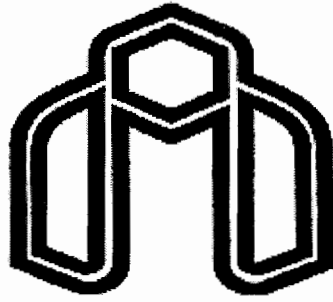




دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده برق و روباتیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

برق-کنترل

طراحی کنترل کننده های

مقاوم H_2 و H_∞ روی سیستم کشتی

تهیه و تنظیم:

سید جعفر فاضلی آبلوئی

استاد راهنما:

دکتر محمد علی صدرنیا

شهریور ۸۴

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیر

من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق

با تشکر از کسانی که از ابتدا تا به انتها یار من بوده اند.

لازم است که از زحمات گرانبه‌ای استاد راهنمای اینجانب دکتر محمد علی صدرنیا تشکر نمایم.

از زحمات اساتید گرامی آقایان دکتر حداد، دکتر فاتح و دکتر دستفان که در روز دفاع پایان نامه اینجانب حضور داشته اند تشکر می نمایم.

از دوستان گرامی اینجانب که مرا یاری نموده اند، بالاخص دوستان گرامی آقایان اسماعیل بنی سعید، گوران حسنی فرد و مهدی جعفری موفقیت را در همه مراحل خواستارم.

از دوستان ورودی سال ۸۲ که با هم بودن را تجربه کرده ایم، خصوصاً آقایان رضا احمدیان ماژین و اسماعیل طوسی ، ممنونم.

به نام او که یاری دهنده هر انسانی است.
به یاد او که جهان در انتظار اوست.

تقدیم به همسر که در طی انجام این پایان نامه سختیها را تحمل نمود،
و تقدیم به پدر و مادرم که مرا یاری نمودند تا بدین درجه برسم.

چکیده

این پایان نامه در مورد طراحی کنترل کننده های مقاوم H_2 و H_∞ برای سیستم کشتی میباشد. ابتدا در مورد کنترل سیستمهای چندمتغیره بحث میشود. بحث سیستمهای چندمتغیره در مورد مصالحه بین ماتریس حساسیت و حساسیت مکمل، مقادیر تکین، نامعینی و تحلیل مقاوم بودن می باشد. سپس با بدست آوردن مدل سیستم کشتی، و معرفی کنترل کننده های چندمتغیره مقاوم H_2 و H_∞ ، طراحی دو کنترل کننده مزبور را بر روی سیستم کشتی انجام می دهیم.

سیستم کشتی دارای ۴ متغیر حالت میباشد، که دارای ۶ ورودی و ۳ خروجی میباشد. بعد از طراحی دو کنترل کننده، مقایسه کاملی بین این دو کنترل کننده خواهیم داشت. اهداف این پایان نامه شامل پایدار سازی و مقاوم سازی عملکرد سیستم کنترل شده می باشد. با ورود نامعینی (عدم قطعیت) به سیستم پایداری و عملکرد آن مورد بررسی قرار می گیرد.

کلمات کلیدی: سیستم چندمتغیره - کنترل کننده H_2 - کنترل کننده H_∞ - کشتی

- نامعینی

فهرست

الف		تقدیر
ب		تقدیم
ج		چکیده
۱		مقدمه
۵		فصل دوم مروری بر کنترل چندمتغیره
۵		۱-۲- مقدمه
۵		۲-۲- سیستم چندمتغیره
۷		۳-۲- ماتریس حساسیت و حساسیت مکمل
۹		۴-۲- مقادیر تکین
۱۳		۱-۴-۲- تجزیه مقادیر تکین
۱۶		۲-۴-۲- خواص مقادیر تکین
۱۷		۳-۴-۲- عملگر اندازه $\ G\ _2$ و $\ G\ _\infty$
۱۹		۵-۲- نامعینی
۲۱		۶-۲- مقاوم بودن
۲۳		۱-۶-۲- تحلیل مقاوم بودن - روش کلاسیک
۲۵		۲-۶-۲- تحلیل مقاوم بودن - روش مدرن
۲۷		فصل سوم مدل کشتی
۲۷		۱-۳- معرفی

۲۷	 ۲-۳- ساختمان مدل کشتی
۲۹	 ۳-۳- ماتریسهای انتقال کشتی
۳۰	 ۱-۳-۳- دینامیک نیرو
۳۳	 ۲-۳-۳- دینامیک کشتی
۳۷	 ۴-۳- خلاصه
۴۹	 فصل چهارم معرفی H_2 و شبیه سازی آن روی کشتی
۴۹	 ۱-۴- معرفی
۴۲	 ۲-۴- حل مسئله H_2
۴۴	 ۳-۴- طراحی کنترل کننده H_2 برای مدل کشتی
۵۰	 ۴-۴- بررسی مقاوم بودن H_2
۵۰	 ۱-۴-۴- تغییرات در ماتریس فضای حالت با یک عدد ضرب شونده
۵۳	 ۲-۴-۴- تغییرات در ماتریس فضای حالت با تغییر قطبهای سیستم
۵۵	 ۳-۴-۴- تغییرات در سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج
۵۹	 فصل پنجم معرفی H_∞ و شبیه سازی آن روی کشتی
۵۹	 ۱-۵- مقدمه
۶۱	 ۲-۵- یک مثال: حداقل نمودن حساسیت
۶۴	 ۳-۵- فرموله کردن مسئله H_∞
۶۴	 ۱-۳-۵- حداقل کردن حساسیت
۶۵	 ۲-۳-۵- موضوع مختلط مقاوم بودن و عملکرد

۶۵	 ۵-۳-۳- الگوریتم گلوور-دویل برای مسئله H_{∞} کلی
۶۶	 ۵-۴- شکل دهی حلقه مقدار تکین
۷۰	 ۵-۵- طراحی کنترل کننده H_{∞} برای مدل کشتی
۸۱	 ۵-۶- بررسی مقاوم بودن H_{∞}
۸۱	 ۵-۶-۱- تغییرات در ماتریس فضای حالت با یک عدد ضرب شونده
۸۴	 ۵-۶-۲- تغییرات در ماتریس فضای حالت با تغییر قطبهای سیستم
۸۶	 ۵-۶-۳- تغییرات در سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج
۹۰	 فصل ششم پیشنهادات و نتایج
۹۰	 ۶-۱- نتایج
۹۱	 ۶-۲- پیشنهادات
۹۲	 منابع
۹۵	 ضمیمه الف
۹۵	 الف-۱ مقدار مدل کشتی
۹۵	 الف-۱-۱ دینامیک نیرو
۹۵	 الف-۱-۲ دینامیک کشتی
۹۶	 الف-۲ دینامیک کشتی: مدل فضای حالت

فهرست شکل ها:

فصل دوم

- شکل (۱-۲) انواع سیستمهای چندمتغیره 6
- شکل (۲-۲) الگوی سیستم کنترل ۷
- شکل (۳-۲) الگوی اصلی سیستم کنترل ۸
- شکل (۴-۲) مصالحه بین S و T برای طراحی کامل ۹
- شکل (۵-۲) قرائت $\|G\|_{\infty}$ از روی رسم بزرگترین مقدار تکین ۱۸
- شکل (۶-۲) دیاگرام تحلیل مقاوم سیستم $M - \Delta$ ۲۰
- شکل (۷-۲) نامعینی بدون ساختار افزودنی و ضرب شونده ۲۲
- شکل (۸-۲) حاشیه های فاز/بهره ۲۲
- شکل (۹-۲) حاشیه فاز/بهره $\neq$ مقاوم بودن ۲۳
- شکل (۱۰-۲) نمودار مقاوم بودن سیستم چندمتغیره در مقابل حاشیه های فاز/بهره ۲۴

فصل سوم:

- شکل (۱-۳) علامتهای قراردادی برای کشتی ۲۸
- شکل (۲-۳): نیروی پیچش و تقریب آن ($U = 0$ و $\phi = 90^\circ$) ۳۱
- شکل (۳-۳): گشتاور چرخش و تقریب آن ($U = 0$ و $\phi = 90^\circ$) ۳۱
- شکل (۴-۳): گشتاور گردش و تقریب آن ($U = 0$ و $\phi = 90^\circ$) ۳۲
- شکل (۵-۳): نیروی پیچش و تقریب آن ($U = 15.5 \text{ ft/s}$ و $\phi = 45^\circ$) ۳۲
- شکل (۶-۳): گشتاور چرخش و تقریب آن ($U = 15.5 \text{ ft/s}$ و $\phi = 45^\circ$) ۳۳
- شکل (۷-۳): گشتاور گردش و تقریب آن ($U = 15.5 \text{ ft/s}$ و $\phi = 45^\circ$) ۳۳
- شکل (۸-۳): تابع انتقال پیچش و تقریب آن ($U = 15.5 \text{ ft/s}$ و $\phi = 45^\circ$) ۳۸

- شکل (۹-۳): تابع انتقال چرخش و تقریب آن ($U = 15.5 \text{ ft/s}$ و $\phi = 45^\circ$) ۳۵
- شکل (۱۰-۳): تابع انتقال گردش و تقریب آن ($U = 15.5 \text{ ft/s}$ و $\phi = 45^\circ$) ۳۵
- شکل (۱۱-۳): قطبهای مدل کشتی ($H = 10 \text{ ft}$, $\omega_m = 0.72 \text{ rad/s}$) ۳۸
- فصل چهارم:
- شکل (۱-۴) فیلتر کالمن ۴۱
- شکل (۲-۴) ساختار جبران کننده H_2 ۴۲
- شکل (۳-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با کنترل کننده H_2 ۴۷
- شکل (۴-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با کنترل کننده H_2 ۴۸
- شکل (۵-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با کنترل کننده H_2 ۴۸
- شکل (۶-۴) رسم مقادیر تکی ماتریسهای حساسیت و حساسیت مکمل برای کنترل کننده H_2 ۴۹
- شکل (۷-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با تغییرات ماتریسهای فضای حالت در کنترل کننده H_2 ۵۰
- شکل (۸-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات ماتریسهای فضای حالت در کنترل کننده H_2 ۵۱
- شکل (۹-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با تغییرات ماتریسهای فضای حالت در کنترل کننده H_2 ۵۲
- شکل (۱۰-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با تغییرات قطبهای ماتریس فضای حالت ۵۳
- شکل (۱۱-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات قطبهای ماتریس فضای حالت ۵۴
- شکل (۱۲-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با تغییرات قطبهای ماتریس فضای حالت ۵۴
- شکل (۱۳-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با تغییرات سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج ۵۶
- شکل (۱۴-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج ۵۶
- شکل (۱۵-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با تغییرات سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج ۵۷

شکل (۴-۱۶) نمودار استفاده شده در محیط SIMULINK ۵۸

فصل پنجم:

۶۰		شکل (۵-۱) نمایش استاندارد یک سیستم با نامعینی
۶۰		شکل (۵-۲) همان شکل (۵-۱)، البته بدون نامعینی
۶۱		شکل (۵-۳) حلقه فیدبکی
۶۶		شکل (۵-۴) روش ترکیب حساسیت در سیستم کنترل چندمتغیره
۶۷		شکل (۵-۵) نامعینی ضرب شونده/جمع شونده
۶۹		شکل (۵-۶) مشخصات مقدار تکین روی S و T
۷۱		شکل (۵-۷) الگوریتم طراحی کنترل کننده H_∞
۷۲		شکل (۵-۸) رسم منحنی بود برای ماتریسهای وزنی W_1 (با نمایش خط-نقطه) و W_3 (با نمایش نقطه)
۷۴		شکل (۵-۹) رسم منحنی بود برای ماتریسهای وزنی W_1 (با نمایش خط-نقطه) و W_3 (با نمایش نقطه)
۷۵		شکل (۵-۱۰) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با کنترل کننده H_∞
۷۶		شکل (۵-۱۱) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با کنترل کننده H_∞
۷۷		شکل (۵-۱۲) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با کنترل کننده H_∞
۷۸		شکل (۵-۱۳) رسم منحنی بود برای ماتریسهای وزنی W_1 (با نمایش خط-نقطه) و W_3 (با نمایش نقطه)
۷۸		شکل (۵-۱۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با کنترل کننده H_∞
۸۰		شکل (۵-۱۵) رسم مقادیر تکین ماتریسهای حساسیت و حساسیت مکمل برای کنترل کننده H_∞
۸۲		شکل (۵-۱۶) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با تغییرات ماتریسهای فضای حالت در کنترل کننده H_∞
۸۲		شکل (۵-۱۷) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات ماتریسهای فضای حالت در کنترل کننده H_∞
۸۳		شکل (۵-۱۸) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با تغییرات ماتریسهای فضای حالت در کنترل کننده H_∞
۸۵		شکل (۵-۱۹) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با تغییرات قطبهای ماتریس فضای حالت
۸۵		شکل (۵-۲۰) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات قطبهای ماتریس فضای حالت

- شکل (۵-۲۱) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با تغییرات قطبهای ماتریس فضای حالت ۸۶
- شکل (۵-۲۲) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با تغییرات سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج ۸۷
- شکل (۵-۲۳) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج ۸۷
- شکل (۵-۲۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با تغییرات سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج ۸۸
- شکل (۵-۲۵) نمودار استفاده شده در محیط SIMULINK ۸۹

فهرست جداول:

2	جدول (۱-۱) دوره های زمانی کنترل کننده ها
۵۲	جدول (۱-۴) اثرات تغییر ماتریسهای حالت در پاسخهای پله
۸۴	جدول (۱-۵) اثرات تغییر ماتریسهای حالت در پاسخهای پله

فصل اول

مقدمه

هر سیستم فیزیکی نیاز به یک کنترل کننده دارد، زیرا سیستمهای فیزیکی در بیشتر موارد خاصیت پایداری و ردیابی خوبی از خود نشان نمی دهند. به همین دلیل باید یک کنترل کننده یا یک جبران ساز برای سیستم فیزیکی طراحی شود تا سیستم پایدار باشد و در عین حال ورودی را ردیابی کند.

در کنترل کلاسیک (از سال ۱۹۳۰ تا ۱۹۶۰)، که در حوزه فرکانس عمل میکرد، کنترل کننده ها بر پایه منحنی بود، تست پایداری نایکوئیست، تست پایداری روث و حاشیه های بهره و فاز طراحی می شدند. این کنترل کننده ها شامل کنترل کننده های PID^۱ (تناسبی-انتگرالی-مشتقی) و جبران سازهای LEAD-LAG بودند. از سال ۱۹۶۰ طراحی بر پایه مدل های فضای حالت، کنترل پذیری، رؤیت پذیری و فرآیندهای تصادفی انجام می شد، که در حوزه زمان عمل میکرد. این دوره به دوره کنترل مدرن شهرت دارد. کنترل کننده ها نیز شامل فیلتر کالمن، LQR و H_2 بودند. اما باید گفته شود که در این زمان هنوز کنترل کننده ها در صنعت همان کنترل کننده های کلاسیک بود؛ زیرا کنترل کننده های مدرن مقاومت خوبی در مقابل نامعینی نداشتند. به همین خاطر از سال ۱۹۸۰ به فکر کنترل کننده هایی افتادند که مقاومت آن در مقابل نامعینی زیاد باشد، به این دلیل به سراغ نمودارهای مقدار تکین و آنالیز SSV^2 رفتند؛ زیرا تغییرات مقدار تکین در مقابل تغییرات یک آرایه از ماتریس حالت بسیار کم بود، ولی تغییرات مقدار ویژه در مقابل تغییرات یک آرایه از ماتریس حالت بسیار زیاد بود. در این دوره که به دوره کنترل مقاوم شهرت دارد طراحی در حوزه فرکانس و حوزه

^۱ Proportional Integrative Derivative

^۲ Structured Singular Value

زمان با هم صورت می گرفت که کنترل کننده های این دوره کنترل کننده H_∞ ، کنترل کننده μ (SSV) و کنترل کننده LQG/LTR می باشد.

جدول (۱-۱) دوره های زمانی کنترل کننده ها را نشان می دهد.

جدول (۱-۱) دوره های زمانی کنترل کننده ها

کنترل مقاوم ۱۹۸۰- تاکنون	کنترل مدرن ۱۹۶۰ - ۱۹۸۰	کنترل کلاسیک ۱۹۳۰ - ۱۹۶۰	
نمودارهای مقدار تکین آنالیز μ (SSV)	مدل های فضای حالت کنترل پذیری رؤیت پذیری فرآیندهای تصادفی	منحنی بود (پاسخ فرکانسی) تست پایداری نایکوئیست تست پایداری روث حاشیه های بهره و فاز	آنالیز
طراحی H_∞ طراحی μ LQG/LTR	فیلتر کالمن LQR, H_2	کنترل کننده های PID جبران سازی LEAD-LAG	سنتز
حوزه فرکانس و حوزه زمان	حوزه زمان	حوزه فرکانس	حوزه کاری

طی سالهایی که از دوره کنترل مقاوم می گذرد، سعی بر طراحی (و یا استفاده از) این کنترل کننده ها نیز افزایش می یابد. برای مثال میتوان از کنترل کننده های H_∞ در سیستمهای مختلفی از جمله در کشتی، هواپیما، کنترل سوخت خودرو، روبات و غیره نام برد که نمونه هایی را میتوان در [۹]-[۱۱] مشاهده نمود.

سیستم کشتی نیز به نوبه خود باید دارای یک کنترل کننده برای پایداری و ردیابی باشد؛ حال این کنترل کننده می تواند یک کنترل کننده کلاسیک مانند کنترل کننده PID و یا یک کنترل

کننده مدرن مانند فیلتر کالمن باشد. در دهه های اخیر طراحان کنترل به دنبال کنترل کننده هایی با مقاومت بالا در برابر نامعینی ها هستند؛ که این نامعینی ها شامل نویز، اغتشاش، غیرخطی بودن سیستم و تغییر در پارامترهای سیستم باشد، به همین خاطر طراحان کنترل در این دوره به دنبال طراحی کنترل کننده های مقاوم می باشند.

برای مثال سیستم کشتی را در نظر بگیرید. اغتشاشات برای این سیستم برابر با امواج دریا، باد و باران، وجود صخره ها، وجود مرجان های دریای و عمق کم دریا می باشند. این عوامل باعث می شوند که کشتی از مسیر خود منحرف شود یا اینکه مانع کشتی می شوند و کشتی از حرکت باز می ماند. و ممکن است که سیستم کشتی به علت داشتن بار، استفاده زیاد و تعویض قطعات در پارامترهای آن تغییر ایجاد شود. و در آخر نیز وجود قطعات الکترونیکی باعث بوجود آمدن نویز در اندازه گیری حسگرها می شود. همه این عوامل وجود نامعینی در سیستم ها را می رساند.

برای سیستم کشتی نیز کنترل کننده های مختلفی به کار رفته است؛ کنترل کننده هایی که شامل کنترل کننده های دوره کلاسیک یا دوره کنترل مدرن و حتی دوره های کنترل مقاوم می باشد. ۴ نمونه از کنترل کننده ها را که بر روی سیستم کشتی اعمال شده است را می توان در [۱۰]- [۱۳] مشاهده نمود.

این پایان نامه شامل طراحی کنترل کننده هایی برای یک مدل کشتی می باشد. مدل در نظر گرفته شده از [۱۴] آورده شده است. این مدل دارای ۴ متغیر حالت و ۶ ورودی و ۳ خروجی می باشد (خروجی مورد نظر سه متغیر حالت از ۴ متغیر حالت می باشد). برای این سیستم دو کنترل کننده، اولی از دوره کنترل مدرن و با نام کنترل کننده H_2 و دیگری از دوره کنترل مقاوم و با نام کنترل کننده H_∞ می باشد، که معرفی این دو کنترل کننده از [۱۵] و [۱۶] آورده شده است. پس از طراحی این دو کنترل کننده مقایسه ای نیز بین عملکرد این دو خواهیم داشت.

این پایان نامه طی هفت فصل ارائه می گردد. ساختار فصلهای پایان نامه بدین صورت می

باشد:

- در فصل اول شامل معرفی پایان نامه و معرفی دوره های کنترل می باشد.
- در فصل دوم، مروری بر کنترل کننده های چندمتغیره انجام خواهد شد که شامل تعاریفی از جمله تعاریف سیستم چندمتغیره، ماتریس حساسیت^۱، ماتریس حساسیت مکمل^۲، مقادیر تکین، عملگرهای اندازه دو، اندازه بینهایت، نامعینی و مقاوم بودن خواهد بود.
- در فصل سوم مدل کشتی و روابط موجود در آن بحث می شود. کنترل بر روی این مدل انجام خواهد شد.
- در فصل چهارم کنترل کننده ای از دوره کنترل مدرن یعنی کنترل کننده H_2 معرفی خواهد شد که بر روی مدل کشتی مورد نظر نیز اجرا خواهد شد.
- در فصل پنجم کنترل کننده ای از دوره کنترل مقاوم یعنی کنترل کننده H_∞ معرفی خواهد شد که بر روی مدل کشتی مورد نظر نیز اجرا خواهد شد.
- در فصل ششم نتایج دو کنترل کننده فوق بیان می شود.
- در فصل هفتم نیز پیشنهاداتی مبنی بر بهتر نمودن این کنترل کننده ها خواهد آمد.

^۱ Sencitivity

^۲ Sensitivity Complementary

فصل دوم

مروری بر کنترل چندمتغیره

۲-۱- مقدمه :

در طبیعت سیستمهای گوناگونی وجود دارد که دارای ورودیهایی برای تحول در سیستم و خروجیهایی هستند.

مانند سیستم جرم - فنر که دارای یک ورودی و یک خروجی است.

تعریف (۱-۲): به هر سیستم شبیه سیستم بالا که دارای یک ورودی و یک خروجی باشد

سیستم یک ورودی-یک خروجی (SISO)^۱ می باشد.

سیستم دیگری از طبیعت که می توان از آن نام برد سیستم کشتی است که دارای چند ورودی و چند خروجی است.

تعریف (۲-۲): به هر سیستم مانند سیستم بالا که دارای چند ورودی و دارای چند خروجی

باشد سیستم چندمتغیره (MIMO)^۲ گویند.

۲-۲- سیستم چندمتغیره :

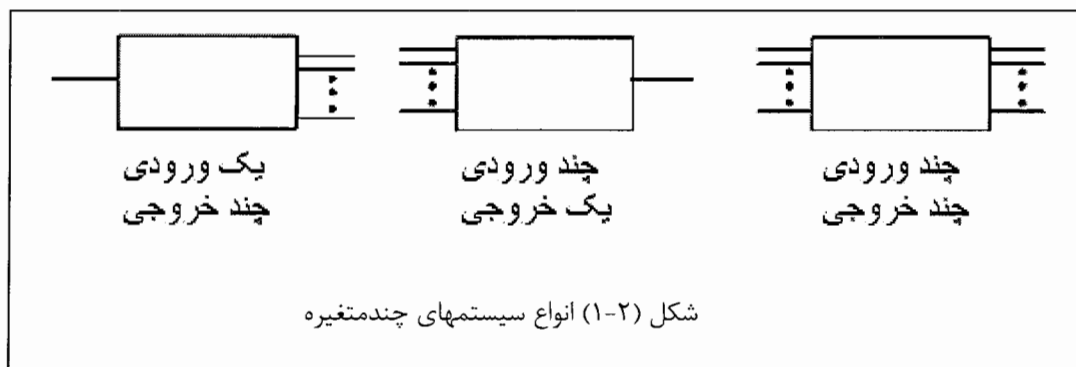
سیستم چند متغیره به سیستمی گفته می شود که تعداد ورودی یا خروجی آن یک نباشد؛

مانند سیستمی که یک ورودی و چند خروجی دارد یا سیستمی که چند ورودی و یک خروجی دارد

یا سیستمی که چند ورودی و چند خروجی دارد. شکل (۱-۲) انواع سیستم چندمتغیره را نشان می دهد.

^۱ Single Input-Single Output

^۲ Multiply Input-Multiply Output



یک سیستم چندمتغیره را در نظر بگیرید، هرگاه به ورودی اول یک سیگنال اعمال کنیم، همه خروجیها تغییر خواهند کرد. اگر بخواهیم مانند سیستم یک ورودی - یک خروجی کنترل نماییم برای هر ورودی جدای از ورودیهای دیگر باید یک کنترل کننده قرار بدهیم. به همین ترتیب باید برای ورودیهای دوم تا آخر نیز کنترل کننده قرار دهیم و این یعنی n خروجی برای یک ورودی، دارای n کنترل کننده باشند، که این روش امکان پذیر نیست؛ زیرا هر خروجی تنها نیاز به یک کنترل کننده دارد نه به چند کنترل کننده (به تعداد ورودی). این تداخل بین ورودیها و خروجیها در سیستمهای چندمتغیره وجود دارد و این تداخل را **کوپلینگ**^۱ می نامند.

در روش کلاسیک ابتدا سیستم را مانند یک سیستم یک ورودی - یک خروجی در نظر می گیرند. یعنی ورودی اول با خروجی اول و ... و ورودی آخر با خروجی آخر در ارتباط باشد.

در طراحی به روش کلاسیک ابتدا باید مشخص نمود ورودیها کدام یک از خروجیها را بیشتر تحت تاثیر قرار دهد، آنگاه با استفاده از روشهایی ورودی - خروجیها را متناظر با هم تفکیک نمود و بعد از تفکیک تعداد کنترل کننده های به تعداد ورودی بستگی دارد.

یکی از جداکننده^۲ ها ماتریس $[G(0)]^{-1}$ است که در فرکانس صفر (DC) تابع انتقال سیستم را برابر ماتریس یک I می نماید.

$$SYS(s) = [G(0)]^{-1} G(s) \quad (۱-۲)$$

^۱ Coupling

^۲ Decoupler

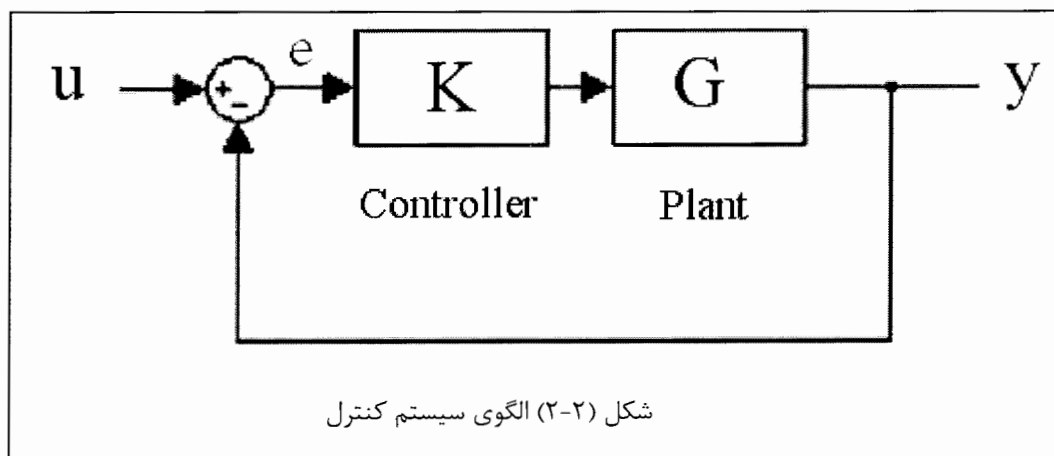
در رابطه (۱-۲) مشاهده می شود که در فرکانس صفر مقدار سیستم برابر I است که ماتریس واحد نشان دهنده اینست که ورودی اول با خروجی اول رابطه دارد و ... (ورودی u با خروجی y رابطه دارد). مسئله ای که در این جداکننده با احتساب رابطه ورودی u با خروجی y وجود دارد اینست که ماتریس تابع انتقال (G) باید مربعی باشد؛ یعنی تعداد ورودی و خروجی برابر باشد (این نکته از ماتریس G نیز قابل استنباط است که $G(0)$ وقتی دارای معکوس است که G مربعی باشد).

۲-۳- ماتریس حساسیت و حساسیت مکمل

الگوی سیستم کنترل را که در شکل (۲-۲) نشان داده است در نظر بگیرید. رابطه

$$e = u - y = (I + GK)^{-1}u \quad (2-2)$$

را خواهیم داشت:



ماتریس $S = (I + GK)^{-1}$ را ماتریس حساسیت می نامند.

و برای خروجی خواهیم داشت:

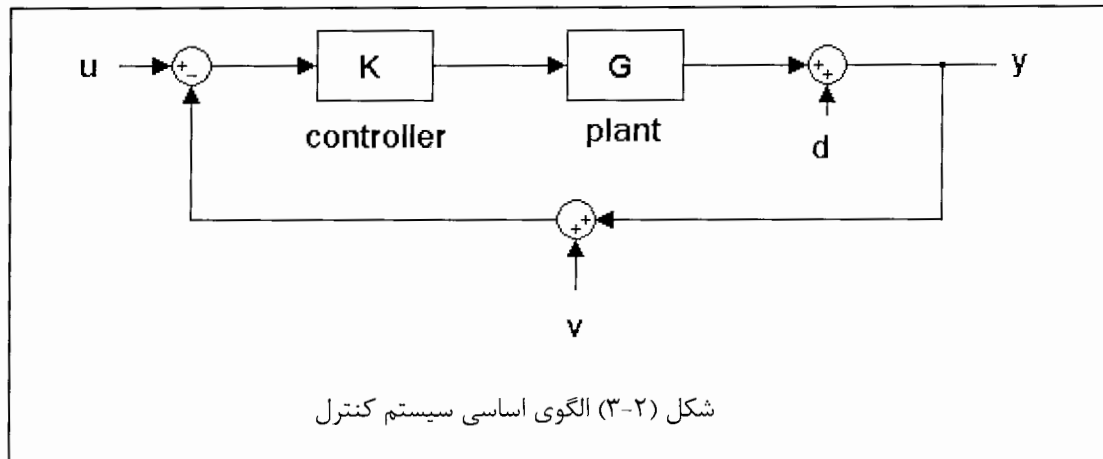
$$y = (I + GK)^{-1} GK u \quad (3-2)$$

ماتریس $T = (I + GK)^{-1} GK$ را ماتریس حساسیت مکمل گویند و رابطه (۴-۲) برای T و

S صادق است.

$$S + T = I \quad (4-2)$$

از رابطه (۲-۲) نتیجه مقابل را خواهیم داشت: باید ماتریس حساسیت را آنقدر کوچک نماییم که خطای سیستم مورد قبول برای طراحی باشد. و این موضوع را برای رابطه (۳-۲) نیز خواهیم داشت زیرا باید ماتریس حساسیت مکمل برابر I باشد تا ورودی و خروجی دقیقاً برابر باشند. حال اگر الگوی سیستم کنترل شکل (۳-۲) را با اغتشاش و نویز داشته باشیم.



آنگاه روابط به صورت

$$y = Sd + T(u - v) \quad (۵-۲)$$

$$e = S(u - d) + Tv \quad (۶-۲)$$

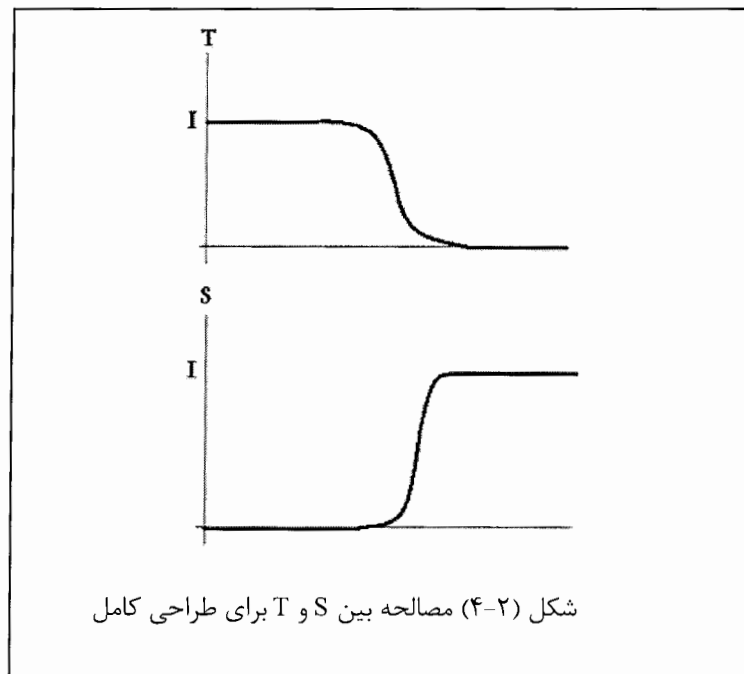
خواهد شد.

نکته: خطای مورد نظر اختلاف ورودی و خروجی است نه ورودی به کنترلر.

می بینیم که افزایش T باعث می شود که نویز به طور کامل در خروجی دیده شود (و همچنین در خطای سیستم) و این مطلوب طراحی نیست. چون نویز یک سیگنال فرکانس بالاست پس باید طیف فرکانسی ماتریس T را طوری طراحی نماییم که در فرکانسهای بالا برابر صفر و در فرکانسهای پایین برابر I شود و این یعنی اینکه S نیز در فرکانسهای پایین برابر صفر و در فرکانسهای بالا برابر I گردد (چون معمولاً ورودی سیگنال فرکانس پایین است، پاسخ سیستم کنترل شده با وجود

نویز یا بدون وجود نویز تغییر چندانی نخواهد کرد). فرکانس پایین بودن S نیز یعنی اینکه اغتشاش d نیز در خروجی دیده نمی شود. چون اغتشاش d یک سیگنال فرکانس پایین است.

شکل (۴-۲) طراحی طیف فرکانسی T و طیف فرکانسی S را نشان می دهد.



۴-۲- مقادیر تکین

در سیستم یک ورودی - یک خروجی کارآیی حلقه فیدبکی به وسیله تغییرات در بهره حلقه با فرکانس، رد اغتشاش، انتقال نویز و حساسیتهای مختلف نسبت به تغییرات پارامترهایی که به بهره وابسته است تعیین می گردد (در نظر بگیرید که پایداری انجام شده است).

اگر تابع انتقال حلقه باز (نسبت بازگشتی) در سمت راست صفحه s هیچ قطبی نداشته باشد، آنگاه حاشیه های پایداری و پاسخ گذرای حلقه بسته نیز به وسیله مشخصات بهره حلقه باز تعیین می گردد.

اگر کوشش کنیم تا این ارتباط را به سیستم چندمتغیره بسط دهیم (تعمیم از سیستم SISO

به سیستم MIMO)، مسئله اصلی اینست که یک ماتریس یک بهره تنها ندارد: اندازه $\|G(s)U(s)\|$

به جهت بردار $U(s)$ وابسته است، اگر G ماتریس تابع انتقال سیستم و U ورودی سیستم باشد. گرچه می توانیم نسبتهای

$$\frac{\|G^{-1}(s)Y(s)\|}{\|Y(s)\|} \quad \text{و} \quad \frac{\|G(s)U(s)\|}{\|U(s)\|}$$

با استفاده از اندازه ماتریسها محدود کنیم. (بایستی معمولا $G(s)$ را مربعی و معکوس پذیر در نظر بگیریم، اما هیچیک از این دو فرض لازم نیستند.) پس اجازه می دهیم تا نظر بهره تنها را با نظر محدوده بهره جایگذاری کنیم، این محدوده بین دو عدد بالا و پایین قرار دارد.

اگر $\|X\|$ را اندازه بردار بدانیم، آنگاه می توانیم اندازه ماتریس را به صورت

$$\|G\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Gx\|}{\|x\|} \quad (7-2)$$

تعریف کنیم.

بخصوص، اگر برای محاسبه اندازه بردار، اندازه اقلیدسی را استفاده کنیم (برای بردار مختلط)،

عبارت

$$\|x\| = \sqrt{(x^H x)} \quad (8-2)$$

را خواهیم داشت.

آنگاه اندازه ماتریس محاسبه شده اندازه هیلبرت^۲ یا طیفی^۳:

$$\|G\|_s = \overline{\sigma} \quad (9-2)$$

نامیده می شود.

مقدار $\overline{\sigma}^2$ بیشینه مقادیر تکین ماتریس $G^H G$ (یا GG^H) است. در این قسمت X^H با

عبارت $\overline{X}^T$ مشخص می شود، همچنین به طور مشابه G^H . حالا، اگر G دارای m ردیف و دارای l

^۱ Supreme

^۲ Hilbert

^۳ Spectral

ستون باشد، و $m \geq l$ ، آنگاه ریشه های مثبت مقادیر ویژه ماتریس $G^H G$ به نام مقادیر تکین ماتریس G نامیده می شود. (اگر $m \leq l$ آنگاه ریشه های مثبت مقادیر ویژه GG^H مقادیر تکین ماتریس G می باشند).

اگر به جای ماتریس G ماتریس $G(s)$ را داشته باشیم، و قرار دهیم $S = j\omega$ ($0 \leq \omega \leq \infty$)، آنگاه مقادیر تکین $G(j\omega)$ تابعی از ω هستند، و به نام **بهره اصلی** $G(s)$ نامیده می شود. وقتی که می خواهیم اهمیت رابطه آنها را با فرکانس داشته باشیم باید این مقادیر را با $\{\sigma_i(\omega)\}$ علامتگذاری نماییم، یا باید این مقادیر را با $\{\sigma_i(G)\}$ علامتگذاری نماییم وقتی که می خواهیم تفاوت قائل شویم مقادیر تکین G را با بعضی دیگر از سیستمها داشته باشیم. همچنین تطبیق می دهیم به ترتیب $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$ ، وقتی الزام دارد، و علامت σ_1 و σ_m را به ترتیب با $\bar{\sigma}$ و $\underline{\sigma}$ جایگذاری می نماییم، وقتی که می خواهیم استفاده از بزرگترین و کوچکترین بهره اصلی را اهمیت دهیم.

نکته ای که وجود دارد اینست که

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \|G(j\omega)\|_s \quad (10-2)$$

اما این اندازه ماتریس $G(j\omega)$ ، با تغییر ω تغییر می کند. بعداً معرفی می کنیم اندازه های $\|G\|_2$ و $\|G\|_\infty$ که اندازه هایی از تابع انتقال G که مستقل از فرکانس می باشند.

مقادیر تکین - در سیستم چندمتغیره که بصورت معادلات حالت نمایش داده می شود می

توان برای ماتریس حالت (A) مقادیر تکین^۱ تعریف کرد که داریم:

مقادیر تکین برای ماتریس $A_{m \times n}$ با رتبه r را با σ_i نمایش می دهیم و داریم:

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^H * A)} \quad \text{If} \quad m > n \quad (11-2)$$

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A * A^H)} \quad \text{If} \quad n > m \quad (12-2)$$

و بدین صورت تنظیم می کنیم

^۱ در اصطلاح مقادیر ویژه که برای رفع ابهام مقادیر تکین مینامیم.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p, p = \min[n, m] \quad (۱۳-۲)$$

اگر $r < p$ آنگاه به تعداد $p-r$ مقدار تکین صفر داریم، یعنی

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_p = 0$$

بزرگترین مقدار تکین را با علامت زیر نمایش می دهند.

$$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1 \quad (۱۴-۲)$$

اگر ماتریس A قطری $n \times n$ باشد، آنگاه n -مین مقدار تکین (کوچکترین مقدار تکین) را با

علامت زیر نمایش می دهیم.

$$\underline{\sigma} = \sigma_n \quad (۱۵-۲)$$

مثال (۱-۲): ماتریس A را به صورت زیر فرض کنید :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+2i & 3+5i \\ 1 & 3-i & 1 \\ 2-2i & 3i & 2 \end{bmatrix}$$

آنگاه برای این ماتریس خواهیم داشت :

$$\sigma_i(A) = 1.1944, \quad 3.9677, \quad 7.5228$$

که کوچکترین آنها:

$$\underline{\sigma}(A) = 1.9144$$

و بزرگترین آنها:

$$\bar{\sigma}(A) = 7.5228$$

همان طور که در این مثال مشاهده می شود، اینست که همه مقادیر تکین اعداد مثبت و

غیرمختلط هستند.

۲-۴-۱- تجزیه مقادیر تکین^۱

بگذارید قرار دهیم $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ و G یک ماتریس مختلط باشد. آنگاه،

ماتریس G را به صورت

$$G = Y \Sigma U^H \quad (۲-۱۶)$$

می توان نوشت.

در حالیکه

اگر $m \geq l$

$$Y \in C^{m \times l}$$

$$\Sigma \in R^{l \times l}$$

$$U^H \in C^{l \times l}$$

$$Y^H Y = I_l$$

$$U^H U = U U^H = I_l$$

اگر $m \leq l$

$$Y \in C^{m \times m}$$

$$\Sigma \in R^{m \times m}$$

$$U^H \in C^{m \times l}$$

$$Y^H Y = Y Y^H = I_m$$

$$U^H U = I_m$$

و $C^{m \times l}$ یعنی مجموعه تمامی ماتریسهای مختلط که m ردیف و l ستون دارند، و $R^{m \times l}$

یعنی مجموعه تمامی ماتریسهای حقیقی که m ردیف و l ستون دارند.

به این عمل تجزیه مقادیر تکین گفته می شود. برای جزئیات بیشتر مراجعه شود به [۱۷]

و [۱۸].

توجه کنید که تجزیه مقادیر تکین یکتا نیست برای مثال $G = Y_1 \Sigma U_1^H$ در صورتیکه

$Y_1 = Y e^{j\theta}$ و $U_1 = U e^{-j\theta}$ ، برای هر θ ، نیز یک تجزیه مقادیر تکین برای ماتریس G است، در

حالیکه σ_i یکتا است.

^۱ Singular-Value Decomposition (SVD)

تجزیه مقادیر تکین برای یک ماتریس G در زیر آمده است که در آن $m \geq l$ است و روابط بالا را تصدیق می نماید.

مثال (۲-۲): ماتریس G و تجزیه مقادیر تکین آن را وقتی $m \geq l$ است را مشاهده می کنید.

از روی ماتریس G و ماتریسهای به دست آمده می توان روابط بالا را بررسی کرد.

$$G = \begin{bmatrix} 1+i & 1-2i \\ 4 & -8+6i \\ -9+5i & i \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.0182 - 0.1375i & -0.2155 + 0.0612i \\ -0.7446 + 0.1168i & 0.5907 - 0.2075i \\ 0.5756 - 0.2852i & 0.6251 - 0.4088i \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 12.1147 & 0 \\ 0 & 9.1233 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.801 & -0.5986 \\ 0.5502 + 0.2358i & -0.7363 - 0.3155i \end{bmatrix}$$

در این قسمت بعضی از خصوصیات تجزیه مقادیر تکین را بکار می بریم.

$$\begin{aligned} GG^H &= (Y \Sigma U^H)(Y \Sigma U^H)^H \\ &= (Y \Sigma U^H)(U \Sigma Y^H) \\ &= Y \Sigma^2 Y^H \end{aligned}$$

اگر $m \leq l$ آنگاه $Y^H = Y^{-1}$ می توان نشان داد که عنصر Y ماتریس بردارهای ویژه

ماتریس GG^H است، و $\{\sigma_i^2\}$ مقادیر ویژه آن می باشد.

$$G^H G = (U \Sigma Y^H)(Y \Sigma U^H) = U \Sigma^2 U^H$$

اگر $m \geq l$ آنگاه $U^H = U^{-1}$ می توان نشان داد که عنصر U ماتریس بردارهای ویژه ماتریس

$G^H G$ است، و $\{\sigma_i^2\}$ مقادیر ویژه آن می باشد.

نکته موجود اینست که رتبه ماتریس G برابر رتبه ماتریس Σ است. پس اگر رتبه ماتریس G برابر r باشد، آنگاه فقط r مقادیر تکین نخست ماتریس G مثبت هستند؛ و باقیمانده برابر صفر هستند.

فرض کنید :

$$H = U \Sigma^{-1} Y^H \quad (۱۷-۲)$$

آنگاه

$$HGH = (U \Sigma^{-1} Y^H)(Y \Sigma U^H)(U \Sigma^{-1} Y^H) = U \Sigma^{-1} Y^H = H \quad (۱۸-۲)$$

و

$$GHG = (Y \Sigma U^H)(U \Sigma^{-1} Y^H)(Y \Sigma U^H) = Y \Sigma U^H = G \quad (۱۹-۲)$$

که نشان می دهد ماتریس H شبه-معکوس^۱ ماتریس G است. در نتیجه داریم :

$$G^\dagger = U \Sigma^{-1} Y^H \quad (۲۰-۲)$$

در حالیکه $G^\dagger$ را شبه-معکوس ماتریس G بنامیم. در اینجا فرض می کنیم که رابطه

$\text{rank}(G) = \min(l, m)$ برقرار باشد. اگر $r < \min(l, m)$ آنگاه در عوض Σ^{-1} خواهیم داشت:

$$G^\dagger = \text{diag}(\Sigma_r^{-1}, 0)$$

که ماتریس Σ_r^{-1} ماتریس قطری و دارای r عدد مثبت (اعداد مقادیر تکین مثبت) است و

ماتریس صفر نیز ماتریس به ابعاد $(k-r) * (k-r)$ است که اگر $k = \min(l, m)$ باشد.

اگر ماتریس G مربعی و غیرویژه^۲ باشد، آنگاه

$$G^{-1} = U \Sigma^{-1} Y^H \quad (۲۱-۲)$$

از رابطه ۱۵-۲ خواهیم داشت که:

$$\|G^{-1}(j\omega)\|_s = \frac{1}{\underline{\sigma}(\omega)} \quad (۲۲-۲)$$

^۱ Pseudo- Inverse

^۲ ماتریس ویژه دارای دترمینان صفر است.

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\|G^{-1}(j\omega)y(j\omega)\|}{\|y(j\omega)\|} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(\omega)}$$

و از اندازه طیفی ماتریس G خواهیم داشت:

$$\frac{\|G(j\omega)u(j\omega)\|}{\|u(j\omega)\|} \leq \bar{\sigma}(\omega)$$

اگر قرار دهیم $y(j\omega) = G(j\omega) * u(j\omega)$ بدست می آوریم که :

$$\underline{\sigma}(\omega) \leq \frac{\|G(j\omega)u(j\omega)\|}{\|u(j\omega)\|} \leq \bar{\sigma}(\omega) \quad (23-2)$$

رابطه (23-2) نشان می دهد که بهره سیستم چندمتغیره در بین دو عدد بزرگترین مقدار

تکین و کوچکترین مقدار تکین قرار دارد.

یک خصوصیت کاربردی سیستم عدد شرطی^۱ آنست، که بصورت

$$Cond(G) = \frac{\bar{\sigma}(\omega)}{\underline{\sigma}(\omega)} \quad (24-2)$$

تعریف می شود، که، البته، وابسته به فرکانس می باشد.

۲-۴-۲- خواص مقادیر تکین

در این قسمت بعضی از کاربردهای مفید مقادیر تکین را بیان می کنیم.

$$1. \quad \bar{\sigma}(A) = \max_{x \in \mathbb{C}^m} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$2. \quad \underline{\sigma}(A) = \min_{x \in \mathbb{C}^m} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

۳. $\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A)$ در حالیکه λ_i ، i-مین مقدار تکین ماتریس A است.

۴. اگر A^{-1} وجود داشته باشد، $\underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})}$

^۱Condition number

$$5. \quad \bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})} \text{ اگر } A^{-1} \text{ وجود داشته باشد،}$$

$$6. \quad \bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \bar{\sigma}(A)$$

$$7. \quad \bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$$

$$8. \quad \bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B)$$

$$9. \quad \underline{\sigma}(A) \bar{\sigma}(E) \leq \underline{\sigma}(A+E) \leq \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(E)$$

$$10. \quad \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma}(AB) \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\}$$

$$11. \quad \max_{i,j} |a_{ij}| \leq \bar{\sigma}(A) \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|$$

$$12. \quad \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \text{Trace}(A^H * A)$$

خصوصیت ۱ خیلی مهم است زیرا که بزرگترین مقدار تکین A مانند بیشترین بهره ماتریس

برای بردار ورودی X ی که تغییر می کند در هر جهت ممکن برقرار شده است.

۲-۴-۳- عملگر اندازه $\|G\|_\infty$ و $\|G\|_2$

فرض نمودیم "بهره" تابع انتقال فقط منحصر به فرکانس وابسته است. اما این ممکن است، و

کاربردی، تا اندازه ای خام از "بهره" را داشته باشیم - یک شماره سیگنالی که وابسته به تابع انتقال

است. باید دو اندازه گیری دیگر، یا اندازه، از G تعریف نماییم، یا با $\|G\|_2$ و $\|G\|_\infty$ به ترتیب

علامتگذاری نماییم.

تعریف (۲-۱): $G(s)$ را یک تابع انتقال سره که هیچ قطبی روی موهومی ندارد. آنگاه

$$\|G\|_2 \equiv \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^p (\sigma_i(G(j\omega)))^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-25)$$

و

$$\|G\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (2-26)$$

که با علامتهای $\|G\|_2$ و $\|G\|_\infty$ که هر دو خصوصیات کاربردی اندازه ها در آنها صادق است،

برای مثال:

$$\text{if and only if } \|G\| = 0, \text{ with } \|G\| \geq 0$$

$$\alpha, \text{ for any scalar } \|\alpha G\| = |\alpha| \|G\|$$

$$\|G + H\| \leq \|G\| + \|H\|$$

$$\text{also satisfies } \|G\|_\infty$$

$$\|GH\|_\infty \leq \|G\|_\infty \|H\|_\infty$$

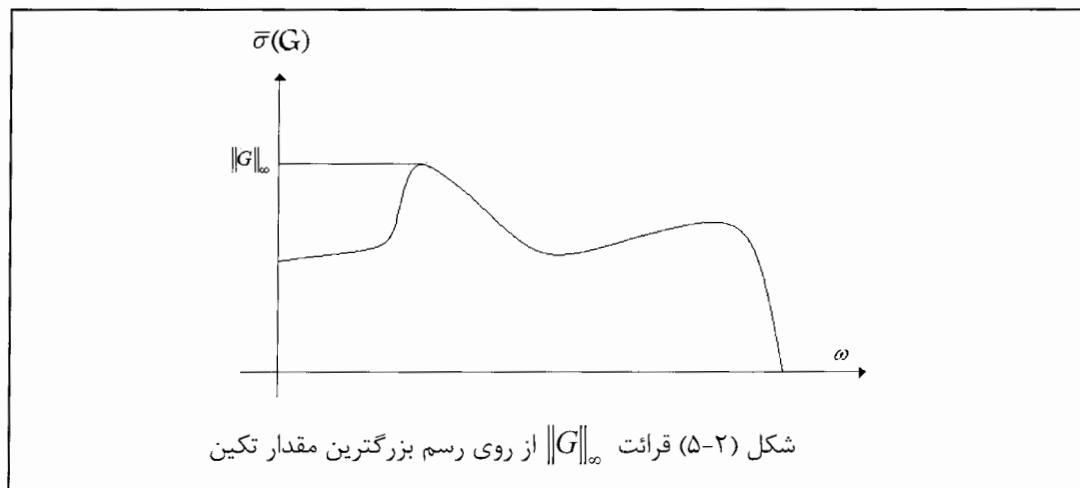
اما نامعادله اخیر برای $\|G\|_2$ صادق نیست. این اندازه ها را اغلب به نام عملگرهای اندازه می

شناسند.

شکل (۵-۲) رسم بزرگترین مقدار تکین برای تابع انتقال G را نشان می دهد، که از روی این

رسم می توان نشان داد که چگونه $\|G\|_\infty$ را می توان قرائت کرد، که این نیز یعنی ماکزیمم نمودار

$\bar{\sigma}(G)$ ، که به آسانی بدست می آید.



قضیه (۱-۲) (رجوع کنید به [۱۹ و ۲۰]): اگر $\|u\|_2 < \infty$ ، $y(s) = G(s)u(s)$ و $G(s)$ پایدار و

سره باشد و هیچ قطبی روی محور موهومی نداشته باشد، آنگاه

$$\sup_u \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \|G\|_\infty \quad (2-27)$$

اثبات: حذف شده است.

۲-۵- نامعینی

در طراحی سیستمهای کنترلی می بینیم که سیستم مورد نظر دارای معادلات خطی شده است. حال سؤال اینست که اگر بخواهیم سیستم اصلی را با عوامل غیرخطی آن کنترل کنیم، طراحی به چه صورت خواهد بود؟

در سیستمهای طراحی شده نیز، وقتی سیستم در محیط عملی اجرا می شود می بینیم که یک سری از اغتشاشها به سیستم وارد می شود که سیستم را از کنترل صحیح باز می دارد. حال سؤال اینست که اگر بخواهیم در مقابل این سری اغتشاشات سیستم پایدار بماند چه اعمالی را باید انجام دهیم.

برای مثال برای سیستم کشتی اغتشاشات برابرنده با امواج دریا، باد و باران، وجود صخره ها، وجود مرجان های دریای و ... که باعث می شوند که کشتی از مسیر خود منحرف شود یا اینکه مانع کشتی می شوند و کشتی از حرکت باز می ماند.

در سیستمهای طراحی شده در تئوری اندازه گیری معمولاً توسط حسگرها با عدد یک محاسبه می شود (یعنی در فیدبک هیچ فرآیندی وجود ندارد)، اما در عمل این حسگرها یا یک نیستند یا دارای تأخیر هستند. حال سؤال اینست که اگر بخواهیم سیستمی طراحی شود که اگر مشکل فوق پیش آمد یا اینکه حسگر دارای نقصی شد سیستم هنوز پایدار باشد.

به عوامل غیرخطی، اغتشاش و نویز (عدم صحت اندازه گیری) در حالت عام، نامعینی گویند؛ و به طراحی سیستم به صورتی که در مقابل این نامعینی ها پایدار بماند طراحی مقاوم^۱ گویند.

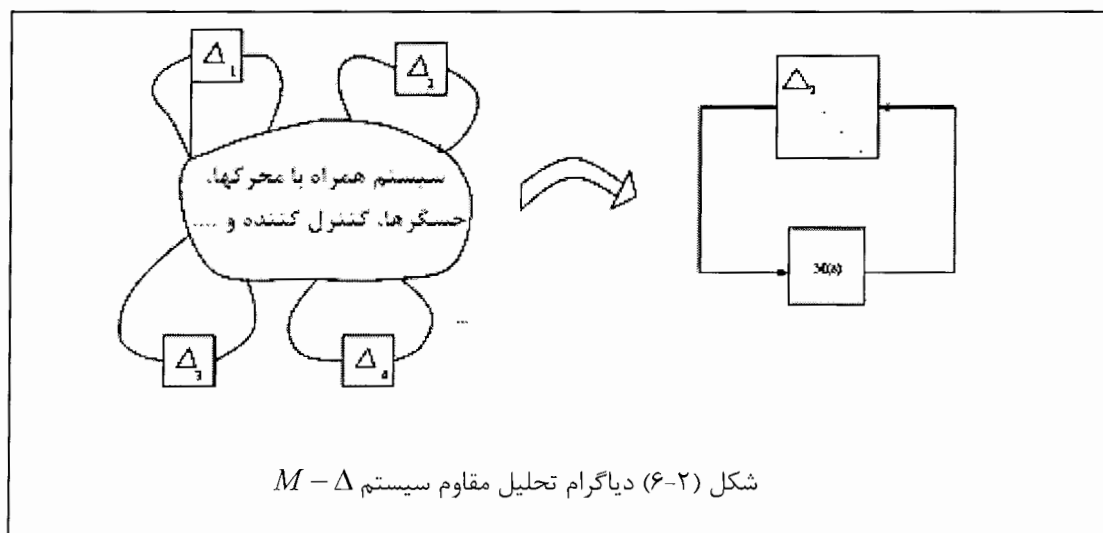
^۱ Robust Control

در طرح کلی از سیستم و کنترلر و... نامعینی را با Δ_i نشان می دهیم، برای مثال Δ_1 یعنی اغتشاشات، Δ_2 یعنی عدم تطبیق مدل با سیستم اصلی و Δ_3 یعنی نویز وارد بر سیستم. هدف طراحی کنترل مقاوم اینست که حاشیه پایداری سیستم چندمتغیره (MSM)^۱ را بدست آورد. و این یعنی اینکه علاقه مند به پیدا کردن بزرگترین Δ هستیم قبل از اینکه ناپایداری اتفاق بیافتد.

دو وظیفه در محاسبه MSM مورد بحث است.

۱. مدل نامعینی را بدست آوریم.
۲. قرار دادن نامعینی سیستم به صورت یک نامعینی کلی در سیستم $M - \Delta$ مانند شکل (۶-۲)، و آنگاه طراحی کنترل مقاوم.

در عمل، هر $\Delta_i (i=1,2,\dots,n)$ ممکن است که خود یک ماتریس باشد و نمایشی از نوعهای مختلف از نامعینی فیزیکی باشد. دو نوع کلی از نامعینی در کنترل مقاوم تعریف می شود- دارای ساختار و بدون ساختار



^۱ Multivariable Stability Margin

نامعینی بدون ساختار معمولاً توسط عنصرهای وابسته به فرکانس مانند اشباع محرکها و مدهای ساختاری مدل نشده در محدوده فرکانس بالا یا اغتشاش فرآیند در محدوده فرکانس پائین تعریف می شود. وابستگی اینها به فرآیند نامی ($\bar{G}$) با یک جمع شونده

$$G = \bar{G} + \Delta_A$$

یا ضرب شونده

$$G = (1 + \Delta_M) \bar{G}$$

در نظر گرفته می شوند.

نیز می توان فرض کرد که اندازه این دو محدود باشد، یعنی، با استفاده از اندازه H_∞ داشته باشیم $\|\Delta\|_\infty < r$ ، وقتی که r یک عدد مثبت در نظر بگیریم. شکل (۲-۶) شکل نامعینی بدون ساختار جمع شونده و ضرب شونده را نشان می دهد که چطور در سیستم کنترل وجود دارند. نامعینی دارای ساختار بوسیله اختلاف پارامتری در دینامیک فرآیند نمایش داده می شود، برای مثال :

الف . نامعینی در ورودیهای قطعی ماتریسهای فضای حالت (A,B,C,D)

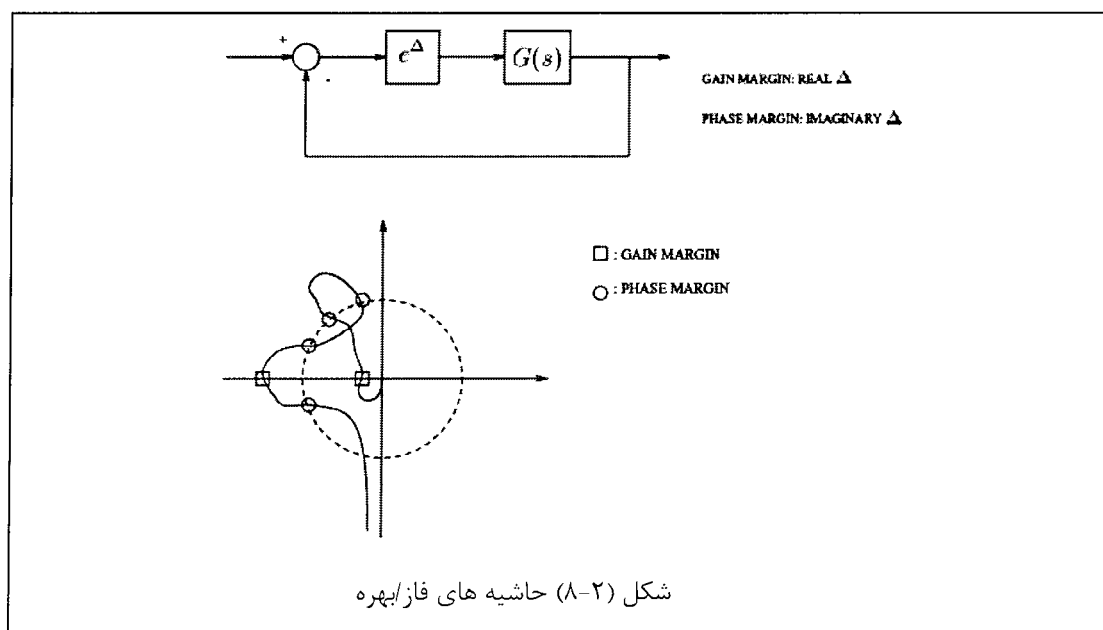
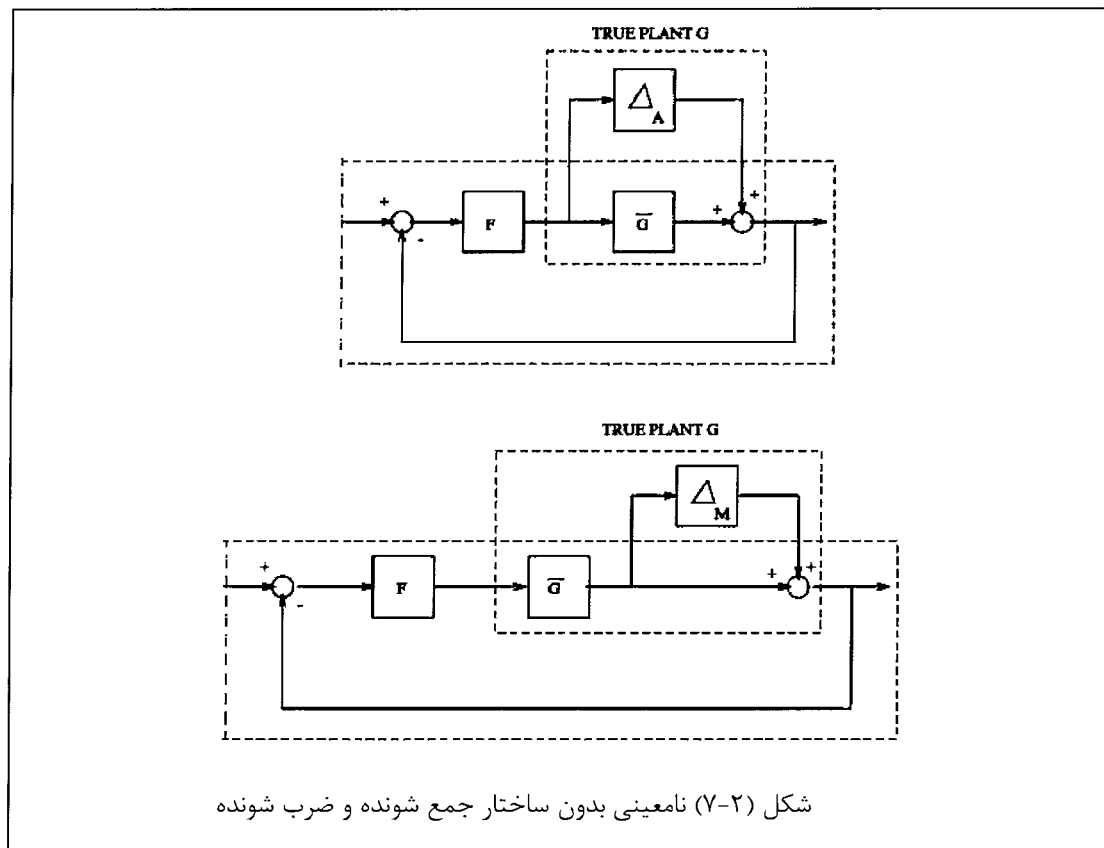
ب . نامعینی در قطبها و/یا صفرهای معین از تابع انتقال فرآیند.

ج . نامعینی در بهره/فاز حلقه.

۲-۶- مقاوم بودن

در ابتدا لازم است حاشیه های پایداری (مقاوم بودن) در سیستم یک ورودی-یک خروجی بیان کنیم. سیستم حلقه بسته ای را در سیستم یک ورودی-یک خروجی در نظر بگیرید (شکل (۲-۸)، حاشیه های فاز/بهره کلاسیک). حد بهره در این سیستم را با متغیر $\text{real}(\Delta)$ تعریف می کنیم، و حاشیه فاز را با $\text{imag}(\Delta)$ نشان می دهیم. در رسم نایکوئیست یک سیستم یک ورودی-یک

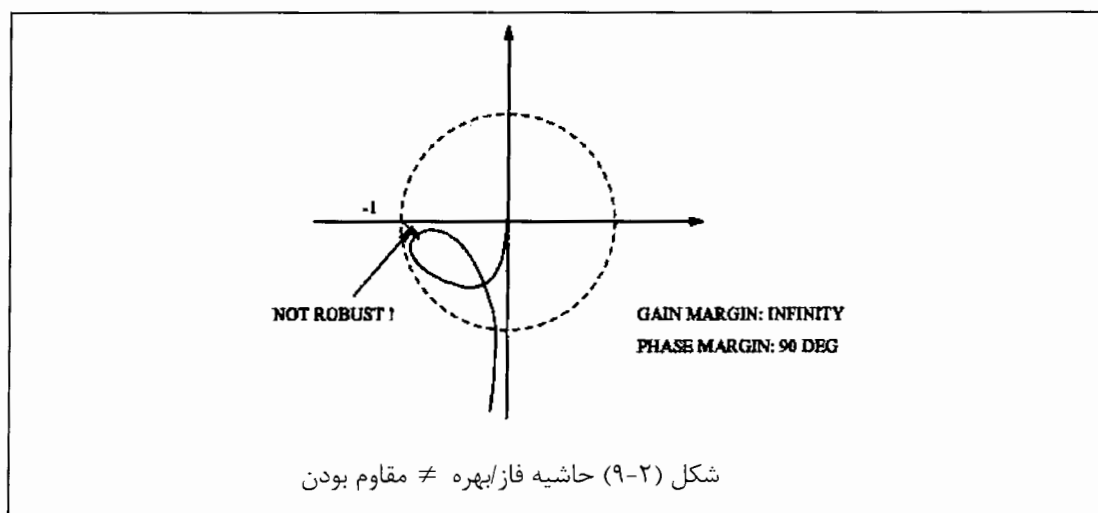
خروجی بسادگی از تقاطع تابع انتقال حلقه (KG) با دایره واحد (دایره به شعاع ۱ و مرکز مبدأ) حاشیه فاز و از تقاطع تابع انتقال حلقه (KG) با محور حقیقی حاشیه بهره بدست می آید.



یک مثال ساده در شکل (۹-۲) نشان داده شده است، حاشیه های فاز/بهره بی درنگ آشکار می کند که حاشیه های فاز/بهره در سیستم یک ورودی-یک خروجی مقاوم بودن سیستم را نشان نمی دهد. به این خاطر که شما دارید یک حاشیه فاز ۹۰ درجه و حاشیه بهره بی نهایت، همان طور که در شکل نشان داده شده است، زیرا از نقطه بحرانی ۱- دور است. به عبارت دیگر، حاشیه های فاز/بهره کلاسیک نمی تواند همزمان دو کمیت را تسخیر کند.

۲-۶-۱- تحلیل مقاوم بودن - روش کلاسیک

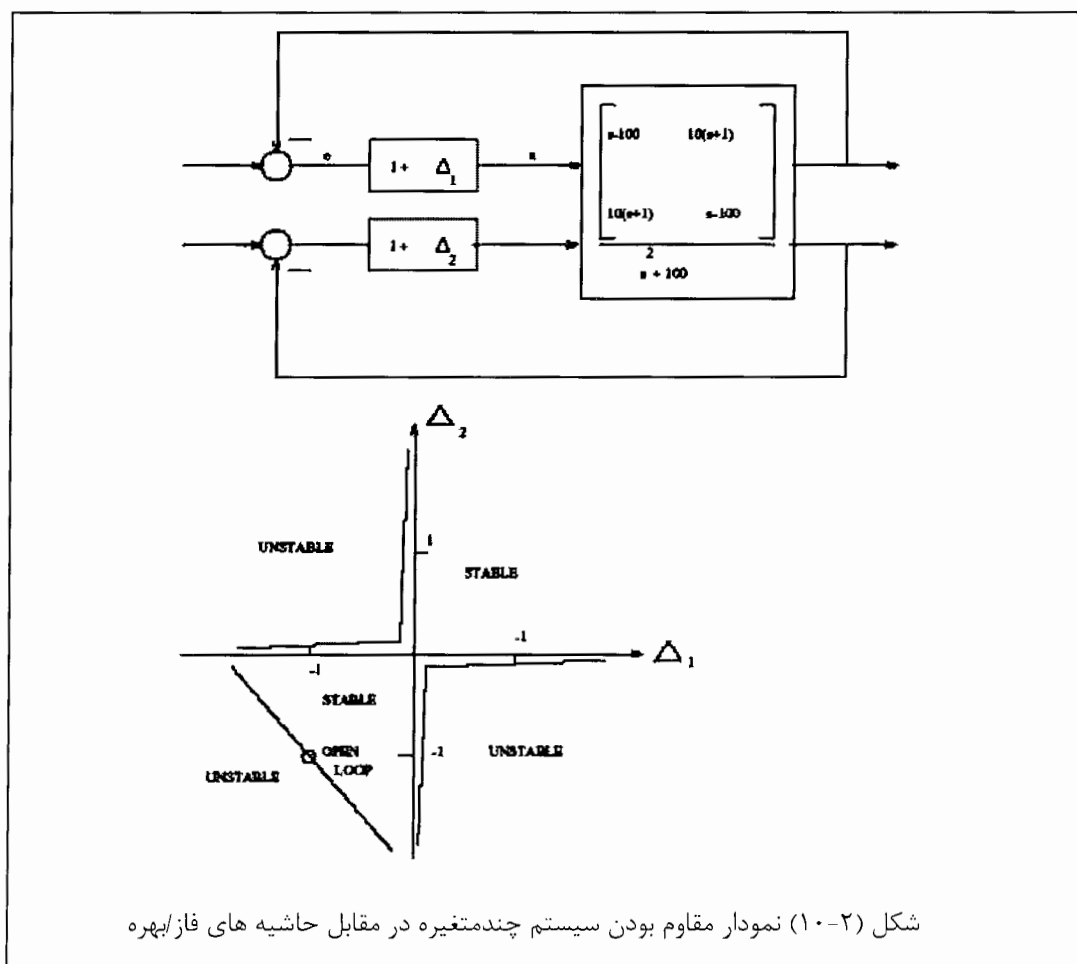
برای سیستم چندمتغیره، حاشیه فاز/بهره کلاسیک در یک زمان خاص برای یک حلقه بدون در نظر گرفتن تغییرات همزمان حلقه های دیگر و بدون تداخل با آنها محاسبه می شود. در ۱۹۷۸، Doyle در [۲۱] شرح داده است با یک مسئله مورد علاقه نشان داده است که چگونه حاشیه های فاز/بهره کلاسیک می تواند خوش بینانه پایداری سیستم (مقاوم بودن) را حدس بزند. شکل (۲-۱۰)، مقاوم بودن سیستم چندمتغیره را بر علیه حاشیه های فاز/بهره رسم شده است که دیاگرام بلوکی سیستم و ابرصفحه پایداری در فضای پارامتری دو بعدی نشان می دهد. آشکارا، وقتی $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ آنگاه تابع انتقال حلقه دو حلقه فیدبکی با تابع انتقال $1/s$ است. هر حلقه تکی دارای حاشیه بهره بینهایت و دارای حاشیه فاز ۹۰ (مثبت و منفی ۹۰) است. اما تغییر همزمان در دو متغیر Δ_1 و Δ_2 سریع سیستم را به ناپایداری سوق می دهد.



تئوریسین بریتانیایی کنترل ای. جی. جی. مک فارلان^۱ نشان داد که ابزار تحلیل خبره که به نام **مکان بهره مشخصات**^۲ نام دارد اندازه مقاوم بودن سیستم را نشان می دهد (نگاه کنید به [۲۰]). این ایده حاشیه های فاز/بهره مقدار ویژه هر تابع انتقال $L(s)$ را محاسبه می کند، آنگاه پایداری مقاوم سیستم چندمتغیره را بر اساس **قضیه پایداری نایکوئیست** **تعمیم یافته** بدست می آورد:

یک سیستم پایدار است اگر و تنها اگر مکان نایکوئیست مقادیر ویژه تابع انتقال دور نقطه حقیقی -1 را به ازای هر قطب ناپایدار از $L(s)$ یک بار دور بزند.

گرچه، مکان بهره مشخصات می تواند به طور خوش بینانه نتیجه نشان داده شده در مثال زیر را داشته باشد.



^۱ A. G. J. MacFarlane

^۲ Characteristic gain loci

مثال (۴-۱): ماتریس تابع انتقال ۲ در ۲

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-47s+2}{(s+1)(s+2)} & \frac{56s}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-42s}{(s+1)(s+2)} & \frac{50s+2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

را فرض کنید، با تجزیه کیفیتی

$$G(s) = X\Lambda(s)X^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

یک کنترل کننده فیدبکی پایدار کننده برابر است با:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مکان بهره مشخصات در بر گیرنده $\Lambda(s)$ به سادگی مشخص می شود که دارای حاشیه فاز

۱۸۰ درجه و حاشیه بهره بینهایت است. گرچه، به طور همزمان به جای k_1 ، $k_1 + 0.13$ قرار دهیم و

به جای k_2 ، $k_2 - 0.12$ قرار دهیم، آنگاه سیستم ناپایدار خواهد شد.

از نظر جبر خطی عددی شگفت آور نیست، زیرا محاسبه بردار ویژه یک فرآیند حساس عددی

است به صورتی که تغییر کوچک در یک عنصر ماتریس تغییر بزرگی در بردار ویژه نتیجه می دهد.

۲-۶-۲- تحلیل مقاوم بودن - روش مدرن

اخیراً در دهه ۱۹۷۰، شروع به تحقیق در این مورد انجام شد [۲۲ و ۲۳]، با استفاده از مقادیر

تکین و آزمایش تست آن با مقاوم بودن، که ممکن است بر مشکلهای وابسته به روشهای کلاسیک

چیره شود.

یک قضیه استاندارد مقاوم بودن پایداری مقادیر تکین که بر پایه قضیه بهره کوچک سندبرگ-

زامس^۱ [۲۴ و ۲۵] برپا شده است:

^۱ Sandberg-Zames

سیستم $M - \Delta$ پایدار است برای هر $\Delta(s)$ پایدار که در عبارت زیر صدق کند.

$$\sigma(\Delta(j\omega)) < \frac{1}{\sigma[M(j\omega)]}$$

$$\text{for all } \omega \in R \left(\text{or } \|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{\|M\|_{\infty}} \right)$$

چند فرض کاربردی مهم از قضایای زیر استفاده می شود.

۱- یک تغییر کوچک در Δ هرگز نمی تواند تغییر بزرگی در $\bar{\sigma}(\Delta)$ ایجاد کند (یعنی مقادیر

تکین برای تحلیل مقاوم بودن بهتر از مقدار ویژه است).

۲- اگرچه این قضیه یک عبارت را در بر می گیرد، شرط کافی برای پایدار مقاوم بودن است، این

شرایط نیز لازم برای پایداری در حس ضعیفی است که وجود دارد چند Δ که شرط $\|\Delta\|_{\infty} = 1/\|M\|_{\infty}$

صادر کند و سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی نباشد.

فصل سوم

مدل کشتی

۳-۱- معرفی

اهمیت صحت مدلسازی کشتی در [۲۶] نشان داده شده است. در این فصل، مدل کشتی ای را که طبیعت تصادفی کشتی و تداخل مهم در میان حرکتهای مختلف را حفظ می کند در نظر می گیریم. مدل در فضای حالت است. مدل در نهایت دارای ۴ متغیر حالت خواهد بود که برای حرکت کشتی در نظر گرفته ایم. بخش بعدی ساختمان مدل و تقریبی را که انجام شده است را نمایش میدهد. جزئیات بیشتر را در [۱۴]، [۲۷]، [۲۸]، [۲۹] میتوانید پیدا نمایید. طیف قدرت حرکات کشتی دارای باند نسبتاً باریکی (بین $0/2$ تا 2 رادیان بر ثانیه) است. به همین دلیل مدلهای درجه بالاتر برای نمایش صحیح مدل نیاز است.

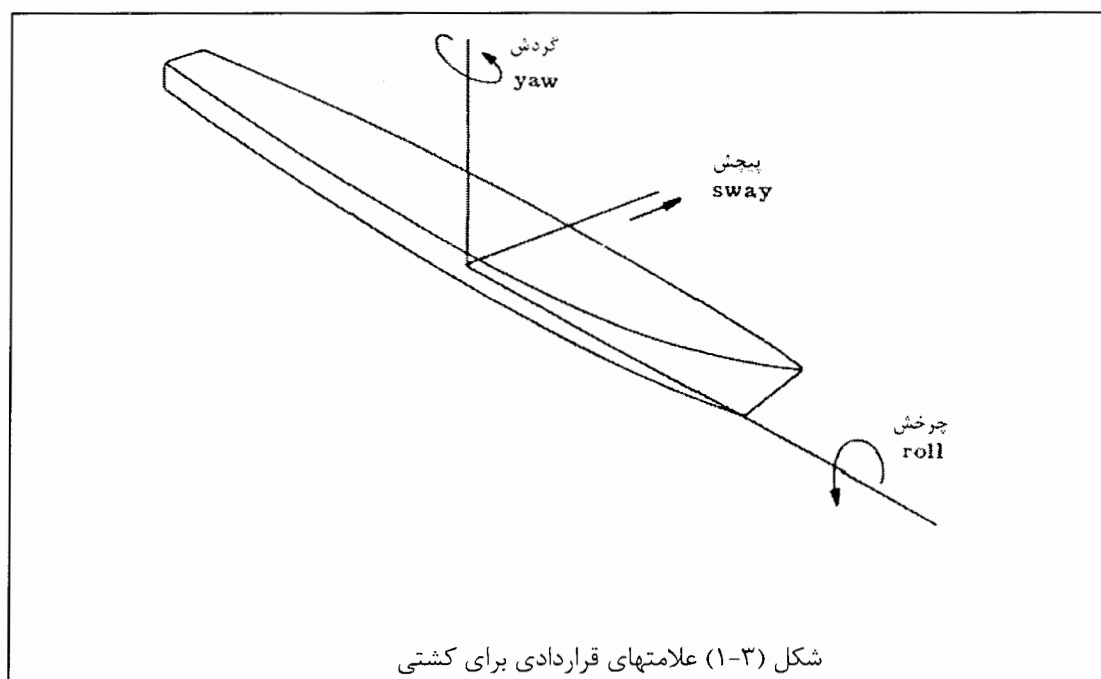
۳-۲- ساختمان مدل کشتی

حرکت افقی کشتی در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. علامتهای قراردادی در شکل نشان داده شده است. نقطه مبدأ مختصات ارائه شده در شکل در سطح تقارن کشتی، در سطح افقی آب و در وسط کشتی قرار دارد. این نقطه به مرکز ثقل و به شرایط بار وابسته است.

اگر حرکت کشتی کوچک فرض شود آنگاه حرکت کشتی خطی در نظر گرفته می شود. این فرض، چون موجها دارای ارتفاع محدودی هستند، فرضی صحیح می باشد.

طیف موج معمولاً در بازه $0/2$ تا 2 رادیان بر ثانیه قرار دارد. متغیر حرکت چرخش^۱ نیاز به توجه بیشتری دارد. زیرا اگر متغیر حرکت چرخش بزرگ باشد، میرایی غیرخطی بر مدل حکمفرما می شود.

^۱ Roll



مدل کشتی در اصل به ۳ قسمت تقسیم می شود. قسمت اول مربوط به وارد شدن موج (در مدل دریا) در نقطه مرجع در وسط کشتی است. ارتفاع موج با یک فرآیند تصادفی و طیف قدرت نسبتاً باند باریک شناخته می شود.

قسمت دوم و سوم مدل با هم قرار داده می شوند، که پاسخ آن به موج نمایش داده می شود. با استفاده از فرضیه خطی سازی این پاسخ را می توان از ارتفاع موج تا حرکت کشتی با ماتریس تابع انتقال نشان داد. قسمت دوم از مدل نشان می دهد که دینامیک نیرو توسط موج ورودی تولید می شود. در حالیکه قسمت سوم از مدل با دینامیک بدنه سخت نمایش داده می شود که مانند اینست که دینامیک بوسیله حرکت کشتی در پاسخ به نیروی سیال اضافه شده است.

این نیروها عبارتند از :

- نیروی جبری بوسیله شتاب ذره های سیالی که توسط کشتی جابجا می شود تولید

می شود .

- نیروی میراکننده بوسیله انرژی کم ر بوده شده توسط موجهایی که توسط حرکت کشتی تولید می شود تولید می شود.

- نیروی دینامیک.

برای یک موج کاملاً سینوسی معادله حرکت دارای معادله دیفرانسیل زیر است:

$$(M + A_h)\ddot{x}_h + B_h\dot{x}_h + C_h x_h = \underline{F} \quad (1-3)$$

در حالیکه:

- M ماتریس وزن کشتی است.

- A_h وزن اضافه شده است.

- x_h بردار حرکت کشتی است (حرکتهای پیچش^۱، چرخش و گردش^۲).

- B_h ترم میرایی است.

- C_h ترم هیدرودینامیکی است.

- $\underline{F}$ بردار نیرو است و بردار لحظه ای است که توسط موج واردشونده تولید می شود.

ترمهای $\underline{F}$ ، A_h و B_h به فرکانس موج واردشونده وابسته هستند.

برای یک ارتفاع موج نامنظم، معادله (۱-۳) تبدیل به معادله انتگرال- دیفرانسیلی خواهد شد.

ضرایب هیدرودینامیکی (M ، A_h ، B_h و C_h) و نیروها در ابتدا بدست می آیند، و مدل کلی

کشتی بدست می آید.

پارامترهای مدل عبارتند از : سرعت سیال، جهت موجهای، اندازه موجهای مهم، و فرکانس

مدل در طیف موج.

۳-۳- ماتریسهای انتقال کشتی

ماتریس انتقال کشتی برای حرکتهای پیچش، چرخش و گردش می تواند به دو ماتریس

^۱Sway

^۲Yaw

- ماتریس انتقال از ارتفاع موج برای نیرو و گشتاوری که توسط موج واردشونده تولید می شود.

- ماتریس انتقال از نیرو و گشتاور برای حرکت افقی.
تقسیم شود.

این ماتریسهای انتقال از مقادیر نیروها، جرمهای افزوده شونده، میرایی، جرم و نیروهای هیدرودینامیکی با استفاده از معادله (۱-۳) برای موجها بدست می آیند.

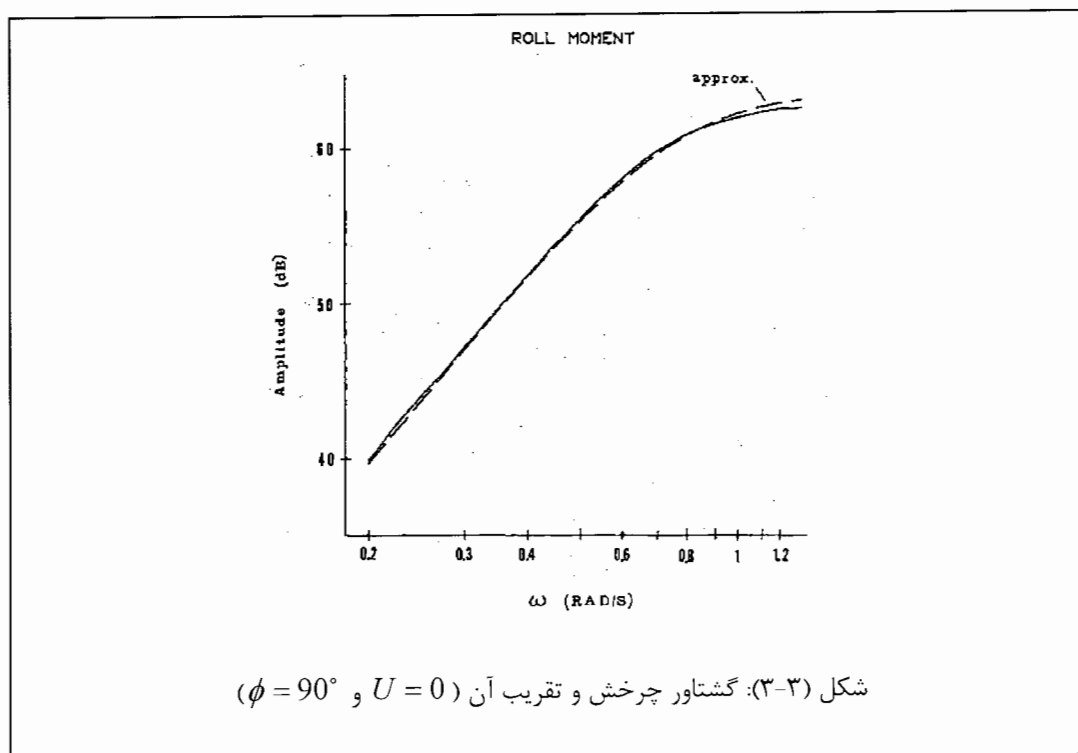
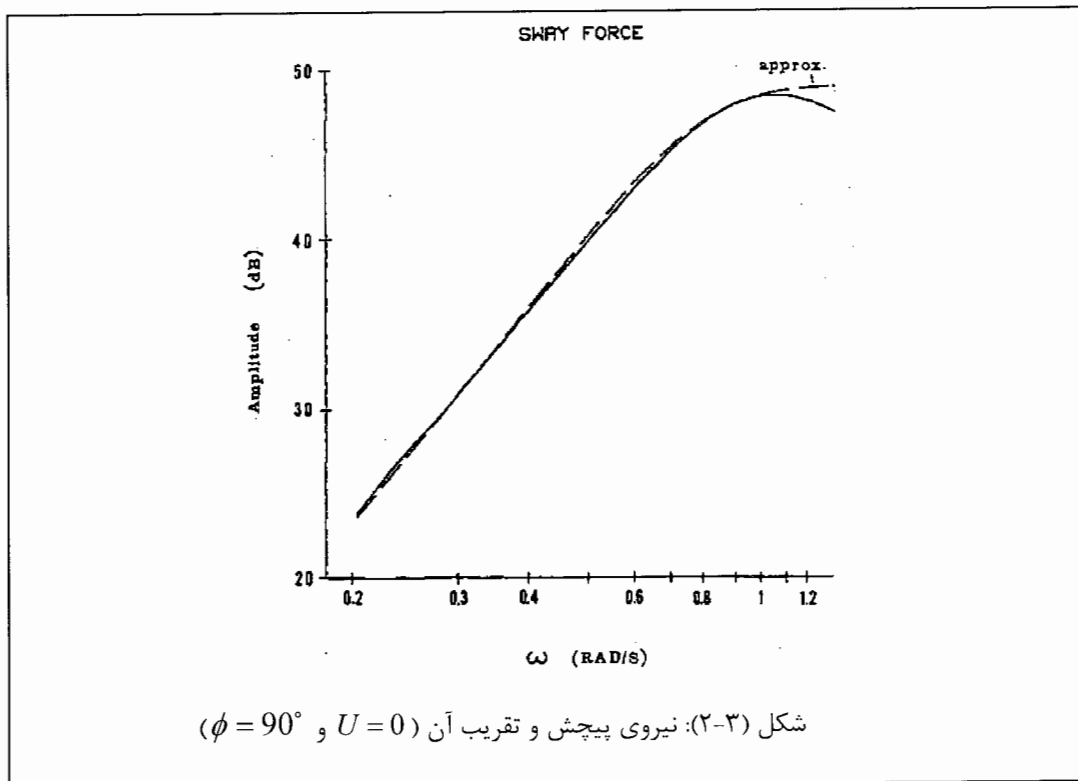
۳-۳-۱- دینامیک نیرو

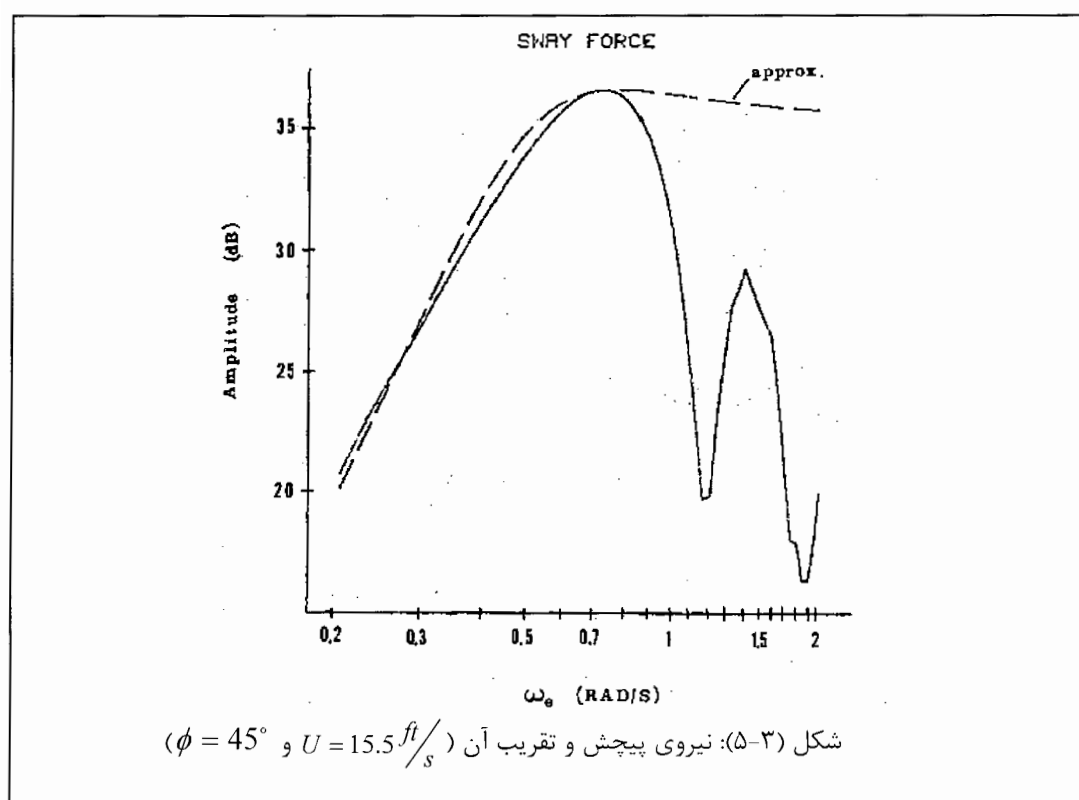
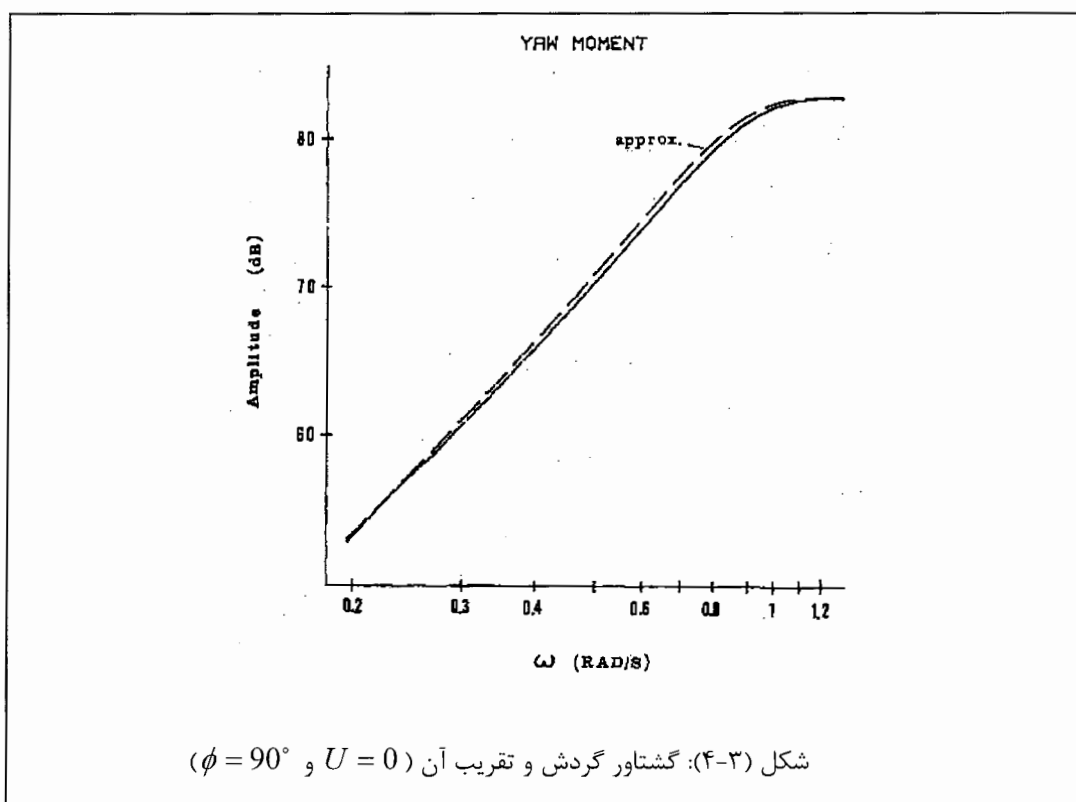
شکلهای (۲-۳)، (۳-۳) و (۴-۳) تابع انتقال نیروی پیچش و گشتاورهای چرخش و گردش در اندازه لگاریتمی برای $U = 0$ و $\phi = 90^\circ$ می باشد. در شکلهای (۵-۳)، (۶-۳) و (۷-۳) نیز تابع انتقال نیروی پیچش و گشتاورهای چرخش و گردش در اندازه لگاریتمی برای $U = 15.5 \text{ ft/s}$ و $\phi = 45^\circ$ می باشد.

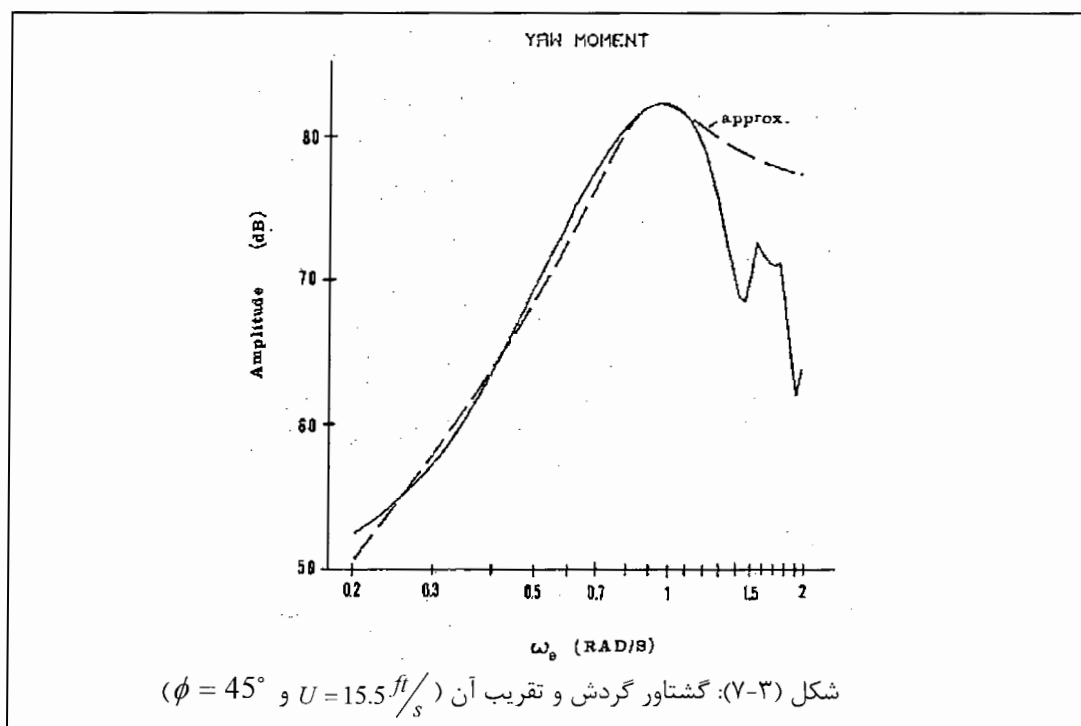
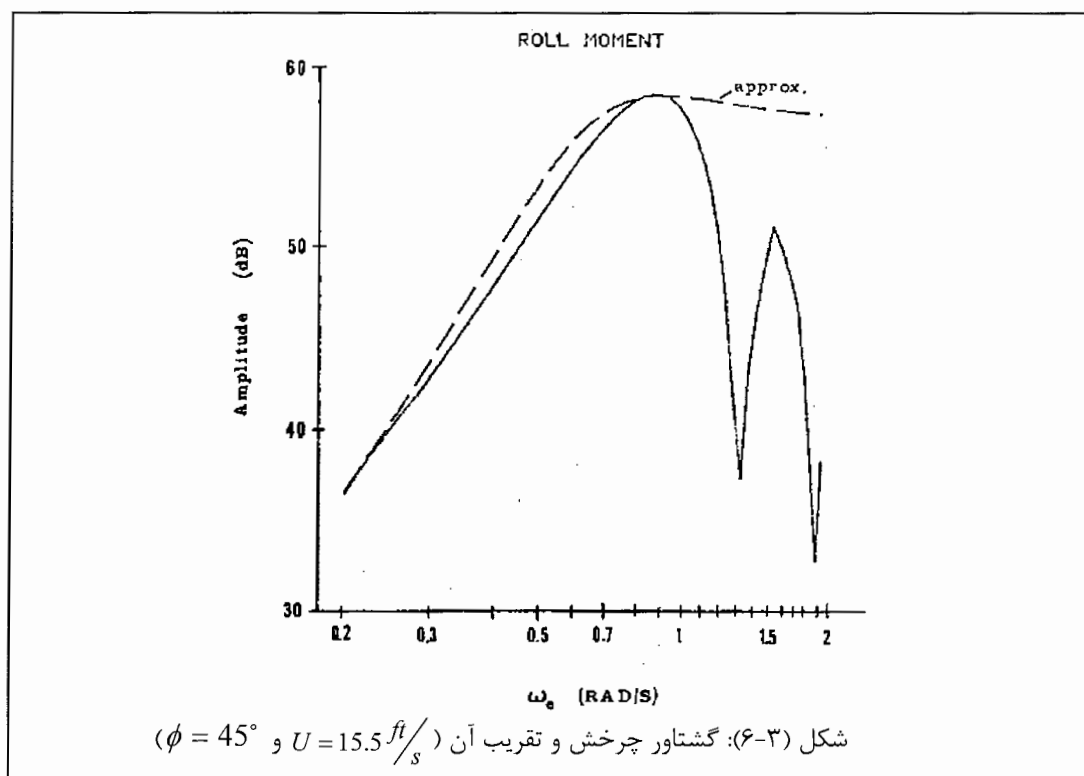
نیروها با سیستم درجه دو تقریب می شوند، برای مثال

$$\frac{F_i}{s} = \frac{F_i s^2}{1 + 2J_i / \omega_i + (s / \omega_i)^2} \quad \begin{matrix} i = s, r, y \\ \text{for sway, roll, yaw} \end{matrix} \quad (2-3)$$

با انتخاب $U = 15.5 \text{ ft/s}$ و $\phi = 45^\circ$ ، می بینیم که دینامیک نیرو دارای خصوصیات بعد بینهایت است. مقادیر ضریب در تابع انتقال، و وابستگی آنها به سرعت کشتی و زاویه موج، در ضمیمه الف آورده شده است.







۳-۲-۳- دینامیک کشتی

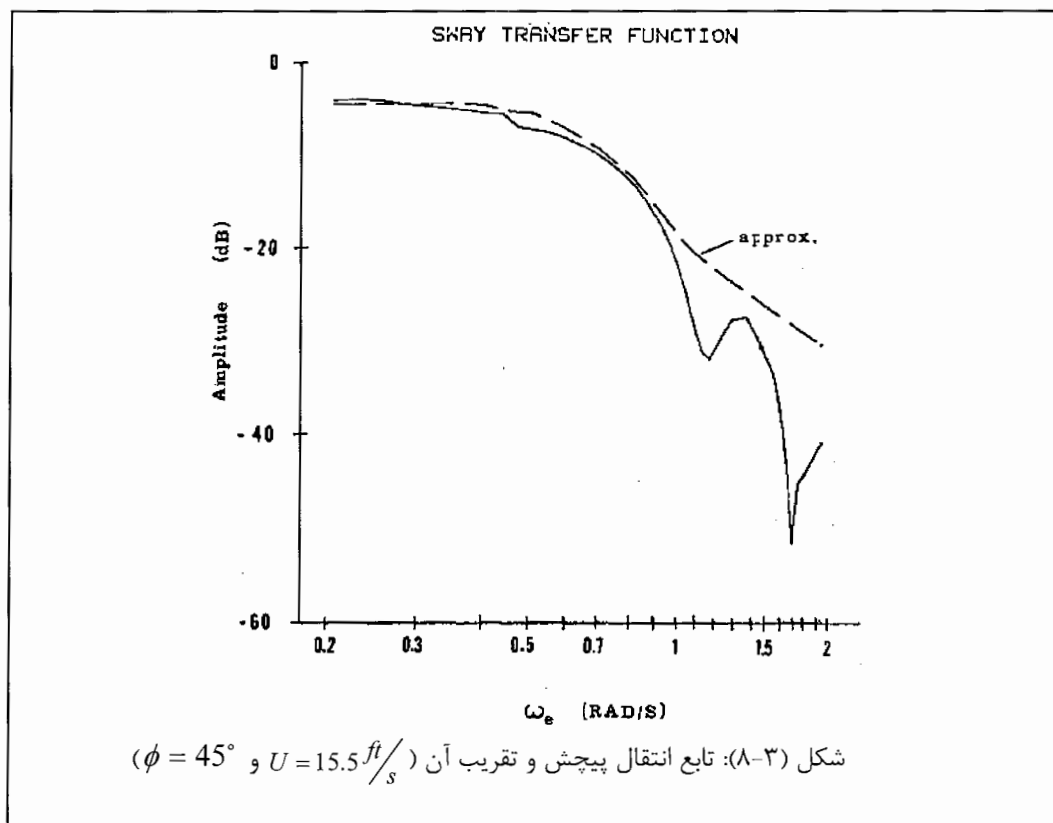
دینامیک کشتی با ماتریسهای A_h ، B_h و C_h رابطه دارد. پیش تر گفته شده است که

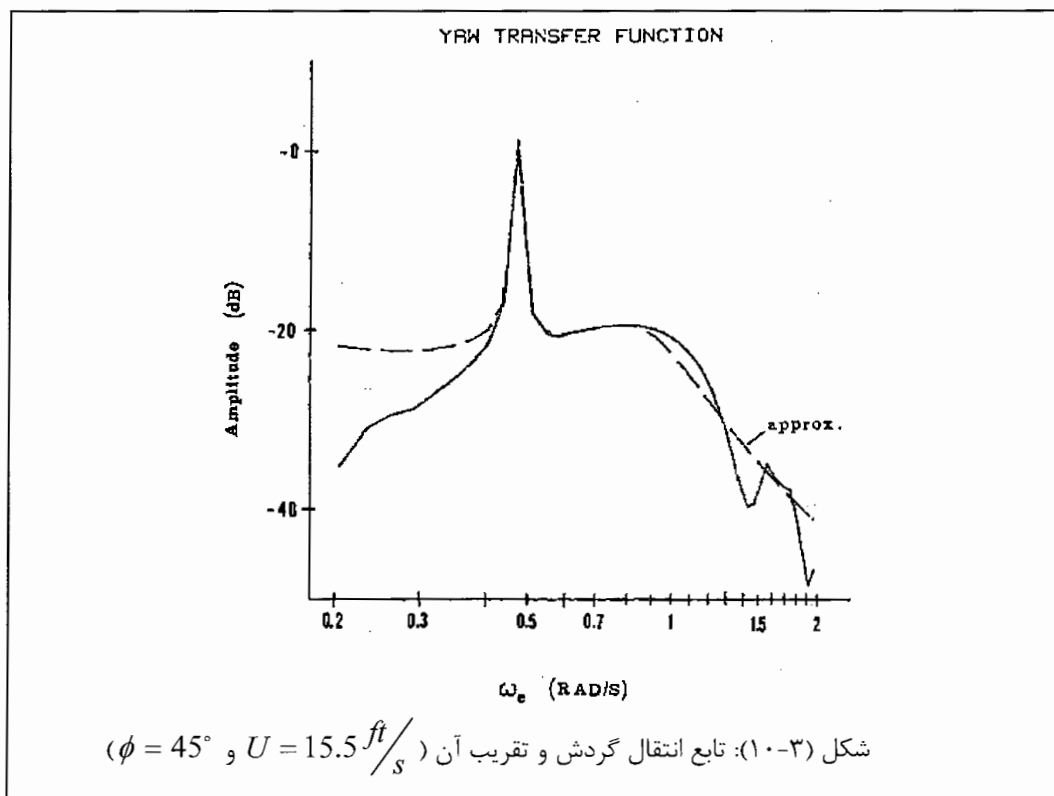
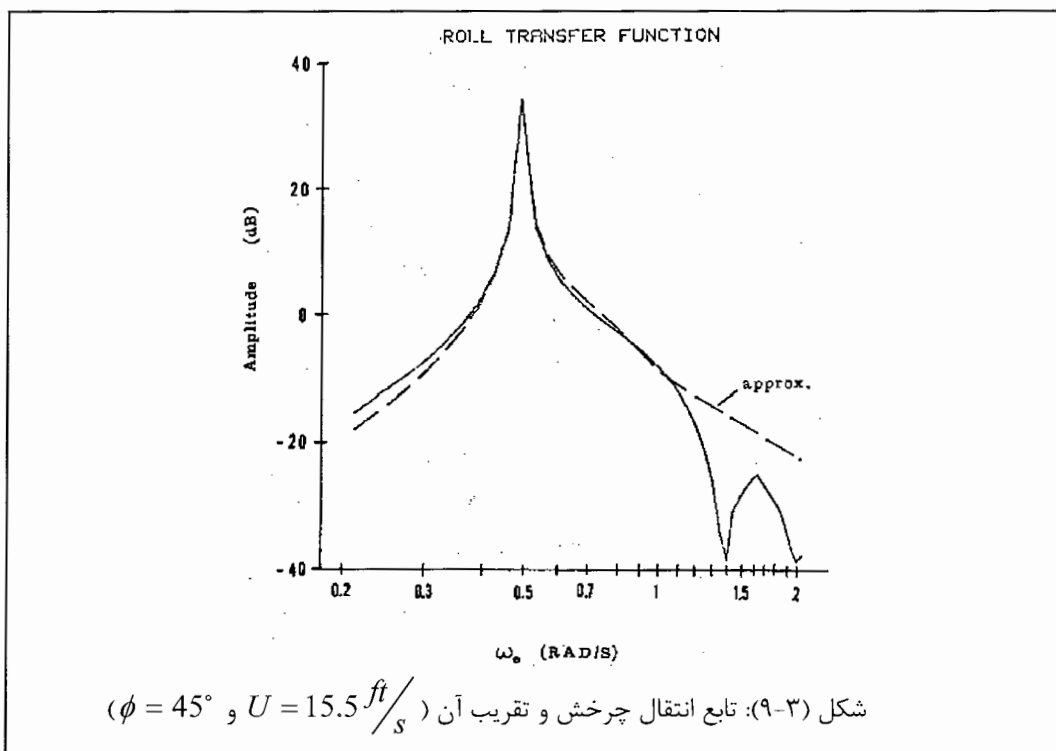
ماتریسهای A_h ، B_h به فرکانسهای موج واردشونده وابسته هستند، بنابراین درجه معادله دیفرانسیل

$$(M + A_h)\ddot{x}_h + B_h\dot{x}_h + C_h x_h = \underline{F} \quad (3-3)$$

برای هر حرکت از سه حرکت بیشتر از ۲ می باشد.

تغییرات مهم دیگر در ماتریسهای A_h و B_h توسط سرعت کشتی و زاویه انجام می شود. شکل‌های (۸-۳)، (۹-۳) و (۱۰-۳) نتایج کلی از تقریب دینامیک کشتی را نشان می دهد. دینامیک کشتی با سیستم درجه دو تقریب شده است. به نظر می آید که تقریب خوبی است. در این تقریب از دینامیک فرکانس بالاتر غافل شده ایم.





اگر ماتریسهای A_h و B_h را ثابت در نظر بگیریم معادلات دیفرانسیلی

$$(M + A_h)\ddot{x}_h + B_h\dot{x}_h + C_h x_h = \underline{F} \quad (۳-۴)$$

از درجه ۶ خواهد بود. با انتخاب $R = (M + A_h)^{-1}$ ، $P = (M + A_h)^{-1} B_h$ و $Q = (M + A_h)^{-1} C_h$ ، نمایش فضای حالت بصورت

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x}_h \\ x_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P & -Q \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_h \\ x_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} F \quad (5-3)$$

بدست می آید که نمایش فضای حالت شامل ۶ حالت (حرکات و مشتق آنها) است.

وقتی این مدل را با مدل‌های نیرو ترکیب می کنیم، دو حذف صفر و قطب اتفاق می افتد. این حذف صفر و قطب سیستم را به سوی یک سیستم با درجه غیرمینیمال سوق خواهد داد، و به سوی ناپایداری در شبیه سازی خواهد برد. با تغییرات ساده (جزئیات در ضمیمه الف) این مشکل حل خواهد شد و یک مدل درجه ۴ از دینامیک کشتی بدست می آید، که دارای حرکت‌های چرخش، پیچش و گردش است و فقط دارای مشتق چرخش است.

مدل کشتی را با فرض $H = 10 \text{ ft}$ و $\omega_m = 0.72 \text{ rad/s}$ و $\phi = 45^\circ$ و $U = 15.5 \text{ ft/s}$ در

نظر بگیرید. مدل بدست آمده به قرار زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0083 & 0.2748 & 0.1097 & 8.0407 \\ 0.000043 & -0.0196 & -0.0234 & 0.0129 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.0005 & -0.0232 & 0.0005 & 0.0324 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0024 & 0 & 0 & 0 & -0.000004 & 0 \\ 0.000003 & 0.000001 & 0 & 0.000008 & -1 \times 10^{-8} & -1 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.000004 & 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-7} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

قطبهای مدل کشتی عبارتند از :

$$\begin{bmatrix} -0.0201 + 0.0594 i \\ -0.0201 - 0.0594 i \\ -0.0101 + 0.1536 i \\ -0.0101 - 0.1536 i \end{bmatrix}$$

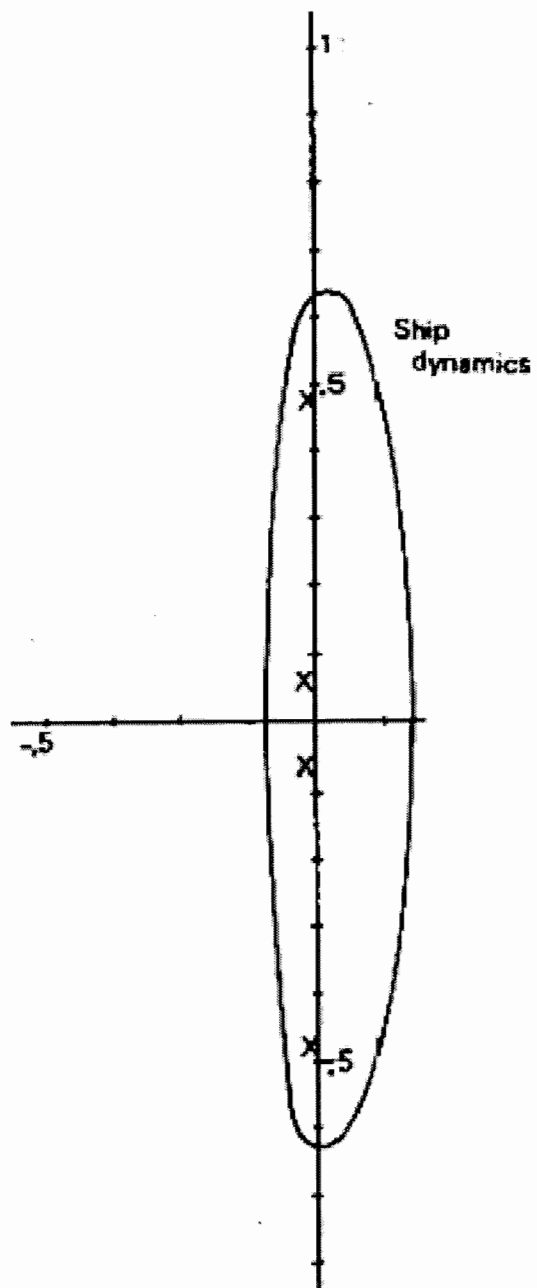
قطبهای مدل نیز در شکل (۳-۱۱) برای $H = 10 ft$ و $\omega_m = 0.72 rad/s$ نشان داده شده

است. شش قطب با طیف دریا تطبیق دارد. شش قطب دیگر برای دینامیک نیرو است (دو قطب برای هر حرکت). ۴ قطب باقیمانده با دینامیک کشتی تطبیق دارد.

۳-۴- خلاصه

در این فصل، مدل کشتی بدست آمده است. طیف امواج در یک باند فرکانسی باریک بصورت متمرکز در اطراف مرکز ۱ رادیان بر ثانیه ظاهر شده است. در نتیجه تمامی حرکات دارای طیف قدرت نسبتاً محدودی هستند. مخصوصاً حرکت چرخش که خیلی تمرکز یافته شده است، که رفتاری شبیه یک سیستم درجه دو خیلی میرا دارد.

در بعضی از تقریبه‌ها مدل با بعد محدود بدست می‌آید. مدل ثابت میکند که تقریبه‌های فرض شده خیلی خوب هستند. مدل منتج شده در فرم فضای حالت و خصوصیات مهم آن توضیح داده شده است.



شکل (۱۱-۳): قطبهای مدل کشتی ($H = 10\text{ ft}$, $\omega_m = 0.72\text{ rad/s}$)

فصل چهارم

معرفی H_2 و شبیه سازی آن

روی کشتی

۴-۱- معرفی

در این فصل روش طراحی بر پایه تئوری کنترل بهینه را شرح خواهیم داد. تئوری مطلوب این فصل به نام مسئله خطی درجه دوم گوسی^۱ یا H_2 معروف است. جوابهای اصلی تئوری در این فصل بیان می شود. اما برای جزئیات کاملتر خواننده را به [۳۰]-[۳۶] ارجاع می دهیم. این منابع قضایای اساسی را به رسمیت می شناسند. این روش به طراح اجازه می دهد مقادیر تکین نسبت بازگشتی، در خروجی یا ورودی فرآیند، برای تعیین مقاوم بودن را شکل دهد. و رسیدن به عملکرد مورد نظر به طور خودکار بدست می آید. لازم نیست که در مورد خصوصیات فاز نگران باشیم و مکان هندسی مشخصات لازم نیست که امتحان شود.

مدل سیستم در فضای حالت به فرم

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \quad (۱-۴)$$

$$y = Cx + v \quad (۲-۴)$$

می باشد. در رابطه (۱-۴) عنصر u بردار سیگنال کنترل را نمایش می دهد؛ در رابطه (۲-۴) عنصر y نیز بردار خروجی اندازه گیری شده (که با v مخلوط شده است) را نمایش می دهد. بردار x نیز متغیر حالت این سیستم می باشد. w و v نیز نویز سفید هستند. این دو متغیر فرآیند تصادفی گوسی با میانگین صفر هستند. این دو متغیر ناپسته و دارای کوواریانس

$$E\{ww^T\} = W \geq 0, \quad E\{vv^T\} = V > 0 \quad (۳-۴)$$

هستند. یعنی رابطه

^۱ Linear Quadratic Gaussian (LQG)

$$E\{wv^T\} = 0 \quad (4-4)$$

برای دو متغیر برقرار است.

مسئله ای که برای طراحی کنترل بهینه مدنظر است حداقل نمودن تابع «هزینه»

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left\{\int_0^T (z^T Q z + u^T R u) dt\right\} \quad (5-4)$$

است در حالیکه

$$z = Mx \quad (6-4)$$

ترکیبی خطی از حالتها باشد. و

$$Q = Q^T \geq 0, \quad R = R^T \geq 0 \quad (7-4)$$

ماتریسهای وزنی باشند.

مسئله کنترل بهینه H_2 بوسیله تجزیه مقادیر تکین حل می شود. بدین صورت که ابتدا،

تخمین بهینه $\hat{x}$ از حالت x بدست می آوریم (بهینه یعنی اینکه $E\{(x - \hat{x})^T (x - \hat{x})\}$ مینیمم شود). آنگاه از این تخمین برای حل مسئله کنترل درجه دوم خطی معین استفاده می کنیم. جملات فوق نشان دهنده اینست که مسئله را به دو زیر مسئله کاهش دهیم.

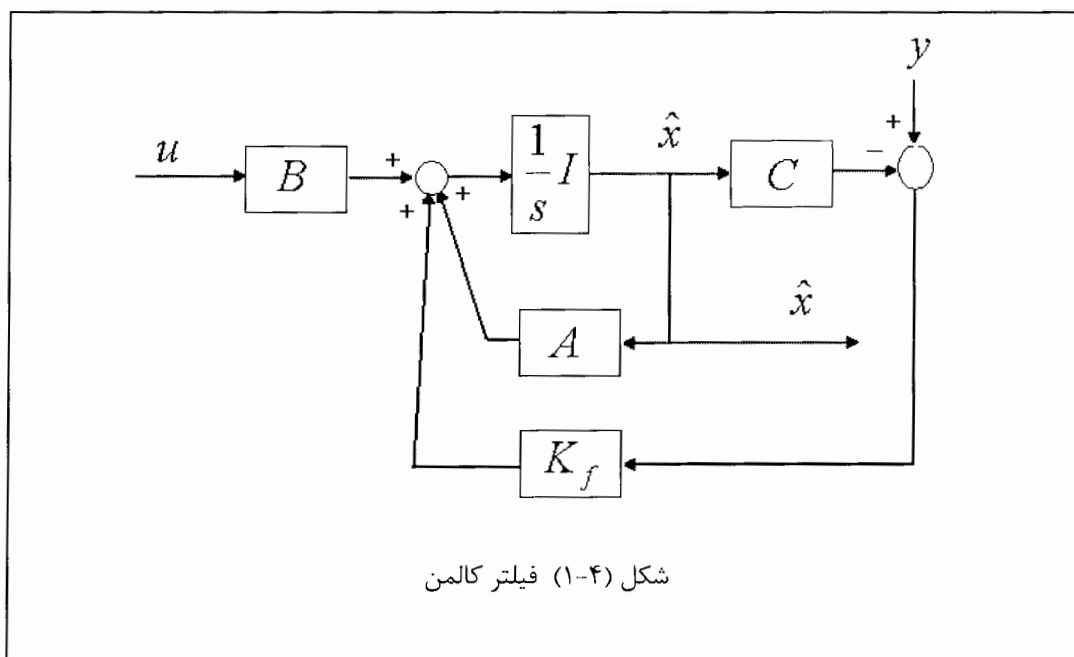
اولین زیر مسئله تخمین حالتها سیستم است. این تخمین بوسیله فیلتر کالمن انجام می

شود. شکل (4-1) دیاگرام بلوکی فیلتر کالمن را نشان می دهد. در این دیاگرام ساختمان ریتگر

حالت مشاهده می شود. ماتریس بهره K_f ، ریتگر حالت فیلتر کالمن است. فرمول بکار رفته برای

ماتریس بهره K_f در بخش بعدی خواهد آمد. خروجی فیلتر کالمن بردار تخمین $\hat{x}$ است. در حالیکه

برداری ورودی و بردار خروجی فرآیند، u و y ، ورودی فیلتر کالمن می باشند.



دومین زیر مسئله حداقل نمودن هزینه

$$\int_0^{\infty} (z^T Q z + u^T R u) dt \quad (۸-۴)$$

با بدست آوردن سیگنال کنترلی است. فرض

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (۹-۴)$$

را در نظر بگیرید.

برای حل این زیر مسئله از ماتریس فیدبک حالت استفاده خواهیم کرد. بردار سیگنال کنترل

u را تابع خطی از حالتها در نظر می گیریم. در این صورت از رابطه

$$u = -K_c x \quad (۱۰-۴)$$

استفاده خواهیم کرد؛ در حالیکه K_c ماتریس فیدبک حالت باشد.

گفتیم که می خواهیم با معادلات (۱-۴) تا (۷-۴) تابع هزینه (۵-۴) را حداقل نماییم. اما

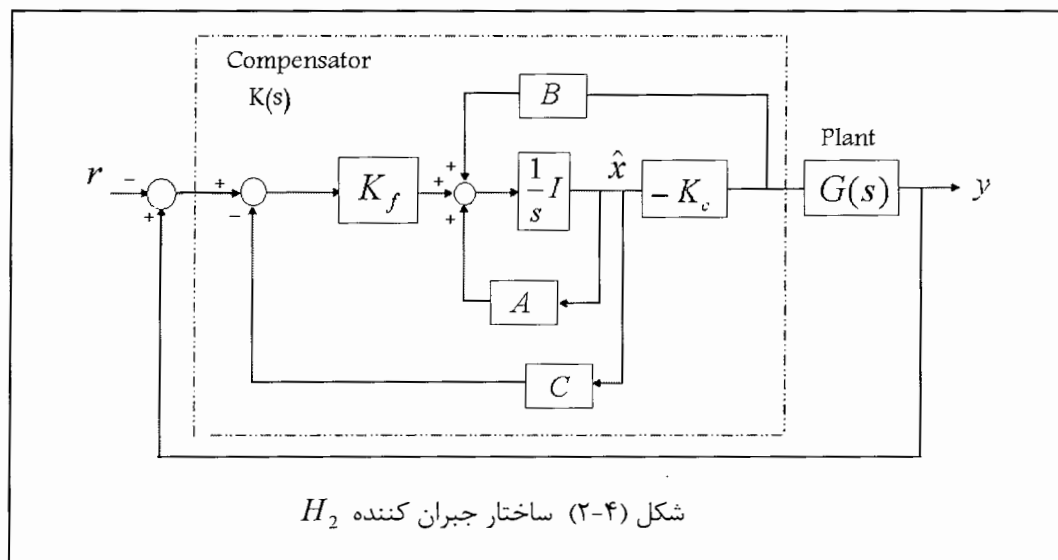
چیزهایی دیگر نیز در مسئله کنترل وجود دارد که بوسیله فرمولهای ریاضی بیان نمی شود. مانند

نامعینی مدل، غیرخطی بودن ها و نوعهای مختلفی از اغتشاش، که هیچ کدام به سادگی به نمایش

ریاضی آورده نمی شوند.

بعد از تخمین بردار حالت، آنگاه از یک ماتریس فیدبک حالت برای کنترل سیستم استفاده می‌کنیم. ترکیبی از این دو دیاگرام، اتصال متوالی فیلتر کالمن با ماتریس فیدبک حالت است. یک دیاگرام بلوگی در شکل (۲-۴) نشان داده شده است.

برای طراحی های مناسبتر و استفاده از مقادیر تکین که در دوره کنترل مقاوم رایج است به فصل ۵ از [۱۵] مراجعه شود.



۲-۴- حل مسئله H_2

ماتریس فیدبک حالت بهینه K_c از رابطه

$$K_c = R^{-1} B^T P_c \quad (۱۱-۴)$$

بدست می‌آید. در حالیکه P_c در معادله جبری ریکاتی

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R^{-1} B^T P_c + M^T Q M = 0 \quad (۱۲-۴)$$

صدق کند. و $P_c = P_c^T \geq 0$ (در اصل جواب زیادی برای (۱۲-۴) وجود دارد، اما تنها

جوابهایی با ماتریس مثبت نیمه معین مورد قبول است).

ماتریس بهره فیلتر کالمن از رابطه

$$K_f = P_f C^T V^{-1} \quad (۱۳-۴)$$

بدست می آید در حالیکه P_f در معادله جبری ریکاتی (که دوگان (۱۲-۴) است)

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + \Gamma W \Gamma^T = 0 \quad (14-4)$$

صدق کند و $P_f = P_f^T \geq 0$.

روشهای مختلفی برای حل (۱۲-۴) و (۱۴-۴) وجود دارد. در اینجا یک روش مستقیم توسط

مک فارلان^۱ و پاتر^۲ داریم، که نیاز به جبر خطی داریم.

ماتریس هامیلتونی^۳ (با بعد $2n \times 2n$ ، اگر n تعداد حالتها باشد)

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -M^T Q M & -A^T \end{bmatrix} \quad (15-4)$$

را در نظر بگیرید. اگر U ماتریس بردار ویژه ماتریس H باشد، آنگاه n ستون سمت چپ با بردار ویژه های مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی تطبیق دارد، و n ستون سمت راست با بردار ویژه های مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت تطبیق دارد (مقادیر ویژه های مثبت و مقادیر ویژه های منفی دارای اندازه یکسانی می باشند).

تقسیم بندی ماتریس U با بلوکهای $n \times n$ بصورت

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \quad (16-4)$$

است. آنگاه پاسخ (۱۲-۴) بصورت

$$P_c = U_{21} U_{11}^{-1} \quad (17-4)$$

است.

برای حل معادله دوگان (۱۴-۴)، لازم است جای A را با A^T ، B را با C^T ، R را با V و

$M^T Q M$ را با $\Gamma W \Gamma^T$ عوض نماییم و آنگاه روش مشابهی را بکار ببریم.

^۱ MacFarlane

^۲ Potter

^۳ Hamiltonian

اگر (۱۰-۴) را در (۹-۴) جایگذاری کنیم معادله

$$\dot{x} = (A - BK_c)x \quad (۱۸-۴)$$

بدست می آید که معادله سیستم حلقه بسته می باشد. مقادیر ویژه $A - BK_c$ میتواند نشان دهد که طرح فیدبک حالت فرضی پایدار مجانبی است.

از شکل (۱-۴) معادله حالت فیلتر کالمن دیده می شود با

$$\frac{d}{dx} \hat{x} = (A - K_f C) \hat{x} + Bu + K_f y \quad (۱۹-۴)$$

مقادیر ویژه $A - K_f C$ میتواند نشان دهد که فیلتر کالمن یک رؤیتگر پایدار مجانبی است.

معادله ترکیبی فیلتر کالمن/طرح فیدبک حالت بهینه رابطه (۲۰-۴) است.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK_c \\ K_f C & A - K_f C - BK_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma w \\ K_f v \end{bmatrix} \quad (۲۰-۴)$$

اگر ε را خطای تقریب در نظر بگیریم

$$\varepsilon = x - \hat{x} \quad (۲۱-۴)$$

آنگاه (۲۰-۴) را می توان بصورت

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma w \\ \Gamma w - K_f v \end{bmatrix} \quad (۲۲-۴)$$

نوشت که نشان می دهد مقادیر ویژه حلقه بسته از فرآیند جبران ساز H_2 از مقادیر ویژه از طرح فیدبک حالت و مقادیر ویژه فیلتر کالمن تشکیل شده است. بنابراین طرح کلی (تحت فرض اظهار شده) پایدار داخلی است.

۳-۴- طراحی کنترل کننده H_2 برای مدل کشتی

برای طراحی کنترل کننده H_2 با استفاده از دستور LQE در نرم افزار MATLAB 7.0

ابتدا نیاز داریم که ماتریسهای Γ ، W و V را انتخاب کنیم (که در روابط (۱-۴)، (۲-۴) و (۳-۴)

ظاهر شده اند) و از روابط (۱۳-۴) و (۱۴-۴) ماتریس K_f را بدست آوریم.

باید بنویسیم:

$$K_f = LQE(A, \Gamma, C, W, V) \quad (۲۳-۴)$$

در رابطه بالا A و C را از مدل کشتی خواهیم داشت، و برای سه ماتریس دیگر باید سه ماتریس تعریف کنیم که نیاز به تکرار در استفاده از روابط داریم.

اولین و ساده ترین انتخاب برای این سه ماتریس به صورت زیر است:

$$\Gamma = B$$

$$W = I_6$$

$$V = I_3$$

برای پیدا نمودن ماتریس K_c نیز نیاز به تعریف ماتریسهای Q ، R و M داریم که با توجه به اینکه رابطه (۱۲-۴) دوگان رابطه (۱۴-۴) می باشد می توان از این انتخابها سود برد.

$$M = C^T$$

$$Q = I_3$$

$$R = I_6$$

و با استفاده از رابطه (۴۴-۴) می توانیم ماتریس K_c را بدست آوریم.

$$K_c = LQE(A^T, M, B^T, Q, R) \quad (۲۴-۴)$$

با داشتن این انتخابها پاسخ پله ای که بدست می آید پاسخ مطلوب نیست.

بیشترین مقدار پاسخ پله وقتی که ورودی اول پله باشد برابر 8×10^{-16} می باشد و بیشترین مقدار پاسخ پله وقتی که ورودی دوم پله باشد برابر 8×10^{-11} می باشد و بیشترین مقدار پاسخ پله وقتی که ورودی سوم پله باشد برابر 2×10^{-11} می باشد.

با تکرار در استفاده از دستورهای نرم افزار MATLAB بهترین پاسخ را برای این سیستم به

صورت زیر خواهیم داشت:

$$M = C^T$$

$$Q = 100000 \times I_3$$

$$R = 10^{-14} \times I_6$$

$$\Gamma = B$$

$$W = 10^5 \times I_6$$

$$V = 10^{-11} \times I_3$$

در این حالت قطبهای کنترل کننده برابر

$$\begin{bmatrix} -7.9 \times 10^6 \\ -399 \\ -134 + 134i \\ -134 - 134i \end{bmatrix}$$

می باشند.

با انتخاب ماتریسهای فوق پاسخ پله ای که مشاهده می شود به صورت شکل (۳-۴) و (۴-۴)

و (۵-۴) است؛ که در این حالت مشخصات پاسخ پله به صورت زیر است:

در شکل (۳-۴) دیده می شود که وقتی به ورودی اول ورودی پله بدهیم، فقط خروجی اول

تحت تأثیر قرار خواهد گرفت و دو خروجی دیگر به سمت صفر^۱ میل خواهند کرد.

در شکل‌های (۴-۴) و (۵-۴) نیز همین موضوع دیده می شود. در شکل (۴-۴) وقتی به

ورودی دوم ورودی پله بدهیم، فقط خروجی دوم تحت تأثیر قرار خواهد گرفت و دو خروجی دیگر به

سمت صفر میل خواهند کرد. در شکل (۵-۴) وقتی به ورودی سوم ورودی پله بدهیم، فقط خروجی

سوم تحت تأثیر قرار خواهد گرفت و دو خروجی دیگر به سمت صفر میل خواهند کرد

با انتخاب ماتریسهای فوق مشخصات پاسخ پله به صورت زیر است:

هر جا صحبت از صفر شدن دو خروجی دیگر می شود بیانگر اینست که مقدار نهایی خیلی کوچک خواهد شد و ما آن را می توانیم صفر در نظر بگیریم.

برای ورودی اول: (فقط خروجی اول بحث می شود).

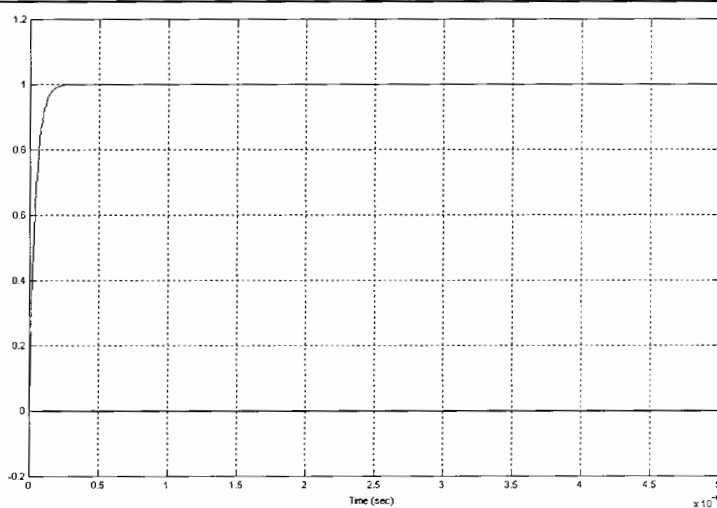
۱. زمان صعود: $T_r = 9.12 \times 10^{-6}$ sec

۲. زمان نشست: $T_s = 1.63 \times 10^{-5}$ sec

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M_p = 0$ %



شکل (۳-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با کنترل کننده H_2

برای ورودی دوم: (فقط خروجی دوم بحث می شود).

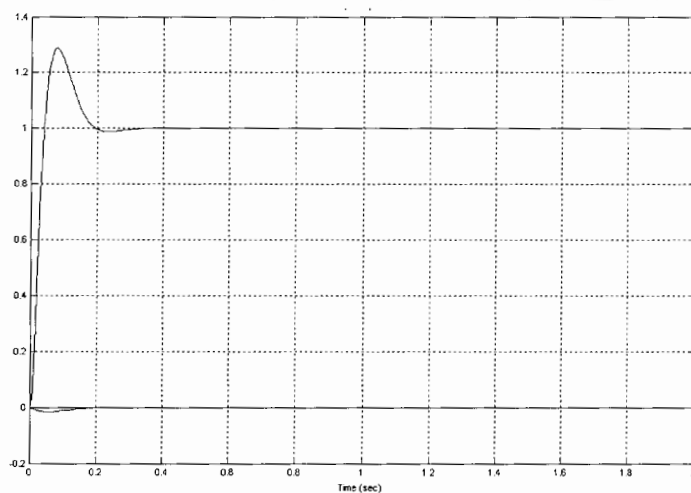
۱. زمان صعود: $T_r = 0.0261$ sec

۲. زمان نشست: $T_s = 0.177$ sec

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M_p = 28.8$ %



شکل (۴-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با کنترل کننده H_2

برای ورودی سوم: (فقط خروجی سوم بحث می شود).

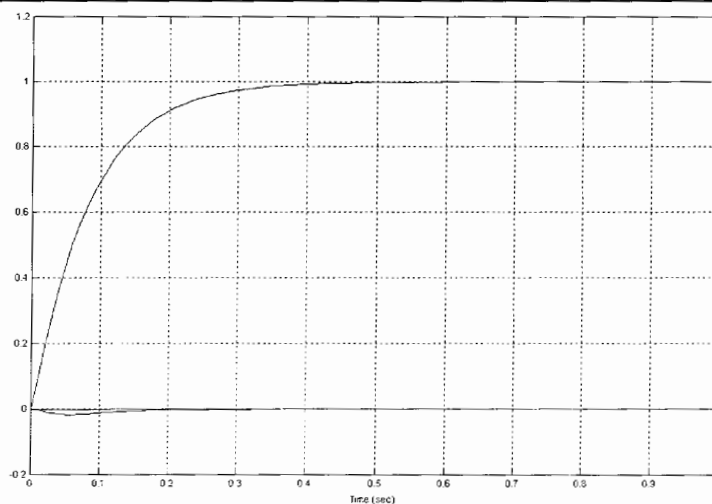
۱. زمان صعود: $T_r = 0.179 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.322 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 0.998$

۴. خطا: $e = 0.002$

۵. فراجاهش: $M = 0 \%$

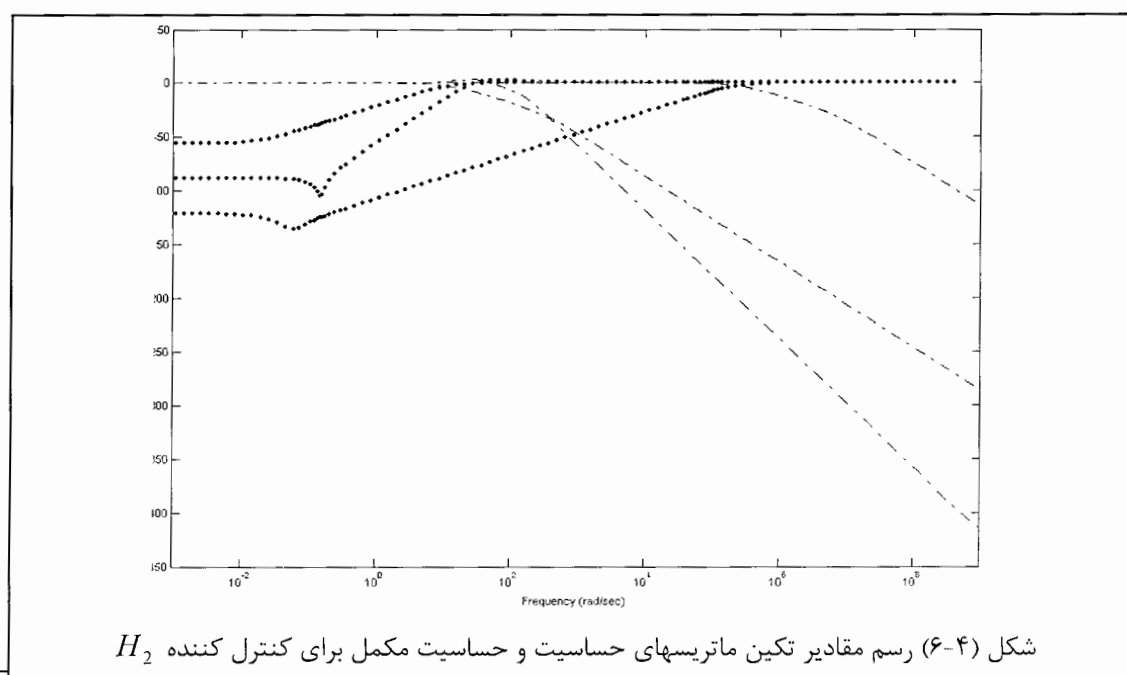


شکل (۵-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با کنترل کننده H_2

مشخصات این کنترل کننده به صورت زیر می باشد:

در این کنترل کننده باید ۶ ماتریس را برای طراحی انتخاب کنیم که این ۶ ماتریس دارای ۱۳۰ عنصر می باشد. و انتخاب ۶ ماتریس با دشواریهایی همراه است که گاهی اوقات باید آن قدر تکرار نمود تا جواب بهینه پیدا شود.

در این کنترل کننده شکل دهی مقدار تکین در اختیار ما نیست. به شکل (۴-۶) دقت نمایید که در کمتر از فرکانس $2/51$ رادیان بر ثانیه مقدار ماتریس حساسیت مکمل از سه^۱ مقدار $1/0.046$ و $0/9902$ و $0/9993$ و 1 و 1 در فرکانس صفر خواهد رسید. باز اگر به مقادیر تکین نگاهی بیندازیم می بینیم که سه مقدار تکین ماتریس حساسیت مکمل از یک نقطه خاص به سمت صفر میل نمی کنند. به همین دلیل سه مقدار مختلف برای زمان صعود و زمان نشست سه پاسخ پله مشاهده می کنیم. و همچنین در بیشتر از فرکانس 1000000 رادیان بر ثانیه مقدار ماتریس حساسیت از سه مقدار $0/9989$ و 1 و $1/0.016$ به مقدار 1 در فرکانس بینهایت خواهد رسید. در این مقدار تکین نیز سه مقدار تکین ماتریس حساسیت از یک نقطه خاص به سمت صفر میل نمی کنند.



^۱ چون ماتریس حساسیت دارای ۳ سطر و ۳ ستون می باشد؛ به همین دلیل دارای سه مقدار تکین می باشد

در این کنترل کننده ماتریس حالت دارای بعد کمی است؛ یعنی تعداد قطبهای کنترل کننده کم است. تعداد قطبهای این کنترل کننده برابر ۴ است.

۴-۴- بررسی مقاوم بودن H_2

این قسمت مهمترین قسمت برای دریافت مقاوم بودن سیستم است.

تغییرات در ماتریس فضای حالت را به سه قسمت تقسیم می نماییم:

۴-۴-۱- تغییرات در ماتریس فضای حالت با یک عدد ضرب شونده

اگر تغییرات به صورت

$$A \Rightarrow 0.9 \times A$$

$$B \Rightarrow 0.9 \times B$$

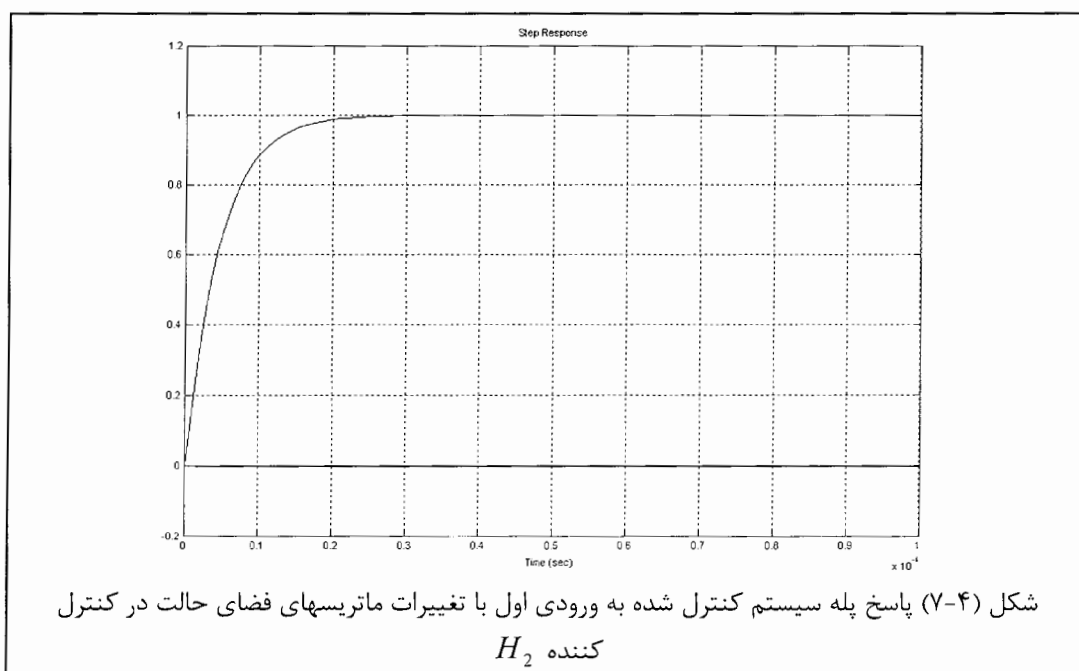
$$C \Rightarrow 0.9 \times C$$

$$D \Rightarrow 0.9 \times D$$

باشد. آنگاه پاسخها به صورت زیر می باشد. شکلهای (۷-۴)، (۸-۴) و (۹-۴) سه پاسخ پله

برای سه ورودی می باشد که برای هر ورودی مشخصات خروجی متناظر را نوشتیم تا مقایسه ای بین

این سه پاسخ و پاسخهای قبلی داشته باشیم.



برای ورودی اول: (فقط خروجی اول بحث می شود).

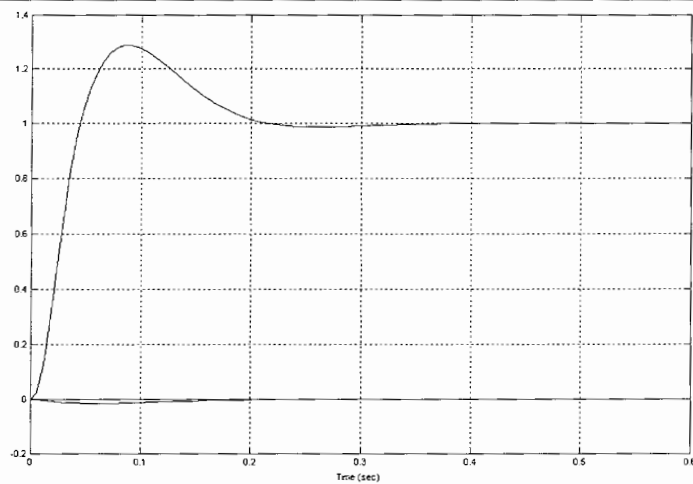
۱. زمان صعود: $T_r = 1.01 \times 10^{-5} \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 1.81 \times 10^{-5} \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M_p = 0 \%$



شکل (۴-۸) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات ماتریسهای فضای حالت در کنترل کننده H_2

برای ورودی دوم: (فقط خروجی دوم بحث می شود).

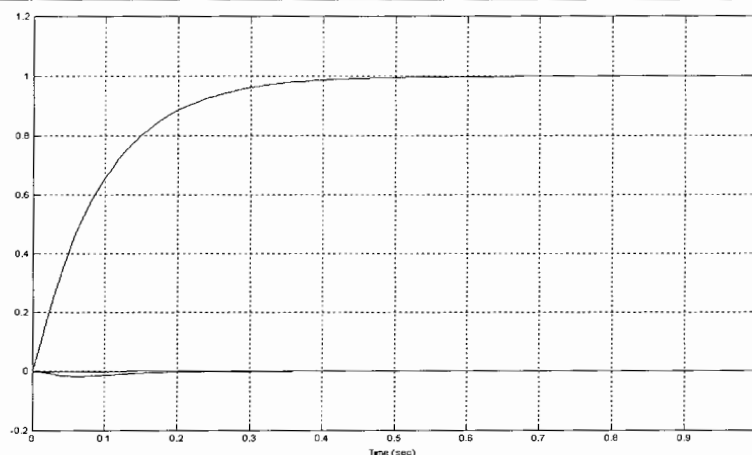
۱. زمان صعود: $T_r = 0.0289 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.196 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M_p = 28.8 \%$



شکل (۹-۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با تغییرات ماتریسهای فضای حالت در کنترل کننده H_2

برای ورودی سوم: (فقط خروجی سوم بحث می شود).

۱. زمان صعود: $T_r = 0.199 \quad \text{sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.358 \quad \text{sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 0.998$

۴. خطا: $e = 0.002$

۵. فراجهش: $M = 0 \quad \%$

همانطور که می بینیم هیچ تغییری در مقدار نهایی، خطا و فراجهش مشاهده نمی شود. اما در زمان صعود و زمان نشست در حدود ۱۱٪ افزایش داشتیم. حال اگر عدد ضرب شونده از ۱ بیشتر شود عکس این عمل اتفاق می افتد، یعنی زمان صعود و زمان نشست کمتر از حالت اولیه می شود. جدول زیر نشان دهنده این تغییرات است:

جدول (۱-۴) اثرات تغییر ماتریسهای حالت در پاسخهای پله

کنترل کننده H_2	مقدار نهایی و خطا	زمان صعود	زمان نشست	فراجهش
عدد ضرب شونده ۰/۹ باشد	بدون تغییر	افزایش	افزایش	بدون تغییر

عدد ضرب شونده ۱/۱ باشد	بدون تغییر	کاهش	کاهش	بدون تغییر
------------------------	------------	------	------	------------

۴-۴-۲- تغییرات در ماتریس فضای حالت با تغییر قطبهای سیستم

اگر قطبهای سیستم را تغییر دهیم آنگاه شکلهای زیر حاصل می شود:

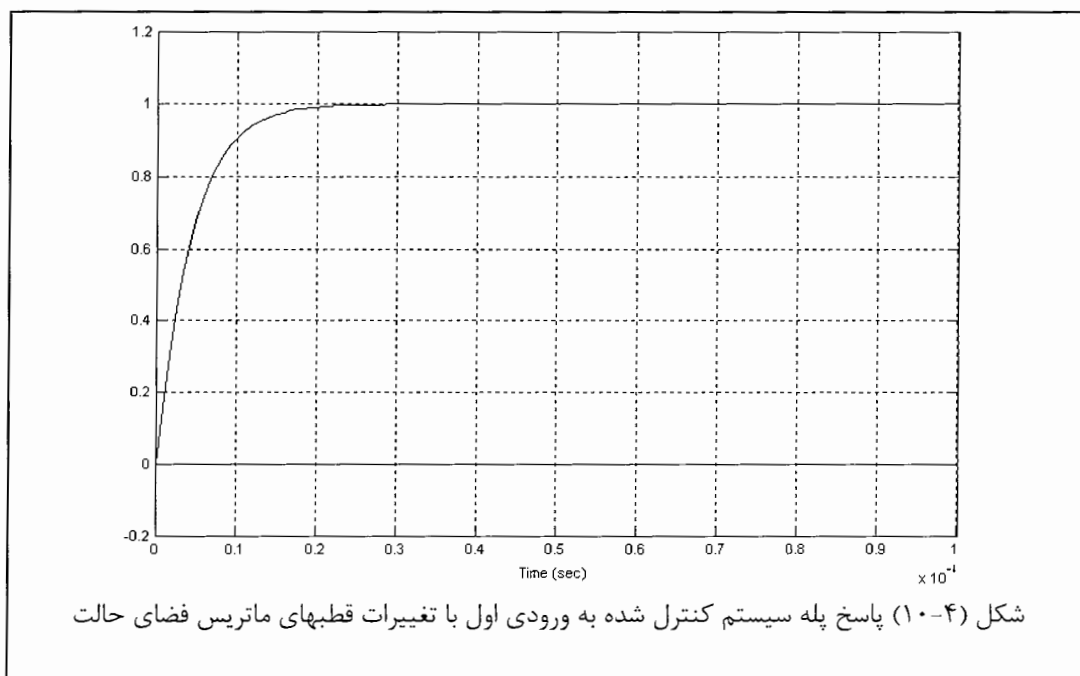
قطبهای سیستم هر کدام به اندازه ۰/۰۱ افزایش پیدا کرده اند؛ یعنی قطبهای زیر را داریم:

$$\begin{bmatrix} -0.0101 + 0.0594i \\ -0.0101 - 0.0594i \\ -0.0001 + 0.1536i \\ -0.0001 - 0.1536i \end{bmatrix}$$

آنگاه پاسخها به صورت زیر می باشد. شکلهای (۴-۱۰)، (۴-۱۱) و (۴-۱۲) سه پاسخ پله برای

سه ورودی می باشد که برای هر ورودی مشخصات خروجی متناظر را نوشتیم تا مقایسه ای بین این

سه پاسخ و پاسخهای اصلی داشته باشیم.



برای ورودی اول: (فقط خروجی اول بحث می شود).

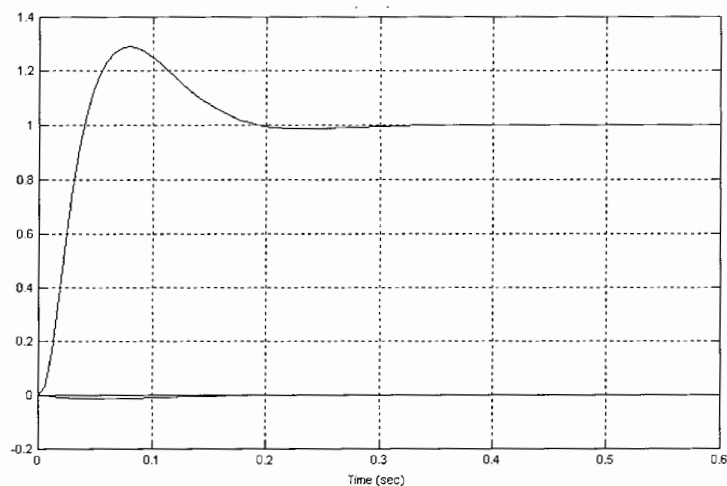
۱. زمان صعود: $T_r = 9.12 \times 10^{-6} \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 1.63 \times 10^{-5} \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M = 0 \%$



شکل (۴-۱۱) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات قطبهای ماتریس فضای حالت

برای ورودی دوم: (فقط خروجی دوم بحث می شود).

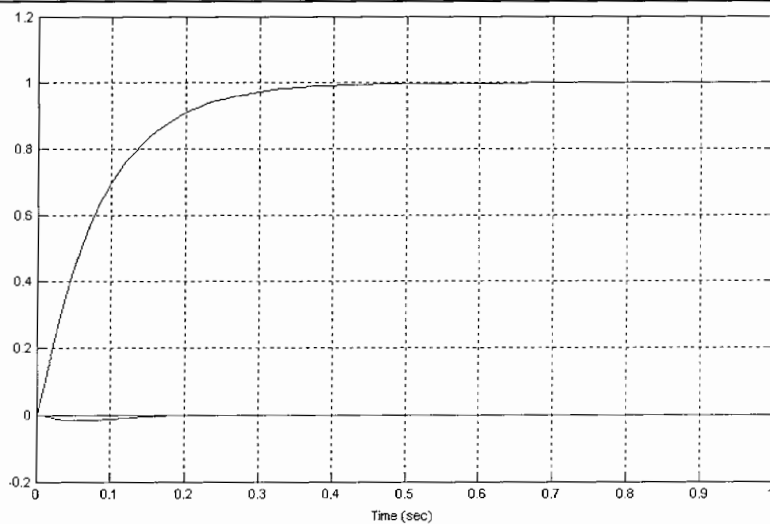
۱. زمان صعود: $T_r = 0.0261 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.177 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M = 28.8 \%$



شکل (۴-۱۲) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با تغییرات قطبهای ماتریس فضای حالت

برای ورودی سوم: (فقط خروجی سوم بحث می شود).

۱. زمان صعود: $T_r = 0.18 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.323 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 0.999$

۴. خطا: $e = 0.001$

۵. فراجش: $M = 0 \%$

۴-۳-۴- تغییرات در سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج

حال اگر سرعت کشتی را از $U = 15.5 \text{ ft/s}$ به $U = 10 \text{ ft/s}$ و همزمان زاویه کشتی را با امواج از $\phi = 45^\circ$ به $\phi = 90^\circ$ تغییر دهیم. آنگاه پاسخهای زیر را برای کنترل کننده فوق خواهیم داشت: شکلهای (۴-۱۳)، (۴-۱۴) و (۴-۱۵) سه پاسخ پله برای سه ورودی می باشد که برای هر ورودی مشخصات خروجی متناظر را نوشتیم تا مقایسه ای بین این سه پاسخ و پاسخهای اصلی داشته باشیم.

برای ورودی اول: (فقط خروجی اول بحث می شود).

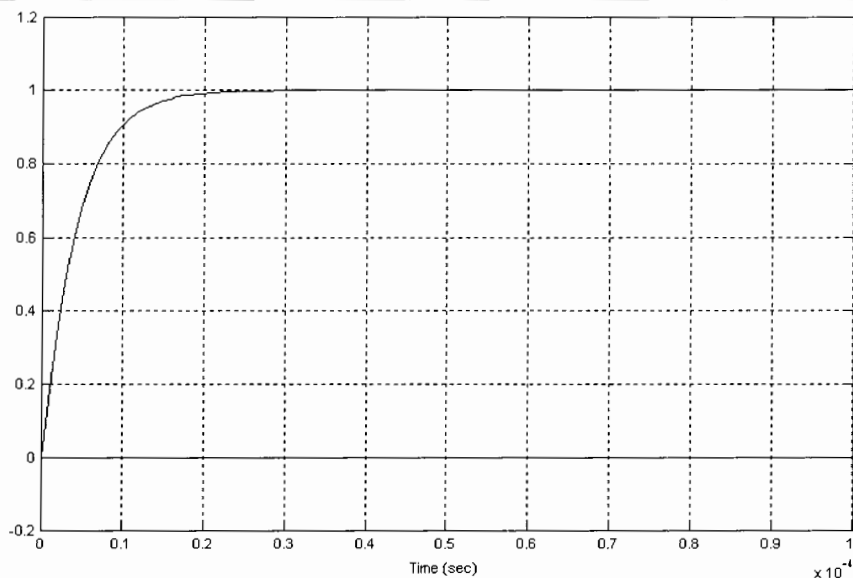
۱. زمان صعود: $T_r = 9.12 \times 10^{-6} \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 1.63 \times 10^{-5} \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجش: $M = 0 \%$



شکل (۴-۱۳) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با تغییرات سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج

برای ورودی دوم: (فقط خروجی دوم بحث می شود).

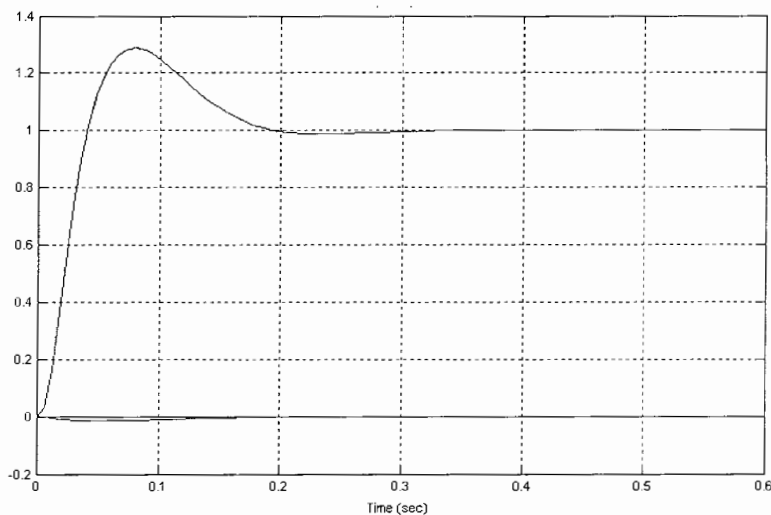
۱. زمان صعود: $T_r = 0.0261 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.177 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M = 28.8 \%$



شکل (۴-۱۴) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج

برای ورودی سوم: (فقط خروجی سوم بحث می شود).

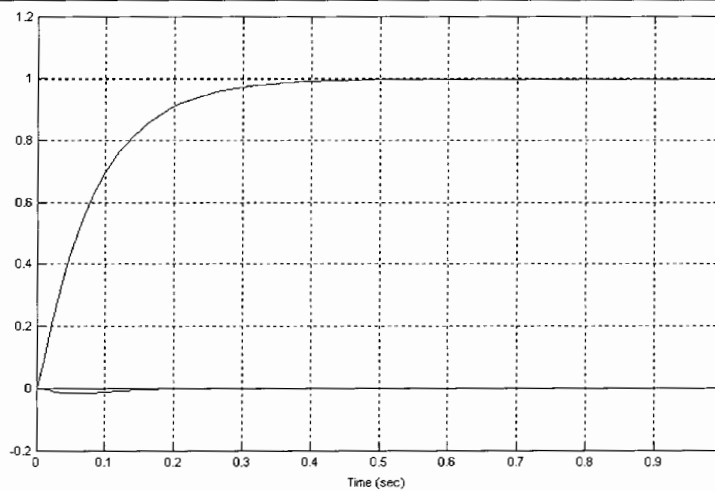
۱. زمان صعود: $T_r = 0.179 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.322 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 0.998$

۴. خطا: $e = 0.002$

۵. فراجش: $M = 0 \%$

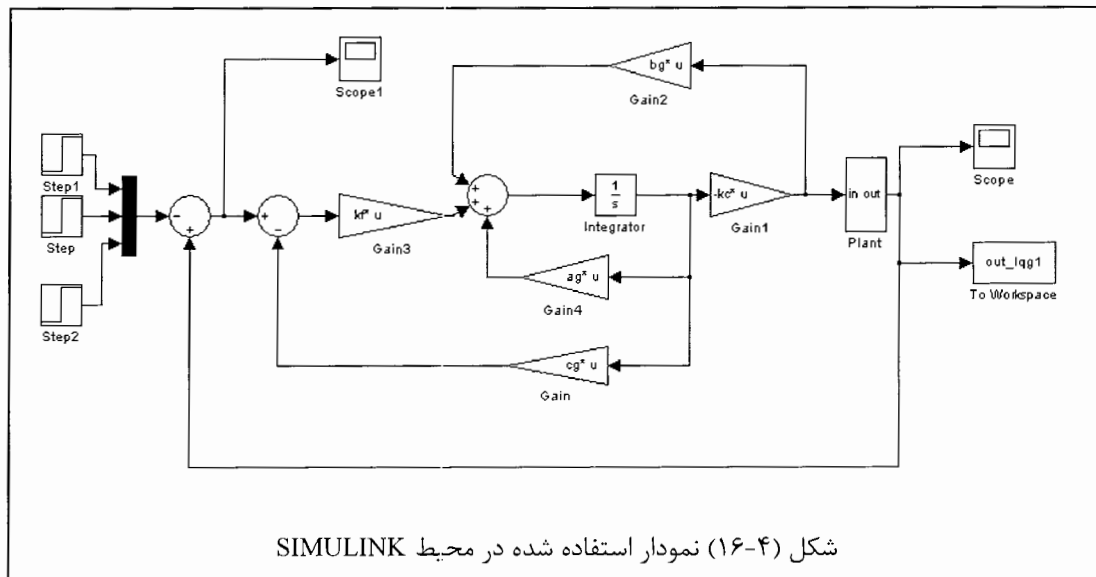


شکل (۴-۱۵) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با تغییرات سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج

همان طور که از شکل‌های اخیر مشاهده می شود مدل کشتی با کنترل کننده H_2 در مقابل تغییرات پارامترها مقاوم می باشد. لازم به ذکر است که همان طور بیان نمودیم در حالی که از کنترل کننده H_2 استفاده می کنیم نباید نگران جداسازی ورودی و خروجی ها باشیم. زیرا در همه شکل‌های فوق مشاهده کردیم که خروجی ۱ با ورودی ۱ و خروجی ۲ با ورودی ۲ و خروجی ۳ با ورودی ۳ تحریک می شود و دو خروجی دیگر به سمت صفر میل می کنند.

در ضمن از [۴۰] نیز استفاده شده است که در محیط SIMULINK این شکل را استفاده

نمودیم:



فصل پنجم

معرفی H_∞ و شبیه سازی آن

روی سیستم کشتی

۵-۱- مقدمه

این فصل در مورد کنترل بهینه H_∞ (تلفظ به صورت اچ-اینفینیتی) میباشد. توضیح در مورد طراحی فیدبکی داده میشود.

در فصل دوم گفتیم که میتوانیم نمایش صریحی از نامعینیها را با یک مدل وابسته به سیستم اصلی نشان دهیم. نمایش استاندارد سیستم شناخته شده غیرصریح تحت کنترل فیدبکی در شکل (۵-۱) نمایش داده است. در این نمایش «ورودی خارجی» w یک بردار از تمام سیگنالهایی که به سیستم وارد میشوند است، و «خطا» z یک بردار از تمامی سیگنالهایی که برای نشان دادن خصوصیات از رفتار سیستم حلقه بسته نیاز داریم است. u بردار سیگنال کنترل میباشد، و y بردار اندازه گیری شده از خروجی میباشد.

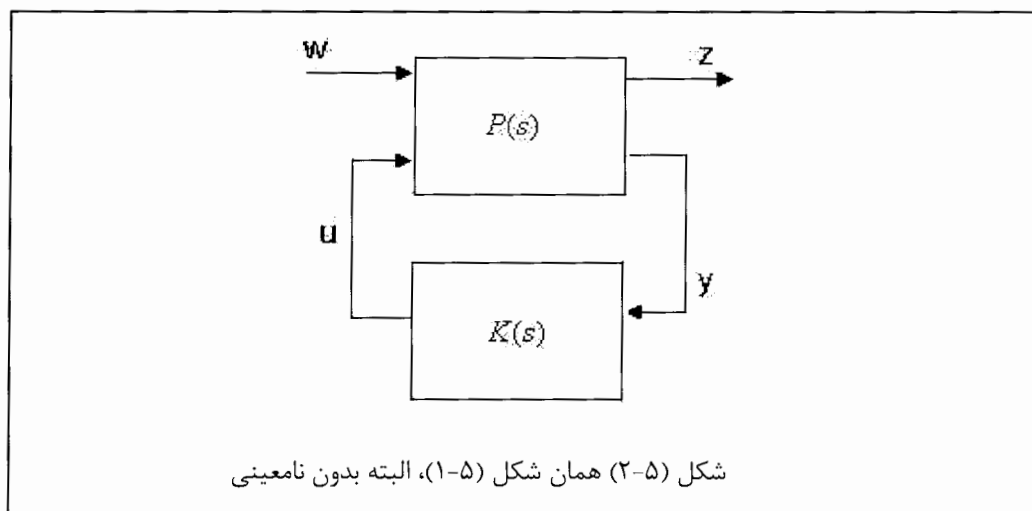
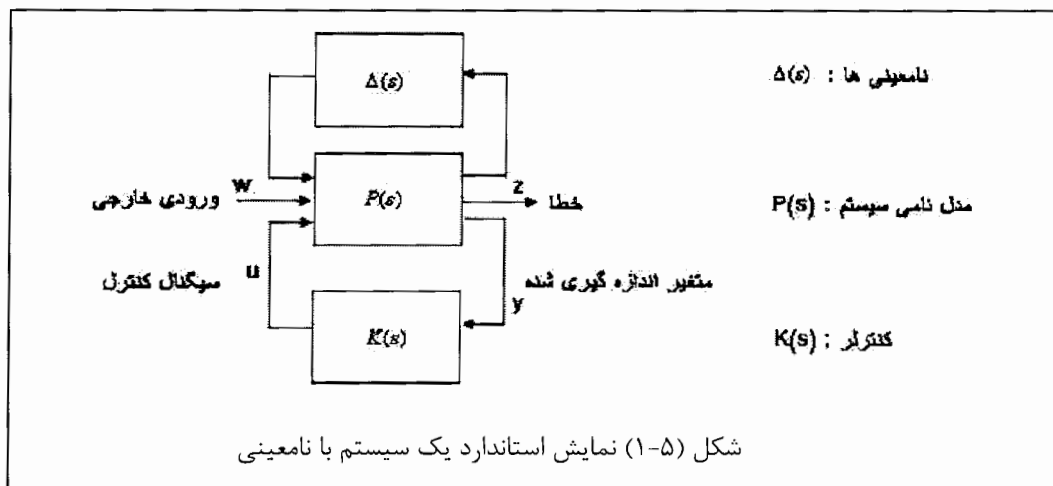
در این فصل ابتدا با نمایش نشان داده شده در شکل (۵-۲)، که همان شکل (۵-۱) میباشد با این تفاوت که نامعینی جمع شونده $\Delta(s)$ نشان داده نشده است. $P(s)$ از مدل نامی سیستم نتیجه شده است. گرچه، ممکن است شامل تابعهای وزنی که به مسئله طراحی مربوط هستند باشد.

فرض کنید $P(s)$ تقسیم بندی شده باشد به صورت

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (۵-۱)$$

در حالیکه

$$y = P_{21}w + P_{22}u \quad (2-5)$$



$$z = P_{11}w + P_{12}u \quad (3-5)$$

اگر از رابطه $u = Ky$ استفاده نماییم داریم:

$$y = P_{21}w + P_{22}(Ky) \quad (4-5)$$

$$y = (I - P_{22}K)^{-1} P_{21}w \quad (5-5)$$

$$z = P_{11}w + P_{12}u = P_{11}w + P_{12}(Ky) = P_{11}w + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1} P_{21}w \quad (6-5)$$

عبارت در میان براکتها در معادله (۶-۵) به کرار در این فصل تکرار میشود، به همین دلیل با عبارت ساده تر که برای این عبارت در نظر گرفته ایم نشان می دهیم. این عبارت ساده تر را با $F_1(P, K)$ نمایش می دهیم، که میتوانیم معادله (۶-۵) را دوباره با عبارت

$$\begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}u \\ &= P_{11}w + P_{12}(Ky) \\ &= P_{11}w + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}w \\ &= F_1(P, K)w \end{aligned} \quad (۷-۵)$$

بازنویسی کنیم.

با تعریف مشخصی از w و z (یا، معادل آن، $P(s)$)، آنگاه برای هر کنترل کننده $K(s)$ که حلقه بسته را پایدار نگهدارد، کنترل کننده ای که در رابطه

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \|F_1(P, K)\|_{\infty} \\ &\text{for all stable controller } K \end{aligned} \quad (۸-۵)$$

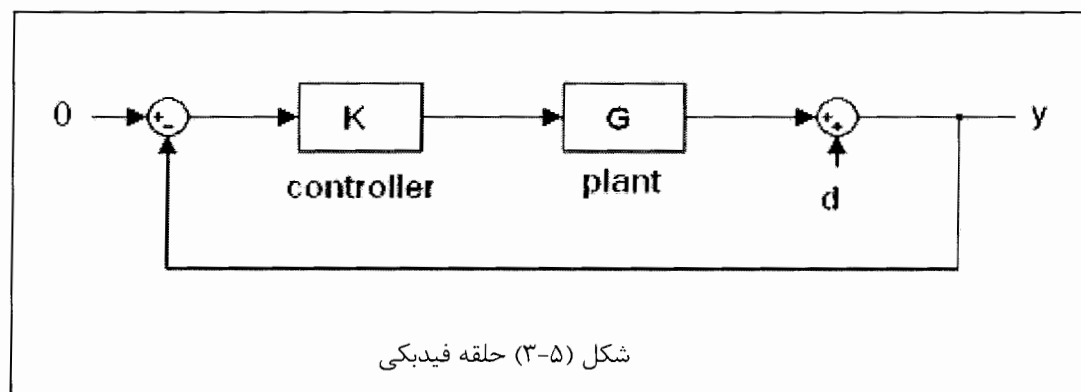
صدق کند، پاسخ مطلوب برای کنترل کننده H_{∞} می باشد، در حالیکه اندازه $\|\bullet\|_{\infty}$ را در بخشهای قبل تعریف کرده ایم.

این عبارت به نام مسئله بهینه سازی H_{∞} معروف است.

۵-۲- یک مثال: حداقل نمودن حساسیت

بگذارید ابتدا به مثال ساده ای توجه کنیم. فرض کنید یک حلقه فیدبکی را در نظر بگیرید که

در شکل (۳-۵) آمده است.



برای اینکه همه چیز امکان ساده بودن را فراهم کنیم، همه سیگنالها را عددی در نظر میگیریم، و G را نیز پایدار در نظر میگیریم. فرض میکنیم که میدانیم که اغتشاش چگونه است، اما میدانیم که طیف فرکانسی آن در بازه فرکانسی $0 \leq \omega \leq \omega_b$ است. یک هدف طراحی قابل قبول اینست که کنترل کننده K را به طوری پیدا کنیم که در بدترین حالت، خروجی به ازای هر اغتشاش d حداقل شود (و حلقه پایدار باشد، البته)، و بتوانیم مسئله

$$\text{minimize } \|S\|_{\infty} \quad (9-5)$$

را حل کنیم یا، معادل آن را

$$\text{minimize } \sup_{\omega} |S(j\omega)| \quad (10-5)$$

در حالیکه $S = (I + GK)^{-1}$ تابع حساسیت است. این هدف به صورتی محقق میشود که محدودیت در بازه فرکانسی که اغتشاش اتفاق می افتد انجام شود، یعنی در فرکانسهایی که اغتشاش مقدار دارد تابع حساسیت (تقریباً) صفر شود، و در فرکانسهایی که اغتشاش مقدار صفر دارد تابع حساسیت مقدار داشته باشد. میتوانیم یک تابع انتقال (پایدار، مینیمم فاز) $W(s)$ با این خصوصیات

$$|W(j\omega)| \cong 1, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_b \quad (11-5)$$

و

$$|W(j\omega)| \ll 1, \quad \omega > \omega_b \quad (12-5)$$

پیدا کنیم.

و آنگاه این مسئله را مطرح میکنیم که

$$\text{minimize } \sup_{\omega} |W(j\omega)S(j\omega)| \quad (13-5)$$

فرض کنید که تعریف نماییم

$$Q = K(I + GK)^{-1} \quad (14-5)$$

آنگاه میتوانیم دوباره S را با استفاده از ترمهای G و Q به صورت

$$S = I - GQ \quad (۱۵-۵)$$

بنویسیم. به علاوه، بررسی کردن عبارات

$$(I + KG)^{-1} K = Q \quad (۱۶-۵)$$

$$(I + KG)^{-1} = I - QG \quad (۱۷-۵)$$

و

$$(I + KG)^{-1} G = (I - GQ)G \quad (۱۸-۵)$$

نیز ساده است.

چونکه Q در هر چهار فرمول ظاهر شده است، و چون G را پایدار در نظر میگیریم، میتوانیم فوری پایداری حلقه بسته را حدس بزنیم اگر Q پایدار باشد، زیرا هر چهار فرمول از این دو ماتریس پایدار تشکیل شده است. بیش از آن، حلقه بسته پایدار است اگر Q پایدار باشد، برای مثال Q ناپایدار باشد آنگاه (۱۶-۵) ناپایدار خواهد بود، و آنگاه کل سیستم ناپایدار خواهد بود. میتوانیم همچنین به (۱۴-۵) نگاه کنیم که K سره خواهد بود (تحقق پذیر) فقط اگر Q سره باشد (برای K ی سره، $|S| \rightarrow \infty$ as $Q \rightarrow K$)، و از (۱۹-۵) که در زیر آمده است باید بتوانیم استنباط کنیم که Q سره خواهد بود فقط اگر K سره باشد. از ترکیب این مشاهدات با (۱۴-۵)، هر کنترل کننده پایدار کننده تحقق پذیر را با

$$K = (I - QG)^{-1} Q \quad (۱۹-۵)$$

داشته باشیم.

در حالیکه پارامتر Q در همه حال پایدار باشد، توابع انتقال پایدار هستند. این عبارت را با نام پارامتری کردن یولا^۱ همه کنترل کننده های پایدار مینامند. میتوانیم فرمول بهینه سازی خود را با توجه به کمک (۵-۱۴) به صورت

$$\min_{stable\ Q} \sup_{\omega} |W(I - GQ)(j\omega)| \quad (۵-۲۰)$$

دوباره نویسی کنیم.

۵-۳- فرموله کردن مسئله H_{∞}

۵-۳-۱- حداقل کردن حساسیت

در ابتدا، بگذارید حقیقتاً تابع حساسیت را مانند دو بخش قبل قرار دهیم. برای این کار، از فرمول همیشگی برای نوشتن

$$W(I + GK)^{-1} = W[I - GK(I + GK)^{-1}] \quad (۵-۲۱)$$

استفاده میکنیم. در حالیکه به فرمول

$$F_1(P, K) = W(I + GK)^{-1} \quad (۵-۲۲)$$

نیاز داریم.

در مقایسه ۵-۲۲ با ۵-۳ استنباط زیر را خواهیم داشت که

$$P_{22} = -G, \quad P_{21} = I, \quad P_{12} = -WG, \quad P_{11} = W \quad (۵-۲۳)$$

خواننده میتواند این تساوی ها را بررسی کند تا انتخاب کند $w=d$ و $z=Wy$ در حالیکه d و y

متغیرهای اغتشاش و خروجی هستند، به ترتیب، که در شکل (۵-۳) نشان داده شده است.

نکته اینست که از این فرمول میفهمیم که باید عبارت $\|WS\|_{\infty}$ را برای سیستم چندمتغیره

حداقل کنیم. در این موضوع P_{21} و P_{11} همیشه مربعی هستند، در حالیکه P_{12} و P_{22} بعدی شبیه

بعد ماتریس تابع انتقال G خواهند داشت.

^۱ Youla parameterization

۵-۳-۲- موضوع مختلط مقاوم بودن و عملکرد

فرض کنید می‌خواهیم عملکرد خوبی در رد اغتشاش فراهم کنیم، و پایداری را در حضور نامعینی بدون ساختار ضرب شونده خروجی نگهداریم. یعنی، می‌خواهیم که حساسیت S و تابع انتقال حلقه بسته $I-S$ را کوچک نگهداریم. اما همزمان این عمل انجام نمی‌شود، البته، اما می‌توانیم در هر فرکانسی اولی یا دومی را کوچک نگهداریم. می‌توانیم این موضوع را به صورت

$$F_1(P, K) = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 (I - S) \end{bmatrix} \quad (۲۴-۵)$$

بنویسیم.

در حالیکه W_1 و W_3 ماتریسهای وزن وابسته به فرکانس هستند.

در مقایسه ۲۴-۵ با ۳-۵ استنباط زیر را خواهیم داشت که

$$P_{22} = -G, \quad P_{21} = I, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} -W_1 G \\ W_3 G \end{bmatrix}, \quad P_{11} = \begin{bmatrix} W_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۲۵-۵)$$

۵-۳-۳- الگوریتم گلوور-دویل^۱ برای مسئله H_∞ کلی

الگوریتمی که در این بخش گفته میشود از [۳۸] آورده شده است؛ برای دیدن اثباتی که برای این قضیه آمده است به [۳۹] مراجعه شود.

این الگوریتم برای کنترل کننده های K پایدارکننده حلقه بسته حاصل میشود، برای مثال

$$\|F_1(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (۲۶-۵)$$

برای بعضی انتخاب از مقدار γ ، برای هر کنترل کننده ای که موجود است.

بنابراین مسأله فوق را به شرح زیر می‌توانیم بیان کنیم:

با داشتن P, K را چنان پیدا نماییم که:

۱- $F_1(P, K)$ پایدار داخلی باشد.

^۱ Glover-Doyle

$$F_1(P, K) \leq \gamma \quad (27-5)$$

۴-۵- شکل دهی حلقه مقدار تکین

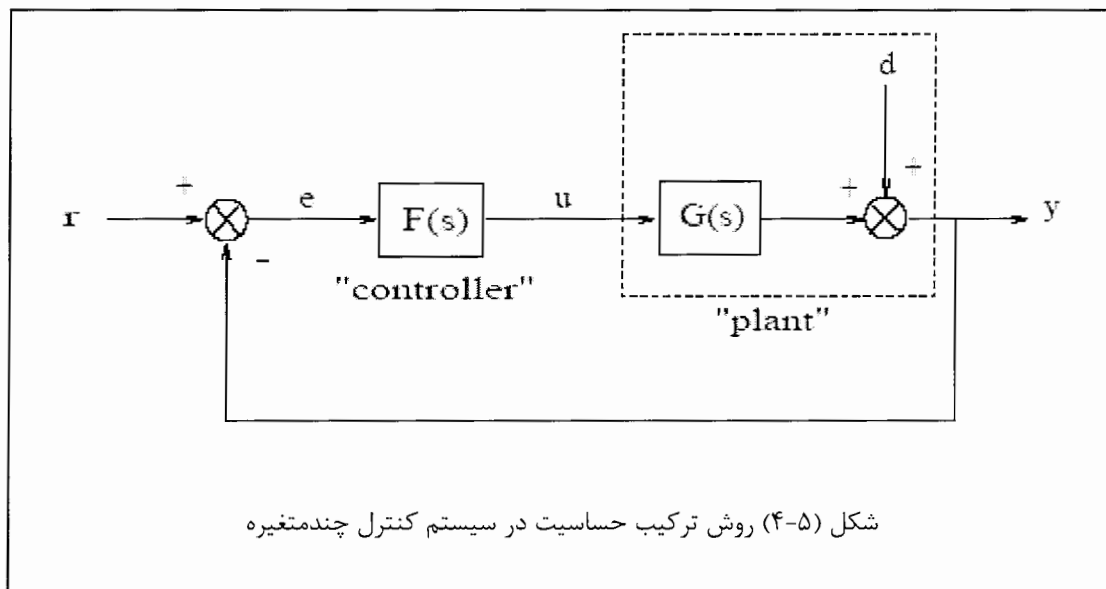
روش ترکیب حساسیت سیستم نمودار بلوکی سیستم کنترل چندمتغیره شکل (۴-۵) را در نظر بگیرید. برای کم کردن حاشیه های پایداری و عملکرد چنین سیستمهایی میتوانیم از مقدارهای تکین ماتریسهای تابع انتقال حلقه بسته از r به خروجیهای e ، u و y استفاده کنیم.

آنگاه از روی شکل (۴-۵) روابط زیر را خواهیم داشت:

$$S(s) = (I + G(s)F(s))^{-1} \quad (27-5)$$

$$R(s) = F(s)(I + G(s)F(s))^{-1} \quad (28-5)$$

$$T(s) = G(s)F(s)(I + G(s)F(s))^{-1} \quad (29-5)$$



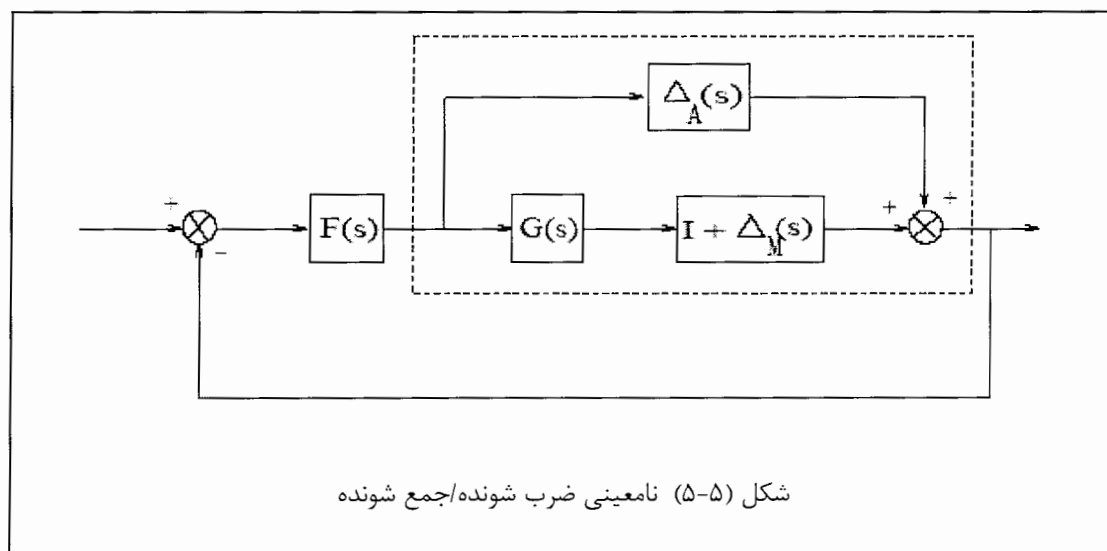
دو ماتریس $S(s)$ ، $T(s)$ به عنوان ماتریسهای تابع حساسیت و تابع حساسیت مکمل شناخته میشوند. ماتریس $R(s)$ نام معینی ندارد. نمودارهای منحنی بود مقادیر تکین برای هر کدام از این ماتریسهای تابع انتقال $S(s)$ ، $R(s)$ و $T(s)$ نقش مهمی را در طراحی سیستم کنترل چندمتغیره مقاوم

بازی میکنند. مقادیر تکین ماتریس تابع انتقال $L(s) = G(s)F(s)$ مهم هستند چون $L(s)$ ماتریسهای $S(s)$ و $T(s)$ را معین میکند.

مقادیر تکین $S(j\omega)$ تضعیف اغتشاش را معین میکنند چون $S(s)$ در حقیقت تابع انتقال حلقه بسته از اغتشاش d به خروجی فرآیند y میباشد. بنابراین تضعیف اغتشاش به صورت زیر نوشته میشود.

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq |W_1^{-1}(j\omega)| \quad (۳۰-۵)$$

در حالیکه $|W_1^{-1}(j\omega)|$ ضریب تضعیف اغتشاش مطلوب است. با توجه به اینکه $|W_1^{-1}(j\omega)|$ وابسته به فرکانس است قادر میشویم که برای هر فرکانس ضریب تضعیف مختلفی تعیین کنیم. نمودارهای بود مقادیر تکین $R(s)$ و $T(s)$ برای اندازه گیری حاشیه های پایداری طراحی های فیدبکی چندمتغیره در حضور تغییرات جمع شونده Δ_A و تغییرات فرآیند ضرب شونده Δ_M استفاده میشود. شکل (۵-۵) را برای نامعینی جمع شونده و ضرب شونده ببینید.



ببینیم چگونه منحنی بود مقدار تکین مکمل حساسیت $T(s)$ حاشیه پایداری را برای تغییرات ضرب شونده Δ_M تعیین میکند. حاشیه پایداری ضرب شونده مطابق تعریف، اندازه کوچکترین $\Delta_M(s)$ پایدار است که سیستم را ناپایدار میکند، وقتی که نامعینی جمع شونده Δ برابر صفر است. $\bar{\sigma}(\Delta_M(j\omega))$ طبق تعریف اندازه $\Delta_M(j\omega)$ است و دو قضیه پایداری زیر را داریم:

قضیه مقاوم ۱: فرض کنید که شکل (۵-۵)، نامعینی جمع شونده/ضرب شونده پایدار باشد و

هر دو Δ و Δ_M صفر باشند. آنگاه اندازه کوچکترین $\Delta_M(s)$ پایدار برای اینکه سیستم ناپایدار شود برابر است با

$$\bar{\sigma}(\Delta_M(j\omega)) = \frac{1}{\sigma(T(j\omega))} \quad (۳۱-۵)$$

هر چقدر $\bar{\sigma}(T(j\omega))$ کوچکتر باشد اندازه کوچکترین تغییرات ضرب شونده ناپایدار کننده بزرگتر خواهد بود و بنابراین حاشیه پایداری بزرگتری خواهیم داشت. نتیجه مشابه برای پایداری در مواجهه با تغییرات جمع شونده $\Delta_A(s)$ نسبت به $R(s)$ بدست می آید. فرض کنید $\Delta_A(j\omega)$ اندازه $\bar{\sigma}(\Delta_M(j\omega))$ در فرکانس ω باشد، آنگاه قضیه پایداری زیر را خواهیم داشت:

قضیه مقاوم ۲: فرض کنید که شکل (۵-۵)، نامعینی جمع شونده/ضرب شونده پایدار باشد و

هر دو Δ و Δ_A صفر باشند. آنگاه اندازه کوچکترین $\Delta_A(s)$ پایدار برای اینکه سیستم ناپایدار شود برابر است با

$$\bar{\sigma}(\Delta_A(j\omega)) = \frac{1}{\sigma(R(j\omega))} \quad (۳۲-۵)$$

به عنوان نتیجه این دو قضیه، مرسوم است که حاشیه های پایداری سیستم های کنترل از طریق نامعادلات مقدار تکین نظیر

$$\bar{\sigma}(R(j\omega)) \leq |W_2^{-1}(j\omega)| \quad (۳۳-۵)$$

$$\bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq |W_3^{-1}(j\omega)| \quad (۳۴-۵)$$

در حالیکه $|W_2(j\omega)|$ و $|W_3(j\omega)|$ اندازه های بزرگترین تغییرات فرآیند جمع شونده و ضرب شونده پیش بینی شده است. مرسوم است که تمام اثرات نامعینی را به داخل یک تغییر ضرب شونده فرضی Δ_M جمع میکنیم، یعنی مشخصات طراحی کنترل به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{1}{\sigma_i(S(j\omega))} \geq |W_1(j\omega)| \quad (۳۵-۵)$$

$$\sigma_i(T(j\omega)) \leq |W_3^{-1}(j\omega)| \quad (36-5)$$

هم چنین که در شکل (۶-۵) نشان داده شده است، مشخصات مقدار تکین روی S و T دیده می شود.

جالب است که توجه کنیم که در قسمت بالایی شکل (۶-۵) مشخصات مقدار تکین روی S و

T بالای خط صفر dB

$$\underline{\sigma}(L(j\omega)) \approx \frac{1}{\sigma(S(j\omega))} \quad (37-5)$$

است؛ در حالیکه قسمت پائینی شکل (۶-۵) مشخصات مقدار تکین روی S و T پائین خط

صفر dB

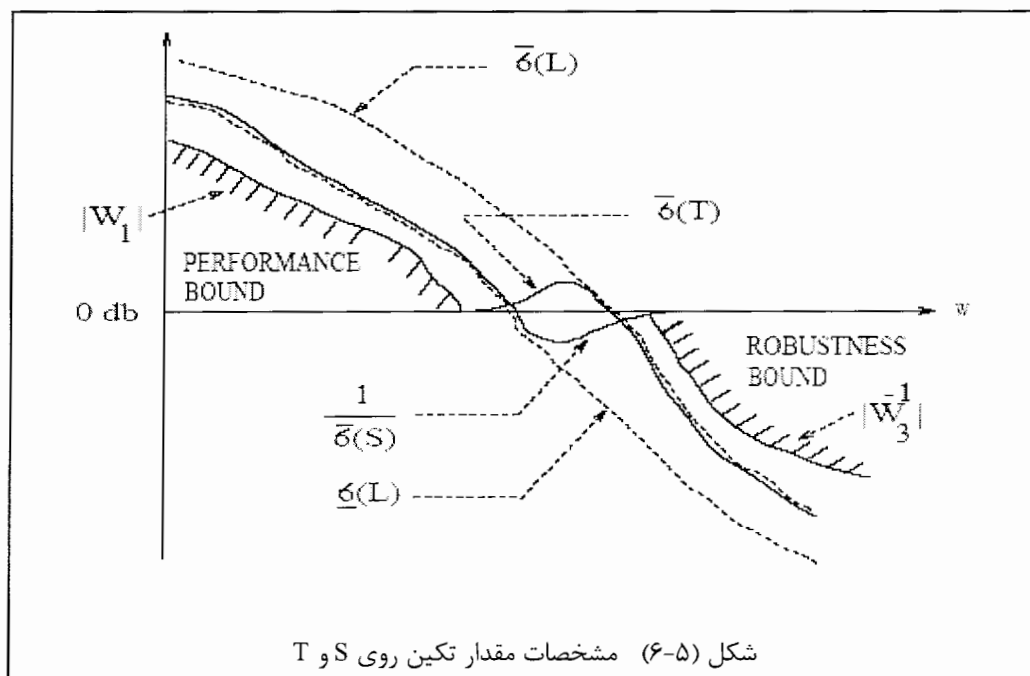
$$\underline{\sigma}(L(j\omega)) \approx \bar{\sigma}(T(j\omega)) \quad (38-5)$$

است.

این نتایج از این حقیقت ناشی است که

$$S(s) = (I + L(s))^{-1} = L(s)^{-1} \quad \text{اگر} \quad \underline{\sigma}(L(s)) \gg 1 \quad (39-5)$$

$$T(s) = L(s)(I + L(s))^{-1} = L(s) \quad \text{اگر} \quad \underline{\sigma}(L(s)) \ll 1 \quad (40-5)$$



بنابراین مرسوم است که مشخصات تضعیف اغتشاش و حاشیه پایداری ضرب شونده به طور مستقیم بر حسب نواحی غیرمجاز برای منحنی های بود $\sigma_i(L(j\omega))$ به عنوان نیازهای «شکل دهی حلقه مقدار تکین» دیده می شود.

نکته مهم در انتخاب مشخصات طراحی W_1 و W_3 این است که فرکانس قطع صفر dB منحنی بود W_1 باید به قدر کافی زیر فرکانس قطع صفر dB منحنی بود W_3^{-1} باشد، در غیر اینصورت شرایط فوق قابل دسترسی نخواهد بود.

۵-۵- طراحی کنترل کننده H_∞ برای مدل کشتی

ابتدا طبق الگوریتم شکل (۷-۵) باید ماتریسهای وزنی W_1 ، W_2 و W_3 را مشخص نماییم. آنگاه باید در حضور این ماتریسهای وزنی بهترین γ را در طراحی بدست آوریم. برای طراحی از نرم افزار ۷.۰ MATLAB و در محیط برنامه نویسی M-file و محیط SIMULINK استفاده شده است. برای یافتن بهترین γ از دستور HINFOPT استفاده شده است.

اولین انتخابی که برای ماتریسهای وزنی خواهیم داشت به صورت زیر است:

$$W_1 = \frac{1.1s + 12}{6s + 6} \times I_3$$

$$W_2 = \frac{6s + 27}{6s + 1000} \times I_6$$

$$W_3 = \frac{5s + 5}{3s + 11} \times I_3$$

برای طراحی با ماتریسهای وزنی فوق بهترین γ با استفاده از دستور HINFOPT برابر است

با:

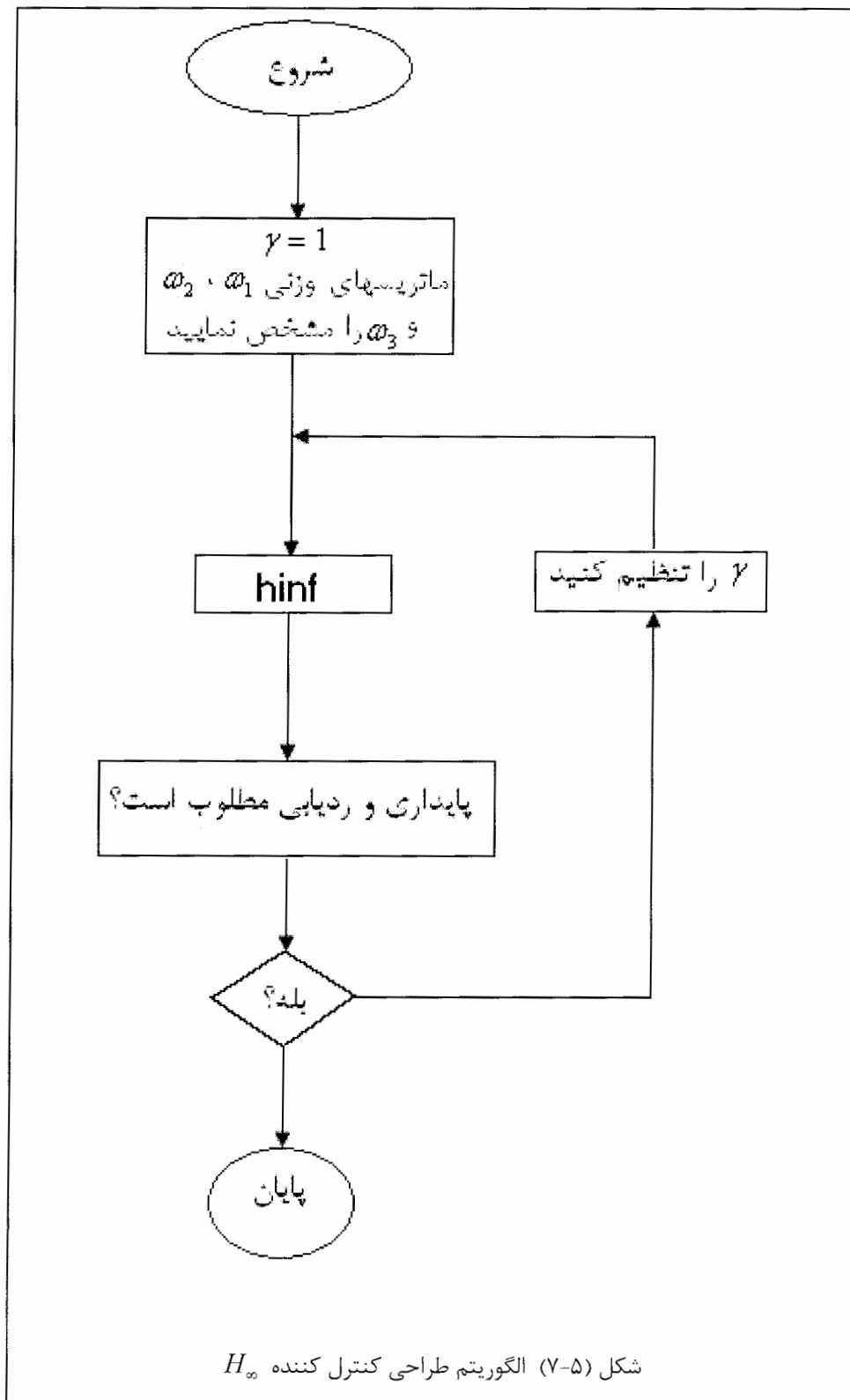
$$\gamma = 1.1641 \times 10^{-9}$$

در این حالت که دارای بهترین γ برای کنترل کننده بکار رفته مقدار نهایی و پایدار و

همچنین خطای سیستم برای پاسخ پله برابر است با:

برای ورودی اول:

$$S.S. = 0.607 \quad \text{و} \quad e = 0.393$$



دو خروجی دیگر دارای مقدار نهایی $S.S. = 0.0105$ و $S.S. = 0.0322$ هستند که به صفر میل نمی کند.

برای ورودی دوم:

$$e = 0.405 \quad \text{و} \quad S.S. = 0.595$$

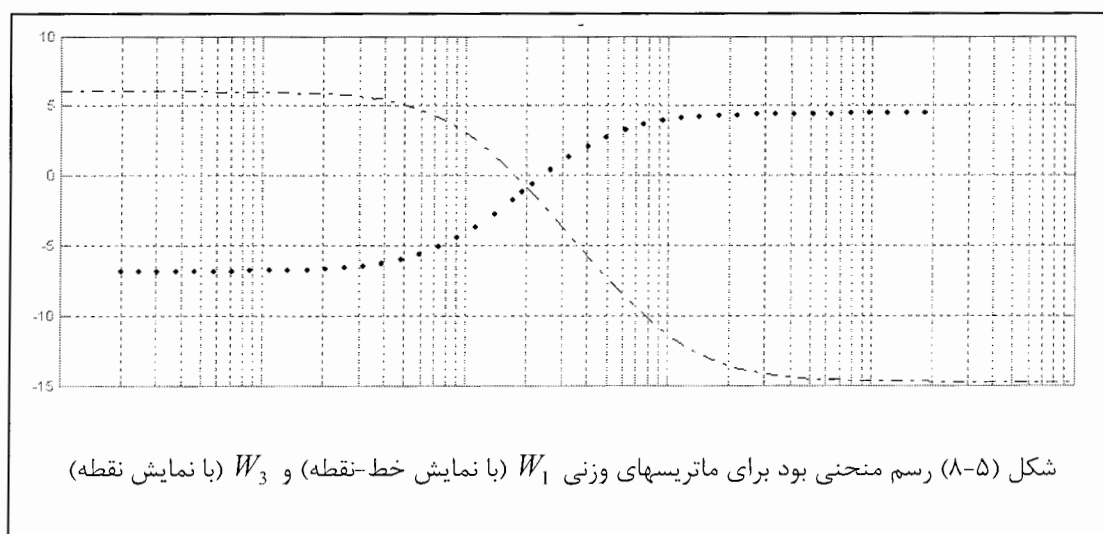
دو خروجی دیگر دارای مقدار نهایی $S.S. = 0.0242$ و $S.S. = 0.00815$ هستند که به صفر میل نمی کند.

برای ورودی سوم:

$$e = 0.447 \quad \text{و} \quad S.S. = 0.553$$

دو خروجی دیگر دارای مقدار نهایی $S.S. = 0.00355$ و $S.S. = 0.0971$ هستند که به صفر میل نمی کند.

تا این قسمت از کار پایداری بر روی سیستم انجام شده است، ولی همانطور که میبینیم عمل ردیابی مطلوب طراحی نیست. به همین دلیل باید تغییراتی را روی ماتریسهای وزنی انجام دهیم. با دقت در شکل (۸-۵) میتوان فهمید که اشکال کار کجاست.



همان طور که از شکل (۸-۵) پیداست محل قطع ماتریس وزنی W_1 با محور صفر dB برابر $1/75$ رادیان بر ثانیه است و محل قطع ماتریس وزنی W_3 با محور صفر dB برابر $2/45$ رادیان بر ثانیه است. بر اساس آنچه که در آخر بخش (۴-۵) توضیح دادیم فرکانس قطع صفر dB منحنی بود W_1 باید به قدر کافی زیر فرکانس قطع صفر dB منحنی بود W_3^{-1} باشد؛ در حالیکه فرکانس $2/45$ در مقابل فرکانس $1/75$ زیاد نیست.

پس باید به سه اصل زیر توجه کنیم:

۱. در فرکانس صفر مقدار ماتریس وزنی W_1 بیشتر از ۱ (یا صفر dB) باشد و در فرکانس بینهایت مقدار ماتریس وزنی W_1 کمتر از ۱ (یا صفر dB) باشد.
۲. در فرکانس صفر مقدار ماتریس وزنی W_3 کمتر از ۱ (یا صفر dB) باشد و در فرکانس بینهایت مقدار ماتریس وزنی W_3 بیشتر از ۱ (یا صفر dB) باشد.
۳. باید فرکانس محل قطع ماتریس وزنی W_1 با محور صفر dB از فرکانس محل قطع ماتریس وزنی W_3 با محور صفر dB به اندازه کافی کوچک باشد.

با در نظر گرفتن این سه اصل طراحی مجدد برای ردیابی مطلوب به صورت زیر می باشد:

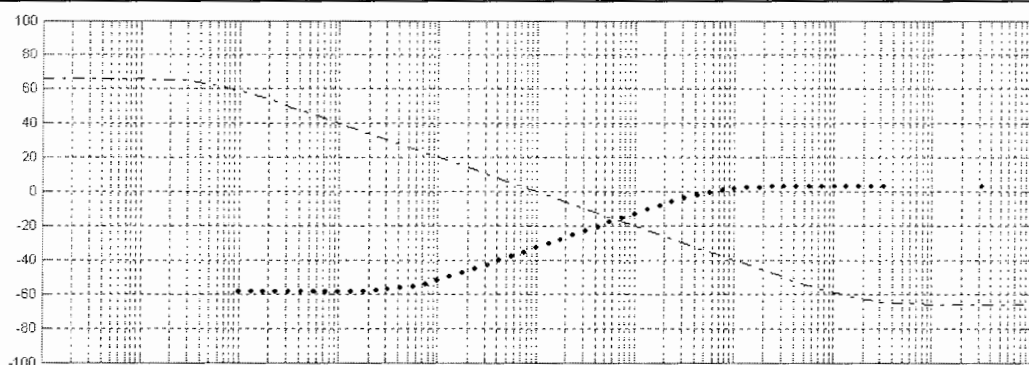
$$W_1 = \frac{0.01s + 20}{20s + 0.01} \times I_3$$

$$W_2 = \frac{1s + 1}{10s + 70} \times I_6$$

$$W = \frac{2s + 0.1}{1.4s + 90} \times I$$

در این حالت شکل زیر را در این حالت خواهیم داشت:

میبینیم که فرکانس ۱ رادیان بر ثانیه محل قطع ماتریس وزنی W_1 با محور صفر dB و فرکانس 63 رادیان بر ثانیه محل قطع ماتریس وزنی W_3 با محور صفر dB می باشد. بهترین مقدار برای این انتخاب، $\gamma = 5.157 \times 10^{-10}$ است.



شکل (۵-۹) رسم منحنی بود برای ماتریسهای وزنی W_1 (با نمایش خط-نقطه) و W_3 (با نمایش نقطه)

در این حالت قطبهای کنترل کننده برابر

$$\begin{bmatrix} -6.7 \times 10^7 \\ -1751 \\ -245 + 241i \\ -245 - 241i \\ -226 \\ -43.4 \\ -9.37 \\ -8.96 \\ -9.12 \\ -7 \\ -6.998 \\ -7 \\ -0.933 \\ -5 \times 10^{-4} \\ -5 \times 10^{-4} \\ -5 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

می باشند.

با انتخاب ماتریسهای فوق پاسخ پله ای که مشاهده می شود به صورت شکل (۵-۱۰) و (۵-۵)

(۱۱) و (۵-۱۲) است؛ که در این حالت مشخصات پاسخ پله به صورت زیر است:

در شکل (۵-۱۰) وقتی به ورودی اول ورودی پله بدهیم، فقط خروجی اول تحت تأثیر قرار

خواهد گرفت و دو خروجی دیگر به سمت صفر میل خواهند کرد.

در شکل‌های (۱۱-۵) و (۱۲-۵) نیز همین موضوع دیده می‌شود. در شکل (۱۱-۵) وقتی به ورودی دوم ورودی پله بدهیم، فقط خروجی دوم تحت تأثیر قرار خواهد گرفت و دو خروجی دیگر به سمت صفر میل خواهند کرد. در شکل (۱۲-۵) وقتی به ورودی سوم ورودی پله بدهیم، فقط خروجی سوم تحت تأثیر قرار خواهد گرفت و دو خروجی دیگر به سمت صفر میل خواهند کرد.

با انتخاب ماتریس‌های وزنی فوق مشخصات پاسخ پله به صورت زیر است:

برای ورودی اول: (فقط خروجی اول بحث می‌شود).

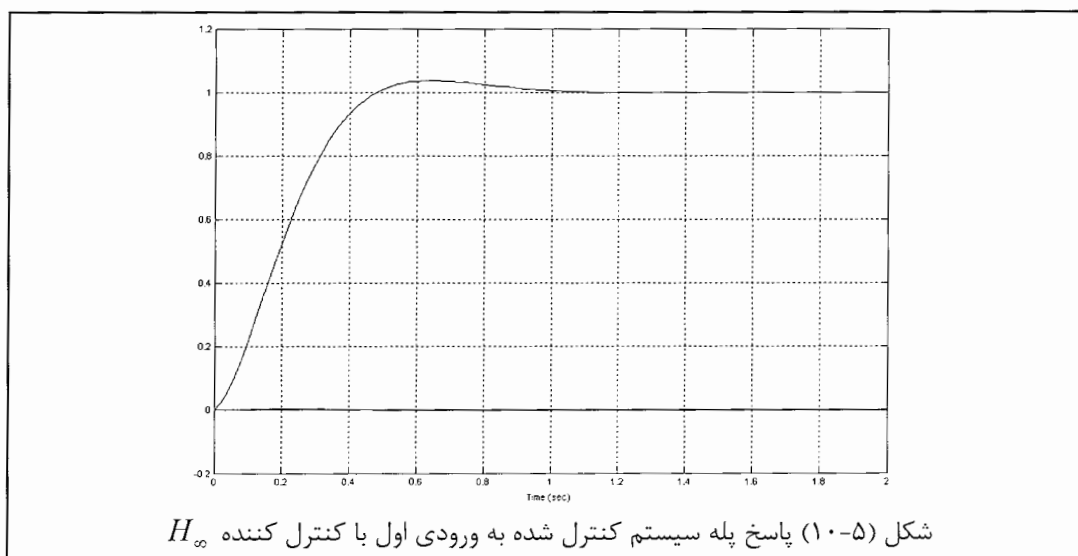
۱. زمان صعود: $T_r = 0.315 \quad \text{sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.831 \quad \text{sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجاهش: $M_p = 3.67 \quad \%$



برای ورودی دوم: (فقط خروجی دوم بحث می‌شود).

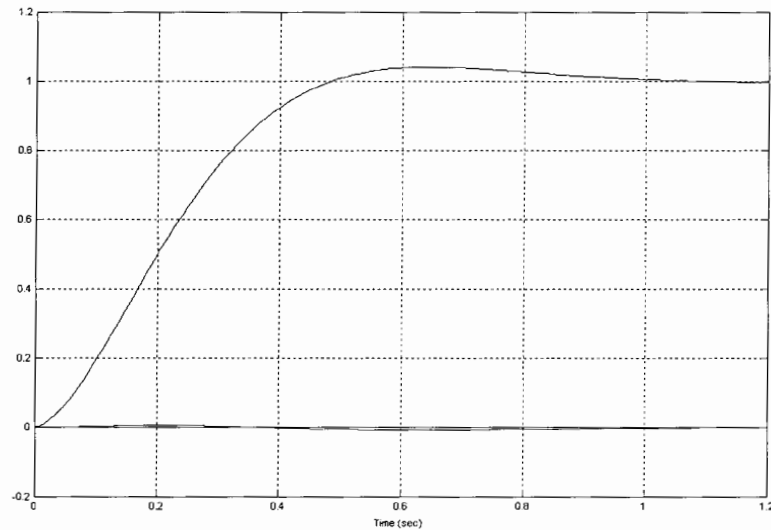
۱. زمان صعود: $T_r = 0.317 \quad \text{sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.851 \quad \text{sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M_p = 4.04 \%$



شکل (۵-۱۱) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با کنترل کننده H_∞

برای ورودی سوم: (فقط خروجی سوم بحث می شود).

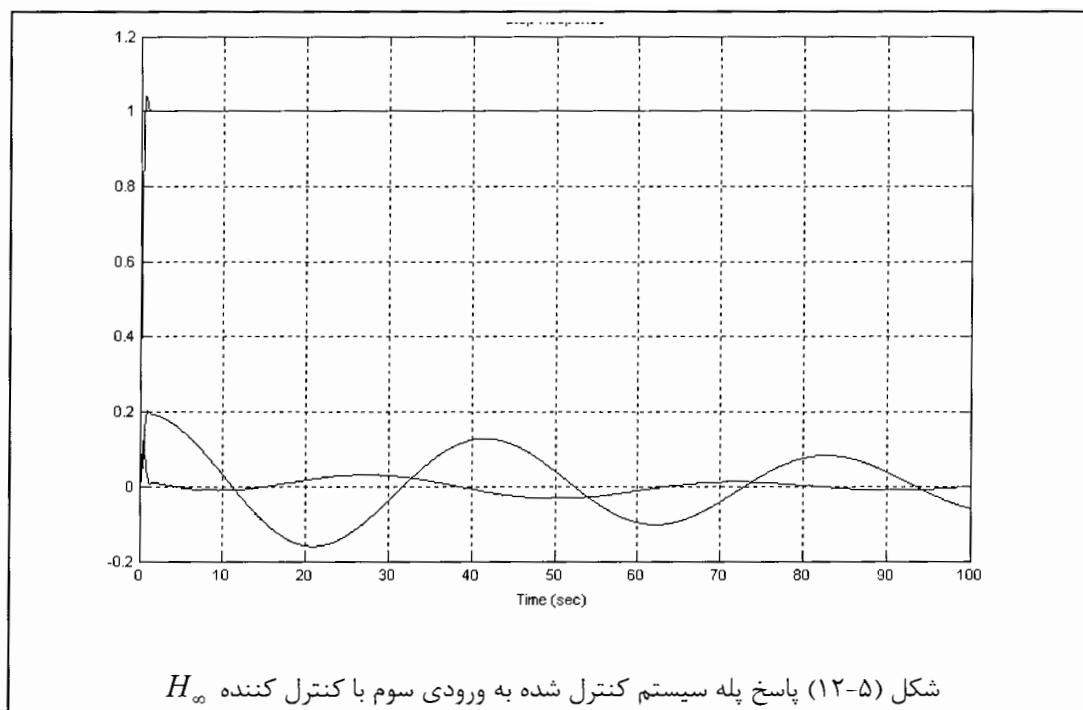
۱. زمان صعود: $T_r = 0.319 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.848 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M_p = 3.98 \%$



برای یافتن پاسخهای دیگر باید تغییراتی را روی ماتریسهای وزنی انجام دهیم. می توان طراحی را به صورتی انجام داد که در فرکانس صفر مقدار ماتریس حساسیت به نزدیک صفر شود و مقدار ماتریس مکمل حساسیت به I نزدیک شود، که در این حالت فراجش پاسخ پله تا حد ۳۰ درصد خواهد شد.

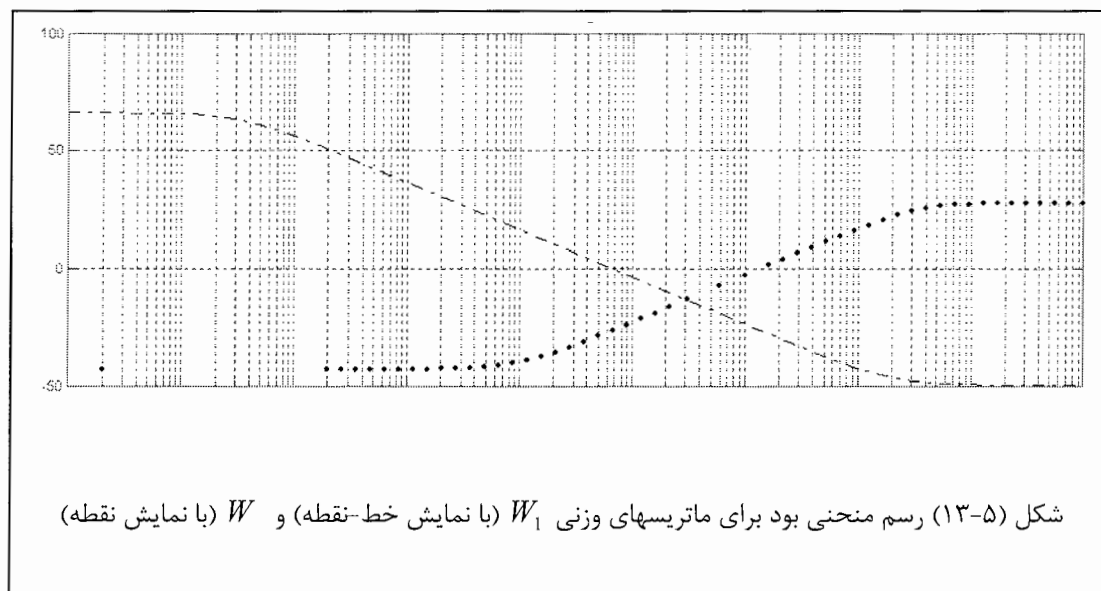
یک نمونه از این طراحی ها به صورت زیر است:

$$W_1 = \frac{0.005s + 100}{1.5s + 0.05} \times I_3$$

$$W_2 = \frac{1.2s + 0.01}{2s + 6000} \times I_6$$

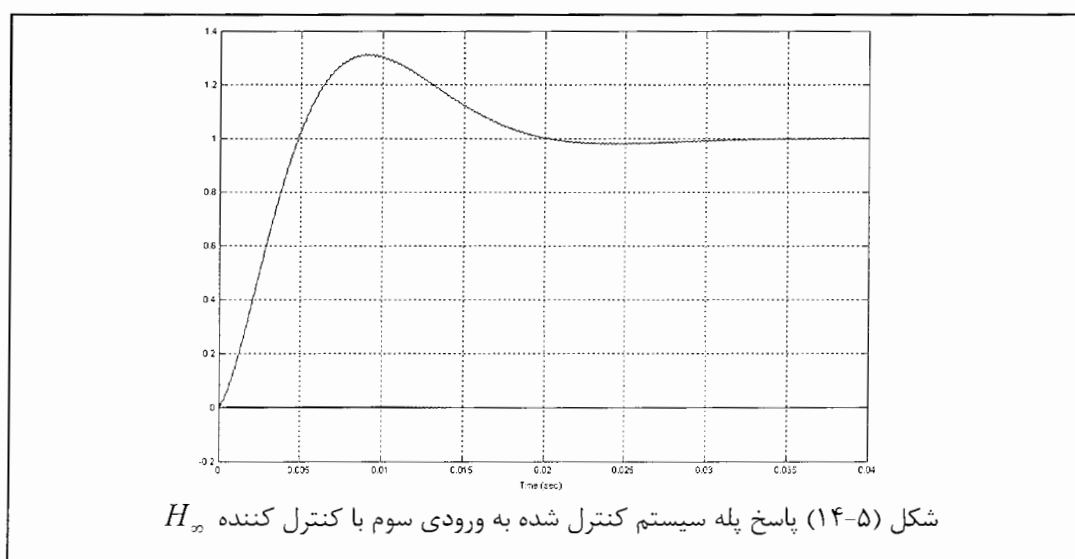
$$W_3 = \frac{0.5s + 5}{0.02s + 700} \times I_3$$

در این حالت شکل (۱۳-۵) را در این حالت خواهیم داشت.



میبینیم که فرکانس $66/5$ رادیان بر ثانیه محل قطع ماتریس وزنی W_1 با محور صفر dB و فرکانس 1400 رادیان بر ثانیه محل قطع ماتریس وزنی W_3 با محور صفر dB می باشد. به همین دلیل میبینیم که با $\gamma = 1.25 \times 10^{-10}$ که بهترین γ برای این طراحی میباشد، مشخصات این پاسخ به صورت زیر است.

پاسخ پله را در شکل (۱۴-۵) را می توانید ببینید.



مشخصات برای پاسخ پله برای ورودی سوم:

۱. زمان صعود: $T_r = 0.00351 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.0189 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V_f = 1$

۴. خطا: $e = 0$

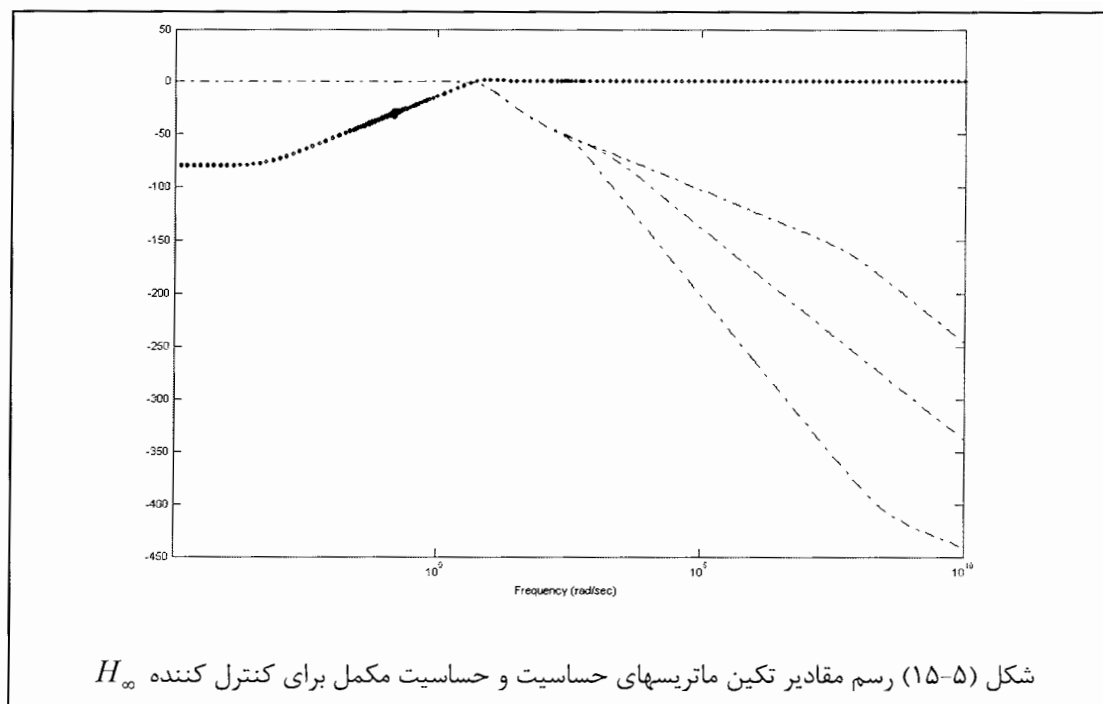
۵. فراجش: $M_p = 31.5 \%$

مشخصات این کنترل کننده به صورت زیر می باشد:

در این کنترل کننده باید ۳ تابع انتقال و یک عدد (γ) را مشخص نماییم که خصوصیات حاکم بر این سه تابع انتقال شرایط نسبتاً آسانی برای طراحی به وجود می آورد و مقدار عدد γ نیز با کمی تکرار بدست آوریم.

در این کنترل کننده شکل دهی مقدار تکین کاملاً در اختیار ماست؛ بدین ترتیب که می توانیم باند عبور در ماتریس حساسیت و ماتریس حساسیت مکمل را خود انتخاب نماییم. به شکل (۵)- (۱۵) دقت نمایید. در این شکل دهی بر اساس انتخاب ماتریس وزنی W_1 باید در کمتر از فرکانس ۱ رادیان بر ثانیه مقدار ماتریس حساسیت مکمل (T) برابر I (یا در شکل برابر صفر dB) باشد و بر اساس انتخاب ماتریس وزنی W باید در بیشتر از فرکانس $63/9$ رادیان بر ثانیه مقدار ماتریس حساسیت (S) برابر I (یا در شکل برابر صفر dB) باشد. و در این شکل مشاهده می شود که در کمتر از فرکانس ۱ رادیان بر ثانیه مقدار ماتریس حساسیت مکمل از سه مقدار $1/0.004$ و $0/9996$ و $0/9989$ به مقدار ۱ در فرکانس صفر خواهد رسید. اگر به مقادیر تکین نگاهی بیندازیم می بینیم که سه مقدار تکین ماتریس حساسیت مکمل از یک نقطه خاص به سمت صفر میل می کنند. به همین دلیل سه مقدار برای زمان صعود و زمان نشست سه پاسخ پله تقریباً با هم برابرند. و همچنین در بیشتر از فرکانس $63/9$ رادیان بر ثانیه مقدار ماتریس حساسیت از سه مقدار $1/0.045$ و $1/0.056$ و $1/0.044$ به مقدار ۱ در فرکانس بینهایت خواهد رسید.

چون ماتریس حساسیت دارای ۳ سطر و ۳ ستون می باشد؛ به همین دلیل دارای سه مقدار تکین می باشد.^۱



لازم به ذکر است که در کنترل کننده H_∞ هر ۳ اندازه مقدار تکین ماتریس حساسیت از نزدیکی فرکانس ۱ رادیان بر ثانیه و هر ۳ اندازه مقدار تکین ماتریس حساسیت مکمل از نزدیکی فرکانس $63/9$ رادیان بر ثانیه همگرا شده و به اندازه صفر dB می‌رسند. اما در کنترل کننده H_2 ، ۳ اندازه مقدار تکین ماتریس حساسیت از نزدیکی فرکانس $2/51$ رادیان بر ثانیه و ۳ اندازه مقدار تکین ماتریس حساسیت مکمل از نزدیکی فرکانس 1000000 رادیان بر ثانیه همگرا نشده و هر کدام از فرکانس خاصی به نزدیکی خط صفر dB می‌رسند. و این نشان دهنده اینست که شکل دهی حلقه مقدار تکین در کنترل کننده H_∞ به مراتب دقیقتر از کنترل کننده H_2 می‌باشد.^۱ و اصلاً مقدار فرکانس قطع صفر dB برای ماتریس حساسیت و ماتریس حساسیت مکمل در کنترل کننده H_2 توسط طراح مشخص نمی‌شود.

در این کنترل کننده ماتریس حالت دارای بعد بیشتری نسبت به کنترل کننده H_2 است؛ یعنی تعداد قطبهای کنترل کننده آن بیشتر از کنترل کننده H_2 است. تعداد قطبهای این کنترل

^۱ به حلقه مقدار تکین شکلی نمیدهد. H_2 می‌توان گفت که اصلاً کنترل کننده^۱

کننده بیشتر از دو برابر تعداد قطب سیستم، یعنی بیشتر از ۸، است، که با وجود کنترل کننده مطلوب تعداد قطبها برابر ۱۶ است.

۵-۶- بررسی مقاوم بودن H_{∞}

این قسمت مهمترین قسمت برای دریافت مقاوم بودن سیستم است.

تغییرات در ماتریس فضای حالت را به سه قسمت تقسیم می نماییم:

۵-۶-۱- تغییرات در ماتریس فضای حالت با یک عدد ضرب شونده

اگر تغییرات به صورت

$$A \Rightarrow 0.9 \times A$$

$$B \Rightarrow 0.9 \times B$$

$$C \Rightarrow 0.9 \times C$$

$$D \Rightarrow 0.9 \times D$$

باشد. آنگاه پاسخها به صورت زیر می باشد. شکلهای (۵-۱۶)، (۵-۱۷) و (۵-۱۸) سه پاسخ

پله برای سه ورودی می باشد که برای هر ورودی مشخصات خروجی متناظر را نوشتیم تا مقایسه ای

بین این سه پاسخ و پاسخهای قبلی داشته باشیم.

برای ورودی اول: (فقط خروجی اول بحث می شود).

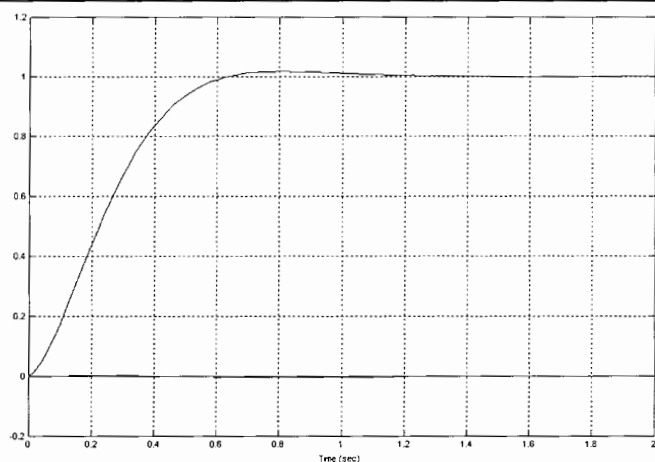
$$T_r = 0.389 \quad \text{sec} \quad \text{۱. زمان صعود:}$$

$$T_s = 0.575 \quad \text{sec} \quad \text{۲. زمان نشست:}$$

$$V_f = 1 \quad \text{۳. مقدار نهایی:}$$

$$e = 0 \quad \text{۴. خطا:}$$

$$M_p = 1.68 \quad \% \quad \text{۵. فراجهش:}$$



شکل (۵-۱۶) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با تغییرات ماتریسهای فضای حالت در کنترل کننده H_{∞}

برای ورودی دوم: (فقط خروجی دوم بحث می شود).

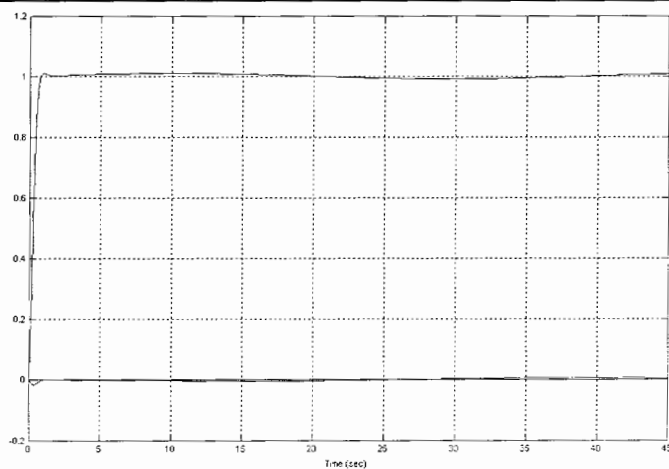
۱. زمان صعود: $T_r = 0.447 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.678 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M_p = 1.03 \%$



شکل (۵-۱۷) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات ماتریسهای فضای حالت در کنترل کننده H_{∞}

برای ورودی سوم: (فقط خروجی سوم بحث می شود).

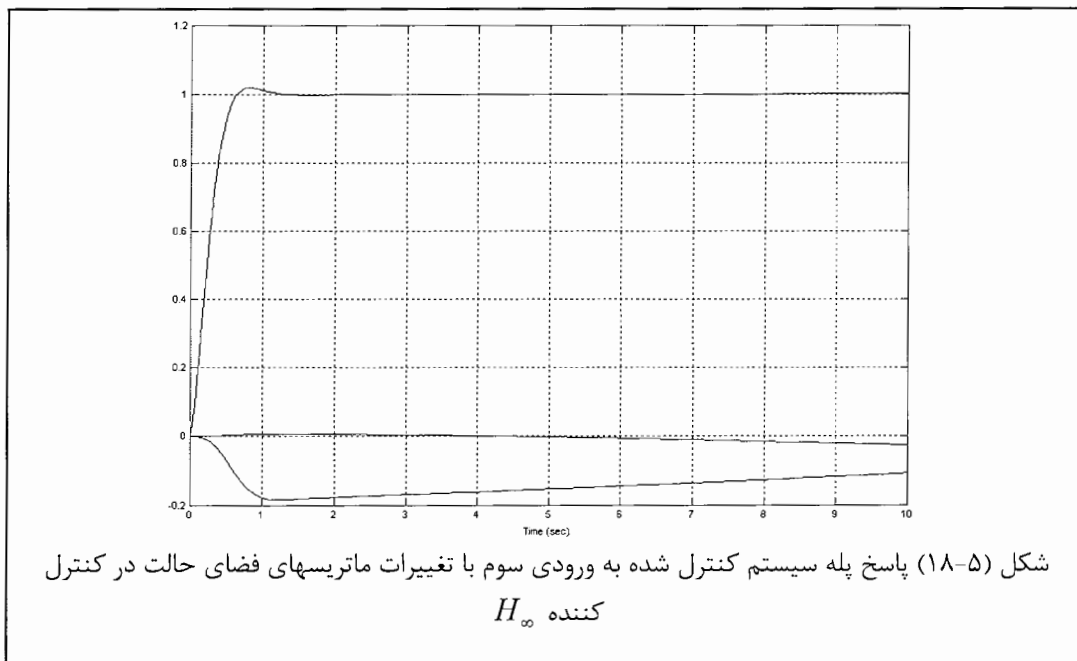
۱. زمان صعود: $T_r = 0.39 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.944 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M_p = 2.39 \%$



همانطور که می بینیم هیچ تغییری در مقدار نهایی و خطا مشاهده نمی شود. اما در زمان صعود در حدود ۱۸٪ افزایش داشتیم. در زمان نشست در حدود ۲۰٪ کاهش داشتیم (البته در پاسخ به ورودی سوم افزایش داشتیم). و در فراجهش در حدود ۲۰٪ کاهش داشتیم (البته در پاسخ به ورودی سوم افزایش داشتیم). اگر عدد ضرب شونده از ۱ بیشتر شود زمان صعود و زمان نشست کمتر از حالت اولیه می شود ولی فراجهش بیشتر از حالت قبل می شود.

جدول زیر نشان دهنده این تغییرات است:

جدول (۱-۵) اثرات تغییر ماتریسهای حالت در پاسخهای پله

کنترل کننده H_{∞}	مقدار نهایی و خطا	زمان صعود	زمان نشست	فراجاهش
عدد ضرب شونده ۰/۹ باشد	بدون تغییر	افزایش	کاهش	کاهش
عدد ضرب شونده ۱/۱ باشد	بدون تغییر	کاهش	کاهش	افزایش

۵-۶-۲- تغییرات در ماتریس فضای حالت با تغییر قطبهای سیستم

اگر قطبهای سیستم را تغییر دهیم آنگاه شکلهای زیر حاصل می شود:

قطبهای سیستم هر کدام به اندازه ۰/۰۱ افزایش پیدا کرده اند؛ یعنی قطبهای زیر را داریم:

$$\begin{bmatrix} -0.0101 + 0.0594i \\ -0.0101 - 0.0594i \\ -0.0001 + 0.1536i \\ -0.0001 - 0.1536i \end{bmatrix}$$

آنگاه پاسخ به صورت زیر می باشد. شکلهای (۱۹-۵)، (۲۰-۵) و (۲۱-۵) سه پاسخ پله برای

سه ورودی می باشد که برای هر ورودی مشخصات خروجی متناظر را نوشتیم تا مقایسه ای بین این سه پاسخ و پاسخهای قبلی داشته باشیم.

برای ورودی اول: (فقط خروجی اول بحث می شود).

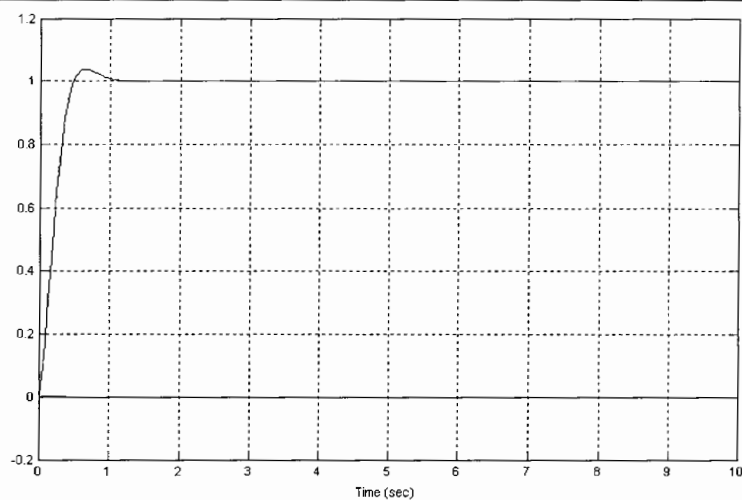
$$T_r = 0.314 \quad \text{sec} \quad \text{۱. زمان صعود:}$$

$$T_s = 0.847 \quad \text{sec} \quad \text{۲. زمان نشست:}$$

$$V = 1 \quad \text{۳. مقدار نهایی:}$$

$$e = 0 \quad \text{۴. خطا:}$$

$$M_p = 3.84 \quad \% \quad \text{۵. فراجاهش:}$$



شکل (۵-۱۹) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با تغییرات قطبهای ماتریس فضای حالت

برای ورودی دوم: (فقط خروجی دوم بحث می شود).

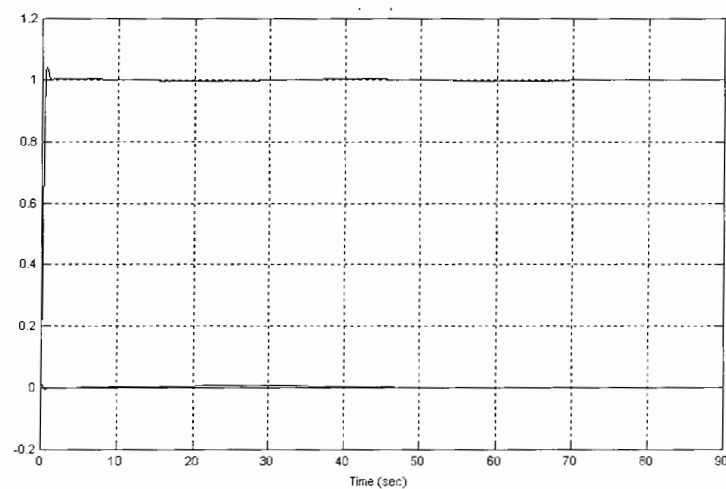
۱. زمان صعود: $T_r = 0.355 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.898 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M_p = 4.04 \%$



شکل (۵-۲۰) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات قطبهای ماتریس فضای حالت

برای ورودی سوم: (فقط خروجی سوم بحث می شود).

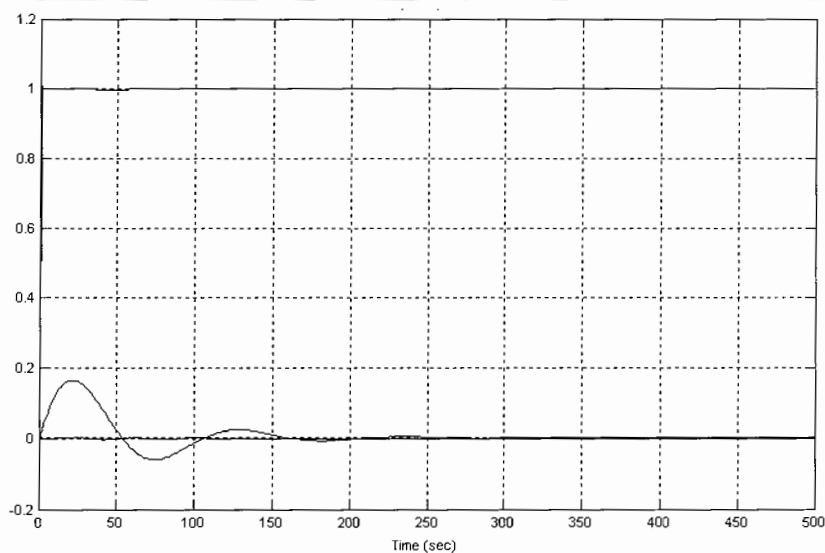
۱. زمان صعود: $T_r = 0.794 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.972 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V = 1$

۴. خطا: $e = 0$

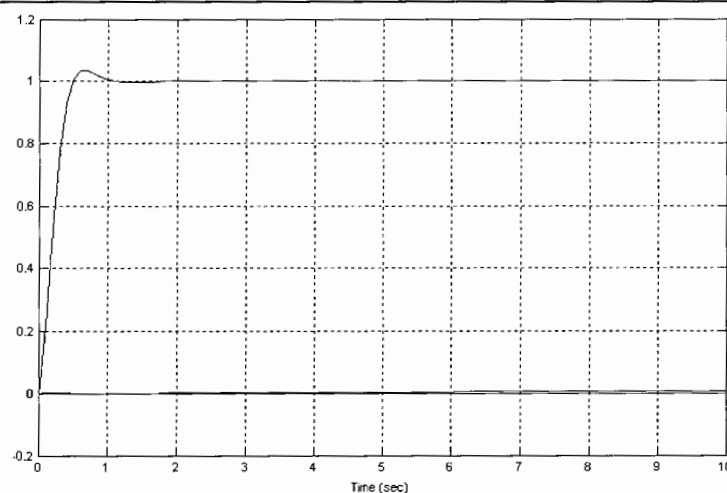
۵. فراجهش: $M_p = 0.8 \%$



شکل (۵-۲۱) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی سوم با تغییرات قطبهای ماتریس فضای حالت

۵-۶-۳- تغییرات در سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج

حال اگر سرعت کشتی را از $U = 15.5 \text{ ft/s}$ به $U = 10 \text{ ft/s}$ و همزمان زاویه کشتی را با امواج از $\phi = 45^\circ$ به $\phi = 90^\circ$ تغییر دهیم. آنگاه پاسخهای زیر را برای کنترل کننده فوق خواهیم داشت. شکل‌های (۵-۲۲)، (۵-۲۳) و (۵-۲۴) سه پاسخ پله برای سه ورودی می باشد که برای هر ورودی مشخصات خروجی متناظر را نوشتیم تا مقایسه ای بین این سه پاسخ و پاسخهای قبلی داشته باشیم.



شکل (۵-۲۲) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی اول با تغییرات سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج

برای ورودی اول: (فقط خروجی اول بحث می شود.)

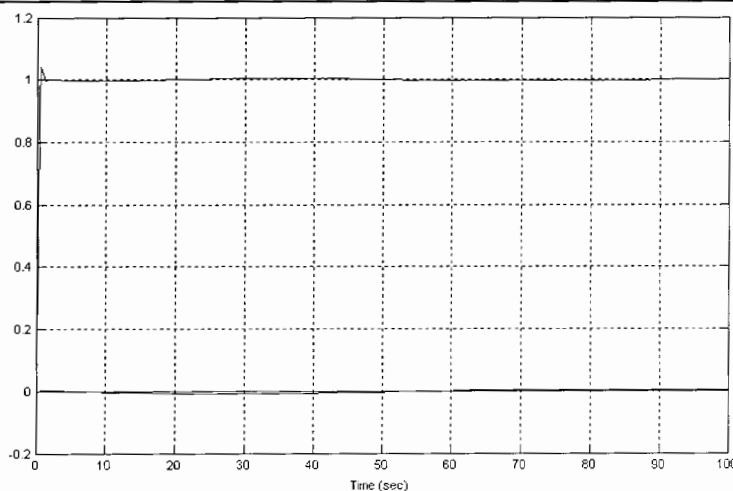
۱. زمان صعود: $T_r = 0.333 \text{ sec}$

۲. زمان نشست: $T_s = 0.819 \text{ sec}$

۳. مقدار نهایی: $V = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M_p = 3.39 \%$



شکل (۵-۲۳) پاسخ پله سیستم کنترل شده به ورودی دوم با تغییرات سرعت کشتی و زاویه کشتی با امواج

برای ورودی دوم: (فقط خروجی دوم بحث می شود.)

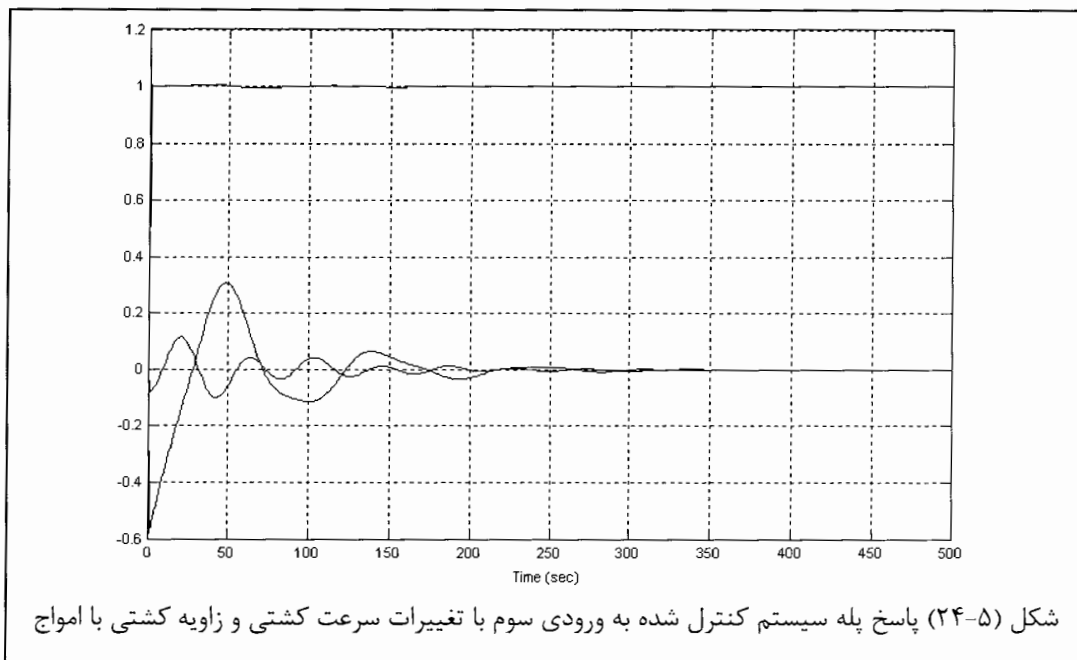
۱. زمان صعود: $T_r = 0.347$ sec

۲. زمان نشست: $T_s = 0.881$ sec

۳. مقدار نهایی: $V = 1$

۴. خطا: $e = 0$

۵. فراجهش: $M_p = 4.17$ %



برای ورودی سوم: (فقط خروجی سوم بحث می شود).

۱. زمان صعود: $T_r = 0.795$ sec

۲. زمان نشست: $T_s = 0.974$ sec

۳. مقدار نهایی: $V = 1$

۴. خطا: $e = 0$

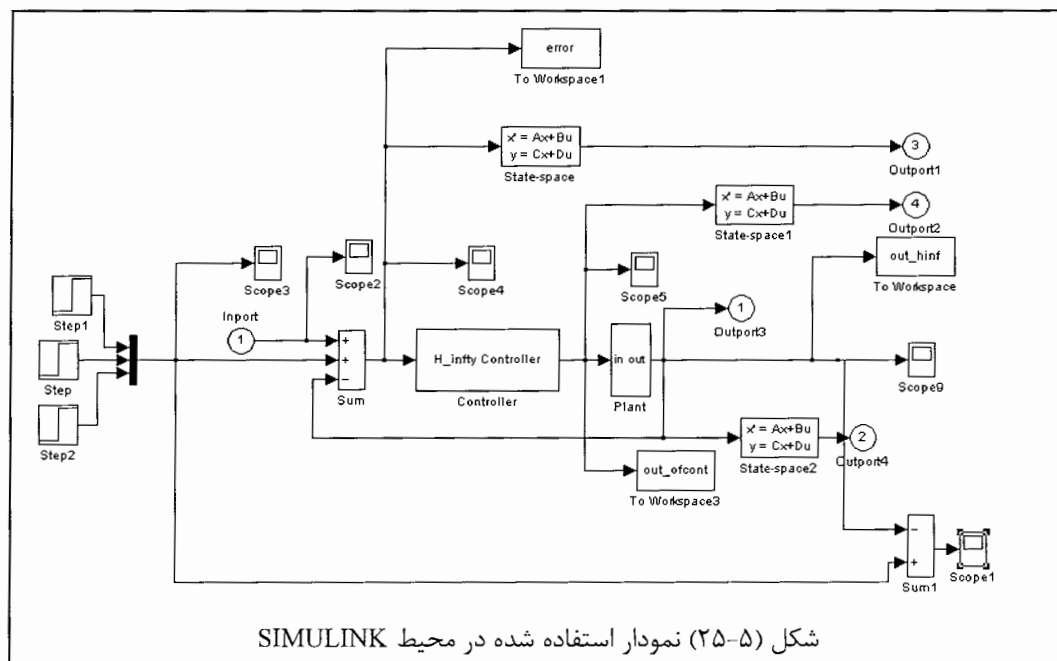
۵. فراجهش: $M_p = 0.6$ %

همان طور که از شکل‌های اخیر مشاهده می شود مدل کشتی با کنترل کننده H_∞ کاملاً در مقابل تغییرات پارامترها مقاوم می باشد. لازم به ذکر است که همان طور بیان نمودیم در حالی که از کنترل کننده H_∞ استفاده می کنیم نباید نگران جداسازی ورودی و خروجی ها باشیم. زیرا در همه

شکلهای فوق مشاهده کردیم که خروجی ۱ با ورودی ۱ و خروجی ۲ با ورودی ۲ و خروجی ۳ با ورودی ۳ تحریک می شود و دو خروجی دیگر به سمت صفر میل می کنند.

در ضمن از [۴۰] نیز استفاده شده است که در محیط SIMULINK این شکل را استفاده

نمودیم:



فصل ششم

پیشنهادهات و نتایج

۶-۱-نتایج

این پایان نامه شامل طراحی دو کنترل کننده H_2 و H_∞ روی کشتی می باشد. در بخش شبیه سازی دیدیم که هر دو سیستم کنترل شده به خوبی توانستند که عمل جداسازی را در مدل سیستم کشتی را توسط دو کنترل کننده انجام دهند. این خود بهترین مزیت برای این دو کنترل کننده است.

هر دو کنترل کننده دارای مقاوم بودن خوبی در مقابل تغییرات پارامترهای سیستم از خود نشان دادند. این تغییرات شامل تغییر در ماتریسهای فضای حالت با یک عدد ضرب شونده، تغییر در قطبهای سیستم و تغییر در سرعت کشتی و زاویه آن با امواج بود. در هر سه تغییر که با نام نامعینی می شناسیم هر دو سیستم کنترل شده پایداری و ردیابی خود را حفظ نمودند.

اما اگر خصوصیات این دو کنترل کننده را با دقت ببینیم داریم:

مشخصات کنترل کننده H_2 :

۱. انتخاب ۶ ماتریس با ۱۳۰ عنصر
 ۲. عدم دسترسی به شکل دهی مقدار تکین
 ۳. بعد کم ماتریس حالت کنترل کننده
 ۴. عدم داشتن زمان صعود و زمان نشست برابر
- و مشخصات کنترل کننده H_∞ :

۱. انتخاب ۳ ماتریس وزنی
۲. شکل دهی مقدار تکین

۳. بعد زیاد ماتریس حالت کنترل کننده

۴. داشتن زمان صعود و زمان نشست تقریباً برابر

با دقت در خصوصیات و مقایسه بین دو کنترل کننده می بینیم که کنترل کننده H_2 دارای بعد کمتری نسبت به کنترل کننده H_∞ است. اما در سه خصوصیت دیگر کنترل کننده H_∞ نسبت به کنترل کننده H_2 برتری دارد. طراحی نسبتاً آسانتر و شکل دهی مقدار تکین و از همه مهمتر زمان صعود و زمان نشست تقریباً برابر از مزایای خاص کنترل کننده H_∞ می باشد.

۶-۲-پیشنهادات

برای انجام پروژه های دیگر توسط دانشجویان پیشنهاد می شود

- از کنترل کننده LQG/LTR به جای کنترل کننده H_2 استفاده شود.
- از کنترل کننده μ (آنالیز و سنتز μ) به جای کنترل کننده H_∞ استفاده شود. در کنترل کننده μ نامعینی را به طور ساختاری در نظر می گیریم.
- از کنترل کننده H_∞ با کاهش مرتبه استفاده شود.
- امروزه استفاده از کنترل دیجیتال رایج است. کنترل کننده های فوق را دیجیتال نماید و مقایسه ای بین آنالوگ و دیجیتال نیز صورت گیرد.

1. P. J. Van Spronsen, and Rob Tousain, 2001, "An optimal control approach to preventing marine diesel engine overloading aboard Karel Doorman Class frigates".
2. Jessica A. Woods-Vedeler, and Locus G. Horta, "On orbit application of H-infinity to the middeck active controls experiment: overview of results".
3. Isaac Kaminer, pramod p.Khargonekar, and Grog Roble, "Design of localizer capture and track modes for a lateral autopilot using H-infinity synthesis".
4. István SZÁSZI, and Balász KULCSÁR, 2001, "Robust control and fault detection filter design for aircraft pitch axis", Periodica Polytechnica Ser. Transp. Eng. Vol. 29, no 1-2, pp 83-100
5. Hiroaki Kuraoka, Naoto Ohka, Masahiro Ohba, Shigeyuki Hosoe, and Feifei Zhang, "Application of H-infinity design to automotive fuel control".
6. K. Cooney, G. Caffrey, and E. Coyle, 2004, "Robust H2/LQG design for a cross coupled process", Control 2004, University of Bath, UK.
7. I. A. Njabeleke, R. F. Pannet, P. K. Chawdhry, and C. R. Burrows, 1997, "H- infinity control in fluid power", IEE colloquium on 17 Oct. 1997. pages: 7/1-7/4.
8. Karl Heinz Kienitz, and Takashi Yoneyama, 1993, "A robust controller for Insulin Pumps based on H-infinity theory", IEEE transaction on biomedical engineering, Vol. 40, No. 11, November 1993.
9. Wayne L. Stout, M. Edwin Sewan, "Application of H-infinity theory to robot manipulator control".
10. M. J. Grimble, S. A. Carr, and M. R. Katebi, 1996, "Integrated ship control using H_{∞} robust design techniques".
11. Luigi Fortuna, and Giovanni Muscato, 1996, "A roll stabilization system for a monohull ship: modeling, Identification, and adaptive control", IEEE transaction on control system technology, Vol. 4, No. 1, January 1996.
12. Y. M. Enab, "Intelligent controller design for the ship steering problem", IEE proc. Control theory app. Vol. 143, No. 1, January 1996.
13. Yao Zhang, Grant E. Hearn, and Pratyush sen, 1996, "A neural network approach to ship track-keeping control", IEEE transaction on ocean engineering, Vol. 21, No. 4, October 1993.
14. Marc Bodson, "Lateral control system design for VTOL landing on a DD963 in the high sea states", 1982, Thesis, Massachusetts Institute of technology,
15. J. M. Maciejowski, (1989). Multivariable Feedback Design.
16. PC MatLab 2004, User's Guide. The Math work Inc.
17. Golub G.H. and van Loan C.F. (1983). Matrix Computation. Baltimore MD: Johns Hopkins University Press.
18. Stewart G.W. (1973). Introduction to Matrix Computation. New York: Academic Press
19. Hung Y. S. and MacFarlane A. G. J. (1982). Multivariable feedback: A Quasi-classical approach. Lecture notes in control and information science, Vol. 40. Berlin: Springer- Verlag
20. I. Postlethwaite and A. G. MacFarlane, A complex variable approach to the analyses of linear multivariable feedback systems. New York: Springer- Verlag, 1979

21. J. C. Doyle, "Robustness of multiloop linear feedback systems." Proc. Of 1978 IEEE con. On decision and control. pp. 12-18, San Diego, CA, January 8-10, 1979
22. J. C. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis." IEEE Trans. On automat. Contr., AC. 26, 1, pp. 4-16, February 1981
23. M. G. Safanov, A. G. Laub, and G. Hartmann, "feedback properties of multivariable systems: the role and use of return difference matrix." IEEE Trans. On automat. Contr., AC. 26, 1, pp. 47-65, February 1981.
24. I. W. Sandberg. " On the L2-boundedness of solution of nonlinear functional equations," Bell Syst. Tech. J., vol. 43, pp. 1581-1599, July 1964.
25. G. Zames, "On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems." Parts 1 and 2, IEEE Trans. On automatic control, AC-11, 23, pp. 228-238, 465-476, 1966.
26. C. G. McMuldroch, "VTOL controls for shipboard landings", S. M. thesis, Laboratory for information and decision systems, M.I.T., Cambridge, MA, June 1979
27. M. Triantafyllou, M. Athans, "Real time estimation of the heaving and pitching motions of a ship using a Kalman filter, Proc. Ocean '81, Bodson, MA, September 1981.
28. M. Triantafyllou, M. Bodson, M. Athans, "Real time estimation of ship motions using a Kalman filtering techniques", laboratory for information and decision systems , M.I.T., Cambridge, MA, 1982
29. M. Triantafyllou, M. Bodson, "real time prediction of marine vessel motions, using Kalman filtering techniques", Proc. OTC '82, Houston, May 1982
30. Kwakernaak H., and Sivan R. (1972). Linear optimal control systems, New York, Wiley.
31. Anderson B. D. O., and Moore J. B. (1972). Linear optimal control. Englewood cliffs NJ: Prentice-Hall.
32. Davis M. H. A., and Vinter R. B. (1985). Stochastic modeling and control. London: Chapman & Hall.
33. Åström K. J., and Wittenmark B. (1984). Computer-controlled systems. Englewood cliffs NJ: Prentice-Hall.
34. Franklin G. F., and Powell J. D. (1980) Digital control of dynamic systems. Reading MA: Addison-Wesley.
35. Banks S. P. (1986). Control system engineering. Englewood cliffs NJ: Prentice-Hall.
36. IEEE (1971). Special issue on the control problem. IEEE transaction on automatic control, AC-16, 607-11.
37. Savanov M. G., and Athans M. (1977). Gain and phase margins of multiloop LQG regulators. IEEE transaction on automatic control, AC-22, 173-9
38. Glover K., and Doyle J. C. (1988). State space formulae for all stabilizing controller that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity. Systems and control letters, 11, 167-172

39. Doyle J., Glover K., Khargonekar P. and Francis B. (1988). State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. In proc. American control conf., Atlanta GA, pp. 1691-6.
40. Simulink 2004, a program for simulating dynamic systems. The Math work Inc,

مدل کشتی

الف-۱ مقدار مدل کشتی

الف-۱-۱ دینامیک نیرو

$$U = 0, \quad \phi = 90^\circ$$

$$F_{s,0} = 310 \quad J_{s,0} = 0.72 \quad \omega_{s,0} = 0.6$$

$$F_{r,0} = 2120 \quad J_{r,0} = 0.7 \quad \omega_{r,0} = 0.76$$

$$F_{y,0} = 11300 \quad J_{y,0} = 0.35 \quad \omega_{y,0} = 0.96$$

برای هر U و ϕ :

$$F_s = F_{s,0} \sin \phi, \quad J_s = J_{s,0} \sin \phi, \quad \omega_s = (\omega_{s,0} + \omega_{s,0}^2 \frac{U}{g} \cos \phi) \sin \phi$$

$$F_r = F_{r,0} \sin \phi, \quad J_r = J_{r,0} \sin \phi, \quad \omega_r = (\omega_{r,0} + \omega_{r,0}^2 \frac{U}{g} \cos \phi) \sin \phi$$

$$F_y = F_{y,0} \sin \phi, \quad J_y = J_{y,0} \sin \phi, \quad \omega_y = (\omega_{y,0} + \omega_{y,0}^2 \frac{U}{g} \cos \phi) \sin \phi$$

الف-۱-۲ دینامیک کشتی

$$U = 0, \quad \phi = 90^\circ$$

$$M = \begin{bmatrix} 215 & 988 & -230 \\ 988 & 104000 & 0 \\ -230 & 0 & 3.76 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$A_{h,o} = \begin{bmatrix} 223 & -759 & 14600 \\ -759 & 22900 & 182000 \\ 14600 & 182000 & 4.18 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$B_{h,o} = \begin{bmatrix} 10.6 & -55.4 & 423 \\ -55.4 & 887 \times RDF & 6270 \\ 423 & 6270 & 144000 \end{bmatrix}$$

$$C_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$RDF = 3$ (عامل میرایی چرخش)

برای هر U و ϕ :

$$A_h = A_{h,0} + \frac{U}{\omega_p^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{h,o_{1,1}} \\ 0 & 0 & B_{h,o_{1,2}} \\ B_{h,o_{1,1}} & B_{h,o_{1,2}} & U \times A_{h,o_{1,1}} \end{bmatrix}$$

$$B_h = B_{h,o} + U \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A_{h,o_{1,1}} \\ 0 & 0 & -A_{h,o_{1,2}} \\ A_{h,o_{1,1}} & A_{h,o_{1,2}} & \frac{U}{\omega_p^2} \times B_{h,o_{1,1}} \end{bmatrix}$$

در حالیکه:

$$\omega_p = 0.425 + \frac{U \cos \phi}{178.27}$$

الف-۲ دینامیک کشتی: مدل فضای حالت

ما معادلات حرکت را به صورت

$$(M + A_h) \ddot{x}_h + B_h \dot{x}_h + C_h x_h = \underline{F}$$

داریم. در حالیکه

$$\underline{x}_h = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sway \\ roll \\ yaw \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sway & force \\ roll & moment \\ yaw & moment \end{bmatrix}$$

ما با نامیدن

$$R = (M + A_h)^{-1} = \{r_{ij}\}$$

$$P = (M + A_h)^{-1} B_h = \{p_{ij}\}$$

$$Q = (M + A_h)^{-1} C_h = R \times C_h$$

چرخش تنها حرکتی است که دارای نیروی دینامیک است در نتیجه:

$$C_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & r_{12}C_{rr} & 0 \\ 0 & r_{22}C_{rr} & 0 \\ 0 & r_{32}C_{rr} & 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس، ما

$$s^2 \underline{x} = -P s \underline{x} - Q \underline{x} + R \underline{F}$$

مینویسیم یا:

$$s(x_1) = (sx_1)$$

$$s(x_2) = (sx_2)$$

$$s(x_3) = (sx_3)$$

$$s(sx_1) = -p_{11}(sx_1) - p_{12}(sx_2) - r_{12}C_{rr}(x_2) - p_{13}(sx_3) + r_{11}F_1 + r_{12}F_2 + r_{13}F_3 \quad (\text{الف-۱})$$

$$s(sx_2) = -p_{21}(sx_1) - p_{22}(sx_2) - r_{22}C_{rr}(x_2) - p_{23}(sx_3) + r_{21}F_1 + r_{22}F_2 + r_{23}F_3 \quad (\text{الف-۲})$$

$$s(sx_3) = -p_{31}(sx_1) - p_{32}(sx_2) - r_{32}C_{rr}(x_2) - p_{33}(sx_3) + r_{31}F_1 + r_{32}F_2 + r_{33}F_3 \quad (\text{الف-۳})$$

که معادلاتی از نمایش فضای حالت با تعداد ۶ حالت هست. حذف صفر- قطب ضمنی، بین قطبهای حرکتیهای پیچش و گردش و صفرهای تطبیق یافته با نیرو و گشتاور وجود دارد.

برای اجتناب از این امر، معادله (الف-۲) را بصورت

$$C_{rr}\left(\frac{x_2}{s}\right) = -\frac{sx_2}{r_{22}} - \frac{p_{21}}{r_{22}}x_1 - \frac{p_{22}}{r_{22}}x_2 - \frac{p_{23}}{r_{22}}x_3 + \frac{r_{21}}{r_{22}}\frac{F_1}{s} + \frac{r_{22}}{r_{22}}\frac{F_2}{s} + \frac{r_{23}}{r_{22}}\frac{F_3}{s} \quad (\text{الف-۴})$$

دوباره نویسی می کنیم.

$$s(x_1) = t_{11}(x_1) + t_{12}(sx_2) + t_{13}(x_2) + t_{14}(x_3) + u_{11}\left(\frac{F_1}{s}\right) + u_{15}\left(\frac{F_3}{s}\right) \quad (\text{الف-۵})$$

در حالیکه:

$$t_{11} = \frac{r_{12}}{r_{22}}p_{21} - p_{11}$$

$$t_{12} = \frac{r_{12}}{r_{22}}$$

$$t_{13} = \frac{r_{12}}{r_{22}}p_{22} - p_{12}$$

$$t_{14} = \frac{r_{12}}{r_{22}}p_{23} - p_{13}$$

$$u_{11} = r_{11} - \frac{r_{12}}{r_{22}}r_{21}$$

$$u_{15} = r_{13} - \frac{r_{12}}{r_{22}}r_{23}$$

بطور مشابه، از (الف-۴) و (الف-۳) داریم:

$$s(x_3) = t_{41}(x_1) + t_{42}(sx_2) + t_{43}(x_2) + t_{44}(x_3) + u_{41}\left(\frac{F_1}{s}\right) + u_{45}\left(\frac{F_3}{s}\right) \quad (\text{الف-۶})$$

در حالیکه:

$$t_{41} = \frac{r_{32}}{r_{22}} p_{21} - p_{31}$$

$$t_{42} = \frac{r_{32}}{r_{22}}$$

$$t_{43} = \frac{r_{32}}{r_{22}} p_{22} - p_{32}$$

$$t_{44} = \frac{r_{32}}{r_{22}} p_{23} - p_{33}$$

$$u_{41} = r_{31} - \frac{r_{32}}{r_{22}} r_{21}$$

$$u_{45} = r_{33} - \frac{r_{32}}{r_{22}} r_{23}$$

و، البتہ:

$$s(x_2) = (sx_2) \quad (\text{الف-۷})$$

نہایتاً، (الف-۴)، (الف-۵)، (الف-۶) و (الف-۲) راہنمایی می کند بہ:

$$s(sx_2) = t_{21}(x_1) + t_{22}(sx_2) + t_{23}(x_2) + t_{24}(x_3) + \\ u_{21}\left(\frac{F_1}{s}\right) + u_{22}(F_1) + u_{24}(F_2) + u_{25}\left(\frac{F_3}{s}\right) + u_{26}(F_3) \quad (\text{الف-۸})$$

در حالیکہ:

$$t_{21} = -p_{21}t_{11} - p_{23}t_{41}$$

$$t_{22} = -p_{21}t_{12} - p_{23}t_{42} - p_{22}$$

$$t_{23} = -p_{21}t_{13} - p_{23}t_{43} - r_{22}c_{rr}$$

$$t_{24} = -p_{21}t_{14} - p_{23}t_{44}$$

$$u_{21} = -p_{21}u_{11} - p_{23}u_{41}$$

$$u_{22} = r_{21}$$

$$u_{24} = r_{22}$$

$$u_{25} = -p_{21}u_{15} - p_{23}u_{45}$$

$$u_{26} = r_{23}$$

معادلات (الف-۴)، (الف-۵)، (الف-۶)، (الف-۷) و (الف-۸) ترکیبی از یک نمایش از فضای حالت جدید است،
با تنها چهار حالت:

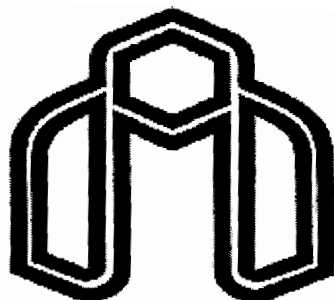
$$s \begin{bmatrix} x_1 \\ sx_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = T \times \begin{bmatrix} x_1 \\ sx_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + U \times \begin{bmatrix} \frac{F_1}{s} \\ F_1 \\ \frac{F_2}{s} \\ F_2 \\ \frac{F_3}{s} \\ F_3 \end{bmatrix}$$

و:

$$T = \{t_{ij}\}$$

$$U = \{u_{ij}\}$$

که در بالا داده شده است.



Shahrood University of Technology

Department of Electrical & Robotic Engineering

**Thesis Submitted for the Master of Science
in Control Engineering**

H_{∞} & H_2 controller design on Ship

By:

Seyyed Jafar Fazeli Abelouei

Supervisor:

Dr. M. A. Sadrnia

September 2005