





دانشکده مهندسی برق و رباتیک

گروه کنترل

کنترل تطبیقی سیستم‌های تکین غیرخطی خودگردان

دانشجو: آریتا آذر فر

استاد راهنما: دکتر حیدر طوسی‌ان شاندیز

استاد مشاور: دکتر مسعود شفیعی

رساله جهت اخذ درجه دکتری

بهمین ۹۲



مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره ۱۲

باسمه تعالی

شماره :
تاریخ :
ویرایش :

صورت جلسه دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود آقای/خانم آزیتا آذر فر دانشجوی دکتری رشته کنترل به شماره دانشجویی ۸۸۱۸۳۶۵ ورودی سال ۱۳۸۸ در تاریخ ۹۲/۱۱/۱۶ از رساله خود با عنوان :

..... کنترل تطبیقی سیستم های تکین غیر خطی خودگردان

دفاع و با اخذ نمره ۱۹/۰۲ به درجه : عالی نائل گردید.

- | | |
|---|---|
| ☐ (ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷ | ☒ (الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ |
| ☐ (د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد | ☐ (ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵ |
| | ☐ (ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد |

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
	دکتر محمد طوسین شاد	استاد / اساتید راهنما	دانشیار	
	دکتر —	مشاور / مشاورین		
	دکتر ابوالفضل رفیعی	استاد مدعو داخلی (خارجی)	دانشیار	
	دکتر محمد حسن فاتح	استاد مدعو داخلی / خارجی	استاد	
	دکتر محسن اکبرزاده کلات	استاد مدعو داخلی / خارجی	استادیار	
	دکتر حسن مکی زاده	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید.

تاریخ و امضاء:

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران: علی حسن

پاس فراوان از از زحمات بی دریغ استاد محترم جناب آقای دکتر طویان شاندیز که موضوع زیبا و جدید سیستم های تکین را به من

معرفی نموده و، همواره راهنمای کارم بودند و در تمام مراحل این پایان نامه مرایای نمودند و تشکر فراوان از استاد محترم جناب آقای دکتر

شفیعی که با تمامی مشغله کاری ما را در انجام این رساله یاری رسانند.

و با پاس از زحمات برادر عزیزم دکتر آرش آذفر که پیوسته در کنارم بود و در امر تدوین و ترجمه مقالات ما را یاری رساند و تکیه گاه من در

مواجهه با مشکلات، و وجودش مایه دلگرمی من می باشد.

پروردگار:

نه ميتوانم موباشان را كه در راه عزت من سفيد شد، سياه كنم و نه براي دستاي پينه بسته شان كه ثمره تلاش براي افتخار من است، مرهبي دارم. پس توفيقم

ده كه هر خطه شكر گزارشان باشم و ثاينه هاي عرم را در عصاي دست بودنشان بگذرانم.

تقديم به

پدرم كه عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگي، استادگي را تجربه نمايم

و به مادرم، درياي بي کران فداكاري و عشق كه وجودم برايش همه رنج بود و وجودش براي من همه مهر

و به

همسرم، اسطوره زندگيم، پناه خستگيم و اميد بودنم

تعهد نامه

اینجانب از دانشجوی دوره دکتری رشته دانشگاه مهندسی برق و رباتیک

دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله دکتری با عنوان :

کنترل تطبیقی سیستم های تدین غیر خطی خود دراز

تحت راهنمایی آقای دکتر متعهد می شوم :

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است .

تاریخ :

امضاء دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

هدف از این رساله، حل مسئله کنترل تطبیقی سیستم‌های تکین است. سیستم‌هایی که معادلات جبری و دینامیکی را به طور همزمان دارا می‌باشند، سیستم‌های تکین می‌نامند. در این رساله ابتدا سعی شده است مشخصات و رفتار سیستم‌های تکین و اهداف کنترلی خاص این‌گونه سیستم‌ها مورد بحث قرار گیرد. روش‌ها و تحلیل‌های مختلف پایداری و مجاز بودن سیستم توضیح داده شده است و هدف بر آنست تا روش‌های کنترلی بر اساس این قضایای پایداری استخراج شود. اکثر روش‌هایی که تا کنون به کنترل سیستم‌های تکین پرداخته‌اند، روش‌های وابسته به مدل بوده است. لذا در این رساله برآنیم تا روش‌های کنترل تطبیقی را برای سیستم‌های تکین توسعه دهیم. کلیه روش‌های تطبیقی ارائه شده در این رساله برای سیستم‌های تکین خطی و غیرخطی، نوآوری رساله می‌باشد. در ابتدا یک روش پس‌خورد حالت تطبیقی برای مجاز سازی سیستم‌های تکین خطی تک ورودی ارائه شده است. سپس روش پیشنهادی برای سیستم‌های چند متغیره و حل مسئله ردگیری سیستم‌های تکین خطی تعمیم داده می‌شود. پایداری سیستم حلقه بسته بر اساس قضیه پایداری لیاپانوف تضمین می‌شود. در ادامه اثبات می‌کنیم که می‌توان کنترل‌کننده پیشنهادی را با اندکی تغییر در قانون تطبیق، برای مجازسازی و ردگیری سیستم‌های تکین غیرخطی که در آن بخش غیرخطی مدل شرط لپشیتز را ارضا می‌کند، نیز به کار ببریم. کنترل پیشنهادی ساختار ساده و عملی دارد. در ادامه یک روش کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیرخطی ارائه شده است. در ابتدا فرض می‌کنیم که میزان تکین بودن یا شاخص مدل مرجع و سیستم تحت کنترل یکسان باشد و در پایان کنترل‌کننده تطبیقی مدل مرجع پیشنهادی را برای ردگیری مدل‌های تکین با شاخص متفاوت تعمیم می‌دهیم. تمامی سیستم‌های غیرخطی مطرح شده در این رساله از نوع افاین¹ می‌باشند و ورودی‌های سیستم به صورت جمله غیرخطی در معادلات مدل ظاهر

¹ Affine

نمی‌شوند. در هر بخش، برای بررسی بهتر رفتار کنترل‌کننده‌های پیشنهاد شده، شبیه‌سازی بر روی

سیستم‌های تکین مختلف انجام گرفته‌است. نتایج شبیه‌سازی تاییدی بر کارایی کنترل‌کننده‌ها می‌باشد.

کلمات کلیدی- سیستم‌های تکین، کنترل تطبیقی، کنترل مدل مرجع، سیستم‌های تکین غیرخطی، کنترل سیستم‌های تکین

لیست مقالات مستخرج از رساله

1- A. Azarfar, H. Toossian Shandiz, M. Shafiee , “Adaptive feedback control for linear singular systems”, *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, vol. 22, pp. 132 – 142, 2014

2- A. Azarfar, H. Toossian Shandiz, M. Shafiee,” Adaptive Control for Nonlinear Singular Systems”, *Information technology and control*.accepted 20.1.2014.

۳- آ. آذر فر ، ح. طوسی‌ان شاندیز، م. شفیع‌ی ، " کنترل تطبیقی سیستم‌های سینگولار چند متغیره با کاربرد در کاربرد در کنترل ربات تحت قید " ، مجله مکانیک شاره‌ها و سازه‌ها دانشگاه صنعتی شاهرود / دوره ۲ / شماره ۴ / صفحه ۳۷-۴۶ ، سال ۱۳۹۱.

۴- آ. آذر فر ، ح. طوسی‌ان شاندیز، م. شفیع‌ی ، " کنترل سیستم‌های سینگولار خطی به کمک فیدبک حالت تطبیقی " ، بیست و یکمین کنفرانس مهندسی برق ایران (icee2013) ، دانشگاه فردوسی مشهد. ۱۳۹۲

۵- آ. آذر فر ، ح. طوسی‌ان شاندیز، م. شفیع‌ی ، " کنترل مدل مرجع سیستم سینگولار غیر خطی " ، سومین کنفرانس کنترل و ابزار دقیق (ICCIA 2014) ، دانشگاه امیرکبیر دی ماه ۱۳۹۲.

فهرست

فصل اول	۲
۱-۱ مقدمه	۲
۲-۱ - اهمیت و کاربرد سیستم‌های تکین	۴
۳-۱ - مروری بر تاریخچه سیستم‌های تکین	۶
۴-۱ - کنترل سیستم‌های تکین	۹
۴-۱ - اهمیت کنترل تطبیقی سیستم‌های تکین	۱۱
۵-۱ - ساختار ادامه رساله	۱۵
فصل دوم - معرفی سیستم‌های تکین	۱۸
۱-۲ مقدمه	۱۸
۲-۲ ساختار سیستم‌های تکین	۱۸
۳-۲ مفاهیم حل‌پذیری و شاخص سیستم‌های تکین	۲۱
۱-۳-۲ - شاخص مشتقی سیستم تکین	۲۴
۲-۳-۲ - حل پذیری و شاخص در سیستم‌های تکین خطی	۲۸
۴-۲ - پایداری و مجاز بودن سیستم‌های تکین	۳۷
۱-۴-۲ - پایداری و مجاز بودن سیستم‌های خطی	۴۱
۵-۲ کاهش شاخص سیستم	۴۳
۶-۲ اهمیت کنترل پس‌خورد در سیستم‌های تکین	۴۴
۷-۲ - جمع‌بندی	۴۵
فصل سوم - طراحی کنترل‌کننده تطبیقی برای سیستم‌های تکین خطی	۴۸
۱-۳ - مقدمه	۴۹
۲-۳ - مجاز سازی سیستم تکین خطی به کمک کنترل تطبیقی	۴۹
۱-۲-۳ - شبیه سازی	۵۳
۳-۳ - ردگیری کامل حالت برای سیستم تکین خطی تک ورودی به کمک کنترل تطبیقی	۵۴

۳-۳-۱- شبیه سازی الف	۶۰
۳-۳-۲- شبیه سازی ب - مدل تکین موتور DC	۶۴
۳-۴-۴- طراحی کنترل تطبیقی برای ردگیری حالت سیستم‌های تکین خطی چندمتغیره	۶۹
۳-۴-۱- شبیه سازی کنترل برروی بازوی ربات تمیزکار	۷۳
۳-۵- جمع بندی	۸۴
فصل چهارم- طراحی کنترل کننده تطبیقی برای سیستم‌های تکین غیرخطی لپشیتز	۸۷
۴-۱- مقدمه	۸۷
۴-۲- بیان مسئله و فرض‌های اولیه	۸۷
۴-۳- طراحی کنترل کننده تطبیقی برای مجاز سازی سیستم‌های تکین غیرخطی لپشیتز تک ورودی	۸۹
۴-۴- طراحی کنترل کننده تطبیقی برای ردگیری کامل حالت سیستم‌های تکین غیرخطی لپشیتز چند متغیره	۹۲
۴-۵- شبیه‌سازی برروی مدل تکین ربات سیار	۹۶
۴-۶- جمع‌بندی	۱۰۴
فصل پنجم- طراحی کنترل کننده تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیرخطی	۱۰۶
۵-۱- مقدمه	۱۰۶
۵-۲- بیان مسئله و فرضیات	۱۰۶
۵-۳- طراحی کنترل کننده مدل مرجع پایه	۱۰۸
۵-۴- طراحی کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیرخطی (کنترل الف)	۱۱۱
۵-۵- طراحی کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیرخطی با فرض نامعلوم بودن ماتریس E (کنترل ب)	۱۱۴
۵-۶- شبیه‌سازی روش مدل مرجع	۱۱۷
۵-۶-۱- شبیه‌سازی الف	۱۱۹
۵-۶-۲- شبیه‌سازی ب	۱۲۲
۵-۷- جمع بندی	۱۲۵
فصل ششم- نتایج و پیشنهادات	۱۲۷
۶-۱- نتایج	۱۲۷

- ۶-۲- پیشنهادات ۱۲۹
- پیوست الف- حساب ماتریس ها ۱۳۳
- الف- ۱- بُرد ماتریس ۱۳۳
- الف- ۲- فضای پوچ ماتریس ۱۳۳
- الف- ۳- ماتریس پوچ توان ۱۳۳
- پیوست ب- ضرب کرونکر (ضرب مستقیم یا ضرب تنسوری) ۱۳۴
- منابع ۱۳۷

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ - ساختار کلی کنترل تطبیقی ۱۳
- شکل ۱-۲ مدل ساده آونگ ۲۶
- شکل ۲-۲- مدار الکتریکی مثال ۳-۲ ۳۵
- شکل ۱-۳ کنترل مجاز سازی سیستم تکین خطی تک ورودی ۵۳
- شکل ۲-۳ - پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم. هر سه متغیر به سمت صفر همگرا شده‌اند. ۵۶
- شکل ۳-۳ - همگرایی پارامترهای تحت تنظیم θ به یک مقدار ثابت که می‌تواند تخمینی از بردار θ^* باشد. ۵۶
- شکل ۴-۳- ورودی کنترلی اعمال شده به سیستم تکین ۵۷
- شکل ۵-۳ - سیستم کنترل تطبیقی برای ردگیری حالت سیستم تکین خطی ۶۰
- شکل ۶-۳- ردگیری متغیرهای حالت سیستم تکین نمونه از مسیر مطلوب (شبیه سازی الف) ۶۲
- شکل ۷-۳- خطای ردگیری متغیرهای سیستم تکین نمونه از مسیرمطلوب (شبیه سازی الف) ۶۲
- شکل ۸-۳- همگرایی پارامترهای تحت تنظیم بردار θ_1 در شبیه سازی الف ۶۳
- شکل ۹-۳- همگرایی پارامترهای تحت تنظیم بردار θ_2 در شبیه سازی الف ۶۳
- شکل ۱۰-۳- ورودی کنترلی اعمال شده به سیستم نمونه برای ردگیری حالت. u_d هزینه ردگیری پیش‌بینی شده می‌باشد که به صورت ریاضی با هدف مقایسه محاسبه شده است. (شبیه سازی الف) ۶۴
- شکل ۱۲-۳- مدلی ساده از موتور DC ۶۵
- شکل ۱۳-۳- ردگیری متغیرهای حالت موتور از مسیر مطلوب در شبیه سازی ب. ۶۷
- شکل ۱۴-۳- خطای ردگیری متغیرهای موتور در شبیه‌سازی ب ۶۸
- شکل ۱۵-۳- همگرایی پارامترهای تحت تنظیم بردار θ_1 در شبیه سازی ب ۶۸
- شکل ۱۶-۳- همگرایی پارامترهای تحت تنظیم بردار θ_2 در شبیه سازی ۶۹
- شکل ۱۷-۳- ولتاژ ورودی (ورودی کنترل) موتور در شبیه سازی ب ۶۹
- شکل ۱۸-۳- سیستم کنترل تطبیقی برای ردگیری حالت سیستم تکین خطی چند متغیره. ۷۲
- شکل ۱۹-۳- مدل ساده شده ربات در فضای دوبعدی [۲۶] ۷۳
- شکل ۲۰-۳- ردگیری متغیرهای حالت δz از مسیر مطلوب در سیستم کنترل ربات تمیزکار ۷۹
- شکل ۲۱-۳- متغیرهای $\delta \mu$ در سیستم کنترل ربات تمیزکار ۷۹
- شکل ۲۲-۳- خطای ردگیری در سیستم کنترل ربات تمیزکار ۸۰
- شکل ۲۳-۳- حرکت نقطه انتهایی ربات در مختصات دکارتی ۸۰
- شکل ۲۴-۳- گشتاور کنترلی اعمال شده به مفاصل در سیستم کنترل ربات تمیزکار ۸۱
- شکل ۲۵-۳- اغتشاش اعمال شده به متغیر حالت x در شبیه‌سازی دوم سیستم کنترل ربات تمیزکار ۸۲

- شکل ۳-۲۶- ردگیری متغیرهای حالت δz از مسیر مطلوب در حضور اغتشاش و نامعینی در سیستم کنترل ربات تمیزکار ۸۲
- شکل ۳-۲۷- متغیرهای $\delta \mu$ در حضور اغتشاش و نامعینی در سیستم کنترل ربات تمیزکار ۸۳
- شکل ۳-۲۸- خطای ردگیری در حضور اغتشاش و نامعینی در پارامترها در سیستم کنترل ربات تمیزکار ۸۳
- شکل ۳-۲۹- ورودی کنترلی در حضور اغتشاش و نامعینی در سیستم کنترل ربات تمیزکار ۸۴
- شکل ۴-۱- مدل ساده‌ای از ربات سیار ۹۷
- شکل ۴-۲- ردگیری مسیر مطلوب دایره‌ای توسط ربات سیار در صفحه (X, Y) . ربات یک دایره به قطر ۱۰ متر را می‌پیماید. ۱۰۰
- شکل ۴-۳- پاسخ زمانی متغیرهای X, Y ربات در مقایسه با مقادیر مطلوب ۱۰۱
- شکل ۴-۴- خطای ردگیری متغیرهای X, Y در سیستم کنترل ربات سیار. خطای ردگیری کمتر از ۰/۲ متر است. ۱۰۱
- شکل ۴-۵- جهت حرکت ربات (φ) در مقایسه با جهت مطلوب (φ_d) ۱۰۲
- شکل ۴-۶- ورودی کنترلی اعمال شده به سیستم ربات سیار. ورودی u نیروی جلوبرنده در واحد نیوتن است و ورودی u_2 فرمان گشتاور چرخش ربات در واحد نیوتن-متر است. ۱۰۲
- شکل ۴-۷- همگرایی پارامترهای تحت تنظیم در سیستم کنترل ربات سیار، ماتریس θ ۱۰۳
- شکل ۴-۸- همگرایی پارامترهای تحت تنظیم در سیستم کنترل ربات سیار، ماتریس θ_2 ۱۰۳
- شکل ۵-۱- سیستم کنترل مدل مرجع پایه برای سیستم‌های تکین غیر خطی ۱۱۱
- شکل ۵-۲- سیستم کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیر خطی (کنترل الف) ۱۱۴
- شکل ۵-۳- سیستم کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیر خطی با فرض نامعلوم بودن ماتریس E (کنترل ب) ۱۱۸
- شکل ۵-۴- ردگیری متغیر x_1 سیستم تکین غیر خطی نمونه از حالت x_{m1} در مدل مرجع اول با استفاده از روش کنترل الف. ماتریس E در هر دو سیستم تحت کنترل و سیستم مرجع یکسان است. ۱۲۰
- شکل ۵-۵- ردگیری متغیر x_2 سیستم تکین غیر خطی نمونه از حالت x_{m2} در مدل مرجع اول با استفاده از روش کنترل الف. ماتریس E در هر دو سیستم تحت کنترل و سیستم مرجع یکسان است. ۱۲۰
- شکل ۵-۶- خطای ردگیری در شبیه‌سازی الف ۱۲۱
- شکل ۵-۷- هزینه کنترل در شبیه‌سازی الف ۱۲۱
- شکل ۵-۸- ردگیری متغیر x_1 سیستم تکین غیر خطی نمونه از حالت x_{m1} در مدل مرجع دوم با استفاده از روش کنترل ب. سیستم مرجع یک سیستم غیر تکین است. ۱۲۳
- شکل ۵-۹- ردگیری متغیر x_2 سیستم تکین غیر خطی نمونه از حالت x_{m2} در مدل مرجع دوم با استفاده از سیستم کنترل ب. ۱۲۳
- شکل ۵-۱۰- خطای ردگیری در شبیه‌سازی ب ۱۲۴
- شکل ۵-۱۱- ورودی کنترلی در شبیه‌سازی ب. ۱۲۴

علائم و اختصارات

سیستم‌های دیفرانسیلی جبری	DAE
سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی	ODE
رتبه ماتریس A	$\text{Rank}(A)$
برد ماتریس A	$R(A)$
فضای پوچ ماتریس A	$N(A)$
مجموعه تمامی توابعی می‌باشد که n بار مشتق پذیر است	C^n
$\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2}$	$\mathbf{f}_{2;x_2}$
$B_\delta = \{x \in R^n \mid \ x\ \leq \delta\}$	B_δ
ضرب کرونکر	$\otimes$
دترمینان ماتریس A	$ A $
نرم اقلیدسی ماتریس A	$\ A\ $
بردار ستونی از تمام اعضای ماتریس A است به صورتی که تمام ستون‌های ماتریس A پشت سر هم نوشته شود	$\text{vec}(A)$

فصل اول

مقدمه

فصل اول

۱-۱ مقدمه

در دهه‌های گذشته، نظریه فضای حالت استاندارد به صورت گسترده مورد مطالعه قرار گرفته و به نتایج قابل قبولی نیز رسیده است. یک مدل فضای حالت استاندارد متناظر با تعدادی معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) می‌باشد؛ با این وجود در برخی از سیستم‌های فیزیکی از قبیل فرآیندهای شیمیایی، مدارهای الکتریکی، سیستم‌های قدرت، سیستم‌های سیاسی و اقتصادی، متغیرهای حالت ممکن است با تعدادی معادله جبری نیز به یکدیگر وابسته باشند و مدل فضای حالت معمولی نمی‌تواند برای توصیف این سیستم‌ها مورد استفاده قرار گیرد [۱, ۲]. بنابراین واقعیت، سیستم‌های عمومی‌تری به نام سیستم‌های تکین^۱ معرفی شد که معادلات جبری و دینامیکی را به طور همزمان دارا می‌باشند، بنابراین مدل سیستم محدودیت‌های دینامیکی و استاتیکی یک مدل واقعی را به طور همزمان توصیف می‌کند. سیستم‌های تکین عموماً برای مدل‌سازی سیستم‌های چند بخشی^۲ مورد استفاده قرار می‌گیرد که در آن رفتار دینامیکی هر بخش به صورت معادلات دیفرانسیل و ارتباط بین بخش‌های متفاوت با معادلات جبری بیان می‌گردد [۳]. به عنوان مثال در مدل‌سازی فرآیندهای شیمیایی، معادلات دیفرانسیل بیانگر تعادل‌های دینامیکی جرم و انرژی است در حالی که معادلات

¹ Singular systems

² Multibody

جبری بیانگر روابط تعادل ترمودینامیکی، فرض‌های حالت دائم و غیره می‌باشند [۴]. در شبکه‌های الکتریکی، قوانین KVL و KCL که ارتباط دهنده بخش‌های مختلف هستند، معادلات جبری محدود کننده را تولید می‌کنند [۵، ۶]. در سیستم‌های مکانیکی، دینامیک هر زیر سیستم با معادلات دیفرانسیل و محدودیت‌های ناشی از الحاق زیر سیستم‌ها با معادلات جبری بیان می‌شوند [۳]. معادلات یک سیستم تکین را به شکل کلی زیر می‌توان بیان نمود.

$$E\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (1-1)$$

که در آن x بردار متغیرهای حالت سیستم و u بردار ورودی‌های کنترلی است. به طور معمول رتبه^۱ ماتریس E کامل نیست. می‌توان گفت که نظریه سیستم‌های استاندارد پیشین حالت خاصی از سیستم‌های تکین می‌باشد.

سیستم‌های تکین در زمینه‌های تحقیقاتی مختلف با نام‌های گوناگونی شناخته می‌شوند. در مهندسی کنترل با توجه به تکین بودن ماتریس ضرائب مشتق‌های حالت که در (۱-۱) با نام E مشخص شده است، این سیستم‌ها با نام تکین شهرت یافته‌اند [۱، ۲، ۷-۹] و از آن جهت که تعمیمی بر سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی می‌باشند، گاهی با نام سیستم‌هایی با فضای حالت تعمیم یافته^۲ خوانده می‌شوند [۱۰-۱۲]. در بعضی از علوم مهندسی از آن جهت که این سیستم‌ها توصیف ساده‌تر و قابل درکی از خواص و رفتار سیستم‌ها ارائه می‌دهند، به نام سیستم‌های توصیف کننده^۳ شهرت دارند [۱۳-۱۶]. در علوم ریاضی و محاسبات عددی به نام سیستم‌های دیفرانسیلی جبری (DAE) معروف هستند [۳، ۱۷-۱۹]. این سیستم‌ها را گاهی با نام‌های سیستم‌های شبه حالت^۴ [۲۰، ۲۱]، و سیستم‌های منحل^۵ [۲۲] نیز می‌شناسند. در این رساله نام سیستم‌های تکین مورد استفاده قرار گرفته است.

¹ Rank

² Generalized state space systems

³ Descriptor systems

⁴ Semi state systems

⁵ Degenerate systems

در سه دهه اخیر این نوع سیستم‌ها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است و مقالات گوناگونی در مورد پاسخ سیستم‌های تکین، تحلیل و کنترل این نوع سیستم‌ها ارائه شده است که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به مراجع کلیدی [۱، ۲، ۱۳، ۲۳-۲۶] رجوع نمود.

برخی تحلیل‌های کاربردی راجع به سیستم‌های تکین نخستین بار در کتاب کمبل [۲۳] آورده شد. وی سیستم‌های تکین را با نظریه جدید معکوس دریزین بررسی و تحلیل نمود و قضایای جدیدی بیان کرد.

۲-۱ - اهمیت و کاربرد سیستم‌های تکین

از دید ریاضی، مدل تکین می‌تواند به صورت مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی و معادلات جبری که در کنار همدیگر قرار می‌گیرند فرض شود که شامل اطلاعاتی در مورد شرایط و محدودیت‌های دینامیکی و استاتیکی سیستم می‌باشد. این مزیت، مدلسازی کامل‌تر و دقیق‌تری از سیستم‌های واقعی را ممکن می‌سازد. سیستم‌های تکین در تحلیل سیستم‌های مهندسی از قبیل رباتیک [۲۷، ۲۸]، اقتصاد [۲۹، ۳۰]، سیستم‌های ابعاد وسیع^۱ [۳۱، ۳۲]، فرآیندهای شیمیایی [۴، ۱۸]، شبکه‌های الکتریکی [۱، ۲۰، ۳۳]، سیستم‌های مهندسی پزشکی [۳۴]، سیستم‌های قدرت [۳۵] و مهندسی هوافضا [۳۶] کاربرد دارند. مدل تکین می‌تواند محدودیت‌های فیزیکی و جبری که بر رفتار سیستم تاثیر گذار است را مدلسازی کند و پاسخ‌های ضربه که به طور طبیعی در خیلی از سیستم‌ها اتفاق می‌افتد را توجیه نماید، در حالی که سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی قادر به توصیف این پدیده‌ها نیستند. علاوه بر آن، توصیف بعضی سیستم‌ها با استفاده از هر دو نوع معادلات جبری و دیفرانسیلی آسان‌تر و کاهش مدل به معادلات دیفرانسیلی سخت است. مدل تکین مدل دقیق‌تری را ارائه می‌دهد، در حالی که با کاهش مدل سیستم به مدل دیفرانسیلی معمولی بعضی از مشخصه‌ها از دسترس خارج

¹ Large scale

می‌شوند. با توجه به توانایی این نوع سیستم‌ها در مدلسازی دقیق‌تر فرآیندها، سیستم‌های تکین به سرعت جای خود را در علوم مهندسی باز کرده‌اند.

به عنوان مثال در توصیف سیستم‌های ابعاد وسیع، شبکه‌های قدرت چند ماشینه، سیستم‌های تحت قید محیطی، سیستم‌های مکانیکی چندبخشی، رفتارهای ضربه‌ای در مدارهای الکتریکی و سایر سیستم‌ها، مدل‌های تکین کارایی فراوانی دارند. امروزه می‌توان ادعا نمود که مدل اصلی اکثر سیستم‌های واقعی و عملی یک مدل تکین می‌باشد و مدل‌های فضای حالت معمولی ساده شده این مدل اصلی می‌باشند.

به طور کلی خصوصیتی در سیستم‌های تکین وجود دارد که در سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی یافت نمی‌شود، در ادامه به تعدادی از تفاوت‌های سیستم‌های تکین با سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی اشاره شده است.

- تابع تبدیل سیستم‌های تکین لزوماً سره نمی‌باشد و می‌تواند شامل یک بخش چندجمله‌ای نیز باشد [۲].
- برای بعضی شرایط اولیه، پاسخ زمانی سیستم‌های تکین می‌تواند غیر علی^۱ و دارای ضربه^۲ باشد. به عبارتی دیگر در بعضی مواقع، پاسخ سیستم ممکن است به مشتقات ورودی وابسته باشد [۳۷].
- به طور کلی سیستم‌های تکین دارای ۳ مود^۳ متفاوت هستند. مودهای محدود، مودهای نامحدود (مربوط به رفتار ضربه‌ای^۴) و مودهای استاتیک [۲۵].

¹ Non-casual

² Impulse

³ Mode

⁴ Impulsive behavior

- برای سیستم‌های تکین، شرایط اولیه سازگار^۱ تعریف می‌شود. در صورتی که شرایط اولیه سازگار نباشند، حتی در صورتی که سیستم دارای رفتار ضربه‌ای نباشد، گسستگی محدود در پاسخ سیستم ظاهر می‌شود [۲۳].

با توجه به مزایای مدل تکین و احساس نیاز موجود در تحلیل این‌گونه سیستم‌ها تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه صورت گرفته و همچنان در حال افزایش است. بنابراین نیازمند آن هستیم که نظریه‌های کنترلی مناسب نیز برای این‌گونه سیستم‌ها توسعه داده شود. با توجه به تفاوت سیستم‌های تکین و سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی از نظر مفاهیم پایداری، کنترل پذیری و رویت پذیری، روش‌های کنترلی متفاوتی نیز مورد نیاز است که بتواند نیازهای کنترلی این‌گونه سیستم‌ها را همراه با پاسخ یکتا و بدون ضربه برطرف نماید. بنابراین با جرات می‌توان کنترل سیستم‌های تکین را به عنوان شاخه جدیدی از علم کنترل در نظر گرفت که هنوز می‌توان تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه انجام داد.

۳-۱ - مروری بر تاریخچه سیستم‌های تکین

در این بخش به بررسی سیر پیشرفت سیستم‌های تکین در دهه‌های مختلف میلادی خواهیم پرداخت.

۳-۱-۱ - دهه ۶۰، تولد سیستم‌های تکین

تحقیقات روی سیستم‌های تکین از دهه ۱۹۶۰ و اولین بار با مطالعه مدارهای الکتریکی و مدلسازی آنها به صورت یک مدل تکین آغاز گردید. اولین کاربردهای آن در حل مسائل اغتشاشات تکین^۲ بود، چون در این مسائل کاهش درجه مدل منجر به ایجاد معادلات جبری -دینامیکی می‌شد. در حل

^۱ Consistent

^۲ Singular perturbation

مسائل مذکور تعبیری برای معادلات تکین به صورت "معادلات جبری- دیفرانسیلی برای ساده سازی مسائل پیچیده تر" ارائه شد.

این مدل های اغتشاشی عموماً خطی بودند و شاخص سیستم ها ۱ و ۲ بود. در اواخر دهه ۶۰ و اوایل دهه ۷۰ موضوع معادلات تکین غیر خطی و حل آن مورد توجه پژوهشگران محاسبات عددی و ریاضیات قرار گرفت. روش های عددی معادلات مانند (BDF^1) برای حل معادلات تکین تعمیم داده شد و کدهای اولیه رایانه ای نوشته شد.

۱-۳-۲- دهه ۷۰، نگرشی ژرف تر

در اواخر دهه ۷۰، تلاش های جدیدی در سه شاخه کنترل، روش های عددی و علوم ریاضیات آغاز گردید و نسل جدیدی از محققین به مطالعه این نوع سیستم ها پرداختند و شاخه جدیدی از علم به نام سیستم های تکین شکل گرفت. تغییرات بنیادی در نگرش پژوهشگران شکل گرفت که در دهه ۸۰ نیز ادامه پیدا کرد. از محققین مطرح این دوره می توان به کمبل^۲ و لونبرگر^۳ اشاره کرد. تحلیل سیستم های تکین با استفاده از معکوس دریزین^۴ توسط کمبل ارائه شد [۳۷] و سیستم های غیر خطی تکین مورد بررسی قرار گرفت [۱۴]. از نظر محققین این دوره، معادلات تکین دیگر ساده شده معادلات پیچیده تر با حذف پارازیت ها یا دینامیک های سریع نبود، بلکه ایده جدیدی شکل گرفت که : "معادلات اصلی سیستم های واقعی به صورت معادلات تکین است و مدل فضای حالت معمولی، ساده شده مدل تکین سیستم هاست".

¹ Backward Differentiation Formulas

² Campbell

³ Luenberger

⁴ Drazin Inverse

۱-۳-۳- دهه ۸۰ و ۹۰، پژوهش‌های بنیادی

این دوران، دوران شکوفایی سیستم‌های تکین به عنوان یک شاخه جدید از علم بود. معادلات تکین بیشتر مورد توجه علوم مهندسی قرار گرفت و برنامه‌های رایانه‌ای کاربردی برای استفاده مهندسان توسعه پیدا کرد. سیستم‌های غیر خطی با شاخص بالاتر از ۲ مانند سیستم‌های مکانیکی و کنترل پرواز [۲۷، ۳۶، ۳۸] کم کم مورد توجه قرار گرفت. مسائل کلاسیک کنترل از قبیل کنترل پذیری و رویت پذیری برای سیستم‌های تکین توسعه داده شد [۸، ۳۹-۴۵]. همزمان با پیشرفت چشم‌گیر سیستم‌های رایانه‌ای و نرم‌افزارهای شبیه سازی در این سال‌ها، سیستم‌های پیچیده‌تری با معادلات تکین طراحی، شبیه سازی و کنترل شد و در نتیجه آن، الگوریتم‌های جدید تحلیل و کنترل ارائه شد [۴۶]. همچنین مسئله خطی‌سازی سیستم‌های غیرخطی تکین مورد توجه قرار گرفت [۴۷]. بعضی از روش‌های کنترل از قبیل کنترل بهینه، برای کنترل سیستم‌های تکین و مسئله ردگیری^۱ آن‌ها، توسط شفیع‌ی ارائه شد [۴۸-۵۱]. در نیمه دوم دهه هشتاد، سیستم‌های تکین تاخیری به عنوان یک شاخه اصلی از سیستم‌های تکین مورد بحث قرار گرفت [۲۱، ۵۲]. از محققین مطرح این دوره می‌توان به پاندولفی^۲، شفیع‌ی^۳، کمبل^۴، دای^۵، لوئیس^۶ اشاره کرد.

۱-۳-۴- قرن ۲۱، کاربرد سیستم‌های تکین

در سال‌های اخیر، کاربرد سیستم‌های تکین مورد توجه علوم مختلف مهندسی قرار گرفت. توانایی سیستم‌های تکین در مدلسازی و پیش‌بینی سری‌های زمانی در مسائل هواشناسی و ژئوفیزیکی مورد استفاده قرار گرفت [۵۳-۵۵]. همچنین در پیش‌بینی سری‌های زمانی آشوبی از سیستم‌های تکین استفاده شد [۵۶]. مدل کردن سیستم‌ها با مدل تکین، مخصوصاً در سیستم‌های علوم انسانی، اقتصاد و

¹ Tracking

² Pandolfi, Luciano

³ Shafiee, Masoud

⁴ Campbell, Stephen L

⁵ Dai, Liyi

⁶ Lewis, Frank L

مهندسی پزشکی مورد توجه قرار گرفت [۳، ۱۹، ۳۴]. همچنین استفاده از روش‌های کنترل مبتنی بر الگوریتم‌های هوشمند، شبکه‌های عصبی و فازی در حل مسائل تکین گسترش پیدا کرد [۵۶-۶۰]. روش‌های کنترل مقاوم [۶۱-۶۶] و کنترل بهینه [۱۳، ۳۲، ۶۰، ۶۷-۷۰] برای کنترل این نوع سیستم‌ها به سرعت توسعه داده شد. در جدیدترین پژوهش‌ها، پایداری و کنترل سیستم‌های تکین سوئیچینگ تاخیردار مورد بررسی قرار گرفته است [۷۱-۷۳].

علاوه بر تحقیقات گسترده‌ای که بر روی نظریه سیستم‌های تکین، تحلیل و کنترل آنها صورت گرفته است. این نوع سیستم‌ها هنوز به جایگاه واقعی خود در بین علوم مهندسی و کاربردی نرسیده‌اند. بنابراین نیازمند آزمایش‌ها و پژوهش‌های بیشتری هستیم که بتوانیم از توانایی سیستم‌های تکین در گسترش علم و صنعت استفاده نماییم.

۱-۴- کنترل سیستم‌های تکین

در کنار مزایای زیاد مدلسازی تکین، کنترل و طراحی کنترل‌کننده برای این سیستم‌ها مشکلات و پیچیدگی‌های خاص خود را دارد. در اولین گام دو مفهوم منظم^۱ و بدون ضربه^۲ برای پاسخ سیستم‌های تکین تعریف می‌شود که در سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی به طور ذاتی وجود دارند. منظم بودن پاسخ تضمین می‌کند که سیستم دارای پاسخ یکتاست. در کنترل سیستم‌های تکین، علاوه بر پایداری نیازمند پاسخ منظم و بدون ضربه نیز می‌باشیم که اصطلاحاً به آن سیستم مجاز^۳ می‌گویند، که در فصل‌های بعدی به تفصیل شرح داده می‌شود. مفهوم رایج دیگر برای سیستم‌های تکین شاخص^۴ سیستم می‌باشد. شاخص یک سیستم میزان پیچیدگی آن سیستم را مشخص می‌کند. هرچه شاخص سیستم بالاتر باشد، تحلیل و کنترل آن سیستم پیچیده‌تر می‌شود. با توجه به این تعاریف روش‌های کنترلی متفاوتی تا کنون برای سیستم‌های تکین توسعه داده شده‌اند. از بین کلیه

^۱ regular

^۲ Impulse free

^۳ Admissible system

^۴ Index

روش‌ها، روش‌های مختلف کنترل بهینه و کنترل مقاوم به صورت گسترده‌ای برای سیستم‌های تکین به کاربرده شده‌اند. پاندولفی [۲۲] و شفیع [۷۴] اولین کسانی بودند که تحقیقاتی روی مساله کنترل بهینه سیستم‌های تکین انجام دادند و پس از تجزیه سیستم، یک تنظیم کننده خطی برای آن ارائه نمودند. پس از آن روش‌های کنترل H_∞ [۷۹-۷۵] و کنترل H_2 [۸۰, ۸۱] نیز بر روی سیستم‌های تکین پیاده سازی شد.

علاوه بر روش‌های مقاوم و بهینه که بیشترین روش‌های اعمال شده به سیستم‌های تکین هستند، روش‌های متفاوتی نظیر روش‌های کنترل هوشمند [۵۶-۶۰]، روش‌های پس‌خورد^۱ حالت [۶۳, ۸۲] و نظیر آن نیز تاکنون برای سیستم‌های تکین توسعه پیدا کرده‌اند. روش‌های کنترل جایابی قطب [۷, ۸۳-۸۶] برای سیستم‌های تکین ارائه شد. روش‌های مبتنی بر توابع لیپانوف، به عنوان یکی از رایج‌ترین روش‌های کنترل به سیستم‌های تکین راه پیدا کرده‌اند. از آنجا که سیستم‌های تکین ممکن است مدهای نامحدود در پاسخ خود داشته باشند، بنابراین توابع لیپانوف متفاوتی نسبت به سیستم‌های معمولی برای آنها ارائه می‌شود. به عنوان مثال [۴۲] تابع لیپانوفی برای بررسی پایداری، منظم بودن و بدون ضربه بودن سیستم‌های تکین ارائه کرد. در [۴۵] یک تابع لیپانوف برای کنترل مدهای نامحدود سیستم‌های تکین ارائه شد که در آن از تجزیه سیستم استفاده شده است. بررسی منظم بودن و منظم سازی سیستم‌های تکین در بسیاری از مقالات از قبیل [۸۷-۹۰] مورد بررسی قرار گرفت. در سال‌های اخیر طراحی کنترل مود لغزشی برای سیستم‌های تکین [۹۱, ۹۲] مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است.

علاوه بر تحقیقات گسترده با این حال تاکنون روش‌های موفق کنترلی زیادی نظیر روش‌های مود لغزشی و کنترل تطبیقی به صورت کامل و جامع برای سیستم‌های تکین بررسی نشده است. با توجه

¹ Feedback

به توانایی کنترل‌کننده‌های تطبیقی در غلبه بر نامعینی‌های ساختاری و پارامتری و تغییرات آرام سیستم و محیط، نیاز به گسترش این نوع کنترل برای سیستم‌های تکین به خوبی احساس می‌شود.

لازم به ذکر است که بعضی از مشکلات مربوط به تحلیل و کنترل سیستم‌های تکین، مربوط به جدید بودن فضای تحقیقاتی آن است. تعاریف شاخص‌های مختلف برای سیستم، تعاریف متعدد کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری و کاربرد سیستم‌ها با نام‌های مختلف نشان می‌دهند که سیستم‌های تکین هنوز به جایگاه واقعی خود نرسیده‌اند و فضای تحقیقاتی برای بررسی بیشتر این‌گونه سیستم‌ها باز است. به طور مشابه زمانی که فضای حالت معمولی برای توصیف سیستم‌ها مطرح شد با مخالفت‌ها و مشکلات مشابه زیادی مواجه شد. امید است با پژوهش‌ها و تحقیقات بیشتر و باز شدن مسائل مربوط به سیستم‌های تکین، توسعه برنامه‌های رایانه‌ای و جعبه ابزارهای^۱ شبیه‌سازی و ارائه نظریه‌های کامل‌تر و دقیق‌تر، سیستم‌های تکین به تدریج جای مدل‌های فضای حالت معمولی را در کتاب‌ها و مقاله‌ها بگیرد و مدل‌های فضای حالت معمولی فقط به عنوان حالت خاصی از سیستم‌های تکین مورد بررسی قرار گیرند.

۴-۱- اهمیت کنترل تطبیقی سیستم‌های تکین

هدف از استفاده از کنترل تطبیقی این است که کنترل‌کننده طراحی شده بدین روش، بتواند در مقابل تغییرات آرام در سیستم و همچنین خطاهای مدل‌سازی پاسخ مناسب بدهد. تفاوت کنترل تطبیقی و کنترل مقاوم این است که در کنترل تطبیقی نیازی به دانستن بازه‌ی کاری سیستم و یا میزان خطای پارامترها نیست. به عبارتی، طراحی از دیدگاه کنترل مقاوم به کنترل‌کننده‌ای می‌انجامد که در بازه مشخصی پایداری سیستم را تضمین کند بدون آنکه نیازی به تغییر قوانین کنترلی باشد، ولی با روش کنترل تطبیقی می‌توان قوانین کنترلی را به گونه‌ای با تغییر شرایط تطبیق داد که سیستم پایدار شود.

¹ Toolbox

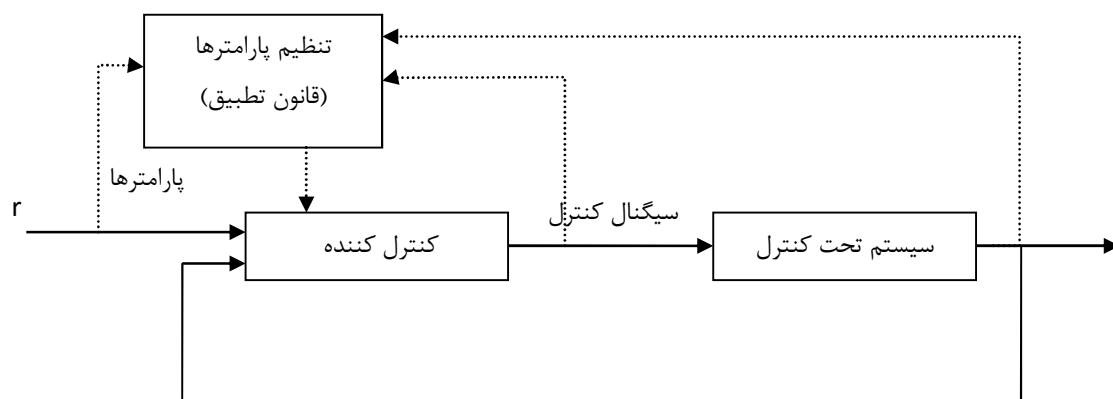
اهمیت کنترل کننده تطبیقی هنگامی مشخص می شود که نامعینی در پارامترها و دینامیک های مدل نشده در سیستم وجود دارد. در این صورت با به کارگیری کنترل کننده تطبیقی می توان بر نامعینی ها غلبه نمود. یک سیستم کنترل تطبیقی به طور کلی کنترل کننده ای است که بتواند با توجه به تغییرات سیستم تحت کنترل یا تغییرات در محیط، رفتار کنترلی خود را تنظیم کند. بعضی دلایل استفاده از کنترل تطبیقی به صورت زیر است:

۱- خصوصیات و پارامترهای سیستم تحت کنترل تغییر کند.

۲- خصوصیات محیط و اغتشاشات تغییر کند.

عموماً هدف اصلی سیستم تطبیقی عبارت از ثابت نگه داشتن کارایی یک سیستم در حضور این عدم قطعیت ها می باشد. بنابراین کنترل کننده های پیشرفته باید تطبیقی باشد.

ساختار اصلی یک سیستم کنترل تطبیقی در شکل ۳-۱ نشان داده شده است. ساختار کنترل کننده از دو بخش تشکیل می شود، حلقه داخلی یک حلقه پس خوردی معمولی است و حلقه خارجی پارامترهای کنترل کننده را تنظیم می کند. سیگنال r به منظور مشخص نمودن پاسخ ایده آل که سیستم کنترل بایستی پیروی نماید، استفاده می گردد. فرض می شود سیستم تحت کنترل دارای اجزایی ناشناخته باشد. اهمیت کنترل تطبیقی برای سیستم های تکین چشم گیرتر است. اکثر روش های کنترلی که تا کنون برای سیستم های تکین ارائه شده به مدل دقیق سیستم نیازمندند و یا حدود تغییر پارامترها و عدم قطعیت ها باید مشخص باشد.



شکل ۱-۱ - ساختار کلی کنترل تطبیقی

این در حالی است که کنترل تطبیقی که یکی از روش‌های موفق و پرکاربرد کنترلی در سیستم‌های عملی و واقعی محسوب می‌شود به صورت جامع و کامل برای این سیستم‌ها توسعه داده نشده است. نامعینی در پارامترها و دینامیک‌ها برای سیستم‌های تحت قید و سیستم‌های تکین مشکلات بیشتری ایجاد می‌کند. تغییرات در محیط برای سیستم‌هایی که تحت قید محیطی هستند، (مانند رباتی که با سطح خارجی برخورد می‌کند و یا رباتی که یک جسم را نگه می‌دارد) مشکلات مضاعفی را ایجاد خواهد کرد. نامعینی در بعضی از ماتریس‌های سیستم‌های تکین می‌تواند منجر به نامعلوم بودن شاخص و یا سایر خصوصیات سیستم تکین گردد که خود پیچیدگی‌های طراحی کنترل‌کننده را افزایش می‌دهد. وجود متغیرهای جبری و وابسته که پاسخ سریع‌تری نسبت به تغییرات در سیستم از خود نشان می‌دهند بر پیچیدگی‌های سیستم کنترل می‌افزاید. توجه به این موارد و این حقیقت که در بسیاری از سیستم‌های واقعی مدل دقیق ریاضی در دسترس نمی‌باشد، لزوم استفاده از کنترل تطبیقی را برای سیستم‌های تکین مشخص می‌کند. تاکنون تحقیقات محدودی بر روی کنترل تطبیقی سیستم‌های تکین انجام شده است که محدوده بسیار کمی از روش‌های کنترل تطبیقی و مدل مرجع را پوشش می‌دهد و جای بسیاری از روش‌های پرکاربرد و موفق تطبیقی در بین پژوهش‌ها خالی است. مقالات مربوط به کنترل تطبیقی در دسترس عبارتند از مقالات کنفرانسی شامل [۹۳-۱۰۲] و مقالات چاپ شده در مجلات [۱۰۳، ۱۰۴] که می‌توان به عنوان یک جامعه آماری مناسب

ادعا کرد که تحقیقات بسیار محدودی در این زمینه انجام گرفته است. در [۹۳] با استفاده از شناسایی سیستم کاهش یافته توربین گازی، یک کنترل مدل پیش‌بین یک گام جلوتر طراحی شده است. چند روش مدل مرجع در مقالات [۹۴، ۹۶، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۲] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. طراحی روی‌تگر تطبیقی [۱۰۴] و منظم‌سازی^۱ تطبیقی [۱۰۰] انجام شده است. در [۱۰۳] یک روش مقاوم تطبیقی با نامعلوم بودن پارامترها برای سیستم‌های تکین غیرخطی ارائه شده است که در آن دینامیک‌های غیرخطی معلوم فرض شده‌اند.

با توجه به کارایی و اهمیت روش‌های کنترل تطبیقی در مهندسی کنترل، هدف از این رساله طراحی روش‌های مختلف کنترل تطبیقی برای سیستم‌های تکین برای رسیدن به اهداف مختلف کنترلی از قبیل پایدارسازی، تنظیم، ردگیری مسیر، ردگیری مدل مرجع با حضور نامعینی‌های ساختاری و پارامتری است. در ابتدا کنترل خودتنظیم سیستم‌های تکین خطی تک ورودی در جهت پایدارسازی و مجاز نمودن سیستم مورد بررسی قرار خواهد گرفت. سپس روش پیشنهادی برای مسائل تنظیم و ردگیری برای سیستم‌های چند متغیره توسعه داده می‌شود. در ادامه تعمیمی از روش پیشنهاد شده برای سیستم‌های غیرخطی لپشیتز^۲ ارائه می‌شود و در پایان یک روش تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین خطی با وجود نامعینی در پارامترهای سیستم ارائه خواهد گردید. پایداری تمام روش‌ها با استفاده از نظریه لیاپانوف تضمین شده است. مسئله پایدارسازی و ردگیری به صورت مجزا برای هر روش مورد بررسی قرار گرفته است. برای روشن شدن بهتر رفتار سیستم‌ها تمامی روش‌های ارائه شده بر روی سیستم‌های تکین نمونه شبیه‌سازی شده است و نتایج قابل قبول شبیه‌سازی‌ها کارایی روش‌های کنترل تطبیقی پیشنهادی را تایید می‌کند.

¹ Regularization

² Lipschitz

۱-۵- ساختار ادامه رساله

در ادامه، در فصل دوم به معرفی سیستم‌های تکین خواهیم پرداخت. تعاریف اولیه و مفاهیمی از قبیل حل‌پذیری، شاخص و مجاز بودن مورد بررسی قرار می‌گیرد. فصل سوم به طراحی کنترل تطبیقی برای سیستم‌های تکین خطی می‌پردازد. یک روش کنترل تطبیقی برای مجاز نمودن سیستم‌های تکین خطی ارائه و سپس برای ردگیری سیستم‌های چندمتغیره تعمیم داده می‌شود. در فصل چهارم، روش کنترل پیشنهادی برای سیستم‌های خطی برای ردگیری سیستم‌های غیرخطی که شرط لپشیتز را ارضا می‌کنند تعمیم داده می‌شود. یک روش مدل مرجع تطبیقی برای سیستم‌های تکین غیرخطی در فصل پنجم ارائه شده است. طراحی تمام روش‌ها مبتنی بر نظریه لیاپانوف می‌باشد. برای بررسی بهتر کارایی کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، در هر قسمت روش کنترل ارائه شده بر روی یک یا چند سیستم شبیه‌سازی شده است. نتایج تمام شبیه‌سازی‌ها کارایی روش‌های پیشنهادی را تایید می‌کند. نتیجه‌گیری از رساله و پیشنهادات برای ادامه کار در فصل هفتم آورده شده است.

معرفی سیستم‌های تکین

فصل دوم - معرفی سیستم‌های تکین

۲-۱ مقدمه

در این فصل ساختار یک سیستم تکین را بررسی می‌کنیم. تعاریف و قضایای اولیه مورد نیاز برای تحلیل سیستم‌های تکین به اختصار شرح داده می‌شود. مفاهیم منظم بودن، بدون ضربه بودن، شاخص سیستم، شرایط اولیه سازگار، پایداری و مجاز بودن سیستم‌های تکین مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲-۲ ساختار سیستم‌های تکین

در نظریه سیستم‌ها، معادلات دینامیکی کلی سیستم‌های فیزیکی را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد

$$(1-2)$$

$F(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) = 0$ که در آن u بردارهای ستونی و F تابعی از آنهاست. بردار u ورودی سیستم و $\dot{x}$ مشتق بردار x نسبت به زمان است. در سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی معادله (۱-۲) تنها دارای معادلات دیفرانسیل است که بیانگر روابط حاکم بر سیستم می‌باشد.

اما اگر در معادله (۱-۲) مشتق جزئی F نسبت به $\dot{x}$ که با F_x نشان داده می‌شود، کاهش رتبه^۱ داشته باشد و یا در حالت مربعی که تعداد متغیرها با تعداد معادلات برابر است

¹ Rank

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right| = 0 \quad (2-2)$$

باشد، آنگاه سیستم (۱-۲) دارای معادلات جبری و دیفرانسیلی به صورت همزمان می‌باشد [۲۴] که به سیستم دیفرانسیلی-جبری (DAE) و یا سیستم تکین معروف است. این کلاس از سیستم‌ها را دیگر نمی‌توان با معادلات دیفرانسیلی معمولی (ODE) به صورت

$$(3-2)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

نوشت. در این نوع سیستم‌ها تمامی متغیرهای بردار $\mathbf{x}$ ، متغیر حالت حافظه دار نیستند بعضی از عضوهای بردار $\mathbf{x}$ فقط وابستگی جبری به مقادیر دیگر متغیرها در هر لحظه را دارند. این معادلات جبری ناشی از قیدها و محدودیت‌های حاکم بر سیستم است. سیستم‌های تکین خواص متعدد و منحصر به فردی دارند که با سیستم‌های معمولی متفاوت است. هدف از این رساله بررسی و کنترل این نوع سیستم‌های دیفرانسیلی-جبری یا تکین است.

مثال ۱-۲

به عنوان یک مثال ساده، سیستم تکین زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + x_2 + 2u &= 0 \\ x_2 - x_1 + u &= 0 \end{aligned} \quad (4-2)$$

با در نظر گرفتن متغیرهای سیستم به صورت $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ ، می‌توان دید که این سیستم در قالب کلی (۱-۲) صدق می‌کند در حالیکه معادله (۳-۲) نیز برقرار می‌باشد. پس از ساده سازی معادلات سیستم را می‌توان به صورت

(۵-۲)

$$\dot{x}_1 = -x_1 - u$$

$$x_2 = x_1 - u$$

نوشت. همانطور که مشخص است، رفتار متغیر x_1 با یک معادله دیفرانسیلی معمولی مدل می‌شود، در حالی که متغیر x_2 فقط به صورت جبری به x_1 و u وابسته است. تنها متغیر x_1 اطلاعاتی از گذشته سیستم را دربردارد و به عنوان تنها متغیر حافظه دار سیستم مطرح می‌شود و متغیر x_2 تنها تصویری از سایر متغیرهاست که با توجه به اهمیت بررسی رفتار آن در مدل سیستم اضافه شده است. این حقیقت که تمامی متغیرهای یک سیستم تکین مستقل و حافظه دار نیستند یکی از مشخصه‌های مهم سیستم‌های تکین محسوب می‌شود [۲۶].

متغیرهای اضافی در سیستم‌های تکین یا ناشی از قیدهای حاکم بر مسئله است و یا برای ارائه مدل دقیق‌تر و کامل‌تر در معادلات سیستم ظاهر می‌شوند. اغلب اوقات در هنگام مدل سازی سیستم‌های فیزیکی و مکانیکی معادلات کلی این گونه سیستم‌ها ساختار ساده‌تری به خود می‌گیرند [۱۰۵] که می‌توان آن را به شکل کلی

$$E\dot{x} = f(x, u, t) \quad (۶-۲)$$

بیان کرد. که در آن $x \in R^n$ متغیرهای سیستم، $u \in R^m$ ورودی سیستم و رتبه ماتریس $E \in R^{n \times n}$ کامل نیست ($Rank(E) = r < n$). بدون از دست دادن عمومیت مسئله می‌توان سیستم با معادلات (۶-۲) را به شکل نیمه صریح^۱ زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ 0 &= f_2(x_1, x_2, u) \end{aligned} \quad (۷-۲)$$

¹ Semi-explicit form

که در آن $\mathbf{x}_1 \in R^r$ و $\mathbf{x}_2 \in R^{r-r}$ می‌باشد. در این حالت، در صورتی که مشتق جزئی $\mathbf{f}_2$ نسبت به $\mathbf{x}_2$ که با $\mathbf{f}_{2,\mathbf{x}_2}$ نمایش داده می‌شود غیر تکین^۱ باشد، آنگاه می‌توان ادعا نمود که تمامی اعضای بردار $\mathbf{x}_1$ متغیرهای حافظه دار سیستم می‌باشند که در ادامه توضیح داده خواهد شد. مدل سیستم‌های تکین غیرخطی افاین^۲ که بیشتر در این رساله استفاده شده است را می‌توان به صورت شکل کلی زیر نوشت.

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (۸-۲)$$

که در آن $\mathbf{f} \in R^n$ و $\mathbf{g} \in R^{n \times m}$ می‌باشد. در این نوع سیستم‌ها متغیرهای ورودی به صورت غیرخطی در معادلات ظاهر نمی‌شوند. در نهایت مدل خطی سیستم‌های تکین را می‌توان به شکل زیر بیان نمود.

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (۹-۲)$$

که در آن $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ و $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$ ماتریس‌های ضرائب سیستم تکین می‌باشند.

۲-۳- مفاهیم حل‌پذیری^۳ و شاخص^۴ سیستم‌های تکین

حل‌پذیری به طور ساده به این معناست که جوابی برای معادلات سیستم تکین یافت شود که در معادله (۶-۲) صدق کند. مفهوم حل‌پذیری در سیستم‌های تکین به علت وجود معادلات جبری کمی پیچیده‌تر است. تمامی جواب‌ها و شرایط اولیه سیستم‌های تکین باید در قیدهای حاکم بر مسئله که به صورت معادلات جبری ظاهر می‌شوند صدق کنند. این مسئله زمانی که تعدادی معادلات جبری پنهان در سیستم موجود باشد، پیچیده‌تر می‌شود. به طور کلی در حل مسائل تکین به دنبال یافتن

^۱ Nonsingular

^۲ Affine

^۳ Solvability

^۴ Index

یک زیر فضای مناسب که مسئله در آن جواب داشته باشد، هستیم. یکی از پیچیدگی‌های اصلی سیستم‌های تکین مسئله مقدار اولیه^۱ است. شرایط اولیه سیستم باید قیود پنهان و آشکار سیستم تکین را ارضا نمایند در غیر اینصورت باعث ایجاد ناپیوستگی و یا رفتارهای ضربه‌ای^۲ در پاسخ سیستم خواهند شد. به عنوان یک مثال ساده رفتار ضربه ای جریان ناشی از اتصال کوتاه شدن یک خازن با شارژ اولیه به علت صدق نکردن شرایط اولیه در معادلات جدید مدار است. یکی از مزایای اصلی سیستم‌های تکین توانایی مدلسازی، بررسی و تحلیل این‌گونه رفتارهای ضربه‌ای در سیستم‌های مختلف می‌باشد. مفاهیم حل‌پذیری و شاخص‌های مختلف سیستم تکین در مقاله کلیدی [۲۴] توضیح داده شده است. که بعضی از تعاریف اصلی آن در ادامه آورده شده است.

تعریف ۱-۲

مدل تکین (۶-۲) را در بازه زمانی $I \subset \mathbb{R}$ در نظر بگیرید.

الف-تابع $\mathbf{x}(t) \in C^1$ یک جواب (۶-۲) محسوب می‌شود اگر بازای ورودی اعمال شده $\mathbf{u}$ ، در معادله (۶-۲) صدق کند. (C^n مجموعه تمامی توابعی می‌باشد که n بار مشتق پذیر است.)

ب-تابع $\mathbf{x}(t) \in C^1$ یک جواب برای مسئله مقدار / اولیه سیستم تکین (۶-۲) می‌باشد اگر علاوه بر آن که یک جواب از معادله (۶-۲) است در شرط

$$(۱۰-۲)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

نیز صدق می‌کند.

¹ Initial value problem (IVP)

² Impulsive

پ- یک شرط اولیه (t_0, x_0) سازگار^۱ نامیده می‌شد، اگر مسئله مقدار اولیه سیستم تکین (۶-۲) بازای آن حداقل یک جواب داشته باشد.

ت- مدل سیستم حل‌پذیر است اگر حداقل یک جواب داشته باشد. □

تعریف ۲-۲

الف- مسئله کنترل برای سیستم توصیف شده با (۶-۲) سازگار نامیده می‌شود اگر تابع ورودی u یافت شود که بازای آن سیستم (۶-۲) دارای جواب x باشد.

ب- سیستم در همسایگی $(\hat{x}, \hat{u})$ که در معادله (۶-۲) صدق می‌کند، منظم^۲ محلی نامیده می‌شود، اگر بازای هر تابع ورودی^۳ $\hat{u}$ در نزدیکی $\hat{u}$ و هر شرط اولیه در نزدیکی $\hat{x}(t_0)$ که بازای ورودی^۳ $\hat{u}$ با سیستم سازگار است، یک جواب یکتا داشته باشد. □

به طور ساده‌تر می‌توان گفت که منظم بودن سیستم، یکتایی جواب را تضمین می‌کند. با توجه به این تعاریف و مفاهیم، شاخص‌های^۳ مختلفی برای طبقه بندی میزان پیچیدگی حل معادلات سیستم تکین ارائه شده است که نشان می‌دهد پیچیدگی یک سیستم دیفرانسیلی جبری چه مقدار از یک سیستم دیفرانسیلی معمولی بیشتر است. با توجه به اینکه چه عواملی در اندازه‌گیری میزان پیچیدگی یک سیستم مورد نظر است، تعاریف متعددی از شاخص یا شاخص سیستم تکین ارائه شده است. مفهوم مشترک در تمامی این تعاریف این است که سیستمی با شاخص بالاتر در مقایسه با سیستمی با شاخص پایین‌تر، با مشکلات و پیچیدگی‌های بیشتری در تحلیل و کنترل مواجه است. از تعاریف

¹ Consistent

² Regular

³ Index

مختلف شاخص می‌توان به شاخص مشتقی^۱، شاخص بیگانگی^۲ و شاخص انحراف^۳ اشاره نمود. در این رساله از شاخص مشتقی به عنوان شاخص یا اندیس سیستم استفاده شده است که پرکاربردترین مفهوم شاخص برای سیستم‌های تکین است. در ادامه رساله برای سادگی به جای استفاده از کلمه شاخص مشتقی به طور خلاصه کلمه شاخص استفاده شد و منظور از شاخص یا اندیس سیستم تکین همان شاخص مشتقی سیستم تکین است. به طور کلی بررسی حل‌پذیری سیستم‌های تکین خطی و غیرخطی را می‌توان در منابع [۱۰۶-۱۰۸] یافت و اطلاعات بیشتر درمورد شاخص‌های مختلف سیستم‌های تکین در [۱۰۶، ۱۰۹] مورد بحث قرار گرفته است.

۲-۳-۱- شاخص مشتقی سیستم تکین

رایج‌ترین مفهوم شاخص برای سیستم‌های تکین، شاخص مشتقی است. به طور خلاصه می‌توان گفت تعداد دفعاتی که لازم است از معادلات سیستم مشتق گرفته شود تا به یک سیستم دیفرانسیلی معمولی برسیم (مشتق متغیرهای جبری ظاهر شود) برابر با شاخص مشتقی سیستم است. قابل توجه است که مفهوم شاخص یک خصوصیت مدل است و برای مدل‌های مختلف ارائه شده برای یک سیستم می‌تواند مختلف باشد.

برای محاسبه شاخص مشتقی، سیستم تکین را به شکل کلی (۲-۱) در نظر بگیرید. با مشتق‌گیری از معادلات سیستم نسبت به زمان آرایه‌ای از مشتقات معادلات به صورت زیر بدست آورید.

$$\mathbf{F}_t^j(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(j+1)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(j+1)}) = \begin{bmatrix} F(t, x, \dot{x}, u) \\ \frac{d}{dt} F(t, x, \dot{x}, u) \\ \vdots \\ \frac{d^j}{dt^j} F(t, x, \dot{x}, u) \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

¹ Differential Index

² Strangeness Index

³ Perturbation Index

تعریف ۲-۳ ([۱۰۷])

کوچکترین مقدار j که بازای آن ماتریس F_t^j بتواند به صورت یکتا مقدار بردار $\dot{x}$ را به صورت تابعی پیوسته از x, t, u و مشتقات بالاتر u معین کند، برابر با شاخص مشتقی سیستم تکین است که با v نشان می‌دهیم. □

قابل به ذکر است که شرط کافی برای اینکه ماتریس F_t^j بتواند به صورت یکتا مقدار بردار $\dot{x}$ را به صورت تابعی پیوسته از x, t, u و مشتقات بالاتر u معین کند، اینست که ماتریس ژاکوبی F_t^j نسبت به بردار X_j که با $F_{t;x_j}^j$ نشان می‌دهیم رتبه ستونی آن برابر با n باشد و سیستم کنترل سازگار باشد [110] در حالی که

$$X_j = [\dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(j)}]^T \quad (۱۲-۲)$$

همانطور که قبلاً ذکر شد شاخص یک مدل تکین معیار مهمی در بررسی پیچیدگی این نوع مدل‌ها می‌باشد. هرچه مدل شاخص بالاتری داشته باشد، تحلیل و کنترل آن سخت‌تر خواهد بود. مدل تکین با شاخص صفر معادل با مدل دیفرانسیلی معمولی خواهد بود. در طراحی کنترل کننده، مدل با شاخص یک قابل قبول‌تر است و شاخص‌های دو و بالاتر با افزایش پیچیدگی همراه هستند. اگر شاخص یک مدل برابر با یک باشد رفتارهای ضربه‌ای در آن اتفاق نمی‌افتد و تمامی قیود مسئله در معادلات مدل آشکار است. در این نوع سیستم‌ها هیچ قید پنهان^۱ وجود ندارد. اما در سیستم‌هایی با شاخص بالاتر^۲ مسئله کمی پیچیده‌تر است. اگر شاخص بزرگتر از یک باشد، شرایط اولیه ناسازگار می‌تواند در پاسخ مدل ضربه^۳ ایجاد کند. در این نوع سیستم‌ها شرایط اولیه سازگار نه تنها باید در معادلات صدق کنند بلکه باید قیدهای پنهان مدل را نیز ارضا نمایند. اگر شاخص بزرگتر از یک باشد،

¹ Implicit constraints

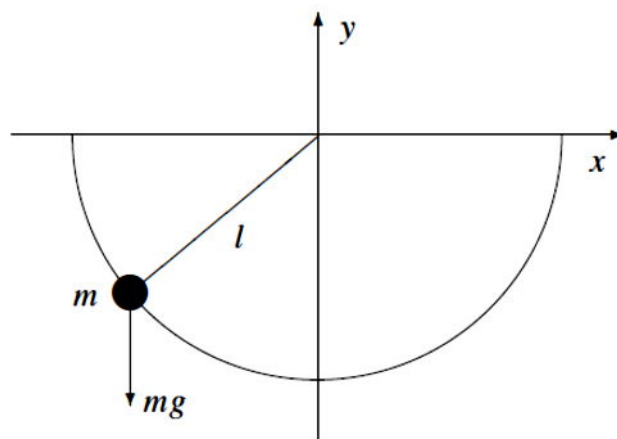
² High Index Systems

³ Impulse

یک سری قید پنهان در مدل وجود دارد که در معادلات دیده نمی‌شود و پس از مشتق‌گیری ظاهر می‌شوند. در مدلسازی سیستم‌های مکانیکی چندبخشی اغلب مدل بدست آمده دارای شاخص سه می‌باشد [۱۰۵]. البته باید توجه نمود که شاخص به مدل بستگی دارد و تغییر فضا و انتخاب متغیرهای حالت متفاوت می‌تواند منجر به مدلی با شاخصی متفاوت گردد. علاوه بر آن قوانین پس‌خورد مختلف می‌تواند منجر به شاخص متفاوت در سیستم حلقه بسته گردد [۲۶]. بنابراین از پس‌خورد می‌توان برای کاهش شاخص یک سیستم تکین استفاده نمود. برای درک بهتر شاخص و قید پنهان مثال کلیدی و معروف آونگ را در فضای دکارتی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۲-۲ مدل آونگ در فضای دکارتی [۱۰۶]

مدل آونگ شامل یک جرم نقطه‌ای به جرم m ، در فضای دکارتی (x, y) ، یک مدل تکین است. مدل ساده آونگ در شکل ۱-۲ نمایش داده شده است. طول آونگ برابر با l و شتاب جاذبه زمین است.



شکل ۱-۲ مدل ساده آونگ

تابع لاگرانژ با انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ و انرژی پتانسیل $U = mgy$ و قید حاکم بر سیستم

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0 \text{ برابر است با}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy - \lambda(x^2 + y^2 - l^2) \quad (۱۳-۲)$$

با در نظر گرفتن متغیرهای $q = x, y, \lambda$ دینامیک حرکت با معادله زیر توصیف می‌گردد.

(۱۴-۲)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

خواهد بود. که معادل است با

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + 2x\lambda &= 0 \\ m\ddot{y} + 2y\lambda + mg &= 0 \\ x^2 + y^2 - l^2 &= 0 \end{aligned} \quad (۱۵-۲)$$

پارمتر λ متغیر جبری مدل محسوب می‌شود و برابر با ضریب کشش^۱ آونگ می‌باشد. معادله سوم در

(۱۵-۲) قید جبری مسئله می‌باشد با یک بار مشتق گیری از معادله آخر خواهیم داشت

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \quad (۱۶-۲)$$

این معادله قید پنهان مدل آونگ است که در ابتدا در معادلات دیده نمی‌شود. همانطور که مشخص

است این قید بیانگر این موضوع است که بردار سرعت بر بردار مکان در هر لحظه عمود است. با یکبار

دیگر مشتق گیری از معادله (۱۶-۲) و جایگذاری مقادیر از معادله (۱۵-۲)، خواهیم داشت

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x \left(\frac{-2x\lambda}{m} \right) + y \left(\frac{-2y\lambda}{m} - g \right) = 0 \quad (۱۷-۲)$$

که قید پنهان دیگر مدل آونگ است. همانطور که مشخص است اگر یکبار دیگر از معادله مشتق

بگیریم مشتق λ ظاهر می‌شود و می‌توان معادلات را به صورت یک مدل دیفرانسیلی معمولی باز

نویسی کرد بنابراین شاخص مدل آونگ برابر با سه است و دو قید پنهان در مدل وجود دارد. شرایط

اولیه سازگار برای این مدل از آونگ علاوه بر معادله جبری معادلات مدل باید در قیود پنهان مدل نیز

صدق کند. □

¹ Tension

لازم به ذکر است اگر مدل تکین به صورت نیمه صریح (۷-۲) نوشته شود، می‌توان گفت که شاخص

$$\text{سیستم برابر با یک است، اگر و تنها اگر } \mathbf{f}_{2;x_2} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2} \text{ غیر تکین باشد [۱۰۷].}$$

درجه آزادی سیستم و یا تعداد شرایط اولیه مستقل لازم برای محاسبه پاسخ سیستم، برابر است با $r = \text{rank}(E) < n$ که r را مرتبه تعمیم یافته می‌نامند. به عبارت دیگر در سیستم تکین با مشخص بودن r شرط از شرایط اولیه سیستم، می‌توان پاسخ سیستم را بدست آورد و نیازی به داشتن تمام شرایط اولیه نیست. می‌توان گفت که با داشتن r حالت از حالت‌های اولیه، بقیه حالت‌های اولیه مورد نیاز از شرط سازگاری بدست خواهند آمد.

۲-۳-۲- حل پذیری و شاخص در سیستم‌های تکین خطی

تاکنون در بررسی و تحلیل سیستم‌های تکین خطی تحقیقات بیشتری صورت گرفته است و قضایای مختلفی برای بررسی رفتار و محاسبه شاخص این‌گونه سیستم‌ها ارائه شده است. سیستم تکین خطی به همراه معادله خروجی را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (۱۸-۲)$$

که در رابطه فوق $\mathbf{x} \in R^n$ متغیرهای حالت سیستم، $u \in R^m$ ورودی سیستم و $\mathbf{y} \in R^l$ خروجی سیستم می‌باشد. ماتریس‌های $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in R^{l \times n}$ ماتریس‌های ضرایب سیستم هستند.

اگر ماتریس $\mathbf{E}$ غیرتکین باشد با ضرب طرفین معادله در معکوس آن می‌توان به معادله فضای حالت معمولی رسید. اگر ماتریس $\mathbf{E}$ تکین باشد، با سیستم‌های فضای حالت معمولی تفاوت‌های بسیاری دارد که در این رساله مد نظر می‌باشد. در صورتی که $\mathbf{E}\mathbf{x}(0^-)$ و $u(t)$ برای زمانهای بزرگ‌تر از صفر مشخص باشد، جواب معادله (۹-۲) با گرفتن تبدیل لاپلاس به صورت زیر در می‌آید:

(۱۹-۲)

$$\begin{aligned} X(s) &= (sE - A)^{-1}[Ex(0^-) + BU(s)] \\ Y(s) &= CX(s) \end{aligned}$$

شرط معکوس‌پذیری $(sE - A)$ برای داشتن جواب یکتا امری ضروری است که این شرط، به شرط منظم بودن یا همان حل‌پذیری سیستم‌های تکین خطی معروف است و تضمین می‌کند که سیستم دارای پاسخ یکتا خواهد بود.

تعریف ۲-۴

اگر $|sE - A|$ به ازای برخی از s ها مخالف صفر باشد، سیستم تکین خطی (۱۸-۲) منظم یا رگولار نامیده می‌شود و سیستم دارای پاسخ یکتا خواهد بود. □

همانطور که مشخص است اگر سیستم (۱۸-۲) منظم نباشد یا به عبارتی ماتریس $(sE - A)$ کاهش رتبه^۱ داشته باشد آنگاه بردار غیر صفر $\theta(s)$ وجود دارد به طوریکه

(۲۰-۲)

$$(sE - A)\theta(s) \equiv 0$$

در این صورت اگر بردار $X(s)$ پاسخی از سیستم (۱۸-۲) باشد، آنگاه بردار $X(s) + \alpha\theta(s)$ نیز بازای هر α پاسخ سیستم خواهد بود. می‌توان ادعا کرد اگر سیستم منظم نباشد می‌تواند دارای چند پاسخ بازای یک ورودی باشد. همچنین در این حالت ممکن است سیستم هیچ جوابی نیز نداشته باشد.

[۴۱].

¹ Rank deficient

اگر سیستم تکین خطی منظم باشد، آنگاه می‌توان با تبدیل فضای حالت، به دو زیر سیستم مستقل یکی به صورت دیفرانسیلی کامل و دیگری به صورت جبری کامل رسید. این نوع تبدیل فضای حالت را تجزیه^۱ سیستم تکین می‌نامند. لم زیر از مرجع [۲] به بیان این مسئله می‌پردازد.

لم ۱-۲- تجزیه کرونکر-ویسترس^۲ سیستم‌های تکین خطی

سیستم خطی (۱۸-۲) منظم است / اگر و فقط / اگر ماتریس‌های غیر تکین M_1 و N_1 یافت شوند به طوریکه

$$M_1 E N_1 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad M_1 A N_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \quad (21-2)$$

که در آن $n_1 + n_2 = n$ و ماتریس $N \in R^{n_2 \times n_2}$ پوچ توان^۳ است.

لم بالا تعریف رابطه معادل دیگری برای منظم بودن سیستم تکین ارائه می‌دهد. در این حالت می‌توان

سیستم معادل با (۱۸-۲) را با تغییر در فضای حالت به صورت $\mathbf{x} = N_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ زیر بدست آورد.

(22-2)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\ N \dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t), \quad y_2(t) = C_2 x_2(t); \quad y = y_1 + y_2 \end{cases}$$

که در آن $x_1 \in R^{n_1}$ ، $x_2 \in R^{n_2}$ و

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = M_1 B, \quad [C_1 \quad C_2] = C N_1 \quad (23-2)$$

¹ Decomposition

² Kronecker-Weierstrass Decomposition

³ Nilpotent

این تجزیه به طور معادل در [۸] به عنوان تجزیه به زیر سیستم تند و کند^۱ عنوان شده است. که در آن زیر سیستم مربوط به A_1 به نام زیر سیستم کند و زیر سیستم دوم مربوط به N به نام زیر سیستم تند نامیده می شود. در بعضی از مراجع به تجزیه استاندارد نیز معروف است. ماتریس های M_1 و N_1 یکتا نیستند. در این قالب استاندارد پاسخ سیستم را نیز می توان به صورت ساده تری محاسبه کرد. پاسخ سیستم (۲-۲۲) را می توان به شکل زیر نوشت. پاسخ زیرسیستم اول یا زیر سیستم کند به صورت یک سیستم دیفرانسیلی معمولی به شکل زیر بیان می گردد:

$$y_1 = C_1 e^{A_1 t} x_1(0) + C_1 \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \quad (2-24)$$

برای به دست آوردن پاسخ زیر سیستم دوم مربوط به N و یا همان زیر سیستم تند، اگر ماتریس N پوچ توان از شاخص v باشد، آنگاه داریم $N^v = 0$ ، $N^{v-1} \neq 0$ ، بنابراین اگر ورودی u به اندازه کافی ($v-1$ بار) مشتق پذیر باشد با v بار مشتق گیری از رابطه زیر سیستم تند خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} N\dot{x}_2 &= x_2 + B_2 u \\ N^2 x_2^{(2)} &= N\dot{x}_2 + NB_2 \dot{u} \\ &\dots \\ N^{v-1} x_2^{(v-1)} &= N^{v-2} x_2^{(v-2)} + N^{v-2} B_2 u^{(v-2)} \\ 0 &= N^{v-1} x_2^{(v-1)} + N^{v-1} B_2 u^{(v-1)} \end{aligned} \quad (2-25)$$

با مرتب سازی معادلات خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x_2 &= N\dot{x}_2 - B_2 u \\ x_2 &= N^2 x_2^{(2)} - B_2 u - NB_2 \dot{u} \\ &\dots \\ x_2 &= -\sum_{k=0}^{v-1} N^k B_2 u^{(k)} \end{aligned} \quad (2-26)$$

و علاوه بر آن می توان نوشت:

¹ Slow-fast decomposition

$$y_2 = -C_2 \sum_{k=0}^{\nu-1} N^k B_2 u^{(k)} \quad (27-2)$$

همانطور که مشخص است پاسخ زیر سیستم اول به مقادیر اولیه، ماتریس A_1 و ورودی سیستم بستگی دارد، حال آنکه پاسخ زیر سیستم دوم تنها به مشتقات ورودی وابسته است از این جهت این دو زیر سیستم به زیر سیستم‌های تند و کند معروف هستند. در این پاسخ شرایط اولیه سازگار در نظر گرفته شده است و تنها حالت‌های اولیه مستقل به سیستم داده شده است. بنابراین با توجه به آن می‌توان گفت که هر حالت اولیه که در

$$\mathbf{x}(0^+) = N_1 \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x_1(0) - N_1 \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{\nu-1} N^k B_2 u^{(k)}(0^+) \quad (28-2)$$

صدق کند یک شرط اولیه سازگار برای سیستم اصلی (2-18) می‌باشد. در [8, 25] محققین با تعمیم این پاسخ برای هر شرط اولیه/دخوه پاسخ زیر سیستم تند را به صورت زیر بیان نمودند.

$$x_2 = -\sum_{k=1}^{\nu-1} \delta^{(k-1)} N^k x_2(0) - \sum_{k=0}^{\nu-1} N^k B_2 u^{(k)} \quad (29-2)$$

که در آن δ تابع دلتای دیراک است. همانطور که مشخص است اگر شرایط اولیه سازگار نباشد و $\nu \geq 2$ باشد رفتار ضربه ای در پاسخ سیستم نمایان خواهد شد. در سیستم‌های خطی تکین ν یا اندیس پوچی ماتریس پوچ توان N برابر با شاخص یا اندیس سیستم تکین است. به طور کلی می‌توان بیان نمود برای سیستم‌های تکین خطی با معادله (2-18) شاخص سیستم برابر با اندیس ماتریس E در معادلات است که در ادامه توضیح داده شده است.

تعریف 2-5 - اندیس ماتریس [111]

اندیس یک ماتریس، کوچکترین توانی از ماتریس است که به ازای آن فضای پوچی ماتریس عوض نمی‌شود. به عبارتی دیگر، اندیس یک ماتریس، کوچکترین توان غیر منفی از ماتریس است که در آن هر کدام از شرایط زیر برقرار باشد:

(۳۰-۲)

$$\begin{aligned} \text{rank}(A^k) &= \text{rank}(A^{k+1}) \\ R(A^k) &= R(A^{k+1}) \quad (\text{the point where } R(A^k) \text{ stops shrinking}) \\ N(A^k) &= N(A^{k+1}) \quad (\text{the point where } N(A^k) \text{ stops growing}) \end{aligned}$$

که در روابط فوق، R نماد برد ماتریس A ، N نماد فضای پوچی ماتریس A و k اندیس ماتریس مذکور است. $\square$

اندیس یا شاخص سیستم تکین همان اندیس ماتریس E در معادله حالت سیستم تکین می‌باشد.

با افزایش شاخص یک سیستم، پیچیدگی تحلیل آن نیز افزایش می‌یابد که این مسئله در پاسخ تحلیلی سیستم (۲۹-۲) نیز مشخص است. علاوه بر آن با توجه به پاسخ سیستم می‌توان گفت که سیستم‌های تکین لزوماً علی^۱ نیستند و در نتیجه تابع تبدیل سیستم‌های تکین خطی لزوماً سره^۲ نمی‌باشد و می‌تواند شامل بخش چندجمله‌ای نیز باشد. با توجه به (۱۹-۲) و با فرض منظم بودن، پاسخ لاپلاس سیستم را می‌توان به شکل

$$y(s) = C(sE - A)^{-1}[Ex(0^-) + Bu(s)] \quad (۳۱-۲)$$

نوشت. بنابراین تابع تبدیل سیستم تکین خطی را می‌توان به صورت

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sE - A)^{-1}B \quad (۳۲-۲)$$

بیان نمود. در حالت کلی، تابع تبدیل یک سیستم تکین لزوماً سره نمی‌باشد و می‌تواند شامل یک بخش اکیداً سره و یک بخش چند جمله‌ای باشد. با توجه به تجزیه سیستم‌های تکین می‌توان ادعا نمود که بخش اکیداً سره مربوط به زیر سیستم کند و بخش چندجمله‌ای مربوط به زیر سیستم دوم یا تند می‌باشد. پاسخ لاپلاس زیر سیستم تند را با توجه به (۲۲-۲) می‌توان به صورت

¹ Casual

² Proper

(۳۳-۲)

$$Y_2(s) = -C_2(sN - I)^{-1}(Nx_2(0) + B_2U(s)) = -C_2 \sum_{k=0}^{v-1} N^k s^k (Nx_2(0) + B_2U(s))$$

نوشت. البته واضح است که پاسخ لاپلاس معادل با پاسخ زمانی (۲۹-۲) می باشد. همانطور که از پاسخ مشخص است به راحتی می توان دریافت که تابع تبدیل زیرسیستم تند چندجمله ای می باشد.

با توجه به تابع تبدیل سیستم تکین خطی (۳۲-۲) و قطب های تابع تبدیل، خصوصیات دیگری از سیستم های تکین نیز مشخص می گردد؛ زمانی که ماتریس E تکین باشد خواهیم داشت:

$$\deg|sE - A| = f \leq r < n \quad (۳۴-۲)$$

که در آن همانطور که قبلا ذکر شد $r = \text{rank}(E) < n$ مرتبه تعمیم یافته سیستم و n مرتبه سیستم است. به این معنی که سیستم تکین دارای f قطب محدود است و بقیه قطب های سیستم در بینهایت خواهد بود. می توان گفت پاسخ سیستم همانند سیستم های معمولی دارای f مد نمایی متناظر با f قطب محدود سیستم خواهد بود و علاوه بر آن، می تواند دارای $r-f$ مد ضربه ای باشد.

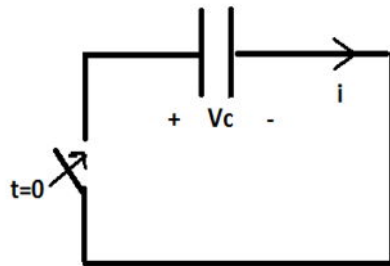
در پایان به صورت یک جمع بندی برای سیستم های تکین خطی می توان نوشت:

۱- اگر $|sE - A|$ به ازای برخی از s ها مخالف صفر باشد، سیستم تکین منظم یا رگولار نامیده می شود و سیستم دارای پاسخ یکتا خواهد بود.

۲- اگر $\deg|sE - A| = \text{rank}(E)$ باشد، پاسخ سیستم دارای ضربه نخواهد بود و تاثیر شرط اولیه ناسازگار بصورت یک گسستگی یا تغییر ناگهانی در $t = 0$ ظاهر می شود.

۳- اگر $\deg|sE - A| \neq \text{rank}(E)$ ، ممکن است پاسخ سیستم دارای ضربه باشد. اگر شرط اولیه سیستم سازگار باشد، پاسخ سیستم دارای ضربه نخواهد بود؛ در صورتی که شرایط اولیه سیستم ناسازگار باشد، ضربه در پاسخ سیستم ظاهر می شود.

مثال ۳-۲-۲۵] برای بررسی بهتر مفاهیم شاخص و پاسخ ضربه دار سیستم در سیستم‌های تکین خطی مدار ساده و عملی شکل ۲-۲ را در نظر بگیرید. خازن C دارای شارژ اولیه $V_d(0)$ از زمان‌های منفی می‌باشد. در لحظه $t=0$ کلید وصل می‌شود. اگر ولتاژ دو سر کلید را به عنوان ورودی سیستم در نظر بگیریم، آنگاه معادلات سیستم را به صورت زیر می‌توان نوشت.



شکل ۲-۲- مدار الکتریکی مثال ۳-۲

$$\begin{aligned} C\dot{V}_c(t) &= i(t) \\ V_c + u &= 0 \end{aligned} \quad (۳۵-۲)$$

با در نظر گرفتن متغیرهای حالت به صورت $[x_1 \ x_2]^T = [i \ V_c]^T$ و $C=1$ می‌توان معادلات سیستم را به شکل تکین زیر نوشت.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (۳۶-۲)$$

از آن جهت که

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \nu = 2 \quad (۳۷-۲)$$

اندیس ماتریس $\mathbf{E}$ سیستم برابر با ۲ می‌باشد بنابراین می‌توان گفت که شاخص سیستم تکین مد نظر ما نیز برابر با ۲ خواهد بود. بنابراین اگر شرایط اولیه ناسازگار باشد حتما ضربه در پاسخ سیستم

نمایان خواهد شد. با یک بار مشتق‌گیری از معادله دوم و جایگذاری روابط، قید پنهان مسئله را به صورت

$$x_1 + \dot{u} = 0 \quad (38-2)$$

می‌توان نوشت. همانطور که مشخص است با یک بار دیگر مشتق‌گیری از معادله (38-2) می‌توان $\dot{x}_1$ را به دست آورد که تایید می‌کند شاخص سیستم برابر با ۲ است. درجه تعمیم یافته سیستم برابر با $r = \text{rank}(\mathbf{E}) = 1$ می‌باشد در حالی که سیستم طبق رابطه

$$(39-2)$$

$$|s\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

هیچ قطب محدودی ندارد و درجه چند جمله‌ای $|s\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ برابر با $f = 0$ می‌باشد. بنابراین سیستم تنها یک مود نامحدود خواهد داشت. با در نظر گرفتن جریان مدار به عنوان خروجی به صورت $y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ تابع تبدیل سیستم تکین را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$G(s) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -s \quad (40-2)$$

همانطور که مشخص است تابع تبدیل سیستم هم ارز با معادله (38-2) می‌باشد. حال اگر اتصال کلید را به صورت $u = 0$ مدل کنیم پاسخ زمانی سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \dot{x}_2(t) \\ x_2(t) &= 0 \quad t \geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2(0^-)\delta(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad t \geq 0 \quad (41-2)$$

همان طور که مشخص است تابع ضربه در پاسخ جریان مدار (x_1) نمایان شده است. $\square$

۲-۴- پایداری و مجاز بودن^۱ سیستم‌های تکین

در سیستم‌های فضای حالت معمولی پایداری نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کند. پایدار بودن سیستم تضمین می‌نماید که سیستم از لحاظ عملی قابل استفاده است و می‌توان با طراحی کنترل‌کننده‌هایی رفتار سیستم را به رفتار مطلوب سوق داد؛ همچنین اگر سیستم پایدار نباشد، هدف کنترل در ابتدا تضمین پایداری و سپس همگرایی رفتار سیستم به رفتار مطلوب خواهد بود. ولی در سیستم‌های تکین پایدار بودن سیستم با تعریفی که برای آن بیان شد، یک سیستم قابل قبول از دید عملی و کاربردی را نمایش نمی‌دهد. به عبارت بهتر می‌توان گفت سیستم تکین ممکن است پایدار باشد ولی از لحاظ عملی قابل استفاده نباشد و این مربوط به ویژگی منظم و بدون ضربه بودن سیستم تکین می‌باشد. به عنوان مثال سیستم تکین ممکن است پایدار به مفهوم بیان شده باشد ولی دارای رفتار ضربه‌ای باشد که مطلوب نیست. می‌توان گفت همان اندازه که پایداری سیستم مهم است به همان اندازه منظم و بدون ضربه بودن سیستم تکین نیز مهم می‌باشد. بنابراین در سیستم‌های تکین، هدف اولیه تنها فراهم نمودن پایداری نیست بلکه علاوه بر پایداری به دنبال حذف رفتار ضربه‌ای و تضمین منظم بودن سیستم هستیم. بررسی پایداری سیستم تکین معمولاً به تنهایی انجام نمی‌گیرد بلکه مفاهیم منظم و بدون ضربه بودن و یا به طور خلاصه مفهوم مجاز بودن سیستم تکین مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تعریف ۲-۶ سیستم مجاز^۲

یک سیستم تکین مجاز نامیده می‌شود، اگر منظم، بدون ضربه^۳ و پایدار باشد. □

¹ Admissibility

² Admissible

³ Impulse free

در بررسی پایداری سیستم‌های تکین مشابه با سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی، پایداری نقاط تعادل را بررسی می‌کنیم. بدون از دست دادن عمومیت مسئله فرض می‌کنیم برای سیستم تکین غیرخطی نامتغیر با زمان خودگردان^۱

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (۴۲-۲)$$

که معادل با سیستم بدون ورودی یا سیستم حلقه بسته با ورودی پس‌خوردی $u = h(\mathbf{x})$ می‌باشد، $\mathbf{f}(0) = 0$ و $\mathbf{x} = 0$ نقطه تعادل سیستم است.

تعریف ۷-۲ پایداری [۱۰۶]

نقطه تعادل $\mathbf{x} = 0$ پایدار است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $t_0 \in R$ محدوده $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\mathbf{x}(0) \in B_\delta$ ^۲ باشد، آنگاه برای همه زمان‌های $t > t_0$ $\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{E}\mathbf{x}(0))\| < \varepsilon$ باشد. در حالی که حالت اولیه $\mathbf{E}\mathbf{x}(0)$ یک حالت اولیه سازگار برای سیستم است.

تعریف ۸-۲ پایداری مجانبی [۱۰۶]

برای سیستم (۴۲-۲)، با شرایط اولیه سازگار، نقطه تعادل $\mathbf{x} = 0$ پایدار مجانبی است اگر پایدار باشد و علاوه بر آن محدوده $\delta_0(t_0) > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\mathbf{x}(0) \in B_{\delta_0} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{E}\mathbf{x}(0))\| = 0 \quad (۴۳-۲)$$

□

لازم به ذکر است برای سیستم تکین نیمه صریح خود گران به شکل

^۱ Autonomous

^۲ $B_\delta = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq \delta\}$

(۴۴-۲)

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$0 = f_2(x_1, x_2)$$

اگر شاخص سیستم برابر با یک باشد ($f_{2;x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ غیر تکین باشد)، آنگاه سیستم شامل متغیرهای دینامیکی x_1 و متغیرهای جبری x_2 خواهد بود. دینامیک x_1 با معادله $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ به دست می‌آید در حالی که x_2 در هر لحظه از سایر متغیرها به دست می‌آید و تصویری از سایر متغیرهاست. یا به عبارتی می‌توان گفت که سیستم قید $f_2(x_1, x_2) = 0$ را ارضا می‌کند و یا جواب‌های سیستم دیفرانسیلی $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ در زیر فضای محدود شده با $f_2(x_1, x_2) = 0$ مد نظر می‌باشد. این مسئله نشان می‌دهد که بالا رفتن شاخص در سیستم‌های تکین تاثیری بر پایداری سیستم با شرایط اولیه سازگار ندارد و بر پاسخ گذرای سیستم تاثیرگذار است. برای سیستم‌هایی با شاخص بالاتر باید پاسخ‌های ضربه دار کنترل شود و باید مسئله ایجاد ضربه در پاسخ را با ناپایداری سیستم متفاوت دانست.

یکی از مهم‌ترین روش‌های بررسی پایداری در سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی نظریه لیاپانوف است. برای بررسی پایداری سیستم‌های تکین نیز روش‌های مبتنی بر لیاپانوف تعمیم داده شده است.

قضیه ۱-۲ [۷۸]

برای سیستم (۴۲-۲) با فرض $f(0) = 0$ و شرایط اولیه سازگار، اگر تابع لیاپانوف مثبت $V(x)$ وجود داشته باشد که مقدار آن در x هایی که $Ex = 0$ باشد برابر با صفر گردد و در سایر نقاط مقدار مثبت داشته باشد و شرایط زیر را ارضا نماید که

$$\frac{\partial}{\partial x} V = V_1^T(x) E \quad V_1 \in C^1, V_1: R^n \rightarrow R^n \quad (\text{الف})$$

$$\dot{V} = V_1^T(x)f(x) \leq 0 \quad (\text{ب})$$

آنگاه نقطه تعادل $x = 0$ پایدار می‌باشد و اگر علاوه بر آن شرط

$$\dot{V} = V_1^T(x)f(x) < 0 \quad (\text{ج})$$

را ارضا نماید، آنگاه نقطه تعادل $x = 0$ به صورت مجانبی پایدار است. (اثبات در [۷۸]). □

قابل ذکر است که شرط الف در قضیه تضمین می‌کند که در هنگام مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف جمله $E\dot{x}$ ظاهر شود که بتوان به جای آن دینامیک $f(x)$ را جایگزین نمود و مسئله پایداری را تحلیل نمود. در غیر اینصورت اگر $\dot{x}$ به تنهایی ظاهر شود در ادامه تحلیل مسئله به مشکل برخورد خواهد کرد زیرا نمی‌توان مشابه با سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی به راحتی دینامیک سیستم را جایگزین $\dot{x}$ کرد.

قضیه زیر علاوه بر پایداری مجانبی به بررسی شاخص سیستم نیز می‌پردازد.

قضیه ۲-۲ [۷۸]

برای سیستم (۴۲-۲) با فرض $f(0) = 0$ و شرایط اولیه سازگار، اگر تابع لیاپانوف مثبت $V(x) \in C^3$ وجود داشته باشد که مقدار آن در x هایی که $E\dot{x} = 0$ باشد برابر با صفر گردد و در سایر نقاط مقدار مثبت داشته باشد و شرایط زیر را ارضا نماید که

$$\frac{\partial}{\partial x} V = V_1^T(x)E \quad V_1 \in C^2, V_1: R^n \rightarrow R^n \quad (\text{الف})$$

$$\dot{V} = V_1^T(x) \mathbf{f}(x) < 0 \quad (\text{ب})$$

$$E^T V_{1x} = V_{1x}^T E \geq 0 \quad \text{where } V_{1x} = \frac{\partial V_1}{\partial x} \quad (\text{ج})$$

را ارضا نماید، آنگاه نقطه تعادل $\mathbf{x} = 0$ به صورت مجانبی پایدار است و شاخص سیستم برابر با یک خواهد بود. (اثبات در [۷۸]). □

در سیستم‌های تکین با شاخص یک، تحلیل پایداری کمی آسان‌تر است. به عنوان نمونه در سیستم تکین نیمه صریح (۲-۴۴) اگر شاخص سیستم برابر با یک باشد ($\mathbf{f}_{2;x_2} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2}$ غیر تکین باشد) آنگاه طبق قضیه تابع ضمنی می‌توان x_2 را مانند $x_2 = h(x_1)$ به دست آورد که در $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, h(\mathbf{x}_1)) = 0$ صدق می‌کند و $h(0) = 0$ باشد. بنابراین اگر $\mathbf{x}_1 \rightarrow 0$ آنگاه $\mathbf{x}_2 \rightarrow 0$ میل می‌کند. در نتیجه می‌توان پایداری را برای سیستم دیفرانسیلی معمولی

$$(۲-۴۵)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, h(\mathbf{x}_1))$$

بررسی نمود. همانطور که قبلاً بیان شد، سیستم با شاخص یک حل‌پذیر است و ضربه در پاسخ نخواهد داشت، بنابراین از پایدار بودن سیستم می‌توان به مجاز بودن سیستم رسید.

۲-۴-۱ پایداری و مجاز بودن سیستم‌های خطی

در مهندسی کنترل سیستم‌های خطی اهمیت و کاربرد فراوانی دارند. اکثر نظریه‌های کنترلی مختلف ابتدا برای سیستم‌های خطی طراحی می‌شود و سپس برای عموم سیستم‌ها تعمیم می‌یابد. بررسی پایداری و مجاز بودن سیستم‌های تکین خطی علاوه بر اینکه کاربرد فراوانی دارد، درک بهتری از رفتارهای سیستم‌های تکین در اختیار می‌گذارد. سیستم تکین خطی خودگردان

$$\dot{\mathbf{E}}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (۴۶-۲)$$

را در نظر بگیرید. در بررسی این سیستم به طور معمول به بررسی زوج $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$ می پردازیم. به صورت کلی سیستم تکین خطی پایدار مجانبی است، اگر $\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{A}) < 0$ باشد که $\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{A})$ ، شعاع طیفی تعمیم یافته است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{A}) \triangleq \max_{\lambda \in \{s | \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0\}} \text{Re}(\lambda) \quad (۴۷-۲)$$

تعریف ۳-۸ - [۱۱۲] سیستم تکین $(۴۶-۲)$ ، پایدار مجانبی است اگر تمام ریشه های معادله $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$ دارای قسمت حقیقی منفی باشند یا اگر اعداد مثبتی مانند β, α وجود داشته باشند به گونه ای که داشته باشیم:

$$(۴۸-۲)$$

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \alpha e^{-\beta t} \|\mathbf{x}(0)\|_2, \quad t > 0$$

برای سیستم هایی که به شکل استاندارد یا کرونکر-ویسترس تجزیه شده اند، می توان پایداری و بدون ضربه بودن را برای اجزا زیر سیستم ها بررسی نمود. لم زیر به بررسی مجاز بودن این سیستم ها می پردازد.

لم ۲-۲ برای سیستم تجزیه شده به شکل $(۲۲-۲)$ می توان نوشت:

- سیستم $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$ ، بدون ضربه است، اگر و فقط اگر $N = 0$
- سیستم $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$ ، پایدار است، اگر و فقط اگر $\alpha(A_1) < 0$
- سیستم $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$ ، مجاز است، اگر و فقط اگر $N = 0$ ، $\alpha(A_1) < 0$

که $\alpha(\mathbf{A}) = \alpha(\mathbf{I}, \mathbf{A})$ می باشد. $\square$

لازم به یاد آوری است که در صورتی می‌توان سیستم (۳۹-۲) را به شکل (۲۲-۲) تجزیه نمود که سیستم منظم باشد. از اشکالات این روش اینست که پیدا کردن ماتریس‌های M_1 و N_1 برای تجزیه سیستم به راحتی امکان‌پذیر نمی‌باشد. استفاده از نظریه لیاپانوف نیز برای تحلیل پایداری سیستم‌های خطی تکین بسیار مورد توجه محققین قرار گرفته است و توابع لیاپانوف متعددی برای این سیستم‌ها پیشنهاد شده است. در ادامه به بیان یک قضیه برای این سیستم‌ها خواهیم پرداخت.

قضیه ۳-۲ [۷۸]

برای سیستم (۴۶-۲)، زوج (E, A) پایدار و بدون ضربه است، اگر و فقط اگر ماتریس P وجود داشته باشد که نامعادله لیاپانوف تعمیم یافته زیر را ارضا نماید به طوری که

$$(۴۹-۲)$$

$$\begin{cases} P^T A + A^T P < 0 \\ E^T P = P^T E \geq 0 \end{cases}$$

لازم به تذکر است که $x^T E^T P x = 0$ اگر و فقط اگر $Ex = 0$ باشد. اثبات قضیه در [۷۸] موجود است. $\square$

این قضیه در ادامه در طراحی کنترل کننده مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۵-۲ کاهش شاخص سیستم

کاهش شاخص سیستم فرایندی است که در آن مدل‌هایی با شاخص بالاتر را به صورت مدلی با شاخص کمتر به طور معمول با شاخص صفر یا یک، بازنویسی می‌کنند. هدف از این کار تحلیل ساده‌تر مسئله می‌باشد و توجه به اینکه بسیاری از روش‌های عددی حل معادلات تکین و نرم افزارهای شبیه‌سازی ارائه شده برای این کلاس از سیستم‌ها محدود به سیستم‌هایی با شاخص یک هستند. ابزار کلیدی در کاهش شاخص یک سیستم و آشکارسازی قیود پنهان سیستم مشتق‌گیری می‌باشد. به

همین خاطر فرایندهای پیشنهادی برای کاهش شاخص مشابه با فرایندهایی است که برای محاسبه شاخص و بررسی حل‌پذیری سیستم‌ها صورت می‌گیرد. به عنوان مثال روشی که در محاسبه شاخص مشتقی سیستم ارائه شد یکی از روش‌های کاهش شاخص نیز محسوب می‌شود، به طوری که قیدهای پنهان مدل را به عنوان معادلات جبری به مدل اضافه می‌کنند.

از آن جهت که تحلیل سیستم‌ها با شاخص یک آسان‌تر از سیستم‌هایی با شاخص بالاتر است و این سیستم‌ها بیشتر مورد توجه محققین و مهندسين کنترل است، روش‌های کاهش شاخص به کرات مورد توجه قرار گرفته است [۲۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۱۳، ۱۱۴]. ولی از آن جا که کاهش شاخص جز اهداف این رساله نمی‌باشد، تحلیل بیشتر روش‌های ارائه شده مد نظر ما نمی‌باشد و در طراحی کنترل کننده‌ها شاخص اولیه سیستم‌ها مورد توجه قرار گرفته است.

۲-۶ اهمیت کنترل پس‌خورد در سیستم‌های تکین

طراحی کنترل‌کننده‌ها به طور عموم برای اهداف کنترلی مختلفی صورت می‌گیرد. در سیستم‌های تکین علاوه بر اهداف بهینه‌سازی، تنظیم، ردگیری و پایدارسازی، اهدافی مانند منظم سازی، حذف رفتارهای ضربه‌ای، کاهش شاخص، بهبود مرتبه تعمیم یافته سیستم نیز مورد توجه قرار می‌گیرد. استفاده از پس‌خورد در این سیستم‌ها نیز می‌تواند بر مشخصه‌های سیستم تکین حلقه بسته تاثیرگذار باشد. استفاده از پس‌خورد حالت برای کنترل سیستم‌های تکین خطی در کنار سایر کنترل کننده‌ها می‌تواند علاوه بر اهداف کنترلی تنظیم و ردگیری، اهداف منظم‌سازی و حذف ضربه را نیز محقق سازد. از آنجا که پس‌خورد تناسبی (استاتیک) نمی‌تواند بر ماتریس E سیستم تاثیرگذار باشد در اغلب اوقات از پس‌خورد مشتقات حالت نیز استفاده می‌شود که بتواند مستقیماً ماتریس E سیستم را تحت تاثیر قرار دهد. حال آنکه استفاده از پس‌خورد مشتقات حالت برای سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی رایج نیست. به عنوان مثال کنترل پس‌خورد زیر را برای سیستم خطی (۲-۹) در نظر بگیرید.

(۵۰-۲)

$$u = K_1 x - K_2 \dot{x} + v$$

که در آن جمله اول پس‌خورد تناسبی، جمله دوم پس‌خورد مشتقی و v کنترل جدید می‌باشد. $K_1, K_2 \in R^{m \times n}$ است. کنترل (۵۰-۲) را کنترل پس‌خورد حالت تناسبی مشتقی (P-D) می‌نامند. بنابراین سیستم حلقه بسته را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$(E + BK_2)\dot{x} = (A + BK_1)x + Bv \quad (۵۱-۲)$$

همانطور که از معادلات مشخص است با تنظیم بهینه ماتریس‌های K_1, K_2 می‌توان مشخصه‌های سیستم تکین حلقه بسته اعم از مرتبه تعمیم‌یافته، شاخص، رفتارهای ضربه‌ای و غیره را تحت تاثیر قرار داد. قابل توجه است که اگر چه پس‌خورد مشتقات حالت کارایی بسزایی برای سیستم‌های تکین دارد ولی از آن‌جا که ممکن است مشتق تمام حالت‌ها در دسترس نباشد و اینکه مشتق‌گیری باعث افزایش نویزپذیری در سیستم می‌شود، تا زمانی که پس‌خورد تناسبی بتواند اهداف کنترلی را محقق سازد از پس‌خورد مشتقی استفاده نمی‌شود.

طراحی دقیق ضرائب پس‌خورد نیازمند مدل ریاضی دقیق سیستم تکین می‌باشد، حال آنکه در بسیاری از سیستم‌های واقعی ممکن است مدل دقیق در دسترس نباشد. از این‌رو در این رساله طراحی پس‌خورد حالت تطبیقی برای سیستم‌های خطی و همچنین سیستم‌های غیرخطی لپشیتز^۱ با پارامترهای نامعلوم مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۷-۲- جمع‌بندی

^۱ Lipschitz

در این فصل، ساختار سیستم‌های تکین مورد بررسی قرار گرفت. سیستم‌های تکین معادلات دیفرانسیلی و جبری را به طور همزمان دارا می‌باشند. متغیرهای اضافی در سیستم‌های تکین یا ناشی از قیدهای حاکم بر مسئله و یا برای ارائه مدل دقیق‌تر و کامل‌تر در معادلات سیستم ظاهر می‌شوند. این نوع سیستم‌ها لزوماً علی نمی‌باشند. معادلات تکین ممکن است جواب نداشته باشد، بی‌نهایت جواب داشته باشد یا دارای جواب یکتا باشد که به شرایط حل‌پذیری سیستم بستگی دارد. بررسی حل‌پذیری، شرایط وجودی جواب و محاسبه شاخص برای سیستم‌های تکین در این فصل انجام شد. شاخص‌های^۱ مختلفی برای طبقه‌بندی میزان پیچیدگی حل معادلات سیستم تکین ارائه شده است که نشان می‌دهد پیچیدگی یک سیستم دیفرانسیلی جبری چه مقدار از یک سیستم دیفرانسیلی معمولی بیشتر است. به‌طور کلی سیستمی با شاخص بالاتر در مقایسه با سیستمی با شاخص پایین‌تر، با مشکلات و پیچیدگی‌های بیشتری در تحلیل و کنترل مواجه است. مفاهیم شرایط اولیه سازگار و قیدهای پنهان در این فصل مورد بررسی قرار گرفت. پایداری، مجاز بودن و قضایای مربوط به آن عنوان شد و بیان گردید که سیستم تکین مجاز است اگر علاوه بر پایداری، منظم و بدون ضربه نیز باشد. در پایان فصل، اهداف کنترلی مورد نیاز برای سیستم‌های تکین و اهمیت کنترل پس‌خورد در کنترل سیستم‌های تکین بررسی شد. در فصل بعد به طراحی کنترل‌کننده تطبیقی برای سیستم‌های تکین با اهداف مجازسازی و ردگیری خواهیم پرداخت.

¹ Index



فصل سوم

طراحی کنترل کننده تطبیقی برای سیستم‌های تکین خطی

فصل سوم - طراحی کنترل کننده تطبیقی برای سیستم‌های تکین خطی

۳-۱- مقدمه

در این فصل به طراحی کنترل کننده پس خورد حالت تطبیقی برای سیستم های تکین خطی خواهیم پرداخت. ابتدا مسئله مجاز سازی و طراحی کنترل کننده برای مجاز نمودن سیستم تک متغیره (SISO) مورد بررسی قرار خواهد گرفت، سپس کنترل کننده پیشنهادی را برای حل مسئله ردگیری سیستم های تکین تعمیم می دهیم. در ادامه کنترل تطبیقی سیستم های تکین خطی چند متغیره (MIMO) مورد بحث قرار می گیرد. برای بررسی بهتر کارایی کنترل کننده ها، روش های پیشنهادی را بر روی سیستم های نمونه تکین شبیه سازی شده است و نتایج شبیه سازی کارایی کنترل های پیشنهادی را تایید می کند.

۳-۲- مجاز سازی سیستم تکین خطی به کمک کنترل تطبیقی

سیستم تکین خطی نامتغیر با زمان تک ورودی زیر را از مرتبه n در نظر بگیرید

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۳-۱)$$

که در آن $u \in R$ و $A, E \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times 1}$ می باشد. ماتریس E یک ماتریس تکین و ماتریس A نامعلوم است.

هدف کنترل در این بخش، طراحی کنترل کننده پس خورد حالت تطبیقی

$$u = -\theta x \quad (۳-۲)$$

و یک قانون تطبیق برای بردار θ با بعد $1 \times n$ می‌باشد، به طوریکه سیستم حلقه بسته

(۳-۳)

$$E\dot{x}(t) = (A + B\theta)x(t)$$

مجاز باشد. بررسی مجاز بودن سیستم با قضیه (۳-۲) انجام خواهد گرفت. برای طراحی کنترل کننده ابتدا فرض‌های زیر را در نظر بگیرید.

فرض ۱-۳ - برای سیستم (۱-۳) فرض می‌کنیم ماتریس P وجود دارد به طوریکه

$$E^T P = P^T E \geq 0 \quad (۴-۳)$$

فرض ۲-۳ - با دانستن P ، فرض می‌کنیم که بردار θ^* وجود دارد به طوریکه

$$-E^T Q = P^T (A + B\theta^*) + (A + B\theta^*)^T P \quad (۵-۳)$$

که ماتریس $E^T Q$ یک ماتریس مثبت نیمه معین متقارن و بردار θ^* نامعلوم است.

دو فرض بالا به طور کلی بیان می‌دارد که سیستم (۱-۳) قابلیت مجاز شدن با پس‌خورد حالت را داراست. با دانستن فرض‌های بالا، طراحی کنترل کننده را در قضیه ۱-۳ بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۳

برای سیستم (۱-۳) با کنترل پس‌خورد حالت تطبیقی (۲-۳) که در آن θ یک بردار قابل تنظیم با قانون تنظیم

$$\dot{\theta}^T = -\gamma x x^T P^T B \quad (۶-۳)$$

می‌باشد، در حالی که γ یک ضریب مثبت با عنوان آهنگ همگرایی و P شرط (۴-۳) را ارضا می‌نماید، سیستم حلقه بسته (۳-۳) یک سیستم مجاز خواهد بود.

اثبات- ابتدا فرض کنید که کنترل ایده‌آل $u = \theta^* x$ که در آن θ^* شرط (۳-۵) را ارضا می‌کند، به سیستم اعمال شود. در این حالت سیستم حلقه بسته (E, A^*) که در آن

$$A^* = A + B\theta^* \quad (۳-۷)$$

می‌باشد، طبق قضیه پایداری (۲-۳) پایدار و مجاز خواهد بود. حال با انتخاب کنترل $u = \theta x$ ، هدف کنترل میل کردن کنترل u به کنترل ایده‌آل u^* و در نتیجه آن همگرا شدن بردار θ به بردار θ^* خواهد بود.

با دانستن این هدف، سیستم حلقه بسته (۳-۳) را به کمک (۳-۷) بازنویسی می‌کنیم. دینامیک سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود.

$$E\dot{x} = A^*x + B(\theta - \theta^*)x \quad (۳-۸)$$

از رابطه (۳-۸) مشخص است اگر بردار θ برابر با بردار θ^* گردد، آنگاه سیستم حلقه بسته مجاز خواهد بود. برای کاهش خطای پارامتری و پایدار نمودن سیستم، تابع لیاپانوف مثبت زیر را انتخاب می‌کنیم.

$$(۳-۹)$$

$$V = x^T E^T P x + \frac{1}{\gamma} (\theta - \theta^*) (\theta - \theta^*)^T$$

با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف نسبت به زمان خواهیم داشت:

$$\dot{V} = \dot{x}^T E^T P x + x^T P^T E \dot{x} + \frac{2}{\gamma} (\theta - \theta^*) \dot{\theta}^T \quad (۳-۱۰)$$

با جایگذاری دینامیک حلقه بسته (۳-۸) در رابطه (۳-۱۰) داریم:

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T [\mathbf{P}^T \mathbf{A}^* + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{P}] \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) + \frac{2}{\gamma}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)^T \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (۱۱-۳)$$

با توجه به فرض (۵-۳) و رابطه (۷-۳) مشتق تابع لیپانوف را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) [\mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} + \frac{1}{\gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T] \quad (۱۲-۳)$$

بنابراین با انتخاب قانون تنظیم (۶-۳) برای بردار $\boldsymbol{\theta}$ ، مشتق تابع لیپانوف طبق رابطه زیر منفی نیمه معین خواهد شد.

$$(۱۳-۳)$$

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$$

بنابراین با لم باربالات می‌توان نتیجه گرفت که سیستم حلقه بسته مجاز خواهد بود.

از آن جهت که تابع لیپانوف تعریف شده از پایین کراندار است و مشتق آن منفی نیمه معین می‌باشد، این موضوع ایجاب می‌کند که $V(t) \leq V(0)$ باشد و بنابراین بردار $\mathbf{x}$ و $(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)$ کراندار است. برای استفاده از لم باربالات، بایستگی پیوستگی یکنواخت $\dot{V}$ بررسی گردد. مشتق $\dot{V}$ به صورت زیر خواهد بود.

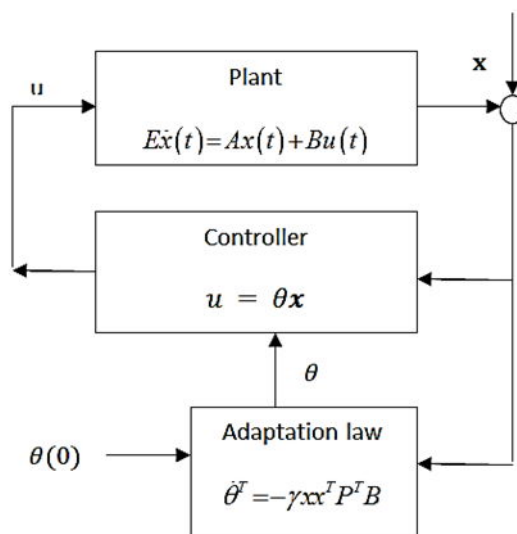
$$\ddot{V} = -2\mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T (\mathbf{A}^* \mathbf{x} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*) \mathbf{x}) \quad (۱۴-۳)$$

از آنجا که بردار $\mathbf{x}$ و $(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)$ کراندار است، این رابطه نشان می‌دهد که $\ddot{V}$ نیز کراندار است. این بدان معنی است که $\dot{V}$ به صورت یکنواخت پیوسته می‌باشد. آنگاه لم باربالات نشان می‌دهد که چنانچه

$t \rightarrow \infty$ میل کند، $\mathbf{x} \rightarrow 0$ میل می‌کند. □

همانطور که مشخص است ساختار کنترل کننده پیشنهادی در مقایسه با کنترل کننده های موجود، ساده و عملی می باشد. کنترل مجاز سازی سیستم تکین خطی تک ورودی در شکل ۱-۳ خلاصه شده است.

برای بررسی بهتر کارایی کنترل کننده، کنترل پیشنهادی بر روی یک سیستم تکین نمونه شبیه سازی شده است که در ادامه توضیح داده خواهد شد.



شکل ۱-۳ کنترل مجاز سازی سیستم تکین خطی تک ورودی

۱-۲-۳ شبیه سازی

برای بررسی بهتر عملکرد کنترل کننده، روش پیشنهادی بر روی یک سیستم عددی نمونه شبیه سازی شده است. سیستم تکین خطی با رابطه (۱-۳) و مقادیر

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (۱۴-۳)$$

در نظر بگیرید. شرایط اولیه به صورت $x_1(0) = -2.2$, $x_2(0) = 4.1$, $x_3(0) = -1$ فرض شده است. کنترل کننده زیر مطابق با قضیه ۱-۳ به سیستم اعمال شده است.

$$u = \theta x = [\theta_{11} \ \theta_{12} \ \theta_{13}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{\theta}^T = -\gamma x x^T P^T B, \quad P = \begin{bmatrix} 0.7029 & 0.9404 & 0.9001 \\ 0.4581 & 0.8770 & -0.4500 \\ -0.5948 & -0.5674 & 0.9001 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

که در آن $\gamma=0.9$ انتخاب شده است و ماتریس P شرط (3-4) را ارضا می‌کند. مقادیر اولیه بردار θ به صورت $[-28, 1, 0.2]$ در نظر گرفته شده است. پاسخ زمانی سه متغیر سیستم در شکل 3-2 نمایش داده شده است. همانطور که مشخص است پاسخ سیستم به سرعت به سمت صفر همگرا شده است و بیانگر این است که کنترل پیشنهادی در پایداری سیستم موفق بوده است. شکل 3-3 همگرایی پارامترهای تحت تنظیم θ را نشان می‌دهد که به یک مقدار ثابت که می‌تواند تخمینی از بردار θ باشد همگرا شده است. مقدار نهایی بردار θ برابر با $[-5.7965, -5.2173, 0.3800]$ است که فرض (3-5) را تایید می‌کند. هزینه کنترل در شکل 3-4 نشان داده شده است. همانطور که مشخص است ورودی کنترل‌کننده تغییرات آرامی دارد، محدود و قابل قبول است.

همانطور که از نتایج شبیه‌سازی مشخص است کنترل پیشنهادی در مجاز سازی سیستم تکین موفق عمل نموده است و سیستم حلقه بسته نهایی با مقدار نهایی θ یک سیستم مجاز است.

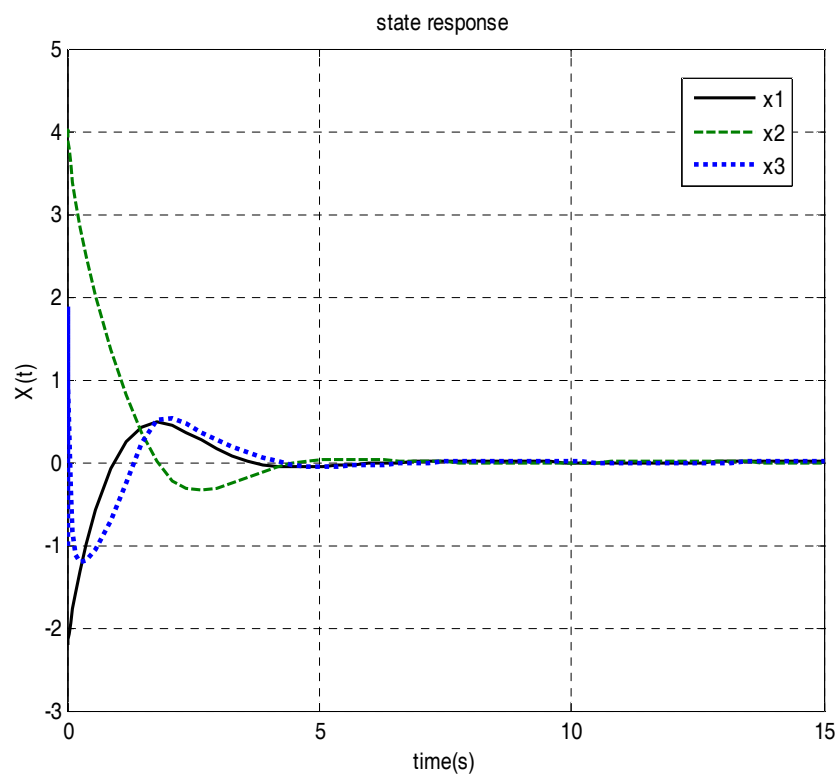
3-3- ردگیری کامل حالت برای سیستم تکین خطی تک ورودی به کمک

کنترل تطبیقی

در بخش قبل مجاز سازی سیستم تکین به کمک کنترل تطبیقی انجام گرفت، در این بخش کنترل پیشنهادی را برای تحقق هدف ردگیری کامل متغیرهای حالت از یک مسیر مطلوب تعمیم می‌دهیم. هدف در این بخش، طراحی کنترل u می‌باشد به طوری که حالت‌های سیستم x بتواند مقادیر مطلوب x_d^1 را ردگیری کند. ابتدا باید در نظر داشت که مسیر مطلوب ارائه شده برای سیستم

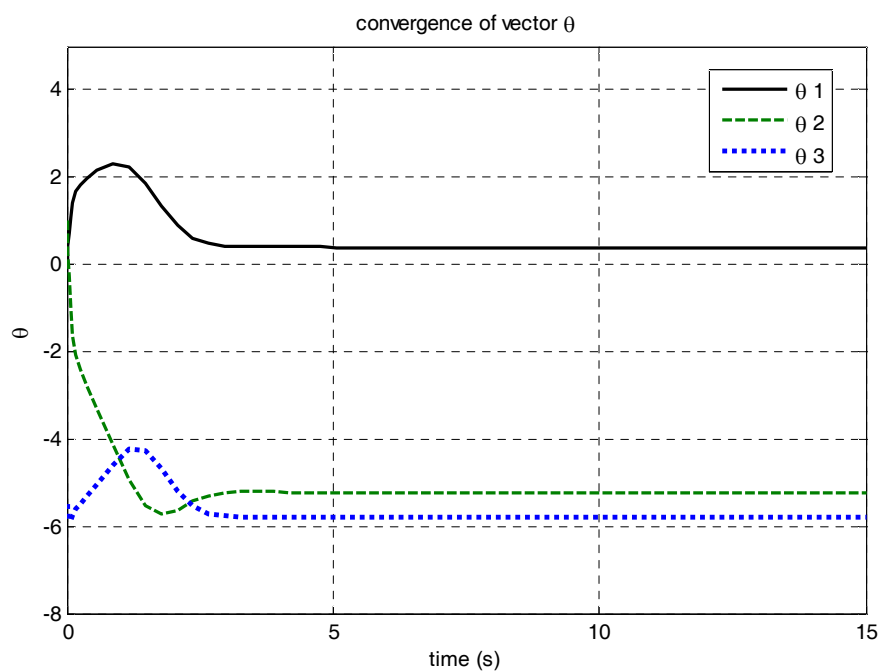
¹ Desired trajectory

می‌بایست یک مسیر ممکن یا شدنی^۱ باشد. مسیر ممکن بدین معناست که اگر مقادیر اولیه حالت‌های سیستم بر روی مسیر مرجع قرار داشته باشد امکان ادامه حرکت بر روی مسیر مرجع با ورودی محدود برای سیستم وجود داشته باشد [۱۱۵].

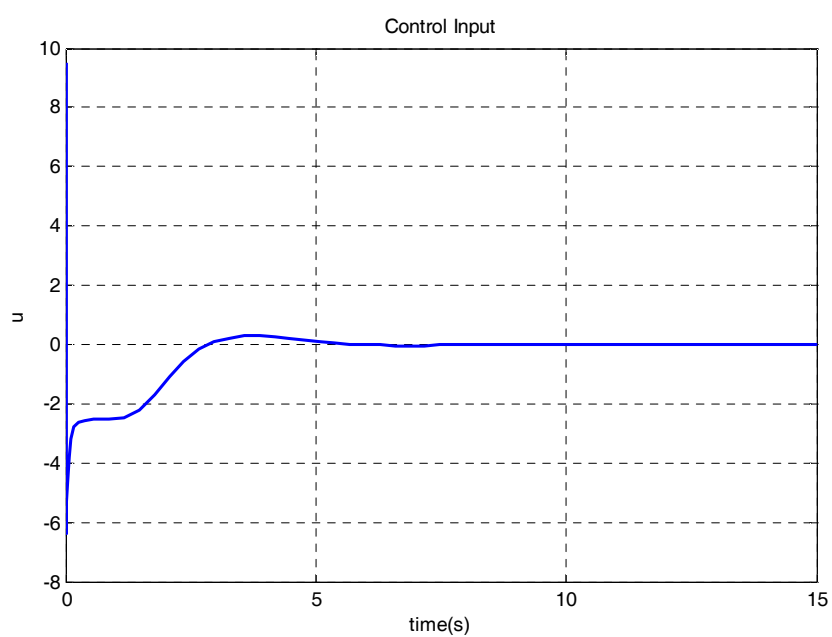


^۲ Feasible

شکل ۳-۲ - پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم. هر سه متغیر به سمت صفر همگرا شده‌اند.



شکل ۳-۳ - همگرایی پارامترهای تحت تنظیم θ به یک مقدار ثابت که می‌تواند تخمینی از بردار $\hat{\theta}$ باشد.



شکل ۳-۴- ورودی کنترلی اعمال شده به سیستم تکین

در راستای این هدف می‌توان گفت مسیرهای مطلوب $\mathbf{x}_d$ باید در معادلات سیستم صدق کند، نرم و مشتق‌پذیر از درجه مورد نیاز باشد. به طور کلی برای سیستم‌های تکین می‌توان گفت که مسیر مرجع باید طوری انتخاب گردد که مشتقات لازم به نحوی که $E\dot{\mathbf{x}}_d$ موجود باشد، در دسترس باشد.

از آن جهت که رتبه ماتریس E کامل نمی‌باشد در بعضی حالت‌ها ممکن است مشتق تمامی متغیرهای مطلوب $\mathbf{x}_d$ مورد نیاز نباشد، لیکن مسیر مطلوب ارائه شده باید شرط وابستگی جبری متغیرها را ارضا نماید و یا به عبارتی دیگر در معادلات جبری مدل نیز صدق کند. بنابراین داریم:

(۱۶-۳)

$$E\dot{\mathbf{x}}_d(t) = A\mathbf{x}_d(t) + B\mathbf{u}_d(t)$$

که در آن $\mathbf{u}_d$ را هزینه ردگیری می‌نامیم و برابر با هزینه‌ای است که برای نگه داشتن حالت‌های سیستم بر روی مسیر مطلوب $\mathbf{x}_d$ باید داده شود. همانطور که مشخص است $\mathbf{u}_d$ فقط به انتخاب مسیر مرجع $\mathbf{x}_d$ و پارامترهای سیستم بستگی دارد. حال برای تحقق هدف ردگیری کنترل‌کننده زیر پیشنهاد می‌شود.

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}_1 \mathbf{e} - \mathbf{0}_2 \mathbf{x}_d \quad (17-3)$$

که در آن

(۱۸-۳)

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$$

برابر با خطای ردگیری سیستم است. حال هدف کنترل پیدا کردن قانون تنظیم برای بردارهای $\mathbf{0}_1$ و $\mathbf{0}_2$ می‌باشد به‌طوری‌که تمامی حالت‌های سیستم حلقه بسته

(۱۹-۳)

$$\dot{\mathbf{E}}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{e} - \boldsymbol{\theta}_2 \mathbf{x}_d)$$

مسیر مطلوب $\mathbf{x}_d$ را ردگیری نماید. برای تحقق این هدف ابتدا در نظر می‌گیریم که فرض‌های ۱-۳ و ۲-۳ به ازای $\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\theta}_1^*$ برقرار باشد و فرض ۳-۳ نیز برقرار باشد.

فرض ۳-۳ - بردار $\boldsymbol{\theta}_2^*$ وجود دارد به طوریکه

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_d(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{\theta}_2^* \mathbf{x}_d(t) \quad (۲۰-۳)$$

یا به عبارتی دیگر فرض شده است که هزینه ردگیری u_d برای مسیر مطلوب $\mathbf{x}_d$ با $\boldsymbol{\theta}_2^* \mathbf{x}_d$ معادل است. با دانستن فرض‌های ۱-۳ تا ۳-۳، طراحی کنترل‌کننده برای ردگیری حالت سیستم تکین خطی در قضیه زیر خلاصه شده است.

قضیه ۲-۳ - تمامی حالت‌های سیستم (۱-۳) با قانون کنترل تطبیقی (۱۷-۳) که در آن $\boldsymbol{\theta}_1$ و $\boldsymbol{\theta}_2$ بردارهای قابل تنظیم با قانون تنظیم

(۲۱-۳)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}}_1^T &= -\gamma_1 \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_2^T &= \gamma_2 \mathbf{x}_d \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} \end{aligned}$$

می‌باشد، مسیر مطلوب $\mathbf{x}_d$ را ردگیری خواهند کرد و سیستم حلقه بسته (۱۹-۳) یک سیستم مجاز خواهد بود.

اثبات - در سیستم حلقه بسته (۱۹-۳) مقدار $\mathbf{x}$ را با رابطه

$$\mathbf{x} = \mathbf{e} - \mathbf{x}_d \quad (۲۲-۳)$$

جایگزین می‌کنیم. دینامیک حلقه بسته به صورت

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{0}_1\mathbf{e} - \mathbf{B}\mathbf{0}_2\mathbf{x}_d + \mathbf{E}\ddot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{A}\mathbf{x}_d \quad (23-3)$$

خواهد بود. با افزودن و کم کردن جملات $\mathbf{B}\mathbf{0}_1^*\mathbf{e}$ و $\mathbf{B}\mathbf{0}_2^*\mathbf{x}_d$ داریم

$$(24-3)$$

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{0}_1^*\mathbf{e} + \mathbf{B}(\mathbf{0}_1 - \mathbf{0}_1^*)\mathbf{e} - \mathbf{B}\mathbf{0}_2^*\mathbf{x}_d - \mathbf{B}(\mathbf{0}_2 - \mathbf{0}_2^*)\mathbf{x}_d + \mathbf{E}\ddot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{A}\mathbf{x}_d$$

با توجه به رابطه (۲۰-۳) و پس از ساده‌سازی، رابطه (۲۴-۳) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$(25-3)$$

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{0}_1^*)\mathbf{e} + \mathbf{B}(\mathbf{0}_1 - \mathbf{0}_1^*)\mathbf{e} - \mathbf{B}(\mathbf{0}_2 - \mathbf{0}_2^*)\mathbf{x}_d$$

حال تابع لیاپانوف زیر را مشابه با (۹-۳) به صورت زیر انتخاب می‌کنیم.

$$V = \mathbf{e}^T \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{\gamma_1} (\mathbf{0}_1 - \mathbf{0}_1^*) (\mathbf{0}_1 - \mathbf{0}_1^*)^T + \frac{1}{\gamma_2} (\mathbf{0}_2 - \mathbf{0}_2^*) (\mathbf{0}_2 - \mathbf{0}_2^*)^T \quad (26-3)$$

پس از مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف، به طور مشابه با (۱۰-۳) و (۱۱-۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mathbf{e}^T [\mathbf{P}^T \mathbf{A}^* + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{P}] \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\mathbf{0}_1 - \mathbf{0}_1^*)\mathbf{e} - 2\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\mathbf{0}_2 - \mathbf{0}_2^*)\mathbf{x}_d \\ & + \frac{2}{\gamma_1} (\mathbf{0}_1 - \mathbf{0}_1^*) \dot{\mathbf{0}}_1^T + \frac{2}{\gamma_2} (\mathbf{0}_2 - \mathbf{0}_2^*) \dot{\mathbf{0}}_2^T \end{aligned} \quad (27-3)$$

که در آن

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{0}_1^* \quad (28-3)$$

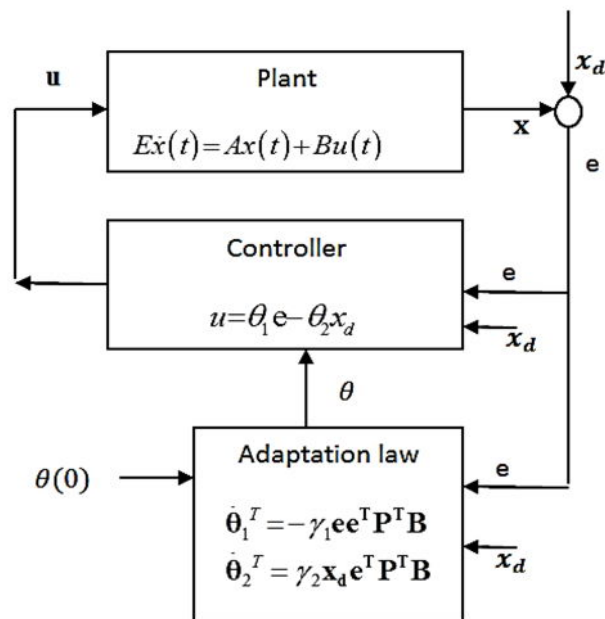
می‌باشد. پس از مرتب‌سازی، رابطه (۲۷-۳) به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\dot{V} = \mathbf{e}^T [\mathbf{P}^T \mathbf{A}^* + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{P}] \mathbf{e} + 2(\mathbf{0}_1 - \mathbf{0}_1^*) [\mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} + \frac{1}{\gamma_1} \dot{\mathbf{0}}_1^T] + 2(\mathbf{0}_2 - \mathbf{0}_2^*) [-\mathbf{x}_d \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} + \frac{1}{\gamma_2} \dot{\mathbf{0}}_2^T] \quad (29-3)$$

بنابراین با انتخاب قوانین تنظیم به صورت (۲۱-۳) و با توجه به رابطه (۲۸-۳) و (۵-۳) مشتق تابع لیاپانوف به صورت

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \quad (۳۰-۳)$$

خواهد بود. بنابراین به طور مشابه با استفاده از لم باربالات (۱۴-۳) می‌توان نتیجه گرفت که خطای ردگیری به سمت صفر میل می‌کند. سیستم کنترل تطبیقی برای ردگیری حالت سیستم تکین خطی در شکل ۵-۳ نشان داده شده است. برای بررسی بهتر عملکرد ردگیری کنترل‌کننده، روش پیشنهادی را علاوه بر سیستم (۱۴-۳) بر روی یک موتور DC که به صورت معادلات تکین مدل شده است نیز پیاده سازی نموده‌ایم در ادامه دو شبیه‌سازی الف برای سیستم نمونه (۱۴-۳) و شبیه‌سازی ب برای سیستم موتور DC مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۵-۳ - سیستم کنترل تطبیقی برای ردگیری حالت سیستم تکین خطی

۳-۳-۱- شبیه سازی الف

در این بخش سیستم کنترل ردگیری حالت را بر روی سیستم نمونه (۳-۱۴) شبیه‌سازی نموده‌ایم. همان مقادیر اولیه برای x انتخاب شده است.

هدف کنترل در این قسمت این است که متغیرهای حالت سیستم (۳-۱۴) مسیر مطلوب

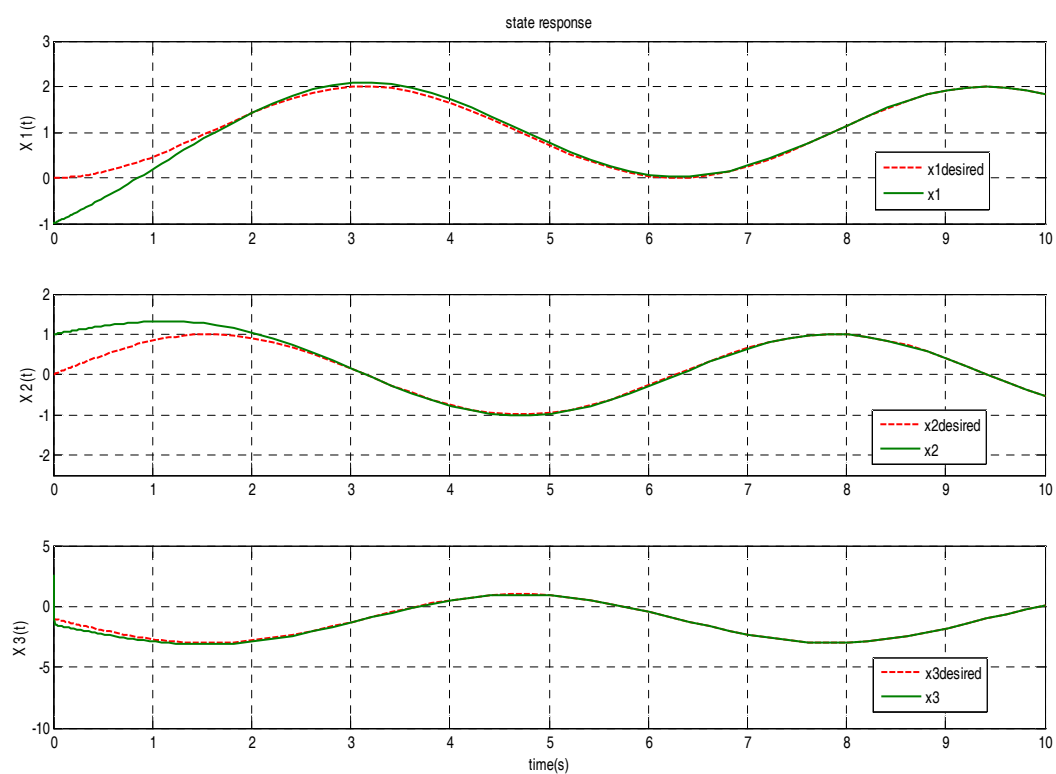
$$x_d = [1 - \cos(t), \sin(t), -1 - \sin(t)] \quad (۳-۳۱)$$

را ردگیری کنند. قانون کنترل (۳-۱۷) به همراه قوانین تنظیم (۳-۲۱) به سیستم اعمال شده است. ماتریس P در این بخش به صورت

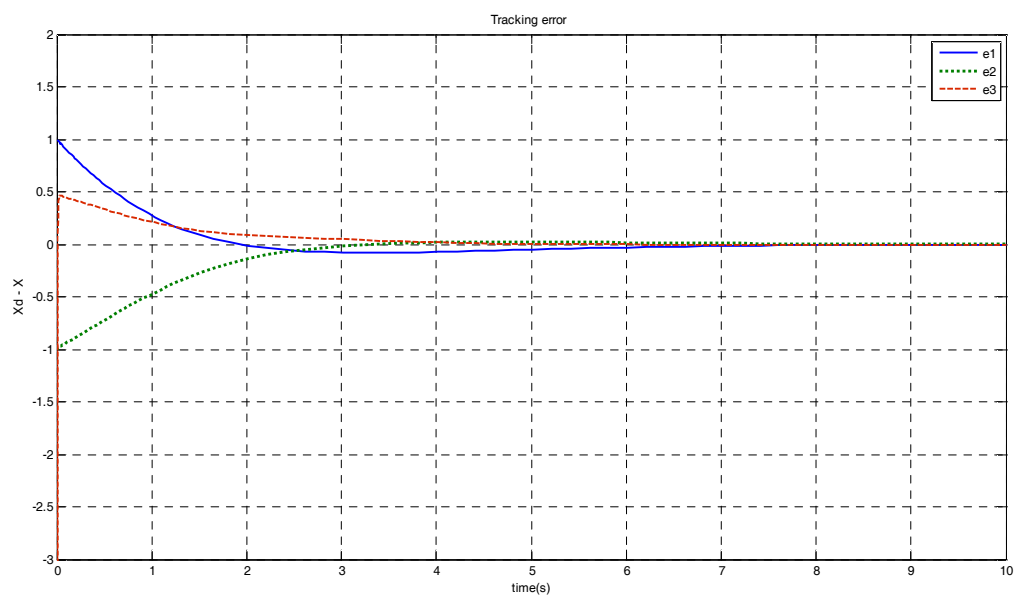
$$P = \begin{bmatrix} 1.1882 & 1.2846 & -1.8363 \\ 0.2321 & 0.7336 & 0.9182 \\ -0.0534 & -0.2967 & -1.8363 \end{bmatrix} \quad (۳-۳۲)$$

تعریف شده است که شرط (۳-۴) را ارضا می‌نماید.

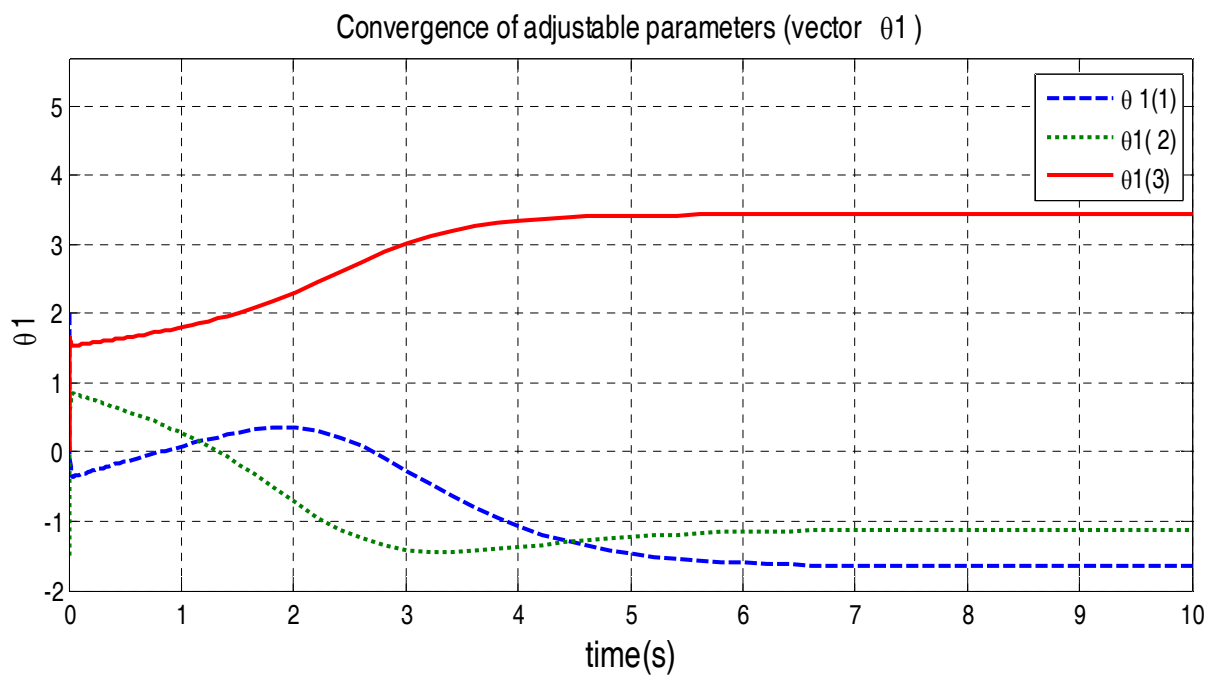
نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۳-۶ تا ۳-۱۰ نشان داده شده است. ردگیری متغیرهای حالت از مسیر مطلوب در شکل ۳-۶ آورده شده است که نشان می‌دهد کنترل پیشنهادی در ردگیری مسیر مطلوب موفق عمل نموده است. خطای ردگیری در شکل ۳-۷ نمایش داده شده است. همانطور که از شکل مشخص است خطای ردگیری قابل قبول می‌باشد و به سمت صفر همگرا شده است. همگرایی پارامترهای تحت تنظیم بردارهای θ_1 و θ_2 به ترتیب در شکل‌های ۳-۸ و ۳-۹ نشان داده شده است. پارامترها به سمت مقدار ثابتی همگرا شده‌اند. مقدار نهایی بردار θ_1 برابر با $[3.4305 \quad -1.1163 \quad -1.6511]$ به دست آمده است که با ماتریس P در نظر گرفته شده، در شرط (۳-۵) صدق می‌کند. ورودی کنترلی اعمال شده در مقایسه با هزینه ردگیری u_d که به صورت مستقیم از رابطه (۳-۱۶) محاسبه شده است در شکل (۳-۱۰) نمایش داده شده است.



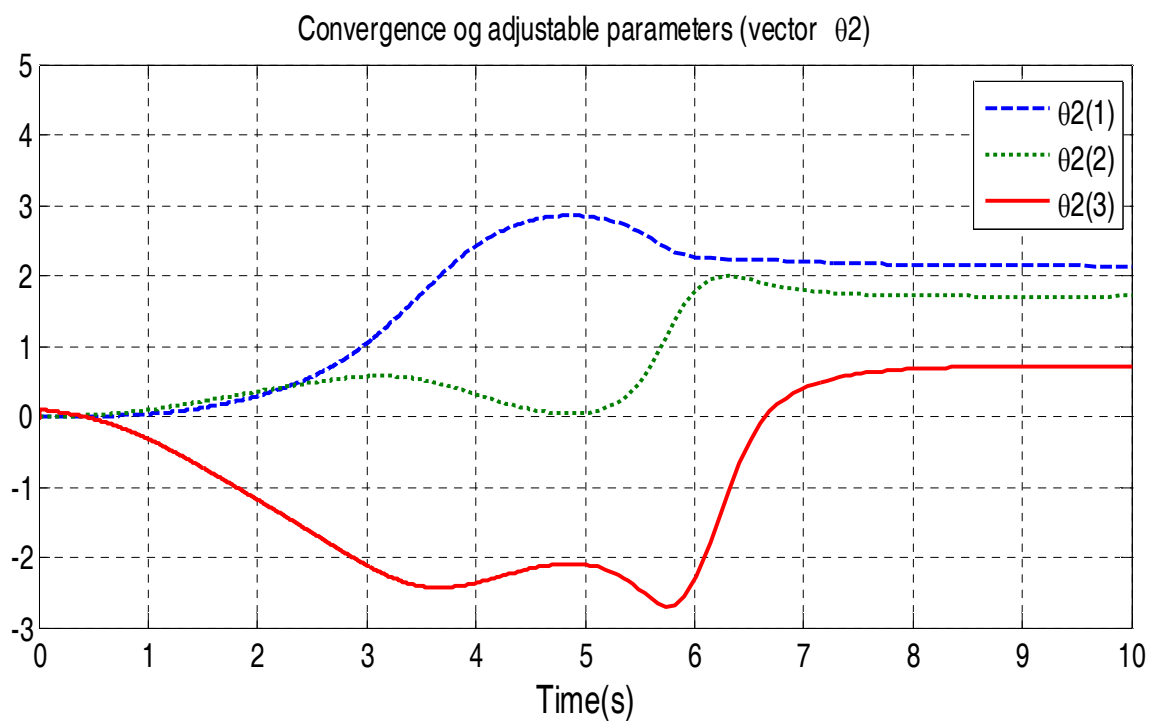
شکل ۳-۶- ردگیری متغیرهای حالت سیستم تکین نمونه از مسیر مطلوب (شبیه سازی الف)



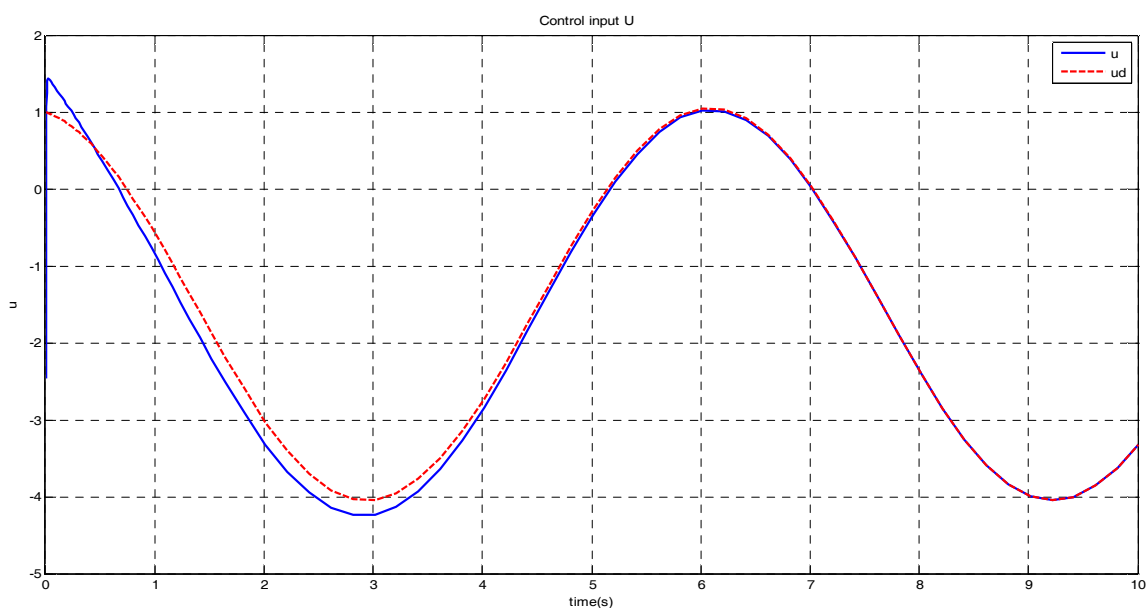
شکل ۳-۷- خطای ردگیری متغیرهای سیستم تکین نمونه از مسیر مطلوب (شبیه سازی الف)



شکل ۳-۸- همگرایی پارامترهای تحت تنظیم بردار θ_1 در شبیه سازی الف



شکل ۳-۹- همگرایی پارامترهای تحت تنظیم بردار θ_2 در شبیه سازی الف



شکل ۳-۱۰- ورودی کنترلی اعمال شده به سیستم نمونه برای ردگیری حالت. u_d هزینه ردگیری پیش‌بینی شده می‌باشد که به صورت ریاضی با هدف مقایسه محاسبه شده است. (شبیه سازی الف)

همانطور که مشخص است نیروی کنترل محدود و تغییرات آرامی دارد و به سمت هزینه ردگیری u_d پیش‌بینی شده همگرا شده است. نتایج شبیه‌سازی کارایی کنترل پیشنهادی را برای ردگیری سیستم‌های تکین خطی تایید می‌کند. برای بررسی بهتر، شبیه‌سازی دوم بر روی مدل یک سیستم موتور DC انجام گرفته است.

۳-۳-۲ شبیه سازی ب - مدل تکین موتور DC

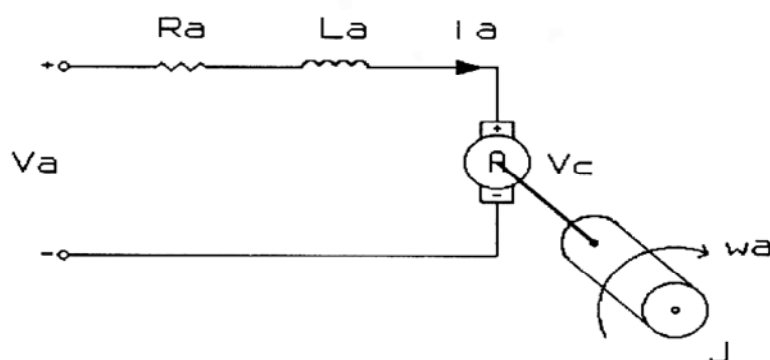
در این قسمت برای بررسی بهتر رفتار کنترل‌کننده، روش پیشنهادی بر روی یک موتور DC که به صورت کامل‌تر با سیستم تکین مدل شده است انجام گرفته است. شکل ۳-۱۱ یک موتور DC ساده را نشان می‌دهد. اگر از اندوکتانس موتور صرف‌نظر کنیم، معادلات سیستم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} V_a(t) = R i_a(t) + K_w \omega(t) \\ J \frac{d\omega}{dt} = K_t i_a(t) - b \omega(t) \end{cases} \quad (3-33)$$

که در آن $V_a(t)$, $i_a(t)$ و $\omega(t)$ به ترتیب ولتاژ آرمیچر موتور، جریان آرمیچر و سرعت شفت موتور را در لحظه t نشان می‌دهند. R مقاومت الکتریکی آرمیچر بوده و K_t, K_w ضرایب ثابت نیرو و گشتاور موتور هستند. J, b نیز ضریب دمپینگ و ممان اینرسی موتور می‌باشند. معادلات سیستم شامل یک معادله دیفرانسیل و یک معادله جبری ناشی از قانون kvl حاکم بر سیستم می‌باشد. در فضای حالت معمولی این سیستم به صورت یک سیستم درجه یک با یک متغیر حالت مدل می‌شود و رفتار جریان آرمیچر مدل نمی‌شود. می‌توان این سیستم را به صورت کامل‌تر با مدل تکین مدل‌سازی کرد. مدل تکین موتور می‌تواند رفتار جریان ناشی از سویچ زنی و تغییرات هنگام اعمال بار را در مدار توصیف کند.

با انتخاب $u(t) = V_a(t)$, $x_1(t) = i_a(t)$ و $x_2(t) = \omega(t)$ به عنوان متغیرهای حالت، معادلات توصیف کننده موتور DC بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & K_w \\ K_t & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3-34)$$



شکل ۳-۱۲- مدلی ساده از موتور DC

همان‌طور که مشاهده می‌شود معادله به دست آمده به شکل تکین می‌باشد. پارامترهای استفاده شده برای موتور در جدول ۳-۱ آورده شده است.

جدول ۳-۱- پارامترهای مدل موتور DC

b	J	K_w	K_t	R
2.5×10^{-5} NM/rpm	1.5×10^{-5} NMS	8×10^{-3} v/rpm	8×10^{-3} v/rpm	0.8Ω

حال قانون کنترل (۳-۱۷) به همراه قوانین تنظیم (۳-۲۱) به سیستم موتور اعمال می‌کنیم. شرایط اولیه موتور به صورت $x_1(0) = 3A$, $x_2(0) = 500 rpm$ تعریف شده است. ماتریس p در این قسمت به صورت

(۳-۳۵)

$$p = \begin{bmatrix} -0.697 & -0.006 \\ 0 & 0.617 \end{bmatrix}$$

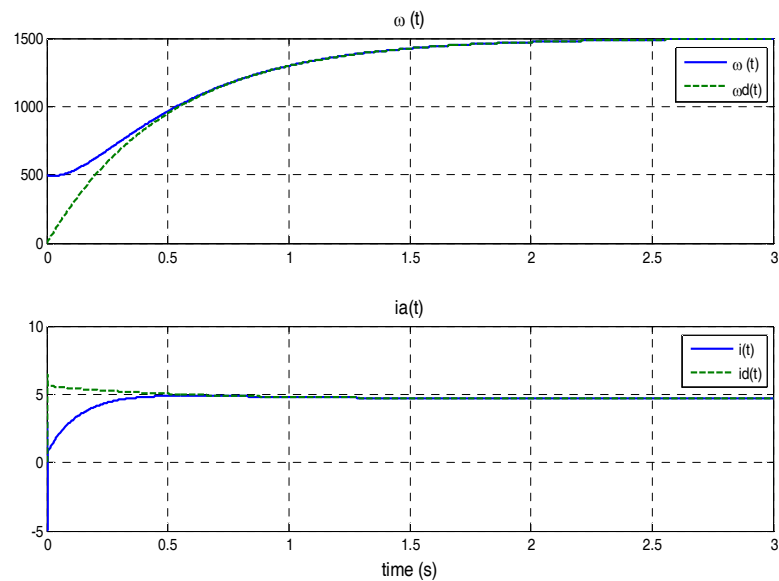
تعریف شده است که در شرط (۳-۴) صدق می‌کند. هدف کنترل این است که سرعت و جریان موتور مسیر مطلوب

(۳-۳۶)

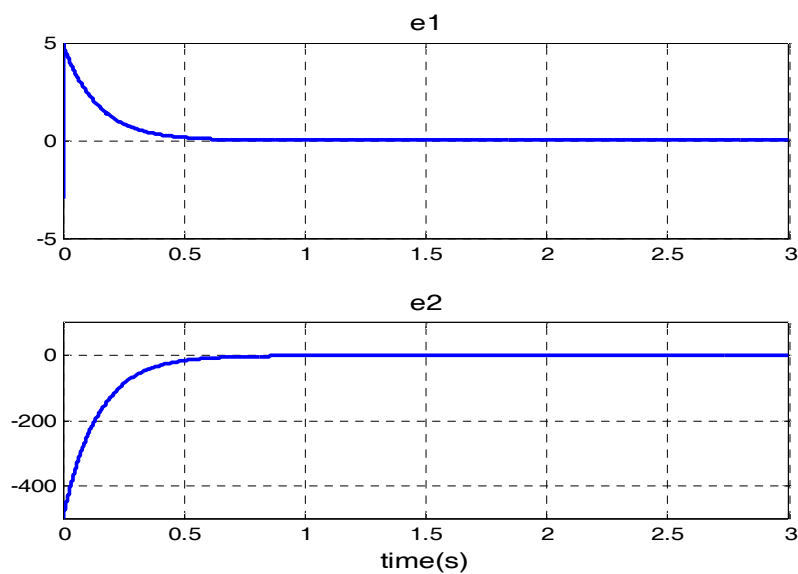
$$x_d = [(4.7 + 0.93e^{-2t}), (1500 - 1500e^{-2t})]^T$$

را ردگیری کنند. نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۳-۱۳ تا ۳-۱۷ نمایش داده شده است. ردگیری متغیرهای حالت موتور از مسیر مطلوب داده شده در شکل ۳-۱۳ نشان داده شده است. خطای ردگیری در شکل ۳-۱۴ آورده شده است. همان‌طور که از نتایج مشخص است ردگیری مسیر به صورت کامل انجام گرفته است. همگرایی پارامترهای تحت تنظیم بردارهای θ_1 و θ_2 به ترتیب در شکل‌های

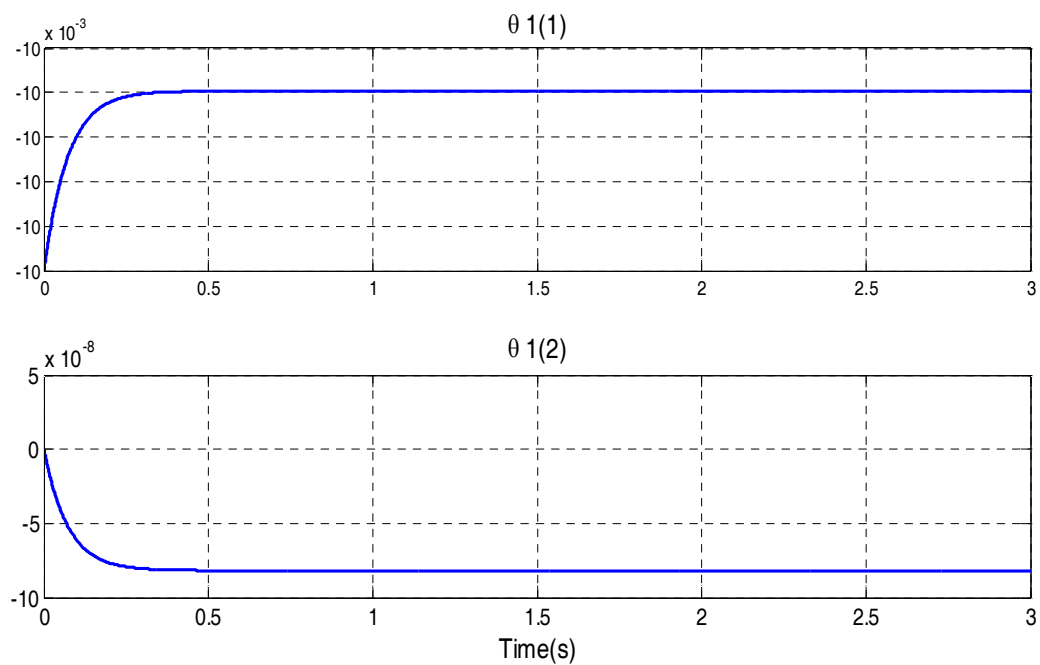
۱۵-۳ و ۱۶-۳ نشان داده شده است. پارامترها به سمت مقدار ثابتی همگرا شده‌اند که می‌تواند تخمینی از مقادیر ایده‌آل θ_1^* و θ_2^* باشند. مقدار نهایی بردار θ_1 برابر با $[-0.01 \ -8.1 \times 10^{-8}]$ به دست آمده است که با ماتریس P در نظرگرفته شده در شرط (۵-۳) صدق می‌کند. ورودی کنترلی محدود و قابل قبول است و در شکل ۱۷-۳ نشان داده شده است.



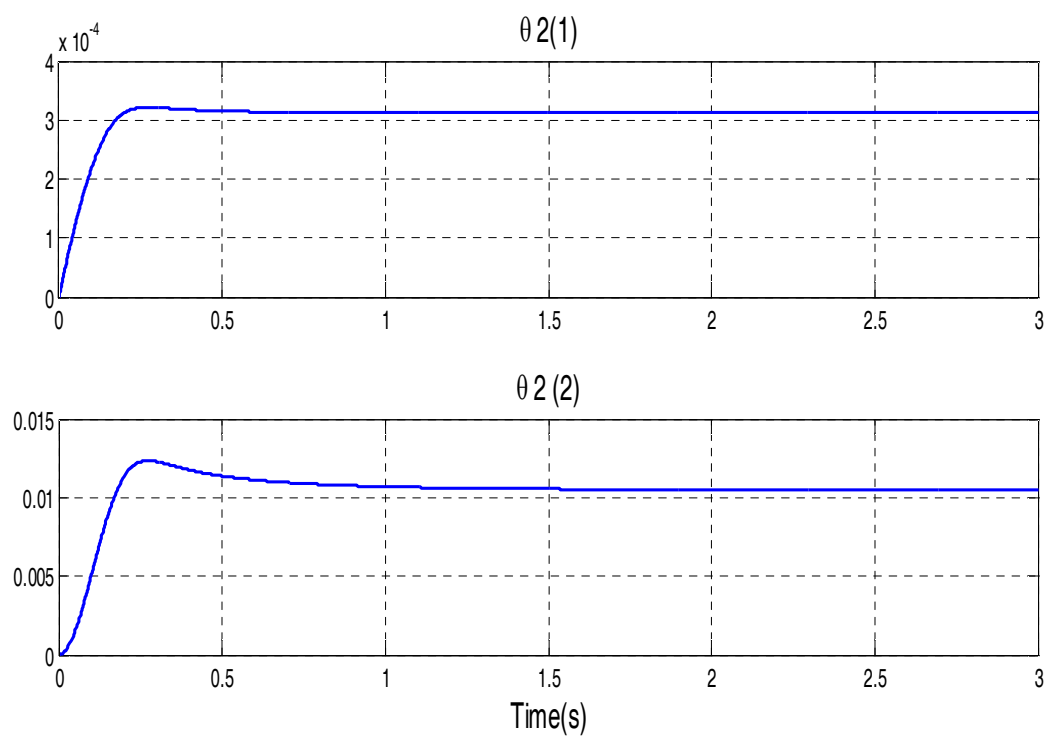
شکل ۱۳-۳- ردگیری متغیرهای حالت موتور از مسیر مطلوب در شبیه سازی ب.



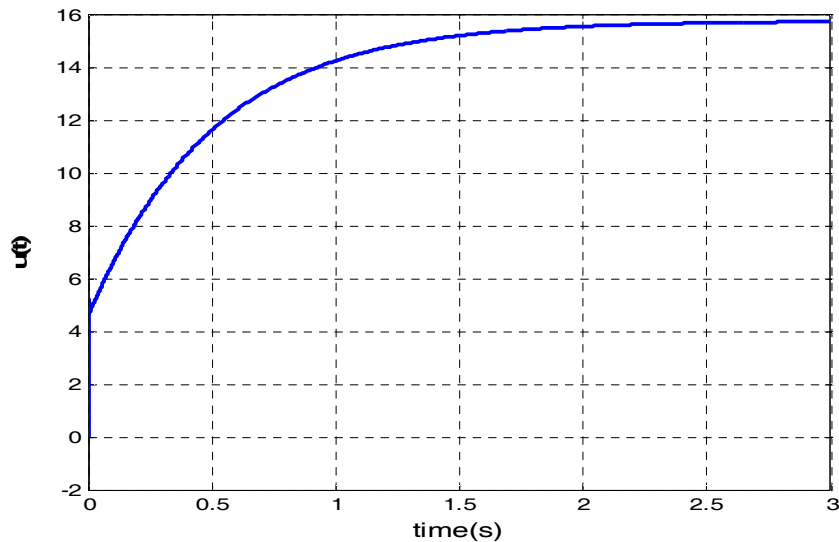
شکل ۳-۱۴- خطای ردگیری متغیرهای موتور در شبیه‌سازی ب



شکل ۳-۱۵- همگرایی پارامترهای تحت تنظیم بردار θ_1 در شبیه‌سازی ب



شکل ۳-۱۶ - همگرایی پارامترهای تحت تنظیم بردار θ_2 در شبیه سازی



شکل ۳-۱۷ - ولتاژ ورودی (ورودی کنترل) موتور در شبیه سازی ب

همانطور که از نتایج دو شبیه سازی مشخص است کنترل تطبیقی پیشنهادی عملکرد بسیار خوبی در ردگیری حالت سیستم های تکین خطی دارد. در ادامه فصل، روش کنترل پیشنهادی برای ردگیری کامل حالت سیستم های تکین خطی چند متغیره تعمیم داده می شود.

۳-۴ - طراحی کنترل تطبیقی برای ردگیری حالت سیستم های تکین خطی

چندمتغیره

طراحی کنترل تطبیقی برای مجازسازی و ردگیری سیستم های تکین تک ورودی در بخش های گذشته انجام گرفت. در آن حالت، θ یک بردار $1 \times n$ بود ولی در حالت چند ورودی ضرایب پس خورد به صورت ماتریس $m \times n$ خواهد بود. در این بخش هدف تنظیم هر لحظه ماتریس ضرائب پس خورد برای کنترل سیستم بر پایه تئوری لیاپانوف است. سیستم تکین خطی چند ورودی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (37-3)$$

در این حالت ماتریس $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$ است که m تعداد ورودی‌های سیستم می‌باشد. مانند حالات قبلی، ماتریس $\mathbf{A}$ نامعلوم فرض شده است. کنترل پیشنهادی به صورت مشابه با (37-17) به صورت

$$(38-3)$$

$$\mathbf{u}=\theta_1\mathbf{e}-\theta_2\mathbf{x}_d$$

تعریف می‌شود که در این حالت ماتریس‌های $\theta_1, \theta_2 \in R^{n \times n}$ می‌باشند. بنابراین سیستم حلقه بسته مشابه با (37-19) می‌باشد. فرض‌های اولیه 3-1 تا 3-3 برای ماتریس‌های $\theta_1^*, \theta_2^* \in R^{n \times n}$ نیز برقرار می‌باشند. تنها تفاوت سیستم با سیستم قبل در تعریف تابع لیاپانوف و در نتیجه آن قوانین تنظیم خواهد بود. اگر θ_1, θ_2 ماتریس باشند، تابع لیاپانوف (37-26) اسکالر نخواهد بود و مورد قبول نیست. برای این منظور در تعریف و ساده‌سازی تابع لیاپانوف از بردار سازی ماتریس‌ها ($vec(.)$) و ضرب کرونکر استفاده کرده‌ایم که در ادامه در قضیه 3-3 توضیح داده می‌شود.

قضیه 3-3 - تمامی حالت‌های سیستم تکین چند متغیره (37-3) با استفاده از قانون کنترل (37-38)

(38) که در آن θ_1, θ_2 ماتریس‌های قابل تنظیم با قوانین تنظیم

$$\begin{aligned} vec(\dot{\theta}_1)^T &= -\gamma_1 (\mathbf{e}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}) \\ vec(\dot{\theta}_2)^T &= \gamma_2 (\mathbf{x}_d^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (39-3)$$

می‌باشند، حالت‌های مطلوب $\mathbf{x}_d$ را ردگیری می‌کنند و سیستم حلقه بسته مجاز خواهد بود. $vec(p)$ برابر با بردار ستونی از تمام اعضای ماتریس p است به صورتی که تمام ستون‌های ماتریس p پشت سر هم نوشته شود و $\otimes$ نماد ضرب کرونکر است.

اثبات- به دلیل تشابه از آوردن بعضی از روابط مشابه صرف نظر شده است. سیستم حلقه بسته پس از مرتب سازی مشابه با (۳-۲۵) خواهد بود. برای سیستم های چند ورودی تابع لیاپانوف زیر را تعریف می کنیم.

$$V = \mathbf{e}^T \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{\gamma_1} \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*)^T \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) + \frac{1}{\gamma_2} \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*)^T \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*) \quad (3-40)$$

پس از مشتق گیری و مرتب سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mathbf{e}^T [\mathbf{P}^T \mathbf{A}^* + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{P}] \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \mathbf{e} - 2\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*) \mathbf{x}_d \\ & + \frac{2}{\gamma_1} \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) + \frac{2}{\gamma_2} \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_2)^T \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*) \end{aligned} \quad (3-41)$$

با توجه به اسکالر بودن جملات $\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \mathbf{e}$ و $\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*) \mathbf{x}_d$ ، می توان بیان نمود

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \mathbf{e} &= \text{vec}(\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \mathbf{e}) \\ \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*) \mathbf{x}_d &= \text{vec}(\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*) \mathbf{x}_d) \end{aligned} \quad (3-42)$$

با استناد به قضایای مربوط به ضرب کرونگر که در [۱۱۶] آمده است و به صورت خلاصه در پیوست توضیح داده شده است، داریم:

$$(3-43)$$

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \mathbf{e}) &= (\mathbf{e}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}) \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \\ \text{vec}(\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*) \mathbf{x}_d) &= (\mathbf{x}_d^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}) \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*) \end{aligned}$$

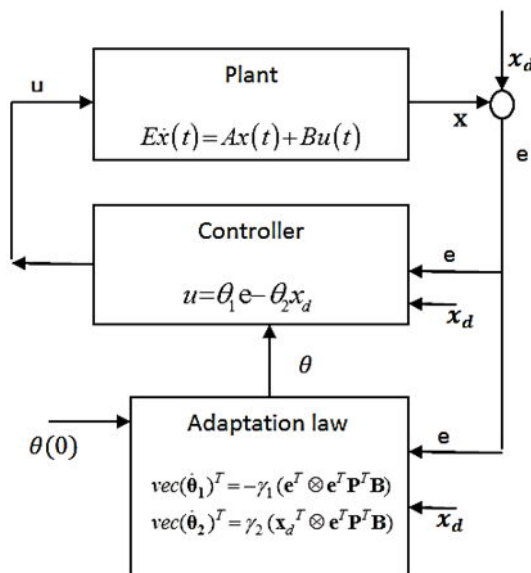
حال با استفاده از رابطه (۳-۴۳) در (۳-۴۱) مشتق تابع لیاپانوف را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{e}^T \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + [(\mathbf{e}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}) + \frac{2}{\gamma_1} \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1)^T] \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \\ & + [-(\mathbf{x}_d^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}) + \frac{2}{\gamma_2} \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_2)^T] \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*) \end{aligned} \quad (3-44)$$

بنابراین با انتخاب قوانین تنظیم به صورت رابطه (۳-۳۹)، مشتق تابع لیاپانوف مشابه با (۳-۳۰) منفی معین خواهد بود. بنابراین خطای ردگیری به سمت صفر میل می کند و سیستم حلقه بسته طبق قضیه

۳-۲ مجاز خواهد بود. ساختار کنترل کننده تطبیقی برای سیستم خطی چندورودی در شکل (۳-۱۸) نشان داده شده است. ساختار کنترل مشابه با حالت تک ورودی است و تنها تفاوت آن در قوانین تنظیم ماتریس ها می باشد.

استفاده از ضرب کرونکر در تابع لیاپانوف عملیات محاسبات و فاکتورگیری ماتریس ها را بسیار راحت تر می کند.



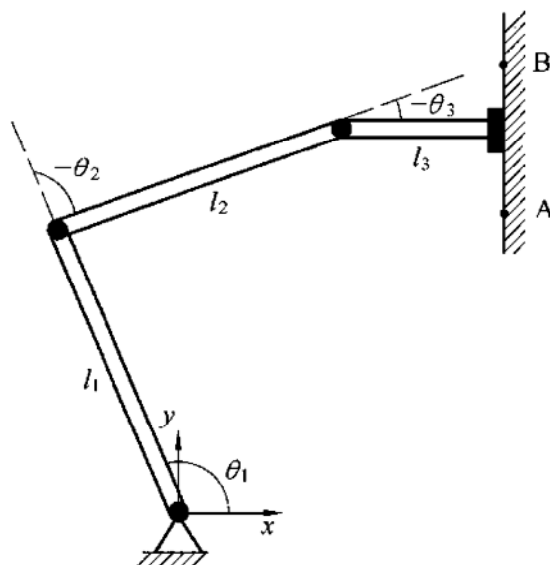
شکل ۳-۱۸ - سیستم کنترل تطبیقی برای ردگیری حالت سیستم تکین خطی چند متغیره.

برای بررسی کارایی کنترل کننده در حالت چند ورودی، روش پیشنهادی را بر روی یک بازوی ربات تحت قید که به صورت تکین مدل شده است، پیاده سازی می شود. مدل ربات و جزئیات شبیه سازی در بخش بعد مورد بررسی قرار گرفته است.

۳-۴-۱- شبیه سازی کنترل بر روی بازوی ربات تمیزکار^۱

در این بخش یک ربات با سه مفصل که مدل ساده شده ربات تمیز کار ارائه شده در [۱۱۷] است، را به عنوان یک مدل کاربردی برای سیستم‌های تکین انتخاب شده است. حرکت یک ربات تمیز کار در برخورد با سطح محدود می‌شود. شکل ۳-۱۹ مدل ساده این ربات را در فضای دوبعدی نشان می‌دهد.

هدف کنترل این است که ربات سطح بین دو نقطه A, B را با یک نیروی ثابت تمیز کند. برای حرکت ربات در راستای این هدف دو قید وجود دارد. اول اینکه حرکت ربات در راستای محور x محدود می‌شود. . در این مسئله فرض می‌کنیم $(x \leq l)$. دوم اینکه هر سه مفصل باید طوری حرکت کنند که نقطه انتهایی ربات عمود بر سطح باشد. که این قید را می‌توان به صورت



شکل ۳-۱۹- مدل ساده شده ربات در فضای دوبعدی [۲۶]

(۳-۴۵)

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$$

¹ Skywash

عنوان کرد. که θ_i زاویه مفصل i ام از محور x است. در هنگام پاک کردن سطح هر دو قید مسئله باید رعایت شود. با اضافه کردن قیدهای مسئله به مدل ربات آزاد ارائه شده در [۱۱۸] معادلات مدل تکین ربات را در فضای مفصلی می‌توان به راحتی به دست آورد.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\theta}(\theta)\ddot{\theta} + \mathbf{c}_{\theta}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{g}_{\theta}(\theta) &= \mathbf{u}_{\theta} + \mathbf{F}_{\theta}^T \mu \\ \Phi_{\theta}(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (۴۶-۳)$$

که در آن $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ بردار زوایای مفصل، $\mathbf{u}_{\theta} \in R^3$ گشتاور ورودی به مفصل، $\mathbf{M}_{\theta} \in R^{3 \times 3}$ ماتریس اینرسی، $\mathbf{c}_{\theta} \in R^3$ بردار نیروهای مرکزگرا و کوریولیس، $\mathbf{g}_{\theta} \in R^3$ بردار نیروهای ناشی از جاذبه، $\mu \in R^2$ بردار ضرائب لاگرانژ، $\mathbf{F}_{\theta}^T \mu$ و $\mathbf{F}_{\theta} = \frac{\partial \Phi_{\theta}}{\partial \theta}$ نیروهای محدود کننده هستند. تابع قید $\Phi_{\theta}(\theta)$ که از محدودیت‌های حاکم بر ربات به دست می‌آید برابر با

$$\Phi_{\theta} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - l \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix} \quad (۴۷-۳)$$

است. از آن جهت که هدف کنترل، کنترل ربات در فضای کار است با انتخاب متغیر $z = [x \ y \ \varphi]$ که در آن x, y موقعیت ربات در فضای کار و φ راستای نقطه انتهایی ربات است،

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \varphi &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{aligned} \quad (۴۸-۳)$$

معادلات دینامیکی ربات را در فضای دکارتی باز نویسی می‌کنیم [۲۶].

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_z(\theta)\ddot{z} + \mathbf{c}_z(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{g}_z(\theta) &= \mathbf{u}_z + \mathbf{F}_z^T \mu \\ \Phi_z(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (۴۹-۳)$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_z(\theta) &= \mathbf{J}^T(\theta) \mathbf{M}_\theta(\theta) \mathbf{J}^{-1}(\theta) \\
\mathbf{g}_z(\theta) &= \mathbf{J}^T(\theta) \mathbf{g}_\theta(\theta) \\
\mathbf{c}_z(\theta, \dot{\theta}) &= \mathbf{J}^T(\theta) [\mathbf{c}_z(\theta, \dot{\theta}) - \mathbf{M}_\theta(\theta) \mathbf{J}^{-1}(\theta) \dot{\mathbf{J}}(\theta) \dot{\theta}] \\
\mathbf{u}_z &= \mathbf{J}^{-T}(\theta) \mathbf{u}_\theta
\end{aligned}
\tag{۵۰-۳}$$

و J ماتریس ژاکوبین ربات است. در این حالت با توجه به (۴۸-۳) قیدهای مسئله را نیز می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned}
\Phi_z(z) &= \mathbf{F}_0 z - \mathbf{L}_0 \\
\mathbf{F}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{۵۱-۳}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\mathbf{F}_z = \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} = \mathbf{F}_0
\tag{۵۲-۳}$$

از معادلات بالا می‌توان دید که یک ربات تحت قید را می‌توان به صورت یک فرم بسته با معادلات جبری دیفرانسیلی مدل کرد. از مزایای این نوع مدل‌سازی این است که دینامیک ربات همراه با قید حاکم بر مسئله تحلیل می‌شود. به طور مثال در ربات مذکور مدل می‌شود که x نمی‌تواند بزرگتر از l باشد و اگر ربات به خواهد در راستای محور x بیشتر حرکت کند در واقع نیروی وارد بر سطح بیشتر می‌شود. مدل کردن این قید در دینامیک سیستم رفتار ربات را کامل‌تر و دقیق‌تر توصیف می‌کند.

حال معادلات فضای کار ربات ارائه شده را در نظر بگیرید. ماتریس‌های ضرائب سیستم $\mathbf{M}_\theta, \mathbf{c}_\theta, \mathbf{g}_\theta, \mathbf{J}$ در [۱۱۸] تعریف شده است. پارامترهای مدل به صورت $m_1 = 20kg, m_2 = 10kg, m_3 = 5kg$ و $l_1 = 2m, l_2 = 1.5m, l_3 = 1m$ تعریف شده است که در آن l_i, m_i جرم و طول مفصل i می‌باشد. همانطور که مشخص است معادلات جبری قیدهای سیستم در فضای دکارتی خطی است. معادلات دینامیک ربات را در نقطه برخورد با سطح خطی می‌کنیم. مختصات نقطه کار در (۵۳-۳) آمده است.

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_\omega &= \left[l \quad l + \frac{\Delta l}{2} \quad 0 \right]^T \\
\dot{\mathbf{z}}_\omega &= \left[0 \quad \dot{y}_\omega \quad 0 \right]^T \\
\ddot{\mathbf{z}}_\omega &= \left[0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \\
\dot{y}_\omega &= 0.3 \text{ m/s}, l = 2 \text{ m}, \Delta l = 1 \text{ m}
\end{aligned}
\tag{۵۳-۳}$$

مقادیر نقطه کار زوایای مفاصل θ_ω از سینماتیک معکوس $\mathbf{z}_\omega$ محاسبه شده است. با انتخاب

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_\omega$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_0 \delta \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{D}_0 \delta \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}_0 \delta \mathbf{z} &= \mathbf{S}_0 \delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_0^T \delta \boldsymbol{\mu} \\
\mathbf{F}_0 \delta \mathbf{z} &= 0
\end{aligned}
\tag{۵۴-۳}$$

نوشت [۲۶]. بردار $\delta \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_\omega$ می‌باشد که در آن $\boldsymbol{\mu}_\omega$ بردار نیروها در لحظه تماس است. درایه اول آن نیروی مطلوب برای تمیز کردن سطح در راستای بردار x است که در این مسئله نیروی مطلوب برابر با (۲۰-) نیوتن در نظر گرفته شده است. و درایه دوم نیرو در راستای محور y که در اینجا برابر با صفر فرض شده است. مقادیر ماتریس‌های دینامیک ربات به صورت (۵۵-۳) می‌باشد.

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_0 &= \begin{bmatrix} -1.521 & -1.551 & 1.551 \\ 3.22 & 3.284 & -3.284 \\ -3.22 & -3.284 & 3.284 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_0 &= \begin{bmatrix} 18.753 & -7.944 & 7.944 \\ -7.944 & 31.818 & -26.818 \\ 7.944 & -26.818 & 26.818 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_0 &= \begin{bmatrix} 67.489 & 69.239 & -69.239 \\ 69.812 & 1.686 & -1.686 \\ -69.812 & -1.686 & -68.27 \end{bmatrix} & \mathbf{S}_0 &= \begin{bmatrix} -0.216 & -0.338 & 0.554 \\ 0.458 & -0.845 & 0.386 \\ -0.458 & 0.845 & 0.613 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{۵۵-۳}$$

با تغییر متغیر

$$\mathbf{x}^T = \left[\delta \mathbf{z}^T \quad \delta \dot{\mathbf{z}}^T \quad \delta \boldsymbol{\mu}^T \right] \tag{۵۶-۳}$$

معادلات خطی شده را می‌توان به صورت

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \tag{۵۷-۳}$$

(۵۸-۳)

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -K_0 & -D_0 & F_0^T \\ F_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ S_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بازنویسی کرد. حال کنترل‌کننده (۳۸-۳) را با قانون تنظیم (۳۹-۳) به سیستم (۵۷-۳) اعمال می‌کنیم. برای تمیز کردن سطح بین نقاط A, B در شکل ۱ با نیروی ثابت ۲۰ نیوتن لازم است تا مقادیر مطلوب حالت‌ها را به صورت

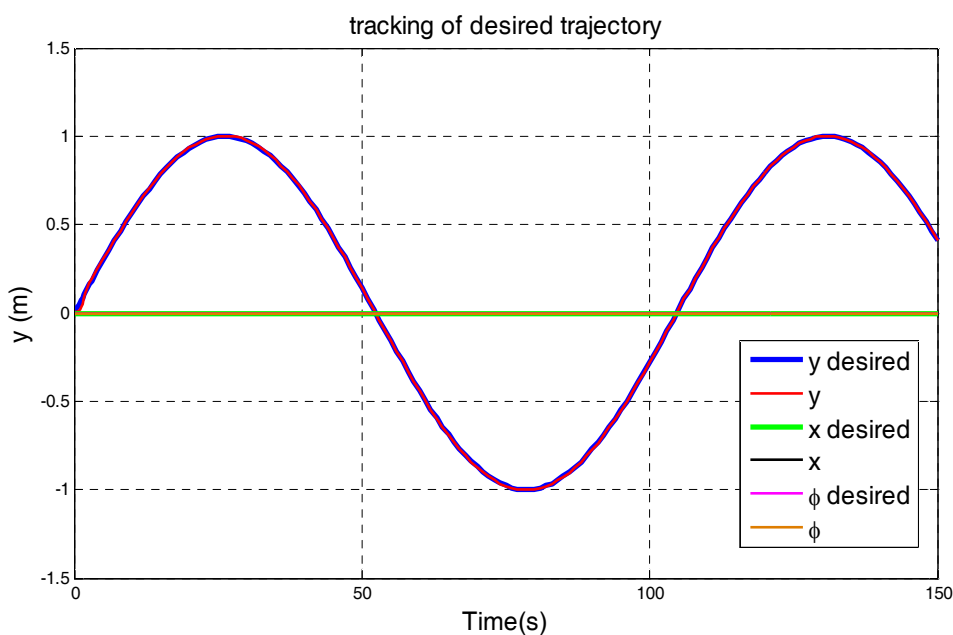
$$x_d = [0 \quad \sin(.06t) \quad 0 \quad 0 \quad 0.06 \cos(.06t) \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (۵۹-۳)$$

تعریف کنیم. هدف کنترل حرکت رفت و بازگشتی نقطه انتهایی ربات بین نقاط A و B در شکل ۳-۱۹ است. نقطه انتهایی ربات از مبدا شروع به حرکت به سمت نقطه A خواهد کرد بعد از توقف در A، تغییر جهت داده و به سمت نقطه B حرکت می‌کند و پس از آن دوباره به سمت نقطه A تغییر جهت می‌دهد. با در نظر گرفتن این هدف و با توجه به صفر شدن سرعت در لحظه تغییر جهت، تعریف تابع سینوسی برای مقدار مطلوب تغییرات y یکی از بهترین گزینه‌های موجود است. مقادیر مطلوب تغییرات x و φ و $\delta\mu$ نیز به ترتیب برای اهداف باقی ماندن بر روی سطح، عمود بودن نقطه انتهایی بر سطح دیوار و ثابت ماندن نیروی اعمالی بر سطح برابر با صفر در نظر گرفته شده است. ردگیری متغیرهای حالت δz از مسیر مطلوب در شکل ۳-۲۰ و متغیرهای جبری $\delta\mu$ در شکل ۳-۲۱ نمایش داده شده است. صفر بودن متغیرهای $\delta\mu$ که بیانگر تفاوت نیروی اعمالی بر سطح با مقدار نیروی مطلوب می‌باشند، تضمین می‌کند که نقطه انتهایی ربات با نیروی ثابت ۲۰ نیوتن بر روی سطح حرکت کند. خطای ردگیری متغیرها در شکل ۳-۲۲ و حرکت نقطه انتهایی ربات بر روی سطح در شکل ۳-۲۳ نمایش داده شده است. گشتاور کنترلی اعمال شده به سه مفصل ربات در شکل ۳-۲۴ نشان داده شده است. همانطور که مشخص است گشتاور ورودی محدود و تغییرات آرامی دارد که قابل اعمال بودن کنترل‌کننده را نشان می‌دهد. نتایج شبیه سازی کارایی کنترل‌کننده پیشنهادی را

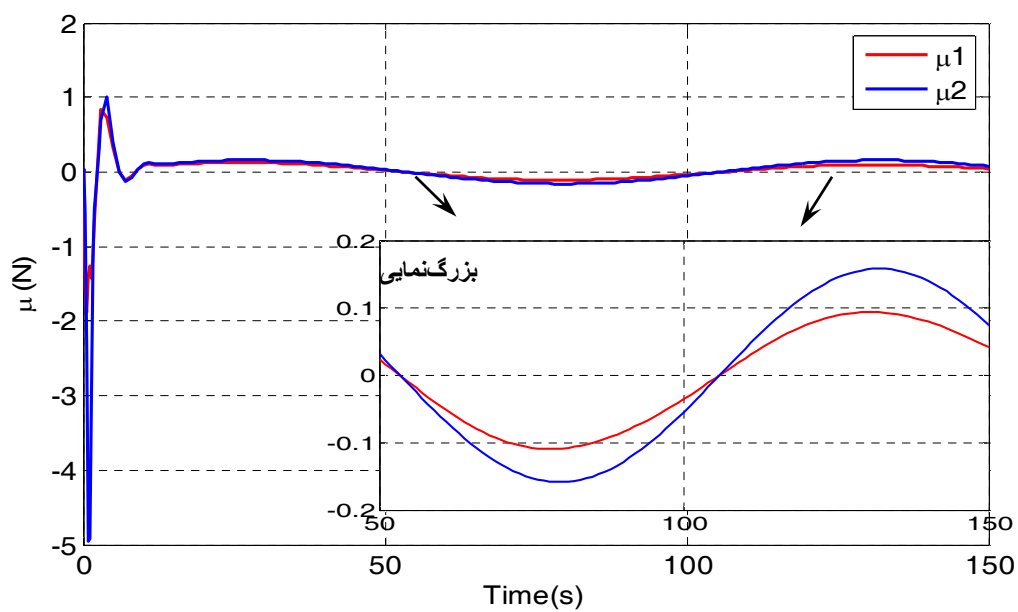
برای کنترل سیستم تکین چند متغیره ربات مقید تایید می‌کند. برای ارزیابی بهتر، در ادامه کارایی کنترل‌کننده پیشنهادی را در حضور اغتشاش خارجی و دقیق نبودن پارامترهای مدل بررسی می‌کنیم.

۳-۴-۱-۱- شبیه سازی سیستم کنترل ربات تمیزکار در حضور اغتشاش و نامعینی

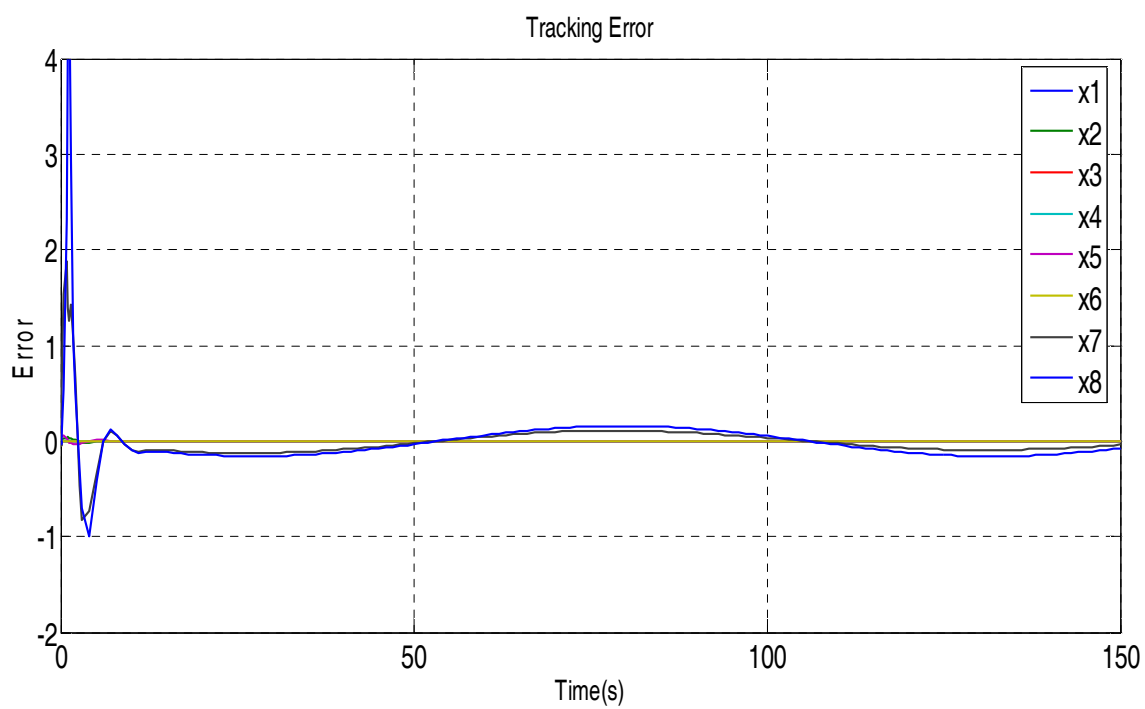
برای بررسی رفتار سیستم کنترل در حضور اغتشاش و نامعینی در پارامترها در شبیه سازی دوم ۱۰ درصد عدم قطعیت در پارامترهای مدل سیستم از قبیل E, B در نظر می‌گیریم. دقیق نبودن ماتریس‌های سیستم، کنترل‌کننده را در محاسبه دقیق قانون کنترل دچار مشکل خواهد کرد با این حال انتظار داریم کنترل‌کننده با تطبیق ضریب پس‌خورد بتواند خطای ردگیری را در حد قابل قبولی کاهش دهد. ماتریس‌های سیستم را به صورت $\hat{E}=1.09E$ ، $\hat{B}=1.1B$ در نظر گرفته شده است. علاوه بر دقیق نبودن پارامترهای مدل سیستم، یک اغتشاش خارجی که به صورت یک پالس مدل شده است در ثانیه ۲۰۰ به حالت x اعمال می‌شود که توصیف‌گر یک جابجایی ناگهانی در راستای محور x می‌باشد.



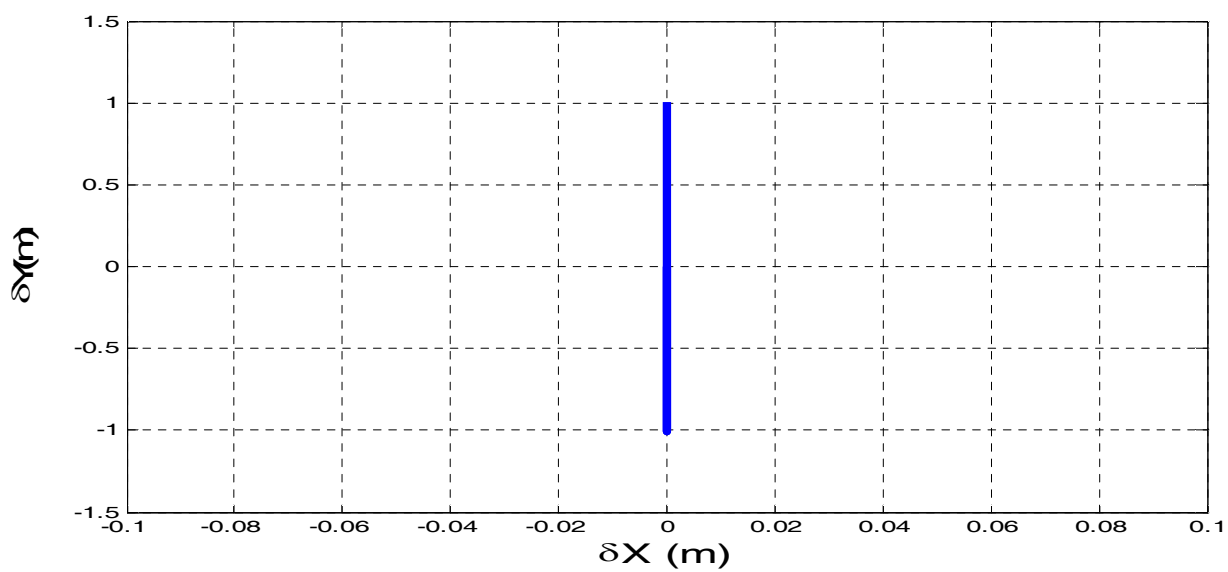
شکل ۳-۲۰- ردگیری متغیرهای حالت δz از مسیر مطلوب در سیستم کنترل ربات تمیزکار



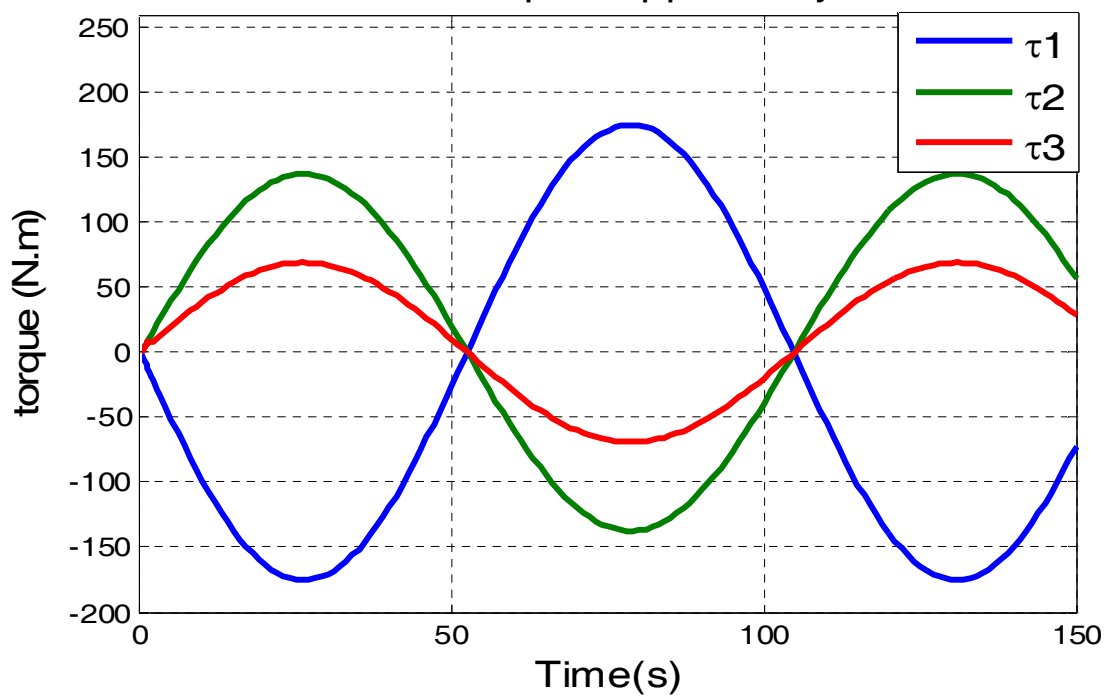
شکل ۳-۲۱- متغیرهای $\delta \mu$ در سیستم کنترل ربات تمیزکار



شکل ۳-۲۲- خطای ردگیری در سیستم کنترل ربات تمیزکار

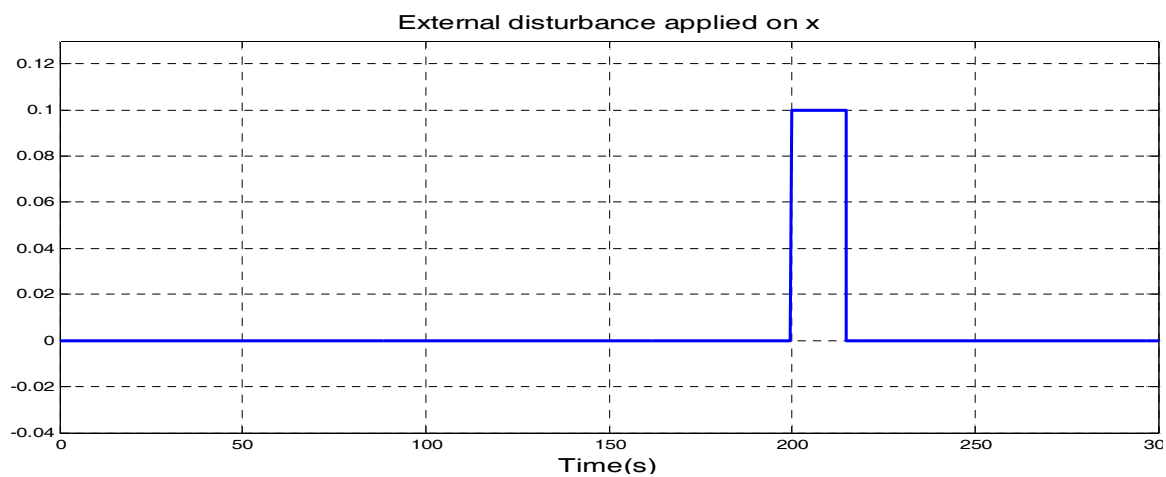


شکل ۳-۲۳- حرکت نقطه انتهایی ربات در مختصات دکارتی

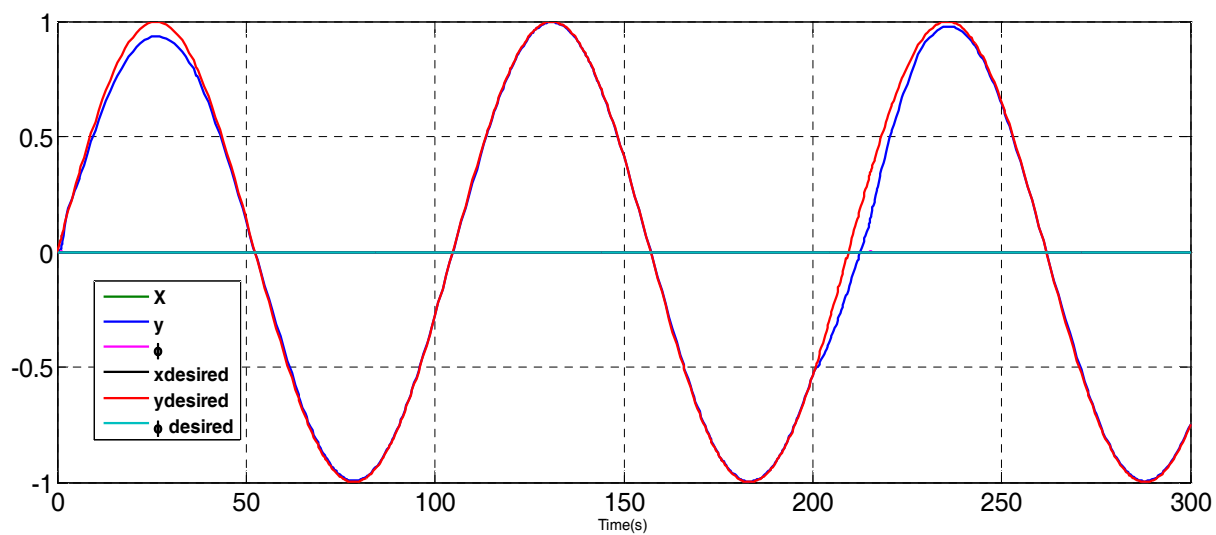


شکل ۳-۲۴- گشتاور کنترلی اعمال شده به مفاصل در سیستم کنترل ربات تمیزکار

دامنه پالس ۰/۱ متر و مدت زمان اعمال آن به سیستم ۲۰ ثانیه می‌باشد. این اغتشاش به صورت جمع‌شونده در خروجی ظاهر می‌شود. پالس اعمال شده به حالت x در شکل ۳-۲۵ نشان داده شده است. حال کنترل‌کننده (۳-۳۸) را با قانون تنظیم (۳-۳۹) به سیستم ربات (۳-۵۷) در حضور نامعینی و اغتشاش خارجی مذکور اعمال می‌کنیم. مسیر مرجع و مقادیر اولیه مشابه با شبیه‌سازی اول در نظر گرفته شده است. ردگیری متغیرهای حالت δz از مسیر مطلوب در شکل ۳-۲۶ و متغیرهای جبری $\delta \mu$ در شکل ۳-۲۷ نمایش داده شده است. همان‌طور که از نمودارها مشخص است ردگیری مسیر مرجع در مختصات دکارتی در حضور اغتشاش و نامعینی به خوبی انجام شده است ولی خطای ردگیری در کنترل نیرو کمی بیشتر شده است که می‌توان دلیل آن را ارتباط جبری این متغیرها با متغیرهای حالت دیگر سیستم دانست. به عنوان مثال جابجایی ناگهانی در راستای محور x که راستای اعمال نیرو می‌باشد مستقیماً بر نیروی وارده تاثیر گذار است؛ این پدیده را می‌توان در نمودار شکل ۳-۲۷ مشاهده نمود. با توجه به نتایج شبیه‌سازی می‌توان گفت کنترل‌کننده پس‌خورد تطبیقی پیشنهادی در حضور نامعینی در پارامترها رفتار مناسبی ارائه می‌دهد ولی در حضور اغتشاش خارجی مقاومت کمتری از خود نشان می‌دهد. خطای ردگیری متغیرها در شکل ۳-۲۸ و گشتاور کنترلی اعمال شده به سه مفصل ربات در شکل ۳-۲۹ نشان داده شده است. با توجه به نتایج حاصل از دو شبیه‌سازی می‌توان به کارایی کنترل‌کننده پس‌خورد حالت تطبیقی پیشنهادی برای سیستم‌های تکین چند متغیره پی‌برد.

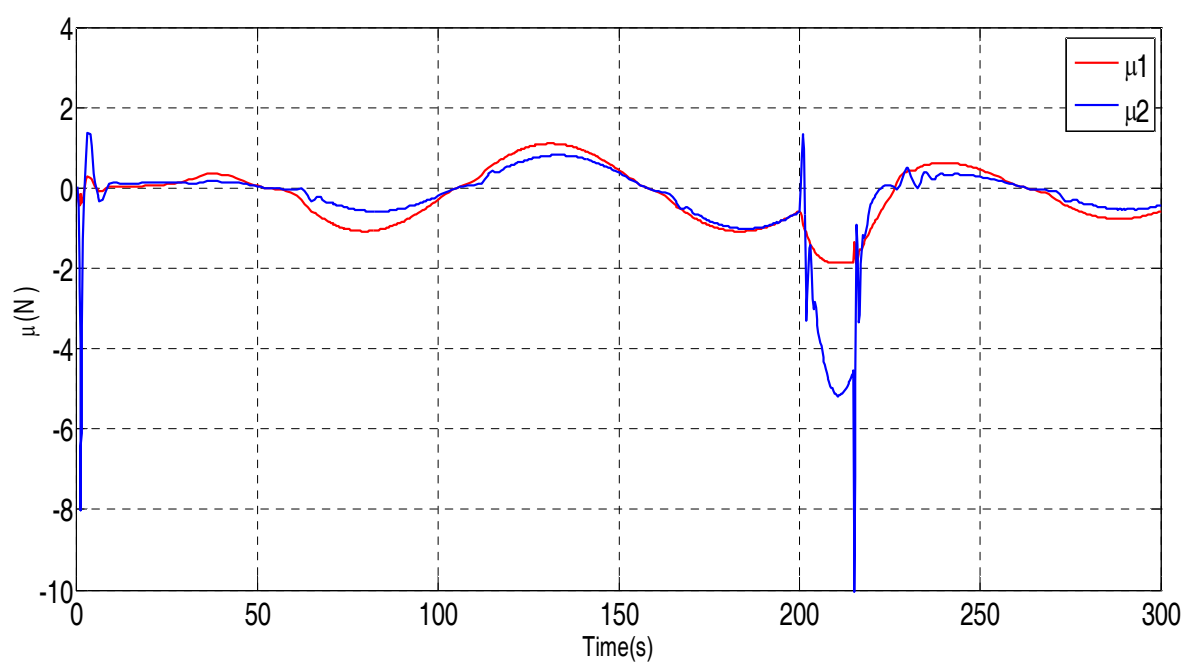


شکل ۳-۲۵- اغتشاش اعمال شده به متغیر حالت X در شبیه‌سازی دوم سیستم کنترل ربات تمیزکار

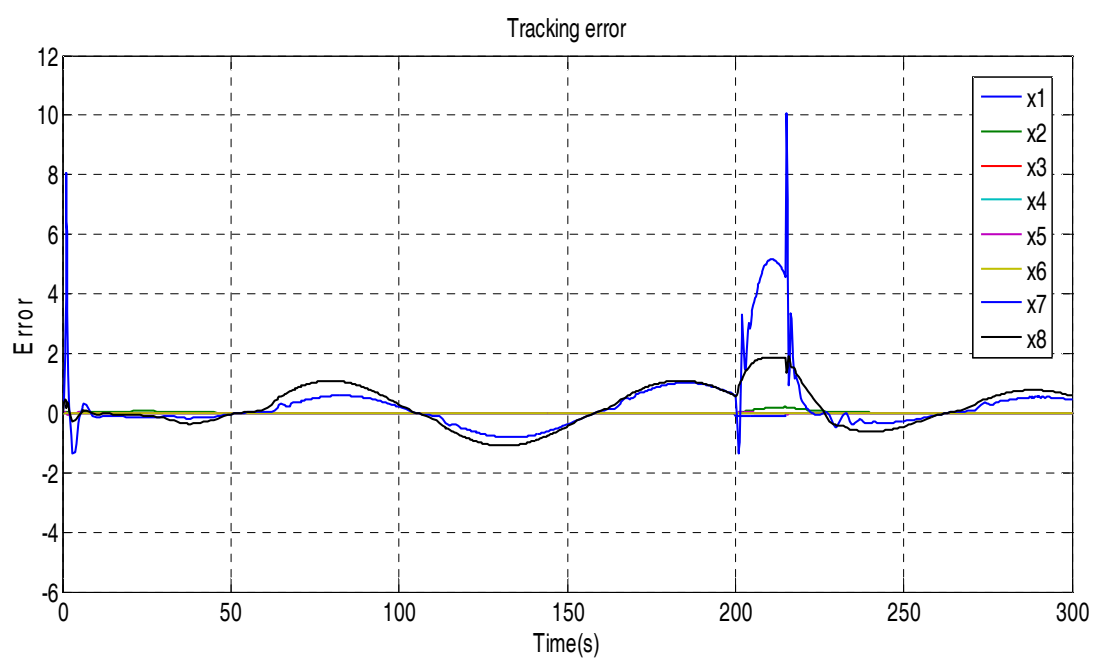


شکل ۳-۲۶- ردگیری متغیرهای حالت δz از مسیر مطلوب در حضور اغتشاش و نامعینی در سیستم کنترل ربات

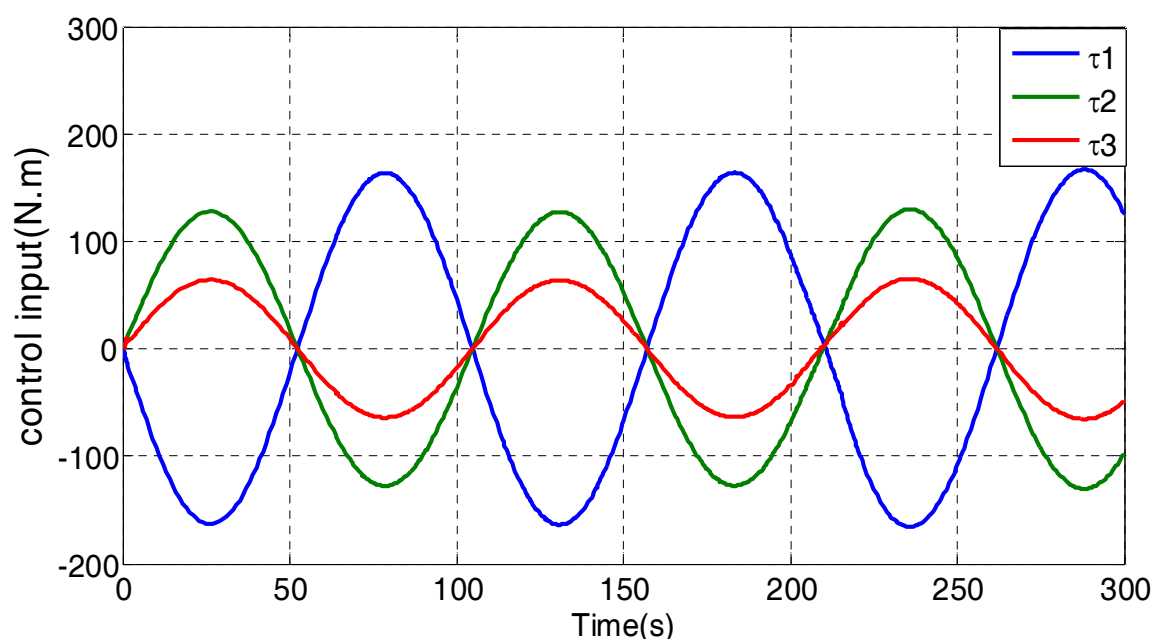
تمیزکار



شکل ۳-۲۷- متغیرهای $\delta \mu$ در حضور اغتشاش و نامعینی در سیستم کنترل ربات تمیزکار



شکل ۳-۲۸- خطای ردگیری در حضور اغتشاش و نامعینی در پارامترها در سیستم کنترل ربات تمیزکار



شکل ۳-۲۹ - ورودی کنترلی در حضور اغتشاش و نامعینی در سیستم کنترل ربات تمیزکار

۳-۵ - جمع بندی

در این فصل یک روش کنترل تطبیقی برای مجاز سازی سیستم تکین خطی ارائه و سپس برای ردگیری سیستم‌های تکین خطی تک ورودی و چند ورودی تعمیم داده شد. در طراحی کنترل برای سیستم‌های چند متغیره تکین تنها به علت تغییر در تابع لیاپانوف، قوانین تطبیق تغییر کرده است که تنها تفاوت آن با کنترل سیستم تکین تک ورودی می‌باشد. در هر بخش سیستم کنترل ارائه شده بر روی سیستم‌های تکین نمونه شبیه‌سازی و نتایج همه شبیه‌سازی‌ها کارایی روش کنترل پیشنهادی را تایید می‌کند.

طراحی کنترل کننده تطبیقی برای سیستم‌های تکین غیرخطی لپشیتز

فصل چهارم - طراحی کنترل‌کننده تطبیقی برای سیستم‌های تکین

غیرخطی لپشیتز^۱

۴-۱ مقدمه

در این فصل به طراحی کنترل‌کننده تطبیقی برای سیستم‌های تکین غیرخطی که در آن بخش غیرخطی مدل شرط لپشیتز را ارضا می‌کند می‌پردازیم. تمامی سیستم‌های غیرخطی مطرح شده در این رساله از نوع سیستم‌های غیرخطی افاین^۲ می‌باشند که در این نوع سیستم‌ها متغیرهای ورودی به صورت غیرخطی در معادلات مدل ظاهر نمی‌شوند. هدف از این فصل تعمیم روش کنترل پیشنهادی در فصل قبل برای سیستم‌های تکین غیرخطی لپشیتز است. مشابه با فصل گذشته ابتدا طراحی کنترل برای مجازسازی یک سیستم تکین غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد و در ادامه روش مذکور برای ردگیری کامل حالت سیستم‌های تکین خطی چندمتغیره تعمیم داده می‌شود. در پایان فصل روش کنترل پیشنهادی بر روی سیستم تکین ربات سیار با هدف ردگیری مسیرمطلوب حرکت شبیه سازی شده است و نتایج شبیه سازی کارایی کنترل‌کننده را برای سیستم‌های تکین غیرخطی لپشیتز تایید می‌کند.

۴-۲ بیان مسئله و فرض‌های اولیه

سیستم تکین غیرخطی را در قالب کلی زیر در نظر بگیرید:

^۱ Lipschitz

^۲ Affine

$$\dot{\mathbf{E}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}u(t) \quad (1-4)$$

که در آن $\mathbf{x} \in R^n$ بردار متغیرهای حالت سیستم، $u \in R^l$ بردار ورودی سیستم، l تعداد ورودی‌های سیستم، $\mathbf{B} \in R^{n \times l}$ و $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ ماتریس‌های ضرائب ثابت و $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in R^{n \times 1}$ بردار توابع غیرخطی سیستم می‌باشد. در طراحی کنترل‌کننده فرض می‌شود مقادیر پارامترهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{f}$ نامعلوم است و بردار $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ شرط لپیشیتز زیر را ارضا می‌نماید.

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| \leq L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad (2-4)$$

در حالیکه مقدار L نیز نامعلوم است. بدون از دست دادن عمومیت مسئله فرض می‌کنیم $\mathbf{f}(0) = 0$ و بنابراین شرط (2-4) را می‌توان به صورت

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq L \|\mathbf{x}\| \quad (3-4)$$

بازنویسی کرد. برای طراحی کنترل‌کننده u به طوری که سیستم غیرخطی (1-4) به ازای آن یک سیستم مجاز باشد و برای رسیدن به هدف ردگیری کامل حالت، فرض‌های زیر مشابه با فصل قبل در نظر گرفته شده است.

فرض 1-4 - برای سیستم (1-4) فرض می‌کنیم ماتریس $\mathbf{E}$ سیستم شرط زیر را ارضا می‌کند

$$\mathbf{E}^T = \mathbf{E} \geq 0 \quad (4-4)$$

این شرط معادل با **فرض 1-3** می‌باشد که در آن $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ انتخاب شده است. از آن جهت که در مدل‌سازی سیستم‌های مکانیکی اغلب اوقات ماتریس $\mathbf{E} = \text{diag}(\mathbf{I}, \mathbf{0})$ خواهد بود، بنابراین این فرض کلاس وسیعی از سیستم‌های تکین را در بر می‌گیرد.

فرض 2-4 - با دانستن $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ ، فرض می‌کنیم که بردار $\boldsymbol{\theta}_1^* \in R^{l \times n}$ وجود دارد به طوریکه

(۵-۴)

$$P^T(A+LI+B\theta_1^*)+(A+LI+B\theta_1^*)^TP=-E^TQ$$

که ماتریس E^TQ یک ماتریس مثبت نیمه معین متقارن و θ_1^* نامعلوم است. برای تعبیر فیزیکی این دو فرض می‌توان گفت که سیستم خطی که به نحوی کران سیستم غیرخطی لپشیتز می‌باشد قابلیت مجاز شدن با استفاده از کنترل پس‌خور حالت را دارا می‌باشد.

برای ردگیری کامل حالت، مسیر مطلوب x_d باید یک مسیر شدنی برای سیستم تکین باشد و به‌گونه‌ای انتخاب شود که عبارت $E\dot{x}_d$ موجود باشد. در ادامه در قسمت طراحی کنترل‌کننده برای ردگیری مسیر فرض زیر در نظر گرفته شده است.

فرض ۳-۴ - برای مسیر مشخص x_d فرض می‌کنیم ماتریس نامعلوم $\theta_2^* \in R^{l \times n}$ وجود دارد به طوریکه

$$B\theta_2^* x_d = -(A+LI)x_d + E\dot{x}_d \quad (۶-۴)$$

برقرار باشد.

در ادامه در بخش ۳-۴ به طراحی سیستم کنترل برای مجازسازی سیستم غیرخطی تک ورودی خواهیم پرداخت و در بخش ۴-۴ روش پیشنهادی را برای ردگیری سیستم‌های غیرخطی چندورودی تعمیم می‌دهیم.

۳-۴ - طراحی کنترل‌کننده تطبیقی برای مجاز سازی سیستم‌های تکین

غیرخطی لپشیتز تک ورودی

در این بخش با فرض $(l=1)$ به تعمیم روش کنترل پیشنهادی در فصل قبل برای مجازسازی سیستم تکین غیرخطی می‌پردازیم. هدف در این بخش طراحی کنترل

$$u = \theta_1 x \quad (۷-۴)$$

و یک قانون برای تنظیم بردار θ_1 ، به گونه‌ای است که سیستم حلقه بسته

$$E\dot{x} = (A + B\theta_1)x + f(x) \quad (۸-۴)$$

طبق قضیه پایداری ۲-۳ یک سیستم مجاز باشد. یا به عبارتی دیگر θ_1 به سمت θ_1^* همگرا شود. در ادامه طراحی کنترل‌کننده را در قالب قضیه زیر بیان نموده‌ایم.

قضیه ۴-۱- سیستم حلقه بسته (۸-۴) که در آن θ_1 یک بردار قابل تنظیم با قانون تنظیم

$$\dot{\theta}_1^T = -\gamma x x^T P^T B \quad (۹-۴)$$

و γ یک ضریب مثبت با عنوان آهنگ همگرایی و $P=I$ می‌باشد، یک سیستم مجاز خواهد بود.

اثبات- معادله سیستم حلقه بسته (۸-۴) را می‌توان به صورت

$$(۱۰-۴)$$

$$E\dot{x} = (A + B\theta_1^*)x + f(x) + B(\theta_1 - \theta_1^*)x$$

باز نویسی نمود. تابع لیاپانوف مشابه با قبل به صورت

$$V = \frac{1}{2} x^T E^T P x + \frac{1}{2\gamma} (\theta_1 - \theta_1^*)(\theta_1 - \theta_1^*)^T \quad (۱۱-۴)$$

تعریف می‌شود. که در آن P شرط (۴-۴) را ارضا می‌نماید. با مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف خواهیم داشت:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (\dot{x}^T E^T P x + x^T P^T E \dot{x}) + \frac{1}{\gamma} (\theta_1 - \theta_1^*) \dot{\theta}_1^T \quad (۱۲-۴)$$

با جایگذاری دینامیک حلقه بسته (۴-۱۰) در معادله مشتق لیاپانوف (۴-۱۲) داریم:

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_1^*) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \mathbf{x} + \frac{1}{\gamma} (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \dot{\boldsymbol{\theta}}_1^T \quad (۴-۱۳)$$

از آن جا که جمله $\mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$ یک اسکالر است و ماتریس $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ می باشد، با توجه به شرط لپشیتز بودن بردار $\mathbf{f}$ (۴-۳)، داریم

$$\dot{V} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_1^*) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \mathbf{x} + \frac{1}{\gamma} (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \dot{\boldsymbol{\theta}}_1^T \quad (۴-۱۴)$$

معادله (۴-۱۴) را می توان در قالب زیر بازنویسی کرد.

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_1^* + \mathbf{L}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_1^* + \mathbf{L})^T \mathbf{P} \mathbf{x}] + (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) [\mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} + \frac{1}{\gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}}_1^T] \quad (۴-۱۵)$$

با توجه به رابطه (۴-۱۵) می توان دید که اگر قانون تطبیق به صورت (۴-۹) انتخاب شود، با توجه به فرض (۴-۵) خواهیم داشت

$$\dot{V} \leq \frac{-1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (۴-۱۵)$$

بنابراین طبق قضیه پایداری لیاپانوف و لم باربالات سیستم (۴-۸) پایدار خواهد بود و بردار $\boldsymbol{\theta}_1$ به سمت $\boldsymbol{\theta}_1^*$ همگرا می شود. $\square$

بنابراین اثبات کردیم که قانون کنترل پس خورد پیشنهادی در فصل گذشته را می توان برای سیستم های غیر خطی لپشیتز نیز به کار برد.

نتیجه فرعی^۱ ۴-۱- برای سیستم های تکین غیر خطی افاین در قالب کلی

¹ Corollary

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u(t) \quad (۱۶-۴)$$

که در آن $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ بردار توابع غیرخطی می‌باشد و مقدار آن در هر لحظه به مقدار $\mathbf{x}$ وابسته است، اگر ماتریس ثابت $\mathbf{B}$ با بعد یکسان یافت شود که بازای تمامی مقادیر $\mathbf{x}$ ، رابطه $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{B}\|$ برقرار باشد، آنگاه قضیه ۱-۴ را می‌توان برای این کلاس از سیستم‌ها نیز تعمیم داد. مشابه با اثبات قضیه ۱-۴ با جایگذاری $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ به جای $\mathbf{B}$ در رابطه (۱۳-۴) خواهیم داشت:

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \theta_1^* \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) (\theta_1 - \theta_1^*) \mathbf{x} + \frac{1}{\gamma} (\theta_1 - \theta_1^*) \dot{\theta}_1^T \quad (۱۷-۴)$$

از آنجا که جمله $\mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \theta_1^* \mathbf{x}$ اسکالر است، بنابراین داریم $\mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \theta_1^* \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} \theta_1^* \mathbf{x}$ و رابطه (۴-۱۷) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\dot{V} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B} \theta_1^*) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) (\theta_1 - \theta_1^*) \mathbf{x} + \frac{1}{\gamma} (\theta_1 - \theta_1^*) \dot{\theta}_1^T \quad (۱۸-۴)$$

که مشابه با رابطه (۱۴-۴) می‌باشد. بنابراین با یک تغییر کوچک در قانون تنظیم به صورت

$$\dot{\theta}_1^T = -\gamma \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (۱۹-۴)$$

می‌توان گفت که قضیه ۱-۴ با قانون تنظیم (۱۹-۴) برای این کلاس از سیستم‌ها با رابطه (۱۶-۴) نیز برقرار می‌باشد. □

در بخش بعدی روش کنترل پیشنهادی را برای ردگیری سیستم‌های تکین غیرخطی افاین چند ورودی تعمیم می‌دهیم.

۴-۴- طراحی کنترل کننده تطبیقی برای ردگیری کامل حالت سیستم‌های تکین

غیرخطی لپشیتز چند متغیره

هدف از این بخش تعمیم روش کنترل پیشنهادی برای ردگیری حالت سیستم‌های تکین غیرخطی، که در آن بخش غیرخطی مدل شرط لپشیتز را ارضا می‌کند، می‌باشد. به عبارتی دیگر در این بخش اثبات می‌کنیم که می‌توان روش کنترل پس‌خورد حالت تطبیقی ارائه شده برای سیستم‌های خطی را برای ردگیری سیستم‌های غیرخطی لپشیتز نیز به کار برد. قانون کنترل تطبیقی

$$(۲۰-۴)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}_1 \mathbf{e} + \boldsymbol{\theta}_2 \mathbf{x}_d$$

که در آن

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \quad (۲۱-۴)$$

و $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in R^{l \times n}$ می‌باشد را به سیستم (۱-۴) اعمال می‌کنیم. حال هدف کنترل طراحی قانون تنظیم برای ماتریس‌های $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ می‌باشد به طوریکه تمامی حالت‌های سیستم مسیر مطلوب $\mathbf{x}_d$ را ردگیری نماید. طراحی کنترل‌کننده در قضیه ۲-۴ خلاصه شده است.

قضیه ۲-۴ - برای سیستم تکین غیرخطی (۱-۴) با استفاده از قانون کنترل (۲۰-۴) و قانون تنظیم

$$(۲۲-۴)$$

$$\text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1)^T = -\gamma_1 (\mathbf{e}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B})$$

$$\text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_2)^T = -\gamma_2 (\mathbf{x}_d^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B})$$

برای ماتریس‌های $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ و با دانستن فرض‌های ۱-۴ تا ۳-۴، می‌توان گفت که سیستم حلقه بسته یک سیستم مجاز خواهد بود و تمامی حالت‌های $\mathbf{x}$ حالات مطلوب $\mathbf{x}_d$ را ردگیری می‌نماید.

اثبات - با توجه به (۲۱-۴) داریم:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e} + \mathbf{x}_d \quad (۲۳-۴)$$

با جایگذاری x در معادلات سیستم (۴-۱) خواهیم داشت:

$$(۴-۲۴)$$

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathbf{f}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d) + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

تابع $\mathbf{F}(\mathbf{e})$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$(۴-۲۵)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{e}) = \mathbf{f}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_d)$$

از رابطه (۴-۲) به راحتی می توان گفت که اگر $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ لپشیتز باشد، آنگاه بردار $\mathbf{F}(\mathbf{e})$ نیز شرط لپشیتز را ارضا می کند. با استفاده از تعریف (۴-۲۵) و با اعمال قانون کنترل (۴-۲۰) به سیستم تکین غیرخطی (۴-۱)، سیستم حلقه بسته به شکل زیر خواهد بود.

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{F}(\mathbf{e}) + \mathbf{B}\mathbf{0}_1\mathbf{e} + \mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathbf{f}(\mathbf{x}_d) - \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{B}\mathbf{0}_2\mathbf{x}_d \quad (۴-۲۶)$$

رابطه (۴-۲۶) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{0}_1^*)\mathbf{e} + \mathbf{F}(\mathbf{e}) + \mathbf{B}(\mathbf{0}_1 - \mathbf{0}_1^*)\mathbf{e} + \mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathbf{f}(\mathbf{x}_d) - \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{B}\mathbf{0}_2^*\mathbf{x}_d + \mathbf{B}(\mathbf{0}_2 - \mathbf{0}_2^*)\mathbf{x}_d \quad (۴-۲۷)$$

تابع لیاپانوف مثبت زیر را مشابه با تابع (۳-۴۰) انتخاب می کنیم.

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{e}^T\mathbf{E}^T\mathbf{P}\mathbf{e} + \frac{1}{2\gamma_1}\text{vec}(\mathbf{0}_1 - \mathbf{0}_1^*)^T\text{vec}(\mathbf{0}_1 - \mathbf{0}_1^*) + \frac{1}{2\gamma_2}\text{vec}(\mathbf{0}_2 - \mathbf{0}_2^*)^T\text{vec}(\mathbf{0}_2 - \mathbf{0}_2^*) \quad (۴-۲۸)$$

مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر محاسبه می شود.

(۲۹-۴)

$$\begin{aligned}\dot{V} = & \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_1^*) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{F}(\mathbf{e}) + \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*) \mathbf{x}_d \\ & + \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_d) + \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_2^* \mathbf{x}_d + \mathbf{A} \mathbf{x}_d - \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}_d) \\ & + \frac{1}{\gamma_1} \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1)^T \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) + \frac{1}{\gamma_2} \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_2)^T \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*)\end{aligned}$$

با استفاده از شرط لیپشیتز و قواعد ضرب کرونکر مشابه با روابط (۳-۴۱) تا (۳-۴۴)، مشتق تابع لیانوف پس از ساده‌سازی به شکل زیر در خواهد آمد.

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq & \frac{1}{2} \mathbf{e}^T [\mathbf{P}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_1^* + \mathbf{L} \mathbf{I}) + (\mathbf{A} + \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_1^* + \mathbf{L} \mathbf{I})^T \mathbf{P}] \mathbf{e} \\ & + [(\mathbf{e}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}) + \frac{1}{\gamma_1} \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1)^T] \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1^*) \\ & + [(\mathbf{x}_d^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}) + \frac{1}{\gamma_2} \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_2)^T] \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2^*)\end{aligned} \quad (۳۰-۴)$$

بنابراین با انتخاب قوانین تطبیق به صورت (۴-۲۱) خواهیم داشت

$$\dot{V} \leq \frac{-1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{E}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (۳۱-۴)$$

که نشان می‌دهد طبق لم باربالات و قضیه پایداری ۲-۳ برای سیستم‌های تکین، سیستم حلقه بسته مجاز خواهد بود و تمامی حالت‌های سیستم مسیر مطلوب $\mathbf{x}_d$ را ردگیری می‌نماید. □

نتیجه فرعی ۴-۲- برای سیستم‌های تکین غیرخطی افاین با معادله (۴-۱۶) که در آن $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{B}\|$ می‌باشد. به طور مشابه با نتیجه فرعی ۴-۱ می‌توان نتیجه گرفت که با تغییر قوانین تطبیق به صورت

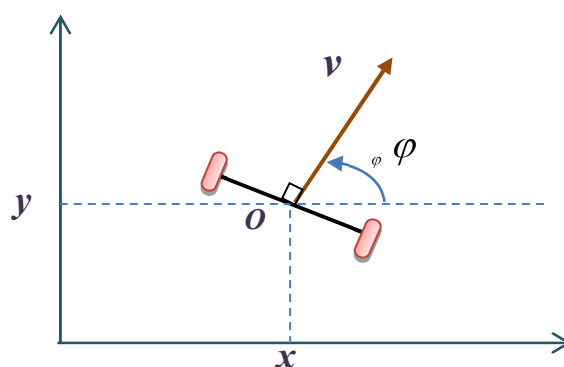
$$\begin{aligned}\text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_1)^T = & -\gamma_1 (\mathbf{e}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_2)^T = & -\gamma_2 (\mathbf{x}_d^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}))\end{aligned} \quad (۳۲-۴)$$

می‌توان قضیه ۴-۲ را برای ردگیری کامل حالت این‌گونه سیستم‌ها نیز تعمیم داد. به علت تشابه در روند اثبات، از آوردن اثبات صرف‌نظر شده است. □

همان‌طور که مشخص است قانون کنترل پیشنهادی ساده و عملی است و برای مجازسازی و ردگیری سیستم‌های تکین خطی و غیرخطی لپشیتز کارایی دارد. در ادامه برای بررسی بهتر کارایی کنترل‌کننده، قانون کنترل پیشنهاد شده را با هدف ردگیری مسیر مطلوب به یک ربات سیار^۱ که به صورت تکین مدل‌سازی شده است، اعمال می‌کنیم.

۴-۵- شبیه‌سازی بر روی مدل تکین ربات سیار

مدل تکین ربات سیار، مدل طبیعی‌تر و دقیق‌تری را در مقایسه با سایر روش‌های مدل‌سازی ارائه می‌دهد و اطلاعات کامل‌تری در مورد حرکت ربات با در نظر گرفتن دینامیک و همچنین قیود سینماتیکی آن در اختیار می‌گذارد [۱۱۹]. مدل تکین ربات سیار و مزایای آن در [۱۲۰] مورد بررسی قرار گرفته است. مدل ساده ربات سیار در شکل ۴-۱ نمایش داده شده است



¹ Mobile Robot

شکل ۴-۱- مدل ساده‌ای از ربات سیار

که در آن O مرکز جرم ربات با مختصات مکانی (x, y) و v بردار سرعت حرکت ربات است. متغیر φ زاویه حرکت ربات نسبت به محور x هاست. حرکت ربات توسط قیود سینماتیک حاکم محدود می‌شود. معادلات سینماتیک ربات سیار را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۲۰]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \varphi \\ \dot{y} &= v \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= \omega\end{aligned}\quad (33-4)$$

که در آن ω سرعت زاویه‌ای ربات می‌باشد. از جمع سه رابطه بالا می‌توان قید جبری حاکم بر مسئله را در قالب زیر نوشت.

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0 \quad (34-4)$$

در کنترل حرکت ربات سیار، دینامیک حرکت باید همراه با سینماتیک آن مورد بررسی قرار گیرد. در مدل تکین ربات قیده‌ای سینماتیکی محدود کننده حرکت در کنار دینامیک لحاظ شده‌اند. حرکت دینامیکی ربات را می‌توان توسط فرمول لاگرانژ به صورت زیر مدل نمود [۱۲۰]:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= \lambda \sin \varphi + u_1 \cos \varphi \\ m\ddot{y} &= \lambda \cos \varphi + u_1 \sin \varphi \\ I_0 \ddot{\varphi} &= u_2\end{aligned}\quad (35-4)$$

که در آن I_0 ممان اینرسی ربات می‌باشد. متغیر u_1 ورودی جلو برنده سیستم در جهت φ می‌باشد و u_2 فرمان ورودی چرخش می‌باشد که جهت حرکت را مشخص می‌کند. ضریب لاگرانژ λ متغیر ناشی از قید سینماتیکی (۳۴-۴) می‌باشد. ضریب λ معادلات سینماتیکی و دینامیکی ربات را با یکدیگر تلفیق می‌کند. با در نظر گرفتن متغیرهای حالت سیستم به صورت

(۳۵-۴)

$$\mathbf{z} = [\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T \quad \lambda]^T, \quad \mathbf{q} = [x \ y \ \varphi]^T$$

مدل سیستم ربات سیار را می توان در قالب سیستم تکین غیر خطی افاین به شکل

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{g}(\mathbf{z})\mathbf{u}(t) \quad (۳۶-۴)$$

نوشت. که در آن $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T$ فرمان های ورودی سیستم می باشد و

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳۷-۴)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \sin \varphi \\ -\lambda \cos \varphi \\ 0 \\ \dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \text{diag}([1, 1, 1, m, m, I_o, 0]) \quad (۳۸-۴)$$

همان طور که از رابطه (۳۸-۴) مشخص است، به راحتی می توان اثبات نمود که بردار $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ شرط لپشیتز را ارضا می کند. علت تکین شدن مدل ربات انتخاب λ به عنوان متغیر سیستم می باشد. از دید عملی λ نیرویی است که در برابر چرخش ربات مقاومت می کند. با استفاده از مدل تکین می توان تاثیر قیدهای سینماتیکی را در دینامیک حرکت لحاظ کرد. برای طراحی مسیر یک ربات سیار بایستی دینامیک های ربات و قیود سینماتیکی با هم در نظر گرفته شوند. زمانی که ربات با سرعت بالا حرکت می کند و یا گشتاور راه انداز ربات قوی است، این امر از اهمیت بیشتری برخوردار است. در سرعت های

بالا ضریب لاگرانژ یا همان نیروی قیدی λ بایستی برای جلوگیری از لغزش، محدود نگاه داشته شود. به عبارت دیگر مسیر می‌بایست با ضریب لاگرانژ محدود طراحی گردد. هدف کنترل در این شبیه‌سازی این است که ربات سیار یک مسیر دایره‌ای مطلوب را ردگیری کند. معادله مسیر مطلوب تعریف شده برای ربات به شکل زیر است.

(۳۹-۴)

$$\begin{aligned}x_d &= 5 \sin(0.1t) \\ y_d &= 5 \cos(0.1t) - 5\end{aligned}$$

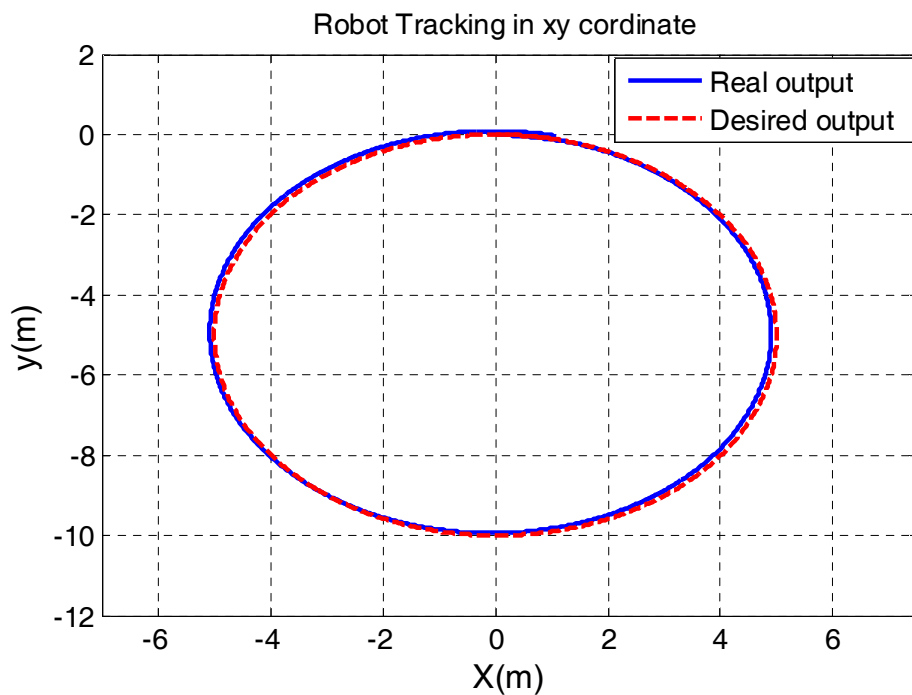
جهت مطلوب حرکت ربات φ_d در هر لحظه با توجه به مسیر مطلوب به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\varphi_d = \tan^{-1}\left(\frac{y_d}{x_d}\right) \quad (۴۰-۴)$$

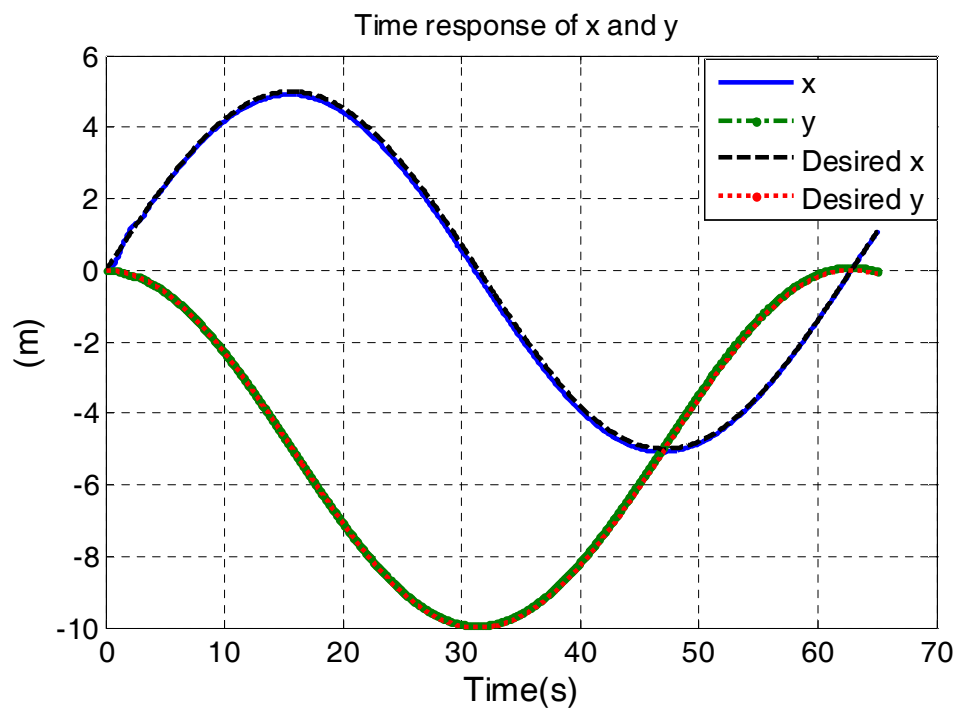
در زمان ردگیری برای جلوگیری از لغزش، متغیر λ باید محدود نگاه داشته شود. مقادیر پارامترهای سیستم را برابر با $m = 1kg$ و $I_0 = 1kgm^2$ در نظر گرفته‌ایم.

کنترل‌کننده (۲۰-۴) را همراه با قوانین تنظیم (۳۲-۴) به سیستم غیرخطی ربات (۳۶-۴) اعمال نموده‌ایم. هدف کنترل ردگیری مسیر مطلوب (۳۹-۴) در مختصات دکارتی است. نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۲-۴ تا ۸-۴ نشان داده شده است. ردگیری مسیر توسط ربات در صفحه (x,y) در شکل ۲-۴ آورده شده است. همان‌طور که مشخص است ربات به صورت کامل مسیر را ردگیری کرده و یک دایره کامل را می‌پیماید. پاسخ زمانی متغیرهای x, y در مقایسه با مقادیر مطلوب مورد نظر در شکل ۳-۴ ترسیم شده است. در شکل ۴-۴ خطای ردگیری مسیر آورده شده است. خطای ردگیری کمتر از 0.2 متر است که برای رباتی که مسیر دایره‌ای به قطر 10 متر را می‌پیماید، قابل قبول است. جهت حرکت ربات ψ در مقایسه با جهت مطلوب φ_d در شکل ۵-۴ نشان داده شده است. سرعت زاویه‌ای حرکت ربات ثابت و معادل با سرعت زاویه‌ای مطلوب است. هزینه کنترل محدود و قابل قبول است و

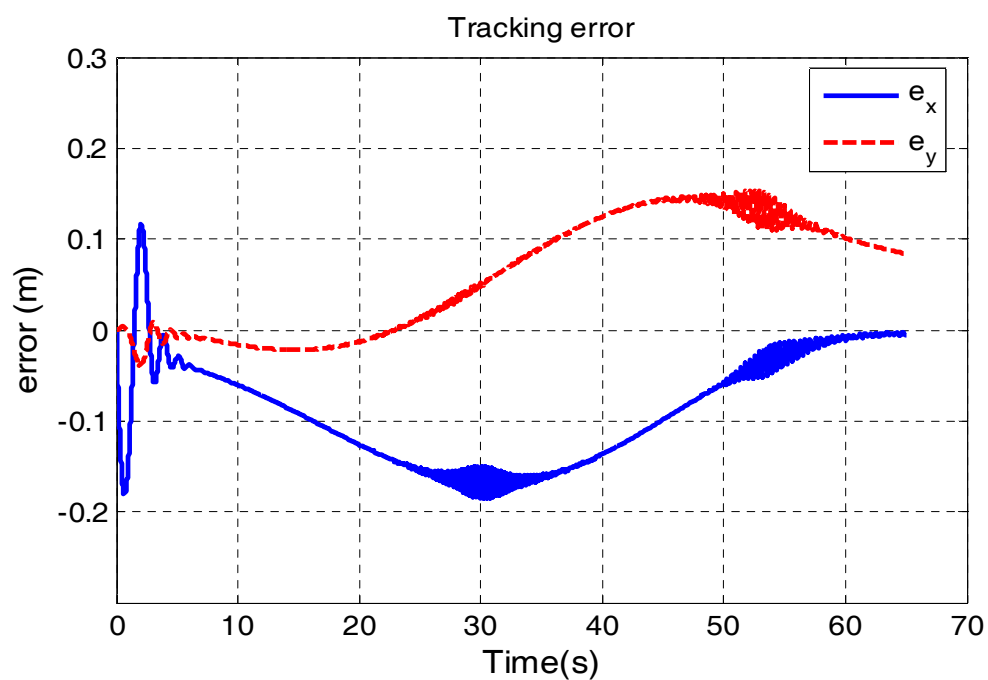
در شکل ۴-۶ آورده شده است. فرکانس نوسانات ورودی‌های کنترل کمتر از ۱/۵ هرتز می‌باشد که برای ربات سیار مطلوب می‌باشد. پاسخ نوسانی در اثر افزایش آهنگ همگرایی γ می‌باشد. با افزایش γ نوسانات افزایش می‌یابد ولی در قبال آن سرعت همگرایی نیز افزایش می‌یابد و مقدار خطا سریع‌تر به سمت صفر همگرا می‌شود. مقادیر کمتر γ نوسانات را کم می‌کند و سرعت همگرایی نیز در نتیجه آن کمتر می‌شود. همگرایی پارامترهای θ_1 و θ_2 در شکل‌های ۴-۷ و ۴-۸ مشخص است.



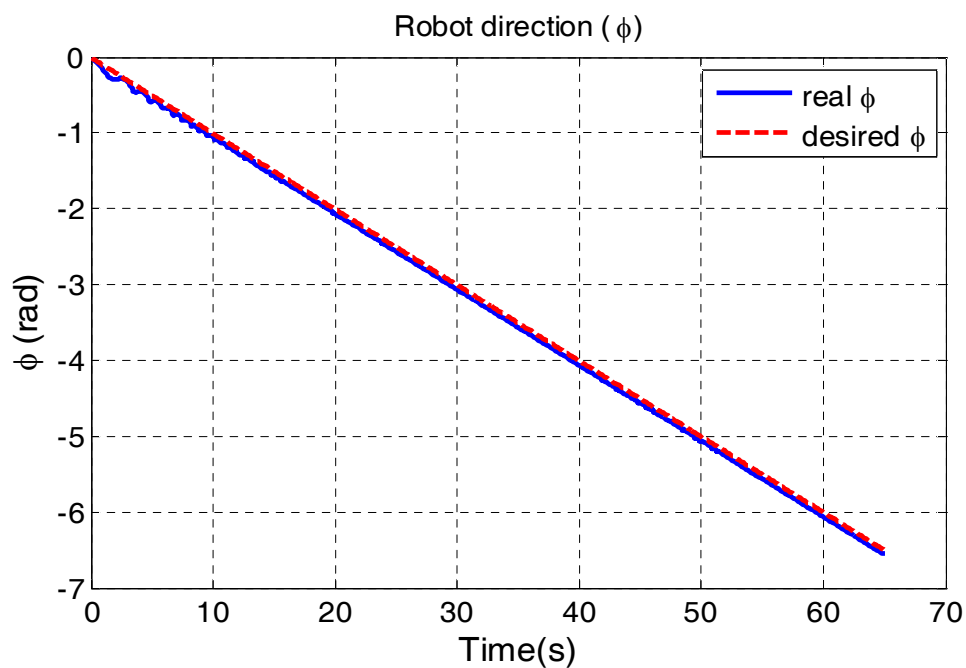
شکل ۴-۲ ردگیری مسیر مطلوب دایره‌ای توسط ربات سیار در صفحه (x,y) . ربات یک دایره به قطر ۱۰ متر را می‌پیماید.



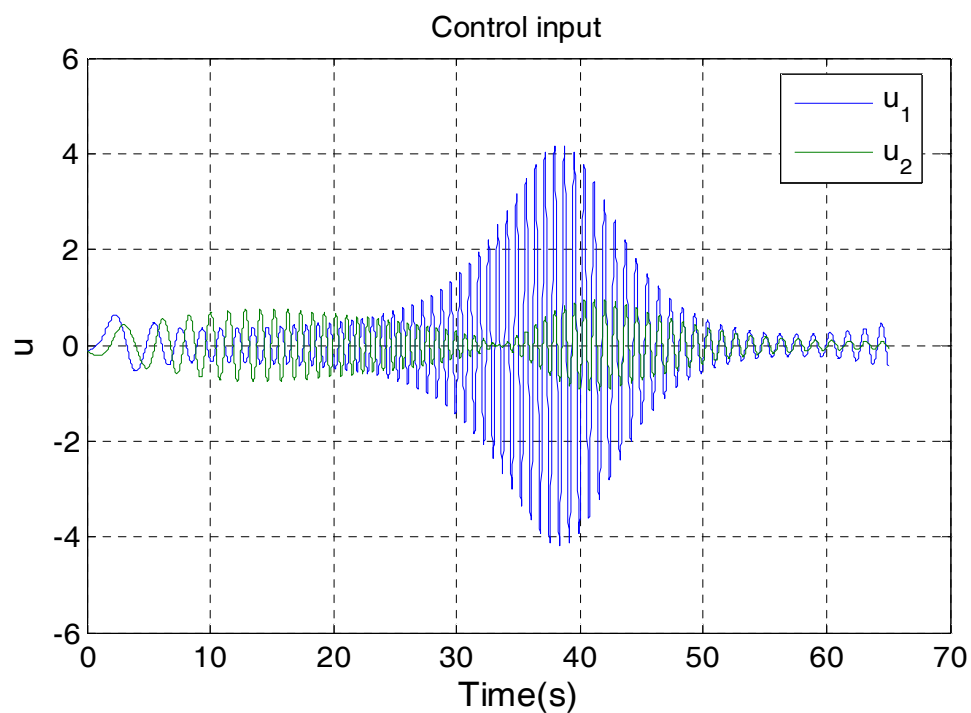
شکل ۴-۳- پاسخ زمانی متغیرهای x, y ربات در مقایسه با مقادیر مطلوب



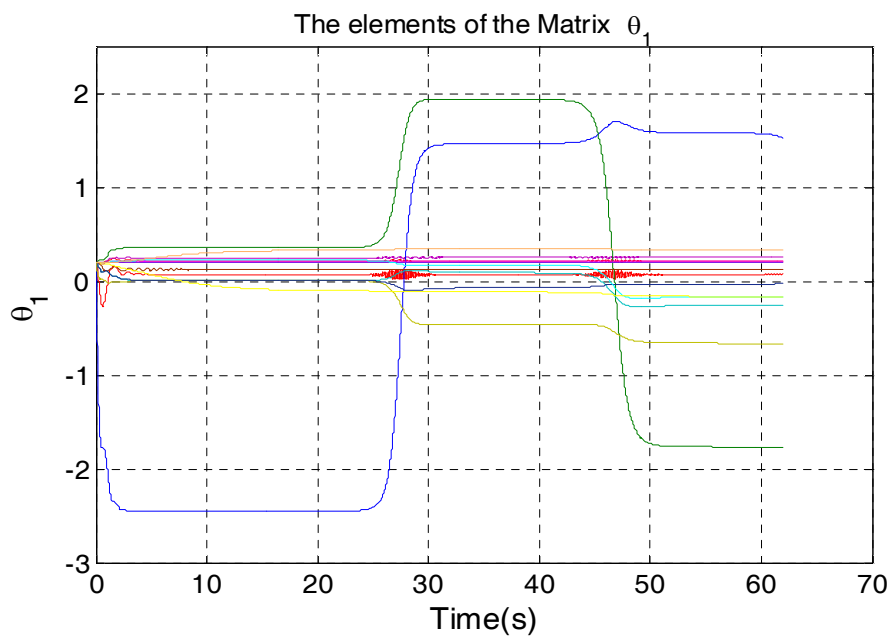
شکل ۴-۴ خطای ردگیری متغیرهای x, y در سیستم کنترل ربات سیار. خطای ردگیری کمتر از ۰/۲ متر است.



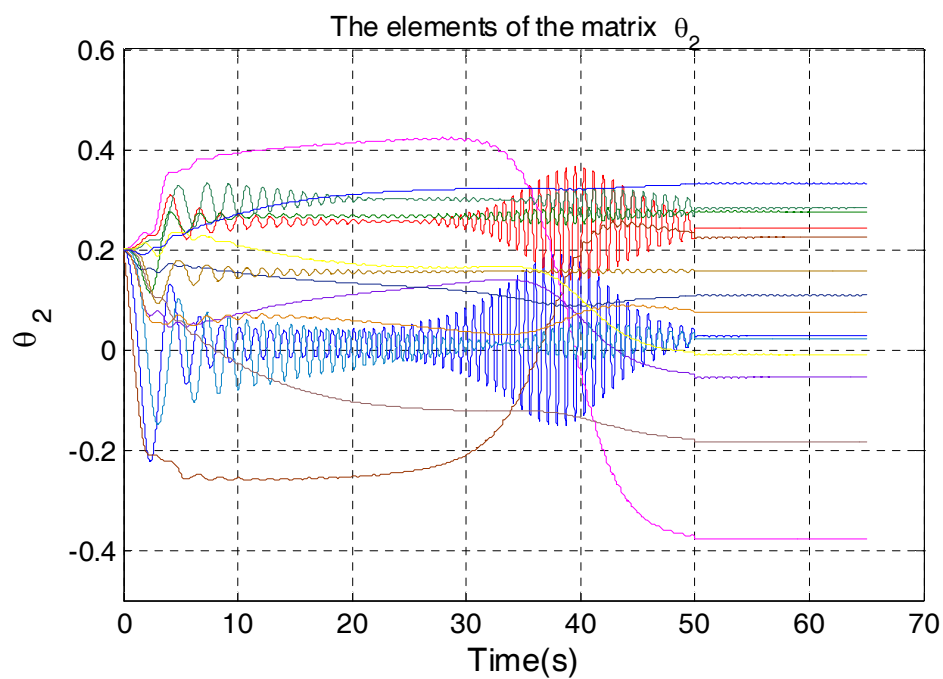
شکل ۴-۵ جهت حرکت ربات (ϕ) در مقایسه با جهت مطلوب (ϕ_d)



شکل ۴-۶ ورودی کنترلی اعمال شده به سیستم ربات سیار. ورودی u_1 نیروی جلوبرنده در واحد نیوتن است و ورودی u_2 فرمان گشتاور چرخش ربات در واحد نیوتن-متر است.



شکل ۴-۷ همگرایی پارامترهای تحت تنظیم در سیستم کنترل ربات سیار، ماتریس θ_1



شکل ۴-۸ همگرایی پارامترهای تحت تنظیم در سیستم کنترل ربات سیار، ماتریس θ_2

از نتایج شبیه‌سازی کنترل تطبیقی پیشنهادی بر روی ربات سیار می‌توان دید که درحالی‌که ساختار کنترل‌کننده بسیار ساده و عملی می‌باشد ولی کارایی بسیار خوبی دارد.

۴-۶ - جمع بندی

در این فصل روش کنترل تطبیقی که در فصل سوم برای سیستم‌های تکین خطی ارائه شده بود، برای سیستم‌های تکین غیرخطی لپشیتز تعمیم داده شده است. در ابتدا مسئله مجازسازی سیستم تکین غیرخطی مورد بررسی قرار گرفت و پس از آن روش مذکور برای ردگیری کامل حالت سیستم‌های تکین غیرخطی چند متغیره تعمیم داده شد. برای بررسی بهتر کارایی کنترل‌کننده، سیستم پیشنهادی بر روی یک ربات سیار که به صورت تکین مدل‌سازی شده بود، پیاده‌سازی شد. دینامیک حرکت ربات سیار با قید سینماتیکی حاکم بر مسئله محدود می‌شود که این مسئله را در طراحی کنترل تعقیب ربات باید در نظر گرفت. مدل تکین سیستم ربات دینامیک و قیدهای سینماتیکی ربات را با هم تلفیق می‌کند. به عبارتی دیگر می‌توان گفت که سیستم تکین، مدل طبیعی‌تر و کامل‌تری از حرکت ربات سیار ارائه می‌دهد. نتایج شبیه‌سازی کارایی کنترل‌کننده را برای سیستم‌های تکین غیرخطی نیز تایید می‌کند. قانون کنترل پیشنهاد شده بسیار ساده و عملی می‌باشد و می‌توان از آن برای مجازسازی و ردگیری سیستم‌های تکین خطی و همچنین سیستم‌های تکین غیرخطی لپشیتز استفاده نمود.

فصل پنجم

طراحی کنترل کننده تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیرخطی

فصل پنجم - طراحی کنترل کننده تطبیقی مدل مرجع برای سیستم های تکین غیرخطی

۵-۱ مقدمه

در این فصل به طراحی کنترل کننده تطبیقی مدل مرجع برای سیستم های تکین غیرخطی افاین می پردازیم. هدف کنترل این است که تمامی حالت های سیستم تکین غیرخطی، حالت های یک سیستم خطی مرجع را دنبال کند. در ابتدا فرضیات لازم برای ردگیری یک مدل مرجع خطی را بیان می داریم. با فرض معین بودن تمام پارامترهای مدل، یک روش کنترل مدل مرجع پایه غیرتطبیقی ارائه می شود. سپس با فرض نامعلوم بودن بعضی از پارامترها روش مذکور را به کنترل تطبیقی مدل مرجع تعمیم می دهیم. طراحی کنترل تطبیقی در دو بخش انجام می گیرد. در بخش اول فرض می کنیم که ماتریس E که مسئول تکین شدن سیستم و پیچیدگی سیستم است مشخص می باشد و با ماتریس E مدل مرجع یکسان است. سپس در بخش بعدی فرض می کنیم که ماتریس E نیز نامعین است و مدل مرجع نیز می تواند شاخص متفاوتی داشته باشد و روش کنترل را تعمیم می دهیم.

۵-۲ بیان مسئله و فرضیات

سیستم تکین غیرخطی افاین را در قالب کلی زیر در نظر بگیرید.

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + af(x) + g(x)u(t) \quad (5-1)$$

که در آن $\mathbf{x} \in R^n$ بردار متغیرهای حالت سیستم، $u \in R^l$ بردار ورودی سیستم، l تعداد ورودی‌های سیستم، $\mathbf{B} \in R^{n \times l}$ و $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ ماتریس‌های ضرائب ثابت و $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in R^{n \times 1}$ بردار توابع غیرخطی سیستم و α اسکالر می‌باشد. حال هدف کنترل این است که تمامی متغیرهای حالت سیستم تکین غیرخطی (۱-۵) حالت‌های سیستم مرجع خطی

(۲-۵)

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{r}_m(t)$$

را دنبال کند. که در آن $\mathbf{x}_m \in R^n$ حالت‌های مرجع و $\mathbf{r}_m$ ورودی مدل مرجع می‌باشد. ماتریس‌های $\mathbf{A}_m \in R^{n \times n}$ و $\mathbf{B}_m \in R^{n \times l}$ ضرایب سیستم می‌باشند. ماتریس $\mathbf{E}$ برابر با ماتریس $\mathbf{E}$ مدل انتخاب شده است. انتخاب مدل مرجع مناسب یکی از بخش‌های مهم روند طراحی کنترل‌کننده می‌باشد. مدل مرجع انتخاب شده باید یک سیستم مجاز باشد بنابراین در قضیه پایداری ۲-۳ صدق می‌کند و داریم

$$\begin{cases} \mathbf{P}^T \mathbf{A}_m + \mathbf{A}_m^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \\ \mathbf{E}^T \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{E} \geq 0 \end{cases} \quad (۳-۵)$$

علاوه بر مجاز بودن، برای انتخاب یک مدل مرجع خطی برای سیستم غیرخطی شرط‌های دیگری نیز نیاز است. این شرط‌ها قبلاً برای سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی مطرح شده است که به شرط وفق پذیری^۱ یا ردگیری کامل مدل مرجع^۲ معروف است [۱۲۱-۱۲۳]. از آن جهت که ماتریس $\mathbf{E}$ در معادله مرجع و سیستم تحت کنترل یکسان است با توجه به اثبات ارائه شده در [۱۲۱] می‌توان به سادگی این شرط را برای سیستم‌های تکین نیز استفاده نمود که در ادامه توضیح داده شده است. اگر سیستم غیرخطی را در قالب

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})u(t) \quad (۴-۵)$$

^۱ Matching condition

^۲ Perfect Model Following

بازنویسی کنیم، آنگاه شرط وفق پذیری را می توان بر اساس بُرد^۱ و رتبه ماتریس ها^۲ به صورت

(۶-۵)

$$R(\mathbf{g}) \supset R(\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_1),$$

$$R(\mathbf{g}) \supset R(\mathbf{B}_m) \quad (R(a) \text{ denotes } Rang(a))$$

و یا در قالب

$$(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger)\mathbf{B}_m = 0; \quad (\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger)(\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_1) = 0 \quad (۷-۵)$$

بیان نمود. که در آن $\mathbf{g}^\dagger = (\mathbf{g}^T \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T$ شبه معکوس^۳ ماتریس $\mathbf{g}$ می باشد. بنابراین در ابتدا باید فرض کنیم که مدل مرجع انتخاب شده شرط های لازم را دارد. در بخش بعدی به طراحی کنترل کننده مدل مرجع پایه با دانستن تمامی پارامترهای مدل می پردازیم.

۵-۳- طراحی کنترل کننده مدل مرجع پایه

بعد از انتخاب مدل مرجع مناسب برای رسیدن به هدف ردگیری مدل مرجع، بردار خطا را به صورت

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_m \quad (۸-۵)$$

تعریف می کنیم. با کم کردن معادله مدل مرجع (۲-۵) از معادله سیستم (۱-۵) و با استفاده از تعریف خطا در (۸-۵) خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{e} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})u - \mathbf{B}_m r_m \quad (۹-۵)$$

حال برای ساده سازی روابط $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ را به شکل زیر تعریف می کنیم.

¹ Range

² Rank requirement

³ Pseudo inverse

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_m \mathbf{x} \quad (۱۰-۵)$$

بنابراین دینامیک خطای حلقه بسته را می توان به صورت

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{e} + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u - \mathbf{B}_m r_m \quad (۱۱-۵)$$

نوشت. حال هدف کنترل، طراحی قانون کنترل u است به طوریکه خطای ردگیری به سمت صفر میل کند. برای نیل به این هدف تابع لیاپانوف زیر را انتخاب می کنیم.

$$(۱۲-۵)$$

$$V = \mathbf{e}^T \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$$

که در آن ماتریس $\mathbf{P}$ در شرط (۳-۵) صدق می کند. مشتق تابع لیاپانوف را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{E} \dot{\mathbf{e}} \quad (۱۳-۵)$$

با جایگذاری دینامیک خطا (۱۱-۵) در (۱۳-۵) مشتق تابع لیاپانوف را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$\dot{V} = \mathbf{e}^T (\mathbf{A}_m^T \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \mathbf{A}_m) \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T [\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u - \mathbf{B}_m r_m] \quad (۱۴-۵)$$

همان طور که از رابطه (۱۴-۵) مشخص است اگر بتوان قانون کنترل u را به نحوی انتخاب کرد که

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})u = -\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_m r_m \quad (۱۵-۵)$$

برقرار باشد، آنگاه با توجه به (۳-۵) مشتق تابع لیاپانوف به شکل

$$(۱۶-۵)$$

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}$$

خواهد شد. بنابراین بر اساس قضیه پایداری لیاپانوف می‌توان تضمین کرد که خطای ردگیری به سمت صفر همگرا می‌شود و سیستم غیرخطی مدل مرجع خطی را دنبال خواهد کرد.

کنترل‌کننده زیر را پیشنهاد می‌دهیم.

$$u = \mathbf{g}^\dagger(-\hat{\mathbf{f}}(x) + \mathbf{B}_m r_m) \quad (17-5)$$

برای تضمین اینکه کنترل پیشنهادی در رابطه (5-15) صدق کند لازم است تا رابطه

$$(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger)(-\hat{\mathbf{f}}(x) + \mathbf{B}_m r_m) = 0 \quad (18-5)$$

برقرار باشد. برای بررسی دقیق‌تر با استفاده از روابط (5-10) و (5-4) شرط (5-18) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger)(-(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_m)\mathbf{x} + \mathbf{B}_m r_m) = 0 \quad (17-5)$$

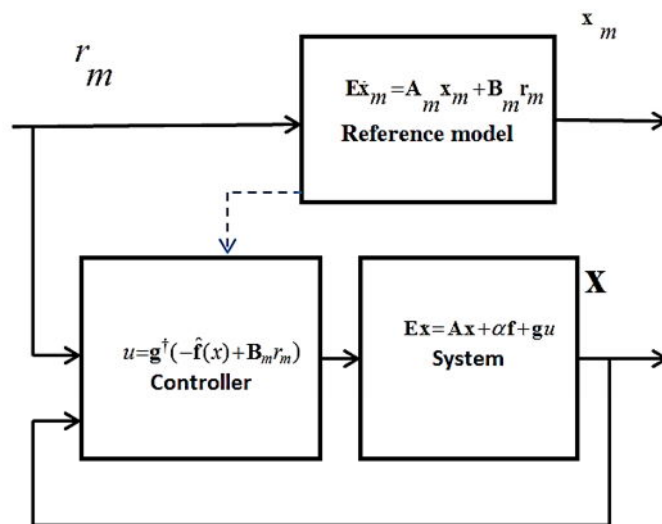
همان‌طور که مشخص است اگر شرط‌های وفق‌پذیری (5-7) برقرار باشد، آنگاه معادله (5-17) نیز به ازای هر مقدار از $\mathbf{x}$ و r_m برقرار است. در نتیجه کنترل پیشنهادی (5-17) معادله (5-15) را ارضا می‌کند و مشتق تابع لیاپانوف را اکیدا منفی می‌سازد. بنابراین می‌توان گفت که با انتخاب قانون کنترل به صورت (5-17)، دینامیک خطا به صورت

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m \mathbf{e} \quad (18-5)$$

خواهد بود. در این حالت میرایی قطب‌های سیستم مرجع $(\mathbf{E}, \mathbf{A}_m)$ که ریشه‌های چندجمله‌ای $|\mathbf{s}\mathbf{E} - \mathbf{A}_m| = 0$ می‌باشند، سرعت همگرایی حالت‌های سیستم به حالت‌های مدل مرجع را تعیین می‌کنند. بنابراین می‌توان گفت که اگر تمام پارامترهای سیستم تکین غیرخطی (5-1) مشخص باشد، با انتخاب قانون کنترل (5-17) تمامی حالت‌های سیستم غیرخطی، حالت‌های سیستم خطی مرجع

(۲-۵) را ردگیری خواهد کرد. سیستم کنترل مدل مرجع پایه برای سیستم‌های تکین غیر خطی در شکل ۱-۵ نشان داده شده است.

در بخش بعد به طراحی کنترل کننده مدل مرجع تطبیقی با فرض نامعلوم بودن ماتریس A و ضریب α خواهیم پرداخت.



شکل ۱-۵- سیستم کنترل مدل مرجع پایه برای سیستم‌های تکین غیر خطی

۴-۵- طراحی کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیرخطی (کنترل الف)

در این بخش فرض می‌کنیم که ماتریس A و ضریب α نامعلوم می‌باشد. بنابراین قانون کنترل زیر را پیشنهاد می‌دهیم.

(۱۹-۵)

$$u = g^\dagger(-\hat{A}x - \hat{\alpha}f(x) + A_m x + B_m^T r_m)$$

که در آن $\hat{A}$ و $\hat{\alpha}$ تخمینی از مقادیر واقعی A و α خواهند بود. با ضرب g در دو طرف رابطه (۵-۱۹) و اضافه و کم کردن چند جمله خواهیم داشت:

(۲۰-۵)

$$\mathbf{g}u = \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger(-\mathbf{A}\mathbf{x} - \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_m\mathbf{x} + \mathbf{B}_m r_m + (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x} + (\alpha - \hat{\alpha})\mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

با استفاده از شرایط وفق پذیری (۷-۵)، معادله (۲۰-۵) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\mathbf{g}u = (-\mathbf{A}\mathbf{x} - \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_m\mathbf{x} + \mathbf{B}_m r_m) + \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger((\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x} + (\alpha - \hat{\alpha})\mathbf{f}(\mathbf{x})) \quad (۲۱-۵)$$

حال با جایگذاری (۲۱-۵) در دینامیک خطای (۹-۵)، سیستم حلقه بسته به صورت

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m\mathbf{e} + \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger((\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x} + (\alpha - \hat{\alpha})\mathbf{f}(\mathbf{x})) \quad (۲۲-۵)$$

در می آید. همان طور که از رابطه (۲۲-۵) مشخص است اگر مقادیر $\hat{\mathbf{A}}$ و $\hat{\alpha}$ برابر با مقادیر واقعی $\mathbf{A}$ و α گردد، خطای ردگیری به سمت صفر همگرا می شود. حال برای کاهش خطای پارامتری و همگرایی خطا به سمت صفر تابع لیاپانوف زیر را انتخاب می کنیم.

$$V = \mathbf{e}^T \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{\gamma_1}(\alpha - \hat{\alpha})^2 + \frac{1}{\gamma_2} \text{vec}(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})^T \text{vec}(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) \quad (۲۳-۵)$$

با مشتق گیری از تابع لیاپانوف و جایگذاری دینامیک خطای حلقه بسته (۲۲-۵) در آن، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mathbf{e}^T (\mathbf{A}_m^T \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \mathbf{A}_m) \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger((\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x} + (\alpha - \hat{\alpha})\mathbf{f}(\mathbf{x})) \\ & - \frac{2}{\gamma_1}(\alpha - \hat{\alpha})\dot{\hat{\alpha}} - \frac{2}{\gamma_2} \text{vec}(\dot{\hat{\mathbf{A}}})^T \text{vec}(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) \end{aligned} \quad (۲۴-۵)$$

از آنجا که جمله $\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x}$ اسکالر است داریم:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger) \text{vec}(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) \quad (۲۵-۵)$$

بنابراین (۲۴-۵) را می توان به شکل

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{2}{\gamma_1} (\alpha - \hat{\alpha}) [-\dot{\hat{\alpha}} + \gamma_1 \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g} \mathbf{g}^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{x})] \\ & + \frac{2}{\gamma_2} [-\text{vec}(\dot{\hat{\mathbf{A}}})^T + \gamma_2 (\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g} \mathbf{g}^\dagger)] \text{vec}(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) \end{aligned} \quad (26-5)$$

بازنویسی کرد. حال با انتخاب قوانین تطبیق به صورت

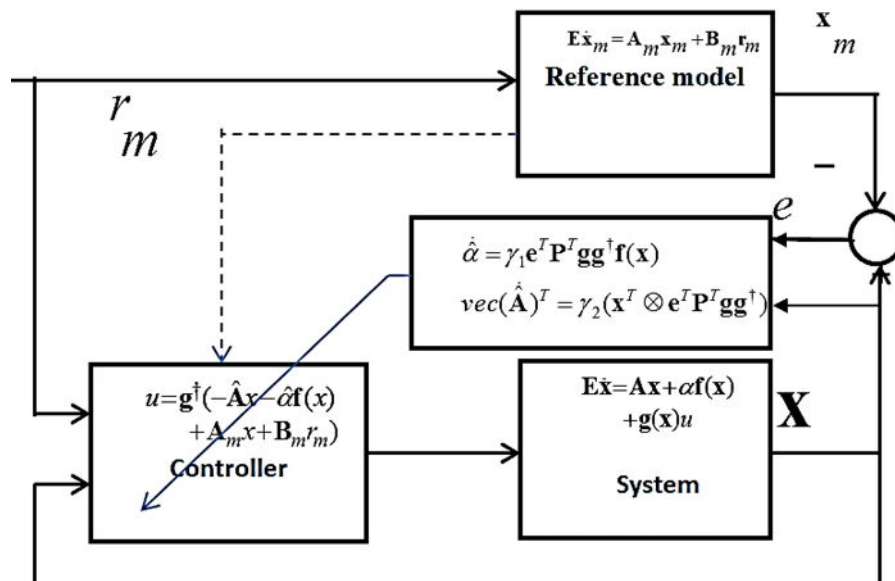
$$\begin{aligned} \dot{\hat{\alpha}} &= \gamma_1 \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g} \mathbf{g}^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \text{vec}(\dot{\hat{\mathbf{A}}})^T &= \gamma_2 (\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g} \mathbf{g}^\dagger) \end{aligned} \quad (27-5)$$

مشتق تابع لیاپانوف به صورت

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \quad (28-5)$$

درخواهد آمد. بنابراین با انتخاب قانون کنترل به صورت رابطه (5-19) و قوانین تنظیم (5-27)، پایداری سیستم تضمین و خطای ردگیری به سمت صفر همگرا خواهد شد. سیستم کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیرخطی (کنترل الف) در شکل 5-2 نشان داده شده است.

در بخش بعد با فرض نامعلوم بودن ماتریس E به طراحی کنترل مدل مرجع تطبیقی برای ردگیری سیستم مرجع با ماتریس E متفاوت می‌پردازیم.



شکل ۵-۲- سیستم کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیرخطی (کنترل الف)

۵-۵- طراحی کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیرخطی با

فرض نامعلوم بودن ماتریس E (کنترل ب)

در این بخش فرض می‌کنیم ماتریس E نیز نامعلوم می‌باشد. هدف کنترل اینست که سیستم غیرخطی تکین (۵-۱) با فرض نامعلوم بودن E, A و α ، سیستم تکین مرجع خطی

$$E_m \dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{r}_m(t) \quad (۵-۲۹)$$

را ردگیری نماید. سیستم مرجع باید یک سیستم مجاز باشد، بنابراین E_m, A_m در شرط (۵-۳) صدق می‌کند. نامعلوم بودن ماتریس E پیچیدگی طراحی و هزینه کنترل را افزایش می‌دهد. از آن جهت که ماتریس E مشخص کننده شاخص سیستم است در طراحی سیستم کنترل، سیستم تکین غیرخطی می‌تواند سیستم مرجع با شاخص متفاوت و یا حتی سیستم مرجع غیرتکین ($|E_m| \neq 0$) را ردگیری نماید. در ازای این مزیت، هزینه کنترل و پیچیدگی کنترل کننده افزایش می‌یابد.

قبل از طراحی کنترل کننده شروط وفق پذیری (۵-۶) و (۵-۷) باید بازنگری گردد. از آن جهت که ماتریس E سیستم با ماتریس E_m در مدل مرجع متفاوت است باید شرط اضافی برای انتخاب E_m سیستم مرجع در نظر گرفته شود. با بازنگری در اثبات شروط وفق پذیری در [۱۲۱] می‌توان نتیجه گرفت که اگر علاوه بر شروط قبلی، بُرد ماتریس $(E_m - E)$ زیرمجموعه بُرد $\mathbf{g}$ باشد،

$$R(\mathbf{g}) \supset R(E_m - E) \quad (۵-۳۰)$$

و یا

$$(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger)(E_m - E) = 0 \quad (۵-۳۱)$$

آنگاه سیستم تکین غیرخطی قابلیت ردگیری کامل سیستم تکین خطی مرجع را دارا می‌باشد.

اگرچه پارامترهای سیستم نامعلوم در نظر گرفته شده‌است ولی فرض می‌شود که ماتریس‌ها در شرط وفق‌پذیری صدق می‌کنند. این فرض، یک فرض غیر معمولی نمی‌باشد. از آن جهت که شرط وفق‌پذیری در اصل مربوط به رتبه ماتریس‌ها می‌باشد طبیعی است که از رتبه ماتریس‌ها و درجه سیستم تحت کنترل آگاه باشیم. به عنوان مثال در کنترل موتور DC، ساختار دینامیکی و رتبه ماتریس‌ها مشخص است در حالی که ممکن است از مقادیر دقیق مقاومت و سلف آرمیچر و ضرائب دیگر موتور اطلاعی در دست نباشد.

حال برای تحقق هدف ردگیری مدل مرجع، با کم کردن معادله سیستم مرجع (۵-۲۹) از معادله سیستم غیرخطی (۵-۱) و با استفاده از تعریف خطای (۵-۸)، دینامیک خطا به صورت زیر خواهد بود.

$$\mathbf{E}_m \dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{e} + (\mathbf{A}\mathbf{x} + \alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_m \mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u - \mathbf{B}_m r_m - (\mathbf{E} - \mathbf{E}_m)\dot{\mathbf{x}} \quad (۵-۳۲)$$

حال برای همگرایی خطای ردگیری به سمت صفر، کنترل کننده زیر را پیشنهاد می‌دهیم.

$$u = \mathbf{g}^\dagger(-\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \hat{\alpha}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{B}_m r_m + (\hat{\mathbf{E}} - \mathbf{E}_m)\dot{\mathbf{x}}) \quad (۵-۳۳)$$

که در آن $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{A}}$ و $\hat{\alpha}$ تخمینی از مقادیر واقعی $\mathbf{E}, \mathbf{A}$ و α می‌باشد. همانطور که از رابطه (۵-۳۳) مشخص است، پس‌خورد مشتقات حالت به قانون کنترل اضافه شده است. پس‌خورد مشتقات حالت در سیستم‌های تکین کارایی بالا دارد و می‌تواند مستقیماً بر روی خصوصیات تکین بودن سیستم اعم از منظم بودن و شاخص تاثیر بگذارد [۲۶]. این در حالی است که پس‌خورد مشتقات حالت در سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی رایج نیست و کارایی بهتری نسبت به پس‌خورد حالت ندارد.

حال با ضرب ماتریس در دوطرف رابطه (۵-۳۳) و با در نظر گرفتن شروط وفق‌پذیری (۵-۷) و (۵-۵)

(۳۱) داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}u = & (-\mathbf{A}\mathbf{x} - \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_m\mathbf{x} + \mathbf{B}_m r_m + (\mathbf{E} - \mathbf{E}_m)\dot{\mathbf{x}}) \\ & + \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger((\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x} + (\alpha - \hat{\alpha})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + (\hat{\mathbf{E}} - \mathbf{E})\dot{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (34-5)$$

با جایگذاری (34-5) در دینامیک خطا (32-5)، سیستم حلقه بسته به شکل زیر خواهد بود.

$$\mathbf{E}_m \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m \mathbf{e} + \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger((\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x} + (\alpha - \hat{\alpha})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + (\hat{\mathbf{E}} - \mathbf{E})\dot{\mathbf{x}}) \quad (35-5)$$

حال برای پایداری سیستم و کاهش خطای پارامتری تابع لیپانوف زیر را معرفی می کنیم.

$$(36-5)$$

$$\begin{aligned} V = & \mathbf{e}^T \mathbf{E}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{\gamma_1} (\alpha - \hat{\alpha})^2 + \frac{1}{\gamma_2} \text{vec}(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})^T \text{vec}(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) \\ & + \frac{1}{\gamma_3} \text{vec}(\hat{\mathbf{E}} - \mathbf{E})^T \text{vec}(\hat{\mathbf{E}} - \mathbf{E}) \end{aligned}$$

مشتق تابع لیپانوف به صورت

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mathbf{e}^T (\mathbf{A}_m^T \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \mathbf{A}_m) \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger((\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x} + (\alpha - \hat{\alpha})\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{E}})\dot{\mathbf{x}}) \\ & - \frac{2}{\gamma_1} (\alpha - \hat{\alpha})\dot{\hat{\alpha}} - \frac{2}{\gamma_2} \text{vec}(\dot{\hat{\mathbf{A}}})^T \text{vec}(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) - \frac{2}{\gamma_3} \text{vec}(\dot{\hat{\mathbf{E}}})^T \text{vec}(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{E}}) \end{aligned} \quad (37-5)$$

خواهد بود. به طور مشابه با (23-5) تا (26-5)، می توان مشتق تابع لیپانوف را به شکل

$$(38-5)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{2}{\gamma_1} (\alpha - \hat{\alpha}) [-\dot{\hat{\alpha}} + \gamma_1 \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{x})] \\ & + \frac{2}{\gamma_2} [-\text{vec}(\dot{\hat{\mathbf{A}}})^T + \gamma_2 (\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger)] \text{vec}(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) \\ & - \frac{2}{\gamma_3} [\text{vec}(\dot{\hat{\mathbf{E}}})^T + \gamma_3 (\dot{\mathbf{x}}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}\mathbf{g}^\dagger)] \text{vec}(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{E}}) \end{aligned}$$

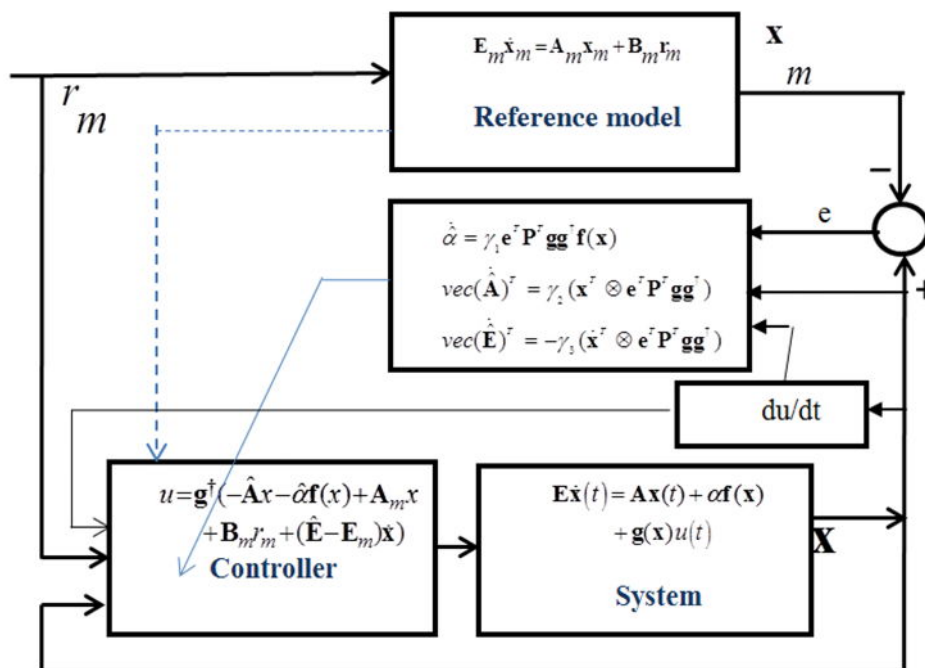
بازنویسی کرد. بنابراین با انتخاب قوانین تطبیق به صورت

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\alpha}} &= \gamma_1 \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g} \mathbf{g}^{\dagger} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \text{vec}(\dot{\hat{\mathbf{A}}})^T &= \gamma_2 (\mathbf{x}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g} \mathbf{g}^{\dagger}) \\ \text{vec}(\dot{\hat{\mathbf{E}}})^T &= -\gamma_3 (\dot{\mathbf{x}}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g} \mathbf{g}^{\dagger})\end{aligned}\quad (۳۹-۵)$$

مشتق تابع لیاپانوف به صورت مشابه با (۲۸-۵) اکیدا منفی خواهد شد و می‌توان نتیجه گرفت که خطای ردگیری به سمت صفر همگرا می‌شود. اضافه کردن پس‌خورد مشتقات حالت پیچیدگی کنترل را افزایش می‌دهد. در سیستم‌های تکین مشتق متغیرها را مستقیماً نمی‌توان از روی معادلات سیستم محاسبه کرد و مشتق همه متغیرها در مدل موجود نیست و بعضی از متغیرها فقط به صورت جبری در مدل ظاهر می‌شوند. از این‌رو برای به دست آوردن بردار مشتقات حالت شاید لازم باشد که از بعضی متغیرها مستقیم مشتق بگیریم که این کار باعث افزایش نویزپذیری سیستم خواهد شد. ولی با توجه به قابلیت‌هایی که در این حالت به سیستم کنترل اضافه می‌شود (از جمله توانایی ردگیری مدل با شاخص متفاوت)، ارزش پرداخت این‌گونه هزینه‌ها را داراست. سیستم کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیرخطی با فرض نامعلوم بودن ماتریس $\mathbf{E}$ (کنترل ب) در شکل ۳-۵ نشان داده شده است. در ادامه در بخش بعد رفتار سیستم‌های کنترل مدل مرجع (الف) و (ب) بر روی یک سیستم نمونه شبیه‌سازی شده است.

۵-۶- شبیه‌سازی روش مدل مرجع

برای بررسی بهتر رفتار کنترل‌کننده پیشنهاد شده برای ردگیری مدل مرجع، در این بخش روش کنترل را بر روی یک سیستم تکین غیرخطی نمونه پیاده‌سازی نموده‌ایم. مدل سیستم تحت کنترل مشابه با معادله (۱-۵) می‌باشد و ماتریس‌های سیستم به شرح زیر است.



شکل ۵-۳- سیستم کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های تکین غیرخطی با فرض نامعلوم بودن ماتریس E

(کنترل ب)

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha = 1, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos x_1 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{x_1} \end{bmatrix} \quad (۴۰-۵)$$

می‌خواهیم حالت‌های سیستم نمونه، حالت‌های دو سیستم مرجع متفاوت را ردگیری نماید. معادلات سیستم‌های مرجع در ادامه آورده شده است.

سیستم مرجع اول

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{m1} \\ \dot{x}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_m \quad (۴۱-۵)$$

و سیستم مرجع دوم

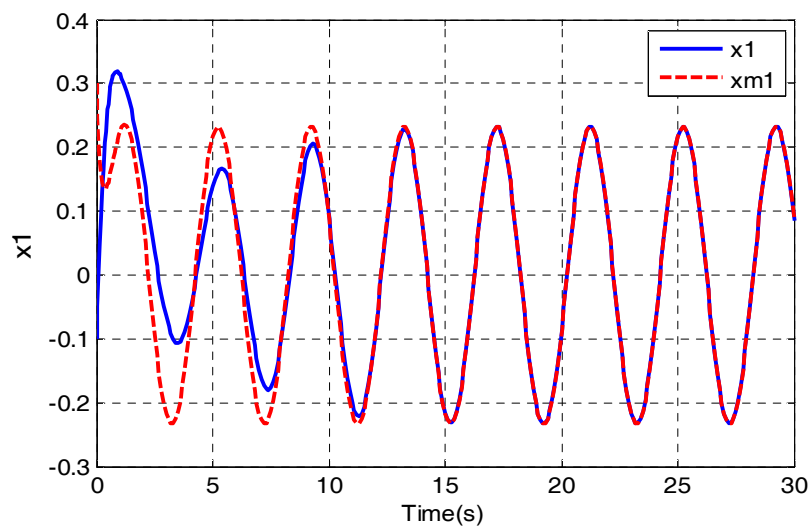
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{m1} \\ \dot{x}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_m \quad (۴۲-۵)$$

در هر دو مدل مرجع $r_m = \sin(0.5\pi t)$ انتخاب شده است. در ردگیری سیستم مرجع اول ماتریس E معلوم فرض شده است و از روش کنترل (الف) برای تحقق ردگیری استفاده می‌شود که نتایج در بخش شبیه‌سازی الف مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

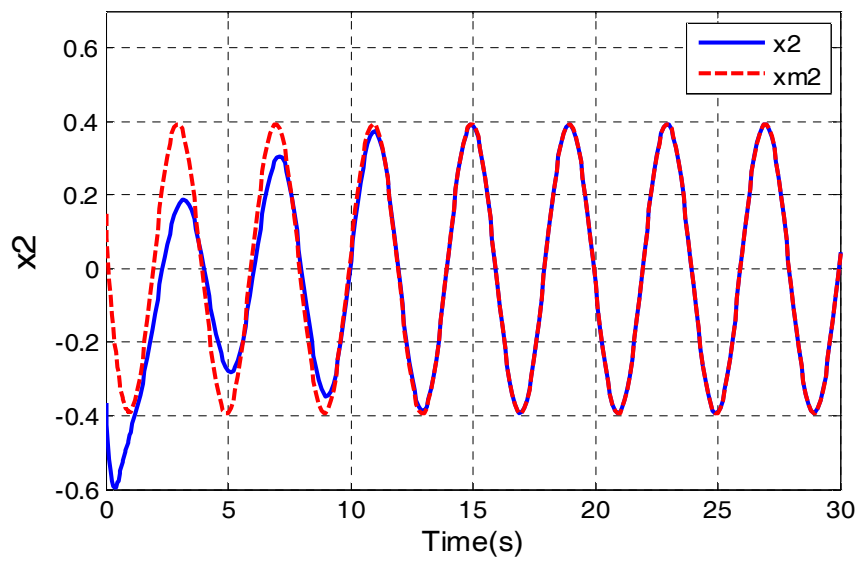
در مسئله ردگیری سیستم مرجع دوم ماتریس E نامعلوم فرض شده است و همان‌طور که مشخص است ماتریس E_m سیستم مرجع با ماتریس E سیستم متفاوت است. برای تحقق ردگیری در این حالت از روش کنترل (ب) استفاده نموده‌ایم و نتایج در بخش شبیه‌سازی ب مورد بررسی قرار می‌گیرد. قابل ذکر است که سیستم مرجع دوم یک سیستم غیر تکین $|E| \neq 0$ است.

۵-۶-۱- شبیه‌سازی الف

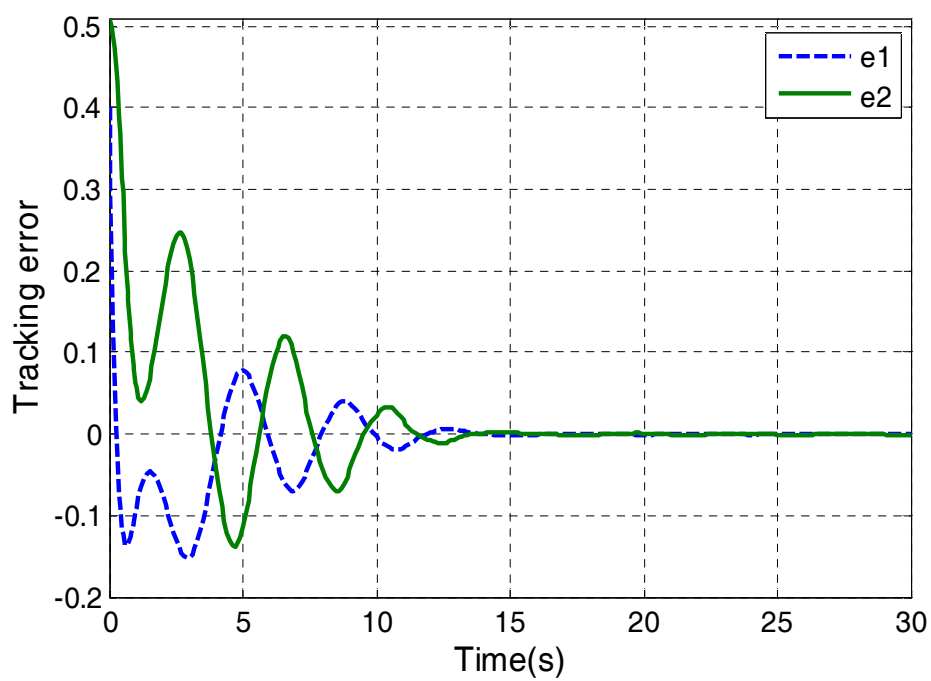
در این بخش هدف کنترل این است که سیستم غیرخطی با ضرایب (۵-۴۰) سیستم مرجع اول (۵-۴۱) را با فرض نامعلوم بودن A و α ردگیری کند. از روش کنترل الف برای تحقق این هدف بهره برده‌ایم. قانون کنترل تطبیقی (۵-۱۹) را به همراه قواعد تطبیق (۵-۲۷) به سیستم مذکور اعمال کرده‌ایم و نتایج شبیه‌سازی سیستم کنترل در شکل‌های ۵-۴ تا ۵-۷ آورده شده است. ردگیری متغیرهای حالت سیستم از حالت‌های سیستم مرجع در شکل ۵-۴ و ۵-۵ نشان داده شده است. همان‌طور که از نتایج مشخص است سیستم کنترل در تحقق هدف ردگیری مدل مرجع موفق عمل نموده است. خطای ردگیری به سمت صفر همگرا شده است (شکل ۵-۶). در شکل ۵-۷ هزینه کنترل نشان داده شده است. هزینه کنترل محدود است و تغییرات آرامی دارد.



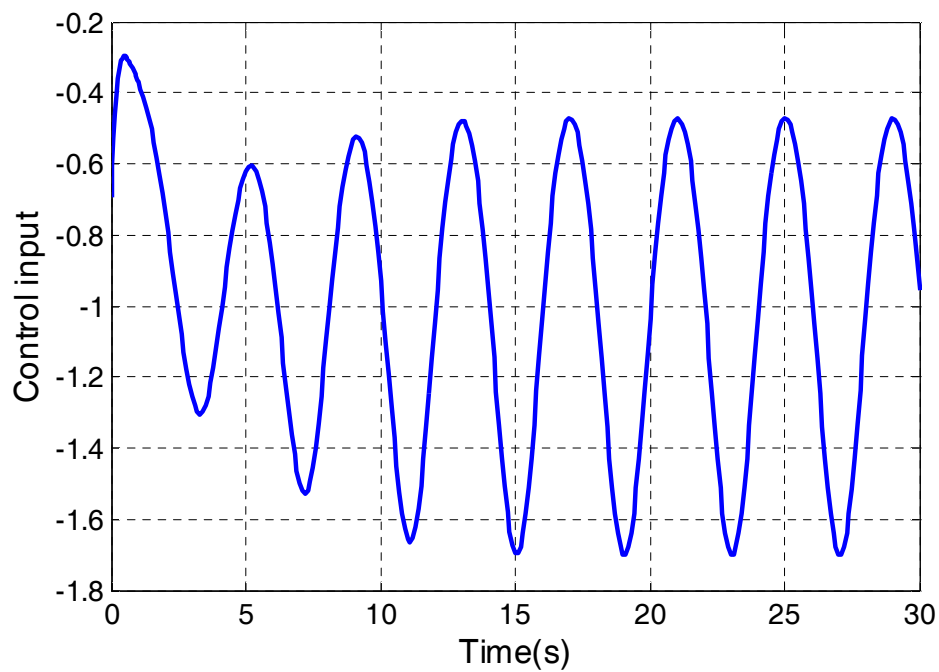
شکل ۵-۴- ردگیری متغیر x_1 سیستم تکین غیرخطی نمونه از حالت x_{m1} در مدل مرجع اول با استفاده از روش کنترل الف. ماتریس $\mathbf{E}$ در هر دو سیستم تحت کنترل و سیستم مرجع یکسان است.



شکل ۵-۵- ردگیری متغیر x_2 سیستم تکین غیرخطی نمونه از حالت x_{m2} در مدل مرجع اول با استفاده از روش کنترل الف. ماتریس $\mathbf{E}$ در هر دو سیستم تحت کنترل و سیستم مرجع یکسان است.



شکل ۵-۶- خطای ردگیری در شبیه‌سازی الف



شکل ۵-۷- هزینه کنترل در شبیه‌سازی الف

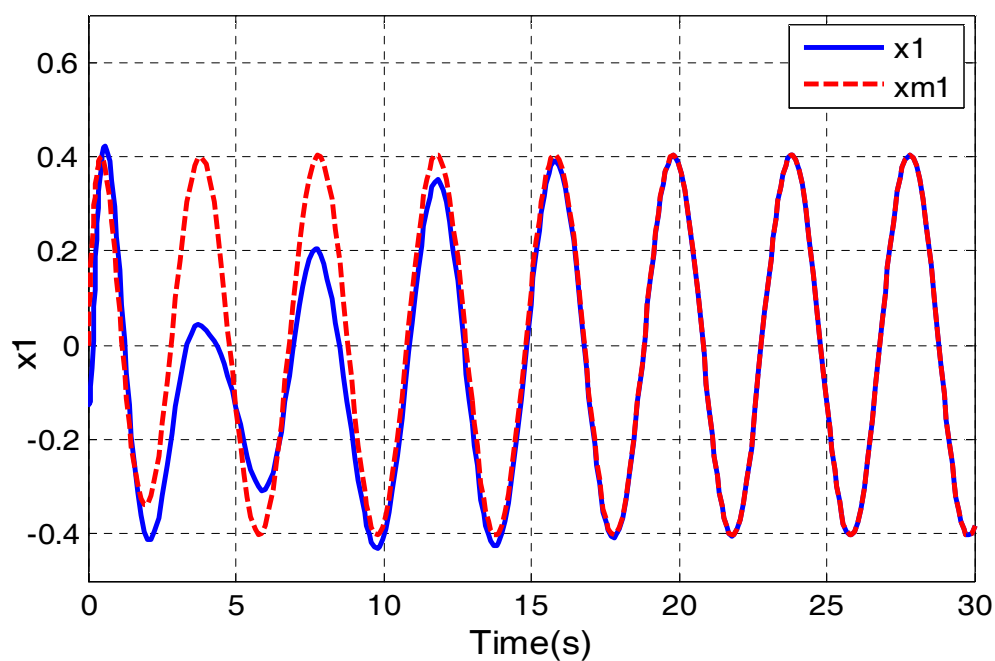
همان‌طور که از نتایج نیز پیدا است زمانی که ماتریس E سیستم معلوم فرض شده است و مدل مرجع ماتریس E مشابهی دارد، روش کنترل (الف) کارایی بالایی دارد و به خوبی هدف ردگیری مدل را محقق می‌سازد. حال در ادامه، از روش کنترل ب برای تحقق هدف ردگیری سیستم مرجع دوم بهره بهره‌ایم که نتایج شبیه‌سازی در بخش شبیه‌سازی ب مورد بررسی قرار گرفته است.

۵-۶-۲- شبیه‌سازی ب

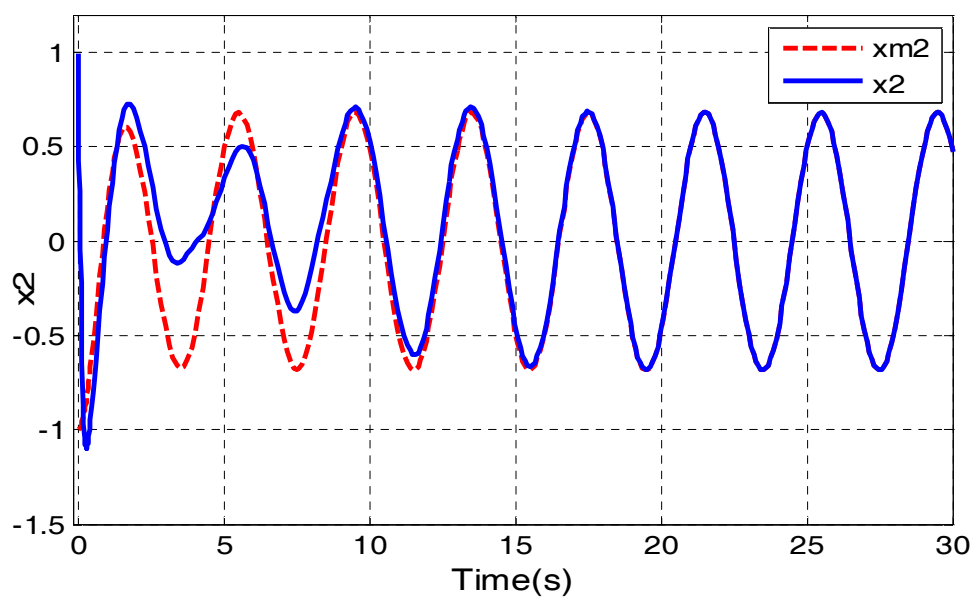
در این بخش هدف کنترل این است که سیستم غیرخطی با ضرایب (۵-۴۰) سیستم مرجع دوم (۵-۴۲) را با فرض نامعلوم بودن E ، A و α ردگیری کند. از روش کنترل ب برای تحقق این هدف بهره برده‌ایم. سیستم مرجع دوم یک سیستم غیرتکین است. قانون کنترل (۵-۳۳) به همراه قواعد تنظیم (۵-۳۹) به سیستم اعمال نموده‌ایم. نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۵-۸ تا ۵-۱۱ خلاصه شده است. ردگیری متغیرهای حالت از مقادیر مطلوب مورد نظر در شکل‌های ۵-۸ و ۵-۹ نشان داده شده است. خطای ردگیری در شکل ۵-۱۰ آورده شده است. هزینه کنترل قابل قبول است و در شکل ۵-۱۱ آورده شده است.

همان‌طور که از نتایج پیداست در شرایط نامعلوم بودن ماتریس E ، کنترل‌کننده در امر ردگیری یک سیستم مرجع غیر تکین موفق عمل نموده است.

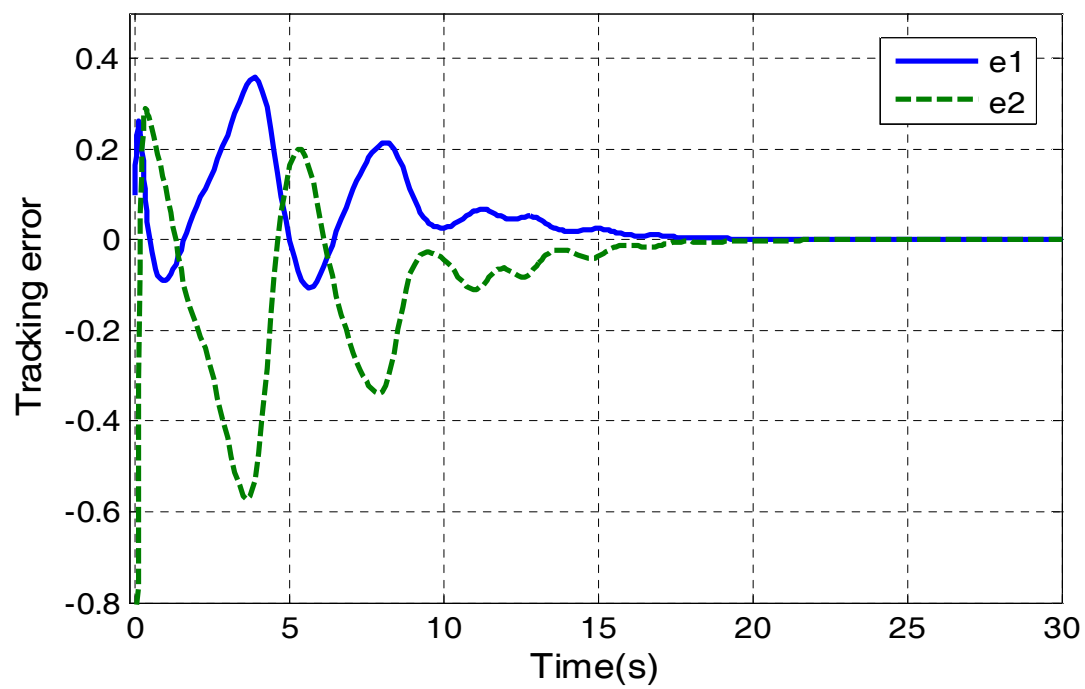
از نتایج هردو شبیه‌سازی مشخص است که کنترل‌کننده‌های تطبیقی مدل مرجع الف و ب در امر ردگیری سیستم مرجع مورد نظر موعق عمل نموده‌اند.



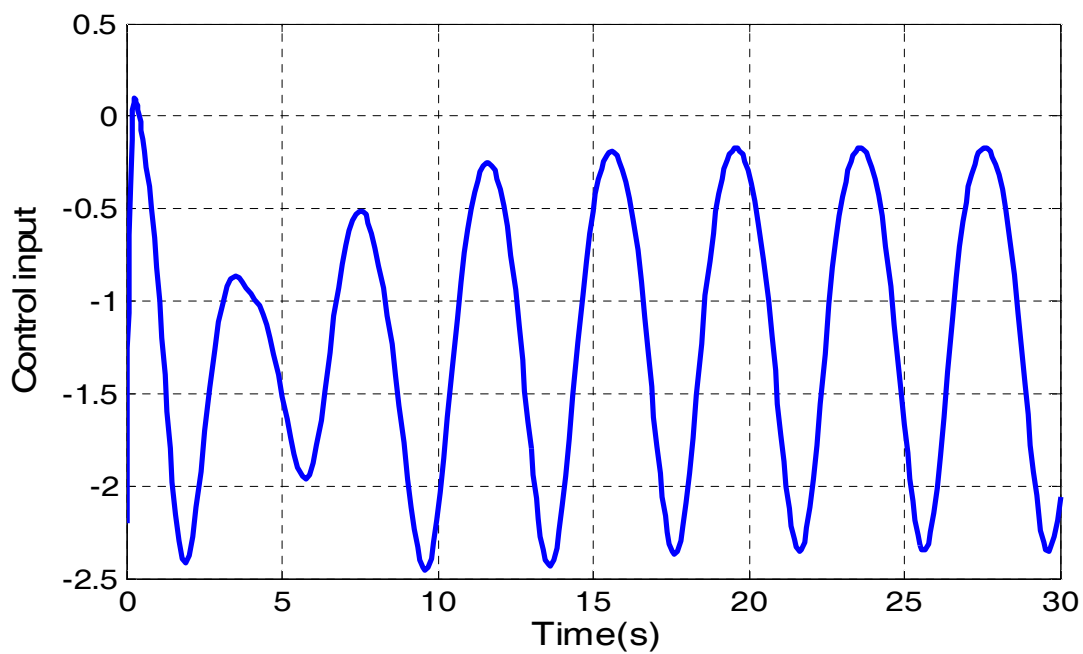
شکل ۵-۸- ردگیری متغیر x_1 سیستم تکین غیرخطی نمونه از حالت x_{m1} در مدل مرجع دوم با استفاده از روش کنترل ب. سیستم مرجع یک سیستم غیرتکین است.



شکل ۵-۹- ردگیری متغیر x_2 سیستم تکین غیرخطی نمونه از حالت x_{m2} در مدل مرجع دوم با استفاده از سیستم کنترل ب.



شکل ۵-۱۰ - خطای ردگیری در شبیه‌سازی ب



شکل ۵-۱۱ - ورودی کنترلی در شبیه‌سازی ب.

۵-۷- جمع بندی

در این فصل روش کنترل تطبیقی مدل مرجع سیستم‌های تکین غیرخطی مورد بررسی قرار گرفت. در ابتدا یک روش کنترل مدل مرجع پایه با فرض معلوم بودن تمامی پارامترهای سیستم طراحی شد و در ادامه این روش به دو روش کنترل تطبیقی مدل مرجع سیستم‌های تکین غیرخطی تعمیم داده شد. در روش اول مقادیر A و α سیستم تحت کنترل نامعلوم فرض شد، در حالی که ماتریس E سیستم که مسئول تکین شدن و معین شاخص سیستم است، معلوم در نظر گرفته شد. این روش کنترل به نام روش کنترل الف مطرح شد. در روش دوم که به عنوان کنترل ب مورد بررسی قرار گرفت، علاوه بر مقادیر A و α ، ماتریس E سیستم نیز نامعلوم فرض شده است. در این حالت، سیستم کنترل قابلیت ردگیری مدل مرجع با شاخص متفاوت و یا حتی مدل مرجع غیر تکین را داراست. قابلیت‌های کنترل‌کننده در روش کنترل ب به خاطر استفاده از پس‌خورد مشتقات حالت به صورت چشمگیری افزایش می‌یابد، حال آن که این امر سبب افزایش پیچیدگی کنترل‌کننده نیز می‌گردد. هر دو روش مورد بررسی بر روی یک سیستم تکین غیرخطی نمونه شبیه‌سازی شد و نتایج شبیه‌سازی‌ها کارایی کنترل‌کننده‌ها را تایید می‌کند.

نتایج و پیشنهادات

فصل ششم - نتایج و پیشنهادات

۶-۱- نتایج

سیستم‌های تکین به طور کلی به سیستم‌های اطلاق می‌شود که معادلات جبری و معادلات دیفرانسیلی را به طور همزمان دارا می‌باشند. این معادلات جبری می‌تواند ناشی از قیدهای محیطی و یا محدودیت ذاتی سیستم باشد. از این‌رو سیستم‌های تکین، مدل دقیق‌تر و کامل‌تری از فرایندها را ارائه می‌دهد و برای مدل‌سازی سیستم‌های تحت قید کارایی بالایی دارند.

معادلات تکین به طور کلی می‌تواند جواب نداشته باشد، دارای بی‌نهایت جواب باشد و یا جواب یکتایی داشته باشد. منظم بودن سیستم تکین بدین معنا است که سیستم دارای پاسخ یکتا باشد و این مسئله در سیستم‌های تکین اهمیت ویژه‌ای دارد.

شاخص سیستم تکین، میزان پیچیدگی حل معادلات تکین را مشخص می‌کند و بیان می‌کند که یک سیستم تکین چقدر با یک سیستم دیفرانسیلی معمولی تفاوت دارد. سیستمی با شاخص بالاتر در مقایسه با سیستمی با شاخص پایین‌تر، با مشکلات و پیچیدگی‌های بیشتری در تحلیل و کنترل مواجه است.

شرایط اولیه معادلات تکین باید سازگار باشد و این بدان معنا است که باید در معادلات جبری مدل و علاوه بر آن در قیدهای پنهان مدل نیز صدق کند. شرایط اولیه ناسازگار در سیستم‌های تکین با شاخص بزرگتر از یک، منجر به ایجاد ضربه در پاسخ سیستم خواهند شد. بدین خاطر در کنترل یک

سیستم تکین علاوه بر پایداری، به دنبال پاسخ منظم و حذف رفتارهای ضربه‌ای نیز می‌باشیم. به سیستم تکینی که این سه خصوصیت را دارا است در اصطلاح سیستم مجاز گفته می‌شود. به این خاطر قضایای مختلفی برای بررسی مجاز بودن سیستم‌های تکین ارائه شده است. در این میان، قضایایی مبتنی بر تعمیم قضیه پایداری لیاپانوفی در سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی برای بررسی مجاز بودن سیستم‌های تکین نیز ارائه شده است که در این رساله برای طراحی کنترل‌کننده از یکی از آن‌ها استفاده شد.

در این رساله، کنترل تطبیقی سیستم‌های تکین مورد بررسی قرار گرفت. در ابتدا یک روش پس‌خورد قابل تنظیم برای مجازسازی و ردگیری سیستم‌های تکین خطی تک ورودی و چندمتغیره ارائه گردید و در ادامه روش مورد نظر برای سیستم‌های تکین غیرخطی که در آن بخش غیرخطی مدل شرط لپشیتز را ارضا می‌کند، تعمیم داده شد. نتایج قابل قبولی از شبیه‌سازی کنترل پیشنهادی بر روی سیستم تکین نمونه، مدل تکین موتور DC، مدل خطی شده ربات تمیزکار و سیستم تکین غیرخطی ربات سیار، دریافت گردید.

در مراحل بعدی کار یک روش مدل مرجع تطبیقی برای سیستم‌های تکین غیرخطی ارائه شد. در ابتدا فرض شد که شاخص مدل مرجع و مدل تحت کنترل یکسان می‌باشد و در ادامه روش مذکور، با استفاده از افزودن جمله پس‌خورد مشتقات حالت به قانون کنترل، برای ردگیری سیستم مرجع با شاخص مختلف تعمیم داده شد. از آن جهت که پس‌خورد مشتقات حالت به طور مستقیم می‌تواند بر خصوصیات مربوط به سیستم‌های تکین اعم از منظم بودن، بدون ضربه بودن، شاخص و پایداری تاثیر بگذارد، استفاده از پس‌خورد مشتقات حالت در قانون کنترل برای سیستم‌های تکین کارایی بالایی دارد. در حالی که در سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی پس‌خورد مشتقات حالت تفاوت چندانی با پس‌خورد حالت معمولی ندارد. مشکل اصلی در این کار این است که مشتقات همه متغیرها در مدل سیستم تکین در دسترس نیست و بعضی از متغیرها صرفاً به صورت جبری در معادلات ظاهر

می‌شوند، از این‌رو مجبور به مشتق‌گیری بعضی از متغیرها خواهیم شد که باعث افزایش پیچیدگی سیستم و افزایش نویزپذیری در سیستم خواهد شد.

۶-۲- پیشنهادات

۱- از آن‌جهت که در سیستم‌های تکین غیرخطی نظریه‌های کنترل به صورت جامع و کاملی مورد بررسی قرار نگرفته است و هنوز روش‌های کلی و جامع برای این سیستم‌ها ارائه نشده است، مسئله کنترل تطبیقی سیستم‌های غیرخطی در واقع حل دو مسئله جداگانه طراحی کنترل‌کننده غیرخطی غیر تطبیقی و تطبیقی نمودن روش مذکور می‌باشد که تا اندکی باعث پیچیدگی این رساله نیز گردید. اما از آنجا که کنترل سیستم‌های تکین خطی مورد بررسی و بحث بیشتری قرار گرفته است و روش‌های کنترلی متعددی برای سیستم‌های تکین خطی تاکنون ارائه شده است حال وقت آن است که مسئله کنترل تطبیقی را برای این سیستم‌ها تعمیم دهیم. در زمینه سیستم‌های تکین خطی قضایای بررسی پایداری و مجاز بودن متعددی تاکنون ارائه شده است که می‌تواند در طراحی کنترل‌کننده‌ها استفاده گردد. علاوه بر آن جعبه ابزارهای شبیه‌سازی و روش‌های حل متعددی نیز برای این سیستم‌ها ارائه گردیده است که می‌تواند راه‌گشای طراحی کنترل‌کننده‌ها باشد. این در حالی است که روش‌های کنترل تطبیقی به صورت جامع و کافی برای سیستم‌های تکین خطی مورد بررسی قرار نگرفته است.

۲- مسئله کنترل سیستم‌های تکین غیرخطی یک فضای باز برای تحقیقات بیشتر است.

۳- یکی از مشکلات اساسی در تعمیم روش‌های کنترلی ارائه شده برای سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی به سیستم‌های تکین این است که بردار مشتقات حالت در دسترس نیست و از نظر ریاضی نمی‌توان دینامیک سیستم را جایگزین $\dot{x}$ کرد؛ درحالی‌که در طراحی بسیاری از روش‌های کنترل برای سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی این جایگزینی انجام می‌شود. این مسئله را باید در طراحی

کنترل‌کننده‌ها برای سیستم‌های تکین در نظر گرفت. یا به عبارتی دیگر در تعمیم روش‌های معمولی قوانین کنترل باید طوری طراحی گردد که در صورت نیاز به مشتق‌گیری به جای $\dot{x}$ جمله $E\dot{x}$ ظاهر شود.

۴- پیشنهاد می‌شود به جای تعمیم روش‌های کنترل مربوط به سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی، با دیدی متفاوت، روش‌های کنترل مخصوص سیستم‌های تکین طراحی گردد و دید طراح با جستجو در روش‌های موجود، محدود نگردد. در این حالت می‌توان روش‌های ارائه شده را به سیستم‌های دیفرانسیلی معمولی به عنوان حالت خاصی از سیستم‌های تکین نیز اعمال نمود. سیستم‌های تکین، مدل‌های کامل‌تری هستند و نیازمند روش‌های کنترل کامل‌تر نیز می‌باشند.

پیوست

پیوست الف - حساب ماتریس‌ها [۱۱۱]

الف-۱ - بُرد ماتریس^۱

برای ماتریس $A \in R^{m \times n}$ ، بُرد ماتریس که با نماد $R(A)$ نشان می‌دهند، زیر مجموعه‌ای از فضای

R^m است که توسط تابع $f(x) = Ax$ ایجاد می‌شود. به عبارتی دیگر

(الف-۱)

$$R(A) = \{Ax \mid x \in R^n\} \subseteq R^m$$

به طور مشابه بُرد ماتریس A^T برابر است با

(الف-۲)

$$R(A^T) = \{A^T y \mid y \in R^m\} \subseteq R^n$$

الف-۲ - فضای پوچ^۲ ماتریس

برای ماتریس $A \in R^{m \times n}$ مجموعه

$$N(A) = \{x_{n \times 1} \mid Ax = 0\} \subseteq R^n \quad (\text{الف-۳})$$

فضای پوچ ماتریس A نامیده می‌شود که با نماد $N(A)$ نشان می‌دهند. به عبارتی ساده‌تر $N(A)$

برابر با مجموعه تمامی جواب‌های معادله $Ax = 0$ می‌باشد.

الف-۳ - ماتریس پوچ توان^۱

^۱ Range

^۲ Nullspace

ماتریس $N \in R^{n \times n}$ پوچ توان نامیده می‌شود اگر برای مقدار مثبتی از k داشته باشیم $N^k = 0$.

در این حالت k برابر با شاخص ماتریس N ($k = \text{index}(N)$) است که شاخص پوچی^۲ ماتریس N نیز نامیده می‌شود.

پیوست ب – ضرب کرونکر^۳ (ضرب مستقیم یا ضرب تنسوری^۴)

اگر A یک ماتریس $n \times p$ و B یک ماتریس $m \times q$ باشد، آنگاه حاصلضرب کرونکر این دو ماتریس برابر با ماتریس بلوکی زیر است [۱۱۶].

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1p}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2p}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{np}B \end{bmatrix}_{mn \times pq} \quad (\text{ب-۱})$$

برای ضرب کرونکر کاربردها و خواص متعددی وجود دارد، یکی از خواص آن به صورت زیر است

$$\text{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\text{vec}(X) \quad (\text{ب-۲})$$

که در آن $\text{vec}(X)$ برابر با بردار ستونی از تمام اعضای ماتریس X است به صورتیکه تمام ستون‌های ماتریس X پشت سر هم نوشته شود. اثبات (ب-۲) در [۱۲۴] موجود است.

¹ Nilpotent matrix

² Index of nilpotency

³ Kronecker product

⁴ Tensor product

منابع

منابع

- [1] F. L. Lewis, "A survey of linear singular systems," *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 5, pp. 3-36, 1986.
- [2] L. Dai, *Singular control systems*: Springer-Verlag New York, Inc., 1989.
- [3] P. Müller, "Descriptor systems: pros and cons of system modelling by differential-algebraic equations," *Mathematics and computers in simulation*, vol. 53, pp. 273-279, 2000.
- [4] A. Kumar and P. Daoutidis, "Feedback control of nonlinear differential-algebraic-equation systems," *AIChE Journal*, vol. 41, pp. 619-636, 1995.
- [5] W. Kampowsky, P. Rentrop, and W. Schmidt, *Classification and numerical simulation of electric circuits*: Mathemat. Inst., 1991.
- [6] W. Mathis, "Analysis of linear time-invariant networks in the frequency domain," in *Mathematical Modelling and Simulation of Electrical Circuits and Semiconductor Devices*, ed: Springer, 1994, pp. 83-90.
- [7] A. Ailon, "An approach for pole assignment in singular systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 34, pp. 889-893, 1989.
- [8] D. Cobb, "Controllability, observability, and duality in singular systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 29, pp. 1076-1082, 1984.
- [9] L. Ashayeri, M. Shafiee, and M. B. Menhaj, "Kalman Filter for Fractional Order Singular Systems," *Journal of American Science*, vol. 9, 2013.
- [10] A. Ailon, "Controllability of generalized linear time-invariant systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 32, pp. 429-432, 1987.
- [11] S. L. Campbell, "Nonlinear time-varying generalized state-space systems: An overview," in *Decision and Control, 1984. The 23rd IEEE Conference on*, 1984, pp. 268-273.
- [12] G. Hayton, P. Fretwell, and A. Pugh, "Fundamental equivalence of generalized state-space systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 31, pp. 431-439, 1986.
- [13] M. Shafiee, "RESEARCH NOTE OPTIMAL CONTROL FOR DESCRIPTOR SYSTEMS: TRACKINGPROBLEM," *International Journal of Engineering*, vol. 14, 2001.

- [14] D. G. Luenberger, "Non-linear descriptor systems," *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 1, pp. 219-242, 1979.
- [15] E. Boukas, "Static output feedback control for linear descriptor systems: LMI approach," in *Mechatronics and Automation, 2005 IEEE International Conference*, 2005, pp. 1230-1234.
- [16] D. Chu and R. C. Tan, "Algebraic characterizations for positive realness of descriptor systems," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 30, pp. 197-222, 2008.
- [17] M. Gerdin, T. B. Schön, T. Glad, F. Gustafsson, and L. Ljung, "On parameter and state estimation for linear differential-algebraic equations," *Automatica*, vol. 43, pp. 416-425, 2007.
- [18] A. Kumar and P. Daoutidis, *Control of Nonlinear Differential Algebraic Equation Systems: With Applications to Chemical Processes* vol. 397: CRC Press, 1999.
- [19] D. C. Tarraf and H. H. Asada, "A differential-algebraic equation (DAE) formulation of arterial hemodynamics," in *Engineering in Medicine and Biology Society, 2000. Proceedings of the 22nd Annual International Conference of the IEEE*, 2000, pp. 1126-1129.
- [20] R. Newcomb and B. Dziurla, "Some circuits and systems applications of semistate theory," *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 8, pp. 235-260, 1989.
- [21] M. W. Spong, "A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems," *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 5, pp. 69-85, 1986.
- [22] L. Pandolfi, "On the regulator problem for linear degenerate control systems," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 33, pp. 241-254, 1981.
- [23] S. L. V. Campbell and S. Campbell, *Singular systems of differential equations* vol. 1: Pitman San Francisco, 1980.
- [24] V. Mehrmann and T. Stykel, "Descriptor Systems: A General Mathematical Framework for Modelling, Simulation and Control (Deskriptorsysteme: Ein allgemeines mathematisches Konzept für Modellierung, Simulation und Regelung)," *at-Automatisierungstechnik*, vol. 54, pp. 405-415, 2006.
- [25] G. Verghese, B. Lévy, and T. Kailath, "A generalized state-space for singular systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 26, pp. 811-831, 1981.
- [26] G. Duan, *Analysis and design of descriptor linear systems* vol. 23: Springer, 2010.
- [27] J. K. Mills and A. A. Goldenberg, "Force and position control of manipulators during constrained motion tasks," *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, vol. 5, pp. 30-46, 1989.

- [28] E. Samiei and M. Shafiee, "Descriptor modeling and response analysis of two rigid-flexible cooperative arms," in *Control Automation Robotics & Vision (ICARCV), 2010 11th International Conference on*, 2010, pp. 149-156.
- [29] D. G. Luenberger and A. Arbel, "Singular dynamic Leontief systems," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 991-995, 1977.
- [30] D. Luenberger, "Dynamic equations in descriptor form," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 22, pp. 312-321, 1977.
- [31] S. Singh and R.-W. Liu, "Existence of state equation representation of linear large-scale dynamical systems," *Circuit Theory, IEEE Transactions on*, vol. 20, pp. 239-246, 1973.
- [32] I. Zamani, M. Zaynali, M. Shafiee, and A. Afshar, "Optimal control of singular large-scale linear systems," in *Electrical Engineering (ICEE), 2011 19th Iranian Conference on*, 2011, pp. 1-5.
- [33] M. Günther and U. Feldmann, "The DAE-index in electric circuit simulation," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 39, pp. 573-582, 1995.
- [34] Q. Zhang, C. Liu, and X. Zhang, *Complexity, analysis and control of singular biological systems* vol. 421: Springer, 2012.
- [35] B. Stott, "Power system dynamic response calculations," *Proceedings of the IEEE*, vol. 67, pp. 219-241, 1979.
- [36] B. Stevens and F. Lewis, "Aircraft Modeling, Dynamics and Control," ed: New York: Wiley, 1991.
- [37] S. L. Campbell, J. Meyer, Carl D, and N. J. Rose, "Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 31, pp. 411-425, 1976.
- [38] H. Hemami and B. t. Wyman, "Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 24, pp. 526-535, 1979.
- [39] D. Bender, "Lyapunov-like equations and reachability/observability Gramians for descriptor systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 32, pp. 343-348, 1987.
- [40] F. Lewis and K. Ozcaldiran, "Reachability and controllability for descriptor systems," in *Proceedings of the 27th Midwestern Symposium on Circuits and Systems, Morgantown, West Virginia*, 1984, pp. 690-695.
- [41] E. Yip and R. Sincovec, "Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 26, pp. 702-707, 1981.

- [42] K. Takaba, N. Morihira, and T. Katayama, "A generalized Lyapunov theorem for descriptor system," *Systems & Control Letters*, vol. 24, pp. 49-51, 1995.
- [43] A. Varga, "On stabilization methods of descriptor systems," *Systems & Control Letters*, vol. 24, pp. 133-138, 1995.
- [44] S. Xu and C. Yang, "Stabilization of discrete-time singular systems: a matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 35, pp. 1613-1617, 1999.
- [45] Q. Zhang, J. Lam, and L. Zhang, "Generalized lyapunov equation for analyzing the stability of descriptor systems," in *Proceedings of the 14th World Congress of IFAC*, 1999, pp. 19-24.
- [46] U. M. Ascher and L. R. Petzold, "Projected implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 28, pp. 1097-1120, 1991.
- [47] L. Xiaoping, "On linearization of nonlinear singular control systems," in *American Control Conference, 1993*, 1993, pp. 2284-2287.
- [48] M. Razzaghi and M. Shafiee, "Optimal control of singular systems via Legendre series," *International journal of computer mathematics*, vol. 70, pp. 241-250, 1998.
- [49] M. Shafiee, "LQR problem for continuous time descriptor systems," *Amirkabir Journal of Sceince and Technology*, pp. 5-9, 1993.
- [50] M. Shafiee, "Tracking problem for singular systems," in *Proc. Of ICEE*, 1994, pp. 102-111.
- [51] M. Shafiee and P. Karimaghai, "Optimal control for singular systems (Rectangular case)," *Proc. of ICEE'97*, pp. 152-160, 1997.
- [52] L. Pandolfi, "Generalized control systems, boundary control systems, and delayed control systems," *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 3, pp. 165-181, 1990.
- [53] M. Mirmomeni, M. Shafiee, C. Lucas, and B. N. Araabi, "Introducing a new learning method for fuzzy descriptor systems with the aid of spectral analysis to forecast solar activity," *Journal of atmospheric and solar-terrestrial physics*, vol. 68, pp. 2061-2074, 2006.
- [54] M. Mirmomeni, E. Kamaliha, M. Shafiee, and C. Lucas, "Long-term prediction of solar and geomagnetic activity daily time series using singular spectrum analysis and fuzzy descriptor models," *Earth Planets and Space (EPS)*, vol. 61, p. 1089, 2009.
- [55] M. Mirmomeni, C. Lucas, B. N. Araabi, and M. Shafiee, "Forecasting sunspot numbers with the aid of fuzzy descriptor models," *Space Weather*, vol. 5, 2007.

- [56] M. Mirmomeni, C. Lucas, M. Shafiee, B. N. Araabi, and E. Kamaliha, "Fuzzy descriptor systems and spectral analysis for chaotic time series prediction," *Neural Computing and Applications*, vol. 18, pp. 991-1004, 2009.
- [57] P. Balasubramaniam, J. Abdul Samath, N. Kumaresan, and A. Vincent Antony Kumar, "Solution of matrix Riccati differential equation for the linear quadratic singular system using neural networks," *Applied mathematics and computation*, vol. 182, pp. 1832-1839, 2006.
- [58] A. Vincent Antony Kumar and P. Balasubramaniam, "Optimal control for linear singular system using genetic programming," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 192, pp. 78-89, 2007.
- [59] M. Mirmomeni and M. Shafiee, "State analysis of discretetime singular nonlinear systems using a fuzzy neural network," in *13th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE'05), Zanzan Univ., Zanzan, Iran*, 2005.
- [60] M. Shafiee and S. Amani, "Optimal control for a class of singular systems using neural network," *Iranian Journal of Science and Technology, Transaction B, Engineering*, vol. 29, pp. 33-48, 2005.
- [61] G. I. Bara, "Robust analysis and control of parameter-dependent uncertain descriptor systems," *Systems & Control Letters*, vol. 60, pp. 356-364, 2011.
- [62] S. Dai, J. Fu, and J. Zhao, "Robust reliable tracking control for a class of uncertain systems and its application to flight control," *Acta Automatica Sinica*, vol. 32, p. 738, 2006.
- [63] B. Sari, O. Bachelier, and D. Mehdi, "Robust state feedback admissibilization of discrete linear polytopic descriptor systems: a strict LMI approach," *IET Control Theory & Applications*, To appear, 2008.
- [64] Y. Wang, Z.-Q. Sun, and F.-C. Sun, "Robust fuzzy control of a class of nonlinear descriptor systems with time-varying delay," *INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL AUTOMATION AND SYSTEMS*, vol. 2, pp. 76-82, 2004.
- [65] Y. Xia, P. Shi, G. Liu, and D. Rees, "Robust mixed H_2/H_∞ state-feedback control for continuous-time descriptor systems with parameter uncertainties," *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 24, pp. 431-443, 2005.
- [66] D. Yue and Q.-L. Han, "Robust H_∞ filter design of uncertain descriptor systems with discrete and distributed delays," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 3200-3212, 2004.
- [67] E. Alirezaei, M. Samavat, and M. Vali, "Optimal Control of Linear Time Invariant Singular Delay Systems Using the Orthogonal Functions," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 6, pp. 1877-1891, 2012.

- [68] G. A. Kurina and R. März, "On linear-quadratic optimal control problems for time-varying descriptor systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 42, pp. 2062-2077, 2004.
- [69] M. Popescu, "Singular optimal control for dynamic systems," *Editura Academiei Române, Bucharest*, 2002.
- [70] G.-S. Zhang and L. Liu, "Linear quadratic optimal control based on dynamic compensation for rectangular descriptor systems," *Acta Automatica Sinica*, vol. 36, pp. 1752-1757, 2010.
- [71] I. Zamani and M. Shafiee, "On the stability issues of switched singular time-delay systems with slow switching based on average dwell-time," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012.
- [72] I. Zamani, M. Shafiee, and A. Ibeas, "Stability analysis of hybrid switched nonlinear singular time-delay systems with stable and unstable subsystems," *International Journal of Systems Science*, pp. 1-17, 2013.
- [73] I. Zamani, M. Shafiee, and A. Ibeas, "Exponential stability of hybrid switched nonlinear singular systems with time-varying delay," *Journal of the Franklin Institute*, 2012.
- [74] M. Shafiee, "the linear quadratic optimal regulator problem for continuous time descriptor systems," *Amirkabir Journal of Sceince and Technology*, 1981.
- [75] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, " H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, pp. 669-673, 1997.
- [76] H. Wang, A. Xue, R. Lu, Z. Xu, and J. Wang, "Robust H_∞ control for discrete singular systems with parameter uncertainties," *Acta Automatica Sinica*, vol. 33, pp. 1300-1305, 2007.
- [77] E. Uezato and M. Ikeda, "Strict LMI conditions for stability, robust stabilization, and H_∞ control of descriptor systems," in *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, 1999, pp. 4092-4097.
- [78] H.-S. Wang, C.-F. Yung, and F.-R. Chang, "H-infinity Control for Nonlinear Descriptor Systems (Lecture Notes in Control and Information Sciences)," 2006.
- [79] K. Takaba, N. Morihira, and T. Katayama, " H_∞ control for descriptor systems-a J-spectral factorization approach," in *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, 1994, pp. 2251-2256.
- [80] M. Ikeda, T. Lee, and E. Uezato, "A strict LMI condition for H_2 control of descriptor systems," in *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, 2000, pp. 601-604.

- [81] K. Takaba and T. Katayama, " H^2 Output Feedback Control for Descriptor Systems," *Automatica*, vol. 34, pp. 841-850, 1998.
- [82] G.-R. Duan and R. J. Patton, "Eigenstructure assignment in descriptor systems via state feedback-a new complete parametric approach," *International journal of systems science*, vol. 29, pp. 167-178, 1998.
- [83] D. Cobb, "Feedback and pole placement in descriptor variable Systems†," *International Journal of Control*, vol. 33, pp. 1135-1146, 1981.
- [84] B. Marx, D. Koenig, and D. Georges, "Robust pole-clustering for descriptor systems a strict LMI characterization," in *Proc. of the European Control Conference*, 2003.
- [85] D. Vafiadis and N. Karcanias, "Block decoupling and pole assignment of singular systems: a frequency domain approach," *International Journal of Control*, vol. 76, pp. 185-192, 2003.
- [86] R. Yu and D. Wang, "Structural properties and poles assignability of LTI singular systems under output feedback," *Automatica*, vol. 39, pp. 685-692, 2003.
- [87] R. Byers, P. Kunkel, and V. Mehrmann, "Regularization of linear descriptor systems with variable coefficients," *SIAM journal on control and optimization*, vol. 35, pp. 117-133, 1997.
- [88] D. Chu and D. Ho, "Necessary and sufficient conditions for the output feedback regularization of descriptor systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 44, pp. 405-412, 1999.
- [89] D. Wang and C. Soh, "On regularizing singular systems by decentralized output feedback," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 44, pp. 148-152, 1999.
- [90] J. Zhu, S. Ma, and Z. Cheng, "Singular LQ problem for nonregular descriptor systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 1128-1133, 2002.
- [91] L. Wu and D. W. Ho, "Sliding mode control of singular stochastic hybrid systems," *Automatica*, vol. 46, pp. 779-783, 2010.
- [92] L. Wu, P. Shi, and H. Gao, "State estimation and sliding-mode control of Markovian jump singular systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 55, pp. 1213-1219, 2010.
- [93] S. Daley and H. Wang, "Adaptive gas turbine control using a singular system approach," in *Control, 1994. Control '94. International Conference on*, 1994, pp. 687-691 vol.1.

- [94] Q. Fang and F. Cao, "Adaptive control of singular nonlinear systems with convex/concave parametrization," in *Control Automation Robotics & Vision (ICARCV), 2010 11th International Conference on*, 2010, pp. 1680-1683.
- [95] A. Kumar and P. Daoutidis, "Control of nonlinear differential-algebraic process systems," in *American Control Conference, 1994*, 1994, pp. 330-334 vol.1.
- [96] Z. Lihua, S. Okubo, and W. Jianguo, "Design for model tracing control system of nonlinear descriptor system of invariant zero stable configuration," in *Robotics and Biomimetics, 2007. ROBIO 2007. IEEE International Conference on*, 2007, pp. 2267-2272.
- [97] Z. Lu and X. Liu, "Adaptive regularization for a class of nonlinear affine differential-algebraic equation systems," in *American Control Conference, 2008*, 2008, pp. 517-522.
- [98] K. Tamura and K. Yasuda, "Adaptive state feedback control for descriptor systems," in *SICE Annual Conference 2010, Proceedings of*, 2010, pp. 1088-1091.
- [99] C. Xin, L. Fei, and F. Zhumu, "Model reference adaptive neural network control for a class of switched nonlinear singular systems," in *Systems and Control in Aeronautics and Astronautics (ISSCAA), 2010 3rd International Symposium on*, 2010, pp. 55-60.
- [100] L. Zongtao and L. Xiaoping, "Adaptive regularization for a class of nonlinear affine differential-algebraic equation systems," in *American Control Conference, 2008*, 2008, pp. 517-522.
- [101] H. Tang, S. Okubo, B. Zhao, and W. Liu, "A design of model following control system for a class of nonlinear descriptor system," in *Industrial Electronics, Control and Instrumentation, 1997. IECON 97. 23rd International Conference on*, 1997, pp. 295-299.
- [102] D. Wang, S. Wu, S. Okubo, and T. Akiyama, "TS fuzzy model following control system for descriptor system," in *Computer-Aided Industrial Design & Conceptual Design, 2009. CAID & CD 2009. IEEE 10th International Conference on*, 2009, pp. 2275-2279.
- [103] X. Jian-Xin, J. Qing-Wei, and L. Tong-Heng, "Adaptive robust control schemes for a class of nonlinear uncertain descriptor systems," *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 957-962, 2000.
- [104] Y. Uetake, "Adaptive observer for continuous descriptor systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 39, pp. 2095-2100, 1994.
- [105] M. Arnold, V. Mehrmann, and A. Steinbrecher, "Index reduction in industrial multibody system simulation," 2004.

- [106] P. Kunkel and V. L. Mehrmann, *Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution*: European Mathematical Society, 2006.
- [107] K. E. Brenan, S. L. V. Campbell, and L. R. Petzold, *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations* vol. 14: Siam, 1989.
- [108] S. L. Campbell and E. Griepentrog, "Solvability of general differential algebraic equations," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 16, pp. 257-270, 1995.
- [109] S. L. Campbell and C. W. Gear, "The index of general nonlinear DAEs," *Numerische Mathematik*, vol. 72, pp. 173-196, 1995.
- [110] S. CAMPBELL, "A computational method for general higher index nonlinear singular systems of differential equations," *Repr. from Numerical and Applied Mathematics*, v. 12, 1989 p 555-560, 1990.
- [111] C. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra book and solutions manual* vol. 2: Siam, 2000.
- [112] L. Pandolfi, "Controllability and stabilization for linear systems of algebraic and differential equations," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 30, pp. 601-620, 1980.
- [113] S. E. Mattsson and G. Söderlind, "Index reduction in differential-algebraic equations using dummy derivatives," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 14, pp. 677-692, 1993.
- [114] R. Bachmann, L. Brüll, T. Mrziglod, and U. Pallaske, "On methods for reducing the index of differential algebraic equations," *Computers & chemical engineering*, vol. 14, pp. 1271-1273, 1990.
- [115] A. A. J. Lefeber, *Tracking control of nonlinear mechanical systems*: Universiteit Twente, 2000.
- [116] W.-H. Steeb and Y. Hardy, "Matrix calculus and Kronecker product," *AMC*, vol. 10, p. 12, 2011.
- [117] R. Schraft and M. Wanner, "The Aircraft Cleaning Robot "SKYWASH"," *Industrial Robot: An International Journal*, vol. 20, pp. 21-24, 1993.
- [118] J. J. Craig, "Introduction to robotics: mechanics and control," 2004.
- [119] D. Wang and G. Xu, "Full-state tracking and internal dynamics of nonholonomic wheeled mobile robots," *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, vol. 8, pp. 203-214, 2003.
- [120] M. Mirmomeni, Shafiee, Masoud, Miri, Seyed Mojtaba "Tracking problem for mobile robot via singular systems theorem," in *Proc. 15th ICEE*, 2007, pp. 61-66.

- [121] H. Erzberger, "Analysis and design of model following control systems by state space techniques," 1968.
- [122] A. Balestrino, G. De Maria, and A. Zinober, "Nonlinear adaptive model-following control," *Automatica*, vol. 20, pp. 559-568, 1984.
- [123] N. R. C. o. C. Reprints and Y. Chan, *Perfect model following with real model*, 1974.
- [124] آ. گراهام, ضرب کرونگر و حساب دیفرانسیل و انتگرال ماتریسی بهمراه کاربردها: تهران علوی, ۱۳۹۰.

Abstract:

The adaptive control problem for singular systems is investigated in this thesis. Singular systems (a.k.a, descriptor systems and differential-algebraic systems) which contain both differential and algebraic equations have attracted a lot of research interest in recent years. This kind of models is a natural and convenient representation of real systems and can deal with complex and constrained systems more easily. Many applications of singular systems have been discussed in different systems such as circuit systems, power systems, economic systems, constrained robots, chemical process and biological systems.

Several control methods are therefore rapidly extended for singular systems. However, the complex nature of this class of systems causes some difficulties in control approaches. In addition to being stable, an acceptable singular system should be regular and impulse free. A system which poses these three characteristics is known as an admissible system. The control objective is therefore making the system admissible.

In this thesis, firstly, a short discussion on singular systems characteristics and formulation is provided, and the theories and assumptions used for control design are presented. Afterwards, an adaptive state feedback control approach for a one-input linear singular system is investigated which makes the closed loop dynamics of this class of systems regular, impulse free and stable. The proposed adaptive method is based on the Lyapunov theorem to ensure the admissibility of the descriptor system. Then the presented method is extended to a state tracking controller for multi input linear singular systems. We then prove that by some small changes in adaption law, the proposed control method can be used for nonlinear singular systems in which the nonlinear part satisfies the Lipschitz condition. The presented controller is fairly simple compared to the existing methods in the literature proposed for the control problem of singular systems. At the end, an adaptive model reference control approach is designed for nonlinear singular systems. All of the nonlinear systems in this thesis are assumed to be affine ones. For better illustration of the proposed controllers, some simulations have been done, and the results emphasize the effectiveness of the presented methods.

Keywords- Singular systems, Adaptive control, Adaptive model reference control system, Nonlinear singular systems, Singular systems control.



Shahrood University of Technology
Faculty of Electrical Engineering & Robotics

PhD thesis

Adaptive Control of Nonlinear Autonomous Singular Systems

Azita Azarfar

Supervisor:

Dr. Heydar Toossian Shandiz

Co-Supervisor:

Dr. Masoud Shafiee

January 2014