

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک
گروه تبدیل انرژی
پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک

آنالیز تحلیلی جریان و انتقال حرارت در کانال‌های مثلثی با استفاده از روش ریتز

نگارنده: امیرحسین حاجی آقایی

اساتید راهنما

دکتر محمد حسن کیهانی

دکتر محمود نوروزی

در این صفحه صورت جلسه دفاع را قرار دهید. لازم است پس از صحافی این صفحه مجدداً توسط دانشکده مهر گردد و استاد راهنما با امضای خود اصلاحات پایان نامه را تائید کند.

تقدیم اثر

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام‌بخش آلام زمینی‌ام است.

به استوارترین تکیه‌گاهم، دستان پرمهر پدرم،

به سبزترین نگاه زندگی‌ام، چشمان سبز مادرم،

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره‌ای از دریای بی‌کران مهربانی‌تان را سپاس نتوانم بگویم.

باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگی‌تان را بزدايد.

بوسه بر دستان پرمهرتان

شکر و قدردانی

سپاس خدای بزرگ را که مرا یاری رساند تا بتوانم این مقطع تحصیلی را به پایان رسانده و گامی در راستای اعتلای علم بردارم. از اساتید راهنمای گران قدرم دکتر محمد حسن کیهانی و دکتر محمود نوروزی که وجودشان همیشه قوتی برای انجام کارهایم بوده است و بدون شک، انجام این پایان نامه بدون کمک و راهنمایی های ارزنده آنها امکان پذیر نبوده است، کمال تشکر را دارم.

تشکر از تمامی معلمان و اساتیدی که توفیق دانش آموزی و دانشجویی در محضرشان را داشتم.

و در پایان از تمامی عزیزانی که در طول انجام این پروژه مرا یاری کرده اند کمال تشکر و قدردانی را ابراز می نمایم.

امیرحسین حاجی آقایی
دی ۱۴۰۰

تعمدنامه

اینجانب **امیرحسین حاجی آقایی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **آنالیز تحلیلی جریان و انتقال حرارت در کانال‌های مثلی با استفاده از روش ریتز تحت راهنمایی دکتر محمد حسن کیهانی و دکتر محمود نوروزی** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.



تاریخ : ۱۴۰۰/۱۰/۲۹

امضای دانشجو :

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود . استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

بررسی جریان و انتقال حرارت درون کانال‌ها، سابقه‌ی بسیاری دارد. امروزه، پیشرفت صنعت و نیاز به کانال‌هایی با فشردگی بیشتر نسبت به مقاطع دایره‌ای، باعث شده تا محققان تحقیقاتی را در این زمینه برای کانال‌هایی با سطح مقطع چندضلعی انجام دهند. در این بین، مطالعاتی نیز در زمینه‌ی کانال‌هایی با مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه، با استفاده از روش‌های مختلفی اعم از روش‌های آزمایشگاهی، عددی و تحلیلی صورت گرفته است. پژوهش حاضر، انتقال حرارت و جریان را درون کانال‌های مثلثی با زوایای دلخواه، برای اولین بار توسط روش تحلیلی ریتز بر پایه‌ی حساب تغییرات مورد بررسی قرار داده است. به علاوه در این تحقیق، برای نخستین بار انتقال حرارت درون کانال‌های مثلثی با زوایای دلخواه، با در نظر گرفتن اتلاف لزجت، مورد بررسی قرار گرفته است. از مزایای استفاده از روش تحلیلی ریتز در مطالعه‌ی حاضر، می‌توان به این نکته اشاره کرد که برای حالت‌های مختلف مقطع مثلثی، همواره شرایط مرزی ارضا می‌شود. در حل انتقال حرارت با در نظر گرفتن اثر اتلاف لزجت، از عدد برینکمن (Br) استفاده شده و تأثیر آن بر روی توزیع دما مورد بررسی قرار گرفته است. در حالت کلی، انتقال حرارت در حضور اتلاف لزجت، به دو قسمت خنک‌کننده (دمای دیواره کمتر از دمای سیال) و گرم‌کننده (دمای دیواره بیش‌تر از دمای سیال) تقسیم می‌شود. عدد پوازیه و عدد ناسلت که از حل جریان و انتقال حرارت حاصل می‌شوند، به‌عنوان نتایج حل مسأله در این مطالعه ارائه شده و با نتایج موجود از مطالعات گذشته مقایسه شده‌اند که این مقایسه، نشان از دقت مناسب روش تحلیل ریتز دارد. بیشترین اختلاف بین نتایج به‌دست‌آمده و نتایج موجود در مطالعات گذشته، برای عدد پوازیه در مثلث‌های متساوی‌الساقین برابر با ۰.۷۶ درصد و در مثلث‌های قائم‌الزاویه برابر با ۰.۴ درصد است. همچنین بیشترین اختلاف مربوط به عدد ناسلت در این مقایسه برای حالت $Br = 0$ ، در مثلث‌های متساوی‌الساقین برابر با ۰.۸ درصد و در مثلث‌های قائم-

الزاویه برابر با ۰.۴ درصد می‌باشد. در بین تمامی مقاطع مثلثی نیز، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بیشترین مقدار عدد پوازیه، بیشترین مقدار عدد ناسلت در حالت $Br=0$ و حالت گرم‌کننده و کمترین مقدار عدد ناسلت در حالت خنک‌کننده است. برای حالتی که $Br \neq 0$ باشد، با افزایش مقدار عدد برینکمن، عدد ناسلت کاهش می‌یابد، همچنین با افزایش / کاهش عدد برینکمن به سمت $\pm\infty$ ، عدد ناسلت به سمت صفر میل می‌کند.

کلمات کلیدی: کانال مثلثی، انتقال حرارت، حل تحلیلی، روش ریتز، عدد برینکمن، عدد پوازیه

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱-

۲-

۳

فهرست مطالب

د	فهرست جداول
ه	فهرست اشکال
ز	فهرست علائم
۱	فصل ۱: مقدمه
۲	۱-۱ مقدمه.....
۴	۲-۱ سابقه موضوع.....
۱۰	۳-۱ تحقیق حاضر.....
۱۱	۱-۳-۱ نوآوری و ضرورت انجام تحقیق.....
۱۱	۴-۱ جمع‌بندی.....
۱۳	فصل ۲: روابط مسأله
۱۴	۱-۲ مقدمه.....
۱۴	۲-۲ پارامترهای بی‌بعد.....
۱۵	۳-۲ معادلات حاکم.....
۱۶	۱-۳-۲ معادله پیوستگی.....
۱۶	۲-۳-۲ معادله مومنتوم.....
۱۶	۱-۲-۳-۲ شکل بی‌بعد معادله مومنتوم.....
۱۷	۳-۳-۲ معادله انرژی.....
۱۷	۱-۳-۳-۲ شکل بی‌بعد معادله انرژی.....
۱۹	۴-۲ ضریب اصطکاک.....
۲۲	۱-۴-۲ عدد پوازیه.....

۲-۵ عدد ناسلت..... ۲۳

۲-۶ نتیجه گیری..... ۲۴

فصل ۳: روش حل تحلیلی

۲۵

۳-۱ مقدمه..... ۲۶

۳-۲ حساب تغییرات..... ۲۶

۳-۳ روش ریتز..... ۲۹

۳-۳-۱ حل معادله مومنتوم با استفاده از روش ریتز..... ۲۹

۳-۳-۲ حل معادله انرژی با استفاده از روش ریتز..... ۳۴

۳-۴ نتیجه گیری..... ۳۶

فصل ۴: بررسی نتایج

۳۷

۴-۱ مقدمه..... ۳۸

۴-۲ نتایج مربوط به حل جریان..... ۳۸

۴-۲-۱ عدد پوازیه..... ۴۰

۴-۳ نتایج مربوط به حل دما..... ۴۹

۴-۳-۱ توزیع اتلاف..... ۴۹

۴-۳-۲ عدد ناسلت برای حالت $Br=0$ ۵۴

۴-۳-۳ عدد ناسلت برای حالت $Br \neq 0$ ۶۲

۴-۴ نتیجه گیری..... ۸۲

فصل ۵: نتیجه گیری و پیشنهادات

۸۵

۵-۱ مقدمه..... ۸۶

۵-۲ نتیجه گیری..... ۸۶

۵-۳ پیشنهادات..... ۸۸

فهرست جداول

- جدول ۴-۱. مقایسه‌ی عدد پوازیه برای مثلث‌های متساوی‌الساقین ۴۰
- جدول ۴-۲. مقایسه اعداد پوازیه برای مثلث‌های قائم‌الزاویه ۴۱
- جدول ۴-۳. اعداد پوازیه برای مثلث‌هایی با زوایای دلخواه ۴۴
- جدول ۴-۴. مقایسه عدد ناسلت برای مثلث‌های متساوی‌الساقین در حالت $Br=0$ ۵۶
- جدول ۴-۵. مقایسه عدد ناسلت برای مثلث‌های قائمه در حالت $Br=0$ ۵۷
- جدول ۴-۶. مقادیر ناسلت برای مثلث‌های با زوایای دلخواه در حالت $Br=0$ ۵۹
- جدول ۴-۷. عدد ناسلت در مثلث‌های متساوی‌الساقین برای اعداد مختلف برینکمن ۷۱
- جدول ۴-۸. عدد ناسلت در مثلث‌های قائم‌الزاویه برای اعداد مختلف برینکمن ۷۲
- جدول ۴-۹. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br = -10$ ۷۹
- جدول ۴-۱۰. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br = -5$ ۸۰
- جدول ۴-۱۱. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br = -1$ ۸۰
- جدول ۴-۱۲. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br = 1$ ۸۱
- جدول ۴-۱۳. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br = 5$ ۸۱
- جدول ۴-۱۴. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br = 10$ ۸۲

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱. میکروکانال مثلثی جهت استفاده در مبدل های حرارتی فشرده ۳
- شکل ۲-۱. مقادیر افت فشار، طول ورودی هیدرودینامیکی بی بعد و عدد پوازیه برای مثلث های متساوی الساقین [۲] ۴
- شکل ۳-۱. مقادیر $NuH1$ ، $NuH2$ و NuT برای مثلث های متساوی الساقین [۲] ۵
- شکل ۴-۱. شکل کلی مسأله ۱۰
- شکل ۱-۲. تعادل انرژی در یک المان از حجم کنترل ۱۸
- شکل ۲-۲. نیروهای وارد به سیال ۲۰
- شکل ۱-۳. ناحیه حل معادلات مثال ۱-۳ [۲۱] ۲۷
- شکل ۲-۳. کران های انتگرال گیری در یک مقطع مثلثی ۳۰
- شکل ۳-۳. سطح مقطع یک کانال مثلثی ۳۱
- شکل ۱-۴. کانتور سرعت برای مثلث متساوی الاضلاع طبق رابطه ی ارائه شده در [۲۲] ۳۹
- شکل ۲-۴. کانتور سرعت مثلث متساوی الاضلاع برای تحقیق حاضر ۳۹
- شکل ۳-۴. عدد پوازیه برای مثلث های با زوایای دلخواه ۴۲
- شکل ۴-۴. ضریب اصطکاک پوسته ای در مثلث متساوی الساقین با زاویه رأس ۳۰ درجه ۴۵
- شکل ۵-۴. ضریب اصطکاک پوسته ای در مثلث متساوی الساقین با زاویه رأس ۴۵ درجه ۴۵
- شکل ۶-۴. ضریب اصطکاک پوسته ای در مثلث متساوی الساقین با زاویه رأس ۶۰ درجه ۴۶
- شکل ۷-۴. ضریب اصطکاک پوسته ای در مثلث متساوی الساقین با زاویه رأس ۹۰ درجه ۴۶
- شکل ۸-۴. ضریب اصطکاک پوسته ای در مثلث متساوی الساقین با زاویه رأس ۱۰۰ درجه ۴۷
- شکل ۹-۴. ضریب اصطکاک پوسته ای در مثلث قائم الزاویه، با زاویه $\alpha = 70$ و $\beta = 20$ ۴۷
- شکل ۱۰-۴. ضریب اصطکاک پوسته ای در مثلث قائم الزاویه، با زاویه $\alpha = 30$ و $\beta = 60$ ۴۸
- شکل ۱۱-۴. کانتور توزیع اتلاف در مقطع متساوی الاضلاع ۵۰
- شکل ۱۲-۴. کانتور توزیع اتلاف در مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس ۳۰ درجه ۵۰
- شکل ۱۳-۴. کانتور توزیع اتلاف در مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس ۹۰ درجه ۵۱
- شکل ۱۴-۴. کانتور توزیع اتلاف در مقطع قائم الزاویه با زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه ۵۱
- شکل ۱۵-۴. کانتور توزیع اتلاف در مقطع قائم الزاویه با زوایای ۲۰ و ۷۰ درجه ۵۲
- شکل ۱۶-۴. کانتور توزیع اتلاف در مقطع مثلثی با زوایای ۴۰، ۶۰ و ۸۰ درجه ۵۲
- شکل ۱۷-۴. کانتور توزیع اتلاف در مقطع مثلثی با زوایای ۴۵، ۵۵ و ۸۰ درجه ۵۳
- شکل ۱۸-۴. اندازه اتلاف برای تمام مقاطع مثلثی ۵۴

- شکل ۴-۱۹. کانتور دما برای مثلث متساوی الاضلاع در حالت $Br=0$ ۵۵
- شکل ۴-۲۰. عدد ناسلت برای مثلث‌های با زوایای دلخواه در حالت $Br=0$ ۵۸
- شکل ۴-۲۱. کانتور توزیع دما در مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس 30° درجه ۶۰
- شکل ۴-۲۲. کانتور توزیع دما در مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس 90° درجه ۶۰
- شکل ۴-۲۳. کانتور توزیع دما در مقطع قائم الزاویه با زوایای 30° و 60° درجه ۶۱
- شکل ۴-۲۴. کانتور توزیع دما در مقطع قائم الزاویه با زوایای 20° و 70° درجه ۶۱
- شکل ۴-۲۵. کانتور توزیع دما در مقطع مثلثی با زوایای 80° ، 60° و 40° درجه ۶۲
- شکل ۴-۲۶. کانتور توزیع دما در مقطع مثلثی با زوایای 80° ، 55° و 45° درجه ۶۲
- شکل ۴-۲۷. عدد ناسلت برای اعداد برینکمن مختلف در مقطع متساوی الاضلاع ۶۳
- شکل ۴-۲۸. کانتور توزیع دما در مقطع متساوی الاضلاع ($Br \neq 0$) ۶۶
- شکل ۴-۲۹. توزیع دما برای مقطع متساوی الاضلاع برای $Br=-0.275$ ۶۷
- شکل ۴-۳۰. توزیع دما برای مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس 30° درجه برای $Br=-0.283$ ۶۸
- شکل ۴-۳۱. توزیع دما برای مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس 90° درجه برای $Br=-0.28$ ۶۸
- شکل ۴-۳۲. توزیع دما برای مقطع قائم الزاویه با زوایای 30° و 60° درجه برای $Br=-0.284$ ۶۹
- شکل ۴-۳۳. توزیع دما برای مقطع قائم الزاویه با زوایای 20° و 70° درجه برای $Br=-0.29$ ۶۹
- شکل ۴-۳۴. توزیع دما برای مقطع مثلثی با زوایای 80° ، 40° و 60° درجه برای $Br=-0.279$ ۷۰
- شکل ۴-۳۵. توزیع دما برای مقطع مثلثی با زوایای 80° ، 45° و 55° درجه برای $Br=-0.279$ ۷۰
- شکل ۴-۳۶. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br=-10$ ۷۳
- شکل ۴-۳۷. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br=-5$ ۷۴
- شکل ۴-۳۸. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br=-1$ ۷۵
- شکل ۴-۳۹. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br=1$ ۷۶
- شکل ۴-۴۰. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br=5$ ۷۷
- شکل ۴-۴۱. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br=10$ ۷۸

فهرست علائم

x	مؤلفه افقی مکان در دستگاه مختصات کارتزین
y	مؤلفه عمودی مکان در دستگاه مختصات کارتزین
z	جهت حرکت جریان در کانال در دستگاه مختصات کارتزین
A	مساحت
Γ	محیط
D_h	قطر هیدرولیکی
w	سرعت در راستای z
w_0	سرعت ماکزیمم سیال در یک کانال دایره‌ای با قطر هیدرولیکی و گرادیان فشار یکسان
T	دما
T_w	دمای دیواره
T_m	دمای میانگین
q''	شار حرارتی وارد شده به دیواره
k	ضریب هدایت حرارتی
Br	عدد برینکمن
μ	لزجت
U	سرعت میانگین
τ_w	تنش برشی دیواره
$\dot{\gamma}$	نرخ برشی
u	سرعت در راستای x
v	سرعت در راستای y
P	فشار
ρ	چگالی
t	زمان
V	بردار سرعت
g	شتاب گرانش
c	ضریب گرمای ویژه
q'''	گرمای داخلی تولیدشده

ضریب قابلیت تراکم	$\beta T \frac{DP}{Dt}$
اتلاف لزجت	φ
دبی جرمی	$\dot{m}$
آنتالپی (رابطه ۲-۱۷)	h
ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (رابطه ۲-۳۹)	h
افت هد سیال	h_{loss}
ضریب اصطکاک داریسی	f
طول کانال	L
عدد رینولدز	Re
ضریب اصطکاک پوسته‌ای	C_f
عدد پوازیه	Po
عدد ناسلت	Nu
یک تابع کلی برای توضیح حساب تغییرات (مثال ۳-۱)	F
تابعی	I
پارامتر مورد استفاده جهت نشان دادن تغییرات	δ
ضریب مجهول ریتز	a
تابع ریتز	Ψ
تعداد جملات سری ریتز	N
طول اضلاع مثلث	L_1, L_3, L_4
فاصله بخشی از ضلع L_1 از مرکز مختصات تا ارتفاع مثلث	L_2
ارتفاع مثلث	H

فصل ۱: مقدمه

۱-۱ مقدمه

به دلیل کاربردهای صنعتی فراوان، انتقال حرارت درون کانال‌ها مورد مطالعات بسیاری قرار گرفته است. شکل هندسی کانال‌ها یکی از نکات بسیار مهم به لحاظ تأثیرگذاری بر روی هزینه‌ها و همچنین نرخ انتقال حرارت است. بسیاری از مطالعات صورت گرفته مربوط به کانال‌هایی هستند که دارای سطح مقطع دایره‌ای شکل می‌باشند، اما با توجه به پیشرفت‌های نوین مبدل‌های حرارتی^۱ و نیاز به نرخ بالای انتقال حرارت و همچنین هزینه کمتر، برخی از محققین مطالعاتی را در زمینه‌ی انتقال حرارت در کانال‌های غیر دایره‌ای انجام داده‌اند. میان سطح مقطع‌های غیر دایره‌ای، کانال‌های با سطح مقطع چندضلعی علاوه بر سطح انتقال حرارت بیشتر (در مقایسه با کانال‌های مارپیچ، دو سطح موازی و...)، دارای فشردگی بیشتری نیز هستند، که باعث استفاده از این کانال‌ها در مبدل‌های حرارتی فشرده^۲ می‌شود. در این بین کانال‌های با سطح مقطع مثلثی شکل، علاوه بر نرخ انتقال حرارت مناسب، به دلیل برخورداری از فشردگی بسیار عالی و تأثیر در بهبود هزینه‌ها می‌توانند در صنعت مورد استفاده قرار گیرند. یکی از مواردی که امروزه به آن توجه بسیاری می‌شود، انتقال حرارت در مقیاس میکرو می‌باشد. در دو دهه‌ی اخیر، روش میکرو سیالات^۳ توسعه‌ی بسیار زیادی در زمینه‌های مختلف داشته است. از روش‌های رایج ساخت میکرو کانال^۴ در مبحث میکرو سیالات، می‌توان به روش لیتوگرافی^۵، روش گرم‌کوبی^۶، حکاکی^۷ و قالب‌گیری تزریقی^۸ اشاره کرد. علاوه بر پیشرفت بسیار در مبحث میکرو سیالات، ساخت میکرو کانال‌ها به دلیل محدودیت‌های روش‌های ذکر شده، برای تمام مقطع‌ها میسر نیست به‌طوری‌که امروزه شکل سطح مقطع میکرو کانال‌ها، اغلب به‌صورت مستطیل و مثلث می‌باشد

^۱ Heat Exchangers

^۲ Compact Heat Exchangers

^۳ Microfluidics

^۴ Microchannel

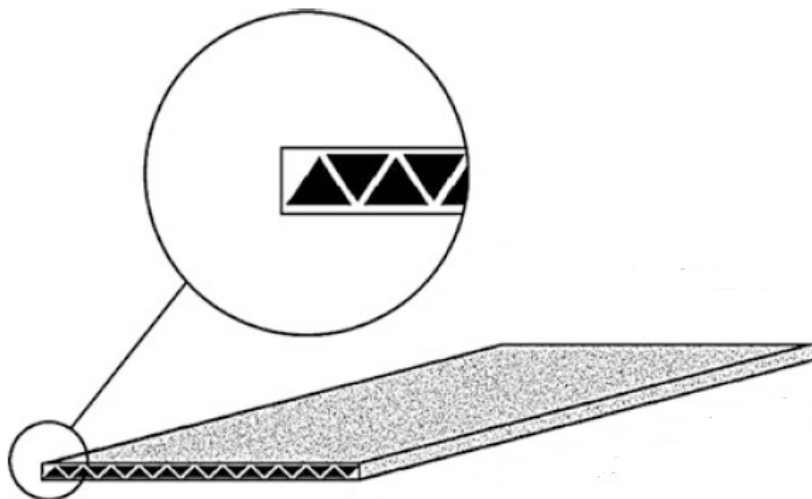
^۵ Lithography

^۶ Hot Embossing

^۷ Etching

^۸ Injection Molding

[۱]. شکل (۱-۱) نشان‌دهنده نمونه‌ای از یک میکرو کانال مثلثی برای استفاده در مبدل‌های حرارتی فشرده است.



شکل ۱-۱. میکرو کانال مثلثی جهت استفاده در مبدل‌های حرارتی فشرده

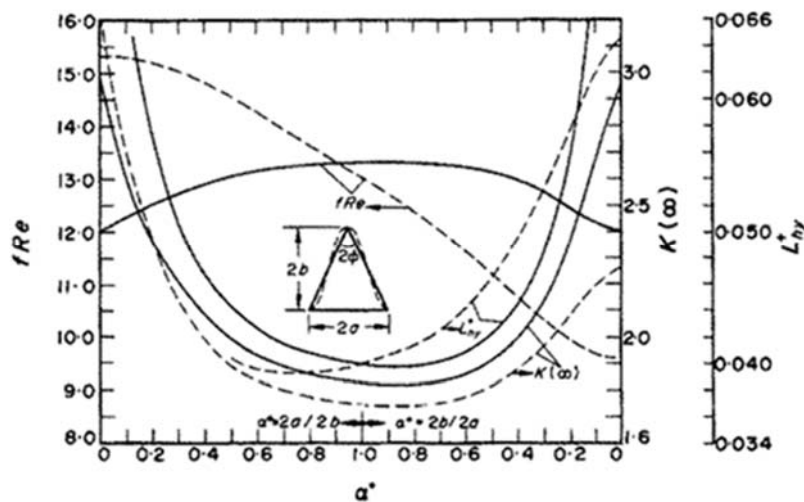
با توجه به مطالب ذکر شده، بررسی جریان و انتقال حرارت در انواع سطح مقطع‌های مثلثی، می‌تواند به توسعه و بهبود کانال‌ها و میکرو کانال‌های مورد استفاده در صنعت، کمک بسزایی کند. تحقیقات نشان داده‌اند که انتقال حرارت جریان آرام، علاوه بر شکل هندسی کانال، به عواملی چون سرعت ورودی جریان، نیمرخ^۹ حرارتی و شرایط مرزی دمای دیواره یا شار حرارتی بستگی دارد. مطالعات تجربی خوبی در این زمینه در حال انجام است، اما برای تفسیر نتایج آزمایشگاهی، به یک منبع نظری مناسب نیاز است. در این پژوهش، با ارائه یک روش تحلیلی، جریان و انتقال حرارت درون کانال‌های مثلثی شکل مورد بررسی قرار خواهد گرفت که می‌تواند پایگاه اطلاعاتی مناسبی جهت بررسی نتایج آزمایشگاهی صورت گرفته در این زمینه و ارائه آن‌ها برای کاربردهای صنعتی باشد.

^۹ Profile

۲-۱ سابقه موضوع

تاکنون مطالعات متعددی در مورد جریان و انتقال حرارت جریان آرام درون کانال‌ها انجام شده است. از آنجاکه بررسی و مقایسه تحقیقات انجام شده برای محققان و نیز طراحان از اهمیت بالایی برخوردار است، در این بخش تعدادی از مطالعات انجام شده در این زمینه بررسی خواهند شد.

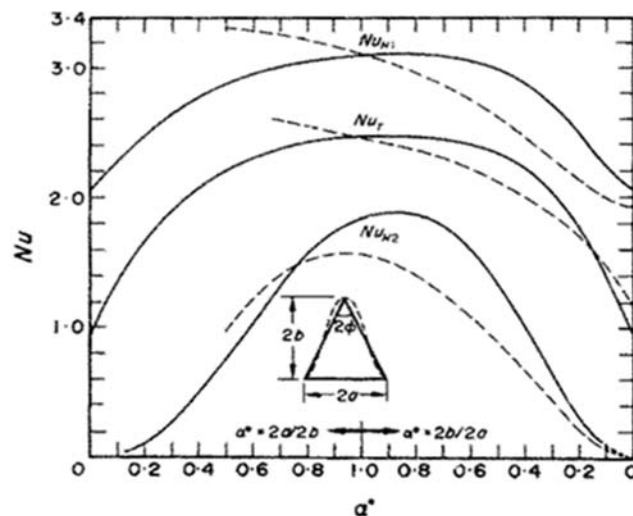
یکی از بهترین مطالعاتی که در این زمینه انجام گرفت را می‌توان پژوهشی که در سال ۱۹۷۵ توسط شاه [۲] با استفاده از روش برازش حداقل مربعات^{۱۰}، برای جریان آرام سیال و انتقال حرارت در شرایط کاملاً توسعه یافته، برای چند شکل دلخواه صورت گرفت، عنوان کرد. او این مطالعه را برای شرایط مرزی دمای دیواره ثابت، $H1$ (شار حرارتی محوری وارد شده به دیواره و دمای محیطی دیواره ثابت) و $H2$ (شار حرارتی وارد شده به دیواره در جهت محوری و محیطی ثابت) انجام داد و نتایج به دست آمده را درون جدولی تنظیم کرد.



شکل ۲-۱. مقادیر افت فشار، طول ورودی هیدرودینامیکی بی‌بعد و عدد پوازیه^{۱۱} برای مثلث‌های متساوی-الساقین [۲]

^{۱۰} Least-Squares-Matching

^{۱۱} Poiseuille Number



شکل ۳-۱. مقادیر Nu_{H1} ، Nu_{H2} و Nu_T برای مثلث‌های متساوی‌الساقین [۲]

قسمتی از نتایج وی، برای هندسه مثلث متساوی‌الساقین، در شکل (۲-۱) و شکل (۳-۱) ارائه شده است. مشاهده می‌شود که طبق بررسی‌های شاه [۲]، میان مقاطع متساوی‌الساقین، بیشترین مقدار عدد پوازیه و همچنین بیشترین مقدار عدد ناسلت تحت شرایط مرزی دما ثابت، $H1$ و $H2$ ، مربوط به مثلث متساوی‌الاضلاع است. همچنین بین شرایط مرزی مختلف، بیشترین مقدار ناسلت به ترتیب مربوط به شرط مرزی $H1$ ، سپس شرط مرزی دما ثابت و بعد شرط مرزی $H2$ می‌باشد. در سال ۱۹۹۲ یک مطالعه تحلیلی بر روی جریان توسعه یافته آرام در کانال‌های قائم‌الزاویه تحت شرایط مرزی دمای دیواره ثابت برای سیالات نیوتونی توسط آپارکیدو و کوتا [۳] انجام گرفت. نتایج این مطالعه در قالب نمودار با داده‌های موجود از گذشته مقایسه شد و تطابق خوبی با آن‌ها داشت. هیدرودینامیک و مشخصات حرارتی جریان آرام کاملاً توسعه یافته در یک کانال مثلثی شکل دلخواه توسط عبدالواحد و آتیا [۴] در سال ۱۹۸۴ با استفاده از روش تفاضل محدود ارزیابی شد. در این مطالعه برای کانال‌های متساوی‌الساقین، انحرافات گزارش شده در مقایسه با نتایج موجود در [۲، ۵-۸] برای ضریب اصطکاک، افت فشار افزایشی^{۱۲}، طول ورودی هیدرودینامیکی^{۱۳}، ناسلت برای شرایط مرزی شار ثابت و ناسلت برای شرایط مرزی دما ثابت به ترتیب ۰.۳٪، ۱٪، ۱.۱٪، ۰.۲٪ و ۰.۵٪ است. این

^{۱۲} Incremental Pressure Drop

^{۱۳} Hydrodynamic Entrance Length

مقادیر برای سطح مقطع متساوی الاضلاع به ترتیب 0.069% ، 0.012% ، 0.427% ، -0.183% و 0.162% گزارش شده است. آن‌ها نتایج این مقایسه را در قالب جداول و نمودارهایی ارائه کردند. اعتماد و همکارانش [۹] در سال ۱۹۹۶ یک مطالعه عددی را بر پایه روش المان محدود گالرکین^۱ به منظور حل معادلات حاکم سه بعدی برای جریان آرام پایدار در حال توسعه و انتقال حرارت سیالات کاملاً چسبنده غیر نیوتنی در کانال‌های مثلثی متساوی الاضلاع انجام دادند. آن‌ها نشان دادند که توزیع عدد ناسلت در امتداد دیوارها تحت تأثیر تغییرات شاخص پاور_لاو^۲ قرار دارد. نتایج برای گستره گستره وسیعی از شاخص پاور_لاو و عدد پرانتل برای شرایط مرزی دمای دیوار ثابت و شار حرارتی ثابت ارائه شد. چن و همکارانش [۱۰] در سال ۲۰۰۰ تحقیقی را با روش حجم محدود برای جریان و انتقال حرارت در کانال‌های مثلثی با زاویه رأس‌های مختلف ۱۵، ۳۰، ۶۰ و ۹۰ انجام دادند. دو شرط مرزی دما ثابت و شار حرارتی ثابت در این تحقیق مورد مطالعه قرار گرفت. مقایسه پاسخ‌های به‌دست‌آمده با داده‌های موجود از گذشته، رضایتمندی مطلوبی را به همراه داشت. آن‌ها پاسخ‌های به‌دست‌آمده را در جدولی ارائه دادند و همچنین عنوان کردند که ضریب اصطکاک و عدد ناسلت وابستگی شدیدی به تغییرات زاویه رأس مثلث دارند. در سال ۲۰۰۴ توسط چاوز و همکارانش [۱۱] مطالعه‌ای بر روی انتقال حرارت اجباری برای سیالات غیر نیوتنی پاور-لاو درون کانال‌های مثلثی انجام گرفت. آن‌ها از یک روش تحلیلی-عددی، بر پایه روش تبدیل انتگرال تعمیم یافته^۳ برای شبیه سازی انتقال حرارت اجباری سیالات غیر نیوتنی پاور_لاو استفاده کردند و تحلیل‌ها را تحت شرایط مرزی دمای دیواره ثابت برای کانال‌های مثلثی قائم‌الزاویه و متساوی الساقین انجام دادند. چاوز و همکاران برای شبیه سازی عددی خود از دو کد در زبان برنامه نویسی فورترن^۴ استفاده کرده و نتایج را برای عدد ناسلت محلی و دمای میانگین بی بعد ارائه دادند. بررسی انتقال حرارت و تولید آنتروپی^۵ برای

^۱ Galerkin Finite Element Method

^۲ Powe-Law

^۳ Generalized Integral Transform Technique

^۴ FORTRAN

^۵ Entropy Generation

یک جریان توسعه یافته حرارتی درون کانال متخلخل اشباع^۱ با سطح مقطع مستطیل شکل در سال ۲۰۰۷ توسط هومن و حاجی شیخ [۱۲] صورت گرفت. شرایط مسئله به صورت دمای ثابت دیواره و شار حرارتی یکنواخت فرض شد که بر پایه مدل جریان برینکمن^۲ مورد بررسی قرار گرفت. روش کلاسیک گالرکین^۳ برای محاسبه توزیع سرعت توسعه یافته به کار برده شد. برای حل معادله انرژی با در نظر گرفتن اتلاف لزجت^۴، روش تعمیم باقی مانده وزنی (EWRM)^۵ مورد استفاده قرار گرفت و همچنین میدان دمای محلی (سه بعدی) با استفاده از تابع گرین^۶ حل شد. نتایج ارائه شده حاکی از آن بود که افزایش اثر تلفات لزجت موجب کاهش عدد ناسلت می شود. ژانگ [۱۳] در سال ۲۰۰۷ انتقال حرارت اجباری و جریان آرام را در کانال های با سطح مقطع مثلث متساوی الساقین که در مبدل های حرارتی فشرده فین پللیت^۷ استفاده می شوند را مورد بررسی قرار داد. جریان از نظر هیدرودینامیکی کاملاً توسعه یافته، اما از نظر حرارتی، در حال توسعه فرض شد. این پژوهش طیف گسترده ای از مثلث های متساوی الساقین با زاویه رأس های ۳۰ تا ۱۲۰ و همچنین پارامترهای هدایتی پره از ۰ تا بی نهایت را پوشش داد. او نشان داد که علاوه بر زاویه رأس مثلث، پارامترهای هدایتی پره نقش مهمی در پدیده انتقال حرارت مبدل های حرارتی فشرده فین پللیت دارند. زمانی که پارامترهای هدایتی پره از ۰ تا سمت بی نهایت زیاد می شوند، عدد ناسلت نیز افزایش می یابد. در سال ۲۰۱۰ ری و میسرا [۱۴] افت فشار و انتقال حرارت را برای جریان کاملاً توسعه یافته درون کانال هایی با سطح مقطع مربعی شکل و مثلث متساوی الاضلاع به همراه گوشه های گرد شده، تحت شرایط مرزی $H1$ و $H2$ مورد بررسی قرار دادند. شعاع بدون بعد منحنی گوشه ها، برای کانال های مربعی از ۰ تا حداکثر مقدار ممکن، یعنی ۱ و برای کانال های متساوی الاضلاع از ۰ تا حداکثر مقدار ممکن، یعنی ۱.۷۳۲ در نظر گرفته شد. در این

^۱ Porous-Saturated Duct

^۲ Brinkman Flow Model

^۳ The Classical Galerkin Method

^۴ Viscous Dissipation

^۵ Extended Weighted Residuals Method

^۶ Green's Function

^۷ Plate-Fin

مطالعه نشان داده شد که عدد پوازیه هم برای کانال‌های با سطح مقطع مربعی شکل و هم برای کانال‌های با سطح مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع، با افزایش منحنی گوشه‌ها افزایش می‌یابد. در متساوی‌الاضلاع این مقدار در شعاع منحنی برابر ۰.۳۵ به حداکثر مقدار خود می‌رسد. در نهایت برای هردو سطح مقطع عدد پوازیه به مقدار متناظر خود در دایره، یعنی عدد ۱۶، میل می‌کند. در بررسی عدد ناسلت برای هردو شرط مرزی نیز عدم وجود یکنواختی ملاحظه شد که بیان شد با افزایش شعاع منحنی گوشه‌ها این عدم یکنواختی کاهش پیدا می‌کند و در نهایت به مقدار متناظر خود در دایره میل می‌کنند. این عدم یکنواختی در شرط مرزی $H1$ به مراتب بیش‌تر از شرط مرزی $H2$ به چشم می‌خورد. وانگ [۱۷-۱۵] یک‌سری راه‌حل‌های دقیق را برای جریان نوسانی^۱ و جریان آغازین^۲ در یک کانال با سطح مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع ارائه داد. حل دقیق وانگ برای جریان نوسانی، اثر حلقوی^۳ سرعت در نزدیک مرز، به ویژه در گوشه‌ها را پیش‌بینی می‌کند. او همچنین جریان لغزشی^۴ و انتقال حرارت شار ثابت را درون کانال‌های مثلثی متساوی‌الساقین مورد بررسی قرار داد. وانگ در این مطالعه از روش ریتز^۵ استفاده کرد و جدول مفیدی از اعداد پوازی و ناسلت را تهیه نمود. وی نتایج را به‌صورت عمومی به‌دست آورد به‌گونه‌ای که هم برای گازهای رقیق^۶ و هم برای جریان‌های به‌شدت آب‌گریز^۷ مورد استفاده قرار می‌گیرند. او مدعی شد که روش ریتزی که در مطالعه به کار گرفته است می‌تواند برای هر مقطع لوله‌ای مورد استفاده قرار گیرد. نکته‌ی مهمی که او به آن اشاره کرد این بود که روش ریتز متناسب با مرز است، به‌طوری که مرزهای منحنی و گوشه‌های تیز مشکلی ایجاد نمی‌کنند. نتایج او همچنین نشان داد که عدد پوازیه با افزایش لغزش، کاهش می‌یابد و با افزایش ضخامت نیز، ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش پیدا می‌کند. اعداد ناسلت برای شرایط مرزی $H1$ و $H2$ با افزایش لغزش،

^۱ Oscillatory Flow

^۲ Starting Flow

^۳ Annular Effect

^۴ Slip Flow

^۵ Ritz Method

^۶ Rarefied Gas

^۷ Superhydrophobic Flows

افزایش یافته، اما با افزایش پرش دما^۱ کاهش پیدا می‌کنند. در شرایط یکسان، اعداد ناسلت با شرط مرزی HI بالاتر از اعداد ناسلت با شرایط مرزی $H2$ می‌باشند. وی همچنین یک راه حل تحلیلی دقیق برای جریان لغزشی کاملاً توسعه یافته و انتقال حرارت برای شرایط مرزی HI در کانال‌های مستطیلی و مثلثی متساوی‌الاضلاع ارائه داد. او در این مطالعه نشان داد، زمانی که لغزش افزایش پیدا می‌کند، عدد پوازیه به صفر کاهش می‌یابد درحالی‌که عدد ناسلت تا یک مقدار ثابتی افزایش پیدا می‌کند. زمانی که پرش حرارتی افزایش می‌یابد، عدد ناسلت به صفر کاهش پیدا می‌کند. عدد ناسلت تأثیر-پذیری نسبتاً زیادی از سرعت لغزشی و پرش حرارتی دارد. در سال ۲۰۱۶ هالیت کارابولوت و همکارانش [۱۸] یک روش حل عددی برای مسئله انتقال حرارت جریان کاملاً توسعه‌یافته در شرایط دمای دیواره ثابت و کاربرد آن در کانال‌های سهمی‌وار^۲ و مثلثی متساوی‌الساقین ارائه دادند. آن‌ها از روش تفاضل محدود، برای حل عددی میدان دما و سرعت استفاده کردند. معادلات حاکم جریان کاملاً توسعه‌یافته و انتقال حرارت در کانال‌های مثلثی متساوی‌الساقین و سهمی‌وار به مختصات متناسب با مرز تبدیل شده و به‌صورت عددی حل شدند. که نتایج حاصل با داده‌های موجود سازگار بود. نوروزی و همکارانش [۱۹] در سال ۲۰۱۹ برای نخستین بار یک حل دقیق برای انتقال حرارت درون کانال‌هایی با سطح مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع ارائه دادند. آن‌ها در این مطالعه اثر اتلاف لزجت را نیز در نظر گرفتند و برای مطالعه بر روی تأثیر اتلاف لزجت از عدد برینکمن^۳ استفاده کردند. عدد ناسلت به‌دست‌آمده در این مطالعه برای حالتی که عدد برینکمن برابر با صفر باشد (از اتلاف لزجت چشم-پوشی شود)، ۳.۱۱ گزارش شده است که تطابق خوبی با مقادیری که از گذشته موجود است دارد. آن‌ها همچنین نشان دادند که عدد برینکمن بحرانی برای مقطع متساوی‌الاضلاع برابر با ۰.۲۷۵- است که در آن عدد ناسلت به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

^۱ Temperature Jump

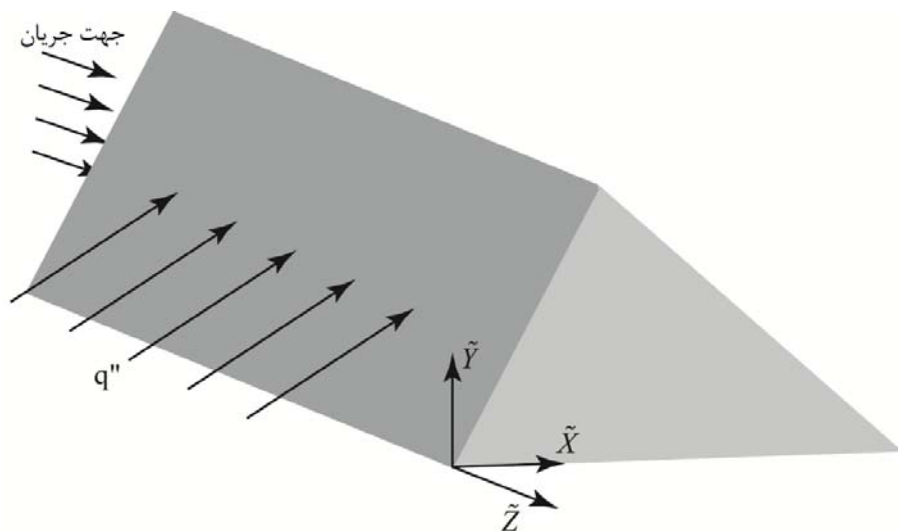
^۲ Parabolic Ducts

^۳ Brinkman Number

۳-۱ تحقیق حاضر

در این مطالعه به بررسی جریان و انتقال حرارت اجباری تحت شرایط مرزی شار ثابت درون کانال‌های با سطح مقطع مثلثی پرداخته شده است. این مقاطع شامل انواع مثلث‌ها می‌شوند و محدود به تعداد خاصی از اشکال هندسی مثلث نیستند. بر خلاف مطالعات گذشته که اغلب بر پایه‌ی روش‌های رایج در دینامیک سیالات محاسباتی صورت گرفته‌اند، در این تحقیق از روش ریتز برای محاسبه جریان و انتقال حرارت درون کانال‌های مثلثی استفاده شده است. از جمله مزایای روش تحلیلی ریتز در پژوهش حاضر می‌توان به این نکته اشاره کرد که این روش متناسب با مرز است. یعنی با تغییر هندسه‌ی مثلث، مشکلی در حل به وجود نمی‌آید و شرایط مرزی همواره ارضا می‌شود.

از فرضیاتی که برای ساده سازی مسئله در نظر گرفته شده است می‌توان به تراکم ناپذیر بودن سیال و پایدار بودن و کاملاً توسعه‌یافته بودن جریان اشاره کرد. همچنین سیال مورد مطالعه، سیال نیوتونی می‌باشد و از تأثیرات وزن نیز صرف نظر شده است. در شکل (۴-۱) یک حالت کلی از مسئله نشان داده شده است که در آن جهت جریان، شار وارد شده به دیواره و محورهای مختصات مشاهده می‌شوند.



شکل ۴-۱. شکل کلی مسئله

۱-۳-۱ نوآوری و ضرورت انجام تحقیق

با توجه به پیشرفت صنعت و نیاز به انتقال حرارت بالا و هزینه‌های مقرون به صرفه می‌توان به اهمیت بررسی جریان و انتقال حرارت درون کانال‌های غیر دایره‌ای، از جمله کانال‌های با سطح مقطع مثلثی شکل که دارای مزیت‌هایی مانند انتقال حرارت مناسب، فشردگی بالا، هندسه‌ی ساده و ... می‌باشند، پی برد. از نوآوری‌های مطالعه حاضر که برای اولین بار صورت گرفته است می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- بررسی جریان و انتقال حرارت درون کانال‌های مثلثی با زوایای دلخواه با استفاده از روش تحلیلی ریتز.
- بررسی انتقال حرارت برای هر مثلث دلخواهی با در نظر گرفتن اتلاف لزجت.

۱-۴ جمع‌بندی

در این فصل ابتدا در مورد اهمیت بررسی جریان و انتقال حرارت درون کانال‌ها توضیح داده شد. در ادامه مروری بر مطالعات گذشته صورت گرفت و همچنین توضیح مختصری در مورد پژوهش حاضر ارائه گردید. در فصول آینده به معادلات حاکم، حل آن‌ها متناسب با شرایط مرزی مدنظر و همچنین ارائه حالت بی‌بعد معادلات به دست آمده جهت به کارگیری در حل مسئله حاضر، پرداخته شده است. به علاوه در فصول بعدی، در مورد روش ریتز و نحوه استفاده از آن در این پژوهش توضیح داده شده است. در ادامه نتایج به دست آمده ارائه و نتایج مطالعات قبل مورد مقایسه قرار خواهد گرفت. در انتها نیز ضمن نتیجه‌گیری کلی از این پژوهش، پیشنهاداتی نیز برای تحقیقات آینده ارائه شده است.

فصل ۲ : روابط مسأله

۲-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا پارامترهای بدون بعد مورد نیاز برای بی بعد سازی روابط و سپس معادلات حاکم سه گانه، یعنی پیوستگی، مومنتوم و انرژی بیان شده و مورد بررسی قرار خواهند گرفت و با اعمال فرضیات مسأله و همچنین عبارات بی بعد ذکر شده، صورت نهایی و بدون بعد این معادلات به دست آورده خواهد شد. در ادامه روابط مربوط به ضرایب اصطکاک و عدد ناسلت استخراج می شوند که به عنوان نتایج این مطالعه می باشند.

۲-۲ پارامترهای بی بعد

همان طور که اشاره شد در این بخش به بیان پارامترهای بی بعد مورد نیاز، جهت بی بعد سازی معادلاتی که در ادامه ارائه می شوند، پرداخته خواهد شد. این پارامترها به صورت زیر قابل بیان هستند.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\tilde{x}}{D_h} & y &= \frac{\tilde{y}}{D_h} & z &= \frac{\tilde{z}}{D_h} & \Gamma &= \frac{\tilde{\Gamma}}{D_h} \\ A &= \frac{\tilde{A}}{D_h^2} & w &= \frac{\tilde{w}}{w_0} & T &= \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{q'' D_h / k} & Br &= \frac{\mu \tilde{U}^2}{q'' D_h} \\ \tau_w &= \frac{D_h \tilde{\tau}_w}{\mu w_0} & \dot{\gamma} &= \frac{D_h}{w_0} \tilde{\dot{\gamma}} \end{aligned} \quad (۱-۲)$$

در عبارات بالا، x و y و z جهت های بدون بعد در دستگاه مختصات کارتزین می باشند. A مساحت بی بعد سطح مقطع، w سرعت بی بعد در راستای z دمای بی بعد، $\tilde{T}_m$ دمای میانگین، $\tilde{T}_w$ دمای دیواره، q'' شار حرارتی وارد بر دیواره، k ضریب رسانش، Γ محیط بی بعد سطح مقطع، $\tilde{U}$ سرعت میانگین، μ لزجت سیال، τ_w تنش برشی بی بعد و Br عدد برینکمن می باشد. عدد برینکمن عدد بدون بعدی است که نشان دهنده انتقال حرارت به روش هدایتی به سیال لزج اطراف می باشد. همچنین قطر هیدرولیکی (D_h)، نرخ برشی ($\dot{\gamma}$)، دمای میانگین سیال ($\tilde{T}_m$)، سرعت متوسط محوری سیال ($\tilde{U}$) و سرعت مرجع (w_0) که عبارت است از سرعت ماکزیمم سیال در یک کانال مستقیم دایره ای با قطر

هیدرولیکی و گرادیان فشار یکسان، به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\tilde{\gamma}_x^2 + \tilde{\gamma}_y^2} \quad (۲-۲)$$

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_x = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \\ \tilde{\gamma}_y = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \end{cases} \quad (۳-۲)$$

$$\tilde{\tau}_w = \mu \tilde{\gamma} \quad (۴-۲)$$

$$D_h = \frac{4\tilde{A}}{\tilde{F}} \quad (۵-۲)$$

$$\tilde{T}_m = \frac{1}{\tilde{U}\tilde{A}} \int \tilde{w}\tilde{T}d\tilde{A} \quad (۶-۲)$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{\tilde{A}} \int \tilde{w}d\tilde{A} \quad (۷-۲)$$

$$w_0 = -\frac{D_h^2}{16\mu} \frac{d\tilde{P}}{d\tilde{z}} \quad (۸-۲)$$

۲-۳ معادلات حاکم

معادلات مورد نیاز برای حل جریان آرام و انتقال حرارت درون کانالها، معادلات سه گانه، یعنی

پیوستگی، مومنتوم و انرژی هستند که به شکل زیر بیان می شوند [۲۰]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \tilde{V} = 0 \quad (۹-۲)$$

$$\rho \frac{D\tilde{V}}{Dt} = -\nabla \tilde{P} + \rho \tilde{g} + \mu \nabla^2 \tilde{V} + \frac{1}{3} \mu \nabla \tilde{V} \quad (۱۰-۲)$$

$$\rho c \frac{D\tilde{T}}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla \tilde{T}) + q''' + \beta \tilde{T} \frac{D\tilde{P}}{Dt} + \mu \varphi \quad (۱۱-۲) \text{ الف}$$

$$\varphi = 2 \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right\} + \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \quad \text{ب (۱۱-۲)}$$

۲-۳-۱ معادله پیوستگی

شکل کلی معادله پیوستگی در رابطه (۹-۲) بیان شده است که در آن $\tilde{V}$ بردار سرعت، ρ چگالی، t زمان، $\tilde{P}$ معرف فشار، $\tilde{g}$ شتاب گرانش زمین و μ لزجت سیال می باشد. با در نظر گرفتن جریان به-صورت پایدار و تراکم ناپذیر، این عبارت به صورت زیر خلاصه می شود.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (۱۲-۲)$$

که در آن با توجه به توسعه یافته بودن جریان، $\tilde{u} = \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0$ است.

۲-۳-۲ معادله مومنتوم

معادله ای که در رابطه (۱۰-۲) بیان شده است، حالت کلی از معادله مومنتوم را بیان می کند. با اعمال شرایط توسعه یافتگی و پایدار بودن جریان و همچنین صرف نظر کردن از نیروی وزنی، معادله نهایی مومنتوم در جهت $\tilde{z}$ را نیز می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{1}{\mu} \frac{d\tilde{P}}{d\tilde{z}} \quad (۱۳-۲)$$

۲-۳-۱-۲ شکل بی بعد معادله مومنتوم

شکل نهایی معادله مومنتوم در رابطه (۱۳-۲) نشان داده شده است. اما این شکل از معادله برای استفاده در حل تحلیلی مناسب نمی باشد. به همین جهت شکل بدون بعد این عبارت برای استفاده در حل مسأله، به صورت زیر بیان می شود.

طبق عبارت (۸-۲) و با استفاده از تعریف سرعت مرجع، برای گرادیان فشار رابطه زیر را می توان

نوشت:

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{z}} = -\frac{16\mu w_0}{D_h^2} \quad (۱۴-۲)$$

با قرار دادن عبارت (۱۴-۲) در رابطه (۱۳-۲) و با استفاده از شکل بی بعد w ، x و y ، شکل بی بعد معادله مومنتوم به صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{w_0}{D_h^2} = \frac{1}{\mu} \frac{-16\mu w_0}{D_h^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -16 \quad (۱۵-۲)$$

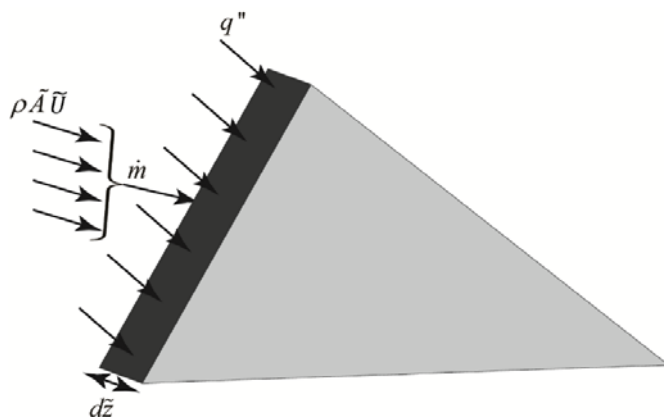
۳-۳-۲ معادله انرژی

معادله ی (۱۱-۲) الف، نشان دهنده شکل کلی معادله انرژی است که در آن c گرمای ویژه، q''' گرمای داخلی تولید شده، $\beta \tilde{T} \frac{D\tilde{P}}{Dt}$ ضریب قابلیت تراکم، k ضریب هدایت حرارتی و φ نشان دهنده ی اتلاف می باشند. در مسأله ی حاضر، ضریب رسانش ثابت و تولید گرمای داخلی صفر در نظر گرفته شده است و از اثر ضریب قابلیت تراکم نیز صرف نظر می شود (در سیال تراکم ناپذیر، ضریب انبساط گرمایی $\beta = 0$ است). در نهایت با اعمال شرط توسعه یافتگی معادله انرژی به شکل زیر نوشته خواهد شد.

$$\rho c \left(\tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) = k \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \mu \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right\} \quad (۱۶-۲)$$

۳-۳-۲-۱ شکل بی بعد معادله انرژی

برای بی بعد کردن معادله انرژی، ابتدا باید تعادل انرژی برای یک المان از حجم کنترل (شکل ۱-۲) نوشته شود.



شکل ۱-۲. تعادل انرژی در یک المان از حجم کنترل

در شکل بالا، سیال با سرعت متوسط محوری $\tilde{U}$ وارد حجم کنترل می‌شود. بنابراین دبی جرمی این حجم کنترل برابر است با $\dot{m} = \rho \tilde{A} \tilde{U}$. کل گرما منتقل شده از دیواره به سیال نیز برابر است با $q'' \tilde{\Gamma} d\tilde{z}$. برای حجم کنترل بالا، تعادل انرژی به صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$q'' \tilde{\Gamma} d\tilde{z} + \int \mu \phi d\tilde{A} d\tilde{z} = \dot{m} (h_{z+dz} - h_z) \quad (۱۷-۲)$$

$$q'' \tilde{\Gamma} d\tilde{z} + \int \mu \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right\} d\tilde{A} d\tilde{z} = \rho \tilde{A} \tilde{U} c d\tilde{T}_m$$

$$\frac{q'' \tilde{\Gamma}}{\rho \tilde{A} \tilde{U} c} + \frac{\mu}{\rho \tilde{A} \tilde{U} c} \int \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right\} d\tilde{A} = \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{z}}$$

$$\frac{4q''}{\rho \tilde{U} c D_h} + \frac{\mu}{\rho \tilde{A} \tilde{U} c} \int \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right\} d\tilde{A} = \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{z}} \quad (۱۸-۲)$$

با توجه به شار حرارتی ثابت در دیواره و رابطه $q'' = h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)$ ، با مشتق گیری از طرفین

نسبت به $\tilde{z}$ عبارت زیر به دست خواهد آمد.

$$\frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{z}} = \frac{d\tilde{T}_w}{d\tilde{z}} \quad (۱۹-۲)$$

از طرفی طبق تعریف شرط توسعه‌یافتگی می‌توان گفت $\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_w} \right) = 0$ که با محاسبه این

مشتق، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{(\tilde{T}_m - \tilde{T}_w) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\tilde{T} - \tilde{T}_w) - (\tilde{T} - \tilde{T}_w) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\tilde{T}_m - \tilde{T}_w)}{(\tilde{T}_m - \tilde{T}_w)^2} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{T}_w}{\partial \tilde{z}} - \left(\frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_w} \right) \left(\frac{\partial \tilde{T}_m}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{T}_w}{\partial \tilde{z}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial \tilde{T}_w}{\partial \tilde{z}} \quad (20-2)$$

با توجه به عبارات (۱۸-۲)، (۱۹-۲) و (۲۰-۲) می‌توان نتیجه زیر را گرفت.

$$\frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{z}} = \frac{d\tilde{T}_w}{d\tilde{z}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \frac{q'' \tilde{T}}{\rho \tilde{A} \tilde{U} c} + \frac{\mu}{\rho \tilde{A} \tilde{U} c} \int \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right\} d\tilde{A} \quad (21-2)$$

حال می‌توان عبارت بی‌بعد را برای معادله (۱۶-۲)، طبق نتیجه به دست آمده نوشت.

$$\rho c \tilde{w} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) = k \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \mu \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right\}$$

$$\rho c \tilde{w} \left(\frac{4q''}{\rho \tilde{U} c D_h} + \frac{\mu}{\rho \tilde{A} \tilde{U} c} \int \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right\} d\tilde{A} \right) = k \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \mu \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{4w}{U} + \frac{w}{UA} \frac{\mu w_0^2}{q'' D_h} \int \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu w_0^2}{q'' D_h} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \frac{4w}{U} + \frac{Br}{U^2} \left(\frac{w}{UA} \int \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA - \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \right) \quad (22-2)$$

عبارت (۲۲-۲) نشان‌دهنده حالت بی‌بعد معادله انرژی با در نظر گرفتن اتلاف لزجت است.

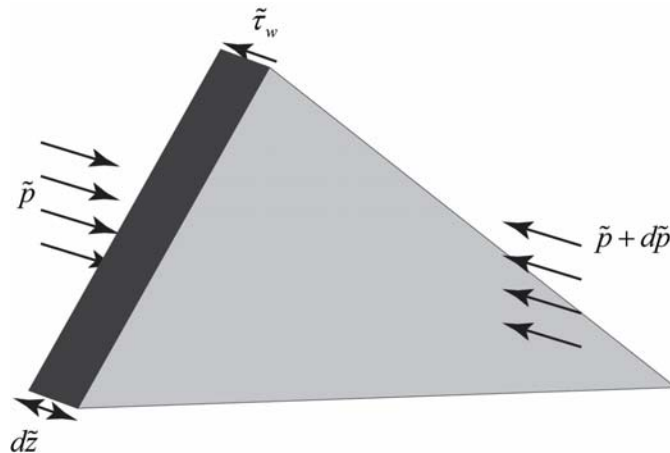
همان‌طور که مشاهده می‌شود با صفر در نظر گرفتن عدد برینکمن (ترم مربوط به اتلاف لزجت)،

معادله بی‌بعد انرژی برای حالتی که در آن از اتلاف صرف‌نظر شده باشد، به دست می‌آید.

۲-۴ ضریب اصطکاک

در جریان‌های داخلی، افت فشار سیال در طول کانال بر اثر اصطکاک با سرعت متوسط سیال در

ارتباط است. همچنین افت فشار را می‌توان برحسب تنش برشی دیواره نیز بیان کرد. به این ترتیب با محاسبه افت فشار درون کانال، رابطه‌ی میان اصطکاک، سرعت متوسط و تنش برشی سیال استخراج خواهد شد. در شکل ۲-۲ یک المان از حجم کنترل به طول $d\tilde{z}$ و سطح مقطع $\tilde{A}$ مشاهده می‌شود.



شکل ۲-۲. نیروهای وارد به سیال

در جریان‌های توسعه‌یافته، چون در امتداد جریان، فشار کاهش می‌یابد، گرادیان فشار جریان ثابت و منفی است. بنابراین طبق تعریف، رابطه زیر برای فشار نوشته می‌شود.

$$-\Delta\tilde{P} = \rho\tilde{g}\tilde{h}_{loss} \quad (2-23)$$

در رابطه‌ی بالا $\tilde{h}_{loss}$ افت هد سیال می‌باشد که معادله داریس-ویتزباخ^۱ برای آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{h}_{loss} = f \frac{\tilde{L}}{D_h} \frac{\tilde{U}^2}{2\tilde{g}} \quad (2-24)$$

که در آن $\tilde{U}$ سرعت متوسط سیال، $\tilde{L}$ طول کانال، D_h قطر هیدرولیکی کانال و f ضریب اصطکاک داریس می‌باشند. عبارت $\frac{\tilde{U}^2}{2\tilde{g}}$ دارای دیمانسیون طول و از جنس هد می‌باشد. با توجه به عبارت $\frac{\tilde{L}}{D_h}$ که عبارتی بی‌بعد است، نتیجه می‌شود که f نیز بی‌بعد می‌باشد. با جاگذاری رابطه (۲-۲۴) در (۲-۲۳) نتایج زیر به دست خواهد آمد.

^۱ Darcy-Weisbach Equation

$$-\frac{\Delta \tilde{P}}{\rho \tilde{g}} = f \frac{\tilde{L}}{D_h} \frac{\tilde{U}^2}{2 \tilde{g}} \quad (25-2)$$

$$-\frac{\Delta \tilde{P}}{\tilde{L}} = \rho \frac{f}{D_h} \frac{\tilde{U}^2}{2} \quad (26-2)$$

یا

$$-\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{z}} = \rho \frac{f}{D_h} \frac{\tilde{U}^2}{2} \quad (27-2)$$

درون کانال اگرچه جریان در حال حرکت است، اما با توجه به شرط توسعه یافته بودن جریان، شتاب ندارد ($a_z = 0$). با استفاده از معادله $F_z = ma_z$ برای المان نشان داده شده در شکل ۲-۲ و با نوشتن تعادل بین نیروهای فشار و لزجت معادلات زیر به دست خواهد آمد.

$$\sum F_z = 0$$

$$\tilde{P}\tilde{A} - (\tilde{P} + d\tilde{P})\tilde{A} - \int (\tilde{\tau}_w d\tilde{\Gamma}) d\tilde{z} = 0$$

$$-d\tilde{P}\tilde{A} - \int (\tilde{\tau}_w d\tilde{\Gamma}) d\tilde{z} = 0$$

$$-\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{z}} = \frac{1}{\tilde{A}} \int \tilde{\tau}_w d\tilde{\Gamma} \quad (28-2)$$

می توان بین عبارت های (۲۷-۲) و (۲۸-۲)، یک تساوی برقرار کرد.

$$\rho \frac{f}{D_h} \frac{\tilde{U}^2}{2} = \frac{1}{\tilde{A}} \int \tilde{\tau}_w d\tilde{\Gamma} \quad (29-2)$$

با بی بعد کردن رابطه بالا به وسیله عبارت های (۱-۲)، رابطه ۳۰-۲ و ۳۱-۲ برای اصطکاک استخراج

خواهد شد.

$$\frac{f}{D_h} \frac{\left(\frac{1}{\tilde{A}} \int \tilde{w} d\tilde{A} \right)^2}{2} \rho = \frac{1}{\tilde{A}} \int \tilde{\tau}_w d\tilde{\Gamma} = \frac{1}{\tilde{A}} \int \mu \tilde{\gamma} d\tilde{\Gamma}$$

$$f \frac{\frac{D_h^4}{A^2} \left(\int w dA \right)^2 \cdot w_0^2}{2 D_h} \rho = \frac{1}{A D_h^2} \frac{\mu w_0 D_h}{D_h} \int \dot{\gamma} d\Gamma$$

$$f\left(\int w dA\right)^2 = 2A \frac{\mu}{D_h \rho w_0} \int \dot{\gamma} d\Gamma$$

$$f\left(\int w dA\right)^2 = 2AU \frac{\int \dot{\gamma} d\Gamma}{Re}$$

$$f\left(\int w dA\right)^2 = 2A \frac{1}{A} \int w dA \frac{\int \dot{\gamma} d\Gamma}{Re}$$

$$f = \frac{2}{Re} \frac{\int \dot{\gamma} d\Gamma}{\int w dA} \quad (30-2)$$

یا

$$f.Re = 2 \frac{\int \dot{\gamma} d\Gamma}{\int w dA} \quad (31-2)$$

به علاوه، برای جریان آرام درون کانال، ضریب اصطکاک پوسته‌ای نیز به شکل زیر تعریف می‌شود

[20].

$$C_f = \frac{\tilde{\tau}_w}{\frac{1}{2} \rho \tilde{U}^2} = \frac{\mu \tilde{\gamma}}{\frac{1}{2} \rho \tilde{U}^2} \quad (32-2)$$

که به صورت زیر بی بعد خواهد شد.

$$C_f = \frac{\mu \tilde{\gamma}}{\frac{1}{2} \rho \tilde{U}^2} = \frac{\mu \frac{w_0}{D_h} \dot{\gamma}}{\frac{1}{2} \rho \tilde{U} U w_0} \quad (33-2)$$

$$C_f = \frac{2\dot{\gamma}}{U Re} \quad (34-2)$$

یا

$$C_f.Re = 2 \frac{\dot{\gamma}}{U} \quad (35-2)$$

۲-۴-۱ عدد پوازیه

عدد پوازیه یک عدد بی بعد است که برای جریان آرام، کاملاً توسعه یافته و پایدار، درون یک کانال با

سطح مقطع ثابت، توصیف می‌شود. در واقع به وسیله‌ی عدد پوازیه می‌توان افت فشار را برای سیال

نیوتونی تراکم ناپذیر درون یک کانال به دست آورد. این عدد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Po = \frac{2D_h \tilde{\tau}_w}{\mu \tilde{U}} \quad (۳۶-۲)$$

عبارت $\tilde{\tau}_w$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\tilde{\tau}_w = \frac{1}{2} f \rho \tilde{U}^2 \quad (۳۷-۲)$$

با جاگذاری عبارت ۳۷-۲ در ۳۶-۲، نتیجه می شود که $Po = f . Re$ و رابطه ۳۱-۲ به شکل زیر نوشته خواهد شد.

$$Po = f . Re = 2 \frac{\int \dot{\gamma} d\Gamma}{\int w dA} \quad (۳۸-۲)$$

۲-۵ عدد ناسلت

ناسلت عدد بی بعدی است که نسبت انتقال حرارت جابه جایی به انتقال حرارت هدایتی را بیان می کند و به صورت زیر بیان می شود.

$$Nu = \frac{h D_h}{k} \quad (۳۹-۲)$$

طبق رابطه شار حرارتی در انتقال حرارت جابه جایی، ضریب انتقال حرارت جابه جایی را به شکل زیر می توان تعریف کرد.

$$h = \frac{q''}{\tilde{T}_w - \tilde{T}_m} \quad (۴۰-۲)$$

با توجه به عبارت ذکر شده برای دمای بی بعد در روابط ۱-۲، دمای میانگین بی بعد سیال به شکل زیر تعریف خواهد شد.

$$T_m = \frac{\tilde{T}_m - \tilde{T}_w}{q'' D_h / k} \quad (۴۱-۲)$$

با توجه به عبارت ۴۱-۲ و تعریف دمای میانگین، رابطه ۴۰-۲ به شکل زیر بازنویسی می شود.

$$h = - \frac{q''}{T_m q'' D_h / k} = - \frac{k}{D_h} \frac{UA}{\int w T dA} \quad (۴۲-۲)$$

حال با قرار دادن عبارت (۴۲-۲) در (۳۹-۲)، رابطه مربوط به عدد ناسلت به دست خواهد آمد.

$$Nu = -\frac{k}{D_h} \frac{UA}{\int wTdA} \frac{D_h}{k} = -\frac{UA}{\int wTdA}$$

$$Nu = -\frac{A \frac{1}{A} \int wTdA}{\int wTdA}$$

$$Nu = -\frac{\int wTdA}{\int wTdA} \quad (۳۹-۲)$$

۲-۶ نتیجه گیری

در این فصل معادلات حاکم و همچنین معادلات مربوط به اصطکاک و عدد ناسلت مورد بررسی قرار گرفتند. به علاوه فرم بدون بعد این معادلات برای حل در مطالعه‌ی حاضر ارائه گردید. در ادامه به بیان روش مورد استفاده در این پژوهش جهت حل معادلات حاکم و یافتن پاسخ پرداخته خواهد شد.

فصل ۳ : روش حل تحلیلی

۳-۱ مقدمه

در این فصل به تشریح روش تحلیلی مورد استفاده، برای حل مسأله جریان و انتقال حرارت اجباری درون کانال‌های مثلثی پرداخته خواهد شد.

روشی که برای حل مسأله حاضر استفاده شده است، روش ریتز بر مبنای حساب تغییرات^۲ می‌باشد. از این روش برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود. برای توضیح این روش ابتدا نیاز است تا توضیحاتی در مورد حساب تغییرات ارائه شود، بعد از آن مدل کار روش ریتز تشریح خواهد شد.

۳-۲ حساب تغییرات

حساب تغییرات روشی است که از آن برای یافتن مجموعه‌ای از مسیرها و خم‌ها، به عنوان توابع دارای اکسترمم استفاده می‌شود. در این روش، از تغییرات کوچک در تابعی^۳، جهت یافتن اکسترمم‌ها استفاده می‌شود و برای این کار نیاز به شرط اساسی^۴ می‌باشد که بر روی تابعی اعمال می‌شود. برای تفهیم بهتر این موضوع، یک مثال از کتاب انتقال حرارت هدایتی آرپاچی [۲۱] را در ادامه مورد بررسی قرار گرفته است.

مثال ۳-۱

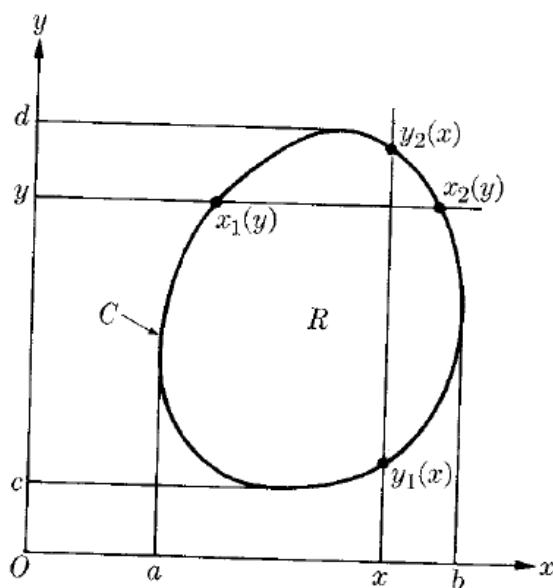
تابعی I به صورت زیر مفروض است. شکل (۳-۱) نیز نشان دهنده‌ی ناحیه حل معادلات و بازه‌ی کران-های انتگرال گیری است.

$$I = \iint_R F(x, y, T, T_x, T_y) dx dy \quad (۳-۱)$$

^۲ Calculus of Variations

^۳ Functional

^۴ Necessary Condition



شکل ۱-۳. ناحیه حل معادلات مثال ۱-۳ [۲۱]

در عبارت ۱-۳، x و y متغیرهای مستقل، T عبارت مجهول مدنظر است که باید تعیین شود، به-گونه‌ای که در ناحیه‌ی R (شکل ۱-۳) تغییر می‌کند اما تغییرات آن بر روی مرز (ناحیه C) برابر با صفر می‌باشد. T_x و T_y نیز مشتق‌های T نسبت به x و y هستند. جواب‌های مربوط به T شامل مقادیری می‌شوند که به ازای آن‌ها تابعی I دارای اکسترمم باشد. شرط لازم برای آن که معادله‌ی ۱-۳ به حداقل (یا حداکثر) مقدار برسد، آن است که تابع $F(x, y, T, T_x, T_y)$ باید معادله‌ی اوایلر (معادله‌ی ۲-۳) را ارضا کند.

$$\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial T_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial T_y} \right) = 0 \quad (۲-۳)$$

قضیه ۱-۳

شرط اساسی برای اینکه تابعی I (رابطه‌ی ۱-۳) دارای اکسترمم باشد، این است که تغییرات آن برابر با صفر شود یعنی $\delta I = \delta \iint F(x, y, T, T_x, T_y) dx dy = 0$. در ادامه اثبات این قضیه جهت استفاده از آن در حل به روش ریتز، بیان خواهد شد.

تغییرات T که باعث تغییر در F می‌شود، برای x و y ثابت، به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\delta F = F(x, y, T + \delta T, T_x + \delta T_x, T_y + \delta T_y) - F(x, y, T, T_x, T_y) \quad (3-3)$$

با استفاده از بسط تیلور، عبارت (۳-۳) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial T} \delta T + \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T_x + \frac{\partial F}{\partial T_y} \delta T_y \quad (4-3)$$

در رابطه (۴-۳) از درجات بالاتر بسط تیلور صرف نظر شده است. با توجه به عبارت (۴-۳)، تغییرات

I به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta I = \iint_R \delta F(x, y, T, T_x, T_y) dx dy = 0$$

$$\delta I = \iint_R \left(\frac{\partial F}{\partial T} \delta T + \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T_x + \frac{\partial F}{\partial T_y} \delta T_y \right) dx dy = 0 \quad (5-3)$$

با توجه به شکل ۱-۳ و با انتگرال گیری جزء به جزء، عبارت سوم داخل پرانتز رابطه ی ۵-۳ به شکل

زیر نوشته می‌شود:

$$\iint_R \frac{\partial F}{\partial T_y} \delta T_y dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial F}{\partial T_y} \delta T_y dy \right) dx \quad (6-3)$$

$$\iint_R \frac{\partial F}{\partial T_y} \delta T_y dx dy = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial T_y} \delta T \bigg|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx - \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial T_y} \right) \delta T dy \right) dx \quad (7-3)$$

به همین ترتیب برای جمله دوم نیز عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\iint_R \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T_x dx dy = \int_c^d \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T \bigg|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy - \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial T_x} \right) \delta T dx \right) dy \quad (8-3)$$

با توجه به این که تغییرات T بر روی مرز برابر با صفر است، عبارت اول سمت راست روابط ۷-۳ و

۸-۳، صفر می‌شود. نتیجه جاگذاری روابط ۸-۳ و ۷-۳ در عبارت ۵-۳، به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\delta I = \iint_R \left\{ \frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial T_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial T_y} \right) \right\} \delta T dx dy = 0 \quad (9-3)$$

از رابطه ی ۹-۳ می‌توان نتیجه زیر را گرفت:

$$\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial T_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial T_y} \right) = 0 \quad (10-3)$$

معادله (۳-۱۰)، همان معادله اویلر است و با استفاده قضیه ۳-۱ استخراج شده است. به این ترتیب نتیجه می‌شود که قضیه ۳-۱ نیز صادق است و برای حل معادلات می‌توان از آن استفاده کرد.

۳-۳ روش ریتز

روش ریتز بر مبنای حساب تغییرات، یک روش حل مستقیم برای یافتن پاسخ‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل است. این روش را از آن جهت مستقیم می‌نامیم که یک راه‌حل به‌طوری که تابعی دارای اکسترمم باشد، جهت حل معادلات دیفرانسیل، بدون استفاده از حل معادله اصلی ارائه می‌دهد. قدم اصلی در این روش، انتخاب مناسب یک سری از توابع مدنظر برای حل، به صورت زیر است:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(x, y) \quad (۳-۱۱)$$

که به N جمله بستگی دارد و تابع $\psi_n(x, y)$ برای تمامی مقادیر n ، شرایط مرزی را ارضا می‌کند. در رابطه‌ی (۳-۱۱)، u مجهول مسأله، a_n ضرایب مجهول ریتز و $\psi_n(x)$ توابع ریتز هستند. نکته مهم در روش ریتز، انتخاب صحیح توابع ریتز است، به‌طوری که همواره شرایط مرزی را ارضا کنند. پس از انتخاب یک سری مناسب، و جاگذاری آن به‌جای عبارت مجهولی، N معادله و N مجهول ظاهر خواهد شد که با حل این دستگاه ضرایب مجهول به دست آمده و سپس با قرار دادن این ضرایب در سری، می‌توان پاسخ مسأله را استخراج کرد. در ادامه نحوه استفاده از روش ریتز برای حل مسأله حاضر توضیح داده خواهد شد.

۳-۳-۱ حل معادله مومنتوم با استفاده از روش ریتز

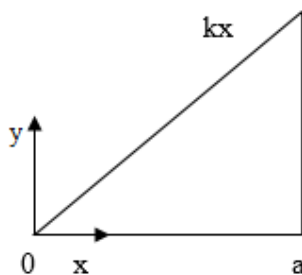
عبارت (۲-۱۵)، شکل بی‌بعد معادله مومنتوم است که برای یافتن سرعت در مطالعه‌ی حاضر مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای حل این معادله شرط مرزی سرعت بر روی دیواره‌ها برابر با صفر لحاظ می‌شود. بر اساس تعاریف پیشین، روش ریتز برای یافتن پاسخ راه حلی ارائه می‌دهد که در آن تابعی

دارای اکسترمم است و همچنین طبق قضیه ۳-۱، شرط اساسی برای این که تابعی دارای اکسترمم باشد، این است که تغییرات آن برابر با صفر شود. برای یافتن تابعی، معادلات ۳-۱ تا ۳-۱۰ به صورت معکوس حل می شوند. اگر معادله ی مومنتوم (۳-۱۲) را به عنوان معادله ی اوپلر در نظر بگیریم رابطه ی (۳-۱۳) را می توان با کمک معادله ی (۳-۹) نوشت.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 16 = 0 \quad (۳-۱۲)$$

$$\delta I = \iint_R \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 16 \right) \delta w dx dy = 0 \quad (۳-۱۳)$$

عبارت (۳-۱۳) همان معادله ای است که از شرط اساسی به دست آمده و با حل آن مقادیر w محاسبه می شود. برای مشخص کردن کران های انتگرال یک مقطع مثلثی به صورت شکل (۳-۲) در نظر می گیریم.



شکل ۳-۲. کران های انتگرال گیری در یک مقطع مثلثی

به این ترتیب معادله ی (۳-۱۳) به شکل زیر نوشته می شود.

$$\delta I = \int_0^a \int_0^{kx} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 16 \right) \delta w dy dx = 0 \quad (۳-۱۴)$$

با استفاده از حل انتگرالی جزء به جزء، عبارت های اول و دوم داخل پرانتز در رابطه ی (۳-۱۴)، به-

صورت زیر تعریف می شوند.

$$\int_0^{kx} \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx dy = \int_0^{kx} \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_0^a dy - \int_0^{kx} \int_0^a \delta \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \quad (۳-۱۵)$$

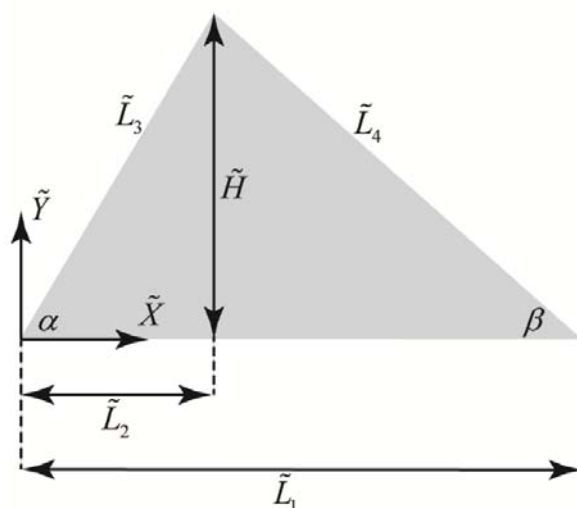
$$\int_0^a \int_0^{kx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta w dy dx = \int_0^a \frac{\partial w}{\partial y} \delta w \Big|_0^{kx} dx - \int_0^a \int_0^{kx} \delta \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dy dx \quad (۱۶-۳)$$

با توجه به این که مقدار w در مرزها ثابت و برابر با صفر است، عبارت اول سمت راست روابط (۱۵-۳) و (۱۶-۳) برابر با صفر خواهد بود. با جاگذاری معادلات (۱۵-۳) و (۱۶-۳) در رابطه‌ی (۱۴-۳)، شکل نهایی این رابطه به صورت زیر خواهد بود.

$$\delta \int \left\{ -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + 16w \right\} dA = 0 \quad (۱۷-۳)$$

با توجه به قضیه $\delta I = 0$ استنباط می شود که در معادله (۱۷-۳)، عبارت انتگرالی همان تابعی مسأله (معادله‌ی ۱-۳) می باشد که پس از ساده سازی در نهایت معادله‌ی (۱۳-۳) از آن به دست آمده که با حل آن مقادیر w به دست می آید.

برای حل مسأله به روش ریتز باید تابع مناسب ریتز، به طوری که شرط مرزی را ارضا کند استخراج شود. برای این کار یک سطح مقطع از کانال مثلثی در شکل ۳-۳ نشان داده شده است.



شکل ۳-۳. سطح مقطع یک کانال مثلثی

معادله خط اضلاع این مثلث را می توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$L_1 : \tilde{y} = 0 \quad (۱۸-۳)$$

$$L_3 : \tilde{y} - \left(\frac{\tilde{H}}{\tilde{L}_2} \right) \tilde{x} = 0 \quad (۱۹-۳)$$

$$L_4 : \tilde{y} - \left(\frac{\tilde{H}}{\tilde{L}_2 - \tilde{L}_1} \right) \tilde{x} - \left(\frac{\tilde{L}_1}{\tilde{L}_1 - \tilde{L}_2} \right) \tilde{H} = 0 \quad (۲۰-۳)$$

با ضرب کردن معادلات خط اضلاع مثلث در یکدیگر، عبارتی حاصل می‌شود که مقدار آن بر روی اضلاع مثلث، همواره صفر است. درواقع می‌توان از این عبارت به‌عنوان تابع ریتز استفاده کرد که همواره شرط مرزی را ارضا می‌کند. البته این عبارت نیاز به بی‌بعد سازی دارد. رابطه (۲۱-۳) حاصل ضرب معادلات خط مثلث می‌باشد.

$$\tilde{\psi} = \tilde{y} \left(\tilde{y} - \left(\frac{\tilde{H}}{\tilde{L}_2} \right) \tilde{x} \right) \left(\tilde{y} - \left(\frac{\tilde{H}}{\tilde{L}_2 - \tilde{L}_1} \right) \tilde{x} - \left(\frac{\tilde{L}_1}{\tilde{L}_1 - \tilde{L}_2} \right) \tilde{H} \right) \quad (۲۱-۳)$$

با استفاده از پارامترهای ارائه شده در عبارت (۲-۱)، می‌توان عبارت (۲۱-۳) را بی‌بعد کرد که نتیجه نهایی برای تابع ریتز به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\psi = y \left(y - \left(\frac{H}{L_2} \right) x \right) \left(y - \left(\frac{H}{L_2 - L_1} \right) x - \left(\frac{L_1 + \sqrt{H^2 + L_2^2} + \sqrt{H^2 + (L_1 - L_2)^2}}{2(L_1 - L_2)} \right) \right) \quad (۲۲-۳)$$

حال با استفاده از تابع ریتز به دست آمده، می‌توان سری لازم، برای استفاده در روش ریتز را تشکیل داد. این سری می‌تواند با توجه به مسأله، حالت‌های مختلفی داشته باشد. در این مسأله، پس از بررسی چند حالت از سری‌ها، در نهایت از بسط جملات x و y (متغیرهای مسأله)، که پاسخ‌های بهتری را ارائه می‌داد، استفاده شده است و این بسط تا جمله ۲۸ام ادامه دارد (به دلیل زیاد شدن حجم محاسبات و محدودیت‌های سیستم پردازشگر و همچنین همگرایی قابل قبول در این تعداد از جملات، سری برای جملات بیشتر محاسبه نشده است). برای این کار می‌توان سری را به‌صورت زیر نشان داد.

$$w(x, y) = a_1 \psi_1(x, y) + a_2 \psi_2(x, y) + \dots + a_{28} \psi_{28}(x, y) \quad (۲۳-۳)$$

که در آن ضرایب مجهول ریتز هستند و $\psi_1(x, y), \dots, \psi_{28}(x, y)$ نیز توابع ریتز

هستند که به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\psi_1(x, y) = x^0 y^0 \psi(x, y)$$

$$\psi_2(x, y) = x \psi(x, y)$$

$$\psi_3(x, y) = y \psi(x, y)$$

$$\psi_4(x, y) = xy \psi(x, y) \quad (24-3)$$

$$\psi_5(x, y) = x^2 \psi(x, y)$$

$$\psi_6(x, y) = y^2 \psi(x, y)$$

⋮

$$\psi_{28}(x, y) = y^6 \psi(x, y)$$

با قرار دادن عبارات (24-3) در رابطه (23-3)، سرعت به شکل زیر تعریف می شود

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i(x, y) = \psi(x, y) (a_1 + a_2 x + a_3 y + \dots + a_{28} y^6) \quad (25-3)$$

با توجه به عبارت (25-3)، رابطه ی (13-3) به شکل زیر بیان می شود.

$$\delta I = \int \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) \right) + 16 \right\} \cdot \{ (a_1 + \dots + a_{28} y^6) \delta \psi \} dA = 0 \quad (26-3)$$

$$\begin{aligned} \delta I = & \delta a_1 \int \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) \right) + 16 \right\} \psi_1 dA + \\ & \delta a_2 \int \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) \right) + 16 \right\} \psi_2 dA + \\ & \delta a_3 \int \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) \right) + 16 \right\} \psi_3 dA + \dots + \\ & \delta a_{28} \int \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) \right) + 16 \right\} \psi_{28} dA = 0. \quad (27-3) \end{aligned}$$

برای آن که رابطه ی 27-3 برابر با صفر باشد، باید عبارت های داخل انتگرال ها برابر با صفر قرار

گیرد. بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi \right) \right) \psi_1 dA = - \int 16 \psi_1 dA \\
& \int \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi \right) \right) \psi_2 dA = - \int 16 \psi_2 dA \\
& \int \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi \right) \right) \psi_3 dA = - \int 16 \psi_3 dA \\
& \vdots \\
& \int \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi \right) \right) \psi_{28} dA = - \int 16 \psi_{28} dA \quad (28-3)
\end{aligned}$$

با حل معادله ۲۸-۳، در نهایت به ۲۸ معادله انتگرالی و ۲۸ مجهول می‌رسیم که با حل این دستگاه ضرایب مجهول ریتز به دست می‌آیند. پس از جاگذاری این ضرایب مجهول در رابطه‌ی (۲۳-۳)، سرعت به دست خواهد آمد.

۳-۳-۲ حل معادله انرژی با استفاده از روش ریتز

همان‌طور که در فصل دوم به آن اشاره شد، معادله‌ی (۲۲-۲)، شکل نهایی معادله انرژی‌ای است که در تحقیق حاضر حل خواهد شد. شرایط مرزی مسأله برای دما، شرایط شار ثابت می‌باشد که با توجه به عبارت بی‌بعد دما، مقدار دمای بی‌بعد بر روی مرزها برابر با صفر خواهد بود. با توجه به صفر بودن مقدار دمای بی‌بعد بر روی مرزها و شباهت آن با شرایط مرزی سرعت، می‌توان تغییرات تابعی مورد نیاز برای حل دما را نیز مشابه سرعت در نظر گرفت و به‌صورت زیر تعریف کرد.

$$\delta I = \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \frac{4w}{U} - \frac{Br}{U^2} \left(\frac{w}{UA} \int \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dA - \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \right\} \delta T dx dy = 0 \quad (29-3)$$

تابعی اصلی مسأله دما، همانند مسأله سرعت محاسبه می‌شود. همچنین با توجه به شرایط مرزی، مقادیر $\Psi(x, y), \Psi_1(x, y), \Psi_2(x, y), \dots, \Psi_{28}(x, y)$ را می‌توان همان عبارات مربوط به سرعت در نظر گرفت و T را به شکل زیر تعریف کرد.

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i(x, y) = \psi(x, y) (a_1 + a_2 x + a_3 y + \dots a_{28} y^6) \quad (30-3)$$

با جاگذاری عبارت ۳۰-۳ در رابطه‌ی ۲۹-۳ و حل به روش مشابه، در نهایت رابطه‌ی زیر به دست

خواهد آمد.

$$\int \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) \right) \psi_1 dA =$$

$$- \int \left\{ \frac{4w}{U} + \frac{Br}{U^2} \left(\frac{w}{UA} \int \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dA - \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \right\} \psi_1 dA,$$

$$\int \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) \right) \psi_2 dA =$$

$$- \int \left\{ \frac{4w}{U} + \frac{Br}{U^2} \left(\frac{w}{UA} \int \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dA - \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \right\} \psi_2 dA,$$

$$\int \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) \right) \psi_3 dA =$$

$$- \int \left\{ \frac{4w}{U} + \frac{Br}{U^2} \left(\frac{w}{UA} \int \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dA - \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \right\} \psi_3 dA,$$

⋮

$$\int \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ((a_1 + \dots + a_{28} y^6) \psi) \right) \psi_{28} dA =$$

$$- \int \left\{ \frac{4w}{U} + \frac{Br}{U^2} \left(\frac{w}{UA} \int \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dA - \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right) \right\} \psi_{28} dA, \quad (31-3)$$

با حل این دستگاه ۲۸ معادله و ۲۸ مجهول و به دست آوردن مقادیر ضرایب مجهول ریتز و

جاگذاری آن‌ها در عبارت ۳۰-۳، دما به دست خواهد آمد. دقت شود که در معادله ۳۱-۳، در صورتی‌که

از تأثیر اتلاف لزجت در حل معادله صرف‌نظر شود، مقدار عدد برینکمن برابر با صفر خواهد بود.

۳-۴ نتیجه‌گیری

در این فصل به بیان روش تحلیلی ریتز بر مبنای حساب تغییرات و همچنین نحوه استفاده آن در این مطالعه و حل معادلات حاکم توسط این روش پرداخته شد. رابطه‌ی کلی توزیع سرعت و توزیع دما برای تمام مقاطع مثلثی نیز در این فصل ارائه گشت. در ادامه‌ی این فصل به بیان و بحث در مورد نتایج استخراج شده از حل معادلات با استفاده از روش تحلیلی ریتز پرداخته خواهد شد.

فصل ۴: بررسی نتایج

۴-۱ مقدمه

در این فصل به ارائه و بررسی نتایج حاصل از حل روابط به دست آمده در فصل دوم و سوم پرداخته خواهد شد. با حل معادلات مومنتوم و انرژی که در فصل‌های گذشته به آن‌ها اشاره شد، سرعت و دمای مورد نیاز جهت محاسبه عدد ناسلت و ضریب اصطکاک به دست می‌آید. همان‌طور که مشاهده شد، حل معادلات مومنتوم و انرژی، شامل حل یک دستگاه انتگرالی ۲۸ معادله و ۲۸ مجهول است که دستگاهی پیچیده می‌باشد. به همین جهت در این پژوهش برای حل این دستگاه و انتگرال‌های آن از نرم افزار برنامه‌نویسی متلب^۵ استفاده شده است که نتایج این محاسبات، برای هندسه‌های مثلی در قالب نمودار و کانتور^۶ و جدول در این فصل ارائه و با نتایج گذشته تطبیق داده خواهد شد.

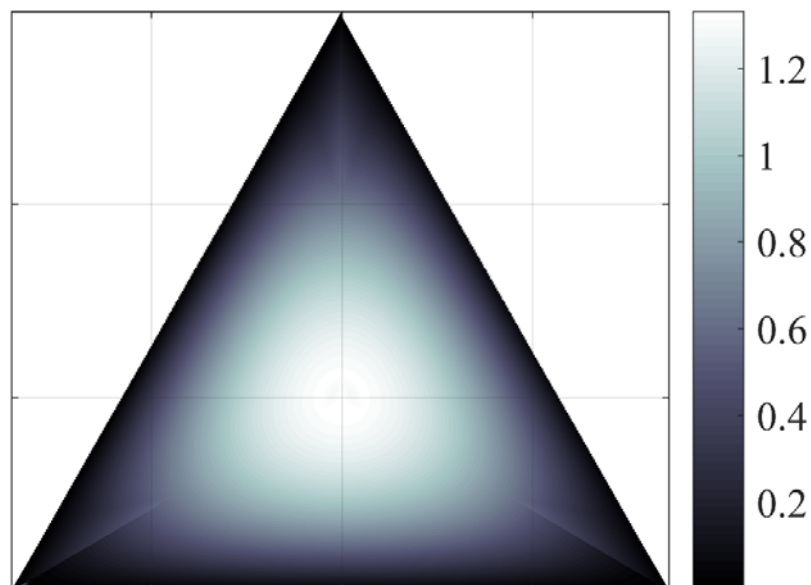
۴-۲ نتایج مربوط به حل جریان

همان‌طور که در فصل‌های گذشته نیز اشاره شد، جریان مورد مطالعه، در ناحیه کاملاً توسعه‌یافته درون کانال مثلی قرار دارد. سرعت در دیواره‌ها صفر، جریان پایدار و سیال تراکم ناپذیر فرض می‌شود. معادله‌ی سرعت برای سطح مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع، در کتاب سیالات ویسکوز، نوشته‌ی آقای پاپاناستاسیو [۲۲] آورده شده است. در ابتدای این بخش، جهت صحت‌سنجی روند تحقیق، ابتدا معادله‌ی سرعتی که توسط روش ریتز استخراج شده است، با این معادله مورد مقایسه قرار می‌گیرد. شکل ۴-۲ کانتور سرعت تحقیق حاضر را برای مثلث متساوی‌الاضلاع نشان می‌دهد. در واقع این شکل و همچنین شکل ۴-۱، سرعت بی‌بعد را در مقطع مثلی با ابعاد بی‌بعد نشان می‌دهد. قابل ملاحظه است که مقدار سرعت در دیواره‌ها برابر با صفر است که شرایط مرزی را ارضا می‌کند، همچنین در مرکز مثلث، همان‌طور که طبق تغییرات نیمرخ سرعت درون کانال برای جریان توسعه‌یافته انتظار می‌رود، دارای بیشترین مقدار خود است که مقدار بی‌بعد آن حدوداً ۱.۳ می‌باشد. از مقایسه‌ی دو شکل

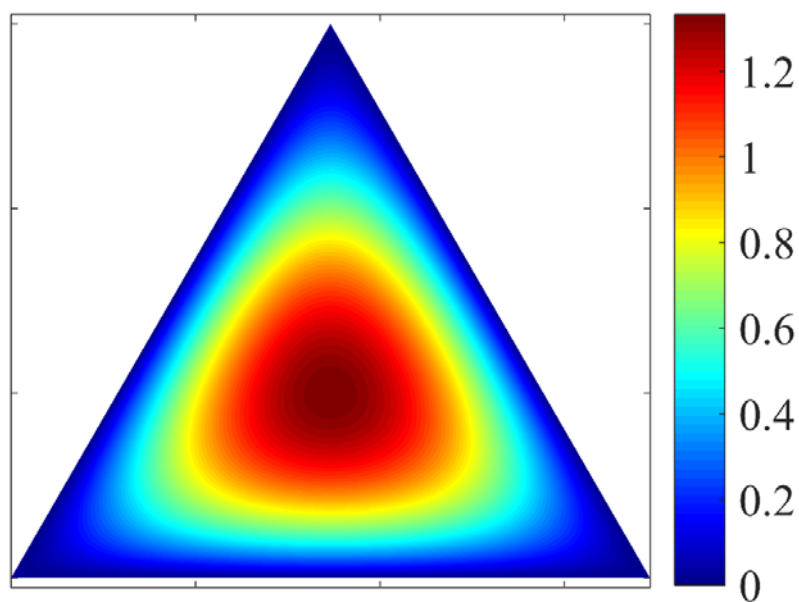
^۵ Matlab

^۶ Contour

۱-۴ و ۲-۴ می‌توان به تطابق خوب میان روش ریتز و روش حل دقیق پی برد که نشان‌دهنده‌ی دقت بالای روش تقریبی ریتز است.



شکل ۱-۴. کانتور سرعت برای مثلث متساوی‌الاضلاع طبق رابطه‌ی ارائه شده در [۲۲]

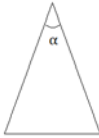


شکل ۲-۴. کانتور سرعت مثلث متساوی‌الاضلاع برای تحقیق حاضر

۴-۲-۱ عدد پوازیه

عدد پوازیه یکی از نتایجی است که می‌توان با داشتن سرعت جریان درون کانال، آن را محاسبه کرد. در واقع حاصل رابطه‌ی پوازیه که در فصل دوم محاسبه شد، یک عدد می‌باشد که به شکل سطح مقطع بستگی دارد.

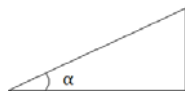
جدول ۴-۱. مقایسه‌ی عدد پوازیه برای مثلث‌های متساوی‌الساقین

زاویه رأس							
ϵ_3 (%)	ϵ_2 (%)	ϵ_1 (%)	تحقیق حاضر	وایت [۲۳]	اسپارو [۷]	شاه [۲]	
—	۰.۴	۰.۲	۴۹.۸	—	۵۰	۴۹.۹	۱۰
۰.۷۶	—	۰.۲	۵۱.۲	۵۱.۶	۵۱.۲	۵۱.۳	۲۰
—	—	۰.۱۹	۵۲.۲	—	۵۲.۲	۵۲.۳	۳۰
—	۰.۱۹	—	۵۲.۹	۵۲.۹	۵۲.۸	۵۲.۹	۴۰
—	—	—	۵۳.۲	—	۵۳.۲	۵۳.۲	۵۰
—	—	—	۵۳.۳	۵۳.۳	۵۳.۳	۵۳.۳	۶۰
—	—	—	۵۳.۲	—	۵۳.۲	۵۳.۲	۷۰
۰.۱۹	۰.۱۹	—	۵۳	۵۲.۹	۵۲.۹	۵۳	۸۰
—	۰.۱۹	—	۵۲.۶	—	۵۲.۷	۵۲.۶	۹۰
—	—	—	۵۲	۵۲	—	—	۱۰۰
۰.۲	—	—	۵۱	۵۱.۱	—	۵۱	۱۲۰
۰.۴	—	—	۴۹.۷	۴۹.۵	—	—	۱۴۰
—	—	۰.۴۱	۴۹.۱	—	—	۴۸.۹	۱۵۰
۰.۶	—	—	۴۸.۶	۴۸.۳	—	—	۱۶۰

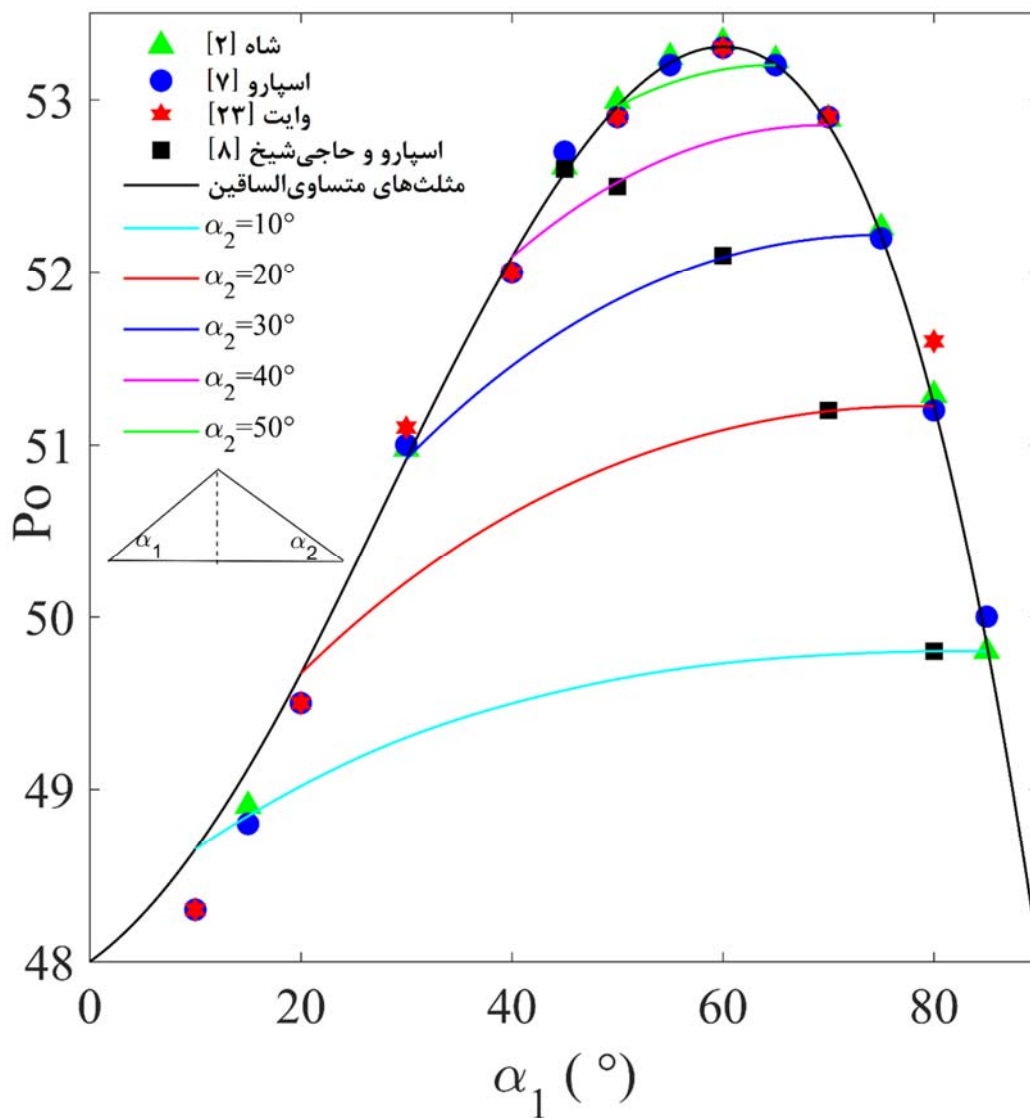
در جدول ۴-۱ مقادیر عدد پوازیه جهت مقایسه با داده‌های موجود در تحقیقات گذشته برای

هندسه‌ی مثلث‌های متساوی‌الساقین ارائه شده است. مقدار خطای موجود میان نتایج به دست آمده و نتایج موجود در مطالعه‌ی شاه [۲]، تحقیق اسپارو [۷] و کتاب مکانیک سیالات وایت [۲۳] به ترتیب با ϵ_1 ، ϵ_2 و ϵ_3 نشان داده شده است. در جدول ۴-۲ نیز مقادیر عدد پوازیه تحقیق حاضر برای مثلث‌های قائم‌الزاویه، با مقادیر به دست آمده در مطالعه‌ی اسپارو و حاجی شیخ [۸] مورد مقایسه قرار گرفته است.

جدول ۴-۲. مقایسه اعداد پوازیه برای مثلث‌های قائم‌الزاویه

ϵ (%)	تحقیق حاضر	اسپارو و حاجی شیخ [۸]	زاویه رأس
			
۰.۴	۴۹.۸	۵۰	۱۰
—	۵۱.۲	۵۱.۲	۲۰
۰.۱۹	۵۲.۱	۵۲	۳۰
—	۵۲.۵	۵۲.۵	۴۰
—	۵۲.۶	۵۲.۶	۴۵
—	۵۲.۵	۵۲.۵	۵۰
۰.۱۹	۵۲.۱	۵۲	۶۰
—	۵۱.۲	۵۱.۲	۷۰
۰.۴	۴۹.۸	۵۰	۸۰

درصد خطای مقادیر پوازیه در مقایسه با مطالعه‌ی اسپارو و حاجی شیخ [۸] برای مثلث‌های قائم‌الزاویه، توسط ϵ در جدول نشان داده شده است. بررسی نتایج حاصل از مقایسه مقادیر به دست آمده با داده‌های موجود از گذشته، نشان‌دهنده‌ی دقت بالای روش ریتز و صحت مقادیر به دست آمده در حل حاضر است. این مقایسات در شکل ۴-۳، در قالب نمودار به نمایش در آمده است.



شکل ۴-۳. عدد پوازیه برای مثلث‌های با زوایای دلخواه

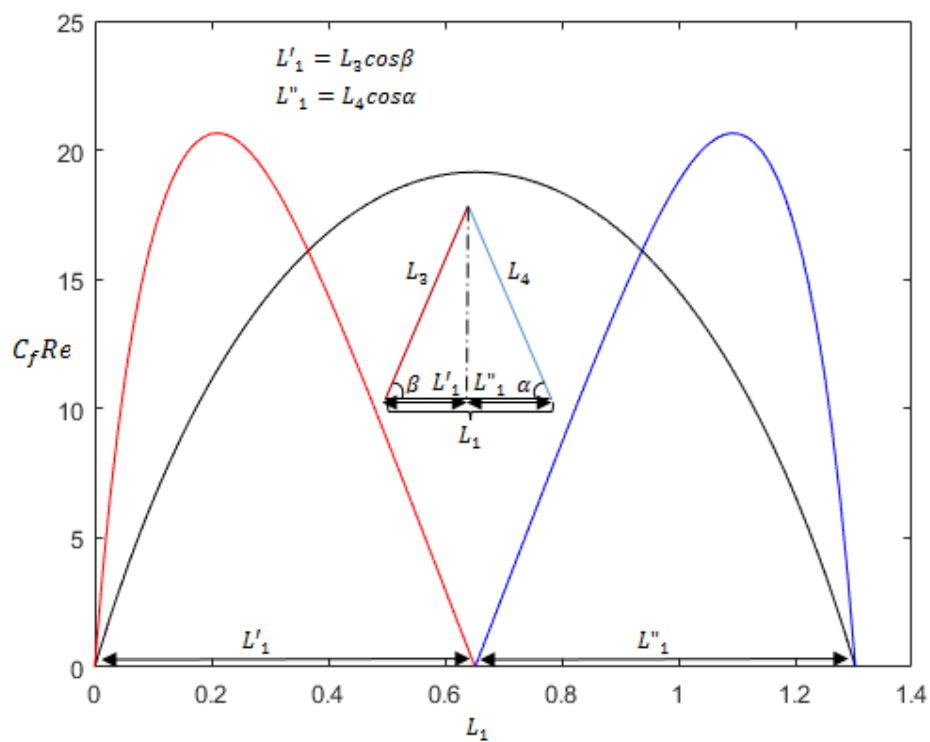
شکل ۴-۳، نشان‌دهنده‌ی مقادیر عدد پوازیه برای تمام حالت‌های مثلث‌ها می‌باشد و برحسب زوایای α_1 و α_2 (در شکل نشان داده شده است) که برای نمایش تمام حالت‌های مثلث کافی هستند، رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نواحی مرزی شکل شامل مقادیر عدد پوازیه برای مثلث‌های متساوی‌الساقین می‌باشد. مقادیر موجود در مطالعات گذشته برای مثلث‌های متساوی-الساقین و قائم‌الزاویه نیز در شکل نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که تغییرات عدد پوازیه برای تمام مقاطع مثلثی در محدوده‌ی بسیار کوچکی رخ می‌دهد که بین ۴۸ تا ۵۳.۳ می‌باشد. همچنین با

بزرگ‌تر شدن مقاطع مثلثی مقدار عدد پوازیه افزایش می‌یابد. می‌توان از تصویر نتیجه گرفت که در بین تمام مثلث‌هایی که زاویه‌ی α_2 یکسانی دارند، بیشترین مقدار عدد پوازیه مربوط به مثلث متساوی‌الساقین با زاویه رأس α_2 می‌باشد. بیشترین مقدار عدد پوازیه در بین تمام هندسه‌های مثلثی نیز مربوط به مقطع متساوی‌الاضلاع می‌باشد. با استفاده از شکل ۴-۳، با انتخاب زاویه‌های مثلث مورد نظر و یافتن مقدار عدد پوازیه برای آن مثلث، با در دست داشتن اطلاعات جریان و سیال می‌توان با کمک رابطه ۲-۲۴ مقدار افت هد سیال و در نتیجه $\Delta \bar{P}$ را برای هر مقطع مثلثی محاسبه کرد.

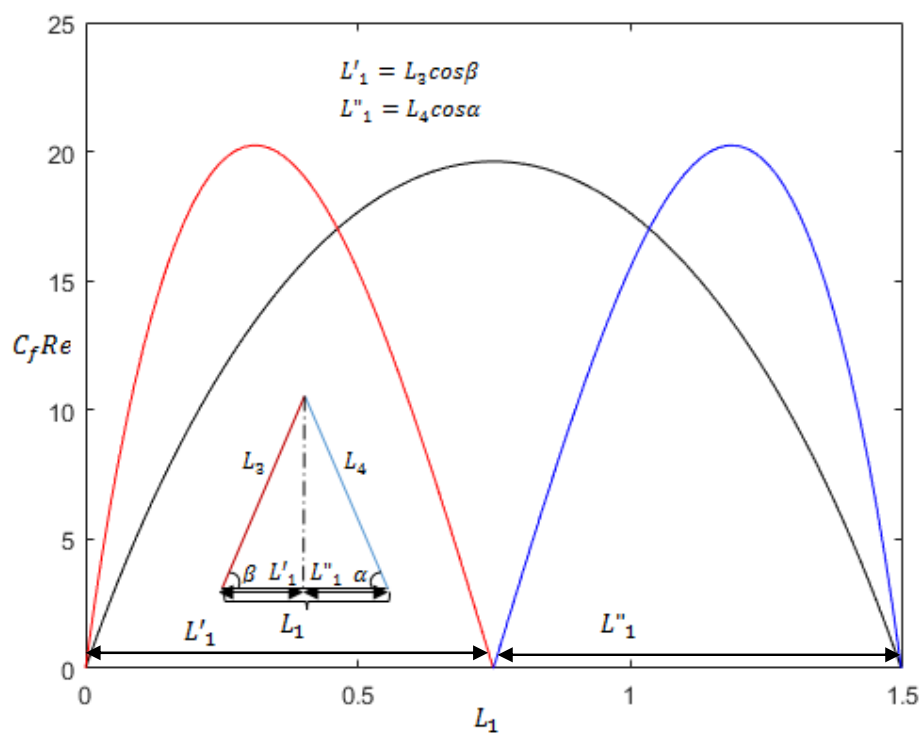
جدول ۴-۳، جهت سهولت دسترسی محققان به مقادیر عدد پوازیه، برای حالت‌های مختلف مثلث، ارائه شده‌است. مقادیر این جدول نیز بر اساس زوایای α_1 و α_2 نوشته شده‌اند. دقت شود که مقادیر مربوط به $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ و $\alpha_1 = \alpha_2 = 90$ قابل محاسبه توسط تحقیق حاضر نیستند و صرفاً برای آسان کردن کار محققین جهت انجام محاسبات درونیابی، از تحقیق‌های گذشته مقدار آن‌ها لحاظ شده است. در این جدول مقادیری که بر روی قطر اصلی قرار دارند مربوط به مثلث‌های متساوی-الساقین می‌باشند. همچنین شکل‌های ۴-۴ تا ۴-۱۰، ضریب اصطکاک پوسته‌ای بر روی دیواره را، برای مثلث‌های مختلف نشان می‌دهند.

جدول ۴-۳. اعداد پوازیه برای مثلث‌هایی با زوایای دلخواه

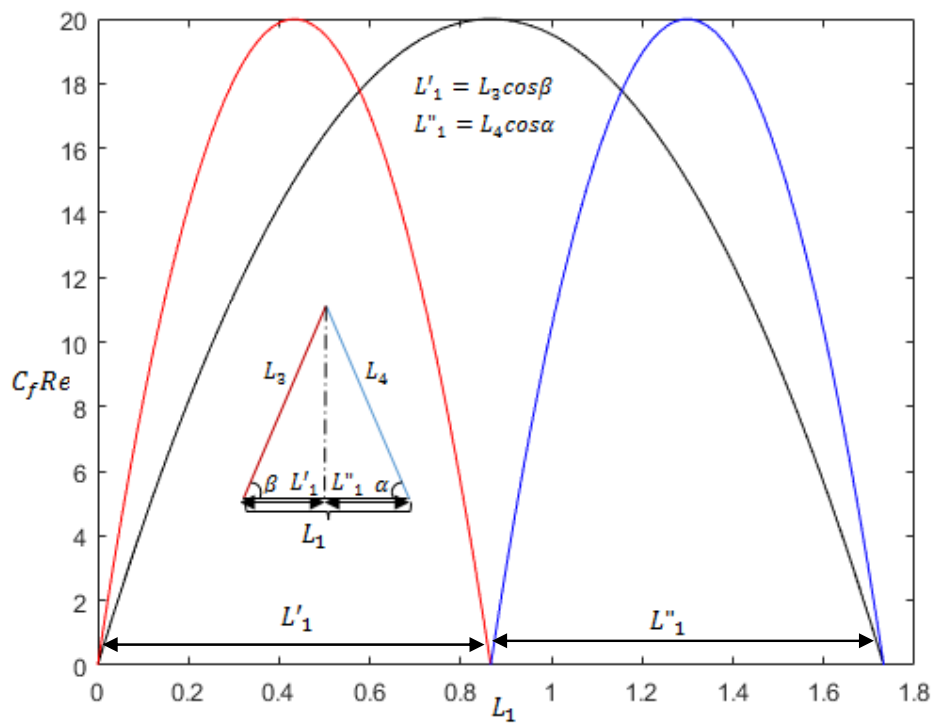
α_1	α_2										
	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
۰	۴۸	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
۱۰	—	۴۸.۶	۴۹	۴۹.۳	۴۹.۵	۴۹.۶	۴۹.۶	۴۹.۷	۴۹.۸	۴۹.۸	۴۹.۸
۲۰	—	۴۹	۴۹.۷	۵۰.۲	۵۰.۶	۵۰.۸	۵۰.۹	۵۱.۱	۵۱.۲	۵۱.۲	۵۱.۲
۳۰	—	۴۹.۳	۵۰.۲	۵۱	۵۱.۵	۵۱.۷	۵۱.۸	۵۲.۱	۵۲.۲	۵۲.۲	۵۲.۱
۴۰	—	۴۹.۵	۵۰.۶	۵۱.۵	۵۲	۵۲.۳	۵۲.۵	۵۲.۸	۵۲.۹	۵۲.۸	۵۲.۵
۴۵	—	۴۹.۶	۵۰.۸	۵۱.۷	۵۲.۳	۵۲.۶	۵۲.۸	۵۳	۵۳.۱	۵۲.۹	۵۲.۶
۵۰	—	۴۹.۶	۵۰.۹	۵۱.۸	۵۲.۵	۵۲.۸	۵۳	۵۳.۲	۵۳.۲	۵۳	۵۲.۵
۶۰	—	۴۹.۷	۵۱.۱	۵۲.۱	۵۲.۸	۵۳	۵۳.۲	۵۳.۳	۵۳.۲	۵۲.۸	۵۲.۱
۷۰	—	۴۹.۸	۵۱.۲	۵۲.۲	۵۲.۹	۵۳.۱	۵۳.۲	۵۳.۲	۵۲.۹	۵۲.۲	۵۱.۲
۸۰	—	۴۹.۸	۵۱.۲	۵۲.۲	۵۲.۸	۵۲.۹	۵۳	۵۲.۸	۵۲.۲	۵۱.۲	۴۹.۸
۹۰	—	۴۹.۸	۵۱.۲	۵۲.۱	۵۲.۵	۵۲.۶	۵۲.۵	۵۲.۱	۵۱.۲	۴۹.۸	۴۸



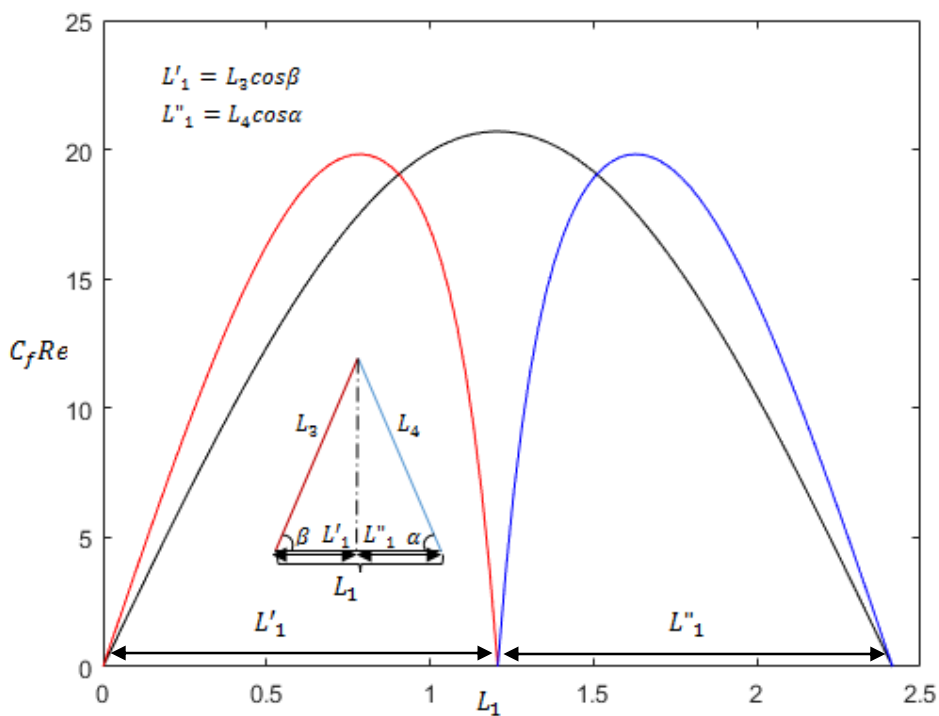
شکل ۴-۴. ضریب اصطکاک پوسته‌ای در مثلث متساوی الساقین با زاویه رأس ۳۰ درجه



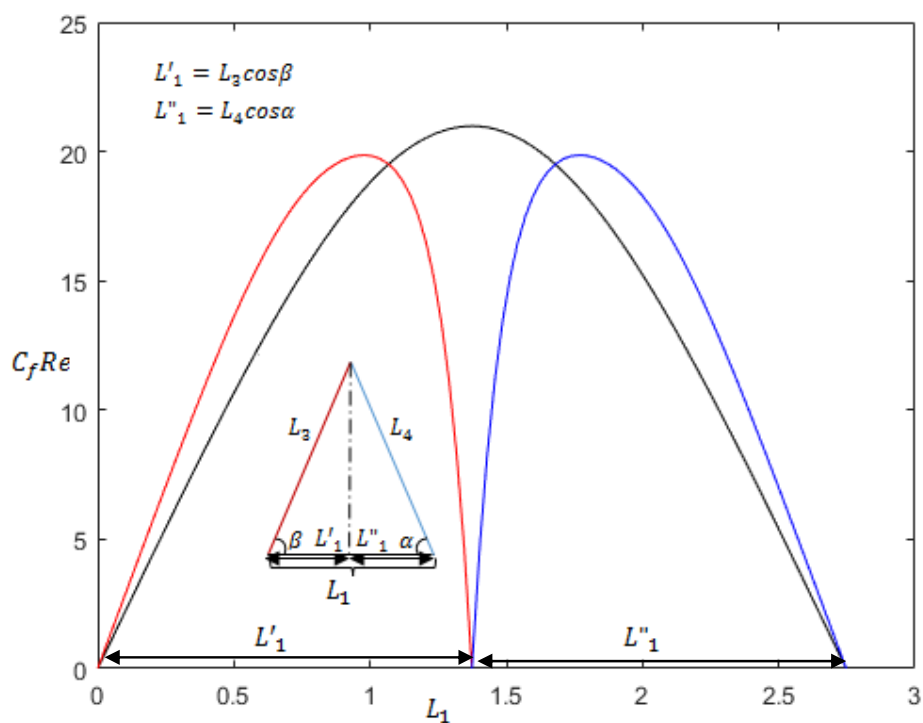
شکل ۴-۵. ضریب اصطکاک پوسته‌ای در مثلث متساوی الساقین با زاویه رأس ۴۵ درجه



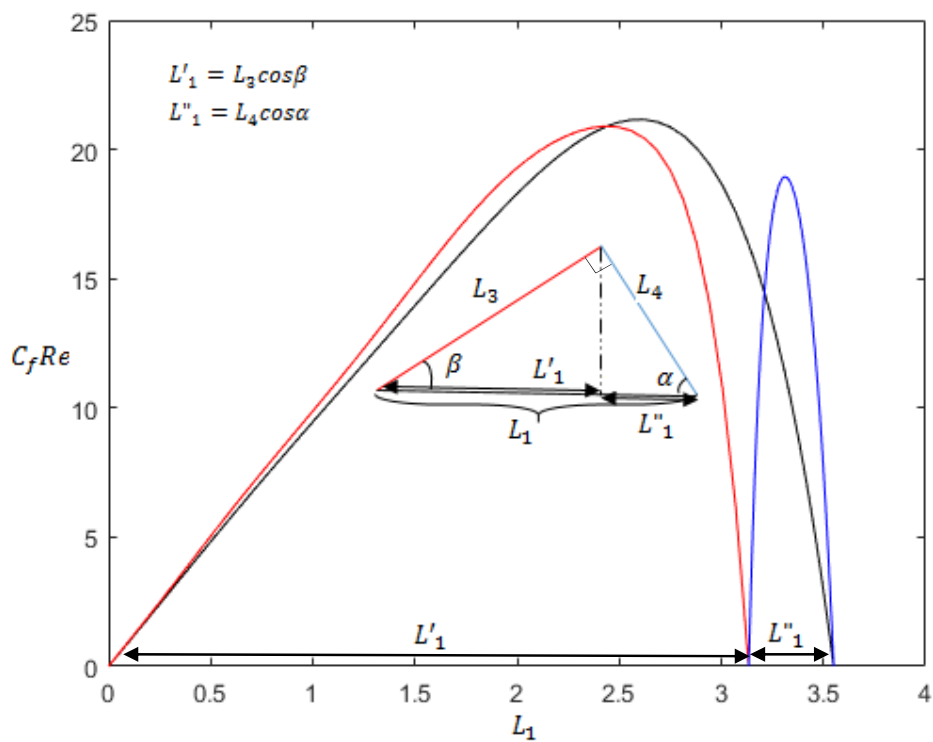
شکل ۴-۶. ضریب اصطکاک پوسته‌ای در مثلث متساوی‌الساقین با زاویه رأس ۶۰ درجه



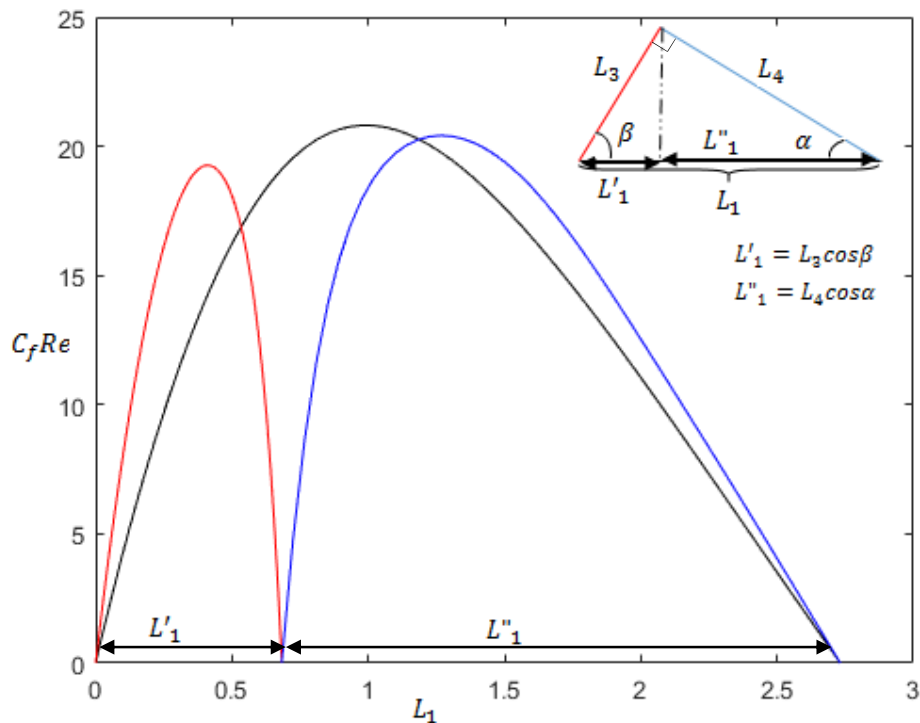
شکل ۴-۷. ضریب اصطکاک پوسته‌ای در مثلث متساوی‌الساقین با زاویه رأس ۹۰ درجه



شکل ۴-۸. ضریب اصطکاک پوسته‌ای در مثلث متساوی‌الساقین با زاویه رأس ۱۰۰ درجه



شکل ۴-۹. ضریب اصطکاک پوسته‌ای در مثلث قائم‌الزاویه، با زاویه $\alpha = 70$ و $\beta = 20$



شکل ۴-۱۰. ضریب اصطکاک پوسته‌ای در مثلث قائم‌الزاویه، با زاویه $\alpha = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$

ضریب اصطکاک پوسته‌ای بر روی دیواره‌ها، برای چند مقطع مثلثی مختلف در شکل‌های ۴-۴ تا ۴-۱۰ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در هر ضلع، مقدار ضریب اصطکاک پوسته‌ای در دو نقطه برابر با صفر می‌باشد که این نقاط مربوط به گوشه‌های مثلث هستند. برای توجیه این موضوع، می‌توان به مطلبی که کومار و همکارانش [۲۴] در تحقیق خود درباره‌ی تأثیر گوشه‌ی گرد مثلث در انتقال حرارت ذکر کردند، اشاره کرد. آن‌ها با اشاره به این که گوشه‌های تیز، بر روی جریان درون کانال مثلثی تأثیر قابل‌توجهی می‌گذارد بیان کردند که در گوشه‌های مثلث، جریان راکد می‌شود. بر این اساس و با توجه به روابط ۲-۲، ۳-۲ و ۳۵-۲ می‌توان این‌گونه بیان کرد که در گوشه‌های مثلث، تغییرات سرعت و در نتیجه مقدار ضریب اصطکاک پوسته‌ای برابر با صفر می‌باشد. در مقاطع متساوی-الساقین، برای مثلث‌های با زاویه رأس کمتر از 60° ، ماکزیمم مقدار ضریب اصطکاک پوسته‌ای موجود در قاعده‌ی مثلث کمتر از ساق‌های مثلث می‌باشد اما در هندسه‌های با زاویه‌ی رأس بیشتر از 60° ، مقدار ماکزیمم موجود در قاعده‌ی مثلث بیشتر از مقادیر دو ضلع دیگر است. در مقطع

متساوی‌الاضلاع نیز مقدار ماکزیمم ضریب اصطکاک پوسته‌ای در هر سه ضلع برابر است.

۴-۳ نتایج مربوط به حل دما

در فصول گذشته، حالت بی‌بعد معادله انرژی حل و ارائه شد. همان‌طور که ذکر شد شرایط مرزی جهت حل معادله انرژی، شرط اعمال شار ثابت بر روی دیواره است که با توجه معادله بی‌بعد تعریف شده، مقدار دمای بدون بعد بر روی مرزها نیز برابر با صفر است. معادله‌ی انرژی به‌دست‌آمده، شامل اتلاف لزجت است که با در نظر گرفتن مقدار صفر برای عدد برینکمن، معادله‌ی انرژی برای حالتی که از اتلاف صرف‌نظر شود حل خواهد شد. در این بخش به بررسی نتایج حاصل از حل دما برای دو حالت با و بدون در نظر گرفتن اتلاف لزجت پرداخته خواهد شد.

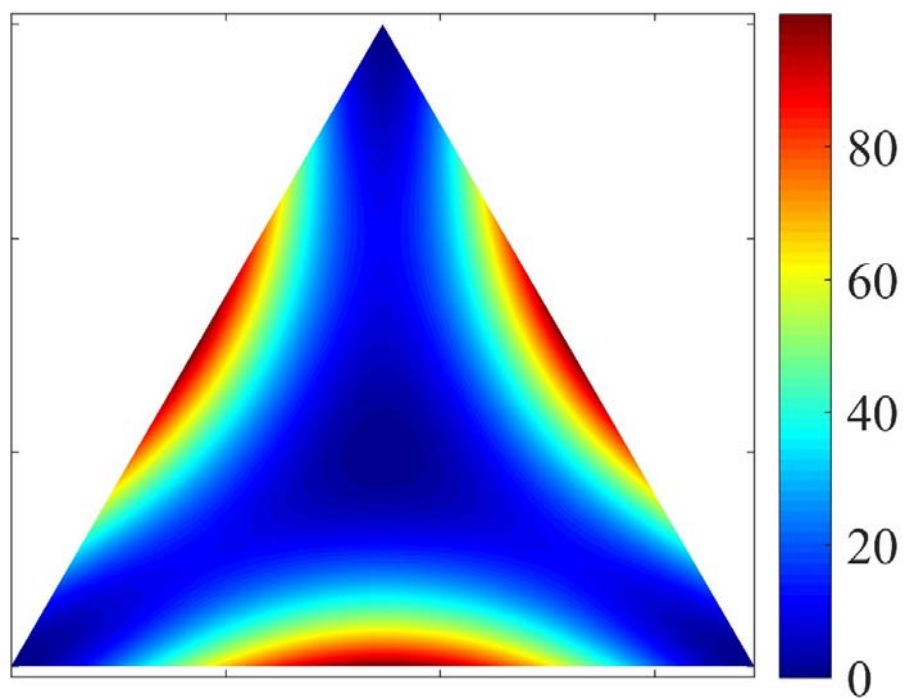
۴-۳-۱ توزیع اتلاف

همان‌طور که اشاره شد، رابطه‌ی (۲-۲۲) نشان دهنده‌ی معادله‌ی انرژی بی‌بعدی است که در مطالعه‌ی حاضر حل می‌شود. عبارت (۳-۳۱) نشان دهنده‌ی آن بخش از معادله‌ی انرژی مربوط به اتلاف می‌باشد.

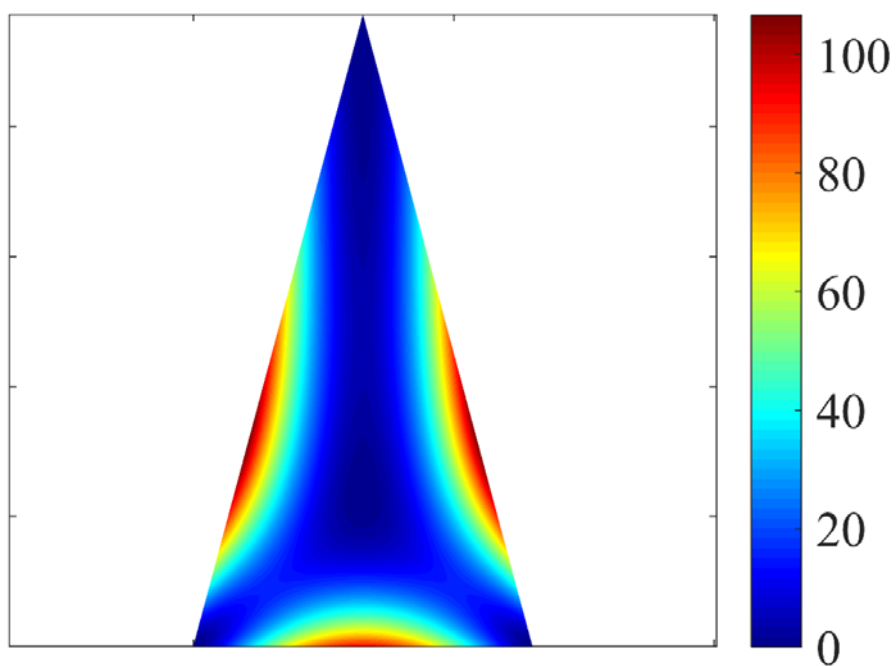
$$\phi = \frac{1}{W^2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (۳-۳۱)$$

کانتور توزیع اتلاف در مقاطع مختلف مثلی در شکل‌های ۴-۱۱ تا ۴-۱۷ نشان داده شده است. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده برای ضریب اصطکاک پوسته‌ای، انتظار می‌رود بیشترین مقدار اتلاف، بر روی دیواره‌ها و در نقاطی باشد که مقدار C_f در آن‌ها ماکزیمم است چون در این نقاط بیشترین مقدار تنش به چشم می‌خورد. همچنین در گوشه‌های مثلث و در مرکز آن نیز مقدار اتلاف برابر با صفر است. به‌علاوه با توجه به شکل‌های ۴-۱۱ تا ۴-۱۷ مشاهده می‌شود که هرچه زوایای مثلث باریک‌تر باشد،

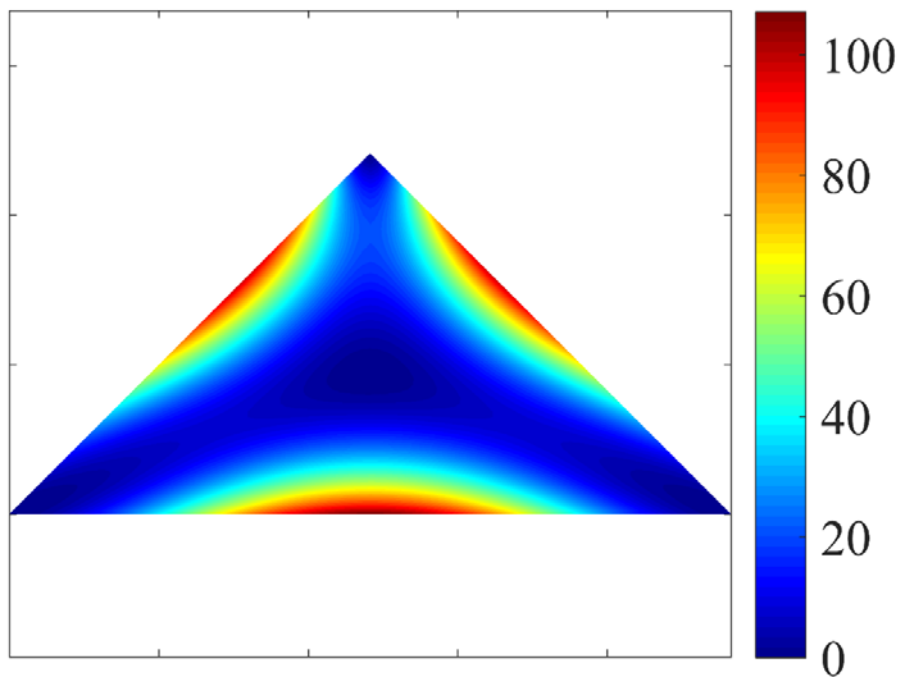
ماکزیمم اتلاف آن دارای مقدار بیشتری می باشد.



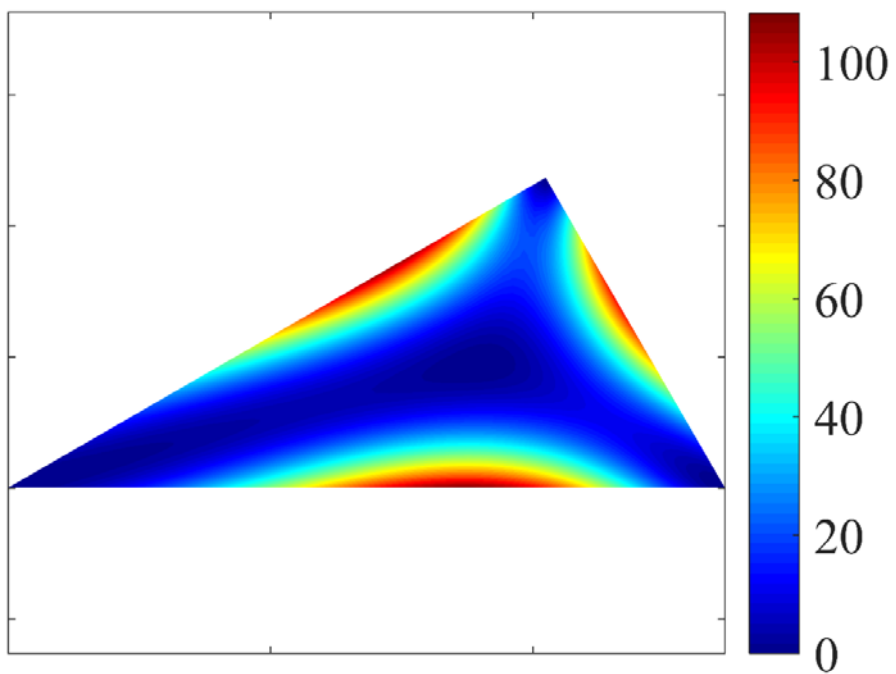
شکل ۴-۱۱. کانتور توزیع اتلاف در مقطع متساوی الاضلاع



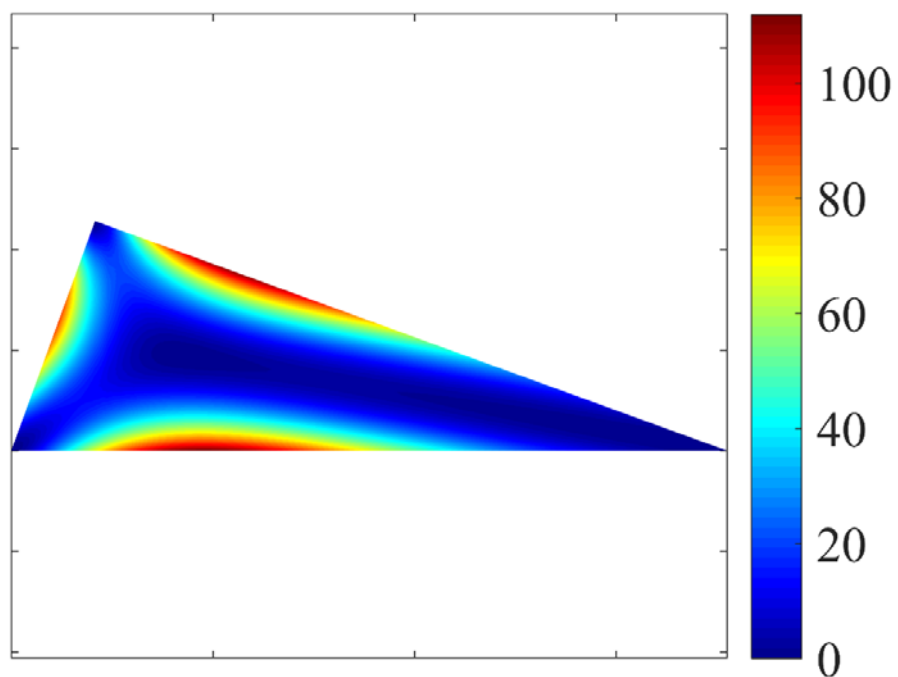
شکل ۴-۱۲. کانتور توزیع اتلاف در مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس ۳۰ درجه



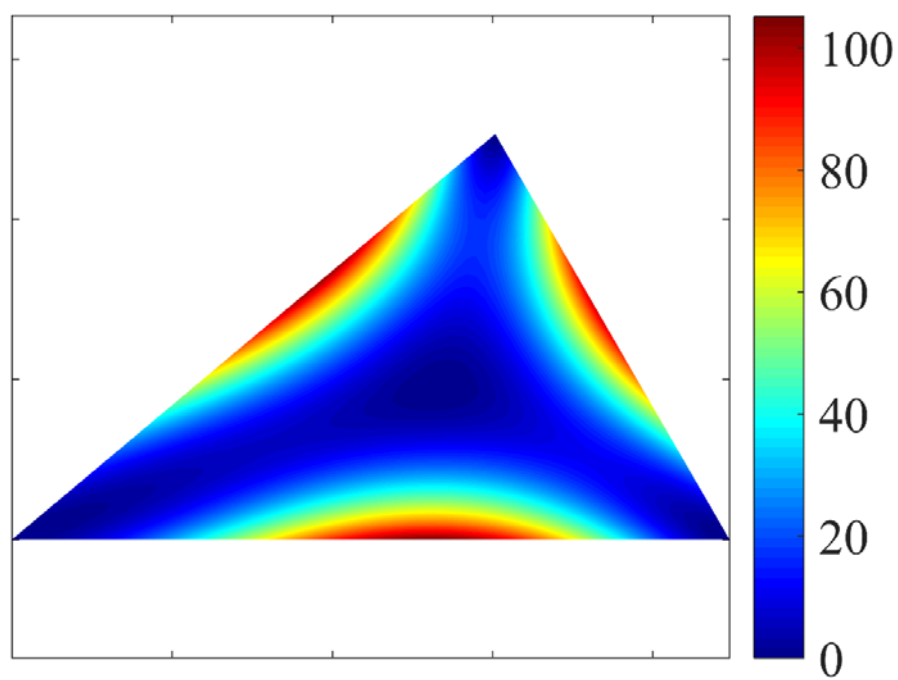
شکل ۴-۱۳. کانتور توزیع اتلاف در مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس ۹۰ درجه



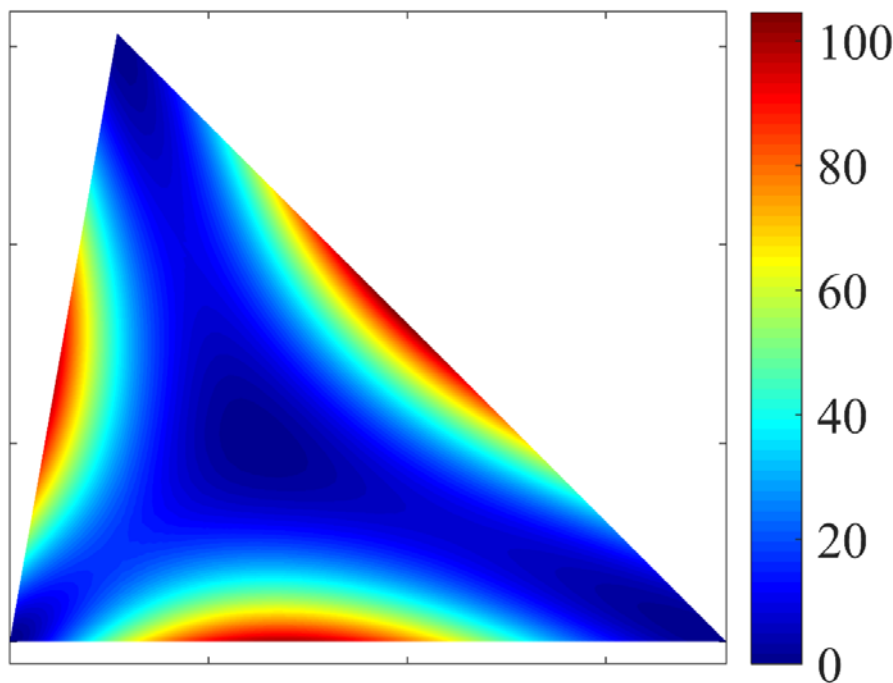
شکل ۴-۱۴. کانتور توزیع اتلاف در مقطع قائم الزاویه با زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه



شکل ۴-۱۵. کانتور توزیع اتلاف در مقطع قائم‌الزاویه با زوایای ۲۰ و ۷۰ درجه



شکل ۴-۱۶. کانتور توزیع اتلاف در مقطع مثلثی با زوایای ۴۰، ۶۰ و ۸۰ درجه

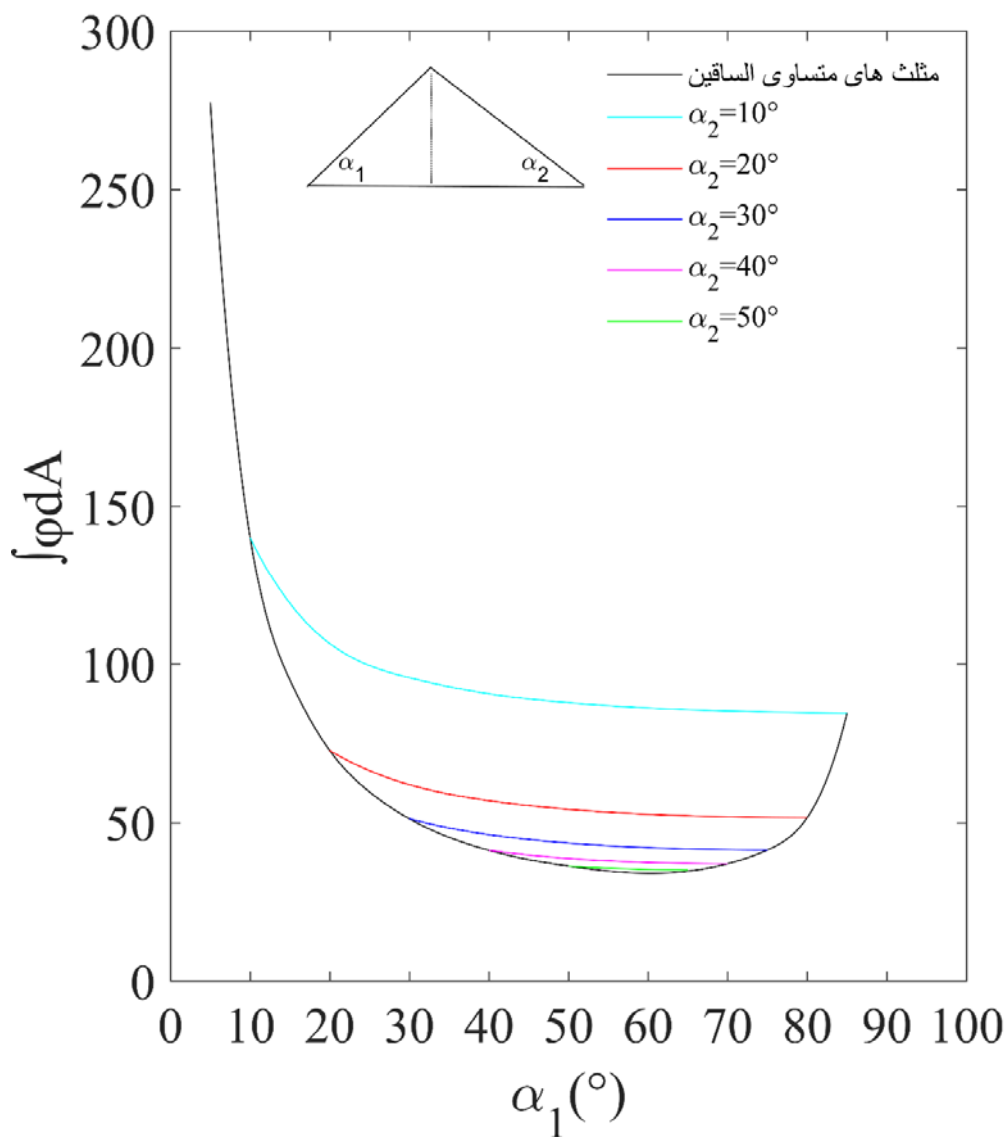


شکل ۴-۱۷. کانتور توزیع اتلاف در مقطع مثلثی با زوایای ۴۵، ۵۵ و ۸۰ درجه

با انتگرال گیری از رابطه (۳-۳۱) معادله‌ی اندازه اتلاف به صورت زیر بیان می شود:

$$\int \varphi dA = \frac{1}{W^2} \int \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dA. \quad (۳-۳۲)$$

حاصل معادله‌ی (۳-۳۲) یک عدد می باشد که برای هر مقطع مثلثی متفاوت است. شکل ۴-۱۸ اندازه اتلاف را برای تمام مقاطع مثلثی نشان می دهد. با توجه به این شکل مشاهده می شود که هرچه مقطع مثلثی بازتر باشد، اندازه اتلاف آن کم تر است. در مقاطع باریک، مشاهده می شود که اندازه اتلاف عدد بسیار بزرگی است که نشان دهنده‌ی وجود تنش بسیار زیاد در این مقاطع است. با پهن تر شدن مقاطع و بازتر شدن زوایا اندازه اتلاف کاهش می یابد. برای مثلث هایی که شامل یک α_2 یکسان می- شوند بازه تغییرات اندازه اتلاف کم است و این بازه با پهن تر شدن مقطع مثلث ها کم تر هم می شود تا در مقطع متساوی الاضلاع به کمترین مقدار خود برسد. بین تمام مثلث هایی که یک زاویه α_2 یکسان داشته باشند، کمترین اندازه اتلاف مربوط به مثلث متساوی الساقین با زاویه رأس α_2 می باشد.

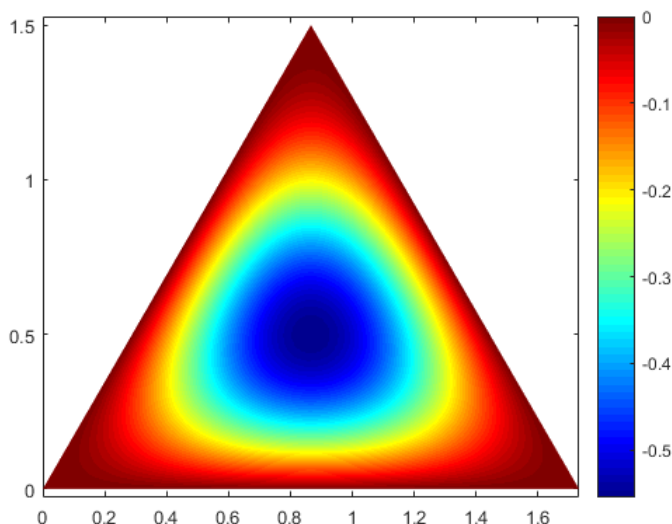


شکل ۴-۱۸. اندازه اتلاف برای تمام مقاطع مثلثی

۴-۳-۲ عدد ناسلت برای حالت $Br=0$

از نتایجی که پس از حل معادله‌ی انرژی می‌توان آن را محاسبه کرد، عدد بی‌بعد ناسلت است که نشان دهنده‌ی نرخ انتقال حرارت جابجایی به انتقال حرارت هدایتی می‌باشد. در حالتی که عدد برینکمن برابر با صفر باشد یا به عبارت دیگر از اتلاف لزجت صرف‌نظر شود، با توجه به شار حرارتی که به دیواره وارد می‌شود، انتقال حرارت از دیواره به سیال صورت می‌گیرد. شکل ۴-۱۹، این امر را برای یک شکل

کانال مثلثی (مثلث متساوی الاضلاع) نشان می‌دهند.



شکل ۴-۱۹. کانتور دما برای مثلث متساوی الاضلاع در حالت $Br=0$

شکل ۴-۱۹، کانتور دمای بی‌بعد را برای مقطع مثلث متساوی الاضلاع، نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، مقدار دمای بی‌بعد بر روی مرزها برابر با صفر است. همچنین مشاهده می‌شود که مقدار دما روی دیواره‌ها بیشترین مقدار را دارد و این مقدار با دور شدن از ناحیه مجاور دیواره، کاهش پیدا می‌کند و با توجه به این که جهت انتقال گرما از ناحیه گرم‌تر به ناحیه سردتر است، انتقال حرارت از دیواره به سیال انجام می‌شود. با توجه به رابطه‌ی دمای بی‌بعد، وجود مقادیر منفی دما درون کانال نشان دهنده‌ی آن است که دمای سیال از دمای دیواره کم‌تر می‌باشد.

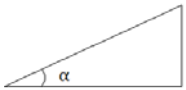
در ادامه‌ی این بخش جدول ۴-۴ و ۵-۴، جهت صحت‌سنجی نتایج به‌دست‌آمده در پژوهش حاضر تنظیم گردیده است. در جدول ۴-۴ مقادیر عدد ناسلت، برای مثلث‌های متساوی الساقین، با نتایج ارائه شده در مطالعه‌ی شاه [۲] و مطالعه‌ی اسپارو و حاجی‌شیخ [۸] مورد مقایسه قرار گرفته و درصد خطای حاصل از این مقایسه نیز به ترتیب با ϵ_1 و ϵ_2 در جدول نشان داده شده است. با توجه به جدول ۴-۴، بیشترین مقدار عدد ناسلت برای مثلث‌های متساوی الساقین، مربوط به زاویه‌ی 60° درجه است. در جدول ۵-۴ نیز مقایسه‌ای بین مقادیر ناسلت به‌دست‌آمده در این تحقیق برای مثلث‌های

قائم‌الزاویه و مقادیر ارائه‌شده توسط اسپارو و حاجی شیخ [۸]، صورت گرفته و درصد خطای حاصل از این مقایسه نیز با ϵ در جدول (۴-۵) ارائه شده است. همچنین در بین مثلث‌های قائم‌الزاویه نیز، بیشترین مقدار عدد ناسلت مربوط به زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌باشد. مشاهده نتایج به‌دست‌آمده و مقایسه آن‌ها با اطلاعات موجود، بیان‌گر دقت بسیار خوب روش ریتز در حل معادله‌ی دما و صحت مقادیر به‌دست‌آمده است.

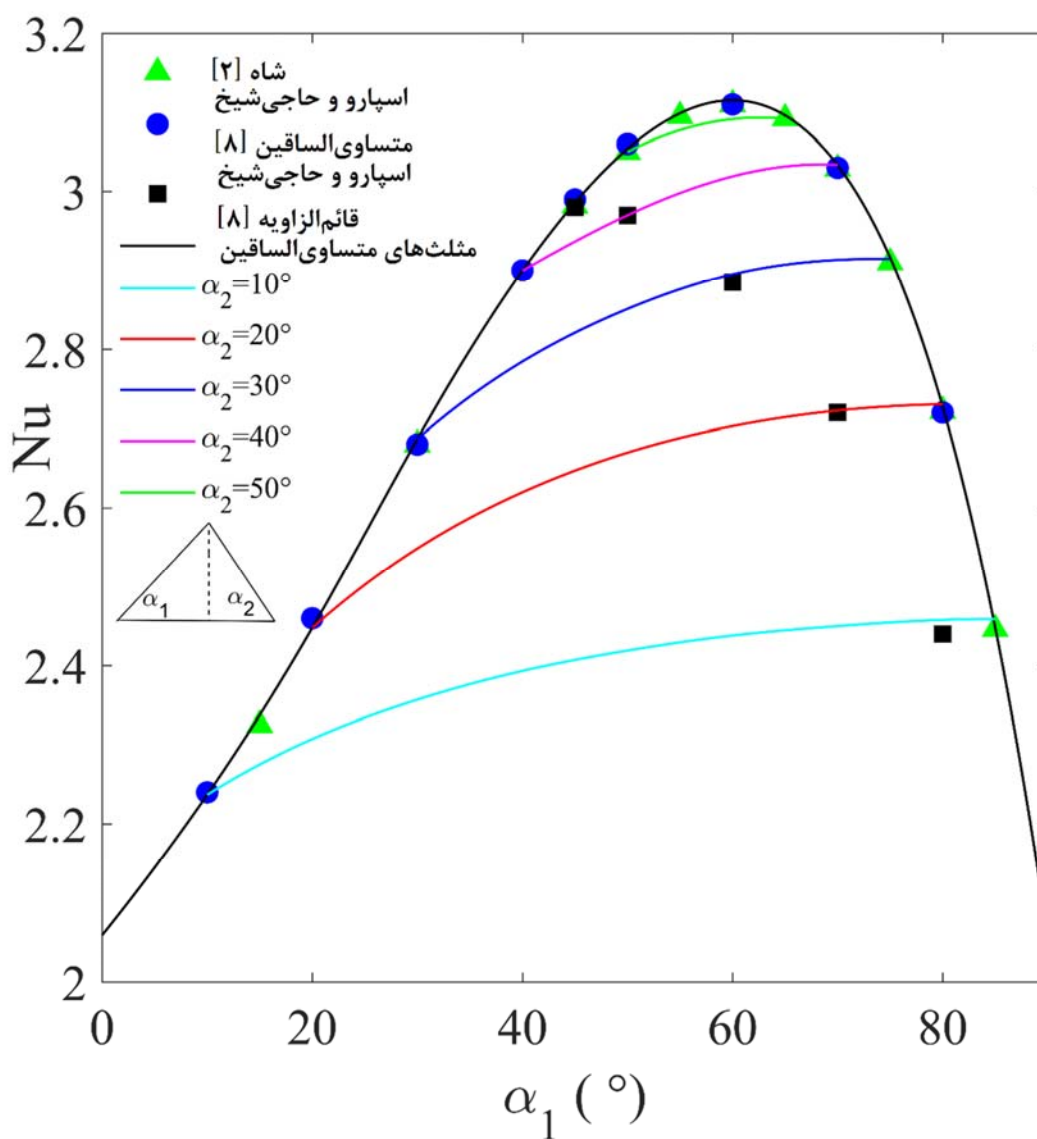
جدول ۴-۴. مقایسه عدد ناسلت برای مثلث‌های متساوی‌الساقین در حالت $Br=0$

زاویه رأس					
شاه [۲]	اسپارو و حاجی شیخ [۸]	تحقیق حاضر	ϵ_1 (%)	ϵ_2 (%)	
۱۰	۲.۴۵	۲.۴۶	۰.۴	—	
۲۰	۲.۷۲	۲.۷۲	۰.۴	۰.۴	
۳۰	۲.۹۱	۲.۹۱	۰.۲	۰.۲	
۴۰	۳.۰۳	۳.۰۳	—	—	
۵۰	۳.۰۹	۳.۱۰	—	۰.۳	
۶۰	۳.۱۱	۳.۱۱	—	—	
۷۰	۳.۱	۳.۱	—	—	
۸۰	۳.۰۵	۳.۰۶	—	۰.۳	
۹۰	۲.۹۸	۲.۹۹	—	۰.۳	
۱۰۰	—	۲.۹	—	—	
۱۲۰	۲.۶۸	۲.۶۸	—	—	
۱۴۰	—	۲.۴۶	—	۰.۸	
۱۵۰	۲.۳۳	۲.۳۲	—	۰.۴	
۱۶۰	—	۲.۲۴	—	۰.۴	

جدول ۴-۵. مقایسه عدد ناسلت برای مثلث‌های قائمه در حالت $Br=0$

زاویه رأس	اسپارو و حاجی شیخ [۸]	تحقیق حاضر	ϵ (%)
			
۱۰	۲.۴۴	۲.۴۵	۰.۴
۲۰	۲.۷۲	۲.۷۲	—
۳۰	۲.۸۸	۲.۸۹	۰.۳
۴۰	۲.۹۷	۲.۹۷	—
۴۵	۲.۹۸	۲.۹۸	—
۵۰	۲.۹۷	۲.۹۷	—
۶۰	۲.۸۸	۲.۸۹	۰.۳
۷۰	۲.۷۲	۲.۷۲	—
۸۰	۲.۴۴	۲.۴۵	۰.۴

شکل ۴-۲۰، مقادیر عدد ناسلت را برای حالت‌های مختلف هندسه‌ی مثلث، در شرایطی که $Br=0$ نشان می‌دهد. مقادیری که در مطالعات شاه [۲] و اسپارو و حاجی شیخ [۸] به‌دست‌آمده نیز جهت مقایسه در این شکل ارائه شده است که هدف از آن، نشان دادن دقت بسیار مناسب روند حل مطالعه-ی حاضر است. این شکل برحسب مقادیر α_1 و α_2 رسم شده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر مربوط به مثلث‌های متساوی‌الساقین، بر روی مرز شکل حضور دارند. با افزایش زاویه‌های مثلث و پهن‌تر شدن مقطع، عدد ناسلت افزایش می‌یابد. به‌علاوه بیشترین مقدار ناسلت میان مثلث‌هایی که شامل زاویه‌ی α_2 یکسان هستند، مربوط به حالت مثلث متساوی‌الساقین با زاویه رأس α_2 است. همچنین بیشترین مقدار عدد ناسلت در بین حالت‌های مختلف مثلث نیز مربوط به مثلث متساوی-الاضلاع است.

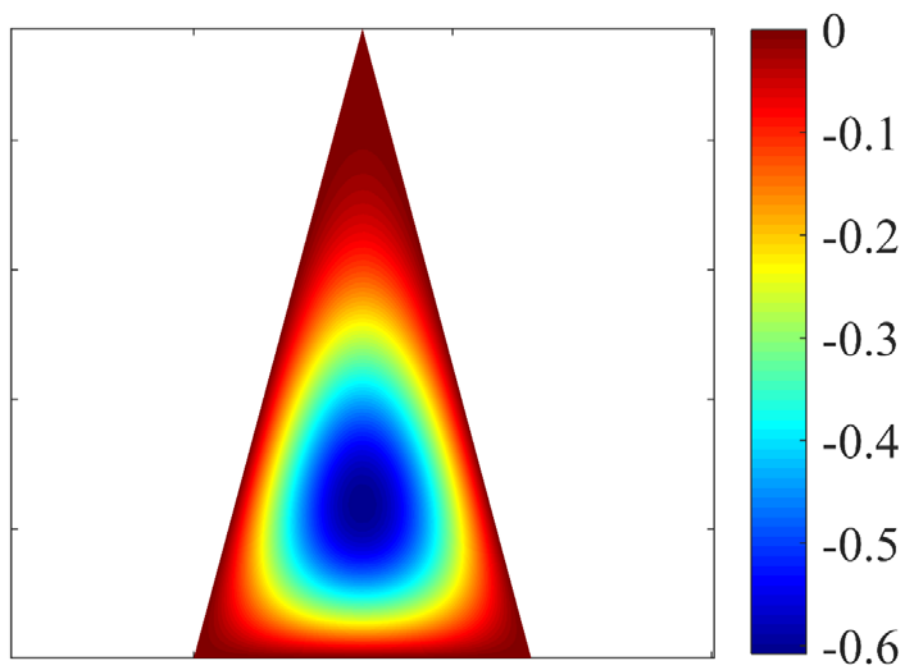


شکل ۴-۲. عدد ناسلت برای مثلث‌های با زوایای دلخواه در حالت $Br=0$

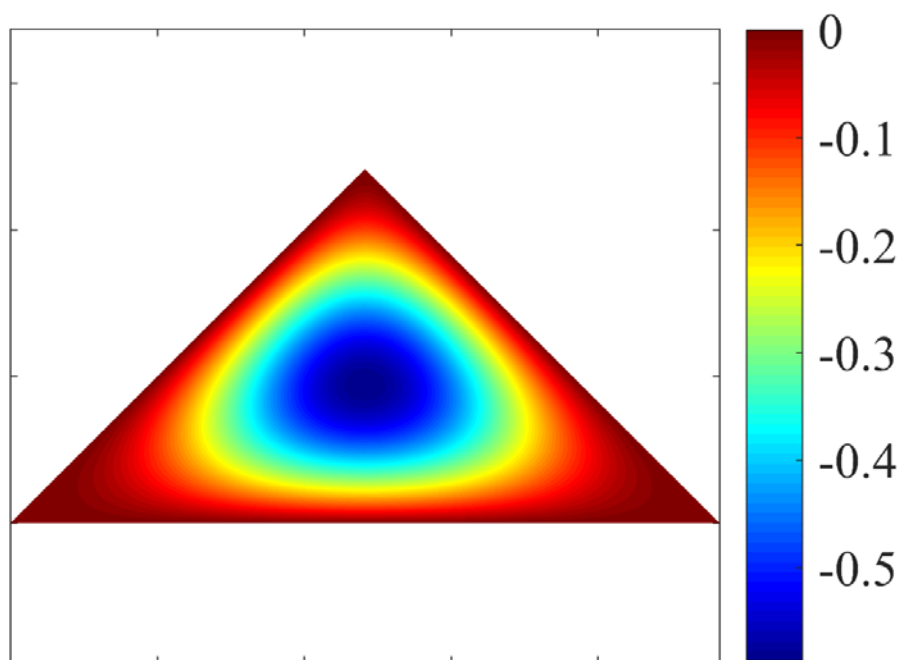
در ادامه نیز جدول مربوط به مقادیر عدد ناسلت، برای حالت $Br = 0$ ، جهت سهولت دسترسی محققین به این مقادیر ارائه شده است که قطر اصلی آن نیز مربوط به مقادیر مثلث‌های متساوی-الساقین می‌باشد. لازم به ذکر است که زوایای $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ و $\alpha_1 = \alpha_2 = 90$ قابل محاسبه نبوده و مقادیر متناظر با این زوایا، صرفاً جهت سهولت در محاسبات درونیابی، از مطالعات موجود گذشته در جدول ۴-۶ ذکر شده است. همچنین شکل‌های ۴-۲۱ تا ۴-۲۶ کانتور دما را برای برخی مقاطع مثلثی نشان می‌دهند.

جدول ۴-۶. مقادیر ناسلت برای مثلث‌های با زوایای دلخواه در حالت $Br=0$

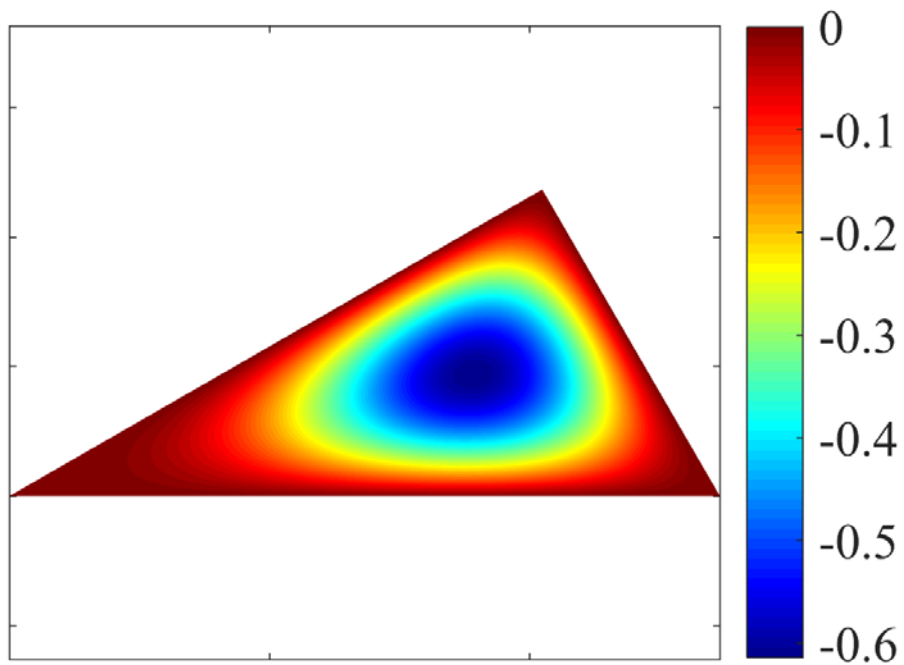
α_1	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
α_2	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
۰	۲.۰۶	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
۱۰	—	۲.۲۳	۲.۳۰	۲.۳۵	۲.۳۹	۲.۴	۲.۴۱	۲.۴۳	۲.۴۴	۲.۴۵	۲.۴۵
۲۰	—	۲.۳۰	۲.۴۴	۲.۵۵	۲.۶۲	۲.۶۵	۲.۶۷	۲.۷	۲.۷۲	۲.۷۳	۲.۷۲
۳۰	—	۲.۳۵	۲.۵۵	۲.۶۸	۲.۷۸	۲.۸۲	۲.۸۵	۲.۸۹	۲.۹۱	۲.۹۱	۲.۸۹
۴۰	—	۲.۳۹	۲.۶۲	۲.۷۸	۲.۹	۲.۹۴	۲.۹۷	۳.۰۲	۳.۰۳	۳.۰۲	۲.۹۷
۴۵	—	۲.۴۰	۲.۶۵	۲.۸۲	۲.۹۴	۲.۹۸	۳.۰۲	۳.۰۶	۳.۰۷	۳.۰۵	۲.۹۸
۵۰	—	۲.۴۱	۲.۶۷	۲.۸۵	۲.۹۷	۳.۰۲	۳.۰۵	۳.۰۹	۳.۰۹	۳.۰۵	۲.۹۷
۶۰	—	۲.۴۳	۲.۷	۲.۸۹	۳.۰۲	۳.۰۶	۳.۰۹	۳.۱۱	۳.۰۹	۳.۰۲	۲.۸۹
۷۰	—	۲.۴۴	۲.۷۲	۲.۹۱	۳.۰۳	۳.۰۷	۳.۰۹	۳.۰۹	۳.۰۳	۲.۹۱	۲.۷۲
۸۰	—	۲.۴۵	۲.۷۳	۲.۹۱	۳.۰۲	۳.۰۵	۳.۰۵	۳.۰۲	۲.۹۱	۲.۷۳	۲.۴۵
۹۰	—	۲.۴۵	۲.۷۲	۲.۸۹	۲.۹۷	۲.۹۸	۲.۹۷	۲.۸۹	۲.۷۲	۲.۴۵	۲.۰۶



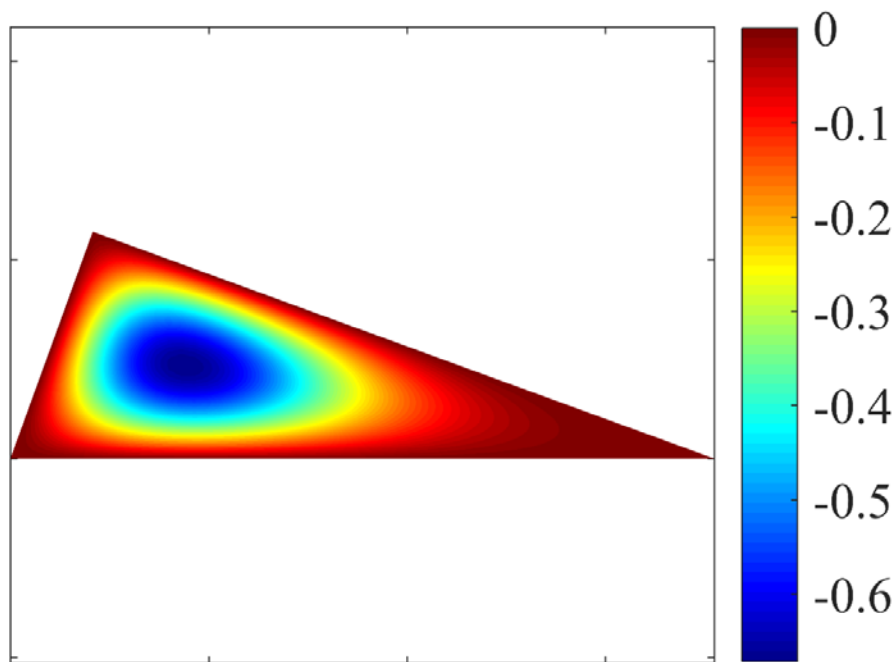
شکل ۴-۲۱. کانتور توزیع دما در مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس ۳۰ درجه



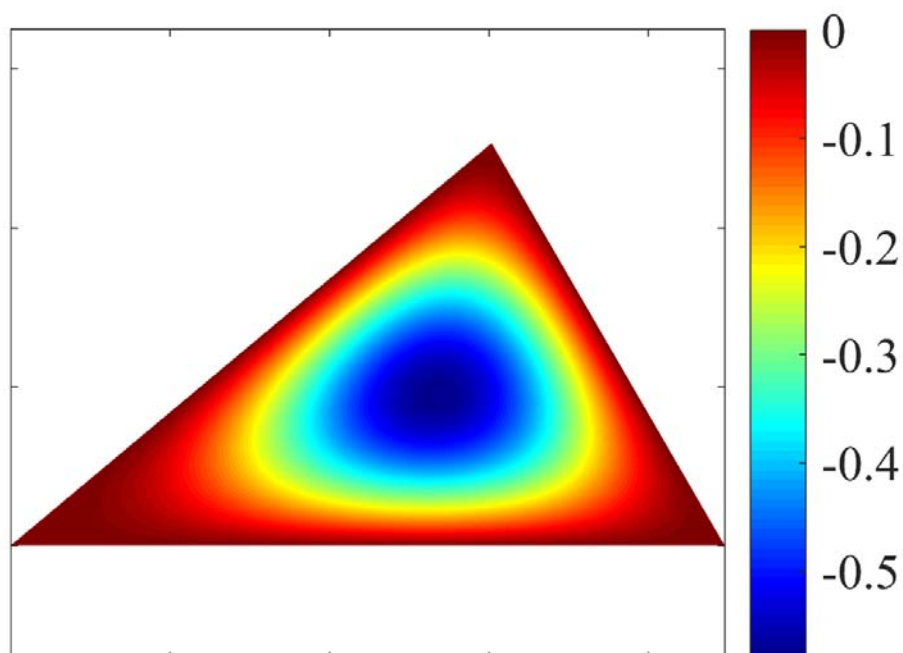
شکل ۴-۲۲. کانتور توزیع دما در مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس ۹۰ درجه



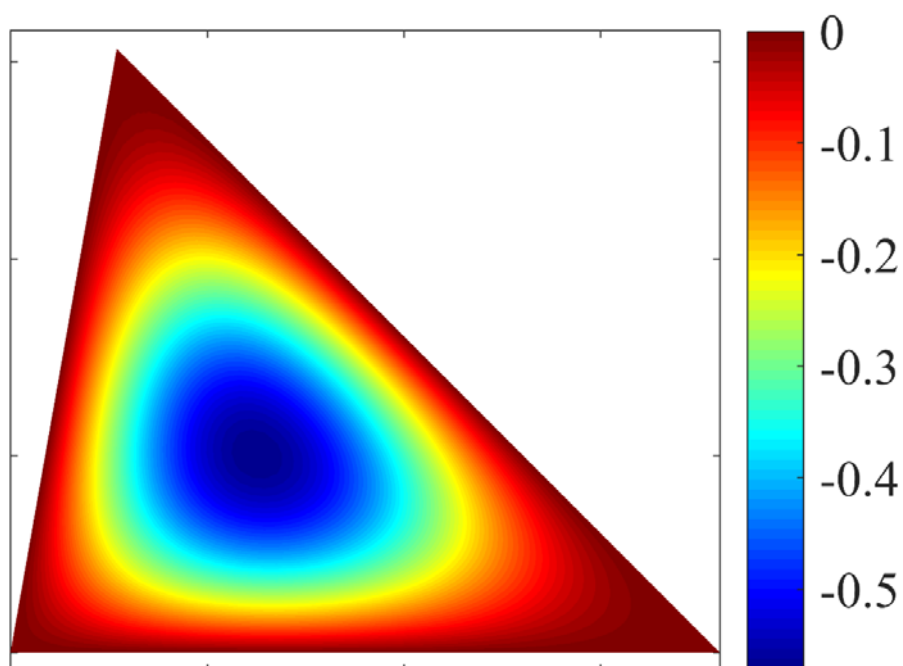
شکل ۴-۲۳. کانتور توزیع دما در مقطع قائم الزاویه با زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه



شکل ۴-۲۴. کانتور توزیع دما در مقطع قائم الزاویه با زوایای ۲۰ و ۷۰ درجه



شکل ۴-۲۵. کانتور توزیع دما در مقطع مثلثی با زوایای ۸۰، ۶۰ و ۴۰ درجه



شکل ۴-۲۶. کانتور توزیع دما در مقطع مثلثی با زوایای ۸۰، ۵۵ و ۴۵ درجه

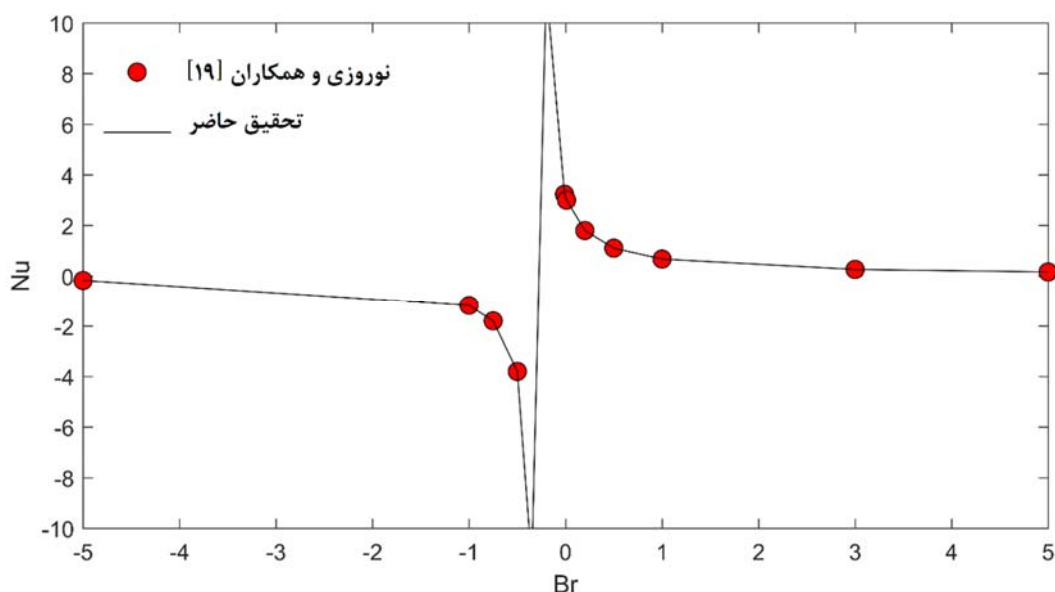
۴-۳-۳ عدد ناسلت برای حالت $Br \neq 0$

در این بخش به نتایج حاصل از حل معادله‌ی انرژی، با در نظر گرفتن اتلاف لزجت پرداخته خواهد

شد. برای حالتی که عدد برینکمن مخالف با صفر باشد، تأثیرات لزجت در سیال لحاظ می‌شود. اعمال این اثر، نحوه انتقال حرارت و توزیع دما سیال درون کانال را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بازه‌ی تغییرات عدد برینکمن می‌تواند از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد. نوروزی و همکارانش [۱۹] در یک حل دقیق، نتایجی را برای انتقال حرارت سیال در کانال‌های با سطح مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع، با در نظر گرفتن اتلاف لزجت، در قالب کانتورها و نمودارهایی ارائه دادند. برای محاسبه عدد ناسلت با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برینکمن، آن‌ها رابطه‌ای را به صورت زیر بیان کردند.

$$Nu = \frac{308}{9(40Br + 11)} \quad (۱-۴)$$

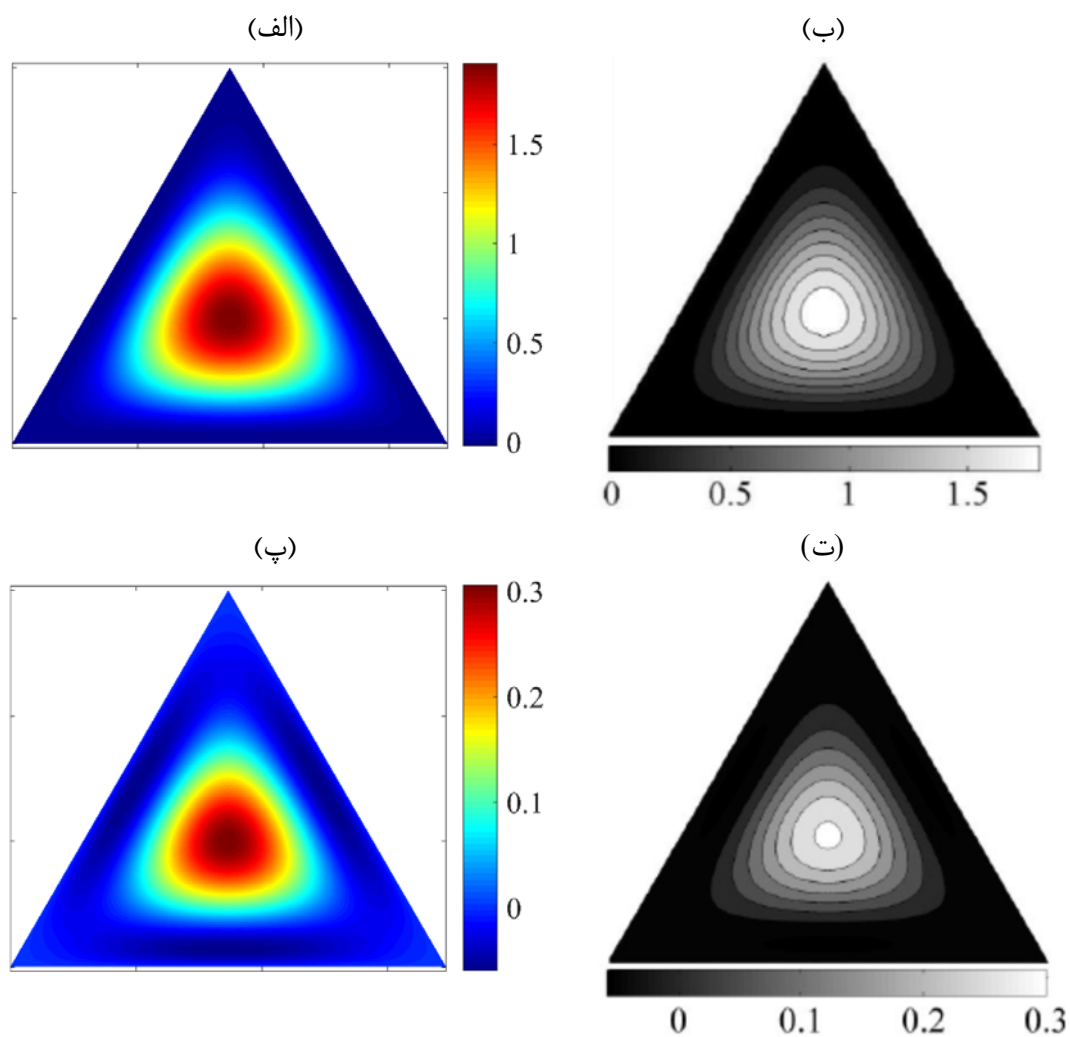
شکل زیر مقادیر ناسلت را به ازای اعداد مختلف برینکمن برای مقطع متساوی‌الاضلاع نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲۷. عدد ناسلت برای اعداد برینکمن مختلف در مقطع متساوی‌الاضلاع

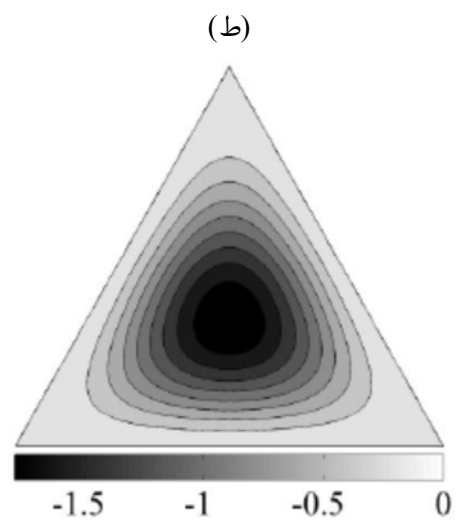
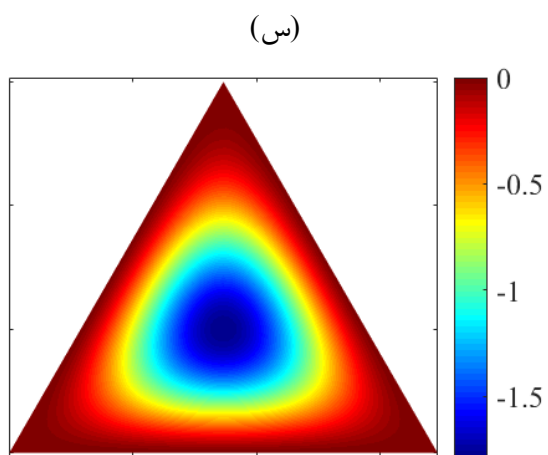
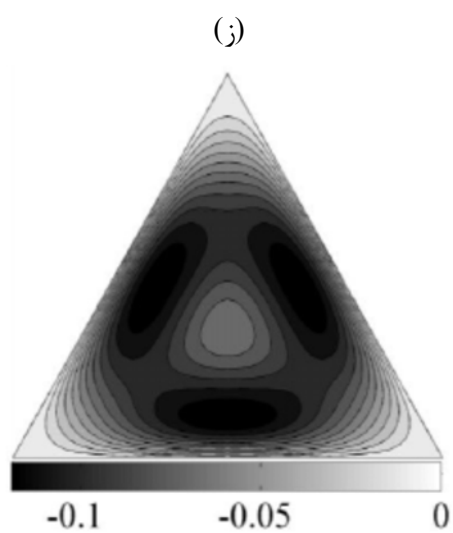
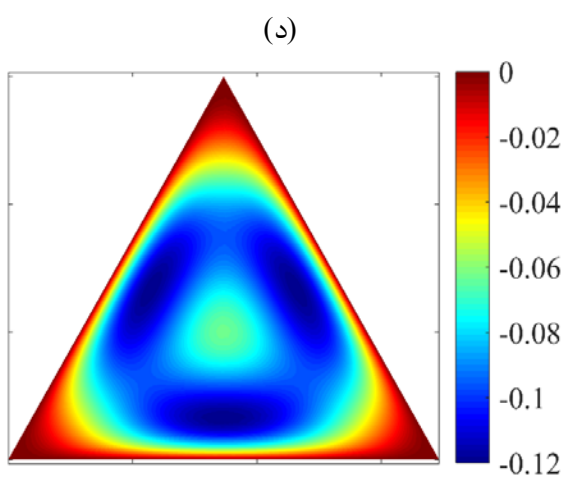
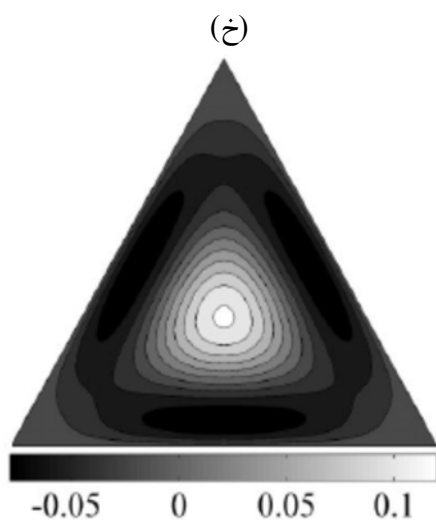
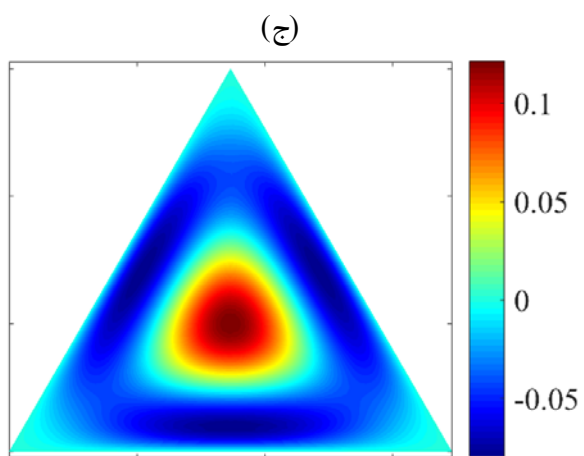
شکل ۴-۲۷، مقایسه‌ای است بین مقادیر ناسلت محاسبه شده در تحقیق حاضر و مقادیری که نوروزی و همکارانش [۱۹] برای مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع با اعداد برینکمن مختلف ارائه دادند. همانطور که در شکل دیده می‌شود، حل حاضر از دقت بسیار مناسبی برخوردار است و مقادیر به دست آمده توسط روش ریتز، تطابق بسیار مناسبی با مقادیر حاصل از حل دقیق دارند.

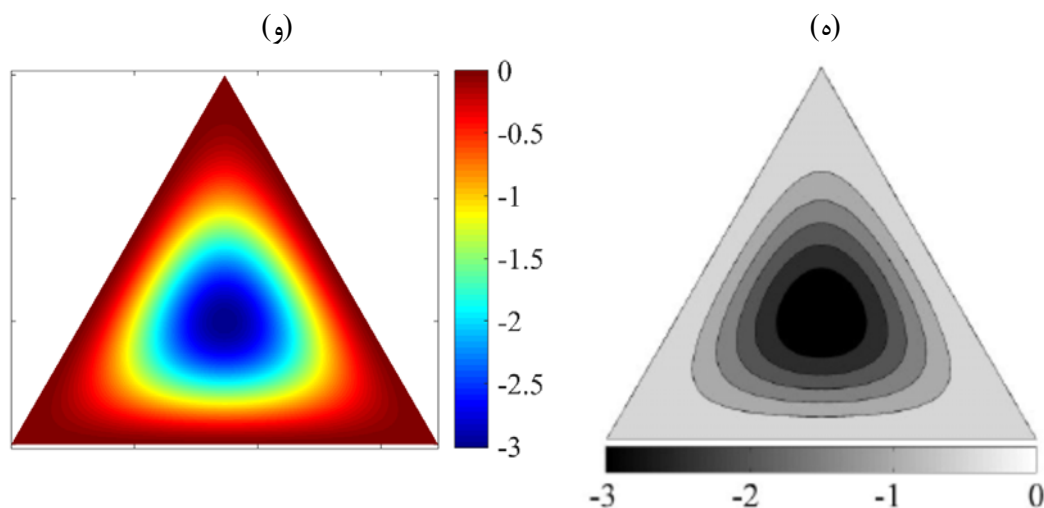
شکل ۴-۲۸، توزیع دمای بی‌بعد را برای حالت خنک‌کننده^۷ (الف تا ز) و حالت گرم‌کننده^۸ (س تا ه) در مقایسه با مطالعه‌ی نوروزی و همکاران [۱۹] در سطح مقطع متساوی‌الاضلاع نشان می‌دهد.



^۷ Cooling Case

^۸ Heating Case

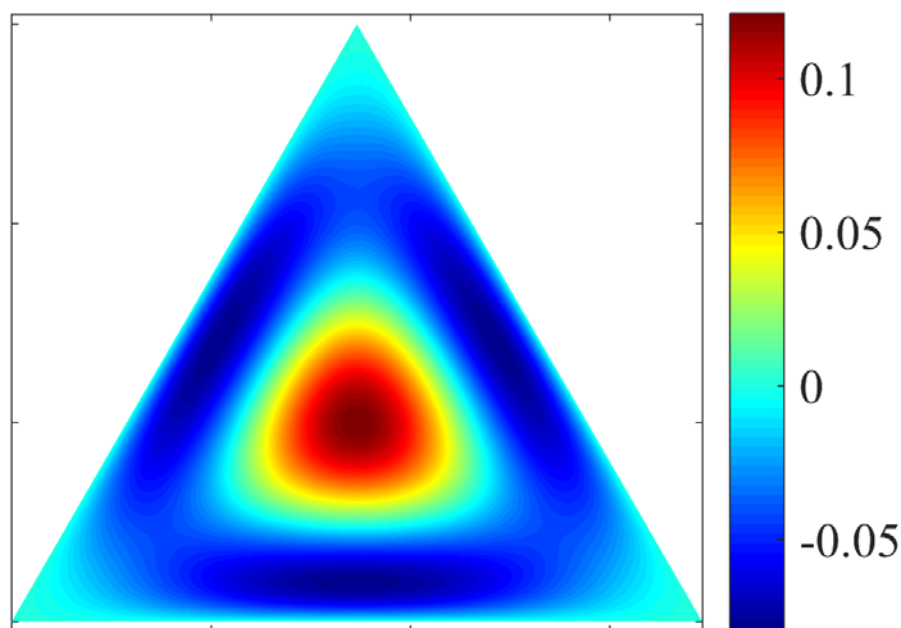




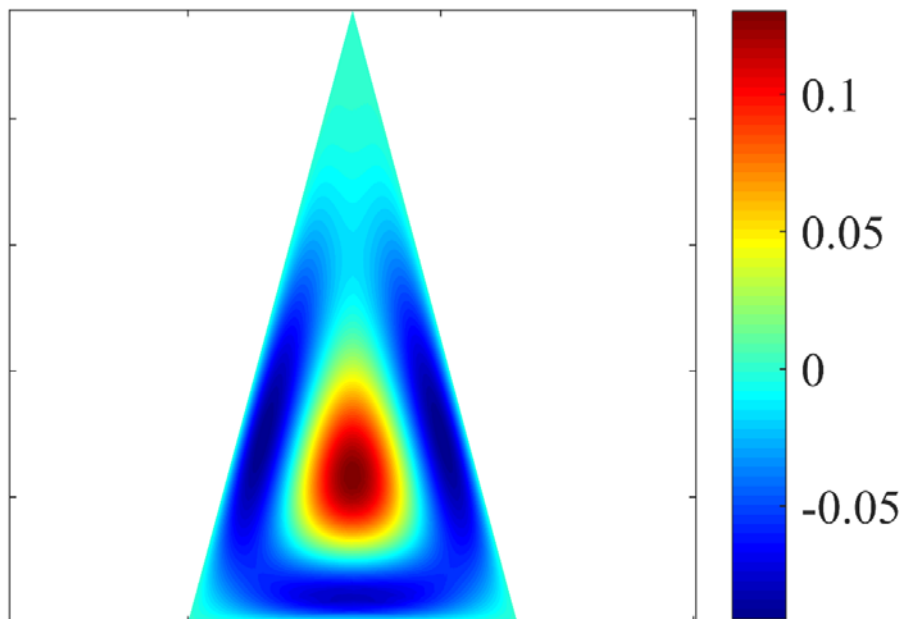
شکل ۴-۲۸. کانتور توزیع دما در مقطع متساوی الاضلاع ($Br \neq 0$) (الف) مطالعه‌ی حاضر $Br=-1$ ، (ب) مرجع $Br=-1$ [۱۹]، (پ) مطالعه‌ی حاضر $Br=-0.35$ ، (ت) مرجع $Br=-0.35$ [۱۹]، (ج) مطالعه‌ی حاضر $Br=-0.275$ ، (خ) مرجع $Br=-0.275$ [۱۹]، (د) مطالعه‌ی حاضر $Br=-0.2$ ، (ز) مرجع $Br=-0.2$ [۱۹]، (س) مطالعه‌ی حاضر $Br=0.5$ ، (ط) مرجع $Br=0.5$ [۱۹]، (و) مطالعه‌ی حاضر $Br=1$ ، (ه) مرجع $Br=1$ [۱۹].

همان‌طور که در شکل ۴-۲۸ (س تا ه) (حالت گرم کننده) مشاهده می‌شود، مقادیر منفی T در اعداد برینکمن مثبت ($Br \geq 0$) به چشم می‌خورد. وجود مقادیر منفی نشان می‌دهد که دمای دیواره بیشتر از دمای سیال است و انتقال حرارت نیز مشابه حالت $Br=0$ ، از دیواره به سیال صورت می‌گیرد. همچنین با افزایش مقدار برینکمن، اختلاف دمای میانگین سیال و دیواره نیز افزایش می‌یابد. در شکل ۴-۲۷، مشاهده می‌شود که برای مقادیر $Br \geq 0$ ، با افزایش مقدار برینکمن و بیشتر شدن اختلاف دمای میانگین سیال و دمای دیواره، مقدار ناسلت کاهش پیدا می‌کند و به مقدار حدی صفر، نزدیک می‌شود. برای مقادیر منفی برینکمن (حالت خنک کننده) اما نحوه‌ی انتقال حرارت به این شکل نیست. با کم شدن مقدار برینکمن، در $Br=-0.2$ (شکل ۴-۲۸، (د) و (ز))، مشاهده می‌شود که مقدار دمای بی‌بعد سیال همچنان منفی، اما رو به افزایش است و اختلاف بین دمای میانگین سیال و دمای دیواره کاهش پیدا می‌کند. با کمتر شدن مقدار برینکمن، اختلاف میان دمای میانگین سیال و دمای دیواره کمتر شده، و این روند تا جایی که این دو دما به یکدیگر بسیار نزدیک شود ادامه می‌یابد. با

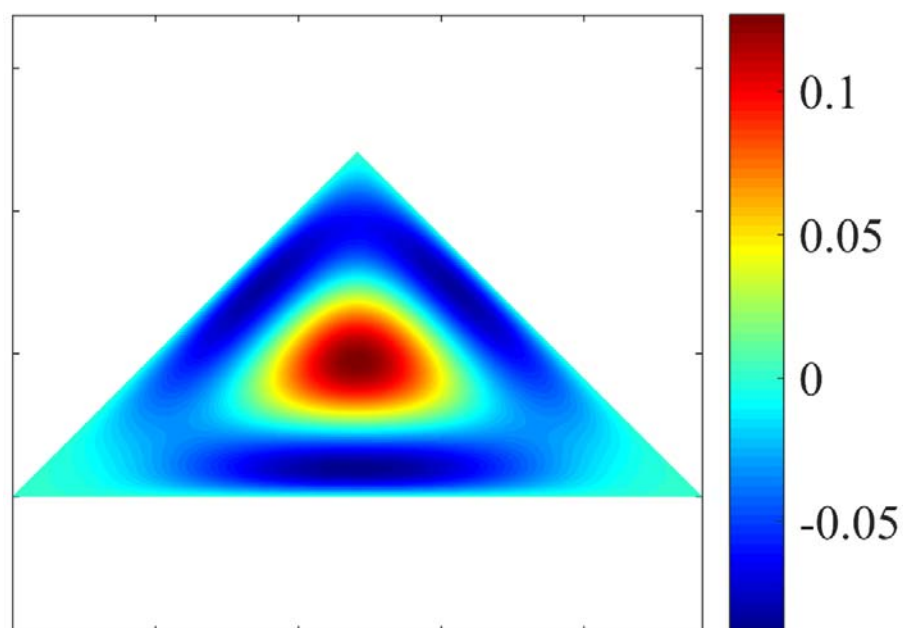
توجه به شکل ۴-۲۷ و رابطه‌ی ۴-۱۹]، نقطه بحرانی عدد برینکمن در $Br_c = -0.275$ به چشم می‌خورد که همان نقطه‌ای است که دمای میانگین سیال و دمای دیواره مقداری تقریباً برابر دارند. برای مقادیر $Br > -0.275$ ، در شکل ۴-۲۷، مشاهده می‌شود که ناسلت دارای مقادیر مثبت است. عدد مثبت ناسلت به آن معناست که انتقال حرارت از دیواره به سیال (در جهت شار حرارتی اعمال شده به دیواره) صورت می‌پذیرد. اختلاف دمای میانگین سیال و دمای دیواره در $Br_c = -0.275$ به کمترین مقدار خود می‌رسد که در این نقطه عدد ناسلت به بی‌نهایت میل می‌کند. با کمتر شدن مقدار برینکمن و افزایش دمای میانگین سیال، مقادیر ناسلت تغییر علامت داده و با علامت منفی مشاهده می‌شوند. عدد منفی ناسلت به آن معناست که انتقال حرارت از سیال به دیواره (در خلاف جهت اعمال شار به دیواره)، صورت می‌گیرد. همچنین مشاهده می‌شود با کمتر شدن مقدار برینکمن و در نتیجه افزایش اختلاف دمای میانگین سیال و دمای دیواره، عدد ناسلت به سمت صفر میل می‌کند (شکل ۴-۲۷). با بررسی نتایج دما برای حالت $Br \neq 0$ و مقایسه‌ی آن‌ها با نتایج حل دقیق، می‌توان به میزان دقت روش حل حاضر و صحت مقادیر به‌دست‌آمده پی برد. شکل‌های ۴-۲۹ تا ۴-۳۵، کانتور دما را در چند مقطع مثلثی برای اعداد برینکمن بحرانی نشان می‌دهد.



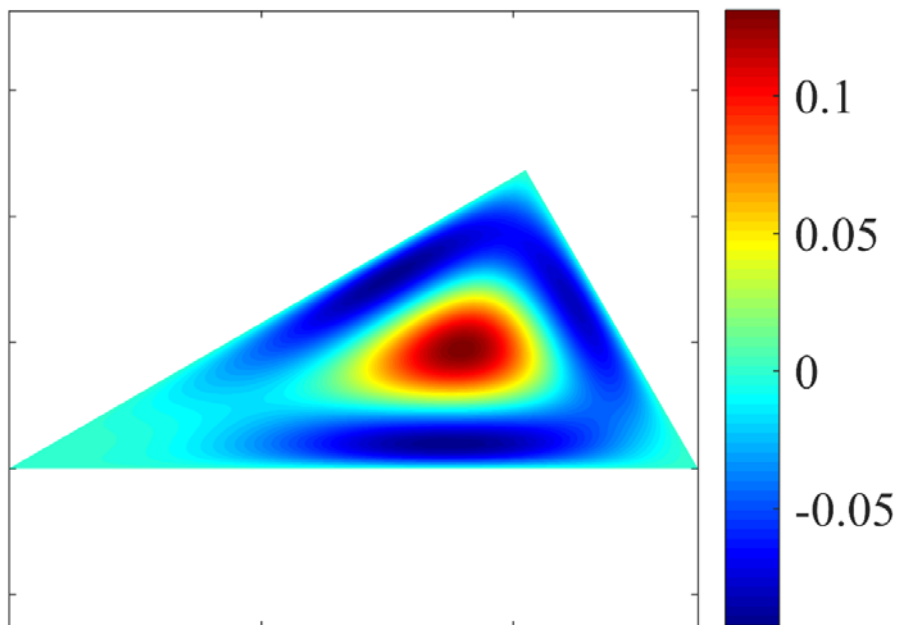
شکل ۴-۲۹. توزیع دما برای مقطع متساوی‌الاضلاع برای $Br = -0.275$



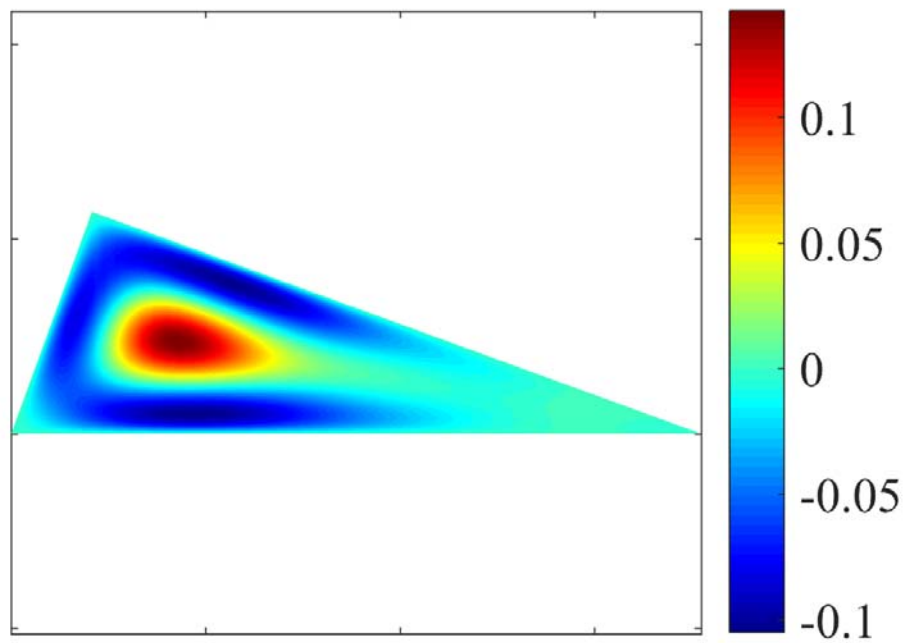
شکل ۴-۳۰. توزیع دما برای مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس ۳۰ درجه برای $Br=-0.283$



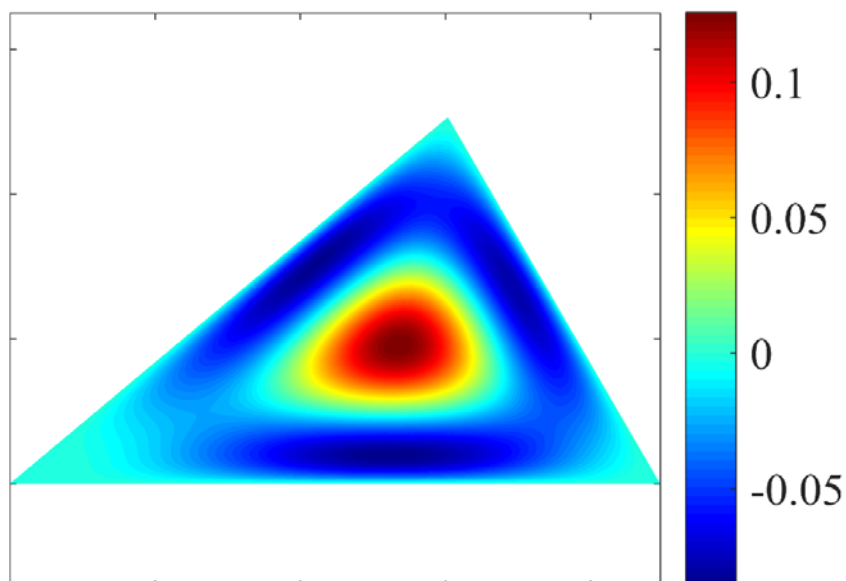
شکل ۴-۳۱. توزیع دما برای مقطع متساوی الساقین با زاویه رأس ۹۰ درجه برای $Br=-0.28$



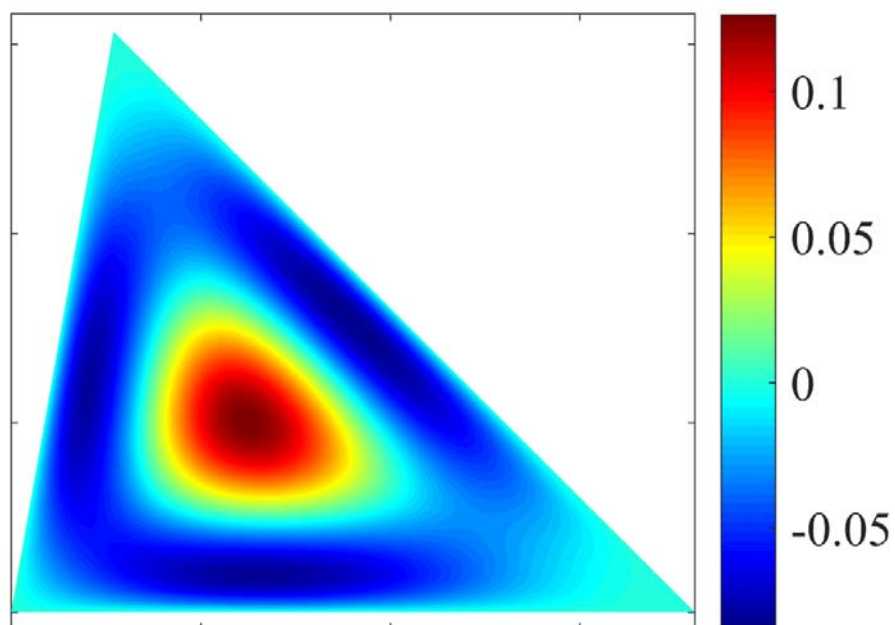
شکل ۴-۳۲. توزیع دما برای مقطع قائم‌الزاویه با زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه برای $Br=-0.284$



شکل ۴-۳۳. توزیع دما برای مقطع قائم‌الزاویه با زوایای ۲۰ و ۷۰ درجه برای $Br=-0.29$



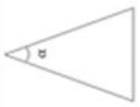
شکل ۴-۳۴. توزیع دما برای مقطع مثلثی با زوایای ۸۰، ۴۰ و ۶۰ درجه برای $Br = -0.279$



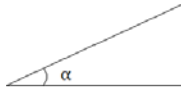
شکل ۴-۳۵. توزیع دما برای مقطع مثلثی با زوایای ۸۰، ۴۵ و ۵۵ درجه برای $Br = -0.279$

جداول ۴-۷ و ۴-۸، مقادیر ناسلت را در مقاطع متساوی الساقین و قائم الزاویه، به ازای اعداد برینکمن مختلف (حالت گرم کننده و حالت خنک کننده) نشان می‌دهد. در انتهای هر کدام از این جدول‌ها نیز، عدد برینکمن بحرانی برای سطح مقطع‌های مختلف بیان شده است.

جدول ۴-۷. عدد ناسلت در مثلث‌های متساوی‌الساقین برای اعداد مختلف برینکمن

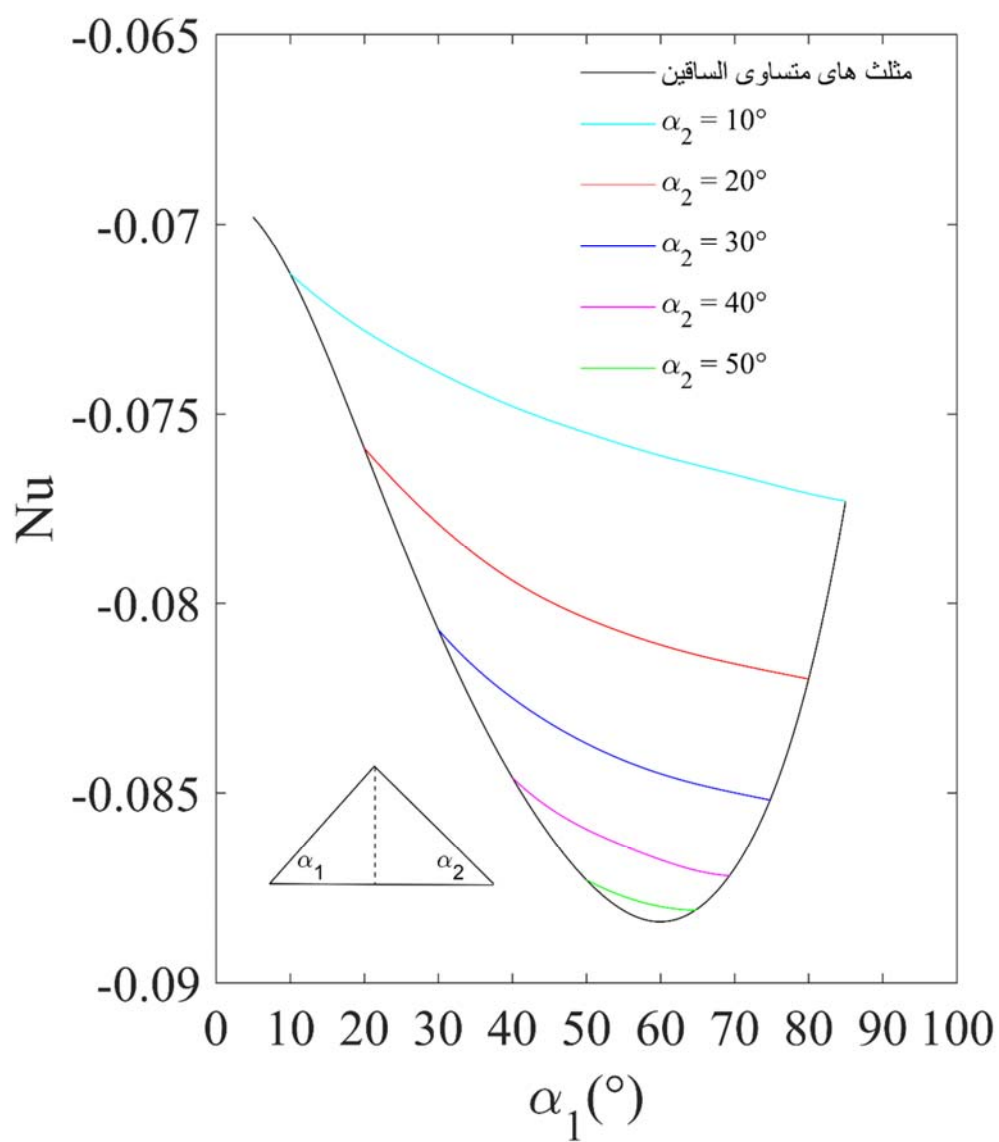
عدد برینکمن برای مثلث‌های متساوی‌الساقین													
													
۱۷۰	۱۵۰	۱۳۰	۱۱۰	۹۰	۸۰	۷۰	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰	۰
-۰.۱۴۴	-۰.۱۵۲	-۰.۱۶۲	-۰.۱۷	-۰.۱۷۷	-۰.۱۸	-۰.۱۸۱	-۰.۱۸۲	-۰.۱۸۱	-۰.۱۷۹	-۰.۱۷۵	-۰.۱۶۹	-۰.۱۵۸	-۰.۱۵
-۰.۹۸۲	-۱.۰۲۴	-۱.۰۸	-۱.۱۲۸	-۱.۱۶۴	-۱.۱۸	-۱.۱۸۴	-۱.۱۹	-۱.۱۸۴	-۱.۱۷۳	-۱.۱۵۲	-۱.۱۲	-۱.۰۶۶	-۱
-۱.۵۴۲	-۱.۶	-۱.۶۷۴	-۱.۷۳۸	-۱.۷۸۴	-۱.۸	-۱.۸۱	-۱.۸۱۳	-۱.۸۱	-۱.۸	-۱.۷۷	-۱.۷۲۳	-۱.۶۶	-۰.۷۵
-۳.۵۸۶	-۳.۶۵۱	-۳.۷۲۶	-۳.۷۸	-۳.۸۱۴	-۳.۸۲۶	-۳.۸۳۳	-۳.۸۴	-۳.۸۳۵	-۳.۸۲۶	-۳.۸۱	-۳.۸	-۳.۷۷	-۰.۵
۶.۰۶۵	۶.۷۷۸	۷.۹۲	۹.۲۱۲	۱۰.۴۰۹	۱۰.۸۸	۱۱.۲	۱۱.۳۲	۱۱.۱۸	۱۰.۷۳۴	۹.۹۲	۸.۷۶۶	۷.۳۲۹	-۰.۲
۲.۲۴۳	۲.۴۱۳	۲.۶۵۸	۲.۹	۳.۰۹۶	۳.۱۶۸	۳.۲۱۵	۳.۲۳۲	۳.۲۱۲	۳.۱۴۶	۳.۰۲۲	۲.۸۲۵	۲.۵۳۸	-۰.۰۱
۲.۱۰۳	۲.۲۶	۲.۴۸۴	۲.۷۰۴۶	۲.۸۸۳	۲.۹۴۸	۲.۹۹۱	۳	۲.۹۹	۲.۹۲۸	۲.۸۱۶	۲.۶۳۷	۲.۳۷۶	۰.۰۱
۱.۳۲۲	۱.۴۱	۱.۵۳۳	۱.۶۵	۱.۷۴۳	۱.۷۷۶	۱.۷۹۸	۱.۸	۱.۷۹۷	۱.۷۷	۱.۷۰۹	۱.۶۱۵	۱.۴۷۸	۰.۲
۰.۸۳۳	۰.۸۸۴	۰.۹۵۵	۱.۰۲۱	۱.۰۷۳	۱.۰۹۱	۱.۱۰۳	۱.۱۰۸	۱.۱۰۲۹	۱.۰۸۶	۱.۰۵۴	۱	۰.۹۲۶	۰.۵
۰.۵۱۶	۰.۵۴۶	۰.۵۸۷	۰.۶۲۵	۰.۶۵۴	۰.۶۶۴	۰.۶۷۱	۰.۶۷۴	۰.۶۷۱	۰.۶۶۲	۰.۶۴۳	۰.۶۱۴	۰.۵۷	۱
۰.۲۰۴	۰.۲۱۵	۰.۲۳	۰.۲۴۵	۰.۲۵۵	۰.۲۵۹	۰.۲۶۱	۰.۲۶۲	۰.۲۶۱	۰.۲۵۸	۰.۲۵۱	۰.۲۴	۰.۲۲۵	۲
۰.۱۲۷	۰.۱۳۴	۰.۱۴۴	۰.۱۵۲	۰.۱۵۹	۰.۱۶۱	۰.۱۶۲	۰.۱۶۳	۰.۱۶۲	۰.۱۶	۰.۱۵۶	۰.۱۵	۰.۱۴	۵
-۰.۳۱۲	۰.۳۰۵	-۰.۲۹۶	-۰.۲۸۷	-۰.۲۸	-۰.۲۷۸	-۰.۲۷۶	-۰.۲۷۵	-۰.۲۷۶	-۰.۲۷۸	-۰.۲۸۳	-۰.۲۹	-۰.۳۰۲	B_{7c}

جدول ۴-۸. عدد ناسلت در مثلث‌های قائم‌الزاویه برای اعداد مختلف برینکمن

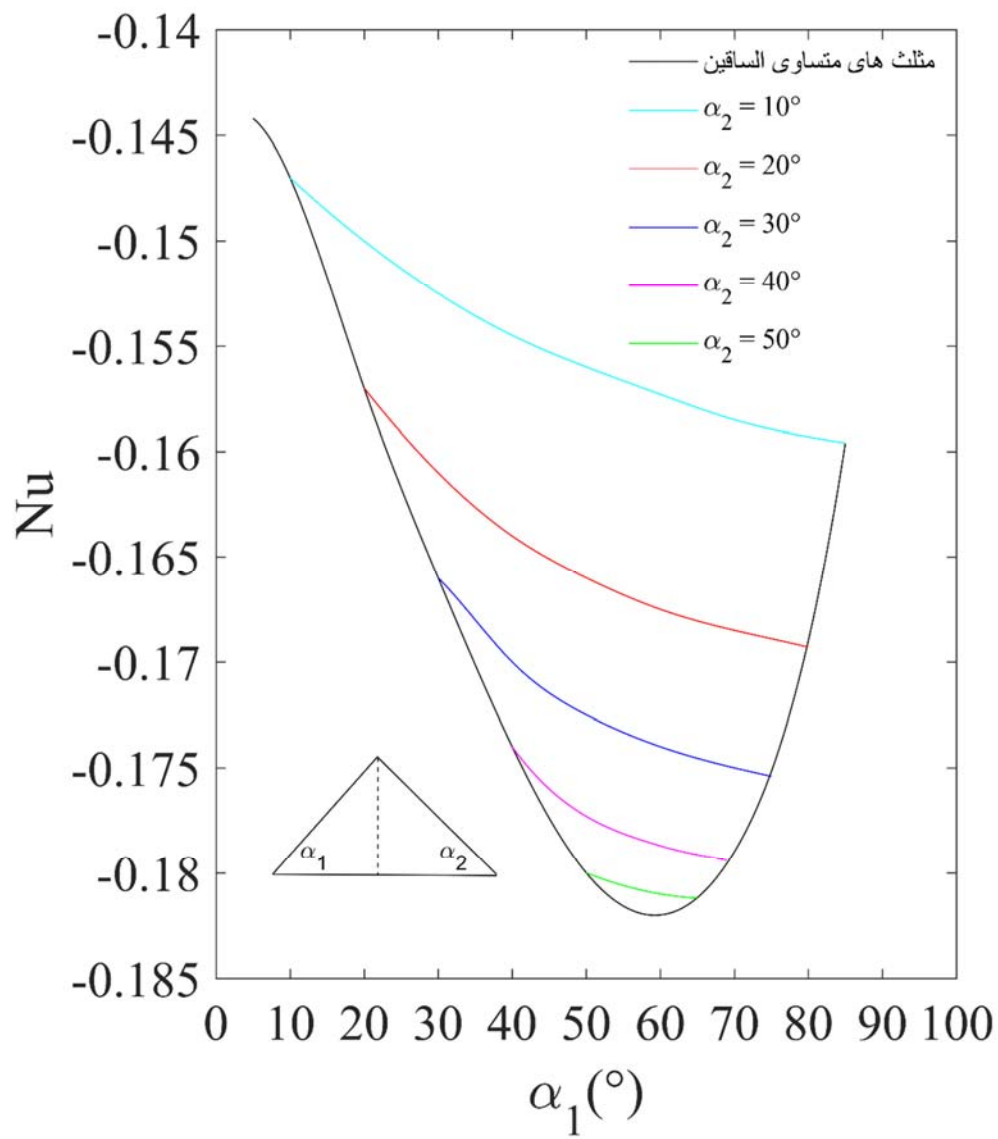
عدد ناسلت برای مثلث‌های قائم‌الزاویه 				عدد برینکمن
۴۰	۳۰	۲۰	۱۰	
-۰.۱۷۷	-۰.۱۷۴	-۰.۱۶۸	-۰.۱۵۹	-۵
-۱.۱۶۲	-۱.۱۴۸	-۱.۱۱۷	-۱.۰۷۴	-۱
-۱.۷۸۱	-۱.۷۶۳	-۱.۷۲۶	-۱.۶۷۷	-۰.۷۵
-۳.۸۱۳	-۳.۸۰۴	-۳.۷۹	-۳.۸۱۶	-۰.۵
۱۰.۳۳۸	۹.۷۸	۸.۷۰۷	۷.۱۷۹	-۰.۲
۳.۰۸۶	۲.۹۹۸	۲.۸۲	۲.۵۴۱	-۰.۰۱
۲.۸۷۳	۲.۷۹۴	۲.۶۳۲	۲.۳۸	۰.۰۱
۱.۷۳۸	۱.۶۹۸	۱.۶۱۴	۱.۴۸۳	۰.۲
۱.۰۷	۱.۰۴۸	۱	۰.۹۳	۰.۵
۰.۶۵۲	۰.۶۴	۰.۶۱۴	۰.۵۷۳	۱
۰.۲۵۵	۰.۲۵	۰.۲۴	۰.۲۲۶	۳
۰.۱۵۸	۰.۱۵۵	۰.۱۵	۰.۱۴۱	۵
-۰.۲۸	-۰.۲۸۳	-۰.۲۹	-۰.۳۰۴	Br_c

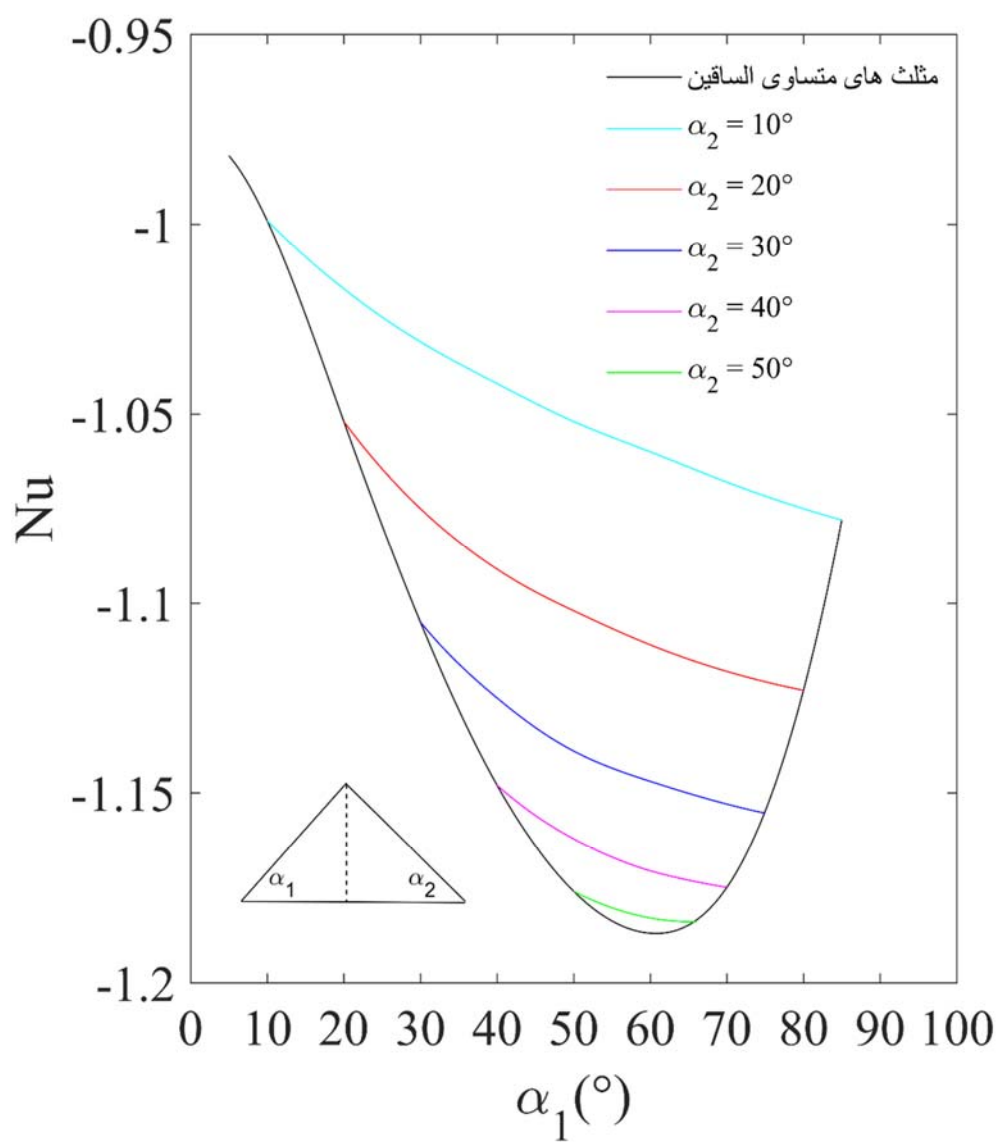
در جداول ۴-۷ و ۴-۸، تغییر علامت عدد ناسلت در قبل و بعد از نقطه‌ی برینکمن بحرانی به چشم می‌خورد. همان‌طور که اشاره شده است، علامت عدد ناسلت نشان‌دهنده‌ی جهت انتقال حرارت است. به این معنا که برای مقادیر منفی ناسلت، انتقال حرارت از سیال به دیواره (به دلیل بیشتر بودن دمای میانگین سیال نسبت به دمای دیواره کانال) و برای مقادیر مثبت ناسلت، انتقال حرارت از دیواره به سیال (به دلیل بیشتر بودن دمای دیواره نسبت به دمای میانگین سیال) صورت می‌گیرد.

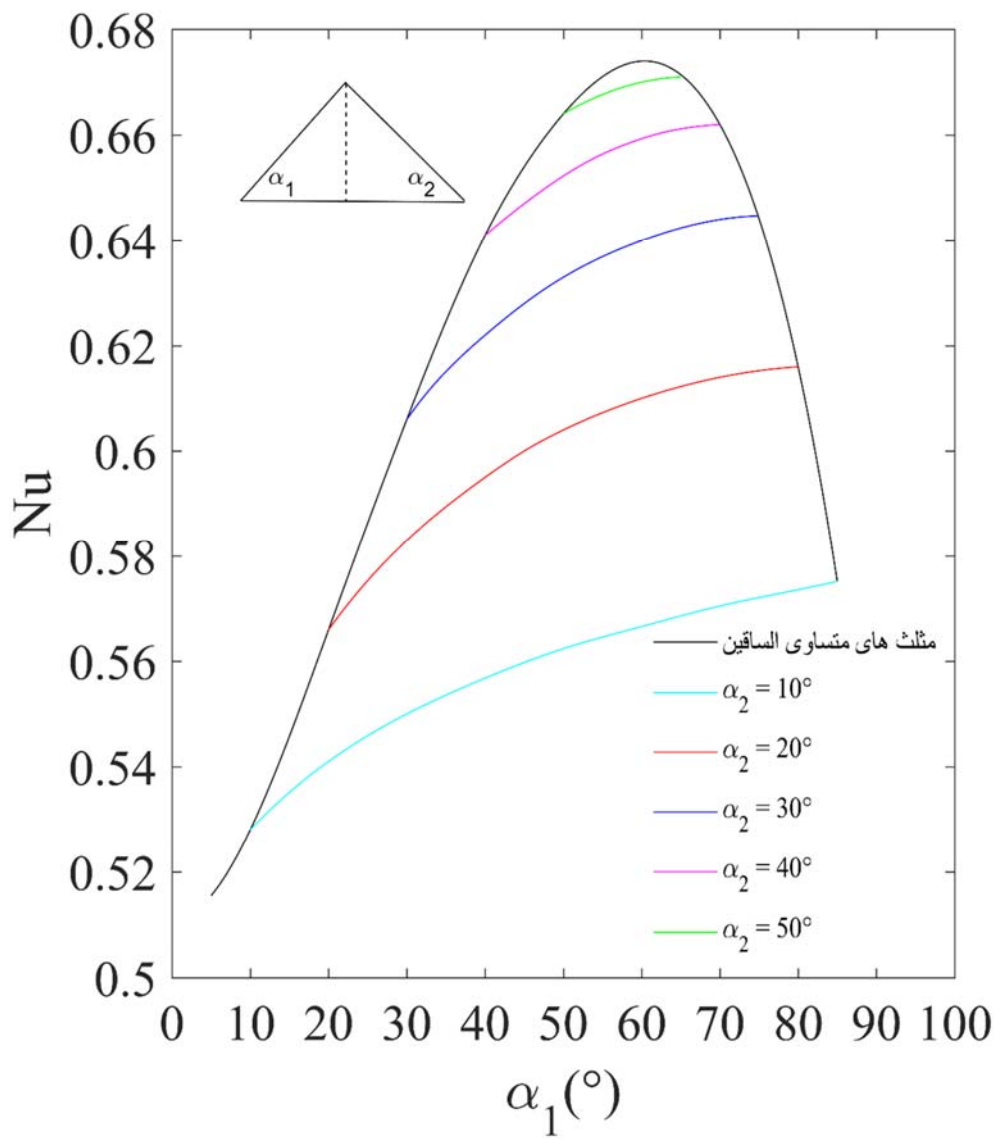
شکل‌های ۴-۳۶ تا ۴-۴۱ مقادیر عدد ناسلت را به ازای اعداد برینکمن مختلف، برای سطح مقطع-های مثلثی با زوایای دلخواه نشان می‌دهند. این نمودارها براساس زوایای α_1 و α_2 رسم شده‌اند.



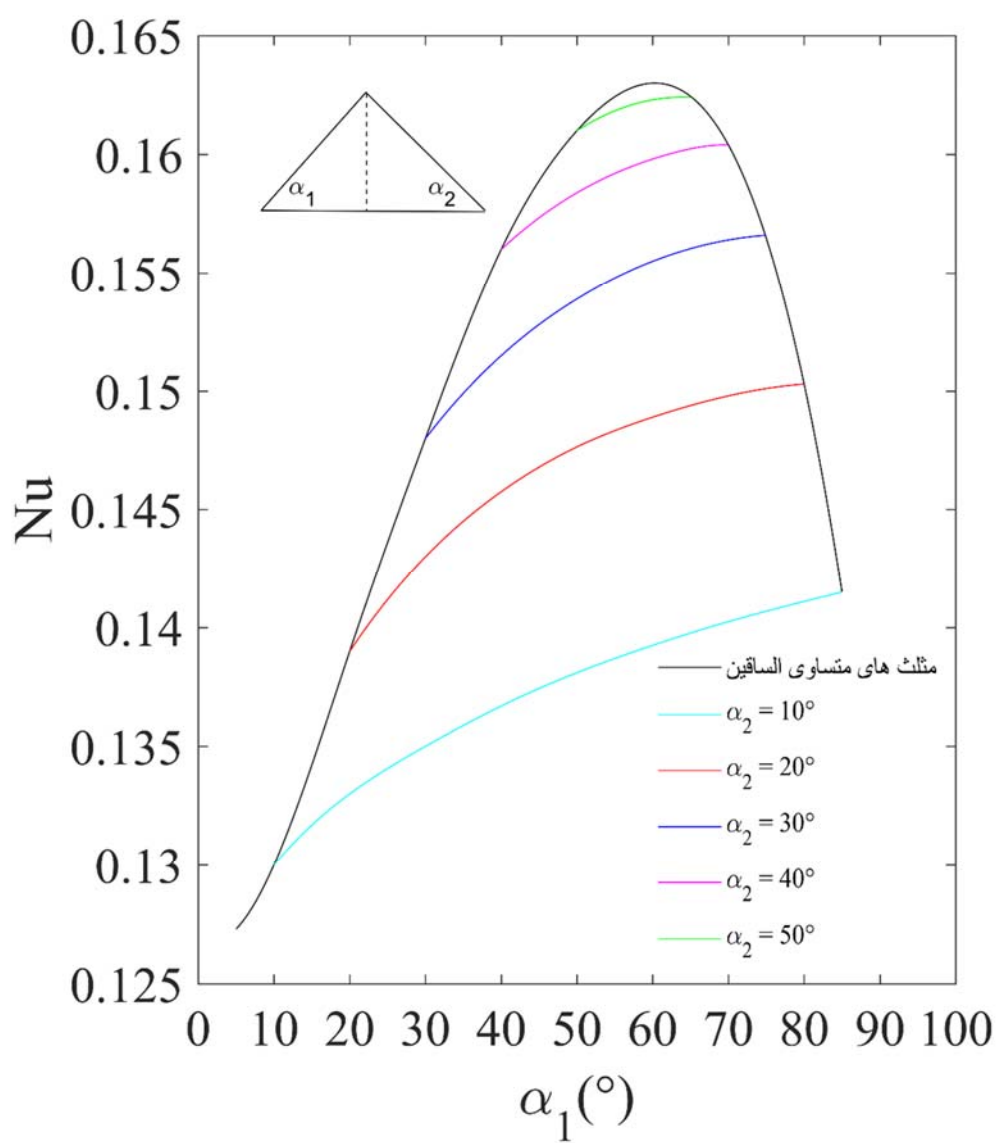
شکل ۴-۳۶. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br = -10$



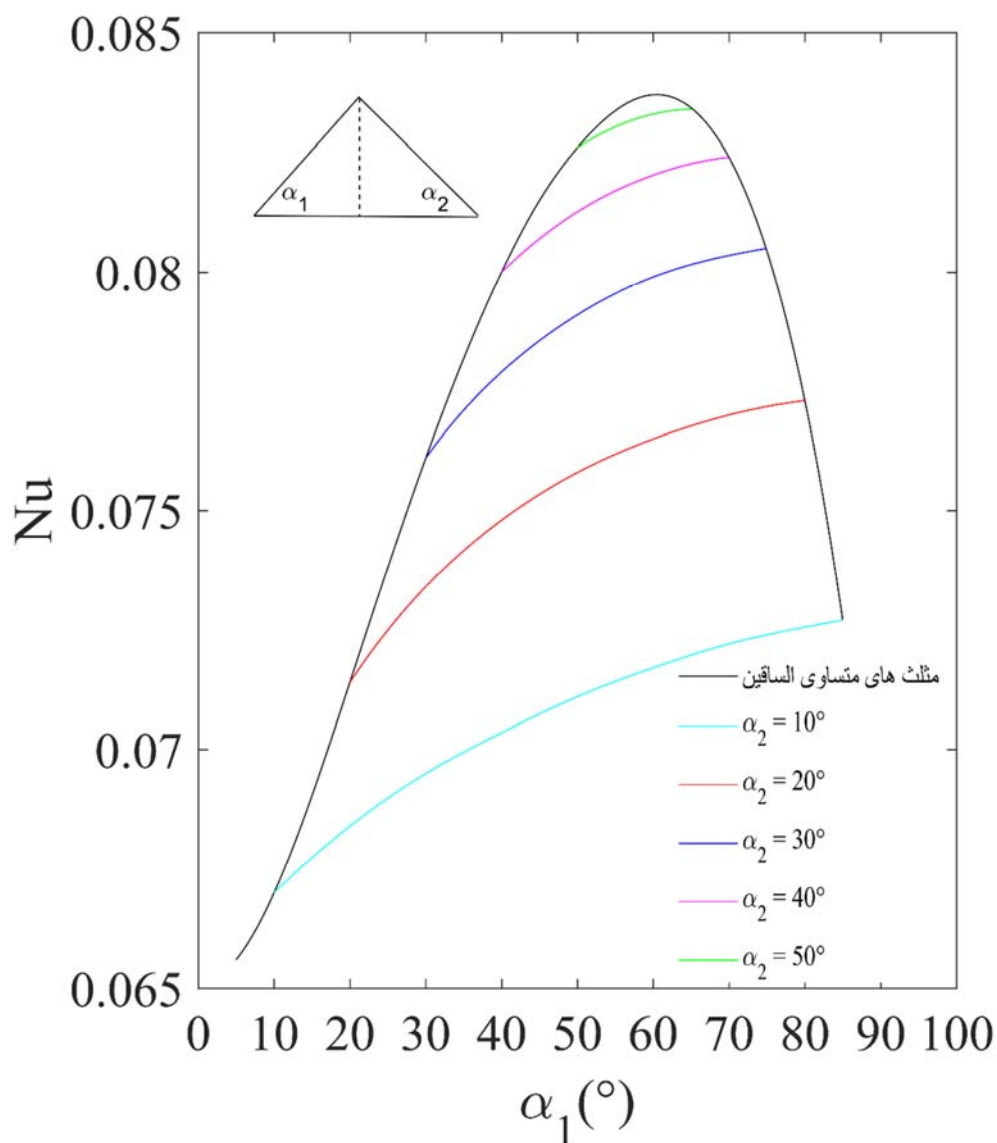




شکل ۴-۳۹. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br=1$



شکل ۴-۴. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br=5$



شکل ۴-۴۱. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br=10$

در شکل‌های ۴-۳۶ تا ۴-۴۱، عدد ناسلت برای اعداد مختلف برینکمن در سطح مقطع مثلثی با زوایای دلخواه نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که روند تغییرات عدد ناسلت در حالت خنک کننده، در خلاف جهت حالت گرم کننده می‌باشد. هرچه زوایای مثلث بازتر و مقطع مثلثی پهن‌تر شود، عدد ناسلت در حالت خنک کننده، کاهش و در حالت گرم کننده، افزایش می‌یابد. کمترین مقدار عدد ناسلت در حالت خنک کننده (و بیشترین مقدار در حالت گرم کننده) میان تمام مثلث‌هایی که یک زاویه α_2 یکسان دارند، مربوط به مثلث متساوی‌الساقینی است که در آن α_2 زاویه رأس مثلث

باشد. همچنین برای برینکمن‌های مختلف و در بین تمام هندسه‌های مثلث، کمترین مقدار ناسلت (در حالت خنک کننده) و بیشترین مقدار عدد ناسلت (در حالت گرم کننده)، مربوط به مثلث متساوی‌الاضلاع است. به‌علاوه مشاهده می‌شود هرچه مقدار برینکمن به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند، مقدار ناسلت کمتر شده و به صفر نزدیک‌تر می‌شود. در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش عدد برینکمن، عدد ناسلت کاهش می‌یابد.

در انتهای این فصل نیز مقادیر مربوط به عدد ناسلت برای مثلث‌هایی با زوایای دلخواه در قالب جدول ۴-۱۱ تا ۴-۱۶ ارائه شده است.

جدول ۴-۹. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br = -10$

α_1	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰
α_2									
۱۰	-۰/۰۷۱۳	-۰/۰۷۲۸	-۰/۰۷۴	-۰/۰۷۴۸	-۰/۰۷۵۳	-۰/۰۷۵۴	-۰/۰۷۶	-۰/۰۷۶۵	-۰/۰۷۷۱
۲۰	-۰/۰۷۲۸	-۰/۰۷۵۹	-۰/۰۷۷۹	-۰/۰۷۹۴	-۰/۰۷۹۹	-۰/۰۸۰۴	-۰/۰۸۱۱	-۰/۰۸۱۶	-۰/۰۸۲
۳۰	-۰/۰۷۴	-۰/۰۷۷۹	-۰/۰۸۰۷	-۰/۰۸۲۵	-۰/۰۸۳۲	-۰/۰۸۳۸	-۰/۰۸۴۶	-۰/۰۸۵	-۰/۰۸۵
۴۰	-۰/۰۷۴۸	-۰/۰۷۹۴	-۰/۰۸۲۵	-۰/۰۸۴۶	-۰/۰۸۵۴	-۰/۰۸۶	-۰/۰۸۷	-۰/۰۸۷۱	-۰/۰۸۷
۴۵	-۰/۰۷۵۳	-۰/۰۷۹۹	-۰/۰۸۳۲	-۰/۰۸۵۴	-۰/۰۸۶۲	-۰/۰۸۶۸	-۰/۰۸۷۵	-۰/۰۸۷۷	-۰/۰۸۷۵
۵۰	-۰/۰۷۵۴	-۰/۰۸۰۴	-۰/۰۸۳۸	-۰/۰۸۶	-۰/۰۸۶۸	-۰/۰۸۷	-۰/۰۸۸	-۰/۰۸۸	-۰/۰۸۷
۶۰	-۰/۰۷۶	-۰/۰۸۱۱	-۰/۰۸۴۶	-۰/۰۸۷	-۰/۰۸۷۵	-۰/۰۸۸	-۰/۰۸۸۴	-۰/۰۸۸	-۰/۰۸۷
۷۰	-۰/۰۷۶۵	-۰/۰۸۱۶	-۰/۰۸۵	-۰/۰۸۷۱	-۰/۰۸۷۷	-۰/۰۸۸	-۰/۰۸۸	-۰/۰۸۷۱	-۰/۰۸۵
۸۰	-۰/۰۷۷۱	-۰/۰۸۲	-۰/۰۸۵	-۰/۰۸۷	-۰/۰۸۷۵	-۰/۰۸۷	-۰/۰۸۷	-۰/۰۸۵	-۰/۰۸۲

جدول ۴-۱۰. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br = -5$

$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰
۱۰	-۰,۱۴۷	-۰,۱۵	-۰,۱۵۲	-۰,۱۵۴	-۰,۱۵۵	-۰,۱۵۶	-۰,۱۵۷	-۰,۱۵۸	-۰,۱۵۹
۲۰	-۰,۱۵	-۰,۱۵۷	-۰,۱۶۱	-۰,۱۶۴	-۰,۱۶۵	-۰,۱۶۶	-۰,۱۶۷	-۰,۱۶۸	-۰,۱۶۹
۳۰	-۰,۱۵۲	-۰,۱۶۱	-۰,۱۶۶	-۰,۱۷	-۰,۱۷۲	-۰,۱۷۳	-۰,۱۷۴	-۰,۱۷۵	-۰,۱۷۵
۴۰	-۰,۱۵۴	-۰,۱۶۴	-۰,۱۷	-۰,۱۷۴	-۰,۱۷۶	-۰,۱۷۷	-۰,۱۷۹	-۰,۱۷۹	-۰,۱۷۹
۴۵	-۰,۱۵۵	-۰,۱۶۵	-۰,۱۷۲	-۰,۱۷۶	-۰,۱۷۷	-۰,۱۷۹	-۰,۱۸	-۰,۱۸۱	-۰,۱۸
۵۰	-۰,۱۵۶	-۰,۱۶۶	-۰,۱۷۳	-۰,۱۷۷	-۰,۱۷۹	-۰,۱۸	-۰,۱۸۱	-۰,۱۸۱	-۰,۱۸
۶۰	-۰,۱۵۷	-۰,۱۶۷	-۰,۱۷۴	-۰,۱۷۹	-۰,۱۸	-۰,۱۸۱	-۰,۱۸۲	-۰,۱۸۱	-۰,۱۷۹
۷۰	-۰,۱۵۸	-۰,۱۶۸	-۰,۱۷۵	-۰,۱۷۹	-۰,۱۸۱	-۰,۱۸۱	-۰,۱۸۱	-۰,۱۷۹	-۰,۱۷۵
۸۰	-۰,۱۵۹	-۰,۱۶۹	-۰,۱۷۵	-۰,۱۷۹	-۰,۱۸	-۰,۱۸	-۰,۱۷۹	-۰,۱۷۵	-۰,۱۶۹

جدول ۴-۱۱. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br = -1$

$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰
۱۰	-۰,۹۹۹	-۱,۰۱۷	-۱,۰۳۱	-۱,۰۴	-۱,۰۴۴	-۱,۰۴۸	-۱,۰۵۶	-۱,۰۶۴	-۱,۰۷۴
۲۰	-۱,۰۱۷	-۱,۰۵۲	-۱,۰۷۵	-۱,۰۹۱	-۱,۰۹۷	-۱,۱۰۲	-۱,۱۱۱	-۱,۱۱۸	-۱/۱۲
۳۰	-۱/۰۳۱	-۱,۰۷۵	-۱,۱۰۵	-۱,۱۲۵	-۱,۱۳۳	۱,۱۳۹	-۱,۱۴۸	-۱/۱۵	-۱,۱۵
۴۰	-۱,۰۴	-۱,۰۹۱	-۱,۱۲۵	-۱,۱۴۸	-۱,۱۵۶	۱,۱۶۲	-۱,۱۷	-۱,۱۷۳	-۱,۱۷
۴۵	-۱,۰۴۴	-۱,۰۹۷	-۱,۱۳۳	-۱,۱۵۶	-۱,۱۶۴	-۱,۱۷	-۱,۱۷۸	-۱,۱۸۱	-۱,۱۷۹
۵۰	-۱,۰۴۸	-۱,۱۰۲	-۱,۱۳۹	-۱,۱۶۲	-۱,۱۷	-۱,۱۸	-۱/۱۸۳	-۱,۱۸۳	-۱/۱۸
۶۰	-۱,۰۵۶	-۱,۱۱۱	-۱,۱۴۸	-۱,۱۷	-۱,۱۷۸	-۱,۱۸۳	-۱,۱۸۷	-۱,۱۸۳	-۱,۱۷
۷۰	-۱,۰۶۴	-۱,۱۱۸	-۱,۱۵	-۱,۱۷۳	-۱,۱۸۱	-۱,۱۸۳	-۱,۱۸۳	-۱,۱۷۳	-۱,۱۵
۸۰	-۱,۰۷۴	-۱/۱۲	-۱,۱۵	-۱,۱۷	-۱,۱۷۹	-۱,۱۸	-۱,۱۷	-۱,۱۵	-۱/۱۲

جدول ۴-۱۲. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br=1$

$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰
۱۰	۰,۵۲۸	۰,۵۴۱	۰,۵۵	۰,۵۵۶	۰,۵۵۹	۰,۵۶۱	۰,۵۶۶	۰,۵۷	۰,۵۷۳
۲۰	۰,۵۴۱	۰,۵۶۶	۰,۵۸۳	۰,۵۹۵	۰,۶	۰,۶۰۴	۰,۶۱	۰,۶۱۴	۰,۶۱۶
۳۰	۰/۵۵	۰,۵۸۳	۰,۶۰۶	۰,۶۲۲	۰,۶۲۸	۰,۶۳۳	۰,۶۴	۰,۶۴	۰,۶۴
۴۰	۰,۵۵۶	۰,۵۹۵	۰,۶۲۲	۰,۶۴۱	۰,۶۴۷	۰,۶۵۲	۰,۶۶	۰,۶۶۲	۰,۶۶
۴۵	۰,۵۵۹	۰,۶	۰,۶۲۸	۰,۶۴۷	۰,۶۵۴	۰,۶۵۹	۰,۶۶۶	۰,۶۶۷	۰,۶۶۵
۵۰	۰,۵۶۱	۰,۶۰۴	۰,۶۳۳	۰,۶۵۲	۰,۶۵۹	۰,۶۶	۰,۶۷	۰,۶۷	۰,۶۶
۶۰	۰,۵۶۶	۰,۶۱	۰,۶۴	۰,۶۶	۰,۶۶۶	۰,۶۷	۰,۶۷۴	۰,۶۷	۰,۶۶
۷۰	۰,۵۷	۰,۶۱۴	۰,۶۴	۰,۶۶۲	۰,۶۶۷	۰,۶۷	۰,۶۷	۰,۶۶۲	۰,۶۴
۸۰	۰,۵۷۳	۰,۶۱۶	۰,۶۴	۰,۶۶	۰,۶۶۵	۰,۶۶	۰,۶۶	۰,۶۴	۰,۶۱

جدول ۴-۱۳. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br=5$

$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰
۱۰	۰,۱۳	۰,۱۳۳	۰,۱۳۵	۰,۱۳۷	۰,۱۳۷	۰,۱۳۸	۰,۱۳۹	۰,۱۴	۰,۱۴۱
۲۰	۰,۱۳۳	۰,۱۳۹	۰,۱۴۳	۰,۱۴۶	۰,۱۴۷	۰,۱۴۷	۰,۱۴۹	۰,۱۵	۰,۱۵
۳۰	۰/۱۳۵	۰,۱۴۳	۰,۱۴۸	۰,۱۵۲	۰,۱۵۳	۰,۱۵۴	۰,۱۵۵	۰,۱۵۶	۰,۱۵۶
۴۰	۰,۱۳۷	۰,۱۴۶	۰,۱۵۲	۰,۱۵۶	۰,۱۵۷	۰,۱۵۸	۰/۱۵۹	۰,۱۶	۰/۱۵۹
۴۵	۰,۱۳۷	۰,۱۴۷	۰,۱۵۳	۰,۱۵۷	۰,۱۵۹	۰,۱۶	۰,۱۶۱	۰,۱۶۲	۰,۱۶۱
۵۰	۰,۱۳۸	۰,۱۴۷	۰,۱۵۴	۰,۱۵۸	۰,۱۶	۰,۱۶۱	۰,۱۶۲	۰,۱۶۲	۰,۱۶۱
۶۰	۰,۱۳۹	۰,۱۴۹	۰,۱۵۶	۰,۱۵۹	۰,۱۶۱	۰,۱۶۲	۰,۱۶۳	۰,۱۶۲	۰,۱۵۹
۷۰	۰,۱۴	۰,۱۵	۰,۱۵۶	۰,۱۶	۰,۱۶۲	۰,۱۶۲	۰,۱۶۲	۰,۱۶	۰,۱۵۶
۸۰	۰,۱۴۱	۰,۱۵	۰,۱۵۶	۰,۱۵۹	۰,۱۶۱	۰,۱۶۱	۰,۱۵۹	۰,۱۵۶	۰,۱۵

جدول ۴-۱۴. عدد ناسلت در مثلث با زوایای دلخواه برای $Br = 10$

$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰
۱۰	۰,۰۶۷	۰,۰۶۸۵	۰,۰۶۹۶	۰,۰۷۰۴	۰,۰۷۰۹	۰,۰۷۱	۰,۰۷۱۵	۰,۰۷۲	۰,۰۷۲۵
۲۰	۰,۰۶۸۵	۰,۰۷۱	۰,۰۷۳۴	۰,۰۷۴۸	۰,۰۷۵۴	۰,۰۷۵۸	۰,۰۷۶۵	۰,۰۷۷	۰,۰۷۷۳
۳۰	۰,۰۶۹۶	۰,۰۷۳	۰,۰۷۶۱	۰,۰۷۷۹	۰,۰۷۸۶	۰,۰۷۹۱	۰,۰۷۹۹	۰,۰۸	۰,۰۸
۴۰	۰,۰۷۰۴	۰,۰۷۴	۰,۰۷۷۹	۰,۰۸	۰,۰۸۰۷	۰,۰۸۱۳	۰,۰۸۲	۰,۰۸۲۴	۰,۰۸۲
۴۵	۰,۰۷۰۹	۰,۰۷۵	۰,۰۷۶۸	۰,۰۸۰۷	۰,۰۸۱۵	۰,۰۸۲	۰,۰۸۲۸	۰,۰۸۳	۰,۰۸۲۷
۵۰	۰,۰۷۱	۰,۰۷۵	۰,۰۷۹۱	۰,۰۸۱۳	۰,۰۸۲	۰,۰۸۳	۰,۰۸۳۳	۰,۰۸۳۳	۰,۰۸۳
۶۰	۰,۰۷۱۵	۰,۰۷۶۵	۰,۰۷۹۹	۰,۰۸۲	۰,۰۸۲۸	۰,۰۸۳۳	۰,۰۸۳۷	۰,۰۸۳۳	۰,۰۸۲
۷۰	۰,۰۷۲	۰,۰۷۷	۰,۰۸	۰,۰۸۲۴	۰,۰۸۳	۰,۰۸۳۳	۰,۰۸۳۳	۰,۰۸۲۴	۰,۰۸
۸۰	۰,۰۷۲۵	۰,۰۷۷	۰,۰۸	۰,۰۸۲	۰,۰۸۲۷	۰,۰۸۳	۰,۰۸۲	۰,۰۸	۰,۰۷۷

۴-۴ نتیجه گیری

در این فصل به بررسی نتایج به دست آمده از حل معادلات فصل دوم پرداخته شد. در ابتدا نتایج مربوط به حل جریان گزارش شدند و با نتایج موجود در مطالعات گذشته نیز مورد مقایسه قرار گرفتند که تطابق خوبی با آنها داشتند. در ادامه نتایج مربوط به حل انتقال حرارت برای دو حالت $Br = 0$ و $Br \neq 0$ در قالب کانتور و نمودار ارائه و با نتایج گذشته نیز مقایسه شدند. در بخش انتقال حرارت نیز تطابق خوبی بین نتایج این مطالعه و مطالعات قبل وجود داشت. در مجموع هم نتایج مربوط به حل جریان و هم نتایج مربوط به انتقال حرارت، جهت سهولت استفاده محققین، در قالب جدول نیز ارائه

شد. در فصل نتیجه‌گیری توضیحات کامل‌تری ارائه گردیده است.

فصل ۵ : نتیجه گیری و پیشنهادات

۵-۱ مقدمه

در این پژوهش، جریان و انتقال حرارت درون کانال‌های مثلثی با زوایای دلخواهی، با استفاده از روش ریتز مورد بررسی قرار گرفت. انتقال حرارت در دو حالت با و بدون در نظر گرفتن اثر اتلاف لزجت بررسی شد و نتایج آن در فصول گذشته ارائه گردید. در این بخش ابتدا یک نتیجه‌گیری از تحقیق حاضر ارائه می‌شود و در انتها پیشنهاداتی برای مطالعات آینده ذکر می‌گردد.

۵-۲ نتیجه‌گیری

همانطور که در فصل سوم مشاهده شد، حل تحلیلی با استفاده از روش ریتز برای جریان درون کانال-های مثلثی ارائه شده است. معادله‌ی توزیع سرعت و توزیع دما برای تمام مقاطع مثلثی در رابطه‌های (۳-۲۵) و (۳-۳۰) بیان شده‌اند. ضرایب مجهول a_1 تا a_{28} با حل دستگاه ۲۸ معادله و ۲۸ مجهول به دست آمده‌اند. پس از حل این معادلات و محاسبه توزیع سرعت و دما، عدد پوازیه، ضریب اصطکاک پوسته، توزیع اتلاف و عدد ناسلت به عنوان نتایج حاصل از حل جریان و انتقال حرارت نشان داده شده‌اند. مقایسه‌ی مقادیر به دست آمده برای عدد پوازیه با نتایج موجود از مطالعات گذشته، نشان دهنده‌ی دقت بالای روش حل انتخابی در پژوهش حاضر است. بیشترین اختلاف ارائه شده برای عدد پوازیه، در مقاطع متساوی‌الساقین ۰.۷۶ درصد و برای مقاطع قائم‌الزاویه ۰.۴ درصد است. یکی از مزیت‌های پژوهش حاضر، آن است که به دلیل ارائه مقادیر عدد پوازیه برای تمام مقاطع مثلثی شکل، محاسبه‌ی افت فشار در هر مقطع مثلثی را برای محققین بسیار آسان کرده است. ضریب اصطکاک پوسته از دیگر نتایج مربوط به جریان است که مقادیر در گوشه‌های مثلث برابر با صفر گزارش شده است. مقدار این ضریب در مقاطع مختلف بر روی دیواره‌ها، با فاصله گرفتن از زاویه‌های مثلث، افزایش می‌یابد تا به مقدار ماکزیمم خود برسد.

در حل معادله انرژی، برای اثر اتلاف لزجت عدد برینکمن (Br) تعریف شد و انتقال حرارت در دو

حالت $Br=0$ و $Br \neq 0$ برای شرایط مرزی شار حرارتی ثابت، مورد بررسی قرار گرفت. عدد ناسلت در حالت $Br=0$ با نتایج موجود در مطالعات گذشته مقایسه شد که بیشترین اختلاف مشاهده شده در مقاطع متساوی الساقین برابر با ۰.۸ درصد و برای مقاطع قائم الزاویه ۰.۴ درصد می باشد. زمانی که از اثر اتلاف لزجت صرف نظر شود ($Br=0$)، با توجه به شار حرارتی که به دیواره وارد می شود، دمای دیوار کانال از سیال درون کانال بیشتر بوده و در نتیجه انتقال حرارت از دیوار به سیال صورت می گیرد. طبق رابطه‌ی ارائه شده برای دمای بدون بعد، دما بی بعد بر روی دیواره برابر با صفر است که این موضوع در نتایج گزارش شده نیز مشاهده می شود.

بررسی انتقال حرارت برای حالتی که $Br \neq 0$ ، به سه قسمت تقسیم می شود. ناحیه $Br \geq 0$ ، ناحیه $0 < Br < Br_c$ و ناحیه $Br_c < Br$. در ناحیه $Br \geq 0$ ، مشاهده می شود که انتقال حرارت همانند حالتی که $Br=0$ است، از دیواره به سیال صورت می گیرد. با بیشتر شدن مقدار برینکمن، اختلاف میان دمای دیواره و دمای متوسط سیال بیشتر شده و در نتیجه عدد ناسلت به سمت صفر میل می کند. عدد برینکمن بحرانی (Br_c)، نقطه‌ای است که در آن دمای متوسط سیال، تحت تأثیر اتلاف لزجت، برابر با دمای دیوار کانال می شود و در واقع این دو دما اثرات یکدیگر را خنثی می کنند. در این حالت اختلاف میان دمای میانگین سیال و دمای دیواره برابر با صفر می شود و عدد ناسلت نیز به سمت بی نهایت میل می کند. در ناحیه $0 < Br < Br_c$ ، مشاهده می شود که با کم شدن مقدار عدد برینکمن، دمای میانگین سیال رو به افزایش است. در برخی از نقاط مانند نقطه $Br=-0.01$ ، دمای میانگین سیال افزایش چشم گیری ندارد و انتقال حرارت همچنان مانند حالت $Br=0$ از دیواره به سیال رخ می دهد. در نقاطی مانند $Br=-0.2$ ، مشاهده می شود که دمای میانگین سیال رشد بیشتری دارد و حتی از مرکز سیال به سمت دیواره اندکی حرارت منتقل می شود. اما دمای میانگین سیال در این نقطه، برای غلبه بر شار حرارتی وارد شده به دیواره کافی نبوده و می بینیم که عدد ناسلت در این نقطه همچنان مثبت بوده و انتقال حرارت از دیواره به سیال صورت می گیرد. با کم تر شدن مقدار برینکمن، مقدار عدد ناسلت بیشتر شده تا در نهایت در Br_c ، به بینهایت میل می کند. پس از Br_c و با کم تر شدن مقدار

برینکمن مشاهده می‌شود که عدد ناسلت تغییر علامت داده و دارای مقادیر منفی می‌شود. در واقع این نقطه‌ی بحرانی را می‌توان نقطه‌ی تغییر جهت انتقال حرارت تعریف کرد به صورتی که برای مقادیر $Br_c < Br < +\infty$ انتقال حرارت در جهت اعمال شار حرارتی انجام می‌شود و عدد ناسلت شامل اعداد مثبت می‌شود و برای مقادیر $Br_c > Br > -\infty$ انتقال حرارت در خلاف جهت اعمال شار حرارتی صورت گرفته است و اعداد ناسلت شامل مقادیر منفی هستند. همان‌طور که انتظار می‌رود، در ناحیه‌ی $Br_c > Br$ ، با کم شدن مقدار عدد برینکمن، دمای میانگین سیال از دمای دیواره کانال بیشتر شده و انتقال حرارت از سیال به دیواره صورت می‌گیرد. با کم‌تر شدن مقدار عدد برینکمن، اختلاف میان دمای دیواره کانال و دمای میانگین سیال افزایش یافته و عدد ناسلت به سمت صفر میل می‌کند. برای مجموعه‌ای از مثلث‌ها که یک زاویه α_2 یکسان دارند:

- بیشترین مقدار عدد پوازیه
 - کم‌ترین مقدار اندازه اتلاف
 - بیشترین مقدار عدد ناسلت در حالت $Br=0$
 - کمترین مقدار عدد ناسلت برای حالت خنک کننده
 - بیشترین مقدار عدد ناسلت برای حالت گرم کننده
- مربوط به مثلث متساوی‌الساقینی است که زاویه α_2 در رأس آن قرار بگیرد. در حالت کلی نیز در بین تمام مقاطع مثلثی، موارد ذکر شده در مثلث متساوی‌الاضلاع صورت می‌گیرد.

۳-۵ پیشنهادات

پژوهش حاضر برای اولین بار توسط روش تحلیلی ریتز، جریان و انتقال حرارت را با و بدون در نظر گرفتن اثرات لزجت مورد بررسی قرار داده است و با توجه به مقایسات صورت گرفته از دقت بالایی برخوردار است که می‌تواند به عنوان پایگاه اطلاعاتی مناسبی در اختیار محققین قرار گیرد. اما اعتبار یک پژوهش زمانی مشخص می‌شود که با مطالعات عملی، جهت استفاده در صنعت، مورد مقایسه قرار

گیرد. از این رو می توان با انجام تحقیقات آزمایشگاهی در مقاطع مختلف مثلثی، و همچنین انجام مطالعات عددی و مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج موجود در تحقیق حاضر، اعتبار و عیار این پژوهش را ارتقا داد. همچنین می توان با استفاده از روش تحلیلی ریتز، حالت های دیگری از شرایط مرزی، مانند شرایط مرزی دما ثابت را مورد تحقیق و بررسی قرار داد.

1. Wang, H.C., M.M. Zhao, and L.Q. Wu, *Fabrication of sandwich-like microfluidic chip with circular cross-section micro-channels*. International Journal of Modern Physics B, 2018. **32**(26): p. 1850288.
2. Shah, R., *Laminar flow friction and forced convection heat transfer in ducts of arbitrary geometry*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1975. **18**(7-8): p. 849-862.
3. Aparecido, J. and R. Cotta, *Laminar thermally developing flow inside right-angularly triangular ducts*. Applied scientific research, 1992. **49**(4): p. 355-368.
4. Abdel-Wahed, R. and A. Attia, *Fully developed laminar flow and heat transfer in an arbitrarily shaped triangular duct*. Wärme-und Stoffübertragung, 1984. **18**(2): p. 83-88.
5. Nakamura, H., S. Hiraoka, and I. Yamada, *Laminar forced convection flow and heat transfer in arbitrary triangular ducts*. Heat Transfer—Japanese Research, 1972. **1**: p. 120-122.
6. Schmidt, F. and M. Newell, *Heat transfer in fully developed laminar flow through rectangular and isosceles triangular ducts*. International journal of heat and mass transfer, 1967. **10**(8): p. 1121-1123.
7. Sparrow, E., *Laminar flow in isosceles triangular ducts*. AIChE Journal, 1962. **8**(5): p. 599-604.
8. Sparrow, E. and A. Haji-Sheikh, *Laminar heat transfer and pressure drop in isosceles triangular, right triangular, and circular sector ducts*. 1965.
9. Etemad, S.G., A. Mujumdar, and R. Nassef, *Simultaneously developing flow and heat transfer of non-Newtonian fluids in equilateral triangular duct*. Applied mathematical modelling, 1996. **20**(12): p. 898-908.
10. Chen, S., et al., *Numerical prediction of laminar forced convection in triangular ducts with unstructured triangular grid method*. Numerical Heat Transfer: Part A: Applications, 2000. **38**(2): p. 209-224.
11. Chaves, C.L., et al., *Forced convection heat transfer to power-law non-Newtonian fluids inside triangular ducts*. Heat transfer engineering, 2004. **25**(7): p. 23-33.
12. Hooman, K. and A. Haji-Sheikh, *Analysis of heat transfer and entropy generation for a thermally developing Brinkman–Brinkman forced convection problem in a rectangular duct with isoflux walls*. International journal of heat and mass transfer, 2007. **50**(21-22): p. 4180-4194.
13. Zhang, L.-Z., *Laminar flow and heat transfer in plate-fin triangular ducts in thermally developing entry region*. International journal of heat and mass transfer, 2007. **50**(7-8): p. 1637-1640.
14. Ray, S. and D. Misra, *Laminar fully developed flow through square and equilateral triangular ducts with rounded corners subjected to H1 and H2 boundary conditions*. International Journal of Thermal Sciences, 2010. **49**(9): p. 1763-1775.
15. Wang, C., *Benchmark solutions for slip flow and H1 heat transfer in rectangular and equilateral triangular ducts*. Journal of heat transfer, 2013. **135**(2).

16. Wang, C., *Exact Solutions for Starting and Oscillatory Flows in an Equilateral Triangular Duct*. Journal of Fluids Engineering, 2016. **138**(8).
17. Wang, C., *Slip flow and constant flux heat transfer in isosceles triangular ducts*. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 2017. **31**(1): p. 69-77.
18. Karabulut, H., D. Ipci, and C. Cinar, *Numerical solution of fully developed heat transfer problem with constant wall temperature and application to isosceles triangle and parabolic ducts*. Applied Thermal Engineering, 2016. **102**: p. 115-124.
19. Norouzi, M., et al., *An Exact Solution for Fluid Flow and Heat Convection through Triangular Ducts Considering the Viscous Dissipation*. AUT Journal of Mechanical Engineering, 2019. **3**(2): p. 197-204.
20. Bejan, A., *Convection heat transfer*. 2013: John wiley & sons.
21. Arpaci, V.S., *Conduction heat transfer*. 1966, 550 &. ADDISON-WESLEY PUBLISHING CO., READING, MASS, 1966.
22. Papanastasiou, T., G. Georgiou, and A.N. Alexandrou, *Viscous fluid flow*. 2021: CRC press.
23. White, F.M., *Fluid Mechanics 7th edn University of Rhode Island*. Publication company: Mc Graw Hill, 2010.
24. Kumar, R., et al., *Effect of dimple intrusions and curvature radius of rounded corner triangular duct on fluid flow and heat transfer*. Journal of Thermal Science and Engineering Applications, 2019. **11**(3): p. 031001.

Abstract

The study of flow and heat transfer within ducts has a long history. Today, the development of industry and the need for channels with more compactness than circular sections, has led researchers to do research in this context for channels with a polygonal cross section. In the meantime, studies have been conducted in the field of channels with an equilateral triangle, isosceles and right angles, using different methods including laboratory, numerical and analytical methods. The present study investigates heat and flow transfer within triangular channels with arbitrary angles for the first time by the Ritz method. In addition, in this study, for the first time, heat transfer within triangular channels with desired angles, considering the viscous dissipation, is investigated. One of the advantages of using Ritz method in the present study is that for different states of the triangular section, the boundary conditions are always satisfied. In solving heat transfer considering the effect of the viscous dissipation, Brinkmann number (Br) is used and its effect on temperature distribution is investigated. Generally, heat transfer in the presence of the viscous dissipation is divided into two parts: cooling case (wall temperature less than fluid temperature) and heating case (wall temperature more than fluid temperature). Poiseuille number and Nusselt number obtained from flow and heat transfer solution are presented as problem solving results in this study and compared with the results of previous studies, which show the appropriate accuracy of the Ritz analytical method. The maximum difference between the obtained results and the results of previous studies is 0.76% for the Poiseuille number in isosceles triangles and 0.4% in right triangles. Also, the maximum difference related to the Nusselt number in this comparison for the case $Br = 0$, in isosceles triangles equal to 0.8% and in right triangles is equal to 0.4 percent. Among all triangular sections, the equilateral triangle has the highest value of Poiseuille number, the

highest value of Nusselt number in $Br = 0$ and heating mode and the lowest value of Nusselt number in cooling mode. For the case $Br \neq 0$, by increasing the value of Brinkmann number, the Nusselt number decreases, also as Brinkman number increases/decreases to $\pm\infty$, the Nusselt number tends to zero.

Keywords: Triangular ducts; Heat transfer, Analytical solution, Ritz method, Brinkman number, Poiseuille number, Viscous dissipation.



Shahrood University of
Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Master of Science Thesis in Energy Conversion

Analytical Analysis of Flow and Heat Transfer in Triangular Ducts Using Ritz Method

By: Amir Hossein Hajei Aghaei

Supervisor:

Dr. Mohammad Hassan Kayhani

Dr. Mahmood Norouzi

Jan, 2022