

الحمد لله الذي
خلقنا من
الحمم



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک
رساله دکتری مهندسی طراحی کاربردی

توسعه روش محاسباتی ربات‌های انعطاف‌پذیر بر مبنای ماتریس انتقال گسسته برای تغییر شکل‌های بزرگ

نگارنده:

مهدی فیض‌اله‌زاده

استاد راهنما:

دکتر مهدی بامداد

شهریور ۱۴۰۰



مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره: ۲۳۲ / ۲۴۰۰ / ۱۳
تاریخ: ۱۴۰۰ / ۱۲ / ۱۶
ویرایش:

پیوست شماره ۲

دانشکده: مهندسی مکانیک و الکترونیک

گروه: طراحی کاربردی

رساله دکتری آقای مهدی فیض اله زاده

تحت عنوان: توسعه روش محاسباتی ربات‌های انعطاف‌پذیر بر مبنای ماتریس انتقال گسسته برای تغییر شکل‌های بزرگ

در تاریخ: ۱۴۰۰/۰۶/۳۱ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک رساله دکتری ارزیابی گردید و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

اعضا	اساتید مشاور	اعضا	اساتید راهنما
-	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر مهدی بامداد
-	نام و نام خانوادگی:	-	نام و نام خانوادگی:

اعضا	نماینده تحصیلات تکمیلی	اعضا	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی: دکتر سید علی مینا		نام و نام خانوادگی: دکتر حمیدرضا ایبک چی
			نام و نام خانوادگی: دکتر محسن ایرانی
			نام و نام خانوادگی: دکتر امین نیکوبین

سپاس خدایی را که باران بی حساب رحمتش همواره شامل بندگان بوده است.

با احترام فراوان

از پدر بزرگوار و مادر مهربانم، که همواره در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاورم بوده‌اند، و به خاطر تمام محبت‌ها و حمایت‌های بی‌دریغشان، کمال تشکر و قدردانی را دارم. هر چند دین من به این دو عزیز بیش از آن است که قابل بیان باشد و هرچه در سپاس‌گزاری از ایشان گفته شود قطعاً ناقص و نارسا است.

و از همسر مهربانم که در تمام طول تحصیل همراه و همگام من بوده تشکر می‌کنم. همچنین از زحمات همه‌ی اساتید بزرگوارم، به ویژه جناب آقای دکتر مهدی بامداد که صبورانه راهنمایم بودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم و از خداوند منان برایشان توفیق روز افزون مسئلت می‌نمایم.

تعمدنامه

اینجانب مهدی فیض‌اله‌زاده دانشجوی دوره دکتری رشته مهندسی طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه توسعه روش محاسباتی ربات‌های انعطاف‌پذیر بر مبنای ماتریس انتقال گسسته برای تغییر شکل‌های بزرگ تحت راهنمایی دکتر مهدی بامداد متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود . استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

هدف از این رساله، تدوین روش عمومی مناسب جهت مدل سازی دینامیکی ربات های انعطاف پذیر صفحه ای بر مبنای روش ماتریس انتقال است. روش ماتریس انتقال روشی ساده و درعین حال با دقت قابل قبول است که برای مدل سازی و تحلیل های دینامیکی استفاده می شود. بر این مبناء، ابتدا پیشینه تحقیق، محدودیت ها و مشکلات عددی در روش ماتریس انتقال مورد بررسی قرار می گیرد. سپس در یک مطالعه موردی، مشکلات عددی برای ربات انعطاف پذیر مورد توجه قرار می گیرد. برای حذف مشکلات و محدودیت های این روش در حوزه رباتیک، روش ماتریس انتقال گسسته ریکاتی ارائه می گردد. در همین راستا روش مورد نظر روی چندین نمونه مورد مطالعه شامل تیر یک سر گیردار با تغییر شکل بزرگ، ربات دو لینکی با مفاصل دورانی، ربات دو لینکی PR و یک ربات سه لینکی PRR پیاده سازی می شود. نتایج حاصل از الگوریتم بیان شده با استفاده از نرم افزار تجاری ADAMS و تحقیقات سایر نویسندگان مورد مقایسه قرار می گیرد. در انتها، نمونه آزمایشگاهی یک ربات انعطاف پذیر با دو مفصل دورانی و کشویی با استفاده از روش بیان شده، مدل سازی شده و نتایج عملی تحلیل می شود. مقایسه نتایج رساله حاضر با سایر نتایج نشان می دهد که روش ماتریس انتقال ریکاتی بهبود داده شده، می تواند روشی با دقت مناسب و حجم محاسبات پایین، جهت مدل سازی دینامیکی ربات های انعطاف پذیر با تغییر شکل های بزرگ مورد استفاده قرار گیرد.

کلمات کلیدی: روش ماتریس انتقال، ربات انعطاف پذیر، تغییر شکل بزرگ، گسسته سازی، روش ریکاتی، نرم افزار تجاری ADAMS

Vibration analysis of rotating beam with variable cross section using Riccati transfer matrix method

M Feyzollahzadeh, M Bamdad

Structural Engineering and Mechanics 70 (2), 199-207

A modified transfer matrix method to reduce the calculation time: A case study on beam vibration

M Feyzollahzadeh, M Bamdad

Applied Mathematics and Computation 378, 125238

Computational efficient discrete time transfer matrix method for large deformation analysis of flexible manipulators

M Bamdad, M Feyzollahzadeh

Mechanics Based Design of Structures and Machines, 1-23

فهرست مطالب

۱	فصل ۱ مقدمه
۲	۱-۱. مقدمه
۲	۲-۱. تشریح موضوع
۲	۳-۱. اهمیت رساله
۷	۴-۱. نوآوری‌ها
۸	۵-۱. مراحل تحقیق
۱۰	۶-۱. ساختار رساله
۱۱	فصل ۲ الگوریتمی برای کاهش حجم محاسبات در روش ماتریس انتقال
۱۲	۱-۲. مقدمه
۱۲	۲-۲. مطالعه موردی : تعیین فرکانس‌های طبیعی در یک تیر دوار
۱۳	۲-۲-۲. مدل‌سازی به روش ماتریس انتقال
۱۵	۳-۲-۲. اعمال شرایط مرزی
۱۶	۴-۲-۲. تعیین فرکانس‌های طبیعی با مقادیر عددی
۲۲	۳-۲. الگوریتم پیشنهادی
۲۴	۲-۳-۲. پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی
۲۵	۳-۳-۲. مقایسه حجم محاسبات
۲۷	فصل ۳ بهبود الگوریتم پیشنهادی بر پایه ماتریس انتقال ریکاتی
۲۸	۱-۳. مقدمه
۲۸	۲-۳. ماتریس انتقال ریکاتی
۲۹	۳-۳. بهبود الگوریتم
۳۰	۴-۳. نتایج عددی
۳۳	فصل ۴ بهبود روش ماتریس انتقال گسسته ریکاتی
۳۴	۱-۴. مقدمه
۳۵	۲-۴. بهبود روش ماتریس انتقال ریکاتی در بعد مکان
۳۶	۳-۴. بهبود روش ماتریس انتقال ریکاتی در بعد زمان
۳۸	۴-۴. تعیین ماتریس‌های انتقال
۳۸	۱-۴-۴. معادلات حرکت المان صلب
۴۰	۲-۴-۴. معادلات مفصل انعطاف‌پذیر، بارهای خارجی متمرکز و جرم متمرکز
۴۲	۳-۴-۴. معادلات موتور محرک
۴۳	۴-۴-۴. تعیین ماتریس‌های انتقال
۴۷	۵-۴. مطالعات عددی

- ۴-۵-۱. پاسخ اجباری تیر اویلر برنولی خطی..... ۴۷
- ۴-۵-۲. پاسخ اجباری تیر با تغییر شکل بزرگ..... ۵۰
- ۴-۵-۳. یک ربات دو لینکی روی مسیر حلزونی..... ۵۵

فصل ۵ نتایج آزمایشگاهی

۵۹

- ۵-۱. مقدمه ۶۰
- ۵-۲. ربات انعطاف پذیر PR ۶۰
- ۵-۳. ربات PRR با مفصل انعطاف پذیر ۶۴
- ۵-۴. مدل سازی مورد آزمایشگاهی ۶۷
- ۵-۴-۱. آشنایی با مورد آزمایشگاهی..... ۶۷
- ۵-۴-۲. ساختار انجام آزمایش..... ۶۸
- ۵-۴-۳. مدل سازی و استخراج مدل فیزیکی ماهیچه مصنوعی و فنر..... ۷۰
- ۵-۴-۴. مدل سازی در ADAMS..... ۷۲
- ۵-۴-۵. مدل سازی به روش ماتریس انتقال..... ۷۳
- ۵-۴-۶. اندازه گیری موقعیت مجری نهایی با استفاده از IDynamics App..... ۷۴
- ۵-۴-۷. بررسی نتایج عددی آزمایش..... ۷۵

فصل ۶ نتیجه گیری

۷۹

- جمع بندی ۸۰
- پیشنهادهای برای کارهای آینده ۸۰
- پیوست الف: کتابخانه ماتریس های انتقال ۸۲
- پیوست ب: نمونه های از کاربرد کتابخانه ماتریس های انتقال برای یک ربات دو لینکی ۸۴

فهرست اشکال

- شکل ۱-۲. نمایشی از یک تیر دوار و تغییر شکل آن در حین دوران ۱۳
- شکل ۲-۲. مدل سازی بازوی دوار به روش ماتریس انتقال ۱۵
- شکل ۳-۲. ترسیم خطای نسبی بر حسب تعداد المان ها در فرکانس طبیعی اول ۲۰
- شکل ۴-۲. ترسیم خطای نسبی بر حسب تعداد المان ها در فرکانس طبیعی دوم ۲۱
- شکل ۵-۲. ترسیم خطای نسبی بر حسب تعداد المان ها در فرکانس طبیعی سوم ۲۱
- شکل ۶-۲. ترسیم بزرگنمایی بخشی از شکل ۶ ۲۲
- شکل ۷-۲. الگوریتم کاهش حجم محاسبات ۲۳
- شکل ۸-۲. حجم محاسبات بر حسب تعداد المان ها ۲۶
- شکل ۱-۳. بهبود الگوریتم پیشنهادی ۳۰
- شکل ۲-۳. رسم معادله فرکانسی در دور پایین ($\lambda=12$) ۳۱
- شکل ۳-۳. رسم معادله فرکانسی در دور متوسط ($\lambda=50$) ۳۱
- شکل ۴-۳. رسم معادله فرکانسی در دور بالا ($\lambda=100$) ۳۲
- شکل ۵-۳. مقایسه حجم محاسبات برای سه روش ماتریس انتقال سنتی، ماتریس انتقال بهبود یافته و ماتریس انتقال ریکاتی بهبود یافته ۳۲
- شکل ۱-۴. گسسته سازی لینک انعطاف پذیر ۳۶
- شکل ۲-۴. انتخاب مقادیر مناسب پارامترهای کنترلی در روش ژو ۳۸
- شکل ۳-۴. نمایشی از المان صلب ۳۹
- شکل ۴-۴. نیرو و گشتاورهای وارد بر المان صلب در مدل غیرخطی ۴۰
- شکل ۵-۴. الف) نیرو و گشتاورهای خارجی متمرکز وارد بر المان بدون جرم، ب) نیرو و گشتاورهای اعمالی به المان جرم متمرکز ۴۱
- شکل ۶-۴. الف) نمایشی از یک ربات با موتور محرک خطی و دورانی، ب) مدل سازی موتور محرک ۴۲
- شکل ۷-۴. الف) مدل سازی موتور محرک دورانی، ب) مدل سازی موتور محرک خطی ۴۳
- شکل ۸-۴. مشخصات ابعادی و فیزیکی تیر یک سر گیردار ۴۸
- شکل ۹-۴. تاریخچه زمانی جابجایی انتهای تیر ۴۹
- شکل ۱۰-۴. اختلاف تاریخچه زمانی در روش ماتریس انتقال نسبت به حل تحلیلی ۴۹
- شکل ۱۱-۴. تاریخچه زمانی جابجایی در مقادیر مختلف α ۵۰
- شکل ۱۲-۴. مقایسه تئوریهای کلاسیک و تئوری غیرخطی تیرها ۵۱
- شکل ۱۳-۴. مدل سازی تیر در نرم افزار ADAMS ۵۱
- شکل ۱۴-۴. تاریخچه زمانی جابجایی ۵۲
- شکل ۱۵-۴. تاریخچه زمانی جابجایی در مقادیر مختلف α ۵۳
- شکل ۱۶-۴. تاثیر پارامتر α در حداکثر جابجایی ۵۴
- شکل ۱۷-۴. مقایسه حجم محاسبات در مدل ارائه شده و مدل سنتی ۵۴
- شکل ۱۸-۴. مسیر حلزونی حرکت ربات ۵۶

شکل ۴-۱۹. موقعیت مجری نهایی	۵۶
شکل ۴-۲۰. مسیر حرکت مجری نهایی	۵۷
شکل ۴-۲۱. موقعیت مجری نهایی (انعطاف پذیری در مفصل اول)	۵۷
شکل ۴-۲۲. موقعیت مجری نهایی (انعطاف پذیری در مفصل دوم)	۵۸
شکل ۴-۲۳. موقعیت مجری نهایی (انعطاف پذیری در هر دو مفصل)	۵۸
شکل ۵-۱. نمایی از ربات PR در حرکت از مسیر P1 به P2	۶۰
شکل ۵-۲. مدل سازی ربات PR با استفاده از روش ماتریس انتقال	۶۲
شکل ۵-۳. موقعیت مجری نهایی در ضخامت های مختلف	۶۲
شکل ۵-۴. مسیر حرکت مجری نهایی در ضخامت های مختلف (m)	۶۳
شکل ۵-۵. موقعیت مجری نهایی در زمان های مختلف (الف) زمان ۲۰ ثانیه، (ب) زمان ۱۵ ثانیه، (ج) زمان ۱۰ ثانیه	۶۴
شکل ۵-۶. نمایی از ربات PRR و مسیر حرکت	۶۵
شکل ۵-۷. نمایی از ربات PRR و مسیر حرکت	۶۵
شکل ۵-۸. خطای مجری نهایی نسبت به ربات با مفصل صلب (انعطاف پذیری در مفصل اول)	۶۶
شکل ۵-۹. خطای مجری نهایی نسبت به ربات با مفصل صلب (انعطاف پذیری در مفصل دوم)	۶۶
شکل ۵-۱۰. خطای مجری نهایی نسبت به ربات با مفصل صلب (انعطاف پذیری در مفصل سوم)	۶۶
شکل ۵-۱۱. نمایی از مورد آزمایشگاهی	۶۸
شکل ۵-۱۲. ساختار انجام آزمایش	۶۹
شکل ۵-۱۳. مدل سازی مورد آزمایشگاهی	۷۰
شکل ۵-۱۴. دیاگرام آزاد مجموعه ماهیچه و فنر	۷۱
شکل ۵-۱۵. نمودار جابجایی ماهیچه بر حسب فشار	۷۲
شکل ۵-۱۶. مدل سازی مورد آزمایشگاهی در نرم افزار ADAMS	۷۳
شکل ۵-۱۷. مدل سازی مدل سازی مورد آزمایشگاهی به روش ماتریس انتقال	۷۴
شکل ۵-۱۸. محیط نرم افزار IDynamics [۶۴]	۷۵
شکل ۵-۱۹. (الف) فشار ورودی ماهیچه مصنوعی، (ب) ولتاژ ورودی شیر کنترل فشار، (ج) زاویه دوران لینک انعطاف پذیر	۷۶
شکل ۵-۲۰. اندازه گیری موقعیت مجری نهایی با استفاده از IDynamics	۷۷
شکل ۵-۲۱. مقایسه جابجایی انتهای لینک در چهار حالت مختلف	۷۸
شکل ۵-۲۲. مقایسه نتایج حاصل از نرم افزار IDynamics و یک سنسور دقیق برای یک نمونه خاص [۶۴]	۷۸

فهرست جداول

- جدول ۱-۱. روشهای ارائه شده جهت حذف محدودیتها و مشکلات عددی در روش ماتریس انتقال .. ۹
- جدول ۱-۲. تعیین فرکانس طبیعی اول بازوی دوار با استفاده از روش ماتریس انتقال و مقایسه آن با
 نتایج پیشین ۱۷
- جدول ۲-۲. تعیین فرکانس طبیعی دوم بازوی دوار با استفاده از روش ماتریس انتقال و مقایسه آن با
 نتایج پیشین ۱۷
- جدول ۳-۲. تعیین فرکانس طبیعی سوم بازوی دوار با استفاده از روش ماتریس انتقال و مقایسه آن با
 نتایج پیشین ۱۷
- جدول ۴-۲. تعیین فرکانس طبیعی اول بازوی دوار با سطح مقطع متغیر و مقایسه با نتایج پیشین... ۱۸
- جدول ۵-۲. تعیین فرکانس طبیعی دوم بازوی دوار با سطح مقطع متغیر و مقایسه با نتایج پیشین .. ۱۹
- جدول ۶-۲. تعیین فرکانس طبیعی سوم بازوی دوار با سطح مقطع متغیر و مقایسه با نتایج پیشین. ۱۹
- جدول ۷-۲. خطای نسبی روش ماتریس انتقال نسبت به [۶۱] ۱۹
- جدول ۸-۲. مشخصات سختافزاری و نرمافزاری رایانه مورد استفاده ۲۶
- جدول ۵-۱. جابجایی ماهیچه در فشارهای مختلف ۷۲
- جدول پ-۱: کتابخانه ماتریس انتقال برای یک ربات دو لینکی در شرایط مختلف ۸۴

فصل ۱

مقدمه

۱-۱. مقدمه

ربات‌های صنعتی معمولاً به گونه‌ای طراحی می‌شوند که بیشترین سفتی را داشته باشند. این امر موجب افزایش توانایی حمل بار و کاهش تغییر شکل در بازوهای ربات شده و در این حالت استفاده از بازوان صلب امکان حرکت دقیق در مسیر موردنظر را فراهم می‌کند. از طرف دیگر، استفاده متداول از مواد سنگین و ابعاد بزرگ در ربات‌های صلب منجر به محدود شدن سرعت عملکرد ربات، افزایش ابعاد عملگرها و مصرف بالای انرژی می‌شود. ربات‌های انعطاف‌پذیر در بسیاری از کاربردها همچون سرعت-های بالا، قابلیت مانور بالا و محدودیت‌های مصرف انرژی کاربرد ویژه‌ای پیدا می‌کند [۱، ۲]. ربات‌های انعطاف‌پذیر که در مقایسه با نوع صلب مزایایی چون وزن کم‌تر، محرک‌های کوچک‌تر، انرژی مصرفی و هزینه ساخت پایین‌تر دارند، مورد توجه بسیاری از محققان بوده‌اند [۳].

۱-۲. تشریح موضوع

ربات‌های انعطاف‌پذیر را می‌توان در دو دسته ربات‌ها با تغییر شکل‌های کوچک و با تغییر شکل-های بزرگ تقسیم‌بندی کرد. تغییر شکل‌های کوچک، در ربات‌هایی ایجاد می‌شود که معمولاً بازو با هدف داشتن تغییر شکل ساخته نمی‌شوند، اما با توجه به پروفیل هندسی بازو، شرایط کاری و بار وارده، تغییر شکل‌هایی ناچیز در بازوی ربات ایجاد می‌شود. در این حالت عموماً معادلات دیفرانسیل حرکت معادلاتی خطی خواهند بود. از طرفی ربات‌های با تغییر شکل زیاد، ربات‌هایی هستند که با هدف داشتن تغییر شکل در بازو طراحی و ساخته می‌شوند و یا شرایط کاری ربات موجب محدود شدن ابعاد و جرم بازو می‌شود. در این حالت انعطاف‌پذیری بالا در بازوی ربات و یا بارهای خارجی موجب تغییر شکل‌های بزرگ می‌شود که در این حالت معادلات دیفرانسیل حرکت معمولاً غیرخطی و پیچیده خواهد بود. در این رساله، هدف تدوین روشی محاسباتی برای حل دینامیک ربات‌های انعطاف‌پذیر با تغییر شکل‌های بزرگ می‌باشد.

۱-۳. اهمیت رساله

ربات‌های انعطاف‌پذیر با تغییر شکل‌های بزرگ عموماً دارای معادلات دینامیکی غیرخطی و پیچیده هستند و این موضوع موجب شده است که محققان برای حل معادلات دینامیکی سیستم

معمولاً از روش‌های عددی به ویژه روش اجزاء محدود استفاده کنند. روش‌های عددی دارای یک مشخصه یکسان هستند و آن این است که برای افزایش دقت در نتایج باید از تعداد المان‌ها و یا تعداد گام‌های زمانی مناسب استفاده شود. با افزایش تعداد المان‌ها در روش اجزاء محدود و یا افزایش تعداد گام‌های حل در روش‌های عددی، ابعاد ماتریس‌های موجود برای حل افزایش می‌یابد و این موضوع موجب می‌شود استفاده از این روش‌ها در بسیاری از موارد حجم محاسبات را به شکل قابل‌توجهی افزایش دهد [۴-۶]. این در حالی است که در بسیاری از موارد نیازمند استفاده از روش با دقت مناسب و حجم محاسباتی اندک خواهیم بود. برای نمونه می‌توان به الگوریتم‌های بهینه‌سازی اشاره نمود. در الگوریتم‌های بهینه‌سازی، گاهی به تعداد دفعات زیادی حلقه مدل دینامیکی حل می‌شود. در این حالت، استفاده از روش‌هایی با حجم محاسباتی بالا می‌تواند زمان بهینه‌سازی را به شکل قابل‌توجهی افزایش دهد. حجم محاسبات در برنامه‌های کامپیوتری که گاهی با CPU time معرفی می‌شود عبارت است از مقدار زمانی که توسط پردازش مرکزی (CPU) به اجرای دستورالعمل‌های برنامه اختصاص داده می‌شود. در این رساله منظور از حجم محاسبات زمان اجرای برنامه از ابتدا تا انتهای برنامه می‌باشد.

روش ماتریس انتقال، روشی ساده و بادقت مناسب است که برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی، گشتاور خمشی، نیروی برشی و تغییر شکل در تیرها، بازوهای مکانیکی و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد [۷-۱۰]. در روش ماتریس انتقال ابتدا بردار حالت تعریف می‌شود. بردار حالت شامل متغیرهای سیستم است که معمولاً نشان دهنده جابجایی و بارهای داخلی متناسب با ابعاد سیستم می‌باشد. سپس ماتریس انتقال برای هر یک از المان‌های سیستم تعیین و با استفاده از روابط بازگشتی بردار حالت برای نقاط مختلف اعمال می‌شود. این روش در واقع تکمیل روشی است که هولزر در سال ۱۹۲۱ برای بررسی ارتعاشات پیچشی محورها ارائه داد [۱۱]. هولزر محور پیچشی را با یک سری المان انعطاف‌پذیر و المان متمرکز گسسته‌سازی کرد و فرکانس‌های طبیعی محور پیچشی را با روشی که امروزه به نام روش هولزر شناخته می‌شود تعیین کرد. پس از آن میکلسن [۱۲] روش هولزر را با کمی تغییر برای ارتعاشات عرضی تیرها به کار برد. پستل و همکارانش محور تحقیقات خود را در بررسی و گسترش این روش قرار دادند و در نهایت حاصل تحقیقاتشان را در [۱۳] به چاپ رساندند. این محققان اولین کسانی بودند که به جای استفاده از جرم متمرکز، از مدل پیوسته برای ارتعاشات عرضی استفاده نمودند. دای و همکارانش با استفاده از این روش به بررسی ارتعاشات دوبعدی و سه-بعدی در شبکه‌های انتقال پرداختند [۱۴]. هووان و هورن با استفاده از روش ماتریس انتقال، تعیین فرکانس‌های طبیعی و فرکانس‌های میرا در یک محور پیچشی را مورد مطالعه قرار دادند [۱۵]. سراسو

و همکارانش از این روش برای بررسی ارتعاشات اجباری در یک میله استفاده کردند [۱۶]. اراسانیو و همکارانش فرکانس‌های طبیعی یک تیر با سطح مقطع ثابت و با جرم متمرکز نقطه‌ای را بدست آوردند و نتایج حاصل از روش ماتریس انتقال را با داده‌های تجربی و روش اجزاء محدود مقایسه کردند [۱۷].

در ادامه بوینجیو و همکارانش با استفاده از روش ماتریس انتقال ارتعاشات آزاد تیر اویلر برنولی با سطح مقطع ثابت را مورد بررسی قرار دادند. این نویسندگان ماتریس انتقال برای المان‌های مخروطی را با تعریف توابع مرتبه ۲ برای سطح مقطع و مرتبه ۴ برای ممان اینرسی بدست آورده و نتایج را با المان‌های استوانه‌ای مقایسه نموده و نشان دادند که با استفاده از المان‌های مخروطی در تعداد المان‌های کمتری به دقت مناسب می‌توان رسید [۱۸]. برادران لی یک تابع درجه ۳ برای سختی خمشی در نظر گرفتند و معادله هریک از المان‌ها را با روش فروبنیوس حل کرده و در نهایت با اعمال روش ماتریس انتقال روابط مورد نیاز جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی تیر اویلر برنولی با سطح مقطع متغیر را استخراج کردند [۱۹]. آرجود و حاماد ارتعاشات آزاد تیر ثابت با تئوری‌های تیموشنکو و اویلر برنولی را با روش ماتریس انتقال بررسی کردند و تاثیر تکیه‌گاه‌های مختلف در فرکانس‌های طبیعی را مود مطالعه قرار دادند [۲۰].

بوک به همراه همکارانش، اولین کسی بود که از روش ماتریس انتقال جهت مدل‌سازی و کنترل ربات‌های انعطاف پذیر استفاده کرد. این محققان یک ربات دو لینکی را با استفاده از روش ماتریس انتقال، مدل کرده و با استفاده از فیدک زاویه موقعیت انتهای بازو را کنترل کردند [۲۱]. در ادامه این محققان مقاله‌ای دیگر ارائه داده و در آن یک سیستم کنترلی برای یک ربات تک لینکی پیشنهاد دادند. در این مطالعه، بوک به همراه همکارانش از ماتریس انتقال سنتی و مدل تیر اویلر برنولی بهره گرفته و با تغییر ماتریس انتقال در حوزه لاپلاس، ضرایب کنترلی را برای ربات تک لینکی طراحی کردند. این نویسندگان محل قرارگیری موتور دورانی را با یک فنر و یک دمپر پیچشی مدل‌سازی کردند [۲۲].

در زمینه‌ی کاربرد روش ماتریس انتقال در رباتیک، می‌توان به تحقیقات و مقالات رایان کراوس و همکارانش نیز اشاره کرد. رایان کراوس به همراه همکارانش، مطالعات بوک را گسترش داد و با استفاده از روش ماتریس انتقال یک کنترل فعال برای ربات انعطاف‌پذیر با میرایی ارائه داد [۲۳].

در ادامه این نویسندگان در مقاله‌ای دیگر، دو روش اجزاء محدود و ماتریس انتقال را جهت مدل‌سازی یک ربات انعطاف‌پذیر با تغییر شکل محدود مقایسه کردند. ربات مورد مطالعه از چهار لینک صلب و یک لینک انعطاف‌پذیر تشکیل شده و محل قرارگیری موتور با فنر پیچشی مدل‌سازی

گردید. این نویسندگان نشان دادند که روش ماتریس انتقال و روش اجزاء محدود نتایج یکسانی دارند هرچند حجم محاسبات روش ماتریس انتقال نسبت به اجزاء محدود پایین تر است [۲۴].

سپس رایان کراوس و همکارانش روش ماتریس انتقال را برای یک ربات انعطاف پذیر با عملگر هیدرولیکی ارائه دادند [۲۵]. برای این منظور، یک مدل مرتبه یک برای تغییرات عملگر هیدرولیکی در نظر گرفته و با استفاده از دیاگرام بود، ضرایب معادل سازی برای عملگر را بدست آوردند؛ سپس ماتریس انتقال برای عملگر هیدرولیکی را تعیین کردند.

پس از آن، این نویسندگان با بکارگیری روش ماتریس انتقال یک برنامه‌ی کامپیوتری جهت شناسایی مشخصات ربات‌های انعطاف پذیر معرفی کردند [۲۶]. برای این منظور از مدل تیر اوایلر برنولی استفاده کرده و برنامه‌ی با استفاده از نرم افزار پایتون^۱ پیشنهاد دادند.

سپس در همین راستا این نویسندگان با استفاده از روش ماتریس انتقال یک سیستم کنترلی برای سیستم‌هایی با فیدبک نامتعارف^۲ ارائه نمودند [۲۷]. برای این منظور از نتایج تحقیقات قبل استفاده کردند و این بار با معرفی تابع درجه دو برای موتور دورانی، ماتریس انتقال موتور را محاسبه کرده و ضرایب کنترلی برای ربات انعطاف پذیر با فیدبک نامتعارف را به دست آوردند.

پس از آن رایان کراوس یک ربات آزمایشگاهی تک لینکی را با استفاده از روش ماتریس انتقال مدل سازی کرد. سپس با استفاده از دیاگرام بود و یک الگوریتم کاهشی، مشخصات مدل ارائه شده از جمله مشخصات موتور و فنر معادل را شناسایی کرد [۲۸].

در ادامه تحقیقات، رایان کراوس برای مدل سازی ربات مورد مطالعه در [۲۸]، از ماتریس انتقال گسسته استفاده نمود. برای این منظور بازوی ربات را با یک سری المان صلب، فنر پیچشی و دمپر مدل سازی کرد و یک مدل برای ربات با تغییر شکل کوچک ارائه داد و با استفاد از آن موقعیت انتهایی ربات را کنترل کرد [۲۹].

رایان کراوس در ادامه تحقیقات روش ماتریس انتقال را برای یک ربات سه لینکی مورد استفاده قرار داد و یک الگوریتم بهینه سازی کنترلی برای ربات آزمایشگاهی سه لینکی ارائه داد [۳۰].

علاوه بر تحقیقات انجام گرفته توسط بوک و کراوس، ژانگ نیز در چند سال اخیر مقالاتی در زمینه کاربرد روش ماتریس انتقال در رباتیک منتشر کرده است. هرچند مطالعات صورت گرفته توسط رایان کراوس و بوک، عموماً مبنای کنترلی داشت اما ژانگ مقالاتش را در زمینه مدل سازی دینامیکی ربات‌های انعطاف پذیر ارائه داده است. ژانگ به همراه همکارانش، ابتدا مقاله‌ای جهت سینماتیک یک

¹ PYTHON

² Noncollocated

ربات صلب محرک و با استفاده از روش ماتریس انتقال گسسته ارائه داد [۳۱]. در مطالعه [۳۱]، ژانک روابط سینماتیکی و دینامیکی را بر مبنای دینامیک سیستم‌های چند عضوی مشخص نمود. همچنین تمام لینک‌ها را صلب در نظر گرفت و موتور دورانی را نیز با فنر پیچشی مدل‌سازی کرد. در ادامه ژانک و همکارانش با استفاده از روش ماتریس انتقال گسسته، روابطی را برای سینماتیک و دینامیک ربات‌های سری صفحه‌ای ارائه دادند [۳۲]. تحقیق صورت گرفته توسط ژانک در واقع گسترش تحقیقات رایان کراوس در [۲۹] بود. با این تفاوت که کراوس تغییر شکل کوچک ربات را در نظر گرفت و لذا فرض کرد حرکت جرم‌های صلب در یک جهت خواهد بود. ژانک فعالیت کراوس را گسترش داده و حرکت المان‌های صلب را در دو جهت قرار داد. با این کار ماتریس انتقال از ماتریس 5×5 تبدیل به ماتریس 7×7 شد.

سپس ژانک و همکاران روش ماتریس انتقال گسسته را بر پایه شتاب معرفی کردند و با استفاده از آن، روابطی را جهت تحلیل سینماتیکی و دینامیکی ربات‌های انعطاف‌پذیر عنوان نمودند [۳۳]. تعریف ماتریس انتقال بر پایه شتاب، به منظور استفاده از آن در سیستم‌های کنترلی بود. ژانک نشان داد، باتوجه به این که در واقعیت خروجی فیدبک سنسورها شتاب می‌باشد، بنابراین استفاده از ماتریس انتقال بر مبنای شتاب، موجب افزایش دقت در کنترل ربات خواهد شد.

پس از آن این نویسندگان مقاله‌ای دیگر ارائه داده و این بار با ترکیب روش بخش‌های محدود^۱ و روش ماتریس انتقال گسسته، روشی کم حجم جهت تحلیل ربات‌های انعطاف‌پذیر صفحه‌ای ارائه و نتایج تحقیقات خود را با داده‌های تجربی مورد مقایسه قرار دادند [۳۴].

روش ماتریس انتقال دارای محدودیت‌هایی است و این محدودیت‌ها موجب شده تا این روش، برخلاف روش اجزاء محدود هم از نظر دقت و هم از نظر کاربرد گسترش نیابد. این روش تنها در شرایط خاص برای ربات‌های انعطاف‌پذیر قابل استفاده می‌باشد. روش ماتریس انتقال تنها برای سیستم‌های خطی به کار گرفته می‌شود [۳۵]. مشکل دیگر روش ماتریس انتقال در عدم توانایی این روش برای تعیین پاسخ اجباری سیستم است. این روش تنها زمانی می‌تواند برای تعیین پاسخ سیستم، مورد استفاده قرار گیرد که ورودی خارجی یک تابع هارمونیک بوده و یا ترکیبی از چند تابع هارمونیک باشند [۱۳، ۳۵]. یکی دیگر از مشکلات اساسی در استفاده از روش ماتریس انتقال، تعیین فرکانس‌های طبیعی در مودهای بالا است. روش ماتریس انتقال در مودهای بالا دچار مشکلات عددی شده و تعیین فرکانس‌های طبیعی در مودهای بالا با استفاده از این روش به‌سادگی امکان‌پذیر نخواهد

¹ Finite Segments

بود [۶، ۱۰، ۱۳].

مزیت‌های روش ماتریس انتقال موجب شده است که در سال‌های متعدد محققانی در زمینه کاهش محدودیت‌های روش ماتریس انتقال، حذف و یا به تأخیر انداختن مشکلات عددی در روش ماتریس انتقال فعالیت کنند [۴، ۳۲، ۳۳، ۳۶-۴۰]. جدول ۱-۱ روش‌های ارائه شده در سال‌های مختلف، به همراه مزایا و معایب هریک را نشان می‌دهد. همان‌طور که از جدول ۱-۱ مشخص است، هرچند روش‌های ارائه شده برخی از مشکلات روش ماتریس انتقال را حل کرده‌اند اما هنوز هریک از این روش‌ها دارای معایبی است و در حالت کلی نمی‌توان از روش‌های فوق به‌عنوان یک روش جامع جهت تحلیل ربات‌های انعطاف‌پذیر با تغییر شکل بزرگ بهره گرفت. در این رساله روش ماتریس انتقال توسعه داده می‌شود تا به‌عنوان یک روش جامع با حجم محاسبات پایین جهت مدل‌سازی دینامیکی ربات‌های انعطاف‌پذیر مورد استفاده قرار گیرد. جهت حذف محدودیت‌های روش ماتریس انتقال، از روش ماتریس انتقال گسسته کمک گرفته می‌شود. در تغییر شکل‌های بزرگ برای افزایش دقت، باید از تعداد المان‌های بیشتری استفاده کرد و این موضوع می‌تواند حجم محاسبات را در روش ماتریس انتقال گسسته افزایش دهد. برای کاهش حجم محاسبات، مدلی ارائه می‌شود تا با تعداد المان‌های کمتر به دقت مناسب رسید. همچنین با توجه به این‌که روش ماتریس انتقال گسسته همچنان در موده‌های بالا و شرایط خاص دچار مشکلات عددی می‌شود، روش ماتریس انتقال گسسته با تبدیل ریکاتی ترکیب می‌شود تا روش پیشنهادی هم دارای حجم محاسبات پایین باشد و هم دچار مشکلات عددی نشود.

۴-۱. نوآوری‌ها

با توجه به مطالب بیان شده در قسمت قبل، اقدامات و نوآوری‌های موجود در این رساله را می‌توان به شرح زیر بیان کرد:

۱. در تغییر شکل‌های بزرگ برای افزایش دقت در نتایج باید از تعداد المان‌های بیشتری استفاده نمود. در این حالت استفاده از تعداد المان‌های بیشتر حجم محاسبات در روش ماتریس انتقال را تا حدودی افزایش می‌دهد. در این رساله با تغییر طول و سختی در المان اول، الگوریتمی ارائه می‌شود تا با استفاده از $N/2$ المان به دقت N المان رسید.
۲. در روش ماتریس انتقال، برای تعیین ماتریس‌های انتقال باید معکوس ماتریس انتقال صفر تعیین شود. در این تحقیق با استفاده از مقادیر صفر در سطرها و ستون‌های ماتریس انتقال

الگوریتمی ارائه می‌شود تا به جای تعیین معکوس ماتریس از مرتبه n معکوس ماتریس از مرتبه $n/2$ محاسبه شود.

۳. الگوریتم بیان شده برای کاهش مرتبه ماتریس معکوس با ماتریس انتقال ریکانی ترکیب می‌شود تا مشکلات و محدودیت‌های روش ماتریس انتقال در الگوریتم پیشنهادی حذف شود.

۴. در روش ماتریس انتقال گسسته، برای گسسته‌سازی در بعد زمان از روش‌های انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود. در رساله حاضر، برای بهبود روش ماتریس انتقال برخلاف محققان قبلی که از روش مرسوم نیومارک استفاده کرده‌اند، از روش جدید انتگرال‌گیری استفاده می‌شود، که از مزیت‌هایی در حوزه محاسباتی برخوردار است.

۵. هرچند مقالات زیادی در کاربرد روش ماتریس انتقال برای حوزه رباتیک ارائه شده است، اما تا به حال یک کتابخانه جامع از ماتریس‌های انتقال برای مفاصل و المان‌های مختلف عرضه نشده است. در این رساله سعی شد تا یک کتابخانه جامع برای مفاصل و المان‌های مختلف در حوزه رباتیک پیشنهاد شود.

۵-۱. مراحل تحقیق

با توجه به اینکه هدف از رساله حاضر توسعه روش ماتریس انتقال برای کاربردهای رباتیکی است ابتدا روش ماتریس انتقال و محدودیت‌های این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس روش‌های مختلف برای حذف مشکلات و محدودیت‌های روش ماتریس انتقال مورد توجه قرار گرفته و روش مناسب انتخاب می‌گردد. با انتخاب روش مناسب، الگوریتم بهبود یافته ارائه می‌گردد. الگوریتم بهبود یافته هم بعد مکان و هم بعد زمان را شامل می‌شود. سپس الگوریتم پیشنهادی در چند نمونه شامل تیر یک سر گیردار با تغییر شکل بزرگ، ربات دو لینکی با مفاصل دورانی، ربات دو لینکی PR و یک ربات سه لینکی PRR پیاده‌سازی می‌شود. نتایج حاصل از الگوریتم بیان شده با تحقیقات سایر نویسندگان و نرم‌افزار تجاری ADAMS مورد مقایسه قرار می‌گیرد. در نمونه آزمایشگاهی یک ربات با دو مفصل دورانی و کشویی با استفاده از روش مذکور، مدل‌سازی شده و نتایج عملی تحلیل می‌شود.

جدول ۱-۱. روش‌های ارائه شده جهت حذف محدودیت‌ها و مشکلات عددی در روش ماتریس انتقال

عنوان روش	سال ارائه	مزایا	معایب
ماتریس انتقال اصلاح شده [۱۳]	۱۹۶۳	۱. حذف مشکلات عددی در مودهای بالا ۲. حذف مشکلات عددی در مودهای بالا	۱. برای سیستم‌های با مرتبه بالا قابل استفاده نیست. ۲. محدودیت در ارتعاشات اجباری
ماتریس انتقال دلتا [۱۳]	۱۹۶۳	۱. حذف مشکلات عددی در مودهای بالا ۲. حذف مشکلات عددی در مودهای بالا	۱. با این روش نمی‌توان بردار حالت را تعیین کرد. ۲. افزایش حجم محاسبات
ماتریس انتقال ریکاتی [۶]	۱۹۷۸	۱. حذف مشکلات عددی ۲. کاهش حجم محاسبات	۱. محدودیت در ارتعاشات اجباری
فرآیند شاخه کردن ماتریس انتقال [۴۱]	۱۹۸۱	۱. حذف مشکلات عددی برای سیستم‌ها با سختی بالای نقطه‌ای ۲. حذف مشکلات عددی برای سیستم‌ها با سختی بالای نقطه‌ای	۱. افزایش حجم محاسبات ۲. محدودیت در ارتعاشات اجباری
روش ماتریس انتقال گسسته [۳۵]	۱۹۸۶	۱. امکان استفاده برای ارتعاشات اجباری در شرایط مختلف ۲. قابل استفاده برای سیستم‌های غیرخطی	۱. مشکلات عددی در شرایط خاص
ماتریس انتقال تعمیم یافته [۱۵]	۱۹۹۹	۱. حذف محدودیت روش ماتریس انتقال در سیستم‌های میرا ۲. حذف محدودیت روش ماتریس انتقال در سیستم‌های میرا	۱. افزایش حجم محاسبات ۲. محدودیت در ارتعاشات اجباری
بی‌بعد سازی بردار حالت [۴۲]	۲۰۱۲	۱. حذف مشکلات عددی در مودهای بالا ۲. حذف مشکلات عددی در مودهای بالا	۱. محدودیت در ارتعاشات اجباری
ماتریس انتقال گسسته بر پایه شتاب [۳۳]	۲۰۱۵	۱. حذف مشکلات عددی ۲. حذف محدودیت‌ها	۱. خطا در تعیین جابجایی

۶-۱. ساختار رساله

با توجه به نوآوری‌های مطرح شده در رساله حاضر، این رساله در شش فصل تقسیم‌بندی می‌شود. در فصل دوم به بررسی روش ماتریس انتقال و محدودیت‌های این روش پرداخته می‌شود. برای این منظور، ماتریس انتقال برای یک تیر دوار تعیین می‌گردد. سپس الگوریتم پیشنهادی برای تبدیل ماتریس انتقال صفر به ماتریس قطری بلوکی ارائه می‌شود تا بجای تعیین ماتریس معکوس از مرتبه n ماتریس معکوس از مرتبه $n/2$ تعیین شود. الگوریتم پیشنهادی در یک مورد عددی پیاده‌سازی می‌شود و حجم محاسبات برای ماتریس انتقال سنتی و الگوریتم پیشنهادی مورد قیاس قرار می‌گیرد. در فصل سوم، الگوریتم پیشنهادی که در فصل دوم عنوان شد با تبدیل ریکاتی ترکیب می‌شود تا مشکلات عددی در الگوریتم پیشنهادی ایجاد نگردد. الگوریتم پیشنهادی در یک مطالعه موردی برای لینک یا تک مفصل دورانی پیاده‌سازی شده و نشان داده می‌شود که با الگوریتم پیشنهادی علاوه بر کاهش حجم محاسبات، مشکلات عددی در مودهای بالا رخ نمی‌دهد.

در فصل چهارم، روش پیشنهادی این رساله با عنوان "ماتریس انتقال گسسته ریکاتی بهبود یافته" مطرح می‌شود. روش پیشنهادی نسبت به مطالعات پیشین در بعد مکان با تغییر طول المان‌ها و در بعد زمان با تغییر روش عددی مرسوم بهبود می‌یابد. روش پیشنهادی روی یک تیر با تغییر شکل بزرگ و یک ربات دو لینکی با مفاصل دورانی پیاده‌سازی می‌شود و نتایج حاصل با نتایج سایر نویسندگان و نرم‌افزار تجاری ADAMS مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

در فصل پنجم، ابتدا یک ربات سه محوره PRR با استفاده از روش بیان شده مدل‌سازی می‌شود تا کتابخانه ماتریس‌های انتقال در حوزه رباتیک تکمیل شود. سپس نمونه آزمایشگاه مورد مطالعه قرار می‌گیرد و نتایج آزمایشگاهی با نتایج تئوری و نتایج نرم‌افزار ADAMS مورد مقایسه قرار می‌گیرد. در نهایت در فصل ششم اهداف و نوآوری‌های رساله حاضر بررسی شده و پیشنهادها جهت توسعه تحقیقات در این حوزه ارائه می‌گردد.

فصل ۲

الگوریتمی برای کاهش

حجم محاسبات در روش

ماتریس انتقال

۱-۲. مقدمه

روش ماتریس انتقال، روشی ساده و با دقت است که برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی، گشتاور خمشی، نیروی برشی و تغییر شکل در تیرها، بازوهای مکانیکی و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد [۷-۱۰]. در این روش برای تعیین ماتریس‌های انتقال، باید معکوس ماتریس انتقال صفر لحاظ شود. این موضوع می‌تواند حجم محاسبات را در سیستم‌هایی که دارای ماتریس‌های انتقال با ابعاد بزرگ هستند افزایش دهد. در این فصل در یک مطالعه موردی مقدمه‌ای از روش ماتریس انتقال بیان می‌شود. سپس الگوریتمی پیشنهاد می‌شود تا بجای تعیین ماتریس معکوس از مرتبه n ، ماتریس معکوس از مرتبه $n/2$ انتخاب شود. الگوریتم پیشنهادی در یک مطالعه موردی پیاده‌سازی می‌شود و حجم محاسبات برای ماتریس انتقال سنتی و الگوریتم پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۲-۲. مطالعه موردی: تعیین فرکانس‌های طبیعی در یک تیر دوار

در این قسمت فرکانس‌های طبیعی یک تیر دوار با استفاده از روش ماتریس انتقال محاسبه شده و نتایج حاصل با تحقیقات پیشین مقایسه می‌شود. دوران تیر با سرعت ثابت، موجب تشکیل نیروی محوری گریز از مرکز می‌گردد. در این حالت نیروی محوری در تکیه‌گاه دارای حداکثر مقدار و در انتها برابر با صفر است. شکل ۱-۲ تغییر شکل یک تیر دوار با سطح مقطع ثابت را نشان می‌دهد. شکل ۱-۲ بازوی دواری را نشان می‌دهد که با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω دوران می‌کند. معادله ارتعاشات آزاد این بازو با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی به شکل رابطه ۱-۲ محاسبه می‌شود [۴۳]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(G(x) \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(J \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2} \right) = 0 \quad (1-2)$$

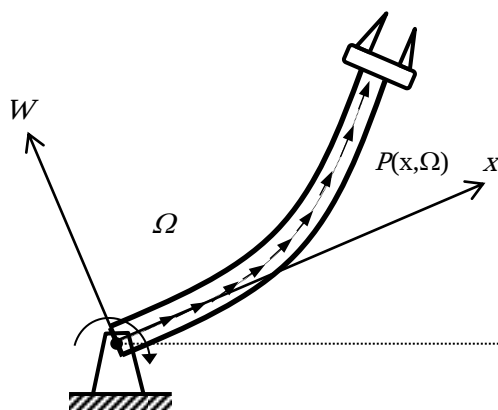
که در رابطه ۱-۲، W جابجایی عرضی، x محور طولی، $EI(x)$ سختی خمشی، ρ چگالی، $A(x)$ سطح مقطع، Ω سرعت زاویه‌ای و J ممان اینرسی قطبی می‌باشد. همچنین $G(x)$ نیز با استفاده از رابطه ۲-۲ قابل محاسبه است.

$$G(x) = \int_x^L \rho A(u) du \quad (2-2)$$

که در رابطه ۲-۲، L طول بازو می‌باشد. با توجه به ناچیز بودن اثر J در معادله دیفرانسیل حرکت [۴۳] و با جایگذاری جواب $W(x,t) = w(x)T(t)$ در معادله ۲-۲، جواب مربوط به بعد مکانی

به صورت زیر حاصل می شود.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \rho A(x) \omega^2 w - \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(G(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (2-3)$$



شکل ۲-۱. نمایی از یک تیر دوار و تغییر شکل آن در حین دوران

۲-۲-۲. مدل سازی به روش ماتریس انتقال

برای مدل سازی به روش ماتریس انتقال، بازوی دوار به یک سری المان با طول l و سطح مقطع ثابت مدل می شود. در این حالت سطح مقطع و ممان اینرسی در هر المان میانگینی از مقادیر موجود در آن محدوده در نظر گرفته می شود. شکل ۲-۲ نمایی از مدل سازی به روش ماتریس انتقال را نشان می دهد. در صورتی که فرض شود طول هریک از المان ها نسبت به فاصله x_i ناچیز باشد در این حالت متغیر x برای هریک از المان ها مقداری ثابت داشته و لذا معادله دیفرانسیل حرکت به صورت زیر حاصل می شود:

$$EI_i \frac{d^4 v}{d\eta^4} - P_i \frac{d^2 v}{d\eta^2} - \rho A_i \omega^2 \frac{dv}{d\eta} = 0 \quad (2-4)$$

که در روابط ۲-۴، EI و A به صورت میانگینی از نقطه i و $i-1$ در نظر گرفته می شود و P با گسسته سازی تعیین می شود. معادله ۲-۴ تبدیل به یک معادله با ضرایب ثابت شده و لذا جواب معادله دیفرانسیل به صورت زیر حاصل می شود:

$$v_i = C_1 \cosh s_1 \eta_i + C_2 \sinh s_1 \eta_i + C_3 \cos s_2 \eta_i + C_4 \sin s_2 \eta_i \quad (2-5)$$

با مشتق‌گیری از رابطه ۵-۲ شیب θ ، گشتاور خمشی M و نیروی برشی V را برای هریک از المان‌ها می‌توان با استفاده از روابط زیر محاسبه کرد:

$$v = C_1 \cosh s_1 \eta + C_2 \sinh s_1 \eta + C_3 \cos s_2 \eta + C_4 \sin s_2 \eta \quad (۶-۲)$$

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial \eta} = t_{21} C_1 + t_{22} C_2 + t_{23} C_3 + t_{24} C_4$$

$$M = EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) = t_{31} C_1 + t_{32} C_2 + t_{33} C_3 + t_{34} C_4$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial \eta} = t_{41} C_1 + t_{42} C_2 + t_{43} C_3 + t_{44} C_4$$

روابط بدست آمده برای جابجایی، شیب، گشتاور خمشی و نیروی برشی، برای هریک از المان‌ها را می‌توان به شکل ماتریسی به صورت رابطه ۷-۲ نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} v \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (۷-۲)$$

که رابطه ۷-۲ را می‌توان به شکل رابطه ۸-۲ نمایش داد:

$$Z(\eta) = T(\eta).C \quad (۸-۲)$$

که $Z(\eta)$ بردار حالت، C بردار ضرایب ثابت و $T(\eta)$ ماتریس انتقال تابع می‌باشد. در نقطه $i-1$ مقدار η برابر با صفر بوده و بردار حالت به شکل معادله ۱۰-۲ بدست می‌آید:

$$Z_{i-1} = T(0).C \quad (۹-۲)$$

و از رابطه‌ی ۹-۲ می‌توان ماتریس C را به شکل رابطه ۱۰-۲ به دست آورد:

$$C = T(0)^{-1}.Z_{i-1} \quad (۱۰-۲)$$

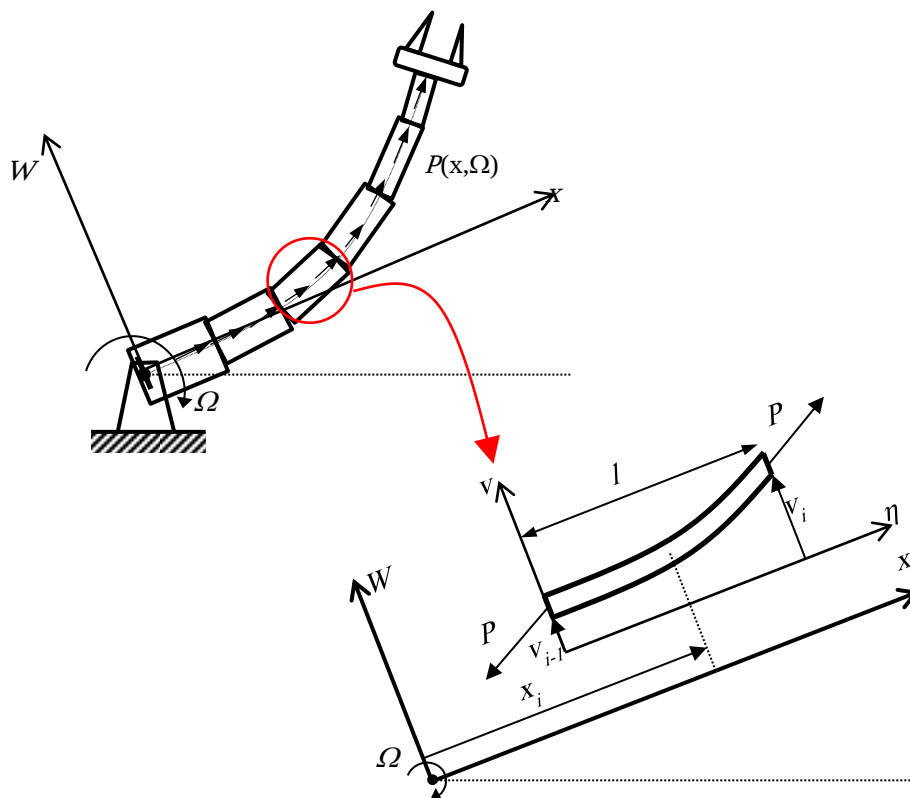
و با جای گذاری ماتریس C در رابطه ۸-۲، بردار حالت به شکل رابطه ۱۱-۲ به دست می‌آید:

$$Z(z) = T(\eta).T(0)^{-1}.Z_{i-1} \quad (۱۱-۲)$$

در نقطه‌ی i مقدار η برابر با l بوده و لذا بردار حالت به شکل رابطه ۱۲-۲ به دست می‌آید:

$$Z_i = T(l).T(0)^{-1}.Z_{i-1} = [H]_i.Z_{i-1} \quad (۱۲-۲)$$

که $[H]_i$ ماتریس انتقال بین نقطه‌ی i و نقطه‌ی $i-1$ می‌باشد.



شکل ۲-۲. مدل سازی بازوی دوار به روش ماتریس انتقال

۳-۲-۲. اعمال شرایط مرزی

در انتهای آزاد مقادیر M_n و V_n برابر با صفر است. همچنین در صورتی که تکیه گاه بازو، به عنوان یک تکیه گاه گیردار در نظر گرفته شود، در این حالت شیب و جابجایی در تکیه گاه برابر با صفر بوده و بنابراین رابطه بین بردار حالت در نقطه ۱ و نقطه n به شکل رابطه ۲-۱۳ به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} v \\ \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ V \end{bmatrix}_1 \quad (2-13)$$

که برای جواب غیر صفر باید دترمینان ماتریس رابطه ۲-۱۳ صفر باشد:

$$\Delta\omega = \det \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = 0 \quad (2-14)$$

۲-۲-۴. تعیین فرکانس‌های طبیعی با مقادیر عددی

برای بررسی میزان صحت روش بیان شده، در این قسمت فرکانس‌های طبیعی تیر دوار با سطح مقطع ثابت و با استفاده از روش ماتریس انتقال محاسبه شده و نتایج حاصل با تحقیقات پیشین در [۴۳، ۴۴] قیاس می‌گردد. برای این منظور، در جداول ۱-۲ تا ۳-۲ فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم در حالت بی‌بعد و برای دوره‌های مختلف نمایش داده شده است. برای بی‌بعد سازی فرکانس طبیعی از رابطه $\kappa = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}$ و برای بی‌بعد سازی دور از رابطه $\lambda = \frac{\rho A \Omega^2 L^4}{EI}$ استفاده شده است. همچنین برای بررسی میزان حساسیت روش ماتریس انتقال نسبت به تعداد المان‌ها، فرکانس‌های طبیعی در تعداد المان‌های ۲، ۵ و ۱۰ المان تعیین گردیده است. با بررسی مقادیر موجود در جداول ۱-۲ تا ۳، می‌توان دریافت که در تمام موده‌های ارتعاشی، افزایش دور موجب افزایش خطا در نتایج شده و استفاده از تعداد المان‌ها در دوره‌های بالا نسبت به دوره‌های پایین از اهمیت بیشتری برخوردار می‌باشد. چنانچه برای حالت $\lambda=0$ که بازو دوران ندارد، مقادیر فرکانس طبیعی مستقل از تعداد المان‌ها برای هر سه مدل یکسان بوده و با افزایش دور اختلاف بین نتایج حاصل از سه مدل افزایش می‌یابد. دلیل این موضوع، میزان تأثیر نیروی محوری در فرکانس‌های طبیعی است. در دوره‌های پایین دامن‌ه‌ی نیروی محوری ناچیز بوده و لذا نیروی محوری تأثیر چندانی در فرکانس‌های طبیعی ندارد. بنابراین در این حالت استفاده از تعداد المان‌های کم منجر به دقت بالا در نتایج می‌شود. از طرفی، با افزایش دور، دامن‌ه‌ی نیروی محوری افزایش یافته و در این حالت استفاده از تعداد المان‌های کم موجب افزایش خطا در نتایج می‌شود. زیرا در این حالت استفاده از تعداد المان‌های پایین توزیع مناسبی از تغییرات نیروی محوری در طول بازو را بیان نمی‌کند و لذا در این حالت در تعداد المان‌های کم خطای نتایج افزایش می‌یابد.

جدول ۲-۱. تعیین فرکانس طبیعی اول بازوی دوار با استفاده از روش ماتریس انتقال و مقایسه آن با نتایج پیشین

λ	روش ماتریس انتقال			روش فروبنیوس	روش گالرکین
	n=2	n=5	n=10	[۴۴]	[۱۸، ۱۷]
0	3.5160	3.5160	3.5160	3.5160	3.5160
2	4.1118	4.1344	4.1366	4.1373	4.1373
4	5.5159	5.5751	5.5826	5.5850	5.5851
6	7.2145	7.3410	7.3558	7.3604	7.3608
8	9.0145	9.2263	9.2497	9.2568	9.2580
10	10.8497	11.1596	11.1928	11.2023	11.2051

جدول ۲-۲. تعیین فرکانس طبیعی دوم بازوی دوار با استفاده از روش ماتریس انتقال و مقایسه آن با نتایج پیشین

λ	روش ماتریس انتقال			روش فروبنیوس	روش گالرکین
	n=2	n=5	n=10	[۴۴]	[۱۸، ۱۷]
0	22.0345	22.0345	22.0345	22.0345	22.0345
2	22.6967	22.6229	22.6169	22.6149	22.6150
4	24.5649	24.3037	24.2810	24.2734	24.2737
6	27.3621	26.8726	26.8256	26.8091	26.8109
8	30.7953	30.0986	30.0233	29.9954	30.0004
10	34.6369	33.7871	33.6817	33.6404	33.6513

جدول ۲-۳. تعیین فرکانس طبیعی سوم بازوی دوار با استفاده از روش ماتریس انتقال و مقایسه آن با نتایج پیشین

λ	روش ماتریس انتقال			روش فروبنیوس	روش گالرکین
	n=2	n=5	n=10	[۴۴]	[۱۸، ۱۷]
0	61.6972	61.6972	61.6972	61.6972	61.6972
2	62.3461	62.2835	62.2757	62.2732	62.2732
4	64.2537	64.0078	63.9767	63.9668	63.9674
6	67.3121	66.7751	66.7065	66.6840	66.6868
8	71.3681	70.4527	70.3334	70.2930	70.3013
10	76.2520	74.8948	74.7129	74.6490	74.6673

در ادامه به بررسی ارتعاشات آزاد بازوی دوار با سطح مقطع متغیر پرداخته می‌شود. برای این منظور از بازوی دوار مورد مطالعه در [۴۳] استفاده شده است. در [۴۳] نویسندگان به بررسی ارتعاشات آزاد یک بازوی دوار با سطح مقطع متغیر پرداختند که رابطه بین جرم در طول بازو به شکل $m(x) = m_0(1 - \xi)$ و رابطه بین سختی خمشی نیز در طول بازو به شکل $EI = EI_0(1 - 0.95\xi)$ تعریف می‌شود. که ξ پارامتر بی‌بعد $\xi = x/L$ می‌باشد. برای بی‌بعد سازی فرکانس طبیعی، مشابه قبل از پارامترهای K و λ استفاده شده است و نتایج حاصل در جداول ۲-۴ تا ۲-۶ آورده شده است. برای

بررسی و مقایسه دقیق تر نتایج در جداول ۲-۴ تا ۲-۶ نتایج مقالات [۴۵, ۴۶] نیز آورده شده است. نتایج موجود در جداول ۲-۴ تا ۶ نشان می دهد که مشابه حالت قبل در تعداد المان های پایین اختلاف نتایج حاصل از روش ماتریس انتقال نسبت به مطالعات پیشین زیاد بود و با افزایش تعداد المان ها میزان خطا کاهش می یابد. از طرفی مشابه حالت قبل در دوره های بالا تعداد المان های بیشتری مورد نیاز است تا بتوان نتایج بهتری از روش ماتریس انتقال گرفت. برای بررسی دقیق تر این موضوع در جدول ۲-۷ خطای نتایج حاصل از روش ماتریس انتقال نسبت به تحقیقات وانگ و همکارانش [۴۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۴۶] نویسندگان از روش فروبنیوس برای تعیین فرکانس های طبیعی استفاده کردند و چون این روش می تواند به عنوان یک روش تحلیلی مورد استفاده قرار گیرد، می تواند منبعی مناسب جهت بررسی نتایج حاصل از روش ماتریس انتقال باشد. با استفاده از جدول ۲-۷ می توان دریافت که مشابه آنچه در قسمت قبل بیان شده در دوره های بالا تعداد المان های بالاتری نیاز است تا بتوان نتایج مناسب تری را از روش ماتریس انتقال به دست آورد. برای حالت $\lambda=0$ که بازو دوران نمی کند و برای فرکانس طبیعی اول، با انتخاب ۲ المان خطایی حدود ۱۴ درصد ایجاد می شود و تنها با افزایش المان ها به ۵ المان این خطا به حدود ۲/۵ درصد می رسد و پس از آن با افزایش تعداد المان ها به ۱۰ المان خطا به کمتر از دو رقم اعشار می رسد. این درحالیست که در $\lambda=10$ با انتخاب ۲ المان خطایی حدود ۱۰ درصد، با انتخاب ۱۰ المان خطا به ۶ درصد و حتی با انتخاب ۲۰۰ المان خطا به ۰/۴ می رسد. این موضوع میزان اهمیت تعداد المان ها در میزان دقت نتایج را نسبت به سرعت دورانی بازو نشان می دهد.

جدول ۲-۴. تعیین فرکانس طبیعی اول بازوی دوار با سطح مقطع متغیر و مقایسه با نتایج پیشین

دور	روش ماتریس انتقال							Gunda et al. [45]	Wang and Wereley [46]	Wright et al. [59]
	n=2	n=5	n=10	n=20	n=40	n=100	n=200			
0	4.5116	5.1464	5.2414	5.2656	5.2717	5.2734	5.2737	5.2738	5.2738	5.2738
2	5.0284	5.5240	5.6306	5.6782	5.7016	5.7155	5.7202	5.7249	5.7249	5.7249
5	6.8716	7.1557	7.3220	7.4592	7.5454	7.6032	7.6235	7.6443	7.6443	7.6443
10	10.7939	11.0069	11.3600	11.6773	11.8786	12.0135	12.0608	12.1092	12.1092	12.1092

جدول ۲-۵. تعیین فرکانس طبیعی دوم بازوی دوار با سطح مقطع متغیر و مقایسه با نتایج پیشین

دور	روش ماتریس انتقال							Gunda et al. [45]	Wang and Wereley [46]	Wright et al. [59]
	n=2	n=5	n=10	n=20	n=40	n=100	n=200			
0	20.2111	23.1584	23.7861	23.9491	23.9902	24.0019	24.0035	24.0041	24.0041	24.0041
2	20.8055	23.5380	24.1489	24.3236	24.3787	24.4017	24.4077	24.4130	24.4129	24.4130
5	23.6030	25.4362	25.9725	26.2036	26.3252	26.4032	26.4303	26.4581	26.4581	26.4581
10	30.9605	31.2524	31.6382	32.0315	32.3358	32.5637	32.6481	32.7369	32.7367	32.7369

جدول ۲-۶. تعیین فرکانس طبیعی سوم بازوی دوار با سطح مقطع متغیر و مقایسه با نتایج پیشین

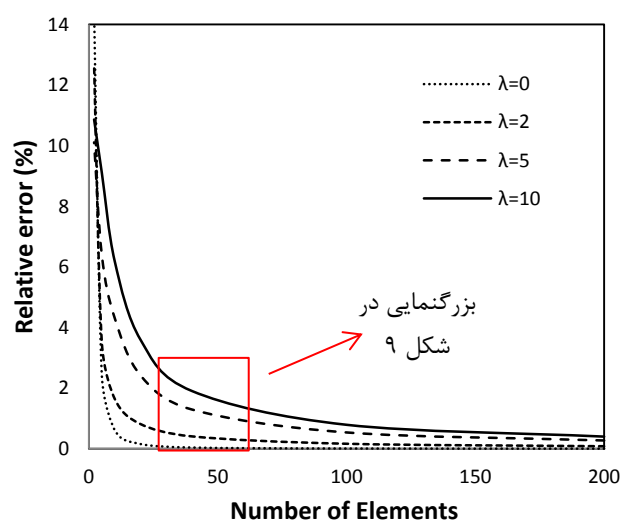
دور	روش ماتریس انتقال							Gunda et al. [45]	Wang and Wereley [46]	Wright et al. [59]
	n=2	n=5	n=10	n=20	n=40	n=100	n=200			
0	57.0416	57.4092	59.2957	59.7995	59.9273	59.9633	59.9684	59.9702	59.9708	59.9701
2	57.5815	57.7831	59.6509	60.1653	60.3054	60.3517	60.3608	60.3670	60.3676	60.3669
5	58.3652	59.7055	61.4812	62.0491	62.2510	62.3495	62.3791	62.4070	62.4078	62.4069
10	65.3380	66.0867	67.6093	68.3415	68.7350	68.9961	69.0895	69.1852	69.1875	69.1851

جدول ۲-۷. خطای نسبی روش ماتریس انتقال نسبت به [۶۱]

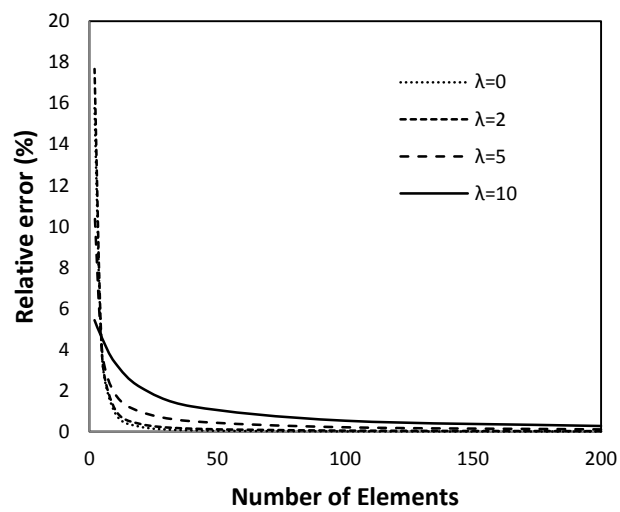
دور	فرکانس طبیعی	$error = \left \frac{K_{exact} - K_{TMM}}{K_{exact}} \times 100 \right $ خطای نسبی (درصد)						
		n=2	n=5	n=10	n=20	n=40	n=100	n=200
		n=2	n=5	n=10	n=20	n=40	n=100	n=200
اول	0	14.4527	2.4157	0.6143	0.1554	0.0398	0.0075	0.0018
	2	12.6661	3.5092	1.6471	0.8157	0.4069	0.1641	0.0820
	5	10.1081	6.3916	4.3113	2.4214	1.2937	0.5376	0.2720
	10	10.8619	9.1029	6.1870	3.5997	1.9043	0.7903	0.3996
دوم	0	15.8014	3.5231	0.9081	0.2291	0.0579	0.0091	0.0024
	2	17.6721	3.5837	1.0813	0.3657	0.1400	0.0458	0.0213
	5	10.7910	3.8623	1.8343	0.9618	0.5023	0.2074	0.1050
	10	5.4257	4.5340	3.3555	2.1541	1.2246	0.5284	0.2706
سوم	0	4.8843	4.2714	1.1257	0.2856	0.0725	0.0125	0.0040
	2	4.6152	4.2812	1.1872	0.3351	0.1030	0.0263	0.0112
	5	6.4777	4.3300	1.4847	0.5747	0.2512	0.0934	0.0459
	10	5.5638	4.4817	2.2810	1.2227	0.6540	0.2766	0.1416

برای بررسی دقیق‌تر تأثیر انتخاب تعداد المان‌ها در نتایج، رسم نمودار خطا بر حسب تعداد

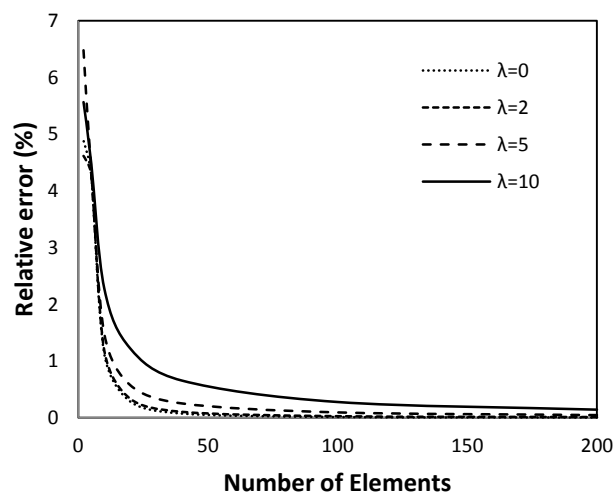
المان‌ها می‌تواند مفید باشد و لذا این نمودار در اشکال ۲-۳ تا ۵ و برای فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم ترسیم شده است. با بررسی نمودارهای موجود در اشکال ۲-۳ تا ۵ می‌توان دریافت که با افزایش تعداد ناچیز المان‌ها، شیب خطا برای تمام فرکانس‌ها کاهش قابل توجهی پیدا کرده و سپس با افزایش تعداد المان‌های خطا با شیب بسیار ملایم کاهش می‌یابد. دلیل این موضوع به وجود آمدن خطای دیگری علاوه بر خطای تیر با سطح مقطع ثابت است که در اینجا ظاهر می‌شود. در بازو با سطح مقطع ثابت تنها خطای موجود، خطای ثابت فرض کردن نیروی محوری در المان‌ها بود. در بازو با سطح مقطع متغیر علاوه بر این موضوع، خطای حاصل از مدل‌سازی سختی خمشی و سطح مقطع نیز در نتایج حاصل می‌شود زیرا در اینجا فرض می‌شود که سطح مقطع و سختی خمشی برای هر المان ثابت است. از طرفی این که کدام مورد بیشتر در میزان خطا تأثیر دارد را می‌توان با مقایسه نمودار $\lambda=0$ با سایر نمودارها به دست آورد. در واقع در $\lambda=0$ تنها خطای موجود خطای ناشی از خطای تغییرات سطح مقطع است. زیرا در این حالت با توجه به عدم دوران، نیروی محوری وجود ندارد و تنها خطای موجود، خطای مدل‌سازی سختی خمشی و سطح مقطع است. برای روشن شدن این موضوع در شکل ۲-۶ بخشی از نمودار شکل ۲-۳ مورد بزرگنمایی قرار گرفته است. با مقایسه نمودار مربوط به $\lambda=0$ با سایر نمودارها می‌توان به میزان سهم خطای هریک از مدل‌سازی‌ها پرداخت. شکل ۲-۳ نشان می‌دهد که سهم خطای ثابت فرض کردن نیروی محوری نسبت به مدل‌سازی سطح مقطع بیشتر است. در واقع با استفاده از شکل ۲-۳ می‌توان دریافت که آنچه موجب افزایش خطا در دوره‌های بالا می‌شود ثابت فرض کردن نیروی محوری در المان‌ها است و لذا در دوره‌های بالا نیازمند تعداد المان‌های بیشتری برای افزایش دقت در نتایج هستیم.



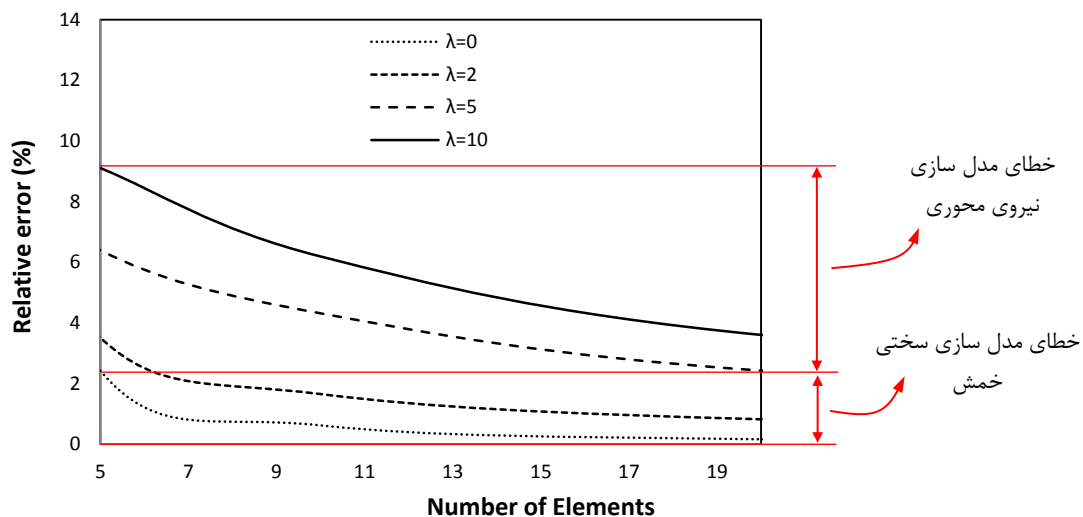
شکل ۲-۳. ترسیم خطای نسبی بر حسب تعداد المان‌ها در فرکانس طبیعی اول



شکل ۲-۴. ترسیم خطای نسبی بر حسب تعداد المان‌ها در فرکانس طبیعی دوم



شکل ۲-۵. ترسیم خطای نسبی بر حسب تعداد المان‌ها در فرکانس طبیعی سوم

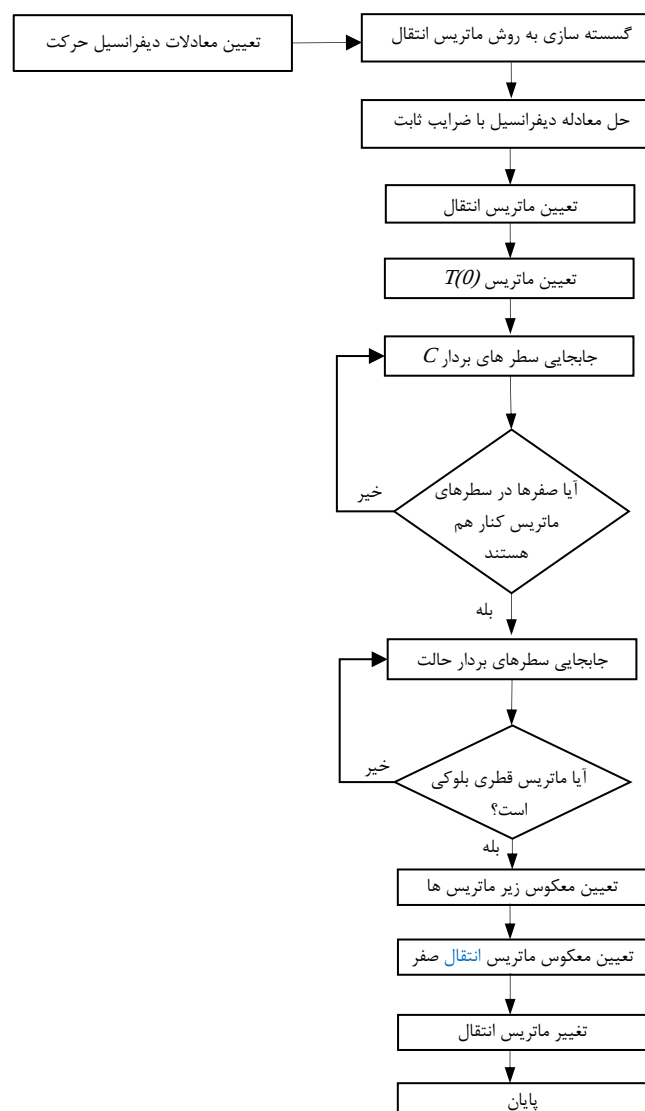


شکل ۲-۶. ترسیم بزرگنمایی بخشی از شکل ۶

۲-۳. الگوریتم پیشنهادی

با توجه به این که پاسخ سیستم متشکل از توابع هارمونیک و هایپربولیک است و نیز سطرهای ماتریس انتقال، مشتقات پاسخ سیستم می‌باشد، بنابراین ماتریس انتقال در هر سطر به صورت یکی در میان یکسان خواهد بود و تنها ضرایب آن تعویض می‌شود. حال در صورتی که ماتریس $T(0)$ تعیین شود، در این حالت در هر سطر به دلیل وجود پاسخ سینوسی در معادله، نیمی از عبارات موجود در ماتریس $T(0)$ صفر خواهد شد. حال در صورتی که بتوان تمام صفرهای موجود در ماتریس $T(0)$ را در یک قسمت قرار داد، می‌توان به جای محاسبه معکوس ماتریس $n \times n$ ، معکوس یک ماتریس $n/2 \times n/2$ را محاسبه کرد. برای این منظور، شکل ۲-۷ نمایی از الگوریتم پیشنهادی را زیر نشان می‌دهد. در شکل ۲-۷، ابتدا معادلات حرکت تعیین می‌شود. سپس معادلات حرکت گسسته شده تا تبدیل به معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت شوند. در ادامه معادلات حرکت برای هر المان حل شده و ماتریس انتقال تابع برای المان‌ها تعیین می‌شود. با تعیین ماتریس انتقال تابع، ماتریس $T(0)$ تعیین می‌شود. سپس محل ضرایب ثابت تغییر می‌کند تا عبارات صفر در هر سطر از ماتریس $T(0)$ در یک سمت قرار گیرند. در مرحله بعدی، جای عبارات بردار حالت عوض می‌شود تا ماتریس $T(0)$ تبدیل به یک ماتریس قطری بلوکی شود. در نهایت معکوس زیر ماتریس‌های ماتریس جدید تعیین می‌شود. در این حالت، روند الگوریتم شکل ۲-۷ را می‌توان در شش مرحله به صورت زیر بیان کرد:

۱. تعیین معادلات حرکت
۲. تعیین ماتریس $T(0)$
۳. تعویض ضرایب ثابت تا عبارات صفر در هر سطر از ماتریس $T(0)$ در یک سمت قرار گیرند.
۴. تغییر مکان عبارات موجود در بردار حالت تا ماتریس $T(0)$ تبدیل به یک ماتریس قطری بلوکی شود.
۵. محاسبه معکوس زیر ماتریس‌ها
۶. تعیین ماتریس انتقال جدید



شکل ۲-۷. الگوریتم کاهش حجم محاسبات

۲-۳-۲. پیاده سازی الگوریتم پیشنهادی

با استفاده از تعیین ماتریس انتقال در بخش قبل، ماتریس انتقال در نقطه صفر را می توان به صورت رابطه ۱۵-۲ به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & s_2 \\ EIs_1^2 & 0 & -EIs_2^2 & 0 \\ 0 & (-P + EIs_1^2)s_1 & 0 & -(P + EIs_2^2)s_2 \end{bmatrix} \quad (15-2)$$

حال ماتریس ضرایب ثابت را به صورت زیر تغییر می دهیم:

$$C = [C_1 \quad C_3 \quad C_2 \quad C_4]^T \quad (16-2)$$

در این حالت ماتریس انتقال صفر به صورت رابطه ۱۷-۲ حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 & s_2 \\ EIs_1^2 & -EIs_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-P + EIs_1^2)s_1 & -(P + EIs_2^2)s_2 \end{bmatrix} \quad (17-2)$$

حال بردار حالت را به صورت زیر تغییر می کند:

$$Z = [v \quad M \quad \theta \quad V]^T \quad (18-2)$$

و لذا ماتریس انتقال صفر به صورت زیر حاصل می شود:

$$T(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ EIs_1^2 & -EIs_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 & s_2 \\ 0 & 0 & (-P + EIs_1^2)s_1 & -(P + EIs_2^2)s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (19-2)$$

که ماتریس رابطه ۱۹-۲ یک ماتریس قطری بلوکی است و در آن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ EIs_1^2 & -EIs_2^2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ (-P + EIs_1^2)s_1 & -(P + EIs_2^2)s_2 \end{bmatrix} \quad (20-2)$$

از طرفی برای یک ماتری قطری بلوکی مثل ماتریس D می توان نوشت:

$$D = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \longrightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \quad (21-2)$$

بنابراین با تعیین معکوس ماتریس های A و B می توان به سادگی معکوس ماتریس $T(0)$ را به دست آورد:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} & \frac{1}{EI(s_1^2 + s_2^2)} \\ \frac{s_1^2}{s_1^2 + s_2^2} & \frac{-1}{EI(s_1^2 + s_2^2)} \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{P + EIs_2^2}{EIs_1(s_1^2 + s_2^2)} & \frac{1}{EIs_1(s_1^2 + s_2^2)} \\ \frac{-P + EIs_1^2}{EIs_2(s_1^2 + s_2^2)} & \frac{-1}{EIs_2(s_1^2 + s_2^2)} \end{bmatrix} \quad (22-2)$$

و لذا معکوس ماتریس به صورت رابطه ۲۳-۲ حاصل می شود:

$$T^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} & \frac{1}{EI(s_1^2 + s_2^2)} & 0 & 0 \\ \frac{s_1^2}{s_1^2 + s_2^2} & \frac{-1}{EI(s_1^2 + s_2^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P + EIs_2^2}{EIs_1(s_1^2 + s_2^2)} & \frac{1}{EIs_1(s_1^2 + s_2^2)} \\ 0 & 0 & \frac{-P + EIs_1^2}{EIs_2(s_1^2 + s_2^2)} & \frac{-1}{EIs_2(s_1^2 + s_2^2)} \end{bmatrix} \quad (23-2)$$

با توجه به تغییر در ماتریس ضرایب و بردار حالت، ماتریس انتقال جدید هم به صورت رابطه ۲۴-۲ حاصل می شود:

$$(24-2) \quad \begin{bmatrix} \cosh s_1 x_i & \cos s_2 x_i & \sinh s_1 x_i & \sin s_2 x_i \\ EIs_1^2 \cosh s_1 x_i & -EIs_2^2 \cos s_2 x_i & EIs_1^2 \sinh s_1 x_i & -EIs_2^2 \sin s_2 x_i \\ s_1 \sinh s_1 x_i & -s_2 \sin s_2 x_i & s_1 \cosh s_1 x_i & s_2 \cos s_2 x_i \\ (-P + EIs_1^2) s_1 \sinh s_1 x_i & (P + EIs_2^2) s_2 \sin s_2 x_i & (-P + EIs_1^2) s_1 \cosh s_1 x_i & -(P + EIs_2^2) s_2 \cos s_2 x_i \end{bmatrix}$$

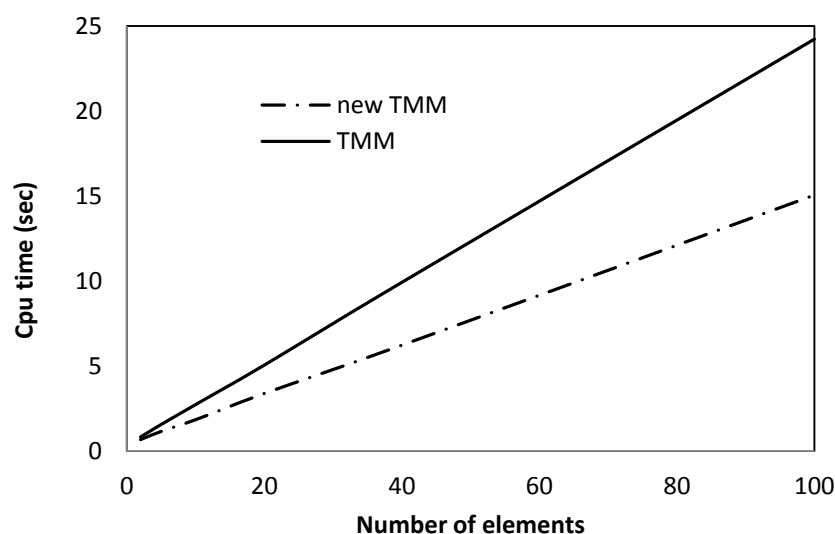
۳-۳-۲. مقایسه حجم محاسبات

در این قسمت به بررسی میزان زمان شبیه سازی نسبت به تعداد المان ها پرداخته می شود. برای این منظور جدول ۲-۸ مشخصات سیستم مورد نظر که برنامه ی کامپیوتری نرم افزار متلب در آن نوشته شده است را نمایش می دهد. برای بررسی میزان تأثیر روش بیان شده در حجم محاسبات، در شکل ۲-۸ میزان حجم محاسبات بر حسب تعداد المان برای روش ماتریس انتقال و ماتریس انتقال جدید مورد مقایسه قرار گرفته است. با استفاده از شکل ۲-۸ می توان دریافت که حجم محاسبات متناسب با تعداد المان ها یک رابطه خطی دارد و ماتریس انتقال بیان شده نسبت به ماتریس اولیه دارای حجم محاسبات کمتری است. هرچند کاهش حجم محاسبات در تعداد المان های کم چندان تفاوتی ندارد، اما در تعداد المان های بالا این اختلاف بیشتر بوده و به روشنی قابل مشاهده است. بنابراین برای مدل هایی که دقت بالایی در نتایج مورد نیاز است و جهت مدل سازی تعداد المان های

بیشتری باید مورد استفاده قرار گیرد، می‌توان با تغییر ماتریس انتقال و با استفاده از الگوریتم مطرح شده، حجم محاسبات را کاهش داد. از طرفی با توجه به خطی بودن حجم محاسبات با تعداد المان‌ها، می‌توان با انجام یک شبیه‌سازی با المان‌های کم، حجم محاسبات برای المان‌های بیشتر را با دقت مناسب تخمین زد.

جدول ۲-۸. مشخصات سخت‌افزاری و نرم‌افزاری رایانه مورد استفاده

Item	Value
OS Name	Microsoft Windows 7 Ultimate
System Model	HP ProBook 4520s
Processor	GHz M 480 @ 2.67 Intel(R) Core(TM) i5 CPU
Installed Physical Memory (RAM)	4.00 GB
Version	6.1.7601 Service Pack 1 Build 76016
System Type	X86-based PC
Hardware Abstraction Layer	Version = "6.1.7601.17514"
Available Virtual Memory	4.29 GB



شکل ۲-۸. حجم محاسبات بر حسب تعداد المان‌ها

فصل ۳

بهبود الگوریتم پیشنهادی بر پایه ماتریس انتقال ریکاتی

۳-۱. مقدمه

در فصل قبل الگوریتمی ارائه شد تا با استفاده از آن مرتبه ماتریس معکوس در روش ماتریس انتقال کاهش یابد. هرچند الگوریتم پیشنهادی موجب کاهش حجم محاسبات در روش ماتریس انتقال می‌شود اما همچنان در مودهای بالا مشکلات عددی در این الگوریتم وجود دارد. در این فصل الگوریتم پیشنهادی با روش ماتریس انتقال ریکاتی ترکیب می‌شود تا مشکلات عددی در این روش حذف شود. در ادامه روش ماتریس انتقال ریکاتی بیان شده و سپس الگوریتم پیشنهادی بر مبنای این روش بهبود می‌یابد.

۳-۲. ماتریس انتقال ریکاتی

ماتریس انتقال ریکاتی در سال ۱۹۷۸ و برای حذف مشکلات عددی در روش ماتریس انتقال توسط هورنر ارائه گردید. هورنر با تغییر بردار حالت، تغییری جزئی در ماتریس انتقال ایجاد نمود و اثبات کرد که با این تغییر حتی در مودهای بالا مشکلات عددی ایجاد نمی‌شود. هورنر ماتریس انتقال را به چند زیر ماتریس تفکیک کرد و ثابت نمود که با این تغییر، وجود سختی بالا و یا انعطاف‌پذیری بالا در مدل نیز موجب مشکلات عددی در ماتریس انتقال نخواهد شد. از طرفی نشان داد که ماتریس انتقال ریکاتی نسبت به ماتریس انتقال سنتی از حجم محاسبات کمتری برخوردار است [۴، ۳۷، ۴۷]. نتایج مقاله هورنر حاکی از آن است که در صورتی که حجم محاسبات روش ماتریس انتقال در ارتعاشات آزاد برابر با n^2 باشد، حجم محاسبات ماتریس انتقال ریکاتی برابر با $n^2/2$ خواهد بود. همچنین در صورتی که حجم محاسبات در تعیین پاسخ سیستم برای روش ماتریس انتقال برابر با $n^2 + n^2$ باشد، برای ماتریس انتقال ریکاتی برابر با $n^2 + n^2/2$ خواهد بود [۶].

در تبدیل ریکاتی بردار حالت به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{F} \quad \mathbf{E}]^T \quad (۳-۱)$$

که در عبارت ۳-۱، $\mathbf{F}$ نیمی از متغیرهای موجود در بردار حالت است که در نقطه شروع ($x=0$) معلوم می‌باشد و $\mathbf{E}$ نیمی دیگر از متغیرهای موجود در بردار حالت می‌باشد که در نقطه شروع نامعلوم هستند. با تغییر بردار حالت، رابطه بین بردار حالت بین نقطه i و نقطه $i+1$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}_{i-1} \quad (۳-۲)$$

در این حالت تبدیل ریکاتی به صورت زیر بیان می شود:

$$\mathbf{F}_{i-1} = \mathbf{S}_{i-1}\mathbf{E}_{i-1} + \mathbf{P}_{i-1} \quad (3-3)$$

که در رابطه ۳-۳، $\mathbf{S}$ ماتریس انتقال ریکاتی و $\mathbf{P}$ عبارات مربوط به بارهای خارجی می باشد که در ارتعاشات آزاد مقدار $\mathbf{P}$ برابر با صفر است. عبارات موجود در رابطه ۳-۳ به صورت رابطه ۴-۳ قابل محاسبه می باشند [۴۷]:

$$\mathbf{S}_i = (\mathbf{U}_{11}\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{U}_{12})\mathbf{T}_i \quad (4-3)$$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{U}_{11}\mathbf{P}_{i-1} + \mathbf{S}_i\mathbf{Q}_i$$

$$\mathbf{T}_i = (\mathbf{U}_{21}\mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{U}_{22})^{-1}$$

$$\mathbf{Q}_i = -\mathbf{U}_{21}\mathbf{P}_{i-1}$$

عبارات رابطه ۴-۳ یک رابطه بازگشتی برای محاسبه $\mathbf{S}$ و $\mathbf{P}$ بیان می کند.

۳-۳. بهبود الگوریتم

در این قسمت الگوریتم پیشنهادی بر پایه ماتریس انتقال ریکاتی بهبود می یابد تا در موده های بالا نیز این الگوریتم قابل استفاده باشد. شکل ۱-۳ نمایی از الگوریتم را نشان می دهد. ساختار الگوریتم پیشنهادی مشابه فصل قبل است با این تفاوت که پس از محاسبه ماتریس انتقال برای هر المان، ماتریس انتقال ریکاتی برای هر المان محاسبه می شود. در این حالت نیازی به ضرب ماتریس های انتقال در هم و تعیین ماتریس انتقال کل نیست. بنابراین حجم محاسبات به دلیل حذف تعیین ماتریس انتقال کل کاهش می یابد. به عبارت دیگر، در روش ماتریس انتقال، ابتدا ماتریس انتقال برای هر المان تعیین شده و سپس ماتریس انتقال کل از ضرب تمام ماتریس های انتقال در هم بدست می آید. سپس با اعمال شرایط مرزی مجهولات مورد نظر تعیین می شود. امام در روش ماتریس انتقال ریکاتی، ماتریس ریکاتی برای هر المان تعیین شده و در نهایت مجهولات مورد نظر با اعمال شرایط مرزی روی ماتریس ریکاتی المان آخر تعیین می شود. این موضوع موجب کاهش حجم محاسبات در روش ماتریس انتقال ریکاتی نسبت به روش ماتریس انتقال سنتی می شود. در این حالت، با استفاده از شکل ۱-۳، الگوریتم بهبود یافته به صورت زیر بیان می شود:

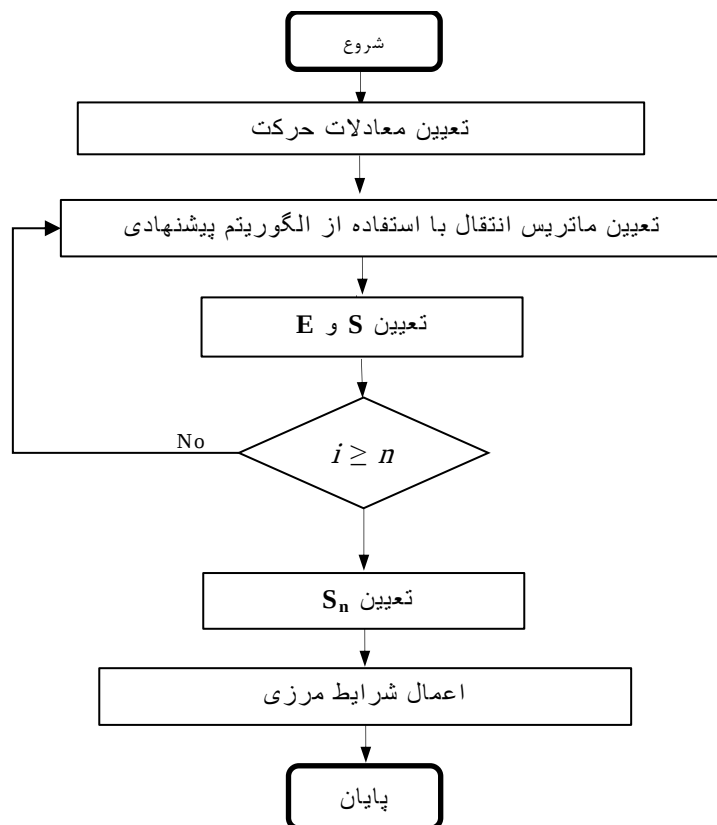
۱. تعیین معادلات حرکت

۲. تعیین ماتریس انتقال با استفاده از الگوریتم پیشنهادی در فصل قبل

۳. تعیین $\mathbf{S}$ و $\mathbf{E}$ برای تمام المان ها

۴. تعیین $\mathbf{S}_n$

۵. اعمال شرایط مرزی

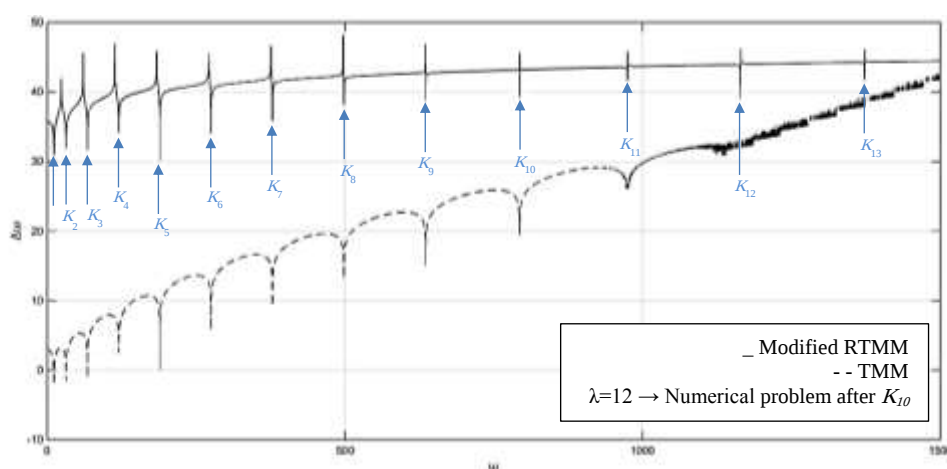


شکل ۳-۱. بهبود الگوریتم پیشنهادی

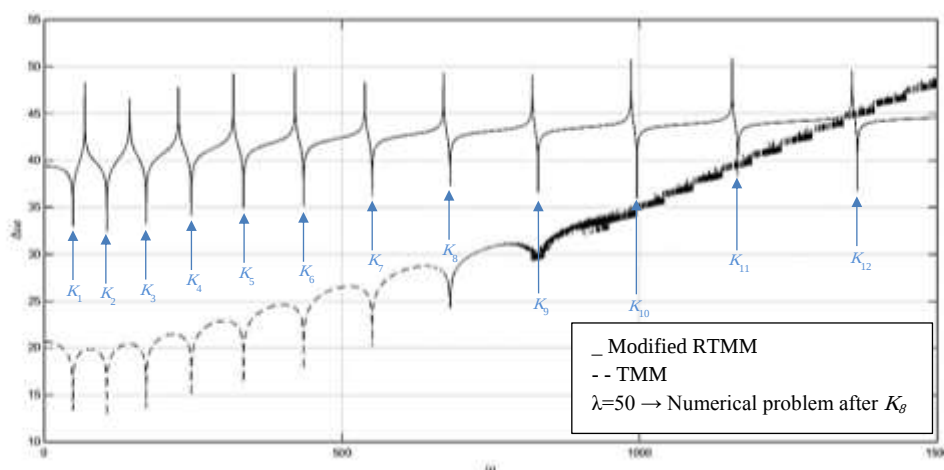
۳-۴. نتایج عددی

در این قسمت، مطالعه عددی ارائه شده در بخش ۲-۲-۴ مجدداً مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور، سه سرعت پایین ($\lambda=12$)، متوسط ($\lambda=50$) و بالا ($\lambda=100$) برای تیر در نظر گرفته می‌شود. باتوجه به این که λ یک عبارت بی‌بعد است، لذا λ در مقالات و مطالعات علمی به عنوان پارامتری برای ارزیابی شرایط دوران تیر یا پروانه‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، عموماً $0 < \lambda < 12$ دور پایین برای دوران در نظر گرفته می‌شود. $12 < \lambda < 50$ دور نسبتاً بالا و $50 < \lambda < 100$ دور خیلی بالا در نظر گرفته می‌شود [۴۸]. برای درک فیزیکی از مقدار عددی دور، در صورتی که طول تیر 50 cm، سطح مقطع $2 \times 2 \text{ cm}^2$ و جنس تیر فولاد گرفته شود، در $\lambda=100$ تیر با سرعتی حدود 11000 دور بر دقیقه دوران می‌کند. این در حالی است که پمپ‌های سانتریفیوژ عموماً در محدود 1000 تا 3000 دور بر دقیقه کار می‌کنند و در شرایط خاص گاهی دور این پمپ‌ها به 6000 دور هم می‌رسد. بنابراین $\lambda=100$ دور بسیار بالایی برای دوران خواهد بود [۴۹].

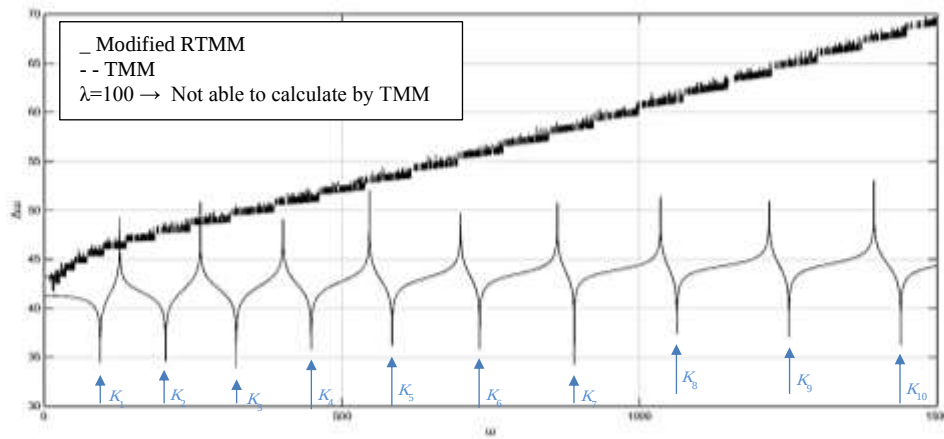
اشکال ۲-۳ تا ۵-۳ نتایج حاصل از روش ماتریس انتقال ریکاتی و روش ماتریس انتقال سنتی را مورد مقایسه قرار می‌دهد. همان‌طور که از اشکال ۲-۳ تا ۵-۳ مشخص است، روش ماتریس انتقال سنتی در مدهای بالا دچار مشکلات عددی شده و این در حالیست که روش ماتریس انتقال ریکاتی بدون محدودیت در تمام مدهای ارتعاشی قابل استفاده است. هرچقدر که سرعت دورانی تیر بیشتر باشد مشکلات عددی در مدهای پایین‌تری رخ می‌دهد. چنانچه برای $\lambda=12$ مشکلات عددی از مود یازدهم به بعد ایجاد می‌شود. برای $\lambda=50$ ، مشکلات عددی بعد از مود هشتم ایجاد شده و برای $\lambda=100$ مشکلات عددی از همان مود اول ایجاد می‌شود.



شکل ۲-۳. رسم معادله فرکانسی در دور پایین ($\lambda=12$)

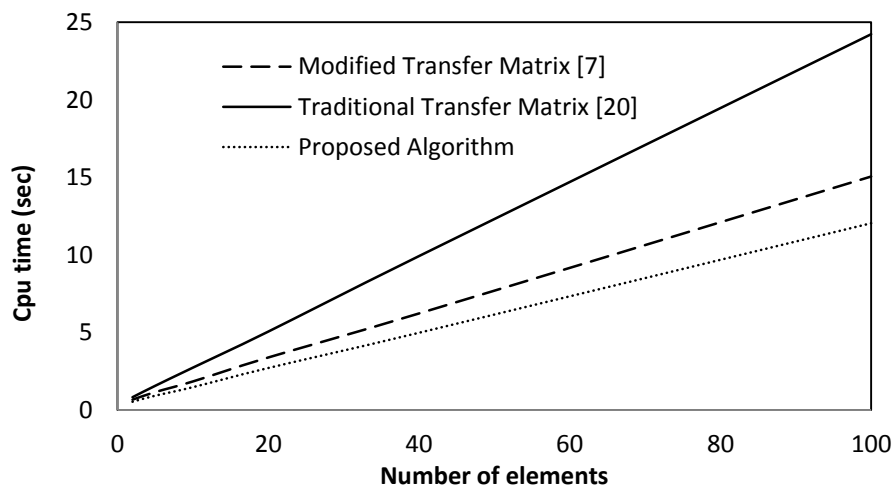


شکل ۳-۳. رسم معادله فرکانسی در دور متوسط ($\lambda=50$)



شکل ۳-۴. رسم معادله فرکانسی در دور بالا ($\lambda=100$)

شکل ۳-۵ حجم محاسبات برای هر سه روش ماتریس انتقال سنتی، ماتریس انتقال بهبود یافته و روش ماتریس انتقال ریکاتی بهبود یافته را مورد مقایسه قرار می‌دهد. همان‌طور که از شکل ۳-۵ مشخص است با توجه به این‌که در الگوریتم بهبود یافته نیازی به محاسبه ماتریس انتقال کل نیست بنابراین حجم محاسبات در این روش نسبت به سایر روش‌ها پایین‌تر است.



شکل ۳-۵. مقایسه حجم محاسبات برای سه روش ماتریس انتقال سنتی، ماتریس انتقال بهبود یافته و ماتریس انتقال ریکاتی بهبود یافته

فصل ۴

بهبود روش ماتریس انتقال

گستره ریکاتی

۴-۱. مقدمه

روش‌های عددی توانایی تحلیل سیستم‌های غیرخطی و تعیین پاسخ سیستم به ورودی‌های مختلف را دارا هستند اما این روش‌ها دارای حجم محاسبات بالایی بوده و برخلاف روش ماتریس انتقال در این روش‌ها با افزایش تعداد درجه آزادی، ابعاد ماتریس‌های مورد محاسبه هم افزایش پیدا کرده و لذا حجم محاسبات نیز به شکل قابل توجهی افزایش می‌یابد. کومار و همکارانش در سال ۱۹۸۶ روشی ارائه دادند تا با استفاده از آن بتوان از هر دو مزیت روش ماتریس انتقال و روش‌های عددی بهره برد [۳۵]. برای این منظور کومار، معادله مربوط به بعد مکانی سیستم را با روش ماتریس انتقال و بعد زمانی را با گسسته‌سازی و با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی حل کرد و برای روش ذکر شده، عنوان ماتریس انتقال گسسته را انتخاب کرد. با این روش می‌توان پاسخ سیستم به ورودی‌های مختلف و نیز پاسخ بسیاری از سیستم‌های غیرخطی را تعیین کرد [۳۵] و درعین حال از مزیت روش ماتریس انتقال هم بهره جست [۳۱، ۳۳، ۵۰].

روش ماتریس انتقال گسسته در بعد زمان از روش‌های انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌کند. بنابراین این روش همچنان محدودیت‌های روش‌های انتگرال‌گیری عددی را دارا است. در روش‌های انتگرال‌گیری عددی باید گام زمانی به اندازه کافی کوچک انتخاب شود تا نتایج صحیح تعیین شود. از طرفی در هریک از روش‌های انتگرال‌گیری عددی انتخاب پارامترهای کنترلی تاثیر بسیاری در صحت نتایج دارد. بنابراین در روش ماتریس انتقال گسسته برای بهبود نتایج و همگرایی پاسخ باید گام زمانی به اندازه کافی کوچک باشد و پارامترهای کنترلی نیز باید در محدوده‌ی پایدار انتخاب شوند [۵۱].

با استفاده از روش ماتریس انتقال گسسته، می‌توان پاسخ سیستم به ورودی‌های مختلف را تعیین کرد اما همچنان مشکلات عددی در روش ماتریس انتقال گسسته وجود دارد. روش ماتریس انتقال گسسته ریکاتی علاوه بر این که مشکلات عددی در روش ماتریس انتقال را حل می‌کند، می‌تواند جهت تعیین پاسخ سیستم به ورودی‌های مختلف نیز مورد استفاده قرار گیرد [۴، ۵۲]. در این فصل روش ماتریس انتقال گسسته ریکاتی جهت تحلیل ربات‌های انعطاف‌پذیر با تغییر شکل بزرگ مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای این منظور، این روش در دو بعد بهبود می‌یابد. در بعد مکانی نوع گسسته‌سازی المان انعطاف‌پذیر بهبود می‌یابد تا با استفاده از المان‌های کمتر بتوان به دقت مطلوب رسید. در بعد زمان نیز بجای استفاده از روش نیومارک، از روش جدیدتر ژو استفاده می‌شود. سپس در چند مطالعه عددی، روش بهبود یافته در تیر با تغییر شکل بزرگ و در ربات با لینک انعطاف‌پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴-۲. بهبود روش ماتریس انتقال ریکاتی در بعد مکان

در این قسمت مدلی جدید جهت گسسته‌سازی المان‌های انعطاف‌پذیر ارائه می‌شود تا با استفاده از المان‌های کمتر بتوان به دقت مناسب رسید. مشابه شکل ۴-۱ لینک انعطاف‌پذیر به یک سری المان با جرم‌ها و ممان اینرسی متمرکز تقسیم‌بندی می‌شود. طول تمام المان‌ها به‌غیر از المان اول را برابر با l در نظر گرفته شده و طول المان اول برابر با αl لحاظ می‌شود. بنابراین در صورتی که طول کل تیر برابر با L باشد، طول تمام المان‌ها به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$l_i = \frac{L}{n-1+\alpha} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (۴-۱)$$

حال بین هریک از المان‌های صلب یک فنر پیچشی در نظر گرفته می‌شود. برای تعیین ضریب سختی معادل فرض می‌کنیم بین هر دو جرم متمرکز یک المان انعطاف‌پذیر بدون جرم قرار دارد. در این حالت با توجه به بدون جرم بودن المان گشتاور خمشی M در طول المان وارد می‌شود. در این صورت زاویه خمش المان انعطاف‌پذیر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI(x)} dx \quad (۴-۲)$$

که در رابطه ۴-۲ EI سختی خمشی تیر و x متغیر طولی المان می‌باشد. شرایط مرزی برای المان i ام به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow \theta = \theta_i \\ x=l &\rightarrow \theta = \theta_{i+1} \end{aligned} \quad (۴-۳)$$

بنابراین حاصل انتگرال رابطه (۴-۲) به‌صورت زیر می‌شود:

$$\theta_{i+1} = \frac{Ml}{EI} + \theta_i \quad (۴-۴)$$

از طرفی گشتاور معادل را می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد [۵۳]

$$M = K(\theta_{i+1} - \theta_i) \quad (۴-۵)$$

بنابراین با ترکیب دو رابطه ۴-۴ و ۴-۵ می‌توان سختی معادل را به‌صورت زیر به دست آورد:

$$K_i = \frac{EI}{l} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (۴-۶)$$

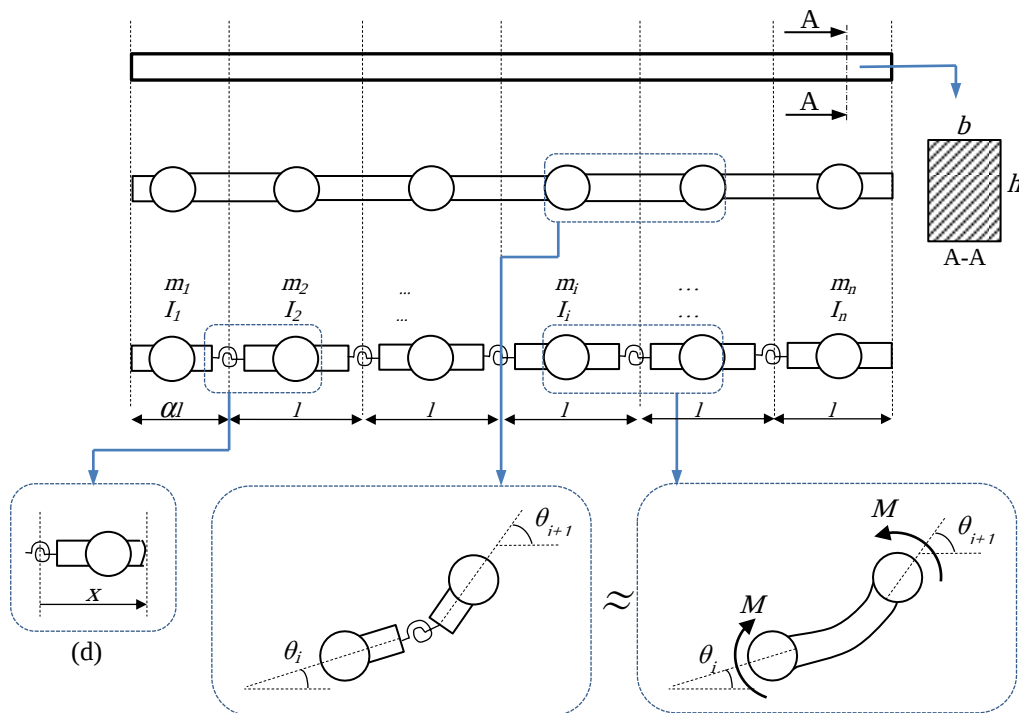
برای المان اول شرایط مرزی انتهای المان به‌صورت زیر می‌باشد:

$$x = (\alpha + 1) \frac{l}{2} \rightarrow \theta = \theta_{i+1} \quad (۴-۷)$$

بنابراین سختی معادل برای المان اول را می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد:

$$K_1 = \frac{2EI}{(\alpha+1)l} \quad (۸-۴)$$

در این حالت α مقداری بین ۰ تا ۱ خواهد داشت. در صورتی که مقدار صفر برای α انتخاب شود لینک انعطاف‌پذیر به تعداد $n-1$ المان تبدیل شده و در این حالت تکیه‌گاه به جای مدل صلب یک مدل انعطاف‌پذیر با ضریب سختی $K_i = 2EI/L$ خواهد بود. در این حالت سختی تکیه‌گاه دو برابر سختی المان‌ها خواهد بود. از طرفی در صورتی که مقدار ۱ برای α انتخاب شود، در این حالت لینک انعطاف‌پذیر به n تعداد المان به طول مساوی l تبدیل می‌شود.



شکل ۴-۱. گسسته سازی لینک انعطاف‌پذیر

۴-۳. بهبود روش ماتریس انتقال ریکاتی در بعد زمان

در روش ماتریس انتقال گسسته می‌توان مشتق اول و دوم متغیرهای موجود در بردار حالت را به شکل خطی به صورت تابعی از خود متغیر نمایش داد. در این حالت می‌توان برای متغیری مثل ζ عبارت زیر را نمایش داد:

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}(t_i) &= A_{\zeta} \dot{\zeta}(t_i) + B_{\zeta} \\ \dot{\zeta}(t_i) &= D_{\zeta} \zeta(t_i) + E_{\zeta} \end{aligned} \quad (۹-۴)$$

که ضرایب A_{ζ} ، B_{ζ} ، D_{ζ} و E_{ζ} ضرایب روش ماتریس انتقال گسسته هستند و با استفاده از

روش‌های انتگرال‌گیری عددی محاسبه می‌شوند. در تمام مطالعاتی که تا به حال انجام گرفته است عموماً نویسندگان از روش نیومارک استفاده کرده‌اند. در این قسمت برای بهبود روش ماتریس انتقال گسسته در بعد زمان، از روش ژو [۵۴] استفاده می‌شود. در [۵۴] ژو روش جدید انتگرال‌گیری عددی را ارائه داد و روش خود را با روش نیومارک برای چند مطالعه عددی مقایسه کرد و نشان داد که این روش با داشتن سه پارامتر کنترلی نسبت به روش نیومارک از مزیت‌های محاسباتی بیشتری برخوردار است. در روش ژو رابطه بین شتاب و جابجایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{i+1} = \dot{\eta}_i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\zeta_1}{2}\right) \ddot{\eta}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \frac{\zeta_1}{4}\right) \ddot{\eta}_{i+1} \Delta t - \frac{1}{4} \zeta_1 \ddot{\eta}_{i-1} \Delta t \\ \eta_{i+1} = \eta_i + \dot{\eta}_i \Delta t + \left(\frac{1}{3} + \frac{\zeta_2}{6}\right) \ddot{\eta}_i (\Delta t)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta_2}{12}\right) \ddot{\eta}_{i+1} (\Delta t)^2 - \frac{1}{12} \zeta_2 \ddot{\eta}_{i-1} (\Delta t)^2 \end{cases} \quad (10-4)$$

که ضرایب ζ_1 و ζ_2 در رابطه ۱۰-۴ پارامترهای کنترلی در روش ژو هستند. با استفاده از رابطه اول معادله ۱۰-۴ می‌تواند رابطه شتاب با جابجایی را به صورت رابطه ۱۱-۴ نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_{i+1} = & \left[\frac{12}{(2 - \zeta_2)(\Delta t)^2} \right] \eta_{i+1} \\ & + \left[\frac{12}{(2 - \zeta_2)(\Delta t)^2} \right] \left[-\eta_i - \dot{\eta}_i \Delta t - \left(\frac{1}{3} + \frac{\zeta_2}{6}\right) \ddot{\eta}_i (\Delta t)^2 + \frac{1}{12} \zeta_2 \ddot{\eta}_{i-1} (\Delta t)^2 \right] \end{aligned} \quad (11-4)$$

بنابراین ضرایب A و B در روش ماتریس انتقال گسسته به روش زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned} A_\eta = & \left[\frac{12}{(2 - \zeta_2)(\Delta t)^2} \right] \\ B_\eta = & A_\eta \left[-\eta_i - \dot{\eta}_i \Delta t - \left(\frac{1}{3} + \frac{\zeta_2}{6}\right) \ddot{\eta}_i (\Delta t)^2 + \frac{1}{12} \zeta_2 \ddot{\eta}_{i-1} (\Delta t)^2 \right] \end{aligned} \quad (12-4)$$

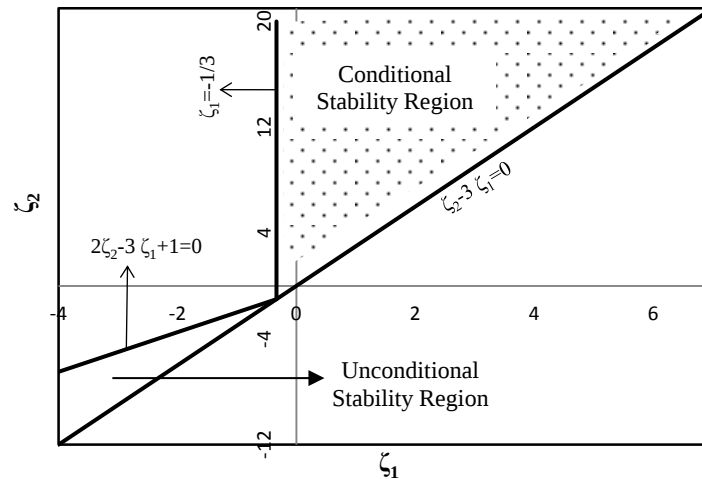
و به صورت مشابه با استفاده از رابطه دوم در معادله ۱۰-۴ ضرایب D و E در روش ماتریس انتقال گسسته به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$D_\eta = \left(\frac{1}{2} - \frac{\zeta_1}{4}\right) \Delta t A_\eta \quad E_\eta = \left[\dot{\eta}_i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\zeta_1}{2}\right) \ddot{\eta}_i \Delta t - \frac{1}{4} \zeta_1 \ddot{\eta}_{i-1} \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \frac{\zeta_1}{4}\right) B_\eta \Delta t \right] \quad (13-4)$$

آنچه در تمام روش‌های انتگرال‌گیری از اهمیت بسیار برخوردار است، انتخاب صحیح پارامترهای کنترلی است. روش ژو بدون محدودیت پایدار است اگر مقادیر کنترلی در بازه زیر انتخاب شود [۵۴]:

$$\begin{cases} 2\zeta_2 - 3\zeta_1 + 1 \leq 0 \\ \zeta_1 + 1 \leq 0 \\ \zeta_2 - 3\zeta_1 > 0 \end{cases} \quad (14-4)$$

با رسم سه نمودار در رابطه ۴-۱۴، می‌توان مقادیر مناسب پارامترهای کنترلی مطابق شکل ۴-۲ تعیین کرد.



شکل ۴-۲. انتخاب مقادیر مناسب پارامترهای کنترلی در روش ژو

۴-۴. تعیین ماتریس‌های انتقال

در این قسمت ماتریس‌های انتقال برای هر یک از المان‌های ربات انعطاف‌پذیر شامل: لینک انعطاف‌پذیر، نیروهای خارجی، مفصل انعطاف‌پذیر و ... مشخص می‌شود. برای این منظور ابتدا باید معادلات حرکت برای هر المان تعیین شود. سپس با حل معادله حرکت، رابطه بین نقطه i و $i+1$ تعیین می‌شود تا با استفاده از آن ماتریس انتقال برای هر المان تعیین شود. بنابراین در ادامه، ابتدا معادله حرکت برای هر المان تعیین شده و سپس رابطه بین نقطه i و $i+1$ در هر المان تعیین می‌شود. در نهایت ماتریس انتقال برای هر المان تعیین می‌شود.

۴-۴-۱. معادلات حرکت المان صلب

شکل ۴-۳ نمایی از المان صلب نمایش داده شده است. در صورتی که مرکز جرم در وسط المان در نظر گرفته شود، با استفاده از شکل ۴-۲ می‌توان موقعیت مرکز جرم را به صورت زیر نمایش داد:

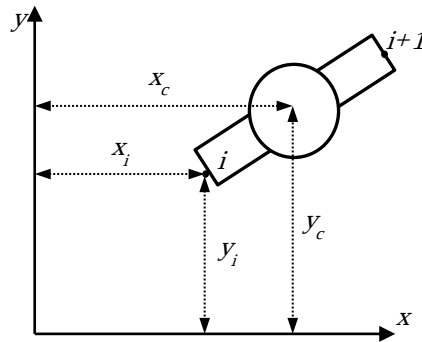
$$x_c = x_i + \frac{l}{2} \cos \theta \quad (4-15)$$

$$y_c = y_i + \frac{l}{2} \sin \theta$$

با مشتق‌گیری از رابطه ۴-۱۵ می‌توان شتاب در مرکز جرم را با استفاده از رابطه زیر به دست آورد:

$$\ddot{x}_c = \ddot{x}_i - \frac{l}{2} \ddot{\theta} \sin \theta - \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (۴-۱۶)$$

$$\ddot{y}_c = \ddot{y}_i + \frac{l}{2} \ddot{\theta} \cos \theta - \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta$$



شکل ۴-۳. نمایی از المان صلب

در شکل ۴-۴ نیروها و گشتاورهای وارد بر المان i-ام نمایش داده شده است. با تعیین شتاب مرکز جرم می‌توان با استفاده از قانون دوم نیوتن عبارت زیر را برای نیرو در جهت x و y نمایش داد:

$$N_{i+1} = N_i - m_i \ddot{x}_c \quad (۴-۱۷)$$

$$V_{i+1} = V_i + m_i \ddot{y}_c + ql$$

که در عبارت ۴-۱۷، N نیرو در جهت x ، V نیرو در جهت y ، m_i جرم المان و q بار قائم وارد بر المان می‌باشد. همچنین با گشتاورگیری حول نقطه $i+1$ ، می‌توان عبارت زیر را برای گشتاور نمایش داد:

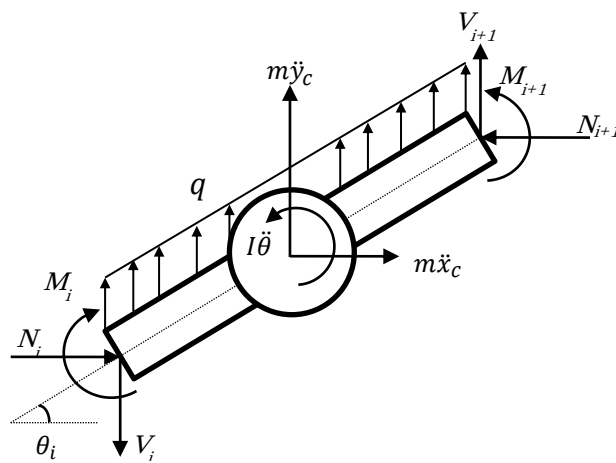
$$M_{i+1} = M_i - N_i l \sin \theta - V_i l \cos \theta + \bar{I} \ddot{\theta} + m_i \ddot{x}_c \frac{l}{2} \sin \theta - m_i \ddot{y}_c \frac{l}{2} \cos \theta - q \frac{l^2}{2} \cos \theta \quad (۴-۱۸)$$

حال عبارات به‌دست‌آمده برای شتاب را در روابط نیرو و گشتاور جایگذاری می‌کنیم:

$$N_{i+1} = N_i - m \left(\ddot{x}_i - \frac{l}{2} \ddot{\theta} \sin \theta - \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \quad (19-4)$$

$$V_{i+1} = V_i + m \left(\ddot{y}_i + \frac{l}{2} \ddot{\theta} \cos \theta - \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) + ql$$

$$M_{i+1} = M_i - N_i l \sin \theta - V_i l \cos \theta + \bar{I} \ddot{\theta} + m \frac{l}{2} \sin \theta \left(\ddot{x}_i - \frac{l}{2} \ddot{\theta} \sin \theta - \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) - m \frac{l}{2} \cos \theta \left(\ddot{y}_i + \frac{l}{2} \ddot{\theta} \cos \theta - \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) - q \frac{l^2}{2} \cos \theta$$



شکل ۴-۴. نیرو و گشتاورهای وارد بر المان صلب در مدل غیرخطی

۴-۴-۲. معادلات مفصل انعطاف پذیر، بارهای خارجی متمرکز و جرم متمرکز

در فنر خمشی فرض بر این است که موقعیت ورودی و خروجی در یک نقطه قرار دارد. از طرفی با توجه به این که فنر جرم ندارد بنابراین برای فنر، نیرو و گشتاورها در دو طرف فنر یکسان بوده و لذا می توان رابطه بین نیرو و جابجایی بین دونقطه ی i و $i-1$ را به صورت زیر نمایش داد:

$$x_{i+1} = x_i \quad (20-4)$$

$$y_{i+1} = y_i$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{1}{k_i} M_i$$

$$M_{i+1} = M_i$$

$$N_{i+1} = N_i$$

$$V_{i+1} = V_i$$

برای اعمال نیرو و گشتاورهای خارجی نقطه‌ای فرض می‌شود که بارهای خارجی بر المان بدون جرم اعمال می‌شود. همچنین فرض می‌شود که المان فاقد طول بوده بنابراین موقعیت ورودی و خروجی در یک نقطه قرار دارد. این فرض موجب ساده‌سازی روابط تعادل می‌شود. شکل ۴-۵ (الف) نمایی از المان بدون جرم و نیروهای وارده را نمایش می‌دهد. در این حالت با استفاده از روابط تعادل می‌توان نوشت:

$$x_{i+1} = x_i \quad (۲۱-۴)$$

$$y_{i+1} = y_i$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i$$

$$M_{i+1} = M_i + M_{ext}$$

$$N_{i+1} = N_i + N_{ext}$$

$$V_{i+1} = V_i + V_{ext}$$

شکل ۴-۵ ب نمایی از نیروها و گشتاورهای وارد به جرم متمرکز را نشان می‌دهد. به صورت مشابه برای جرم متمرکز می‌توان روابط زیر را نمایش داد:

$$x_{i+1} = x_i \quad (۲۲-۴)$$

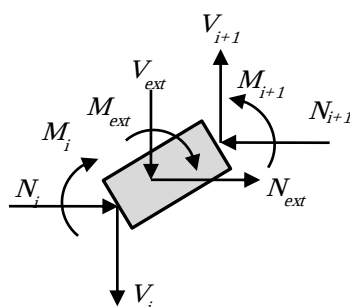
$$y_{i+1} = y_i$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i$$

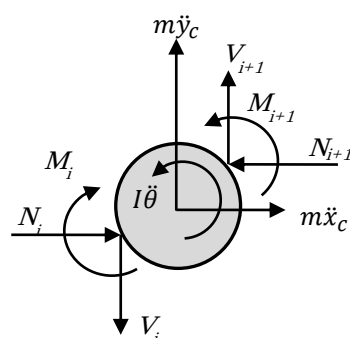
$$M_{i+1} = M_i + \bar{I} \ddot{\theta}$$

$$N_{i+1} = N_i - m_i \ddot{x}_c$$

$$V_{i+1} = V_i + m_i \ddot{y}_c$$



(الف)

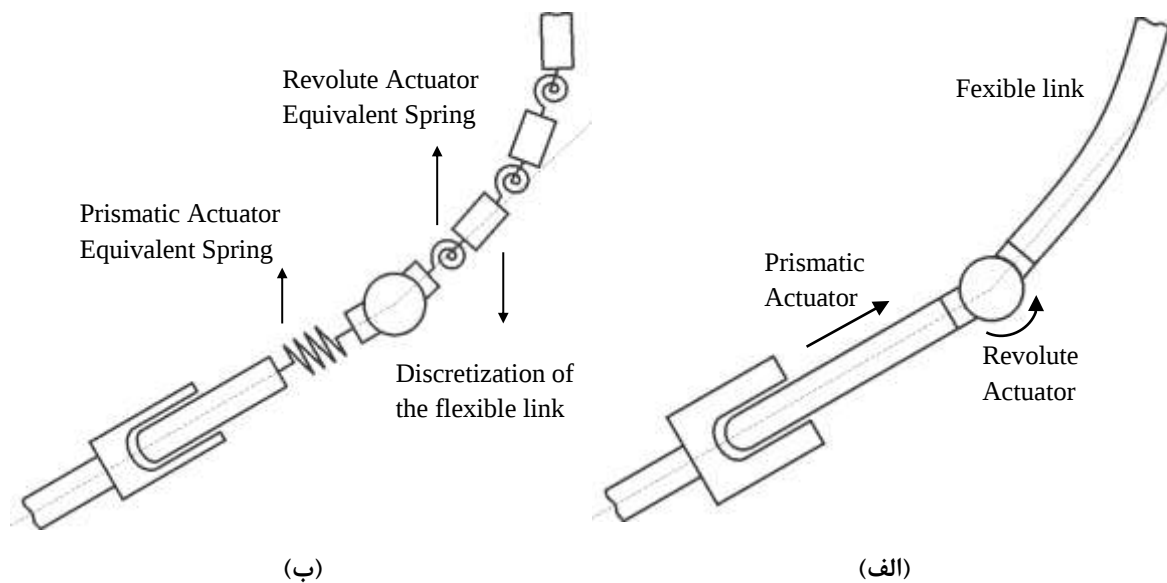


(ب)

شکل ۴-۵. (الف) نیرو و گشتاورهای خارجی متمرکز وارد بر المان بدون جرم، (ب) نیرو و گشتاورهای اعمالی به المان جرم متمرکز

۳-۴-۴. معادلات موتور محرک

شکل ۴-۶ الف نمایی از یک ربات با محرک‌های خطی و دورانی را نشان می‌دهد. شکل ۴-۶ ب نیز مدل‌سازی موتور محرک را نمایش می‌دهد. موتور محرک را می‌توان با یک فنر معادل و یک حرکت مدل‌سازی کرد. فنر معادل میزان انعطاف‌پذیری در موتور را نشان می‌دهد و با استفاده از تست‌های تجربی قابل محاسبه می‌باشد [۲۹]. حرکت موتور محرک نیز وابسته به ولتاژ ورودی است.



شکل ۴-۶. الف) نمایی از یک ربات با موتور محرک خطی و دورانی، ب) مدل‌سازی موتور محرک

برای موتورهای محرک سه نقطه $i-1$ ، i و $i+1$ در نظر گرفته می‌شود تا بتوان به راحتی معادلات محرک را تعیین کرد (شکل ۴-۷). با استفاده از شکل ۴-۷ معادله حرکت برای موتور محرک دورانی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\theta_{i+1} = \theta_{i-1} + G_{\theta} + \frac{1}{k_{\theta}} M_i \quad (4-23)$$

که در رابطه ۴-۲۳، k_{θ} سختی معادل فنر دورانی و G_{θ} دوران موتور می‌باشد. برای موتور محرک خطی رابطه بین نقطه $i-1$ و i به صورت زیر به دست می‌آید:

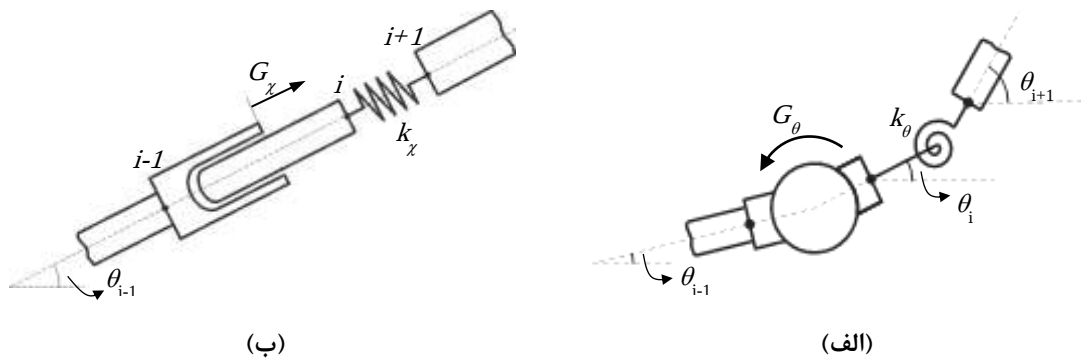
$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + G_x \cos \theta_{i-1} \\ y_i &= y_{i-1} + G_x \sin \theta_{i-1} \end{aligned} \quad (4-24)$$

که در ۴-۲۴، G_x حرکت خطی موتور محرک می‌باشد. همچنین برای موتور محرک خطی رابطه بین نقطه i و $i+1$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{N_i}{k_e} \quad (۲۵-۴)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{V_i}{k_e}$$

که در رابطه ۲۵-۴، k_e سختی معادل موتور محرک خطی می‌باشد.



شکل ۴-۷. الف) مدل‌سازی موتور محرک دورانی، ب) مدل‌سازی موتور محرک خطی

۴-۴-۴. تعیین ماتریس‌های انتقال

برای مدل مورد بررسی در این رساله، بردار حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z = [x, y, \theta, M, N, V, 1]^T \quad (۲۶-۴)$$

حال در صورتی که بتوان روابط بین سطرهای بردار حالت بین دو نقطه از المان‌ها را بر حسب سایر عبارات موجود در بردار حالت تعیین کرد، می‌توان با نوشتن این روابط به صورت ماتریسی، ماتریس انتقال بین المان‌ها را به دست آورد. هرچند در قسمت قبل روابط بین نیرو و گشتاور بین نقطه‌ی i و نقطه‌ی $i+1$ به دست آمد، اما وجود برخی از عبارات موجب اختلال در استفاده از روش ماتریس انتقال می‌شود. در روش ماتریس انتقال باید رابطه‌ی بین سطرهای بردار حالت با یکدیگر یک رابطه‌ی خطی باشد. بنابراین در این حالت ترم‌های شتاب و سرعت متغیرهای x ، y و θ موجب اختلال در استفاده از این روش خواهد شد. از طرفی وجود عبارات غیرخطی و ضرب متغیرها در یکدیگر همچون عباراتی مثل $\dot{\theta}^2$ ، $\cos\theta$ ، $\dot{\theta}^2 \sin\theta$ و... نیز مشکلی دیگر در استفاده از این روش خواهد بود. برای جملات شتاب و سرعت از ضرایب خطی‌سازی روش ماتریس انتقال گسسته به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\ddot{\zeta}(t_i) = A_{\zeta} \dot{\zeta}(t_i) + B_{\zeta} \quad (۲۷-۴)$$

$$\dot{\zeta}(t_i) = D_{\zeta} \zeta(t_i) + E_{\zeta}$$

که ضرایب A_{ζ} ، B_{ζ} ، D_{ζ} و E_{ζ} همان ضرایبی هستند که در قسمت قبل تعیین شدند و با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی قابل محاسبه می‌باشند. برای حل مشکل وجود توابع مثلثاتی در ماتریس انتقال، توابع مثلثاتی را در زمان t_i با استفاده از بسط تیلور، برحسب زمان t_{i-1} نمایش می‌دهیم، در این حالت توابع مثلثاتی در زمان t_i نقش یک عدد ثابت را داشته و لذا در ستون‌نمایی ماتریس انتقال قرار می‌گیرند. برای یک تابع دلخواه مثل u ، می‌توان با استفاده از رابطه زیر گام زمانی $n+1$ به گام زمانی n مرتبط کرد [۵۵]:

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}_n \Delta t^2 + \frac{1}{6} \ddot{\ddot{u}}_n \Delta t^3 + \dots \quad (۲۸-۴)$$

با در نظر گرفتن $u = \sin \theta$ و $u = \cos \theta$ و استفاده از سه جمله اول رابطه (۲۵-۴) می‌توان به روابط زیر رسید:

$$\sin \theta(t_i) = \sin \theta(t_{i-1}) \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\dot{\theta}(t_{i-1}) \Delta t]^2 \right\} \quad (۲۹-۴)$$

$$+ \cos \theta(t_{i-1}) \left\{ \dot{\theta}(t_{i-1}) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\theta}(t_{i-1}) \Delta t^2 \right\} + o(\Delta t^2)$$

$$\cos \theta(t_i) = \cos \theta(t_{i-1}) \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\dot{\theta}(t_{i-1}) \Delta t]^2 \right\} - \sin \theta(t_{i-1}) \left\{ \dot{\theta}(t_{i-1}) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\theta}(t_{i-1}) \Delta t^2 \right\} + o(\Delta t^2)$$

همان‌طور که مشخص است با تقریب فوق $\sin \theta$ و $\cos \theta$ در زمان t_i تنها وابسته به گام زمانی قبلی هستند و لذا نقش یک عدد ثابت را ایفا می‌کنند.

پارامتر دیگری که موجب اختلال در استفاده از روش ماتریس انتقال می‌شود، عبارت $\dot{\theta}^2$ می‌باشد. برای خطی سازی این عبارت، از بسط تیلور دو عبارت ضربی استفاده می‌کنیم. برای دو تابع دلخواه $a(t)$ و $b(t)$ که در یکدیگر ضرب می‌شوند با استفاده از بسط تیلور می‌توان نوشت:

$$a(t_i)b(t_i) = a(t_{i-1})b(t_i) + a(t_i)b(t_{i-1}) - a(t_{i-1})b(t_{i-1}) + \dot{a}(t_{i-1})\dot{b}(t_{i-1})\Delta t^2 \quad (۳۰-۴)$$

با استفاده از رابطه ۳۰-۴، می‌توان $\dot{\theta}^2$ را به صورت زیر نمایش داد:

$$\dot{\theta}^2(t_i) = \underbrace{2\dot{\theta}(t_{i-1})\dot{\theta}(t_i)}_{A_{\theta}} - \underbrace{\dot{\theta}^2(t_{i-1}) + \ddot{\theta}^2(t_{i-1})\Delta t^2}_{B_{\theta}} = A_{\theta}\dot{\theta}(t_i) - B_{\theta} \quad (۳۱-۴)$$

بنابراین با استفاده از رابطه ۴-۳۱، $\dot{\theta}^2$ را می‌توان به شکل تابعی خطی از $\dot{\theta}$ نمایش داد. همچنین با توجه به رابطه‌ی در نظر گرفته شده برای $\dot{\theta}$ می‌توان نوشت:

$$\dot{\theta}^2(t_i) = A_{\theta} D_{\theta} \theta(t_i) + (A_{\theta} E_{\theta} - B_{\theta}) \quad (۳۲-۴)$$

حال با استفاده از روابط بیان شده به خطی سازی معادلات پرداخته و سپس ماتریس انتقال برای هریک از المان‌ها تعیین می‌شود. در این حالت برای المان صلب روابط تعادل به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x_{i+1} = x_i + l \bar{c} \quad (۳۳-۴)$$

$$y_{i+1} = y_i + l \bar{s}$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i$$

$$\begin{aligned} M_{i+1} = & \left(m \frac{l}{2} \bar{s} A_x \right) x_i + \left(-m \frac{l}{2} \bar{c} A_y \right) y_i + \left(\bar{I} A_{\theta} - m \frac{l^2}{4} A_{\theta} (\bar{s}^2 + \bar{c}^2) \right) \theta_i \\ & + M_i + (-l \bar{s}) N_i + (-l \bar{c}) V_i \\ & + \left(\bar{I} B_{\theta} + m \frac{l}{2} \bar{s} B_x - m \frac{l^2}{4} B_{\theta} (\bar{s}^2 + \bar{c}^2) - m \frac{l}{2} \bar{c} B_y - q \frac{l^2}{2} \bar{c} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{i+1} = & (-m A_x) x_i + \left(m \frac{l}{2} \bar{s} A_{\theta} + m \frac{l}{2} \bar{c} A_{\theta} D_{\theta} \right) \theta_i + N_i \\ & + \left(m \frac{l}{2} \bar{s} B_{\theta} + m \frac{l}{2} \bar{c} (A_{\theta} E_{\theta} - B_{\theta}) - m B_x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{i+1} = & (m A_y) y_i + \left(m \frac{l}{2} \bar{c} A_{\theta} - m \frac{l}{2} \bar{s} A_{\theta} D_{\theta} \right) \theta_i + V_i \\ & + \left(m \frac{l}{2} \bar{c} B_{\theta} - m \frac{l}{2} \bar{s} (A_{\theta} E_{\theta} - B_{\theta}) + m B_y + q l \right) \end{aligned}$$

که با استفاده از رابطه ۴-۳ می‌توان ماتریس انتقال المان صلب را به صورت زیر به دست آورد:

$$U_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l \bar{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l \bar{s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m \frac{l}{2} \bar{s} A_x & -m \frac{l}{2} \bar{c} A_y & u_{43} & 1 & -l \bar{s} & -l \bar{c} & u_{47} \\ -m A_x & 0 & u_{53} & 0 & 1 & 0 & u_{57} \\ 0 & m A_y & u_{63} & 0 & 0 & 1 & u_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳۴-۴)$$

که ضرایب موجود در رابطه ۴-۳۴ به صورت رابطه ۴-۳۵ تعیین می‌شود:

$$u_{43} = \bar{I}A_{\theta} - m \frac{l^2}{4} A_{\theta} (\bar{s}^2 + \bar{c}^2) \quad (35-4)$$

$$u_{47} = \bar{I}B_{\theta} + m \frac{l}{2} \bar{s}B_x - m \frac{l^2}{4} B_{\theta} (\bar{s}^2 + \bar{c}^2) - m \frac{l}{2} \bar{c}B_y - q \frac{l^2}{2} \bar{c}$$

$$u_{53} = m \frac{l}{2} \bar{s}A_{\theta} + m \frac{l}{2} \bar{c}A_{\theta}D_{\theta}$$

$$u_{57} = m \frac{l}{2} \bar{s}B_{\theta} + m \frac{l}{2} \bar{c} (A_{\theta}E_{\theta} - B_{\theta}) - mB_x$$

$$u_{63} = m \frac{l}{2} \bar{c}A_{\theta} - m \frac{l}{2} \bar{s}A_{\theta}D_{\theta}$$

$$u_{67} = m \frac{l}{2} \bar{c}B_{\theta} - m \frac{l}{2} \bar{s} (A_{\theta}E_{\theta} - B_{\theta}) + mB_y + ql$$

حال ماتریس انتقال فنر خمشی مشخص می‌شود. با توجه به این که در روابط مربوط به فنر پارامترهای غیرخطی وجود ندارد بنابراین به راحتی با نوشتن رابطه ۴- ۲۰ به شکل ماتریسی می‌توان ماتریس انتقال فنر را به صورت رابطه ۴- ۳۳ به دست آورد:

$$U_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36-4)$$

و به صورت مشابه با استفاده از روابط ۴- ۲۱ ماتریس انتقال بارهای خارجی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$U_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & M_{ext} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & N_{ext} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & V_{ext} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37-4)$$

همان‌طور که مشخص است تمام بارهای خارجی در ستون آخر ماتریس انتقال قرار می‌گیرند. برای تعیین ماتریس انتقال جرم متمرکز باید روابط مربوط به ترم شتاب در رابطه ۴- ۲۲ خطی سازی شود. در این حالت با خطی سازی ترم‌های شتاب، ماتریس انتقال به صورت زیر خواهد بود:

$$U_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}A_\theta & 1 & 0 & 0 & \bar{I}B_\theta \\ -m_i A_x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -m_i B_x \\ 0 & m_i A_y & 0 & 0 & 0 & 1 & m_i B_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38-4)$$

با استفاده از رابطه ۲۳-۴ ماتریس انتقال موتور محرک دورانی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$U_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k_\theta} & 0 & 0 & G_\theta(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39-4)$$

همچنین با ترکیب معادلات ۲۴-۴ و ۲۵-۴ و خطی سازی جملات غیر خطی، ماتریس انتقال موتور محرک خطی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$U_\chi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_e} & 0 & G_\chi \bar{s} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_e} & G_\chi \bar{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40-4)$$

۴-۵. مطالعات عددی

۴-۵-۱. پاسخ اجباری تیر اویلر برنولی خطی

در این قسمت به عنوان مطالعه موردی اول، ارتعاشات اجباری یک تیر یک سر گیردار با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل ۴-۶ نمایی از مورد مطالعه را نمایش می‌دهد.

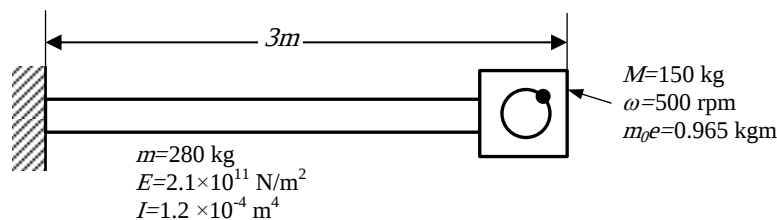
در شکل ۴-۶ تیر یک سر گیردار تحت بار نا بالانسی $m_0 e$ قرار داشته که با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. همچنین جرم متمرکز M نیز در انتهای تیر قرار دارد. در این حالت پاسخ بی‌بعد انتهای تیر در شرایط اولیه صفر را می‌توان به صورت زیر به دست آورد [۵۶]

$$w(x, t) = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\eta X_k(1)}{\lambda_k - \bar{\omega}^2} X_k(x) \right] \sin \bar{\omega} t, \quad \bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho A L^4}{EI}}, \quad \eta = \frac{m_0 e \omega^2 L^2}{EI} \quad (41-4)$$

که در رابطه ۴۱-۴ λ_k مقادیر ویژه و X پاسخ بعد مکانی بوده و با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$X_k(x) = C_k \left[\cos \lambda^{1/4} x - \cosh \lambda^{1/4} x + \frac{\cos \lambda^{1/4} + \cosh \lambda^{1/4}}{\sin \lambda^{1/4} + \sinh \lambda^{1/4}} (\sinh \lambda^{1/4} x - \sin \lambda^{1/4} x) \right] \quad (42-4)$$

که ضریب C_k با استفاده نرمال سازی شکل مودها تعیین می‌گردد [۵۶]. رابطه ۴-۳۷ پاسخ بی‌بعد انتهای تیر را نمایش می‌دهد. برای تعیین مقادیر عددی کافیست که پاسخ فوق در طول تیر ضرب شود.



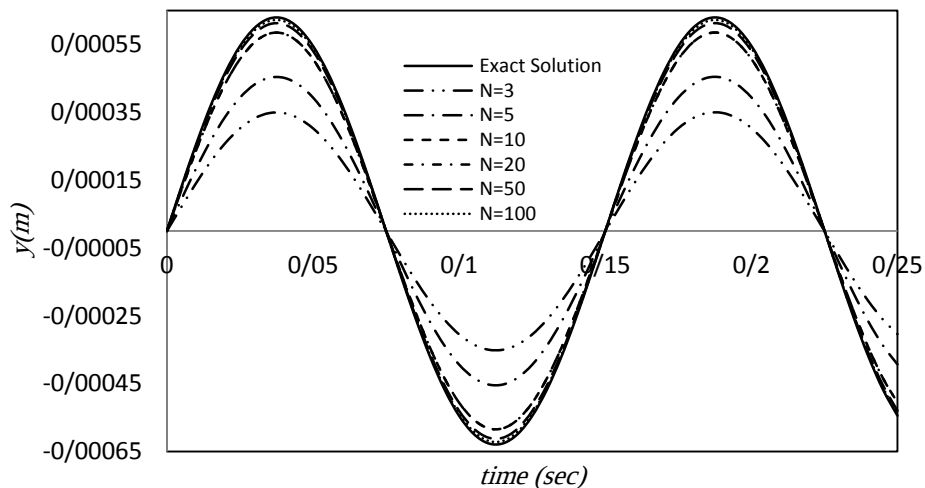
شکل ۴-۸. مشخصات ابعادی و فیزیکی تیر یک سر گیردار

برای مدل سازی به روش ماتریس انتقال، تیر به یک سری المان صلب با فنر خمشی تقسیم شده و ماتریس انتقال برای هریک از المان ها با استفاده از روابط بیان شده، تعیین می‌شود. همچنین ماتریس انتقال برای جرم انتهای تیر و نیروی متمرکز به صورت جدا مشخص شده و ماتریس انتقال کل از ضرب ماتریس ها در هم به دست می‌آید. در این حالت رابطه بین بردار حالت در ابتدا و انتهای تیر به صورت زیر خواهد بود:

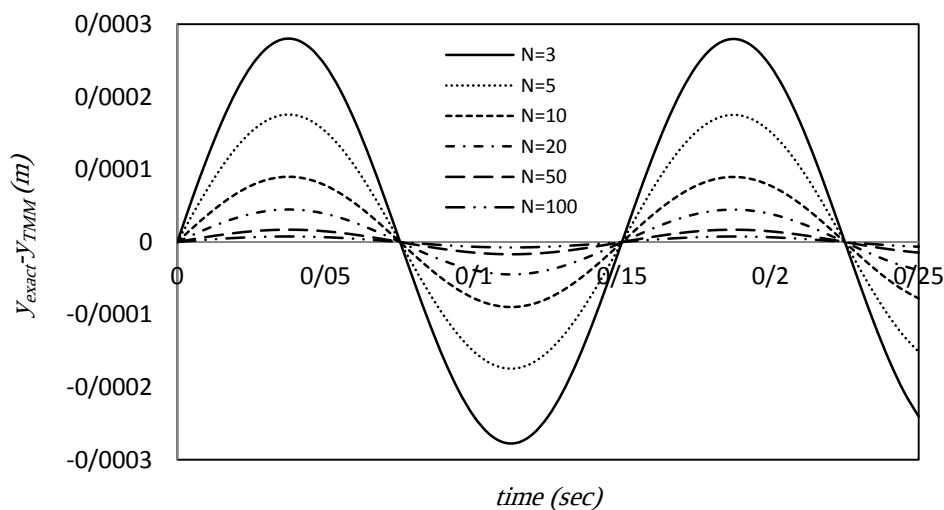
$$Z_n = U_F U_m U_{r,n} U_{s,n-1} U_{r,n-1} U_{s,n-2} \cdots U_{r,2} U_{s,1} U_{r,1} Z_1 \quad (43-4)$$

مشخصات ابعادی و فیزیکی تیر در شکل ۴-۶ نمایش داده شده است. برای بررسی نتایج با استفاده از روش ماتریس انتقال برنامه‌ای در نرم افزار متلب نوشته شده و نتایج حاصل برای حل تحلیلی و نتایج ماتریس انتقال گسسته در شکل ۴-۷ نشان داده شده است. برای این منظور در شکل ۴-۷ پاسخ انتهای تیر در تعداد المان های مختلف محاسبه شده و نمودار حل تحلیلی نیز برای مقایسه میزان دقت مدل سازی ترسیم شده است. با بررسی نمودارهای موجود در شکل ۴-۷ می‌توان دریافت که با افزایش تعداد المان ها پاسخ مدل ارائه شده نزدیک به پاسخ تحلیلی می‌شود. برای بررسی دقیق تر حساسیت

مدل نسبت به تعداد المان‌ها، در شکل ۴-۸ میزان اختلاف روش ماتریس انتقال نسبت به پاسخ تحلیلی در تعداد المان‌های مختلف نمایش داده شده است. همان‌طور که از شکل ۴-۸ قابل مشاهده است با افزایش تعداد المان‌ها مدل ماتریس انتقال نزدیک به مدل تحلیلی شده و میزان اختلاف با افزایش تعداد المان‌ها کاهش می‌یابد.



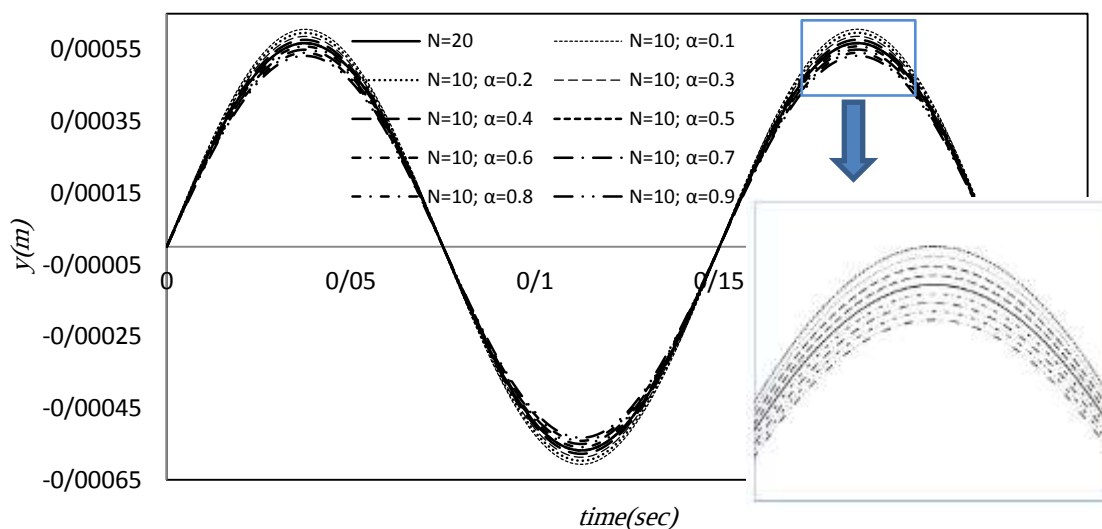
شکل ۴-۹. تاریخچه زمانی جابجایی انتهای تیر



شکل ۴-۱۰. اختلاف تاریخچه زمانی در روش ماتریس انتقال نسبت به حل تحلیلی

در ادامه به بررسی اثر انتخاب مقادیر α در میزان دقت نتایج پرداخته می‌شود. برای این منظور در شکل ۴-۹ پاسخ انتهای تیر برای دو حالت $N=20$ و با المان‌هایی با طول مساوی و $N=10$ و با مقادیر مختلف α مورد بررسی قرار می‌گیرد. همان‌طور که از شکل ۴-۹ مشخص است با افزایش α پاسخ حاصل از ۱۰ المان نزدیک به ۲۰ المان شده و در $\beta=0.5$ نمودار حاصل منطبق با نمودار حاصل از ۲۰

المان می‌شود. از طرفی از این به بعد با افزایش مقدار α مقدار خطا افزایش یافته و در $\alpha=0.9$ حداکثر خطا ایجاد می‌شود. بنابراین مقدار $\alpha=0.5$ برای α بهترین مقدار می‌باشد و با تعیین این مقدار برای α می‌توان با انتخاب تعداد المان‌های کمتر دقت مناسب‌تری دریافت کرد.

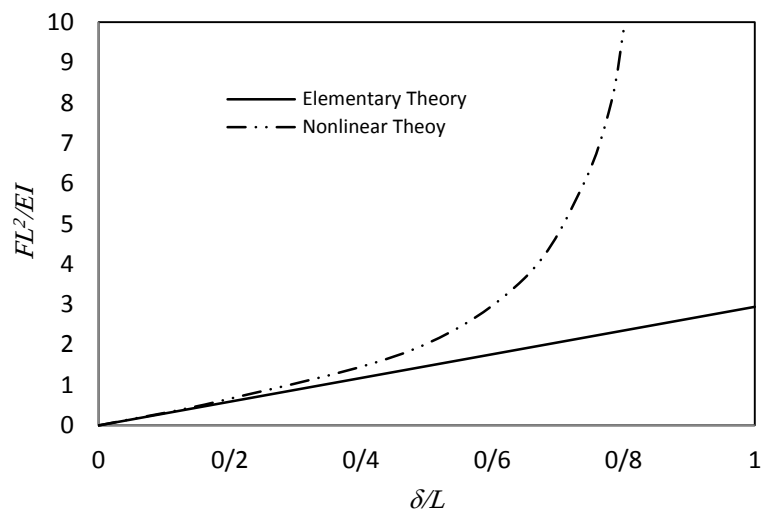


شکل ۴-۱۱. تاریخچه زمانی جابجایی در مقادیر مختلف α

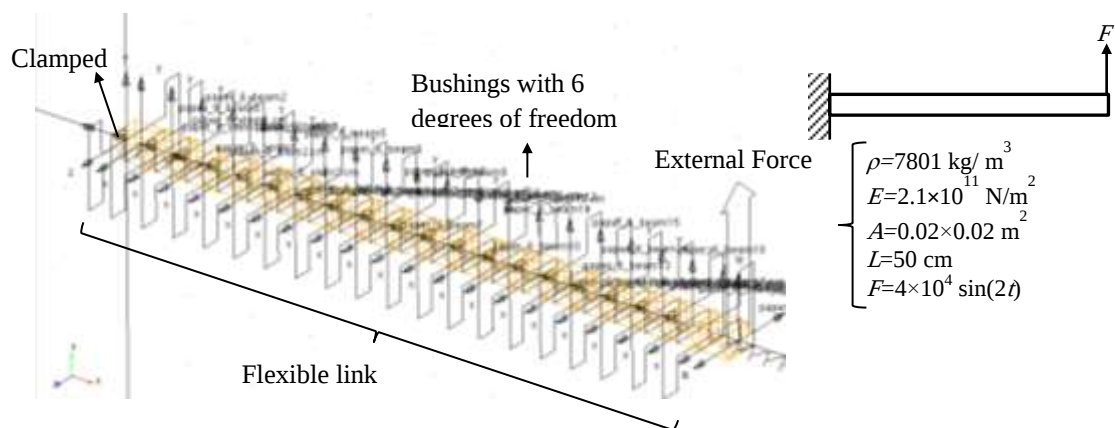
۴-۵-۲. پاسخ اجباری تیر با تغییر شکل بزرگ

به‌عنوان مطالعه موردی دوم در این قسمت پاسخ اجباری تیر یک سرگیردار در تغییر شکل بزرگ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. شکل ۴-۱۲ تئوری‌های کلاسیک و تئوری غیرخطی در تغییر شکل تیرها مورد بررسی قرار می‌دهد [۵۷، ۵۸]. در شکل ۴-۱۲ محور عمودی نیروی بی بعد و محور طولی جابجایی بی بعد را نشان می‌دهد. همانطور که از شکل ۴-۱۲ مشخص است، در صورتی که نیروی بی بعد کمتر از یک باشد، تئوری‌های کلاسیک و تئوری غیرخطی تیرها نتایج یکسانی خواهد داشت. از طرفی در صورتی که مقدار نیروی بی بعد افزایش پیدا کند، تیر در محدوده‌ی تغییر شکل بزرگ قرار گرفته و استفاده از تئوری‌های کلاسیک موجب افزایش خطا در نتایج خواهد شد. شکل ۴-۱۳ مشخصات ابعادی تیر مورد مطالعه را نشان می‌دهد. برای مثال مورد نظر مقدار نیروی بی بعد ۳٫۶۷ می‌باشد و لذا تیر در محدوده‌ی تغییر شکل بزرگ قرار دارد. برای بررسی میزان دقت نتایج حاصل از روش ماتریس انتقال با مدل غیرخطی تیر در نرم افزار ADAMS مقایسه می‌شود. شکل ۴-۱۳ مدل‌سازی تیر در نرم‌افزار ADAMS به همراه مشخصات ابعادی تیر را نمایش می‌دهد. برای راستی آزمایی نتایج، تیر در هر دو مدل به ۳۰ المان تقسیم شده است. شکل ۴-۱۴، جابجایی انتهای تیر

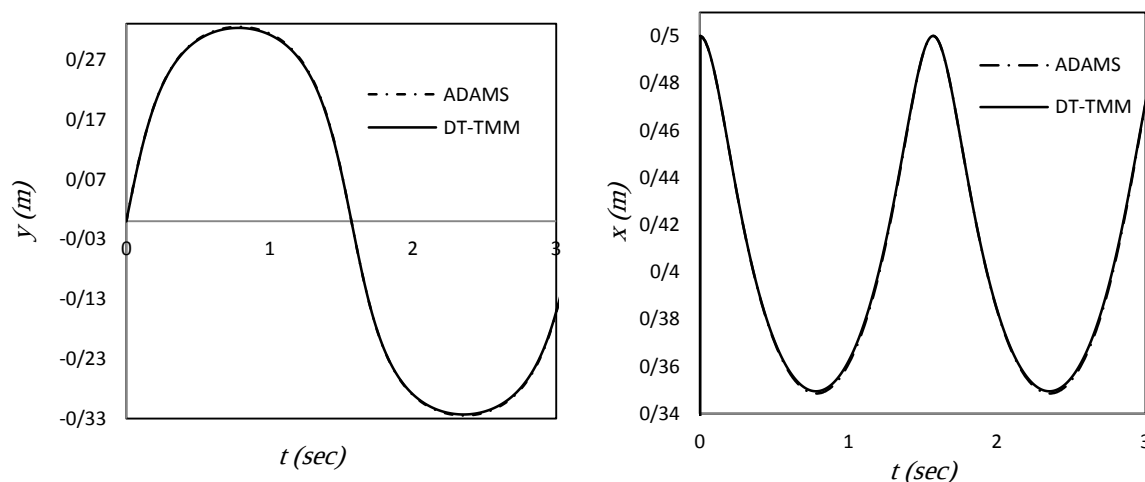
برای نرم افزار ADAMS و مدل ارائه شده را مورد سنجش قرار می دهد. همانطور که مشخص است نتایج روش ماتریس انتقال توافق خوبی را با مدل تیر غیر خطی ADAMS نشان می دهد.



شکل ۴-۱۲. مقایسه تئوری های کلاسیک و تئوری غیرخطی تیرها

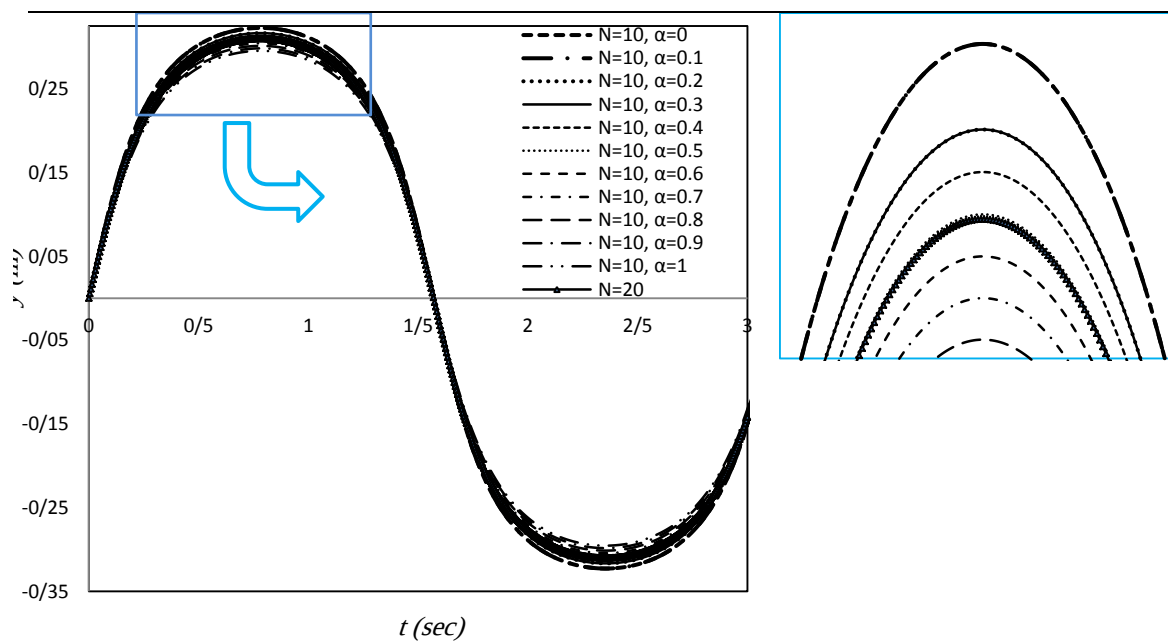
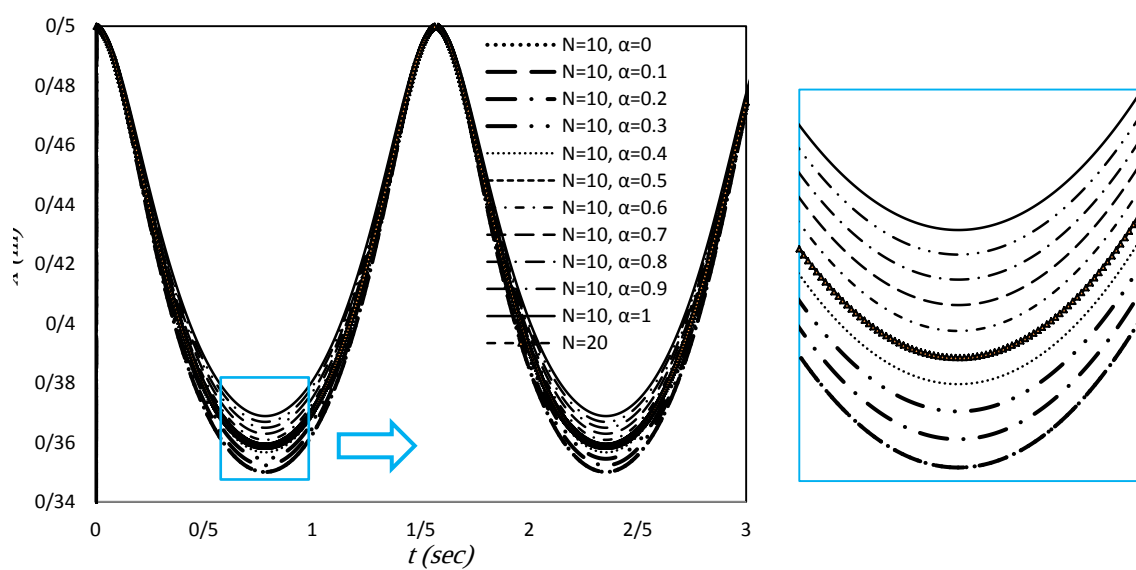


شکل ۴-۱۳. مدل سازی تیر در نرم افزار ADAMS

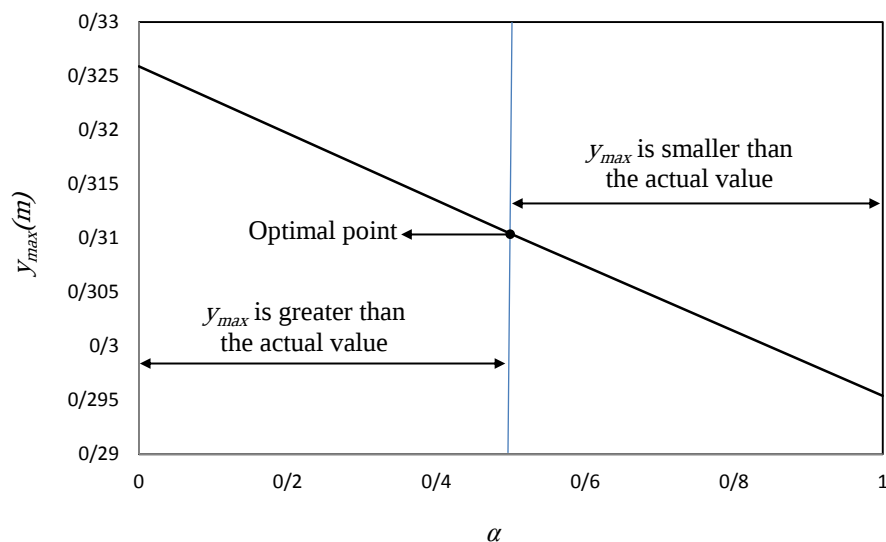


شکل ۴-۱۴. تاریخچه زمانی جابجایی

در بخش قبل پارامتر α برای تیر خطی تعیین شد. در این بخش این پارامتر برای تیر غیر خطی در شکل ۴-۱۵ مورد بررسی قرار می‌گیرد. به همین منظور، مشابه بخش قبل، پاسخ انتهای تیر برای دو حالت $N=20$ و با المان‌هایی با طول مساوی و $N=10$ و با مقادیر مختلف α مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای بررسی دقیق‌تر، در شکل ۴-۱۶ اثر انتخاب α در حداکثر جابجایی نمایش داده شده است. در شکل ۴-۱۶ نمودار به دو بخش تقسیم شده است. با استفاده از نمودار شکل ۴-۱۶ می‌توان دریافت که در بخش اول یعنی در محدوده $0 < \alpha < 0.5$ ، حداکثر دامنه بزرگتر از مقدار واقعی تعیین می‌شود. از طرفی با انتخاب α در محدوده دوم یعنی $0.5 < \alpha < 1$ ، حداکثر دامنه از مقدار واقعی کوچکتر تعیین می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در تغییر شکل‌های بزرگ نیز مقدار 0.5 برای α مقدار بهینه می‌باشد.

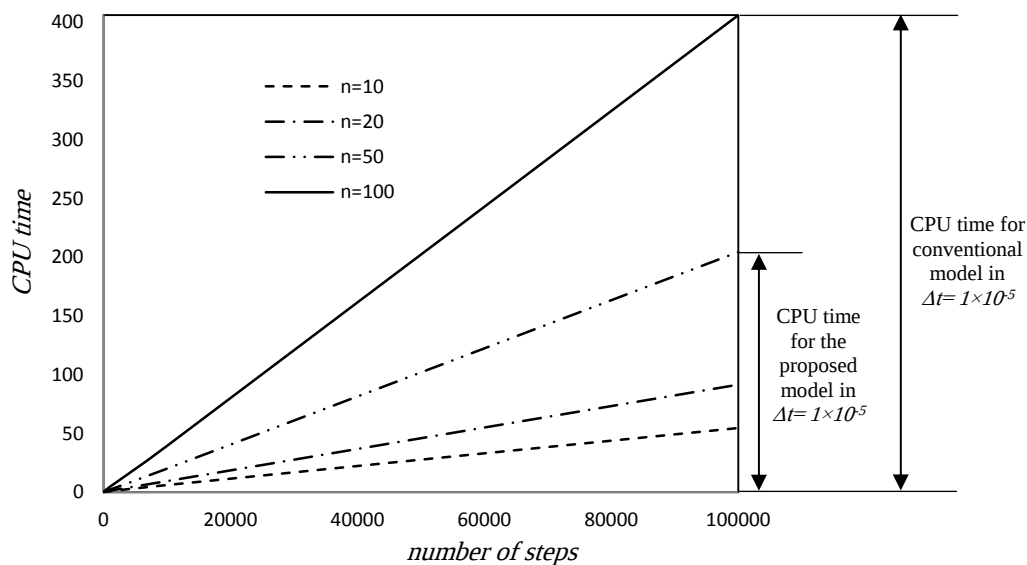


شکل ۴-۱۵. تاریخچه زمانی جابجایی در مقادیر مختلف α



شکل ۴-۱۶. تاثیر پارامتر α در حداکثر جابجایی

شکل ۴-۱۷ حجم محاسبات مدل ارائه شده با مدل سنتی (مدل با المان‌های یکسان) را مورد مقایسه قرار می‌دهد. با استفاده از شکل ۴-۱۷ می‌توان دریافت، باتوجه به این‌که در مدل ارائه شده با انتخاب نصف المان‌ها می‌توان به دقت مورد نظر رسید، بنابراین در مدل ارائه شده حجم محاسبات ۵۰ درصد کمتر از مدل سنتی می‌باشد.



شکل ۴-۱۷. مقایسه حجم محاسبات در مدل ارائه شده و مدل سنتی

۴-۵-۳. یک ربات دو لینکی روی مسیر حلزونی

در این بخش حرکت یک دو لینکی انعطاف‌پذیر در یک مسیر حلزونی مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل ۴-۱۸ نمایی از مسیر حرکت دو لینکی را نمایش می‌دهد. طول هریک از لینک‌ها ۲۵ سانتی‌متر بوده و زمان طی مسیر نیز ۴,۲۵ ثانیه می‌باشد. با استفاده از نقاط ابتدایی و انتهایی، رابطه موتور محرک در مفاصل اول و دوم به صورت زیر تعیین می‌شود:

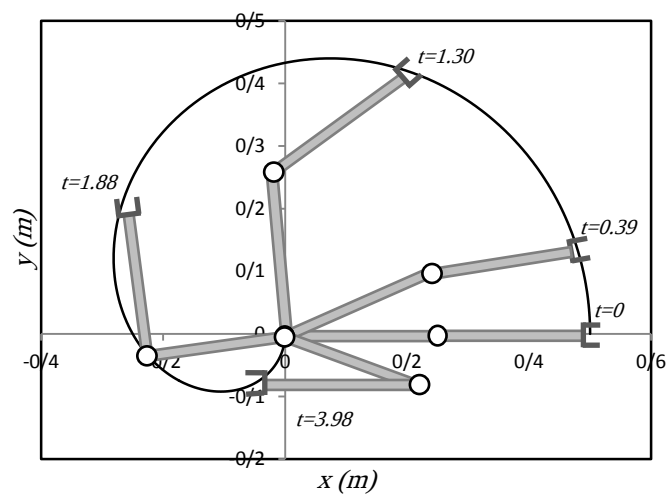
$$\begin{cases} G_1 = \frac{\pi}{10} \left[\frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} \sin(2t) \right], & 0 < G_1 < 2\pi \\ G_2 = \frac{\pi}{20} \left[-\frac{t}{T} + \frac{\pi}{2} \sin(2t) \right], & 0 < G_2 < \pi \end{cases} \quad (4-44)$$

که در رابطه ۴-۴ مقدار T برابر با ۰,۲ در نظر گرفته می‌شود. در این حالت با در نظرگیری مفصل انعطاف‌پذیر برای موتور محرک ماتریس انتقال کل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

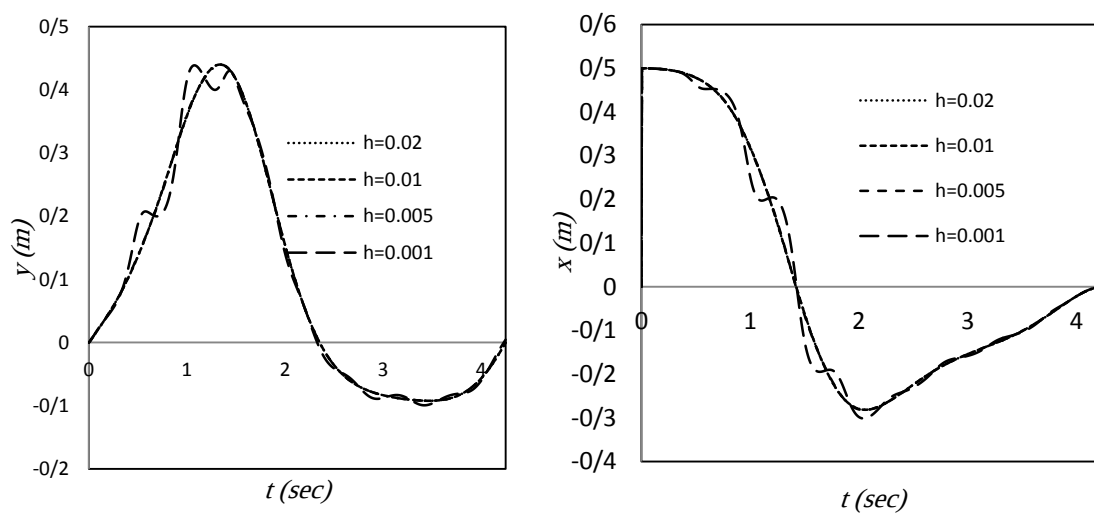
$$U = U_{r,n} U_{s,n-1} U_{r,n-1} U_{s,n-2} \dots U_{r,i} U_{s,i} U_{S2} U_{PD2} U_{s,i-1} U_{r,i-1} U_{s,i-2} \dots U_{r,2} U_{s,1} U_{r,1} U_{S1} U_{PD1} \quad (4-45)$$

برای بررسی تغییر شکل بزرگ در لینک‌ها چند سطح مقطع با ضخامت مختلف در نظر گرفته شده است. همچنین برای ساده‌تر شدن تحلیل در این قسمت از انعطاف‌پذیری مفاصل صرف نظر شده است. هریک از لینک‌ها به ۲۵ المان تقسیم شده‌اند و نتایج حاصل در شکل ۴-۱۹ نشان داده شده است. در شکل ۴-۱۹ تاریخچه زمانی جابجایی انتهای ربات ترسیم شده است.

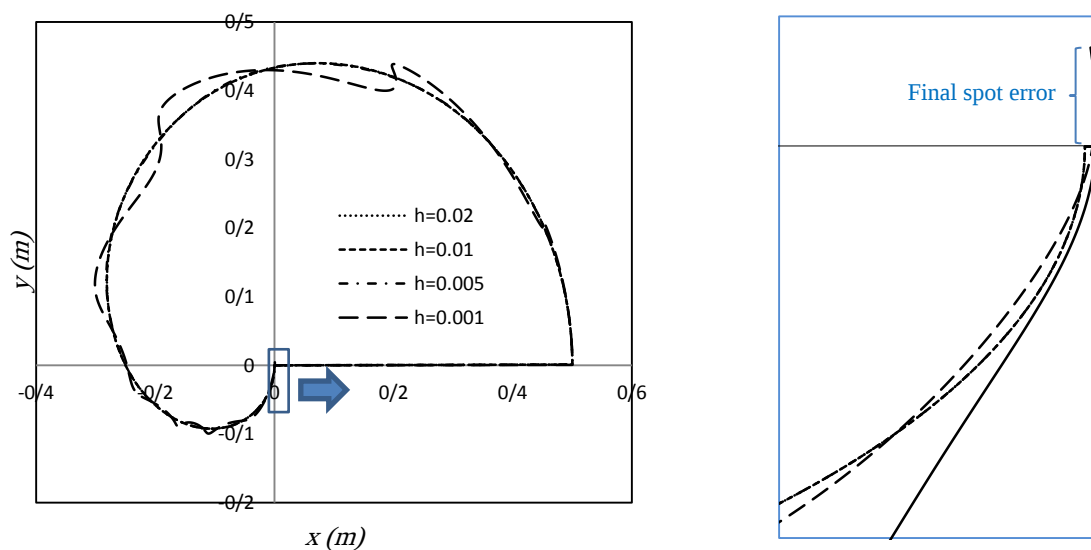
با استفاده از نمودارهای X و Y می‌توان دریافت که کاهش سطح مقطع موجب افزایش نرمی تیر می‌شود و این موضوع منجر به افزایش نوسانات در پاسخ می‌شود. هر قدر که لینک نرم‌تر باشد این نوسانات زودتر شروع شده و دارای دامنه‌ی بیشتری هستند. این نوسانات باعث ایجاد انحراف ربات در نقطه انتهایی می‌شود. این موضوع را می‌توان به روشنی از نمودار شکل ۴-۲۰ دریافت. در شکل ۴-۲۰ مسیر مجری نهایی برای سطح مقطع‌های مختلف ترسیم شده است. همچنین نقطه انتهایی ربات بزرگ‌نمایی شده است. با استفاده از نمودار بزرگ‌نمایی می‌توان دریافت که انعطاف‌پذیری زیاد لینک موجب می‌شود تا مجری نهایی در نقطه‌ای خارج از نقطه نهایی متوقف شود.



شکل ۴-۱۸. مسیر حلزونی حرکت ربات

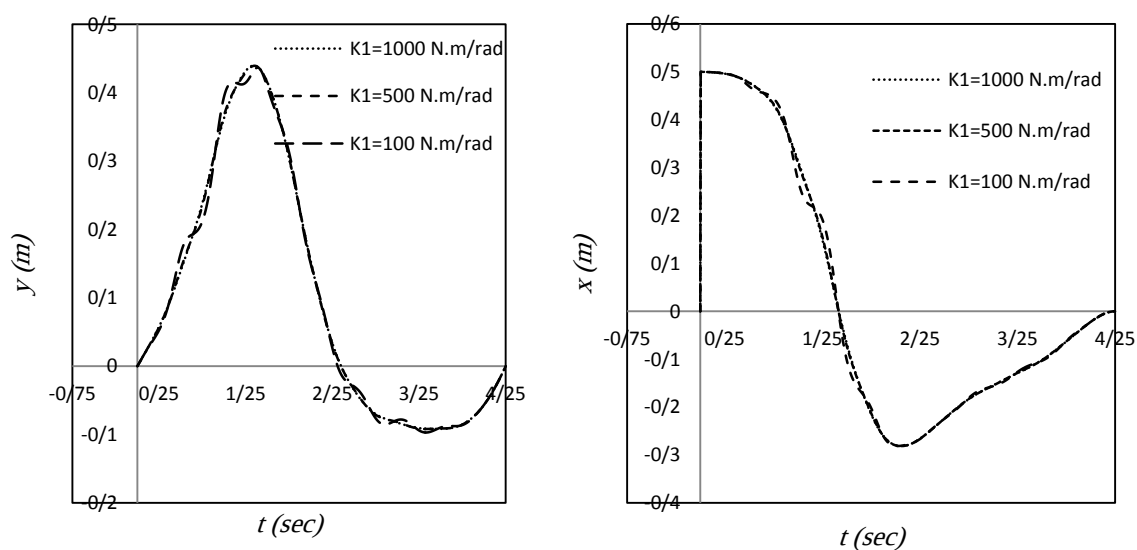


شکل ۴-۱۹. موقعیت مجری نهایی

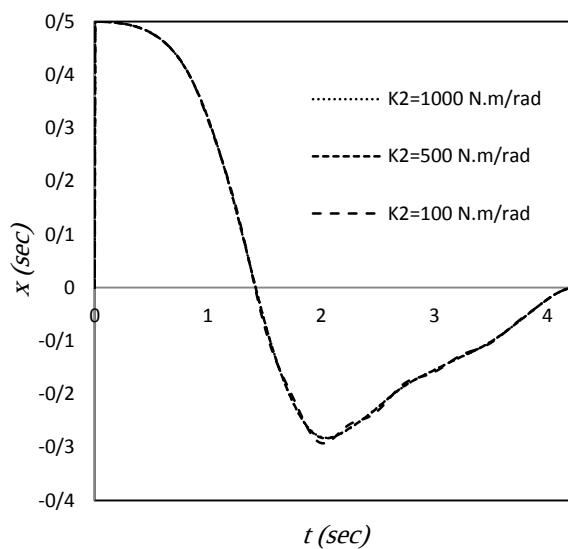
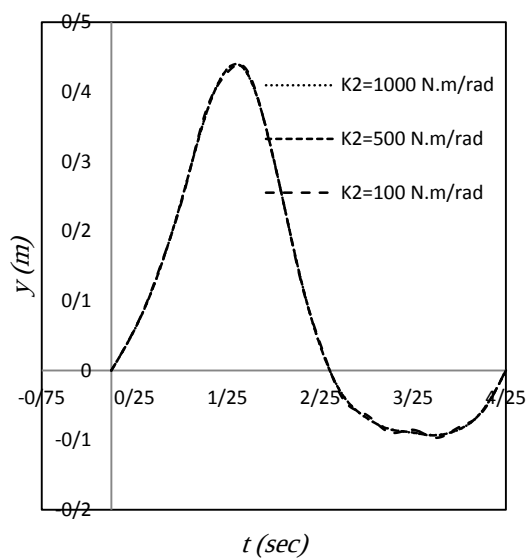


شکل ۴-۲۰. مسیر حرکت مجری نهایی

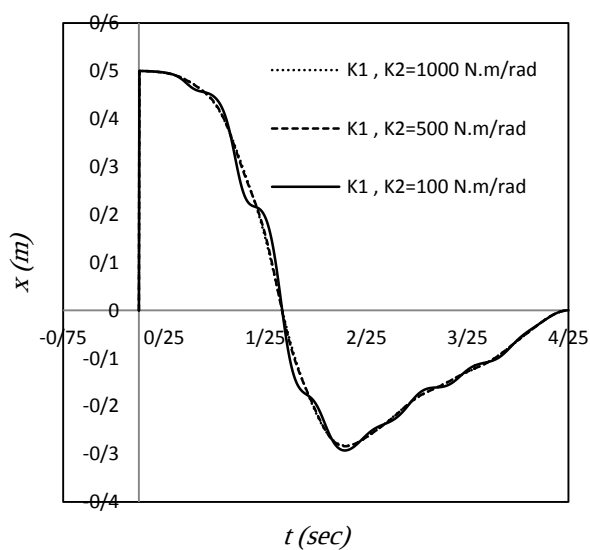
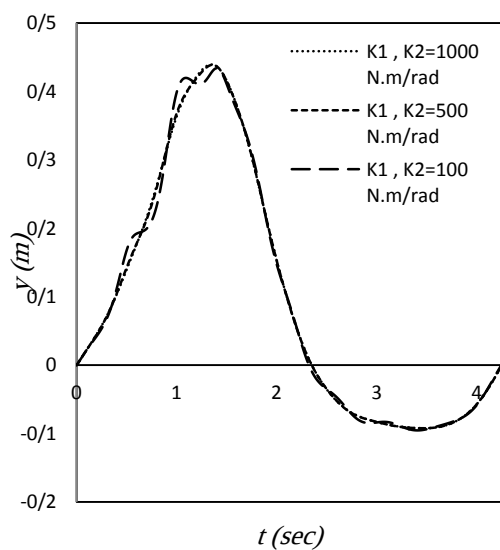
در ادامه به بررسی اثر انعطاف‌پذیری مفاصل در پاسخ انتهایی ربات پرداخته می‌شود. برای این منظور سه حالت مورد توجه قرار می‌گیرد. حالت اول فقط انعطاف‌پذیری در مفصل اول وجود دارد (شکل ۴-۲۱). حالت دوم انعطاف‌پذیری فقط در مفصل دوم وجود دارد (شکل ۴-۲۲) و حالت آخر هر دو مفصل انعطاف‌پذیر هستند (شکل ۴-۲۳). با استفاده از اشکال ۴-۲۱ تا ۴-۲۳ می‌توان دریافت که وجود مفصل انعطاف‌پذیر موجب افزایش نوسانات در پاسخ می‌شود. از طرفی هرچقدر که مفصل نزدیک‌تر به تکیه‌گاه باشد تأثیر بیشتری در خطای مجری نهایی دارد و موجب افزایش خطا در مجری نهایی می‌شود.



شکل ۴-۲۱. موقعیت مجری نهایی (انعطاف‌پذیری در مفصل اول)



شکل ۴-۲۲. موقعیت مجری نهایی (انعطاف پذیری در مفصل دوم)



شکل ۴-۲۳. موقعیت مجری نهایی (انعطاف پذیری در هر دو مفصل)

فصل ۵

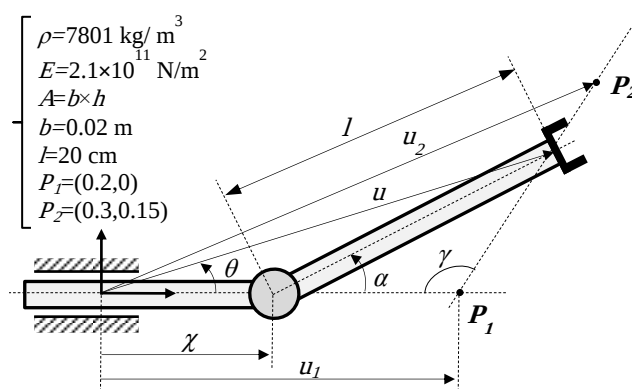
نتایج آزمایشگاهی

۵-۱. مقدمه

مدل آزمایشگاهی مورد مطالعه در این فصل یک لینک انعطاف پذیر است که توسط یک ماهیچه مصنوعی تحریک می شود. حرکت طولی ماهیچه مصنوعی را می توان با یک مفصل کشویی محرک و دوران لینک را می توان با یک مفصل دورانی محرک مدل سازی کرد. برای آشنایی با ترکیب مفاصل کشویی و دورانی، در این فصل ابتدا یک ربات PR با استفاده از روش مطرح شده در این رساله مورد بررسی قرار می گیرد. دلیل انتخاب این ربات وجود هر دو مفصل کشویی P و دورانی R است که این امکان را فراهم می کند تا تمام ماتریس های انتقال ارائه شده در این رساله پیاده سازی شود. سپس یک ربات PRR با هدف بررسی تأثیر انعطاف پذیری مفاصل مورد مطالعه قرار می گیرد. پس از ارائه این دو مثال، مورد آزمایشگاهی با استفاده از روش ماتریس انتقال گسسته مدل سازی می شود و نتایج حاصل از روش ماتریس انتقال با نتایج حاصل از نرم افزار ADAMS و نتایج آزمایشگاهی راستی آزمایی می شود.

۵-۲. ربات انعطاف پذیر PR

در این بخش ارتعاشات یک ربات انعطاف پذیر PR در حرکت مستقیم از نقطه P_1 به P_2 مورد بررسی قرار می گیرد. شکل ۴-۱ نمایی از ربات PR و مسیر حرکت را نشان می دهد. در شکل ۴-۱، χ بیانگر حرکت طولی ربات و α دوران ربات را نمایش می دهد. با استفاده از روابط هندسی در شکل ۵-۱، می توان طول u_1 ، طول u_2 ، طول مسیر L_{12} و زاویه γ را به صورت رابطه ۵-۱ تعیین کرد:



شکل ۵-۱. نمایی از ربات PR در حرکت از مسیر P_1 به P_2

$$u_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad u_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \quad (۱-۵)$$

$$L_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\gamma = \arcsin \left[\frac{(P_1 P_2)^2 + u_1^2 - u_2^2}{2(P_1 P_2)u_1} \right]$$

پارامترهای موجود در رابطه ۱-۵ مقادیری ثابت دارند. برای تعیین مسیر ربات، رابطه‌ای با استفاده از هندسه بین زاویه چرخش ربات (α) و حرکت طولی (χ) بر حسب زاویه θ تعیین می‌شود. با داشتن زاویه θ می‌توان موقعیت مجری نهایی در هر لحظه را به صورت زیر تعیین کرد [۲۳]:

$$u = \frac{u_1 \sin(\gamma)}{\sin(\pi - \gamma - \theta)} \quad (۲-۵)$$

با داشتن u می‌توان زاویه چرخش ربات را با استفاده از زاویه θ به صورت زیر معین کرد:

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{u}{l} \sin \theta \right] \quad (۳-۵)$$

با تعیین u و استفاده از روابط هندسی می‌توان رابطه حرکت طولی را به صورت زیر تعیین کرد:

$$\chi = u \cos \theta - l \cos \alpha \quad (۴-۵)$$

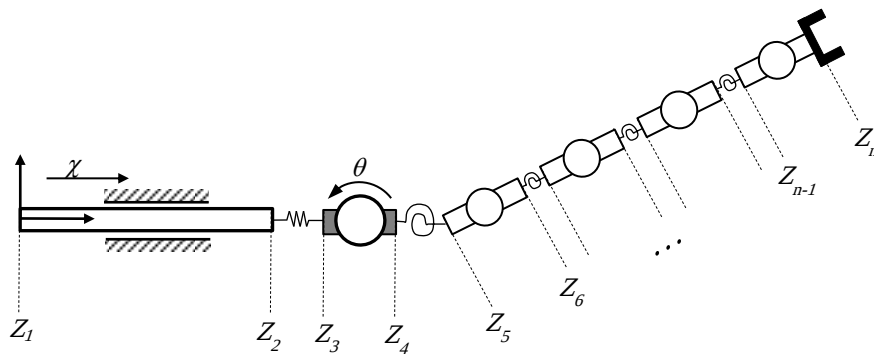
بنابراین الگوریتم طراحی مسیر به صورت زیر حاصل می‌شود:

۱. انتخاب یک تابع اختیاری برای θ
۲. تعیین u_1 و u_2
۳. تعیین زاویه γ
۴. تعیین طول مسیر L_{12}
۵. تعیین u با استفاده از رابطه ۲-۵
۶. تعیین زاویه چرخش با استفاده از رابطه ۳-۵
۷. تعیین حرکت طولی ربات با استفاده از رابطه ۴-۵

در این قسمت زاویه اختیاری θ را به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۶]:

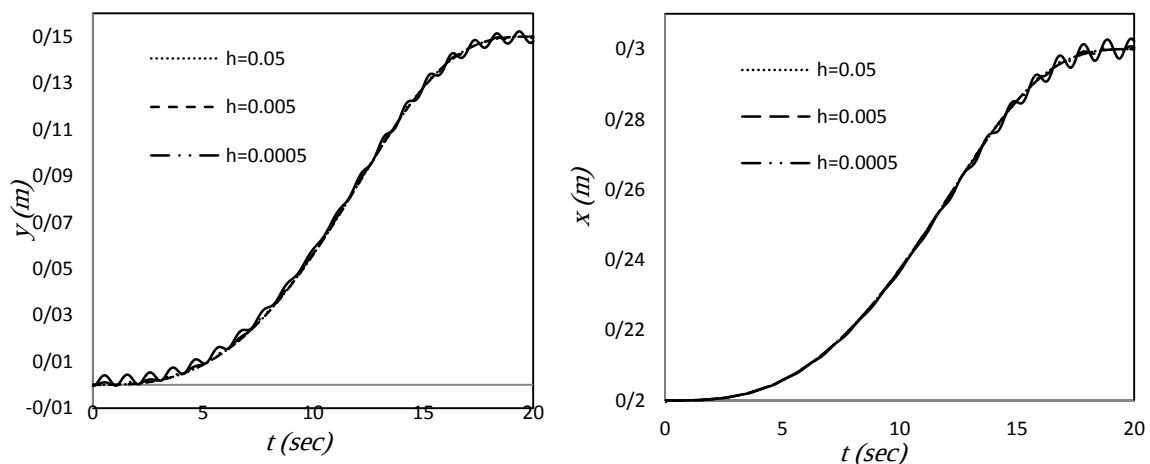
$$\theta = \frac{\theta_t}{t_p} \left[t - \frac{t_p}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi}{t_p} t \right) \right] \quad (۵-۵)$$

که در رابطه ۵-۵، t_p کل زمان حرکت و θ_t زاویه کل حرکت می‌باشد. شکل ۲-۵ نمایی از مدل‌سازی ربات به روش ماتریس انتقال را نشان می‌دهد. حرکت طولی ربات توسط یک محور صلب انجام گرفته و بازوی ربات که حرکت دورانی را انجام می‌دهد، یک لینک انعطاف‌پذیر در نظر گرفته شده است.

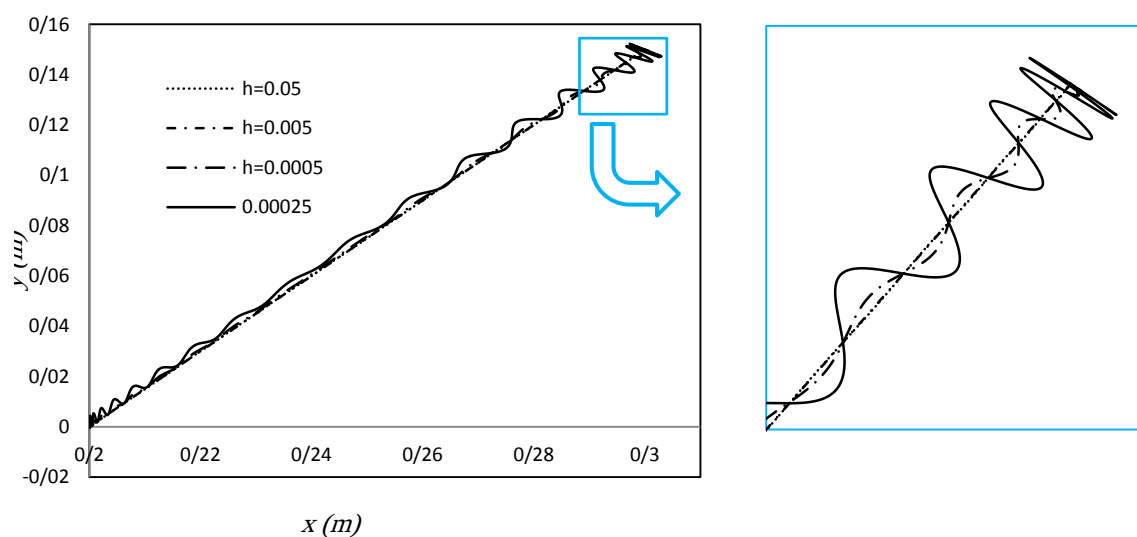


شکل ۲-۵. مدل‌سازی ربات PR با استفاده از روش ماتریس انتقال

برای بررسی تغییر شکل بزرگ، ضخامت‌های مختلفی از سطح مقطع برای ربات در نظر گرفته شده در اشکال ۳-۵ و ۴-۵ مسیر مجری نهایی ترسیم شده است.

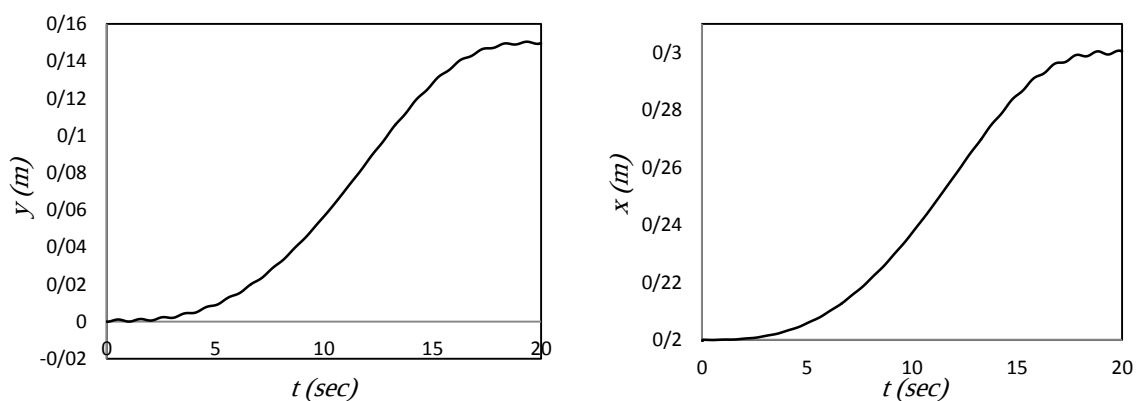


شکل ۳-۵. موقعیت مجری نهایی در ضخامت‌های مختلف

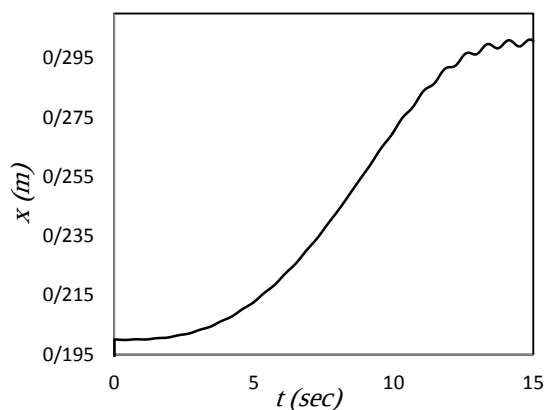
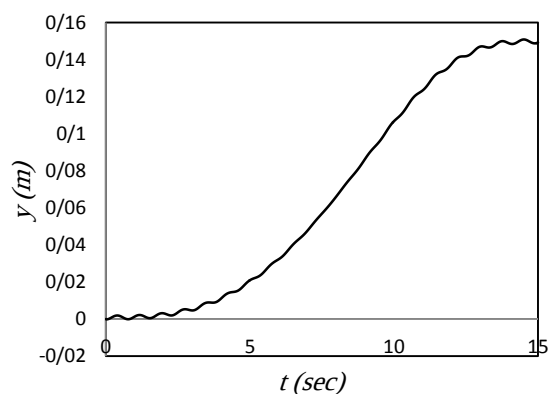


شکل ۵-۴. مسیر حرکت مجری نهایی در ضخامت‌های مختلف (m)

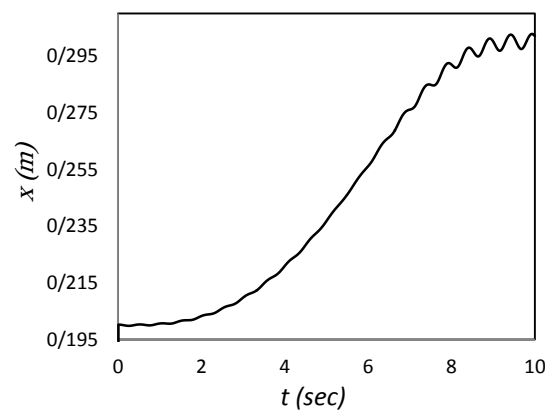
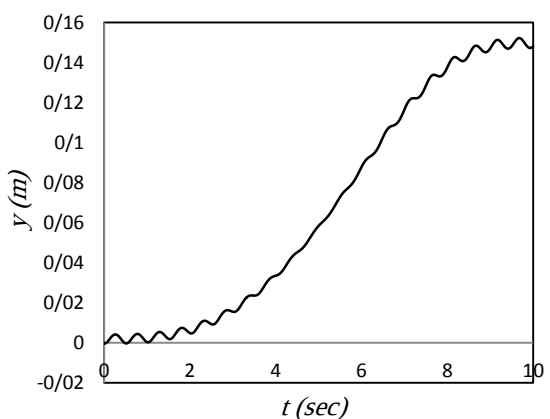
در ادامه در شکل ۵-۵ به بررسی اثر زمان کل (t_p) در طراحی مسیر و موقعیت مجری نهایی می‌پردازیم. برای این منظور سه زمان ۱۰، ۱۵ و ۲۰ ثانیه در نظر گرفته شده است و نشان داده شده که کاهش زمان کل موجب افزایش دامنه ارتعاشات می‌شود.



الف



ب.



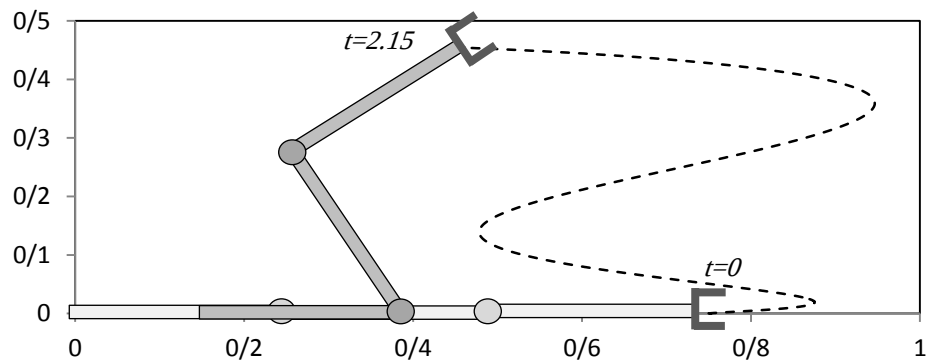
ج.

شکل ۵-۵. موقعیت مجری نهایی در زمان‌های مختلف الف) زمان ۲۰ ثانیه، ب) زمان ۱۵ ثانیه، ج) زمان ۱۰ ثانیه

۵-۳. ربات PRR با مفاصل انعطاف‌پذیر

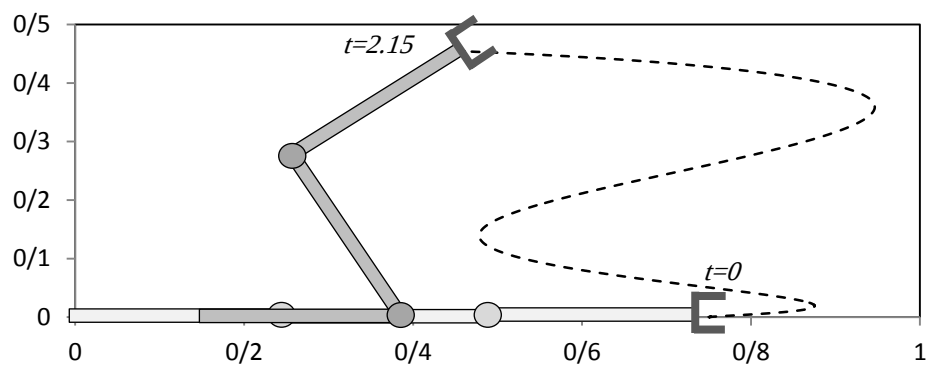
در این قسمت یک ربات PRR با هدف بررسی تأثیر انعطاف‌پذیری مفاصل مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور، شکل ۵-۶ مسیر حرکت ربات را نشان می‌دهد. با استفاده از مسیر فوق، سه حرکت زیر برای هر یک از مفاصل در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} G_1 = t \sin(5t) \\ G_2 = \frac{\pi}{4} \left[t - \frac{\pi}{8} \sin(2t) \right] \\ G_2 = \frac{\pi}{10} \left[-t + \frac{\pi}{8} \sin(2t) \right] \end{cases} \quad (5-6)$$

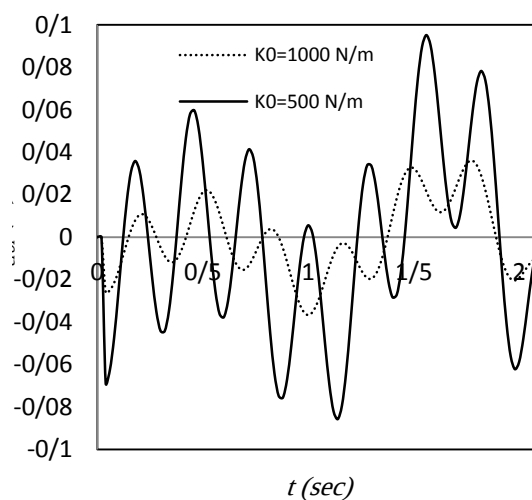
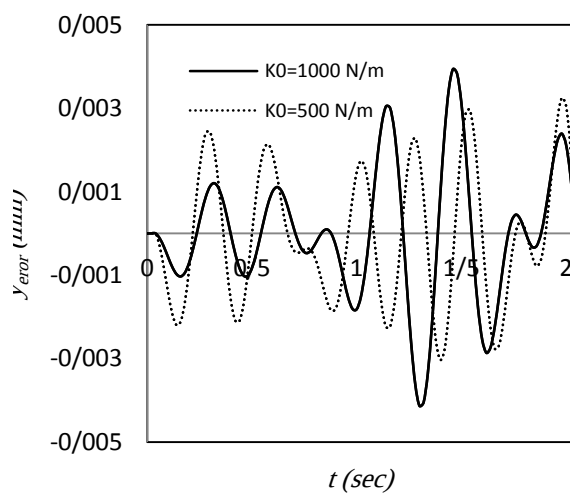


شکل ۵-۶. نمایی از ربات PRR و مسیر حرکت

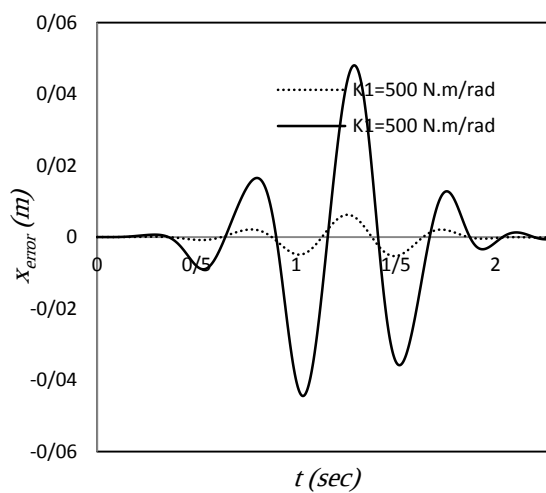
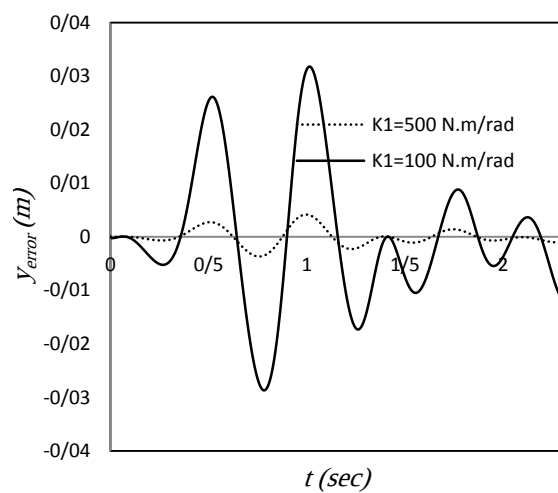
برای بررسی دقیق‌تر اثر انعطاف‌پذیری مفاصل، خطای مجری نهایی در اثر انعطاف‌پذیری مفاصل در سه حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت اول انعطاف‌پذیری تنها برای مفصل اول در نظر گرفته می‌شود. در حالت دوم انعطاف‌پذیری تنها برای مفصل دورانی دوم در نظر گرفته شده و در حالت آخر انعطاف‌پذیری برای مفصل دورانی سوم در نظر گرفته شده و نتایج در اشکال ۵-۸ تا ۵-۱۰ نمایش داده شده است. همان‌طور که از اشکال ۵-۸ تا ۵-۱۰ مشخص است، هرچقدر که انعطاف‌پذیری مفاصل به تکیه‌گاه نزدیک‌تر باشد، خطای مجری نهایی بیشتر می‌شود که این موضوع در ربات دو لینکی که در فصل قبل بررسی شد نیز مشاهده شد.



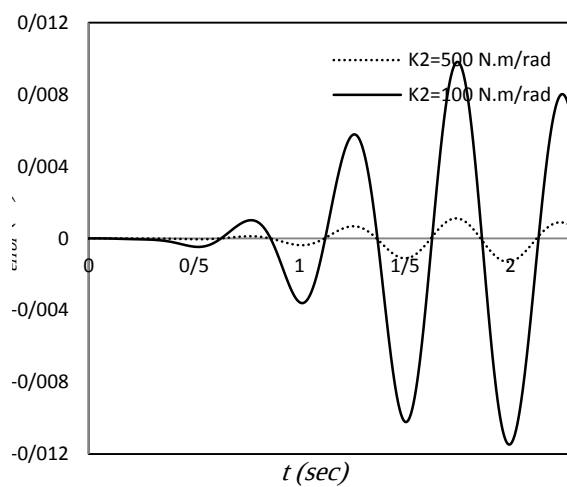
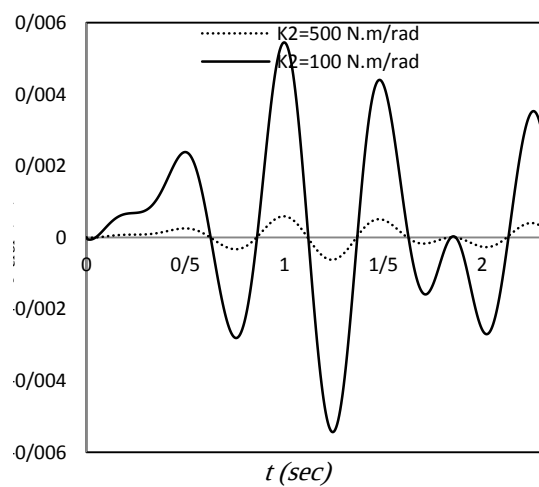
شکل ۵-۷. نمایی از ربات PRR و مسیر حرکت



شکل ۵-۸. خطای مجری نهایی نسبت به ربات با مفصل صلب (انعطاف پذیری در مفصل اول)



شکل ۵-۹. خطای مجری نهایی نسبت به ربات با مفصل صلب (انعطاف پذیری در مفصل دوم)



شکل ۵-۱۰. خطای مجری نهایی نسبت به ربات با مفصل صلب (انعطاف پذیری در مفصل سوم)

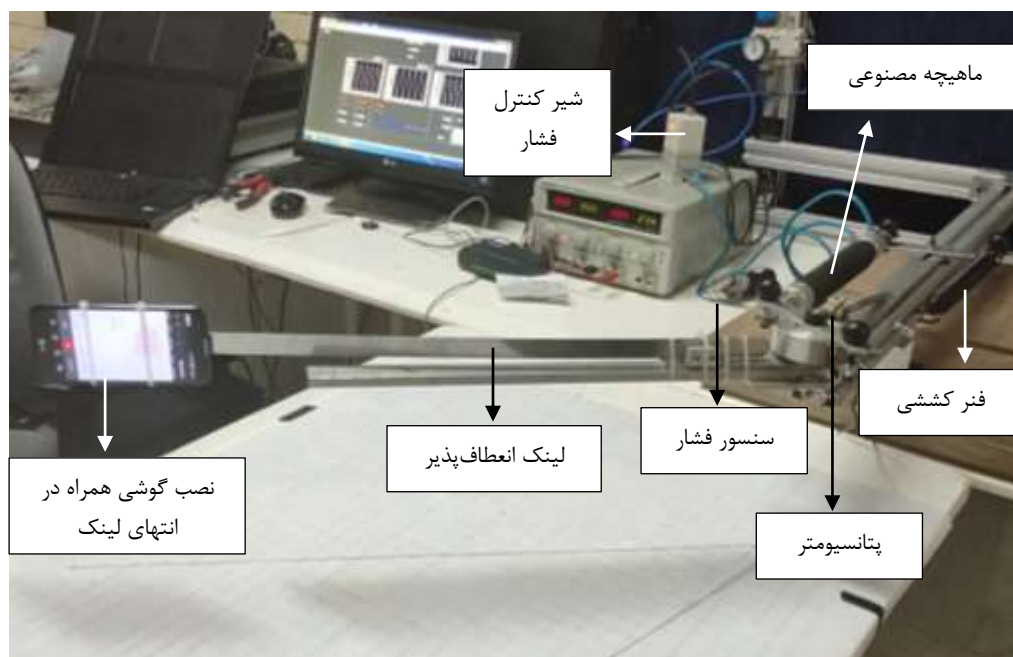
۵-۴. مدل سازی مورد آزمایشگاهی

۵-۴-۱. آشنایی با مورد آزمایشگاهی

شکل ۵-۱۱ نمایی از مورد آزمایشگاهی را نمایش می دهد. مدل آزمایشگاهی از یک لینک انعطاف پذیر که توسط یک ماهیچه مصنوعی تحریک می شود تشکیل شده است. ماهیچه های مصنوعی که به عنوان محرک های عضلانی نیز شناخته می شوند ابزارهایی هستند که می توانند سختی خود را تغییر دهند، به طور معکوس منقبض و یا منبسط شوند. ماهیچه های مصنوعی نسبت به عملگرهای سنتی دارای مزیت هایی چون نسبت بالای توان و قدرت به وزن، انطباق ذاتی، عدم نیاز به اتصالات پیچیده، قابلیت انجام متوالی حرکت بدون افت در عملکرد، صدای کم و ... هستند. اگرچه در حال حاضر استفاده از ماهیچه های مصنوعی نسبت به سایر عملگرها بسیار محدود است اما به نظر می رسد که در آینده ماهیچه های مصنوعی می توانند کاربردهای گسترده ای در رباتیک داشته باشند. ماهیچه های مصنوعی با توجه به مکانیزم تحریک به صورت الکتریکی، حرارتی، پنوماتیک، هیدرولیکی و مغناطیسی تقسیم بندی می شوند [۵۹، ۶۰]. ماهیچه های مصنوعی پنوماتیکی^۱ که به اختصار PAM نامیده می شوند عملگرهایی هستند که قابلیت انقباض و کشیده شدن توسط کیسه پنوماتیکی از هوای فشرده را دارند. پس از اعمال فشار هوا به کیسه پنوماتیکی، افزایش حجم ایزوتروپیک اتفاق می افتد و این افزایش حجم منجر به یک انقباض خطی در امتداد محور ماهیچه می شود [۶۱]. ماهیچه مصنوعی به کار رفته در این رساله ساخت شرکت فستو بوده و قادر است در حداکثر فشار کاری ۵۵۰ کیلوپاسکال، نیرویی معادل ۱۴۴۰ نیوتن وارد کند. همچنین قطر ماهیچه ۲۰ میلی متر و طول مؤثر آن ۲۵ سانتی متر می باشد. فشار ورودی ماهیچه نیز با استفاده از سنسور فشار که در مدار قرار دارد اندازه گیری می شود.

برای حرکت دقیق ماهیچه مصنوعی باید فشار ورودی ماهیچه بدقت تنظیم شود. برای این منظور، در این رساله از شیر کنترل فشار ساخت شرکت فستو (مدل VPPE-E1) استفاده می شود. این شیر با ولتاژ ورودی ۰ الی ۵ ولت فشار خروجی ۰ الی ۶ بار را تولید می کند.

¹ Pneumatic artificial muscles (PAM)

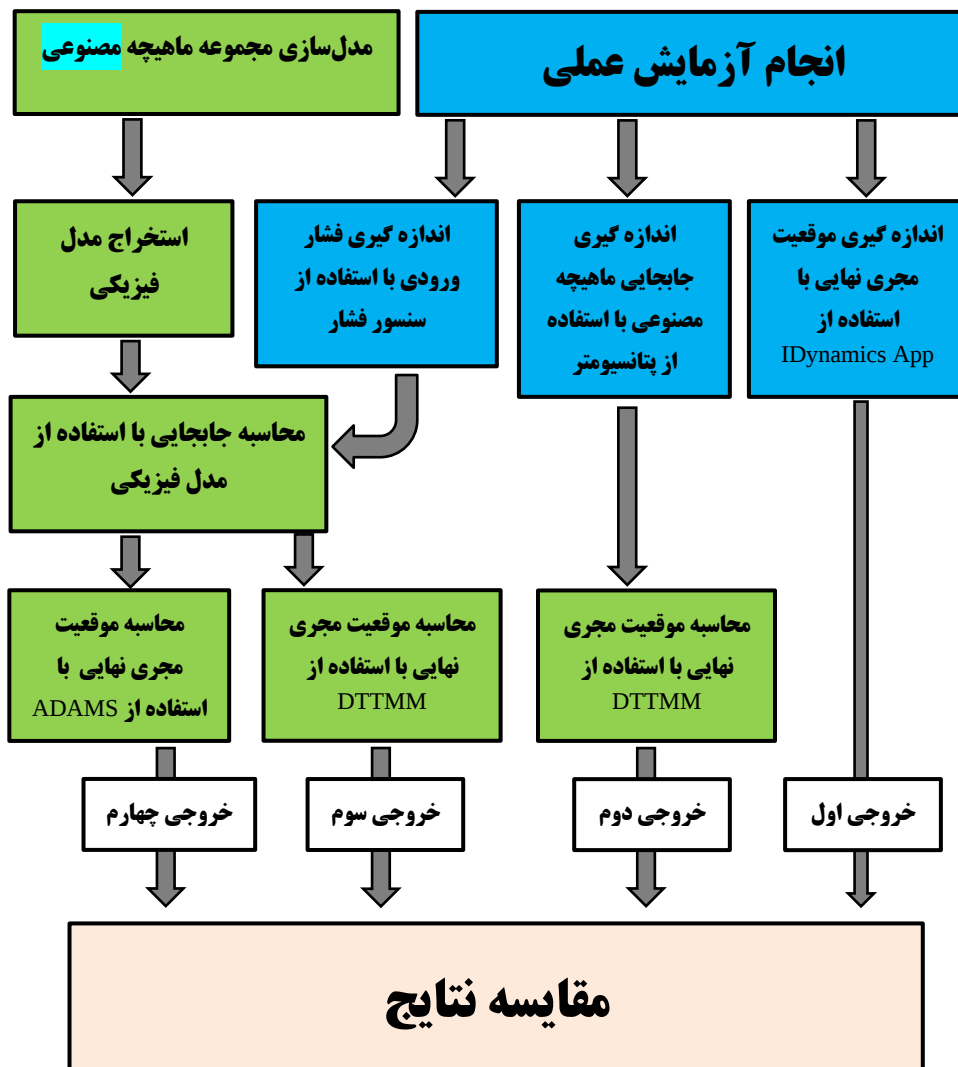


شکل ۵-۱۱. نمایی از مورد آزمایشگاهی

۵-۴-۲. ساختار انجام آزمایش

شکل ۵-۱۲ نمایی از ساختار کلی آزمایش را نشان می‌دهد. در شکل ۵-۱۲ بلوک‌های آبی بخش‌های اندازه‌گیری شده در آزمایش را نشان می‌دهند و بلوک‌های سبز بخش‌های مربوط به محاسبات تئوری و مدل‌سازی می‌باشند. در این حالت ساختار آزمایش شامل چهار خروجی جهت مقایسه و راستی آزمایی خواهد بود. در خروجی اول، جابجایی انتهای لینک انعطاف‌پذیر به صورت مستقیم با استفاده از نصب گوشی در انتهای لینک و نرم‌افزار IDynamics تعیین می‌شود. در خروجی دوم، جابجایی ماهیچه مصنوعی با استفاده از پتانسیومتر متصل به ماهیچه مصنوعی تعیین می‌شود. این جابجایی به عنوان یک ورودی به لینک انعطاف‌پذیر اعمال می‌شود و با استفاده از روش ماتریس انتقال گسسته جابجایی انتهای بازوی رباتیک یک درجه آزادی تعیین می‌شود. در خروجی سوم، فشار ماهیچه مصنوعی با استفاده از سنسور فشار تعیین می‌شود. سپس با استفاده از مدل فیزیکی ماهیچه مصنوعی، جابجایی انتهای لینک برحسب زمان تعیین می‌شود. این جابجایی به عنوان یک ورودی به لینک انعطاف‌پذیر اعمال می‌شود و با استفاده از روش ماتریس انتقال گسسته جابجایی انتهای لینک تعیین می‌شود. در خروجی چهارم، جابجایی ماهیچه مصنوعی که با استفاده از مدل فیزیکی تعیین شد، به عنوان یک ورودی برای نرم‌افزار ADAMS انتخاب شده و جابجایی انتهای لینک در نرم‌افزار ADAMS تعیین می‌شود. در نهایت با مقایسه چهار خروجی آزمایش، می‌توان میزان صحت

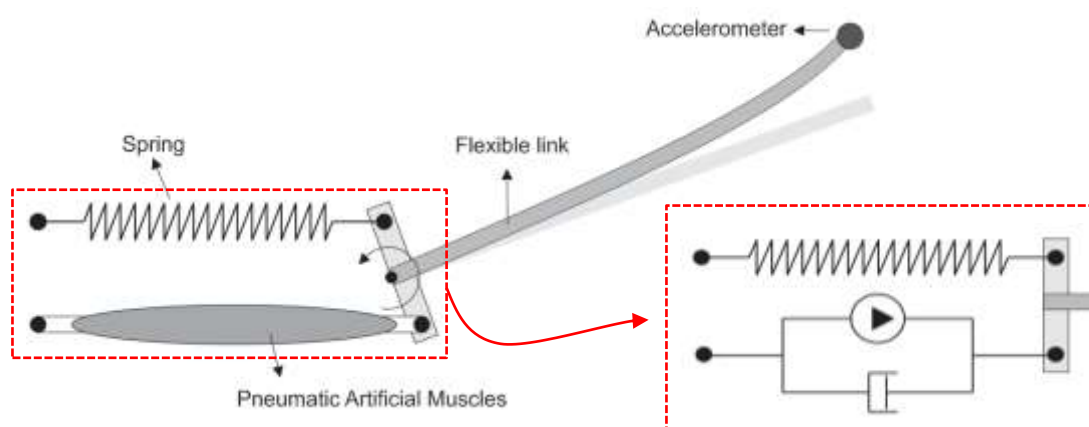
مدل سازی فیزیکی ماهیچه و مدل ماتریس انتقال را مورد بررسی قرار داد. در ادامه هریک از بخش های ارائه شده در شکل ۵-۱۲ به تفصیل شرح داده می شود.



شکل ۵-۱۲. ساختار انجام آزمایش

۳-۴-۵. مدل سازی و استخراج مدل فیزیکی ماهیچه مصنوعی و فنر

شکل ۵-۱۳ مدل سازی مورد آزمایشگاهی را نشان می دهد. با توجه به این که لینک انعطاف پذیر در تکیه گاه لولا شده است، می توان مجموعه فنر و ماهیچه مصنوعی را به عنوان یک دوران ورودی در تکیه گاه لینک مدل سازی کرد. گام اول تعیین مدل زاویه ورودی برای لینک انعطاف پذیر است. برای این منظور برای مدل سازی ماهیچه مصنوعی از مدل [۶۲] استفاده می کنیم و با استفاده از مدل فوق ماهیچه مصنوعی مشابه یک دمپر و یک نیرو مدل سازی می شود.



شکل ۵-۱۳. مدل سازی مورد آزمایشگاهی

شکل ۵-۱۴ دیاگرام آزاد مجموعه ماهیچه و فنر را نشان می دهد. در این حالت با استفاده از دیاگرام آزاد جابجایی ماهیچه به صورت زیر به دست می آید:

$$\ddot{y} = \frac{F_{ce} - B\dot{y} - Ky - F_{ex}}{(m + \frac{I}{l^2})} \quad (۷-۵)$$

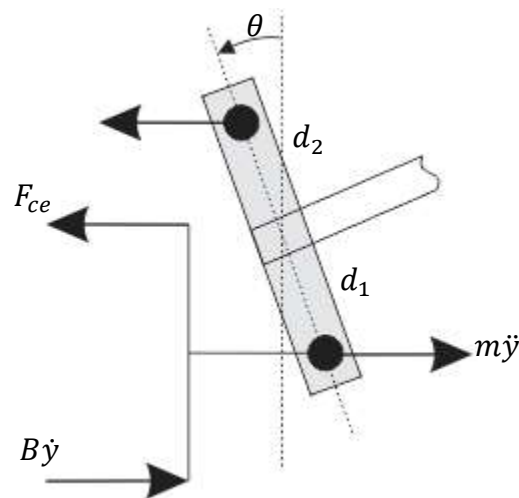
که در رابطه ۵-۷، y جابجایی ماهیچه مصنوعی، I و m ممان اینرسی و جرم میله متصل به لینک در تکیه گاه، B ضریب میرایی معادل ماهیچه مصنوعی، K سختی فنر، F_{ex} پیش بار فنر و F_{ce} نیروی معادل ماهیچه مصنوعی می باشد که تابع فشار و جابجایی ماهیچه است و به صورت زیر محاسبه می شود [۶۲]:

$$F_{ce}(p, \xi) = (a_1 + a_2 p) + (b_1 + b_2 p)\xi + (c_1 + c_2 p)e^{-\xi z} \quad (۸-۵)$$

که در رابطه ۵-۸، ξ نسبت طول کشیده شده به طول اولیه ماهیچه و z ضریبی برای انطباق بهتر نمودار است. همچنین ضرایب a تا c با استفاده از داده های تجربی تعیین می شود. برای حل معادله

۷-۵ باید نیروی معادل ماهیچه مصنوعی F_{ce} و ضریب میرایی B مشخص شوند. برای این منظور، با استفاده از آزمایش‌های تجربی [۶۳]، یک تابع برای تغییرات ضریب میرایی و نیروی معادل مشخص می‌شود. در این حالت با استفاده از ابزار شناسایی سیستم در نرم‌افزار متلب، ضریب میرایی رابطه ۷-۵ در حالت کشش و فشار به صورت زیر تعیین می‌شود [۶۳]:

$$B = \begin{cases} -2.21 \times 10^{-6} p^2 + 0.002237 p + 1.1 \\ 0.0009761 p + 2.582 \end{cases} \quad (۹-۵)$$



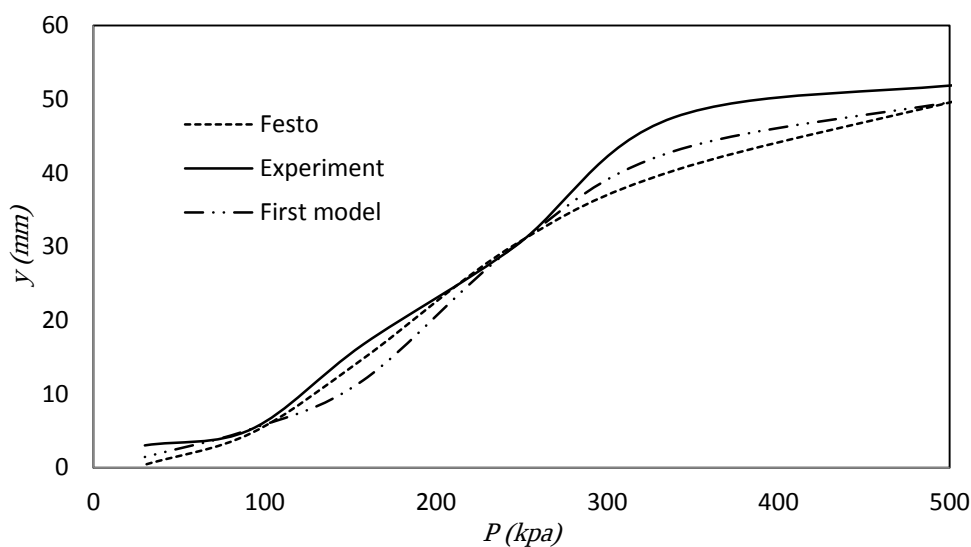
شکل ۵-۱۴. دیاگرام آزاد مجموعه ماهیچه و فنر

همچنین ضرایب نیروی معادل رابطه ۸-۵ نیز به صورت زیر حاصل می‌شود [۶۳]:
 $a_1 = -587.1; a_2 = 3.348; b_1 = 2259; b_2 = -14.45; c_1 = 689.6; c_2 = -0.2055;$ (۱۰-۵)

در این حالت با داشتن رابطه نیرو و ضریب میرایی به سادگی می‌توان معادله ۷-۵ را در هر لحظه با استفاده از سیمولینک متلب حل کرد و ماتریس انتقال را با استفاده از آن تعیین نمود. در ادامه جابجایی ماهیچه مصنوعی با استفاده از مدل ارائه شده تعیین می‌شود و نتایج حاصل با نتایج عملی [۶۳] و نتایج نرم‌افزار MuscleSIM که توسط شرکت فستو ارائه می‌شود مورد مقایسه قرار می‌گیرد. جدول ۲-۵ جابجایی ماهیچه مصنوعی در فشارهای مختلف را نشان می‌دهد. در شکل ۵-۱۵ نیز نتایج جدول ۱-۵ به صورت نمودار ترسیم شده است. همان‌طور که از شکل ۵-۱۵ مشخص است نتایج مدل ارائه شده توافق خوبی را با نتایج حاصل از نرم‌افزار فستو نشان می‌دهد و لذا در این رساله از این مدل استفاده می‌شود.

جدول ۵-۱. جابجایی ماهیچه در فشارهای مختلف

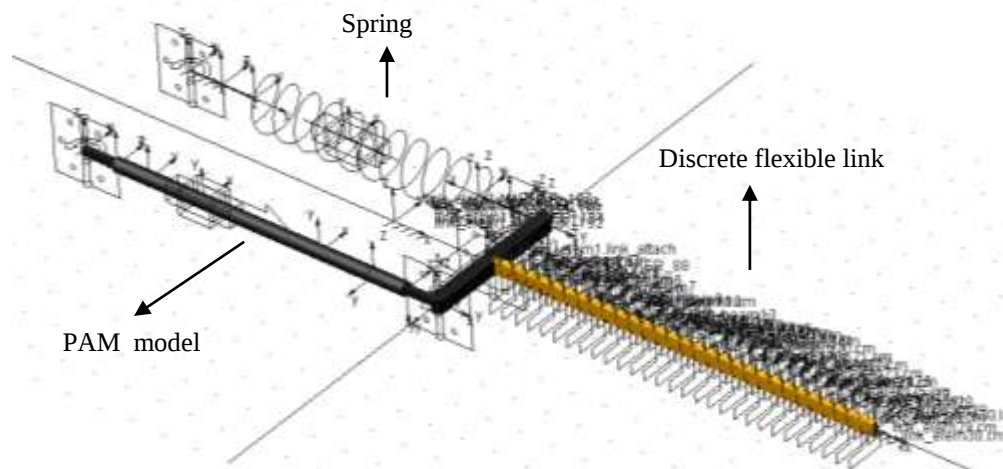
فشار ورودی (kpa)	نیروی خارجی (N)	جابجایی ماهیچه مصنوعی (mm)		
		عملی	مدل ارائه شده	نرم افزار فستو
518.799	98.1	52.25	50.27	50.6
338.989	98.1	47.525	42.94	40.3
246.361	98.1	30.05	30.13	30.3
157.593	98.1	16.725	11.86	14.8
92.2852	98.1	5.225	5.259	4.7
30.0293	98.1	3.025	1.453	0.4



شکل ۵-۱۵. نمودار جابجایی ماهیچه بر حسب فشار

۵-۴-۴. مدل سازی در ADAMS

در این قسمت مورد آزمایشگاهی در نرم افزار ADAMS مدل سازی می شود. شکل ۵-۱۶ نمای از مدل سازی مورد آزمایشگاهی در نرم افزار را نشان می دهد. برای مدل سازی ماهیچه از یک مفصل کشویی معادل استفاده شده است. همچنین برای مدل سازی لینک انعطاف پذیر از ابزار discrete flexible link استفاده شده است.



شکل ۵-۱۶. مدل سازی مورد آزمایشگاهی در نرم افزار ADAMS

برای حرکت مفصل کشویی از جابجایی ماهیچه بر حسب زمان که با استفاده از مدل فیزیکی تعیین می شود استفاده خواهد شد. برای این منظور، ابتدا با استفاده از نقاط تعیین شده یک اسپلاین در نرم افزار ADAMS تعیین می شود. پس اسپلاین باید به عنوان یک تابع برای مفصل کشویی تبدیل شود. برای این منظور نرم افزار ادامز سه تابع درونیابی AKISPL، CUBSPL و CURVE را برای مدل سازی ارائه می دهد. با توجه به این که تابع CURVE فقط برای منحنی های خود نرم افزار قابل استفاده است و تابع AKISPL نسبت به تابع CBSUL حجم محاسبات کمتری دارد، در این فصل از تابع AKISPL برای مدل سازی در ADAMS استفاده می شود.

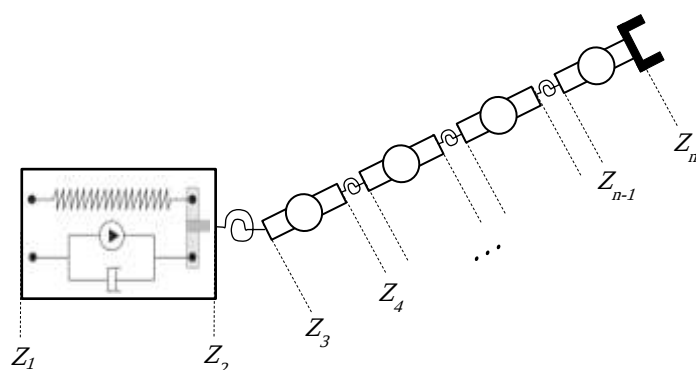
۵-۴-۵. مدل سازی به روش ماتریس انتقال

برای مدل سازی به روش ماتریس انتقال می توان از دو مدل استفاده کرد. در حالت اول مجموعه ماهیچه و فنر به عنوان یک ورودی برای لینک انعطاف پذیر در نظر گرفته می شود. در این حالت مجموعه ماهیچه و فنر به عنوان یک ماتریس انتقال در نظر گرفته شده و به صورت عددی در ماتریس بعدی ضرب می شود. مزیت این روش امکان مدل سازی کل مجموعه به عنوان یک سیستم سری می باشد.

در حالت دوم می‌توان مجموعه ماهیچه را به عنوان یک ماتریس جدا و مجموعه فنر هم به عنوان یک ماتریس جدا در نظر گرفت. در این حالت برای تعیین ماتریس انتقال کل باید ماتریس انتقال یک سیستم شاخه ای را تعیین کرد زیرا دو ماتریس انتقال ماهیچه و فنر در نقطه تکیه‌گاه به هم خواهند رسید. باتوجه به این که مبنای روش در این رساله تعیین ماتریس انتقال سیستم‌های پشت سرهم یا سری می‌باشد، بنابراین از مدل اول برای تعیین ماتریس انتقال کل استفاده می‌شود. شکل ۵-۱۷ نمایی از مدل‌سازی به روش اول را نشان می‌دهد. در این حالت ماتریس انتقال کل به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$U = U_m U_{r,n} U_{s,n-1} \cdots U_{r,i-1} U_{s,i-2} \cdots U_{r,2} U_{s,1} U_{r,1} U_S U_{M\&S} \quad (5-11)$$

که در رابطه ۵-۱۱، U_m ماتریس انتقال جرم معادل سنسور انتهای لینک است و $U_{M\&S}$ ماتریس انتقال مجموعه ماهیچه مصنوعی و فنر می‌باشد و به صورت عددی در هر لحظه با استفاده از سیمولینک تعیین می‌شود.



شکل ۵-۱۷. مدل‌سازی مدل‌سازی مورد آزمایشگاهی به روش ماتریس انتقال

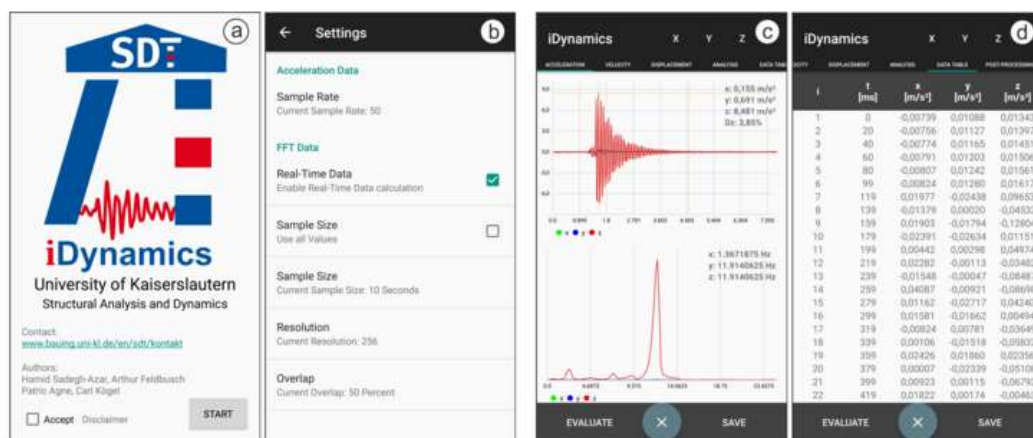
۵-۴-۶. اندازه گیری موقعیت مجری نهایی با استفاده از IDynamics App

امروزه نرم‌افزارهای مختلفی برای استفاده از گوشی همراه جهت تحلیل‌های دینامیکی ارائه می‌شود. نرم‌افزار IDynamics از مجموعه نرم‌افزارهای تحلیل دینامیکی و ارتعاشی است که توسط دانشگاه کایزرسلاترن^۱ توسعه یافته است. شکل ۵-۱۸ نمایی از محیط نرم‌افزار را نمایش می‌دهد. این نرم‌افزار

1. www.bauing.uni-kl.de/en/sdt/idynamics/seite

امکان نصب و راهاندازی در سیستم‌های اندروید را داراست و با استفاده از سنسور شتاب و ژيروسکوپ امکان محاسبه شتاب، سرعت و جابجایی را فراهم می‌کند.

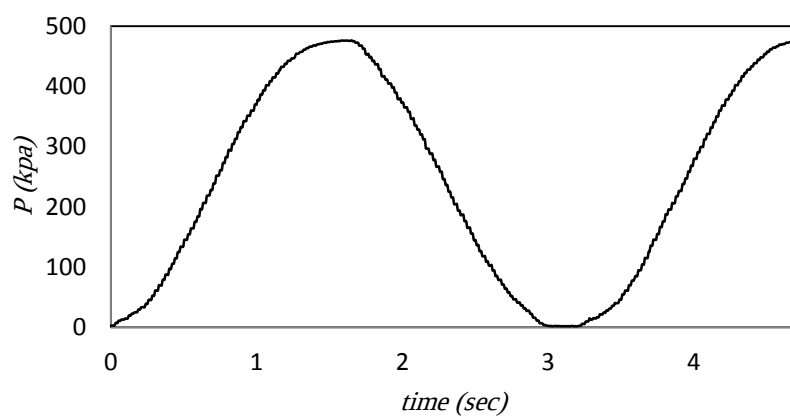
در این فصل با استفاده از نرم‌افزار IDynamics، جابجایی مجری نهایی تعیین می‌شود. آنچه در استفاده از این نرم‌افزار مورد اهمیت دارد، انتخاب مناسب ضریب کالیبره است. این موضوع به خصوص در محاسبه سرعت و جابجایی اهمیت بیشتری پیدا می‌کند [۶۴]. در این حالت ضریب کالیبره باتوجه به ماهیت فیزیکی آزمایش انتخاب می‌شود. در این رساله این ضریب با استفاده از نتایج تئوری انتخاب شده است. در بخش ۵-۴-۷، نحوه تعیین ضریب کالیبره برای مورد مطالعه بیان می‌شود.



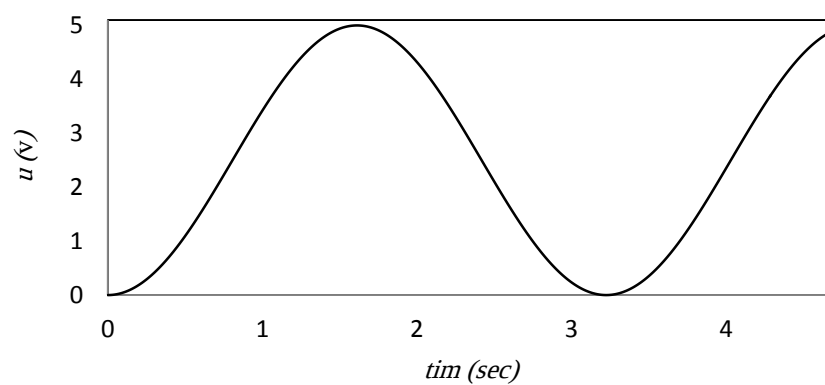
شکل ۵-۱۸. محیط نرم‌افزار IDynamics [۶۴]

۵-۴-۷. بررسی نتایج عددی آزمایش

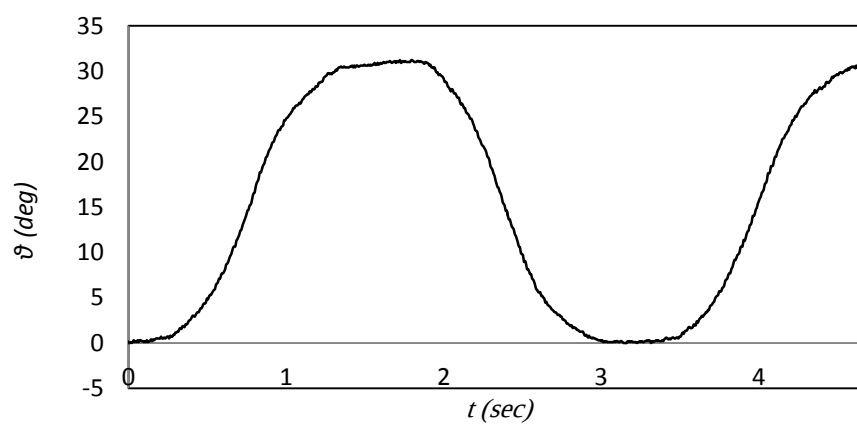
در این بخش نتایج عددی آزمایش مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، طول لینک انعطاف‌پذیر 54cm، ضخامت آن 2.3mm و ارتفاع آن 20mm در نظر گرفته شده است. همچنین فشار ورودی ماهیچه یک فشار سینوسی با فرکانس 5 rad/sec انتخاب شده است. برای تولید فشار سینوسی، ولتاژ ورودی شیر کنترل فشار بین یک تا پنج ولت تغییر می‌کند. شکل ۵-۱۹ (الف)، فشار ورودی ماهیچه مصنوعی برحسب زمان را نشان می‌دهد که با استفاده از سنسور فشار اندازه‌گیری شده است. همچنین شکل ۵-۱۹ (ب)، ولتاژ ورودی شیر کنترل فشار و شکل ۵-۱۹ (ج)، زاویه دوران لینک انعطاف‌پذیر را نشان می‌دهد که با استفاده از پتانسیومتر متصل به لینک تعیین شده است.



(الف)



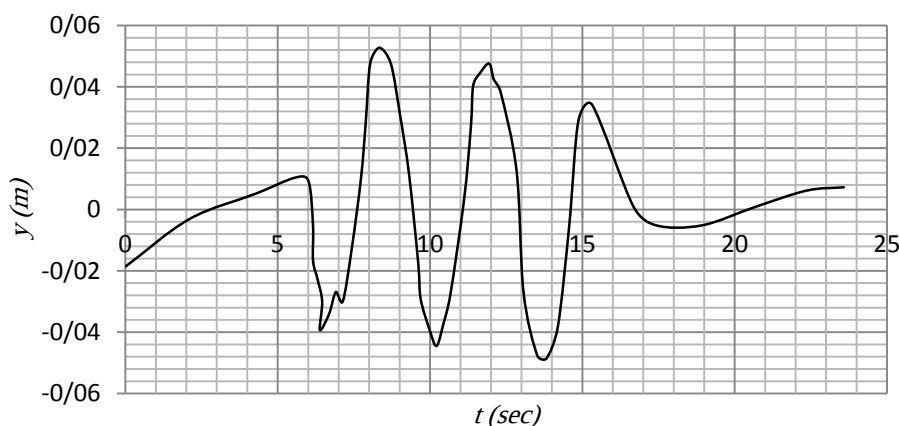
(ب)



(ج)

شکل ۵-۱۹. الف) فشار ورودی ماهیچه مصنوعی، ب) ولتاژ ورودی شیر کنترل فشار، ج) زاویه دوران لینک انعطاف پذیر

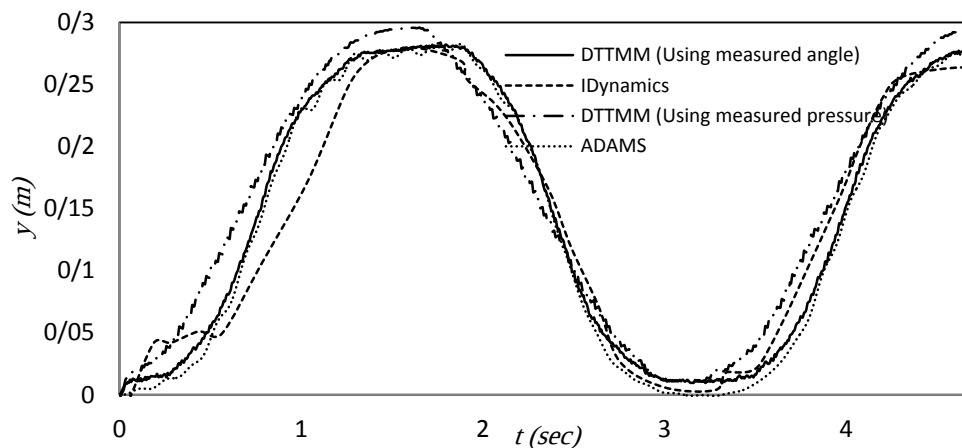
شکل ۵-۲۰، جابجایی مجری نهایی که با استفاده از نرم افزار IDynamics تعیین شده است را نمایش می‌دهد. باتوجه به این که آزمایش در نرم افزار IDynamics در حالت بلادرنگ انجام گرفته است، بنابراین محور افقی که بیانگر زمان آزمایش می‌باشد نیازی به ضریب کالیبره ندارد. از طرفی برای تعیین ضریب کالیبره در محور عمودی، از نتایج تئوری استفاده شده است. در این حالت، حداکثر دامنه در مدل تئوری 0.3m می‌باشد. از طرفی حداکثر دامنه اندازه‌گیری شده با استفاده از شکل ۵-۲۰ برابر با 0.092m می‌باشد. بنابراین با انتخاب ضریب کالیبره 3.26 می‌توان نمودار شکل ۵-۲۰ را کالیبره کرد.



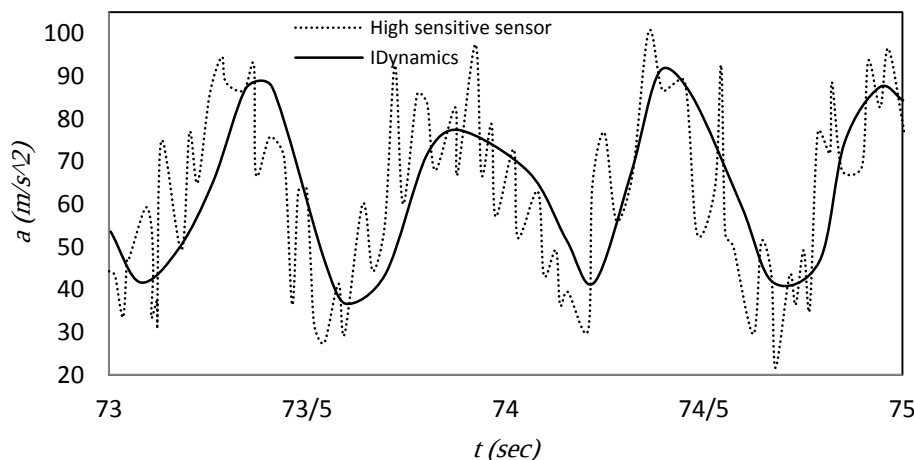
شکل ۵-۲۰. اندازه‌گیری موقعیت مجری نهایی با استفاده از IDynamics

شکل ۵-۲۱، جابجایی انتهای لینک در چهار حالت مختلف را نشان می‌دهد که در بخش ۵-۴-۲ بیان شد. همانطور که از شکل ۵-۲۱ مشخص است، نتایج هر چهار حالت توافق نسبتاً خوبی را با یکدیگر نشان می‌دهند هرچند کمی اختلاف بین نتایج وجود دارد. چنانچه نتایج حاصل از نرم افزار ADAMS و نتایج حاصل از روش ماتریس انتقال در حالتی که از مدل فیزیکی استفاده می‌شود (نمودار Using measured pressure) توافق بسیار خوبی را با یکدیگر نشان می‌دهد زیرا ورودی هر دو مدل یکسان می‌باشد. همچنین، در حالتی که در روش ماتریس انتقال از پتانسیومتر استفاده شده است (نمودار Using measured angle)، دامنه تعیین شده نسبت به سایر حالت‌ها بیشتر است. این موضوع دقیقاً در شکل ۵-۱۵ هم دیده شد و نشان می‌دهد که دامنه تعیین شده در مدل فیزیکی نسبت به نتایج عملی کمتر است و در واقع مدل فیزیکی یک مدل با تقریب نقصانی می‌باشد. از طرفی نتایج حاصل از نرم افزار IDynamics بسیار نرم و بدون نوسان می‌باشد و توافق مناسبی با نتایج

ADAMS و روش ماتریس انتقال گسسته دارد. دلیل این موضوع استفاده از الگوریتم هموارسازی در نرم افزار IDynamics است [۶۴] که برای کاهش اثر نویزهای مزاحم از یک الگوریتم هموارسازی پنج نقطه‌ای استفاده می‌کند. در این حالت در هر نقطه، میانگین چهار نقطه مجاور تعیین می‌شود و این الگوریتم حداکثر تا سه تکرار انجام می‌گیرد [۶۴]. شکل ۵-۲۲ نمایی از این حالت را برای یک نمونه خاص نشان می‌دهد. در شکل ۵-۲۲، شتاب عمودی برای یک نمونه با استفاده از نرم افزار IDynamics و یک سنسور شتاب با دقت بالا ترسیم شده است [۶۴]. همانطور که از شکل فوق مشخص است نمودار حاصل از نرم افزار نسبت به نتایج سنسور دقیق نرم تر بوده و از نوسانات کمتری برخوردار است. با این حال نتایج حاصل از نرم افزار IDynamics از نظر مهندسی قابل قبول بوده و مورد تایید استانداردهای DIN 4150-2، DIN 4150-3 و VDI 2038 می‌باشد [۶۴].



شکل ۵-۲۱. مقایسه جابجایی انتهای لینک در چهار حالت مختلف



شکل ۵-۲۲. مقایسه نتایج حاصل از نرم افزار IDynamics و یک سنسور دقیق برای یک نمونه خاص [۶۴]

فصل ۶

نتیجه‌گیری

جمع‌بندی

در این رساله روش ماتریس انتقال جهت تحلیل دینامیکی ربات‌های انعطاف‌پذیر با تغییر شکل بزرگ ارائه گردید تا هم در حوزه وسیع رباتیک قابل استفاده باشد و هم حجم محاسبات کمتری نسبت به روش سنتی داشته باشد.

برای توسعه در حوزه رباتیک یک کتابخانه جامع از ماتریس‌های انتقال شامل: لینک صلب و انعطاف‌پذیر، مفاصل حرکتی، نیروهای خارجی، جرم‌های متمرکز، محرک‌های خطی و دورانی پیشنهاد گردید.

برای کاهش حجم محاسبات، الگوریتمی ارائه شد تا با استفاده از آن مرتبه معکوس ماتریس انتقال صفر کاهش پیدا کند و محاسبات کمتری برای تعیین ماتریس معکوس انجام گیرد. همچنین الگوریتم فوق با روش ماتریس انتقال ریکاتی ترکیب شد تا مشکلات عددی در الگوریتم پیشنهادی در مودهای بالا و یا در شرایط خاص ایجاد نشود. از طرفی در گسسته‌سازی لینک انعطاف‌پذیری مدلی ارائه شد تا با انتخاب المان‌های کمتر بتوان به دقت مناسب در مدل‌سازی رسید.

موارد فوق در چندین مطالعه عددی پیاده‌سازی شد که نتایج مطالعات عددی را می‌توان به شرح زیر دسته‌بندی کرد:

۱. استفاده از الگوریتم پیشنهادی برای تبدیل ماتریس انتقال صفر به ماتریس قطری بلوکی موجب کاهش مرتبه ماتریس معکوس از n به $n/2$ می‌شود که این موضوع موجب کاهش حجم محاسبات (حدود ۳۰ درصد) در مطالعه عددی شد.
۲. ترکیب روش ماتریس انتقال ریکاتی با الگوریتم پیشنهادی موجب می‌شود که علاوه بر کاهش حجم محاسبات (حدود ۱۰ درصد)، روش ماتریس انتقال دچار مشکلات عددی نشود.
۳. روش ماتریس انتقال گسسته ریکاتی بهبود یافته می‌تواند با حجم محاسبات تقریباً نصف و بدون محدودیت در موردهای مختلف رباتیکی مورد استفاده قرار گیرد.
۴. انتخاب مقدار 0.5 برای α بهترین مقدار می‌باشد و با انتخاب این مقدار برای α می‌توان با انتخاب تعداد المان‌های کمتر دقت مناسب‌تری دریافت کرد.

پیشنهادهای برای کارهای آینده

هرچند سعی بر این شد تا این رساله یک روش کامل و جامع برای ربات‌های انعطاف‌پذیر باشد،

اما با توجه به وسعت این حوزه، فعالیت‌ها و تحقیقات زیادی در این زمینه باقی‌مانده که می‌تواند به‌صورت زیر دسته‌بندی شود:

۱. در این رساله طول المان اول یک طول متغیر در نظر گرفته شد. به‌عنوان بهبود و توسعه این روش می‌توان طول سایر المان‌ها را نیز متغیر در نظر گرفت و با تعداد المان‌های کمتر دقت مناسبی به دست آورد.
۲. در این رساله جهت مدل‌سازی بازوی انعطاف‌پذیر از مجموعه جرم و فنر معادل استفاده شد. به‌منظور افزایش دقت و مدل‌سازی دقیق می‌توان از تئوری‌های تغییر شکل غیرخطی و ترکیب آن‌ها با روش ماتریس انتقال استفاده کرد.
۳. روش بیان شده در این رساله می‌تواند در سیستم‌های سه‌بعدی گسترش و توسعه پیدا کند.
۴. در این رساله ربات‌های سری یا سیستم‌هایی با المان‌های پشت سرهم مورد بررسی قرار گرفت. باتوجه به این‌که در سیستم‌های شاخه‌ای و یا موازی شرایط استفاده از ماتریس‌های انتقال تغییر می‌کند، پیشنهاد می‌شود تا روش بیان شده در این رساله برای ربات‌های موازی، شاخه‌ای و ترکیبی گسترش یابد.
۵. ماتریس انتقال بر پایه شتاب معمولاً برای سیستم‌های کنترلی کاربرد بیشتری پیدا می‌کند. بنابراین وجود یک کتابخانه از ماتریس‌های انتقال بر پایه شتاب می‌تواند برای مدل‌سازی این سیستم‌ها بسیار مناسب و کاربردی باشد.

پیوست الف: کتابخانه ماتریس‌های انتقال

۱. ماتریس انتقال المان صلب

$$U_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l\bar{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l\bar{s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m\frac{l}{2}\bar{s}A_x & -m\frac{l}{2}\bar{c}A_y & u_{43} & 1 & -l\bar{s} & -l\bar{c} & u_{47} \\ -mA_x & 0 & u_{53} & 0 & 1 & 0 & u_{57} \\ 0 & mA_y & u_{63} & 0 & 0 & 1 & u_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{43} = \bar{I}A_\theta - m\frac{l^2}{4}A_\theta(\bar{s}^2 + \bar{c}^2)$$

$$u_{47} = \bar{I}B_\theta + m\frac{l}{2}\bar{s}B_x - m\frac{l^2}{4}B_\theta(\bar{s}^2 + \bar{c}^2) - m\frac{l}{2}\bar{c}B_y - q\frac{l^2}{2}\bar{c}$$

$$u_{53} = m\frac{l}{2}\bar{s}A_\theta + m\frac{l}{2}\bar{c}A_\theta D_\theta$$

$$u_{57} = m\frac{l}{2}\bar{s}B_\theta + m\frac{l}{2}\bar{c}(A_\theta E_\theta - B_\theta) - mB_x$$

$$u_{63} = m\frac{l}{2}\bar{c}A_\theta - m\frac{l}{2}\bar{s}A_\theta D_\theta$$

$$u_{67} = m\frac{l}{2}\bar{c}B_\theta - m\frac{l}{2}\bar{s}(A_\theta E_\theta - B_\theta) + mB_y + ql$$

۲. ماتریس انتقال فنر پیچشی

$$U_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۳. ماتریس انتقال بارهای خارجی

$$U_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & M_{ext} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & N_{ext} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & V_{ext} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴. ماتریس انتقال جرم متمرکز

$$U_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}A_\theta & 1 & 0 & 0 & \bar{I}B_\theta \\ -m_i A_x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -m_i B_x \\ 0 & m_i A_y & 0 & 0 & 0 & 1 & m_i B_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۵. ماتریس انتقال موتور محرک دورانی

$$U_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k_\theta} & 0 & 0 & G_\theta(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۶. ماتریس انتقال موتور محرک خطی

$$U_{\chi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_e} & 0 & G_{\chi} \bar{s} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_e} & G_{\chi} \bar{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پیوست ب: نمونه‌ای از کاربرد کتابخانه ماتریس‌های انتقال برای یک ربات دو لینکی

با تعیین ماتریس انتقال برای هر یک از المان‌ها می‌توان ماتریس انتقال کل را با ضرب تمام ماتریس‌ها در هم محاسبه کرد. برای آشنایی با نحوه استفاده از کتابخانه بیان شده، در جدول پ-۱ ماتریس انتقال کل برای یک ربات دو لینکی و برای حالت‌های مختلف تعیین شده است. با استفاده از جدول فوق مشخص است که برای تعیین ماتریس انتقال کل باید تمام ماتریس‌های انتقال از آخرین بردار به بردار اول در یکدیگر ضرب شوند.

جدول پ-۱: کتابخانه ماتریس انتقال برای یک ربات دو لینکی در شرایط مختلف

نوع ربات	محرك اول	لینک اول	محرك دوم	لینک دوم	ماتریس انتقال کل
RR	دورانی	صلب	دورانی	صلب	$U = U_{r,2} U_{\theta,2} U_{r,1} U_{\theta,1}$
PP	کشویی	صلب	کشویی	صلب	$U = U_{r,2} U_{\chi,2} U_{r,1} U_{\chi,1}$
RP	دورانی	صلب	کشویی	صلب	$U = U_{r,2} U_{\chi} U_{r,1} U_{\theta}$
PR	کشویی	صلب	دورانی	صلب	$U = U_{r,2} U_{\theta} U_{r,1} U_{\chi}$
RR	دورانی	انعطاف پذیر	دورانی	انعطاف پذیر	$U = U_{r,n} U_{s,n-1} U_{r,n-1} U_{s,n-2} \dots U_{r,i} U_{s,i} U_{\theta,2} U_{s,i-1} U_{r,i-1} U_{s,i-2} \dots U_{r,2} U_{s,1} U_{r,1} U_{\theta,1}$
PP	کشویی	انعطاف پذیر	کشویی	انعطاف پذیر	$U = U_{r,n} U_{s,n-1} U_{r,n-1} U_{s,n-2} \dots U_{r,i} U_{s,i} U_{\chi,2} U_{s,i-1} U_{r,i-1} U_{s,i-2} \dots U_{r,2} U_{s,1} U_{r,1} U_{\chi,1}$

RP	دورانی	انعطاف پذیر	کشویی	انعطاف پذیر	$U = U_{r,n} U_{s,n-1} U_{r,n-1} U_{s,n-2}$ $\cdots U_{r,i} U_{s,i} U_{\chi} U_{s,i-1} U_{r,i-1} U_{s,i-2}$ $\cdots U_{r,2} U_{s,1} U_{r,1} U_{\theta}$
PR	کشویی	انعطاف پذیر	دورانی	انعطاف پذیر	$U = U_{r,n} U_{s,n-1} U_{r,n-1} U_{s,n-2}$ $\cdots U_{r,i} U_{s,i} U_{\theta} U_{s,i-1} U_{r,i-1} U_{s,i-2}$ $\cdots U_{r,2} U_{s,1} U_{r,1} U_{\chi}$

References

- [1] M. H. Korayem, H. Tourajizadeh and M. Bamdad, "Dynamic load carrying capacity of flexible cable suspended robot: robust feedback linearization control approach," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 60, no. 3, pp. 341-363, 2010.
- [2] M. Korayem, E. Davarzani, and M. Bamdad, "Optimal trajectory planning with the dynamic load carrying capacity of a flexible cable-suspended manipulator," *Scientia Iranica*, 2010.
- [3] M. Bamdad and M. Feyzollahzadeh, "Computational efficient discrete time transfer matrix method for large deformation analysis of flexible manipulators," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. pp. 1-23, 2020.
- [4] X. Rui, D. Bestle, G. Wang, J. Zhang and X. Rui, "A new version of the Riccati transfer matrix method for multibody systems consisting of chain and branch bodies," *Multibody System Dynamic*, vol. 49, no. 3, pp. 337-354, 2020.
- [5] X. Rui, X. Wang, Q. Zhou, and J. Zhang, "Developments in transfer matrix method for multibody systems (Rui method) and its applications," in *ASME 2018 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2018: American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- [6] G. Horner and W. Pilkey, "The Riccati transfer matrix method," *Journal of Mechanical Design*, vol. 100, no. 2, pp. 297-302, 1978.
- [7] B. A. O'Leary, "Analysis of high-speed rotating systems using Timoshenko beam theory in conjunction with the transfer matrix method," 1989.
- [8] M. Deepthikumar, A. Sekhar, and M. Srikanthan, "Balancing of flexible rotor with bow using transfer matrix method," *Journal of Vibration and Control*, vol. 20, no. 2, pp. 225-240, 2014.
- [9] M. Feyzollahzadeh and M. Mahmoodi, "Dynamic Analysis of Offshore Wind Turbine Towers with Fixed Monopile Platform Using the Transfer Matrix Method," *Journal of Solid Mechanics*, vol. 8, no. 1, pp. 130-151, 2016.
- [10] R. Uhrig, "The transfer matrix method seen as one method of structural analysis among others," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 4, no. 2, pp. 136-148, 1966.
- [11] H. Holzer, "Die Berechnung der Drehschwingungen," *Berlin: Julius Springer*, 1921.
- [12] N. Myklestad, "A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibration of airplane wings and other types of beams," *Journal of the Aeronautical Sciences*, 2012.
- [13] E. Pestel and F. A. Leckie, *Matrix methods in elastomechanics*. McGraw-Hill, 1963.
- [14] H. Dai, L. Wang, Q. Qian, and J. Gan, "Vibration analysis of three-dimensional pipes conveying fluid with consideration of steady combined force by transfer matrix method," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, no. 5, pp. 2453-2464, 2012.

- [15] Y. M. Huang and C. Horng, "Analysis of torsional vibration systems by the extended transfer matrix method," *ASME Journal of*, no. 2, pp. 250-255, 1999.
- [16] V. CEAUȘU, A. Craifaleanu, and C. Dragomirescu, "Transfer matrix method for forced vibrations of bars," *University" Politehnica" of Bucharest Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering*, vol. 72, no. 2, pp. 35-42, 2010.
- [17] N. Orășanu and A. Craifaleanu, "Theoretical and experimental analysis of the vibrations of an elastic beam with four concentrated masses," in *Proceedings of the Annual Symposium of the Institute of Solid Mechanics, SISOM*, 2011, pp. 25-26.
- [18] M. Boiangiu, V. Ceausu, and C. D. Untaroiu, "A transfer matrix method for free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams with variable cross section," *Journal of Vibration and Control*, vol. 22, no. 11, pp. 2591-2602, 2016.
- [19] J. W. Lee and J. Y. Lee, "Free vibration analysis using the transfer-matrix method on a tapered beam," *Computers & Structures*, vol. 164, pp. 75-82, 2016.
- [20] Y. S. Al Rjoub and A. G. Hamad, "Free vibration of functionally Euler-Bernoulli and Timoshenko graded porous beams using the transfer matrix method," *KSCE Journal of Civil Engineering*, pp. 1-15, 2016.
- [21] D. Whitney, "Feedback Control if Two Beam, Two Joint Systems With Distributed Flexibility1," 1975.
- [22] W. J. Book and M. Majette, "Controller design for flexible distributed parameter mechanical arms via combined state space and frequency domain techniques," 1983.
- [23] R. W. Krauss and W. J. Book, "Stability in active mass damping control of a flexible robot," in *Aerospace Conference, 2004. Proceedings. 2004 IEEE*, 2004, vol. 5: IEEE.
- [24] R. Krauss, O. Bruls, and W. Book, "Two competing linear models for flexible robots: Comparison, experimental validation, and refinement," in *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, 2005, pp. 1963-1968: IEEE.
- [25] R. Krauss, W. Book, and O. Bröls, "Transfer matrix modelling of hydraulically actuated flexible robots," *International Journal of Fluid Power*, vol. 8, no. 1, pp. 51-57, 2007.
- [26] R. W. Krauss and W. J. Book, "A Python Software Module for Automated Identification of Systems Modeled with the Transfer Matrix Method," *IMECE, 2007. Proceedings of the 2007, ASME*, 2007.
- [27] R. W. Krauss and W. J. Book, "Transfer matrix modeling of systems with noncollocated feedback," *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, vol. 132, no. 6, p. 061301, 2010.
- [28] R. W. Krauss, "Computationally efficient modeling of flexible robots using the transfer matrix method," *Journal of Vibration and Control*, vol. 18, no. 5, pp. 596-608, 2012.
- [29] R. Krauss and M. Okasha, "Discrete-time transfer matrix modeling of flexible robots under feedback control," in *American Control Conference (ACC), 2013*, 2013, pp. 4104-4109: IEEE.

- [30] R. W. Krauss, "Infinite-dimensional pole-optimization control design for flexible structures using the transfer matrix method," *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 9, no. 1, p. 011004, 2014.
- [31] Y. Guo, W. Chen, X. Zhao, and X. Zhang, "Transfer matrix method for multi-body systems dynamics modeling of rescue robot," in *Mechatronics and Automation (ICMA), 2014 IEEE International Conference on*, 2014, pp. 1940-1944: IEEE.
- [32] W. Chen, H. Li, and X. Zhang, "Modelling and Analysis of Planar Robotic Arm Dynamics Based on An Improved Transfer Matrix Method for Multi-body Systems," in *Proceedings of the 14th IFToMM World Congress*, 2015, pp. 233-240.
- [33] R. Srensen, M. R. Iversen, and X. Zhang, "Dynamic Modeling of Flexible Robot Manipulators: Acceleration-Based Discrete Time Transfer Matrix Method," in *Recent Advances in Mechanism Design for Robotics*: Springer, 2015, pp. 377-386.
- [34] H. Li and X. Zhang, "A Method for Modeling Flexible Manipulators: Transfer Matrix Method with Finite Segments," *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering*, vol. 10, no. 6, pp. 1086-1093, 2016.
- [35] A. S. Kumar and T. Sankar, "A new transfer matrix method for response analysis of large dynamic systems," *Computers & structures*, vol. 23, no. 4, pp. 545-552, 1986.
- [36] X. Rui, X. Wang, Q. Zhou, and J. Zhang, "Developments in transfer matrix method for multibody systems (Rui method) and its applications," in *ASME 2018 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2018: American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- [37] J. Gu, X. Rui, J. Zhang and G. Chen, "Riccati transfer matrix method for linear tree multibody systems," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 84, no. 1, pp. 011008, 2017.
- [38] X. Rui, D. Bestle, J. Zhang, and Q. Zhou, "A new version of transfer matrix method for multibody systems," *Multibody System Dynamics*, vol. 38, no. 2, pp. 137-156, 2016.
- [39] H. Li and X. Zhang, "A Method for Modeling Flexible Manipulators: Transfer Matrix Method with Finite Segments," *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering*, vol. 10, no. 6, pp. 1086-1093, 2016.
- [40] H.-g. Yang, X.t. Rui, Z.h. Zhan, J.s. Zhang, J.j. Gu, and B. He, "Virtual design software for mechanical system dynamics using transfer matrix method of multibody system and its application," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 7, no. 9, p. 1687814015601578, 2015.
- [41] K. Tanaka, K. Kikuchi, and A. Okumura, "Improvement of computation accuracy in transfer matrix method vibration analysis by using a branching process," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 76, no. 4, pp. 587-590, 1981.

- [42] M. Boiangiu and A. Boiangiu, "Transfer matrix method applied in the study of vibrations of the centrifuges with the basket in the console," *matrix*, vol. 1, p. 4, 2012.
- [43] R. Thresher and J. Wang, "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 49, p. 197, 1982.
- [44] W. Liu and F.H. Yeh, "Vibrations of non-uniform rotating beams," *Journal of sound and vibration*, vol. 119, no. 2, pp. 379-384, 1987.
- [45] J. B. Gunda and R. Ganguli, "New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 50, no. 3, pp. 578-588, 2008.
- [46] G. Wang and N. M. Wereley, "Free vibration analysis of rotating blades with uniform tapers," *AIAA journal*, vol. 42, no. 12, pp. 2429-2437, 2004.
- [47] B. He, X. Rui, and G. Wang, "Riccati discrete time transfer matrix method for elastic beam undergoing large overall motion," *Multibody System Dynamics*, vol. 18, no. 4, pp. 579-598, 2007.
- [48] R. Ganesh and R. Ganguli, "Stiff string approximations in Rayleigh–Ritz method for rotating beams," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, no. 17, pp. 9282-9295, 2013.
- [49] A. R. J. H. Al-Obaidi, "Investigation of effect of pump rotational speed on performance and detection of cavitation within a centrifugal pump using vibration analysis," *Heliyon*, vol. 5, no. 6, pp. e01910, 2019.
- [50] X. Zhang, R. Sørensen, M. R. Iversen and H. Li, "Computationally efficient dynamic modeling of robot manipulators with multiple flexible-links using acceleration-based discrete time transfer matrix method," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 49, pp. 181-193, 2018.
- [51] V. Alizadehyazdi, "Stability of Discrete Time Transfer Matrix Method (DT-TMM)," Southern Illinois University at Edwardsville, 2016. (Master Thesis)
- [52] L. Sun, X. Rui, D. Bestle, G. Wang, J. Zhang, and X. Rui, "Vibration Analysis of Linear Beam With Moving Loads Based on Riccati Transfer Matrix Method for Multibody Systems," in *ASME 2018 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2018: American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- [53] A. Neves, F. Simões, and A. P. da Costa, "Vibrations of cracked beams: Discrete mass and stiffness models," *Computers & Structures*, vol. 168, pp. 68-77, 2016.
- [54] J. Zhou and Y. J. A. M. S. Zhou, "A new simple method of implicit time integration for dynamic problems of engineering structures," *Acta Mechanica Sinica*, vol. 23, no. 1, pp. 91-99, 2007.
- [55] D. Sha, X. Zhou, and K. Tamma, "Time discretized operators. Part 2: towards the theoretical design of a new generation of a generalized family of unconditionally stable implicit and explicit representations of arbitrary order for computational dynamics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, no. 3-4, pp. 291-329, 2003.
- [56] S. G. Kelly, "Fundamentals of mechanical vibrations," 1992.

- [57] A. Banerjee and S. Nagarajan, "Efficient simulation of large overall motion of beams undergoing large deflection," *Multibody System Dynamics*, vol. 1, no. 1, pp. 113-126, 1997.
- [58] K. Bisshopp and D. Drucker, "Large deflection of cantilever beams," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 3, no. 3, pp. 272-275, 1945.
- [59] J. Zhang, J. Sheng, C. Neill, C. Walsh, R. Wood, J. Ryu, J. Desai, "Robotic artificial muscles: Current progress and future perspectives," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 35, no. 3, pp. 761-781, 2019.
- [60] S. M. Mirvakili and I. Hunter, "Artificial muscles: Mechanisms, applications, and challenges," *Advanced Materials*, vol. 30, no. 6, p. 1704407, 2018.
- [61] F. Daerden and D. Lefeber, "Pneumatic artificial muscles: actuators for robotics and automation," *European Journal of Mechanical and Environmental Engineering*, vol. 47, no. 1, pp. 11-21, 2002.
- [62] M. Damme, P. Bey, B. Vanderborght and R. Versluys, "The safety of a robot actuated by pneumatic muscles—a case study," *International Journal of Social Robotics*, vol. 2, no. 3, pp. 289-303, 2010.
- [۶۳] سید رهی صفوی، "طراحی و ساخت ربات پوششی توانبخشی برای ناتوانی حرکتی اندام تحتانی در فرآیند راه رفتن"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱۳۹۷.
- [64] A. Feldbusch, H. Sadegh-Azar, and P. Agne, "Vibration analysis using mobile devices (smartphones or tablets)," *Procedia Engineering*, vol. 199, pp. 2790-2795, 2017

Abstract

This thesis aims to develop a suitable method for dynamic modeling of planar flexible robots with large deformation based on the transfer matrix method. The transfer matrix method is a simple and accurately acceptable method used for modeling and dynamic analysis. For this purpose, first, the research background, limitations, and numerical difficulties in the transfer matrix method are examined. Then in a case study, numerical difficulties for a flexible robot are considered. To eliminate the numerical difficulties and limitations of this method in the field of robotics, the Riccati discrete-time transfer method is presented. The method implementation on several cases studied includes clamped beam with large deformation, a two-link manipulator with rotating joints, with PR joints and one three-link PRR manipulator is presented. The results of the expressed algorithm are compared with ADAMS software and prior researches' outputs. Finally, an experimental flexible robot with two rotating and prismatic joints is investigated through the proposed modeling and experiment analysis. It proves that the improved Riccati transfer matrix method can be used as a tool with good accuracy and low computational cost for dynamic modeling of flexible robots with large deformations.

Keywords: Transfer Matrix Method, Flexible Robot, Large Deformation, Discretization, Riccati Method, ADAMS Commercial Software



Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

Ph.D. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Development of a computational method for flexible robots based on discrete transfer matrix for large deformation

By: Mahdi Feyzollahzadeh

Supervisor:

Dr. Mahdi Bamdad

September 2021