بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندســی مکانیک

گروه تبدیل انرژی

بررسی عددی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیلات همگرا و واگرا

دانشجو:

سبحان مسیبی درچه

استاد راهنما:

دکتر محمدمحسن شاه‌مردان

استاد مشاور:

دکتر محمود نوروزی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

زمستان **۱۳۹۰**

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مکانیک

گروه : تبدیل انرژی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سبحان مسیبی درچه

تحت عنوان:

بررسی عددی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیلات همگرا و واگرا

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : **محمدمحسن شاه‌مردان**		نام و نام خانوادگی : **محمود نوروزی**	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : **محسن نظری**		نام و نام خانوادگی : **محمود چهارطاقی**	
نام و نام خانوادگی : **پوریا اکبرزاده**			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تقدیم به

پدرم،

مادرم

و همسر آینده‌ام!

تشکر و قدردانی

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، به‌ویژه اساتید محترم آقای دکتر محمد محسن شاه‌مردان و آقای دکتر محمود نوروزی که با راهنمایی‌های مدبرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

تعهد نامه

اینجانب **سبحان مسیبی درچه** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک- گرایش تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیـک دانشـگاه صـنعتی شـاهرود نویسـنده پایـان نامـه بـا عنـوان **"بررسی عددی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیلات همگرا و واگــرا"** تحت راهنمائی دکتر **محمد محسن شاه‌مردان و دکتر محمود نوروزی**متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده‌است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده‌است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده‌است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده‌است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد**.**

و

چکیده

در این تحقیق، جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرای متقارن محوری به‌صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا معادلات پیوستگی، ممنتوم و انرژی در حالت کلی در مختصات استوانه‌ای ارائه شده‌اند و سپس روابط کلی معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک (مدل CEF) ارائه و توابع ویسکومتریک لزجت، اختلاف تنش عمودی اول و دوم با استفاده از مدل کاریو-یاسودا ارائه شده است. در ادامه، روش عددی مورد استفاده تشریح و معادلات حاکم در این تحقیق، با استفاده از روش تفاضل محدود به‌صورت صریح گسسته‌سازی شده‌اند. جهت پایداری عددی بیشتر، شبکه عددی جابجا شده به‌کار گرفته شد تا پارامترهای جریان به‌یکدیگر جفت شده و حل عددی همگرایی بهتری پیدا کند. جهت حل پیمایش زمان مجازی، از روش تراکم‌پذیری مصنوعی استفاده شده تا فشار نیز مانند پارامترهای دیگر جریان در هر زمان محاسبه شود.

نتایج عددی برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک شامل خطوط جریان، توزیع سرعت، توزیع فشار، تنش برشی، لزجت، دما، ناسلت و ... ارائه و در ذیل به گزیده‌ای از نتایج حاصله از از این حل عددی اشاره شده است.

- خاصیت الاستیک سیال، باعث کاهش بیشینه سرعت محور در مرکز می‌شود.
- افت فشار سیال نیوتنی در مقایسه با سیال نیوتنی تعمیم‌یافته (رقیق‌شونده) و ویسکو-الاستیک بیشتر می‌باشد.
- کاهش اندیس توانی n، باعث افت فشار کمتر و افزایش خاصیت الاستیک باعث افزایش افت فشار می‌شود.

- طول جریان در حال توسعه سیال رقیق‌شونده و ویسکوالاستیک از سیال نیوتنی بیشتر می‌باشد. در حالت کلی، کاهش اندیس توانی، باعث افزایش طول در حال توسعه جریان و افزایش خاصیت الاستیک باعث کاهش این طول می‌شود.
- گردابه‌های ایجاد شده در جریان سیال در تبدیل واگرا، برای سیال ویسکوالاستیک و رقیق‌شونده بزرگتر از سیال نیوتنی می‌باشد. در حالت کلی، کاهش اندیس توانی n باعث افزایش طول گردابه و افزایش اختلاف تنش اول باعث کاهش این طول می‌شود و اختلاف تنش دوم تاثیری بر گردابه‌ها ندارد.
- نرخ برش تعمیم‌یافته سیال در کنار دیواره‌ها و در منطقه‌ای که تغییر سطح مقطع وجود دارد به‌شدت بالاست و همین امر باعث کاهش لزجت سیال در این مناطق می‌شود.
- نرخ برش تعمیم‌یافته سیال در خط مرکزی در قسمت توسعه‌یافته جریان و مناطق مرکزی گردابه‌ها مقادیر کوچکی دارد و همین امر باعث می‌شود لزجت بی‌بعد سیال تقریبا به مقدار یک برسد.
- توزیع ناسلت در تبدیل همگرا و واگرا به‌دلیل وجود دیواره عمودی در محل تغییر سطح مقطع، در این منطقه دارای بیشینه محلی می‌باشد و پس از آن به مقدار ثابتی میل می‌کند.
- ناسلت سیال ویسکوالاستیک بیشتر از سیال نیوتنی می‌باشد.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل ۱. مقدمه

۱-۱- مقدمه

در این فصل، مروری کوتاه بر مکانیک سیالات غیرنیوتنی مخصوصا سیالات ویسکوالاستیک صورت می‌گیرد. در ابتدا تفاوت سیالات نیوتنی با سیالات غیرنیوتنی تشریح شده است. سپس بحث کوتاهی روی چند معادله ساختاری سیالات ویسکوالاستیک انجام شده است.

۱-۲- طبقه‌بندی سیالات ویسکوالاستیک

سیال نیوتنی سیالی است که اولا تنش تسلیم نداشته باشد و ثانیا تنش برشی آن با نرخ برش رابطه خطی داشته باشد. نسبت تغییرات تنش به نرخ برش که برای سیال نیوتنی همواره مقداری ثابت می‌باشد لزجت نامیده می‌شود. سیال غیرنیوتنی نیز به سیالی گفته می‌شود که حداقل یکی از شرایط سیال نیوتنی را نداشته باشد. این سیالات به سه گروه زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

- سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان
- سیالات غیرنیوتنی وابسته به زمان
- سیالات ویسکوالاستیک

سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان، سیالاتی هستند که رابطه تنش برشی و لزجت در آن‌ها به‌صورت غیرخطی می‌باشد. در حالت‌های خاصی این گروه از سیالات دارای تنش تسلیم نیز هستند. در این گونه از مواد، برای اینکه ماده جریان پیدا کند این است که تنش به حد خاصی برسد و در تنش‌های کمتر از این مقدار مانند یک جامد عمل می‌کند و تنش را تحمل می‌کند. پلاستیک بینگهام یکی از معروفترین موادی است که دارای تنش تسلیم می‌باشد. خمیردندان یک مثال ساده برای سیالات دارای تنش تسلیم می‌باشد که باید تنش برشی از حد مشخصی بیشتر شود که آن جریان پیدا کند.

سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان که بدون تنش تسلیم هستند به نام سیالات نیوتنی تعمیم‌یافته معروف هستند و به دو گروه تقسیم می‌شوند:

سیالات شبه‌پلاستیک

سیالات دایلاتنت

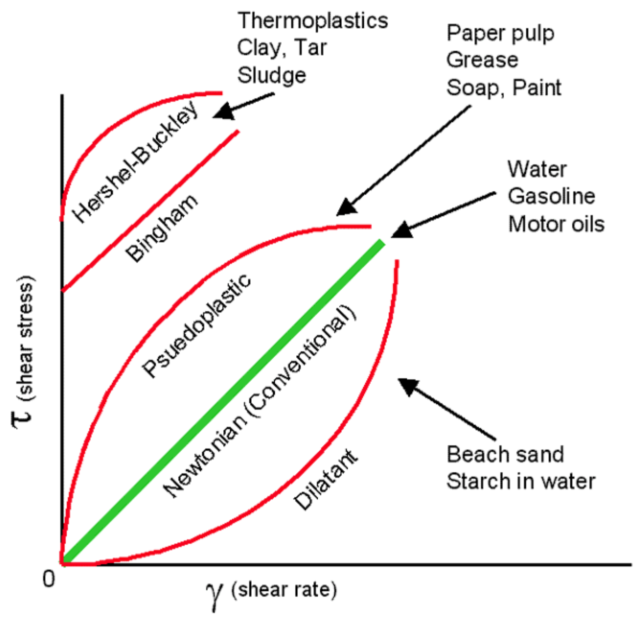
لزجت این مواد به‌صورت یک تابع از نرخ برش سیال می‌باشد. مدل‌های زیادی برای ارائه این رابطه بین لزجت و نرخ برش ارائه شده است. یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین این مدل‌ها، مدل توانی است که در آن لزجت به عنوان یک تابع توانی نرخ برش در نظر گرفته می‌شود [۱]. یکی از اشکالات این مدل، این است که لزجت در نرخ برش صفر برابر مقداری نامحدود می‌شود. البته عکس این قضیه نیز صادق است، یعنی لزجت در نرخ برش‌های بزرگ بسیار کوچک می‌شود. مدل‌های دیگری نیز مانند مدل کراس، مدل کاریو-یاسودا و مدل راینر- فیلیپوف از جمله مدل‌های نیوتنی تعمیم‌یافته هستند که مشکل مدل توانی را ندارند [۲]. در این مدل‌ها، لزجت در نرخ برش صفر و لزجت در نرخ برش‌های بالا معمولا مقداری ثابت به‌دست می‌آید که آن‌ها را به‌ترتیب با (η_0) و (η_∞) نمایش می‌دهند. معمولا با افزایش ثابت‌های مدل‌های غیرنیوتنی، رفتار تنش وابسته به نرخ برش بهتر مدل می‌شود.

سیالات شبه‌پلاستیک، سیالاتی هستند که افزایش نرخ برش باعث کاهش لزجت آن‌ها می‌شود. سیالات دایلاتنت رفتاری عکس این حالت از خود نشان می‌دهند. در اکثر مدل‌های غیرنیوتنی به‌ازای اندیس توانی کوچکتر از ۱ $(n<1)$ رفتار شبه‌پلاستیک و به‌ازای اندیس توانی بزرگتر از ۱ $(n>1)$ رفتار دایلاتنت دارند. شایان ذکر است برای $n=1$ سیال رفتار نیوتنی از خود نشان می‌دهد. شکل (۱-۱) رفتار تنش در برابر نرخ برش را برای انواع سیالات نمایش می‌دهد.

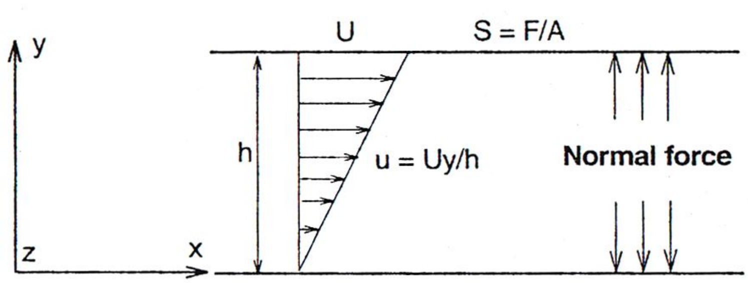
در سیالات غیرنیوتنی تابع زمان، لزجت تابعی از نرخ برش و زمان می‌باشد. در این مواد، با اعمال نرخ برش، ساختمان ماده مدام تغییر می‌کند (لزجت نیز تغییر می‌کند) تا اینکه لزجت به یک مقدار ثابتی برسد.

گروه سوم از سیالات غیرنیوتنی، سیالات ویسکوالاستیک هستند که همزمان خواص ویسکوز سیال و الاستیک جامد را دارا می‌باشند. ساده‌ترین آزمایشی که در مورد رفتار سیال ویسکوالاستیک می‌توان

به آن اشاره کرد، آزمایش جریان برشی ساده می‌باشد. جریان سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی را در نظر بگیرید (شکل (۱-۲) را ببینید) که صفحه بالایی با سرعت U حرکت می‌کند. اگر صفحه بالایی ناگهان متوقف شود تنش به‌طور آنی صفر نمی‌شود. این در حالی است که برای سیال نیوتنی تنش سریعا صفر می‌شود[۴]. پس از توقف صفحه بالایی در جریان برش سیال ویسکوالاستیک، این صفحه کمی عقب برمی‌گردد. این بازگشت، به خاصیت الاستیک سیال برمی-گردد.



شکل (۱-۱) منحنی های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات مستقل از زمان [۳].



شکل (۱-۲) طرح شماتیک جریان برشی ساده (جریان کوئت)[۴].

خاصیت دیگر سیالات ویسکوالاستیک این است که این مواد معمولا هنگامی که سیلان پیدا کنند، تنش‌های عمودی نابرابر پیدا می‌کنند. در جریان برشی ساده سیال نیوتنی، تنش عمودی همواره مقداری ثابت است که برابر با فشار استاتیکی می‌باشد. این در حالی است که در جریان برشی سیال ویسکوالاستیک، بین تنش‌های عمودی اختلاف وجود دارد. در جریان برش ساده، اگر جهت جریان را جهت x و راستای تغییرات سرعت را جهت y بنامیم، اختلاف تنش عمودی به‌صورت زیر تعریف می-شود[۲]:

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \quad (۱-۱)$$

حال، اگر جهت راستگرد عمود بر جهت‌های x و y را جهت z بنامیم، می‌توان اختلاف تنش عمودی دوم را نیز به‌صورت زیر تعریف کرد [۲]:

$$N_1 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} \quad (۲-۱)$$

ثابت‌های اختلاف تنش عمودی نیز بر اساس روابط (۱-۱) و (۱-۲) به‌دست می‌آیند[۲]:

$$\Psi_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2} \quad (۳-۱)$$

$$\Psi_2 = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} \quad (۴-۱)$$

که در آن، Ψ_1 و Ψ_2 ثابت‌های تنش عمودی اول و دوم و $\dot{\gamma}$ نرخ برش می‌باشد. همانطور که قبلا اشاره شد لزجت در سیالات غیرنیوتنی تابعی از نرخ برش می‌باشد. بنابراین برای سیال ویسکوالاستیک می‌توان بر اساس تنش برشی و نرخ برش، لزجت سیال ویسکوالاستیک را به‌دست آورد [۲]:

$$\eta = \frac{\sigma_{xy}}{\dot{\gamma}} \quad (۵-۱)$$

بر اساس روابط مذکور، لزجت، اختلاف تنش عمودی اول و دوم در سیال ویسکوالاستیک همگی تابعی از نرخ برش می‌باشد.

۱-۳- پارامترهای مهم در جریان سیالات ویسکوالاستیک

معمولا برای بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک، از دو عدد بی‌بعد دبورا و وایزنبرگ استفاده می‌کنند. عدد دبورا، بر اساس نسبت زمان آسودگی از تنش به زمان مشخصه تعریف می‌شود. نسبت نیروی ناشی از خاصیت الاستیک به نیروی حاصل از لزجت سیال را نیز به‌صورت عدد وایزنبرگ نمایش می‌دهند [۴]:

$$De = \lambda\omega = \lambda / T \qquad (۱-۶)$$

$$Wi = \lambda\dot{\gamma} \qquad (۱-۷)$$

که در آن، λ زمان مشخصه ماده (زمان آسودگی از تنش)، T زمان مشخصه جریان، ω فرکانس مشخصه جریان و $\dot{\gamma}$ نرخ برش جریان می‌باشد. هر چه اعداد دبورا و وایزنبرگ برای یک ماده کوچکتر باشد ماده شانس جریان یافتن بیشتری پیدا می‌کند.

۱-۴- معادلات متشکله مواد و سیالات ویسکوالاستیک

منظور از معادله متشکله، معادله‌ای است که قادر به بیان رابطه بین تنش و تغییر شکل یک ماده مشخص باشد. در این بخش مروری اجمالی بر معادلات متشکله سیالات ویسکوالاستیک صورت می‌گیرد. معادله متشکله سیال نیوتنی توسط اسحاق نیوتن بیان شد [۵].

قانون پایه یک سیال نیوتنی به شکل زیر قابل بیان است:

$$\tau_{ij} = (-P + \lambda\dot{\varepsilon}_{kk})\delta_{ij} + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (۱-۸)$$

در رابطه (۱-۸)، P فشار استاتیکی، $\dot{\varepsilon}$ نرخ برش و λ و η ثابتهای ویسکوز هستند.

به‌طور کلی برای مواد ویسکوالاستیک می‌توان بی‌نهایت معادله متشکله در نظر گرفت! این معادلات می‌توانند به اشکال متنوعی رابطه‌ای بین بسط مشتقات و انتگرال‌های تنش و نرخ برش را در بر بگیرند.

می‌توان معادلات متشکله را به دو دسته معادلات خطی و غیر خطی نیز تقسیم نمود. در ادامه در مورد این معادلات بحث شده و تعدادی از معروف‌ترین این معادلات معرفی می‌شوند.

۱-۴-۱- مدل‌های ویسکوالاستیک خطی

مدل‌های ویسکوالاستیک خطی بر پایه تلفیق خواص جامدات خطی و سیالات نیوتنی ارائه شده‌اند. به‌عبارتی این مدل‌ها از ترکیب‌های مختلف مجموعه‌ای از فنرها و دمپرهای خطی حاصل شده‌اند. لذا معادله متشکله هر مدل ویسکوالاستیک خطی به شکل زیر قابل بیان است [۶،۷]:

$$(1+\lambda_1\frac{\partial}{\partial t}+\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\ldots+\lambda_n\frac{\partial^n}{\partial t^n})\tau_{ij}=\eta_0(1+\xi_1\frac{\partial}{\partial t}+\xi_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\ldots+\xi_m\frac{\partial^m}{\partial t^m})\gamma_{ij} \qquad (۹-۱)$$

در رابطه (۱-۹) ، مقادیر λ_i و ξ_i به‌ترتیب زمان آسودگی از تنش و زمان تاخیر سیال از مرتبه i بوده و η_0 لزجت در نرخ برش صفر، τ_{ij} تنش برشی و γ_{ij} نرخ برش است. همچنین مقادیر m و n بصورت $n=m$ یا $n=m+1$ با هم رابطه دارند. بنابراین با انتخاب اختیاری مقادیر n و m می‌توان مدل ویسکوالاستیک جدیدی را برای یک ماده تشکیل داد. در اینجا ثابت‌های زمانی مرتبه پایین از ثابت‌های زمانی مرتبه بالا غالب‌تر هستند. همچنین به ازای $\lambda_i=\xi_i=0$ مدل مشابه سیالات نیوتنی خواهد بود. مقدار نرخ برش (γ_{ij}) نیز به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (۱۰-۱)$$

که در رابطه (۱-۱۰)، u سرعت و x جهت مختصات است. مدل‌های ویسکوالاستیک خطی برای شبیه‌سازی جریان محلول‌های رقیق پلیمری و سوسپانسیون‌های رقیق ذرات کروی جامد در سیالات نیوتنی بسیار مناسب هستند. اصولاً پاسخ این مدل‌ها برای تغییر شکل‌های کوچک با فیزیک جریان سازگار بوده اما پاسخ آن برای تغییر شکل‌های بزرگ پرخطا است. استفاده از این مدل‌ها در محاسبات مربوط به تجهیزات رئومتری و برای تغییر شکل‌های کوچک متداول است.

یکی از اولین و معروفترین مدل‌های ویسکوالاستیک خطی مدل ماکسول است. در این مدل قانون پایه بر اساس یک فنر و دمپر سری تعریف می‌شود. مدل ماکسول به شکل زیر تعریف شده است [۴]:

$$\tau_{ij} + \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \eta \gamma_{ij} \tag{۱-۱۱}$$

در رابطه (۱-۱۱)، η لزجت و μ مدول برشی ماده است. مطابق مدل ماکسول ماده دارای زمان آسودگی از تنش و فاقد زمان رهایی از تغییر شکل است. در این مدل با توقف برش‌دهی، نرخ تغییر شکل در سرتاسر ماده به‌طور آنی صفر خواهد شد. بنابراین مدل ماکسول برای تغییر شکل‌های کوچک محلولهای پلیمری رقیق (مواد ویسکوالاستیک دارای خواص ویسکوز و الاستیک تقریباً خطی) که دارای زمان رهایی از تغییر شکل کوچک هستند، مناسب است.

در مدل کلوین-ویت، رفتار سیال ویسکوالاستیک بر اساس یک فنر و دمپر موازی خطی شبیه‌سازی شده است.

رابطه بین تنش و نرخ برش در این مدل به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \mu(\gamma_{ij} + \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}) \tag{۱-۱۲}$$

رفتار این مدل بر عکس(۱-۱۲) مدل ماکسول است و هرچند در این مدل یکی از زمان‌های رهایی از تغییر شکل لحاظ شده اما مدل دارای زمان آسودگی از تنش نیست.

در مدل برگرز یک المان ماکسول با یک المان کلوین-ویت سری شده است.

مدل برگرز به شکل زیر قابل بیان است:

$$\tau_{ij} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial t^2} = (\eta_1 + \eta_2)\gamma_{ij} + (\lambda_1\eta_2 + \lambda_2\eta_1)\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \tag{۱-۱۳}$$

مسلم است که مدل برگرز رفتار کاملتری را از یک ماده ویسکوالاستیک ارائه می‌کند. در حالت خاصی از مدل برگرز، چنانچه یکی از فنرها یا دمپرهای المان ماکسول حذف شود، مدل جدیدی به نام مدل جفریز به‌دست می‌آید [۴]:

$$\tau_{ij}+\lambda_1\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t}=\eta(\gamma_{ij}+\lambda_2\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}) \qquad (۱۴-۱)$$

مدل جفریز مدل ساده و نسبتاً مناسبی برای بررسی رفتار یک ماده ویسکوالاستیک است زیرا در آن یک زمان آسودگی از تنش و یک زمان رهایی از تغییر شکل لحاظ شده است.

مدل ماکسول توسعه‌یافته از طریق موازی کردن تعداد متناهی از المان‌های ماکسول به‌دست می‌آید. اصولاً یک ماده پلیمری از تعداد زیادی از مولکول‌های رشته‌ای با طول‌های مختلف و احیاناً ساختارهای فضایی متنوع تشکیل شده که سبب ایجاد زمان‌های مختلف آسودگی از تنش در این مواد می‌شود. به‌همین دلیل این مدل برای ایجاد زمان‌های متعدد آسودگی از تنش ایجاد شده است.

می‌توان نشان داد که در مدل ماکسول توسعه‌یافته ضریب الاستیک و لزجت معادل (تابعی از زمان هستند) به شکل زیر قابل بیان می‌باشد [۳]:

$$\mu(t)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\exp(-t/\lambda_i) \qquad (۱۵-۱)$$

$$\eta(t)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i(1-\exp(-t/\lambda_i)) \qquad (۱۶-۱)$$

به‌طور مشابه، مدل کلوین-ویت توسعه‌یافته نیز از طریق سری کردن المان‌های کلوین-ویت قابل تعریف است (جهت ایجاد زمان‌های رهایی از تغییر شکل مختلف).

۱-۴-۲- مدل‌های ویسکوالاستیک غیر خطی

هر چند که مدل‌های ویسکوالاستیک خطی روابط دیفرانسیلی ساده‌ای را بین تنش و نرخ برش پیش‌بینی می‌کنند، اما این مدل‌ها دارای مشکلاتی هستند.

یکی از معروفترین مدل‌های تبیین رفتار سیالات ویسکوالاستیک، خانواده مدل‌های اولدروید است. خانواده اولدروید مبحث مفصلی از مکانیک محیط‌های پیوسته است که پرداختن به آن از حوصله این بحث خارج است و در اینجا تنها به نتایج حاصل از آن (معادلات متشکله‌ای که در زمینه مدل‌سازی جریان سیالات ویسکوالاستیک کاربرد دارند) پرداخته می‌شود. مدل‌های اولدروید نیاز به محاسبه

مشتق زمانی همرفتی همبسته و نیز مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته تانسور تنش دارند که این مشتقات به‌ترتیب در روابط (۱-۱۷) تا (۱-۲۰) آمده‌اند [۲].

$$\tau^{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot \tau + \tau \cdot (\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۱-۱۷}$$

$$\vdots$$

$$\tau^{(n)} = \frac{D\tau_{(n-1)}}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot \tau^{(n-1)} + \tau^{(n-1)} \cdot (\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۱-۱۸}$$

$$\tau_{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}}\cdot \tau + \tau \cdot (\nabla V)\right\} \tag{۱-۱۹}$$

$$\vdots$$

$$\tau_{(n)} = \frac{D\tau_{(n-1)}}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}}\cdot \tau_{(n-1)} + \tau_{(n-1)} \cdot (\nabla V)\right\} \tag{۱-۲۰}$$

در روابط بالا، τ تانسور تنش، V بردار سرعت و T نیز نماد ترانهاده تانسور است. همچنین مشتقات زمانی همرفتی همبسته و مشتقات زمانی همرفتی پاد همبسته نرخ برش نیز به‌ترتیب به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\gamma^{(1)} = \nabla V + (\nabla V)^{\mathrm{T}} \tag{۱-۲۱}$$

$$\gamma^{(2)} = \frac{D\gamma^{(1)}}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot \gamma^{(1)} + \gamma^{(1)} \cdot (\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۱-۲۲}$$

$$\vdots$$

$$\gamma^{(n)} = \frac{D\gamma^{(n-1)}}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot \gamma^{(n-1)} + \gamma^{(n-1)} \cdot (\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۱-۲۳}$$

$$\gamma_{(1)} = \nabla V + (\nabla V)^{\mathrm{T}} \tag{۱-۲۴}$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}}\cdot \gamma_{(1)} + \gamma_{(1)} \cdot (\nabla V)\right\} \tag{۱-۲۵}$$

$$\vdots$$

$$\gamma_{(n)} = \frac{D\gamma_{(n-1)}}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}}\cdot \gamma_{(n-1)} + \gamma_{(n-1)} \cdot (\nabla V)\right\} \tag{۱-۲۶}$$

در میان مدل‌های اولدروید، دو مدل اولدروید-ای و اولدروید-بی از همه معروفتر هستندکه معادله متشکله این دو مدل به‌ترتیب در روابط (۱-۲۷) و (۱-۲۸) آمده است :

$$\tau+\lambda_1\tau^{(1)}=\eta_0(\gamma^{(1)}+\lambda_2\gamma^{(2)}) \quad (۱-۲۷)$$

$$\tau+\lambda_1\tau_{(1)}=\eta_0(\gamma_{(1)}+\lambda_2\gamma_{(2)}) \quad (۱-۲۸)$$

هرچند این دو مدل به‌خوبی اصول مکانیک محیط‌های پیوسته را ارضا می‌کنند اما در زمینه تعیین اختلاف تنش عمودی دوم دارای ضعف‌هایی هستند. رابطه (۱-۲۷)، معادله متشکله مدل اولدروید-ای بوده که در آن ثابت تنش عمودی دوم قرینه ثابت تنش عمودی اول است ($\Psi_2=-\Psi_1$)، درحالیکه در مدل اولدروید-بی ثابت اختلاف تنش عمودی اول وجود داشته اما ثابت تنش عمودی دوم برابر صفر است ($\Psi_1>0$ و $\Psi_2=0$). از آنجا که در اکثر سیالات ویسکوالاستیک اختلاف تنش عمودی دوم دارای مقداری نسبتاً کوچک و حداکثر ۲۰٪ اختلاف تنش عمودی اول است بنابراین به نظر می‌رسد که پاسخ‌های مدل اولدروید-بی به واقعیت نزدیک است. به‌همین دلیل استفاده از مدل اولدروید-ای چندان رایج نبوده، حال آنکه تحقیقات عددی و تحلیلی فراوانی بر اساس مدل اولدروید-بی انجام شده است. مدل اولدروید-بی به مدل همرفتی جفریز نیز معروف است. این مدل در حالت‌های خاصی به مدل‌های دیگری ساده می‌شود :

اگر $\lambda_2=0$ باشد، دراینصورت مدل فوق همرفتی ماکسول (UCM) به‌دست می‌آید:

$$\tau+\lambda_1\tau_{(1)}=\eta_0\gamma_{(1)} \quad (۱-۲۹)$$

اگر $\lambda_1=0$ شود، مدل اولدروید-بی به مدل سیال مرتبه دو تبدیل می‌گردد:

$$\tau=\eta_0(\gamma_{(1)}+\lambda_2\gamma_{(2)}) \quad (۱-۳۰)$$

اگر $\lambda_1=\lambda_2$ باشد، این مدل به سیال نیوتنی با لزجت η_0 ساده می‌شود.

به‌طور کلی صورت عمومی مدل اولدروید، مدل هشت ثابته اولدروید است که در سال ۱۹۵۸ ارائه شده است [۸]:

$$\begin{aligned}\tau+\lambda_1\tau_{(1)}+\frac{\lambda_3}{2}(\tau\gamma_1+\gamma_1\tau)+\frac{\lambda_5}{2}[tr(\tau)]\gamma_1+\frac{\lambda_6}{2}[tr(\tau\gamma_1)]I=\\-\eta_0\left(\gamma_{(1)}+\lambda_2\gamma_{(2)}+\lambda_4{\gamma_{(1)}}^2+\frac{\lambda_7}{2}\left[tr\left({\gamma_{(1)}}^2\right)\right]I\right)\end{aligned} \quad (۱-۳۱)$$

این مدل قادر به ارائه رفتار بسیار کاملی از یک سیال ویسکوالاستیک است ولی بسیار پیچیده و ناپایداری عددی آن بالا می‌باشد.

مدل راینر-ریولین یکی از مدل‌های غیرخطی ساده برای بررسی جریان‌های برشی سیالات ویسکوالاستیک است. معادله متشکله مدل راینر-ریولین در حالت کلی به‌شکل زیر است [۲]:

$$\tau = \eta\left(II, III\right)\gamma + \Psi_2\left(II, III\right)\gamma \cdot \gamma \tag{۳۲-۱}$$

در رابطه(۱-۳۲)، γ تانسور نرخ برش، η لزجت و Ψ_2 ثابت اختلاف تنش‌های عمودی دوم است. همچنین مقادیر II و III ناوردایی‌های دوم و سوم تانسور نرخ برش هستند.

مدل کریمینال اریکسون فیلبی (CEF) مدل مناسبی برای شبیه‌سازی جریان‌های برشی دائمی سیالات ویسکوالاستیک است. معادله متشکله این مدل به‌شکل زیر است [۲]:

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\gamma_{(1)} - \frac{1}{2}\Psi_1(\dot{\gamma})\gamma_{(2)} + \Psi_2(\dot{\gamma})\left\{\gamma_{(1)}.\gamma_{(1)}\right\} \tag{۳۳-۱}$$

از جمله مزایای این مدل می‌توان به امکان اعمال مستقیم توابع رئولوژیک وابسته به نرخ برش تعمیم-یافته (شامل لزجت و ثابت‌های اختلاف تنش عمودی اول و دوم) در مدل اشاره نمود. پاسخ‌های این مدل در ناحیه اعداد دبورای کوچک و محدوده وسیعی از اعداد وایزنبرگ دقیق بوده و استفاده از آن جهت محاسبات صنعتی رایج است. در تحقیق حاضر از این مدل به عنوان معادله متشکله استفاده شده است.

مدل چهار ثابته فان-تین-تنر (PTT) در اصل بر اساس تئوری شبکه برای مذاب‌های پلیمری طراحی شده است. صورت عمومی این مدل به‌شکل زیر است [۹]:

$$g\tau + \lambda\tau_{(1)} + \frac{1}{2}\xi\lambda\left(\gamma.\tau - \tau.\gamma\right) = \eta_0\gamma \tag{۳۴-۱}$$

در رابطه فوق g تابعی از ناوردایی اول تانسور نرخ برش است:

$$g = \exp\left[-\varepsilon\left(\lambda/\eta_0\right)tr(\tau)\right] \approx 1 - \varepsilon\left(\lambda/\eta_0\right)tr(\tau) \tag{۳۵-۱}$$

از صورت اصلاح‌شده مدل فان-تین-تنر (MPTT) می‌توان برای مدل‌سازی رفتار محلول‌های پلیمری

استفاده نمود. در مدل MPTT صورت کلی تنش به‌صورت مجموع تنش ویسکوز ناشی از ماده حلال نیوتنی و تنش ویسکوالاستیک ماده حل‌شونده تعریف می‌شود:

$$\sigma_{total} = -PI + \eta_N \gamma + \tau \qquad (۱-۳۶)$$

در رابطه فوق، P فشار استاتیکی، $\eta_N \gamma$ نشان‌دهنده تنش ناشی از ماده حلال نیوتنی و τ تنش ویسکوالاستیک ماده حل‌شونده بوده و η_N لزجت ماده حلال نیوتنی و γ تانسور نرخ برش است. معادله متشکله مدل MPTT به‌شکل زیر است [۹]:

$$g\tau + \lambda\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + V.\nabla\tau - L\tau - \tau L^{T}\right) = \eta_m \gamma \qquad (۱-۳۷)$$

در رابطه (۱-۳۷)، مقادیر g، L و η_m به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$g = 1 - \frac{\lambda\varepsilon}{\eta_{m0}} tr(\tau) \qquad (۱-۳۸)$$

$$L = \nabla V^{T} - \xi\gamma/2 \qquad (۱-۳۹)$$

$$\eta_m = \eta_{m0} \frac{1+\xi(2-\xi)\lambda^2\dot{\gamma}^2}{\left(1+\Gamma^2\dot{\gamma}^2\right)^{(1-n)/2}} \qquad (۱-۴۰)$$

در روابط فوق، λ زمان آسودگی از تنش، ε عدد وایزنبرگ، ξ از ثابت‌های ماده، η_m لزجت ماده حل‌شونده، η_{m0} لزجت ماده حل‌شونده در نرخ برش صفر، n توان نمایی برای ماده حل‌شونده (جهت مدل‌سازی لزجت تابع نرخ برش برای ماده حل‌شونده) و $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم‌یافته است. همچنین Γ یک پارامتر زمانی است که معمولاً برابر زمان آسودگی از تنش (λ) فرض می‌شود. به‌این ترتیب لزجت برای کل محلول در نرخ برش صفر به شکل $\eta_0 = \eta_N + \eta_{m0}$ به‌دست می‌آید. بنابراین با تعریف پارامتر $\beta = \eta_{m0}/\eta_0$، مقدار لزجت حلال را می‌توان به شکل $\eta_N = (1-\beta)\eta_0$ نمایش داد. در این حالت مقدار تنش کل و معادله متشکله مدل MPTT به‌صورت زیر خواهد بود [۹]:

$$\sigma_{total} = -PI + (1-\beta)\eta_0\gamma + \tau \qquad (۱-۴۱)$$

$$\lambda\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}+\nabla\cdot\left(V\,\tau\right)\right)=\mu\beta\eta_0\gamma+\lambda\left(L\tau+\tau L^{\mathrm{T}}\right)-g\,\tau \qquad (۴۲-۱)$$

که μ در رابطه فوق به‌شکل زیر خواهد بود :

$$\mu=\frac{1+\xi\left(2-\xi\right)\lambda^2\dot{\gamma}^2}{\left(1+\Gamma^2\dot{\gamma}^2\right)^{(1-n)/2}} \qquad (۴۳-۱)$$

در پایان خاطر نشان می‌شود که یکی از روش‌های رایج در طبقه‌بندی سیالات ویسکوالاستیک، طبقه-بندی یک سیال بر اساس مدل ویسکوالاستیکی است که به‌نحو بهتری نسبت به سایر مدل‌ها قادر به ارائه رفتار آن سیال باشد. به‌همین دلیل برخی از سیالات ویسکوالاستیک به‌صورت سیال اولدروید-بی، سیال ماکسول، سیال فان-تین–تنر و ... نامگذاری می‌شوند.

فصل ۲. پیشینه تحقیق

در این قسمت، گزارش مختصری از برخی مطالعات قبلی که در زمینه حل عددی و تجربی جریان و انتقال حرارت در تبدیلات همگرا و واگرا انجام شده است، ارائه می‌شود. این مطالعات، شامل جریان سیال‌های نیوتنی، غیرنیوتنی و ویسکوالاستیک می‌باشد.

۲-۱- جریان سیال در تبدیل واگرا

در این قسمت جریان سیال در تبدیل واگرا در مطالعات و تحقیقات قبلی مورد بررسی قرار گرفته است. اما از آنجا که فیزیک جریان سیال در تبدیلات واگرای صفحه‌ای تفاوت زیادی با فیزیک جریان در تبدیلات واگرای متقارن محوری دارد، پیشینه تحقیق هر کدام از موضوعات مذکور به‌طور مفصل و جداگانه گزارش شده است.

۲-۱-۱- جریان سیال در تبدیل واگرای صفحه‌ای

جریان سیال در تبدیل‌های واگرای صفحه‌ای از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. این نوع از جریان‌ها دارای هندسه تقریبا ساده و شکل جریان پیچیده هستند. شاید مهمترین پارامتر جریان در تعیین نوع این جریان‌ها عدد بدون بعد رینولدز (Re) می‌باشد. به‌همین جهت در این قسمت برای ارائه گزارش مختصر از مطالعات قبلی، یک دسته‌بندی کلی انجام می‌شود:

-جریان خزشی در تبدیل واگرای صفحه‌ای.

-جریان آرام در تبدیل واگرای صفحه‌ای.

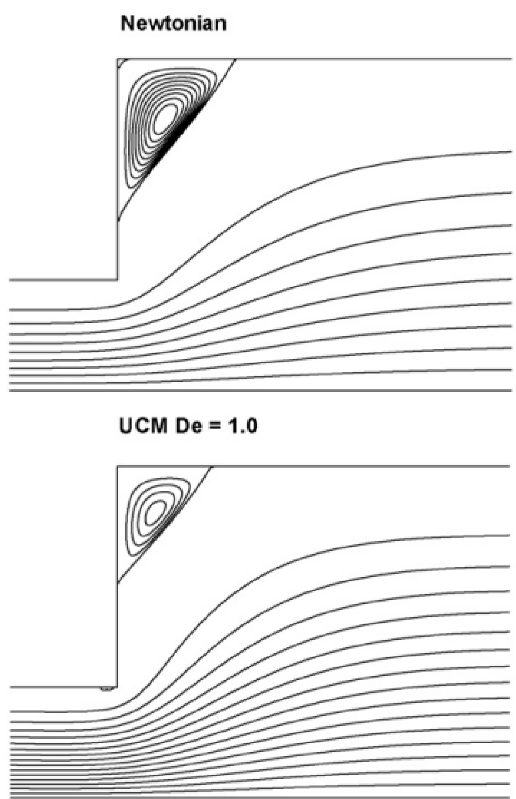
جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک (مدل UCM) در مرجع [۱۱] به‌صورت عددی حل شده است. در این مطالعه تاثیرات عدد دبورا (De) و نسبت تبدیل بر روی پارامترهای جریان مثل اندازه گردابه بررسی شده است. اندازه و شدت گردابه‌های ایجاد شده با افزایش عدد دبورا کاهش پیدا می‌کند. از دیگر نتایج این تحقیق، ارائه رابطه کلی برای طول گردابه و افت فشار برای جریان سیال نیوتنی و

ویسکوالاستیک می‌باشد. به عنوان نمونه روابط زیر برای طول گردابه و ضریب افت فشار سیال نیوتنی ارائه شده‌اند که با نتایج عددی سازگار می‌باشند [۱۱]:

$$\frac{X_R}{D}=\frac{1.01(ER-1)^{1.1}}{1+2.42(ER-1)^{1.1}} \tag{۲-۱}$$

$$C=\frac{0.31(ER-1)}{\sqrt{1+0.56(ER-1)^2}} \tag{۲-۲}$$

جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک با استفاده از سه مدل UCM، اولدروید B و LPPT در تبدیل واگرا با نسبت ۱:۳ بررسی شده است [۱۲]. خاصیت الاستیک سیال ویسکوالاستیک باعث کاهش اندازه و شدت گردابه‌های جریان می‌شود. این نتیجه در شکل(۲-۱) ارائه شده است.



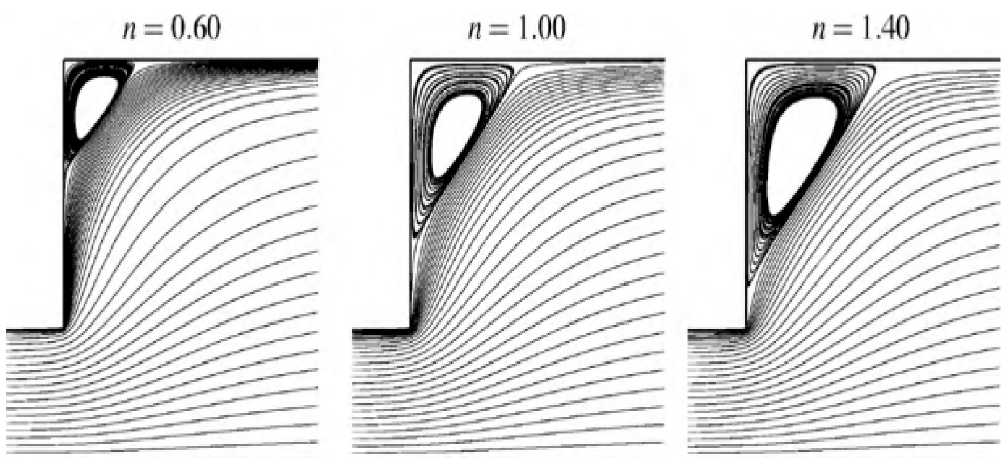
شکل(۲-۱)	- مقایسه خطوط جریان برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک (مدل UCM) [۱۲].

تحقیق دیگری نیز در زمینه جریان خزشی سیال غیرنیوتنی در تبدیل واگرا با نسبت ۱:۳ صورت

گرفته است که از مدل توانی برای مدل‌سازی خواص غیرنیوتنی استفاده شده است [۱۳]. در این مرجع، محدوده رینولدز و اندیس توانی به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$0.0001 \le \mathrm{Re}_{gen} \le 10 \quad , \quad 0.6 \le n \le 1 \qquad (۲-۳)$$

نمونه‌ای از خطوط جریان در $\mathrm{Re}_{gen} = 0.0001$ در شکل زیر ملاحظه می‌شود:

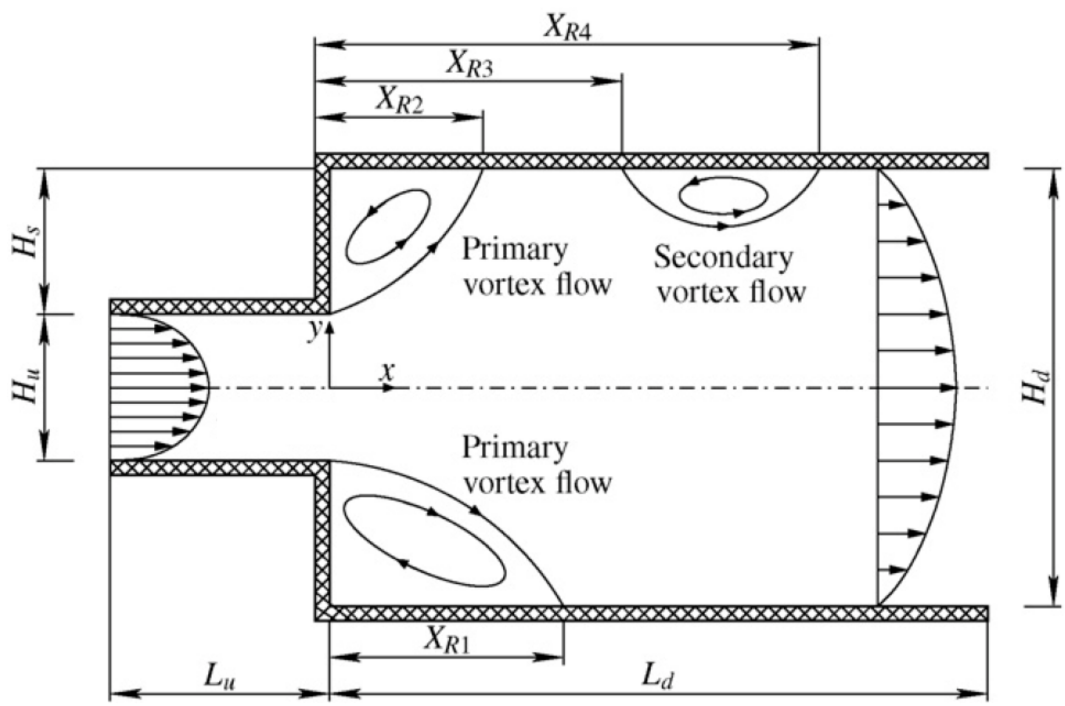


شکل(۲-۲) مقایسه خطوط جریان برای سیال غیرنیوتنی در $\mathrm{Re}_{gen} = 0.0001$ [۱۳].

همانطور که در شکل(۲-۲) مشاهده می‌شود خاصیت غیرنیوتنی n رابطه مستقیم با طول گردابه دارد و با افزایش آن طول گردابه نیز زیاد می‌شود. البته باید به این نکته توجه کرد که در اکثر تحقیقات مانند مرجع مذکور از رینولدز تعمیم‌یافته Re_{gen} استفاده کرده‌اند که اندیس توانی n در آن منظور شده است.

رژیم جریان آرام در تبدیلات واگرای صفحه‌ای دارای فیزیک جریان تقریبا پیچیده‌ای می‌باشد. به‌همین دلیل، محققان زیادی، جریان سیال نیوتنی و غیرنیوتنی در تبدیلات واگرا را با استفاده از روش‌های عددی و تجربی مطالعه کرده‌اند. یکی از قدیمی‌ترین کارهای تجربی در این زمینه را دارست و همکاران [۱۴] ، انجام داده‌اند که به نتیجه‌ای جالب دست یافته‌اند. مشاهدات آن‌ها نشان داد که

جریان سیال در تبدیلات واگرای صفحه‌ای در اعداد رینولدز پایین $(Re \le 56)$ متقارن می‌باشد، اما برای اعداد رینولدز بالاتر $(Re > 56)$ جریان نامتقارن می‌شود و گردابه‌های بالا و پایین از نظر اندازه با هم اختلاف پیدا می‌کنند. با افزایش بیشتر عدد رینولدز، جریان سیال، وابسته به زمان، سه بعدی و نهایتا مغشوش می‌شود. چنین پدیده‌ای که جریان در تبدیلات واگرای متقارن صفحه‌ای، تقارن خود را از دست می‌دهد را شاخه‌ای شدن می‌نامند. کار تجربی دیگری نیز توسط فرن و همکاران [۱۵]، برای تبدیل واگرایی با نسبت ۱:۳ انجام شده است. نتایج تحقیق ایشان، پیدا کردن عدد رینولدز بحرانی برای انتقال جریان از حالت متقارن به حالت نامتقارن و همچنین ترسیم نمودار دوشاخه‌ای این جریان بود. سال‌های بعد نیز چند بررسی عددی روی این موضوع انجام شده است [۱۷و۱۶]. شکل(۲-۳) نمودار شماتیک خطوط جریان برای حالت شاخه‌ای شدن را نمایش می‌دهد.



شکل(۲-۳) شکل شماتیک پدیده شاخه‌ای شدن در تبدیل واگرای صفحه‌ای [۱۸].

اخیرا، جریان نامتقارن سیالات غیرنیوتنی در تبدیل واگرای صفحه‌ای و به‌ویژه بحث‌های مربوط به

پدیده شاخه‌ای شدن مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته است. هدف بیشتر تحقیقات انجام شده در این زمینه، پیدا کردن عدد رینولدز بحرانی در نسبت‌های واگرایی مختلف می‌باشد. در جریان سیالات غیرنیوتنی، این پدیده علاوه بر عدد رینولدز، به خواص غیرنیوتنی سیال نیز وابسته است. به‌همین دلیل، در اکثر این تحقیقات از عدد رینولدز تعمیم‌یافته یا عدد رینولدز اصلاح شده استفاده می‌کنند که خواص غیرنیوتنی سیال نیز در آن منظور شده است.

ترنیک [۱۸] تاثیرات خواص غیرنیوتنی را بر انتقال جریان از حالت متقارن به حالت نامتقارن در تبدیل واگرا با نسبت ۱:۳ بررسی کرده است. مدل مورد استفاده وی، سیال رقیق‌شونده توانی و محدوده اندیس توانی و رینولدز به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$10 \le \mathrm{Re}_{gen} \le 150 \quad , \quad 0.6 \le n \le 1 \tag{۲-۴}$$

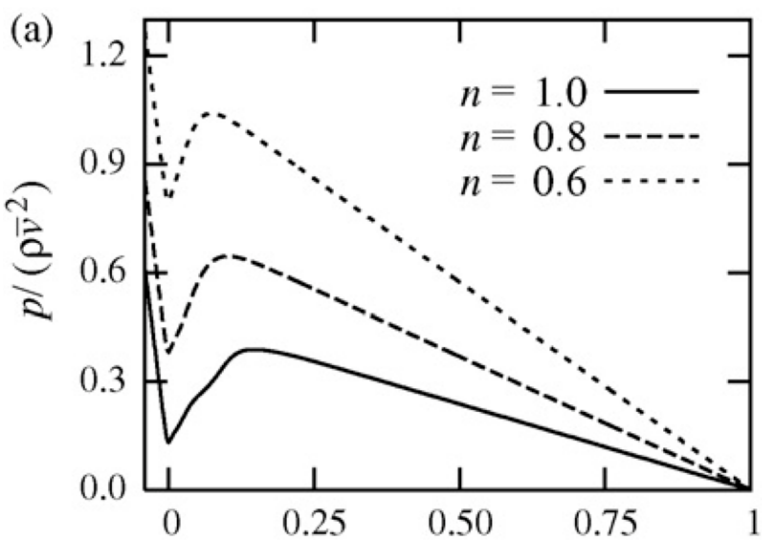
ترنیک [۱۸] نتایج را به‌ازای تعریف‌های مختلف برای رینولدز ارائه کرده است. اعداد رینولدز مورد استفاده وی، عدد رینولدز تعمیم‌یافته Re_{gen}، عدد رینولدز اصلاح‌شده Re_{Mod} و عدد رینولدز دیواره Re_{wall} می‌باشند که همگی بر اساس مدل توانی به‌دست آمده‌اند و به‌صورت زیر تعریف شده‌اند [۱۸]:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}_{gen} &= \frac{6\rho v_{ave}^{2-n} H^n}{K\left[\left(4n+2\right)/n\right]} \\ \mathrm{Re}_{\mathrm{mod}} &= \frac{\rho v_{Max}^{2-n}\left(H/2\right)^n}{K} \\ \mathrm{Re}_{wall} &= \frac{\rho v_{ave}^{2-n} H^n}{K\left[\left(4n+2\right)/n\right]^{n-1}} \end{aligned} \tag{۲-۵}$$

که در آن، ρ چگالی سیال، v_{ave} سرعت متوسط سیال، H ارتفاع کانال، K ثابت مدل توانی، n اندیس توانی و $v_{\max}$ سرعت بیشینه سیال می‌باشد. شایان ذکر است که اعداد رینولدز مذکور، با یکدیگر رابطه دارند [۱۸]:

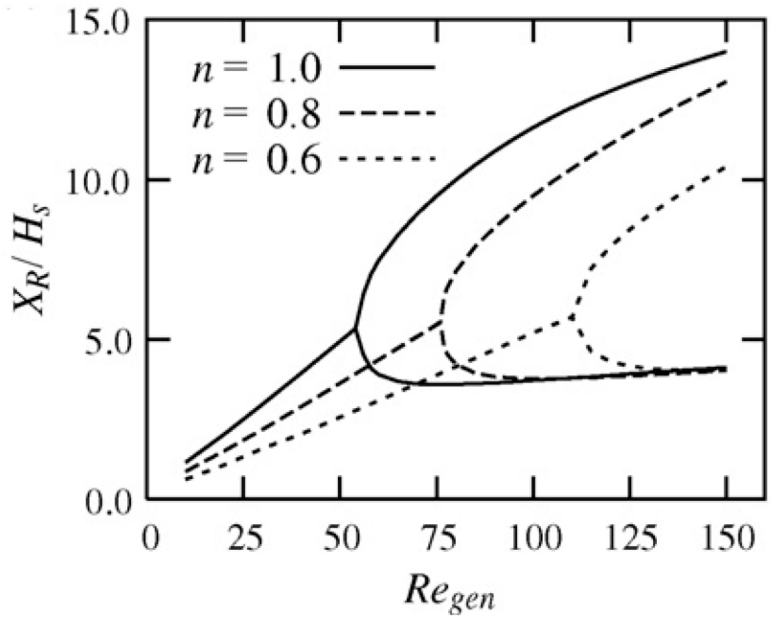
$$\mathrm{Re}_{\mathrm{mod}} = \frac{1}{6}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^2 \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \mathrm{Re}_{gen}$$
$$\mathrm{Re}_{wall} = \frac{1}{6}\left(\frac{4n+2}{n}\right)\mathrm{Re}_{gen} \qquad (۶-۲)$$

نتایج ترنیک [۱۸] نشان می‌دهد که رفتار رقیق‌شوندگی سیال، از یک طرف باعث افزایش افت فشار جریان در تبدیلات واگرا و از طرف دیگر باعث افزایش عدد رینولدز تعمیم‌یافته بحرانی می‌شود. به عبارت دیگر رفتار رقیق‌شوندگی سیال باعث تاخیر در انتقال جریان از حالت متقارن به حالت نامتقارن می‌شود. شکل(۲-۴) افزایش افت فشار سیال رقیق‌شونده را به‌وضوح نشان می‌دهد.



شکل(۲-۴) تغییرات فشار بدون بعد در راستای محور مرکزی [۱۸].

اندازه گردابه‌ها در نقطه آغاز انتقال جریان از حالت متقارن به حالت نامتقارن با کاهش اندیس توانی n افزایش می‌یابد. این بدین معنی است که عدد رینولدز تعمیم‌یافته بحرانی برای مدل توانی رقیق‌شونده بیشتر از مقدار آن برای سیال نیوتنی است. در شکل(۲-۵) تغییرات طول گردابه نسبت به Re_{gen} برای سیال رقیق‌شونده ارائه شده است.

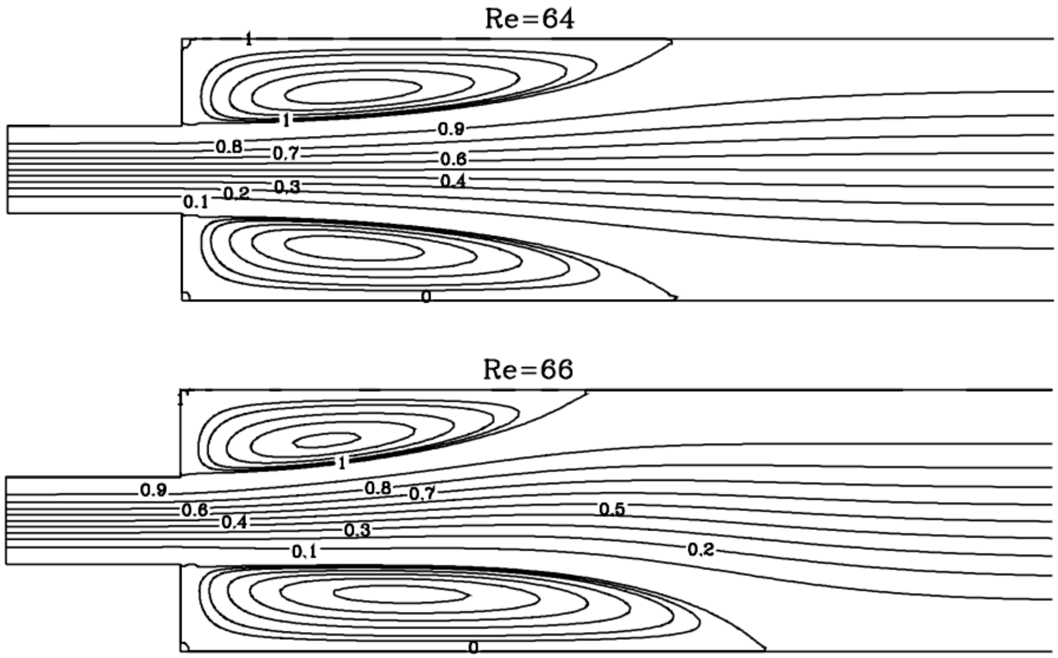


شکل(۲-۵) تغییرات طول گردابه با رینولدز تعمیم‌یافته برای سیال رقیق‌شونده [۱۸] .

با افزایش بیشتر عدد رینولدز، پدیده دوشاخه‌ای دوم اتفاق می‌افتد و گردابه جدیدی در سمت گردابه کوچک به‌وجود می‌آید که رفتار رقیق‌شوندگی سیال این پدیده را نیز به تاخیر می‌اندازد [۱۸].

بالچ و همکاران [۱۹] حل عددی جریان سیال ویسکوالاستیک را در تبدیل‌های همگرا و واگرا با استفاده از روش المان محدود انجام داده‌اند. در این تحقیق، بیشتر روی اندازه گردابه‌ها بحث شده است. از نتایج این تحقیق این است که افزایش اینرسی جریان در تبدیلات واگرا باعث افزایش طول گردابه شده، در صورتی که عکس این قضیه در تبدیلات همگرا صادق است.

جریان سیال ویسکوالاستیک با لزجت ثابت، در تبدیل واگرای صفحه‌ای به‌صورت عددی حل شده است [۲۰]. مدل مورد استفاده، مدل FENE-CR و نسبت تبدیل ۱:۳ در نظر گرفته شده است. در این تحقیق تاثیرات پارامترهای غلظت، توسعه‌پذیری و عدد وایزنبرگ بر روی طول و قدرت گردابه، خطوط جریان و نمودار دوشاخه‌ای به‌دست آمده است. در شکل(۲-۶) تاثیرات افزایش رینولدز بر شاخه‌ای شدن جریان سیال ویسکوالاستیک کاملا واضح است.



شکل(۲-۶) اثر افزایش رینولدز بر شاخه‌ای شدن جریان سیال ویسکوالاستیک [۲۰].

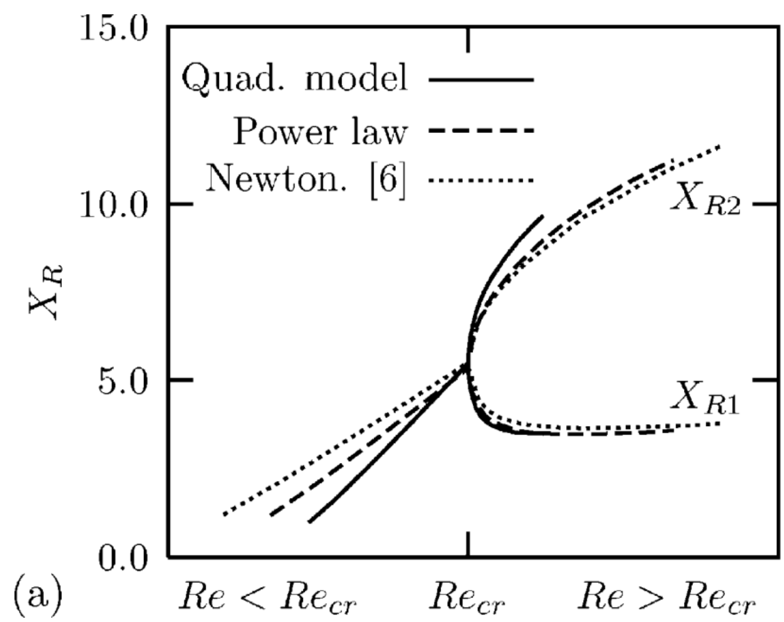
از نتایج مطالعه عددی الیویرا [۲۰] می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- پدیده شاخه‌ای شدن باعث افزایش افت فشار جریان می‌شود.
- عدد رینولدز بحرانی برای سیال ویسکوالاستیک افزایش می‌یابد. بنابراین می‌توان گفت که خاصیت الاستیک موجب پایداری در حالت رژیم جریان آرام می‌شود.
- اندازه و شدت گردابه‌های ویسکوالاستیک در مقایسه با سیال نیوتنی کوچکتر هستند.
- افت فشار سیال ویسکوالاستیک بیشتر از سیال نیوتنی می‌باشد.

جریان آرام سیال غیرنیوتنی توانی ($0 < n \le 2$) در تبدیل واگرا با نسبت ۱:۳ با استفاده از روش اختلاف محدود به‌صورت عددی حل شده است [۲۱]. با توجه به محدوده اندیس توانی n، رفتار رقیق-شوندگی و غلیظ‌شوندگی در این تحقیق بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که رفتار رقیق‌شوندگی $n < 1$ باعث تاخیر در پدیده دوشاخه‌ای می‌شود (برای حالت غلیظ‌شوندگی نتیجه عکس می‌باشد).

بررسی عددی جریان سیال غیرنیوتنی غلیظ‌شونده با استفاده از مدل کوآدراتیک انجام شده

است[۲۲]. نتایج این تحقیق به‌صورت گزارشی از اعداد رینولدز بحرانی این دسته از سیالات ارائه شده است. اعداد رینولدز بحرانی برای دو مدل کوآدراتیک و توانی به‌ترتیب ۳۳ و ۴۴ به‌دست آمده است. طول توسعه‌یافتگی و افت فشار سیال غلیظ‌شونده در عبور از تبدیل واگرا در مقایسه با سیال نیوتنی بیشتر می‌باشد. نکته جالبی که از نتایج ترنیک و همکاران [۲۲] می‌توان گرفت این است که طول گردابه در نقطه آغاز شاخه‌ای شدن برای سیال نیوتنی، کوآدراتیک و توانی برابر است. این موضوع به-وضوح در شکل(۲-۷) مشخص می‌باشد.



شکل(۲-۷) تغییرات طول گردابه نسبت به رینولدز برای سیال نیوتنی، کوآدراتیک و توانی [۲۲].

مشابه مطالعات قبلی تاثیرات خواص غیرنیوتنی بر انتقال جریان از حالت متقارن به حالت نامتقارن در تبدیل واگرای ۱:۲ بررسی شده است [۲۳]. هردو حالت رقیق‌شونده و غلیظ‌شونده با استفاده از مدل معروف توانی ($0.3 \leq n \leq 3$) شبیه‌سازی و برای هر مورد عدد رینولدز بحرانی گزارش شده است.

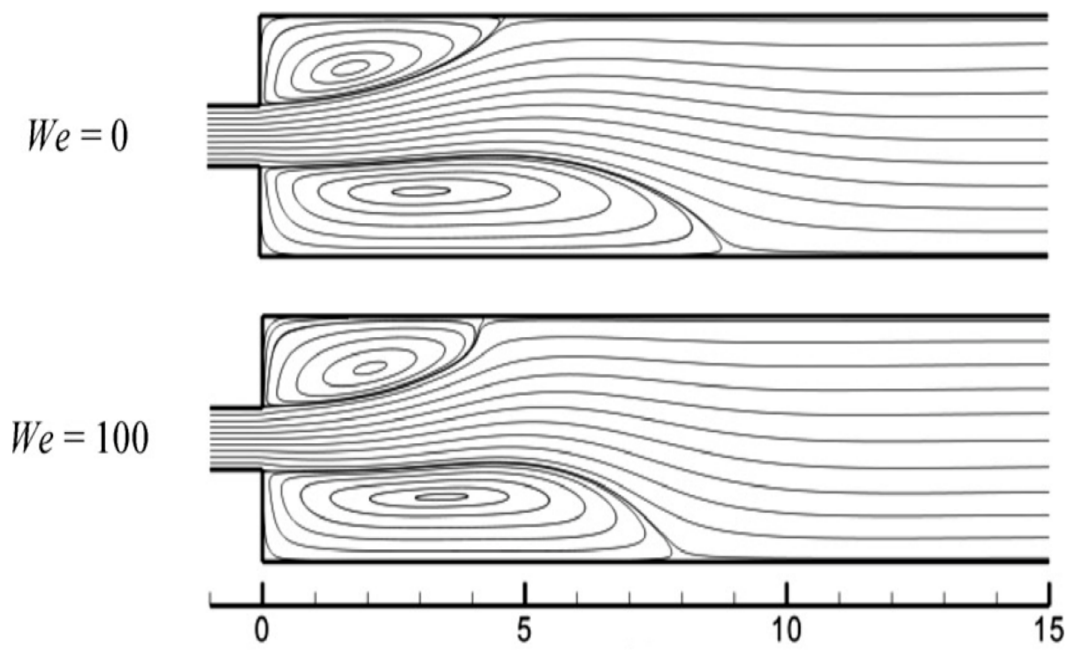
در تحقیقی دیگر، مدل‌سازی عددی جریان سیال کیسون، توانی و کومادا در تبدیل واگرا انجام شده

است [۲۴]. در این تحقیق عدد رینولدز بحرانی به‌ازای خواص دیگر جریان برای هر سه مدل مذکور به‌دست آمده است.

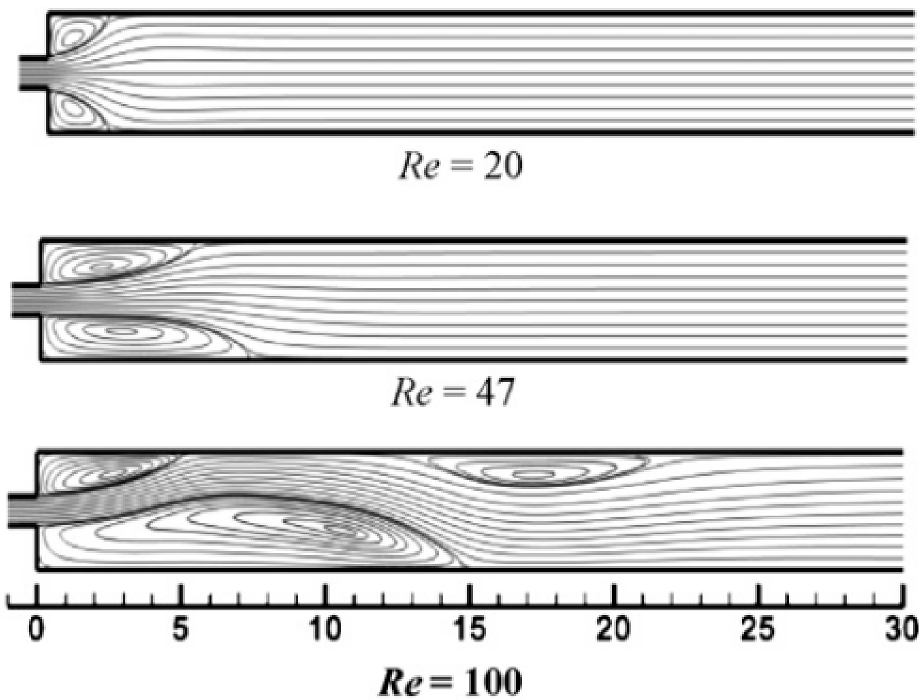
حل عددی جریان سیال ویسکوالاستیک با استفاده از مدل FENE-CR در تبدیل واگرایی با نسبت ۱:۴ انجام شده است [۲۵]. محدوده Re و We به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$0.01 \le \mathrm{Re} \le 100 \quad , \quad 0 \le We \le 100 \tag{۲-۷}$$

در این مطالعه نیز مانند سایر مطالعات پیشین، خاصیت الاستیک سیال باعث کاهش طول گردابه‌ها می‌شود (شکل(۲-۸) را ببینید). از طریق رسم نمودارهای خطوط جریان می‌توان به آسانی رینولدز بحرانی برای نقاط اول و دوم شاخه‌ای شدن را تعیین کرد. به عنوان نمونه طبق شکل(۲-۹) رینولدز بحرانی برای آغاز شاخه‌ای شدن $\mathrm{Re}_{cr} = 47$ می‌باشد.



شکل(۲-۸) خطوط جریان سیال ویسکوالاستیک در Re=۴۰ [۲۵] .



شکل(۲-۹) خطوط جریان سیال ویسکوالاستیک در اعداد رینولدز مختلف [۲۵].

۲-۱-۲- جریان سیال در تبدیل واگرای متقارن محوری

جریان سیال در تبدیل واگرای متقارن محوری نسبت به جریان در تبدیل واگرای صفحه‌ای مورد توجه کمتری واقع شده است. این در صورتی است که کاربردهای صنعتی جریان در تبدیل واگرای متقارن محوری بیشتر می‌باشد. الیویرا [۲۰] بیان می‌کند که در تبدیلات واگرای متقارن محوری، پدیده دو شاخه‌ای یا همان اختلاف اندازه گردابه‌ها، اتفاق نمی‌افتد. تحقیقات نسبتا زیادی روی جریان سیال نیوتنی در این هندسه انجام شده است که گزارش مختصری از بعضی از آن‌ها در این قسمت ارائه می-شود.

الیویرا و همکاران [۲۶] جریان سیال نیوتنی در تبدیل واگرای متقارن محوری در نسبت‌های $1.5 \le ER \le 4$ و اعداد رینولدز $0.5 \le \mathrm{Re} \le 200$ را به‌صورت عددی حل کرده‌اند. طول گردابه‌ها و ضریب افت فشار در حالت‌های مختلف به‌دست آمده‌اند. هدف این تحقیق، به‌دست آوردن یک رابطه

کلی برای ضریب افت فشار با استفاده از نتایج عددی می‌باشد. در تحقیق حاضر، صحت نتایج عددی در حالت نیوتنی با همین مرجع [۲۶] اعتبارسنجی شده‌اند. به‌همین دلیل، در جدول (۲-۱) طول گردابه بدون بعد $\frac{x_R}{h}$ در اعداد رینولدز و نسبت‌های واگرایی مختلف ارائه شده است.

همانطور که از جدول (۲-۱) مشخص است طول گردابه رابطه مستقیم با عدد رینولدز دارد و در همه نسبت‌های واگرایی با افزایش رینولدز، طول گردابه نیز افزایش پیدا می‌کند. در اعداد رینولدز پایین، افزایش نسبت تبدیل باعث کاهش طول گردابه و در اعداد رینولدز بالا، افزایش نسبت تبدیل باعث افزایش طول گردابه‌های سیال نیوتنی در تبدیل واگرای متقارن می‌شود.

جدول (۲-۱) طول گردابه بدون بعد سیال نیوتنی در اعداد رینولدز و نسبت‌های واگرایی مختلف [۲۶].

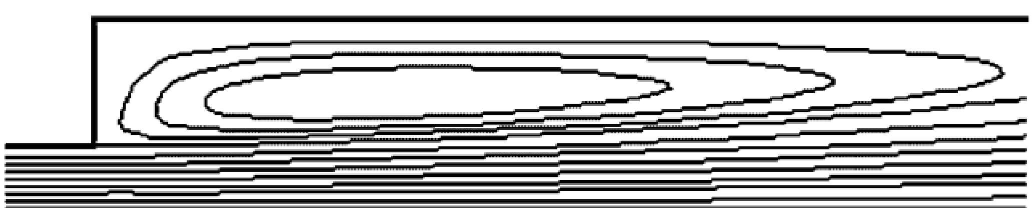
Re	ER=۱/۵	ER=۲	ER=۲/۶	ER=۳	ER=۴
۰/۵	۰/۶۰۳	۰/۵۲۹	۰/۴۹۰	۰/۴۸۱	۰/۴۵۰
۱	۰/۶۱۵	۰/۵۴۹	۰/۵۱۰	۰/۵۰۵	۰/۴۷۵
۲	۰/۶۴۲	۰/۵۹۲	۰/۵۶۰	۰/۵۵۷	۰/۵۲۹
۳/۵	۰/۶۸۹	۰/۶۶۴	۰/۶۵۰	۰/۶۴۵	۰/۶۲۱
۵	۰/۷۳۶	۰/۷۴۶	۰/۷۴۰	۰/۷۴۶	۰/۷۲۶
۱۰	۰/۹۲۶	۱/۰۷	۱/۱۱	۱/۱۵	۱/۱۴
۱۲/۵	۱/۰۳	۱/۲۶	۱/۳۳	۱/۳۸	۱/۳۸
۱۷/۵	۱/۲۴	۱/۶۵	۱/۷۹	۱/۸۷	۱/۸۹
۲۵	۱/۵۷	۲/۲۷	۲/۵۱	۲/۶۴	۲/۶۹
۳۵	۲/۰۳	۳/۱۲	۳/۵۱	۳/۷۱	۳/۷۹
۵۰	۲/۷۳	۴/۴۳	۵/۰۴	۵/۳۳	۵/۴۸
۱۰۰	۵/۲۰	۸/۸۷	۱۰/۲	۱۰/۸	۱۱/۱

شاید تنها تحقیقی که به بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک در تبدیل واگرای متقارن محوری پرداخته است مطالعات آزمایشگاهی پاک و همکاران [۲۹] می‌باشد. نویسندگان این مقاله تنها به بررسی خواص غیرنیوتنی و ویسکوالاستیک روی طول گردابه‌های جریان درتبدیل واگرای متقارن

محوری با نسبت های ۲ و ۲/۶۶۷ پرداخته‌اند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که در رژیم جریان آرام، طول گردابه‌های سیال ویسکوالاستیک کمتر از سیال نیوتنی می‌باشد و در رژیم جریان آشفته طول گردابه‌های سیال ویسکوالاستیک چند برابر سیال نیوتنی می‌باشد. عدد رینولدز در مطالعه مذکور، به صورت رینولدز تعمیم‌یافته تعریف شده است که اندیس نمایی مدل توانی، در آن منظور شده است. همانطور که اشاره شد این تحقیق فقط به بررسی خواص غیرنیوتنی و ویسکوالاستیک روی طول گردابه متمرکز شده است.

تحقیق دیگری در زمینه جریان آرام سیال نیوتنی در تبدیل واگرای صفحه‌ای و متقارن محوری انجام شده است [۲۷]. معادلات ناویر-استوکس دو بعدی با استفاده از روش المان محدود گسسته‌سازی و سپس حل شده‌اند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که گردابه‌های تبدیل واگرای صفحه‌ای و متقارن محوری با رفتاری شبیه هم، به‌صورت خطی با رینولدز تغییر می‌کنند.

تحقیق دیگری نیز توسط داگتکین و آنسال [۲۸] در زمینه سیالات نیوتنی انجام شده که محدوده رینولدز و نسبت واگرایی در آن گسترده‌تر است ($0.1 \le \mathrm{Re} \le 500$, $1.5 \le ER \le 10$). تبدیل واگرا در هر دو حالت صفحه‌ای و متقارن محوری در این تحقیق در نظر گرفته شده است. نمونه‌ای از خطوط جریان در این تحقیق در شکل(۲-۱۰) نشان داده شده است.



شکل(۲-۱۰) خطوط جریان سیال نیوتنی در تبدیل واگرای متقارن محوری ۱:۳ در Re=۱۰۰ [۲۸]

حل عددی جریان آرام سیال توانی رقیق‌شونده در تبدیل واگرای متقارن محوری در مرجع [۳۰] انجام شده است. نتایج عددی این تحقیق جهت به‌دست آوردن یک رابطه کلی برای افت فشار تابعی از عدد

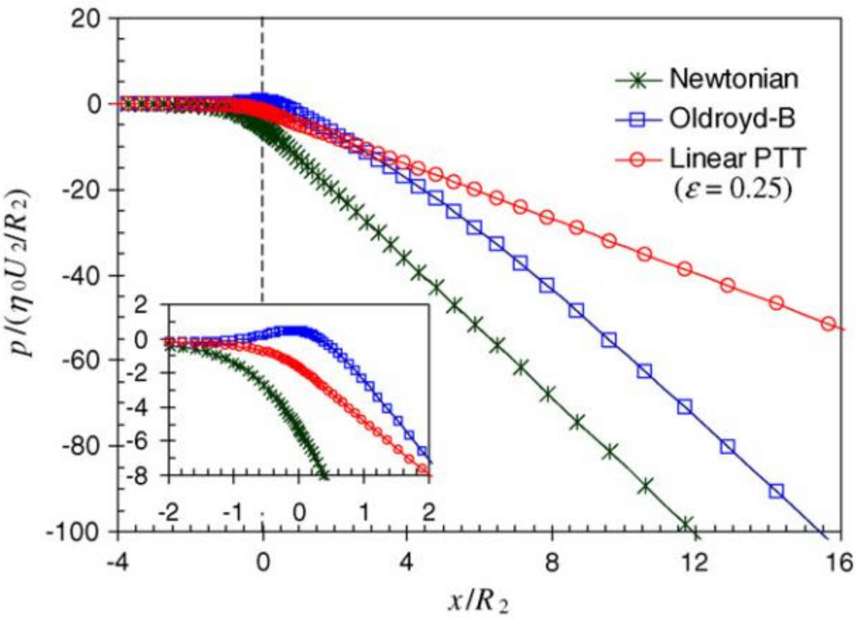
رینولدز و اندیس توانی استفاده شده است.

۲-۱-۳- جریان سیال در تبدیل همگرا

علی‌رغم جریان در تبدیل واگرای متقارن محوری، جریان سیال غیرنیوتنی در تبدیل همگرای متقارن محوری قبلا کاملا بررسی شده است. در اینجا گزارش کوتاهی از تعدادی از تحقیقات گذشته در این زمینه ارائه شده است.

مطالعه تجربی جریان سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا توسط رایفورد و همکاران[۳۱] انجام گرفته که در این تحقیق از سرعت‌سنج لیزری برای اندازه‌گیری سرعت محوری و شعاعی استفاده شده است. سیال ویسکوالاستیک مورد بررسی، دارای خواص رقیق‌شونده و اختلاف تنش عمودی اول می-باشد. رقیق‌شوندگی سیال با استفاده از مدل کاریو-یاسودا به‌خوبی مدل شده است. نرخ برش در این مسئله وابسته به عدد رینولدز و عدد دبورا می‌باشد. پروفیل‌های سرعت به اعداد بدون بعد رینولدز و دبورا وهمچنین هندسه (نسبت همگرایی) بستگی دارند.

مطالعه عددی جریان سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا با استفاده از روش المان محدود انجام شده است[۳۲]. مدل ویسکوالاستیک مورد استفاده مدل UCM می‌باشد. مدل مورد استفاده، توانایی تغییر لزجت (حالت رقیق‌شونده) و اختلاف تنش عمودی اول را داراست. نتایج این مطالعه با داده‌های تجربی نیز اعتبارسنجی شده‌اند. یکی از مهم‌ترین تاثیرات در جریان در تبدیل همگرا، تاثیر نسبت همگرایی است. این تاثیر در تحقیقی دیگر برای جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک به‌صورت عددی بررسی شده است[۳۳]. در مطالعه مذکور، مدل‌های ویسکوالاستیک مورد استفاده، مدل اولدروید-بی و PTT و نسبت‌های همگرایی $CR = 2,4,10,20,40,100$ در نظر گرفته شده‌اند. در شکل(۲-۱۱) توزیع فشار سیال نیوتنی در مقایسه با سیال‌های ویسکوالاستیک اولدروید-بی و PPT رسم شده است.

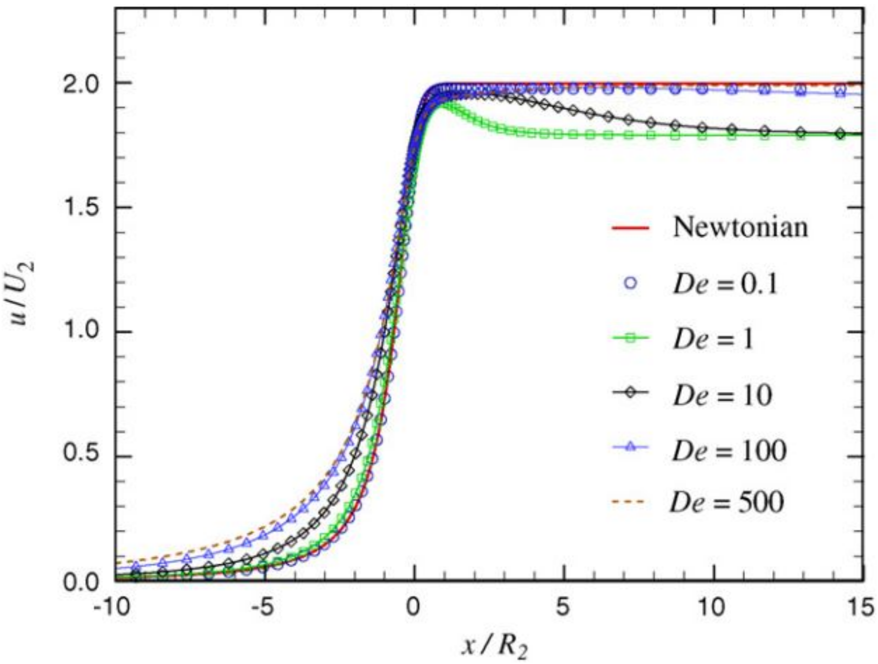


شکل(۲-۱۱) توزیع فشار سیال نیوتنی، اولدروید بی و PPT در محور مرکزی تبدیل همگرا با نسبت۴۰[۳۳].

همانطور که مشاهده می‌شود افت فشار سیال نیوتنی از سیال ویسکوالاستیک بیشتر است. مدل اولدروید-بی نیز دارای افت فشار بیشتری نسبت به سیال PPT می‌باشد. برای هر سه نوع سیال، افت فشار بالادست جریان نسبت به افت فشار پایین‌دست به‌صورت قابل توجهی دارای مقدار کمتری است. در بالادست جریان سطح مقطع جریان بسیار بزرگتر از پایین‌دست می‌باشد، به‌همین دلیل سرعت متوسط در مقطع پایین‌دست افزایش می‌یابد و باعث می‌شود که فشار به‌شدت کاهش پیدا کند (طبق معادله برنولی).

در شکل(۲-۱۲) توزیع سرعت محوری برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک (مدل PTT) در تبدیل همگرایی با نسبت ۴۰ ترسیم شده است. سرعت سیال نیوتنی در پایین‌دست به مقدار تحلیلی یعنی ۲ می‌رسد. برای سیال ویسکوالاستیک طول توسعه‌یافتگی افزایش می‌یابد و جریان در فاصله بیشتری از تبدیل توسعه‌یافته می‌شود. در اعداد دبورا پایین سرعت محوری سیال در مرکز کاهش می‌یابد. ولی

پس از آن، با افزایش اعداد دبورا سرعت محوری در مرکز افزایش می‌یابد.



شکل(۲-۱۲) توزیع سرعت محوری در محور تقارن برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک (PPT) در نسبت همگرایی ۴۰ [۳۳].

تحقیق دیگری در زمینه حل عددی جریان سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرای متقارن محوری انجام شده است [۳۴]. مدل مورد استفاده در این مطالعه، مدل UCM و نسبت تبدیل ۴:۱ در نظر گرفته شده‌اند. در این تحقیق نیز، تغییرات اعداد دبورا بر فیزیک جریان بررسی شده است.

۱-۲-۳ انتقال حرارت در تبدیلات همگرا و واگرا

تاکنون تحقیقات بسیار کمی در مورد حل عددی انتقال حرارت سیال غیرنیوتنی و ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرا انجام شده است. یکی از مهم‌ترین دلایل این موضوع این است که در سیالات غیرنیوتنی مخصوصا سیالات ویسکوالاستیک لزجت سیال وابستگی شدیدی به دما دارد. از یک طرف،

برای سیالات ویسکوالاستیک این وابستگی به دما باید به‌صورت یک تابع مشخص شود و از طرف دیگر، برای تحلیل انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک، باید معادلات پیوستگی و ممنتوم به‌طور همزمان با معادله انرژی حل شوند. این در حالی است که برای سیالات نیوتنی، معادلات پیوستگی و ممنتوم همزمان حل شده و سپس مقادیر سرعت به‌دست آمده در معادله انرژی جایگذاری می‌شوند. با این توضیحات، در این قسمت به دو مرجع در مورد انتقال حرارت سیال غیرنیوتنی و ویسکوالاستیک اشاره می‌شود.

انتقال حرارت جریان آشفته سیال ویسکوالاستیک در تبدیل واگرای متقارن محوری به‌صورت تجربی بررسی شده است [۳۵]. محدوده رینولدز و پرانتل در این مطالعه به‌ترتیب $6200<Re<63000$ و $8.5<Pr<16.2$ در نظر گرفته شده است. مقادیر ناسلت متوسط و ناسلت موضعی به‌ازای مقادیر مختلف رینولدز به‌دست آمده است. وجود تبدیل واگرا باعث افزایش ناسلت متوسط و مقدار انتقال حرارت می‌شود. بیشترین ناسلت موضعی در جایی است که سطح مقطع به‌طور ناگهانی افزایش می‌یابد.

تحقیقی دیگر در زمینه انتقال حرارت سیال غیرنیوتنی در تبدیل واگرا به‌صورت عددی انجام شده است[۳۶]. در این تحقیق، جریان و انتقال حرارت سیال غیرنیوتنی به‌صورت وابسته به‌هم بررسی و توزیع سرعت و افت فشار سیال به‌دست آمده‌اند. در مدل حرارتی کراس رابطه‌ای به‌صورت زیر ارائه شده است [۳۶]:

$$\eta\left(T,|\gamma|\right)=\frac{\eta_0\left(T\right)}{1+\left[\lambda\left(T\right)|\gamma|\right]^{1-n(T)}} \qquad (۸-۲)$$

که در آن:

$$\eta_0\left(T\right)=a_1\exp\left(\frac{a_2}{T}\right)\ ,\ \lambda\left(T\right)=b_1\exp\left(\frac{b_2}{T}\right)\ ,\ n\left(T\right)=c_1\exp\left(-\frac{c_2}{T}\right) \qquad (۹-۲)$$

فصل ۳.   معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت

۳-۱- مقدمه

در این بخش معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در دستگاه مختصات استوانه‌ای ارائه شده است. این دستگاه مختصات، جهت مطالعه جریان و انتقال حرارت در تبدیلات همگرا و واگرای متقارن محوری استفاده می‌شود. در تحقیق حاضر، همه متغیرهای جریان و انتقال حرارت به‌صورت بی‌بعد بررسی شده‌اند. معادلات حاکم ارائه شده در این بخش، برای حل عددی جریان در تبدیل همگرا و واگرا استفاده و که نتایج به‌دست آمده در فصل پنجم ارائه شده است.

۳-۲- پارامترهای بی بعد جریان

در این تحقیق از دستگاه مختصات استوانه‌ای برای مطالعه جریان سیال ویسکوالاستیک در تبدیلات همگرا و واگرای متقارن محوری استفاده شده است. پارامترهای بی‌بعد مورد استفاده شامل موارد زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&r=\frac{\tilde{r}}{D} && v_r=\frac{\tilde{v}_r}{W_0} && v_z=\frac{\tilde{v}_z}{W_0} \\
&P=\frac{\tilde{P}D}{\eta_0 W_0} && \tau=\frac{\tilde{\tau}D}{\eta_0 W_0} && \gamma_{(1)}=\tilde{\gamma}_{(1)}\frac{D}{W_0} \\
&\gamma_{(2)}=\tilde{\gamma}_{(2)}\left(\frac{D}{W_0}\right)^2 && \eta=\frac{\tilde{\eta}}{\eta_0} && \Psi_{1,2}=\frac{\tilde{\Psi}_{1,2}D}{\eta_0 W_0}
\end{aligned}
\qquad (۱-۳)
$$

که در آن، $\tilde{r}$ و $\tilde{z}$ معرف جهات دستگاه استوانه‌ای در جهات شعاعی و محوری، D قطر بزرگتر تبدیل (قطر ورودی برای تبدیل همگرا و قطر خروجی برای تبدیل واگرا)، $\tilde{v}_i$ مولفه‌های سرعت، W_0 سرعت مرجع (همان سرعت ورودی $\tilde{U}_{in}$)، $\tilde{P}$ فشار، η_0 لزجت در نرخ برش صفر، $\tilde{\tau}$ تانسور تنش، $\tilde{\gamma}_{(1)}$ و $\tilde{\gamma}_{(2)}$ مشتقات زمانی نرخ برش مرتبه اول و دوم، $\tilde{\Psi}_1$ و $\tilde{\Psi}_2$ ثابت‌های اختلاف تنش عمودی اول و دوم و $\tilde{\eta}$ لزجت سیال می‌باشد. علامت ~ در بالای هر متغیر نشانگر متغیر دارای بعد می‌باشد.

در این تحقیق، اعداد بدون بعد رینولدز Re و وایزنبرگ We بر اساس قطر ورودی تبدیل به‌دست آمده است. نسبت تبدیل ER نیز نسبت قطر بزرگتر تبدیل به قطر کوچکتر تبدیل در نظر گرفته شده است.

$$We_{\exp}=\frac{\lambda_1 W_0}{d} \qquad We_{con}=\frac{\lambda_1 W_0}{D}$$

$$\mathrm{Re}_{\exp}=\frac{\rho W_0 d}{\eta_0} \qquad \mathrm{Re}_{con}=\frac{\rho W_0 D}{\eta_0} \tag{۲-۳}$$

$$ER=\frac{D}{d}$$

۳-۳- معادلات حاکم بر جریان و شرایط مرزی مربوطه

معادلات حاکم بر جریان دائمی سیال ویسکوالاستیک در تبدیلات همگرا و واگرا شامل معادلات پیوستگی و ممنتوم است:

$$\nabla\cdot\tilde{V}=0 \tag{۳-۳}$$

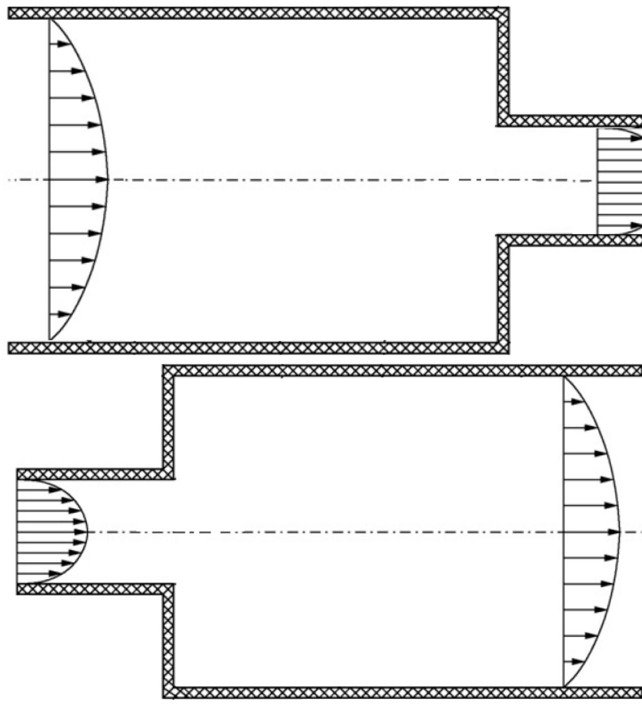
$$\rho\tilde{V}.\nabla\tilde{V}=-\nabla\tilde{p}+\nabla\cdot\tilde{\tau} \tag{۴-۳}$$

که در آن، $\tilde{V}$ معرف بردار سرعت، ρ چگالی، $\tilde{P}$ فشار و $\tilde{\tau}$ تانسور مرتبه دوم تنش می‌باشد.

در تحقیق حاضر، جریان دوبعدی دائمی سیال ویسکوالاستیک تراکم‌ناپذیر در حالت آرام در تبدیل واگرا و همگرای متقارن محوری در نظر گرفته شده است. شکل(۳-۱)، طرح شماتیک هندسه جریان را نشان می‌دهد.

پارامترهای هندسی مسئله ، شامل طول و قطر لوله بالادست جریان (l,d)، طول و قطر لوله پایین‌دست (L,D) و اختلاف شعاع دو لوله $h=(D-d)/2$ می‌باشد. جریان ورودی به‌صورت یکنواخت در راستای z و برابر با U در نظر گرفته شده است. برای خروجی بخش دوم نیز شرط $\frac{\partial}{\partial x}=0$ (به‌جز برای فشار) قرار داده شده است. البته باید توجه داشت که نسبت‌های هندسی $\frac{l}{d}$ و $\frac{L}{D}$ باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا جریان در هر دو قسمت بالادست و پایین‌دست به حالت توسعه‌یافته تبدیل شود.

برای اطمینان از این موضوع، برای حل‌های عددی انجام شده، نمودارهای سرعت در محور تقارن رسم شده تا توسعه‌یافتگی در انتهای هر دو بخش از این نمودارها مشخص شود. چنین نمودارهایی در فصل نتایج آورده شده است.



شکل(۳-۱) - شکل شماتیک تبدیل همگرا و واگرا

معادلات حاکم بر جریان دائمی سیال تراکم ناپذیر شامل معادلات پیوستگی و ممنتوم در جهت‌های شعاعی و محوری به شکل زیر می باشند:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \qquad (۵-۳)$$

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta}}{r}\right) \qquad (۶-۳)$$

$$v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) \qquad (۷-۳)$$

معادلات فوق، صورت اصلی معادلات حاکم بر جریان هستند که در این تحقیق برای مطالعه جریان سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرا مورد استفاده قرار گرفته‌اند. شکل جریان در این هندسه در رژیم آرام به صورت دو بعدی است ($v_\theta = 0$). از طرف دیگر به خاطر شرط تقارن محوری در مرکز لوله، تغییرات در راستای θ برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود ($\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$). در معادلات مذکور می‌توان با به‌کار بردن معادله متشکله هر نوع سیالی در جملات تنش، شکل نهایی معادلات حاکم را برای جریان آن سیال به‌دست آورد. به عنوان مثال، با جایگذاری مقادیر تنش سیال نیوتنی، صورت بی‌بعد معادلات ممنتوم جریان سیال نیوتنی به‌دست می‌آید:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right) \qquad (۸-۳)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \qquad (۹-۳)$$

در سیالات ویسکوالاستیک نیز همانند سیالات نیوتنی، اعمال شرط مرزی عدم لغزش بر روی دیواره جامد استفاده می‌شود.

$$(\text{at Wall}):\ \mathrm{v_z} = 0\,, \quad \mathrm{v_r} = 0 \qquad (۱۰-۳)$$

در این تحقیق، از مدل کریمینال-اریکسون-فیلبی (CEF) به عنوان معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است. اعمال شرط مرزی برای فشار استاتیکی روی مرزهای هندسه مسئله کار دشواری است و معمولاً در تحلیل‌های عددی از شرط مرزی گرادیان فشار عمودی همگن استفاده می‌شود. در این گزارش، از روش عددی مخصوصی استفاده شده که در آن نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار نیست. درهندسه مسئله، به‌دلیل وجود تقارن محوری، تنها نیاز به تحلیل جریان در نیمی از صفحه مختصات می‌باشد. با توجه به هندسه مسئله، می‌توان دریافت که این جریان نسبت به صفحه $r = 0$ دارای تقارن محوری است. با توجه به این شکل می‌توان دریافت که مولفه سرعت v_r عمود به محور تقارن و مولفه سرعت v_z مماس به این مرز می‌باشند. بنابراین شرایط زیر

برای مولفه‌های سرعت روی مرز تقارن وجود دارند:

$$(r=0):\ \frac{\partial v_z}{\partial r}=0\ ,\quad v_r=0 \tag{۱۱-۳}$$

جریان ورودی نیز به‌صورت یکنواخت در راستای z و برابر با U در نظر فرض می‌شود.

$$(z=0):\ v_z=U_{in}\ ,\quad v_r=0 \tag{۱۲-۳}$$

در خروجی بخش دوم نیز برای کلیه متغیرها به جز فشار شرط $\partial/\partial x\equiv 0$ قرار داده شده است.

$$(z=z_{Max}):\ \frac{\partial v_z}{\partial z}=0\ ,\quad \frac{\partial v_r}{\partial z}=0 \tag{۱۳-۳}$$

۳-۴- معادله حاکم بر انتقال حرارت و شرایط مرزی مربوطه

در این بخش متغیرهای بی‌بعد انتقال حرارت ارائه می‌شود. متغیرهای بی‌بعد حرارتی مربوط به انتقال حرارت در تحقیق حاضر عبارتند از:

$$T_T=\frac{\tilde{T}-\tilde{T}_w}{\tilde{T}_{in}-\tilde{T}_w}\qquad Br_T=\frac{\eta_0 W_0^{\ 2}}{k\left(\tilde{T}_{in}-\tilde{T}_w\right)} \tag{۱۴-۳}$$

$$\Pr=\frac{\eta_0}{\rho\alpha}\qquad Nu=\frac{hD}{k} \tag{۱۵-۳}$$

در رابطه فوق T_T دمای بی بعد، $\tilde{T}_{in}$ دمای سیال در ورودی، $\tilde{T}_w$ دمای دیواره، ، k ضریب هدایت حرارتی، Br_T عدد برینکمن، α ضریب انتقال حرارت، h ضریب انتقال حرارت جابجایی، $\Pr$ عدد پرانتل و Nu عدد ناسلت است.

با اعمال قانون اول ترمودینامیک بر روی یک المان حجم کنترل، معادله انتقال حرارت برای جریان سیالات ، طبق رابطه زیر به‌دست می‌آید [۳۷]:

$$\rho C_v\,(\underbrace{\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{t}}}_{\substack{rate\,of\\ change}}+\underbrace{\tilde{V}.\nabla\tilde{T}}_{Convection})=\underbrace{\nabla.\left(k\,\nabla\tilde{T}\right)}_{\substack{Diffusion\\ (conduction)}}+\underbrace{\tilde{\tau}:\nabla\times\tilde{V}-\tilde{T}\left(\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{T}}\right)_{\rho}\nabla.\tilde{V}}_{Work} \tag{۱۶-۳}$$

که در آن، $\tilde{T}$ دمای سیال، ρ چگالی سیال، C_v ظرفیت گرمایی ویژه در حجم ثابت، $\tilde{t}$ زمان، k

ضریب هدایت حرارتی، $\tilde{P}$ فشار و $\tilde{\tau}$ تانسور تنش جریان سیال است. در رابطه فوق انتقال حرارت هدایتی بر اساس قانون فوریه به‌دست آمده است. همچنین جمله آخر رابطه مذکور، اثر کار تراکم-پذیری سیال بر انتقال حرارت جریان را نشان می‌دهد. از آنجا که مایعات ویسکوالاستیک سیالاتی تراکم‌ناپذیر هستند، لذا این جمله ($\nabla.\tilde{V}$) در معادله انتقال حرارت این سیالات صفر در نظر گرفته می‌شود. جمله $\tilde{\tau}:\nabla\times\tilde{V}$ در رابطه فوق، اثر کار میدان تنش بر جریان سیال را بیان می‌کند و برای سیال نیوتنی همیشه دارای مقدار مثبتی می‌باشد. مثبت بودن این جمله بیانگر بازگشت‌ناپذیری کار میدان جریان است. در سیال نیوتنی این جمله به اثر تلفات لزجت معروف است. علی‌رغم سیال نیوتنی، این جمله برای جریان سیال ویسکوالاستیک ممکن است که به‌طور موضعی دارای مقداری منفی باشد. منفی بودن این جمله برای این است که بخشی از انرژی در بخش الاستیک سیال ذخیره شده است [۳۷].

نکته دیگر اینکه، چنانچه از وابستگی خواص سیال به دما صرف‌نظر شود، حل میدان جریان مستقل از میدان دما می‌شود. تحقیق حاضر بر همین اساس انجام شده است. صورت بی‌بعد معادله انتقال حرارت دائمی جریان سیال ویسکوالاستیک تراکم‌ناپذیر در دستگاه مختصات استوانه‌ای، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r}+v_z \frac{\partial T}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+Br\Phi\right\} \qquad (۱۷-۳)$$

رابطه فوق شکل بی‌بعد معادله انرژی برای انتقال حرارت می‌باشد. در رابطه فوق، Φ کار میدان تنش بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Phi=\frac{\partial v_r}{\partial r}\tau_{rr}+\frac{v_r}{r}\tau_{\theta\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\tau_{zz}+\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\tau_{rz} \qquad (۱۸-۳)$$

با توجه به بی‌بعدسازی دما، شرط مرزی زیر برای دماهای بی‌بعد روی دیواره‌های هندسه در نظر گرفته می‌شود:

$$T_T = 0 \tag{۱۹-۳}$$

دمای سیال در ورودی برابر مقدار ثابت $\tilde{T}_{in}$ فرض شده است. بنابراین با توجه به رابطه (۱۴-۳)، مقدار T_T در ورودی برابر یک به‌دست می‌آید. در خروجی تبدیل نیز شرط مرزی $\frac{\partial T}{\partial x} = cte$ در نظر گرفته شده است. در واقع این شرط، یک شرط تقریبی برای دمای خروجی است. با توجه به اینکه طول هندسه در راستای x بلند در نظر گرفته شده و در دیواره‌های هندسه، شرط دما-ثابت برقرار است، می‌توان با اطمینان شرط مرزی نامبرده را استفاده کرد. البته، نتایج عددی که در بخش‌های بعدی ارائه شده است، صحت این شرط مرزی را تائید می‌کند. بر روی محور تقارن ($r = 0$) نیز شرط مرزی نیومن همگن برای مقادیر دما در راستای عمود بر مرز بر قرار است ($\frac{\partial T}{\partial r} = 0$).

۳-۵- معادله متشکله سیال ویسکوالاستیک (مدل CEF)

معادله متشکله کریمینال-اریکسون-فیلبی تعمیم‌یافته معروف به مدل CEF که در این تحقیق، جهت شبیه‌سازی میدان تنش سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳۸و۳۹]:

$$\tilde{\tau} = \tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}_{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}_{(2)} + \tilde{\Psi}_2(\dot{\tilde{\gamma}})\left\{\tilde{\gamma}_{(1)}.\tilde{\gamma}_{(1)}\right\} \tag{۲۰-۳}$$

که در آن، جملات $\tilde{\gamma}_{(1)}$ و $\tilde{\gamma}_{(2)}$ معرف مشتقات مرتبه اول و دوم همرفتی پاد همبسته تانسور نرخ برش می‌باشند که به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\tilde{\gamma}_{(1)} = \nabla\tilde{V} + \nabla\tilde{V}^{T} \tag{۲۱-۳}$$

$$\tilde{\gamma}_{(2)} = \frac{D\tilde{\gamma}_{(1)}}{D\tilde{t}} - \left\{\left(\nabla\tilde{V}\right)^{T}.\tilde{\gamma}_{(1)} + \tilde{\gamma}_{(1)}.\left(\nabla\tilde{V}\right)\right\} \tag{۲۲-۳}$$

توابع ویسکومتریک در این مدل، لزجت ($\tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})$) و اختلاف تنش‌های عمودی اول و دوم ($\tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}})$ و $\tilde{\Psi}_2(\dot{\tilde{\gamma}})$) به‌صورت توابعی از نرخ برش تعمیم‌یافته منظور شده‌اند. نرخ برش تعمیم‌یافته نیز برابر با

مانای دوم تانسور نرخ برش می‌باشد:

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{2}II} = \sqrt{\frac{1}{2}tr\left(\tilde{\gamma}_{(1)}.\tilde{\gamma}_{(1)}\right)} \qquad (۲۳\text{-}۳)$$

معادله متشکله CEF برحسب مشتقات زمانی مرتبه اول و دوم همرفتی همبسته تانسور نرخ برش نیز قابل بیان می‌باشد [۲]:

$$\tilde{\gamma}^{(1)} = \nabla\tilde{V} + \left(\nabla\tilde{V}\right)^{\mathrm{T}} \qquad (۲۴\text{-}۳)$$

$$\tilde{\gamma}^{(2)} = \frac{D\tilde{\gamma}^{(1)}}{Dt} + \left\{\left(\nabla\tilde{V}\right)\cdot\tilde{\gamma}^{(1)} + \tilde{\gamma}^{(1)}\cdot\left(\nabla\tilde{V}\right)^{\mathrm{T}}\right\} \qquad (۲۵\text{-}۳)$$

با توجه به معادله فوق، مقدار مشتق مادی نرخ برش به صورت زیر تعریف می‌شود[۲]:

$$\frac{D\tilde{\gamma}^{(1)}}{D\tilde{t}} = \tilde{\gamma}^{(2)} - \left\{\left(\nabla\tilde{V}\right)\cdot\tilde{\gamma}^{(1)} + \tilde{\gamma}^{(1)}\cdot\left(\nabla\tilde{V}\right)^{T}\right\} \qquad (۲۶\text{-}۳)$$

طبق تعریف مقدار $\gamma^{(1)}$ با $\tilde{\gamma}_{(1)}$ برابر است، بنابراین می‌توان $\tilde{\gamma}_{(1)}$ را به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\tilde{\gamma}_{(2)} = \tilde{\gamma}^{(2)} - \left\{\left((\nabla\tilde{V}) + (\nabla\tilde{V})^{T}\right)\cdot\tilde{\gamma}^{(1)} + \tilde{\gamma}^{(1)}\cdot\left((\nabla\tilde{V}) + (\nabla\tilde{V})^{T}\right)\right\} \qquad (۲۷\text{-}۳)$$

بنابراین:

$$\tilde{\gamma}_{(2)} = \gamma^{(2)} - 2\left\{\gamma^{(1)}.\gamma^{(1)}\right\} \qquad (۲۸\text{-}۳)$$

بنابراین چنانچه مقدار $\tilde{\gamma}_{(2)}$ از معادله فوق در معادله (۲۰-۳) جایگزین شود و با توجه به برابری مقدار $\tilde{\gamma}_{(1)}$ با $\tilde{\gamma}^{(1)}$، تنش سیال ویسکوالاستیک (مدل CEF) می‌شود:

$$\tilde{\tau} = \tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}^{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}^{(2)} + \left(\tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}}) + \tilde{\Psi}_2(\dot{\tilde{\gamma}})\right)\left\{\tilde{\gamma}^{(1)}.\tilde{\gamma}^{(1)}\right\} \qquad (۲۹\text{-}۳)$$

معادله فوق، شکل معادله متشکله سیال CEF برحسب مشتقات زمانی همرفتی همبسته تانسور نرخ برش می‌باشد که در برخی از مراجع مورد استفاده شده است.

معادله متشکله CEF بر اساس بسط مشتقات نرخ برش (مشتقات بر مبنای ضرایب زمان‌های تاخیر سیال) توسعه داده شده است. در تحقیق بریس و همکاران [۴۰] نشان داده شد که پاسخ معادله

ساختاری CEF در اعداد دبورای کوچک با پاسخ سایر مدل‌های ویسکوالاستیک (مانند مدل وایت متزنر) یکسان می‌باشد. دقیق‌ترین پاسخ‌های مدل CEF مربوط به جریان‌دائمی برش سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد. این مدل، در حالت‌های زیر به مدل‌های دیگری تبدیل می‌شود:

- اگر $\tilde{\eta}$، $\tilde{\Psi}_1$ و $\tilde{\Psi}_2$ مستقل از نرخ بـرش باشـند ($\tilde{\eta}(\dot{\gamma})=\tilde{\eta}_0, \tilde{\Psi}_1(\dot{\gamma})=\tilde{\Psi}_{1,0}, \tilde{\Psi}_2(\dot{\gamma})=\tilde{\Psi}_{2,0}$)، معادله CEF به مدل سیال مرتبه دو قابل تبدیل است.
- اگر $\tilde{\Psi}_1=0$، معادله CEF به مدل سیال راینر-ریولین ساده می‌شود.
- اگر $\tilde{\eta}=\tilde{\eta}(\dot{\gamma}), \tilde{\Psi}_1=0, \tilde{\Psi}_2=0$، معادله CEF به سیال نیوتنی تعمیم‌یافته تبدیل می‌شود.
- اگر $\tilde{\eta}=\tilde{\eta}_0, \tilde{\Psi}_1=0, \tilde{\Psi}_2=0$، مدل به سیال نیوتنی ساده می‌شود.

در اکثر مواد ویسکوالاستیک (به‌ویژه در محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری)، وابستگی لزجت به نرخ برش به‌صورت رقیق‌شونده است (کمتر شدن لزجت با ازدیاد نرخ برش). حالت غلیظ‌شوندگی لزجت بسیار کمیاب می‌باشد. به‌همین دلیل، بسیاری از توابع ویسکومتریک به‌صورت رقیق‌شونده در نظر گرفته شده‌اند. مدل ویسکومتریک مورد استفاده در این تحقیق، مدل کاریو-یاسودا می‌باشد. در این مدل، توابع ویسکومتریک برای لزجت و ضرایب اختلاف تنش‌های عمودی اول و دوم به‌شکل زیر قابل بیان هستند :

$$\frac{\tilde{\eta}(\dot{\gamma})-\tilde{\eta}_\infty}{\tilde{\eta}_0-\tilde{\eta}_\infty}=\left[1+(\lambda\dot{\gamma})^a\right]^{(n-1)/a} \qquad (۳۰-۳)$$

$$\Psi_1(\dot{\gamma})=2\lambda_1(\tilde{\eta}_0-\tilde{\eta}_\infty)\left[1+(\lambda\dot{\gamma})^a\right]^{(n-1)/a} \qquad (۳۱-۳)$$

$$\Psi_2(\dot{\gamma})=-\chi\,\Psi_1(\dot{\gamma}) \qquad (۳۲-۳)$$

که در آن، $\tilde{\eta}_0$ لزجت در نرخ برش صفر، $\tilde{\eta}_\infty$ لزجت در نرخ برش بی‌نهایت، λ ثابت زمانی مدل، λ_1 ثابت زمانی تاخیر سیال، χ نسبت اختلاف تنش‌های عمودی اول و دوم، n توان نمایی و a ثابت بی‌بعدی است که ناحیه انتقال بین نرخ برش صفر و ناحیه نمایی را بیان می‌کند. مقدار a برای بسیاری از محلول‌های پلیمری برابر ۲ اعلام شده است. همچنین در اکثر محلول‌ها و مذاب‌های

پلیمری مقدار $\tilde{\eta}_\infty$ حدود 10^1 تا 10^4 بار از $\tilde{\eta}_0$ کوچکتر در نظر گرفته شده است. به همین دلیل، در برخی از کاربردهای مهندسی مقدار $\tilde{\eta}_\infty$ برابر صفر فرض شده است. $\tilde{\eta}_\infty$ در واقع بیانگر بخش نیوتنی رفتار ماده می‌باشد که معمولاً در محلول های پلیمری مقدار آن کوچک می‌باشد. در اکثر آزمایشات رئولوژیکی از اندازه‌گیری مستقیم مقدار اختلاف تنش دوم صرفنظر می‌شود و این مقدار تنها به‌صورت نسبتی از اختلاف تنش عمودی اول در نظر گرفته می‌شود. در اینجا نیز چنین کاری انجام شده و ضریب χ به‌عنوان نسبت اختلاف تنش‌های عمودی منظور شده است. در بیشتر مواد ویسکوالاستیک، اختلاف تنش عمودی دوم دارای مقداری منفی می‌باشد، در حالی که همیشه مقادیر مثبتی برای اختلاف تنش عمودی اول اعلام شده است. در اکثر مواد ویسکوالاستیک مقدار اختلاف تنش عمودی دوم از ۲۰٪ اختلاف تنش عمودی اول کمتر بوده ($\chi < 0.2$) و در بسیاری از محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری نیز مقدار اختلاف تنش دوم حدود ۱۰ ٪ اختلاف تنش عمودی اول گزارش شده است ($\chi \approx 0.1$). مدل کاریو-یاسودا یک مدل چند ثابته است که از انعطاف پذیری کافی برای برازش مناسب بر روی توابع ویسکومتریک بسیاری از مواد ویسکوالاستیک برخوردار است. به‌طور کلی پس از جمع‌آوری داده‌های کافی آزمایشگاهی از رفتار رئولوژیکی ماده، می‌توان این مدل را بر روی داده‌ها برازش داد و ضرایب مربوطه را تعیین نمود. مدل کاریو-یاسودا در واقع حالت تعمیم‌یافته مدل معروف کراس می‌باشد [۴۱]:

$$\tilde{\eta}(\dot{\gamma}) = \tilde{\eta}_\infty + \left(\tilde{\eta}_0 - \tilde{\eta}_\infty\right) / \left[1 + \lambda \dot{\gamma}^{(1-n)}\right] \qquad (۳۳-۳)$$

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = 2\lambda_1 (\tilde{\eta}_0 - \tilde{\eta}_\infty) / \left[1 + \lambda \dot{\gamma}^{(1-n)}\right] \qquad (۳۴-۳)$$

در مدل کراس، لزجت در نرخ برش صفر برابر $\tilde{\eta}_0$ و در نرخ برش بی‌نهایت برابر $\tilde{\eta}_\infty$ در نظر گرفته می‌شود و بین این دو مقدار حدی، مدل کراس به مدل نمایی نزدیک می‌شود. از مزایای مدل کاریو-یاسودا نسبت به مدل کراس این است که در این مدل رفتار رئولوژیکی غیرخطی به شکل دقیق‌تری محاسبه می‌شود. مزیت دیگر هر دو مدل نسبت به مدل نمایی، امکان محاسبه $\tilde{\eta}_\infty$ در این مدل‌ها می-

باشد (در مدل نمایی مقدار $\tilde{\eta}_\infty$ همواره برابر صفر محاسبه می‌شود).

۳-۶- معادله ساختاری سیال CEF در دستگاه مختصات استوانه‌ای

همانگونه که پیشتر ذکر شد، در این تحقیق از دستگاه مختصات استوانه‌ای برای بررسی عددی جریان سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرا استفاده شده است. به‌همین منظور، در اینجا مولفه‌های تانسور تنش سیال و مشتقات مربوطه در دستگاه مختصات استوانه‌ای ارائه شده است. صورت بی‌بعد معادله ساختاری سیال CEF به‌شکل زیر می‌باشد:

$$\tau = \eta\gamma_{(1)} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)} + \Psi_2\left\{\gamma_{(1)}\cdot\gamma_{(1)}\right\} \qquad (۳۵-۳)$$

در دستگاه مختصات استوانه‌ای، مولفه‌های تانسور تنش بی‌بعد سیال CEF از معادلات زیر محاسبه می‌شوند [۵]:

$$\tau_{rr} = \eta\gamma_{(1)rr} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)rr} + \Psi_2(\gamma_{(1)rr}{}^2 + \gamma_{(1)r\theta}{}^2 + \gamma_{(1)rz}{}^2) \qquad (۳۶-۳)$$

$$\tau_{r\theta} = \eta\gamma_{(1)r\theta} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)r\theta} + \Psi_2(\gamma_{(1)rr}\gamma_{(1)r\theta} + \gamma_{(1)r\theta}\gamma_{(1)\theta\theta} + \gamma_{(1)rz}\gamma_{(1)z\theta}) \qquad (۳۷-۳)$$

$$\tau_{rz} = \eta\gamma_{(1)rz} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)rz} + \Psi_2(\gamma_{(1)rr}\gamma_{(1)rz} + \gamma_{(1)r\theta}\gamma_{(1)\theta z} + \gamma_{(1)rz}\gamma_{(1)zz}) \qquad (۳۸-۳)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \eta\gamma_{(1)\theta\theta} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)\theta\theta} + \Psi_2(\gamma_{(1)r\theta}{}^2 + \gamma_{(1)\theta\theta}{}^2 + \gamma_{(1)\theta z}{}^2) \qquad (۳۹-۳)$$

$$\tau_{\theta z} = \eta\gamma_{(1)\theta z} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)\theta z} + \Psi_2(\gamma_{(1)\theta r}\gamma_{(1)rz} + \gamma_{(1)\theta\theta}\gamma_{(1)\theta z} + \gamma_{(1)\theta z}\gamma_{(1)zz}) \qquad (۴۰-۳)$$

$$\tau_{zz} = \eta\gamma_{(1)zz} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)zz} + \Psi_2(\gamma_{(1)rz}{}^2 + \gamma_{(1)\theta z}{}^2 + \gamma_{(1)zz}{}^2) \qquad (۴۱-۳)$$

که در آن، η، Ψ_1 و Ψ_2 توابعی از نرخ برش تعمیم‌یافته $(\dot{\gamma})$ می‌باشند. با توجه به تعریف نرخ برش تعمیم‌یافته، این مقدار از معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{\tilde{\gamma}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\tilde{\gamma}_{rr(1)}{}^{2}+\tilde{\gamma}_{\theta\theta(1)}{}^{2}+\tilde{\gamma}_{zz\,(1)}{}^{2}+2\tilde{\gamma}_{\theta z\,(1)}{}^{2}+2\tilde{\gamma}_{rz\,(1)}{}^{2}+2\tilde{\gamma}_{r\theta(1)}{}^{2}\right)} \qquad (۴۲-۳)$$

در روابط (۳۶-۳) تا (۴۱-۳)، $\gamma_{(1)}$ تانسور نرخ برش بوده و مولفه‌های آن برای جریان مورد مطالعه به‌شکل زیر است:

$$\gamma_{(1)_{rr}}=2\frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad \gamma_{(1)_{r\theta}}=0 \qquad \gamma_{(1)_{rz}}=\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$\gamma_{(1)_{\theta\theta}}=2\frac{v_r}{r} \qquad \gamma_{(1)_{\theta z}}=0 \qquad \gamma_{(1)_{zz}}=2\frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (۴۳-۳)$$

شایان ذکر است که برای جریان مورد مطالعه با توجه به هندسه مسئله، جمله‌های v_θ و $\frac{\partial}{\partial\theta}$ برابر با صفر در نظر گرفته شده‌اند. همچنین $\gamma_{(2)}$ مشتق همرفتی پاد همبسته نرخ برش مرتبه دو بوده و در دستگاه مختصات استوانه‌ای به‌شکل زیر قابل محاسبه می‌شود:

$$\gamma_{(2)\mathrm{rr}}=\mathrm{v_r}\frac{\partial\gamma_{(1)\mathrm{rr}}}{\partial \mathrm{r}}+\mathrm{v_z}\frac{\partial\gamma_{(1)\mathrm{rr}}}{\partial \mathrm{z}}-\gamma_{(1)\mathrm{rr}}^{2}-2\frac{\partial \mathrm{v_r}}{\partial \mathrm{z}}\gamma_{(1)\mathrm{rz}} \qquad (۴۴-۳)$$

$$\gamma_{(2)_{r\theta}}=v_r\frac{\partial\gamma_{(1)_{r\theta}}}{\partial r}+v_z\frac{\partial\gamma_{(1)_{r\theta}}}{\partial z}-\frac{1}{2}\left(3\gamma_{(1)_{rr}}+\gamma_{(1)_{\theta\theta}}\right)\gamma_{(1)_{r\theta}}-\gamma_{(1)_{\theta z}}\gamma_{(1)_{rz}}-\frac{\partial v_r}{\partial z}\gamma_{(1)_{\theta z}} \qquad (۴۵-۳)$$

$$\gamma_{(2)_{rz}}=v_r\frac{\partial\gamma_{(1)_{rz}}}{\partial r}+v_z\frac{\partial\gamma_{(1)_{rz}}}{\partial z}-\frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)_{rr}}+\gamma_{(1)_{zz}}\right)\gamma_{(1)_{rz}}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\gamma_{(1)_{rr}}-\frac{\partial v_r}{\partial z}\gamma_{(1)_{zz}} \qquad (۴۶-۳)$$

$$\gamma_{(2)\theta\theta}=\mathrm{v_r}\frac{\partial\gamma_{(1)\theta\theta}}{\partial \mathrm{r}}+\mathrm{v_z}\frac{\partial\gamma_{(1)\theta\theta}}{\partial \mathrm{z}}-2\left(\gamma_{(1)\mathrm{r}\theta}^{2}+\gamma_{(1)\theta\mathrm{z}}^{2}\right)-\gamma_{(1)\theta\theta}^{2} \qquad (۴۷-۳)$$

$$\gamma_{(2)_{\theta z}}=v_r\frac{\partial\gamma_{(1)_{\theta z}}}{\partial r}+v_z\frac{\partial\gamma_{(1)_{\theta z}}}{\partial z}-\frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)_{\theta\theta}}+3\gamma_{(1)_{zz}}\right)\gamma_{(1)_{\theta z}}-\gamma_{(1)_{r\theta}}\gamma_{(1)_{rz}}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\gamma_{(1)_{r\theta}} \qquad (۴۸-۳)$$

$$\gamma_{(2)\mathrm{zz}}=\mathrm{v_r}\frac{\partial\gamma_{(1)\mathrm{zz}}}{\partial \mathrm{r}}+\mathrm{v_z}\frac{\partial\gamma_{(1)\mathrm{zz}}}{\partial \mathrm{z}}-\gamma_{(1)\mathrm{zz}}^{2}-2\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{r}}\gamma_{(1)\mathrm{rz}} \qquad (۴۹-۳)$$

فصل ۴. روش عددی

۴-۱- مقدمه

در این تحقیق، تفاضل محدود برای تحلیل جریان و انتقال حرارت در تبدیل همگرا و واگرا مورد استفاده قرار گرفته است. معادلات حاکم به‌صورت صریح گسسته‌سازی شده‌اند. تقریب مرکزی مرتبه دوم برای مشتقات مکانی و تقریب پیشروی مرتبه اول برای مشتق زمان (مجازی) استفاده شده است. در اینجا، شبکه جابجاشده استفاده شده که در آن متغیرهای جریان مطابق روش علامتگذاری و سلول روی گره‌های محاسباتی اختصاص یافته‌اند. همچنین برای اصلاح فشار استاتیکی در طی گام‌های زمان مجازی، روش تراکم‌پذیری مصنوعی به‌کار گرفته شده است.

این فصل، شامل مباحثی در مورد روش عددی مورد استفاده، صورت گسسته معادلات حاکم (برای جریان و انتقال حرارت) و نحوه اعمال شرایط مرزی می‌باشد.

۴-۲- تحلیل عددی جریانهای دائمی

اکثرا تحلیل عددی مسائل جریان دائمی به‌صورت شبه گذرا صورت می‌گیرد و پس از اعمال یک شرط اولیه مناسب، معادلات حاکم در حالت گذرا حل شده تا جواب‌ها به‌سمت پاسخ‌های جریان دائمی همگرا شوند [۴۲]. حل عددی معادلات حاکم بر جریان سیالات لزج در حالت غیردائم دارای مشکلی است که به آن اشاره می‌شود. معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت (معادلات ممنتوم و معادله انتقال حرارت) دارای جمله‌هایی تابع زمان برای مؤلفه‌های سرعت و دما می‌باشند. از همین رو، مولفه-های سرعت و دما به‌صورت گذرا موجود می‌باشند، ولی فشار در این معادلات دارای جمله تابع زمان نیست. برای غلبه بر این مشکل، باید تغییراتی در معادله پیوستگی ایجاد کرد تا فشار نیز مانند مولفه-های سرعت و دما به‌صورت گذرا قابل حل باشد [۴۲].

برای انجام این کار، جمله فشار تابع زمان به معادله پیوستگی اضافه می‌شود که به آن روش تراکم‌پذیری مصنوعی می‌گویند [۴۳]. در روش تراکم‌پذیری مصنوعی فشار در طی گام‌های زمان

مجازی تخمین زده می‌شود. کاربرد این روش برای جریان دائمی سیالات تراکم‌ناپذیر بوده و از سوی چورین [۴۳] ارائه شده است. در این روش، با افزودن یک عبارت تابع زمان برای فشار، معادله پیوستگی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{\tau}\nabla.V\ =0 \qquad (۱-۴)$$

که در آن τ، تراکم‌پذیری مصنوعی سیال نامیده می‌شود. این ضریب در تحقیق حاضر، برابر با ۰/۰۰۱ در نظر گرفته شده است. شایان ذکر است که با توجه به رابطه فوق، در حالت حدی، وقتی که حالت دائم حاصل می‌شود ($t\rightarrow\infty$)، معادله (۴-۱) به‌شکل معادله پیوستگی تراکم‌ناپذیر معمولی ساده می‌شود. (چون در حالت دائم $\frac{\partial P}{\partial t}$ برابر صفر می‌شود).

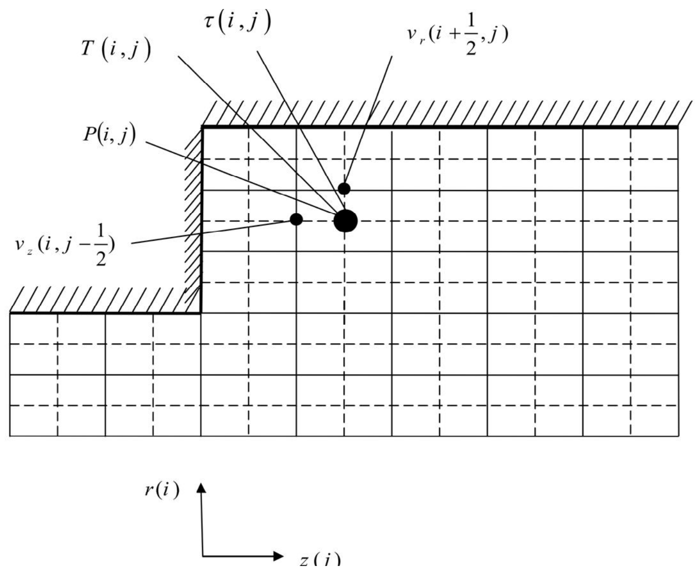
۴-۳- شبکه محاسباتی

استفاده از شبکه محاسباتی به‌نام شبکه جابجا شده برای حل عددی گام به گام جریان سیالات مرسوم است. استفاده از این شبکه، باعث می‌شود که متغیرها به یکدیگر جفت شده و پایداری حل عددی بهتر شود.

شبکه جابجا شده به روش‌های مختلفی تولید می‌شود. در تحقیق حاضر، مطابق شکل (۴-۱)، شبکه در امتداد یکی از خطوط مختصات به‌اندازهٔ نصف فاصله دو نقطه جابجا شده است. در اینجا به‌دلیل وجود تقارن محوری، شبکه محاسباتی تنها در r و z نمایش داده شده است. استفاده از دو شبکه غیرمنطبق بر هم باعث شده که آن‌ها را شبکه‌های اولیه و ثانویه بنامند. همچنین شبکه اولیه با خطوط خط‌چین و شبکه ثانویه با خطوط ممتد نشان داده شده است. گره‌های محاسباتی شبکه اولیه با i و j نشان داده شده است. شبکه ثانویه نیز، با فواصل نصف متمایز شده است.

یکی از دشواری‌های مربوط به روش‌های عددی مختلف اعمال شرط مرزی فیزیکی مناسب برای فشار استاتیکی محسوب می‌شود. گسسته‌سازی تفاضل محدود معادلات حاکم بر روی شبکه جابجاشده را

می‌توان به شکلی انجام داد که نیازی به استفاده از این شرط مرزی نباشد. با توجه به اینکه، مرزها بر روی شبکه ثانویه تعریف می‌شوند و فشار بر روی شبکه اولیه اختصاص یافته و در معادلات حاکم فاقد مشتق مرتبه دوم است، بنابراین در اینجا نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار نیست.



شکل(۴-۱) شبکه جابجاشده و نحوه تخصیص پارمترهای جریان و انتقال حرارت روی آن.

شکل(۴-۱) نحوه اختصاص پارامترهای جریان و انتقال حرارت روی شبکه جابجاشده برای تبدیل واگرا نشان داده شده است. مطابق شکل، فشار استاتیکی (p)، مولفه‌های میدان تنش (τ) و دما (T) روی شبکه اولیه محاسبه می‌شوند. مولفه‌های سرعت v_r و v_z نیز بر روی موقعیت‌های ویژه‌ای در محل اتصال شبکه اولیه با شبکه ثانویه قرار می‌گیرند. مولفه سرعت شعاعی v_r، در امتداد شعاعی (r) روی شبکه ثانویه و در امتداد طولی (z) روی شبکه اولیه قرار دارد ($v_{r(i+1/2,j)}$)، حال آنکه این موضوع برای مولفه سرعت محوری v_z برعکس می‌باشد ($v_{z(i,j+1/2)}$).

۴-۴- گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت

استفاده از گسسته‌سازی به روش تفاضل محدود بر روی شبکه جابجاشده توسط هارلو و ولچ [۴۴] ابداع شده که هدف از ابداع آن بررسی جریان‌های تراکم‌ناپذیر دائمی بوده است. در این روش، برای گسسته‌سازی معادلات حاکم از تقریب تفاضل محدود پیشرو مرتبه اول برای مشتق زمان و تقریب تفاضل محدود مرتبه دوم برای مشتقات مکانی استفاده می‌شود. در این گسسته‌سازی، نحوه اختصاص متغیرهای جریان به شبکه جابجا شده مطابق روش علامتگذاری و سلول می‌باشد.

این روش عمدتاً برای مطالعه جریان سیالات نیوتنی استفاده شده است. در این تحقیق، این روش برای مطالعه جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرا به‌کار رفته است. استفاده از این روش، سبب پیچیده شدن شکل گسسته معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت سیالات غیرنیوتنی شده و اعمال شرایط مرزی را دشوار می‌کند. اما یکی از مهم‌ترین مزایای این روش آن است که پایداری حل عددی را به‌طور قابل توجهی افزایش می‌دهد و نسبت به روش معمول تفاضل محدود ساده دارای پایداری عددی بسیار بیشتری می‌باشد [۴۲].

استفاده از این روش برای جریان سیال نیوتنی بسیار مناسب می‌باشد زیرا در معادلات ناویر استوکس، جملات دیورژانس تنش سیال نیوتنی به ترم لاپلاسین میدان سرعت ساده می‌شود که این جمله به‌سادگی بر روی شبکه جابجا شده گسسته‌سازی شده و اعمال شرایط مرزی روی آن بسیار ساده‌تر است. از آنجا که جمله تنش ویسکوز نقش فراوانی در پایداری تحلیل عددی دارد به‌همین دلیل جمله مربوط به این تنش (ترم لاپلاسین میدان سرعت) به‌طور جداگانه گسسته‌سازی شده است. برای این منظور میدان تنش بی‌بعد سیال CEF به‌صورت زیر بیان شده است [۵]:

$$\tau = \eta \gamma_{(1)} + \tau^E \tag{۴-۲}$$

که در آن τ^E معرف تنش ناشی از اثر الاستیک سیال بوده و با توجه رابطه (۳-۲۰) برای سیال CEF به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\tau^{E} = -\frac{1}{2}\Psi_{1}\gamma_{(2)} + \Psi_{2}\left\{\gamma_{(1)}\cdot\gamma_{(1)}\right\} \tag{۳-۴}$$

در اینجا از شکل بقایی معادلات حاکم بر جریان استفاده شده است. بنابراین با توجه به رابطه (۴-۲)، صورت بقایی معادلات ممنتوم حاکم بر جریان سیال CEF (معادلات (۳-۶) و (۳-۷)) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_{r}}{\partial t} + \frac{\partial v_{r}^{2}}{\partial r} + \frac{\partial v_{r}v_{z}}{\partial z} + \frac{v_{r}^{2}}{r} = \\ &\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\begin{aligned}&-\frac{\partial P}{\partial r} + \eta\left(\nabla^{2}v_{r} - \frac{v_{r}}{r^{2}}\right) + \left(\frac{\partial v_{r}}{\partial z} + \frac{\partial v_{z}}{\partial r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial z} + \\ &2\frac{\partial v_{r}}{\partial r}\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rr}{}^{E}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}{}^{E}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr}{}^{E} - \tau_{\theta\theta}{}^{E}}{r}\end{aligned}\right\}\end{aligned} \tag{۴-۴}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_{z}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(v_{r}v_{z}\right) + \frac{\partial v_{z}^{2}}{\partial z} + \frac{v_{r}v_{z}}{r} = \\ &\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{-\frac{\partial P}{\partial z} + \eta\nabla^{2}v_{z} + \left(\frac{\partial v_{r}}{\partial z} + \frac{\partial v_{z}}{\partial r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial r} + 2\frac{\partial v_{z}}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rz}{}^{E}\right) + \frac{\partial \tau_{zz}{}^{E}}{\partial z}\right\}\end{aligned} \tag{۵-۴}$$

۴-۵- شکل گسسته معادلات حاکم

در این قسمت شکل گسسته معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت ارائه می‌شود. با توجه به شبکه مورد استفاده و نحوه تخصیص پارامترهای جریان روی آن، صورت گسسته معادله ممنتوم در جهت شعاعی (r) به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}^{n+1}-v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}}{\Delta t}+\frac{(v_r^2)_{j+1,k}-(v_r^2)_{j,k}}{\Delta r}+\frac{(v_rv_z)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}-(v_rv_z)_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{\Delta z}+\frac{(v_r^2)_{j+\frac{1}{2},k}}{r_{j+\frac{1}{2}}}=$$
$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{P_{j+1,k}-P_{j,k}}{\Delta r}+\frac{\eta_{j,k}}{\mathrm{Re}}\frac{v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}-2v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j+\frac{3}{2},k}}}{\Delta r^2}$$
$$+\frac{\eta_{j,k}}{\mathrm{Re}}\frac{v_{r_{j+\frac{1}{2},k-1}}-2v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j+\frac{1}{2},k+1}}}{\Delta z^2}+\frac{\eta_{j,k}}{\mathrm{Re}\,r_{j+\frac{1}{2}}}\frac{v_{r_{j+\frac{3}{2},k}}-v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}}{2\Delta r}$$
$$-\frac{\eta_{j,k}}{\mathrm{Re}\,r_{j+\frac{1}{2}}^2}v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\gamma_{rr_{j,k}}+\gamma_{rr_{j+1,k}}}{2}\right)\left(\frac{\eta_{j+1,k}-\eta_{j-1,k}}{\Delta r}\right) \tag{۶-۴}$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\gamma_{rz_{j,k}}+\gamma_{rz_{j+1,k}}}{2}\right)\left(\frac{\eta_{j,k+1}+\eta_{j+1,k+1}-\eta_{j,k-1}-\eta_{j+1,k-1}}{4\Delta z}\right)$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{r_{j+1}\tau^E_{rr_{j+1,k}}-r_j\tau^E_{rr_{j,k}}}{r_{j+\frac{1}{2}}\Delta r}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\tau^E_{\theta\theta_{j,k}}+\tau^E_{\theta\theta_{j+1,k}}}{2r_{j+\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\tau^E_{rz_{j,k+1}}+\tau^E_{rz_{j+1,k+1}}-\tau^E_{rz_{j,k-1}}-\tau^E_{rz_{j+1,k-1}}}{4\Delta z}$$

در رابطه فوق، برخی از جملات بر روی شبکه اختصاص یافته خود قرار ندارند. بنابراین لازم است که این جملات از روابط زیر در معادله فوق جایگزین شوند:

$$(v_r^2)_{j+1,k}=\frac{1}{4}(v_{r_{j+\frac{3}{2},k}}+v_{r_{j+\frac{1}{2},k}})^2 \tag{۷-۴}$$

$$(v_r^2)_{j,k}=\frac{1}{4}(v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j-\frac{1}{2},k}})^2 \tag{۸-۴}$$

$$(v_rv_z)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}(v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j+\frac{1}{2},k+1}})(v_{z_{j,k+\frac{1}{2}}}+v_{z_{j+1,k+\frac{1}{2}}}) \tag{۹-۴}$$

$$(v_rv_z)_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}(v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j+\frac{1}{2},k-1}})(v_{z_{j,k-\frac{1}{2}}}+v_{z_{j+1,k-\frac{1}{2}}}) \tag{۱۰-۴}$$

همچنین معادله ممنتوم در جهت محوری (z) نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&\frac{v_{z\,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{z\,j,k+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t} + \frac{(v_r v_z)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (v_r v_z)_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \\
&\frac{(v_z^2)_{j,k+1} - (v_z^2)_{j,k}}{\Delta z} + \frac{1}{r_j}(v_r v_z)_{j,k+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{P_{j,k+1} - P_{j,k}}{\Delta z} + \\
&\frac{\eta_{j,k}}{\mathrm{Re}}\frac{v_{z\,j-1,k+\frac{1}{2}} - 2v_{z\,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z\,j+1,k+\frac{1}{2}}}{\Delta r^2} + \frac{\eta_{j,k}}{\mathrm{Re}}\frac{v_{z\,j,k-\frac{1}{2}} - 2v_{z\,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z\,j,k+\frac{3}{2}}}{\Delta z^2} + \\
&\frac{\eta_{j,k}}{\mathrm{Re}\, r_j}\frac{v_{z\,j+1,k+\frac{1}{2}} - v_{z\,j-1,k+\frac{1}{2}}}{2\Delta r} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\gamma_{zz\,j,k} + \gamma_{zz\,j,k+1}}{2}\right)\left(\frac{\eta_{j,k+1} - \eta_{j,k}}{\Delta z}\right) + \\
&\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\gamma_{rz\,j,k+1} + \gamma_{rz\,j,k}}{2}\right)\left(\frac{\eta_{j+1,k+1} + \eta_{j+1,k} - \eta_{j-1,k+1} - \eta_{j-1,k}}{4\Delta r}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\tau^{E}_{zz\,j,k+1} - \tau^{E}_{zz\,j,k}}{\Delta z} \\
&+ \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{r_{j+1}(\tau^{E}_{rz\,j+1,k+1} + \tau^{E}_{rz\,j+1,k}) - r_{j-1}(\tau^{E}_{rz\,j-1,k+1} + \tau^{E}_{rz\,j-1,k})}{4\Delta r}
\end{aligned} \qquad (۱۱\text{-}۴)$$

در رابطه فوق، برای جملاتی که بر روی محل مناسب گره‌های محاسباتی قرار ندارند، داریم:

$$(v_r v_z)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(v_{r\,j+\frac{1}{2},k} + v_{r\,j+\frac{1}{2},k+1})(v_{z\,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z\,j+1,k+\frac{1}{2}}) \qquad (۱۲\text{-}۴)$$

$$(v_r v_z)_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(v_{r\,j-\frac{1}{2},k} + v_{r\,j-\frac{1}{2},k+1})(v_{z\,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z\,j-1,k+\frac{1}{2}}) \qquad (۱۳\text{-}۴)$$

$$(v_z^2)_{j,k+1} = \frac{1}{4}(v_{z\,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z\,j,k+\frac{3}{2}})^2 \qquad (۱۴\text{-}۴)$$

$$(v_z^2)_{j,k} = \frac{1}{4}(v_{z\,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z\,j,k-\frac{1}{2}})^2 \qquad (۱۵\text{-}۴)$$

در روابط فوق، بالانویس $n+1$ معرف گام زمانی تحلیل در لحظه جدید است. برای سادگی، بالانویس سایر متغیرهایی که درگام زمانی n محاسبه می‌شوند، در روابط فوق درج نشده است. شایان ذکر است که در اینجا مولفه‌های میدان تنش و تانسور نرخ برش مرتبه اول و دوم بر روی شبکه اولیه محاسبه شده‌اند. با توجه به رابطه (۳-۴۳)، روابط زیر برای تانسور نرخ برش برقرار است:

$$\gamma_{rr\,j,k} = 2\left(\frac{v_{r\,j+\frac{1}{2},k} - v_{r\,j-\frac{1}{2},k}}{\Delta r}\right) \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

$$\gamma_{r\theta_{j,k}}=0 \tag{۱۷-۴}$$

$$\gamma_{rz_{j,k}}=\left(\frac{v_{r_{j-\frac{1}{2},k+1}}+v_{r_{j+\frac{1}{2},k+1}}-v_{r_{j-\frac{1}{2},k-1}}-v_{r_{j+\frac{1}{2},k-1}}}{4\Delta z}\right)+\left(\frac{v_{z_{j+1,k+\frac{1}{2}}}+v_{z_{j+1,k-\frac{1}{2}}}-v_{z_{j-1,k+\frac{1}{2}}}-v_{z_{j-1,k-\frac{1}{2}}}}{4\Delta z}\right) \tag{۱۸-۴}$$

$$\gamma_{\theta\theta_{j,k}}=\left(\frac{v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}}{r_j}\right) \tag{۱۹-۴}$$

$$\gamma_{\theta z_{j,k}}=0 \tag{۲۰-۴}$$

$$\gamma_{zz_{j,k}}=2\left(\frac{v_{z_{j,k+\frac{1}{2}}}-v_{z_{j,k-\frac{1}{2}}}}{\Delta z}\right) \tag{۲۱-۴}$$

نرخ برش تعمیم‌یافته را می‌توان بر اساس روابط فوق و معادله (۳-۴۲) به‌دست آورد. با جایگزینی نرخ برش تعمیم‌یافته در معادلات (۳-۲۹) تا (۳-۳۲)، می‌توان توابع ویسکومتریک شامل لزجت و توابع اختلاف تنش‌های عمودی اول و دوم را به‌دست آورد. همچنین با ترکیب معادلات (۴-۱۶) تا (۴-۲۱) و روابط (۳-۴۴) تا (۳-۴۹)، مولفه‌های تانسور نرخ برش مرتبه دوم نیز مشخص می‌شوند. در نهایت با استفاده از توابع ویسکومتریک و نرخ‌های برش مرتبه اول و دوم می‌توان مقادیر τ^E را از رابطه (۴-۲) روی شبکه اولیه تعیین نمود.

شکل گسسته معادله پیوستگی به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{P_{j,k}^{n+1}-P_{j,k}^{n}}{\Delta t}+\frac{1}{\tau}\left(\frac{v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}^{n+1}+v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}^{n+1}}{2r_j}+\frac{v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}^{n+1}-v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}^{n+1}}{\Delta r}+\frac{v_{z_{j,k+\frac{1}{2}}}^{n+1}-v_{z_{j,k-\frac{1}{2}}}^{n+1}}{\Delta z}\right)=0 \tag{۲۲-۴}$$

با توجه به اینکه دما روی شبکه اولیه تعریف می‌شود، صورت گسسته معادله انرژی نیز به شکل زیر خواهد شد:

$$\frac{T_{j,k}^{n+1}-T_{j,k}}{\Delta t}+\left(v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}\right)\left(\frac{T_{j+1,k}-T_{j-1,k}}{4\Delta r}\right)$$
$$+\left(v_{z_{j,k+\frac{1}{2}}}+v_{z_{j,k-\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{T_{j,k+1}-T_{j,k-1}}{4\Delta z}\right)=$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\left(\begin{array}{l}\frac{T_{j+1,k}-2T_{j,k}+T_{j-1,k}}{\Delta r^{2}}+\frac{T_{j+1,k}-T_{j-1,k}}{2r_{j}\,\Delta r}\\+\frac{T_{j,k+1}-2T_{j,k}+T_{j,k-1}}{\Delta z^{2}}+Br\Phi_{j,k}\end{array}\right) \tag{۲۳-۴}$$

جمله کار میدان تنش ($\Phi_{j,k}$) نیز از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\Phi_{j,k}=\frac{1}{2}\left(\gamma_{rr_{j,k}}\tau_{rr_{j,k}}+\gamma_{\theta\theta_{j,k}}\tau_{\theta\theta_{j,k}}+\gamma_{zz_{j,k}}\tau_{zz_{j,k}}\right)+$$
$$\gamma_{r\theta_{j,k}}\tau_{r\theta_{j,k}}+\gamma_{rz_{j,k}}\tau_{rz_{j,k}}+\gamma_{\theta z_{j,k}}\tau_{\theta z_{j,k}} \tag{۲۴-۴}$$

۴-۶- شرایط مرزی جریان و انتقال حرارت

در تحقیق حاضر به دلیل وجود تقارن محوری نسبت به θ، تحلیل جریان تنها در مقطعی از هندسه انجام شده است. مرزهای دامنه محاسباتی شامل یک مرز ورودی، سه دیواره جامد (دیواره افقی اول، دیواره عمودی و دیواره افقی دوم)، یک مرز تقارن محوری و یک مرز خروجی است. روی دیواره‌های جامد شرط مرزی عدم لغزش برای مولفه‌های سرعت اعمال شده است. همانگونه که در بخش‌های قبلی ذکر شد، در این تحقیق به‌دلیل استفاده از روش شبکه جابجاشده، نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار استاتیکی نیست. در اینجا مرزهای دامنه محاسباتی بر روی شبکه ثانویه در نظر گرفته شده است. اعمال شرایط مرزی درون شبکه جابجاشده دشواری‌هایی دارد. مشکل اصلی برای اعمال شرط مرزی، عدم قرارگیری گره‌های محاسباتی برخی از مولفه‌های سرعت بر روی مرزهای جریان می‌باشد. در این حالت یک ردیف گره محاسباتی در پشت مرز محاسباتی و خارج از دامنه محاسباتی در نظر گرفته می‌شود. مثلا چنانچه آخرین مولفه‌های سرعت در نزدیکی مرز جامد را با V^{+} و مولفه‌های سرعت پشت مرز جامد و بر روی گره‌های مجازی را با V^{-} نشان دهیم، داریم:

$$V^{+} = -V^{-} \qquad (۴-۲۵)$$

شایان ذکر است که چنانچه n و t به‌ترتیب به‌صورت جهت‌های عمود و مماس بر مرز تعریف شوند، دراین صورت برای مرز جامد رابطه زیر بایستی بین مشتقات سرعت بر روی اولین گره‌های داخل شبکه (+) و گره‌های مجازی (−) برقرار باشد.

$$\frac{\partial V^{+}}{\partial t} = -\frac{\partial V^{-}}{\partial t} \qquad (۴-۲۶)$$

$$\frac{\partial V^{+}}{\partial n} = +\frac{\partial V^{-}}{\partial n} \qquad (۴-۲۷)$$

علاوه‌بر مولفه‌های سرعت، بعضاً نیاز به تخمین تنش بر روی گره‌های مجازی نیز وجود دارد. در این صورت، باید از مجموعه معادلات (۴-۲۵) تا (۴-۲۷) استفاده کرد تا مولفه‌های تنش را بر روی گره-های مجازی محاسبه نمود. مقادیر تنش بر روی گره‌های مجازی فاقد ارزش فیزیکی هستند و کاربرد آنها صرفاً جهت استفاده در محاسبات برای معادلات ممنتوم آخرین گره‌های داخل (مرز) می‌باشد. با توجه به هندسه مسئله، روی مرز متقارن محوری نیز روابط زیر بین گره‌های مجازی و اولین گره‌های داخل شبکه محاسباتی برقرار است:

$$v_r^{+} = -v_r^{-} \qquad (۴-۲۸)$$

$$v_z^{+} = +v_z^{-} \qquad (۴-۲۹)$$

مشتقات مولفه‌های سرعت در راستای شعاعی و عمودی نیز برای این مرز به شکل زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial v_r^{+}}{\partial r} = \frac{\partial v_r^{-}}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial v_r^{+}}{\partial z} = -\frac{\partial v_r^{-}}{\partial z} \qquad (۴-۳۰)$$

$$\frac{\partial v_z^{+}}{\partial r} = -\frac{\partial v_z^{-}}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial v_z^{+}}{\partial z} = \frac{\partial v_z^{-}}{\partial z} \qquad (۴-۳۱)$$

برای مرز خروجی نیز می‌توان روابط مشابهی برای محاسبه سرعت‌ها و مشتقات آن در گره‌های مجازی بیرون از مرز به‌دست آورد:

$$v_r^{+} = v_r^{-} \quad , \quad v_z^{+} = v_z^{-} \qquad (۴-۳۲)$$

$$\frac{\partial v_r^{\,+}}{\partial r}=\frac{\partial v_r^{\,-}}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial v_r^{\,+}}{\partial z}=\frac{\partial v_r^{\,-}}{\partial z} \tag{۳۳-۴}$$

$$\frac{\partial v_z^{\,+}}{\partial r}=\frac{\partial v_z^{\,-}}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial v_z^{\,+}}{\partial z}=\frac{\partial v_z^{\,-}}{\partial z} \tag{۳۴-۴}$$

در ادامه شرایط مرزی مربوط به معادله انتقال حرارت بررسی می‌شود. با توجه به رابطه (۳-۱۴)، شرط مرزی زیر برای دماهای بی‌بعد روی دیواره کانال برقرار است:

$$T_T = 0 \tag{۳۵-۴}$$

در این تحقیق، دمای سیال در ورودی برابر مقدار ثابت $\tilde{T}_{in}$ فرض شده است. بنابراین با توجه به رابطه (۳-۱۴)، مقدار دما برابر یک خواهد بود. در خروجی نیز شرط مرزی $\partial T / \partial x = cte$ برقرار است. بر روی مرز متقارن محوری نیز شرط مرزی $\partial T / \partial r = 0$ برقرار می‌باشد.

۴-۷- پایداری عددی

باید توجه شود که مشکل ناپایداری عددی در تحلیل جریان سیالات ویسکوالاستیک بسیار حادتر از سیالات نیوتنی می‌باشد. این مشکل مخصوصا برای اعداد رینولدز و وایزنبرگ بالا غیرقابل اجتناب است. همانطور که می‌دانیم در جریان سیال نیوتنی، همه جملات میدان تنش خطی می‌باشند و جمله تنش ویسکوز نقش فراوانی در پایداری حل عددی دارا می‌باشد. در جریان سیال نیوتنی، رفتار غیرخطی تنها از جملات اندازه حرکت به‌وجود می‌آید. در جریان سیال CEF این مشکل بسیار بزرگ-تر می‌باشد، زیرا علاوه‌بر جملات اندازه حرکت، مولفه‌های میدان تنش نیز به‌شدت از خود رفتار غیرخطی نشان می‌دهند و وجود مشتقات مرتبه فرد در دیورژانس میدان تنش این سیالات نیز سهم عمده‌ای در بروز ناپایداری ایفا می‌کند. همچنین نوع رفتار غیرخطی میدان تنش سیال CEF به‌صورت کسری است که این امر تحلیل پایداری این جریان را با مشکل جدی روبرو می‌کند. در این تحقیق از برخی تکنیک‌های عددی استفاده شده که پایداری حل عددی را به‌نحو قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشیده است. به‌طور خلاصه عواملی که سبب افزایش پایداری حل عددی در تحقیق اخیر شده‌اند، عبارتند از

[۵]:

- استفاده از شبکه جابجا شده و اختصاص متغیرهای جریان به روش علامت‌گذاری و سلول.
- جداسازی جمله تنش ویسکوز (لاپلاسین میدان سرعت) از میدان تنش سیال CEF و گسسته‌سازی آن به‌طور جداگانه (این جمله نقش مهمی در پایداری حل عددی دارد).
- محاسبه تنش‌های ناشی از اثر اختلاف تنش های عمودی (τ^E) بر روی گره‌های مجازی.
- با اختصاص میدان تنش، تانسورهای نرخ برش و لزجت روی شبکه اولیه هزینه محاسباتی نسبت به محاسبه جداگانه آنها بر روی گره‌های مختص هر معادله ممنتوم به‌شدت کاهش می‌یابد.

۴-۸- الگوریتم حل عددی

در این بخش الگوریتم برنامه CFD حل عددی جهت مطالعه جریان و انتقال حرارت تشریح می‌شود. به‌طور خلاصه در اینجا از الگوریتم زیر برای تحلیل جریان استفاده شده است:

۱. مشخص نمودن متغیرهای جریان و سیال مانند ابعاد هندسی، تعداد گره‌های محاسباتی، عدد رینولدز، متغیرهای غیرنیوتنی (شامل ضرایب و ثابت‌های توابع ویسکومتریک مربوط به لزجت و اختلاف تنش‌های عمودی اول و دوم)، گام زمانی و ... .

۲. اعمال شرایط اولیه به مولفه‌های میدان سرعت، فشار، نرخ برش مرتبه اول و دوم و مولفه-های تانسور تنش.

۳. محاسبه گرادیان‌های سرعت و مولفه‌های تانسور نرخ برش در لحظه فعلی (n) روی شبکه اولیه.

۴. محاسبه تانسور نرخ برش مرتبه دوم و نرخ برش تعمیم‌یافته در لحظه فعلی (n) بر اساس تانسور برش محاسبه شده در مرحله ۳.

۵. محاسبه توابع ویسکومتریک بر اساس نرخ برش تعمیم‌یافته محاسبه شده در مرحله ۴.

۶. محاسبه مولفه‌های تنش τ^E بر اساس تانسور نرخ برش (محاسبه شده در مرحله ۳)، نرخ برش مرتبه دو (محاسبه شده در مرحله ۴) و توابع ویسکومتریک (محاسبه شده در مرحله ۵).

۷. تعیین مولفه های تنش τ^E در گره های مجازی بر اساس تنش محاسبه شده در مرحله ۶.

۸. محاسبه مولفه‌های سرعت در گام زمانی جدید $(n+1)$ بر اساس شکل گسسته معادلات و مقادیر متغیرهای جریان و میدان تنش در لحظه فعلی (n).

۹. تخمین فشار در گام زمانی جدید $(n+1)$ بر اساس معادله پیوستگی اصلاح‌شده و نیز مولفه‌های سرعت محاسبه شده در مرحله ۸.

۱۰. اعمال شرایط مرزی بر روی میدان سرعت در لحظه $(n+1)$ و نیز تخمین سرعت روی گره‌های مجازی.

۱۱. محاسبه مقادیر باقیمانده معادلات ممنتوم و پیوستگی و مقایسه حداکثر مقادیر باقیمانده معادلات حاکم با مقدار تلرانس همگرایی.

۱۲. چنانچه مقدار حداکثر باقیمانده از تلرانس بیشتر بود، مقادیر محاسبه شده در گام زمانی جدید $(n+1)$ به‌عنوان مقادیر پیش‌فرض محاسبه بعدی در نظر گرفته می‌شود و با بازگشت به مرحله ۳ محاسبه تکرار می‌شود. اگر مقدار باقیمانده از تلرانس کمتر بود، محاسبه پایان می‌یابد.

از آنجا که در این تحقیق، چگالی و توابع ویسکومتریک مستقل از دما فرض شده، لذا حل معادلات جریان مستقل از معادله انتقال حرارت صورت می‌گیرد. به‌عبارت دیگر حل معادلات جریان بایستی پیش از حل معادله انتقال حرارت صورت گیرد و از نتایج میدان سرعت برای حل میدان دما استفاده شود. به‌طور خلاصه الگوریتم حل معادله انتقال حرارت به‌شرح زیر است:

۱. مشخص نمودن پارامترهای انتقال حرارت، شامل عدد پرانتل، عدد برینکمن، گام زمانی مربوط به معادله انتقال حرارت، تلرانس همگرایی و ... .

۲. محاسبه کار میدان تنش (برای میدان جریان مورد نظر).

۳. اعمال شرایط اولیه به میدان دما

۴. محاسبه میدان دما در گام زمانی جدید ($n+1$).

۵. اعمال شرایط مرزی بر روی میدان دما در لحظه ($n+1$).

۶. محاسبه باقیمانده معادله انتقال حرارت و مقایسه حداکثر مقدار باقیمانده معادلات انرژی با مقدار تلرانس همگرایی

۷. چنانچه مقدار حداکثر باقیمانده از تلرانس بیشتر بود، مقادیر محاسبه شده در گام زمانی جدید ($n+1$) به‌عنوان مقادیر پیش‌فرض محاسبه بعدی در نظر گرفته می‌شود و با بازگشت به مرحله ۴ محاسبه تکرار می‌شود. اگر مقدار باقیمانده از تلرانس کمتر بود، محاسبه پایان می‌یابد.

# فصل ۵.	بررسی نتایج

۵-۱- مقدمه

در این فصل، نتایج حاصل از حل عددی برای شبیه‌سازی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرای متقارن محوری ارائه شده است. همانطور که در فصل دوم به آن اشاره شد، جریان سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرای متقارن محوری قبلا به‌صورت عددی بررسی شده ولی تا کنون بر اساس اطلاع نگارنده، جریان سیال ویسکوالاستیک با استفاده از مدل CEF در تبدیل واگرای متقارن محوری به صورت عددی بررسی نشده است. به‌همین خاطر، بیشترین قسمت فصل نتایج به بررسی جریان در تبدیل واگرا می‌پردازد. نسبت‌های تبدیل واگرایی و همگرایی در این تحقیق به‌ترتیب برابر ۳ و ۲ در نظر گرفته شده است.

در ابتدای این فصل، استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی بررسی و صحت نتایج حاصل از حل عددی ارزیابی می‌شود. جهت ارزیابی صحت نتایج عددی، این نتایج با روابط تحلیلی جریان نیوتنی و نتایج مطالعات قبلی مقایسه شده است. در قسمت‌های بعدی نیز، نتایج حل میدان جریان و دما به-صورت نمودارها و جداولی ارائه شده است.

۵-۲- مطالعه استقلال حل عددی از شبکه

در این بخش، استقلال برنامه CFD مورد استفاده بررسی شده است. برای تبدیل واگرا، نتایج برای سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در $\mathrm{Re}=20$ و توان‌های نمایی مختلف ($n=1,0.9,0.8,0.7,0.6$) برای ۳ نوع شبکه‌بندی بررسی و برای تبدیل همگرا نیز، جریان سیال نیوتنی در اعداد رینولدز ۲۰ تا ۱۰۰ ($\mathrm{Re}=20,40,60,80,100$) با استفاده از سه نوع شبکه‌بندی حل شده است. همانطور که از شکل(۳-۱) پیداست، هندسه مسئله شامل دو قسمت می‌باشد، قسمت بالادست و قسمت پایین‌دست جریان که آن‌ها به‌ترتیب با بخش (۱) و بخش (۲) معرفی شده است. برای شبکه‌بندی‌های مختلف، تعداد سلول‌های متفاوتی در راستای شعاعی و طولی برای هر دو بخش در نظر گرفته شده و مشخصات این

شبکه‌بندی‌ها در جدول (۵-۱) وجدول (۵-۲) ارائه شده است.

جدول (۵-۱) خواص شبکه‌بندی‌های مختلف مورد استفاده برای تبدیل همگرا

	M1 Nr*Nz	M2 Nr*Nz	M3 Nr*Nz
بخش ۱	۲۰*۸۰	۲۶*۱۰۴	۳۲*۱۲۸
بخش ۲	۱۰*۸۰	۱۳*۱۰۴	۱۶*۱۲۸
تعداد کل سلول	۲۴۰۰	۴۰۵۶	۶۱۴۴

جدول (۵-۲) خواص شبکه‌بندی‌های مختلف مورد استفاده برای تبدیل واگرا

	M1 Nr*Nz	M2 Nr*Nz	M3 Nr*Nz
بخش ۱	۱۳*۱۵۶	۱۵*۱۸۰	۲۰*۲۴۰
بخش ۲	۳۹*۴۶۸	۴۵*۵۴۰	۶۰*۷۲۰
تعداد کل سلول	۲۰۲۸۰	۲۷۰۰۰	۴۸۰۰۰

در جدول (۵-۳) سرعت سیال نیوتنی در مرکز لوله بالادست در ناحیه توسعه‌یافته در اعداد رینولدز مختلف با استفاده از ۳ نوع شبکه‌بندی ارائه شده است. حالت مرجع طبق روابط تحلیلی برابر با ۲ می‌باشد.

در جدول (۵-۴)، طول گردابه بدون بعد در تبدیل واگرا، $\frac{X_r}{h}$ برای سیال نیوتنی تعمیم‌یافته برای ۳ نوع شبکه‌بندی به‌همراه خطاهای نسبی آورده شده است. در اینجا، از برونیابی ریچاردسون به عنوان یک حالت مرجع استفاده شده است.

۵-۳- ارزیابی صحت نتایج

در این قسمت، صحت نتایج حاصل از حل عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مورد تبدیل همگرا می‌توان با توجه به جدول (۵-۳) استناد کرد که حل عددی صحیح می‌باشد. همانطور که مشخص است مقادیر به‌دست‌آمده از حل عددی برای سرعت بیشینه سیال نیوتنی در مرکز لوله تطابق خوبی با مقدار تحلیلی این پارامتر دارد.

جدول (۵-۳) بیشینه سرعت سیال نیوتنی در بالادست جریان در تبدیل همگرا برای ۳ نوع شبکه‌بندی

E(M3)	E(M2)	E(M1)	Ref	M3	M2	M1	n=1.0
۰/۵%	۲%	۳/۵%	۲	۱/۹۹	۱/۹۶	۱/۹۳	Re=10
۲/۵%	۳%	۴%	۲	۱/۹۵	۱/۹۴	۱/۹۲	Re=20
۲/۵%	۳/۵%	۴%	۲	۱/۹۵	۱/۹۳	۱/۹۲	Re=30
۳%	۴%	۴/۵%	۲	۱/۹۴	۱/۹۲	۱/۹۱	Re=40
۳/۵%	۵%	۵/۵%	۲	۱/۹۳	۱/۹۰	۱/۸۹	Re=50

جدول (۵-۴) طول گردابه در تبدیل واگرا برای ۳ نوع شبکه‌بندی به‌همراه خطاهای نسبی.

E(M3)	E(M2)	E(M1)	Ref	M3	M2	M1	Re=20
۲/۱۹%	۳/۶۶%	۴/۶۵%	۲/۰۴	۲/۰۸	۲/۱۱	۲/۱۳	n=1.0
۱/۰۱%	۰/۳۲%	۱/۰۷%	۲/۸۹	۲/۸۶	۲/۸۸	۲/۹۲	n=0.9
۰/۰۰%	۰/۷۶%	۱/۷۶%	۴/۰۱	۴/۰۱	۴/۰۴	۴/۰۸	n=0.8
۰/۱۳%	۰/۲۳%	۰/۷۷%	۵/۵۵	۵/۵۴	۵/۵۶	۵/۵۹	n=0.7
۰/۰۱%	۰/۱۷%	۰/۵۷%	۷/۵۴	۷/۵۳	۷/۵۵	۷/۵۸	n=0.6

در مورد تبدیل واگرا، بهترین کمیتی که می‌توان با استدلال به آن از صحت حل مسئله مطمئن شد، طول گردابه‌های ایجاد شده می‌باشد. الیویرا و همکاران [۲۶] در سال ۱۹۹۸ جریان نیوتنی در تبدیل واگرای متقارن محوری را بررسی کرده‌اند. آنها علاوه‌بر مطالعه روی ضریب افت فشار، طول گردابه‌ها را

در اعداد رینولدز مختلف $0.5 \le \mathrm{Re} \le 200$ و در نسبت‌های تبدیل $1.5 \le ER \le 4$ گزارش کرده‌اند. در جدول (۵-۴)، طول گردابه‌های حاصل از حل عددی تحقیق حاضر برای اعداد رینولدز مختلف درتبدیل واگرا با نسبت ۱:۳، برای سیال نیوتنی با نتایج الیویرا و همکاران [۲۶] مقایسه شده است. همانطور که از این جدول مشخص است، نتایج عددی با کارهای قبلی تطابق خوبی دارد و می‌توان از صحت این نتایج، اطمینان حاصل کرد.

جدول (۵-۵) مقایسه طول گردابه‌های حل عددی با نتایج الیویرا و همکاران [۲۶] در تبدیل واگرای ۱:۳ در اعداد رینولدز ۱۰ تا ۱۰۰.

$\frac{X_r}{h}$ [۲۶]	$\frac{X_r}{h}$	Re
۱/۱۵	۱/۱۷	۱۰
۱/۳۸	۱/۳۳	۱۲/۵
۱/۸۷	۱/۸۴	۱۷/۵
۲/۶۴	۲/۵۱	۲۵
۳/۷۱	۳/۶۷	۳۵
۵/۳۳	۵/۱۸	۵۰
۱۰/۸	۱۰/۶۸	۱۰۰

۵-۴- حل میدان جریان

در این قسمت نتایج حاصل از حل عددی میدان جریان برای تبدیل همگرا با نسبت ۲:۱ و تبدیل واگرا با نسبت ۱:۳ ارائه می‌شود. این نتایج شامل خطوط جریان، پروفیل‌های سرعت، توزیع فشار و ... می‌باشد. پارامترهای مذکور، برای سیال نیوتنی و غیرنیوتنی به‌طور خاص با یکدیگر مقایسه شده است. ابتدا، لیستی از پارامترهای موجود در حل مسئله درجدول (۵-۶) آورده شده که شامل خواص سیال و پارامترهای هندسی می‌باشد.

جدول (۵-۶) مجموعه پارامترهای در نظر گرفته شده در این تحقیق

$\frac{l}{d}$	$\frac{L}{D}$	$\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$\eta_0[Pa.s]$	$\eta_\infty[Pa.s]$	a	n	$\lambda[s]$
20	20	800	135	5	2	$0.6 \le n \le 1$	0.036

۵-۴-۱- حل میدان جریان برای تبدیل همگرا متقارن محوری

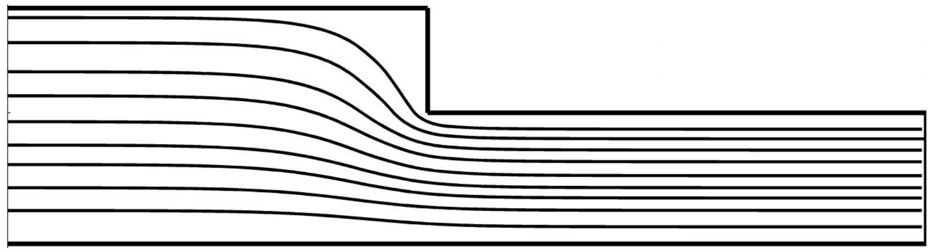
در این بخش، جریان سیال ویسکوالاستیک در تبدیل واگرای ۲:۱ متقارن محوری مورد بررسی قرار می‌گیرد. البته همانطور که در بخش‌های پیشین ذکر شد جریان سیال ویسکوالاستیک در این هندسه قبلا به‌صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. به‌همین دلیل، این تحقیق بر روی جریان سیال در تبدیل واگرای متقارن محوری تمرکز بیشتری دارد و گزارش مختصری در مورد جریان سیال در تبدیل همگرا ارائه می‌دهد.

عدد رینولدز، به‌صورت رینولدز بالادست جریان استفاده شده که بر اساس سرعت یکنواخت ورودی (U)، قطر لوله در بالادست جریان (D) و لزجت در نرخ برش صفر η_0 تعریف می‌شود:

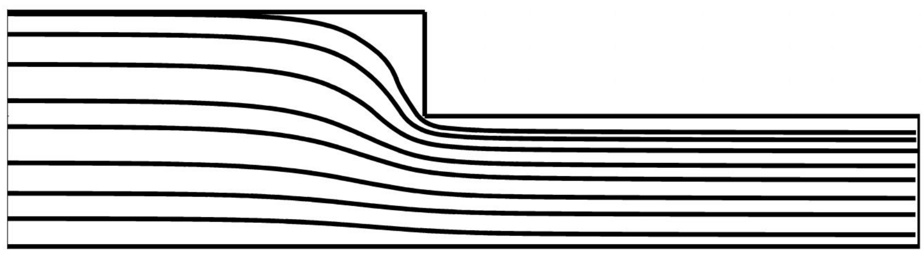
$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{up} = \frac{\rho U D}{\eta_0} \qquad (۱-۵)$$

شکل(۵-۱) خطوط جریان سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا را در Re=20 نشان می-دهد. پارامترهای غیرنیوتنی سیال ویسکوالاستیک، n=0.9، We=0.05 و $\chi = 0.1$ در نظر گرفته شده است.

شکل(۵-۲)، سرعت محوری سیال نیوتنی و سیال ویسکوالاستیک در Re=20 را نشان می‌دهد. بی-بعدسازی سرعت با استفاده از سرعت یکنواخت در بالادست جریان (U) صورت گرفته است. توسعه-یافتگی جریان در هر دو قسمت از نمودار شکل(۵-۲) مشخص است. سرعت محوری سیال نیوتنی (n=1) در مرکز لوله در قسمت بالادست و پایین دست جریان، به‌ترتیب به مقادیر ۲ و ۸، که برابر با حل تحلیلی این مقادیر می‌باشد، می‌رسد. برای سیال ویسکوالاستیک، طول توسعه‌یافتگی در هر دو



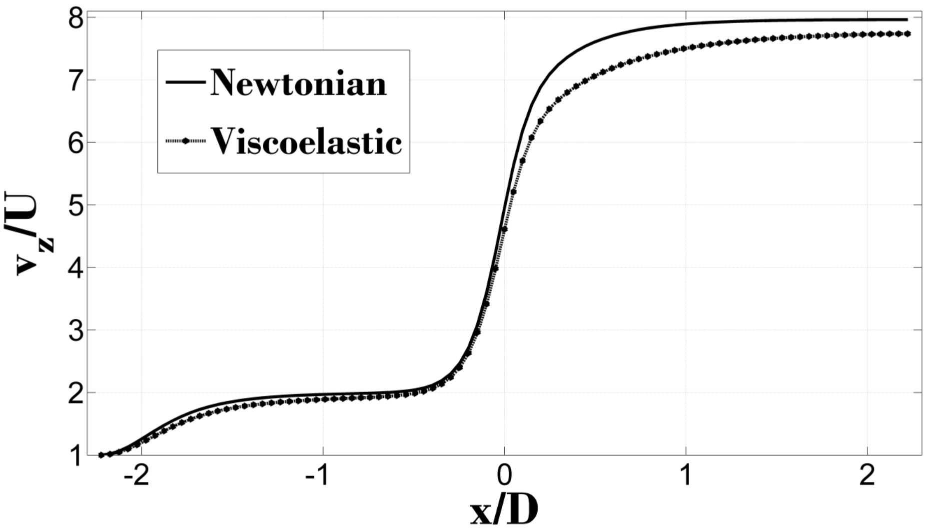
الف) نیوتنی



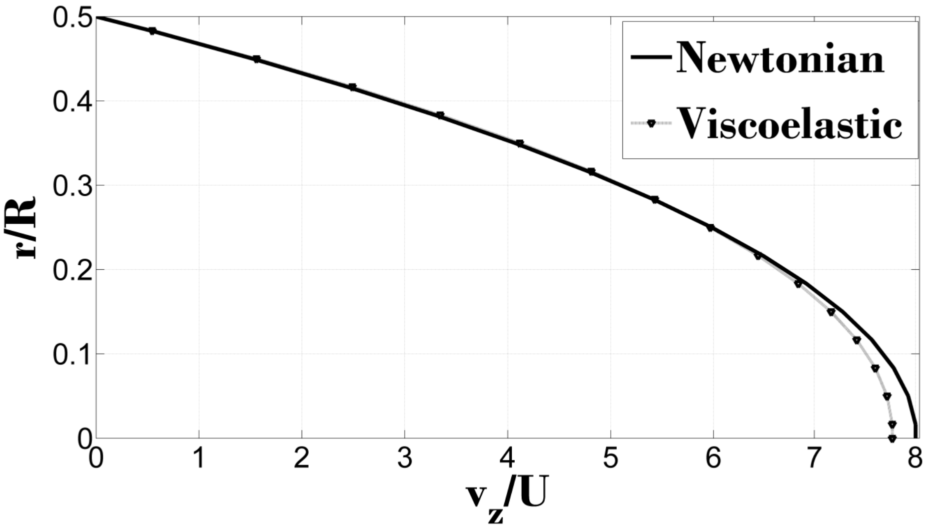
ب) ویسکوالاستیک

شکل(۵-۱)   خطوط جریان در تبدیل همگرا در Re=۲۰ برای الف) سیال نیوتنی ب) سیال ویسکوالاستیک ($n=0.9, We=0.05, \chi=0.1$).

بخش بالادست و پایین‌دست جریان بیشتر از سیال نیوتنی می‌باشد. مقدار بیشینه سرعت محوری (سرعت در مرکز لوله) برای سیال ویسکوالاستیک کمتر از مقدار مشابه برای سیال نیوتنی می‌باشد. می‌توان پیش‌بینی نمود که با توجه به ثابت بودن دبی، سرعت در کناره‌های دیواره برای سیال ویسکوالاستیک بیشتر از سیال نیوتنی است. توزیع سرعت محوری در مقطع انتهایی برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در شکل(۵-۳) ترسیم شده است.



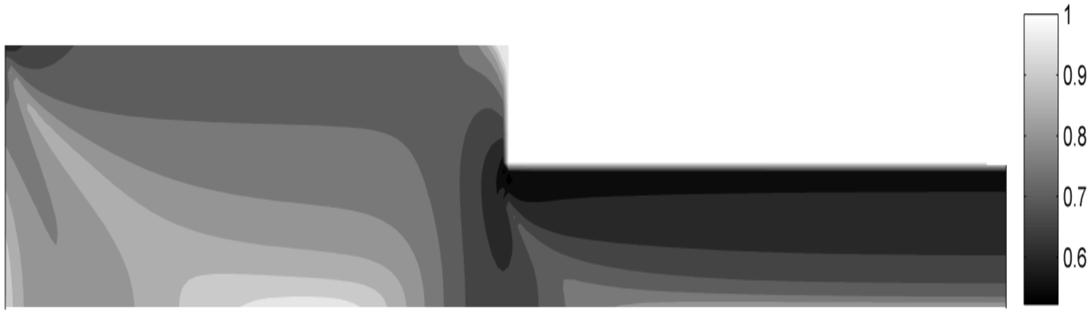
شکل(۵-۲) توزیع سرعت محوری سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در Re=۲۰.



شکل(۵-۳) توزیع سرعت سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در مقطع انتهایی

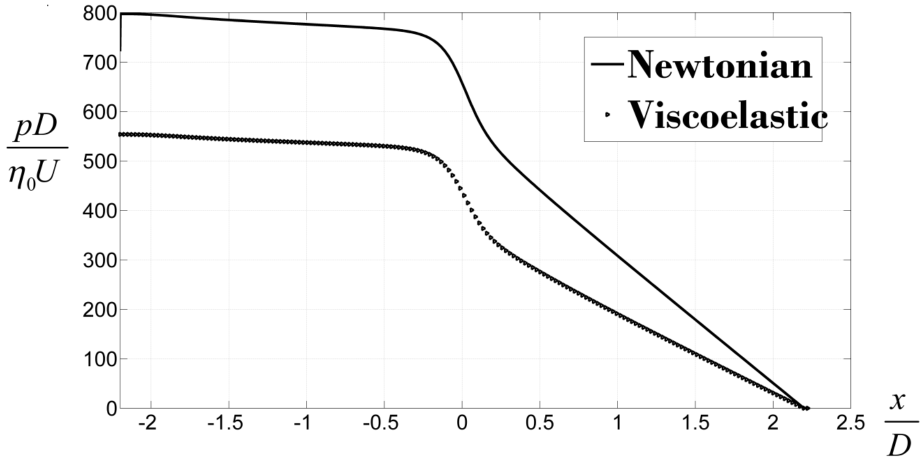
شکل(۵-۴) توزیع لزجت در نواحی مختلف هندسه مسئله را نشان می‌دهد. در بررسی جریان سیالات غیرنیوتنی، می‌توان تغییرات لزجت را به تغییرات نرخ برش نسبت داد. مقدار کمینه لزجت مربوط به مکانی است که سطح مقطع جریان تغییر می‌کند. این افزایش سطح مقطع منجر به تغییرات ناگهانی سرعت‌ها (همان افزایش نرخ برش) و در نهایت کاهش لزجت می‌شود. بخش‌های مرکزی لوله در

قسمت توسعه یافته یکی از مناطقی می‌باشد که لزجت به بالاترین مقدار خود می‌رسد ($\frac{\eta}{\eta_0} \cong 1$).



شکل(۵-۴) توزیع لزجت در نواحی مختلف هندسه مسئله برای سیال ویسکوالاستیک

توزیع فشار در طول محور مرکزی در شکل(۵-۵) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود گرادیان فشار جریان توسعه‌یافته در پایین‌دست جریان، برای هر دو مدل سیال از مقدار مشابه برای بالادست جریان بیشتر است. این افزایش گرادیان فشار به‌دلیل کاهش سطح مقطع و در نهایت افزایش سرعت میانگین می‌باشد. تغییرات سطح مقطع باعث می‌شود که توزیع فشار غیرخطی در حوالی این منطقه به‌وجود آید. توزیع فشار غیرخطی پس از عبور از ناحیه در حال توسعه به‌حالت خطی در می‌آید. با مقایسه توزیع فشار جریان سیال نیوتنی با جریان سیال ویسکوالاستیک مشاهده می‌شود که گرادیان فشار سیال نیوتنی در مقایسه با سیال ویسکوالاستیک در هر دو بخش، بیشتر می‌باشد.



شکل(۵-۵) توزیع فشار محوری برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا

۵-۴-۲- حل میدان جریان برای تبدیل واگرای متقارن محوری

در این بخش، جریان سیال لزج ویسکوالاستیک در تبدیل واگرای ۱:۳ متقارن محوری مورد بررسی قرار می‌گیرد تا به‌طور خاص تمرکز بیشتری بر روی اثر خاصیت توان نمایی مدل کاریو-یاسودا (n) و همچنین خاصیت الاستیک سیال صورت گیرد.

مطابق کارهای قبلی که در این زمینه انجام شده است، عدد رینولدز بالادست جریان بر اساس سرعت یکنواخت ورودی (U)، قطر لوله در بالادست جریان (d) و لزجت در نرخ برش صفر η_0 تعریف می-شود:

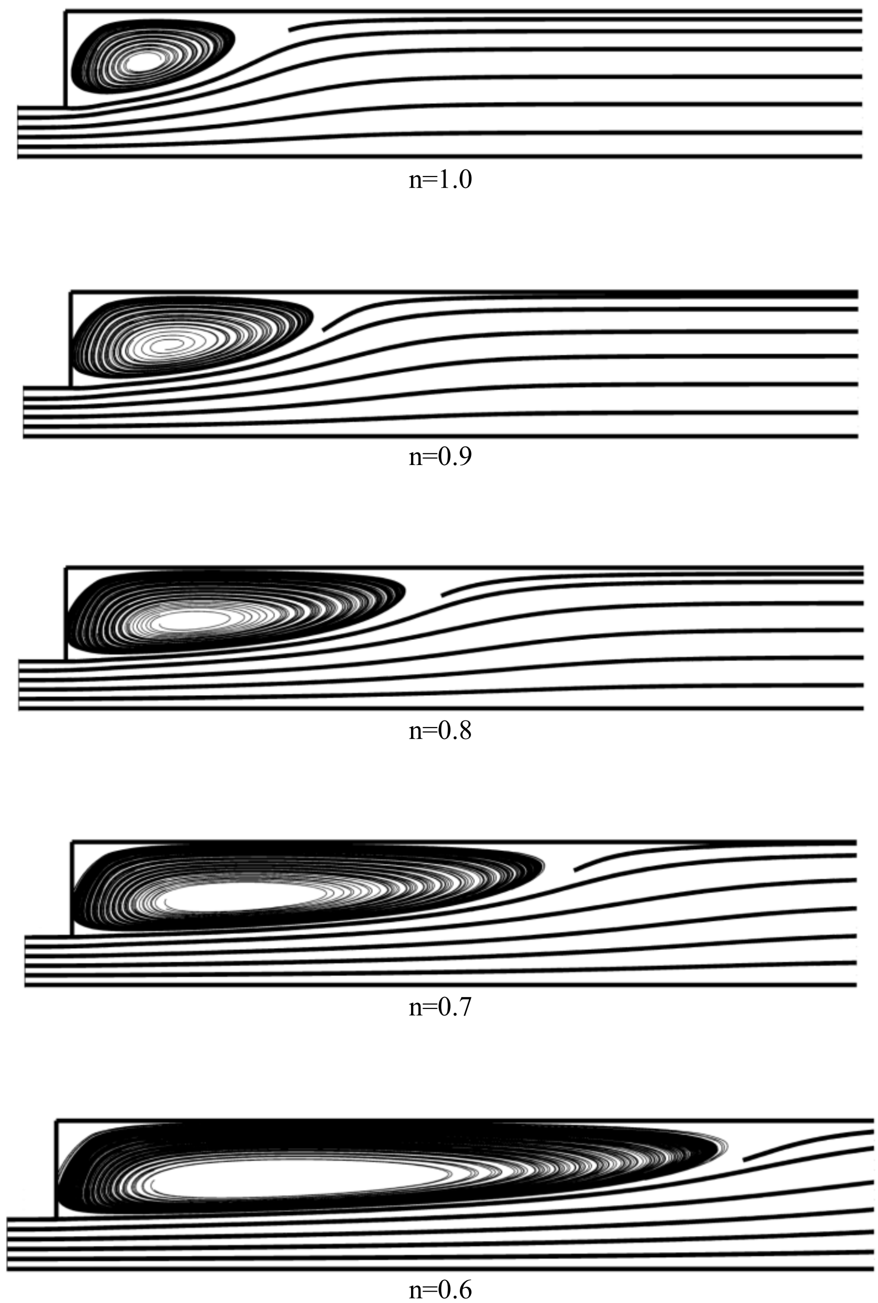
$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{up} = \frac{\rho U d}{\eta_0} \tag{۵-۲}$$

خطوط جریان سیال نیوتنی تعمیم‌یافته به‌ازای Re=20 و $(n = 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6)$ در شکل(۵-۶) ترسیم و تاثیر خاصیت غیرنیوتنی سیال (n) بر روی گردابه‌ها مشخص شده است. هر چه انحراف n از عدد ۱ بیشتر می‌شود، گردابه‌ها بزرگتر و طول آن افزایش پیدا می‌کند. اندازه گردابه (X_r) یکی از پارامترهای مهم در تحلیل مسئله تبدیل‌های واگرا و همگرا می‌باشد. در حالت کلی، این طول برای

جریان غیرنیوتنی تابع شرایط ورودی (یکنواخت، توسعه‌یافته و ...)، نسبت تبدیل ($\frac{D}{d}$)، عدد رینولدز جریان (Re) و خواص غیرنیوتنی سیال نظیر توان نمایی n و عدد وایزنبرگ (We) می‌باشد.

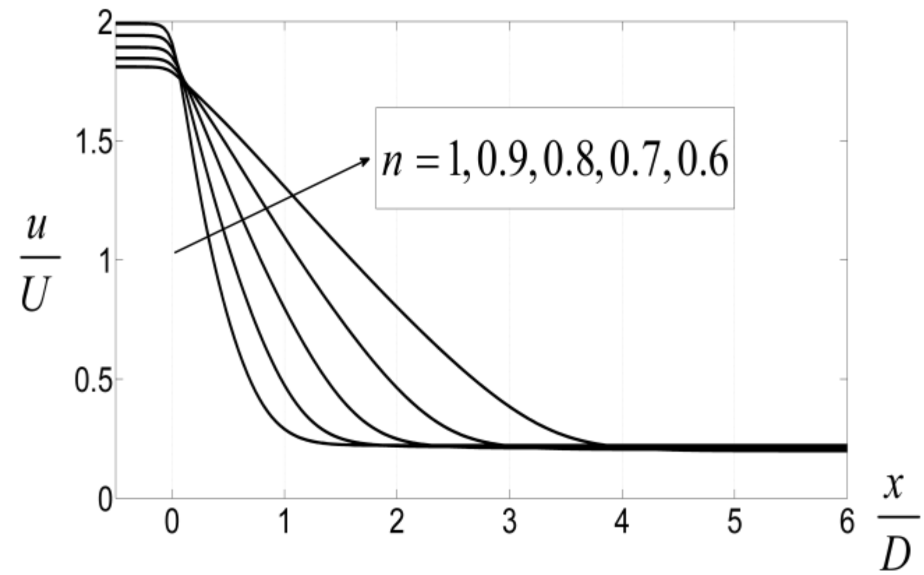
شکل(۵-۷)، سرعت محوری سیال را به‌ازای توان‌های نمایی مختلف در Re=20 نشان می‌دهد. بی-بعدسازی سرعت با استفاده از سرعت یکنواخت در بالادست جریان (U) صورت گرفته است. نسبت-های هندسی بدون‌بعد $\frac{l}{d}$ و $\frac{L}{D}$ باید به‌قدر کافی بزرگ باشد که جریان در بالادست و پایین‌دست به حالت توسعه‌یافته درآید. توسعه‌یافتگی جریان در هر دو قسمت از نمودار شکل(۵-۷) مشخص است. سرعت در مرکز لوله برای سیال نیوتنی (n=1) به مقدار ۲ که برابر با حل تحلیلی این مقدار می باشد، می‌رسد. با کاهش توان نمایی n ، اولا طول توسعه‌یافتگی افزایش پیدا می‌کند (یکی از دلایل این موضوع، افزایش طول گردابه‌هاست). این طول، برای n=0.6 تقریبا به مقدار $\frac{x}{D} \cong 4$ می‌رسد. ثانیا سرعت بیشینه در مرکز لوله کاهش پیدا می‌کند. می‌توان پیش‌بینی نمود که با توجه به ثابت بودن دبی، سرعت در کنار دیواره با کاهش توان نمایی n، افزایش پیدا می‌کند. در قسمت بالادست، اختلاف سرعت‌ها به‌ازای مقادیر مختلف n مشاهده شده که این اختلاف سرعت‌ها در پایین‌دست جریان، کمتر می‌شود. این امر، به خاطر افزایش سطح مقطع می‌باشد.

شکل(۵-۸)، نشان‌دهنده سرعت محوری در مقطع $\frac{x}{D}=\frac{1}{2}$ به‌ازای $(n=1,0.8,0.6)$ می‌باشد. سرعت محوری در نزدیکی دیواره مقدار منفی پیدا می‌کند. با کاهش توان نمایی n ، اولا ناحیه‌ای که دارای سرعت منفی می‌باشد، افزایش می‌یابد. ثانیا، مقدار سرعت بیشینه در مرکز لوله افزایش پیدا می‌کند. سرعت منفی کنار دیواره، نشان دهنده وجود گردابه‌ها می‌باشد.



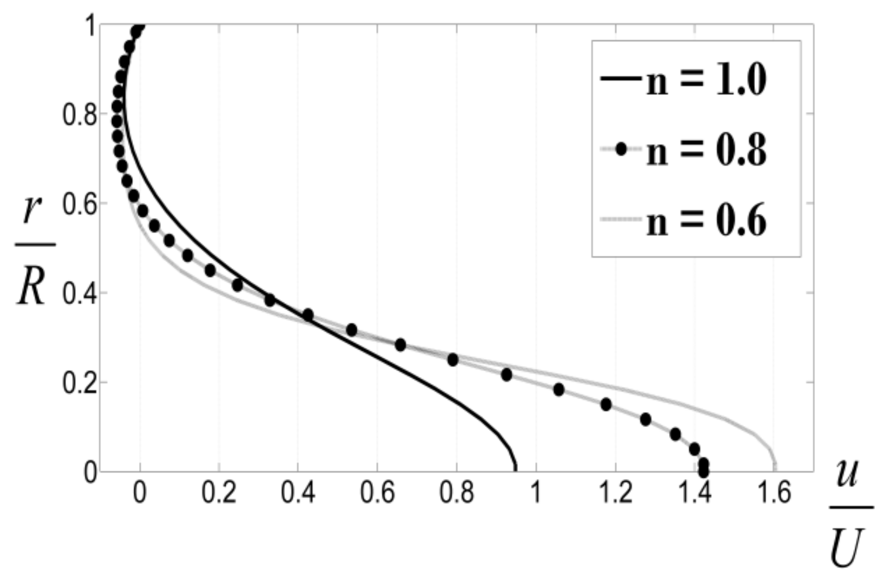
شکل(۵-۶) خطوط جریان سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در Re=۲۰ و به‌ازای

$\left(n = 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6\right)$



شکل(۵-۷) توزیع سرعت محوری سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در Re=۲۰ و به‌ازای

$(\mathrm{n} = \mathbf{1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6})$



شکل(۵-۸) پروفیل سرعت سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در Re=۲۰ در مقطع $\frac{x}{D} = \frac{1}{2}$

شکل(۵-۹)، نشان‌دهنده توزیع لزجت و نرخ برش تعمیم‌یافته بدون بعد در محور تقارن می‌باشد. محورعمودی شکل(۵-۹)-الف، بیانگر نرخ برش تعمیم‌یافته و محور عمودی شکل(۵-۹)-ب، بیانگر

لزجت می‌باشد. در این نمودار به خاطر مقایسه راحت‌تر لزجت و نرخ برش، هر دوی آن‌ها در کنار یکدیگر رسم شده‌اند. همانطور که ذکر شد، مدل ویسکومتریک کاریو-یاسوا که در این تحقیق استفاده شده است، یک مدل رقیق برشی می‌باشد. این بدین معناست که با افزایش نرخ برش، لزجت سیال کاهش پیدا می‌کند. این رفتار سیال در شکل (۵-۹) کاملا آشکار است. همانگونه که پیش بینی می‌شد، برای هر سه مقدار n ، مقادیر بیشینه نرخ برش و کمینه لزجت هر دو در یک ناحیه اتفاق می‌افتد. لزجت و نرخ برش تعمیم‌یافته نیز مانند بقیه خواص جریان در ناحیه توسعه‌یافته ثابت می‌ماند. با توجه به این شکل می‌توان رابطه زیر را برای همه توان‌های نمایی استخراج کرد:

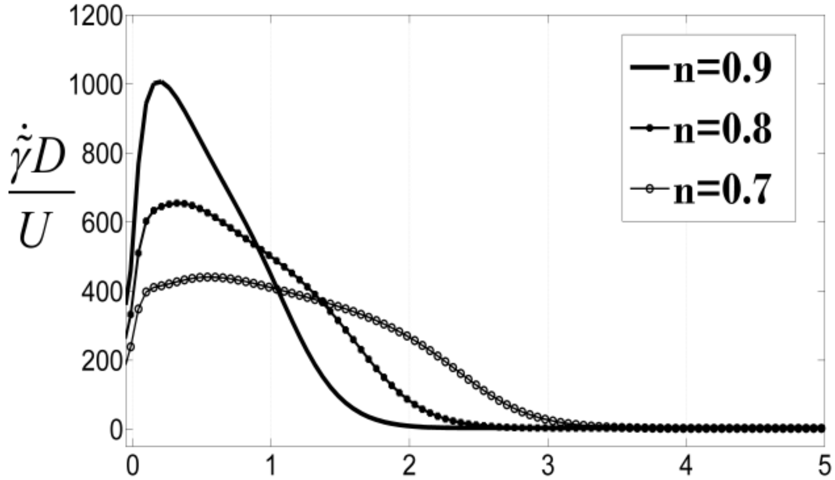
$$for \;\begin{cases} \dfrac{x}{D} \geq \dfrac{L_{99}}{D} \\ r=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\eta}{\eta_0} \to 1 \\ \dfrac{\dot{\tilde{\gamma}} D}{U} \to 0 \end{cases} \qquad (۵-۳)$$

که در آن L_{99} نشان دهنده طول توسعه‌یافتگی جریان می‌باشد. رابطه (۵-۳) بیان می‌کند که در محور تقارن لوله $(r=0)$ و بعد از ناحیه توسعه‌یافتگی ($\dfrac{x}{D} \geq \dfrac{L_{99}}{D}$) مقدار نرخ برش سیال صفر و بنابراین لزجت به مقدار η_0 می‌رسد. البته می‌توان این مورد را به‌صورت تحلیلی نیز مورد بررسی قرار داد. تانسور نرخ برش $\tilde{\gamma}$ برای مسئله حاضر به‌شکل زیر می‌باشد:

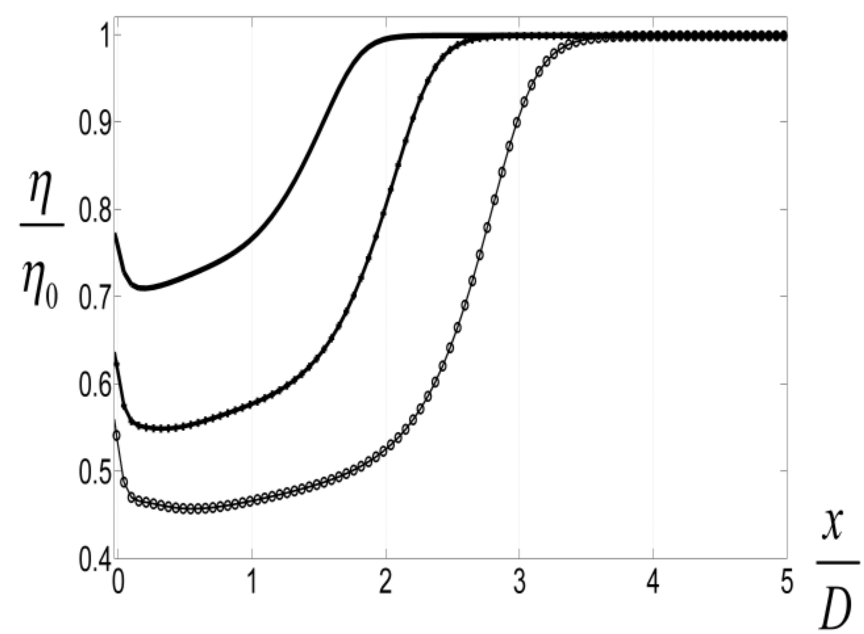
$$\tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 2\dfrac{v_r}{r} & 0 \\ \dfrac{\partial v_r}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 2\dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (۵-۴)$$

در بازنویسی ماتریس نرخ برش در رابطه (۵-۴) از جمله‌های ($\dfrac{\partial}{\partial \theta}$) و ($v_\theta$) به خاطر حالت تقارن محوری مسئله صرف‌نظر شده است. در حالت جریان توسعه‌یافته، جمله‌های ($\dfrac{\partial}{\partial z}$) و ($v_r$) برابر با صفر هستند. اکنون، تنها جمله باقی‌مانده ماتریس نرخ برش، ($\dfrac{\partial v_z}{\partial r}$) می‌باشد که این جمله نیز در

محور تقارن لوله ($r=0$) صفر می‌باشد. بنابراین ماتریس نرخ برش $\tilde{\gamma}$ برابر ماتریس صفر، و به تبع آن نرخ برش تعمیم یافته $\dot{\tilde{\gamma}}$ نیز برابر با صفر به‌دست می‌آید.



الف



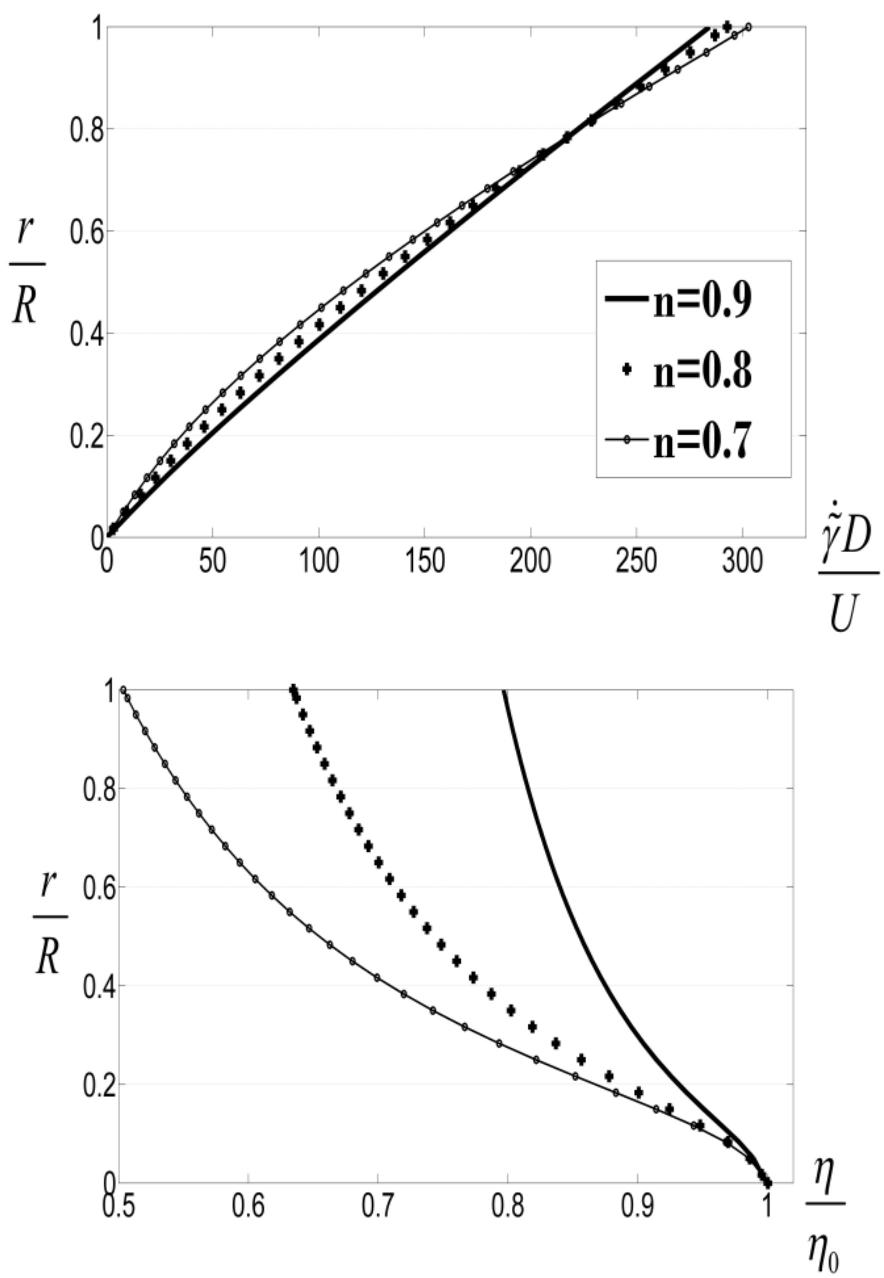
ب

شکل(۵-۹) توزیع نرخ برش و لزجت بدون بعد سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در محور تقارن به ازای Re=۲۰.

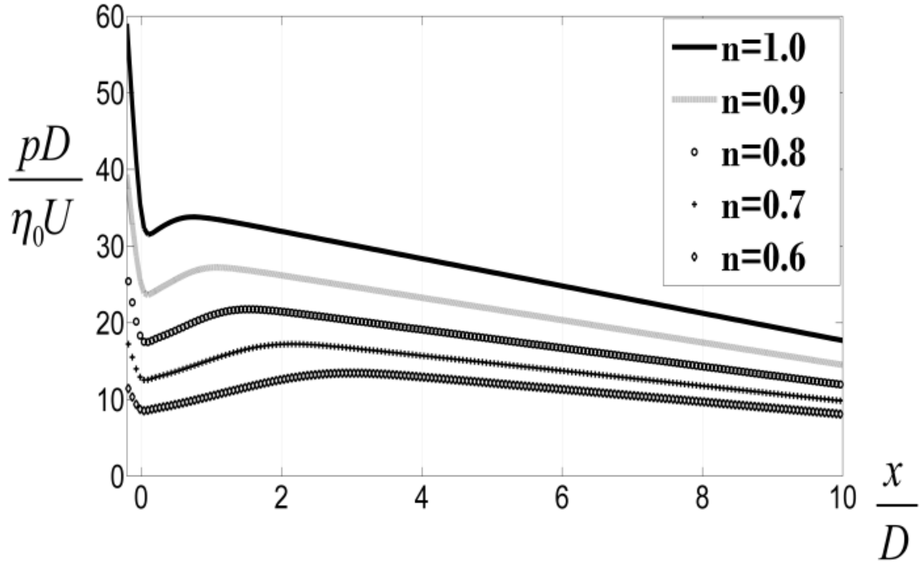
در شکل(۵-۱۰)، توزیع لزجت و نرخ برش در مقطع $\frac{x}{D}=20$ نشان داده شده است. محور عمودی در این شکل نشان‌دهنده شعاع از مرکز لوله و محورهای افقی شکل(۵-۱۰) به‌ترتیب بیانگر نرخ برش تعمیم‌یافته و لزجت می‌باشند. مقطع $\frac{x}{D}=20$ جایی است که جریان به‌ازای کلیه توان‌های نمایی n، توسعه‌یافته شده است و نرخ برش در مرکز لوله صفر، و در دیواره به مقدار بیشینه خود می‌رسد. لزجت نیز رفتار معکوسی با نرخ برش دارد و از مقدار η_0 در مرکز به مقدار کمینه خود در کنار دیواره می‌رسد. همانطور که از شکل(۵-۱۰) پیداست تغییرات نرخ برش با کاهش توان نمایی تغییرات چندانی ندارد ولی توزیع لزجت تغییرات بیشتری دارد. همچنین لزجت کمینه در کنار دیواره با کاهش n کمتر می‌شود.

شکل(۵-۱۱)، توزیع فشار محوری برای سیال نیوتنی تعمیم‌یافته را در مرکز لوله نشان می‌دهد. توزیع فشار خطی در منطقه بالادست نشان‌دهنده جریان توسعه‌یافته قبل از تغییر سطح مقطع ($\frac{x}{D}<0$) می‌باشد. فشار محلی در منطقه پایین‌دست ($\frac{x}{D}>0$)، در نقطه‌ای به اوج خود می‌رسد. این افزایش فشار به دلیل افزایش سطح مقطع و به تبع آن کاهش سرعت می‌باشد (با توجه به معادله ی برنولی). البته گرادیان فشار در منطقه توسعه‌یافته در قسمت پایین‌دست به خاطر افزایش سطح مقطع و کاهش سرعت میانگین با گرادیان فشار در منطقه بالادست متفاوت است و دارای مقدار کمتری می‌باشد. محل بیشینه فشار در پایین‌دست جریان نیز تابع توان نمایی n می‌باشد و با کاهش مقدار n این نقطه به انتهای لوله نزدیکتر می‌شود. و در انتها، مهمترین نکته اینکه، افت فشار سیال نیوتنی در عبور از تبدیل واگرا بیشتر از سیال نیوتنی تعمیم‌یافته می‌باشد. به عبارت دیگر، با کاهش توان نمایی سیال، افت فشار جریان نیز کاهش پیدا می‌کند. این تاثیر خاصیت غیرنیوتنی سیال به خاطر ماهیت رقیق-شوندگی سیال نیوتنی تعمیم‌یافته می‌باشد. در واقع، هر چه سیال رقیق‌تر باشد افت فشار جریان نیز کمتر می‌شود. یکی از مهمترین دستاوردهای این تحقیق در کاربردهای عملی، این است که با توجه به

افت فشار کمتر سیالات رقیق برشی، این دسته از سیالات، جایگزین مناسبی برای سیالات نیوتنی در صنعت می‌باشند.

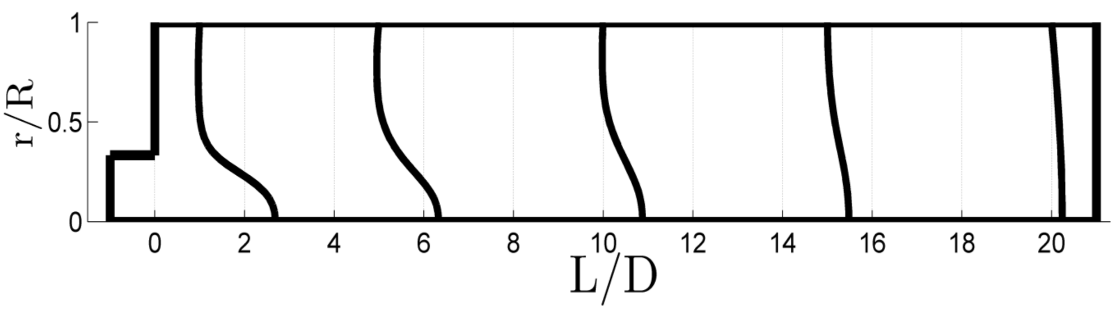


شکل(۵-۱۰)   پروفیل لزجت و نرخ برش بدون بعد سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در مقطع $\frac{x}{D}=20$ به ازای Re=۲۰.



شکل(۵-۱۱)	توزیع فشار بدون بعد سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در محور تقارن به‌ازای Re=۲۰ .

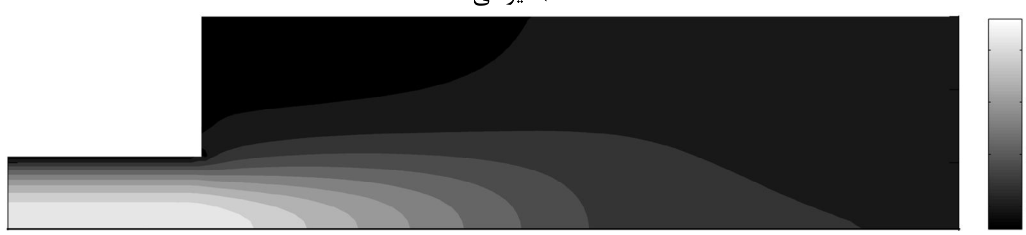
در شکل(۵-۱۲)، پروفیل سرعت سیال ویسکوالاستیک در مقاطع مختلف $\frac{x}{D}=1,5,10,15,20$ هندسه مسئله نشان داده شده است. همانگونه که از شکل پیداست در ابتدای تبدیل، سرعت در نواحی مرکزی لوله مقادیر بالایی دارد، این امر به خاطر سرعت منفی سیال در کناره دیواره می باشد.



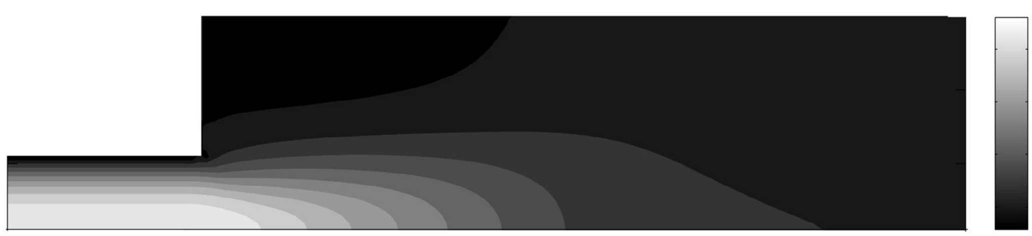
شکل(۵-۱۲)	توزیع سرعت سیال ویسکوالاستیک در مقاطع مختلف در Re=20 به ازای $.(n = 0.6, We = 0.4, \chi = 0.2)$

توزیع سرعت محوری ($\frac{v_z}{U}$) سیال نیوتنی، نیوتنی تعمیم‌یافته و ویسکوالاستیک در شکل(۵-۱۳) نشان داده شده است. همانطور که پیش‌بینی می‌شد سرعت در نواحی مرکز لوله دارای بیشترین مقدار و در مناطق کنار دیواره دارای کمترین مقدار خود می‌باشد. محدوده سرعت محوری منفی در نقاط ابتدایی تبدیل، نشانه تشکیل گردابه در این مناطق می‌باشد.

الف) نیوتنی



ب) نیوتنی تعمیم‌یافته $(n = 0.6)$



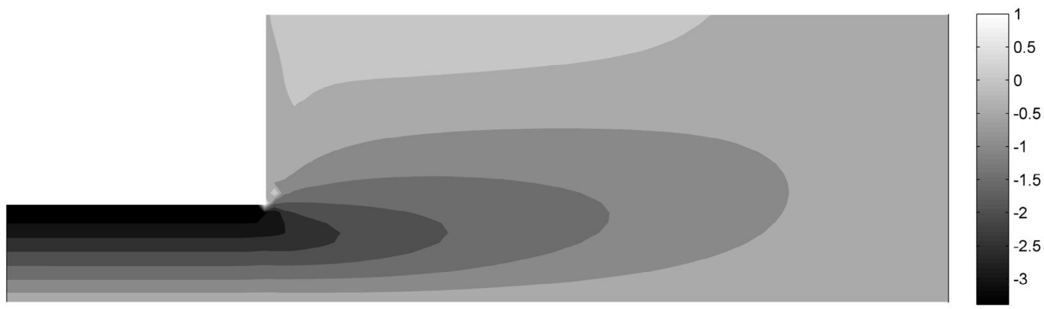
ج) ویسکوالاستیک $(n = 0.6, We = 0.4, \chi = 0.2)$

شکل(۵-۱۳) توزیع سرعت محوری $\frac{v_z}{U}$ در $\mathrm{Re} = 20$ برای سیال الف) نیوتنی ب) نیوتنی تعمیم‌یافته ج) ویسکوالاستیک

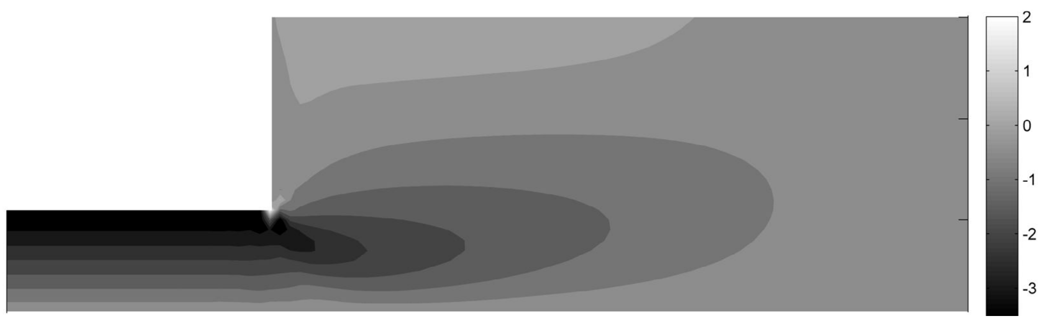
شکل(۵-۱۴) توزیع تنش برشی را برای سیال نیوتنی، نیوتنی تعمیم‌یافته و ویسکوالاستیک نشان می-

دهد. برای هر سه حالت، مقادیر تنش برشی بزرگتر از صفر مربوط به مکانی است که سرعت در کنار دیواره‌ها مقداری منفی دارد. سرعت محوری منفی باعث ایجاد تنش برشی مثبت در منطقه‌ایست که گردابه‌ها وجود دارند.

الف) نیوتنی



ب) نیوتنی تعمیم‌یافته $(n=0.6)$



ج) ویسکوالاستیک $(n=0.6, We=0.4, \chi=0.2)$

شکل(۵-۱۴) توزیع تنش برشی $\frac{\tau_{rz} D}{\eta_0 U}$ در $\mathrm{Re}=20$ برای سیال الف) نیوتنی ب) نیوتنی تعمیم‌یافته ج) ویسکوالاستیک

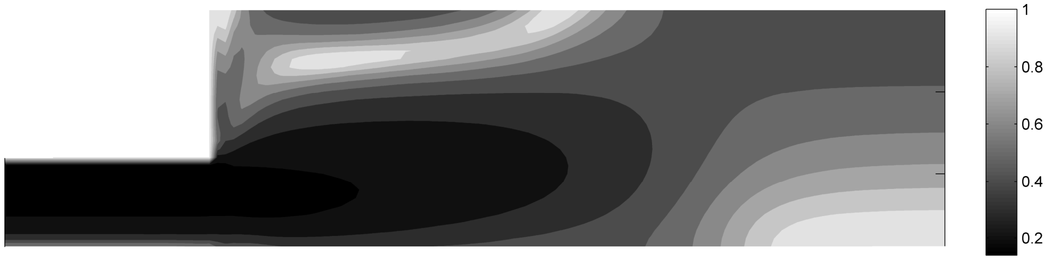
شکل(۵-۱۵) نشان‌دهنده توزیع لزجت، اختلاف تنش عمودی اول و اختلاف تنش عمودی دوم می-باشد. قبلا اشاره شد که در توابع ویسکومتریک رقیق شونده، لزجت رابطه معکوس با نرخ برش دارد. بنابراین می‌توان کاهش یا افزایش لزجت را به تغییرات نرخ برش نسبت داد. پایین‌ترین مقادیر لزجت مربوط به مکانی است که سطح مقطع جریان تغییر می‌کند. این افزایش سطح مقطع منجر به تغییرات ناگهانی سرعت‌ها (همان افزایش نرخ برش) و در نهایت کاهش لزجت می‌شود. در دو منطقه نیز لزجت به بالاترین مقدار خود می‌رسد. ناحیه مرکزی لوله در قسمت توسعه یافته یکی از این مناطق می‌باشد که قبلا در توضیحات شکل(۵-۹) دلیل این موضوع بیان شد. ناحیه دیگری که لزجت آن بیشینه است، تقریبا نواحی مرکز گردابه می‌باشد. با توجه به کوچک بودن سرعت‌ها در این منطقه ، نرخ برش تعمیم یافته $\dot{\gamma}$ در این ناحیه مقدار ناچیزی می‌شود و لزجت نیز برابر با لزجت در نرخ برش صفر می-شود $(\frac{\eta}{\eta_0} \cong 1)$.

همانطور که می‌دانیم تنش برشی رابطه مستقیمی با لزجت دارد، ولی با مقایسه شکل(۵-۱۴)ج و شکل(۵-۱۵)الف ، این سوال پیش می‌آید که چه طور ممکن است ناحیه‌ای که لزجت دارای پایین-ترین مقدار خود می‌باشد، اندازه تنش برشی بیشینه باشد! برای بیان دلیل این موضوع، ابتدا رابطه تنش برشی برای سیال ویسکوالاستیک ارائه می‌شود:

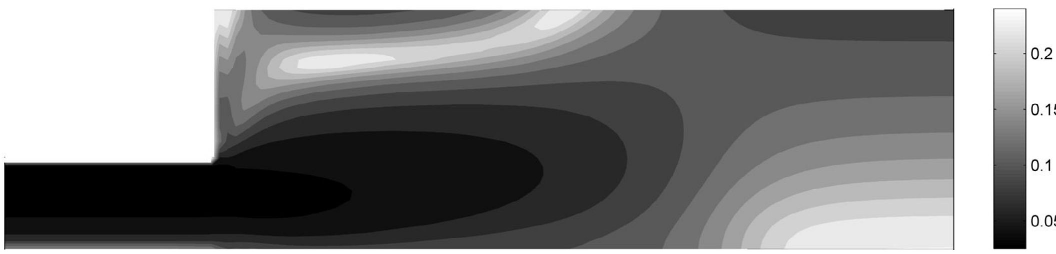
$$\tau_{rz} = \eta\left(\dot{\gamma}\right)\gamma_{rz} = \eta\left(\dot{\gamma}\right)\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \tau_{rz}^E \qquad (۵-۵)$$

که در آن τ_{rz}^E تنش برشی حاصل از خاصیت الاستیک سیال می‌باشد. با توجه به معادله (۵-۵) تنش برشی رابطه مستقیم با لزجت و نرخ برش دارد. این معادله، یک رابطه دوگانه و معکوس بین تنش و نرخ برش را بیان می‌کند. یعنی از طرفی طبق معادله (۵-۵)، افزایش نرخ برش (γ_{rz}یا همان $\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}$) باعث افزایش اندازه تنش می‌شود و از طرف دیگر، با توجه به خاصیت رقیق‌شوندگی سیال، افزایش نرخ برش، باعث کاهش لزجت و همچنین کاهش اندازه تنش می‌شود. برای سیال

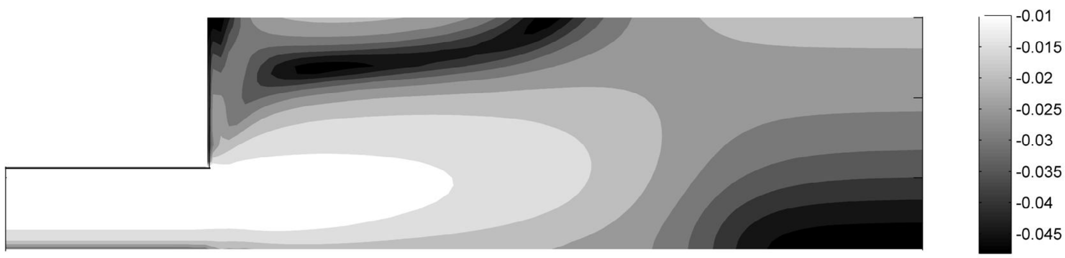
نیوتنی، تنش تنها یک رابطه مستقیم با نرخ برش دارد زیرا لزجت سیال نیوتنی مستقل از نرخ برش می‌باشد. بنابراین نمی‌توان تنها بر اساس توزیع لزجت در مورد تنش اظهار نظر نمود.



الف) لزجت



ب) اختلاف تنش عمودی اول



ج) اختلاف تنش عمودی دوم

شکل(۵-۱۵) توزیع الف) لزجت $\frac{\eta}{\eta_0}$ ب) اختلاف تنش عمودی اول $\frac{(\tau_{zz}-\tau_{rr})D}{\eta_0 U}$ ج) اختلاف تنش عمودی دوم $\frac{(\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta})D}{\eta_0 U}$.

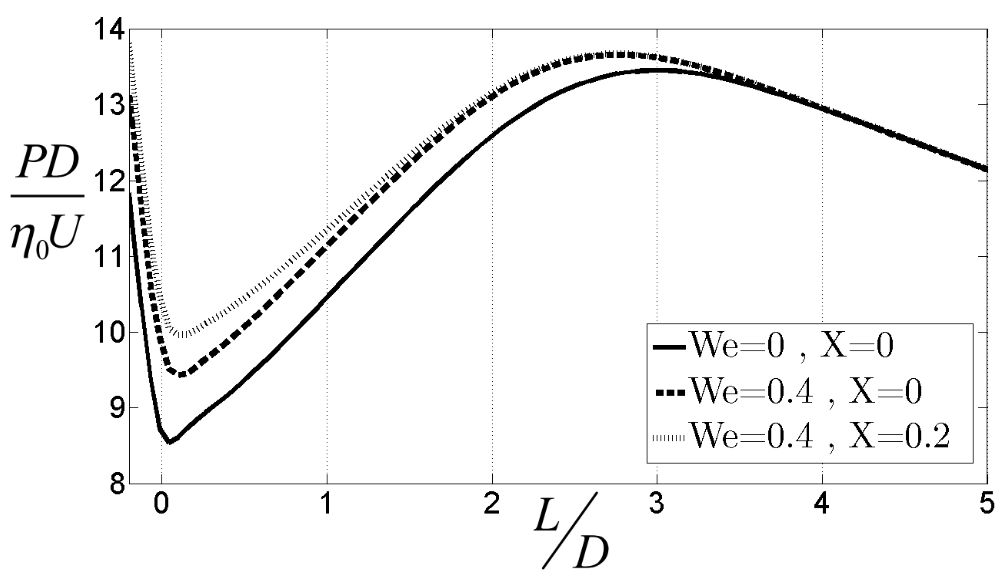
توزیع اختلاف تنش عمودی اول و دوم از نظر کیفی (و نه کمی) در شکل(۵-۱۵) بسیار شبیه به توزیع لزجت در این شکل می‌باشد. این شباهت، به‌صورت اتفاقی برای مسئله حاضر رخ نداده است. در واقع معادله متشکله CEF (مدل رئولوژیکی کاریو-یاسودا) این‌چنین خاصیتی دارد. با دقت در معادلات

(۳-۳۰) تا (۳-۳۲) به‌راحتی می‌توان رابطه‌ای خطی بین لزجت و اختلاف تنش عمودی اول (یا دوم) به‌صورت زیر پیدا کرد:

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = 2\lambda_1\left(\tilde{\eta}(\dot{\gamma}) - \tilde{\eta}_\infty\right) = A + B\,\tilde{\eta}(\dot{\gamma}) \tag{۵-۶}$$

$$\Psi_2(\dot{\gamma}) = -\chi\,\Psi_1(\dot{\gamma}) = -2\chi\lambda_1\left(\tilde{\eta}(\dot{\gamma}) - \tilde{\eta}_\infty\right) = C + D\tilde{\eta}(\dot{\gamma}) \tag{۵-۷}$$

شکل(۵-۱۶) توزیع فشار محوری برای سیال نیوتنی تعمیم‌یافته و ویسکوالاستیک (برای دو حالت) در مرکز لوله نشان داده است. نکته جالب که از این نمودار دریافت می‌شود این است که توزیع فشار در قسمت توسعه‌یافته منطقه پایین دست برای سیال نیوتنی تعمیم‌یافته و ویسکوالاستیک با شیب برابر تغییر می‌کند، یعنی اختلاف تنش عمودی اول و دوم، تاثیری در گرادیان فشار ناحیه توسعه‌یافته ندارد. البته توزیع فشار برای سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی تعمیم‌یافته سریع‌تر توسعه یافته شده است (سریعتر وارد ناحیه خطی می شود). و در آخر، مهمترین نکته اینکه، افت فشار سیال ویسکوالاستیک در عبور از تبدیل واگرا بیشتر از سیال نیوتنی تعمیم‌یافته می‌باشد. به عبارت دیگر، اختلاف تنش عمودی اول و دوم، هر دو باعث افزایش افت فشار می شوند.



شکل(۵-۱۶) توزیع فشار بدون بعد سیال نیوتنی تعمیم‌یافته و ویسکوالاستیک در محور تقارن به ازای Re=20 و n=0.6.

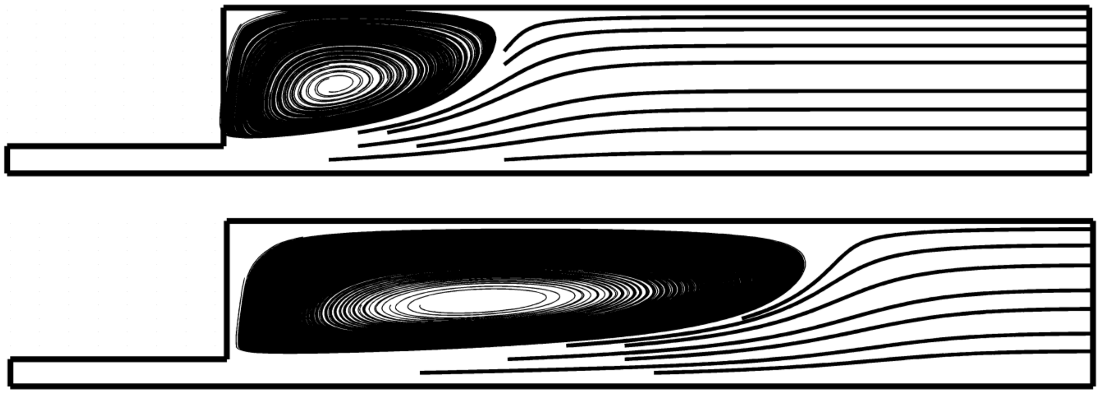
در جدول (۵-۷)، طول گردابه $\left(X_r\right)$ به عنوان تابع خواص غیرنیوتنی سیال در Re=20 و نسبت تبدیل $\frac{D}{d}=3$ آمده است.

جدول (۵-۷) طول گردابه در Re=20 به‌ازای خواص غیرنیوتنی مختلف

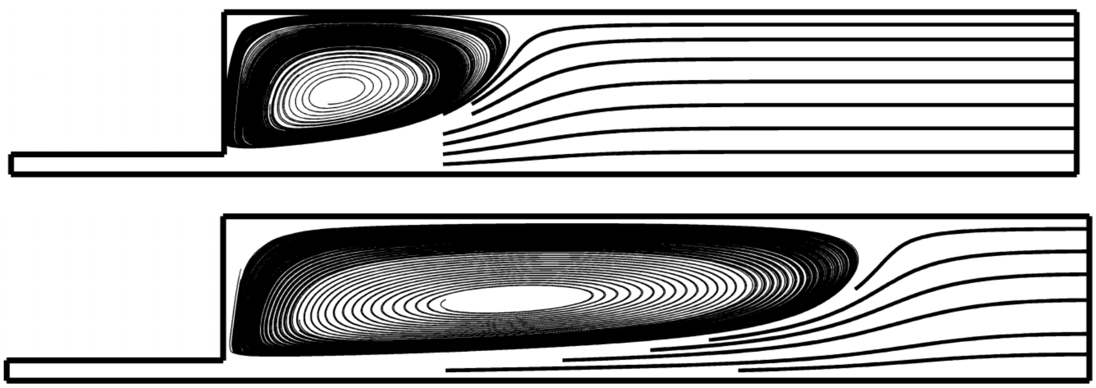
We	X	n	$\frac{X_r}{h}$
We=0	X=0	n=1.0	2.13
		n=0.9	2.92
		n=0.8	4.08
		n=0.7	5.59
		n=0.6	7.58
We=0.1	X=0	n=0.6	7.34
We=0.2			7.27
We=0.3			7.16
We=0.4			6.99
We=0.4	X=0.2	n=0.6	6.99

طول گردابه برای سیال نیوتنی تعمیم‌یافته به‌ازای کاهش اندیس توانی n، افزایش پیدا می‌کند. (این نتیجه به صورت کیفی نیز از شکل(۵-۶) مشخص بود.) برای سیال ویسکوالاستیک، با افزایش عدد وایزنبرگ، طول گردابه کاهش پیدا می‌کند. خاصیت الاستیک سیال، باعث کاهش اندازه گردابه می‌شود. این نتیجه، مشابه یافته‌های رچا و همکاران [۲۵] می‌باشد که تبدیل واگرای صفحه‌ای را مورد بررسی قرار داده‌اند. نکته جالب دیگر در مورد جدول (۵-۷) این است که اعمال اختلاف تنش عمودی دوم $\left(X=0.2\right)$ هیچ تاثیری در اندازه طول گردابه ندارد.

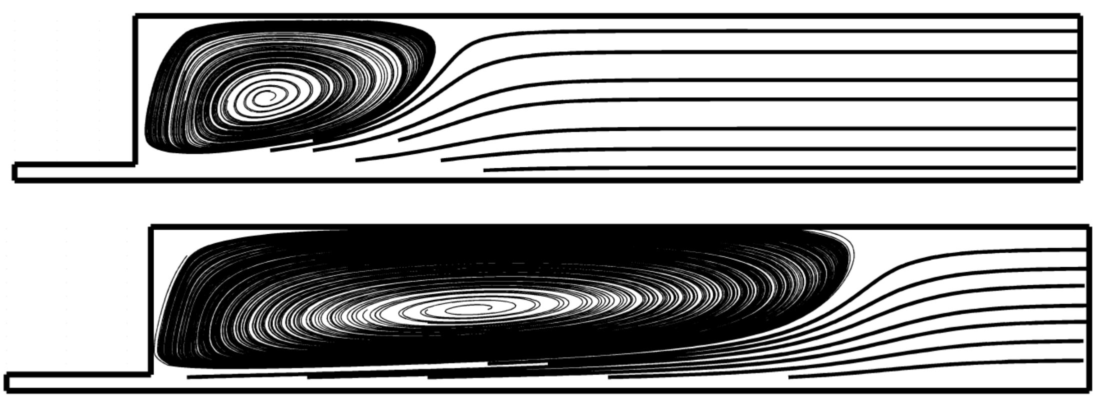
در شکل(۵-۱۷) خطوط جریان سیال نیوتنی در مقایسه با سیال ویسکوالاستیک در نسبت‌های واگرایی مختلف ترسیم شده است.



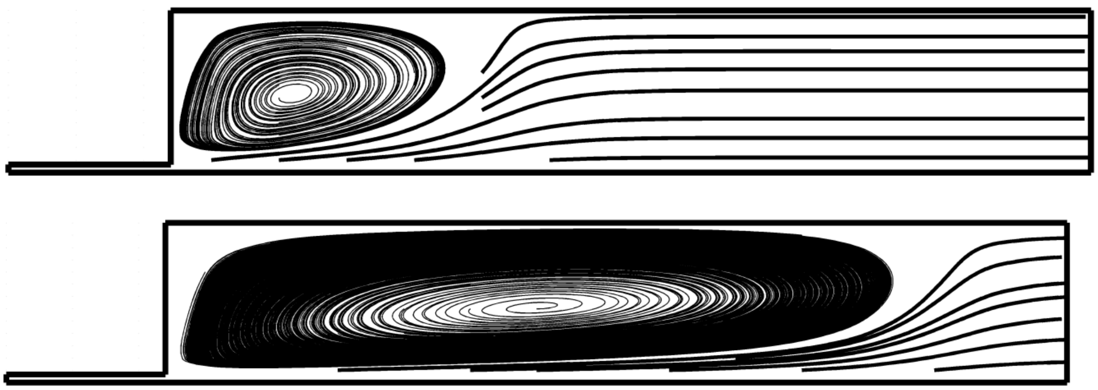
الف) نسبت ۱:۶



ب) نسبت ۱:۸



ج) نسبت ۱:۱۰



د) نسبت ۱:۲۰

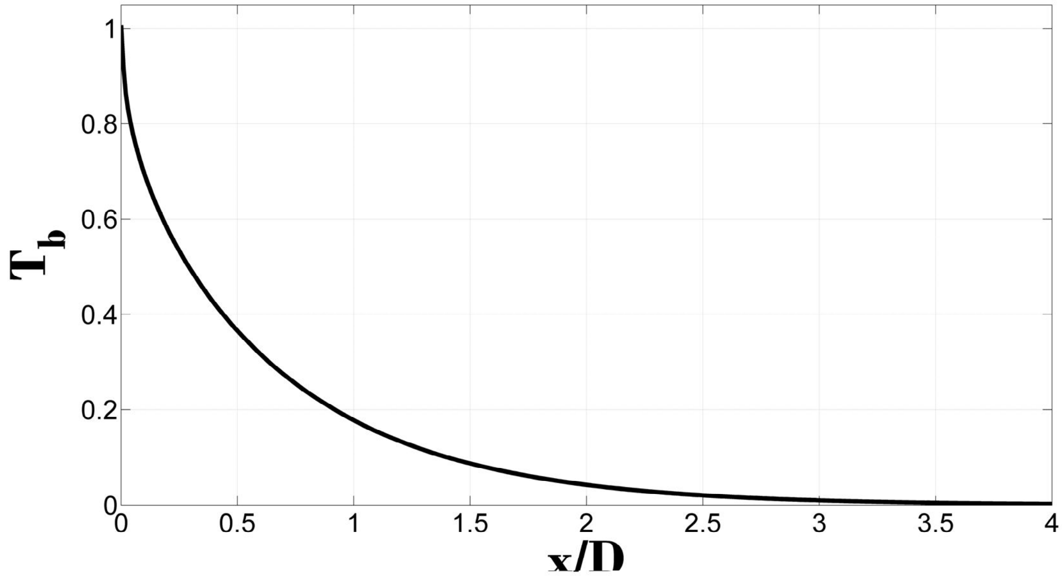
شکل(۵-۱۷) مقایسه خطوط جریان سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک

در نسبت‌های مختلف. $\left(n = 0.8, We = 0.05, \chi = 0.1\right)$

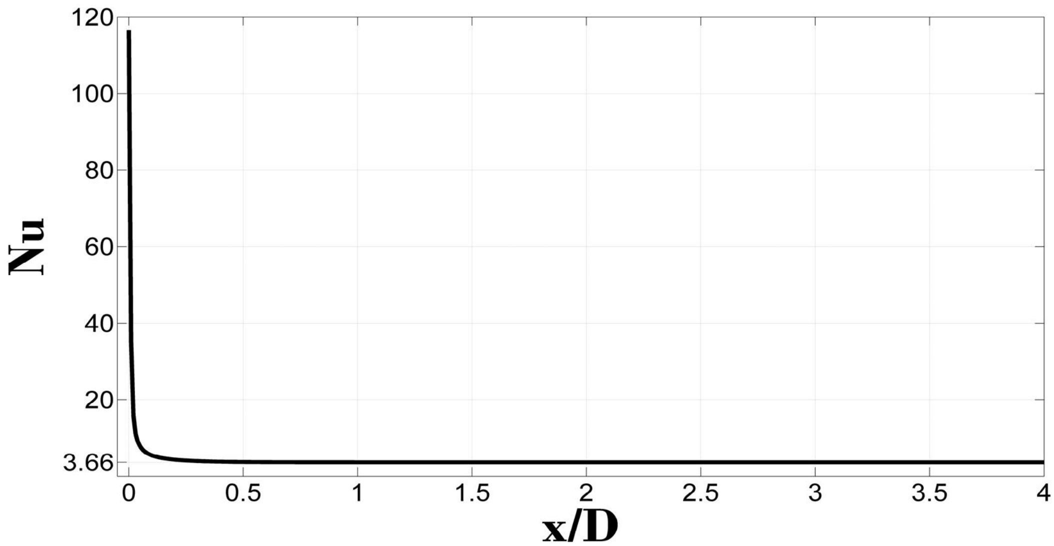
۵-۵- حل میدان دما برای جریان در تبدیل همگرای متقارن محوری

در این قسمت، گزارش مختصری از انتقال حرارت جریان اینرسی در تبدیل همگرا ارائه می‌شود. نتایج انتقال حرارت برای حالتی گزارش می‌شود که دمای دیواره‌ها ثابت باشد. برای ورودی شرط دما ثابت در نظر گرفته شده است (در این حالت سیال با دمای مشخصی وارد می‌شود). شرط مرزی تقارن نیز برای مرز پایین استفاده شده است. در خروجی نیز، با توجه به اینکه طول کل لوله به‌قدر کافی بزرگ در نظر گرفته شده است، با تقریب خوبی می‌توان از شرط مرزی $\frac{\partial T}{\partial x} = cte$ استفاده کرد.

برای اطمینان از صحت حل عددی معادله انرژی، ابتدا نتایج برای انتقال حرارت سیال نیوتنی در لوله ارائه می‌شود. به همین منظور با صرف نظر از اتلافات، توزیع دمای متوسط (شکل(۵-۱۸)) و ناسلت (شکل(۵-۱۹)) در طول لوله ارائه شده است.



شکل(۵-۱۸) توزیع دمای متوسط سیال نیوتنی در طول لوله به‌ازای Re=۶۰ و Pr=۰/۸۵.



شکل(۵-۱۹) مقدار ناسلت سیال نیوتنی در طول لوله به‌ازای Re=۶۰ و Pr=۰/۸۵.

همانطور که از شکل(۵-۱۹) پیداست، مقدار ناسلت در طول لوله کاهش پیدا کرده و به مقدار ۳/۶۶ می‌رسد که برابر با حل تحلیلی آن می‌باشد [۴۵]. با توجه به این حل، می‌توان از صحت گسسته‌سازی و حل عددی معادله انرژی اطمینان حاصل کرد.

توزیع دمای سیال در نواحی مختلف هندسه مسئله (تبدیل همگرا) برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در شکل(۵-۲۰) نشان داده شده است. تاثیر دمای ثابت دیواره‌ها، از یک طرف با فاصله گرفتن از ورودی باعث کاهش دمای سیال می‌شود و از طرف دیگر، با نزدیک شدن به دیواره‌ها دمای سیال کاهش می‌یابد. کلیه خطوط دماثابت در شکل، از نقطه مشترک مرز ورودی و دیواره‌ها می‌گذرد. این بدین خاطر است که دمای ورودی برابر با ۱ و دمای دیواره برابر با صفر در نظر گرفته شده است. نکته دیگر اینکه، تقریبا دمای سیال قبل از رسیدن به تبدیل، برابر با دمای دیواره‌ها شده و پس از آن تغییرات چندانی ندارد.

الف) نیوتنی

ب) ویسکوالاستیک

شکل(۵-۲۰) توزیع دما در تبدیل همگرا در Re= ۲۰ و Pr=۰/۵. برای الف) سیال نیوتنی ب) سیال ویسکوالاستیک ($n = 0.9, We = 0.05, \chi = 0.1$)

مقدار انتقال حرارت از سیال به‌سمت دیواره به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$q(x) = h(x)\left(T_b(x) - T_w\right) \tag{۸-۵}$$

که در آن $q(x)$ انتقال حرارت بر واحد سطح، $h(x)$ ضریب انتقال حرارت جابجایی، $T_b(x)$ دمای متوسط سیال و T_w دمای دیواره می‌باشد. از میان پارامترهای فوق، تنها دمای دیواره ثابت است و متغیرهای دیگر تابع طول ورودی x می‌باشند. از طرف دیگر نیز می‌توان انتقال حرارت هدایتی از دیواره را به صورت زیر نوشت:

$$q(x) = -k \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} \tag{۹-۵}$$

با ترکیب روابط (۵-۸) و (۵-۹) می‌توان عدد بی‌بعد ناسلت را به‌دست آورد:

$$Nu = \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} \frac{D}{\left(T_w - T_b(x)\right)} \tag{۱۰-۵}$$

شایان ذکر است که منظور از جمله $\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R}$، گرادیان دما بر روی دیواره‌های افقی است. منظور از R در رابطه (۵-۱۰) فاصله دیوار افقی از مرکز می‌باشد که برای ناحیه قبل از تبدیل R_1 و برای ناحیه پس از تبدیل R_2 استفاده می‌شود.

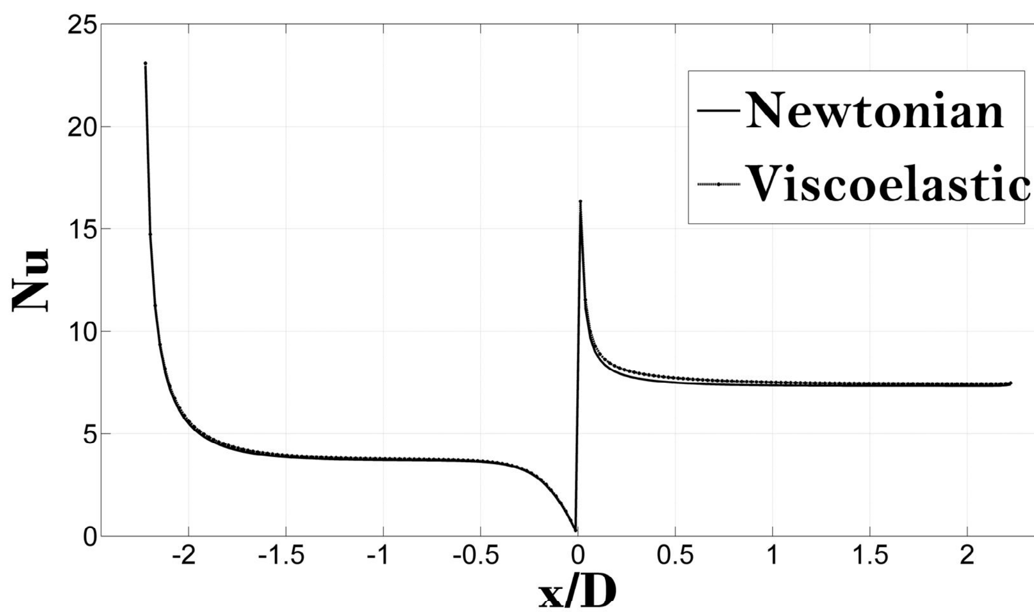
رابطه (۵-۱۰) برای کلیه ناحیه‌ها صادق است جز در منطقه تغییر سطح مقطع. در اینجا، به‌دلیل وجود دیواره عمودی انتقال حرارت هدایتی در جهت x می‌باشد و نمی‌توان از رابطه (۵-۱۰) استفاده کرد. رابطه‌ای که برای به‌دست آوردن ناسلت در منطقه استفاده شده است عبارتست از:

$$Nu = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(x=x_c,\, R_2<r<R_1)} \frac{D}{\left(T_w - T_b(x_c)\right)} \tag{۱۱-۵}$$

که در آن، R_1 شعاع مقطع اول، R_2 شعاع مقطع دوم و x_c محل تغییر سطح مقطع می‌باشد.

شکل(۵-۲۱) توزیع ناسلت را در طول تبدیل همگرا برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک نشان می‌دهد. همانطور که پیش‌بینی می‌شد، ناسلت در ورودی برای هر دو نوع سیال مقادیر بالایی دارد و با

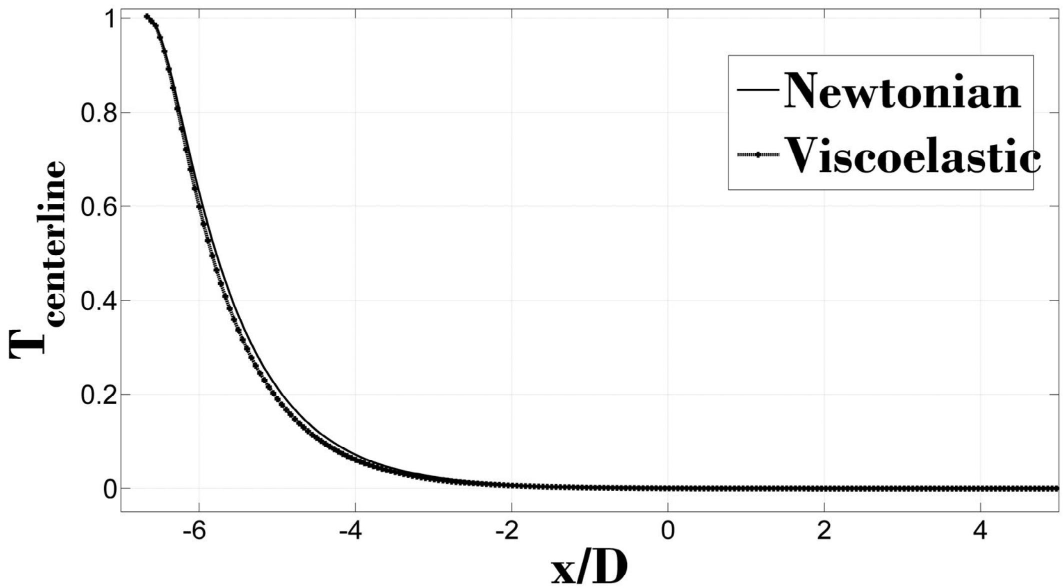
پیشروی جریان کاهش پیدا می‌کند. در ناحیه تغییر سطح مقطع نیز به‌دلیل وجود دیواره عمودی ناسلت (انتقال حرارت) به‌طور موضعی افزایش یافته و پس از آن به‌صورت تدریجی کاهش می‌یابد تا به مقدار ثابتی برسد. با مقایسه ناسلت سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک می‌توان نتیجه گرفت که برای سیال ویسکوالاستیک مقدار ناسلت اندکی بیشتر از سیال نیوتنی می‌باشد.



شکل(۵-۲۱)   توزیع ناسلت در Re= ۲۰ و Pr=۰/۵. برای الف) سیال نیوتنی ب) سیال ویسکوالاستیک ($n = 0.9, We = 0.05, \chi = 0.1$)

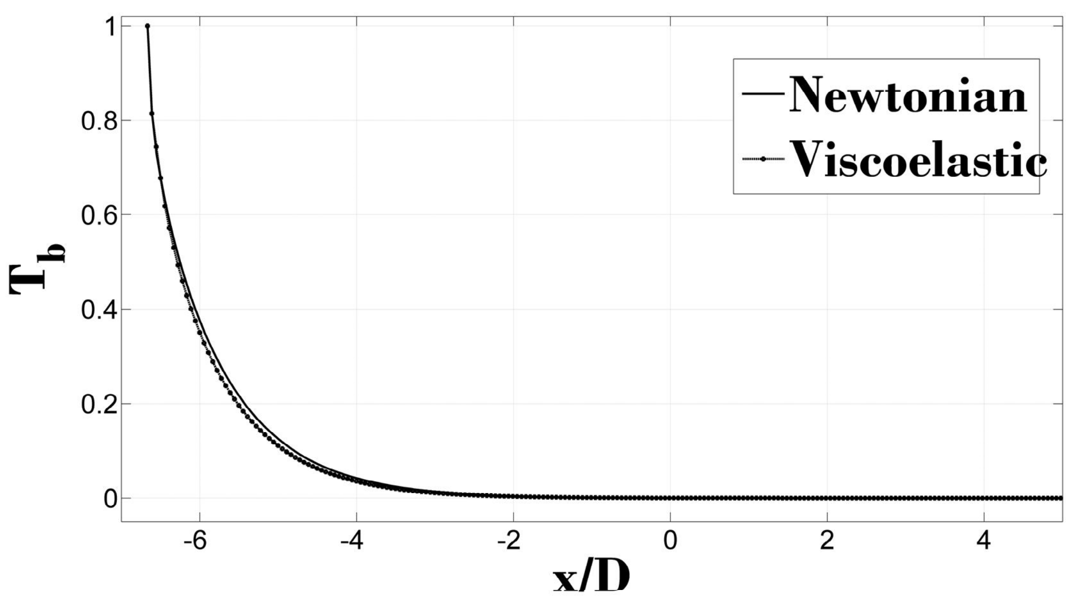
۵-۶- حل میدان دما برای جریان در تبدیل واگرای متقارن محوری

در این قسمت، نتایج حل عددی معادله انرژی برای جریان سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در تبدیل واگرا ارائه شده است. شکل(۵-۲۲) و شکل(۵-۲۳) به‌ترتیب توزیع دمای خط مرکزی و دمای متوسط را در طول محور x نشان می‌دهد. هر دو دمای ذکر شده از مقدار ۱ (در ورودی) آغاز شده و با پیشروی در طول محور x به سمت دمای دیواره‌ها (صفر) میل می‌کند. شایان ذکر است که دمای سیال ویسکوالاستیک در هر دو حالت اندکی از مقدار سیال نیوتنی کمتر می‌باشد.



شکل(۵-۲۲)	توزیع دمای خط مرکزی در ۲۰ =Re و ۲=Pr. برای الف) سیال نیوتنی ب) سیال

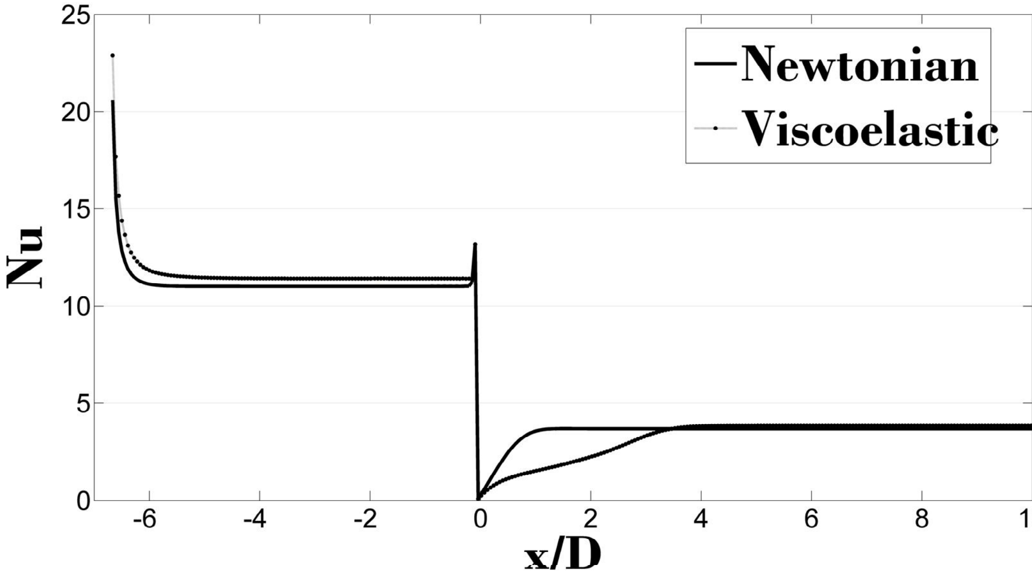
ویسکوالاستیک ($n = 0.6, We = 0.4, \chi = 0.2$)



شکل(۵-۲۳)	توزیع دمای متوسط در ۲۰ =Re و ۲=Pr. برای الف) سیال نیوتنی ب) سیال

ویسکوالاستیک ($n = 0.6, We = 0.4, \chi = 0.2$)

شکل(۵-۲۴) توزیع ناسلت برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در طول محور x را نشان می‌دهد.



شکل(۵-۲۴) توزیع ناسلت در Re= ۲۰ و Pr=۲. برای سیال نیوتنی سیال ویسکوالاستیک

$(n = 0.6, We = 0.4, \chi = 0.2)$

فصل ۶. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۶-۱- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرای متقارن محوری به‌صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش روابط فیزیکی، ابتدا معادلات پیوستگی، ممنتوم و انرژی در حالت کلی در مختصات استوانه‌ای ارائه شده‌اند و سپس روابط کلی معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک (مدل CEF) ارائه و توابع ویسکومتریک لزجت، اختلاف تنش عمودی اول و دوم با استفاده از مدل کاریو-یاسودا ارائه شده است. در فصل چهارم، روش عددی مورد استفاده تشریح و معادلات حاکم در این تحقیق، با استفاده از روش تفاضل محدود به‌صورت صریح گسسته‌سازی شده‌اند. جهت پایداری عددی بیشتر، شبکه عددی جابجا شده به‌کار گرفته شد تا پارامترهای جریان به‌یکدیگر جفت شده و حل عددی همگرایی بهتری پیدا کند. جهت حل پیمایش زمان مجازی، از روش تراکم‌پذیری مصنوعی استفاده شده تا فشار نیز مانند پارامترهای دیگر جریان در هر زمان محاسبه شود. گسسته‌سازی معادلات پیوستگی، ممنتوم و انرژی طبق روش عددی مورد استفاده ارائه شده است.

در فصل نتایج، ابتدا برای میدان جریان استقلال حل از شبکه مورد بررسی قرار گرفت و سپس، صحت نتایج حل میدان جریان برای تبدیل همگرا و واگرا به‌ترتیب با روابط تحلیلی و مطالعات قبلی مقایسه شد. در این فصل، نتایج عددی برای سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک شامل خطوط جریان، توزیع سرعت، توزیع فشار، تنش برشی، لزجت، دما، ناسلت و ... ارائه و در ذیل به گزیده‌ای از نتایج حاصله از از این حل عددی اشاره شده است.

- خاصیت الاستیک سیال، باعث کاهش بیشینه سرعت محور در مرکز می‌شود.
- افت فشار سیال نیوتنی در مقایسه با سیال نیوتنی تعمیم‌یافته (رقیق‌شونده) و ویسکو-الاستیک بیشتر می‌باشد.

- کاهش اندیس توانی n، باعث افت فشار کمتر و افزایش خاصیت الاستیک باعث افزایش افت فشار می‌شود.
- طول جریان در حال توسعه سیال رقیق‌شونده و ویسکوالاستیک از سیال نیوتنی بیشتر می‌باشد. در حالت کلی، کاهش اندیس توانی، باعث افزایش طول در حال توسعه جریان و افزایش خاصیت الاستیک باعث کاهش این طول می‌شود.
- گردابه‌های ایجاد شده در جریان سیال در تبدیل واگرا، برای سیال ویسکوالاستیک و رقیق‌شونده بزرگتر از سیال نیوتنی می‌باشد. در حالت کلی، کاهش اندیس توانی n باعث افزایش طول گردابه و افزایش اختلاف تنش اول باعث کاهش این طول می‌شود و اختلاف تنش دوم تاثیری بر گردابه‌ها ندارد.
- نرخ برش تعمیم‌یافته سیال در کنار دیواره‌ها و در منطقه‌ای که تغییر سطح مقطع وجود دارد به‌شدت بالاست و همین امر باعث کاهش لزجت سیال در این مناطق می‌شود.
- نرخ برش تعمیم‌یافته سیال در خط مرکزی در قسمت توسعه‌یافته جریان و مناطق مرکزی گردابه‌ها مقادیر کوچکی دارد و همین امر باعث می‌شود لزجت بی‌بعد سیال تقریبا به مقدار یک برسد.
- توزیع ناسلت در تبدیل همگرا و واگرا به‌دلیل وجود دیواره عمودی در محل تغییر سطح مقطع، در این منطقه دارای بیشینه محلی می‌باشد و پس از آن به مقدار ثابتی میل می‌کند.
- ناسلت سیال ویسکوالاستیک بیشتر از سیال نیوتنی می‌باشد.

۶-۲- پیشنهادات

می‌توان برای ادامه تحقیق در زمینه جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرا، موضوعات زیر را بررسی نمود:

- حل عددی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرا در حالت غیر دائم
- حل عددی همزمان جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرا (اعمال وابستگی لزجت و تنش به دما)
- حل عددی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیل همگرا و واگرا با استفاده از مدل‌های مختلف ویسکوالاستیک و مقایسه نتایج آن‌ها.
- حل عددی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در تبدیل‌های تدریجی همگرا و واگرا.

مراجع

[۱] شیخی نارانی م، (۱۳۷۱) "بررسی خواص، جریان و انتقال حرارت و اختلاط سیالات غیرنیوتنی"، چاپ اول، جهاد دانشگاهی صنعتی امیرکبیر،تهران.

[2] Bird B. R., Armstrong R.C., and Hassager O., (1987). "Dynamics of Polymer Liquids", Vol. 1, Second Edition, John Wiely & sons.

[3] Malkin, A. Y. (1994), "Rheology Fundamentals", First Edition, Chem. Tech. Publishing, Toronto.

[4] Phan-Thien, N. (2002), "Understanding Viscoelasticity", First Edition, Springer, Berlin.

[۵] نوروزی م.، (۱۳۸۸)، پایان‌نامه دکتری: "بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده دارای مقطع مستطیلی و در حالت‌های ایستا و چرخان"، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[۶] لی م، رابین دو کرمپل ا، مترج، شعرباف غ ر، (۱۳۷۸) "مقدمه‌ای بر مکانیک محیط‌های پیوسته"، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، تهران.

[7] Larson R. G. (1988), " Constitute Equation for Polymer Melts and Solutions", Vol. 2, Second Edition, John Wiley, & Sons.

[8] Oldroyd, J. G. (1985), "Non-Newtonian effects in steady motion of some idealized elasticoviscous fluids", Proc. Roy.Soc., London Ser A 245,pp. 278-297.

[9] Phan-Thien, N and Tanner, R. I. (1977), "A new constitute equation derived from network theory", J. Non-Newtonian. Fluid, 2, pp. 353-365.

[10] Giesekus, H. (1982), "A simple constitute equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility", J. Non-Newtonian. Fluid, 2, pp. 353-365.

[11] Poole R.J., Pinho F.T., Alves M.A. and Oliveira P.J., (2009). "The effect of expansion ratio for creeping expansion flows of UCM fluids". J. Non-Newtonian Fluid Mech. 163, pp. 35-44.

[12] R.J. Poole, M.A. Alves, P.J. Oliveira, F.T. Pinho, Plane sudden expansion flows of viscoelastic liquids, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 146 (2007) 79–91.

[13] Primoˇz Ternik, New contributions on laminar flow of inelastic non-Newtonian rued in the two-dimensional symmetric expansion: Creeping and slowly moving flow conditions, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 165 (2010) 1400–1411.

[14] F. Durst, A. Melling, J.H. Whitelaw, Low Reynolds number flow over a plane symmetrical sudden expansion. s.l. : J. Fluid Mech. 64 (1974) 111–128.

[15] R.M. Fearn, T. Mullin, K.A. Cliffe, Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion, J. Fluid Mech. 211 (1990) 595–608.

[16] D. Drikakis, Study of bifurcation phenomena in incompressible sudden-expansion flows, Phys. Fluids 9 (1997) 76–87.

[17] F. Battaglia, S.J. Tavener, A.K. Kulkarni, C.L. Merkle, Bifurcation of Low Reynolds Number Flows in Symmetric Channels, AIAA J. 35 (1997) 99–105.

[18] Primoˇz Ternik, Planar sudden symmetric expansion flows and bifurcation phenomena of purely viscous shear-thinning fluids, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 157 (2009) 15–25.

[19] A. Bloach, P. Townsend, M.F. Webster, On vortex development in viscoelastic expansion and contraction flows, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 65 (1996) 133 -149.

[20] Paulo J. Oliveira, Asymmetric flows of viscoelastic fluids in symmetric planar expansion geometries, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 114 (2003) 33–63.

[21] R. Manica, A.L. De Bortoli, Simulation of sudden expansion flows for power-law fluids, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 121 (2004) 35–40.

[22] Primoˇz Ternik, Jure Marn, Zoran ˇZuniˇ, Non-Newtonian fluid flow through a planar symmetric expansion: Shear-thickening fluids, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 135 (2006) 136–148.

[23] Panagiotis Neofytou, Transition to asymmetry of generalised Newtonian fluid flows through a symmetric sudden expansion, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 133 (2006) 132–140.

[24] Panagiotis Neofytou a, Dimitris Drikakis, Non-Newtonian flow instability in a channel with a sudden expansion, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 111 (2003) 127–150.

[25] Gerardo N. Rocha, Robert J. Poole, Paulo J. Oliveira, Bifurcation phenomena in viscoelastic flows through a symmetric 1:4 expansion, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 141 (2007) 1–17.

[26] P.J. Oliveira, F.T. Pinho, A. Schulte, A general correlation for the local loss coefficient in Newtonian axisymmetric sudden expansions, International Journal of Heat and Fluid Flow 19 (1998) 655-660.

[27] P. S. Scott and F. A. Mirza, Afinite element analysis of laminar flows through planer and axisymmetric abrupt expansions, Computers & Fluids Vol. 14, No. 4. pp. 423-432, 1986.

[28] Ihsan Da˘gtekin and Mazhar ¨Unsal, Numerical analysis of axisymmetric and planar sudden expansion flows for laminar regime, Int. J. Numer. Meth. Fluids 2011; 65:1133–1144.

[29] Bockchoon Pak, Young I. Cho and Stephen U.S Choi, Seperation and reattachment of non-newtonian fluid flows in a sudden expansion pipe, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 37 (1990) 175-199.

[30] F.T. Pinho, P.J. Oliveira, J.P. Miranda, Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion, International Journal of Heat and Fluid Flow 24 (2003) 747–761.

[31] William P.Raiford, Lidia M. Quinzani, Paul J. Coates, Robert C. Armstrong and Robert A.Brown, LDV measurements of viscoelstic flow transitions in abrupt axisymmetric contraction of inertia and elasticity, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 32 (1989) 39-68.

[32] Paul J. Coates, Robert C. Armstrong and Robert A. Brown, Calculation of steady-state viscoelastic flow through axisymmetric contractions with the EEME formulation, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 42 (1992) 141-188.

[33] Monica S.N. Oliveira, Paulo J. Oliveira, Fernando T. Pinho, Manuel A. Alves, Effect of contraction ratio upon viscoelastic flow in contractions: The axisymmetric case, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 147 (2007) 92–108.

[34] G. P. Sasmal, A finite volume approach for calculation of viscoelastic flow through an abrupt axisymmetric contraction, J. Non-Newtonian Fluid Mech, 56 (1995) 15-47.

[35] Bockchoon Pak, Young I. Cho and Stephen U. S. Choi, A study of turbulent heat transfer in a sudden expansion pipe with drag-reducing viscoelastic fluid, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 34, No 4/5, pp 1195-1208, 1991.

[36] P.S.B. Zdanski, M. Vaz Jr, Non-isothermal polymer melt flow in sudden expansions, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 161 (2009) 42–47.

[37] Bird, R. B., Steward, W. E., and Lightfoot, E. N. (1960). “ Transport Phenomena”, First Edition, John Wiley.

[38] Crimnale, W. O., Ericksen, J. L., and Filbey, G. L. (1958). “Steady Shear Flow of Non-Newtonian Fluids”, Arc. Rat. Mech. Anal., 1, pp. 410-417.

[39] Ericksen, J. L. and Borgen, J. T. (1960). “Viscoelasticity: Phenomenological Aspects”, First Edition, Academic press, New York.

[40] Berds, A., Armstrong, R. C., and Brown, R. A. (1983). “Perturbation theory for viscoelastic fluids between eccentric rotating cylinders”, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 13, pp. 109-148.

[41] Cross, M. M. (1965), “Rheology of non-Newtonian Fluids: A New Flow Equation for Pseudoplastic Systems”, Journal of Colloid Science, 20, pp. 417-437.

[42] 1K. A., Hoffman, Chiang, S. T. (1989), “Computational Fluid Dynamics for Engineers”, First ed., EES, Texas.

[43] Chorin, A. J., (1967), “A numerical method for solving incompressible viscous flow problems”, J. Comput. Phys., 2, pp. 12-26.

[44] 131- Harlow, F. H. and Welch, J. E. (1965), “Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface,” 8, pp. 2182-2189.

[45] Kays, W. M. and Crawford, M. E. (1993). “Convective Heat and Mass Transfer”, Third edition, McGraw-Hill, New York.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

The numerical investigation of viscoelastic flow and heat transfer in sudden expansions and contractions

Thesis
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
Master of Science (M.Sc)

Sobhan Mosayebi-Dorcheh

Supervisors

Dr. M. M. Shahmardan

Dr. M. Norouzi

Date: February 2012