بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد تبدیل انرژی

حل سه‌بعدی روش پیش‌شرط توانی در بهبود همگرایی شبیه‌سازی عددی جریان‌های پایا و ناپایا عبوری از هیدروفویل‌ها

نگارنده:

جعفر دارا رشخواری

استاد راهنما

دکتر پوریا اکبرزاده

شهریور ۱۴۰۰

صورت‌جلسه دفاع

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای جعفر دارا رشخواری با شماره دانشجویی۹۷۰۶۹۵۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی تحت عنوان **حل سه‌بعدی روش پیش‌شرط توانی در بهبود همگرایی شبیه‌سازی عددی جریان‌های پایا و ناپایا عبوری از هیدروفویل‌ها** که در تاریخ ۱۴۰۰/۰۶/۲۳ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار شد به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۸ ■

ج) درجه خوب: نمره۱۷/۹۹– ۱۶☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹-۱۴ ☐

ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐

نوع تحقیق: **نظری** ■ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنمای اول	دکتر پوریا اکبرزاده	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم	---	---	---
۳- استاد مشاور	---	---	---
۴- استاد داور اول	دکتر علی جباری مقدم	دانشیار	
۵- استاد داور دوم	دکتر رامین ذاکری	استادیار	
۶- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر علی سررشته‌داری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی گردویی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

۱۴۰۰/۷/۶

تقدیم اثر

تقدیم با بوسه بر دستان پدرم:

به او که نمی‌دانم از بزرگی‌اش بگویم یا مردانگی سخاوت، سکوت، مهربانی و.....

پدرم راه تمام زندگی است

پدرم دل‌خوشی همیشگی است

تقدیم به مادر عزیزتر از جانم:

مادرم هستی من ز هستی توست

غمگسار جاودانی مادر است

چشم سار مهربانی مادر است

تشکر و قدردانی

برحسب وظیفه و از باب ((من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق)) از تمامی اساتید بزرگواری که مرا در تحصیل علم و معرفت یاری کرده‌اند، از استاد ارجمند دکتر پوریا اکبرزاده که با حسن خلق و فروتنی زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را برعهده گرفتند.

تعهدنامه

این‌جانب **جعفر دارا رشخواری** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **تبدیل انرژی** دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه **حل سه‌بعدی روش پیش‌شرط توانی در بهبود همگرایی شبیه‌سازی عددی جریان‌های پایا و ناپایا عبوری از هیدروفویل‌ها** تحت راهنمایی **دکتر پوریا اکبرزاده** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط این‌جانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای ، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، از روش پیش‌شرط توسعه‌یافته به نام روش پیش‌شرط توانی، برای تحلیل و بررسی جریان‌های آرام پایا و ناپایا با زاویه حمله ثابت عبوری از هیدروفویل‌ها به‌صورت سه‌بعدی استفاده شده است. پژوهشگران به جریان‌های پایا و ناپایا در زمینه‌های گوناگون توجه خاص و ویژه‌ای دارند. جریان با عدد رینولدز پایین به‌دلیل کاربردهای خاص مانند وسایل بدون سرنشین و ربات‌ها در ابعاد بسیار کوچک توسط محققان مطالعه می‌شود. همچنین تحقیقات تجربی و عددی فراوانی روی دینامیک گردابه ها، بررسی هیدروفویل‌ها و.... انجام گرفته است. در این مطالعه با تغییر کمیت مشتق زمانی معادلات حاکم، معادلات سه‌بعدی ناویر-استوکس اصلاح می‌گردد. با کمک میدان سرعت و استفاده از رابطه توانی، ماتریس پیش‌شرط اصلاح شده و برای انتگرال‌گیری معادلات حاکم از روش عددی حجم محدود جیمسون از نوع مرکزیت سلول استفاده شده است. جریان ناپایا با کمک الگوریتم دوزمانه حل می‌شود، انتگرال‌گیری در زمان با کمک روش انتگرال‌گیری زمانی رانج-کوتا صریح چهار مرحله‌ای انجام می‌گیرد. دستگاه معادلات مسئله که شامل معادلات پیوستگی و ممنتوم در دستگاه مختصات دکارتی به‌صورت سه‌بعدی می‌باشد، با استفاده از الگوریتمی در نرم‌افزار C++ حل گردیده است. جریان پایا و ناپایا تراکم‌ناپذیر سه‌بعدی عبوری از هیدروفویل NACA 0012 با اعداد رینولدز و زاویه حمله مختلف حل شده است. نتایج حاصل با دقت خوبی با مطالعات دیگر پژوهشگران همخوانی و تطابق دارد و از نتایج مشاهده می‌شود که روش پیش‌شرط توانی نرخ همگرایی بالایی دارد و زمان محاسبات در مقایسه با روش‌های دیگر ۲۰ تا ۵۰ درصد کاهش می‌دهد.

کلمات کلیدی: روش پیش‌شرط‌سازی توانی، جریان پایا، جریان ناپایا، حجم محدود، حل دوزمانه.

فهرست مطالب

فهرست اشکال ج

فهرست علائم ه

فصل۱ : کلیات تحقیق ۱

۱-۱ مقدمه ۲

۱-۲ پیشینه پژوهش ۴

۱-۳ اهداف پایان‌نامه ۹

۱-۳-۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه ۱۰

فصل۲ :روش پیش‌شرط سازی در جریان تراکم ناپذیر ۱۱

۲-۱ تراکم‌پذیری مصنوعی ۱۲

۲-۲ روش پیش‌شرط ترکل ۱۵

۲-۳ روش پیش‌شرط مالان ۱۶

۲-۴ روش پیش‌شرط توانی ۱۷

۲-۵ بررسی و مقایسه روش‌ها ۱۸

فصل۳ : جداسازی عددی جریان ناپایا و پایا با استفاده از شیوه پیش‌شرط توانی ۲۱

۳-۱ پیش گفتار ۲۲

۳-۲ معادلات سه‌بعدی پیش‌شرط ۲۲

۳-۳ روش حجم محدود جیمسون ۲۵

۳-۳-۱ محاسبات جریان ناپایا ۲۶

۳-۳-۲ محاسبات جریان پایا ۲۶

۳-۳-۳ جداسازی معادلات حاکم ۲۶

۳-۳-۴ انتگرال‌گیری در زمان ۲۹

۳-۳-۵ جداسازی حسگرهای فشاری و سرعت ۳۰

۳-۳-۶ شرایط مرزی ۳۱

۳-۳-۶-۱ شرط مرزی دیوار ۳۱

۳-۳-۶-۲ شرط مرزی ورودی ۳۱

۳-۳-۶-۳ شرط مرزی خروجی ۳۲

۳-۳-۶-۴ شرط مرزی تناوبی (پریودیک) ۳۳

فصل۴ : نتایج **۳۵**
۴-۱ مقدمه ۳۶
۴-۲ جریان پایا ۳۶
۴-۲-۱ جریان پایا با زاویه حمله صفر درجه ۳۶
۴-۲-۱-۱ شبکه‌بندی میدان حل ۳۶
۴-۲-۱-۲ نتایج عددی و اعتبارسنجی ۳۸
۴-۲-۱-۳ استقلال حل از شبکه محاسباتی ۳۹
۴-۲-۱-۴ بررسی شرط تناوبی (پریودیک) ۴۰
۴-۲-۱-۵ بررسی روش پیش‌شرط توانی در بهبود همگرایی ۴۱
۴-۲-۲ جریان پایا با زاویه حمله ده درجه ۴۲
۴-۲-۲-۱ شبکه‌بندی میدان حل ۴۲
۴-۲-۲-۲ نتایج عددی و اعتبارسنجی ۴۲
۴-۲-۲-۳ بررسی شرط تناوبی (پریودیک) ۴۳
۴-۲-۲-۴ بررسی روش پیش‌شرط توانی در بهبود همگرایی ۴۴
۴-۳ جریان ناپایا ۴۵
۴-۳-۱ شبکه‌بندی میدان حل ۴۵
۴-۳-۲ نتایج عددی و اعتبار سنجی ۴۷
۴-۳-۳ استقلال حل از شبکه محاسباتی ۵۳
۴-۴ جریان پایا با تغییر زاویه در راستا **z** ۵۴
۴-۴-۱ شبکه‌بندی میدان حل ۵۴
۴-۴-۲ نتایج عددی و اعتبار سنجی ۵۶
۴-۴-۳ بررسی روش پیش‌شرط توانی در بهبود همگرایی ۵۸
فصل۵ : نتیجه‌گیری و پیشنهادها **۶۱**
۵-۱ بحث و نتیجه‌گیری ۶۲
۵-۲ پیشنهادها ۶۴
مراجع **۶۵**

فهرست اشکال

شکل ۳-۱ نمایش مرزهای استفاده شده ۳۱
شکل ۴-۱ نمای دور از شبکه‌بندی پیرامون هیدروفویل NACA 0012 ..... ۳۷
شکل ۴-۲ نمای نزدیک از شبکه‌بندی پیرامون هیدروفویل NACA 0012 ..... ۳۷
شکل ۴-۳ مقایسه ضریب فشار مطالعه حاضر با مرجع [۴۸] ۳۸
شکل ۴-۴ مقایسه شبکه‌بندی‌های مختلف با مرجع [۴۸] پیرامون هیدروفویل NACA 0012 ..... ۳۹
شکل ۴-۵ بررسی تعداد گره در راستا z پیرامون هیدروفویل NACA 0012 ..... ۴۰
شکل ۴-۶ مقایسه روش‌های SAC و روش SPM با روش پیش‌شرط توانی با توان‌های مختلف پیرامون هیدروفویل NACA 0012 ..... ۴۱
شکل ۴-۷ مقایسه ضریب فشار پیرامون هیدروفویل NACA 0012 با مرجع [۴۸] ۴۲
شکل ۴-۸ بررسی تعداد گره در راستا z پیرامون هیدروفویل NACA 0012 ..... ۴۳
شکل ۴-۹ مقایسه روش‌های SAC و روش SPM با روش پیش‌شرط توانی با توان‌های مختلف برای هیدروفویل NACA 0012 ..... ۴۴
شکل ۴-۱۱ نمای نزدیک از شبکه‌بندی پیرامون هیدروفویل NACA 0012 ..... ۴۶
شکل ۴-۱۲ تغییرات سرعت عمودی v در مکان x = 1.1 , y = 0 , z = 0 پشت هیدروفویل NACA 0012 برحسب زمان در Re = 800 و زاویه بیست درجه در مقایسه با مرجع [۸] ۴۷
شکل ۴-۱۳ تغییرات سرعت عمودی v در مکان x = 3.0 , y = 0 , z = 0 پشت هیدروفویل NACA 0012 برحسب زمان در Re = 800 و زاویه بیست درجه در مقایسه با مرجع [۸] ۴۸
شکل ۴-۱۴ تغییرات سرعت عمودی v در مکان x = 2.0 , y = 0 , z = 0 پشت هیدروفویل NACA 0012 برحسب زمان در Re = 800 و زاویه بیست درجه در مقایسه با مرجع[۷] ۴۸
شکل ۴-۱۵ مقایسه خطوط هم‌تراز سرعت افقی u با نتایج حاصل از مرجع [۸] در Re = 800 و زاویه حمله بیست درجه برای هیدروفویل NACA 0012 در زمان ۵ ثانیه ۴۹
شکل ۴-۱۶ مقایسه خطوط هم‌تراز سرعت افقی v با نتایج حاصل از مرجع [۸] در Re = 800 و زاویه حمله بیست درجه برای هیدروفویل NACA 0012 در زمان ۵ ثانیه ۵۰
شکل ۴-۱۷ ضریب برا بر روی هیدروفویل NACA 0012 برحسب زمان در Re = 800 با زاویه حمله ۲۰ درجه در مقایسه با شاتالوو [۷] ۵۱
شکل ۴-۱۸ توزیع ضریب پسا بر روی هیدروفویل NACA 0012 برحسب زمان در Re = 800 با زاویه حمله ۲۰ درجه ۵۱
شکل ۴-۱۹ زمان CPU در هر گام زمانی برای هیدروفویل NACA 0012 در Re = 800 با زاویه حمله ۲۰ درجه ۵۲

شکل ۴-۲۰ تعداد تکرارها برای هیدروفویل NACA 0012 در Re = 800 با زاویه حمله ۲۰ درجه ۵۳
۴-۳-۳ استقلال حل از شبکه محاسباتی ۵۳
شکل ۴-۲۱ بررسی شبکه بندی های مختلف پیرامون هیدروفیل NACA 0012 ۵۴
شکل ۴-۲۲ نمای دور از شبکه‌بندی پیرامون هیدروفویل NACA 0012 ۵۵
شکل ۴-۲۳ نمای نزدیک از شبکه‌بندی پیرامون هیدروفویل NACA 0012 ۵۵
شکل ۴-۲۴ مقایسه سرعت u پیرامون هیدروفویل NACA 0012 در Re = 500 با زاویه حمله $\boldsymbol{\alpha = 10^{\circ}}$ و $\boldsymbol{\theta = 45^{\circ}}$ در چهار برش نشان داده شده ۵۶
شکل ۴-۲۵ مقایسه سرعت v پیرامون هیدروفویل NACA 0012 در Re = 500 با زاویه حمله $\boldsymbol{\alpha = 10^{\circ}}$ و $\boldsymbol{\theta = 45^{\circ}}$ در چهار برش نشان داده شده ۵۷
شکل ۴-۲۶ نمودار توزیع ضریب پسا هیدروفویل NACA 0012 ۵۸
شکل ۴-۲۷ مقایسه روش‌های SAC و روش SPM با روش پیش‌شرط توانی با توان‌های مختلف برای هیدروفویل NACA 0012 ۵۸

فهرست علائم

U	سرعت جریان آزاد	m/s
u	سرعت در جهت x	m/s
u_∞	سرعت جریان آزاد در جهت x	m/s
v	سرعت در جهت y	m/s
v_∞	سرعت جریان آزاد در جهتy	m/s
w	سرعت در جهت z	m/s
w_∞	سرعت جریان آزاد در جهتz	m/s
P	فشار	Kg/ms^2
P_∞	فشار جریان آزاد	Kg/ms^2
t	زمان	s
Re	عدد رینولدز	
N	تعداد سلول‌های فضای محاسباتی	
L	طول	m
S	بردار سطح	s
μ	لزجت دینامیکی	Kg/ms
ρ	چگالی	Kg/m^3
τ	تنش	Kg/s^2m^1
λ	مقدار ویژه	
β	ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی	
σ	ضریب پیش‌شرط	
ε_2	ضریب لزجت مصنوعی	
ε_4	ضریب اتلاف مصنوعی	
Γ^{-1}	ماتریس پیش‌شرط	
A_p	حسگر فشار محلی	
A_u	حسگر سرعت محلی	

فصل ۱ : کلیات تحقیق

۱-۱ مقدمه

شبیه‌سازی عددی جریان‌های تراکم‌ناپذیر[1] یک مبحث مهم در دینامیک سیالات محاسباتی[2] می‌باشد. زیرا بسیاری از جریان‌های واقعی در هیدرودینامیک و آیرودینامیک با سرعت کم مانند جریان حول هیدروفویل یا جریان پیرامون بال هنگام فرود در دسته جریان‌های تراکم‌ناپذیر قرار می‌گیرند. حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر کاربردهای زیادی دارند، مانند طراحی مبدل‌های حرارتی، خنک‌کاری مجموعه‌های الکترونیک و دستگاه‌های بیوپزشکی. حل میدان جریان تراکم‌ناپذیر پیچیده بوده و برای حل آن نمی‌توان از روش‌های عددی که برای حل جریان تراکم‌پذیر موثرند، استفاده کرد. به‌دلیل این‌که در جریان‌های تراکم‌ناپذیر چگالی ثابت است و نسبت به دیگر کمیت‌ها مانند سرعت با نرخ تغییرات کمی همراه است، مشکلاتی در حل ایجاد می‌گردد. این اختلاف در تغییر مجهولات باعث کاهش سرعت همگرایی حل می‌شود اما در جریان تراکم‌پذیر به دلیل حضور مشتق چگالی نسبت به زمان در معادله پیوستگی، این عیب وجود ندارد.

امروزه شبیه‌سازی عددی جریان‌های پایا و ناپایا به‌دلیل محدودیت‌های موجود در انجام آزمون‌های آزمایشگاهی از لحاظ هزینه و عدم امکان توسعه بر تمام نمونه‌های لازم، مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. این نوع جریان‌ها کاربردهای زیادی دارند که به‌عنوان مثال می‌توان به شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ[3]، برهم‌کنش قطعات ثابت و چرخان در توربوماشین‌ها، موتورهای پیستونی، آیرودینامیک بالگرد، شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان‌های آشفته[4] و... اشاره کرد [۱]. حرکت جسم و ایجاد نواحی جدایش و ریزش گردابه به میدان حل باعث تشکیل جریان ناپایا می‌شود، که روی مؤلفه‌های آیرودینامیکی- هیدرودینامیکی اجسام تأثیرگذار است. نرخ تغییرات این مؤلفه‌ها نسبت به زمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد.

[1] Incompressible Flows
[2] Computational Fluid Dynamic
[3] Large Eddy Simulations
[4] Direct Numerical Simulations (DNS)

برای حل معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر، می‌توان از روش‌های مانند روش تابع چرخش جریان[1] و روش متغیرهای اولیه[2] استفاده کرد. روش تابع چرخش جریان از تعریف تابع چرخش و تابع جریان که تنها به مؤلفه‌های سرعت بستگی دارد، ایجاد می‌گردد. با استفاده از این تعریف این توابع در معادلات حاکم جایگذاری می‌شوند. معادله انتقال چرخش با معادلات ممنتوم و تابع جریان با متغیرهای معادله پیوستگی جابه‌جا می‌گردد. بدین‌صورت، فشار از مجهول‌های معادله حذف شده و تابع چرخش و تابع جریان با متغیرهای وابسته در دستگاه معادلات جایگذاری می‌شود. از حل این معادلات و یافتن تابع جریان، میدان سرعت و فشار محاسبه می‌گردد. در این روش تعداد معادلات مورد نیاز برای حل کم است، بنابراین باعث کاهش زمان محاسبات می‌گردد. این روش برای حل جریان‌های پایا و ناپایا کاربرد دارد. حل جریان‌های سه‌بعدی با استفاده از روش تابع جریان بسیار پیچیده است و دلیل آن هم این است که تابع جریان در جریان‌های سه‌بعدی قابل تعریف نیست. روش متغیرهای اولیه، برعکس روش تابع جریان به‌طور مستقیم به حل میدان فشار و سرعت می‌پردازد. در این پایان‌نامه، معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر براساس روش متغیرهای اولیه حل می‌شوند.

حل جریان‌های پایا و ناپایا تراکم‌ناپذیر روش‌های زیادی دارد. تمامی روش‌ها به منظور افزایش نرخ همگرایی و دقت حل مسئله ایجاد شده‌اند. زیرا افزایش نرخ همگرایی، بسیاری از هزینه‌ها مانند زمان را کاهش می‌دهد. پژوهشگران زیادی در این حوزه مطالعه و بررسی انجام دادند که منجر به بروز و پیدایش روش پیش‌شرط گردید. طبق نتایج پژوهشگران، روش پیش‌شرط سرعت همگرایی را به مقدار قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد.

[1] Vorticity Stream Function
[2] Primitive Varibles

۲-۱ پیشینه پژوهش

برای شبیه‌سازی عددی جریان ناپایا از الگوریتم دوزمانه استفاده می‌شود، که این الگوریتم یک عبارت مشتق زمان حقیقی به‌صورت ضمنی به دستگاه معادلات حاکم اضافه می‌کند. با اضافه کردن این عبارت به دستگاه معادلات حاکم، دو حلقه تکرار خارجی (مربوط به زمان حقیقی) و داخلی (مربوط به زمان مجازی) به وجود می‌آید. با همگرایی حل در زمان مجازی، معادله در زمان حقیقی نیز حل می‌شود. نخستین بار جمیسون [۲] در سال ۱۹۹۱ از این روش بهره برد. این روش در مقایسه با روش‌های دیگر در انتخاب گام زمانی محدود نیست. گام زمانی تنها برپایه فیزیک و نوع جریان تعیین می‌گردد. آرنون و همکاران [۳] اثبات کردند زمانی که گام زمان حقیقی هم‌مرتبه یا دارای مرتبه کمتر از گام زمان مجازی باشد، روش پیشنهاد شده، ناپایدار می‌شود.

ملسون و همکاران [۴] با پیدا کردن عامل پدیدآورنده ناپایداری، الگوریتم دو زمانی را به طریقی اصلاح کردند که با هر گام زمانی پایدار است. بعد از ملسون، پژوهشگران دیگری مطالعاتی برای بهبود و افزایش سرعت همگرایی این الگوریتم انجام دادند [۵]. هسو [۶] در سال ۲۰۰۴ در رساله دکتری خود با ترکیب روش‌های ضمنی وصریح، طرحی دو مرحله‌ای پیشنهاد داد که دارای دقت مرتبه دو می‌باشد که این روش تعداد تکرار مورد نیاز برای همگرایی را کاهش داد. در سال ۲۰۰۶ شاتالو [۷] در رساله دکتری خود روش‌هایی همچون تفاضل پادباسو با دقت مرتبه‌ی سه[۱] و روش تکراری فاکتورگیری تقریبی[۲] در بهبود سرعت همگرایی مورد بررسی قرار داد. حافظ و همکاران [۸] در سال ۲۰۰۷ با استفاده از برهم کنش لزج-غیرلزج[۳] و کوپل کردن تابع پتانسیل و محاسبات لایه‌مرزی به روش جدیدی دست پیدا کردند. آن‌ها با کمک از تجزیه سرعت از نوع هلموتز[۴] و قانون تصحیح شده برنولی[۵] برای کمیت فشار فرمول‌بندی جدیدی به‌دست آوردند. همچنین شبیه‌سازی عددی جریان‌های تراکم‌ناپذیر آرام پایا و ناپایا

[1] Third Order Upwind Difference
[2] Approximate Factorization Iterative Mehtod
[3] Viscous _Inviscid Interaction Procedure
[4] Helmholtz Type Velocity Decompostion
[5] Modified Bernouli's Law

با کمک از این روش انجام دادند. این روش پیشنهادی برخلاف روش تابع چرخش جریان، امکان توسعه و حل جریان‌های سه‌بعدی را دارا می‌باشد.

جریان‌های پایا و ناپایا نیز به‌طور عمده در زمینه‌های مربوط به آیرودینامیک و هیدرودینامیک کاربردی مورد پژوهش و بررسی قرار گرفته است. مطالعات تجربی و عددی زیادی حول دینامیک گردابه‌ها، استفاده از هیدروفویل و ایرفویل‌های نوسانی در کنترل جریان و... انجام شده است [۹]. جریان ناپایا در موضوعات مانند آیرودینامیک بالگرد، قطعات چرخان در توربوماشین‌ها، جریان پره‌های توربین و موارد زیادی مورد توجه قرارگرفته است [۱۰]. امروزه وسایل نقلیه هوایی میکرو[1] به‌دلیل ظرفیت بالا خود در زمینه‌های نظامی و غیرنظامی مورد توجه قرارگرفته‌اند [۱۱، ۱۲، ۱۳]. این وسایل به‌دلیل ابعاد و سرعت بسیار کمتر و قرار داشتن در دسته جریان‌های با عدد رینولدز پایین، خواص جریان متمایزی نسبت به جریان با اعداد رینولدز بالا دارد. برای دست یافتن به کارایی آیرودینامیکی برتر و قدرت مانور زیاد، راه‌کارهای مناسب و مختلف از کنترل جریان مورد نیاز است که این نشان‌دهنده نیاز به شبیه‌سازی عددی جریان‌های ناپایا می‌باشد [۱۴].

الگوریتم‌های پیمایش زمانی در حل و شبیه‌سازی عددی جریان‌های تراکم‌پذیر دارای اهمیت هستند. یکی از مزیت‌های اصلی این الگوریتم‌ها را که می‌توان برشمرد، این است که در جریان‌های لزج و غیرلزج با هر نوع روش جداسازی قابلیت استفاده دارند. به‌طوری که در چند دهه اخیر، مورد توجه پژوهشگران برای حل جریان‌های گذر صوتی و فراصوتی بوده است. در جریان‌های تراکم‌ناپذیر پایا چون دستگاه معادلات هذلولوی کامل نیست و فشار در معادله پیوستگی وجود ندارد، روش‌های پیمایشی را نمی‌توان به‌کار برد. در معادلات جریان تراکم‌ناپذیر ناپایا که دستگاه معادلات به‌دلیل وجود جملات وابسته به زمان از نوع سهموی است، می‌توان از شیوه‌های پیمایش استفاده کرد اما از پایداری کمتری بهره‌مند هستند. هنگامی که سرعت متوسط جریان از سرعت صوت در سیال خیلی کمتر باشد، جملات

[1] Micro Air Vehicles

جابه‌جایی[1] معادلات تابع زمان تمایل دارند که حالت قبلی خود را حفظ کنند یا عبارتی معادلات لخت شدند. به‌دلیل غالب شدن سرعت امواج صوتی لازم است گام زمانی را خیلی کوچک انتخاب شود که این امر، نرخ همگرایی را کاهش می‌دهد. همچنین وجود جملات پخش[2] در معادلات، زمان همگرایی را افزایش می‌دهد. شیوه اصلاح این مشکل هنگامی‌که اثر جملات پخش ناچیز (مانند جملات اویلر)، کوچک (مانند جریان با عدد رینولدز زیاد) و غالب (مانند جریان با عدد رینولدز پایین) باشد، قطعا متفاوت است. به این خاطر روش پیش‌شرط[3] برای حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر یا جریان تراکم‌پذیر با عدد ماخ خیلی کم، با کمک الگوریتم‌های پیمایش زمانی بسط پیدا کرد.

شروع استفاده از روش‌های پیش‌شرط را می‌توان برای بار نخست به روش کورین [۱۵] در سال ۱۹۶۷ برای حل معادلات تراکم‌ناپذیر به‌کاربرد، منتسب کرد. در جریان‌های تراکم‌ناپذیر، جملات مربوط به زمان حذف می‌شوند و متغیر فشار هم در معادله پیوستگی آشکار نمی‌شود، در واقع رابطه این معادله و معادلات ممنتوم فقط از سوی متغیرهای سرعت ایجاد می‌شود. شیوه حل این نوع معادلات حدس زدن میدان فشار و حل کردن میدان سرعت با کمک معادلات ممنتوم می‌باشد. سپس برای بررسی درست بودن میدان سرعت به‌دست آمده، از معادلات پیوستگی استفاده می‌شود. این شیوه برای اولین بار به‌وسیله پتنکار [۱۶] در سال ۱۹۸۰ استفاده شد و به نام روش فشار-مبنا[4] معرفی گردید. اما گذر زمان مشخص کرد که این روش‌ها زمان‌بر و از جهت محاسبات غیراقتصادی می‌باشند.

از نظر حل عددی، اختلاف اصلی معادلات جریان تراکم‌پذیر و جریان‌های تراکم‌ناپذیر در خصوصیات ریاضی آن‌ها می‌باشد. معادلات جریان تراکم‌پذیر از نوع معادلات هذلولوی هستند پس دارای مشخصه‌های حقیقی هستند و امواج فشار با سرعت مشخص حرکت می‌کنند. معادلات جریان تراکم‌ناپذیر تلفیقی از خصوصیات معادلات سهموی و بیضوی هستند که این تفاوت فقط متأثر از نبود جمله مشتق زمانی در معادله پیوستگی است. برای برطرف کردن این عیب براساس پیشنهاد کورین

[1] Convective Terms
[2] Diffusion Terms
[3] Perconditioning Mehtod
[4] Pressure Based

[۱۵] یک گزاره غیر فیزیکی تابع زمان به معادله پیوستگی اضافه می‌شود که به همراه معادلات ممنتوم، یک دستگاه معادلات موقت هذلولوی را ایجاد می‌کند. این گزاره غیر فیزیکی مشتق زمانی فشار است که با توان دوم سرعت صوت مجازی[1] نرمال شده است. در واقع کورین یک پیوند مجازی بین فشار و چگالی سیال تراکم‌ناپذیر ایجاد کرد و مقدار چگالی در معادله پیوستگی را با گزاره مجازی مشتق زمانی فشار جابه‌جا کرد. در این روش مشخص می‌شود که جواب در جهت پروسه تکرار به‌سوی جواب دائمی همگرا شده است و گزاره اضافه شده منحصراً نقش یک مقدار کاذب را ایجاد می‌کند که با پیمایش زمانی از بین می‌رود. این شیوه تراکم‌پذیری مصنوعی[2] شناخته شده است.

وی‌ویاند [۱۷] در گروه اولین پژوهشگرانی بود که تحقیق کلی بر دستگاه‌های موقت مجازی[3] برای محاسبات حالت پایدار انجام داد. با این حال کار وی به معادلات انرژی-ثابت محدود می‌شود. در این حالت می‌توان به کار بریلی و همکاران [۱۸] اشاره نمود. سپس ترکل [۱۹] در سال ۱۹۸۷ با افزودن جملات مشتق زمانی غیرواقعی به معادلات ممنتوم، با بسط دادن روش کورین، سرعت همگرایی حل را مقدار زیادی افزایش داد. این روش برای بار نخست به نام روش پیش‌شرط معرفی گردید. در ادامه لی [۲۰] در سال ۱۹۹۲ مشخص کرد که با برگزیدن دو جمله مشتق زمانی می‌توان لختی معادلات برای اعداد ماخ حوالی صفر را حذف کرد و بهترین عدد حالت[4] را برای جریان‌های زیرصوتی ایجاد کرد. چوی و مرکل [۲۱] رابطه پیش‌شرط برای معادلات اویلر ایجاد کردند که فقط برای اعداد ماخ کم پاسخگو بود. مطالعات مرکل [۲۲، ۲۳] و ویس و اسمیت [۲۴] باعث پیدا کردن ماتریس‌های پیش‌شرط ساده‌ای شد که برای همه معادلات حالت و جریان‌های لزج قابل به‌کارگیری بود. ون لیر و همکارانش [۲۵] در سال ۱۹۹۱ یک پیش‌شرط بهینه برای معادلات اویلر برای همه اعداد ماخ ایجاد کردند. یکی از مزیت‌های این پیش‌شرط، امکان به‌کارگیری از روش‌های پیمایش زمانی می‌باشد، به‌طوری‌که قابلیت میرایی مدهای خطا فرکانس بالا را نیز شامل می‌شود. با این حال ماتریس پیشنهادی آن‌ها در قیاس با ماتریس ترکل به زاویه جریان حساسیت بالاتری دارد. برای کم کردن حساسیت به زاویه جریان، دویانگ لی [۲۶] در

[1] Pseudo Acoustic Speed
[2] Artificial Compressibility
[3] Pseudo Unsteady
[4] Condiotion Number

سال ۱۹۹۶، ماتریس پیش‌شرط مستقل از زاویه جریان را معرفی کرد که عملکرد خوبی در نواحی پیرامون نقطه سکون داشت. زاکانتی [۲۷] در رساله دکتری خود، مطالعه کاملی روی روش‌های متفاوت پیش‌شرط در معادلات اویلر انجام داد. او ملاک‌های زیادی مانند کم کردن لختی[۱]، هذلولوی بودن[۲]، متقارن بودن[۳] و غیره را در طراحی و بررسی ماتریس‌های پیش‌شرط مورد بررسی قرارداد. در سال ۲۰۰۲ مالان و همکاران [۲۸] با معرفی یک ماتریس پیش‌شرط محلی و تصحیح ماتریس‌های پیش‌شرط قبل که در آن‌ها از مقادیر ثابت برای ضریب پیش‌شرط به‌کار برده می‌شد، سرعت همگرایی و دقت مسئله را هم‌زمان مورد بررسی قرار دادند. در این روش، ضریب پیش‌شرط به‌طور محلی و با در نظر گرفتن گرادیان میدان فشار (در هر گام زمانی) عوض می‌شود. مالان روش خود را روی مسائل جریان داخل حفره[۴]، جریان پله[۵]، جریان شناوری داخل حفره[۶] و گردابه ون‌کارمن[۷] به‌کاربرد [۲۹].

شایان ذکر است که در ایران نیز هجران فر و همکاران شبیه‌سازی عددی جریان‌های آرام تراکم‌ناپذیر پایا با استفاده از روش تراکم‌پذیری مصنوعی انجام داده‌اند. در این تحقیق ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی به‌صورت محلی اعمال و برای جریان لزج و غیرلزج استفاده شده است [۳۰]. سپس اصفهانیان و اکبرزاده [۳۱] از روش پیش‌شرط‌سازی استاندارد برای حل جریان تراکم‌ناپذیر غیرلزج و لزج عبوری از سیلندر در جریان آزاد و جریان عبوری از مانع دایروی داخل کانال استفاده کردند. آن‌ها در سال ۲۰۱۲ به تحلیل و بررسی جریان کاویتاسیون با کمک از روش پیش‌شرط‌سازی توانی[۸] پرداختند [۳۲]. در ادامه اکبرزاده و همکاران در سال ۲۰۱۴، اثر دمش و مکش بر ضرایب برآ و پسا جریان‌های کاویتاسیونی و تراکم‌ناپذیر لزج عبوری از هیدروفویل‌ها را با استفاده از روش پیش‌شرط توانی مورد ارزیابی قرار دادند [۳۳، ۳۴]. روش هموارسازی جدیدی برای جریان پایدار و ناپایدار حول ایرفویل توسط اکبرزاده و

[1] Stiffness
[2] Hyperbolicity
[3] Symmetrizability
[4] Lide Driven Cavity
[5] Backward Facing Step
[6] Buoyancy Driven Cavity
[7] Von Karman Vortex
[8] Power-Law Perconditioning Mehtod

همکاران [۳۵] در سال ۲۰۱۸ معرفی شد. همچنین برای اولین بار شتاب‌دهنده همگرای قدرتمند به نام روش از بین بردن سلول به وسیله اکبرزاده و همکاران معرفی گردید [۳۶].

عمده تحقیقات ذکرشده، در عدد رینولدز بالا صورت گرفته است اما امروزه به‌دلیل کاربرد فراوان آیرودینامیک هیدروفویل‌ها در عدد رینولدز پایین مانند هواپیماهای نظامی خاص، وسایل هوایی و زیرسطحی بدون سرنشین و کاوشگرهای زیرسطحی به‌طور ویژه بررسی می‌شوند. وسایل زیرسطحی بدون سرنشین در صنایع متنوعی از جمله صنایع نفت، گاز و صنایع نظامی برای اکتشاف و نقشه‌برداری در اعماق اقیانوس به‌کار می‌روند. این تجهیزات کوچک که در سرعت‌های پایین مورد استفاده قرار می‌گیرند، معمولاً عدد رینولدز آن‌ها بین ۴۰۰ الی ۶۰۰۰ می‌باشد. از آن‌جایی که در چنین شرایطی کمبود تحقیق و مطالعه وجود دارد، در این پایان‌نامه شبیه‌سازی سه‌بعدی جریان حول هیدروفویل‌ها در اعداد رینولدز پایین انجام شده است.

۱-۳ اهداف پایان‌نامه

در این پایان‌نامه برای شبیه‌سازی عددی جریان پایا و ناپایا به‌صورت سه‌بعدی از روش پیش‌شرط توانی استفاده شده، همچنین تاثیر این روش بر سرعت همگرایی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. ترکیب ضرایب پیش‌شرط محلی (تصحیح آن به‌وسیله حسگرهای محلی میدان سرعت[1]) با جملات وابسته به زمان در معادلات ممنتوم، در چارچوب یک الگوریتم ضمنی دو زمانه پیش‌شرط شده برای نخستین بار به‌صورت سه‌بعدی انجام گرفته است. شبیه‌سازی عددی جریان لزج تراکم‌ناپذیر ناپایا و پایا حول هیدروفویل NACA 0012 به‌صورت سه‌بعدی در بازه اعداد رینولدز کم تحلیل و بررسی شده است. در ابتدا معادلات پیش‌شرط شده حاکم نشان داده می‌شوند و در ادامه روش پیش‌شرط توانی معرفی گردیده است. در این روش ضریب پیش‌شرط به‌صورت محلی و از میدان سرعت یا فشار و با استفاده از یک رابطه

[1] Local Velocity Flow-Field Sensor

توانی حساب شده و در هر گام زمانی با حسگرهای موضعی سرعت یا فشار اصلاح می‌شود. در ادامه معادلات ناویر-استوکس با استفاده از روش حجم محدود جیمسون[1] و روش پیش‌شرط‌سازی توانی با افزودن جملات ظاهری اتلافی[2] و لزجت[3] به ترتیب به شکل مشتقات مکانی مرتبه چهارم و دوم حل می‌شوند. برای محاسبه انتگرال زمان از روش صریح رانج-کوتا چهار مرحله‌ای[4] و برای حل جریان‌های ناپایا از یک الگوریتم ضمنی دوزمانه کمک گرفته شده است. حل عددی حاضر با نتایج موجود ارزیابی و مقایسه شده و اثر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

۱-۳-۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه

این پایان‌نامه متشکل از یک فصل به‌عنوان کلیات تحقیق و ۴ فصل اصلی و یک بخش برای معرفی مراجع استفاده شده است. در فصل دوم روش‌های متفاوت پیش‌شرط‌سازی و معادلات پیش‌شرط شده حاکم معرفی می‌شوند و سپس روش پیش‌شرط توانی ارائه می‌گردد. در فصل سوم جداسازی عددی معادلات پیش‌شرط ارائه می‌شود. در فصل چهارم نتایج عددی حل جریان‌های سه‌بعدی تراکم‌ناپذیر لزج پایا و ناپایا و اثر روش پیش‌شرط توانی در افزایش سرعت همگرایی و دقت حل ارائه می‌شود. فصل پنجم بررسی نتایج این پایان‌نامه و ارائه پیشنهادها و توصیه‌هایی برای بالا بردن کیفیت تحقیق حاضر و انجام مطالعه کامل‌تر در جهت موضوع پایان‌نامه پرداخته می‌شود.

[1] Jemson Finite Volume Method
[2] Artificial Dissipation
[3] Artificial Velocity
4 Explicit Four-Stage Runge-kutta Scheme

فصل ۲ : روش پیش شرط سازی در جریان تراکم ناپذیر

همان‌طور که در فصل قبل گفته شد اختلاف زیاد بین سرعت صوت و سرعت جابه‌جایی سیال در اعداد ماخ کم، مشکل اساسی حل معادلات تراکم‌پذیر می‌باشد. در این حالت، با روش پیش‌شرط می‌توان در مقادیر ویژه دستگاه معادلات حاکم تغییری ایجاد نمود و اختلاف زیاد بین سرعت‌های ذکر شده را برطرف کرد. برای مشخص شدن این موضوع به معرفی مفهوم تراکم‌پذیری مصنوعی و گسترش آن به روش‌های پیش‌شرط ترکل و مالان پرداخته می‌شود.

۲-۱ تراکم‌پذیری مصنوعی

در جریان‌های تراکم‌ناپذیر جملات مربوط به زمان حذف می‌شوند و متغیر فشار هم در معادله پیوستگی آشکار نمی‌شود، در واقع رابطه این معادله و معادلات ممنتوم فقط از سوی متغیرهای سرعت ایجاد می‌شود. این نوع معادلات را با حدس زدن میدان فشار و حل کردن میدان سرعت با کمک معادلات ممنتوم می‌توان تحلیل و بررسی کرد. سپس برای بررسی صحت حل انجام شده از معادلات پیوستگی استفاده می‌شود. اما این روش از لحاظ زمانی طولانی و از جهت محاسبات غیراقتصادی می‌باشد. معادلات جریان تراکم‌پذیر از نوع معادلات هذلولوی هستند پس دارای مشخصه‌های حقیقی هستند و امواج فشار با سرعت مشخص حرکت می‌کنند. معادلات جریان تراکم‌ناپذیر تلفیقی از خصوصیات معادلات سهموی و بیضوی هستند که این تفاوت فقط متأثر از نبود جمله مشتق زمانی در معادله پیوستگی است. برای برطرف کردن این عیب براساس پیشنهاد کورین یک گزاره غیر فیزیکی تابع زمان به معادله پیوستگی اضافه می‌شود که به همراه معادلات ممنتوم، یک دستگاه معادلات ناپایا هذلولوی (مجازی)، معادل مجموعه معادلات اول را ایجاد می‌کند. در این روش مشخص می‌شود که جواب در جهت پروسه تکرار به‌سوی جواب دائمی همگرا شده است و گزاره اضافه شده منحصراً نقش یک مقدار کاذب را ایجاد می‌کند که با پیمایش زمانی از بین می‌رود. این شیوه تراکم‌پذیری مصنوعی نامیده می‌شود.

در واقع در این روش یک پیوستگی مجازی بین فشار و چگالی سیال در زمان مجازی معرفی می‌شود که به معادله پیوستگی منظور می‌گردد. معادلات جریان تراکم‌ناپذیر ناپایا غیرلزج در نظر گرفته می‌شوند :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۱-۲)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \qquad (۲-۲)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad (۳-۲)$$

کورین با معرفی شاخص تراکم‌پذیری مصنوعی و اضافه کردن یک جمله مشتق زمانی به معادله پیوستگی، ماهیت دستگاه معادلات جدید را هذلولوی کرد. معادله پیشنهادی کورین به شکل زیر است:

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۴-۲)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \qquad (۵-۲)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad (۶-۲)$$

$$C^2=\frac{\partial p}{\partial \rho} \qquad (۷-۲)$$

رابطه (۲-۷) سرعت صوت سیال تراکم‌پذیر در حالت کلی را نشان می‌دهد. کمیت β در رابطه بالا سرعت صوت مجازی می‌باشد، واضح است که هر چه مقدار β بزرگ‌تر باشد، جمله مشتق زمانی اضافه شده به معادله پیوستگی کوچک‌تر شده و معادلات جریان به معادلات اصلی تراکم‌ناپذیر نزدیک‌تر می‌شوند و درنتیجه لختی معادلات زیاد می‌شود. تامامدیس و همکاران [۳۷] در سال ۱۹۹۶ اعلام کرد که مقدار β اثر فراوانی بر پایداری و نرخ همگرایی معادلات دارد و این مقدار باید برپایه شرایط جریان، هندسه جسم و تجربیات برنامه‌نویس انتخاب شود که می‌تواند از ۰/۱ تا ۱۰ متغیر باشد. با ضرب کردن معادله اول دستگاه (۲-۴) در u و v و جمع آن‌ها با معادلات دوم و سوم از دستگاه مذکور، شکل بقایی معادلات پیشنهادی کورین به شکل زیر نوشته می‌شوند. با در نظر گرفتن دستگاه معادلات اویلر و با

استفاده از معادله (۲-۷) و رابطه $\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}$ و اعمال این عمل‌گر بر جمله مشتق زمانی دستگاه معادلات رابطه (۲-۱۱) به‌دست می‌آید، همچنین در رابطه (۲-۱۲)، مولفه‌های رابطه (۲-۱۱) تعریف گردیده است.

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۲-۸)$$

$$\frac{u}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=0 \qquad (۲-۹)$$

$$\frac{v}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (v^2+p)}{\partial y}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}=0 \qquad (۲-۱۰)$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{Q}}+\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{E}}{\partial y}=0 \qquad (۲-۱۱)$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{Q}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial p} & 0 & 0\\ u\frac{\partial \rho}{\partial p} & \rho & 0\\ v\frac{\partial \rho}{\partial p} & 0 & \rho\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{Q}=\begin{pmatrix}p\\ u\\ v\end{pmatrix} \qquad (۲-۱۲)$$

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}u\\ u^2+P\\ uv\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{E}=\begin{pmatrix}v\\ uv\\ u^2+P\end{pmatrix}$$

برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر ($\rho = 1$)، معادلات (۲-۸)، (۲-۹) و (۲-۱۰) به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند. در بخش بعدی نشان داده می‌شود، که این معادله حالت خاصی از روش پیش‌شرط استاندارد ترکل است.

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۲-۱۳)$$

$$\frac{u}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=0 \qquad (۲-۱۴)$$

$$\frac{v}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (v^2+p)}{\partial y}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}=0 \qquad (۲-۱۵)$$

۲-۲ روش پیش‌شرط ترکل

در سال ۱۹۸۷ ترکل [۱۹] با افزودن مشتقات زمانی مصنوعی به معادلات ممنتوم، با گسترش شیوه کورین، سرعت همگرایی حل را تا میزان زیادی افزایش داد. این روش به اسم روش پیش‌شرط معرفی گردید. معادلات بسط یافته آن برای جریان تراکم‌ناپذیر غیرلزج با افزودن جملات مشتق زمانی به دستگاه معادلات (۲-۴)، (۲-۵) و (۲-۶) ، روابط (۲-۱۶)، (۲-۱۷) و (۲-۱۸) حاصل می‌شود. روابط (۲-۱۹)، (۲-۲۰) و (۲-۲۱) شکل بقایی و رابطه (۲-۲۲) شکل برداری دستگاه معادلات (۲-۱۶)، (۲-۱۷) و (۲-۱۸) را نشان می‌دهند. همچنین Γ_p^{-1} نشان‌دهنده ماتریس پیش‌شرط می‌باشد.

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۲-۱۶)$$

$$\frac{\alpha u}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \qquad (۲-۱۷)$$

$$\frac{\alpha v}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad (۲-۱۸)$$

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۲-۱۹)$$

$$\frac{\alpha u}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=0 \qquad (۲-۲۰)$$

$$\frac{\alpha v}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (v^2+p)}{\partial y}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}=0 \qquad (۲-۲۱)$$

$$\Gamma_p^{-1}\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{E}}{\partial y}=0 \qquad (۲-۲۲)$$

$$\Gamma_p^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta^2} & 0 & 0\\ \frac{\alpha u}{\beta^2} & 1 & 0\\ \frac{\alpha v}{\beta^2} & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (۲-۲۳)$$

ماهیت پیش‌شرط‌های متفاوت از سه مقدار متغیر α به شرح زیر است:

$\alpha = 0$: با قرار دادن این مقدار، معادلات ذکرشده به همان صورت معادلات تراکم‌پذیر مصنوعی کورین تغییر پیدا می‌کنند. در این صورت همگرایی جواب بسیار طولانی می‌شود اما پایداری و انعطاف‌پذیری بالای دارد.

$\alpha = 1$: با این مقدار تراکم‌پذیر مصنوعی برای سازگاری دستگاه معادلات علاوه بر معادله پیوستگی به معادلات ممنتوم نیز اضافه می‌شود.

$\alpha = 2$: این مقدار به پیشنهاد ترکل است، این روش میزان همگرایی سریعی دارد اما با آزمایش‌های عددی صورت گرفته، پایداری و انعطاف‌پذیری کمتری برخوردار است [۱۹].

۲-۳ روش پیش‌شرط مالان

مالان و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۰۲ با پیشنهاد یک ماتریس پیش‌شرط عمومیت یافته محلی و تصحیح ماتریس‌های پیش‌شرط قبل که در آن‌ها از مقادیر ثابت برای ضریب α به‌کار برده می‌شد، سرعت همگرایی و دقت حل مسئله را هم‌زمان در نظر گرفتند. در این روش ضریب α به‌صورت محلی و با در نظر گرفتن به گرادیان میدان فشار (در هر گام زمانی) تغییر پیدا می‌کند. ماتریس پیش‌شرط توصیه شده توسط مالان برای معادلات برداری (۲-۲۲) به شرح زیر است:

$$\Gamma_p^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma u}{\beta^2} & 1 & 0 \\ \frac{\sigma v}{\beta^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۲۴-۲)$$

$$\Gamma_p = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ -\sigma u & 1 & 0 \\ -\sigma v & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۲۵-۲)$$

با توجه به ماتریس Γ_p می‌توان فهمید که اگر $\sigma \neq 0$ باشد، منجر به‌اضافه شدن جملاتی از معادله پیوستگی به باقی معادلات ممنتوم می‌شود. پس نوسانات در معادله پیوستگی منجر به اثر مستقیم روی دیگر معادلات و پایداری آن‌ها می‌شوند. اگر $\sigma = 0$ انتخاب شود، اثری بر معادلات ندارد. اما با انتخاب

$\sigma = 2$ که ترکل معرفی کرد این تاثیر بیشتر است. برای بهینه کردن این اثر، مالان و همکاران این حسگر فشار را در هر گام زمان مجازی به‌کار بردند. توصیه آن‌ها استفاده از یک حسگر فشار موضعی[1] و اعمال آن روی ضریب σ به شرح زیر است. در رابطه (۲-۲۷)، عبارت $p(x^m)$ فشار در $x = x^m$ است. ضریب σ در ناحیه پیوسته از ۲ تا صفر در ناحیه با گرادیان شدید فشار متغیر است. پس ماتریس پیش‌شرط در رابطه (۲-۲۹) بازنویسی می‌شود.

$$A_p = \lim_{x \to x^{m+}} \frac{|\nabla p(x^m) - \nabla p(x)|}{|\nabla p(x^m)| - |\nabla p(x)|} \tag{۲۶-۲}$$

$$\nabla p(x^m) = \lim_{x \to x^{m+}} \frac{p(x) - p(x^m)}{x - x^m} \tag{۲۷-۲}$$

$$\sigma = 2(1 - A_p) \tag{۲۸-۲}$$

$$\Gamma_p^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ \frac{2(1-A_p)u}{\beta^2} & 1 & 0 \\ \frac{2(1-A_p)v}{\beta^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۲۹-۲}$$

۲-۴ روش پیش‌شرط توانی

اکبرزاده [۳۸] در رساله دکترا خود نشان داد که اگر حسگر فشار A_p با حسگر محلی سرعت A_u جایگزین شود، نرخ همگرایی حل عددی به‌خصوص برای جریان اطراف هیدروفویل به مقدار زیادی

[1] Local Perssure Sensor

اصلاح می‌شود. سپس برای جریان‌های آرام و لزج، رابطه (۲-۳۰) به‌عنوان ضریب پیش‌شرط معرفی می‌گردد، که در این عبارت A_u از عبارت مشابه با حسگر فشار حساب می‌شود.

$$\sigma = 2(1 - A_u) \tag{۲-۳۰}$$

$$A_u = \lim_{x \to x^{m+}} \frac{|\nabla u(x^m) - \nabla u(x)|}{|\nabla u(x^m)| - |\nabla u(x)|} \tag{۲-۳۱}$$

$$\nabla u(x^m) = \lim_{x \to x^{m+}} \frac{u(x) - u(x^m)}{x - x^m} \tag{۲-۳۲}$$

در رابطه بالا $u(x^m)$ سرعت در $x = x^m$ است. ترکل [۱۹, ۳۸] مشخص کرد اگرچه $\sigma = 2$ از نظر مفهومی باید نرخ همگرایی بالاتری داشته باشد، ولی در قیاس با $\sigma = 0$ توانایی پایین‌تری نشان می‌دهد. سپس برای کوچک کردن ضریب σ در رابطه (۲-۳۰)، ضریب پیش‌شرط به شکل زیر تعریف می‌شود، که $(m \geq 2)$ عدد صحیح است.

$$\sigma = 2(1 - A_u)^m \tag{۲-۳۳}$$

۲-۵ بررسی و مقایسه روش‌ها

با توجه به اینکه در این فصل، روش تراکم‌پذیری مصنوعی، روش پیش‌شرط ترکل، روش پیش‌شرط مالان و روش پیش‌شرط مالان معرفی و بررسی شد. در این بخش این روش‌ها با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

الف) روش تراکم‌پذیری مصنوعی

این روش، روش پیشنهادی کورین می‌باشد که در بخش مربوط به آن به تفصیل توضیح داده شده است. با توجه به‌اینکه برای بار اول مطرح گردید، زمینه‌ساز روش‌های دیگر می‌باشد. ایراد این روش زیاد بودن نرخ همگرایی آن می‌باشد.

ب) روش پیش‌شرط ترکل

روش پیشنهادی ترکل، که همان روش توسعه یافته روش تراکم‌پذیری مصنوعی می‌باشد، این روش نرخ همگرایی بالایی دارد اما از پایداری و انعطاف‌پذیری کمتری دارا می‌باشد.

پ) روش پیش‌شرط مالان

در این روش ضریب پیش‌شرط به‌صورت محلی انتخاب می‌شود، مزیت روش پیش‌شرط مالان این است که سرعت و دقت همگرایی را با هم بررسی می‌شود. اما این روش در جریان‌های لزج آرام حول هیدروفویل NACA همگرایی در مرتبه پایین رخ می‌دهد، در جریان‌های غیر لزج منجر به واگرایی می‌شود.

ت) روش پیش‌شرط توانی

روش پیش‌شرط توانی توسعه یافته روش‌های یاد شده می‌باشد، در این روش ضریب پیش‌شرط با کمک حسگر محلی سرعت بدست می‌آید. مزیت این روش در مقایسه با روش‌های دیگر بهبود نرخ همگرایی می‌باشد.

فصل ۳ : جداسازی عددی جریان ناپایا و پایا
با استفاده از شیوه پیش شرط توانی

۳-۱ پیش گفتار

مالان و همکاران [۲۸] با معرفی یک ماتریس پیش‌شرط محلی و تصحیح ماتریس‌های پیش‌شرط قبل که در آن‌ها مقدار ثابت برای ضریب پیش‌شرط به‌کار برده می‌شد، نرخ همگرایی و دقت حل مسئله همراه با یکدیگر مورد بررسی قرار دادند. در روش پیشنهاد شده آن‌ها، ضریب پیش‌شرط σ به‌صورت محلی و با در نظر گرفتن گرادیان میدان فشار (در هر گام زمانی) متغیر است. قابل یادآوری است که این روش در تحلیل و بررسی جریان داخل حفره و گردابه ون‌کارمن توسط مالان به‌کارگرفته شد [۲۹]. اکبرزاده [۳۸] نشان داد که با به‌کار بردن روش پیش‌شرط مالان برای جریان‌های لزج آرام اطراف هیدروفویل‌های NACA، همگرایی در مرتبه بسیار پایینی انجام می‌پذیرد. همچنین به‌کار بردن آن روی جریان‌های غیرلزج باعث واگرایی حل عددی می‌گردد. برای رفع این مشکل ضریب پیش‌شرط محلی جدیدی به نام ماتریس پیش‌شرط توانی معرفی شد. این ضریب در واقع مدل تصحیح شده پیش‌شرط مالان است. نتایج به‌دست‌آمده از انجام روش پیش‌شرط توانی مشخص می‌کند که همچنین بر تصحیح روش مالان در جریان عبوری از هیدروفویل‌ها، سرعت همگرایی شبیه‌سازی عددی را تا مقدار قابل توجه‌ای کم کرد. این افت در بعضی از مسئله‌ها به ۶۰ درصد می‌رسد [۳۸].

۳-۲ معادلات سه‌بعدی پیش‌شرط

معادلات جریان بی‌بعد سه‌بعدی حاکم پیش‌شرط سازی شده به‌صورت زیر می‌باشند. که در این رابطه t و τ به ترتیب زمان حقیقی و زمان مجازی می‌باشند. ماتریس‌های Γ، Q، E، F و G عباتند از:

$$\Gamma \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \Pi \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial z} = 0 \qquad (۱-۳)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \tag{۲-۳}$$

$$Q = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 - \xi\tau_{xx} \\ \rho uv - \xi\tau_{yx} \\ \rho uw - \xi\tau_{zx} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - \xi\tau_{xy} \\ p + \rho v^2 - \xi\tau_{yy} \\ \rho vw - \xi\tau_{zy} \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu - \xi\tau_{xz} \\ \rho wv - \xi\tau_{zy} \\ p + \rho w^2 - \xi\tau_{zz} \end{pmatrix} \tag{۳-۳}$$

$$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sigma u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ \frac{-\sigma v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{-\sigma w}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \tag{۴-۳}$$

که در روابط بالا $u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}$، $v = \frac{\bar{v}}{U_\infty}$ و $w = \frac{\bar{w}}{U_\infty}$ سرعت در راستای x، y و z در نظر گرفته می‌شود، همچنین $x = \frac{\bar{x}}{L}$، $y = \frac{\bar{y}}{L}$ و $z = \frac{\bar{z}}{L}$ محورهای مختصات دکارتی می‌باشند. $p = \frac{\bar{p}}{\rho_\infty U_\infty^2}$ فشار استاتیکی و $\rho = \frac{\rho}{\rho_\infty}$ چگالی نسبی و $t = \frac{\bar{t}U_\infty}{L}$ زمان، L طول مرجع و U_∞ سرعت مرجع و عبارات τ_{yy}، τ_{xx}، τ_{zz}، τ_{xy}، τ_{xz} و τ_{yz} تانسورهای تنش می‌باشند. مقدار ξ در جریان غیرلزج برابر صفر و برای جریان لزج یک در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد، ضریب پیش‌شرط توانی، در رابطه بالا به شکل زیر تعین می‌گردد. ($m \geq 2$) عدد صحیح می‌باشد.

$$\sigma = 2(1 - A_u)^m \tag{۵-۳}$$

ترکل [۱۹] مشخص کرد که در جریان غیرلزج، ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی بایستی در صورت امکان به‌سرعت جابجایی نزدیک شود. در این صورت به آن ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی جابجایی[1] نامیده می‌شود و از طریق زیر به‌دست می‌آید:

$$\beta^2 = \begin{cases} max[(3-\sigma)V^2, kV_{max}^2] & \sigma < 2 \\ K_{max}[(\sigma-1)V^2, kV_{max}^2] & \sigma \geq 2 \end{cases} \quad (۶-۳)$$

که $V_{max}^2 = (u^2 + v^2)$ و ضرایب k و K دو مقدار ثابت هستند و به ترتیب در بازه (۰/۱۶ − ۱) و (۱/۱ − ۱) قرار دارند [۴۰]. رابطه بالا مشخص می‌کند که ضریب تراکم‌پذیر مصنوعی وابسته به‌سرعت جریان است و مقدار آن در تمام فضا حل متغیر است. با این حال، محاسبات عددی صورت گرفته در مراجع مانند [۳۱, ۴۰] مشخص می‌کنند که با کمک از یک عدد ثابت برای این ضریب ($\beta = \beta_0$) نتیجه بهتری در نرخ همگرایی دارد. از این رو رابطه زیر برای جریان غیرلزج برقرار است:

$$\beta^2 = min\{\beta_{conv}^2, \beta^2\} \quad (۷-۳)$$

در جریان با عدد رینولدز پایین، به دلیل افزایش سرعت تأثیر محلی، مقدار ضریب تراکم‌پذیری اساساً مقدار بزرگی است. در این صورت ضریب تراکم‌پذیر مصنوعی[2] پخشی از عبارت زیر حساب می‌شود [۲۸]. که L_{min} کمترین طول ضلع المان محاسباتی است. برای جریان آرام ($Re \leq 10^4$)، ضریب تراکم‌پذیر مصنوعی طبق رابطه (۳-۱۰) محاسبه می‌شود. همچنین با توجه به روابط (۳-۵) و (۳-۸)، عدد حالت برای دستگاه معادلات پیش‌شرط شده برای ($m \geq 2$) در رابطه (۳-۱۱) محاسبه می‌گردد.

$$\beta_{diff}^2 = 0.25\left[(\frac{4\mu}{\rho Re L_{min}} + \sigma v)^2 - (2-\sigma)^2 V^2\right] \quad (۸-۳)$$

$$\beta^2 = max\{\beta_{diff}^2, \beta_p^2\} \quad (۹-۳)$$

$$\beta_p^2 = \begin{cases} 10^{-8} Re^2 V_{max}^2 & V \leq \frac{Re}{1000} V_{max} \\ max(\beta_0^2, V^2) & V > \frac{Re}{1000} V_{max} \end{cases} \quad (۱۰-۳)$$

[1] Convective Artificial Compressiblity
[2] Diffusion Artificial Compressiblity

$$k(m) = \frac{1}{1 - \frac{2 - 2\left(1 - A_p\right)^m}{1 + \frac{X}{2V}}} \qquad m \geq 2 \qquad (۱۱-۳)$$

$$X = \frac{4\mu}{\rho Re L_{min}}$$

طبق نتیجه‌گیری در مرجع [۳۸] نامساوی $1 < k(2) < k(m > 2)$ از نظر تئوریک مشخص می‌کند که $m = 2$ بایستی بهترین عملکرد را در نزول نرخ همگرایی دارد، ولی عدد بهینه m ممکن است که از مقدار ۲ بیشتر باشد.

در رابطه (۳-۵) اگر $m = 0$ باشد، ضریب پیش‌شرط ثابت و غیر صفر است که برابر روش پیش‌شرط ترکل است (روش ترکل را با SPM (روش پیش‌شرط استاندارد[1]) نشان داده می‌شود). با در نظر گرفتن حسگرهای محلی فشار و سرعت $0 < A_p < 1$ و $0 < A_u < 1$، اگر مقدار m به سمت بی‌نهایت میل کند در این صورت مقدار σ به صفر میل می‌کند که همان روش تراکم‌پذیر مصنوعی کورین می‌شود. این روش را با SAC (روش تراکم‌پذیری استاندارد[2]) نشان داده می‌شود. به همین ترتیب در رابطه (۳-۵) اگر $m = 1$ باشد، ضریب پیش‌شرط مالان و همکاران حاصل می‌شود. روش مالان را با MPM (روش پیش‌شرط مالان[3]) نشان داده می‌شود.

۳-۳ روش حجم محدود جیمسون

در این پایان‌نامه، برای جداسازی معادلات حاکم از روش حجم محدود جیمسون استفاده می‌شود [۴۲, ۴۳]. خاصیت بسیار مطلوبی که این روش دارد پاسخ حالت دائم در آن مستقل از گام زمانی است. این روش حجم کنترل توسط افراد مختلف در حالت دوبعدی به‌کار گرفته شده است. دلگشا و همکاران [۴۴, ۴۵] از این روش برای شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون در داخل کانال همگرا-واگرا استفاده کرده‌اند. این روش برای جریان‌های پایا و ناپایا قابلیت استفاده دارد.

[1] Standard Perconditioning Mehtod
[2] Standard Artifficial Compressibility
[3] Malan's Perconditioning Mehtod

۳-۳-۱ محاسبات جریان ناپایا

روش حل براساس الگوریتم پیمایش زمانی و الگوریتم دوزمانه و کمک از گام‌های زمانی رانج-کوتا است. از معادله (۳-۱) روی حجم کنترل (i,j,k) انتگرال گرفته می‌شود و با استفاده از قضیه دیوژانس[1] معادلات زیر حاصل می‌شوند [۲۸, ۳۲, ۴۳]:

$$\Pi^{-1}\Gamma\frac{\partial}{\partial t}\iint_s (Q.n)ds+\frac{\partial}{\partial \tau}\iint_s (Q.n)ds+\Pi^{-1}\iint_s (Q.n)ds=0 \qquad (۳-۱۲)$$

۳-۳-۲ محاسبات جریان پایا

از معادله (۳-۱) روی حجم کنترل (i,j,k) بدون در نظر گرفتن عبارت زمان حقیقی و با استفاده از قضیه دیورژانس معادلات زیر حاصل می‌شوند.

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\iint_s (Q.n)ds+\Pi^{-1}\iint_s (Q.n)ds=0 \qquad (۳-۱۳)$$

۳-۳-۳ جداسازی معادلات حاکم

در روش حجم محدود، حجم کنترل‌ها را می‌توان به دو روش میان‌گره[2] و روش گوشه‌گره[3] حل کرد. بدین منظور ابتدا با کمک روش‌های جبری یا دیفرانسیلی ناحیه مورد نظر شبکه‌بندی شده و معادلات مربوط برای هر حجم کنترل بر اساس نقاط مرکزی حجم‌ها جداسازی می‌شوند. با تخمین زدن عبارت $\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t}$ و $\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \tau}$ از معادله (۳-۱۲) و خارج کردن از حالت انتگرال و محاسبه در مرکز حجم کنترل و همچنین

[1] Divergrnce Theorem
[2] Cell_center
[3] Cell Vertex

اضافه کردن جملات اتلاف جیمسون، معادله جداسازی شده در رابطه (۳-۱۳) نمایش داده می‌شود. [۲۸, ۳۱, ۴۳]. همچنین در این رابطه $\forall_{i,j,k}$ مقدار حجم کنترل می‌باشد.

$$\Pi^{-1}\Gamma\frac{\partial}{\partial t}\left(\forall_{i,j,k}Q_{i,j,k}\right)+\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\forall_{i,j,k}Q_{i,j,k}\right)=D\left(Q_{i,j,k}\right)-RS\left(Q_{i,j,k}\right) \quad (۱۴-۳)$$

$$\vec{R}=E\hat{\imath}+F\hat{\jmath}+G\hat{k} \qquad \vec{S}=S_x\hat{\imath}+S_y\hat{\jmath}+S_k\hat{k} \quad (۱۵-۳)$$

در رابطه بالا بردار $\vec{S}$ همان بردار نرمال در سطوح حجم کنترل است. در رابطه (۳-۱۳)، کمیت RS تابع شار است و در همین رابطه عبارت $D\left(Q_{i,j,k}\right)$ ترم اتلاف بوده و به‌صورت تابعی از Q می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳۱]: در این روابط L نشان‌دهنده‌ی شماره دیواره‌های حجم کنترل است.

$$RS_1=\beta^2\sum_{L=1}^{6}(uS_x+vS_y+wS_z)\rho \quad (۱۶-۳)$$

$$RS_2=-\frac{\sigma u_{i,j}RS_1}{\rho\beta^2}+\sum_{L=1}^{6}\left(uS_x+vS_y+wS_z\right)\rho u+pS_x \quad (۱۷-۳)$$

$$RS_3=-\frac{\sigma v_{i,j}RS_1}{\rho\beta^2}+\sum_{L=1}^{6}\left(uS_x+vS_y+wS_z\right)\rho u+pS_y \quad (۱۸-۳)$$

$$RS_4=-\frac{\sigma w_{i,j}RS_1}{\rho\beta^2}+\sum_{L=1}^{6}\left(uS_x+vS_y+wS_z\right)\rho u+pS_z \quad (۱۹-۳)$$

با همگرایی معادله (۳-۱۲) در زمان مجازی τ، حل معادله در زمان حقیقی t حاصل می‌شود. جمله زمان حقیقی با کمک از تفاضل پسروی سه نقطه‌ای و به‌صورت ضمنی جداسازی می‌شود [۲, ۴۶]. در رابطه زیر n نشان‌دهنده زمان فیزیکی می‌باشد.

$$\Pi^{-1}\Gamma\,\forall_{i,j,k}\frac{\partial Q_{i,j,k}}{\partial t}=\Pi^{-1}\Gamma\,\forall_{i,j,k}\frac{3Q_{i,j,k}^{n+1}-4Q_{i,j,k}^{n}+Q_{i,j,k}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (۲۰-۳)$$

$$D(Q_{i,j,k}) = D_x(Q_{i,j,k}) + D_y(Q_{i,j,k}) + D_z(Q_{i,j,k}) \quad (۲۱-۳)$$

در رابطه بالا $D_x(Q_{i,j,k})$ جمله اتلاف در جهت x، $D_y(Q_{i,j,k})$ جمله اتلاف در جهت y و $D_z(Q_{i,j,k})$ جمله اتلاف در جهت z است. هر یک از این سه ترم هر حجم کنترل، در روابط (۳-۲۲)، (۳-۲۳) و (۳-۲۴) نشان داده شده‌اند. ضریب اتلافی مشتق دوم به‌صورت تابعی از مشتق دوم فشار در نظر گرفته می‌شود. در رابطه‌های (۳-۲۵)، (۳-۲۶) و (۳-۲۷) این ضرایب برای سه جهت x،y و z محاسبه می‌شوند.

$$D_x(Q_{i,j,k}) = d_{i+\frac{1}{2},j,k} - d_{i-\frac{1}{2},j,k} \quad (۲۲-۳)$$

$$D_y(Q_{i,j,k}) = d_{i,j+\frac{1}{2},k} - d_{i,j-\frac{1}{2},k} \quad (۲۳-۳)$$

$$D_z(Q_{i,j,k}) = d_{i,j,k+\frac{1}{2}} - d_{i,j,k-\frac{1}{2}} \quad (۲۴-۳)$$

$$(\upsilon_x)_{i,j,k} = \frac{|p_{i+1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}|}{p_{i+1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}} \quad (۲۵-۳)$$

$$(\upsilon_y)_{i,j,k} = \frac{|p_{i,j+1,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j-1,k}|}{p_{i,j+1,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j-1,k}} \quad (۲۶-۳)$$

$$(\upsilon_z)_{i,j,k} = \frac{|p_{i,j,k+1} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j,k-1}|}{p_{i,j,k+1} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j,k-1}} \quad (۲۷-۳)$$

در روابط بالا، عبارت $d_{i+\frac{1}{2},j,k}$ به شکل زیر می‌باشد. در رابطه (۳-۲۸)، $\epsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ و $\epsilon^{(4)}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ به ترتیب ضرایب لزجت مصنوعی و اتلاف مصنوعی معرفی می‌شوند و از رابطه زیر حساب می‌شوند [۴۲, ۴۳, ۴۵]. ضرایب $k^{(2)}$ و $k^{(4)}$ ضرایب ثابت می‌باشند.

$$d_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\forall_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Delta t}\left[\epsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j,k}\delta_2 - \epsilon^{(4)}_{i+\frac{1}{2},j,k}\delta_4\right] \quad (۲۸-۳)$$

$$\delta_2 = Q_{i+1,j,k} - Q_{i,j,k} \quad (۲۹-۳)$$

$$\delta_4 = Q_{i+2,j,k} - 3Q_{i+1,j,k} + 3Q_{i,j,k} - Q_{i-1,j,k} \quad (۳۰-۳)$$

$$\forall_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2}\left(\forall_{i,j,k} - \forall_{i+1,j,k}\right) \quad (۳۱-۳)$$

$$\epsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j,k} = k^{(2)} Max\left[(\nu_y)_{i+1,j,k}, (\nu_y)_{i,j,k}\right] \quad (۳۲-۳)$$

$$\epsilon^{(4)}_{i+\frac{1}{2},j,k} = Max\left[0\,,(k^{(4)} - \epsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j,k}\right] \quad (۳۳-۳)$$

$$k^{(2)} = \frac{1}{4}$$

$$k^{(4)} = \frac{1}{256}$$

۳-۳-۴ انتگرال‌گیری در زمان

روش پیشنهادی برای انتگرال‌گیری این معادلات روش رانج-کوتا مرتبه چهار است. این روش چهار مرحله‌ای به‌صورت زیر است [۴, ۲۸, ۴۲]:

$$Q^{(0)}_{i,j,k} = Q^{(n)}_{i,j,k} \quad (۳۴-۳)$$

$$Q^{(1)}_{i,j,k} = Q^{(0)}_{i,j,k} - \frac{\Delta\tau}{4\forall_{i,j,k}}[RS\left(Q^{(0)}_{i,j,k}\right) - D\left(Q^{(0)}_{i,j,k}\right)] \quad (۳۵-۳)$$

$$Q^{(2)}_{i,j,k} = Q^{(0)}_{i,j,k} - \frac{\Delta\tau}{3\forall_{i,j,k}}[RS\left(Q^{(1)}_{i,j,k}\right) - D\left(Q^{(0)}_{i,j,k}\right)] \quad (۳۶-۳)$$

$$Q^{(3)}_{i,j,k} = Q^{(0)}_{i,j,k} - \frac{\Delta\tau}{2\forall_{i,j,k}}[RS\left(Q^{(2)}_{i,j,k}\right) - D\left(Q^{(0)}_{i,j,k}\right)] \quad (۳۷-۳)$$

$$Q^{(4)}_{i,j,k} = Q^{(n)}_{i,j,k} - \frac{\Delta\tau}{\forall_{i,j,k}}[RS\left(Q^{(3)}_{i,j,k}\right) - D\left(Q^{(0)}_{i,j,k}\right)] \quad (۳۸-۳)$$

$$Q^{(n+1)}_{i,j,k} = Q^{(4)}_{i,j,k} \quad (۳۹-۳)$$

همان‌طور که بیشتر گفته شده بود، برای افزایش بازدهی و سرعت، جملات اتلافی فقط یک‌بار و آن‌هم در مرحله نخست محاسبه می‌شوند، در سایر مراحل از همان مقدار مرحله نخست استفاده می‌گردد. لازم به یادآوری است که پاسخ حالت دائم مستقل از گام زمان $\Delta\tau$ است. ولی برای پایداری و شتاب بخشیدن به‌سرعت همگرایی باید از گام زمان مناسب بهره برد. در این روش گام زمانی در هر حجم کنترل از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\Delta\tau \leq cfl \times \frac{\Delta L^{min}_{i,j,k}}{\lambda^{max}_{i,j,k}} \quad (۴۰-۳)$$

که در رابطه بالا $\Delta L_{i,j,k}^{min}$ کمترین طول اضلاع حجم کنترل است. cfl عدد کورانت-فردریچ-لوی[1] و $\lambda_{i,j,k}^{max}$ مقدار ویژه حداکثر برای هر حجم کنترل است و رابطه آن در زیر آمده است. برای مشخص کردن میزان همگرایی از خطا فشار محلی طبق رابطه زیر استفاده‌شده است. مقدار N نشان‌دهنده المان‌های میدان محاسباتی است [۳۲] .

$$\lambda_{i,j,k}^{max} = \frac{1}{2}[(2 - A_u)Vel_{mag} + \sqrt{(2 - A_u)^2 Vel_{mag}^2 + 4 \times \beta^2} \quad (۴۱-۳)$$

$$Vel_{mag} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (۴۲-۳)$$

$$\text{Res} = \log \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(\frac{\Delta p_{i,j,k}}{p_{i,j,k}})^2}{N}} \quad (۴۳-۳)$$

۳-۳-۵ جداسازی حسگرهای فشاری و سرعت

برای تعیین مقدار σ در رابطه (۲-۲۶) باید حسگرهای فشار و سرعت در وسط هر حجم کنترل حساب شود. برای جداسازی حسگرهای فشار و سرعت از معادله (۲-۲۷) که مالان [۲۸] معرفی کرده است، طبق عبارت (۳-۴۴) محاسبه می‌شود. و برای مرز، از رابطه (۳-۴۵) محاسبه می‌گردد: (فرض می‌شود سلول $i, j-1, k$ مرز دیوار باشد)

$$A_u^{i,j,k} = \frac{\left|6u_{i,j,k} - u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k} - u_{i.j-1,k} - u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k+1} - u_{i.j.k-1}\right|}{\left|u_{i,j,k} - u_{i+1,j,k}\right| + \left|u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}\right| + \left|u_{i,j,k} - u_{i,j+1,k}\right| + \cdots} \quad (۴۴-۳)$$

$$A_u^{i,j,k} = \frac{\left|6u_{i,j,k} - u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k} - u_{i.j-1,k} - u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k+1} - u_{i.j.k-1}\right|}{\ldots + \left|u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k}\right| + \left|u_{i,j,k} - u_{i,j,k+1}\right| + \left|u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}\right|}$$

[1] Courant –Feriedrichs-Lawy

$$A_u^{i,j,k}$$

$$= \frac{\left|9u_{i,j,k} - 2u_{i+1,j,k} - 2u_{i-1,j,k} - 2u_{i.j,k-1} - 2u_{i,j,k+1} - u_{i,j+1,k}\right|}{2\left|u_{i,j,k} - u_{i+1,j,k}\right| + 2\left|u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}\right| + 2\left|u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}\right| + \cdots} \qquad (۴۵-۳)$$

$$A_u^{i,j,k} = \frac{\left|9u_{i,j,k} - 2u_{i+1,j,k} - 2u_{i-1,j,k} - 2u_{i.j,k-1} - 2u_{i,j,k+1} - u_{i,j+1,k}\right|}{\ldots + 2\left|u_{i,j,k} - u_{i,j,k+1}\right| + 2\left|u_{i,j,k} - u_{i,j+1,k}\right| + \left|u_{i,j,k} - u_{i,j+1.k}\right|}$$

۳-۳-۶ شرایط مرزی

در حل حاضر از جریان لزج تراکم‌ناپذیر استفاده شده است، شرایط مرزی مسئله به شرح زیر می‌باشد. که شرایط مرزی دیوار، شرایط مرزی ورودی، شرایط مرزی خروجی و شرط مرزی تناوبی (پریودیک[۱]) توضیح داده شده است.

۳-۳-۶-۱ شرط مرزی دیوار

برای افزایش راندمان و دقت یک روش عددی و اعمال ساده‌تر شرایط مرزی، تبدیلی را از فضا فیزیکی به فضا محاسباتی انجام گرفته است. بدین منظور معادله‌های حرکت را از فضا فیزیکی (x, y, z) به فضا محاسباتی (ξ, η, ζ) انتقال داده می‌شود. برای جریان لزج شرط مرزی سرعت، شرط عدم لغزش باید برای دیوار برقرار باشد. به‌بیان‌دیگر مقادیر سرعت بایستی صفر شود. شرط مرزی فشار به شکل $\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0$ که η بردار عمود است.

۳-۳-۶-۲ شرط مرزی ورودی

برای شرط مرز ورودی به دلیل تراکم‌ناپذیر بودن جریان، مقدار سرعت را ثابت و با مقدار سرعت جریان آزاد برابر قرارداده شده است. و مقدار فشار برون‌یابی می‌شود. رابطه (۳-۴۲) برای زاویه صفر درجه در

[۱] Periodic

راستا محور z[1] برقرار است. اگر تغییر زاویه نسبت به محور z برقرار باشد، از رابطه (۳-۴۳) استفاده می‌شود.

$$\begin{cases} \rho_i = \rho_\infty \\ u_i = U_\infty \cos\alpha \\ v_i = U_\infty \sin\alpha \\ w_i = 0 \\ p_i = 2p_n - p_{n-1} \end{cases} \quad (۴۴-۳)$$

$$\begin{cases} \rho_i = \rho_\infty \\ u_i = U_\infty \cos\theta \cos\alpha \\ v_i = U_\infty \cos\theta \sin\alpha \\ w_i = U_\infty \sin\theta \\ p_i = 2p_n - p_{n-1} \end{cases} \quad (۴۵-۳)$$

۳-۳-۶-۳ شرط مرزی خروجی

برای شرط مرز خروجی به دلیل تراکم‌ناپذیر بودن جریان، مقدار فشار با فشار جریان آزاد یکسان در نظر گرفته می‌شود و مقادیر سرعت از داخل میدان حل درون‌یابی می‌شوند:

$$\begin{cases} \rho_o = 2\rho_n - \rho_{n-1} \\ u_o = 2u_n - u_{n-1} \\ v_o = 2v_n - v_{n-1} \\ w_o = 2w_n - w_{n-1} \\ p_o = p_\infty \end{cases} \quad (۴۶-۳)$$

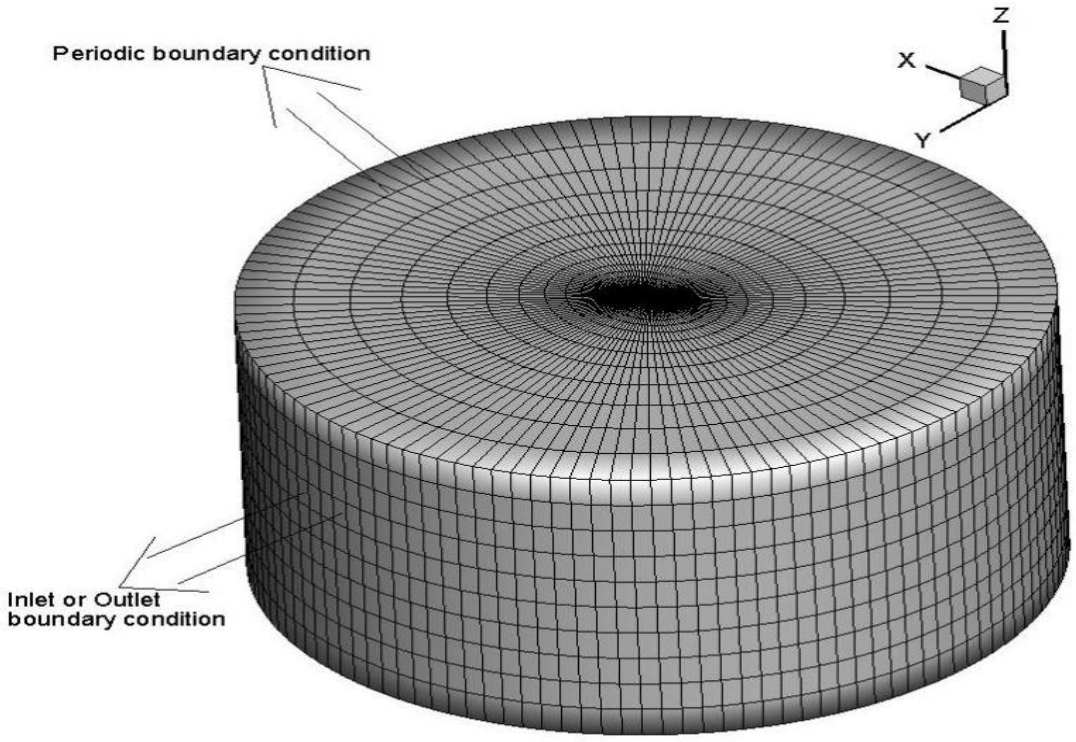
که اندیس‌های i و o بیان‌گر ورودی و خروجی می‌باشند، اندیس ∞ بیان‌گر جریان آزاد، α زاویه حمله در صفحه x وy، اندیس‌های n و$n-1$ نشان‌دهنده اولین و دومین المان مرز ورودی و خروجی است همچنین θ نشان‌دهنده زاویه نسبت به محور z است.

[1] Z-Axis

۳-۳-۶-۴ شرط مرزی تناوبی (پریودیک)

برای اینکه حل مسئله مستقل از تغییر در راستا محور z شود، صفحات بالا و پایین استوانه را تناوبی در نظر گرفته می‌شود. در رابطه بالا اندیس‌های D و U بیان‌گر مؤلفه‌های صفحات بالا و پایین می‌باشند. شکل ۳-۱ شرایط مرزی را نشان می‌دهد.

$$\begin{cases} \rho_U = \rho_D \\ u_U = u_D \\ v_U = v_D \\ w_U = w_D \\ p_U = p_D \end{cases} \qquad (۴۵-۳)$$



شکل ۳-۱. نمایش مرزهای استفاده شده

فصل ۴ : نتایج

۴-۱ مقدمه

در این فصل نتایج حاصل از شبیه‌سازی مورد بررسی قرارگرفته است. در پایان‌نامه حاضر برای شبیه‌سازی، برنامه‌ای توسعه یافته سه‌بعدی با نرم‌افزار C++ و استفاده از مزیت شیءگرایی نوشته شده است. الگوریتم این برنامه عددی از روش حجم محدود از نوع مرکزیت سلول استفاده شده و با کمک روش پیش‌شرط توانی گسترش داده شده و برای جریان پایا و ناپایا به‌صورت سه‌بعدی و همچنین از شرط جریان یکنواخت $(P_\infty = 1.0\,, U_\infty = 1.0\,, \rho_\infty = 1.0)$ به عنوان شرط اولیه استفاده شده است. به‌منظور اعتبارسنجی پایان‌نامه، نتایج شبیه‌سازی عددی جریان آرام پایا و ناپایا پیرامون هیدروفویل NACA 0012 با نتایج عددی موجود مورد ارزیابی قرارگرفته است. پس از اعتبارسنجی، نتایج روش‌های دیگر پیش‌شرط بر سرعت همگرایی در زوایای حمله و اعداد رینولدز مختلف بررسی و تحلیل می‌شود. در پایان این فصل پایان جریان آرام لزج با تغییر زاویه نسبت به محور z مورد بررسی قرار می‌گیرد.

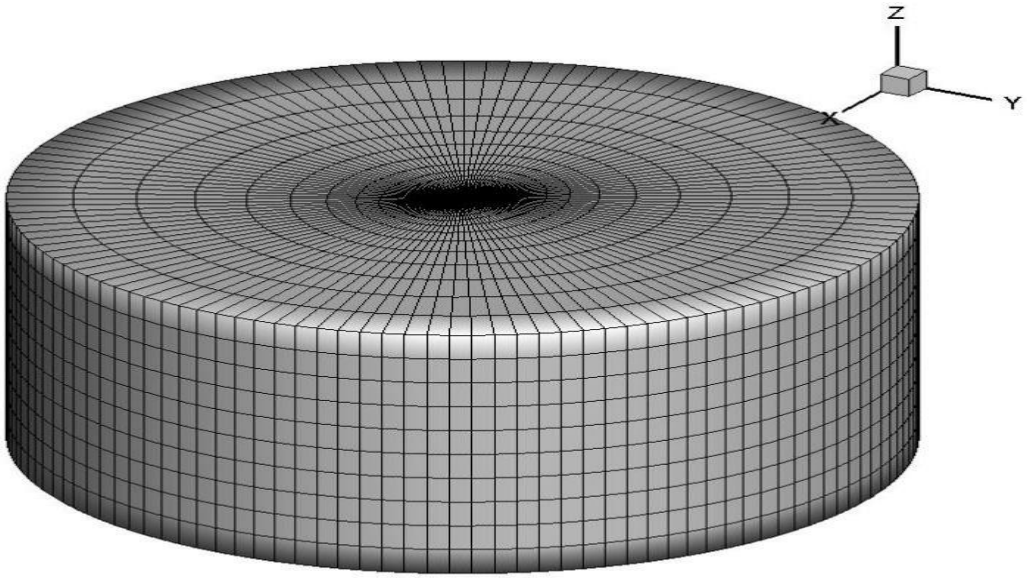
۴-۲ جریان پایا

۴-۲-۱ جریان پایا با زاویه حمله صفر درجه

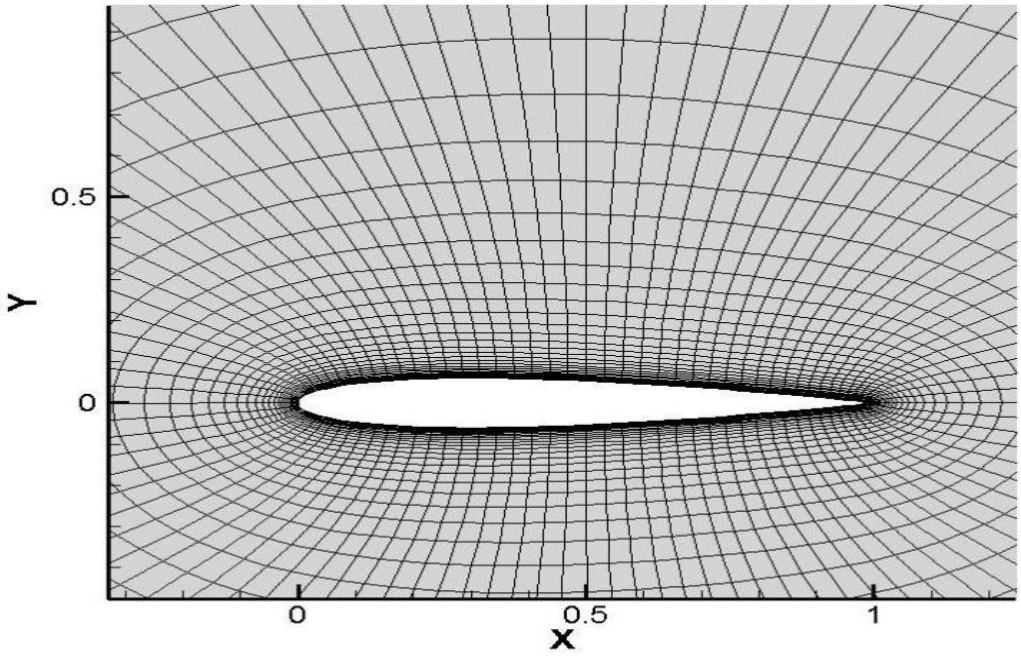
۴-۲-۱-۱ شبکه‌بندی میدان حل

شبکه‌بندی مورد استفاده در این پایان‌نامه، شبکه‌بندی با سازمان از نوع o[۱] که دارای ۱۰۱ گره در راستا محور x[۲] و ۵۱ گره در راستا محور y[۳] و ۱۰ گره در راستا محور z همچنین فاصله اولین گره محاسباتی تا دیوار هیدروفویل ۰/۰۰۰۳ – ۰/۰۰۰۴ برابر طول وتر هیدروفویل در نظر گرفته می‌شود. مرز خارجی مساحت جانبی استوانه و سطح مقطع استوانه دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شده است.

[۱] O_Grid
[۲] X-Axis
[۳] Y-Axis



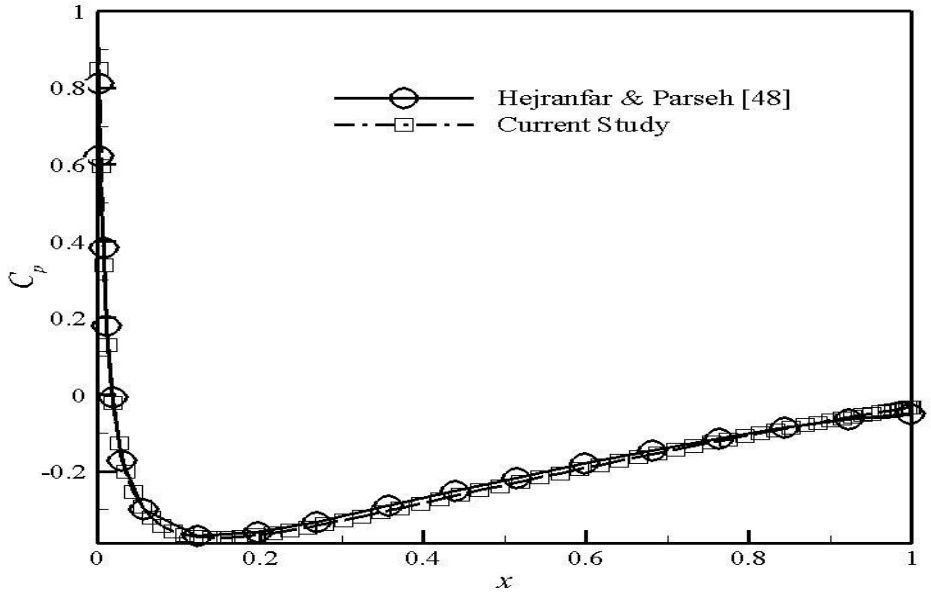
شکل ۴-۱ نمای دور از شبکه‌بندی پیرامون هیدروفویل NACA 0012



شکل ۴-۲ نمای نزدیک از شبکه‌بندی پیرامون هیدروفویل NACA 0012

۴-۲-۱-۲ نتایج عددی و اعتبارسنجی

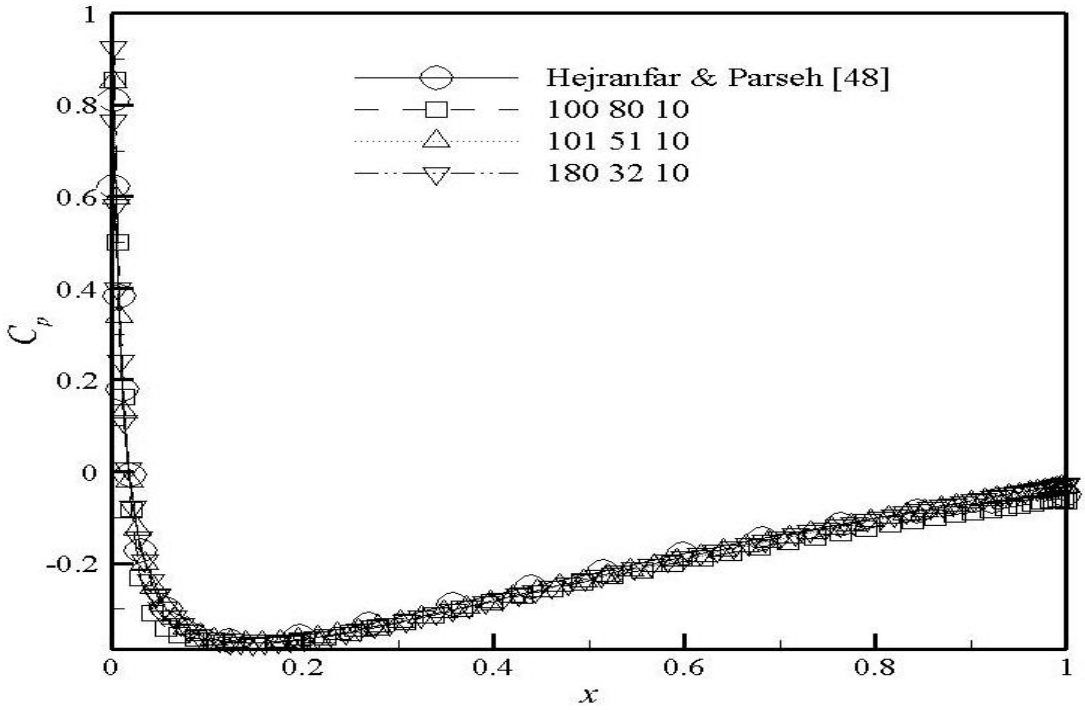
برای ارزیابی الگوریتم جریان آرام پایا تراکم‌ناپذیر از نتایج عددی هجران فر و پارسه [۴۸] استفاده شده است. برای بررسی درستی الگوریتم پایا، جریان آرام هیدروفویل NACA 0012 در Re = 5000 با زاویه حمله صفر درجه شبیه‌سازی شده است.



شکل ۴-۳ مقایسه ضریب فشار مطالعه حاضر با مرجع [۴۸]

۴-۲-۱-۳ استقلال حل از شبکه محاسباتی

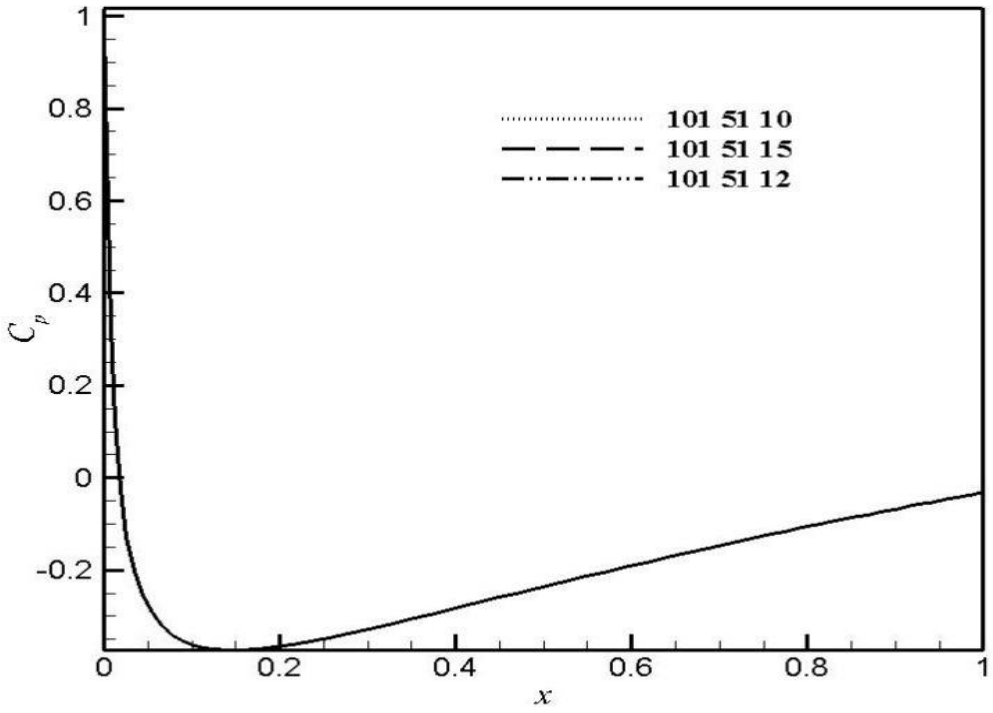
برای نشان دادن مستقل بودن حل از شبکه محاسباتی، سه شبکه به ابعاد ۱۰×۸۰×۱۰۰، ۱۰×۵۱×۱۰۱ و۱۰×۳۲×۱۸۰ در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به ضریب فشار در Re =5000 و زاویه حمله صفر درجه پیرامون هیدروفوبل NACA0012 در شکل ۴-۴ نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتیجه حاصل از شبکه ۱۰×۵۱×۱۰۱ با نتیجه مرجع [۴۸] انطباق نسبتاً خوبی دارد. لذا در این مطالعه و شبیه‌سازی از این شبکه‌بندی استفاده گردیده است.



شکل ۴-۴ مقایسه شبکه‌بندی‌های مختلف با مرجع [۴۸] پیرامون هیدروفویل NACA 0012

۴-۲-۱-۴ بررسی شرط تناوبی (پریودیک)

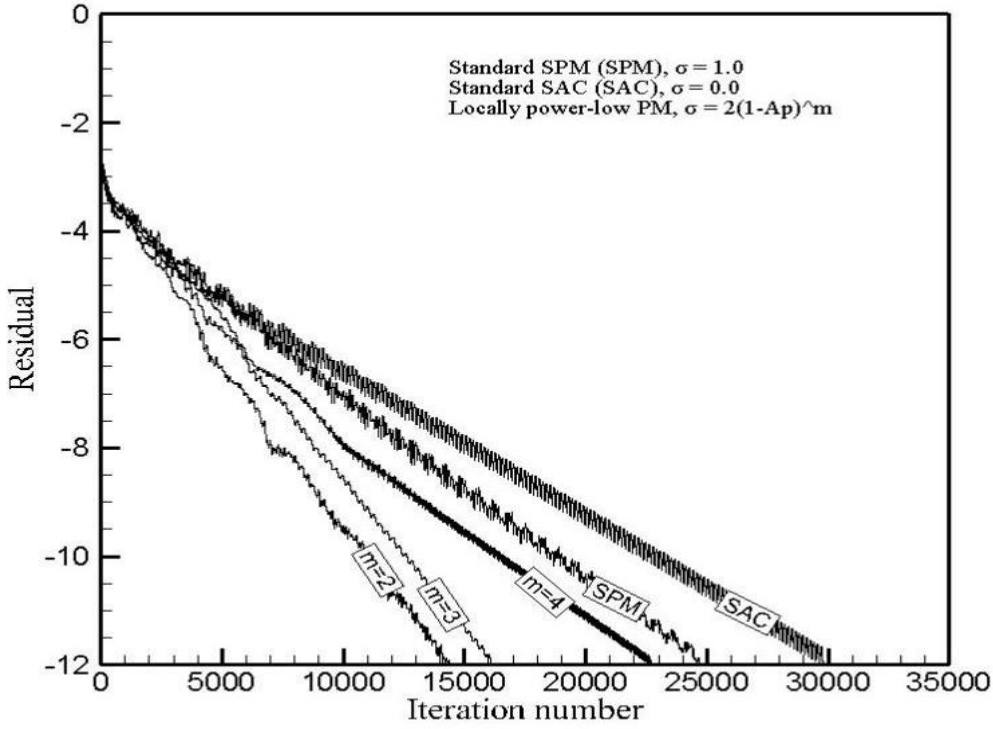
در مطالعه حاضر برای شبیه‌سازی همان‌طور که در فصل قبل گفته شد از شرط تناوبی در راستا z استفاده شده است. برای نشان دادن شرط تناوبی و تأثیر آن بر حل برای ابعاد ۱۰×۵۱×۱۰۱، ۱۲×۵۱×۱۰۱ و ۱۵×۵۱×۱۰۱ ضریب فشار حول هیدروفویل NACA 0012 را در شکل ۴-۵ مقایسه شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت تعداد گره در راستا z به دلیل اعمال شرط تناوبی در مسئله تأثیری در جواب ندارد، پس در ادامه حل از شبکه با ابعاد ۱۰×۵۱×۱۰۱ استفاده می‌شود.



شکل ۴-۵ بررسی تعداد گره در راستا z پیرامون هیدروفویل NACA 0012

۴-۲-۱-۵ بررسی روش پیش‌شرط توانی در بهبود همگرایی

همان‌طور که در فصل‌های پیشین روش‌های مختلفی برای حل و شبیه‌سازی معرفی شد، در این بخش روش پیش‌شرط توانی را با روش‌های تراکم‌پذیری استاندارد (SAC) و روش پیش‌شرط استاندارد (SPM) مورد مقایسه و ارزیابی قرار گرفته است. شکل ۴-۶ تأثیر روش پیش‌شرط در عدد رینولدز Re = 5000 و در زاویه حمله صفر درجه حول هیدروفویل NACA 0012 نشان می‌دهد. از تحلیل و بررسی نمودار زیر مشخص می‌شود که در مقدار بهینه توان پیش‌شرط (m = 2) بیشترین نرخ همگرایی را دارد. در مقایسه با دو روش ذکر شده (SAC و SPM) زمان محاسبات را ۴۰ و ۵۰ درصد کاهش می‌دهد.



شکل ۴-۶ مقایسه روش‌های SAC و روش SPM با روش پیش‌شرط توانی با توان‌های مختلف پیرامون هیدروفویل NACA 0012

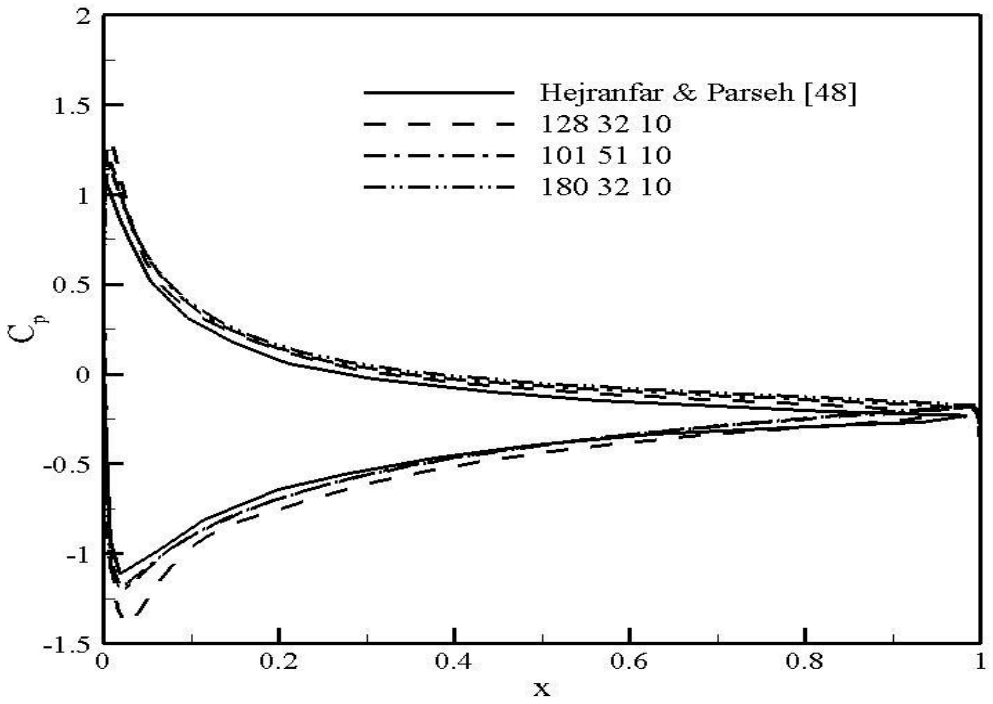
۴-۲-۲ جریان پایا با زاویه حمله ده درجه

۴-۲-۲-۱ شبکه‌بندی میدان حل

برای شبکه‌بندی جریان آرام پایا با زاویه ده درجه، از شبکه‌بندی بخش قبل استفاده شده است.

۴-۲-۲-۲ نتایج عددی و اعتبارسنجی

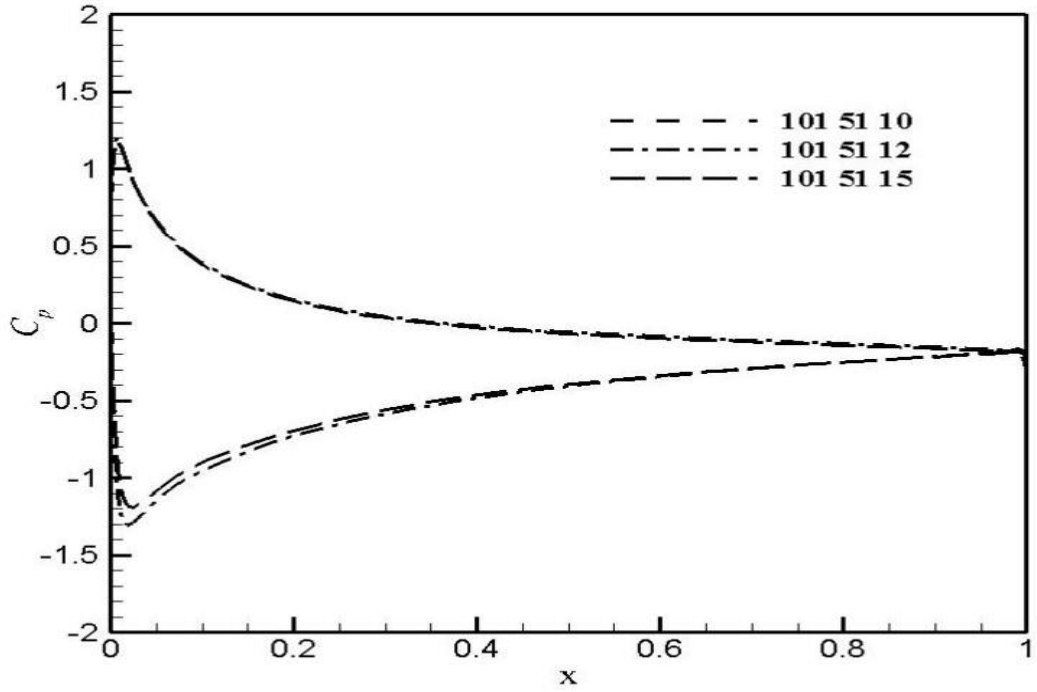
برای بررسی صحت الگوریتم پایا، جریان آرام هیدروفویل NACA 0012 در Re = 500 با زاویه حمله ده درجه شبیه‌سازی شده است. نتایج حاصل از این الگوریتم با نتایج عددی هجران فر و پارسه [۴۸] مقایسه گردیده است. شکل ۴-۷ تغییرات ضریب فشار پیرامون دیواره هیدروفویل NACA 0012 را نشان می‌دهد. همچنین در شکل ۴-۷ برای سه شبکه‌بندی ضریب فشار نشان داده شده، که شبکه با ابعاد ۱۰×۵۱ ×۱۰۱ انطباق خوبی با مرجع [۴۸] دارد.



شکل ۴-۷ مقایسه ضریب فشار پیرامون هیدروفویل NACA 0012 با مرجع [۴۸]

۴-۲-۲-۳ بررسی شرط تناوبی (پریودیک)

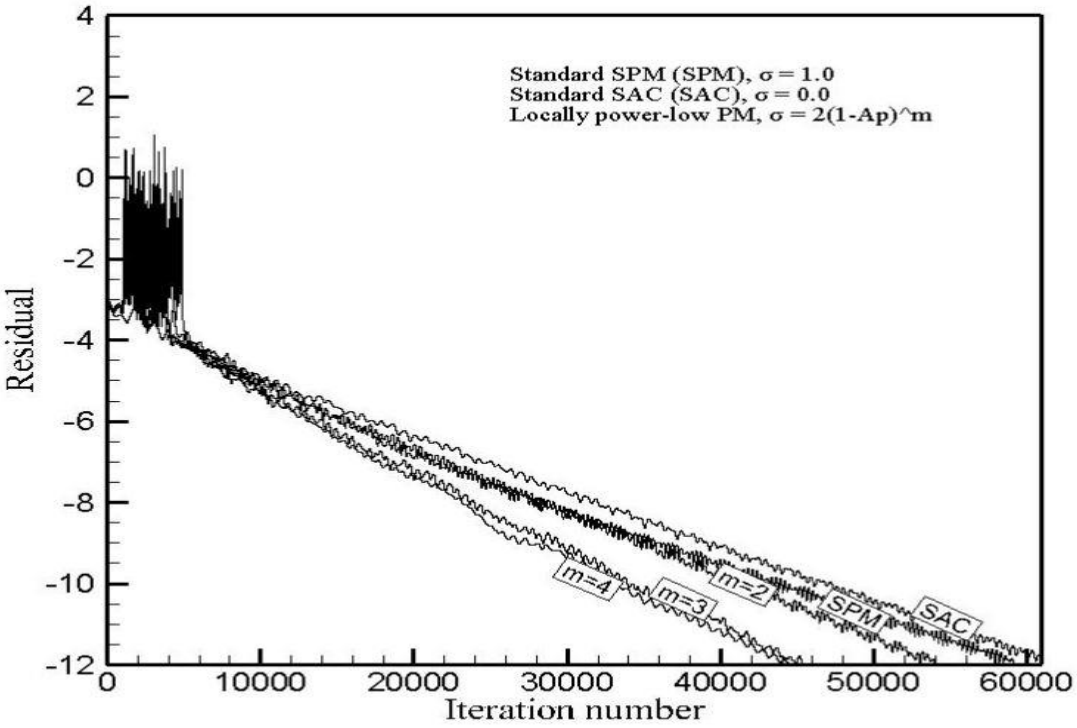
در مطالعه حاضر برای شبیه‌سازی، همان‌طور که در فصل قبل گفته شد از شرط پریودیک در راستا z استفاده شده است و برای نشان دادن شرط پریودیک و تأثیر آن بر حل، برای ابعاد ۱۰×۵۱ ×۱۰۱، ۱۲×۵۱ ×۱۰۱ و ۱۵×۵۱ ×۱۰۱ ضریب فشار حول هیدروفویل را در شکل ۴-۸ مقایسه شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت تعداد گره در راستا z به دلیل اعمال شرط تناوبی در مسئله تأثیری در جواب ندارد، در ادامه حل از شبکه با ابعاد ۱۰×۵۱ ×۱۰۱ استفاده شده است.



شکل ۴-۸ بررسی تعداد گره در راستا z پیرامون هیدروفویل NACA 0012

۴-۲-۲-۴ بررسی روش پیش‌شرط توانی در بهبود همگرایی

در این بخش روش پیش‌شرط توانی را با روش‌های تراکم‌پذیری استاندارد (SAC) و روش پیش‌شرط استاندارد (SPM) مورد مقایسه و ارزیابی قرار گرفته است. شکل ۴-۹ تأثیر روش پیش‌شرط در عدد رینولدز Re = 500 و در زاویه حمله ده درجه حول هیدروفویل NACA 0012 نشان می‌دهد. از بررسی نمودار زیر مشخص می‌شود، استفاده از ضریب پیش‌شرط توانی با توان بهینه ($m = 4$) نرخ همگرایی را افزایش می‌دهد. همچنین روش پیش‌شرط توانی در مقایسه با دو روش (SAC و SPM) زمان محاسبات را ۲۵ تا ۳۰ درصد کاهش می‌دهد.

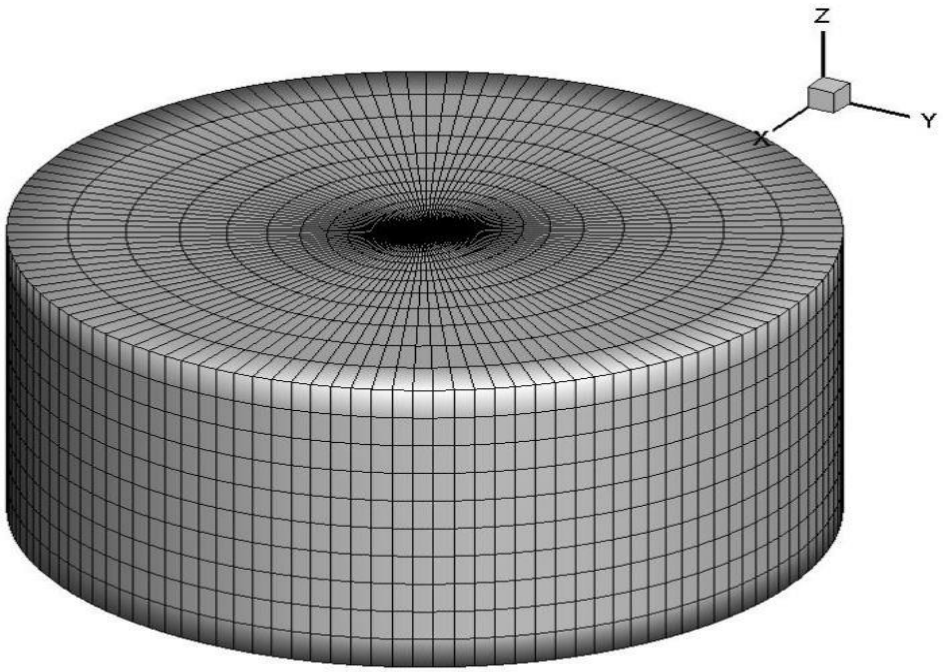


شکل ۴-۹ مقایسه روش‌های SAC و روش SPM با روش پیش‌شرط توانی با توان‌های مختلف برای هیدروفویل NACA 0012

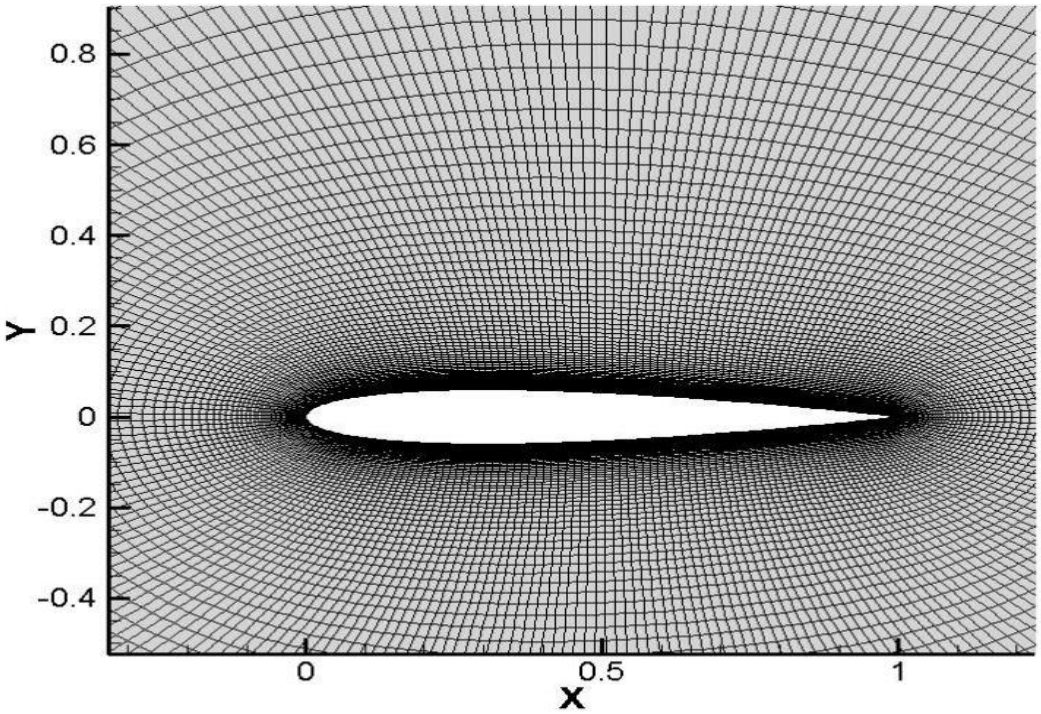
۴-۳ جریان ناپایا

۴-۳-۱ شبکه‌بندی میدان حل

شبکه‌بندی مورداستفاده در این پایان‌نامه، شبکه‌بندی با سازمان از نوع o که دارای ۲۵۰ گره در راستای محور x و ۱۳۰ گره در راستای محور y و ۱۰ گره در راستای محور z همچنین فاصله اولین گره محاسباتی تا دیوار هیدروفویل ۰/۰۰۰۳ – ۰/۰۰۰۴ برابر طول وتر هیدروفویل در نظر گرفته شده است. مرز خارجی مساحت جانبی استوانه است و سطح مقطع استوانه دایره‌ای به شعاع ۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شده است . گام زمان حقیقی $\Delta t = 0.01$ در نظر گرفته شده است و در هر گام زمانی حقیقی میدان حل تا 10^{-4} همگرا می‌شود.



شکل ۴-۱۰ نمای دور از شبکه‌بندی پیرامون هیدروفویل NACA 0012

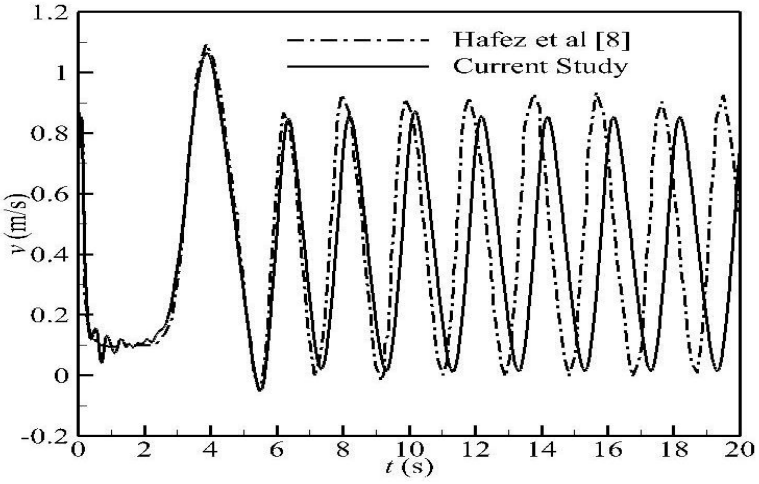


شکل ۴-۱۱ نمای نزدیک از شبکه‌بندی پیرامون هیدروفویل NACA 0012

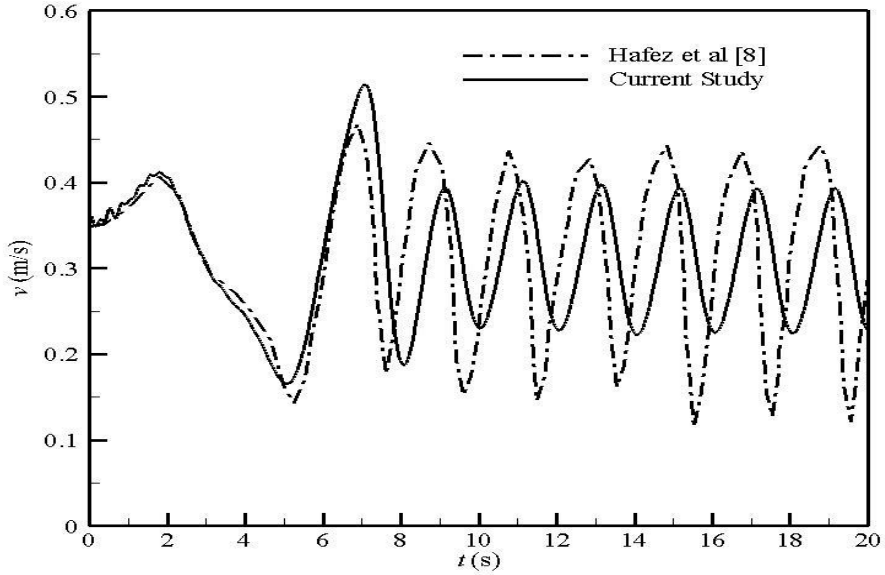
۴-۳-۲ نتایج عددی و اعتبار سنجی

برای مقایسه الگوریتم جریان آرام ناپایا تراکم‌ناپذیر از نتایج عددی حافظ و همکاران [۸] و همچنین شاتالوو [۷] کمک گرفته شده است. برای بررسی صحت الگوریتم ناپایا، جریان آرام حول هیدروفویل NACA 0012 در رینولدز Re = 800 و در زاویه حمله بیست درجه شبیه‌سازی شده است. نتایج و نمودارهای که در زیر آمده است با مراجع حافظ و همکاران [۸] و شاتالوو [۷] مقایسه شده‌اند و از تطابق خوبی برخوردار هستند. دلیل اختلاف نمودارها ناشی از اختلاف میزان خطا محاسباتی می‌باشد. در این حل میزان خطا محاسباتی 10^{-4} در نظر گرفته شده است اما در مراجع بالا میزان خطا محاسباتی کمتر انتخاب شده است. انتخاب میزان خطا محاسباتی با محدودیت همراه می‌باشد، این محدودیت به‌خاطر هندسه سه‌بعدی و تعداد نقاط شبکه محاسباتی زیاد می‌باشد. در نتیجه با انتخاب خطا محاسباتی مناسب که تطابق خوبی با مراجع یاد شده دارند زمان محاسبات کاهش پیدا می‌کند.

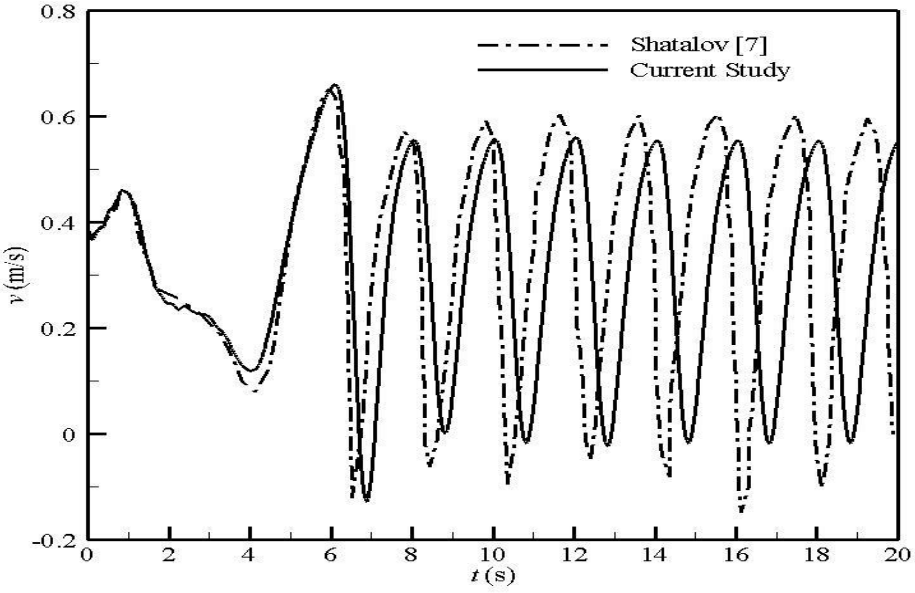
شکل‌های ۴-۱۲ و ۴-۱۳ تغییرات سرعت عمودی v نسبت به زمان، در مکان پشت هیدروفویل $x = 1.1 , y = 0$ و x=3, y=0 در قیاس با نتایج مرجع نشان داده‌شده است. سپس در شکل ۴-۱۴ تغییرات سرعت عمودی v در مکان $x = 2 , y = 0$ در مقایسه با مرجع [۷] نشان داده‌شده است.



شکل ۴-۱۲ تغییرات سرعت عمودی v در مکان $x = 1.1 , y = 0 , z = 0$ پشت هیدروفویل NACA 0012 برحسب زمان در $Re = 800$ و زاویه بیست درجه در مقایسه با مرجع [۸]

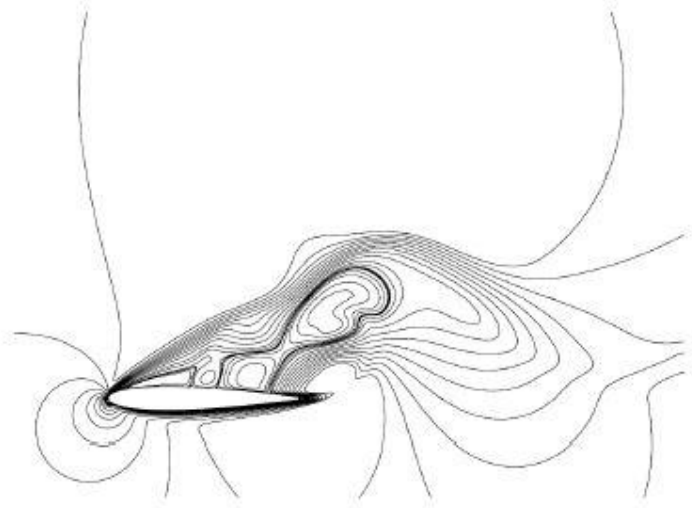


شکل ۴-۱۳ تغییرات سرعت عمودی v در مکان x = 3.0 , y = 0 , z = 0 پشت هیدروفویل NACA 0012 برحسب زمان در Re = 800 و زاویه بیست درجه در مقایسه با مرجع [۸]

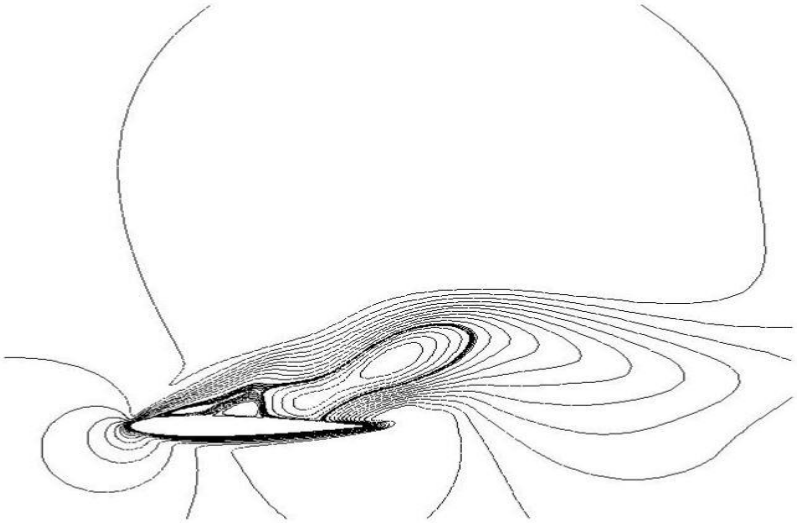


شکل ۴-۱۴ تغییرات سرعت عمودی v در مکان x = 2.0 , y = 0 , z = 0 پشت هیدروفویل NACA 0012 برحسب زمان در Re = 800 و زاویه بیست درجه در مقایسه با مرجع [۷]

در شکل ۴-۱۵ خطوط هم‌تراز سرعت افقی u و در شکل ۴-۱۶ خطوط هم‌تراز سرعت عمودی v با نتایج حاصل از مرجع [۸] در Re = 800 و زاویه حمله بیست درجه برای هیدروفویل NACA 0012 در زمان ۵ ثانیه مقایسه شده است.

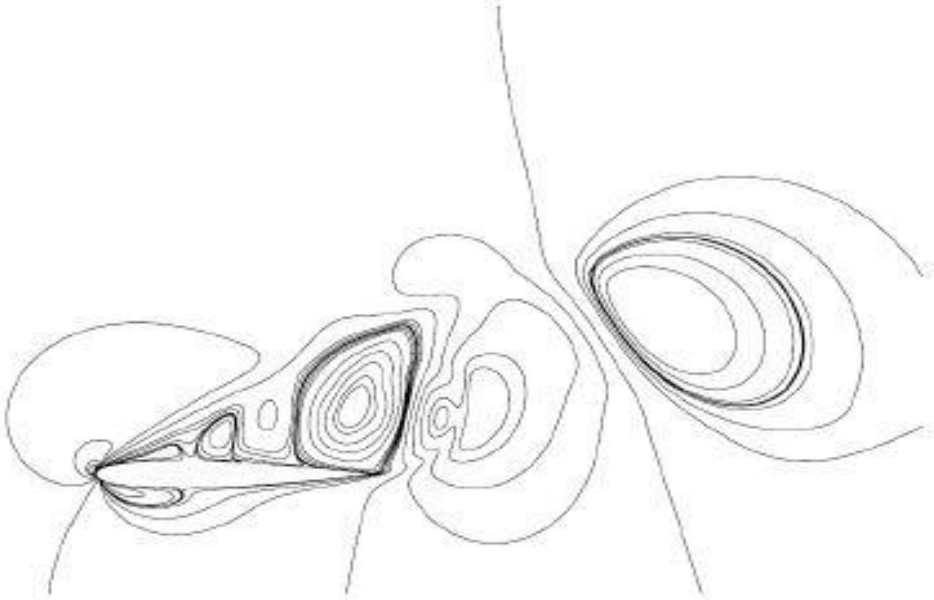


۱) حافظ و همکاران [۸]

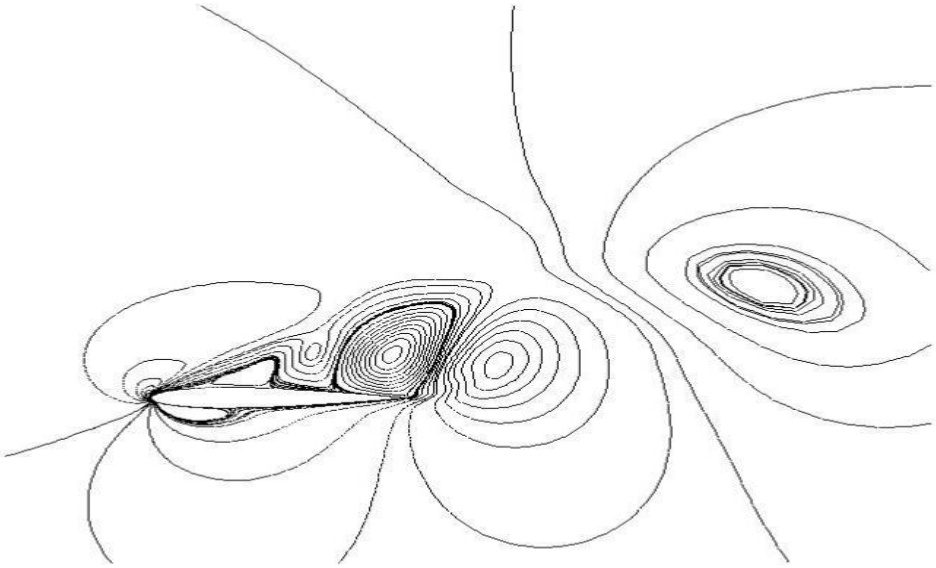


۲) مطالعه حاضر

شکل ۴-۱۵ مقایسه خطوط هم‌تراز سرعت افقی u با نتایج حاصل از [۸] در Re = 800 و زاویه حمله بیست درجه برای هیدروفویل NACA 0012 در زمان ۵ ثانیه



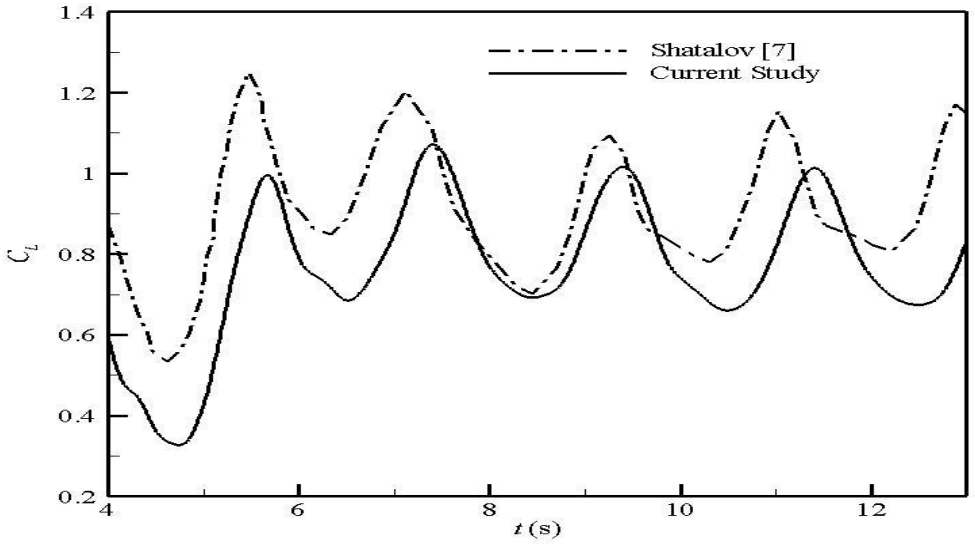
۱) حافظ و همکاران[۸]



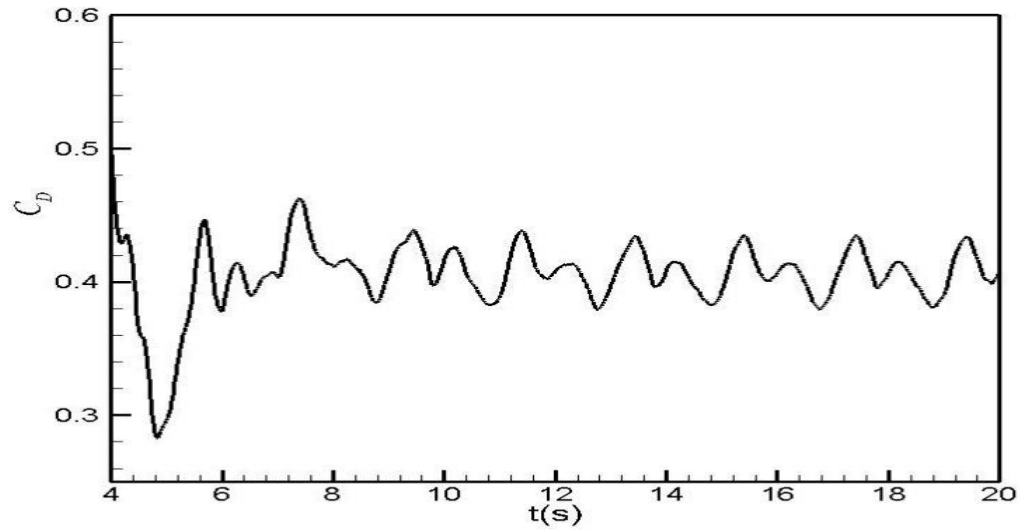
۲) مطالعه حاضر

شکل ۴-۱۶ مقایسه خطوط هم‌تراز سرعت افقی v با نتایج حاصل از [۸] در Re = 800 و زاویه حمله بیست درجه برای هیدروفویل NACA 0012 در زمان ۵ ثانیه

در شکل ۴-۱۷ نمودار ضریب برا برحسب زمان و در شکل ۴-۱۸ نمودار ضریب پسا برحسب زمان نشان داده شده است. این دو نمودار را با نتایج حاصل از شاتالوو [۷] مقایسه شده و از انطباق خوبی دارا می‌باشند.



شکل ۴-۱۷ ضریب برا بر روی هیدروفویل NACA 0012 برحسب زمان در Re = 800 با زاویه حمله ۲۰ درجه در مقایسه با شاتالوو [۷]

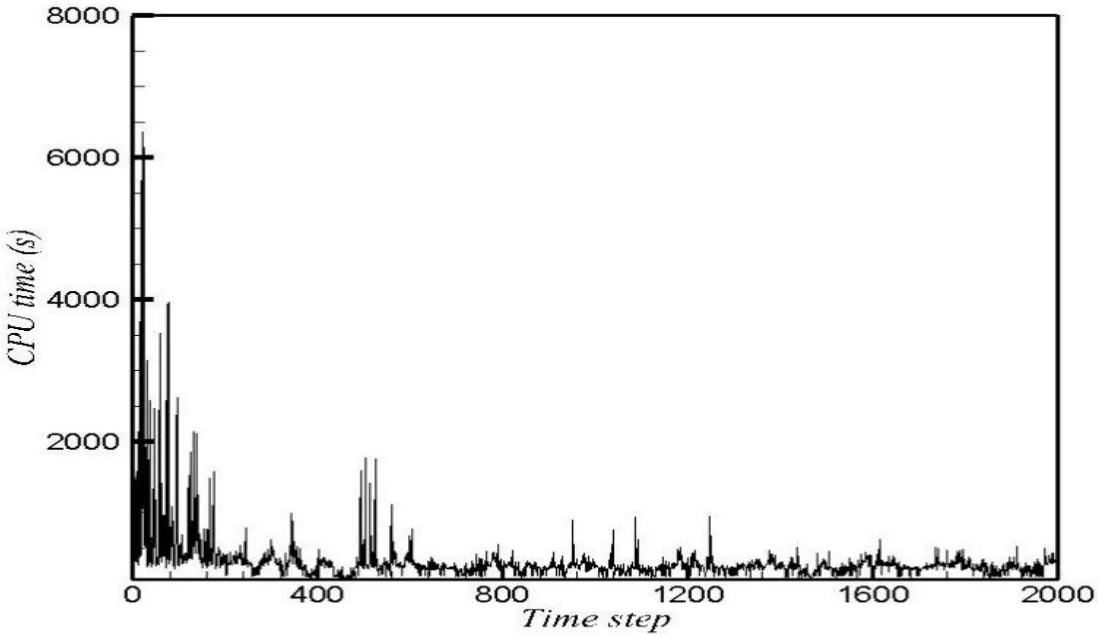


شکل ۴-۱۸ توزیع ضریب پسا بر روی هیدروفویل NACA 0012 برحسب زمان در Re = 800 با زاویه حمله ۲۰ درجه

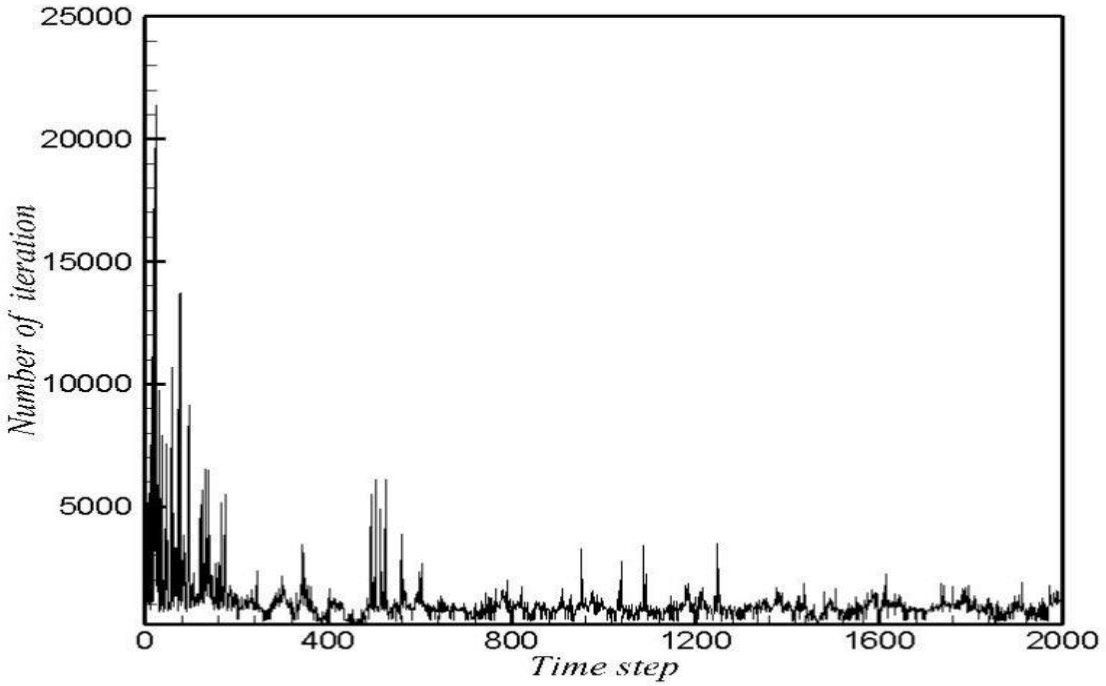
همان‌طور که گفته شده است با توجه به روند حل دستگاه معادلات حاکم و استفاده از الگوریتم دوزمانه، دو حلقه تکرار خارجی (زمان حقیقی) و داخلی (زمان مجازی) وجود دارد که با همگرایی در زمان مجازی، حل معادله در زمان حقیقی به دست می‌آید.

در شکل ۴-۱۹ زمان محاسبات پردازنده مرکزی برای اجرای یک حلقه داخلی در زمان‌های مختلف برای جریان عبوری از هیدروفویل NACA 0012 در Re = 800 و زاویه حمله بیست درجه نشان داده شده است. این شکل فرایند حل کامل جریان ناپایا (یعنی ۲۰ ثانیه یا ۲۰۰۰ تکرار حلقه خارجی با گام زمانی حقیقی ۰/۰۱ ثانیه می‌باشد) و برای خطا محاسباتی 10^{-4} رسم شده است.

در شکل ۴-۲۰ تعداد تکرار برای اجرای حلقه داخلی در زمان‌های مختلف برای جریان عبوری از هیدروفویل NACA 0012 در Re = 800 و زاویه حمله بیست درجه نشان داده شده است. این شکل تعداد تکرار در هر گام زمانی مجازی را مشخص می‌کند، و برای خطا محاسباتی 10^{-4} رسم شده است.



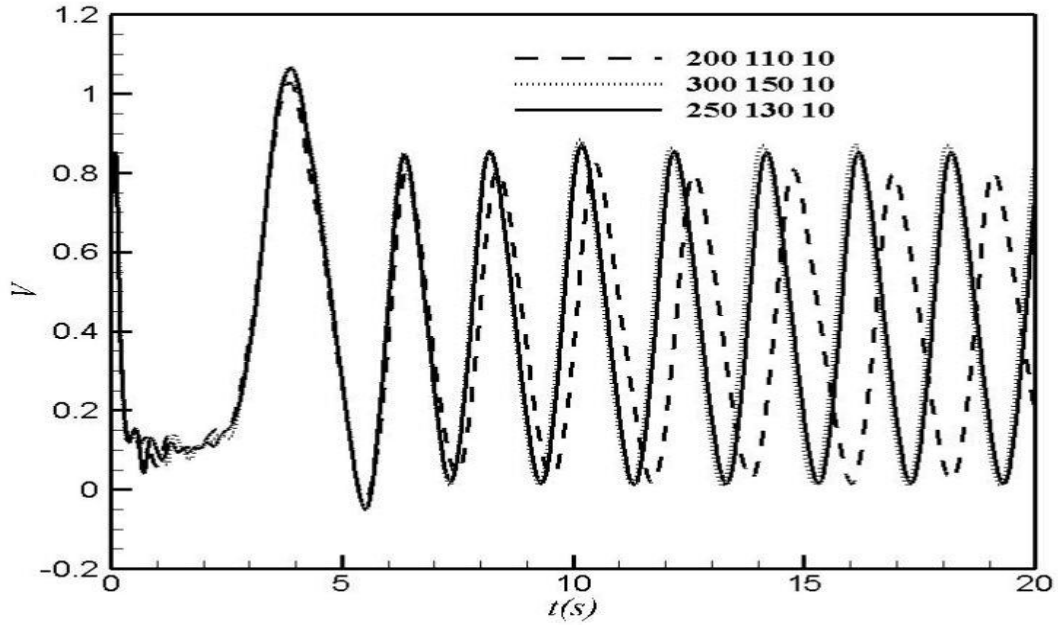
شکل ۴-۱۹ زمان CPU در هر گام زمانی برای هیدروفویل NACA 0012 در Re = 800 با زاویه حمله ۲۰ درجه



شکل ۴-۲۰ تعداد تکرارها برای هیدروفویل NACA 0012 در Re = 800 با زاویه حمله ۲۰ درجه

۴-۳-۳ استقلال حل از شبکه محاسباتی

برای بررسی استقلال حل از شبکه محاسباتی، سه شبکه به ابعاد ۱۰×۱۱۰×۲۰۰، ۱۰×۱۳۰×۲۵۰ و ۱۰×۱۵۰ ×۳۰۰ ایجاد شده است. نتایج تغییرات سرعت عمودی v در مکان x = 1.1، y = 0.0 و z = 0.0 پشت هیدروفویل NACA 0012 با عدد رینولدز Re = 800 و $\alpha = 20°$ برحسب زمان در شکل ۴-۲۱ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نمودار مربوط به شبکه با ابعاد ۱۰×۱۳۰×۲۵۰ انطباق نسبتاً خوبی در قیاس با دو شبکه دیگر دارد. با توجه به اعتبارسنجی انجام شده در نمودارهای قبلی که جزئیات آن در بخش قبلی ارائه شد، از دقت خوب و مناسبی برای حل جریان‌های ناپایا پیرامون هیدروفویل NACA 0012 دارا می‌باشد. برای کاهش زمان محاسبات از شبکه‌بندی با ابعاد ۱۰×۱۳۰×۲۵۰ استفاده شده است.

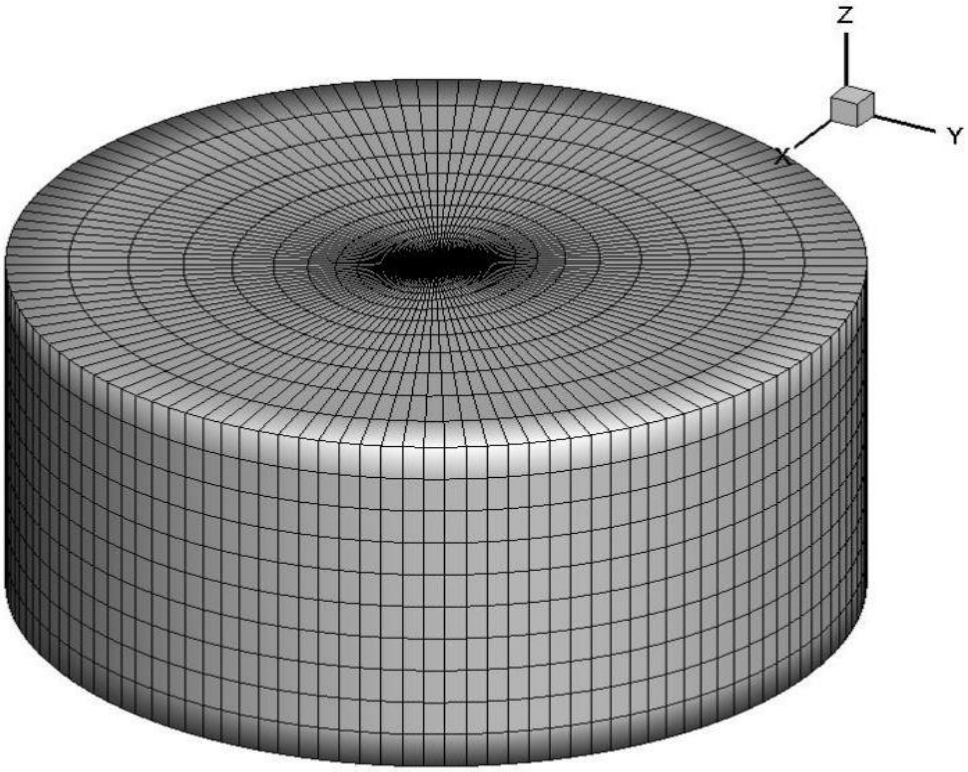


شکل ۴-۲۱ بررسی شبکه‌بندی‌های مختلف پیرامون هیدروفیل NACA 0012

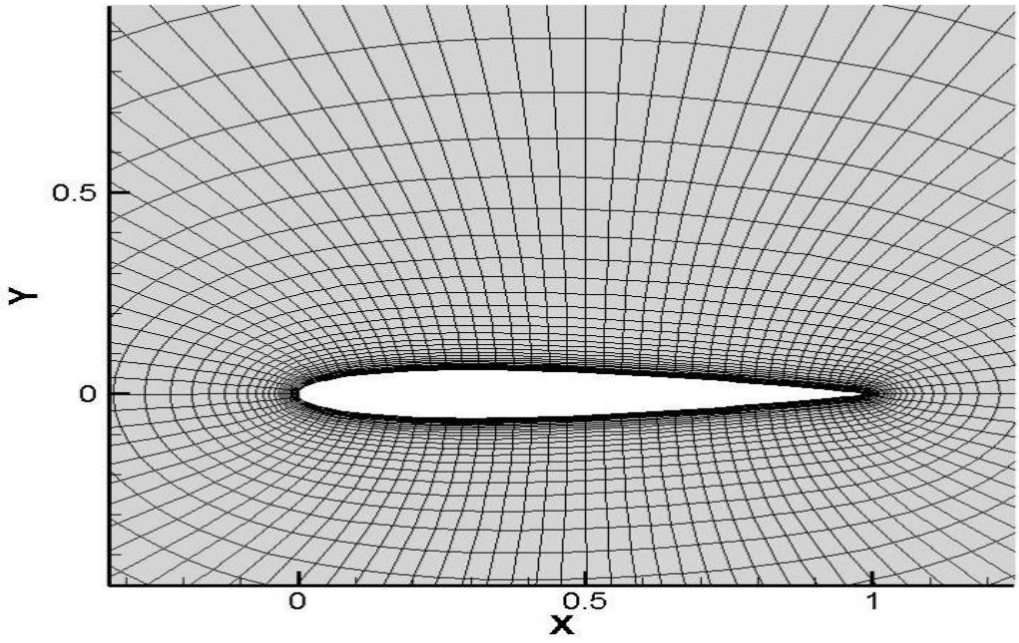
۴-۴ جریان پایا با تغییر زاویه در راستا z

۴-۴-۱ شبکه‌بندی میدان حل

شبکه‌بندی مورد استفاده در این پایان‌نامه، شبکه‌بندی با سازمان از نوع o که دارای ۱۰۱ گره در راستا محور x و ۵۱ گره در راستا محور y و ۱۰ گره در راستا محور z همچنین فاصله اولین گره محاسباتی تا دیوار هیدروفویل ۰/۰۰۰۳ – ۰/۰۰۰۴ برابر طول وتر هیدروفویل در نظر گرفته شده است. مرز خارجی مساحت جانبی استوانه است و سطح مقطع استوانه دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شده است.



شکل ۴-۲۲ نمای دور از شبکه‌بندی پیرامون هیدروفویل NACA 0012

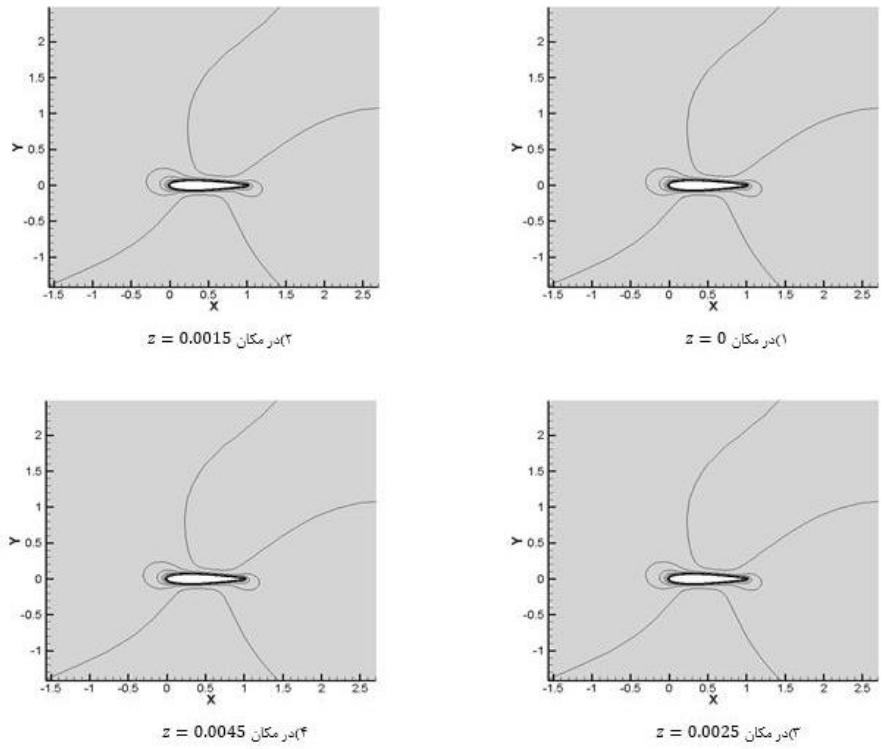


شکل ۴-۲۳ نمای نزدیک از شبکه‌بندی پیرامون هیدروفویل NACA 0012

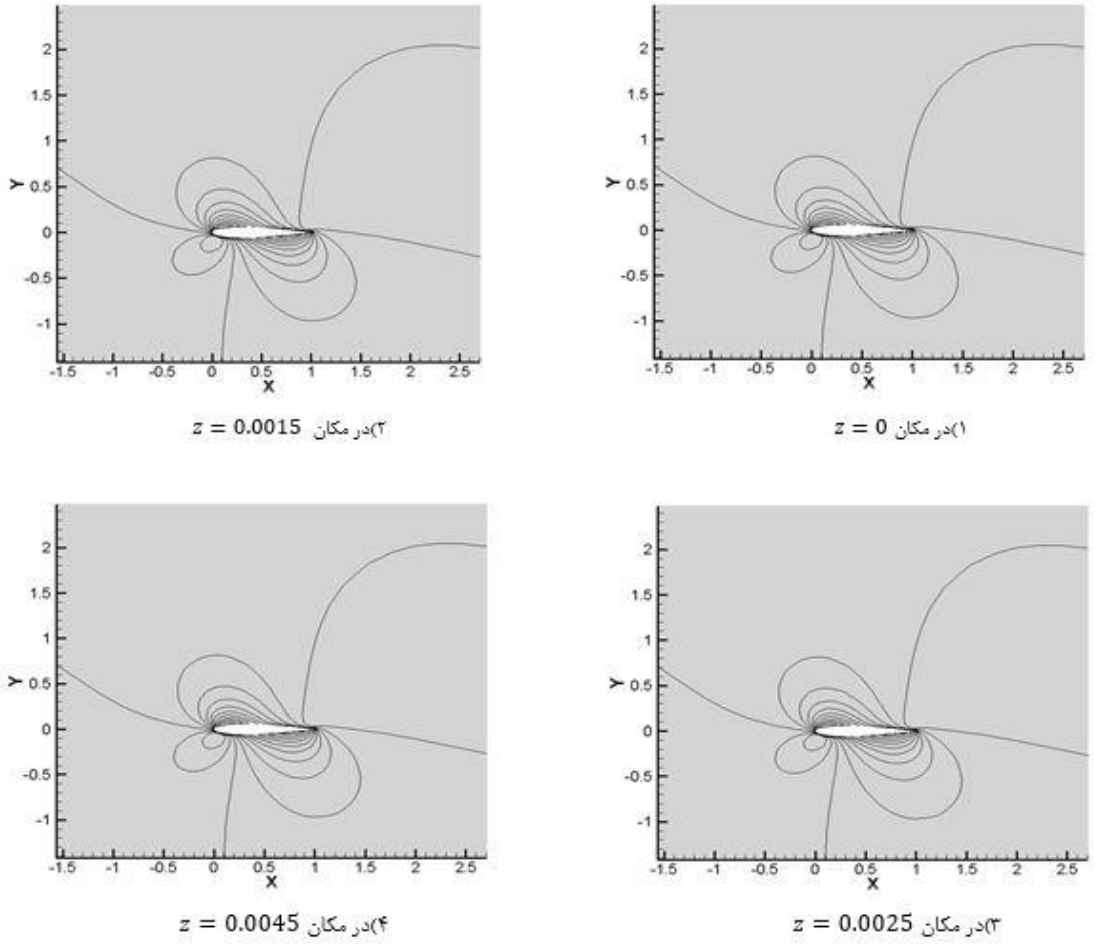
۴-۴-۲ نتایج عددی و اعتبار سنجی

برای ارزیابی الگوریتم جریان آرام پایا تراکم‌ناپذیر به‌دلیل استفاده از شرط تناوبی در مسئله برای بررسی صحت نتایج به دست آمده بایستی مؤلفه‌های سرعت و فشار در راستا z پیرامون هیدروفویل یکسان باشد برای این منظور برش‌های در راستا محور z ایجاد می‌شود و مؤلفه‌های سرعت آن مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرد. برای بررسی درستی الگوریتم پایا، جریان آرام هیدروفویل NACA 0012 در Re = 500 با زاویه حمله $\alpha = 10°$ و $\theta = 45°$ شبیه‌سازی شده است.

در شکل ۴-۲۴ مقایسه خطوط هم‌تراز سرعت u و در شکل ۴-۲۵ مقایسه خطوط هم‌تراز سرعت v پیرامون هیدروفویل NACA 0012 در Re = 500 با زاویه حمله $\alpha = 10°$ و $\theta = 45°$ در چهار برش ایجاد شده را مورد مقایسه قرار می‌گیرد. برش اول در مکان $z = 0$، برش دوم در مکان Z = 0.0015، برش سوم در مکان $z = 0.0025$ و در برش چهارم در مکان $z = 0.0045$ ایجاد شده است.

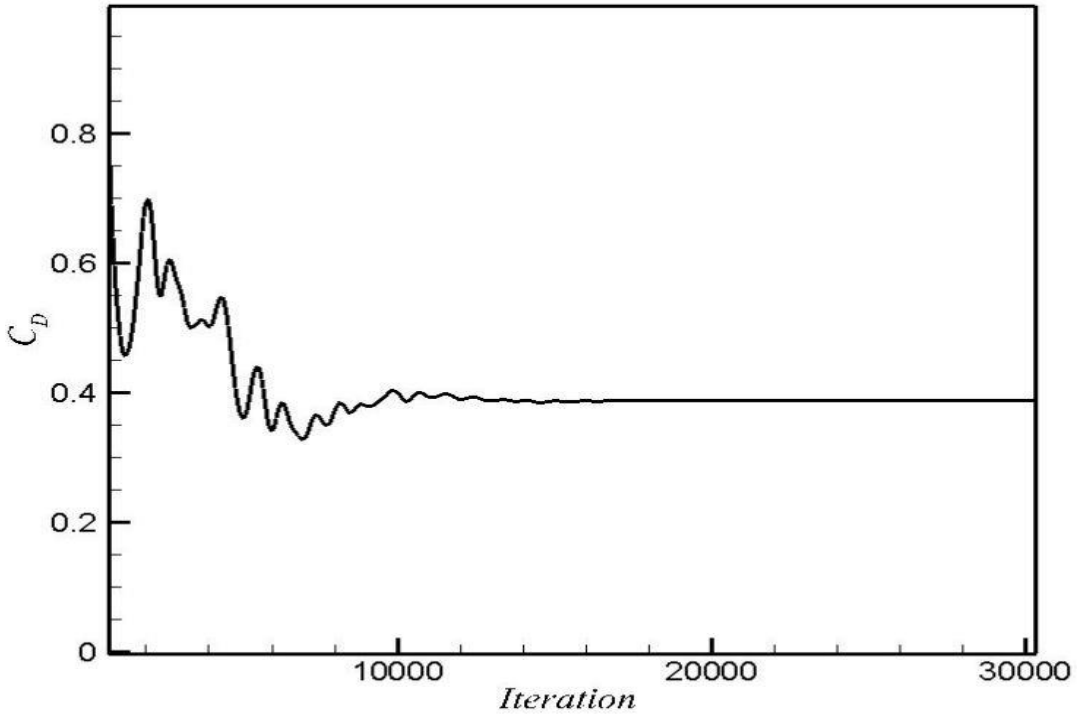


شکل ۴-۲۴ مقایسه سرعت u پیرامون هیدروفویل NACA 0012 در Re = 500 با زاویه حمله $\alpha = 10°$ و $\theta = 45°$ در چهار برش نشان داده شده



شکل ۴-۲۵ مقایسه سرعت v پیرامون هیدروفویل NACA 0012 در $Re = 500$ با زاویه حمله $\alpha = 10°$ و $\theta = 45°$ در چهار برش نشان داده شده

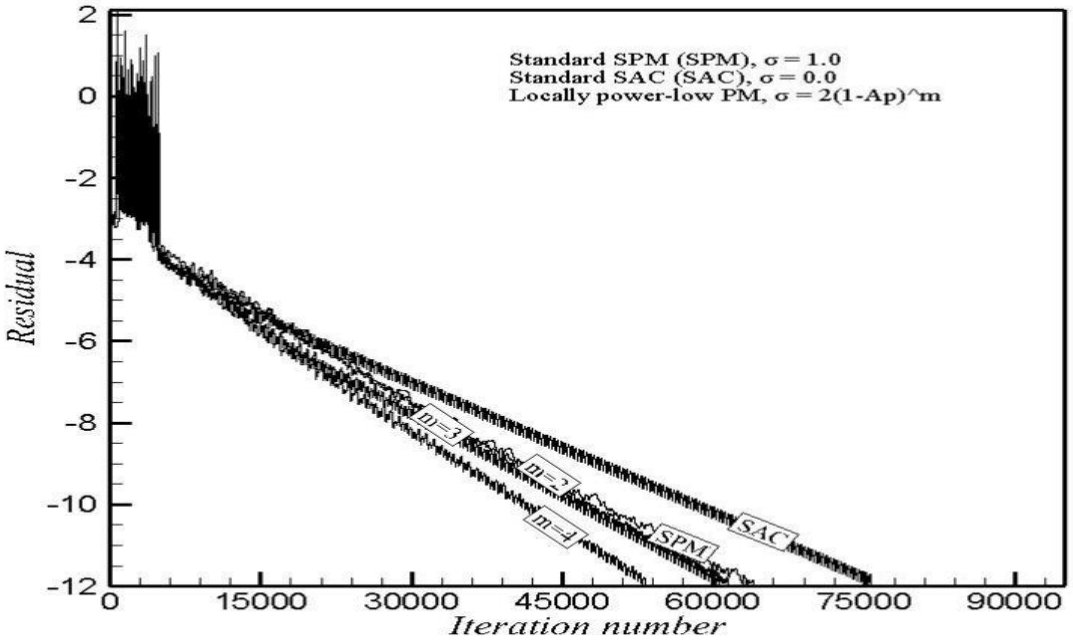
از شکل‌های ۴-۲۴ و ۴-۲۵ نتیجه می‌شود که مقادیر سرعت در برش‌های نشان داده شده یکسان هست و درستی الگوریتم را نشان می‌دهد. در شکل ۴-۲۶ توزیع ضریب پسا را نشان می‌دهد، با بررسی شکل می‌توان نوسانات تغییر ضریب پسا را مشاهده کرد و بعد از طی کردن ۱۰۰۰۰ تکرار، این ضریب مقدار ثابتی دارد.



شکل ۴-۲۶ نمودار توزیع ضریب پسا هیدروفویل NACA 0012

۴-۴-۳ بررسی روش پیش‌شرط توانی در بهبود همگرایی

در این بخش روش پیش‌شرط توانی را با روش‌های تراکم‌پذیری استاندارد (SAC) و روش پیش‌شرط استاندارد (SPM) مورد مقایسه و ارزیابی قرار گرفته است. شکل ۴-۲۷ تأثیر روش پیش‌شرط در عدد رینولدز $Re = 500$ و در زاویه حمله $\alpha = 10°$ و $\theta = 45°$ حول هیدروفویل NACA 0012 نشان می‌دهد. از بررسی نمودار زیر مشخص می‌شود، استفاده از ضریب پیش‌شرط توانی با توان بهینه (m=4) نرخ همگرایی را افزایش می‌دهد. همچنین روش پیش‌شرط توانی در مقایسه با دو روش (SAC و SPM) زمان محاسبات را ۲۰ تا ۴۰ درصد کاهش می‌دهد.



شکل ۴-۲۷ مقایسه روش‌های SAC و روش SPM با روش پیش‌شرط توانی با توان‌های مختلف برای هیدروفویل NACA 0012

فصل ۵ : نتیجه گیری و پیشنهادها

در فصل حاضر چکیده‌ای از نتایج حاصل از مطالعات صورت گرفته در این پایان‌نامه ارائه می‌شود.در پایان این فصل پیشنهادهایی جهت ارتقای مطالعات بعدی ارائه می‌گردد.

۵-۱ بحث و نتیجه‌گیری

در حال حاضر پژوهشگران تمایل زیادی به شبیه‌سازی دائم و غیردائم جریان‌های تراکم‌ناپذیر برای اجسام متحرک دارند. این شبیه‌سازی‌ها استفاده زیادی در بخش‌های مختلف آیرودینامیک و هیدرودینامیک کاربردی دارد که از جمله می‌توان به بررسی آیرودینامیک اجسام پرنده، بررسی آیرودینامیک ایرفویل‌ها (پره بالگرد، وسایل هوایی میکرو و ...)، شبیه‌سازی جریان آشفته و ... اشاره نمود. در تحقیق حاضر، الگوریتمی برای شبیه‌سازی عددی جریان‌های پایا و ناپایا لزج با کمک از روش تراکم‌پذیری مصنوعی معرفی گردید. یکی از نکات مهم در روش تراکم‌پذیری مصنوعی، روش انتخاب ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی می‌باشد. انتخاب ضریب تراکم‌پذیری به‌صورت محلی هست زیرا باعث پایداری و افزایش سرعت همگرایی می‌شود.

در این پایان‌نامه، الگوریتم سه بعدی جهت شبیه‌سازی عددی جریان‌های پایا و ناپایا لزج با استفاده از روش تراکم‌پذیری مصنوعی ارائه شد. از آن‌جا که یکی از بحث‌های مطرح در روش تراکم‌پذیری مصنوعی، نحوه‌ی انتخاب ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی می‌باشد. نحوه‌ی انتخاب این ضریب به‌صورت محلی و براساس رژیم جریان ارائه گردید.

در جریان‌های تراکم‌ناپذیر میان مقادیر ویژه دستگاه معادلات اختلاف زیادی هست و این اختلاف سختی دستگاه معادلات را در پی دارد. برای رفع این مشکل در این پایان‌نامه، از روش پیش‌شرطی برای کاهش اختلاف میان مقادیر ویژه دستگاه معادلات برای کم کردن سختی معادلات، استفاده شده است. نکته بسیار مهمی که در روش‌های پیش‌شرط مطرح می‌شود، انتخاب پیش‌شرط بهینه که بهترین نرخ همگرایی را دارا باشد. در پایان‌نامه حاضر از روش پیش‌شرط توانی استفاده شده است. در روش پیش‌شرط با ایجاد یک ماتریس پیش‌شرط موضعی و تصحیح ماتریس‌های پیش‌شرط قبلی که در آن از مقدار ثابت

جهت ضریب پیش‌شرط استفاده می‌شد، نرخ همگرایی و دقت حل مسئله باهم مورد بررسی قرار می‌گیرد. ضریب پیش‌شرط توانی به‌صورت موضعی و با در نظر گرفتن حسگرهای موضعی میدان سرعت (در هر گام زمانی) و با استفاده از رابطه توانی حساب می‌شود. در این پایان‌نامه برای اولین بار از روش پیش‌شرط توانی جهت شبیه‌سازی جریان‌های پایا و ناپایا به‌صورت استفاده شده است و تاثیر این روش بر نرخ همگرایی در جریان‌های پایا مورد بررسی قرار گرفته است.

الگوریتم عددی استفاده شده برای حل دستگاه معادلات، شیوه حجم محدود از نوع مرکزیت سلول که برای حذف نوسانات به دلیل استفاده از شیوه تفاضل مرکزی در محاسبه شارها، از عبارت میرایی عددی که به‌وسیله جیمسون معرفی شده است. در این روش معادلات ناویر-استوکس با تغییر جمله مشتق زمانی معادلات حاکم تصحیح می‌شود. و برای حل جریان ناپایا از یک الگوریتم ضمنی دوزمانه استفاده می‌شود. برای همگرایی حل به سمت حالت دائم، روش انتگرال‌گیری زمانی رانج-کوتاه صریح چهار مرحله‌ای می‌باشد. در این پایان‌نامه، جریان لزج تراکم‌ناپذیر پایا و ناپایا پیرامون هیدروفویل NACA 0012 در اعداد رینولدز و زاویه حمله متفاوت بررسی شده است.

نتایج حاصل از پایان‌نامه را با نتایج سایر محققان مقایسه و بررسی شده است و نشان می‌دهد الگوریتم حاضر دقت خوبی داراست. با اعمال روش تراکم‌پذیری مصنوعی و کمک از روش پیش‌شرط در این مطالعه نشان داده می‌شود، استفاده از شیوه پیش‌شرط توانی و مقایسه با روش‌های مانند SPM و SAC کاهش تکرار گام‌های عددی و افزایش نرخ همگرایی را نتیجه می‌شود. با توجه به نتایج مطالعه حاضر مشخص می‌شود با انتخاب ضریب پیش‌شرط بهینه در روش پیش‌شرط توانی، تعداد گام‌های تکرار مسئله را ۲۰ تا ۵۰ درصد در قیاس با سایر روش‌های پیش‌شرط (SPM و SAC) کاهش دارد. مقدار بهینه ضریب پیش‌شرط توانی ثابت نیست و در بازه $2 \leq m \leq 4$ قرار دارد. در جدول زیر روش پیش‌شرط توانی با روش‌های تراکم‌پذیری و پیش‌شرط استاندارد با توجه به نتایج حاصل از پایان‌نامه مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است.

جدول ۵-۱ : تاثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA 0012

نوع جریان	زاویه حمله	عدد رینولدز	کاهش تکرار نسبت به روش تراکم‌پذیری استاندارد (٪)	کاهش تکرار نسبت به روش پیش‌شرط استاندارد (٪)	توان بهینه
پایا	$\alpha = 0°$	۵۰۰۰	۵۰	۴۰	۲
پایا	$\alpha = 10°$	۵۰۰	۳۰	۲۵	۴
پایا	$\alpha = 10°$ $\theta = 45°$	۵۰۰	۴۰	۲۰	۴

۵-۲ پیشنهادها

برای بالا بردن سطح کیفی مطالعه حاضر و انجام مطالعات کامل در جهت موضوع پایان‌نامه، پیشنهادهای زیر عنوان می‌شوند:

الف) از شبکه‌بندی با سازمان از نوع C[1] در شبکه‌بندی حل استفاده شود.

ب) از شیوهای عددی مرتبه بالاتر و ترکیب آن با شیوه پیش‌شرط توانی در حل استفاده شود.

پ) گسترش و توسعه برنامه برای حل جریان‌های کاویتاسیونی به‌صورت سه‌بعدی

ت) گسترش و توسعه برنامه برای حل جریان‌های آشفته به‌صورت سه‌بعدی

ث) گسترش و توسعه برنامه برای حل جریان‌های با در نظر گرفتن دمش و مکش از سطح هیدروفویل

[1] C-Grid

مراجع

[1] Blazek, J. (2015). *Temporal Discretization in Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, Third Edition, Butterworth-Heinemann, Oxford, 167-211.

[2] Jameson, A. (1991) Time dependent calculations using multigrid with applications to unsteady flows past airfoils and wings. *In 10th Computational Fluid Dynamics Conference*, 1596, Honolulu, HI, U.S.A.

[3] Arnone, A., Liou, M. S., & POVINELLI, L. (1993) Multigrid time-accurate integration of Navier-Stokes equations. *In 11th Computational Fluid Dynamics Conference*, 3361, Orlando, Fl, U.S.A.

[4] Melson, N. D., Atkins, H. L., & Sanetrik, M. D. (1993) Time-accurate Navier-Stokes calculations with multigrid acceleration. *In The Sixth Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, 423-439*, Colorado, U.S.A*

[5] Venkatakrishnan, V., & Mavriplis, D. J. (1996) Implicit method for the computation of unsteady flows on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, **127**(2), 380-397.

[6] Hsu, J. M. J. (2004) *An implicit-explicit flow solver for complex unsteady flow*s, PhD Thesis, Stanford University, California.

[7] Shatalov, A.V.(2006)*Numerical simulations of incompressible laminar flows using viscous-inviscid interaction procedures*, PhD Thesis, The University of California Davis, California.

[8] Hafez, M., Shatalov, A., & Nakajima, M. (2007) Improved numerical simulations of incompressible flows based on viscous/inviscid interaction procedures, *Computers* . *Fluids*, **36**(10), 1588-1591.

[9] Young, J., & Lai, J. C. S. (2001). A computational study of the wake structure of a plunging airfoil. *In Computational Fluid Dynamics 2000*, 151-156, Springer, Berlin, Heidelberg.

[10] Szumowski, A. P., & Meier, G. E. A. (1996) Forced oscillations of airfoil flows, Experiments in Fluids, **21**(6), 457-464.

[11] Pines, D. J., & Bohorquez, F. (2006) Challenges facing future micro-air-vehicle development, *Journal of Aircraft*, **43**(2), 290-305.

[12] Shyy, W., Lian, Y., Tang, J., Viieru, D., & Liu, H. (2008) *Aerodynamics of low Reynolds number flyers*, Cambridge University Press

[13] Shyy, W., Aono, H., Chimakurthi, S. K., Trizila, P., Kang, C. K., Cesnik, C. E., & Liu, H. (2010) Recent progress in flapping wing aerodynamics and aeroelasticity. *Progress in Aerospace Sciences*, **46**(7), 284-327.

[14] Kang, W., Lei, P., Zhang, J., & Xu, M. (2015) Effects of local oscillation of airfoil surface on lift enhancement at low Reynolds number. *Journal of Fluids and Structures*, **57**, 49-65.

[15] Chorin, A. J. (1997) A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, **135**(2), 118-125.

[16] Patankar, S. V., (1980) Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill.

[17] Viviand, H. (1985). Pseudo-unsteady systems for steady inviscid calculations Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 334

[18] Briley, W. R., McDonald, H., & Shamroth, S. J. (1983) A low Mach number Euler formulation and application to time-iterative LBI schemes. *AIAA journal*, **21**(10), 1467-1469.

[19] Turkel, E. (1987) Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of computational physics*, **72**(2), 277-298.

[20] Lee, W. T. (1992). *Local preconditioning of the Euler equations*, PhD Thesis, University of Michigan, Michigan.

[21] Choi, Y. H., & Merkle, C. L. (1993) The application of preconditioning in viscous flows. *Journal of Computational Physics*, **105**(2), 207-223.

[22] Merkle, C. (1995*) Preconditioning methods for viscous flow calculations, Computational Fluid Dynamics Review,* 419-436.

[23] Merkle, C. L., Sullivan, J. Y., Buelow, P. E., & Venkateswaran, S. (1998) Computation of flows with arbitrary equations of state. *AIAA Journal*, **36**(4), 515-521.

[24] Weiss, J. M., & Smith, W. A. (1995) Preconditioning applied to variable and constant density flows. *AIAA Journal*, **33**(11), 2050-2057.

[25] VA, B., Lee, W. T., & ROE, P. (1991) Characteristic time-stepping or local preconditioning of the Euler equations. *In 10th Computational Fluid Dynamics Conference*, 1552, Honolulu, HI , U.S.A.

[26] Lee, D. (1996) *Local preconditioning of the Euler and Navier-Stokes equations.* PhD Thesis, University Of Michigan, Michigan.

[27] Zaccanti, M. R. (1999) *Analysis and design of preconditioning methods for the Euler equations*.PhD Thesis, Mississippi State University, Mississippi.

[28] Malan, A. G., Lewis, R. W., & Nithiarasu, P. (2002) An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous

incompressible flows: Part I. Theory and implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **54**(5), 695-714.

[29] Malan, A. G., Lewis, R. W., & Nithiarasu, P. (2002) An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: part II. application. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **54**(5), 715-729.

[۳۰] هجران فر.ک، فتاح حصاری.ک، عزت نشان. ا . ۱۳۸۸، الگوریتم پیش‌شرطی جهت تسریع همگرایی حل جریان‌های تراکم ناپذیر غیر لزج / لزج، *هفدهمین اجلاس سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک*، دانشگاه تهران، تهران

[31] Esfahanian, V., & Akbarzadeh, P. (2008) The Jameson's numerical method for solving the incompressible viscous and inviscid flows by means of artificial compressibility and preconditioning method. *Applied Mathematics and Computation*, **206**(2), 651-661.

[32] Esfahanian, V., Akbarzadeh, P., & Hejranfar, K. (2012) An improved progressive preconditioning method for steady non-cavitating and sheet-cavitating flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **68**(2), 210-232.

[33] Akbarzadeh, P., Mirzaee, I., Kayhani, M. H., & Akbarzadeh, E. (2014) Blowing and suction effect on drag and lift coefficients for viscous incompressible flows over hydrofoils by power-law preconditioning method. *Modares Mechanical Engineering*, **14**(4), 129-140.

[34] Akbarzadeh, P., & Akbarzadeh, E. (2014) Numerical investigation of blowing effect on hydrodynamic behavior of cavitating flows over hydrofoils using power law preconditioning method. *Modares Mechanical Engineering*, **14**(8), 59-67.

[35] Akbarzadeh, P., Lehdarboni, A. A., & Derazgisoo, S. M. (2018) A new smoothing approach for accelerating the convergence of power-law preconditioning method in steady and unsteady flows simulation. *International Journal of Mechanical Sciences*, **141**, 316-329.

[36] Akbarzadeh, P., Derazgisoo, S. M., & Lehdarboni, A. A. (2019). A Cell-Elimination method for solving steady and unsteady Navier–Stokes equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **69**, 304-319.

[37] Tamamidis, P., Zhang, G., & Assanis, D. N. (1996) Comparison of pressure-based and artificial compressibility methods for solving 3D steady incompressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, **124**(1), 1-13.

[۳۸] اکبرزاده.پ، ۱۳۸۹، رساله دکترا، روش‌های پیش‌شرط در شبیه‌سازی عددی جریان‌های کاویتاسیون، دانشکده مهندسی مکانیک، رساله دکترا دانشگاه تهران.

[39] Turkel, E. (1993) Review of preconditioning methods for fluid dynamics. *Applied Numerical Mathematics*, **12**(1-3), 257-284.

[40] Turkel, E. (1996) Preconditioning methods for low-speed flows. *In 14th Applied Aerodynamics Conference*, 2460, Virginia.

[41] Turkel, E., Fiterman, A., & Van Leer, B. (1993). Preconditioning and the limit to the incompressible flow equations. NASA Report 191500, ICASE Report 93-42, Virginia.

[42] Jameson, A. (1982) Steady-state solution of the Euler equations for transonic flow. In Transonic, Shock, and Multidimensional Flows, Academic press, New York, U.S pp.37-69

[43] Jameson, A., Schmidt, W., & Turkel, E. (1981) Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes. *In 14th fluid and plasma dynamics conference* , 1259, Palo Alto, CA, U.S.A.

[44] Coutier-Delgosha, O., Fortes-Patella, R., Reboud, J. L., Hakimi, N., & Hirsch, C. (2005) Numerical simulation of cavitating flow in 2D and 3D inducer geometries. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **48**(2), 135-167.

[45] Coutier-Delgosha, O., Fortes-Patella, R., Reboud, J. L., Hakimi, N., & Hirsch, C. (2005). Stability of preconditioned Navier–Stokes equations associated with a cavitation model. *Computers & Fluids*, **34**(3), 319-349.

[46] Belov, A., Martinelli, L., & Jameson, A. (1995) A new implicit algorithm with multigrid for unsteady incompressible flow calculations. *In 33rd Aerospace sciences meeting and exhibit*, 49, Palo Alto, CA, U.S.A.

[47] Coutier-Delgosha, O., Reboud, J. L., & Delannoy, Y. (2003) Numerical simulation of the unsteady behaviour of cavitating flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **42**(5), 527-548.

[48] Hejranfar, K., & Parseh, K. (2017) Preconditioned characteristic boundary conditions based on artificial compressibility method for solution of incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, **345**, 543-564.

Abstract

In this dissertation, The developed precondition method called the power preconditioning method has been used to analyze and study steady and unsteady laminar flows with a fixed attack angle passing through the hydrofoils in three dimensions. Researchers pay special attention to steady and unsteady flows in various fields. Flow with low Reynolds number is studied by researchers due to special applications such as drones and robots on a very small scale. Also, many experimental and numerical researches have been done on the dynamics of vortices, the study of hydrofoils and etc. In this study, the Navier-Stokes three-dimensional equations are modified by changing the temporal derivative quantity of the governing equations. Using the velocity field and the power relation, the preconditional matrix was modified and the Jameson finite volume numerical method of cell-center was used to integrate the governing equations. Unsteady flow is solved with help of the dual-time algorithm, time integration is done with the help of the explicit four-step Range-Kota time integration method. The simultaneous equations of the problem, which includes the equations of continuity and momentum in the Cartesian coordinate system in three dimensions, has been solved using an algorithm in C++ software. Steady and Unsteady three-dimensional incompressible flow passing through NACA 0012 hydrofoil is solved with Reynolds numbers and different attack angles. The results are in a good agreement with other studies of researchers and it can be seen from the results that the power preconditioning method has a high convergence rate and computations time reduces by 20 to 50 percent compared to other methods .

Keywords: Power-law preconditioning method, Steady flow, Unsteady flow, Finite volume, Dual-time solution.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronic Engineering

Three-dimensional solution Power-law preconditioning method to improve the convergence of the numerical simulation of unsteady flows around hydrofoils

By:Jafar Dara Roshtkhari

Supervisor:
Dr. Pooria Akbarzadeh

August, 2021