

بسم الله الرحمن الرحيم



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی

بررسی جریان و انتقال حرارت در لوله های خمیده (مارپیچ)

توسط:

مریم پهلواندخت شاهجویی

استاد راهنما:

دکتر محمد حسن کیهانی

دکتر فرهاد طالبی

اسفند ۱۳۸۶

با سپاس فراوان از زحمات اساتید ارجمند جناب آقای دکتر کیهانی و جناب آقای دکتر طالبی و با تشکر از مسئولین محترم دانشکده مهندسی دانشگاه سمنان، بویژه مسئولین محترم کتابخانه و مرکز کامپیوتر که مساعدت فراوانی نموده اند.

چکیده:

جریان سیال در لوله های خمیده بدلیل گرادیان فشار موجود در مقطع لوله از وضعیت مستقیم (rectilinear) خارج شده و با افزوده شدن یک جریان ثانویه ضعیف به جریان چرخشی تبدیل می شود. نقش این چرخش بر انتقال حرارت می تواند در بهبود کارایی مبدل های لوله مارپیچ بسیار با اهمیت باشد. در این پروژه حل عددی معادلات ناویر-استوکس و معادله انرژی به روش حجم محدود برای جریان آرام توسعه یافته در لوله های خمیده، برای اعداد دین بالا و پایین ارائه شده است. در اعداد دین بالا پیک های دو گانه روی هر نیمه کانتور سرعت محوری مشاهده می شوند.

کلمات کلیدی:

جریان ثانویه، لوله های خمیده، جریان، انتقال حرارت جابجایی اجباری، حل عددی

فهرست مطالب:

۱- مقدمه، مروری بر کارهای انجام شده

۱-۱ مقدمه.....	۱
۲-۱ کاربردها.....	۲
۳-۱ بررسی پارامترهای مختلف در لوله های خمیده.....	۵
۱-۳-۱ الگوی جریان.....	۵
۲-۳-۱ افت فشار و ضرایب اصطکاک.....	۸
۲-۳-۱ عدد رینولدز بحرانی و جریان انتقالی.....	۹
۳-۳-۱ انتقال حرارت.....	۱۲

۲- تئوری و معادلات حاکم

۱-۲ معادلات حرکت.....	۲۰
۲-۲ جریان خمیده توسعه یافته.....	۲۲
۱-۲-۲ جریان آرام توسعه یافته در یک لوله دایره ای.....	۲۳
۱-۲-۲-۱ تقریب اولیه برای انحنای کوچک.....	۲۴
۲-۲-۲-۱ تقریب های ثانویه و بالاتر برای انحنای کوچک.....	۲۷
۳-۲-۲-۱ عدد دین.....	۳۴
۴-۲-۲-۱ جریان در اعداد دین بالا.....	۳۶
۵-۲-۲-۱ حل عددی معادلات جریان.....	۳۹
۶-۲-۲-۱ داده های تجربی و مقایسه با پیش بینی ها.....	۴۲

۳- معادلات بکار رفته و روش حل عددی

۴۶.....	۱-۳ معادلات اساسی.....
۵۱.....	۲-۳ روش عددی.....
۵۴.....	۳-۳ طرح اختلاف بالادست.....
۵۵.....	۱-۳-۳ ارزیابی طرح اختلاف بالادست.....
۵۶.....	۴-۳ طرح اختلاف پیوندی.....
۵۷.....	۱-۴-۳ ارزیابی طرح اختلاف پیوندی.....

۴- نتایج و نمودارها

۵۹.....	۱-۴ مقدمه.....
۵۹.....	۱-۱-۴ نتایج شبیه سازی برای جریان آرام.....
۸۷.....	فهرست منابع.....

فهرست علائم

a	(m) شعاع لوله
ρ	(kg/m ³) دانسیته
c_p	(J/kg.K) گرمای ویژه در فشار ثابت
μ	(kg/m.s) لزجت دینامیکی
β	(K ⁻¹) ضریب انبساط گرمایی حجمی
g	(m/s ²) شتاب گرانش
α	(m ² /s) ضریب پخش گرمایی
R_c	(m) شعاع انحنا
T	(K) دما
f_c	ضریب اصطکاک
Q	(m ³ .s ⁻¹) نرخ جریان حجمی
De	عدد دین = $Re (r/R)^{1/2}$
Re	عدد رینولدز
Nu	عدد نوسلت
Pr	عدد پرانتل
Gz	عدد گراتز
Ra	عدد رایلی
Pe	($Re Pr$) عدد پکلت

فصل اول

مقدمه، مروری بر کارهای انجام
شده

فصل اول

مقدمه، مروری بر کارهای انجام شده

۱-۱- مقدمه

اگر یک سیال که در طول یک لوله مستقیم با سطح مقطع ثابت جریان دارد، تغییر جهت پیدا کند سیال نزدیک محور مجرا، بالاترین سرعت را دارا می باشد و در معرض نیروی گریز از مرکز^۱ بیشتری نسبت به سیالی که در مجاورت دیواره های مجرا با سرعت کمتری حرکت می کند، قرار می گیرد. این امر موجب برهم‌نهی یک حرکت متقاطع روی جریان اصلی می شود که جریان ثانویه^۲ نامیده می شود، که در آن سیال ناحیه مرکزی لوله به سمت بیرون مرکز انحنا حرکت می کند و سیال نزدیک دیواره های لوله به سمت مرکز انحنا حرکت می کند. بنابراین، برای مجراهای با سطح مقطع متقارن، با توجه به هموار بودن منحنی، جریان ثانویه شامل یک جفت گردابه مارپیچی می باشد. گسترش بیشتر جریان های اولیه و ثانویه بستگی به هندسه خم دارد که موجب تغییر جهت جریان می شود. برای خم های طولانی توزیع سرعت های محوری و ثانویه در خم نهایتاً به شکلی که مستقل از فاصله در امتداد محور لوله می باشد، می رسد. این نوع جریان به عنوان جریان توسعه یافته^۳ شناخته می شود که در فصل ۲ مورد بحث قرار می گیرد.

^۱-Centrifugal force

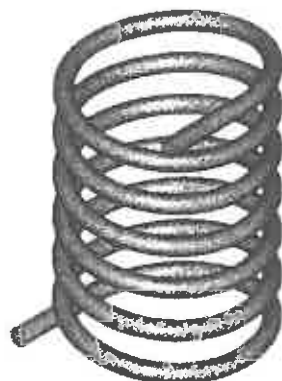
^۲-Secondary flow

^۳-Fully-developed

۱-۲- کاربردها

لوله های مارپیچی در بسیاری از کاربردها شامل صنایع غذاسازی، راکتورهای هسته ای، مبدل های حرارتی فشرده، سیستم های بازیافت حرارت، فرایندهای شیمیایی و تجهیزات پزشکی کاربرد دارند.[1,2,3,4,5,6,7]

لوله های خمیده برای جامعه پزشکی جالب توجه هستند، چرا که جریان خون در بسیاری از رگها که خمیده اند، اتفاق می افتد[8,9]. لوله های مارپیچی برای فرایندهای مختلفی مانند مبدل های حرارتی شکل (۱-۱) و راکتورها بسیار مفید هستند، زیرا آنها می توانند سطح انتقال حرارت زیادی را در فضای کوچک، با ضرایب انتقال حرارت^۱ بالا و توزیع زمان اقامت^۲ کم، به وجود آورند. بدلیل استفاده وسیع لوله های مارپیچی در این کاربردها، اطلاعات در مورد افت فشار، الگوهای جریان و خواص انتقال حرارت بسیار مهم است.

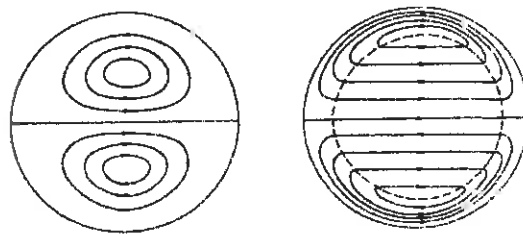


شکل (۱-۱) دیاگرام لوله مارپیچی

^۱-Heat transfer coefficient

^۲-Residence time distribution

تعیین افت فشار برای برآورد قدرت مورد نیاز پمپ برای غلبه بر این افت بمنظور تأمین نرخ جریان مورد نیاز، لازم است. این افت فشار همچنین، تابعی از انحنای لوله است. انحنای باعث به وجود آمدن الگوهای جریان ثانویه عمود بر جهت جریان محوری اصلی می شود، جریان داخل مرکز لوله به سمت دیواره خارجی حرکت می کند، و سپس با برگشت جریان در امتداد دیواره، به سمت قسمت داخلی لوله بر می گردد، همانطور که در شکل (۱-۲) نشان داده شده است، می توان انتظار داشت این جریان ثانویه، انتقال حرارت بین دیواره لوله و جریان سیال را افزایش دهد.



$$N_{De} > 100$$

$$N_{De} < 20$$

شکل (۱-۲) جریان ثانویه برای اعداد دین بالا و پایین

استفاده از لوله های مارپیچی بعنوان راکتور پلیمریزاسیون بصورت تئوری توسط میهال و استراجا [10] بررسی شد. آنها مدلی را ارائه دادند که پروفیل سرعت، پروفیل دما، و تبدیل منومر برای پلیمریزاسیون را در جریان آرام پیش بینی می کرد. با وجود این نتایج آنان نشان داد که اختلافی بین تبدیل منومر در لوله های مارپیچی و لوله مستقیم در مورد پارامترهایی که آنها آزمایش کردند، وجود ندارد.

انتقال جرم جابجایی طبیعی از سطح خارجی لوله های مارپیچی توسط سید احمد و همکاران [11] بمنظور استفاده لوله های مارپیچی در راکتورهای الکتروشیمیایی، که در آن لوله های مارپیچی همزمان می توانند بعنوان مبدل حرارتی و الکتروود بکار روند مورد مطالعه قرار گرفت.

افت فشار و ضرایب انتقال حرارت برای یک مبدل پوسته و لوله که لوله داخلی آن با لوله های مارپیچی جایگزین شده، اندازه گیری شد [12]. روابط عدد نوسلت برای هر دو جریان آرام و مغشوش بدست آمد. برای جریان آرام عدد نوسلت به عدد دین (Dean Number) مربوط می شود، درحالیکه برای جریان مغشوش، به عدد رینولدز ضربدر مربع انحنا مربوط می شود.

طاهریان و آلن [13] جابجایی طبیعی لوله های مارپیچی عمودی را در یک محفظه استوانه ای هنگام آزمایش قطر لوله، سطح لوله و گام حلقه بر روی ضریب انتقال حرارت مطالعه کردند. آنها دریافتند که افزایش مساحت سطح موجب کاهش ضریب انتقال حرارت می شود. هدف این مطالعات، برای استفاده در سیستمهای خانگی آب گرم خورشیدی بود.

طاهریان و آلن [14] جابجایی طبیعی از لوله های مجزا در یک مبدل حرارتی پوسته و لوله (Shell-and-coil heat exchanger) را بررسی کردند. آنها دریافتند که عدد نوسلت نمی تواند به عدد رایلی بر اساس قطر لوله مربوط باشد. نتایج آنها نشان داد که موثرترین پارامتر روی ضریب انتقال حرارت مساحت سطح لوله است، افزایش سطح انتقال حرارت، کاهش ضریب انتقال حرارت را نشان می دهد.

کاربرد لوله مارپیچی به عنوان اواپراتور یک لوله گرمایی حلقه شده، توسط یی و همکاران [15] مطالعه شد. آنها خواص جریان و انتقال حرارت را برای شارهای حرارتی مختلف بررسی کردند. آنها روابطی برای نرخ انتقال حرارت بر اساس داده های تجربی پیشنهاد کردند.

حمید و محمد [16] انتقال جرم گازها به فیلمهای مایع در هر دو لوله های مستقیم مایل و لوله های مارپیچ با هدف افزایش ضرایب انتقال جرم بررسی کردند. آنها نتایج خود را برای انتقال جرم در لوله مارپیچی بصورت اعداد اشمیت (Schmidt)، شرود (Sherwood)، دین (Dean)، و گالیلیو (Galileo)، برای هر دو جریان آرام و مغشوش (دو رابطه مجزا) فرمولبندی کردند. نتایج آنان ضرایب انتقال حرارت بالاتری برای لوله های مارپیچی در مقایسه با لوله های مستقیم نشان داد. بعلاوه، آنها نشان دادند افزایش انحنا همچنین منجر به ضرایب انتقال جرم بالاتر می شود.

کاربرد لوله مارپیچی در یک فرایند تصفیه بخار آب- آمونیاک برای سیستمهای جذبی بطور عددی توسط فرناندز [17] مطالعه شد. آنها اثر ضرایب انتقال حرارت و جرم را بر کارایی تصفیه کننده مورد بحث قرار دادند.

۳-۱ بررسی پارامترهای مختلف در لوله های خمیده

۱-۳-۱ الگوی جریان

اولین مشاهدات اثر انحنا بر جریان داخل لوله های مارپیچی در اوایل قرن بیستم مورد توجه قرار گرفت. گریندلی و گیبسون [18] هنگام انجام آزمایش روی ویسکوزیته^۱ هوماتوجه اثر انحنا بر جریان در لوله های مارپیچی شدند. ویلیامز [19] دریافت که محل سرعت محوری ماکسیمم به سمت دیواره خارجی لوله خمیده منتقل می شود.

اوستیس [20] متوجه افزایش مقاومت جریان برای لوله های خمیده در مقایسه با لوله های مستقیم شد و این افزایش مقاومت می تواند به نسبت انحنا مربوط باشد. با وجود این، در حلقوی کردن لوله ها در بعضی موارد تغییر شکل قابل توجهی در سطح مقطع رخ می دهد که باعث شکل بیضوی سطح مقطع می شود. اوستیس [21] همچنین دریافت که انحنا، هرچند جزئی، موجب کاهش سرعت بحرانی می شود، که یک معیار متداول گذار جریان از آرام به مغشوش می باشد. با تزریق جوهر در جریان آب داخل لوله های مارپیچی، لوله های U شکل و زانویی ها، الگوی جریان ثانویه را مشاهده نمود. این جریان ثانویه هنگامیکه یک سیال در یک لوله خمیده یا کانال جریان یابد، مشاهده می شود.

اولین تلاشها برای شرح ریاضی جریان در یک لوله مارپیچی توسط دین [22,23] انجام شد. اولین مقاله او، اولین تقریب حرکت پایدار سیال تراکم ناپذیر را که در یک لوله مارپیچی با سطح مقطع دایره ای جریان داشت، بیان می کرد. هرچند این تقریب با مشاهدات تجربی سازگاری کیفی دارد، قابلیت نشان دادن ارتباط بین گرادیان فشار، نرخ جریان و انحنای لوله های خمیده را ندارد.

^۱-Viscosity

دین [23] مشاهده کرد که کاهش نرخ جریان بدلیل انحنا، هنگامیکه حرکت کند است بستگی به متغیر K ، که برابر است با $2(Re)^2 r/R$ ، دارد. عدد رینولدز، r شعاع لوله و R شعاع انحنا می باشد. همچنین این کار با این فرض که نسبت r/R کوچک است انجام شد. این فرض چهار معادله اصلی را بدون تأثیر بر جملات مهمی که اثر انحنا بر حرکت را مشخص میکنند، بسیار ساده می سازد (معادله پیوستگی و سه معادله ممنتوم). توضیح دین [23] در مورد لزوم یک گرادیان فشار بالاتر برای نگهداشتن نرخ جریان معین در یک لوله خمیده این بود که مقداری از سیال تحت نوسان دائمی بین قسمت مرکزی لوله، جایی که سرعت زیاد است، و بخش خارجی لوله، جایی که سرعت کم است، می باشد. این حرکت ناشی از نیروهای گریز از مرکز ایجاد شده توسط انحنای لوله می باشد و منجر به اتلاف انرژی می شود.

این حرکت، مشابهی در جریان خطی در لوله های مستقیم ندارد. دین همچنین نشان داد که نسبت دبی جرمی در یک لوله خمیده به لوله مستقیم در همان گرادیان فشار، فقط تابعی از K برای نسبت های r/R کوچک می باشد. روابط بدست آمده فقط برای مقادیر تا $K=650$ قابل استفاده است. [23]

سی ام وایت [24] مطالعات را برای جریان آرام آب و روغن معدنی با ویسکوزیته های مختلف درون لوله های خمیده با نسبت انحنای $1/15$ ، $1/50$ و $1/2050$ توسعه داد. او نشان داد که آغاز اغتشاش فقط به مقدار عدد رینولدز یا معیار دین $(De = Re(r/R)^{1/2})$ بستگی ندارد. برای انحنای $1/15$ ، عدد رینولدز 9000 لازم است تا اغتشاش آغاز شود در صورتیکه برای نسبت انحنای $1/2050$ ، تفاوت قابل ملاحظه ای در سرعت بحرانی برای رسیدن به حالت مغشوش در مقایسه با یک لوله مستقیم وجود ندارد. او نتیجه گرفت که جریان در لوله های خمیده پایدار تر از جریان لوله های مستقیم است.

توپاخ اوغلو [25] یک حل تقریبی با استفاده از توابع جریان را برای تعیین الگوی جریان در یک سیال پایدار آرام تراکم ناپذیر لزج در لوله های خمیده، بکار برد. نتایج نشان داد که نرخ جریان بستگی به دو متغیر مستقل دارد، عدد رینولدز و انحنای لوله. مک کونالوگ و سریواستاوا [26]

بررسیهای عددی برای تعیین مشخصه های جریان ثانویه جریان آرام توسعه یافته انجام دادند. نتایج آنان نشان داد با افزایش سرعت محوری، ماکسیمم مقدار سرعت محوری به سمت دیواره خارجی حرکت می کند و همچنین گردابه های ثانویه¹ به سمت دیواره خارجی نزدیک می شوند.

مطالعات عددی جریان آرام توسط تروسدل و آدلر [27] با استفاده از شبکه مربعی² انجام شد. آنها دریافتند روش عددی را می توان برای اعداد دین تا 200 بکار برد. افزایش بیشتر عدد دین موجب واگرایی مقادیر بدست آمده از این روش حل می شود. لوله های مارپیچی با سطح مقطع مربعی مورد استفاده قرار گرفت. اسمیت [28] بطور تحلیلی جریان آرام در لوله های خمیده را برای اعداد دین بزرگ مطالعه کرد. نتایج برای لوله های با سطح مقطع دایروی، مثلثی و مستطیلی ارائه شده اند.

ماسلیا [29] جریان ثانویه را برای جریان آرام در لوله خمیده با سطح مقطع نیمدایره ای با استفاده از هر دو روش عددی و تجربی بررسی کرد. نتایج عددی نشان داد که برای اعداد دین بالای 105، جریان ثانویه می تواند بسته به حدس اولیه میدان جریان دو حل داشته باشد. الگوی جریان ثانویه دو یا چهار گردابی.

جریان ناپایدار چسبنده در لوله های خمیده تا اندازه ای در مقایسه با جریان پایدار متفاوت است. لین [30] جریان ناپایدار منتج از گرادیان فشار نوسانی را پیش بینی کرد. نتایج نشان داد که جریان ثانویه در مقایسه با گرادیان فشار پایدار می تواند در خلاف جهت باشد. این پیش بینی ها با کارهای تجربی تأیید شد.

تأثیر انحنای لوله خمیده بر جریان توسعه یافته مغشوش توسط انور و همکاران [30] بررسی شد. با عدد رینولدز 50000 و شعاع خم لوله 0.077، محققین اثرات خم U شکل را بر جریان پایین دست بعد از خم اندازه گیری کردند. آنها نشان دادند که جریان در یک فاصله 18 قطر لوله در پایین

¹-Secondary vortices

²-Square mesh

دست هنوز تحت تأثیر خمیدگی قرار دارد. انرژی جریان ثانویه فقط بوسیله تلفات لزجت^۱ از بین می رود.

الگوهای جریان برای جریان مغشوش در یک لوله خمیده با استفاده از شبیه سازی ادی بزرگ^۲ توسط بوئرسما و نیوستاد [31] برای جریان توسعه یافته مطالعه شد. آنها نتایج عددی خود را با نتایج تجربی مقایسه کردند و نشان دادند که نتایج آنها از شبیه سازی ادی بزرگ قابل قبول است و این روش برای تعیین الگوی جریان ثانویه عملی است.

۱-۳-۲ افت فشار و ضرایب اصطکاک

ایتو [32] آزمایشاتی بر روی لوله های خمیده هموار با نسبت انحنای از 1/16.4 تا 1/648 برای تعیین ضریب اصطکاک جریان مغشوش انجام داد. او فرمولهای اصطکاک را براساس قانون 1/7 توانی^۳، و از قانون توزیع سرعت لگاریتمی ارائه کرد. برای $Re(r/R)^2$ در محدوده 0.034 تا 300 برای

$$f_c \left(\frac{R}{r} \right)^{1/2} = 0.029 + 0.304 \left[Re \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{-1/4} \quad (1-1)$$

مقادیر $Re(r/R)^2$ پایینتر از 0.034، ضریب اصطکاک با لوله مستقیم برابر است. برای مقادیر بزرگ $Re(r/R)^2$ معادله تجربی زیر ارائه شد که می توان برای مقادیر $Re(r/R)^2$ بالای 6 بکار برد

$$f_c \left(\frac{R}{r} \right)^{1/2} = \frac{0.316}{\left[Re \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/5}} \quad (2-1)$$

نانگ و لین [33] مقایسه ضرایب اصطکاک بین لوله های مستقیم و خمیده را برای نسبت انحنای مختلف، با تکیه بر لوله های با خمیدگی بیشتر، گزارش کردند. کار آنها نشان داد که در اعداد

^۱-Viscous dissipation

^۲-Large eddy simulations

^۳-1/7th power law

دین بزرگ نسبت ضریب اصطکاک با افزایش انحنا کاهش می یابد. این نتایج، با نتایج اوستین و سیدر [34] تناقض داشت. تاربل و ساموئلز [35] رابطه زیر را برای ضریب اصطکاک ارائه کردند که تابعی از عدد رینولدز و نسبت انحنا می باشد تا اینکه فقط به عدد دین وابسته باشد. این رابطه برای محدوده اعداد دین 20 تا 500 توصیه می شود.

$$\frac{f_c}{f_s} = 1.0 + \left[8.279 \times 10^{-4} + \frac{7.964 \times 10^{-3}}{R/r} \right] \text{Re} - 2.096 \times 10^{-7} \text{Re}^2 \quad (3-1)$$

علی [36] رابطه ای بین افت فشار و نرخ جریان برای لوله های مارپیچی با استفاده از عدد اولر (Euler number)، عدد رینولدز، و عدد هندسی جدیدی که تابعی از قطر معادل لوله می باشد، قطر داخلی لوله، و طول لوله بدست آورد. او اشاره کرد که چهار ناحیه جریانی وجود دارد، یک آرام، یک مغشوش، و دو محدوده جریان انتقالی. روابطی برای همه نواحی بر اساس سه عدد مشخصه بدست آمد.

گرادیانهای سرعت در دیواره یک لوله مارپیچی با یک روش الکتروشیمیایی توسط گالیر [37] برای هر دو رژیم جریانی آرام و مغشوش اندازه گیری شد. اندازه گیریهای گرادیان سرعت دیواره در محلهای مختلف محیط دایره اطراف لوله انجام شد.

۳-۳-۱ عدد رینولدز بحرانی و جریان انتقالی^۱

از کارهای تیلور [38] و وایت [39] پی می بریم که اثر انحنای خط مرکزی، افزایش بیشتر عدد رینولدز بحرانی نسبت به جریان در لوله مستقیم است. در شکل داده های تجربی از برخی منابع برای جریان در لوله با سطح مقطع دایره ای رسم شده است. شکل (۳-۱)، عدد دین بحرانی، $(De)_{crit}$ ، را نشان می دهد که بالاترین عدد دین برای یک نسبت شعاع، R/a معین است که در آن جریان هنوز کاملاً آرام است. هنگامیکه مقدار R/a به سمت بی نهایت افزایش می یابد، شرط محدود کننده جریان لوله مستقیم برقرار می شود. جالب توجه است که مشاهده نتایج تجربی برای

^۱-Transitional flow

مقادیر بزرگ R_c/a ثابت می کند وضعیت بحرانی بستگی به سطح آشفتگی جریان دارد، نتیجه ای که می توان از داده های جریان لوله مستقیم پیش بینی نمود. با وجود این، هنگامیکه R_c/a تا حدود 100 کاهش می یابد، بنظر می رسد نتایج برای جریان مغشوش و نامغشوش به هم می پیوندند تا یک عدد رینولدز بحرانی واحد در نسبت شعاع معین را بدهند.

تعدادی معادلات تجربی برای ارتباط دادن داده های تجربی برای جریانهای آشسته مطرح شد. ایتو با استفاده از داده های حاصل از آزمایش خود و بررسی های گذشته، رابطه تجربی زیر را برای تعیین عدد رینولدز بحرانی ارائه داد:

$$Re_{crit} = 20000 \left(\frac{a}{R_c} \right)^{0.32} \quad (4-1)$$

که می توان آن را به فرم دیگرنوشت

$$(De_u)_{crit} = (Re)_{crit} \left(\frac{a}{R_c} \right)^{1/2} = 2 \times 10^4 \left(\frac{a}{R_c} \right)^{0.82} \quad (5-1)$$

این معادلات در محدوده $10 < R_c/a < 860$ کاربرد دارد. معادله (5-1) عدد رینولدز بحرانی 2300 را برای $R_c/a = 862$ می دهد و بنابراین برای مقادیر R_c/a بزرگتر از این مقدار عدد رینولدز بحرانی برابر با نتایج جریان لوله مستقیم گرفته می شود.

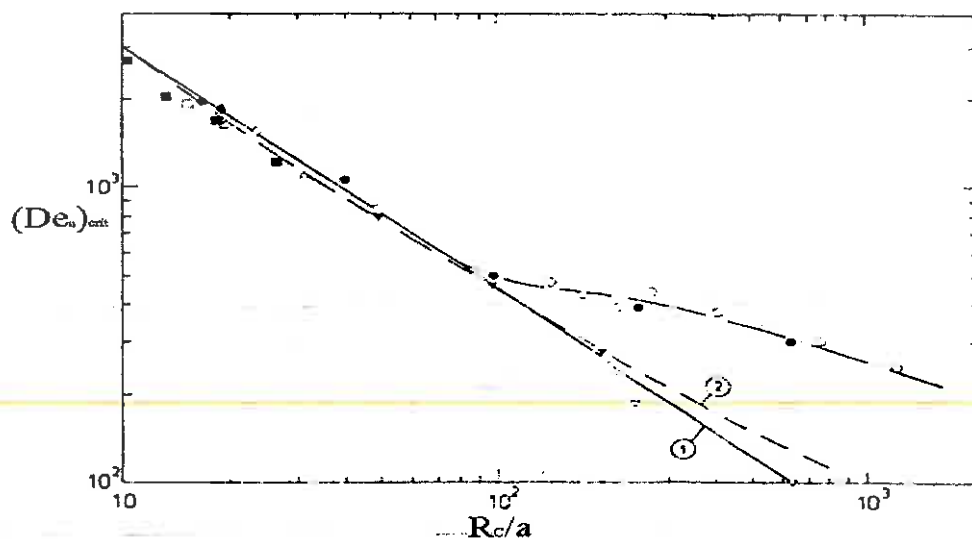
معادله ای که وقتی R_c/a به بی نهایت میل می کند، به رابطه ای برای لوله مستقیم منجر می شود:

$$(Re)_{crit} = 2300 \left[1 + 10 \left(\frac{a}{R_c} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (6-1)$$

یا

$$(De_u)_{crit} = 2300 \left(\frac{a}{R_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + 10 \left(\frac{a}{R_c} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (7-1)$$

معادله (۶-۱) شبیه معادله ایست که توسط سرینیواسان، نانداپورکار و هلند [40] پیشنهاد شد، اما بنظر می رسد ضرایب بکار رفته در اینجا رابطه را کمی اصلاح می کند. معادلات (۵-۱) و (۷-۱) برای مقایسه با داده های تجربی در شکل (۳-۱) رسم شده اند.



شکل (۳-۱) انتقال جریان از آرام به مغشوش در یک لوله خمیده. 1 معادله (۵-۱) ; 2 معادله (۷-۱).
 داده های تجربی: (a) جریان غیر آشفته: (○) کئولگان و بجی; (●) ایتو; (b)
 جریان آشفته: (□) وایت; (Δ) تیلور; (▼) آدلر; (◊) اینگلست و استارو;
 (▽) ایتو; (◆) کوپر و کولور

سوئبرگ [41] نشان داد، برای $De > 100$ نیروی کوریولیس^۱ پایداری جریان آرام را تحت تأثیر قرار می دهد. در واقع، گذار از جریان آرام به جریان انتقالی در عدد رینولدز بالاتر را به تعویق می اندازد. او همچنین دریافت که این موضوع بطور ضعیفی بستگی به نسبت انحنا دارد.

^۱-Coriolis force

اندازه گیری سرعت توسط وبستر و هامفری [42] برای جریان انتقالی در لوله های مارپیچی برای لوله ای با نسبت انحنای 1/18.2 انجام شد. یافته های آنان نشان داد انحنای لوله از کم و زیاد شدن اغتشاش که بطور طبیعی در گرادیانهای سرعت زیاد در دیواره ها وجود دارند، جلوگیری می کند. این توانایی در جلوگیری از اغتشاش با افزایش عدد رینولدز کم می شود. نتایج آنها همچنین جریان ناپایدار را حتی وقتی که جریان در محدوده مغشوش نباشد، نشان داد. دیگران نیز این ناپایداریهای جریان را مشاهده کردند [38,43].

۱-۳-۴ انتقال حرارت

سبان و مک لافلین [44] انتقال حرارت را در لوله های خمیده برای جریان های آرام و مغشوش مطالعه کردند. آنها لوله ها را با شیرهای فشار و ترموکوپل مجهز کردند. ترموکوپلها در هر نوبت روی محیط داخلی و خارجی لوله ها قرار گرفتند. نمودارهای عدد نوسلت برحسب عدد گراتز (Graetz number) برای لوله های با نسبت شعاع 17 و 104 با اعداد رینولدز محدوده 12 تا 5600 برای رژیم جریان آرام ارائه شد. عدد پرانتل در محدوده 100 تا 756 قرار داشت. نتایج نشان داد که محیط خارجی عدد نوسلت بزرگتری نسبت به محیط داخلی (تقریباً نسبت 4 برای نسبت شعاع 17) دارد، که هردو اساساً بزرگتر از عدد نوسلت تئوری برای لوله های مستقیم تحت همان شرایط است. نتایج همچنین اثری از طول ورودی گرمایی^۱ روی عدد نوسلت، نشان می دهند. آنها همچنین اعداد نوسلت را بر اساس اعداد رینولدز و ضریب اصطکاک فرمولبندی کردند.

$$Nu = 0.644 Pr^{1/3} \left[\frac{f}{8} (Re)^2 \frac{2r}{x} \right]^{1/3} \quad (1-8)$$

بدین ترتیب، سبان و مک لافلین معادله خود را برای داده های مورد استفاده در رابطه فوق به فرم دیگر بیان کردند:

^۱-Thermal entry length

$$Nu = A Pr^{1/3} \left[\frac{f}{8} (Re)^2 \right]^{1/3} \quad (9-1)$$

مقدار A برای نسبت شعاع 17، 0.13 بود. فرم دوم برای نسبت شعاع 104 مناسب نبود، هرچند تغییر A معادله را مناسبتر می سازد. آنها همان طرح آزمایشی و روشها را برای تعیین ضریب اصطکاک و رابطه عدد نوسلت را برای جریان مغشوش آب در همان لوله هایی که قبلاً ذکر شد، بکار بردند. اعداد رینولدز و پرانتل برای آزمایشات جریان مغشوش به ترتیب در محدوده 6000 تا 65600 و 2.9 تا 5.7 قرار داشت. نسبت ضرایب انتقال حرارت محیط داخلی به خارجی از مرتبه 2 و 4 برای لوله های با نسبت شعاع به ترتیب 104 و 17 بود. همچنین میانگین ضرایب خود را با رابطه زیر مقایسه کردند و دریافتند که انحرافی بیشتر از 10% و 15% برای لوله های با نسبت شعاع 104 و 17 وجود ندارد.

$$Nu Pr^{-0.4} = \frac{f}{8} Re \quad (10-1)$$

انتقال حرارت و افت فشار بخار گرم شده در لوله های مارپیچی توسط راجرز و می هیو [45] مطالعه شد. آنها متوجه شدند حتی برای دستگاه بخار گرم، دمای یکنواخت دیواره، اساساً بدلیل پخش بخار چگالیده بالای سطح لوله، بدست نمی آید. آنها رابطه زیر را برای عدد نوسلت داخلی بر اساس دمای فیلم پیشنهاد کردند.

$$Nu = 0.021 Re^{0.85} Pr^{0.4} (r/R)^{0.1} \quad (11-1)$$

موری و ناکایاما [46] جریان توسعه یافته را در لوله خمیده با شار حرارتی ثابت برای اعداد دین بزرگ مطالعه کردند. هر دو نوع جریان مورد بررسی قرار گرفت. آنها فرض کردند که جریان به دو قسمت تقسیم می شود، یک لایه مرزی کوچک نزدیک دیواره لوله، و یک هسته بزرگ که جریان باقیمانده را می سازد. در ناحیه هسته، فرض می شود جریان ثانویه کاملاً افقی باشد، که سیال را به سمت خارج لوله می برد. سیال از طریق لایه مرزی به دیوار داخلی لوله بر می گردد. این الگو برای

اعداد دین کوچک، متفاوت است. آنها همچنین نسبتی بین ضخامت لایه مرزی دما و سرعت بر حسب عدد پرانتل، بدست آوردند. نشان داده شد نسبت عدد نوسلت بین لوله های مستقیم و خمیده تابعی از عدد دین و نسبت بین ضخامت لایه های مرزی گرمایی و هیدرودینامیک می باشد. آزمایشات انجام شده با نسبت شعاع 40 برای تصدیق تئوری انجام شد. پروفیل های سرعت و دما، هر دو تحلیل تئوری را تأیید کردند.

افت فشار و انتقال حرارت برای جریان آرام گلیسرول توسط کوبر و کولور [47] برای انواع مختلف لوله های خمیده، شامل لوله های مارپیچ ارائه شد. اعداد رینولدز در حدود 80 تا 6000 و نسبت شعاع در حدود 10.3 تا 27 بود. یک حمام بخار برای تأمین شرط دمای سطح ثابت روی دیواره خارجی لوله فراهم شد. همچنین محققان دریافتند نتایج تأثیر متقابل بین نرخ انتقال گرما و عدد گراتز برگ و بونیل [48] مخالف نتایج سبان و مک لافلین بود. محققان اندیشیدند که این اختلاف ممکنست به این دلیل باشد که در این دو تحقیق شرایط مرزی متفاوتی استفاده شده، یکی دمای دیواره ثابت (برگ و بونیل) بوده و دیگری در شار حرارتی ثابت (سبان و مک لافلین) بوده است. یکی از لوله هایی که توسط کوبر و کولور استفاده شد همان نسبت شعاعی را داشت که توسط سبان و مک لافلین مورد استفاده قرار گرفت. نتایج کوبر و کولور در اعداد گراتز پایین، با نتایج سبان و مک لافلین منطبق هستند، اما در اعداد گراتز بالاتر تفاوت دارند. رابطه زیر برای عدد نوسلت براساس نسبت شعاع (R_c/a) و عدد گراتز (Gz) بدست آمد.

$$Nu = [1.98 + 1.8(a/R_c)]Gz^{0.7} \quad (1-12)$$

برای $20 < Pr < 100$ و $10 < Gz < 1000$, $80 < Re < 6000$.

موری و ناکایاما [49] جریان و انتقال حرارت را در حالت توسعه یافته مغشوش بطور تجربی و تئوری مطالعه کردند. انتقال گرما برای سیستم شارحرارتی ثابت بررسی شد و تغییر خواص فیزیکی با دما در این بررسی در نظر گرفته نمی شود. تحلیل با فرض یک لایه مرزی نازک در امتداد دیواره، شبیه کارقبلیشان [46]، انجام شد. اعداد نوسلت متوسط اطراف محیط محاسبه شد. مشاهده شد که اختلاف بین اعداد نوسلت برای یک لوله مستقیم و یک لوله خمیده، وقتی عدد پرانتل بزرگ می

شود، بطور جزئی کاهش می یابد، که مخالف نتایجی است که برای جریان آرام بدست آمد. آزمایشات با جریان هوا داخل لوله های خمیده با نسبت شعاع 18.7 و 40 انجام شد.

موری و ناکایاما [50] کارهای قبلی خود را با تحلیل تئوری دمای یکنواخت دیواره توسعه دادند. نتایج نشان داد فرمول عدد نوسلت برای دمای دیواره یکنواخت همانند فرمول شار حرارتی یکنواخت است. روابط عدد نوسلت بدست آمده در کار قبلی [46] برای جریان آرام به شکل کاربردی تر ارائه شد. تغییر خواص فیزیکی با دما برای هوا، آب و روغن مطالعه شد. باستثناء جریان آرام آب، دمای میانگین حسابی خواص فیزیکی بین ورودی و خروجی را می توان بکار برد.

روش بسط سری توسط اوزیسیک و توپاخ اوغلو [51] برای حل انتقال حرارت جریان آرام با شار حرارتی ثابت استفاده شد. نتایج نشان داد انتقال حرارت به سه عدد مستقل، نسبت شعاع لوله، عدد رینولدز و عدد پرانتل بستگی دارد.

بررسی های عددی برای شار حرارتی یکنواخت دیواره با دمای محیطی یکنواخت دیواره برای اعداد دین محدوده 1-1200، اعداد پرانتل 0.005-1600، و نسبت انحنا (r/R) ، $1/10$ تا $1/100$ برای میدان سرعت و جریان توسعه یافته، توسط کلب و سیدر [52] انجام شد. آنها دریافتند که پارامتر نسبت انحنا اثر جزئی روی عدد نوسلت متوسط برای هر عدد پرانتل معین دارد. بنابراین، نسبت انحنا روی تغییر محیطی عدد نوسلت تأثیر دارد، هرچند این تأثیر هنوز زیاد نیست. برای اعداد پرانتل بالاتر از 0.7، نشان داده می شود عدد نوسلت محلی در سطح دیواره داخلی همیشه کمتر از این عدد در لوله مستقیم می باشد، و با افزایش عدد دین کمتر افزایش می یابد تا زمانیکه به یک مقدار محدود کننده می رسد. افزایش اعداد نوسلت موضعی روی دیواره خارجی با افزایش عدد دین ادامه می یابد آنها همچنین متوجه شدند که افزایش جزئی ضرایب انتقال حرارت بسیار بزرگتر از افزایش جزئی تلفات اصطکاکی است، بجز برای فلزات مایع. رابطه نوسلت زیر برای اعداد پرانتل پایین (0.005 تا 0.05) با اعداد دین 20 تا 1200 ارائه شد:

$$\overline{Nu} = 3.31 De^{0.115} Pr^{0.0108} \quad (1-13)$$

برای اعداد پرانتل محدوده 0.7 تا 5 و اعداد دین 80 تا 1200، رابطه زیر برای عدد نوسلت متوسط بدست آمد

$$\overline{Nu} = 0.913 De^{0.476} Pr^{0.200} \quad (14-1)$$

کلب و سیدر [53] این کار را با استفاده از شرط مرزی دمای دیواره یکنواخت با اعداد دین تا 1200، اعداد پرانتل و نسبت انحنا، به ترتیب در محدوده 0.05 تا 1600 و 10 تا 100 توسعه دادند. نتایج آنان نشان داد انحنا بر تغییر عدد نوسلت محیطی، تأثیر اندکی دارد. ولی، عدد نوسلت متوسط را تحت تأثیر قرار نمی دهد. همچنین دریافتند شرط مرزی حرارتی اثر مهمی بر میدان دما دارد.

تأثیر نیروهای شناوری^۱ روی جریان آرام توسعه یافته با شار حرارتی ثابت بطور تحلیلی توسط یائو و برگر [54] مطالعه شد. مطالعات آنان بر اساس تقریب بوزینسک^۲ برای نیروهای شناوری قرار داشت و لوله های خمیده را در هر جهت گیری عمودی و افقی تحلیل کردند. روابط عدد نوسلت بر اساس عدد رینولدز، عدد رایلی (Raleigh number) و عدد دین برای هر دو جهت ارائه شد.

انتقال حرارت جابجایی آرام بطور عددی و تحلیلی توسط جانسن و هوگندورن [55] برای هر دو حالت شار حرارتی یکنواخت و دمای ثابت دیواره بررسی شد. ناحیه ورودی حرارتی همچنین مطالعه شد و نشان داده شد که طول ناحیه ورودی حرارتی اساساً بستگی به یک عدد معین گردش جریان ثانویه دارد که برای بسط توزیع دما مورد نیاز است. نشان داده شد اثر انواع مختلف شرایط مرزی کوچک است.

جریان آرام و انتقال حرارت توسعه یافته بصورت عددی توسط زاپریانوف و همکاران [56] با استفاده از روش گامهای کسری برای محدوده وسیعی از اعداد دین (10 تا 7000) و اعداد پرانتل (0.005 تا 2000) مطالعه شد. کار آنها برحالت دمای دیواره ثابت تأکید داشت و نشان داد که عدد نوسلت با افزایش اعداد پرانتل حتی برای همان عدد دین افزایش می یابد. آنها همچنین خطوط جریانی و همدم را برای اعداد دین و پرانتل مختلف ارائه کردند.

^۱-Buoyancy forces

^۲-Boussinesq

اثر شناوری بر میدان جریان و انتقال حرارت بطور عددی توسط لی و همکاران [57] برای حالت جریان آرام توسعه یافته و شار حرارتی ثابت با دمای محیطی دیواره ثابت مطالعه شد. آنها دریافتند اثرات شناوری موجب افزایش عدد نوسلت متوسط، و هم کاهش توزیع عدد نوسلت موضعی می شود. همچنین دریافتند نیروهای شناوری منجر به تغییر جهت الگوهای جریان ثانویه می شود. نیروهای شناوری همچنین برای جریان آرام توسعه یافته توسط فوتاگامی و آئویاما [58] بصورت عددی و تجربی بررسی شد. آنها عبارتی برای پیش بینی عدد نوسلت متوسط برای مواردی که جریان ثانویه و نیروهای شناوری هر دو در ضرایب انتقال حرارت مهم هستند، ارائه کردند. آزمایشات با شرایط مرزی شار حرارتی یکنواخت و در محدوده ای که نیروهای شناوری و گریز از مرکز، هر دو جریان ثانویه را تحت تأثیر قرار می دهند، انجام شد.

لی و همکاران [59] انتقال حرارت مغشوش را در لوله خمیده برای جریان در حال توسعه نزدیک نقطه بحرانی آب با استفاده از روش حجم کنترل اجزاء محدود بصورت عددی بررسی کردند. در این بررسی، نیروهای شناوری بشدت جریان ثانویه را تحت تأثیر قرار می دهند، چون این نیروها نزدیک نقطه بحرانی بسیار قویتر از نیروهای گریز از مرکز هستند. ضریب انتقال حرارت و ضریب اصطکاک هردو افزایش زیادی می یابند، وقتی که فشار به نقطه بحرانی نزدیک می شوند. همچنین رفتار نوسانی برای ضریب اصطکاک ملاحظه شد، مشابه آنچه برای عدد نوسلت در جریانهای در حال توسعه دیده شد.

اثر ترکیب انحنای و شناوری بر نرخ انتقال حرارت در جریان آرام توسعه یافته بصورت عددی توسط گوئرینگ و همکاران [60] مطالعه شد. آنها روش حجم کنترل را برای حل معادلات ناویر-استوکس و معادله انرژی با استفاده از تقریب بوزینسک برای در نظر گرفتن شناوری بکار بردند. دو شرط مرزی حرارتی مورد استفاده قرار گرفت، هر دو شار حرارتی ثابت، اما یکی شار حرارتی محیطی ثابت بود در صورتیکه دیگری دمای دیواره محیطی ثابت داشت. منحنی های رژیم برای هر دو شرط مرزی ارائه شد که انتقال حرارت را به سه رژیم تقسیم شد: ناحیه ای که در آن انحنای مهم است، ناحیه ای که در آن شناوری مهم است، و سطحی که در آن که هر دو عوامل مهم هستند. این

سطوح را می توان به ترتیب بصورت جابجایی اجباری، جابجایی مختلط، و جابجایی آزاد نامگذاری کرد.

بای و همکاران [5] انتقال حرارت مغشوش را از لوله های مارپیچی افقی بصورت تجربی بررسی کردند. آنها نتیجه گرفتند، وقتی عدد رینولدز افزایش می یابد، سهم جریان ثانویه در انتقال حرارت کاهش می یابد و انتقال حرارت به انتقال حرارت در یک لوله مستقیم نزدیک می شود. این امر ناشی از این واقعیت است که وقتی عدد رینولدز افزایش می یابد، لایه مرزی کوچکتر می شود. لایه مرزی بزرگ است که توسط جریان ثانویه به سمت خارج مرکز لوله کشیده می شود و ضریب انتقال حرارت را افزایش می دهد، و این اثر با افزایش عدد رینولدز، کاهش می یابد. عدد نوسلت موضعی روی دیواره خارجی می تواند 3 تا 4 برابر دیواره داخلی باشد. آنها رابطه ای برای عدد نوسلت بصورت تابعی از موقعیت روی محیط بسط دادند، ولی شامل عدد دین بعنوان تنها پارامتر بکار رفته در آزمایش برای اندازه لوله، نبود.

مقایسه ضرایب انتقال حرارت بین لوله های مستقیم و لوله های مارپیچی غوطه ور در حمام آب توسط پرابهانجان و همکاران [61] انجام شد. یافته ها نشان داد ضریب انتقال حرارت در سیستم مارپیچی بزرگتر است.

ایناگاکي [62] ضریب انتقال حرارت خارجی را برای دسته لوله های مارپیچی برای اعداد رینولدز محدوده 6000 تا 22000 مطالعه کرد و تعیین کرد عدد نوسلت خارجی را می توان با رابطه زیر برای این ساختار ویژه بیان کرد

$$Nu = 0.78 Re^{0.51} Pr^{0.3} \quad (1-15)$$

سیلکنز [63] اثر شناوری را بر جریان در حال توسعه در لوله مارپیچی بطور عددی بررسی کرد. نتایج نشان داد بطور کلی افزایش عدد گراشوف (Grashoff number) منجر به افزایش انتقال حرارت می شود و تأثیر متقابل شدید بین اثرات شناوری و گریز از مرکز در نتیجه جریان ثانویه

مرکب وجود دارد. نیروهای شناوری قوی منجر به تغییرات مهمی در جریانهای ثانویه عادی برای لوله های مارپیچی می شود.

مطالعات انتقال حرارت یک لوله خمیده غوطه ور در یک حمام آب توسط پرابهانجان [64] انجام شد. روشی برای پیش بینی دماهای خروجی از لوله مارپیچی پیشنهاد شد که نرخ جریان و هندسه لوله در نظر گرفته می شود. انتقال حرارت روی خارج لوله ها جابجایی طبیعی است. در این نوع سیستم، نه دمای دیواره را می توان ثابت فرض کرد و نه شار حرارتی دیواره را.

فصل دوم

تئوری و معادلات حاکم

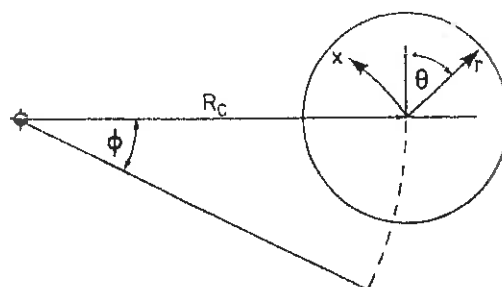
فصل دوم

تئوری و معادلات حاکم

۲-۱- معادلات حرکت

شکل (۲-۱) سیستم مختصاتی را که مناسب برای تحلیل جریان در خم با سطح مقطع دایره ای می باشد نشان می دهد، محور آن یک قوس دایروی را تشکیل می دهد. شعاع انحنای خط مرکزی لوله با R_c نشان داده می شود. مختصات هر نقطه درون جریان با مختصات قطبی x, r, θ نشان داده می شود که $x = R_c \phi$ و مولفه های سرعت در جهت افزایش x, r, θ به ترتیب u, v, w هستند.

برای بدست آوردن معادلات پیوستگی و ممنتوم، تئوری مختصات متعامد منحنی الخط^۱ بکار می رود.



شکل (۲-۱) سیستم مختصات با سطح مقطع دایره ای

^۱-Orthogonal curvilinear coordinates

طول قوس ds بشکل زیر داده می شود:

$$(ds)^2 = \left\{ 1 + \frac{r}{R_c} \sin \theta \right\}^2 (dx)^2 + (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 \quad (1-2)$$

برای جریان تراکم ناپذیر پایا ، معادلات پیوستگی و ممنتیم یعنی معادلات ناویر - استوکس به شکل زیر می باشند:

$$\frac{R_c}{(R_c + r \sin \theta)} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} + \frac{v \sin \theta + w \cos \theta}{R_c + r \sin \theta} = 0, \quad (2-2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{R_c}{(R_c + r \sin \theta)} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u(v \sin \theta + w \cos \theta)}{R_c + r \sin \theta} \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{R_c}{(R_c + r \sin \theta)} \left(-\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) + \mu \left\{ \frac{R_c^2}{(R_c + r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right. \right. \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{(R_c + r \sin \theta)^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{(R_c + r \sin \theta)} \left[\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \\ &+ \left. \left. \frac{2R_c}{(R_c + r \sin \theta)^2} \left[\cos \theta \frac{\partial w}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} \right], \quad (3-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{uR_c}{(R_c + r \sin \theta)} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} - \frac{u^2 \sin \theta}{R_c + r \sin \theta} \\ &= \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{R_c^2}{(R_c + r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right. \right. \\ &- \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{(R_c + r \sin \theta)} \left[\sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w \cos \theta}{r} \right] \\ &- \left. \left. \frac{2R_c \sin \theta}{(R_c + r \sin \theta)^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sin \theta}{(R_c + r \sin \theta)^2} [v \sin \theta + w \cos \theta] \right\} \right], \quad (4-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{uR_c}{(R_c + r \sin \theta)} \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} - \frac{u^2 \cos \theta}{(R_c + r \sin \theta)} \\
 &= \frac{1}{\rho} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{R_c^2}{(R_c + r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right. \right. \\
 &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta}{(R_c + r \sin \theta)} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{(R_c + r \sin \theta)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right] \\
 &\left. \left. - \frac{2R_c \cos \theta}{(R_c + r \sin \theta)^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\cos \theta}{(R_c + r \sin \theta)^2} [v \sin \theta + w \cos \theta] \right\} \right]. \quad (5-2)
 \end{aligned}$$

۲-۲ جریان خمیده توسعه یافته^۱

در فصل اول، شرح فیزیکی مختصری از اینکه چگونه جریان ثانویه در یک خم به وجود می آید داده شد.

جریان درون خم را می توان بطور کلی شامل یک هسته جریان چرخشی غیر لزج که در آن جمله تنش برشی کوچک است و می توان آن را در مقایسه با جملات اینرسی حذف کرد ، بعلاوه ناحیه دومی در مجاورت دیواره مجرا در نظر گرفت، که جملات تنش برشی مهم هستند. در ناحیه هسته ، سرعت های محوری بالا باعث به وجود آمدن نیروهای گریز از مرکز بزرگ می شوند که توسط یک توزیع فشار شعاعی متقابل تحت تأثیر قرار می گیرند.

برای خم های با شعاع انحنای ثابت مولفه های سرعت v و w از صفر افزایش می یابند تا به مقدار ثابتی میرسند، و مشتقات سرعت نسبت به x صفر می شوند. به موقعیتی می رسیم که توزیع سرعت های اولیه و ثانویه با x تغییر نمی کنند و در این حالت جریان بعنوان جریان خمیده توسعه یافته شناخته می شود.

خط مرکزی یک لوله دایره ای معمولی منحصر به یک صفحه منحصر بفرد است در حالیکه در مورد لوله مارپیچی (Helical coil) اینطور نیست. از اینرو یک تفاوت اساسی در هندسه دو نوع خم وجود دارد. در عمل لوله های مارپیچی شاید از متداولترین نمونه شکل های است که در آن جریان

^۱-Fully-developed curved flow

خمیده توسعه یافته اتفاق می افتد. برای جریان خمیده توسعه یافته در یک لوله دایره ای معمولی، ضریب اصطکاک تابعی از (Re) و R_c/a می باشد. برای یک لوله مارپیچی، ضریب اصطکاک تابع زاویه مارپیچ (Helix angle) ξ ، (Re) و R_c/a می باشد. با وجود این، برای زوایای مارپیچ کوچک، تأثیر بر افت فشار ناچیز است و اطلاعات را می توان همانند لوله های دایروی معمولی در نظر گرفت.

۲-۲-۱- جریان آرام توسعه یافته در یک لوله دایره ای

با استفاده از سیستم مختصات شکل (۲-۱) و با توجه به اینکه درجریان توسعه یافته مولفه های سرعت مستقل از x هستند، معادلات پیوستگی و منتم از ساده سازی معادلات (۲-۵) - (۲-۲) بدست می آیند.

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{v \sin \theta}{R_c + r \sin \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{w \cos \theta}{R_c + r \sin \theta} = 0, \quad (۲-۶)$$

$$\begin{aligned} & v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{uv \sin \theta}{R_c + r \sin \theta} + \frac{uw \cos \theta}{R_c + r \sin \theta} \\ &= - \frac{R_c}{(R_c + r \sin \theta)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u \sin \theta}{R_c + r \sin \theta} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u \cos \theta}{R_c + r \sin \theta} \right) \right], \end{aligned} \quad (۲-۷)$$

$$\begin{aligned} & v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} - \frac{u^2 \sin \theta}{R_c + r \sin \theta} \\ &= - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right) - \frac{\mu}{\rho} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{R_c + r \sin \theta} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right], \end{aligned} \quad (۲-۸)$$

$$\begin{aligned} & v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} - \frac{u^2 \cos \theta}{R_c + r \sin \theta} \\ &= - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{R_c + r \sin \theta} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (۲-۹)$$

۲-۱-۲-۱- تقریب اولیه برای انحنای کوچک

بعنوان تقریب اولیه جریان در یک لوله خمیده را می توان بصورت آشفتگی در جریان پویسله (Poiseuille) در نظر گرفت. برای جریان پویسله

$$u = A(a^2 - r^2); \quad v = w = 0; \quad \hat{p} / \rho = Cx \quad (10-2)$$

A و C مقادیر ثابت و x فاصله اندازه گیری شده در طول محور لوله از نقاط دلخواه می باشد. دین [22] برای جریان خمیده توسعه یافته فرض کرد $a \gg R_c$ و

$$u = A(a^2 - r^2) + u_1; \quad v = v_1; \quad w = w_1; \quad \frac{\hat{p}}{\rho} = Cx + \frac{\hat{p}_1}{\rho} \quad (11-2)$$

u_1 ، v_1 ، w_1 در مقایسه با u کوچک هستند، و $\hat{p}_1$ در مقایسه با $\hat{p}$ کوچک است. با فرضیات فوق و ابقاء مقادیر کوچک مرتبه اول، معادلات (۲-۹) - (۲-۶) بصورت زیر در می آیند:

$$\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{v_1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = 0, \quad (12-2)$$

$$\begin{aligned} -2Arv_1 = & -\left(1 - \frac{r \sin \theta}{R_c}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(Cx + \frac{\hat{p}_1}{\rho}\right) \\ & + \frac{\mu}{\rho} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (A(a^2 - r^2) + u_1) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{A(a^2 - r^2) \sin \theta}{R_c} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A(a^2 - r^2) \cos \theta}{R_c} \right) \right], \end{aligned} \quad (13-2)$$

$$-\frac{A^2(a^2 - r^2)^2}{R_c} \sin \theta = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\hat{p}_1}{\rho} \right) - \frac{\mu}{\rho r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{w_1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \quad (14-2)$$

$$-\frac{A^2(a^2-r^2)^2}{R_c} \cos \theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\hat{p}_1}{\rho} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{w_1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right). \quad (15-2)$$

با این استدلال که جملات معادله (۱۳-۲) که کوچک نیستند باید مساوی باشند نتیجه می شود:

$$C = -4 \frac{\mu}{\rho} A \quad (16-2)$$

و بنابراین معادله به شکل معادله زیر ساده می شود:

$$-2Arv_1 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{p}_1}{\rho} \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{6Ar \sin \theta}{R_c} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \right). \quad (17-2)$$

و حل به شکل زیر ادامه می یابد.

$$\begin{aligned} u_1 &= u' \sin \theta, \\ v_1 &= v' \sin \theta, \\ w_1 &= w' \cos \theta, \\ \frac{\hat{p}_1}{\rho} &= p' \sin \theta, \end{aligned}$$

که مقادیری که با «پریم» مشخص شده اند فقط تابع r هستند. این متغیرها در معادلات (۱۲-۲)، (۱۴-۲)، (۱۵-۲)، (۱۷-۲) برای بدست آوردن چهار معادله اصلی جدید، جایگزین می شوند. از این سری جدید معادلات به همراه شرایط مرزی، ابتدا v' و w' برآورد می شوند، و نهایتاً u' بدست می آید.

سپس عبارات منتج برای u_1 ، v_1 و w_1 که حل دقیق معادلات حاکم (۱۵-۲) - (۱۲-۲) است بدست، می آیند و نهایتاً از معادله (۱۱-۲) نتیجه می شود:

۲-۱-۲-۲- تقریب های ثانویه و بالاتر برای انحنای کوچک

دین [23] تحلیل فوق را برای اینکه جملات مرتبه بالاتر نیز در نظر گرفته شوند، به شکل زیر اصلاح کرد. با استفاده از معادلات (۹-۲) - (۶-۲) و با فرض $R_c \gg a$ ، $(R_c + r \sin \theta)$ را می توان با R_c جایگزین کرد، معادلات حاکم بصورت زیر در می آیند.

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0, \quad (24-2)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right], \quad (25-2)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} - \frac{u^2 \sin \theta}{R_c} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right) - \frac{\mu}{\rho r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad (26-2)$$

$$v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} - \frac{u^2 \cos \theta}{R_c} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right). \quad (27-2)$$

این معادلات با معادلات حرکت در مختصات استوانه ای به اضافه جمله نیروی گریز از مرکز، که در جهت $\theta = 90^\circ$ شکل (۱-۲) عمل می کند، یکی هستند.

از آنجا که u ، v ، w مستقل از x هستند، از معادله (۲۵-۲) در می یابیم که $\hat{p}/\rho$ باید به

فرم

$$xP_1(r, \theta) + P_2(r, \theta)$$

باشد. و سپس از معادلات (۲۶-۲) و (۲۷-۲) نتیجه می شود که

$$P_1(r, \theta) = \text{constant}.$$

بنابراین می توانیم بنویسیم

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\hat{p}}{\rho}\right) = \frac{G}{\rho} \quad (28-2)$$

G گرادیان فشار محوری است.

از شرط پیوستگی (۲۴-۲) تابع جریان برای جریان ثانویه Ψ ، می تواند بصورت

$$rv = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (29-2)$$

تعریف شود. (قراردادهای بکار رفته با قراردادهای معمول متفاوت است)

جایگذاری این عبارات در معادلات (۲۶-۲) و (۲۷-۲) و حذف $\hat{p}/\rho$ منجر می شود به معادلات

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \nabla_1^2 \Psi + \frac{2u}{R_c} \left(r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -\frac{\mu}{\rho} r \nabla_1^4 \Psi \quad (30-2)$$

و

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{G}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla_1^2 u \quad (31-2)$$

که

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (32-2)$$

معادلات (۳۱-۱) و (۳۰-۱) را می توان با استفاده از متغیرهای جدید که به شکل زیر بیان می شوند، به فرم بدون بعد نوشت.

$$\psi = \frac{\Psi}{\mu/\rho}; \quad \zeta = \frac{r}{a}; \quad u^+ = \frac{u}{u_0} \quad (33-2)$$

بنابراین

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla_1^2 \psi + Ku^+ \left(\zeta \cos \theta \frac{\partial u^+}{\partial \zeta} - \sin \theta \frac{\partial u^+}{\partial \theta} \right) = -\zeta \nabla_1^4 \psi \quad (34-2)$$

و

$$\frac{1}{\zeta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial u^+}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial u^+}{\partial \zeta} \right) = C + \nabla_1^2 u^+ \quad (35-2)$$

که در آن

$$K = 2u_0^2 a^3 \rho^2 / \mu^2 R_c, \quad (36-2)$$

$$C = Ga^2 / \mu u_0, \quad (37-2)$$

و

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (38-2)$$

دین، u_0 را مؤلفه سرعت در جهت محور لوله در $r = 0$ معرفی کرد، و فرض کرد مقدار این مؤلفه در لوله خمیده و در جریان پویسله بطور تقریبی یکسان است. اکنون، عدد رینولدز بصورت رابطه

$$(Re) = \frac{UD\rho}{\mu}$$

تعریف می شود. نهایتاً، تقریب

$$\frac{au_0\rho}{\mu} \approx \frac{UD\rho}{\mu} = (Re)$$

برقرار می شود، که در آن U سرعت متوسط جریان و D قطر لوله می باشد. پس برای حرکت کند، از معادله (36-2) داریم

$$K \approx \frac{2a(Re)^2}{R_c}. \quad (39-2)$$

برای حرکت در لوله خمیده، برای تقریب زدن مانند لوله مستقیم، فقط کوچک بودن a/R_c کافی نیست، شرط دیگر کوچک بودن K نیز باید ارضا شود.

با نوشتن بسط سریهای

$$\left. \begin{aligned} u^+ &= u_0^+ + Ku_1^+ + K^2u_2^+ + \dots \\ \psi &= K\psi_1 + K^2\psi_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (40-2)$$

مقادیر u_0^+, u_1^+, ψ_1 و غیره که فقط تابع ζ و θ هستند را می توان با جایگزینی معادلات (40-2) در معادلات (34-2) و (35-2) و مساوی قرار دادن ضرایب توانی K بدست آورد. اولین معادله از (2-35)

$$\nabla_1^2 u_0^+ + C = 0 \quad (41-2)$$

است که با شرایط مرزی $u^+ = 0$ و $\zeta = 1$ حل

$$u_0^+ = 1 - \zeta^2; \quad C = 4 \quad (42-2)$$

را داراست که با جریان پویسله مطابقت دارد.

اولین معادله از (2-34)

$$\zeta \nabla_1^4 \psi_1 = -\zeta \cos \theta u_0^+ \frac{\partial u_0^+}{\partial \zeta} = 2\zeta^2 (1 - \zeta^2) \cos \theta. \quad (43-2)$$

با ارضاء این معادله و شرایط مرزی $\zeta = 1$, $\partial \psi / \partial \zeta = \partial \psi / \partial \theta = 0$ داریم

$$\psi_1 = \frac{\cos \theta}{144} \zeta (1 - \zeta^2)^2 \left(1 - \frac{\zeta^2}{4} \right). \quad (44-2)$$

دومین معادله از معادله (2-35)

$$\nabla_1^2 u_1^+ = -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \frac{\partial u_0^+}{\partial \zeta}.$$

است. بنابراین

$$u_1^+ = \frac{\sin \theta}{576} \left(\frac{19}{40} \zeta - \zeta^3 + \frac{3}{4} \zeta^5 - \frac{1}{4} \zeta^7 + \frac{1}{40} \zeta^9 \right). \quad (45-2)$$

در این مرحله نتایج Ψ_1 و u_1^+ را می توان با نتایج حل دقیق برای $K \rightarrow 0$ از معادلات (۲۰-۲) - (۱۸-۲) تطبیق داد. بنابراین:

$$v_1 = K \frac{\mu}{\rho r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \frac{u_0^2 a^2 \rho}{\mu R_c} \frac{\sin \theta}{288} (1 - \zeta^2)^2 (4 - \zeta^2), \quad (46-2)$$

بدیهی است که هیچ خطایی در Ψ_1 وجود ندارد. مقایسه u_1 با $u_0 K u_1^+$ خطایی به شکل زیر خواهد داشت

$$K u_1^+ - \frac{u_1}{u_0} = \frac{3a\zeta(1-\zeta^2)\sin\theta}{4R_c} \quad (47-2)$$

نرخ جریان حجمی بصورت

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a u r dr d\theta \quad (48-2)$$

داده می شود و چون Q مستقل از θ است، Q توسط آن قسمت از u^+ که تابع θ نیست مشخص می شود. بنابراین u_1^+ هیچ نقشی ندارد، بطوریکه در این مرحله از تقریب رابطه بین نرخ جریان و گرادیان فشار محوری، همانند جریان پویسله می باشد.

تقریب بعدی، این رابطه را تحت تأثیر قرار می دهد.

از معادله (۳۴-۲)

$$\begin{aligned}
 -\zeta \nabla_1^4 \psi_2 &= \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla_1^2 \psi_1 \\
 &+ u_0^+ \left(\zeta \cos \theta \frac{\partial u_1^+}{\partial \zeta} - \sin \theta \frac{\partial u_1^+}{\partial \theta} \right) + u_1^+ \zeta \cos \theta \frac{\partial u_0^+}{\partial \zeta}
 \end{aligned} \quad (49-2)$$

و بنابراین Ψ_2 متناسب با $\sin 2\theta$ است. از معادله (۳۵-۲)

$$\zeta \nabla_1^2 u_2^+ = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} \frac{\partial u_1^+}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \frac{\partial u_1^+}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \frac{\partial u_0^+}{\partial \zeta} \quad (50-2)$$

از آن نتیجه می شود u_2^+ به فرم $g_2(\zeta) + G_2(\zeta) \cos 2\theta$ است. چون دومین جمله تأثیری بر Q از مرتبه K^2 ندارد، نیاز به محاسبه ندارد، و بنابراین نیاز به محاسبه Ψ_2 نیست. آن بخش از u_2^+ که فقط تابع ζ است رابطه

$$\zeta \frac{\partial^2 g_2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial g_2}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial \zeta} g_1 + \chi_1 \frac{\partial g_1}{\partial \zeta} \right) \quad (51-2)$$

را ارضا می کند. که در آن

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \chi_1 \cos \theta \\ u_1^+ &= g_1 \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (52-2)$$

انتگرالگیری از معادله (۵۱-۲) می دهد:

$$\zeta \frac{\partial g_2}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} g_1 \chi_1 \quad (53-2)$$

که، با جایگذاری معادلات (۴۴-۲) و (۴۵-۲)، دین با انتگرالگیری معادله زیر را یافت

$$\begin{aligned}
 g_2(\zeta) &= \frac{1}{663552} [-0.1839 + 0.95\zeta^2 - 2.0687\zeta^4 + 2.475\zeta^6 \\
 &- 1.7781\zeta^8 + 0.785\zeta^{10} - 0.2062\zeta^{12} + 0.0286\zeta^{14} - 0.0016\zeta^{16}]
 \end{aligned} \quad (54-2)$$

نرخ جریان حجمی با همان درجه تقریب به شکل زیر داده می شود:

$$Q = \int_0^a 2\pi u r dr = 2\pi u_0 a^2 \int_0^1 u^+ \zeta d\zeta$$

$$= 2\pi u_0 a^2 \int_0^1 \zeta [1 - \zeta^2 + K^2 g_2(\zeta)] d\zeta.$$

بنابراین

$$Q = \pi a^2 U = \frac{\pi a^2 u_0}{2} \left[1 - 0.03058 \left(\frac{K}{576} \right)^2 \right]. \quad (55-2)$$

برای همان گرادیان فشار محوری، نرخ جریان حجمی در جریان پویسله، $\pi a^2 u_0/2$ است. بنابراین جملات داخل کروشه ها در معادله (55-2)، تصحیح مرتبه اول را در تأثیر انحنا روی گرادیان فشار محوری برای نرخ جریان معین، ارائه می دهد. دین، همچنین جمله بعدی سری را محاسبه کرد، در نتیجه معادله (55-2) بصورت زیر در می آید:

$$Q = -\frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{d\hat{p}}{dx} \left[1 - 0.03058 \left(\frac{K}{576} \right)^2 + 0.01195 \left(\frac{K}{576} \right)^4 \right] \quad (56-2)$$

که u_0 جاگذاری شده است. ضرایب معادله (56-1) اخیراً توسط ون دایک [65] تأیید شده اند. با بررسی جملات ψ_3, u_3^+, u_4^+ دین توانست استنتاج کند که معادله (56-2) را می توان بدون خطای جدی برای مقادیر K تا حدود 576، بکاربرد. پس، با استفاده از معادله (56-2)، محاسبه محدوده پارامترهای (Re) و R_c/a که در آن حل ها جواب می دهند، امکانپذیر است. با تعریف ضریب اصطکاک، f_c برای جریان خمیده توسعه یافته بمنظور ارضاء رابطه

$$\frac{d\hat{p}}{dx} = \frac{1}{R_c} \frac{d\hat{p}}{d\phi} = -\frac{4f_c}{D} \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (57-2)$$

که در آن D قطر لوله است، معادله (۵۶-۲) بصورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{16}{(\text{Re})f_c} = \left[1 - 0.03058 \left(\frac{K}{576} \right)^2 + 0.01195 \left(\frac{K}{576} \right)^4 \right] \quad (58-2)$$

برای $K=0$ ، معادله (۵۸-۲) بصورت عبارتی برای جریان پویسله، ساده می شود

$$f = \frac{16\mu}{\rho UD} = \frac{16}{(\text{Re})}$$

$$(\text{Re}) = \frac{\rho UD}{\mu}$$

۲-۲-۱-۳- عدد دین (Dean number)

در فرمولبندی مقادیر بی بعد K و C ، معادلات (۳۶-۲) و (۳۷-۲)، مولفه سرعت محوری در خط مرکزی لوله، u_0 بکار می رود. مقدار u_0 در ابتدا مشخص نیست و با پیشرفت حل جریان، برآورد می شود. بعنوان تقریب اولیه، دریافتیم که انحنای تأثیری بر توزیع سرعت محوری ندارد، که برای جریان پویسله نیز همینطور بود. از معادله (۵۴-۲) بدیهی است که، برای $\zeta = 0$ ، بعنوان تقریب ثانویه مقدار u_0 با جریان پویسله متفاوت است. این وابستگی توزیع سرعت محوری به دیگر پارامترهای جریان، استفاده کلی از K را نامناسب می سازد، و بهمین دلیل محققین بعدی دو حالت از چیزی را که اکنون بعنوان عدد دین شناخته میشود، معرفی کردند.

حالت اول که برای کارهای تحلیلی مناسب است عدد دین De_p ، می باشد که به شکل زیر تعریف می شود:

$$De_p = \frac{Ga^2}{\mu} \left(\frac{2a^3}{\left(\frac{\mu}{\rho} \right)^2 R_c} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (59-2)$$

G گرادیان فشار محوری در محور لوله، $(\partial \hat{p} / \partial x)_{r=0}$ می باشد.

پارامتر De_p بوسیله

$$De_p = CK^{\frac{1}{2}} \quad (۶۰-۲)$$

به K و C دین مربوط می شود.

حالت دوم، که برای کارهای تحلیلی استفاده می شود و برای انجام محاسبات و کار طراحی مناسبتر است، عدد دین De_u است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$De_u = (Re) \left(\frac{a}{R_c} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۶۱-۲)$$

زمانیکه مقدار K کوچک است، مانند توزیع سرعت محوری و گرادیان فشار محوری در جریان پویسله،

$C = 4$ می باشد

و سپس

$$De_p = 4K^{\frac{1}{2}} = 4(Re) \left(\frac{2a}{R_c} \right)^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}De_u \quad (۶۲-۲)$$

از کار انجام شده در بخش ۲-۱-۲-۲، بالاترین حد ارائه این ساده سازی ها مقادیر $K = 576$ ، $De_p =$

۹۶ و $De_u = 16.97$ می باشد. برای مقادیر بزرگتر De_u و De_p ، هیچ رابطه ساده ای برای K

نمی توان نوشت، اما De_u و De_p با معادله زیر به هم مربوط می شوند:

$$De_p = \frac{(Re)f_c}{2\sqrt{2}} De_u \quad (۶۳-۲)$$

مقادیر عددی این کمیتها در بخش ۲-۱-۲-۲ ارائه می شوند.

با در نظر گرفتن معادلات (۲۹-۲)، (۳۰-۲) و (۳۱-۲)، و جایگذاری مقادیر بی بعد

$$\psi = \frac{\Psi}{\mu/\rho}; \quad \zeta = \frac{r}{a}; \quad u^* = \left(\frac{2a^3}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 R_c} \right)^{\frac{1}{2}} u, \quad (64-2)$$

معادلات حاکم جریان، با استفاده از سیستم مختصات شکل (۲-۱)، بصورت زیر خواهد بود:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla_1^2 \psi + u^* (\zeta \cos \theta \partial u^* / \partial \zeta - \sin \theta \partial u^* / \partial \theta) = -\zeta \nabla_1^4 \psi \quad (65-2)$$

و

$$\frac{1}{\zeta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \partial u^* / \partial \theta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \partial u^* / \partial \zeta \right) = De_p + \nabla_1^2 u^* \quad (66-2)$$

که De_p در معادله (۲-۵۹) تعریف شده است، و

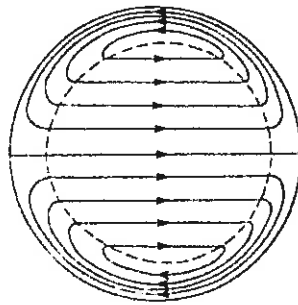
$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

ملاحظه می شود که این طرح برای بی بعد کردن معادلات، نسبتاً موثرتر از آنیست که در ابتدا توسط دین، معادلات (۲-۳۳)، استفاده شد و بویژه نقش حیاتی De_p را در تعیین جریان در لوله های خمیده بوضوح بیان نمود.

۲-۲-۱-۴- جریان در اعداد دین بالا

در اعداد دین بالا، $De_u > 200$ برخی از محققین [46,66,67] یک شکل الگوی جریان را با فرض $R_0/a \gg 1$ تحلیل کرده اند. در این تحلیل ها مدل جریان تقسیم می شود به یک هسته مرکزی، که در آن جریان ثانویه تقریباً سرعت یکنواخت به سمت بیرون مرکز انحنا دارد بعلاوه یک لایه مرزی در مجاورت دیواره لوله، همانطور که در شکل (۲-۲) دیده می شود. حرکت درون لایه

مرزی به سمت مرکز انحناست و از اینرو شرط بقای جرم (پیوستگی) درون جریان ثانویه برقرار می شود.



شکل (۲-۲) الگوی حالت ایده ال خطوط جریان ثانویه در اعداد دین بالا مرکز انحنای به سمت چپ

اختلاف بین تحلیل های موری و ناکایاما [46]، باروا [66] و ایتو [67] در جزئیات توزیع سرعت در ناحیه هسته و لایه مرزی، و روشهای بکار رفته برای پیوستن شرایط درون هسته و لایه مرزی روی فصل مشترکشان اتفاق می افتد. باروا (1963) برای مقادیر بزرگ De_u نتیجه زیر را بدست آورد:

$$\frac{(Re)f_c}{16} = \frac{(1.122)^3}{4De_u} \left[1.181 + \left\{ (1.181)^2 + \frac{De_u}{\sqrt{6}} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^3 \quad (۲-۶۷)$$

که می توان آن را بصورت سری توانی زیر نوشت:

$$\frac{(Re)f_c}{16} = 0.09185De_u^{\frac{1}{2}} + 0.5093 + 1.413De_u^{-\frac{1}{2}} + 2.321De_u^{-1} + \dots \quad (۲-۶۸)$$

شاید توجه به این مطلب ارزشمند باشد، باروا پیش بینی می کند که جدایش در $\theta = 62^\circ 58'$ اتفاق می افتد و این نظریه را بیان می کند که معادلات لایه مرزی برای نشان دادن حرکت از آن نقطه به $\theta = \pi/2$ مناسب نیستند. این پیش بینی جدایش توسط موری و ناکایاما یا ایتو تأیید نشد و ممکن است با واقعیت فیزیکی سازگار باشد یا نباشد. این امکان وجود دارد، زیرا گرادیان مولفه های سرعت در فصل مشترک هسته- لایه مرزی ناپیوسته هستند.

موری و ناکایاما در 1965 نتیجه زیر را بدست آوردند:

$$\frac{(\text{Re})f_c}{16} = 0.1080 De_u^{\frac{1}{2}} [1 - 3.253 De_u^{\frac{1}{2}}]^{-1} \quad (69-2)$$

که دارای بسط

$$\frac{(\text{Re})f_c}{16} = 0.1080 De_u^{\frac{1}{2}} + 0.351 + \dots \quad (70-2)$$

می باشد.

و ایتو رابطه

$$\frac{(\text{Re})f_c}{16} = 0.1033 De_u^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 + \frac{1.729}{De_u} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1.315}{De_u^{\frac{1}{2}}} \right]^{-3} \quad (71-2)$$

را بدست آورد.

که بسط آن بصورت زیر است

$$\frac{(\text{Re})f_c}{16} = 0.1033 De_u^{\frac{1}{2}} [1 + 3.945 De_u^{-\frac{1}{2}} + O(De_u^{-1})]. \quad (72-2)$$

هر سه این تئوری ها روابط زیر را

$$(Re)f_c \propto De_u^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad (Re)f_c \propto De_p^{\frac{1}{2}}$$

در مقادیر بالای عدد دین پیش بینی می کنند، هرچند اختلاف جزئی در ضرایب تناسب^۱ وجود دارد. این سه عبارت که توسط ایتو بدست آمد بخوبی با نتایج عددی کالینز و دنیس [68] که در معادله (۷۴-۲) ارائه شده، تطبیق می کند.

۲-۲-۱-۵- حل عددی معادلات جریان

در سالهای اخیر، کاربرد روشهای عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی (۲-۶۵) و (۲-۶۶) بطور قابل ملاحظه ای دانش ما را در مورد جریان خمیده توسعه یافته، افزایش داده است. تحلیل دین که در بخش های ۲-۲-۱-۱ و ۲-۲-۱-۲ بحث شد، به اعداد دین $De_u < 17$ محدود شد و برای تحلیلهای مورد بحث در بخش ۲-۲-۱-۴ یک فرم مناسب برای اعداد دین بالا، $De_u > 200$ در نظر گرفته شد، حل های عددی اکنون برای محدوده $10 < Dep < 5000$ مطابق محدوده تقریبی $2 < De_u < 360$ داده می شوند. و شرط $Re/a > 1$ ، همچنان برقرار است.

سریواستاوا و مک کونالوگو [26] یک سیستم مختصات تا حدودی متفاوت با شکل (۲-۱) بکار بردند. ابتدا محدوده اعداد دین را با حل معادلاتی شبیه معادلات (۲-۶۵) و (۲-۶۶) در محدوده تقریبی $100 < Dep < 600$ توسعه دادند. سرعت بی بعد و تابع جریان با سری فوریه^۲ نشان داده شد، و سیستم معادلات به شکل عددی برای بدست آوردن رابطه نرخ جریان حجمی، و کانتورهای Ψ ثابت و u^* ثابت برای ۹ مقدار Dep حل شد.

گرینسپین [69] یک روش تفاضل محدود را برای محاسبه کانتورهای Ψ ثابت و u^* ثابت برای مقادیر Dep تا 5000 بکار برد. با وجود این نتایج وی، بخاطر کیفیت مش بندی و روشهای عددی بکار رفته، توسط کالینز و دنیس [70] و توسط اسمیت مورد سؤال قرار گرفت.

^۱-Coefficients of proportionality

^۲-Fourier series

توصیف کاملی از تعیین عددی جریان در لوله های خمیده ، در محدوده $96 < Dep < 5000$ توسط کالینز و دنیس ارائه شد. کانتورهای Ψ ثابت و u^* ثابت محاسبه شدند و همچنین خواص اصطکاکی مشخص شدند.

آنها نشان دادند برای $Dep > 1000$ ، نتاج در مورد اصطکاک به فرم زیر می باشد

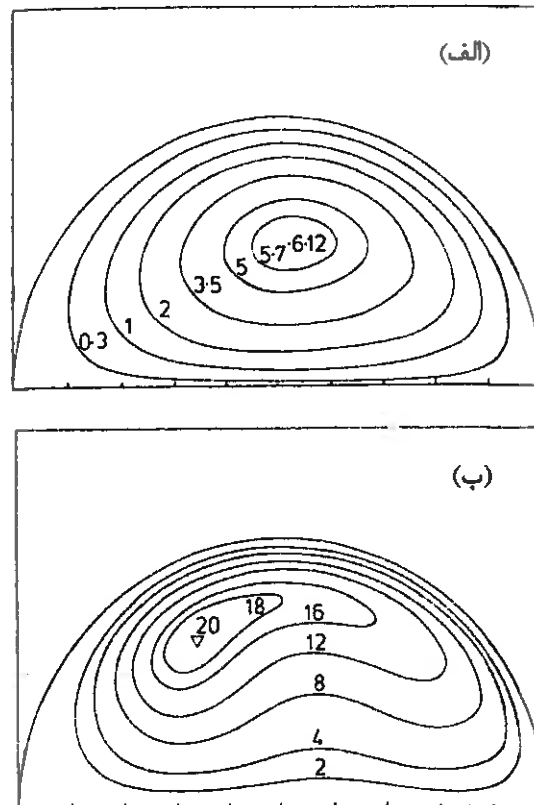
$$\frac{16}{(Re)f_c} = D_p^{-\frac{1}{3}} \{ 8.12 - 16.7 D_p^{\frac{1}{3}} + O(D_p^{\frac{2}{3}}) \} \quad (73-2)$$

که می توان بصورت

$$\frac{(Re)f_c}{16} = 0.1028 D_u^{\frac{1}{2}} \{ 1 + 3.70 D_u^{-\frac{1}{2}} + O(D_u^{-1}) \}. \quad (74-2)$$

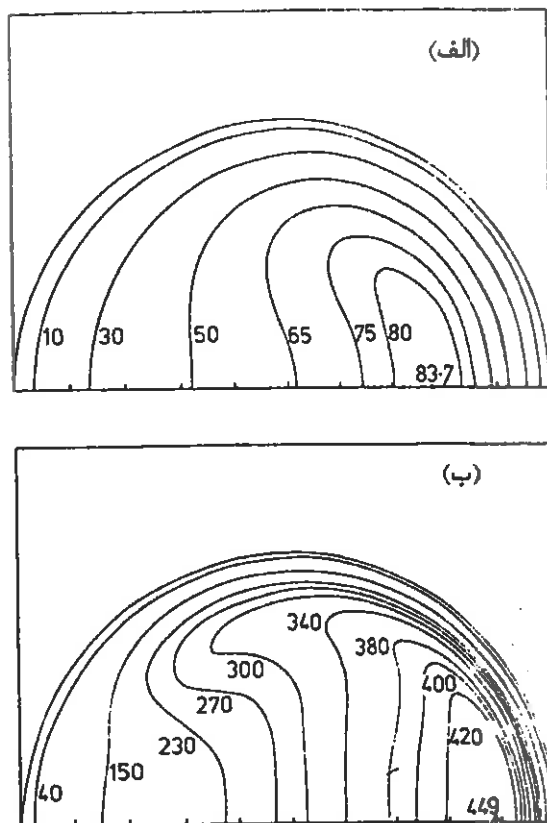
نوشت.

این رابطه بخوبی با نتایج تحلیلی ایتو مطابقت دارد. دو مثال از کانتورهای تابع جریان و سرعت محوری ثابت، که توسط کالینز و دنیس مشخص شدند ، به ترتیب در شکل های (۲-۳) و (۲-۴) نشان داده شده اند.



شکل (۳-۲) منحنی های Ψ ثابت. (الف) $Dep = 500$ ، (ب) $Dep = 5000$. مرکز انحنا به سمت چپ

این نکته جالب توجه است که در سالهای اخیر حل‌های عددی برای جریان در حال توسعه در لوله های خمیده ارائه شده اند. در این حل‌ها شرایط توسعه یافتگی، هنگامیکه الگوی جریان مستقل از فاصله در طول لوله باشد، مشخص شده اند. پاتانکار، پرتپ و اسپالدینگ [71] حل های عددی در این زمینه بدست آوردند که بخوبی با داده های منتشر شده دیگر در مورد جریان توسعه یافته خمیده برابری می کند.

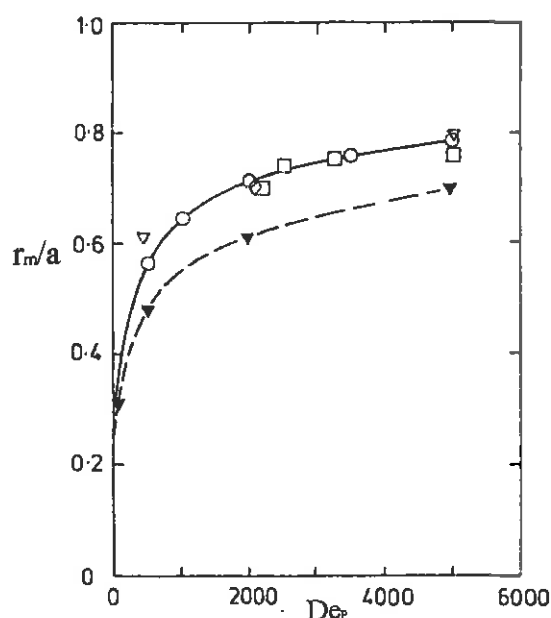


شکل (۴-۲) منحنی های u^* ثابت . (الف) $Dep = 500$; (ب) $Dep = 5000$.
مرکز انحنا به سمت چپ.

۲-۲-۱-۶- داده های تجربی و مقایسه با پیش بینی ها

در اعداد دین پایین، میدان جریان الگوی متقارنی با توجه به دیواره های داخلی و خارجی خم نشان می دهد. در حالیکه عدد دین افزایش می یابد ، موقعیت سرعت محوری ماکسیمم در طول صفحه تقارن به بیرون مرکز انحنا حرکت می کند. ما شعاعی که در آن ماکسیمم سرعت اتفاق می افتد را با r_m نشان می دهیم. در شکل (۲-۵) تغییر r_m/a با Dep نشان داده شده است، هر دو مقدار محاسبه شده و داده های تجربی (حاصل از آزمایش) را شامل می شود. مشاهده می شود که توافق خوبی بین تئوری و آزمایش به استثناء نتایج گرینسپن وجود دارد.

بالاترین مقدار De_p که برای آن یک حل عددی موجود است $De_p=5000$ ، برابر مقدار $De_u=364$ می باشد. داده های تجربی که در فصل اول (۳-۳-۱) در نظر گرفته شد، تأیید می کنند که جریان آرام بر مقادیر De_u برابر 2000 یا بیشتر تأکید دارد. در بالاترین مقدار عدد دین که توسط گرینسپن در نظر گرفته شده، $De_p=5000$ ، قسمت های نوسانی روی بعضی از کانتورهای u^* ثابت مشخص می شود. گرینسپن عقیده داشت که اینها ممکنست نشانه ای از آغاز اغتشاش باشد. همچنین بسیار محتمل است که نوسانات بواسطه خطاها در فرایندهای عددی تعبیر شوند، در حالیکه De_p افزایش می یابد کالینز و دنیس نشان داده اند که نتایج آنها تمایل به ساختاری که شامل یک لایه مرزی در نزدیکی دیواره لوله و یک هسته مرکزی غیر لزج می باشد نشان می دهد.

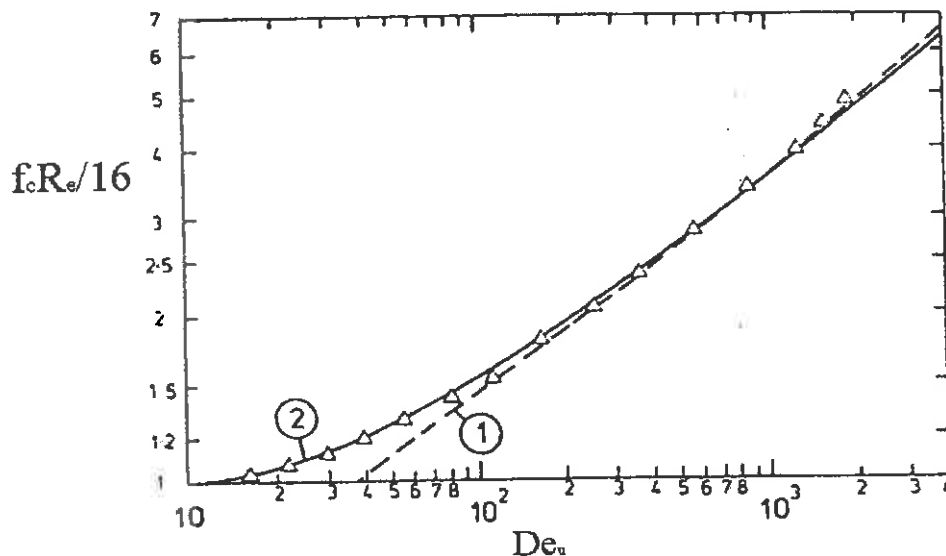


شکل (۵-۲) تغییرات موقعیت ماکسیمم سرعت محوری با De_p . آزمایشات: (□) آدلر؛ پیش بینی عددی: (○) کالینز و دنیس؛ (▽) پاتانکار و همکاران؛ (◊) اکیاما و چنگ؛ (▼) گرینسپن.

آزمایشات روی افت فشار برای جریان توسعه یافته در لوله های خمیده توسط برخی از محققین [24,32,72] انجام شد. این نتایج و نتایج تحلیلی و عددی که در بخشهای قبلی ذکر شد، بخوبی با معادله تجربی وایت که برای محدوده $17 < De_u < 1000$ بکار می رود، منطبق است.

$$\frac{(Re)f_c}{16} = \left[1 - \left\{ 1 - \left(\frac{11.6}{De_u} \right)^{0.45} \right\}^{2.222} \right]^{-1} \quad (۷۵-۲)$$

برای مقادیر $De_u > 1000$ معادله (۷۴-۲) رابطه بهتری $(Re)f_c$ ارائه می کند ، در حالیکه برای $17 < De_u$ معادلات (۵۸-۲) و (۶۲-۲) مناسب هستند. معادلات (۷۴-۲) و (۷۵-۲) و بعضی از داده های تجربی ارائه شده، در شکل (۶-۲) رسم شده اند.



شکل (۶-۲) مقایسه نتایج تجربی با معادله تجربی وایت برای جریان خمیده آرام توسعه یافته. 1 معادله (۷۴-۲) ; 2 معادله (۷۵-۲).

باید توجه شود که معادله (۷۵-۲) و بطور مشابه معادله های (۷۲-۲) - (۶۷-۲) می توانند به آسانی بر حسب عدد دین ، De_p ، که در رابطه (۵۹-۲) تعریف شده با استفاده از معادله (۶۳-۲)، بیان شوند. برای راحتی بعضی از مقادیر عددی مشابه De_u ، De_p و $f_c Re / 16$ در جدول (۱-۲) داده شده اند. معادلاتی که برای محاسبه این مقادیر بکار می روند ذکر شده اند.

جدول (۱-۲) رابطه بین اعداد دین، De_u و De_p ، در جریان خمیده آرام توسعه یافته.

De_u	De_p	$\frac{(Re)f_c}{16}$	Eqns
1	5.657	1.000	58,62
3	16.97	1.000	58,62
10	56.57	1.003	58,62
16.97	96	1.019	58,62
16.97	97.63	1.017	75,63
30	187.7	1.106	75,63
100	865.5	1.530	75,63
300	3833	2.259	75,63
363.6	5000	2.431	75,63
1000	20590	3.640	75,63
1000	20540	3.631	74,63
3000	102010	6.011	74,63
5000	216350	7.649	74,63

داده هایی که شکل (۲-۶) بر اساس آن رسم شده، مربوط به جریانهای خمیده با زوایای مارپیچ کوچک یا صفر می باشد. فاروجیا [73] جریان در چهار لوله با نسبت شعاع در محدوده 17 تا 30، و زوایای مارپیچ بین 2° و 43° را بررسی کرد. برای جریان آرام دریافتیم که تأثیر زاویه مارپیچ روی ضریب اصطکاک کم است هر چند در یک عدد دین De_u معین، تمایل به افزایش زاویه مارپیچ برای کاهش ضریب اصطکاک، وجود دارد. ماکسیمم انحراف^۱ از معادله وایت (۲-۷۵)، برای جریان خمیده توسعه یافته، فقط 12 درصد بود.

^۱-Deviation

فصل سوم

معادلات بکار رفته و روش حل

عددی

فصل سوم

معادلات بکار رفته و روش حل عددی

۳-۱- معادلات اساسی

با مراجعه به شکل (۳-۱)، معادلات اساسی در مختصات (r, θ, z) را که نمایانگر جریان توسعه یافته با جریان ثانویه است، می توان به صورت زیر نوشت:

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (۳-۱)$$

و معادلات ناویر-استوکس به صورت زیر است:

$$v_r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\mu}{\rho r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} + F_r \quad (۳-۲الف)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} + F_\theta$$

و معادله انرژی

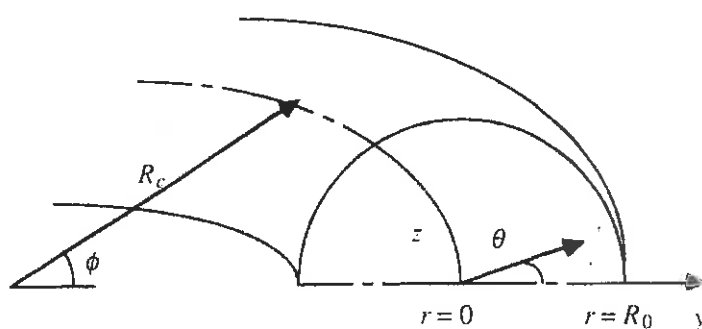
$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right\} \quad (۳-۲ب)$$

که v_r و v_θ و w نمایانگر مولفه های سرعت به ترتیب در جهت r و θ و z است.

هنگامیکه شعاع انحنای لوله R_c به اندازه کافی بزرگتر از شعاع خود لوله R_0 باشد رابطه زیر

برقرار می شود:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{R_c} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (3-3)$$



شکل (۳-۱) منظره سطح مقطع یک لوله خمیده.

نیروی گریز از مرکز که در نتیجه انحنای لوله به وجود می آید از روابط زیر محاسبه می شود:

$$F_r = \frac{w^2}{R_c} \cos \theta \quad (4-3)$$

$$F_\theta = -\frac{w^2}{R_c} \sin \theta$$

از طرف دیگر با انتخاب $\theta = 0$ به صورت موازی با گرانش زمین می توان نیروهای شناوری را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} F_r &= g\beta(T - T^*) \cos \theta \\ F_\theta &= g\beta(T - T^*) \sin \theta \end{aligned} \quad (5-3)$$

که T^* دمای مرجع است و می تواند هر مقدار دلخواهی داشته باشد. این کمیت در معادلات تفاضل محدود ظاهر نمی شود.

حال توجه خود را بر روی حل معادلات اصلی متمرکز می کنیم. ابتدا تابع ورتیسسته، ω ، و

تابع خط جریان، ψ ، را برای مولفه های جریان ثانویه به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (۶-۳)$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (۷-۳)$$

معادله اصلی برای خط جریان را می توان از جایگزینی تعریف تابع ψ در معادله ای برای ω بدست آورد.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\omega \quad (۸-۳)$$

با مشتق گیری متقاطع از معادلات مومنوم در جهت θ و r و سپس تفاضل آنها از یکدیگر،

می توانیم فشار را از معادلات حذف کنیم. بنابراین معادله ورتیسسته بصورت زیر استخراج می شود:

$$v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \quad (۹-۳)$$

فرض می کنیم w یا T معلوم می باشند و هردو F_r و F_{θ} مشخص شده اند. می توانیم ψ و

ω (و بنابراین، v_r و v_{θ}) را از معادلات (۸-۳) و (۹-۳) بدست آوریم. با داشتن این مقادیر، می

توانیم w و T را به ترتیب، از معادله مومنوم در جهت z و معادله انرژی (۳-۲) بدست آوریم. با

استفاده از معادله ممنتوم برای جریان توسعه یافته، می بینیم که گرادیان فشار در جهت z ، $\partial p / \partial z$ ،

تابع z نیست، مقدار خاص $\partial p / \partial z$ را می توان از نرخ جریان بدست آورد. باید $\partial p / \partial z$ را طوری قرار

دهیم که رابطه زیر برقرار شود:

$$\int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} w r d\theta dr = \frac{\pi R_0^2}{2} w_0 = \text{constant} \quad (۱۰-۳)$$

در عمل، ابتدا یک مقدار $p/\partial z$ را حدس می زنیم و w بدست آمده را با w_θ مقایسه می کنیم. اگر مقدار متوسط کمیت اولیه کوچکتر (یا بزرگتر) از دومی باشد، باید $p/\partial z$ را تا زمانی که همگرا شود، افزایش (کاهش) دهیم.

اگر فرض کنیم که دمای دیواره لوله در سطح مقطع داده شده یکنواخت است و همچنین گرمای کلی ورودی از میان دیواره لوله در جهت جریان، یکنواخت است، می توان جمله $\partial T/\partial z$ در معادله انرژی را ثابت در نظر گرفت.

$$\rho c_p \frac{dT}{dz} \frac{\pi R_0^2}{2} w_0 = \pi R_0 q_w \quad (3-11)$$

مجموعه شرایط مرزی مناسب بصورت

$$\begin{aligned} v_\theta = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \text{at } \theta = 0, \pi \\ v_\theta = 0, \quad v_r = 0, \quad T = 0, \quad \text{at } r = R_0 \end{aligned} \quad (3-12)$$

هستند

یا، برحسب ψ و ω بصورت

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad \omega = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \text{at } \theta = 0, \pi \\ \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad T = 0, \quad \text{at } r = R_0 \end{aligned} \quad (3-13)$$

است که اولی شرط تقارن و دومی شرط عدم لغزش می باشد.

ما سه شرط مرزی برای ψ و فقط یک شرط مرزی برای ω داریم. شرط مرزی دیگر برای ω باید از معادله تابع جریان در $r=R_0$ بدست آید.

از آنجایی که $\partial^2 \psi / \partial \theta^2 = 0$ و $\partial \psi / \partial r = 0$ ، این رابطه بکار می رود

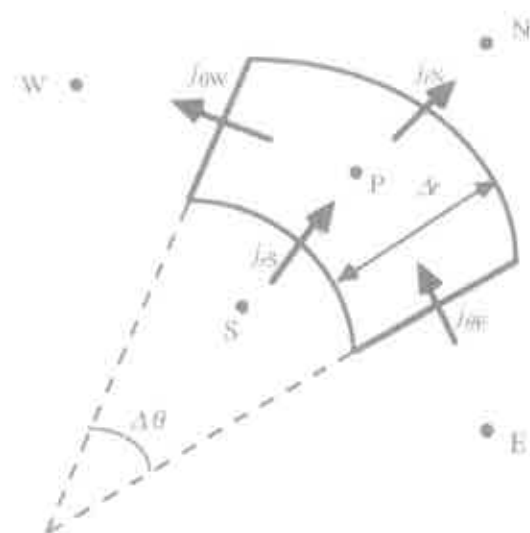
$$\omega_{r=R_0} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right)_{r=R_0} \quad (3-14)$$

بدین ترتیب، یادآور می شویم، بطور کلی این یک معادله تابع جریان است، بنابراین هنگامیکه یک فرم تفاضل محدود معادله فوق برای محاسبه ω در $r=R_0$ از توزیع ψ بکار می رود منجر به $(\partial \psi / \partial r)_{r=R_0} = 0$ می شود. با بسط سری تیلور^۱ ψ حول $r=R_0$ ، عبارت مناسبی برای شرایط مرزی ω بصورت زیر بدست می آوریم.

$$\psi_{R_0-\Delta r} = \psi_{r=R_0} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{r=R_0} \Delta r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right)_{r=R_0} \Delta r^2 \quad (3-15)$$

و از این رو،

$$\omega_{r=R_0} = \frac{-2\psi_{R_0-\Delta r}}{\Delta r^2} \quad (3-16)$$



شکل (۳-۲) شبکه کامپیوتری.

^۱-Taylor series

۳-۲- روش عددی

فرم کلی معادلات اصلی را می توان بصورت

$$v_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] + J \quad (۳-۱۷)$$

نوشت.

که در آن φ نمایانگر w ، ω و T که برای آن D با $\nu (\mu/\rho)$ مرتبط می شود، بترتیب با ν و α

اصلاح عبارت فوق با استفاده از معادله پیوستگی منجر می شود به:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(v_r \varphi - D \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(v_\theta \varphi - \frac{D}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = rJ \quad (۳-۱۸)$$

این معادله با سیستم شبکه ای که در شکل (۳-۲) نشان داده شده، حل می شود. در معادلات

$$j_r = v_r \varphi - D \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (۳-۱۹)$$

$$j_\theta = v_\theta \varphi - \frac{D}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

با استفاده از طرح گسسته سازی بر اساس فرمولاسیون سلول دهنده^۱، که در آن φ در مرکز هر سلول قرار گرفته، بدست می آوریم.

$$j_{\theta E} = -\frac{D}{r} \frac{\varphi_P - \varphi_E}{\Delta \theta} + v_\theta \frac{\varphi_E + \varphi_P}{2} + |v_\theta| \frac{\varphi_E - \varphi_P}{2} \quad (۳-۲۰)$$

هنگامیکه عدد پکلت سلول، $r \Delta \theta v_\theta / D$ ، به اندازه کافی بزرگ است، اثرات upwind غالب است.

بدلیل این اثرات، روش پیوندی را که در زیر شرح داده شده، اختیار می کنیم.

$$j_{\theta E} = -\frac{\varphi_P - \varphi_E}{2} \frac{D}{r \Delta \theta} \left\{ \frac{|Pe|}{2} + 1 + \left| \frac{|Pe|}{2} - 1 \right| \right\} + v_\theta \frac{\varphi_E + \varphi_P}{2} \quad (۳-۲۱)$$

که در آن

^۱-Donor-cell

$$Pe = \frac{r\Delta\theta v_\theta}{D} \quad (22-3)$$

اگر $Pe > 2$ یا $Pe < -2$.

$$j_\theta = -|v_\theta| \frac{\varphi_P - \varphi_E}{2} + \frac{v_\theta}{2} (\varphi_E + \varphi_P) \quad (23-3)$$

اگر $-2 < Pe < 2$.

$$j_\theta = -\frac{D}{r\Delta\theta} (\varphi_E - \varphi_P) + \frac{v_\theta}{2} (\varphi_E + \varphi_P) \quad (24-3)$$

روش فوق برای کاهش نفوذ عددی که از اختلاف upwind ناشی می شود، استفاده می شود.
نیروی محرک^۱ چرخش، که به تشکیل جریان ثانویه کمک می کند، را می توان بصورت زیر نوشت.

$$J = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \quad (25-3)$$

بدین ترتیب، برای یک لوله خمیده

$$J = -\frac{\sin \theta}{R_c} \frac{\partial w^2}{\partial r} - \frac{\cos \theta}{R_c} \frac{\partial w^2}{r \partial \theta} \quad (26-3)$$

و برای لوله گرم شده

$$J = -g\beta \sin \theta \frac{\partial (T - T^*)}{\partial r} - g\beta \cos \theta \frac{\partial (T - T^*)}{r \partial \theta} \quad (27-3)$$

^۱-Driving force

در صفحه $\theta = \pi/2$

$$J = -\frac{1}{R_c} \frac{\partial w^2}{\partial r} \quad (28-3)$$

مقادیر بزرگ w در مرکز لوله اتفاق می افتد، زیرا w نزدیک دیواره لوله صفر است. این اختلاف موجب ایجاد جریان ثانویه می شود. در ناحیه مرکزی نیروی گریز از مرکز به دلیل مقدار زیاد سرعت برجسته است. برای مقابله با اثرات نیروی گریز از مرکز، فشار نزدیک دیواره لوله دور از مرکز انحنا، افزایش می یابد.

در سمت مقابل دیواره لوله، اختلاف فشار محسوسی رخ نمی دهد، چون سرعت در آن ناحیه کم است. این مکانیسم تولید اختلاف فشار است که جریان ورودی را در امتداد دیواره لوله حرکت می دهد.

هنگامیکه لوله گرم می شود، ناحیه ای با درجه حرارت بالا در مجاورت دیواره لوله، به دلیل شناوری در امتداد دیواره صعود می کند، و نزدیک مرکز نزول می کند. پارامترهای بی بعد زیر، که هنگام نرمال سازی نیروهای رانش، ظاهر می شوند، حرکات جریان ثانویه را مشخص می کنند.
عدد دین:

$$De = \sqrt{\frac{R_0}{R_c}} Re \quad (29-3)$$

و، برای یک لوله گرم شده،

عدد رایلی:

$$Ra = \frac{g\beta R_0^3}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\alpha} \frac{2\dot{q}}{\rho c_p u_m} \quad (30-3)$$

که در آن

$$Re = \frac{2u_m R_0}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)} \quad (3-31)$$

۳-۳- طرح اختلاف بالادست (UDS)

تقریب زدن φ_e توسط مقادیرش در گره بالادست 'e' معادل استفاده از تقریب تفاضل پیشرو یا پسرو برای اولین قدم می باشد بسته به جهت جریان، از اینرو نام طرح اختلاف upwind (بالا دست، UDS) برای این تقریب بکار می رود. در UDS، φ_e بصورت زیر تقریب زده می شود:

$$\varphi_e = \begin{cases} \varphi_P & \text{if } (v.n)_e > 0; \\ \varphi_E & \text{if } (v.n)_e < 0. \end{cases} \quad (3-32)$$

این تنها تقریبی است که معیار محدودیت را بصورت نامشروط ارضا می کند، یعنی هرگز به حلهای نوسانی منجر نمی شود. بنابر این، از نظر عددی نفوذی است همانطور که در اینجا نشان داده می شود.

بسط سری تیلور حول p (برای شبکه دکارتی و $(v.n)_e > 0$) بصورت زیر داده می شود:

$$\varphi_e = \varphi_P + (x_e - x_P) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_P + H, \quad (3-33)$$

که H جملات مرتب بالاتر را نشان می دهد. تقریب UDS فقط جمله اول طرف راست را نگه می دارد، بنابر این یک طرح مرتبه اول می باشد. جمله خطای قطع منتج آن، ترم نفوذ است یعنی مانند یک شار نفوذیست.

$$f_e^d = \Gamma_e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e \quad (3-34)$$

ضرایب عددی مصنوعی (ساختگی)، یا نفوذ کاذب (که با نامهای مختلف غیر متعارف رواج دارد)، $I_e^{num} = (\rho u)_e \Delta x / 2$ است. این نفوذ عددی در مسائل چند بعدی بزرگتر می شود، اگر جریان نسبت به شبکه مورب باشد. سپس، خطای قطع نفوذ در جهت عمود بر جریان و در جهت جریان را تولید می کند، بویژه یک نوع خطای جدی، قله ها یا تغییرات سریع در متغیرها نمونه گیری می شود، و از آنجاییکه نرخ کاهش خطا فقط از مرتبه اول است، شبکه های بسیار ریز برای بدست آوردن حلهای دقیق لازم است.

۳-۳-۱- ارزیابی طرح اختلاف بالادست

پایداری

طرح اختلاف بالادست نتایج سازگاری را برای محاسبه شارهای عبوری از سطوح سلول به دست می آورد، بنابراین به آسانی می توان نشان داد که یک قاعده پایدار می باشد.

محدودیت

ضرایب معادله گسسته شده همیشه مثبت می باشند و معیارهای خاصیت مرزی را ارضاء می کنند. همچنین ماتریس ضرایب بصورت قطری در می آید، از اینرو هیچ نوسانی در حل رخ نمی دهد.

انتقال

این طرح برای جهت جریان جواب می دهد، بنابراین خاصیت انتقال در فرمولبندی صادق است.

دقت

طرح فوق بر اساس قاعده اختلاف پسرو می باشد، بنابراین بر اساس خطای قطع سری تیلور دقت فقط از مرتبه اول خواهد بود.

طرح اختلاف بالادست بدلیل سادگی آن بطور وسیع در محاسبات معمولی CFD بکار می رود بطوریکه به آسانی می توان با تکرار روش بالادست در ضرایب برای هر جهت مختصاتی آنرا به مسائل

چند بعدی بسط داد. یک مانع بزرگ برای طرح فوق این است که وقتی جریان همراه با خطوط شبکه نباشد، نتایج غلطی می دهد. طرح اختلاف بالادست سبب می شود توزیع خواص منتقل شده در تمام مسائل پخش شود. در خطای حاصله یک شبه- نفوذ مشاهده می شود که به آن نفوذ کاذب گفته می شود. این اثر می تواند با محاسبه خاصیت انتقال ϕ با استفاده از اختلاف بالادست در یک ناحیه ای که جریان با یک زاویه ای نسبت به شبکه کارترین قرار دارد، نشان داده شود.

۳-۴- طرح اختلاف پیوندی^۱

طرح اختلاف پیوند اسپالدینگ براساس ترکیبی از طرحهای اختلاف بالادست و اختلاف مرکزی می باشد. طرح اختلاف مرکزی که از دقت مرتبه دوم می باشد، برای اعداد پکلت^۲ کوچک ($Pe < 2$) بکار می رود و طرح بالادست از دقت مرتبه اول می باشد، اما بدلیل قابلیت انتقال، برای اعداد پکلت بزرگ ($Pe \geq 2$) بکار می رود. مانند قبل، گسسته معادله نفوذ- جابجایی یک بعدی و بدون عبارت چشمه را بسط می دهیم. این معادله می تواند بصورت یک معادله تعادل شار بیان شود. طرح اختلاف پیوند از فرمول تکه خطی بر اساس عدد پکلت محلی، برای ارزیابی شار خالص عبوری از هر سطح حجم کنترل استفاده می کند. عدد پکلت در سطح یک حجم کنترل ارزیابی می شود.

بطور مثال برای یک سطح غربی:

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \delta x_{wp}} \quad (3-35)$$

قاعده اختلاف پیوند برای شار خالص در واحد سطح که از سطح غربی عبور می کند بصورت زیر می باشد:

^۱-Hybrid differencing scheme

^۲-Peclet

$$q_w = F_w \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_w + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_p \right] \quad -2 < Pe_w < 2 \quad (3-36)$$

$$q_w = F_w A_w \phi_w \quad Pe_w \geq 2$$

$$q_w = F_w A_w \phi_p \quad Pe_w \leq -2$$

به آسانی می توان ملاحظه کرد که این روش برای اعداد پکلت کوچک هم ارز باروش اختلاف مرکزی برای عبارتهای جابجایی و نفوذ می باشد. اما هنگامیکه $|Pe| > 2$ می باشد، با طرح بالادست برای جابجایی هم ارز است، و نفوذ برابر صفر می باشد. شکل عمومی معادله گسسته شده بصورت زیر است:

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_E \phi_E \quad (3-37)$$

ضریب مرکزی توسط رابطه زیر بیان می شود:

$$a_p = a_w + a_E + (F_e - F_w)$$

پس از برخی جاگذاری و باز نویسی به راحتی ثابت می شود که ضرایب همسایه طرح اختلاف پیوند برای نفوذ- جابجایی یک بعدی و دائم بصورت زیر نوشته می شود:

a_w	a_E
$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$

۳-۴-۱- ارزیابی طرح اختلاف پیوندی

طرح اختلاف پیوند از خواص مساعد مربوط به طرحهای اختلاف مرکزی و بالادست استفاده می کند. هنگامیکه طرح اختلاف مرکزی در اعداد پکلت بالا نتایج غیر دقیقی تولید می کند، این طرح به اختلاف بالادست متمایل می شود. طرح کاملاً پایدار بوده و از آنجائیکه ضرایب همواره مثبت می باشند بطور غیر مشروط محدود شده است. معیار انتقال را برای اعداد پکلت بزرگ با استفاده از

قاعده بالادست ارضا می کند، همچنین بطور فیزیکی جوابهای واقع بینانه ای تولید می کند و هنگامیکه با روشهای مرتبه بالا مقایسه می شود پایداری بالایی را نشان می دهد. اختلاف پیوند بطور وسیع در روشهای مختلف دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) استفاده شده است و ثابت شده که برای پیش بینی جریانهای واقعی سیال مفید می باشد. تنها عدم مزیت آن در اینست که دقت خطای قطع سری تیلور فقط از مرتبه اول می باشد.

فصل چهارم

نتایج و نمودارها

فصل چهارم

نتایج و نمودارها

۴-۱- مقدمه

شبیه سازی مسئله به روش حجم محدود با استفاده از فرترن صورت گرفته است و نتایج حاصل از حل عددی با نرم افزار tecplot پردازش شده است.

۴-۲- نتایج شبیه سازی برای جریان آرام

پارامترهای مختلف جریان برای ورودیهای مختلف بدست آمده اند. نتایج زیر برای اعداد دین بالا و پایین برای دو حالت مختلف نیروی رانش J بدست آمده اند. $De = Re(r/R)^{1/2}$ که J طبق رابطه (۳-۲۶) و (۳-۲۷) بصورت زیر می باشد

برای یک لوله خمیده

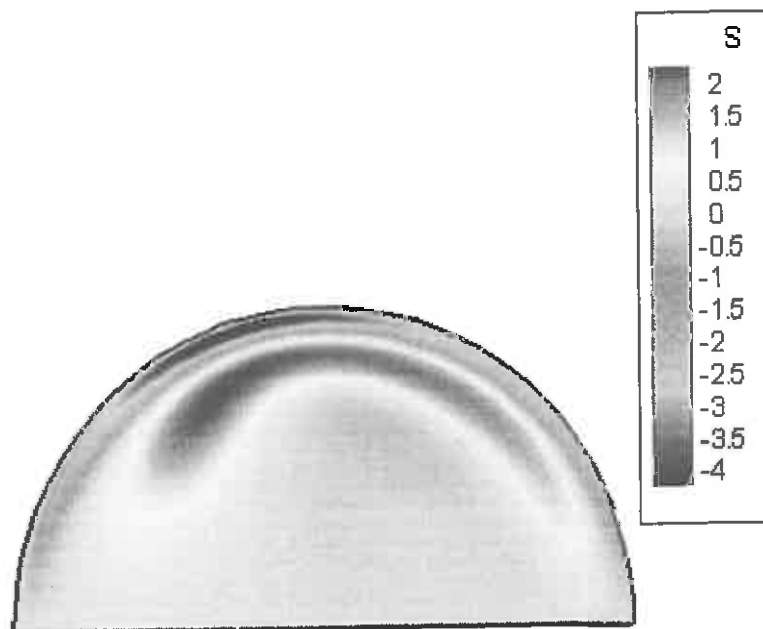
$$J = -\frac{\sin \theta}{R_c} \frac{\partial w^2}{\partial r} - \frac{\cos \theta}{R_c} \frac{\partial w^2}{r \partial \theta}$$

و

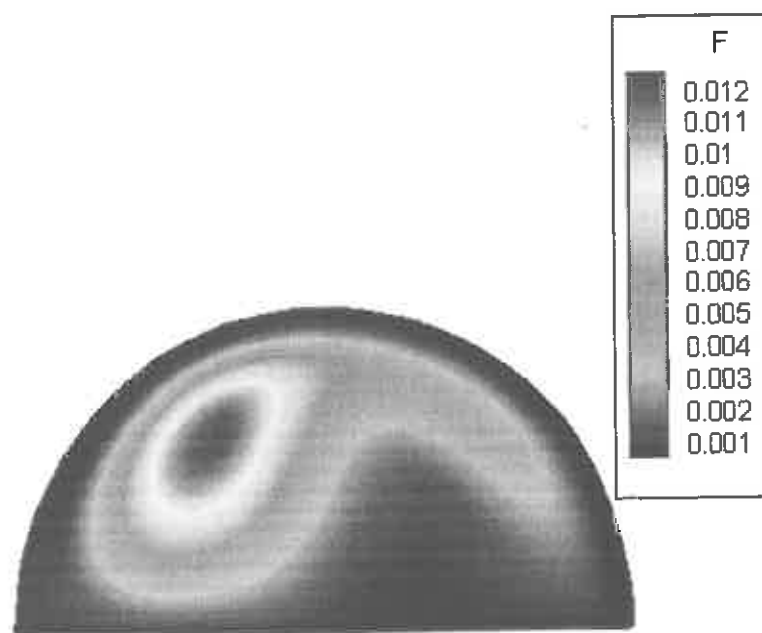
برای یک لوله گرم شده

$$J = -g\beta \sin \theta \frac{\partial (T - T^*)}{\partial r} - g\beta \cos \theta \frac{\partial (T - T^*)}{r \partial \theta}$$

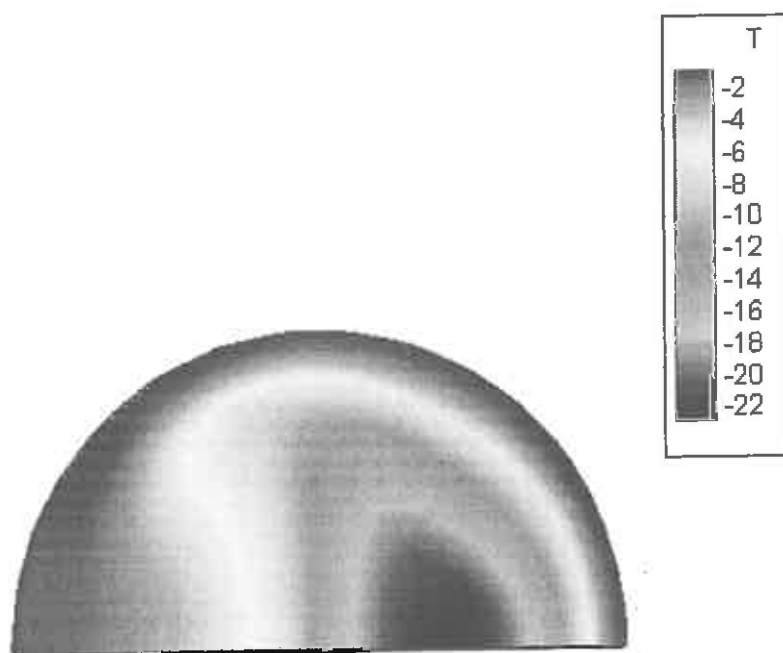
برای عدد دین بالا $Re=1200$ و $R/r=20$ نتایج بصورت زیر می باشند:
لوله خمیده



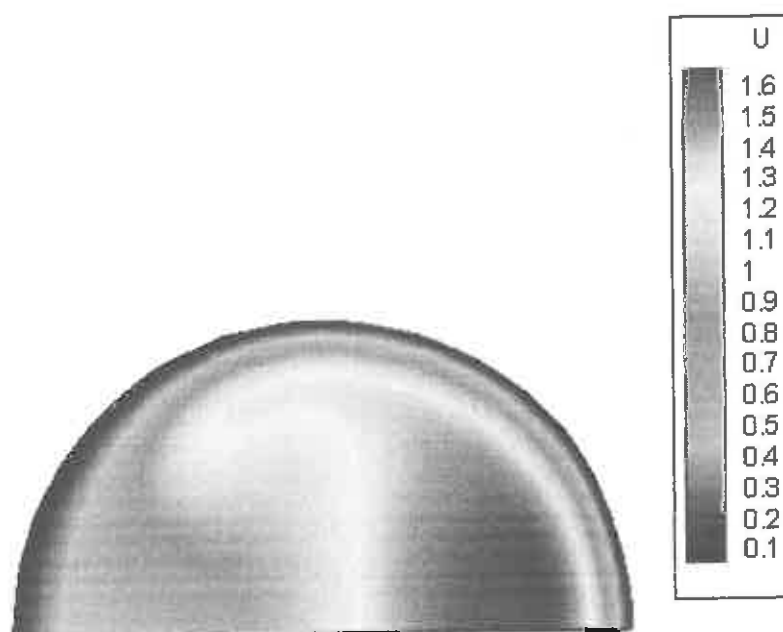
شکل (۴-۱) کانتور ورتیسسته ω برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله خمیده



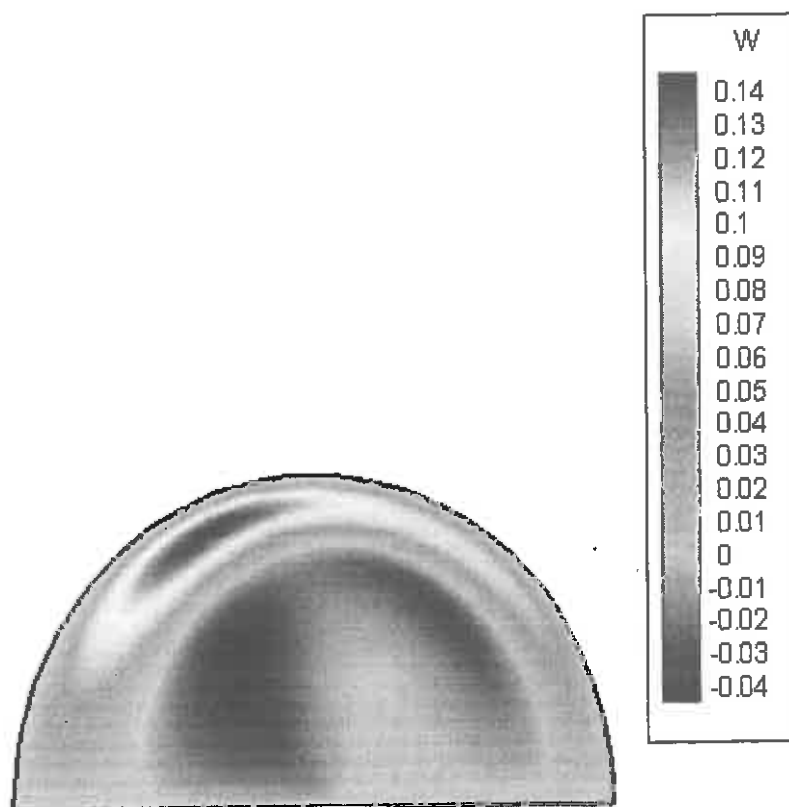
شکل (۴-۲) کانتور تابع جریان ψ برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله خمیده



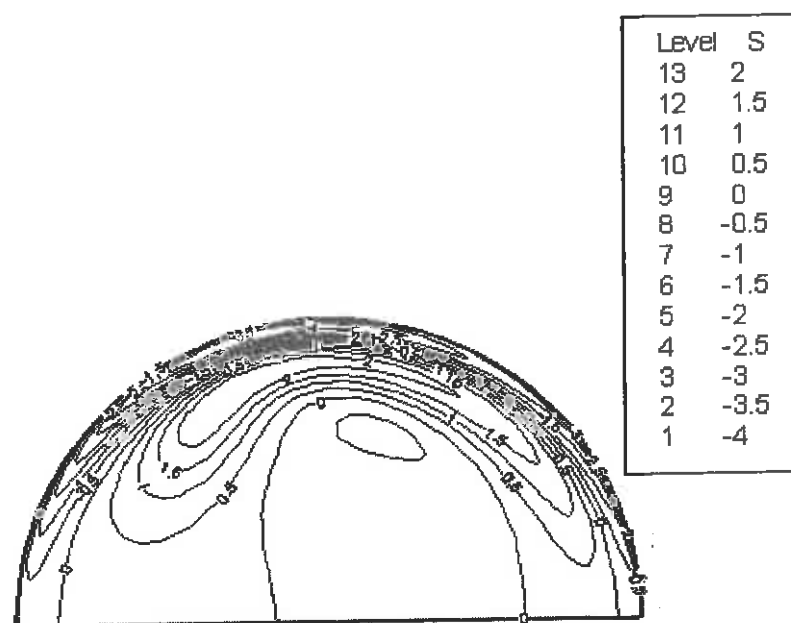
شکل (۳-۴) کانتور دما T برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله خمیده



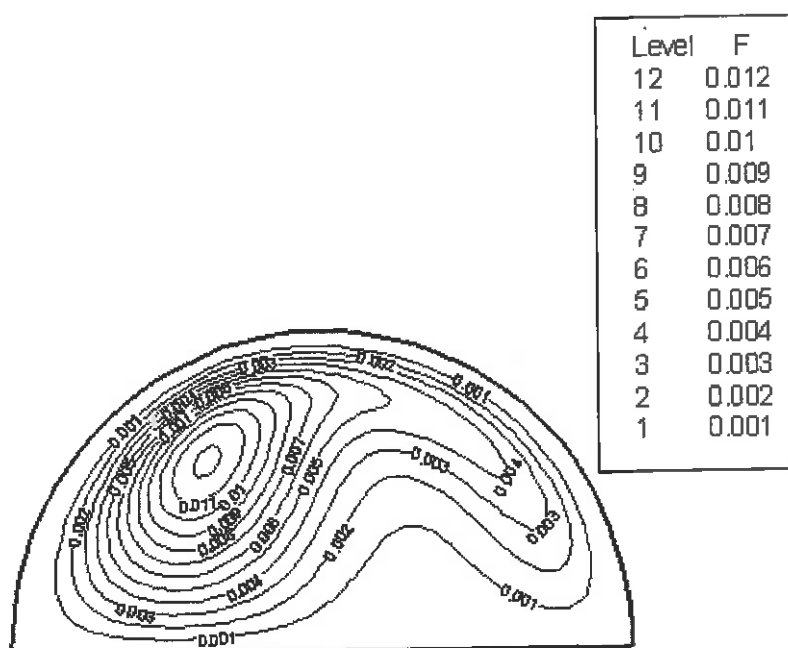
شکل (۴-۴) کانتور سرعت در جهت جریان w برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله خمیده



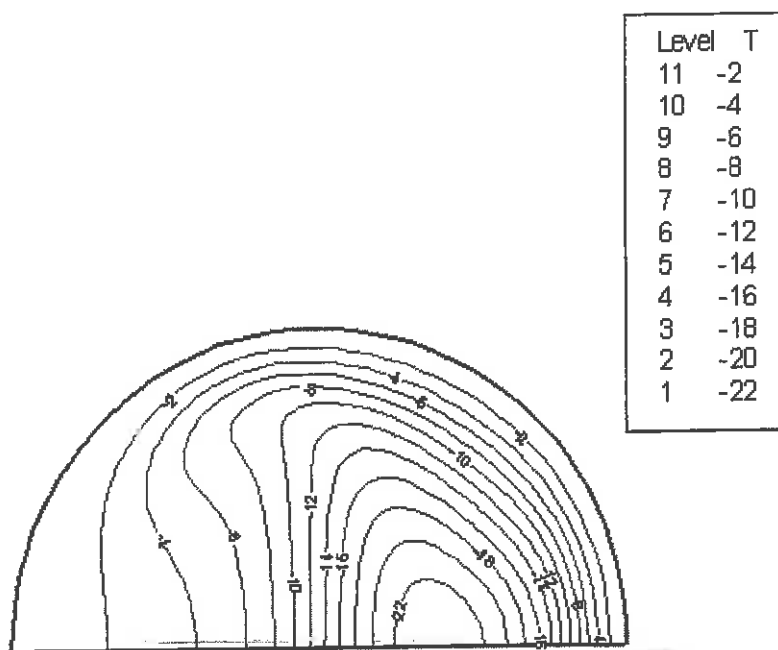
شکل (۴-۵) کانتور سرعت سمتی (زاویه ای) در جهت θ ، v_θ برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله خمیده



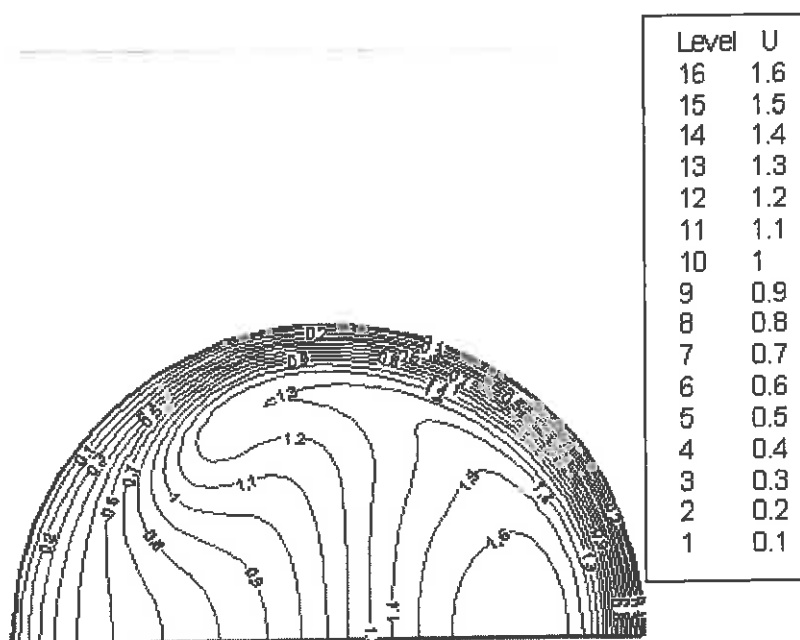
شکل (۴-۶) کانتور خطی ورتیسسته ω برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله خمیده



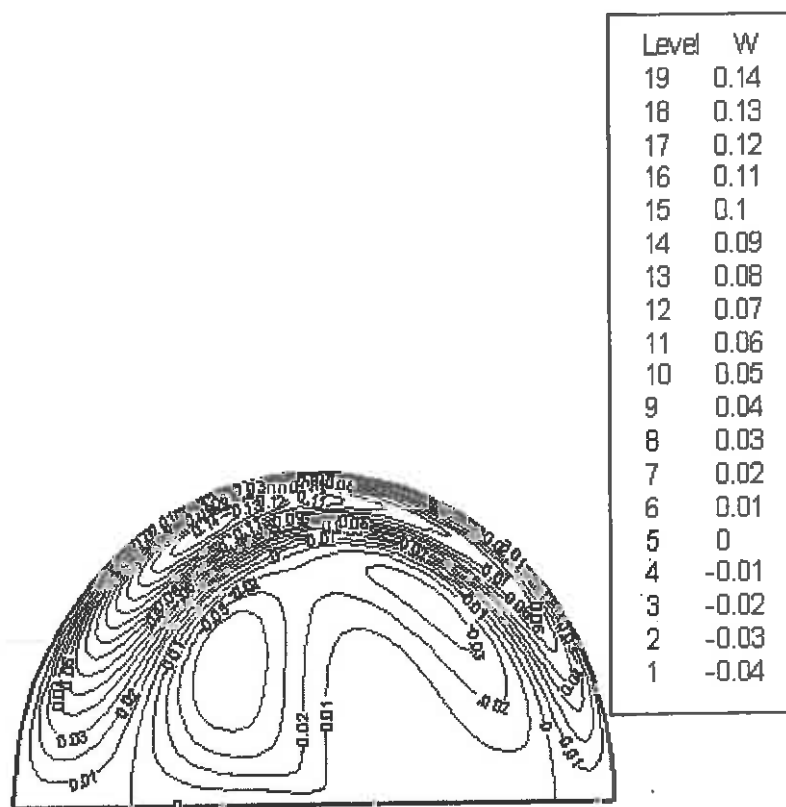
شکل (۴-۷) کانتور خطی تابع جریان ψ برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله خمیده



شکل (۸-۴) کانتور خطی دما T برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله خمیده

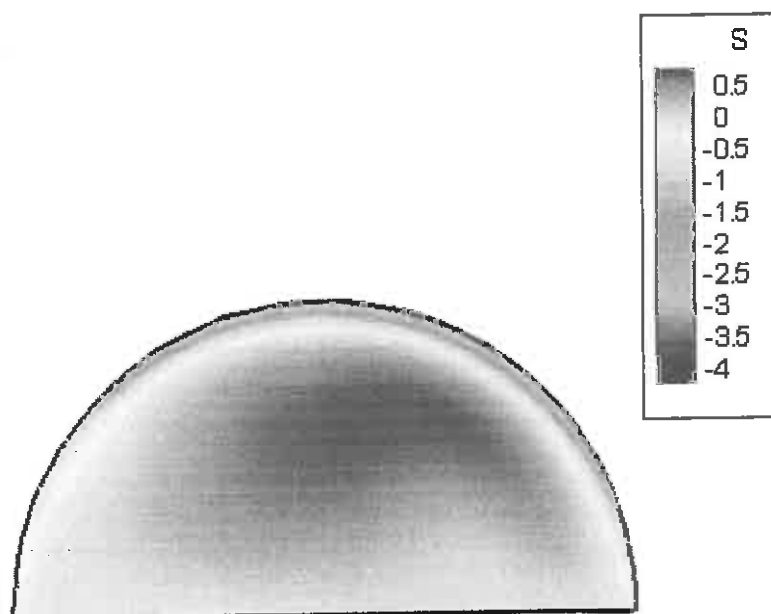


شکل (۹-۴) کانتور خطی سرعت در جهت جریان w برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله خمیده

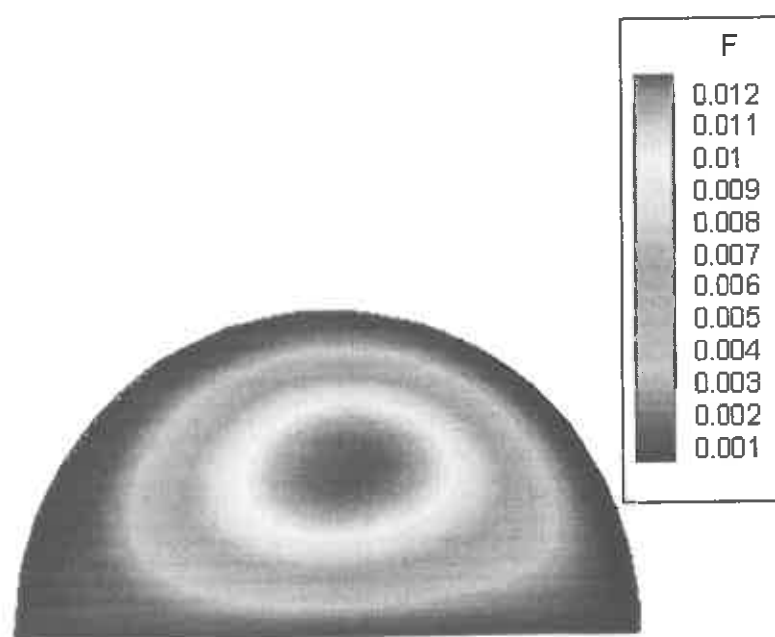


شکل (۴-۱۰) کانتور خطی سرعت سمتی (زاویه ای) در جهت θ ، v_θ برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله خمیده

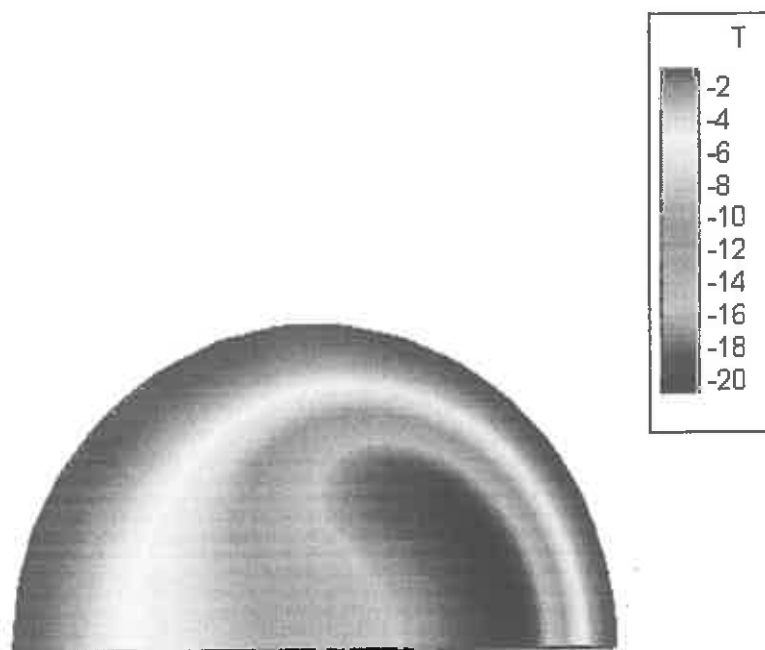
لوله گرم شده



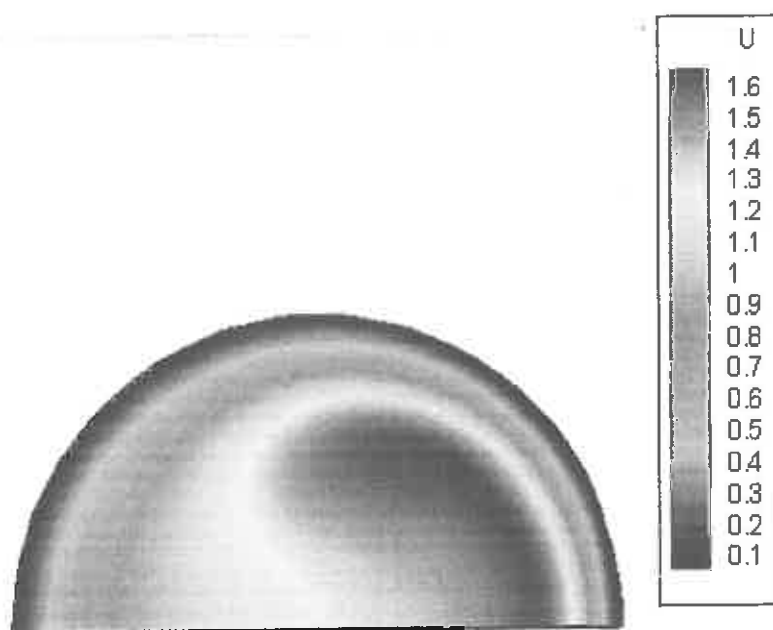
شکل (۴-۱۱) کانتور ورثیسیته ω برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله گرم شده



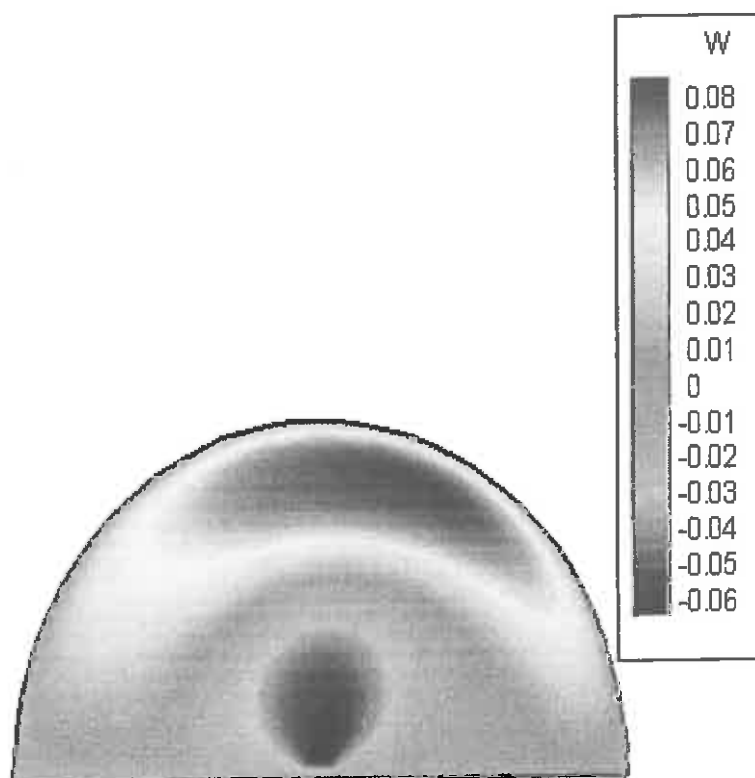
شکل (۴-۱۲) کانتور تابع جریان ψ برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله گرم شده



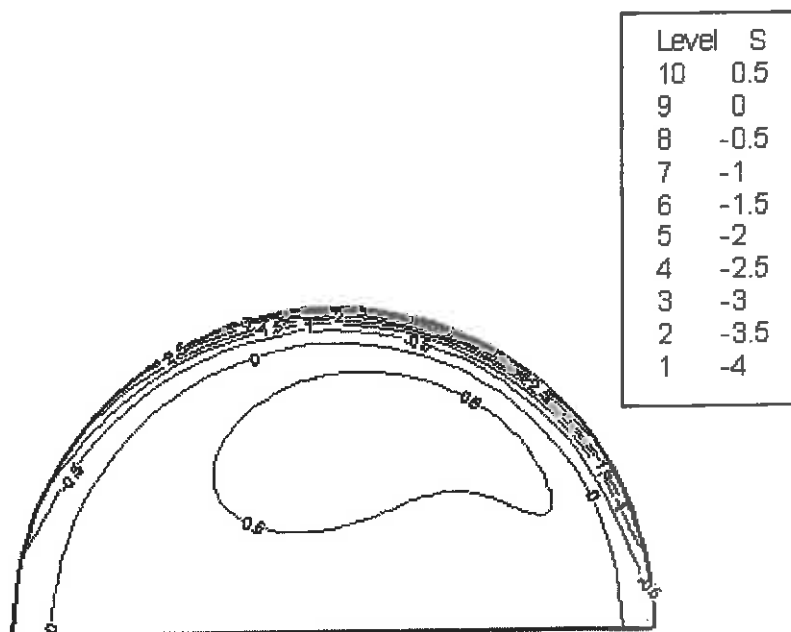
شکل (۴-۱۳) کانتور دما T برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله گرم شده



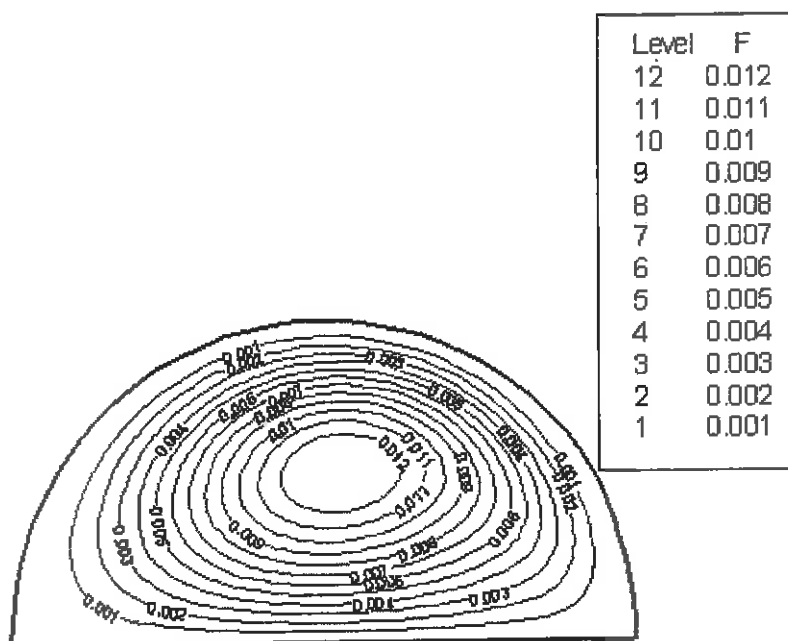
شکل (۴-۱۴) کانتور سرعت در جهت جریان w برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله گرم شده



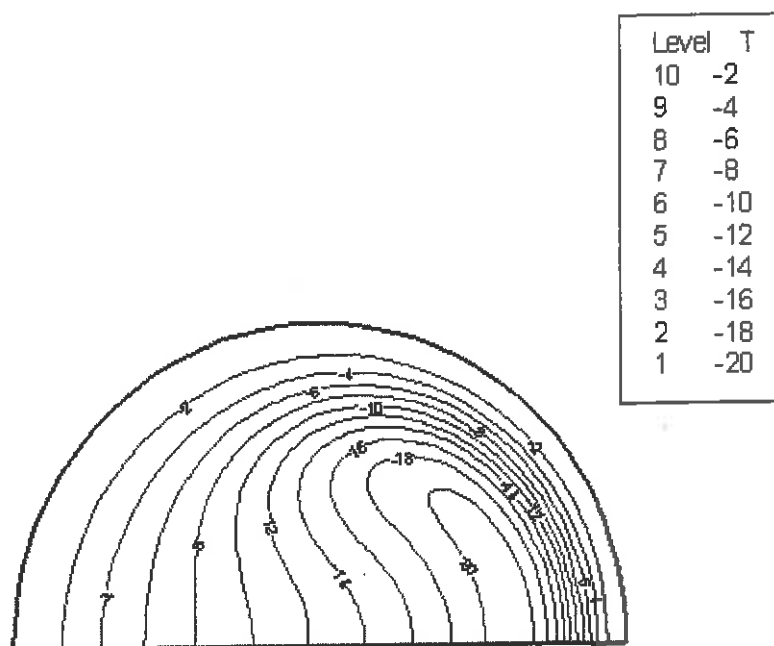
شکل (۴-۱۵) کانتور سرعت سمتی (زاویه ای) در جهت θ ، v_θ برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله گرم شده



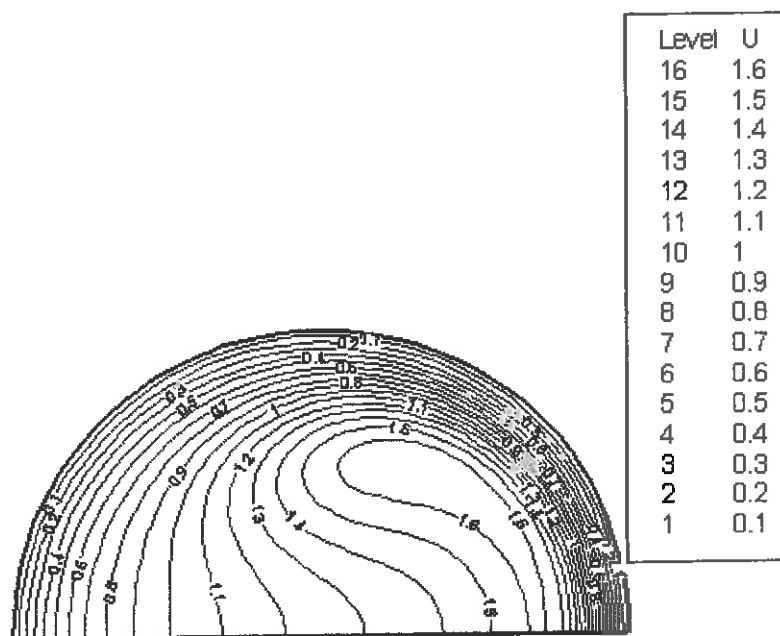
شکل (۴-۱۶) کانتورخطی ورتیسینته ω برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله گرم شده



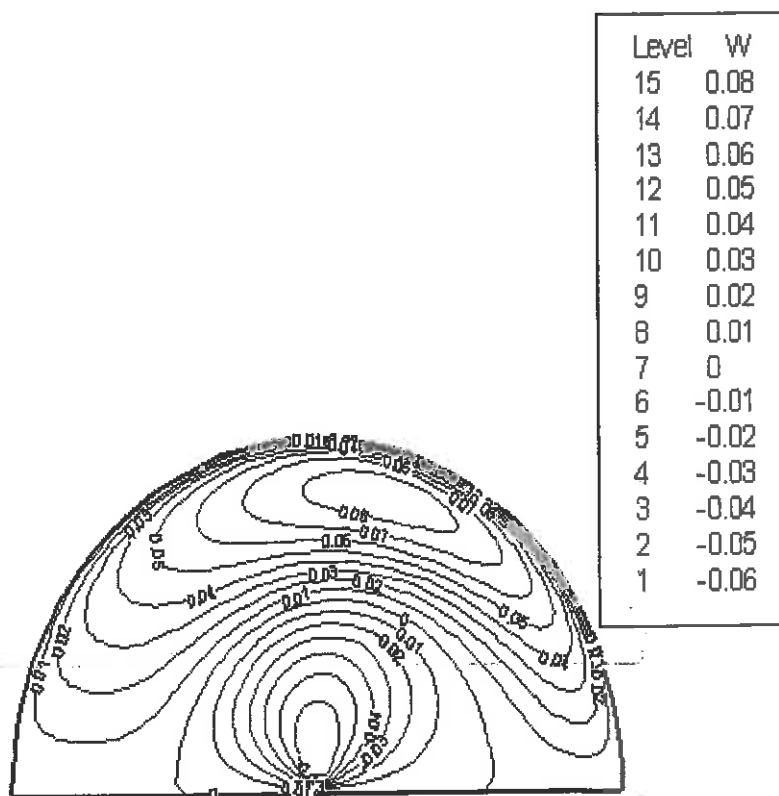
شکل (۴-۱۷) کانتور خطی تابع جریان ψ برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله گرم شده



شکل (۴-۱۸) کانتور خطی دما T برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله گرم شده

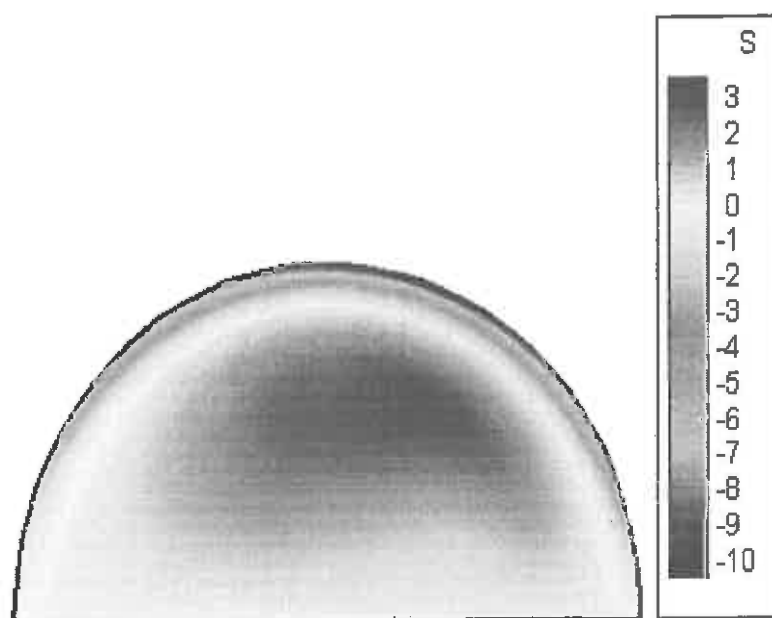


شکل (۴-۱۹) کانتور خطی سرعت در جهت جریان w برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله گرم شده

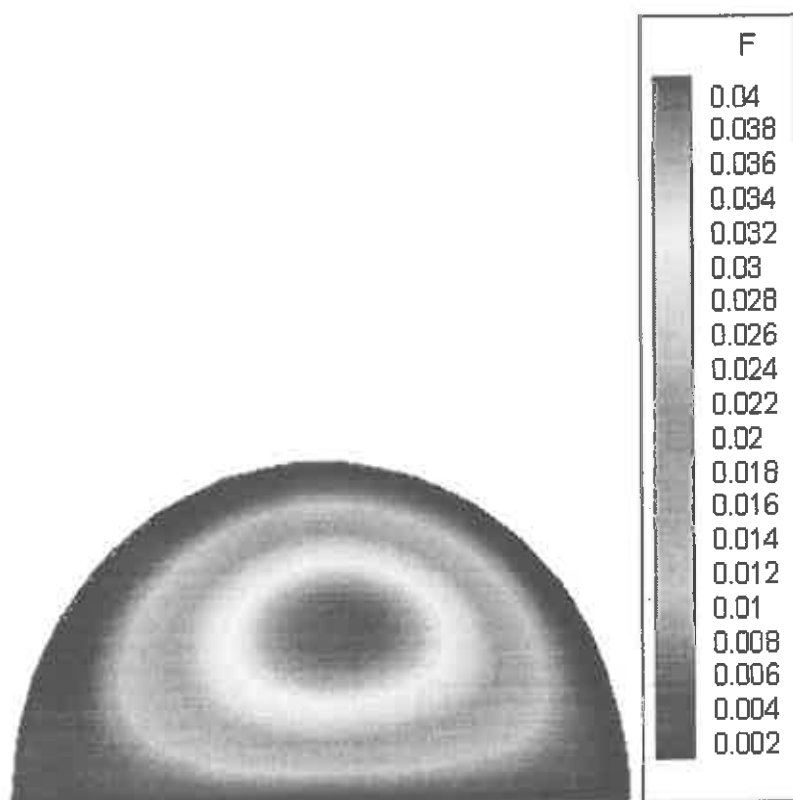


شکل (۴-۲۰) کانتور خطی سرعت سمتی (زاویه ای) در جهت θ ، v_θ برای $Re=1200$ و $R/r=20$ برای لوله گرم شده

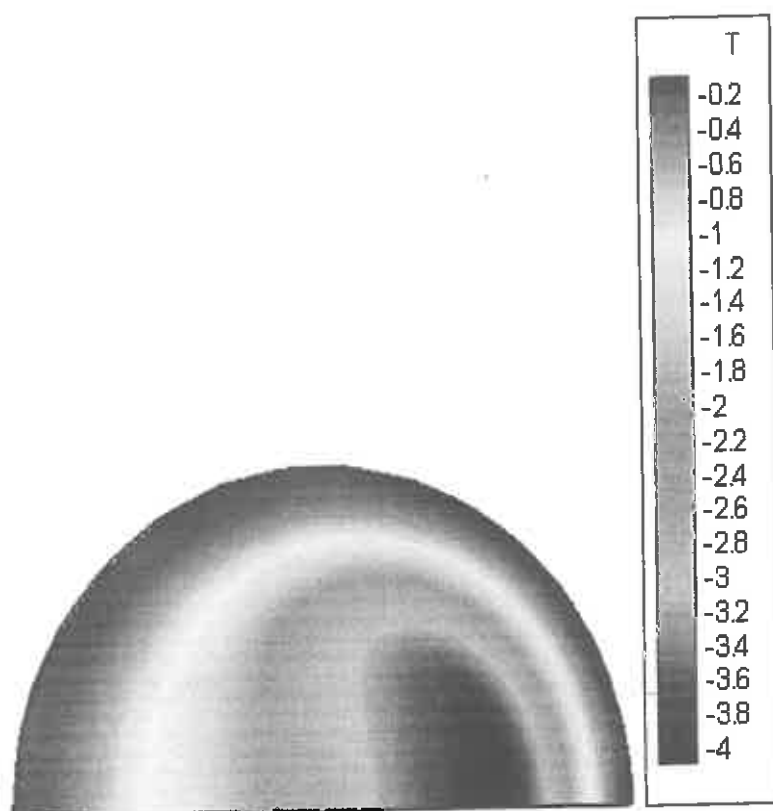
برای عدد دین پایین $Re=200$ و $R/r=7$ نتایج به صورت زیر بدست آمده اند.
برای لوله خمیده



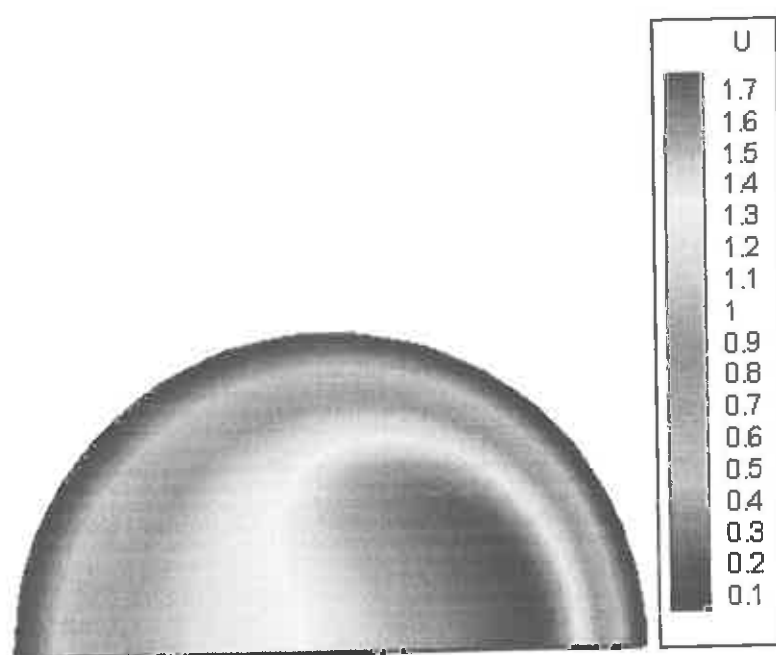
شکل (۴-۲۱) کانتور ورتیسسته ω برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله خمیده



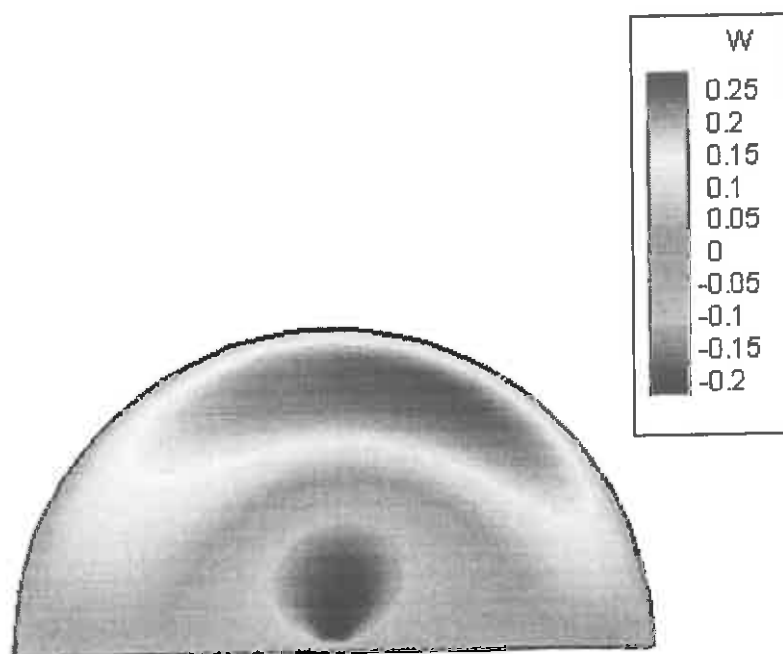
شکل (۴-۲۲) کانتور تابع جریان ψ برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله خمیده



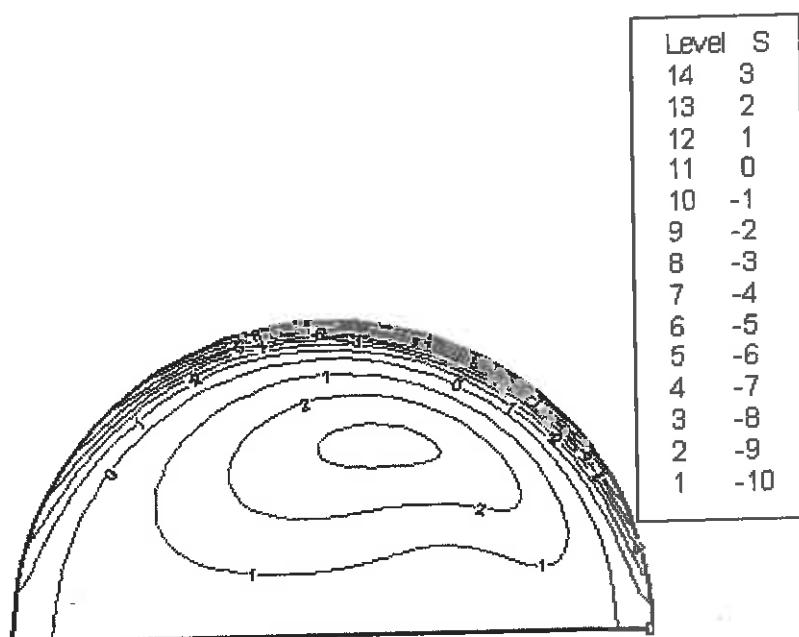
شکل (۲۳-۴) کانتور دما T برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله خمیده



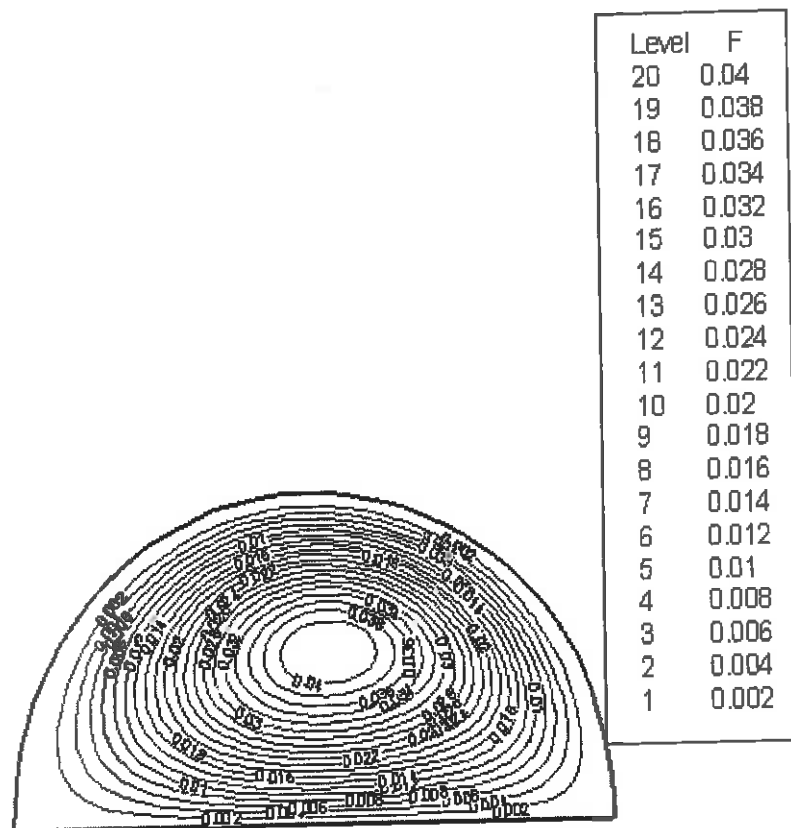
شکل (۲۴-۴) کانتور سرعت در جهت جریان w برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله خمیده



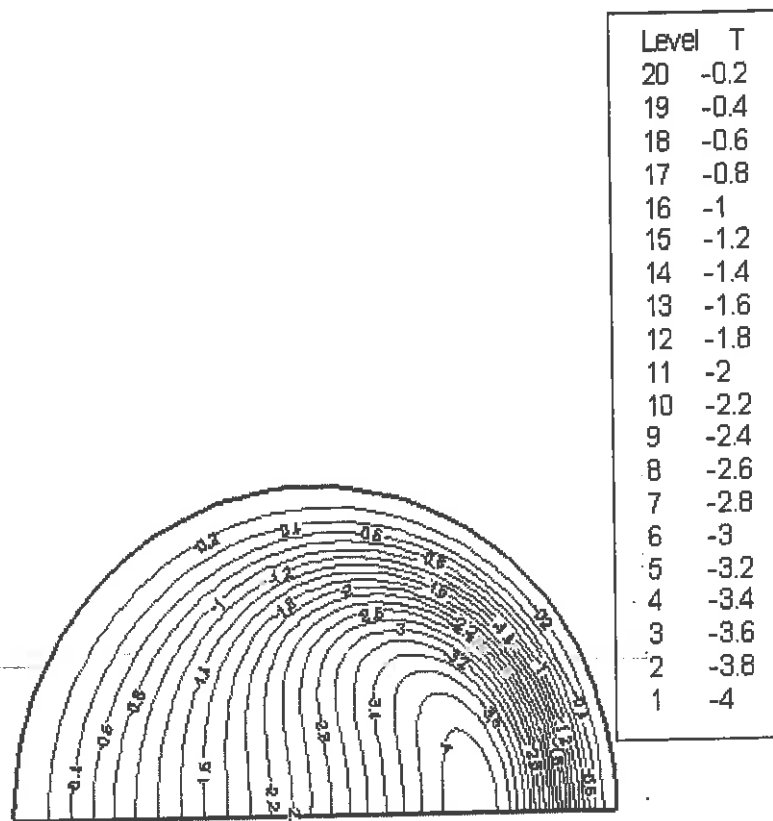
شکل (۴-۲۵) کانتور سرعت سمتی (زاویه ای) در جهت θ ، v_θ برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله خمیده



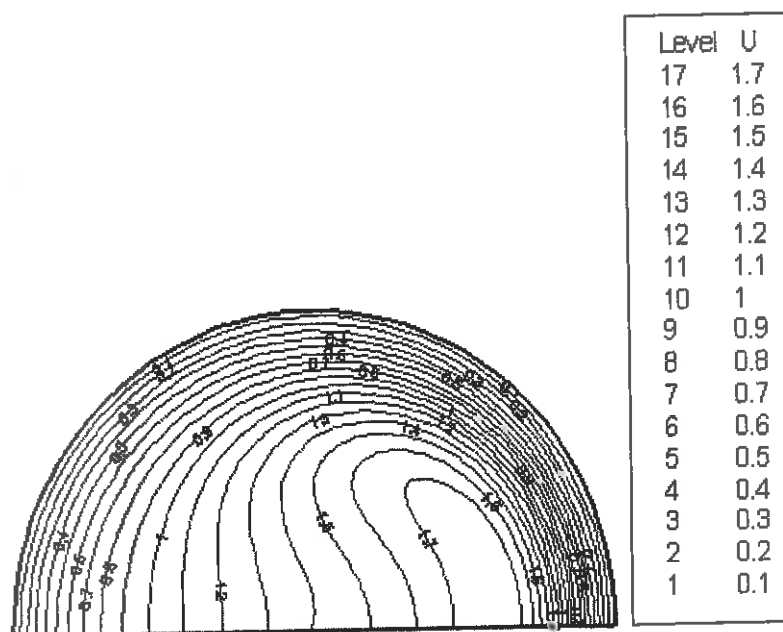
شکل (۴-۲۶) کانتور خطی ورتیسسته ψ برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله خمیده



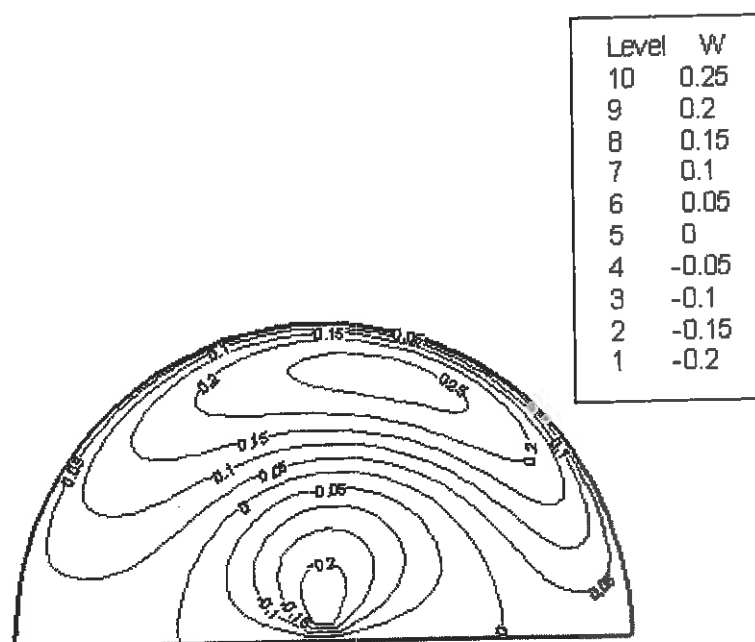
شکل (۴-۲۷) کانتور خطی تابع جریان ψ برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله خمیده



شکل (۴-۲۸) کانتورخطی دما T برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله خمیده

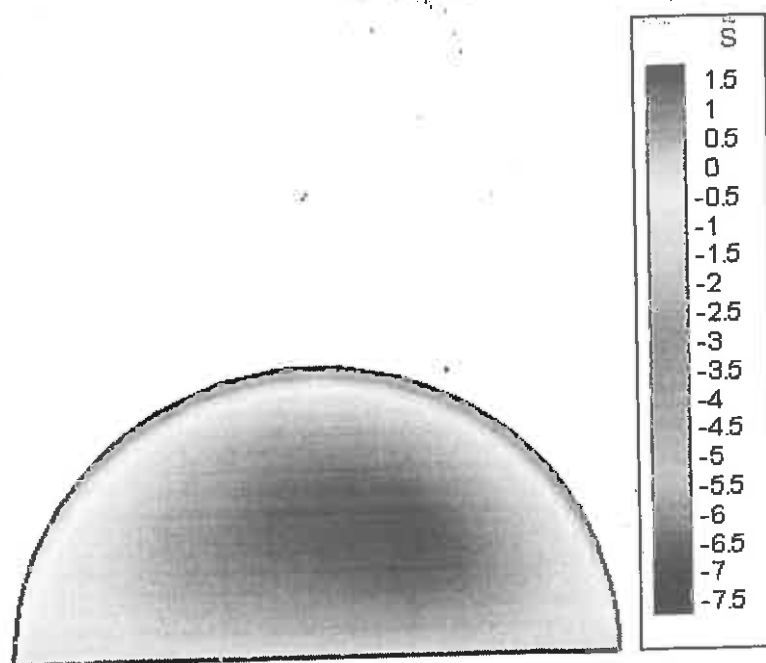


شکل (۴-۲۹) کانتور خطی سرعت در جهت جریان w برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله خمیده

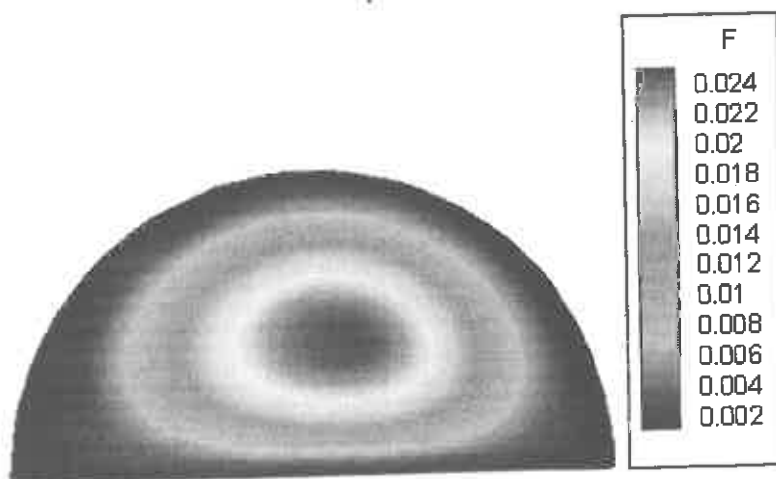


شکل (۴-۳۰) کانتور خطی سرعت سمتی (زاویه ای) در جهت θ ، v_θ برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله خمیده

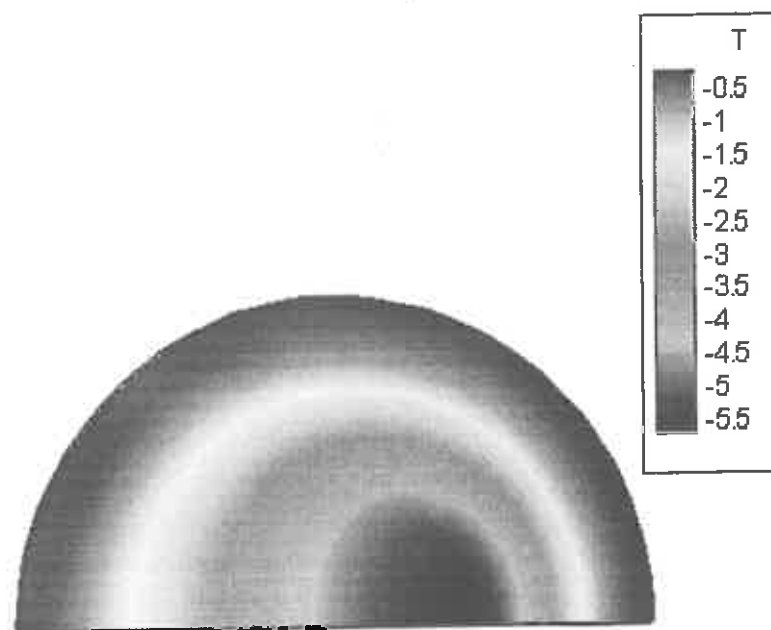
لوله گرم شده



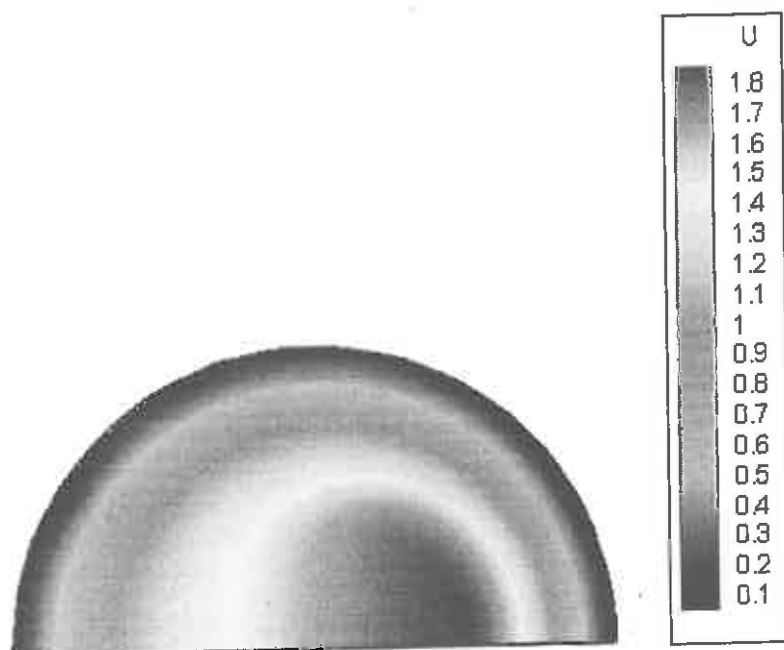
شکل (۴-۳۱) کانتور ورتیسسته ω برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله گرم شده



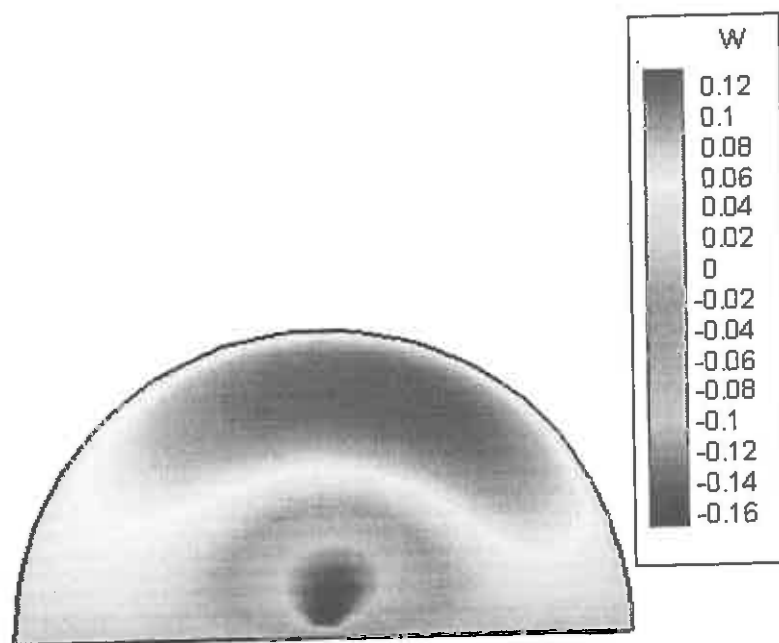
شکل (۴-۳۲) کانتور تابع جریان ψ برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله گرم شده



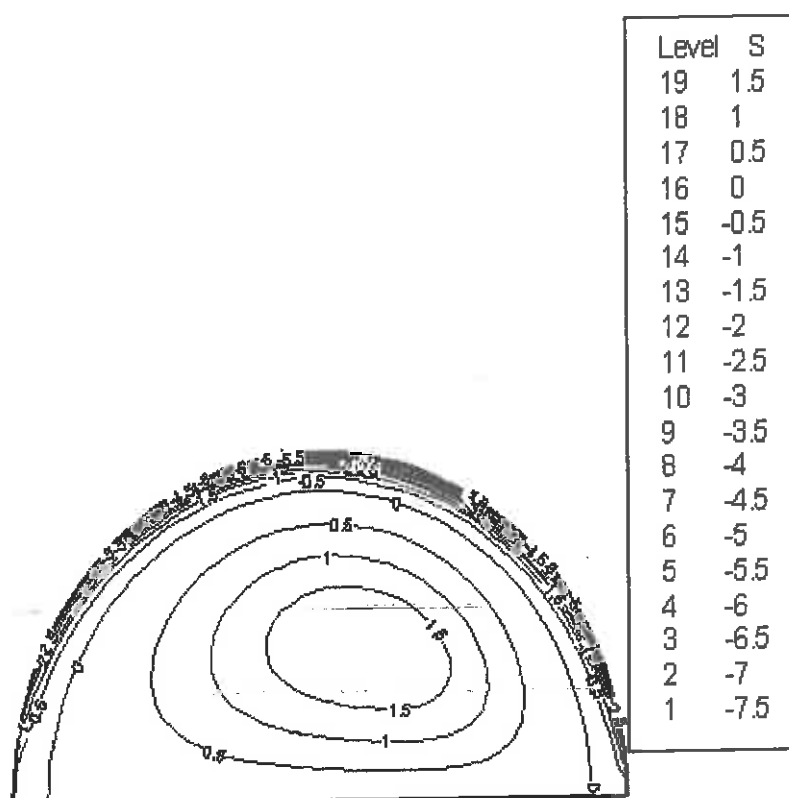
شکل (۴-۳۳) کانتور دما T برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله گرم شده



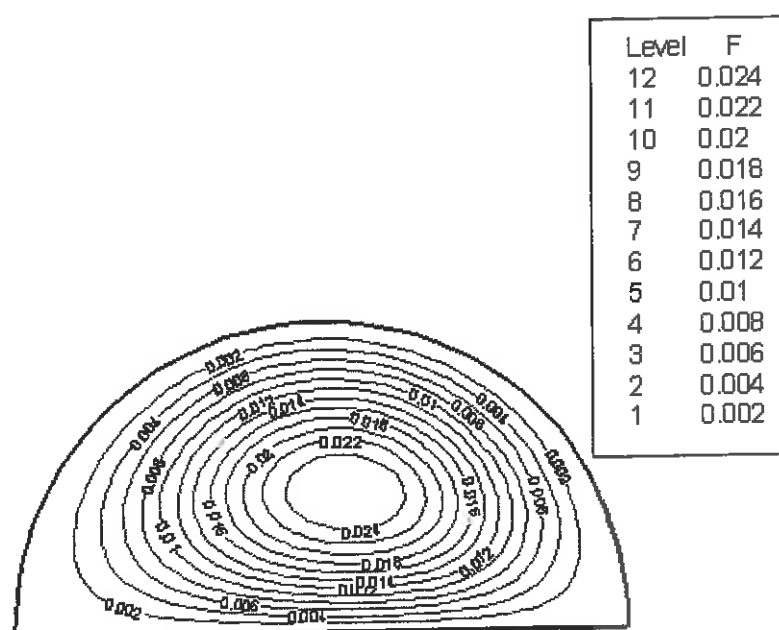
شکل (۴-۳۴) کانتور سرعت در جهت جریان w برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله گرم شده



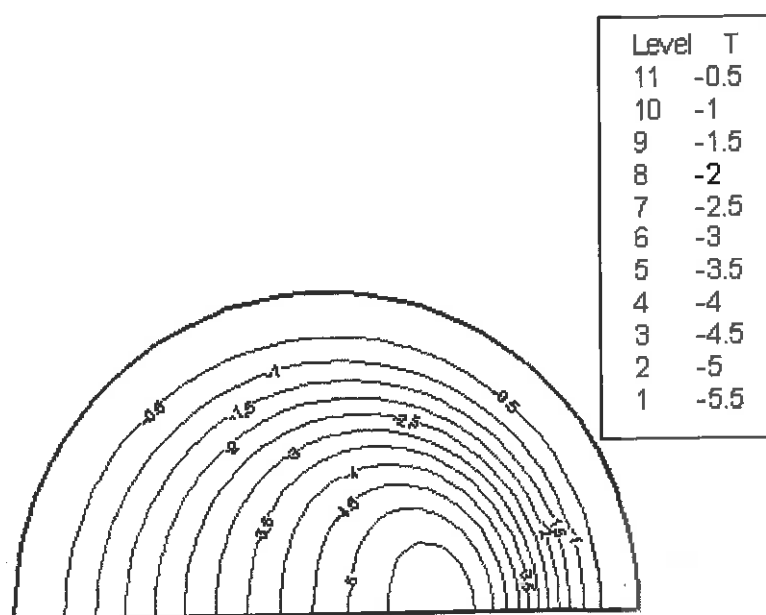
شکل (۴-۳۵) کانتور سرعت سمتی (زاویه ای) در جهت θ ، v_θ برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله گرم شده



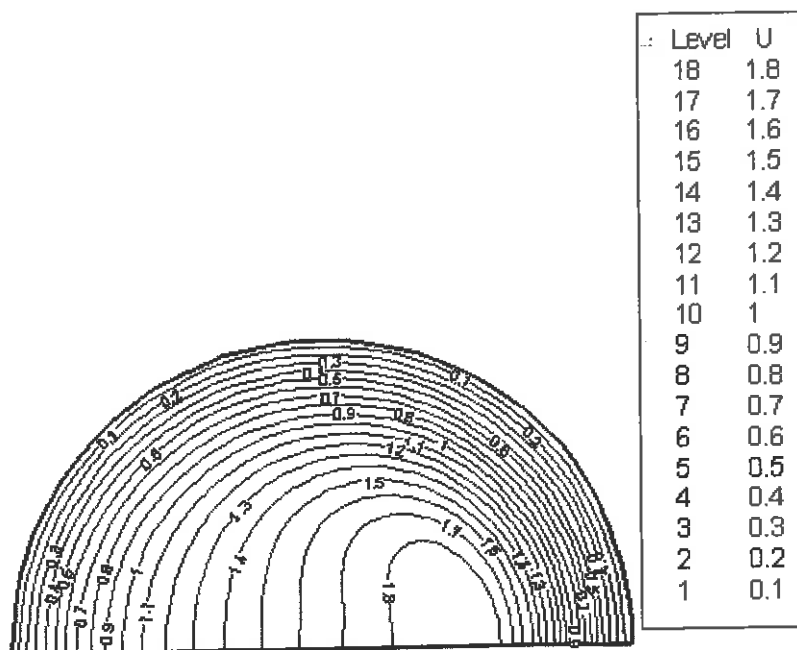
شکل (۴-۳۶) کانتور خطی ورتیسینه ω برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله گرم شده



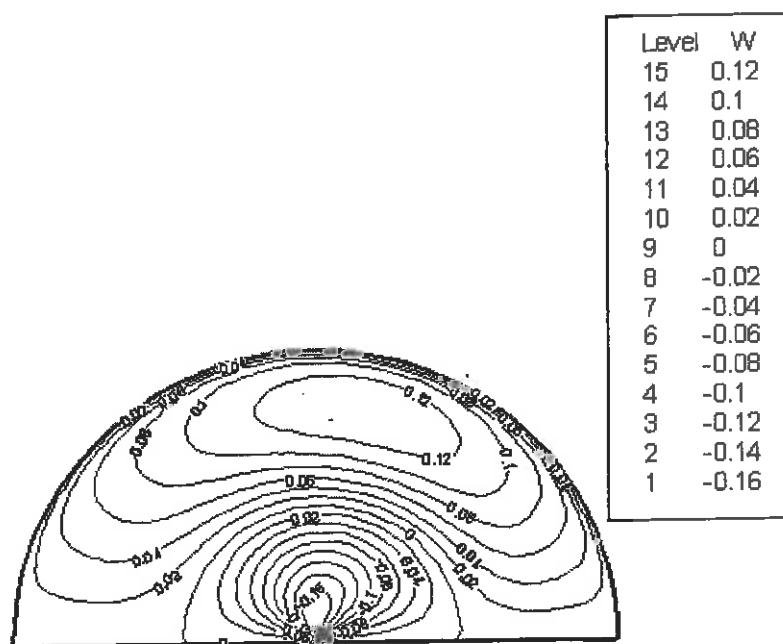
شکل (۴-۳۷) کانتور خطی تابع جریان ψ برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله گرم شده



شکل (۴-۳۸) کانتور خطی دما T برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله گرم شده

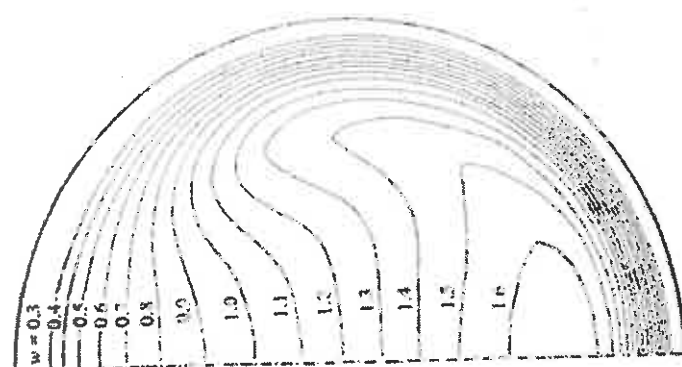


شکل (۴-۳۹) کانتور خطی سرعت در جهت جریان w برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله گرم شده

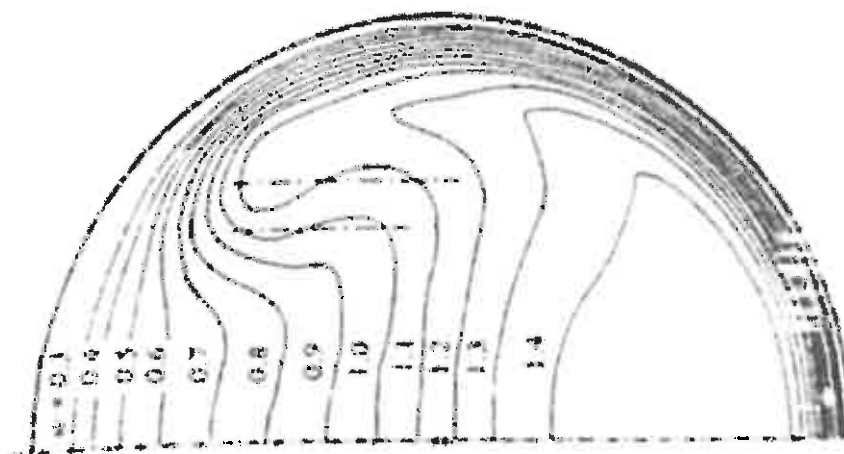


شکل (۴-۴) کانتور خطی سرعت سمتی (زاویه ای) در جهت θ ، v_θ برای $Re=200$ و $R/r=7$ برای لوله گرم شده

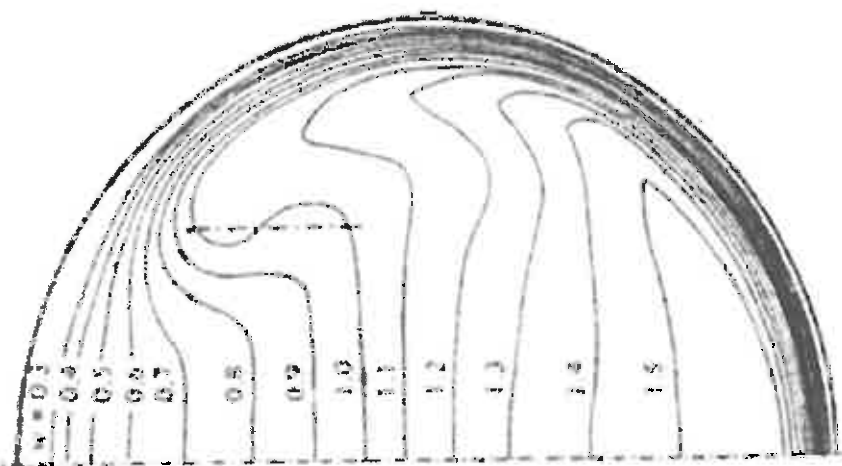
بعنوان مثال همانطور که در شکلهای فوق مشاهده می شود، یک پیک دوگانه برای کانتور سرعت w برای اعداد دین بالا مشاهده می شود. اوستین و سیدر [34] این پیک دوگانه سرعت را در مطالعات خود برای جریان در لوله های خمیده مشاهده کردند. همچنین آگراوال و همکاران [74] این پدیده را در نتایج آزمایشات لیزر-داپلر خود مشاهده کردند. برای اعداد دین پایین همانطور که در شکل دیده می شود برای کانتور سرعت w پروفیل سرعت با پیک دوگانه مشاهده نمی شود که این نتایج با نتایج بدست آمده توسط سوه و برگر [75] مطابقت دارد که در شکلهای زیر نشان داده شده اند.



شکل (۴-۴) کانتور هم سرعت محوری برای جریان توسعه یافته در عدد دین پایین $Re=242, R/r=7$.



(الف)



(ب)

شکل (۴-۴۲) کانتور هم سرعت محوری برای عدد دین بزرگ: (الف) $Re=1263$, $R/r=20$ (ب) $Re=900$, $R/r=7$

- [1] Berger, S. A., Talbot, L., Yao, L. S. 1983. **Flow in curved pipes**. Ann. Rev. Fluid Mech. 15,461-512.
- [2] Abdalla, M. A. 1994. **A four-region, moving-boundary model of a once through, helical-coil steam generator**. Annals of nuclear energy, Vol. 21(9):541-562.
- [3] Rao, B. K. 1994. **Turbulent heat transfer to power-law fluids in helical passages**. International journal of heat and fluid flow, Vol. 15(2):142-148.
- [4] Rabin, Y., E. Korin. 1996. **Thermal analysis of a helical heat exchanger for ground thermal energy storage in arid zones**. International journal of heat and mass transfer, Vol. 39(5):1051-1065.
- [5] Bai, B., L. Guo, Z. Feng., X. Chen. 1999. **Turbulent heat transfer in a horizontally coiled tube**. Heat Transfer-Asian Research, Vol. 28(5):395-403.
- [6] Sandeep, K. P., T. K. Palazoglu. 1999. **Secondary flow in coiled tubes**. Presented at the 1999 ASAE Annual International Meeting. Paper No. 996148. ASAE, 2950 Niles Rd., St. Joseph, MI 49085-9659 USA.
- [7] Genssle, A. and K. Stephan. 2000. **Analysis of the process characteristics of an absorption heat transformer with compact heat exchangers and the mixture TFFE181**. International Journal of Heat Sciences, Vol. 39:30-38.
- [8] Zabielski, L. and A. J. Mestel. 1998a. **Steady flow in a helically symmetrical pipe**. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 370:297-320.
- [9] Zabielski, L. and A. J. Mestel. 1998b. **Unsteady blood flow in a helically symmetrical pipe**. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 59(4):693-705.
- [10] Mihail, R. and S. Straja. 1981. **The behaviour of the helically coiled tubes as a polymerization reactor**. Chemical Engineering Science, Vol. 36:1266-1296.
- [11] Sedahmad, G. H., L. W. Shemilt, and F. Wong. 1985. **Natural convection mass transfer characteristics of rings and helical coils in relation to their use in electrochemical reactor design**. Chemical Engineering Science, Vol.40(7):1109-1114.
- [12] Prasad, B. V. S. S. S., D. H. Das, A. K. Prabhakar. **Pressure drop, heat transfer and performance of a helically coiled tubular exchanger**. Heat Recovery systems & CHP, Vol.9(3):249-256.
- [13] Taherian, H. and P. L. Allen. 1997. **Natural convection from vertical helical coils in a cylindrical enclosure**. Proceedings of the ASME Heat Transfer Division, HTD-Vol.353:135-142.

- [14] Taherian, H. and P. L. Allen. 1998. **Experimental study of natural convection shell-and-coil heat exchangers.** ASME Proceedings of the 7th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, HTD-Vol.357-2.
- [15] Yi, J., Z. H. Liu, J. Wang. 2003. **Heat transfer characteristics of the evaporator section using small helical coiled pipe in a looped heat pipe.** Applied Thermal Engineering, Vol.23:89-99.
- [16] Hameed, M. S. and M. S. Muhammad. 2003. **Mass transfer into liquid falling tubes in straight and helically coiled tubes.** International Journal of Heat and Mass transfer, Vol.46:1715-1724.
- [17] Fernández-Seara, J., J. Sieres, and M. Vazquez. 2003. **Heat and mass transfer analysis of a helical coil rectifier in an ammonia-water absorption system.** International Journal of Thermal Sciences, Vol.42:783-794.
- [18] Grindley, J. H. and A. H. Gibson. 1908. **On the frictional resistance of air through a pipe.** Proc. R. Soc. London Ser. A 80:114-39.
- [19] Williams, G. S., Hubbell, C. W., and G. H. Fenkell. 1902. **Experiments at Detroit, Mich., on the effect of curvature upon the flow of water in pipes,** Trans. ASCE 47:1-196.
- [20] Eustice, J. 1910. **Flow of water in curved pipes.** Proc. R. Soc. Lond. A 84, 107.
- [21] Eustice, J. 1911. **Experiments of streamline motion in curved pipes.** Proc. R. Soc. Lond. A 85, 119.
- [22] Dean, W. R. 1927. **Note on the motion of fluid in a curved pipe.** Phil. Mag. 20, 208.
- [23] Dean, W. R. 1928. **The streamline motion of fluid in a curved pipe.** Phil. Mag. 30, 673.
- [24] White, C. M. 1929. **Streamline flow through curved pipe.** Proc. R. Soc. Lond. A 123, 645.
- [25] Topakoglu, H. C. 1967. **Steady laminar flows of an incompressible fluid in curved pipes.** Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 16(12):1321-1337.
- [26] McConologue, D. J., Srivastava, R. S. 1968. **Motion of fluid in a curved tube.** Proc. R. Soc. Lond. A 307, 37.
- [27] Truesdell, L.C., Adler, R. J. 1970. **Numerical treatment of fully developed laminar flow in helically coiled tubes.** AIChE J. 16, 1010.
- [28] Smith, F. T. 1976. **Fluid flow into a curved pipe.** Proc. R. Soc. Lond. A 351, 71.
- [29] Masliyah, J. H. 1980. **On laminar flow in curved semicircular ducts.** J. Fluid Mech. 99, 469.
- [30] Lyne, W. H. 1970. **Unsteady viscous flow in a curved pipe.** Journal of Fluid mechanics, Vol.45(1):13-31.

- [30] Anwer, M., R. and M. C. So and Y. G. Lai. 1989. **Perturbation by and recovery from bend curvature of fully developed turbulent pipe flow.** Physics of Fluids A Vol.1(8):1387-1397.
- [31] Boersma, B. J. and F. T. M. Nieuwstadt. 1996. **Large eddy simulation of turbulent flow in a curved pipe.** International Journal of Fluid engineering, Transactions of the ASME, Vol. 118(2):248-254.
- [32] Ito, H. 1959. **Friction factors for turbulent flow in curved pipes.** Journal of Basic engineering, Transactions of the ASME, Vol. 81:123-134.
- [33] Nunge, R. J. and T.-S. Lin. 1973. **Laminar flow in strongly curved tubes.** AIChE Journal, Vol. 19(6):1280-12810.
- [34] Austin, L. R., Seader, J. D. 1973. **Fully developed viscous flow in coiled circular pipes.** AIChE J. 19, 85.
- [35] Tarbell, J. M. and M. R. Samuels. 1973. **Momentum and heat transfer in helical coils.** The Chemical Engineering Journal, Vol. 5:117-127.
- [36] Ali, S. 2001. **Pressure drop Correlations for flow through regular helical coil tubes.** Fluid Dynamics Research, Vol. 28:295-310.
- [37] Galier, S., S. Issanchou, P. Moulin, M. J. Clifton, and P. Aptel. 2003. **Electrochemical measurement of velocity gradient at the wall of a helical tube.** AIChE Journal, Vol. 49(8):1972-1979.
- [38] Taylor, G. I. 1929. **The criterion for turbulence in curved pipes.** Proc. R. Soc. Lond. A124, 243.
- [39] White, C. M. 1929. **Streamline flow through curved pipe.** Proc. R. Soc. Lond. A 123, 645.
- [40] Srinivasan, P. S., Nandapurkar, S. S., and Holland, F. A. 1968. **Pressure drop and heat transfer in coils.** Chemical Engineering, Vol. 218:113-9.
- [41] Soeberg, K. 1988. **Viscous flow in curved tubes – I. Velocity profiles.** Chemical Engineering Science, Vol.43(4):855-862.
- [42] Webster, D. R., and J. A. C. Humphrey. 1993. **Experimental observations of flow instability in a helical coil.** Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering, Vol. 115(3):436-443.
- [43] Sreenivasan, K. R. and P. J. Strykowski. 1983. **Stabilization effects in flow through helically coiled pipes.** Experiments in Fluids, Vol. 1:31-36.
- [44] Seban, R. A., E. F. McLaughlin. 1963. **Heat transfer in tube coils with laminar and turbulent flow.** International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 6:387-395.
- [45] Rogers, G. F. C. and Y. R. Mayhew. 1964. **Heat transfer and pressure loss in helically coiled tubes with turbulent flow.** International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 7:1207-1216.

- [46] Mori, Y., W. Nakayama. 1965. **Study on forced convective heat transfer in curved pipes (1st report, laminar region)**. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 8:67-82.
- [47] Kubair, V. and N. R. Kuloor. 1966. **Heat transfer to Newtonian fluids in coiled pipes in laminar flow**. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 9:63-75.
- [48] Berg, R. R. and C. F. Bonilla. 1950. Trans. N. Y. Acad. Sci. Vol. 13:12 (as cited in Kubair and Kuloor. 1966).
- [49] Mori, Y., W. Nakayama. 1967a. **Study on forced convective heat transfer in curved pipes (2nd report, turbulent region)**. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 10:37-59.
- [50] Mori, Y., W. Nakayama. 1967b. **Study on forced convective heat transfer in curved pipes (3rd report, theoretical analysis under the condition of uniform wall temperature and practical formulae)**. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 10:681-695.
- [51] Ozisik, M. N. and H. C. Topakoglu. 1968. **Heat transfer for laminar flow in a curved pipe**. Journal of Heat Transfer, Vol. 90:313-318.
- [52] Kalb, C. E. and J. D. Seader. 1972. **Heat and mass transfer phenomena for viscous flow in curved circular pipe**. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15: 801-817.
- [53] Kalb, C. E. and J. D. Seader. 1974. **Fully developed viscous-flow heat transfer in curved circular tubes with uniform wall temperature**. AIChE Journal, Vol. 20(2): 340-346.
- [54] Yao, L.-S., and S. A. Berger. 1978. **Flow in heated curved pipes**. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 88(2):339-354.
- [55] Janssen, L. A. M., C. J. Hoogendoorn. 1978. **Laminar convective heat transfer in helical coiled tubes**. International journal of heat and mass transfer, Vol. 21:1197-1206.
- [56] Zapryanov, Z., Christov, C. and E. Toshev. 1980. **Fully developed laminar flow and heat transfer in curved tubes**. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 23: 873-880.
- [57] Lee, J. B., H. A. Simon, and J. C. F. Chow. 1985. **Buoyancy in developed laminar curved tube flows**. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 28(2): 631-640.
- [58] Futagami, K. and Y. Aoyama. 1988. **Laminar heat transfer in a helically coiled tube**. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 31(2): 387-396.

- [59] Li, L. J., C. X. Lin, and M. A. Ebadian. 1999. **Turbulent heat transfer to near-critical water in heated curved pipe under the conditions of mixed convection.** International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 42(16): 3147-3158.
- [60] Goering, D. J., J. A. C. Humphrey, and R. Greif. 1997. **The dual influence of curvature and buoyancy in fully developed tube flows.** International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 40(9): 2187-2199.
- [61] Prabhanjan, D. G., G. S. V. Raghavan., T. J. Rennie. 2002. **Comparison of heat transfer rates between a straight tube heat exchanger and a helically coiled heat exchanger.** International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 29(2):185-191.
- [62] Inagaki, Y., Koiso, H., Takumi, H., Ioka, I., and Y. Miyamoto. 1998. **Thermal hydraulic study on a high-temperature gas-gas heat exchanger with helically coiled tube bundles.** Nuclear Engineering and Design, Vol. 185:141-151.
- [63] Sillekens, J. J. M., C. C. M. Rindt and A. A. Van Steenhoven. 1998. **Developing mixed convection in a coiled heat exchanger.** International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 41(1): 61-72.
- [64] Prabhanjan, D. G., T. J. Rennie., G. S. V. Raghavan. 2004. **Natural convective heat transfer from helical coiled tubes.** International Journal of Thermal Sciences, Vol. 43(4):359-365.
- [65] Vandyke, M. 1978. Extended stokes series: laminar flow through a loosely coiled pipe. J. Fluid Mech. 86, 129.
- [66] Barua, S. N. 1963. **On secondary flow in stationary curved pipes.** Q. J. Mech. Appl. Maths 16, 61.
- [67] Ito, H. 1969. **Laminar flow in a curved pipe.** Z. angew. Math. Mech. 49, 653.
- [68] Collins, W. M. and S. C. R. Dennis. 1976. **Viscous eddies near a 90° and a 45° corner through a curved tube of triangular cross section.** Journal of Fluid Mechanics. Vol. 76(3):417-32.
- [69] Greenspan, D. 1973. **Secondary flow in a curved tube.** J. Fluid Mech. 57, 167.
- [70] Collins, W.M., Dennis, S.C.R. 1975. **The steady motion of a viscous fluid in a curved tube.** Q.J.Mech. Apply. Maths 28, 133.
- [71] Patankar, S. V., Pratap V. S. and Spalding, D. B. 1974. **Prediction of laminar flow and heat transfer in helically coiled pipes.** Journal of Fluid Mechanics. Vol. 62, part3: 539-51.
- [72] Keulegan, G. H. and Beji, K. H. 1937. **Pressure losses for fluid flow in curved pipes.** J. Res., Nat. Bur. Standards, Vol. 18:89-114.
- [73] Furrugia, M. 1967. **Characteristics of fluid flow in helical tubes.** Ph.D. Thesis, University of London.

- [74] Agrawal, Y., Talbot, L. and Gong, K. 1978. **Laser anemometer study of flow development in curved circular pipes.** Journal of Fluid Mechanics. 85, 497.
- [75] Soh, W. Y. and Berger, S. A. **Laminar entrance flow in a curved pipe.** Journal of Fluid Mechanics. Vol. 148:109-135.
- [76] Timothy J. Rennie, **Numerical and experimental studies of a double-pipe heat exchanger.** Ph.D. thesis, Department of Bioresource Engineering, McGill University, Montreal, 2004.
- [77] A. J. Ward-Smith, **Internal fluid flow. The fluid dynamics of flow in pipes and ducts.** Lecturer in Mechanical Engineering Brunel University. CLARENDON PRESS . OXFORD 1980.
- [78] Susumu Kotake, Kunio Hijikata, **Numerical Simulations of Heat transfer and Fluid Flow on a Personal Computer.** ELSEVIER, Amsterdam-London-New York-Tokyo 1993.
- [79] J. H. Ferziger, M. Peric, **Computational Methods for Fluid Dynamics,** Second Revised Edition, Springer, Berlin, 1999.
- [80] ورستیگ، ه. ک. مالالاسکرا، ویراتونگ. مقدمه ای بر دینامیک سیالات محاسباتی. مترجم، شجاعی فرد، محمد حسن. نور پور هشتروندی، علیرضا. چاپ اول، مرکز انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۷۹.
- [81] هافمن، ک. ا. چیانگ، اس. تی. دینامیک سیالات محاسباتی برای مهندسان. جلد اول و دوم. مترجم، عظیمیان، احمد. چاپ اول، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۶.

Abstract

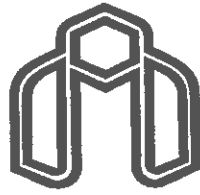
It is well known, when a fluid flows through a stationary curved pipe; a secondary flow is set up. It is basically due to a centrifugal force which arises at curved paths. These weak secondary flows have a significant influence on heat transfer rate and enhance the performance of helical coil heat exchangers.

In the present work a numerical investigation based on Control Volume method is used to solve laminar steady 2D - N.S.Eqs and energy equation simultaneously.

Different Dean numbers were examined, and the effects of Dean number on flow pattern were observed. Two peaks in axial velocity component appear in each half section at high Dean numbers.

Keywords:

Secondary flow, Bend tubes, Fluid Flow, Forced Convection Heat Transfer, Numerical solution



**Faculty of Mechanical Engineering
Shahrood University of Technology**

Thesis for degree of Master of Science in Mechanical Engineering

Title:

**Fluid Flow and Heat Transfer in Bend tubes
(Helical Coil)**

By:

M. Pahlevandokht

Supervisors:

Dr. M. H. Kayhani

Dr. F. Talebi