

بِسْمِ اللَّهِ
الرَّحْمَنِ
الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک
رساله دکتری مهندسی مکانیک طراحی کاربردی

تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ضخامت متغیر با خیز نسبتاً زیاد، تحت بار دینامیکی عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

نگارنده:

فاطمه سوهانی

استاد راهنما:

دکتر حمیدرضا ایپک چی

اسفند ۱۳۹۹

أَلَيْسَ اللَّهُ بِكَافٍ عَبْدَهُ

(قرآن کریم، س ۳۹، ی ۳۶)

تقدیم به عزیزترین‌ها

پدر و مادرم

به جبران قطره‌ای از دریای محبتشان

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب

"من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ" :

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوaram، که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار

غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یآوری بی چشم داشت برای من بوده‌اند؛

و از استاد ارجمند و شایسته؛ جناب آقای دکتر حمید رضا ایپک‌چی که در کمال سعه‌صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تعهد نامه

این جانب فاطمه سوهانی دانشجوی دوره دکتری رشته مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ضخامت متغیر با خیز نسبتاً زیاد تحت بار دینامیکی عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تحت راهنمایی دکتر حمید رضا ایپکچی متعهد می‌شوم.

تحقیقات در این رساله توسط این جانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است. مطالب مندرج در رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.

کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.

حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیر گذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.

در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

تیرها با ضخامت متغیر در راستای طول، به منظور دستیابی به توزیع بهتر استحکام و وزن، در بسیاری از سازه‌ها مانند برج‌های توربین بادی، پل‌ها یا ساختمان‌ها، سازه‌های فضایی و غیره کاربرد دارند. تحلیل این سازه‌ها زمانی که نیروی محوری با خیز عرضی کوپل می‌شود، پیچیده‌تر است. در این رساله تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ضخامت متغیر با خیز نسبتاً زیاد، تحت بار دینامیکی عرضی و بار محوری به کمک تئوری اغتشاشات، انجام خواهد شد. تیر از ماده همگن و همسانگرد ساخته شده است. در استخراج معادلات، میدان جابجایی با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول تخمین زده می‌شود. سینماتیک مسأله بر اساس روابط کرنش-جابجایی فن‌کارمن و رابطه‌ی ساختاری، روابط هوک است. معادلات حاکم بر حرکت تیر، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی و با ضرایب متغیر هستند که به یکدیگر کوپل بوده و به کمک اصل هامیلتون تعیین شده‌اند.

مواردی که در این تحلیل در نظر گرفته خواهند شد عبارتند از: تعیین پاسخ بر حسب مکان و زمان با تکیه‌گاه ساده، تعیین فرکانس‌های طبیعی تیر با شرایط مرزی ساده و گیردار، بررسی وابستگی دامنه به فرکانس، بررسی تأثیر پارامترهای هندسی بر پاسخ و فرکانس، بررسی دقت تئوری مرتبه اول در تعیین فرکانس و مقایسه نتایج با حل عددی.

نتایج نشان می‌دهند که فرکانس‌های محوری و عرضی علاوه بر دامنه عرضی به دامنه محوری نیز وابسته هستند همچنین از روش‌های ذکر شده مبتنی بر تئوری اغتشاشات در این رساله، می‌توان برای تحلیل فرکانسی تیرهای غیریکنواختی که بر اساس تئوری‌های اویلر-برنولی و تیموشنکو و FSDT فرمول‌بندی می‌شوند، استفاده کرد.

کلمات کلیدی: تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، ضخامت متغیر، تحلیل فرکانسی، تئوری

اغتشاشات، خیز نسبتاً زیاد

فهرست مقاله‌های مستخرج از رساله

Sohani F., Eipakchi H. R., (2021), Nonlinear geometry effects investigation on free vibrations of beams using shear deformation theory, Mechanics Based Design of Structures and Machines, Published online, <https://doi.org/10.1080/15397734.2021.1872385>.

Sohani F., Eipakchi H. R., (2021), Linear and nonlinear vibrations of variable cross-section beams using shear, ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Published online, <https://doi.org/10.1002/zamm.202000265>.

Sohani F., Eipakchi H. R., (2018), Analytical solution for modal analysis of Euler-Bernoulli and Timoshenko beam with an arbitrary varying cross-section, Mathematical Models in Engineering, 4(3), 164-174.

Sohani F., Eipakchi H. R., (2018), Analytical solution for Euler-Bernoulli beam with moderately large deflection and variable thickness, 3rd International Conference on Mechanical & Aerospace Engineering.

Sohani F., Eipakchi H. R., (2018), Vibration analyse for beam with variable cross section along length under axial load, 3rd International Conference on Mechanical & Aerospace Engineering.

فهرست مطالب

۱	فصل اول: تاریخچه و مرور مقالات
۲	۱-۱- مقدمه
۳	۱-۲- اجزای سازه‌ای
۳	۱-۳- سیستم‌های غیرخطی
۴	۱-۴- تئوری تیرها
۵	۵-۱- مروری بر مقالات
۵	۱-۵-۱- ارتعاشات خطی تیر
۶	۱-۵-۲- ارتعاشات غیرخطی تیر
۱۱	۱-۵-۳- ارتعاشات تیر با در نظر گرفتن اثر برش
۱۲	۱-۵-۴- ارتعاشات غیرخطی تیر با در نظر گرفتن اثر برش
۱۴	۱-۵-۵- ارتعاشات خطی تیر ضخامت متغیر
۱۶	۱-۵-۶- ارتعاشات تیر با در نظر گرفتن اثر برش و ضخامت متغیر
۱۶	۱-۶- جمع‌بندی
۱۹	فصل دوم: تحلیل فرکانسی تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو با ضخامت متغیر
۲۰	۱-۲- مقدمه
۲۱	۲-۲- تیر اویلر برنولی ضخامت متغیر
۲۳	۲-۳- تیر تیموشنکو ضخامت متغیر
۲۵	۲-۴- حل عددی
۲۶	۲-۵- مطالعه پارامتری تیر با خیز کوچک و ضخامت متغیر
۳۲	۲-۶- جمع‌بندی
۳۵	فصل سوم: ارتعاشات آزاد تیر با خیز نسبتاً زیاد و ضخامت ثابت با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی
۳۶	۱-۳- مقدمه

۳۷	۳-۲- تیر با فرض خیز نسبتاً زیاد و ضخامت ثابت
۴۰	۳-۳- تئوری اغتشاشات
۴۹	۳-۴- حل عددی تیر
۴۹	۳-۵- مطالعه پارامتری تیر مسأله
۶۱	۳-۶- جمع‌بندی
۶۳	فصل چهارم: ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ضخامت متغیر با خیز نسبتاً زیاد با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی
۶۴	۴-۱- مقدمه
۶۴	۴-۲- ارتعاشات آزاد تیر ضخامت متغیر با فرض خیز نسبتاً زیاد
۶۷	۴-۳- تحلیل فرکانسی
۷۴	۴-۴- تعیین پاسخ
۸۲	۴-۵- تحلیل عددی تیر با ضخامت متغیر
۸۳	۴-۶- مطالعه موردی
۹۲	۴-۷- جمع‌بندی
۹۳	فصل پنجم: نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۹۴	۵-۱- مقدمه
۹۴	۵-۲- نتیجه‌گیری
۹۶	۵-۳- پیشنهادها
۹۸	مراجع
۱۱۱	ضمائم

فهرست شکل‌ها

- ۲۱ شکل (۱-۲) نمای مسأله
- ۲۸ شکل (۲-۲) تیر با تکیه‌گاه ساده و ضخامت متغیر خطی
- ۳۱ شکل (۳-۲) سه شکل مود تیر اویلر-برنولی با تابع ضخامت نوع دوم و شرایط مرزی گیردار (CC)
- ۳۲ شکل (۴-۲) شکل مود اول برای تیر اویلر-برنولی با پنج تابع ضخامت و شرط مرزی SS
- ۳۶ شکل (۱-۳) هندسه و بارگذاری تیر
- ۵۱ شکل (۲-۳) تأثیر طول بر روی فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_L = 0.02l^{-0.997}$
- ۵۲ شکل (۳-۳) تأثیر ضخامت بر روی فرکانس عرضی اول با بارهای محوری مختلف
- ۵۳ شکل (۴-۳) شکل مودها (عرضی - خطی)
- ۵۴ شکل (۵-۳) تغییرات $(\omega_{ax})_{NL}$ در FSDT برحسب $\varepsilon a_{23}, \varepsilon a_{14}$
- ۵۴ شکل (۶-۳) تغییرات $(\omega_{tr})_{NL}$ در FSDT برحسب $\varepsilon a_{23}, \varepsilon a_{14}$
- ۵۵ شکل (۷-۳) الف) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه عرضی (برای دامنه‌های محوری مختلف)
- ۵۵ شکل (۷-۳) ب) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه محوری (برای دامنه‌های عرضی مختلف)
- ۵۶ شکل (۸-۳) الف) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه عرضی (برای دامنه‌های محوری مختلف)
- ۵۶ شکل (۸-۳) ب) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه محوری (برای دامنه‌های عرضی مختلف)
- ۵۷ شکل (۹-۳) الف) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه عرضی (برای ضخامت‌های مختلف) ($\varepsilon a_{14}=0.01$)
- ۵۷ شکل (۹-۳) ب) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه محوری (برای ضخامت‌های مختلف) ($\varepsilon a_{23}=0.03$)
- ۵۸ شکل (۱۰-۳) الف) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه عرضی

- (برای ضخامت‌های مختلف) ($\varepsilon a_{14}=0.001$)
- ۵۸ شکل (۳-۱۰ ب) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه محوری (برای ضخامت‌های مختلف) ($\varepsilon a_{23}=0.01$)
- ۵۹ شکل (۳-۱۱ الف) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه عرضی (برای بارهای محوری مختلف) ($\varepsilon a_{14}=0.001$)
- ۵۹ شکل (۳-۱۱ ب) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه محوری (برای بارهای محوری مختلف) ($\varepsilon a_{23}=0.01$)
- ۶۰ شکل (۳-۱۱ ج) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه محوری (برای بارهای محوری مختلف) ($\varepsilon a_{23}=0.01$)
- ۶۰ شکل (۳-۱۱ د) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه عرضی (برای بارهای محوری مختلف) ($\varepsilon a_{14}=0.01$)
- ۶۴ شکل (۴-۱) هندسه تیر
- ۸۵ شکل (۴-۲ الف) مقایسه فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_L$ تیر اوپلر-برنولی با FSDT با تابع ضخامت نوع اول
- ۸۵ شکل (۴-۲ ب) مقایسه فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_L$ تیر اوپلر-برنولی با FSDT با تابع ضخامت نوع پنجم
- ۸۷ شکل (۴-۳ الف) نمودار فرکانس عرضی - دامنه محوری برای دامنه‌های عرضی مختلف با تابع ضخامت نوع اول و $p^*=0$
- ۸۸ شکل (۴-۳ ب) نمودار فرکانس عرضی - دامنه عرضی برای دامنه‌های عرضی مختلف با تابع ضخامت نوع اول و $p^*=0$
- ۸۸ شکل (۴-۳ ج) نمودار فرکانس محوری - دامنه عرضی برای دامنه‌های عرضی مختلف با تابع ضخامت نوع اول و $p^*=0$
- ۸۹ شکل (۴-۳ د) نمودار فرکانس محوری - دامنه محوری برای دامنه‌های عرضی مختلف با تابع ضخامت نوع اول و $p^*=0$
- ۹۰ شکل (۴-۴) پاسخ عرضی تیر در $x^*=0.5$ به‌ازای توابع ضخامت مختلف
- ۹۰ شکل (۴-۵) تغییر شکل عرضی تیر در $t^*=0.05/t_0$ به‌ازای توابع ضخامت مختلف

۹۱ شکل (۴-۶) پاسخ محوری تیر در $x^*=0.5$ به ازای توابع ضخامت مختلف

۹۱ شکل (۴-۷) تغییر شکل محوری تیر در $t^*=0.05/t_0$ به ازای توابع ضخامت مختلف

۹۲ شکل (۴-۸) تغییر شکل عرضی مرتبه های مختلف تیر در $t^*=0.05/t_0$ به ازای تابع ضخامت نوع چهارم

فهرست جدول‌ها

۲۶	جدول (۱-۲) خواص تیر
۲۸	جدول (۲-۲) مقایسه فرکانس‌های طبیعی تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با ضخامت ثابت
۲۸	جدول (۲-۳) مقایسه نتایج تئوری‌های اویلر-برنولی و تیموشنکو با نتایج [۱۱۹]
۲۹	جدول (۲-۴) پروفیل‌های ضخامت با توابع مختلف
۲۹	جدول (۲-۵) مقایسه تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با توابع ضخامت مختلف
۳۰	جدول (۲-۶ الف) نتایج تیرهای تیموشنکو و اویلر-برنولی با دو و سه جمله با تابع ضخامت نوع دوم
۳۰	جدول (۲-۶ ب) نتایج تیرهای تیموشنکو و اویلر-برنولی با دو و سه جمله با تابع ضخامت نوع دوم
۳۱	جدول (۷-۲) مقایسه تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با پروفیل سطح مقطع‌های مختلف با تابع ضخامت نوع دوم
۴۹	جدول (۱-۳) مشخصات تیر
۵۰	جدول (۲-۳) مقایسه $(\omega_{tr})_L$ به‌ازای نسبت‌های منظر مختلف
۵۱	جدول (۳-۳) تأثیر بار محوری بر فرکانس عرضی خطی $(\omega_{tr})_L$ با استفاده از FSDT
۵۲	جدول (۴-۳) فرکانس‌های تیر با تکیه‌گاه‌های مختلف
۵۳	جدول (۵-۳) فرکانس‌های محوری بی‌بعد
۶۰	جدول (۶-۳) تأثیر بار محوری بر روی فرکانس به‌ازای دامنه‌های $(\varepsilon a_{14}=0.01, \varepsilon a_{23}=0.01)$
۸۲	جدول (۱-۴) مشخصات تیر
۸۳	جدول (۲-۴) مقایسه تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با ضخامت ثابت
۸۴	جدول (۳-۴) مقایسه تیرهای FSDT با نتایج مقاله [۱۱۹]

- ۸۴ جدول (۴-۴) پروفیل ضخامت با توابع مختلف
- ۸۴ جدول (۵-۴) مقایسه فرکانس‌های عرضی با توابع ضخامت مختلف
- ۸۶ جدول (۴-۶ الف) ضرایب فرکانس‌های غیرخطی برای مقادیر مختلف l/h_0 با تابع ضخامت نوع اول و $p^*=0$
- ۸۶ جدول (۴-۶ ب) ضرایب فرکانس‌های غیرخطی برای مقادیر مختلف l/h_0 با تابع ضخامت نوع اول $p^*=0.00005$
- ۸۷ جدول (۴-۶ ج) ضرایب فرکانس‌های غیرخطی برای مقادیر مختلف l/h_0 با تابع ضخامت نوع اول و $p^*=-0.00005$
- ۸۹ جدول (۴-۷) تأثیر دامنه محوری و عرضی بر روی فرکانس‌های غیرخطی با تابع ضخامت نوع اول، نوع پنجم و $p^*=0$

فصل اول

تاریخچه و مرور مقالات

۱-۱- مقدمه

تیر یکی از عناصر بنیادی در سازه‌های مهندسی است که در بسیاری از سازه‌ها مانند پره‌های هلی-کوپتر، آنتن‌های فضایی، هواپیماها، اسلحه‌ها، ساختمان‌های بلند، پل‌های عریض و غیره کاربرد دارد. مطالعه‌ی پاسخ دینامیکی و استاتیکی تیرها می‌تواند به درک بهتر رفتار سازه‌های واقعی تحت شرایط بارگذاری مشابه کمک کند. اطلاع از مشخصه‌های ارتعاشی یک سیستم، مانند فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی آن، لازمه شناخت آن سیستم است. محاسبه مشخصه‌های ارتعاشی، برای یک سیستم خطی آسان است. اما در عمل بیشتر سیستم‌های مورد استفاده ماهیت غیرخطی دارند.

بررسی مدل‌های خطی به‌تنهایی برای درک رفتار سیستم‌ها کافی نیستند و این مدل‌ها ممکن است نادرست، ناکافی و یا گمراه‌کننده باشند. مثلاً زمانی که دامنه نوسانات بزرگ باشد، فرکانس‌های طبیعی سیستم وابسته به دامنه ارتعاشات بوده در نتیجه بررسی این مدل‌ها به روش خطی منجر به نتایج غلط می‌شوند، همچنین ممکن است یک حل خطی پیش‌بینی کند که سیستم پایدار است در حالی که در واقعیت ناپایدار است.

از طرفی پدیده‌های فیزیکی جالبی در سازه‌های غیرخطی اتفاق می‌افتد که به‌وسیله مدل‌های خطی نمی‌توان آن‌ها را توضیح داد. به عنوان مثال می‌توان به پدیده‌های پرش،^۱ تشدیدهای ساب هارمونیک،^۲ سوپرهارمونیک^۳ و ترکیبی^۴، نوسانات خودتحریک^۵ و آشوب^۶ اشاره کرد. در واقعیت هیچ سیستم فیزیکی کاملاً خطی وجود ندارد و مدل‌های خطی سیستم‌های فیزیکی، دارای محدودیت هستند. به طور کلی مدل‌های خطی برای محدوده‌های خاص، کاربرد دارند؛ از جمله زمانی که دامنه ارتعاشات بسیار کوچک است. بنابراین برای شناخت و درک دقیق‌تر رفتار دینامیکی سازه‌های تحت

¹Jump

²Subharmonic

³Superharmonic

⁴Combination

⁵Self-excited oscillations

⁶Chaos

شرایط بارگذاری عمومی ضروری است که آثار غیرخطی در مدل سازی سیستم‌ها در نظر گرفته شوند (ملاکار[۱]).

در این فصل، در ابتدا توضیح مختصری درباره‌ی برخی از اجزای سازه‌ای داده می‌شود. در قسمت بعد، به معرفی سیستم‌های غیرخطی پرداخته و در نهایت مرور مقالات مرتبط با رساله انجام می‌شود.

۱-۲- اجزای سازه‌ای

از لحاظ هندسه و شرایط بارگذاری، سازه‌ها را می‌توان به چند گروه تقسیم‌بندی کرد: کابل‌ها، میله‌ها^۱، تیرها، غشاها^۲، ورق‌ها^۳ و پوسته‌ها^۴. کابل‌ها سازه‌های یک بعدی هستند که، تنها بار کششی را تحمل می‌کنند. میله‌ها سازه‌های یک بعدی هستند که می‌توانند بار محوری تحمل کنند. تیرها سازه‌هایی هستند که یکی از ابعاد آنها به مراتب بزرگ‌تر از دو بعد دیگر است و در معرض بارهای عرضی قرار دارند که منجر به خمش آنها می‌شود. در حالت کلی تیر قادر به تحمل نیروهای کششی، فشاری، خمشی، برش عرضی و پیچشی است. ورق‌ها سازه‌هایی مسطح هستند که دو بعد آنها به مراتب بزرگ‌تر از بعد سوم است و قادرند نیروهای کششی، فشاری، برش صفحه‌ای^۵، خمشی، پیچشی و بارهای برشی عرضی را تحمل کنند. غشا سازه‌ای دو بعدی است که تنها می‌تواند نیروی کشش و برش صفحه‌ای را تحمل کند. پوسته‌ها سازه‌هایی خمیده هستند که دو بعد آنها به مراتب بزرگ‌تر از بعد سوم است و قادرند نیروهای خارج صفحه^۶ را با ایجاد نیروهای صفحه‌ای، تحمل کنند (اوگرال[۲]).

۱-۳- سیستم‌های غیرخطی

¹Cables

²Rods

³Membranes

⁴Plates

⁵Shells

⁶In-Plane

⁷Out-of-plane

سیستم‌های غیرخطی سیستم‌هایی هستند که اصل جمع آثار در مورد آن‌ها صادق نیست. در طبیعت سیستم‌های غیرخطی فراوانی وجود دارد. در حقیقت سیستم‌های غیرخطی نه تنها استثنا نیستند، بلکه قانون و قاعده طبیعت هستند. از نظر ریاضی، سیستمی، غیرخطی است که ضرب متغیرهای وابسته یا مشتقات آن‌ها در معادلات حرکت یا شرایط مرزی وجود داشته باشد. علاوه بر این وجود هرگونه پرش و یا ناپیوستگی می‌تواند سبب غیرخطی شدن سیستم گردد. ایوان ایوانوسکی [۳]، نایفه و موک [۴] و مون [۵] انواع غیرخطی‌ها را با جزئیات و به وسیله مثال‌های مختلف توضیح داده‌اند. منشأ رفتار غیرخطی در سیستم می‌تواند ماده، هندسه، اینرسی، نیروهای حجمی و یا استهلاک باشد. مثلاً در سیستم‌هایی که تحت تغییر شکل‌ها و یا جابجایی‌های بزرگ قرار دارند، از نظر هندسی غیر-خطی هستند که این رفتار غیرخطی در انرژی پتانسیل سیستم ظاهر می‌شود. در سازه‌ها، تغییر شکل‌های بزرگ معمولاً منجر به روابط غیرخطی کرنش-جابجایی می‌شود.

غیرخطی اینرسی ناشی از جمله‌های غیرخطی سرعت و شتاب در معادلات حرکت است. انرژی جنبشی سیستم منشأ ایجاد رفتار غیرخطی از منظر اینرسی است. به‌عنوان مثال، می‌توان به جمله‌های شتاب کریولیس و مرکزگرا اشاره نمود. همچنین در معادلات توصیف حرکت یک پاندول الاستیک و یا حرکت عرضی یک تیر تحت کشش، غیرخطی‌های اینرسی وجود دارد.

۴-۱- تئوری تیرها

تیرها مانند سایر سازه‌ها، علاوه بر این که می‌توانند با تئوری عمومی الاستیسیته بررسی شوند با برخی تئوری‌های تقریب نیز مدل می‌شوند که به عنوان نمونه می‌توان به تئوری اوایلر-برنولی و تئوری تیموشنکو اشاره کرد. مشکل اساسی در تئوری الاستیسیته این است که معادلات آن تنها برای تعداد کمی از مسائل قابل حل است؛ از همین رو این تئوری پرکاربرد نیست. در تئوری تیر اوایلر-برنولی [۶] فرض شده است که خطوط عمود بر تار خنثی، پس از تغییر شکل نیز همچنان عمود بر تار خنثی

باقی می‌مانند و هیچ کرنشی در این صفحات رخ نخواهد داد. به عبارت دیگر از تأثیرات اعوجاج و تغییر شکل برشی و همچنین از کرنش‌های عمودی عرضی چشم‌پوشی شده است. این فرضیات برای تیرهای بلند و باریک معتبر است. فرض عدم وجود برش عرضی بدین معناست که چرخش در سطح مقطع تنها به دلیل خمش ایجاد می‌شود. اما برای تیرهای ضخیم، مودهای فرکانس بالا و یا در تیرهای کامپوزیتی برش عرضی قابل چشم‌پوشی نیست.

با وارد نمودن اثر تغییر شکل برشی در مدل تیر اوپلر-برنولی، تئوری تیر تیموشنکو پدید آمد (شیمز و دیم [۷]. در این تئوری، برای ساده‌سازی استخراج معادلات حرکت، فرض شده است که کرنش برشی در سطح مقطع یکنواخت است و به‌جای آن یک ضریب تصحیح برشی در معادلات در نظر گرفته می‌شود که این ضریب علاوه بر پارامترهای جنس و هندسه به شرایط مرزی و نوع بارگذاری وابسته است [۸]. در حضور برش عرضی، چرخش در سطح مقطع ناشی از هر دو تغییر شکل خمشی و برشی عرضی خواهد بود. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول فرض می‌شود که سطوح مستوی که پیش از خمش عمود بر صفحه میانی هستند همچنان مستوی باقی می‌مانند اما دیگر بر صفحه میانی عمود نیستند، در صورتی‌که در تئوری‌های مرتبه بالاتر علاوه بر عمود بودن از مستوی بودن سطوح نیز صرف‌نظر می‌شود. مثلاً در تئوری مرتبه سوم ردی-بیکفورد^۱ میدان جابجایی به گونه‌ای است که یک کرنش برشی و تنش برشی عرضی مرتبه دو را در تیر ایجاد می‌کند و در صفحات بالایی و پایینی تنش و کرنش برشی صفر است؛ در نتیجه در این تئوری نیازی به ضریب تصحیح برشی نیست.

۵-۱- مروری بر مقالات

۵-۱-۱- ارتعاشات خطی تیر

کرسپو داسیلوا [۹] به بررسی جابه‌جایی استاتیکی و فرکانس‌های طبیعی نوسانات بسیار کوچک حول

¹Reddy – Bickford

موقعیت تعادل استاتیکی پرداختند و نتایج حاصل با نتایج روش اجزای محدود هینانت و هودجز [۱۰] و نتایج تجربی داول و همکاران [۱۱] یکسان بود. وانگ و همکاران [۱۲] مسأله تیر در معرض بار نقطه‌ای را با استفاده از روش انتگرال بیضوی و تکنیک شوتینگ بهینه^۱ بررسی نمودند. مدل دیگر تیر تیموشنکو توسط ما و همکاران [۱۳] مدل‌سازی شد و محققان ریزساختار آن مدل را برای مطالعه پاسخ‌های مختلف دینامیکی در نظر گرفتند. تئوری تنش - کوپل و اصل هامیلتون برای فرمول‌بندی مسأله بکار گرفته می‌شوند. در ارتعاشات آزاد، این مدل، فرکانس طبیعی بالاتری را در مقایسه با مدل کلاسیک نشان می‌دهد. نویسندگان اظهار داشتند که اثر اندازه حتی هنگامی که ضخامت تیر بسیار کوچک است، قابل ملاحظه هست. طهرانی و ایپک‌چی [۱۴] پاسخ تیرهای اوایلر-برنولی و تیموشنکو تحت بارگذاری متحرک را به صورت تحلیلی تعیین نمودند. صدیقی و ایپک‌چی [۱۵] و [۱۶] فرکانس طبیعی و پاسخ تیرهای تیموشنکو متحرک محوری را با استفاده از تئوری اغتشاشات و با فرض تغییر شکل کوچک محاسبه نمودند.

۱-۵-۲- ارتعاشات غیرخطی تیر اوایلر-برنولی

وینوسکی - کریگر [۱۷] بورگرین [۱۸] نوسانات آزاد تیر با تکیه‌گاه‌های مفصلی را بررسی نمودند. معادلات حرکت آن‌ها شامل یک جمله‌ی غیرخطی ناشی از کشش صفحه‌ی میانی است که سبب غیرخطی شدن روابط کرنش-جابجایی می‌شود. آن‌ها پاسخ را به صورت توابع بیضوی ارائه کردند و دریافتند که فرکانس ارتعاشات با دامنه تغییر می‌کند. همچنین بورگرین تأثیر بار محوری فشاری را به صورت تئوری و تجربی بررسی نمود. بولوتین [۱۹] در یک مسأله خاص نشان داد که تأثیر غیرخطی اینرسی مهم‌تر از تأثیر غیرخطی هندسی در تیرها است. ایونس [۲۰] تأثیر کشش صفحه‌ی میانی بر روی ارتعاشات تیر یکنواخت را با تکیه‌گاه‌های ساده، گیردار و ساده-گیردار بررسی کرد. باس بای و

¹ Shooting-optimization technique

وینگارتن [۲۱] از روش المان محدود برای فرمول‌بندی معادلات دیفرانسیل غیرخطی تیر تحت بار نوسانی استفاده کردند. آن‌ها شرایط مرزی با تکیه‌گاه ساده و گیردار را بررسی نمودند. هو و همکاران [۲۲] و [۲۳] به مطالعه تأثیر کشش صفحه‌ی میانی در حرکات چرخشی غیرصفحه‌ای با دامنه‌ی بزرگ در تیر با تکیه‌گاه ساده پرداختند. آتلوری [۲۴] ارتعاشات غیرخطی تیر مفصلی را بررسی نمود. ایشان در معادلات، جمله‌های اینرسی پیچشی، غیرخطی هندسی و غیرخطی اینرسی را وارد نمود؛ اما از تأثیر کشش صفحه‌ی میانی و تغییر شکل برشی عرضی صرف‌نظر کرد. استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه^۱ برای حل معادلات حاصل نشان داد که غیرخطی مؤثر وابسته به جمله‌های غیرخطی اینرسی و هندسی است که با شماره‌ی مود تغییر می‌کنند. کرسپو داسیلوا [۹] معادلات غیرخطی و شرایط مرزی حرکت خمشی-خمشی-پیچشی تیر همسانگرد تحت کشش را بررسی نمود. در معادلات، جمله‌های غیرخطی مرتبه سوم هندسی و اینرسی را در نظر گرفت و نشان داد که جمله‌های غیرخطی اینرسی هم‌مرتبه با جمله‌های غیرخطی هندسی هستند. کرسپو داسیلوا [۹] و [۲۵]، پای و نایفه [۲۶] و اندرسون و همکاران [۲۷] حرکت غیرخطی تیر یک سرگیردار را بررسی و نشان دادند که در مود اول جمله‌های غیرخطی هندسی که منجر به رفتار سخت‌شونده^۲ می‌شوند، غالب هستند؛ در حالی که در مودهای دوم و بالاتر جمله‌های غیرخطی اینرسی که منجر به رفتار نرم‌شونده^۳ می‌شوند، غالب هستند. نوردگرن [۲۸] از روش عددی برای تحلیل حرکت سه‌بعدی با دامنه‌ی محدود برای تیر در معرض کشش استفاده نمود. اپستین و موری [۲۹] تئوری سه‌بعدی برای تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ تیرهای جدار نازک را فرمول‌بندی کردند. حل‌های عددی صورت گرفته برای رفتار پیش‌کمانش تیر I شکل در این تئوری با داده‌های تجربی تطابق بسیار خوبی داشتند. هودجز و داوول [۳۰] معادلات غیرخطی حرکت با جمله‌های غیرخطی درجه دوم را برای توصیف دینامیکی تیرهای بسیار باریک و پره‌های چرخان هلی‌کوپتر تحت کشش و تغییر شکل‌های نسبتاً زیاد تعیین نمودند. حرکت تیر

¹Multiple scales

²Hardening

³Softening

یک سرگردار غیر چرخشی تحت تغییر شکل بزرگ را به صورت تجربی، داول و همکاران [۱۱] بررسی و با نتایج حاصل از تئوری هودجز و داول [۳۰] مقایسه کردند. انطباق نسبتاً خوبی برای تغییر شکل خمشی کوچک مشاهده می‌شود؛ اما در جابجایی‌های بزرگ‌تر بین نتایج اختلاف دیده می‌شود. راسن و فریدمن [۳۱] با در نظر گرفتن جمله‌های غیرخطی مرتبه سوم توانستند معادلات دقیق‌تری نسبت به هودجز و داول [۳۰] ارائه دهند. نتایج عددی آن‌ها انطباق خوبی با داده‌های تجربی داول و همکاران [۱۱] داشت. راسن و همکاران [۳۲] و [۳۳] معادلات حرکات پیچشی-خمشی کوپل‌شده غیرخطی را برای تحلیل میله پیش‌پیچیده شده^۱ استخراج نمودند. کرسپو داسیلوا و هودجز [۳۴] معادلات دیفرانسیل غیرخطی حرکت تیر چرخان را با در نظر گرفتن تمام جمله‌های غیرخطی مرتبه سوم ارائه و تأثیر این جمله‌ها را بر حرکت پره‌های چرخان هلی‌کوپتر بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که مهم‌ترین جمله‌های غیرخطی مرتبه سوم، جمله‌های غیرخطی هندسی هستند که در معادلات پیچش ظاهر می‌شوند. سپس معادلات توصیف دینامیک غیرخطی تیرهای خمشی-خمشی-پیچشی-کشی توسط کرسپو داسیلوا [۲۵] و [۳۵] ارائه شده است. هودجز و همکاران [۳۶] به بعضی از اشتباه‌های رایج در مدل‌سازی غیرخطی تیرهای یک سرگردار اشاره نمودند. ما و همکاران [۳۷] روش جدیدی را بر اساس ترکیب اغتشاشات مودال^۲ بر هم‌کنش مودها^۳ و اغتشاشات ماتریسی^۴ برای پاسخ غیرخطی تیر با خیز نسبتاً زیاد تحت بارگذاری نوسانی ارائه کردند. در فرمول‌بندی، جابجایی طولی و اینرسی در نظر گرفته شده است. همچنین یک مثال عددی از کاربرد این روش ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که اغتشاشات مودال روش مؤثرتری در تحلیل این دسته از مسائل است. لی [۳۸] خیز بزرگ تیر نوع لودویک^۵ را که در معرض ترکیب بار متمرکز و گسترده قرار دارد، را بررسی نمود. مسأله شامل جمله‌های غیرخطی هندسی و مادی است و با استفاده از روش عددی رانگ کوتا حل شده است. دیدو

¹ Pretwisted

² Modal perturbation

³ Mode superposition

⁴ Matrix perturbation

⁵ Ludwick

و السدر [۳۹] با استفاده از روش ریتز به مطالعه رفتار خیز بزرگ تیرهای یک سر گیردار منشوری و غیر منشوری که در معرض انواع مختلف بارگذاری قرار دارند، پرداختند. ژانگ و همکاران [۴۰] و [۴۱] و [۴۲] رفتار دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی تیر یک سر گیردار که در معرض تحریک محوری هارمونیک قرار دارد را مطالعه کردند. آنها از روش ملنیکف^۱ تعمیم یافته^۱، روش گالرکین و روش بسطهای زمانی چندگانه برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم استفاده نمودند. پرتیر و دوايودی [۴۳] ارتعاشات غیرخطی تیر یکسر گیردار با بار نقطه‌ای که در معرض بار محوری تناوبی و میدان مغناطیسی قرار دارد، را مطالعه کردند و معادلات حرکت با استفاده از روش بسطهای زمانی چندگانه حل کردند. آنها از تئوری اویلر-برنولی برای فرمول‌بندی مسأله استفاده نمودند. چن [۴۴] روش انتگرالی^۲ جدیدی را برای حل مسأله‌ی تیر یک سرگیردار با خیز نسبتاً زیاد^۳ ارائه نمود. روش انتگرال ممان^۴ را می‌توان برای بارگذاری‌های پیچیده و خواص متغیر در تیر به کار برد. این شیوه‌ی آسان، تنها به روش‌های ساده عددی نیاز دارد و در نتیجه کاربرد آن آسان است. پاسخ برای بارگذاری و خواص مشخص در تیر به منظور نشان دادن اعتبار این روش ارائه شده است. استویکوف و ریبرو [۴۵]، ارتعاشات غیرخطی هندسی تیر با سطح مقطع مستطیلی با تغییر شکل‌های خمشی، پیچشی و طولی در هر صفحه را با استفاده از روش المان محدود بررسی کردند. غیرخطی هندسی با استفاده از تانسور کرنش گرین در نظر گرفته شده است و اهمیت جابجایی‌های طولی مرتبه دو که معمولاً در روابط کرنش-جابجایی نادیده گرفته می‌شوند، بررسی شده است. چن و همکاران [۴۶] دینامیک غیرخطی تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری را با استفاده از روش گسسته‌سازی گالرکین مطالعه کردند. جنگ [۴۷] روش جدیدی را برای تحلیل خیز نسبتاً بزرگ تیر بی‌نهایت و با پی الاستیک و تحت بارهای متمرکز، ارائه نمود. ایشان از یک روند تکرارشونده برای حل معادلات استفاده کرد. بروژان و همکاران

¹ Extended Melnikov method

² Integral approach

³ Moderately large deflection

⁴ Moment integral

[۴۸] مسأله خیزهای بزرگ تیرهای نازک و غیر منشوری یک سر گیردار که تحت بارهای متمرکز و گسترده قرار دارند را با استفاده از روش‌های عددی مطالعه نمودند. واتاناساکولپونگ و چیکیتیراتانا [۴۹] روش کوادراتور دیفرانسیلی^۱ را برای حل مسأله ارتعاشات خطی و غیرخطی تیرهای محدود شده به صورت الاستیک به کار بردند. تاری [۵۰] مسأله تعیین مؤلفه‌های پارامتریک تغییر شکل بزرگ تیر اوایلر-برنولی یک سر گیردار با بار نقطه‌ای را بررسی نمود. ژانگ و همکاران [۵۱] با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی به تحلیل ارتعاشات غیرخطی عرضی تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری پرداختند. میرزابیگی و معدولیت [۵۲] ارتعاشات آزاد دامنه بزرگ تیر با پی الاستیک را مطالعه کردند. فرضیه اوایلر-برنولی و مدل وینکلر برای تیر و پی الاستیک در نظر گرفته شد و روش هموتوپي^۲ برای حل معادلات حرکت به کار رفته است. روش تعادل هارمونیک^۳ توسط گنو و ژانگ [۵۳] برای تقریب رفتار نوسانی تیر مخروطی استفاده شد. مینایی [۵۴] رفتار ارتعاشات آزاد دامنه بزرگ تیر اوایلر-برنولی که در معرض بارهای غیرخطی دمایی قرار دارد و بر روی پی پاسترناک قرار گرفته را با استفاده از روش گالرکین حل نمودند. غلامی و همکاران [۵۵] رزونانس غیرخطی تیر کامپوزیت با روکش نانو تیوب کربن و با در نظر گرفتن نقص هندسی که در معرض بار عرضی هارمونیک قرار دارد، به صورت عددی بررسی کردند. قایش مطالعات وسیعی را بر روی ارتعاشات غیرخطی و پایداری تیرها و تیرهای متحرک محوری از جنبه‌های گوناگون مانند تأثیر سرعت، تکیه‌گاه میانی، خواص مواد و روش‌های حل انجام داده است [۶۷-۵۶]. مک‌هاق و داول [۶۸] یک مدل تئوری برای حرکت غیرخطی تیر با خیز زیاد و تحت کشش، ارائه نمودند. آن‌ها از روش ریلی برای بسط تغییر شکلها و نیروهای مقید در سری‌های مودال استفاده کردند. گوکو و ساها [۶۹] حل عددی تیرهای انحنا دار غیرخطی هندسی با تکیه-گاه‌های متحرک را ارائه کردند. آن‌ها تأثیر نسبت منظر و بارگذاری را بر روی نتایج بررسی نمودند. رزونانس اولیه و ثانویه تیر کامپوزیت با روکش نانو کربن و تحت تحریک هارمونیک عرضی

^۱ Differential quadrature (DQ)

^۲ Homotopy analysis method (HAM)

^۳ Harmonic balance

توسط ژیهوا و همکاران [۷۰] بررسی گردید. معادلات با روش گالرکین گسسته‌سازی شد. تاسورا و همکاران [۷۱] فرمول‌بندی کارآمدی را برای تیر سه بعدی که می‌تواند در شبیه‌سازی‌های دینامیکی جابجایی‌های بزرگ، برخورد و ماده غیرخطی استفاده شود، ارائه نمودند.

۱-۵-۳- ارتعاشات تیر با در نظر گرفتن اثر برش

پای و نایفه [۷۲] معادلات ارتعاشات خمشی -خمشی-پیچشی-کششی تیرهای کامپوزیت و فلزی چرخان را ارائه نمودند. معادلات حاصل شامل جمله‌های کوپل‌شده ساختاری و غیرخطی‌های مرتبه دوم و سوم هندسی و اینرسی بودند. پای و نایفه [۷۳] مدل فوق را با اضافه نمودن تأثیر تغییر شکل برشی عرضی تعمیم دادند. پای و نایفه [۷۴] به صورت هندسی مدل دقیق تیر غیرخطی را برای تیغه-های چرخان کامپوزیتی خمیده و تحت پیچش در ارتعاشات ارائه دادند همچنین تأثیرات تنش سه‌بعدی و اعوجاج را بررسی کردند. وانگ و ایسا [۷۵] فرمول‌بندی ماتریس سفتی دینامیکی را برای سازه‌های خمیده با سطح مقطع ثابت و با در نظر گرفتن آثار تغییر شکل برشی عرضی، اینرسی دورانی و کشیدگی محور خنثی تحت ارتعاش اجباری، به همراه یک مثال عددی برای نشان دادن کاربرد این روش ارائه کردند. ون‌رنزبورگ و ون‌درمر و [۷۶]، روش حل مسأله‌ی مقدار ویژه مرتبط با مدل تیر تیموشنکو یکنواخت را ارائه و در مورد فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر با تکیه‌گاه ساده و تیر یک سرگیردار بحث کردند. لی و همکاران [۷۷] ارتعاشات آزاد تیرهای برشی را با در نظر گرفتن اینرسی دورانی بررسی کردند. همچنین تحت شرایط عمومی، معادله‌ی مشخصه‌ی تیرهای برشی با اینرسی دورانی محدود؛ به صورت صریح استخراج و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها برای تیر بر پی الاستیک محاسبه کردند. سو و ما [۷۸] با استفاده از دو روش تحلیلی تبدیل لاپلاس و مود نرمال، پاسخ دینامیکی گذرای تیر تیموشنکو یک‌سرگیردار را تحت نیروی ضربه‌ای بررسی کردند. مقایسه دو روش نشان می‌دهد که روش مود نرمال در تحلیل پاسخ گذرای تیر تیموشنکو یک‌سرگیردار از روش

تبدیل لاپلاس کاراثر است. لاکشین و همکاران [۷۹] تأثیر تنش برشی بر روی خمش و کمانش تیرها و ورق‌های کامپوزیت را با در نظر گرفتن فرضیه خط مستقیم بررسی کردند. لاری و همکاران [۸۰] تئوری تغییر شکل برشی تیر را بر اساس موقعیت سطح خنثی برای تحلیل ارتعاشات آزاد و خمش تیر با مواد تابعی^۱ ارائه کردند. این تئوری برای توزیع هایپربولیک کرنش‌های برشی عرضی و ارضای شرایط مرزی بدون برهم‌کنش بر روی سطح تیر بدون استفاده از ضریب تصحیح برشی در نظر گرفته شده است. سان و لی [۸۱] ارتعاشات آزاد تیر غیر یکنواخت تیموشنکو با ماده تابعی که در معرض بارهای کششی و فشاری محوری قرار دارد، را بررسی نمودند. خادم مشیر و ایپک‌چی [۸۲] ارتعاشات آزاد و اجباری تیرهای ارتوتروپیک را بر اساس تئوری غیر محلی ارینگن^۲ تحلیل نمودند. آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بدون در نظر گرفتن آثار کرنش نرمال و با فرض تغییر شکل کوچک استفاده کردند و با استفاده از روش اغتشاشات، به تحلیل مسأله پرداختند. علوی و ایپک‌چی [۸۳] ارتعاشات آزاد خطی ورق‌های دایره‌ای با ماده الاستیک تابعی را با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و به کمک تئوری اغتشاشات بررسی نمودند.

۱-۵-۴- ارتعاشات غیرخطی تیر با در نظر گرفتن اثر برش

فودا [۸۴] از روش مقیاس‌های چندگانه برای تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر با تکیه‌گاه ساده استفاده کرد. ایشان در فرمول‌بندی، آثار تغییر شکل برشی عرضی را همانند اینرسی دورانی بر روی رفتار ارتعاشات دامنه بزرگ در نظر گرفت و نشان داد تأثیر برش و اینرسی دورانی در تیرهای نسبتاً ضخیم و کوتاه تحت ارتعاشات دامنه بزرگ قابل توجه است همچنین تغییرات فرکانس‌های غیرخطی با تغییر پارامترهای مختلف را ارائه کرد. ژونگ و لیائو [۸۵] ارتعاشات غیرخطی مرتبه بالای تیرهای تیموشنکو با مرزهای ثابت را بررسی کردند. آثار غیرخطی تغییر شکل محوری، انحنای خمشی و کرنش‌های

^۱ Functionally graded materials

^۲ Eringen nonlocal theory

برشی عرضی در نظر گرفتند. معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم با استفاده از SDQM^۱ حل کردند و نسبت فرکانس‌های غیرخطی به خطی استخراج و تغییرات آنها با نسبت دامنه به شعاع ژیراسیون بررسی شده است. برخلاف یافته‌های شناخته شده برای فرکانس‌های اصلی غیرخطی تیرها، بعضی از فرکانس‌های غیرخطی مرتبه بالا با افزایش نسبت دامنه به شعاع ژیراسیون، کاهش می‌یابند. ساپونتزاکیز و موکوس [۸۶] روش المان مرزی را برای تحلیل غیرخطی تیر با سطح مقطع ثابت با در نظر گرفتن آثار تغییر شکل برشی به کار گرفتند. سیمسک [۸۷] تحلیل دینامیکی غیرخطی تیر ساخته شده از مواد تابعی با تکیه‌گاه ساده تحت بار هارمونیک متحرک را با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و روابط کرنش-جابه‌جایی فن کارمن ارائه کرد. خواص مواد تیر در راستای ضخامت بر اساس قانون توانی به صورت پیوسته تغییر می‌کند. توابع حدسی برای تغییر شکل عرضی و محوری و چرخش سطح مقطع تیر به صورت چندجمله‌ای در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت غیرخطی با استفاده از روش نیومارک بتا^۲ و روش تکرار مستقیم^۳ حل شده‌اند. در این مقاله آثار تغییر شکل زیاد، توزیع مواد، سرعت بار متحرک و فرکانس تحریک بر روی جابه‌جایی تیر، ممان‌های خمشی و تنش-های برشی بررسی شده است. استوژانوویک [۸۸] ارتعاشات غیرخطی تیر تیموشنکو با پی پاسترناک^۴ غیرخطی را با استفاده از روش عددی مطالعه کرد. شهلائی فر و همکاران [۸۹] تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر تیموشنکو را با استفاده از روش گالرکین و هموتوپی ارائه کردند. فرخی و قایش [۹۰] دینامیک غیرخطی میکرو تیر برشی را بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده و با استفاده از روش کالرکین بررسی نمودند. داس [۹۱] ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو با ماده تابعی و با در نظر گرفتن جمله‌های غیرخطی برای کرنش‌های برشی و نرمال را با استفاده از روش ریتز حل نمود. پاسخ تیر با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش اغتشاشات توسط سوهانی و ایپک‌چی [۹۲]

^۱ SplinEBased differential quadrature method

^۲ Newmark- β method

^۳ Direct iteration method

^۴ Pasternak

برای یک تیر ایزوتروپیک و ملک حسینی و ایپکچی [۹۳] برای تیر ویسکوالاستیک به صورت تحلیلی تعیین شد. از آنجاکه جمله‌های مرتبه دوم برای تقریب پاسخ استفاده شد بنابراین جمله‌های سکولار در پاسخ آنها مشاهده نشد. وانگ و دوک [۹۴] پاسخ دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی پوسته نسبتاً ضخیم با ماده تابعی و بر روی پی الاستیک پسترناک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و روش رانگ کوتا بررسی کردند. ژی و همکاران [۹۵] ارتعاشات غیرخطی و پاسخ دینامیکی تیر با ماده تابعی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم بهبود یافته مطالعه نمودند. آنها روش جدیدی را بر اساس تکنیک انتگرال عددی مستقیم برای حل معادلات ارتعاشات غیرخطی ارائه دادند.

۱-۵-۵- ارتعاشات خطی تیر ضخامت متغیر

تیرهای غیریکنواخت با سطح مقطع‌های متغیر در راستای طول، در بسیاری از سازه‌هایی که در آنها نیاز به توزیع بهینه‌ی استحکام و وزن است، کاربرد دارند. کین و همکاران [۹۶] تئوری جامعی در ارتباط با ارتعاشات کوچک تیرهای یک‌سرگردار با حرکت اختیاری در حالت سه‌بعدی (انتقالی و چرخشی) ارائه نمودند. این تئوری برای تیرهایی با سطح مقطع دلخواه و خواص مادی متغیر با مکان کاربرد دارد. آنها به کمک یک مثال ناکارآمدی یک برنامه‌ی کامپیوتری معروف در تحلیل دینامیکی سازه‌های چندعضوی را نشان دادند. جتگانکار و چهیل [۹۷] فرکانس‌های طبیعی تیر با اینرسی، مساحت و جرم متغیر را در یک حالت عمومی بررسی کردند. این روش پیشنهادی اجازه می‌دهد که تأثیر هر یک از این متغیرها به صورت جداگانه ارزیابی شود و منجر به مفاهیم جرم مؤثر، اینرسی مؤثر و سطح مؤثر می‌گردد. در این روش می‌توان با یک فرمول ساده فرکانس تیر با خواص متغیر را تعیین کرد. همچنین آثار تغییر شکل برشی بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر با شرایط مرزی کلاسیک را می‌توان با فرمول‌های ساده‌ای مشابه تیرهای با تکیه‌گاه ساده مشخص کرد. ویژگی بارز این کار سادگی روابطی است که می‌توان برای انواع شرایط مرزی استفاده کرد. دی روزا و آیسیلو [۹۸] رفتار دینامیکی

یک تیر با سطح مقطع متغیر خطی را بررسی کردند. معادله حرکت به صورت توابع بسل حل شد. یک روش تقریبی اجزای محدود برای تحلیل تیرهای با سطح مقطع متغیر توسط ایزنبرگر و ریچ [۹۹] ارائه شد. آنها از توابع خیز تیر با سطح مقطع ثابت برای یافتن تقریبی ماتریس سفتی و جرم استفاده کردند. ابرت [۱۰۰] فرمول‌های ساده‌ای برای پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی اصلی تیرها با سطح مقطع متغیر با شکل سطح مقطع عمومی و شرایط مرزی دلخواه را با استفاده از روش ریلی-ریتز ارائه کرد. ژو و چانگ [۱۰۱] مشخصه‌های ارتعاشی تیر اوایلر-برنولی با سطح مقطع متغیر خطی پیوسته را به کمک روش ریلی-ریتز تعیین کردند. بیونگ و همکاران [۱۰۲] ارتعاشات آزاد تیر اوایلر-برنولی با تغییرات خطی ضخامت و شرایط مرزی عمومی را مطالعه کردند. فرکانس‌های طبیعی به وسیله روش رانگ کوتا محاسبه شدند. کوکلا و زموجسکا [۱۰۳] از روش تابع گرین برای تحلیل فرکانسی تیر اوایلر-برنولی با سطح مقطع متغیر استفاده کردند. ایس و همکاران [۱۰۴] بر روی ارتعاشات یک تیر ایزوتروپیک تیر اوایلر-برنولی که دارای سطح مقطع متغیر بود مطالعه کردند. دروسا و لیپیلو [۱۰۵] فرکانس‌های طبیعی تیر اوایلر-برنولی با ضخامت خطی با تعداد دلخواه قیود منعطف الاستیک، دورانی و محوری را تعیین نمودند. تحلیل دینامیکی با استفاده از روش گسسته‌سازی سلولی انجام شد. زامورسکا [۱۰۶] مسأله ارتعاشی تیر اوایلر-برنولی غیر یکنواخت را با استفاده از روش‌های تابع گرین و سری‌های توانی، بررسی کردند. محمود و همکاران [۱۰۷] از روش تبدیل دیفرانسیلی برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیر اوایلر-برنولی با سطح مقطع یکنواخت و غیریکنواخت استفاده کردند. لی و همکاران [۱۰۸] حل عددی را برای تحلیل استاتیکی و ارتعاشات آزاد محوری و عرضی تیر با مواد تابعی و پروفیل سطح مقطع متغیر ارائه کردند. بوانجیو و همکاران [۱۰۹] معادلات دیفرانسیل ارتعاشات خمشی تیر اوایلر-برنولی با سطح مقطع متغیر را با استفاده از توابع بسل حل کردند. نوری فر و همکاران [۱۱۰] از روش تبدیل دیفرانسیلی برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیر اوایلر-برنولی با سطح مقطع متغیر نمایی، استفاده کردند. سائو و ژائو [۱۱۱] از روش مجانبی برای تحلیل ارتعاشات آزاد

غیریکنواخت محوری تیرها از جنس مواد تابعی استفاده کرد. لی و همکاران [۱۱۲] حل تحلیلی ارتعاشات با تکیه‌گاه ثابت و ضخامت متغیر دلخواه و پیوسته را بر اساس تئوری الاستیسیته دوبعدی مطالعه نمودند. با استفاده از روش بسط سری‌های سینوسی فوریه معادلات ارتعاشات آزاد تیر با ضخامت متغیر حل شد.

۱-۵-۶- ارتعاشات تیر با در نظر گرفتن اثر برش و ضخامت متغیر

یوآن و همکاران [۱۱۳] روشی بدیع برای ساده‌سازی معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکو با هندسه غیریکنواخت و ماده ناهمگن در راستای محور تیر را ارائه کردند. آنها معادلات حاکم را به شکل غیر کوپل تبدیل کردند. هر یک از معادلات حاصل به شکل معادله اشتوروم لیوویل با ضرایب متغیر هستند. مؤلفان این معادلات را برای تغییرات چندجمله‌ای و نمایی پارامترها برحسب از توابع بسل حل کردند. کوراباسینا و کوپاناتا [۱۱۴] برای محاسبه فرکانس پایه تیر تیموشنکو روش میدان جابجایی کوپل شده^۱ را توسعه دادند که محاسبات را در مقایسه با سایر روش‌ها کاهش می‌دهد. ژائو و همکاران [۱۱۵] از چندجمله‌ای‌های چبیشف^۲ برای تحلیل ارتعاشات تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با مواد تابعی محوری و سطح مقطع غیر یکنواخت، استفاده کردند. چن و همکاران [۱۱۶] به بررسی دوباره ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکو چرخان با ضخامت متغیرخطی با استفاده از روش تکرار^۳ پرداختند.

۱-۶- جمع‌بندی

در این فصل، در ابتدا به معرفی انواع اجزای سازه‌ای پرداخته شد، سپس در مورد تیرها و انواع

^۱ Coupled displacement field method

^۲ Chebyshev polynomials

^۳ Variational iteration

سیستم‌های غیرخطی‌ها توضیح داده شد. در قسمت بعد تاریخچه‌ی مختصری در مورد تئوری‌های تیر و کارهای انجام شده در زمینه‌ی ارتعاشات تیر بیان گردید. با توجه به مقالات مرور شده در تحلیل سازه‌ها با خیز نسبتاً زیاد محققان جنبه‌های مختلفی را برای بررسی رفتار تیر در نظر گرفته‌اند. برخی از آنها به شرح زیر است:

- بارگذاری‌ها معمولاً به صورت بار نقطه‌ای، گسترده یا ترکیب آنها هستند.
 - رفتار مواد ممکن است ایزوتروپیک، مواد تابعی، کامپوزیت و غیره باشد.
 - منشأ جمله‌های غیرخطی می‌تواند جمله‌های هندسی یا مربوط به مواد غیرخطی باشد.
 - علاوه بر تئوری سه بعدی الاستیسیته، تئوری تغییر شکل برشی، تئوری اویلر-برنولی، تئوری تیموشنکو و تئوری‌های موضعی مانند تنش‌های کوپل اصلاح شده^۱، به کار گرفته شده است.
 - روش‌های حل شامل روش‌های عددی مانند المان محدود، رانگ کوتا، شوتینگ، گالرکین و تبدیل دیفرانسیلی و روش‌های تحلیلی از جمله سریهای فوریه، ریتز^۲، تئوری اغتشاشات و غیره می‌باشد.
- در این رساله، به بررسی تحلیلی ارتعاشات آزاد و اجباری تیر با خیز نسبتاً زیاد که در آن میدان جابه‌جایی بر اساس، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول است، پرداخته می‌شود. نوآوری‌ها این مسأله عبارتند از:

- استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول که شامل آثار تغییر شکل برشی، اینرسی چرخشی و کرنش‌های نرمال عرضی در فرمول‌بندی می‌باشد.
- استفاده از فرضیات سینماتیکی فن کارمن به همراه قانون هوک به عنوان معادله ساختاری.
- سطح مقطع دارای شکل دلخواه متقارن بوده و مقطع می‌تواند با هر ضابطه پیوسته‌ای تعریف شود. این، منجر به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با ضرایب متغیر می‌شود.
- ارائه حل تحلیلی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی غیرخطی محوری و عرضی.

¹ Couple stress for size-dependent beams

² Ritz

- مطالعه پارامتری برای بررسی تأثیر بار محوری، پروفیل ضخامت و دامنه (ارتعاشات) محوری و عرضی بر روی فرکانس‌های غیرخطی.

فصل دوم

تحليل فرکانسی تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو با
ضخامت متغیر

در این فصل ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با سطح مقطع متغیر به کمک روش تئوری اغتشاشات بررسی می‌شود. معادلات مورد بررسی، معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر هستند و از تقریب ونتزل، کرامرز، بریلوین^۱ (WKB) برای حل معادلات مقدار ویژه و تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها استفاده شده است. مطالعه پارامتری جهت بررسی اثر پروفیل‌های مختلف سطح مقطع و ترکیب شرایط مرزی مختلف بر روی فرکانس طبیعی انجام می‌شود. برای اعتبارسنجی روش مذکور، نتایج تحلیلی با نتایج حل عددی و نتایج ارائه شده در مقالات دیگر مقایسه خواهد شد.

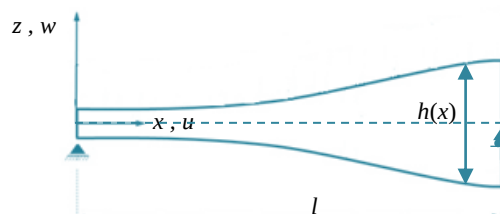
مرور مقالات نشان می‌دهد که از روش‌های تحلیلی و عددی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیرها استفاده شده است. اگرچه روش عددی روشی مستقیم است اما ایجاد یک مدل عددی برای تیر با سطح مقطع متغیر دلخواه زمان‌بر است به‌خصوص زمانی که هدف نهایی، بهینه‌سازی با استفاده از روش سعی و خطا باشد. در حل‌های تحلیلی بیشتر مؤلفان از توابع شناخته شده برای حل مسأله مقدار ویژه سیستم استفاده کردند. در این فصل حل تحلیلی بر اساس روش اغتشاشات برای ارتعاشات خمشی تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با سطح مقطع متغیر دلخواه ارائه می‌شوند و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها تعیین می‌شوند. حل ارائه شده به شرایط مرزی خاص، پروفیل ضخامت یا استفاده از توابع خاص برای حل محدود نشده است. برای نشان دادن صحت و کارایی روش ارائه شده، مثال‌های عددی آورده شده‌اند.

در فرمول‌بندی ارائه شده، پروفیل ضخامت به عنوان ورودی بوده و برخلاف روش‌های عددی که با تغییر ضخامت، لازم است مدل جدیدی ایجاد شود، نیاز به فرمول‌بندی و حل جدید، وجود ندارد.

¹ Wentzel, Kramers, Brillouin approximation

۲-۲- تیر اویلر-برنولی ضخامت متغیر

یک تیر اویلر-برنولی همگن و ایزوتروپیک مفروض است. سطح مقطع تیر غیریکنواخت و متقارن، طول تیر l ، چگالی ρ و مساحت سطح مقطع $A(x)$ است.



شکل (۱-۲) نمای مسأله

معادله حاکم بر تیر با ضخامت متغیر و خیز کوچک به صورت زیر است [۱۱۷].

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (۱-۲)$$

در معادله (۱-۲)، $w(x,t)$ خیز عرضی تیر، x و t پارامترهای زمان و مکان، E مدول یانگ و $I(x)$ و $A(x)$ ممان اینرسی سطح و مساحت سطح مقطع تیر، l طول، h ضخامت و b پهنای تیر است. شرایط مرزی تیر اویلر-برنولی برای حالات مختلف به صورت زیر است.

$Clamped\ edge : w = 0, \quad w_{,x} = 0$	لبه گیردار	
$Simple\ edge : w = 0, \quad w_{,xx} = 0$	لبه با تکیه‌گاه ساده	
$Free\ edge : w_{,xx} = 0, \quad w_{,xxx} = 0$	لبه آزاد	(۲-۲)

در این بخش از روش اغتشاشات برای حل معادله حاکم استفاده شده است. ابتدا معادله حاکم با استفاده از پارامترهای زیر بی بعد می‌شوند.

$$w^* = \frac{w}{w_0}, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}, \quad I^*(x^*) = \frac{I(x)}{k_0^2 A_0}, \quad w_0 = k_0 \alpha_1,$$

$$\alpha_1 = \sqrt{12}, \quad g = \frac{E}{G}, \quad e = \frac{\rho k_0^2 \alpha_1^2}{E t_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{w_0}{l}, \quad t_0 = \frac{l}{\sqrt{E / \rho}},$$

$$A_0 = A(x)|_{x=0}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A_0}}, \quad I_0 = I(x)|_{x=0} \quad (۳-۲)$$

x^* و t^* به ترتیب مکان و زمان بی‌بعد، w^* جابجایی عرضی بی‌بعد، t_0 ، w_0 زمان و خیز مشخصه، k_0 شعاع ژیراسیون سطح مقطع هستند و ε کمیت کوچک است که به عنوان پارامتر اغتشاش در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از معادله (۲-۳)، شکل بی‌بعد معادله (۲-۱) (بر حسب جابجایی) به شکل زیر است.

$$e \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + \frac{1}{\alpha_1^2} \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \left(I^*(x^*) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) = 0 \quad (۲-۴)$$

معادله (۲-۴) یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی با ضرایب متغیر است. $\lambda_1 = \varepsilon^{-1}$ را به عنوان پارامتر بزرگ در نظر گرفته و از بسط WKB برای تعیین شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی استفاده شده است. حل به شکل زیر در نظر گرفته شده است.

$$w^*(x^*, t^*) = W^*(x^*) \exp(i \omega t^*) \quad (۲-۵)$$

که ω فرکانس طبیعی بی‌بعد است. با جایگذاری معادله (۲-۵) در معادله (۲-۴) نتیجه می‌شود:

$$-e \omega^2 W^* + \frac{1}{\alpha_1^2} \varepsilon^4 \frac{d^2}{dx^{*2}} \left(I^*(x^*) \frac{d^2 W^*}{dx^{*2}} \right) = 0 \quad (۲-۶)$$

بسطی به شکل زیر برای W در نظر شده است:

$$W^*(x^*) = a e^{i G(x^*, \lambda_1)} \quad (۲-۷)$$

با جایگذاری معادله (۲-۷) در معادله (۲-۶) و در نظر گرفتن بسط مستقیم برای G به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$G = G_0(x^*) + \varepsilon G_1(x^*) + \varepsilon^2 G_2(x^*) + \dots \quad (۲-۸)$$

معادله (۲-۷) و معادله (۲-۸) در معادله (۲-۶) جایگزین می‌شود و مرتبه‌های مختلف ε به شکل زیر جدا شده است:

$$O(\varepsilon^0): \frac{1}{\alpha_1^2} I^* p^4 - e \omega^2 = 0, \quad p = \frac{dG_0}{dx^*} \quad (۲-۹)$$

$$O(\varepsilon^1): p \left(2I^* \frac{dG_1}{dx^*} + \frac{dI^*}{dx^*} \right) + 3I^* \frac{d^2 G_0}{dx^{*2}} = 0 \quad (10-2)$$

$$O(\varepsilon^2): 4I^* p^3 \frac{dG_2}{dx^*} + p^2 \left(\frac{d^2 I^*}{dx^{*2}} + 6I^* \left(\frac{dG_1}{dx^*} \right)^2 + 6I^* \frac{d^2 G_1}{dx^{*2}} + 6 \frac{dI^*}{dx^*} \frac{dG_1}{dx^*} \right) + p \left(4I^* \frac{d^3 G_0}{dx^{*3}} + 6 \frac{dI^*}{dx^*} \frac{d^2 G_0}{dx^{*2}} + 12I^* \frac{dG_1}{dx^*} \frac{d^2 G_0}{dx^{*2}} \right) + 3I^* \left(\frac{d^2 G_0}{dx^{*2}} \right)^2 = 0 \quad (11-2)$$

از معادله (۹-۲)، چهار ریشه برای G'_0 به دست می‌آید. سپس G'_1, G'_2 از معادلات (۱۰-۲) و (۱۱-۲) تعیین می‌شوند بنابراین $G' = G'_0 + \varepsilon G'_1 + \varepsilon^2 G'_2$ به دست خواهد آمد. با استفاده از انتگرال‌گیری و تعیین G حل بر اساس معادله (۷-۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$W^* = \sum_{n=1}^4 a_n \exp(\lambda_1 G_n(x^*)) \quad (12-2)$$

با اعمال شرایط مرزی در معادله (۱۲-۲)، یک دستگاه معادلات جبری همگن به دست می‌آید. حل غیر بدیهی این دستگاه منجر به تعیین مقدار ویژه ω و شکل‌های مود خواهد شد.

۲-۳- تیر تیموشنکو ضخامت متغیر

ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو همگن با ضخامت متغیر به شکل زیر است [۱۱۷].

$$\begin{aligned} -\rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(G A_s(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right) &= 0 \\ -\rho I(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(E I(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + G A_s(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) &= 0 \end{aligned} \quad (13-2)$$

که $\psi(x,t)$ زاویه چرخش ناشی از خمش، G مدول برشی، $A_s = \kappa A$ و κ ضریب تصحیح برشی می‌باشد. κ ضریب تصحیح برشی است و برای یکنواختی نیروی برش در سطح مقطع اعمال می‌شود. برای سطح مقطع مستطیلی $\kappa=5/6$ و برای سطح مقطع دایره‌ای $\kappa=0.9$ است. (وانگ [۱۱۸]) شرایط مرزی برای تیر تیموشنکو به صورت زیر هستند:

Clamped edge : $w = 0, \quad \psi = 0$

Simple edge : $w = 0, \quad \psi_{,x} = 0$

Free edge : $\psi_{,x} = 0, \quad (w_{,x} - \psi) = 0$ (۱۴-۲)

از ترکیب دو معادله (۱۳-۲)، یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهار با ضرایب متغیر به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & -k \rho^2 A I \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + \rho G \left(-A^2 + A \frac{d^2 I}{dx^2} - \frac{dI}{dx} \frac{dA}{dx} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \rho A I (G + kE) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ & \rho \left(A (2G + kE) \frac{dI}{dx} - G I \frac{dA}{dx} \right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} - G E A I \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + G E \left(I \frac{dA}{dx} - 3A \frac{dI}{dx} \right) \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \\ & + G E \left(2 \frac{dA}{dx} - 3A \frac{d^2 I}{dx^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + G E \left(\frac{d^2 I}{dx^2} - A \frac{d^3 I}{dx^3} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (۱۵-۲)$$

برای بی‌بعدسازی معادله فوق از پارامترهای بی‌بعد رابطه (۳-۲) استفاده شده‌است. با جایگذاری رابطه (۳-۲) در معادله (۱۵-۲) شکل بی‌بعد معادله حرکت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & -k . g e^2 A^* I^* \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial t^{*4}} + \left(-\alpha_1^2 e A^{*2} + e \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 I^*}{dx^{*2}} A^* - \frac{dI^*}{dx^*} \frac{dA^*}{dx^*} \right) \right) \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^{*2}} \\ & + \varepsilon^2 e \left(A^* (2 + kg) \frac{dI^*}{dx^*} - I^* \frac{dA^*}{dx^*} \right) \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial t^{*2}} + \varepsilon^2 e A^* I^* (1 + k . g) \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} \\ & + \varepsilon^4 \left(I^* \frac{dA^*}{dx^*} - 3A^* \frac{dI^*}{dx^*} \right) \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*3}} + \varepsilon^4 \left(2 \frac{dI^*}{dx^*} \frac{dA^*}{dx^*} - 3A^* \frac{d^2 I^*}{dx^{*2}} \right) \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \\ & + \varepsilon^4 \left(\frac{d^2 I^*}{dx^{*2}} \frac{dA^*}{dx^*} - A^* \frac{d^3 I^*}{dx^{*3}} \right) \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} - \varepsilon^4 A^* I^* \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^{*4}} = 0; \quad \psi^*(x^*, t^*) = \psi(x, t) \end{aligned} \quad (۱۶-۲)$$

ψ^* در معادله (۱۶-۲) به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$\psi^*(x^*, t^*) = \psi^*(x^*) \exp(i \omega t^*); \quad \psi^*(x^*) = a . \exp(\lambda_1 G(x^*, \lambda_1)) \quad (۱۷-۲)$$

با جایگذاری معادله (۱۷-۲) در معادله (۱۶-۲) و به کار بردن بسط مستقیم برای G مانند معادله (۲-

۸) و جدا کردن جمله‌های با مرتبه یکسان ε نتیجه می‌شود:

$$O(\varepsilon^0): I^* p^4 + e^2 \omega^4 k . g I^* - e \omega^2 \alpha_1^2 A^* = 0, \quad p = \frac{dG_0}{dx^*} \quad (۱۸-۲)$$

$$O(\varepsilon^1): 4A^* I^* p \frac{dG_1}{dx^*} + 6A^* I^* \frac{d^2 G_0}{dx^{*2}} + \left(-\frac{dA^*}{dx^*} I^* + 3A^* \frac{dI^*}{dx^*}\right) p = 0 \quad (19-2)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2): & e\omega^2 \left(A^* \frac{d^2 I^*}{dx^{*2}} - \frac{dA^*}{dx^*} \frac{dI^*}{dx^*} \right) + q_6 p \frac{d^2 G_0}{dx^{*2}} + q_6 p^2 \frac{dG_1}{dx^*} + 4I^* A^* p^3 \frac{dG_2}{dx^*} \\ & + I^* A^* p \left(4 \frac{d^3 G_0}{dx^{*3}} + 12 \frac{d^2 G_0}{dx^{*2}} \frac{dG_1}{dx^*} \right) + \left(3A^* \frac{d^2 I^*}{dx^{*2}} - 2 \frac{dA^*}{dx^*} \frac{dI^*}{dx^*} \right) p^2 \\ & + 6A^* I^* p^2 \left(\left(\frac{dG_1}{dx^*} \right)^2 + \frac{d^2 G_1}{dx^{*2}} \right) + 3I^* A^* \left(\frac{d^2 G_0}{dx^{*2}} \right)^2 = 0, \\ q_6 = & 9A^* \frac{dI^*}{dx^*} - 3I^* \frac{dA^*}{dx^*} \end{aligned} \quad (20-2)$$

از معادله (۱۸-۲) چهار ریشه برای G'_0 تعیین گردید. به ترتیب از معادله (۱۹-۲) و (۲۰-۲) G'_2, G'_1 نیز تعیین می‌شوند بنابراین $G' = G'_0 + \varepsilon G'_1 + \varepsilon^2 G'_2$ به دست خواهد آمد و با تعیین G حل به شکل زیر خواهد بود:

$$\psi^* = \sum_{n=1}^4 a_n \exp(\lambda_n G_n(x^*)) \quad (21-2)$$

با جایگذاری معادله (۵-۲) در معادله اول (۱۳-۲) و استفاده از پارامترهای بی‌بعد رابطه (۳-۲) و تبدیل معادلات به شکل بی‌بعد و جایگذاری معادله (۲۱-۲) در معادله حاصل می‌توان جابجایی عرضی W را تعیین کرد. در نهایت $w(x,t)$ از معادله (۵-۲) تعیین می‌شود. با اعمال شرایط مرزی (معادله (۱۴-۲)) یک دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود. برای داشتن حل غیر بدیهی، باید ماتریس ضرایب صفر باشد. حل این معادله که می‌تواند به کمک روش نصف کردن انجام شود منجر به تعیین فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌شود.

¹ Bisection method

۲-۴- حل عددی

از نرم‌افزار انسیس^۱ ۱۶/۲ برای تحلیل مودال تیر با ضخامت متغیر استفاده شده است. تمام نتایج گزارش شده (به جز موارد خاص ذکر شده) مربوط به سطح مقطع مستطیلی با عرض ثابت و ضخامت متغیر با مشخصات لیست شده در جدول (۱-۲) هستند. d_0 و h_0 به ترتیب قطر و ضخامت سطح مقطع دایره‌ای و مستطیلی در $x=0$ است و d_1 و h_1 مربوط به $x=1$ هستند.

جدول (۱-۲) خواص تیر

طول	(mm)	۵۰۰
عرض	(mm)	۳۲
$d_0=h_0$	(mm)	۲۵
$d_1=h_1$	(mm)	۴۵
مدول الاستیسیته	(GPa)	۲۰۰
چگالی	(kg/m ³)	۷۸۰۰

۲-۵- مطالعه پارامتری تیر با خیز کوچک و ضخامت متغیر

در این بخش موارد زیر برای یک تیر با مقطع مستطیل بررسی شده است:

الف: بررسی اعتبار حل

ب: بررسی اثر پارامترهای هندسی بر فرکانس طبیعی

ج: بررسی فرکانس طبیعی با تئوری‌های ذکر شده در مودهای بالاتر

د: بررسی اثر پروفیل‌های مختلف ضخامت بر فرکانس طبیعی

ه: بررسی اثر شرایط مرزی بر نتایج

¹ Ansys workbench

تمامی فرکانس‌های گزارش شده بی‌بعد هستند و با ضرب t_0 در رابطه (۳-۲) می‌توان فرکانس‌ها را برحسب rad/s گزارش کرد. نمادهای C و S به ترتیب مربوط به تکیه‌گاه گیردار و ساده است. در CS, SC, SS, CC حرف اول نشان‌دهنده شرایط مرزی در $x=0$ و دومین شرط مرزی را در $x=1$ نشان می‌دهد. به عنوان مثال SC در $x=0$ تکیه‌گاه ساده و در $x=1$ تکیه‌گاه گیردار دارد. برای صحت‌سنجی فرمول‌بندی، ابتدا فرکانس‌های تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو با شرط مرزی SS گزارش شده است. جدول (۲-۲) فرکانس‌های طبیعی تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو با شرط مرزی ساده را نشان می‌دهد. نتایج برای دو حالت گزارش شده‌اند: نتایج اویلر-برنولی و تیموشنکو مربوط به حل دقیق معادلات [۱۱۷] (که در متن با HG مشخص شده) و WKB که مربوط به حل ارائه شده در این فصل است. از آنجایی که اختلاف بین نتایج ناچیز است، بنابراین برنامه به درستی عمل می‌کند. همچنین در مودهای بالاتر، اختلاف بین روش‌های تقریبی و دقیق افزایش می‌یابد. از جدول (۲-۲)، با کاهش نسبت طول به ضخامت (l/h) فرکانس‌های طبیعی و اختلاف بین تئوری‌های اویلر-برنولی و تیموشنکو خصوصاً در مودهای بالاتر افزایش می‌یابد. درصد اختلاف نتایج برای HG به صورت زیر تعریف شده است:

$$Diff (\%) = (\omega_{EB} - \omega_{TB}) / \omega_{TB} \times 100 \quad (22-2)$$

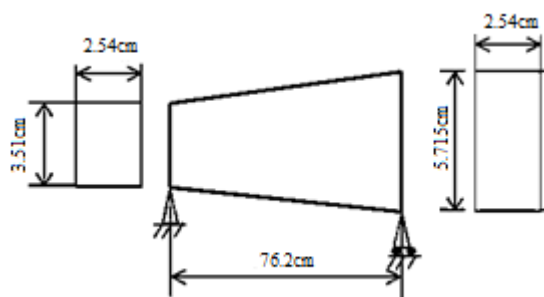
که اندیس TB معرف تیر تیموشنکو است.

جدول (۲-۲) مقایسه فرکانس‌های طبیعی تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با ضخامت ثابت

l/h	تئوری	مد اول	مد دوم	مد سوم
۲۵	اویلر برنولی (HG)	۰/۱۱۳۹۷	۰/۴۵۵۸۴	۱/۰۲۵۷۰
	اویلر برنولی (WKB)	۰/۱۱۳۹۶	۰/۴۵۵۸۶	۱/۰۲۵۶۸
	تیموشنکو (HG)	۰/۱۱۳۶۸	۰/۴۵۱۳۱	۱/۰۰۳۰۷
	تیموشنکو (WKB)	۰/۱۱۳۹۶	۰/۴۵۵۸۸	۱/۰۲۵۹۰
	اختلاف (%)	۰/۲۵	۱/۰۰	۲/۲۶
۱۵/۶	اویلر برنولی (HG)	۰/۱۸۲۶۲	۰/۷۳۰۵۳	۱/۶۴۳۶۵
	اویلر برنولی (WKB)	۰/۱۸۲۶۴	۰/۷۳۰۵۴	۱/۶۴۳۷۲
	تیموشنکو (HG)	۰/۱۸۱۴۶	۰/۷۱۲۲۵	۱/۵۵۶۱۷
	تیموشنکو (WKB)	۰/۱۸۲۶۴	۰/۷۳۰۷۵	۱/۶۴۶۱۰

اختلاف (%)	۰/۶۴	۲/۵۷	۵/۶۲
اویلر برنولی (HG)	۰/۲۸۴۸۹	۱/۱۳۹۶۹	۲/۵۶۴۲۲
اویلر برنولی (WKB)	۰/۲۸۴۹۱	۱/۱۳۹۶۴	۲/۵۶۴۲۰
تیموشنکو (HG)	۰/۲۸۰۴۸	۱/۰۷۴۴۲	۲/۰۲۷۰۵
تیموشنکو (WKB)	۰/۲۸۴۹۴	۱/۱۴۱۵۸	۲/۵۸۶۸۰
اختلاف (%)	۱/۵۷	۶/۰۷	۲۶/۵۰

در جدول (۳-۲)، مقایسه نتایج تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با نتایج [۱۱۹] برای پروفیل با ضخامت خطی (شکل ۲-۲) و شرایط مرزی ساده گزارش شده است. [۱۱۹] از تئوری اویلر-برنولی و حل عددی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی استفاده کرده است. نتایج نشان می‌دهد که در مودهای بالاتر، نتایج تیموشنکو به حل عددی نسبت به نتایج اویلر-برنولی نزدیک‌تر هستند.



شکل (۲-۲) تیر با تکیه‌گاه ساده و ضخامت متغیر خطی

جدول (۳-۲) مقایسه فرکانس‌های تئوری‌های اویلر-برنولی و تیموشنکو با نتایج [۱۱۹]

تئوری	مد اول	مد دوم	مد سوم
[۱۱۹]	۰/۱۷۱۴۵	۰/۷۰۵۶۰	۱/۵۸۷۹
اویلر برنولی	۰/۱۹۳۹۰	۰/۷۸۴۸۴	۱/۷۶۲۷۰
اختلاف (%)	۱/۳۵	۳/۳۳	۳/۴۷
تیموشنکو	۰/۱۷۴۰۰	۰/۶۸۰۳۴	۱/۵۲۵۴۸
اختلاف (%)	۱/۴۹	۳/۵۸	۳/۹۳

توابع مختلف با وزن یکسان برای سطح مقطع تیرها در نظر گرفته شده است. برای سطح مقطع مستطیلی $A(x)=b \cdot h(x)$ و توابع ضخامت مختلف در جدول (۴-۲) لیست شده‌اند و مقایسه

فرکانس‌های تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو در جدول (۲-۵) گزارش شده است. درصد اختلاف مشابه رابطه (۲-۲۲) تعریف شده است.

جدول (۲-۴) پروفیل‌های ضخامت با توابع مختلف

$a_1 = 0.8, b_1 = 1$	$h^* = a_1 x^* + b_1$	نوع اول
$a_1 = -1.6, b_1 = 2.4, c_1 = 1$	$h^* = a_1 x^{*3} + b_1 x^{*2} + c_1$	نوع دوم
$a_1 = -1, b_1 = 1.8, c_1 = 1$	$h^* = a_1 x^{*4} + b_1 x^{*2} + c_1$	نوع سوم
$b_1 = -0.4, c_1 = 1.4$	$h^* = b_1 \cos(\pi x^*) + c_1$	نوع چهارم
$a_1 = 0.866, b_1 = -0.4, c_1 = 1.4$	$h^* = a_1 \sinh(x^*) + b_1 \cosh(x^*) + c_1$	نوع پنجم

جدول (۲-۵) مقایسه فرکانس‌های طبیعی تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با توابع ضخامت مختلف

تابع ضخامت	تئوری	مد اول	مد دوم	مد سوم
نوع اول	اوایلر برنولی	۰/۱۹۳۹۰	۰/۷۸۴۸۴	۱/۷۶۲۷۰
	تیموشنکو	۰/۱۹۳۶۷	۰/۷۸۵۱۷	۱/۷۶۶۳۷
	اختلاف (%)	۰/۱۲	۰/۰۴	۰/۲۱
نوع دوم	اوایلر برنولی	۰/۲۰۶۸۶	۰/۷۸۳۰۴	۱/۷۴۹۳۷
	تیموشنکو	۰/۲۰۲۱۸	۰/۷۸۱۹۰	۱/۷۵۲۳۳
	اختلاف (%)	۲/۳۲	۰/۱۵	۰/۱۷
نوع سوم	اوایلر برنولی	۰/۲۳۲۳۵	۰/۷۹۱۳۶	۱/۷۵۰۵۷
	تیموشنکو	۰/۱۸۶۷۶	۰/۷۷۵۱۰	۱/۷۴۶۶۲
	حل عددی	۰/۱۸۶۰۶	۰/۷۵۷۲۷	۱/۶۳۸۶۸
	اختلاف (%)	۲۴/۴۱	۲/۱۰	۰/۲۳
نوع چهارم	اوایلر برنولی	۰/۲۰۱۹۵	۰/۷۸۱۶۱	۱/۷۴۷۵۹
	تیموشنکو	۰/۲۰۱۹۸	۰/۷۸۲۰۱	۱/۷۵۱۲۲
	اختلاف (%)	۰/۰۲	۰/۰۵	۰/۲۱
نوع پنجم	اوایلر برنولی	۰/۱۹۳۳۷	۰/۷۸۴۹۳	۱/۷۶۳۵۸
	تیموشنکو	۰/۱۹۳۴۳	۰/۷۸۵۲۸	۱/۷۶۷۲۶
	اختلاف (%)	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۲۱

بر اساس جدول (۲-۵)، پروفیل‌های مختلف با وزن یکسان فرکانس را تغییر می‌دهند. برای پروفیل نوع سوم، بین فرکانس‌های اویلر-برنولی و تیموشنکو اختلاف وجود دارد. برای بررسی بیشتر، این مورد با استفاده از روش عددی، تحلیل شده است. نتایج نشان می‌دهد حل عددی به نتایج تیر تیموشنکو

بسیار نزدیک است ولی با نتایج اوایلر-برنولی اختلاف دارد. در جدول (۶-۲) سه فرکانس طبیعی اول تیرهای اوایلر-برنولی و تیموشنکو با تغییرات ضخامت نوع دوم و شرایط مرزی مختلف را مقایسه شده است. جدول (۶-۲) نشان می‌دهد که بزرگترین فرکانس مربوط به شرط مرزی CC است در حالی که کمترین فرکانس، مربوط به SS است. همچنین نتایج برای دو جمله $G = G_0(x) + \epsilon G_1(x)$ و سه جمله $G = G_0(x) + \epsilon G_1(x) + \epsilon^2 G_2(x)$ در این جدول‌ها گزارش شده است. هر چند اختلاف نتایج در بیشتر موارد ناچیز است اما در شرایط مرزی غیر یکسان مانند SC و CS در تئوری اوایلر-برنولی نتایج حاصل از بسط با دو جمله معتبر نیست زیرا فرکانس‌های یکسانی را برای حالت SC و CS گزارش می‌کند، بنابراین نتایج برای بسط با سه جمله ارائه شده است.

جدول (۶-۲ الف) مقایسه فرکانس‌های طبیعی تیرهای تیموشنکو و اوایلر-برنولی با دو و سه جمله

مود	SS (2)	SS (3)	اختلاف (%)	CC (2)	CC (3)	اختلاف (%)
۱	۰/۱۹۳۳۷	۰/۲۰۶۸۶	۶/۵۲	۰/۴۳۸۳۵	۰/۴۴۶۶۵	۱/۸۶
۲	۰/۷۷۳۴۹	۰/۷۸۳۰۴	۱/۲۲	۱/۲۰۸۳۳	۱/۲۱۶۹۶	۰/۷۱
۳	۱/۷۴۰۳۵	۱/۷۴۹۳۷	۰/۵۲	۲/۳۶۸۸۲	۲/۳۷۷۴۴	۰/۳۶
۱	۰/۱۹۳۶۰	۰/۲۰۲۱۸	۴/۲۴	۰/۴۳۹۸۴	۰/۴۴۸۲۴	۱/۸۷
۲	۰/۷۷۲۶۵	۰/۷۸۱۹۰	۱/۱۸	۱/۲۱۶۴۱	۱/۲۲۵۳۳	۰/۷۳
۳	۱/۷۴۳۱۷	۱/۷۵۲۳۳	۰/۵۲	۲/۳۹۶۸۴	۲/۴۰۶۱۳	۰/۳۹

جدول (۶-۲ ب) نتایج تیرهای تیموشنکو و اوایلر-برنولی با دو و سه جمله (تابع ضخامت نوع دوم)

مود	SS (2)	SS (3)	اختلاف (%)	CC (2)	CC (3)	اختلاف (%)
۱	۰/۳۰۲۰۸	۰/۲۸۹۲۰	۴/۲۶	۰/۳۰۲۰۸	۰/۳۳۳۳۸	۹/۳۹
۲	۰/۹۷۸۹۴	۰/۹۷۳۲۱	۰/۵۹	۰/۹۷۸۹۴	۱/۰۰۲۳۵	۲/۳۴
۳	۲/۰۴۲۴۹	۲/۰۴۰۵۸	۰/۰۹	۲/۰۴۲۴۹	۲/۰۶۱۹۰	۰/۹۴
۱	۰/۲۳۴۹۰	۰/۲۷۱۲۳	۱۳/۴	۰/۳۴۹۸۸	۰/۳۴۴۰۴	۱/۷۰
۲	۰/۹۵۲۲۲	۰/۹۷۰۱۰	۱/۸۴	۱/۰۰۹۶۸	۱/۰۱۰۵۰	۰/۰۸
۳	۲/۰۳۴۴۱	۲/۰۴۹۱۱	۰/۷۲	۲/۰۷۶۲۱	۲/۰۸۰۰۰	۰/۱۸

در جدول ۷-۲ مقایسه سه فرکانس طبیعی تیرهای اوایلر-برنولی و تیموشنکو با سطح مقطع مختلف، شرط مرزی SS و تغییرات ضخامت نوع دوم گزارش شده است. تیر با سطح مقطع‌های مختلف و

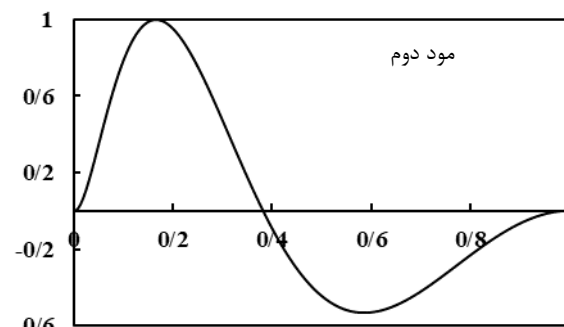
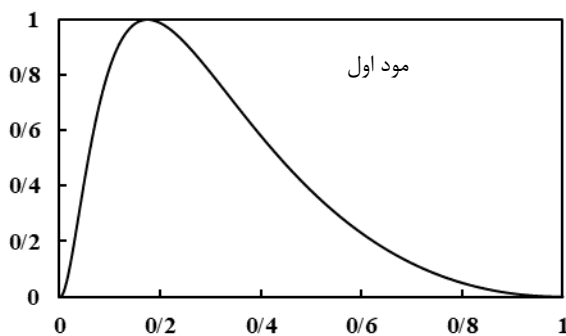
حجم‌های یکسان فرکانس‌های طبیعی متفاوتی دارند. همچنین در این مطالعه موردی، تئوری تیر تیموشنکو برای محاسبه فرکانس طبیعی اول تیر با سطح مقطع دایره‌ای نسبت به تئوری اویلر-برنولی مزیتی ندارد.

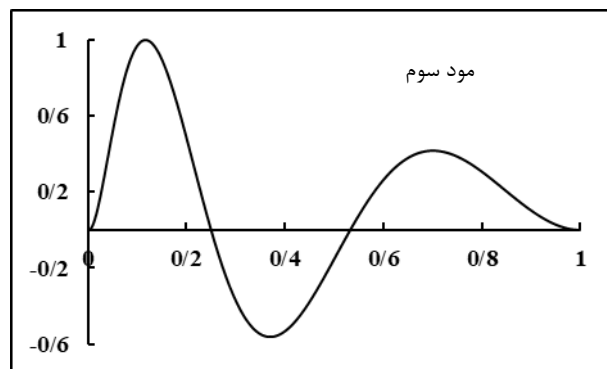
جدول (۷-۲) مقایسه فرکانس‌های طبیعی تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با پروفیل سطح مقطع‌های مختلف با تابع

ضخامت نوع دوم

سطح مقطع	تئوری	مد اول	مد دوم	مد سوم
مستطیلی	اویلر-برنولی	۰/۲۰۶۸۶	۰/۷۸۳۰۴	۱/۷۴۹۳۷
	تیموشنکو	۰/۲۰۲۱۸	۰/۷۸۱۹۰	۱/۷۵۲۳۳
دایره‌ای	اویلر-برنولی	۰/۳۵۹۱۶	۱/۳۳۸۳۹	۲/۹۷۰۱۳
	تیموشنکو	۰/۳۲۰۰۰	۰/۹۶۹۹۳	۲/۱۴۸۰۳
	حل عددی	۰/۳۸۰۶۱	۱/۰۴۳۳۸	۱/۹۷۲۳۵

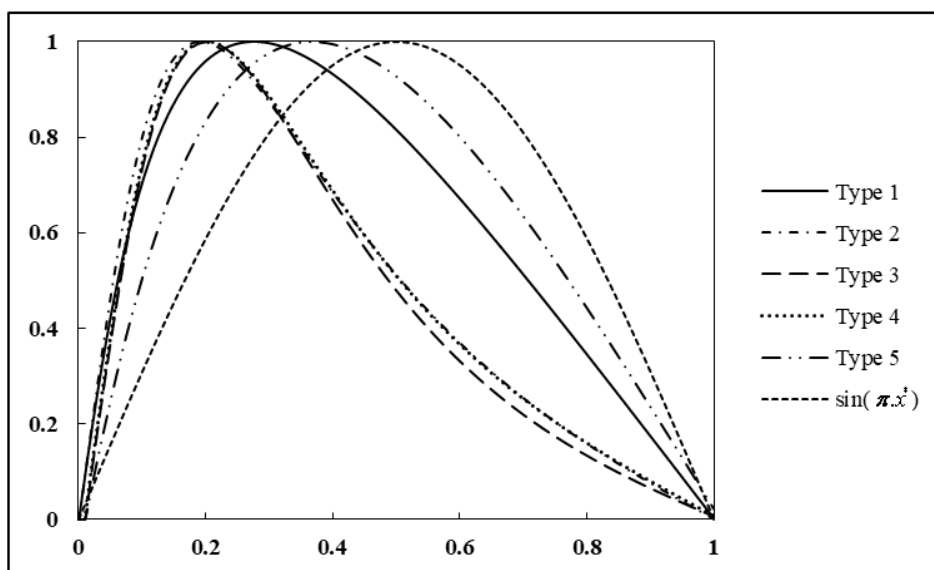
در شکل (۳-۲) سه شکل مود اول تیر اویلر-برنولی با شرایط مرزی CC نشان داده شده است. برخلاف تیرها با ضخامت ثابت، برای تیر با ضخامت متغیر نقطه برخورد منحنی شکل مود با محور افقی دقیقاً در مرکز تیر نیست.





شکل (۳-۲) سه شکل مود تیر اویلر-برنولی با تابع ضخامت نوع دوم و شرط مرزی گیردار

در شکل (۴-۲) تأثیر تابع ضخامت بر روی شکل مود اول تیر اویلر-برنولی با شرایط مرزی SS نشان داده شده است. همان‌طور که نشان داده شده است، شکل مود تیر با ضخامت متغیر، با تابع سینوسی متفاوت بوده و نقطه متناظر با مقدار حداکثر در وسط تیر نیست.



شکل (۴-۲) شکل مود اول برای تیر اویلر-برنولی با پنج تابع ضخامت و شرط مرزی SS

۲-۶- جمع‌بندی

در این فصل یک فرمول‌بندی و حل ریاضی برای بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با ضخامت متغیر ارائه گردید و معادله حاکم با استفاده از روش تحلیلی اغتشاشات حل شد. با مطالعه پارامتری اثر شرایط مرزی، شکل سطح مقطع و توابع ضخامت مختلف بر فرکانس‌های طبیعی عرضی بررسی شد.

فصل سوم

ارتعاشات آزاد تیر با خیز نسبتاً زیاد و ضخامت ثابت با استفاده از

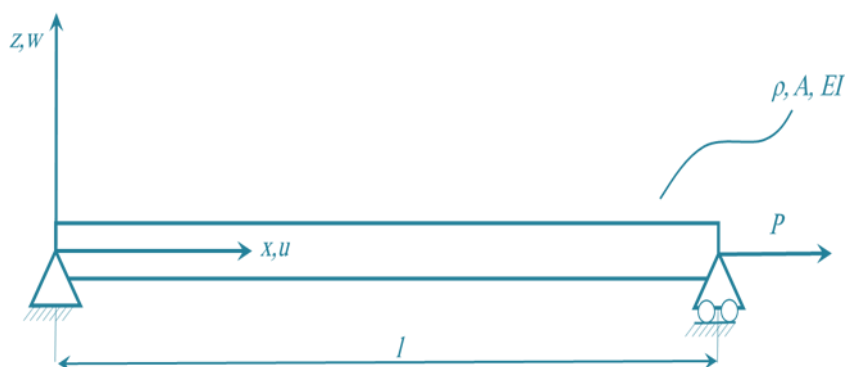
تئوری تغییر شکل برشی

۳-۱- مقدمه

در این فصل روش تحلیلی تعیین فرکانس‌های طبیعی غیرخطی تیرها، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه می‌گردد. سینماتیک غیرخطی خیز نسبتاً زیاد با استفاده از روابط فن‌کارمن تعریف شده است. کرنش‌ها کوچک هستند و در نتیجه از روابط ساختاری هوک برای محاسبه تنش‌ها استفاده شده است. معادلات حرکت با به‌کارگیری اصل هامیلتون استخراج شده‌اند و به کمک رویکرد تحلیلی بر اساس تئوری اغتشاشات حل بسته هر مرتبه به دست می‌آید.

۳-۲- تیر با فرض خیز نسبتاً زیاد و ضخامت ثابت

یک تیر یکنواخت همگن و ایزوتروپیک به طول l عرض b ضخامت h چگالی ρ و سطح مقطع A در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. سیستم مختصات (x, y, z) در یک طرف تیر واقع شده و محور x در راستای طول و محور z در راستای ضخامت تیر است که نسبت به صفحه میانی اندازه‌گیری می‌شود. مساحت سطح مقطع ثابت بوده و تیر تحت بار محوری P قرار دارد.



شکل (۳-۱) هندسه و بارگذاری تیر

در این فصل، مدل تیر بر اساس فرضیات زیر تعریف شده است:

- ضخامت تیر h و عرض آن b ، در مقایسه با طول l کوچک است.
- تیر از ماده همگن و الاستیک خطی ساخته شده است.
- جابه‌جایی‌ها، تنش‌ها و کرنش‌ها مستقل از مختصه y (عمود بر صفحه) هستند (حرکت صفحه‌ای).
- کرنش‌ها کوچک (روابط تنش - کرنش خطی) و خیزها نسبتاً بزرگ هستند (روابط کرنش - جابجایی غیرخطی).

میدان جابه‌جایی تیر مستطیلی شکل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با در نظر گرفتن کرنش نرمال عرضی تعریف شده است. بر اساس این تئوری کرنش نرمال عرضی در مقطع تیر ثابت است. (در حالت خیز کوچک)

$$\begin{aligned} u(x,z,t) &= u_0(x,t) + z \cdot u_1(x,t), \quad v(x,z,t) = 0, \\ w(x,z,t) &= w_0(x,t) + z \cdot w_1(x,t) \end{aligned} \quad (1-3)$$

که $u(x,z,t)$ و $w(x,z,t)$ به ترتیب جابه‌جایی‌های محوری و عرضی هستند. $v(x,z,t)$ مولفه جابجایی در راستای محور y است که در حرکت صفحه‌ای صفر در نظر گرفته می‌شود. u_0 و w_0 خیزهای صفحه میانی بوده، u_1 و w_1 توابع بی‌بعد مجهول هستند که معرف چرخش تیر حول صفحه میانی و کرنش نرمال عرضی در خیزهای کوچک است. در مقالات مهندسی، برای تحلیل خیز بزرگ در سازه‌ها معمولاً از تانسور کرنش گرین^۱ استفاده می‌شود. فن کارمن نشان داد که در خیزهای نسبتاً بزرگ جمله‌های غیرخطی $u_{,x}^2$ ، $v_{,y}^2$ و $u_{,x} v_{,y}$ در مقایسه با سایر مولفه‌های کرنش قابل صرف‌نظر هستند. بنابراین طبق روابط فن کارمن مولفه‌های کرنش غیر صفر به صورت زیر است [۱۲۰]:

¹ Green-Saint Venant

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2, \quad \varepsilon_z = w_{,z} + \frac{1}{2}w_{,z}^2, \quad \gamma_{zx} = w_{,x} + u_{,z} + w_{,z}w_{,x} \quad (۲-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۱-۳) در رابطه (۲-۳) مؤلفه‌های کرنش به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{0,x} + zu_{1,x} + \frac{1}{2}(w_{0,x} + zw_{1,x})^2, \quad \varepsilon_z = w_1 + \frac{1}{2}w_1^2; \\ \gamma_{xz} &= u_1 + (1+w_1)(w_{0,x} + zw_{1,x}) \end{aligned} \quad (۳-۳)$$

برای ماده الاستیک خطی، همگن و ایزوتروپیک روابط ساختاری به صورت زیر است [۱۲۱]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_z &= A\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} \end{aligned} \quad (۴-۳)$$

که λ و μ ضرایب لامه و ν ضریب پواسون است [۱۲۱]:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad A = \lambda + 2\mu \quad (۵-۳)$$

برای استخراج معادلات حرکت تیر از اصل هامیلتون استفاده می‌شود [۱۲۲]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0, \quad L = T - U \quad (۶-۳)$$

که T انرژی جنبشی، U انرژی کرنشی و W_{nc} کار نیروهای ناپایستار است. انرژی کرنشی و تغییرات آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx \cdot dy \cdot dz; \\ 0 &\leq x \leq l, \quad -b/2 \leq y \leq b/2, \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \end{aligned} \quad (۷-۳)$$

$$\delta U = \iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx \cdot dy \cdot dz \quad (۸-۳)$$

با جایگذاری روابط (۳-۳) و (۴-۳) در رابطه (۸-۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \int_0^l (N_{x,x} \delta u_0 + (Q_x + M_{x,x}) \delta u_1 + A_0 \delta w_0 + A_1 \delta w_1) dx + \\
& (N_x \delta u_0 + M_x \delta u_1 + B_0 \delta w_0 + B_1 \delta w_1) \Big|_0^l \\
A_1 = & (M_x w_{0,x} + P_x w_{1,x} + M_{xz} (1 + w_1))_{,x} \\
& + (w_1 + 1) N_z + Q_x w_{0,x} + M_{xz} w_{1,x} \\
A_0 = & (N_x w_{0,x} + M_x w_{1,x} + Q_x (1 + w_1))_{,x} \\
B_1 = & M_x w_{0,x} + P_x w_{1,x} + M_{xz} (1 + w_1), B_0 = N_x w_{0,x} + Q_x (1 + w_1)
\end{aligned} \quad (9-3)$$

که منته‌های تنش به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}
N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz, \quad P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \sigma_x dz, \\
N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z dz, \quad Q_x = \kappa \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad M_{xz} = \kappa \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xz} dz
\end{aligned} \quad (10-3)$$

κ ضریب تصحیح برشی است. انرژی جنبشی تیر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
T = & \iiint \frac{1}{2} \rho (u_{,t}^2 + w_{,t}^2) dx dy dz = \\
& \frac{1}{2} \rho b h \int_0^l \left(u_{0,t}^2 + w_{0,t}^2 + \frac{h^2}{12} (u_{1,t}^2 + w_{1,t}^2) \right) dx
\end{aligned} \quad (11-3) \text{ الف}$$

$$\delta T = \rho b h \int_0^l (u_{0,tt} \delta u_0 + w_{0,tt} \delta w_0 + \frac{h^2}{12} (u_{1,tt} \delta u_1 + w_{1,tt} \delta w_1)) dx \quad (11-3) \text{ ب}$$

پتانسیل ناشی از بار محوری و تغییرات آن به صورت زیر است [۱۲۲]:

$$W_{nc} = \frac{1}{2} \int_0^l P w_{,x}^2 dx, \quad \delta W_{nc} = P w_{0,x} \delta w_0 \Big|_0^l - \int_0^l P w_{0,xx} \delta w_0 dx \quad (12-3)$$

با ترکیب روابط (۳-۶)، (۳-۹)، (۳-۱۱) و (۳-۱۲) معادلات حرکت به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
N_{x,x} - \rho h u_{0,tt} = 0, \quad M_{x,x} + Q_x - \frac{\rho h^3}{12} u_{1,tt} = 0; \\
b (N_x w_{0,x} + M_x w_{1,x} + Q_x (1 + w_1))_{,x} - \rho b h w_{0,tt} + P w_{0,xx} = 0 \\
(M_x w_{0,x} + P_x w_{1,x} + M_{xz} (1 + w_1))_{,x} + Q_x w_{0,x} + M_{xz} w_{1,x} \\
+ N_z (1 + w_1) - \frac{\rho h^3}{12} w_{1,tt} = 0
\end{aligned} \quad (13-3) \text{ الف}$$

علاوه بر این، شرایط مرزی در این مدل تیر در $x=0$ و $x=1$ به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}
N_x \delta u_0|_0^l &= 0, \quad M_x \delta u_1|_0^l = 0; \\
(N_x w_{0,x} + Q_x (1+w_1) - P w_{0,x}) \delta w_0|_0^l &= 0 \\
(M_x w_{0,x} + P_x w_{1,x} + M_{xz} (1+w_1)) \delta w_1|_0^l &= 0
\end{aligned} \quad (۱۳-۳) \text{ (ب)}$$

با جایگذاری منته‌های تنش (۱۰-۳) در معادلات (۱۳-۳)، معادلات حاکم بر اساس مؤلفه‌های جابه‌جایی به‌دست خواهند آمد. شکل کلی معادلات حرکت به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
G_1[u_0, w_0, w_1] &= 0, \quad G_2[u_1, w_0, w_1] = 0 \\
G_3[u_0, u_1, w_0, w_1, P] &= 0, \quad G_4[u_0, u_1, w_0, w_1] = 0
\end{aligned} \quad (۱۴-۳)$$

G_1 تا G_4 اپراتورهای دیفرانسیلی هستند. معادلات شامل چهار معادله دیفرانسیل جزئی کوپل هستند. شکل صریح بی‌بعد این معادلات در ادامه آورده می‌شود.

۳-۳- تئوری اغتشاشات

در این بخش، از تئوری اغتشاشات برای حل معادلات حاکم استفاده می‌شود. بنابراین حل با بی‌بعد سازی معادلات حاکم، با استفاده از پارامترهای بی‌بعد زیر آغاز می‌شود:

$$\begin{aligned}
x^* &= \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}, \quad u_0^* = \frac{u_0}{h_0}, \quad w_0^* = \frac{w_0}{h_0}, \quad h^* = \frac{h}{h_0} \\
\theta_1 &= \frac{\lambda}{A}, \quad \theta_2 = \frac{\kappa \mu}{A}, \quad P^* = \frac{P}{A.b.h_0}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{l}, \quad e = \frac{\rho h_0^2}{A t_0^2}
\end{aligned} \quad (۱۵-۳)$$

x^* و t^* به ترتیب مکان و زمان بی‌بعد، u_0^* و w_0^* مؤلفه‌های جابجایی بی‌بعد صفحه میانی تیر و h_0 و t_0 ضخامت و زمان مشخصه هستند که به صورت $h_0 = h$ و $t_0 = l/c$ تعریف می‌شوند. c پارامتر سرعت موج و به صورت $c = \sqrt{A/\rho}$ تعریف می‌شود. ε پارامتر کوچک است که به عنوان پارامتر اغتشاش در نظر گرفته شده و همچنین متغیر جدید X به صورت $X = x^*/\varepsilon$ تعریف شده‌است. با استفاده از روابط (۳-۱۵)، شکل بی‌بعد معادلات (۱۴-۳) به صورت زیر به‌دست خواهند آمد.

$$\varepsilon^2 \left(u_{0,X}^* + \frac{1}{2} \varepsilon w_{0,X}^{*2} + \varepsilon \frac{h^{*2}}{6} w_{1,X}^{*2} \right) + \varepsilon \theta_1 w_{1,X}^* (1+w_1) - e u_{0,tt}^* = 0, \quad (۱۶-۳) \text{ (الف)}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \frac{h^{*3}}{12} \left(u_{1,X}^* + \varepsilon w_{0,X}^* w_{1,X}^* \right)_{,X} - \varepsilon \theta_2 h^* \left(u_1^* + \varepsilon \left(1 + w_1^* \right) w_{0,X}^* \right) \\ & - \varepsilon e \frac{h^{*3}}{12} u_{1,tt}^* = 0, \end{aligned} \quad (۱۶-۳ ب)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \frac{h^{*3}}{12} \left(u_{1,X}^* w_{1,X}^* + \frac{3}{2} \varepsilon w_{0,X}^* \left(w_{1,X}^* \right)^2 \right)_{,X} + \\ & \varepsilon^2 h^* \theta_1 \left(w_{0,X}^* w_1^* \left(1 + \frac{1}{2} w_1^* \right) \right)_{,X} - e h^* w_{0,tt}^* + P^* w_{0,XX}^* \\ & + \varepsilon^3 h^* \left(\left(u_{0,X}^* w_{0,X}^* \right)_{,X} + \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} w_{0,X}^* \right) w_{0,XX}^* w_{0,X}^* \right) \\ & + \varepsilon h^* \theta_2 \left(\left(1 + w_1^* \right) \left(u_1^* + \varepsilon \left(1 + w_1^* \right) w_{0,X}^* \right) \right)_{,X} = 0, \end{aligned} \quad (۱۶-۳ ج)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \frac{h^{*3}}{12} \left(u_{0,X}^* w_{1,X}^* + u_{1,X}^* w_{0,X}^* + \frac{3}{2} \varepsilon w_{0,X}^{*2} w_{1,X}^* \right)_{,X} \\ & + \varepsilon^2 \theta_1 \frac{h^{*2}}{24} \left(w_1^* \left(1 + w_1^* \right) w_{1,X}^* \right)_{,X} + \varepsilon \theta_2 h^* \left(u_1^* + \varepsilon \left(1 + w_1^* \right) w_{0,X}^* \right) w_{0,X}^* \\ & + \varepsilon^2 \theta_2 \frac{h^{*3}}{12} \left(\left(1 + w_1^* \right)^2 w_{1,X}^* \right)_{,X} - e \frac{h^{*2}}{12} w_{1,tt}^* + \varepsilon^4 \frac{h^{*4}}{160} \left(w_{1,X}^* \right)_{,X} \\ & + \left(1 + w_1^* \right) \left(w_1^* \left(1 + \frac{1}{2} w_1^* \right) + \varepsilon \theta_1 h^* \left(u_{0,X}^* + \frac{1}{2} \varepsilon w_{0,X}^{*2} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (۱۶-۳ د)$$

برای تعیین فرکانس طبیعی از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌شود [۱۲۳]. مقیاس‌های زمانی

مستقل جدید $T_0=t$ ، $T_1=\varepsilon t$ و $T_2=\varepsilon^2 t$ در نظر گرفته شده و حل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_6 \left(X, t^*; \varepsilon \right) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i U_{6i} \left(X, T_0, T_1, T_2 \right), \quad U_6 = u_0^*, u_1^*, w_0^*, w_1^* \quad (۱۷-۳)$$

تعداد مقیاس‌های زمانی مستقل $T_n=\varepsilon^n t$ با مرتبه جمله‌ها در معادلات (۱۷-۳) و درجه غیرخطی

معادلات (۱۶-۳) یکسان است. پارامتر T_0 مقیاس زمانی سریع و T_1 و T_2 پارامترهای زمانی کند نامیده

می‌شوند و با استفاده از آن‌ها می‌توان وابستگی فرکانس به دامنه را تعیین نمود. مشتق زمانی مرتبه

دوم به شکل زیر است:

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + 2\varepsilon^3 D_1 D_2,$$

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial T_2} \quad (۱۸-۳)$$

با جایگذاری روابط (۱۷-۳) و (۱۸-۳) در معادلات (۱۶-۳) و مساوی صفر قراردادن ضرایب توان‌های مشابه ε ، معادلات مرتبه‌های مختلف به دست می‌آیند. معادلات مرتبه‌های مختلف ε به شکل زیر هستند:

$$O(\varepsilon)$$

$$L_1[u_{00}^*, w_{10}^*] = 0, \quad L_1[u, w] = u_{,XX} + \theta_1 w_{,X} - e u_{,T_0 T_0} \quad (۱۹-۳ الف)$$

$$L_2[u_{10}^*, w_{00}^*] = 0, \quad L_2[u, w] = \frac{h^{*2}}{12} u_{,XX} - \theta_2 (u + w_{,X}) - e \frac{h^{*2}}{12} u_{,T_0 T_0} \quad (۱۹-۳ ب)$$

$$L_3[u_{00}^*, w_{10}^*] = 0, \quad L_3[u, w] = \theta_2 u_{,X} + (\theta_2 + P^*) w_{,XX} - e w_{,T_0 T_0} \quad (۱۹-۳ ج)$$

$$L_4[u_{10}^*, w_{00}^*] = 0, \quad L_4[u, w] = -\theta_1 u_{,X} + \frac{\theta_2 h^{*2}}{12} w_{,XX} - w - e \frac{h^{*2}}{12} w_{,T_0 T_0} \quad (۱۹-۳ د)$$

$$O(\varepsilon^2)$$

$$L_1[u_{01}^*, w_{11}^*] = 2e u_{00, T_0 T_1}^* - \theta_1 w_{10}^* w_{10, X}^* - \frac{h^{*2}}{12} w_{10, X}^* w_{10, XX}^* - w_{00, X}^* w_{00, XX}^* \quad (۲۰-۳ الف)$$

$$L_2[u_{11}^*, w_{01}^*] = h^{*2} \left(2e u_{10, T_0 T_1}^* - \frac{1}{12} (w_{10, X}^* w_{00, X}^*)_{,X} \right) + \theta_2 w_{10}^* w_{00, X}^* \quad (۲۰-۳ ب)$$

$$L_3[u_{11}^*, w_{01}^*] = 2e w_{00, T_0 T_1}^* + P^* w_{01, XX}^* \\ \left(w_{00, X}^* (-u_{00, X}^* - (\theta_1 + 2\theta_2) w_{10}^*) - \theta_2 w_{10}^* u_{10}^* - \frac{h^{*2}}{12} w_{10, X}^* u_{10, X}^* \right)_{,X} \quad (۲۰-۳ ج)$$

$$\begin{aligned}
L_4[u_{01}^*, w_{11}^*] = & \left(\frac{3}{2} w_{10}^* + \theta_1 u_{00,X}^* \right) w_{10}^* - \frac{h^{*2}}{12} \left(w_{10,X}^* u_{00,X}^* + w_{00,X}^* u_{10,X}^* \right)_{,X} \\
& + \frac{1}{2} (\theta_1 + 2\theta_2) (w_{00,X}^{*2} - \frac{h^{*2}}{12} w_{10,X}^{*2} - \frac{h^{*2}}{6} w_{10}^* w_{10,XX}^*) + \theta_1 u_{01,X}^* \\
& + \theta_2 w_{00,X}^* u_{10}^* + e \frac{h^{*2}}{6} w_{10,T_0 T_1}^*
\end{aligned} \tag{د-٢٠-٣}$$

$$O(\varepsilon^3)$$

$$\begin{aligned}
L_1[u_{02}^*, w_{12}^*] = & e(u_{00,T_1 T_1}^* + 2u_{00,T_0 T_2}^* + 2u_{01,T_0 T_1}^*) - \left(w_{00,X}^* w_{01,X}^* + h^{*2} w_{11,X}^* w_{10,X}^* \right)_{,X} \\
& - \theta_1 (w_{10}^* w_{11}^*)_{,X},
\end{aligned} \tag{الف-٢١-٣}$$

$$\begin{aligned}
L_2[u_{12}^*, w_{02}^*] = & e \frac{h^{*2}}{12} (u_{10,T_1 T_1}^* + 2u_{10,T_0 T_2}^* + 2u_{11,T_0 T_1}^*) \\
& - \frac{h^{*2}}{12} \left(w_{11,X}^* w_{00,X}^* + w_{10,X}^* w_{01,X}^* \right)_{,X} + \theta_2 \left(w_{11}^* w_{00,X}^* + w_{10}^* w_{01,X}^* \right),
\end{aligned} \tag{ب-٢١-٣}$$

$$\begin{aligned}
L_3[u_{12}^*, w_{02}^*] = & e (w_{00,T_1 T_1}^* + 2w_{01,T_0 T_1}^* + 2w_{00,T_0 T_2}^*) \\
& - \frac{h^{*2}}{8} (w_{00,X}^* w_{10,X}^{*2} + \frac{2}{3} (w_{10,X}^* u_{11,X}^* + w_{11,X}^* u_{10,X}^*))_{,X} + P^* w_{02,XX}^* \\
& - \frac{3}{2} w_{00,XX}^* w_{00,X}^{*2} - \left(w_{01,X}^* (u_{00,X}^* + \theta_1 w_{10}^*) \right)_{,X} - u_{01,X}^* (w_{00}^* + w_{00,X}^*)_{,X} \\
& - \frac{1}{2} (\theta_1 + 2\theta_2) (w_{00,X}^* w_{10}^{*2} + w_{00,X}^* w_{11}^*)_{,X} - \theta_2 \left(w_{10}^* u_{11}^* + w_{11}^* u_{10}^* + 2w_{01,X}^* w_{10}^* \right)_{,X}
\end{aligned} \tag{ج-٢١-٣}$$

$$\begin{aligned}
L_4[u_{02}^*, w_{12}^*] = & -e \frac{h^{*2}}{12} (2w_{11,T_0 T_1}^* + w_{10,T_1 T_1}^* + 2w_{10,T_0 T_2}^*) \\
& + \theta_1 (w_{11}^* u_{00,X}^* + w_{10}^* u_{01,X}^*) + \theta_2 (u_{10}^* w_{01,X}^* + w_{10}^* w_{00,X}^{*2} + u_{11}^* w_{00,X}^*) \\
& - \frac{h^{*2}}{24} (\theta_1 + 2\theta_2) (w_{10}^* (4w_{11,XX}^* + 2w_{10,X}^{*2} + w_{10,XX}^* w_{10}^*) + 2(w_{10,X}^* w_{11}^*)_{,X}) \\
& + (\theta_1 + 2\theta_2) w_{00,X}^* w_{01,X}^* + \frac{1}{2} w_{10}^* (w_{10}^{*2} + w_{00,X}^{*2}) + 3w_{10}^* w_{11}^* - \frac{3h^{*4}}{160} w_{10,X}^{*2} w_{10,XX}^* \\
& - \frac{h^{*2}}{12} \left(\frac{2}{3} w_{00,X}^{*2} w_{10,X}^* + (w_{11,X}^* u_{00,X}^* + w_{10,X}^* u_{01,X}^* + w_{01,X}^* u_{10,X}^* + w_{00,X}^* u_{11,X}^*)_{,X X} \right)
\end{aligned} \tag{د-٢١-٣}$$

در ابتدا معادلات (۱۹-۳) حل می‌شوند. معادلات (۱۹-۳) شامل چهار معادله دیفرانسیل جزئی خطی با ضرایب ثابت بوده و دستگاه معادلات دوبه‌دو کوپل هستند. معادلات اول و چهارم (۱۹-۳ الف)، (۳-۳) ۱۹ د) با یکدیگر و معادلات دوم و سوم (۱۹-۳ ب)، (۱۹-۳ ج) نیز با یکدیگر کوپل هستند. هر دستگاه معادله را می‌توان به شکل ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\left[\overline{B_2}\right] \frac{\partial^2 \{y^*\}}{\partial X^2} + \left[\overline{B_1}\right] \frac{\partial \{y^*\}}{\partial X} + \left[\overline{B_3}\right] \{y^*\} + \left[\overline{B_4}\right] \frac{\partial^2 \{y^*\}}{\partial T_0^2} = \{0\}_{2 \times 1} \quad (22-3)$$

که بردار $\{y^*\}$ شامل توابع وابسته بوده و $\left[\overline{B_j}\right], j=1,2$ ضرایب ماتریس‌ها هستند. حل معادلات (۲۲-۳) به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\{y^*\} = \{V(X, T_1, T_2)\} \exp(i\omega T_0) \quad (23-3)$$

که ω فرکانس بی‌بعد است. این پارامتر برای معادلات اول و چهارم (۱۹-۳ الف)، (۱۹-۳ د) فرکانس محوری (ω_{ax}) و برای معادلات دوم و سوم (۱۹-۳ ب)، (۱۹-۳ ج) به عنوان فرکانس عرضی (ω_{tr}) تعریف می‌شود. با جایگذاری معادلات (۲۳-۳) در معادلات (۲۲-۳) نتیجه می‌شود:

$$\left[\overline{B_2}\right] \frac{d^2 V}{dX^2} + \left[\overline{B_1}\right] \frac{dV}{dX} + \left[\overline{B_0}\right] V = \{0\}, \quad \left[\overline{B_0}\right] = \left[\overline{B_3}\right] - \omega^2 \left[\overline{B_4}\right] \quad (24-3)$$

می‌توان حل معادله (۲۴-۳) را به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\{V(X, T_1, T_2)\} = \{A_6(T_1, T_2)\} e^{\beta X} \quad (25-3)$$

که β مقادیر ویژه و $\{A\}$ بردارهای ویژه هستند. با جایگذاری روابط (۲۵-۳) در معادلات (۲۴-۳) دستگاه معادلات جبری زیر به دست خواهد آمد:

$$[ax] \{A_6\} = \{0\}, \quad [ax] = \beta^2 [\overline{B_2}] + \beta [\overline{B_1}] + [\overline{B_0}] \quad (26-3)$$

برای حل غیر بدیهی، دترمینان ضرایب ماتریس $([ax])$ باید صفر باشد. رابطه حاصل معادله تفرق است که رابطه بین β و ω است. این یک معادله جبری درجه چهار است و ریشه‌های آن $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ تابع ω هستند. سپس بردارهای ویژه با استفاده از معادله (۲۶-۳) تعیین خواهند شد. $\{A_6\}$ بردار ویژه

مربوط به مقدار ویژه β است. با تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه حل عمومی معادلات (۳-۲۴) به صورت زیر است:

$$\{V(X, T_1, T_2)\} = \sum_{j=1}^4 C_j \{A_6(T_1, T_2)\}_j e^{\beta_j X} \quad (۳-۲۷-الف)$$

که C_j ها ثابت هستند، با اعمال شرایط مرزی، یک دستگاه معادله جبری به شکل $[bx]_{4 \times 4} \{C\} = \{0\}$ به دست می‌آیند که عناصر ماتریس $[bx]$ تابع ω هستند. برای حل غیر صفر، دترمینان ضرایب ماتریس $([bx])$ باید صفر باشد. این معادله پیچیده را می‌توان با روش نصف کردن حل و فرکانس‌های طبیعی سیستم را مشخص کرد. حل معادلات (۳-۲۲) به شکل زیر است:

$$\{y^*\} = \{V(X, T_1, T_2)\} \exp(i \omega T_0) + C.C, \quad \omega = \omega_{ax} \text{ or } \omega_{tr} \quad (۳-۲۷-ب)$$

که $C.C$ عبارت‌های مزدوج مختلط حل است. روند مذکور را می‌توان برای معادلات (۳-۱۹ الف)، (۳-۳) و (۱۹-د) و (۱۹-۳ ب)، (۱۹-۳ ج) اجرا کرد. برای معادلات (۳-۱۹ الف)، (۳-۱۹ د) نتیجه می‌شود:

$$\{V_{14}(X, T_1, T_2)\} = \sum_{j=1}^4 d_j (T_1, T_2) \{A_{14}\}_j e^{\beta_j X}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{00}^* \\ w_{10}^* \end{Bmatrix} = \{V_{14}(X, T_1, T_2)\} \exp(i \omega_{ax} T_0) + C.C \quad (۳-۲۸-الف)$$

و برای معادلات (۳-۱۹ ب) و (۳-۱۹ ج):

$$\{V_{23}(X, T_1, T_2)\} = \sum_{j=1}^4 d_j (T_1, T_2) \{A_{23}\}_j e^{\beta'_j X}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{10}^* \\ w_{00}^* \end{Bmatrix} = \{V_{23}(X, T_1, T_2)\} \exp(i \omega_{tr} T_0) + C.C \quad (۳-۲۸-ب)$$

با استفاده از معادلات (۳-۱۹ ب)، (۳-۱۹ ج) و با جایگذاری $\omega_{tr}=0$ بار کمانش را می‌توان محاسبه کرد. بار محوری تأثیری بر فرکانس‌های خطی معادلات (۳-۲۰ الف)، (۳-۲۰ د) ندارد.

¹ Procedure

مشابه معادلات (۱۹-۳)، معادلات (۲۰-۳) دو به دو کوپل ولی ناهمگن هستند. بنابراین دو معادله کوپل ناهمگن نتیجه می‌شود. برای مثال در ادامه حل معادلات (۲۰-۳ الف)، (۲۰-۳) توضیح داده می‌شوند. حل بخش همگن مشابه مرتبه ε است. حل مرتبه ε در بخش ناهمگن معادلات مرتبه ε^2 جایگذاری می‌شود. شکل کلی این معادلات به صورت معادله (۲۹-۳ الف) و معادلات (۱۹-۳ ب)، (۳-۳) ۱۹ ج) به شکل معادله (۲۹-۳ ب) است:

$$\begin{aligned} L_2 \begin{bmatrix} u_{11}^*, w_{01}^* \end{bmatrix} &= A_{10}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i \omega_{tr} T_0) + \\ &A_{11}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i (\omega_{ax} \pm \omega_{tr}) T_0) + C.C \\ L_3 \begin{bmatrix} u_{11}^*, w_{01}^* \end{bmatrix} &= A_{40}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i \omega_{tr} T_0) + \\ &A_{41}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i (\omega_{ax} \pm \omega_{tr}) T_0) + C.C \end{aligned} \quad (۲۹-۳ الف)$$

$$\begin{aligned} L_1 \begin{bmatrix} u_{01}^*, w_{11}^* \end{bmatrix} &= A_{20}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i \omega_{ax} T_0) + \\ &A_{21}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{tr} T_0) + A_{22}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{ax} T_0) + C.C \\ L_4 \begin{bmatrix} u_{01}^*, w_{11}^* \end{bmatrix} &= A_{30}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i \omega_{ax} T_0) + \\ &A_{31}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{tr} T_0) + A_{32}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{ax} T_0) + C.C \end{aligned} \quad (۲۹-۳ ب)$$

که A_{ij} توابع معلوم هستند. حل خصوصی برای جمله‌هایی که نمایی (به جز جمله $\exp(i \omega_{ax} T_0)$) هستند به صورت ترکیب خطی جمله‌های ناهمگن معادلات (۱۹-۳ الف)، (۱۹-۳ د) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u_{11p}^* &= B_{21}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i (\omega_{tr} \pm \omega_{ax}) T_0) + C.C \\ w_{01p}^* &= B_{31}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i (\omega_{tr} \pm \omega_{ax}) T_0) + C.C \end{aligned} \quad (۳۰-۳ الف)$$

$$\begin{aligned} u_{01p}^* &= B_{11}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{ax} T_0) + B_{12}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{tr} T_0) + C.C \\ w_{11p}^* &= B_{41}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{ax} T_0) + B_{42}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{tr} T_0) + C.C \end{aligned} \quad (۳۰-۳ ب)$$

می‌توان توابع B_{ij} را با جایگذاری روابط (۳۰-۳) در معادلات (۲۹-۳) به دست آورد. جمله $\exp$

$(i \omega_{ax} T_0)$ برای معادلات (۲۰-۳ الف) و (۲۰-۳ د) جمله سکولار است که می‌تواند منجر به حل

ناهمگرا گردد. بنابراین حل همگرا، با حذف سکولاریتی تعیین می‌گردد. این موضوع نیازمند تعیین

توابع الحاقی و استفاده از شرایط حل پذیری است. جزئیات حل در مراجع [۱۲۴-۱۲۵] آورده شده

است. اعمال شرایط حل پذیری (پیوست ج) منجر به رابطه (۳۱-۳ الف) می‌شود:

$$\frac{\partial A_{14}}{\partial T_1} = 0 \rightarrow A_{14}(T_1, T_2) = A_{14}(T_2) \quad (31-3) \text{ الف}$$

با استفاده از روند مشابه می‌توان معادلات (۳-۲۰ ب)، (۳-۲۰ ج) را بررسی کرد. برای این معادلات جمله‌های سکولار ضرایب جمله $\exp(i\omega_{tr}T_0)$ هستند با اعمال شرایط حل‌پذیری نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial A_{23}}{\partial T_1} = 0 \rightarrow A_{23}(T_1, T_2) = A_{23}(T_2) \quad (31-3) \text{ ب}$$

معادلات (۳-۲۱) مشابه معادلات مرتبه ε^2 حل می‌گردند. این معادلات شامل دو معادله کوپل ناهمگن هستند. برای نمونه در ادامه، حل معادلات (۳-۲۱ الف)، (۳-۲۱ د) توضیح داده می‌شود. حل بخش همگن مشابه معادلات مرتبه ε است. برای بخش ناهمگن، حل معادلات مرتبه ε و ε^2 در بخش ناهمگن معادلات مرتبه ε^3 جایگزین شده‌است. شکل کلی این معادلات به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} L_1[u_{02}^*, w_{12}^*] &= A_{30}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i\omega_{ax} T_0) + A_{31}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(3i\omega_{ax} T_0) \\ &+ A_{32}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i(2\omega_{tr} \pm \omega_{ax})T_0) + C.C \\ L_4[u_{02}^*, w_{12}^*] &= A_{50}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i\omega_{ax} T_0) + A_{51}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(3i\omega_{ax} T_0) \\ &+ A_{52}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i(2\omega_{tr} \pm \omega_{ax})T_0) + C.C \end{aligned} \quad (32-3)$$

که A_{ij} توابع معلوم هستند. حل خصوصی برای جمله‌های نمایی (به جز جمله $\exp(i\omega_{ax}T_0)$)، به صورت ترکیب خطی جمله‌های ناهمگن معادلات (۳-۳۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u_{02p}^* &= B_{11}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(3i\omega_{ax} T_0) + \\ &B_{12}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i(2\omega_{tr} \pm \omega_{ax})T_0) + C.C \\ w_{12p}^* &= B_{41}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(3i\omega_{ax} T_0) + \\ &B_{42}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i(2\omega_{tr} \pm \omega_{ax})T_0) + C.C \end{aligned} \quad (33-3)$$

توابع B_{ij} با جایگذاری روابط (۳-۳۳) در معادلات (۳-۲۹ الف) و (۳-۲۹ د) به دست خواهند آمد. جمله $\exp(i\omega_{ax}T_0)$ یک جمله سکولار برای معادلات (۳-۲۹ الف) و (۳-۲۹ د) است. بنابراین با استفاده از شرایط حل‌پذیری، سکولاریتی مسأله حذف می‌گردد. روند مشابه‌ای برای معادلات (۳-۲۹ ب) و (۳-۲۹ ج) انجام شد. نتایج اعمال شرایط حل‌پذیری به شکل زیر است:

$$C_{11} \overline{A_{23}}(T_2) \cdot \overline{A_{14}}(T_2) A_{14}(T_2) + C_{12} \overline{A_{23}}^2(T_2) \cdot A_{23}(T_2) + C_{13} \cdot \frac{d \overline{A_{23}}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (3-34 \text{ الف})$$

$$C_{41} \overline{A_{23}}(T_2) \cdot \overline{A_{14}}(T_2) A_{23}(T_2) + C_{42} \overline{A_{14}}^2(T_2) \cdot A_{14}(T_2) + C_{43} \cdot \frac{d \overline{A_{14}}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (3-34 \text{ ب})$$

که ضرایب مختلط معلوم بوده و $\overline{A_{ij}}$ مزدوج مختلط A_{ij} است. معادلات (3-34) به صورت مستقیم قابل حل نیستند و معمولاً دامنه ارتعاشات به شکل قطبی در نظر گرفته می‌شود:

$$A_{23}(T_2) = \frac{1}{2} a_{23}(T_2) \cdot \exp(i \beta_{23}(T_2)), \quad A_{14}(T_2) = \frac{1}{2} a_{14}(T_2) \cdot \exp(i \beta_{14}(T_2)) \quad (3-35)$$

که مقادیر حقیقی a_{ij} و β_{ij} به ترتیب دامنه و فاز هستند. با جایگذاری معادله (3-35) در معادله (3-34) نتیجه می‌شود:

$$C_{14} \cdot a_{23}(T_2) \cdot a_{14}^2(T_2) + C_{15} \cdot a_{23}^3(T_2) + C_{16} \cdot a_{23}(T_2) \frac{d \beta_{23}(T_2)}{dT_2} + C_{17} i \frac{da_{23}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (3-36 \text{ الف})$$

$$d_{14} \cdot a_{23}(T_2) \cdot a_{14}^2(T_2) + d_{15} \cdot a_{23}^3(T_2) + d_{16} \cdot a_{23}(T_2) \frac{d \beta_{23}(T_2)}{dT_2} + d_{17} i \frac{da_{23}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (3-36 \text{ ب})$$

$$C_{44} \cdot a_{14}(T_2) \cdot a_{23}^2(T_2) + C_{45} \cdot a_{14}^3(T_2) + C_{46} \cdot a_{14}(T_2) \frac{d \beta_{14}(T_2)}{dT_2} + C_{47} i \frac{da_{14}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (3-36 \text{ ج})$$

$$d_{44} \cdot a_{14}(T_2) \cdot a_{23}^2(T_2) + d_{45} \cdot a_{14}^3(T_2) + d_{46} \cdot a_{14}(T_2) \frac{d \beta_{14}(T_2)}{dT_2} + d_{47} i \frac{da_{14}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (3-36 \text{ د})$$

که d_{ij} و C_{ij} ثابت‌های مختلط معلوم هستند. با جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی (3-36) نتیجه می‌شود:

$$\frac{da_{23}(T_2)}{dT_2} = 0 \rightarrow a_{23}(T_2) = a_{23}, \quad \frac{da_{14}(T_2)}{dT_2} = 0 \rightarrow a_{14}(T_2) = a_{14} \quad (37-3 \text{ الف})$$

به عبارت دیگر دامنه‌های عرضی و محوری ثابت هستند. همچنین:

$$\beta_{23} = \kappa_{23} T_2, \quad \beta_{14} = \kappa_{14} T_2, \\ \kappa_{23} = \gamma_{11} a_{14}^2 + \gamma_{12} a_{23}^2, \quad \kappa_{14} = \gamma_{21} a_{14}^2 + \gamma_{22} a_{23}^2 \quad (37-3 \text{ ب})$$

که γ_{ij} ثابت‌های معلوم هستند. با استفاده از معادلات (38-3) و (35-3) فرکانس‌های عرضی و محوری به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$(\omega_{tr})_{NL} = \omega_{tr} + \varepsilon^2 \kappa_{23} + O(\varepsilon^3), \quad (\omega_{ax})_{NL} = \omega_{ax} + \varepsilon^2 \kappa_{14} + O(\varepsilon^3) \quad (38-3)$$

این نکته حائز اهمیت است که فرکانس‌های غیرخطی تابعی از دامنه‌های عرضی و محوری هستند. درحالی‌که در بیشتر پژوهش‌های انجام شده فرکانس‌ها تنها به دامنه عرضی وابسته هستند.

۳-۴- حل عددی تیر

از نرم‌افزار انسیس برای تحلیل مودال تیر استفاده شده است. مشخصات هندسی و مکانیکی تیر در جدول (۱-۳) آورده شده است. از المان SOLID186 برای مدل‌سازی سه‌بعدی تیر استفاده شده است. این المان دارای ۲۰ گره با سه درجه آزادی انتقالی در هر گره است.

جدول (۱-۳) مشخصات تیر

۷۰۰	(mm)	طول
۴۰	(mm)	عرض
۷	(mm)	ضخامت
۲۰۰	(GPa)	مدول الاستیسیته
۰/۳		ضریب پواسون
۷۸۰۰	(kg/m ³)	چگالی

۵-۳- مطالعه پارامتری تیر مسأله

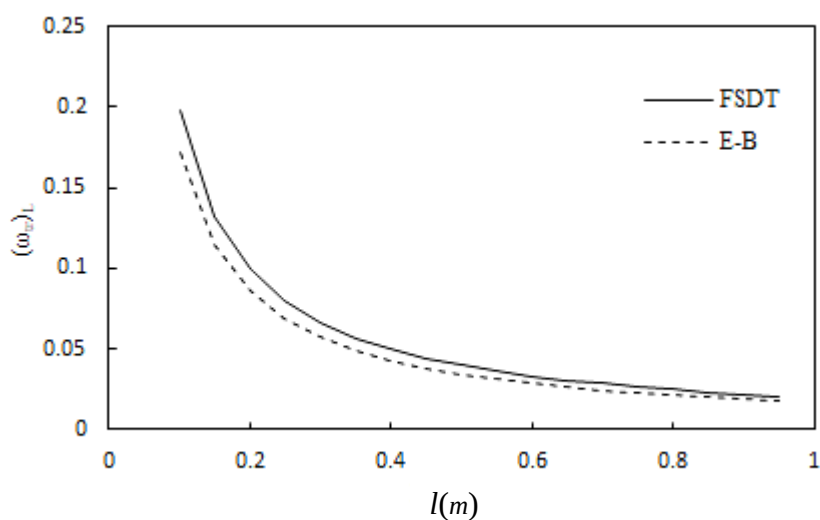
در ابتدا، تأثیر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس طبیعی، بدون در نظر گرفتن بار محوری، بررسی شده است. تمامی داده‌های ورودی بر اساس جدول (۳-۱) بوده و شرایط مرزی ساده در نظر گرفته شده است. فرکانس‌های گزارش شده (به جز موارد خاص ذکر شده)، فرکانس‌های طبیعی خطی بی‌بعد عرضی $(\omega_{tr})_L$ هستند. در جدول (۳-۲) ضریب l/h نسبت منظر بوده و مقادیر کوچک این ضریب مربوط به تیرهای ضخیم و کوتاه است. در ادامه نتایج حاصل از تئوری اوپلر-برنولی خطی (EB)، ریلی (R-B) و حل عددی FE مقایسه می‌گردد. با افزایش نسبت منظر، نتایج تئوری‌ها به یکدیگر نزدیک‌تر شده و این نشان‌دهنده اهمیت کم برش در تیرهای بلند و نازک بوده و در نتیجه تئوری FSDT نتایج را بهبود نمی‌دهد. در حالی که در تیرهای ضخیم‌تر خصوصاً در مودهای بالاتر، نتایج FSDT به حل عددی سه بعدی نزدیک‌تر است.

جدول (۳-۲) مقایسه $(\omega_{tr})_L$ به‌ازای نسبت‌های منظر مختلف

l/h	روش	مد اول	مد دوم	مد سوم
۵	FSDT	۰/۵۲۷	۱/۷۸۰	۳/۳۲۱
	EB	۰/۴۹۱	۱/۹۶۴	۴/۴۲۰
	R-B	۰/۴۸۳	۱/۸۴۷	۳/۸۸۳
	FE	۰/۴۷۸	۱/۶۲۴	۳/۰۳۴
۸	FSDT	۰/۳۴۵	۱/۲۷۰	۲/۵۶۲
	EB	۰/۳۰۷	۱/۲۲۸	۲/۷۶۳
	R-B	۰/۳۰۵	۱/۱۹۷	۲/۶۱۵
	FE	۰/۳۱۳	۱/۱۶۰	۲/۳۶۲
۱۰	FSDT	۰/۲۷۹	۱/۰۵۵	۲/۱۹۲
	EB	۰/۲۴۶	۰/۹۸۲	۲/۲۱۰
	R-B	۰/۲۴۵	۰/۹۶۶	۲/۱۳۲
	FE	۰/۲۵۳	۰/۹۶۱	۲/۰۱۲
۵۰	FSDT	۰/۰۵۷	۰/۲۲۷	۰/۵۰۹
	EB	۰/۰۴۹	۰/۱۹۶	۰/۴۴۱
	R-B	۰/۰۴۹	۰/۱۹۶	۰/۴۴۱
	FE	۰/۰۵۱	۰/۲۰۵	۰/۴۶۰
۷۵	FSDT	۰/۰۳۸	۰/۱۵۲	۰/۳۴۱

۰/۲۹۵	۰/۱۳۱	۰/۰۳۳	EB	۱۰۰
۰/۲۹۴	۰/۱۳۱	۰/۰۳۳	R-B	
۰/۲۹۴	۰/۱۳۱	۰/۰۳۲	FE	
۰/۲۵۶	۰/۱۱۴	۰/۰۲۸	FSDT	
۰/۲۲۱	۰/۰۹۸	۰/۰۲۵	EB	
۰/۲۲۱	۰/۰۹۸	۰/۰۲۵	R-B	
۰/۲۲۱	۰/۰۹۸	۰/۰۲۴	FE	

شکل (۲-۳) تأثیر طول بر روی فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد. افزایش طول باعث کاهش فرکانس تیر می‌شود، یا به عبارت دیگر فرکانس تیر با طول آن رابطه عکس دارد. در تئوری تیر اویلر برنولی، با فرض خیز کوچک، فرکانس با عکس مجذور طول ($1/l^2$) رابطه دارد.



شکل (۲-۳) تأثیر طول بر روی فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_L = 0.02l^{-0.997}$

جدول (۳-۳) نشان می‌دهد که با افزایش بار محوری، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. در حقیقت تغییرات بار محوری متناظر با تغییرات سفتی^۱ تیر است، همچنین بار منفی می‌تواند در تیر ایجاد کمزش کند. برای تیر با مشخصات ذکر شده در جدول (۱-۳) بار کمزش $P^* = -0.8e-4$ است.

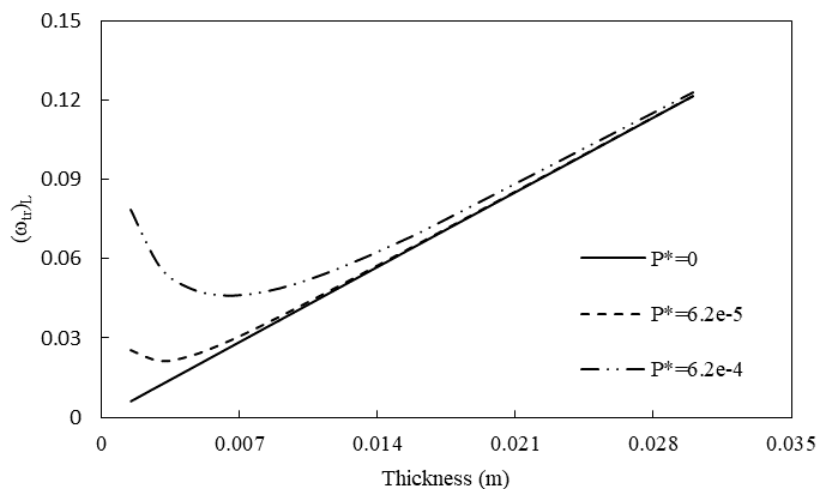
جدول (۳-۳) تأثیر بار محوری بر فرکانس عرضی خطی $(\omega_{tr})_L$ با استفاده از FSDT

مد سوم	مد دوم	مد اول	P^*
۰/۲۴۳	۰/۱۰۱	۰/۰۱۱	-۰/۷۰e-۴

^۱ Stiffness

۰/۲۵۶	۰/۱۱۴	۰/۰۲۸	۰/۰۰۰
۰/۳۹۳	۰/۲۲۹	۰/۱۰۳	۰/۱۰e-۲
۰/۷۱۴	۰/۴۵۹	۰/۲۲۴	۰/۵۰e-۲
۰/۹۷۶	۰/۶۳۸	۰/۳۱۵	۰/۱۰e-۱
۱/۱۸۲	۰/۷۷۸	۰/۳۸۶	۰/۱۵e-۱
۱/۳۵۷	۰/۸۹۶	۰/۴۴۵	۰/۲۰e-۲

شکل (۳-۳) تأثیر تغییرات ضخامت بر روی فرکانس را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با چشم‌پوشی از بار محوری در محدوده مورد مطالعه، با افزایش ضخامت، فرکانس افزایش می‌یابد. همچنین فرکانس با ضخامت رابطه خطی دارد. این رابطه در تیر اوپلر-برنولی با تکیه‌گاه ساده نیز صادق است [۱۱۷]. بار محوری، رابطه بین فرکانس و ضخامت را تغییر می‌دهد. توجه شود که تغییرات ضخامت؛ جرم و سفتی تیر را هم‌زمان تغییر می‌دهد.



شکل (۳-۳) تأثیر ضخامت بر فرکانس عرضی اول با بارهای محوری مختلف

در جدول (۴-۳) فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی (B.C.) مختلف آورده شده است. همان‌طور که پیش‌بینی می‌شد، فرکانس‌های طبیعی تیر با تکیه‌گاه ساده کمتر از سایر موارد است.

جدول (۴-۳) فرکانس‌های تیر با تکیه‌گاه‌های مختلف

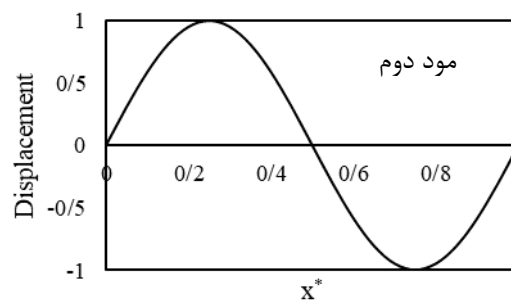
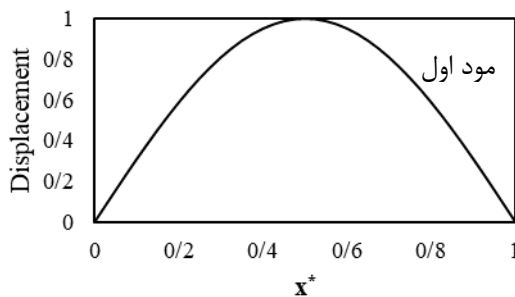
مد سوم	مد دوم	مد اول	B.C.
۰/۲۵۶	۰/۱۱۴	۰/۰۲۸	SS
۰/۳۰۰	۰/۱۴۴	۰/۰۴۴	SC

۰/۳۴۸	۰/۱۷۸	۰/۰۶۵	CC
-------	-------	-------	----

در تئوری‌هایی مانند اویلر-برنولی یا تیموشنکو، فرکانس محوری محاسبه نمی‌شود؛ در حالی که در فرمول‌بندی FSDT فرکانس محوری مانند فرکانس عرضی قابل محاسبه است. در جدول (۳-۵) فرکانس محوری بی‌بعد FSDT آورده شده است. شکل (۳-۴) دو شکل مود اول تیر را نشان می‌دهد.

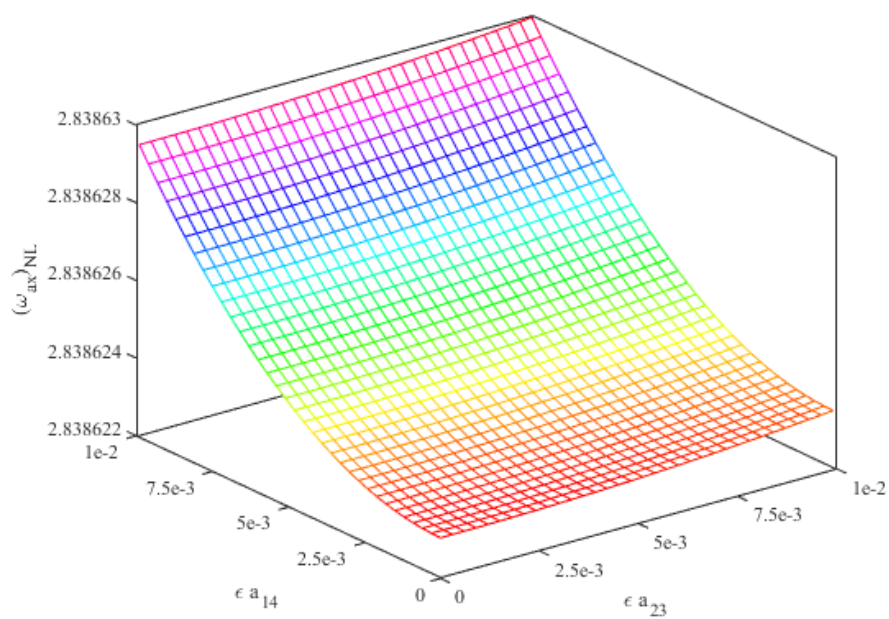
جدول (۳-۵) فرکانس‌های محوری بی‌بعد

مد سوم	مد دوم	مد اول	
۸/۵۱۵	۵/۶۷۷	۲/۸۳۹	$(\omega_{ax})_L$

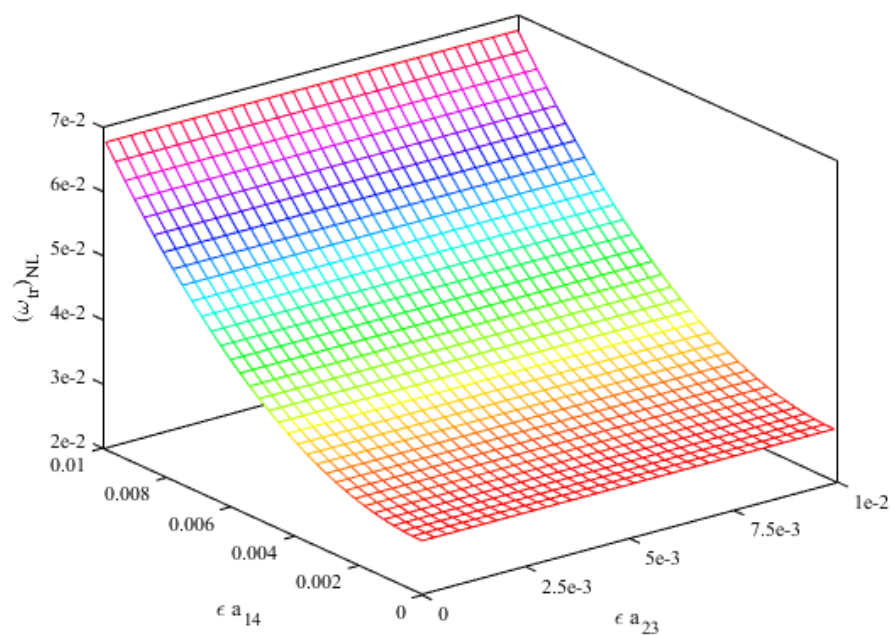


شکل (۳-۴) شکل مودها (عرضی - خطی)

در فرمول‌بندی FSDT نه تنها فرکانس‌های غیرخطی به دامنه عرضی a_{23} وابسته هستند بلکه به دامنه محوری a_{14} نیز وابسته هستند. در شکل‌های (۳-۵) و (۳-۶) وابستگی فرکانس‌های غیرخطی بی‌بعد محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ و عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ به دامنه‌های محوری و عرضی بر اساس FSDT نشان داده شده است. لازم به ذکر است که نتایج مرتبط با دامنه، به صورت دامنه ضربدر اپسیلون گزارش شده است. حساسیت فرکانس عرضی نسبت به تغییرات دامنه‌های محوری و عرضی بیشتر از فرکانس محوری است.



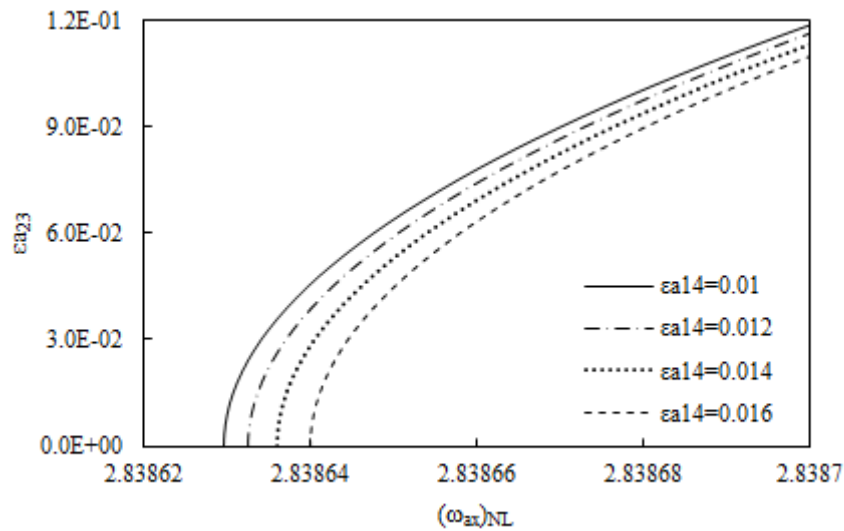
شکل (۵-۳) تغییرات $(\omega_{ax})_{NL}$ در FSDT بر حسب ϵa_{23} , ϵa_{14}



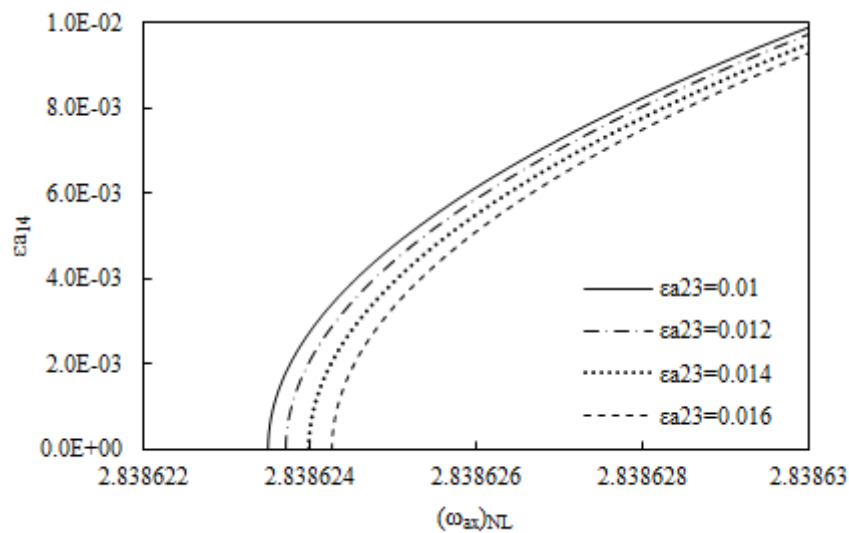
شکل (۶-۳) تغییرات $(\omega_{tr})_{NL}$ در FSDT بر حسب ϵa_{23} , ϵa_{14}

در شکل‌های (۷-۳) و (۸-۳) تأثیر دامنه‌های محوری و عرضی بر روی فرکانس‌های محوری و عرضی آورده شده است. مثلاً افزایش حدود ۶۰٪ در a_{23} (با a_{14} ثابت) یا افزایش ۶۰٪ در a_{14} (با a_{23} ثابت) نشان می‌دهد که تأثیر دامنه محوری بر روی فرکانس محوری بیشتر از دامنه عرضی است، هر چند که

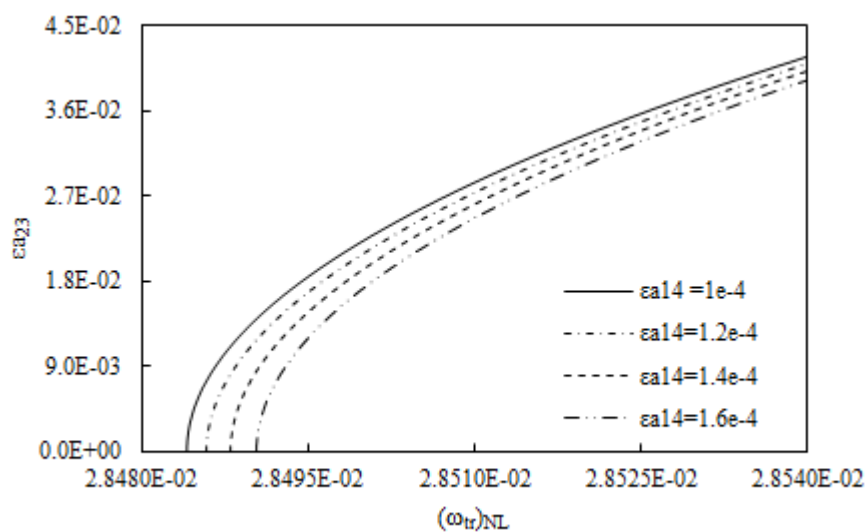
تغییرات فرکانس محوری با دامنه محوری و دامنه عرضی کوچک است. همچنین تأثیر دامنه محوری بر روی فرکانس عرضی از تأثیر دامنه عرضی بیشتر است. به هر حال اثر هر دو دامنه محوری و عرضی بر روی فرکانس عرضی غیرخطی قابل توجه است.



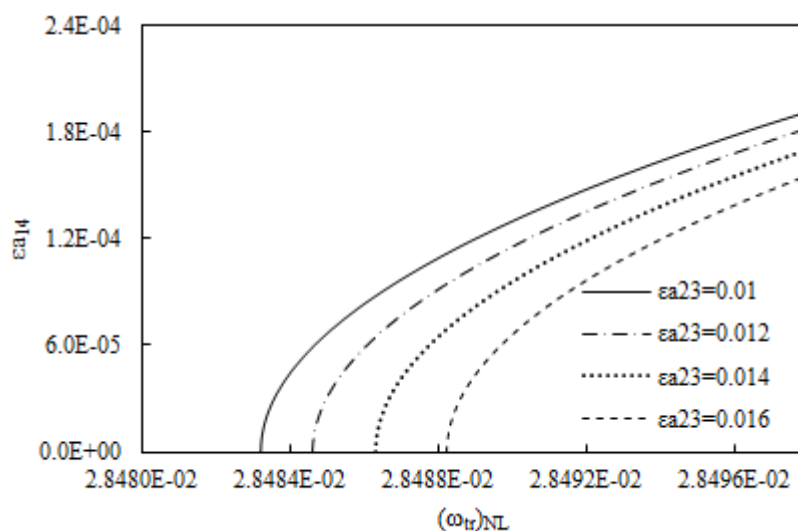
شکل (۳-۷ الف) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه عرضی (برای دامنه‌های محوری مختلف)



شکل (۳-۷ ب) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه محوری (برای دامنه‌های عرضی مختلف)



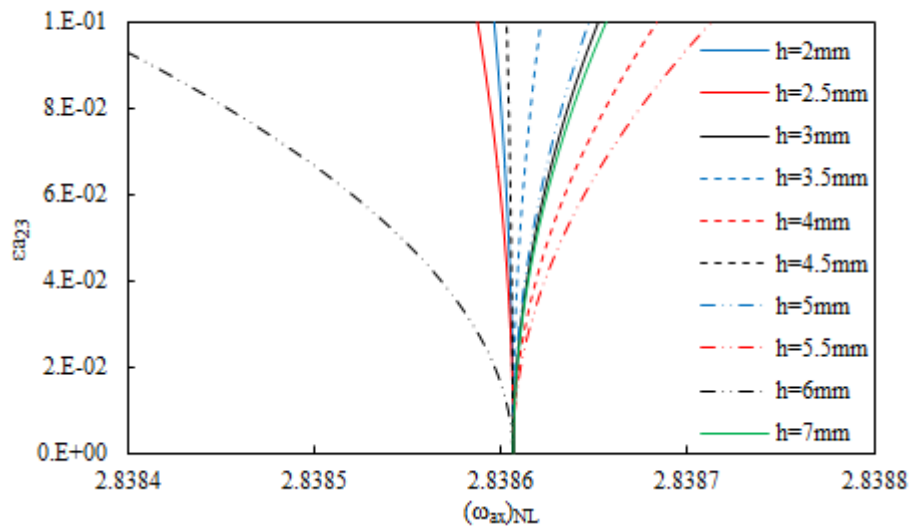
شکل (۳-۸ الف) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه عرضی (برای دامنه‌های محوری مختلف)



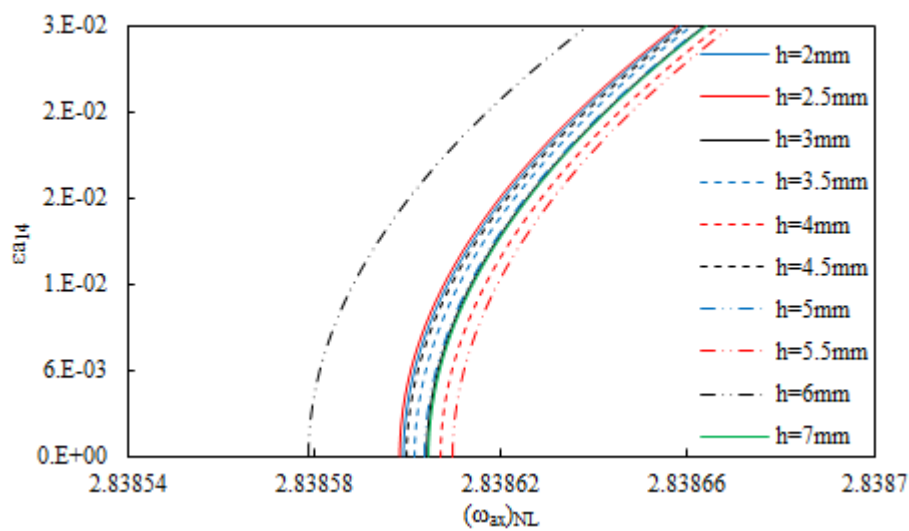
شکل (۳-۸ ب) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه محوری (برای دامنه‌های عرضی مختلف)

شکل‌های (۳-۹) و (۳-۱۰) تأثیر ضخامت بر روی فرکانس‌های غیرخطی عرضی و محوری نشان می‌دهد. به ازای ضخامت‌های مختلف نمودار فرکانس-دامنه تغییرات اساسی خواهد داشت و علاوه بر رفتار سخت شونده، رفتار نرم‌شونده نیز مشاهده می‌گردد. همچنین افزایش ضخامت به ازای یک دامنه مشخص می‌تواند باعث افزایش فرکانس گردد و این، به میزان دامنه‌های عرضی و محوری بستگی دارد. برای مقادیر مشخص دامنه‌ها، فرکانس عرضی غیرخطی تقریباً مستقل از محدوده خاصی از ضخامت

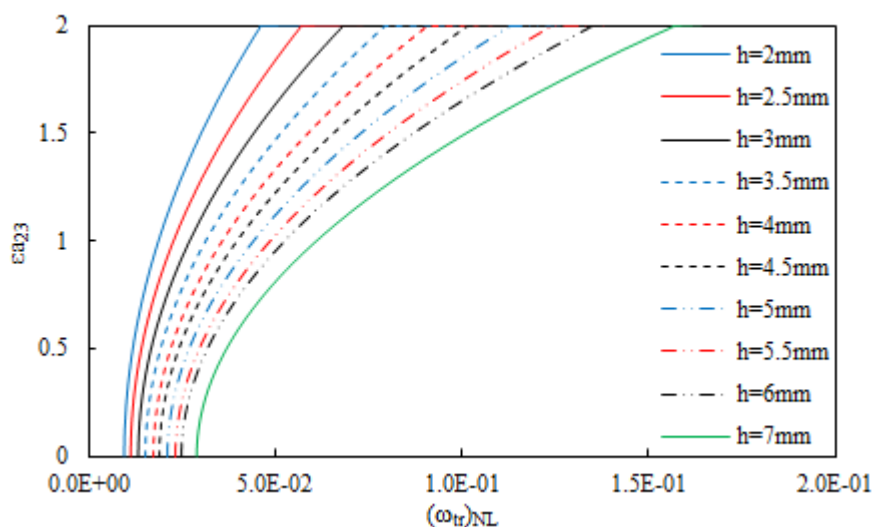
است. علاوه بر آن تأثیر تغییرات ضخامت بر روی فرکانس محوری زیاد نیست اما می‌تواند فرکانس عرضی را به اندازه قابل توجهی تغییر دهد.



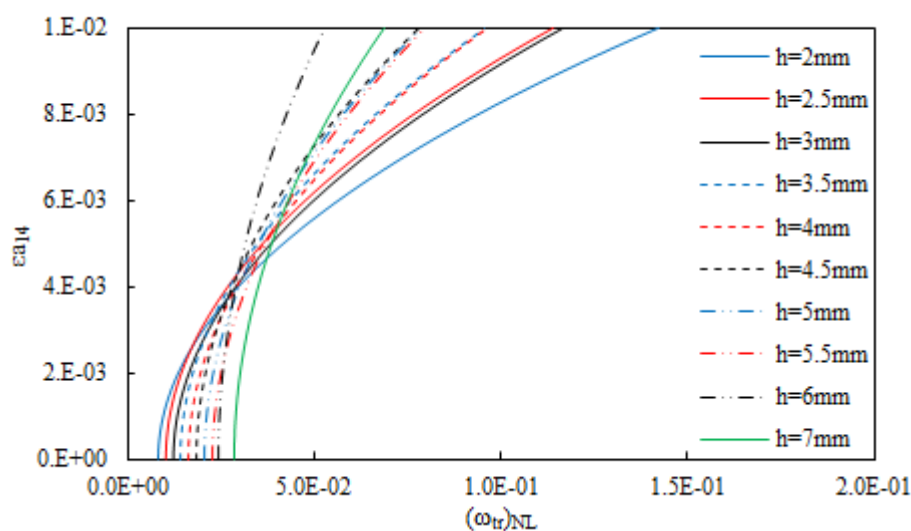
شکل (۹-۳ الف) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه عرضی (برای ضخامت‌های مختلف) $(\epsilon a_{14}=0.01)$



شکل (۹-۳ ب) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه محوری (برای ضخامت‌های مختلف) $(\epsilon a_{23}=0.03)$

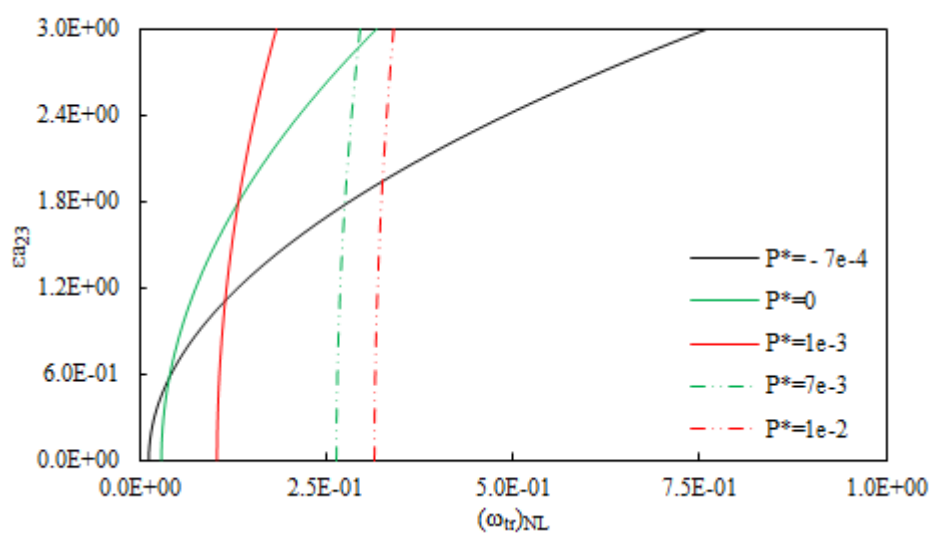


شکل (۳-۱۰ الف) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه عرضی (برای ضخامت‌های مختلف) ($\epsilon_{a14}=0.001$)

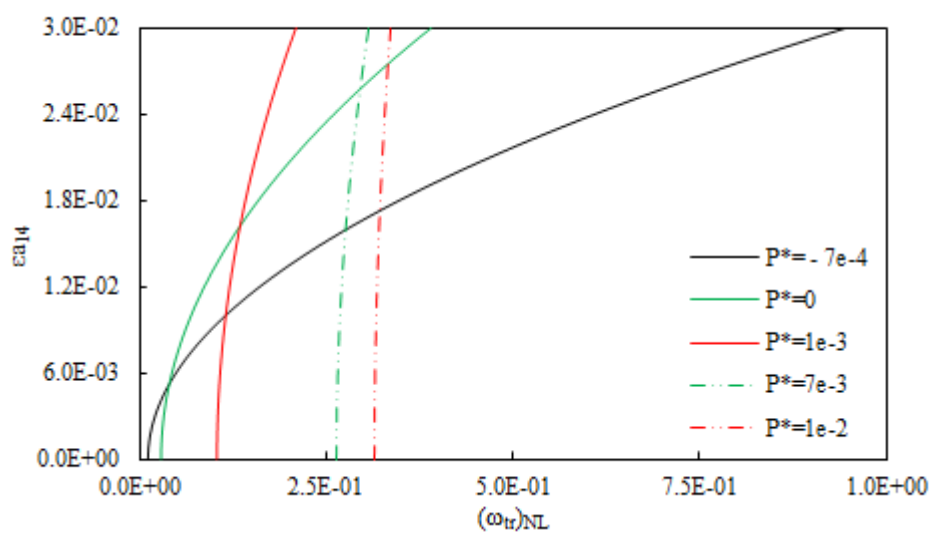


شکل (۳-۱۰ ب) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه محوری (برای ضخامت‌های مختلف) ($\epsilon_{a23}=0.01$)

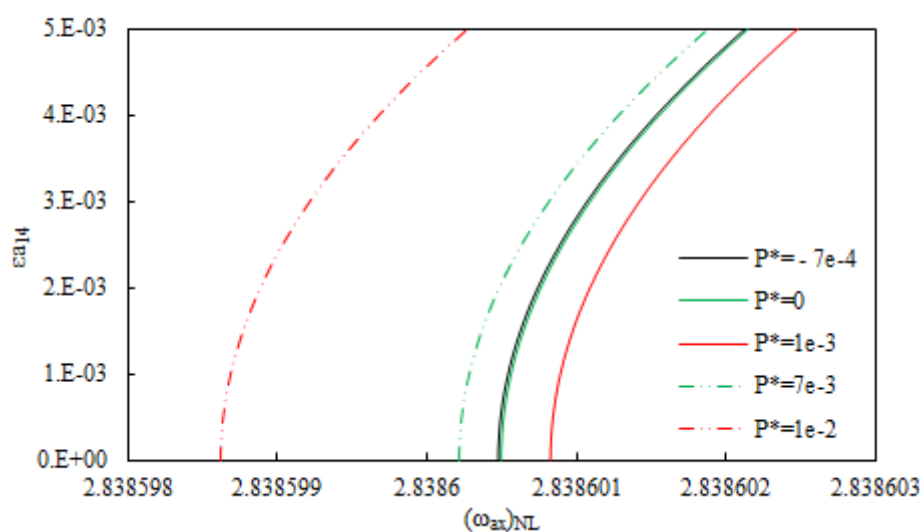
تأثیر بارهای کششی و فشاری بر روی نمودار فرکانس-دامنه در شکل‌های (۳-۱۱) و جدول (۳-۶) نشان داده شده است. مشابه تغییرات ضخامت، افزایش فرکانس با افزایش بار محوری وابسته به دامنه‌های ارتعاشات است و بار منفی فرکانس عرضی را کاهش می‌دهد ولی تأثیر چندانی بر روی فرکانس محوری ندارد. اختلاف فرکانس‌ها در جدول نسبت به حالت بدون بار محوری محاسبه شده است.



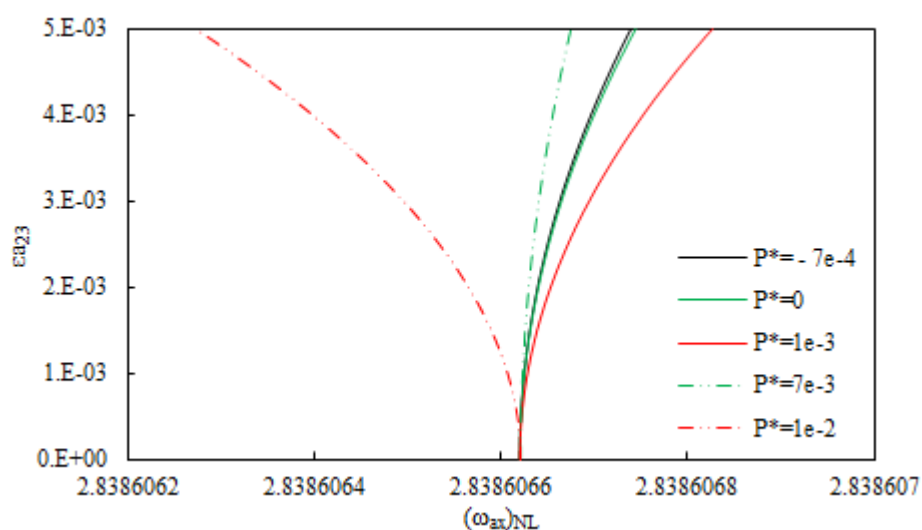
شکل (۱۱-۳) الف) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه عرضی (برای بارهای محوری مختلف) ($\epsilon_{a14}=0.001$)



شکل (۱۱-۳) ب) تغییرات فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_{NL}$ با دامنه محوری (برای بارهای محوری مختلف) ($\epsilon_{a23}=0.01$)



شکل (۳-۱۱) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه محوری (برای بارهای محوری مختلف) ($\varepsilon a_{23}=0.01$)



شکل (۳-۱۱د) تغییرات فرکانس محوری $(\omega_{ax})_{NL}$ با دامنه عرضی (برای بارهای محوری مختلف) ($\varepsilon a_{14}=0.01$)

جدول (۳-۶) تأثیر بار محوری بر روی فرکانس عرضی به ازای دامنه‌های مشخص ($\varepsilon a_{14}=0.01, \varepsilon a_{23}=0.01$)

P^*	$(\omega_{tr})_{NL}$	اختلاف (%)
$-4e-7$	0.01098	$-61/44$
0	0.02848	0
$3e-1$	0.0335	$262/89$
$3e-7$	0.26436	$828/23$
$2e-1$	0.31500	$1006/03$

۶-۳- جمع‌بندی

در این فصل، تحلیل فرکانسی تیر با فرض خیز نسبتاً زیاد و تحت بار محوری با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه گردید. معادلات حاکم، که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی هستند، با استفاده از روش بسط مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات به صورت تحلیلی حل گردیدند و نتایج با تحلیل‌های عددی مقایسه و تأثیر ضخامت، طول و بار محوری بر روی فرکانس طبیعی بررسی گردید. بر خلاف روش اویلر-برنولی و تیموشینکو امکان تعیین فرکانس محوری علاوه بر تعیین فرکانس عرضی با استفاده از معادلات حاصل، وجود دارد.

فصل چهارم

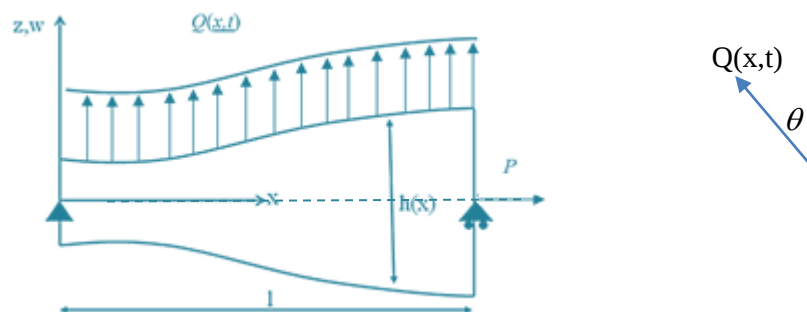
ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ضخامت متغیر با خیز نسبتاً
زیاد با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

۴-۱- مقدمه

در این فصل، معادلات حاکم بر تیر مرتعش با خیز نسبتاً زیاد و ضخامت متغیر با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده است. تیر از ماده همگن و ایزوتروپیک ساخته شده است که تحت بار محوری و عرضی قرار گرفته است. سینماتیک مسأله بر اساس رابطه کرنش جابجایی فن کارمن بوده و قانون هوک به عنوان معادله ساختاری استفاده می‌شود. معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر ارتعاشات محوری و عرضی تیر، شامل چهار معادله کوپل غیرخطی با ضرایب متغیر است که با روش گالرکین و تکنیک اغتشاشات، فرکانس‌های طبیعی و پاسخ آن تعیین شده است. با مطالعه پارامتری تأثیر توابع ضخامت متفاوت مانند توابع خطی، چندجمله‌ای و مثلثاتی بر روی نتایج مورد بررسی قرار گرفته است.

۴-۲- ارتعاشات آزاد تیر ضخامت متغیر با فرض خیز نسبتاً زیاد

یک تیر ایزوتروپیک، همگن با سطح مقطع متقارن و ضخامت غیریکنواخت $h(x)$ طول l ، چگالی ρ و سطح مقطع $A(x)$ مفروض است. دستگاه مختصات دکارتی (x, y, z) در گوشه چپ تیر واقع شده است که محور x در راستای طول و محور z در راستای ضخامت تیر بوده که از صفحه میانی اندازه‌گیری می‌شود. اگر مقطع تیر مستطیل شکل باشد $A(x) = b \cdot h(x)$ که b پهنای تیر است. بار محوری P و بار عرضی $Q(x, t)$ مطابق شکل به تیر اعمال می‌شود که در ارتعاشات آزاد، $Q(x, t) = 0$ است.



شکل (۴-۱) هندسه تیر در معرض بار خارجی

میدان جابه‌جایی بر اساس FSDT مطابق رابطه (۳-۱) است،
 رابطه کرنش جابجایی با روابط فن‌کارمن (۳-۲) و (۳-۳)
 تعریف شده و رابطه هوک همان رابطه (۳-۴) است. اصل
 هامیلتون نیز با رابطه (۳-۶) تعریف می‌شود. تغییرات
 انرژی کرنشی به صورت زیر است:

$$\delta U = \int_0^l \iint_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dA dx, \quad dA = dA(x) \quad (1-4)$$

با جایگذاری روابط (۳-۴) در معادله (۱-۴) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_0^l \left(N_{x,x} \delta u_0 + (Q_x + M_{x,x}) \delta u_1 + A_0 \delta w_0 + A_1 \delta w_1 \right) dx + \\ & \left(N_x \delta u_0 + M_x \delta u_1 + B_0 \delta w_0 + B_1 \delta w_1 \right) \Big|_0^l \\ A_1 = & \left(M_x w_{0,x} + P_x w_{1,x} + M_{xz} (1 + w_1) \right)_{,x} \\ & + \left((w_1 + 1) N_z + Q_x w_{0,x} + M_{xz} w_{1,x} \right) \\ A_0 = & \left(N_x w_{0,x} + M_x w_{1,x} + Q_x (1 + w_1) \right)_{,x} \\ B_1 = & M_x w_{0,x} + P_x w_{1,x} + M_{xz} (1 + w_1) \\ B_0 = & M_x w_{1,x} + N_x w_{0,x} + Q_x (1 + w_1) - P_x w_{0,x} \end{aligned} \quad (2-4)$$

که منته‌های تنش به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} N_x = & \iint_A \sigma_x dA, \quad M_x = \iint_A z \sigma_x dA, \quad P_x = \iint_A z^2 \sigma_x dA \\ Q_x = & \kappa \iint_A \tau_{xz} dA, \quad M_{xz} = \kappa \iint_A z \tau_{xz} dA, \quad N_z = \iint_A \sigma_z dA \end{aligned} \quad (3-4)$$

با جایگذاری معادلات (۳-۱)، (۳-۳) و (۳-۴) در معادلات (۳-۴) می‌توان منته‌های تنش را بر حسب
 جمله‌های جابجایی تعیین کرد. به عنوان نمونه، برای محاسبه P_x ممان‌های سطحی به صورت زیر
 تعریف می‌شوند:

$$I_i(x) = I_i = \iint_A z^i dA, \quad i = 0, \dots, 4 \quad (4-4)$$

از آنجایی که سطح مقطع متقارن است، به ازای n های فرد مقادیر I_n صفر هستند. همچنین برای سطح

مقطع مستطیلی با ضخامت ثابت b انتگرال دوگانه در فرمول (۴-۴) به شکل زیر خواهد بود:

$$\iint_A f \cdot dA = b \int_{-h(x)/2}^{h(x)/2} f \cdot dz \xrightarrow{\text{for example}} P_x = \iint_A z^2 \sigma_x dA = b \int_{-h(x)/2}^{h(x)/2} z^2 \cdot \sigma_x \cdot dz \quad (۵-۴)$$

در نتیجه P_x به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$P_x = \left(A_4 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) + \lambda w_1 \left(1 + \frac{1}{2} w_1 \right) \right) I_2 \\ + A_4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) I_3 + \frac{1}{2} A_4 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 I_4 \quad (۶-۴)$$

انرژی جنبشی تیر به شکل زیر نوشته شده است:

$$T^* = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \iint_A \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dA(z) dx \quad (۷-۴)$$

و تغییرات آن عبارتند از:

$$T = \iiint T^* dx dy dz = \\ \frac{1}{2} \rho b \int_0^l \left(h \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + h \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 \right) dx \quad (۸-۴)$$

پتانسیل ناشی از بار محوری با رابطه (۳-۱۲) تعریف می شود. به این ترتیب به کمک اصل هامیلتون،

معادلات ارتعاش آزاد تیر ضخامت متغیر بر حسب منته‌های تنش به صورت زیر خواهد بود:

$$b \frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho b h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \\ b \frac{\partial M_x}{\partial x} - b Q_x - \frac{\rho b h^3}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \\ b \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + M_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + Q_x (1 + w_1) \right) - \rho b h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \\ b \frac{\partial}{\partial x} \left(M_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + M_{xz} (1 + w_1) \right) - b Q_x \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ - b M_{xz} \frac{\partial w_1}{\partial x} - b N_z (1 + w_1) - \frac{\rho b h^3}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \quad (۹-۴ \text{ الف})$$

و شرایط مرزی عبارتند از:

$$\begin{aligned}
N_x \delta u_0|_0^l &= 0 \\
M_x \delta u_1|_0^l &= 0 \\
\left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + Q_x (1+w_1) + Qu_0 + \frac{h}{2} Qu_1 + Qw_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{h}{2} Qw_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{h}{2} Qw_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{h^2}{4} Qw_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} - P \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \delta w_0|_0^l = 0 \\
\left(M_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + M_{xz} (1+w_1) + \frac{h}{2} Qu_0 + \frac{h^2}{4} Qu_1 + \frac{h^2}{4} Qw_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{h}{2} Qw_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{h^2}{4} Qw_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \delta w_1|_0^l = 0
\end{aligned} \tag{۹-۴ ب}$$

بر اساس مؤلفه‌های جابه‌جایی شکل عمومی معادلات حرکت به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
G_1[u_0, w_0, w_1] &= 0, \quad G_2[u_1, w_0, w_1] = 0 \\
G_3[u_0, u_1, w_0, w_1, P] &= 0, \quad G_4[u_0, u_1, w_0, w_1] = 0
\end{aligned} \tag{۱۰-۴}$$

G_1 تا G_4 اپراتورهای دیفرانسیلی هستند. این معادلات شامل چهار معادله دیفرانسیل جزئی

غیرخطی هستند که به یکدیگر کوپل هستند. شکل صریح بی‌بعد معادلات در ادامه، گزارش می‌شود.

۴-۳- تحلیل فرکانسی

در این بخش از تئوری اغتشاشات برای حل معادلات حاکم استفاده شده است. حل با تبدیل

معادلات حاکم به شکل بی‌بعد با استفاده از پارامترهای زیر شروع می‌شود:

$$u_0^*(x^*, t^*) = \frac{u_0(x, t)}{ww_0}, \quad w_0^*(x^*, t^*) = \frac{w_0(x, t)}{ww_0}, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{t}{t_0} \tag{۱۱-۴ الف}$$

$(^*)$ نشان‌دهنده شکل بی‌بعد کمیت $()$ است. ww_0 و t_0 مکان و زمان مشخصه هستند. زمان مشخصه

به صورت $t_0 = l/c$ تعریف می‌شود که c سرعت موج مشخصه است و به شکل $c = \sqrt{A_4/\rho}$ تعریف

می‌گردد. بر اساس پارامترهای بالا، پارامترهای زیر نیز تعریف می‌شوند.

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{A_4}, \quad \theta_2 = \frac{\kappa\mu}{A_4}, \quad P^* = \frac{P}{bA_4A_0}, \quad e = \frac{\rho \cdot ww_0^2}{A_4t_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{ww_0}{l}$$

$$A_0 = A(x)|_{x=0}, \quad ww_0 = k_0 \cdot \alpha_1, \quad \alpha_1 = \sqrt{12},$$

$$I_i^*(x^*) = \frac{I_i(x)}{k_0^i A_0}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (11-4 \text{ ب})$$

از معادله (۴-۴)؛ k_0 شعاع ژیراسیون در $x=0$ است و جابه‌جایی مشخصه به عنوان ضربی از k_0 در نظر گرفته شده است. برای سطح مقطع مستطیلی $ww_0=h_0$ است که h_0 ضخامت در $x=0$ و برای سطح مقطع دایره‌ای $ww_0=d_0\sqrt{3}/2$ که d_0 قطر در $x=0$ می‌باشد. ε به عنوان پارامتر اغتشاشات در نظر گرفته شده است. با استفاده از معادلات (۴-۱۱) شکل بی‌بعد معادلات (۴-۱۰) (بر اساس مولفه‌های جابجایی) تعیین می‌شوند. متغیر جدید $X=x^*/\varepsilon$ تعریف شده است و از روش بسط‌های زمانی چندگانه برای تحلیل فرکانسی [۱۲۴] استفاده می‌شود. مشتق دوم زمانی به صورت رابطه (۳-۱۸) تعریف می‌شود. بنابراین معادلات حرکت بر اساس متغیرهای جدید تعیین می‌شوند. معادله اول از معادلات (۴-۱۰) به صورت زیر است:

$$-eI_0^*\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial T_0 \partial T_1} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial T_0 \partial T_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial T_1^2}\right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(I_2^* \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial X}\right)^2\right) + I_0^*(\theta_1(1+w_1^*)\frac{\partial w_1^*}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial X} \left(I_0^* \frac{\partial u_0^*}{\partial X} + \frac{1}{2}I_0^* \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)^2 + \theta_1(1+\frac{1}{2}w_1^*)w_1^*\right) = 0 \quad (12-4)$$

معادلات طولانی هستند و بقیه معادلات در این جا گزارش نشده‌اند. حل معادلات (۴-۱۲) به صورت زیر نوشته شده است:

$$u_0^*(X, T_0, T_1, T_2; \varepsilon) = \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i u_{0i}^*(X, T_0, T_1, T_2)$$

$$u_1^*(X, T_0, T_1, T_2; \varepsilon) = \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i u_{1i}^*(X, T_0, T_1, T_2)$$

$$w_0^*(X, T_0, T_1, T_2; \varepsilon) = \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i w_{0i}^*(X, T_0, T_1, T_2) \quad (13-4)$$

$$w_1(X, T_0, T_1, T_2; \varepsilon) = \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i w_{1i}^*(X, T_0, T_1, T_2)$$

روابط (۱۳-۴) در معادله (۱۲-۴) و سایر معادلات حرکت جایگزین شده و با جداکردن معادلات با

مرتبه یکسان ε معادلات هر مرتبه تعیین می‌شوند. معادلات مرتبه اول به صورت زیر هستند:

$$-2\alpha_1^2 L_{10}[u_{00}^*, w_{10}^*] = 0, \quad L_{10}[u_{00}^*, w_{10}^*] = eI_0^* \frac{\partial^2 u_{00}^*}{\partial T_0^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left(I_0^* (\theta_1 w_{10}^* + \frac{\partial u_{00}^*}{\partial X}) \right) \quad (۱۴-۴ \text{ الف})$$

$$-2\alpha_1 L_{20}[u_{10}^*, w_{00}^*] = 0, \quad L_{20}[u_{10}^*, w_{10}^*] = eI_2^* \frac{\partial^2 u_{10}^*}{\partial T_0^2} + \alpha_1^2 \kappa \theta_2 I_0^* (u_{10}^* + \frac{\partial w_{00}^*}{\partial X}) - \frac{\partial}{\partial X} (I_2^* \frac{\partial u_{10}^*}{\partial X}) \quad (۱۴-۴ \text{ ب})$$

$$-2\alpha_1^3 L_{30}[u_{10}^*, w_{00}^*] = 0, \quad L_{30}[u_{10}^*, w_{00}^*] = eI_0^* \frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial T_0^2} - \kappa \theta_2 \frac{\partial}{\partial X} \left(I_0^* (u_{10}^* + \frac{\partial w_{00}^*}{\partial X}) \right) - P^* \frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial X^2} \quad (۱۴-۴ \text{ ج})$$

$$-2\alpha_1^2 L_{40}[u_{00}^*, w_{10}^*] = 0, \quad L_{40}[u_{00}^*, w_{10}^*] = eI_2^* \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial T_0^2} + \alpha_1^2 I_0^* (\theta_1 \frac{\partial u_{00}^*}{\partial X} + w_{10}^*) - \kappa \theta_2 \frac{\partial}{\partial X} (I_2^* \frac{\partial w_{10}^*}{\partial X}) \quad (۱۴-۴ \text{ د})$$

معادلات (۱۴-۴) خطی هستند و با استفاده از آن‌ها می‌توان فرکانس‌های طبیعی خطی را تعیین نمود.

این دستگاه معادلات شامل چهار معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و همگن است که ضرایب متغیر

دارند. با در نظر گرفتن تقارن مقطع، دستگاه معادلات شامل دو دستگاه معادله است که دو به دو با هم

کوپل هستند. معادله اول و چهارم (معادلات (۱۴-۴) الف) و (۱۴-۴) د) با یکدیگر کوپل هستند و حل

این معادلات منجر به تعیین فرکانس محوری می‌شود. فرکانس‌های عرضی مرتبط با معادلات دوم و

سوم (معادلات (۱۴-۴) ب) و (۱۴-۴) ج) بوده که دو به دو کوپل هستند. بر اساس روش گالرکین

[۱۱۷] حل معادلات (۱۴-۴) ب) و (۱۴-۴) ج) برای تیر با تکیه‌گاه ساده به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$u_{00}^*(x^*, T_0, T_1, T_2) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(T_0, T_1, T_2) \cos\left(\frac{n\pi X}{l_e}\right), \quad l_e = \frac{l}{\omega \omega_0}$$

$$w_{10}^*(x^*, T_0, T_1, T_2) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(T_0, T_1, T_2) \sin\left(\frac{n\pi X}{l_e}\right) \quad (۱۵-۴)$$

با جایگذاری معادله (۱۵-۴) در معادلات (۱۴-۴) ب) و (۱۴-۴) ج) و ضرب معادله اول در $\sin(n\pi X/l_e)$ و ضرب معادله دوم در $\cos(n\pi X/l_e)$ و انتگرال گیری در طول دامنه $[0, l_e]$ ، دو معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان به دست خواهد آمد. حل این معادلات به صورت زیر انتخاب شده است:

$$u_n(T_0, T_1, T_2) = A_1(T_1, T_2) \exp(i \omega T_0), \quad w_n(T_0, T_1, T_2) = A_2(T_1, T_2) \exp(i \omega T_0) \quad (۱۶-۴)$$

که ω فرکانس بی بعد و A_j , $j=1,2$ ثابت است. با جایگذاری معادلات (۱۶-۴) در معادلات حاصل، یک دستگاه معادله جبری به شکل $[bx]\{A\}=\{0\}$ به دست خواهد آمد. اعضای ماتریس $[bx]$ تابع ω بوده و $\{A\}=\{A_1(T_1, T_2), A_2(T_1, T_2)\}$ است. برای حل غیر صفر، دترمینان ماتریس ضرایب $[bx]$ باید صفر باشد. ریشه های این معادلات فرکانس های طبیعی سیستم به ازای مقادیر n هستند و $\{A\}=A_{14}(T_1, T_2)\{\alpha_9, 1\}$ بردار ویژه بوده که $A_{14}(T_1, T_2)$ مستقل از T_0 و تابعی از n است و در بخش بعدی تعیین خواهد شد. A_9 عبارتی معلوم است که تابع فرکانس و n است. بنابراین حل معادلات (۱۴-۴) الف) و (۱۴-۴) ب) به صورت زیر خواهد بود:

$$\{y^*\}_{14} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{14}(T_1, T_2) \{\alpha_9 \cdot \cos(n\pi X / l_e), \sin(n\pi X / l_e)\} \exp(i \omega T_0) + CC, \quad \omega = \omega_{ax} \quad (۱۷-۴) \text{ الف)}$$

ω_{ax} فرکانس بی بعد محوری است. روند ارائه شده قبل را می توان برای معادلات (۱۴-۴) ب) و (۱۴-۴) ج) نیز به کار برد. برای این معادلات ω_{tr} فرکانس عرضی است و نتیجه می شود:

$$\{y^*\}_{23} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{23}(T_1, T_2) \{\alpha_8 \cdot \cos(n\pi X / l_e), \sin(n\pi X / l_e)\} \exp(i \omega T_0) + CC, \quad \omega = \omega_{tr} \quad (۱۷-۴) \text{ ب)}$$

α_8 پارامتری معلوم و $A_{23}(T_1, T_2)$ در ادامه تعیین خواهد شد. مشابه معادلات (۴-۱۴)، معادلات مرتبه

دوم دوبه دو کوپل بوده ولی ناهمگن هستند. این معادلات در ضمیمه گزارش شده‌اند.

برای نمونه روند حل معادلات توضیح داده شده است. حل بخش همگن مشابه $O(\varepsilon)$ است. حل مرتبه

یک در بخش ناهمگن معادلات مرتبه دو جایگزین شده و با ضرب معادله اول در $\sin(n\pi X/l_e)$ و معادله

دوم در $\cos(n\pi X/l_e)$ ، از معادلات در طول دامنه انتگرال‌گیری می‌شود. دستگاه معادلات با مشتق

جزئی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان تبدیل شده و شکل کلی معادلات به

صورت معادلات (۴-۱۸) است:

$$\begin{aligned} L_{10}[u_{01}^*, w_{11}^*] &= A_{10}(T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{ax} T_0) + A_{11}(T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{tr} T_0) \\ &+ C.C \\ L_{40}[u_{01}^*, w_{11}^*] &= A_{40}(T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{ax} T_0) + A_{41}(T_1, T_2) \cdot \exp(2i \omega_{tr} T_0) \\ &+ C.C \end{aligned}$$

(۴-۱۸)

که A_{ij} تابع معلوم بر حسب A_{14} ، A_{23} هستند. حل خصوصی جمله‌های نمایی (به جز $\exp(i\omega_{ax}T_0)$) را

می‌توان به صورت ترکیب خطی جمله‌های موجود در بخش ناهمگن معادلات (۴-۱۸) نوشت:

$$\begin{aligned} u_{01p}^* &= B_{11}(T_1, T_2) \exp(2i \omega_{ax} T_0) + B_{12}(T_1, T_2) \exp(2i \omega_{tr} T_0) + C.C \\ w_{11p}^* &= B_{41}(T_1, T_2) \exp(2i \omega_{ax} T_0) + B_{42}(T_1, T_2) \exp(2i \omega_{tr} T_0) + C.C \end{aligned} \quad (۴-۱۹)$$

توابع B_{ij} با جایگذاری معادلات (۴-۱۹) در معادلات (۴-۱۸) تعیین خواهد شد. برای جمله $\exp$

$(i\omega_{ax}T_0)$ که جمله سکولار است و به حل غیر یکنواخت منجر می‌شود، حل خصوصی به صورت زیر

در نظر گرفته می‌شود:

$$u_{01}^* = d_0 \exp(i \omega_{ax} T_0), \quad w_{11}^* = d_1 \exp(i \omega_{ax} T_0) \quad (۴-۲۰الف)$$

با جایگذاری معادلات (۴-۲۰الف) در معادلات (۴-۱۸) یک دستگاه معادلات جبری ناهمگن به صورت

زیر نتیجه می‌شود:

$$[b_{x1}]_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}, \quad [b_{x1}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (۲۰-۴ ب)$$

که دترمینان $[bx_1]$ صفر است. شرط حل پذیری با صفر قرار دادن دترمینان زیر به دست خواهد آمد.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & f_1 \\ a_{21} & f_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (۲۰-۴ ج)$$

که این منجر می شود به:

$$\frac{\partial A_{14}}{\partial T_1} = 0 \rightarrow A_{14}(T_1, T_2) = A_{14}(T_2) \quad (۲۱-۴ الف)$$

به طور مشابه، برای معادلات مرتبه دوم دستگاه دوم، نتیجه می شود:

$$\frac{\partial A_{23}}{\partial T_1} = 0 \rightarrow A_{23}(T_1, T_2) = A_{23}(T_2) \quad (۲۱-۴ ب)$$

با روش مشابه معادلات مرتبه سوم را می توان بررسی کرد. دو دستگاه معادلات کوپل نتیجه می شود. با

اعمال روش گالرکین، معادلات (۱۴-۴ الف)، (۱۴-۴ د) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} L_{10}[u_{02}^*, w_{12}^*] &= A_{30}(T_1, T_2) \cdot \exp(i \omega_{ax} T_0) + A_{31}(T_1, T_2) \cdot \exp(3i \omega_{ax} T_0) \\ &+ A_{32}(T_1, T_2) \cdot \exp(i(2\omega_{tr} \pm \omega_{ax})T_0) + C.C \\ L_{40}[u_{02}^*, w_{12}^*] &= A_{50}(T_1, T_2) \cdot \exp(i \omega_{ax} T_0) + A_{51}(T_1, T_2) \cdot \exp(3i \omega_{ax} T_0) \\ &+ A_{52}(T_1, T_2) \cdot \exp(i(2\omega_{tr} \pm \omega_{ax})T_0) + C.C \end{aligned} \quad (۲۲-۴)$$

که A_{ij} تابع معلوم از A_{14} , A_{23} است. حل خصوصی برای جمله های نمایی (به جز $\exp(i\omega_{ax}T_0)$) را

می توان به صورت ترکیب خطی بخش ناهمگن جمله های معادلات (۲۲-۴) نوشت:

$$\begin{aligned} u_{02p}^* &= B_{11}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(3i\omega_{ax}T_0) + B_{12}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i(2\omega_{tr} \pm 2\omega_{ax})T_0) + C.C \\ w_{12p}^* &= B_{14}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(3i\omega_{ax}T_0) + B_{42}(X, T_1, T_2) \cdot \exp(i(2\omega_{tr} \pm 2\omega_{ax})T_0) + C.C \end{aligned} \quad (۲۳-۴)$$

توابع B_{ij} را می توان با جایگزینی معادلات (۲۳-۴) در معادلات (۲۲-۴) به دست آورد. جمله

$\exp(i\omega_{ax}T_0)$ یک جمله سکولار برای معادلات (۱۴-۴ الف)، (۱۴-۴ د) است. با روش اشاره شده در

معادلات مرتبه دوم، روابط زیر برای جمله‌های سکولار معادلات (۴-۱۴ الف)، (۴-۱۴ د) و (۴-۱۴ ب)،

(۴-۱۴ ج) نتیجه می‌شود:

$$C_{11} \cdot \overline{A_{23}}(T_2) \cdot \overline{A_{14}}(T_2) A_{14}(T_2) + C_{12} \cdot \overline{A_{23}^2}(T_2) \cdot A_{23}(T_2) + C_{13} \cdot \frac{d\overline{A_{23}}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (۴-۱۴ الف)$$

$$C_{41} \cdot \overline{A_{23}}(T_2) \cdot \overline{A_{14}}(T_2) A_{23}(T_2) + C_{42} \cdot \overline{A_{14}^2}(T_2) \cdot A_{14}(T_2) + C_{43} \cdot \frac{d\overline{A_{14}}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (۴-۲۴ ب)$$

که ضرایب مختلط معلوم و $\overline{A_{ij}}$ مزدوج مختلط A_{ij} است. معادلات (۴-۲۴) به صورت مستقیم قابل حل نیستند. معمولاً دامنه ارتعاشات را به شکل قطبی زیر در نظر می‌گیرند:

$$A_{23}(T_2) = \frac{1}{2} a_{23}(T_2) \cdot \exp(i\beta_{23}(T_2)), \quad A_{14}(T_2) = \frac{1}{2} a_{14}(T_2) \cdot \exp(i\beta_{14}(T_2)) \quad (۴-۲۵)$$

با جایگذاری معادلات (۴-۲۵) در معادلات (۴-۲۴)، و جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی نتیجه می‌شود:

$$C_{14} \cdot a_{23}(T_2) \cdot a_{14}^2(T_2) + C_{15} \cdot a_{23}^3(T_2) + C_{16} \cdot a_{23}(T_2) \frac{d\beta_{23}(T_2)}{dT_2} + C_{17} i \frac{da_{23}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (۴-۲۶ الف)$$

$$d_{14} \cdot a_{23}(T_2) \cdot a_{14}^2(T_2) + d_{15} \cdot a_{23}^3(T_2) + d_{16} \cdot a_{23}(T_2) \frac{d\beta_{23}(T_2)}{dT_2} + d_{17} i \frac{da_{23}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (۴-۲۶ ب)$$

$$C_{44} \cdot a_{14}(T_2) \cdot a_{23}^2(T_2) + C_{45} \cdot a_{14}^3(T_2) + C_{46} \cdot a_{14}(T_2) \frac{d\beta_{14}(T_2)}{dT_2} + C_{47} i \frac{da_{14}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (۴-۲۶ ج)$$

$$d_{44} \cdot a_{14}(T_2) \cdot a_{23}^2(T_2) + d_{45} \cdot a_{14}^3(T_2) + d_{46} \cdot a_{14}(T_2) \frac{d\beta_{14}(T_2)}{dT_2} + d_{47} i \frac{da_{14}(T_2)}{dT_2} = 0 \quad (۴-۲۶ د)$$

که C_{ij} و d_{ij} ثوابت مختلط معلوم هستند. با صفر کردن بخش‌های حقیقی و موهومی معادلات (۴-۲۶) نتیجه می‌شود:

$$\frac{da_{23}(T_2)}{dT_2} = 0 \rightarrow a_{23}(T_2) = a_{23}, \quad \frac{da_{14}(T_2)}{dT_2} = 0 \rightarrow a_{14}(T_2) = a_{14} \quad (۴-۲۷ الف)$$

برای مثال دامنه عرضی مستقل از T_1, T_2 است. همچنین:

$$\beta_{23} = \kappa_{23} T_2, \quad \beta_{14} = \kappa_{14} T_2, \quad \kappa_{23} = \gamma_{11} a_{14}^2 + \gamma_{12} a_{23}^2, \quad \kappa_{14} = \gamma_{21} a_{14}^2 + \gamma_{22} a_{23}^2 \quad (27-4) \text{ ب}$$

که γ_{ij} ثوابت معلوم هستند. از معادلات (21-4) و (27-4) فرکانس‌های غیرخطی عرضی و محوری به صورت زیر تعیین می‌گردند.

$$(\omega_{tr})_{NL} = \omega_{tr} + \varepsilon^2 \kappa_{23} + O(\varepsilon^3), \quad (\omega_{ax})_{NL} = \omega_{ax} + \varepsilon^2 \kappa_{14} + O(\varepsilon^3) \quad (28-4)$$

باید توجه نمود که فاز و بنابراین فرکانس‌های غیرخطی تابع توان دوم دامنه‌های عرضی و محوری هستند.

۴-۴- تعیین پاسخ

تیر بررسی شده در بخش قبل، تحت بار گسترده $Q(x,t)$ (بر واحد طول) در لبه بالایی خود یعنی $z=h/2$ و نیروی محوری P مطابق شکل قرار دارد. برای تعیین معادله حرکت بر اساس FSDT به کمک اصل هامیلتون و مشابه روند ذکر شده در بخش (2-4) عمل می‌شود. انرژی کرنشی و تغییرات آن مطابق رابطه (2-4)، منتهجه‌ها با رابطه (3-4) و انرژی جنبشی با رابطه (8-4) تعریف می‌شوند. برای تعیین کار حاصل از تحریک دینامیکی عرضی، با فرض این که بار، پیرو^۱ باشد؛ کار هر یک از مؤلفه‌های آن تعیین می‌شود. اگر زاویه بار با امتداد قائم پس از تغییر شکل، θ باشد مؤلفه‌های آن - $Q \sin \theta$ در راستای x و $Q \cos \theta$ در راستای z است. از هندسه شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\partial w}{\partial x} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \dots \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3 + \dots \approx \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (29-4)$$

کار انجام شده توسط این دو مؤلفه به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$W_Q = \int_0^l \left\{ \begin{matrix} -Q \sin \theta \\ Q \cos \theta \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} u \\ w \end{matrix} \right\}_{z=\frac{h}{2}} dx = \int_0^l (-Qu \sin \theta + Qw \cos \theta) dx \quad (30-4)$$

با جایگزینی میدان جابجایی FSDT، تغییرات کار خارجی به شکل زیر است:

¹ Follower

$$\begin{aligned}\delta W_Q = & \int_0^l \left\{ -Q(u_0 + zu_1) \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - Q \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \delta(u_0 + zu_1) \right. \\ & + Q \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) \delta(w_0 + zw_1) + \\ & \left. Q(w_0 + zw_1) \delta \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) \right\} dx\end{aligned}\quad (31-4)$$

رابطه (31-4) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}\delta W_Q = & \int_0^l (f_1 \delta u_0 + f_2 \delta u_1 + f_3 \delta w_0 + f_4 \delta w_1) dx \\ & - (k_3 \delta w_0 + k_4 \delta w_1) \Big|_0^l \\ k_3 = & Q(u_0 + \frac{h}{2} u_1) + Q w_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \frac{h^2}{4} Q w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{h}{2} Q w_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ k_4 = & \frac{h}{2} Q(u_0 + \frac{h}{2} u_1) + \frac{h^2}{4} Q \frac{\partial w_1}{\partial x} (h w_1 + w_0) + \frac{h}{2} Q w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x}\end{aligned}\quad (32-4)$$

f_1, f_2, f_3, f_4 به شکل زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}f_1 = & -Q \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right), \quad f_2 = -Q \frac{h}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \\ f_3 = & \frac{\partial}{\partial x} (Q u_0) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h}{2} u_1 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h}{2} w_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h}{2} w_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h^2}{4} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + Q - \frac{1}{2} Q \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ & - \frac{h}{2} Q \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - Q \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + P \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ f_4 = & \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h}{2} u_0 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h^2}{4} u_1 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h}{2} w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h^2}{4} w_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h^2}{4} w_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h^2}{4} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h^3}{8} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - Q \frac{h^3}{16} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \\ & - \frac{1}{4} Q h \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - Q \frac{h^2}{4} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x}\end{aligned}\quad (33-4)$$

و در صورتی که نیروی گسترده $Q(x,t)$ قائم باقی بماند (پیرو نباشد) جمله‌های غیرهمگن به شکل

زیر ساده خواهند شد:

$$f_1 = f_2 = f_4 = 0, \quad f_3 = Q + P \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\quad (34-4)$$

معادلات حاکم بر حرکت تیر در بازه زمانی (t_0, t_1) باید اصل هامیلتون را ارضا کنند. با به کارگیری

اصل هامیلتون معادلات حرکت تیر تعیین می شوند:

$$\begin{aligned}
 b \frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho b h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= f_1 \\
 b \frac{\partial M_x}{\partial x} - b Q_x - \frac{\rho b h^3}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= f_2 \\
 b \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + M_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + Q_x (1 + w_1) \right) - \rho b h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} &= f_3 \\
 b \frac{\partial}{\partial x} \left(M_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + M_{xz} (1 + w_1) \right) - b Q_x \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 - b M_{xz} \frac{\partial w_1}{\partial x} - b N_z (1 + w_1) - \frac{\rho b h^3}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} &= f_4
 \end{aligned} \tag{۳۵-۴}$$

برای حل از تئوری اغتشاشات استفاده می شود. مشابه روند ذکر شده در بخش (۳-۴) معادلات

بی بعد می شوند. پارامترهای بی بعد، روابط (۱۱-۴) و متغیر مستقل $X = x^*/\varepsilon$ و روابط مرتب با

مقیاس های چندگانه نیز استفاده می شوند. حل معادلات به شکل (۱۳-۴) در نظر گرفته شده و

جمله های با مرتبه های یکسان ε جدا می شوند. معادلات مرتبه یک به صورت زیر است:

$$-2\alpha_1^2 L_{10}[u_{00}^*, w_{10}^*] = 0; L_{10}[u_{00}^*, w_{10}^*] = e I_0^* \frac{\partial^2 u_{00}^*}{\partial T_0^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left(I_0^* (\theta_1 w_{10}^* + \frac{\partial u_{00}^*}{\partial X}) \right) \tag{۳۶-۴ الف}$$

$$-2\alpha_1 L_{20}[u_{10}^*, w_{00}^*] = 0; L_{20}[u_{10}^*, w_{10}^*] = e I_2^* \frac{\partial^2 u_{10}^*}{\partial T_0^2} + \alpha_1^2 \kappa \theta_2 I_0^* (u_{10}^* + \frac{\partial w_{00}^*}{\partial X})$$

$$- \frac{\partial}{\partial X} (I_2^* \frac{\partial u_{10}^*}{\partial X}) \tag{۳۶-۴ ب}$$

$$-2\alpha_1^3 L_{30}[u_{10}^*, w_{00}^*] = Q^*; L_{30}[u_{10}^*, w_{00}^*] = e I_0^* \frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial T_0^2}$$

$$- \kappa \theta_2 \frac{\partial}{\partial X} \left(I_0^* (u_{10}^* + \frac{\partial w_{00}^*}{\partial X}) \right) - P^* \frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial X^2}, \quad Q^* = \frac{Q}{b A \varepsilon} \tag{۳۶-۴ ج}$$

$$-2\alpha_1^2 L_{40}[u_{00}^*, w_{10}^*] = 0; L_{40}[u_{00}^*, w_{10}^*] = e I_2^* \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial T_0^2} + \alpha_1^2 I_0^* (\theta_1 \frac{\partial u_{00}^*}{\partial X} + w_{10}^*)$$

$$- \kappa \theta_2 \frac{\partial}{\partial X} (I_2^* \frac{\partial w_{10}^*}{\partial X}) \tag{۳۶-۴ د}$$

این دستگاه معادلات شامل چهار معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، خطی، همگن است که ضرایب متغیر دارند. با در نظر گرفتن تقارن مقطع، دستگاه معادلات شامل دو دستگاه معادلات است که دو به دو به یکدیگر کوپل هستند. معادله اول و چهارم (معادلات (۴-۳۶ الف) و (۴-۳۶ د)) با یکدیگر کوپل هستند و حل این معادلات منجر به تعیین پاسخ u_{00}^* و w_{10}^* می‌شود. پاسخ u_{10}^* و w_{00}^* مرتبط با معادلات دوم و سوم (معادلات (۴-۳۶ ب) و (۴-۳۶ ج)) است. حل معادلات (۴-۳۶ ب) و (۴-۳۶ ج) برای تیر با تکیه‌گاه ساده به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} u_{10}(X, T_0, T_1, T_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{10}(T_0, T_1, T_2) \cos(m\pi X / l_e) \\ w_{00}(X, T_0, T_1, T_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{00}(T_0, T_1, T_2) \sin(m\pi X / l_e) \end{aligned} \quad (۴-۳۷)$$

که U_{10} و W_{00} به m نیز بستگی دارند. روابط (۴-۳۷) در معادلات دوم و سوم دستگاه (۴-۳۶) جایگزین می‌شوند. با ضرب طرفین معادله اول در $\sin(m\pi X / l_e)$ و معادله دوم در $\cos(m\pi X / l_e)$ و انتگرال‌گیری در طول بازه $[0, l_e]$ ، دو معادله دیفرانسیل کوپل به هم بر حسب زمان نتیجه می‌شود که یک دستگاه معادلات با ضرایب ثابت است. این معادلات به شکل کلی زیر است:

$$[B_2] \frac{d^2}{dT_0^2} \{y_1\} + [B_0] \{y_1\} = \{F_0(T_0)\}; \{y_1\} = \begin{Bmatrix} U_{10}(T_0, T_1, T_2) \\ W_{00}(T_0, T_1, T_2) \end{Bmatrix} \quad (۴-۳۸)$$

که عناصر ماتریس‌های ضرایب، مقادیری ثابت و معلوم هستند. عناصر جمله غیر همگن نیز به تحریک خارجی بستگی دارند. حل همگن معادلات را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{Bmatrix} U_{10}(T_0, T_1, T_2) \\ W_{00}(T_0, T_1, T_2) \end{Bmatrix}_g = \{V(T_1, T_2)\}_{2 \times 1} e^{\alpha T_0} \quad (۴-۳۹)$$

$\{V\}$ بردارهای ویژه و α مقادیر ویژه می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌ی (۴-۳۹) در دستگاه معادلات، معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$[\overline{B_0}(\alpha)]_{2 \times 2} \{V(T_1, T_2)\} = \{0\}_{2 \times 1} \quad (۴-۴۰ الف)$$

شرط داشتن جواب غیرصفر برای معادله‌ی فوق این است که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد.

$$\det[\overline{B}_0(\alpha)] = 0 \quad (4-40 \text{ ب})$$

رابطه‌ی (۴-۴۰)، معادله‌ی تفرق است و از حل آن چهار مقدار ویژه α_j ($j=1, \dots, 4$) تعیین می‌شوند که دو به دو قرینه هستند. به ازای هر مقدار ویژه، یک بردار ویژه موجود است که به کمک معادله (۴-۴۰ الف) تعیین می‌شوند و شکل کلی آن $\{V\}=\{1, \gamma\}$ می‌باشد که γ مقداری معلوم بر حسب α است. پس از یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، پاسخ عمومی (همگن) معادلات به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} U_{10}(T_0, T_1, T_2) \\ W_{00}(T_0, T_1, T_2) \end{matrix} \right\}_g &= \sum_{j=1}^4 A_{j0}(T_1, T_2) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \gamma_j \end{matrix} \right\} e^{\alpha_j T_0}, \\ \alpha_3 &= -\alpha_1, \quad \alpha_4 = -\alpha_2, \quad A_{30} = \overline{A}_{10}, \quad A_{40} = \overline{A}_{20} \end{aligned} \quad (4-41)$$

ضرایب $A_{j0}(T_1, T_2)$ در ادامه تعیین خواهند شد. حل خصوصی معادلات $\{V_p\}$ است که به شکل تابع نیروی تحریک بستگی دارد و حل کلی مسأله عبارت است از:

$$\left\{ \begin{matrix} U_{10}(T_0, T_1, T_2) \\ W_{00}(T_0, T_1, T_2) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} U_{10}(T_0, T_1, T_2) \\ W_{00}(T_0, T_1, T_2) \end{matrix} \right\}_g + \{V_p\}_{2 \times 1} \quad (4-42)$$

پاسخ دستگاه معادلات دوم را با روند مشابه معادلات قبل، می‌توان به دست آورد. حل عمومی مشابه (۴-۴۱) است ولی ضرایب آن، B_{0j} و مقادیر ویژه آن، β_i , $i=1, \dots, 4$ است. حل کلی نیز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} u_{00}(X, T_0, T_1, T_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{00}(T_0, T_1, T_2) \cos(m\pi X / l_e) \\ w_{10}(X, T_0, T_1, T_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{10}(T_0, T_1, T_2) \sin(m\pi X / l_e) \\ \left\{ \begin{matrix} U_{00}(T_0, T_1, T_2) \\ W_{10}(T_0, T_1, T_2) \end{matrix} \right\}_g &= \sum_{j=1}^4 B_{j0}(T_1, T_2) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \gamma'_j \end{matrix} \right\} e^{\beta_j T_0}, \quad \beta_3 = -\beta_1, \quad \beta_4 = -\beta_2 \\ \left\{ \begin{matrix} U_{00}(T_0, T_1, T_2) \\ W_{10}(T_0, T_1, T_2) \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} U_{00}(T_0, T_1, T_2) \\ W_{10}(T_0, T_1, T_2) \end{matrix} \right\}_g + \{V'_p\}_{2 \times 1}, \quad B_{30} = \overline{B}_{10}, \quad B_{40} = \overline{B}_{20} \end{aligned} \quad (4-43)$$

در ادامه معادلات مرتبه دوم بررسی می‌شوند. معادلات مرتبه دوم یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی ضریب متغیر و ناهمگن هستند که مشابه معادلات مرتبه یک دو به دو با یکدیگر کوپل هستند. به عنوان نمونه برای معادلات دوم و سوم، با جایگذاری حل مرتبه یک در بخش ناهمگن معادلات مرتبه دوم، در نظر گرفتن حل معادله به شکل (۴-۳۷)، ضرب معادله اول در $\sin(n\pi X/le)$ و معادله دوم در $\cos(n\pi X/le)$ و انتگرال‌گیری در دامنه، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان به شکل کلی زیر به دست می‌آید:

$$[B_2] \frac{d^2}{dT_0^2} \{y_2\} + [B_0] \{y_2\} = \{F_1(T_0)\}; \{y_2\} = \begin{Bmatrix} U_{11}(T_0, T_1, T_2) \\ W_{01}(T_0, T_1, T_2) \end{Bmatrix} \quad (4-44 \text{ الف})$$

ماتریس‌های B_0 و B_2 مشابه معادلات مرتبه قبل هستند. جمله غیرهمگن علاوه بر جمله‌های نمایی به شکل زیر، شامل جمله‌هایی ثابت نیز هستند.

$$\exp(\pm(\alpha_1 \pm \beta_1)T_0), \quad \exp(\pm(\alpha_2 \pm \beta_1)T_0), \quad \exp(\pm(\alpha_1 \pm \beta_2)T_0) \\ , \exp(\pm(\alpha_2 \pm \beta_2)T_0), \quad \exp(\alpha_1 T_0), \quad \exp(\pm\alpha_2 T_0) \quad (4-44 \text{ ب})$$

دربین جمله‌های نمایی، جمله‌های $\exp(\pm\alpha_1 T_0)$, $\exp(\pm\alpha_2 T_0)$ سکولار هستند و باید بر آن‌ها شرط حل‌پذیری اعمال کرد (مشابه روابط (۴-۲۰)). در این صورت نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial A_{j0}}{\partial T_1} = \lambda_{j0} A_{j0}, \quad j=1,2 \quad (4-45 \text{ الف})$$

که λ_{j0} یک عدد ثابت است و به بارگذاری عرضی بستگی دارد. اگر $Q(x,t)=0$ باشد این ضریب صفر است. برای معادلات مرتبه دوم دستگاه معادلات اول و چهارم نیز، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial B_{j0}}{\partial T_1} = \tau_{j0} B_{j0}, \quad j=1,2 \quad (4-45 \text{ ب})$$

که τ_{j0} نیز یک ثابت معلوم بوده و به بارگذاری بستگی دارد. برای تعیین حل مرتبط با جمله‌های غیر سکولار، حل به صورت مجموع جمله‌های نمایی با ضرایب نامشخص در نظر گرفته می‌شود و با جایگذاری حل در بخش همگن معادلات، ضرایب مجهول را می‌توان تعیین کرد. برای جمله‌هایی که

ثابت هستند حل خصوصی به عنوان یک مقدار ثابت در نظر گرفته شده و در معادلات جایگزین و این مقدار ثابت تعیین می‌شود. به این ترتیب حل خصوصی معادلات مرتبه دوم تعیین می‌شود ($\{y_2\}$). مشابه این روند برای معادلات مرتبه سوم نیز اجرا می‌شود. به عنوان نمونه برای معادلات دوم و سوم، با جایگذاری حل‌های مرتبه یک و دو در بخش ناهمگن معادلات مرتبه سوم، در نظر گرفتن حل معادله به شکل (۴-۳۷)، ضرب معادله اول در $\sin(n\pi X/le)$ و معادله دوم در $\cos(n\pi X/le)$ و انتگرال‌گیری در دامنه، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان به شکل کلی زیر به دست می‌آید:

$$[B_2] \frac{d^2}{dT_0^2} \{y_3\} + [B_0] \{y_3\} = \{F_3(T_0)\}, \quad \{y_3\} = \begin{Bmatrix} U_{12}(T_0, T_1, T_2) \\ W_{02}(T_0, T_1, T_2) \end{Bmatrix} \quad (۴-۴۶ \text{ الف})$$

ماتریس‌های B_0 و B_2 مشابه معادلات مرتبه قبل است. جمله غیر همگن شامل جمله‌های نمایی به شکل زیر و جمله‌هایی ثابت هستند:

$$\exp(\pm 2\alpha_1 T_0), \exp(\pm 2\alpha_2 T_0), \exp(\pm 2\beta_1 T_0), \\ \exp(\pm 2\beta_2 T_0), \exp(\pm \beta_1 T_0), \exp(\pm \beta_2 T_0) \quad (۴-۴۷)$$

برای تعیین حل مرتبط با جمله‌های غیر سکولار، حل به صورت جمله‌های نمایی با ضرایب نامشخص در نظر گرفته می‌شود و سپس این حل در بخش معادلات جایگذاری می‌شود و ضرایب مجهول حاصل می‌شوند. برای جمله‌هایی که ثابت هستند حل خصوصی به عنوان یک مقدار ثابت در نظر گرفته شده و در معادلات جایگزین می‌شوند و این مقدار ثابت تعیین می‌شود. به این ترتیب حل خصوصی معادلات مرتبه سوم تعیین می‌شود. حل کلی شامل حل مرتبه یک و حل‌های خصوصی مرتبه دوم و سوم است.

$$\{y\} = \varepsilon(\{y_1\}) + \varepsilon^2(\{y_2\}) + \varepsilon^3(\{y_3\}) \quad (۴-۴۸)$$

رابطه (۴-۴۸) حل زمانی مسأله است. المان اول جواب در کسینوس و المان دومی در سینوس ضرب می‌شود (مشابه معادلات (۴-۳۷)) تا حل بر حسب مکان و زمان تعیین شود.

جمله‌های $\exp(\pm \alpha_1 T_0)$, $\exp(\pm \alpha_2 T_0)$ سکولار هستند و با اعمال شرط حل‌پذیری نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{10}}{\partial T_2} &= A_{10}(\lambda_{11} + \tau_{11}A_{10}\bar{A}_{10} + \tau_{12}A_{20}\bar{A}_{20} + \tau_{13}B_{10}\bar{B}_{10} + \tau_{14}B_{20}\bar{B}_{20}) \\ \frac{\partial A_{20}}{\partial T_2} &= A_{20}(\lambda_{21} + \tau_{21}A_{10}\bar{A}_{10} + \tau_{22}A_{20}\bar{A}_{20} + \tau_{23}B_{10}\bar{B}_{10} + \tau_{24}B_{20}\bar{B}_{20})\end{aligned}\quad (49-4 \text{ الف})$$

برای معادلات مرتبه دوم دستگاه معادلات اول و چهارم نیز نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{10}}{\partial T_2} &= B_{10}(\lambda_{31} + \tau_{31}A_{10}\bar{A}_{10} + \tau_{32}A_{20}\bar{A}_{20} + \tau_{33}B_{10}\bar{B}_{10} + \tau_{34}B_{20}\bar{B}_{20}) \\ \frac{\partial B_{20}}{\partial T_2} &= B_{20}(\lambda_{41} + \tau_{41}A_{10}\bar{A}_{10} + \tau_{42}A_{20}\bar{A}_{20} + \tau_{43}B_{10}\bar{B}_{10} + \tau_{44}B_{20}\bar{B}_{20})\end{aligned}\quad (49-4 \text{ ب})$$

که ضرایب λ, τ ثابت بوده و به بارگذاری بستگی دارند.

مشتق مرتبه اول در مقیاس‌های چند گانه به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲۳].

$$\frac{d}{dt^*} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} \quad (50-4)$$

با در نظر گرفتن روابط (۴۹-۴) و (۵۰-۴) و (۴۵-۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{dA_{10}}{dt^*} &= \frac{\partial A_{10}}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial A_{10}}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial A_{10}}{\partial T_2} = \varepsilon \frac{\partial A_{10}}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial A_{10}}{\partial T_2} \rightarrow \\ \frac{dA_{10}}{dt^*} &= \varepsilon \lambda_{10} A_{10} + \varepsilon^2 \{A_{10}(\lambda_{11} + \tau_{11}A_{10}\bar{A}_{10} + \tau_{12}A_{20}\bar{A}_{20} + \tau_{13}B_{10}\bar{B}_{10} + \tau_{14}B_{20}\bar{B}_{20})\} \\ \frac{dA_{20}}{dt^*} &= \varepsilon \lambda_{20} A_{20} + \varepsilon^2 \{A_{20}(\lambda_{21} + \tau_{21}A_{10}\bar{A}_{10} + \tau_{22}A_{20}\bar{A}_{20} + \tau_{23}B_{10}\bar{B}_{10} + \tau_{24}B_{20}\bar{B}_{20})\} \\ \frac{dB_{10}}{dt^*} &= \varepsilon \tau_{10} B_{10} + \varepsilon^2 \{B_{10}(\lambda_{31} + \tau_{31}A_{10}\bar{A}_{10} + \tau_{32}A_{20}\bar{A}_{20} + \tau_{33}B_{10}\bar{B}_{10} + \tau_{34}B_{20}\bar{B}_{20})\} \\ \frac{dB_{20}}{dt^*} &= \varepsilon \tau_{20} B_{20} + \varepsilon^2 \{B_{20}(\lambda_{41} + \tau_{41}A_{10}\bar{A}_{10} + \tau_{42}A_{20}\bar{A}_{20} + \tau_{43}B_{10}\bar{B}_{10} + \tau_{44}B_{20}\bar{B}_{20})\}\end{aligned}\quad (51-4)$$

برای حل معادلات (۵۱-۴)، توابع به صورت قطبی در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}A_{10}(t^*) &= \frac{1}{2}a_{10}(t^*)\exp(i.\alpha_{10}(t^*)), \quad A_{20}(t^*) = \frac{1}{2}a_{20}(t^*)\exp(i.\alpha_{20}(t^*)) \\ B_{10}(t^*) &= \frac{1}{2}b_{10}(t^*)\exp(i.\beta_{10}(t^*)), \quad B_{20}(t^*) = \frac{1}{2}b_{20}(t^*)\exp(i.\beta_{20}(t^*))\end{aligned}\quad (52-4)$$

که a, b دامنه و α, β فاز بوده و توابعی حقیقی می‌باشند. روابط (۵۲-۴) در (۵۱-۴) جایگزین شده و

بخش‌های حقیقی و موهومی جدا می‌شوند. از بخش حقیقی نتیجه می‌شود:

$$\frac{da_{10}(t^*)}{dt^*} = 0, \quad \frac{da_{20}(t^*)}{dt^*} = 0, \quad \frac{db_{10}(t^*)}{dt^*} = 0, \quad \frac{db_{20}(t^*)}{dt^*} = 0 \quad (الف \ ۵۳-۳)$$

رابطه (۵۳-۴) الف) به این معناست که اندازه دامنه ها $(a_{10}, a_{20}, b_{10}, b_{20})$ ثابت بوده و به زمان وابسته نیستند. از بخش موهومی نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{j0}}{dt^*} &= (\tau_{j01}a_{10}^2 + \tau_{j02}a_{20}^2 + \tau_{j03}b_{10}^2 + \tau_{j04}b_{20}^2 + \tau_{j05})\varepsilon^2 + \lambda_{j06}\varepsilon; \quad j=1,2 \\ \frac{d\beta_{j0}}{dt^*} &= (\tau_{j11}a_{10}^2 + \tau_{j12}a_{20}^2 + \tau_{j13}b_{10}^2 + \tau_{j14}b_{20}^2 + \tau_{j15})\varepsilon^2 + \lambda_{j16}\varepsilon; \quad j=1,2 \end{aligned} \quad (ب \ ۵۳-۴)$$

که τ, λ ضرایب ثابت هستند. با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۵۳-۴) ب)، مقادیر فاز به صورت توابعی خطی از t^* به دست می‌آیند. هم چنین به واسطه انتگرال‌گیری، ثابت‌های جدیدی نیز در مجموعه ظاهر می‌شوند. از روابط (۵۱-۴) و (۵۳-۴) می‌توان توابع A, B را تعیین کرد. این توابع در رابطه (۴-۴۸) قرار می‌گیرد تا پاسخ به دست آید و در نهایت ثابت‌های حل، از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

۵-۴- تحلیل عددی تیر با ضخامت متغیر

بسته انسیس برای تحلیل عددی تیر ضخامت متغیر استفاده شده است. تمامی نتایج گزارش شده مربوط به سطح مقطع مستطیلی با عرض ثابت و با ضخامت متغیر است. مشخصات تیر در جدول (۱-۴) لیست شده و شرایط مرزی به جز در موارد اشاره شده، تکیه‌گاه ساده است. ضخامت سطح مقطع در $x^*=0$ با h_0 و در $x^*=1$ با h_1 مشخص می‌شود.

جدول (۱-۴) مشخصات تیر

۵۰۰	(mm)	طول
۳۲	(mm)	عرض
۲۵	(mm)	ضخامت در $x^*=0$
۴۵	(mm)	ضخامت در $x^*=1$
۲۰۰	(GPa)	مدول الاستیسیته

۰/۳	ضریب پواسون
۷۸۰۰	چگالی (kg/m^3)
۰	بار محوری (N)

۴-۶- مطالعه موردی

به عنوان مطالعه موردی، تیر با سطح مقطع مستطیلی و تغییر ضخامت به صورت خطی، پارابولیک، مثلثاتی و همچنین ضخامت ثابت در نظر گرفته شده است. برای سطح مقطع مستطیلی معادله (۴-۶) برقرار است. تمامی فرکانس‌های گزارش شده بدون بعد هستند. برای اعتبار سنجی نتایج، ابتدا تیر با ضخامت ثابت و خطی در نظر گرفته شده است. در جدول (۴-۲) فرکانس‌های تیر با تئوری اوایلر-برنولی، تیموشنکو و FSDT با ضخامت ثابت و تکیه‌گاه ساده گزارش شده است. نتایج تیر اوایلر برنولی و تیموشنکو منطبق بر فرمول‌های ارائه شده توسط هگدورن و گوپتا [۱۱۷] است. مشاهده می‌شود که اختلاف بین نتایج بسیار کوچک است. واضح است که در تیرهای نازک نتایج تیر اوایلر برنولی و سایر تئوری‌ها بسیار نزدیک به یکدیگر هستند اما در تیرهای ضخیم، اختلاف نتایج قابل ملاحظه است بنابراین نتایج تیر اوایلر برنولی با سایر تئوری‌ها در موده‌های بالای تیرهای ضخیم‌تر، اختلاف معناداری دارد. از جدول (۴-۲)، نتیجه می‌شود با کاهش نسبت (l/h_0)، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.

جدول (۴-۲) مقایسه تیرهای اوایلر برنولی و تیموشنکو با ضخامت ثابت

l/h_0	تئوری	مد اول	مد دوم	مد سوم
۲۵	اوایلر-برنولی (HG)	۰/۱۱۳۹۷	۰/۴۵۵۸۴	۱/۰۲۵۷۰
	تیموشنکو (HG)	۰/۱۱۳۶۸	۰/۴۵۱۳۱	۱/۰۰۳۰۷
	FSDT	۰/۱۱۳۵۱	۰/۴۴۸۸۰	۰/۹۹۱۱۶
۱۵/۶	اوایلر-برنولی (HG)	۰/۱۸۲۶۲	۰/۷۳۰۵۳	۱/۶۴۳۶۵
	تیموشنکو (HG)	۰/۱۸۱۴۶	۰/۷۱۲۲۵	۱/۵۵۶۱۷
	FSDT	۰/۱۸۰۸۰	۰/۷۰۲۷۰	۱/۵۱۳۳۲
۱۰	اوایلر-برنولی (HG)	۰/۲۸۴۸۹	۱/۱۳۹۶۹	۲/۵۶۴۲۲
	تیموشنکو (HG)	۰/۲۸۰۴۸	۱/۰۷۴۴۲	۲/۰۲۷۰۵
	FSDT	۰/۲۷۸۱۳	۱/۰۴۲۹۰	۱/۱۴۵۹۸
۵	اوایلر-برنولی (HG)	۰/۵۶۹۸	۲/۲۷۹۲	۵/۱۲۸۴

۳/۶۰۲۸	۱/۸۷۴۹	۰/۵۳۷۲	تیموشنکو (HG)
۳/۳۲۰۵	۱/۷۷۹۹	۰/۵۲۷۴	FSDT

در جدول (۳-۴)، مقایسه تیرهای FSDT با نتایج [۱۱۹]، تیر تیموشنکو ضخامت متغیر (روش WKB) و حل عددی برای پروفیل ضخامت خطی (شکل (۲-۲)) و تکیه‌گاه ساده ارائه شده است. [۱۱۹] از تئوری اویلر برنولی و روش عددی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی استفاده نمود. نتایج نشان می‌دهد که در مودهای بالاتر، نتایج FSDT نسبت به تئوری اویلر برنولی و تیموشنکو به حل عددی نزدیک‌تر هستند.

جدول (۳-۴) مقایسه تیرهای FSDT با نتایج مقاله ([۱۱۹])

روش	مد اول	مد دوم	مد سوم
[۱۱۹]	۰/۱۷۱۴۵	۰/۷۰۵۶۰	۱/۵۸۷۹۱
Timoshenko	۰/۱۷۴۰۰	۰/۶۸۰۳۴	۱/۵۲۵۴۸
FSDT	۰/۱۷۲۷۷	۰/۶۸۱۰۲	۱/۴۷۳۲۹
FE	۰/۱۵۴۳۰	۰/۵۸۵۵۳	۱/۲۶۶۵۳

در جدول (۴-۴) تیرها با پروفیل ضخامت مختلف آورده شده‌اند. این پروفیل‌ها وزن یکسان دارند. در جدول (۵-۴) فرکانس‌های تیر اویلر برنولی، تیموشنکو و FSDT با هم مقایسه شده‌اند.

جدول (۴-۴) پروفیل ضخامت با توابع مختلف

نوع اول	$a_1=0.8, b_1=1$	$h^*=a_1.x^*+b_1$
نوع دوم	$a_1=-1.6, b_1=2.4, c_1=1$	$h^*=a_1.x^{*3}+b_1.x^{*2}+c_1$
نوع سوم	$a_1=-1, b_1=1.8, c_1=1$	$h^*=a_1.x^{*4}+b_1.x^{*2}+c_1$
نوع چهارم	$b_1=-0.4, c_1=1.4$	$h^*=b_1\cos(\pi.x^*)+c_1$
نوع پنجم	$a_1=0.866, b_1=-0.4, c_1=1.4$	$h^*=a_1.\sinh(x^*)+b_1.\cosh(x^*)+c_1$

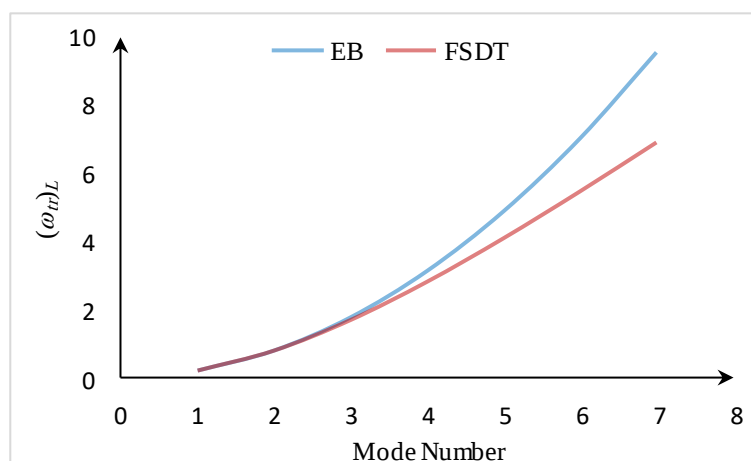
جدول (۵-۴) مقایسه فرکانس‌های عرضی با توابع ضخامت مختلف

تابع ضخامت	تئوری	مد اول	مد دوم	مد سوم
نوع اول	EB	۰/۱۹۳۹۰	۰/۷۸۴۸۴	۱/۷۶۲۷۰

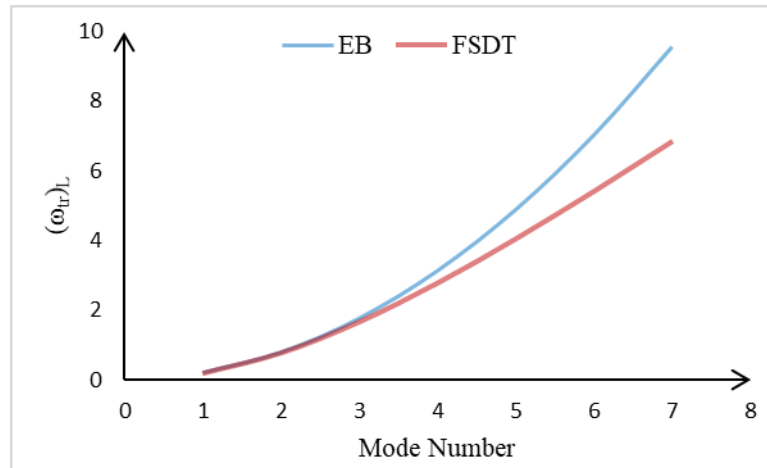
۱/۷۶۶۳۷	۰/۷۸۵۱۷	۰/۱۹۳۶۷	TB	
۱/۶۷۹۰۲	۰/۷۸۵۴۰	۰/۲۰۰۰۸	FSDT	
۱/۷۴۹۳۷	۰/۷۸۳۰۴	۰/۲۰۶۸۶	EB	
۱/۷۵۲۳۳	۰/۷۸۱۹۰	۰/۲۰۲۱۸	TB	نوع دوم
۱/۷۰۵۹۹	۰/۸۰۱۳۲	۰/۲۰۲۵۱	FSDT	
۱/۷۵۰۵۷	۰/۷۹۱۳۶	۰/۲۳۲۳۵	EB	
۱/۷۴۶۶۲	۰/۷۷۵۱۰	۰/۱۸۶۷۶	TB	نوع سوم
۱/۷۱۴۷۸	۰/۸۰۶۷۲	۰/۲۰۲۵۸	FSDT	
۱/۷۴۷۵۹	۰/۷۸۱۶۱	۰/۲۰۱۹۵	EB	
۱/۷۵۱۲۲	۰/۷۸۲۰۱	۰/۲۰۱۹۸	TB	نوع چهارم
۱/۷۰۸۳۲	۰/۸۰۳۰۱	۰/۲۰۲۸۱	FSDT	
۱/۷۶۳۵۸	۰/۷۸۴۹۳	۰/۱۹۳۳۷	EB	
۱/۷۶۷۲۶	۰/۷۸۵۲۸	۰/۱۹۳۴۳	TB	نوع پنجم
۱/۶۷۷۳۴	۰/۷۸۴۴۲	۰/۱۹۹۹۴	FSDT	

بر اساس جدول (۴-۵) پروفیل‌های مختلف با جرم (حجم) یکسان و با تغییر توزیع جرم، حداکثر دو درصد می‌توانند فرکانس‌ها را تغییر دهند. پروفیل نوع پنجم حداقل و نوع دوم حداکثر فرکانس را دارند. شکل (۴-۲) فرکانس عرضی خطی $((\omega_{tr})_L)$ تیر FSDT را با تیر اوپلر برنولی با تابع ضخامت نوع اول مقایسه می‌کند. نتایج نشان می‌دهد که در موده‌های بالاتر اختلاف FSDT با تیر اوپلر برنولی افزایش می‌یابد و

فرکانس
کمتر از اوپلر



شکل (۴-۲ الف) مقایسه فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_L$ تیر اوپلر برنولی با FSDT با تابع ضخامت نوع اول



شکل (۲-۴) ب) مقایسه فرکانس عرضی $(\omega_{tr})_L$ تیر اویلر برنولی با FSDT با تابع ضخامت نوع پنجم

در فرمول‌بندی FSDT، فرکانس‌های غیرخطی نه تنها به دامنه عرضی a_{23} وابسته‌اند بلکه به دامنه محوری a_{14} نیز وابسته هستند. (معادلات (۲۷-۴) و (۲۸-۴)) تأثیر هر دامنه وابسته به ضرایب $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ است. جدول‌های (۴-۶)، این ضرایب را برای پروفیل نوع اول گزارش می‌کنند. در جدول (۴-۶ الف)، بار محوری وجود ندارد، در جدول (۴-۶ ب) یک بار کششی اعمال شده و جدول (۴-۶ ج) مربوط به بار محوری فشاری است. در همه موارد، با کاهش نسبت منظر (l/h_0) ، تأثیر دامنه محوری a_{14} بر روی فرکانس عرضی غیرخطی (مانند γ_{11}) کاهش می‌یابد در حالی که تأثیر دامنه عرضی بر روی فرکانس عرضی غیرخطی (مانند γ_{12}) افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، تأثیر a_{14} برای تیرهای نازک مهم‌تر است و همچنین بار محوری تأثیر بیشتری بر وابستگی فرکانس بر دامنه در تیرهای نازک دارد. برخلاف فرکانس عرضی غیرخطی، بار محوری تأثیری بر فرکانس محوری غیرخطی در موارد مطالعه شده ندارد.

جدول (۴-۶ الف) ضرایب فرکانس‌های غیرخطی برای مقادیر مختلف l/h_0 با تابع ضخامت نوع اول و $p^*=0$

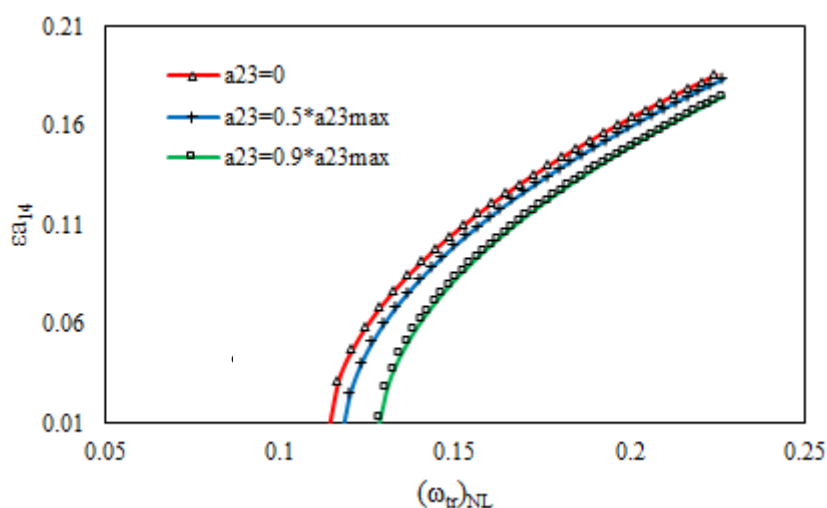
$(\omega_{ax})_L$	$(\omega_{tr})_L$	γ_{22}	γ_{21}	γ_{12}	γ_{11}	l/h_0
۲/۸۳۸۱۹	۰/۱۱۳۵۲	-۰/۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۱۴	۰/۰۱۸۰۷	۳/۲۲۱۲۵	۲۵
۲/۸۳۷۷۹	۰/۱۸۰۸۰	-۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۰۰۳۵	۰/۰۳۰۲۸	۲/۰۹۵۳۳	۱۵/۶
۲/۸۳۶۸۲	۰/۲۷۸۱۳	-۰/۰۰۰۰۲۷	۰/۰۰۰۰۸۶	۰/۰۵۲۳۰	۱/۴۷۶۵۸	۱۰
۲/۸۳۱۸۶	۰/۵۲۱۴۵	-۰/۰۰۰۴۸۵	۰/۰۰۰۳۴۱	۰/۱۶۵۸۰	۱/۱۴۱۲۷	۵

جدول (۴-۶ ب) ضرایب فرکانس‌های غیرخطی برای مقادیر مختلف l/h_0 با تابع ضخامت نوع اول و $p^*=0.00005$

$(\omega_{ax})L$	$(\omega_{tr})L$	γ_{22}	γ_{21}	γ_{12}	γ_{11}	l/h_0
۲/۸۳۸۱۹	۰/۱۳۳۴۷	-۰/۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۱۴	۰/۰۱۵۳۷	۲/۷۴۴۳۸	۲۵
۲/۸۳۷۷۹	۰/۱۹۳۹۳	-۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۰۰۳۵	۰/۰۲۸۲۵	۱/۹۵۶۹۰	۱۵/۶
۲/۸۳۶۸۲	۰/۲۸۶۸۰	-۰/۰۰۰۲۷	۰/۰۰۰۸۶	۰/۰۵۰۷۵	۱/۴۳۴۴۷	۱۰
۲/۸۳۱۸۶	۰/۵۲۶۰۵	-۰/۰۰۴۸۷	۰/۰۰۳۴۱	۰/۱۶۴۴۶	۱/۱۳۳۴۵	۵

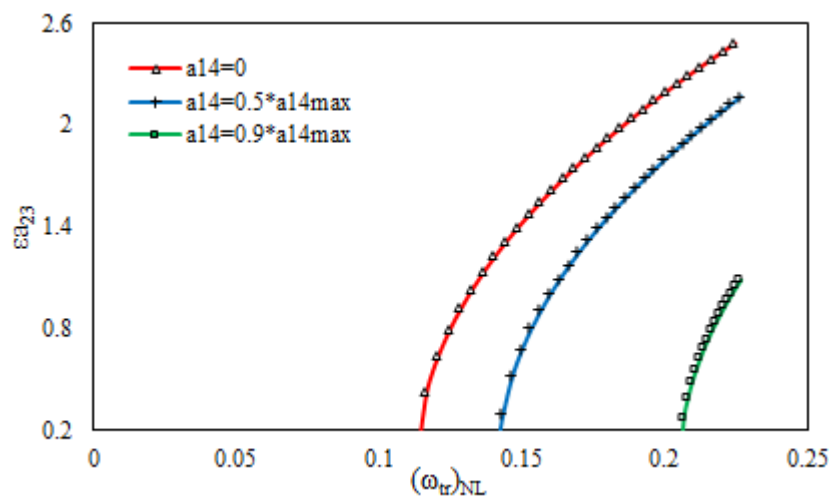
جدول (۴-۶) ضرایب فرکانس‌های غیرخطی برای مقادیر مختلف l/h_0 با تابع ضخامت نوع اول و $p^* = -0.00005$

$(\omega_{ax})L$	$(\omega_{tr})L$	γ_{22}	γ_{21}	γ_{12}	γ_{11}	l/h_0
۲/۸۳۸۱۹	۰/۰۸۹۲۰	-۰/۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۱۴	۰/۰۳۵۸۸	۶/۳۸۳۰۷	۲۵
۲/۸۳۷۷۹	۰/۱۶۶۶۵	-۰/۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۳۵	۰/۰۳۲۸۳	۲/۲۶۹۳۹	۱۵/۶
۲/۸۳۶۸۲	۰/۲۶۹۱۸	-۰/۰۰۰۲۷	۰/۰۰۰۸۶	۰/۰۵۴۰۰	۱/۵۲۲۹۸	۱۰
۲/۸۳۱۸۶	۰/۵۱۶۸۰	-۰/۰۰۴۸۴	۰/۰۰۳۴۱	۰/۱۶۷۱۸	۱/۱۴۹۳۲	۵

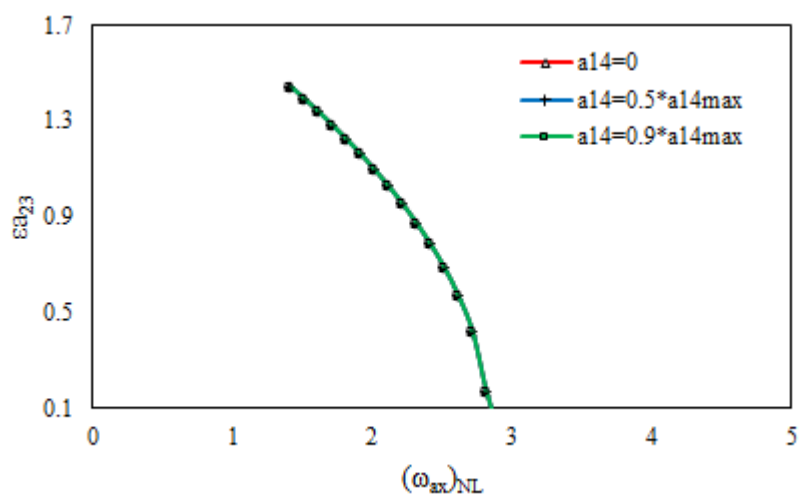


شکل (۴-۳ الف) نمودار فرکانس عرضی - دامنه محوری برای دامنه‌های عرضی مختلف با تابع ضخامت نوع اول و

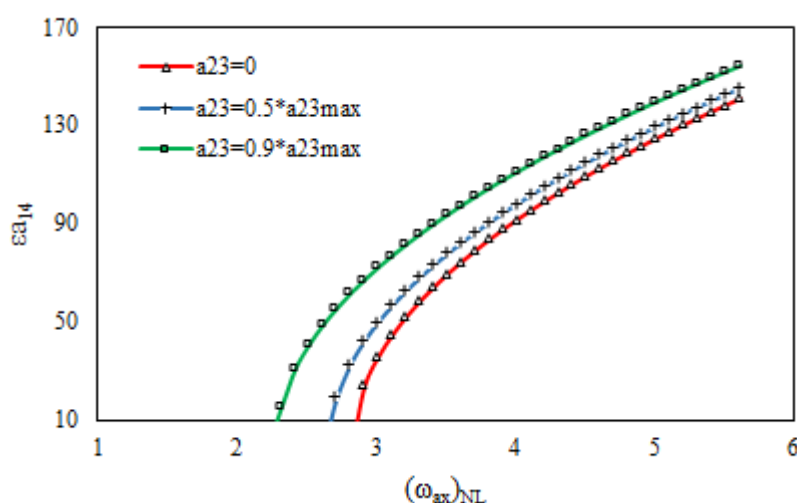
$$p^* = 0$$



شکل (۳-۴ ب) نمودار فرکانس عرضی - دامنه عرضی برای دامنه‌های عرضی مختلف با تابع ضخامت نوع اول و $p^*=0$



شکل (۳-۴ ج) نمودار فرکانس محوری - دامنه عرضی برای دامنه‌های عرضی مختلف با تابع ضخامت نوع اول و $p^*=0$



شکل (۳-۴) د) نمودار فرکانس محوری - دامنه محوری برای دامنه‌های عرضی مختلف با تابع ضخامت نوع اول و $p^*=0$

در شکل‌های (۳-۴) رفتارهای سخت‌شونده و نرم‌شونده فرکانس‌های محوری و عرضی نشان داده شده است. در همه موارد نتایج رفتار سخت‌شونده را نشان می‌دهند به جز حالت فرکانس محوری نسبت به دامنه عرضی، که رفتار نرم‌شونده دارد. بر طبق شکل‌های (۳-۴) ج) و (۳-۴) د) دامنه محوری (a_{14}) تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر روی فرکانس‌های محوری ندارد. نمودارهای مشابه‌ای را می‌توان برای مقادیر مختلف بارهای محوری رسم کرد. خلاصه رفتار تیر در جدول (۷-۴) لیست شده است. با تغییر پروفیل سطح مقطع، رفتار سخت‌شونده و نرم‌شونده تیر تغییر نمی‌کند. همچنین، بار محوری نمی‌تواند تغییری در رفتار نرم‌شونده و سخت‌شونده فرکانس‌های غیرخطی ایجاد کند.

جدول (۷-۴) تأثیر دامنه محوری و عرضی بر روی فرکانس‌های غیرخطی با تابع ضخامت نوع اول، نوع پنجم و $p^*=0$

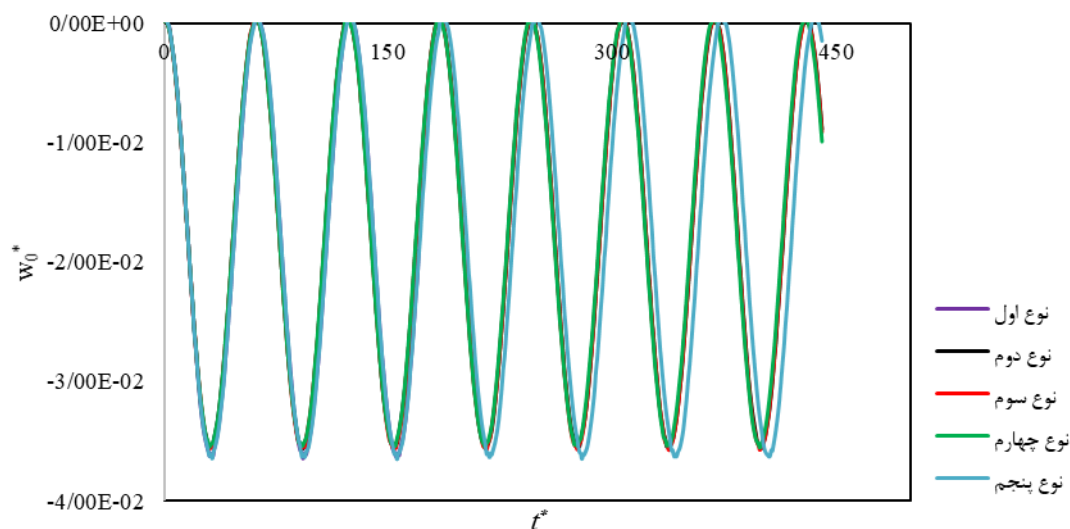
$(\omega_{tr})_{NL}$		$(\omega_{ax})_{NL}$		l/h_0
a_{14}	a_{23}	a_{14}	a_{23}	
سخت‌شونده	سخت‌شونده	سخت‌شونده	نرم‌شونده	۲۵
سخت‌شونده	سخت‌شونده	سخت‌شونده	نرم‌شونده	۱۵/۶
سخت‌شونده	سخت‌شونده	سخت‌شونده	نرم‌شونده	۱۰
سخت‌شونده	سخت‌شونده	سخت‌شونده	نرم‌شونده	۵

شکل (۴-۴) پاسخ عرضی تیر به ازای بار گسترده $1N/m$ با ضابطه $\text{Heaviside}(T_0) = \begin{cases} 0 & T_0 < 1/t_0 \\ 1 & T_0 > 1/t_0 \end{cases}$

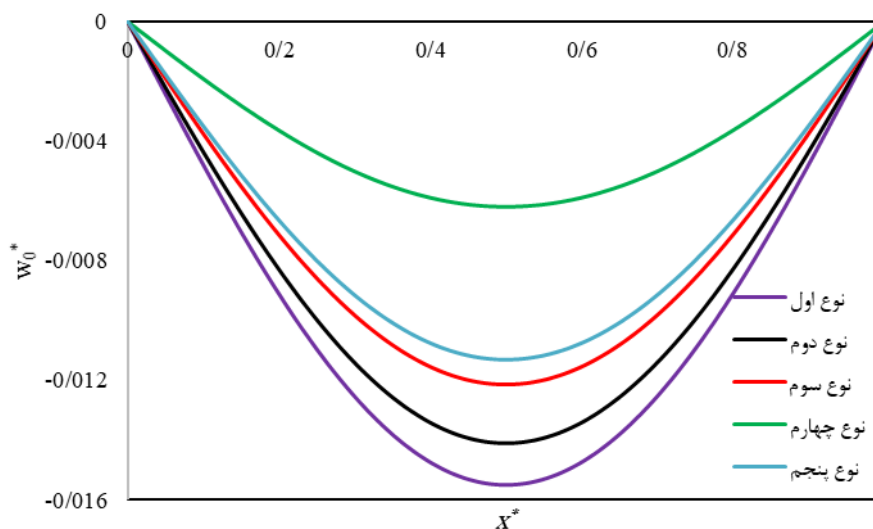
(زمان مشخصه است که در بخش (۴-۳) تعریف شده) وارد می‌شود را در $x^* = 0.5$ نشان می‌دهد.

پاسخ تیر به ازای پروفیل‌های ضخامت مطابق جدول (۴-۲) تعریف شده‌اند و همگی، معادل استاتیکی

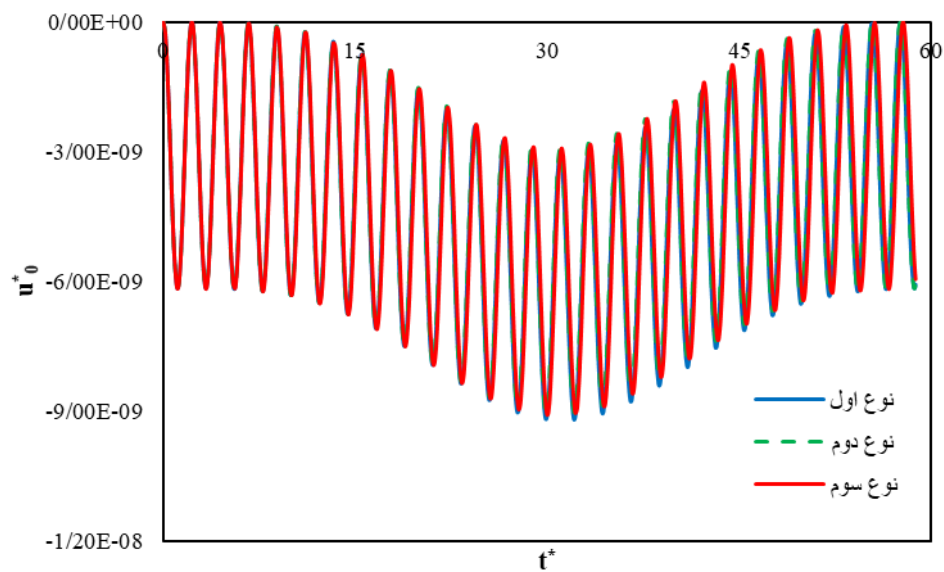
یکسان دارند. شکل (۵-۴) تغییر شکل عرضی تیر را در زمان $t^* = 0.05/t_0$ نشان می‌دهد.



شکل (۴-۴) پاسخ عرضی تیر در $x^* = 0.5$ به ازای توابع ضخامت مختلف

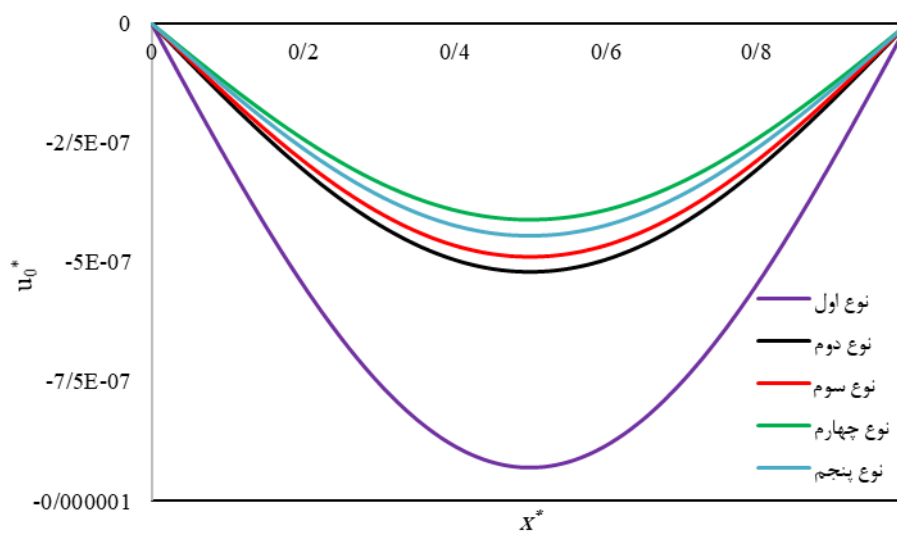


شکل (۵-۴) تغییر شکل عرضی تیر در $t^* = 0.05/t_0$ به ازای توابع ضخامت مختلف

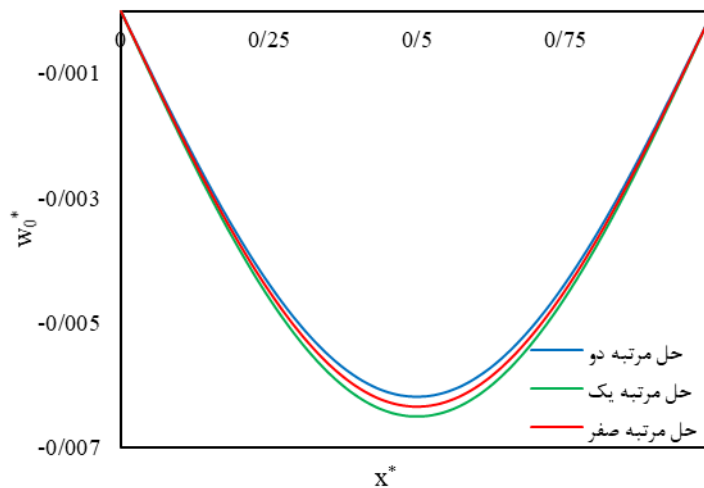


شکل (۶-۴) پاسخ محوری تیر در $x^*=0.5$ به ازای توابع ضخامت مختلف

شکل (۶-۴) و شکل (۷-۴) مربوط به پاسخ زمانی و تغییر شکل محوری تیر تحت بار گسترده است.



شکل (۷-۴) تغییر شکل محوری تیر در $t^*=0.05/t_0$ به ازای توابع ضخامت مختلف



شکل (۸-۴) تغییر شکل عرضی مرتبه های مختلف تیر در $t^*=0.05/t_0$ به ازای تابع ضخامت نوع چهارم

شکل (۸-۴) تغییر شکل عرضی تیر در $t^*=0.05/t_0$ به ازای تابع ضخامت نوع چهارم برای مرتبه های مختلف معادلات را نشان می دهد.

۷-۴-جمع بندی

در این فصل فرمول بندی و روش حل ریاضی برای مطالعه رفتار فرکانس های غیرخطی تیر با ضخامت متغیر متقارن دلخواه که در معرض بار محوری قرار دارد ارائه گردید. در فرمول بندی تاثیر هندسی غیرخطی در نظر گرفته شد و میدان جابجایی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تخمین زده شد. معادلات حاکم با استفاده از تکنیک اغتشاشات و روش گالرکین به صورت تحلیلی حل شد. مطالعه پارامتری برای بررسی تاثیر توابع ضخامت مختلف بر روی فرکانس های طبیعی تیر انجام گردید.

فصل پنجم

نتیجه گیری و پیشنهادها

۱-۵-مقدمه

در این رساله تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ضخامت متغیر با خیز نسبتاً زیاد، تحت بار دینامیکی عرضی و بار محوری به کمک تئوری اغتشاشات، انجام شد. تیر از ماده همگن و همسانگرد ساخته شده است. در استخراج معادلات، میدان جابه‌جایی با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول تخمین زده شد. سینماتیک مسأله بر اساس روابط کرنش-جابجایی فن‌کارمن و رابطه‌ی ساختاری، روابط هوک است. معادلات حاکم بر حرکت تیر، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی و با ضرایب متغیر هستند که به یکدیگر کوپل بوده و به کمک اصل هامیلتون تعیین شده‌اند.

۲-۵- نتیجه‌گیری

- معادلات حاکم بر حرکت تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو، معادلاتی با مشتقات جزئی و ضرایب متغیر که به کمک بسط WKB حل شد. این معادلات در هر مرتبه ϵ ، یک حل فرم بسته^۱ دارند. این حل، یک روش سیستماتیک است که برای تمام پروفیل‌های ضخامت قابل استفاده است و چند نمونه از این پروفیل‌ها در اینجا بررسی شد.
- با افزایش l/h فرکانس طبیعی زیاد شده و اختلاف بین تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو افزایش می‌یابد.
- می‌توان مشاهده کرد که تغییرات سطح مقطع تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر روی شکل مودها دارد. در روش‌هایی مانند گالرکین، توابع آزمایشی^۲ شناخته شده مانند تابع سینوس که شرایط هندسی مسأله را ارضا می‌کنند. گزینه دقیقی برای شکل مد تیر با ضخامت متغیر نیستند.
- روش‌های ذکر شده مبتنی بر تئوری اغتشاشات، می‌توانند برای طراحی تیرهای غیریکنواختی که بر اساس تئوری‌های اویلر-برنولی، تیموشنکو و FSDT فرمول‌بندی می‌شوند، به کار روند.

¹ Closed-form solution

² Trial

- در تیر با در نظر گرفتن اثر برش، زمانی که بار محوری در نظر گرفته نمی‌شود. افزایش ضخامت باعث افزایش فرکانس طبیعی عرضی تیر می‌شود و همچنین فرکانس، مستقیماً وابسته به ضخامت است که با نتایج تیر اوپلر برنولی مطابقت دارد.
- بار محوری رابطه بین ضخامت و فرکانس خطی عرضی را تغییر می‌دهد. در غیاب بار محوری، این رابطه خطی است اما با افزایش بار محوری این رابطه به کلی تغییر می‌کند.
- بار محوری بر روی فرکانس محوری خطی تأثیر ندارد. هر چند که این کمیت می‌تواند باعث تغییر فرکانس محوری غیرخطی شود (برای $a_{23} \neq 0$) اما این تغییرات کوچک هستند.
- افزایش بار محوری باعث افزایش فرکانس عرضی خطی می‌شود اما در مورد فرکانس غیرخطی می‌تواند باعث افزایش یا کاهش فرکانس عرضی غیرخطی ω_{tr} گردد و این تغییر، وابسته به دامنه عرضی و محوری است.
- افزایش ضخامت باعث افزایش یا کاهش فرکانس می‌شود و این وابسته به a_{14} , a_{23} است. در حقیقت سیستم رفتار نرم شونده و سخت شونده نشان می‌دهد. هرچند اثر ضخامت بر روی ω_{tr} بیشتر از ω_{ax} است و تغییرات ضخامت تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر روی فرکانس محوری ندارد.
- افزایش دامنه محوری و عرضی باعث افزایش فرکانس‌های محوری و عرضی خواهد شد و a_{14} در مقایسه با a_{23} تأثیر بیشتری بر روی تغییرات فرکانس دارد.
- با استفاده از معادلات حاکم می‌توان علاوه بر فرکانس عرضی، فرکانس محوری را تعیین نمود.
- پروفیل‌های ضخامت مختلف با جرم (حجم) یکسان می‌توانند فرکانس‌ها را تغییر دهند.
- افزایش دامنه‌های محوری و عرضی باعث افزایش فرکانس‌های محوری و عرضی خواهد شد.
- تأثیر a_{14} در تیرهای نازک مهم‌تر است و بار محوری اثر بیشتری بر وابستگی فرکانس به دامنه در تیرهای نازک دارد.

- تغییرات ω_{ax} کوچک هستند اما a_{23} , a_{14} می‌توانند تغییرات قابل ملاحظه‌ای را در ω_{tr} ایجاد نمایند.
- در همه موارد تیر رفتار سخت‌شونده دارد به جز فرکانس محوری نسبت به دامنه عرضی که تیر رفتار نرم‌شونده است.
- این فرمول‌بندی را می‌توان برای معادلات ساختاری خطی، روابط سینماتیک غیرخطی و توزیع متقارن ماده در راستای ضخامت به کار برد.
- فرمول‌بندی ارائه شده، مشکل مش‌بندی و بررسی حساسیت مش در روش‌های عددی را ندارد.

۳-۵- پیشنهادها

هرچند فرمول‌بندی برای ماده الاستیک ارائه شده است اما این روند را می‌توان برای تمامی تیرهایی که معادلات ساختاری خطی، روابط سینماتیک غیرخطی (فن‌کارمن)، و توزیع متقارن ماده و هندسه در مقطع نسبت به سطح میانی دارند؛ به کار برد. تعدادی از آن‌ها عبارتند از: مواد کامپوزیت، مواد FG با توزیع ناهمگنی در راستای ضخامت یا محوری. برای تمامی این موارد معادلات ساختاری متفاوت هستند و ضرایب منته‌های تنش تغییر خواهد کرد زیرا بازه انتگرال‌گیری نسبت به Z به تعدادی زیر بازه تقسیم خواهد شد و توزیع تنش با مواد الاستیک متفاوت است. همچنین ضرایب انرژی جنبشی تغییر خواهد کرد. در مسأله مورد بررسی، تنها ضرایب معادلات که مقادیر ثابتی هستند نسبت به ماده الاستیک تغییر خواهند کرد. برای ماده تابعی محوری، تابع ضخامت به تابعی جدید تبدیل خواهد شد. بنابراین روند حل تغییر نخواهد کرد اما می‌توان اثر عوامل بیشتری را بر روی فرکانس‌ها بررسی نمود. برخی از پیشنهادها برای مطالعه بیشتر در راستای موضوع رساله به صورت زیر هستند:

الف- بررسی تیر ویسکوالاستیک جدار متغیر با خیز نسبتاً زیاد

ب- بررسی تیر هایپرالاستیک جدار متغیر با خیز نسبتاً زیاد

ج- بررسی تیر FG و کامپوزیت جدار متغیر با خیز نسبتاً زیاد

مراجع

- [1]• Malatkar P. (2003) Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates, Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University Blacksburg, Virginia.
- [2]• Ugural A.C. (2009), *Stresses in Beams, Plates, and Shells*, McGraw-Hill, New York.
- [3]• Evan–Iwanowski R. M. (1976), *Resonance Oscillations in Mechanical Systems*, Elsevier Scientific Publ. Company, New York.
- [4]• Nayfeh A. H., Mook D. T. (1979), *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, New York.
- [5]• Moon F.C. (1987), *Chaotic Vibrations, An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, New York.
- [6]• Meirovitch L. (1970), *Analytical Methods in Dynamics*, McGraw–Hill, New York.
- [7]• Shames I. H., Dym C. L. (1985), *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*, McGraw–Hill, New York.
- [8]• Cowper G. R. (1966), The shear coefficient in Timoshenko’s beam theory, *Journal of Applied Mechanics*, 33, 335–340.
- [9]• Crespo da Silva M. R. M. (1978), Flexural–flexural oscillations of beck’s column subject to a planar harmonic excitation, *Journal of Sound and Vibration*, 60, 133–144.
- [10]• Hinnant H. E., Hodges D. H. (1988), Nonlinear analysis of a cantilever beam, *AIAA Journal*, 26, 1521–1527.
- [11]• Dowell E. H., Traybar J., Hodges D. H. (1977), An experimental–theoretical correlation study of non–linear bending and torsion deformations of a cantilever beam, *Journal of Sound and Vibration*, 50, 533–544.
- [12]• Wang C. M., Lam K. Y., Hel X. Q., Chucheepsakul S. (1997), Large deflections of an end supported beam subjected to a point load, *Journal of Non–Linear Mechanics*, 32, 63–72
- [13]• Ma H. M., Gao X. L., Reddy J. N. (2008), A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 (12), 3379–3391.
- [14]• Tehrani M., Eipakchi H. R. (2012), Response determination of a viscoelastic Timoshenko beam subjected to moving load using analytical and numerical methods, *Structural Engineering and Mechanics*, 44(1), 1–13.
- [15]• Seddighi H., Eipakchi H. R. (2013), Natural frequency and critical speed determination of an axially moving viscoelastic beam, *Mechanics of Time–Dependent Materials*, 17, 529–541.

- [16]• Seddighi H., Eipakchi H. R. (2016), Dynamic response of an axially moving viscoelastic Timoshenko beam, *Journal of Solid Mechanics*, 8 (1), 78–92.
- [17]• Woinowsky Krieger S. (1950), The effect of an axial force on the vibration of hinged bars, *Journal of Applied Mechanics*, 17, 35–36.
- [18]• Burgreen D. (1951), Free vibrations of a pin-ended column with constant distance between pin ends, *Journal of Applied Mechanics*, 18, 135–139.
- [19]• Bolotin V. V. (1964), *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, Holden-Day, San Francisco.
- [20]• Evensen D. A. (1968), Nonlinear vibrations of beams with various boundary conditions, *AIAA Journal*, 6, 370–372.
- [21]• Busby H. R., Weingarten V.I. (1972), Non-linear response of a beam to periodic loading, *Journal of Non-Linear Mechanics*, 7, 289–303.
- [22]• Ho C. H., Scott R. A., Easley J. G. (1975), Non-planar, non-linear oscillations of a beam I, forced motions, *Journal of Non-Linear Mechanics*, 10, 113–127.
- [23]• Ho C. H., Scott R. A., Easley J. G. (1976), Non-planar, non-linear oscillations of a beam II, free motions, *Journal of Sound and Vibration*, 47, 333–339.
- [24]• Atluri S. (1973), Nonlinear vibrations of a hinged beam including nonlinear inertia effects, *Journal of Applied Mechanics*, 40, 121–126.
- [25]• Crespo da Silva M. R. M. (1988), Non-linear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams. I, formulation, *Journal of Solids and Structures*, 24, 1225–1234.
- [26]• Pai P. F., Nayfeh A. H. (1990), Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations, *Journal of Non-Linear Mechanics*, 25, 455–474.
- [27]• Anderson T. J., Nayfeh A.H., Balachandran B. (1996), Experimental verification of the importance of the nonlinear curvature in the response of a cantilever beam, *Journal of Vibration and Acoustics*, 1(18), 21–27.
- [28]• Nordgren R. P. (1974), On computation of the motion of elastic rods, *Journal of Applied Mechanics*, 41, 777–780.
- [29]• Epstein M., Murray D. W. (1976), Three-dimensional large deformation analysis of thin walled beams, *Journal of Solids and Structures*, 12, 867–876.
- [30]• Hodges D. H., Dowell E. H. (1974), *Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades*, NASA Technical Note D-7818.

- [31]• Rosen A., Friedmann P. (1979), The nonlinear behavior of elastic slender straight beams undergoing small strains and moderate rotations, *Journal of Applied Mechanics*, 46, 161–168.
- [32]• Rosen A., Loewy R. G., Mathew M. B. (1987), Nonlinear analysis of pretwisted rods using principal curvature transformation, part I, Theoretical derivation, *AIAA Journal*, 25, 470–478.
- [33]• Rosen A., Loewy R. G., Mathew M. B. (1987), Nonlinear analysis of pretwisted rods using principal curvature transformation. part II, Numerical results, *AIAA Journal*, 25, 598–604.
- [34]• Crespo da Silva M. R. M., Hodges D. H. (1986), Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades. I, Formulation, *Vertica: the international journal of rotorcraft and powered lift aircraft*, 10, 51–169.
- [35]• Crespo da Silva M. R. M. (1991), Equations for nonlinear analysis of 3D motions of beams, *Journal of Applied Mechanics Reviews*, 44, 51–59.
- [36]• Hodges D.H., Crespo da Silva M. R. M., Peters D. A. (1988), Nonlinear effects in the static and dynamic behavior of beams and rotor blades, *Vertica : the international journal of rotorcraft and powered lift aircraft*, 12, 243–256.
- [37]• Ma A. J., Chen S. H., Song D. T. (1995), A new method of nonlinear response analysis for large deflection forced vibrations of beams, *Finite Elements in Analysis and Design*, 20(1), 36–46.
- [38]• Lee K. (2002), Large deflections of cantilever beams of non-linear elastic material under a combined loading, *Journal of Non-Linear Mechanics*, 37, 439–443
- [39]• Dado M., Al-Sadder S. (2005), A new technique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams, *Mechanics Research Communications*, 32, 692–703.
- [40]• Zhang W., Wang F, Yao M. (2005), Global bifurcations and chaotic dynamics in nonlinear nonplanar oscillations of a parametrically excited cantilever beam, *Nonlinear Dynamics*, 40, 251–279.
- [41]• Zhang W., Wang F. X., Zu J. W. (2005), Local bifurcations and codimension-3 degenerate bifurcations of a quintic nonlinear beam under parametric excitation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 24(4), 977–998.
- [42]• Zhang W., Yao M. H., Zhang J. H. (2009), Using the extended Melnikov method to study the multi-pulse global bifurcations and chaos of a cantilever beam, *Journal of Sound and Vibration*, 319(1–2), 541–569.

- [43]• Pratiher B., Dwivedy S. K. (2011), Nonlinear vibrations and frequency response analysis of a cantilever beam under periodically varying magnetic field, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 3(3), 378–391.
- [44]• Chen L. (2010), An integral approach for large deflection cantilever beams, *Journal of Non-Linear Mechanics*, 45(3), 301–305.
- [45]• Stoykov S., Ribeiro P. (2010), Nonlinear forced vibrations and static deformations of 3D beams with rectangular cross section, The influence of warping, shear deformation and longitudinal displacements, *Journal of Non-Linear Mechanics*, 24, 1225–1234.
- [46]• Chen L. H., Zhang W., Yang F. H. (2010), Nonlinear dynamics of higher dimensional system for an axially accelerating viscoelastic beam with in-plane and out-of-plane vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, 329 (25), 5321–5345.
- [47]• Jang T. S. (2012), A new semi-analytical approach to large deflections of Bernoulli Euler–v. Karman beams on a linear elastic foundation, Nonlinear analysis of infinite beams, *Journal of Mechanical Sciences*, 8, 863–869.
- [48]• Brojan M., Cebon M., Kosel F. (2012), Large deflections of non-prismatic nonlinearly elastic cantilever beams subjected to non-uniform continuous load and a concentrated load at the free end, *Acta Mechanica Sinica*, 28(3), 863–869.
- [49]• Wattanakulpong N, Chaikittiratana A. (2013), On the linear and nonlinear vibration responses of elastically end restrained beams using DTM, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 42, 135–150.
- [50]• Tari H. (2013), On the parametric large deflection study of Euler–Bernoulli cantilever beams subjected to combined tip point loading, *Journal of Non-Linear Mechanics*, 49 , 90–99.
- [51]• Zhang W., Wang D. M., Yao M. H. (2014), Using Fourier differential quadrature method to analyze transverse nonlinear vibrations of an axially accelerating viscoelastic beam, *Nonlinear Dynamics*, 78, 839–856.
- [52]• Mirzabeigy A., Madoliat R. (2016), Large amplitude free vibration of axially loaded beams resting on variable elastic foundation, *Alexandria Engineering Journal*, 55 (2), 1107–1114.
- [53]• Guo Z., Zhang W. (2016), The spreading residue harmonic balance study on the vibration frequencies of tapered beams, *Applied Mathematical Modelling*, 40(15–16), 7195–7203.

- [54]• Minaei M. (2016), Strongly nonlinear free vibration analysis of beams using modified homotopy perturbation method subjected to the nonlinear thermal loads, *Indian Journal of Science and Technology*, 9, 17–34.
- [55]• Gholami R., Ansari R., Gholami Y. (2017), Nonlinear resonant dynamics of geometrically imperfect higher-order shear deformable functionally graded carbon–nanotube reinforced composite beams, *Composite Structures*, 174, 45–58.
- [56]• Ghayesh M. H. (2009), Stability characteristics of an axially accelerating string supported by an elastic foundation, *Mechanism and Machine Theory*, 44 (10), 1964–1979.
- [57]• Ghayesh M. H. (2011), On the natural frequencies complex mode functions, and critical speeds of axially traveling laminated beams, Parametric study, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 24(4), 373–382.
- [58]• Ghayesh M. H. (2012), Coupled longitudinal–transverse dynamics of an axially accelerating beam, *Journal of Sound and Vibration*, 331(23), 5107–5124.
- [59]• Ghayesh M. H. (2012), Stability and bifurcations of an axially moving beam with an intermediate spring support, *Nonlinear Dynamics*, 69, 193–210.
- [60]• Ghayesh M. H. (2012), Subharmonic dynamics of an axially accelerating beam, *Archive of Applied Mechanics*, 82(9), 1169–1181.
- [61]• Ghayesh M. H. (2018), Nonlinear vibration analysis of axially functionally graded shear–deformable tapered beams, *Applied Mathematical Modelling*, 59, 583–596.
- [62]• Ghayesh M. H. (2019), Asymmetric viscoelastic nonlinear vibrations of imperfect AFG beams, *Applied Acoustics*, 154, 121–128.
- [63]• Ghayesh M. H. (2019), Dynamical analysis of multilayered cantilevers, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 71, 244–253.
- [64]• Ghayesh M. H. (2019), Mechanics of viscoelastic functionally graded micro cantilevers, *European Journal of Mechanics– A/Solids*, 73, 492–499.
- [65]• Ghayesh M. H. (2019), Nonlinear oscillations of FG cantilevers, *Applied Acoustics*, 145, 393–398.
- [66]• Ghayesh M. H. (2019), Viscoelastic dynamics of axially FG micro beams, *Journal of Engineering Science*, 135, 75–85.
- [67]• Ghayesh M. H. (2019), Viscoelastic mechanics of Timoshenko functionally graded imperfect microbeams, *Composite Structures*, 225, 110974.

- [68]• McHugh K., Dowell E. (2019), Nonlinear responses of inextensible cantilever and free–free beams undergoing large deflections, *Journal of Applied Mechanics*, 85, 51008.
- [69]• Ghuku S., Saha K. N. (2019), A parametric study on geometrically nonlinear behavior of curved beams with single and double link rods, and supported on moving boundary, *Journal of Mechanical Sciences*, 161–162, 105065.
- [70]• Zhihua W., Yimin Z., Guo Y., Zhou Y. (2019), Nonlinear primary and super–harmonic resonances of functionally graded carbon nanotube reinforced composite beams, *Journal of Mechanical Sciences*, 154, 321–340.
- [71]• Tasora A., Benatti S., Mangoni D., Garziera R. (2020), A geometrically exact isogeometric beam for large displacements and contacts, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 358, 112635.
- [72]• Pai P. F., Nayfeh A. H. (1991), Three–dimensional nonlinear vibrations of composite beams. I, equations of motion, *Nonlinear Dynamics*, 1, 477–502.
- [73]• Pai P. F., Nayfeh A. H. (1992), A nonlinear composite beam theory, *Nonlinear Dynamics*, 3, 273–303.
- [74]• Pai P. F., Nayfeh A. H. (1994), A fully nonlinear theory of curved and twisted composite rotor blades accounting for warpings and three–dimensional stress effects, *Journal of Solids and Structures*, 31, 1309–1340.
- [75]• Wang T. M., Issa M. S. (1987), Extensional Vibrations of Continuous Circular Curved Beams with Rotary Inertia and Shear Deformation, II Forced Vibration, *Journal of Sound and Vibration*, 114(2), 309–323.
- [76]• Van Rensburg N. F. J., Van der Merwe A. J. (2006), Natural Frequencies and Modes of a Timoshenko Beam, *Wave Motion*, 44(1) 58–69.
- [77]• Li X. F., Yu Z. W., Zhang H. (2011), Free Vibration of Shear Beams with Finite Rotational Inertia, *Journal of Construction Steel Research*, 67(10), 1677–1683.
- [78]• Su Y. C., Ma C. C. (2012), Transient wave analysis of a cantilever Timoshenko beam subjected to impact loading by Laplace transform and normal mode methods, *Journal of Solids and Structures*, 49, 1158–1176.
- [79]• Lokshin A. Z., Mishkevich V., Ivanov L. D. (2009), Effect of shear on deflection and buckling of beams and plates, *Ships and Offshore Structures*, 4 (4), 323–336.

- [80]• Larbi L. O., Kaci A., Houari M. S. A., Tounsi A. (2013), An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41 (4), 421–433.
- [81]• Sun D. L., Li X. F. (2017), Initial value method for free vibration of axially loaded functionally graded Timoshenko beams with non–uniform cross section, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 47, 102–120.
- [82]• Khadem Moshir S., Eipakchi H. R. (2018), An analytical approach for vibration analysis of laminated orthotropic beam based on nonlocal theory, *Proceedings of the institution of mechanical engineers part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, 233 (10), 3633–3648.
- [83]• Alavi S. H., Eipakchi H.R. (2019), Analytical method for free–damped vibration analysis of viscoelastic shear deformable annular plates made of functionally graded materials, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 47 (4), 497–519.
- [84]• Foda M. A. (1999), Influence of shear deformation and rotary inertia on nonlinear free vibration of a beam with pinned ends, *Computers and Structures*, 71(6), 663–670.
- [85]• Zhong H., Liao M. (2007), Higher–order nonlinear vibration analysis of Timoshenko beams by the spline–based differential quadrature method, *Shock and Vibration*, 14(6), 407–416.
- [86]• Sapountzakis E. J., Mokos V. G. (2008), Shear deformation effect in nonlinear analysis of spatial beams, *Engineering Structures*, 30 (3), 653–663.
- [87]• Simsek M. (2010), Non–linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load, *Composite Structures*, 92(10), 2532–2546.
- [88]• Stojanovic V. (2015), Geometrically nonlinear vibrations of beams supported by a nonlinear elastic foundation with variable discontinuity, *Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 28, 80–66.
- [89]• Shahlaei Far S., Nabarrete A., Balthazar J. M. (2016), Nonlinear vibrations of cantilever Timoshenko beams, A homotopy analysis, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(10) 1866–1877.
- [90]• Farokhi H., Ghayesh M. H. (2016), Nonlinear coupled dynamics of shear deformable micro beams, *Journal of Dynamics and Control*, 4 (4), 492–503.
- [91]• Das D. (2017), Free vibration and buckling analyses of geometrically non–linear and shear–deformable FGM beam fixed to the inside of a rotating rim, *Composite Structures*, 179, 628–660.

- [92]• Sohani F., Eipakchi H. R. (2013), Response determination of a beam with moderately large deflection under transverse dynamic load using first order shear deformation theory, *Journal of Solid Mechanics*, 5(4), 391–401.
- [93]• Malek Hosseini Z., Eipakchi H. R. (2017), An analytical procedure for dynamic response determination of a viscoelastic beam with moderately large deflection using first-order shear deformation theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 24 (10), 875–884.
- [94]• Vuong P. M., Duc N.D. (2020), Nonlinear vibration of FGM moderately thick toroidal shell segment within the framework of Reddy's third order-shear deformation shell theory, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 16, 245–264.
- [95]• Xie K., Wang Y., Fu T. (2020), Nonlinear vibration analysis of third-order shear deformable functionally graded beams by a new method based on direct numerical integration technique, *Journal of Mechanics and Materials in Design*, 16, 839–855.
- [96]• Kane T. R., Ryan R. R., Banerjee A. K. (1987), Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base, *Journal of Guidance*, 10, 139–151.
- [97]• Jategaonkar R., Chehil D. S. (1989), Natural frequencies of a beam with varying section properties, *Journal of Sound and Vibration*, 133(2), 303–322.
- [98]• De Rosa M. A., Auciello N. M. (1996), Free vibrations of tapered beams with flexible ends, *Journal of Computers and Structures*, 60(2), 197–202.
- [99]• Eisenberger M., Reich Y. (1989), Static, vibration and stability analysis of non-uniform beams, *Journal of Computers and Structures*, 31(4), 567–573.
- [100]• Abrate S. (1995), Vibration of non-uniform rods and beams, *Journal of Sound and Vibration*, 185 (4), 703–716.
- [101]• Zhou D., Cheung Y. K. (2000), The free vibration of a type of tapered beams, *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188, 203–216.
- [102]• Byoung K. L., Jong K. L., Tae E. L., Sun G. K. (2002), Free vibrations of tapered Beams with general boundary condition, *Journal of Civil Engineering*, 6(3), 283–288
- [103]• Kukla S., Zamojska I. (2005), Application of Green's function method in free vibration analysis of non-uniform beams, *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science*, 4(1), 87–94.
- [104]• Ece M. C, Aydogdu M., Taskin V. (2007), Vibration of a variable cross-section beam, *Journal of Mechanics Research Communications*, 34, 78–84.

- [105]• De Rosa M. A., Lippiello M. (2009), Natural vibration frequencies of tapered beams, *Journal of Engineering Transactions*, 57(1), 45–66.
- [106]• Zamorska I. (2010), Free transverse vibrations of non–uniform beams, *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science*, 9(2), 244–250.
- [107]• Mahmoud A. A., Abdelghany S. M., Ewis K. M. (2013), Free vibrations of uniform and non–uniform E–B beam using differential transformation method, *Asian Journal of Mathematics and Applications*, 110–116.
- [108]• Li S., Hu J., Zhai C., Xie L. (2013), A unified method for modeling of axially and/or transversally functionally graded beams with variable cross–section profile, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41 (2) 168–188.
- [109]• Boiangiu M., Ceasus V., Untaroiu C. D. (2014), A transfer matrix method for free vibration analysis of Euler–Bernoulli beams with variable cross–section, *Journal of Vibration and Control*, 22(11), 2591–2602.
- [110]• Nourifar M., Keyhani A., Aftabi S. A. (2017), Free vibration analysis of rotating Euler–Bernoulli beam with exponentially varying cross–section by differential transform method, *Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18(2), 1850024112•Cao D., Gao Y. (2018), Free vibration of non–uniform axially functionally graded beams using the asymptotic development method, *Applied Mathematics and Mechanics*, 40, 85–96.
- [111]• Cao D., Gao Y. (2018), Free vibration of non–uniform axially functionally graded beams using the asymptotic development method, *Applied Mathematics and Mechanics*, 40, 85–96.
- [112]• Li Z., Xu Y. F., Huang D., Zhao Y. (2020), Two–dimensional elasticity solution for free vibration of simple–supported beams with arbitrarily and continuously varying thickness, *Journal of Applied Mechanics*, 9, 275–289.
- [113]• Yuan J., Pao Y. H., Chen W. (2016), Exact solutions for free vibrations of axially inhomogeneous Timoshenko beams with variable cross–section, *Acta Mechanica*, 227, 2625–2643.
- [114]• Korabathina R., Koppanat M. S. (2016), Linear free vibration analysis of tapered Timoshenko beams using coupled displacement field Method, *Journal of Mathematical Models in Engineering*, 2(1), 27–33.
- [115]• Zhao Y., Huang Y., Guo M. (2017), A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non–uniform cross–section based on Chebyshev polynomials theory, *Journal of Composite Structure*, 168, 277–284.

- [116]• Chen Y., Zhang J., Zhang H. (2017), Free vibration analysis of rotating tapered Timoshenko beams via variational iteration method, *Journal of Vibration and Control*, 23(2), 220–234.
- [117]• Hagedorn P., Gupta A. D. (1988), *Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems*, John Wiley & Sons. USA.
- [118]• Wang C. M., Reddy J. N., Lee K. H. (2000), *Shear deformable beams and plates, relationships with classical solutions*, Elsevier Science, New York.
- [119]• Shukla R. K. (2013) PhD. Thesis, *Vibration Analysis of Tapered Beam*, Department of Mechanical Engineering National Institute of Technology, Rourkela.
- [120]• Amabili M. (2008), *Nonlinear vibration and stability of shells and plates*, Cambridge University Press, New York.
- [121]• Sadd M. (2009), *Elasticity Theory, Applications, and Numerics*, Academic Press, New York.
- [122]• Rao S. S. (2007), *Vibrations of continuous systems*, John Wiley & Sons. New Jersey.
- [123]• Nayfeh A. H. (1993), *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley, New York.
- [124]• Nayfeh A. H., Pai P. F. (2004), *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- [125]• Khadem Moshir S., Eipakchi H. R, Sohani. F. (2017), Free vibration behavior of viscoelastic annular plates using first–order shear deformation theory, *Structural Engineering and Mechanics*, 62, 607–618.

ضمائم

پیوست الف: شکل بی بعد معادلات

$$\begin{aligned}
 & -h^* e \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^{*2}} + \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial x} w_1^* h^* \varepsilon^3 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x} \right)^2 h^* \varepsilon^3 \frac{dh^*}{dx} + h^* \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^{*2}} h^* \varepsilon \theta_1 \frac{\partial w_1^*}{\partial x} \\
 & + \frac{dh^*}{dx} \varepsilon^2 \frac{\partial u_0^*}{\partial x} + h^* \varepsilon^3 \frac{\partial w_0^*}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} + h^* \varepsilon \theta_1 w_1^* \frac{\partial w_1^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{dh^*}{dx} \varepsilon^3 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x} \right)^2 + \frac{dh^*}{dx} \varepsilon \theta_1 w_1^* \\
 & + \frac{1}{2} \frac{dh^*}{dx} \varepsilon \theta_1 w_1^{*2} - f_1^* = 0 \\
 \\
 & -\frac{1}{12} h^* e \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} + \frac{1}{12} h^* \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{12} h^* \varepsilon^3 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \frac{1}{12} h^* \varepsilon^3 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \\
 & + \frac{1}{4} h^* \varepsilon^2 \frac{dh^*}{dx} \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \frac{1}{4} h^* \varepsilon^3 \frac{dh^*}{dx} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} - h^* \varepsilon \theta_2 \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} - h^* \theta_2 u_1^* \\
 & - \varepsilon \theta_2 h^* w_1^* \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} - f_2^* = 0 \\
 \\
 & -h^* e \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^{*2}} + \frac{1}{2} \varepsilon^4 \frac{dh^*}{dx} \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right)^3 + \varepsilon^2 \theta_1 w_1^* \frac{dh^*}{dx} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} + \varepsilon^2 \theta_2 \frac{dh^*}{dx} w_1^{*2} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \\
 & + \varepsilon \theta_2 \frac{dh^*}{dx} w_1^* u_1^* + \varepsilon^2 h^* \theta_1 \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + h^* \varepsilon \theta_2 \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} u_1^* + h^* \varepsilon \theta_2 \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} w_1^* \\
 & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \theta_1 \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{dh^*}{dx} w_1^{*2} + 2 \varepsilon^2 \theta_2 \frac{dh^*}{dx} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} w_1^* + 2 \varepsilon^2 h^* \theta_2 \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \varepsilon^2 h^* \theta_1 w_1^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} \\
 & + \frac{1}{4} h^* \varepsilon^3 \frac{dh^*}{dx} \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \frac{3}{8} h^* \varepsilon^4 \frac{dh^*}{dx} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + \varepsilon^2 \theta_2 \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{dh^*}{dx} + \varepsilon^2 h^* \theta_2 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} w_1^{*2} \\
 & + \varepsilon \theta_2 \frac{dh^*}{dx} u_1^* + \varepsilon^3 \frac{dh^*}{dx} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \varepsilon h^* \theta_2 \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \varepsilon^2 h^* \theta_1 w_1^* \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \varepsilon^2 h^* \theta_2 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} \\
 & + 2 \varepsilon^2 h^* \theta_2 w_1^* \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \frac{1}{4} h^* \varepsilon^4 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \frac{1}{2} h^* \varepsilon^2 \theta_1 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} w_1^{*2} \\
 & + 2 \varepsilon^2 h^* \theta_2 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} w_1^* + \varepsilon^3 h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^{*2}} + \varepsilon^3 h^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{1}{12} \varepsilon^3 h^* \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} \\
 & + \frac{3}{2} \varepsilon^4 h^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{12} \varepsilon^3 h^* \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \frac{1}{8} \varepsilon^4 h^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right)^2 - f_3^* = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12}h^{*3}e\frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{4}\varepsilon^2 h^{*2}\theta_1 w_1^* \frac{dh^*}{dx^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \frac{1}{8}\varepsilon^2 h^{*2}\theta_1 w_1^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \\
& + \frac{1}{2}\varepsilon^2 h^{*2}\theta_2 \frac{dh^*}{dx^*} w_1^* \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \frac{1}{4}\varepsilon^2 h^{*2}\theta_2 \frac{dh^*}{dx^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} w_1^{*2} - \frac{1}{2}h^* w_1^{*3} - \varepsilon h^* \theta_1 \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} \\
& + \frac{1}{4}\varepsilon^3 h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} + \frac{1}{4}\varepsilon^2 h^{*2}\theta_2 \frac{dh^*}{dx^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \frac{3}{8}h^{*2}\varepsilon^4 \frac{dh^*}{dx^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)^2 \\
& + \frac{1}{4}h^{*2}\varepsilon^3 \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \frac{dh^*}{dx^*} \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{1}{24}\varepsilon^2 h^{*2}\theta_1 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 w_1^* + \frac{1}{12}\varepsilon^2 h^{*3}\theta_2 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 w_1^* \\
& - h^* w_1^* - \frac{3}{2}w_1^{*2} + \frac{1}{24}\varepsilon^2 h^{*3}\theta_1 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 + \frac{1}{12}\varepsilon^2 h^{*3}\theta_2 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 - \varepsilon \theta_2 h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} u_1^* \\
& + \frac{1}{32}\varepsilon^4 h^{*4} \frac{dh^*}{dx^*} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^3 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 h^* \theta_1 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)^2 w_1^* - \varepsilon h^* \theta_1 \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} w_1^* + \frac{1}{12}\varepsilon^2 h^{*3}\theta_2 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \\
& - \varepsilon^2 h^* \theta_2 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)^2 w_1^* + \frac{1}{12}\varepsilon^3 h^{*3} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{1}{12}\varepsilon^3 h^{*3} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} \\
& + \frac{1}{8}\varepsilon^4 h^{*3} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)^2 + \frac{1}{12}\varepsilon^3 h^{*3} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \frac{3}{16}\varepsilon^4 h^{*5} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}\right)^2 \\
& - \frac{1}{2}\varepsilon^2 h^* \theta_1 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)^2 - \varepsilon^2 h^* \theta_2 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^4 h^{*3} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \\
& + \frac{1}{12}\varepsilon^2 h^{*3}\theta_1 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} w_1^* + \frac{1}{24}\varepsilon^2 h^{*3}\theta_1 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} w_1^{*2} + \frac{1}{4}\varepsilon^2 h^{*3}\theta_2 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} w_1^* \\
& + \frac{1}{12}\varepsilon^3 h^{*3} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} + \frac{1}{12}\varepsilon^2 h^{*3}\theta_2 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} w_1^{*2} - f_4^* = 0
\end{aligned}$$

$$f_1^* = f_2^* = f_4^* = 0, \quad f_3^* = P^* \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}},$$

پیوست ب: معادلات مرتبه دوم

معادله اول:

$$\begin{aligned} & -2\alpha_1^2 L_{10}[u_{01}^*, w_{11}^*] + 2\alpha_1^2 \theta_1 I_0^* w_{10}^* \frac{\partial w_{10}^*}{\partial X} + \alpha_1^2 \theta_1 w_{10}^{*2} \frac{\partial I_0^*}{\partial X} - 4\alpha_1^2 e I_0^* \frac{\partial^2 u_{00}^*}{\partial T_0 \partial T_1} \\ & + 2\alpha_1^2 I_0^* \frac{\partial w_{00}^*}{\partial X} \frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial X^2} + \alpha_1^2 \frac{\partial I_0^*}{\partial X} \left(\frac{\partial w_{00}^*}{\partial X} \right)^2 + 2I_2^* \frac{\partial w_{10}^*}{\partial X} \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial X^2} + \frac{\partial I_2^*}{\partial X} \left(\frac{\partial w_{10}^*}{\partial X} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

معادله چهارم

$$\begin{aligned} & -2\alpha_1^2 L_{40}[u_{01}^*, w_{11}^*] - 2\alpha_1^4 \kappa \theta_2 I_0^* u_{10}^* \frac{\partial w_{00}^*}{\partial X} + 4\alpha_1^2 \kappa \theta_2 I_2^* w_{10}^* \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial X^2} - 3\alpha_1^4 I_0^* w_{10}^* \\ & + 2\alpha_1^2 \theta_1 I_2^* w_{10}^{*2} \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial X^2} + 2\alpha_1^4 \kappa \theta_2 I_2^* \left(\frac{\partial w_{10}^*}{\partial X} \right)^2 + 2\alpha_1^2 \theta_1 w_{10}^* \frac{\partial I_2^*}{\partial X} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial X} \\ & - 2\alpha_1^4 \kappa \theta_2 I_0^* \left(\frac{\partial w_{00}^*}{\partial X} \right)^2 + \alpha_1^2 \theta_1 I_2^* u_{10}^* \left(\frac{\partial w_{10}^*}{\partial X} \right)^2 - 4\alpha_1^2 e I_2^* u_{10}^* \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial T_0 \partial T_1} \\ & + 2\alpha_1^2 I_2^* \frac{\partial u_{00}^*}{\partial X} \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial X^2} + 2\alpha_1^2 I_2^* \frac{\partial w_{10}^*}{\partial X} \frac{\partial^2 u_{00}^*}{\partial X^2} + 2\alpha_1^2 \frac{\partial I_2^*}{\partial X} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial X} \frac{\partial u_{00}^*}{\partial X} \\ & + 2\alpha_1^2 I_2^* \frac{\partial u_{10}^*}{\partial X} \frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial X^2} + 2\alpha_1^2 I_2^* \frac{\partial w_{00}^*}{\partial X} \frac{\partial^2 u_{10}^*}{\partial X^2} + 2\alpha_1^2 \frac{\partial I_2^*}{\partial X} \frac{\partial w_{00}^*}{\partial X} \frac{\partial u_{10}^*}{\partial X} \\ & + 4\alpha_1^2 \kappa \theta_2 I_2^* w_{10}^* \frac{\partial I_2^*}{\partial X} \frac{\partial w_{10}^*}{\partial X} - 2\alpha_1^4 \theta_1 w_{10}^* I_0^* \frac{\partial u_{00}^*}{\partial X} - \alpha_1^4 \theta_1 I_0^* \left(\frac{\partial w_{00}^*}{\partial X} \right)^2 \end{aligned}$$

پیوست ج: تابع الحاقی

توابع الحاقی برای معادلات (۱۹-۳ الف) و (۱۹-۳ ب) را می‌توان با در نظر گرفتن معادلات دیفرانسیل همگن کوپل و توابع الحاقی $\Phi_1(X)$ و $\Phi_4(X)$ به دست آورد. معادله اول را در $\Phi_1(X)$ و معادله دوم را در $\Phi_4(X)$ ضرب می‌کنیم و بر روی بازه دامنه انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^{1/\varepsilon} L_2 \left(\left[u_{10}^*, w_{00}^* \right] \Phi_1 + L_4 \left[u_{10}^*, w_{00}^* \right] \Phi_4 \right) dx = 0$$

که L_2 و L_4 اپراتورهای دیفرانسیلی هستند و در معادله (۱۹-۳) تعریف شده‌اند. با استفاده از انتگرال جز به جز، معادلات الحاقی (مرتبط با بخش همگن) و شرایط مرزی متناظر برای $\Phi_1(X)$ و $\Phi_4(X)$ تعیین شده است. با حل این معادلات، توابع الحاقی تعیین گردید.

$$L[\phi_1, \phi_4] = 0 ; L[\phi_1, \phi_4] = \phi_{1,XX} + \theta_1 \phi_{4,X} - e \phi_{1,T_0 T_0}$$

$$L_2[\phi_2, \phi_3] = 0 ; L_2[\phi_2, \phi_3] = \frac{h^{*2}}{12} \phi_{2,XX} - \theta_2 \left(\phi_2 + \phi_{3,X} \right) - \frac{e h^{*2}}{12} \phi_{2,T_0 T_0}$$

$$L_3[\phi_2, \phi_3] = 0 ; L_3[\phi_2, \phi_3] = \theta_2 \phi_{2,X} + (\theta_2 + P^*) \phi_{3,XX} - e \phi_{3,T_0 T_0}$$

$$L_4[\phi_1, \phi_4] = 0 ; L_4[\phi_1, \phi_4] = -\theta_1 \phi_{1,X} + \frac{\theta_2 h^{*2}}{12} \phi_{4,XX} - \phi_4 - \frac{e h^{*2}}{12} \phi_{4,T_0 T_0}$$

Abstract

To achieve the best strength and weight distribution in many structures such as wind turbine towers, bridges, buildings, aerospace structures, etc; beams with a variable thickness along the axis, are used. Analyzing these structures when axial force and transverse deflection are coupled is more complicated and more important. One of the applications of the non-linear theory is finding more exact results. In this dissertation, free and forced vibrations in beams with variable thickness with moderately large deflection under transverse dynamic load and axial load will be investigated. The beam is homogeneous and isotropic, in deriving the equations, the displacement field is estimated by the first order shear deformation theory. The problem's kinematics is based on strain-displacement relation (Von-Karman's relation) and Hook's law as a constitutive equation. The governing equation of motion in this problem is a system of non-linear partial differential equations with variable coefficients which are determined by the hamilton principle.

Other assumptions that will be considered are as follows:

determining response according to space and time in the simply supported beam, determining natural frequencies of the beam for simple and fixed boundary conditions, investigating the amplitude dependency on frequency, investigating geometrical effects on response and frequencies, investigating the accuracy of the first order shear deformation theory in frequency determination, and comparison between the results and numerical solutions.

Keywords:

First order shear deformation theory, variable thickness, frequency analysis, perturbation theory, moderately large deflections, finite element method



Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

Ph.D. Thesis in Applied Mechanics

**Free and forced vibration of a variable thickness
beam with moderately large deflection under
transverse load using first order shear deformation
theory**

By: Fatemeh Sohani

**Supervisor:
Dr. Hamid Reza Eipakchii**

2021