





دانشکده مهندسی مکانیک

گروه جامدات

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی
مدول الاستیسیته به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

دانشجو: حامد قارونی

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: بهمن ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد : آقای حامد قارونی

تحت عنوان: تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی مدول الاستیسیته
به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه
..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تشکر و قدردانی:

بر خود واجب می دانم از زحمات پدر و مادر مهربانم که همواره در تحصیل علم، دانش و اخلاق مشوق اینجانب بوده اند قدردانی نمایم.

لازم است که از زحمات اساتید محترم دانشکده ی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود که از محضر درس آن بزرگواران استفاده نموده‌ام، قدردانی نمایم. هم چنین از استاد بزرگوار جناب دکتر مهدی قنّاد که زحمت هدایت پایان نامه ی اینجانب بر دوش ایشان است، بسیار سپاسگزارم. از خداوند متعال توفیق روز افزون این عزیزان را خواستارم.

حامد قارونی

دانشجو تأیید می‌نماید که مطالب مندرج در این پایان‌نامه (رساله) نتیجه‌ی تحقیقات خودش می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه‌ی حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد.

ماه و سال

چکیده

هدف از مطالعه‌ی حاضر، تحلیل و مدلسازی جابه‌جایی و تنش‌های ایجاد شده در استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت ثابت در حالت تقارن محوری تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی می‌باشد. در ابتدا معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم با استفاده از روش انرژی برای ماده‌ی FG با تغییرات نمایی خواص تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی استخراج و روش حل معادلات نهایی بیان و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است. به‌منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حل تحلیلی، مدلسازی عددی استوانه‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. همچنین تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، تحت بارگذاری فشاری انجام و توزیع تنش و جابه‌جایی در شرایط مرزی مختلف ارائه و نتایج حاصل با نتایج حل عددی مقایسه شده‌اند. علاوه بر آن تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری و شار حرارتی یکنواخت برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده و مقایسه‌ی نتایج حاصل با حل عددی نشان داده است که تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ها از دقت مطلوب برخوردار نمی‌باشد. در نتیجه به منظور تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان تحت بارگذاری فشاری و شار حرارتی یکنواخت، از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم استفاده شده است. مقایسه‌ی نتایج حل تحلیلی و عددی صحت روش حل و افزایش دقت تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالاتر را مورد تأیید قرار داد. نهایتاً نتیجه‌گیری و جمع‌بندی نهایی انجام شده و پیشنهادهایی نیز ارائه شده است.

واژگان کلیدی: استوانه‌های جدار ضخیم، تئوری تغییر شکل برشی، حل تحلیلی، تغییرات نمایی خواص، مواد هوشمند، روش اجزاء محدود.

فهرست مطالب

فصل ۱: مروری بر روش‌های تحلیل پوسته‌ها

۲	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها
۴	۳-۱ تئوری پوسته‌های نازک
۵	۱-۳-۱ تئوری غشایی
۶	۲-۳-۱ تئوری خمشی
۷	۴-۱ تئوری پوسته‌های ضخیم
۸	۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطی
۹	۲-۴-۱ تئوری تغییر شکل برشی
۱۱	۵-۱ مواد با تغییرات تابعی خواص FGM
۱۲	۱-۵-۱ ویژگی‌های مواد FG
۱۴	۲-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد FG
۱۵	۳-۵-۱ فرآیندهای تولید مواد FG
۱۶	۴-۵-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد FG
۱۹	۶-۱ پیشینه‌ی پژوهش
۲۳	۷-۱ جمع‌بندی

فصل ۲: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

۲۶	۱-۲ مقدمه
۲۶	۲-۲ تئوری تغییر شکل برشی
۳۰	۳-۲ تحلیل الاستیک استوانه‌های ناهمگن
۳۲	۱-۳-۲ توزیع ناهمگنی مدول الاستیسیته
۳۵	۲-۳-۲ حل الاستیک استوانه تحت بارگذاری فشاری
۳۷	۴-۲ مطالعه‌ی موردی
۳۸	۱-۴-۲ استوانه‌ی دوسر گیردار
۵۰	۲-۴-۲ استوانه‌ی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد
۶۱	۵-۲ حل عددی استوانه‌های ناهمگن تحت بارگذاری فشاری

۶۲	۱-۵-۲ مقایسه‌ی نتایج
۶۷	۶-۲ جمع‌بندی

فصل ۳: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

۷۰	۱-۳ مقدمه
۷۰	۲-۳ تحلیل الاستیک استوانه‌های چرخان ناهمگن
۷۳	۱-۲-۳ توزیع ناهمگنی چگالی
۷۵	۲-۲-۳ حل الاستیک استوانه‌های چرخان تحت بارگذاری فشاری
۷۸	۳-۳ مطالعه‌ی موردی
۷۸	۱-۳-۳ استوانه‌ی دوسر گیردار
۸۲	۲-۳-۳ استوانه‌ی یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد
۸۵	۴-۳ حل عددی استوانه‌های چرخان ناهمگن تحت فشار داخلی
۸۶	۱-۴-۳ مقایسه‌ی نتایج
۹۰	۵-۳ جمع‌بندی

فصل ۴: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

۹۲	۱-۴ مقدمه
۹۲	۲-۴ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن
۹۵	۱-۲-۴ توزیع ناهمگنی ضریب انبساط حرارتی
۹۶	۲-۲-۴ حل معادله‌ی انتقال حرارت
۹۹	۳-۲-۴ حل ترموالاستیک استوانه تحت بارگذاری فشاری
۱۰۲	۳-۴ مطالعه‌ی موردی
۱۰۲	۱-۳-۴ استوانه‌ی دوسر گیردار
۱۰۷	۲-۳-۴ استوانه‌ی یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد
۱۱۱	۴-۴ حل عددی استوانه‌های ناهمگن تحت فشار داخلی و بارگذاری حرارتی
۱۱۳	۱-۴-۴ مقایسه‌ی نتایج
۱۱۸	۵-۴ جمع‌بندی

فصل ۵: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

۱۲۱	۱-۵ مقدمه
۱۲۱	۲-۵ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان ناهمگن
۱۲۷	۱-۲-۵ توزیع ناهمگنی خواص مکانیکی
۱۳۰	۲-۲-۵ حل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان تحت بارگذاری فشاری
۱۳۲	۳-۵ مطالعه‌ی موردی
۱۳۳	۱-۳-۵ استوانه‌ی دوسر گیردار
۱۳۶	۴-۵ حل عددی استوانه‌های چرخان ناهمگن تحت فشار داخلی
۱۳۷	۱-۴-۵ مقایسه‌ی نتایج
۱۴۵	۵-۵ نتیجه‌گیری

فصل ۶: جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۱۴۸	۱-۶ مقدمه
۱۴۸	۲-۶ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری
۱۵۵	۳-۶ پیشنهادها

۱۵۷	مراجع
-----	-------

فهرست اشکال و نمودارها

- شکل ۱-۱ نمای مقطع یک استخوان ۱۲
- شکل ۲-۱ مقایسه‌ی تغییرات خواص در مواد مختلف ۱۳
- شکل ۳-۱ ساختار گروه‌های پروژه‌ی ساخت FGM در ژاپن ۱۴
- شکل ۴-۱ دسته‌بندی روش‌های گوناگون تولید مواد FG ۱۵
- شکل ۱-۲ پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت ۲۷
- شکل ۲-۲ پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت تحت فشار داخلی و خارجی ۳۰
- شکل ۳-۲ توزیع بی‌بعد مدول الاستیسیته در راستای شعاعی ۳۳
- شکل ۴-۲ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار ۳۹
- شکل ۵-۲ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار ۴۰
- شکل ۶-۲ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار ۴۰
- شکل ۷-۲ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار ۴۲
- شکل ۸-۲ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار ۴۲
- شکل ۹-۲ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار ۴۳
- شکل ۱۰-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۴۴
- شکل ۱۱-۲ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۴۵
- شکل ۱۲-۲ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۴۵
- شکل ۱۳-۲ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۴۶

- شکل ۲-۱۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۴۶
- شکل ۲-۱۵ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۴۷
- شکل ۲-۱۶ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۴۷
- شکل ۲-۱۷ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۴۸
- شکل ۲-۱۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۴۸
- شکل ۲-۱۹ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۴۹
- شکل ۲-۲۰ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۴۹
- شکل ۲-۲۱ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۵۰
- شکل ۲-۲۲ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۱
- شکل ۲-۲۳ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۱
- شکل ۲-۲۴ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۲
- شکل ۲-۲۵ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۲
- شکل ۲-۲۶ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۳
- شکل ۲-۲۷ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۳
- شکل ۲-۲۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۵

- شکل ۲-۲۹ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۵
- شکل ۲-۳۰ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۶
- شکل ۲-۳۱ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۶
- شکل ۲-۳۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۷
- شکل ۲-۳۳ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۷
- شکل ۲-۳۴ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۸
- شکل ۲-۳۵ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۸
- شکل ۲-۳۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۹
- شکل ۲-۳۷ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۵۹
- شکل ۲-۳۸ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۶۰
- شکل ۲-۳۹ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۶۰
- شکل ۲-۴۰ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$ ۶۳
- شکل ۲-۴۱ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار خارجی برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$ ۶۴
- شکل ۲-۴۲ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۶۴
- شکل ۲-۴۳ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۶۵

- شکل ۲-۴۴ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۶۵
- شکل ۲-۴۵ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۶۶
- شکل ۳-۱ پروفیل استوانه‌ی چرخان جدار ثابت تحت بارگذاری فشاری ۷۱
- شکل ۳-۲ توزیع بی‌بعد چگالی در راستای شعاعی ۷۴
- شکل ۳-۳ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار ۷۹
- شکل ۳-۴ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار ۷۹
- شکل ۳-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۸۰
- شکل ۳-۶ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۸۰
- شکل ۳-۷ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۸۱
- شکل ۳-۸ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۸۱
- شکل ۳-۹ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۸۲
- شکل ۳-۱۰ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۸۳
- شکل ۳-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۸۴
- شکل ۳-۱۲ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۸۴
- شکل ۳-۱۳ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۸۵
- شکل ۳-۱۴ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد ۸۵

- شکل ۳-۱۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$ ۸۶
- شکل ۳-۱۶ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۸۷
- شکل ۳-۱۷ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۸۷
- شکل ۳-۱۸ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت یکسر گیردار - یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۸۸
- شکل ۳-۱۹ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت یکسر گیردار - یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۸۸
- شکل ۴-۱ پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی ۹۳
- شکل ۴-۲ توزیع بی‌بعد ضریب انبساط حرارتی در راستای شعاعی ۹۶
- شکل ۴-۳ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار ۱۰۳
- شکل ۴-۴ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار ۱۰۴
- شکل ۴-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۱۰۵
- شکل ۴-۶ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۱۰۶
- شکل ۴-۷ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۱۰۶
- شکل ۴-۸ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۱۰۷
- شکل ۴-۹ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یکسر گیردار - یکسر آزاد ۱۰۸
- شکل ۴-۱۰ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یکسر گیردار - یکسر آزاد ۱۰۸

- شکل ۴-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد
- شکل ۴-۱۲ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد
- شکل ۴-۱۳ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد
- شکل ۴-۱۴ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد
- شکل ۴-۱۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$
- شکل ۴-۱۶ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$
- شکل ۴-۱۷ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$
- شکل ۴-۱۸ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$
- شکل ۴-۱۹ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$
- شکل ۵-۱ پروفیل استوانه‌ی چرخان جدار ثابت تحت بارگذاری فشاری و حرارتی
- شکل ۵-۲ توزیع بی‌بعد خواص مکانیکی در راستای شعاعی
- شکل ۵-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار
- شکل ۵-۴ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار

- شکل ۵-۵ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۱۳۶
- شکل ۶-۵ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار ۱۳۶
- شکل ۷-۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$ ۱۳۹
- شکل ۸-۵ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$ ۱۳۹
- شکل ۹-۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به‌ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۱۴۰
- شکل ۱۰-۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دوسر گیردار به‌ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۱۴۱
- شکل ۱۱-۵ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به‌ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۱۴۲
- شکل ۱۲-۵ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دوسر گیردار به‌ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۱۴۲
- شکل ۱۳-۵ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به‌ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۱۴۳
- شکل ۱۴-۵ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دوسر گیردار به‌ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ ۱۴۳

فهرست جداول

- جدول ۱-۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$ ۶۶
- جدول ۲-۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار خارجی برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$ ۶۷
- جدول ۳-۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$ ۶۷
- جدول ۱-۳ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$ ۸۹
- جدول ۲-۳ تنش محیطی محاسبه شده تحت بارگذاری‌های مختلف برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$ ۸۹
- جدول ۱-۴ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT برای بارگذاری‌های مختلف در حالت دو سرگیردار به‌ازای $n=1$ در $x=L/2$ ۱۱۴
- جدول ۲-۴ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$ ۱۱۸
- جدول ۱-۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT برای بارگذاری‌های مختلف در حالت دو سرگیردار به‌ازای $n=1$ در $x=L/2$ ۱۴۵
- جدول ۲-۵ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT برای بارگذاری‌های مختلف در حالت دو سرگیردار به‌ازای $n=1$ در $x=L/2$ ۱۴۵

فهرست علائم و اختصارات

U_r	جابه‌جایی شعاعی
U_x	جابه‌جایی محوری
u, φ	مؤلفه‌های جابه‌جایی محوری در FSDT
w, ψ	مؤلفه‌های جابه‌جایی شعاعی در FSDT
u_i	مؤلفه‌های جابه‌جایی محوری در HSDT
w_i	مؤلفه‌های جابه‌جایی شعاعی در HSDT
σ_θ	تنش محیطی
τ_{xz}	تنش برشی
σ_r	تنش شعاعی
σ_x	تنش محوری
ε_θ	کرنش محیطی
γ_{xz}	کرنش برشی
ε_r	کرنش شعاعی
ε_x	کرنش محوری
$\varepsilon^T(z)$	کرنش حرارتی
E	مدول الاستیسیته
ν	نسبت پواسون
ρ	چگالی
k	ضریب هدایت حرارتی
α	ضریب انبساط حرارتی
q_r	شار حرارتی
n	ثابت ناهمگنی ماده
μ, λ	ثوابت لامه
p_i	فشار داخلی
p_o	فشار خارجی
ω	سرعت دورانی

T_i	دمای داخلی
T_o	دمای خارجی
T_{ref}	دمای محیط
$\Delta T(r)$	توزیع اختلاف دما
N_x, N_θ, N_z	نیروهای محوری
M_x, M_θ, M_z	لنگرهای خمشی
$P_x, P_\theta, P_z, S_x, S_\theta$	لنگرهای خمشی مرتبه‌ی بالا
Q_x	نیروی برشی
M_{xz}	لنگر پیچشی
P_{xz}, S_{xz}	لنگرهای پیچشی مرتبه‌ی بالا
U	انرژی کرنشی
U^*	چگالی انرژی کرنشی
W	کار نیروهای خارجی
$\overrightarrow{f_{bf}}$	نیروهای حجمی
$\overrightarrow{f_{sf}}$	نیروهای سطحی
$\bar{r}$	نسبت شعاع به شعاع داخلی
h	ضخامت پوسته
L	طول استوانه
x	مختصات در جهت طولی استوانه
r	مختصات در جهت شعاعی استوانه
θ	مختصات در جهت محیطی استوانه
R	شعاع صفحه‌ی میانی استوانه
z	فاصله‌ی هر نقطه‌ی استوانه از صفحه‌ی میانی
$\{F\}$	بردار ناهمگنی
$[A], [B], [C]$	ماتریس‌های ضرایب
K	ضریب تصحیح برشی
m_i	مقادیر ویژه
ξ_i	بردارهای ویژه

فصل ۱

مروری بر روش‌های تحلیل پوسته‌ها

۱-۱ مقدمه

پوسته‌ها^۱ یا سازه‌های پوسته‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها در اشکال طبیعی مانند جمجمه‌ی سر انسانها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند؛ در اشکال مصنوعی در صنایع مختلف: ساختمانی، نیروگاهی، خودروسازی، نظامی، هوا و فضا همانند: سقف‌ها، لوله‌ها، بدنه‌ی خودروها و هواپیماها، پرتابه‌ها و پرتاب‌کننده‌ها، موشک‌ها و سفینه‌ها تولید می‌شوند.

پوسته‌ها به طور کلی، سازه‌های خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به تناسب مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آنها نیز حائز اهمیت می‌باشد. روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیت ویژه‌تری برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش‌پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آنها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش و در صورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند.

۱-۲ دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

الف- از دیدگاه هندسی:

پوسته‌ی حاصل از انتقال^۲: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی

1. Shells
2. Shell of Translation

قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران^۱: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک^۲: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی^۳ آن کوچکتر از $1/20$ باشد.

پوسته‌ی جدار ضخیم^۴: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگتر از $1/20$ باشد.

ب- از دیدگاه مادی:

پوسته‌ی همگن^۵: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

پوسته‌ی ناهمگن^۶: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

پوسته‌ی همسانگرد^۷: خواص مکانیکی (E, ν) ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان است.

پوسته‌ی ناهمسانگرد^۸: خواص مکانیکی (E, ν) ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان نیست.

ج- از دیدگاه رفتاری:

-
1. Shell of Rotation
 2. Thin Shell
 3. Midsurface
 4. Thick Shell
 5. Homogeneous Shell
 6. Inhomogeneous(Heterogeneous) Shell
 7. Isotropic Shell
 8. Anisotropic Shell

پوسته با تغییر شکل های کوچک^۱: جابه جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی باری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییر شکل های بزرگ^۲: جابه جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی باری، کوچک نیست (رفتار غیر خطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان^۳: تغییر شکل ها بازگشت پذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می کنند (رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان^۴: تغییر شکل ها بازگشت ناپذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی کنند (رفتار غیر خطی از نظر مادی).

۱-۳ تئوری پوسته های نازک

در پوسته های نازک، نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی R کوچکتر از $1/20$ می باشد. تئوری این دسته از پوسته ها بر مبنای تئوری الاستیسیته ی خطی بنا شده است. به طور کلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته ی سه بعدی استفاده نمی شود؛ بلکه با ساده سازی روابط الاستیسیته، روش های تحلیلی- تقریبی برای تحلیل پوسته های نازک به دست می آورند. دقت نتایج تئوری های ارائه شده بستگی به درجه ی ساده سازی روابط الاستیسیته دارد. اولین فرضیات را کیرشهف^۵ (۱۸۵۰) درباره ی ورق ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته ها به کار گرفته شد. ارون^۶ (۱۸۷۴) تئوری پوسته ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لوو^۷ (۱۸۸۸)

-
1. Small Deflection
 2. Large Deflection
 3. Elastic Behavior
 4. Plastic Behavior
 5. Kirchhoff
 6. Aron
 7. Love

معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری لوو-کیرشهف مشهور است. رایسنر^۱ (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لوو تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری^۲ را ارائه نمود. فلوگه^۳ (۱۹۳۲) اولین کسی است که تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشد. با ساده‌سازی آنها تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به دست می‌آیند. نظریات فلوگه توسط بیرنه^۴ (۱۹۴۴) تکمیل شد. نقدی^۵ (۱۹۵۷) تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که به کارگیری آنها مشکل می‌باشد. سندرز^۶ (۱۹۵۹) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلِف^۷ (۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

تئوری عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به این گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱ - تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی)^۸

۲ - تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)^۹

۳ - تئوری با تقریب مرتبه‌ی دو (تئوری فلوگه)^{۱۰}

۱-۳-۱ تئوری غشایی

غشاء^{۱۰} از دیدگاه مکانیکی، یک تار^{۱۱} دو بعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری (نیروهای

-
1. Reissner
 2. Axisymmetric Shell of Revolution
 3. Flugge
 4. Byrne
 5. Naghdi
 6. Sanders
 7. Novozhilov
 8. Membrane Theory
 9. Bending Theory
 10. Membrane
 11. String

را تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی^۱ آنها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در تئوری غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسایل در حالت تنش صفحه‌ای^۲ و کرنش صفحه‌ای^۳ با چشم‌پوشی از تنش تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند [۲].

۱-۳-۲ تئوری خمشی

ورق^۴ از دیدگاه مکانیکی، یک تیر^۵ دو بعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آنها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناویر^۶ ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لوو باهمین فرضیات، تئوری خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلی، معادلات تعادل به تنهایی برای به‌دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در تئوری خمشی نیز، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لوو-کیرشهف می‌نامند که عبارتند از [۲]:

-
1. Bending Stiffness
 2. Plane Stress
 3. Plane Strain
 4. Plate
 5. Beam
 6. Navier

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی

نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم پوشی است (تنش

صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و

عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر

گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

۴-۱ تئوری پوسته‌های ضخیم

اولین بار لامه^۱ (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (PET)^۲، حلّ دقیق استوانه‌های

ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسانگرد را ارائه

کرد [۳]، که تاکنون نیز در حلّ مسایل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین^۳ (۱۹۳۰)

روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف^۴ (۱۹۴۹) با

استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلّی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶)

با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی^۵ را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری

نمود [۴]. میرسکی و هرمان^۶ (۱۹۵۸) با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل، تحلیل ارتعاشی

1. Lamé
2. Plane Elasticity Theory
3. Galerkin
4. Vlassov
5. Shear Deformation
6. Mirsky-Hermann

پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند [۵]. گرینسپن^۱ (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود [۶].

تئوری عمومی پوسته‌های ضخیم را می‌توان به این گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱ - تئوری الاستیسیته‌ی خطی

۲ - تئوری تغییر شکل برشی

۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطی

به طور کلی در تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول رابطه‌ی دست آورد؛ معادلات عبارتند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارتند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی (بردار جابه‌جایی). تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی هرچند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به طور کامل توصیف می‌کند و منجر به حل دقیق می‌شود ولی حل معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به کارگیری آنها امکان‌ناپذیر است. با فرضیات ساده‌شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه‌ها به کار برد. در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جابه‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این تئوری را لامه^۲ برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد به کار برد و توزیع

1. Greenspon

2. Lame

تنش را در استوانه‌ها به دست آورد. تئوری لامه به تئوری کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است [۷].

معادله دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌ی ضخیم جدار ثابت عبارت است از:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0 \quad \text{or} \quad r^2 u_r'' + r u_r' - u_r = 0 \quad (1-1)$$

و جابه‌جایی استوانه u_r برابر است با:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (2-1)$$

r شعاع استوانه، C_1, C_2 ثابت‌های معادله هستند که با شرایط مرزی به دست می‌آیند.

۲-۴-۱ تئوری تغییر شکل برشی

در این تئوری، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف نمی‌شود بلکه با مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌شود. به طور کلی فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (r) برابر است با شعاع سطح میانی (R) به علاوه فاصله‌ی آن نقطه از سطح میانی (z)، یعنی:

$$r = R + z, \quad \left| \frac{z}{h} \right| < 1 \quad (3-1)$$

بر اساس تئوری لامه، جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی توخالی:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1 (R + z) + \frac{C_2}{(R + z)} \quad (4-1)$$

به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت:

$$u_r = C_1 (R + z) + \frac{C_2}{R} \left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \dots \right) = \left(C_1 R + \frac{C_2}{R} \right) + \left(C_1 - \frac{C_2}{R^2} \right) z + \frac{C_2}{R^3} z^2 + \dots \quad (5-1)$$

$$\Rightarrow u_r = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots$$

براساس رابطه‌ی بالا، جابه‌جایی شعاعی را به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب z می‌توان نوشت. اگر $z = 0$ باشد، نشانگر جابه‌جایی سطح میانی است. اگر فقط جمله‌ی اول در نظر گرفته شود $u = u_0$ ، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی صفر پوسته‌های کلفت می‌شود که مشابه تئوری خمشی (تئوری مرتبه‌ی یک در پوسته‌های نازک) و اگر دو جمله در نظر گرفته شود $u = u_0 + u_1 z$ ، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی یک پوسته‌های کلفت می‌شود که مشابه تئوری فلوگه (تئوری مرتبه‌ی دو در پوسته‌های نازک) می‌باشد [۶].

در این تئوری، علاوه بر اثر نیروهای محوری، اثرات برش، خمش، پیچش و نیز اثرات اینرسی دورانی و میدان حرارتی را می‌توان در نظر گرفت. تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول میرسکی-هرمان شهرت دارد که تعمیم تئوری تیموشنکو^۱ در تیرها و همچنین تئوری میندلین^۲ در ورق‌ها می‌باشد [۸]. میدان جابه‌جایی در این تئوری عبارت است از:

$$\begin{cases} U_x = u + \phi z \\ U_\theta = v + \theta z \Rightarrow \{U\} = \{u_0\} + \{u_1\} z \\ U_z = w + \psi z \end{cases} \quad (۶-۱)$$

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، مستوی باقی می‌مانند ولیکن الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند. هرچند به کارگیری تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، منجر به حل دقیق مسائل می‌شود، ولیکن به دلیل اینکه تاکنون هیچ راه حل کاملی برای پوسته‌های کلفت (به غیر از موارد خاص) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی ارائه نشده است، تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای مختلف با انواع جداره، انواع مواد، انواع بارگذاری و شرایط مرزی، حتی نامتقارن محوری^۳، روش مناسبی می‌باشد.

1. Timoshenko
2. Mindlin
3. Nonaxisymmetric

۱-۵ مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM)^۱

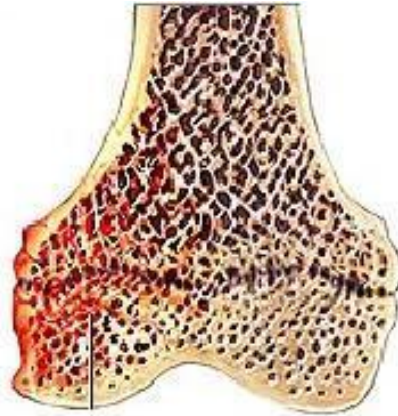
مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوا و فضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند. از این رو دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند که از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها)^۲ در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهم‌ساز به‌وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری همزمان مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، ولیکن از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند.

لخنیتسکی^۳ (۱۹۵۰) تئوری الاستیسیته‌ی اجسام مرکب را فرمول‌بندی کرد [۹] و پس از وی دیگران، تئوری‌های حاکم بر ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی را ارائه نمودند. وینسون^۴ (۱۹۷۴) تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی را در تحلیل استاتیکی پوسته‌های کامپوزیتی به‌کار برد و بین نتایج دو روش مقایسه‌ای انجام داد.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آنهاست که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به‌ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی‌ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص یا مواد هدفمند (FGM) در ساختار ارگانیزم‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به عنوان مثال استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه

1. Functionally Graded Materials
2. Composite Material (Composites)
3. Lekhnitskii
4. Vinson

دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این رو تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. مواد FG، ناهمگن هستند ولیکن آنها را همسانگرد در نظر می‌گیرند.



شکل ۱-۱ نمای مقطع یک استخوان

۱-۵-۱ ویژگی‌های مواد FG

مواد ناهمگن FG در مقایسه با مواد همگن (ایزوتروپ‌ها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها) دارای ویژگی‌های به شرح زیر می‌باشند [۱۰]:

- ۱ - مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا. درحقیقت این گونه مواد با کاهش تنش‌های حرارتی، آثار منفی آنها را به نحو قابل توجهی کاهش می‌دهند. به کمک مواد FG می‌توان در ناحیه‌هایی که تنش‌های حرارتی به حالت بحرانی می‌رسند، آنها را کنترل کرد.
- ۲ - مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا. به کمک مواد FG می‌توان استحکام مواد را افزایش داد تا از ورود اجسام به ناحیه‌ی مومسان و حتی شکست^۱ تا حدود زیادی جلوگیری شود.
- ۳ - یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد FG، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود،

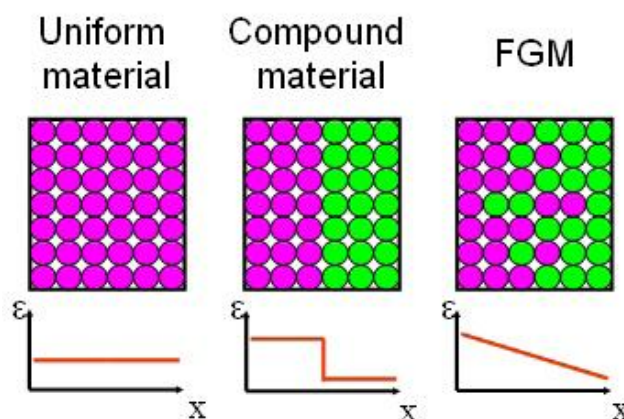
1. Fracture

مانند لبه‌های جسم و نزدیکی سوراخ‌ها و گشودگی‌ها. به کمک مواد FG می‌توان آثار تمرکز تنش را به صورت چشم‌گیری کاهش داد.

۴ - بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد هدفمند FG است.

۵ - اگر پوشش ترد^۱ بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد FG، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

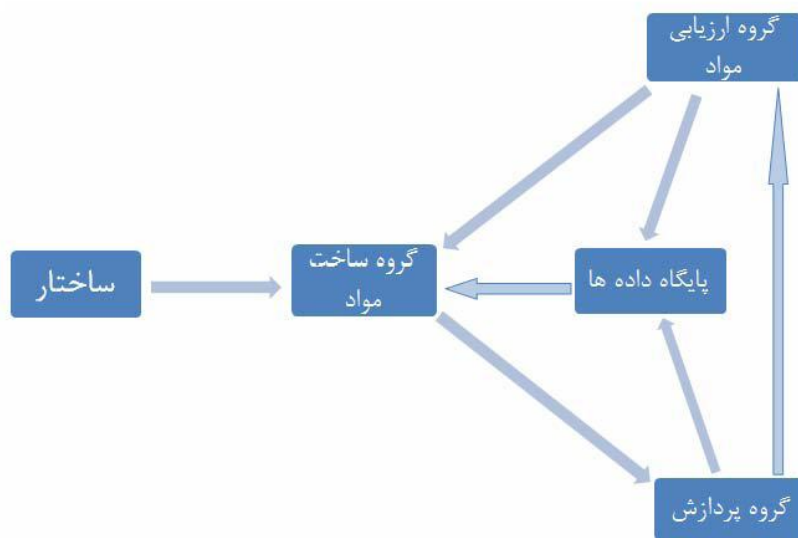
۶ - تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد FG، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد FG، به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آنها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل (۲-۲) مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و FGM را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱ مقایسه‌ی تغییرات خواص در مواد مختلف [۱۰]

۱-۵-۲ تاریخچه‌ی مواد FG

مفهوم اولیه‌ی FGM توسط نینو^۱ و همکارانش در ۱۹۸۴ در سازمان هوا و فضای ژاپن مطرح و از ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید FGM در این کشور شروع شد [۱۱ و ۱۲]. مرحله‌ی اول پروژه‌ی ملی ((فناوری گسترش FGM)) طی سال‌های ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد. در این پروژه، سه گروه ساخت مواد، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء شود.



شکل ۱-۳ ساختار گروه‌های پروژه‌ی ساخت FGM در ژاپن [۱۲]

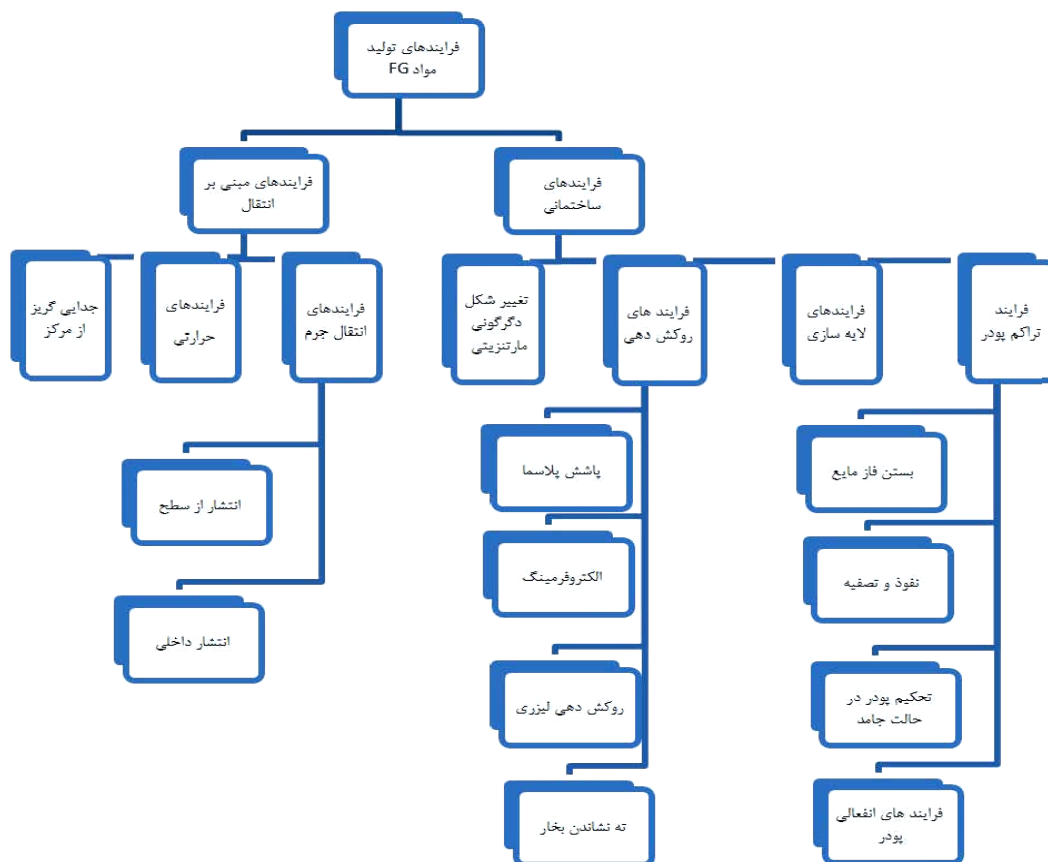
پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلیمتر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلیمتر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ درجه‌ی کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ درجه‌ی کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در ۱۹۹۰ در

1. Ninno

اختیار همگان قرار دادند. مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلیمتر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلیمتر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد [۱۳]. دومین سمپوزیوم جهانی FGM، در ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به‌ویژه تحلیل سازه‌های FGM فراگیر شد.

۱-۵-۳ فرآیندهای تولید مواد FG

تاکنون فرآیندهای تولید مواد FG در محدوده‌ی آزمایشگاه‌های تخصصی بوده و هنوز روش تولید نیمه-صنعتی با صرفه‌ی اقتصادی ارائه نشده است. به طور کلی روش‌های تولید موجود را می‌توان به دو گروه عمده تقسیم کرد [۱۰].



شکل ۱-۴ دسته‌بندی روش‌های گوناگون تولید مواد FG [۱۰]

گروه اول: فرآیندهای تولید مواد FG به صورت لایه لایه، که به آن فرآیندهای ساختمانی می‌گویند. این نوع فرآیندها، نتیجه‌ای از پیشرفت‌های شگرف انجام شده در زمینه‌ی اتوماسیون ساخت مواد پیشرفته می‌باشد. در فرآیندهای ساختمانی، تغییرات تدریجی توسط انباشته‌شدن مواد با یک روش برنامه‌ریزی شده انجام می‌شود. با روش‌های ساخت در این گروه، مدل‌های مواد FG را می‌توان به هر شکل و یا هرگونه تغییرات دلخواهی سازگار کرد. به همین دلیل هیچ‌گونه محدودیتی در چگونگی تغییرات تدریجی وجود ندارد. این نکته موجب انعطاف‌پذیری در طراحی می‌شود. با وجود نکات مثبت فراوان این روش‌ها، تولید مواد FG با آنها، بسیار پرهزینه، وقت‌گیر و دشوار است که با افزایش دقت، مشکلات آن چند برابر می‌شوند. در شکل (۱-۴) روش‌های این گروه نشان داده شده است.

گروه دوم: فرآیندهای تولید مواد FG مبتنی بر پدیده‌ی انتقال برای ایجاد تغییرات تدریجی در یک جزء از مواد می‌باشند. این نوع فرآیندها از جریان سیال، انتشار اتمی یا انتقال حرارت برای تولید تغییرات تدریجی در ریزساختارهای محلی یا ترکیب‌های موجود بهره می‌گیرند. جریان سیال و انتشار حالت جامد در طول فرآیند جامدسازی، پاسخ‌گوی تفکیک کریستال‌ها در ساخت مواد آلیاژی می‌باشد. به این ترتیب به گونه‌ای دیگر، روش‌هایی برای ایجاد تغییرات تدریجی به دست می‌آیند. روش‌های تولید فرآیند انتقال، انعطاف‌پذیری روش‌های تولید فرآیندهای ساختمانی را ندارند ولی از لحاظ زمان و هزینه، بسیار مناسب‌تر از روش‌های گروه اول می‌باشند.

۱-۵-۴ مدل‌سازی ریاضی مواد FG

با توجه به اینکه مواد FG اساساً ناهمگن می‌باشند و خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی آنها به صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند، می‌توان تغییر خواص را با یک تابع پیوسته‌ی ریاضی، مدل کرد و از آن در روش‌های تحلیلی و عددی بهره گرفت. روش مرسوم در مدل‌سازی خواص مکانیکی و حرارتی

مواد FG، استفاده از یک تابع توانی یا تابع نمایی برای بیان توزیع پیوسته‌ی خواص در ماده می‌باشد. معمولاً در عبارات مربوط به توزیع خواص، تغییرات مدول کشسانی (E)^۱، ضریب هدایت حرارتی، ضریب انبساط حرارتی و چگالی را در نظر می‌گیرند و تغییرات نسبت پواسون (ν)^۲، را لحاظ نمی‌کنند. دلیل آن، مقدار نسبت پواسون است که بسیار نزدیک به هم می‌باشد، به گونه‌ای که می‌توان از تغییرات ناچیز آن در جسم چشم‌پوشی کرد، یعنی ماده را ناهمگن همسانگرد (FG ایزوتروپ) در نظر گرفت.

أباتا و نودا^۳ (۱۹۹۴) تابع توانی [۱۴]، هورگان و چان^۴ (۱۹۹۹) تابع توانی [۱۵]، یانگ^۵ (۲۰۰۰) تابع توانی [۱۶]، توتونچو^۶ (۲۰۰۱) تابع توانی [۱۷]، تارن^۷ (۲۰۰۱) تابع توانی [۱۸]، جتاری و همکاران (۲۰۰۳) تابع توانی [۱۹]، ارسلان و آکیز^۸ (۲۰۰۶) تابع نمایی [۲۰] و هونگ‌جون و ژیفای^۹ (۲۰۰۶) تابع نمایی [۲۱] را در روش‌های تحلیلی به کار بردند.

تابع توانی در اکثر مراجع به صورت رابطه‌ی (۱-۱۸) در نظر گرفته می‌شود:

$$P(z) = P_a \left(\frac{z}{a} \right)^n \quad (۷-۱)$$

P_a خاصیت ماده (مکانیکی، حرارتی و ...) در یک لایه‌ی مشخص و n ثابت ناهمگنی است.

رایج‌ترین ماده‌ی FG، تلفیق فلز-سرامیک^{۱۰} است که با افزودن برخی عناصر آلیاژی دیگر خواص دلخواه

تأمین می‌شود. پراوین و ردی^{۱۱} (۱۹۹۸)، رابطه‌ی ویژه‌ای برای یک ورق FGM با ضخامت ثابت h ارائه

کردند. ایشان تغییر خواص را در ورق به صورت زیر بیان نمودند [۲۲]:

-
1. Elasticity Modulus
 2. Poisson's Ratio
 3. Obata & Noda
 4. Horgan & Chan
 5. Yang
 6. Tutuncu
 7. Tarn
 8. Eraslan & Akis
 9. Hongjun & Zhifei
 10. Metal-Ceramic
 11. Praveen & Reddy

$$P(z) = (P_c - P_m)V^n + P_m \quad (۸-۱)$$

P_m خواص فلز، P_c خواص سرامیک و V نسبت حجمی در جسم می‌باشد.

$$V = \left(\frac{z}{h}\right) + \frac{1}{2}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (۹-۱)$$

اگر $n=0$ باشد، ورق همگن سرامیک به‌دست می‌آید؛ اگر $z = -h/2$ باشد، خاصیت فلزی و اگر

$z = h/2$ باشد، خاصیت سرامیک به‌دست می‌آید. این ماده در اجسامی که لبه‌ی بالایی آن در معرض

گرادیان دمایی بالا و لبه‌ی پایینی آن تحت بارهای مکانیکی قرار دارند، بسیار مفید است.

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت کلی‌تر برای دو خاصیت به شکل زیر بیان نمود:

$$P(z) = (P_1 - P_2)V^n + P_2 \quad (۱۰-۱)$$

P_1 و P_2 خواص در دو لایه‌ی مختلف می‌باشد. به عنوان مثال رابطه برای یک استوانه‌ی توخالی جدار

ثابت، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} E(r) = (E_0 - E_i)V^n + E_i \\ V = \frac{r/r_i - 1}{r_o/r_i - 1} \end{cases} \quad (۱۱-۱)$$

E_i و E_o به ترتیب، مدول یانگ ماده‌ی FG در شعاع داخلی و خارجی استوانه می‌باشد.

توتونچو (۲۰۰۹) سه مدل تابع توانی ساده، تابع توانی مشابه تابع پراوین و ردی و نیز تابع نمایی به

صورت تلفیق فلز-سرامیک ارائه کرد [۲۳]. شاو^۱ (۲۰۰۸) برای خواص ماده‌ی ناهمگن تابع نمایی به صورت

رابطه‌ی (۱۲-۱) ارائه کرد [۲۴]:

$$\begin{cases} A(R) = A_o e^{m_i(R-R_1)} \\ R_1 = \frac{r_1}{r_m}, R_2 = \frac{r_2}{r_m} \end{cases} \quad (۱۲-۱)$$

که در این رابطه m_i ثابت ناهمگنی ماده، r_1 و r_2 به ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و r_m

میانگین شعاع داخلی و خارجی و A_0 خواص لایه‌ی خارجی استوانه می‌باشد.

توتونچو (۲۰۰۷) [۲۵] و همچنین کلس و کانکر^۱ (۲۰۱۱) [۲۶] تغییر خواص در جداری استوانه را به

صورت تابع نمایی طبق رابطه‌ی زیر بیان نمودند:

$$A(r) = A_0 e^{\beta r} \quad (1-13)$$

که در آن r شعاع استوانه، β ثابت ناهمگنی ماده و A_0 نیز خواص لایه‌ی خارجی استوانه می‌باشد.

۱-۶ پیشینه‌ی پژوهش

تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد به روش‌های مختلف، همان گونه که در بخش ۱-۴ بیان شد، دارای قدمتی نسبتاً طولانی است. تحلیل استوانه‌های ناهمسانگرد به حدود نیم قرن پیش برمی‌گردد، ولی تحلیل استوانه‌های ناهمگن مربوط به دهه‌ی اخیر است. در این بخش، مطالعات انجام شده بر روی استوانه‌های همگن و ناهمگن در رابطه با موضوع پروژه گزارش می‌شود.

استوانه‌های همگن: برای اولین بار لامه در ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حل^۲

دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از مواد همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای را ارائه کرد [۷۳]. گالرکین در ۱۹۳۰ روابط حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف^۲ در ۱۹۴۹ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حل^۳ برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی در ۱۹۵۶ با لحاظ اثر برش عرضی، تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود [۴]. میرسکی و هرمان در ۱۹۸۵ با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم را ارائه کردند [۵]. در ۱۹۶۰ مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را گرینسپن با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و

1. Keles & Conker
2. Vlassov

ضخیم، محاسبه و با یکدیگر مقایسه نمود[۶].

زیو و پرل^۱ در ۱۹۷۳ با به کارگیری تئوری میرسکی-هرمان و روش عددی تفاضل محدود، پاسخ ارتعاشی استوانه‌های نیمه‌بلند را به دست آوردند[۲۷]. سوزوکی و تاکاهاشی^۲ در ۱۹۸۱ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، معادلات ارتعاشی حاکم بر استوانه‌های همگن جدار متغیر را استخراج و آنها را به کمک سری فریبینیوس حل کردند. ایشان برای همگرایی ۵۰ جمله از سری را در نظر گرفتند[۲۸]. سوزوکی و همکاران در ۱۹۸۶ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، معادلات ارتعاشی حاکم بر مخروط‌های همگن جدار متغیر را به دست آورده و آنها را به کمک سری فریبینیوس با لحاظ ۱۰۰ جمله از سری، حل کردند[۲۹]. ایپکچی و همکاران در ۲۰۰۳ معادلات استوانه‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات^۳ حل کردند[۳۰]. ایشان در ۲۰۰۸ معادلات مخروط‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی دوم، استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات حل کردند[۳۱]. قنّاد و همکاران در ۲۰۰۹ حلّ عمومی پوسته‌های مخروطی شکل ناقص جدار ضخیم همگن و همسانگرد را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به کمک تئوری اغتشاشات ارائه نمودند[۳۲]. در سال ۲۰۱۰ نیز قنّاد و زمانی‌نژاد با استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم همگن و همسانگرد بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت حاصل را برای شرایط مرزی دوسر گیردار حل نمودند[۳۳]. ایپکچی در ۲۰۱۰ نیز معادلات پوسته‌های جدار ضخیم مخروطی شکل همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات حل کرد[۳۴].

استوانه‌های ناهمگن: پس از اولین سمپوزیوم جهانی FGM در ۱۹۹۰، فوکویی و یاماناکا^۴ در ۱۹۹۲

1. Ziv & Perl
2. Suzuki & Takahashi
3. Perturbation Theory
4. Fukui & Yamanaka

روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و آنها را به روش عددی رانگ-کوتا حل کردند [۳۵]. آباتا و نودا در ۱۹۹۴ تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه و کره‌ی توخالی FGM استخراج و ماده‌ی بهینه را به‌دست آوردند [۱۴]. لوی و ردی^۱ در ۱۹۹۹ ارتعاشات پوسته‌های نازک استوانه‌ای FGM را با استفاده از تئوری لویو-کیرشهف استخراج و آنها را به کمک روش ریلی-ریتز حل کردند [۳۶]. هورگان و چان^۲ در ۱۹۹۹ معادلات حاکم بر یک استوانه‌ی توخالی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و توزیع تنش را به‌دست آوردند [۱۴]. ایشان در ۱۹۹۹ با همین روش، تنش‌ها را در یک دیسک دوار FGM بررسی کردند [۳۷]. توتونچو در ۲۰۰۱ حل دقیق مخازن استوانه‌ای و کره‌ی جدار ثابت FGM با توزیع توانی مدول الاستیسیته تحت فشار یکنواخت داخلی را ارائه کردند. ایشان معادلات استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک تئوری لامه استخراج و توزیع تنش را به‌ازای ریشه‌های مثبت معادله مشخصه به‌دست آورد. در مقاله‌ی ایشان، رابطه و نمودار تنش محیطی و نمودار تنش شعاعی اشتباه است که در برخی از پژوهش‌های پسین نیز استفاده شده است [۱۷]. جباری و همکاران در ۲۰۰۲ تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه‌ی توخالی FGM تحت بارهای متقارن [۱۹] و در ۲۰۰۳ تحت بارهای نامتقارن حرارتی [۳۸] را به‌دست آوردند.

هونگ‌جون و ژیفای در ۲۰۰۶ حل دقیق استوانه‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی مدول یانگ در راستای شعاعی با لایه‌های همگن را ارائه کردند [۲۱]. ژیفای و همکاران در ۲۰۰۷ با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به صورت توانی و خطی، استوانه‌ی FGM را با روش چند لایه‌ای کردن، تحلیل و با حل توتونچو مقایسه و در نتیجه به اشتباه مقاله‌ی نامبرده پی‌بردند [۳۹]. توتونچو در ۲۰۰۷ تحلیل استوانه‌ی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع نمایی مدول یانگ، ارائه کرد [۲۵]. شاو در ۲۰۰۸ تحلیل

1. Loy & Reddy
2. Horgan & Chan

ترمو مکانیکی استوانه‌های توخالی تشکیل شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص تحت بارهای مکانیکی و افزایش خطی دمای مرزی را با انتقال معادلات دیفرانسیل حاکم به حوزه‌ی لاپلاس و استفاده از روش حل به کمک سری‌ها انجام داد [۲۴]. توتونچو در ۲۰۰۹ نیز توزیع میدان جابه‌جایی و مقادیر تنش مربوط به دیسک، استوانه و کره‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی و توانی خواص ماده در راستای شعاع تحت فشار داخلی را توسط تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و روش تابع متمم تعیین نمود [۲۳]. زمانی‌نژاد و قناد در ۲۰۰۹ با ارائه‌ی دستگاه معادلات سه‌بعدی بر اساس تحلیل تانسوری، رفتار پوسته‌های جدار ضخیم FGM حاصل از دوران با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر در راستای نصف‌النهاری را بررسی کردند [۴۰]. قناد و همکاران در ۲۰۱۰ حلّ عمومی استوانه‌های جدار کلفت FGM را بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی به ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه‌ی بسته ارائه و اشتباه مقاله‌ی توتونچو را نشان داده و آن را تصحیح کردند [۴۱]. ایشان در ۲۰۱۱ حلّ عمومی استوانه‌های جدار کلفت FGM را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، ارائه و نتایج آن را با حلّ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی مقایسه نمودند [۴۲]. در ۲۰۱۰ عارفی و رحیمی تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را تحت فشار داخلی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در حالت کرنش صفحه‌ای انجام دادند [۴۳]. در ۲۰۱۱ کلس و کانکر حلّ گذرای هدایت حرارتی به صورت هذلولوی برای استوانه و کره‌ی توخالی ناهمگن تشکیل شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص را ارائه نمودند [۲۶]. قربانپور و همکاران در ۲۰۱۱ اثر ناهمگنی را بر روی رفتار الکتریکی، حرارتی و مکانیکی یک استوانه‌ی چرخان جدار ضخیم FGPM^۱ با تغییرات توانی خواص تحت فشار داخلی و خارجی بررسی و معادلات حاصل را برای این استوانه حل کردند [۴۴].

۷-۱ جمع‌بندی

برای تحلیل استوانه‌های ضخیم همگن و ناهمگن با جدار ثابت، فشار یکنواخت و شرایط انتهایی متفاوت، به گونه‌ای که مسأله از حالت الاستیسیته‌ی دو بعدی خارج نشود، می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و تئوری تغییر شکل برشی استفاده کرد ولی برای تحلیل استوانه‌های کلفت همگن و ناهمگن با جدار متغیر و یا فشار غیریکنواخت، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مناسب‌تر است. همچنین با توجه به اینکه در تئوری تغییر شکل برشی بر خلاف تئوری الاستیسیته‌ی مستوی کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفته می‌شود استفاده از تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل استوانه‌ها تحت شرایط مرزی مختلف مناسب‌تر می‌باشد. به دلیل اهمیت تحلیل پوسته‌ها و همچنین ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی آن‌ها و با توجه اینکه تاکنون حلّ تحلیلی با استفاده از روش انرژی برای استوانه‌های جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی خواص تحت بارگذاری‌های فشاری، حرارتی و دورانی به طور همزمان ارائه نشده است، در این پژوهش با ارائه‌ی حلّ تحلیلی برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم با شرایط انتهایی مختلف به کمک تئوری تغییر شکل برشی، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حلّ عددی به منظور بررسی صحت نتایج صورت پذیرفته است.

ابتدا در فصل اوّل این پژوهش، ضمن مرور تئوری پوسته‌های نازک و کلفت، مطالعات انجام شده در خصوص پوسته‌های استوانه‌ای ارائه شده است. همچنین مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM) تعریف و ضمن بیان تاریخچه و ویژگی‌های آن‌ها، فرآیندهای تولید و مدل‌سازی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته و پیشینه‌ی پژوهشی مواد FG ارائه شده است. فصل دوّم شامل استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم با استفاده از روش انرژی برای ماده‌ی FGM با تغییرات نمایی خواص تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی می‌باشد. سپس روش حلّ معادلات نهایی بیان و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است. به‌منظور بررسی

صحت نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، مدلسازی عددی استوانه‌ای مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. در فصل سوم برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های چرخان جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، ضمن ارائه‌ی حلّ عمومی پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری دورانی و فشاری، توزیع تنش و جابه‌جایی به صورت مطالعه‌ی موردی برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. نهایتاً نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک تئوری تغییر شکل برشی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند. در فصل چهارم نیز به منظور تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای، پس از استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، حلّ عمومی پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری و حرارتی ارائه و به صورت مطالعه‌ی موردی برای استوانه تحت فشار داخلی و شار حرارتی یکنواخت برای شرایط مرزی مختلف حل شده است. سپس با ارائه‌ی حلّ عددی برای استوانه‌ی مورد نظر، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند. همچنین عدم قابلیت تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ها نشان داده شده است. در فصل پنجم نیز به منظور تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان تحت بارگذاری فشاری و شار حرارتی یکنواخت، با استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار کلفت در حالت تقارن محوری با ضخامت ثابت توسط تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم، حلّ عمومی پوسته‌های استوانه‌ای برای شرایط انتهایی دوسر گیردار ارائه شده است. نهایتاً نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه و صحت روش حل مورد تأیید قرار گرفته است. نتیجه‌گیری، جمع‌بندی نهایی و ارائه‌ی پیشنهادها در فصل ششم انجام شده است.

فصل ۲

تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

۲-۱ مقدمه

از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای جدار کلفت دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشند و همواره مهندسان و دانش‌پژوهان به دنبال اعمال تغییرات بر روی ضخامت و ماده‌ی این دسته از پوسته‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آنها را در برابر نیروهای وارد شده افزایش داده و در صورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند. استوانه‌های جدار ضخیم در مخازن تحت فشار و لوله‌های توپ استفاده می‌شوند.

در این فصل ابتدا به معرفی و مقایسه‌ی تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و تئوری تغییر شکل برشی به طور مختصر پرداخته می‌شود. سپس برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد همگن و ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، حلّ عمومی استوانه‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی و شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. نهایتاً با ارائه‌ی حلّ عددی توسط نرم-افزار المان محدود Ansys برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک روش تغییر شکل برشی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند.

۲-۲ تئوری تغییر شکل برشی

در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی در استوانه‌ها، همان‌طور که در فصل اول نیز به آن اشاره شد فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند و تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور استوانه متقارن بوده و مقدار آنها در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفته نمی‌شوند. همچنین تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می‌کند، به عبارت دیگر تغییر مکان شعاعی فقط تابع شعاع $U_r(r)$ می‌باشد. بنابراین به دلیل عدم وجود

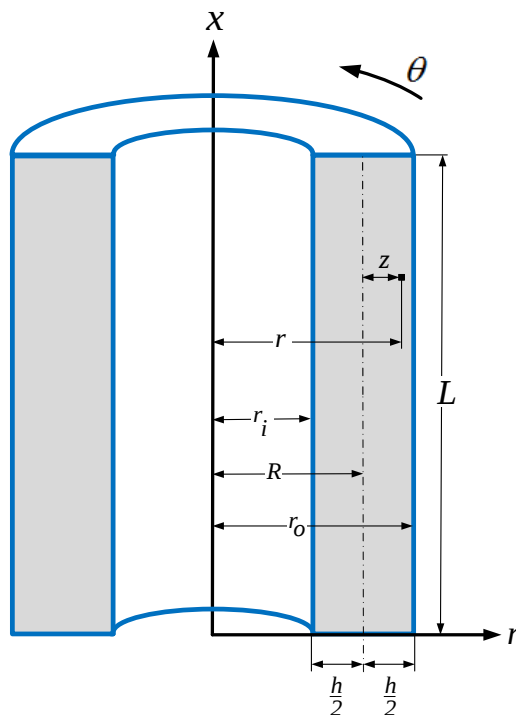
تنش برشی، تنش‌های عمودی، تنش‌های اصلی می‌باشند. در تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک فرض می‌شود که خطوط راست و عمود بر صفحه‌ی میانی، پس از تغییر شکل همچنان راست و عمود باقی می‌مانند و جابه‌جائی هر نقطه از پوسته، همان جابه‌جائی صفحه‌ی میانی در نظر گرفته می‌شود. در این تئوری نیز از تنش برشی و کرنش برشی چشم‌پوشی می‌شود. در تئوری تغییر شکل برشی، خطوط راست و عمود بر صفحه‌ی میانی، پس از تغییر شکل راست باقی می‌مانند ولی الزاما عمود نیستند، یعنی تنش و کرنش برشی لحاظ می‌شوند.

اگر مطابق شکل (۱-۲)، فاصله‌ی هر نقطه‌ی پوسته از محور تقارن (r) برابر با مجموع شعاع صفحه‌ی میانی (R) و فاصله‌ی آن نقطه از صفحه‌ی میانی (z) در نظر گرفته شود:

$$r = R + z, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2} \quad (۱-۲)$$

همچنین h ضخامت و L طول استوانه باشد:

$$h = r_o - r_i, \quad 0 \leq x \leq L \quad (۲-۲)$$



شکل ۱-۲ پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت

بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، جابه‌جایی شعاعی استوانه برابر است با:

$$u_r = c_1 r + \frac{c_2}{r} = c_1(R+z) + \frac{c_2}{R+z} \quad (3-2)$$

با توجه به شرط $\left|\frac{z}{R}\right| \ll 1$ و به کمک بسط تیلور، جابه‌جایی شعاعی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_r &= c_1(R+z) + \frac{c_2}{R} \left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \dots \right) \\ &= \left(c_1 R + \frac{c_2}{R} \right) + \left(c_1 - \frac{c_2}{R^2} \right) z + \frac{c_2}{R^3} z^2 + \dots \end{aligned} \quad (4-2)$$

در نتیجه نهایتاً می‌توان نوشت:

$$u_r = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots \quad (5-2)$$

بر اساس رابطه‌ی (5-2) جابه‌جایی شعاعی استوانه را به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب z می‌توان

نوشت که حالت $z=0$ بیانگر جابه‌جایی صفحه‌ی میانی است.

با استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اول (اشاره شده در فصل اول)،

میدان جابه‌جایی برای استوانه‌ی جدار ضخیم در حالت متقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{cases} U_x = u(x) + \phi(x)z \\ U_\theta = 0 \\ U_z = w(x) + \psi(x)z \end{cases} \quad (6-2)$$

همچنین مقادیر کرنش‌ها بر اساس روابط سینماتیک در حالت تقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{du}{dx} + \frac{d\phi}{dx} z \\ \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{r} = \frac{w}{R+z} + \frac{\psi}{R+z} z \\ \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = \psi \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = \left(\phi + \frac{dw}{dx} \right) + \frac{d\psi}{dx} z \end{cases} \quad (7-2)$$

بر اساس روابط رفتاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد تنش‌ها بر حسب مقادیر کرنش عبارتند از:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \\ \tau_{xz} = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \end{cases} \quad (۸-۲)$$

با تعریف پارامتر جدید λ برای خلاصه‌نویسی داریم:

$$\begin{cases} \sigma_i = \lambda E(r) [(1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k)] \\ \tau_{xz} = \frac{1-2\nu}{2} \lambda E(r) \gamma_{xz} \\ \lambda = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (۹-۲)$$

نیروهای محوری بر حسب نتیجه‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} dz \quad (۱۰-۲)$$

لنگرهای خمشی بر حسب نتیجه‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} z dz \quad (۱۱-۲)$$

نیروی برشی بر حسب تنش برشی برابر است با:

$$Q_x = K \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (۱۲-۲)$$

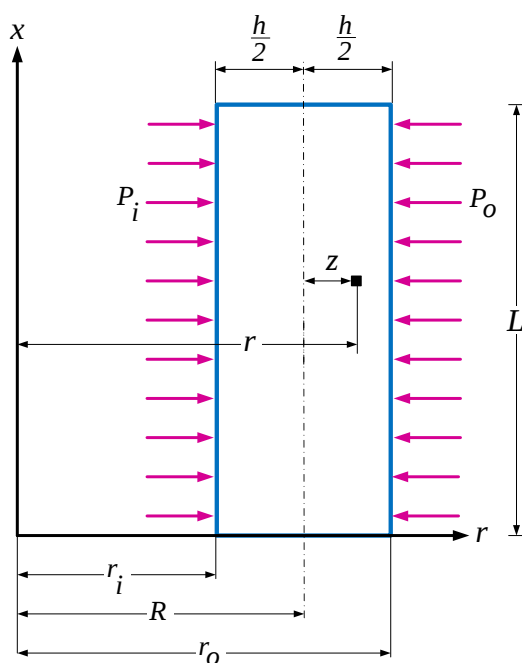
و لنگر پیچشی بر حسب تنش برشی برابر است با:

$$M_{xz} = K \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \quad (۱۳-۲)$$

۳-۲ تحلیل الاستیک استوانه‌های ناهمگن

یک پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی را به صورت شکل (۳-۲) در نظر

می‌گیریم:



شکل ۳-۲ پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت تحت فشار داخلی و خارجی

بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \quad (۱۴-۲)$$

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\left\{ \begin{aligned} U &= \iiint_V U^* dV \\ dV &= r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \\ U^* &= \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \\ &= \frac{1}{2} E(r) \lambda \left[(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta \varepsilon_z) + \frac{1-2\nu}{2} \gamma_{xz}^2 \right] \end{aligned} \right. \quad (۱۵-۲)$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار داخلی و خارجی:

$$\begin{cases} W = \iint_S (\vec{f}_{sf} \cdot \vec{u}) dS \\ dS = r d\theta dx = (R+z) dx d\theta \\ \Rightarrow W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) U_z dx d\theta \end{cases} \quad (۱۶-۲)$$

و با انتگرالگیری در محدوده‌ی:

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (۱۷-۲)$$

برای تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی

داریم:

$$\delta U = R \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \delta U^* \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx d\theta \quad (۱۸-۲)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} = R \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx$$

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) \delta U_z dx d\theta \quad (۱۹-۲)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} = \int_0^L \left[P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right] (\delta w + z \delta \psi) dx$$

با جایگذاری کرنش‌های رابطه‌ی (۷-۲) در روابط (۱۸-۲) و (۱۹-۲) و نیز به‌کارگیری اصول حساب

وردشی و اصل کار مجازی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای تحت فشار داخلی و خارجی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{2\pi} = \frac{\delta W}{2\pi} \quad (۲۰-۲)$$

$$\begin{cases} R \frac{dN_x}{dx} = 0 \\ R \frac{dM_x}{dx} - R Q_x = 0 \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta = -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - R N_z = P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) \end{cases} \quad (۲۱-۲)$$

$$R [N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi]_0^L = 0 \quad (۲۲-۲)$$

روابط (۲۱-۲) همان معادلات تعادل را تشکیل می‌دهند. رابطه‌ی کمکی (۲۲-۲) شرایط مرزی مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌بایست در هر دو انتهای استوانه صفر باشند.

۲-۳-۱ توزیع ناهمگنی مدول الاستیسیته

در استوانه‌های تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، مدول الاستیسیته E و ضریب پواسون ν تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد $\bar{r}$ می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و بالاخص در این بررسی، به علت تغییرات جزئی ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن توزیع نمایی برای مدول الاستیسیته در طول جداره‌ی استوانه به صورت تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد $\bar{r}$ به صورت رابطه‌ی (۲۳-۲) خواهیم داشت:

$$E(r) = E_i e^{n(\bar{r}-1)} \quad (23-2)$$

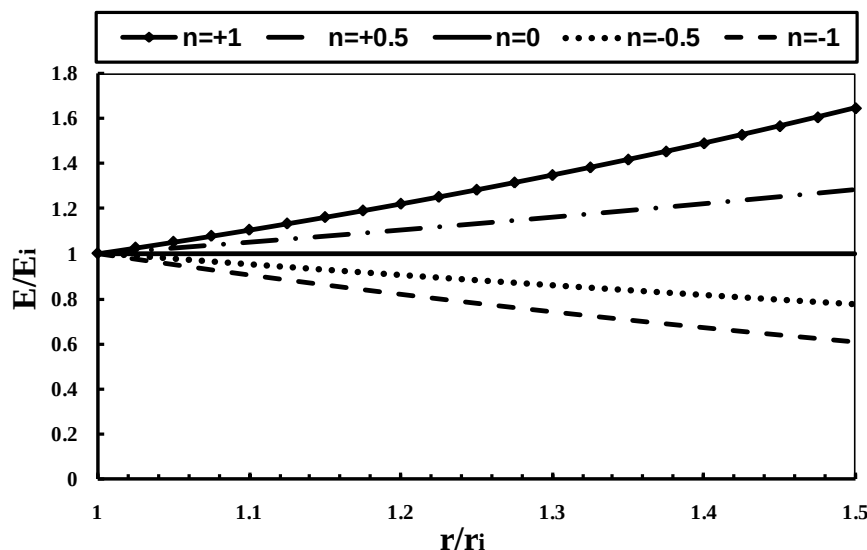
که در این رابطه $\bar{r} = r/r_i$ مختصات شعاعی بی‌بعد است. همچنین E_i مدول الاستیسیته‌ی شعاع داخلی استوانه و n نیز ثابت ناهمگنی ماده می‌باشد که $n=0$ همان ماده‌ی همگن است. با جایگذاری مقدار $r = R + z$ در رابطه‌ی (۲۳-۲) داریم:

$$E(z) = E_i e^{n\left(\frac{R+z-r_i}{r_i}\right)} = E_i \eta e^{n\left(\frac{z}{r_i}\right)} \quad (24-2)$$

که در آن پارامتر η در استوانه‌ی جدار ثابت مستقل از دستگاه مختصات بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta = e^{\left(\frac{nh}{2r_i}\right)} \quad (25-2)$$

شکل (۳-۲) توزیع مدول الاستیسیته‌ی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن و همسانگرد به‌ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲ توزیع بی‌بعد مدول الاستیسیته در راستای شعاعی

معادلات (۲-۲۱) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد. برای حل آن باید نیروها و لنگرها را با استفاده از روابط (۲-۱۰) تا (۲-۱۳) به منته‌های تنش و با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۲۴) در روابط (۲-۹) و استفاده از روابط (۲-۹) به مؤلفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۲-۷) بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نوشت. نهایتاً یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به دست می‌آید که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$[A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \quad (2-26)$$

که در آن بردار مجهول $\{y\}$ شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت رابطه‌ی (۲-۲۷) می‌باشد:

$$\{y\} = \{u \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \quad (2-27)$$

رابطه‌ی (۲-۲۸) نیز قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به صورت بردار نیروی $\{F\}$ را نشان می‌دهد.

$$\{F\} = \frac{1}{\lambda E_i \eta} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (2-28)$$

در دستگاه معادلات (۲-۲۶) ماتریس‌های $[A]_{4 \times 4}$ و $[C]_{4 \times 4}$ متقارن و $[B]_{4 \times 4}$ پادمتقارن هستند که

در ادامه درایه‌های غیر صفر مربوط به آنها آورده شده است:

$$A_{11} = R(1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (2-29)$$

$$A_{12} = R(1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz = A_{21} \quad (2-30)$$

$$A_{22} = R(1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} z^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (2-31)$$

$$A_{33} = R\mu \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (2-32)$$

$$A_{34} = R\mu \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz = A_{43} \quad (2-33)$$

$$A_{44} = R\mu \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} z^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (2-34)$$

$$A_{13} = A_{14} = A_{23} = A_{24} = A_{31} = A_{32} = A_{41} = A_{42} = 0 \quad (2-35)$$

$$B_{13} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} dz = -B_{31} \quad (2-36)$$

$$B_{14} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} (R + 2z) dz = -B_{41} \quad (2-37)$$

$$B_{23} = \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} [(\nu - \mu)z - R\mu] dz = -B_{32} \quad (2-38)$$

$$B_{24} = \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} [R(\nu - \mu) + z(2\nu - \mu)] z dz = -B_{42} \quad (2-39)$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = B_{33} = B_{34} = B_{43} = B_{44} = 0 \quad (2-40)$$

$$C_{22} = -R\mu \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (2-41)$$

$$C_{33} = -(1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} \frac{e^{\frac{nz}{ri}}}{R + z} dz \quad (2-42)$$

$$C_{34} = -\nu \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} dz - (1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} \left(\frac{z}{R+z} \right) dz = C_{43} \quad (43-2)$$

$$C_{44} = -2\nu \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} z dz - (1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} \left(\frac{z^2}{R+z} \right) dz - R(1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} e^{\frac{nz}{ri}} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz \quad (44-2)$$

$$C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{21} = C_{23} = C_{24} = C_{31} = C_{32} = C_{41} = C_{42} = 0 \quad (45-2)$$

که پارامتر μ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu = K \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \quad (46-2)$$

K ضریب تصحیح برشی^۱ است که بسته به هندسه‌ی پوسته در عبارت تنش برشی وارد می‌شود. این

ضریب در حالت استاتیک برای استوانه $K = 5/6$ در نظر گرفته شده است [۴۵].

۲-۳-۲ حل الاستیک استوانه تحت بارگذاری فشاری

همانطور که توضیح داده شد، دستگاه معادله‌ی (۲-۲۶) یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن

خطی با ضرایب ثابت می‌باشد که دارای حلّ عمومی و حلّ خصوصی است. اگر این دستگاه معادلات را به

صورت ساده شده‌ی زیر بنویسیم:

$$[A]\{y''\} + [B]\{y'\} + [C]\{y\} = \{F\} \quad (47-2)$$

داریم:

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p \quad (48-2)$$

برای حلّ عمومی دستگاه فوق مقدار $\{y\} = \{\xi\} e^{mx}$ را در معادلات آن می‌گذاریم، داریم:

$$e^{mx} [m^2 A + mB + C] \{\xi\} = \{0\} \quad (49-2)$$

با توجه به اینکه $e^{mx} \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$|m^2 A + mB + C| = 0 \quad (50-2)$$

از حلّ معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه m_i محاسبه شده که به صورت چهار جفت ریشه‌ی مزدوج حاصل

می‌شوند که یک جفت آن صفر می‌باشند. از سه جفت ریشه‌ی باقیمانده، یک جفت آن عدد حقیقی و دو جفت دیگر اعداد مختلط به صورت مزدوج می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه‌ی حاصل در معادله‌ی (۲-۴۹)، بردارهای ویژه ξ_i متناظر با مقادیر ویژه‌ی فوق به‌دست می‌آیند. در نهایت حلّ عمومی عبارتست از:

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^6 C_i \{\xi\}_i e^{m_i x} \quad (2-51)$$

با توجه به این نکته که مقادیر ویژه‌ی حاصل شامل اعداد مختلط می‌باشند، برای به‌دست آوردن بردارهای ویژه‌ی متناظر با این اعداد مختلط، باید از روابط حاکم بر بردارهای ویژه‌ی مربوط به اعداد مختلط استفاده کرد [۴۶-۴۸].

برای حل خصوصی، قسمت ناهمگن معادلات (۲-۲۶) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری با ضخامت ثابت و تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از x نمی‌باشد. بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس $[C]$ طبق معادله‌ی زیر جواب خصوصی را به دست آورد.

$$[C]\{y\} = \{F\} \Rightarrow \{y\} = [C]^{-1}\{F\} \quad (2-52)$$

اما با توجه به معکوس‌ناپذیری (منفرد بودن) ماتریس $[C]$ به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، با ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حل می‌شود. بدین منظور در اولین معادله از سری معادلات (۲-۲۱)، از طرفین آن انتگرال‌گیری کرده و خواهیم داشت:

$$RN_x = C_0 \quad (2-53)$$

همانطور که در معادلات (۲-۲۶) مشخص است، عبارت u وجود ندارد ولیکن du/dx در معادلات وجود دارد. با در نظر گرفتن du/dx به عنوان پارامتری جدیدی به نام v و انتگرال‌گیری از طرفین اولین معادله از سری معادلات داریم:

$$u = \int v dx + C_7 \quad (2-54)$$

بنابراین دستگاه معادلات قدیم به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} [A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \\ \{y\} = \{v \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \end{cases} \quad (55-2)$$

که در آن بردار نیرویی $\{F\}$ با توجه به انتگرالگیری از طرفین اولین معادله، به صورت زیر می‌باشد:

$$\{F\} = \frac{1}{\lambda E_i \eta} \begin{Bmatrix} C_0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (56-2)$$

بنابراین با حل دستگاه معادلات فوق به صورت مطالعه‌ی موردی می‌توان مولفه‌های میدان جابه‌جایی

را به‌دست آورد.

شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۲-۲) توسط رابطه‌ی (۲۲-۲) بیان می‌شوند. به عبارتی باید مقادیر $\{u \quad \phi \quad w \quad \psi\}$ و $\{N_x \quad M_x \quad Q_{xz} \quad M_{xz}\}$ در دو انتهای استوانه طوری در نظر گرفته شوند که همواره رابطه‌ی (۲۲-۲) برابر صفر باشد. با داشتن ۶ مجهول $C_1, \dots, C_6$ در جواب عمومی و ۲ ثابت C_0, C_7 در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل ۴ شرط مرزی در هر سمت، ۸ ثابت مجهول را محاسبه کرد. نهایتاً با به‌دست آوردن ثوابت مجهول، بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مولفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه‌ی (۴۸-۲) برحسب متغیرهای x, z به‌دست می‌آیند. با استفاده از رابطه‌ی (۶-۲) می‌توان میدان جابه‌جایی شعاعی و طولی را به‌دست آورده و با استفاده از روابط (۷-۲) تا (۱۳-۲) مقادیر تنش، کرنش، نیرو و لنگر را نیز محاسبه کرد.

۴-۲ مطالعه‌ی موردی

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج حل تحلیلی، یک استوانه جدار ضخیم

ناهمگن و همسانگرد با ضخامت ثابت مطابق شکل (۲-۲) به شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی

$r_o = 60 \text{ mm}$ ، طول $L = 800 \text{ mm}$ و توزیع نمایی مدول الاستیسیته را در نظر می‌گیریم. مدول الاستیسیته در سطح داخلی استوانه برابر $E_i = 200 \text{ GPa}$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ را تحت سه حالت بارگذاری زیر در نظر می‌گیریم:

$$1 - \text{فشار یکنواخت داخلی } P_i = 80 \text{ MPa}$$

$$2 - \text{فشار یکنواخت خارجی } P_o = 80 \text{ MPa}$$

$$3 - \text{فشار یکنواخت داخلی } P_i = 80 \text{ MPa} \text{ و خارجی } P_o = 80 \text{ MPa}$$

تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط انتهایی (الف) دوسر گیردار و (ب) یکسر گیردار - یک سر آزاد انجام شده است. حل تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 11 صورت گرفته است [۴۹].

۲-۴-۱ استوانه‌ی دوسر گیردار

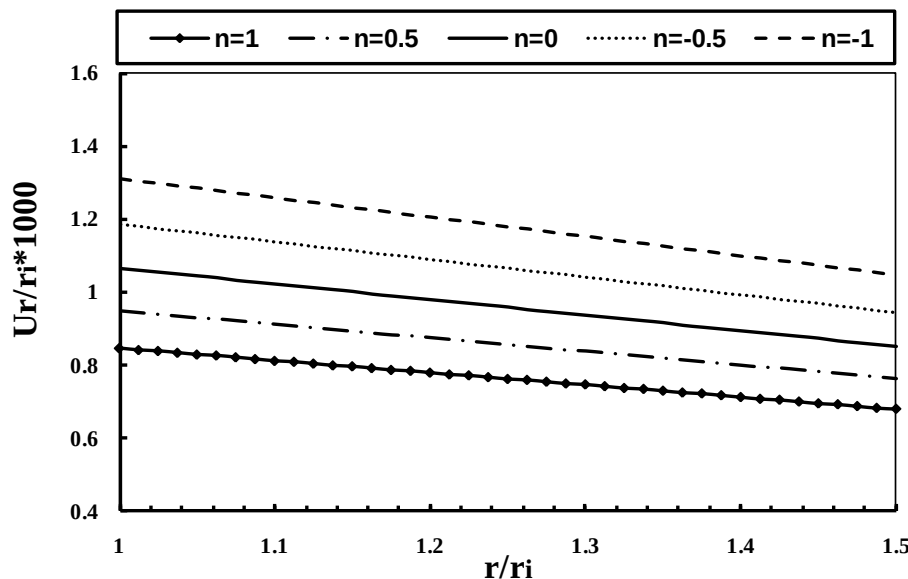
برای شرایط مرزی دوسر گیردار با توجه به رابطه‌ی (۲-۲۲) داریم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \end{cases} \quad (2-57)$$

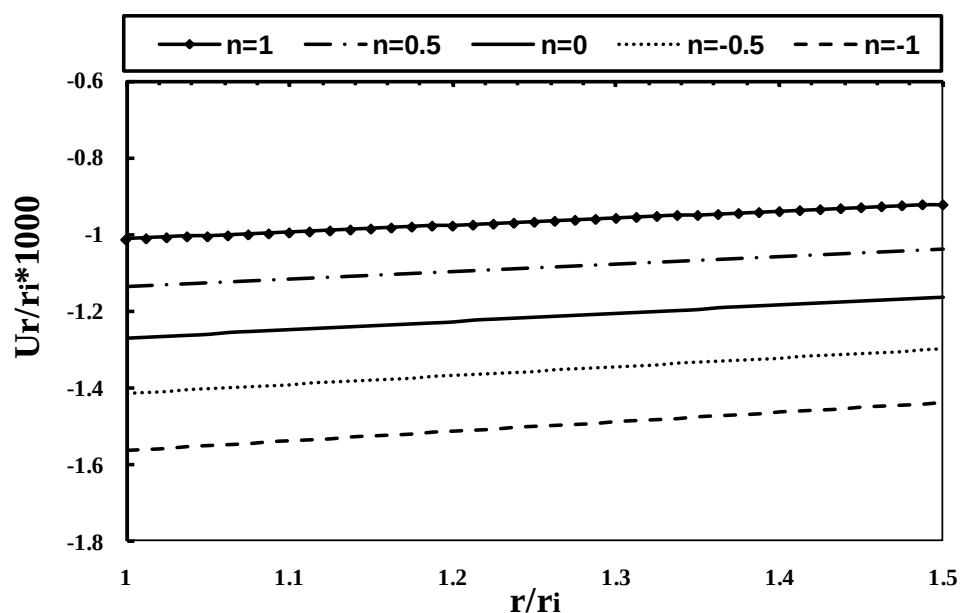
با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به‌دست می‌آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند. در شکل‌های (۲-۴) تا (۲-۶) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به‌ازای n های مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه برای حالت دوسر گیردار نشان داده شده است.

همانطور که مشخص است به ازای n های منفی جابه‌جایی استوانه نسبت به ماده‌ی همگن از نظر مقدار بیشتر است و به ازای n های مثبت کمتر می‌باشد، ولیکن این نسبت در استوانه تحت فشار داخلی و تحت فشار خارجی در طول جداره تقریباً ثابت می‌ماند یعنی تغییرات جابه‌جایی در ماده‌ی ناهمگن مشابه

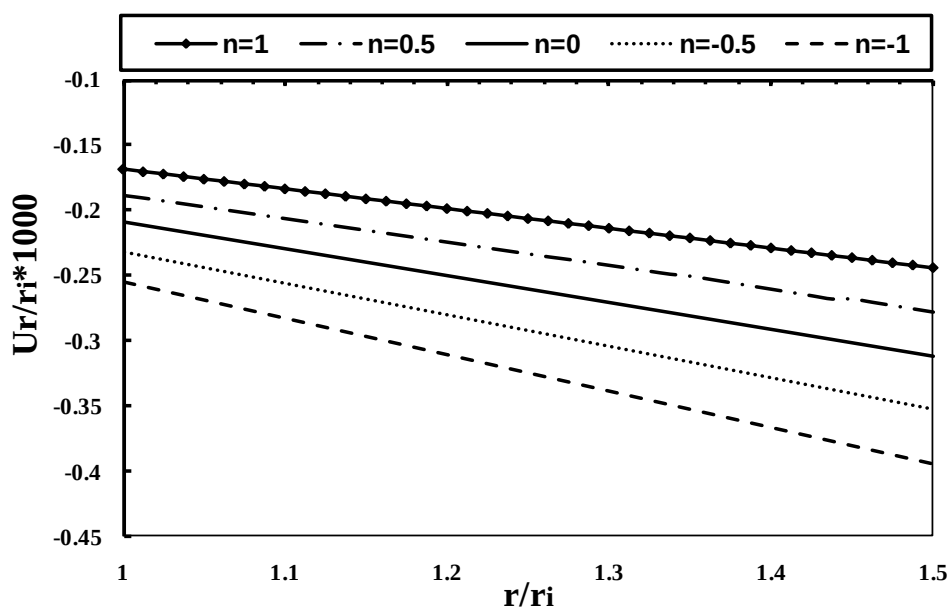
تغییرات جابه‌جایی در ماده‌ی همگن است و میزان تفاوت به مقدار $|n|$ بستگی دارد. همچنین جابه‌جایی شعاعی استوانه برای فشار داخلی دارای مقادیر مثبت و در فشار خارجی دارای مقدار منفی می‌باشد. با توجه به حضور عبارات مربوط به فشار در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات (۲-۵۵)، جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز با استفاده از اصل جمع آثار^۱، از مجموع جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت فشار داخلی و تحت فشار خارجی به دست می‌آید. با توجه به شکل (۲-۶) می‌توان دریافت که اثر فشار خارجی بر فشار داخلی غلبه می‌کند یعنی به ازای n های مختلف جابه‌جایی شعاعی دارای مقادیر منفی می‌باشد. در این نوع بارگذاری نیز به ازای n های منفی جابه‌جایی استوانه نسبت به ماده‌ی همگن از نظر مقدار بیشتر و به ازای n های مثبت کمتر می‌باشد. همچنین نسبت جابه‌جایی شعاعی به‌ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی ثابت نمانده و در لایه‌ی خارجی نسبت به لایه‌ی داخلی دارای اختلاف بیشتری از ماده‌ی همگن می‌باشد.



شکل ۲-۴ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار



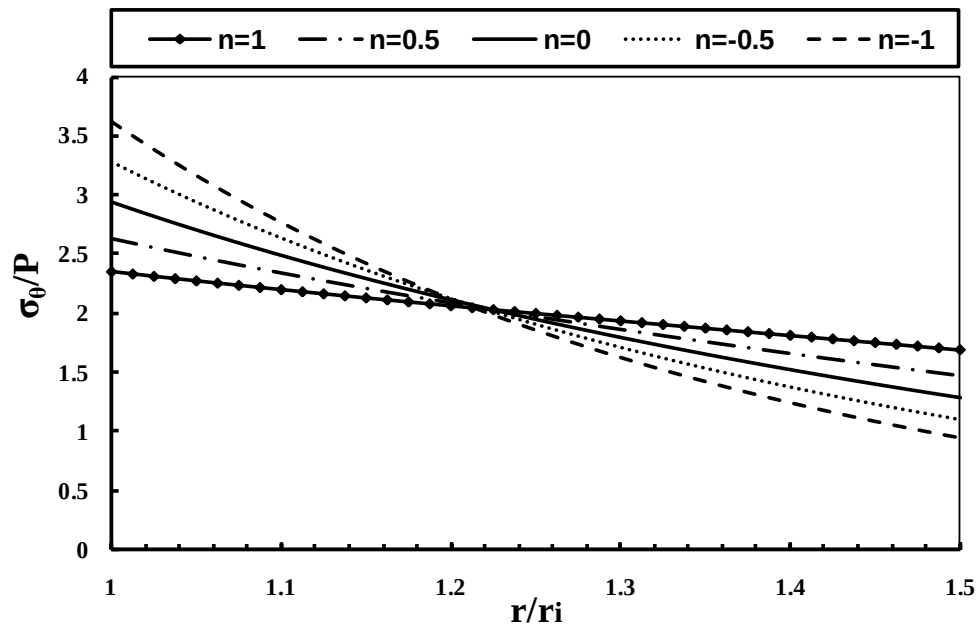
شکل ۵-۲ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار



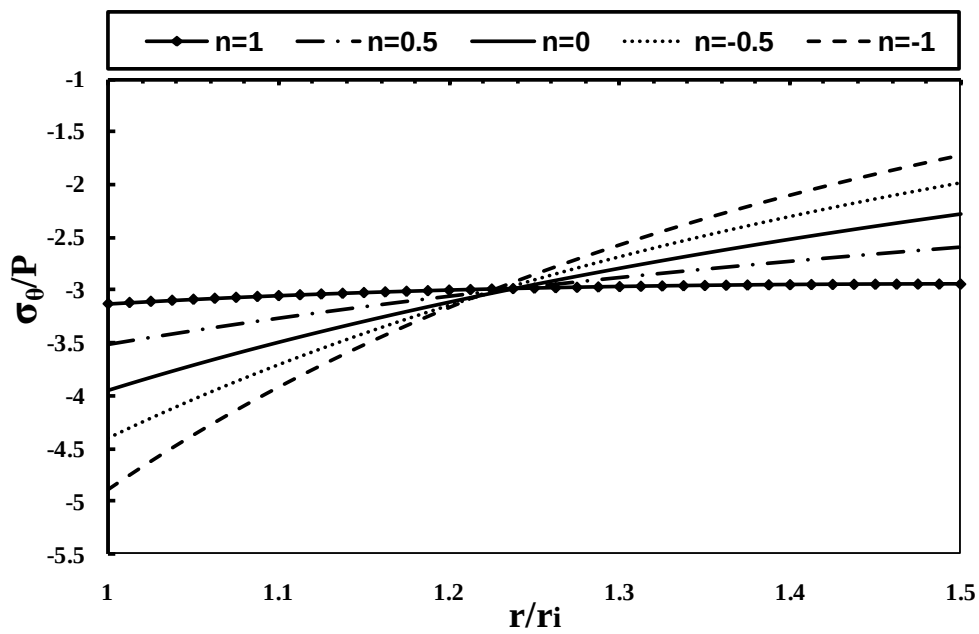
شکل ۶-۲ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار

شکل‌های (۷-۲) تا (۹-۲) نیز توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به

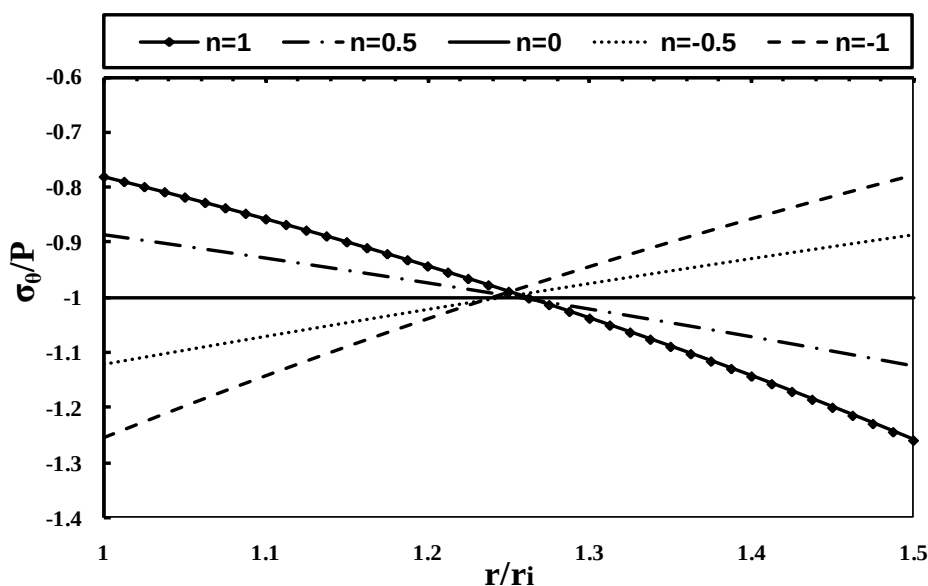
ازای n های مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه برای حالت دوسر گیردار نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است تنش محیطی استوانه تحت فشار داخلی مثبت و برای فشار خارجی دارای مقادیر منفی می‌باشد. در استوانه تحت فشار داخلی، تنش محیطی به ازای n های منفی در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، کمتر از ماده‌ی همگن می‌باشد و به ازای n های مثبت برعکس در نیمه‌ی داخلی جداره، کمتر از ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، بیشتر از ماده‌ی همگن است. استوانه تحت فشار خارجی نیز با توجه به منفی بوده تنش محیطی، رفتار مشابهی با استوانه تحت فشار داخلی از نظر مقدار تنش محیطی به ازای n های مختلف در طول جداره از خود نشان می‌دهد. تنش محیطی برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز با استفاده از اصل جمع آثار، از مجموع تنش‌های محیطی حاصل از فشار داخلی و فشار خارجی حاصل می‌شود که فشار خارجی اثر غالب را داشته و سبب منفی شدن تنش محیطی می‌شود. در این بارگذاری نیز تنش محیطی برای n های منفی در نیمه‌ی داخلی جداره، از نظر مقدار بیشتر از ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، کمتر از ماده‌ی همگن می‌باشد و به ازای n های مثبت برعکس در نیمه‌ی داخلی جداره، از نظر مقدار کمتر از ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، بیشتر از ماده‌ی همگن می‌باشد. مشخص است که تنش محیطی مربوط به استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی و خارجی برابر مقدار ثابت ۱- می‌باشد. در محدوده‌ی لایه‌ی میانی استوانه، رفتار تنش محیطی ماده‌ی ناهمگن همانند رفتار ماده‌ی همگن می‌باشد. در نیمه‌ی داخلی استوانه مقادیر n مثبت و در نیمه‌ی خارجی مقادیر n منفی سبب کاهش تنش شده که با توجه به بزرگتر بودن تنش در لایه‌ی داخلی، استفاده از مواد ناهمگن با n های مثبت مناسب‌تر می‌باشد. در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز به دلیل اینکه تنش محیطی لایه‌ی داخلی و خارجی به ازای ثوابت ناهمگنی مثبت و منفی دارای مقادیر تقریباً یکسانی می‌باشند، استفاده از ماده‌ی همگن با توجه به ایجاد تنش ثابت در طول جداره‌ی استوانه توصیه می‌شود.



شکل ۷-۲ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار



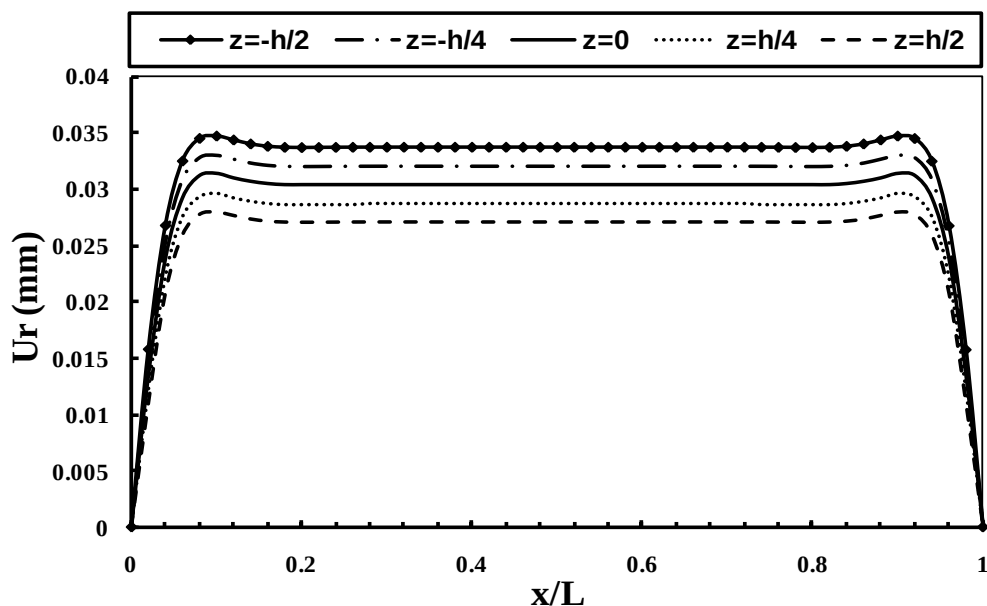
شکل ۸-۲ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار



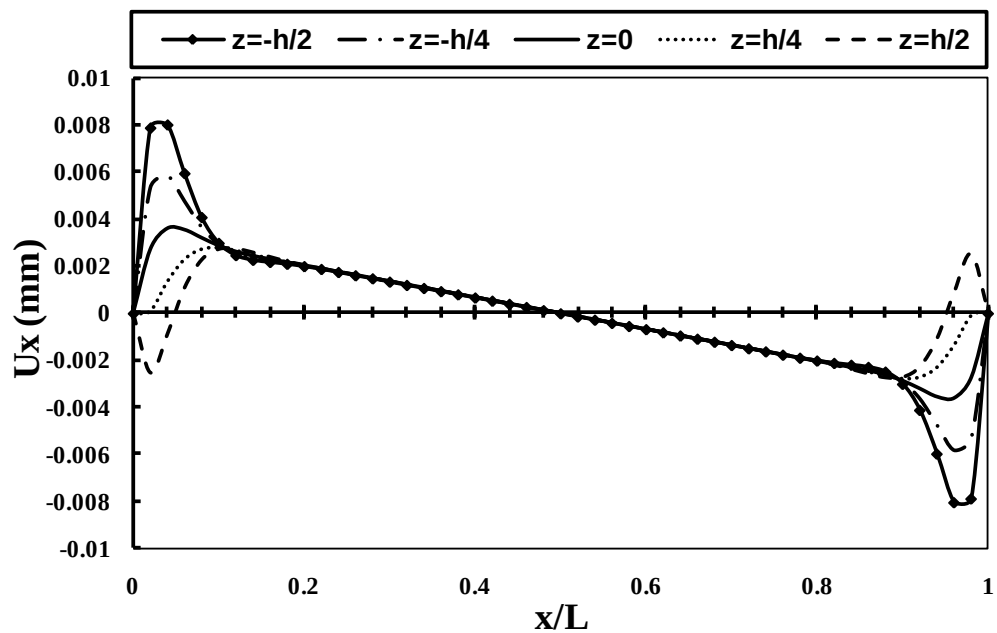
شکل ۹-۲ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار

شکل‌های (۲-۱۰) تا (۲-۲۱) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی را در راستای طول استوانه به‌ازای $n=1$ در پنج لایه‌ی مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه برای حالت دوسر گیردار نشان می‌دهد. مقادیر جابه‌جایی و تنش محیطی برای استوانه تحت فشار داخلی و تحت فشار خارجی، از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی از نظر مقدار کاهش می‌یابد. تنش محیطی در نقاط اطراف مرز و در لایه‌های نزدیک به لایه‌ی خارجی برای استوانه تحت فشار داخلی دارای مقادیر منفی و برای استوانه تحت فشار خارجی دارای مقادیر مثبت می‌باشد. تنش محیطی در بقیه‌ی نقاط و جابه‌جایی شعاعی در کلیه‌ی نقاط استوانه تحت فشار داخلی مثبت و برای استوانه تحت فشار خارجی منفی می‌باشند؛ با توجه به این نکته و بزرگتر بودن مقادیر تنش و جابه‌جایی استوانه تحت فشار خارجی نسبت به استوانه تحت فشار داخلی، استفاده از اصل جمع آثار منجر به مقادیر جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی منفی برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی می‌شود. برآیند دو فشار داخلی و خارجی سبب می‌شود که جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی از نظر مقدار کاهش یابد درحالی‌که جابه‌جایی محوری همانند دو بارگذاری

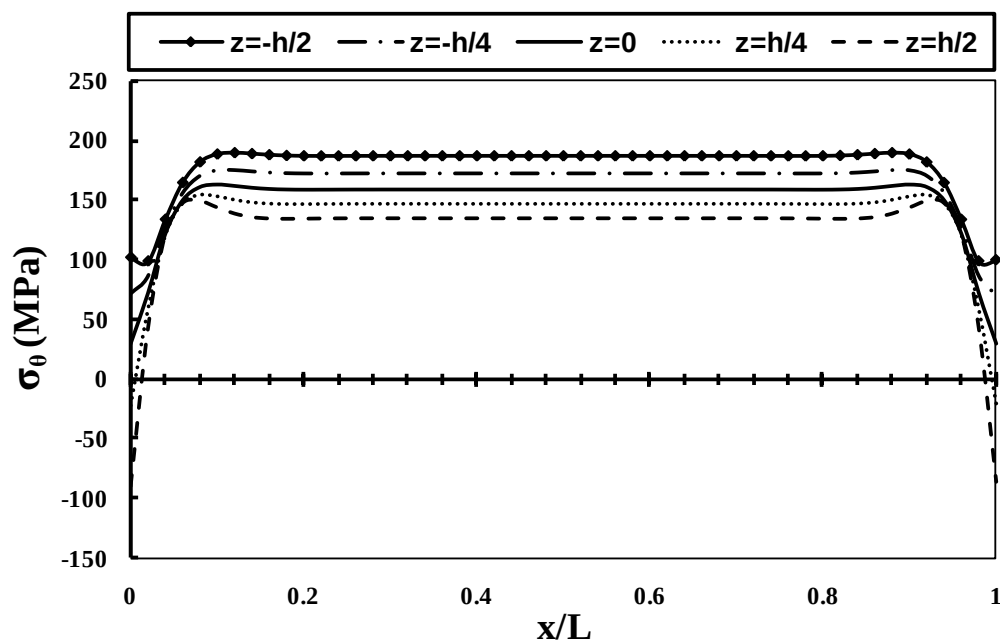
دیگر دارای حداکثر مقدار خود در لایه‌ی داخلی می‌باشد. با فاصله گرفتن از دو انتهای استوانه، جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در هر لایه دارای مقادیر ثابتی در طول پوسته‌ی استوانه‌ای می‌باشند. جابه‌جایی محوری برای نقاط دور از مرز در لایه‌های مختلف تفاوت قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر ندارند؛ در حالیکه در نقاط اطراف دو انتهای استوانه، عکس این پدیده صادق است. تنش برشی در طول استوانه به غیر از نزدیکی دو انتهای آن، دارای مقادیر صفر می‌باشد. این امر نشان می‌دهد که تنش برشی در نزدیکی مرز-های انتهایی استوانه تحت تأثیر شرایط مرزی به وجود می‌آید. در استوانه تحت فشار داخلی تنش برشی در لایه‌ی داخلی دارای بیشترین مقدار است که در اطراف مرز $x=0$ تنش برشی مثبت و در نزدیکی مرز $x=L$ مقدار منفی ایجاد می‌شود؛ در حالیکه در استوانه تحت فشار خارجی تنش برشی در لایه‌ی خارجی بیشترین مقدار را دارا بوده و نزدیکی مرز $x=0$ دارای تنش برشی منفی و مرز $x=L$ دارای مقدار مثبت می‌باشد. همچنین در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی مقادیر تنش برشی در اطراف مرز $x=0$ برای لایه‌های نیمه‌ی خارجی و بخشی از نیمه‌ی داخلی منفی و برای لایه‌های نزدیک به لایه‌ی داخلی مثبت می‌باشند. در اطراف مرز $x=L$ عکس این پدیده اتفاق می‌افتد.



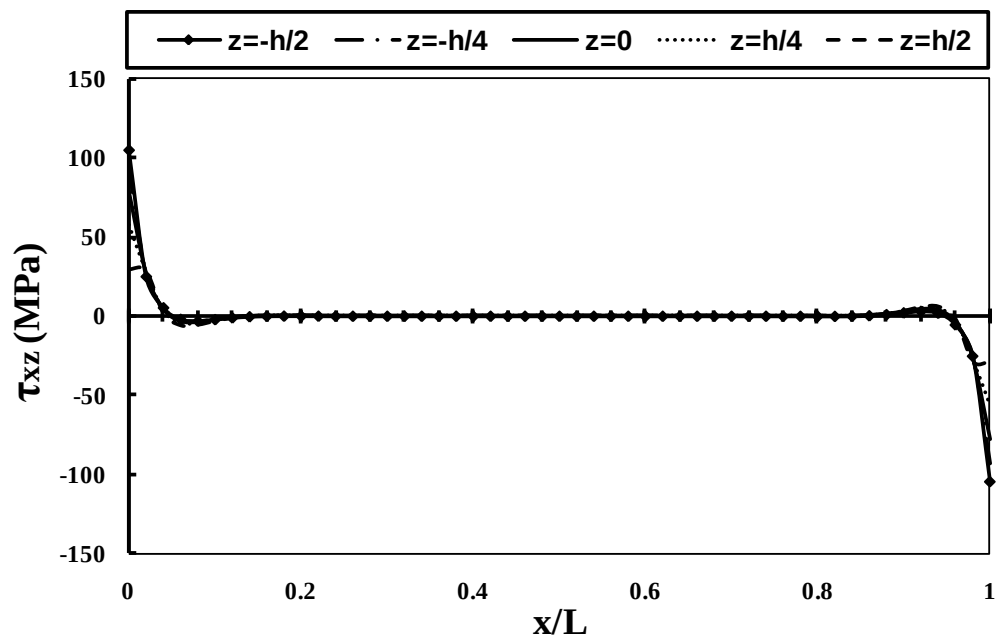
شکل ۲-۱۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



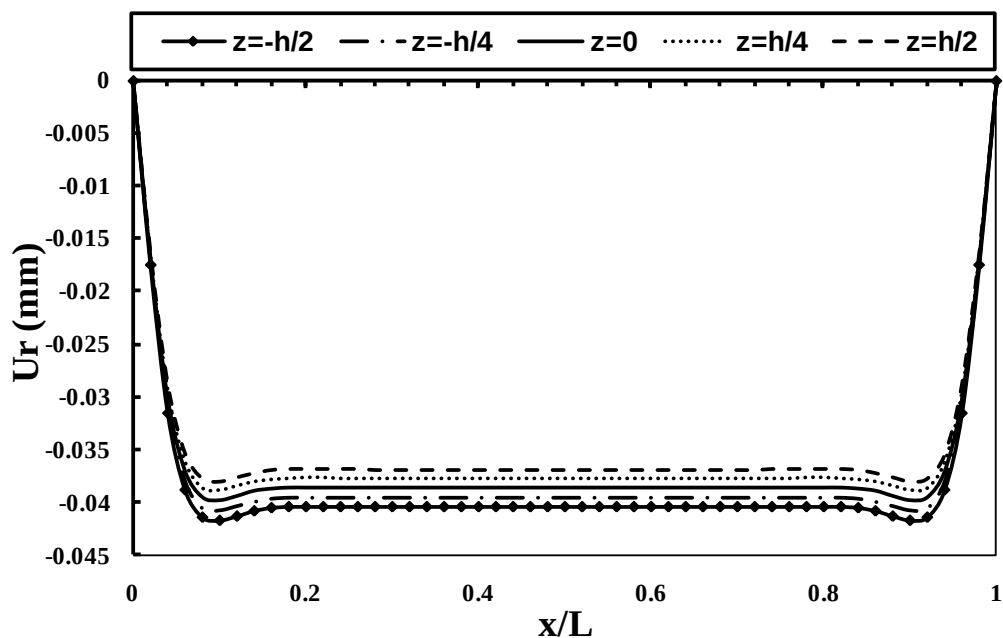
شکل ۱۱-۲ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



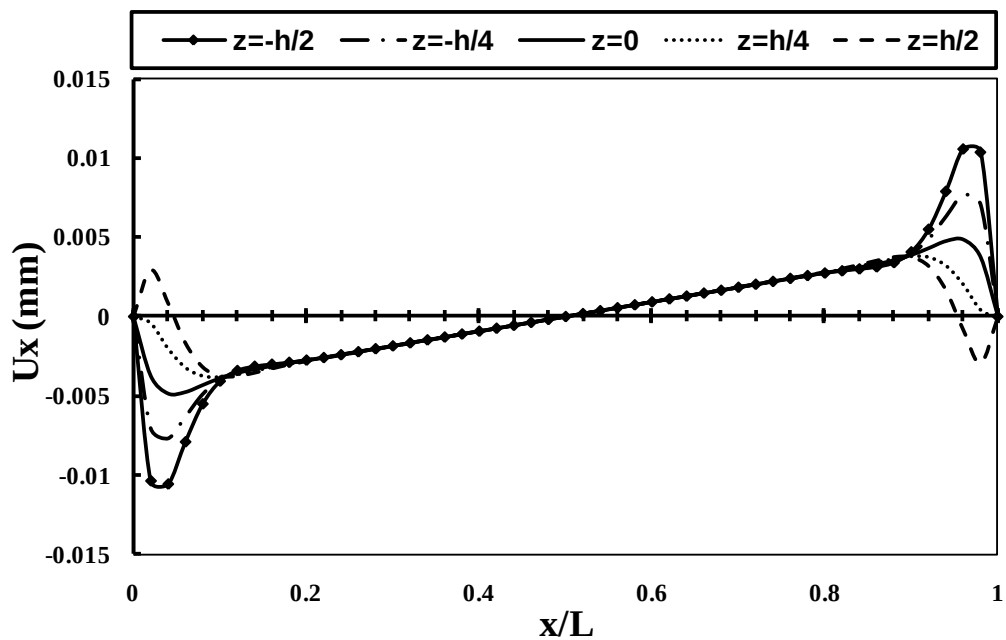
شکل ۱۲-۲ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



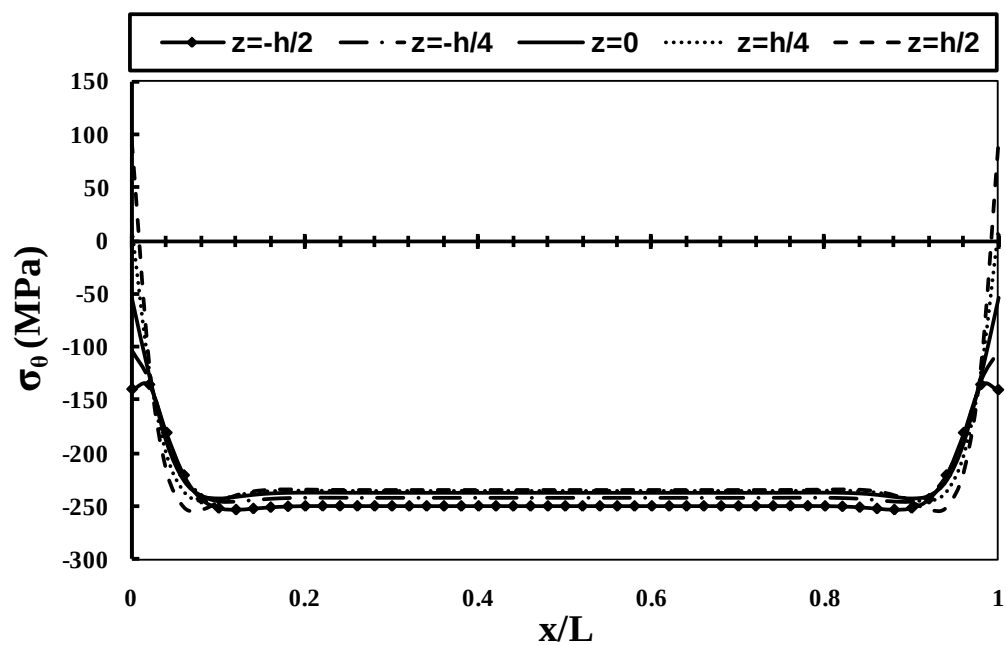
شکل ۲-۱۳ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی
به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



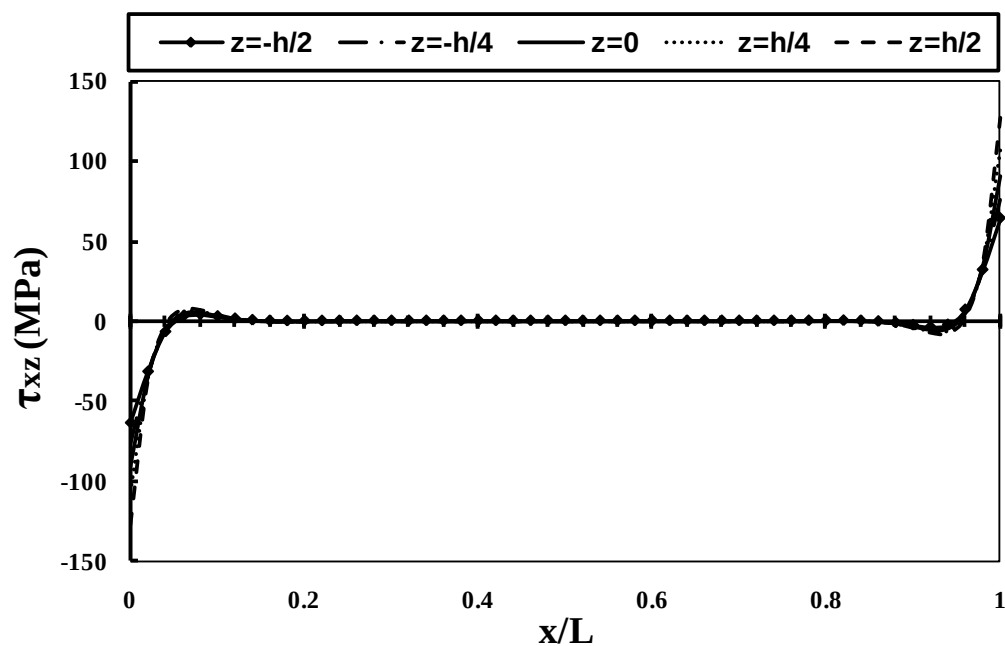
شکل ۲-۱۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی
به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



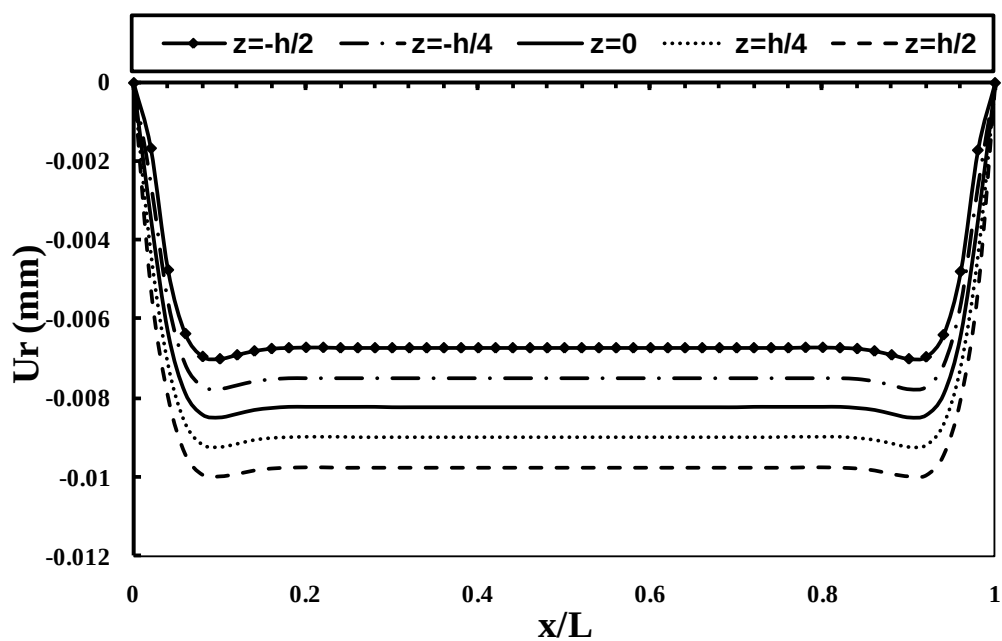
شکل ۲-۱۵ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



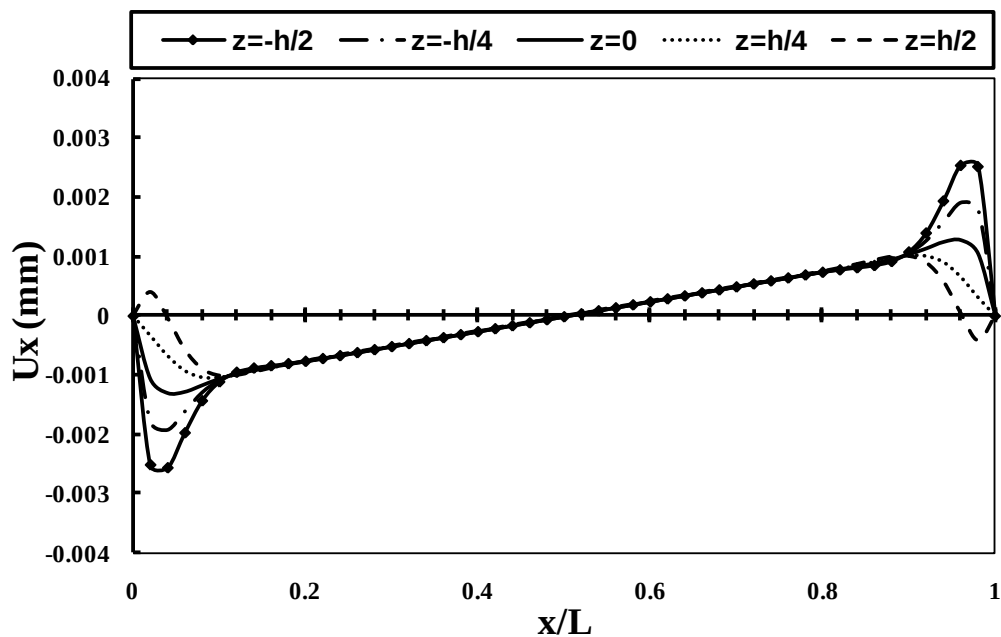
شکل ۲-۱۶ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



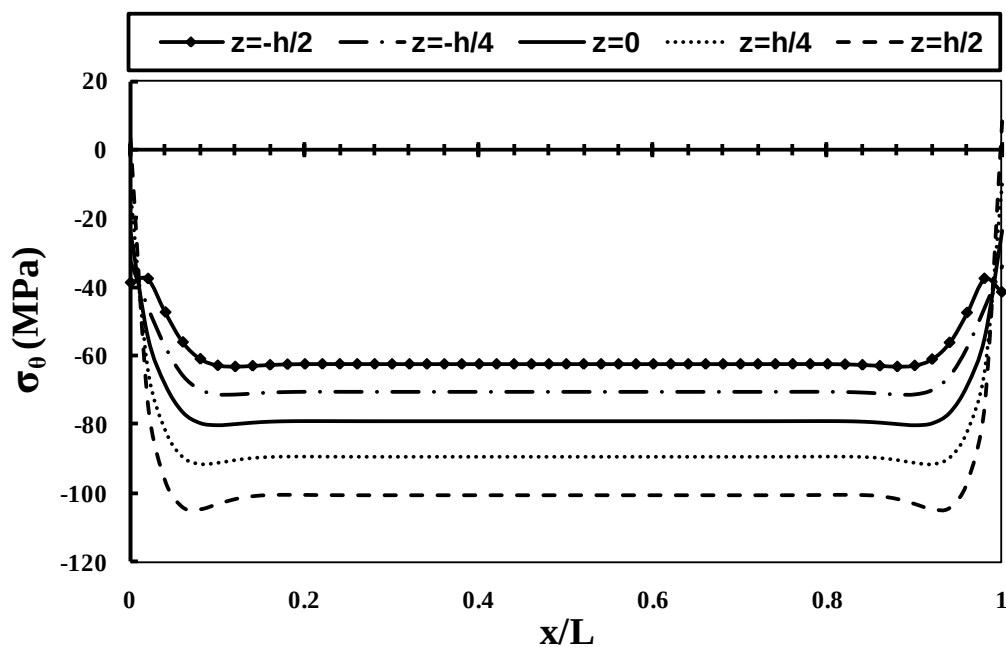
شکل ۲-۱۷ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی
به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



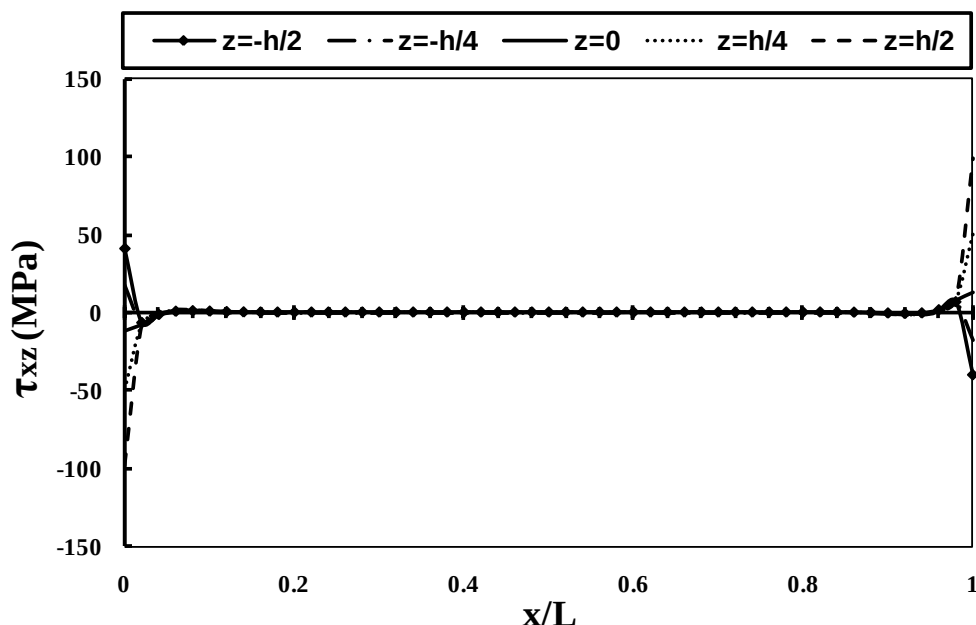
شکل ۲-۱۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی
به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۲-۱۹ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۲-۲۰ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۲-۲۱ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار

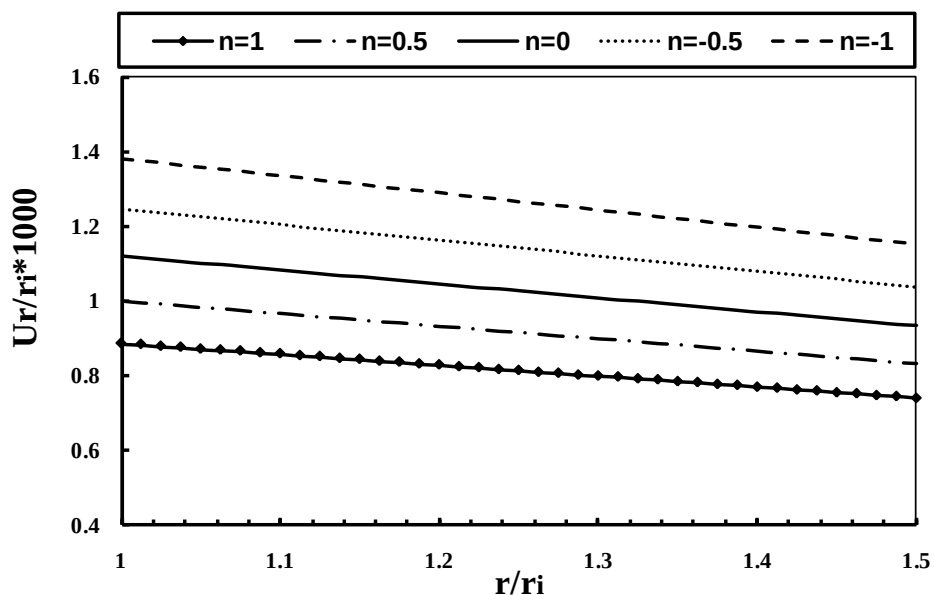
۲-۴-۲ استوانه‌ی یکسر گیردار - یکسر آزاد

برای شرایط مرزی یکسر گیردار - یکسر آزاد با توجه به رابطه‌ی (۲-۲۲) داریم:

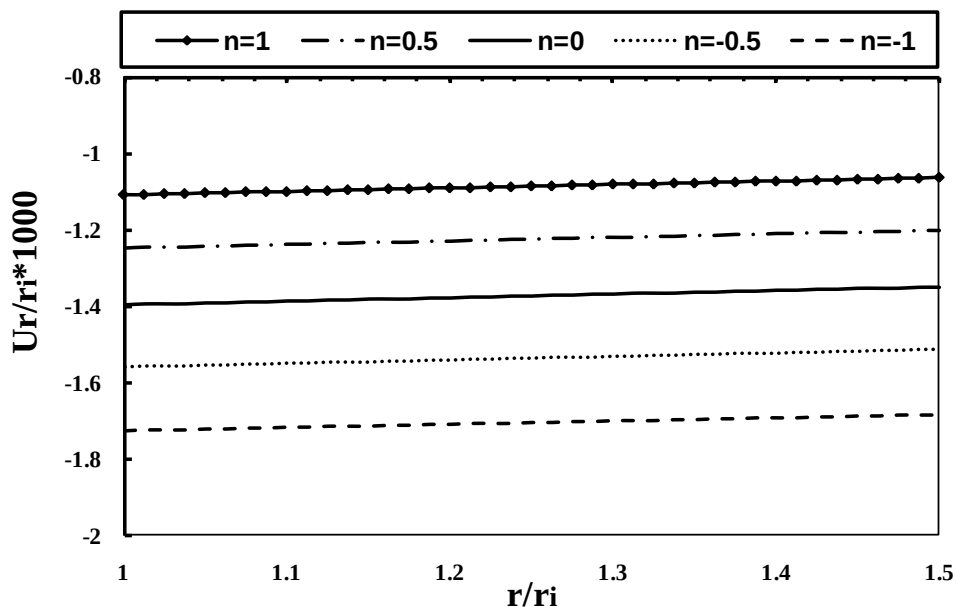
$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow N_x=0, M_x=0, Q_{xz}=0, M_{xz}=0 \end{cases} \quad (۲-۵۸)$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به‌دست می‌آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند. در شکل‌های (۲-۲۲) تا (۲-۲۴) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به ازای n های مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که مقادیر جابه‌جایی شعاعی در وسط استوانه برای حالت یکسر گیردار - یکسر آزاد اختلاف اندکی نسبت به حالت دوسر گیردار دارد. در واقع عدم وجود قید در انتهای آزاد استوانه سبب افزایش جابه‌جایی از نظر مقدار می‌شود؛ یعنی مقادیر جابه‌جایی شعاعی منفی مربوط به استوانه تحت فشار خارجی برای شرایط انتهایی یکسر

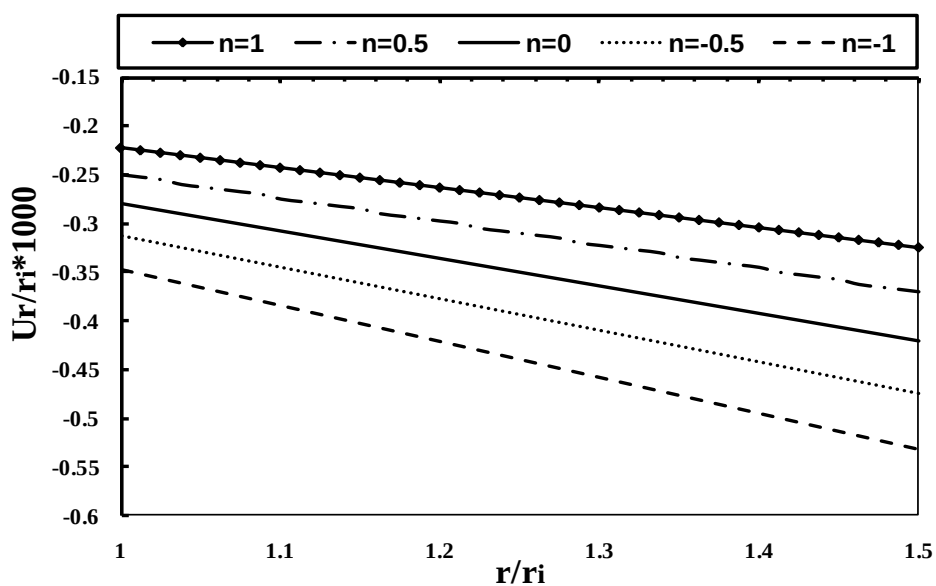
گیردار-یکسر آزاد نسبت به شرایط انتهایی دوسر گیردار از نظر مقدار افزایش می‌یابد ولی در رفتار استوانه تغییری ایجاد نمی‌کند. برای استوانه تحت فشار داخلی و نیز استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز همین مطلب صادق است.



شکل ۲-۲۲ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد

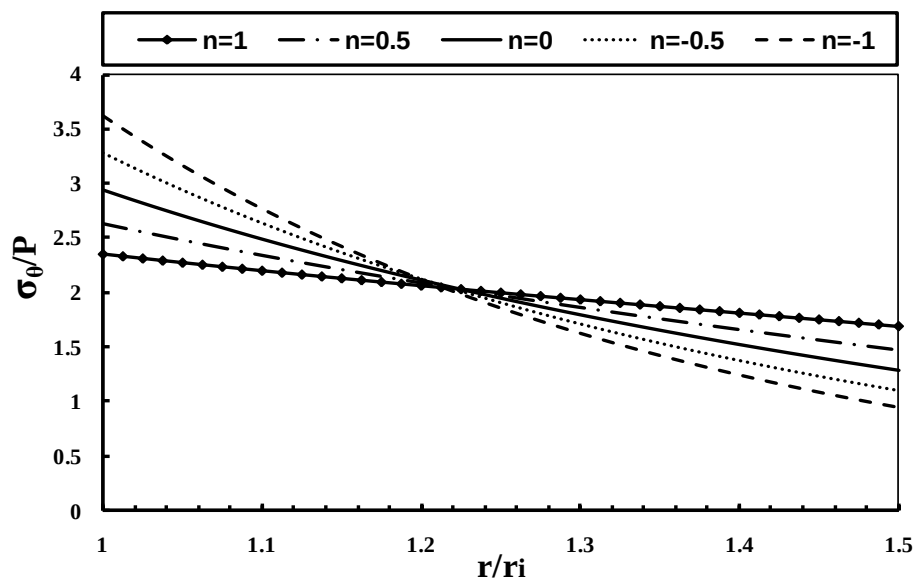


شکل ۲-۲۳ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$ برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد

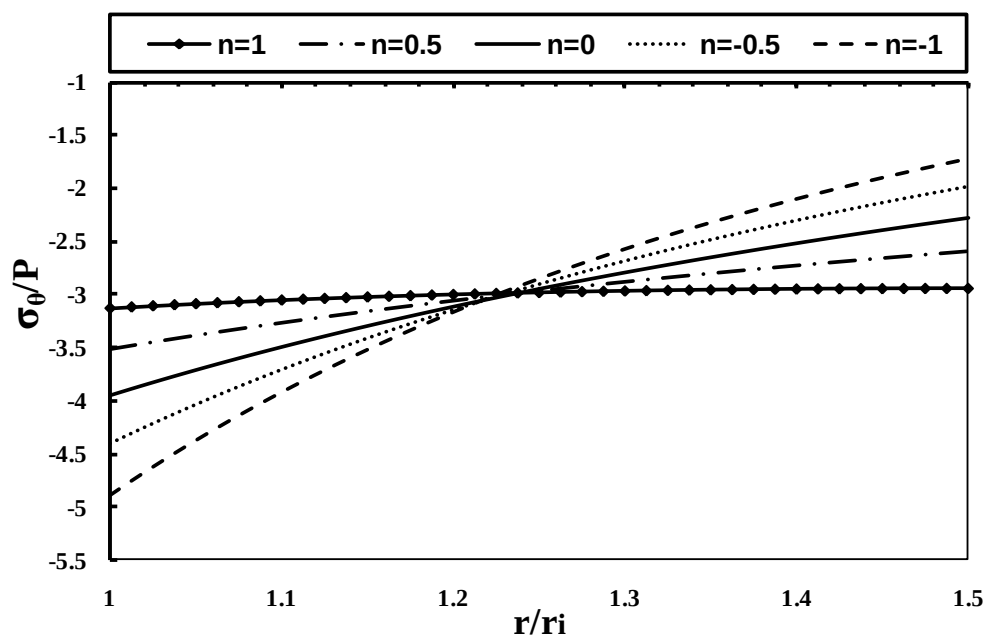


شکل ۲-۲۴ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد

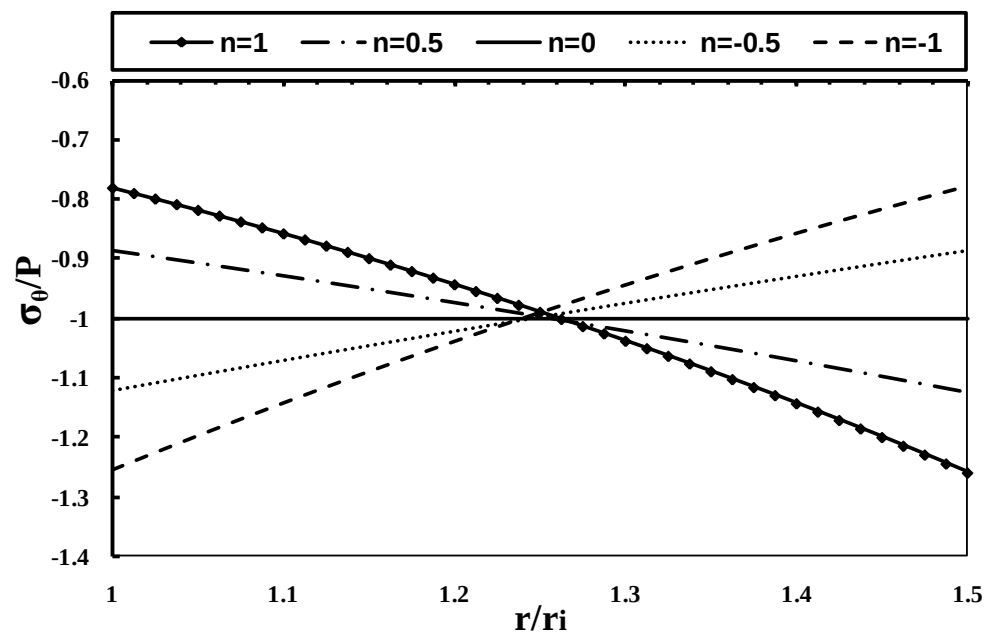
شکل‌های (۲-۲۵) تا (۲-۲۷) نیز توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به ازای n های مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه را برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد نشان می‌دهد. مشخص است که تنش‌های محیطی برای شرایط انتهایی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد نسبت به حالت دوسر گیردار اختلاف قابل ملاحظه‌ای نداشته و رفتار مشابهی نشان می‌دهند.



شکل ۲-۲۵ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



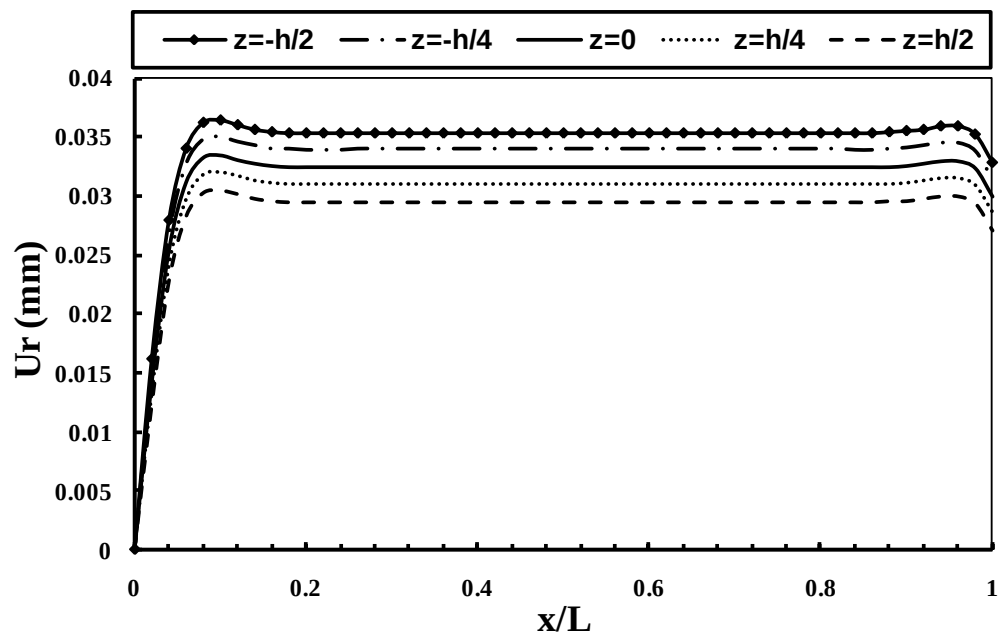
شکل ۲-۲۶ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ای ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



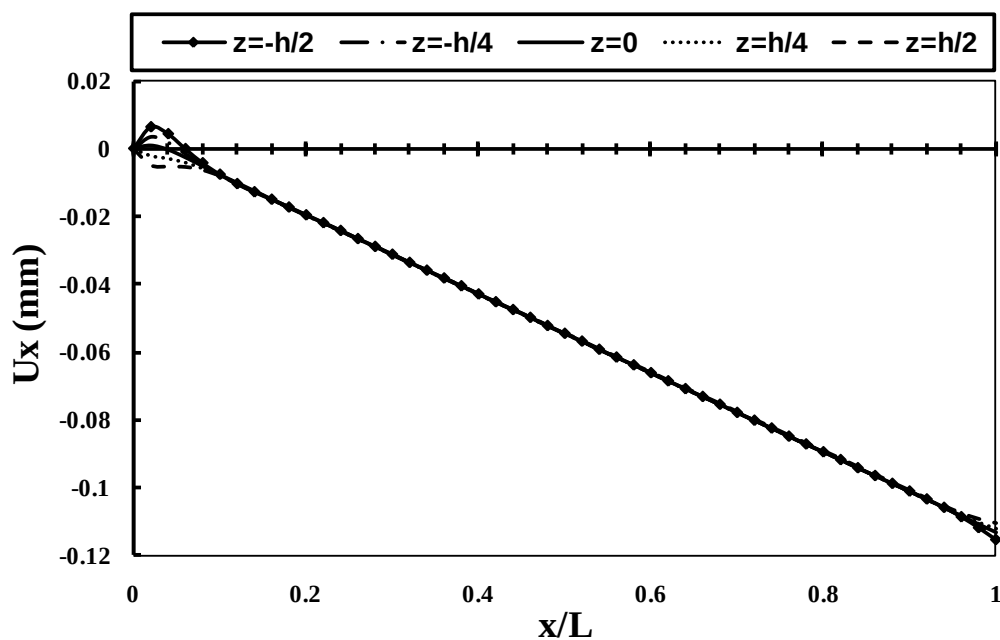
شکل ۲-۲۷ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ای ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد

شکل‌های (۲۸-۲) تا (۳۹-۲) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش

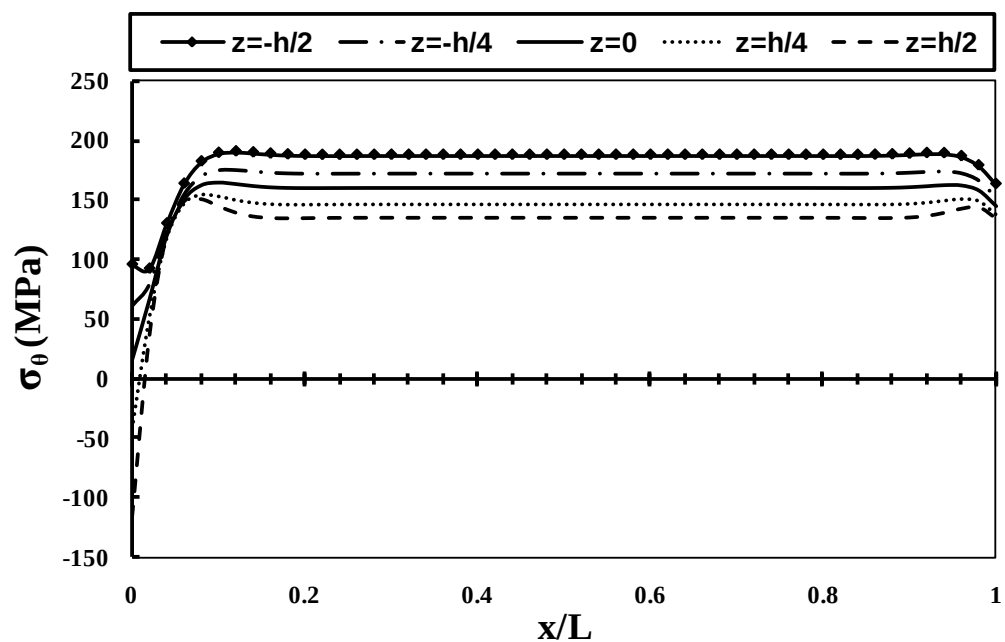
برشی را در راستای طول استوانه به ازای $n=1$ در پنج لایه‌ی مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده نشان می‌دهد. جابه‌جایی شعاعی، تنش محیطی و تنش برشی پوسته‌ی استوانه‌ای تحت شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد، در طول استوانه تا نزدیکی انتهای آزاد آن و نیز در سمت گیردار استوانه مشابه شرایط دوسر گیردار می‌باشد. تئوری تغییر شکل برشی جابه‌جایی شعاعی در انتهای آزاد استوانه را تحت تأثیر تنش برشی اندک موجود در نزدیکی آن، دارای قلّه‌ای مشابه سمت گیردار (در فاصله‌ای کمتر از انتهای استوانه نسبت به سمت گیردار) نشان می‌دهد. تنش محیطی نیز به طور مشابه در سمت آزاد و در فاصله‌ای کمتر از انتهای استوانه در مقایسه با سمت گیردار نسبت به مقدار متوسط موجود در طول استوانه در هر لایه کاهش می‌یابد. رفتار جابه‌جایی محوری در انتهای گیردار استوانه همانند استوانه‌ی دوسر گیردار می‌باشد. جابه‌جایی محوری با اندکی فاصله از انتهای گیردار در طول استوانه تحت تأثیر قیود موجود در سمت گیردار آن برای حالت فشار داخلی دارای مقادیر منفی و فشار خارجی دارای مقادیر مثبت می‌باشد که این مقادیر برای لایه‌های مختلف یکسان می‌باشد. با توجه به این مطلب، جابه‌جایی محوری برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی که از برآیند جابه‌جایی‌های حاصل از فشار داخلی و فشار خارجی ایجاد می‌شود، به دلیل بزرگتر بودن مقادیر مثبت ناشی از فشار خارجی دارای مقدار مثبت یکسان برای تمام لایه‌ها می‌باشد. در انتهای آزاد استوانه مجدداً جابه‌جایی محوری لایه‌های مختلف با یکدیگر فاصله‌ی اندکی می‌گیرند. برای استوانه تحت فشار خارجی نیز به دلیل بالاتر بودن مقادیر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی و همچنین کمتر بودن تفاوت این مقادیر در لایه‌های مختلف، قلّه‌های ایجاد شده در توزیع جابه‌جایی شعاعی و کاهش تنش محیطی در سمت آزاد استوانه در نمودارها نامحسوس‌تر می‌باشد. در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی به دلیل ایجاد تنش برشی بسیار کم در سمت آزاد آن، جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی ایجاد شده در طول استوانه (در فاصله‌ی اندک از انتهای گیردار) تا انتهای استوانه برای هر لایه ادامه پیدا کرده و در رفتار آن تغییری ایجاد نمی‌شود.



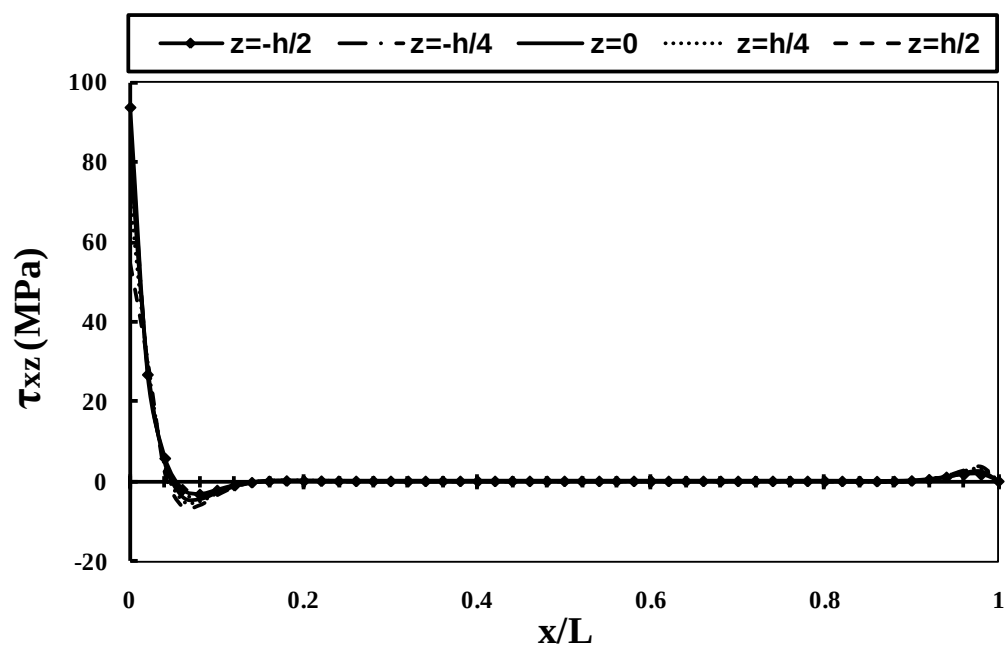
شکل ۲۸-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد



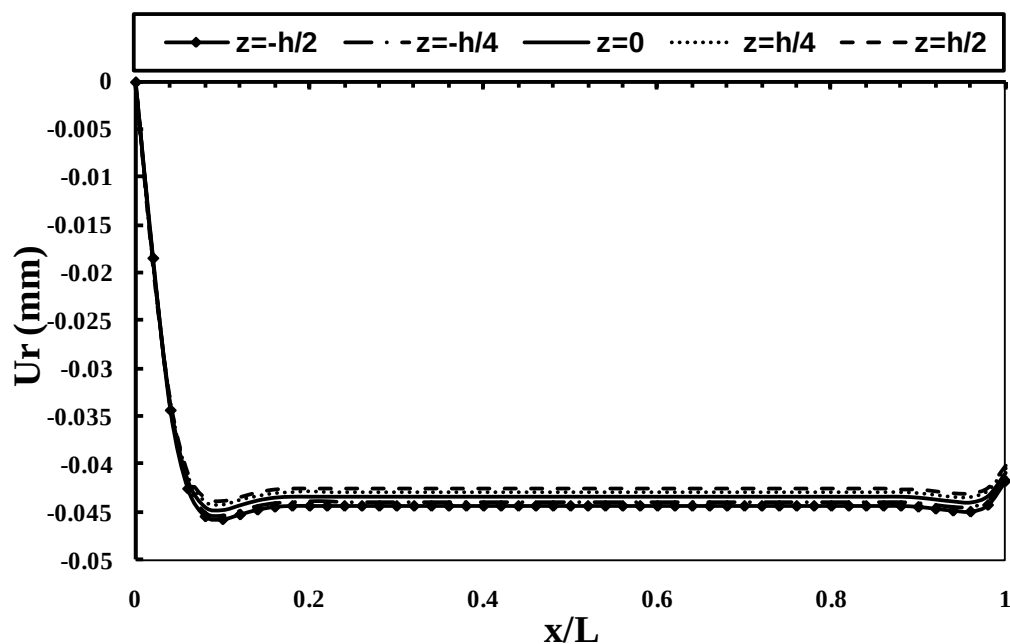
شکل ۲۹-۲ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد



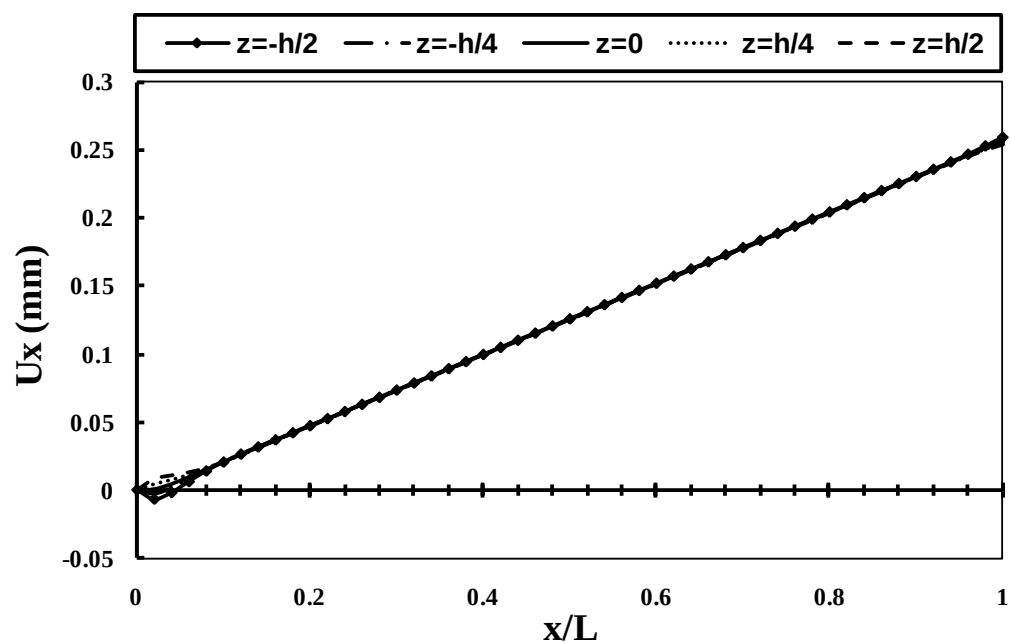
شکل ۳۰-۲ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد



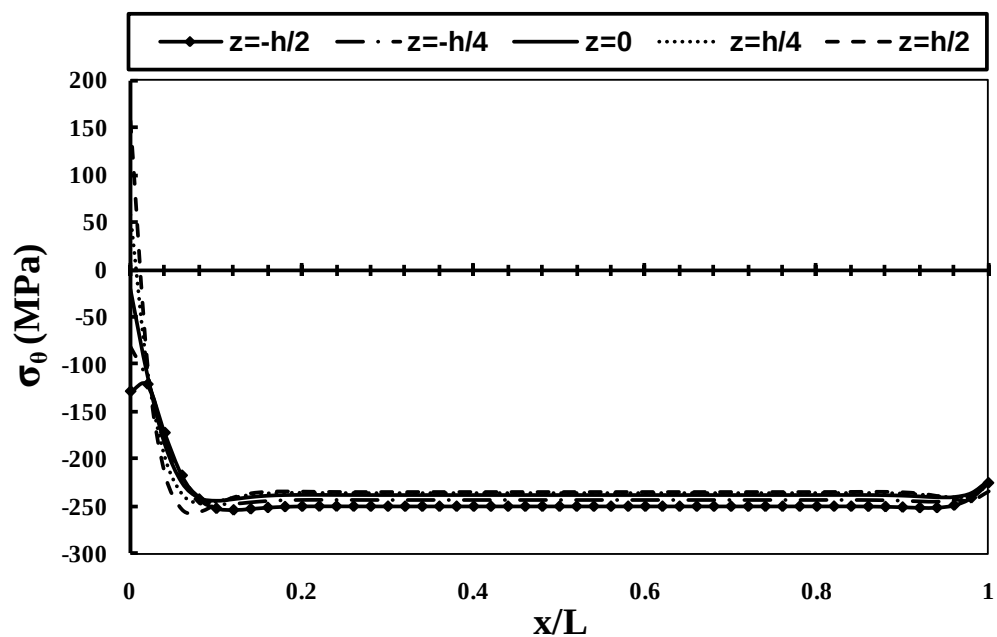
شکل ۳۱-۲ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد



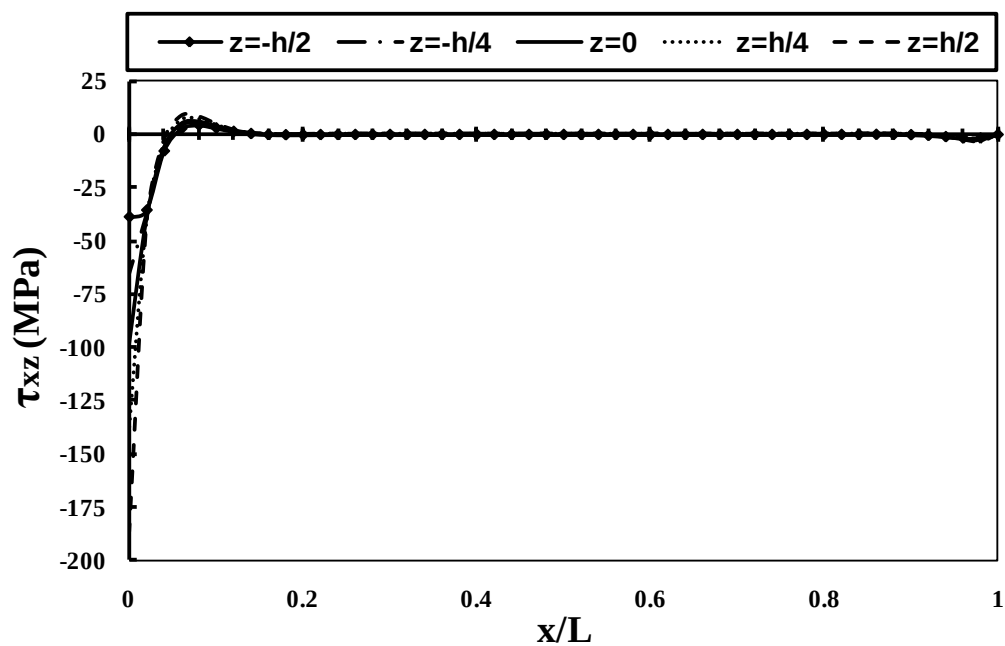
شکل ۳۲-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



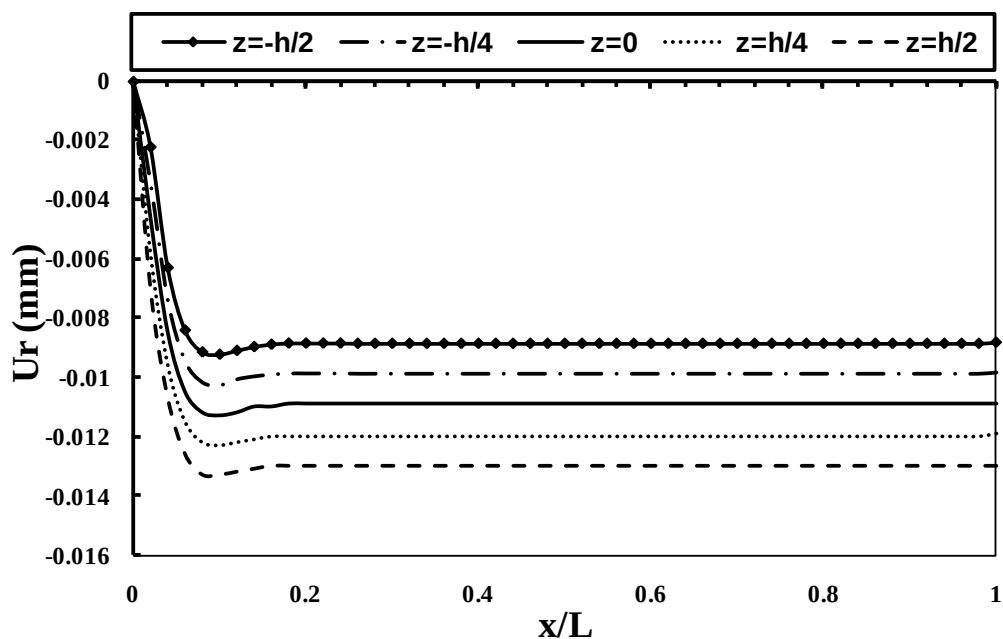
شکل ۳۳-۲ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



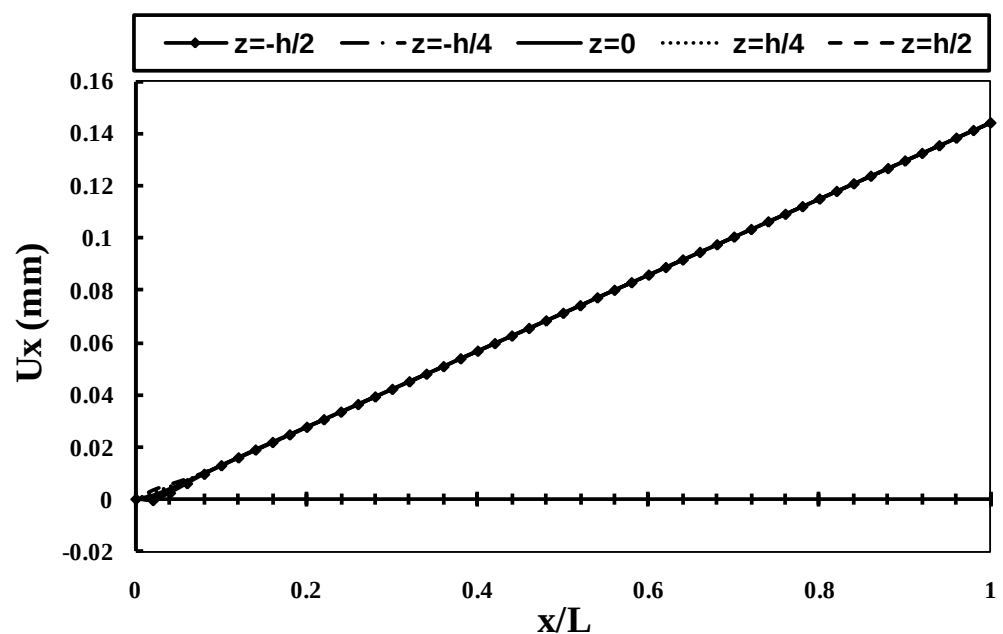
شکل ۳۴-۲ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد



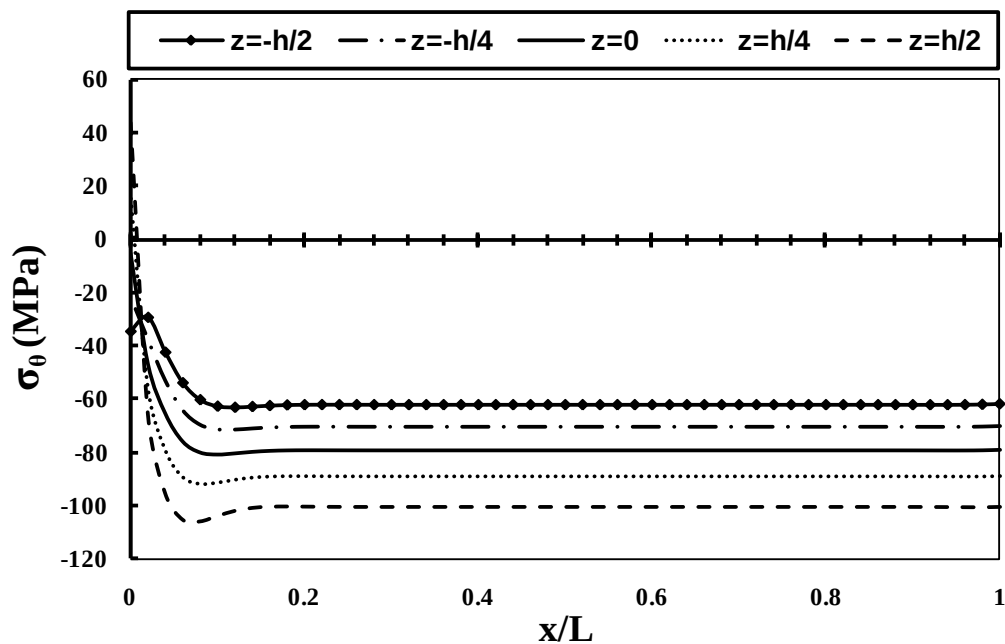
شکل ۳۵-۲ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد



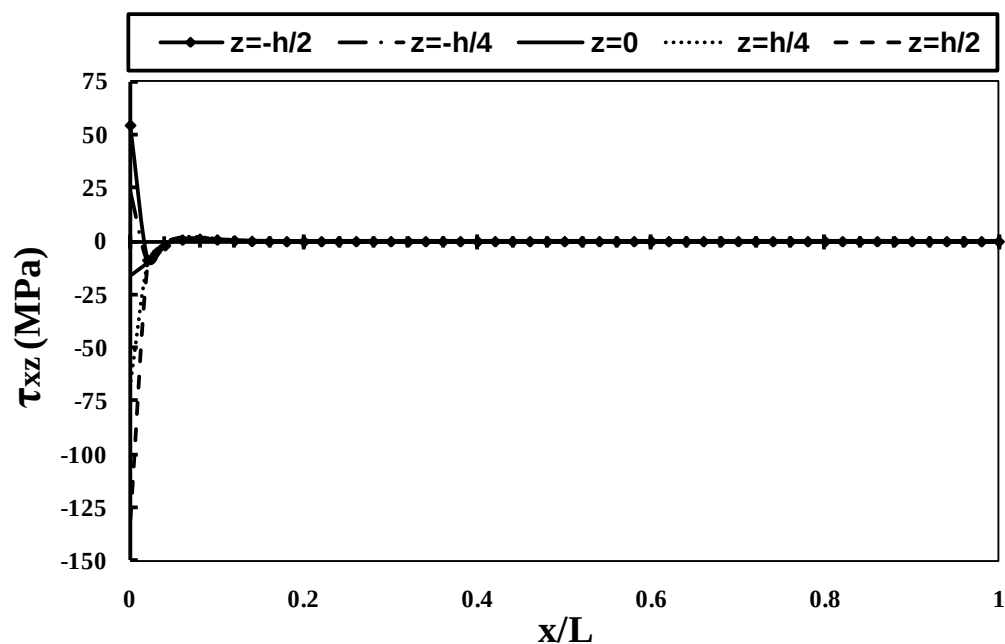
شکل ۲-۳۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



شکل ۲-۳۷ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



شکل ۳۸-۲ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



شکل ۳۹-۲ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد

۲-۵ حلّ عددی استوانه‌های ناهمگن تحت بارگذاری فشاری

روش اجزاء محدود، متکی به برنامه‌های نرم‌افزاری است که در قالب یک بسته ارائه می‌شود. یکی از این بسته‌ها که کاربرد فراوانی دارد و کاربران بسیاری از آن استفاده می‌کنند، Ansys است. در این پایان-نامه از نرم‌افزار Ansys 11 استفاده شده است. در این بخش نحوه‌ی مدل‌سازی استوانه‌ی FGM توضیح داده شده است. همچنین نتایج مربوط به حلّ تحلیلی توسط روش تغییر شکل برشی با نتایج عددی حاصل از روش اجزاء محدود در استوانه‌های همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی مقایسه شده است.

برای المان‌بندی استوانه، المان solid از نوع plane 8node 82 انتخاب شده است که گزینه‌ی axisymmetric مربوط به این المان فعال شده است. مقطع این المان ۴ ضلعی با اضلاع خمیده و دارای ۸ گره^۱ (۴ گره در رئوس و ۴ گره در وسط اضلاع) است که درجه‌ی آزادی هر گره، دو می‌باشد (یکی جابه‌جایی در راستی شعاعی و دیگری جابه‌جایی در راستای محوری). این المان برای مسائل تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و متقارن محوری کاربرد دارد. ماتریس سفتی المان مذکور 16×16 می‌باشد. استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلیمتر و شعاع خارجی ۶۰ میلیمتر با جداره‌ی ثابت به طول ۸۰۰ میلیمتر به صورت یک مستطیل که نشان دهنده‌ی یک مقطع عرضی از استوانه در حالت متقارن محوری می‌باشد، مدل‌سازی شده است. برای ایجاد خواص ناهمگنی که به صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است، با تقسیم جداره‌ی استوانه به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته در هر لایه بسته به فاصله‌ی مرکز هر لایه از لایه‌ی داخلی به صورت تابع نمایی طبق رابطه‌ی (۲-۲۳)، نهایتاً پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از ۲۰ استوانه‌ی همگن و همسانگرد (ایزوتروپ) به هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محل اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محلّ اتصال لایه‌ها، حدّ میانگین چپ و

1. Node

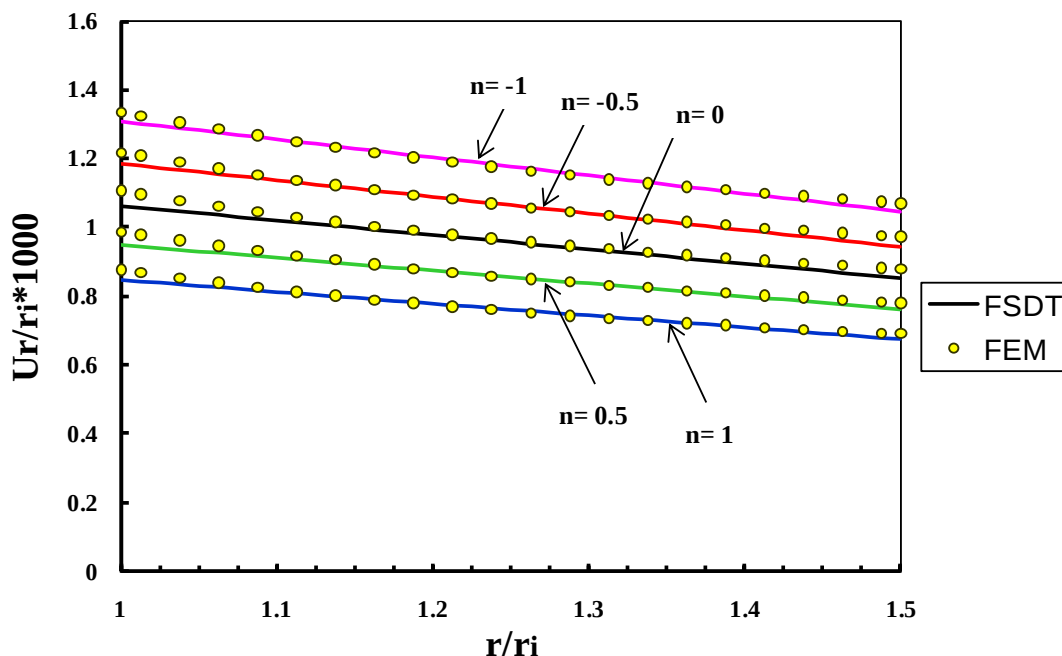
راست مزر دو لایه در نظر گرفته می‌شوند. برای اعمال شرایط مرزی موجود در دو انتهای استوانه بسته به شرایط انتهایی، درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در سر استوانه را مقید می‌کنیم. برای شرایط مرزی دوسر گیردار، کلیه درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در دو انتهای استوانه را مقید می‌کنیم. همچنین برای شرایط مرزی یک سر گیردار - یک سر آزاد، بدون اعمال قید بر روی گره‌های موجود در سمت آزاد استوانه، درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در سمت گیردار استوانه را همانند قسمت قبل مقید می‌کنیم. برای بارگذاری فشاری نیز با در نظر گرفتن گره‌های موجود در مرز داخلی و خارجی مقطع استوانه در حالت متقارن محوری، می‌توان فشار داخلی و خارجی را اعمال کرد [۵۰].

۲-۵-۱ مقایسه‌ی نتایج

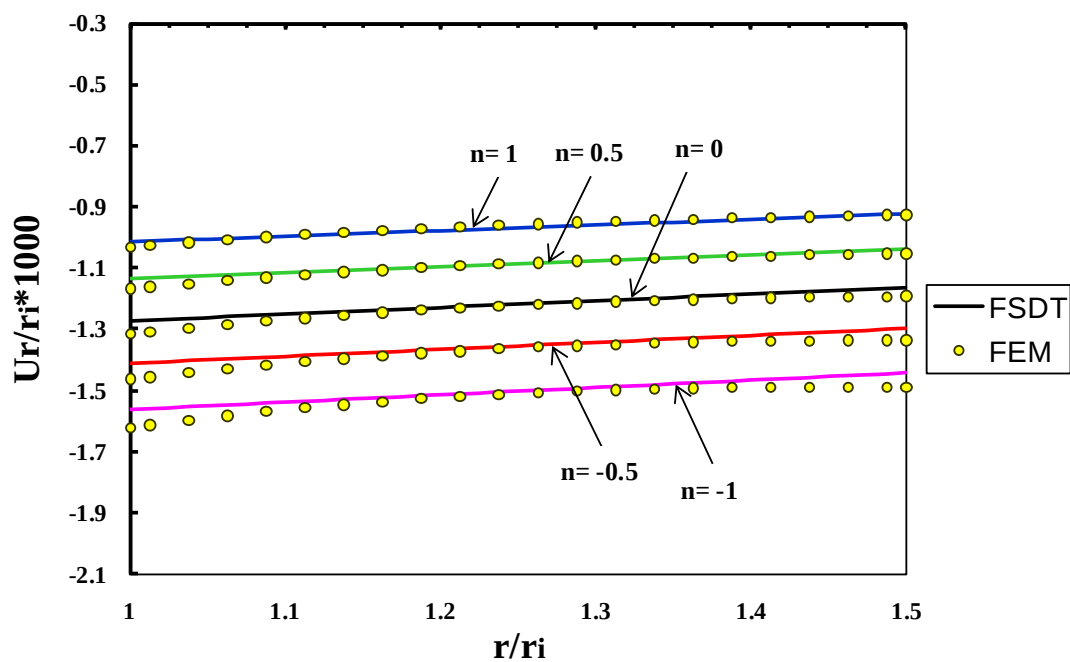
در ادامه به منظور بررسی صحت نتایج حل تحلیلی، نتایج حاصل از تئوری تغییر شکل برشی و نتایج حاصل از حل عددی به کمک نرم‌افزار Ansys آورده شده است. در شکل‌های (۲-۴۰) و (۲-۴۱) نتایج جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT به ترتیب در استوانه تحت فشار داخلی و فشار خارجی به‌ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در طول جداره‌ی استوانه و در $x=L/2$ برای شرایط انتهایی دوسر گیردار آورده شده است. همانطور که در شکل نیز مشخص است مقادیر جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده توسط تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در وسط جداره‌ی استوانه به ازای n های مختلف دارای انطباق خوبی با روش عددی می‌باشد که برای n های کوچکتر این انطباق بیشتر می‌شود. شکل (۲-۴۲) نیز حاوی نتایج جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت شرایط انتهایی دوسر گیردار و ثابت ناهمگنی $n=1$ می‌باشد. توزیع جابه‌جایی محوری محاسبه شده توسط دو روش عددی و تحلیلی برای سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه‌ی دوسر گیردار تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ در شکل (۲-۴۳) نشان داده شده

است. با توجه به این نمودارها می‌توان دریافت که در لایه‌ی میانی بیشترین انطباق بین روش‌های FE و FSDT وجود دارد. اختلاف موجود بین دو روش در لایه‌ی داخلی بیشتر و در لایه‌ی خارجی کمتر می‌باشد. دلیل این اختلاف صرف نظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور رابطه‌ی (۲-۵) به دلیل استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اول می‌باشد.

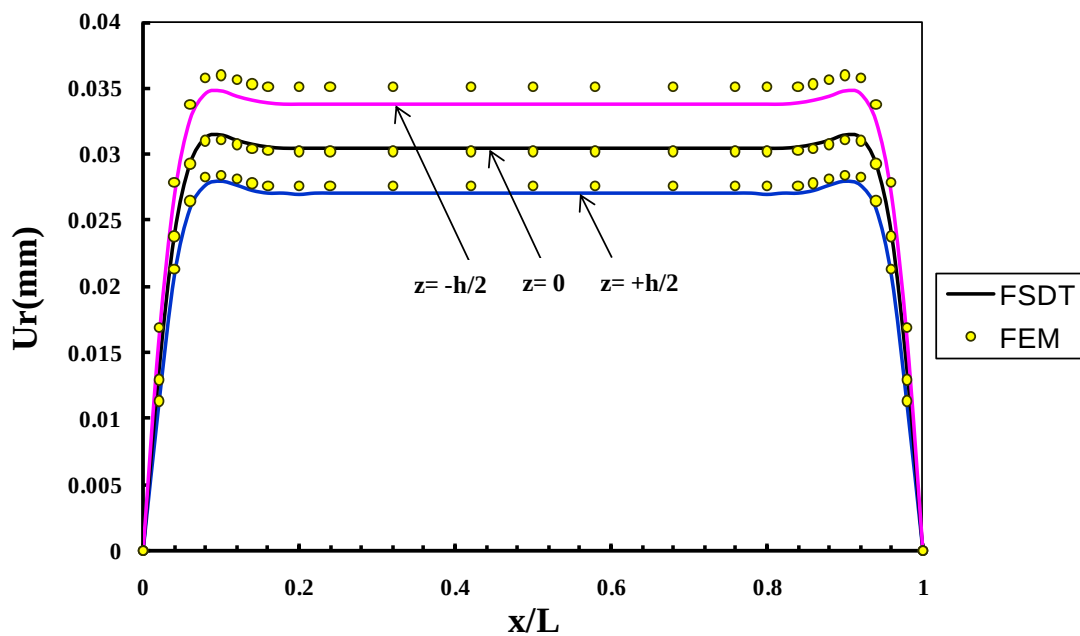
در شکل‌های (۲-۴۴) و (۲-۴۵) به ترتیب توزیع جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری حاصل از دو روش FE و FSDT در سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت فشار داخلی و شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد برای ثابت ناهمگنی $n=1$ نشان داده شده است. روش FE برای جابه‌جایی شعاعی در انتهای آزاد استوانه یک افزایش اندک را نسبت به مقدار جابه‌جایی در قسمت میانی استوانه پیش‌بینی کرده در حالیکه در روش FSDT یک افزایش و سپس کاهش مقدار جابه‌جایی را پیش‌بینی می‌کند.



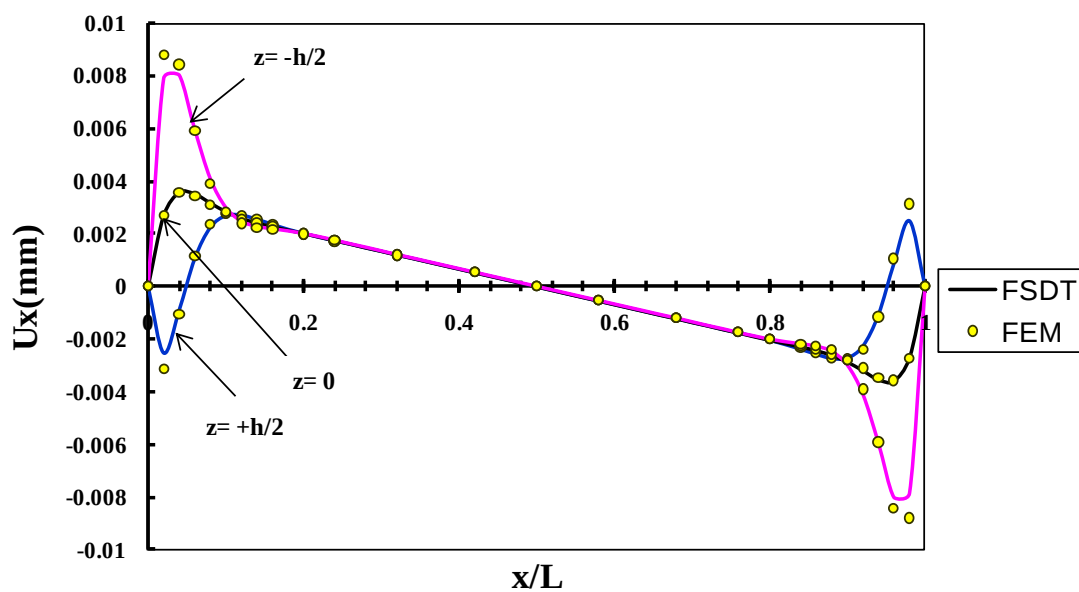
شکل ۲-۴۰ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$



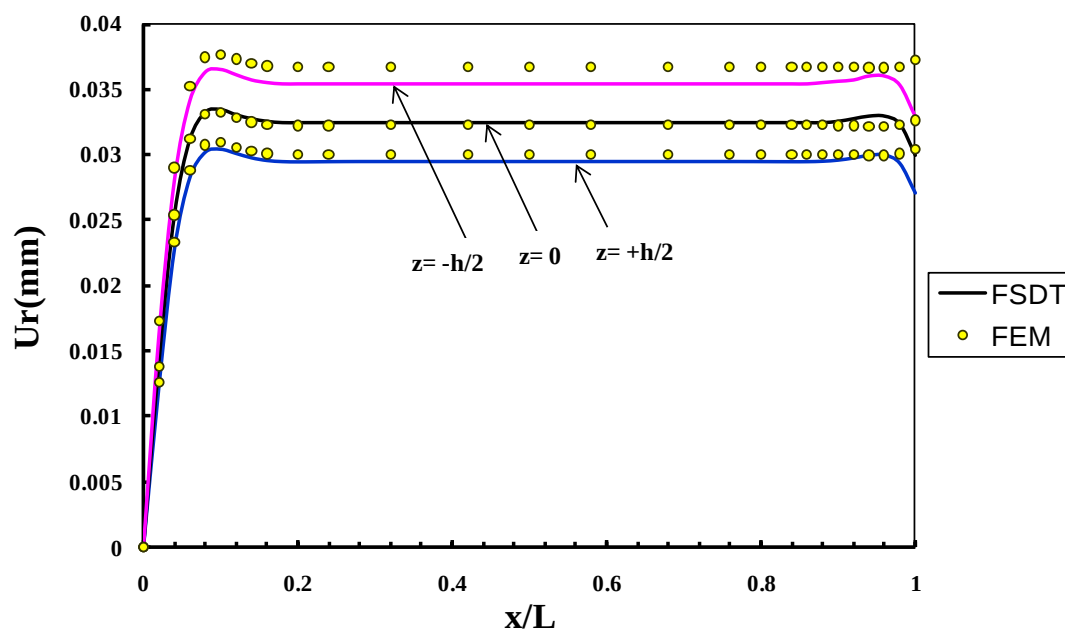
شکل ۴۱-۲ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار خارجی
برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$



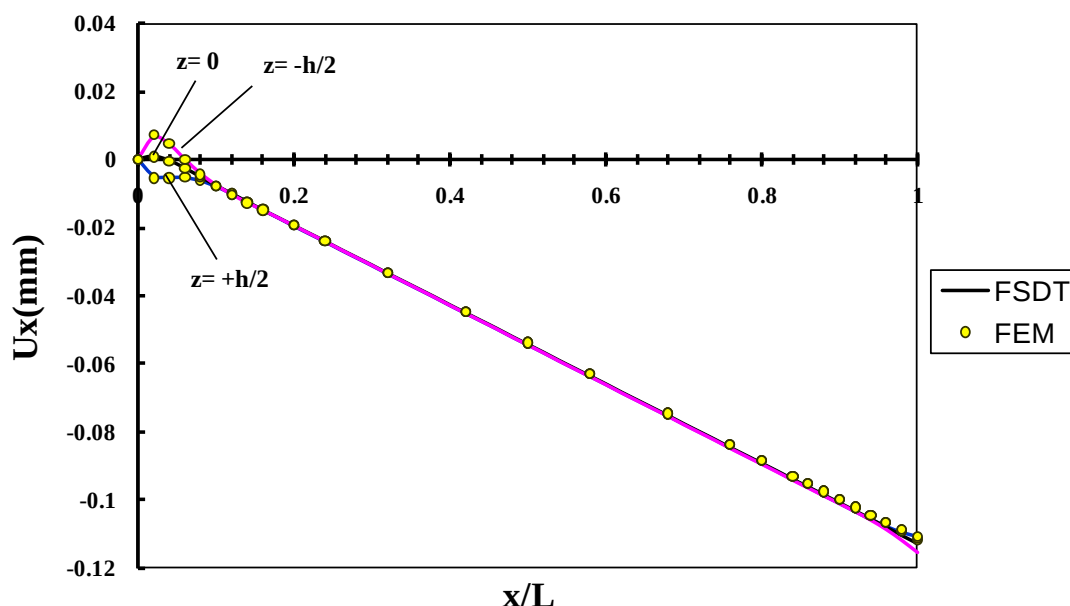
شکل ۴۲-۲ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی
برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$



شکل ۴۳-۲ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی
برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$



شکل ۴۴-۲ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی
برای حالت یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$



شکل ۴۵-۲ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$

جدول (۲-۱) تا (۳-۲) حاوی نتایج تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در دو لایه‌ی داخلی و میانی استوانه برای سه حالت بارگذاری می‌باشد. همانطور که مشخص است اختلاف بین مقادیر تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در سطح میانی استوانه کمتر و در سطح داخلی بیشتر می‌باشد. مشاهده می‌شود که تنش محیطی در استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی و خارجی دارای مقدار برابر ۸۰- مگاپاسکال می‌باشد.

جدول ۲-۱ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$

	$\sigma_{\theta} [MPa]$	$n = -1$	$n = -.5$	$n = 0$	$n = .5$	$n = 1$
سطح داخلی $r = r_i$	FEM	۲۵۸/۲۲	۲۳۲/۴۹	۲۰۷/۹۳	۱۸۴/۶۴	۱۶۲/۶۹
	FSDT	۲۹۰/۱۷	۲۶۲/۲۲	۲۳۵/۷۸	۲۱۰/۹۲	۱۸۷/۷۱
سطح میانی $r = R$	FEM	۱۵۱/۰۴	۱۵۳/۹۹	۱۵۶/۱۷	۱۵۷/۵۳	۱۵۸/۰۴
	FSDT	۱۴۸/۸۴	۱۵۲/۵۷	۱۵۵/۶۱	۱۵۷/۹	۱۵۹/۴

جدول ۲-۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار خارجی

برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$

	$\sigma_{\theta} [MPa]$	$n = -1$	$n = -.5$	$n = 0$	$n = .5$	$n = 1$
سطح داخلی $r = r_i$	FEM	-۳۵۰/۵۰	-۳۱۸/۴۶	-۲۸۷/۹۲	-۲۵۹/۰۰	-۲۳۱/۷۸
	FSDT	-۳۹۰/۵۹	-۳۵۲/۶۸	-۳۱۵/۷۸	-۲۸۱/۸۲	-۲۵۰/۲۳
سطح میانی $r = R$	FEM	-۲۳۰/۲۴	-۲۳۳/۶۹	-۲۳۶/۱۷	-۲۳۷/۶۱	-۲۳۸/۵۸
	FSDT	-۲۲۸/۱۵	-۲۳۲/۴۱	-۲۳۵/۶۱	-۲۳۷/۶۹	-۲۳۷/۱۴

جدول ۳-۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی

برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$

	$\sigma_{\theta} [MPa]$	$n = -1$	$n = -.5$	$n = 0$	$n = .5$	$n = 1$
سطح داخلی $r = r_i$	FEM	-۹۲/۲۸	-۸۵/۹۷	-۷۹/۹۹	-۷۴/۳۶	-۶۹/۰۹
	FSDT	-۱۰۰/۴۲	-۹۰/۴۶	-۸۰/۰۰	-۷۰/۹	-۶۲/۵۲
سطح میانی $r = R$	FEM	-۷۹/۲۰	-۷۹/۷۰	-۸۰/۰۰	-۸۰/۰۸	-۸۰/۵۴
	FSDT	-۷۹/۳۱	-۷۹/۸۴	-۸۰/۰۰	-۷۹/۷۹	-۷۷/۷۴

۲-۶ جمع‌بندی

همانطور که در طول فصل اشاره شد، در استوانه‌ای جدار کلفت با ضخامت ثابت، فشار داخلی یکنواخت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت و فشار خارجی یکنواخت نیز باعث ایجاد جابه‌جایی شعاعی منفی در استوانه می‌شود. استوانه تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت از برآیند دو بارگذاری شامل فشار داخلی و فشار خارجی حاصل می‌شود؛ بنابراین با توجه به بزرگتر بودن مقادیر جابه‌جایی و تنش ناشی از فشار خارجی نسبت به فشار داخلی، فشار خارجی اثر غالب را داشته و سبب ایجاد جابه‌جایی منفی می‌شود. در مورد تنش محیطی این بارگذاری نیز می‌توان به وضوح مشاهده کرد که تنش‌های ایجاد شده در وسط استوانه منفی می‌باشند. برای استوانه تحت هر سه حالت بارگذاری، مواد ناهمگن با مقادیر ثابت

ناهمگنی مثبت سبب کاهش جابه‌جایی در استوانه نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود در حالیکه مقادیر ثابت ناهمگنی منفی باعث افزایش جابه‌جایی نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود. در مورد تنش محیطی نیز همانطور که اشاره شد، استفاده از مواد ناهمگن با ضریب ناهمگنی مثبت در استوانه تحت فشار داخلی و استوانه تحت فشار خارجی به دلیل کاهش تنش محیطی بیشینه مناسب‌تر می‌باشد. در مورد استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز استفاده از ماده‌ی همگن سبب کاهش تنش محیطی بیشینه نسبت به ماده‌ی ناهمگن می‌شود. در استوانه تحت فشار داخلی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و برشی و همچنین جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری کاهش می‌یابد. در مورد استوانه تحت فشار خارجی نیز به غیر از تنش برشی، بقیه‌ی موارد رفتار مشابهی دارند. تنش برشی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد. برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی مقادیر تنش محیطی، تنش برشی و جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد، ولیکن در مورد جابه‌جایی محوری رفتاری مشابه دو بارگذاری دیگر نشان می‌دهد. شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد نسبت به حالت دوسر گیردار در انتهای گیردار آن تا نیمه‌ی استوانه به غیر از جابه‌جایی محوری تأثیر اندکی بر نتایج حاصل می‌گذارد. رفتار پوسته تا نزدیکی انتهای آزاد مشابه رفتار آن در نقاط دور از مرز در طول استوانه می‌باشد. به دلیل کاهش تنش برشی در سمت آزاد استوانه، در انتهای آزاد تغییر کمی در رفتار استوانه مشاهده می‌شود که تئوری تغییر شکل برشی و حلّ عددی این تغییرات را تا حدودی متفاوت پیش‌بینی می‌کنند. در مورد جابه‌جایی محوری نیز به دلیل عدم وجود قید در سمت آزاد استوانه، یک افزایش در مقدار جابه‌جایی محوری با حرکت به سمت آزاد استوانه مشاهده می‌شود. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه‌ی تحت فشار وجود دارد. این مطابقت در لایه‌ی میانی بیشتر و در لایه‌ی داخلی کمتر می‌باشد. با توجه به آنچه در این فصل گفته شد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم تحت بار فشاری مناسب می‌باشد.

فصل ۳

تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای

چرخان FGM

۳-۱ مقدمه

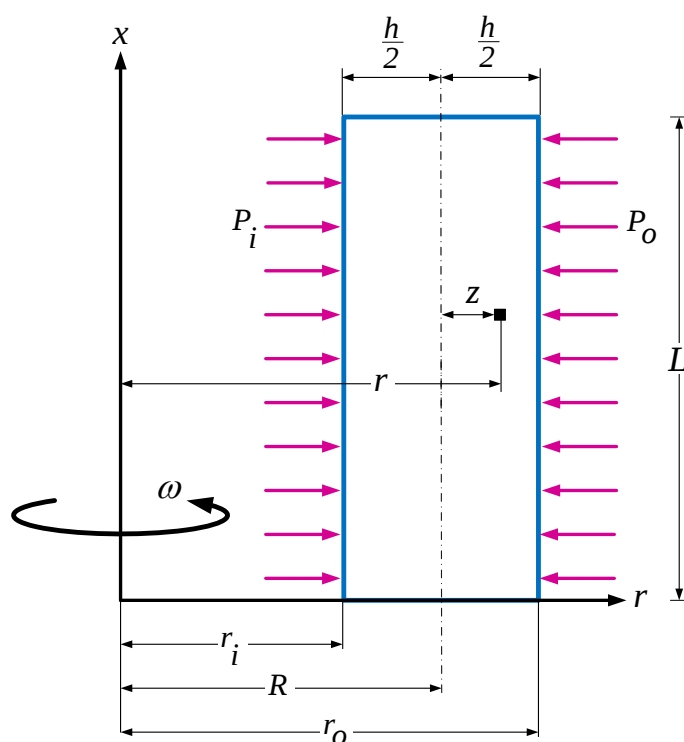
استوانه‌های چرخان دارای کاربرد بسیار وسیعی در صنعت می‌باشند. لذا بررسی و تحلیل تنش در آنها در شرایط مختلف کاری از اهمیت بسزایی برخوردار است. همچنین اکثر سازه‌هایی که مواد FG در آنها استفاده می‌شوند و نیاز به مقاومت بالا در شرایط کاری هستند از قبیل سازه‌های هوافضایی، موشک‌ها، سازه‌های دوار واقع در رآکتورهای اتمی و ... به غیر از نیروهای مکانیکی، دارای دوران نیز می‌باشند؛ از اینرو تحلیل و بررسی این بارگذاری در مورد این مواد حایز اهمیت است. در اکثر محورهای استوانه‌ای توپر یا توخالی، تأثیر دوران عامل مهم ایجاد تنش در استوانه می‌باشد.

در این فصل برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های چرخان جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد همگن و ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، حلّ عمومی استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت داخلی ارائه شده است. نهایتاً با انجام حلّ عددی توسط نرم‌افزار المان محدود Ansys برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک روش تغییر شکل برشی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند.

۳-۲ تحلیل الاستیک استوانه‌های چرخان ناهمگن

یک پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم چرخان تحت فشار داخلی و خارجی را به صورت شکل (۳-۱) در نظر می‌گیریم. همانطور که در فصل دوم نیز بیان شد بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \quad (۳-۱)$$



شکل ۱-۳ پروفیل استوانه‌ای چرخان جدار ثابت تحت بارگذاری فشاری

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\left\{ \begin{aligned} U &= \iiint_V U^* dV \\ dV &= r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \\ U^* &= \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \\ &= \frac{1}{2} E(r) \lambda \left[(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta \varepsilon_z) + \frac{1-2\nu}{2} \gamma_{xz}^2 \right] \end{aligned} \right. \quad (۲-۳)$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار داخلی و خارجی و سرعت دورانی:

$$\left\{ \begin{aligned} W &= \iint_S (\vec{f}_{sf} \cdot \vec{u}) dS + \iiint_V (\vec{f}_{bf} \cdot \vec{u}) dV \\ dS &= r dx d\theta = (R+z) dx d\theta \\ dV &= r d\theta r dx = (R+z) dz dx d\theta \end{aligned} \right. \quad (۳-۳)$$

که در آن نیروی حجمی حاصل از دوران با سرعت ثابت به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{f}_{bf} = \rho(r) r \omega^2 = \rho(z) (R+z) \omega^2 \quad (۴-۳)$$

نهایتاً کار نیروهای خارجی به صورت زیر به دست می آید:

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) U_z dx d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(R+z)\omega^2 U_z (R+z) dz dx d\theta \quad (5-3)$$

و با انتگرالگیری در محدوده ی:

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2} \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad (6-3)$$

برای تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه ی چرخان با سرعت دورانی

ثابت تحت فشار داخلی و خارجی داریم:

$$\delta U = R \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \delta U^* \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx d\theta \quad (7-3)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} = R \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx$$

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) \delta U_z dx d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(R+z)^2 \omega^2 \delta U_z dz dx d\theta \quad (8-3)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} = \int_0^L \left[P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) - P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) \right] (\delta w + z \delta \psi) dx + \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \omega^2 (\delta w + z \delta \psi) (R+z)^2 dz dx$$

با جایگذاری کرنش های رابطه ی (۷-۲) در روابط (۷-۳) و (۸-۳) و نیز بکارگیری اصول حساب وردشی

و اصل کار مجازی برای یک پوسته ی استوانه ای چرخان تحت فشار داخلی و خارجی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{2\pi} = \frac{\delta W}{2\pi} \quad (9-3)$$

$$\begin{cases} R \frac{dN_x}{dx} = 0 \\ R \frac{dM_x}{dx} - R Q_x = 0 \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta = -P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) - \omega^2 \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(R+z)^2 dz \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - R N_z = P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2}\right) - \omega^2 \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z (R+z)^2 dz \end{cases} \quad (10-3)$$

$$R [N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi]_0^L = 0 \quad (11-3)$$

روابط (۱۰-۳) همان معادلات اصلی ما را تشکیل می‌دهند. رابطه‌ی کمکی (۱۱-۳) نیز شرایط مرزی مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌بایست در هر دو انتهای استوانه صفر باشد.

۳-۲-۱ توزیع ناهمگنی چگالی

در استوانه‌های تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، مدول الاستیسیته E ، ضریب پواسون ν و چگالی ρ تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد $\bar{r}$ می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و بالاخص در این بررسی، به علت تغییرات جزئی ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن توزیع نمایی برای مدول الاستیسیته و چگالی در طول جداره‌ی استوانه به صورت تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد $\bar{r}$ به صورت روابط (۱۲-۳) و (۱۳-۳) خواهیم داشت:

$$E(r) = E_i e^{n(\bar{r}-1)} \quad (12-3)$$

$$\rho(r) = \rho_i e^{n(\bar{r}-1)} \quad (13-3)$$

که در این رابطه $\bar{r} = r/r_i$ مختصات شعاعی بی‌بعد است. همچنین E_i و ρ_i به ترتیب مدول الاستیسیته و چگالی در شعاع داخلی استوانه و n نیز ثابت ناهمگنی ماده می‌باشد که $n=0$ همان ماده‌ی همگن است. با جایگذاری مقدار $r = R + z$ در روابط (۱۲-۳) و (۱۳-۳) داریم:

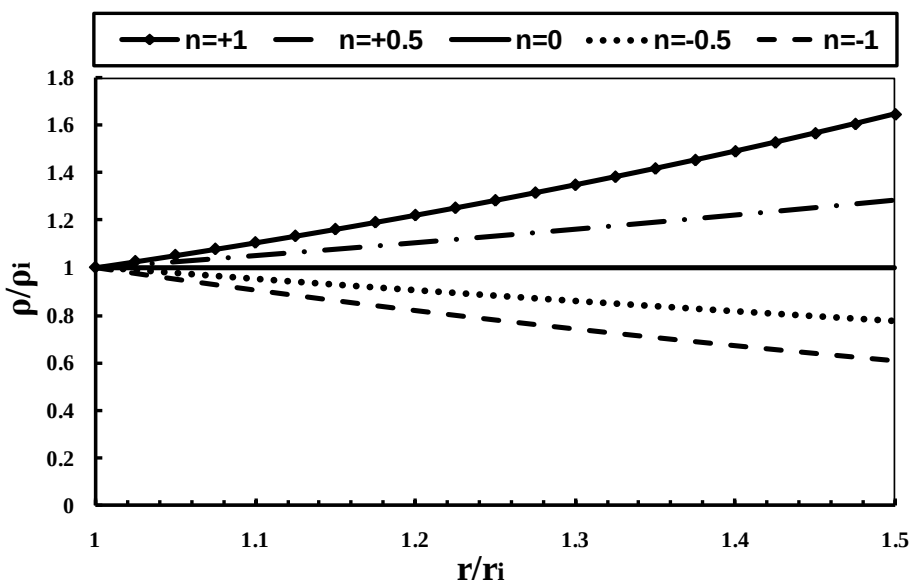
$$E(z) = E_i e^{n\left(\frac{R+z-r_i}{r_i}\right)} = E_i \eta e^{n\left(\frac{z}{r_i}\right)} \quad (14-3)$$

$$\rho(z) = \rho_i e^{n\left(\frac{R+z-r_i}{r_i}\right)} = \rho_i \eta e^{n\left(\frac{z}{r_i}\right)} \quad (15-3)$$

که در آن پارامتر η در استوانه‌ی جدار ثابت مستقل از دستگاه مختصات بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta = e^{\left(\frac{nh}{2r_i}\right)} \quad (16-3)$$

شکل (۲-۳) توزیع چگالی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن و همسانگرد به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۲-۳ توزیع بی‌بعد چگالی در راستای شعاعی

معادلات (۱۰-۳) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسل می‌باشد. برای حل آن باید نیروها و لنگرها را با استفاده از روابط (۱۰-۲) تا (۱۳-۲) به منته‌های تنش و با جایگذاری رابطه‌ی (۱۴-۳) و (۱۵) در روابط (۹-۲)، (۹-۳)، و (۱۰-۳) به مؤلفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۷-۲) بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نوشت. نهایتاً یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به‌دست می‌آید که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$[A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \quad (۱۷-۳)$$

که در آن بردار مجهول $\{F\}$ شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت رابطه‌ی (۲۵-۲) می‌باشد:

$$\{y\} = \{u \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \quad (۱۸-۳)$$

همچنین قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به‌صورت بردار نیروی $\{F\}$ در رابطه‌ی (۱۹-۳) نشان داده

شده است:

$$\{F\} = \frac{1}{\lambda E_i \eta} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) - \omega^2 \rho_i \eta \int_{-h/2}^{h/2} e^{\left(\frac{nz}{r_i}\right)} (R+z)^2 dz \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2}\right) - \omega^2 \rho_i \eta \int_{-h/2}^{h/2} e^{\left(\frac{nz}{r_i}\right)} z (R+z)^2 dz \end{Bmatrix} \quad (۱۹-۳)$$

در دستگاه معادلات (۱۷-۳) ماتریس‌های $[A]_{4 \times 4}$ و $[C]_{4 \times 4}$ متقارن و $[B]_{4 \times 4}$ پادمتقارن هستند که در فصل قبلی به درایه‌های آنها اشاره شده است.

۳-۲-۲ حل الاستیک استوانه‌های چرخان تحت بارگذاری فشاری

همانطور که توضیح داده شد، دستگاه معادله (۱۷-۳) یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت می‌باشد که دارای حلّ عمومی و حلّ خصوصی است. اگر این دستگاه معادلات را به صورت ساده شده‌ی زیر بنویسیم:

$$[A]\{y''\} + [B]\{y'\} + [C]\{y\} = \{F\} \quad (۲۰-۳)$$

داریم:

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p \quad (۲۱-۳)$$

برای حلّ عمومی دستگاه فوق مقدار $\{y\} = \{\xi\} e^{mx}$ را در معادلات آن می‌گذاریم، داریم:

$$e^{mx} [m^2 A + mB + C] \{\xi\} = \{0\} \quad (۲۲-۳)$$

با توجه به اینکه $e^{mx} \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$|m^2 A + mB + C| = 0 \quad (۲۳-۳)$$

از حلّ معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه m_i محاسبه شده که به صورت سه جفت ریشه‌ی مزدوج غیر صفر

حاصل می‌شوند. از این سه جفت ریشه، یک جفت آن عدد حقیقی و دو جفت دیگر آن نیز اعداد مختلط مزدوج می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه‌ی حاصل در معادله‌ی (۳-۲۲)، بردارهای ویژه ξ_i متناظر با مقادیر ویژه‌ی فوق به‌دست می‌آیند. در نهایت حلّ عمومی عبارتست از:

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^6 C_i \{\xi\}_i e^{m_i x} \quad (۳-۲۴)$$

با توجه به این نکته که مقادیر ویژه‌ی حاصل شامل اعداد مختلط می‌باشند، برای به‌دست آوردن بردارهای ویژه‌ی متناظر با این اعداد مختلط، باید از روابط حاکم بر بردارهای ویژه‌ی مربوط به اعداد مختلط استفاده کرد.

برای حلّ خصوصی، قسمت ناهمگن معادلات (۳-۱۷) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری با ضخامت ثابت و تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از x نمی‌باشد. بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس $[C]$ طبق معادله‌ی زیر جواب خصوصی را به دست آورد.

$$[C]\{y\} = \{F\} \Rightarrow \{y\} = [C]^{-1}\{F\} \quad (۳-۲۵)$$

اما با توجه به معکوس‌ناپذیری (منفرد بودن) ماتریس $[C]$ به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، با ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حل می‌شود. بدین منظور در اولین معادله از سری معادلات (۳-۱۰)، از طرفین آن انتگرال‌گیری کرده و خواهیم داشت:

$$RN_x = C_0 \quad (۳-۲۶)$$

همانطور که در معادلات (۳-۱۷) مشخص است، عبارت u وجود ندارد ولیکن du/dx در معادلات وجود دارد. با در نظر گرفتن du/dx به عنوان پارامتری جدیدی به نام v و انتگرال‌گیری از طرفین اولین معادله از سری معادلات داریم:

$$u = \int v dx + C_7 \quad (۳-۲۷)$$

بنابراین دستگاه معادلات قدیم به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} [A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \\ \{y\} = \{\nu \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \end{cases} \quad (28-3)$$

که در آن بردار نیرویی $\{F\}$ با توجه به انتگرالگیری از طرفین اولین معادله، به صورت زیر می‌باشد:

$$\{F\} = \frac{1}{\lambda E_i \eta} \begin{Bmatrix} C_0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) - \omega^2 \rho_i \eta \int_{-h/2}^{h/2} e^{n \left(\frac{z}{r_i} \right)} (R+z)^2 dz \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) - \omega^2 \rho_i \eta \int_{-h/2}^{h/2} e^{n \left(\frac{z}{r_i} \right)} z (R+z)^2 dz \end{Bmatrix} \quad (29-3)$$

بنابراین با حل دستگاه معادلات فوق به صورت مطالعه‌ی موردی می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به‌دست آورد.

شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۱-۳) توسط رابطه‌ی (۱۱-۳) بیان می‌شوند. به عبارتی باید مقادیر $\{u \quad \phi \quad w \quad \psi\}$ و $\{N_x \quad M_x \quad Q_{xz} \quad M_{xz}\}$ در دو انتهای استوانه طوری در نظر گرفته شوند که همواره رابطه‌ی (۱۱-۳) برابر صفر باشد. با داشتن ۶ مجهول $C_6, \dots, C_1$ در جواب عمومی و ۲ ثابت C_7, C_0 در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل ۴ شرط مرزی در هر سمت، ۸ ثابت مجهول را محاسبه کرد. نهایتاً با به‌دست آوردن ثوابت مجهول، بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه‌ی (۲۱-۳) بر حسب متغیرهای z, x به‌دست می‌آیند. با استفاده از رابطه‌ی (۶-۲) می‌توان میدان جابه‌جایی شعاعی و طولی را به‌دست آورده و با استفاده از روابط (۷-۲) تا (۱۳-۲) مقادیر تنش، کرنش، نیرو و لنگر را نیز محاسبه کرد.

۳-۳ مطالعه‌ی موردی

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج حلّ تحلیلی، یک استوانه جدار ضخیم ناهمگن و همسانگرد با ضخامت ثابت مطابق شکل (۱-۳) به شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ ، طول $L = 800 \text{ mm}$ و توزیع نمایی مدول الاستیسیته و چگالی طبق روابط (۱۴-۳) و (۱۵-۳) دارای مدول الاستیسیته و چگالی در سطح داخلی استوانه به ترتیب برابر $E_i = 200 \text{ GPa}$ و $\rho_i = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ و نسبت پواسون ثابت $\nu = 0.3$ را تحت فشار یکنواخت داخلی $P_i = 80 \text{ MPa}$ و سرعت دورانی ثابت $\omega = 3600 \text{ rpm}$ در نظر می‌گیریم.

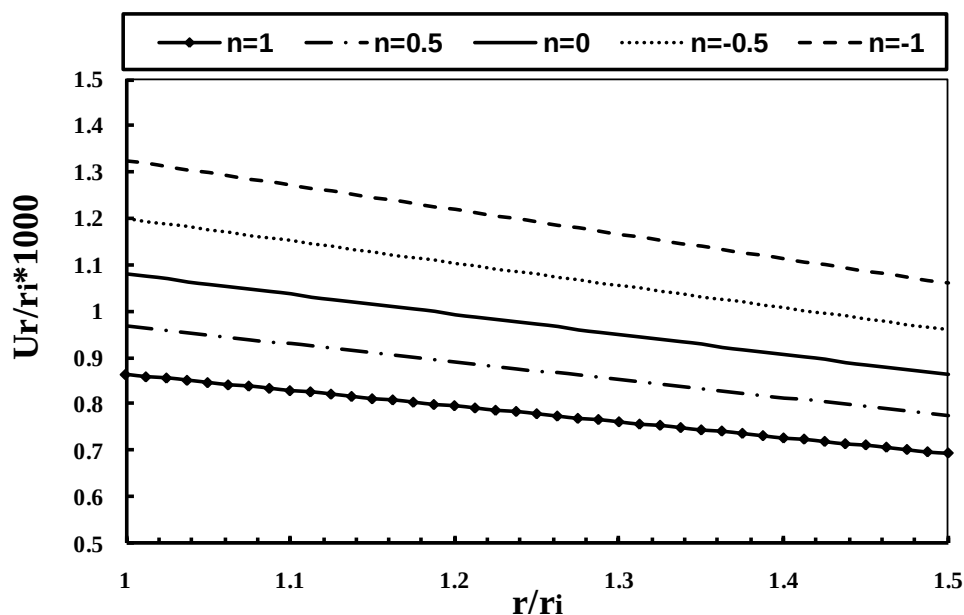
تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط انتهایی (الف) دوسر گیردار و (ب) یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد انجام شده است. حلّ تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 11 صورت گرفته است.

۱-۳-۳ استوانه‌ی دوسر گیردار

برای شرایط مرزی دو سر گیردار با توجه به رابطه‌ی (۱۱-۳) داریم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \end{cases} \quad (30-3)$$

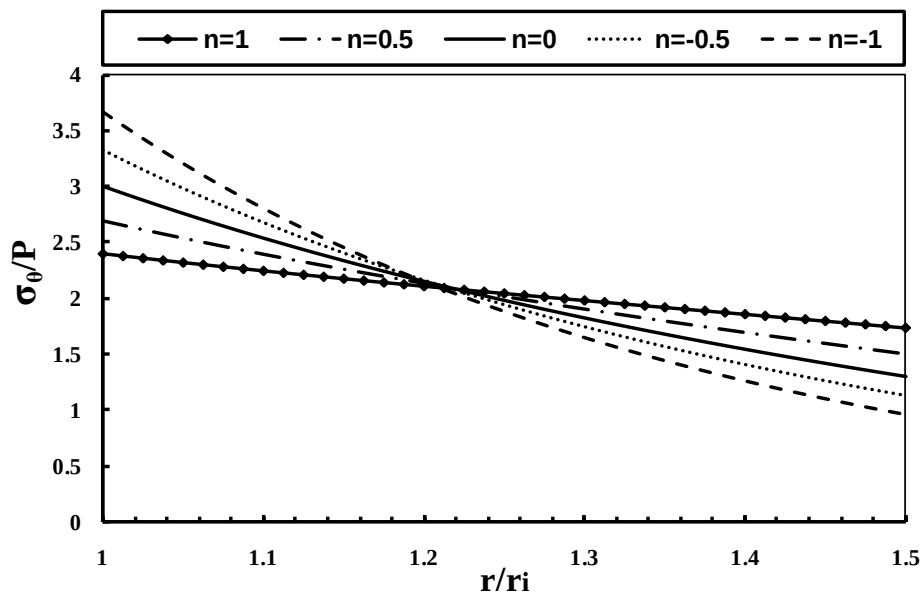
با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به دست می‌آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند. در شکل (۳-۳) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به ازای n های مختلف برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی در وسط استوانه برای حالت دوسر گیردار نشان داده شده است.



شکل ۳-۳ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار

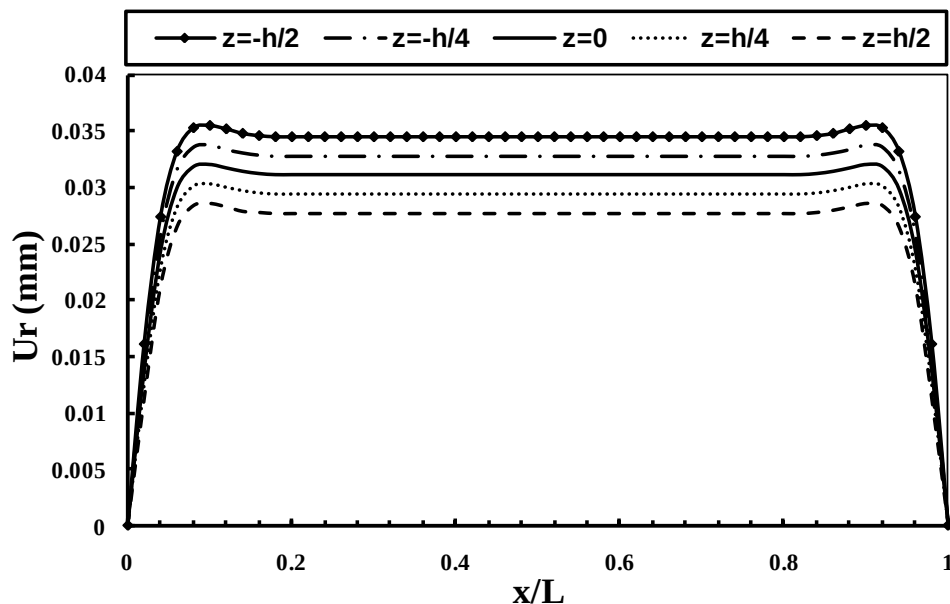
شکل (۳-۴) نیز توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به ازای n های

مختلف برای بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه برای شرایط انتهایی دوسر گیردار نشان می‌دهد.

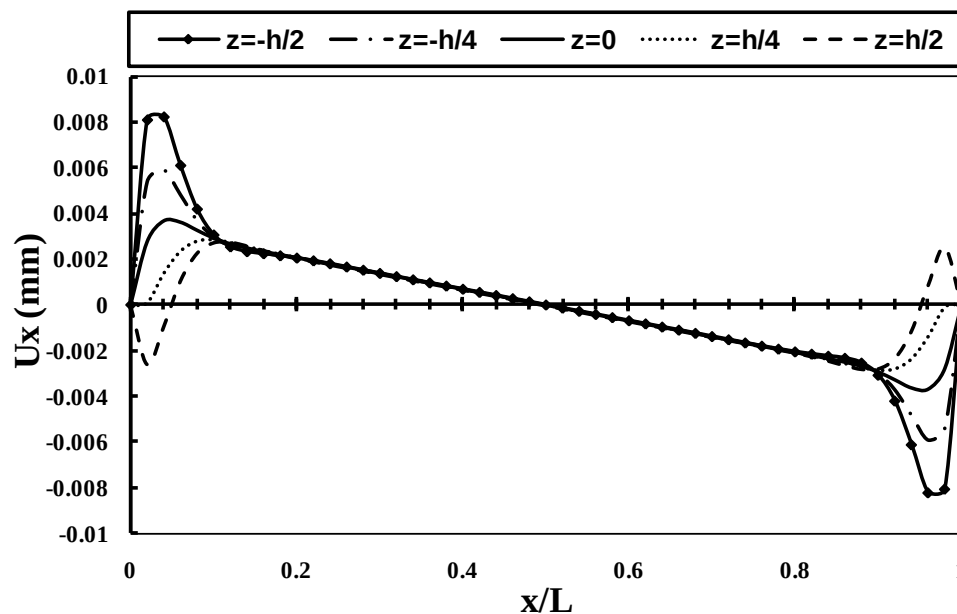


شکل ۳-۴ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار

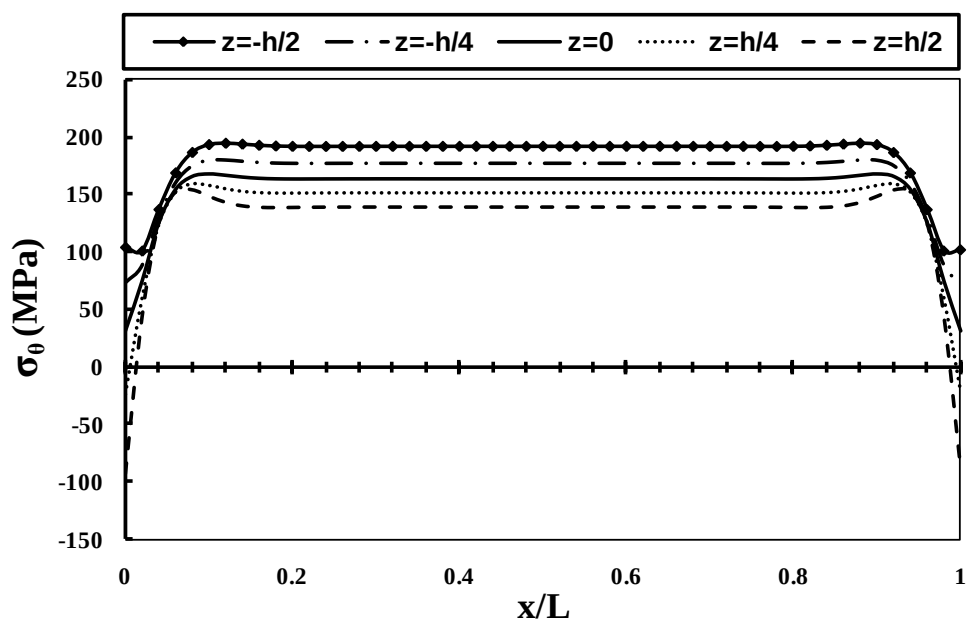
شکل‌های (۳-۵) تا (۳-۸) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی را در راستای طول استوانه به ازای $n=1$ در پنج لایه‌ی مختلف تحت بارگذاری فشاری و دورانی نشان می‌دهد.



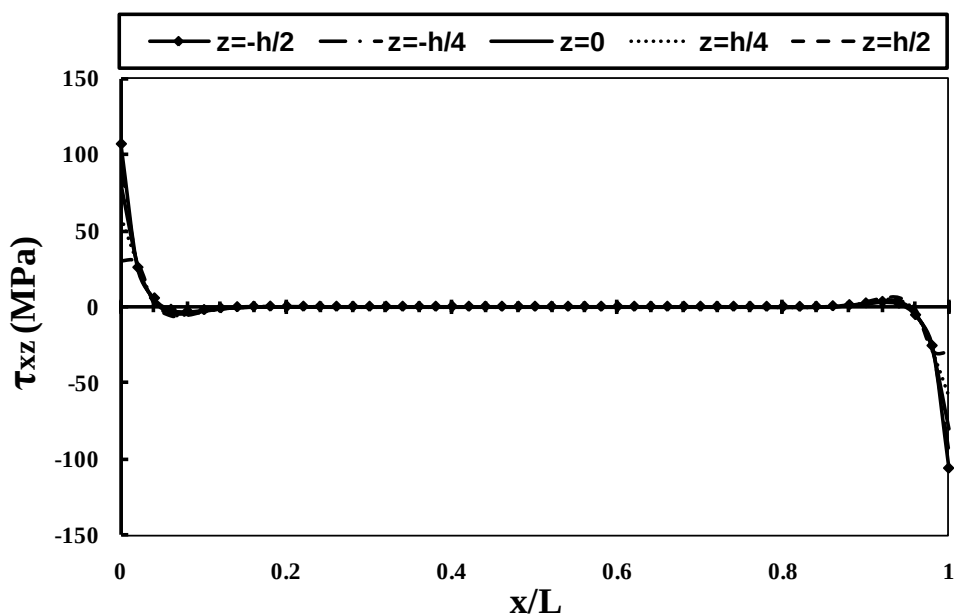
شکل ۳-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۳-۶ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۳-۷ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۳-۸ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار

مقایسه‌ی جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی بین استوانه تحت بارگذاری مکانیکی و دورانی با استوانه تحت بارگذاری فشاری نشان می‌دهد که چرخش با سرعت ثابت 3600 rpm تأثیر بسیار اندکی در بر روی توزیع

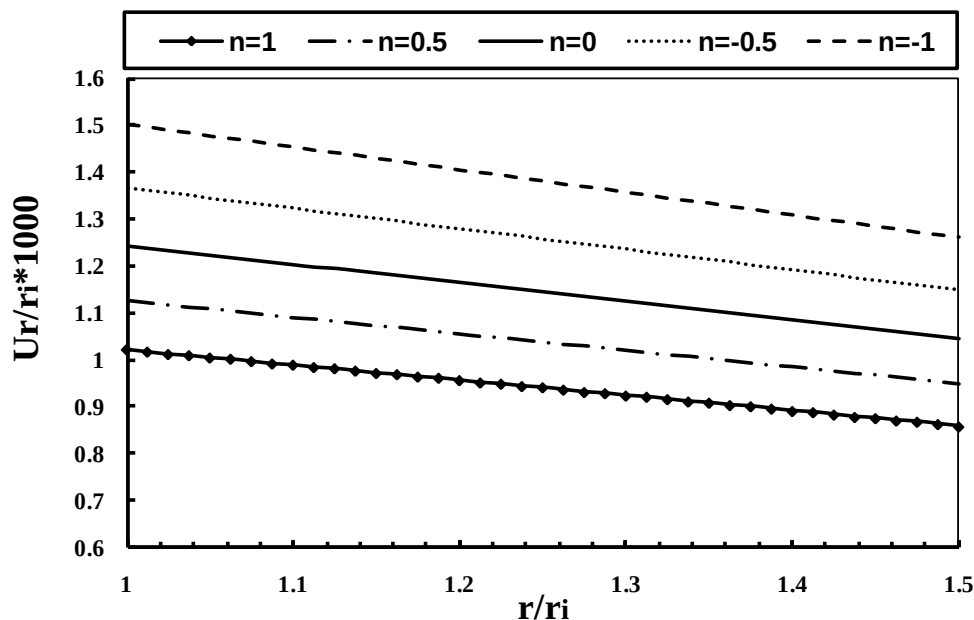
جابه‌جایی و تنش داشته و سبب افزایش بسیار کم این مقادیر می‌شود. به عنوان مثال مقدار جابه‌جایی شعاعی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت 3600 rpm در وسط استوانه برای لایه‌های داخلی، میانی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ حدود $0.7 \mu\text{m}$ می‌باشد.

۳-۲-۳ استوانه‌ی یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد

برای شرایط مرزی یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۱) داریم:

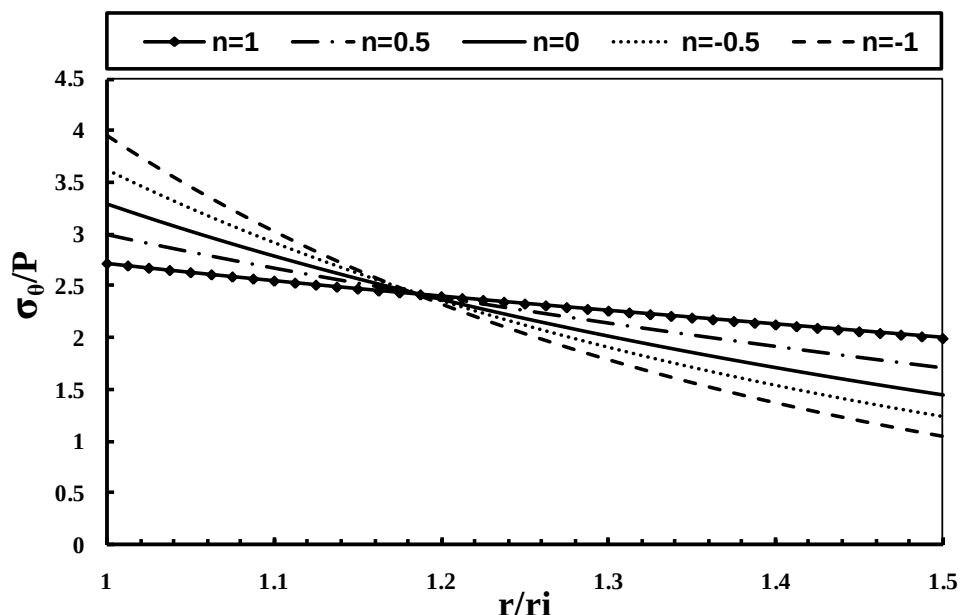
$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow N_x=0, M_x=0, Q_{xz}=0, M_{xz}=0 \end{cases} \quad (3-11)$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مولفه‌های میدان جابه‌جایی به دست می‌آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند. در شکل (۳-۹) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به ازای n های مختلف برای بارگذاری فشاری و دورانی در وسط استوانه برای شرایط انتهایی یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد نشان داده شده است.



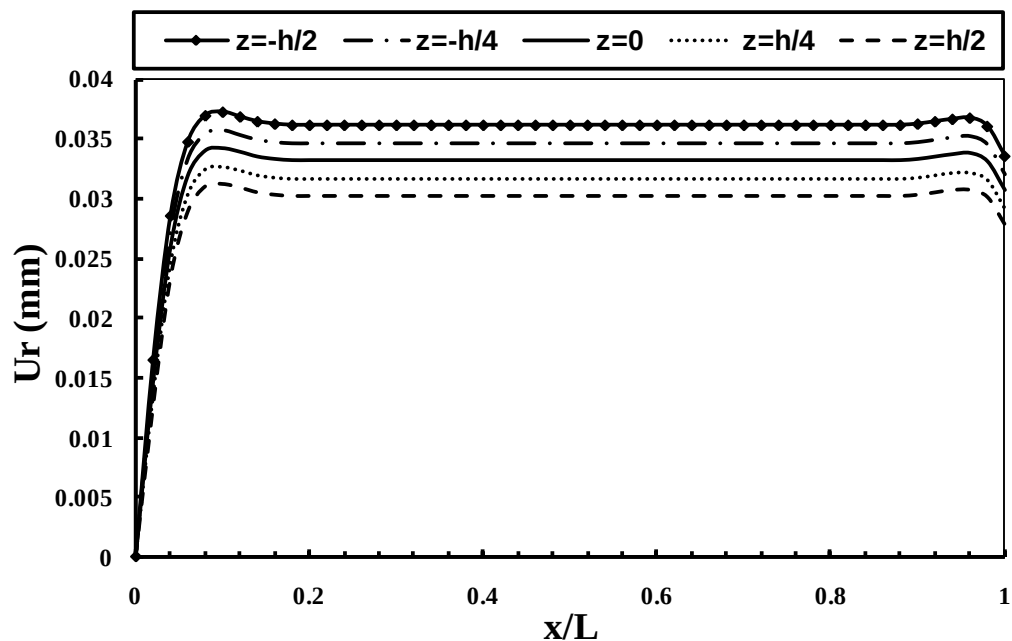
شکل ۳-۹ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد

شکل (۳-۱۰) نیز توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به ازای n های مختلف برای بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه نشان می‌دهد.

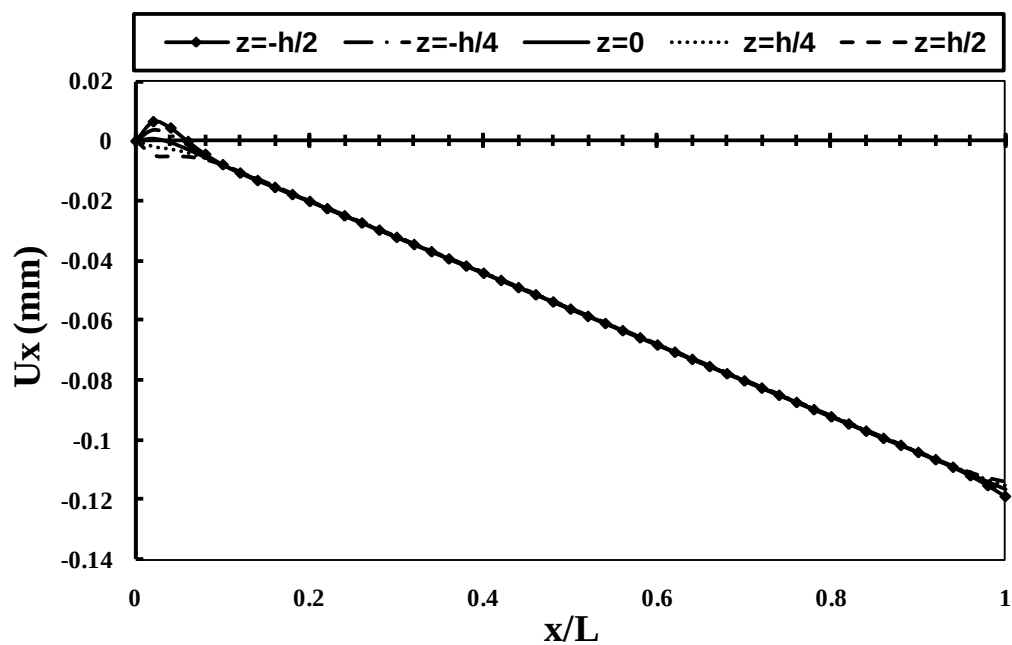


شکل ۳-۱۰ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد

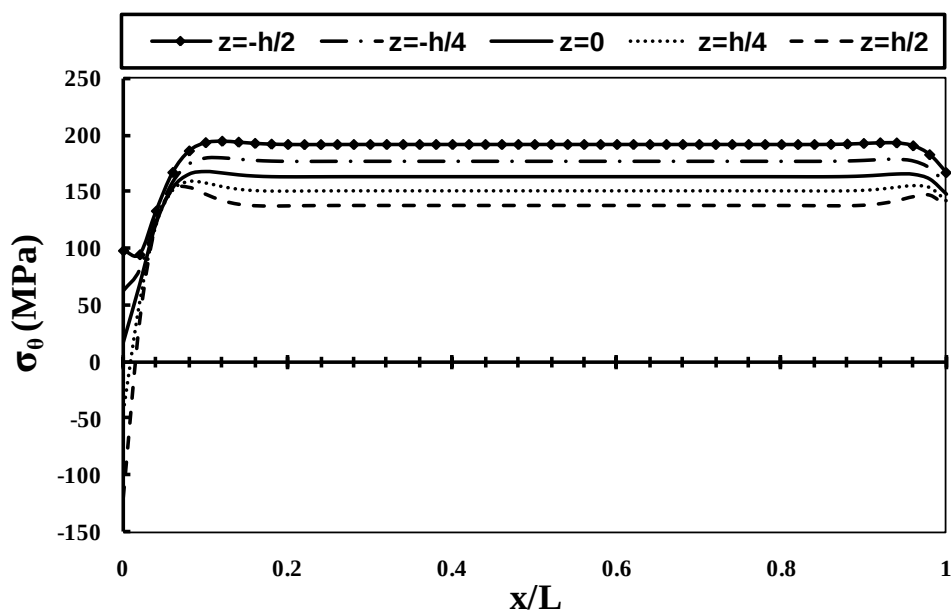
شکل‌های (۳-۱۱) تا (۳-۱۴) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی را در راستای طول استوانه به ازای $n=1$ در پنج لایه‌ی مختلف برای شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد نشان می‌دهد. مقایسه‌ی جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در استوانه یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد تحت بار مکانیکی و دورانی با استوانه تحت بار فشاری نشان می‌دهد که چرخش با سرعت 3600 rpm همانند شرایط مرزی دو سر گیردار تأثیر بسیار اندکی در بر روی توزیع جابه‌جایی و تنش داشته و سبب افزایش کم این مقادیر می‌شود. مشابه شرایط مرزی دو سر گیردار مقدار جابه‌جایی شعاعی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت 3600 rpm در وسط استوانه برای لایه‌های داخلی، میانی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ حدود همان $7 \mu\text{m}$ می‌باشد. به عبارت دیگر برای استوانه‌ی چرخان، شرایط مرزی تغییر محسوسی در مقدار جابه‌جایی شعاعی و محیطی موجود در طول استوانه ایجاد نمی‌کند.



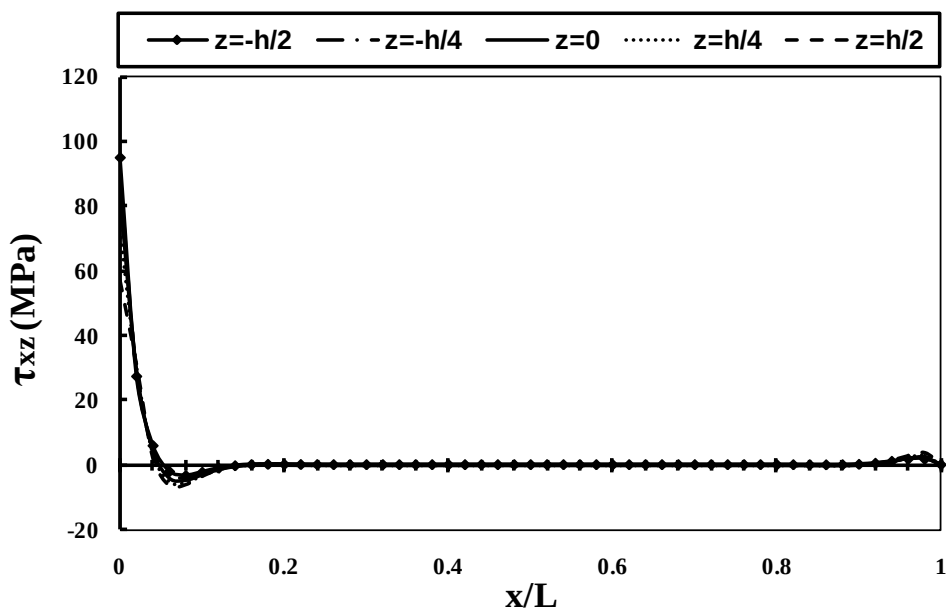
شکل ۱۱-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



شکل ۱۲-۳ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



شکل ۳-۱۳ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یکسر گیردار - یکسر آزاد



شکل ۳-۱۴ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یکسر گیردار - یکسر آزاد

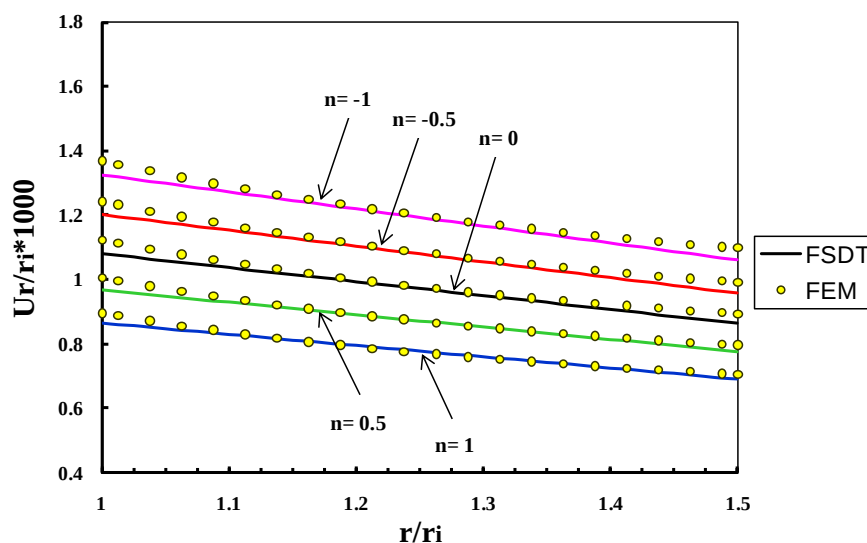
۳-۴ حل عددی استوانه‌های چرخان ناهمگن تحت فشار داخلی

نحوه‌ی مدلسازی استوانه‌ی FGM چرخان همانند فصل قبل می‌باشد. در این قسمت با در نظر گرفتن

کلّ گره‌های موجود در پوسته‌ی استوانه‌ای، یک سرعت دورانی ثابت نیز به مجموعه وارد می‌شود. در این بخش نیز نتایج مربوط به حلّ تحلیلی توسط روش تغییر شکل برشی با نتایج عددی حاصل از روش اجزاء محدود در استوانه‌های همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی دارای سرعت دورانی ثابت مقایسه شده است.

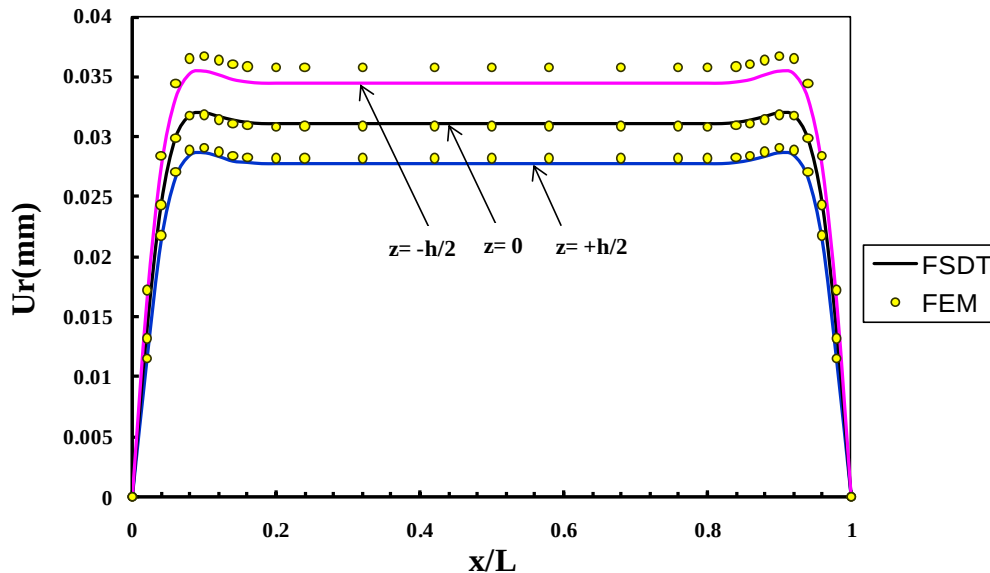
۳-۴-۱ مقایسه‌ی نتایج

در ادامه به منظور بررسی صحت روش حلّ تحلیلی ارائه شده، نتایج حاصل از روش تئوری تغییر شکل برشی و نتایج حاصل از حلّ عددی به کمک نرم‌افزار Ansys آورده شده است. در شکل (۳-۱۵) نتایج جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT برای ثوابت ناهمگنی مختلف در طول جداره‌ی استوانه و در $x=L/2$ برای شرایط انتهایی دوسرگیردار آورده شده است. با توجه به این نمودار می‌توان دریافت که در لایه‌ی میانی همانند استوانه تحت فشار داخلی بیشترین انطباق بین روش‌های FE و FSDT وجود دارد. همچنین اختلاف موجود بین دو روش در لایه‌ی داخلی بیشتر و در لایه‌ی خارجی کمتر می‌باشد. قابل ذکر است که میزان این اختلاف در استوانه تحت بارگذاری فشاری و دورانی بیشتر از استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد.

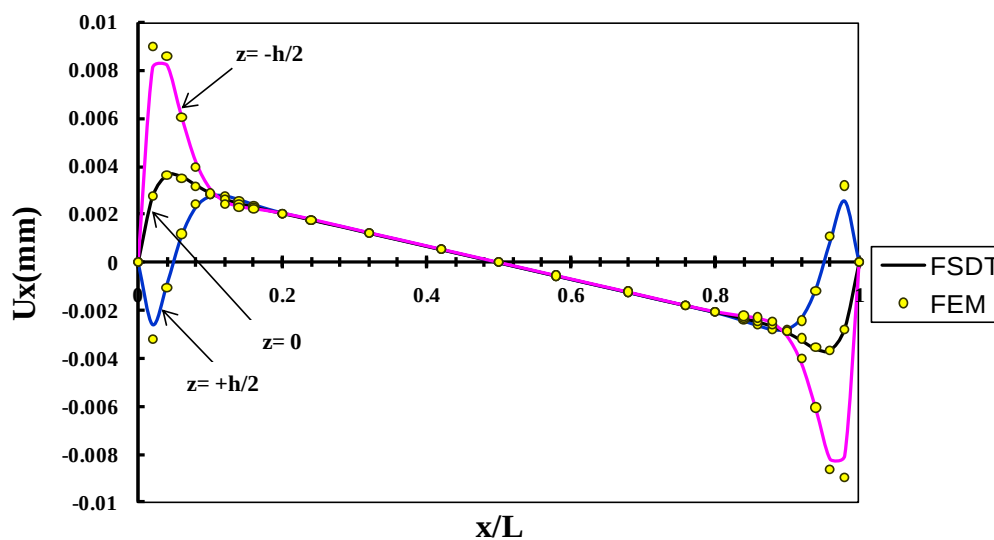


شکل ۳-۱۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت دوسرگیردار در $x=L/2$

شکل (۳-۱۶) حاوی نتایج جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت شرایط انتهایی دوسر گیردار برای ثابت ناهمگنی $n=1$ می‌باشد. توزیع جابه‌جایی محوری محاسبه شده توسط دو روش عددی و تحلیلی برای سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه‌ی دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ در شکل (۳-۱۷) نشان داده شده است.

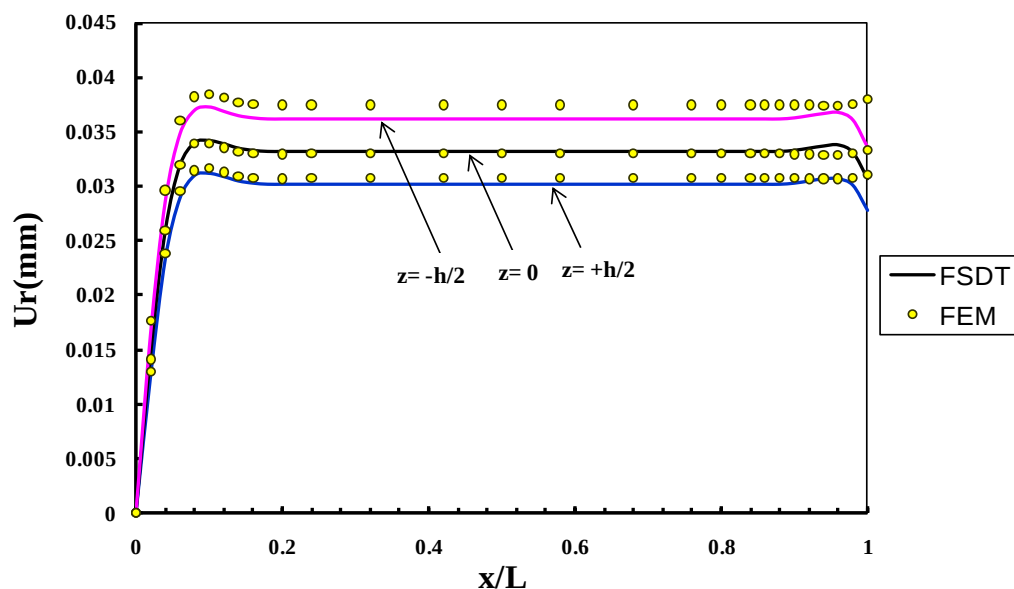


شکل ۳-۱۶ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$

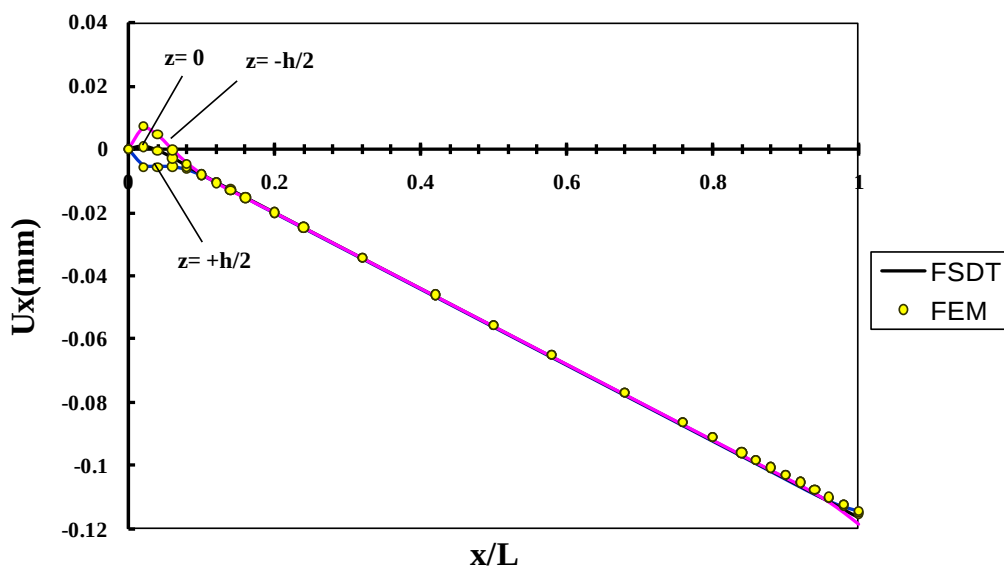


شکل ۳-۱۷ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$

در شکل‌های (۱۸-۳) و (۱۹-۳) به ترتیب توزیع جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری حاصل از دو روش FE و FSDT در سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد برای ثابت ناهمگنی $n=1$ نشان داده شده است.



شکل ۱۸-۳ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$



شکل ۱۹-۳ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$

جدول (۱-۳) حاوی نتایج تنش بیشینه‌ی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در دو لایه‌ی داخلی و میانی استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت دو سر-گیردار می‌باشد. در جدول (۲-۳) مقادیر تنش محیطی حاصل از استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی و تنش محیطی ناشی از استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دو سرگیردار توسط روش FSDT نشان داده شده است. همانطور که مشخص است حداکثر مقدار تنش محیطی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت 3600 rpm کمتر از 5 MPa می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که میزان تنش حاصل از دوران در سطح داخلی بیشتر از سطح میانی می‌باشد.

جدول ۱-۳ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی
برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$

	$\sigma_{\theta} [MPa]$	$n = -1$	$n = -.5$	$n = 0$	$n = .5$	$n = 1$
سطح داخلی $r = r_i$	FEM	۲۶۲	۲۳۶/۰۷	۲۱۱/۶۳	۱۸۹	۱۶۶/۷۱
	FSDT	۲۹۳/۸۶	۲۶۶/۰۲	۲۳۹/۷	۲۱۴/۹۶	۱۹۱/۸۶
سطح میانی $r = R$	FEM	۱۵۳	۱۵۶/۳۸	۱۵۸/۹۶	۱۶۱	۱۶۱/۸۸
	FSDT	۱۵۰/۸۷	۱۵۴/۹۴	۱۵۸/۳۸	۱۶۱/۱۴	۱۶۳/۱۷

جدول ۲-۳ تنش محیطی محاسبه شده تحت بارگذاری‌های مختلف برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$

	$\sigma_{\theta} [MPa]$	$n = -1$	$n = -.5$	$n = 0$	$n = .5$	$n = 1$
سطح داخلی $r = r_i$	بار فشاری	۲۹۰/۱۷	۲۶۲/۲۲	۲۳۵/۷۸	۲۱۰/۹۲	۱۸۷/۷۱
	بار فشاری و دورانی	۲۹۳/۸۶	۲۶۶/۰۲	۲۳۹/۷	۲۱۴/۹۶	۱۹۱/۸۶
سطح میانی $r = R$	بار فشاری	۱۴۸/۸۴	۱۵۲/۵۷	۱۵۵/۶۱	۱۵۷/۹	۱۵۹/۴
	بار فشاری و دورانی	۱۵۰/۸۷	۱۵۴/۹۴	۱۵۸/۳۸	۱۶۱/۱۴	۱۶۳/۱۷

۳-۵ جمع بندی

با توجه با تأثیر بسیار کم بارگذاری دورانی برای سرعت‌های نه چندان زیاد، مشاهده می‌شود که رفتار استوانه تحت بارگذاری دورانی و فشاری مشابه رفتار استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. به عبارتی می‌توان از نتایج مربوط به فصل دوم برای بررسی رفتار استوانه‌ی چرخان تحت فشار استفاده کرد. همانطور که در طول فصل نیز اشاره شد، در استوانه‌ی جدار کلفت با ضخامت ثابت، دوران با سرعت ثابت برای سرعت‌های نه چندان زیاد سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی بسیار اندکی می‌شود. به عنوان مثال مقدار جابه‌جایی شعاعی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت 3600 rpm در وسط استوانه برای لایه‌های داخلی، میانی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ حدود $0.7 \mu\text{m}$ می‌باشد. همچنین حداکثر مقدار تنش محیطی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت 3600 rpm کمتر از 5 MPa می‌باشد. قابل ذکر است که میزان تنش حاصل از دوران در سطح داخلی بیشتر از سطح میانی می‌باشد. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار و دوران در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات حاکم ظاهر می‌شود، می‌توان برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌های دورانی و فشاری به طور جداگانه، معادلات حاکم را حل کرده و نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در حقیقت بردار ناهمگنی $\{F\}$ در نقش بردار نیرویی شامل نیروهای سطحی و حجمی ظاهر می‌شود. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه تحت بارگذاری‌های دورانی و فشاری وجود دارد. این مطابقت در لایه‌ی میانی بیشتر و در لایه‌ی داخلی کمتر می‌باشد. با توجه به آنچه در این فصل گفته شد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم چرخان تحت بارگذاری فشاری مناسب می‌باشد.

فصل ۴

تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای
FGM

۴-۱ مقدمه

طراحی مواد FG در ابتدا به منظور کاربردهای حرارتی آنها در شرایط ویژه بود و مقاومت منحصر به فرد استوانه‌های جدار ضخیم (FGM) در برابر بارهای حرارتی، محققان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آنها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، بپردازند.

در این فصل برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد همگن و ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، حلّ عمومی استوانه‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت داخلی و شار حرارتی یکنواخت ارائه شده است. نهایتاً با ارائه‌ی حلّ عددی توسط نرم‌افزار المان محدود Ansys برای استوانه تحت فشار داخلی و شار حرارتی یکنواخت، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک روش تغییر شکل برشی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند.

۴-۲ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن

یک پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی و با حضور منبع حرارتی در شعاع داخلی و خارجی استوانه را به صورت شکل (۴-۱) در نظر می‌گیریم.

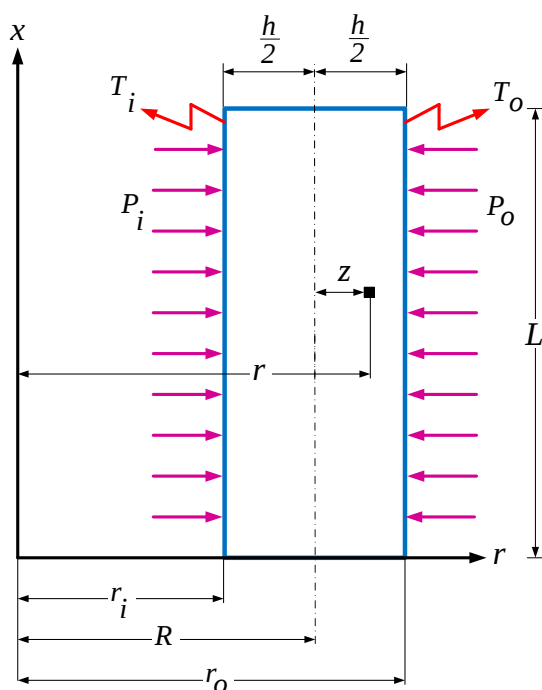
همانطور که در فصول قبلی نیز بیان شد بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات

کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \quad (۴-۱)$$

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\begin{cases} U = \iiint_V U^* dV \\ dV = r dr d\theta dz = (R+z) dx d\theta dz \\ U^* = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \end{cases} \quad (۴-۲)$$



شکل ۱-۴ پروفیل استوانه‌ای جدار ثابت تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی

بر اساس روابط رفتاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد و با در نظر گرفتن کرنش‌های حرارتی، تنش‌ها

بر حسب مقادیر کرنش عبارتند از:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} - \frac{\alpha(r)E(r)\Delta T(r)}{1-2\nu} \\ \tau_{xz} = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \end{cases} \quad (3-4)$$

که در آن $\Delta T(r)$ تابع توزیع اختلاف دما در طول جداره‌ی استوانه بوده و $\alpha(r)$ نیز ضریب انبساط

حرارتی می‌باشد. با تعریف پارامتر λ برای خلاصه‌نویسی داریم:

$$\begin{cases} \sigma_i = \lambda E(r) \left[(1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k) - \alpha(r)(1+\nu)\Delta T(r) \right] \\ \tau_{xz} = \frac{1-2\nu}{2} \lambda E(r) \gamma_{xz} \\ \lambda = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (4-4)$$

با جایگذاری مقادیر تنش از رابطه‌ی (۴-۴) در رابطه‌ی (۲-۴) برای انرژی کرنشی خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{aligned} U &= \iiint_V U^* dV \\ dV &= r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \\ U &= \frac{1}{2} E(r) \lambda \left[(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta \varepsilon_z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-2\nu}{2} \gamma_{xz}^2 - \alpha(r) \Delta T(r) (1+\nu)(\varepsilon_x + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \right] \end{aligned} \right. \quad (۵-۴)$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار داخلی و خارجی:

$$\left\{ \begin{aligned} W &= \iint_S (\vec{f}_{sf} \cdot \vec{u}) dS \\ dS &= r d\theta dx = (R+z) dx d\theta \\ \Rightarrow W &= \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) U_z dx d\theta \end{aligned} \right. \quad (۶-۴)$$

و با انتگرالگیری در محدوده‌ی:

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (۷-۴)$$

برای تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه‌ی تحت شار حرارتی و فشار

داخلی و خارجی یکنواخت داریم:

$$\delta U = R \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \delta U^* \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx d\theta \quad (۸-۴)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} = R \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx$$

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) \delta U_z dx d\theta \quad (۹-۴)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} = \int_0^L \left[P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) - P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) \right] (\delta w + z \delta \psi) dx$$

با جایگذاری کرنش‌های رابطه‌ی (۲-۷) در روابط (۴-۸) و (۴-۹) و نیز به‌کارگیری اصول حساب

وردشی و اصل کار مجازی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای تحت شار حرارتی و فشار داخلی و خارجی

خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{2\pi} = \frac{\delta W}{2\pi} \quad (10-4)$$

$$\begin{cases} R \frac{dN_x}{dx} = 0 \\ R \frac{dM_x}{dx} - RQ_x = 0 \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta = -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - RN_z = P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) \end{cases} \quad (11-4)$$

$$R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi \right]_0^L = 0 \quad (12-4)$$

روابط (۱۱-۴) همان معادلات اصلی ما را تشکیل می‌دهند. رابطه‌ی کمکی (۱۲-۴) هم شرایط مرزی مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌بایست در هر دو انتهای استوانه صفر باشند.

۴-۲-۱ توزیع ناهمگنی ضریب انبساط حرارتی

در استوانه‌های تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، مدول الاستیسیته E ، ضریب پواسون ν و ضریب انبساط حرارتی α توابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد $\bar{r}$ می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و بالاخص در این بررسی، به علت تغییرات جزئی ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن توزیع نمایی برای مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در طول جداره‌ی استوانه (شعاع استوانه) به صورت تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد $\bar{r}$ به صورت رابطه‌ی (۲۳-۲) خواهیم داشت:

$$E(r) = E_i e^{n(\bar{r}-1)} \quad (13-4)$$

$$\alpha(r) = \alpha_i e^{n(\bar{r}-1)} \quad (14-4)$$

که در این رابطه $\bar{r} = r/r_i$ مختصات شعاعی بی‌بعد است. همچنین E_i و α_i به ترتیب مدول

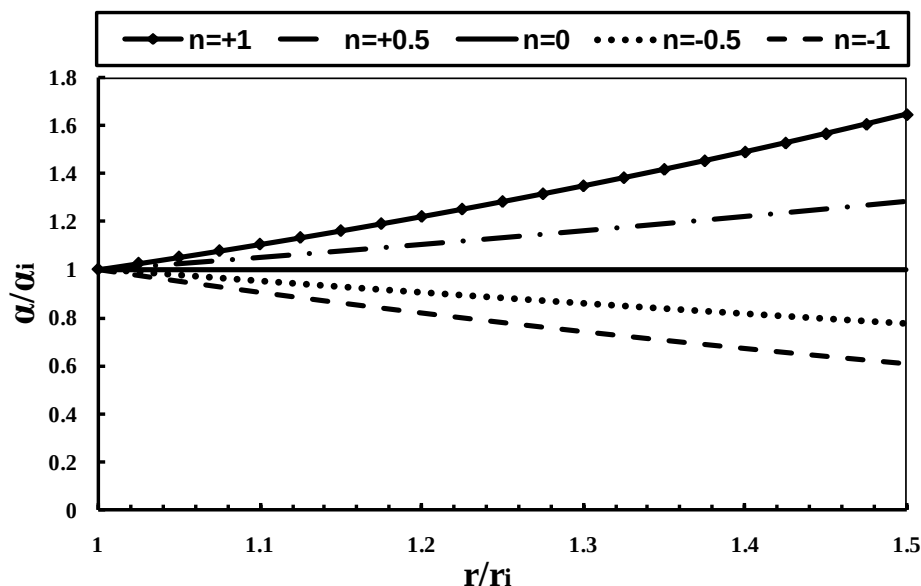
الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در شعاع داخلی استوانه و n نیز ثابت ناهمگنی ماده می‌باشد که $n=0$ همان ماده‌ی همگن است. با جایگذاری مقدار $r=R+z$ در روابط (۴-۱۳) تا (۴-۱۴) داریم:

$$E(z) = E_i e^{n\left(\frac{R+z-r_i}{r_i}\right)} = E_i \eta e^{n\left(\frac{z}{r_i}\right)} \quad (۴-۱۵)$$

$$\alpha(z) = \alpha_i e^{n\left(\frac{R+z-r_i}{r_i}\right)} = \alpha_i \eta e^{n\left(\frac{z}{r_i}\right)} \quad (۴-۱۶)$$

شکل (۲-۲) توزیع ضریب انبساط حرارتی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در

استوانه‌ی ناهمگن و همسانگرد به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۲-۴ توزیع بی‌بعد ضریب انبساط حرارتی در راستای شعاعی

۲-۲-۴ حل معادله‌ی انتقال حرارت

همانطور که در قسمت قبل توضیح داده شد، برای یک استوانه تحت تاثیر منبع حرارتی در اطراف آن

مطابق شکل (۴-۱)، در نظر گرفتن انتقال حرارت به صورت هدایت در داخل جداره‌ی استوانه باعث ایجاد

کرنش‌های حرارتی در داخل استوانه می‌شود. برای انجام تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ی مورد نظر می-

بایست با حل معادله‌ی انتقال حرارت پوسته‌ی استوانه‌ای، تابع توزیع اختلاف دما در طول جداره‌ی استوانه

تعیین شود. برای این منظور اگر یک المان در مختصات استوانه‌ای در نظر بگیریم؛ در شرایطی که تولید حرارتی و گذشت زمان وجود ندارد (شرایط یکنواخت)، با توجه به اصل پایستگی انرژی می‌بایست شار ورودی و خروجی در این المان ثابت باشد. با توجه به فرض متقارن محوری بودن بارگذاری و عدم وجود گرادیان دما در راستای ضخامت، فقط شار حرارتی در راستای شعاع وجود دارد، از این رو داریم:

$$q_r = q_{r+dr} \quad (۱۷-۴)$$

که در آن:

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k \{hrd\theta\} \frac{dT}{dr} \quad (۱۸-۴)$$

k ضریب هدایت حرارتی و h ضریب جابه‌جایی می‌باشد. از طرفی نیز داریم:

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{dq_r}{dr} dr = q_r + \frac{d}{dr} \left(k \{hrd\theta\} \frac{dT}{dr} \right) dr \quad (۱۹-۴)$$

با توجه به روابط به‌دست آمده، معادله‌ی انتقال حرارت را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (۲۰-۴)$$

با حل معادله‌ی دیفرانسیل (۲۰-۴) داریم:

$$T(r) = c_1 \ln(r) + c_2 \quad (۲۱-۴)$$

شرایط مرزی برای توزیع دما به نحوی است که سطح داخلی در معرض دمای T_i و سطح خارجی در

معرض دمای T_o قرار گرفته است:

$$T(r) \Big|_{r=r_i} = T_i, \quad T(r) \Big|_{r=r_o} = T_o \quad (۲۲-۴)$$

در نهایت پس از اعمال شرایط مرزی طبق رابطه‌ی (۲۲-۴) توزیع دما در طول جداره‌ی استوانه به

صورت تابعی از شعاع استوانه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T(r) = \frac{(T_i - T_o) \ln\left(\frac{r}{r_o}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} + T_o \quad (۲۳-۴)$$

با توجه به اینکه در معادله‌ی کرنش حرارتی، عبارت توزیع اختلاف دما یعنی $\Delta T(z)$ ظاهر می‌شود،

معادله‌ی (۴-۲۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T(z) = \frac{(\Delta T_i - \Delta T_o) \ln\left(\frac{R+z}{r_o}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} + \Delta T_o \\ \Delta T_i = T_i - T_{ref}, \quad \Delta T_o = T_o - T_{ref} \end{array} \right. \quad (۴-۲۴)$$

که در آن T_{ref} دمای محیط (مرجع) می‌باشد.

معادلات (۴-۱۱) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشند. برای حل آن باید نیروها و

لنگرها را با استفاده از روابط (۲-۱۰) تا (۲-۱۳) به منته‌های تنش و با جایگذاری رابطه‌ی (۴-۱۵) و (۴-۱۶)

در روابط (۴-۴) و استفاده از رابطه‌ی (۴-۲۴) به مؤلفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۲-۷) بر

حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نوشت. نهایتاً یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با

ضرایب ثابت به دست می‌آید که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$[A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \quad (۴-۲۵)$$

که در آن بردار مجهول $\{y\}$ شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت رابطه‌ی (۴-۲۶) می‌باشد:

$$\{y\} = \{u \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \quad (۴-۲۶)$$

همچنین قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به صورت بردار نیروی $\{F\}$ در رابطه‌ی (۴-۲۷) نشان داده

شده است:

$$\{F\} = \frac{1}{\lambda E_i \eta} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) - \lambda E_i \alpha_i \eta^2 \int_{-h/2}^{h/2} e^{\left(\frac{2nz}{r_i}\right)} \Delta T(z) (1+\nu) dz \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2}\right) - \lambda E_i \alpha_i \eta^2 \int_{-h/2}^{h/2} e^{\left(\frac{2nz}{r_i}\right)} \Delta T(z) (1+\nu) (R+2z) dz \end{array} \right\} \quad (۴-۲۷)$$

جملات حاصل در بردار ناهمگنی $\{F\}$ شامل دو بخش حاصل از بارگذاری حرارتی و ناشی از بارگذاری مکانیکی می‌باشند. جملات مربوط به بارگذاری حرارتی با توجه به روابط رفتاری (۴-۴) و در نظر گرفتن کرنش‌های حرارتی، در عبارت انرژی کرنشی وارد شده که نهایتاً در مؤلفه‌های سوم و چهارم قسمت ناهمگن دستگاه معادلات (۴-۲۵) در نقش نیروهای حجمی ظاهر می‌شوند. جملات مربوط به بارگذاری مکانیکی نیز از جملات مربوط به کار نیروهای خارجی حاصل می‌شود.

در دستگاه معادلات (۴-۲۴) ماتریس‌های $[A]_{4 \times 4}$ و $[C]_{4 \times 4}$ متقارن و $[B]_{4 \times 4}$ پادمتقارن هستند که درایه‌های مربوط به آنها در فصل دوم آورده شده است.

۴-۲-۳ حل ترموالاستیک استوانه تحت بارگذاری فشاری

همانطور که توضیح داده شد، دستگاه معادله‌ی (۴-۲۵) یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت می‌باشد که دارای حلّ عمومی و حلّ خصوصی است. اگر این دستگاه معادلات را به صورت ساده شده‌ی زیر بنویسیم:

$$[A]\{y''\} + [B]\{y'\} + [C]\{y\} = \{F\} \quad (۴-۲۸)$$

داریم:

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p \quad (۴-۲۹)$$

برای حلّ عمومی دستگاه فوق مقدار $e^{mx} \{y\} = \{\xi\}$ را در معادلات آن می‌گذاریم، داریم:

$$e^{mx} [m^2 A + mB + C] \{\xi\} = \{0\} \quad (۴-۳۰)$$

با توجه به اینکه $e^{mx} \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$|m^2 A + mB + C| = 0 \quad (۴-۳۱)$$

از حلّ معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه m_i محاسبه شده که به صورت سه جفت ریشه‌ی مزدوج غیرصفر حاصل می‌شوند. از این سه جفت ریشه، یک جفت آن عدد حقیقی و دو جفت دیگر آن نیز اعداد مختلط

مزدوج می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه‌ی حاصل در معادله‌ی (۴-۳۰)، بردارهای ویژه ξ_i متناظر با مقادیر ویژه‌ی فوق به‌دست می‌آیند. در نهایت حلّ عمومی عبارتست از:

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^6 C_i \{\xi\}_i e^{m_i x} \quad (۴-۳۲)$$

با توجه به این نکته که مقادیر ویژه‌ی حاصل شامل اعداد مختلط می‌باشند، برای به‌دست آوردن بردارهای ویژه‌ی متناظر با این اعداد مختلط، باید از روابط حاکم بر بردارهای ویژه‌ی مربوط به اعداد مختلط استفاده کرد.

برای حلّ خصوصی، قسمت ناهمگن معادلات (۴-۲۵) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری با ضخامت ثابت و تحت شار حرارتی و فشار داخلی و خارجی یکنواخت، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از x نمی‌باشد. بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس $[C]$ طبق معادله‌ی زیر جواب خصوصی را به دست آورد.

$$[C]\{y\} = \{F\} \Rightarrow \{y\} = [C]^{-1}\{F\} \quad (۴-۳۳)$$

اما با توجه به معکوس‌ناپذیری (منفرد بودن) ماتریس $[C]$ به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، با ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حل می‌شود. بدین منظور در اولین معادله از سری معادلات (۴-۱۱)، از طرفین آن انتگرال‌گیری کرده و خواهیم داشت:

$$RN_x = C_0 \quad (۴-۳۴)$$

همانطور که در معادلات (۴-۲۵) مشخص است، عبارت u وجود ندارد ولیکن du/dx در معادلات وجود دارد. با در نظر گرفتن du/dx به عنوان پارامتری جدیدی به نام v و انتگرال‌گیری از طرفین اولین معادله از سری معادلات داریم:

$$u = \int v dx + C_7 \quad (۴-۳۵)$$

بنابراین دستگاه معادلات قدیم به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} [A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \\ \{y\} = \{v \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \end{cases} \quad (36-4)$$

که در آن آن بردار نیرویی $\{F\}$ با توجه به انتگرالگیری از طرفین اولین معادله، به صورت زیر می باشد:

$$\{F\} = \frac{1}{\lambda E_i \eta} \begin{Bmatrix} C_0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) - \lambda E_i \alpha_i \eta^2 \int_{-h/2}^{h/2} e^{\left(\frac{2nz}{r_i}\right)} \Delta T(z)(1+\nu) dz \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2}\right) - \lambda E_i \alpha_i \eta^2 \int_{-h/2}^{h/2} e^{\left(\frac{2nz}{r_i}\right)} \Delta T(z)(1+\nu)(R+2z) dz \end{Bmatrix} \quad (37-4)$$

بنابراین با حل معادلات فوق به صورت مطالعه‌ی موردی می توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به

دست آورد.

شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۴-۱) توسط رابطه‌ی (۴-۱۲) بیان

می‌شوند. به عبارتی باید مقادیر $\{u \quad \phi \quad w \quad \psi\}$ و $\{N_x \quad M_x \quad Q_{xz} \quad M_{xz}\}$ در دو انتهای استوانه

طوری در نظر گرفته شوند که همواره رابطه‌ی (۴-۱۲) برابر صفر باشد. با داشتن ۶ مجهول $C_6, \dots, C_1$ در

جواب عمومی و ۲ ثابت C_7, C_0 در جواب خصوصی، می توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای

استوانه شامل ۴ شرط مرزی در هر سمت، ۸ ثابت مجهول را محاسبه کرد. نهایتاً با به دست آوردن ثوابت

مجهول، بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه‌ی (۲-۴۶) بر حسب

متغیرهای z, x به دست می‌آیند. با استفاده از رابطه‌ی (۲-۶) می توان میدان جابه‌جایی شعاعی و طولی

را به دست آورده و با استفاده از روابط (۴-۴)، (۲-۷) و (۲-۱۰) تا (۲-۱۳) مقادیر تنش، کرنش، نیرو و

لنگر را نیز محاسبه کرد.

۳-۴ مطالعه‌ی موردی

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج حل تحلیلی، یک استوانه جدار ضخیم ناهمگن و همسانگرد با ضخامت ثابت مطابق شکل (۱-۴) به شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ ، طول $L = 800 \text{ mm}$ و توزیع نمایی مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی طبق روابط (۱۵-۴) تا (۱۶-۴) دارای مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی استوانه به ترتیب برابر مقادیر $E_i = 200 \text{ GPa}$ و $\alpha_i = 12 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ و همچنین نسبت پواسون ثابت $\nu = 0.3$ را تحت فشار یکنواخت داخلی $P_i = 80 \text{ MPa}$ ، دمای سطح داخلی $T_i = 125^\circ\text{C}$ و دمای سطح خارجی برابر دمای محیط $T_o = 25^\circ\text{C}$ در نظر می‌گیریم.

تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط انتهایی (الف) دوسر گیردار و (ب) یک‌سر گیردار - یک سر آزاد انجام شده است. حل تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 11 صورت گرفته است.

۱-۳-۴ استوانه‌ی دوسر گیردار

برای شرایط مرزی دو سر گیردار با توجه به رابطه‌ی (۱۲-۴) داریم:

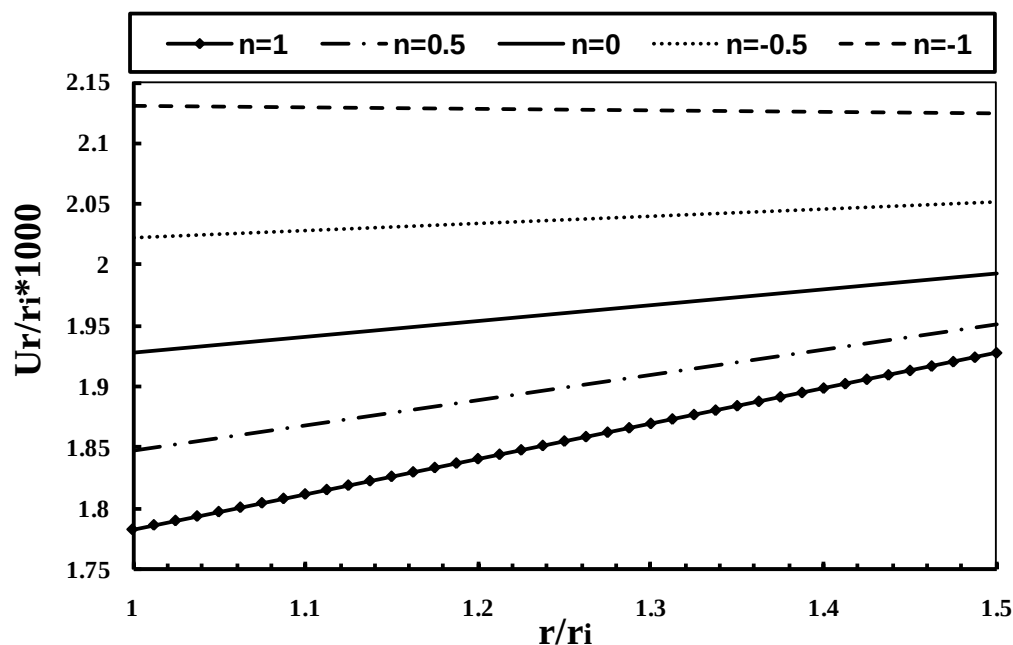
$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \end{cases} \quad (38-4)$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مولفه‌های میدان جابه‌جایی به دست می‌-

آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند.

در شکل (۳-۴) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به‌ازای n های مختلف برای بارگذاری حرارتی و فشاری در وسط استوانه نشان داده شده است. همانطور که از شکل (۳-۴) مشخص است به‌ازای n های منفی جابه‌جایی استوانه نسبت به ماده‌ی همگن از نظر مقدار بیشتر است و به‌ازای n های مثبت

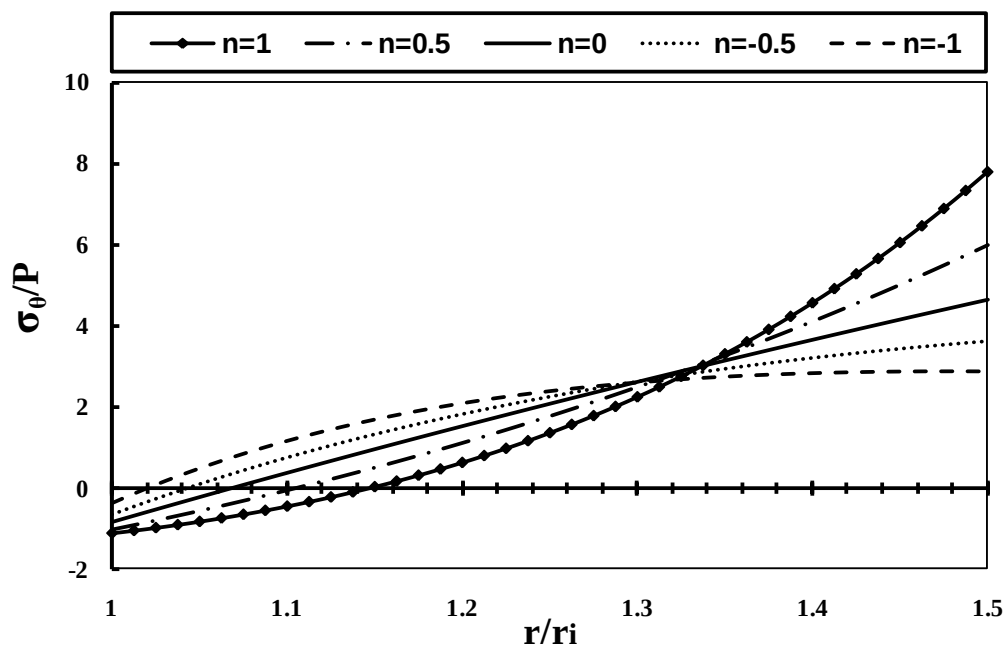
کمتر می‌شود. این نسبت در استوانه تحت فشار داخلی در طول جداره تقریباً ثابت می‌ماند ولیکن در استوانه تحت شار حرارتی یکنواخت و فشار داخلی در طول جداره ثابت نمی‌ماند یعنی تغییرات جابه‌جایی در ماده‌ی ناهمگن مشابه تغییرات جابه‌جایی در ماده‌ی همگن نمی‌باشد.



شکل ۳-۴ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار

شکل (۴-۴) توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به ازای n های مختلف برای بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه نشان می‌دهد. تنش محیطی برای n های منفی در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از ماده همگن و در نیمه خارجی کمتر از ماده‌ی همگن می‌باشد و برعکس برای n های مثبت در نیمه‌ی داخلی کمتر و در نیمه خارجی بیشتر از ماده‌ی همگن است. در محدوده لایه میانی رفتار ماده ناهمگن همانند رفتار ماده همگن می‌باشد که در استوانه تحت بارگذاری‌های حرارتی و فشاری این محدوده به سمت لایه‌ی بیرونی میل کرده در حالیکه در استوانه تحت فشار داخلی این محدوده به سمت لایه‌ی داخلی تمایل پیدا می‌کند. در نیمه‌ی داخلی استوانه مقادیر n مثبت و در نیمه‌ی خارجی مقادیر n

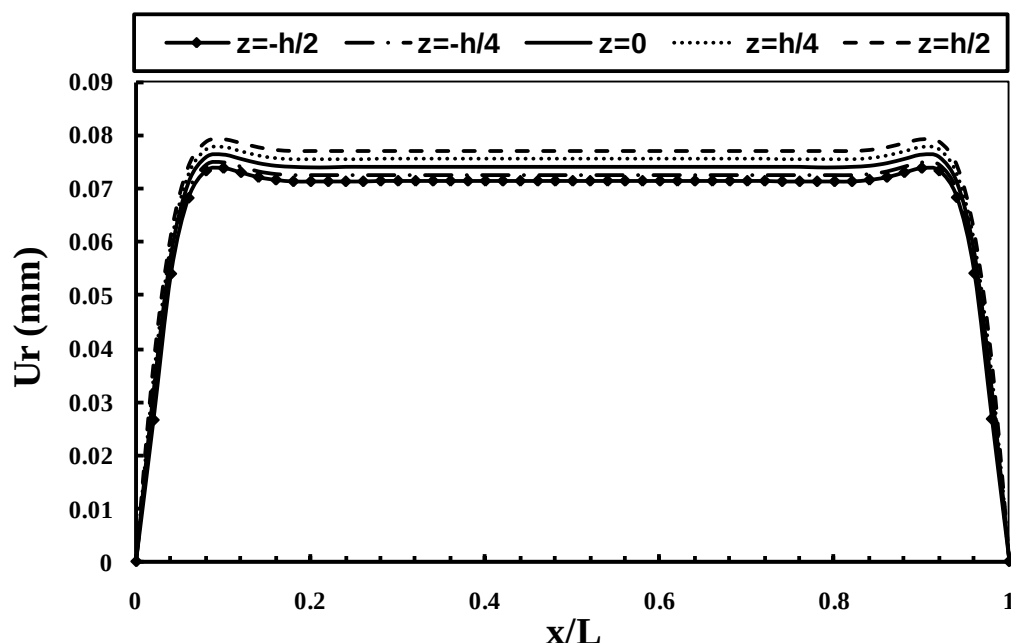
منفی سبب کاهش تنش شده که با توجه به بزرگتر بودن تنش در لایه‌ی خارجی، استفاده از مواد ناهمگن با n های منفی بر خلاف استوانه تحت بار فشاری به تنهایی مناسب‌تر می‌باشد.



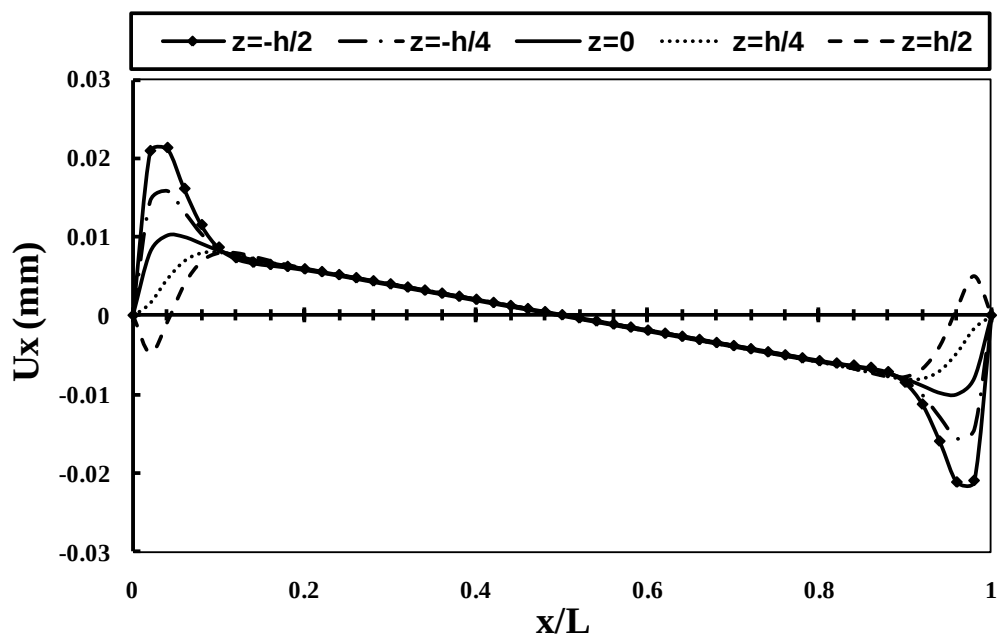
شکل ۴-۴ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار

شکل‌های (۴-۵) تا (۴-۸) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی را در راستای طول استوانه به ازای $n=1$ در پنج لایه‌ی مختلف برای بارگذاری حرارتی و فشاری برای شرایط انتهایی دوسر گیردار نشان می‌دهد. مقادیر جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی برای استوانه تحت فشار داخلی و شار حرارتی یکنواخت، از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی از نظر مقدار افزایش می‌یابد. همچنین اختلاف مقادیر جابه‌جایی شعاعی بین هر لایه برای $n=1$ کمتر از بارگذاری فشاری است. تنش محیطی در نقاط اطراف مرز و در لایه‌های نزدیک به لایه‌ی داخلی برای استوانه تحت بارگذاری حرارتی و فشار داخلی دارای مقادیر تنش منفی می‌باشد. مقادیر تنش محیطی در بقیه‌ی نقاط و جابه‌جایی شعاعی در کلیه‌ی نقاط در استوانه تحت بارگذاری ذکر شده مثبت می‌باشد. جابه‌جایی محوری همانند دو

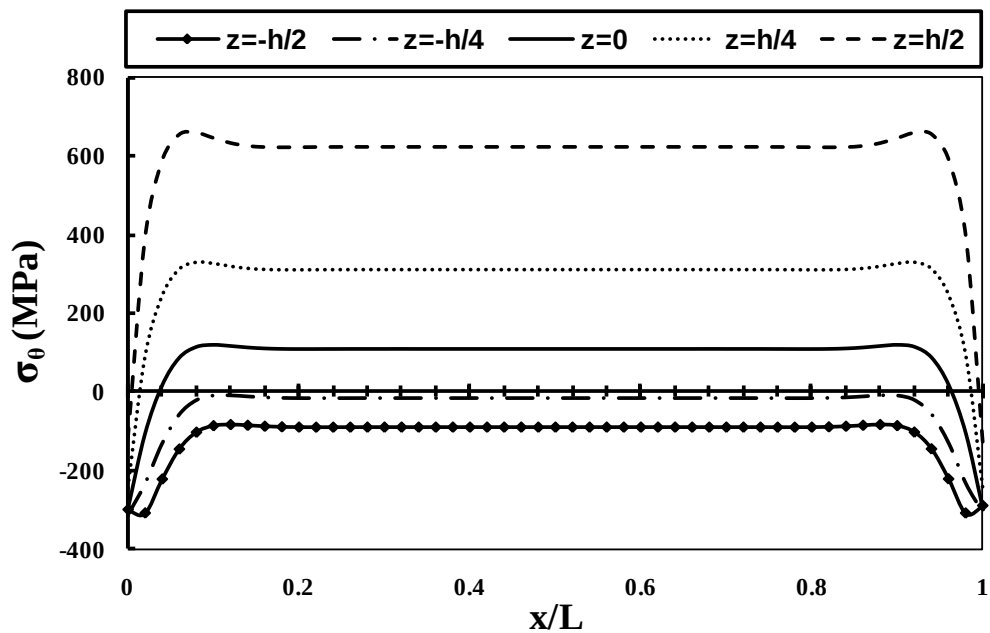
بارگذاری دیگر دارای حداکثر مقدار خود در لایه‌ی داخلی می‌باشد. با فاصله گرفتن از دو انتهای استوانه، مقادیر جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در هر لایه دارای مقدار ثابتی در طول پوسته‌ی استوانه‌ای می‌باشند. جابه‌جایی محوری برای نقاط دور از مرز در لایه‌های مختلف تفاوت قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر ندارند؛ در حالیکه در نقاط اطراف دو انتهای استوانه، عکس این پدیده صادق است. تنش برشی در طول استوانه به غیر از نزدیکی دو انتهای آن، دارای مقادیر صفر می‌باشند. این امر نشان می‌دهد که تنش برشی در نزدیکی مرزهای انتهایی استوانه تحت تأثیر شرایط مرزی به وجود می‌آید که در تئوری تغییر شکل برشی این تنش‌های برشی لحاظ می‌شوند. تنش برشی در استوانه تحت بارگذاری حرارتی و فشار داخلی بر خلاف استوانه تحت فشار داخلی در لایه‌ی خارجی دارای بیشترین مقدار است که در اطراف مرز $x=0$ تنش برشی مثبت و در نزدیکی مرز $x=L$ مقدار منفی ایجاد می‌شود.



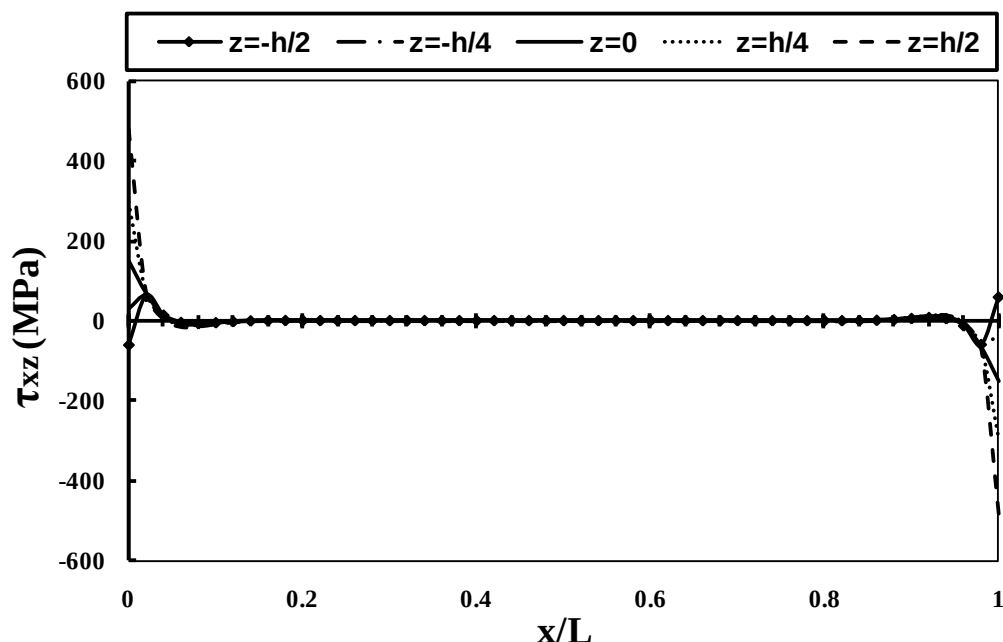
شکل ۴-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۴-۶ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۴-۷ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۴-۸ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار

۴-۳-۲ استوانه‌ی یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد

برای شرایط مرزی یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد با توجه به رابطه‌ی (۴-۱۲) داریم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow N_x=0, M_x=0, Q_{xz}=0, M_{xz}=0 \end{cases} \quad (۴-۳۹)$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به دست می‌-

آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند. در

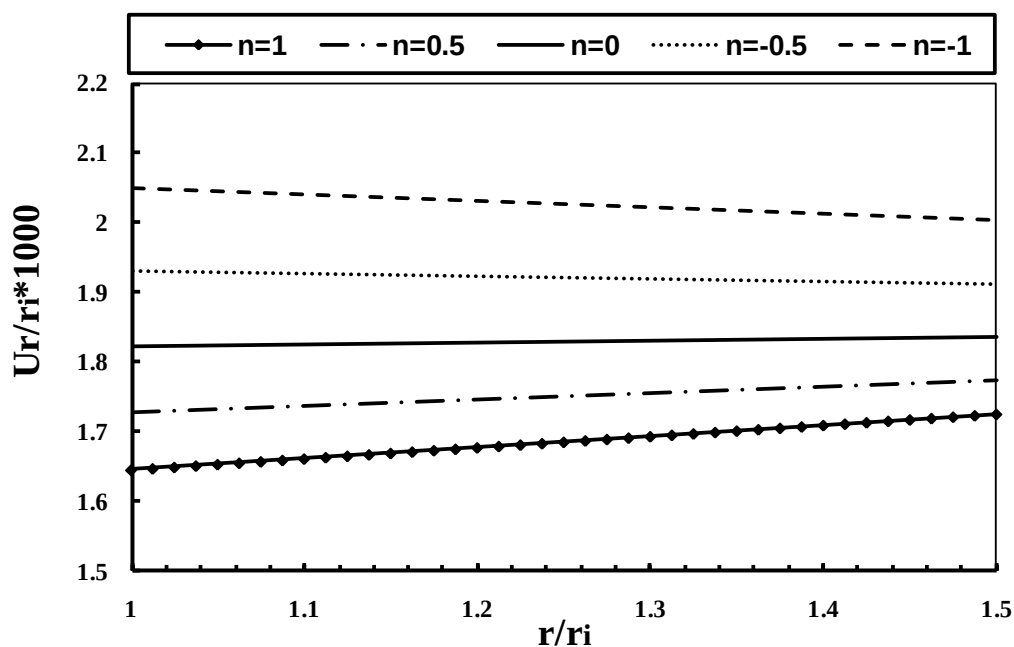
شکل (۴-۹) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به ازای n های مختلف برای بارگذاری

حرارتی و فشاری در وسط استوانه نشان داده شده است. شکل (۴-۱۰) نیز توزیع نرمال تنش محیطی

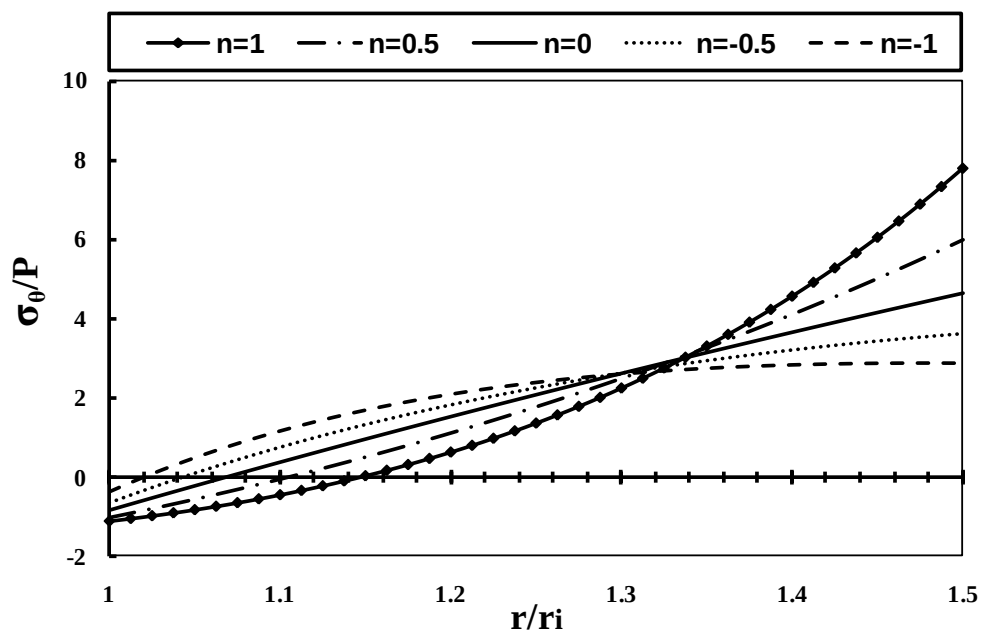
استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به ازای n های مختلف برای بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه

نشان می‌دهد. برخلاف فشار داخلی مشاهده می‌شود که اختلاف بین مقادیر جابه‌جایی شعاعی حاصل از

دو شرط انتهایی مورد بررسی در وسط استوانه قابل توجه می‌باشد.



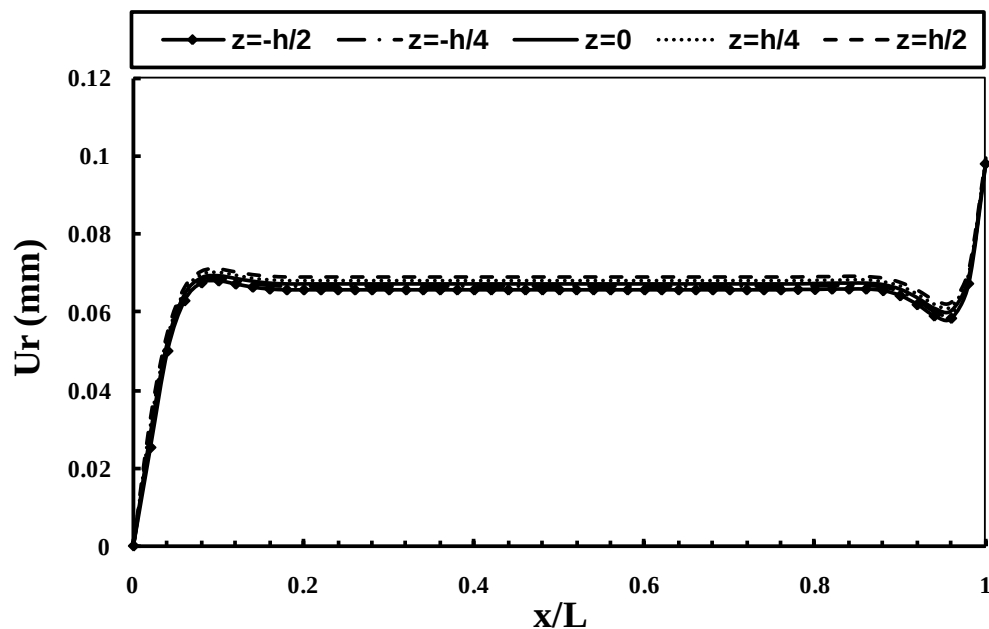
شکل ۹-۴ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



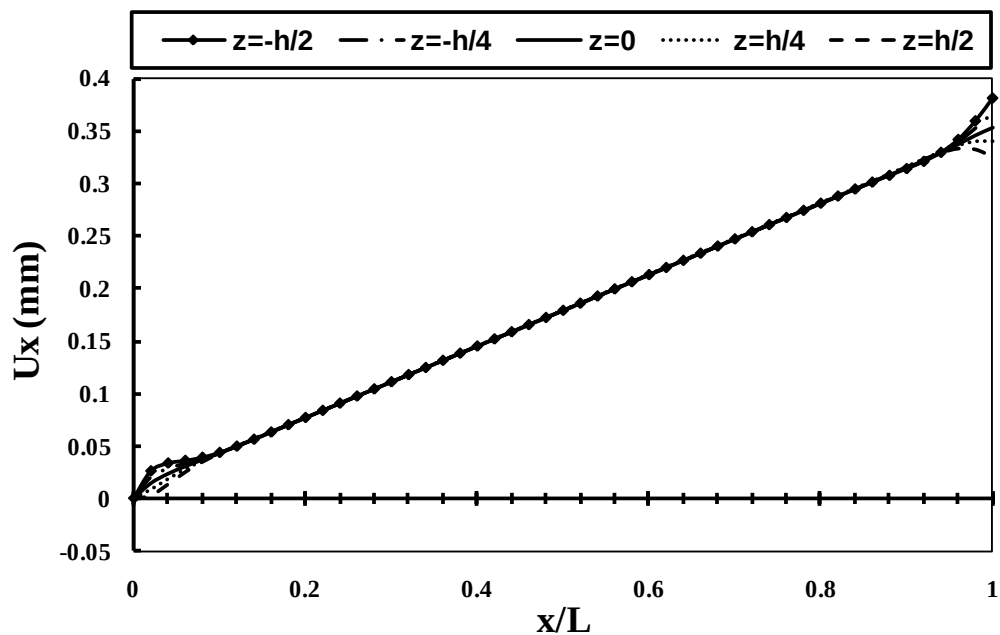
شکل ۱۰-۴ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد

شکل‌های (۴-۱۱) تا (۴-۱۴) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش

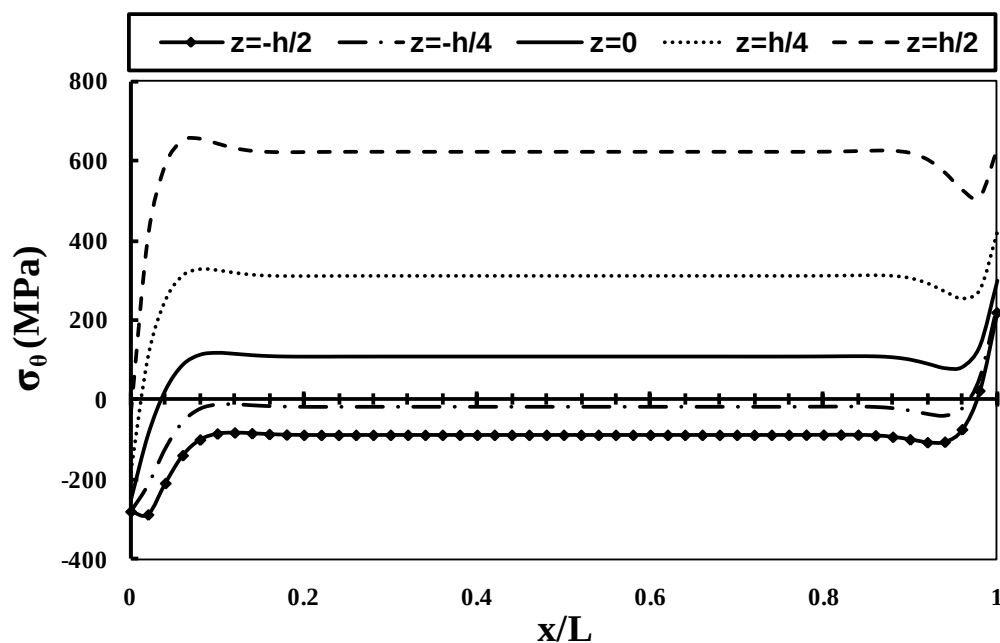
برشی را در راستای طول استوانه برای بارگذاری حرارتی و فشاری به ازای $n=1$ در پنج لایه‌ی مختلف نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در نزدیکی انتهای آزاد استوانه برای این بارگذاری یک کاهش و سپس افزایش قابل ملاحظه در مقدار جابه‌جایی شعاعی رخ می‌دهد. تنش محیطی نیز به طور مشابه در سمت آزاد استوانه نسبت به مقدار متوسط موجود در طول استوانه در هر لایه کاهش و سپس افزایش می‌یابد. جابه‌جایی شعاعی، تنش محیطی و تنش برشی پوسته‌ی استوانه‌ای تحت شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد، در طول استوانه تا نزدیکی انتهای آزاد آن و نیز در سمت گیردار استوانه مشابه شرایط دوسر گیردار می‌باشد. جابه‌جایی محوری با اندکی فاصله از انتهای گیردار در طول استوانه تحت تأثیر قیود موجود در سمت گیردار آن برای بارگذاری حرارتی و فشاری دارای مقادیر مثبت می‌باشد که این مقادیر برای لایه‌های مختلف یکسان است. در انتهای آزاد استوانه مجدداً جابه‌جایی محوری لایه‌های مختلف با یکدیگر فاصله‌ی اندکی می‌گیرند. تنش برشی نیز در نزدیکی انتهای آزاد استوانه برای همه‌ی لایه‌ها دارای مقدار منفی شده که نهایتاً به سمت صفر میل می‌کند.



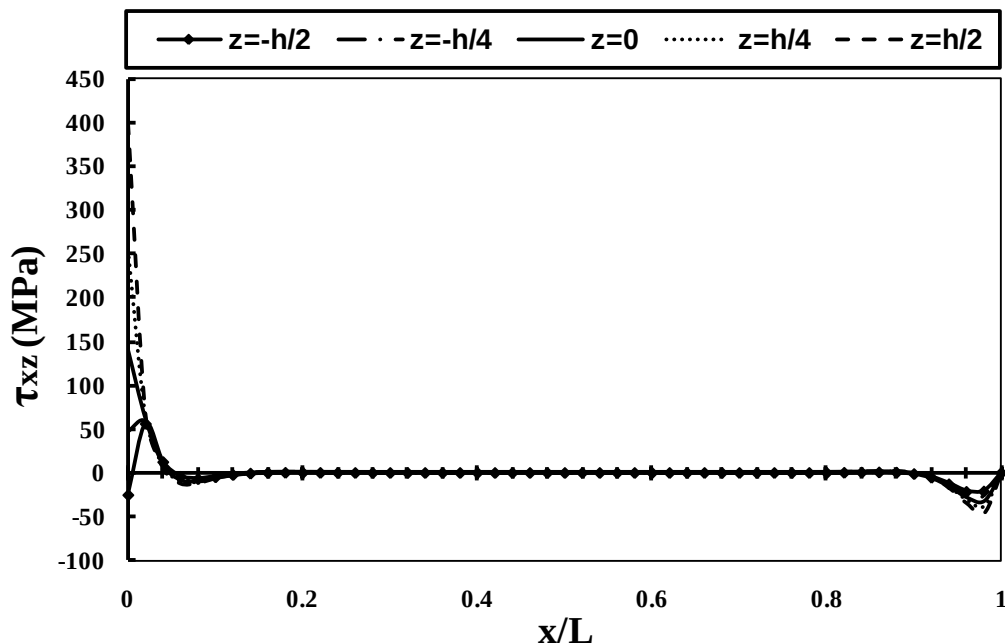
شکل ۴-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد



شکل ۴-۱۲ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



شکل ۴-۱۳ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



شکل ۴-۱۴ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت شار حرارتی و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد

۴-۴ حل عددی استوانه‌های ناهمگن تحت فشار داخلی و بارگذاری حرارتی

در این بخش نحوه‌ی مدل‌سازی استوانه‌ی FGM تحت بارگذاری‌های حرارتی و مکانیکی توضیح داده شده است. همچنین نتایج مربوط به حل تحلیلی توسط روش تغییر شکل برشی با نتایج عددی حاصل از روش اجزاء محدود در استوانه‌های همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی ثابت و شار حرارتی یکنواخت مقایسه شده است.

برای المان‌بندی استوانه، المان solid از نوع 82 node 82 plane انتخاب شده که گزینه‌ی axisymmetric مربوط به این المان فعال شده است. مقطع این المان ۴ ضلعی با اضلاع خمیده و دارای ۸ گره (۴ گره در رئوس و ۴ گره در وسط اضلاع) است که درجه‌ی آزادی هر گره، دو می‌باشد (یکی جابه‌جایی در راستی شعاعی و دیگری جابه‌جایی در راستای محوری). این المان برای مسائل تنش صفحه‌ای،

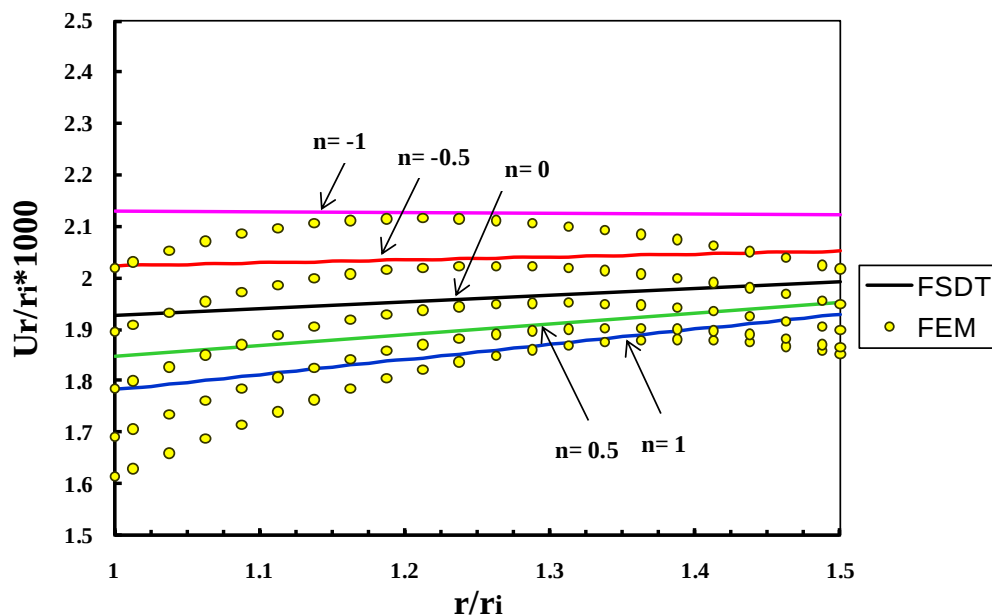
کرنش صفحه‌ای و متقارن محوری کاربرد دارد. ماتریس سفتی المان مذکور 16×16 می‌باشد. المان در نظر گرفته شده برای تحلیل توزیع حرارت در جداره‌ی استوانه، المان solid از نوع 77 plane 8nod با گزینه‌ی axisymmetric انتخاب شده است. استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلیمتر و شعاع خارجی ۶۰ میلیمتر با جداره‌ی ثابت به طول ۸۰۰ میلیمتر به صورت یک مستطیل که نشان دهنده‌ی یک مقطع عرضی از استوانه در حالت متقارن محوری می‌باشد، مدلسازی شده است. برای ایجاد خواص ناهمگنی که به صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است، با تقسیم جداره‌ی استوانه به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته و چگالی در هر لایه بسته به فاصله‌ی مرکز هر لایه از لایه‌ی داخلی به صورت تابع نمایی طبق روابط (۴-۱۵) و (۴-۱۶)، نهایتاً پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از ۲۰ استوانه‌ی همگن و همسانگرد (ایزوتروپ) به هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محل اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محل اتصال لایه‌ها، حد میانگین چپ و راست مزر دو لایه در نظر گرفته می‌شوند. برای اعمال شرایط مرزی موجود در دو انتهای استوانه بسته به شرایط انتهایی، درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در سر استوانه را مقید می‌کنیم. برای شرایط مرزی دو سر گیردار، کلیه‌ی درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در دو انتهای استوانه را مقید می‌کنیم. همچنین برای شرایط مرزی یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد، بدون اعمال قید بر روی گره‌های موجود در سمت آزاد استوانه، درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در سمت گیردار استوانه را همانند قسمت قبل مقید می‌کنیم. برای بارگذاری فشاری نیز با در نظر گرفتن گره‌های موجود در مرز داخلی مقطع استوانه در حالت متقارن محوری، می‌توان فشار داخلی را اعمال کرد. همچنین برای اعمال شرایط دمایی موجود در سطح داخلی و خارجی پوسته‌ی استوانه‌ای، با در نظر گرفتن کل گره‌های موجود در سطوح داخلی و خارجی استوانه، مقدار اختلاف دمای مربوط به هر یک از این سطوح را با دمای محیط به عنوان بارگذاری حرارتی اعمال می‌کنیم.

۴-۴-۱ مقایسه‌ی نتایج

در ادامه به منظور بررسی صحت روش حلّ تحلیلی ارائه شده، نتایج حاصل از روش تئوری تغییر شکل برشی و نتایج حاصل از حلّ عددی به کمک نرم‌افزار Ansys آورده شده است. در شکل (۴-۱۵) نتایج جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT برای ثوابت ناهمگنی مختلف در طول جداره‌ی استوانه و در $x=L/2$ آورده شده است. جدول (۴-۱) مقادیر جابه‌جایی شعاعی ناشی از بارگذاری‌های حرارتی و مکانیکی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT را در پنج لایه‌ی مختلف برای ثابت ناهمگنی $n=1$ در وسط استوانه در حالت دوسر گیردار نمایش می‌دهد. با توجه به حضور عبارات مربوط به بارگذاری حرارتی و فشاری در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات (۴-۳۶)، جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت فشار داخلی و شار حرارتی با استفاده از اصل جمع آثار، از مجموع جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت فشار داخلی و استوانه تحت شار حرارتی یکنواخت به دست می‌آید. با توجه به این نکته و جدول (۴-۱) ملاحظه می‌شود که جابه‌جایی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی برای استوانه تحت فشار داخلی کاهشی بوده در حالیکه برای استوانه تحت شار حرارتی افزایشی می‌باشد که با توجه به افزایش مقدار z در رابطه‌ی مربوط به توزیع اختلاف دما و در نتیجه افزایش کرنش حرارتی منطقی می‌باشد. در بارگذاری فشاری و حرارتی توزیع جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی در حال افزایش می‌باشد که ناشی از غلبه‌ی نیروی حرارتی بر فشار داخلی می‌باشد. با توجه به این نمودارها می‌توان دریافت که در محدوده‌ی لایه‌ی میانی بیشترین انطباق بین روش‌های FE و FSDT وجود دارد و اختلاف موجود بین دو روش در لایه‌های داخلی و خارجی بیشترین مقدار می‌باشد. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول توزیع جابه‌جایی شعاعی را در طول جداره‌ی استوانه به صورت تابع خطی از شعاع استوانه فرض می‌کند در حالیکه مطابق تئوری الاستیسیته‌ی مستوی در حقیقت یک توزیع هذلولوی به صورت رابطه‌ی (۴-۴۰) در طول جداره‌ی استوانه وجود دارد:

$$U_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (4-40)$$

همانطور که در فصول قبلی نیز بیان شد این تقریب خطی در لایه‌ی میانی استوانه از دقت بالاتری برخوردار می‌باشد، ولیکن در لایه‌های داخلی و خارجی از توزیع پیش‌بینی شده توسط روش PET فاصله می‌گیرد. این مسئله در مورد استوانه تحت بارگذاری حرارتی تشدید می‌شود؛ دلیل این امر فاصله گرفتن توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه از حالت خطی می‌باشد. در حقیقت تقریب یک تابع هذلولوی با یک توزیع خطی منشأ خطا می‌شود.

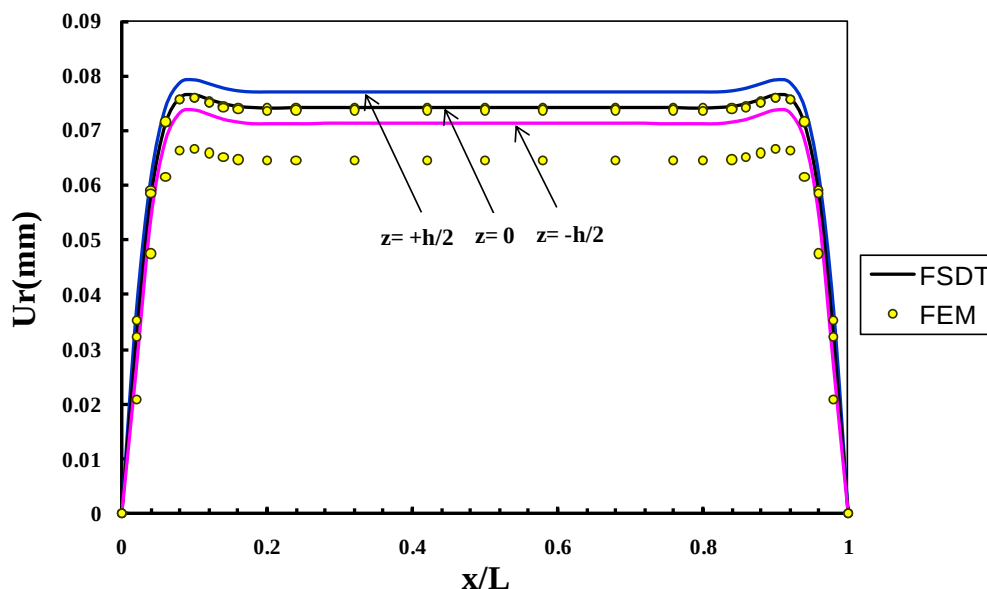


شکل ۴-۱۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$

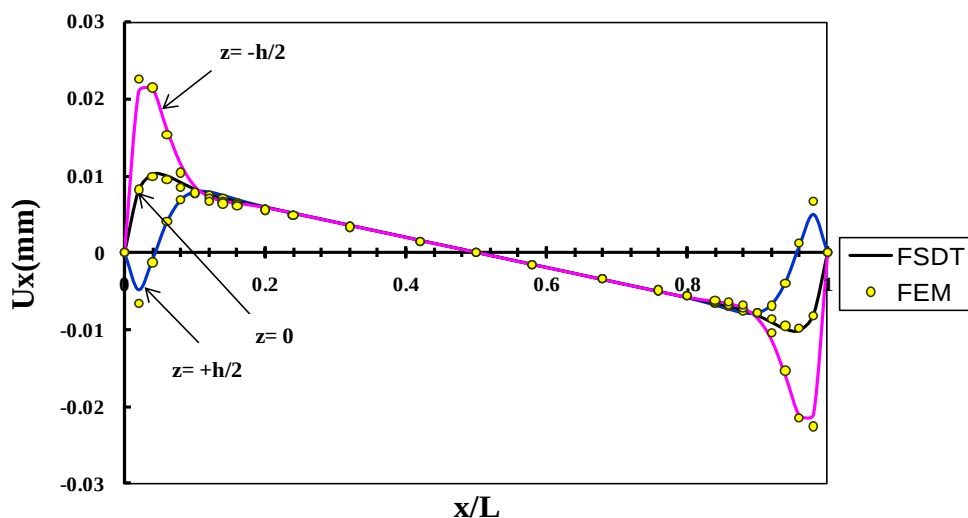
جدول ۴-۱ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT برای بارگذاری‌های مختلف در حالت دو سرگیردار به‌ازای $n=1$ در $x=L/2$

$U_r [mm]$	FSDT		FEM	
	بارگذاری فشاری	بارگذاری حرارتی	بارگذاری فشاری	بارگذاری حرارتی
$z = -h/2$	۰/۰۳۳۸	۰/۰۳۷۵	۰/۰۳۵۱	۰/۰۲۹۴
$z = -h/4$	۰/۰۳۲۱	۰/۰۴۰۶	۰/۰۳۲۳	۰/۰۳۷۸
$z = 0$	۰/۰۳۰۴	۰/۰۴۳۸	۰/۰۳۰۲	۰/۰۴۳۵
$z = h/4$	۰/۰۲۸۸	۰/۰۴۶۹	۰/۰۲۸۷	۰/۰۴۶۵
$z = h/2$	۰/۰۲۷۱	۰/۰۵۰۰	۰/۰۲۷۶	۰/۰۴۶۵

شکل (۴-۱۶) حاوی نتایج جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت شرایط انتهایی دوسر گیردار برای ثابت ناهمگنی $n=1$ می‌باشد. توزیع جابه‌جایی محوری محاسبه شده توسط دو روش عددی و تحلیلی برای سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه‌ی دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ در شکل (۴-۱۷) نشان داده شده است. همانطور که قبلاً اشاره شد با توجه به نمودار (۴-۱۶) می‌توان دریافت که در لایه‌ی میانی کمترین اختلاف بین روش‌های FE و FSDT وجود دارد؛ این اختلاف در لایه‌ی داخلی بیشتر از لایه‌ی خارجی می‌باشد. همچنین مشخص است که مقدار جابه‌جایی شعاعی حاصل از روش عددی در طول استوانه در فاصله‌ی کمی از تکیه‌گاه‌ها در لایه‌ی خارجی با جابه‌جایی ایجاد شده در لایه‌ی میانی اختلاف بسیار کمی دارند که همین عامل باعث شده تا جابه‌جایی‌های هر دو لایه در شکل (۴-۱۶) بر یکدیگر منطبق باشند. قابل ذکر است که این مقدار در لایه‌ی داخلی اندکی بیشتر می‌باشد. برای جابه‌جایی محوری نتایج حاصل از دو روش FE و FSDT با یکدیگر انطباق قابل قبولی دارند که در لایه‌های داخلی و میانی در نزدیکی دو انتهای استوانه اندکی اختلاف بین دو روش مشاهده می‌شود.

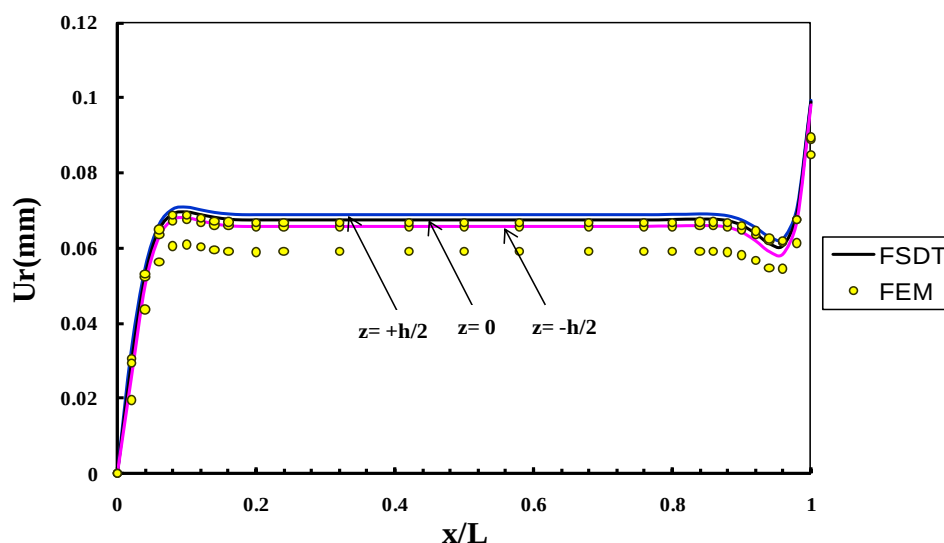


شکل ۴-۱۶ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$

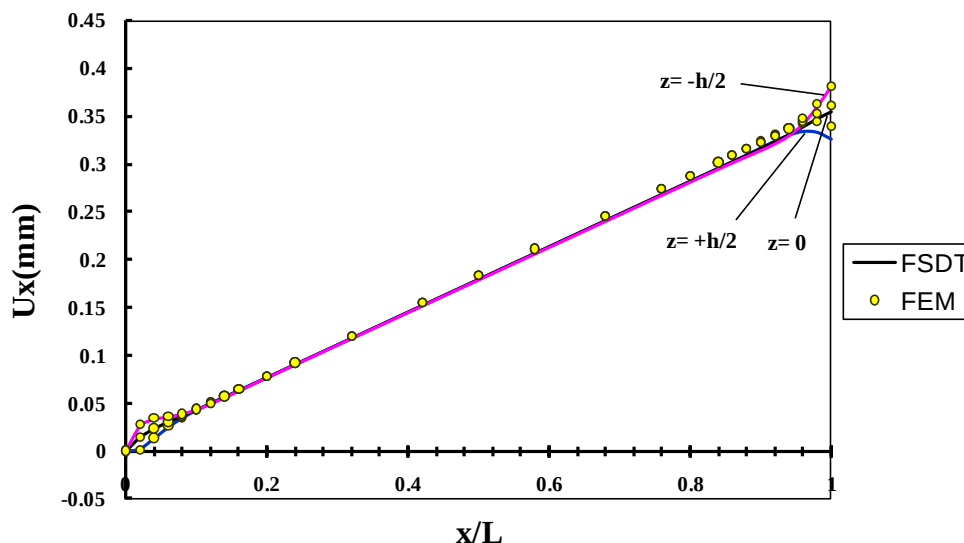


شکل ۴-۱۷ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$

در شکل‌های (۴-۱۸) و (۴-۱۹) به ترتیب توزیع جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری حاصل از دو روش FE و FSDT در سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد برای ثابت ناهمگنی $n=1$ نشان داده شده است. بر خلاف بارگذاری فشاری، در اینجا روش‌های FE و FSDT برای جابه‌جایی شعاعی در انتهای آزاد استوانه رفتار مشابهی را پیش‌بینی می‌کنند. در جابه‌جایی محوری نیز با حرکت در طول استوانه به سمت انتهای آزاد آن، فاصله کمی بین دو روش ایجاد می‌شود.



شکل ۴-۱۸ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$



شکل ۴-۱۹ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$

جدول (۴-۲) حاوی نتایج تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در دو لایه‌ی داخلی و میانی استوانه برای شرایط انتهایی دوسر گیردار می‌باشد. همانطور که مشخص است اختلاف بین مقادیر تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در سطح میانی استوانه کمتر و در سطح داخلی بیشتر می‌باشد. برای توجیه اختلاف نسبتاً زیاد بین مقادیر تنش محیطی حاصل از دو روش عددی و تحلیلی در لایه‌ی داخلی توجه به این نکات ضروری است که اولاً در استفاده از روش FSDT ابتدا مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی محاسبه شده و سپس با استفاده از روابط (۲-۷) مقادیر کرنش و نهایتاً با استفاده از روابط رفتاری توزیع تنش به دست می‌آید؛ دوماً همانطور که قبلاً اشاره شد میدان جابه‌جایی محاسبه شده توسط این روش دارای اندکی خطا به خصوص در لایه‌ی داخلی می‌باشد. در حقیقت با تبدیل جابه‌جایی به کرنش، خطای ناشی از این تبدیل در مقادیر کرنش ایجاد می‌شود، سپس مقادیر تنش با استفاده از روابط رفتاری محاسبه می‌شوند. توجه به این نکته ضروری است که عمل مشتق‌گیری سبب افزایش خطا می‌شود، به همین دلیل خطای موجود در تنش‌های شعاعی و محوری

بیشتر از خطای موجود در تنش‌های محیطی می‌باشد. خطای اولیه‌ی ناشی از تقریب توزیع جابه‌جایی نیز به همراه خطای اشاره شده منشأ ایجاد اختلاف بین دو روش FE و FSDT می‌شود.

جدول ۴-۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه تحت شار حرارتی و فشار داخلی
برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$

	$\sigma_{\theta} [MPa]$	$n = -1$	$n = -.5$	$n = 0$	$n = .5$	$n = 1$
سطح داخلی	FEM	۷۰/۵	۴۱/۰۲	۱۳/۶۵	-۱۱/۱۳	-۳۲/۷۸
$r = r_i$	FSDT	-۳۱/۱	-۵۱/۷۵	-۶۸/۷۳	-۸۱/۴۷	-۸۹/۳۵
سطح میانی	FEM	۱۷۸	۱۷۴/۶	۱۶۷/۲۴	۱۵۴/۵۳	۱۳۵/۰۷
$r = R$	FSDT	۱۸۹/۴۶	۱۸۰/۲۵	۱۶۴/۶۹	۱۴۱/۲۱	۱۰۸

۴-۵ جمع‌بندی

با توجه به آنچه در قسمت قبلی بیان شد، استفاده از روش FSDT در تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل صرف‌نظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور رابطه‌ی (۲-۵) و استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اول مناسب نمی‌باشد. در حقیقت با توجه به اینکه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول توزیع جابه‌جایی شعاعی را در طول جداره‌ی استوانه به صورت خطی در نظر می‌گیرد و توجه به این نکته که جابه‌جایی شعاعی در استوانه تحت بارگذاری حرارتی و فشاری دارای یک توزیع غیرخطی با انحنای زیادتری نسبت به استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای مناسب نمی‌باشد، در حالیکه دقت نتایج حاصل از این روش برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری مناسب می‌باشد. در بارگذاری حرارتی شرایط انتهایی تأثیر بیشتری نسبت به دو بارگذاری دیگر بر روی رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای می‌گذارد. در استوانه تحت شار حرارتی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و برشی و همچنین جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد؛ در حالیکه در

در استوانه تحت فشار داخلی، جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش پیدا می‌کنند. جابه‌جایی محوری نیز در بارگذاری حرارتی همانند بارگذاری فشاری از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار و شار حرارتی در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات حاکم ظاهر می‌شود، می‌توان برای استوانه‌ی تحت فشار و شار حرارتی یکنواخت با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌های حرارتی و فشاری به طور جداگانه، معادلات حاکم را حل کرده و نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در حقیقت بردار ناهمگنی $\{F\}$ در نقش بردار نیرویی ظاهر می‌شود که در این میان بارگذاری حرارتی نقش غالب را دارد. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حل تحلیلی و حل عددی در استوانه تحت بارگذاری‌های حرارتی و فشاری به غیر از لایه‌ی میانی استوانه وجود ندارد. اختلاف موجود بین نتایج عددی و تحلیلی در لایه‌ی داخلی به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

فصل ۵

تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای

چرخان FGM

۵-۱ مقدمه

همانطور که در فصل قبل نیز عنوان شد، مقاومت منحصر به فرد استوانه‌های جدار ضخیم (FGM) در برابر بارهای حرارتی، دانشمندان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آنها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، بپردازند. کاربرد گسترده‌ی این استوانه‌ها در رآکتورها، ژنراتورها و سانتریفیوژها که نیروی گریز از مرکز در آنها نقش مهمی ایفا می‌کند، باعث شده تا تحلیل این استوانه‌ها تحت تاثیر فشار، حرارت و دوران به طور همزمان مورد بررسی قرار گیرد.

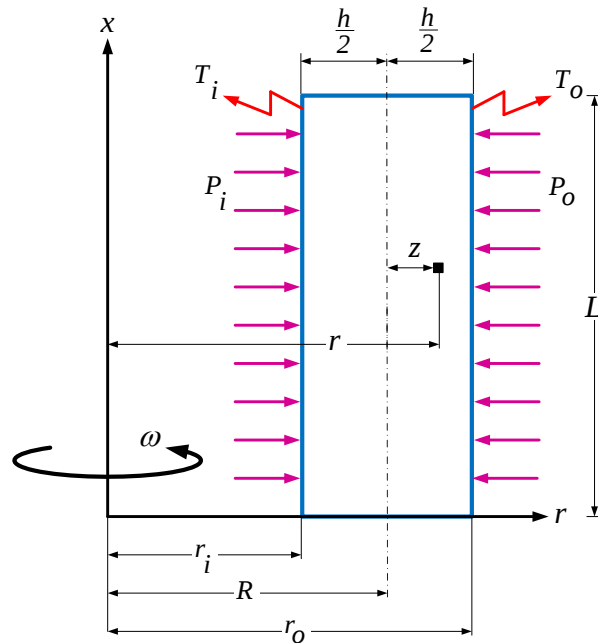
همانطور که در فصل قبلی نیز بیان شد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل ترمو-الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای مناسب نمی‌باشد. به همین منظور در فصل حاضر با توجه به پیشینه‌ی پژوهشی نویسنده در استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا^۱ [۵۱] و قابلیت آن در تحلیل ورق-ها و پوسته‌های ناهمگن، برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد همگن و ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا، حلّ عمومی استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت داخلی و شار حرارتی یکنواخت صورت پذیرفته است. نهایتاً با ارائه‌ی حل عددی توسط نرم‌افزار المان محدود Ansys برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی و شار حرارتی، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک روش تغییر شکل برشی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند.

۵-۲ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان ناهمگن

یک پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم چرخان تحت فشار داخلی و خارجی و با حضور منبع حرارتی در شعاع داخلی و خارجی استوانه را به صورت شکل (۵-۱) در نظر می‌گیریم. اگر مطابق شکل (۵-۱)،

1. High Order Shear Deformation Theory

فاصله‌ی هر نقطه از پوسته از محور تقارن (r) را برابر با مجموع شعاع صفحه‌ی میانی (R) و فاصله‌ی آن نقطه از صفحه‌ی میانی (z) در نظر بگیریم:



شکل ۱-۵ پروفیل استوانه‌ی چرخان جدار ثابت تحت بارگذاری فشاری و حرارتی

$$r = R + z \quad , \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2} \quad (۱-۵)$$

همچنین h ضخامت و L طول استوانه باشد:

$$h = r_o - r_i \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad (۲-۵)$$

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم، میدان جابه‌جایی برای استوانه‌ی جدار ضخیم در حالت متقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{cases} U_x = u_0(x) + zu_1(x) + z^2 u_2(x) + z^3 u_3(x) \\ U_\theta = 0 \\ U_z = w_0(x) + zw_1(x) + z^2 w_2(x) + z^3 w_3(x) \end{cases} \quad (۳-۵)$$

که در آن عبارات $u_3(x), \dots, u_0(x)$ و $w_3(x), \dots, w_0(x)$ مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی بوده که مجهول

می‌باشند.

همچنین مقادیر کرنش‌ها بر اساس روابط سینماتیک در حالت تقارن محوری عبارتند از:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} z + \frac{du_2}{dx} z^2 + \frac{du_3}{dx} z^3 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{U_z}{r} = \frac{w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3}{R + z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial U_z}{\partial z} = w_1 + 2w_2 z + 3w_3 z^2 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = \left(u_1 + \frac{dw_0}{dx} \right) + \left(2u_2 + \frac{dw_1}{dx} \right) z + \left(3u_3 + \frac{dw_2}{dx} \right) z^2 + \frac{dw_3}{dx} z^3 \end{aligned} \right. \quad (4-5)$$

بر اساس روابط رفتاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد و با در نظر گرفتن کرنش‌های حرارتی، تنش‌ها

بر حسب مقادیر کرنش عبارتند از:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_i &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_i + \lambda (\varepsilon_j + \varepsilon_k) - \varepsilon^T(z) \\ \tau_{xz} &= \mu \gamma_{xz} \end{aligned} \right. \quad (5-5)$$

$\varepsilon^T(z)$ کرنش حرارتی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon^T(z) = \frac{\lambda \alpha(z) \Delta T(z) (1 + \nu)}{\nu} \quad (6-5)$$

$\Delta T(z)$ نیز تابع توزیع اختلاف دما در طول جداری استوانه بوده که طبق رابطه‌ی (۴-۲۴) تعریف

می‌شود و $\alpha(r)$ نیز ضریب انبساط حرارتی می‌باشد.

همچنین μ و λ ثوابت لامه می‌باشند:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E(r)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu &= \frac{E(r)}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \right. \quad (7-5)$$

همانطور که در فصول قبلی نیز بیان شد بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات

کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \quad (8-5)$$

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\begin{cases} U = \iiint_V U^* dV \\ dV = r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \\ U^* = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \end{cases} \quad (9-5)$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار داخلی و خارجی و سرعت دورانی:

$$\begin{cases} W = \iint_S (\vec{f}_{sf} \cdot \vec{u}) dS + \iiint_V (\vec{f}_{bf} \cdot \vec{u}) dV \\ dS = r dx d\theta = (R+z) dx d\theta \\ dV = r d\theta dr dx = (R+z) dz dx d\theta \end{cases} \quad (10-5)$$

که در آن نیروی حجمی حاصل از دوران با سرعت ثابت به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{f}_{bf} = \rho(r) r \omega^2 = \rho(z) (R+z) \omega^2 \quad (11-5)$$

نهایتاً کار نیروهای خارجی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) U_z dx d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (R+z) \omega^2 U_z (R+z) dz dx d\theta \quad (12-5)$$

و با انتگرالگیری در محدوده‌ی:

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (13-5)$$

برای تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه‌ی چرخان با سرعت دورانی

ثابت تحت فشار داخلی و خارجی داریم:

$$\delta U = R \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \delta U^* \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx d\theta \quad (14-5)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} = R \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx$$

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) \delta U_z dx d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (R+z)^2 \omega^2 \delta U_z dz dx d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} = \int_0^L \left[P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) - P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) \right] (\delta w_0 + z \delta w_1 + z^2 \delta w_2 + z^3 \delta w_3) dx \quad (15-5)$$

$$+ \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \omega^2 (\delta w_0 + z \delta w_1 + z^2 \delta w_2 + z^3 \delta w_3) (R+z)^2 dz dx$$

نیروهای محوری بر حسب منته‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} dz \quad (۱۶-۵)$$

لنگرهای خمشی بر حسب منته‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} z dz \quad (۱۷-۵)$$

لنگرهای خمشی مرتبه‌ی بالا بر حسب منته‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_\theta \\ P_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} z^2 dz \quad (۱۸-۵)$$

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_\theta \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} z^3 dz \quad (۱۹-۵)$$

نیروی برشی بر حسب تنش برشی برابر است با:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (۲۰-۵)$$

لنگر پیچشی بر حسب تنش برشی برابر است با:

$$M_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \quad (۲۱-۵)$$

لنگرهای پیچشی مرتبه‌ی بالا بر حسب تنش برشی برابر است با:

$$P_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z^2 dz \quad (22-5)$$

$$S_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z^3 dz \quad (23-5)$$

با جایگذاری کرنش‌های رابطه‌ی (۴-۵) در روابط (۱۴-۵) و (۱۵-۵) و نیز بکارگیری اصول حساب وردشی و اصل کار مجازی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای چرخان با جدار ثابت تحت شار حرارتی و فشار داخلی و خارجی یکنواخت خواهیم داشت [۳۴]:

$$\frac{\delta U}{2\pi} = \frac{\delta W}{2\pi} \quad (24-5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R \frac{dN_x}{dx} = F_{x_0}^P + F_{x_0}^R \\ R \frac{dM_x}{dx} - RQ_x = F_{x_1}^P + F_{x_1}^R \\ R \frac{dP_x}{dx} - 2RM_{xz} = F_{x_2}^P + F_{x_2}^R \\ R \frac{dS_x}{dx} - 3RP_{xz} = F_{x_3}^P + F_{x_3}^R \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta = F_{z_0}^P + F_{z_0}^R \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - RN_z = F_{z_1}^P + F_{z_1}^R \\ R \frac{dP_{xz}}{dx} - P_\theta + 2RM_z = F_{z_2}^P + F_{z_2}^R \\ R \frac{dS_{xz}}{dx} - S_\theta + 3RP_z = F_{z_3}^P + F_{z_3}^R \end{array} \right. \quad (25-5)$$

$$R[N_x \delta u_0 + M_x \delta u_1 + P_x \delta u_2 + S_x \delta u_3 + Q_x \delta w_0 + M_{xz} \delta w_1 + P_{xz} \delta w_2 + S_{xz} \delta w_3]_0^L = 0 \quad (26-5)$$

چهار معادله‌ی اول از سری معادلات (۲۵-۵) از ضرایب عبارت‌های $\delta u_3, \delta u_2, \delta u_1, \delta u_0$ در اصل کار مجازی حاصل شده‌اند که مربوط به مؤلفه‌های جابه‌جایی محوری می‌باشند. چهار معادله‌ی دوم نیز حاصل از ضرایب عبارت‌های $\delta w_3, \delta w_2, \delta w_1, \delta w_0$ در اصل کار مجازی بوده که مربوط به مؤلفه‌های جابه‌جایی شعاعی می‌باشند. عبارت‌های $F_{x_m}^P$ و $F_{z_m}^P$ برای $i = 0, 1, 2, 3$ مؤلفه‌های بردار $\{F^P\}_{8 \times 1}$ به ترتیب در راستای

محوری و شعاعی بوده که حاصل از کار نیروهای خارجی فشاری شامل فشار داخلی و خارجی می‌باشند. داریم:

$$\{F^P\} = \{F_{x_0}^P \ F_{x_1}^P \ F_{x_2}^P \ F_{x_3}^P \ F_{z_0}^P \ F_{z_1}^P \ F_{z_2}^P \ F_{z_3}^P\}^T \quad (27-5)$$

$$\begin{cases} F_{x_m}^P = 0 \\ F_{z_m}^P = -Rf_{sf} z^m \left(1 + \frac{z}{R}\right) \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (28-5)$$

عبارت‌های $F_{x_m}^R$ و $F_{z_m}^R$ برای $i = 0, 1, 2, 3$ مؤلفه‌های بردار $\{F^R\}_{8 \times 1}$ به ترتیب در راستای محوری و شعاعی بوده که نشان‌دهنده‌ی جملات مربوط به کار نیروهای خارجی ناشی از دوران استوانه می‌باشند. داریم:

$$\{F^R\} = \{F_{x_0}^R \ F_{x_1}^R \ F_{x_2}^R \ F_{x_3}^R \ F_{z_0}^R \ F_{z_1}^R \ F_{z_2}^R \ F_{z_3}^R\}^T \quad (29-5)$$

$$\begin{cases} F_{x_m}^R = 0 \\ F_{z_m}^R = -\omega^2 \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^m (R+z)^2 dz \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (30-5)$$

روابط (25-5) همان معادلات اصلی ما را تشکیل می‌دهند. رابطه‌ی کمکی (26-5) هم شرایط مرزی مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌بایست در هر دو انتهای استوانه صفر باشند.

۵-۲-۱ توزیع ناهمگنی خواص مکانیکی

در استوانه‌های تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، مدول الاستیسیته E ، ضریب پواسون ν ، چگالی ρ و ضریب انبساط حرارتی α توابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد $\bar{r}$ می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و بالاخص در این بررسی، به علت تغییرات جزئی ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن توزیع نمایی برای مدول الاستیسیته، چگالی و ضریب انبساط حرارتی در طول جداره‌ی استوانه به صورت تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد $\bar{r}$ به صورت رابطه‌ی (23-5) خواهیم داشت:

$$X(r) = X_i e^{n(\bar{r}-1)} \quad (31-5)$$

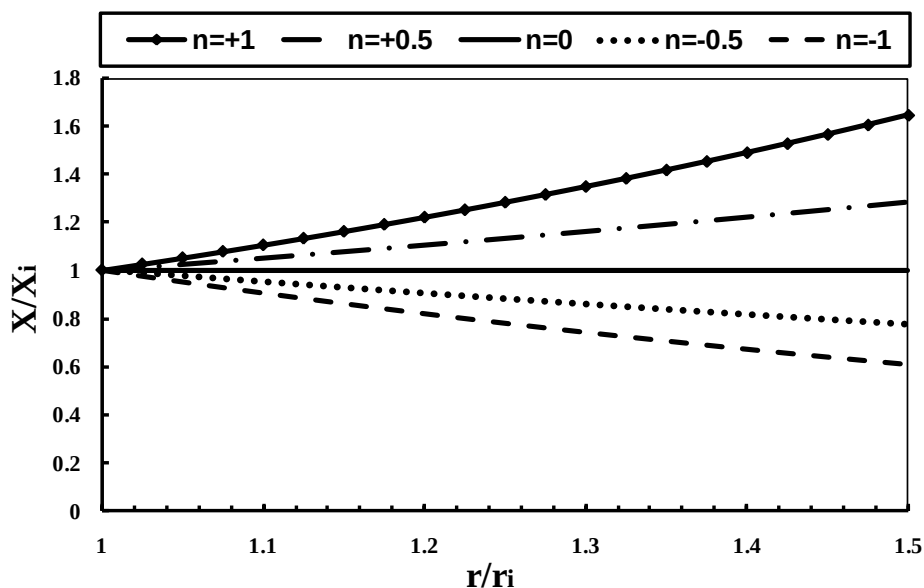
که در این رابطه $\bar{r} = r/r_i$ مختصات شعاعی بی‌بعد است. همچنین X_i نشان دهنده‌ی خواص مکانیکی و فیزیکی شامل مدول الاستیسیته، چگالی و ضریب انبساط حرارتی در شعاع داخلی استوانه و n نیز ثابت ناهمگنی ماده می‌باشد که $n=0$ همان ماده‌ی همگن است. با جایگذاری مقدار $r = R+z$ در رابطه‌ی (31-5) داریم:

$$X(z) = X_i e^{n\left(\frac{R+z-r_i}{r_i}\right)} = X_i \eta e^{n\left(\frac{z}{r_i}\right)} \quad (32-5)$$

که در آن پارامتر η در استوانه‌ی جدار ثابت مستقل از دستگاه مختصات بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta = e^{\left(\frac{nh}{2r_i}\right)} \quad (33-5)$$

شکل (2-5) توزیع خواص مکانیکی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن و همسانگرد به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل 2-5 توزیع بی‌بعد خواص مکانیکی در راستای شعاعی

معادلات (۲۵-۵) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد. برای حل آن باید نیروها و لنگرها را با استفاده از روابط (۱۶-۵) تا (۲۳-۵) به متجه‌های تنش و با جایگذاری خواص مکانیکی از رابطه‌ی (۳۳-۵) در روابط (۵-۵) و استفاده از روابط (۵-۵) و (۲۴-۴) به مؤلفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۴-۵) بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نوشت. نهایتاً یک دستگاه هشت معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت بدست می‌آید که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$[A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \quad (۳۴-۵)$$

در دستگاه (۳۴-۵) ماتریس‌های $[A]_{8 \times 8}$ ، $[B]_{8 \times 8}$ و $[C]_{8 \times 8}$ مشابه FSDT به دست می‌آیند.

که در آن بردار مجهول $\{y\}$ شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت رابطه‌ی (۳۵-۵) می‌باشد:

$$\{y\} = \{u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3\}^T \quad (۳۵-۵)$$

همچنین قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به صورت بردار ناهمگنی $\{F\}$ شامل سه بخش حاصل از

بارگذاری حرارتی $\{F\}^T$ ، بارگذاری فشاری $\{F\}^P$ و بارگذاری دورانی $\{F\}^R$ می‌باشد.

$$\{F\} = \{F\}^P + \{F\}^R + \{F\}^T \quad (۳۶-۵)$$

جملات مربوط به بارگذاری حرارتی با توجه به روابط رفتاری (۵-۵) و در نظر گرفتن کرنش‌های

حرارتی در انرژی کرنشی ایجاد شده که نهایتاً در مؤلفه‌های پنجم تا هشتم قسمت ناهمگن دستگاه

معادلات (۳۴-۵) در نقش نیروهای حجمی ظاهر می‌شوند.

$$\{F^T\} = \{F_{x_0}^T \quad F_{x_1}^T \quad F_{x_2}^T \quad F_{x_3}^T \quad F_{z_0}^T \quad F_{z_1}^T \quad F_{z_2}^T \quad F_{z_3}^T\}^T \quad (۳۷-۵)$$

$$\begin{cases} F_{x_m}^R = 0 \\ F_{z_m}^R = - \left(\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^T(z) \left((m+1)z^m + mRz^{m-1} \right) dz \right) \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (۳۸-۵)$$

همانطور که قبلاً اشاره شد، عبارت‌های مربوط به بارگذاری‌های فشاری و دورانی حاصل از کار

نیروهای خارجی نیز در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات (۳۴-۵) ظاهر می‌شوند که مؤلفه‌های مربوط به

بردارهای $\{F\}^P$ و $\{F\}^R$ قبلاً بیان شدند.

توجه به این نکته نیز ضروری است که بردار ناهمگنی $\{F\}$ تابعی از مختصات x نبوده و برای کلیه بارگذاری‌ها مقدار ثابتی می‌باشد. بنابراین برای حلّ استوانه تحت بارگذاری ترکیبی می‌توان با در نظر گرفتن اثر هر کدام از جملات حاصل از بارگذاری‌های حرارتی، فشاری و دورانی به تنهایی و محاسبه‌ی مقادیر جابه‌جایی و تنش حاصل از هر بارگذاری، نهایتاً با استفاده از اصل جمع آثار مقادیر مربوط به جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری و نیز تنش‌های محیطی و برشی حاصل از بارگذاری ترکیبی را به‌دست آورد.

۵-۲-۲ حلّ ترموالاستیک استوانه‌های چرخان تحت بارگذاری فشاری

همانطور که توضیح داده شد، دستگاه معادله‌ی (۲-۲۴) یک دستگاه هشت معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت می‌باشد که دارای حلّ عمومی و حلّ خصوصی است. اگر این دستگاه معادلات را به صورت ساده شده‌ی زیر بنویسیم:

$$[A]\{y''\} + [B]\{y'\} + [C]\{y\} = \{F\} \quad (۵-۳۹)$$

داریم:

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p \quad (۵-۴۰)$$

برای حلّ عمومی دستگاه فوق مقدار $\{y\} = \{\xi\} e^{mx}$ را در معادلات آن می‌گذاریم، داریم:

$$e^{mx} [m^2 A + mB + C] \{\xi\} = \{0\} \quad (۵-۴۱)$$

با توجه به اینکه $e^{mx} \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$|m^2 A + mB + C| = 0 \quad (۵-۴۲)$$

از حلّ معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه m_i محاسبه شده که به صورت هشت جفت ریشه‌ی مزدوج حاصل می‌شوند که یک جفت آن صفر می‌باشد. با قرار دادن مقادیر ویژه‌ی غیر صفر حاصل در معادله‌ی (۵-۴۱)، بردارهای ویژه ξ_i متناظر با مقادیر ویژه‌ی فوق به‌دست می‌آیند. در نهایت حلّ عمومی عبارتست از:

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^{14} C_i \{\xi\}_i e^{m_i x} \quad (43-5)$$

با توجه به این نکته که مقادیر ویژه حاصل شامل اعداد مختلط می‌باشند، برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر با این اعداد مختلط، باید از روابط حاکم بر بردارهای ویژه مربوط به اعداد مختلط استفاده کرد.

برای حل خصوصی، قسمت ناهمگن معادلات (5-39) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری با ضخامت ثابت و تحت فشار داخلی و خارجی و شار حرارتی یکنواخت، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از x نمی‌باشد. بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس $[C]$ طبق معادله‌ی زیر، جواب خصوصی را به دست آورد.

$$[C]\{y\} = \{F\} \Rightarrow \{y\} = [C]^{-1}\{F\} \quad (44-5)$$

اما با توجه به معکوس‌ناپذیری (منفرد بودن) ماتریس $[C]$ به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، با ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حل می‌شود. بدین منظور در اولین معادله از سری معادلات (5-25)، از طرفین آن انتگرال‌گیری کرده و خواهیم داشت:

$$RN_x = C_0 \quad (45-5)$$

همانطور که در معادلات (5-34) مشخص است عبارت u وجود ندارد ولیکن du/dx در معادلات وجود دارد. با در نظر گرفتن du/dx به عنوان پارامتری جدیدی به نام v و انتگرال‌گیری از طرفین اولین معادله از سری معادلات داریم:

$$u = \int v dx + C_{15} \quad (46-5)$$

بنابراین دستگاه معادلات قدیم به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} [A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \\ \{y\} = \{v \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3\}^T \end{cases} \quad (47-5)$$

که در آن بردار نیرویی $\{F\}$ با توجه به انتگرال گیری از طرفین اولین معادله، به صورت زیر می باشد:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} C_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{z_0}^P + F_{z_0}^R + F_{z_0}^T \\ F_{z_1}^P + F_{z_1}^R + F_{z_1}^T \\ F_{z_2}^P + F_{z_2}^R + F_{z_2}^T \\ F_{z_3}^P + F_{z_3}^R + F_{z_3}^T \end{Bmatrix} \quad (48-5)$$

بنابراین با حل دستگاه معادلات فوق به صورت مطالعه‌ی موردی می توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به دست آورد.

شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۵-۱) توسط رابطه‌ی (۵-۲۶) بیان می‌شوند. به عبارت دیگر با توجه به وجود ۱۶ مجهول باید مقادیر $\{u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ w_0 \ w_1 \ w_2 \ w_3\}$ و $\{N_x \ M_x \ P_x \ S_x \ Q_x \ M_{xz} \ P_{xz} \ S_{xz}\}$ در دو انتهای استوانه طوری در نظر گرفته شوند که همواره رابطه‌ی (۵-۲۶) برابر صفر باشد. با داشتن ۱۴ مجهول $C_1, \dots, C_{14}$ در جواب عمومی و ۲ ثابت C_0, C_{15} در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل ۸ شرط مرزی در هر سمت، ۱۶ ثابت مجهول را محاسبه کرد. نهایتاً با به دست آوردن ثوابت مجهول، بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه‌ی (۵-۴۰) بر حسب متغیرهای z, x به دست می‌آیند. با استفاده از رابطه‌ی (۵-۳) می‌توان میدان جابه‌جایی شعاعی و طولی را به دست آورده و با استفاده از روابط (۵-۴)، (۵-۵) و (۵-۱۶) تا (۵-۲۳) مقادیر تنش، کرنش، نیرو و لنگر را نیز محاسبه کرد.

۳-۵ مطالعه‌ی موردی

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به دست آمده از نتایج حل تحلیلی، یک استوانه‌ی ضخیم

ناهمگن و همسانگرد با ضخامت ثابت و تحت شار حرارتی یکنواخت مطابق شکل (۵-۱) به شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ ، طول $L = 800 \text{ mm}$ و توزیع نمایی خواص مکانیکی را در نظر می‌گیریم. مدول الاستیسیته، چگالی و ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی استوانه به ترتیب برابر مقادیر $E_i = 200 \text{ GPa}$ ، $\rho_i = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ و $\alpha_i = 12 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ و نسبت پواسون ثابت $\nu = 0.3$ را تحت فشار یکنواخت داخلی $P_i = 80 \text{ MPa}$ ، دمای سطح داخلی $T_i = 125^\circ\text{C}$ و دمای سطح خارجی برابر دمای محیط $T_o = 25^\circ\text{C}$ و سرعت دورانی ثابت $\omega = 3600 \text{ rpm}$ در نظر می‌گیریم.

تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط انتهایی دوسر گیردار انجام شده است. حلّ تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 11 صورت گرفته است.

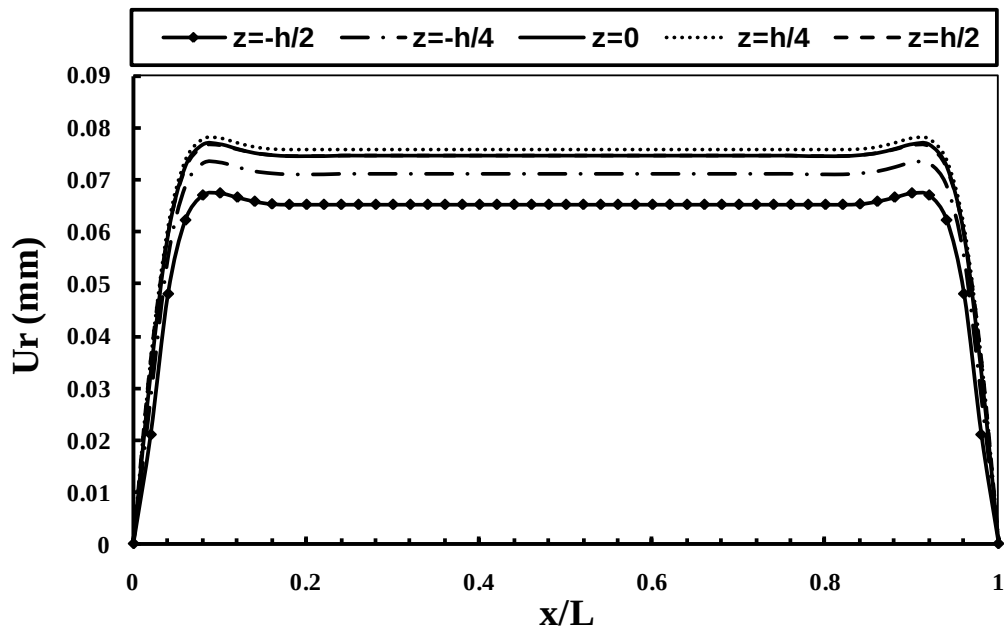
۵-۳-۱ استوانه‌ی دوسر گیردار

برای شرایط مرزی دو سر گیردار با توجه به رابطه‌ی (۵-۲۶) داریم:

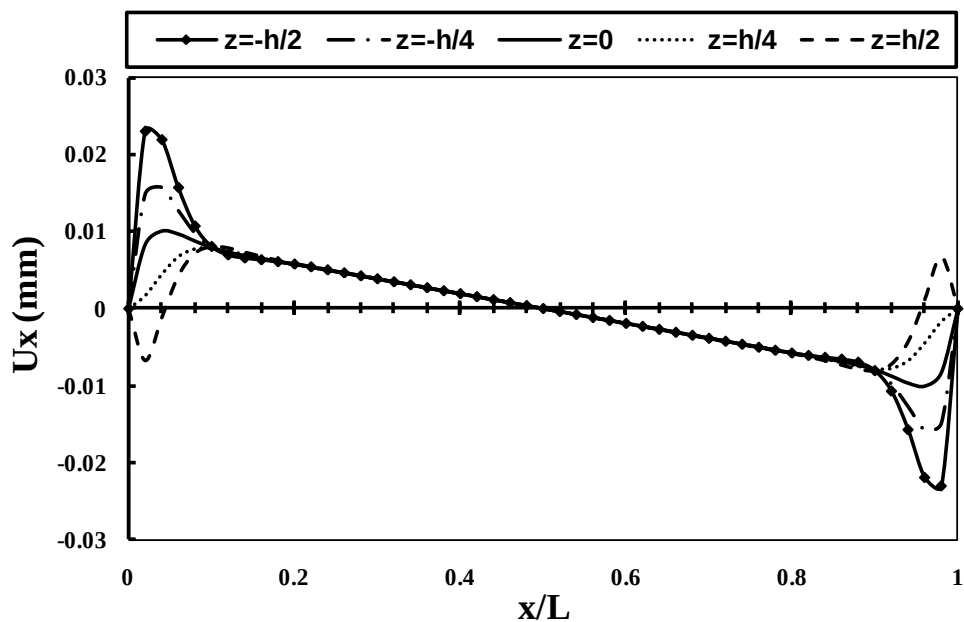
$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = 0 \\ x=L \Rightarrow u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = 0 \end{cases} \quad (۵-۴۹)$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثابت‌های مجهول، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به‌دست می‌آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند. شکل‌های (۵-۳) تا (۵-۶) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی را در راستای طول استوانه به ازای $n=1$ در پنج لایه‌ی مختلف برای استوانه تحت فشار داخلی و شار حرارتی یکنواخت دارای سرعت دورانی ثابت نشان می‌دهد. مقادیر جابه‌جایی شعاعی به‌ازای $n=1$ در نیمه‌ی داخلی استوانه از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی افزایش یافته و در نیمه‌ی خارجی استوانه از لایه‌ی میانی تا لایه‌ی خارجی ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد؛ به نحوی که مقادیر جابه‌جایی لایه‌های میانی و

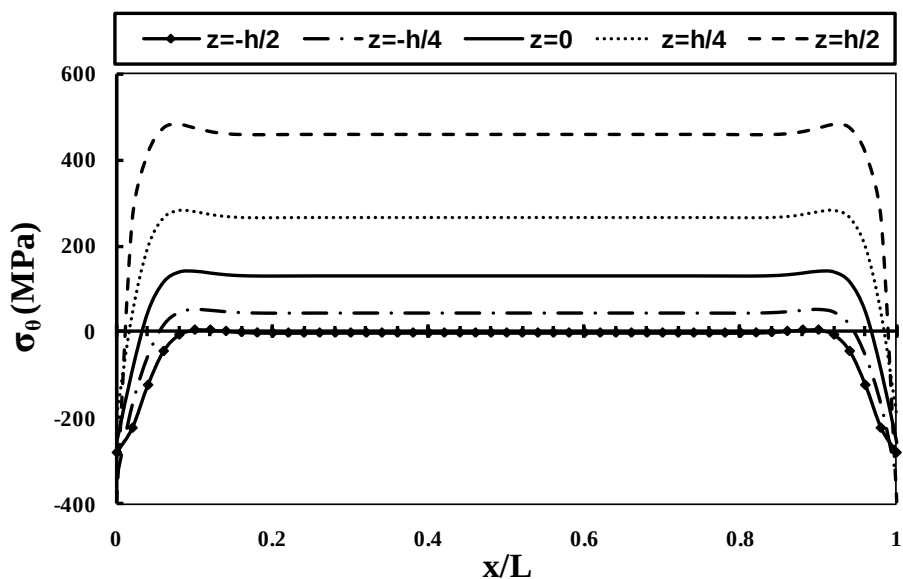
خارجی در طول استوانه با یکدیگر اختلاف بسیار ناچیزی دارند. مقادیر تنش محیطی برای استوانه تحت فشار داخلی و شار حرارتی یکنواخت، از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی از نظر مقدار افزایش می‌یابد. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نیز همین رفتار را برای استوانه پیش‌بینی می‌کند، ولیکن لایه‌های بیشتری را نسبت به تئوری مرتبه‌ی بالا دارای مقادیر تنش منفی محاسبه می‌کند. تنش محیطی در نقاط اطراف مرز و در لایه‌ی داخلی و لایه‌های بسیار نزدیک به آن برای استوانه تحت بارگذاری ترکیبی دارای مقادیر تنش منفی می‌باشد. مقادیر تنش محیطی در بقیه‌ی نقاط و جابه‌جایی شعاعی در کلیه‌ی نقاط در استوانه تحت بارگذاری ذکر شده مثبت می‌باشد. با فاصله گرفتن از دو انتهای استوانه، مقادیر جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در هر لایه دارای مقدار ثابتی در طول پوسته‌ی استوانه‌ای می‌باشند. جابه‌جایی محوری همانند بارگذاری‌های ذکر شده در فصول قبلی دارای حداکثر مقدار خود در لایه‌ی داخلی می‌باشد. جابه‌جایی محوری برای نقاط دور از مرز در لایه‌های مختلف تفاوت قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر ندارند؛ در حالیکه در نقاط اطراف دو انتهای استوانه، عکس این پدیده صادق است. تنش برشی در طول استوانه به غیر از نزدیکی دو انتهای آن، دارای مقدار صفر می‌باشد. این امر نشان می‌دهد که تنش برشی در نزدیکی مرزهای انتهایی استوانه تحت تأثیر شرایط مرزی به وجود می‌آید که در تئوری تغییر شکل برشی این تنش‌های برشی لحاظ می‌شوند. تنش برشی در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی بر خلاف استوانه تحت فشار داخلی، در لایه‌ی خارجی دارای بیشترین مقدار است که در اطراف مرز $x=0$ تنش برشی مثبت و در نزدیکی مرز $x=L$ مقدار منفی ایجاد می‌شود و به طور مشابه با تنش محیطی، تنش‌های برشی لایه‌ی داخلی و لایه‌های نزدیک به آن از این قاعده مستثنی بوده و دارای مقادیر تنش برشی منفی در اطراف مرز $x=0$ و مقادیر تنش مثبت در نزدیکی مرز $x=L$ می‌باشند. همانطور که در فصول قبلی نیز بیان شد، اثر غالب در میان انواع بارگذاری‌های اشاره شده مربوط به بارگذاری حرارتی می‌باشد. پس از آن بارگذاری فشاری و در نهایت کمترین اثر را بارگذاری دورانی بر روی استوانه می‌گذارد.



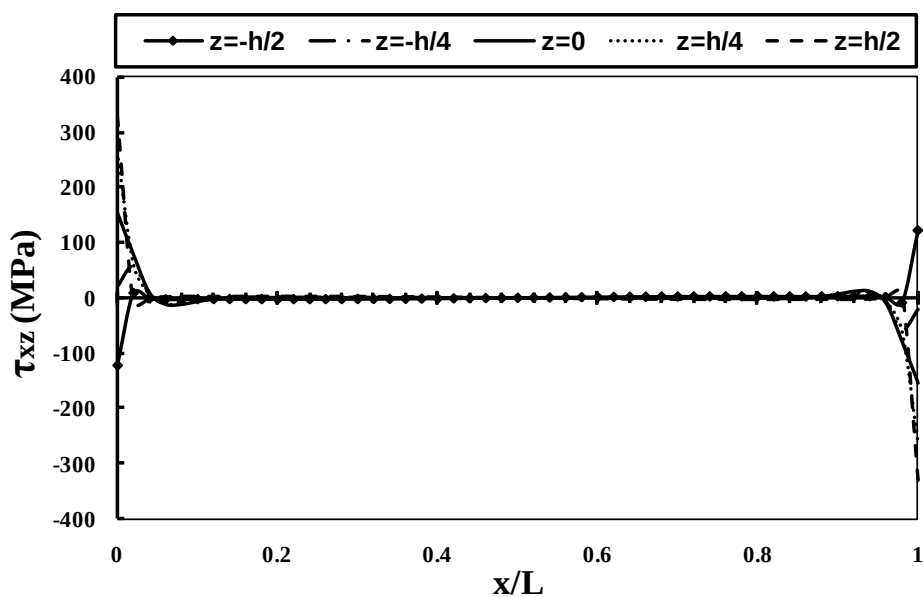
شکل ۳-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۴-۵ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۵-۵ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۵-۶ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ برای حالت دوسر گیردار

۴-۵ حل عددی استوانه‌های چرخان ناهمگن تحت فشار داخلی

در این بخش نتایج مربوط به حل تحلیلی توسط روش تغییر شکل برشی با نتایج عددی حاصل از

روش اجزاء محدود در استوانه‌های همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی و شار حرارتی یکنواخت دارای سرعت دورانی ثابت مقایسه شده است. نحوه‌ی مدل‌سازی توسط نرم‌افزار Ansys در فصول قبلی بیان شده است.

۵-۴-۱ مقایسه‌ی نتایج

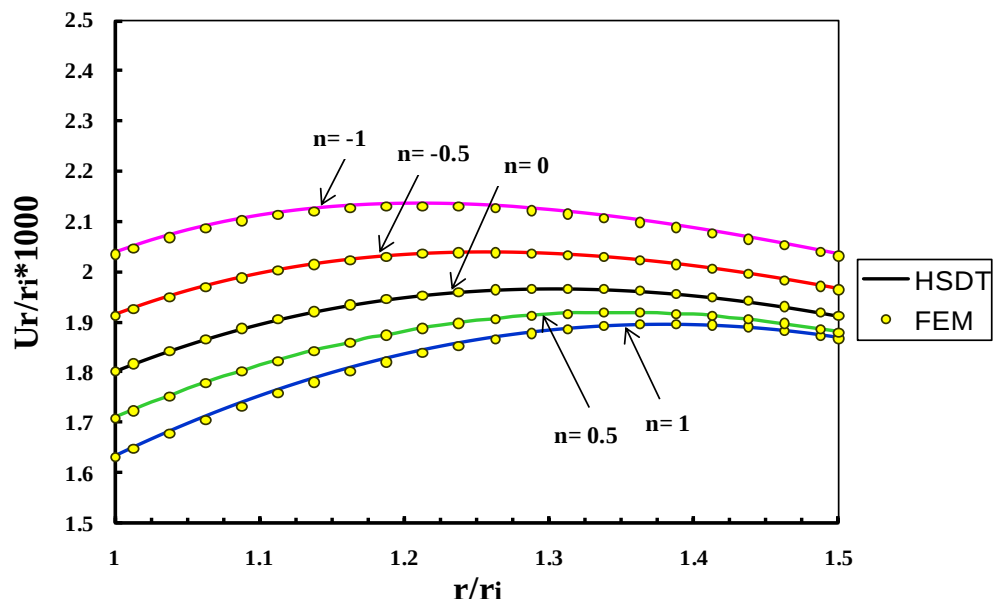
در شکل (۷-۵) و (۸-۵) نتایج جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی بی‌بعد محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT برای بارگذاری ترکیبی به‌ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در طول جداره‌ی استوانه و در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار آورده شده است. همانطور که از شکل (۳-۴) مشخص است به‌ازای n های منفی جابه‌جایی استوانه نسبت به ماده‌ی همگن از نظر مقدار بیشتر است و به‌ازای n های مثبت کمتر می‌شود. این نسبت در استوانه تحت فشار داخلی در طول جداره تقریباً ثابت می‌ماند ولیکن در استوانه‌ی چرخان تحت شار حرارتی یکنواخت و فشار داخلی به‌ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در طول جداره ثابت نمانده و در لایه‌ی داخلی نسبت به لایه‌ی خارجی دارای اختلاف بیشتری از ماده‌ی همگن می‌باشد.

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول توزیع جابه‌جایی شعاعی را در طول جداره‌ی استوانه به صورت تابع خطی از شعاع استوانه فرض می‌کند، در حالیکه مطابق تئوری الاستیسیته‌ی مستوی در حقیقت یک توزیع به صورت رابطه‌ی (۴-۵۰) در طول جداره‌ی استوانه وجود دارد:

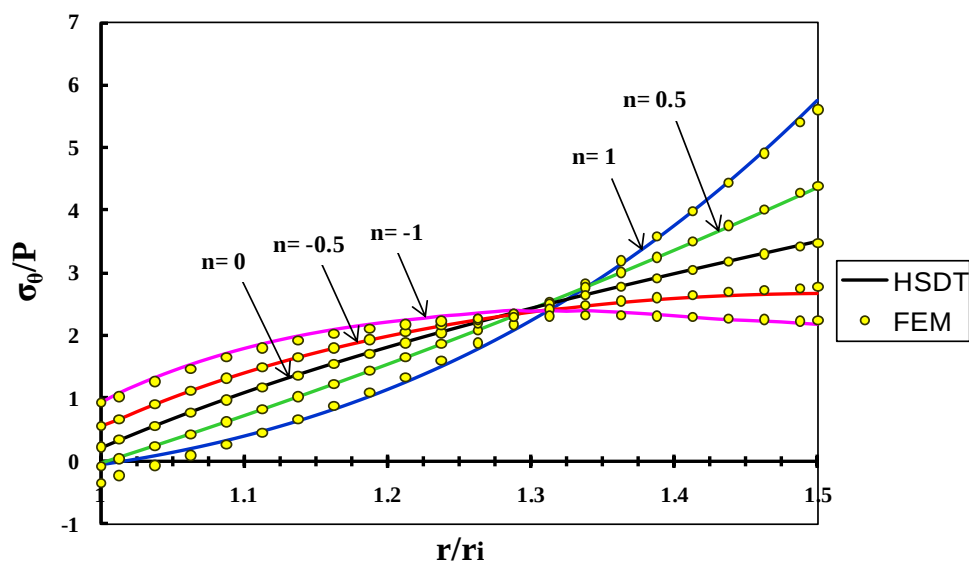
$$U_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (۵-۵۰)$$

همانطور که در فصول قبلی نیز بیان شد در اطراف لایه‌ی میانی روش FSDT از دقت بالاتری برخوردار می‌باشد، ولیکن در لایه‌های داخلی و خارجی از توزیع پیش‌بینی شده توسط روش PET فاصله می‌گیرد. این مسئله در مورد استوانه تحت بارگذاری حرارتی تشدید می‌شود؛ دلیل این امر فاصله گرفتن توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه از حالت خطی و افزایش انحنای آن می‌باشد. در حقیقت

تقریب یک تابع هذلولوی با یک توزیع خطی منشأ خطا می‌باشد. در حالیکه در روش HSDT با در نظر گرفتن یک توزیع چند جمله‌ای مطابق رابطه‌ی (۳-۵) برای جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری، این تقریب بهبود بخشیده می‌شود. در حقیقت اضافه کردن هر یک از عبارت‌های $z^i u_i$ و $z^i w_i$ به جابه‌جایی‌های لایه میانی یعنی u_0 و w_0 در مولفه‌های میدان جابه‌جایی، سبب نزدیکتر شدن توزیع حاصل از تئوری تغییر شکل برشی به حل دقیق حاصل از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی می‌شود. این افزایش دقت در محاسبه‌ی جابه‌جایی‌های محوری و شعاعی سبب بهبود مقادیر تنش محیطی نیز می‌شود. دلیل این امر محاسبه‌ی مؤلفه‌های جابه‌جایی به طور مستقیم و با حل دستگاه معادلات حاکم و سپس محاسبه‌ی کرنش از روی مقادیر حاصل و نهایتاً به دست آوردن مقادیر تنش می‌باشد. با دقت در نمودارهای شکل (۵-۷) می‌توان دریافت که جابه‌جایی شعاعی برای n های مختلف از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی در حال افزایش می‌باشد. سپس در نیمه‌ی خارجی جداره‌ی استوانه، جابه‌جایی شعاعی از نزدیکی لایه‌ی میانی تا لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. مقدار حداکثر جابه‌جایی در طول جداره‌ی استوانه برای $n=-1$ در نقطه‌ی $\bar{r} = 1/2125$ مشاهده می‌شود و با افزایش ثابت ناهمگنی ماده این مقدار به سمت لایه‌ی خارجی میل می‌کند به طوریکه برای $n=1$ این نقطه در $\bar{r} = 1/3875$ رخ می‌دهد. با کاهش مقدار $|n|$ بر دقت نتایج افزوده می‌شود. در شکل (۵-۸) مشاهده می‌شود که تنش محیطی برای n های منفی در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از ماده همگن و در نیمه خارجی کمتر از ماده‌ی همگن می‌باشد و برعکس برای n های مثبت در نیمه‌ی داخلی کمتر و در نیمه خارجی بیشتر از ماده‌ی همگن است. در محدوده لایه میانی رفتار ماده ناهمگن همانند رفتار ماده همگن می‌باشد که در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی این محدوده به سمت لایه‌ی بیرونی میل کرده در حالیکه در استوانه تحت فشار داخلی این محدوده به سمت لایه‌ی داخلی تمایل پیدا می‌کند.



شکل ۷-۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$

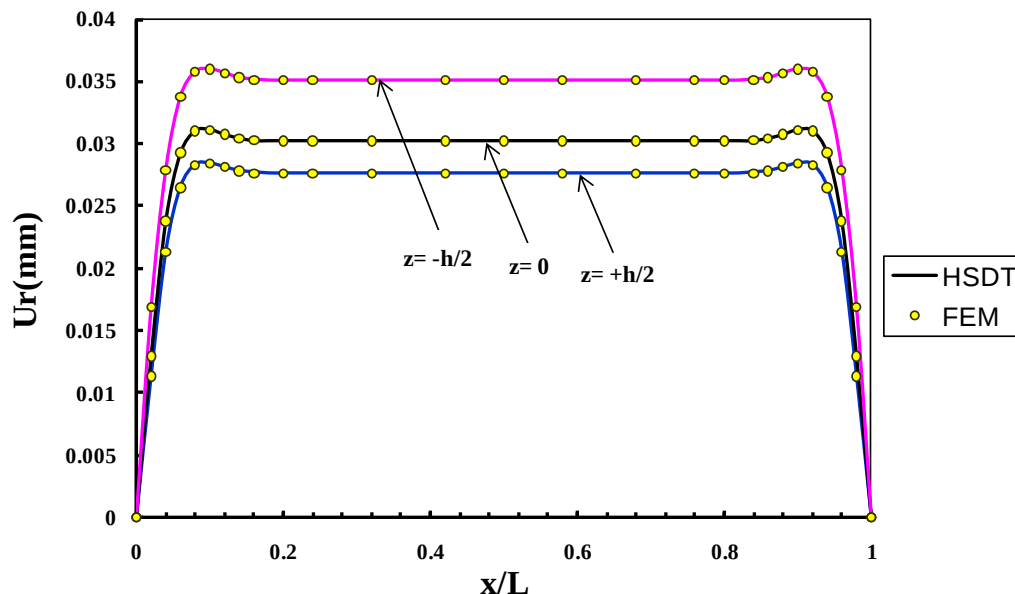


شکل ۸-۵ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$

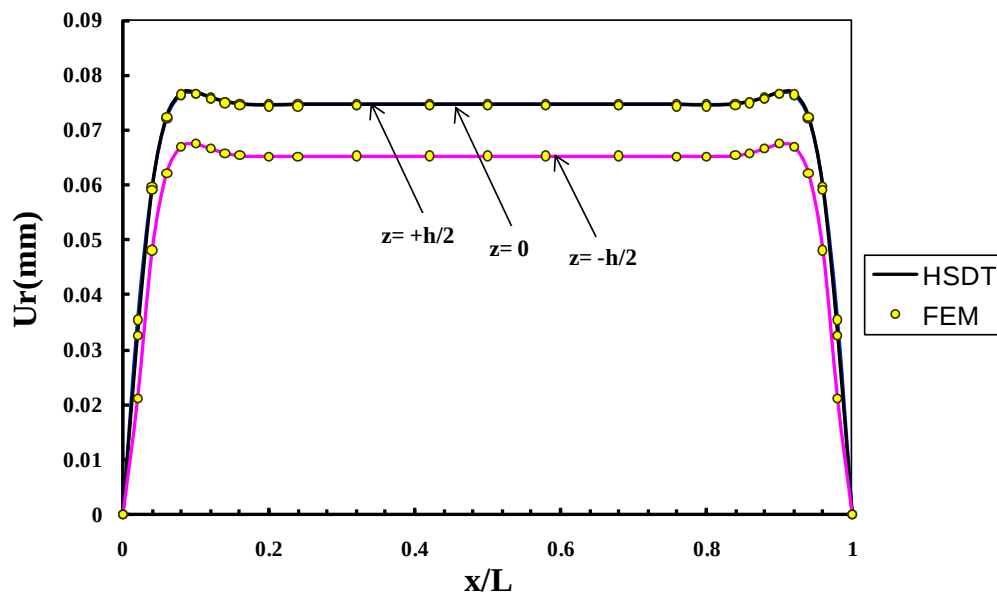
با توجه به تاثیر اندک دوران بر جابه‌جایی و تنش در استوانه‌ها و به منظور بررسی نتایج حاصل از

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم و بررسی میزان افزایش دقت نتایج، در ادامه نحوه‌ی توزیع جابه-

جایی‌های محیطی، جابه‌جایی‌های محوری و تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT در پوسته‌ی استوانه‌ای تحت فشار داخلی و نیز در پوسته‌ی استوانه تحت بارگذاری کلی شامل فشار داخلی، دوران با سرعت ثابت و شار حرارتی یکنواخت آورده شده است. شکل‌های (۵-۹) و (۵-۱۰) به ترتیب حاوی نتایج جابه‌جایی شعاعی حاصل از بارگذاری‌های فشاری و ترکیبی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT در سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت شرایط انتهایی دوسر گیردار و برای ثابت ناهمگنی $n=1$ می‌باشد. همانطور که در فصل قبلی نیز اشاره شد، مقدار جابه‌جایی شعاعی حاصل از روش FE و HSDT در طول استوانه باری بارگذاری کلی در فاصله‌ی کمی از تکیه‌گاه‌ها در لایه‌ی خارجی با جابه‌جایی ایجاد شده در لایه‌ی میانی اختلاف بسیار کمی دارند که همین عامل باعث شده تا جابه‌جایی‌های هر دو لایه در شکل (۵-۱۰) بر یکدیگر منطبق باشند. قابل ذکر است که این مقدار در لایه‌ی داخلی اندکی بیشتر می‌باشد. مشخص است که دقت نتایج نسبت به نتایج فصول قبلی به دلیل استفاده از روش HSDT افزایش داشته است که این افزایش دقت در بارگذاری حرارتی محسوس‌تر می‌باشد.



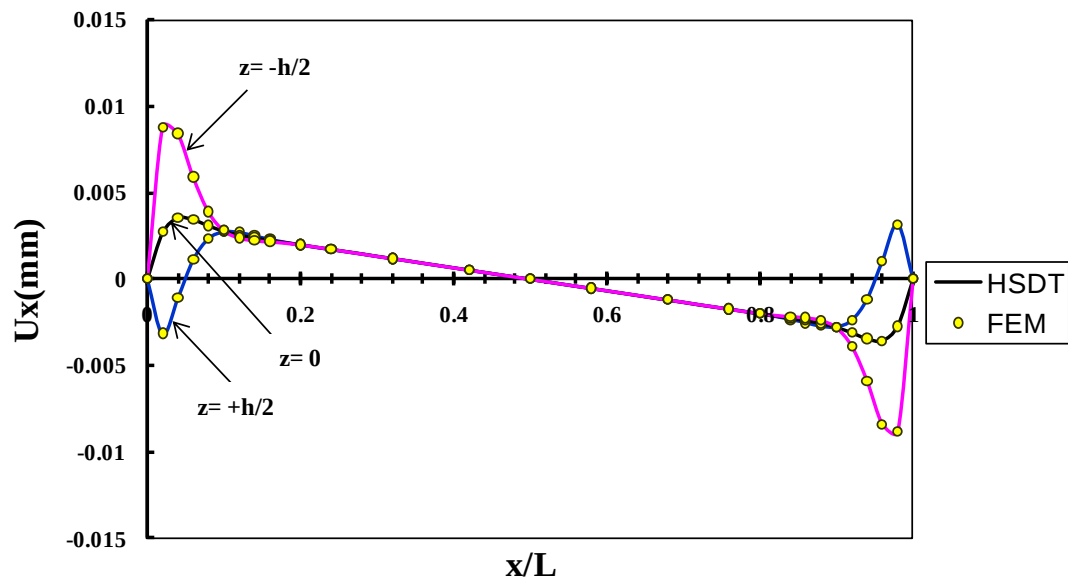
شکل ۵-۹ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$



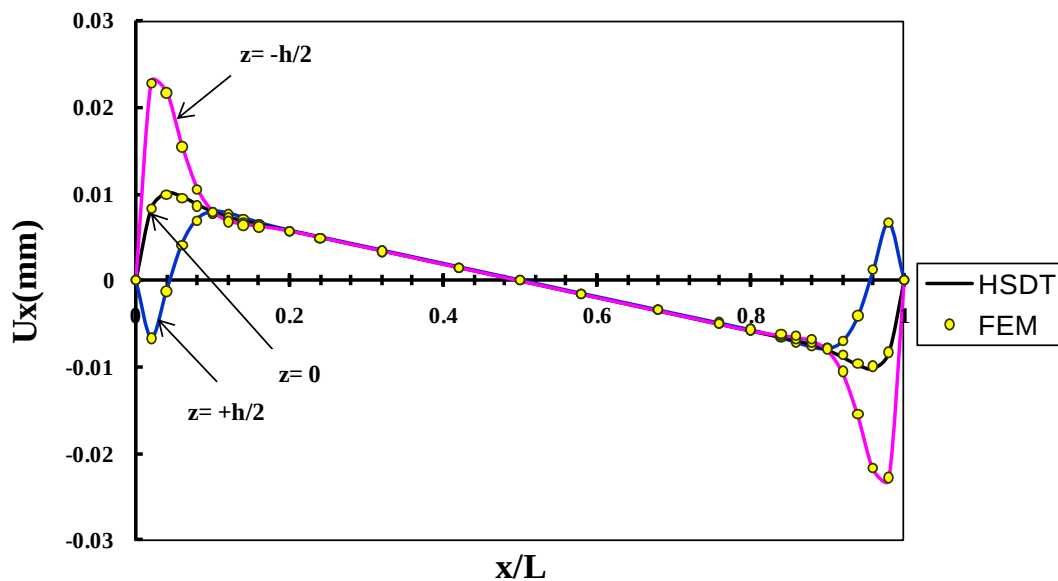
شکل ۱۰-۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$

توزیع جابه‌جایی محوری محاسبه شده توسط دو روش FE و HSDT نیز برای بارگذاری‌های فشاری و کلی در سه لایه‌ی مختلف و در طول استوانه‌ی دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ به ترتیب در شکل‌های (۵-۱۱) و (۵-۱۲) نشان داده شده است. برای جابه‌جایی محوری نتایج حاصل از دو روش FE و HSDT با یکدیگر انطباق قابل قبولی دارند. همچنین در مقایسه با نتایج حاصل از روش FSDT مشاهده می‌شود که اختلاف موجود بین روش‌های عددی و تحلیلی در لایه‌های داخلی و میانی در نزدیکی دو انتهای استوانه برای همه‌ی بارگذاری‌ها، به دلیل استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه‌ی بالاتر از بین رفته است. شکل‌های (۵-۱۳) و (۵-۱۴) نیز تنش‌های محیطی برای دو بارگذاری فشاری و کلی حاصل از روش‌های عددی و تحلیلی در طول استوانه‌ی دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ و شرایط انتهایی دوسر گیردار را نشان می‌دهند. با توجه به شکل (۵-۱۳) می‌توان دریافت که دقت تنش محیطی حاصل از روش HSDT نسبت به روش FSDT افزایش داشته است. در بارگذاری حرارتی به دلایل ذکر شده در فصل قبل، اختلاف مقادیر تنش محیطی حاصل از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به خصوص در

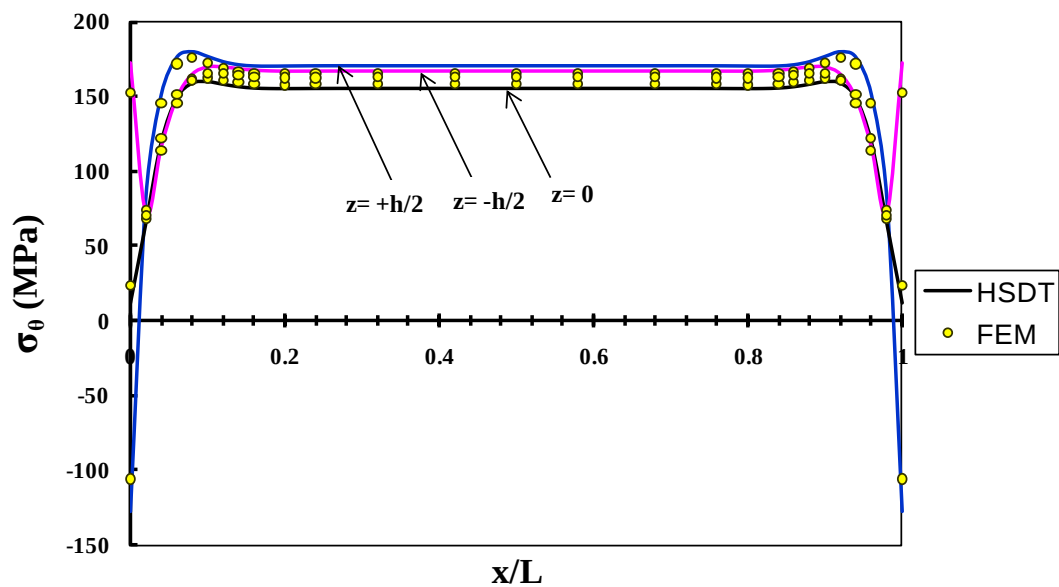
لایه‌ی داخلی با حلّ عددی زیاد می‌باشد که این اختلاف در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوّم مطابق شکل (۵-۱۴) به شدت کاهش پیدا کرده است.



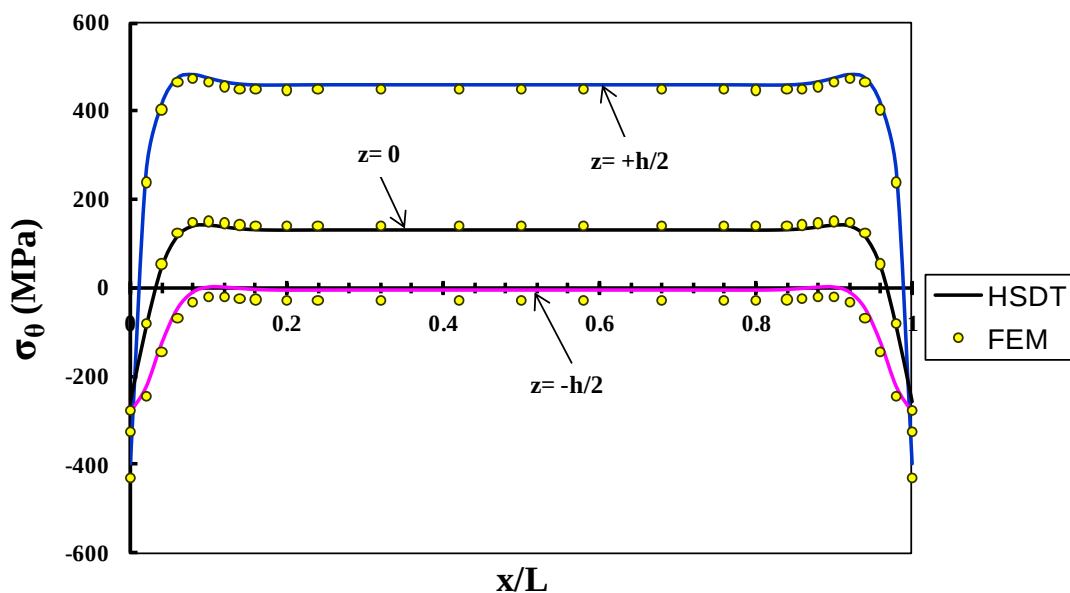
شکل ۵-۱۱ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$



شکل ۵-۱۲ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$



شکل ۱۳-۵ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$



شکل ۱۴-۵ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$

جدول (۱-۵) حاوی مقادیر جابه‌جایی‌های شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT تحت

بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و دورانی در سه لایه‌ی داخلی، میانی و خارجی استوانه برای ثابت ناهمگنی $n=1$ می‌باشد. در جدول (۵-۲) نیز مقادیر تنش بیشینه‌ی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT در سه لایه‌ی مختلف تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و دورانی برای $n=1$ آورده شده است. با دقت در این جداول می‌توان دریافت که توزیع جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در استوانه تحت بارگذاری حرارتی بیشتر از بارگذاری فشاری می‌باشد. بارگذاری دورانی نیز کمترین مقدار جابه‌جایی و تنش را در استوانه ایجاد می‌کند. با توجه به اثر ناچیز دوران در سرعت‌های کمتر از 5000 rpm می‌توان رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای را تحت بارگذاری کلی به برآیند نیروهای حرارتی و مکانیکی نسبت داد. با توجه به اختلاف دمای 100 درجه‌ی سانتی‌گراد بین سطح داخلی و خارجی استوانه‌ی جدار ثابت و فشار داخلی 80 مگاپاسکال مشاهده می‌شود که کرنش‌های حرارتی بر کرنش‌های مکانیکی غلبه می‌کند. با توجه به اینکه جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی در بارگذاری حرارتی افزایش و در بارگذاری فشاری (فشار داخلی) کاهش می‌یابد، نهایتاً مشاهده می‌شود که در بارگذاری ترکیبی جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی تا نزدیکی لایه‌ی میانی افزایش و سپس کاهش می‌یابد. همانطور که در قسمت قبل اشاره شد، این کاهش در طول جداره‌ی استوانه برای $n=1$ در نقطه‌ی $\bar{r} = 1/3875$ مشاهده می‌شود و سبب شده تا کاهش جابه‌جایی از این نقطه تا لایه‌ی خارجی به نحوی باشد که مقادیر جابه‌جایی شعاعی در وسط استوانه برای لایه‌های میانی و خارجی نزدیک به یکدیگر حاصل شود. مقایسه‌ی نتایج حل عددی و تحلیلی نشان‌دهنده‌ی بهبود جابه‌جایی و تنش در روش HSDT می‌باشد.

تنش محیطی در بارگذاری فشاری (فشار داخلی) حاصل از روش‌های FE و HSDT از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش و سپس افزایش می‌یابد، درحالی‌که روش FSDT از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش تنش محیطی را پیش‌بینی می‌کند (شکل (۲-۱۲) فصل ۲). تنش محیطی به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$ در بارگذاری حرارتی با استفاده از روش HSDT نیز با توجه شکل (۵-۸) و جدول (۵-۵)

۲) دارای مقداری اختلاف در لایه‌ی داخلی با روش FE می‌باشد که برای ثوابت ناهمگنی کوچکتر از نظر مقدار این اختلاف از بین می‌رود. با توجه به آنچه در ابتدای همین بخش عنوان شد، محاسبه‌ی تنش‌ها به طور غیر مستقیم از روی مؤلفه‌های جابه‌جایی سبب افزایش مقدار خطا در محاسبه‌ی تنش محیطی می‌شود که با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالاتر این مشکل حل می‌شود.

جدول ۵-۱ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT برای بارگذاری‌های مختلف در حالت دو سرگیردار به‌ازای $n=1$ در $x=L/2$

$U_r [mm]$	مکانیکی		دورانی		حرارتی	
	FEM	HSDT	FEM	HSDT	FEM	HSDT
$z = h / 2$	۰/۰۲۷۶	۰/۰۲۷۶	$۶/۱۶ \times 10^{-۴}$	۶×10^{-۴}	۰/۰۴۶۴	۰/۰۴۶۶
$z = 0$	۰/۰۳۰۲	۰/۰۳۰۳	$۶/۸۲ \times 10^{-۴}$	۶×10^{-۴}	۰/۰۴۳۵	۰/۰۴۳۶
$z = -h / 2$	۰/۰۳۵۰	۰/۰۳۵۱	$۸/۰۸ \times 10^{-۴}$	۷×10^{-۴}	۰/۰۲۹۵	۰/۰۲۹۵

جدول ۵-۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و HSDT برای بارگذاری‌های مختلف در حالت دو سرگیردار به‌ازای $n=1$ در $x=L/2$

$\sigma_\theta [MPa]$	مکانیکی		دورانی		حرارتی	
	FEM	HSDT	FEM	HSDT	FEM	HSDT
$z = h / 2$	۱۶۵/۷۳	۱۷۰/۸۶	۳/۶۸	۳/۷۰	۲۷۸/۹۷	۲۸۵/۲
$z = 0$	۱۵۸/۰۴	۱۵۵/۵	۳/۸۴	۳/۷۹	-۲۲/۹۷	-۲۷/۵۶
$z = -h / 2$	۱۶۲/۶۹	۱۶۷/۰۸	۴/۰۲	۴/۰۲	-۱۹۵/۴۷۷	-۱۳۲/۴۹

۵-۵ نتیجه‌گیری

با توجه به آنچه در قسمت قبلی بیان شد، استفاده از روش FSDT در تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل صرف نظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور رابطه‌ی (۲-۵) و استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اول مناسب نمی‌باشد. با توجه به اینکه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول توزیع جابه‌جایی شعاعی را در طول جداری استوانه به صورت خطی در نظر می‌گیرد و توجه به این نکته که جابه‌جایی شعاعی در استوانه تحت اثر بارگذاری حرارتی دارای یک

توزیع غیرخطی با انحنای بیشتر نسبت به استوانه تحت بارگذاری‌های دورانی و فشاری می‌باشد، در نتیجه استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا (HSDT) سبب کاهش خطا می‌شود. به خصوص با حرکت از لایه‌ی میانی به سمت لایه‌های داخلی و خارجی، این کاهش خطا ملموس‌تر می‌باشد. در استوانه تحت شار حرارتی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و برشی افزایش می‌یابند، در حالیکه در مورد جابه‌جایی محوری عکس این مطلب صادق است. جابه‌جایی شعاعی برای n های مختلف از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی در حال افزایش می‌باشد. سپس در نیمه‌ی خارجی جداری استوانه، جابه‌جایی شعاعی از نزدیکی لایه‌ی میانی تا لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. مقدار حداکثر جابه‌جایی در طول جداری استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی ماده به سمت لایه‌ی خارجی میل می‌کند. با توجه به نتایج حاصل در بارگذاری ترکیبی، استفاده از ماده‌ی ناهمگن با ثابت ناهمگنی منفی که سبب کاهش تنش محیطی بیشینه‌ی در استوانه می‌شود، نسبت به ماده‌ی همگن مناسب‌تر می‌باشد در حالیکه در مورد جابه‌جایی شعاعی، استفاده از ماده با ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش مقادیر جابه‌جایی درون استوانه می‌شود. در مجموع می‌توان بیان داشت که اثر هر یک از بارگذاری‌های فشاری، دورانی و حرارتی در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات نهایی ظاهر می‌شود. بنابراین با استفاده از اصل جمع آثار می‌توان هر یک از این بارگذاری‌ها را به تنهایی در نظر گرفته و در نهایت نتایج بارگذاری ترکیبی از مجموع مقادیر جابه‌جایی و تنش حاصل از هر یک از این بارگذاری‌ها به تنهایی به دست خواهد آمد. در میان انواع بارگذاری، شار حرارتی بیشترین اثر را نسبت به دو بارگذاری دیگر داشته و کمترین تأثیر را دوران بر روی نتایج نهایی می‌گذارد. با توجه به آنچه در این فصل گفته شد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا (سوم) برای تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم تحت بارگذاری‌های حرارتی، دورانی و فشاری مناسب می‌باشد و نسبت به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول میزان دقت نتایج را به خصوص در بارگذاری حرارتی افزایش می‌دهد.

فصل ۶

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۶-۱ مقدمه

استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری، به دلیل مقاومت بالا در برابر انواع فشارهای داخلی و خارجی، نیروها و لنگرها، گرادیان دمایی و بارگذاری‌های متنوع دیگر کاربرد فراوانی در صنعت پیدا کرده‌اند. دستیابی به روش‌های مختلف تحلیل این گروه از پوسته‌ها با تغییرات هندسه، ماده و بارگذاری مورد علاقه‌ی پژوهشگران و نیاز صنعتگران می‌باشد. در همین راستا در این رساله سعی شده است تا با ارائه‌ی روش حل تحلیلی بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی برای استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت ثابت در حالت تقارن محوری تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی، بارگذاری دورانی شامل چرخش با سرعت ثابت و بارگذاری حرارتی به صورت شار حرارتی یکنواخت در جداره‌ی استوانه ناشی از گرادیان دما، اثر هریک از این بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلف بر روی مقادیر تنش و جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ای بررسی شود. همچنین قابلیت‌های تئوری تغییر شکل برشی و نکات قوت و ضعف آن بیان شده است. در این فصل ضمن جمع‌بندی کارهای صورت گرفته در این رساله، نتیجه‌گیری جامعی از مباحث مربوط به هر فصل صورت پذیرفته است و نهایتاً پیشنهادهایی برای ادامه و تکمیل کار نیز ارائه شده است.

۶-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

به طور کلی تحلیل استوانه‌های جدار کلفت (با جدار ثابت یا متغیر) در حالت متقارن محوری تحت انواع بارگذاری‌ها (شامل فشار محوری، فشار شعاعی، نیروهای دورانی، حرارتی و ...) با شرایط انتهایی مختلف با استفاده از اصل کار مجازی بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، منجر به دستگاه معادلات ناهمگن با مجهولاتی شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی می‌شود. وجود هرگونه غیریکنواختی در بارگذاری (فشار متغیر) و جداره‌ی پوسته (مخروط نقص، استوانه‌ی جدار متغیر و ...) و همچنین ایجاد مؤلفه‌ی محوری بارگذاری منجر به دستگاه معادلاتی با ضرایب متغیر می‌شود، در غیر اینصورت دستگاه معادلات

ناهمگن با ضرایب ثابت حاصل می‌شود. تعداد معادلات دستگاه حاصل وابسته به مرتبه‌ی تئوری تغییر شکل برشی مورد استفاده می‌باشد. استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی n منجر به یک دستگاه $2(n+1)$ معادله دیفرانسیل ناهمگن شامل $4(n+1)$ مجهول می‌شود. حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل با تکنیک به کار گرفته شده در این رساله برای ضرایب ثابت و یا استفاده از تئوری اغتشاشات برای ضرایب متغیر با اعمال شرایط مرزی، منجر به محاسبه‌ی ضرایب مجهول مربوط به مسائل مقدار ویژه و نهایتاً مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی می‌شود. مقادیر ویژه‌ی حاصل از حل معادله‌ی مشخصه‌ی مربوط به جواب عمومی دستگاه معادلات حاکم، به صورت جفت ریشه‌های مزدوج شامل مقادیر حقیقی و مختلط می‌باشند. استفاده از روابط سینماتیک، منجر به محاسبه‌ی مؤلفه‌های تانسور کرنش می‌شود؛ نهایتاً با استفاده از روابط رفتاری توزیع تنش در پوسته‌ی استوانه‌ای تعیین می‌شود. توجه به این نکته ضروری است که در استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، میدان جابه‌جایی به طور مستقیم محاسبه می‌شود، درحالی‌که مؤلفه‌های کرنش و تنش به طور غیر مستقیم با استفاده از روابط سینماتیک و رفتاری از میدان جابه‌جایی محاسبه شده به دست می‌آیند. در این میان مشتق‌گیری از میدان جابه‌جایی در روابط سینماتیک منشأ ایجاد خطا در محاسبه‌ی مقادیر کرنش و نهایتاً تنش می‌شود. با افزایش مرتبه‌ی تئوری تغییر شکل برشی، تقریب اولیه‌ی میدان جابه‌جایی بهبود یافته و منجر به نتایج دقیق‌تر می‌شود. در بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی و بارگذاری دورانی استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه‌ی اول دارای دقت قابل قبولی می‌باشد. در مورد بارگذاری‌های حرارتی در حالت گذرا و پایدار ناشی از شار حرارتی درون جسم، به دلیل دور شدن توزیع جابه‌جایی از حالت خطی و افزایش انحنای تابع متناظر با این توزیع، استفاده از تقریب خطی موجود در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول سبب افزایش اختلاف بین حل دقیق و حل تحلیلی مورد نظر می‌شود. افزایش جملات مراتب بالاتر در تئوری تغییر شکل برشی سبب نزدیک‌تر شدن توزیع جابه‌جایی حاصل از این تئوری به توزیع حقیقی موجود در سازه‌ی مورد نظر

شامل ورق، پوسته، تیر و ... می‌شود. در ادامه نتایج مربوط به انواع بارگذاری به طور مجزا بیان شده است.

حالت اوّل: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

همانطور که در فصل دوّم اشاره شد، در استوانه‌ی جدار کلفت با ضخامت ثابت، فشار داخلی یکنواخت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت و فشار خارجی یکنواخت نیز باعث ایجاد جابه‌جایی شعاعی منفی در استوانه می‌شود. استوانه تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت نیز که از برآیند دو بارگذاری شامل فشار داخلی و فشار خارجی حاصل می‌شود؛ با توجه به بزرگتر بودن مقادیر جابه‌جایی و تنش ناشی از فشار خارجی نسبت به فشار داخلی، دارای مقادیر جابه‌جایی منفی می‌باشد. برای استوانه تحت هر سه حالت بارگذاری، مواد ناهمگن با مقادیر ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش جابه‌جایی در استوانه نسب به ماده‌ی همگن می‌شود در حالیکه مقادیر ثابت ناهمگنی منفی باعث افزایش جابه‌جایی نسب به ماده‌ی همگن می‌شود. در مورد تنش محیطی نیز استفاده از مواد ناهمگن با ضریب ناهمگنی مثبت در استوانه تحت فشار داخلی و استوانه تحت فشار خارجی به دلیل کاهش تنش محیطی بیشینه مناسب‌تر می‌باشد. در مورد استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز استفاده از ماده‌ی همگن سبب کاهش تنش محیطی بیشینه نسبت به ماده‌ی ناهمگن می‌شود. در استوانه تحت فشار داخلی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و برشی و همچنین جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری کاهش می‌یابد. در مورد استوانه تحت فشار خارجی نیز به غیر از تنش برشی، بقیه‌ی موارد رفتار مشابهی دارند. برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی مقادیر تنش محیطی، تنش برشی و جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد، ولیکن در مورد جابه‌جایی محوری رفتاری مشابه دو بارگذاری دیگر نشان می‌دهد. شرایط انتهایی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد نسبت به حالت دوسر گیردار در انتهای گیردار آن تا نیمه‌ی استوانه به غیر از جابه‌جایی محوری تأثیر اندکی بر نتایج حاصل می‌گذارد و باعث می‌شود رفتار پوسته تا

نزدیکی انتهای آزاد مشابه رفتار آن در نقاط دور از مرز در طول استوانه باشد. در انتهای آزاد تغییر کمی در رفتار استوانه مشاهده می‌شود که تئوری تغییر شکل برشی و حلّ عددی این تغییرات را اندکی متفاوت پیش‌بینی می‌کنند. در مورد جابه‌جایی محوری نیز به دلیل عدم وجود قید در سمت آزاد استوانه، یک افزایش در مقدار جابه‌جایی محوری با حرکت به سمت آزاد استوانه مشاهده می‌شود. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه‌ی تحت فشار وجود دارد. این مطابقت در لایه‌ی میانی بیشتر و در لایه‌ی داخلی کمتر می‌باشد.

حالت دوم: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

با توجه با تأثیر بسیار کم بارگذاری دورانی برای سرعت‌های نه چندان زیاد، مشاهده می‌شود که رفتار استوانه تحت بارگذاری دورانی مشابه رفتار استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. به عبارت دیگر نتیجه-گیری‌های مربوط به فصل بارگذاری فشاری برای بررسی رفتار استوانه‌ی چرخان تحت فشار نیز صادق است. همانطور که در طول فصل سوم نیز اشاره شد، در استوانه‌ی جدار کلفت با ضخامت ثابت، چرخش سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی بسیار اندکی در حدود $0.7 \mu m$ برای سرعت دورانی 3600 rpm به‌ازای $n=1$ می‌شود. همچنین حداکثر مقدار تنش محیطی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت 3600 rpm کمتر از 5 MPa می‌باشد که این میزان در سطح داخلی بیشتر از سطح میانی می‌باشد. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار و دوران در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات حاکم ظاهر می‌شود، می‌توان برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌های دورانی و فشاری به طور جداگانه در نقش بردار نیرویی شامل نیروهای سطحی و حجمی در بردار ناهمگنی معادلات حاکم، نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه تحت بارگذاری‌های دورانی و فشاری وجود دارد. این مطابقت در لایه‌ی میانی بیشتر و

در لایه‌ی داخلی کمتر می‌باشد. با توجه به آنچه در این فصل گفته شد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم چرخان تحت بارگذاری فشاری مناسب می‌باشد.

حالت سوّم: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

با توجه به آنچه فصل چهارم بیان شد، استفاده از روش FSDT در تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل صرف نظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور و استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اول مناسب نمی‌باشد. در حقیقت با توجه به اینکه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول توزیع جابه‌جایی شعاعی را در طول جداره‌ی استوانه به صورت خطی در نظر می‌گیرد و توجه به این نکته که جابه‌جایی شعاعی در استوانه تحت بارگذاری حرارتی و فشاری دارای یک توزیع غیرخطی با انحنای زیادتر نسبت به استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای مناسب نمی‌باشد. در استوانه تحت شار حرارتی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و برشی و همچنین جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد؛ در حالیکه در استوانه تحت فشار داخلی، جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش پیدا می‌کنند. دلیل افزایش جابه‌جایی شعاعی در استوانه تحت بارگذاری حرارتی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی، افزایش مقدار z در رابطه‌ی مربوط به توزیع اختلاف دما و در نتیجه افزایش کرنش حرارتی می‌باشد. در محدوده لایه میانی رفتار ماده ناهمگن همانند رفتار ماده همگن می‌باشد که در استوانه تحت بارگذاری‌های حرارتی و فشاری این محدوده به سمت لایه‌ی بیرونی میل کرده در حالیکه در استوانه تحت فشار داخلی این محدوده به سمت لایه‌ی داخلی تمایل پیدا می‌کند. در نیمه‌ی داخلی استوانه مقادیر n مثبت و در نیمه‌ی خارجی مقادیر n منفی سبب کاهش تنش شده که با توجه به بزرگتر بودن تنش در لایه‌ی خارجی، استفاده از مواد ناهمگن با n های منفی بر

خلاف استوانه تحت بار فشاری به تنهایی مناسب‌تر می‌باشد. جابه‌جایی محوری نیز در بارگذاری حرارتی همانند بارگذاری فشاری از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. در بارگذاری حرارتی شرایط انتهایی تأثیر بیشتری نسبت به دو بارگذاری دیگر بر روی رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای می‌گذارد. مشاهده می‌شود که در نزدیکی انتهای آزاد استوانه برای این بارگذاری یک کاهش و سپس افزایش قابل ملاحظه در مقدار جابه‌جایی شعاعی رخ می‌دهد که حلّ عددی و تحلیلی رفتار مشابهی را پیش‌بینی می‌کنند. تنش محیطی نیز به طور مشابه در سمت آزاد استوانه نسبت به مقدار متوسط موجود در طول استوانه در هر لایه کاهش و سپس افزایش می‌یابد. جابه‌جایی شعاعی، تنش محیطی و تنش برشی پوسته‌ی استوانه‌ای تحت شرایط انتهایی یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد، در طول استوانه تا نزدیکی انتهای آزاد آن و نیز در سمت گیردار استوانه مشابه استوانه‌ی دوسر گیردار می‌باشد. جابه‌جایی محوری با اندکی فاصله از انتهای گیردار در طول استوانه تحت تأثیر قیود موجود در سمت گیردار آن برای بارگذاری حرارتی و فشاری دارای مقادیر مثبت می‌باشد که این مقادیر برای لایه‌های مختلف یکسان است. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار و شار حرارتی در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات حاکم ظاهر می‌شود، می‌توان برای استوانه‌ی تحت فشار و شار حرارتی یکنواخت با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌های حرارتی و فشاری به طور جداگانه و حلّ معادلات حاکم، نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود که در این میان بارگذاری حرارتی نقش غالب را دارد. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه تحت بارگذاری‌های حرارتی و فشاری به غیر از لایه‌ی میانی استوانه وجود ندارد. اختلاف موجود بین نتایج عددی و تحلیلی در لایه‌ی داخلی به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

حالت چهارم: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

همانطور که اشاره شد در اطراف لایه‌ی میانی روش FSDT از دقت مطلوبی برخوردار می‌باشد، ولیکن

در لایه‌های داخلی و خارجی از توزیع پیش‌بینی شده توسط روش PET فاصله می‌گیرد. این مسئله در مورد استوانه تحت بارگذاری حرارتی تشدید می‌شود؛ دلیل این امر فاصله گرفتن توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداری استوانه از حالت خطی و افزایش انحنای آن می‌باشد. در حقیقت تقریب یک تابع هذلولوی با یک توزیع خطی منشأ خطا می‌باشد. در حالیکه در روش HSDT با در نظر گرفتن یک توزیع چند جمله‌ای برای جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری، این تقریب بهبود بخشیده می‌شود. در حقیقت اضافه کردن هر یک از عبارت‌های $z^i u_i$ و $z^i w_i$ به جابه‌جایی‌های لایه میانی یعنی u_0 و w_0 در مولفه‌های میدان جابه‌جایی، سبب نزدیکتر شدن توزیع حاصل از تئوری تغییر شکل برشی به حل دقیق حاصل از تئوری الاستیسیته می‌شود. این افزایش دقت در محاسبه‌ی جابه‌جایی‌های محوری و شعاعی سبب بهبود مقادیر تنش محیطی نیز می‌شود. دلیل این امر محاسبه‌ی مؤلفه‌های جابه‌جایی به طور مستقیم و با حل دستگاه معادلات حاکم و سپس محاسبه‌ی کرنش از روی مقادیر حاصل و نهایتاً به دست آوردن مقادیر تنش می‌باشد. در بارگذاری حرارتی مشاهده می‌شود که جابه‌جایی شعاعی به‌ازای n ‌های مختلف از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی در حال افزایش می‌باشد. سپس در نیمه‌ی خارجی جداری استوانه، جابه‌جایی شعاعی از نزدیکی لایه‌ی میانی تا لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. مقدار حداکثر جابه‌جایی در طول جداری استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی ماده به سمت لایه‌ی خارجی میل می‌کند. با توجه به نتایج حاصل در بارگذاری ترکیبی، استفاده از ماده‌ی ناهمگن با ثابت ناهمگنی منفی که سبب کاهش تنش محیطی بیشینه‌ی در استوانه می‌شود، نسبت به ماده‌ی همگن مناسب‌تر می‌باشد در حالیکه در مورد جابه‌جایی شعاعی، استفاده از ماده با ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش مقادیر جابه‌جایی درون استوانه می‌شود. در مجموع می‌توان بیان داشت که اثر هر یک از بارگذاری‌های فشاری، دورانی و حرارتی در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات نهایی ظاهر می‌شود. بنابراین با استفاده از اصل جمع آثار می‌توان هر یک از این بارگذاری‌ها را به تنهایی در نظر گرفته و نهایتاً نتایج بارگذاری ترکیبی از مجموع مقادیر جابه‌جایی و تنش

حاصل از هر یک از این بارگذاری‌ها به تنهایی به دست خواهد آمد. در میان انواع بارگذاری، شار حرارتی بیشترین اثر را نسبت به دو بارگذاری دیگر داشته و کمترین تأثیر را دوران بر روی نتایج نهایی می‌گذارد. با توجه به آنچه در این فصل گفته شد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا (سوّم) برای تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم تحت هریک از بارگذاری‌های حرارتی، دورانی و فشاری مناسب می‌باشد و نسبت به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل میزان دقت نتایج را به خصوص در بارگذاری حرارتی افزایش می‌دهد و با حرکت از لایه‌ی میانی به سمت لایه‌های داخلی و خارجی، این کاهش خطا ملموس‌تر می‌باشد.

۳-۶ پیشنهادها

با توجه به کارهایی که در گذشته در رابطه با موضوع این رساله انجام شده و آنچه در این پژوهش ارائه شد، می‌توان دریافت که تئوری تغییر شکل برشی دارای قابلیت بسیار فراوانی در تحلیل مسائلی است که تئوری‌های کلاسیک قادر به حل آنها نمی‌باشند. به همین منظور جهت تکمیل این بررسی‌ها و استفاده از قابلیت‌های موجود در روش انرژی با توجه به کاربرد وسیع و متنوع پوسته‌های استوانه‌ای پیشنهادات زیر ارائه می‌گردد:

۱- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری‌های محوری، خمشی، پیچشی و برشی با استفاده از

تئوری تغییر شکل برشی

۲- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای در حالت نامتقارن محوری از نظر هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی با

استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

۳- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار متغیر در طول استوانه با استفاده از تئوری تغییر شکل

برشی

۴- بررسی پوسته‌های استوانه‌ای تحت توزیع دمای گذرا با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

۵- تحلیل پلاستیک پوسته‌های استوانه‌ای با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

۶- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای با تغییرات نمایی خواص با استفاده از تئوری‌های کلاسیک

۷- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای با مقاطع بیضوی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی در دستگاه

بیضی‌گون

۸- بهینه‌سازی پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن با کنترل میزان تنش و تغییر شکل‌های پلاستیک با

استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

- [1] Flugge W. (1973) "**Stresses in Shells**" 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.
- [۲] یوگورال ای. سی. (۱۳۷۵)، "تنش در ورق‌ها و پوسته‌ها"، ترجمه‌ی غلامحسین رحیمی، چ اول، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، دانشگاه تهران
- [3] Timoshenko S.P. & Goodier J.N.(1983) "**Theory of Elasticity**" 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
- [4] Naghdi P.M. & Cooper R.M. (1956) "Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia" **J. Acoustical Sci. America**, **28**, 1, pp 56-63.
- [5] Mirsky I. & Hermann G.(1958) "Axially motions of thick cylindrical shells" **J. Appl. Mech.** **25**, pp 97-102.
- [6] Greenspon J.E.(1960) "Vibration of a thick-walled cylindrical shell, comparison of the exact theory with approximate theories" **J. Acoustical Sci. America** **32**, 5, pp 571-578.
- [7] Timoshenko S.P.(1976) "**Strength of Materials: Part II (Advanced Theo. and Prob.)**" 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York.
- [8] Mindlin R.D.(1951) "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates" **J. Appl. Mech.**, **18**, pp 31-38.
- [9] Lekhnitskii S.G.(1981) "Theory of Elasticity of An Anisotropic Body" Mir Pub., Moscow.
- [10] Suresh S. & Mortensen A.(1998) "**Fundamentals of Functionally Graded Materials**" Cambridge Pub., London.
- [11] Koizumi M. & Niino M.(1995) "Overview of FGM research in Japan, **MRS Bulletin**" **20**, pp 19-21.
- [12] Koizumi M.(1997) "**FGM activities in Japan, Composites: Part B(Engineering)**" **28B**, pp 1-4.
- [13] Koizumi M.(1993) "**The concept of FGM, Ceramic Transactions Functionally Graded Material**" **34**, pp 3-10.

- [14] Obata Y. & Noda N.(1994) "Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material" *J. Thermal Stresses*, 17, pp 471-487.
- [15] Horgan C.O. & Chan A.M.(1999) "The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials" *J. Elasticity*, 55, pp 43-59.
- [16] Yang Y.Y.(2000) "Time-dependet stress analysis in functionally graded materials" *Int. J. Solids and Struc.*, 37, pp 7593-7608.
- [17] Tutuncu N. & Ozturk M.(2001) "Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels" *J. Composites: Part B(Engineering)*, 32B, pp 683-686.
- [18] Tarn J.Q.(2001); Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads" *Int. J. Solds and Struc.*, 38, pp 9189-8206.
- [19] Jabbari M. & Sohrabpour S. & Eslami M.R.(2002) "Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads" *Int. J. Pressure Vessel and Piping*, 79, pp 493-497.
- [20] Eraslan A.N. & Akis T.(2006) "On the plain strain and plane stress solution of functionally graded solid shaft and solid disk problems" *J. Acta Mechanica*, 181, pp 43-63.
- [21] Hongjun X. & Zhifei S. & Taotao Z.(2007) "Elastic analysis of heterogeneous elastic hollow cylinders" *J. Composite Struc.*, 79, pp 140-147.
- [22] Praveen G.N. & Reddy J.N.(1998) "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded Ceramic-Metal plates" *Int. J. Solids and Struc.* 35, pp 4457-4476.
- [23] Tutuncu N. & Temel B.(2009) "A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres" *J. Composite Struc.*, 91, pp 385-390.
- [24] Shao Z.S. & Ma G.W.(2008) "Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature" *J. Composite Struc.*, 83, pp 259-265.
- [25] Tutuncu N.(2007) "Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties" *J. Eng. Struc.*, 29, pp 2032-2035.
- [26] Keles & Conker C.(2011) "Transient hyperbolic heat condition in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties" *European Journal of Mechanics A/Solids*, 30, pp 449-455.

- [27] Ziv M. & Perl M.(1973) "Impulsive deformation of Mirsky-Hermann's thick cylindrical shells by a numerical methods" *J. Appl. Mech.*, pp **1009-1016**.
- [28] Suzuki K. & Konnon M. & Takahashi S.(1981) "Axisymmetric vibration of a cylindrical shell with variable thickness" *JSME*, **24**, **198**, pp **2122-2132**.
- [29] Takahashi S. & Suzuki K. & Kosawada T.(1986) "Vibrations of conical shells with variable thickness" *JSME*, **29**, **285**, pp **4306-4311**.
- [30] Eipakchi H.R. & Rahimi G.H. & Esmailzadeh Kh., S.(2003) "Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to nonuniform internal pressure" *Struc. Eng. and Mech.*, **16**, **6**, pp **731-748**.
- [31] Eipakchi H.R. & Esmailzadeh Kh. S. & Rahimi G.H.(2008) "Axisymmetric stress analysis of a thick conical shell with varying thickness under nonuniform internal pressure" *J. Eng. Mech. ASCE*, **134**, **8**, pp **601-610**.
- [32] Ghannad M. & Zamani Nejad M. & Rahimi G.H.(2009) "Elastic solution of axisymmetric thick truncated conical shells based on first-order shear deformation theory" *J. Mechanika*, **5**, **79**, pp **13-20**.
- [33] Ghannad M. & Zamani nejad M.(2010) "Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clamped ends" *J. Mechanika*, **5**, **85**, pp **11-18**.
- [34] Eipakchi H.R.(2010) "Third-order shear deformation theory for stress analysis of a thick conical shell under pressure" *J. OF Mechanics OF Materials and Structures*, **1**, **5**, pp **1-17**.
- [35] Fukui Y. & Yamanaka N.(1992) "Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded materials subjected to internal pressure" *JSME, Ser. I*, **35**, **4**, pp **891-900**.
- [36] Loy C.T. & Lam K.Y. & Reddy J.N.(1999) "Vibration of functionally graded cylindrical shells" *Int. J. Mech. Sci.*, **41**, pp **309-324**.
- [37] Horgan C.O. & Chan A.M.(1999) "The stress response of functionally graded isotropic linearly rotating disks" *J. Elasticity*, **55**, pp **219-230**.
- [38] Jabbari M. & Sohrabpour S. & Eslami M.R.(2003) "General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads" *J. Appl. Mech.*, **70**, pp **111-118**.

[39] Zhifei S. & Taotao Z. & Hongjun X.(2007) "Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders" *J. Composite Struc.*, 79, pp 140-147.

[40] Zamani Nejad M. & Rahimi G.H. & Ghannad M.(2009) "Set of field equations for thick shell of revolution made of functionally graded materials in curvilinear coordinate system" *J. Mechanika*, 3, 77, pp 18-26.

[۴۱] قناد م.، رحیمی غ. و اسماعیلزاده خادم س.، پاییز ۱۳۸۹ "حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی"، *مجله فنی و مهندسی مدرس-مهندسی مکانیک*، جلد ۱۰، شماره ۳، ص ۳۱-۴۱.

[۴۲] قناد م.، رحیمی غ. و اسماعیلزاده خادم س.، زمستان ۱۳۸۹ "حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی"، *مجله فنی و مهندسی مدرس-مهندسی مکانیک*، جلد ۱۰-شماره ۴، ص ۱۳-۲۵.

[43] Arefi M. & Rahimi G.H.(2010) "Thermo elastic analysis of a functionally graded cylinder under internal pressure using first order shear deformation theory" *J. Scientific Research and Essays*, 5, 12, pp 1442-1454.

[44] Ghorbanpour Arani A. & Kolahchi R. & Mosallaie Barzoki A.A.(2011) "Effect of material in-homogeneity on elec. thermo-mechanical behaviors of functionally graded piezoelectric rotating shaft" *J. Applied Mathematical Modelling*, 6, 35, pp 2771-2789.

[45] Vlachoutsis S.(1992) "Shear correction factors for plates and shells" *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 33, pp 1537-1552.

[46] Wylie C.R.(1979) "*Differential Equations*" McGraw-Hill, New York.

[47] Wylie C.R. & Barrett L.C.(1995) "*Advanced Engineering Mathematics*" 6th ed., McGraw-Hill, New York.

[48] Fogiel M.(1992) "*The Differential Equations Problem Solver, Research & Education Association*" New Jersey.

[49] Heck A.(2003) "*Introduction to Maple*", 3rd ed., Springer, New York.

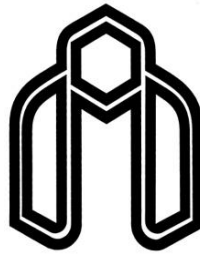
[۵۰] جاهد مطلق، ح.، نوبان م.ر. و اشراقی م.ا.، (۱۳۸۳)، "اجزای محدود ANSYS مرکز انتشارات دانشگاه تهران"، چاپ دوم، تهران.

[۵۱] قتّاد م. و قارونی ح.، اردیبهشت ۱۳۹۰، "کمانش ورق مستطیلی FGM با روش تئوری تغییر شکل
برشی مرتبه سه"، نوزدهمین همایش سالانه مهندسی مکانیک ایران، بیرجند.

Abstract:

The aim of this study is to investigate and modeling the associated stress and displacement of thick walled heterogeneous cylinder under mechanical and thermal loading. The governing equation of the thick cylinders have been extracted using energy method for exponentially varying properties of material under internal and external pressure, the solution of the final equation has been indicated and by case study, results and graphs of the stress and displacement distribution for different boundary conditions have been indicated. For investigating the accuracy of results conducted from analytical solution, the numerical modeling of cylinder has been done and the results of two methods compare. Also, for elastic analysis of rotary cylindrical shells, by doing general solution of the cylinders under pressure loading, stress and displacement distribution for different B.C has been indicated and the results compared with that of analytical solution. Furthermore, thermo-elastic analysis of the cylindrical shells under pressure and uniform heat flux for different boundary conditions have been conducted and comparing the results with that of numerical shows that FSDT is not efficient on thermo elastic analysis. So for analysis of cylinders under mechanical, rotational and thermal loading, third order shear deformation theory has been used. Comparison of the numerical modeling with that of analytical shows an acceptable agreement between outcomes of these two methods. Finally conclusion, discussion and suggestion have been indicated.

Key words: Thick cylinders, Shear deformation theory, Analytical solution, Exponentially varying properties, FGM, FEM.



Shahrood University of Technology

Faculty Mechanic Engineering

**Thermoelastic analysis of functionally graded rotating
thick cylinders with exponentially-varying elasticity
modulus using first order shear deformation theory**

Hamed Gharooni

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

Feb 2012