

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی تبدیل انرژی

توسعه روش پیش شرط توانی برای تحلیل عددی جریان‌های ناپایای سیالات ویسکوالاستیک

نگارنده: حمیدرضا غیاثی شهرکی

اساتید راهنما

دکتر محمود نوروزی

دکتر علی عباس نژاد

استاد مشاور

دکتر پوریا اکبرزاده

بهمن ۱۴۰۰

شماره: ۴۰۰/۲۳۲
تاریخ: ۱۳۰۰/۱۲/۱۶
ویرایش:

باسمه تعالی

فرمهای ارزشیابی پایان نامه کارشناسی ارشد
مربوط به ورودی‌های ۹۴ به بعد



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند معال، آریایی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای حمیدرضا غیاثی شهرکی با شماره دانشجویی ۹۷۱۲۲۹۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی تحت عنوان توسعه روش پیش شرط توانی برای تحلیل عددی جریان‌های ناپایای سیالات ویسکوالاستیک که در تاریخ ۱۴۰۰/۱۱/۳۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار شد به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

☒ الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	☒ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸-۱۸/۹۹
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۷-۱۷/۹۹	☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۵-۱۴/۹۹
☐ ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد	
نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی	

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر محمود نوروزی	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر علی عباس نژاد	استادیار	
۳- استاد مشاور	دکتر پوریا اکبرزاده	دانشیار	
۴- استاد داور اول	دکتر محسن نظری	دانشیار	
۵- استاد داور دوم	دکتر علی سررشته‌داری	استادیار	
۶- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر رامین ذاکری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی گردویی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



۱۴۰۰/۱۲/۱۶

تقدیم بہ:

پدر و مادر عزیزم و ہمسر مہربانم کہ ہموارہ در تمام طول زندگی بزرگ ترین حامی و دلسوزہ پشتیبان من و
یاور من بودہ اند و تحصیلاتم و تمام موفقیت ہایم را مدیون محبت ہا، راہنمایی ہا و زحمات آن بزرگواران
ہستم.

حمید رضا غیاثی شہرکی

باسپاس از:

آقای دکتر نوروزی، آقای دکتر عباس نژاد و آقای دکتر اکبرزاده که افتخار نگارگری شما را داشتم

و بارها بنیانی‌های دلسوزانه و گره‌کشایشان در جهت انجام این پایان نامه بنده را راهنمایی نموده‌اند،

سپاس گزارم و از درگاه خداوند منان آرزوی سلامتی و سعادت برای شما مسئلت می‌نمایم.

حمیدرضا غیاثی شهرکی دی ماه ۱۴۰۰

تهدنامه

اینجانب حمیدرضا غیاثی شهرکی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک-گرایش تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه «توسعه روش پیش شرط توانی برای تحلیل عددی جریان های ناپایای سیالات ویسکوالاستیک» تحت راهنمایی دکتر محمود نوروزی، دکتر علی عباس نژاد متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آن ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود . استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

امروزه سیالات ویسکوالاستیک در صنعت نفت، شیمی، نظامی و پزشکی کاربرد فراوانی دارند. سیالات ویسکوالاستیک به طور توأمان خواص سیال لزج و جامد الاستیک را از خود نشان می‌دهند، همچنین به دلیل وجود خاصیت الاستیک این سیالات در جریان‌های برشی غیردائم دارای ویژگی منحصر به فردی نظیر رفتار نوسانی میراشونده در میدان سرعت بدون عامل خارجی نوسانی در شرایط مرزی و نیروهای خارجی هستند. در این پایان‌نامه، برای پایداری عددی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک در حال عبور از بین دو صفحه موازی ثابت از روش پیش‌شرط توانی با ماتریس پیش‌شرط که از رابطه توانی میدان تنش تصحیح می‌شود، استفاده شده است. در روش پیش‌شرط توانی با تغییر مشتق زمانی معادلات حاکم از شکل سهموی-بیضوی به شکل هذلولوی (تراکم پذیر مصنوعی) تبدیل می‌شوند. جهت مدل‌سازی این‌گونه جریان‌ها از معادله متشکله ماکسول ساده استفاده می‌گردد. برای حل معادلات حاکم و متشکله از یک الگوریتم ضمنی دو زمانه و گسسته‌سازی معادلات با روش تفاضل محدود استفاده شده است. جهت همگرایی حل به سمت حالت دائم، از روش عددی وثوقی فر چهار مرحله‌ای استفاده می‌شود. محاسبات جریان سیال ویسکوالاستیک عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت در اعداد رینولدز، اعداد وایزنبرگ و نسبت لزجت متفاوت ارائه می‌گردد. نتایج ارائه شده شامل پروفیل‌ها و کانتورهای سرعت و تأثیر روش‌های تراکم‌پذیر استاندارد، پیش‌شرط استاندارد و پیش‌شرط توانی با حسگر فشار، سرعت و تنش بر نرخ همگرایی برای این جریان‌ها است. نتایج به دست آمده با حل‌های عددی و تحلیل اعتبارسنجی شده‌اند، نتایج نشان می‌دهد که روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش برای نسبت لزجت‌های کمتر از 0.5 و روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر سرعت یا فشار برای نسبت لزجت‌های برابر یا بیشتر از 0.5 دارای بیشترین نرخ همگرایی و به موجب آن کاهش هزینه زمان محاسباتی را به همراه دارد. روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش علاوه بر دقت بالا دارای پایداری زیاد در حل عددی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک می‌باشد.

کلمات کلیدی: روش پیش‌شرط‌سازی توانی، حسگر تنش، تفاضل محدود، الگوریتم ضمنی دوزمانه، جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک، نرخ همگرایی، مدل ماکسول ساده.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱-

۲-

فهرست مطالب

ل	فهرست جداول
م	فهرست اشکال
ص	فهرست علائم
ق	فهرست علائم یونانی
ر	فهرست علائم زیرنویس
ر	فهرست علائم بالانویس
۱	فصل ۱: مقدمه و پیشینه تحقیق
۲	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ معرفی سیال ویسکوالاستیک
۲	۱-۲-۱ طبقه‌بندی سیالات غیرنیوتنی
۴	۲-۲-۱ رفتارهای سیال ویسکوالاستیک
۶	۳-۱ پیشینه تحقیق
۶	۱-۳-۱ پیشینه تحقیق سیال نیوتنی
۸	۱-۳-۲ پیشینه تحقیق سیال غیرنیوتنی
۹	۴-۱ معرفی پژوهش حاضر
۱۰	۵-۱ ضرورت انجام پژوهش حاضر
۱۰	۶-۱ نوآوری پژوهش
۱۱	۷-۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه
۱۳	فصل ۲: فیزیک مسئله و معادلات حاکم بر جریان
۱۴	۱-۲ مقدمه
۱۴	۲-۲ معادلات حاکم
۱۵	۳-۲ معادله متشکله ماکسول
۱۶	۴-۲ کمیت‌های بی‌بعد
۱۷	۵-۲ تراکم‌پذیری مصنوعی
۱۷	۱-۵-۲ تراکم‌پذیری مصنوعی کورین
۱۹	۲-۵-۲ روش پیش‌شرط ترکل
۲۰	۲-۵-۳ روش پیش‌شرط مالان

۲۱	۴-۵-۲ روش پیش شرط توانی
۲۲	۲-۶ روش پیش شرط توانی برای جریان ویسکوالاستیک
۲۵	فصل ۳: روش عددی

۲۶	۳-۱ مقدمه
۲۶	۳-۲ دستگاه معادلات حاکم
۲۶	۳-۲-۱ دستگاه معادلات مربوط به پیوستگی و ممنوم
۲۸	۳-۲-۲ معادلات متشکله مربوط به تنش
۳۰	۳-۳ روش عددی
۳۱	۳-۳-۱ روش تفاضل محدود
۳۲	۳-۳-۲ گسسته سازی معادلات حاکم
۳۴	۳-۳-۳ گسسته سازی معادله متشکله تنش
۳۵	۳-۳-۴ گسسته سازی جمله مشتق زمان
۳۸	۳-۳-۵ بررسی سرعت صوت کاذب
۳۸	۳-۳-۶ گسسته سازی حسگر تنش
۳۹	۳-۴ شرایط مرزی جریان
۴۱	۳-۵ شرایط اولیه
۴۲	۳-۶ خطای محاسباتی
۴۳	۳-۷ الگوریتم حل

فصل ۴: نتایج عددی

۴۸	۴-۱ مقدمه
۴۹	۴-۲ شرایط و الگوی همگرایی
۴۹	۴-۳ استقلال حل از شبکه
۴۹	۴-۳-۱ استقلال حل عددی از شبکه برای جریان دائم
۵۱	۴-۳-۲ استقلال حل عددی از شبکه برای جریان غیردائم
۵۲	۴-۴ استقلال حل عددی از گام زمانی
۵۴	۴-۵ ارزیابی صحت نتایج
۵۴	۴-۵-۱ ارزیابی نتایج با حل عددی جریان غیردائم در ناحیه توسعه یافته در حالت $\beta = 1$
۵۸	۴-۵-۲ ارزیابی نتایج با حل تحلیلی جریان دائم توسعه یافته
۵۹	۴-۵-۳ ارزیابی نتایج با حل عددی روش پیش شرط سازی و روش پیش شرط توانی
۶۳	۴-۶ نتایج میدان جریان
۶۸	۴-۶-۱ تأثیر تغییرات عدد رینولدز بر میدان سرعت
۶۹	۴-۶-۲ تأثیر تغییرات عدد وایزنبرگ بر میدان سرعت

۷۰.....	۳-۶-۴ تأثیر تغییرات نسبت لزجت بر میدان سرعت
۷۱.....	۷-۴ بررسی نرخ همگرایی روش محلی پیش شرط توانی حسگر تنش
۷۲.....	۱-۷-۴ حالت $Wi=1, Re=10$ و $\beta = 0$
۷۴.....	۲-۷-۴ حالت $Wi=1, Re=10$ و $\beta = 0.25$
۷۷.....	۳-۷-۴ حالت $Wi=5, Re=10$ و $\beta = 0.25$
۷۹.....	۴-۷-۴ حالت $Wi=1, Re=10$ و $\beta = 0.5$
۸۲.....	۵-۷-۴ حالت $Wi=1, Re=10$ و $\beta = 0.75$
۸۴.....	۶-۷-۴ حالت $Wi=1, Re=5$ و $\beta = 0$
۸۷.....	۷-۷-۴ حالت $Wi=1, Re=5$ و $\beta = 0.25$
۸۹.....	۸-۷-۴ حالت $Wi=5, Re=5$ و $\beta = 0.25$
۹۲.....	۹-۷-۴ حالت $Wi=1, Re=5$ و $\beta = 0.5$
۹۴.....	۱۰-۷-۴ حالت $Wi=1, Re=20$ و $\beta = 0$
۹۷.....	۱۱-۷-۴ حالت $Wi=1, Re=20$ و $\beta = 0.25$
۹۹.....	۱۲-۷-۴ حالت $Wi=5, Re=20$ و $\beta = 0.25$
۱۰۲.....	۱۳-۷-۴ حالت $Wi=1, Re=20$ و $\beta = 0.5$

فصل ۵: نتیجه گیری و پیشنهادات ۱۰۷

۱۰۸.....	۱-۵ مقدمه
۱۰۸.....	۲-۵ بحث و نتیجه گیری
۱۰۹.....	۳-۵ پیشنهادات

فهرست جداول

- جدول ۱-۳: مقایسه روشهای مختلف گسسته‌سازی زمانی برای این پژوهش ۳۶
- جدول ۱-۴: مقادیر پایه استفاده شده در پژوهش حاضر ۴۹
- جدول ۲-۴: متوسط خطای حل عددی میدان سرعت در شبکه‌های مختلف نسبت به شبکه مرجع 70×70 ۵۰
- جدول ۳-۴: متوسط خطای حل عددی میدان سرعت در شبکه 40×40 با نسبت ابعادی مختلف نسبت به شبکه مرجع 70×70 ۵۱
- جدول ۴-۴: تأثیر روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش بر سرعت همگرایی بین دو صفحه موازی ثابت ۱۰۵

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱. اعمال چرخش با میله برای سیال نیوتنی (N) و سیال ویسکوالاستیک (V) [۴]. ۴
- شکل ۱-۲. دور شدن موقعیت تورم با افزایش عدد رینولدز از c به a [۳]. ۵
- شکل ۱-۳. بازگشت فتری یک سیال ویسکوالاستیک [۳]. ۵
- شکل ۱-۴. تغییر جهت جریانهای ثانویه در عمق یک جریان در حال چرخش [۳]. ۶
- شکل ۱-۵. نمایی شماتیک از هندسه مورد بررسی در تحقیق حاضر. ۹
- شکل ۱-۳. نمایی از شبکه‌بندی دامنه محاسبات و تعریف مقادیر بر روی گره‌های مربوطه. ۳۱
- شکل ۲-۳. روند نمایی الگوریتم حل. ۴۵
- شکل ۱-۴. پروفیل سرعت در موقعیت $x = 0.2$ برای شبکه‌های مختلف. ۵۰
- شکل ۲-۴. مطالعه استقلال حل از شبکه برای تغییرات سرعت محوری u در موقعیت مکانی $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای $Re=10$ ، $\beta = 0.25$ و $Wi=0.2$ ۵۲
- شکل ۳-۴. سرعت محوری بی‌بعد در مکان $x=5$ ، $Re=10$ ، $Wi=1$ ، $\beta = 0.25$ و در $t = 1.5$ برای گام‌های زمانی مختلف. ۵۳
- شکل ۴-۴. سرعت محوری بی‌بعد در مکان $x=9$ ، $y=1$ ، $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta = 0.25$ در ناحیه کاملاً توسعه‌یافته برای گام‌های زمانی مختلف. ۵۳
- شکل ۵-۴. مقایسه سرعت u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برای $Re=10$ و $\beta = 1$ برای حالت کاملاً توسعه‌یافته. ۵۵
- شکل ۶-۴. مقایسه سرعت u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برای $Re=10$ و $\beta = 1$ ۵۶
- شکل ۷-۴. پروفیل سرعت در جهت x در موقعیت $x=1$ و $t=1$ ۵۶
- شکل ۸-۴. پروفیل سرعت در جهت x در موقعیت $x=1$ و $t=3.5$ ۵۷
- شکل ۹-۴. پروفیل سرعت در جهت x در موقعیت $x=5$ و $t=1$ ۵۷
- شکل ۱۰-۴. پروفیل سرعت در جهت x در موقعیت $x=5$ و $t=3.5$ ۵۸
- شکل ۱۱-۴. مقایسه سرعت در جهت x و موقعیت $x=9$ و در زمان $t=9$ برای جریان بین دو صفحه موازی ثابت با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta = 0.25$ ۵۹
- شکل ۱۲-۴. بررسی عددی تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta = 0.25$ برای روشهای پیش‌شرط سازی، پیش‌شرط توانی با حسگر سرعت و تنش. ۶۰
- شکل ۱۳-۴. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta = 0.25$ ۶۰
- $t = 0.02$ ۶۰

- شکل ۴-۱۴. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ ، $\beta=0.25$ و $t=0.04$ ۶۱
- شکل ۴-۱۵. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ ، $\beta=0.25$ و $t=0.1$ ۶۱
- شکل ۴-۱۶. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ ، $\beta=0.25$ و $t=0.2$ ۶۲
- شکل ۴-۱۷. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ ، $\beta=0.25$ و $t=0.4$ ۶۲
- شکل ۴-۱۸. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ ، $\beta=0.25$ و $t=0.8$ ۶۳
- شکل ۴-۱۹. کانتور سرعت u در گام زمانی 0.04 ۶۳
- شکل ۴-۲۰. کانتور سرعت u در گام زمانی 0.1 ، 0.2 ، 0.3 ، 0.4 ، 0.6 و 1 ۶۴
- شکل ۴-۲۱. کانتور سرعت u در گام زمانی 2 و 4 ۶۵
- شکل ۴-۲۲. زمان CPU در هر لحظه از زمان مسئله برای $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۶۶
- شکل ۴-۲۳. زمان CPU در هر گام زمانی برای $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۶۶
- شکل ۴-۲۴. تعداد تکرارها در هر لحظه از زمان مسئله برای $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۶۷
- شکل ۴-۲۵. تعداد تکرارها در هر گام زمانی برای $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۶۷
- شکل ۴-۲۶. تأثیر عدد رینولدز مختلف با $Wi=1$ و $\beta=0.25$ بر میدان سرعت در ناحیه کاملاً توسعه و موقعیت $x=9$ و $y=1$ ۶۸
- شکل ۴-۲۷. تأثیر عدد وایزنبرگ مختلف با $\beta=0.25$ و $Re=10$ بر میدان سرعت در ناحیه کاملاً توسعه و موقعیت $x=9$ و $y=1$ ۶۹
- شکل ۴-۲۸. تأثیر عدد وایزنبرگ مختلف با $Wi=1$ و $Re=10$ بر میدان سرعت در ناحیه کاملاً توسعه و موقعیت $x=9$ و $y=1$ ۷۱
- شکل ۴-۲۹. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ بر حسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۷۲
- شکل ۴-۳۰. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ بر حسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۷۳
- شکل ۴-۳۱. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ بر حسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۷۳
- شکل ۴-۳۲. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط‌سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۷۴

- شکل ۴-۳۳. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۷۵
- شکل ۴-۳۴. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۷۵
- شکل ۴-۳۵. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۷۶
- شکل ۴-۳۶. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط‌سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۷۶
- شکل ۴-۳۷. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۷۷
- شکل ۴-۳۸. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۷۸
- شکل ۴-۳۹. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۷۸
- شکل ۴-۴۰. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط‌سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۷۹
- شکل ۴-۴۱. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۸۰
- شکل ۴-۴۲. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۸۰
- شکل ۴-۴۳. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۸۱
- شکل ۴-۴۴. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط‌سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۸۱
- شکل ۴-۴۵. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.75$ ۸۲
- شکل ۴-۴۶. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.75$ ۸۳
- شکل ۴-۴۷. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.75$ ۸۳
- شکل ۴-۴۸. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط‌سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.75$ ۸۴

- شکل ۴-۴۹. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۸۵
- شکل ۴-۵۰. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۸۵
- شکل ۴-۵۱. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۸۶
- شکل ۴-۵۲. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۸۶
- شکل ۴-۵۳. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۸۷
- شکل ۴-۵۴. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۸۸
- شکل ۴-۵۵. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۸۸
- شکل ۴-۵۶. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۸۹
- شکل ۴-۵۷. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۹۰
- شکل ۴-۵۸. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۹۰
- شکل ۴-۵۹. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۹۱
- شکل ۴-۶۰. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۹۱
- شکل ۴-۶۱. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۹۲
- شکل ۴-۶۲. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۹۳
- شکل ۴-۶۳. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۹۳
- شکل ۴-۶۴. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۹۴

- شکل ۴-۶۵. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۹۵
- شکل ۴-۶۶. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۹۵
- شکل ۴-۶۷. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۹۶
- شکل ۴-۶۸. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$ ۹۶
- شکل ۴-۶۹. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۹۷
- شکل ۴-۷۰. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۹۸
- شکل ۴-۷۱. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۹۸
- شکل ۴-۷۲. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ ۹۹
- شکل ۴-۷۳. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۱۰۰
- شکل ۴-۷۴. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۱۰۰
- شکل ۴-۷۵. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۱۰۱
- شکل ۴-۷۶. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$ ۱۰۱
- شکل ۴-۷۷. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۱۰۲
- شکل ۴-۷۸. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۱۰۳
- شکل ۴-۷۹. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۱۰۳
- شکل ۴-۸۰. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$ ۱۰۴

فهرست علائم

حسگر سرعت محلی	A_u
حسگر تنش محلی	A_r
سرعت صوت کاذب بی بعد	c
عدد کورانت-فردیچ-لوی	CFL
نیروی خارجی، [N]	F
نصف فاصله بین دو صفحه [m]	h
شمارنده گره در جهت محور x	i
شمارنده گره در جهت محور y	j
شمارنده گام زمانی و ثوقی فر	K
کوچک ترین طول بی بعد وجه سلول	$\Delta L_{\min}$
شمارنده گام زمان حقیقی	N
اختلاف تنش عمودی اول و دوم [Pa]	N_2, N_1
شمارنده گام زمان کاذب	n
میدان فشار سیال، [Pa]	p
میدان فشار بی بعد	p^*
زمان حقیقی، [s]	t
زمان حقیقی بی بعد	t^*
گام زمان حقیقی بی بعد	Δt
زمان کاذب بی بعد	t_a
گام زمان کاذب بی بعد	Δt_a
سرعت مشخصه بی بعد	U
بردار بی بعد سرعت سیال	$\vec{V}$
سرعت سیال در راستای x ، y ، [m/s]	v, u
سرعت بی بعد سیال در راستای x ، y	v^*, u^*
فاصله بی بعد بین دو گره شبکه اولیه یا ثانویه در راستای x	Δx

فاصله بی بعد بین دو گره شبکه اولیه یا ثانویه در راستای y

Δy

فهرست علائم یونانی

ضریب پیش شرط	α
نسبت لزجت نیوتنی بی بعد به کل	β
ضریب تراکم پذیری جابجایی	$\beta_{conv.}$
نرخ برش بی بعد	$\dot{\gamma}$
کمیت تراکم پذیری کاذب بی بعد	δ
ضریب گام زمانی و ثوقی فر	δ_K
لزجت پلیمر، [Pa.s]	η_p
لزجت نیوتنی، [Pa.s]	η_N
لزجت بی بعد کل	η_0
زمان رهایی از تنش، [s]	λ_1
مقدار ویژه بیشینه	λ_{max}
چگالی، [kg/m ³]	ρ
چگالی کاذب، [kg/m ³]	ρ_a
تانسور تنش، [Pa]	τ
تانسور تنش بی بعد	τ^*
تانسور تنش پلیمر بی بعد	τ_P
تانسور تنش نیوتنی بی بعد	τ_N
مؤلفه بی بعد تنش در جهت محور x	τ_{xx}
مؤلفه بی بعد تنش برشی در صفحه xy	τ_{xy}
مؤلفه بی بعد تنش در جهت محور y	τ_{yy}
ثابت اختلاف تنش عمودی اول و دوم، [Pa.s ²]	φ_2, φ_1

فهرست علائم زیرنویس

کاذب	a
جابجایی	$conv.$
بیشینه	$\max$
کمینه	$\min$
نیوتنی	N
پلیمری	P
کل	0

فهرست علائم بالانویس

علامت بی بعد	$*$
--------------	-----

فصل ۱: مقدمه و پیشینه تحقیق

۱-۱ مقدمه

از دیرباز تاکنون برای ساخت تجهیزات صنعتی، نظامی و پزشکی محققان به دنبال مدل‌سازی‌های آزمایشگاهی و عددی مختلف برای توصیف هر چه نزدیک‌تر رفتار این تجهیزات بوده‌اند. بدین منظور پژوهش‌های گوناگونی در حوزه‌های مختلف علمی صورت گرفته است، یکی از مهم‌ترین این حوزه‌ها مکانیک سیالات محاسباتی می‌باشد. از سوی دیگر مسائل پایه در مکانیک سیالات کاربرد فراوانی در مدل‌سازی‌های پیچیده دارد. یکی از این مسائل ساده و کاربردی تحلیل عددی جریان غیردائم سیالات ویسکوالاستیک در کانال دوبعدی می‌باشد، همچنین در روش‌های عددی، پایداری حل، نرخ همگرایی و زمان محاسبات دارای اهمیت است و به همین منظور تحقیق حاضر دارای اهمیت است. ابتدا در این فصل به معرفی سیالات ویسکوالاستیک و رفتار آن‌ها پرداخته می‌شود، سپس به پژوهش محققان پیشین که در رابطه با روش‌های عددی حل معادلات جریان تراکم‌ناپذیر دائم و غیردائم سیالات نیوتنی و ویسکوالاستیک صورت گرفته پرداخته خواهد شد. در ادامه به معرفی این پژوهش که به تحلیل عددی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک به روش پیش‌شرط توانی که با افزودن جمله غیرفیزیکی مشتق زمانی کاذب فشار به معادله پیوستگی که شکل معادلات را از سهموی-بیضوی به هذلولی تبدیل می‌کند که از یک الگوریتم دو زمانه جهت حل آن استفاده می‌شود. الگوریتم دو زمانه از دو حلقه داخلی و خارجی تشکیل می‌شود که با همگرایی حلقه داخلی (زمان کاذب)، جمله اضافه‌شده به معادلات میل می‌کند به صفر و از معادلات حذف می‌گردد و حلقه خارجی با همگرایی حلقه داخلی به گام زمانی بعدی می‌رود. درنهایت درباره اهمیت و نوآوری تحقیق حاضر مطالبی بیان می‌شود.

۱-۲ معرفی سیال ویسکوالاستیک

سیال نیوتنی، سیالی است که در آن تنش برشی رابطه خطی با نرخ برش دارد. ولی سیال غیرنیوتنی، رابطه تنش برشی با نرخ برش غیرخطی است [۱]. سیالات غیرنیوتنی به سه دسته مستقل از زمان، وابسته به زمان و ویسکوالاستیک تقسیم می‌شوند.

۱-۲-۱ طبقه‌بندی سیالات غیرنیوتنی

در این قسمت سه دسته سیالات غیرنیوتنی معرفی می‌شوند. توضیحات در خصوص ویژگی‌های هر کدام و تقسیم‌بندی هر یک از آن‌ها بیان می‌گردد.

۱-۲-۱-۱ سیالات غیرنیوتنی وابسته به زمان

سیالات غیرنیوتنی وابسته به زمان، سیالاتی هستند که در آن‌ها لزجت علاوه بر نرخ برش، تابع زمان نیز

است. به طور کلی این سیالات به دو دسته سیالات رئوپکتیک^۱ و سیالات تیکسوتروپیک^۲ تقسیم می‌شوند. اگر سیالات تیکسوتروپیک در معرض یک برش ثابت قرار گیرد، ساختمان مولکول‌ها شکسته می‌شود و لزجت سیال با افزایش زمان کاهش می‌یابد. سیالات رئوپکتیک سیالات کمیابی هستند که رفتاری برعکس سیالات تیکسوتروپیک از خود نشان می‌دهند [۱].

۲-۱-۲-۱ سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان

سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان، سیالاتی هستند که در آن‌ها رابطه تنش و نرخ برش به صورت غیرخطی می‌باشد. این سیالات به دو گروه فاقد و دارای تنش تسلیم تقسیم می‌شوند. سیالات فاقد تنش تسلیم به دودسته رقیق شونده^۳ و ضخیم شونده^۴ تقسیم می‌شوند. لزجت این سیالات تابعی از نرخ برش است و لزجت سیالات رقیق شونده که نسبت نزولی با نرخ برش دارد ولی لزجت سیالات غلیظ شونده برعکس لزجت سیالات رقیق شونده است [۲].

۳-۱-۲-۱ سیالات ویسکوالاستیک

سیالاتی هستند که توأم خواص لزج و الاستیک دارند، یک خاصیت این سیال دارا بودن یک حافظه جهت‌دار از تغییر شکل‌های خود بوده و از حالت قبلی خود آگاه هستند [۳]. از مهم‌ترین تفاوت‌های میان این سیالات با دیگر سیالات، وجود اختلاف تنش‌های عمودی اول و دوم در این سیالات است. در جریان برشی ساده سیال نیوتنی، تنش‌های عمودی مقدار مشخص دارد و برابر با فشار استاتیکی است. درحالی‌که در جریان سیال ویسکوالاستیک بین تنش‌های عمودی اختلاف وجود دارد. در جریان برشی ساده، در راستای جریان جهت x و جهت عمود بر راستای جریان جهت y و همچنین جهت z عمود بر جهات x و y باشد، اختلاف تنش‌های عمودی اول و دوم به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy} \quad (1-1)$$

$$N_2 = \tau_{yy} - \tau_{zz} \quad (2-1)$$

N_1 و N_2 اختلاف تنش عمودی اول و دوم، τ_{xx} ، τ_{yy} و τ_{zz} به این ترتیب تنش‌های عمودی در جهت x ، y و z محور مختصات می‌باشند. ثابت‌های اختلاف تنش‌های عمودی به صورت معادله (۳-۱) و (۴-۱) است.

1. Rheopectic
2. Thixotropic
3. Pseudoplastic
4. Dilatant

$$\varphi_1 = N_1 / \dot{\gamma}^2 \quad (3-1)$$

$$\varphi_2 = N_2 / \dot{\gamma}^2 \quad (4-1)$$

در رابطه (۳-۱) و (۴-۱)، φ_1 و φ_2 ثابت‌های اختلاف تنش عمودی اول و دوم و $\dot{\gamma}^2$ نرخ برش است. اختلاف تنش‌های عمودی و ثابت‌های تنش‌های عمودی همگی تابعی زوج از نرخ برش هستند. η لزجت سیال ویسکوالاستیک در حالت جریان پایدار به صورت زیر است:

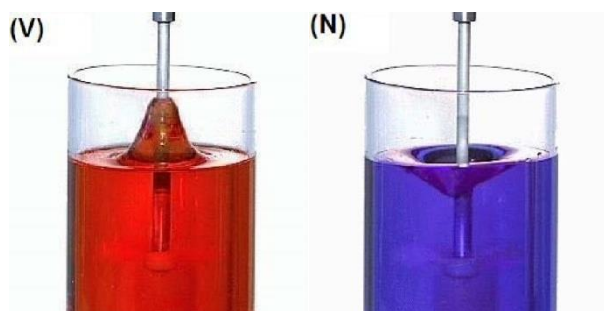
$$\eta = \frac{\tau_{xx}}{\dot{\gamma}} \quad (5-1)$$

۲-۲-۱ رفتارهای سیال ویسکوالاستیک

تفاوت رفتارهای سیال ویسکوالاستیک با نیوتنی دارد، ناشی از اختلاف تنش‌های عمودی است. در این بخش برخی از رفتار این سیال معرفی می‌شوند.

۱-۲-۲-۱ تغییر شکل سطح آزاد یک سیال در حال چرخش

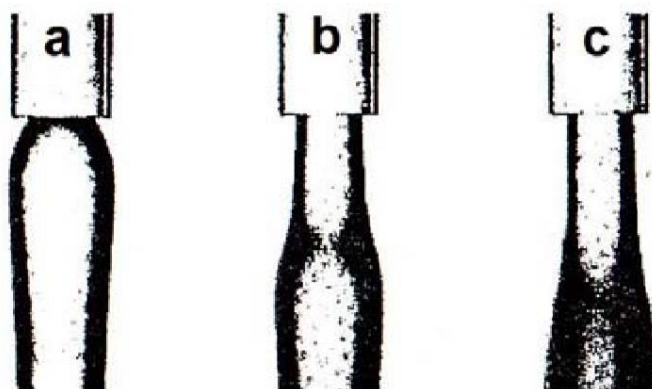
اگر سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک درون ظرفی را با میله هم بزنید. سطح سیال نیوتنی درون ظرف در نزدیک دیوار ظرف بالا می‌آید و در وسط ظرف حول میله پایین می‌رود، این اتفاق به دلیل وجود نیروی گریز از مرکز می‌باشد. ولی در سیال ویسکوالاستیک سطح سیال به صورت محدب که تمایل به بالا رفتن از میله را دارد. این پدیده به دلیل اختلاف تنش نرمال اول است [۴].



شکل ۱-۱. اعمال چرخش با میله برای سیال نیوتنی (N) و سیال ویسکوالاستیک (V) [۴].

۲-۲-۲-۱ آماسیدگی جت

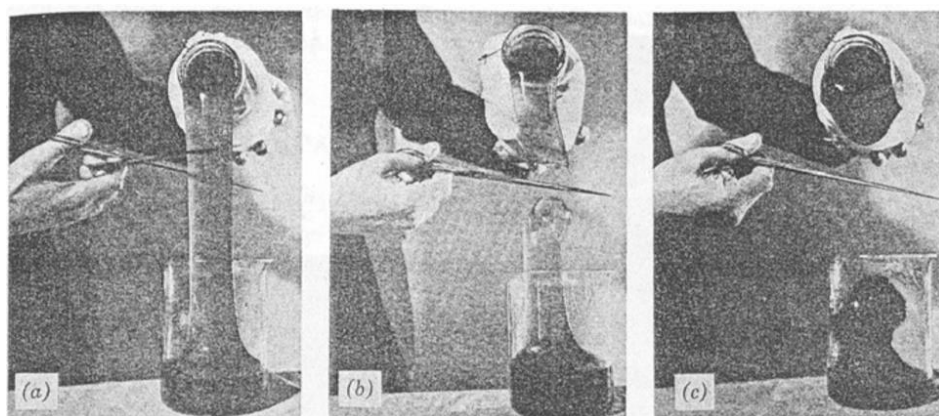
سیال ویسکوالاستیک در خروجی از سر نازل تمایل زیادی به گسترش جانبی دارد، که این اتفاق ناشی از اختلاف تنش عمودی اول می‌باشد. با زیاد شدن اینرسی جریان، باعث دور شدن موقعیت تورم از خروجی نازل می‌شود.



شکل ۱-۲. دور شدن موقعیت تورم با افزایش عدد رینولدز از c به a [۳].

۱-۲-۲-۳ بازگشت فنری

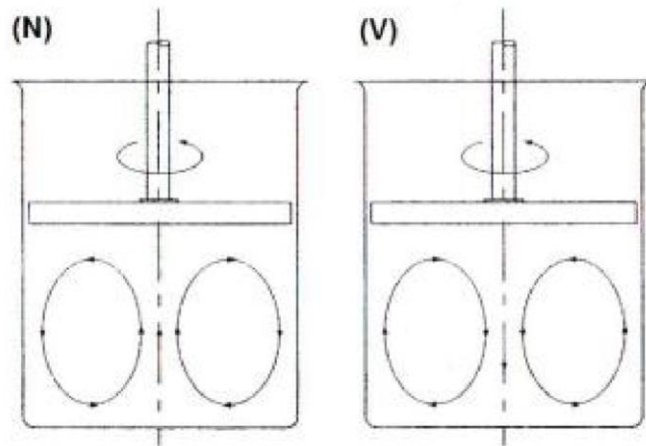
یک سیال ویسکوالاستیک در نظر بگیرید که از یک ظرف به ظرف دیگر در حال خالی شدن باشد. اگر جریان ایجاد شده به کمک وسیله‌ای قطع شود قسمت بالایی جریان به ظرف مبدأ برمی‌گردد. این اتفاق به خاطر خواص الاستیک ماده است و به اصطلاح گویند سیال دارای حافظه است [۳].



شکل ۱-۳. بازگشت فنری یک سیال ویسکوالاستیک [۳].

۱-۲-۲-۴ جریان‌های ثانویه در مجاری غیرمدور

اختلاف تنش نرمال دوم باعث ایجاد جریان‌های ثانویه در جریان آرام و داخلی سیال ویسکوالاستیک با سطح مقطع غیرمدور می‌شود. شدت چرخش جریان ثانویه به مقدار N_2 و جهت چرخش به مثبت و منفی بودن علامت N_2 بستگی دارد.



شکل ۱-۴. تغییر جهت جریان‌های ثانویه در عمق یک جریان در حال چرخش [۳].

۳-۱ پیشینه تحقیق

پیشینه تحقیق را در دو بخش سیال نیوتنی و سیال ویسکوالاستیک به صورت زیر است.

۱-۳-۱ پیشینه تحقیق سیال نیوتنی

برای شبیه‌سازی عددی جریان غیردائم سیال نیوتنی از الگوریتم روش دو زمانی^۱ توسط جیمسون [۵] ارائه شده و در این روش با افزودن جمله مشتق زمان واقعی به شکل ضمنی به دستگاه معادلات حاکم حاصل می‌شود. روند حل این دستگاه معادلات، از دو حلقه تکرار بیرونی و درونی استفاده شده است. حلقه تکرار بیرونی مربوط به زمان واقعی و حلقه تکرار درونی مربوط به زمان کاذب است. با همگرایی حلقه تکرار داخلی، معادلات در زمان واقعی حل می‌شود. برتری این روش از روش‌های دیگر این است که قیدی برای انتخاب گام زمان واقعی وجود ندارد. آرنون و همکاران [۶] دریافتند، اگر گام زمان واقعی از نظر مرتبه برابر یا کوچک‌تر از گام زمان کاذب باشد، حل ناپایدار است. هجران‌فر و همکاران [۷-۸] برای شبیه‌سازی عددی اجسام شناور کاملاً تراکم‌ناپذیر بر پایه تراکم‌پذیری مصنوعی از روش الگوریتم دو زمانه استفاده نموده‌اند. در نظر گرفتن الگوریتم‌های پیمایش زمانی برای شبیه‌سازی عددی جریان‌های تراکم‌ناپذیر لزج، غیرلزج، گذر صوت و فراصوت امروزه جایگاه خاصی بین محققان دارد. از طرف دیگر دستگاه معادلات تراکم‌ناپذیر غیردائم از نظر خاصیت ریاضی دارای ماهیت سهموی-بیضوی هستند. به دلیل اینکه جمله وابسته به زمان در معادله پیوستگی وجود ندارد، استفاده از روش‌های پیمایش زمانی برای این معادلات بلامانع است، ولی دارای پایداری کمتری است. روش سنتی حل عددی معادلات تراکم‌ناپذیر به این صورت است که ابتدا با حدس میدان فشار و حل معادله ممنوم صورت می‌گیرد که میدان سرعت حاصل می‌شود. جهت درستی نتایج میدان سرعت از معادله پیوستگی استفاده می‌شود. این روش توسط پتنکار

1. Dual-Time method

[۹] به نام روش فشار-مبنا^۱ معرفی گردید. این روش از لحاظ محاسباتی غیراقتصادی و زمان‌بر است. معادلات جریان تراکم‌پذیر یک معادله هذلولوی ولی معادلات جریان تراکم‌ناپذیر از نوع معادله سهموی-بیضوی هستند. تفاوت بین این دو جریان در خاصیت ریاضی آن‌هاست. مجهولات معادلات جریان تراکم‌ناپذیر سرعت و فشار است. هیچ ارتباط مستقیم از نظر فشار بین معادله پیوستگی و معادلات ممنتوم وجود ندارد و با انجام عملیات ریاضی، با افزودن یک جمله غیر فیزیکی وابسته به زمان ارتباط بین این دستگاه معادلات میسر می‌شود. با اضافه نمودن جمله مشتق زمانی فشار که به توان دوم سرعت صوت کاذب رسیده است این دستگاه معادلات تراکم‌ناپذیر به شکل هذلولوی درمی‌آید. در واقع رابطه کاذب بین فشار و چگالی سیال تراکم‌ناپذیر برقرار می‌گردد؛ که مشتق زمان فشار کاذب جایگزین چگالی در معادله پیوستگی می‌شود. با پیمایش در زمان کاذب این عبارت کاذب از بین می‌رود. این روش به روش تراکم‌پذیری مصنوعی^۲ معروف است. این روش توسط چورین [۱۰] برای حل معادلات تراکم‌ناپذیر پایا معرفی گردید. تُرکل [۱۱]، روش چورین را با افزودن جملات مشتق زمان کاذب به معادلات ممنتوم توسعه داد که سبب تسریع در سرعت همگرایی می‌شود. این روش به روش پیش‌شرط معروف است. مالان و همکاران [۱۲-۱۳] روش پیش‌شرط محلی با یک ماتریس محلی معرفی کردند، که این ماتریس پیش‌شرط محلی با توجه به ماتریس پیش‌شرط تُرکل اصلاح شد. این ماتریس پیش‌شرط به صورت موضعی با گرادین میدان فشار در هر گام زمان تغییر می‌کند. این روش توجه خاصی بر روی سرعت همگرایی و دقت مسئله دارد. اصفهانیان و اکبرزاده [۱۴] برای حل جریان تراکم‌ناپذیر پایا روی استوانه در جریان آزاد از روش پیش‌شرط استاندارد استفاده نموده‌اند. در این تحقیق اثرات عدد CFL، کمیت تراکم‌پذیر کاذب و ضریب ویسکوزیته مصنوعی بر روی سرعت همگرایی مورد بررسی قرار دادند. همچنین از روش پیش‌شرط سازی توانی^۳ برای تجزیه و تحلیل جریان غیرلزج و آرام حول هیدروفیل پرداختند. در این روش از یک ماتریس پیش‌شرط به‌طور خودکار از میدان فشار یا سرعت به صورت توان استفاده می‌کند. این روش تمرکز بسیاری روی نرخ همگرایی دارد [۱۵]. اکبرزاده و همکاران [۱۶-۱۷] از روش پیش‌شرط توسعه‌یافته توانی برای تحلیل جریان‌های آرام غیردائم عبوری از هیدروفیل استفاده کرده‌اند. در پژوهش آن‌ها از ماتریس پیش‌شرط توانی که با میدان سرعت به صورت موضعی تغییر می‌کند. این روش نیز باعث افزایش نرخ همگرایی و کاهش هزینه محاسباتی از لحاظ زمانی در جریان‌های غیردائم می‌شود. همچنین از روش پیش‌شرط‌سازی توانی محلی برای حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر دائم و غیردائم در اطراف ایرفویل برای اعداد رینولدز بالا استفاده شده است. پژوهش آن‌ها دارای دقت پایداری قابل قبول، تسریع سرعت همگرایی ۱۷-۵۶ درصد و صرف جویی در زمان محاسبات به‌اندازه ۱۶-۵۲ درصد می‌باشد.

2. Pressure-Based

1. Artificial Compressibility.

2. Power-Law Preconditioning Method

۱-۳-۲ پیشینه تحقیق سیال غیرنیوتنی

در قرن اخیر موادی یافته می‌شود که شبیه سیالات هستند، اما رفتار آن‌ها را نمی‌توان با مدل نیوتنی توصیف نمود. این دسته از سیالات به سیالات غیرنیوتنی معروف هستند. مطالعه این گونه جریان‌ها در علمی به نام رئولوژی^۱ جای دارد. با توسعه علم رئولوژی در زمینه‌های مختلف مانند مواد آرایشی و بهداشتی، صنایع نفت، مواد روانکاری حفاری و ... باعث گسترش این علم توسط محققان شده است. یکی از معروف‌ترین نوع سیالات غیرنیوتنی سیال ویسکوالاستیک می‌باشد که دارای اهمیت خاصی در صنایع پتروشیمی، نظامی و ... دارد. یک از مباحث مهم این جریان‌ها بحث در مورد جریان ثانویه و جریان غیردائم می‌باشد؛ که محققانی زیاد در این خصوص تحقیقاتی را انجام داده‌اند. در این بخش به پیشینه تحقیق سیالات ویسکوالاستیک پرداخته شده است.

در جریان‌های سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستقیم دارای مقطع غیرمردور، جریان‌ها مستقیم‌الخط نیستند. در نزدیک هر گوشه یک جفت جریان ثانویه تشکیل می‌شود؛ که توسط اریسکون و همکارانش [۱۸] گزارش شده بود. ویلر و همکارانش [۱۹] به بررسی پروفیل سرعت با استفاده از روش پرتونگاری دریافتند که جریان ثانویه ضعیف مشاهده شده حاصل از خطای عددی می‌باشد. در ادامه محقق دیگری [۲۰] به مدل‌سازی جریان ثانویه در داخل کانال مستطیلی پرداخت که دریافت هشت جریان ثانویه در این کانال شکل می‌گیرد. تانسد و همکارانش [۲۱] با روش اختلالات به بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک در داخل کانال مستطیلی با استفاده از مدل کریمینال اریکسون پرداختند. آن‌ها دریافته‌اند که مقدار اختلاف تنش نرمال دوم رابطه مستقیم با شدت جریان ثانویه دارد. همچنین داری و همکارانش [۲۲] به مدل‌سازی دوبعدی جریان سیال ویسکوالاستیک در داخل کانال پرداختند که هیچ اطلاعاتی در مورد جریان ثانویه حاصل نمی‌شود و محققان زیاد دیگر بروی جریان ثانویه در داخل کانال مستطیلی و هندسه‌های پیچیده‌تر نیز تحقیق کرده‌اند [۲۳-۲۴].

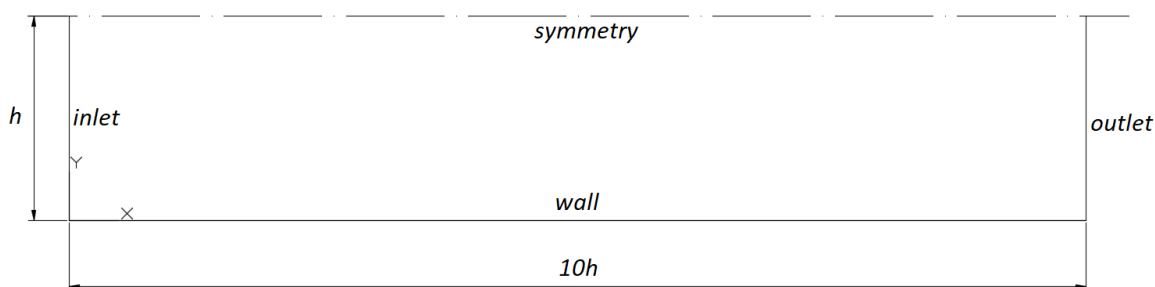
واترز و کینگ [۲۵] به بررسی حل تحلیلی جریان پوازیه^۲ غیردائم سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی بی‌نهایت با استفاده از معادله اولدروید-بی پرداختند و نتایج آن نشان می‌دهد که استفاده از سیال مرتبه دوم برای جریان ویسکوالاستیک وقتی از تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود، برای حل، مشکلاتی به وجود می‌آورد که برای رفع این مشکلات معادله‌سازی از نوع انتگرال را پیشنهاد کرد. همچنین فتکاو و همکاران [۲۶] راه حل‌های دقیق برای حل تحلیلی جریان غیردائم یک سیال اولدروید-بی برای کانالی با سطح مقطع مستطیلی را بررسی نموده‌اند. در تحقیق مامپین و دوایل با بررسی عددی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک مربوط به جریان انقباض^۳ با روش عددی حجم محدود پرداخته‌اند. از مدل اولدروید-بی برای هندسه سه‌بعدی با شبکه غیریکنواخت استفاده شده است. نتایج به‌دست‌آمده آن‌ها نشان می‌دهد که تفاوت اساسی بین نتایج حالت دو و سه‌بعدی وجود دارد. برای حل مسئله پوازیه غیردائم جریان ویسکوالاستیک از روش ترکیبی المان محدود و حجم محدود توسط ساتو و ریچاردسون

1. Rheology
2. Poiseuille Flow
3. Contraction Flow

[۲۷] استفاده شد؛ که در مقاله آن‌ها از مدل اولدروید-بی و مدل UCM مورد استفاده قرار گرفته است. یک مدل عددی با فرمول‌سازی حجم محدود و با تمرکز بروی دقت عددی برای جریان‌های ویسکوالاستیک غیردائم توسط ژو و همکارانش [۲۸] ارائه گردید که الگوریتم حل آن‌ها به صورت حل تکراری و برای جمله زمان از گسسته‌سازی مرتبه دوم به صورت ضمنی استفاده شده است. مدل استفاده شده در تحقیق ژو مدل اولدروید-بی است، آن‌ها نیز نشان دادند گسسته‌سازی جمله زمان به صورت صریح مناسب نیست. مانگیاواچی و همکارانش [۲۹] به توسعه روش عددی برای شبیه‌سازی جریان غیردائم سطح آزاد سیال ویسکوالاستیک با استفاده از مدل اولدروید-بی پرداختند. ایشان معادلات حاکم را با استفاده از روش تفاضل محدود روی یک شبکه با توجه به ایده روش علامت‌گذاری و سلول^۱ حل نموده‌اند. محققان دیگری نیز به بررسی عددی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک در داخل یک کانال همگرا [۳۰]، بین دو صفحه همگرا [۳۱] و در مجاری بسته [۳۲] به تحقیق پرداختند. جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک با مدل ماکسول مشتق جزئی (FDMM) در یک کانال نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [۴۶].

۴-۱ معرفی پژوهش حاضر

در پژوهش حاضر، برای اولین بار از روش پیش‌شرط توانی برای شبیه‌سازی عددی جریان‌های غیردائم سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است. در این تحقیق جریان سیال ویسکوالاستیک از داخل یک کانال افقی با مقطع مستطیل به صورت دو بعدی طبق شکل (۵-۱) جاری می‌گردد.



شکل ۵-۱. نمایی شماتیک از هندسه مورد بررسی در تحقیق حاضر.

همین‌طور که پیش‌تر بیان شد، عبور سیال ویسکوالاستیک از درون کانال با سطح مقطع غیرممتدور، مستقیم‌الخط نیستند. به همین دلیل سبب تشکیل یک جفت جریان ثانویه در گوشه‌های کانال می‌گردد. این جریان‌های ثانویه در حالت دوبعدی در این تحقیق قابل‌رویت نیست. برای محاسبه تنش معادلات ممنتوم با توجه به هندسه دوبعدی از معادله ساختاری ماکسول ساده استفاده شده است. در این مطالعه ضریب پیش‌شرط محلی در جمله وابسته به زمان در معادلات ممنتوم، از رابطه توانی که توسط حسگر

محلی تنش^۱ در هر گام زمانی تصحیح می‌گردد، محاسبه شده است. معادلات ناویر-استکوس جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک از روش تفاضل محدود^۲ مبنی بر روش تراکم‌پذیری مصنوعی در شبکه جابجا شده با روش علامت‌گذاری سلول گسسته‌سازی شده است. همچنین جمله وابسته به زمان در معادلات ممنتوم با الگوریتم ضمنی دو زمانه حل شده است. برای گسسته‌سازی مشتق جمله زمان کاذب از روش عددی وثوقی فر چهار مرحله‌ای بهره برده شده است. در نهایت نتایج تحقیق را با حل تحلیلی و عددی اعتبارسنجی شده است.

۱-۵ ضرورت انجام پژوهش حاضر

بشر در زندگی روزمره از مواد مختلفی استفاده می‌کند. یکی از گروه‌های مهم این مواد، سیالات هستند. قسمت بیشتر این مواد سیال را سیالات غیرنیتونی تشکیل می‌دهند. از سوی دیگر پیشرفت و گسترش صنعت در زمینه‌های استخراج نفت، تزریق مواد پلیمری، تولید انواع شوینده، لوازم‌آرایی و ... باعث شد که مطالعه و شناخت عددی رفتار سیالات غیرنیتونی در هندسه‌های ساده‌تر مانند کانال دوبعدی با سطح مقطع مستطیل و جریان‌های درحال توسعه دارای اهمیت باشد. همچنین در جریان غیردائم سیالات ویسکوالاستیک که دارای ویژگی منحصربه‌فرد رفتار نوسانی در محدوده پایدار، بدون عامل خارجی در شرایط مرزی و نیروی‌های خارجی می‌باشد. پژوهشگران برای ساخت تجهیزات و ابزاری که سیالات ویسکوالاستیک در آن جریان دارد نیازمند به تحلیلی عددی هستند. روش‌های عددی که بتواند معادلات جریان غیردائم سیالات ویسکوالاستیک را مدل‌سازی کند و دارای دقت کافی و نرخ همگرایی زیاد باشد، جایگاه ویژه در مکانیک سیالات محاسباتی دارد. از سوی دیگر روش تراکم‌پذیر مصنوعی برای حل عددی جریان دائم سیالات ویسکوالاستیک روش پرکاربرد و مناسبی می‌باشد. پس از این روی توسعه روش عددی پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر محلی تنش می‌تواند کمک شایانی روی پایداری حل، دقت جواب و تسریع نرخ همگرایی برای معادلات جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک درحال توسعه ایفا کند.

۱-۶ نوآوری پژوهش

امروزه پژوهش‌های فراوانی در خصوص روش‌های حل عددی جریان‌های سیالات ویسکوالاستیک در هندسه‌های متفاوت صورت گرفته است. در ادامه به نوآوری‌های انجام‌شده در پژوهش حاضر پرداخته می‌شود.

- برای اولین بار در این تحقیق، جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک در ناحیه درحال توسعه بین دو صفحه موازی به صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است.
- در تحقیق حاضر برای نخستین بار از روش پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر تنش جهت

2. Local Stress Sensor

3. Finite Difference Method

پایداری بیشتر و افزایش نرخ همگرایی برای حل عددی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی استفاده گردیده است.

- در این تحقیق روش‌های عددی مختلف از قبل تراکم‌پذیر مصنوعی کورین، روش پیش‌شرط استاندارد ترکل، روش پیش‌شرط مالان، روش پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر فشار و سرعت و روش پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر تنش در دامنه از اعداد رینولدز، اعداد وایزنبرگ و نسبت ویسکوزیته برای جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک باهم مقایسه می‌شود.
- در پژوهش حاضر از روش عددی زمانی و ثوقی‌فر برای گسسته‌سازی جمله زمان معادلات جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک روی شبکه جابجا شده برای نخستین بار استفاده می‌شود؛ که این روش عددی زمانی از روش‌های عددی رانج-کوتا، کرانک-نیکولسون، پیشرو و اسدریک از لحاظ نرخ همگرایی و هزینه محاسبات بهتر می‌باشد.

۷-۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه

در این بخش به مرور کلی از مطالبی که در فصل‌های بعدی این پژوهش بیان شده، به شرح زیر پرداخته می‌شود:

- در فصل دوم، معادلات حاکم و متشکله بر جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی ارائه می‌شود. سپس کمیت‌ها و اعداد بی‌بعد که جهت بی‌بعدسازی معادلات حاکم استفاده می‌شوند، معرفی خواهند شد. در ادامه روش تراکم‌پذیری مصنوعی و روش‌های پیش‌شرط سازی معرفی می‌شوند و درنهایت روش پیش‌شرط توانی و معادلات حاکم بر جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک ارائه می‌گردد.
- در فصل سوم، آشنایی با روش عددی مورد استفاده، نحوه گسسته‌سازی معادلات حاکم و متشکله بر جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک، نحوه منفصل‌سازی جمله مشتق زمان و پیاده‌سازی آن در الگوریتم دو زمانه، بررسی سرعت صوت کاذب، نحوه گسسته‌سازی حسگر تنش، نحوه اعمال شرایط مرزی و اولیه جهت حل معادلات حاکم، خطا محاسباتی موجود در نتایج جواب‌ها و در آخر الگوریتم مربوط به کد مکانیک سیالات محاسباتی تهیه شده ارائه می‌گردد.
- در فصل چهارم، نتایج عددی حل جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه بین دو صفحه موازی ثابت ارائه می‌شود. در ابتدای این فصل با شرایط همگرایی حل، استقلال حل از شبکه و از گام زمانی، ارزیابی صحت نتایج به‌دست‌آمده و درنهایت تأثیر روش پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر تنش در افزایش پایداری حل عددی، نرخ همگرایی و دقت جواب‌های حل مورد بررسی قرار می‌گیرد.
- در فصل پنجم، نتیجه‌گیری از نتایج جواب به‌دست‌آمده در این پژوهش و ارائه راه‌کارهای

پیشنهادی و انجام مطالعات جامع تر برای ادامه این پژوهش بیان می شود.

فصل ۲: فنریک مسنده و معادلات حاکم

بر جریان

۲-۱ مقدمه

در فصل حاضر معادلات حاکم و متشکله بر جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی در دستگاه مختصات کارتزین دو بعدی ارائه شده است. در ادامه کمیت‌ها و اعداد بی‌بعد جهت بی‌بعد سازی معادلات حاکم و متشکله ارائه می‌شود. در نهایت با معرفی روش تراکم‌پذیری مصنوعی، روش ماتریس پیش‌شرط ترکل و توسعه روش پیش‌شرط مالان و توانی پرداخته می‌شود.

۲-۲ معادلات حاکم

در این تحقیق، جریان آرام، تراکم‌ناپذیر و غیردائم سیال ویسکوالاستیک مورد مطالعه قرار گرفته است. طبق اصول اولیه مکانیک سیالات، معادلات پیوستگی و ممثوم برای تمام جریان سیال پیوسته به شکل زیر است:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \vec{F} \quad (2-2)$$

که در معادلات فوق $\vec{V}$ بردار سرعت، p میدان فشار، $\boldsymbol{\tau}$ تانسور تنش، $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ تغییرات چگالی نسبت به زمان که در تحقیق حاضر چگالی ثابت بنابراین $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$ است و $\vec{F}$ نیرو خارجی، چون در این پژوهش جریان آزاد است و عامل انتقال انرژی نیروی جاذبه نیست این جمله از معادله (۲-۲) حذف می‌گردد. منظور از معادلات سیال ویسکوالاستیک غیردائم یا دائم در پایان‌نامه حاضر معادلات جریان آزاد، آرام و تراکم‌ناپذیر سیال ویسکوالاستیک است. معادلات سیال ویسکوالاستیک غیردائم در این پژوهش به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3-2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) u \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (4-2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) v \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$$

۲-۳ معادله متشکله ماکسول

برای حل معادلات ممنتوم جریان سیال ویسکوالاتیك (۲-۴) و (۲-۵) نیاز به محاسبه کمیت تنش است. به همین جهت به معادله کمکی برای محاسبه تنش و مدل سازی رفتار سیال ویسکوالاستیک نیازمند است. از سوی دیگر همان طور که قبل تر در بخش (۱-۴-۲) بیان شد، جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال های با سطح مقطع غیرممتدور مستقیم الخط نیست و جریان ثانویه در گوشه ها تشکیل می گردد. از طرف دیگر در این پژوهش هندسه مسئله به شکل دو بعدی می باشد، به همین دلیل بهترین و ساده ترین مدل برای نشان دادن رفتار سیال ویسکوالاستیک مدل ساختاری ماکسول ساده در این تحقیق می باشد. به دلیل اینکه اختلاف تنش نرمال دوم بسیار کوچک است، پاسخ این مدل نیز به واقعیت بسیار نزدیک است.

$$\tau + \lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial t} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (۲-۶)$$

اگر $\lambda_1 = 0$ باشد، مدل ماکسول ساده به سیال نیوتنی تبدیل می شود. در معادله (۲-۶) τ تنش سیال، λ_1 زمان رهایی از تنش^۱، $\frac{\partial \tau}{\partial t}$ مشتق زمانی تنش سیال، η_0 لزجت سیال ویسکوالاستیک و $\dot{\gamma}$ نرخ برش^۲ است. در مدل سازی محلول های پلیمری برای افزایش پایداری بسیار رایج است که تنش را به صورت مجموع تنش های نیوتنی و پلیمری تفکیک می کنند و جمله تنش نیوتنی که منجر به لاپلاس میدان سرعت می شود، نقش مؤثری در پایداری برنامه های عددی کامپیوتر ایفا می کند [۳].

$$\tau = \tau_p + \tau_N \quad (۲-۷)$$

$$\tau_p + \lambda_1 \frac{\partial \tau_p}{\partial t} = \eta_p \dot{\gamma} \quad (۲-۸)$$

$$\tau_N = \eta_N \dot{\gamma} \quad (۲-۹)$$

این مدل نیاز به محاسبه نرخ برش دارد که به شکل زیر است [۳]:

$$\dot{\gamma} = \nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T \quad (۱۰-۲)$$

$$\nabla V_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$u_1 = u, u_2 = v \quad (۱۱-۲)$$

$$x_1 = x, x_2 = y$$

در رابطه (۱۱-۲)، u سرعت محوری در جهت جریان، v سرعت عمودی برجهت جریان، محور x در جهت جریان و محور y عمود بر محور x است.

$$\nabla V^T_{i,j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (۱۲-۲)$$

در ادامه برای حل عددی معادلات نامبرده شده و تحلیل این پژوهش معادلات را به صورت بی بعد درآورده شده است.

۴-۲ کمیت‌های بی بعد

لازم است برای مدل سازی جریان سیال ویسکوالاستیک، معادلات حاکم و معادله مشخصه را بی بعدسازی کرده و سپس به شیوه بیان شده در بخش ۳-۷ حل شود. جهت بی بعدسازی معادلات از روابط زیر استفاده شده است:

$$\beta = \frac{\eta_N}{\eta_0} \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2} \quad \tau^* = \frac{\tau}{\rho U^2} \quad \text{Re} = \frac{\rho U h}{\eta_0} \quad \text{Wi} = \frac{\lambda U}{h} \quad \dot{\gamma}^* = \frac{U^2}{h} \dot{\gamma} \quad (۱۳-۲)$$

$$x^* = \frac{x}{h} \quad y^* = \frac{y}{h} \quad u^* = \frac{u}{U} \quad v^* = \frac{v}{U} \quad t^* = \frac{t U}{h} \quad \eta_0 = \eta_N + \eta_P$$

برای سادگی در نوشتار از نوشتن علامت (*) برای کمیت‌های بی بعد در معادلات صرف نظر شده است. در رابطه (۱۳-۲)، Re عدد رینولدز که نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت است، عدد رینولدز در حل تحلیل و عددی سیالات کاربرد فراوانی دارد. Wi عدد وایزبرگ که نسبت نیروی الاستیک به نیروی لزجت است و عدد وایزبرگ نیز مانند عدد رینولدز، در تحلیل عددی سیالات ویسکوالاستیک و برای تعیین بهترین مدل ساختاری برای تحلیل سیالات غیرنیوتنی مورد استفاده قرار می گیرد. جهت بی بعدسازی رابطه (۱۰-۲)، (۱۱-۲) و (۱۲-۲) از روابط بی بعد (۱۳-۲) استفاده می شود:

$$\tau_P + \text{Wi} \frac{d\tau_P}{dt} = \frac{(1-\beta)}{\text{Re}} \dot{\gamma} \quad (۱۴-۲)$$

$$\tau_N = \frac{\beta}{Re} \dot{\gamma} \quad (15-2)$$

$$\eta_0 = \eta_N + \eta_P \quad (16-2)$$

$$\tau + \lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial t} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (17-2)$$

که در روابط بالا η_N لزجت سیال نیوتنی یا حلال، η_P لزجت پلیمر، η_0 لزجت کل و β نسبت لزجت سیال نیوتنی به لزجت کل می‌باشد. از آنجاکه در تحقیق حاضر هندسه دوبعدی مدنظر است، تانسور تنش به شکل زیر است:

$$\tau_{xx} + Wi \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (18-2)$$

$$\tau_{xy} + Wi \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (19-2)$$

$$\tau_{yy} + Wi \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} = \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (20-2)$$

۵-۲ تراکم‌پذیری مصنوعی

معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر با توجه به نوع کمیت وابسته، به دو فرمول‌بندی مختلف یکی برحسب کمیت‌های اولیه فشار و سرعت و دیگری ورتیسیتی و تابع جریان تقسیم می‌شوند. در این پژوهش از فرمول‌بندی کمیت اولیه استفاده شده است. در معادلات حاکم رابطه مستقیم از نظر فشار بین معادله پیوستگی و معادلات ممنتوم وجود ندارد که برای حل این معادلات دو روش کلی وجود دارد. یکی از روش‌ها، روش معادلات پوآسون است که در این روش یک رابطه غیرمستقیم با مشتق‌گیری معادلات ممنتوم نسبت به راستای موجود با معادله پیوستگی به وجود می‌آید که به معادله پوآسون معروف است [۳۳]. روش دیگر تراکم‌پذیری مصنوعی که در معادله پیوستگی یک جمله کاذب به معادله پیوستگی اضافه می‌شود [۱۰] که در بخش‌های بعدی به توضیح کامل این روش پرداخته شده است.

۱-۵-۲ تراکم‌پذیری مصنوعی کورین

همان‌طور که در بخش (۲-۲-۱) گفته شد، در جریان‌های تراکم‌ناپذیر جمله تغییرات چگالی نسبت به زمان از معادله پیوستگی حذف می‌شود و معادلات جریان تراکم‌ناپذیر به شکل معادلات سهموی-بیضوی در می‌آید. تفاوت معادلات جریان تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر در خاصیت ریاضی آن‌ها می‌باشد. روش‌های

سنتی حل معادلات تراکم‌ناپذیر برپایه حدس میدان فشار، با حل معادلات ممنتوم میدان سرعت به دست می‌آید و جهت درستی میدان سرعت از معادله پیوستگی استفاده می‌شد. این روش از لحاظ زمانی و محاسباتی غیراقتصادی است. در معادلات ممنتوم جمله فشار و سرعت، ولی در معادله پیوستگی فقط جمله سرعت موجود است، به همین منظور کورین [۱۰] پیشنهاد کرده است که یک عبارت غیرفیزیکی وابسته به زمان به معادله پیوستگی اضافه شود. بدین ترتیب معادلات تراکم‌ناپذیر به شکل معادلات هذلولوی درمی‌آید که این دستگاه معادلات غیردائم تراکم‌پذیر مصنوعی بدون حدس میدان فشار به دست می‌آید. این عبارت غیرفیزیکی مشتق فشار نسبت به زمان کاذب که به معادله پیوستگی اضافه می‌شود با پیمایش گام‌های زمانی کاذب از بین می‌رود، این دیدگاه را تراکم‌پذیر مصنوعی^۱ شناخته می‌شود. معادله حالت کاذب کورین به شکل:

$$p = \frac{\rho_a}{\delta} \quad (21-2)$$

که p فشار، δ_a کمیت تراکم‌پذیری کاذب و ρ چگالی کاذب است [۱۰]. با مشتق‌گیری از رابطه (۲۱-۲) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\partial p = \frac{1}{\delta} \partial \rho_a \quad (22-2)$$

با توجه به جمله مشتق چگالی نسبت به زمان رابطه (۲-۱) و (۲۲-۲) می‌توان نوشت [۱۰]:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t_a} = \frac{\partial \rho_a}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial t_a} = \delta \frac{\partial p}{\partial t_a} \quad (23-2)$$

با توجه به تعریف سرعت صوت و تنش الاستیک در حالت یک بعدی:

$$K = p \rightarrow c = \sqrt{\frac{K}{\rho_a}} \xrightarrow{(21-2)} c = \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_a \delta}} = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/2} \rightarrow c^2 = \frac{1}{\delta_a} \quad (24-2)$$

که در رابطه بالا K تنش الاستیک و c سرعت صوت کاذب است، با قرار دادن رابطه (۲۳-۲) و (۲۴-۲) در معادله پیوستگی (۳-۲) معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی کورین به شکل بقایی حاصل می‌شود [۱۰].

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (25-2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_a} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (26-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t_a} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

1- Artificial Compressibility

برای اینکه معادلات جریان به معادلات تراکم‌ناپذیر نزدیک‌تر شوند لازم است جمله اضافی مشتق زمان موجود در معادله پیوستگی (۲-۲۵) به سمت صفر میل کند. برای میل دادن جمله اضافه‌شده به معادله پیوستگی به سمت صفر انتخاب مقدار مناسب سرعت صوت کاذب مؤثر می‌باشد. مقدار سرعت صوت کاذب نقش مهمی روی پایداری و سرعت همگرایی دارد. تامامدیس و همکارانش [۳۴] گزارش دادند که انتخاب مقدار سرعت صوت کاذب به شرایط جریان، نوع هندسه جسم و تجربه فرد برنامه‌نویس بستگی دارد که مقدار پیشنهادی آن‌ها برای سرعت صوت کاذب بین ۰/۱ تا ۱۰ می‌باشد. ادیبی [۳۵] با بررسی ضریب تراکم‌پذیری بر روی جریان تراکم‌ناپذیر سه بعدی غیردائم دریافت که برخلاف جریان تراکم‌پذیر که سرعت صوت کاذب مقداری ثابت در تمام جهت‌ها است، سرعت صوت کاذب تابعی از ضریب تراکم‌پذیری و جهت انتشار است و با تغییر ضریب تراکم‌پذیر مصنوعی در معادلات کورین فقط سبب تغییر نرخ سرعت همگرایی می‌شود و هیچ تأثیری بر دقت نتایج ندارد. درنهایت ادیبی دریافت که مقدار ضریب تراکم‌پذیر مصنوعی ۱ تا ۵ باشد بهترین نرخ همگرایی حاصل می‌شود.

۲-۵-۲ روش پیش‌شرط ترکل

ترکل [۱۱] با افزودن جمله کاذب به معادلات ممنتوم جریان تراکم‌ناپذیر غیرلزج، روش کورین را توسعه داد. توسعه روش کورین، سرعت همگرایی حل را تسریع می‌بخشد و به روش پیش‌شرط معروف است. دستگاه معادلات ترکل به صورت بقایی به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\alpha u}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) &= 0 \\ \frac{\alpha v}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial v}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial y} (v^2 + p) + \frac{\partial}{\partial x} (uv) &= 0 \end{aligned} \quad (2-28)$$

در دستگاه معادلات (۲-۲۸) با قرار دادن $\alpha = 0$ دستگاه معادلات به شکل معادلات تراکم‌پذیر مصنوعی کورین تبدیل می‌شود. در این حالت نرخ همگرایی جواب بسیار آهسته و پایداری بسیار بالا دارا است. با قرار گرفتن $\alpha = 1$ جمله کاذب علاوه بر معادله پیوستگی در معادلات ممنتوم نیز ظاهر می‌شود. با مقدار $\alpha = 2$ که توسط ترکل پیشنهاد شد، با توجه به آزمایش‌ها عددی صورت گرفته، نرخ همگرایی زیاد ولی پایداری کمتری دارد [۱۲].

۲-۵-۳ روش پیش شرط مالان

مالان و همکارانش [۱۲] با توسعه روش پیش شرط ترکل، یک ماتریس پیش شرط محلی ارائه کردند که در آن ماتریس ضریب پیش شرط α به صورت محلی تعیین می شود. در $\alpha = 2$ طبق گزارش ترکل همگرایی سریع ولی اثرات مخربی در پایداری حل دارد [۱۱]. این تخریبات در نواحی محاسباتی با گرادیان کمیت های اصلی بیشتر می شود. مالان با استدلال استنتاجی به دست آمده از نتایج عددی دریافت که عامل این تخریبات در پایداری، نوسانات محلی گرادیان فشار است. برای جلوگیری از این گونه نوسانات از حسگر فشار محلی A_p در میدان محاسباتی استفاده کرد [۱۲]. پیشنهاد مالان [۱۲] استفاده از حسگر فشار محلی A_p و اعمال آن بر روی ضریب پیش شرط α می باشد؛ که مقدار حسگر فشار محلی A_p بین صفر و یک که در مقدار یک بیشترین گرادیان فشار است. مقدار A_p از رابطه زیر حاصل می شود [۱۲]:

$$A_p = \lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{|\nabla p(x_i) - \nabla p(x)|}{|\nabla p(x_i)| - |\nabla p(x)|} \quad (29-2)$$

که $\nabla p(x_i)$ از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\nabla p(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{p(x) - p(x_i)}{x - x_i} \quad (30-2)$$

در رابطه بالا $p(x_i)$ فشار در نقطه ی i در فضای محاسباتی می باشد. ضریب پیش شرط محلی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\alpha = 2(1 - A_p) \quad (31-2)$$

معادلات مالان [۱۲] برای جریان تراکم ناپذیر دائم به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\alpha u}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \\ \frac{\alpha v}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial v}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial y} (v^2 + p) + \frac{\partial}{\partial x} (uv) &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (32-2)$$

معادلات (۲-۳۲) به شکل هذلولوی (هایپربولیک) هستند و تمام معادلات وابسته به زمان در نظر گرفته شده‌اند. برای پایداری عددی از حسگر محلی فشار استفاده می‌شود که ماتریس پیش‌شرط سیستم معادلات (۲-۳۲) مقداری مثبت دارند. مقادیر ویژه این ماتریس سبب افزایش همگرایی حل عددی با جاگذاشتن گام‌های زمانی کاذب می‌شود، که این مقادیر ویژه وابسته به سرعت صوت کاذب و سرعت سیال می‌باشد. پس تعیین مقدار سرعت صوت کاذب مناسب، اهمیت زیادی روی پایداری و همگرایی حل عددی دارند. در تعیین مقدار سرعت صوت کاذب، هم‌مرتبه بودن امواج صوتی با امواج جابجایی و یا امواج پخشی بحث مهمی است. در جریان‌ها با مقدار عدد رینولدز کم مقدار سرعت صوت کاذب ذاتاً عددی بزرگی است و در جریان‌ها با مقدار عدد رینولدز بالا مقدار مرتبه امواج صوتی با امواج جابجایی باید یکسان شود.

۲-۵-۴ روش پیش‌شرط توانی

اکبرزاده [۳۶] با همان معادلات (۲-۲۳)، با جایگذاری حسگر محلی سرعت در ماتریس پیش‌شرط و ضریب پیش‌شرط مالان، سرعت همگرایی را به میزان قابل‌توجهی اصلاح نمود. حسگر محلی سرعت از رابطه زیر مشابه حسگر فشار به دست می‌آید:

$$A_u = \lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{|\nabla u(x_i) - \nabla u(x)|}{|\nabla u(x_i)| - |\nabla u(x)|} \quad (۲-۳۳)$$

که $\nabla u(x_i)$ از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\nabla u(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{u(x) - u(x_i)}{x - x_i} \quad (۲-۳۴)$$

در رابطه بالا $\nabla u(x_i)$ سرعت در نقطه‌ی i در فضای محاسباتی است. همان‌طور که ترکل [۱۱ و ۳۷] بیان کرد از لحاظ تئوری بهترین نرخ همگرایی را در مقدار ضریب دو دارد، اما مشکلاتی در پایداری عددی ایجاد می‌کند. اکبرزاده و همکاران [۳۸] جهت رفع مشکل ذکرشده ضریب پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر سرعت را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\alpha = 2(1 - A_u)^m \quad (۲-۳۵)$$

که در رابطه فوق $(m \geq 2)$ و مقدار آن عدد طبیعی می‌باشد. اکبرزاده و دارازگیسو [۳۹] روش پیش‌شرط توانی را برای حل جریان آرام غیردائم توسعه دادند. مقدار بهینه توان رابطه (۲-۳۵) برای جریان غیردائم حول هیدروفیل ۲ معرفی کردند. معادلات حاکم آن‌ها به صورت زیر می‌باشد.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\alpha u}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (36-2)$$

$$\frac{\alpha v}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial v}{\partial t_a} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (v^2 + p) + \frac{\partial}{\partial x} (uv) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right)$$

۶-۲ روش پیش شرط توانی برای جریان ویسکوالاستیک

یکی از مشکلات دینامیک سیالات محاسباتی پایداری عددی در حل مسائل غیردائم سیالات غیرنیوتنی می باشد و این محدودیت نیز در سیالات نیوتنی به چشم می خورد. روش پیش شرط توانی یکی از روش های افزایش پایداری این گونه جریان ها است که در بخش پیشین به صورت کامل بحث گردید. لذا از معادلات حاکم (۳-۲)، (۴-۲) و (۵-۲) را با توجه به معادلات متشکله بخش (۲-۲-۲) برای جریان تراکم ناپذیر سیال ویسکوالاستیک غیردائم تعمیم داده شده است. این دستگاه معادلات توسعه یافته به صورت زیر است:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\alpha u}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial t_a} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = \frac{\beta}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\alpha v}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial v}{\partial t_a} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (v^2 + p) + \frac{\partial}{\partial x} (uv) = \frac{\beta}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (37-2)$$

سیالات ویسکوالاستیک به دلیل خاصیت الاستیک در جریان برشی غیردائم دارای ویژگی های متفاوت و خاص می باشند. یکی از ویژگی های منحصربه فرد رفتار نوسانی این سیالات در محدوده پایدار می باشد و بدون اینکه یک عامل خارجی نوسانی در شرایط مرزی و نیروهای خارجی باشد، هر چه مقدار نسبت لزجت کمتر باشد خاصیت الاستیک بیشتر و در پی آن نوسانات میدان جریان افزایش می یابد. به همین دلیل برای افزایش پایداری از حسگر تنش برای حل معادلات (۳۷-۲) استفاده شده است. حسگر محلی تنش^۱ به صورت زیر می باشد:

$$A_\tau = \lim_{x \rightarrow x_i^+} \frac{|\nabla \tau(x_i) - \nabla \tau(x)|}{|\nabla \tau(x_i)| - |\nabla \tau(x)|} \quad (38-2)$$

که $\nabla \tau(x_i)$ به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla \tau(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} \frac{\tau(x) - \tau(x_i)}{x - x_i} \quad (39-2)$$

همین‌طور که بیان شد، برای افزایش پایداری از حسگر تنش استفاده می‌شود. لذا ضریب پیش‌شرط توانی طبق بخش (۲-۳-۴) و رابطه (۲-۳۵) تعریف می‌گردد:

$$\alpha = 2(1 - A_\tau)^k \quad (40-2)$$

که در رابطه فوق ($k \geq 1$) و مقدار آن عدد طبیعی است. با هم مرتبه شدن امواج صوتی با امواج برشی با استفاده از این حسگر نرخ همگرایی افزایش و موجب پایداری حل عددی می‌شود. در فصل بعد به بررسی روش عددی و چگونه گسسته‌سازی دستگاه معادلات (۲-۳۹)، حسگر تنش (۲-۴۰) و معادله متشکله ماکسول ساده (۲-۱۸) تا (۲-۲۰) پرداخته شده است.

فصل ۳ : روش عددی

۳-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا معادلات حاکم و متشکله بر جریان غیردائم سیالات ویسکوالاستیک برای پیاده‌سازی الگوریتم دو زمانه ارائه می‌گردد. سپس روش عددی مورد استفاده و نحوه گسسته‌سازی معادلات براساس روش عددی تفاضل محدود بیان می‌شود. در ادامه به بررسی سرعت صوت کاذب، نحوه گسسته‌سازی حسگر تنش، اعمال شرایط مرزی جریان و شرایط اولیه به معادلات، معرفی خطای محاسباتی موجود در جواب‌ها و کاهش آن و در نهایت الگوریتم مورد استفاده در برنامه کامپیوتری مکانیک سیالات محاسباتی ارائه می‌شود.

۳-۲ دستگاه معادلات حاکم

دستگاه معادلات به دو قسمت دستگاه معادلات مربوط به معادلات پیوستگی و ممنتوم و معادلات متشکله تقسیم می‌شوند. در ادامه به شرح هر کدام پرداخته شده است.

۳-۲-۱ دستگاه معادلات مربوط به پیوستگی و ممنتوم

معادلات بی‌بعد جریان تراکم‌ناپذیر غیردائم به شکل برداری، به صورت زیر است:

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t_a} + \Pi \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0 \quad (1-3)$$

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} u \\ u^2 + p - \tau_{xx} - \frac{\beta}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial x} \\ uv - \tau_{xy} - \frac{\beta}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} v \\ uv - \tau_{xy} - \frac{\beta}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial y} \\ v^2 + p - \tau_{yy} - \frac{\beta}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c^2} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha u}{c^2} & 1 & 0 \\ \frac{\alpha v}{c^2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 \\ -\alpha u & 1 & 0 \\ -\alpha v & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

Γ ماتریس پیش‌شرط شده می‌باشد. معادلات جریان تراکم‌ناپذیر غیردائم به صورت زیر است:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (4-3)$$

$$\frac{\alpha \vec{V}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t_a} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot \tau$$

برای جلوگیری از سردرگمی در روابط به جای بردار سرعت $\vec{V}$ از $\mathbf{V}$ استفاده می‌شود. برای حل عددی معادلات (4-3) به صورت تراکم‌پذیری مصنوعی به روش پیش‌شرط توانی که در بخش 2-4 بیان شده، کافی است که مشتق زمان حقیقی موجود در معادلات ممنتوم را به شکل ضمنی مرتبه دو به صورت تفاضل پس‌روی زیر اضافه شود:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{3\mathbf{V}^{N+1} - 4\mathbf{V}^N + \mathbf{V}^{N-1}}{2\Delta t} \quad (5-3)$$

فرآیند حل دستگاه معادلات جریان تراکم‌ناپذیر غیردائم سیال ویسکوالاستیک به شکل تراکم‌پذیر مصنوعی با هر روش عددی به صورت دو حلقه تکرار، حلقه خارجی (مربوط به زمان حقیقی) و حلقه داخلی (مربوط به زمان کاذب) قابل انجام است. برای همگرایی حلقه داخلی می‌توان از هر روش پیش‌روی در زمان که برای حل مسئله دائم استفاده می‌شود، بهره‌مند شد اما جمله مشتق زمان حقیقی به صورت رابطه (5-3) در معادله ممنتوم (4-3) استفاده می‌شود و شکل نیمه گسسته آن به شکل زیر است:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t_a} + \frac{3\mathbf{V}^{N+1} \pm 3\mathbf{V}^n - 4\mathbf{V}^N + \mathbf{V}^{N-1}}{2\Delta t} = -\vec{\nabla} p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} + \vec{\nabla} \cdot \tau - \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{\alpha \mathbf{V}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} \quad (6-3)$$

با اضافه کردن $\pm 3\mathbf{V}^n$ به جمله مشتق زمان حقیقی در معادله (6-3)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t_a} + \frac{3(\mathbf{V}^{N+1} - \mathbf{V}^n)}{2\Delta t} = -\vec{\nabla} p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} + \vec{\nabla} \cdot \tau - \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{V}^n - 4\mathbf{V}^N + \mathbf{V}^{N-1}}{2\Delta t} - \frac{\alpha \mathbf{V}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} \quad (7-3)$$

با همگرایی حل در زمان کاذب t_a ، حل در گام بعدی زمان حقیقی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{V}^{N+1} = \mathbf{V}^{n+1} \quad (8-3)$$

با جایگذاری رابطه (7-3) در رابطه (8-3) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t_a} + \frac{3\Delta t_a}{2\Delta t} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t_a} = -\vec{\nabla} p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} + \vec{\nabla} \cdot \tau - \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{V}^n - 4\mathbf{V}^N + \mathbf{V}^{N-1}}{2\Delta t} - \frac{\alpha \mathbf{V}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} \quad (9-3)$$

که شکل نیمه گسسته معادله ممنوم، دو زمانه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t_a} = \frac{2\Delta t}{2\Delta t + 3\Delta t_a} \left\{ -\bar{\nabla} p + \frac{\beta}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V} + \bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{V}^n - 4\mathbf{V}^N + \mathbf{V}^{N-1}}{2\Delta t} - \frac{\alpha \mathbf{V}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} \right\} \quad (10-3)$$

گسسته‌سازی این معادله در بخش ۳-۳-۲ به صورت کامل بیان شده است. گسسته‌سازی انجام شده با توجه به ماهیت روش‌های عددی محدودیتی از لحاظ پایداری حل جهت انتخاب گام زمان حقیقی وجود ندارد و همین امر سبب کاهش زمان محاسباتی می‌شود. همچنین از نظر اندازه گام زمان فیزیکی هیچ محدودیتی وجود ندارد. فقط تنها قید در گام زمان حقیقی، دقت زمان موردنظر مسئله است.

۳-۲-۲ معادلات متشکله مربوط به تنش

برای حل معادله ممنوم در دستگاه معادلات (۳-۴)، نیاز به یک معادله متشکله می‌باشد. این معادله متشکله در تحقیق حاضر معادله ماکسول ساده می‌باشد که شکل این معادله متشکله به شکل زیر است:

$$\boldsymbol{\tau} + \text{Wi} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = \frac{(1-\beta)}{\text{Re}} \dot{\gamma} \quad (11-3)$$

که در رابطه بالا $\boldsymbol{\tau}$ تانسور تنش که در رابطه (۳-۴) بیان شده، Wi عدد وایزنبرگ و Re عدد رینولدز در بخش ۳-۲-۲ تعریف شده است، β نسبت ویسکوزیته در رابطه (۲-۱۱) بیان شده و $\dot{\gamma}$ نرخ برش به شکل ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (12-3)$$

با توجه به اینکه در رابطه (۳-۱۱) جمله مشتق زمانی تنش وجود دارد و تانسور تنش در معادله ممنوم (۳-۴) مورد استفاده قرار می‌گیرد. این معادله را باید به گونه تغییر داد که بتوان الگوریتم دو زمانه را روی آن پیدا نمود. بنابراین معادله (۳-۱۱) به شکل معادله (۳-۱۳) بیان می‌شود.

$$\boldsymbol{\tau}^{n+1} = \frac{(1-\beta)}{\text{Re}} \dot{\gamma} - \text{Wi} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} \quad (13-3)$$

جمله مشتق زمانی تنش در رابطه (۱۳-۳) را نیز مانند رابطه (۵-۳) در معادلات ممنوم، به شکل ضمنی مرتبه دو به صورت تفاضل پس روی گسسته سازی می گردد:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{3\tau^{N+1} - 4\tau^N + \tau^{N-1}}{2\Delta t} \quad (۱۴-۳)$$

حال گسسته سازی جمله مشتق زمان حقیقی تنش را به معادله ساختاری یعنی رابطه (۱۳-۳) اضافه می شود:

$$\tau^{n+1} = \frac{(1-\beta)}{Re} \dot{\gamma} - Wi \frac{3\tau^{N+1} - 4\tau^N + \tau^{N-1}}{2\Delta t} \quad (۱۵-۳)$$

از آنجاکه الگوریتم حل دارای دو حلقه تکرار داخلی و خارجی است با همگرایی حل در حلقه داخلی یعنی در زمان کاذب t_a ، حل در گام بعدی زمان حقیقی یعنی حلقه خارجی حاصل می شود؛ بنابراین می توان تنش زمان حقیقی را به صورت زیر نوشت:

$$\tau^{N+1} = \tau^{n+1} \quad (۱۶-۳)$$

پس با جایگذاری رابطه (۱۶-۳) در رابطه (۱۵-۳) می توان نوشت:

$$(\tau^{n+1} \pm \tau^n) = \frac{(1-\beta)}{Re} \dot{\gamma} - Wi \frac{3\tau^{N+1} \pm 3\tau^n - 4\tau^N + \tau^{N-1}}{2\Delta t} \quad (۱۷-۳)$$

$$\frac{(\tau^{n+1} - \tau^n) \times \Delta t_a}{\Delta t_a} + Wi \left[\frac{3(\tau^{n+1} - \tau^n)}{2\Delta t} \times \frac{\Delta t_a}{\Delta t_a} \right] = \frac{(1-\beta)}{Re} \dot{\gamma} - Wi \frac{3\tau^n - 4\tau^N + \tau^{N-1}}{2\Delta t} \quad (۱۸-۳)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t_a} \left(\Delta t_a + \frac{3Wi\Delta t_a}{2\Delta t} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \dot{\gamma} - Wi \left(\frac{3\tau^n - 4\tau^N + \tau^{N-1}}{2\Delta t} \right) - \tau^n \quad (۱۹-۳)$$

شکل نیمه گسسته معادله ماکسول ساده به صورت رابطه (۲۰-۳) است.

$$\frac{\partial \tau}{\partial t_a} = \frac{2\Delta t}{\Delta t_a (2\Delta t + 3Wi)} \left\{ \frac{(1-\beta)}{Re} \dot{\gamma} - Wi \left(\frac{3\tau^n - 4\tau^N + \tau^{N-1}}{2\Delta t} \right) - \tau^n \right\} \quad (۲۰-۳)$$

پس همان طور که قبلاً بیان شد جمله زمان حقیقی از نظر انتخاب اندازه گام زمان فیزیکی هیچ

محدودیتی نداشته و فقط در دقت زمان مورد نظر مسئله متفاوت است. در ادامه به روش حل عددی و نحوه گسسته‌سازی معادلات پرداخته شده است.

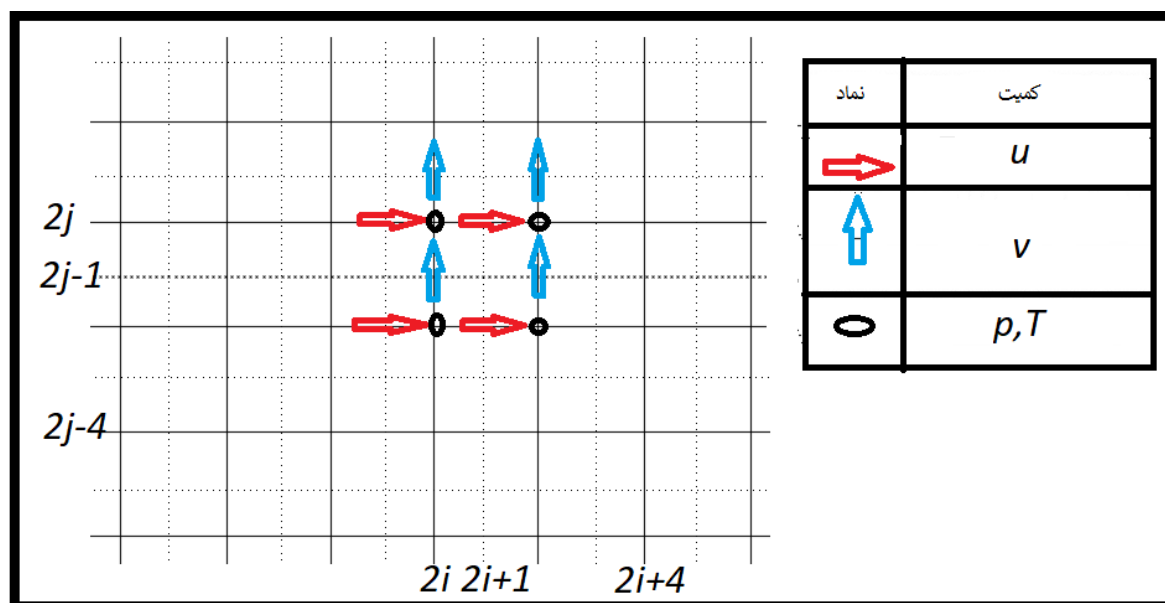
۳-۳ روش عددی

همان‌طور که در بخش ۳-۲ بیان شد، برای حل معادلات جریان تراکم‌ناپذیر غیردائم سیال ویسکوالاستیک به شکل بقایی، مشکلاتی وجود دارد. معادلات تراکم‌ناپذیر دائم حالت خاصی از معادلات تراکم‌ناپذیر غیردائم می‌باشند که مشتق زمان در آن صفر است، از طرف دیگر برای حل معادلات غیردائم شناختی در مورد روش‌های حل عددی معادلات دائم لازم است. در نتیجه مشکلات حل معادلات دائم، دامن معادلات غیردائم را نیز در برمی‌گیرد. یکی از این مشکلات، عدم وجود جمله مشتق زمانی فشار در معادله پیوستگی جریان دائم و غیردائم است. برای حل این معادلات ناچار به حدس میدان فشار تا میدان سرعت از معادلات مومنوم به دست بیاید و برای صحت درستی میدان سرعت از معادله پیوستگی استفاده می‌شود. این روش، به روش فشار-مبنا معروف است [۹]. از آنجاکه یک کمیت مهم در حل‌های عددی، زمان محاسبات حل می‌باشد و این روش از لحاظ زمانی مقرون به صرفه نیست، کورین [۱۰] برای حل این مشکل افزودن یک جمله کاذب شامل مشتق زمان فشار به معادلات پیوستگی پیشنهاد نمود. پس از آن برای افزایش سرعت همگرایی و پایداری حل، مالان [۱۲] حسگر فشار محلی را با ماتریس پیش‌شرطی معرفی نموده‌اند. اکبرزاده و همکاران [۱۶] برای اولین بار روش پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر سرعت برای حل جریان غیردائم حول هیدروفیل استفاده نموده‌اند. برای حل معادلات جریان از روش حجم محدود جیموسن و الگوریتم دو زمانه استفاده کرده‌اند. برای حل جریان غیردائم تراکم‌ناپذیر سیال ویسکوالاستیک از الگوریتم حل گوناگونی استفاده شده است. روش حل موجود برای حل معادلات تراکم‌ناپذیر سیال ویسکوالاستیک روش تفاضل محدود^۱، روش المان محدود^۲، روش حجم محدود^۳ و به صورت ترکیبی از این روش‌ها است. از روش تفاضل محدود با استفاده از شبکه جابه‌جاشده^۴ با روش کورین برای حل معادلات جریان تراکم‌ناپذیر دائم سیال ویسکوالاستیک یک روش پراستفاده می‌باشد. از سوی دیگر برای تحلیل مسائل صنعتی، نظامی، پزشکی و ... نقش حل معادلات جریان تراکم‌ناپذیر غیردائم سیال ویسکوالاستیک را پررنگ‌تر می‌کند. محققان به دنبال روش‌های هستند که دارای پایداری، دقت کافی و سرعت همگرایی بالا برای حل معادلات جریان تراکم‌ناپذیر سیال ویسکوالاستیک داشته باشد. بدین منظور در پژوهش حاضر از روش پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر تنش با بهره‌گیری از روش تفاضل محدود، شبکه جابه‌جا شده و الگوریتم دو زمانه دستگاه معادلات (۳-۱) حل شده است.

-
1. Finite Difference
 2. Finite Element
 3. Finite Volume
 4. Marker and cell method

۳-۳-۱ روش تفاضل محدود

یکی از مشکلات دیگر حل معادلات حاکم عدم وجود شرط مرزی مناسب برای فشار می‌باشد. به این دلیل که در مدل‌سازی عددی صورت گرفته، شرط مرزی مناسب برای فشار که بتوان آن را به روش عددی اعمال نمود و هم از لحاظ فیزیکی تعبیری مناسبی داشته باشد، موجود نیست. برای حل این مشکل از روش شبکه جابجا شده در این پژوهش استفاده شده است. برای ایجاد این شبکه در دامنه محاسباتی از دو شبکه مجزا اولیه و ثانویه استفاده گردیده است. با ایجاد شبکه اولیه، شبکه ثانویه را به اندازه نصف فاصله طولی و عرضی نسبت به شبکه اولیه ایجاد می‌شود. بدین ترتیب هر سلول شبکه ثانویه، بین دو سلول از شبکه اولیه قرار دارد. در این پژوهش جهت سادگی شمارنده‌های شبکه محاسباتی در عدد دو ضرب شده است و شمارنده‌های زوج به عنوان شبکه اولیه و شمارنده‌های فرد برای شبکه ثانویه استفاده شده‌اند. بدین منظور کمیت‌های سرعت در جهت x و y به ترتیب روی گره‌های $(2i+1, 2j)$ و $(2i, 2j+1)$ قرار دارد و کمیت‌های فشار و تنش بر روی شبکه اولیه یعنی گره‌های فرد $(2i, 2j)$ تعریف می‌شوند. از سوی دیگر مرزهای محاسباتی نیز همه بر روی شبکه ثانویه قرار دارند و کمیت فشار بر روی شبکه اولیه تعریف شده است. همچنین در معادلات مشتق مرتبه دوم فشار موجود نیست پس می‌توان معادلات را به گونه‌ای گسسته‌سازی نمود که نیازی به اعمال شرط مرزی فشار نباشد.



شکل ۳-۱: نمایی از شبکه‌بندی دامنه محاسبات و تعریف مقادیر بر روی گره‌های مربوطه.

هندسۀ مورد بحث در این تحقیق یک کانال دو بعدی با سطح مقطع مستطیلی شکل مطابق شکل ۵-۱ می‌باشد. با توجه به وجود تقارن در شکل هندسی در جهت y می‌توان نصف هندسه را جهت کاهش هزینه محاسباتی در نظر گرفت. به جای مرز دیوار بالایی، یک مرز تقارن ایجاد می‌شود.

۳-۳-۲ گسسته‌سازی معادلات حاکم

روش‌های مختلفی جهت گسسته‌سازی معادلات حاکم موجود است ولی شرایطی وجود دارد از جمله قابلیت کوتاه‌تر شدن روند حل، پایداری عددی بیشتر، دقت حل بالا و ... که روش‌های موجود را از هم متمایز می‌سازد. بین تمام روش‌های موجود، روش گسسته‌سازی تفاضل محدود روی شبکه جابجا شده هارلو و ولج [۴۲] برای حل مسائل مربوط به جریان تراکم‌ناپذیر دائم دارای عملکرد مناسب و کاربرد آسان‌تر است. لذا معادلات حاکم که در قسمت ۳-۲ بیان شده مربوط به جریان‌های تراکم‌ناپذیر غیردائم است و روش حل آن در این پژوهش به صورت پیش‌شرط توانی می‌باشد، بنابراین جهت گسسته‌سازی از روش پیش‌شرط توانی استفاده شده است. جهت گسسته‌سازی برای جمله زمان کاذب از روش وثوقی‌فر، برای جمله زمان واقعی از تقریب تفاضل پس‌روی مرتبه دوم به‌صورت ضمنی و جهت تقریب جمله مشتقات مکانی درجه اول و دوم از تفاضل محدود مرکزی مرتبه دوم استفاده گردیده است.

۳-۳-۱-۲ گسسته‌سازی معادله پیوستگی

طبق مطالب پیشین گسسته‌سازی معادله پیوستگی در شبکه اولیه یعنی گره‌های زوج به صورت زیر است:

$$\left. \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} \right|_{2i,2j} + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{2i,2j} + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{2i,2j} = 0 \quad (۳-۲۱)$$

جمله گسسته‌سازی مشتق سرعت معادله (۳-۲۱) به شکل:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{2i,2j} = \frac{u_{2i+1,2j}^n - u_{2i-1,2j}^n}{\Delta x} \quad (۳-۲۲)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{2i,2j} = \frac{v_{2i,2j+1}^n - v_{2i,2j-1}^n}{\Delta y} \quad (۳-۲۳)$$

جمله گسسته‌سازی مشتق زمانی کاذب فشار معادله پیوستگی را در بخش ۳-۳-۴ بیان شده است.

۳-۳-۲-۲ گسسته‌سازی معادله ممنتوم

گسسته‌سازی معادله ممنتوم در شبکه ثانویه یعنی گره‌های فرد صورت می‌گیرد. گسسته‌سازی معادله ممنتوم در جهت x :

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\alpha u}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} \right|_{2i+1,2j} + \left. \frac{\partial u}{\partial t_a} \right|_{2i+1,2j} + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{2i+1,2j} + \left. \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + P) \right|_{2i+1,2j} + \left. \frac{\partial}{\partial y} (uv) \right|_{2i+1,2j} \dots \\ &= \frac{\beta}{\text{Re}} \left(\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{2i+1,2j} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{2i+1,2j} \right) + \left(\left. \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right|_{2i+1,2j} + \left. \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right|_{2i+1,2j} \right) \end{aligned} \quad (24-3)$$

بسط جمله‌های گسسته‌سازی معادله ممنوم در جهت x به شکل زیر می‌باشد:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{2i+1,2j} = \frac{p_{2i+2,2j}^n - p_{2i-2,2j}^n}{\Delta x} \quad (25-3)$$

$$\left. \frac{\partial u^2}{\partial x} \right|_{2i+1,2j} = \frac{(u_{2i+3,2j} + u_{2i+1,2j})^2 - (u_{2i+1,2j} + u_{2i-1,2j})^2}{4\Delta x} \quad (26-3)$$

$$\left. \frac{\partial uv}{\partial x} \right|_{2i+1,2j} = \frac{(u_{2i+1,2j} + u_{2i+1,2j+2}) \times (v_{2i,2j+1} + v_{2i+2,2j+1}) - (u_{2i+1,2j} + u_{2i+1,2j-2}) \times (v_{2i,2j-1} + v_{2i+2,2j-1})}{4\Delta y} \quad (27-3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{2i+1,2j} = \frac{u_{2i-1,2j} - 2u_{2i+1,2j} + u_{2i+3,2j}}{\Delta x^2} \quad (28-3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{2i+1,2j} = \frac{u_{2i+1,2j-2} - 2u_{2i+1,2j} + u_{2i+1,2j+2}}{\Delta y^2} \quad (31-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right|_{2i+1,2j} = \frac{\tau_{xx,2i+2,2j}^n - \tau_{xx,2i,2j}^n}{\Delta x} \quad (30-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right|_{2i+1,2j} = \frac{(\tau_{xx,2i+2,2j+2}^n + \tau_{xx,2i,2j+2}^n) - (\tau_{xx,2i+2,2j-2}^n + \tau_{xx,2i,2j-2}^n)}{4\Delta y} \quad (31-3)$$

$$\left. \frac{\alpha u}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} \right|_{2i+1,2j} = \frac{\alpha_{2i+1,2j} u_{2i+1,2j}}{2c_{2i+1,2j}^2} \left(\left. \frac{\partial p}{\partial t_a} \right|_{2i+2,2j} + \left. \frac{\partial p}{\partial t_a} \right|_{2i,2j} \right) \quad (32-3)$$

چگونگی بسط جمله‌های گسسته‌سازی $\frac{\partial p}{\partial t_a}$ و $\frac{\partial u}{\partial t_a}$ در قسمت ۳-۳-۴ بیان شده است. گسسته‌سازی

معادله ممنوم در جهت y :

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\alpha v}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} \right|_{2i,2j+1} + \left. \frac{\partial v}{\partial t_a} \right|_{2i,2j+1} + \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{2i,2j+1} + \left. \frac{\partial}{\partial y} (v^2 + P) \right|_{2i,2j+1} + \left. \frac{\partial}{\partial x} (uv) \right|_{2i,2j+1} \dots \\ &= \frac{\beta}{\text{Re}} \left(\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{2i,2j+1} + \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{2i,2j+1} \right) + \left(\left. \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right|_{2i,2j+1} + \left. \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right|_{2i,2j+1} \right) \end{aligned} \quad (33-3)$$

بسط جمله‌های گسسته‌سازی معادله ممنتوم در جهت y به شکل زیر می‌باشد:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{2i,2j+1} = \frac{p_{2i,2j+2}^n - p_{2i,2j}^n}{\Delta y} \quad (34-3)$$

$$\left. \frac{\partial v^2}{\partial y} \right|_{2i,2j+1} = \frac{(v_{2i,2j+3} + v_{2i,2j+1})^2 - (v_{2i,2j+1} + v_{2i,2j-1})^2}{4\Delta y} \quad (35-3)$$

$$\left. \frac{\partial uv}{\partial x} \right|_{2i,2j+1} = \frac{(u_{2i+1,2j} + u_{2i+1,2j+2}) \times (v_{2i,2j+1} + v_{2i+2,2j+1}) - (u_{2i-1,2j} + u_{2i-1,2j+2}) \times (v_{2i,2j-1} + v_{2i-2,2j-1})}{4\Delta y} \quad (36-3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{2i,2j+1} = \frac{v_{2i-2,2j+1} - 2v_{2i,2j+1} + v_{2i+2,2j+1}}{\Delta x^2} \quad (37-3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{2i,2j+1} = \frac{v_{2i,2j-1} - 2v_{2i,2j+1} + v_{2i,2j+3}}{\Delta y^2} \quad (38-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right|_{2i,2j+1} = \frac{(\tau_{xy}^n_{2i+2,2j+2} + \tau_{xy}^n_{2i+2,2j}) - (\tau_{xy}^n_{2i-2,2j+2} + \tau_{xx}^n_{2i-2,2j})}{4\Delta x} \quad (39-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right|_{2i,2j+1} = \frac{\tau_{yy}^n_{2i,2j+2} - \tau_{yy}^n_{2i,2j}}{\Delta y} \quad (40-3)$$

$$\left. \frac{\alpha u}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} \right|_{2i,2j+1} = \frac{\alpha_{2i,2j+1} u_{2i,2j+1}}{2c^2_{2i,2j+1}} \left(\left. \frac{\partial p}{\partial t_a} \right|_{2i,2j+2} + \left. \frac{\partial p}{\partial t_a} \right|_{2i,2j} \right) \quad (41-3)$$

چگونگی بسط جمله‌های گسسته‌سازی $\frac{\partial v}{\partial t_a}$ و $\frac{\partial p}{\partial t_a}$ در قسمت ۳-۳-۴ بیان شده است.

۳-۳-۳ گسسته‌سازی معادله متشکله تنش

طبق آنچه که بیان گردید گسسته‌سازی معادله متشکله ماکسول ساده در شبکه اولیه یعنی گره‌های زوج صورت می‌گیرد. گسسته‌سازی معادله ماکسول در تمام جهات به شکل زیر است:

$$\left. \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t_a} \right|_{2i,2j} = \frac{2\Delta t}{\Delta t_{a2i,2j} (2\Delta t + 3Wi)} \left\{ \frac{2(1-\beta)}{Re} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{2i,2j} - Wi \left. \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} \right|_{2i,2j} - \tau_{xx}^n_{2i,2j} \right\} \quad (42-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t_a} \right|_{2i,2j} = \frac{2\Delta t}{\Delta t_{a2i,2j} (2\Delta t + 3Wi)} \left\{ \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{2i,2j} + \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{2i,2j} \right) - Wi \left. \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} \right|_{2i,2j} - \tau_{xy}^n_{2i,2j} \right\} \quad (43-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t_a} \right|_{2i,2j} = \frac{2\Delta t}{\Delta t_{a2i,2j} (2\Delta t + 3Wi)} \left\{ \frac{2(1-\beta)}{Re} \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{2i,2j} - Wi \left. \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} \right|_{2i,2j} - \tau_{yy}^n_{2i,2j} \right\} \quad (44-3)$$

و بسط جمله‌های گسسته‌سازی معادله ماکسول در تمام جهات به شکل زیر است:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{2i,2j} = \frac{u_{2i+1,2j}^n - u_{2i-1,2j}^n}{\Delta x} \quad (45-3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{2i,2j} = \frac{[u_{2i+1,2j+2}^n + u_{2i-1,2j+2}^n] - [u_{2i+1,2j-2}^n + u_{2i-1,2j-2}^n]}{4\Delta y} \quad (46-3)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{2i,2j} = \frac{[v_{2i+2,2j+1}^n + v_{2i-2,2j+1}^n] - [v_{2i+2,2j-1}^n + v_{2i-2,2j-1}^n]}{4\Delta x} \quad (47-3)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{2i,2j} = \frac{v_{2i,2j+1}^n - v_{2i,2j-1}^n}{\Delta y} \quad (48-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} \right|_{2i,2j} = \frac{3\tau_{xx,2i,2j}^n - 4\tau_{xx,2i,2j}^N + \tau_{xx,2i,2j}^{N-1}}{2\Delta t} \quad (49-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} \right|_{2i,2j} = \frac{3\tau_{xy,2i,2j}^n - 4\tau_{xy,2i,2j}^N + \tau_{xy,2i,2j}^{N-1}}{2\Delta t} \quad (50-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} \right|_{2i,2j} = \frac{3\tau_{yy,2i,2j}^n - 4\tau_{yy,2i,2j}^N + \tau_{yy,2i,2j}^{N-1}}{2\Delta t} \quad (51-3)$$

و بسط جمله‌های گسسته‌سازی $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t_a}$ ، $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t_a}$ و $\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t_a}$ در بخش بعدی بیان می‌گردد.

۳-۳-۴ گسسته‌سازی جمله مشتق زمان

در قسمت قبل روش‌های مختلف گسسته‌سازی جمله‌های مربوط به مکان ارائه شد. برای یافتن جواب منحصربه‌فرد صحیح، باید گسسته‌سازی مناسبی نسبت به جمله زمان استفاده گردد. پژوهشگران زیادی در خصوص گسسته‌سازی زمان تحقیقات گسترده انجام دادند. در این پژوهش چند روش گسسته‌سازی مشتق جمله زمان باهم مقایسه شده است. هدف از این مقایسه، جهت انتخاب بهترین روش از لحاظ هزینه محاسباتی و هم از لحاظ سرعت همگرایی هست. لازم به ذکر است این مقایسه برای سیال ویسکوالاستیک غیردائم با مشخصات آمده شده در جدول صورت گرفته است. همان‌طور که از جدول ۳-۱ مشخص است از شش روش مفصل‌سازی برای جمله زمان استفاده شده است. از معرفی این روش‌ها در

این پژوهش به دلیل طولانی بودن مطلب اجتناب شده است و جهت آشنایی بیشتر به مراجع [۴۳ - ۴۴] رجوع گردد. با توجه به مطالب بیان شده، جهت منفصل سازی جمله زمان از روش وثوقی فر استفاده شده است زیرا از لحاظ زمان محاسباتی و هم از لحاظ سرعت همگرایی با توجه به شبکه بندی ناحیه محاسباتی و روش عددی استفاده شده، نسبت به روش های دیگر برتری دارد. این نتیجه گیری برای جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک برقرار است. برای جریان دائم، روش پیشرو از لحاظ زمانی و روش وثوقی فر از لحاظ سرعت همگرایی برتری دارند که این روش در ادامه معرفی می شود.

جدول ۳-۱: مقایسه روش های مختلف گسسته سازی زمانی برای این پژوهش

روش محلی پیش شرط توانی حسگر تنش							
200×40=اندازه شبکه		8000=تعداد سلول ها		Re=10		$\beta = 0.25$	Wi=5
ردیف	روش گسسته سازی زمان	power	c^2	CFL	تعداد تکرار برای همگرایی	زمان همگرایی (s)	دقت
1	Forward	1	7	0.01	عدم همگرایی	عدم همگرایی	10^{-9}
2	Crank-Niklson	1	7	0.01	عدم همگرایی	عدم همگرایی	10^{-9}
3	Sdrik	1	7	2.5	721,029	10,405	10^{-9}
4	Frace	1	7	2.75	407,215	7,515	10^{-9}
5	Range-Kutta	1	7	2.5	602,478	11,562	10^{-9}
6	Vosoughifar	1	7	3.75	205,437	5,781	10^{-9}

روش عددی وثوقی فر که معادلات درجه دوم را در چهار مرحله مبنا قرار می دهد استفاده شده است. منفصل سازی جمله مشتق زمان با روش وثوقی فر برای حل معادله مومنتوم به روش عددی بیان شده در قسمت ها قبل به صورت زیر است:

$$\mathbf{V}^0 = \mathbf{V}^n \quad (52-3)$$

$$\mathbf{V}^K = \mathbf{V}^{K-1} + \frac{2\delta_K \Delta t_a \Delta t}{2\Delta t + 3\Delta t_a} \left\{ -\vec{\nabla} p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{3 \mathbf{V}^n - 4 \mathbf{V}^N + \mathbf{V}^{N-1}}{2\Delta t} - \frac{\alpha \mathbf{V}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t_a} \right\}^{K-1} \quad (53-3)$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^4 \quad (54-3)$$

برای منفصل سازی معادله متشکله ماکسول ساده به صورت:

$$\boldsymbol{\tau}^0 = \boldsymbol{\tau}^n \quad (55-3)$$

$$\tau^K = \tau^{K-1} + \frac{2\delta_K \Delta t}{(2\Delta t + 3 \text{ Wi})} \left\{ \frac{(1-\beta)}{\text{Re}} \gamma_{(1)} - \text{Wi} \left(\frac{3\tau^n - 4\tau^N + \tau^{N-1}}{2\Delta t} \right) - \tau^n \right\}^{K-1} \quad (56-3)$$

$$\tau^{n+1} = \tau^4 \quad (57-3)$$

همچنین برای معادله پیوستگی به شکل زیر است:

$$p^0 = p^n \quad (58-3)$$

$$p^K = p^{K-1} - (\delta_K \Delta t_a c^2) \nabla \cdot \mathbf{V}^{K-1} \quad (59-3)$$

$$p^{n+1} = p^4 \quad (60-3)$$

که در رابطه‌های (52-3) تا (60-3)، کمیت K از ۱ تا ۴ و δ_K ضربی است که مقدار آن برای $K=1$ برابر با $\delta_K = \left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)$ و برای بقیه K ها $\delta_K = \left(\frac{2}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3}\right)$ می‌باشد. همچنین بالانویس n بیانگر زمان کاذب و N معرف زمان حقیقی (فیزیکی) می‌باشد. در این پژوهش جهت تسریع در نرخ همگرایی از گام زمان محلی به صورت رابطه (61-3) استفاده شده است.

$$\Delta t_a = \frac{\text{CFL} \times \Delta L_{\min}}{\lambda_{\max}} \quad (61-3)$$

در رابطه (61-3)، $\Delta L_{\min}$ کوچک‌ترین طول وجه سلول (i,j) ، CFL عدد کورانت-فردیچ-لوی^۱ که مقدار آن برحسب آزمایش‌های عددی به دست می‌آید. مقدار عدد CFL به هندسه مورد مطالعه، تعداد المان شبکه محاسباتی، گام زمان حقیقی، مقدار عدد رینولدز، مقدار عدد وایزنبرگ و مقدار سرعت صوت کاذب بستگی دارد. همچنین $\lambda_{\max}$ مقدار ویژه بیشینه^۲ که از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۲].

$$\lambda_{\max} = 0.5 \left\{ V(2 - \alpha_\tau) + \sqrt{V^2(2 - \alpha_\tau)^2 + 4c^2} \right\} \quad (62-3)$$

در رابطه بالا $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ می‌باشد.

۳-۵ بررسی سرعت صوت کاذب

سرعت صوت کاذب اهمیت خاصی در روش پیش‌شرط توانی دارد. ازجمله اهمیت آن افزایش نرخ همگرایی و پایداری حل عددی می‌باشد. محققان زیادی بر روی سرعت صوت کاذب تحقیق نموده‌اند. در

1. Courant-Friedrichs-Lewy
2. Maximum Eigenvalue

تحقیقات آن‌ها به‌طور کلی مقدار سرعت صوت کاذب به دو صورت خودکار یعنی استفاده از روابط و آزمایش عددی به دست می‌آید. ابتدا به حالت انتخاب مقدار خودکار سرعت صوت کاذب پرداخته می‌شود. در جریان‌های غیرلج ترکیب [۱۱] ضریب تراکم‌ناپذیر مصنوعی را به صورت زیر تعریف می‌کند.

$$\begin{aligned}\beta_{conv.}^2 &= \max \left[(3-\alpha)V^2, QV_{\max}^2 \right] & \alpha < 1 \\ \beta_{conv.}^2 &= q \max \left[(\alpha-1)V^2, QV_{\max}^2 \right] & \alpha \geq 1\end{aligned}\quad (63-3)$$

که $Q=(0.16-1)$ و $q=(1-1.1)$ است. در ادامه محققان دیگر مانند اصفهانیان و اکبرزاده [۱۴] و مالان [۱۲] بر روی مقدار خودکار سرعت صوت کاذب کار نموده‌اند. حالت دوم انتخاب مقدار سرعت صوت کاذب، انتخاب یک مقدار ثابت در کل میدان محاسباتی است که از طریق آزمایش عددی به دست می‌آید. تامامدیس و همکارانش [۳۴] گزارش دادند که انتخاب مقدار سرعت صوت کاذب وابسته است به شرایط جریان، نوع هندسه جسم و تجربه فرد برنامه‌نویس، مقدار پیشنهادی آن‌ها برای سرعت صوت کاذب بین ۰٫۱ تا ۱۰ می‌باشد. ادیبی [۳۵] با بررسی ضریب تراکم‌پذیری بر روی جریان تراکم‌ناپذیر سه بعدی غیردائم با روش تراکم‌پذیری مصنوعی دریافت که برخلاف جریان تراکم‌پذیر که سرعت صوت کاذب مقداری ثابت در تمام جهات است، سرعت صوت کاذب تابعی از ضریب تراکم‌پذیری و جهت انتشار می‌باشد. تغییر ضریب تراکم‌پذیر مصنوعی در معادلات کورین فقط سبب تغییر نرخ سرعت همگرایی می‌شود و هیچ تاثیری بر دقت نتایج ندارد. ادیبی دریافت که با مقدار ضریب تراکم‌پذیر مصنوعی ۱ تا ۵ بهترین نرخ همگرایی برای روش کورین حاصل می‌گردد.

۳-۳-۶ گسسته‌سازی حسگر تنش

جهت تکمیل فرآیند گسسته‌سازی، حسگر تنش را با توجه به رابطه پیشنهادی مالان [۱۲] و این که تنش در شبکه اولیه یعنی گره‌های زوج قرار دارد، به شکل زیر گسسته می‌شود:

$$A_{\tau 2i, 2j} = \frac{\left| 4\tau_{xx 2i, 2j} - \tau_{xx 2i+2, 2j} - \tau_{xx 2i-2, 2j} - \tau_{xx 2i, 2j+2} - \tau_{xx 2i, 2j-2} \right|}{\left| \tau_{xx 2i, 2j} - \tau_{xx 2i+2, 2j} \right| + \left| \tau_{xx 2i, 2j} - \tau_{xx 2i-2, 2j} \right| + \left| \tau_{xx 2i, 2j} - \tau_{xx 2i, 2j+2} \right| + \left| \tau_{xx 2i, 2j} - \tau_{xx 2i, 2j-2} \right|} \quad (64-3)$$

رابطه (۶۴-۳) فوق برای معادله پیوستگی برقرار است چون در شبکه اولیه قرار دارد. همچنین برای معادله ممتموم و مرزها به ترتیب به درونیایی و برونیایی مقادیر حسگر تنش در گره‌های زوج نیاز است. بدین ترتیب برای معادله ممتموم در جهت x داریم:

$$A_{\tau 2i+1,2j} = \frac{A_{\tau 2i,2j} + A_{\tau 2i+2,2j}}{2} \quad (65-3)$$

و برای مرز ورودی به صورت:

$$A_{\tau 1,2j} = \frac{3A_{\tau 2,2j} - A_{\tau 4,2j}}{2} \quad (66-3)$$

برای مرزهای دیگر نیز به همین ترتیب است. گسسته‌سازی حسگر فشار مشابه گسسته‌سازی حسگر تنش می‌باشد، اما گسسته‌سازی حسگر سرعت به دلیل اینکه سرعت در شبکه ثانویه و گره‌های فرد قرار دارد، به صورت رابطه (67-3) خواهد بود.

$$A_{u 2i+1,2j} = \frac{|4u_{2i+1,2j} - u_{2i+3,2j} - u_{2i-1,2j} - u_{2i+1,2j+2} - u_{2i+1,2j-2}|}{|u_{2i+1,2j} - u_{2i+3,2j}| + |u_{2i+1,2j} - u_{2i-1,2j}| + |u_{2i+1,2j} - u_{2i+1,2j+2}| + |u_{2i+1,2j} - u_{2i+1,2j-2}|} \quad (67-3)$$

۳-۴ شرایط مرزی جریان

معادلات دیفرانسیل حاکم بیان شده در قسمت ۳-۲ دارای مجموعه‌ای از جواب‌ها است که در معادله اصلی صدق می‌کند. جهت یافتن جواب منحصر به فرد برای مسئله، کافی است که شرایط مرزی که بیانگر رفتار جریان در کنار مرزها و تأثیر محیط پیرامون جریان سیال است، به معادلات اعمال شود. بدین منظور برای میدان سرعت، در ورودی کانال شرط یکنواختی سرعت محوری و سرعت عرضی صفر فرض می‌شود. درواقع این فرض بیان کننده این است که در ورودی کانال جریان آزاد است. پس شرط مرزی در ورودی ($x=0$) برابر است با:

$$u(0, :) = U_{ave}, \quad v(0^-, :) = -v(0^+, :) \quad (68-3)$$

منظور از بالانویس + و - به ترتیب گره‌های مجاور قبلی و بعدی می‌باشد. از سوی دیگر با توجه به در نظر گرفتن نصف هندسه اولیه به دلیل تقارن و پایدار بودن جریان می‌توان از خاصیت آینه در مرز تقارن بهره‌مند شد. پس طبق این خاصیت کمیت سرعت که روی گره‌های مرز تقارن قرار دارند و در جهت عمود بر خط تقارن مقدار آن برابر با صفر می‌باشد و کمیت سرعتی که در جهت موازی خط تقارن قرار دارند مقدار آن با گره مجاور خود برابر است. با توجه به مطالب بیان شده، شرط مرزی میدان سرعت برای مرز تقارن ($y=h$) به صورت زیر است:

$$u(:, h^+) = u(:, h^-) \quad v(:, h) = 0 \quad (۶۹-۳)$$

در مرز دیوار از فرض شرط عدم لغزش استفاده می‌شود پس در مرز ($y=0$) شرط مرزی به صورت:

$$u(:, 0^-) = -u(:, 0^+) \quad v(:, 0) = 0 \quad (۷۰-۳)$$

برای خروجی کانال می‌توان با در نظر گرفتن طول مناسب، فرض کرد جریان توسعه یافته است پس در نتیجه تغییرات سرعت در خروجی کانال برابر با صفر است. پس از توسعه یافتگی به عنوان شرط مرزی خروجی ($x=L$) به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$u(L^+, :) = u(L^-, :) \quad v(L^+, :) = v(L^-, :) \quad (۷۱-۳)$$

لازم به ذکر است تمام مرزها روی شبکه ثانویه و شمارنده‌های فرد قرار دارند. حال کمیتی مانند تنش که روی شبکه اولیه یعنی روی گروه‌های شمارنده زوج تعریف می‌شود، باید با استفاده از گروه‌های مجاور خود اعمال شود. به همین دلیل لازم است که گره‌های در خارج از هندسه تعریف شوند که هیچ‌گونه تعبیر فیزیکی نداشته باشند و تغییر در جواب‌های مسئله ایجاد نکند. در میدان سرعت که شرط مرزی دیوار ($y=0$)، شرط عدم لغزش برقرار است و مقدار سرعت در جهت محور طولی روی دیوار صفر است. از طرف دیگر موقعیت سرعت طولی در راستای محور x روی شمارنده فرد و در راستای محور y بر روی شمارنده‌های زوج قرار دارد و از سوی دیگر مرزها روی شمارنده فرد می‌باشند برای اعمال شرط مرزی عدم لغزش روی دیوار ($y=0$) به صورت مستقیم امکان پذیر نیست. بدین منظور برای اعمال این شرط مرزی لازم است یک گره مجازی قبل از مرز دیوار تعریف شود. شرط مرزی طبق رابطه (۷۰-۳) است و مقدار سرعت در گره مجازی تعریف شده با منفی سرعت گره متقارن آن در داخل شبکه برابر است. از سوی دیگر مقدار سرعت روی مرز جامد برابر با صفر خواهد شد. مقدار تنش نیز بر روی گره‌های زوج قرار دارد برای اعمال شرایط مرزی تنش هم مانند آنچه قبل تر بیان شد نیاز به تعریف گره‌های مجازی خارج از شبکه است. در مرز ورودی کانال ($x=0$)، تنش در تمام جهات برابر با صفر می‌باشد.

$$\tau_{xx}(0^-, :) = -\tau_{xx}(0^+, :) \quad \tau_{xy}(0^-, :) = -\tau_{xy}(0^+, :) \quad \tau_{yy}(0^-, :) = -\tau_{yy}(0^+, :) \quad (۷۲-۳)$$

و در مرز دیوار جامد ($y=0$) شرط عدم لغزش اعمال می‌شود که با توجه به رابطه متشکله تنش، مقدار تنش در تمام جهات برابر با صفر می‌باشد.

$$\tau_{xx}(:, 0^-) = \tau_{xx}(:, 0^+) \quad \tau_{xy}(:, 0^-) = \tau_{xy}(:, 0^+) \quad \tau_{yy}(:, 0^-) = \tau_{yy}(:, 0^+) \quad (۷۳-۳)$$

در مرز تقارن که مؤلفه‌های تنش در جهت عمود بر مرز می‌باشند، مقدار مؤلفه‌های تنش برابر با منفی مقدار مؤلفه‌های تنش در گره مجازی می‌باشد و مؤلفه‌های تنش که موازی بر مرز تقارن هستند مقدار

مؤلفه‌های تنش برابر با مقدار مؤلفه‌های تنش در گره مجازی متقارن آن است [۴۵].

$$\tau_{xx}(:, h^+) = \tau_{xx}(:, h^-) \quad \tau_{xy}(:, h^+) = -\tau_{xy}(:, h^-) \quad \tau_{yy}(:, h^+) = \tau_{yy}(:, h^-) \quad (۷۴-۳)$$

و در مرز خروجی کانال ($x=L$) همان‌طور که قبل‌تر برای شرط مرزی میدان سرعت بیان شد، با در نظر گرفتن طول کافی برای کانال شرط توسعه‌یافتگی برای مؤلفه‌های تنش برقرار است در پی آن مقدار تغییرات مؤلفه تنش صفر است.

$$\tau_{xx}(L^+, :) = \tau_{xx}(L^-, :) \quad \tau_{xy}(L^+, :) = \tau_{xy}(L^-, :) \quad \tau_{yy}(L^+, :) = \tau_{yy}(L^-, :) \quad (۷۵-۳)$$

در تحقیق حاضر با شبکه‌بندی مورد استفاده، هیچ نیازی به اعمال شرط مرزی فشار نیست و میدان فشار از معادله پیوستگی به دست می‌آید.

۳-۵ شرایط اولیه

در این پژوهش که جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت غیردائم مورد مطالعه قرار گرفته است، برای حل معادلات این جریان از روش پیش‌شرط توانی مورد استفاده قرار گرفته‌شده که جهت حل این معادلات از یک الگوریتم دو زمانه استفاده می‌شود. این الگوریتم شامل دو زمان مجازی و حقیقی است که زمان حقیقی به صورت ضمنی و از مرتبه دوم گسسته‌سازی می‌شود و فقط بر روی دقت مورد نیاز مسئله تأثیر دارد؛ برای داشتن جواب مسئله را در زمان $1/15$ ثانیه یا $1/11$ ثانیه باید به ترتیب گام 0.05 یا 0.1 ثانیه انتخاب گردد؛ اما زمان مجازی موجود در جمله اضافه شده به معادلات حاکم که هیچ ارزش فیزیکی ندارد و صرفاً مانند کاتالیزور عددی عمل می‌کند و در نتایج جواب تأثیری ندارد و درنهایت از معادلات حاکم حذف می‌گردد. شرایط اولیه برای دو زمان حقیقی و مجازی، تمام سرعت‌های عرضی و محوری و تمام مؤلفه‌های تنش در لحظه اولیه برابر با صفر در نظر گرفته شده است. شرایط اولیه به شکل زیر است:

$$u^n(:, :)|_{t_a=0} = 0 \quad v^n(:, :)|_{t_a=0} = 0 \quad u^N(:, :)|_{t=0} = 0 \quad v^N(:, :)|_{t=0} = 0 \quad (۷۶-۳)$$

$$\tau_{xx}^n(:, :)|_{t_a=0} = 0 \quad \tau_{xy}^n(:, :)|_{t_a=0} = 0 \quad \tau_{yy}^n(:, :)|_{t_a=0} = 0 \quad (۷۷-۳)$$

$$\tau_{xx}^N(:, :)|_{t=0} = 0 \quad \tau_{xy}^N(:, :)|_{t=0} = 0 \quad \tau_{yy}^N(:, :)|_{t=0} = 0 \quad (۷۹-۳)$$

تمام شرایط اولیه بیان شده از دیدگاه نگارنده برای تحقیق حاضر موردبررسی و صحت آن مورد تأیید است.

۳-۶ خطای محاسباتی

در محاسبات عددی دو نوع خط رایج است، یکی خطای کوتاه‌سازی^۱ و دیگری خطای رندسازی^۲ می‌باشد. عوامل ایجاد خطای کوتاه‌سازی، یکی از عوامل تعداد جملات بسطی که جهت گسسته‌سازی جملات معادله حاکم بر مسئله استفاده می‌شود. از بین رفتن این خطا در مدل‌سازی عددی امکان‌پذیر نیست، ولی می‌توان مقدار این خطا را با افزایش جملات بسط مورد استفاده کاهش داد؛ اما با افزایش تعداد جملات بسط مورد استفاده باعث پیچیدگی مدل‌سازی و به سبب آن باعث افزایش ناپایداری حل می‌شود. دیگر عامل ایجاد خطای کوتاه‌سازی اندازه سلول‌های محاسباتی می‌باشد پس با کاهش اندازه سلول‌های شبکه محاسباتی می‌توان خطای کوتاه‌سازی را کاهش داد. برای کاهش اندازه سلول کافی است که تعداد سلول‌های شبکه را افزایش داد. همان‌طور که در بخش ۳-۳ بیان شد، جهت گسسته‌سازی برای جمله زمان کاذب از تقریب تفاضل محدود پیشرو مرتبه اول، برای جمله زمان واقعی از تقریب تفاضل پسروی مرتبه دوم به‌صورت ضمنی و جهت تقریب جمله مشتقات مکانی درجه اول و دوم از تفاضل محدود مرکزی مرتبه دوم استفاده شده است. از سوی دیگر خطای کوتاه‌سازی به بسط مورد استفاده در جملات گسسته‌سازی شده معادلات و اندازه سلول شبکه بستگی دارد. حداکثر خطای کوتاه‌سازی برابر است با سائز شبکه به توان بزرگ‌ترین مرتبه بسط داده شده، پس حداکثر خطای کوتاه‌سازی در این پژوهش برابر با سائز سلول شبکه به توان دو است. خطای دیگر در محاسبات عددی، خطای رندسازی می‌باشد و عامل ایجاد این خطا، ماشین محاسباتی است. برای کاهش این خطا کافی است از دقت بیشتر جهت رندسازی اعداد اعشاری استفاده گردد. همچنین مقدار این خطا رابطه مستقیم با تعداد سلول شبکه محاسباتی دارد، یعنی با افزایش سلول‌های شبکه مقدار این خطا افزایش می‌یابد. دلیل افزایش خطا رندسازی این است که با افزایش تعداد سلول‌های شبکه، مقدار محاسبات عددی در شبکه زیادتر شده و این امر سبب افزایش تعداد منابع ایجاد خطای رندسازی می‌شود. در این پژوهش جهت انجام محاسبات از نرم افزار متلب با دقت 10^{-16} استفاده شده است که در مقایسه به خطای رندسازی ایجاد شده در محاسبات عددی کوچک‌تر می‌باشد پس می‌توان از آن صرف‌نظر نمود. خطای کل محاسبات که شامل خطای کوتاه‌سازی و رندسازی می‌باشد، با افزایش تعداد سلول‌های شبکه خطای کوتاه‌سازی کمتر می‌شود و طبق مطالب بیان‌شده خطای رندسازی ناچیز است. برای کاهش خطای کل محاسبات کافی است تعداد سلول‌های شبکه محاسباتی را افزایش داد، اما به این نکته باید توجه داشت که با افزایش تعداد سلول‌های شبکه محاسباتی سبب افزایش هزینه محاسباتی می‌شود. در نتیجه باید شبکه انتخاب شود که کمترین خطا و پایین‌ترین هزینه محاسباتی را داشته باشد و در فصل بعدی نحوه انتخاب شبکه بهینه شرح داده خواهد شد.

1.Truncation
2.Round-off

۳-۷ الگوریتم حل

مطالبی که تاکنون بیان شده، شامل نحوه مدل سازی عددی، گسسته سازی معادلات حاکم، روش عددی مورد استفاده، انتخاب شرایط مرزی و شرایط اولیه مناسب می باشد. برای انجام محاسبات ریاضی جهت حل معادلات گسسته سازی شده از برنامه ای که در نرم افزار متلب تهیه شده، استفاده می شود. در ادامه الگوریتم حل این برنامه شرح داده می شود.

مراحل الگوریتم استفاده شده در برنامه تهیه شده به صورت زیر است:

(۱) مقادیر هندسی از قبیل ابعاد هندسه، تعداد سلول های شبکه محاسباتی و ابعاد سلول، همچنین مقادیر خواص هیدرودینامیکی مانند سرعت ورودی کانال، عدد رینولدز، عدد وایزنبرگ، نسبت لزجت، سرعت صوت کاذب، عدد کورانت- فردیچ- لوی و محدوده خطا همگرایی به برنامه اعمال می شود.

(۲) اعمال گام زمان حقیقی و شرایط اولیه مؤلفه های میدان سرعت و تنش که در بخش ۵-۳ بیان شده است.

(۳) حلقه خارجی برنامه که بیان کننده زمان حل مورد نیاز مسئله که با همگرایی حلقه داخل گام زمان حقیقی بعدی آغاز می شود. این حلقه تا رسیدن به زمان حل مورد نظر مسئله ادامه می یابد.

(۴) حلقه داخلی، برای پیمایش گام زمانی در حلقه داخلی از روش چهار مرحله ای وثوقی فر $(K=1,2,3,4)$ استفاده می شود.

(۵) حلقه تکرار در گام زمانی کاذب به صورت چهار مرحله زمانی وثوقی فر.

(۶) محاسبه مقدار حسگر تنش در مرحله K ام همان طور که در قسمت ۶-۳-۳ بیان شده است.

(۷) محاسبه ضریب پیش شرط توانی در مرحله K ام طبق رابطه $(۲-۴۰)$.

(۸) محاسبه گام زمان محلی کاذب جهت پیمایش زمانی در حلقه چهار مرحله ای وثوقی فر در مرحله K ام از رابطه $(۳-۶۳)$.

(۹) محاسبه مؤلفه های میدان سرعت از معادلات گسسته سازی شده ممنوم در مرحله K ام حلقه وثوقی فر طبق رابطه $(۳-۵۵)$ با مقادیر در مرحله $K-1$ ام و سرعت در زمان حقیقی N و $N-1$.

(۱۰) اعمال شرط مرزی میدان سرعت طبق آنچه در بخش $(۳-۴)$ بیان گردید.

(۱۱) محاسبه نرخ برش در مرحله K ام با استفاده از گرادیان سرعت در گره فرد در مرحله $K-1$ ام.

(۱۲) محاسبه تنش در مرحله K ام با استفاده از نرخ برش به دست آمده در مرحله ۱۰ و تنش در زمان حقیقی N و $N-1$ به دست می آید.

(۱۳) اعمال شرط مرزی مؤلفه تنش طبق آنچه در بخش $(۳-۴)$ بیان شد.

(۱۴) به دست آوردن میدان فشار از معادله پیوستگی با استفاده از میدان سرعت جدید مرحله K ام.

(۱۵) اگر در حلقه زمانی وثوقی فر $K=4$ بود، به مرحله ۱۶ رفته در غیر این صورت برگشت به مرحله

۵.

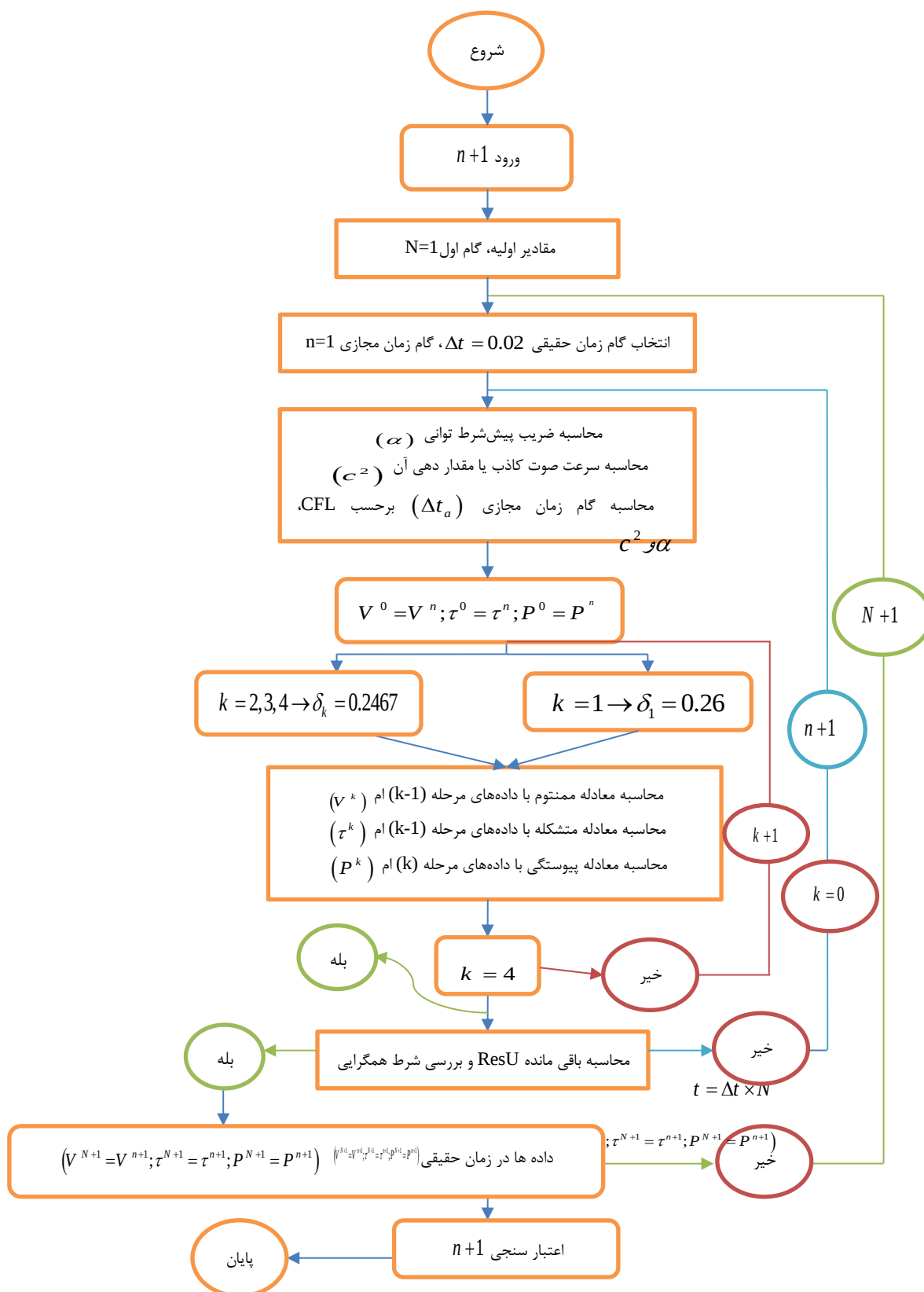
۱۶) تمام مؤلفه‌های به‌دست‌آمده در مرحله چهارم حلقه زمانی وثوقی‌فر برابر است با مؤلفه‌های مرحله $n+1$ ام حلقه داخلی.

۱۷) محاسبه نرم خطای فشار موضعی و مقایسه آن با حداکثر محدوده خطای همگرایی تعیین شده، در صورت اینکه مقدار نرم خطای فشار موضعی کمتر از مقدار محدوده خطای تعیین شده باشد باید به مرحله ۴ برگشت و در غیر این صورت باید مرحله ۱۸ رفت.

۱۸) بررسی اینکه جواب‌های مسئله به زمان مورد نظر رسیده است یا نه. در صورت نرسیدن جواب‌های به زمان مورد نظر مسئله، باید به مرحله ۳ برگشت و تمام مؤلفه‌های زمان N به $N-1$ و $N+1$ به N تبدیل می‌شود. در غیر این صورت باید به مرحله بعدی رفت.

۱۹) اعتبار سنجی نتایج به‌دست‌آمده.

۲۰) پایان.



شکل ۳-۲: روند نمایی الگوریتم حل.

فصل ۴ : نتایج عددی

۴-۱ مقدمه

در این فصل به نتایج حاصل شده از شبیه سازی عددی برای جریان سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه بین دو صفحه موازی ثابت که با استفاده از معادله متشکله ماکسول ساده شبیه سازی شده، ارائه می گردد. در این پژوهش برای شبیه سازی صورت گرفته از زبان برنامه نویسی متلب استفاده شده است. در ابتدای فصل به شرایط و الگویی همگرایی پرداخته شده است. در بخش بعدی جهت انتخاب شبکه مناسب، استقلال حل از شبکه بررسی شده است و در ادامه جهت انتخاب گام زمانی مناسب، استقلال حل از گام زمانی مورد بررسی قرار گرفته است. قبل از ارائه نتایج حاصل به دست آمده در این پژوهش، به صحت سنجی نتایج با حل تحلیلی و حل عددی پرداخته می گردد. در نهایت به بررسی نتایج میدان جریان و تأثیر روش های مختلف پیش شرط روی سرعت همگرایی در عدد رینولدز، عدد وایزنبرگ و نسبت لزجت متفاوت پرداخته می شود.

۴-۲ شرایط و الگوی همگرایی

در پژوهش حاضر برای حل معادلات همان طور که در فصل قبل بیان شد، از روش تکراری استفاده شده است. بدین ترتیب نتایج به دست آمده از معادلات پیوستگی و ممنوم با نتایج تکرار مرحله قبل مقایسه می شوند. اختلاف بین نتایج مرحله کنونی و قبلی را باقیمانده می نامند. باقیمانده حاصل از معادلات پیوستگی و ممنوم با یک مقدار بسیار کوچک همگرا می شوند که در این پژوهش، جریان دائم و غیردائم بررسی و برای شرایط همگرایی جریان غیردائم (حلقه داخلی) از همان شرایط همگرایی جریان دائم استفاده شده است. جهت ارزیابی سرعت همگرایی در این پژوهش از نرم خطای فشار موضعی به شکل زیر استفاده می شود [۳۹]:

$$\text{Res} = \text{Log} \left(\sum_{i=1}^{In} \sum_{j=1}^{Im} \left(\frac{p_{2i,2j}^{n+1} - p_{2i,2j}^n}{p_{2i,2j}^{n+1}} \right) \right)^{1/2} \quad (۱-۴)$$

که $p_{2i,2j}^{n+1}$ و $p_{2i,2j}^n$ به ترتیب فشار محلی در زمان جدید، فشار محلی در زمان قبلی، i و j به ترتیب شمارنده گام مکان در جهت x و y ، In و Im تعداد سلول ها در جهت x و y است. محدوده خطای همگرایی جهت قبول بودن نتایج، با توجه به آزمایش های عددی صورت گرفته در پژوهش های پیشین [۳۹] نرم خطای فشار موضعی 10^{-9} در نظر گرفته می شود، دقت حل نتایج تفاوت خیلی ناچیزی با نرم خطای فشار موضعی 10^{-9} دارد. پس این مقدار مناسبی برای محدوده خطای همگرایی می باشد. مقادیر پایه استفاده شده در این پژوهش در جدول ۴-۱ آمده است.

جدول ۴-۱. مقادیر پایه استفاده شده در پژوهش حاضر

L	U	h	β	Wi	Re	
۱	۰/۱	۰/۱	۱-۰	۵-۰	۲۰-۲	مقدار

۳-۴ استقلال حل از شبکه

یکی از مطالب مهم در مدل سازی عددی برای دستیابی به جواب های صحیح و دقیق، استقلال جواب ها از شبکه بندی دامنه محاسباتی می باشد. در دینامیک سیالات محاسباتی، معادلات حاکم بر مسئله را در یک شبکه بندی تشکیل شده از سلول بررسی می کنند، که اندازه این سلول ها نباید در جواب نهایی تأثیر گذار باشد. سه کمیت مهمی که بر کیفیت شبکه مؤثر است، عبارت اند از:

۱. یکنواختی شبکه^۱، نسبت ابعادی دو سلول مجاور نباید از ۱/۵ تا ۲ بیشتر باشد. عدم رعایت یکنواختی شبکه سبب واگرایی حل می شود.
۲. لهیدگی شبکه^۲ زاویه بین اضلاع یک سلول هرچه به ۹۰ درجه نزدیک تر باشد شبکه بندی عالی تر است. لهیدگی شبکه بر دقت نتایج تأثیر گذار است.
۳. نسبت ابعاد شبکه^۳، نسبت طول بزرگ به عرض کوچک یک سلول است. که مقدار آن نباید از یک بیشتر شود.

در تحقیق حاضر که هندسه مسئله مستطیل شکل است، بهترین نوع شبکه بندی شبکه منظم می باشد. برای این که شبکه بندی از کیفیت کافی برخوردار باشد و با توجه به مطالب پیشین، نوع سلول شبکه را مربعی یا مستطیلی شکل در نظر گرفته شده است. با توجه به بررسی جریان دائم و غیر دائم در این تحقیق، استقلال حل از شبکه در هر دو جریان را به صورت جداگانه بررسی شده است.

۳-۴-۱ استقلال حل عددی از شبکه برای جریان دائم

همان طور که بیان شد جواب ها باید از شبکه بندی محاسباتی مستقل باشند و با تغییر ابعاد شبکه جواب نباید تغییر کند. با توجه به دامنه عدد رینولدز (۲۰-۲) مورد استفاده در این پژوهش چند شبکه با تعداد سلول متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. از طرفی ریز بودن اندازه سلول های شبکه محاسباتی سبب افزایش تعداد سلول می گردد، که موجب کاهش خطای کوتاه سازی و افزایش خطای

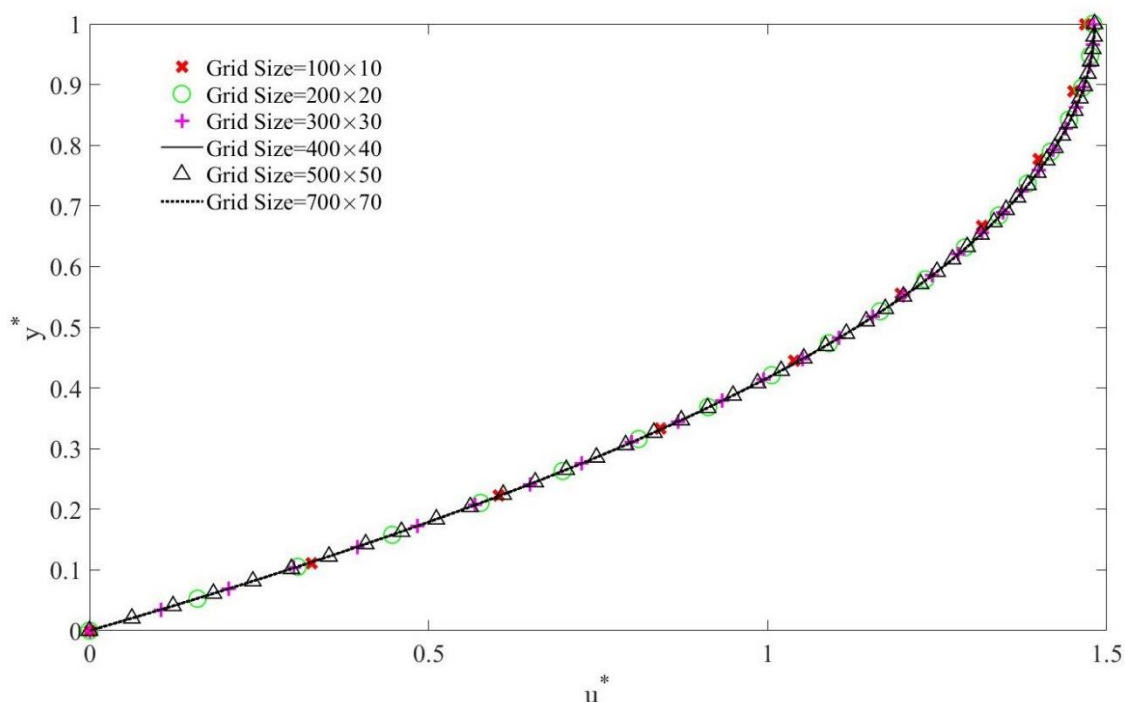
1.Mesh Smothness
2.Mesh Skewness
3.Mesh Aspect ratio

رندسازی می‌شود. خطای کوتاه‌سازی ناشی از روش گسسته سازی و خطای رندسازی ناشی از ماشین محاسباتی است از سمت دیگر افزایش تعداد سلول‌های شبکه موجب افزایش هزینه محاسباتی می‌گردد. برای مقایسه شبکه‌های مختلف از متوسط خطای حل عددی میدان سرعت در موقعیت‌های طولی $1/2$ و 9 نسبت به شبکه مرجع استفاده شده است. شبکه مرجع، شبکه‌ای است که متوسط خطای حل عددی میدان سرعت با شبکه ریزتر از خودش، برابر با صفر باشد. شبکه 70×70 به عنوان شبکه مرجع در این پژوهش استفاده شده است. در جدول ۲-۴ شبکه‌ها با تعداد سلول متفاوت برای عدد رینولدز 10 و 20 با متوسط خطای حل عددی میدان سرعت باهم مقایسه شده است.

جدول ۲-۴. متوسط خطای حل عددی میدان سرعت در شبکه‌های مختلف نسبت به شبکه مرجع 70×70

$In \times Im$					Re
500×50	400×40	300×30	200×20	100×10	
0.034%	0.072%	0.167%	0.465%	1.82%	10
0.044%	0.106%	0.239%	0.697%	2.732%	20

شکل ۱-۴ پروفیل سرعت در موقعیت طولی $0/2$ برای شبکه‌های ذکر شده در جدول ۲-۴ را نشان داده است.



شکل ۱-۴. پروفیل سرعت در موقعیت $x = 0.2$ برای شبکه‌های مختلف.

همان‌طور که از جدول ۲-۴ مشخص است، بهترین شبکه برای تمام دامنه‌های رینولدز با خطای کوچک‌تر از $0/2$ درصد برای این پژوهش مناسب است و در شبکه ریزتر از 40×40 می‌توان ادعا کرد که جواب‌ها مستقل از شبکه محاسباتی می‌باشد.

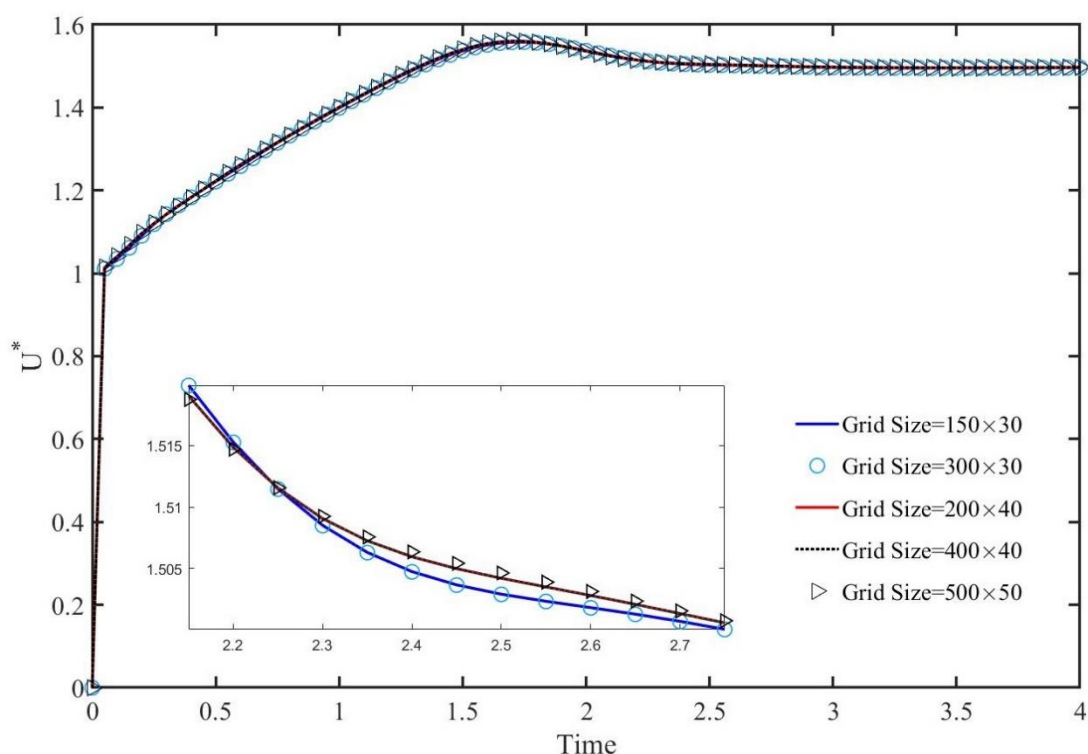
جدول ۳-۴. متوسط خطای حل عددی میدان سرعت در شبکه 40×40 با نسبت ابعادی مختلف نسبت به شبکه مرجع 70×70 .

$In \times Im$				نسبت ابعاد سلولی
1	1/2	1/3	1/4	
400×40	200×40	134×40	100×40	Re
0.072%	0.104%	0.32%	0.41%	10
0.106%	0.135%	0.64%	0.77%	20

همان‌طور که از جدول ۳-۴ معلوم است، نسبت عرض به طول تا مقدار $1/2$ ، تأثیر زیادی بر روی دقت جواب نمی‌گذارد، پس نسبت ابعادی تا یک مقدار خاصی می‌تواند علاوه بر حفظ دقت جواب نیز بر روی زمان حل محاسبات و نرخ همگرایی با کاهش تعداد سلول شبکه محاسباتی تأثیر بگذارد. در این تحقیق برای محاسبات قسمت دائم مسئله از شبکه ابعادی 40×200 استفاده شده است.

۴-۳-۲ استقلال حل عددی از شبکه برای جریان غیردائم

جهت بررسی استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی برای جریان غیردائم بین دو صفحه موازی ثابت از پنج شبکه با ابعاد مختلف 150×30 ، 300×3 ، 400×20 ، 400×40 و 500×5 مورد مطالعه قرار گرفته است، که نتایج عددی مربوط به تغییرات سرعت محوری u در موقعیت مکانی $x = 9$ و $y = 1$ در جریان داخلی بین دو صفحه موازی برحسب زمان با مقادیر $Re = 10$ و $Wi = 0.2$ برای شبکه های نامبرده شده، در شکل ۴-۲ نشان داده شده است.

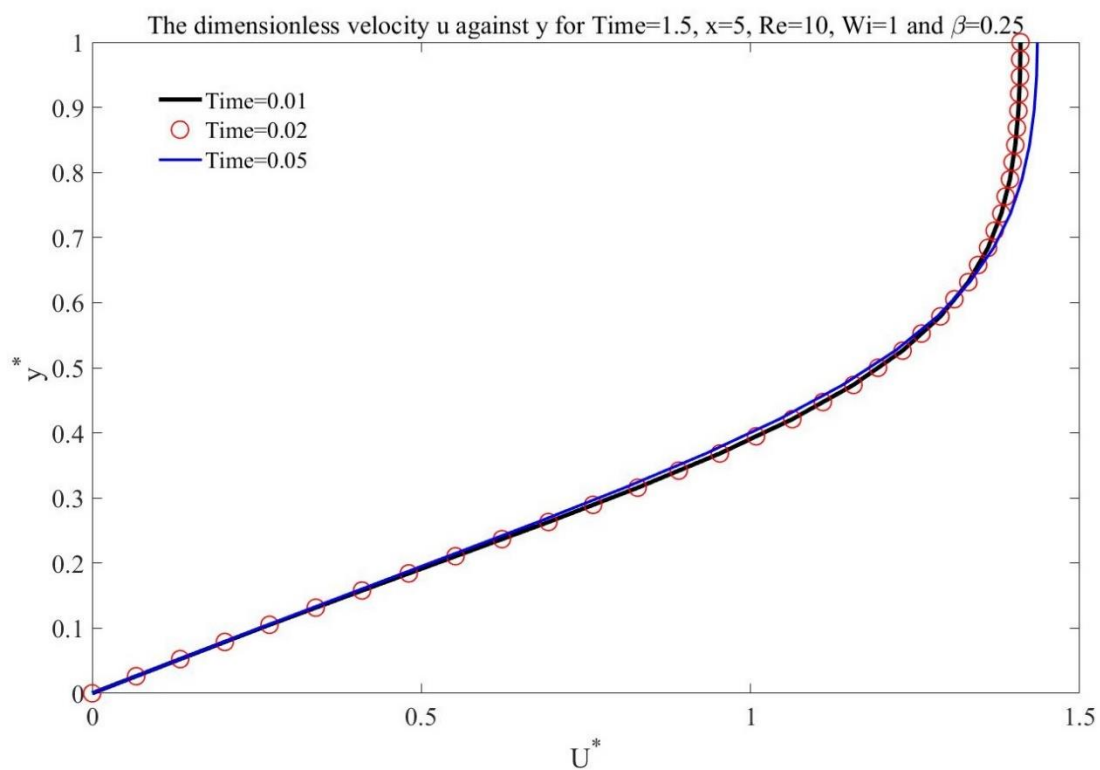


شکل ۴-۲. مطالعه استقلال حل از شبکه برای تغییرات سرعت محوری u در موقعیت مکانی $x=9$ و $y=1$ بر حسب زمان برای $Re=10$ ، $\beta=0.25$ و $Wi=0.2$.

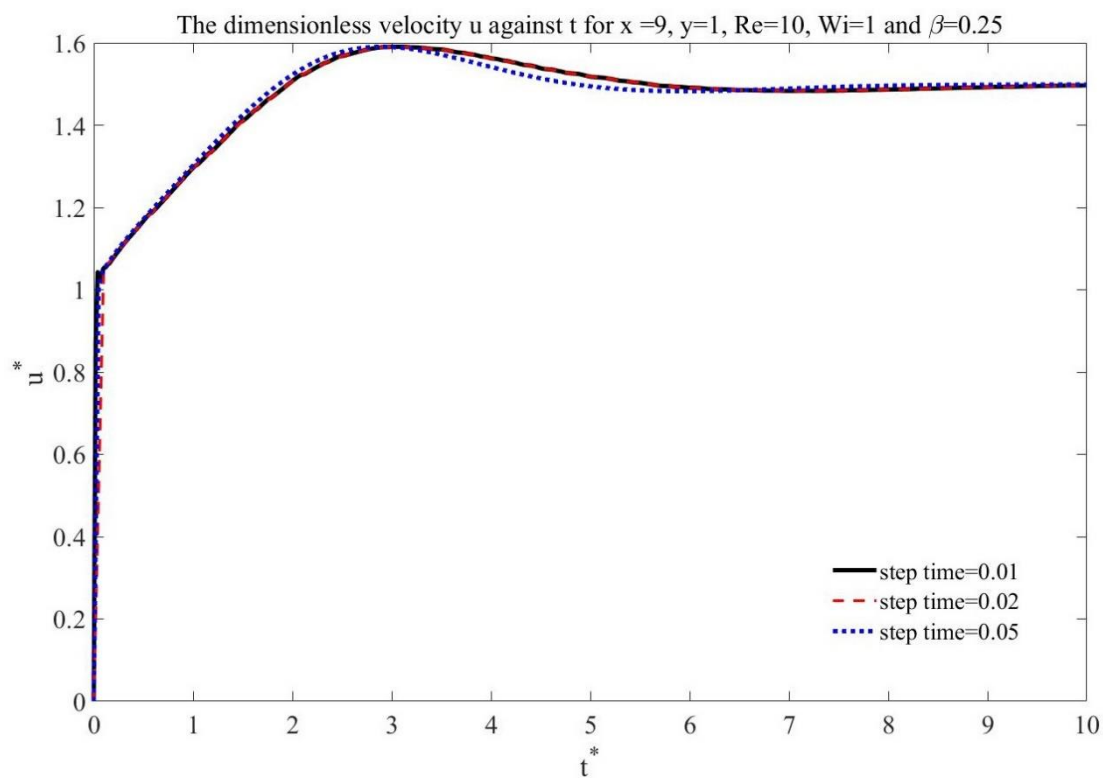
با توجه به شکل ۴-۲ نتایج مربوط به شبکه‌های با ابعاد 200×40 ، 400×40 و 500×50 دارای همپوشانی و انطباق خوبی نسبت به دیگر شبکه‌های بزرگ‌تر و همچنین دارای دقت کافی برای حل جریان‌های غیردائم با مقدار $Wi=0$ که با جریان نیوتنی در بخش ۳-۴-۵ اعتبارسنجی شده است، دارد. همان‌طور که در بخش ۴-۳-۱ بیان شد، تعداد سلول‌های شبکه تأثیر زیادی روی دقت و زمان محاسبه حل دارد که با افزایش تعداد سلول‌های شبکه محاسباتی زمان محاسبات افزایش خواهد یافت. به همین دلیل برای کاهش زمان محاسباتی و دقت کافی حل در این پژوهش از شبکه با ابعاد 200×40 بهره گرفته شده است.

۴-۴ استقلال حل عددی از گام زمانی

همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، جمله زمان حقیقی به صورت ضمنی گسسته‌سازی می‌شود به همین دلیل در انتخاب اندازه گام زمان فیزیکی محدودیتی جز دقت زمان موردنظر مسئله وجود ندارد. بدین منظور در این پژوهش از سه گام زمان حقیقی 0.05 ، 0.02 و 0.01 برای حل مسئله استفاده شده است، نتایج حاصل از این گام‌های زمانی مطابق شکل ۴-۳ و ۴-۴ نشان می‌دهد که انتخاب گام زمانی بر دقت جواب مسئله تأثیرگذار است.



شکل ۳-۴. سرعت محوری بی بعد در مکان $x=5$ ، $Re=10$ ، $Wi=1$ ، $\beta=0.25$ و در $t=1.5$ برای گام‌های زمانی مختلف.



شکل ۴-۴. سرعت محوری بی بعد در مکان $x=9$ ، $y=1$ ، $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ در ناحیه کاملاً توسعه یافته برای گام‌های زمانی مختلف.

همان طور که از شکل ۴-۴ مشخص است انتخاب هر گام زمانی کوچک تر از ۰/۰۲ بر دقت جواب تأثیر ندارد و فقط در جواب خروجی مسئله در زمان موردنظر تأثیرگذار است. برای انتخاب بهترین گام زمانی به دقت زمانی، جواب خروجی مورد نیاز مسئله بستگی دارد به عنوان مثال با انتخاب گام زمانی ۰/۰۲ جواب های خروجی برنامه در زمان های ۰/۰۲، ۰/۰۴، ۰/۰۶، ...، ۱/۰۲ و ... میسر می باشد و خروجی برنامه برای زمان ۱/۰۱ امکان پذیر نیست.

۴-۵ ارزیابی صحت نتایج

در این قسمت به ارزیابی صحت نتایج به دست آماده از حل عددی تحقیق حاضر پرداخته می شود. جهت ارزیابی نتایج از حل تحلیلی جریان غیردائم توسعه یافته برای حالت $\beta=1$ (سیال نیوتنی)، حل تحلیلی جریان دائم در ناحیه توسعه یافته و نتایج حل عددی جریان غیردائم برای جریان سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی ثابت استفاده می شود:

۴-۵-۱ ارزیابی نتایج با حل عددی جریان غیردائم در ناحیه توسعه یافته در حالت $\beta=1$.

جهت بررسی درستی نتایج حاصل از برنامه عددی تحقیق حاضر از نتایج عددی جریان غیردائم در حال توسعه سیال ویسکوالاستیک برای حالت $\beta=1$ از نرم افزار فلوئنت استفاده می شود. دلیل استفاده از نرم افزار فلوئنت جهت صحت سنجی نتایج کد عددی این است که راه حل تحلیلی برای ناحیه کاملاً توسعه یافته جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک داخل کانال دوبعدی با شرط مرزی خروجی توسعه یافته را نمی توان استفاده کرد. دلیل عدم استفاده از حل تحلیلی موجود در مقالات [۴۰-۴۱] که معادله آن به صورت زیر است، بیان می شود.

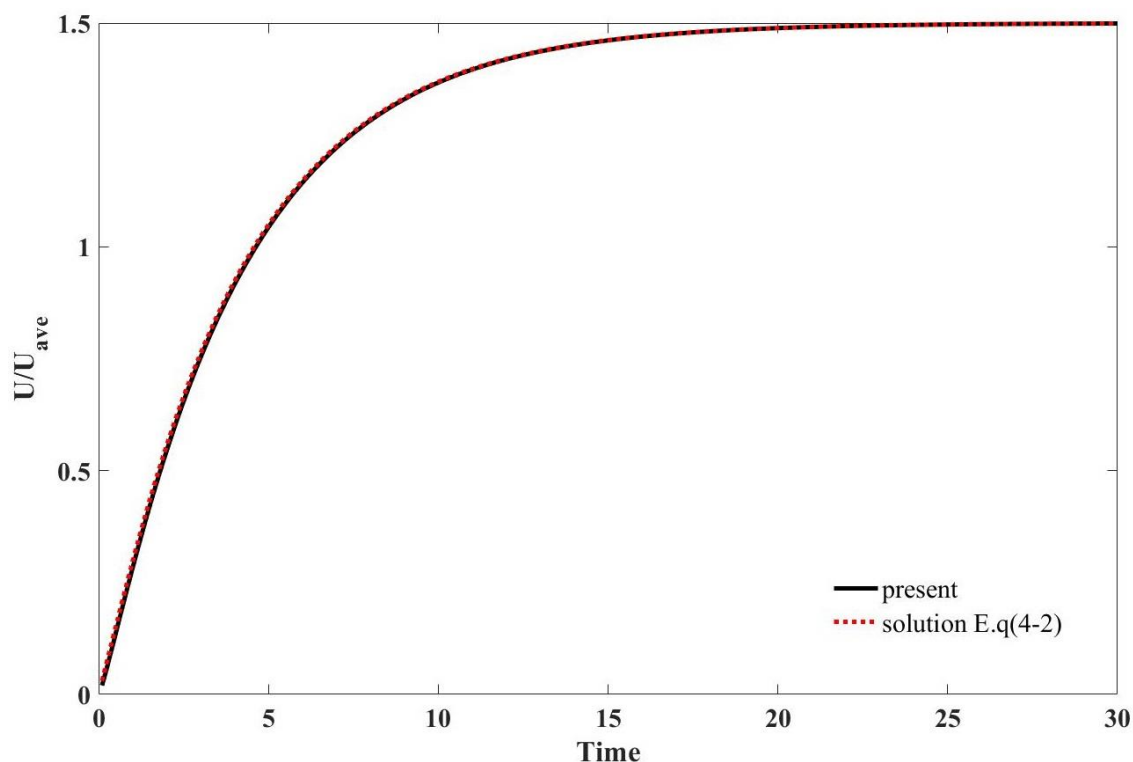
$$u_{ave.}^* = \int_0^1 u^* dy = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_n} \exp\left(\frac{-\lambda_n^2 t^*}{Re}\right) \quad (۲-۴)$$

$$a_n = 4 \times (-1)^n / \lambda_n^3 \quad (۳-۴)$$

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (۴-۴)$$

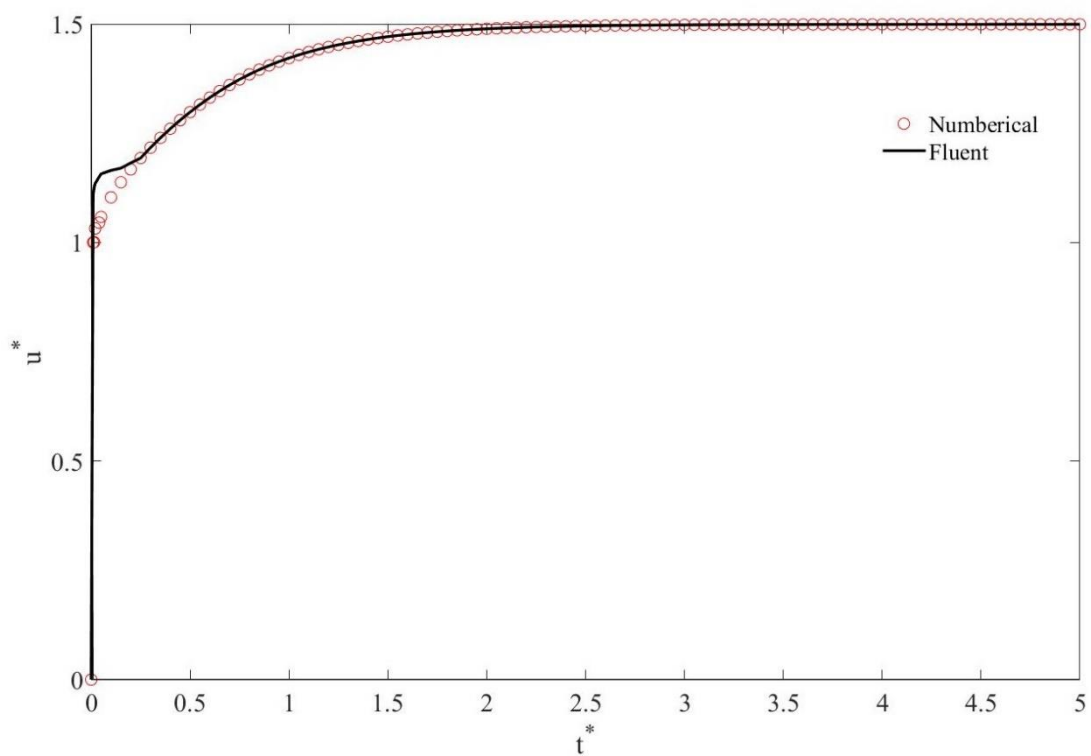
معادلات (۲-۴) تا (۴-۴) حل تحلیلی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک کاملاً توسعه یافته بین دو صفحه موازی برای حالت $\beta=1$ (سیال نیوتنی) را بیان می کند. از این معادله (۲-۴) جهت اعتبار سنجی حل عددی تحقیق حاضر نمی توان استفاده نمود، زیرا این دو مسئله متفاوت از یکدیگر

می‌باشند و اختلاف این حل تحلیلی که در رابطه (۲-۴) ارائه شده، با حل عددی تحقیق حاضر در شرط مرزی جهت جریان (شرط مرزی در جهت x) است. اگر حل عددی به صورت توسعه یافته درآورده شود، حل تحلیلی رابطه (۲-۴) با حل عددی جریان غیردائم سیال نیوتنی توسعه یافته بین دو صفحه موازی دارای هم پوشانی مناسبی است. شکل ۴-۵ این موضوع را به خوبی نشان می‌دهد.



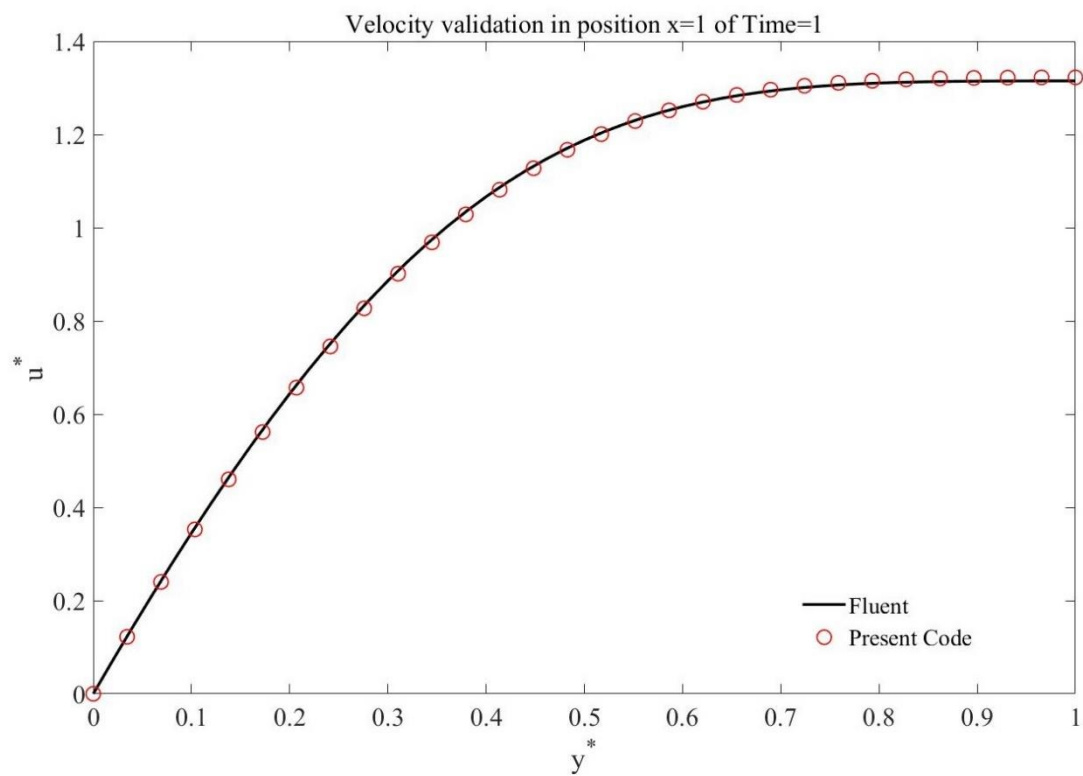
شکل ۴-۵. مقایسه سرعت u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برای $Re=10$ و $\beta=1$ برای حالت کاملاً توسعه یافته.

با توجه به آنچه بیان شد جهت اعتبارسنجی کد عددی از نرم افزار فلونت استفاده می‌شود، که نتایج حاصل از آن در شکل ۴-۶ آورده شده از هم پوشانی و انطباق مناسبی برخوردار است.

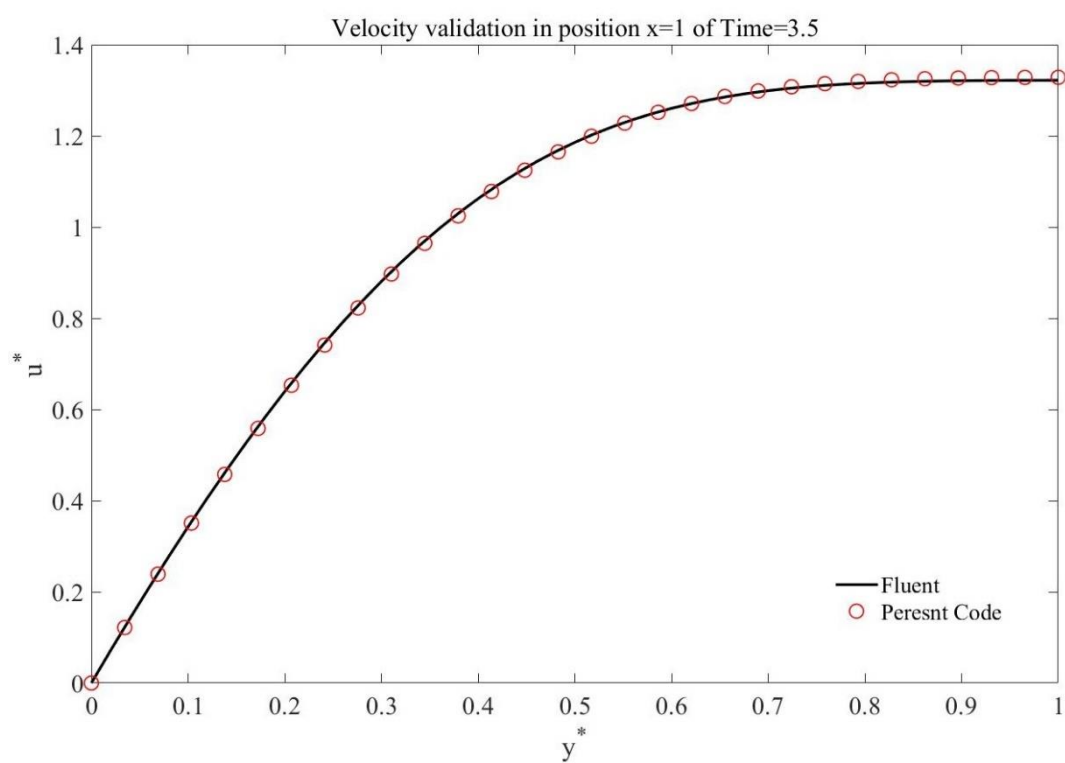


شکل ۴-۶. مقایسه سرعت u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برای $Re=10$ و $\beta=1$

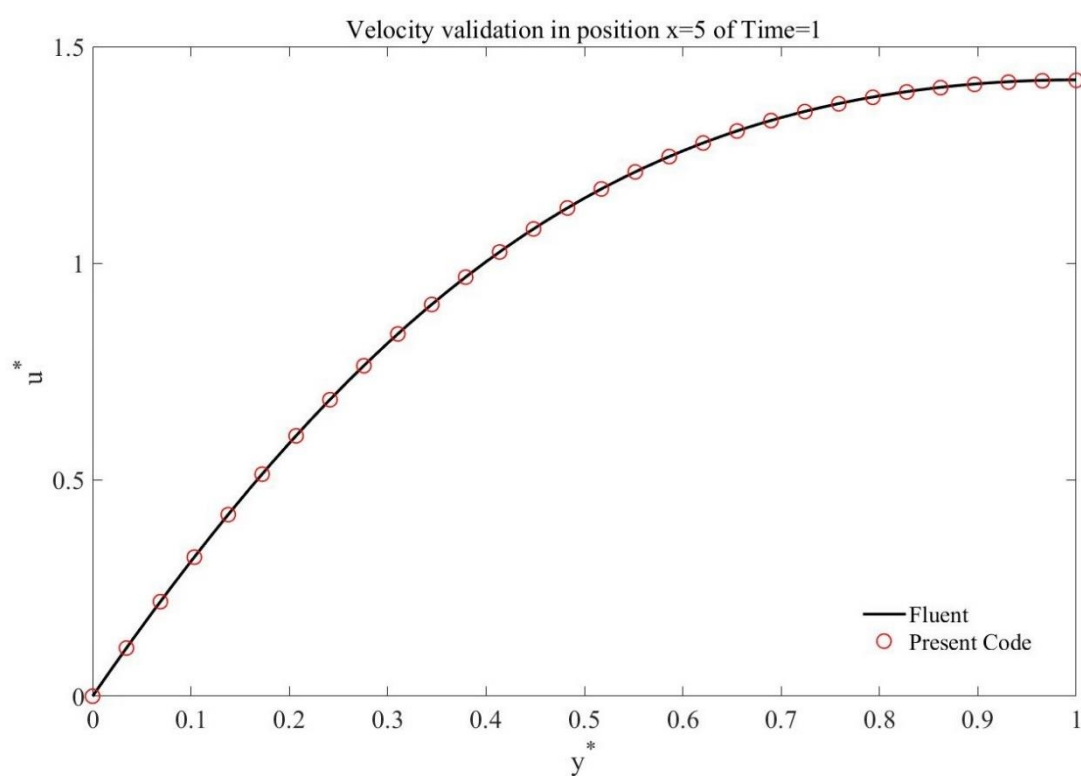
برای بررسی دقیق‌تر در دو موقعیت مکانی $x=1,5$ و دو زمان $t=1,3.5$ پروفیل‌های سرعت حل عددی را با حل فلونت مقایسه شده است.



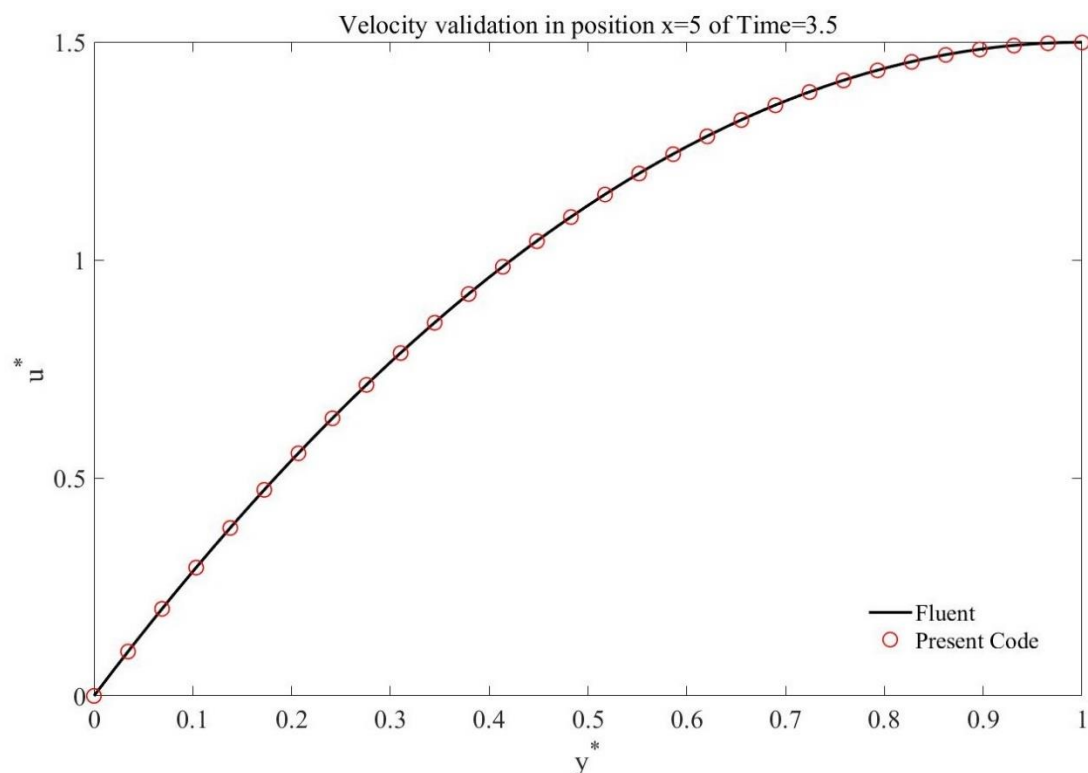
شکل ۴-۷. پروفیل سرعت در جهت x در موقعیت $x=1$ و $t=1$.



شکل ۴-۸. پروفیل سرعت در جهت x در موقعیت $x=1$ و $t=3.5$.



شکل ۴-۹. پروفیل سرعت در جهت x در موقعیت $x=5$ و $t=1$.



شکل ۴-۱۰. پروفیل سرعت در جهت x در موقعیت $x=5$ و $t=3.5$.

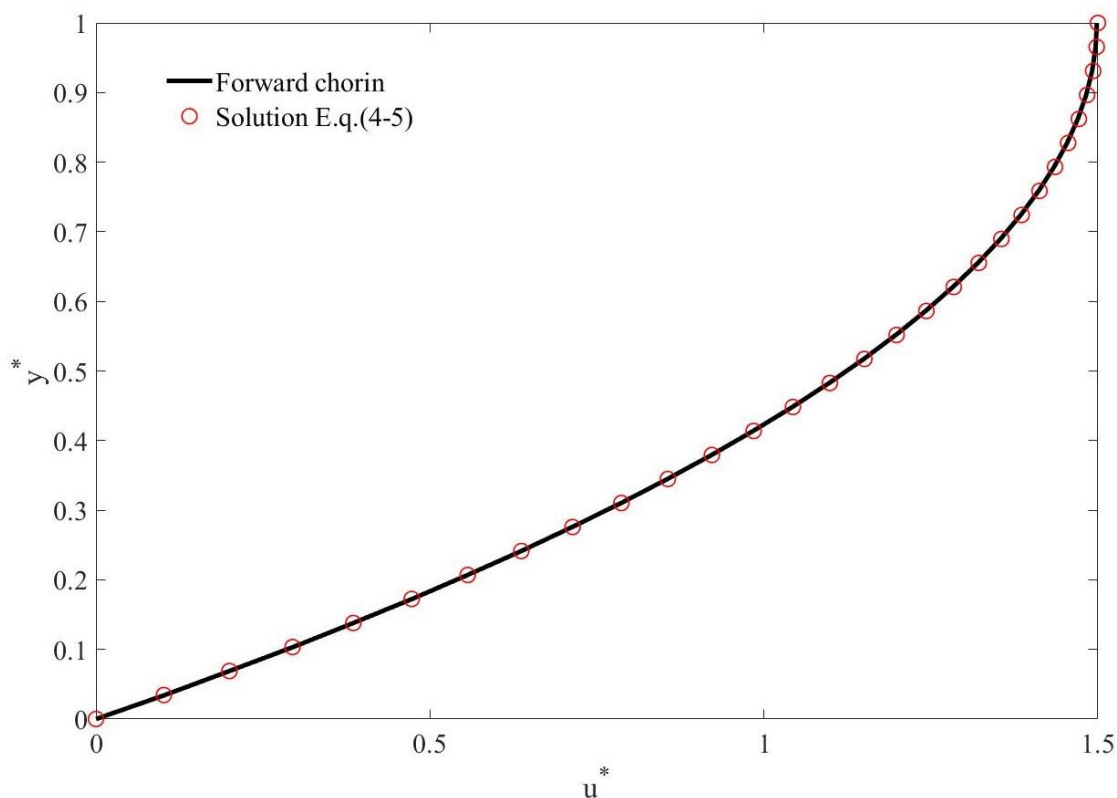
همان طور که از شکل های ۴-۶ تا ۴-۱۰ مشخص است پروفیل سرعت کد عددی و حل فلوئنت دارای انطباق عالی می باشد.

۴-۵-۲ ارزیابی نتایج با حل تحلیلی جریان دائم توسعه یافته

برای تحقیق حاضر از حل تحلیلی جریان دائم توسعه یافته برای اعتبارسنجی نتایج استفاده می شود. به همین دلیل وقتی زمان معادله (۴-۲) را به سمت بی نهایت میل داده شود، جریان دائم شده و معادله آن به صورت زیر است:

$$u = 1.5(1 - y^2) \quad (۴-۵)$$

نتایج حاصل از حل عددی جریان غیردائم تحقیق حاضر در زمان بسیار بزرگ به سمت جواب های جریان دائم میل می کند. همان طور که از شکل ۴-۱۱ مشخص است پروفیل سرعت حاصل از معادله (۴-۵) با کد عددی دارای انطباق عالی است.

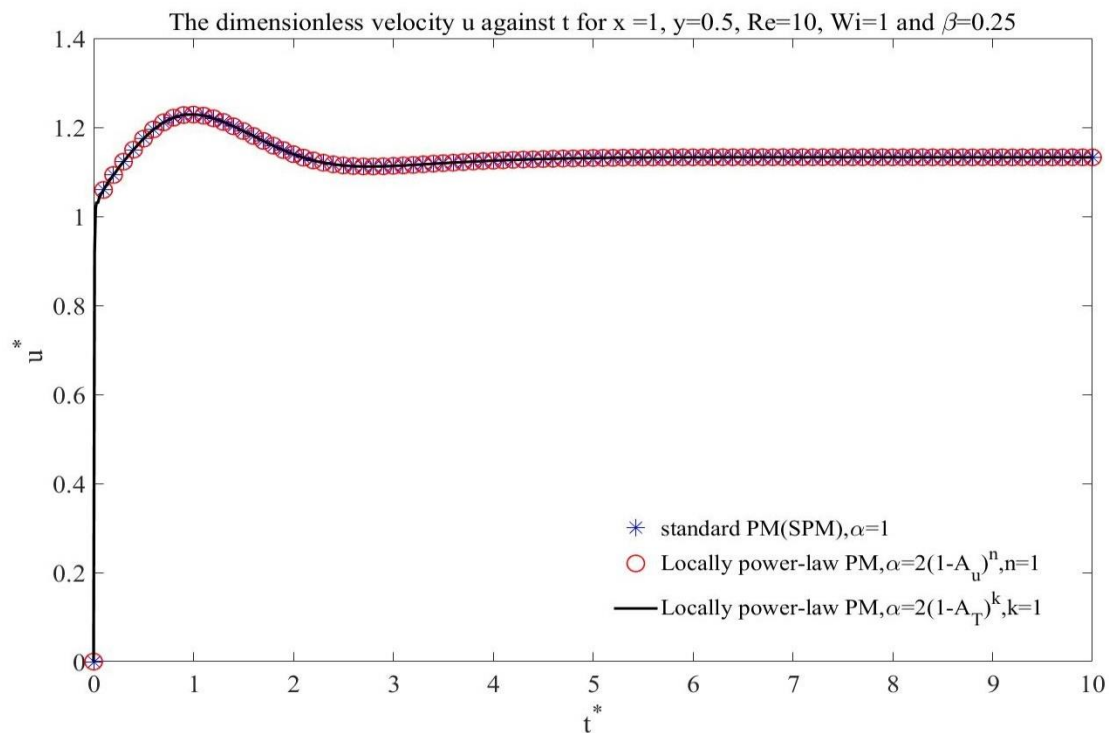


شکل ۴-۱۱. مقایسه سرعت در جهت x و موقعیت $x=9$ و در زمان $t=9$ برای جریان بین دو صفحه موازی ثابت با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$.

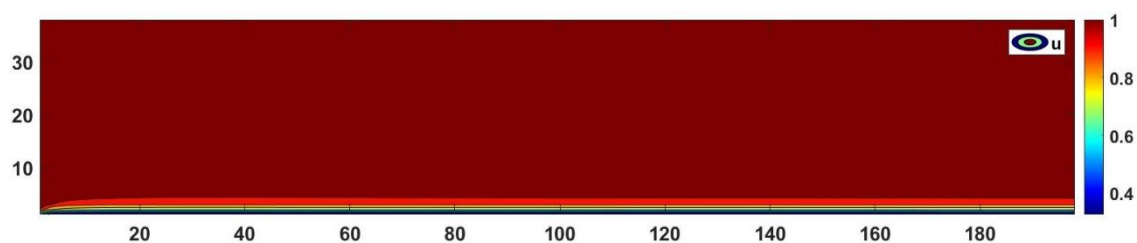
۴-۵-۳ ارزیابی نتایج با حل عددی روش پیش شرط سازی و روش

پیش شرط توانی

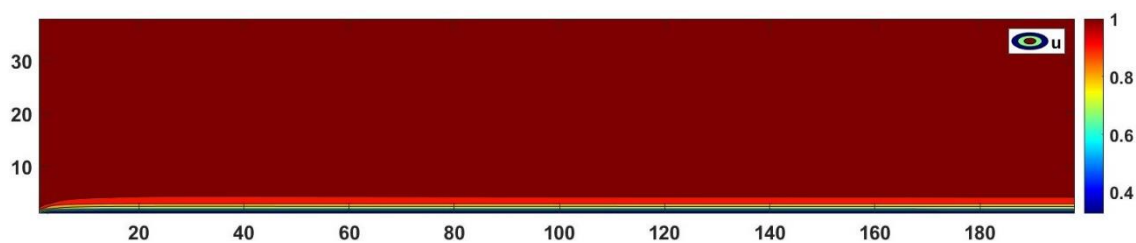
برای ارزیابی نتایج حاصل از کد عددی از نتایج عددی روش پیش شرط سازی و روش محلی پیش شرط توانی حسگر سرعت استفاده می شود. نتایج عددی در شکل ۴-۱۲ نشان می دهد که روش محلی پیش شرط توانی حسگر تنش دارای همپوشانی و انطباق خوبی نسبت به روش های پیش شرط سازی و پیش شرط توانی حسگر سرعت دارد و از طرف دیگر کانتور سرعت روش پیش شرط سازی در زمان های 0.02 ، 0.04 ، 0.1 ، 0.2 ، 0.4 و 0.8 با کانتور سرعت روش محلی پیش شرط توانی حسگر تنش در همان زمان ها که در شکل های ۴-۱۳ تا ۴-۱۵ نشان داده شده است، از انطباق مناسبی برخوردار می باشد.



شکل ۴-۱۲. بررسی عددی تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ برای روش‌های پیش‌شرط سازی، پیش‌شرط توانی با حسگر سرعت و تنش.

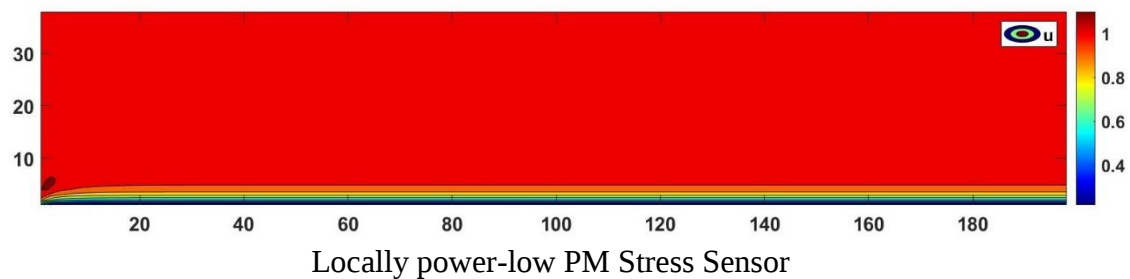
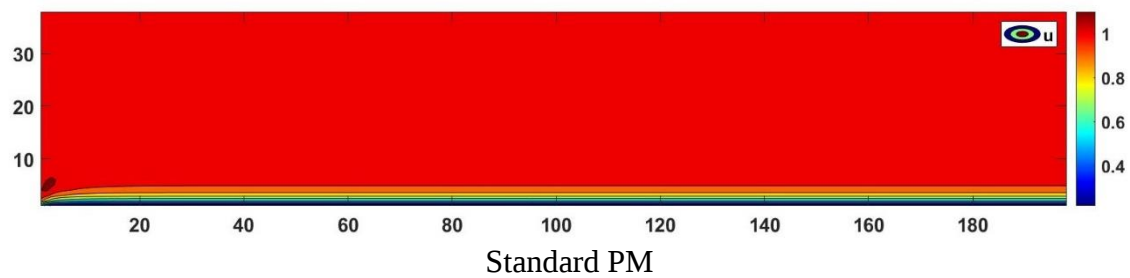


Standard PM

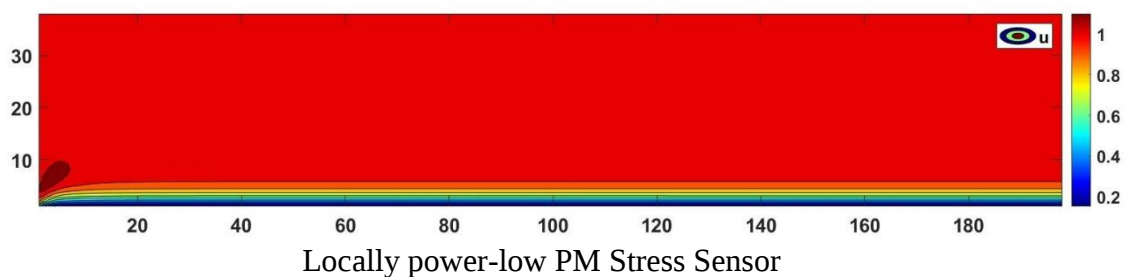
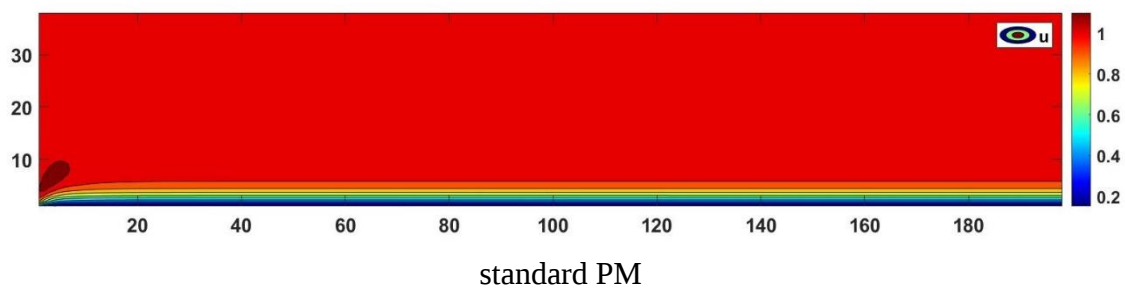


Locally power-low PM Stress Sensor

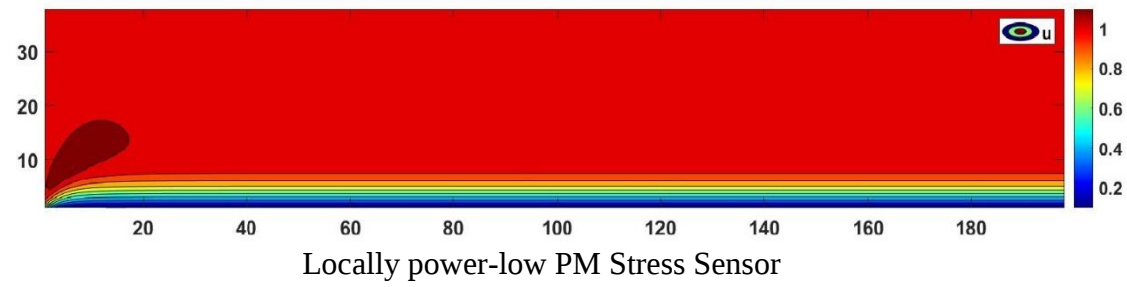
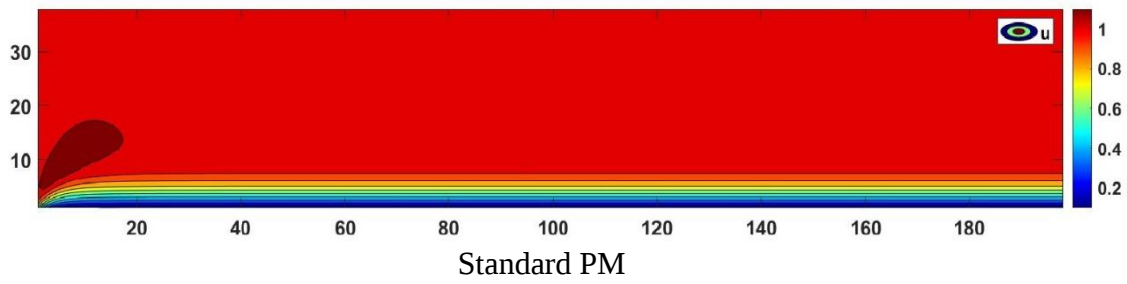
شکل ۴-۱۳. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ $t=0.02$.



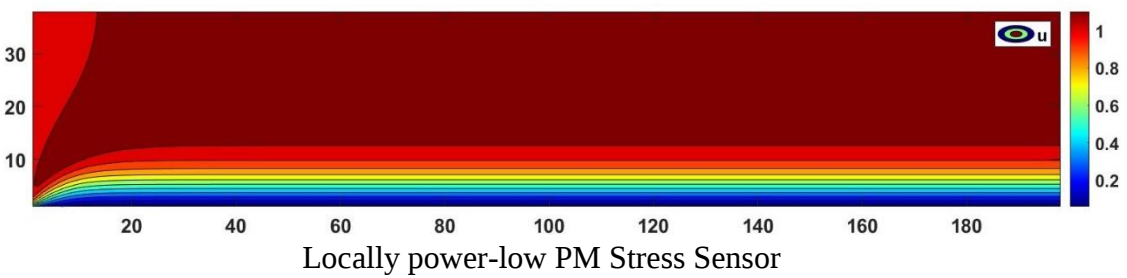
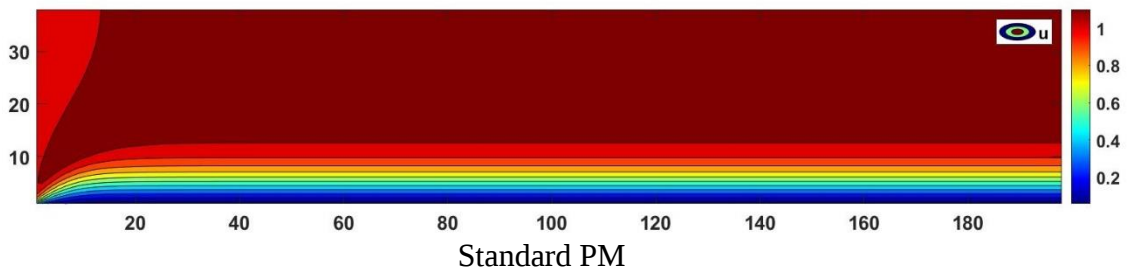
شکل ۴-۱۴. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ ، $\beta=0.25$ و $t=0.04$.



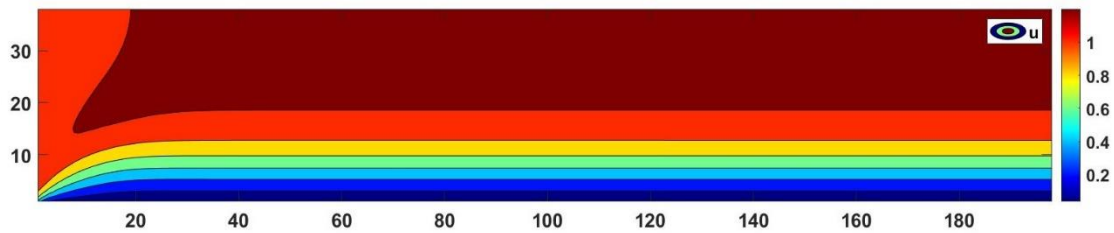
شکل ۴-۱۵. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ ، $\beta=0.25$ و $t=0.1$.



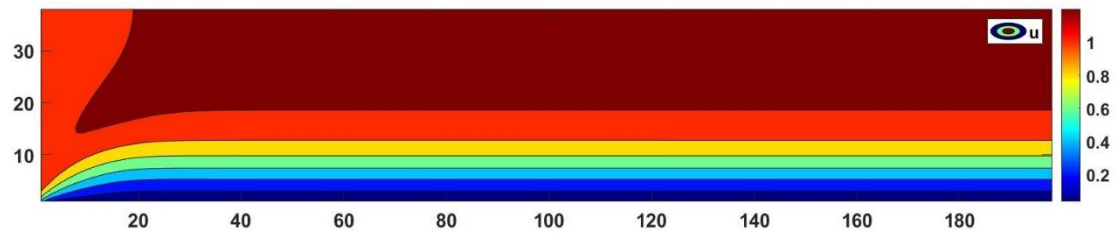
شکل ۴-۱۶. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=1$, $\beta=0.25$ و $t=0.2$.



شکل ۴-۱۷. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=1$, $\beta=0.25$ و $t=0.4$.



Standard PM

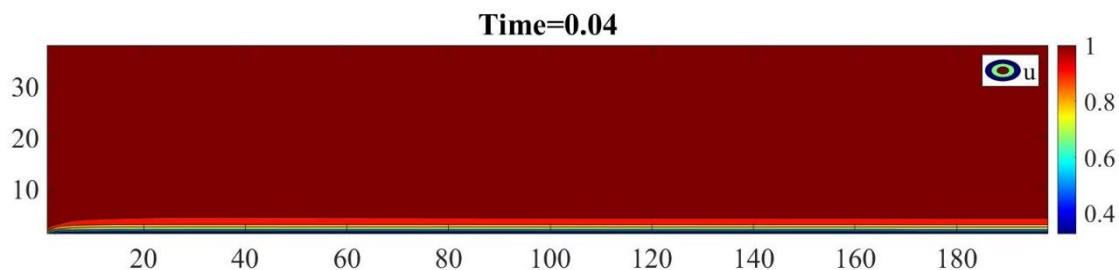


Locally power-low PM Stress Sensor

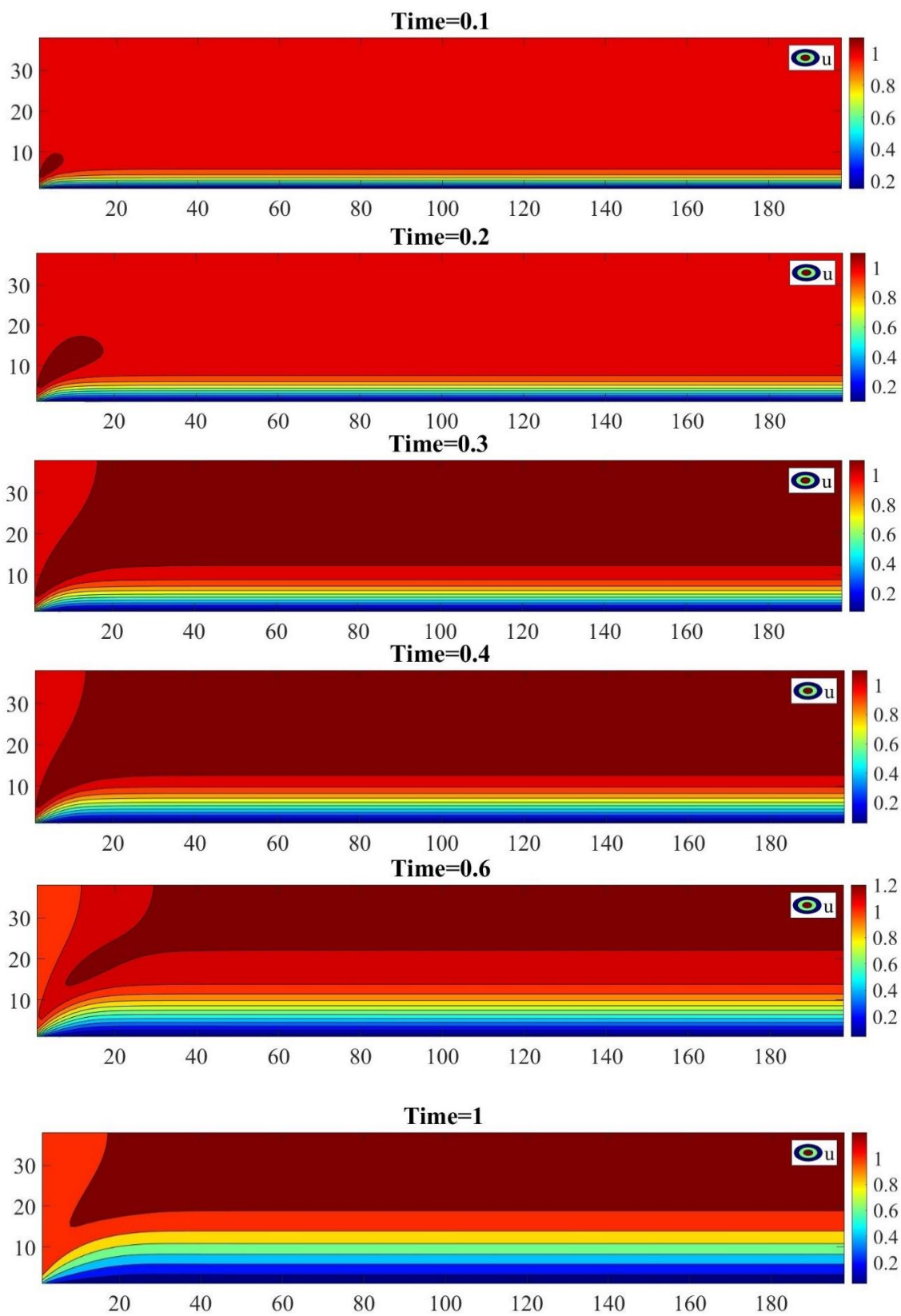
شکل ۴-۱۸. کانتور سرعت محوری برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ ، $\beta=0.25$ و $t=0.8$.

۴-۶ نتایج میدان جریان

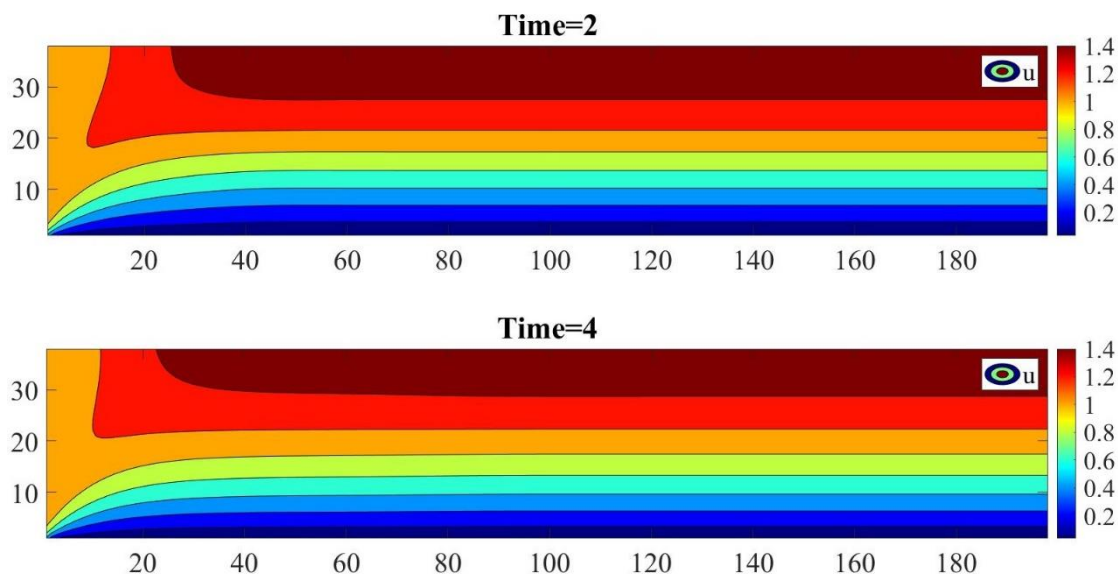
همان‌گونه که در فصل قبل بیان شد برای حل دستگاه معادلات حاکم از یک الگوریتم دو زمانه، که شامل حلقه خارجی (برای زمان حقیقی) و حلقه داخلی (برای زمان کاذب) استفاده می‌شود که با همگرایی حل در حلقه داخلی حل معادله در حلقه خارجی یعنی زمان حقیقی میسر می‌شود. در این مدل‌سازی برای برنامه‌نویسی برنامه موردنظر از نرم‌افزار متلب و از کامپیوتر با مشخصات رم 64 GB و پردازنده مرکزی با قدرت 3.5 GHz استفاده شده است. در ادامه کانتور میدان سرعت محوری u در زمان مختلف برای جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت با شرایط $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$ نمایش داده می‌شود. که شکل‌های ۴-۱۹ تا ۴-۲۱ خطوط هم‌ترازی سرعت محوری u را نمایش می‌دهد.



شکل ۴-۱۹. کانتور سرعت u در گام زمانی ۰/۰۴.

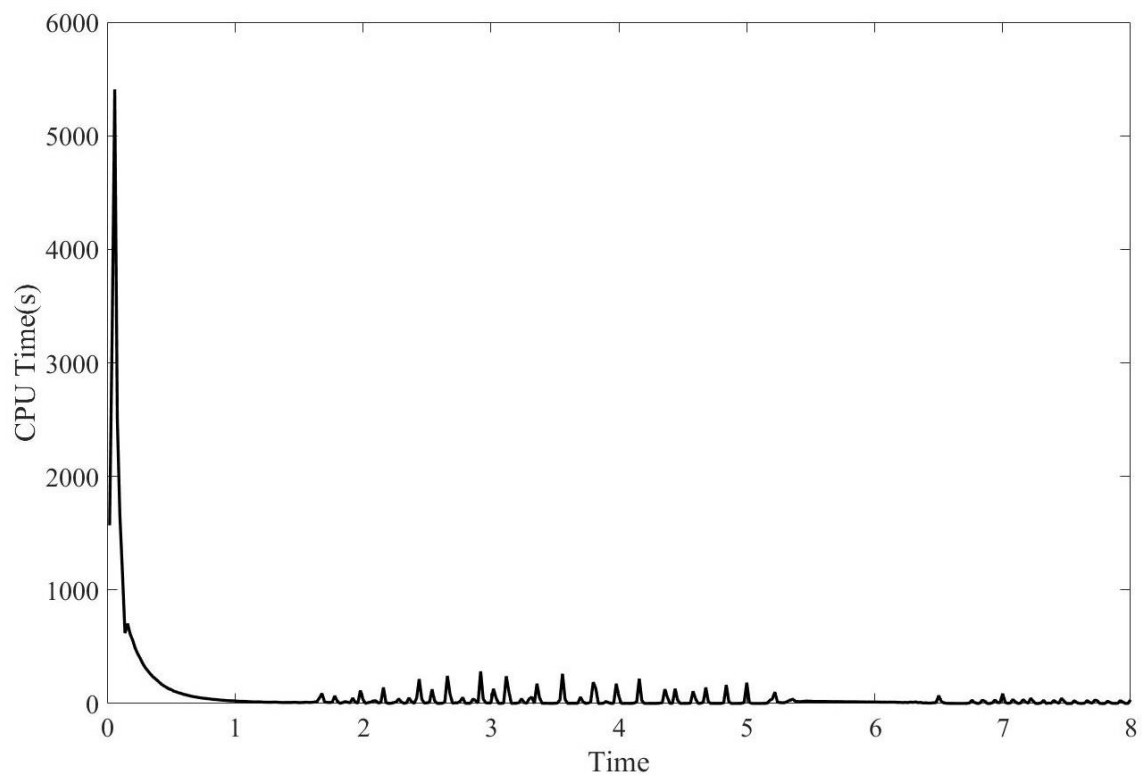


شکل ۴-۲۰. کانتور سرعت u در گام زمانی 0.1 ، 0.2 ، 0.3 ، 0.4 ، 0.6 و 1 .

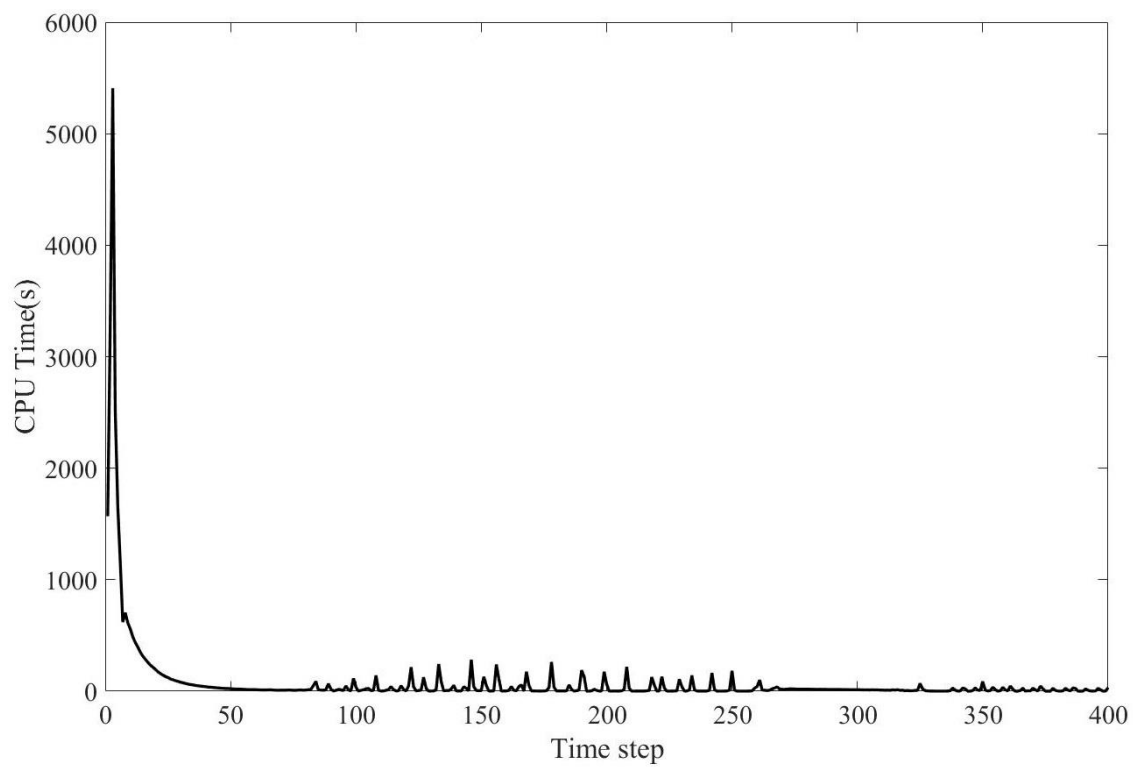


شکل ۴-۲۱. کانتور سرعت u در گام زمانی ۲ و ۴.

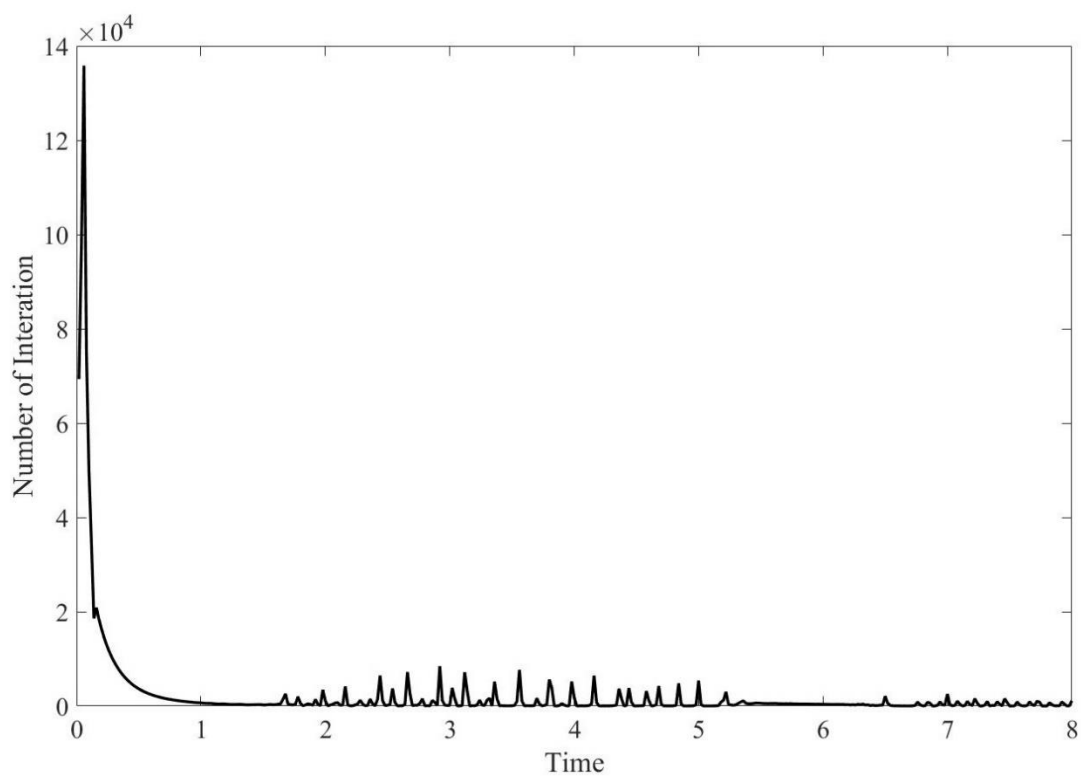
در شکل ۴-۲۲ و ۴-۲۳ محور عمودی زمان محاسباتی پردازنده مرکزی برای اجرای یک گام زمان حقیقی یا اجرای یکبار حلقه داخلی تا برقراری شرط همگرایی و محور افقی زمان حقیقی مسئله را نشان می‌دهد. همچنین شکل ۴-۲۲ و ۴-۲۳ نشان می‌دهد برای حل کامل این جریان ۸ ساعت ۴۱ دقیقه ۲۷ ثانیه زمان لازم است. در شکل ۴-۲۴ و ۴-۲۵ محور عمودی تعداد تکرارهای هر گام حلقه داخلی تا رسیدن به همگرایی و محور افقی زمان حقیقی مسئله یا تعداد گام حلقه خارجی را نشان می‌دهد که در این حالت زمان موردنیاز مسئله ۸ و با گام زمانی ۰/۰۲ برابر با ۴۰۰ گام تکرار حلقه خارجی نیاز است و تعداد کل تکرار حلقه خارجی برای ۴۰۰ گام برابر با ۳۹۲،۹۳۰ است. با توجه به شکل ۴-۲۵ در ۱۰ گام اول بیشترین تعداد تکرار را نسبت به گام‌های دیگر دارد و بیشترین تعداد تکرار مربوط به گام سوم است. در نهایت تعداد تکرار در گام‌های بعدی به کمترین مقدار می‌رسد. استفاده از شبکه جابجا شده موجب افزایش زمان حل می‌شود ولی برای حل مسائل جریان سیال ویسکوالاستیک روشی بسیار مناسب می‌باشد. بنابراین استفاده از الگوریتم دو زمانه با روش چهار مرحله‌ای وثوقی‌فر و روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش برای حل عددی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک از لحاظ نرخ همگرایی و هزینه زمان محاسباتی بسیار مناسب است.



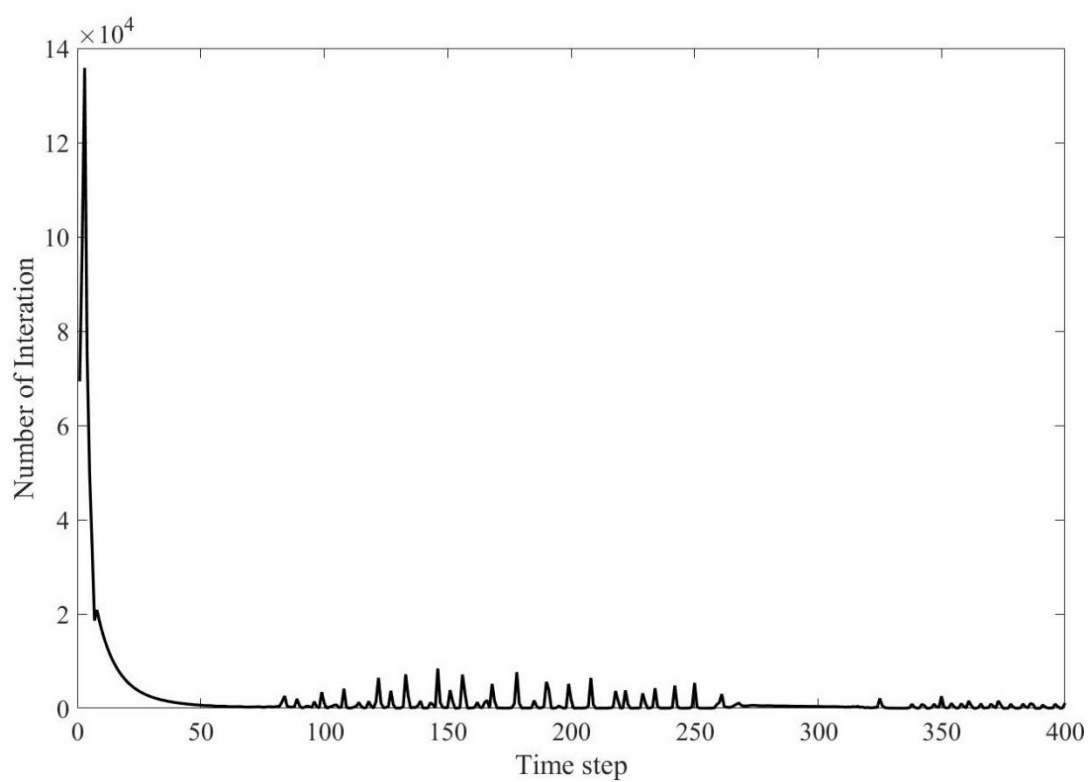
شکل ۴-۲۲. زمان CPU در هر لحظه از زمان مسئله برای $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0.25$.



شکل ۴-۲۳. زمان CPU در هر گام زمانی برای $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0.25$.



شکل ۴-۲۴ تعداد تکرارها در هر لحظه از زمان مسئله برای $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0.25$.

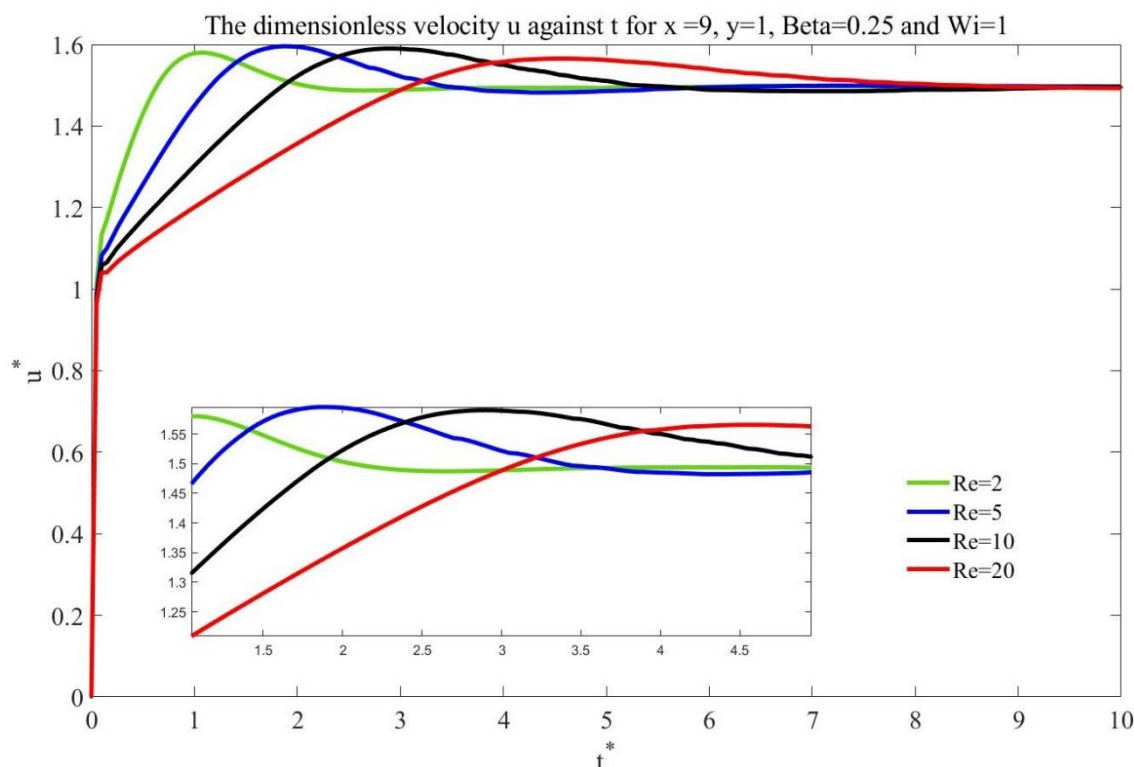


شکل ۴-۲۵ تعداد تکرارها در هر گام زمانی برای $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0.25$.

در ادامه به بررسی نتایج جریان در ناحیه توسعه یافته برای حالت‌های مختلف مورد بررسی این جریان شامل تغییرات عدد رینولدز، عدد وایزنبرگ و نسبت لزجت است و در نهایت هر یک از این حالت‌ها بررسی می‌گردد.

۴-۶-۱ تأثیر تغییرات عدد رینولدز بر میدان سرعت

در این قسمت با تغییرات عدد رینولدز در دامنه ۲ تا ۲۰ با مقدار ثابت عدد وایزنبرگ و نسبت لزجت، میدان سرعت جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی ثابت در ناحیه توسعه یافته مقایسه می‌شود.



شکل ۴-۲۶. تأثیر عدد رینولدز مختلف با $Wi=1$ و $\beta=0.25$ بر میدان سرعت در ناحیه کاملاً توسعه و موقعیت $x=9$ و $y=1$

در شکل ۴-۲۶ سرعت محوری در خط مرکزی (سرعت ماکزیمم در خط تقارن) نسبت به زمان در ناحیه توسعه یافته برای اعداد رینولدز ۲ تا ۲۰، مقدار ثابت $Wi=1$ و $\beta=0.25$ در موقعیت مختصاتی $x=9$ و $y=1$ مقایسه شده است. در زمان بسیار کوتاهی (به اندازه گام اول) پس از راهاندازی طول اولین اوج به وجود می‌آید بعد از گذشت مدت زمانی جریان ثابت می‌شود. طول اولین اوج به مقدار عدد رینولدز بستگی دارد که با افزایش عدد رینولدز طول اولین اوج افزایش می‌یابد. برای عدد رینولدز ۱۰ در زمان ۲ تا ۶ رخ می‌دهد. معادلات جریان در ناحیه توسعه یافته طبق رابطه (۴-۶) از لحاظ ریاضی به شکل هذلولوی و از نظر فیزیکی دارای ماهیت نفوذ می‌باشد [۴۷]. طبق رابطه (۴-۶) و (۴-۷) سرعت

انتشار امواج برشی و امواج پخش تقریباً برابر با $\frac{1}{\sqrt{\text{Re} \cdot \text{Wi}}}$ است. شروع امواج برشی از مرز دیوار در زمان صفر و به سمت خط مرکزی منتشر می‌شوند.

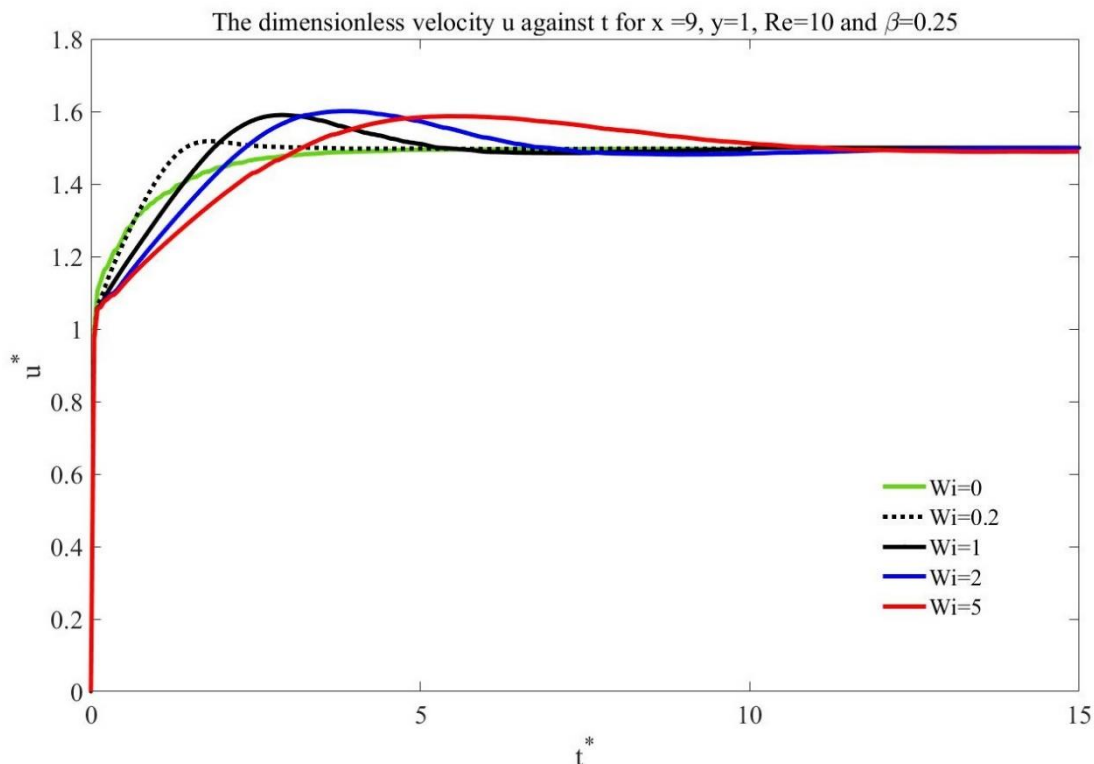
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} + \text{Wi} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial t^2} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} \quad (۶-۴)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Wi} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k(t) + \dot{k}(t) \quad \left(k(t) = -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (۷-۴)$$

امواج برشی باعث حرکت نوسانی میدان سرعت می‌شود. با افزایش سرعت انتشار موج برشی طول موج میدان سرعت کاهش می‌یابد. بنابراین با افزایش عدد رینولدز سبب کاهش سرعت انتشار امواج برشی، در نتیجه مطابق شکل ۴-۲۶ طول موج میدان سرعت افزایش می‌یابد.

۴-۶-۲ تأثیر تغییرات عدد وایزنبرگ بر میدان سرعت

در این بخش با تغییرات عدد وایزنبرگ در دامنه صفر تا ۵ با مقدار ثابت عدد رینولدز و نسبت لزجت، میدان سرعت جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی ثابت در ناحیه توسعه یافته مورد بررسی قرار گرفته است.

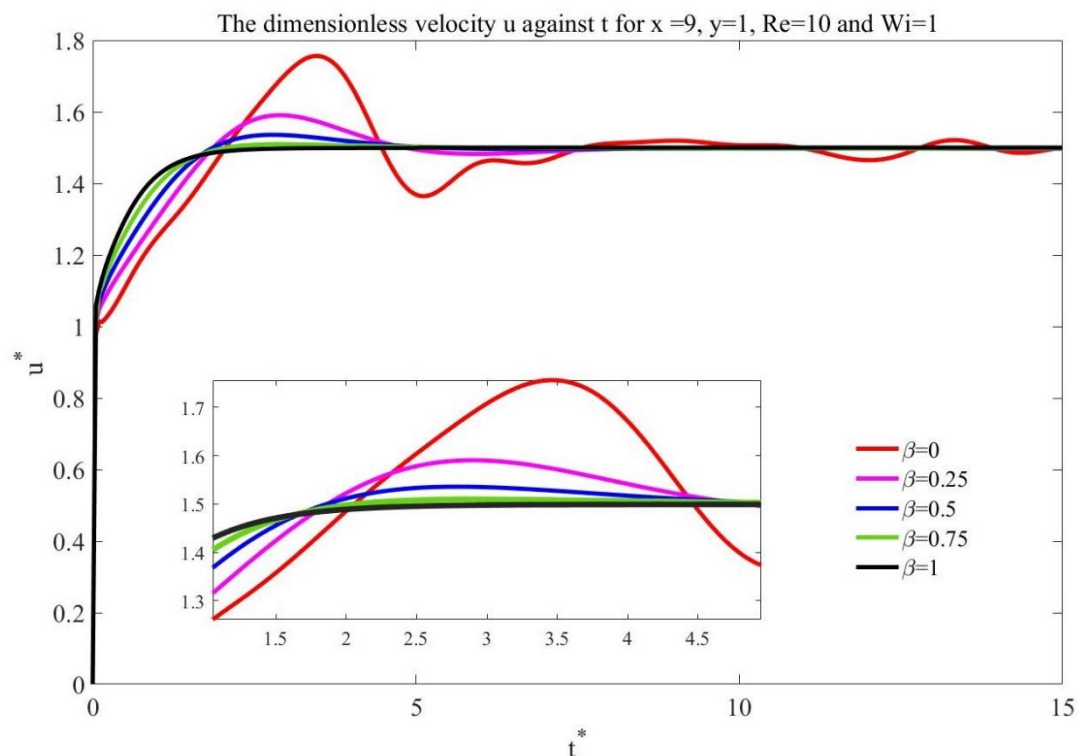


شکل ۴-۲۷. تأثیر عدد وایزنبرگ مختلف با $\beta = 0.25$ و $\text{Re} = 10$ بر میدان سرعت در ناحیه کاملاً توسعه و موقعیت $x=9$ و $y=1$

در شکل ۴-۲۷ سرعت محوری در خط مرکزی (سرعت ماکزیمم در خط تقارن) نسبت به زمان در ناحیه توسعه یافته برای اعداد وایزنبرگ صفر تا ۵، مقدار ثابت $Re=10$ و $\beta=0.2$ در موقعیت مختصاتی $x=9$ و $y=1$ مقایسه شده است. در زمان بسیار کوتاهی (به اندازه گام اول) پس از راه اندازی طول اولین اوج به وجود می آید بعد از گذشت مدت زمانی جریان ثابت (حالت دائم) می شود. طول اولین اوج به مقدار عدد وایزنبرگ بستگی دارد که با افزایش عدد وایزنبرگ طول اولین اوج افزایش می یابد. برای عدد وایزنبرگ ۱ در زمان ۲ تا ۶ رخ می دهد. معادلات جریان در ناحیه توسعه یافته طبق رابطه (۴-۶) از لحاظ ریاضی به شکل هذلولوی و از نظر فیزیکی دارای ماهیت نفوذ می باشد. شروع امواج برشی از مرز دیوار در زمان صفر و به سمت خط مرکزی منتشر می شوند. امواج برشی باعث حرکت نوسانی میدان سرعت می شود. با افزایش سرعت انتشار موج برشی طول موج میدان سرعت کاهش می یابد. بنابراین با افزایش عدد وایزنبرگ سبب کاهش سرعت انتشار امواج برشی، در نتیجه مطابق شکل ۴-۲۷ طول موج میدان سرعت افزایش می یابد. در عدد وایزنبرگ صفر (حالت نیوتنی) به دلیل عدم وجود نیروی الاستیک در میدان سرعت هیچ نوسانی ایجاد نمی شود.

۴-۶-۳ تأثیر تغییرات نسبت لزجت بر میدان سرعت

آخرین حالتی که مورد بررسی قرار می گیرد، تأثیر تغییرات نسبت لزجت بین صفر تا یک روی جریان صورت می گیرد. بدین منظور مجدداً میدان سرعت جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی در ناحیه توسعه یافته در موقعیت مختصاتی $x=9$ و $y=1$ برای مقدار ثابت $Re=10$ و $Wi=1$ مقایسه می شود و شکل ۴-۲۸ حاصل می شود. این شکل نشان می دهد که با افزایش نسبت لزجت سبب تضعیف نقطه اوج و عاری از نوسانات می باشد. بنابراین با کاهش نسبت لزجت باعث زیاد شدن سرعت انتشار امواج برشی و کاهش انتشار امواج پخش می شود. در نتیجه با کاهش نسبت لزجت اوج موج و تعداد نوسانات میدان سرعت افزایش می یابد. مطابق شکل ۴-۲۸ در نسبت لزجت صفر عاری از امواج پخش و دارای سرعت انتشار موج برشی زیادی است بنابراین دارای نوسانات زیاد و اوج موج بلندتر می باشد. در نسبت لزجت یک (سیال نیوتنی) فاقد امواج برشی در جریان است، به همین دلیل هیچ نوسانی در میدان سرعت دیده نمی شود. سرعت انتشار امواج پخش سبب می شوند که زمان رسیدن جریان به حالت ثابت (حالت دائم) طولانی تر شود. برای افزایش سرعت انتشار امواج پخش کافی است عدد رینولدز را کاهش داد.



شکل ۴-۲۸. تأثیر عدد وایزنبرگ مختلف با $Re=10$ و $Wi=1$ بر میدان سرعت در ناحیه کاملاً توسعه و موقعیت $x=9$ و $y=1$

تمام شکل‌های این بخش با خطای محاسباتی 10^{-6} رسم شده است و در ادامه به بررسی تأثیر روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش بر نرخ همگرایی در جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت برای اعداد رینولدز، اعداد وایزنبرگ و نسبت‌های لزجت مختلف پرداخته می‌شود.

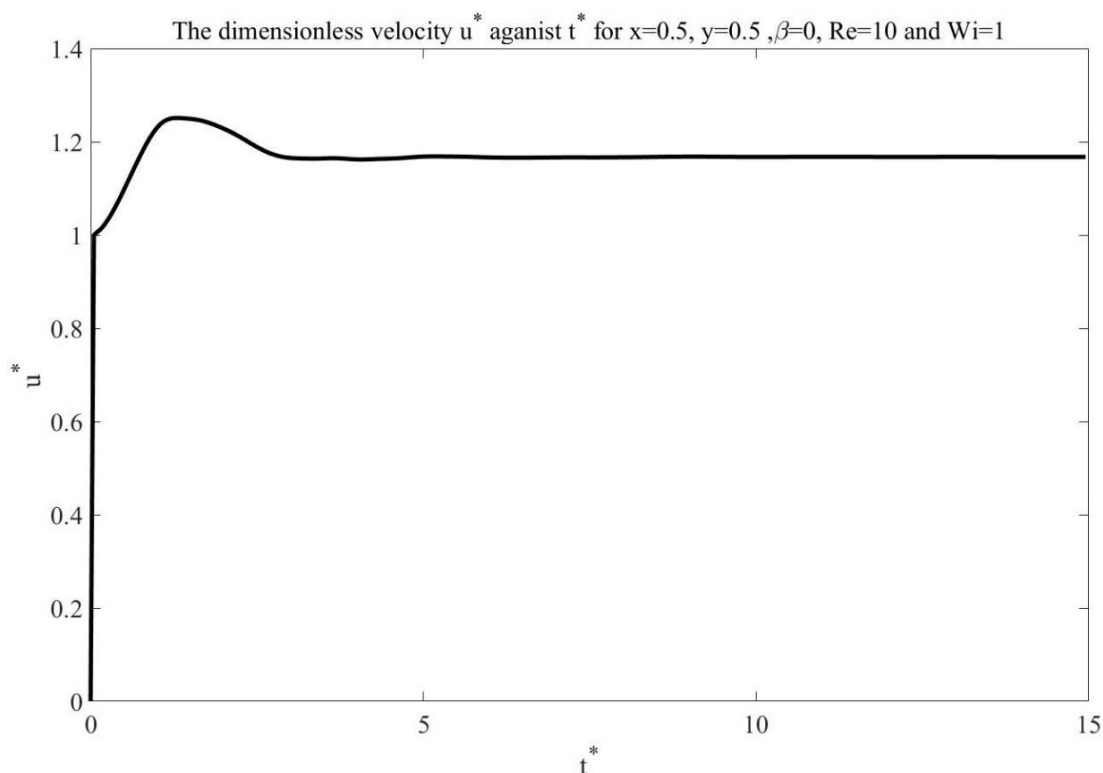
۷-۴ بررسی نرخ همگرایی روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر

تنش

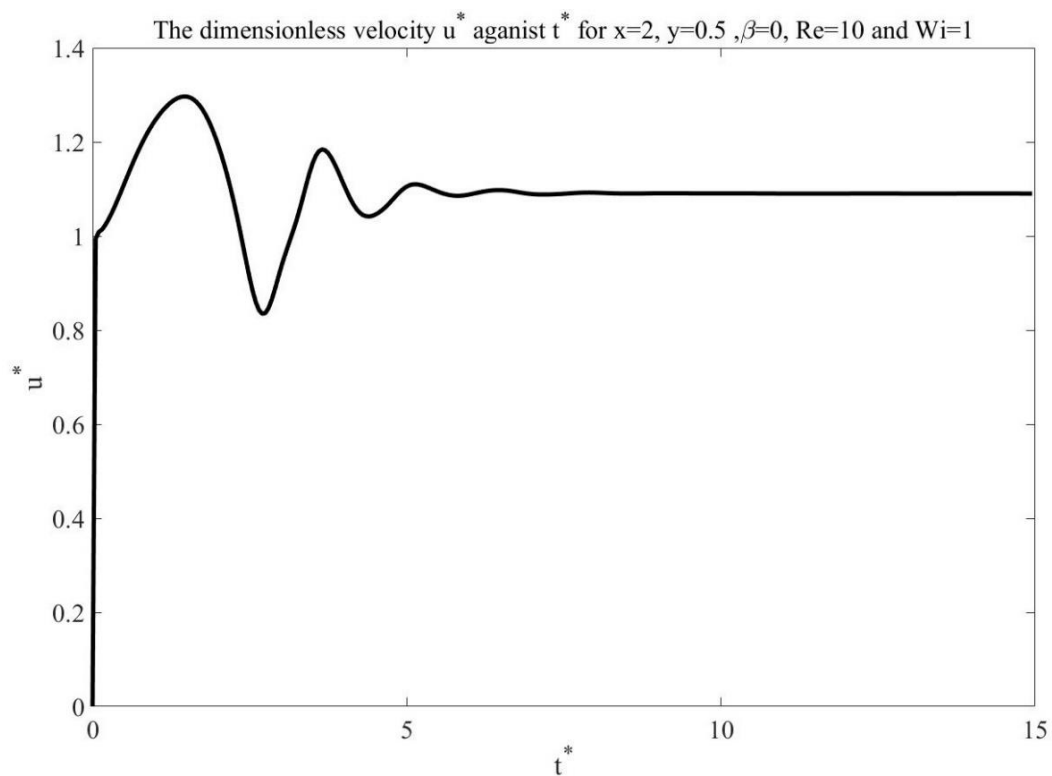
در این پژوهش با توجه به معادلات حاکم بر جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک عبوری بین دو صفحه موازی ثابت با شرایط مرزی و اولیه بیان شده در فصل قبل به بررسی تأثیر روش محلی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی برای عدد رینولدز، عدد وایزنبرگ و نسبت لزجت متفاوت پرداخته می‌شود که شامل ۱۳ حالت است که به بررسی هر یک از این حالت‌ها پرداخته می‌شود. همچنین در محاسبات عددی برای روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش، سرعت و فشار از توان ۱ تا ۵ استفاده شده است و به دلیل شلوغی شکل، بهینه‌ترین توان را در شکل نشان داده شده است.

۴-۷-۱ حالت $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$

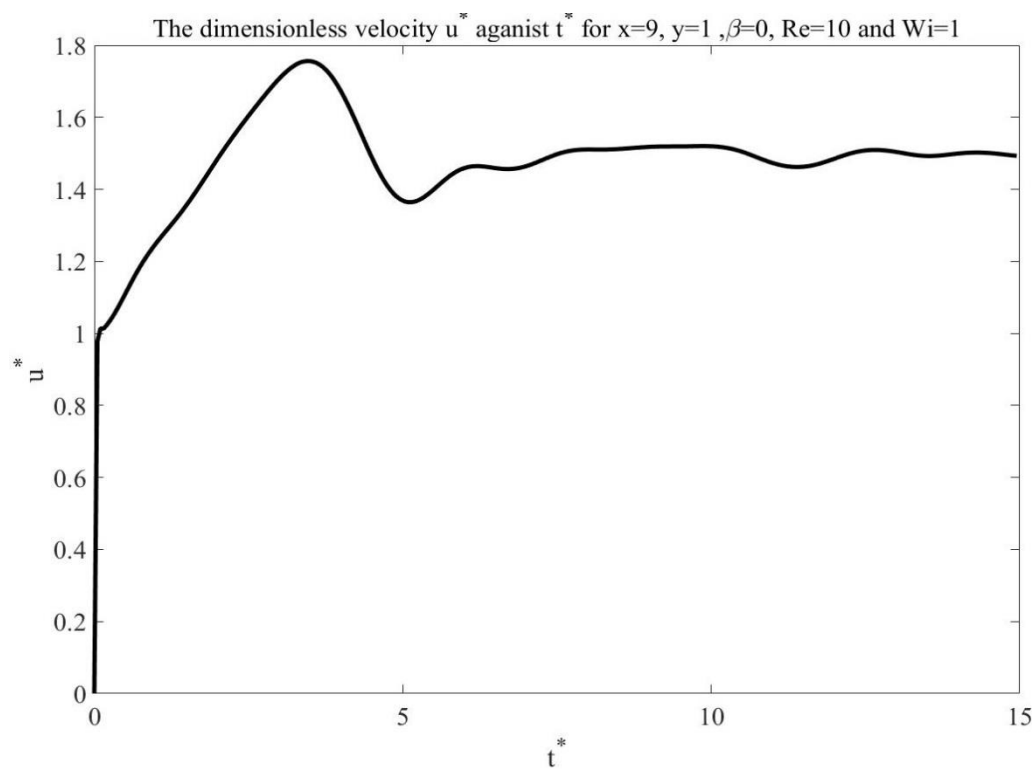
ابتدا تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$ ، $y=0.5$ ، $x=2$ ، $y=0.5$ ، $x=9$ و $y=1$ به ترتیب در شکل‌های ۴-۲۹، ۴-۳۰ و ۴-۳۱ نشان داده شده است. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش‌های پیش‌شرط توانی حسگر سرعت (LPMSV)، پیش‌شرط توانی حسگر فشار (LPMSP)، پیش‌شرط استاندارد (SPM) و تراکم‌پذیر استاندارد (SAC) در عدد رینولدز ۱۰، عدد وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت صفر در شکل ۴-۳۲ آمده است. با توجه به شکل ۴-۳۲ در روش SPM2 و LPMSP سرعت همگرایی خیلی کند صورت می‌گیرد. در این حالت سرعت همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMST) افزایش قابل‌ملاحظه و کاهش تعداد تکرار زیادی نسبت به روش‌های دیگر دارد. نوسانات ایجاد شده در شکل ۴-۳۲ ناشی از شبکه جابجا شده و الگوریتم حل مورد استفاده است زیرا در این شبکه نیازی به اعمال شرط مرزی فشار نیست. فشار در این الگوریتم با استفاده از معادله پیوستگی اصلاح می‌شود به همین دلیل دارای نوساناتی می‌باشد. این نوسانات با افزایش نرخ همگرایی، کاهش می‌یابد. در روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش کمترین نوسانات در نرخ همگرایی دارد.



شکل ۴-۲۹. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ بر حسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$.

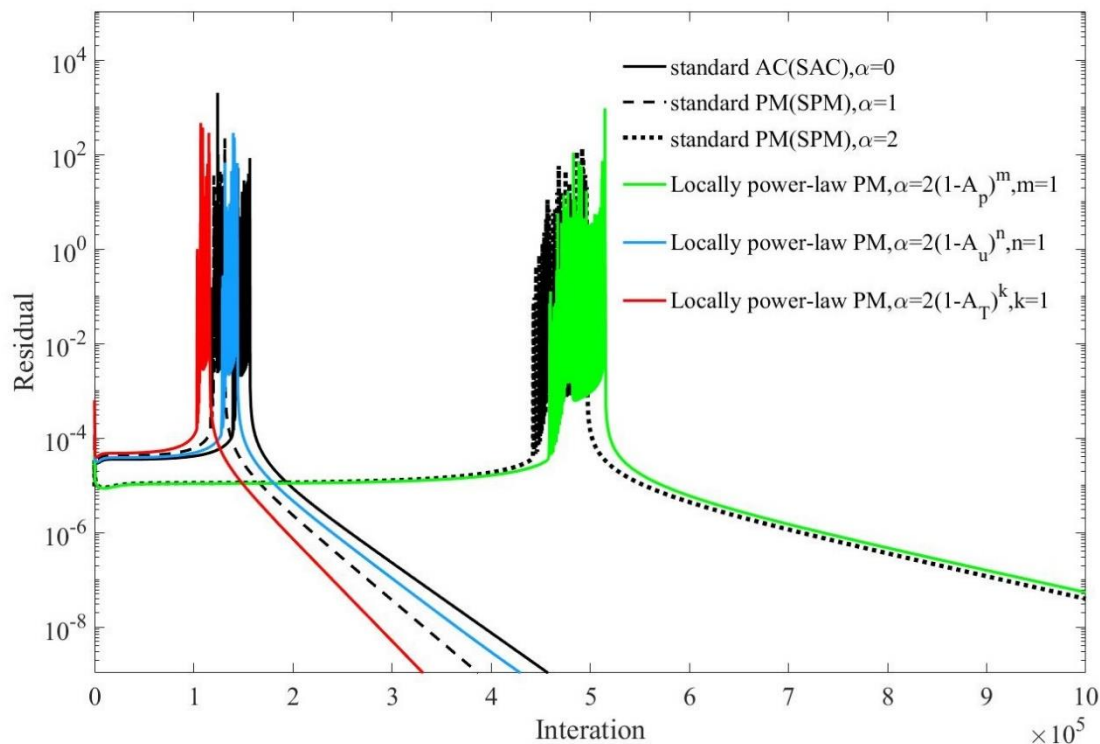


شکل ۴-۳۰. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0$.



شکل ۴-۳۱. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0$.

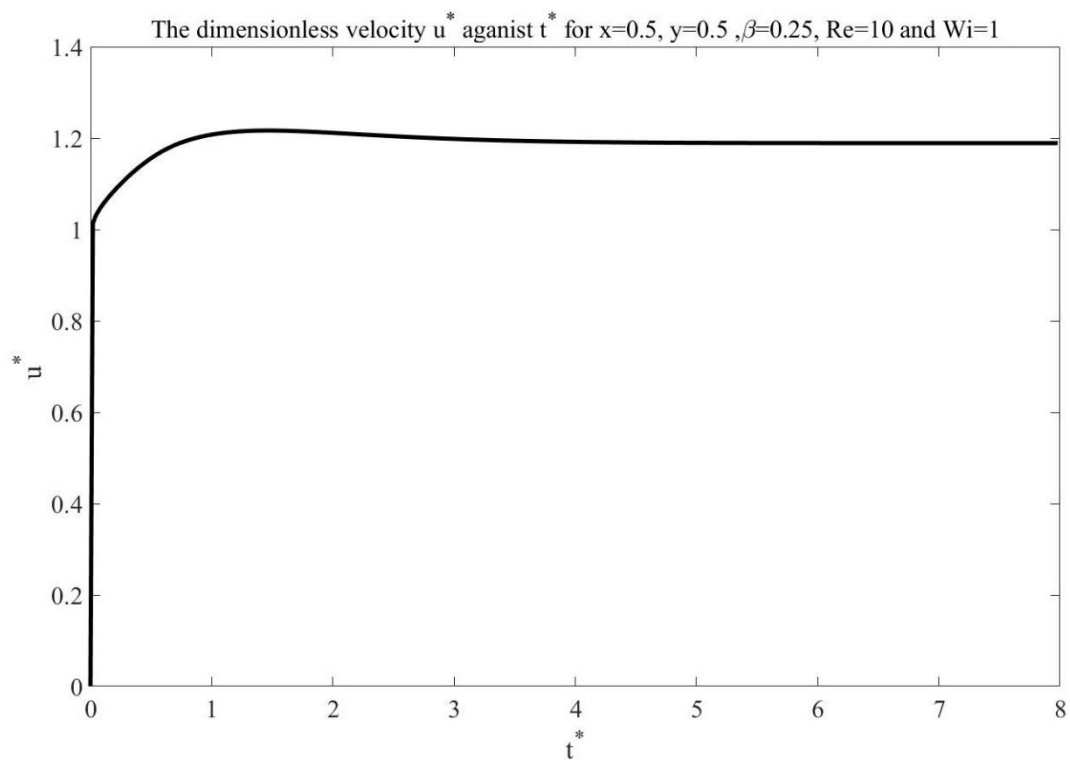
Effect of the locally power-law PM(n,m,k) on accuracy and convergence rate for $\beta=0$, $Re=10$ and $Wi=1$



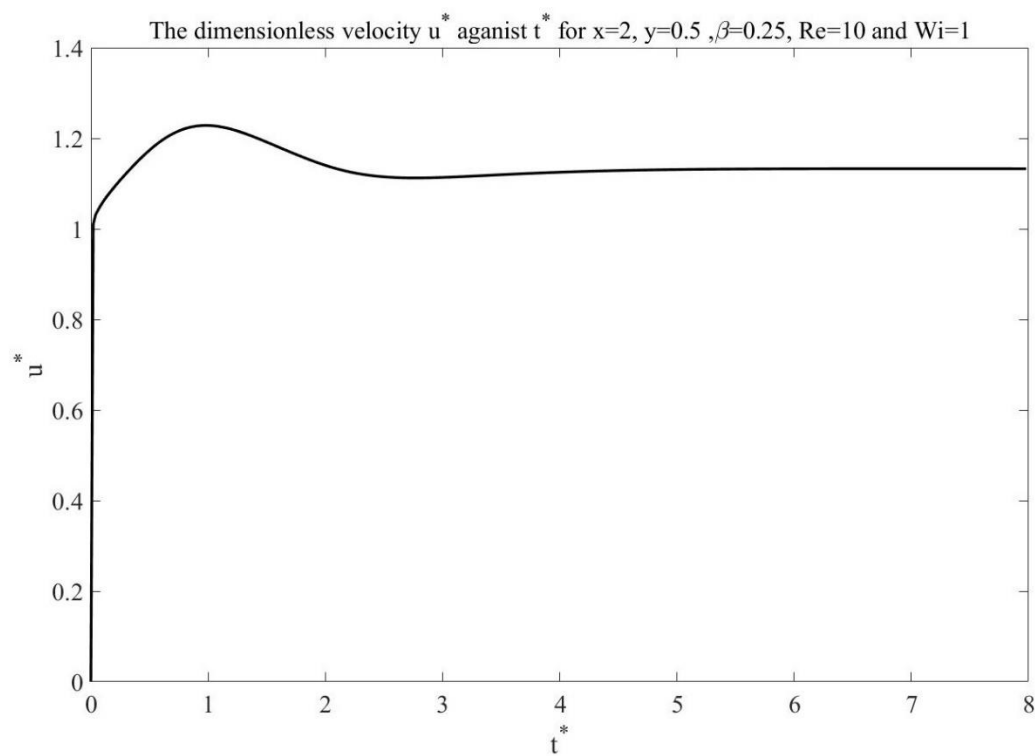
شکل ۴-۳. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$.

۴-۷-۲ حالت $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$

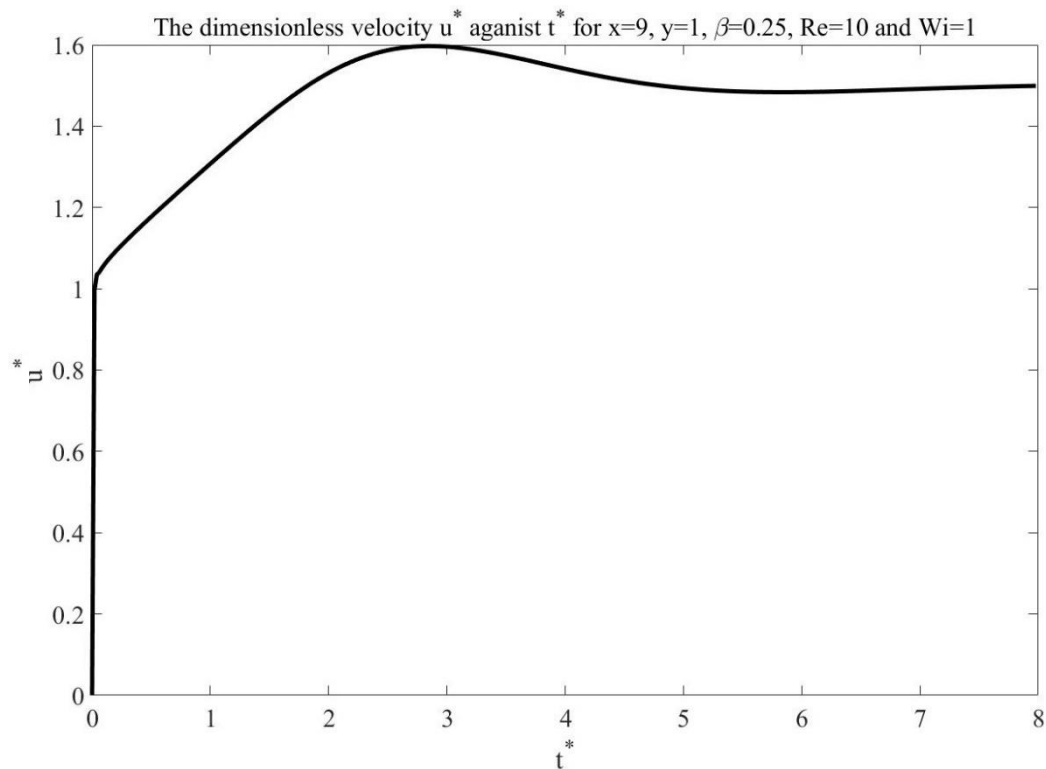
در این حالت تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$ ، $y=0.5$ ، $x=2$ ، $y=0.5$ و $x=9$ ، $y=1$ به ترتیب در شکل‌های ۴-۳۳، ۴-۳۴ و ۴-۳۵ نشان داده شده است. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش پیش‌شرط توانی حسگر سرعت (LPMSV)، پیش‌شرط توانی حسگر فشار (LPMSP)، روش پیش‌شرط استاندارد (SPM) و روش تراکم‌پذیر استاندارد (SAC) در عدد رینولدز ۱۰، عدد وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت ۰/۲۵ در شکل ۴-۳۶ آمده است. با توجه به شکل ۴-۳۶، در روش LPMSP و SAC سرعت همگرایی پایینی دارند. در این حالت نیز سرعت همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) نسبت به روش‌های دیگر بیشتر است.



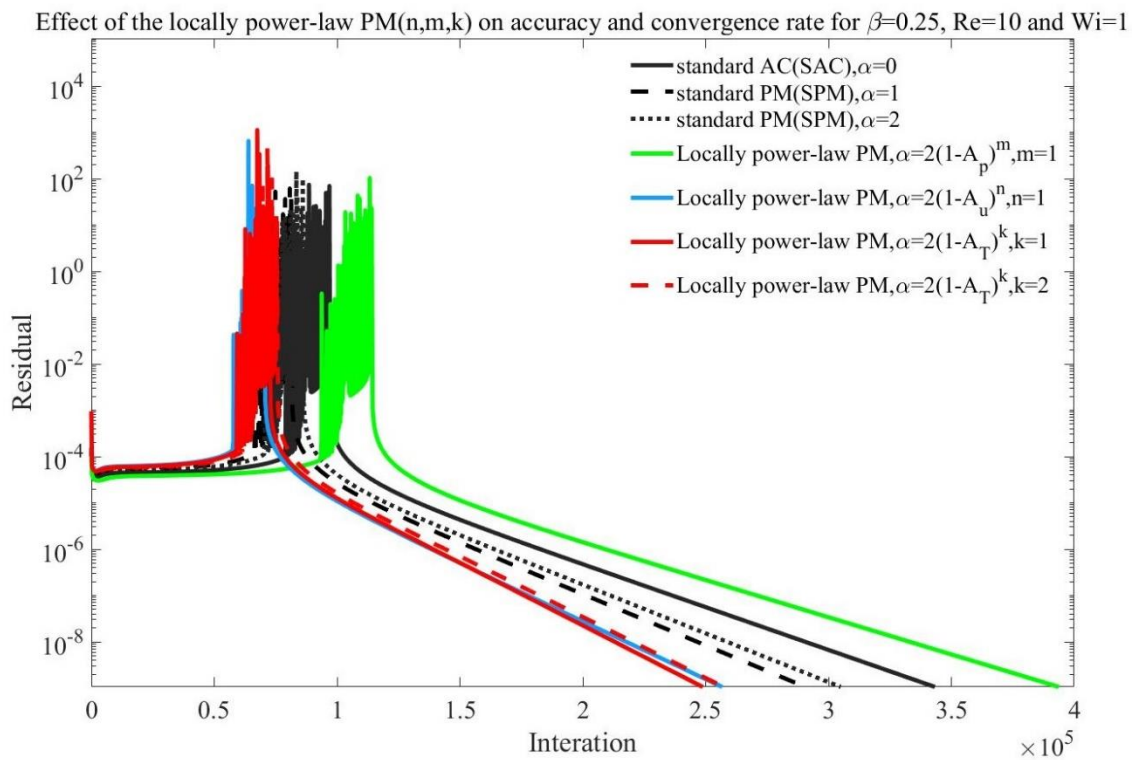
شکل ۳۳-۴. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0.25$.



شکل ۳۴-۴. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0.25$.



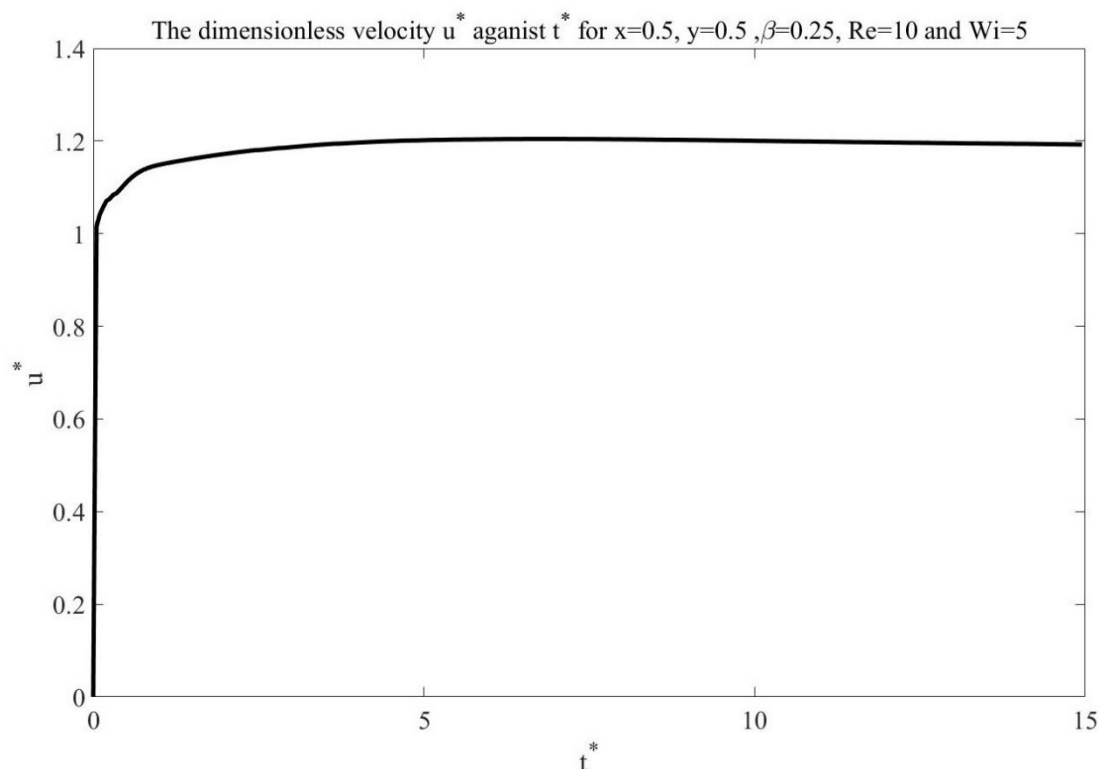
شکل ۴-۳۵. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ بر حسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$.



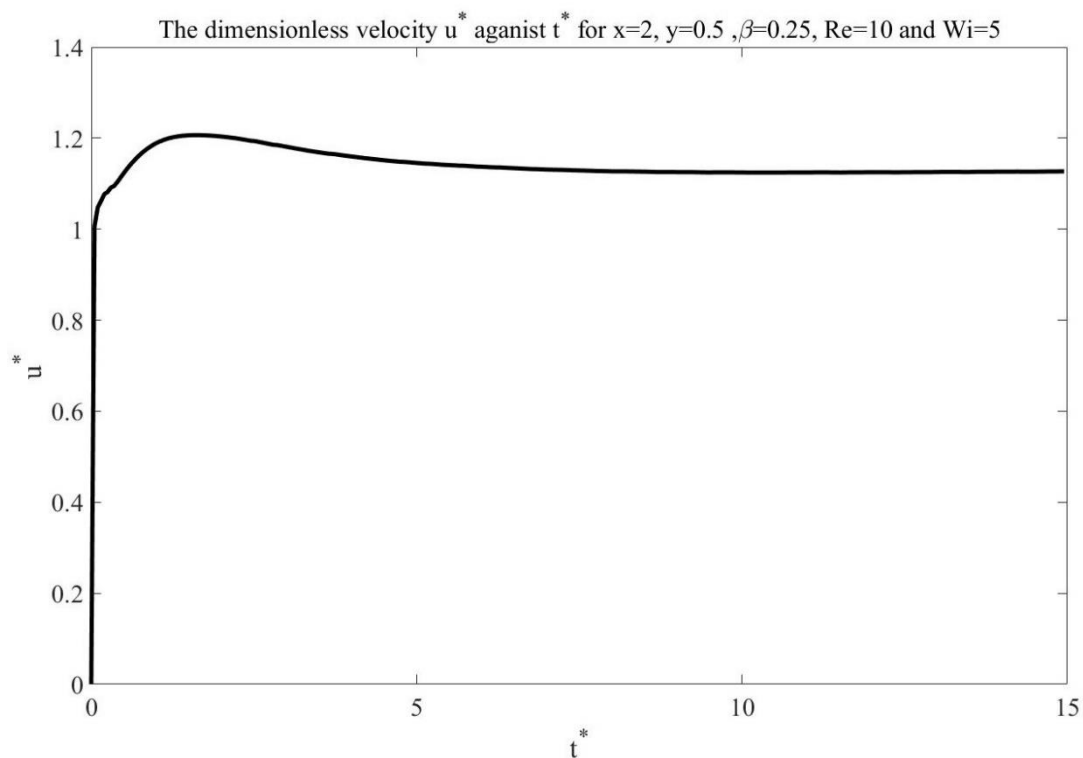
شکل ۴-۳۶. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$.

۳-۷-۴ حالت $\beta = 0.25$ و $Wi=5$, $Re=10$

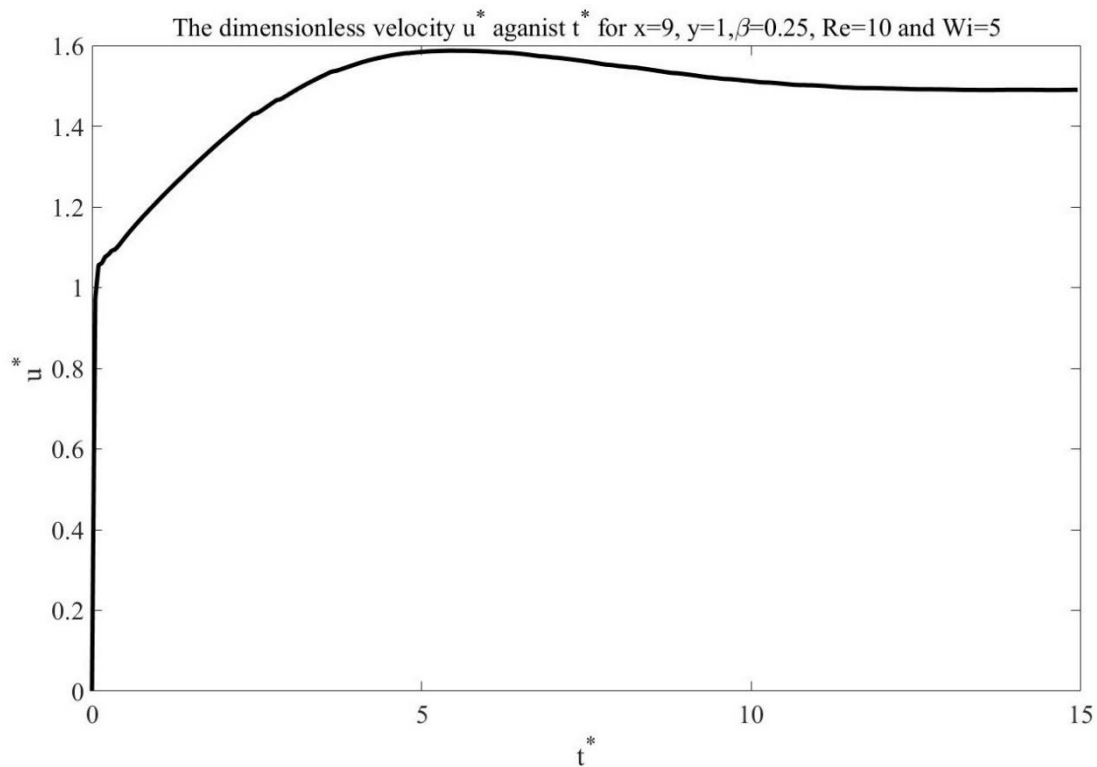
در این مورد نیز تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$, $y=0.5$, $x=2$, $y=0.5$ و $x=9$, $y=1$ به ترتیب در شکل‌های ۳۷-۴، ۳۸-۴ و ۳۹-۴ نشان داده می‌شود. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش‌های LPMSP، LPMSV و SPM در عدد رینولدز ۱۰، عدد وایزنبرگ ۵ و نسبت لزجت ۰/۲۵ در شکل ۴۰-۴ آمده است. با توجه به شکل ۴۰-۴، در روش SPM2 و LPMSP سرعت همگرایی آهسته‌تر می‌باشد و در روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) نسبت به روش‌های دیگر سرعت همگرایی بیشتر است. همچنین با توجه به شکل‌های ۳۶-۴ و ۴۰-۴ با افزایش عدد وایزنبرگ از ۱ به ۵ نرخ همگرایی افزایش می‌یابد و تعداد تکرار نیز کمتر می‌شود.



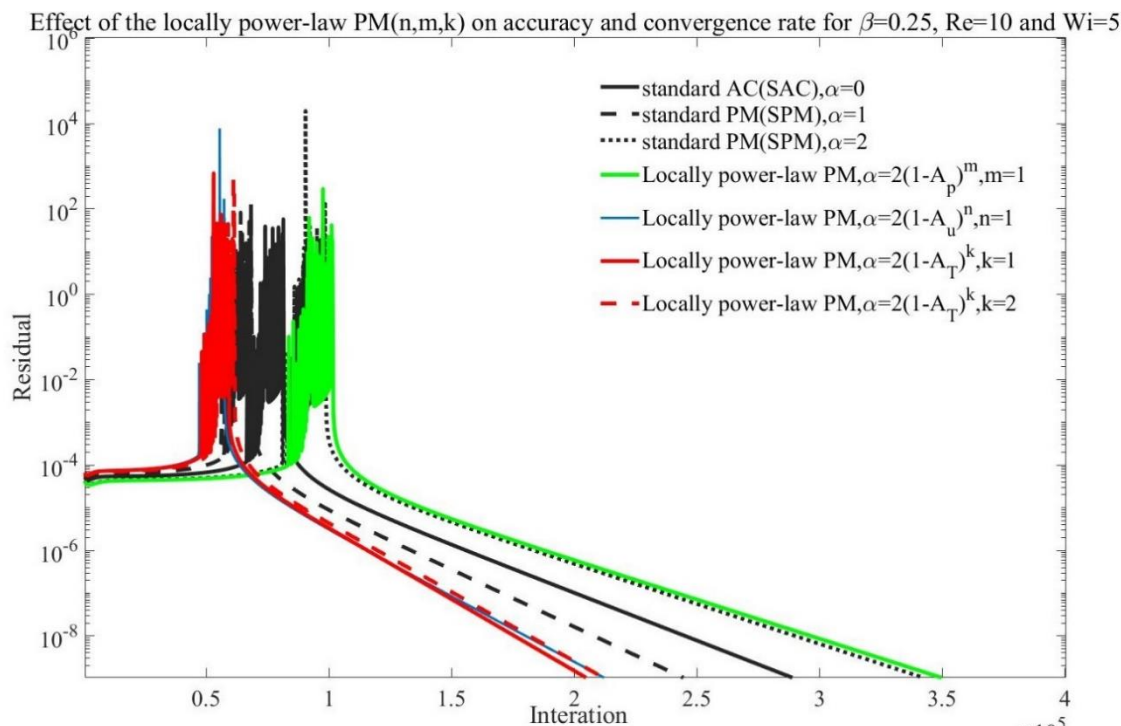
شکل ۳۷-۴. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=5$ و $\beta = 0.25$.



شکل ۳۸-۴. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=5$ و $\beta=0.25$.



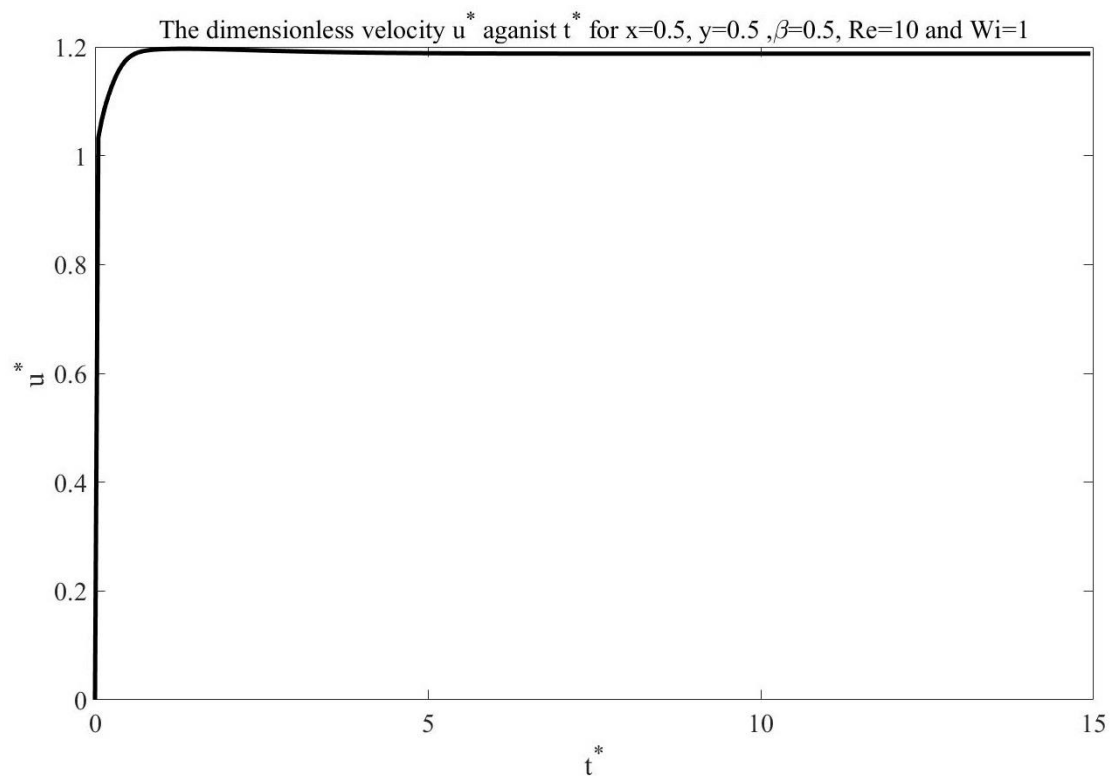
شکل ۳۹-۴. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=5$ و $\beta=0.25$.



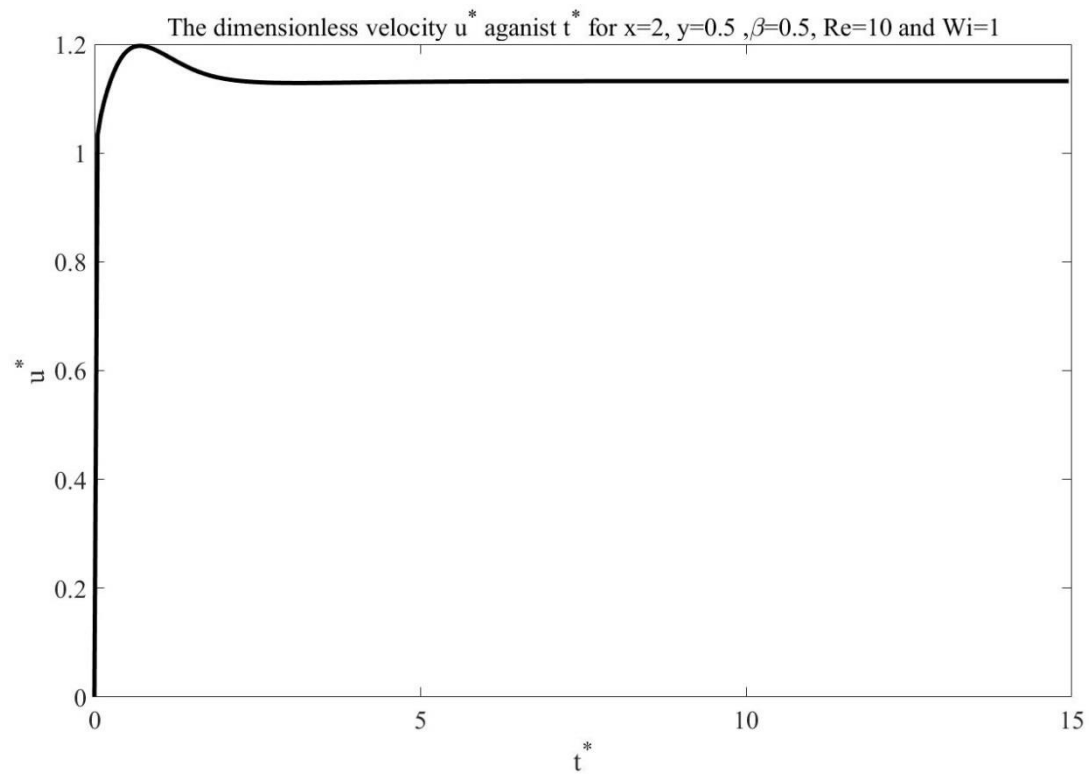
شکل ۴-۴۰. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $\beta=0.25$ و $Wi=5$.

۴-۷-۴ حالت $Re=10$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$

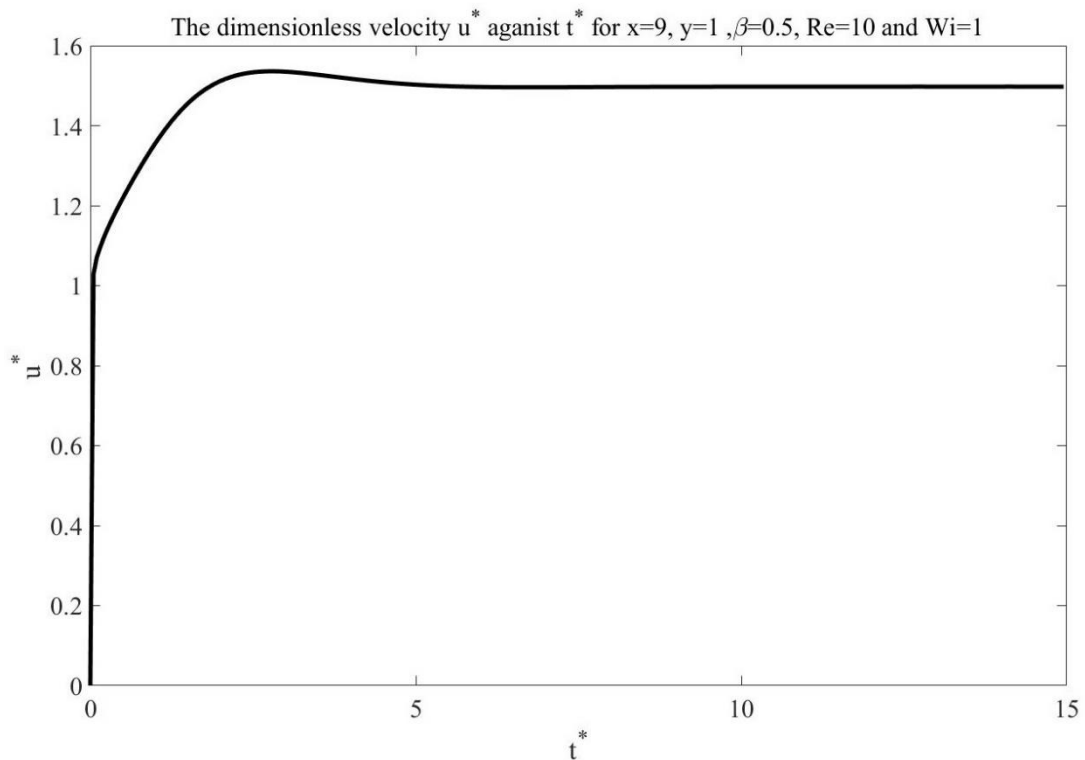
برای این مورد مانند حالت‌های قبل تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$ ، $y=0.5$ ، $x=2$ و $y=1$ ، به ترتیب در شکل‌های ۴-۴۱، ۴-۴۲ و ۴-۴۳ نشان داده می‌شوند. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش‌های LPMSP، LPMSPV و SAC در عدد رینولدز ۱۰، عدد وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت ۰/۵ در شکل ۴-۴۴ آمده است. با توجه به شکل ۴-۴۴، در روش SAC نرخ همگرایی آرام‌تر می‌باشد و در روش پیش‌شرط توانی حسگر فشار (LPMSP) نسبت به روش‌های دیگر سرعت همگرایی بیشتر است. همچنین روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) نیز دارای نرخ همگرایی زیاد نسبت به روش‌های دیگر و نسبت به روش LPMSP نرخ همگرایی ۳/۵ درصد کمتر می‌باشد.



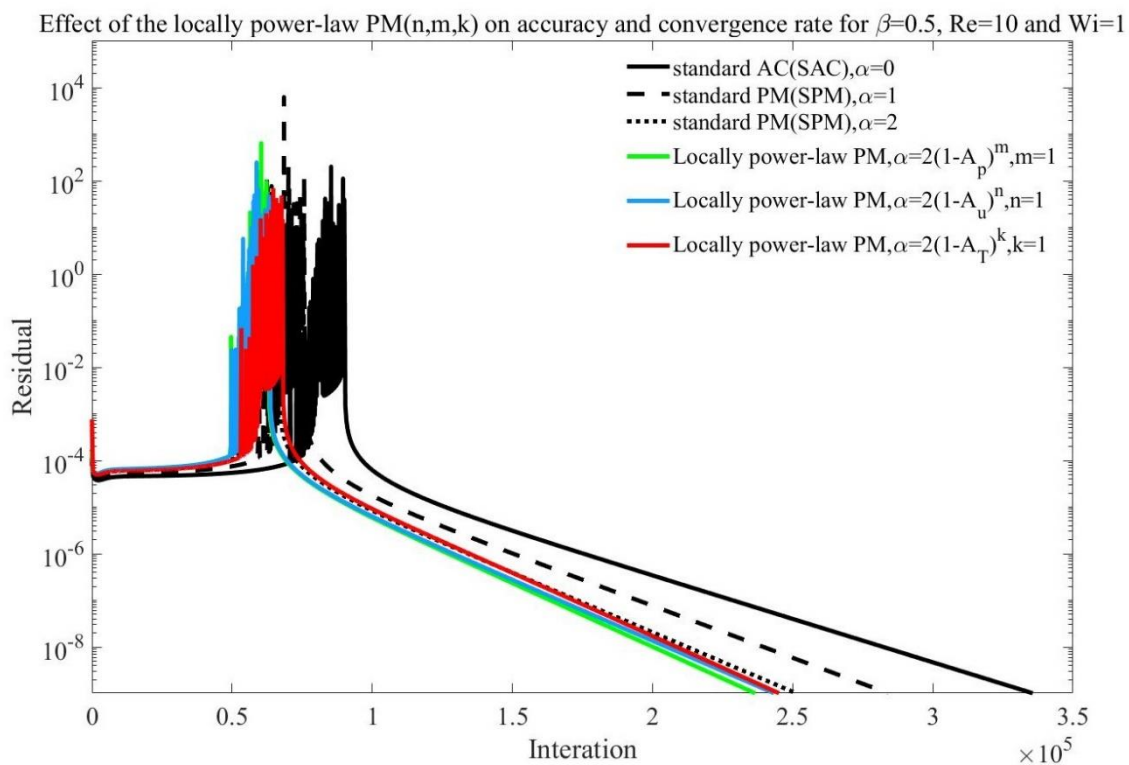
شکل ۴-۴۱. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10, Wi=1$ و $\beta=0.5$.



شکل ۴-۴۲. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10, Wi=1$ و $\beta=0.5$.



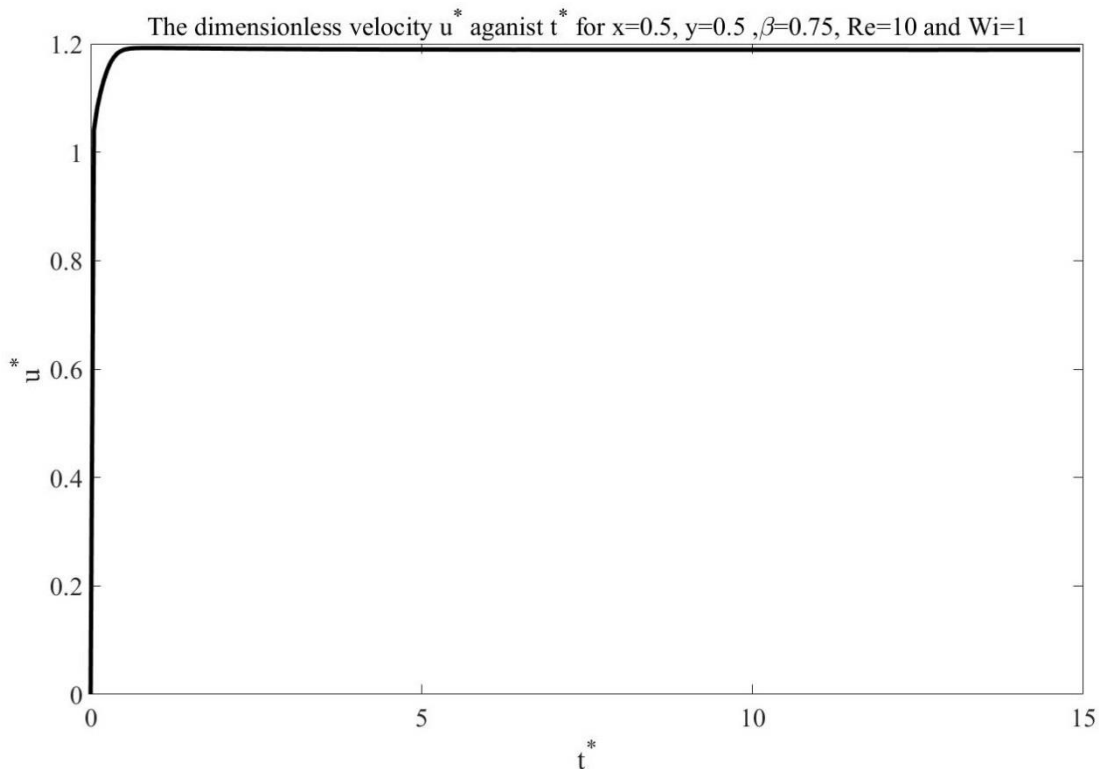
شکل ۴-۲۳. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ بر حسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0.5$.



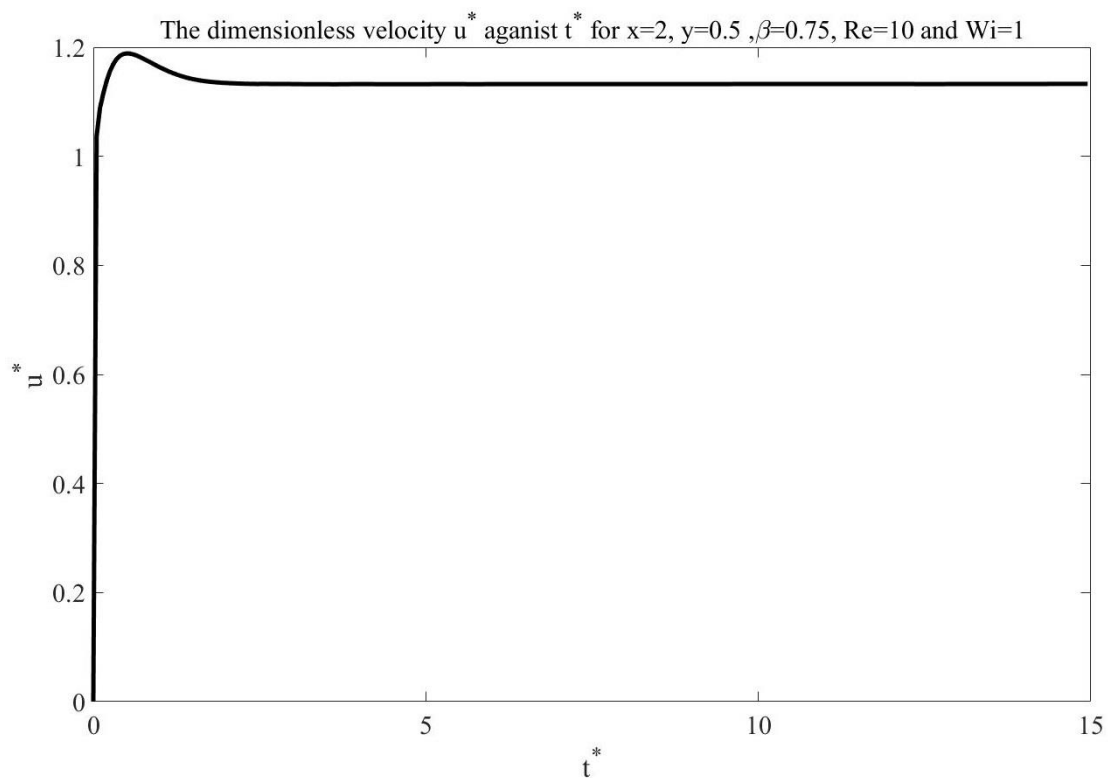
شکل ۴-۲۴. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0.5$.

۴-۷-۵ حالت $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0.75$

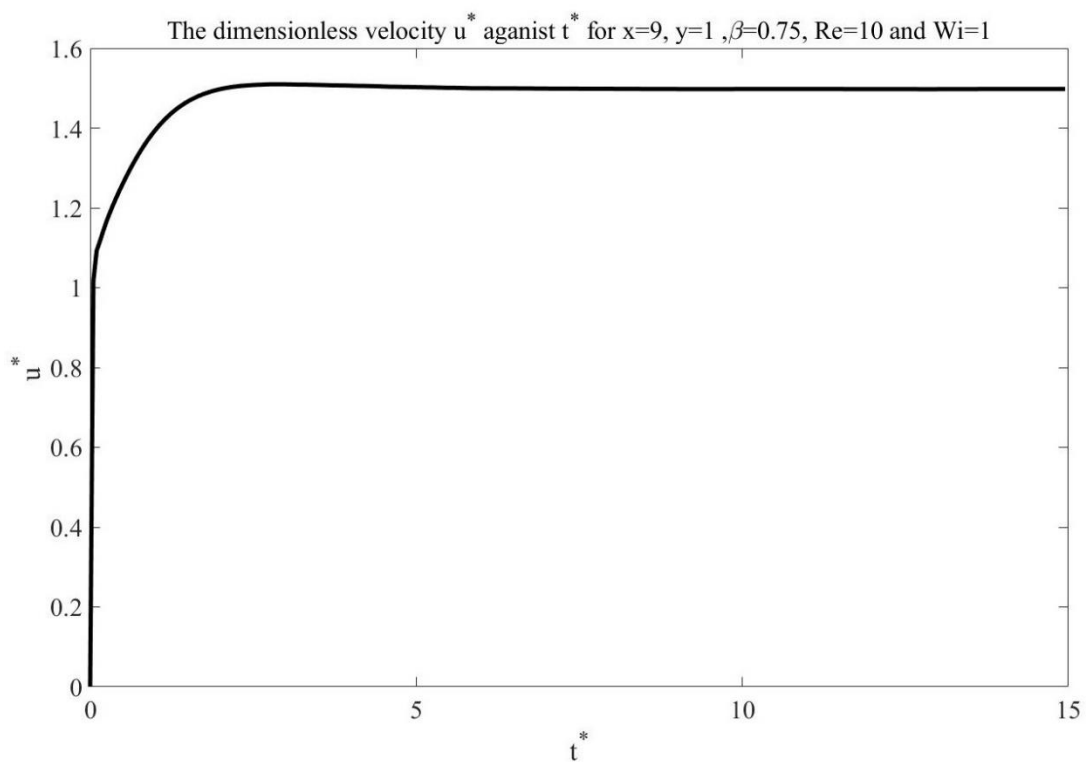
همچنین در این مورد تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$, $y=0.5$, $x=2$, به ترتیب در شکل‌های ۴-۴۵، ۴-۴۶ و ۴-۴۷ نشان می‌دهند. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش‌های LPMSP، LPMSPV و SPM در عدد رینولدز ۱۰، عدد وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت ۰/۷۵ در شکل ۴-۴۸ آمده است. با توجه به شکل ۴-۴۸، در روش SAC و SPM1 سرعت همگرایی آهسته‌تر است و در روش پیش‌شرط توانی حسگر فشار (LPMSP) نسبت به روش‌های دیگر سرعت همگرایی بیشتر می‌باشد. همچنین روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) نیز دارای نرخ همگرایی کمتری نسبت به روش‌های دیگر است.



شکل ۴-۴۵. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$, $Wi=1$ و $\beta=0.75$.

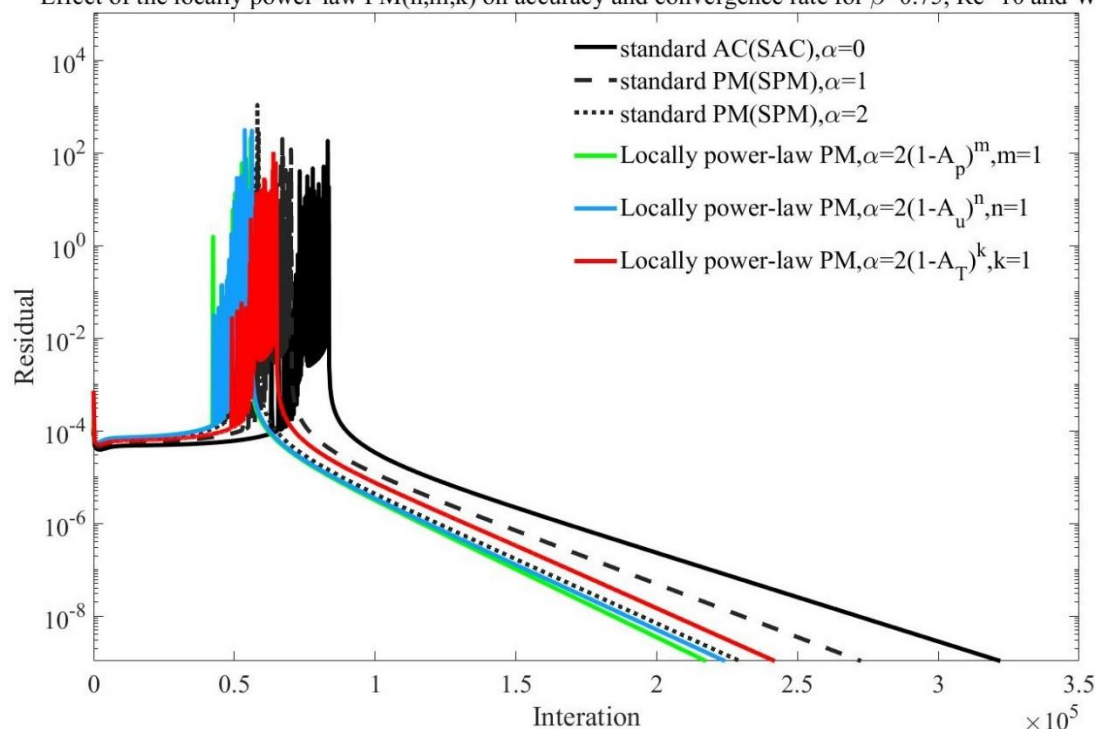


شکل ۴-۴۶. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10, Wi=1$ و $\beta=0.75$.



شکل ۴-۴۷. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10, Wi=1$ و $\beta=0.75$.

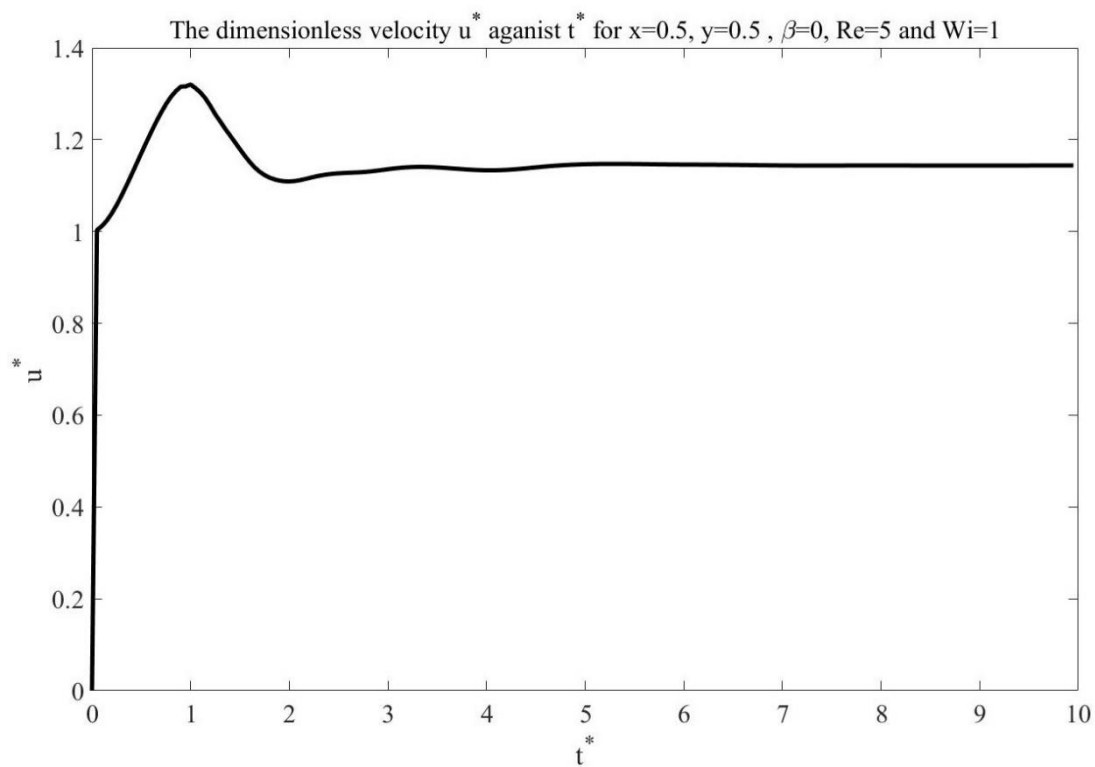
Effect of the locally power-law PM(n,m,k) on accuracy and convergence rate for $\beta=0.75$, $Re=10$ and $Wi=1$



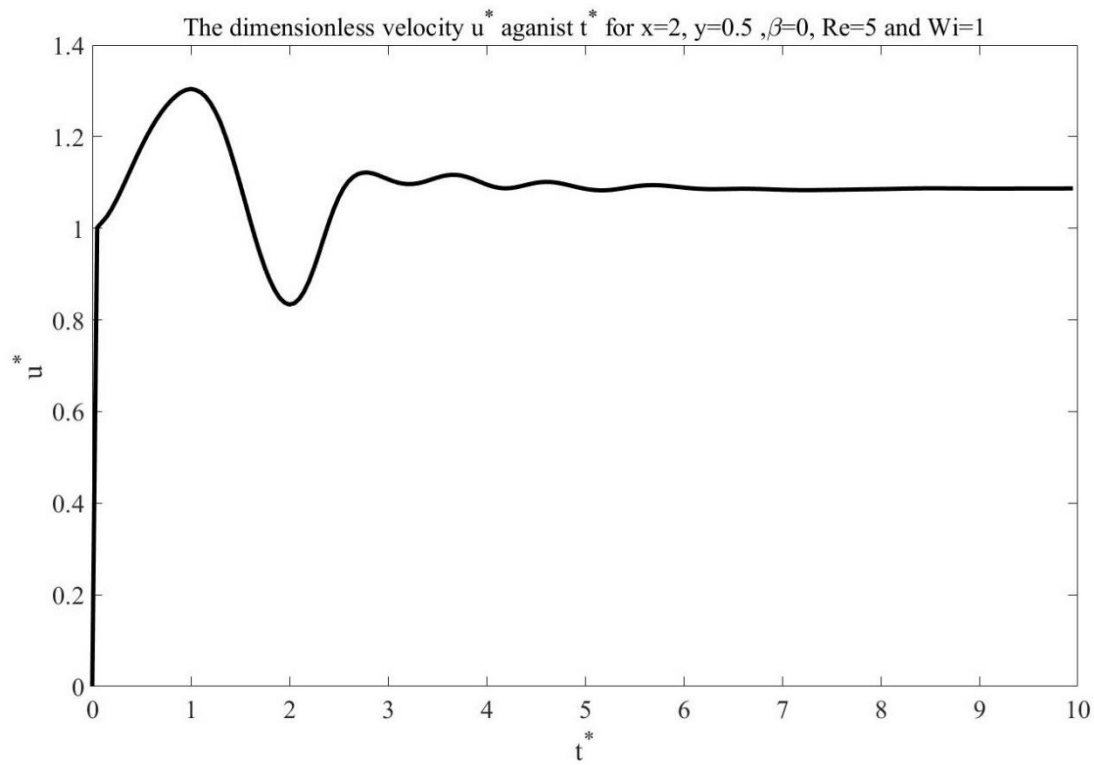
شکل ۴-۴۸. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=10$ ، $\beta=0.75$ و $Wi=1$.

۴-۷-۶ حالت $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$

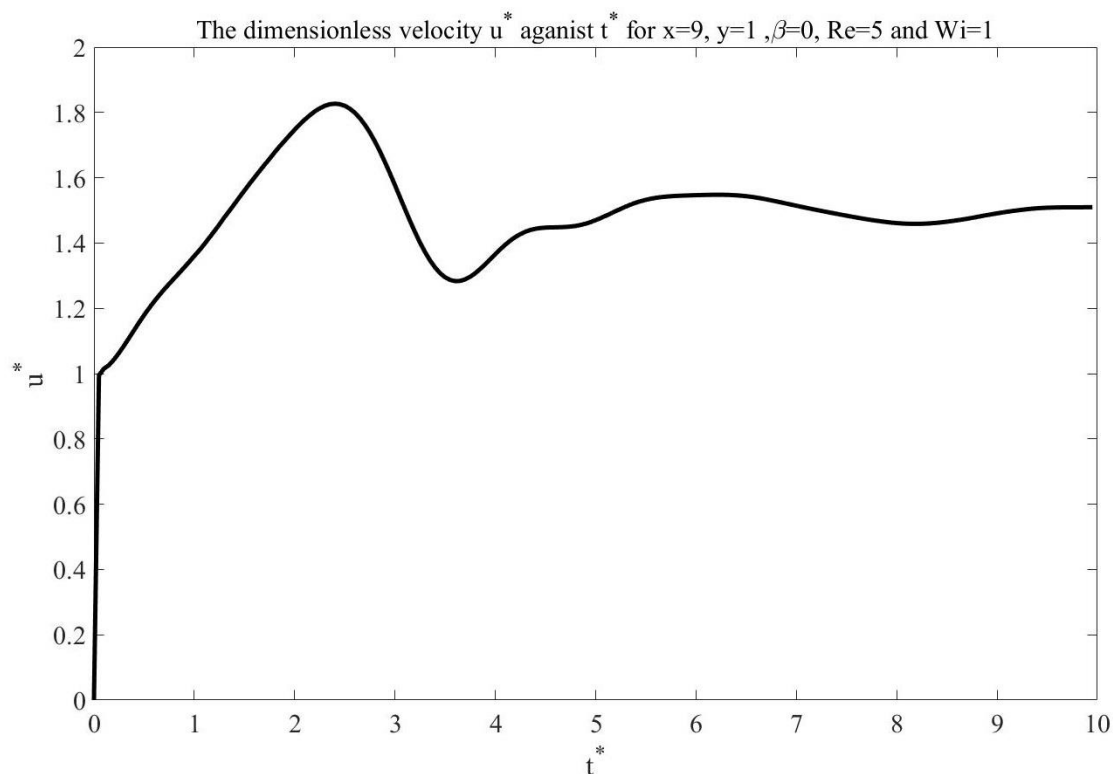
مانند قبل ابتدا تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$ ، $y=0.5$ ، $x=2$ ، $y=0.5$ و $x=9$ ، $y=1$ به ترتیب در شکل‌های ۴-۴۹، ۴-۵۰ و ۴-۵۱ نشان داده شده‌اند. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش‌های پیش‌شرط توانی حسگر سرعت (LPMSSV)، پیش‌شرط توانی حسگر فشار (LPMSP)، پیش‌شرط استاندارد (SPM) و تراکم‌پذیر استاندارد (SAC) در عدد رینولدز ۵، عدد وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت صفر در شکل ۴-۵۲ آمده است. با توجه به شکل ۴-۵۲، در روش SPM2 و LPMSP نرخ همگرایی بسیار کند صورت می‌گیرد. در این حالت سرعت همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) دارای افزایش و کاهش تعداد تکرار فراوان نسبت به روش‌های دیگر دارد.



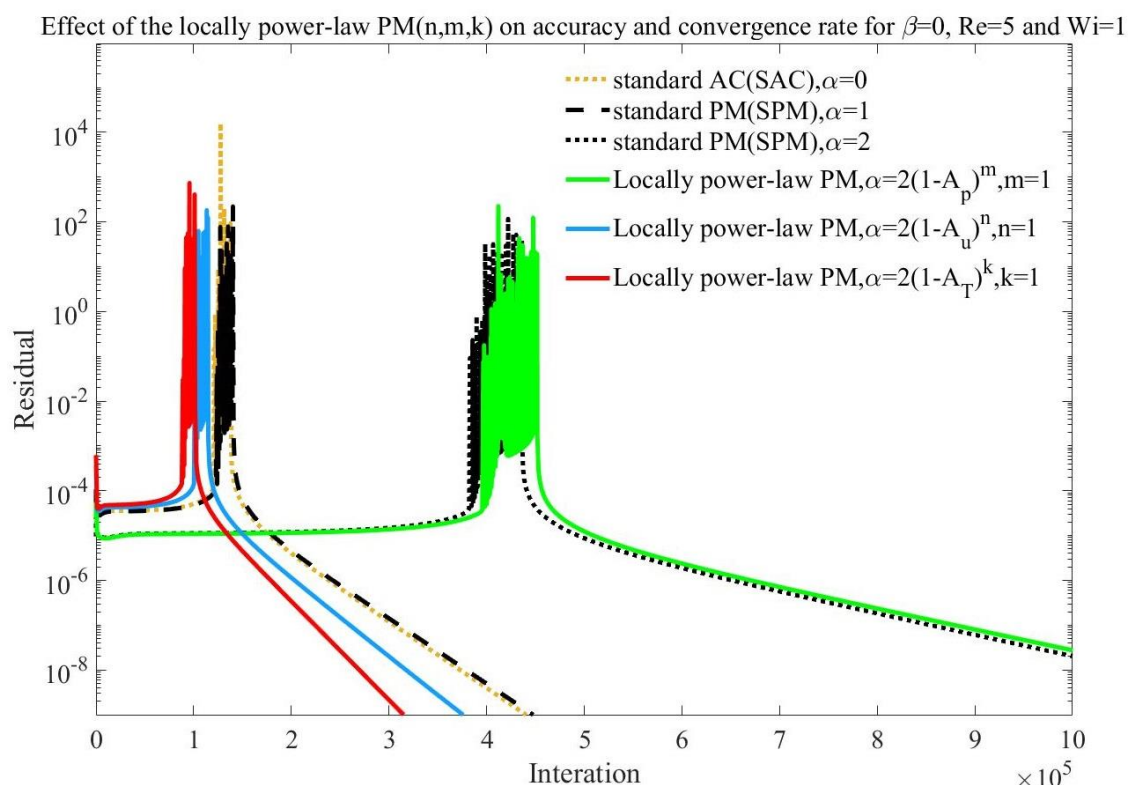
شکل ۴-۴۹. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$, $Wi=1$ و $\beta=0$.



شکل ۴-۵۰. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$, $Wi=1$ و $\beta=0$.



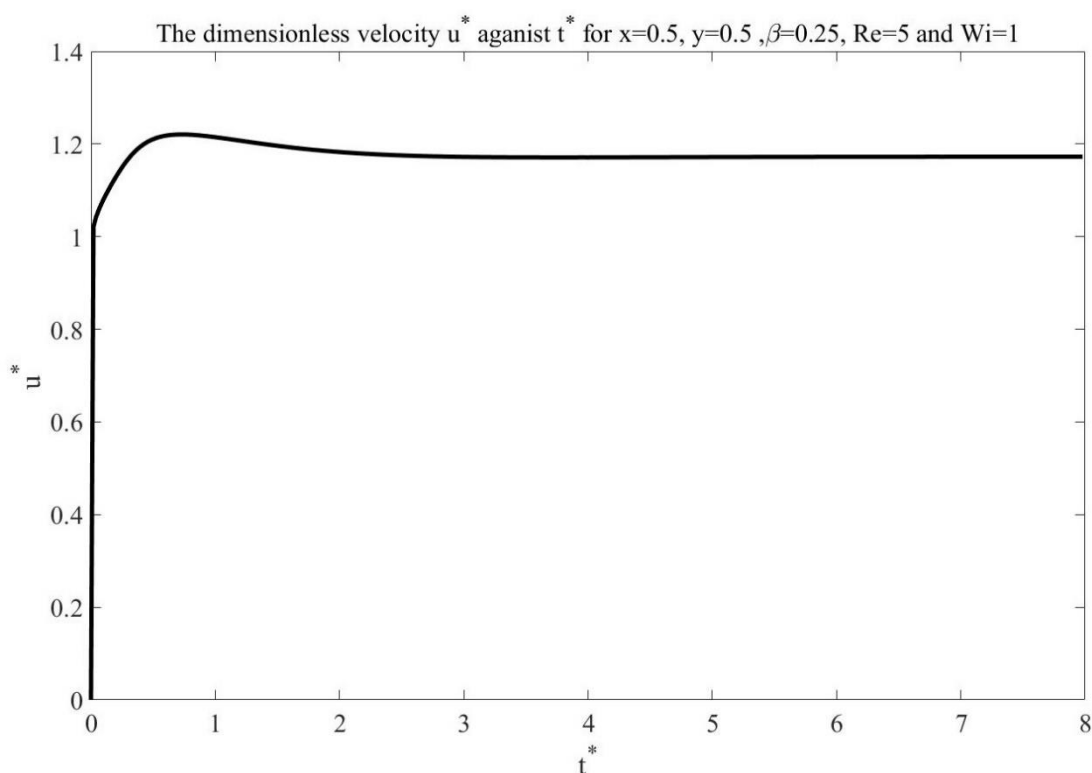
شکل ۴-۵۱. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $\beta=0$ و $Wi=1$, $Re=5$.



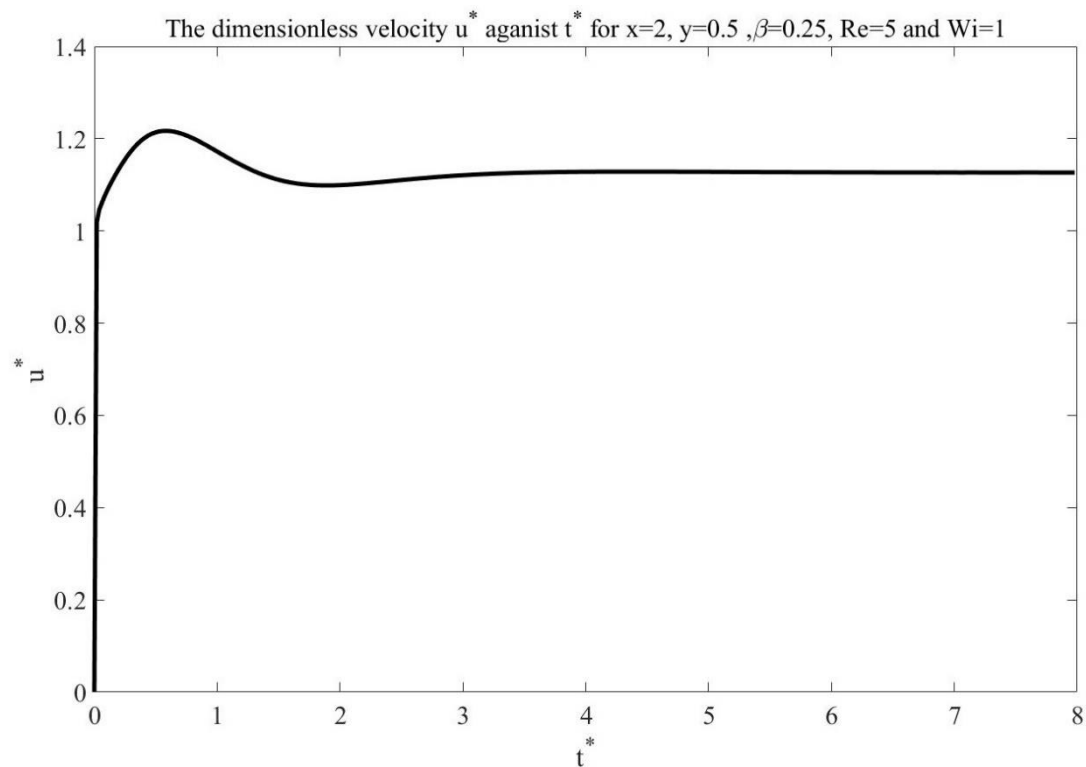
شکل ۴-۵۲. تأثیر روش‌های مختلف پیش شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$, $\beta=0$ و $Wi=1$.

۷-۷-۴ حالت $\beta = 0.25$ و $Wi=1$, $Re=5$

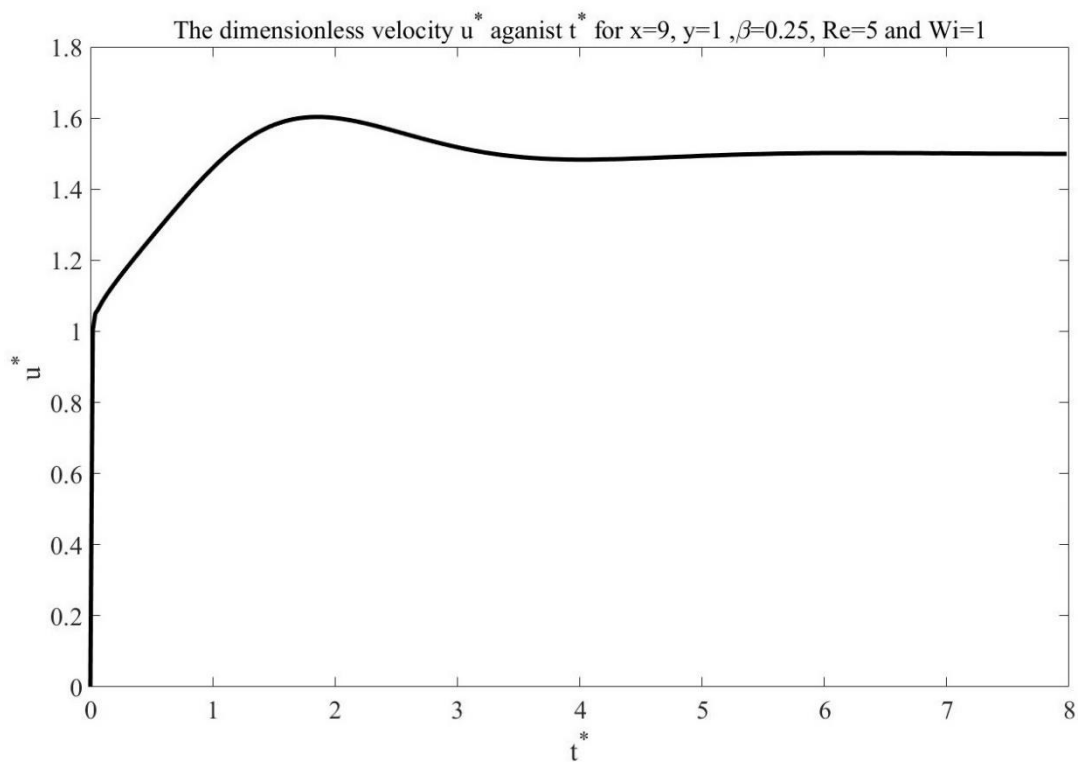
در این مورد نیز تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$, $y=0.5$, $x=2$, $y=0.5$ و $x=9$, $y=1$ به ترتیب در شکل‌های ۴-۵۳، ۴-۵۴ و ۴-۵۵ نشان داده می‌شود. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش پیش‌شرط توانی حسگر سرعت (LPMSV)، روش پیش‌شرط توانی حسگر فشار (LPMSP)، روش پیش‌شرط استاندارد (SPM) و روش تراکم‌پذیر استاندارد (SAC) در عدد رینولدز ۵، عدد وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت ۰/۲۵ در شکل ۴-۵۶ آمده است. با توجه به شکل ۴-۵۶، در روش LPMSP، SPM و SAC نرخ همگرایی بسیار آهسته دارند. در این حالت سرعت همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) نسبت به روش‌های دیگر افزایش قابل چشمگیری دارد.



شکل ۴-۵۳. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$, $Wi=1$ و $\beta = 0.25$.

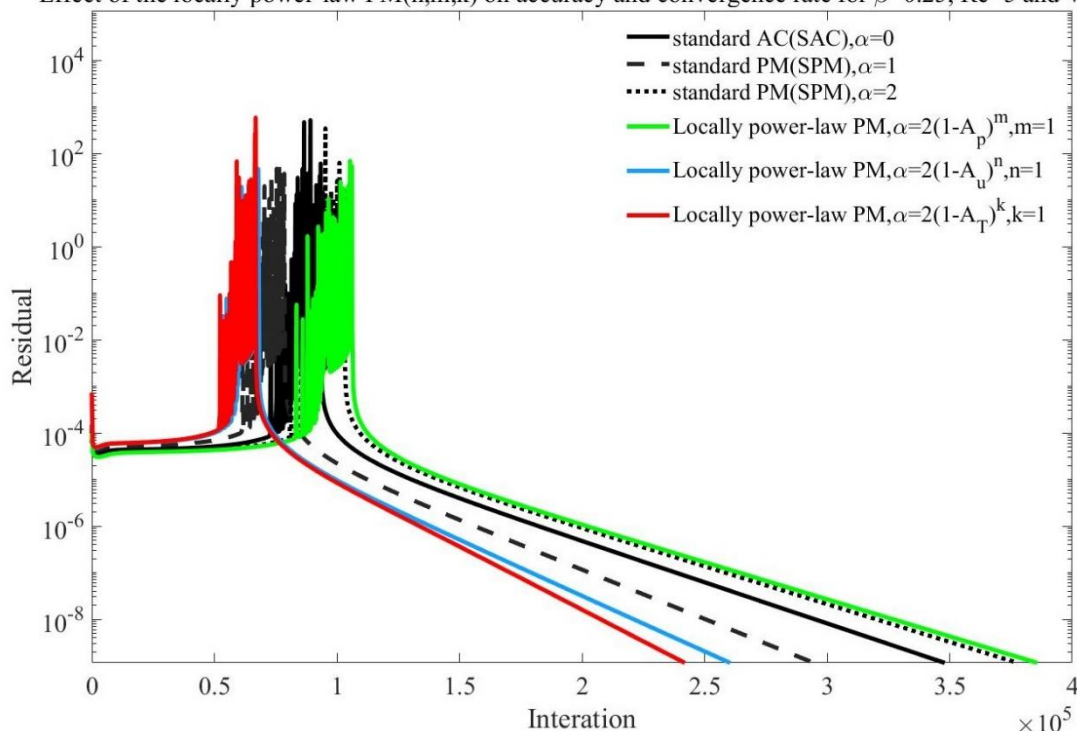


شکل ۴-۵۴. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$, $Wi=1$ و $\beta=0.25$.



شکل ۴-۵۵. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$, $Wi=1$ و $\beta=0.25$.

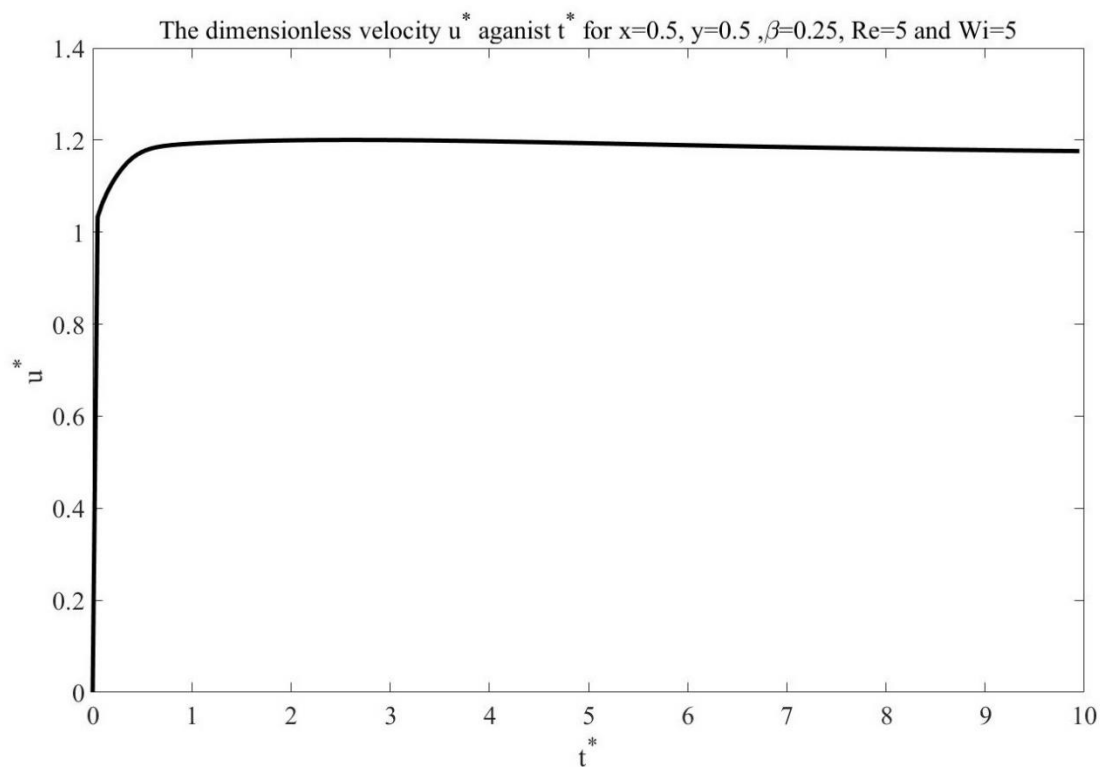
Effect of the locally power-law PM(n,m,k) on accuracy and convergence rate for $\beta=0.25$, $Re=5$ and $Wi=1$



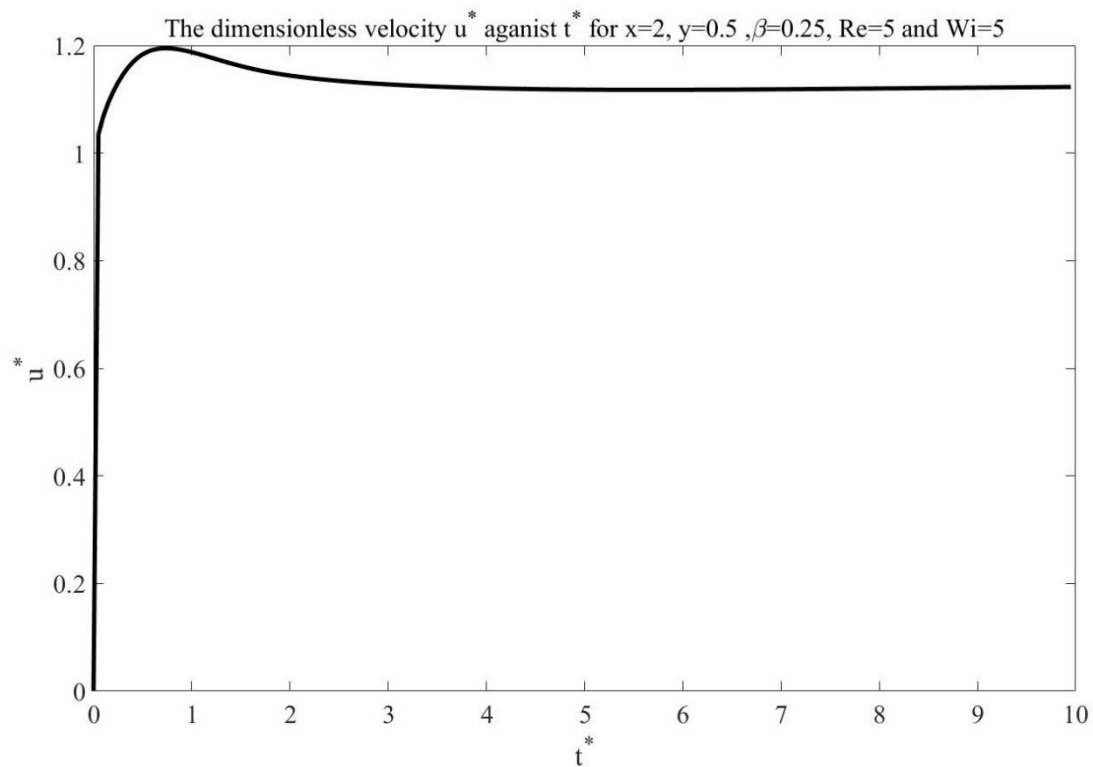
شکل ۴-۵. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط‌سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ و $Wi=1$ و $\beta=0.25$.

۴-۷-۸ حالت $Re=5$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$

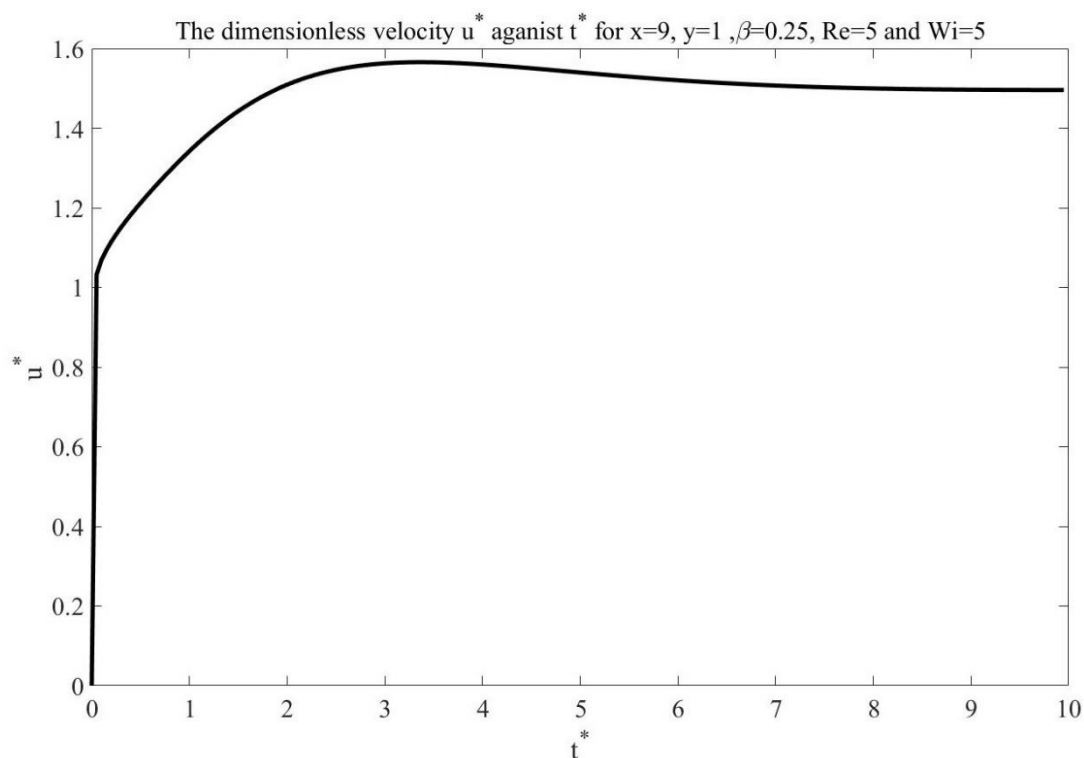
در این حالت نیز تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$ ، $y=0.5$ ، $x=2$ ، $y=1$ و $x=9$ به ترتیب در شکل‌های ۴-۵۷، ۴-۵۸ و ۴-۵۹ نشان داده می‌شوند. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط‌توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش‌های LPMSP، LPMSPV و SPM در SAC در عدد رینولدز ۵، عدد وایزنبرگ ۵ و نسبت لزجت ۰/۲۵ در شکل ۴-۶۰ آمده است. با توجه به شکل ۴-۶۰، در روش SPM2 و LPMSP سرعت همگرایی کندتر است و در روش پیش‌شرط‌توانی حسگر تنش (LPMSS) نسبت به روش‌های دیگر نرخ همگرایی افزایش قابل‌ملاحظه دارد. همچنین با توجه به شکل‌های ۴-۵۶ و ۴-۶۰ و مانند آنچه در قسمت ۴-۷-۳ بیان گردید، با افزایش عدد وایزنبرگ از ۱ به ۵ نرخ همگرایی افزایش و تعداد تکرار نیز کاهش چشمگیری می‌یابد.



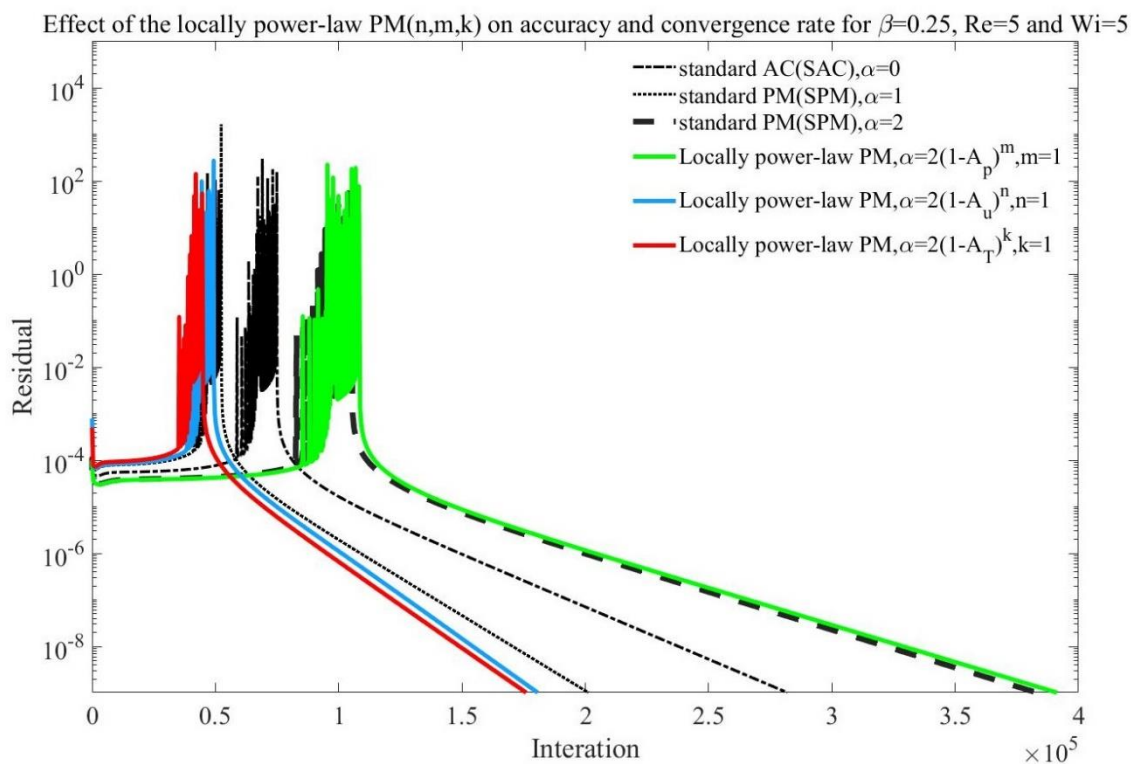
شکل ۴-۵۷. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5, Wi=5$ و $\beta=0.25$.



شکل ۴-۵۸. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5, Wi=5$ و $\beta=0.25$.



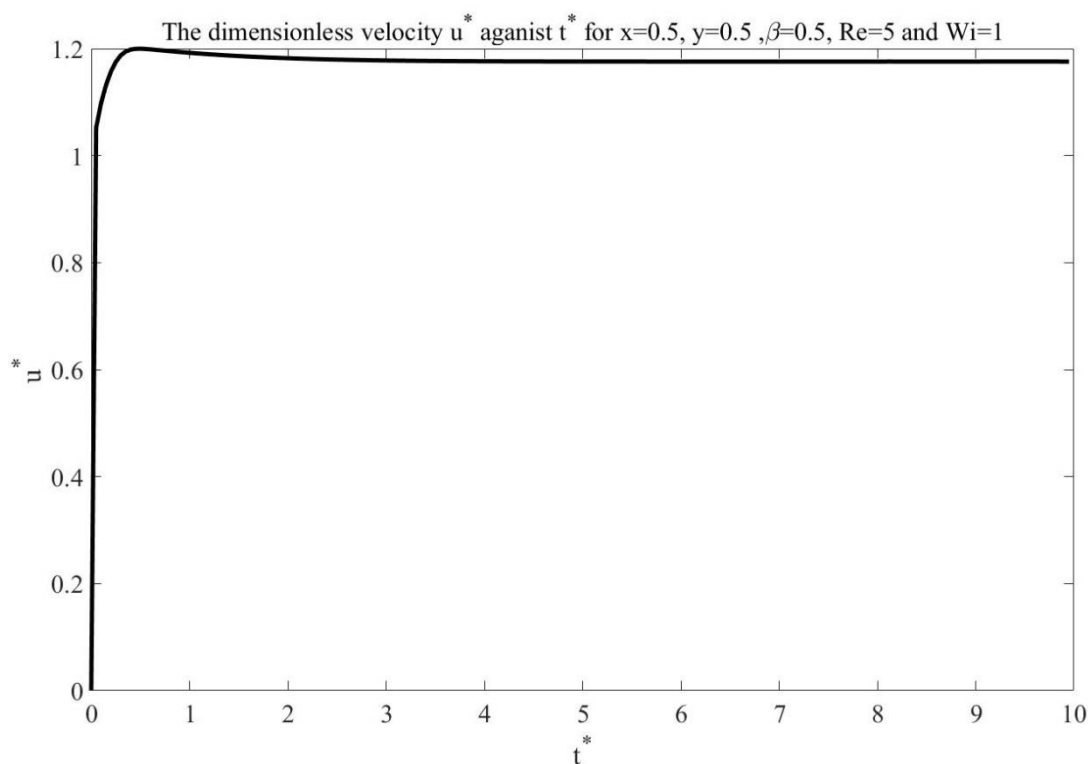
شکل ۴-۵۹. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ بر حسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$, $Wi=5$ و $\beta=0.25$.



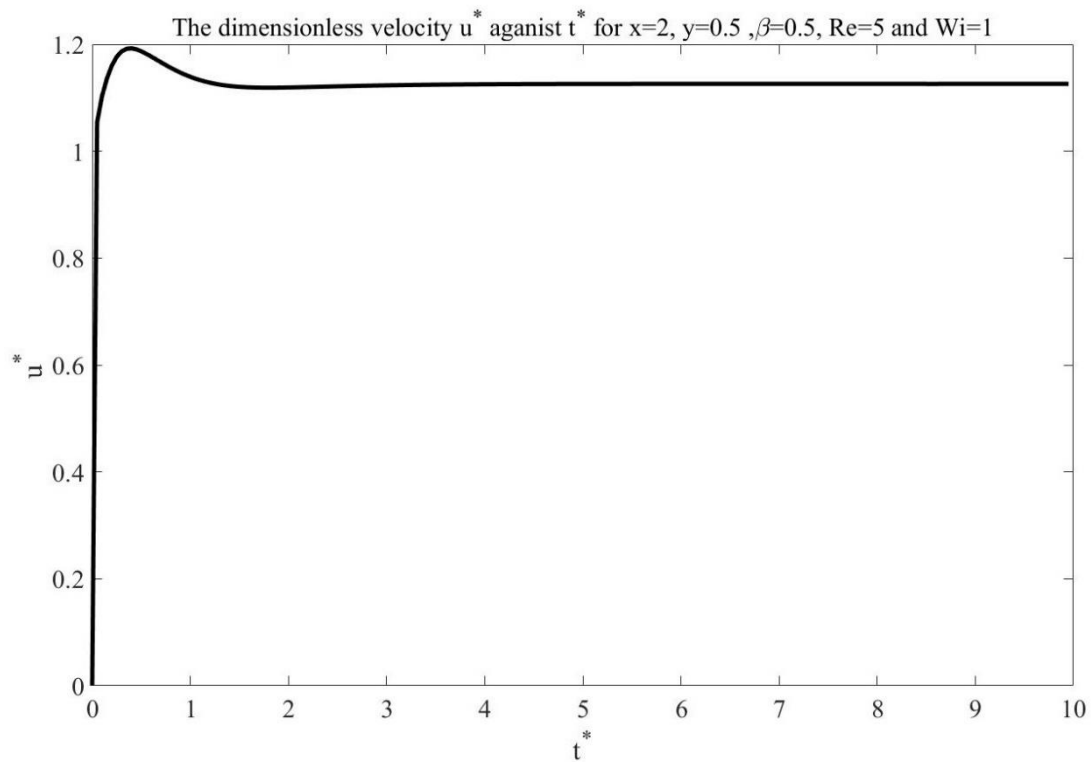
شکل ۴-۶۰. تأثیر روش‌های مختلف پیش شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$, $Wi=5$ و $\beta=0.25$.

۹-۷-۴ حالت $\beta = 0.5$ و $Wi=1$, $Re=5$

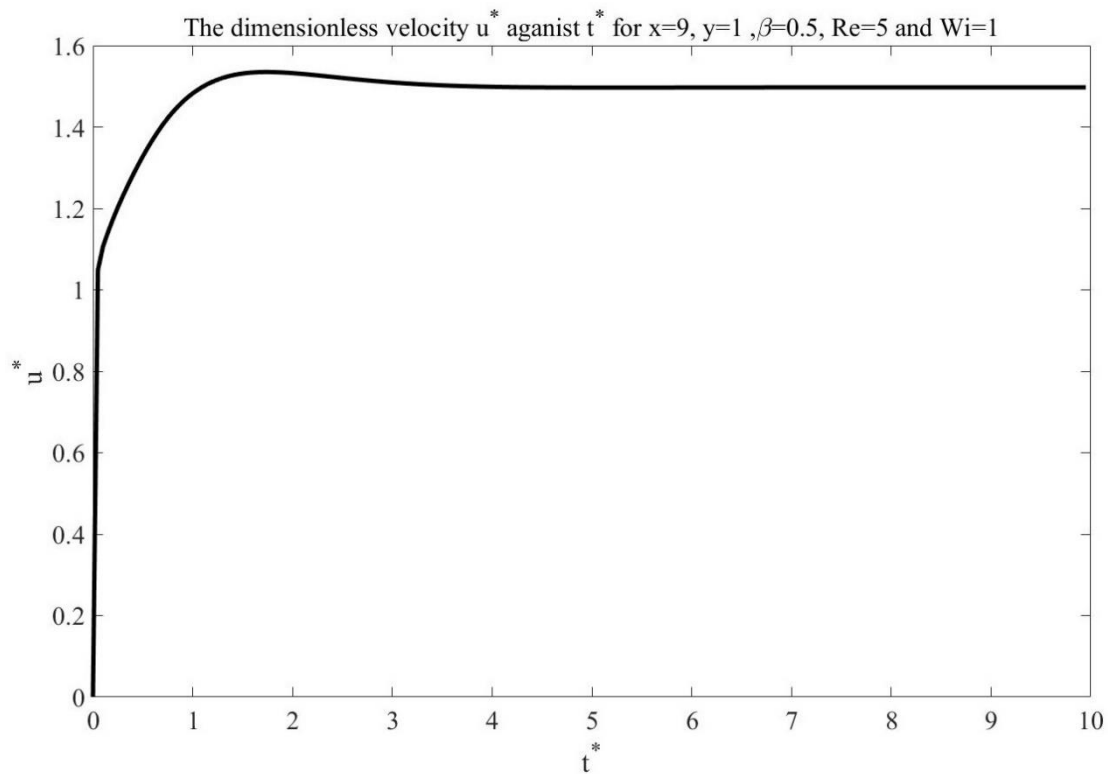
در این مورد نیز مانند حالت‌های قبل تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$, $y=0.5$, $x=2$, $y=0.5$ و $x=9$, $y=1$ به ترتیب در شکل‌های ۶۱-۴، ۶۲-۴ و ۶۳-۴ نشان داده شده‌اند. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش‌های LPMSP، LPMSV، SAC و SPM در عدد رینولدز ۵، عدد وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت ۰/۵ در شکل ۶۴-۴ آمده است. با توجه به شکل ۶۴-۴، در روش SAC نرخ همگرایی کندتر است و در روش پیش‌شرط توانی حسگر سرعت (LPMSV) نسبت به روش‌های دیگر دارای سرعت همگرایی بیشتر است. همچنین روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) نیز دارای نرخ همگرایی بالا نسبت به روش‌های دیگر و نسبت به روش LPMSV نرخ همگرایی ۳/۲ درصد کمتر می‌باشد.



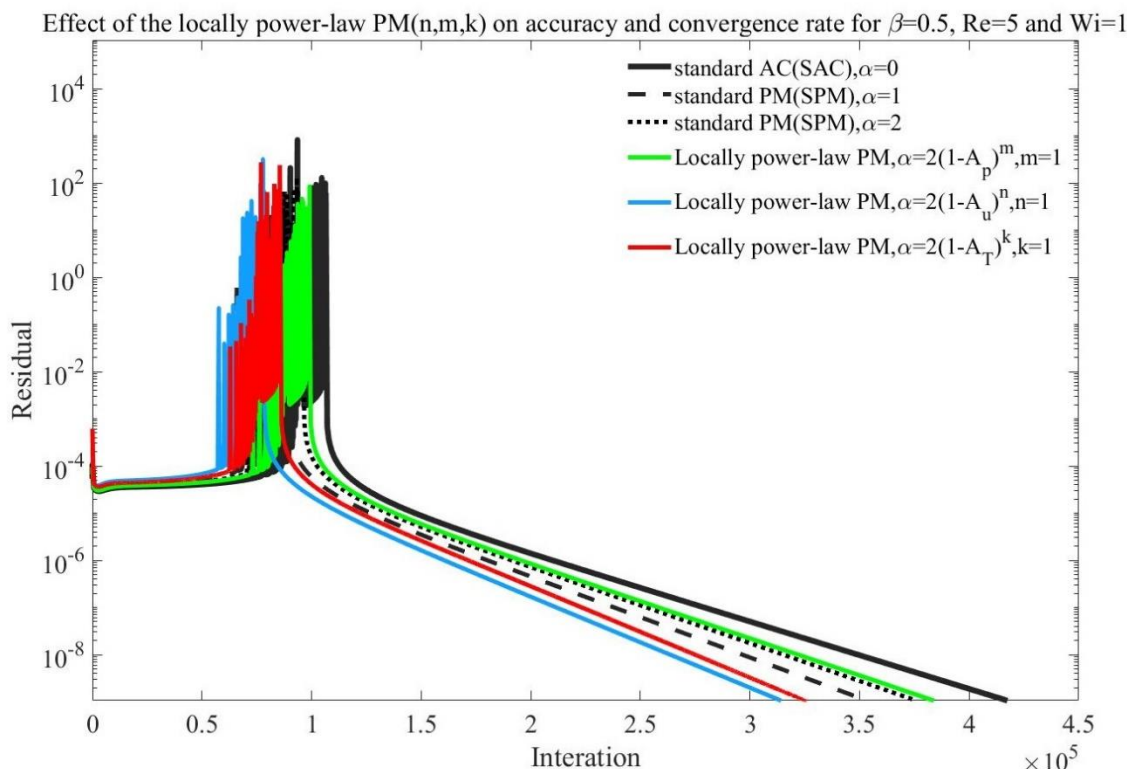
شکل ۶۱-۴. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$, $Wi=1$ و $\beta = 0.5$.



شکل ۴-۶۲. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$.



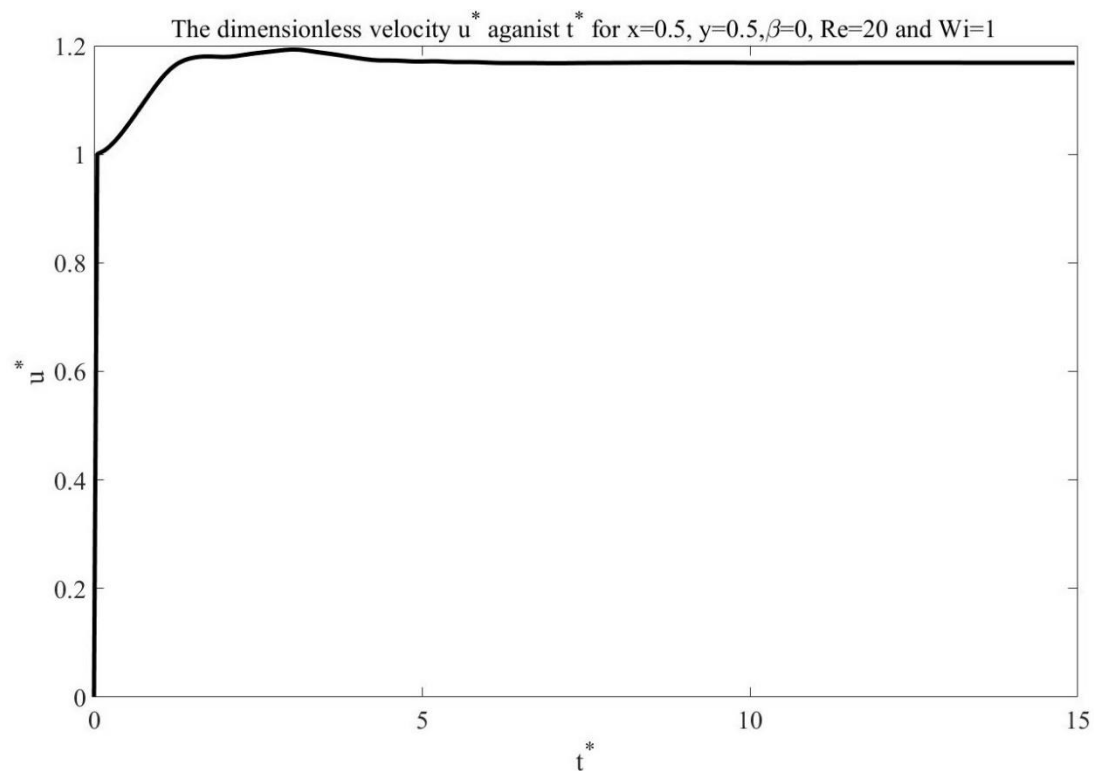
شکل ۴-۶۳. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$.



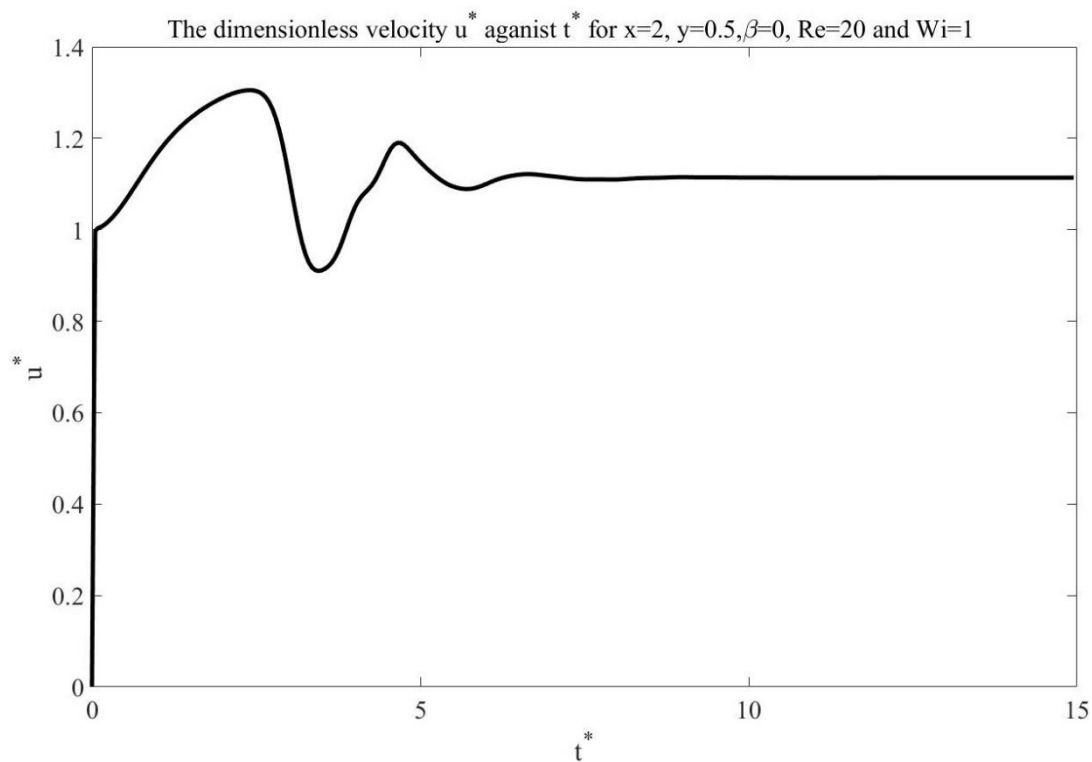
شکل ۴-۶. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=5$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$.

۴-۷-۱۰ حالت $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0$

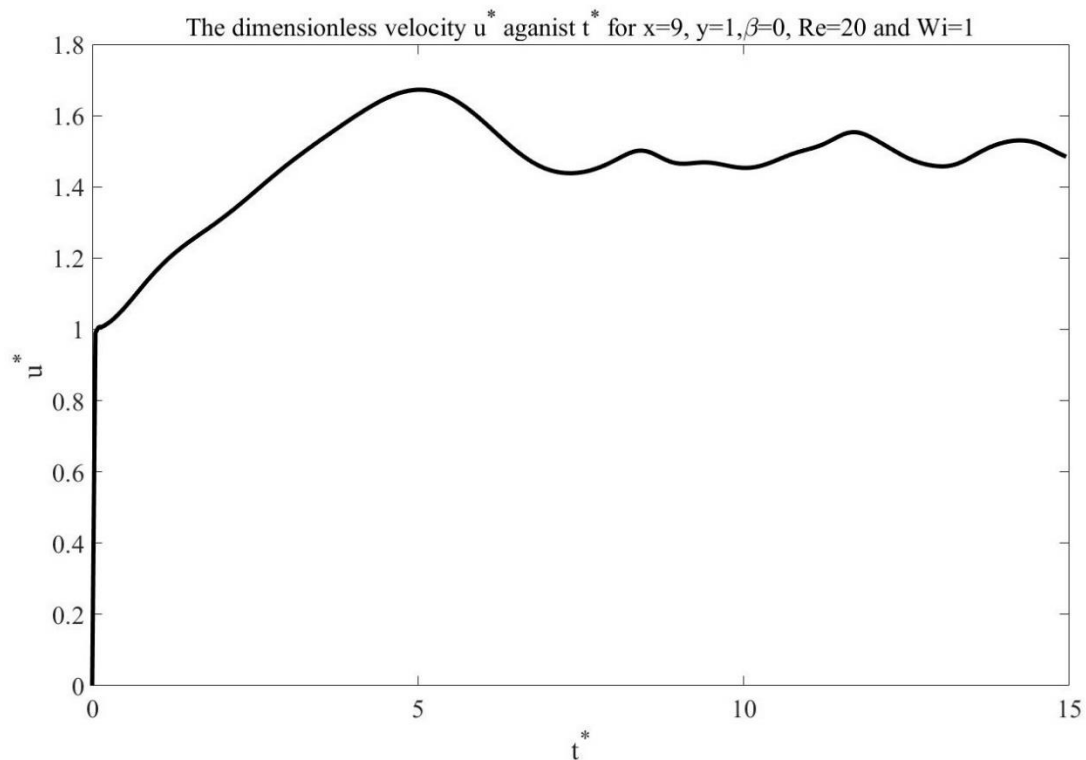
در این حالت نیز تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$ ، $y=0.5$ ، $x=2$ ، $y=1$ و $x=9$ به ترتیب در شکل‌های ۴-۶۵، ۴-۶۶ و ۴-۶۷ نشان داده می‌شوند. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش‌های پیش‌شرط توانی حسگر سرعت (LPMSSV)، پیش‌شرط توانی حسگر فشار (LPMSP)، پیش‌شرط استاندارد (SPM) و تراکم‌پذیر استاندارد (SAC) در عدد رینولدز ۲۰، عدد وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت صفر در شکل ۴-۶۸ آمده است. با توجه به شکل ۴-۶۸، در روش SPM2 و LPMSP نرخ همگرایی کمتری دارند. در این حالت روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) دارای سرعت همگرایی سریع و باعث کاهش تعداد تکرار چشمگیری نسبت به روش‌های دیگر دارد.



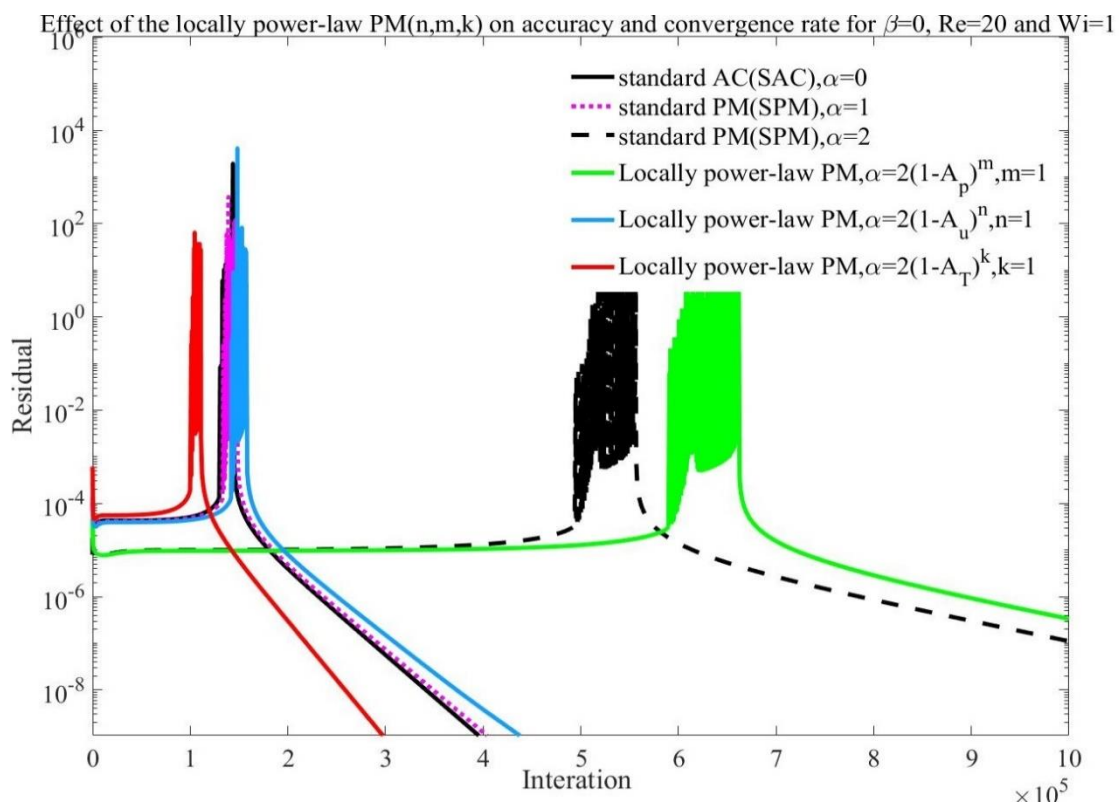
شکل ۴-۶۵. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20, Wi=1$ و $\beta=0$.



شکل ۴-۶۶. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20, Wi=1$ و $\beta=0$.



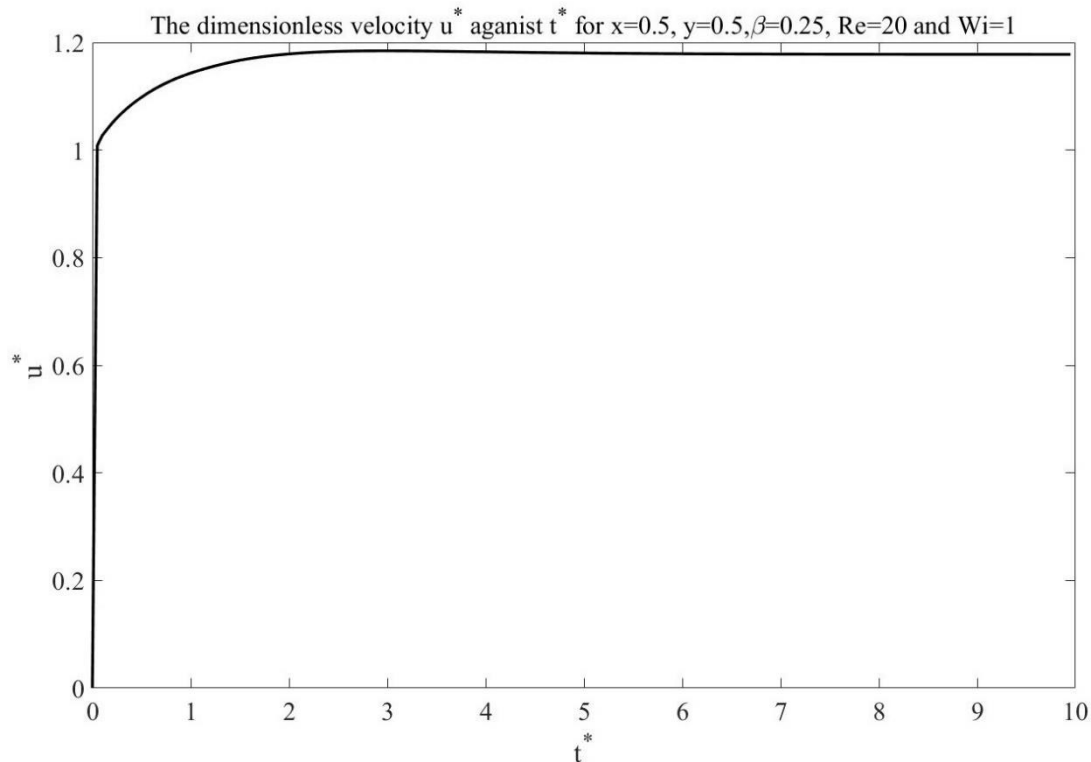
شکل ۴-۶۷. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=9$ و $y=1$ بر حسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ و $Wi=1$ و $\beta=0$.



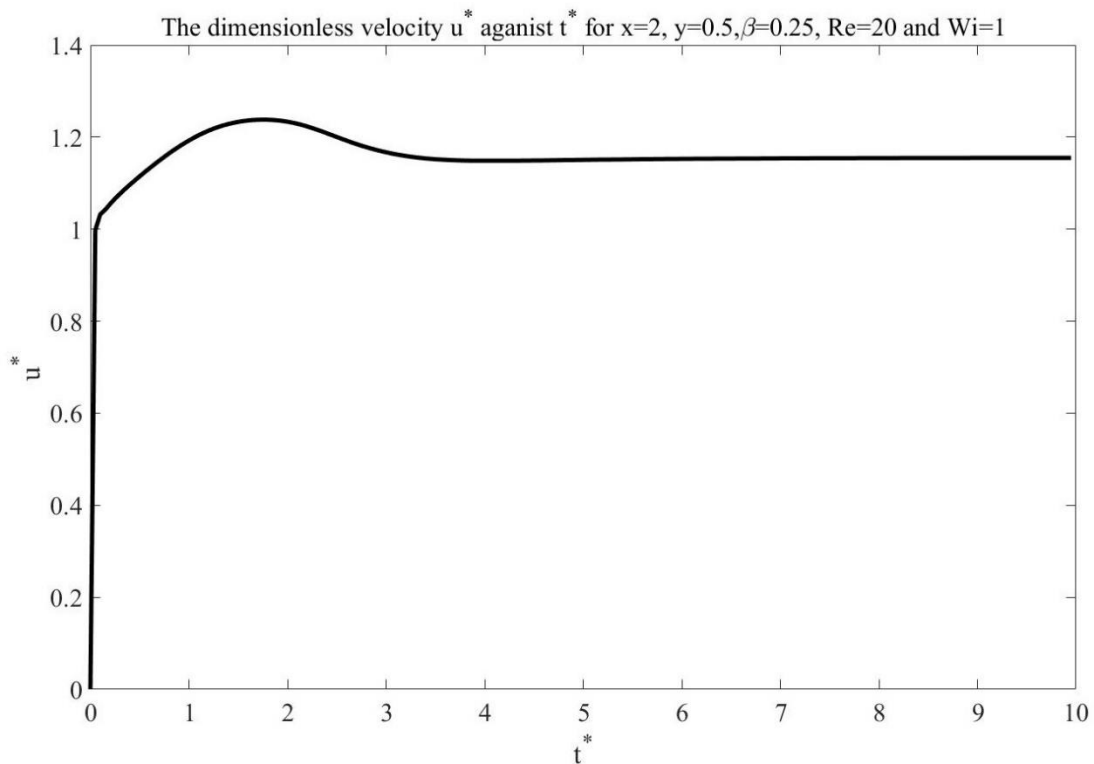
شکل ۴-۶۸. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ و $Wi=1$ و $\beta=0$.

۴-۷-۱۱ حالت $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$

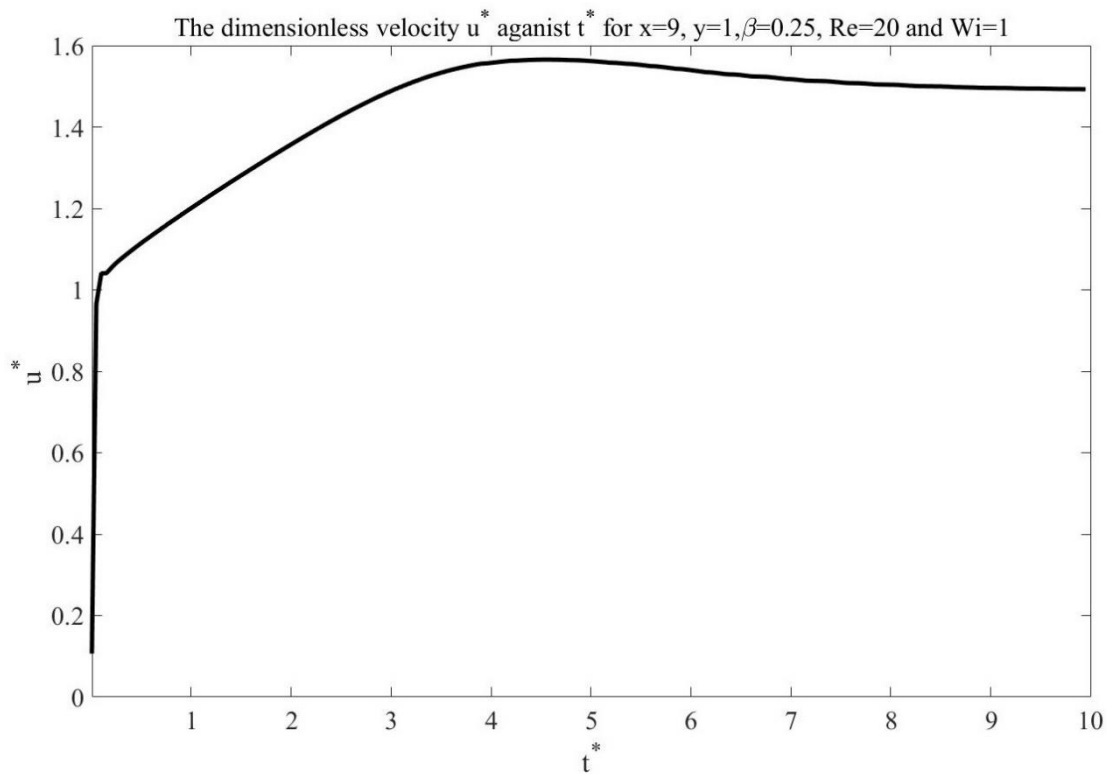
در این مورد نیز تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$ ، $y=0.5$ ، $x=2$ ، $y=0.5$ و $x=9$ ، $y=1$ به ترتیب در شکل‌های ۴-۶۹، ۴-۷۰ و ۴-۷۱ نشان داده می‌شوند. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش پیش‌شرط توانی حسگر سرعت (LPMSP)، پیش‌شرط توانی حسگر فشار (LPMSP)، روش پیش‌شرط استاندارد (SPM) و روش تراکم‌پذیر استاندارد (SAC) در عدد رینولدز ۲۰، عدد وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت ۰/۲۵ در شکل ۴-۷۲ آمده است. با توجه به شکل ۴-۷۲، در روش LPMSP و SPM2 سرعت همگرایی بسیار پایین دارند و به‌موجب آن تعداد تکرارها نسبت به روش‌های دیگر به‌صورت هنگفتی افزایش می‌یابد. در این حالت سرعت همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) نسبت به روش‌های دیگر سریع‌تر است.



شکل ۴-۶۹. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.25$.

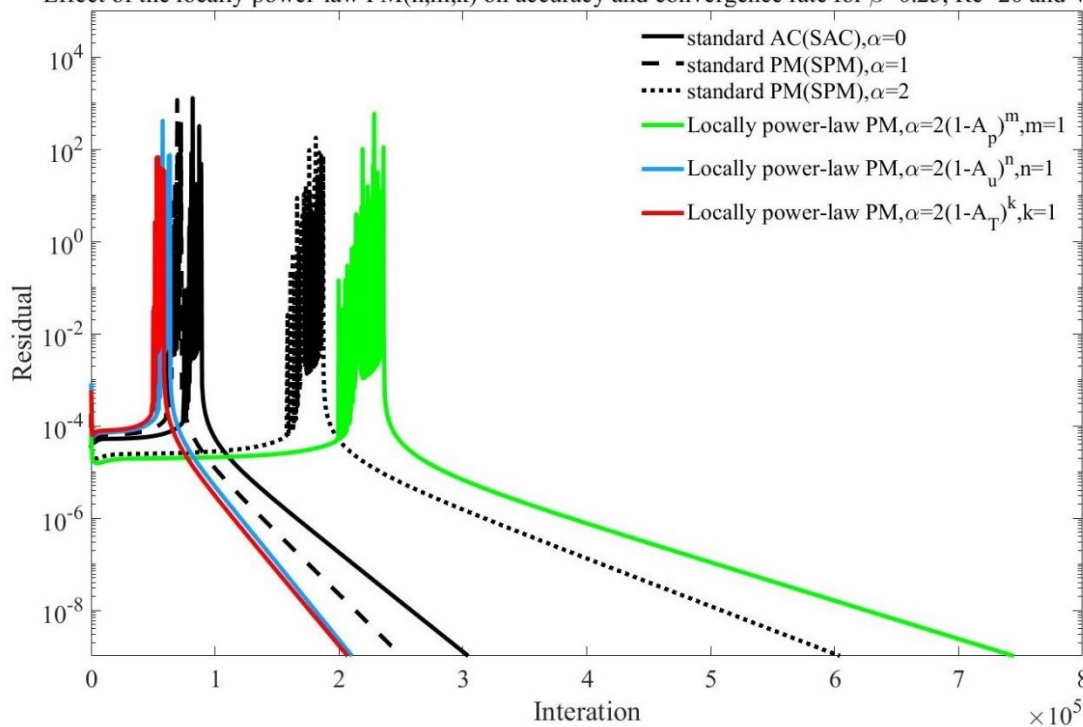


شکل ۴-۷۰. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ و $Wi=1$ و $\beta=0.25$.



شکل ۴-۷۱. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ و $Wi=1$ و $\beta=0.25$.

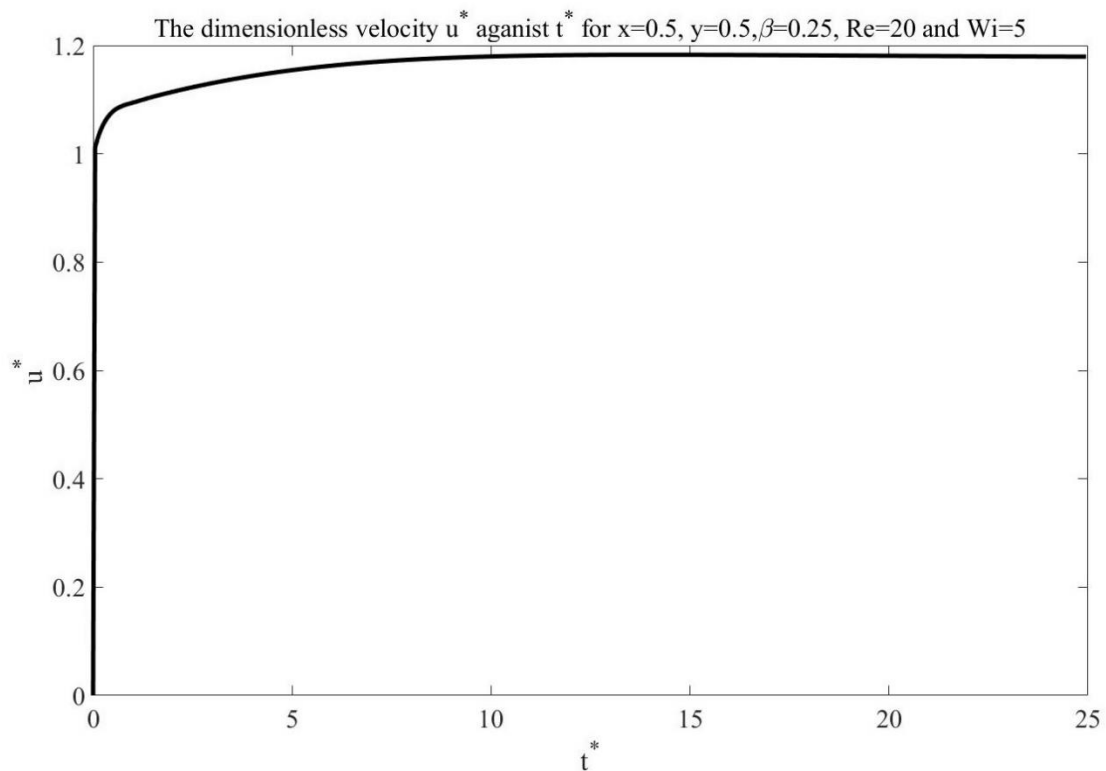
Effect of the locally power-law PM(n,m,k) on accuracy and convergence rate for $\beta=0.25$, $Re=20$ and $Wi=1$



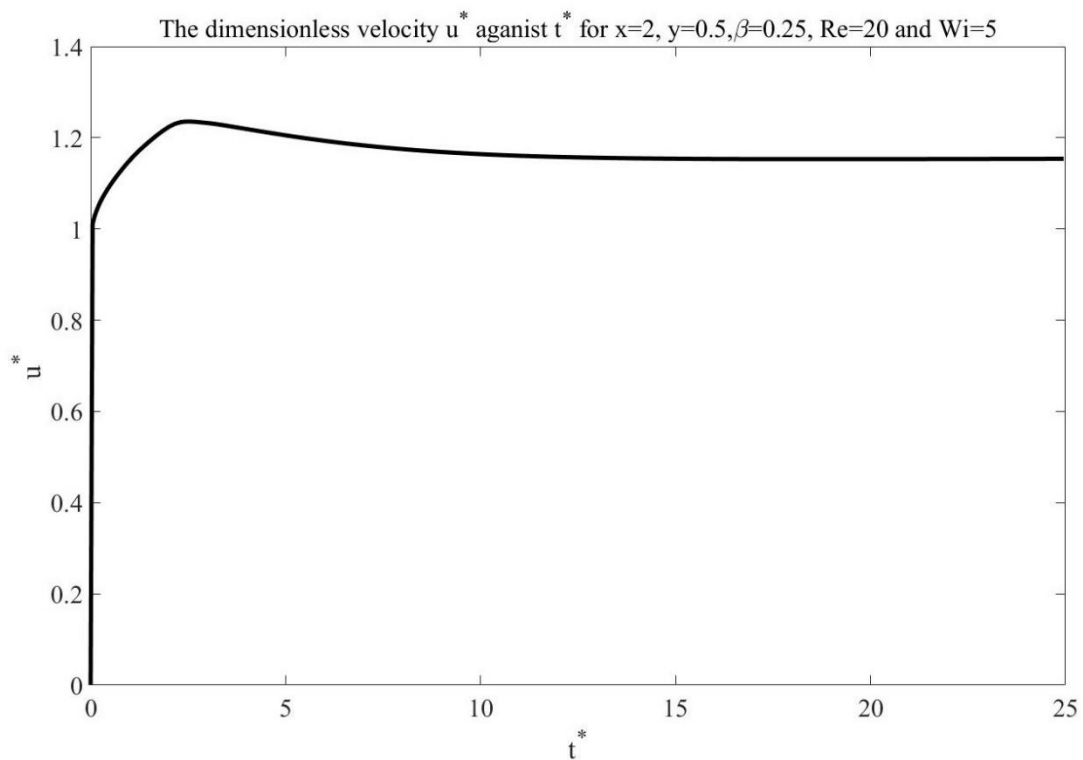
شکل ۴-۷۲. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $\beta=0.25$ و $Wi=1$.

۴-۷-۱۲ حالت $Re=20$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$

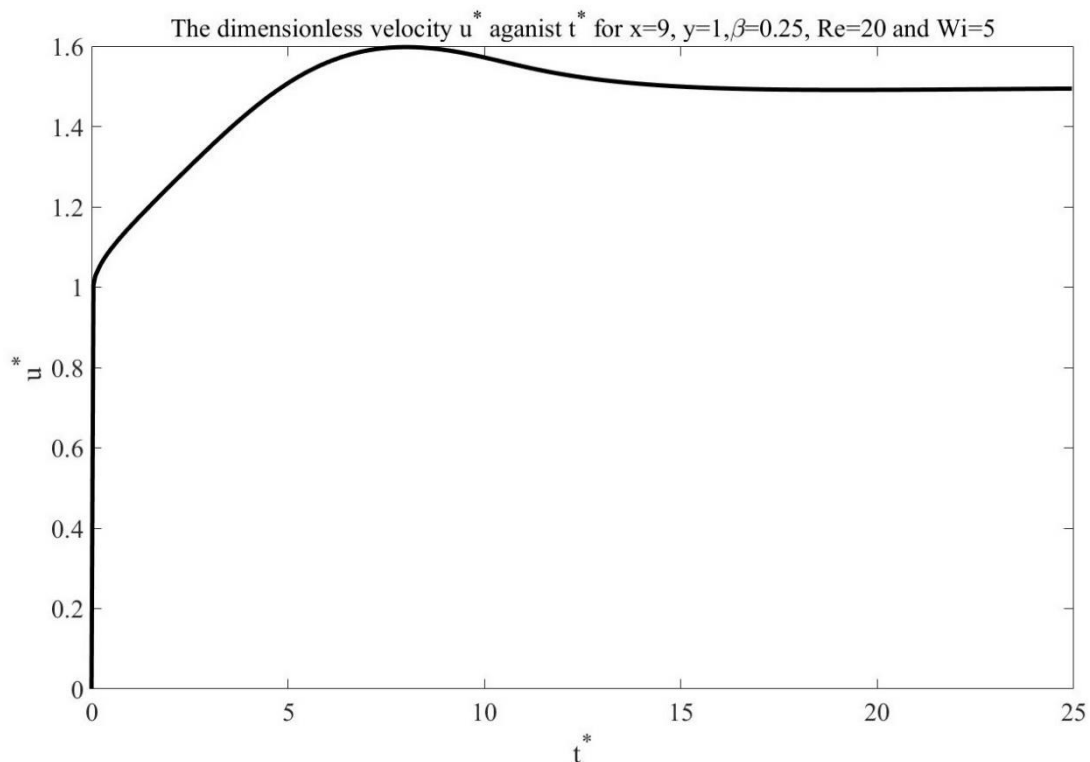
در این حالت نیز تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$ ، $y=0.5$ ، $x=2$ ، $y=1$ و $x=9$ به ترتیب در شکل‌های ۴-۷۳، ۴-۷۴ و ۴-۷۵ آورده شده‌اند. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش‌های LPMSP، LPMSPV، SPM و SAC در عدد رینولدز ۲۰، عدد وایزنبرگ ۵ و نسبت لزجت ۰/۲۵ در شکل ۴-۷۶ آمده است. با توجه به شکل ۴-۷۶، در روش SPM2 و LPMSP سرعت همگرایی بسیار کندتر می‌باشد و در روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) نسبت به روش‌های دیگر نرخ همگرایی افزایش قابل توجهی دارد. همچنین با توجه به شکل‌های ۴-۷۲ و ۴-۷۶ با افزایش عدد وایزنبرگ از ۱ به ۵ نرخ همگرایی تسریع و به سبب آن تعداد تکرار نیز کاهش قابل ملاحظه می‌کند.



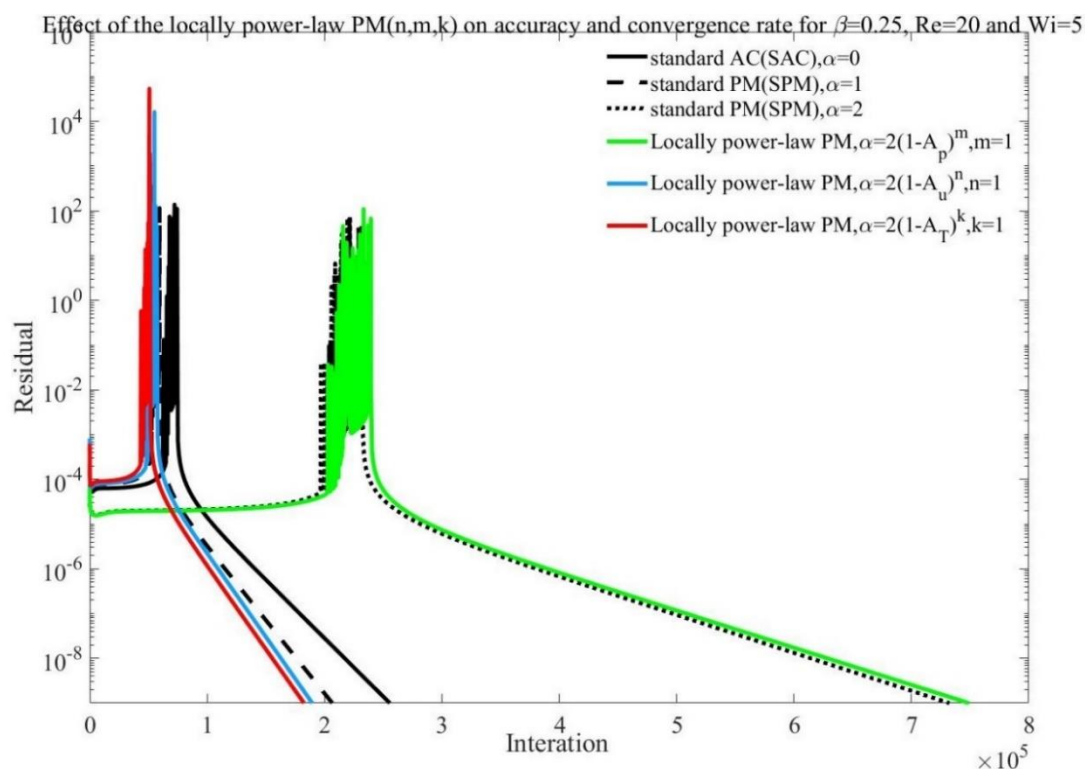
شکل ۴-۷۳. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ و $Wi=5$ و $\beta=0.25$.



شکل ۴-۷۴. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ و $Wi=5$ و $\beta=0.25$.



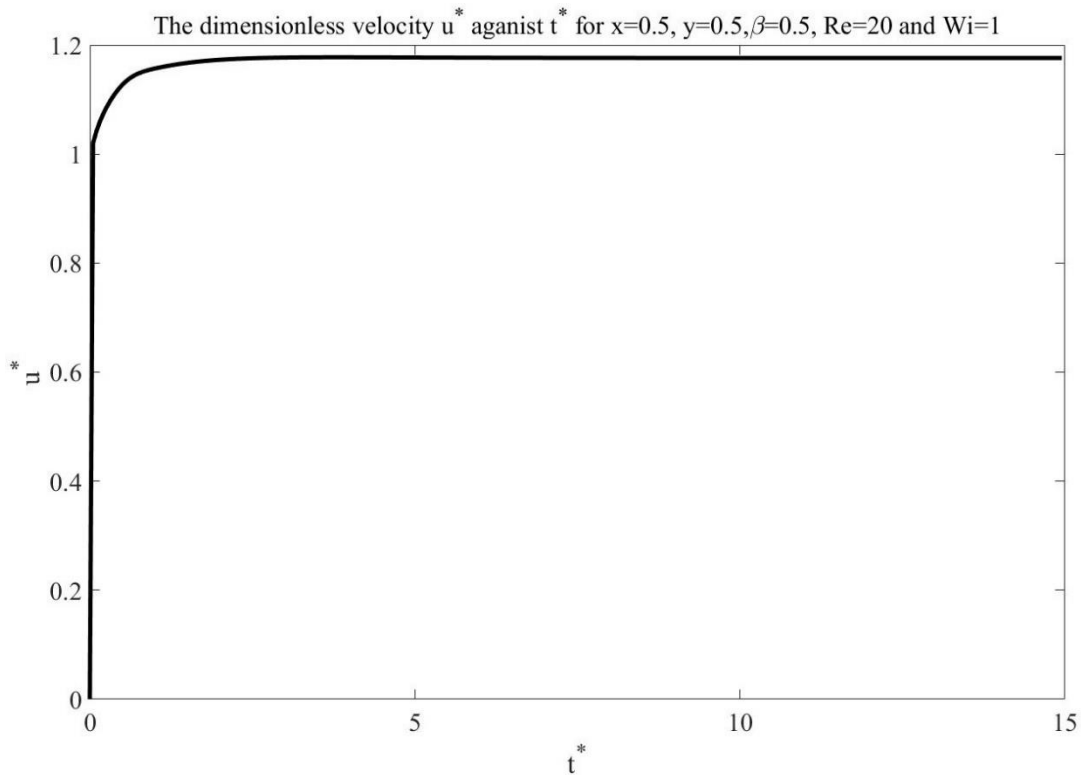
شکل ۴-۷۵. تغییرات سرعت محوری u در جهت $x=9$ و $y=1$ بر حسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$.



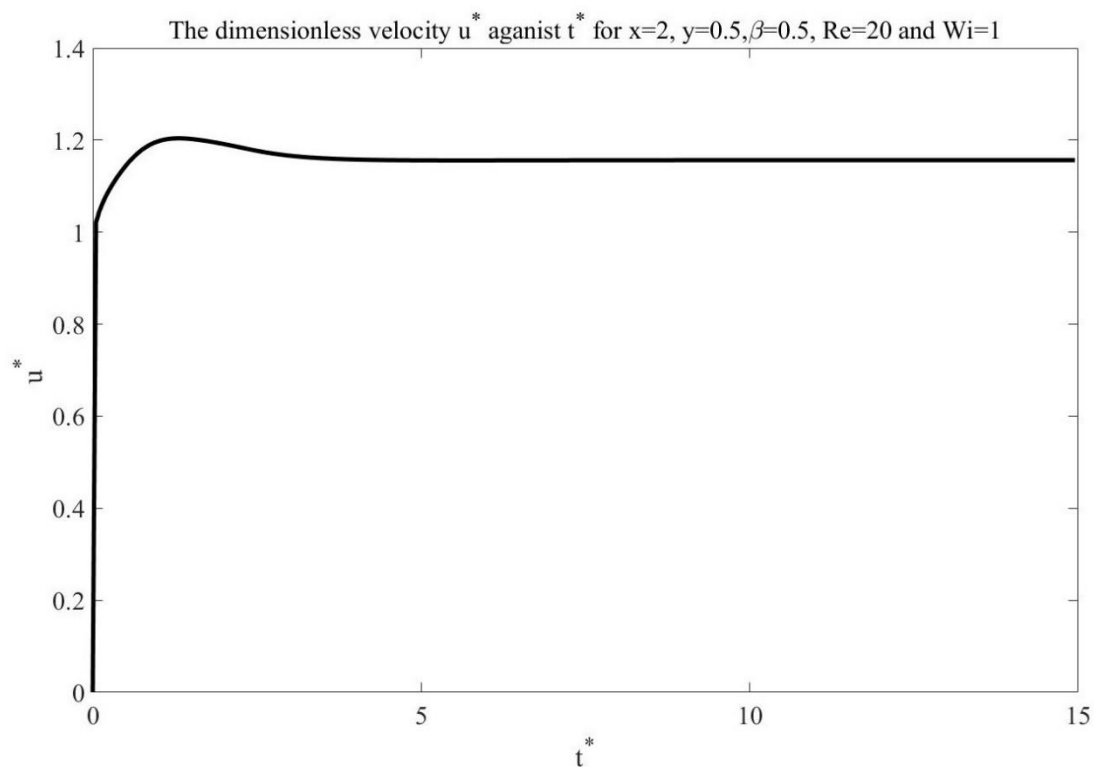
شکل ۴-۷۶. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=5$ و $\beta=0.25$.

۴-۷-۱۳ حالت $Re=20$, $Wi=1$ و $\beta=0.5$

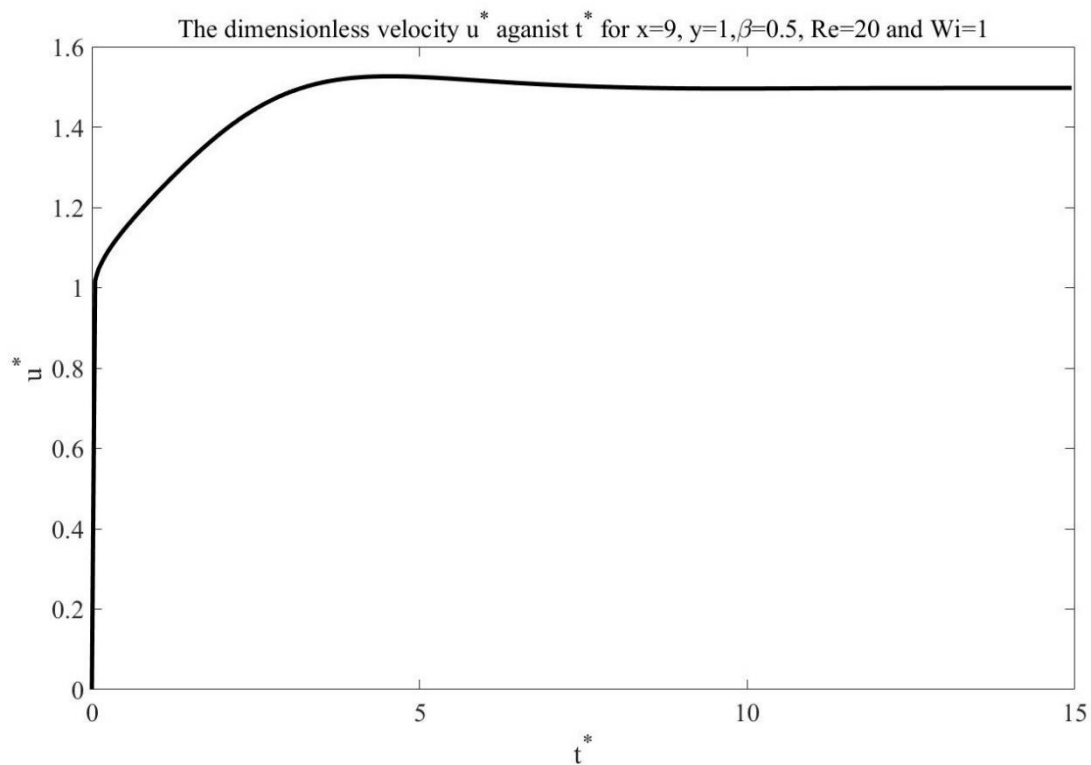
برای این حالت نیز تغییرات سرعت محوری u را نسبت به زمان در موقعیت $x=0.5$, $y=0.5$, $x=2$, $y=0.5$ و $x=9$, $y=1$ به ترتیب در شکل‌های ۴-۷۷، ۴-۷۸ و ۴-۷۹ نشان داده شده‌اند. تأثیر نرخ همگرایی روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) با روش‌های LPMSP، LPMSV و SPM در عدد رینولدز ۲۰، عدد وایزنبرگ ۱ و نسبت لزجت ۰/۵ در شکل ۴-۸۰ آمده است. با توجه به شکل ۴-۸۰ در روش SPM2 و LPMSP سرعت همگرایی بسیار آهسته می‌باشند و در روش پیش‌شرط توانی حسگر سرعت (LPMSV) نسبت به روش‌های دیگر دارای سرعت همگرایی بیشتر است. همچنین روش پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS) نیز دارای نرخ همگرایی خوبی نسبت به روش‌های دیگر بوده و نسبت به روش LPMSV دارای نرخ همگرایی ۳/۱ درصد کمتر می‌باشد.



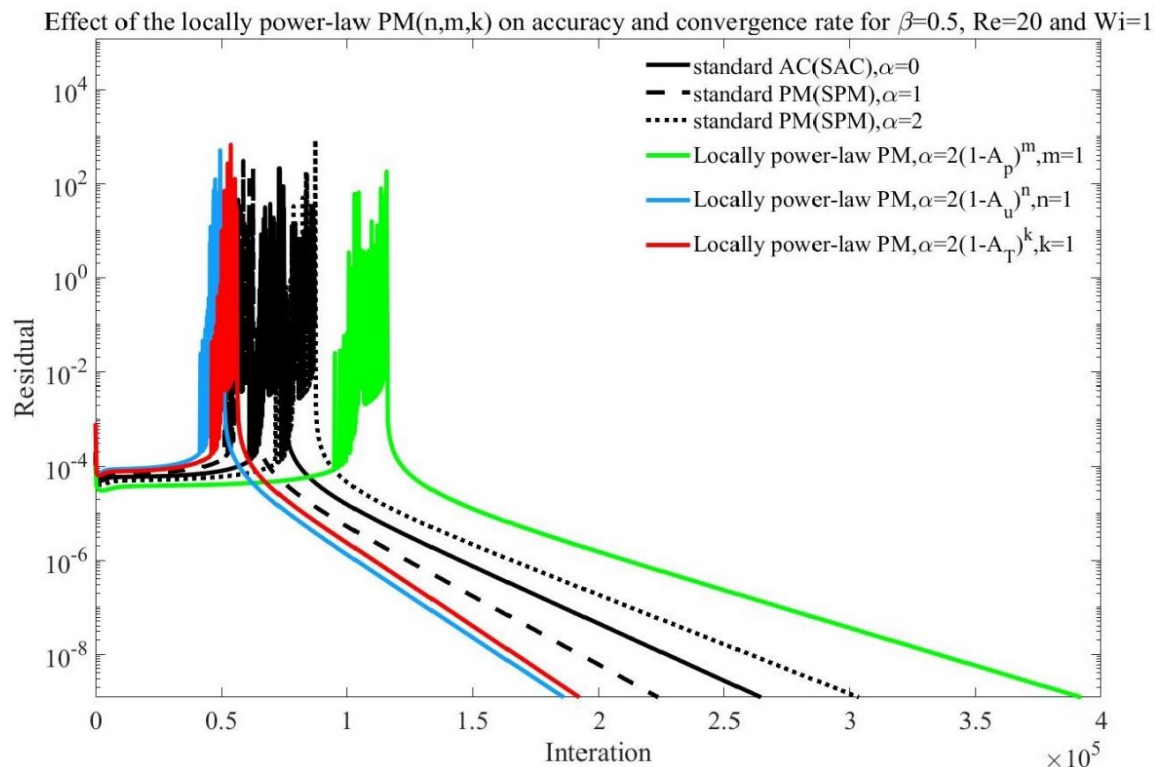
شکل ۴-۷۷. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=0.5$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$, $Wi=1$ و $\beta=0.5$.



شکل ۷۸-۴. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=2$ و $y=0.5$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ و $Wi=1$ و $\beta=0.5$.



شکل ۷۹-۴. تغییرات سرعت محوری u در موقعیت $x=9$ و $y=1$ برحسب زمان برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ و $Wi=1$ و $\beta=0.5$.



شکل ۴-۸۰. تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط‌سازی بر نرخ همگرایی برای جریان بین دو صفحه موازی با $Re=20$ ، $Wi=1$ و $\beta=0.5$.

در جدول ۴-۴ تأثیر روش محلی پیش‌شرط‌توانی حسگر تنش بر نرخ همگرایی نسبت به روش‌های SAC، SPM، LPMSP و LPMSPV بین دو صفحه موازی ثابت موردبررسی قرار گرفته است. بدین منظور جهت محاسبه نرخ همگرایی از مقدار درصد کاهش تعداد تکرارها به صورت تقریبی استفاده شده است. در جدول ۴-۴ علامت منفی در مقدار درصد کاهش تعداد تکرارها نشان‌دهنده آن است که نرخ همگرایی آن روش چند درصد نسبت به روش پیش‌شرط‌توانی حسگر تنش بیشتر می‌باشد. همچنین جدول ۴-۴ تمام سیزده حالت ذکرشده در قسمت قبل که در عدد رینولدز، عدد وایزنبرگ و نسبت لزجت باهم تفاوت دارند را در برمی‌گیرد. با کاهش نسبت لزجت نرخ همگرایی نسبت به روش‌های دیگر پیش‌شرط‌سازی تسریع می‌یابد، به این دلیل که خاصیت الاستیک پررنگتر می‌شود در یک شرایط جریان ثابت (مقدار رینولدز و وایزنبرگ ثابت) با کاهش نسبت لزجت سرعت امواج برشی نسبت به امواج پخشی افزایش می‌یابد و با هم مرتبه بودن امواج صوتی و برشی با استفاده از سنسور تنش سبب افزایش سرعت همگرایی حل می‌شود. با افزایش عدد رینولدز و عدد وایزنبرگ در نسبت لزجت کمتر از ۵۰ درصد سهم خاصیت الاستیک پررنگتر می‌شود و امواج برشی نسبت به امواج پخشی و جابجایی بیشتر است با استفاده از سنسور محلی تنش و هم مرتبه بودن امواج صوتی و برشی سبب افزایش نرخ همگرایی می‌شود. با توجه به جدول ۴-۴ روش محلی پیش‌شرط‌توانی حسگر تنش در مقایسه به روش‌های دیگر پیش‌شرط در نسبت لزجت کمتر از ۵۰ درصد، ۳ تا ۷۶ درصد باعث افزایش نرخ همگرایی و کاهش تعداد تکرارها و به سبب آن باعث کاهش زمان محاسباتی

می‌شود. اما در نسبت لزجت ۵۰ درصد و بالاتر نرخ همگرایی روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش ۸ تا ۳۶ درصد از دو روش SAC و SPM بیشتر است. در تمام حالت‌ها تعداد کل تکرارها از روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش (LPMSS)، روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر سرعت (LPMSV)، روش پیش‌شرط توانی حسگر فشار (LPMSP)، روش پیش‌شرط استاندارد (SPM) و روش تراکم‌پذیر استاندارد (SAC) با استفاده از توان بهینه روش پیش‌شرط توانی محاسبه شده‌اند.

جدول ۴-۴. تأثیر روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش بر سرعت همگرایی بین دو صفحه موازی ثابت.

شماره حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
عدد رینولدز	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۵	۵	۵	۵	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
عدد وایزنبرگ	۱	۱	۵	۱	۱	۱	۱	۵	۱	۱	۱	۵	۱
نسبت لزجت (%)	۰	۲۵	۲۵	۵۰	۷۵	۰	۲۵	۲۵	۵۰	۰	۲۵	۲۵	۵۰
کاهش تعداد تکرار نسبت به روش SAC (%)	۲۷	۲۷	۲۹	۲۷	۲۵	۲۸	۳۰	۳۶	۲۲	۳۲	۳۱	۲۸	۲۷
کاهش تعداد تکرار نسبت به روش SPM1 (%)	۱۴	۱۴	۱۶	۱۴	۱۱	۲۹	۵	۱۰	۸	۲۶	۱۷	۱۱	۱۳
کاهش تعداد تکرار نسبت به روش SPM2 (%)	۶۶	۱۸	۴۰	۴	-۵	۶۷	۳۶	۵۳	۱۴	۶۹	۶۶	۷۵	۳۶
کاهش تعداد تکرار نسبت به روش LPMSP (%)	۶۷	۲۱	۴۱	-۴	-۱۱	۶۷	۳۷	۵۴	۱۵	۷۰	۷۲	۷۶	۵۰
کاهش تعداد تکرار نسبت به روش LPMSV (%)	۲۳	۳	۳	۰,۸	-۸	۱۶	۷	۱	-۳	۲۳	۲	۴	-۳
توان بهینه	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

فصل ۵: نتیجه گیری و پیشنهادات

۵-۱ مقدمه

در این فصل، نتایج حاصل شده از شبیه سازی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت به صورت خلاصه ارائه می گردد. در نهایت در موازات موضوع تحقیق، پیشنهاداتی مطرح می شود.

۵-۲ بحث و نتیجه گیری

امروزه محققان در علوم مختلف مهندسی تمایل زیادی برای شبیه سازی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک دارند، که کاربرد این شبیه سازی را می توان در صنعت شیمی، نفت و ... دید. برای حل دستگاه معادلات جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک از مدل ماکسول ساده استفاده می شود. الگوریتم مورد استفاده در این پژوهش با استفاده از روش تراکم پذیری مصنوعی ارائه شده است. در روش تراکم پذیری مصنوعی برای انتخاب مناسب ضریب تراکم پذیر مصنوعی از آزمایش های عددی و مقادیر که در مراجع ارائه گردیده، که این مقدار بین ۰,۱ تا ۱۰ است. مقدار ضریب تراکم پذیر مصنوعی روی پایداری و افزایش نتایج تأثیر گذار می باشد. مشکلاتی در حل دستگاه معادلات جریان تراکم ناپذیر غیردائم وجود دارد که با انتخاب ضریب پیش شرط مناسب می توان آن را رفع نمود و موجب افزایش نرخ همگرایی و پایدار حل می شود. در این پژوهش برای اولین بار از روش پیش شرط توانی برای مدل سازی عددی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت استفاده شده است. برای نخستین بار از حسگر تنش در روش محلی پیش شرط توانی برای افزایش نرخ همگرایی، پایداری و دقت حل استفاده می گردد. جهت گسسته سازی معادلات حاکم از روش تفاضل محدود و برای به کارگیری روش پیش شرط توانی با اصلاح جمله مشتق زمان معادلات حاکم با استفاده از الگوریتم دو زمانه معادلات حل می گردد. این الگوریتم دو زمانه شامل حلقه داخلی (زمان کاذب) و حلقه خارجی (زمان حقیقی) می باشد که جهت همگرایی حلقه داخلی برای رسیدن به حالت دائم از روش وثوقی فر چهار مرحله ای استفاده شده است. برای گام زمانی حلقه داخلی به صورت محلی از رابطه مقادیر ویژه معادلات حاکم که در این رابطه لازم است از مقدار عدد CFL ثابت که روی سرعت همگرایی و پایداری تأثیر دارد، استفاده می شود. مقدار عدد CFL به صورت آزمایش عددی با مقادیر هندسی و جریان ثابت در مقدار ضریب تراکم پذیر مصنوعی ثابت به دست می آید. در این پژوهش، جهت شبیه سازی عددی جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک عبوری از بین دو صفحه موازی ثابت در اعداد رینولدز، اعداد وایزنبرگ و نسبت لزجت متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است.

نتایج عددی به دست آمده نشان می دهد که الگوریتم دو زمانه روش محلی پیش شرط توانی حسگر تنش برای جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک دارای دقت بسیار خوبی می باشد. همچنین روش پیش شرط توانی با حسگرهای فشار، سرعت و تنش با دو روش پیش شرط استاندارد (SPM) و تراکم پذیر استاندارد (SAC) در اعداد رینولدز، اعداد وایزنبرگ و نسبت لزجت متفاوت باهم مقایسه

شده‌اند، که نتایج نشان می‌دهند در نسبت لزجت کمتر از ۰,۵، روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش و در نسبت لزجت مساوی و بزرگتر از ۰,۵، روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر سرعت یا فشار بهترین نرخ همگرایی و بیشترین مقدار کاهش تعداد تکرار را دارند. از سوی دیگر این نتایج نشان می‌دهد با افزایش مقدار عدد رینولدز یا عدد وایزنبرگ سرعت همگرایی افزایش می‌یابد و به موجب آن تعداد تکرار حل کاهش پیدا می‌کند. در این پژوهش برای اولین بار از روش محلی پیش‌شرط توانی حسگر تنش برای حل جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک عبوری از بین دو صفحه ثابت مورد بررسی قرار گرفته است، نتایج نشان می‌دهد علاوه بر دقت و افزایش نرخ همگرایی بین ۳ تا ۷۶ درصد، سبب افزایش پایداری حل با وجود خاصیت نوسانی میدان سرعت می‌شود.

۳-۵ پیشنهادات

با توجه به تازگی موضوع تحقیق حاضر و مطالعات صورت گرفته در این دامنه، می‌توان پیشنهاداتی برای ادامه تحقیق در زمینه سیالات ویسکوالاستیک به صورت زیر ارائه داد:

- حل تحلیلی برای جریان غیردائم سیال ویسکوالاستیک و نیوتنی در ناحیه توسعه‌یافته بین دو صفحه موازی با شرط مرزی ورودی سرعت متوسط ثابت و شرط مرزی خروجی توسعه‌یافته برای مدل‌های ماکسول ساده، ماکسول توسعه‌یافته و اولدروید-بی.
- استفاده از حسگر تنش به صورت نمایی یا لگاریتمی جهت افزایش نرخ همگرایی در روش پیش‌شرط توانی.
- توسعه روش پیش‌شرط توانی با استفاده از حسگر تنش برای تحلیل عددی جریان‌های دائم و غیردائم سیال ویسکوالاستیک با استفاده از معادله متشکله مدل فن تین تتر برای کانال مستطیلی در ناحیه در حال توسعه.
- توسعه روش پیش‌شرط توانی برای بررسی عددی انتقال حرارت دائم و غیردائم در کانال دوبعدی با استفاده از حسگر تنش.
- استفاده از روش پیش‌شرط توانی برای بررسی عددی جریان و انتقال حرارت دائم و غیر دائم سیال ویسکوالاستیک داخل حفره با استفاده از حسگر تنش.
- بررسی عددی جریان‌های ناپایدار دائم و غیردائم سیال ویسکوالاستیک با استفاده از روش پیش‌شرط توانی و حسگر تنش برای کانال با مقطع مستطیلی مستقیم یا خمیده و مدور.
- بررسی عددی جریان و انتقال حرارت دائم و غیردائم سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های خمیده ایستا و چرخان با استفاده از روش پیش‌شرط توانی و حسگر تنش.
- استفاده از روش پیش‌شرط توانی با حسگر تنش برای بررسی عددی جریان و انتقال حرارت دائم و غیردائم سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه داخل لوله.
- استفاده از روش پیش‌شرط توانی با حسگر تنش برای بررسی عددی جریان و انتقال حرارت دائم و غیردائم سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه سطح آزاد با استفاده از مدل

PTT.

- بررسی لایه‌مرزی جریان و انتقال حرارت دائم و غیردائم سیال ویسکوالاستیک با استفاده از روش پیش‌شرط توانی و حسگر تنش.
- استفاده از روش پیش‌شرط توانی با حسگر تنش برای بررسی جریان دائم و غیردائم سیال ویسکوالاستیک داخل کانال مستطیلی یا دوار با استفاده از روش حجم محدود جیمسون.

مراجع

- [۱] شیخی نارانی م، (۱۳۷۱)، “بررسی خواص، جریان و انتقال حرارت و اختلاط سیالات غیرنیوتونی”، چاپ اول، جهاد دانشگاهی صنعتی امیرکبیر، تهران.
- [2] Bird, R. B. (1987). “CF₂ Curtiss, RC Armstrong and O. Hassager”. *Dynamics of polymeric liquids*, 2.
- [3] Phan-Thien, N. (2003). "Understanding viscoelasticity". *APPLIED RHEOLOGY*, 13(5), 240-241.
- [4] Huilgol, R. R. and Phan-Thien, N. (1997), “Fluid Mechanic of Viscoelasticity”, First Edition, Elsevier.
- [5] Jameson, A. (1991, June). “Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings”. In *10th Computational Fluid Dynamics Conference* (p. 1596).
- [6] Arnone, A., Liou, M. S., & POVINELLI, L. (1993, July). “Multigrid time-accurate integration of Navier-Stokes equations”. In *11th Computational Fluid Dynamics Conference* (p. 3361).
- [7] Rouzbahani, F., & Hejranfar, K. (2018). “Numerical simulation of wave-floating bodies interaction using a truly incompressible SPH method with artificial compressibility approach”. *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, 8(1), 241-252.
- [۸] روزبهانی، فردین و هجرانفر، کاظم، (۱۳۹۷)، “شبیه سازی عددی اندرکنش موج – اجسام شناور با یک روش هیدرودینامیک ذرات هموار کاملاً تراکم ناپذیر بر پایه تراکم پذیری مصنوعی”، مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، دوره ۸، شماره ۱، صفحه ۲۴۱-۲۵۲.
- [9] Patankar, S. V. (1980). “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, *McGraw-Hill, New York*.
- [10] Chorin, A. J. (1997). “A numerical method for solving incompressible viscous flow problems”. *Journal of computational physics*, 135(2), 118-125.
- [11] Turkel, E. (1987). “Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations”. *Journal of computational physics*, 72(2), 277-298.
- [12] Malan, A. G., Lewis, R. W., & Nithiarasu, P. (2002). “An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: Part I. Theory and implementation”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(5), 695-714.
- [13] Malan, A. G., Lewis, R. W., & Nithiarasu, P. (2002). “An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: part II. Application”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(5), 715-729.
- [14] Esfahanian, V., & Akbarzadeh, P. (2008). “The Jameson’s numerical method for solving the incompressible viscous and inviscid flows by means of artificial compressibility and preconditioning method”. *Applied Mathematics and Computation*, 206(2), 651-661.

- [15] Esfahanian, V., Akbarzadeh, P., & Hejranfar, K. (2012). "An improved progressive preconditioning method for steady non-cavitating and sheet-cavitating flows". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 68(2), 210-232.
- [۱۶] م.درازگیسو، پ.اکبرزاده، ۱۳۹۵، "روش پیش‌شرط توانی ضمنی دوزمانه جهت حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر ناپایا"، مهندس مکانیک مدرس، شماره ۲، صفحه‌ای ۹۹-۱۱۰.
- [۱۷] پ.اکبرزاده، م.درازگیسو، م.شهنازی، ا.عسکری‌له‌دارینی، ۱۳۹۸، "روش پیش‌شرط توانی در تسریع نرخ همگرایی جریان‌های تراکم‌ناپذیر پایا و ناپایای آشفته"، مهندسی امیرکبیر، دوره ۵۱، شماره ۲، صفحه ۴۳۷-۴۵۳.
- [18] Ericksen, J. L. (1956). "Overdetermination of the speed in rectilinear motion of non-Newtonian fluids". *Quarterly of Applied Mathematics*, 14(3), 318-321.
- [19] Wheeler, J. A., & Wissler, E. H. (1965). "The friction factor-Reynolds number relation for the steady flow of pseudoplastic fluids through rectangular ducts. Part I". *Theory. AIChE Journal*, 11(2), 207-212.
- [20] Giesekus, H. (1965). "Sekundarströmungen in viskoelastischen Flüssigkeiten bei stationärer und periodischer Bewegung". *Rheologica Acta*, 4(2), 85-101.
- [21] Townsend, P., Walters, K., & Waterhouse, W. M. (1976). "Secondary flows in pipes of square cross-section and the measurement of the second normal stress difference". *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1(2), 107-123.
- [22] Gaidos, R. E., & Darby, R. (1988). "Numerical simulation and change in type in the developing flow of a nonlinear viscoelastic fluid". *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 29, 59-79.
- [۲۳] ع. جلالی، م. کیهانی، م. نوروزی. ۱۳۹۰. "مدل سازی عددی سه بعدی جریان سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در یک کانال مستطیلی". نوزدهمین همایش سالانه مهندسی مکانیک.
- [۲۴] ع. جلالی، م. کیهانی، م. نوروزی. ۱۳۹۰. مدل سازی سه بعدی اثر ناحیه ورودی در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال مستطیلی. مهندسی مکانیک مدرس ۲. ۰-۲۷.
- [25] Waters, N. D., & King, M. J. (1970). "Unsteady flow of an elastic-viscous liquid", *Rheologica Acta*, 9(3), 345-355.
- [26] Fetecau, C., & Fetecau, C. (2005). "Unsteady flows of Oldroyd-B fluids in a channel of rectangular cross-section". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(9), 1214-1219.
- [27] Mompean, G., & Deville, M. (1997). "Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction". *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 72(2-3), 253-279.
- [28] Sato, T., & Richardson, S. M. (1994). "Explicit numerical simulation of time-dependent viscoelastic flow problems by a finite element/finite volume method". *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 51(3), 249-275.

- [29] Tomé, M. F., Mangiavacchi, N., Cuminato, J. A., Castelo, A., & McKee, S. (2002). "A finite difference technique for simulating unsteady viscoelastic free surface flows". *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 106(2-3), 61-106.
- [30] Mori, N. (1993). "Velocity measurement in the startup flow of viscoelastic fluids through contraction with rectangular cross-section". *Nihon Reoroji Gakkaishi*, 21, 33-40.
- [31] Yamamoto, T., Morimoto, M., & Nakamura, K. (1999). "Velocity measurement of start-up flow of polymeric solutions in a planar contraction channel". *Rheologica acta*, 38(4), 384-391.
- [32] Letelier, M. F., & Siginer, D. A. (2003). "Secondary flows of viscoelastic liquids in straight tubes". *International journal of solids and structures*, 40(19), 5081-5095.
- [33] Hoffmann, K. A. (1993). Computational fluid dynamics for engineers. *Engineering education system*, 100-103.
- [34] Tamamidis, P., Zhang, G., & Assanis, D. N. (1996). "Comparison of pressure-based and artificial compressibility methods for solving 3D steady incompressible viscous flows". *Journal of Computational Physics*, 124(1), 1-13.
- [35] Adibi, T. (2018). Three-dimensional Characteristic Based Scheme and Artificial Compressibility Factor on Its Accuracy and Convergence. 37-48.

[۳۶] پ. اکبرزاده، روش های پیش شرط در شبیه سازی عددی جریان های کاویتاسیون، رساله دکتری، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۸۹.

- [37] Turkel, E. (1993). "Review of preconditioning methods for fluid dynamics". *Applied Numerical Mathematics*, 12(1-3), 257-284.
- [38] Esfahanian, V., Akbarzadeh, P., & Hejranfar, K. (2012). "An improved progressive preconditioning method for steady non- cavitating and sheet-cavitating flows". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 68(2), 210-232.

[۳۹] م. درازگیسو، روش پیش شرط توانی در بهبود همگرایی شبیه سازی عددی جریان های ناپایای عبوری از هیدروفویل ها، پایان نامه ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱۳۹۴.

- [40] Haque, M. A. (2009). "Velocity Distribution of Unsteady Laminar Flow for Viscous Fluid". *GANIT: Journal of Bangladesh Mathematical Society*, 29, 1-9.
- [41] Aristov, S. N., & Knyazev, D. V. (2012). "Viscous fluid flow between moving parallel plates". *Fluid Dynamics*, 47(4), 476-482.
- [42] Harlow, F. H., & Welch, J. E. (1965). "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface". *The physics of fluids*, 8(12), 2182-2189.
- [43] Veress, A. (2003). "Incompressible flow solver by means of pseudo-compressible method". *HEJ ANM-030110-A*.

[۴۴] وثوقی فر، ح.، مکانیک سیالات محاسباتی در محیط متلب، جلد اول، چاپ اول، دانشگاه آزاد اسلامی – واحد تهران جنوب، تهران، ص ۳۲۲.

- [45] Kohlman, R. S., Joo, J., Epstein, A. J., & Mark, J. E. (1996). "Physical properties of polymers handbook". *American Institute of Physics, New York*.
- [46] Qi, H., & Xu, M. (2007). "Unsteady flow of viscoelastic fluid with fractional Maxwell model in a channel". *Mechanics Research Communications*, 34(2), 210-212.
- [47] Duartea, A. S. R., Mirandab, A. I. P., & Oliveiraa, P. J. (2008). "Numerical and analytical modeling of unsteady viscoelastic flows: The start-up and pulsating test case problems". *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 154, 153–169.

Abstract

Today, the viscoelastic fluids have plenty usages in oil, chemistry, military and medical industries. Viscoelastic fluids simultaneously show the qualities of viscous fluid and solid elastic, also due to elastic qualities of this fluids in Unsteady shear flows, they gain the unique quality like the damped oscillating behavior in velocity field without foreign oscillating factor in boundary condition and outside forces. In this essay, the power-law preconditioning method with preconditioned matrix has been used for Numerical stability of unsteady flow of viscoelastic fluid passing through two fixed parallel plates. the preconditioning matrix is adapted from the stress field power-law relation. In the power-law preconditioning method with a change in time derivation of conservation equation, the governing equations are converted from parabolic-elliptic form to hyperbolic form (artificial compressibility). For modeling these kinds of flow, simple Maxwell equation is used. To solve the governing and constituent equations, a dual-time implicit algorithm and discretization of equations with finite difference method are applied. For the convergence toward stabilization, The Vosoughifar four-step numerical method is used. The computations of viscoelastic fluids flow passing through two fixed parallel plates, are presented in Reynolds numbers, Weissenberg numbers and Viscosity ratio. The results contain velocity profile and contour, and the effect of standard compressibility methods, standard preconditioning and power-law preconditioning with pressure, velocity and stress sensor on the rate of convergence for these flows. The results are validated using numerical computations and analysis, which indicate that the locally stress sensor power-law preconditioning method for viscosity ratios less than 5% and the locally velocity sensor power-law preconditioning method for viscosity ratios equal to or greater than 5% have the highest convergence speed, thus reducing the computational cost. In addition to high accuracy, the locally method of stress sensor power-law preconditioning has high stability in numerical solution for unsteady viscoelastic fluid flow.

Keywords: Power-law preconditioning method, Stress sensor, Finite difference, Dual-time implicit algorithm, Unsteady Viscoelastic fluid flow, Convergence rate, Simple Maxwell model.



Engineering Faculty of Mechanical and Mechatronics

M.Sc. Thesis in Energy Conversion Engineering

The development of power-law preconditioning approach for numerical analysis of unsteady viscoelastic flows

By: Hamidreza Ghiyasi Shahraky

Supervisors:

Dr. Mahmood Norouzi

Dr. Ali Abbas Nejad

Advisor:

Dr. Pooria Akbarzadeh

January 2022