوپرتویستینگ ۴۵
- شکل ۷-۳: تاثیر انسولین بر حذف قند خون با الگوریتم سوپرتویستینگ ۴۵
- شکل ۸-۳: سطح لغزش در الگوریتم سوپرتویستینگ ۴۶
- شکل ۹-۳: آهنگ تزریق انسولین الگوریتم سوپرتویستینگ ۴۶
- شکل ۱۰-۳: سطح گلوکز خون با کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک ۴۹
- شکل ۱۱-۳: تاثیر انسولین بر حذف قند خون با کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک ۴۹
- شکل ۱۲-۳: غلظت انسولین پلاسما با کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک ۵۰
- شکل ۱۳-۳: سطح لغزش در روش مود لغزشی کلاسیک ۵۰
- شکل ۱۴-۳: آهنگ تزریق انسولین با کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک ۵۱
- شکل ۱۵-۳: سطح گلوکز خون با کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک در حضور اغتشاش ۵۱

- شکل ۳-۱۶: طرح کلی از روش گام به عقب ۵۲
- شکل ۳-۱۷: سطح گلوکزخون با الگوریتم گام به عقب ۵۶
- شکل ۳-۱۸: تاثیر انسولین بر حذف قندخون با الگوریتم گام به عقب ۵۷
- شکل ۳-۱۹: غلظت انسولین پلاسما با الگوریتم گام به عقب ۵۷
- شکل ۳-۲۰: آهنگ تزریق انسولین با الگوریتم گام به عقب ۵۸
- شکل ۳-۲۱: سطح لغزش گام اول در الگوریتم گام به عقب ۵۸
- شکل ۳-۲۲: سطح لغزش گام دوم در الگوریتم گام به عقب ۵۹
- شکل ۳-۲۳: سطح لغزش گام سوم در الگوریتم گام به عقب ۵۹
- شکل ۳-۲۴: مقایسه سطح گلوکزخون در دو روش ۶۳
- شکل ۳-۲۵: مقایسه تاثیر انسولین بر حذف قندخون در دو روش ۶۳
- شکل ۳-۲۶: مقایسه غلظت انسولین پلاسما در دو روش ۶۴
- شکل ۳-۲۷: مقایسه آهنگ تزریق انسولین در دو روش ۶۴
- شکل ۴-۱: سطح گلوکزخون با کنترل کننده مود لغزشی کسری ۷۳
- شکل ۴-۲: تاثیر انسولین بر حذف قندخون با کنترل کننده مود لغزشی کسری ۷۳
- شکل ۴-۳: غلظت انسولین پلاسما با کنترل کننده مود لغزشی کسری ۷۴
- شکل ۴-۴: سطح لغزش در روش مود لغزشی کسری ۷۴
- شکل ۴-۵: آهنگ تزریق انسولین با کنترل کننده مود لغزشی کسری ۷۵
- شکل ۴-۶: سطح گلوکزخون دو بیمار با کنترل کننده مود لغزشی کسری ۷۵
- شکل ۴-۷: تاثیر انسولین بر حذف قندخون دو بیمار با کنترل کننده مود لغزشی کسری ۷۶
- شکل ۴-۸: غلظت انسولین پلاسما دو بیمار با کنترل کننده مود لغزشی کسری ۷۶
- شکل ۴-۹: آهنگ تزریق انسولین دو بیمار با کنترل کننده مود لغزشی کسری ۷۷
- شکل ۴-۱۰: سطح گلوکزخون دو بیمار با کنترل کننده مود لغزشی کسری در حضور اغتشاش ۷۷

- شکل ۴-۱۱: مقایسه سطح گلوکز خون ۷۹
- شکل ۴-۱۲: مقایسه تاثیر انسولین بر حذف قند خون ۷۹
- شکل ۴-۱۳: مقایسه غلظت انسولین پلاسما ۸۰
- شکل ۴-۱۴: مقایسه آهنگ تزریق انسولین ۸۰
- شکل ۴-۱۵: مقایسه سطح لغزش ۸۱
- شکل ۴-۱۶: سطح گلوکز خون به ازای مقادیر مختلف آلفا ۸۱
- شکل ۴-۱۷: سطح گلوکز خون با کنترل کننده پیشنهادی ۸۶
- شکل ۴-۱۸: غلظت انسولین پلاسما با کنترل کننده پیشنهادی ۸۷
- شکل ۴-۱۹: آهنگ تزریق انسولین با کنترل کننده پیشنهادی ۸۷
- شکل ۴-۲۰: سطح لغزش گام اول با کنترل کننده پیشنهادی ۸۸
- شکل ۴-۲۱: سطح لغزش گام دوم با کنترل کننده پیشنهادی ۸۸
- شکل ۴-۲۲: سطح لغزش گام سوم با کنترل کننده پیشنهادی ۸۹
- شکل ۴-۲۳: سطح گلوکز خون در حضور اغتشاش با کنترل کننده پیشنهادی ۸۹

فهرست جدول‌ها:

- جدول ۱-۳: پارامترهای مدل برگمان در فرد سالم ۴۲
- جدول ۲-۳: پارامترهای بیمار ۴۴
- جدول ۳-۳: پارامترهای الگوریتم سوپرتویپستینگ ۴۴
- جدول ۴-۳: پارامترهای کنترل‌کننده مود لغزشی کلاسیک ۴۹
- جدول ۵-۳: پارامترهای الگوریتم گام به عقب ۵۵
- جدول ۶-۳: پارامترهای بیمار ۵۶
- جدول ۷-۳: پارامترهای کنترل‌کننده مود لغزشی ترمینال گام به عقب ۶۲
- جدول ۱-۴: پارامترهای کنترل‌کننده مود لغزشی کسری ۷۲
- جدول ۲-۴: پارامترهای کنترل‌کننده مود لغزشی کسری پیشنهادی ۷۸
- جدول ۳-۴: پارامترهای بیمار ۸۶
- جدول ۴-۴: پارامترهای کنترل‌کننده پیشنهادی ۸۶

فصل اول

آشنایی با بیماری دیابت

۱-۱- مقدمه

سطح گلوکز خون یکی از پارامترهای حیاتی در بدن انسان است، عدم توانایی سیستم داخلی بدن در تنظیم این پارامتر منجر به بروز بیماری دیابت می‌شود. بر اثر عملکرد نادرست سیستم تنظیم انسولین- گلوکز در افراد مبتلا به دیابت، ترشح و عملکرد انسولین جهت تنظیم سطح قندخون دچار اختلال شده و در نتیجه سلول‌های فرد بیمار قادر به تبدیل کربوهیدرات و موادقندی مصرفی به انرژی مورد نیاز بدن نخواهند بود [۱]. در عین حال عوارض ناشی از تزریق نادرست و کنترل نشده انسولین می‌تواند برای سلامت فرد خطرناک باشد. به عنوان مثال بالا رفتن غلظت گلوکز خون (200 mg/dl) که تحت عنوان پدیده هایپرگلیسمی^۱ شناخته می‌شود در دراز مدت منجر به بیماری‌های قلبی، نارسایی کلیه، نابینایی و حتی در مواردی قطع عضو خواهد شد. از طرفی، در نتیجه‌ی تزریق دز^۲ زیاد انسولین کاهش سطح قندخون (50 mg/dl) یا پدیده هایپوگلیسمی^۳، بیهوشی، کما و در موارد شدید مرگ فرد را به همراه دارد [۲]. براساس دلایل مطرح شده کنترل دقیق قندخون از اهمیت بالایی برخوردار بوده و از بروز بسیاری از این عوارض جلوگیری می‌کند. به همین منظور طی سال‌های اخیر تحقیقات گسترده‌ای در زمینه کنترل دیابت انجام شده است [۳،۴].

براساس آمار فدراسیون بین المللی دیابت، شیوع این بیماری در جهان به شدت رو به افزایش است. امروزه بالغ بر ۴۱۵ میلیون فرد مبتلا به دیابت در سراسر جهان وجود دارند که پیش‌بینی می‌شود این رقم تا سال ۲۰۴۰ به ۶۴۲ میلیون نفر نیز برسد. تقریباً هر ۶ ثانیه یک نفر بر اثر دیابت جان خود را از دست می‌دهد. هزینه‌های درمان دیابت در سال ۲۰۱۵ بین ۶۷۳ تا ۱۱۹۷ میلیون دلار بوده است، این ارقام حاکی از پرهزینه بودن این بیماری نیز می‌باشد [۲].

^۱ Hyperglycemia

^۲ Dos

^۳ Hypoglycemia

سیستم درونی بدن افراد دیابتی جهت تنظیم قندخون به درستی عمل نمی‌کند. به همین منظور الگوریتم کنترلی جهت تنظیم سطح گلوکز خون طراحی و جایگزین آن می‌شود. در این پایان‌نامه با استفاده از مدل مینیمال برگمان^۴ جهت توصیف سیستم انسولین-گلوکز، کنترل‌کننده مرتبه کسری به منظور تنظیم سطح قندخون بیمار طراحی شده است. نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده مقاوم بودن کنترل‌کننده پیشنهادی را در برابر تغییرات پارامترها و اغتشاش وارد شده به سیستم بر اثر مصرف غذا ضمن افزایش سرعت همگرایی حالت‌ها به مقدار مطلوب نشان می‌دهد.

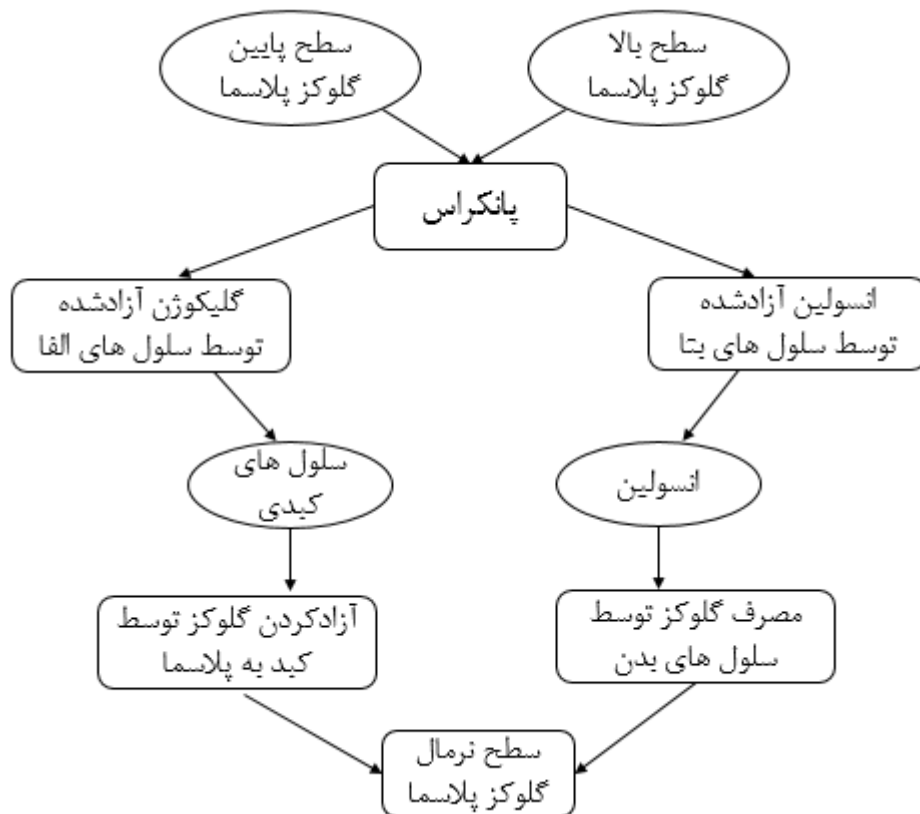
۱-۲- معرفی سیستم انسولین-گلوکز

بدن انسان جهت دستیابی به سطح قندخون نرمال از کنترل دوگانه هورمون‌ها استفاده می‌کند. هورمون‌های انسولین و گلیکوژن که به ترتیب از سلول‌های بتا^۵ و آلفا^۶ در لوزالمعده ترشح می‌شوند غلظت گلوکز خون را در محدوده نرمال $70-110 \text{ mg / dl}$ نگه می‌دارند. عوامل مختلفی از جمله ورزش، مصرف مواد قندی و استرس باعث انحراف سطح قندخون از مقدار طبیعی آن می‌شود. به عنوان مثال هنگامی که بر اثر مصرف غذا غلظت گلوکز خون بالا می‌رود، سلول‌های بتا با ترشح انسولین منجر به جذب قند موجود در خون توسط کبد، ماهیچه‌ها و سایر سلول‌های بدن می‌شوند. همچنین در صورت کاهش قندخون ناشی از فعالیت بدنی شدید، کبد تحت تاثیر گلیکوژن آزاد شده توسط سلول‌های آلفا با ترشح گلوکز سطح قندخون را تنظیم می‌کند. هرگونه اختلال در عملکرد این حلقه طبیعی در سیستم تنظیم انسولین-گلوکز منجر به بروز بیماری دیابت می‌شود. دیابت نوع ۱ و دیابت نوع ۲، دو نمونه از انواع رایج دیابت هستند [۵-۷]. طرح کلی سیستم تنظیم انسولین-گلوکز در شکل ۱-۱ نمایش داده شده است.

^۴ Bergman Minimal Model

^۵ Beta Cell

^۶ Alfa Cell



شکل ۱-۱ طرح کلی سیستم انسولین-گلوکز

۱-۲-۱- دیابت نوع ۱

دیابت نوع ۱ تحت عنوان دیابت وابسته به انسولین^۷ شناخته می‌شود. در این نوع از دیابت، سلول‌های بتا پانکراس^۸ توانایی ترشح هورمون انسولین را به طور طبیعی ندارند در نتیجه گلوکز ناشی از مصرف قند خوراکی و مواد غذایی در خون باقی می‌ماند. همچنین بر اثر عملکرد ضعیف سلول‌های بتا، هورمون گلیکوژن نیز که به طور طبیعی از کبد آزاد می‌شود توسط سلول‌ها جذب نمی‌شود. در نهایت هر دو این عوامل منجر به بالا رفتن سطح قندخون فرد از حد مجاز می‌شود. جوانان بیشتر در معرض خطر ابتلا به این نوع از دیابت می‌باشند. در افراد مبتلا به دیابت نوع ۱ به منظور تنظیم سطح گلوکز خون، انسولین از خارج بدن به بیمار تزریق می‌شود [۵].

^۷ Dependent Diabetes Mellitus

^۸ Pancreas

۱-۲-۲- دیابت نوع ۲

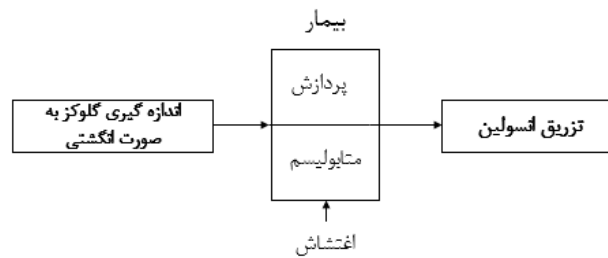
دیابت نوع ۲ به عنوان شایع‌ترین نوع دیابت، به دیابت غیر وابسته به انسولین معروف است و بیشتر افراد بزرگسال به آن مبتلا می‌شوند. کاهش ترشح انسولین سلول‌های بتا و مقاومت انسولین ترشح شده در جذب گلوکز توسط سایر سلول‌های بدن، دو عامل اصلی بروز این نوع از دیابت می‌باشد. از دیگر عوامل رایج ابتلا به این بیماری می‌توان به چاقی، سابقه خانوادگی و بی‌تحرکی نیز اشاره کرد. معمولاً در ابتدا رژیم غذایی، قرص‌های خوراکی و ورزش به بیمار توصیه می‌شود اما در درازمدت با از بین رفتن کامل سلول‌های بتا، مانند دیابت نوع ۱ به تزریق انسولین از خارج بدن به بیمار نیاز است [۸].

۱-۳- راهبردهای کنترلی

همانطور که در بخش قبل به آن اشاره شد افراد مبتلا به دیابت جهت تنظیم سطح قندخون به تزریق انسولین از خارج بدن نیاز دارند. نکته حایز اهمیت در بحث تزریق دارو به بیمار، دقت در تعیین مقدار مورد نیاز انسولین و حداقل زمان پاسخ به آن است. در این راستا دو راهبرد کنترلی حلقه باز و حلقه بسته به طور معمول جهت کنترل قندخون و تنظیم مقدار انسولین تزریقی به بیمار مطرح می‌باشد که در ادامه به آن‌ها پرداخته می‌شود [۹].

۱-۳-۱- کنترل حلقه باز

در روش کنترلی حلقه باز که طرح آن در شکل ۱-۲ نشان داده شده است مقدار معینی از انسولین معمولاً چهار یا پنج بار در طی روز با در نظر گرفتن عواملی از جمله زمان مصرف غذا، میزان گلوکز مصرفی و میزان انسولین ذخیره شده در پلاسما از طریق زیرپوستی به فرد تزریق می‌شود. در صورت بروز شرایطی مانند استرس، فعالیت بدنی و مصرف مواد قندی، سطح قندخون بیمار دچار تغییرات شدیدی شده و در این صورت، این روش تقریبی مناسب نیست.



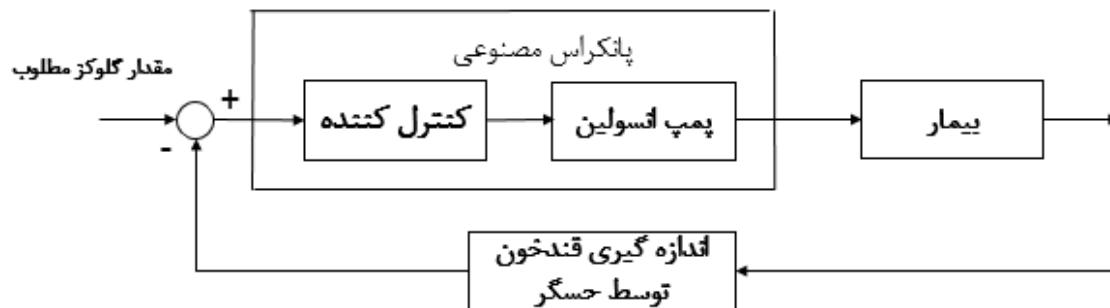
شکل ۲-۱ طرح کلی کنترل نیمه حلقه باز سیستم انسولین-گلوکز

در این روش بیمار هم به عنوان سیستم متابولیکی که باید کنترل شود و هم به عنوان کنترل کننده عمل می کند. روش کنترلی نیمه حلقه باز در جهت بهبود این روش با اندازه گیری سطح گلوکز خون از طریق انگشتی در فواصل زمانی مشخص میزان تزریق انسولین را به طور تقریبی تعیین می کند. اما همچنان خطر تغییرات ناگهانی سطح گلوکز در فواصل نمونه برداری وجود دارد [۱۰, ۱۱]. در هریک از دو روش ذکر شده بعد از تزریق انسولین پس خوردی از میزان قندخون نداریم و به همین جهت بیمار دیابتی در این شرایط همواره در معرض افزایش یا کاهش ناگهانی سطح قندخون است. به منظور جلوگیری از محاسبه میزان انسولین تزریقی به صورت دستی که ممکن است منجر به تغییرات زیاد غلظت گلوکز خون شده و عوارض خطرناکی در پی داشته باشد، پانکراس مصنوعی^۹ به طور مشابه این عملیات را به صورت خودکار و پیوسته انجام می دهد و جایگزین روش تزریق انسولین به صورت گسسته می شود [۱۲].

۱-۳-۲- کنترل حلقه بسته

از نیم قرن پیش تاکنون روش کنترل حلقه بسته و مفهوم پانکراس مصنوعی به جهت دقت بالای آن به عنوان یک راهبرد کنترلی در کنترل دیابت مورد توجه قرار گرفته است. پانکراس مصنوعی عملکردی مشابه با پانکراس طبیعی فرد سالم دارد [۴]. همانطور که در شکل ۱-۳ نشان داده شده است، حسگر اندازه گیری قندخون، کنترل کننده و پمپ تزریق انسولین اجزای اصلی در روش کنترلی حلقه بسته را تشکیل می دهند.

^۹ Artificial Pancreas



شکل ۳-۱ طرح کلی کنترل حلقه بسته سیستم انسولین-گلوکز

در این روش حسگرها که در تماس با بدن فرد قرار می‌گیرند به طور پیوسته میزان قندخون بیمار را اندازه‌گیری کرده و اطلاعات دریافتی را به دستگاه کنترلی می‌فرستند. در ادامه با استفاده از الگوریتم کنترلی طراحی شده برای کنترل کننده میزان انسولین مورد نیاز محاسبه شده و براساس آن، مقدار انسولین لازم از طریق پمپ انسولین به بیمار تزریق می‌شود. هریک از اجزا پانکراس مصنوعی به صورت بی‌سیم با هم در ارتباط هستند [۲]. در سیستم‌های زیستی مانند بدن انسان انحراف هرچند ناچیز متغیرها از مقدار مجاز آن عوارض جبران‌ناپذیری به دنبال دارد. در همین راستا از مزایای کنترل پیوسته قندخون نسبت به روش کنترلی حلقه باز می‌توان به کاهش عوارض ناشی از تزریق یکباره انسولین و جلوگیری از وقوع پدیده هایپرگلیسمی و هیپوگلیسمی اشاره کرد.

۴-۱- پمپ انسولین

تنظیم سطح قندخون در محدوده نرمال برای مدت زمان طولانی به منظور کاهش عوارض ناشی از تغییرات ناگهانی آن، مهم‌ترین مساله پیش‌رو در کنترل دیابت است. استفاده از پمپ انسولین ضمن افزایش دقت سیستم، نوسانات ناشی از تزریقات مکرر انسولین با سرنگ به روش سنتی را کاهش داده و کیفیت زندگی بیمار را بهبود می‌بخشد. پمپ انسولین به صورت مداوم به بدن فرد وصل است. این دستگاه شامل یک مخزن حاوی انسولین است که معمولاً گنجایش انسولین لازم برای ۲ تا ۳ روز را دارد و پس از تمام شدن مجدداً انسولین در محفظه ریخته می‌شود. بیمار با برنامه‌ریزی پمپ به کمک الگوریتم کنترلی طراحی

شده براساس میزان غذای مصرفی و فعالیت روزانه، میزان انسولین تزریقی را تنظیم می‌کند. معمولاً یک دوز پایه انسولین به طور مداوم در طول روز با توجه به شرایط بدنی بیمار جهت تنظیم قندخون بین وعده‌های غذایی، تزریق می‌شود. پس از مصرف غذا با تنظیم پمپ یک دوز اضافی که به دوز وحله‌ای معروف است جهت از بین بردن کربوهیدرات مصرفی به بیمار تزریق می‌شود. با وجود برتری‌های این دستگاه، افرادی که از پمپ انسولین استفاده می‌کنند باید دقت زیادی در نحوه تنظیم و نصب دستگاه داشته باشند تا در صورت مسدود شدن پمپ و یا قطع ست‌ها بتوانند اقدامات لازم را انجام دهند [۱۳، ۱۴]. پمپ انسولین و سیستم نمایش پیوسته قندخون با کاهش احتمال تغییرات سطح گلوکزخون در شرایط مختلف، نقش مهمی در گسترش مفهوم پانکراس مصنوعی و انعطاف‌پذیر کردن شرایط زندگی بیمار ایفا می‌کنند.

۱-۵- مروری بر مدل‌های سیستم انسولین-گلوکز

دیابت و سایر بیماری‌هایی که بر اثر عملکرد نادرست سیستم داخلی تنظیم انسولین-گلوکز رخ می‌دهند و اهمیت بالای کنترل آنها که امروزه به عنوان دغدغه اصلی بسیاری از ریاضی‌دانان و مهندسين کنترل مطرح می‌باشد منجر به ارائه مدل‌های ریاضی مختلفی جهت توصیف سیستم شده است. مدل‌های مطرح شده غالباً براساس آزمایش‌های گلوکز داخل وریدی^{۱۰} و گلوکز خوراکی^{۱۱} انجام شده بر روی بیمار دیابتی و فرد سالم فرمول‌بندی می‌شوند. در ادامه برخی از مدل‌های رایج جهت توصیف سیستم معرفی شده است.

^{۱۰} Intravenous Glucose Tolerance Test

^{۱۱} Oral Glucose Tolerance Test

۱-۵-۱- مدل به شکل معادلات دیفرانسیل معمولی^{۱۲}

مدل ریاضی با معادلات دیفرانسیل معمولی جهت توصیف سیستم در دو حلقه پس خورد منفی براساس

تقابل بین انسولین و گلوکز توسط استوریس^{۱۳} و همکارانش در سال ۱۹۹۱ مطرح شد [۷].

$$\begin{aligned}\frac{dG(t)}{dt} &= G_{in} - f_2(G(t)) - f_3(G(t))f_4(I_i(t)) + f_5(x_3(t)) \\ \frac{dI_p(t)}{dt} &= f_1(G(t)) - E\left(\frac{I_p(t)}{v_p} - \frac{I_i(t)}{v_i}\right) - \frac{I_p(t)}{t_p} \\ \frac{dI_i(t)}{dt} &= E\left(\frac{I_p(t)}{v_x} - \frac{I_i(t)}{v_i}\right) - \frac{I_p(t)}{t_i} \\ \frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{3}{t_d}(I_p(t) - x_1(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{3}{t_d}(x_1(t) - x_2(t)) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= \frac{3}{t_d}(x_2(t) - x_3(t))\end{aligned}\quad (1-1)$$

در رابطه (۱-۱)، $G(t)$ غلظت گلوکز، $I_p(t)$ غلظت انسولین پلاسما، $I_i(t)$ جرم انسولین در فضای بین

سلولی، t_p آهنگ ناپدید شدن انسولین در پلاسما، t_i آهنگ ناپدید شدن انسولین در فضای بین سلولی،

v_p حجم توزیع انسولین پلاسما، E نرخ انتشار، x_1, x_2, x_3 متغیرهای اضافی مربوط به تاخیر اثر

انسولین در تولید گلوکز توسط کبد، f_2, f_3, f_4 توابع مصرف گلوکز توسط اندامهای مختلف و در نهایت

f_1, f_5 به ترتیب توابع تولید انسولین توسط پانکراس و گلوکز توسط کبد است.

^{۱۲} Ordinary differential equation

^{۱۳} Sturis

۱-۵-۲- مدل به شکل معادلات دیفرانسیل تاخیری^{۱۴}

در سال ۲۰۰۱ با حذف تاخیر مرتبه سوم در معادلات دیفرانسیل بیان شده توسط استوریس و در نظر گرفتن یک تاخیر زمانی واحد مدل جدیدی ارائه شد. در این مدل از تاخیر ترشح انسولین ناشی از افزایش قندخون صرف نظر شده است [۷].

$$\begin{aligned}\frac{dG(t)}{dt} &= G_{in} - f_v(G(t)) - f_v(G(t))f_v(I(t)) + f_d(I(t - \tau_v)) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= f_v(G(t - \tau_v)) - d_i I(t)\end{aligned}\quad (2-1)$$

در رابطه (۲-۱)، τ_1 تاخیر زمانی ترشح انسولین، τ_2 تاخیر زمانی تولید گلوکز کبدی و d_i آهنگ ناپدید شدن انسولین است. سایر پارامترها مشابه مدل با معادلات دیفرانسیل معمولی تعریف می‌شوند.

۱-۵-۳- مدل به شکل معادلات دیفرانسیل انتگرالی^{۱۵}

مدل با معادلات دیفرانسیل انتگرال گیر مطابق با رابطه (۳-۱) است.

$$\begin{aligned}\frac{dG(t)}{dt} &= -b_1 G(t) - b_4 I(t)G(t) + b_7 \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -b_2 I(t) + \frac{b_6}{b_5} \int_{t-b_5}^t G(s)ds\end{aligned}\quad (3-1)$$

در رابطه (۳-۱)، $G(t)$ غلظت گلوکز خون و $I(t)$ غلظت انسولین پلاسما است. جزئیات و توصیف بیشتر هریک از پارامترهای مدل با معادلات دیفرانسیل انتگرالی در مرجع [۷] آورده شده است.

۱-۵-۴- مدل مینیمال برگمان

همانطور که در بخش ۱-۵ به آن اشاره شد مدل‌های ریاضی پیچیده و متفاوتی با تعداد پارامترهای زیاد به منظور توصیف سیستم انسولین-گلوکز ارائه شده است. با این وجود استفاده از یک مدل ساده جهت

^{۱۴} Delay differential equation

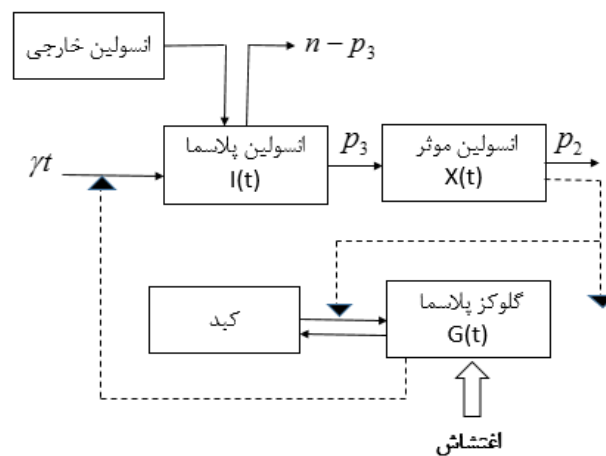
^{۱۵} Integro differential equation

توصیف عملکرد سیستم با حداقل پارامترها در درک بهتر مساله تاثیر بسزایی دارد [۱۵]. مدل ارائه شده در قرن ۱۸ توسط ریچارد برگمان با توجه به سادگی و استفاده از حداقل پارامترها جهت پوشش تمام داده‌های تجربی حاصل از آزمایش گلوکز وریدی مدل مناسبی جهت توصیف عملکرد سیستم به‌شمار می‌رود. در این آزمایش سطح گلوکز و انسولین خون حدوداً سه تا چهار ساعت بعد از تزریق مقداری گلوکز به فرد اندازه‌گیری شده و بر اساس داده‌های حاصل از آن دینامیک مدل تعیین می‌شود. علی‌رغم پیچیدگی‌های زیستی بدن انسان ارتباط بین تزریق انسولین با تولید و مصرف گلوکز بر اساس این آزمایش در مدل برگمان با حداقل پارامترها توصیف شده است که از مزایای این مدل نسبت به سایر مدل‌های ارائه شده به شمار می‌آید. مدل برگمان از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول با دو معادله دیفرانسیل، تغییرات گلوکز خون را پس از تزریق انسولین با در نظر گرفتن انسولین به عنوان ورودی، و بخش دوم با تک معادله دیفرانسیل دینامیک آزاد شدن انسولین را با در نظر گرفتن گلوکز به عنوان ورودی، مدل می‌کند [۱۵].

$$\begin{aligned}\frac{dG(t)}{dt} &= -p_1[G(t) - G_b] - X(t)G(t) + D(t) \\ \frac{dX(t)}{dt} &= -P_2X(t) + p_3[I(t) - I_b] \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -n[I(t) - I_b] + \gamma[G(t) - h]^+ t + u(t)\end{aligned}\quad (۴-۱)$$

در رابطه (۴-۱)، t زمان ورود گلوکز به خون، $G(t)$ غلظت گلوکز خون (mg/dl)، $X(t)$ تاثیر انسولین بر حذف قندخون ($1/min$)، $I(t)$ مقدار انسولین پلاسما در لحظه t (mU/dL)، I_b مقدار پایه انسولین پلاسما ($mU/dl/min^{-2}$)، G_b مقدار پایه گلوکز خون (mg/dl)، p_1 ثابت آهنگ جذب گلوکز مستقل از انسولین در ماهیچه‌ها و کبد ($1/min$)، p_2 ثابت آهنگ کاهش قندخون در بافت‌ها ($1/min$)، p_3 قابلیت افزایش جذب گلوکز وابسته به انسولین در بالاتر از سطح پایه، n آهنگ کاهش انسولین ($1/min$)، h مقدار بالای آستانه قندخون که در آن سلول‌ها انسولین تولید می‌کنند ($1/min$)، γ آهنگ آزاد شدن انسولین از سلول‌ها با غلظت بالای مقدار گلوکز آستانه ($(mg/dl)^{-1} (mU/dl) min^{-2}$) و در نهایت $u(t)$

آهنگ تزریق انسولین از خروجی پمپ است. عبارت $\gamma[G(t)-h]$ بیان کننده تابع تنظیم کننده داخلی می باشد که در فرد سالم به طور طبیعی جهت تولید انسولین وجود دارد. علامت مثبت در این تابع نشان دهنده تاثیر مثبت انسولین با افزایش مقدار سطح گلوکز خون از مقدار آستانه h در حذف قندخون است. طرح کلی مدل مینیمال برگمان در شکل ۱-۴ نشان داده شده است. $u(t)$ آهنگ تزریق انسولین به بیمار از طریق پمپ و $G(t)$ غلظت گلوکز خون به ترتیب ورودی و خروجی سیستم را تشکیل می دهند. همچنین میزان جذب گلوکز ناشی از مصرف غذا به عنوان اغتشاش وارد شده به سیستم $(mg / dl / min)$ $D(t)$ در نظر گرفته می شود. در این پایان نامه همانطور که در ابتدای این بخش به آن اشاره شد، به دلیل استفاده از حداقل پارامترها در بیان ارتباط بین انسولین و گلوکز، سادگی مدل، و مطابقت با داده های حاصل از آزمایش گلوکز، از مدل مینیمال برگمان جهت طراحی الگوریتم کنترلی استفاده شده است.



شکل ۱-۴ طرح کلی مدل مینیمال برگمان

۱-۶- مروری بر روشهای کنترل حلقه بسته سیستم تنظیم انسولین-گلوکز

در راستای طراحی الگوریتم مناسب در روش کنترلی حلقه بسته و گسترش مفهوم پانکراس مصنوعی تحقیقات گسترده ای انجام شده است [۱۰]. در مرجع [۱۶] کنترل کننده پی-آی-دی کلاسیک با استفاده از مدل خطی و در مرجع [۱۷] کنترل کننده پی-آی-دی کسری طراحی شده است. با در نظر

گرفتن مدل خطی بدن انسان، کنترل‌کننده‌های طراحی شده صرفاً حول نقطه کار عملکرد مناسبی دارند. در مراجع [۱۸-۲۰] از روش‌های مبتنی بر مدل از جمله کنترل پیش‌بین و کنترل عصبی جهت کنترل و پیش‌بینی نوسانات قندخون استفاده شده است. در مراجع [۲] و [۲۱] کنترل‌کننده فازی به عنوان یک روش مناسب در کنترل سیستم بدون نیاز به داشتن مدل دقیقی از آن طراحی شده است. همچنین با در نظر گرفتن نامعینی‌های مدل، روش کنترل مقاوم و کنترل تطبیقی به عنوان دو روش اساسی در کنترل سیستم در حضور نامعینی در مراجع [۲۲-۲۴] مطرح شده است.

۷-۱- بیان مساله

با در نظر گرفتن پیچیدگی بدن انسان و تفاوت پارامترهای بدن در افراد مختلف همچنین تاثیر شرایطی مانند استرس، تغذیه، ورزش به عنوان اغتشاش وارد شده به سیستم بر روی میزان قندخون، ضروری است جهت کنترل سطح گلوکزخون الگوریتمی طراحی شود که در برابر تغییر پارامترها و اغتشاش مقاوم باشد. از این رو روش کنترل مود لغزشی به عنوان یک روش مقاوم جهت طراحی الگوریتم کنترلی در این پایان‌نامه انتخاب شده است. از طرفی بسیاری از سیستم‌های زیستی مانند بدن انسان حافظه‌دار هستند و ارتباط بین اجزای آن‌ها را می‌توان با رفتار فرکتال‌ها^{۱۶} که اشکالی خودمتشابه و منظم هستند شبیه دانست. به همین جهت استفاده از معادلات دیفرانسیل کسری به دلیل وابستگی به مقدار گذشته متغیرها و داشتن بعد کسری که در هندسه فرکتالی وجود دارد، جهت توصیف این گونه از سیستم‌ها موثرتر بوده و دقت مدل‌سازی را افزایش می‌دهد.

^{۱۶} Fractals

۸-۱- هدف و ساختار کلی پایان نامه

در این پایان نامه هدف طراحی کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری برای سیستم مرتبه کسری انسولین-گلوکز به منظور بررسی تاثیر استفاده از معادلات کسری در توصیف سیستم و تعریف سطح لغزش، در طراحی قانون کنترلی با استفاده از نظریه کنترل مود لغزشی، جهت بهبود عملکرد سیستم در راستای کنترل قندخون و مقایسه آن با حالت صحیح می باشد. به همین منظور در ابتدا به دلیل مباحث متفاوت مطرح شده در حسابان کسری در مقایسه با حالت صحیح، در فصل دوم جهت آشنایی خواننده با این حوزه به بیان برخی مفاهیم اساسی در حسابان کسری پرداخته شده است. در فصل سوم نظریه کنترل مود لغزشی در حالت صحیح مطرح شده و نتایج شبیه سازی برای روش های متفاوت مود لغزشی نشان داده شده است. در فصل چهارم با ترکیب مفاهیم بیان شده در فصل های دوم و سوم کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری برای سیستم در دو حالت مختلف با در نظر گرفتن معادلات سیستم به شکل صحیح و کسری طراحی شده است. در نهایت نتیجه گیری و پیشنهادها در فصل پنجم مطرح می شود.

۹-۱- جمع بندی

در این فصل در ابتدا به بیان مقدمه ای از دیابت و عوامل بروز این بیماری پرداخته شد. سپس برخی مدل های ریاضی موجود جهت توصیف سیستم انسولین-گلوکز معرفی گردید. در نهایت ضمن اشاره به راهبردهای کنترلی حلقه باز و حلقه بسته جهت کنترل سطح قندخون، طراحی الگوریتم کنترلی مناسب در روش حلقه بسته به عنوان هدف پایان نامه فوق مطرح شد.

فصل دوم

مروری بر حسابان کسری

۲-۱- مقدمه

مفهوم حسابان مرتبه کسری به عنوان تعمیم مشتق و انتگرال صحیح به اعداد حقیقی یا به عبارتی استفاده از مقادیر گویا، غیر گویا، غیر صحیح و حتی مختلط در عملگرهای مشتق و انتگرال برای اولین بار در سال ۱۶۹۵ میلادی در جواب نامه‌ای از لایبنیتز^{۱۷} به هوپیتال^{۱۸} مبنی بر تضاد موجود در رابطه $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ در صورتیکه $n = \frac{1}{2}$ در نظر گرفته شود مطرح شد [۲۵]. در سال‌های اخیر استفاده از حسابان کسری در بسیاری از علوم مهندسی از جمله کنترل، مدل‌سازی و شناسایی سیستم، پردازش تصویر و همچنین سایر زمینه‌ها از جمله علوم ریاضی، فیزیک، شیمی، پزشکی و داروشناسی مورد توجه قرار گرفته است [۲۶]. تحقیقات انجام شده در این زمینه نشان می‌دهد که استفاده از حسابان مرتبه کسری در ارتقا کیفیت مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، فرآیندهای زیستی، و سیستم‌های واقعی نقش بسزایی داشته است. بدیهی است که در صورت داشتن مدل دقیق‌تری از سیستم، فرآیند کنترلی آن هم بهتر انجام می‌شود. همچنین در بسیاری از موارد بهبود عملکرد و کارایی بهتر کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری نسبت به کنترل‌کننده‌های سنتی به خصوص در کنترل سیستم‌های مرتبه کسری به اثبات رسیده است [۲۷].

۲-۲- تعاریف و مقدمات حسابان کسری

مفاهیم مطرح شده در حسابان کسری تفاوت‌های اساسی با حسابان صحیح دارد. با توجه به این مساله، در این بخش به عنوان مقدمه‌ای جهت آشنایی و مطالعه‌ی سیستم‌های کسری، به اختصار به معرفی برخی از کاربردهای توابع و مفاهیم اولیه مورد نیاز در این حوزه پرداخته شده است.

^{۱۷} Leibniz

^{۱۸} Hopital

۲-۲-۱- تابع گاما^{۱۹}

یکی از توابع اساسی در حسابان کسری به عنوان پایه بسیاری از تعاریف مشتق و انتگرال کسری، تابع گامای اوایلر می‌باشد. این تابع در واقع توسعه یافته تابع فاکتوریل از اعداد طبیعی به اعداد حقیقی و مختلط است که در رابطه (۱-۲) تعریف شده است [۲۵].

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1-2)$$

در صورتیکه n عدد طبیعی باشد تابع گاما به صورت فاکتوریل بیان می‌شود.

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad , \quad n \in N \quad (2-2)$$

۲-۲-۲- تابع میتگ-لفلر^{۲۰}

تابع میتگ-لفلر از دیگر توابع پرکاربرد در حسابان کسری است که نقش مهمی در حوزه معادلات دیفرانسیل کسری دارد. این تابع به عنوان تعمیمی از توابع نمایی در حوزه اعداد صحیح مطرح شده و در واقع نقش تابع نمایی در پاسخ سیستم‌های صحیح را در حوزه کسری ایفا می‌کند. تابع میتگ-لفلر به صورت تک پارامتری و دو پارامتری به ترتیب در روابط (۳-۲) و (۴-۲) تعریف شده است [۲۵].

$$\varepsilon_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (3-2)$$

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (4-2)$$

^{۱۹} Gamma function

^{۲۰} Mittag-Leffler function

۲-۲-۳- انتگرال مرتبه کسری

با فرض قابل تعریف بودن تابع $f(t)$ انتگرال نامعین آن در بازه a تا t به صورت رابطه (۵-۲) بیان می‌شود.

$${}_a I_t f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (۵-۲)$$

انتگرال مرتبه دوم تابع چنین است:

$${}_a I_t^2 f(t) = \int_a^t \int_a^\tau f(\lambda) d\lambda d\tau \quad (۶-۲)$$

بر همین اساس رابطه‌ی کوشی برای انتگرال‌های تکراری در حالت صحیح به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$I_c^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_c^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t > c, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \quad (۷-۲)$$

ریمان-لیوویل با تعمیم تعریف فوق به حالتی که $n \in \mathbb{R}^+$ و در نظر گرفتن خاصیت تابع گاما $\Gamma(n) = (n-1)!$ انتگرال کسری از مرتبه‌ی α را با فرض علی بودن تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف کرد [۲۵].

$$I_c^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (۸-۲)$$

۲-۲-۴- مشتق مرتبه کسری

برخلاف حالت صحیح با تغییر α به $-\alpha$ در رابطه (۸-۲) انتگرال به مشتق تبدیل نمی‌شود. مشتق مرتبه کسری تابع، ترکیبی از مشتق صحیح و انتگرال کسری آن است. مشتق مرتبه کسری با عملگر زیر نشان داده می‌شود [۲۷].

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \\ 1 & \operatorname{Re}(\alpha) = 0 \\ \int_a^t (dt)^{-\alpha} & \operatorname{Re}(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (9-2)$$

که در آن α مرتبه کسری مشتق، a کران پایین و t کران بالای مشتق گیری است.

تعاریف متفاوتی برای مشتق مرتبه کسری وجود دارد. در ادامه سه نمونه از رایج ترین آنها معرفی می شود.

۲-۲-۴-۱- مشتق گرانوالد لتنیکوف

مشتق گرانوالد بر اساس رابطه بازگشتی مشتق به شکل رابطه (۲-۱۰) تعریف می شود [۲۸].

$${}_a D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lceil (t-a)/h \rceil} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (2-10)$$

که در آن a حد پایین، t حد بالا و α مرتبه مشتق گیری است. در واقع مشتق گرانوالد لتنیکوف به عنوان شکل گسسته تعریف مشتق کسری مطرح می باشد.

۲-۲-۴-۲- مشتق ریمان-لیوویل

در تعریف مشتق ریمان-لیوویل چنانچه در رابطه (۲-۱۱) بیان شده است، ابتدا انتگرال کسری از مرتبه $m - \alpha$

و سپس مشتق مرتبه صحیح از مرتبه m از تابع گرفته می شود [۲۵].

$${}_R D^\alpha f(t) = D^m I^{m-\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \right], \quad m-1 < \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (2-11)$$

m کوچک ترین عدد صحیح بزرگتر از α است.

تبدیل لاپلاس مشتق ریمان به صورت زیر تعریف می شود.

$$L[{}_R D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [{}_R D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (2-12)$$

همانطور که از رابطه (۲-۱۲) مشخص است در تبدیل لاپلاس ریمان به مقدار مشتق کسری تابع در لحظه صفر نیاز است. به همین دلیل استفاده از تبدیل لاپلاس آن مناسب نیست. لازم به ذکر است این مشکل در تعریف مشتق کاپاتو وجود ندارد.

۲-۲-۴-۳- مشتق کاپاتو

مشتق کاپاتو متداول ترین تعریف مشتق کسری است. با در نظر گرفتن m به عنوان کوچک ترین عدد صحیح بزرگ تر از α مطابق با رابطه (۲-۱۳) در این تعریف ابتدا مشتق مرتبه صحیح m ، سپس انتگرال مرتبه کسری $m - \alpha$ از تابع گرفته می شود [۲۵].

$${}_c D^\alpha = I^{m-\alpha} D^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau, \quad m-1 < \alpha < m, \quad m \in N \quad (2-13)$$

تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپاتو به صورت رابطه (۲-۱۴) تعریف می شود.

$$L[{}_c D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (2-14)$$

برخلاف تبدیل لاپلاس ریمان که وابسته به مشتق کسری تابع در لحظه صفر است در تبدیل لاپلاس کاپاتو شرایط اولیه برای مشتق صحیح تابع ظاهر می شود. همچنین روابط (۲-۱۲) و (۲-۱۴) نشان می دهد تحت شرایط اولیه صفر تبدیل لاپلاس دو تعریف ریمان و کاپاتو با هم یکسان است. به دلیل تعبیر فیزیکی ساده تر مشتقات صحیح نسبت به حالت کسری در کاربردهای مهندسی بیشتر از تعریف مشتق کاپاتو استفاده می شود.

۲-۲-۵- سیستم متناسب^{۲۱}

اگر در رابطه (۲-۱۵) تمام توان‌های مشتق مضرب صحیحی از مقدار پایه α باشد، به عبارتی شرط بیان شده در رابطه (۲-۱۶) برقرار باشد سیستم متناسب خواهد بود [۲۹].

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^{\alpha_k}}{dt^{\alpha_k}} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}} u(t) \quad (۲-۱۵)$$

$$\alpha_k, \beta_k = k\alpha, \quad \alpha \in R^+ \quad (۲-۱۶)$$

۲-۲-۶- تقریب المان‌های کسری

در سیستم‌های مرتبه کسری به دلیل نامحدود بودن بعد مشتق و انتگرال کسری امکان پیاده‌سازی سیستم‌ها و کنترل‌کننده‌ها بدون تقریب ممکن نیست. به همین منظور از جایگزین کردن توابع تبدیل صحیح به جای عملگرهای کسری استفاده می‌شود. در ادامه دو نمونه از متداول‌ترین تقریب‌های پیوسته زمانی از توابع تبدیل مرتبه کسری بیان می‌شود [۳۰].

۲-۲-۶-۱- تقریب اوستالوپ^{۲۲}

در تقریب بازگشتی مطرح شده توسط اوستالوپ در قرن ۱۹، عملگر s^α در محدوده فرکانسی $[w_b, w_h]$ با تابع تبدیل صحیح تعریف شده در رابطه (۲-۱۷) که در محدوده مشخص شده پاسخ فرکانسی مشابهی دارد جایگزین می‌شود [۳۰].

$$H(s) = \left(\frac{w_u}{w_h} \right)^\alpha \prod_{k=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{w_k}}{1 + \frac{s}{w_k}} \quad (۲-۱۷)$$

$$\sqrt{w_b w_h} = w_u \quad (۲-۱۸)$$

^{۲۱} Commensurate Order System

^{۲۲} Oustaloup

$$w'_k = w_b \left(\frac{w_h}{w_b} \right)^{\frac{k+N+1/2-\alpha/2}{2N+1}} \quad (19-2)$$

$$w_k = w_b \left(\frac{w_h}{w_b} \right)^{\frac{k+N+1/2+\alpha/2}{2N+1}} \quad (20-2)$$

در روابط بالا N تعداد صفرها و قطب‌های تابع تبدیل صحیح را مشخص می‌کند. بدیهی است با افزایش N دقت تقریب بیشتر می‌شود.

۲-۲-۶-۲- تقریب کرون^{۲۳}

المان کسری s^v در تقریب کرون حول بازه فرکانسی $[w_b, w_h]$ ، توسط تابع تبدیل رابطه (۲۱-۲) با تعداد N قطب و صفر حقیقی به صورت زیر تقریب زده می‌شود [۳۱].

$$s^\alpha \approx c \prod_{m=1}^N \frac{1 + \frac{s}{w_{z,m}}}{1 + \frac{s}{w_{p,m}}} \quad (21-2)$$

$$w_{z,m} = w_l \left(\frac{w_h}{w_l} \right)^{\frac{2m-1-\alpha}{2N}} \quad (22-2)$$

$$w_{p,m} = w_l \left(\frac{w_h}{w_l} \right)^{\frac{2m-1+\alpha}{2N}} \quad (23-2)$$

۲-۲-۷- پایداری

سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان در حالت صحیح در صورتی پایدار هستند که ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه بخش حقیقی منفی داشته باشند، این مفهوم در سیستم‌های کسری متفاوت است. به عبارتی

^{۲۳} Crone

قطب‌های سیستم مرتبه کسری در صورت پایداری می‌توانند در سمت راست صفحه مختلط نیز قرار گیرند [۲۴].

۲-۷-۱- پایداری سیستم مرتبه کسری خطی

با نگاشت قطب‌ها از صفحه s^q به صفحه w ، معیار پایداری ورودی محدود-خروجی محدود^{۲۴} برای

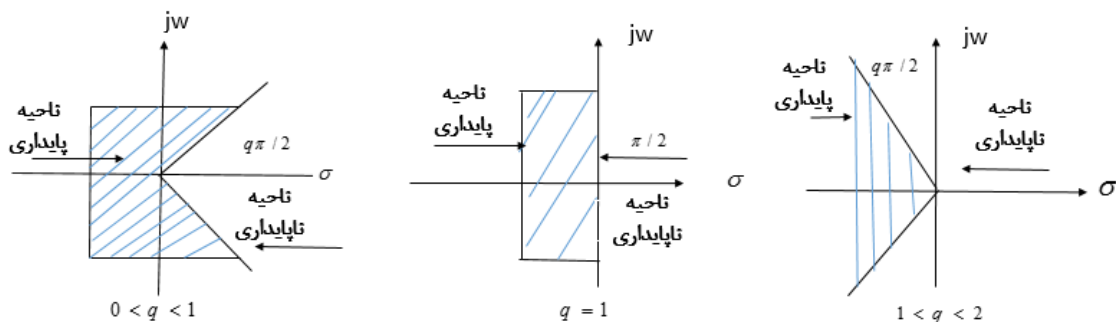
سیستم‌های مرتبه کسری متناسب، با تابع تبدیل $G(w) = \frac{Q(w)}{p(w)}$ به صورت رابطه (۲-۲۴) تعریف می‌شود.

$$|\arg(w_i)| > q\pi/2 \quad (2-24)$$

که در آن w_i ریشه چندجمله‌ای $p(w)$ است. به ازای $q=1$ معیار پایداری معادل با قرارگرفتن ریشه‌ها در سمت چپ صفحه S است. اگر w_i ها مقادیری گویا باشند که در آن p کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج آن‌ها است شرط پایداری به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵].

$$|\arg(w_i)| > \frac{p\pi}{2} \quad (2-25)$$

ناحیه پایداری سیستم مرتبه کسری در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.



شکل ۲-۱ ناحیه پایداری سیستم مرتبه کسری

^{۲۴} Bounded input-bounded output

۲-۷-۲-۲ پایداری سیستم مرتبه کسری غیرخطی

جهت بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی متغیر با زمان مرتبه کسری از تعمیم روش مستقیم لیاپانوف^{۲۵} برای سیستم‌های کسری استفاده می‌شود. سیستم غیرخطی تعریف شده در رابطه (۲۶-۲) با فرض نقطه تعادل $x = 0$ در صورت برقراری شرط‌های بیان شده در روابط (۲۷-۲) و (۲۸-۲) پایدار لیاپانوفی است [۳۲].

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (26-2)$$

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \gamma_2(\|x\|) \quad (27-2)$$

$$D^\alpha V(t, x) \leq -\gamma_3(\|x\|) \quad (28-2)$$

در روابط فوق تابع $V(t, x(t))$ تابع منتخب لیاپانوف، $\alpha \in (0, 1)$ عدد ثابت و $\gamma_i (i = 1, 2, 3)$ توابعی از کلاس k می‌باشد. لازم به ذکر است که، تابع پیوسته $\gamma: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ متعلق به کلاس k است اگر اکیدا صعودی بوده و $\gamma(0) = 0$ باشد.

۲-۸-۲-۲ انواع کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری

تضمین پایداری سیستم و عملکرد مقاوم آن در هنگام بروز اغتشاش، نویز در فرکانس‌های بالا و نامعینی مهم‌ترین ویژگی سیستم کنترلی حلقه بسته شامل کنترل‌کننده است. کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری به دلیل آزادی عملی که در انتخاب مرتبه مشتق و انتگرال در اختیار طراح قرار می‌دهند عملکرد سیستم را بهبود می‌بخشند. ایده طراحی کنترل‌کننده مرتبه کسری اولین بار در سال ۱۹۸۸ میلادی توسط استالوپ تحت عنوان کنترل‌کننده مرتبه کسری مقاوم، که کرون نامیده می‌شود مطرح گردید. پس از آن پادلابنی^{۲۶} در سال ۱۹۹۴ کنترل‌کننده تناسبی-انتگرالی-مشتق‌گیر مرتبه کسری را معرفی کرد [۲۷]. امروزه طراحی و پیاده‌سازی انواع ساختارهای پیشرفته‌تر همچون کنترل‌کننده‌های بهینه،

^{۲۵} Lyapunov

^{۲۶} Podlubny

تطبیقی، فازی و مود لغزشی از نوع کسری مورد توجه قرار گرفته است [۳۳]. در ادامه برخی از انواع کنترل کننده‌های مرتبه کسری معرفی می‌شوند.

۲-۸-۱-۲- کنترل کننده تناسبی- انتگرالی- مشتق‌گیر کسری^{۲۷}

کنترل کننده تناسبی-انتگرالی-مشتق‌گیر به عنوان پرکاربردترین و رایج‌ترین کنترل کننده در صنعت شناخته می‌شود. و در حوزه لاپلاس ساختاری به صورت زیر دارد.

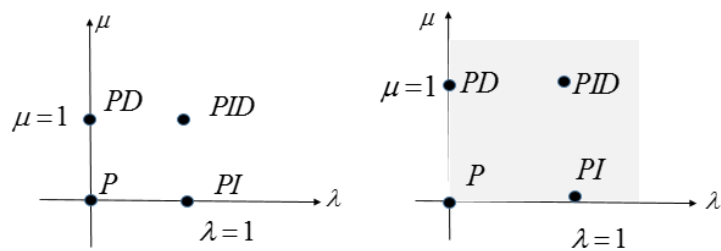
$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (29-2)$$

در حسابان کسری مرتبه انتگرال و مشتق در رابطه (۲۹-۲) با مقادیر کسری مطابق ساختار زیر جایگزین می‌شوند.

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu \quad (30-2)$$

که در آن λ و μ به ترتیب مرتبه انتگرال و مشتق است. کنترل کننده تناسبی- انتگرالی- مشتق‌گیر کسری با پنج پارامتر کنترلی قابل تنظیم $k_p, k_i, k_d, \lambda, \mu$ نسب به کنترل کننده کلاسیک با سه پارامتر قابل تنظیم k_p, k_i, k_d این امکان را به طراح می‌دهد تا در جهت رسیدن به اهداف کنترلی مطلوب آزادی عمل بیشتری داشته باشد. همانطور که در شکل ۲-۲ نشان داده شده است کنترل کننده پی-آی-دی کلاسیک حالت خاصی از کنترل کننده کسری در صورتیکه $(\lambda = \mu = 1)$ باشد در نظر گرفته می‌شود. در صورت حذف بخش انتگرال‌گیر کنترل کننده پی-دی کسری و حذف بخش مشتق‌گیر کنترل کننده پی-آی کسری بدست می‌آید.

^{۲۷} FOPID



شکل ۲-۲ مقایسه کنترل کننده مرتبه صحیح با مرتبه کسری

۲-۲-۸-۲-۲ کنترل کننده تی-آی-دی کسری^{۲۸}

اگر در کنترل کننده تناسبی-انتگرالی-مشتق گیر بیان شده در رابطه (۳۰-۲) بخش تناسبی کنترل کننده با یک جبران ساز شیب جایگزین شود کنترل کننده تی-آی-دی کسری بدست می آید. تابع تبدیل کنترل کننده فوق در حوزه لاپلاس به شکل زیر است.

$$C(s) = \frac{T}{s^{1/n}} + \frac{I}{s} + Ds \quad (31-2)$$

در رابطه بالا D, I, T ثابت های طراحی و n ضریب حقیقی غیر صفر است [۳۴].

۲-۲-۸-۳-۲ جبران ساز پیش فاز-پس فاز مرتبه کسری^{۲۹}

جبران ساز پیش فاز-پس فاز کلاسیک توسط تابع تبدیل زیر تعریف می شود.

$$C(s) = k \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} \quad (32-2)$$

که در آن $\alpha, t > 0$ است. چنانچه $0 < \alpha < 1$ باشد جبران ساز پیش فاز و در غیر این صورت اگر $\alpha > 1$ باشد جبران ساز پس فاز خواهد بود. با گسترش تابع تبدیل رابطه (۳۲-۲) در حوزه کسری جبران ساز پیش فاز-پس فاز مرتبه کسری با تابع تبدیل زیر توصیف می شود [۲۵].

^{۲۸} Tilted integral derivative

^{۲۹} Fractional Lead-Lag Compensator

$$C(s) = k \left(\frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} \right)^\lambda \quad (2-33)$$

که در آن $\lambda \in R$ و $k > 0$ است. تابع تبدیل رابطه بالا در صورتی که $0 < \alpha < 1$ و $\lambda > 0$ باشد یک جبران ساز پیش فاز و در غیر این صورت اگر $0 < \alpha < 1$ و $\lambda < 0$ باشد جبران ساز پس فاز را مشخص می کند.

۲-۸-۴- کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری

کنترل کننده های مود لغزشی مرتبه کسری اخیرا بسیار مورد توجه قرار گرفته اند. این کنترل کننده ها بر اساس ترکیب نظریه مود لغزشی و حسابان کسری طراحی می شوند. در این پایان نامه به دلیل کارایی مناسب این کنترل کننده در کنترل سیستم های غیر خطی، همچنین دقت بالا و مقاوم بودن این روش در برابر اغتشاش و تغییرات پارامترها از کنترل کننده مود لغزشی کسری جهت تنظیم سطح گلوکز خون استفاده شده است. در فصل سوم و چهارم به طور مفصل نحوه طراحی این کنترل کننده بیان می شود.

۲-۳- جمع بندی

در این فصل در ابتدا به بیان تعاریف و مفاهیم مهم موجود در حسابان کسری پرداخته شد. سپس انواع کنترل کننده های مرتبه کسری و روش های تقریب استفاده شده در پیاده سازی آنها مطرح گردید. به طور خلاصه می توان گفت استفاده از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری در علوم مهندسی از جمله طراحی کنترل کننده ها با توجه به انتخاب وسیعی که در اختیار طراح قرار می دهد امکان بهبود عملکرد مطلوب سیستم را نسبت به حالت صحیح فراهم کرده است.

فصل سوم

کنترل مودلغزشی

۳-۱- مقدمه

روش کنترل مود لغزشی به دلیل دقت بالا، مقاوم بودن نسبت به تغییرات پارامترها و اغتشاشات داخلی و خارجی همچنین قابلیت به کارگیری آن در سیستم‌های غیرخطی و چند متغیره در دهه‌های گذشته بسیار مورد توجه قرار گرفته است. با این وجود مساله وزوز^{۳۰} و زمان همگرایی بی‌نهایت حالت‌ها به مقدار مطلوب به عنوان معایب روش مود لغزشی کلاسیک مطرح می‌باشد. انواع روش‌های مود لغزشی مرتبه بالا^{۳۱}، مود لغزشی ترمینال، مود لغزشی دینامیک با حفظ مزیت‌های اصلی روش مود لغزشی کلاسیک از جمله عملکرد مقاوم در برابر نامعینی و اغتشاش، منجر به حذف پدیده لرزش و کاهش زمان ردیابی سیستم می‌شوند [۳۵]. در این فصل برخی از مفاهیم مورد نیاز جهت طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی و انواع روش‌های مود لغزشی، همراه با نتایج شبیه‌سازی به منظور آشنایی بیشتر با کنترل‌کننده‌های مود لغزشی صحیح و مقایسه عملکرد آن‌ها با کنترل‌کننده‌های مود لغزشی مرتبه کسری طراحی شده در فصل چهارم، آورده شده است

۳-۲- سطح لغزش^{۳۲}

در نظریه مود لغزشی، سطح لغزش بر اساس خطای ردیابی مطابق با رابطه (۳-۱) به گونه‌ای انتخاب می‌شود که حالت‌های سیستم بر روی آن به سمت مبدا همگرا شوند. هریک از حالت‌ها پس از شروع از یک مقدار اولیه توسط سطح لغزش جذب شده و به سمت مبدا می‌روند [۳۵].

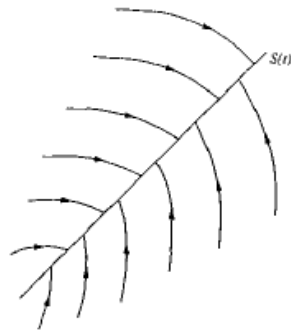
$$s(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e \quad (۳-۱)$$

در رابطه (۳-۱)، $s(x, t)$ سطح لغزش، e خطای ردیابی (تفاضل حالت سیستم از مقدار مطلوب) و λ ثابت مثبت طراحی است. سطح لغزش در شکل ۳-۱ نشان داده شده است.

^{۳۰} Chattering

^{۳۱} Higher order Sliding mod

^{۳۲} Sliding surface



شکل ۳-۱ سطح لغزش [۳۵]

۳-۳- پدیده لرزش

تحریک دینامیک‌های مدل نشده سیستم در فرکانس‌های بالا که به هنگام طراحی نادیده گرفته شده است، وجود تابع ناپیوسته علامت در ورودی کنترلی و محدود بودن فرکانس کلیدزنی منجر به نوسانات با دامنه کم در اطراف سطح لغزش می‌شود که به آن وزوز یا لرزش می‌گویند. این پدیده با ایجاد نوسانات ناخواسته در سیگنال‌های کنترلی منجر به ناپایداری سیستم شده، رفتار سیستم را از حالت ایده‌آل خارج می‌کند و در نهایت موجب عملکرد نامطلوب سیستم می‌شود. پدیده لرزش در شکل ۳-۲ نشان داده شده است [۳۶،۳۷].



شکل ۳-۲ پدیده لرزش

۳-۳-۱- کاهش پدیده لرزش

روش‌های متفاوتی جهت کاهش یا حذف لرزش در ورودی کنترلی وجود دارد. به برخی از این روش‌ها در ادامه اشاره می‌شود.

۱- روش لایه مرزی: با در نظر گرفتن لایه‌ای مرزی در اطراف سطح لغزش و همگرایی حالت‌های سیستم به آن پدیده لرزش حذف می‌شود. این روش موجب کاهش دقت سیستم می‌شود [۳۸،۳۹].

۲- جایگزین کردن توابع تانژانت هیپربولیک، سیگموئید^{۳۳} و اشباع به جای تابع علامت در ورودی کنترلی.

۳- استفاده از کنترل‌کننده‌های مود لغزشی مرتبه بالا [۴۰،۴۱].

۳-۴- طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی [۳۴]

طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی شامل دو مرحله است:

۱- انتخاب سطح لغزش

۲- طراحی ورودی کنترلی که حالت‌های سیستم را به سمت سطح لغزش حرکت داده و همگرایی و پایداری آن را تضمین کند.

سیستم تک ورودی- تک خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}^{(n)}(t) = f(x, t) + b(x, t)u(t) + d(t) \quad , \quad |d(t)| < D \quad (۲-۳)$$

که در آن $x(t)$ بردار متغیرهای حالت، $u(t)$ ورودی کنترلی، f و b توابعی از متغیرهای حالت و $d(t)$ اغتشاش کران‌دار وارد شده به سیستم است. مسأله‌ی کنترلی، طراحی $u(t)$ به گونه‌ای است که حالت $x(t)$ مقدار مطلوب $x_d(t)$ را تعقیب کند و به عبارتی خطای ردیابی در رابطه (۳-۳) صفر شود.

$$e(t) = x(t) - x_d(t) \quad (۳-۳)$$

^{۳۳} Sigmoid function

با در نظر گرفتن رابطه (۳-۲) پس از یکبار مشتق‌گیری از سطح لغزش تعریف شده در رابطه (۳-۱) ورودی کنترلی ظاهر می‌شود. در این شرایط با صفر قرار دادن مشتق سطح لغزش قانون کنترل معادل به دست می‌آید. به دلیل وجود نامعینی در سیستم، یک جمله ناپیوسته تحت عنوان قانون کنترل سویچینگ^{۳۴} جهت تضمین همگرایی به قانون کنترل معادل اضافه شده و ورودی کنترلی نهایی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u(t) = u_{eq}(t) - k \operatorname{sign}(s) \quad (۳-۴)$$

که در آن تابع علامت به صورت زیر است.

$$\operatorname{sign}(s) = \begin{cases} s > 0 & 1 \\ s = 0 & 0 \\ s < 0 & -1 \end{cases} \quad (۳-۵)$$

با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف:

$$v(t) = \frac{1}{2} s^2(t) \quad (۳-۶)$$

شرط پایداری سیستم، معادل منفی معین بودن مشتق تابع منتخب لیاپانوف می‌باشد.

$$\dot{v}(t) = s\dot{s} \leq -\eta|s| \quad (۳-۷)$$

که در آن η عددی مثبت است. همچنین زمان همگرایی حالت‌ها به مقدار مطلوب بر اساس شرط پایداری زمان محدود که در رابطه (۳-۷) بیان شده به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\frac{s}{|s|} ds \leq -\eta dt \quad (۳-۸)$$

$$\begin{cases} s > 0 & \int_{s_0}^0 1 ds \leq \int_0^{t_r} -\eta dt & t_r \leq \frac{s_0}{\eta} \\ s < 0 & \int_{s_0}^0 -1 ds \leq \int_0^{t_r} -\eta dt & t_r \leq \frac{-s_0}{\eta} \end{cases} \quad (۳-۹)$$

^{۳۴} Switching control law

بنابراین t_r که مدت زمان رسیدن حالت‌ها از خارج سطح به سطح لغزش صفر را نشان می‌دهد مطابق رابطه (۱۰-۳) بدست می‌آید.

$$t_{reach} \leq \frac{|s(0)|}{\eta} \quad (۱۰-۳)$$

۳-۵- مود لغزشی دینامیک^{۲۵}

روش مود لغزشی دینامیک با افزایش دینامیک‌های سیستم منجر به بهبود عملکرد و تضمین پایداری می‌شود. سطح لغزش تعریف شده در روش مود لغزشی دینامیک بر خلاف روش کلاسیک که تنها به حالت‌های سیستم بستگی دارد تابعی از متغیرهای حالت و ورودی است و به همین دلیل آن را دینامیک می‌گویند [۴۲].

با تعریف پارامتر ρ به عنوان درجه نسبی سطح لغزش نسبت به ورودی کنترلی (با ρ بار مشتق‌گیری از سطح لغزش $u(t)$ ظاهرشود) و r مرتبه‌ی کنترل‌کننده مود لغزشی ($s = s^* = \dots = s^{(r-1)} = 0$) دو حالت مختلف جهت تعریف سطح لغزش مطرح می‌شود [۴۳].

الف) اگر $\rho = r$

با در نظر گرفتن شکل استاندارد معادلات بر اساس متغیرهای لغزش به صورت رابطه (۱۱-۳):

$$\begin{aligned} s_1^* &= s_2 \\ s_2^* &= s_3 \\ &\vdots \\ s_r^* &= f(s) + g(s)u(t) \end{aligned} \quad (۱۱-۳)$$

سطح لغزش به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$s^{(r)} = f(s) + g(s)u \quad (۱۲-۳)$$

در روابط بالا f و g توابعی معلوم از حالت‌ها هستند.

^{۲۵} Dynamic Sliding Mod

ب) اگر $r > \rho$

فرم فضای حالت سیستم بر اساس متغیرهای لغزش بدین شکل تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} s_1^{\bullet} &= s_2 \\ s_2^{\bullet} &= s_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ s_r^{\bullet} &= f(s, \hat{u}) + g(s, \hat{u})v \end{aligned} \quad (13-3)$$

که در آن $\hat{u} = [u, u^{\bullet}, \dots, u^{(r-\rho-1)}]$ است.

طبق رابطه (13-3) معادله دیفرانسیل سطح لغزش در رابطه (14-3) آورده شده است.

$$\begin{aligned} s^{(r)} &= f + gv \\ u^{(r-\rho)} &= v \end{aligned} \quad (14-3)$$

که در آن v به عنوان ورودی کنترلی مجازی منجر به افزایش دینامیک سیستم می‌شود. از مزیت‌های این روش استفاده از انتگرال در بدست آوردن ورودی کنترلی می‌باشد. این امر به طور چشمگیری منجر به حذف لرزش در سیگنال کنترلی می‌شود.

۳-۶- مود لغزشی نهایی^{۳۶}

ایده‌ی کنترل‌کننده مود لغزشی نهایی بر اساس طراحی سطح لغزشی غیرخطی، که همگرایی حالت‌ها در زمان محدود را تضمین می‌کند بنا نهاده شده است. در مود لغزشی نهایی بر خلاف مود لغزشی کلاسیک زمان همگرایی حالت‌ها به مقدار مطلوب محدود می‌باشد و سطح لغزش تعریف شده در این روش غیرخطی است [۴۲]. مود لغزشی نهایی انواع مختلفی دارد که در ادامه به معرفی برخی از مهم‌ترین آنها می‌پردازیم.

^{۳۶} Terminal Sliding Mod Control

۳-۶-۱- مود لغزشی نهایی نرمال^{۳۷}

سیستم مرتبه دوم رابطه (۳-۱۵) را در نظر بگیرید [۴۲].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u + d(t), \quad |d(t)| < L \end{aligned} \quad (۳-۱۵)$$

در رابطه بالا x_1 و x_2 متغیرهای حالت سیستم، $f(x)$ و $g(x)$ توابع غیرخطی معلوم و $|d(t)| < L$ اغتشاش کراندار وارد شده به سیستم است.

در این روش سطح لغزش به صورت رابطه (۳-۱۶) تعریف می‌شود:

$$s = x_2 + \beta x_1^{q/p} \quad (۳-۱۶)$$

که در آن $\beta > 0$ و p, q اعداد مثبت فرد با شرط $(p > q)$ است. بر اساس نظریه مود لغزشی با صفر قرار دادن مشتق سطح لغزش که در رابطه (۳-۱۶) بیان شده و جایگذاری رابطه (۳-۱۵) در آن، ورودی کنترلی به شکل زیر طراحی می‌شود.

$$\dot{s} = \dot{x}_2 + \beta \frac{q}{p} x_1^{\frac{q}{p}-1} \dot{x}_1 = 0 \quad (۳-۱۷)$$

$$u = -g^{-1}(x) \left(f(x) + \beta \frac{q}{p} x_1^{(q/p)-1} x_2 + (L + \eta) \text{sgn}(s) \right) \quad (۳-۱۸)$$

که در آن $\eta > 0$ ثابت طراحی است. با توجه به اینکه در روش مود لغزشی نهایی نرمال $p > q$ است $q/p - 1$ در ورودی کنترلی عددی منفی می‌شود. چنانچه $x_1 = 0$ و $x_2 \neq 0$ باشد مساله منفرد بودن^{۳۸} در ورودی کنترلی پیش می‌آید که ممکن است منجر به ناپایداری سیستم شود. جهت بررسی پایداری سیستم با ورودی کنترلی طراحی شده تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (۳-۱۹)$$

^{۳۷} Normal TSMC

^{۳۸} Singular problem

$$V^{\bullet} = ss^{\bullet} = s(x_2^{\bullet} + \beta \frac{q}{p} x_1^{\frac{q-1}{p}} x_1^{\bullet}) \quad (20-3)$$

$$= s(f(x) + g(x)u + d(t) + \beta \frac{q}{p} x_1^{\frac{q-1}{p}} x_1^{\bullet})$$

با جایگذاری $u(t)$ طراحی شده در رابطه (۲۰-۳) داریم:

$$s(f(x) - f(x) - \beta \frac{q}{p} x_1^{(q/p)-1} x_2 - (L + \eta) \operatorname{sgn}(s) + d(t) + \beta \frac{q}{p} x_1^{\frac{q-1}{p}} x_1^{\bullet}) \quad (21-3)$$

$$= s(-(L + \eta) \operatorname{sgn}(s) + d(t))$$

$$ss^{\bullet} = sd(x, t) - (L + \eta)|s| < -\eta|s| \quad (22-3)$$

در نتیجه ورودی کنترلی طراحی شده پایداری را تضمین می‌کند. زمان رسیدن از خارج سطح به سطح لغزش که آن را با t_{reach} نشان می‌دهند در مود لغزشی نهایی نیز مانند مود لغزشی کلاسیک که پیش‌تر به آن پرداخته شد محاسبه می‌شود. اما وقتی روی سطح لغزش قرار داریم مدت زمان رسیدن به مبدا با فرض اینکه مبدا مختصات نقطه مطلوب ما است بر خلاف مود لغزشی کلاسیک بی‌نهایت نیست و مطابق روابط زیر محاسبه می‌شود [۴۴]. در واقع t_s بیان‌گر زمان رسیدن $x_1(t_r) \neq 0$ به $x_1(t_r + t_s) = 0$ است.

$$s = x_2 + \beta x_1^{q/p} = 0 \quad (23-3)$$

با گرفتن انتگرال از دو طرف معادله بالا خواهیم داشت:

$$\int_{x_1(t_r)}^0 x_1^{-q/p} dx_1 = \int_{t_r}^{t_r+t_s} -\beta dt$$

$$\frac{-p}{p-q} x_1^{1-(q/p)}(t_r) = -\beta t_s \quad (24-3)$$

$$t_s = \frac{p}{\beta(p-q)} |x_1(t_r)|^{1-(q/p)}$$

۳-۶-۲- مود لغزشی نهایی غیرمنفرد^{۳۹}

مساله منفرد بودن که در مود لغزشی نهایی نرمال مطرح می‌باشد با تغییر سطح لغزش در این روش برطرف می‌شود. با انتخاب سطح لغزش به شکل زیر [۴۵]:

$$s = x_1 + \frac{1}{\beta} x_2^{p/q} \quad (۳-۲۵)$$

و با در نظر گرفتن شرایط هر یک از پارامترها مطابق بخش ۲-۶-۱، ورودی کنترلی طبق رابطه (۳-۲۶) بدست می‌آید.

$$u = -g^{-1}(x)(f(x) + \beta \frac{q}{p} x_2^{2-p/q} + (\eta + L) \text{sgn}(s)) \quad (۳-۲۶)$$

که در آن $k > 0$ و $1 < \frac{p}{q} < 2$ است. روابط مورد نیاز جهت بررسی پایداری سیستم در ادامه بیان شده است.

$$\begin{aligned} s \cdot &= x_1 \cdot + \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} x_2 \cdot = x_2 + \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} (f(x) + g(x)u + d(t)) \\ &= x_2 + \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} (f(x) - f(x) - \beta \frac{q}{p} x_2^{2-p/q} - (\eta + L) \text{sgn}(s) + d(t)) \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} (-(\eta + L) \text{sgn}(s) + d(t)) \end{aligned} \quad (۳-۲۷)$$

با در نظر گرفتن اینکه $1 < \frac{p}{q} < 2$ بنابراین $x_2^{p/q-1} > 0$ است.

$$\begin{aligned} ss \cdot &= \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} (-(\eta + L)|s| + sd(t)) \\ &\leq \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} (-\eta|s|) = -\eta^* |s| \end{aligned} \quad (۳-۲۸)$$

^{۳۹} Nonsingular TSMC

۳-۶-۳- مود لغزشی نهایی سریع^{۴۰}

سرعت همگرایی هنگامی که حالت‌های اولیه از نقطه تعادل دور هستند با دو روش مود لغزشی نهایی

نرمال و مود لغزشی نهایی غیرمنفرد پایین است. با تعریف سطح لغزش به شکل زیر [۴۶]:

$$s_1 = \dot{s}_0 + \alpha_0 s_0 + \beta_0 s_0^{p_0/q_0} \quad s_0 = x_1 \quad (29-3)$$

که در آن $\alpha_0, \beta_0, \gamma, \phi > 0$ پارامترهای طراحی و q_0, p_0 اعداد مثبت فرد ($q_0 < p_0$) است. ورودی

کنترلی طراحی شده در رابطه (۳۰-۳) ضمن افزایش سرعت همگرایی، مانع از بروز منفرد شدن سیستم

نیز می‌شود.

$$u(t) = -\frac{1}{g(x)} (f(x) + \alpha_0 \dot{s}_0 + \beta_0 \frac{d}{dt} s_0^{q_0/p_0} + \phi s_1 + \gamma s_1^{q_0/p_0}) \quad (30-3)$$

زمان t_s به صورت زیر محاسبه می‌شود [۴۶].

$$t_s = \frac{p_0}{\alpha(p_0 - q_0)} \ln \left(\frac{\alpha_0 x(0)^{(p_0 - q_0)/p_0} + \beta_0}{\beta_0} \right) \quad (31-3)$$

با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف رابطه (۳۲-۳) پایداری سیستم اثبات می‌شود [۴۲].

$$v = \frac{1}{2} s_1^2 \quad (32-3)$$

$$\begin{aligned} v^* &= s_1 \dot{s}_1 = s_1 (\ddot{s}_0 + \alpha_0 \dot{s}_0 + \beta_0 s_0^{p_0/q_0 - 1} \dot{s}_0) \\ &= s_1 (f(x) - \dot{f}(x) - \alpha_0 \dot{s}_0 - \beta_0 \frac{d}{dt} s_0^{q_0/p_0} - \phi s_1 - \gamma s_1^{q/p} + \beta_0 \frac{d}{dt} s_0^{q_0/p_0} + d(t)) \\ &= s_1 (-\phi s_1 - \gamma s_1^{q_0/p_0} + d(t)) \end{aligned} \quad (33-3)$$

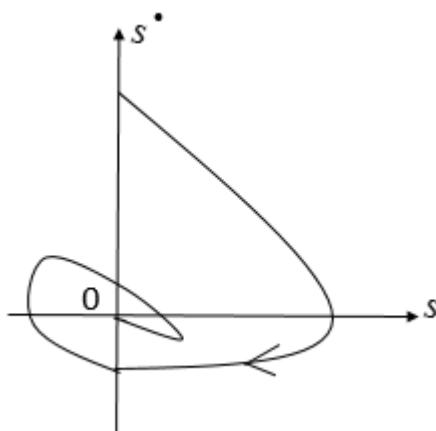
با فرض اینکه $\gamma \geq \left| \frac{1}{s_1^{q/p}} \right| L$ باشد.

$$v^* = -\phi s_1^2 - \gamma s_1^{\frac{q_0 + p_0}{p_0}} + s_1 d(t) \leq 0 \quad (34-3)$$

^{۴۰} Fast TSMC

۳-۷- مود لغزشی مرتبه بالا

یکی از روش‌های پرکاربرد جهت حذف پدیده نامطلوب لرزش بدون کاهش دقت سیستم استفاده از کنترل‌کننده‌های مود لغزشی مرتبه بالا است. جهت طراحی مود لغزشی مرتبه r به $r-1$ امین مشتق سطح لغزش نیاز است. مود لغزشی مرتبه دوم ساده‌ترین کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه بالا است. در این روش سطح لغزش و مشتق مرتبه اول آن صفر می‌شود [۴۷]. الگوریتم‌های متفاوتی جهت طراحی مود لغزشی مرتبه دوم وجود دارد. الگوریتم فراپیچشی یا سوپرتویستینگ^{۴۱} به دلیل اینکه فقط از سطح لغزش در ورودی کنترلی استفاده می‌کند یکی از رایج‌ترین الگوریتم‌های مورد استفاده در طراحی قانون کنترل در روش مود لغزشی مرتبه دوم به شمار می‌رود. مطابق شکل ۳-۳ در این روش، مسیر در صفحه فاز $s-s^*$ به طور چرخشی در اطراف مبدا حرکت می‌کند و در زمان محدود به آن همگرا می‌شود. در مرجع [۴۷] و [۴۸] جزئیات اصول طراحی این الگوریتم بیان شده است.



شکل ۳-۳ مسیر الگوریتم فراپیچشی در صفحه فاز

^{۴۱} Super-Twisting

۳-۸- شبیه‌سازی

جهت تعیین پارامترهای مدل یک سیستم فیزیولوژی^{۴۲} مانند بدن انسان از پارامترهای حیاتی بیمار در شرایط نامی استفاده می‌شود. بدیهی است که پارامترهای حیاتی افراد مختلف متفاوت است که این امر منجر به تغییرات پارامترهای مدل می‌شود. یکی از دلایل اصلی انتخاب روش مود لغزشی در این پایان‌نامه پایداری کنترل‌کننده طراحی شده در مقابل تغییرات پارامترهای مدل می‌باشد. در این بخش بر اساس معادلات مدل مینیمال برگمان برای توصیف سیستم که در بخش ۱-۴-۴ هریک از پارامترهای آن معرفی شد، نمودار سطح گلوکز خون برای فرد سالم و نتایج حاصل از اعمال انواع کنترل‌کننده مود لغزشی صحیح آورده شده است. لازم به ذکر است که در شبیه‌سازی‌ها از دینامیک پمپ صرف نظر شده است.

۳-۹- رفتار فرد سالم

براساس رابطه (۱-۴) معادلات مدل برگمان که برای توصیف سیستم از آن استفاده می‌شود به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\frac{dG(t)}{dt} &= -p_1[G(t) - G_b] - X(t)G(t) + D(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} &= -P_2X(t) + p_3[I(t) - I_b] \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -n[I(t) - I_b] + \gamma[G(t) - h]^+t + u(t)\end{aligned}\quad (3-35)$$

مدل در نظر گرفته شده برای اغتشاش در معادله (۳-۳۶) آورده شده است [۲].

$$D(t) = B e^{-At} \quad (3-36)$$

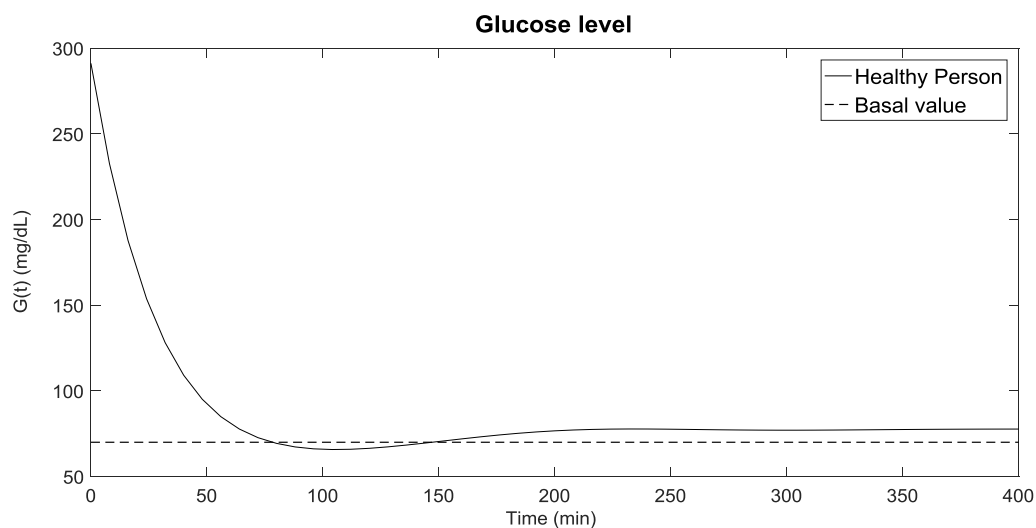
در این رابطه A و B اعداد ثابت مثبت است.

^{۴۲} Physiology

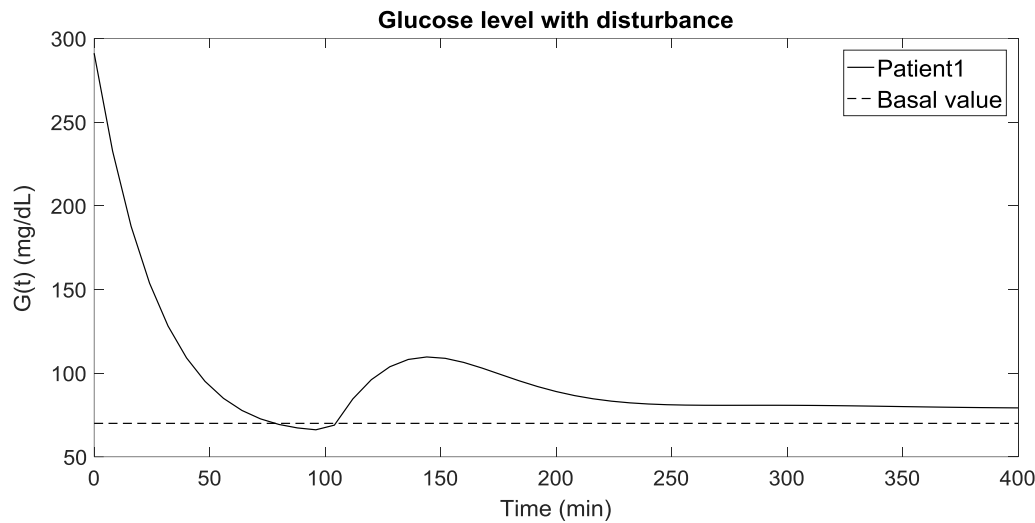
براساس داده‌های جدول ۳-۱ نمودار شکل ۳-۴ نشان می‌دهد سطح گلوکز خون فرد سالم بدون اعمال کنترل‌کننده و به طور طبیعی در محدوده نرمال قرار می‌گیرد. همچنین در شکل ۳-۵ نمودار سطح گلوکز خون پس از اعمال اغتشاش به سیستم بر اثر مصرف غذا در لحظه $t = 100 \text{ min}$ نشان داده شده است.

جدول ۳-۱ پارامترهای مدل برگمان در فرد سالم [۱]

P_1	۰,۰۳۱۷	γ	۰,۰۰۳۹
P_2	۰,۰۱۲۳	G_b	۷۰
P_3	۰,۰۰۰۰۰۴۹۲	I_b	۷
n	۰,۲۶۵۹	G_0	۲۹۱,۲
h	۷۹,۰۳۵۳	I_0	۳۶۴,۸
A	۰,۰۱	B	۰,۰۵



شکل ۳-۴ نمودار سطح گلوکز خون فرد سالم



شکل ۳-۵ نمودار سطح گلوکز خون در حضور اغتشاش

۳-۱۰- الگوریتم فراپیشی

در این بخش جهت طراحی کنترل کننده مود لغزشی مرتبه دوم، از الگوریتم سوپرتویستینگ استفاده شده است [۲]. به همین منظور در ابتدا خطای ردیابی به صورت اختلاف سطح غلظت گلوکز خون با حالت نرمال تعریف می شود.

$$e(t) = G(t) - G_b \quad (3-37)$$

با در نظر گرفتن سطح گلوکز خون به عنوان خروجی سیستم به شکل زیر:

$$y(t) = G(t) \quad (3-38)$$

پس از سه بار مشتق گیری از خروجی، ورودی کنترلی ظاهر می شود، بنابراین درجه نسبی سیستم ۳ است. بر همین اساس سطح لغزش مطابق با رابطه (۳-۱) به صورت زیر تعریف می شود.

$$s = e^{\bullet\bullet\bullet} + c_1 e^{\bullet} + c_2 e \quad (3-39)$$

که در آن c_1 و c_2 پارامترهای مثبت طراحی می باشند. براساس معادله دیفرانسیل مرتبه اول بیان شده در زیر:

$$s^{\bullet} + \alpha_1 |s|^{1/2} \text{sign}(s) + \beta_1 \int \text{sign}(s) d\tau = f(t) \quad (3-40)$$

اگر $\alpha_1 = 1,5L$ و $\beta_1 = 1,1L$ باشد (L ثابت مثبت)، ثابت می‌شود که جواب معادله و مشتق مرتبه اول آن در زمان محدود به صفر همگرا می‌شود. ورودی کنترلی $u(t)$ بر اساس الگوریتم فراپیچشی و حل معادله (۳-۴۰) به شکل زیر طراحی می‌شود [۴۷].

$$u = -\alpha_1 |s|^{1/2} \text{sign}(s) - \beta_1 \int \text{sign}(s) d\tau \quad (۳-۴۱)$$

با انتخاب مقادیر مناسب برای α_1 و β_1 که نحوه انتخاب آن‌ها در پیوست آورده شده است ورودی کنترلی طراحی شده منجر به پایداری سیستم و همگرایی حالت‌ها به مقدار مطلوب می‌شود.

۳-۱۰-۱- نتایج شبیه‌سازی الگوریتم فراپیچشی

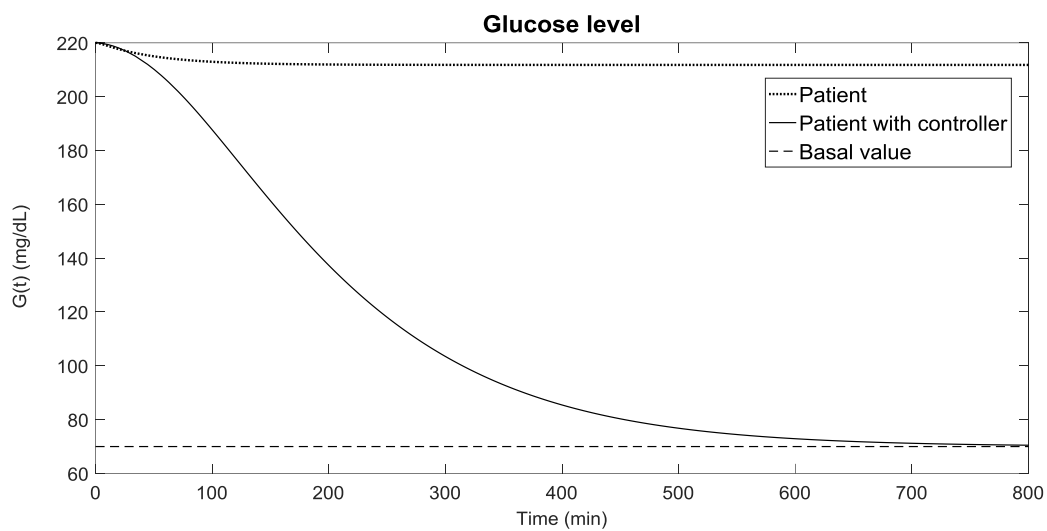
بر اساس داده‌های جدول ۳-۲ و ۳-۳ نتایج حاصل از اعمال کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه دوم نشان داده شده است.

جدول ۳-۲ پارامترهای بیمار [۱]

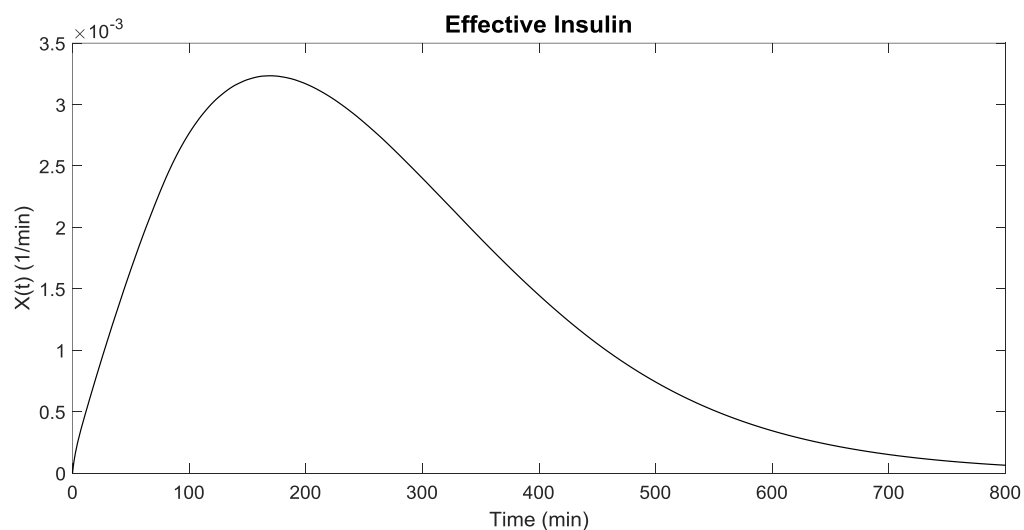
$P_1 = .$	$P_2 = ., 0.2$	$P_3 = ., 0.0000053$	$n = 0, 3$	$\gamma = .$
$G_b = 70$	$I_b = 7$	$G_0 = 220$	$h = 78$	$I_0 = 50$

جدول ۳-۳ پارامترهای الگوریتم فراپیچشی [۱]

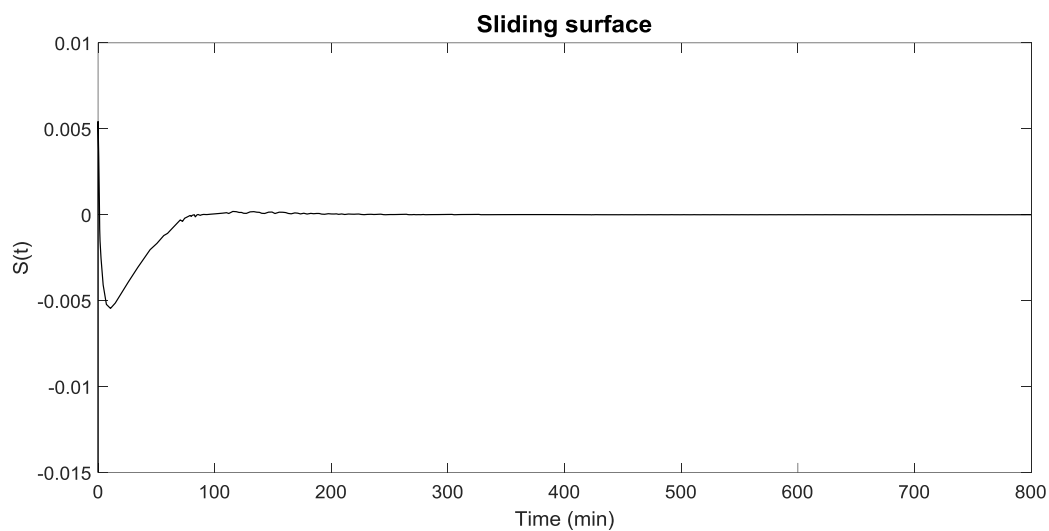
α_1	β_1	C_1	C_2
۵۰	۰.۰۵	۰, ۰.۲	۰, ۰.۰۰۱



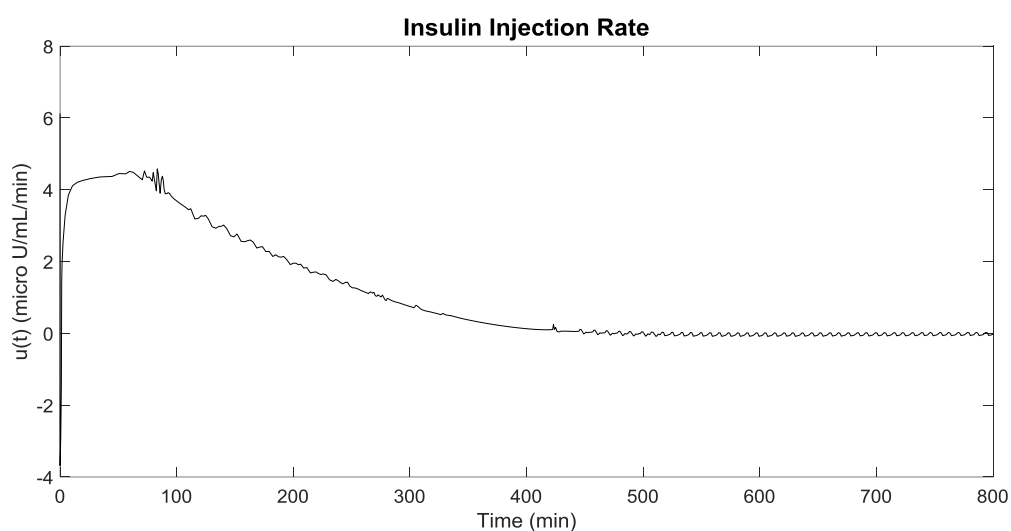
شکل ۳-۶ سطح گلوکز خون با الگوریتم فرایچه



شکل ۳-۷ تاثیر انسولین بر حذف قند خون با الگوریتم فرایچه



شکل ۳-۸ سطح لغزش در الگوریتم سوپرتویستینگ



شکل ۳-۹ آهنگ تزریق انسولین با الگوریتم فرایچه

نتایج نشان می‌دهد که کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه دوم در این سیستم قابلیت حذف چترینگ به طور کامل را ندارد. ضمن اینکه زمان رسیدن سطح قندخون به مقدار مجاز هم در این روش زیاد است.

۳-۱۱- روش مود لغزشی کلاسیک

در این بخش کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک برای سیستم طراحی شده است. بر اساس رابطه بیان شده در معادله (۳-۱) و با توجه به درجه نسبی سیستم در ابتدا سطح لغزش به صورت زیر تعریف می شود.

$$e(t) = G(t) - G_d \quad (۳-۴۲)$$

$$s = e'' + \lambda_1 e' + \lambda_2 e \quad (۳-۴۳)$$

که در آن λ_1 و λ_2 ثابت های مثبت طراحی می باشند. مطابق روند طراحی کنترل کننده مود لغزشی که در بخش ۳-۴ بیان شد با گرفتن مشتق از سطح لغزش و مساوی صفر قرار دادن آن داریم:

$$s' = e''' + \lambda_1 e'' + \lambda_2 e' = 0 \quad (۳-۴۴)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۴۲) در رابطه (۳-۴۴):

$$\Phi(G, X, I, t) - p_3 G(t) u(t) + \lambda_1 e'' + \lambda_2 e' = 0 \quad (۳-۴۵)$$

که در آن تابع Φ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \Phi = & -p_2 p_3 i_b G(t) - n p_3 i_b G(t) - p_2^2 G(t) X(t) - 3 p_3 i_b G(t) X(t) + \\ & p_2 p_3 G(t) I(t) + n p_3 G(t) I(t) - 3 p_2 G(t) X^2(t) + 3 p_3 G(t) X(t) I(t) - G(t) (X(t)^3) \end{aligned} \quad (۳-۴۶)$$

قانون کنترل معادل بدست می آید.

$$u_{eq}(t) = (p_3 G(t))^{-1} (\Phi + \lambda_1 e'' + \lambda_2 e') \quad (۳-۴۷)$$

قانون کنترل سویچینگ جهت تضمین همگرایی حالت ها در حضور نامعینی به رابطه (۳-۴۷) اضافه شده و ورودی کنترلی نهایی به صورت زیر تعریف می شود.

$$u(t) = (p_3 G(t))^{-1} (\Phi + \lambda_1 e'' + \lambda_2 e + k \tanh(s)) \quad (۳-۴۸)$$

همانطور که در بخش ۳-۳-۱ به آن اشاره شد، یکی از روش های از بین بردن چترینگ روش تقریب پیوسته است که در آن به جای تابع ناپیوسته علامت در قانون کنترل سویچینگ، توابع اشباع و تانژانت

هایپربولیک جایگزین می‌شوند. به همین منظور در رابطه (۴۸-۳) تابع تانژانت هایپربولیک به جای تابع علامت استفاده شده است.

اثبات پایداری:

اثبات پایداری سیستم با در نظر گرفتن تابع منتخب لیپانوف رابطه (۴۹-۳) به صورت زیر است.

$$V(t) = \frac{1}{2} s^2(t) \quad (49-3)$$

شرط پایداری بر اساس قضیه پایداری لیپانوف، معادل با منفی معین شدن مشتق تابع منتخب لیپانوف می‌باشد [۳۴]. بنابراین با گرفتن مشتق از تابع $V(t)$:

$$\dot{V}(t) = \dot{s}s = s(\ddot{s} + \lambda_1 \dot{s} + \lambda_2 s) \quad (50-3)$$

و جایگذاری رابطه (۴۵-۳) و (۴۸-۳) در رابطه (۵۰-۳) خواهیم داشت:

$$\dot{V} = s(\Phi - p_3 G(t)u(t) + \lambda_1 \dot{s} + \lambda_2 s) = s(-k \tanh(s)) \quad (51-3)$$

مطابق با لم ۱ که در زیر بیان شده است $\dot{V} \leq 0$ و سیستم پایدار لیپانوفی است.

لم ۱: عبارت زیر برای هر عدد اسکالر مثبت a برقرار است [۴۹].

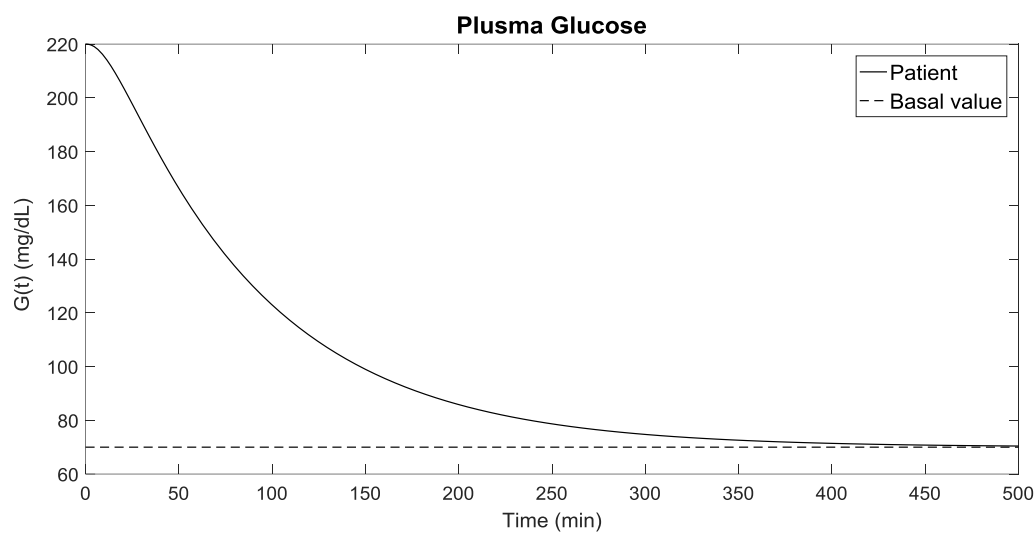
$$S(a \tanh(bs)) = |S(a \tanh(bs))| = \|S(a \tanh(bs))\| \geq 0 \quad (52-3)$$

۳-۱۱-۱- نتایج شبیه‌سازی کنترل‌کننده مود لغزشی کلاسیک پیشنهادی

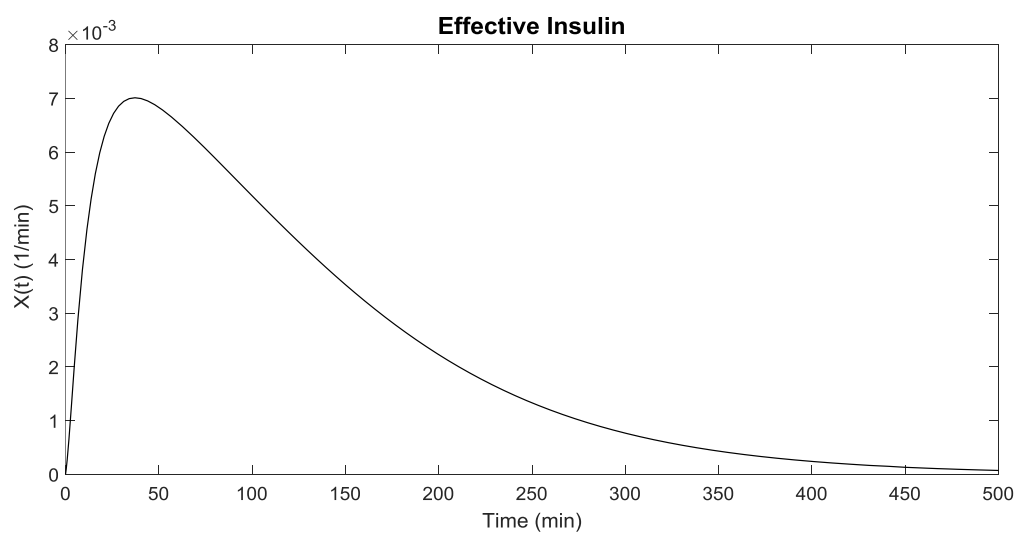
نتایج شبیه‌سازی برای کنترل‌کننده مود لغزشی طراحی شده در این بخش، مطابق با داده‌های جدول ۳-۲ برای پارامترهای مدل و جدول ۳-۴ برای پارامترهای کنترل‌کننده که براساس روش سعی و خطا به دست آمده، در زیر نشان داده شده است. کنترل‌کننده مود لغزشی طراحی شده زمان همگرایی سطح گلوکز خون به حد نرمال را نسبت به کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه دوم با الگوریتم فراپیشی کاهش داده و پدیده چترینگ را حذف می‌کند.

جدول ۳-۴ پارامترهای کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک

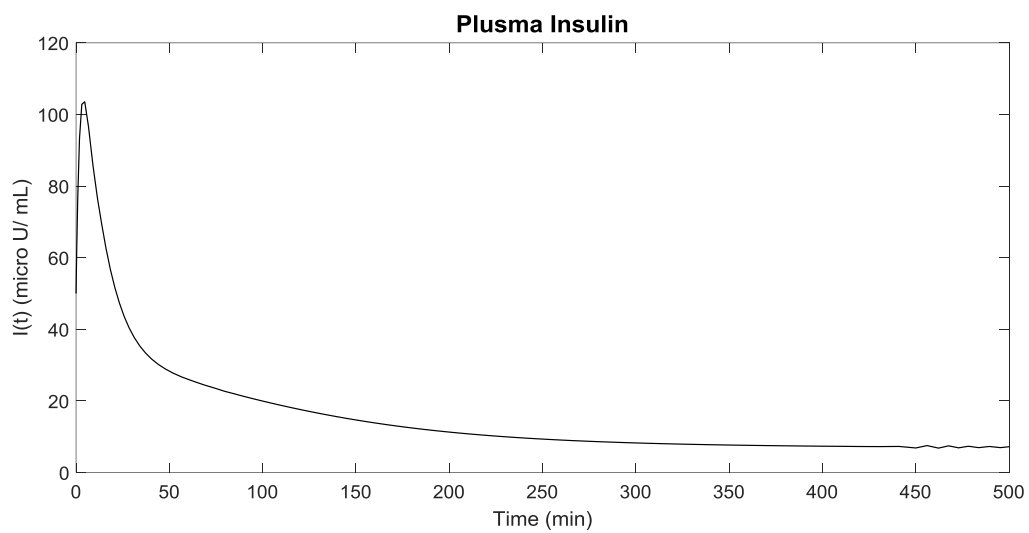
λ_1	λ_2	k
۱	۰,۰۲	۰,۰۸



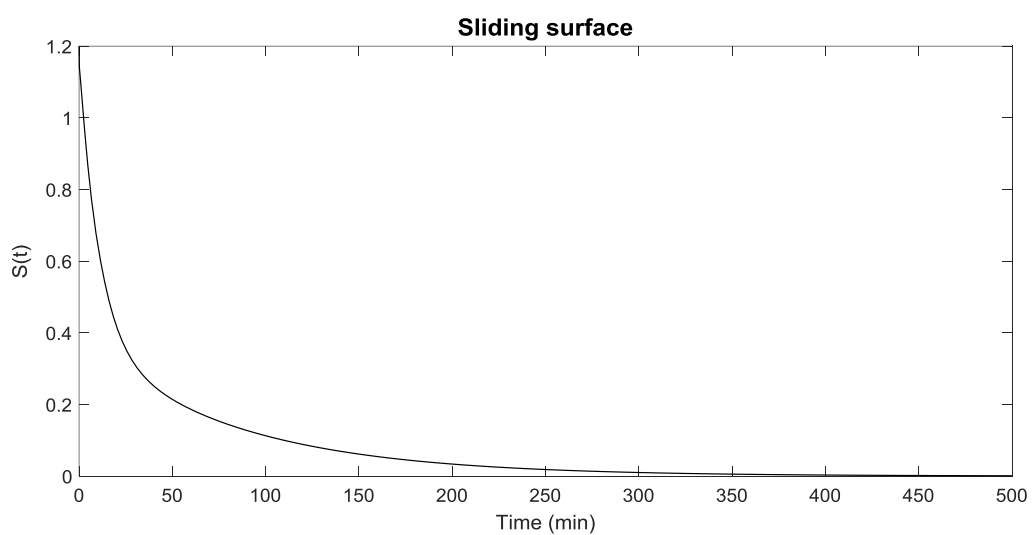
شکل ۳-۱۰ سطح گلوکز خون با کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک



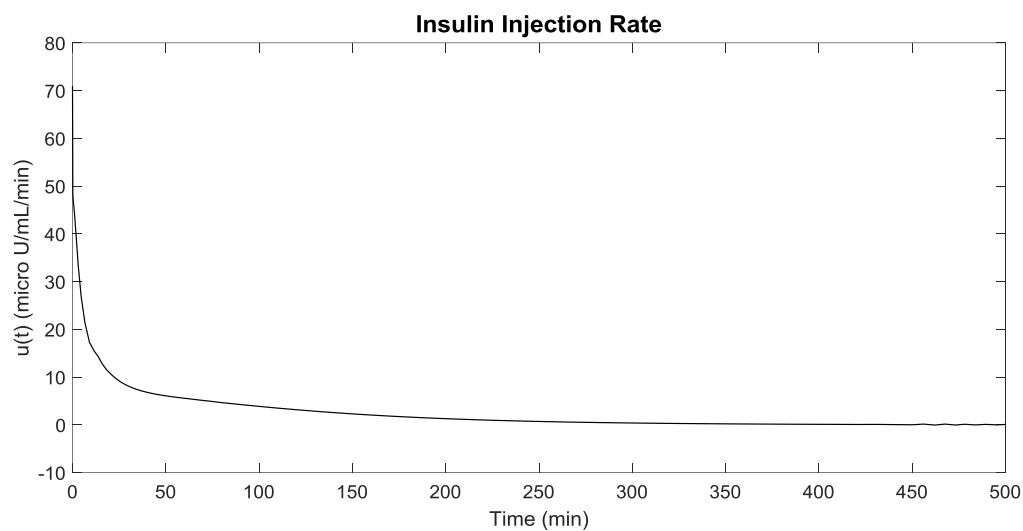
شکل ۳-۱۱ تاثیر انسولین بر حذف قند خون با کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک



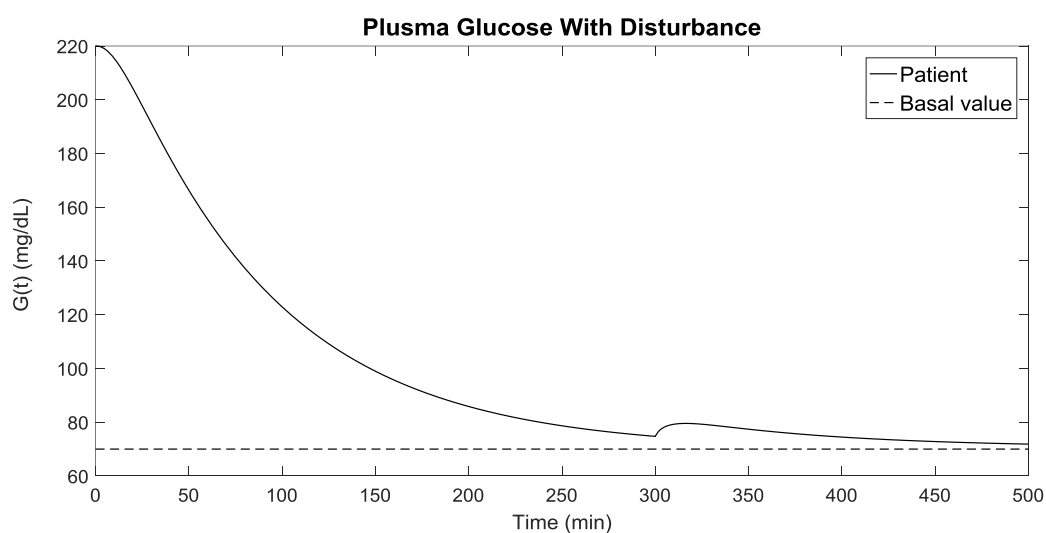
شکل ۳-۱۲ غلظت انسولین پلاسما با کنترل کننده مودلغزشی کلاسیک



شکل ۳-۱۳ سطح لغزش در روش مود لغزشی کلاسیک



شکل ۳-۱۴ آهنگ تزریق انسولین با کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک



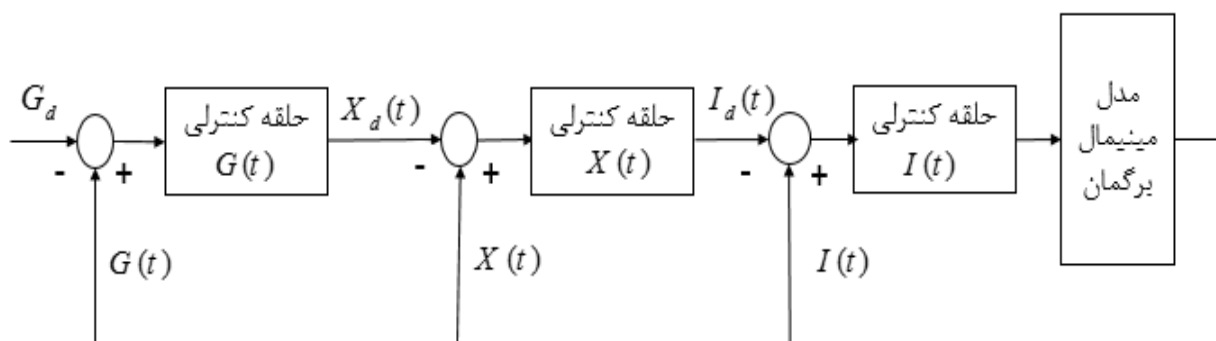
شکل ۳-۱۵ سطح گلوکز خون با کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک در حضور اغتشاش

با فرض وارد شدن اغتشاش به سیستم در لحظه $t = 300 \text{ min}$ ، نمودار سطح گلوکز خون در شکل ۳-۱۵

عملکرد مقاوم کنترل کننده طراحی شده را در برابر اغتشاش نشان می‌دهد.

۳-۱۲- روش گام به عقب^{۴۳}

روش گام به عقب، روشی بازگشتی است که در آن با انتخاب قانون کنترل مناسب بر اساس نظریه لیاپانوف برای هر یک از معادلات حالت به صورت جداگانه، حالت‌های سیستم پایدار می‌شوند. با تکرار این روند برای هریک از حالت‌ها، در انتها سیگنال ورودی نهایی کل سیستم را پایدار می‌کند. در واقع فرم معادلات در این روش به صورت فیدبکی است به این ترتیب که در هر دینامیک سیستم، متغیر حالت بعدی به عنوان ورودی کنترلی مجازی طراحی می‌شود. در هر مرحله با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب می‌توان پایداری آن مرحله را اثبات کرد. هنگامی که درجه نسبی سیستم کنترلی بالا می‌رود گرفتن مشتقات پی در پی از سیستم جهت ظاهرشدن ورودی کنترلی در روش مود لغزشی کلاسیک دشوار است ضمن اینکه منجر به پدیده لرزش نیز می‌شود. در این شرایط استفاده از الگوریتم گام به عقب به منظور طراحی کنترل‌کننده به صورت گام به گام نسبت به کنترل‌کننده مود لغزشی متعارف روند طراحی ساده‌تری دارد. به همین دلیل در این بخش به معرفی و طراحی کنترل‌کننده با روش فوق پرداخته شده است. مراحل طراحی کنترل‌کننده گام به عقب براساس مرجع [۵۰] به صورت زیر است.



شکل ۳-۱۶ طرح کلی روش گام به عقب

^{۴۳} Back Stepping

گام اول:

با در نظر گرفتن معادله حالت اول سیستم، متغیر حالت $X(t)$ به عنوان ورودی کنترلی مجازی جهت رساندن سطح گلوکز خون به مقدار مطلوب G_b طراحی می‌شود.

$$\dot{G}(t) = -p_1[G(t) - G_b] - X(t)G(t) + D(t) \quad (53-3)$$

$$s_1(t) = \lambda_1(G(t) - G_b) \quad (54-3)$$

با صفر قرار دادن مشتق سطح لغزش تعریف شده در رابطه (53-3) ورودی کنترلی معادل بدست می‌آید.

$$\dot{s}_1 = \dot{G}(t) = -p_1[G(t) - G_b] - X_{eq}(t)G(t) = 0 \quad (55-3)$$

$$X_{eq} = \frac{1}{G(t)}[-p_1[G(t) - G_b]] \quad (56-3)$$

جهت افزایش سرعت همگرایی به جای تابع $k_1 s_1 + k_2 \tanh(s_1)$ ، عبارت $k_1 s_1 + k_2 \tanh(s_1)$ به عنوان قانون کنترل سویچینگ به ورودی کنترلی اضافه شده و ورودی کنترلی نهایی به صورت زیر تعریف می‌شود [51].

$$X_d(t) = \frac{1}{G(t)}[-p_1(G(t) - G_b) + (k_1 s_1 + k_2 \tanh(s_1))] \quad (57-3)$$

با در نظر گرفتن تابع منتخب لیاپانوف زیر:

$$V(t) = \frac{1}{2} s_1^2 \quad (58-3)$$

اثبات پایداری گام اول به صورت زیر است.

$$\dot{V} = \dot{s}_1 s_1 = s_1(\lambda_1(\dot{G}(t) - \dot{G}_b)) = s_1(\lambda_1(-G(t)X_d(t))) \quad (59-3)$$

با جایگذاری رابطه (57-3) در (59-3) خواهیم داشت:

$$\dot{V} = s_1(\lambda_1(-k_1 s_1 - k_2 \tanh(s_1))) = -\lambda_1 k_1 s_1^2 - \lambda_1 K_1 s_1 \tanh(s_1) \quad (60-3)$$

مطابق با لم ۱ که در رابطه (52-3) بیان شد و با فرض اینکه $\lambda_1, k_1, K_1 > 0$ است، $\dot{V} \leq 0$ و پایداری اثبات می‌شود.

گام دوم :

با در نظر گرفتن معادله حالت دوم سیستم:

$$\dot{X}(t) = -p_2 X(t) + p_3 [I(t) - i_b] \quad (3-61)$$

مطابق مراحل بیان شده در گام اول، $I(t)$ به عنوان ورودی کنترلی مجازی جهت رساندن حالت $X(t)$ به مقدار مطلوب $X_d(t)$ طراحی می‌شود.

$$S_2(t) = \lambda_2 (X(t) - X_d(t)) \quad (3-62)$$

$$I_{eq}(t) = (p_3)^{-1} (p_2 X + p_3 I_b + \dot{X}_d) \quad (3-63)$$

$$I_d(t) = (p_3)^{-1} (p_2 X + p_3 i_b + \dot{X}_d - (k_2 s_2 + K_2 \tanh(s_2))) \quad (3-64)$$

با انتخاب تابع لیاپانوف زیر:

$$V(t) = \frac{1}{2} S_2^T S_2 \quad (3-65)$$

$$\dot{V}(t) = s_2 \dot{s}_2 = s_2 (\lambda_2 (-p_2 X + p_3 (I_d(t) - i_b) - \dot{X}_d(t))) \quad (3-66)$$

و جایگذاری رابطه (3-64) در (3-66) بدست می‌آید:

$$\dot{V}(t) = s_2 (\lambda_2 (-(k_2 s_2 + K_2 \tanh(s_2))) = -\lambda_2 k_2 s_2^2 - \lambda_2 K_2 s_2 \tanh(s_2) \quad (3-67)$$

مطابق با لم ۱ و با فرض اینکه $\lambda_2, k_2, K_2 > 0$ پایداری گام دوم اثبات می‌شود.

گام سوم:

در این مرحله $u(t)$ به عنوان ورودی کنترلی مجازی در معادله حالت سوم، جهت همگرایی حالت $I(t)$ به مقدار مطلوب $I_d(t)$ طراحی می‌شود و به عنوان ورودی کنترلی نهایی آهنگ تزریق انسولین را مشخص می‌کند.

$$\dot{I}(t) = -n[I(t) - I_b] + u(t) \quad (3-68)$$

$$S_3(t) = \lambda_3 (I(t) - I_d(t)) \quad (3-69)$$

$$u(t) = n(I(t) - i_b) + \dot{I}_d(t) - (k_3 s_3 + K_3 \tanh(s_3)) \quad (3-70)$$

تابع منتخب لیپانوف برای اثبات پایداری گام سوم به صورت زیر است:

$$V = \frac{1}{2} S_3 S_3^T \quad (71-3)$$

$$\dot{V}(t) = s_3 \dot{s}_3 = s_3 (\lambda_3 (-n(I(t) - i_b) + u(t) - I_d(t))) \quad (72-3)$$

با جایگذاری رابطه (70-3) در (72-3) داریم:

$$\dot{V} = s_3 (\lambda_3 (-k_3 s_3 + K_3 \tanh(s_3))) = -\lambda_3 k_3 s_3^2 - \lambda_3 K_3 s_3 \tanh(s_3) \quad (73-3)$$

با فرض اینکه $\lambda_3, k_3, K_3 > 0$ است پایداری گام سوم نیز اثبات می‌شود.

۳-۱۲-۱- نتایج شبیه‌سازی کنترل‌کننده مود لغزشی گام به عقب

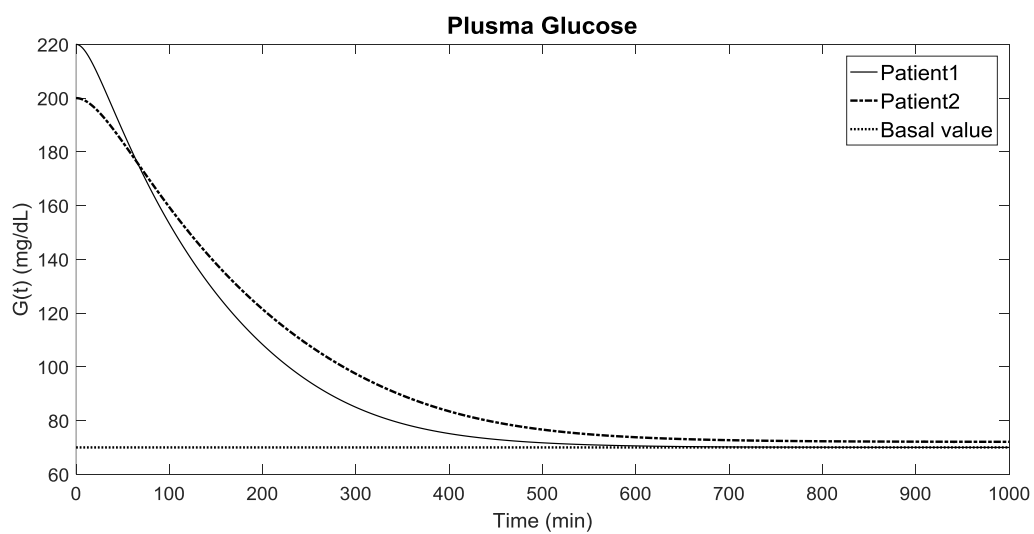
در این بخش نتایج حاصل از اعمال کنترل‌کننده گام به عقب، بر اساس پارامترهای جدول ۳-۵ و ۳-۶ برای دو بیمار مختلف، به منظور نشان دادن پایداری کنترل‌کننده طراحی شده در برابر تغییرات پارامترهای مدل، آورده شده است.

جدول ۳-۵ پارامترهای الگوریتم گام به عقب

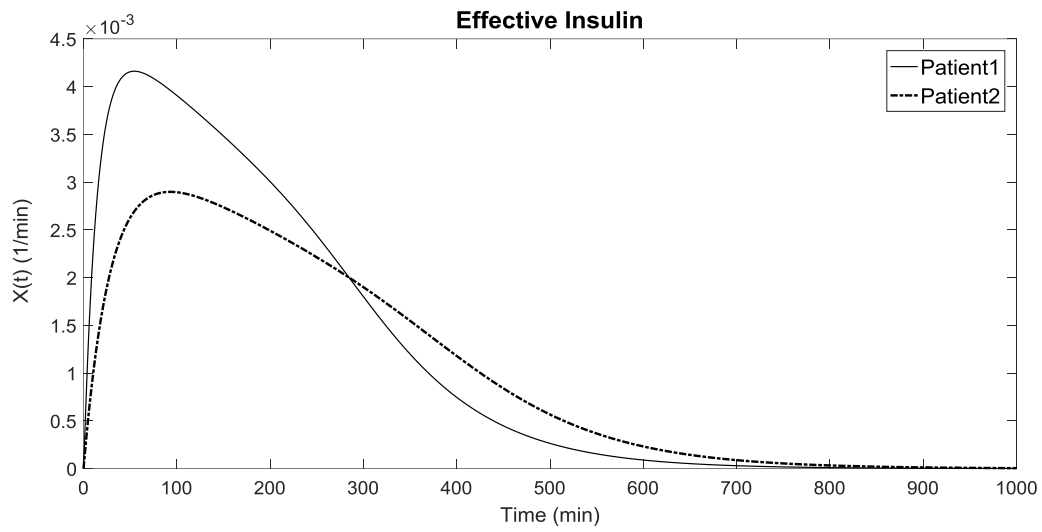
$\lambda_1 = 0.5$	$k_1 = 0.12$	$K_1 = 0.1$
$\lambda_2 = 0.5$	$k_2 = 0.5$	$K_2 = 0.9$
$\lambda_3 = 1$	$k_3 = 0.5$	$K_3 = 1$

جدول ۳-۶ پارامترهای بیمار [۲]

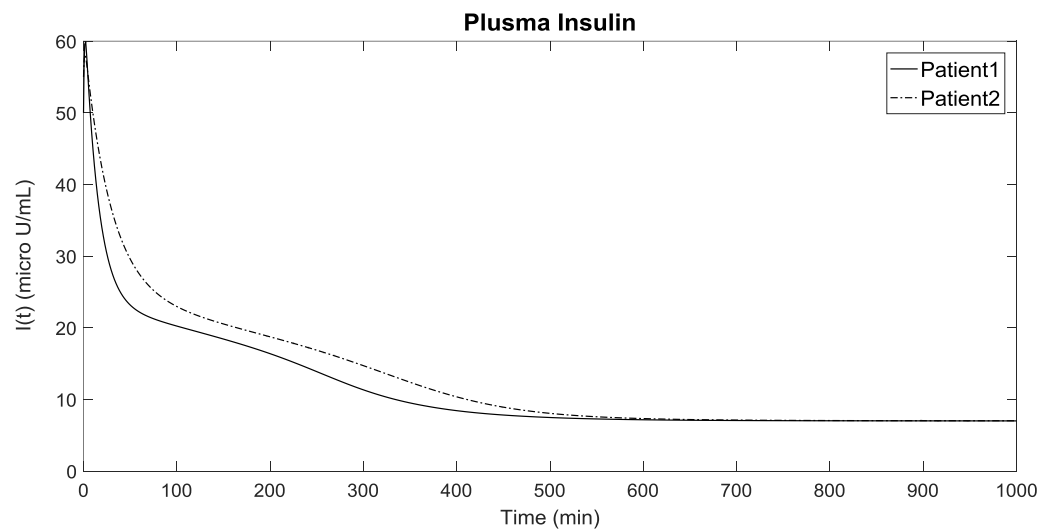
پارامترها	بیمار ۱	بیمار ۲
P_1	۰	۰
P_2	۰,۰۲	۰,۰۰۷۲
P_3	۰,۰۰۰۰۰۵۳	۰,۰۰۰۰۰۲۱۶
n	۰,۳	۰,۲۴۶۵
h	۷۸	۷۷,۵۷۸۳
γ	۰	۰
G_b	۷۰	۷۰
I_b	۷	۷
G_0	۲۲۰	۲۰۰
I_0	۵۰	۵۰



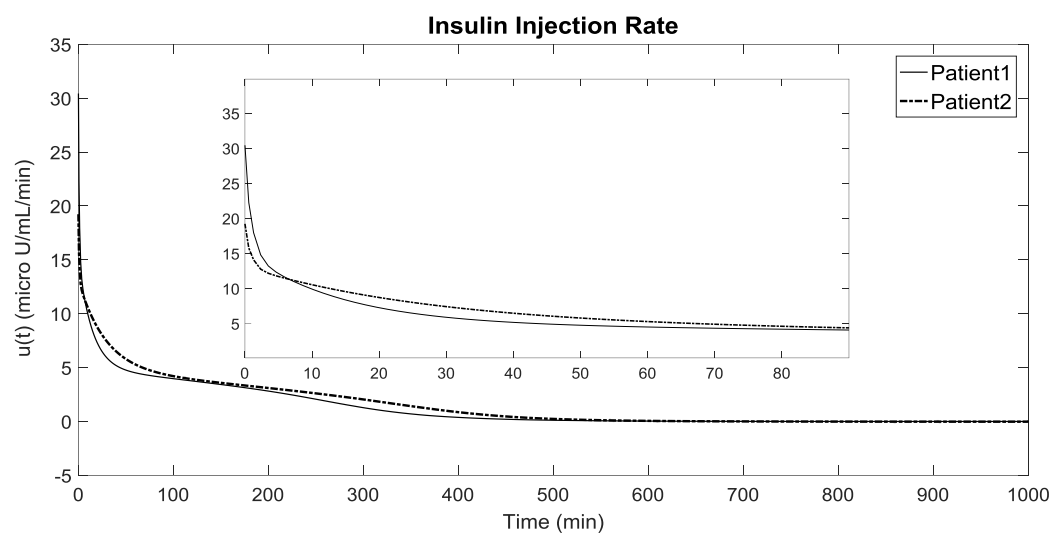
شکل ۳-۱۷ سطح گلوکز خون با الگوریتم گام به عقب



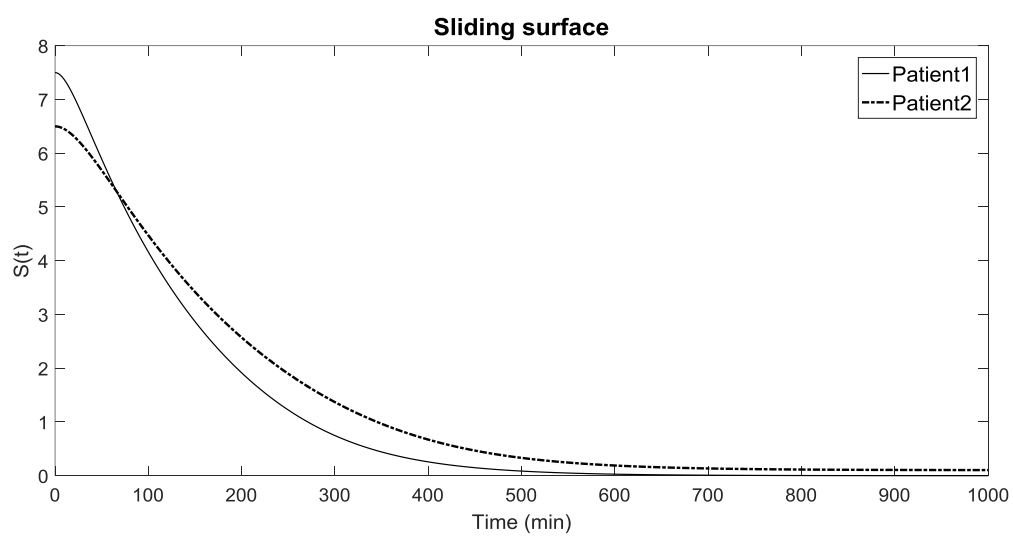
شکل ۳-۱۸ تاثیر انسولین بر حذف قند خون با الگوریتم گام به عقب



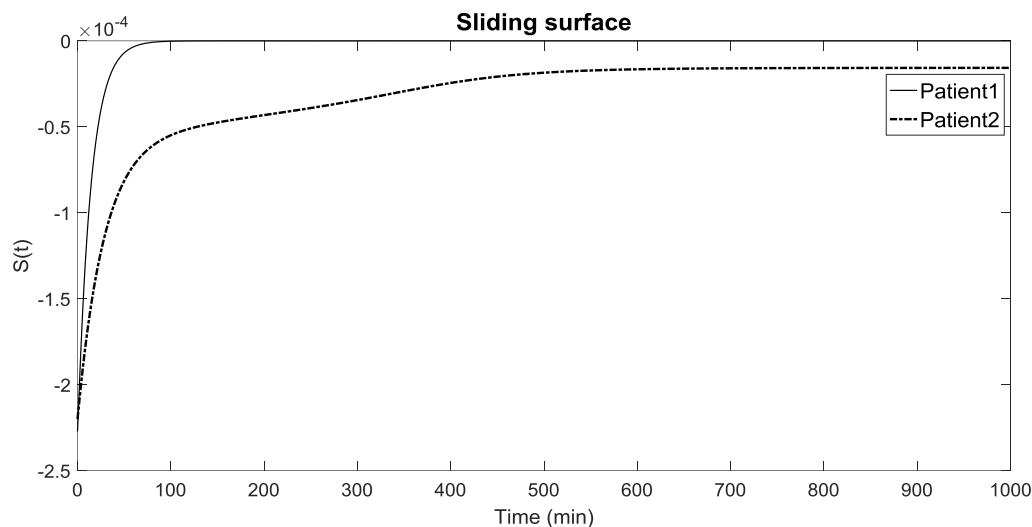
شکل ۳-۱۹ غلظت انسولین پلاسما با الگوریتم گام به عقب



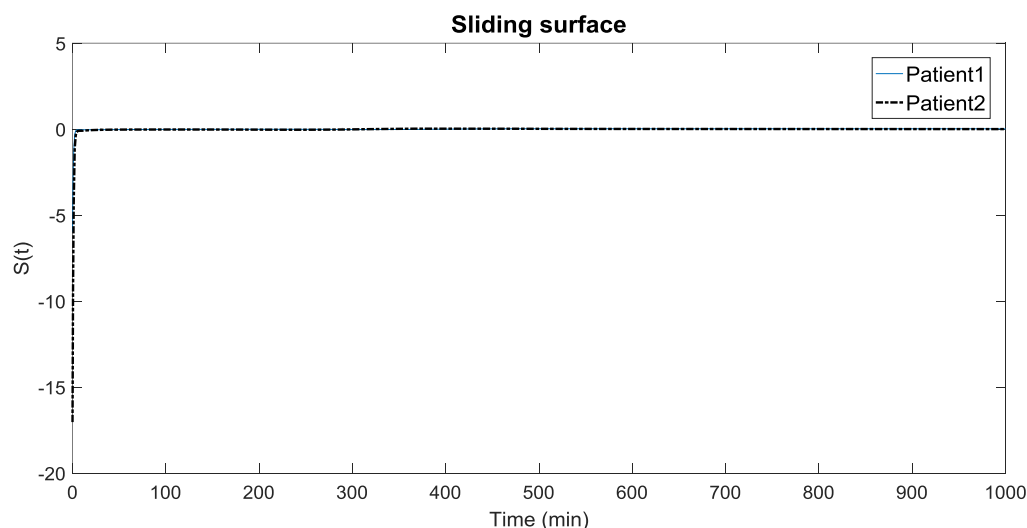
شکل ۳-۲۰ آهنگ تزریق انسولین با الگوریتم گام به عقب



شکل ۳-۲۱ سطح لغزش گام اول در الگوریتم گام به عقب



شکل ۳-۲۲ سطح لغزش گام دوم در الگوریتم گام به عقب



شکل ۳-۲۳ سطح لغزش گام سوم در الگوریتم گام به عقب

نتایج شبیه‌سازی ضمن تاکید بر عملکرد مقاوم کنترل‌کننده در برابر تغییرات پارامترها همچنین نشان می‌دهد نوسانات موجود در نمودار غلظت انسولین پلاسما و ورودی کنترلی در روش کلاسیک که نتایج آن در بخش قبل نشان داده شد، با استفاده از الگوریتم فوق از بین رفته است. همچنین با مقایسه دو نمودار ۳-۱۴ و ۳-۲۰ مشخص است که در این روش با زمان همگرایی مشابه روش کلاسیک میزان انسولین تزریقی نیز کاهش یافته است.

۳-۱۳- روش مود لغزشی ترمینال گام به عقب

بر اساس ترکیب روش مود لغزشی ترمینال و روش گام به عقب که در بخش‌های ۳-۶ و ۳-۱۲ مطرح شد در این بخش به طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی ترمینال گام به عقب پرداخته شده است. سطح لغزش تعریف شده در این روش بر خلاف روش مود لغزشی کلاسیک به صورت غیرخطی و نمایی است. این امر موجب سرعت بخشیدن همگرایی حالت‌ها بر روی سطح لغزش می‌شود [۴۲]. از آنجا که در این سیستم کاهش زمان رسیدن حالت‌ها به مقدار مطلوب اهمیت زیادی دارد، می‌توان گفت این روش نسبت به روش‌های قبلی عملکرد سیستم را بهبود می‌بخشد. مراحل طراحی کنترل‌کننده مجازی برای هر معادله حالت در هر مرحله مانند بخش ۳-۱۶ است به همین دلیل به توضیح روند طراحی به اختصار پرداخته شده است.

گام اول:

سطح لغزش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_1 = G(t) - G_d \quad (۳-۷۴)$$

$$s_1 = e_1 + \lambda_1 e_1^{p_1/q_1} \quad (۳-۷۵)$$

که در آن p_1 و q_1 اعداد مثبت فرد $1 < \frac{p_1}{q_1} < 2$ و $\lambda_1 > 0$ می‌باشند. با گرفتن مشتق از سطح لغزش تعریف شده در رابطه (۳-۷۵) و جایگذاری رابطه (۳-۷۴) در آن، سپس اضافه کردن قانون کنترل سوییچینگ، ورودی کنترلی برای گام اول بدست می‌آید.

$$X_d = G(t)^{-1} \left(\lambda_1 \frac{p_1}{q_1} e_1^{\frac{p_1}{q_1}} e_1^{(p_1/q_1)-1} + k_1 \tanh(s_1) \right) \quad (۳-۷۶)$$

اثبات پایداری گام اول:

$$V(t) = \frac{1}{2} S_1^2(t) \quad (۳-۷۷)$$

با جایگذاری روابط (۳-۷۵) و (۳-۷۶) در مشتق تابع منتخب لیاپانوف داریم:

$$\begin{aligned} V' &= s_1 s_1' = s_1 (-G(t)G(t)^{-1}(\lambda_1 \frac{p_1}{q_1} e_1' e_1^{(p_1/q_1)-1} + k_1 \tanh(s_1)) + \lambda_1 \frac{p_1}{q_1} e_1' e_1^{(p_1/q_1)-1}) \\ &= s_1 (-k_1 \tanh(s_1)) \end{aligned} \quad (78-3)$$

با فرض اینکه $k_1 > 0$ است و براساس لم ۱، $V' \leq 0$ و پایداری اثبات می‌شود.

گام دوم:

در این مرحله هدف رساندن حالت $X(t)$ به مقدار مطلوب $X_d(t)$ است. با صفر قرار دادن مشتق سطح لغزش تعریف شده در رابطه (۸۰-۳) ورودی کنترلی مجازی $I_d(t)$ بدست می‌آید.

$$e_2 = X(t) - X_d(t) \quad (79-3)$$

$$s_2 = e_2 + \lambda_2 e_2^{\frac{p_2}{q_2}} \quad (80-3)$$

p_2 و q_2 اعداد مثبت فرد $1 < \frac{p_2}{q_2} < 2$ و $\lambda_2 > 0$ است.

$$I_d(t) = (p_3)^{-1} (p_2 X + p_3 i_b + X_d' - \lambda_2 \frac{p_2}{q_2} e_2^{\frac{p_2}{q_2}} e_2' - k_2 \tanh(s_2)) \quad (81-3)$$

اثبات پایداری گام دوم:

$$V(t) = \frac{1}{2} S_2^2(t) \quad (82-3)$$

با جایگذاری روابط (۷۹-۳) و (۸۰-۳) در مشتق تابع منتخب لیپانوف خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} V' &= s_2 (-p_2 X + p_3 (p_3)^{-1} (p_2 X + p_3 i_b + X_d' - \lambda_2 \frac{p_2}{q_2} e_2^{\frac{p_2}{q_2}} e_2' - k_2 \tanh(s_2)) - p_3 i_b - X_d' + \lambda_2 \frac{p_2}{q_2} e_2^{\frac{p_2}{q_2}} e_2') \\ &= s_2 (-k_2 \tanh(s_2)) \leq 0 \end{aligned} \quad (83-3)$$

با فرض $k_2 > 0$ و مطابق با لم ۱ پایداری اثبات می‌شود.

گام سوم:

در این مرحله آهنگ تزریق انسولین به عنوان ورودی کنترلی نهایی جهت رساندن $I(t)$ به مقدار مطلوب طراحی می‌شود.

$$e_3 = I(t) - I_d(t) \quad (84-3)$$

$$s_3 = e_3 + \lambda_3 e_3^{\frac{p_3}{q_3}} \quad (۸۵-۳)$$

$$u(t) = n(I(t) - i_b) + I_d'(t) - \lambda_3 \frac{p_3}{q_3} e_2^{\frac{p_3}{q_3}} e_2' - k_3 \tanh(s_3) \quad (۸۶-۳)$$

اثبات پایداری گام سوم:

$$V = \frac{1}{2} S_3^2 \quad (۸۷-۳)$$

با جایگذاری روابط (۸۵-۳) و (۸۶-۳) در مشتق تابع V ، پس از ساده‌سازی بدست می‌آید:

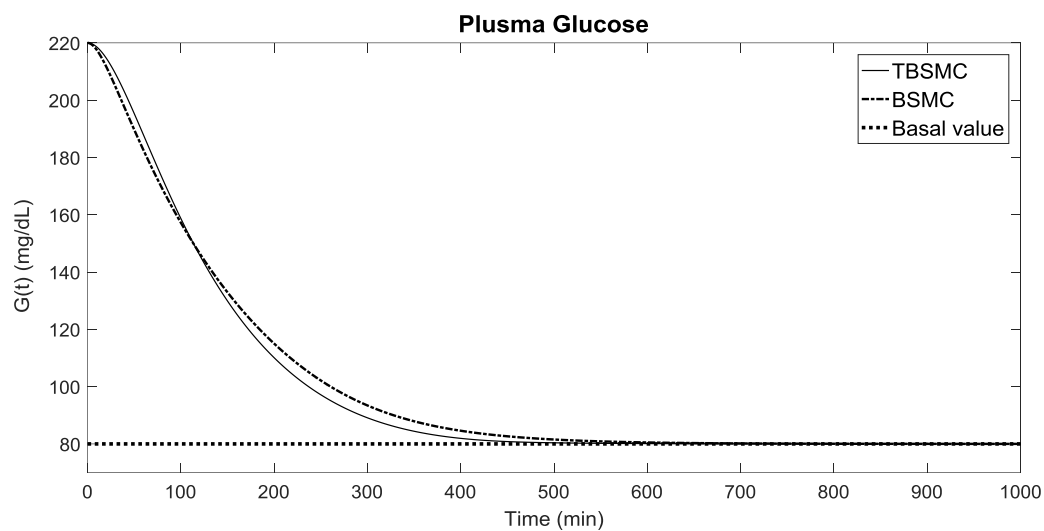
$$\begin{aligned} V' &= s_3(-n(I(t) - I_b) + n(I(t) - i_b) - \lambda_3 \frac{p_3}{q_3} e_2^{\frac{p_3}{q_3}} e_2' - k_3 \tanh(s_3) + I_d'(t) - I_d'(t) + \lambda_3 \frac{p_3}{q_3} e_2^{\frac{p_3}{q_3}} e_2') \\ &= s_3(-k_3 \tanh(s_3)) \leq 0 \end{aligned} \quad (۸۸-۳)$$

۳-۱۳-۱- نتایج شبیه‌سازی کنترل‌کننده ترمینال گام به عقب پیشنهادی

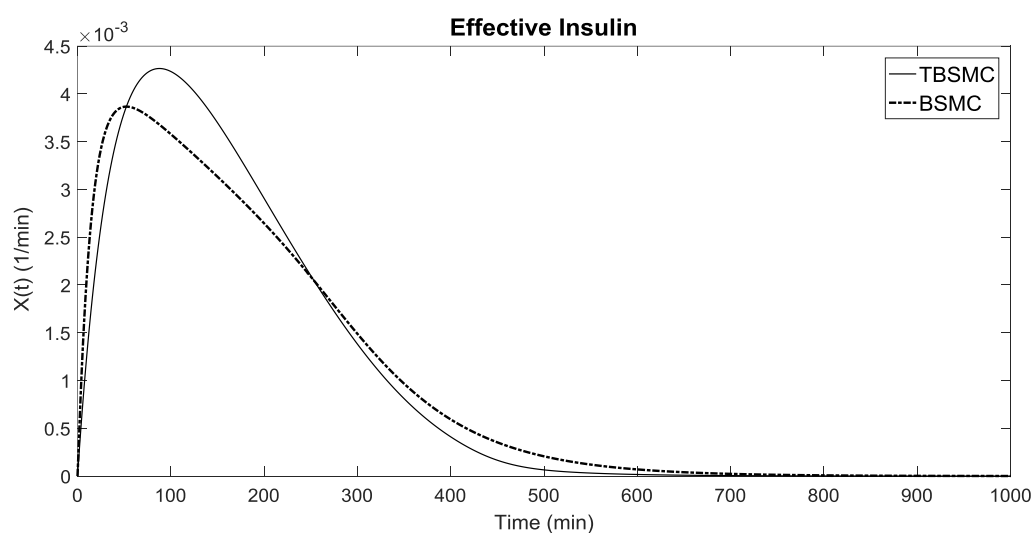
در این قسمت عملکرد کنترل‌کننده گام به عقب که در بخش ۳-۱۲ معرفی شد با کنترل‌کننده ترمینال گام به عقب طراحی شده در این بخش، برای بیمار بر اساس پارامترهای جدول ۳-۲ مقایسه شده است. همانطور که از نمودارها مشخص است این روش نسبت به روش‌های قبلی موجب افزایش سرعت همگرایی سیستم شده است.

جدول ۳-۷ پارامترهای کنترل‌کننده ترمینال گام به عقب

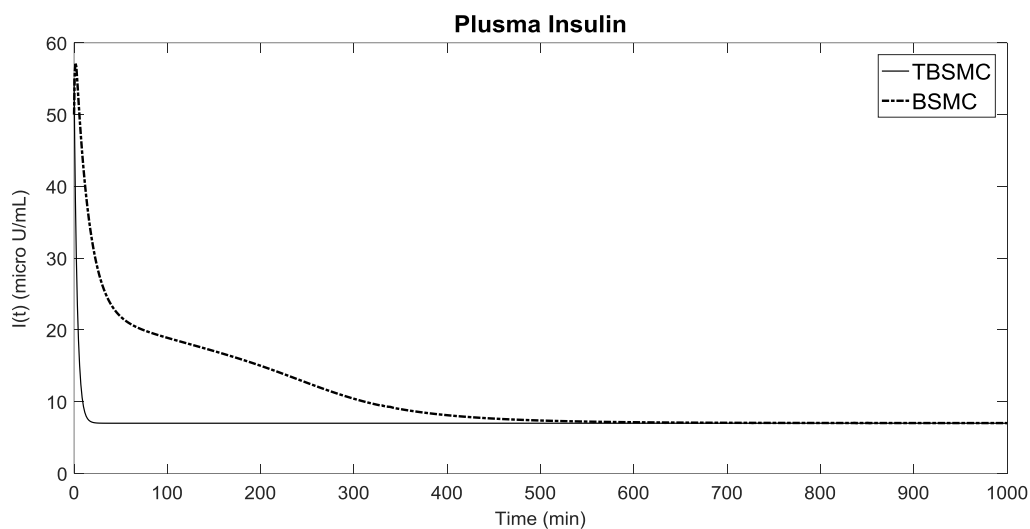
$\lambda_1 = 0.03$	$k_1 = 0.1$	$p_1 = 5$	$q_1 = 3$
$\lambda_2 = 0.1$	$k_2 = 0.1$	$p_2 = 5$	$q_2 = 3$
$\lambda_3 = 0.1$	$k_3 = 0.2$	$p_3 = 5$	$q_3 = 3$



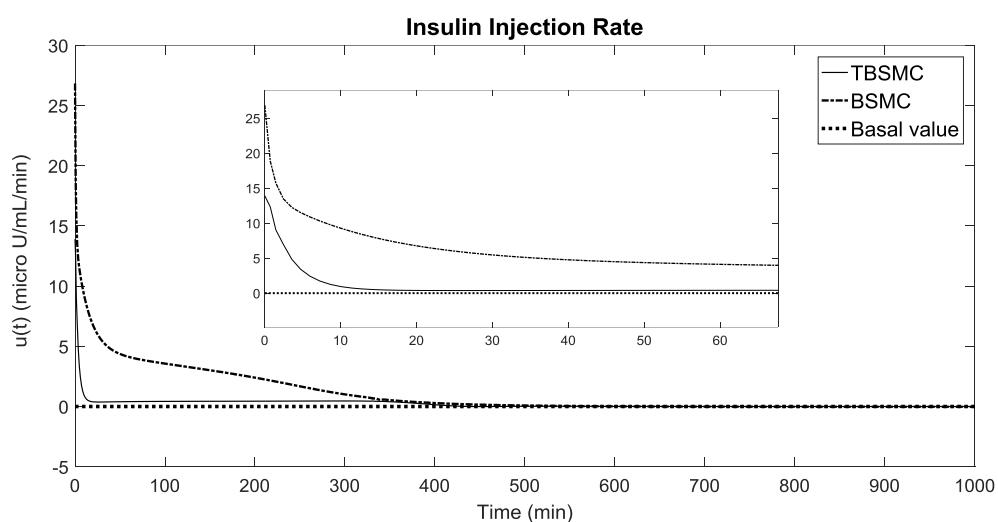
شکل ۳-۲۴ مقایسه سطح گلوکز خون در دو روش



شکل ۳-۲۵ مقایسه تاثیر انسولین بر حذف قند خون در دو روش



شکل ۳-۲۶ مقایسه غلظت انسولین پلاسما در دو روش



شکل ۳-۲۷ مقایسه آهنگ تزریق انسولین در دو روش

۳-۱۴- جمع بندی

در این فصل در ابتدا به بیان نظریه‌ی کنترل مود لغزشی و سپس معرفی انواع روش‌های مود لغزشی کلاسیک، مرتبه دوم، گام به عقب و ترمینال در حالت صحیح پرداخته شد. در ادامه نتایج حاصل از اعمال چهار کنترل کننده مختلف از انواع کنترل کننده‌های مود لغزشی جهت مقایسه عملکرد و اثبات مقاوم بودن

آن‌ها در برابر تغییرات پارامترها و اغتشاش وارد شده به سیستم بر اثر مصرف غذا نشان داده شد. بر اساس نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده در این فصل می‌توان گفت کنترل‌کننده‌های مود لغزشی مرتبه دوم و مود لغزشی کلاسیک به علت چترینگ و همچنین زمان همگرایی بالا عملکرد مناسبی نداشتند. در حالیکه کنترل‌کننده مود لغزشی با الگوریتم گام به عقب توانست ضمن حذف نوسانات موجود در نمودارها زمان رسیدن سطح گلوکز خون به مقدار 70 mg/dl را نیز کاهش دهد. در عین حال همانطور که انتظار می‌رفت کنترل‌کننده ترمینال گام به عقب پیشنهادی در مقایسه با سایر روش‌ها سرعت همگرایی حالت‌ها به مقدار مطلوب را در راستای عملکرد سیستم به طرز چشم‌گیری کاهش داد.

فصل چهارم

کنترل کننده مرتبه کسری

۴-۱- مقدمه

همان‌گونه که در فصل سوم بیان شد روش‌های متفاوتی جهت طراحی الگوریتم کنترلی با روش مود لغزشی به منظور کنترل سطح گلوکز خون در راهبرد کنترلی حلقه بسته در حالت صحیح وجود دارد. در این فصل با استفاده از اصول بیان شده در حسابان کسری که در فصل دوم به آن پرداخته شد، در بخش اول کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه کسری برای سیستم با معادلات حالت صحیح و در بخش دوم با توصیف سیستم توسط معادلات دیفرانسیل کسری، کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه کسری برای سیستم با معادلات کسری طراحی شده است.

۴-۲- انتخاب کنترل‌کننده کسری

وقتی از سیستم‌های کنترل مرتبه صحیح استفاده می‌شود رفتار سیستم از جمله سرعت پاسخ، افزایش یا کاهش خطای حالت ماندگار و پایداری تحت تاثیر سه جمله تناسبی، انتگرالی و مشتقی در کنترل‌کننده است. استفاده از عامل کسری در ساختار کنترل‌کننده این امکان را فراهم می‌کند که با توجه به فرم s^n و $\frac{1}{s^n}$ که در آن $n \in \mathbb{R}^+$ بتوان با مصالحه‌ای تاثیر هریک از عوامل را در بهبود عملکرد مطلوب سیستم بیشتر یا کمتر کرد [۲۳]. تحقیقات انجام شده نشان می‌دهد استفاده از معادلات کسری در مدل کردن سیستم‌های واقعی بسیار کارآمد بوده و منجر به افزایش دقت سیستم می‌شود. همچنین برتری استفاده از کنترل‌کننده کسری در کنترل سیستم با معادلات کسری نسبت به کنترل‌کننده صحیح نیز به اثبات رسیده است [۲۷]. مزایای استفاده از روش مود لغزشی جهت طراحی کنترل‌کننده در فصل سوم مطرح شد. اما استفاده از مفاهیم حسابان کسری در روش مود لغزشی به طور مثال در تعریف سطح لغزش، امکان طراحی کنترل‌کننده‌هایی با عملکرد بهتر را در مقایسه با حالت صحیح فراهم کرده است. در کنترل مود لغزشی ایده‌آل از یک سطح لغزش با مرتبه مشتق و انتگرال صحیح جهت طراحی قانون کنترل استفاده می‌شود، در حالیکه در مود لغزشی کسری می‌توان از مرتبه کسری مشتق و انتگرال استفاده کرد.

به دلیل وجود درجه آزادی در انتخاب مرتبه مشتق و انتگرال در تعریف سطح لغزش کسری، این امکان فراهم می‌شود که بتوان کنترل‌کننده‌های مناسب‌تری در جهت بهبود عملکرد سیستم در مقایسه با کنترل‌کننده‌های حالت صحیح طراحی کرد. کنترل‌کننده مود لغزشی کسری ضمن حفظ قابلیت‌های کنترل‌کننده مود لغزشی کلاسیک از جمله مقاوم بودن در برابر نامعینی‌ها و اغتشاش، سرعت همگرایی حالت‌ها به مقدار مطلوب را نیز افزایش می‌دهد و منجر به حذف نوسانات فرکانس بالا می‌شود [۵۱].

۴-۳- انتخاب تعریف کاپاتو

همانطور که در فصل دوم به آن پرداخته شد، تعمیم توابع از حسابان صحیح به حسابان کسری و استفاده از مرتبه‌های اختیاری به جای مرتبه صحیح در عملگرها، منجر به تعاریف متفاوتی برای مشتق کسری گردید که از بین تعاریف مطرح شده، در این پایان نامه از تعریف مشتق کاپاتو استفاده شده است.

اگر $m-1 < \alpha < m \in \mathbb{Z}^+$ $x(t) \in C^m[0,1]$ خواص زیر برقرار است [۴۹].

خاصیت ۱:

$${}_0^c D_t^\alpha {}_0^c D_t^{-\alpha} x(t) = x(t) \quad , \quad m=1 \quad (۱-۴)$$

خاصیت ۲:

$${}_0^c D_t^{-\alpha} {}_0^c D_t^\alpha x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0) \quad (۲-۴)$$

خاصیت ۳:

$${}_0^c D_t^\alpha {}_0^c D_t^n x(t) = {}_0^c D_t^{\alpha+n} x(t) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad (۳-۴)$$

خاصیت ۴:

$$L\{{}_0^c D_t^\alpha x(t)\} = s^\alpha X(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} x^{(k)}(0) \quad (۴-۴)$$

۴-۴- طراحی کنترل کننده

جهت یادآوری مدل مینیمال برگمان مجدداً در رابطه (۴-۵) آورده شده است.

$$\begin{aligned}\frac{dG(t)}{dt} &= -p_1[G(t) - G_b] - X(t)G(t) + D(t) \\ \frac{dX(t)}{dt} &= -P_2X(t) + p_3[I(t) - I_b] \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -n[I(t) - I_b] + \gamma[G(t) - h]^+ + u(t)\end{aligned}\quad (۴-۵)$$

با تعریف سطح گلوکز خون به عنوان خروجی سیستم:

$$y(t) = G(t) \quad (۴-۶)$$

مراحل طراحی کنترل کننده مود لغزشی کسری مشابه حالت صحیح می باشد، با این تفاوت که سطح لغزش تعریف شده برای سیستم کسری است. در این بخش طراحی ورودی کنترلی برای دو سطح لغزش متفاوت انجام شده است.

۴-۴-۱- کنترل کننده مود لغزشی کسری

در بخش اول سطح لغزش به شکل رابطه (۴-۸) در نظر گرفته می شود [۴۹].

$$e(t) = G(t) - G_d \quad (۴-۷)$$

$$S(t) = {}^c D_t^\alpha e''(t) + \lambda_1 e' + \lambda_2 e \quad (۴-۸)$$

که در آن λ_1 و λ_2 ثابت های مثبت طراحی می باشند. مطابق با نظریه مود لغزشی از سطح لغزش رابطه (۴-۸) مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می دهیم.

$$S'(t) = {}^c D_t^\alpha e'''(t) + \lambda_1 e'' + \lambda_2 e' = 0 \quad (۴-۹)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۷) در رابطه (۴-۹) داریم:

$${}^c D_t^\alpha G(t)^{(3)} + \lambda_1 e'' + \lambda_2 e' = 0 \quad (۴-۱۰)$$

با گرفتن انتگرال کسری $D^{-\alpha}$ از دو طرف رابطه (۴-۱۰) و استفاده از خاصیت دوم مشتق کاپاتو که در رابطه (۴-۲) بیان شده است، ورودی کنترلی معادل مطابق روابط زیر بدست می‌آید.

$${}_0^c D_t^{-\alpha} {}_0^c D_t^{\alpha} (G^{(3)}(t)) = -{}_0^c D_t^{-\alpha} (\lambda_1 e'' + \lambda_2 e') \quad (۴-۱۱)$$

$$G^{(3)}(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (G^{(3)}(t))^{(k)}(0) = -{}_0^c D_t^{-\alpha} (\lambda_1 e'' + \lambda_2 e') \quad (۴-۱۲)$$

$$\Phi(G, X, I, t) - p_3 G(t) u(t) - w = -{}_0^c D_t^{-\alpha} (\lambda_1 e'' + \lambda_2 e') \quad (۴-۱۳)$$

که در آن توابع w و Φ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \Phi = & -p_2 p_3 i_b G(t) - n p_3 i_b G(t) - p^2_2 G(t) X(t) - 3 p_3 i_b G(t) X(t) + \\ & p_2 p_3 G(t) I(t) + n p_3 G(t) I(t) - 3 p_2 G(t) X^2(t) + 3 p_3 G(t) X(t) I(t) - G(t) (X(t))^3 \end{aligned} \quad (۴-۱۴)$$

$$w = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (G^{(3)}(t))^{(k)}(0) \quad (۴-۱۵)$$

$$u_{eq}(t) = (p_3 G(t))^{-1} (\Phi - w + {}_0^c D_t^{-\alpha} (\lambda_1 e'' + \lambda_2 e')) \quad (۴-۱۶)$$

در مرحله بعد ورودی کنترلی سوییچینگ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u_{sw} = (p_3 G(t))^{-1} {}_0^c D_t^{-\alpha} (k_1 \tanh(s)) \quad (۴-۱۷)$$

در نتیجه ورودی کنترلی نهایی جهت کنترل سطح گلوکز خون به صورت رابطه (۴-۱۸) تعریف می‌شود.

$$u(t) = (p_3 G(t))^{-1} ((\Phi - w + {}_0^c D_t^{-\alpha} (\lambda_1 e'' + \lambda_2 e')) + {}_0^c D_t^{-\alpha} (k_1 \tanh(s))) \quad (۴-۱۸)$$

قضیه پایداری:

جهت بررسی پایداری سیستم تابع منتخب لیاپانوف به صورت رابطه (۴-۱۹) در نظر گرفته می‌شود.

$$V(t) = \frac{1}{2} s^2(t) \quad (۴-۱۹)$$

با گرفتن مشتق از تابع و جایگذاری رابطه (۴-۹) در (۴-۱۹):

$$V' = s s' = s ({}_0^c D_t^{\alpha} e'''(t) + \lambda_1 e'' + \lambda_2 e') \quad (۴-۲۰)$$

$$V' = s ({}_0^c D_t^{\alpha} (\Phi - p_3 G(t) u(t)) + \lambda_1 e'' + \lambda_2 e') \quad (۴-۲۱)$$

سپس جایگذاری ورودی کنترلی به دست آمده، در رابطه (۴-۲۱) خواهیم داشت:

$$V' = S({}_0^c D_t^\alpha (\Phi - p_3 G([p_3 G(t)]^{-1}((\Phi - w + {}_0^c D_t^{-\alpha}(\lambda_1 e'' + \lambda_2 e') + {}_0^c D_t^{-\alpha}(k_1 \tanh(s)))))) + \lambda_1 e'' + \lambda_2 e') \quad (22-4)$$

پس از ساده‌سازی، رابطه زیر به دست می‌آید.

$$V' = (-k_1 S \tanh(s)) \leq 0 \quad (23-4)$$

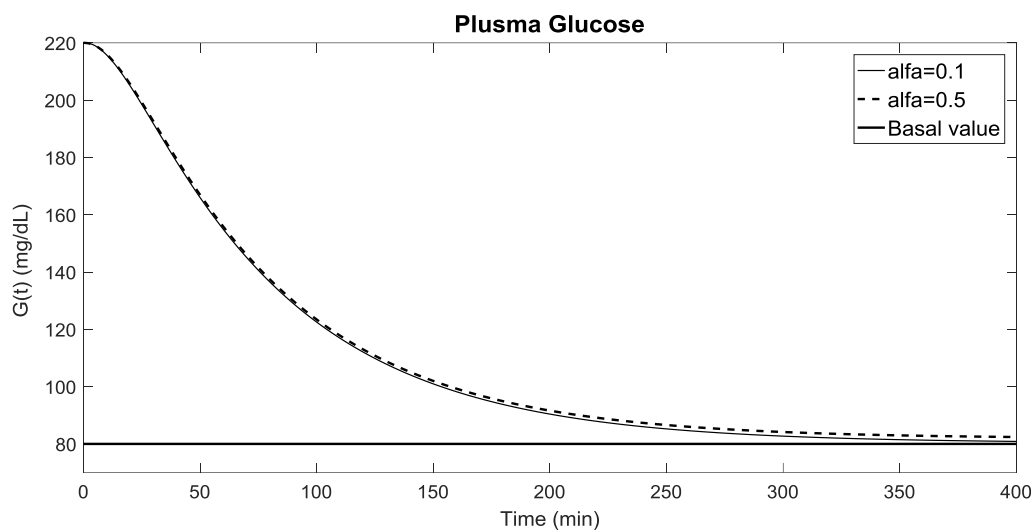
با توجه به لم بیان شده در رابطه (۵۲-۳) اثبات می‌شود که با انتخاب مقادیر مثبت برای k_1 مشتق تابع منتخب لیاپانوف در رابطه (۲۳-۴) منفی است. بنابراین مطابق با نظریه پایداری لیاپانوف سیستم پایدار است.

۴-۱-۱-۴-۱- نتایج شبیه‌سازی

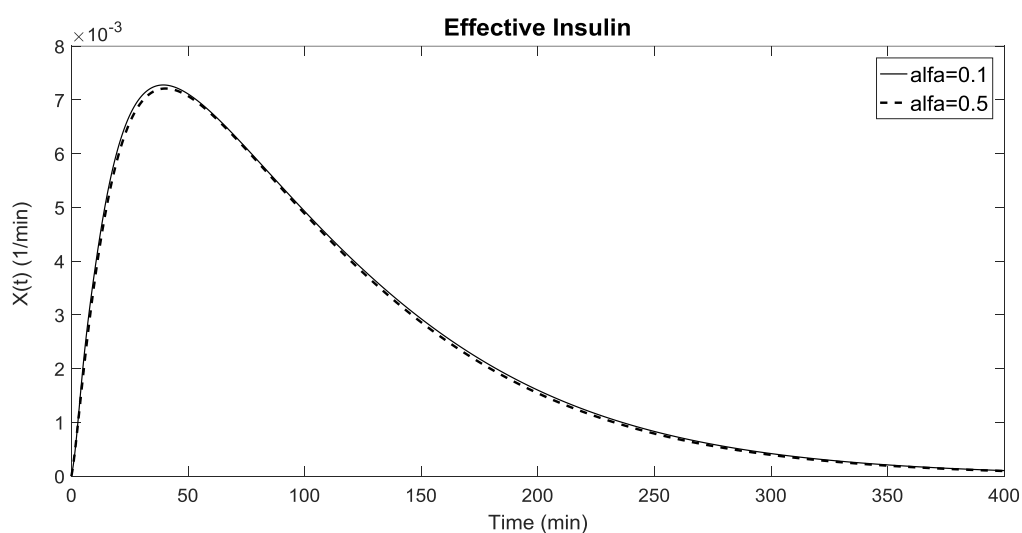
در ابتدا نتایج حاصل از اعمال کنترل‌کننده رابطه (۱۸-۴) براساس پارامترهای جدول ۲-۳ و ۱-۴ به ازای دو مقدار مختلف آلفا نشان داده شده است.

جدول ۱-۴ پارامترهای کنترل‌کننده مود لغزشی کسری

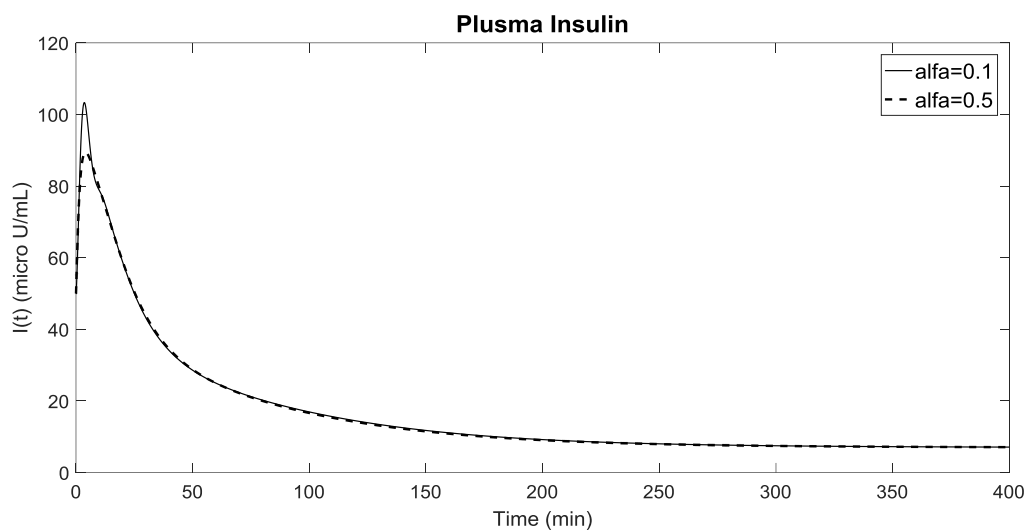
λ_1	λ_2	k
۰,۷	۰,۰۱	۰,۰۸



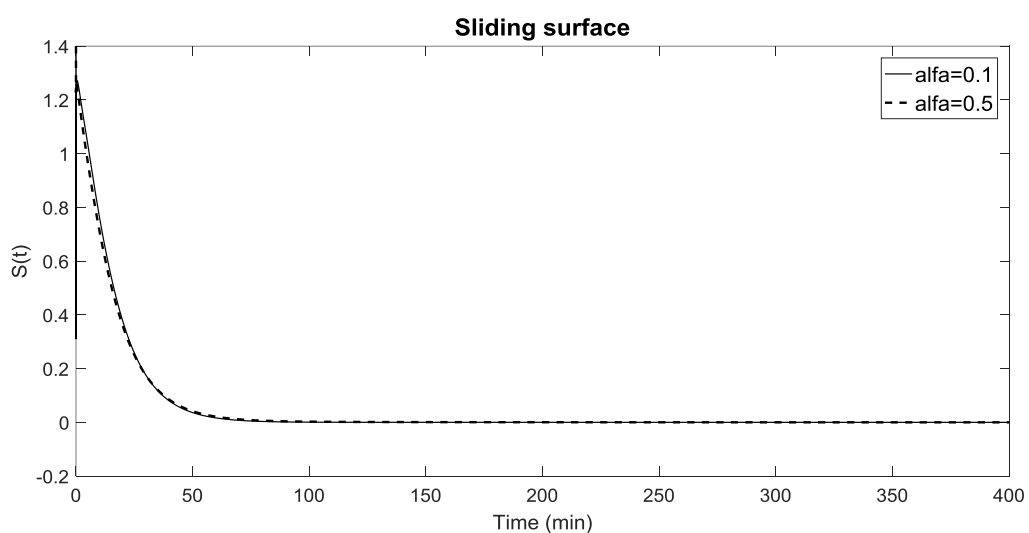
شکل ۱-۴ سطح گلوکز خون با کنترل کننده مود لغزشی کسری



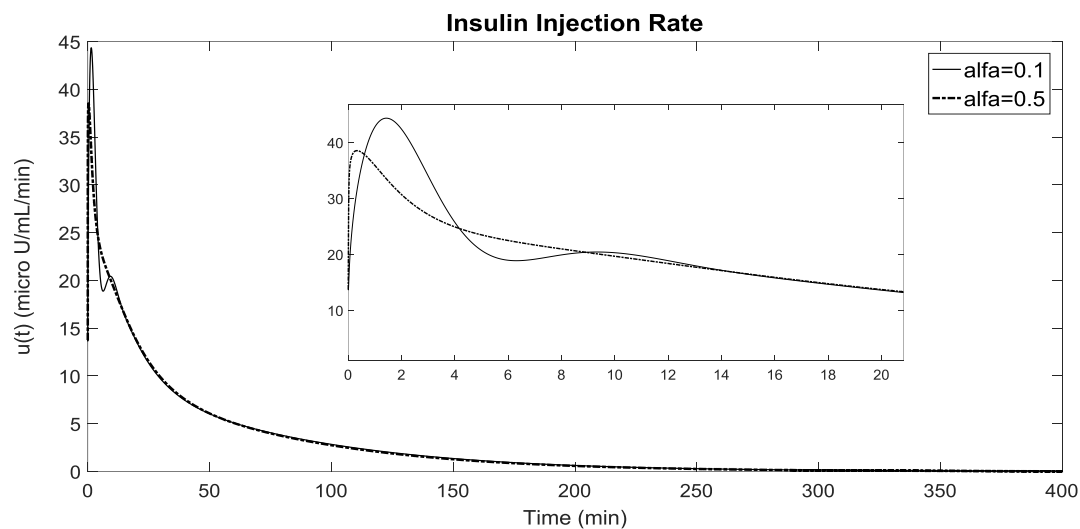
شکل ۲-۴ تاثیر انسولین بر حذف قند خون با کنترل کننده مود لغزشی کسری



شکل ۳-۴ غلظت انسولین پلاسما با کنترل کننده مود لغزشی کسری

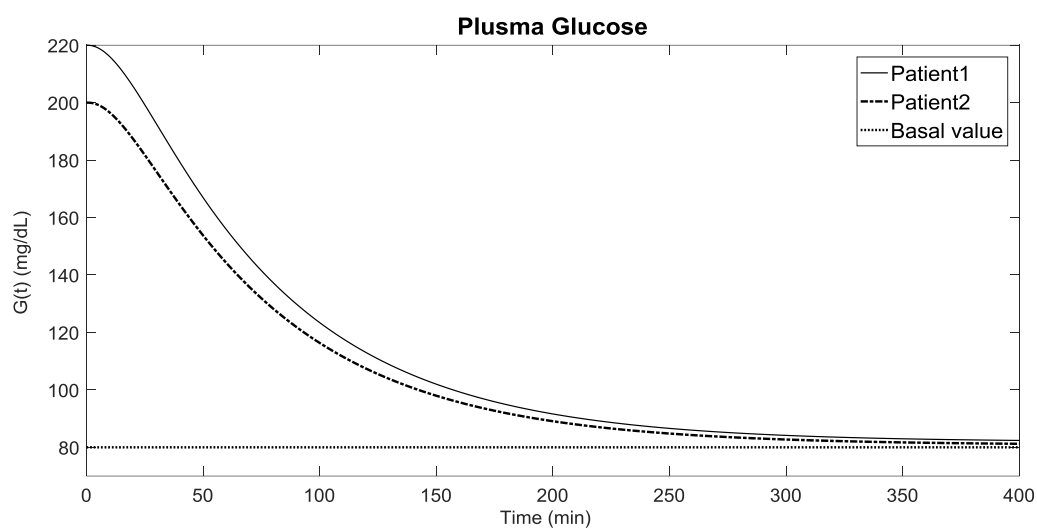


شکل ۴-۴ سطح لغزش در روش مود لغزشی کسری

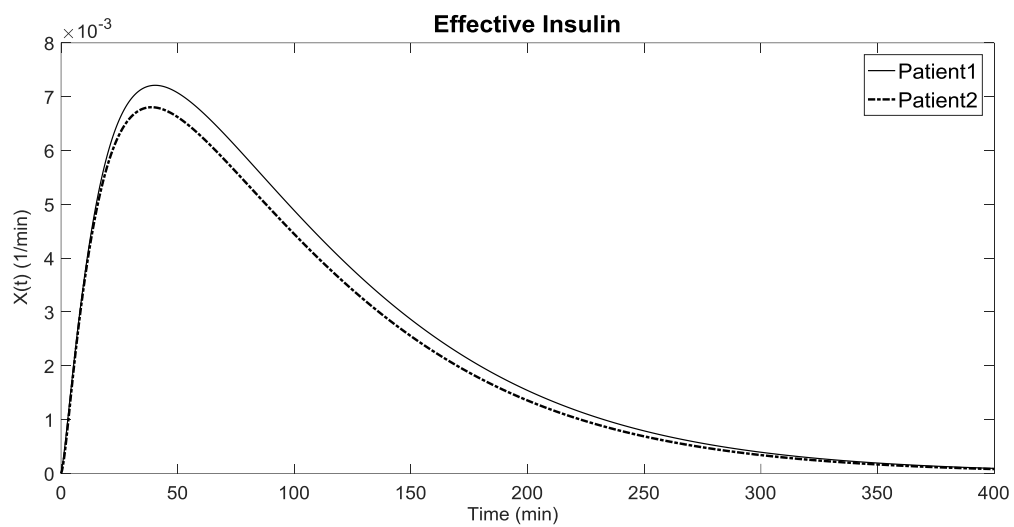


شکل ۴-۵ آهنگ تزریق انسولین با کنترل کننده مود لغزشی کسری

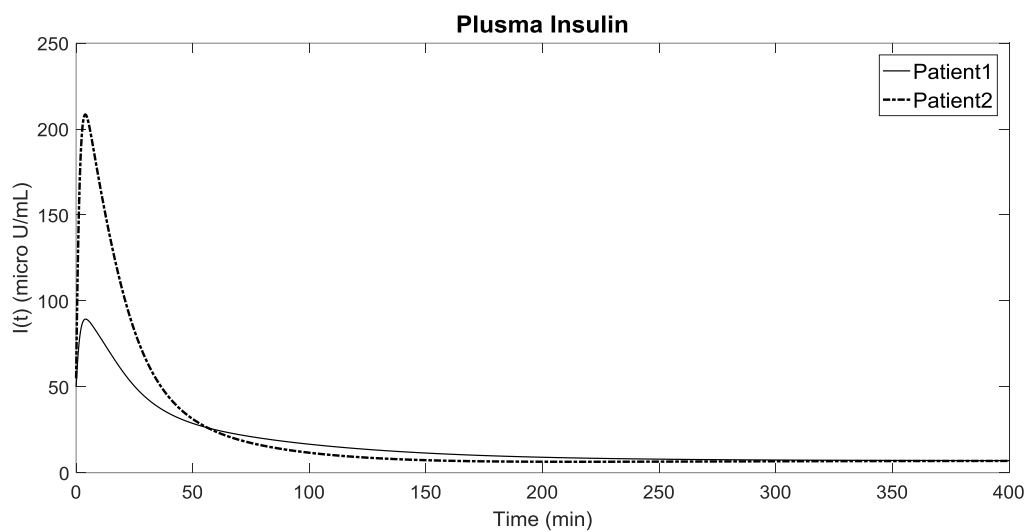
با توجه به نمودارهای نشان داده شده زمان همگرایی به ازای دو مقدار مختلف α تقریباً یکسان است. اما میزان تزریق انسولین با افزایش مرتبه مشتق کسری افزایش می‌یابد. در ادامه جهت نشان دادن مقاوم بودن کنترل کننده مود لغزشی کسری در برابر تغییرات پارامترها، نتایج برای دو بیمار مختلف براساس پارامترهای جدول ۳-۶ و مقدار $\alpha = 0.1$ آورده شده است.



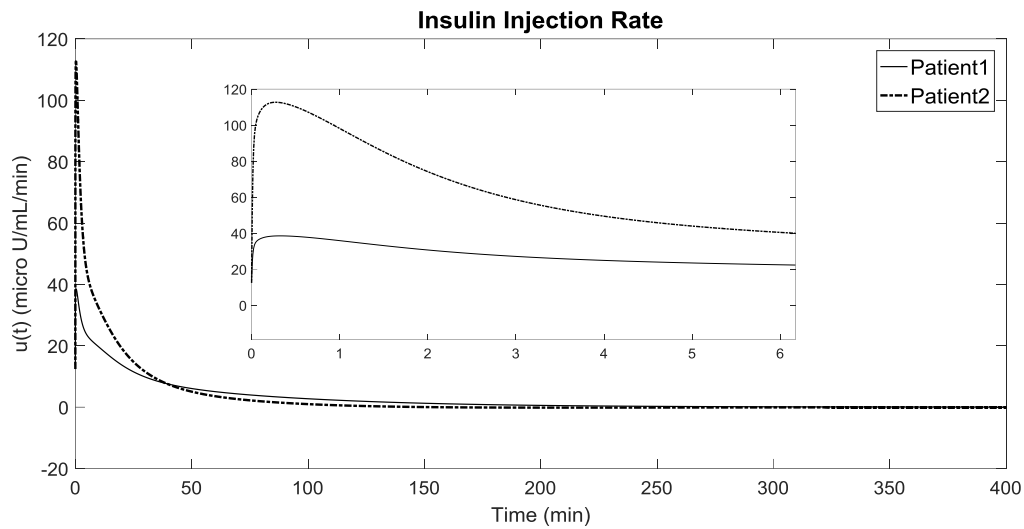
شکل ۴-۶ سطح گلوکز خون دو بیمار با کنترل کننده مود لغزشی کسری



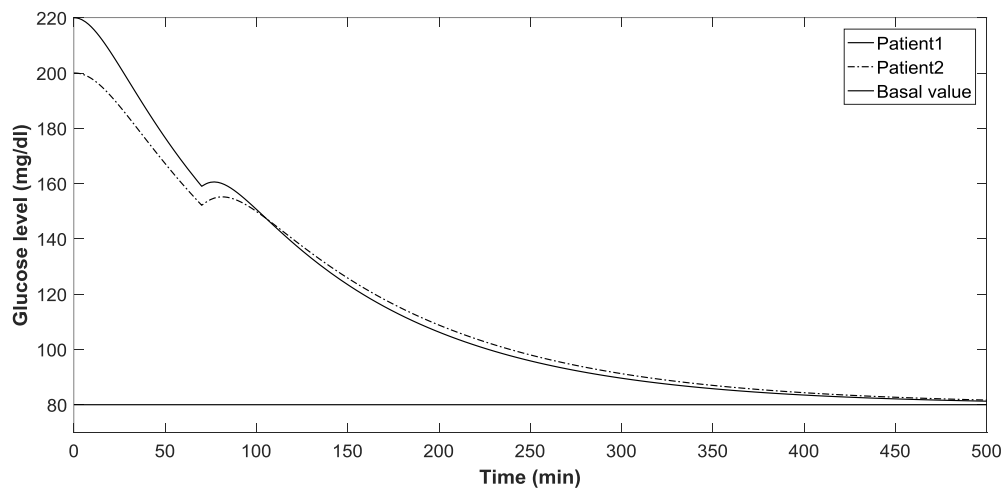
شکل ۷-۴ تاثیر انسولین بر حذف قندخون دو بیمار با کنترل کننده مود لغزشی کسری



شکل ۸-۴ غلظت انسولین پلاسما دو بیمار با کنترل کننده مود لغزشی کسری



شکل ۴-۹ آهنگ تزریق انسولین دو بیمار با کنترل کننده مود لغزشی کسری



شکل ۴-۱۰ سطح گلوکز خون دو بیمار با کنترل کننده مود لغزشی کسری در حضور اغتشاش

۴-۴-۲- کنترل کننده مود لغزشی کسری پیشنهادی

اگر در رابطه (۴-۸) به جای ترم ${}_0^c D_t^\alpha$ از ${}_0^c D_t^{-\alpha}$ در تعریف سطح لغزش استفاده شود خواهیم داشت:

$$S(t) = {}_0^c D_t^{-\alpha} e''(t) + \lambda_3 e' + \lambda_4 e \quad (24-4)$$

در رابطه بالا λ_3 و λ_4 ثابت‌های مثبت طراحی هستند. مراحل طراحی ورودی کنترلی مشابه مطالب بخش

۴-۴-۱ به صورت زیر می‌باشد.

$$S'(t) = {}^c D_t^{-\alpha} e'''(t) + \lambda_3 e'' + \lambda_4 e' = 0 \quad (25-4)$$

با جایگذاری رابطه (۷-۴) در رابطه (۲۵-۴) و گرفتن مشتق D^α از دو طرف معادله، همچنین استفاده از خاصیت مشتق کاپاتو در رابطه (۴-۱) خواهیم داشت:

$${}^c D_t^\alpha {}^c D_t^{-\alpha} (G^{(3)}(t)) = - {}^c D_t^\alpha (\lambda_3 e'' + \lambda_4 e') \quad (26-4)$$

$$\Phi(G, x, I, t) - p_3 G(t) u(t) = - {}^c D_t^\alpha (\lambda_3 e'' + \lambda_4 e') \quad (27-4)$$

تابع Φ در رابطه (۱۴-۴) تعریف شده است. در نتیجه ورودی کنترلی نهایی در این بخش به صورت زیر بدست می‌آید.

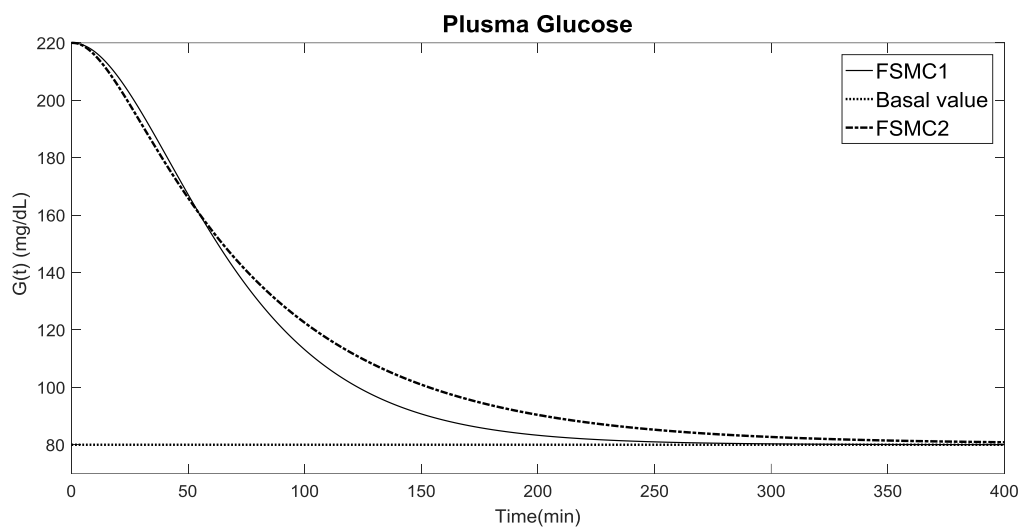
$$u(t) = (p_3 G(t))^{-1} ((\Phi + {}^c D_t^\alpha (\lambda_3 e'' + \lambda_4 e') + {}^c D_t^\alpha (k_2 \tanh(s))) \quad (28-4)$$

۴-۲-۱- نتایج شبیه‌سازی

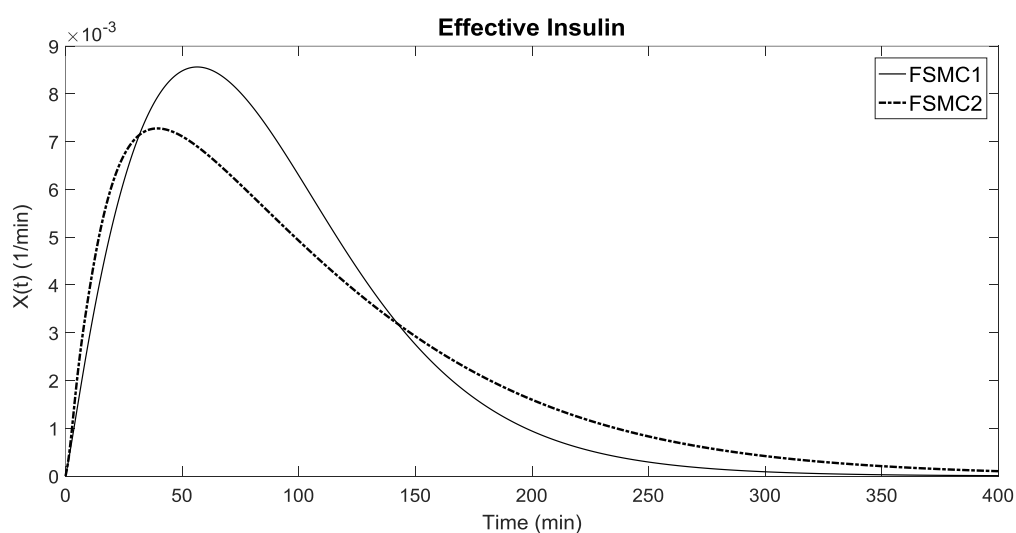
براساس پارامترهای جدول ۲-۳ و ۲-۴ نتایج مقایسه بین کنترل‌کننده رابطه (۱۸-۴) و کنترل‌کننده پیشنهادی در رابطه (۲۸-۴) برای مقدار $\alpha = 0,1$ نشان می‌دهد که در صورت استفاده از عامل $D^{-\alpha}$ در تعریف سطح لغزش به شکل رابطه (۲۴-۴) سرعت همگرایی حالت‌ها افزایش می‌یابد و سطح قندخون در زمان کوتاه‌تری به مقدار مطلوب می‌رسد. همچنین میزان انسولین پلاسما نیز نسبت به حالت قبل کاهش می‌یابد. در نمودارهای زیر کنترل‌کننده دوم مربوط به کنترل‌کننده رابطه (۱۸-۴) و کنترل‌کننده اول، کنترل‌کننده پیشنهادی در رابطه (۲۸-۴) است.

جدول ۲-۴ پارامترهای کنترل‌کننده مود لغزشی کسری پیشنهادی

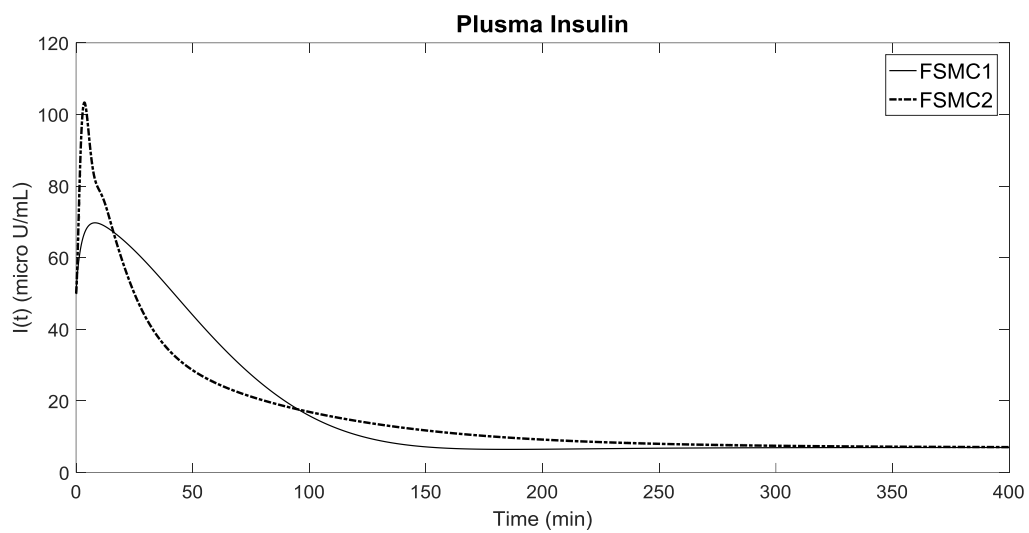
λ_3	λ_4	k_2
۰,۴	۰,۰۱	۰,۰۳۵



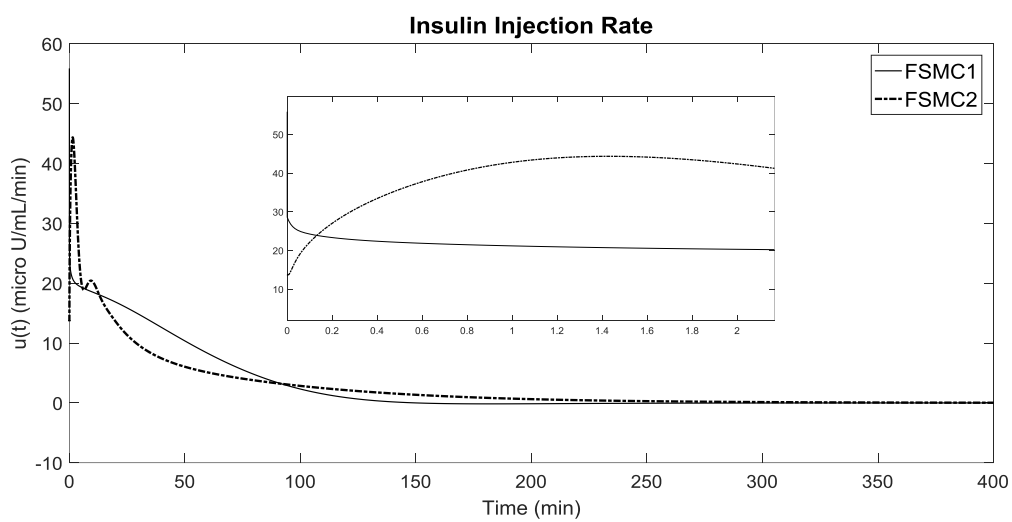
شکل ۴-۱۱ مقایسه سطح گلوکز خون



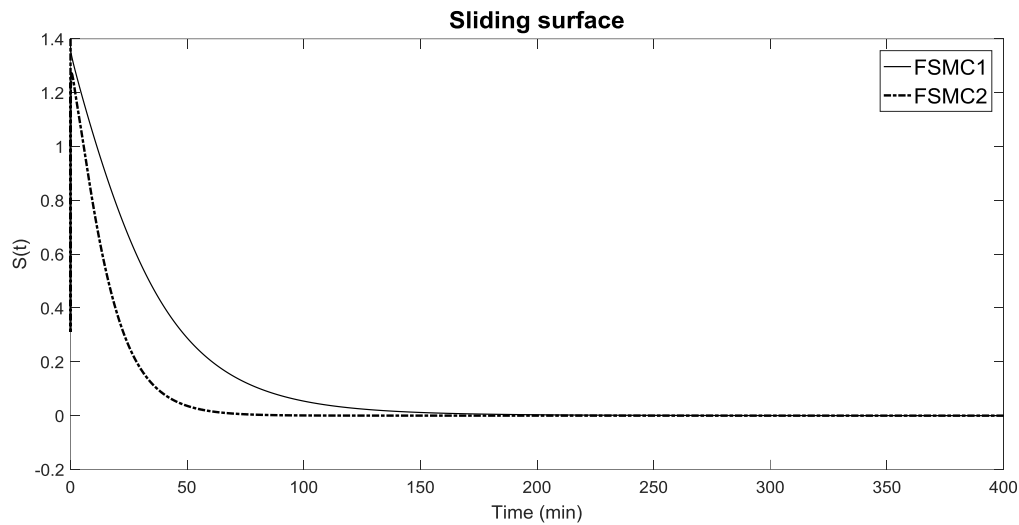
شکل ۴-۱۲ مقایسه تاثیر انسولین بر حذف قند خون



شکل ۴-۱۳ مقایسه غلظت انسولین پلاسما



شکل ۴-۱۴ مقایسه آهنگ تزریق انسولین



شکل ۴-۱۵ مقایسه سطح لغزش

۴-۵- مدل با معادلات دیفرانسیل کسری

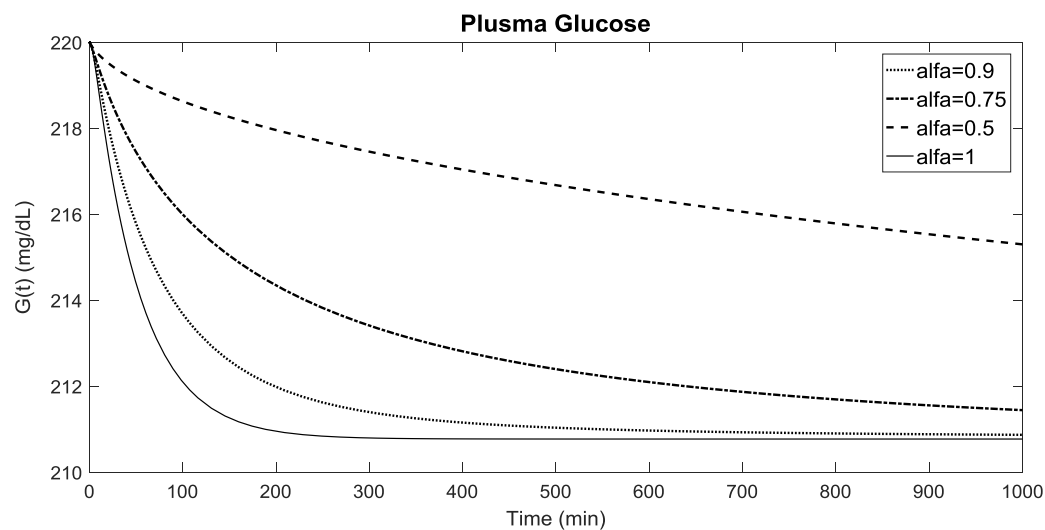
مدل برگمان با معادلات دیفرانسیل کسری جهت توصیف سیستم در رابطه (۴-۲۹) بیان شده است.

$${}^C D^\alpha G(t) = -G(t)X(t) + d(t)$$

$${}^C D^\alpha X(t) = -p_2 X(t) + p_3(I(t) - I_b) \quad (4-29)$$

$${}^C D^\alpha I(t) = -n(I(t) - I_b) + u$$

در رابطه بالا $0 < \alpha < 1$ است و مرتبه مشتق را مشخص می‌کند.



شکل ۴-۱۶ سطح گلوکز خون به ازای مقادیر مختلف آلفا

شکل ۴-۱۶ تغییرات گلوکز خون بیمار را به ازای مقادیر مختلف آلفا قبل از اعمال کنترل کننده نشان می دهد.

۴-۶- کنترل کننده مود لغزشی کسری پیشنهادی برای سیستم کسری

در این بخش کنترل کننده مود لغزشی کسری برای سیستم با معادلات شبه حالت کسری طراحی شده است. سطح لغزش در نظر گرفته شده جهت طراحی کنترل کننده به صورت زیر است [۵۲]:

$$s = ({}_0D_t^\beta + \lambda)^{(n-1)\frac{\alpha}{\beta}} e(t) \quad (۳۰-۴)$$

در رابطه بالا α, β و n پارامترهای طراحی هستند و شرط $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{N}$ برقرار می باشد. فرض می کنیم فرم فضای شبه حالت سیستم به شکل $D^{n\alpha}$ و $\alpha = \beta$ در نظر گرفته شود. بر همین اساس کنترل کننده مود لغزشی بر اساس الگوریتم گام به عقب مطرح شده در بخش ۳-۱۲ طراحی می شود. با فرض اینکه مرتبه سیستم $\alpha = 0.5$ است. مدل برگمان برای سیستم با معادلات دیفرانسیل کسری به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned} {}^C D^{0.5} G(t) &= -G(t)X(t) + d(t) \\ {}^C D^{0.5} X(t) &= -p_2 X(t) + p_3(I(t) - I_b) \\ {}^C D^{0.5} I(t) &= -n(I(t) - I_b) + u \end{aligned} \quad (۳۱-۴)$$

که با توجه به رابطه $D^{n\alpha}$ ، $\beta = \alpha = 1/4$ و $n=2$ است.

گام اول:

با تعریف سطح لغزش براساس رابطه (۳۰-۴) خواهیم داشت:

$$e_1 = G(t) - G_d \quad (۳۲-۴)$$

$$s_1 = ({}_0D_t^{1/4} + \lambda)e_1(t) \quad (۳۳-۴)$$

با گرفتن مشتق از سطح لغزش و مساوی صفر قرار دادن آن خواهیم داشت:

$$Ds_1 = D^{5/4}e_1 + \lambda_1 De_1 = 0 \quad (34-4)$$

با جایگذاری رابطه (32-4) در (34-4):

$$D^{5/4}G(t) = D^{5/4}G_d - \lambda_1 De_1 \quad (35-4)$$

$$D^{3/4}(D^{2/4}G(t)) = D^{5/4}G_d - \lambda_1 De_1 \quad (36-4)$$

$$D^{0.5}G(t) = D^{2/4}G_d - \lambda_1 D^{1/4}e_1 \quad (37-4)$$

و جایگذاری رابطه (31-4) در (37-4):

$$-G(t)X_d = D^{2/4}G_d - \lambda_1 D^{1/4}e_1 \quad (38-4)$$

همچنین تعیین قانون کنترل سویچینگ به شکل $D^{-3/4}(k_1 \tanh(s_1))$ ، قانون کنترل مجازی گام اول به صورت زیر بدست می‌آید.

$$X_d = (G(t))^{-1}(-D^{1/2}G_d + \lambda D^{1/4}e_1 + D^{-3/4}k_1 \tanh(s)) \quad (39-4)$$

اثبات پایداری گام اول:

با انتخاب تابع لیاپانوف به صورت زیر:

$$V = \frac{1}{2}s_1^2 \quad (40-4)$$

$$V^\bullet = s_1 \dot{s}_1 = s(D^{3/4}(D^{2/4}G(t)) - D^{5/4}G_d + \lambda_1 De_1) \quad (41-4)$$

و با جایگذاری روابط (31-4) و (39-4) در رابطه (41-4) پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$V^\bullet = s_1(D^{3/4}(-G(t)(G(t))^{-1}(-D^{1/2}G_d + \lambda D^{1/4}e_1 + D^{-3/4}k_1 \tanh(s)) - D^{5/4}G_d + \lambda_1 De_1) \quad (42-4)$$

$$V^\bullet = (-k_1 s_1 \tanh(s_1)) \leq 0 \quad (43-4)$$

که مطابق با لم بیان شده در رابطه (3-52) مشتق تابع لیاپانوف منفی است و سیستم پایدار می‌باشد.

گام دوم :

در این مرحله $I_d(t)$ به عنوان ورودی کنترلی جهت همگرایی حالت $X(t)$ به مقدار مطلوب طراحی می‌شود.

$$e_2 = X(t) - X_d(t) \quad (44-4)$$

$$s_2 = ({}_0D_t^{1/4} + \lambda_2)e_2(t) \quad (45-4)$$

با جایگذاری رابطه (44-4) در رابطه (45-4) و گرفتن مشتق از سطح لغزش خواهیم داشت:

$$Ds_2 = D^{5/4}e_2 + \lambda_2 De_2 = 0 \quad (46-4)$$

$$D^{5/4}X(t) = D^{5/4}X_d(t) - \lambda_2 De_2 \quad (47-4)$$

$$D^{3/4}(D^{2/4}X(t)) = D^{5/4}X_d(t) - \lambda_2 De_2 \quad (48-4)$$

$$D^{2/4}X(t) = D^{2/4}X_d(t) - \lambda_2 D^{1/4}e_2 \quad (49-4)$$

سپس با جایگذاری رابطه (49-4) در (31-4) ورودی کنترلی مجازی $I_d(t)$ بدست می‌آید.

$$-p_2X(t) + p_3I_d(t) - p_3I_b = D^{2/4}X_d(t) - \lambda_2 D^{1/4}e_2 \quad (50-4)$$

$$I_d(t) = p_3^{-1}(p_3I_b + p_2X(t) + D^{2/4}X_d(t) - \lambda_2 D^{1/4}e_2 - k_2 D^{-3/4} \tanh(s_2)) \quad (51-4)$$

اثبات پایداری گام دوم :

با انتخاب تابع لیاپانوف به صورت زیر:

$$V = \frac{1}{2}s_2^2 \quad (52-4)$$

$$V^* = s_2 s_2^* = s_2(D^{3/4}(D^{2/4}X(t)) - D^{5/4}X_d + \lambda_2 De_2) \quad (53-4)$$

و جایگذاری روابط (49-4) و (51-4) در رابطه (53-4) و ساده‌سازی عبارت خواهیم داشت:

$$V^* = s_2(D^{3/4}(-p_2X(t) + p_3(p_3^{-1}(p_3I_b + p_2X(t) + D^{2/4}X_d(t) - \lambda_2 D^{1/4}e_2 - k_2 D^{-3/4} \tanh(s_2))) - p_3I_b) - D^{5/4}X_d + \lambda_2 De_2) \quad (54-4)$$

$$V^* = s_2(-k \tanh(s_2)) \leq 0$$

گام سوم:

در این مرحله با توجه به سطح لغزش رابطه (۵۵-۴) هدف طراحی ورودی کنترلی نهایی به عنوان آهنگ تزریق انسولین است.

$$e_3 = I(t) - I_d(t) \quad (55-4)$$

$$s_3 = ({}_0D_t^{1/4} + \lambda_3)e_3(t) \quad (56-4)$$

مانند روند طراحی بیان شده در گام اول و دوم در این قسمت هم با جایگذاری رابطه خطا در رابطه سطح لغزش و گرفتن مشتق از آن خواهیم داشت:

$$Ds_3 = D^{5/4}e_3 + \lambda_3 De_3 = 0 \quad (57-4)$$

$$D^{5/4}I(t) = D^{5/4}I_d(t) - \lambda_3 De_3 \quad (58-4)$$

$$D^{2/4}I(t) = D^{2/4}I_d(t) - \lambda_3 D^{1/4}e_3 \quad (59-4)$$

سپس با جایگذاری رابطه (۳۱-۴) در رابطه (۵۹-۴) ورودی کنترلی نهایی بدست می‌آید.

$$u(t) = n(I(t) - I_b) + D^{2/4}I_d(t) - \lambda_3 D^{1/4}e_3 - k_3 D^{-3/4} \tanh(s_3) \quad (60-4)$$

اثبات پایداری گام سوم:

با در نظر گرفتن تابع منتخب لیاپانوف به صورت رابطه (۶۱-۴) :

$$V = \frac{1}{2} s_3^2 \quad (61-4)$$

$$\dot{V} = s_3 \dot{s}_3 = s_3 (D^{3/4} (D^{2/4} I(t)) - D^{5/4} I_d + \lambda_3 De_3) \quad (62-4)$$

و جایگذاری روابط (۳۱-۴) و (۶۰-۴) در رابطه (۶۲-۴) و ساده‌سازی مشتق تابع لیاپانوف خواهیم داشت:

$$\dot{V} = s_3 (-k \tanh(s_3)) \leq 0 \quad (63-4)$$

۴-۶-۱- نتایج شبیه‌سازی

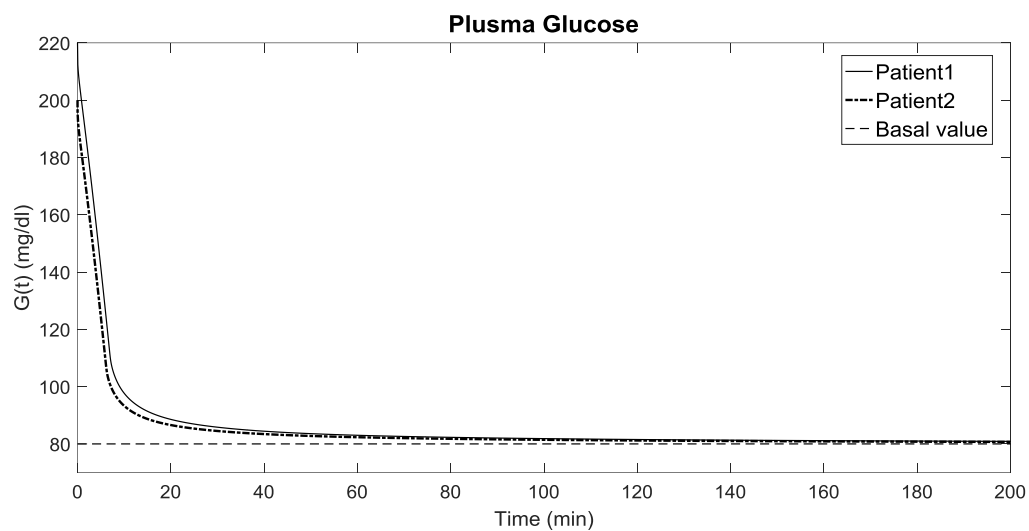
نتایج شبیه‌سازی برای کنترل‌کننده پیشنهادی با توجه به پارامترهای دو بیمار مختلف در جدول ۳-۴ و پارامترهای کنترل‌کننده پیشنهادی مبتنی بر روش سعی و خطا در جدول ۴-۴، جهت نشان دادن مقاوم بودن کنترل‌کننده پیشنهادی در برابر تغییر پارامترها در ادامه آورده شده است.

جدول ۳-۴ پارامترهای بیمار [۵۰]

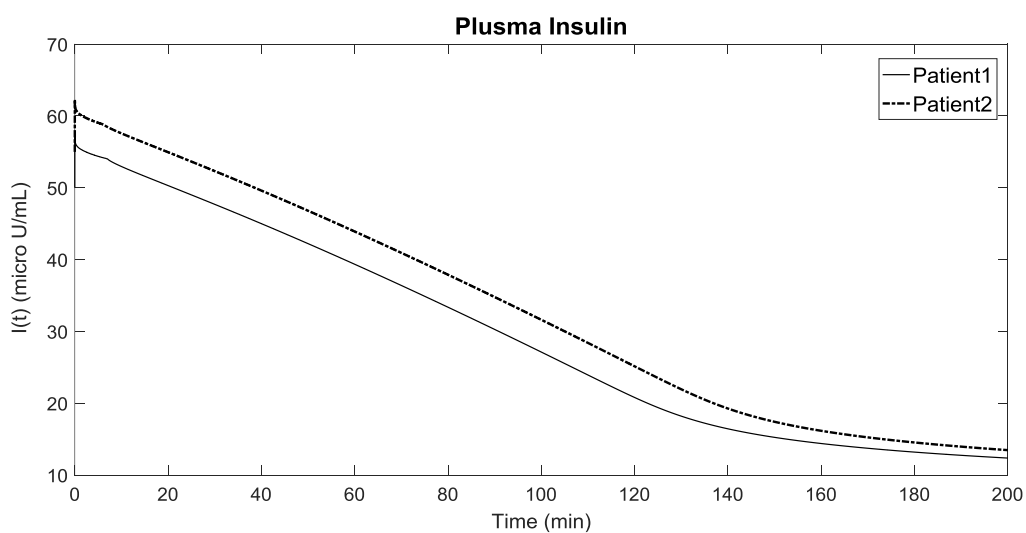
پارامترها	بیمار ۱	بیمار ۲
P_1	۰	۰
P_2	۰,۰۲	۰,۰۱۲۳
P_3	۰,۰۰۰۰۰۵۳	۰,۰۰۰۰۰۸۲
n	۰,۳	۰,۲۶۵۹
h	۷۸	۷۷,۵۷۸۳
γ	۰	۰
G_b	۷۰	۷۰
I_b	۷	۷
G_0	۲۲۰	۲۰۰
I_0	۵۰	۵۵

جدول ۴-۴ پارامترهای کنترل‌کننده پیشنهادی

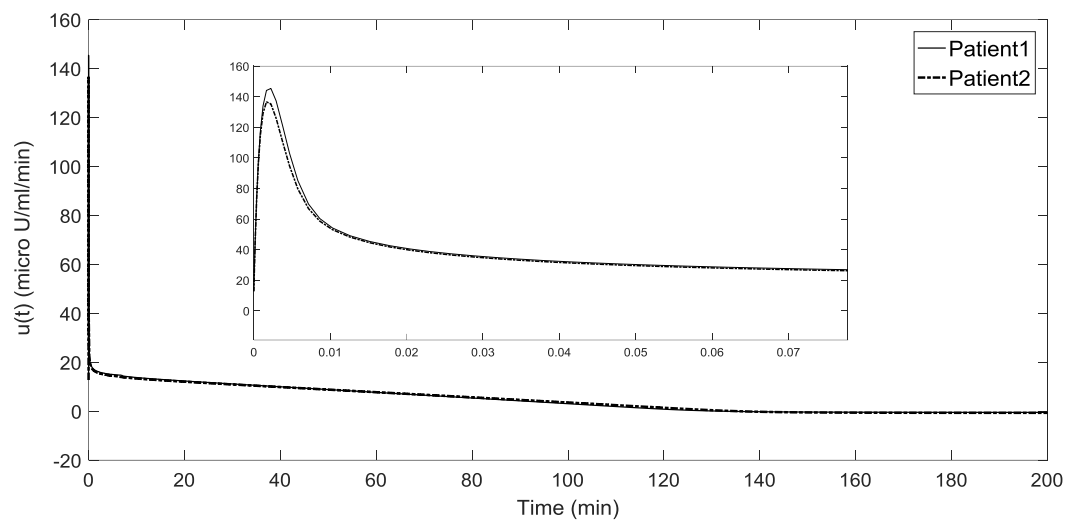
$\lambda_1 = ۰,۱$	$\lambda_2 = ۰,۰۱$	$\lambda_3 = ۰,۰۳$
$k_1 = ۱۰$	$k_2 = ۰,۱$	$k_3 = ۰,۱$



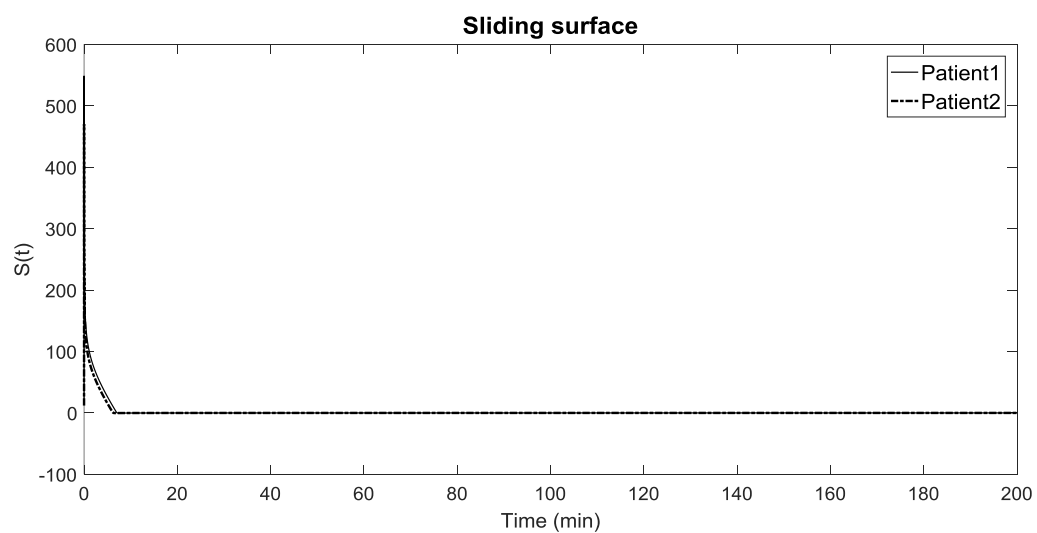
شکل ۴-۱۷ سطح گلوکز خون با کنترل کننده پیشنهادی



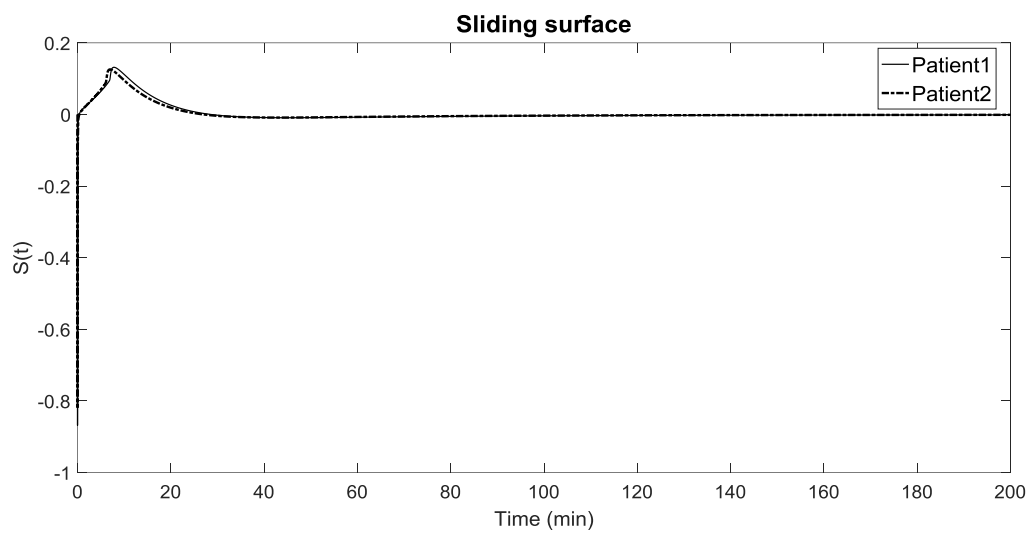
شکل ۴-۱۸ غلظت انسولین پلاسما با کنترل کننده پیشنهادی



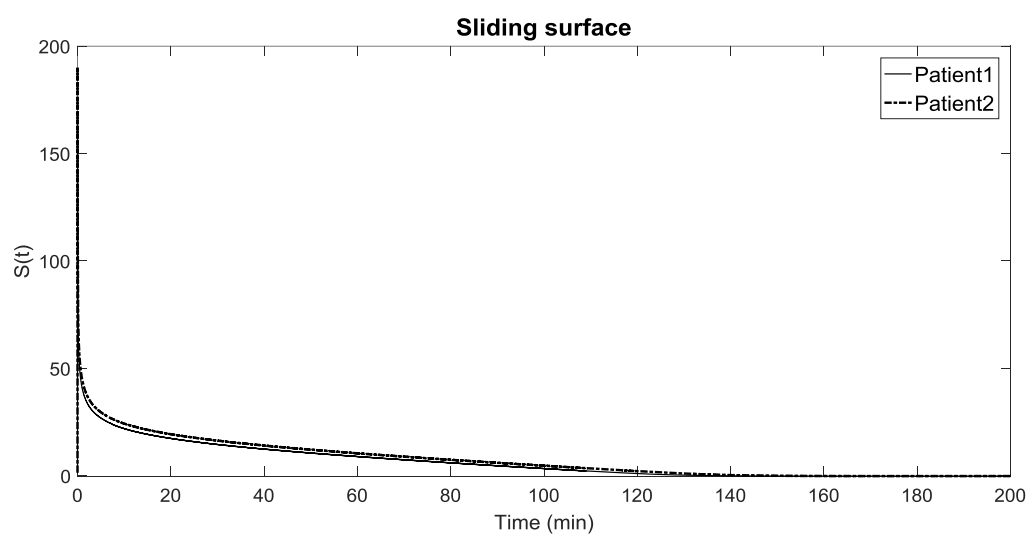
شکل ۴-۱۹ آهنگ تزریق انسولین با کنترل کننده پیشنهادی



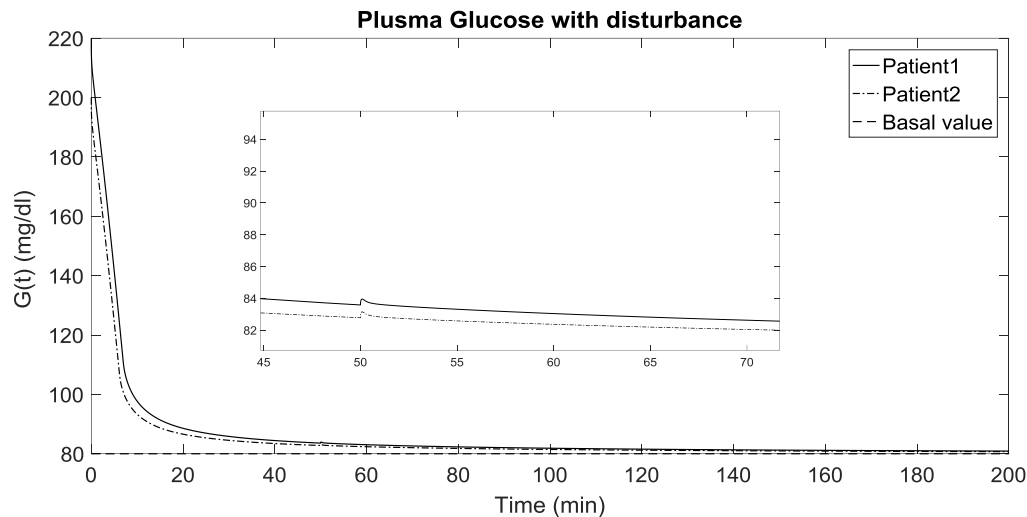
شکل ۴-۲۰ سطح لغزش گام اول در کنترل کننده پیشنهادی



شکل ۴-۲۱ سطح لغزش گام دوم در کنترل کننده پیشنهادی



شکل ۴-۲۲ سطح لغزش گام سوم در کنترل کننده پیشنهادی



شکل ۴-۲۳ سطح گلوکز خون در حضور اغتشاش

همانطور که در شکل ۴-۲۳ مشخص است کنترل کننده مرتبه کسری پیشنهادی عملکرد مقاوم تری نسبت به سایر کنترل کننده های طراحی شده در برابر اغتشاش دارد به این معنا که ضمن تغییرات ناچیزی در سطح گلوکز در زمان کمتری نیز به مقدار نرمال همگرا می شود.

۴-۷ جمع بندی

در این فصل با بهره گیری از مفاهیم بیان شده در فصل سوم در ارتباط با نظریه مود لغزشی و معادلات دیفرانسیل کسری، کنترل کننده مود لغزشی کسری برای سیستم انسولین-گلوکز در دو حالت صحیح و کسری طراحی شد. نتایج شبیه سازی ها نشان داد، حالت های سیستم با اعمال کنترل کننده های کسری در مقایسه با کنترل کننده های صحیح که در فصل سوم نتایج آن ها نشان داده شد، طی زمان کمتری به مقدار مطلوب همگرا می شوند. همچنین عملکرد مقاوم کنترل کننده های فوق در برابر اغتشاش و تغییرات پارامترها نیز بر اساس نتایج به اثبات رسید.

فصل پنجم

نتایج و پیشنهادها

۵-۱- نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه عوامل بروز بیماری دیابت و انواع راهبردهای کنترلی جهت کنترل این بیماری مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به اهمیت کنترل دیابت و جلوگیری از عوارض بلند مدت آن در فصل اول به معرفی ساختار کلی سیستم انسولین-گلوکز و انواع مختلف راهبردهای کنترلی حلقه باز و حلقه بسته جهت کنترل دقیق و پایدار سطح گلوکز خون پرداخته شد. در فصل دوم اصول کلی حاکم بر حسابان مرتبه کسری، انواع کنترل‌کننده‌ها و روش‌های تقریب عملگرهای کسری در این حوزه بیان گردید.

معرفی روش مود لغزشی به عنوان روشی کارآمد در کنترل سیستم غیرخطی انسولین-گلوکز که پارامترهای آن در افراد مختلف متفاوت است در فصل سوم صورت پذیرفت. مقاوم بودن کنترل‌کننده‌های طراحی شده بر اساس روش مود لغزشی در برابر تغییرات پارامترهای مدل و اغتشاش از جمله مهم‌ترین نقاط قوت این کنترل‌کننده‌ها به شمار می‌آید. نتایج حاصل از اعمال برخی از انواع کنترل‌کننده‌های مود لغزشی صحیح به سیستم در فصل سوم نشان داده شد. در این بین کنترل‌کننده مود لغزشی ترمینال صحیح با توجه به سطح لغزش غیرخطی آن کم‌ترین زمان همگرایی سطح گلوکز به مقدار نرمال را در میان کنترل‌کننده‌های طراحی شده به خود اختصاص داد.

در فصل چهارم کنترل‌کننده مود لغزشی کسری با ترکیب نظریه مود لغزشی با حسابان کسری طراحی شد. سیستم بدن انسان جز سیستم‌های بیولوژیک حافظه‌دار است بنابراین استفاده از حسابان کسری در بیان معادلات ریاضی سیستم دقت نتایج شبیه‌سازی را بالا برده و به شرایط واقعی نزدیک‌تر است. همچنین دامنه گسترده‌ای که در انتخاب مرتبه مشتق، انتگرال و حتی مرتبه معادلات حالت سیستم وجود دارد این امکان را فراهم کرده است که بتوان کنترل‌کننده‌هایی با آزادی عمل بیشتر در جهت عملکرد مورد نظر سیستم طراحی کرد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های فصل چهارم نشان داد کنترل‌کننده‌های کسری در مقایسه با حالت صحیح زمان همگرایی را کاهش می‌دهند. کنترل‌کننده مود لغزشی صحیح در بهترین شرایط با روش مود لغزشی ترمینال، سطح گلوکز را در مدت زمان تقریباً ۴۰۰ دقیقه به مقدار مطلوب رساند حال آنکه کنترل‌کننده کسری پیشنهادی توانست این زمان را تا تقریباً

۱۰۰ دقیقه با وجود ورودی کنترلی مجاز کاهش دهد. این مساله در سیستمی مانند بدن انسان که سرعت پاسخ در آن مطرح می‌باشد بسیار حایز اهمیت است و عملکرد سیستم را به شرایط مطلوب نزدیک‌تر می‌کند. همچنین بر اساس نتایج، کنترل‌کننده‌های کسری در مقایسه با کنترل‌کننده‌های صحیح با روش مود لغزشی عملکرد مقاوم‌تری در برابر اغتشاش از خود نشان می‌دهند این امر موجب می‌شود تا سطح گلوکز خون بر اثر مصرف غذا تغییرات کمتری داشته باشد و در زمان کمتری به حالت طبیعی برسد.

۵-۲- پیشنهادها

- ۱- استفاده از سایر مدل‌های ریاضی به طور مثال مدل با در نظر گرفتن تاخیر زمانی جهت توصیف دقیق‌تر عملکرد سیستم.
- ۲- الگوریتم‌های مقاوم دیگری مانند الگوریتم فازی و تطبیقی در زمینه کنترل سیستم انسولین-گلوکز مطرح شده است پیشنهاد الگوریتم‌های ترکیبی با دیفرانسیل کسری می‌تواند در جهت کنترل بهتر سیستم موثر واقع شود.
- ۳- طراحی کنترل‌کننده برای مرتبه‌های مختلف سیستم و سطوح لغزش متفاوت به منظور بررسی تفاوت عملکرد آن‌ها انجام شود.
- ۴- علاوه بر مصرف غذا، نویز سنسورها نیز به عنوان اغتشاش وارد شده به سیستم در نظر گرفته شود.
- ۵- در این پایان‌نامه طراحی پارامترهای کنترل‌کننده براساس روش آزمون و خطا صورت پذیرفت. استفاده از الگوریتم‌های تکاملی در تعیین ضرایب بهینه کنترل‌کننده‌ها می‌تواند مناسب باشد.

پیوست

تعیین حدود پارامترهای الگوریتم فراپیشی

با در نظر گرفتن معادله سیستم به صورت زیر:

$$\dot{X}(t) = f(X, t) + b(t)u(t) + d(t) \quad (1-1)$$

هدف کنترلی رساندن حالتها به $s = s^* = 0$ در زمان محدود است. بر همین اساس با گرفتن مشتق

مرتبه اول و مشتق مرتبه دوم از سطح لغزش داریم:

$$\dot{s}(X) = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial X} (f(X, t) + b(t)u(t) + d(t)) \quad (2-1)$$

$$\ddot{s}(X) = \frac{\partial \dot{s}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{s}}{\partial X} (f(X, t) + b(t)u(t) + d(t)) + \frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \dot{u}(t) \quad (3-1)$$

ضمن در نظر گرفتن مقادیر مثبت $\phi, \Gamma_{\min}, \Gamma_{\max}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial \dot{s}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{s}}{\partial X} (f(X, t) + b(t)u(t) + d(t)) + \frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \dot{u}(t) \right| < \phi \\ 0 \leq \Gamma_{\min} \leq \left| \frac{ds}{du} \right| \leq \Gamma_{\max} \end{array} \right. \quad (4-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\alpha_1 |s|^{1/2} \text{sign}(s) + v \\ v^* = -\beta_1 \text{sign}(s) \end{array} \right. \quad (5-1)$$

حدود پارامترهای C_1 و C_2 به صورت زیر بدست می آید.

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 > \frac{\phi}{\Gamma_{\min}} \\ \alpha_1^2 \geq \frac{4\phi}{\Gamma_{\min}^2} \frac{\Gamma_{\max}(C_2 + \phi)}{\Gamma_{\min}(C_2 - \phi)} \end{array} \right. \quad (6-1)$$

منابع و مراجع:

- [1] Kaveh, P. and Y.B. Shtessel, *Blood glucose regulation using higher-order sliding mode control*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2008. 18(4-5): p. 557-569.
- [2] Yadav, J., A. Rani, and V. Singh, *Performance Analysis of Fuzzy-PID Controller for Blood Glucose Regulation in Type-1 Diabetic Patients*. Journal of medical systems, 2016.
- [3] Lunze, K., et al., *Blood glucose control algorithms for type 1 diabetic patients: A methodological review*. Biomedical Signal Processing and Control, 2013
- [4] Steil, G., A. Panteleon, and K. Rebrin, *Closed-loop insulin delivery—the path to physiological glucose control*. Advanced drug delivery reviews, 2004.
- [5] Friis-Jensen, E. *Modeling and simulation of glucose-insulin metabolism*. in Congress Lyngby. 2007.
- [6] Aicha, H. and A. Mourad. *H-infinity controller design for blood glucose regulation in diabetes patients in the presence of uncertain parameters*. in Control, Engineering & Information Technology (CEIT), 2015 3rd International Conference on. 2015. IEEE.
- [7] Makroglou, A., J. Li, and Y. Kuang, *Mathematical models and software tools for the glucose-insulin regulatory system and diabetes: an overview*. Applied numerical mathematics, 2006. 56(3-4): p. 559-573.
- [8] Taylor, R., *Type 2 Diabetes*. Diabetes care, 2013. 36(4): p. 1047-1055.
- [9] Fisher, M.E., *A semiclosed-loop algorithm for the control of blood glucose levels in diabetics*. IEEE transactions on biomedical engineering, 1991. 38(1): p. 57-61.
- [10] Parker, R.S., F.J. Doyle, and N.A. Peppas, *The intravenous route to blood glucose control*. IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine, 2001. 20(1): p. 65-73.
- [11] Marchetti, G., et al., *A feedforward–feedback glucose control strategy for type 1 diabetes mellitus*. Journal of process control, 2008. 18(2): p. 149-162.
- [12] Lunze, K., et al., *Blood glucose control algorithms for type 1 diabetic patients: A methodological review*. Biomedical Signal Processing and Control, 2013. 8(2)
- [13] Weissberg-Benchell, J., J. Antisdel-Lomaglio, and R. Seshadri, *Insulin pump therapy*. Diabetes care, 2003. 26(4): p. 1079-1087.
- [14] Gonder-Frederick, L.A., et al., *Psychology, technology, and diabetes management*. American Psychologist, 2016. 71(7): p. 577.
- [15] Fang, Q., L. Yu, and P. Li, *A new insulin-glucose metabolic model of type 1 diabetes mellitus: An in silico study*. Computer methods and programs in biomedicine, 2015.
- [16] Steil, G.M., *Algorithms for a closed-loop artificial pancreas: the case for proportional-integral-derivative control*. Journal of diabetes science and technology, 2013
- [17] Goharimanesh, M., A. Lashkaripour, and A. Abouei Mehrizi, *Fractional order PID controller for diabetes patients*. Journal of Computational Applied Mechanics, 2015.
- [18] Hovorka, R., et al., *Nonlinear model predictive control of glucose concentration in subjects with type 1 diabetes*. Physiological measurement, 2004. 25(4): p. 905.
- [19] Lynch, S.M. and B.W. Bequette. *Model predictive control of blood glucose in type I diabetics using subcutaneous glucose measurements*. in American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002. 2002. IEEE.
- [20] de Canete, J.F., S. Gonzalez-Perez, and J. Ramos-Diaz, *Artificial neural networks for closed loop control of in silico and ad hoc type 1 diabetes*. Computer methods and programs in biomedicine, 2012. 106(1): p. 55-66.

- [21] Campos-Delgado, D.U., et al., *Fuzzy-based controller for glucose regulation in type-1 diabetic patients by subcutaneous route*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 2006.
- [22] N'doye, I., et al., *Static output feedback $\mathcal{H}^\infty$ control for a fractional-order glucose-insulin system*. International Journal of Control, Automation and Systems, 2015. 13(4): p. 798-807.
- [23] Aicha, H. and A. Mourad. *H-infinity controller design for blood glucose regulation in diabetes patients in the presence of uncertain parameters*. in *Control, Engineering & Information Technology (CEIT), 2015 3rd International Conference on*. 2015. IEEE.
- [24] Turksoy, K., et al. *Adaptive multivariable closed-loop control of blood glucose concentration in patients with type 1 diabetes*. in *American Control Conference (ACC), 2013*. IEEE.
- [25] Monje, C.A., et al., *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*. 2010: Springer Science & Business Media.
- [26] Karanjkar, D., S. Chatterji, and P. Venkateswaran, *Trends in fractional order controllers*. International journal of emerging technology and advanced engineering, 2012. 2(3): p. 383-389.
- [27] Zhao, C., D. Xue, and Y. Chen. *A fractional order PID tuning algorithm for a class of fractional order plants*. in *Mechatronics and automation, 2005 IEEE international conference*. 2005. IEEE.
- [28] Shah, P. and S. Agashe, *Review of fractional PID controller*. Mechatronics, 2016. 38: p. 29-41.
- [29] Busłowicz, M., *Stability analysis of linear continuous-time fractional systems of commensurate order*. Journal of Automation Mobile Robotics and Intelligent Systems, 2009. 3: p. 12-17.
- [30] Xue, D., C. Zhao, and Y. Chen. *A modified approximation method of fractional order system*. in *Mechatronics and Automation, Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on*. 2006. IEEE.
- [31] Valério, D. and J.S. Da Costa, *Introduction to single-input, single-output fractional control*. IET control theory & applications, 2011. 5(8): p. 1033-1057.
- [32] Aguila-Camacho, N., M.A. Duarte-Mermoud, and J.A. Gallegos, *Lyapunov functions for fractional order systems*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. 19(9): p. 2951-2957.
- [33] Chen, Y., I. Petras, and D. Xue. *Fractional order control-a tutorial*. in *American Control Conference, 2009. ACC'09*. 2009. IEEE.
- [34] Lurie, B.J., *Three-parameter tunable tilt-integral-derivative (TID) controller*. 1994.
- [35] Slotine, J.-J.E. and W. Li, *Applied nonlinear control*. Vol. 199. 1991: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.
- [36] Bartolini, G., et al., *A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems*. International Journal of control, 2003. 76(9-10): p. 875-892.
- [37] Utkin, V., *Sliding mode control*. CONTROL SYSTEMS, ROBOTICS AND AUTOMATION—Volume XIII: Nonlinear, Distributed, and Time Delay Systems-II, 2009: p. 130.
- [38] Delavari, H., et al., *Fuzzy fractional order sliding mode controller for nonlinear systems*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010. 15(4): p. 963-978.
- [39] Becan, M.R. *Sliding Mode Control with Fuzzy Boundary Layer to Air-Air Interception Problem*. in *IEC (Prague)*. 2005.
- [40] Levant, A., *Homogeneity approach to high-order sliding mode design*. Automatica, 2005. 41(5): p. 823-830.

- [41] Levant, A. *Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers*. in *Decision and Control*, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on. 2003. IEEE.
- [42] Liu, J. and X. Wang, *Advanced Sliding Mode Control*, in *Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems*. 2011, Springer. p. 81-96.
- [43] Khan, M.K., K.B. Goh, and S.K. Spurgeon, *Second order sliding mode control of a diesel engine*. *Asian Journal of Control*, 2003. 5(4): p. 614-619.
- [44] Feng, Y., X. Yu, and F. Han, *On nonsingular terminal sliding-mode control of nonlinear systems*. *Automatica*, 2013. 49(6): p. 1715-1722.
- [45] Wu, Y., X. Yu, and Z. Man, *Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems*. *Systems & Control Letters*, 1998. 34(5): p. 281-287.
- [46] *systems*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002. 49(2): p. 261-264.
- [47] Levant, A., *Principles of 2-sliding mode design*. *automatica*, 2007. **43**(4): p. 576-586.
- [48] Polyakov, A. and A. Poznyak, *Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: "Twisting" controller for second-order sliding mode realization*. *Automatica*, 2009.
- [49] Heydarinejad, H. and H. Delavari, *Adaptive Fractional Order Sliding Mode Controller Design for Blood Glucose Regulation-4- π , π π π π π And Applications of Non-integer Order Systems*. 2017, Springer. p. 449-465.
- [50] Parsa, N.T., A. Vali, and R. Ghasemi, *Back Stepping Sliding Mode Control of Blood Glucose for Type I Diabetes*. *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Medical, Health, Biomedical, Bioengineering and Pharmaceutical Engineering*, 2014. 8(11): p. 779-783.
- [51] Dadras, S. and H.R. Momeni, *Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty*. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012. 17(1): p. 367-377.
- [52] Valério, D., *Introducing fractional sliding mode control*. *Proceedings of The Encontro de Jovens Investigadores do LAETA FEUP*, 2012.

Abstract

this thesis, by employing Bergman minimal model to describe the dynamics of glucose-insulin system, a fractional order sliding mod controller with the aim of regulate blood glucose level in a shortest possible time is designed. Simulation result show that use of fractional derivatives in the sliding mod theory while maintaining system's robust performance against disturbances and changing parameters, the time of convergence of system's trajectories into desired value reduced and improves the controller's performance.

Keywords: Insulin-Glucose Nonlinear System, Bergman Minimal Model, Sliding Mod Controller, Fractional Order Sliding Mod Controller



Shahrood University of Technology
Faculty of Electrical Engineering and Robotic
M.Sc. thesis in Control Engineering

Design of fractional order controller for fractional order insulin-glucose system

By: Parisa Turani

Supervisor:
Dr. Heydar Toosian Shandiz

October 2017