

صلى الله عليه وسلم



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک
رشته‌ی مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی ارتعاشات غیرخطی یک سیستم دونا نوصفحه‌ای متصل به هم توسط محیط
الاستیک غیرخطی تحت بارگذاری خارجی هارمونیک

نگارنده:

محمد حیدری سرائی

اساتید راهنما:

دکتر حبیب احمدی

دکتر امیر جلالی

بهمن ۱۳۹۹

تقدیم به

پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی
را تجربه نمایم

و به مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق، که وجودم برایش همه
رنج بود و وجودش برایم همه مهر

سپاسگزاری

از خانواده عزیزم سپاسگزارم که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بوده‌اند و در مواجهه با مشکلات، وجودشان همواره مایه دلگرمی من بوده است. از اساتید عزیز جناب آقای دکتر حبیب احمدی و دکتر امیر جلالی که با راهنمایی‌های دلسوزانه و عالمانه این مسیر را برایم هموار ساختند، نهایت قدردانی را دارم.

تعهدنامه

اینجانب **محمد حیدری سرائی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه با موضوع بررسی ارتعاشات غیرخطی یک سیستم دونانوصفحه‌ای متصل به هم توسط محیط الاستیک غیرخطی تحت بارگذاری خارجی هارمونیک تحت راهنمایی دکتر حبیب احمدی و دکتر امیرجلالی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام **دانشگاه صنعتی شاهرود** و یا **Shahrood University of Technology** به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضاء دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات، مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

امروزه مواد با ساختار نانو مانند نانوتیرها و نانوصفحه‌ها کاربردهای فراوانی در صنعت داشته و شناخت و مطالعه آنها از اهمیت بالایی برخوردار است. یکی از پرکاربردترین مواد نانوساختاری، نانوصفحه می‌باشد که به طور گسترده در مبدل‌ها، حسگرها و دستگاه‌های چندمنظوره استفاده می‌شود. معمولاً تغییر شکل‌های دینامیکی این مواد حائز اهمیت است، به همین علت رفتارهای دینامیکی-ارتعاشی نانو صفحات مورد مطالعه قرار می‌گیرد. لذا در این تحقیق ارتعاشات غیرخطی اجباری نانوصفحه مورد توجه خواهد بود. سیستم مورد مطالعه مطابق از دونانوصفحه که توسط محیط الاستیک غیرخطی به هم متصل شده‌اند، تشکیل شده است. سیستم تحت نیروی تحریک هارمونیک خارجی قرار دارد. از تئوری الاستیسیته غیرمحلی برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر سیستم استفاده می‌شود. از روش گلرکین برای گسسته‌سازی معادلات غیرخطی حاکم به معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی استفاده می‌شود. بعد از گسسته‌سازی معادلات غیرخطی حاکم از روش مقیاس چندگانه برای حل معادله دیفرانسیل عادی غیرخطی استفاده خواهد شد. در نهایت اثر پارامترهای مختلف مانند بستر الاستیک، پارامترهای غیرمحلی و دیگر پارامترهای هندسی و ساختاری سیستم روی رفتار ارتعاشی سیستم مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات غیرخطی، نانوصفحه، بستر الاستیک، رزونانس اولیه، رزونانس ثانویه

فهرست مطالب

فصل ۱: مقدمه.....	۱
۱-۱- مقدمه.....	۲
۲-۱- مروری بر کارهای گذشته.....	۲
۳-۱- ضرورت انجام تحقیق و نوآوری.....	۱۳
فصل ۲: استخراج معادلات.....	۱۵
۱-۲- تئوری الاستیسیته غیر محلی.....	۱۶
فصل ۳: استخراج معادلات برای دو نانوصفحه.....	۲۳
۱-۳- مقدمه.....	۲۴
۲-۳- معادلات دیفرانسیل حرکت.....	۲۴
فصل ۴: حل معادلات حرکت.....	۲۹
۱-۴- مقدمه.....	۳۰
۲-۴- بررسی ارتعاشات آزاد غیر خطی.....	۳۳
۳-۴- بررسی ارتعاشات اجباری غیر خطی.....	۳۶
۱-۳-۴- رزونانس اولیه $\Omega \approx \omega_1$	۳۶
۲-۳-۴- رزونانس اولیه $\Omega \approx \omega_1$ و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$	۳۹
۳-۳-۴- رزونانس ثانویه.....	۴۱
۱-۳-۳-۴- مافوق هارمونیک $\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_1$	۴۳
۲-۳-۳-۴- مادون هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_1$	۴۵
۳-۳-۳-۴- مادون هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_1$ و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$	۴۶

فصل ۵: نتایج.....	۵۱
۵-۱- مقدمه.....	۵۲
۵-۲- صحه گذاری نتایج.....	۵۲
۵-۳- نتایج ارتعاشات اجباری.....	۵۷
فصل ۶: نتیجه گیری و پیشنهادات.....	۶۷
۶-۱- نتیجه گیری.....	۶۸
۶-۲- پیشنهادات.....	۶۸
پیوست.....	۶۹
مراجع.....	۷۰

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱. شماتیک نانوصفحه مغناطیسی الکتروالاستیک متغیر تابعی بر روی بستر پسترناک..... ۴
- شکل ۱-۲. شماتیک نانوصفحه با هسته متخلخل متغیر تابعی با صفحه‌های پیزومغناطیسی..... ۵
- شکل ۱-۳. شماتیک دونانوصفحه متصل به هم با محیط الاستیک..... ۵
- شکل ۱-۴. شماتیک سیستم چند نانوصفحه‌ای..... ۶
- شکل ۱-۵. نمای جانبی نانوصفحه‌های ویسکوالاستیک..... ۷
- شکل ۱-۶. شماتیک دو نانوصفحه پیزوالکتریک..... ۷
- شکل ۱-۷. شماتیک سیستم چند نانوصفحه پیزوالکتریک..... ۸
- شکل ۱-۸. شماتیک دو نانوصفحه سیلیکون نانوکریستال بر روی بسترالاستیک..... ۹
- شکل ۱-۹. شماتیک دونانوصفحه ارتوتروپیک و نیروهای وارد بر آن..... ۱۱
- شکل ۳-۱. شماتیک سیستم مورد مطالعه..... ۲۴
- شکل ۵-۱. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر ضریب غیرمحلی در نانوصفحه بالا..... ۵۴
- شکل ۵-۲. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر ضریب غیرمحلی در نانوصفحه پایین..... ۵۵
- شکل ۵-۳. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر نسبت ابعاد در نانوصفحه بالا..... ۵۵
- شکل ۵-۴. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر نسبت ابعاد در نانوصفحه پایین..... ۵۶
- شکل ۵-۵. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر ضریب سختی بسترالاستیک در نانوصفحه بالا..... ۵۶
- شکل ۵-۶. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر ضریب سختی بسترالاستیک در نانوصفحه پایین..... ۵۷
- شکل ۵-۷. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه با مقادیر مختلفی از پارامتر غیرمحلی..... ۵۸
- شکل ۵-۸. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه با نسبت ابعاد مختلف..... ۵۸
- شکل ۵-۹. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه با مقادیر مختلفی از نیروی تحریک‌کننده..... ۵۹
- شکل ۵-۱۰. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه و حالت خاص با مقادیر مختلفی از پارامتر

- غیر محلی..... ۵۹
- شکل ۵-۱۱. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه و حالت خاص با نسب ابعاد مختلف..... ۶۰
- شکل ۵-۱۲. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه همراه و حالت خاص با مقادیر مختلفی از نیروی تحریک کننده..... ۶۰
- شکل ۵-۱۳. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک با مقادیر مختلفی از پارامتر غیر محلی..... ۶۱
- شکل ۵-۱۴. تغییرات پاسخ فرکانسی در رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک با نسبت ابعاد مختلف..... ۶۱
- شکل ۵-۱۵. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک با مقادیر مختلفی از نیروی تحریک کننده..... ۶۲
- شکل ۵-۱۶. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مادون هارمونیک با مقادیر مختلفی از پارامتر غیر محلی..... ۶۲
- شکل ۵-۱۷. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مادون هارمونیک با نسبت ابعاد مختلف..... ۶۳
- شکل ۵-۱۸. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مادون هارمونیک با مقادیر مختلفی از نیروی تحریک کننده..... ۶۳
- شکل ۵-۱۹. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مادون هارمونیک و حالت خاص با مقادیر مختلفی از پارامتر غیر محلی..... ۶۴
- شکل ۵-۲۰. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مادون هارمونیک و حالت خاص با نسبت ابعاد مختلف..... ۶۵
- شکل ۵-۲۱. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مادون هارمونیک و حالت خاص با مقادیر مختلفی از نیروی تحریک کننده..... ۶۵

فهرست جداول

جدول ۵-۱. نسبت فرکانس‌های طبیعی غیرمحلّی به فرکانس‌های طبیعی محلّی.....۵۳

جدول ۵-۲. نسبت فرکانس‌های طبیعی غیرمحلّی به فرکانس‌های طبیعی محلّی با تغییر ابعاد.....۵۳

فصل اول

مقدمه

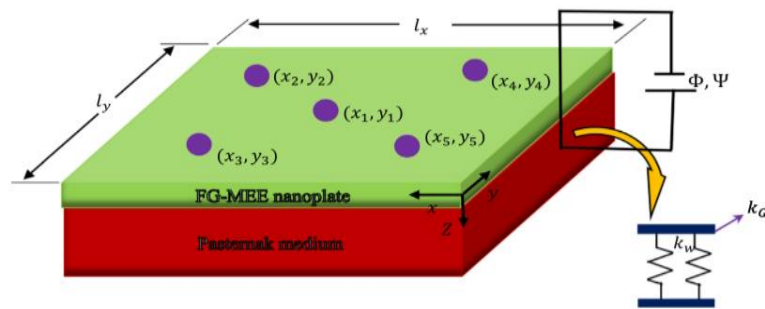
۱-۱- مقدمه

فناوری نانو، علم جدید و کاربردی است که دقت بررسی بسیار خوبی در مقیاس کوچک یعنی ابعاد نانو به محققین ارائه می‌دهد. در این میان یکی از پرکاربردترین زیرمجموعه‌های نانو مواد، نانوصفحه‌ها محسوب می‌شوند. یکی از مهم‌ترین مطالعات کاربردی نانوصفحات تحمل و اثر نیرو است. شناخت کافی از اثرات نیرو و ارتعاشات اجباری بر این نوع سازه‌ها می‌تواند به استفاده درست‌تر و پیش‌بینی عکس‌العمل‌های آن‌ها در شرایط مختلف کمک کند.

۱-۲- مروری بر کارهای گذشته

در سال‌های گذشته محققان زیادی، پژوهش‌های متنوعی را در زمینه‌ی ارتعاشات انواع نانوصفحه انجام داده‌اند. نجف زاده و همکاران [۱] به بررسی ارتعاشات یک نانوصفحه متغیرتابعی با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی و تئوری الاستیسیته غیرمحلی اربینگ پرداخته‌اند. معادلات حاکم بر ارتعاشات نانوصفحه متغیرتابعی را با استفاده از اصل همپلتون استخراج کرده‌اند. همچنین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها را برای تکیه‌گاه ساده به دست آورده‌اند. آنها تاثیر پارامترهای مختلف از جمله نسبت ابعاد، ضخامت و ... نانوصفحه بر فرکانس‌های طبیعی سیستم را مورد تحلیل قرار داده‌اند. صبحی [۲] به بررسی پاسخ خمشی، ارتعاشات آزاد، کمانش مکانیکی و کمانش حرارتی نانوصفحه مدرج تابعی پرداخته است. نانوصفحه بر روی یک محیط الاستیک از نوع پسترناک قرار دارد. با استفاده از تئوری غیرمحلی اربینگ و اصل همپلتون، معادلات حاکم بر حرکت به دست آمده است. شرط مرزی سیستم تکیه‌گاه ساده فرض شده است. مطالعات عددی دقیق برای نشان دادن تأثیر پارامتر غیرمحلی، سختی بستر الاستیک، نسبت ابعاد صفحه و ضخامت بر رفتار ارتعاشی نانوصفحه انجام شده است. فرناندز و همکاران [۳] به مطالعه و تحلیل ارتعاشات خمشی یک نانوصفحه با جرم متصل با استفاده از تئوری الاستیسیته اربینگ برای مواد همگن لام پرداخته‌اند. مقادیر ویژه دقیق نانوصفحه با جرم متصل به صورت کلی به دست آمده است. با توجه به کوچک بودن تراکم جرم نسبت به جرم کل نانوصفحه، یک

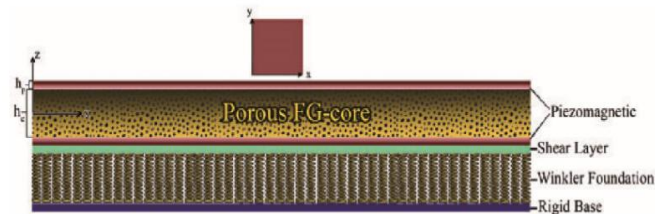
حل فرم بسته ارائه شده است. روش شناسایی بر روی یک سری از شبیه‌سازی‌های عددی، با تغییر پارامتر مقیاس ماده نانوصفحه و موقعیت و اندازه جرم نقطه‌ای آزمایش شده است. رادان [۴] به بررسی کمانش مکانیکی، کمانش حرارتی و رفتارهای ارتعاشات آزاد نانوصفحه متخلخل مدرج تابعی که بر روی یک محیط الاستیک قرار گرفته است، از طریق تئوری گرادیان کرنش غیرمحلّی پرداخته است. معادلات حرکت براساس اصل همیلتون به دست‌آمده‌اند که تأثیرات بستر الاستیک در آن لحاظ شده است. از نتایج عددی برای بررسی صحت کار انجام شده و مقایسه با کارهای مشابه استفاده شده است. اثرات بسیاری از پارامترها مانند فاکتور تخلخل، پارامتر غیرمحلّی، نسبت ابعاد صفحه و کمانش حرارتی بر ارتعاشات نانوصفحه متخلخل مدرج تابعی به طور کامل مورد بحث قرار گرفته است. حسینی و همکاران [۵] کارایی حساسیت نانوصفحه مغناطیسی الکتروالاستیک متغیرتابعی با استفاده از نانوذرّات به عنوان یک نانوسنسور مطابق شکل (۱-۱)، براساس تئوری غیرمحلّی صفحه مایندلین را مورد مطالعه قرار داده‌اند. مدل توزیع توانی برای نشان دادن چگونگی تغییر خواص مواد نانوصفحه این سیستم در راستای ضخامت به کار گرفته شده است. شرایط مرزی هر لبه به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. یک بستر پسترناک برای مدلسازی فشار کلی ناشی از واکنش بین نانوصفحه و بستر استفاده شده است. آنها معادلات دیفرانسیل جزئی و شرایط مرزی مربوطه را ابتدا با استفاده از اصل همیلتون به دست آورده‌اند و سپس به صورت تحلیلی برای تعیین تغییرات در فرکانس از روش ناویر استفاده کرده‌اند. به طور واضح نشان داده‌اند که عواملی مانند پارامتر غیرمحلّی، نسبت جرم متصل به جرم کل، نسبت ابعاد، عدد مود، ولتاژ الکتریکی خارجی اولیه و... تأثیرات بسیار قابل توجهی بر تغییرات فرکانس دارند.



شکل ۱-۱. شماتیک نانوصفحه مغناطیسی الکتروالاستیک متغیرتابعی بر روی بستر پسترناک [۵]

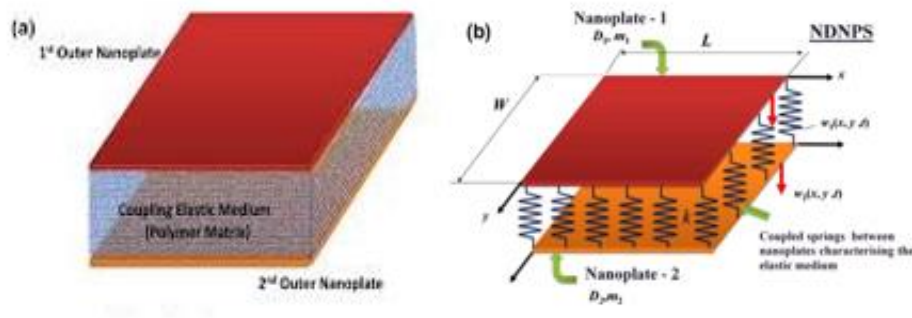
لیو و همکاران [۶] به مطالعه در مورد ارتعاشات غیرخطی نانوصفحه پیزوالکتریک مستطیلی که بر روی بستر الاستیک وینکلر قرار گرفته است، پرداخته‌اند. شرایط مرزی نانوصفحه پیزوالکتریک در هر چهار لبه تکیه‌گاه ساده فرض شده است. نانوصفحه در معرض ولتاژ الکتریکی خارجی و افزایش دمای یکنواخت قرار گرفته است. بر اساس روابط کرنش جابجایی غیرخطی ون-کارمن و روابط غیرمحملی، معادلات حاکم غیرخطی با استفاده از اصل همپلتون به دست آمده است. تأثیرات پارامتر غیرمحملی، ولتاژ الکتریکی خارجی، افزایش دما و ضرایب بستر وینکلر بر روی ارتعاشات غیرخطی نانوصفحه پیزوالکتریک بررسی شده است. عارفی و همکاران [۷] ارتعاشات آزاد یک نانوصفحه ساندویچ الاستیک با هسته متخلخل متغیرتابعی دارای صفحه‌های پیزومغناطیسی که در بالا و پایین نانوصفحه قرار گرفته مطابق شکل (۱-۲) را مورد مطالعه قرار داده‌اند. نانوصفحه ساندویچ الاستیک مستطیل شکل بر روی بستر پسترناک در نظر گرفته شده است. تخلخل‌ها به طور غیر یکنواخت از طریق ضخامت هسته توزیع شده است. تغییرات خواص مواد با تخلخل‌ها با استفاده از تابع توانی اصلاح شده توصیف شده است. پارامتر غیرمحملی و پارامتر گرادیان کرنش برای توصیف کاهش و افزایش سختی نانوصفحه استفاده شده است. آنها معادلات حاکم بر حرکت را از اصل همپلتون براساس تئوری برشی مرتبه اول استخراج کرده‌اند. از تئوری غیرمحملی ارینگن برای بررسی اثرات نانو استفاده شده است. راه‌حل تحلیلی برای حل هفت معادله حاکم بر حرکت با استفاده از روش ناویر ارائه شده است. در نهایت، فرکانس طبیعی برای نسبت‌های مختلف طول، ضریب غیرمحملی، کسر حجمی تخلخل و پارامترهای بستر به صورت

عددی با توزیع‌های تخلخل یکنواخت و غیر یکنواخت بررسی شده است.



شکل ۱-۲. شماتیک نانوصفحه با هسته متخلخل متغیر تابعی با صفحه‌های پیزومغناطیسی [۷]

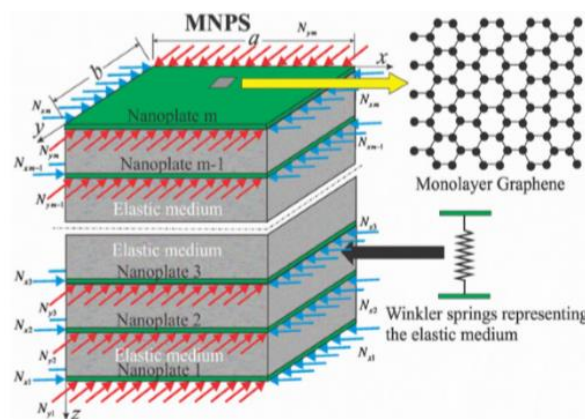
مورمو و همکاران [۸] ارتعاشات آزاد دو نانوصفحه که توسط محیطی الاستیک به هم متصل شده‌اند مطابق شکل (۱-۳) را مورد مطالعه قرار داده‌اند. یک روش تحلیلی برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی این سیستم، زمانی که هر چهار انتها تکیه‌گاه ساده باشند ارائه شده است. این مطالعه نشان می‌دهد که پارامترهای مختلفی بر فرکانس طبیعی این سیستم اثرگذار هستند. این پژوهش یک روش تحلیلی ارائه داده است که می‌توان برای بررسی و مطالعه سیستم‌های پیچیده چند نانوصفحه از آن استفاده کرد.



شکل ۱-۳. شماتیک دونانوصفحه متصل با محیط الاستیک [۸]

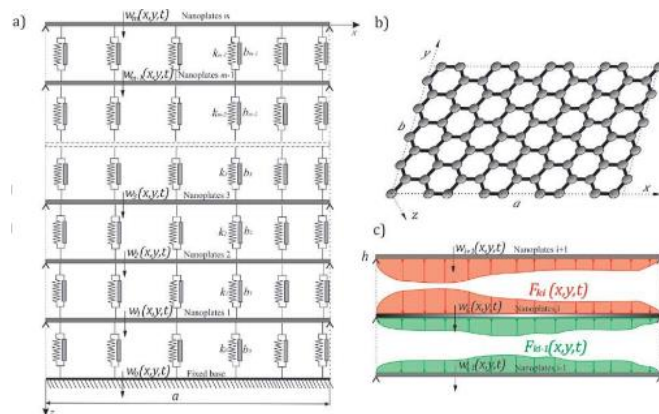
کارلیچیچ و همکاران [۹] به بررسی ارتعاشات و کمانش سیستم‌های چند نانوصفحه‌ای مطابق شکل (۱-۴) و تحلیل دینامیکی این سیستم‌ها پرداخته‌اند. آنها راه‌حل‌های دقیقی برای به دست آوردن

فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش این سیستم پیشنهاد داده‌اند. از تئوری الاستیسیته غیرمحلی برای مدلسازی سیستم استفاده شده است. پاسخ‌های سیستم همگن با استفاده از روش ناویر به دست آمده است. نتایج برای تعیین اثرات ناشی از تغییر در پارامترهای غیرمحلی، ضریب سفتی محیط‌های الاستیک و تعداد لایه‌ها بر فرکانس طبیعی و بار کمانش ارائه شده است.



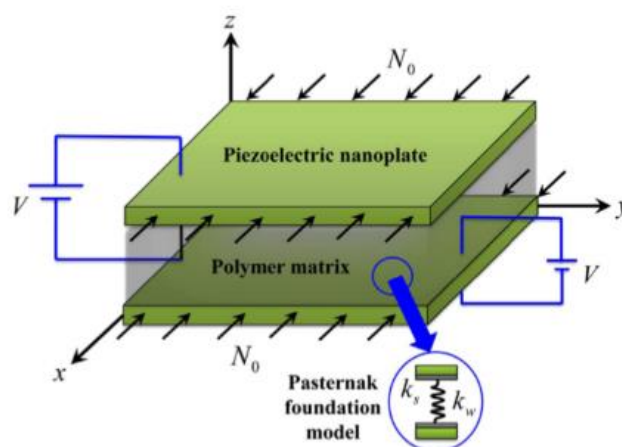
شکل ۴-۱. شماتیک سیستم چند نانوصفحه‌ای [۹]

کارلیچیچ و همکاران [۱۰] در تحقیقی دیگر، ارتعاشات عرضی یک سیستم چند نانوصفحه‌ای تعبیه شده در یک محیط ویسکوالاستیک مطابق شکل (۵-۱)، با استفاده از تئوری غیرمحلی ارینگن را مورد بررسی قرار داده‌اند. از تئوری ویسکوالاستیک کلون-ویت برای مدلسازی مواد در مقیاس نانو استفاده شده است. بر اساس تئوری صفحه کیرشهف-لاو، اصل همیلتون و روابط ساختاری ویسکوالاستیک، تمامی معادلات دیفرانسیل حرکت سیستم همگن استخراج شده است. با استفاده از روش ناویر، حل‌های فرم بسته از فرکانس طبیعی نامیرا و ضریب میرایی مودال ارائه شده است. آنها تاثیر پارامتر غیرمحلی و ویسکوالاستیک، نسبت ابعاد صفحه و ضرایب محیط الاستیک بر مقادیر ویژه را از طریق شبیه سازی‌های عددی بررسی کرده‌اند.



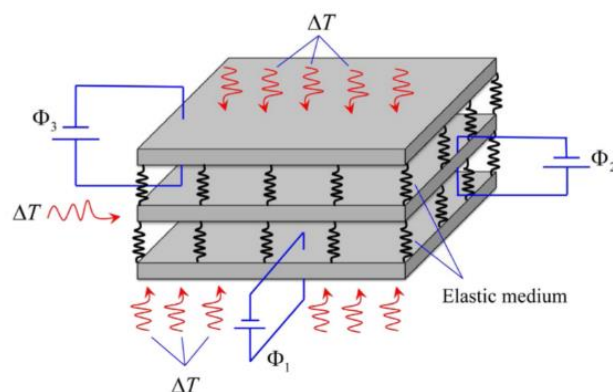
شکل ۵-۱. نمای جانبی نانوصفحه‌های ویسکوالاستیک [۱۰]

عاصمی و همکاران [۱۱] ارتعاشات عرضی دو نانوصفحه پیزوالکتریک که با تنش اولیه تحت ولتاژ الکتریکی خارجی قرار گرفته است مطابق شکل (۶-۱) را مورد بررسی قرار داده‌اند. به منظور در نظر گرفتن اثر برشی یک مدل بستر پسترناک به کار گرفته شده است. اثرات اندازه با استفاده از مکانیک محیط‌های پیوسته غیرمحلّی به دست آمده است. از اصل همیلتون برای استخراج معادلات دیفرانسیل حرکت استفاده شده است. معادلات حاکم برای شرایط مرزی مختلف حل شده است. آنها راه‌حل‌های دقیقی را برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و ولتاژ الکتریکی بحرانی ارائه کرده‌اند. در نهایت نشان داده شد که فرکانس‌های طبیعی نسبت به پارامتر غیرمحلّی و تنش اولیه بسیار حساس هستند.



شکل ۶-۱. شماتیک دو نانوصفحه پیزوالکتریک [۱۱]

آنها [۱۲] سپس به مطالعه در زمینه خواص ترمو-الکترومکانیکی یک سیستم چند نانوصفحه پیزوالکتریک که در یک ماتریس پلیمر جاسازی شده است مطابق شکل (۷-۱)، پرداخته‌اند. این سیستم در معرض توزیع ولتاژ غیریکنواخت قرار گرفته است. آنها معادلات حاکم را برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار داده‌اند و حل فرم بسته برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی با تکیه‌گاه ساده ارائه نمودند. تاثیر پیش بارگذاری اولیه، تغییر دما، شرایط مرزی، نسبت طول به ضخامت، پارامترهای غیرمحلی و غیریکنواخت بر روی ویژگی‌های ارتعاشی این سازه‌ها بررسی شده است. در نهایت نشان داده شده است که فرکانس طبیعی به پارامترهای غیرمحلی و غیریکنواخت حساس می‌باشد.

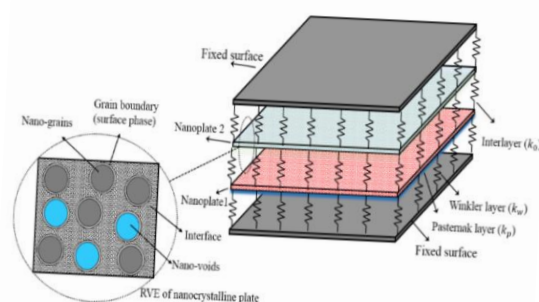


شکل ۷-۱. شماتیک سیستم چند نانوصفحه پیزوالکتریک [۱۲]

ژو و همکاران [۱۳] به بررسی ارتعاشات آزاد یک سیستم دو نانوصفحه ارتوتروپیک که در محیط الاستیک قرار گرفته‌اند، پرداخته‌اند. آنها با استفاده از اصل همیلتون مبتنی بر تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن برای به دست آوردن معادلات حرکت استفاده کرده‌اند. نیروی مغناطیسی لورنتس که بر روی این سیستم اعمال شده است، بر اساس معادلات ماکسول و فرمول لورنتس به دست آمده است. آنها معادلات فرکانس و توابع مود ارتعاشی را به دست آورده‌اند. با نتایج عددی نشان داده شده است که با تغییر پارامتر مغناطیسی، فرکانس‌های طبیعی این سیستم دو روند متفاوت را نشان داده‌اند. این نتیجه به دست آمده است که اعمال میدان مغناطیسی در نانوصفحه یک راه موثر برای کنترل فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی این سیستم‌ها می‌باشد.

براتی و همکاران [۱۴] به تحلیل رفتار ارتعاشی دو نانوصفحه سیلیکون نانوکریستال که بر روی

بسترالاستیک قرار گرفته مطابق شکل (۸-۱)، براساس مدل صفحه‌ای اصلاح شده دومتغیره پرداخته‌اند. از تئوری تنش کوپل شده مبتنی بر تغییرات کرنش برای توصیف رفتار وابسته به اندازه نانوصفحه نانوکریستال استفاده شده است. آنها یک مدل میکرومکانیکی برای ترکیب اثرات ناخالصی و انرژی‌های سطحی به کار گرفته‌اند. از روش گلرکین برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی نانوصفحه نانوکریستال با شرایط مرزی مختلف استفاده شده است. در نهایت نشان داده‌اند که اندازه ریزدانه‌ها، درصد خلا، ناحیه رابط، پارامتر مقیاس، ثابت‌های بستر و شرایط مرزی تاثیر زیادی بر رفتار ارتعاشاتی این سیستم دارند. آنها [۱۵] در مطالعه بعدی به تحلیل دینامیکی و ارتعاشات آزاد دو نانوصفحه متغیرتابعی که در محیط‌های رطوبتی حرارتی قرار گرفته‌اند مطابق شکل (۸-۱)، پرداخته‌اند. این سیستم در معرض بارگذاری رطوبتی حرارتی قرار گرفته است. نانوصفحه‌ها در محیط الاستیک فرض شده است. معادلات حاکم و شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک براساس اصل همیلتون به دست آمده است. این معادلات برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش گلرکین حل شده‌اند. نتایج نشان داده شده است که افزایش رطوبت، افزایش دما، پارامتر غیرمحل، پارامتر گرادیان کرنش، درجه‌بندی ماده، بسترالاستیک و ضخامت جانبی اثر قابل توجهی بر رفتار ارتعاشی این سیستم در مقیاس نانو دارند.

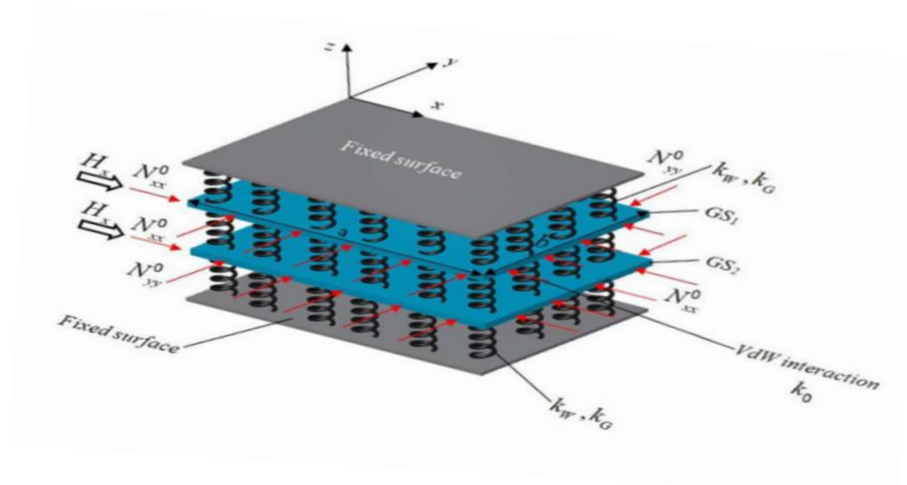


شکل ۸-۱. شماتیک دو نانوصفحه سیلیکون نانوکریستال بر روی بسترالاستیک [۱۵]

حسینی و همکاران [۱۶] به تحلیل ارتعاشات ترمومکانیکی سیستم چند نانوصفحه براساس تئوری

الاستیسیته غیرمحلی ارینگن پرداخته‌اند. فرض شده است که هر صفحه از مواد متغیرتابعی ویسکوالاستیک تشکیل شده و همچنین یک ماده ویسکوپسترناک نیز آنها را به یکدیگر متصل کرده است. فرض شده است خصوصیات ماده هر نانوصفحه متغیرتابعی به طور مداوم در سراسر ضخامت نانوصفحه با توجه به یک تابع توانی تغییر کرده است. با در نظر گرفتن اثرات سطحی، معادلات حرکت از طریق اصل همیلتون استخراج شده است. نتایج برای دو نوع شرایط مرزی گیردار و آزاد به دست آمده است. با توجه به در نظر گرفتن تاثیرات پارامترهای مختلف بر ارتعاشات سیستم مانند تغییرات دمایی، پارامتر غیرمحلی، اثرات سطحی و ویژگی‌های بستر ویسکوپسترناک، نشان داده شده است که این عوامل به شدت بر رفتار ارتعاشی تاثیر می‌گذارند.

لیو و همکاران [۱۷] ارتعاشات عرضی یک سیستم متشکل از دو نانوصفحه مدرج تابعی که توسط یک محیط ویسکوالاستیک به هم متصل شده‌اند را مورد مطالعه قرار داده‌اند. لبه‌های نانوصفحه در معرض بارگذاری قرار گرفته‌اند. از تئوری غیرمحلی ارینگن و اصل همیلتون برای به دست آوردن معادلات حرکت استفاده شده است. شرایط مرزی سیستم از نوع تکیه‌گاه ساده فرض شده است. اثر میرایی ساختاری، میرایی محیط ویسکوالاستیک، اثر پارامتر مقیاس کوچک، نسبت بارگذاری، مدول وینکلر و مدول برشی در فرمول بندی گنجانیده شده است. تاثیر این عوامل بر روی ارتعاشات و بار کمزش سیستم بحث شده است. رادیچ و همکاران [۱۸] به بررسی رفتار ارتعاشات سیستم متشکل از دو نانوصفحه ارتوتروپیک که تحت یک میدان مغناطیسی و پیش بارگذاری درون صفحه‌ای مطابق شکل (۹-۱) پرداخته‌اند. معادلات حرکتی غیرمحلی از طریق اصل همیلتون با استفاده از تئوری ارینگن و اعمال تاثیرات نیروی مغناطیسی لورنز از طریق تئوری ماکسول به دست آمده است. با روش‌های تحلیلی فرکانس ارتعاشات سیستم با شرایط مرزی مختلف به دست آمده است. اثرات پارامتر غیرمحلی، قدرت میدان مغناطیسی، تعداد نیمه موج، بارگذاری اولیه (فشرده سازی و کشش)، ابعاد نانوصفحه و شرایط مرزی بر فرکانس ارتعاشات سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است.



شکل ۹-۱. شماتیک دوانو صفحه ارتوتروپیک و نیروهای وارد بر آن [۱۸]

پوراسماعیلی و همکاران [۱۹] به مطالعه ارتعاشات خطی سیستمی متشکل از دوانو صفحه پرداختند. فرض شده است که هر دو نانوصفحه بر بستری الاستیک قرار گرفته اند. نیروهای داخلی بین دو نانوصفحه در معادلات به دست آمده لحاظ شده است. در این تحقیق نانوصفحات ارتوتروپیک در نظر گرفته شده است. در انتها تاثیر پارمترهای مختلف بر فرکانس سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. هاشمی و همکاران [۲۰] به مطالعه و تحلیل ارتعاشات اجباری نانوصفحه که بر روی محیط ویسکوالاستیک قرار گرفته، براساس تئوری غیرمحلی پرداخته اند. صفحه گرافن ویسکوالاستیک یک لایه به صورت ویسکونانوصفحه مدلسازی شده است. هدف این مدل نشان دادن برهم کنش های دینامیکی در مواد نانوکامپوزیتی با اثر اتلاف است. با در نظر گرفتن تئوری صفحه کیرشهف و مدل ویسکوالاستیک کلوین ویت، معادله حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. این معادله به صورت تحلیلی حل شده است و پاسخ ورق گرافن ویسکوالاستیک را به دست آورده اند. اثرات پارمترهای غیرمحلی، ساختار میرایی ویسکوالاستیک، نسبت ابعاد و محیط ویسکوپسترناک بر رفتار ارتعاشی مورد بررسی قرار گرفته است.

محمدی و همکاران [۲۱] ارتعاشات غیرخطی نانوساختارهای نسل جدید را مورد بررسی قرار داده اند. نانوصفحه کامپوزیتی از هسته ماده متغیر تابعی و دو لایه چربی در قسمت فوقانی و پایین

هسته در نظر گرفته شده است. آنالیز ارتعاشات غیرخطی در حضور نیروی تحریک هارمونیک خارجی مطالعه شده است. تاثیر تداخل بر آنالیز ارتعاشات آزاد و اجباری نانوصفحه کامپوزیت مورد بررسی قرار گرفته است. از تئوری الاستیسیته غیرمحلی برای به دست آوردن معادلات حاکم دیفرانسیل غیرخطی استفاده شده است. مدل کلون ویت برای مدل سازی اثر ویسکوالاستیک لایه های چربی استفاده شده است. از اصل همپلتون برای به دست آوردن معادله حاکم دیفرانسیل استفاده شده است. روش گلرکین برای گسسته سازی معادلات حاکم غیرخطی به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی استفاده شده است. روش مقیاس چندگانه برای حل معادله دیفرانسیل معمولی استفاده شده است. مقایسه نتایج عددی به دست آمده با روش رانج کوتا انجام شده و تطابق خوبی حاصل شده است. در حضور و عدم حضور تداخل، رفتار ارتعاشی سیستم در موارد رزونانس اولیه و ثانویه مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج شبیه سازی نشان داده است که توزیع تداخل نقش مهمی در رفتار مکانیکی نانوصفحه کامپوزیتی دارد. همچنین نتایج عددی نشان داده است که فرکانس غیرخطی سیستم با گذر زمان کاهش یافته است. ملک زاده و فرج پور [۲۲] به مطالعه ارتعاشات آزاد و اجباری یک نانوصفحه و یک سیستم دو نانوصفحه ای به طور مجزا پرداخته اند. نانوصفحه های دایره ای تحت بارگذاری اولیه درون صفحه ای قرار گرفته اند. نانوصفحه ها در معرض یک محیط الاستیک قرار دارند. با استفاده از مختصات قطبی و تئوری کلاسیک معادلات حاکم بر حرکت به دست آمده است. از روش گلرکین برای حل معادله و به دست آوردن فرکانس ارتعاشات و پاسخ دینامیکی استفاده شده است. اثر مقیاس کوچک همراه با سایر پارامترها مانند بار اولیه درون صفحه ای، ضرایب بستر الاستیک و شعاع نانوصفحه ها بررسی می شود. هاشمیان [۲۳] به بررسی ارتعاشات دو صفحه گرافنی حاوی ذره، کوپل شده توسط محیط الاستیک بر اساس تئوری های کلاسیک و مایندلین با در نظر گرفتن اثرات سطح پرداخته است. تاثیر پارامترهایی چون جرم متحرک، اثرات سطح در این مطالعه بحث شده است. نشان داده شده است که با در نظر گرفتن اثرات سطح، فرکانس سیستم افزایش می یابد، همچنین اجرام سنگین تر دور از تکیه گاه ها، کاهش فرکانس را در بر دارند.

وانگ و همکاران [۲۴-۲۵] خواص ارتعاشات غیرخطی دو نانوصفحه ویسکوالاستیک براساس تئوری غیرمحلی مورد بررسی قرار داده‌اند. از رابطه ون-کارمن برای مدلسازی غیرخطی هندسی استفاده شده است. براساس نظریه صفحه کلاسیک، فرمولاسیون از اصل همیلتون در ارتباط با تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن استفاده شده است و با روش گلرکین گسسته سازی می‌شوند. بر اساس این معادلات، پاسخ فرکانسی نانوصفحه‌های دولایه با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به دست آمده است. تأثیر پارامترهای ساختاری بر خصوصیات ارتعاشات غیرخطی بحث شده است. در مورد تأثیر ماتریس الاستیک نیز بحث شده است. علاوه بر این، برخی از پدیده‌های جالب متفاوت از ارتعاشات خطی مشاهده شده است.

۱-۳- ضرورت انجام تحقیق و نوآوری:

همانطور که اشاره شد، مواد با ساختار نانو کاربرد فراوانی در صنعت داشته بنابراین شایسته است که ویژگی‌های مختلف نانوصفحه‌ها بهتر و بیشتر شناخته شوند چرا که سیستم‌های الکتریکی و مکانیکی زیادی بر پایه آنها شکل گرفته‌اند. با مروری بر تحقیقات گذشته مشخص می‌شود که ارتعاشات آزاد نانوصفحه بسیار مورد توجه بوده و تحقیقات متنوعی در این حوزه در حال انجام است. اما تحقیقات در خصوص تحلیل ارتعاشات اجباری نانوصفحه‌ها و تحلیل‌های رزونانسی کمتر انجام شده است. به همین علت در این تحقیق ارتعاشات غیرخطی اجباری دو نانوصفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیستم از دونانوصفحه که توسط محیط الاستیک غیرخطی به هم متصل شده‌اند، تشکیل شده است. آنالیز ارتعاشات غیرخطی در حضور نیروی تحریک هارمونیک خارجی مطالعه شده است. تأثیر محیط الاستیک بر آنالیز ارتعاشات سیستم دو نانوصفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد. از تئوری الاستیسیته غیرمحلی برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر سیستم استفاده می‌شود. از روش گلرکین برای گسسته‌سازی معادلات غیرخطی حاکم و تبدیل آن به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی استفاده می‌شود. شرایط مرزی به صورت تکیه‌گاه ساده می‌باشد. از روش مقیاس چندگانه برای حل معادله دیفرانسیل عادی غیرخطی استفاده می‌شود. لذا نوآوری و تفاوت کار

پیشنهادی نسبت به دیگر تحقیقات بصورت زیر می باشد:

۱- آنالیز ارتعاشات اجباری غیرخطی و رزونانسی اولیه و ثانویه برای دو نانوصفحه

۲- بررسی اثر پارامترهای مختلف هندسی و ساختاری در آنالیزهای ارتعاشی

فصل دوم

استخراج معادلات

۱-۲- تئوری الاستیسیته غیرمحلی

در تئوری الاستیسیته غیرمحلی تنش در یک نقطه، تابعی از کرنش در تمامی نقاط است. که در واقع، اثرها در مقایس کوچک مورد بررسی قرار می گیرد. براساس تئوری غیرمحلی ارینگن [۲۶]، شکل انتگرالی برای یک جسم الاستیک همگن را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\sigma_{kl}(x) = \int_V \alpha(|X - X'|) \tau_{kl}(X') dV(X') \quad (۱-۲)$$

که در رابطه بالا σ_{kl} تنسور تنش غیرمحلی و τ_{kl} تنسور تنش کلاسیک (محلی) می باشند. عبارت $\alpha(|X - X'|)$ تابع کرنل است که یک مدول غیرمحلی می باشد. تابع کرنل نشان دهنده تاثیر کرنش در هر نقطه X' بر روی تنش نقطه مرجع یعنی X است.

از آنجایی که حل مسائل ناشی از انتگرال ها در محدوده حجم که در روابط ساختاری غیرمحلی وجود دارند آسان نمی باشد، فرم دیفرانسیلی معادل را می توان برای چندین تابع کرنل فرمولبندی کرد. درنهایت رابطه تنش-کرنش غیرمحلی به صورت زیر به دست می آید:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \sigma^{nl} = \sigma^l \quad (۲-۲)$$

که در رابطه (۲-۲) σ^{nl} تنش غیرمحلی و μ پارامتر غیرمحلی برای توصیف اثر مقیاس کوچک می باشند. پارامتر غیرمحلی و لاپلاسیان به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\mu = e_0 l \quad (۳-۲)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (۴-۲)$$

که در رابطه (۳-۲) e_0 یک ثابت متناسب با هر ماده است و l یک طول مشخصه داخلی می باشد. مقدار e_0 باید از آزمایشات تعیین شود یا با تطبیق رابطه پراکندگی امواج صفحه ای با دینامیک شبکه اتمی به دست می آید. از طریق این فرآیندها، پارامتر غیرمحلی می تواند به درستی و با دقت بالا رفتار نانو ساختارها را به دست آورد. σ^l نشان دهنده تنسور تنش محلی است که از قانون تعمیم یافته هوک پیروی می کند.

$$\sigma^l(x) = S(x) : \varepsilon(x) \quad (5-2)$$

که در رابطه بالا $S(x)$ تنسور الاستیسیته مرتبه چهارم است. " نیز بیانگر ضرب دوگانه است. در حقیقت، تئوری غیرمحلی که در بالا ذکر شده، اصلاح نظریه پیوستار کلاسیک برای توصیف ویژگی‌های نانوساختارها است. با معرفی پارامتر غیرمحلی، مدل غیرمحلی می‌تواند به طور موثر اثر مقیاس کوچک ساختارهای نانو را شبیه‌سازی کند که نسبتاً متفاوت از ساختار ماکرو هستند.

براساس تئوری صفحه کیرشهف، مولفه‌های جابجایی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2 &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3 &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (6-2)$$

که در رابطه (6-2) u_1, u_2, u_3 جابه‌جایی نقاط x, y, z به ترتیب در راستای x, y, z و در لحظه t می‌باشند. همچنین u_0, v_0, w بیانگر جابه‌جایی نقاط واقع بر صفحه میانی هستند.

از آنجا که ارتعاش غیرخطی ناشی از دامنه بالا در نظر گرفته می‌شود، از روابط کرنش جابه‌جایی ون-کارمن استفاده شده است:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + zK \quad (7-2)$$

که در آن ε بردار کرنش نقطه دلخواه است. ε_0 و K بردار کرنش غیرخطی و بردار تغییرات انحنا در صفحه میانی هستند و طبق روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (9-2)$$

نتیجه تنش برای نانوصفحه غیرمحملی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}^{nl} dz \\ N_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy}^{nl} dz \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy}^{nl} dz \end{aligned} \quad (10-2)$$

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}^{nl} z dz \\ M_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy}^{nl} z dz \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy}^{nl} z dz \end{aligned} \quad (11-2)$$

سپس می توان معادلات تعادل زیر را به ترتیب در راستاهای x ، y و z ارائه داد [۲۷]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (12-2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y}) + q \\ & = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (۱۳-۲)$$

که در رابطه بالا q بارگذاری هارمونیک می باشد و m_0 و m_2 مولفه های جرم بر واحد سطح به

صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} m_0 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz \\ m_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \end{aligned} \quad (۱۴-۲)$$

که در رابطه (۱۴-۲) ρ چگالی ماده را نشان می دهد.

بر اساس رابطه (۲-۲) و ویژگی ویسکوالاستیک نانوصفحه در نظر گرفته شده، رابطه تنش کرنش را

می توان به صورت زیر بیان کرد [۲۸]:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{nl} \\ \sigma_{yy}^{nl} \\ \sigma_{xy}^{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} (1+g \frac{\partial}{\partial t}) & \frac{\nu E}{1-\nu^2} (1+g \frac{\partial}{\partial t}) & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} (1+g \frac{\partial}{\partial t}) & \frac{E}{1-\nu^2} (1+g \frac{\partial}{\partial t}) & 0 \\ 0 & 0 & 2G(1+g \frac{\partial}{\partial t}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (۱۵-۲)$$

که در رابطه بالا E مدول یانگ، G مدول برشی، ν ضریب پواسون و g ضریب میرایی ساختاری

ویسکوالاستیک می باشند. با استفاده از روابط تنش-کرنش و رابطه کرنش جابه جایی، روابط زیر حاصل

می شود:

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2 \nabla^2) M_{xx} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) - \nu D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial y^2} \right) \\ (1 - \mu^2 \nabla^2) M_{yy} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial y^2} \right) - \nu D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) \\ (1 - \mu^2 \nabla^2) M_{xy} &= -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + g \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial t} \right) \end{aligned} \quad (۱۶-۲)$$

که D سختی خمشی صفحه می باشد و برابر است با:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (۱۷-۲)$$

در رابطه بالا h ضخامت نانوصفحه می باشد. برای صفحات جدار نازک، تأثیر اینرسی درون صفحه در ارتعاشات با دامنه زیاد ناچیز در نظر گرفته می شود. به همین علت در پژوهش انجام شده از اثر اینرسی در جهات عمود بر ارتعاشات عرضی صرف نظر می شود. همچنین تابع تنش ایری به صورت زیر تعریف می شود [۲۷]:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ N_{yy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ N_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (۱۸-۲)$$

با جایگذاری روابط (۱۵-۲) و (۱۶-۲) در رابطه (۱۳-۲)، معادله حرکت نانوصفحه ویسکوالاستیک

غیرمحملی به دست می آید که برابر است با:

$$\begin{aligned} &(D) \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, y, t) + (D) g \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} w(x, y, t) \\ &+ 2(D) \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w(x, y, t) + 2(D) g \frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^2 \partial t} w(x, y, t) \\ &+ (D) \frac{\partial^4}{\partial y^4} w(x, y, t) + (D) g \frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial t} w(x, y, t) \\ &= (1 - \nabla^2 \mu^2) q + (1 - \nabla^2 \mu^2) \left(m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, y, t) \right) \\ &+ (1 - \nabla^2 \mu^2) \left(-m_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} w(x, y, t) - m_2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial t^2} w(x, y, t) \right) \\ &+ (1 - \nabla^2 \mu^2) \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y, t) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y, t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, y, t) \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y, t) \right) \\ &+ (1 - \nabla^2 \mu^2) \left(-2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F(x, y, t) \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} w(x, y, t) \right) \end{aligned} \quad (۱۹-۲)$$

نیروی بین دو نانوصفحه ناشی از نیروی ون دروالس می باشد که می توان آن را به صورت محیط

الاستیک در نظر گرفت [۲۹]. برای مدل کردن اثر محیط الاستیک می توان فرض نمود که دو نانوصفحه توسط فنرهای پیوسته غیرخطی به صورت عمودی به یکدیگر متصل شده اند.

بار عرضی q بر روی نانوصفحه بالا اعمال می شود. این بار اعمال شده به صورت $q = f \cos(t)$ در نظر گرفته می شود. به این ترتیب نیروهایی که در نانوصفحه بالا و پایین اثر گذار هستند به شرح زیر می باشند [۲۱]:

$$\begin{aligned} q_1 = & f \cos(\Omega t) - c(w_1(x, y, t) - w_2(x, y, t)) \\ & - k_l(w_1(x, y, t) - w_2(x, y, t)) - k_{nl}(w_1(x, y, t) - w_2(x, y, t))^3 \\ & + k_s \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_1(x, y, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_2(x, y, t) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_2(x, y, t) \right) \end{aligned} \quad (20-2)$$

$$\begin{aligned} q_2 = & -c(w_2(x, y, t) - w_1(x, y, t)) \\ & - k_l(w_2(x, y, t) - w_1(x, y, t)) - k_{nl}(w_2(x, y, t) - w_1(x, y, t))^3 \\ & + k_s \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_2(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_2(x, y, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1(x, y, t) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_1(x, y, t) \right) \end{aligned} \quad (21-2)$$

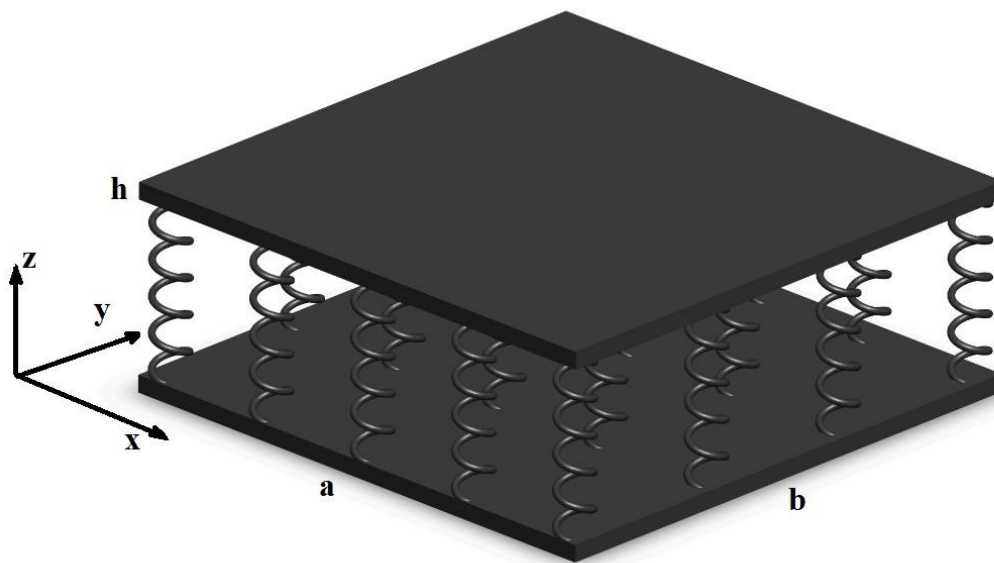
در معادله (۲۰-۲) و (۲۱-۲) q_2 و q_1 به ترتیب نشان دهنده تمامی نیروهای وارد بر نانوصفحه بالا و پایین می باشند. f نیروی تحریک، c نیروی ون دروالس، ثابت های خطی و غیرخطی وینکلو و ثابت الاستیک برشی به ترتیب با نمادهای k_s و k_{nl} ، k_l نشان داده شده اند.

استخراج معادلات برای

دو نانوصفحه

۱-۳-مقدمه

سیستم مطالعه شده از دو نانوصفحه ویسکو الاستیک تشکیل شده است. این دو نانوصفحه توسط محیط الاستیک غیرخطی به یکدیگر متصل شده‌اند که در شکل (۱-۳) نمایش داده شده‌است. همچنین نانوصفحه بالا تحت بارگذاری سراسری و گسترده قرار گرفته است.



شکل ۱-۳. شماتیک سیستم مورد مطالعه

۲-۳-معادلات دیفرانسیل حرکت

همانطور که در فصل قبل اشاره شد محیط الاستیک غیرخطی به صورت فنرهای پیوسته غیرخطی مدلسازی شده‌اند. این فنرها به صورت عمودی مدل می‌شوند و دوناوصفحه را به یکدیگر متصل می‌کنند. جابه‌جایی خمشی نانوصفحه بالا با $w_1(x, y, t)$ و جابه‌جایی خمشی نانوصفحه پایین $w_2(x, y, t)$ نامگذاری می‌شوند. با توجه به معادلات (۱۹-۲)، (۲۰-۲) و (۲۱-۲) معادلات حاکم بر ارتعاشات خمشی برای دو نانوصفحه به طور مجزا را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
& D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} w_1(x, y, t) + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w_1(x, y, t) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} w_1(x, y, t) \right) \\
& + D \left(g \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} w_1(x, y, t) + 2g \frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^2 \partial t} w_1(x, y, t) + g \frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial t} w_1(x, y, t) \right) \\
& + (1 - \mu^2 \nabla^2) \left[m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_1(x, y, t) - m_2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} w_1(x, y, t) + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial t^2} w_1(x, y, t) \right) \right] \quad (1-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (1 - \mu^2 \nabla^2) q_1 + (1 - \mu^2 \nabla^2) \left[-2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_1(x, y, t) \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} w_1(x, y, t) \right] \\
& + (1 - \mu^2 \nabla^2) \left[\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} F_1(x, y, t) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1(x, y, t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_1(x, y, t) \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_1(x, y, t) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} w_2(x, y, t) + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w_2(x, y, t) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} w_2(x, y, t) \right) \\
& + D \left(g \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} w_2(x, y, t) + 2g \frac{\partial^5}{\partial y^2 \partial x^2 \partial t} w_2(x, y, t) + g \frac{\partial^5}{\partial y^4 \partial t} w_2(x, y, t) \right) \\
& + (1 - \mu^2 \nabla^2) \left[m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_2(x, y, t) - m_2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} w_2(x, y, t) + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial t^2} w_2(x, y, t) \right) \right] \quad (2-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (1 - \mu^2 \nabla^2) q_2 + (1 - \mu^2 \nabla^2) \left[-2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_2(x, y, t) \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} w_2(x, y, t) \right] \\
& + (1 - \mu^2 \nabla^2) \left[\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} F_2(x, y, t) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_2(x, y, t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_2(x, y, t) \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_2(x, y, t) \right) \right]
\end{aligned}$$

از معادله سازگاری غیرمحملی زیر به منظور به دست آوردن فرکانس طبیعی غیرخطی استفاده شده است.

$$\nabla^4 F = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3-3)$$

با تعمیم رابطه فوق برای هر دو نانوصفحه می توان نوشت:

$$\nabla^4 F_1 = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w_1(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w_1(x, y, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \right] \quad (4-3)$$

$$\nabla^4 F_2 = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w_2(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w_2(x, y, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \right] \quad (5-3)$$

پاسخ عرضی ارتعاشات غیرخطی را می‌توان برحسب شکل مد و دامنه وابسته به زمان به صورت زیر

نشان داد:

$$w^i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^i(t) \Phi_{mn}^i(x, y), \quad i = 1, 2 \quad (۶-۳)$$

در رابطه بالا $i = 1, 2$ نشان‌دهنده نانوصفحه بالا و پایین است و $\Phi_{mn}^i(x, y)$ شکل مد و $W_{mn}^i(t)$ دامنه‌های وابسته به زمان در پاسخ فرکانسی است. در این مطالعه شرایط مرزی به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. با توجه به شرایط مرزی می‌توان w^i را به صورت زیر نوشت:

$$w^i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^i(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad i = 1, 2 \quad (۷-۳)$$

که در مطالعه انجام شده مد اول مورد بررسی قرار گرفته می‌شود به همین علت مقدار m و n یک در نظر گرفته شده است.

با جایگذاری رابطه (۷-۳) در معادله سازگاری و حل معادلات حاصل، برای هر نانوصفحه یک پاسخ

خصوصی برای توابع تنش F_1 و F_2 به دست آمده است که به صورت زیر می‌باشند:

$$F_1 = \frac{1}{32} \frac{Eh(W_{mn}^1(t))^2}{m^2 b^2 n^2 a^2} \left(n^4 a^4 \cos\left(2\frac{m\pi x}{a}\right) + m^4 b^4 \cos\left(2\frac{n\pi y}{b}\right) \right) \quad (۸-۳)$$

$$F_2 = \frac{1}{32} \frac{Eh(W_{mn}^2(t))^2}{m^2 b^2 n^2 a^2} \left(n^4 a^4 \cos\left(2\frac{m\pi x}{a}\right) + m^4 b^4 \cos\left(2\frac{n\pi y}{b}\right) \right) \quad (۹-۳)$$

با جایگذاری روابط (۷-۳)، (۸-۳) و (۹-۳) در معادلات حاکم بر ارتعاشات خمشی دو نانوصفحه و

گسسته سازی با به کارگیری از روش گلرکین، معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند.

برای نانوصفحه بالا معادل است با:

$$\ddot{w}_1 + c\dot{w}_1 + k_{11}w_1 + k_{22}w_2 + k_{12}w_1^2w_2 + k_{21}w_1w_2^2 + r_1w_1^3 + r_2w_2^3 = F_1' \cos(\Omega t) \quad (۱۰-۳)$$

همچنین برای نانوصفحه پایین داریم:

$$\ddot{w}_2 + c\dot{w}_2 + k_{22}w_1 + k_{11}w_2 + k_{21}w_1^2w_2 + k_{12}w_1w_2^2 + r_2w_1^3 + r_1w_2^3 = F_2' \cos(\Omega t) \quad (۱۱-۳)$$

که برای رابطه های (۱۰-۳) و (۱۱-۳) ضرایب به صورت زیر به دست آمده است.

$$c = \frac{(D)\pi^4 g(a^2 + b^2)^2}{(m_2(a^2 + b^2)\pi^2 + m_0a^2b^2)(\mu^2(a^2 + b^2)\pi^2 + a^2b^2)} \quad (۱۲-۳)$$

$$k_{11} = \frac{(a^2 + b^2)^2(k_s\mu^2 + D)\pi^4 + (a^2 + b^2)b^2a^2((k_l + c)\mu^2 + k_s)\pi^2 + a^4b^4(k_l + c)}{(m_2(a^2 + b^2)\pi^2 + m_0a^2b^2)(\mu^2(a^2 + b^2)\pi^2 + a^2b^2)} \quad (۱۳-۳)$$

$$k_{22} = \frac{((-c - k_w)b^2 - \pi^2k_s)a^2 - \pi^2k_sb^2}{(\pi^2m_2 + b^2m_0)a^2 + \pi^2m_2b^2} \quad (۱۴-۳)$$

$$k_{12} = -\frac{27a^2b^2k_{nl}}{16m_2(a^2 + b^2)\pi^2 + 16m_0a^2b^2} \quad (۱۵-۳)$$

$$k_{21} = \frac{27a^2b^2k_{nl}}{16m_2(a^2 + b^2)\pi^2 + 16m_0a^2b^2} \quad (۱۶-۳)$$

$$r_1 = \frac{1}{16b^2a^2} \frac{E\pi^4a^4h + b^4\pi^4Eh + 9k_{nl}a^4b^4}{(\pi^2a^2m_2 + \pi^2m_2b^2 + m_0a^2b^2)} \quad (۱۷-۳)$$

$$r_2 = -\frac{9a^2b^2k_{nl}}{16m_2(a^2 + b^2)\pi^2 + 16m_0a^2b^2} \quad (۱۸-۳)$$

$$F_1' = \frac{16a^4b^4f}{\pi^2(\mu^2(a^2 + b^2)\pi^2 + a^2b^2)(m_2(a^2 + b^2)\pi^2 + m_0a^2b^2)} \quad (۱۹-۳)$$

$$F_2' = 0$$

فصل چهارم

حل معادلات حرکت

۴-۱-مقدمه

بعد از به دست آوردن معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر حرکت، برای حل تحلیلی این معادلات از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌شود [۳۰]. می‌توان معادلات حرکت به دست آمده در فصل قبل را به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{W}(t) + c\dot{W}(t) + KW(t) + K' W'(t) + RW^3(t) = F \quad (۱-۴)$$

که در رابطه بالا داریم:

$$\ddot{W} = \begin{bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{bmatrix} \quad (۲-۴)$$

$$\dot{W} = \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} \quad (۳-۴)$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (۴-۴)$$

$$W' = \begin{bmatrix} w_1^2 w_2 \\ w_1 w_2^2 \end{bmatrix} \quad (۵-۴)$$

$$W^3 = \begin{bmatrix} w_1^3 \\ w_2^3 \end{bmatrix} \quad (۶-۴)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{22} \\ k_{22} & k_{11} \end{bmatrix} \quad (۷-۴)$$

$$K' = \begin{bmatrix} k_{12} & k_{21} \\ k_{21} & k_{12} \end{bmatrix} \quad (۸-۴)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 \end{bmatrix} \quad (۹-۴)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1' \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱۰-۴)$$

برای حل معادلات حرکت و به دست آوردن فرکانس طبیعی مد اول و مد دوم ابتدا رابطه (۱-۴) را

قطری سازی می‌کنیم. برای قطری سازی داریم:

$$W = Xq \quad (۱۱-۴)$$

در رابطه بالا X ماتریس انتقال می باشد که یک ماتریس 2×2 می باشد:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad (۴-۱۲)$$

برای به دست آوردن ماتریس انتقال ابتدا دو درایه ماتریس X را عدد گذاری کرده و سپس دو درایه دیگر را طوری به دست می آوریم که قطر اصلی ماتریس $X^{-1}KX$ مخالف صفر و قطر فرعی برابر صفر شود. با فرض $x_{11} = 1$ و $x_{12} = 1$ داریم:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad (۱۳-۴)$$

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{x_{22}}{x_{21} - x_{22}} & \frac{1}{x_{21} - x_{22}} \\ \frac{x_{21}}{x_{21} - x_{22}} & -\frac{1}{x_{21} - x_{22}} \end{bmatrix} \quad (۱۴-۴)$$

با استفاده از رابطه (۱۳-۴) و (۱۴-۴) و جایگذاری در ماتریس $X^{-1}KX$ و برابر صفر قرار دادن درایه های قطر فرعی به طور مجزا و حل آن ها مقدار x_{21} و x_{22} به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} x_{21} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{-k_{11}^2 + 5k_{22}^2}}{k_{22}} \right) \\ x_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{-k_{11}^2 + 5k_{22}^2}}{k_{22}} \right) \end{aligned} \quad (۱۵-۴)$$

در نهایت ماتریس انتقال مورد استفاده به صورت زیر می باشد:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{-k_{11}^2 + 5k_{22}^2}}{k_{22}} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{-k_{11}^2 + 5k_{22}^2}}{k_{22}} \right) \end{bmatrix} \quad (۱۶-۴)$$

با اعمال قطری سازی معادلات حرکت به صورت زیر به دست می آیند:

$$\ddot{q}_1 + \mu_1' \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + c_1 q_1^3 + c_2 q_1^2 q_2 + c_3 q_1 q_2^2 + c_4 q_2^3 = c_1' F \quad (۱۷-۴)$$

$$\ddot{q}_2 + \mu_1' \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + c_5 q_1^3 + c_6 q_1^2 q_2 + c_7 q_1 q_2^2 + c_8 q_2^3 = c_2' F \quad (18-4)$$

که در رابطه (۱۷-۴) و (۱۸-۴) فرکانس طبیعی مد اول سیستم، ω_2 فرکانس طبیعی مد دوم سیستم و ضرایب $\mu_1', c_1, c_2, \dots, c_8, c_1'$ و c_2' در پیوست قابل مشاهده می‌باشند. در روش مقیاس‌های چندگانه از مقیاس‌های مستقل به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$T_n = \varepsilon^n t \quad ; n=0,1,2,\dots \quad (19-4)$$

در رابطه بالا ε یک پارامتر کوچک و بی‌بعد می‌باشد. با جایگذاری n می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} T_0 &= t \\ T_1 &= \varepsilon t \\ T_2 &= \varepsilon^2 t \end{aligned} \quad (20-4)$$

T_0 مقیاس زمانی سریع برای بیان فرکانس طبیعی نانوصفحه، T_1 و T_2 مقیاس‌های زمانی کند می‌باشند که فرکانس‌های به وجود آمده ناشی از پارامترهای غیرخطی سیستم را بیان می‌کنند. همچنین رابطه‌های زیر برای مشتق‌های زمانی بر حسب این مقیاس‌های زمانی برقرار می‌باشد:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{dT_2}{dt} \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (21-4)$$

با در نظر گرفتن $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (22-4)$$

رابطه (۲۲-۴) برای مشتق دوم زمانی نیز قابل تعمیم است:

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (23-4)$$

برای حل تحلیل معادلات ابتدا پاسخ سیستم بر اساس روش مقیاس چندگانه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$q_1 = \varepsilon q_{11}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 q_{13}(T_0, T_2) \quad (24-4)$$

$$q_2 = \varepsilon q_{21}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 q_{23}(T_0, T_2) \quad (25-4)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود به دلیل اینکه پارامتر غیرخطی درجه سه می‌باشد، عبارات $\varepsilon^2 q_{12}$ و

$\varepsilon^2 q_{22}$ از معادلات بالا حذف شده‌اند.

۲-۴- بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی

در این بخش به حل تحلیلی ارتعاشات آزاد با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه می‌پردازیم. لذا

معادلات حرکت مورد استفاده به صورت زیر می‌باشند:

$$\ddot{q}_1 + 2ep^2 \mu_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \alpha_1 q_1^3 + \alpha_2 q_1^2 q_2 + \alpha_3 q_1 q_2^2 + \alpha_4 q_2^3 = 0 \quad (۲۶-۴)$$

$$\ddot{q}_2 + 2ep^2 \mu_1 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \alpha_5 q_1^3 + \alpha_6 q_1^2 q_2 + \alpha_7 q_1 q_2^2 + \alpha_8 q_2^3 = 0 \quad (۲۷-۴)$$

که در دو رابطه بالا $\mu_1 = \frac{\mu_1'}{2\varepsilon^2}$ ، $\alpha_6 = c_6$ ، $\alpha_5 = c_5$ ، $\alpha_4 = c_4$ ، $\alpha_3 = c_3$ ، $\alpha_2 = c_2$ ، $\alpha_1 = c_1$ ، $\mu_1 = \frac{\mu_1'}{2\varepsilon^2}$

با استفاده از روابط (۲۰-۴)، (۲۲-۴) و (۲۳-۴) و همچنین با

جایگذاری روابط (۲۴-۴) و (۲۵-۴) در معادلات (۲۶-۴) و (۲۷-۴) و با دسته بندی معادلاتی که از

توان‌های برابر ε برخوردارند، به حل معادلات می‌پردازیم. دسته اول معادلاتی هستند که از مرتبه ε^1

می‌باشند.

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{11}(T_0, T_2) + \omega_1^2 q_{11}(T_0, T_2) = 0 \quad (۲۸-۴)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{21}(T_0, T_2) + \omega_2^2 q_{21}(T_0, T_2) = 0 \quad (۲۹-۴)$$

دسته دوم معادلاتی هستند که از مرتبه ε^3 می‌باشند. برای این دسته داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{13} + \omega_1^2 q_{13} = -2\mu_1 \frac{\partial}{\partial T_0} q_{11} - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} q_{11} \quad (۳۰-۴)$$

$$-\alpha_1 (q_{11})^3 - \alpha_2 (q_{11})^2 q_{21} - \alpha_3 q_{11} (q_{21})^2 - \alpha_4 (q_{21})^3$$

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{23} + \omega_2^2 q_{23} = -2\mu_1 \frac{\partial}{\partial T_0} q_{21} - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} q_{21} \quad (۳۱-۴)$$

$$-\alpha_5 (q_{11})^3 - \alpha_6 (q_{11})^2 q_{21} - \alpha_7 q_{11} (q_{21})^2 - \alpha_8 (q_{21})^3$$

جواب عمومی رابطه‌های (۲۸-۴) و (۲۹-۴) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$q_{11} = A_1(T_2)e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1(T_2)e^{-i\omega_1 T_0} \quad (32-4)$$

$$q_{22} = A_2(T_2)e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_2(T_2)e^{-i\omega_1 T_0} \quad (33-4)$$

با جایگذاری روابط (32-4) و (33-4) در روابط (30-4) و (31-4)، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{13} + \omega_1^2 q_{13} = & -(A_1)^2 e^{iT_0(2\omega_1 - \omega_2)} \bar{A}_2 \alpha_2 - A_1 e^{iT_0(\omega_1 - 2\omega_2)} (\bar{A}_2)^2 \alpha_3 \\ & - A_1 e^{iT_0(\omega_1 + 2\omega_2)} (A_2)^2 \alpha_3 - (A_1)^2 e^{iT_0(2\omega_1 + \omega_2)} A_2 \alpha_2 - (A_1)^3 e^{3i\omega_1 T_0} \alpha_1 \\ & - (A_2)^3 e^{3i\omega_2 T_0} \alpha_4 - \left(2A_1 \bar{A}_1 A_2 \alpha_2 + 3(A_2)^2 \bar{A}_2 \alpha_4 \right) e^{i\omega_2 T_0} \\ & - \left(2i \left(\frac{d}{dT_2} A_1 \right) \omega_1 + 2 \left(i\mu_1 \omega_1 + \frac{3}{2} A_1 \bar{A}_1 \alpha_1 + \alpha_3 \bar{A}_2 A_2 \right) A_1 \right) e^{i\omega_1 T_0} + cc \end{aligned} \quad (34-4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{23} + \omega_2^2 q_{23} = & -(A_1)^2 \bar{A}_2 e^{iT_0(2\omega_1 - \omega_2)} \alpha_6 - A_1 (\bar{A}_2)^2 e^{iT_0(\omega_1 - 2\omega_2)} \alpha_7 \\ & - (A_2)^2 A_1 e^{iT_0(\omega_1 + 2\omega_2)} \alpha_7 - A_2 (A_1)^2 e^{iT_0(2\omega_1 + \omega_2)} \alpha_6 - (A_1)^3 e^{3i\omega_1 T_0} \alpha_5 \\ & - (A_2)^3 e^{3i\omega_2 T_0} \alpha_8 - \left(3(A_1)^2 \bar{A}_1 \alpha_5 + 2A_1 \bar{A}_2 \alpha_7 A_2 \right) e^{i\omega_1 T_0} \\ & - \left(2i \left(\frac{d}{dT_2} A_2 \right) \omega_2 + 2A_2 \left(i\mu_1 \omega_2 + \alpha_6 \bar{A}_1 A_1 + \frac{3}{2} A_2 \bar{A}_2 \alpha_8 \right) \right) e^{i\omega_2 T_0} + cc \end{aligned} \quad (35-4)$$

عبارت cc به معنی مولفه‌های مزدوج مختلط^۱ از عبارت‌های نوشته شده در روابط می‌باشد. در رابطه

(34-4) به جملاتی که ضرایب آنها $e^{i\omega_1 T_0}$ و در رابطه (35-4) جملاتی که ضرایب آنها $e^{i\omega_2 T_0}$ هستند،

جملات سکولارترم گفته می‌شود. برای حذف این جملات آنها را مساوی با صفر قرار می‌دهیم. این

جملات به صورت زیر می‌باشند [30]:

$$-2i \left(\frac{d}{dT_2} A_1 \right) \omega_1 - 2A_1 \left(i\mu_1 \omega_1 + \frac{3}{2} A_1 \bar{A}_1 \alpha_1 + \alpha_3 \bar{A}_2 A_2 \right) = 0 \quad (36-4)$$

$$-2i \left(\frac{d}{dT_2} A_2 \right) \omega_2 - 2A_2 \left(i\mu_1 \omega_2 + \alpha_6 \bar{A}_1 A_1 + \frac{3}{2} A_2 \bar{A}_2 \alpha_8 \right) = 0 \quad (37-4)$$

برای حل معادلات (36-4) و (37-4) مرسوم است که از فرم قطبی به صورت زیر استفاده شود:

^۱ complex conjugate

$$\begin{aligned}
A_1(T_2) &= \frac{1}{2} a_1(T_2) e^{i\theta_1(T_2)} \\
\bar{A}_1(T_2) &= \frac{1}{2} a_1(T_2) e^{-i\theta_1(T_2)} \\
A_2(T_2) &= \frac{1}{2} a_2(T_2) e^{i\theta_2(T_2)} \\
\bar{A}_2(T_2) &= \frac{1}{2} a_2(T_2) e^{-i\theta_2(T_2)}
\end{aligned} \tag{۳۸-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۳۸-۴) در روابط (۳۶-۴) و (۳۷-۴) و ساده‌سازی به معادلات زیر خواهیم

رسید:

$$\omega_1 a_1 \frac{d}{dT_2} \theta_1 - \frac{3}{8} (a_1)^3 \alpha_1 - \frac{1}{4} a_1 \alpha_3 (a_2)^2 + i \left(-\omega_1 \frac{d}{dT_2} a_1 - a_1 \mu_1 \omega_1 \right) = 0 \tag{۳۹-۴}$$

$$\omega_2 a_2 \frac{d}{dT_2} \theta_2 - \frac{3}{8} (a_2)^3 \alpha_8 - \frac{1}{4} a_2 \alpha_6 (a_1)^2 + i \left(-\omega_2 \frac{d}{dT_2} a_2 - a_2 \mu_1 \omega_2 \right) = 0 \tag{۴۰-۴}$$

همچنین با جداسازی جملات حقیقی و موهومی به معادلات زیر خواهیم رسید:

$$-\frac{d}{dT_2} a_1 - \mu_1 a_1 = 0 \tag{۴۱-۴}$$

$$-\frac{d}{dT_2} a_2 - \mu_1 a_2 = 0 \tag{۴۲-۴}$$

$$\frac{d}{dT_2} \theta_1 = \frac{3(a_1)^2 \alpha_1}{8 \omega_1} + \frac{1}{4} \frac{\alpha_3 (a_2)^2}{\omega_1} \tag{۴۳-۴}$$

$$\frac{d}{dT_2} \theta_2 = \frac{3(a_2)^2 \alpha_8}{8 \omega_2} + \frac{1}{4} \frac{\alpha_6 (a_1)^2}{\omega_2} \tag{۴۴-۴}$$

برای به‌دست آوردن a_1 و a_2 از معادلات (۴۱-۴) و (۴۲-۴) نسبت به T_2 انتگرال می‌گیریم:

$$a_1 = a_{10} e^{-\mu_1 T_2} \tag{۴۵-۴}$$

$$a_2 = a_{20} e^{-\mu_1 T_2} \tag{۴۶-۴}$$

که a_{10} و a_{20} ثابت‌های انتگرالی می‌باشند. با جایگذاری a_1 و a_2 در روابط (۴۳-۴) و (۴۴-۴)،

سپس با انتگرال‌گیری از این روابط فازهای سیستم به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\theta_1 = \frac{1}{16} \left(\frac{-3a_{10}^2 e^{-2\mu_1 T_2} \alpha_1 - 2\alpha_3 a_{20}^2 e^{-2\mu_1 T_2}}{\mu_1 \omega_1} \right) + \theta_{10} \quad (47-4)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{16} \left(\frac{-2\alpha_6 a_{10}^2 e^{-2\mu_1 T_2} - 3a_{20}^2 e^{-2\mu_1 T_2} \alpha_8}{\mu_1 \omega_2} \right) + \theta_{20} \quad (48-4)$$

در روابط بالا θ_{10} و θ_{20} ثابت‌های انتگرالی می‌باشند. اگر نیروی میراکننده در این سیستم صفر شود یعنی $\mu_1 = 0$ و در نانوصفحه بالا $a_{20} = 0$ و در نانوصفحه پایین $a_{10} = 0$ باشند، فازهای سیستم به صورت زیر می‌باشند:

$$\theta_1 = \frac{3}{8} \frac{a_{10}^2 \alpha_1}{\omega_1} \varepsilon^2 t + \theta_{10} \quad (49-4)$$

$$\theta_2 = \frac{3}{8} \frac{a_{20}^2 \alpha_8}{\omega_2} \varepsilon^2 t + \theta_{20} \quad (50-4)$$

با توجه به روابط بالا فرکانس طبیعی غیرخطی دو نانوصفحه برابر با روابط زیر می‌باشد:

$$\omega_{1N} = \frac{3}{8} \frac{a_{10}^2 \alpha_1}{\omega_1} + \omega_1 \quad (51-4)$$

$$\omega_{2N} = \frac{3}{8} \frac{a_{20}^2 \alpha_8}{\omega_2} + \omega_2 \quad (52-4)$$

۳-۴- بررسی ارتعاشات اجباری غیرخطی

۳-۴-۱- رزونانس اولیه $\Omega \approx \omega_1$

در این بخش به بررسی ارتعاشات اجباری از نوع رزونانس اولیه سیستم، می‌پردازیم. نیروی تحریک وارد شده بر نانوصفحه بالا $F = f \cos(\Omega t)$ است و همچنین $f_1 = \frac{f}{\varepsilon^3}$ فرض می‌شود. بنابراین معادله حرکت دو نانوصفحه برابر است با:

$$\ddot{q}_1 + 2ep^2 \mu_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \alpha_1 q_1^3 + \alpha_2 q_1^2 q_2 + \alpha_3 q_1 q_2^2 + \alpha_4 q_2^3 = \varepsilon^3 f_1 \cos(\Omega t) \quad (53-4)$$

$$\ddot{q}_2 + 2ep^2 \mu_1 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \alpha_5 q_1^3 + \alpha_6 q_1^2 q_2 + \alpha_7 q_1 q_2^2 + \alpha_8 q_2^3 = 0 \quad (54-4)$$

با استفاده از روابط (۲۰-۴)، (۲۲-۴) و (۲۳-۴) و همچنین با جایگذاری روابط (۲۴-۴) و (۲۵-۴) در معادلات (۵۳-۴) و (۵۴-۴) معادلات را از توان‌های برابر ε دسته بندی می‌کنیم. دسته اول معادلات با توان ε^1 برای نانوصفحه بالا و پایین به ترتیب برابر با رابطه (۲۸-۴) و (۲۹-۴) می‌باشند. دسته دوم برای جملات با توان ε^3 روابط زیر را داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{13} + \omega_1^2 q_{13} = -2\mu_1 \frac{\partial}{\partial T_0} q_{11} - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} q_{11} \quad (۵۵-۴)$$

$$-\alpha_1 (q_{11})^3 - \alpha_2 (q_{11})^2 q_{21} - \alpha_3 q_{11} (q_{21})^2 - \alpha_4 (q_{21})^3 - f_1 \cos(\Omega t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{23} + \omega_2^2 q_{23} = -2\mu_1 \frac{\partial}{\partial T_0} q_{21} - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} q_{21} \quad (۵۶-۴)$$

$$-\alpha_5 (q_{11})^3 - \alpha_6 (q_{11})^2 q_{21} - \alpha_7 q_{11} (q_{21})^2 - \alpha_8 (q_{21})^3$$

با معرفی پارامتر تنظیم σ که نزدیک بودن فرکانس تحریک خارجی سیستم Ω به فرکانس طبیعی نانوصفحه بالا ω_1 را توصیف می‌کند. بر این اساس رابطه زیر برقرار است:

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma \quad (۵۷-۴)$$

$$\Omega t = \omega_1 t + \varepsilon^2 \sigma t = \omega_1 T_0 + \sigma T_2 \quad (۵۸-۴)$$

حال با جایگذاری روابط (۳۲-۴)، (۳۳-۴) و (۵۸-۴) در روابط (۵۳-۴) و (۵۴-۴) نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{13} + \omega_1^2 q_{13} = & -(A_1)^2 e^{iT_0(2\omega_1-\omega_2)} \bar{A}_2 \alpha_2 - A_1 e^{iT_0(\omega_1-2\omega_2)} (\bar{A}_2)^2 \alpha_3 \\ & - A_1 e^{iT_0(\omega_1+2\omega_2)} (A_2)^2 \alpha_3 - (A_1)^2 e^{iT_0(2\omega_1+\omega_2)} A_2 \alpha_2 - (A_1)^3 e^{3i\omega_1 T_0} \alpha_1 \\ & - (A_2)^3 e^{3i\omega_2 T_0} \alpha_4 - \left(2A_1 \bar{A}_1 A_2 \alpha_2 + 3(A_2)^2 \bar{A}_2 \alpha_4 \right) e^{i\omega_2 T_0} \\ & - \left(2i \left(\frac{d}{dT_2} A_1 \right) \omega_1 + 2 \left(i\mu_1 \omega_1 + \frac{3}{2} A_1 \bar{A}_1 \alpha_1 + \alpha_3 \bar{A}_2 A_2 \right) A_1 \right) e^{i\omega_1 T_0} \\ & + \frac{1}{2} f_1 \left(e^{i(\sigma T_2 + \omega_1)} \right) + cc \end{aligned} \quad (۵۹-۴)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{23} + \omega_2^2 q_{23} = & -(A_1)^2 \bar{A}_2 e^{iT_0(2\omega_1 - \omega_2)} \alpha_6 - A_1 (\bar{A}_2)^2 e^{iT_0(\omega_1 - 2\omega_2)} \alpha_7 \\
& - (A_2)^2 A_1 e^{iT_0(\omega_1 + 2\omega_2)} \alpha_7 - A_2 (A_1)^2 e^{iT_0(2\omega_1 + \omega_2)} \alpha_6 - (A_1)^3 e^{3i\omega_1 T_0} \alpha_5 \\
& - (A_2)^3 e^{3i\omega_2 T_0} \alpha_8 - \left(3(A_1)^2 \bar{A}_1 \alpha_5 + 2A_1 \bar{A}_2 \alpha_7 A_2 \right) e^{i\omega_1 T_0} \\
& - \left(2i \left(\frac{d}{dT_2} A_2 \right) \omega_2 + 2A_2 \left(i\mu_1 \omega_2 + \alpha_6 \bar{A}_1 A_1 + \frac{3}{2} A_2 \bar{A}_2 \alpha_8 \right) \right) e^{i\omega_2 T_0} + cc
\end{aligned} \tag{۶۰-۴}$$

در دو رابطه بالا جملاتی که ایجاد سکولارترم می کنند به صورت زیر می باشند:

$$2i \left(\frac{d}{dT_2} A_1 \right) \omega_1 + 2 \left(i\omega_1 \mu_1 + \frac{3}{2} A_1 \bar{A}_1 \alpha_1 + \alpha_3 \bar{A}_2 A_2 \right) A_1 - \frac{1}{2} f_1 e^{i\sigma T_2} = 0 \tag{۶۱-۴}$$

$$2i \left(\frac{d}{dT_2} A_2 \right) \omega_2 + 2 \left(i\omega_2 \mu_1 + \frac{3}{2} \alpha_8 A_2 \bar{A}_2 + A_1 \bar{A}_1 \alpha_6 \right) A_2 = 0 \tag{۶۲-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۳۸-۴) در روابط (۶۱-۴) و (۶۲-۴) و ساده سازی به معادلات زیر خواهیم

رسید:

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{8} (a_1)^3 \alpha_1 + \frac{1}{4} a_1 \alpha_3 (a_2)^2 - \omega_1 a_1 \frac{d}{dT_2} \theta_1 - \frac{1}{2} f_1 \cos(\sigma T_2 - \theta_1) \\
& + i \left(a_1 \omega_1 \mu_1 + \omega_1 \frac{d}{dT_2} a_1 - \frac{1}{2} f_1 \sin(\sigma T_2 - \theta_1) \right) = 0
\end{aligned} \tag{۶۳-۴}$$

$$-\omega_2 a_2 \frac{d}{dT_2} \theta_2 + \frac{3}{8} (a_2)^3 \alpha_8 + \frac{1}{4} a_2 (a_1)^2 \alpha_6 + i \left(\omega_2 \frac{d}{dT_2} a_2 + a_2 \omega_2 \mu_1 \right) = 0 \tag{۶۴-۴}$$

با جداسازی بخش حقیقی و موهومی روابط بالا داریم:

$$\frac{d}{dT_2} a_1 = -a_1 \mu_1 + \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \sin(\sigma T_2 - \theta_1) \tag{۶۵-۴}$$

$$\frac{d}{dT_2} a_2 + a_2 \mu_1 = 0 \tag{۶۶-۴}$$

$$a_1 \frac{d}{dT_2} \theta_1 = \frac{3(a_1)^3}{8 \omega_1} \alpha_1 + \frac{1}{4} \frac{a_1 (a_2)^2}{\omega_1} \alpha_3 - \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \cos(\sigma T_2 - \theta_1) \tag{۶۷-۴}$$

$$a_2 \frac{d}{dT_2} \theta_2 = \frac{3(a_2)^3}{8 \omega_2} \alpha_8 + \frac{1}{4} \frac{a_2 (a_1)^2}{\omega_2} \alpha_6 \tag{۶۸-۴}$$

با تعریف $\gamma = \sigma T_2 - \theta_1$ سیستم تبدیل به یک سیستم خودگردان می شود. همچنین با مشتق گیری

از رابطه گفته شده به معادله $\gamma' = \sigma - \theta_1'$ می‌رسیم. با جایگذاری آنها در روابط (۴-۶۵) و (۴-۶۶) معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$a_1' = -a_1 \mu_1 + \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \sin(\gamma) \quad (۴-۶۹)$$

$$a_1 \gamma' = a_1 \sigma - \frac{3(a_1)^3}{8 \omega_1} \alpha_1 - \frac{1}{4} \frac{a_1(a_2)^2}{\omega_1} \alpha_3 + \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \cos(\gamma) \quad (۴-۷۰)$$

حالت ملنا زمانی رخ می‌دهد که تغییرات دامنه و فاز نداشته باشیم. لذا برای حل حالت ملنا $a_1' = \gamma' = 0$ می‌باشد. همچنین معادلات (۴-۶۹) و (۴-۷۰) را به توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم. در نهایت معادله پاسخ فرکانسی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_1^2 \mu_1^2 + \left(a_1 \sigma - \frac{3 \alpha_1 a_1^3}{8 \omega_1} - \frac{1}{4} \frac{\alpha_3 a_1 a_2^2}{\omega_1} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{f_1^2}{\omega_1^2} = 0 \quad (۴-۷۱)$$

۴-۳-۲- رزونانس اولیه $\omega_1 \approx \Omega$ و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$

در این بخش به بررسی ارتعاشات اجباری ناشی از رزونانس اولیه و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ می‌پردازیم. مراحل ابتدایی حل تحلیلی در این بخش مانند بخش قبل می‌باشد. ضرایبی که در معادله (۴-۵۹) و (۴-۶۰) وجود دارند به صورت زیر می‌باشند:

$$e^{iT_0(2\omega_1-\omega_2)}, e^{iT_0(\omega_1-2\omega_2)}, e^{iT_0(\omega_1+2\omega_2)}, e^{iT_0(2\omega_1+\omega_2)}, e^{3i\omega_1 T_0}, e^{3i\omega_2 T_0}, e^{i\omega_2 T_0}, e^{i\omega_1 T_0}, f_1(e^{i(\sigma T_2+\omega_1)}), cc \quad (۴-۷۲)$$

$$e^{iT_0(2\omega_1-\omega_2)}, e^{iT_0(\omega_1-2\omega_2)}, e^{iT_0(\omega_1+2\omega_2)}, e^{iT_0(2\omega_1+\omega_2)}, e^{-3i\omega_2 T_0}, e^{3i\omega_1 T_0}, e^{3i\omega_2 T_0}, e^{i\omega_1 T_0}, e^{i\omega_2 T_0}, cc \quad (۴-۷۳)$$

معادله (۴-۷۲) ضرایب موجود در نانوصفحه اول و معادله (۴-۷۳) ضرایب موجود در نانوصفحه دوم می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود با فرضیات زیر، رزونانس اولیه به همراه حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ در سیستم قابل مشاهده است:

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1 \\
\omega_2 t &= 3\omega_1 t + \varepsilon^2 \sigma_1 t \\
\omega_2 T_0 &= 3\omega_1 T_0 + \sigma_1 T_2
\end{aligned} \tag{۷۴-۴}$$

$$\begin{aligned}
\Omega &= \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 \\
\Omega t &= \omega_1 t + \varepsilon^2 \sigma_2 t = \omega_1 T_0 + \sigma_2 T_2
\end{aligned} \tag{۷۵-۴}$$

با استفاده از رابطه (۷۴-۴) و (۷۵-۴)، جملاتی که باعث ایجاد سکولارترم می‌شوند به صورت زیر

به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
2i \left(\frac{d}{dT_2} A_1 \right) \omega_1 + 2 \left(i\omega_1 \mu_1 + \frac{3}{2} A_1 \bar{A}_1 \alpha_1 + \alpha_3 \bar{A}_2 A_2 \right) A_1 \\
+ (\bar{A}_1)^2 A_2 \alpha_2 e^{i\sigma_1 T_2} - \frac{1}{2} f 1 e^{i\sigma_2 T_2} = 0
\end{aligned} \tag{۷۶-۴}$$

$$2i \left(\frac{d}{dT_2} A_2 \right) \omega_2 + 2A_2 \left(i\mu_1 \omega_2 + \alpha_6 \bar{A}_1 A_1 + \frac{3}{2} A_2 \bar{A}_2 \alpha_8 \right) + (A_1)^3 \alpha_5 e^{-i\sigma_1 T_2} = 0 \tag{۷۷-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۳۸-۴) در روابط (۷۶-۴) و (۷۷-۴) و ساده‌سازی به معادلات زیر خواهیم

رسید:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{8} (a_1)^3 \alpha_1 + \frac{1}{4} a_1 \alpha_3 (a_2)^2 - \omega_1 a_1 \frac{d}{dT_2} \theta_1 - \frac{1}{2} f 1 \cos(\sigma_2 T_2 - \theta_1) \\
+ i \left(a_1 \omega_1 \mu_1 + \omega_1 \frac{d}{dT_2} a_1 - \frac{1}{2} f 1 \sin(\sigma_2 T_2 - \theta_1) \right) \\
+ \frac{1}{8} (a_1)^2 a_2 \alpha_2 \cos(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) + i \left(\frac{1}{8} (a_1)^2 a_2 \alpha_2 \sin(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) \right) = 0
\end{aligned} \tag{۷۸-۴}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} (a_1)^3 \alpha_5 \cos(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) + \frac{1}{4} a_2 \alpha_6 (a_1)^2 + \frac{3}{8} (a_2)^3 \alpha_8 - \omega_2 a_2 \frac{d}{dT_2} \theta_2 \\
+ i \left(-\frac{1}{8} (a_1)^3 \alpha_5 \sin(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) + a_2 \mu_1 \omega_2 + \omega_2 \frac{d}{dT_2} a_2 \right) = 0
\end{aligned} \tag{۷۹-۴}$$

با جداسازی بخش حقیقی و موهومی در دو رابطه بالا، به ۴ معادله زیر خواهیم رسید:

$$\frac{d}{dT_2} a_1 = -a_1 \mu_1 - \frac{1}{8} \frac{(a_1)^2 a_2}{\omega_1} \alpha_2 \sin(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) + \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \sin(\sigma_2 T_2 - \theta_1) \quad (۸۰-۴)$$

$$\frac{d}{dT_2} a_2 = -a_2 \mu_1 + \frac{1}{8} \frac{(a_1)^3}{\omega_2} \alpha_5 \sin(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) \quad (۸۱-۴)$$

$$a_1 \frac{d}{dT_2} \theta_1 = \frac{3}{8} \frac{(a_1)^3}{\omega_1} \alpha_1 + \frac{1}{4} \frac{a_1 (a_2)^2}{\omega_1} \alpha_3 \quad (۸۲-۴)$$

$$+ \frac{1}{8} \frac{(a_1)^2 a_2}{\omega_1} \alpha_2 \cos(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) - \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \cos(\sigma_2 T_2 - \theta_1)$$

$$a_2 \frac{d}{dT_2} \theta_2 = \frac{1}{4} \frac{a_2 (a_1)^2}{\omega_2} \alpha_6 + \frac{3}{8} \frac{(a_2)^3}{\omega_2} \alpha_8 + \frac{1}{8} \frac{(a_1)^3}{\omega_2} \alpha_5 \cos(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) \quad (۸۳-۴)$$

با تعریف $\gamma_2 = \sigma_2 T_2 - \theta_1$ و $\gamma_1 = \sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1$ سیستم تبدیل به یک سیستم خودگردان

خواهد شد. همچنین با مشتق گیری از آنها به دو معادله $\gamma_2' = \sigma_2 - \theta_1'$ و $\gamma_1' = \sigma_1 + \theta_2' - 3\theta_1'$

می‌رسیم. با جایگذاری آنها در روابط حقیقی و موهومی گفته شده، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$a_1' = -a_1 \mu_1 - \frac{1}{8} \frac{(a_1)^2 a_2}{\omega_1} \alpha_2 \sin(\gamma_1) + \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \sin(\gamma_2) \quad (۸۴-۴)$$

$$a_2' = -a_2 \mu_1 + \frac{1}{8} \frac{(a_1)^3}{\omega_2} \alpha_5 \sin(\gamma_1) \quad (۸۵-۴)$$

$$a_1 \gamma_2' = a_1 \sigma_2 - \frac{3}{8} \frac{(a_1)^3}{\omega_1} \alpha_1 - \frac{1}{4} \frac{a_1 (a_2)^2}{\omega_1} \alpha_3 - \frac{1}{8} \frac{(a_1)^2 a_2}{\omega_1} \alpha_2 \cos(\gamma_1) + \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \cos(\gamma_2) \quad (۸۶-۴)$$

$$a_2 \gamma_1' - 3a_2 \gamma_2' = a_2 \sigma_1 - 3a_2 \sigma_2 + \frac{1}{4} \frac{a_2 (a_1)^2}{\omega_2} \alpha_6 + \frac{3}{8} \frac{(a_2)^3}{\omega_2} \alpha_8 + \frac{1}{8} \frac{(a_1)^3}{\omega_2} \alpha_5 \cos(\gamma_1) \quad (۸۷-۴)$$

این معادلات بر اساس روابط مثلثاتی، حل عددی شده و نتایج در فصل بعد ارائه می‌شود.

۳-۳-۴- ارتعاشات اجباری غیرخطی با رزونانس ثانویه

در این بخش به تحلیل و بررسی ارتعاشات اجباری از نوع رزونانس ثانویه پرداخته می‌شود. همانطور

که در بخش‌های قبل گفته شد. تحریک خارجی وارد شده بر نانوصفحه بالا $F = f \cos(\Omega t)$ است.

برای تحلیل رزونانس ثانویه نیروی تحریک از مرتبه ε در نظر گرفته می‌شود، یعنی $f_1 = \frac{f}{\varepsilon}$ می‌باشد.

معادلات حرکت برای دوناوصفحه طبق معادلات زیر تعریف می شود:

$$\ddot{q}_1 + 2ep^2\mu_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \alpha_1 q_1^3 + \alpha_2 q_1^2 q_2 + \alpha_3 q_1 q_2^2 + \alpha_4 q_2^3 = \varepsilon f_1 \cos(\Omega t) \quad (۸۸-۴)$$

$$\ddot{q}_2 + 2ep^2\mu_1\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \alpha_5 q_1^3 + \alpha_6 q_1^2 q_2 + \alpha_7 q_1 q_2^2 + \alpha_8 q_2^3 = 0 \quad (۸۹-۴)$$

با استفاده از روابط (۲۰-۴)، (۲۲-۴) و (۲۳-۴) و همچنین با جایگذاری روابط (۲۴-۴) و (۲۵-۴)

در معادلات بالا و با دسته بندی معادلات با توان های برابر از مرتبه ε ، برای دسته اول یعنی معادلاتی

که از مرتبه ε^1 می باشند، داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{11} + \omega_1^2 q_{11} = f_1 \cos(\Omega t) \quad (۹۰-۴)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{21} + \omega_2^2 q_{21} = 0 \quad (۹۱-۴)$$

دسته دوم معادلات از مرتبه ε^3 می باشند:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{13} + \omega_1^2 q_{13} = -2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} q_{11} - 2\mu_1 \frac{\partial}{\partial T_0} q_{11} - \alpha_1 (q_{11})^3 - \alpha_2 (q_{11})^2 q_{21} \quad (۹۲-۴)$$

$$\begin{aligned} & -\alpha_3 q_{11} (q_{21})^2 - \alpha_4 (q_{21})^3 \\ & \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{23} + \omega_2^2 q_{23} = -2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} q_{21} - 2\mu_1 \frac{\partial}{\partial T_0} q_{21} - \alpha_5 (q_{11})^3 - \alpha_6 (q_{11})^2 q_{21} \quad (۹۳-۴) \\ & -\alpha_7 q_{11} (q_{21})^2 - \alpha_8 (q_{21})^3 \end{aligned}$$

پاسخ رابطه های (۹۰-۴) و (۹۱-۴) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$q_{11} = A_1 e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 T_0} + \Lambda_1 e^{i\Omega T_0} + \Lambda_1 e^{-i\Omega T_0} \quad (۹۴-۴)$$

$$q_{21} = A_2 e^{i\omega_2 T_0} + \bar{A}_2 e^{-i\omega_2 T_0} \quad (۹۵-۴)$$

که در رابطه (۹۴-۴)، $\Lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{f_1}{\omega_1^2 - \Omega^2} \right)$ می باشد. با جایگذاری روابط (۹۴-۴) و (۹۵-۴) در

دسته دوم یعنی روابط (۹۲-۴) و (۹۳-۴)، معادلات زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{13} + \omega_1^2 q_{13} = & -3e^{iT_0(\Omega-2\omega_1)} (\bar{A}_1)^2 \Lambda_1 \alpha_1 - 3e^{iT_0(2\Omega-\omega_1)} \bar{A}_1 \Lambda_1^2 \alpha_1 \\
& -3e^{iT_0(2\Omega+\omega_1)} A_1 \Lambda_1^2 \alpha_1 - 3e^{iT_0(\Omega+2\omega_1)} (A_1)^2 \Lambda_1 \alpha_1 - (A_2)^3 e^{3i\omega_2 T_0} \alpha_4 - e^{3i\omega_1 T_0} (A_1)^3 \alpha_1 \\
& -2\Lambda_1^3 \alpha_1 \cos(3\Omega T_0) - 2e^{iT_0(\Omega+\omega_1+\omega_2)} A_1 A_2 \Lambda_1 \alpha_2 - 2e^{iT_0(\Omega+\omega_1-\omega_2)} A_1 \bar{A}_2 \Lambda_1 \alpha_2 \\
& -2e^{iT_0(\Omega-\omega_1+\omega_2)} \bar{A}_1 A_2 \Lambda_1 \alpha_2 - 2e^{iT_0(\Omega-\omega_1-\omega_2)} \bar{A}_1 \bar{A}_2 \Lambda_1 \alpha_2 - e^{iT_0(\Omega+2\omega_2)} (A_2)^2 \Lambda_1 \alpha_3 \\
& -e^{iT_0(\Omega-2\omega_2)} (\bar{A}_2)^2 \Lambda_1 \alpha_3 - e^{iT_0(2\Omega+\omega_2)} A_2 \Lambda_1^2 \alpha_2 - e^{iT_0(2\Omega-\omega_2)} \bar{A}_2 \Lambda_1^2 \alpha_2 \\
& -e^{iT_0(\omega_1+2\omega_2)} A_1 (A_2)^2 \alpha_3 - e^{iT_0(\omega_1-2\omega_2)} A_1 (\bar{A}_2)^2 \alpha_3 - e^{iT_0(2\omega_1+\omega_2)} (A_1)^2 A_2 \alpha_2 \\
& -e^{iT_0(2\omega_1-\omega_2)} (A_1)^2 \bar{A}_2 \alpha_2^3 \alpha_1 - 2\Lambda_1 \left(i\Omega \mu_1 + \frac{3}{2} \Lambda_1^2 \alpha_1 + 3A_1 \bar{A}_1 \alpha_1 + \alpha_3 \bar{A}_2 A_2 \right) e^{i\Omega T_0} \\
& -2 \left(\Lambda_1^2 \alpha_2 + A_1 \bar{A}_1 \alpha_2 + \frac{3}{2} A_2 \bar{A}_2 \alpha_4 \right) A_2 e^{i\omega_2 T_0} \\
& - \left(2i \left(\frac{d}{dT_2} A_1 \right) \omega_1 - 2A_1 \left(i\mu_1 \omega_1 + 3\Lambda_1^2 \alpha_1 + \frac{3}{2} A_1 \bar{A}_1 \alpha_1 + \alpha_3 \bar{A}_2 A_2 \right) \right) e^{i\omega_1 T_0} + cc
\end{aligned} \tag{۹۶-۴}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} q_{23} + \omega_2^2 q_{23} = & 2\Lambda_1^3 \alpha_5 \cos(3\Omega T_0) + e^{3i\omega_1 T_0} (A_1)^3 \alpha_5 + (A_2)^3 e^{3i\omega_2 T_0} \alpha_8 \\
& + 2e^{iT_0(\Omega+\omega_1+\omega_2)} A_1 A_2 \Lambda_1 \alpha_6 + 2e^{iT_0(\Omega+\omega_1-\omega_2)} A_1 \bar{A}_2 \Lambda_1 \alpha_6 + 2e^{iT_0(\Omega-\omega_1+\omega_2)} \bar{A}_1 A_2 \Lambda_1 \alpha_6 \\
& + 2e^{iT_0(\Omega-\omega_1-\omega_2)} \bar{A}_1 \bar{A}_2 \Lambda_1 \alpha_6 + e^{iT_0(2\omega_1+\omega_2)} (A_1)^2 A_2 \alpha_6 + e^{iT_0(2\omega_1-\omega_2)} (A_1)^2 \bar{A}_2 \alpha_6 \\
& + e^{iT_0(2\Omega-\omega_2)} \bar{A}_2 \Lambda_1^2 \alpha_6 + e^{iT_0(\Omega+2\omega_2)} (A_2)^2 \Lambda_1 \alpha_7 + e^{iT_0(\Omega-2\omega_2)} (\bar{A}_2)^2 \Lambda_1 \alpha_7 \\
& + e^{iT_0(\omega_1-2\omega_2)} A_1 (\bar{A}_2)^2 \alpha_7 + e^{iT_0(2\Omega+\omega_2)} A_2 \Lambda_1^2 \alpha_6 + 3e^{iT_0(\Omega+2\omega_1)} (A_1)^2 \Lambda_1 \alpha_5 \\
& + 3e^{iT_0(2\Omega+\omega_1)} A_1 \Lambda_1^2 \alpha_5 + e^{iT_0(\omega_1+2\omega_2)} A_1 (A_2)^2 \alpha_7 + 3e^{iT_0(\Omega-2\omega_1)} (\bar{A}_1)^2 \Lambda_1 \alpha_5 \\
& + 3e^{iT_0(2\Omega-\omega_1)} \bar{A}_1 \Lambda_1^2 \alpha_5 + (6\Lambda_1^3 \alpha_5 + 12A_1 \bar{A}_1 \Lambda_1 \alpha_5 + 4A_2 \bar{A}_2 \Lambda_1 \alpha_7) \cos(\Omega T_0) \\
& + (3(A_1)^2 \bar{A}_1 \alpha_5 + 2A_1 A_2 \bar{A}_2 \alpha_7 + 6A_1 \Lambda_1^2 \alpha_5) e^{i\omega_1 T_0} \\
& + \left(2i \left(\frac{d}{dT_2} A_2 \right) \omega_2 + 2 \left(i\omega_2 \mu_1 + \Lambda_1^2 \alpha_6 + A_1 \bar{A}_1 \alpha_6 + \frac{3}{2} A_2 \bar{A}_2 \alpha_8 \right) A_2 \right) e^{i\omega_2 T_0} + cc
\end{aligned} \tag{۹۷-۴}$$

$$\Omega \approx \frac{1}{3} \omega_1 \text{ ۱-۳-۳-۴ مافوق هارمونیک}$$

در این بخش به تحلیل رزونانس مافوق هارمونیک از رزونانس ثانویه پرداخته می‌شود. Ω تحریک

در این بخش نزدیک $\frac{1}{3} \omega_1$ فرض می‌شود. لذا این رزونانس در نانوصفحه بالا رخ می‌دهد. با جایگذاری

$\Omega T_0 = \frac{1}{3} \omega_1 + \sigma T_2$ ، جملات سکولارترم در رابطه (۹۶-۴) و (۹۷-۴) به صورت رابطه زیر می‌باشند:

$$2i \left(\frac{d}{dT_2} A_1 \right) \omega_1 + 2A_1 \left(i\mu_1 \omega_1 + 3\Lambda_1^2 \alpha_1 + \frac{3}{2} A_1 \bar{A}_1 \alpha_1 + \alpha_3 \bar{A}_2 A_2 \right) - \Lambda_1^3 \alpha_1 e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (۹۸-۴)$$

$$2i \left(\frac{d}{dT_2} A_2 \right) \omega_2 + 2 \left(i\omega_2 \mu_1 + \alpha_6 \Lambda_1^2 + A_1 \bar{A}_1 \alpha_6 + \frac{3}{2} A_2 \bar{B}_2 \alpha_8 \right) A_2 = 0 \quad (۹۹-۴)$$

فرم قطبی معادلات یعنی رابطه (۳۸-۴) را در روابط بالا جایگذاری کرده و پس از ساده‌سازی به

معادلات زیر خواهیم رسید:

$$-\Lambda_1^3 \alpha_1 \cos(\sigma T_2 - \theta_1) - \omega_1 a_1 \frac{d}{dT_2} \theta_1 + \left(3\Lambda_1^2 \alpha_1 + \frac{3}{8} \alpha_1 (a_1)^2 + \frac{1}{4} \alpha_3 (a_2)^2 \right) a_1 \quad (۱۰۰-۴)$$

$$+ i \left(-\Lambda_1^3 \alpha_1 \sin(\sigma T_2 - \theta_1) + \omega_1 \frac{d}{dT_2} a_1 + a_1 \mu_1 \omega_1 \right) = 0$$

$$-\omega_2 a_2 \frac{d}{dT_2} \theta_2 + \left(\alpha_6 \Lambda_1^2 + \frac{3}{8} \alpha_8 (a_2)^2 + \frac{1}{4} \alpha_6 (a_1)^2 \right) a_2 \quad (۱۰۱-۴)$$

$$+ i \left(\omega_2 \frac{d}{dT_2} a_2 + a_2 \omega_2 \mu_1 \right)$$

در روابط (۱۰۰-۴) و (۱۰۱-۴) با جداسازی جملات حقیقی و موهومی، به چهار معادله زیر

می‌رسیم:

$$\frac{d}{dT_2} a_1 = -a_1 \mu_1 + \frac{\Lambda_1^3}{\omega_1} \alpha_1 \sin(\sigma T_2 - \theta_1) \quad (۱۰۲-۴)$$

$$\frac{d}{dT_2} a_2 = -a_2 \mu_1 \quad (۱۰۳-۴)$$

$$a_1 \frac{d}{dT_2} \theta_1 = \left(3 \frac{\Lambda_1^2}{\omega_1} \alpha_1 + \frac{3}{8} \frac{(a_1)^2}{\omega_1} \alpha_1 + \frac{1}{4} \frac{(a_2)^2}{\omega_1} \alpha_3 \right) a_1 (T_2) - \frac{\Lambda_1^3}{\omega_1} \alpha_1 \cos(\sigma T_2 - \theta_1) \quad (۱۰۴-۴)$$

$$a_2 \frac{d}{dT_2} \theta_2 = \left(\frac{\Lambda_1^2}{\omega_2} \alpha_6 + \frac{1}{4} \frac{(a_1)^2}{\omega_2} \alpha_6 + \frac{3}{8} \frac{(a_2)^2}{\omega_2} \alpha_8 \right) a_2 (T_2) \quad (۱۰۵-۴)$$

برای تبدیل سیستم به یک سیستم خودگردان $\gamma = \sigma T_2 - \theta_1$ تعریف می‌شود. همچنین با

مشتق‌گیری از رابطه گفته شده به معادله $\gamma' = \sigma - \theta_1'$ می‌رسیم. با جایگذاری آنها در روابط بخش

حقیقی و موهومی نانوصفحه بالا، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$a_1' = -a_1\mu_1 + \frac{\Lambda_1^3}{\omega_1} \alpha_1 \sin(\gamma) \quad (۱۰۶-۴)$$

$$a_1\gamma' = a_1\sigma - \left(3\frac{\Lambda_1^2}{\omega_1} \alpha_1 + \frac{3(a_1)^2}{8\omega_1} \alpha_1 + \frac{1(a_2)^2}{4\omega_1} \alpha_3 \right) a_1 + \frac{\Lambda_1^3}{\omega_1} \alpha_1 \cos(\gamma) \quad (۱۰۷-۴)$$

در حالت مانا $a_1' = \gamma' = 0$ می‌باشد. همچنین معادلات (۱۰۶-۴) و (۱۰۷-۴) را به توان ۲ رسانده

و با هم جمع می‌کنیم. در نهایت معادله پاسخ فرکانسی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_1^2\mu_1^2 + \left[a_1\sigma - \frac{a_1 \left(-3\Lambda_1^2\alpha_1 - \frac{3}{8}\alpha_1 a_1^2 - \frac{1}{4}\alpha_3 a_2^2 \right)}{\omega_1} \right]^2 - \frac{\Lambda_1^6 \alpha_1^2}{\omega_1^2} = 0 \quad (۱۰۸-۴)$$

۴-۳-۲-۳-۲ مادون هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_1$

در این بخش به تحلیل رزونانس مادون هارمونیک از رزونانس ثانویه پرداخته می‌شود. تحریک در

این بخش نزدیک $3\omega_1$ فرض می‌شود. لذا این رزونانس در نانوصفحه بالا رخ می‌دهد. با جایگذاری

$\Omega T_0 = 3\omega_1 + \sigma T_2$ در رابطه (۹۶-۴)، جملاتی که سکولارترم ایجاد می‌کنند به صورت زیر می‌باشند:

$$2i \left(\frac{d}{dT_2} A_1 \right) \omega_1 + 2 \left(i\mu_1 \omega_1 + 3\Lambda_1^2 \alpha_1 + \frac{3}{2} A_1 \bar{A}_1 \alpha_1 + \alpha_3 \bar{A}_2 A_2 \right) A_1 \quad (۱۰۹-۴)$$

$$-3(\bar{A}_1)^2 \Lambda_1 \alpha_1 e^{i\sigma T_2} = 0$$

با جایگذاری فرم قطبی معادلات یعنی رابطه (۳۸-۴) در رابطه بالا و پس از ساده‌سازی، به معادله

زیر خواهیم رسید:

$$-\omega_1 a_1 \frac{d}{dT_2} \theta_1 - \frac{3}{4} (a_1)^2 \Lambda_1 \alpha_1 \cos(\sigma T_2 - 3\theta_1) + \left(3\Lambda_1^2 \alpha_1 + \frac{3}{8} \alpha_1 (a_1)^2 + \frac{1}{4} \alpha_3 (a_2)^2 \right) a_1 \quad (۱۱۰-۴)$$

$$+ i \left(-\frac{3}{4} (a_1)^2 \Lambda_1 \alpha_1 \sin(\sigma T_2 - 3\theta_1) + \omega_1 \frac{d}{dT_2} a_1 + a_1 \mu_1 \omega_1 \right)$$

با جداسازی بخش حقیقی و موهومی به دو رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\frac{d}{dT_2} a_1 = -a_1 \mu_1 + \frac{3(a_1)^2}{4\omega_1} \Lambda_1 \alpha_1 \sin(\sigma T_2 - 3\theta_1) \quad (111-4)$$

$$a_1 \frac{d}{dT_2} \theta_1 = + \left(\frac{3}{\omega_1} \Lambda_1^2 \alpha_1 + \frac{3(a_1)^2}{8\omega_1} \alpha_1 + \frac{1(a_2)^2}{4\omega_1} \alpha_3 \right) a_1 - \frac{3(a_1)^2}{4\omega_1} \Lambda_1 \alpha_1 \cos(\sigma T_2 - 3\theta_1) \quad (112-4)$$

برای تبدیل سیستم به یک سیستم خودگردان از رابطه $\gamma = \sigma T_2 - 3\theta_1$ استفاده می‌شود. با مشتق‌گیری از رابطه گفته شده به معادله $\gamma' = \sigma - 3\theta_1'$ می‌رسیم. سپس با جایگذاری آنها در روابط (111-4) و (112-4)، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$a_1' = -a_1 \mu_1 + \frac{3(a_1)^2}{4\omega_1} \Lambda_1 \alpha_1 \sin(\gamma) \quad (113-4)$$

$$a_1 \gamma_1' = a_1 \sigma_1 + \frac{9(a_1)^2}{4\omega_1} \Lambda_1 \alpha_1 \cos(\gamma_1) - \left(\frac{9}{\omega_1} \Lambda_1^2 \alpha_1 + \frac{9(a_1)^2}{8\omega_1} \alpha_1 + \frac{3(a_2)^2}{4\omega_1} \alpha_3 \right) a_1 \quad (114-4)$$

برای بررسی حالت مانا $a_1' = \gamma_1' = 0$ در نظر گرفته می‌شود. معادله پاسخ فرکانسی برای نانوصفحه بالا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$9a_1^2 \mu_1^2 + \left[a_1 \sigma - 3 \frac{a_1 \left(3\Lambda_1^2 \alpha_1 + \frac{3}{8} \alpha_1 a_1^2 + \frac{1}{4} \alpha_3 a_2^2 \right)}{\omega_1} \right]^2 - \frac{81a_1^4 \Lambda_1^2 \alpha_1^2}{16\omega_1^2} = 0 \quad (115-4)$$

۳-۳-۳-۴- مادون هارمونیک $\Omega \approx 3\omega_1$ و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$

در این بخش به بررسی ارتعاشات اجباری ناشی از رزونانس ثانویه و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ می‌پردازیم. مراحل ابتدایی حل تحلیلی در این بخش مانند بخش قبل می‌باشد. ضرایبی که در معادله (۹۶-۴) و (۹۷-۴) وجود دارند به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
& e^{iT_0(\Omega-2\omega_1)}, e^{iT_0(2\Omega-\omega_1)}, e^{iT_0(2\Omega+\omega_1)}, e^{iT_0(\Omega+2\omega_1)}, e^{3i\omega_2 T_0}, e^{3i\omega_1 T_0}, e^{iT_0(\Omega+\omega_1+\omega_2)}, e^{iT_0(\Omega+\omega_1-\omega_2)} \\
& , e^{iT_0(\Omega-\omega_1+\omega_2)}, e^{iT_0(\Omega-\omega_1-\omega_2)}, e^{iT_0(\Omega+2\omega_2)}, e^{iT_0(\Omega-2\omega_2)}, e^{iT_0(2\Omega+\omega_2)}, e^{iT_0(2\Omega-\omega_2)}, e^{iT_0(\omega_1+2\omega_2)} \\
& , e^{iT_0(\omega_1-2\omega_2)}, e^{iT_0(2\omega_1+\omega_2)}, e^{iT_0(2\omega_1-\omega_2)}, e^{i\Omega T_0}, e^{i\omega_2 T_0}, e^{i\omega_1 T_0}, \cos(3\Omega T_0)
\end{aligned} \quad (116-4)$$

$$\begin{aligned}
& e^{3i\omega_1 T_0}, e^{3i\omega_2 T_0}, e^{iT_0(\Omega+\omega_1+\omega_2)}, e^{iT_0(\Omega+\omega_1-\omega_2)}, e^{iT_0(\Omega-\omega_1+\omega_2)}, e^{iT_0(\Omega-\omega_1-\omega_2)}, e^{iT_0(2\omega_1+\omega_2)} \\
& , e^{iT_0(2\omega_1-\omega_2)}, e^{iT_0(2\Omega-\omega_2)}, e^{iT_0(\Omega+2\omega_2)}, e^{iT_0(\Omega-2\omega_2)}, e^{iT_0(\omega_1-2\omega_2)}, e^{iT_0(2\Omega+\omega_2)}, e^{iT_0(\Omega+2\omega_1)} \\
& , e^{iT_0(2\Omega+\omega_1)}, e^{iT_0(\omega_1+2\omega_2)}, e^{iT_0(\Omega-2\omega_1)}, e^{iT_0(2\Omega-\omega_1)}, e^{-iT_0(\Omega+2\omega_1)}, e^{i\omega_1 T_0}, e^{i\omega_2 T_0} \\
& , \cos(\Omega T_0), \cos(3\Omega T_0)
\end{aligned} \quad (117-4)$$

معادله (۱۱۶-۴) و (۱۱۷-۴) به ترتیب ضرایب موجود در نانوصفحه اول و نانوصفحه دوم می‌باشند.

با توجه به فرضیات زیر، رزونانس ثانویه به همراه حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ در سیستم مورد بررسی قرار

می‌گیرد:

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1 & \Omega &= 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 \\
\omega_2 t &= 3\omega_1 t + \varepsilon^2 \sigma_1 t & \Omega t &= 3\omega_1 t + \varepsilon^2 \sigma_2 t \\
\omega_2 T_0 &= 3\omega_1 T_0 + \sigma_1 T_2 & \Omega T_0 &= 3\omega_1 T_0 + \sigma_2 T_2
\end{aligned} \quad (118-4)$$

در رابطه (۱۱۸-۴) رزونانس ثانویه از نوع مادون هارمونیک به همراه رزونانس داخلی می‌باشد. با

جایگذاری رابطه (۱۱۸-۴) در روابط (۹۶-۴) و (۹۷-۴)، جملاتی ایجاد سکولارترم می‌کنند، به صورت

زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
& 2i \left(\frac{d}{dT_2} A_1 \right) \omega_1 + 2 \left(i\mu_1 \omega_1 - 3\Lambda_1^2 \alpha_1 - \frac{3}{2} A_1 \bar{A}_1 \alpha_1 - \alpha_3 \bar{A}_2 A_2 \right) A_1 \\
& - 3(\bar{A}_1)^2 \Lambda_1 \alpha_1 e^{i\sigma_2 T_2} - (\bar{A}_1)^2 A_2 \alpha_2 e^{i\sigma_1 T_2} = 0
\end{aligned} \quad (119-4)$$

$$\begin{aligned}
& 2i \left(\frac{d}{dT_2} A_2 \right) \omega_2 + 2A_2 \left(i\omega_2 \mu_1 - \Lambda_1^2 \alpha_6 - A_1 \bar{A}_1 \alpha_6 - \frac{3}{2} A_2 \bar{A}_2 \alpha_8 \right) \\
& - (A_1)^3 \alpha_5 e^{-i\sigma_1 T_2} = 0
\end{aligned} \quad (120-4)$$

با جایگذاری فرم قطبی معادلات یعنی رابطه (۳۸-۴) در معادلات بالا و ساده‌سازی به رابطه زیر

خواهیم رسید:

$$-\omega_1 a_1 \frac{d}{dT_2} \theta_1 + \left(-\frac{3}{8}(a_1)^2 \alpha_1 - \frac{1}{4}(a_2)^2 \alpha_3 - 3\Lambda_1^2 \alpha_1 \right) a_1 + i \left(\omega_1 \frac{d}{dT_2} a_1 + a_1 \mu_1 \omega_1 \right) - \frac{1}{8}(a_1)^2 a_2 \alpha_2 \cos(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) - \frac{3}{4}(a_1)^2 \Lambda_1 \alpha_1 \cos(\sigma_2 T_2 - 3\theta_1) \quad (121-4)$$

$$+ i \left(-\frac{1}{8}(a_1)^2 a_2 \alpha_2 \sin(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) - \frac{3}{4}(a_1)^2 \Lambda_1 \alpha_1 \sin(\sigma_2 T_2 - 3\theta_1) \right) = 0$$

$$-\frac{1}{8}(a_1)^3 \alpha_5 \cos(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) + \left(-\frac{3}{8}(a_2)^2 \alpha_8 - \Lambda_1^2 \alpha_6 - \frac{1}{4}\alpha_6 (a_1)^2 \right) a_2 \quad (122-4)$$

$$-\omega_2 a_2 \frac{d}{dT_2} \theta_2 + i \left(\frac{1}{8}(a_1)^3 \alpha_5 \sin(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) + \omega_2 \frac{d}{dT_2} a_2 + a_2 \omega_2 \mu_1 \right) = 0$$

با جداسازی بخش حقیقی و موهومی رابطه بالا، به معادلات زیر خواهیم رسید:

$$\frac{d}{dT_2} a_1 + a_1 \mu_1 - \frac{1}{8} \frac{(a_1)^2 a_2}{\omega_1} \alpha_2 \sin(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) \quad (123-4)$$

$$- \frac{3}{4} \frac{(a_1)^2}{\omega_1} \Lambda_1 \alpha_1 \sin(\sigma_2 T_2 - 3\theta_1) = 0$$

$$\frac{d}{dT_2} a_2 + a_2 \mu_1 + \frac{1}{8} \frac{(a_1)^3}{\omega_2} \alpha_5 \sin(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) = 0 \quad (124-4)$$

$$-a_1 \frac{d}{dT_2} \theta_1 - \left(\frac{3}{8}(a_1)^2 \alpha_1 + \frac{1}{4}(a_2)^2 \alpha_3 + 3\Lambda_1^2 \alpha_1 \right) \frac{a_1}{\omega_1} \quad (125-4)$$

$$- \frac{1}{8} \frac{(a_1)^2 a_2}{\omega_1} \alpha_2 \cos(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) - \frac{3}{4} \frac{(a_1)^2}{\omega_1} \Lambda_1 \alpha_1 \cos(\sigma_2 T_2 - 3\theta_1) = 0$$

$$-a_2 \frac{d}{dT_2} \theta_2 - \left(\frac{3}{8} \frac{(a_2)^2}{\omega_2} \alpha_8 + \frac{1}{\omega_2} \Lambda_1^2 \alpha_6 + \frac{1}{4} \frac{(a_1)^2}{\omega_2} \alpha_6 \right) \frac{a_2}{\omega_2} \quad (126-4)$$

$$- \frac{1}{8} \frac{(a_1)^3}{\omega_2} \alpha_5 \cos(\sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1) = 0$$

با تعریف $\gamma_1 = \sigma_1 T_2 + \theta_2 - 3\theta_1$ و $\gamma_2 = \sigma_2 T_2 - 3\theta_1$ سیستم تبدیل به سیستم خودگردان خواهد

شد. همچنین با مشتق‌گیری از آنها به دو معادله $\gamma_1' = \sigma_1 + \theta_2' - 3\theta_1'$ و $\gamma_2' = \sigma_2 - 3\theta_1'$ می‌رسیم. با

جایگذاری آنها در روابط حقیقی و موهومی گفته شده، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$a_1' + a_1\mu_1 - \frac{1}{8} \frac{(a_1)^2 a_2}{\omega_1} \alpha_2 \sin(\gamma_1) - \frac{3}{4} \frac{(a_1)^2}{\omega_1} \Lambda_1 \alpha_1 \sin(\gamma_2) = 0 \quad (127-4)$$

$$a_2' + a_2\mu_1 + \frac{1}{8} \frac{(a_1)^3}{\omega_2} \alpha_5 \sin(\gamma_1) = 0 \quad (128-4)$$

$$a_1\gamma_2' = a_1\sigma_2 - \left(\frac{3}{8} (a_1)^2 \alpha_1 + \frac{1}{4} (a_2)^2 \alpha_3 + 3\Lambda_1^2 \alpha_1 \right) \frac{a_1}{\omega_1} \\ + \frac{1}{8} \frac{(a_1)^2 a_2}{\omega_1} \alpha_2 \cos(\gamma_1) + \frac{3}{4} \frac{(a_1)^2}{\omega_1} \Lambda_1 \alpha_1 \cos(\gamma_2) \quad (129-4)$$

$$a_2\gamma_1' - 3a_2\gamma_2' = a_2\sigma_1 - 3a_2\sigma_2 + \left(\frac{3}{8} \frac{(a_2)^2}{\omega_2} \alpha_8 + \frac{1}{\omega_2} \Lambda_1^2 \alpha_6 + \frac{1}{4} \frac{(a_1)^2}{\omega_2} \alpha_6 \right) \frac{a_2}{\omega_2} \quad (130-4)$$

$$- \frac{1}{8} \frac{(a_1)^3}{\omega_2} \alpha_5 \cos(\gamma_1)$$

این معادلات بر اساس روابط مثلثاتی، حل عددی شده و نتایج در فصل بعد ارائه می شود.

فصل پنجم

نتایج

۵-۱-مقدمه

در این بخش نتایج تحلیل و بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری دو نانوصفحه که توسط یک محیط الاستیک غیرخطی به یکدیگر متصل شده‌اند، ارائه می‌شود. در ابتدای این بخش نتایج مطالعه انجام شده با مطالعات گذشته برخی از محققین مقایسه می‌شود تا بر کار حاضر صحنه‌گذاری شود. سپس رفتارهای ارتعاشات اجباری غیرخطی و فرکانس‌های ارتعاشی غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرند. تأثیر پارامترهای مختلف ساختاری و غیر محلی بر ارتعاشات این سیستم بیان شده است.

۵-۲-صحنه‌گذاری نتایج

برای راستی آزمایی کار انجام شده به علت اینکه کار حاضر بر اساس مدل با مطالعه وانگ [۱۶] و مطالعه پرادهان [۲۳] مشابه هم می‌باشند، مقایسه می‌شوند. با توجه به این که این مطالعات تنها از بستر خطی وینکلر استفاده کرده‌اند لذا برای مقایسه از ضرایب غیرخطی وینکلر و پسترناک صرف نظر می‌شود. در نهایت نتایج به دست آمده جهت راستی آزمایی با مطالعه وانگ [۲۴] و مطالعه پرادهان [۳۱] مقایسه شده است. با استفاده از روابط به دست آمده به مقادیر عددی بعضی از پارامترها نیاز داریم. این مقادیر به صورت زیر فرض می‌شوند:

$$E = 1.06 \times 10^{12} \text{ pa}$$

$$\rho = 2250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\nu = 0.25$$

$$c = 108 \frac{\text{G.pa}}{\text{nm}}$$

$$h = 0.34 \text{ nm}$$

(۵-۱)

نسبت فرکانس‌های طبیعی غیرمحلی به فرکانس‌های طبیعی محلی به دست آمده در این مطالعه با

نتایج مطالعه وانگ [۲۴] و مطالعه پرادهان [۳۱] مقایسه شده است.

جدول (۵-۱). نسبت فرکانس‌های طبیعی غیرمحلی به فرکانس‌های طبیعی محلی

$\mu (nm)$	وانگ [۲۳] $\frac{\omega_{1non}}{\omega_{1loc}}$	کار فعلی $\frac{\omega_{1non}}{\omega_{1loc}}$
۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰
۰.۵	۰.۹۷۶۲	۰.۹۷۶۲
۱	۰.۹۱۳۹	۰.۹۱۳۸
۱.۵	۰.۸۳۲۱	۰.۸۳۲۱
۲	۰.۷۴۷۵	۰.۷۴۷۵

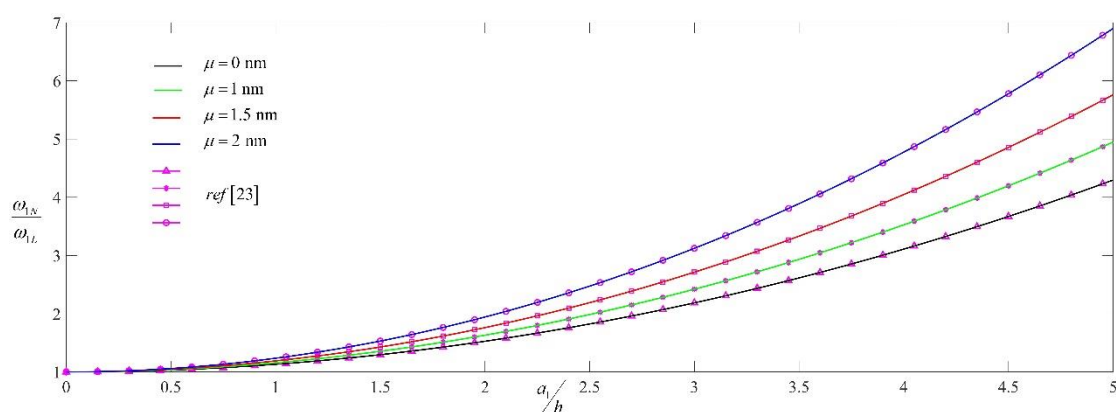
که ω_{1non} فرکانس طبیعی غیرمحلی و ω_{1loc} فرکانس طبیعی محلی و مقدار a طول و b عرض نانوصفحه 10 nm می‌باشد. همانطور که در جدول قابل مشاهده است، نتایج کار فعلی مطابقت بسیار بالایی با کار وانگ [۲۴] دارد. در مقایسه بعد، نتایج مطالعه فعلی با کار پرادهان [۳۱] مورد بررسی قرار می‌گیرد.

جدول (۵-۲). نسبت فرکانس‌های طبیعی غیرمحلی به فرکانس‌های طبیعی محلی با تغییر ابعاد

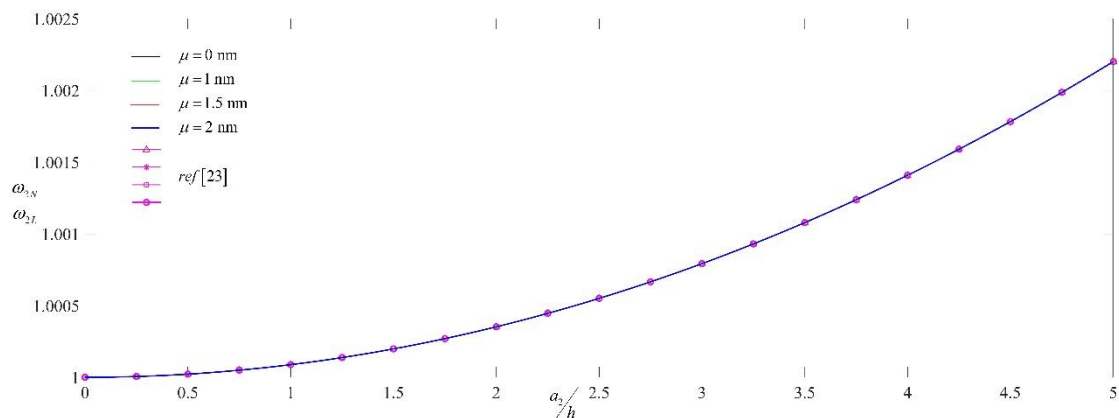
ابعاد	5 nm		10 nm	
$\mu (nm^2)$	پرادهان [۳۰] $\frac{\omega_{1non}}{\omega_{1loc}}$	کار فعلی $\frac{\omega_{1non}}{\omega_{1loc}}$	پرادهان [۳۰] $\frac{\omega_{1non}}{\omega_{1loc}}$	کار فعلی $\frac{\omega_{1non}}{\omega_{1loc}}$
۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰
۱	۰.۷۴۷۵	۰.۷۴۷۵	۰.۹۱۳۹	۰.۹۱۳۸
۲	۰.۶۲۲۷	۰.۶۲۲۶	۰.۸۴۶۷	۰.۸۴۶۷
۳	۰.۵۴۴۸	۰.۵۴۴۸	۰.۷۹۲۵	۰.۷۹۲۵
$\mu (nm^2)$	15 nm		20 nm	
۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰

۱	۰.۹۵۸۸	۰.۹۵۸۸	۰.۹۷۶۲	۰.۹۷۶۲
۲	۰.۹۲۲۳	۰.۹۲۲۳	۰.۹۵۴۱	۰.۹۵۴۰
۳	۰.۸۸۹۸	۰.۸۸۹۷	۰.۹۳۳۲	۰.۹۳۳۲
$\mu (nm^2)$	25 nm		30 nm	
۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰
۱	۰.۹۸۴۵	۰.۹۸۴۵	۰.۹۸۹۲	۰.۹۸۹۲
۲	۰.۹۶۹۹	۰.۹۶۹۸	۰.۹۷۸۸	۰.۹۷۸۷
۳	۰.۹۵۵۹	۰.۹۵۵۷	۰.۹۶۸۸	۰.۹۶۸۶

با مقایسه مطالعه انجام شده و کار پرادهان [۳۱]، به این نتیجه می‌توان رسید که کار کنونی از دقت بالایی برخوردار است و نتایج به دست آمده صحیح می‌باشند. در راستی آزمایی دیگر، تغییرات نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی بر دامنه با مطالعه وانگ [۲۴] مقایسه خواهد شد. لازم به ذکر است که برای مقایسه تنها از بستر خطی وینکلر استفاده می‌شود.

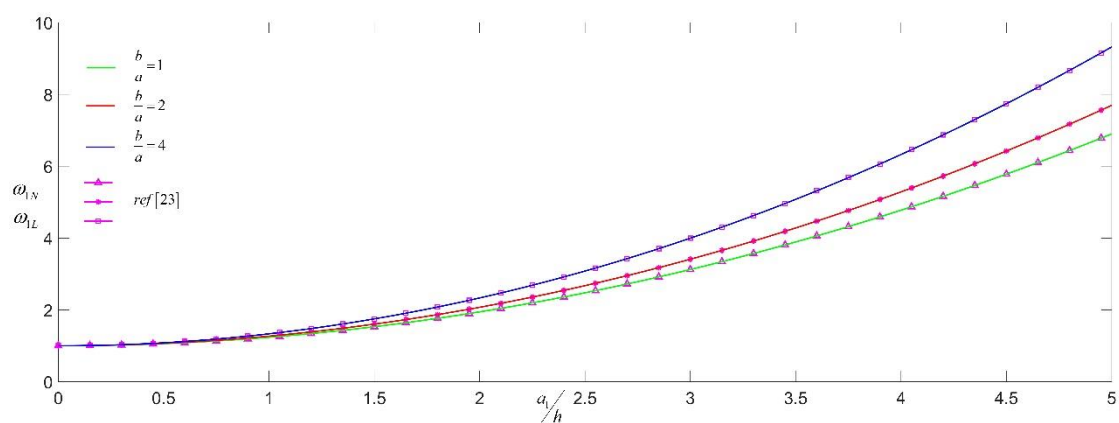


شکل ۵-۱. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر ضریب غیرمحملی در نانوصفحه بالا

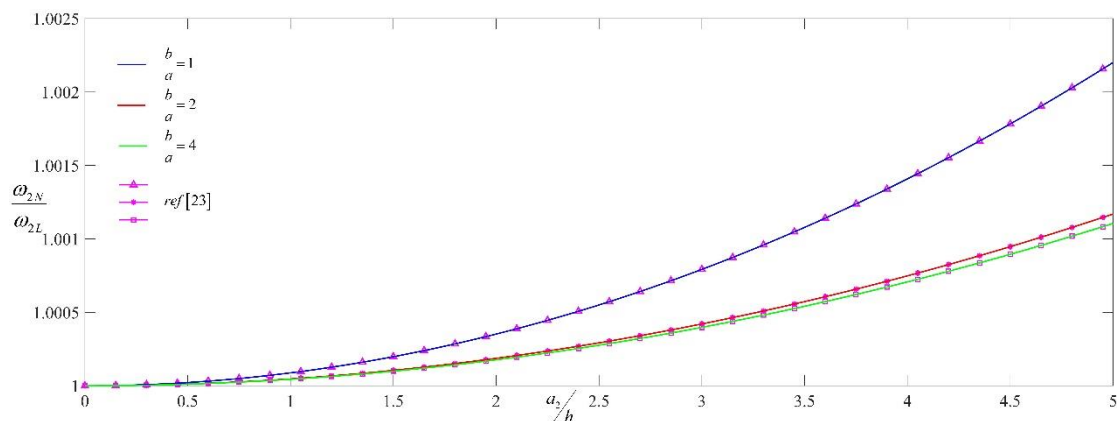


شکل ۵-۲. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر ضریب غیرمحملی در نانوصفحه پایین

در شکل‌های (۵-۱) و (۵-۲) تاثیر ضریب غیرمحملی بر نسبت فرکانس در دو نانوصفحه به طور مجزا نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در نانوصفحه بالا با افزایش ضریب غیرمحملی، نسبت فرکانس افزایش می‌یابد و نشان می‌دهد که اثر مقیاس کوچک، غیرخطی بودن مد اول را تقویت می‌کند. اما در شکل (۵-۲) نشان داده شده است که در نانوصفحه پایین اثر مقیاس کوچک تاثیر چندانی بر غیرخطی بودن مد اول آن ندارد.

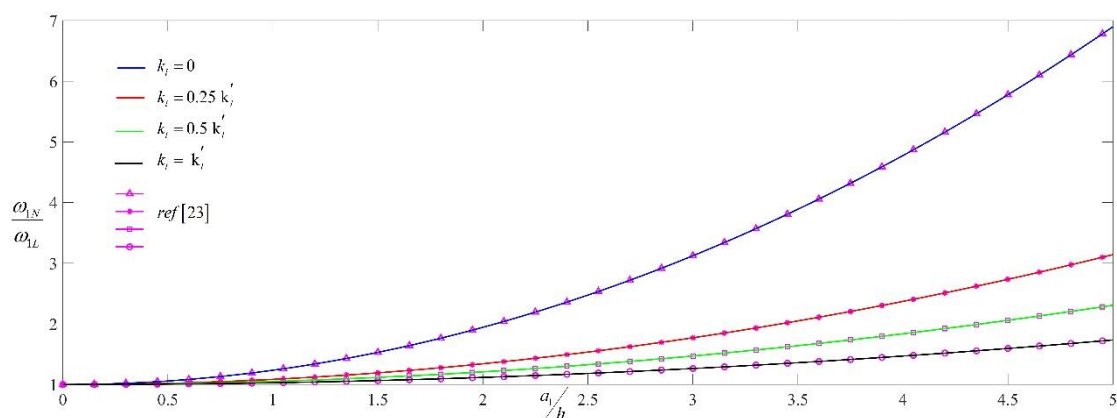


شکل ۵-۳. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر نسبت ابعاد در نانوصفحه بالا

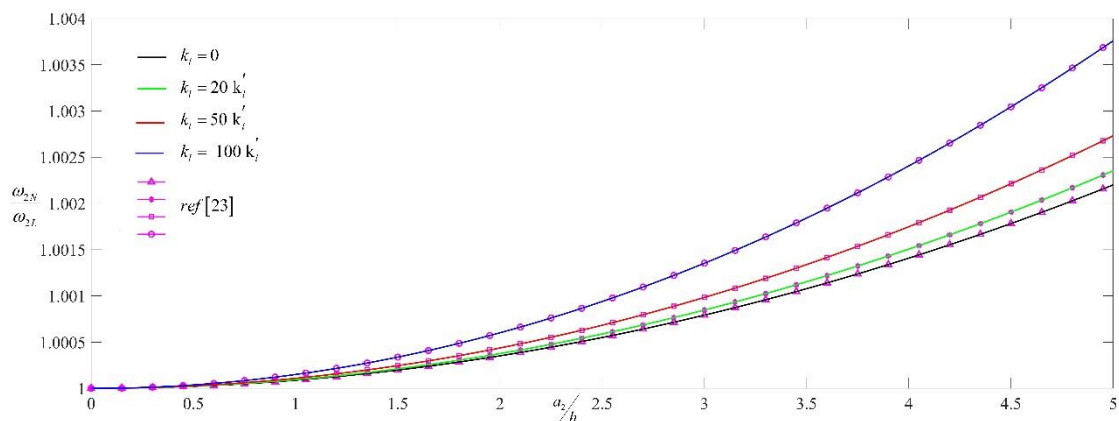


شکل ۴-۵. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر نسبت ابعاد در نانوصفحه پایین

در شکل‌های (۳-۵) و (۴-۵) نتایج با $\mu = 2 \text{ nm}$ رسم و تاثیر تغییر نسبت ابعاد بر نسبت فرکانس نمایش داده شده است. با توجه به نتایج، مشاهده می‌شود که تاثیر نسبت ابعاد در نانوصفحه بالا و پایین کاملاً در تضاد هم می‌باشند. در نانوصفحه بالا با دامنه معین می‌توان مشاهده کرد که با افزایش نسبت ابعاد، نسبت فرکانس نیز افزایش می‌یابد. اما در نانو صفحه دوم با افزایش نسبت ابعاد، نسبت فرکانس کاهش می‌یابد.



شکل ۵-۵. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر ضریب سختی بستر الاستیک در نانوصفحه بالا



شکل ۵-۶. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر ضریب سختی بستر الاستیک در نانوصفحه پایین

در شکل‌های (۵-۵) و (۵-۶) بر اساس $k_l = 1.13 \times 10^{18} \frac{\text{pa}}{m}$ نتایج به دست آمده است. تغییرات نسبت فرکانس با تغییر k_l یعنی ضریب سختی بستر الاستیک قابل مشاهده می‌باشد. با توجه به نتایج به دست آمده می‌توان دریافت که اثر ماتریس سختی بر نسبت فرکانس در نانوصفحه بالا بیشتر از نانوصفحه پایین است. همچنین با افزایش ضریب سختی بستر الاستیک می‌توان مشاهده کرد که در نانوصفحه بالا نسبت فرکانس روند کاهشی دارد ولی در نانوصفحه بالا این روند افزایشی است.

۵-۳- نتایج ارتعاشات اجباری

در این بخش نتایج به دست آمده در بخش ارتعاشات اجباری فصل قبل مورد بحث قرار می‌گیرد. مقادیر عددی استفاده شده در این بخش به صورت زیر می‌باشند:

$$a = 10 \text{ nm}$$

$$b = 10 \text{ nm}$$

$$f' = 1.3567 \times 10^{13}$$

$$k_l = 3.7032 \times 10^{16}$$

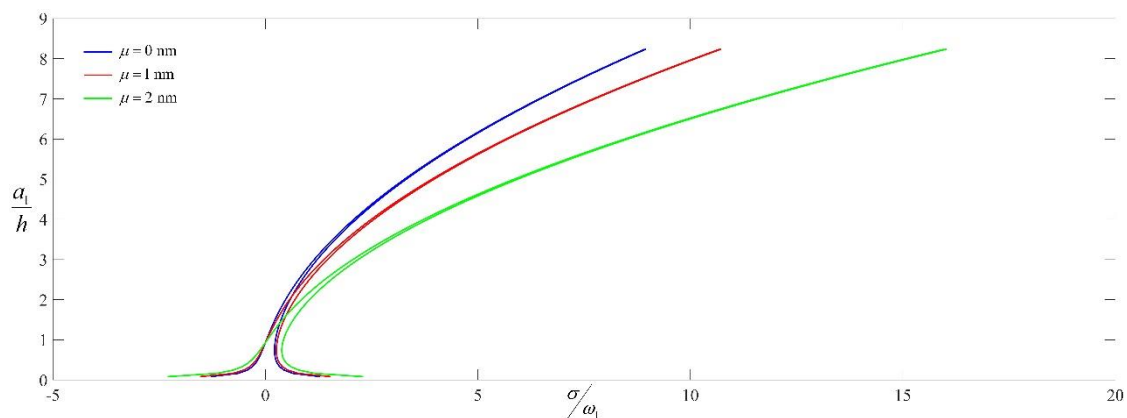
$$k_s = 0.37032$$

$$k_{nl} = 3.2034 \times 10^{35}$$

$$\mu_1 = 10^8$$

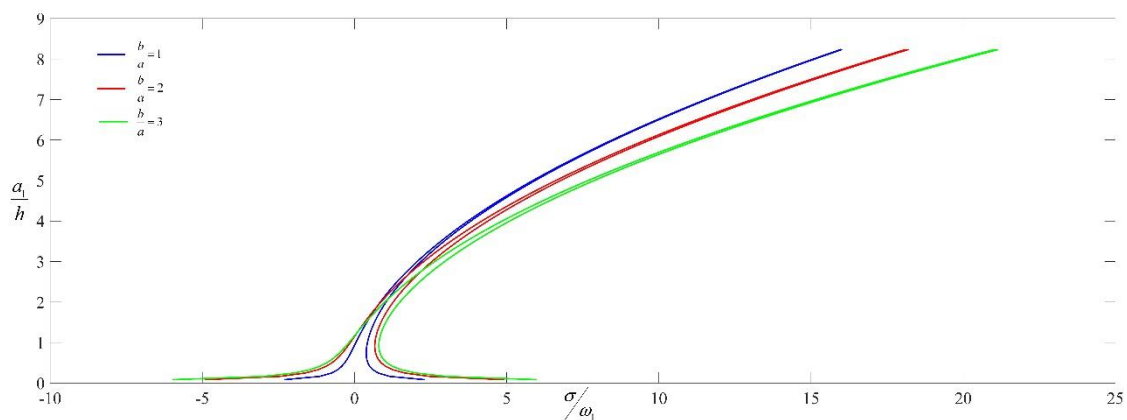
$$g = 4.545018661 \times 10^{-12}$$

(۵-۲)



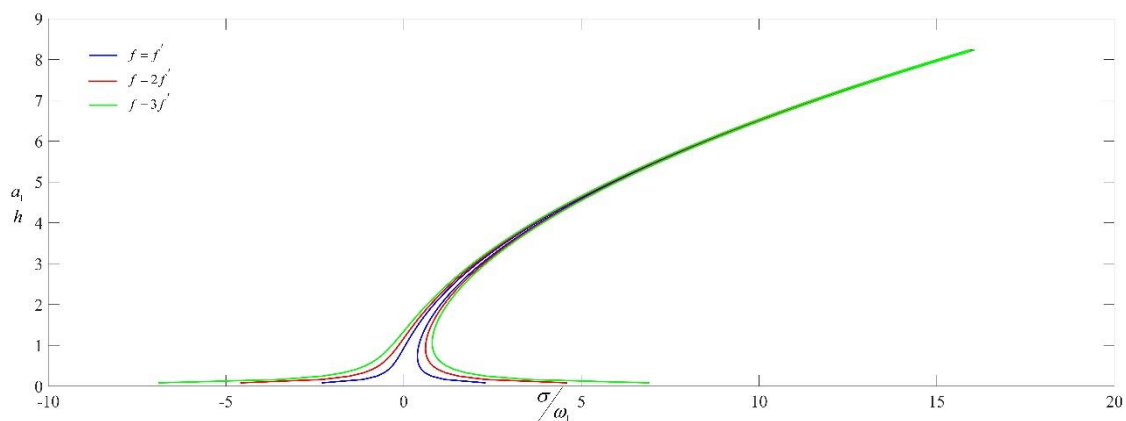
شکل ۵-۷. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه با مقادیر مختلفی از پارامتر غیرمحلی

همانطور که در شکل (۷-۵) قابل مشاهده است، منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست خم شده که نشان می‌دهد سیستم سخت‌شونده است. می‌توان این پدیده را به این صورت بیان کرد که ضریب عبارت غیرخطی مرتبه سه، همیشه مثبت است. سخت‌شوندگی با افزایش پارامتر غیرمحلی بیشتر می‌شود.



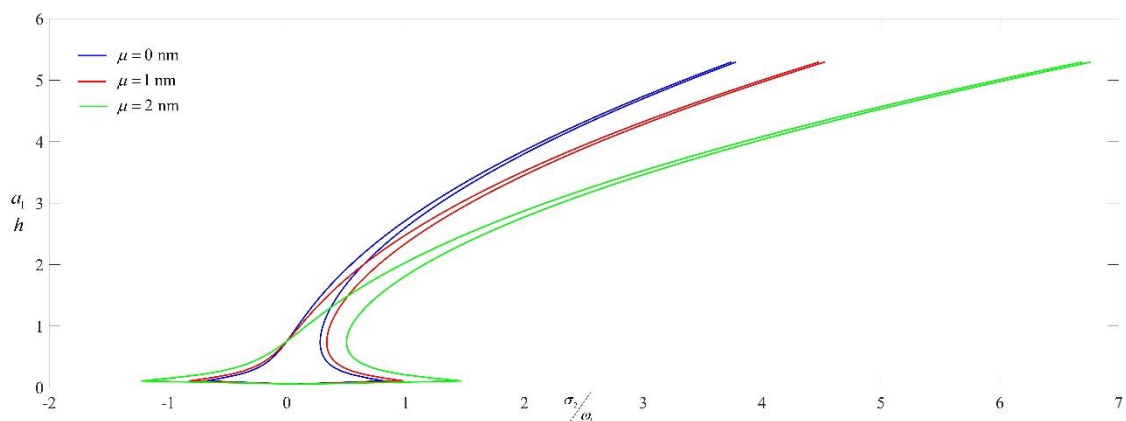
شکل ۵-۸. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه با نسبت ابعاد مختلف

در شکل (۸-۵) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی با تغییر نسبت ابعاد نشان داده شده است. که سخت‌شوندگی سیستم قابل مشاهده است. با افزایش نسبت ابعاد، اثر غیرخطی سیستم افزایش یافته و در نتیجه سخت‌شوندگی بیشتر می‌شود.



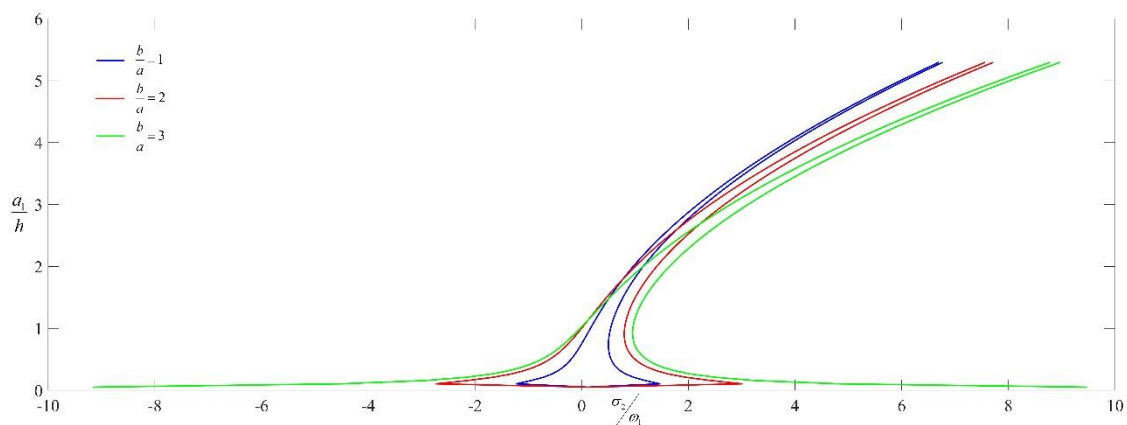
شکل ۵-۹. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه با مقادیر مختلفی از نیروی تحریک کننده

در شکل (۵-۹) تغییرات پاسخ فرکانسی در ازای مقادیر مختلفی از نیروی تحریک کننده نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می شود، هرچه نیروی تحریک کننده کمتر باشد ناحیه تشدید کاهش می یابد.



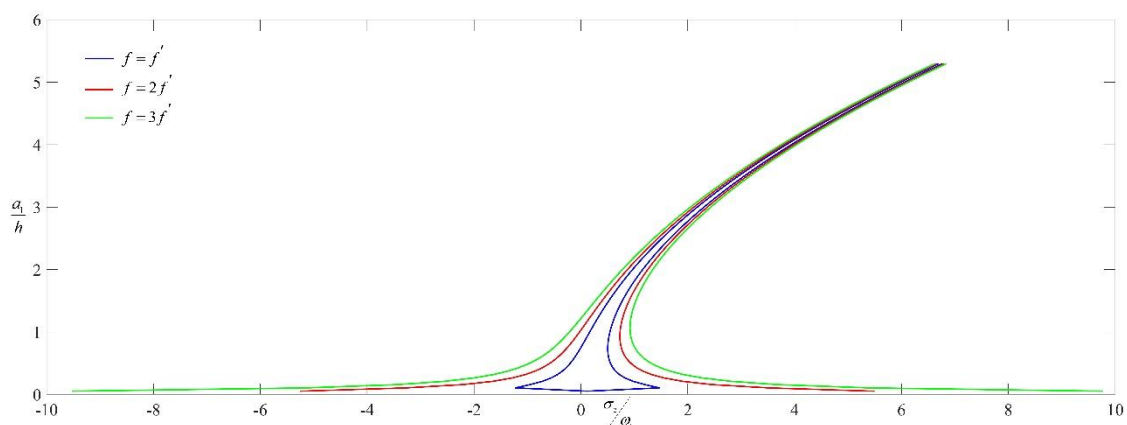
شکل ۵-۱۰. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ با مقادیر مختلفی از پارامتر غیرمحملی

شکل (۵-۱۰) مربوط به حالت رزونانس اولیه و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ می باشد. تغییرات پاسخ فرکانسی با تغییرات پارامتر غیرمحملی نشان داده شده است. با افزایش پارامتر غیرمحملی، سخت شوندگی بیشتر می شود.



شکل ۵-۱۱. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ با نسب ابعاد مختلف

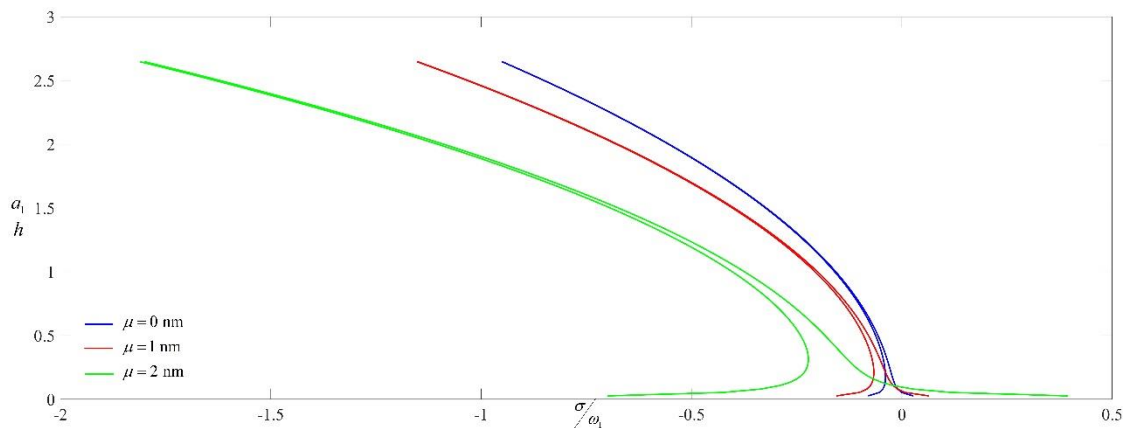
همانطور که در شکل (۵-۱۱) قابل مشاهده است با افزایش نسبت ابعاد سخت شوندگی بیشتر می‌شود. به عبارت دیگر اثر غیرخطی در رزونانس اولیه و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ با افزایش نسبت ابعاد، افزایش می‌یابد.



شکل ۵-۱۲. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه همراه و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ با مقادیر مختلفی از نیروی

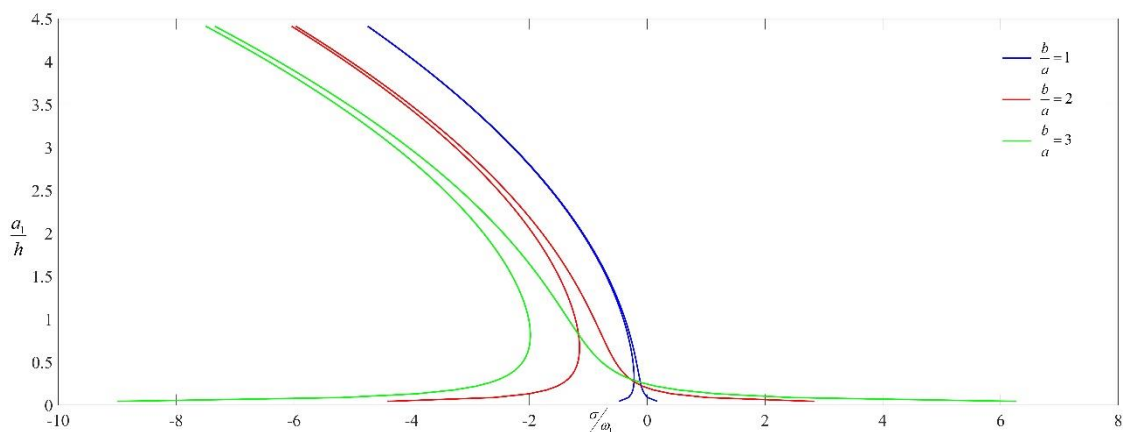
تحریک کننده

شکل (۵-۱۲) تغییرات پاسخ فرکانسی سیستم با رزونانس اولیه و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ با توجه به تغییرات نیروی تحریک کننده را نشان می‌دهد. با افزایش نیروی تحریک کننده ناحیه تشدید هم افزایش می‌یابد.



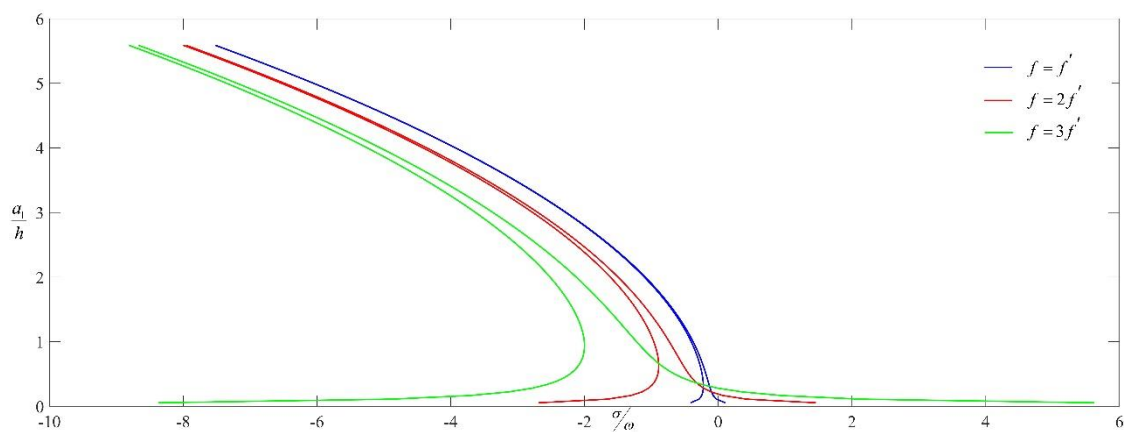
شکل ۵-۱۳. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک با مقادیر مختلفی از پارامتر غیرمحل

در بررسی رزونانس ثانویه از نوع مافوق هارمونیک همانطور که در شکل (۵-۱۳) قابل مشاهده است، سیستم نرم‌شونده می‌باشد. همچنین با افزایش پارامتر غیرمحل، نرم‌شوندگی افزایش می‌یابد. بیشترین دامنه با پارامتر غیرمحل رابطه مستقیم دارد یعنی هرچه پارامتر غیرمحل افزایش یافته است بیشترین دامنه نیز افزایش می‌یابد.



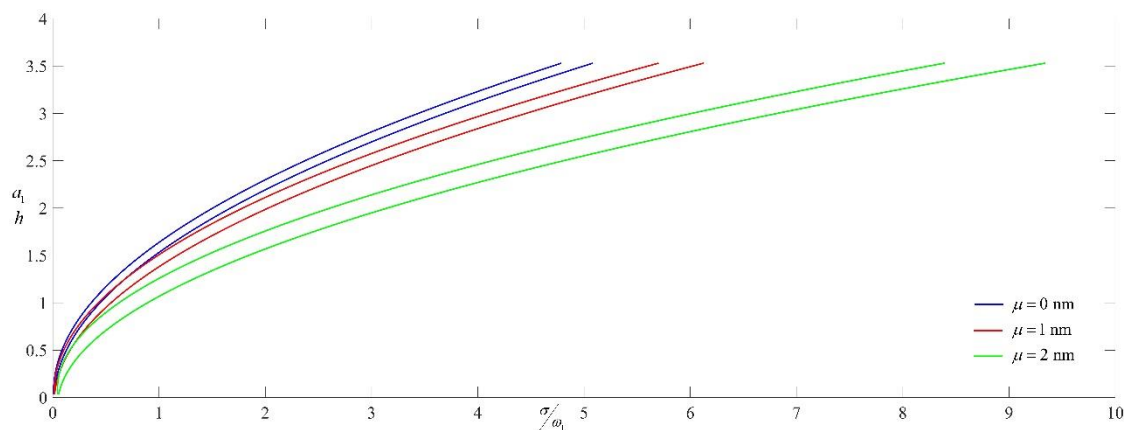
شکل ۵-۱۴. تغییرات پاسخ فرکانسی در رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک با نسبت ابعاد مختلف

شکل (۵-۱۴) پاسخ فرکانسی به ازای نسبت ابعاد مختلف در تحلیل رزونانس ثانویه از نوع مافوق هارمونیک را نشان می‌دهد. با افزایش نسبت ابعاد نرم‌شوندگی نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۵-۱۵. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک با مقادیر مختلفی از نیروی تحریک کننده

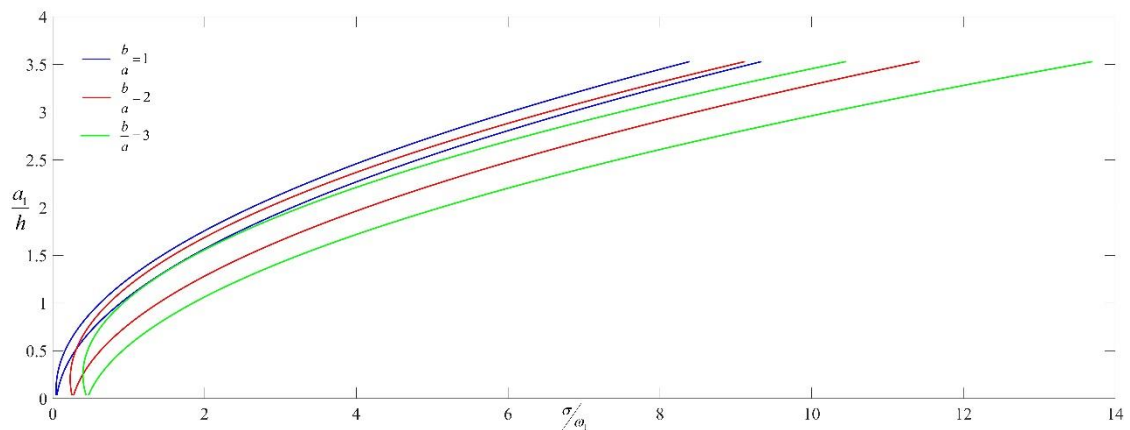
در شکل (۵-۱۵) تغییرات پاسخ فرکانسی به ازای مقادیر مختلفی از نیروی تحریک کننده در رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می شود، هرچه نیروی تحریک کننده افزایش می یابد، نرم شوندگی سیستم نیز افزایش می یابد.



شکل ۵-۱۶. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مادون هارمونیک با مقادیر مختلفی از پارامتر غیرمحملی

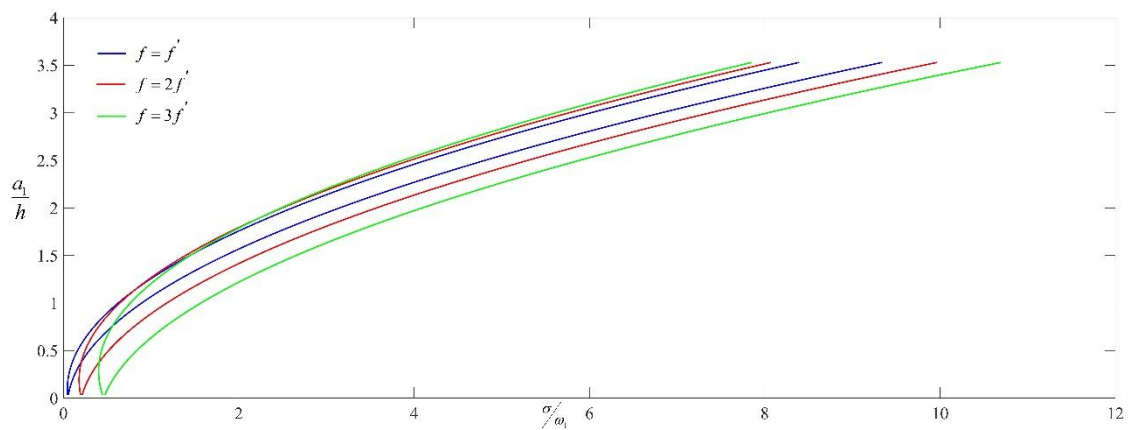
شکل (۵-۱۶) مربوط به پاسخ فرکانسی در رزونانس ثانویه از نوع مادون هارمونیک می باشد. در شکل تغییرات پاسخ فرکانسی با تغییر پارامتر غیرمحملی نشان داده شده است. با افزایش این پارامتر

سخت‌شوندگی افزایش می‌یابد.



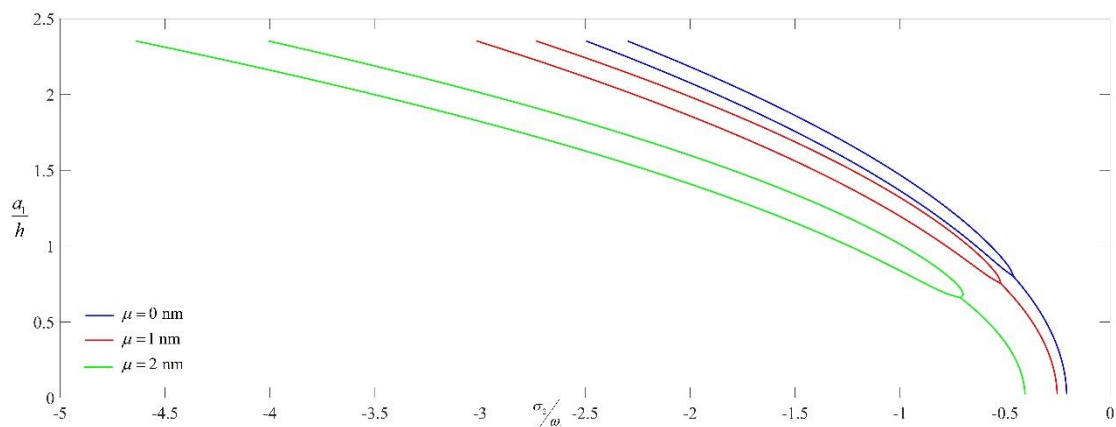
شکل ۵-۱۷. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک با نسبت ابعاد مختلف

تغییرات پاسخ فرکانسی با تغییر نسبت ابعاد در شکل (۵-۱۷) نمایش داده شده است. قابل مشاهده است که در رزونانس ثانویه مادون هارمونیک با افزایش نسبت ابعاد، سخت‌شوندگی نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۵-۱۸. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک با مقادیر مختلفی از نیروی تحریک کننده

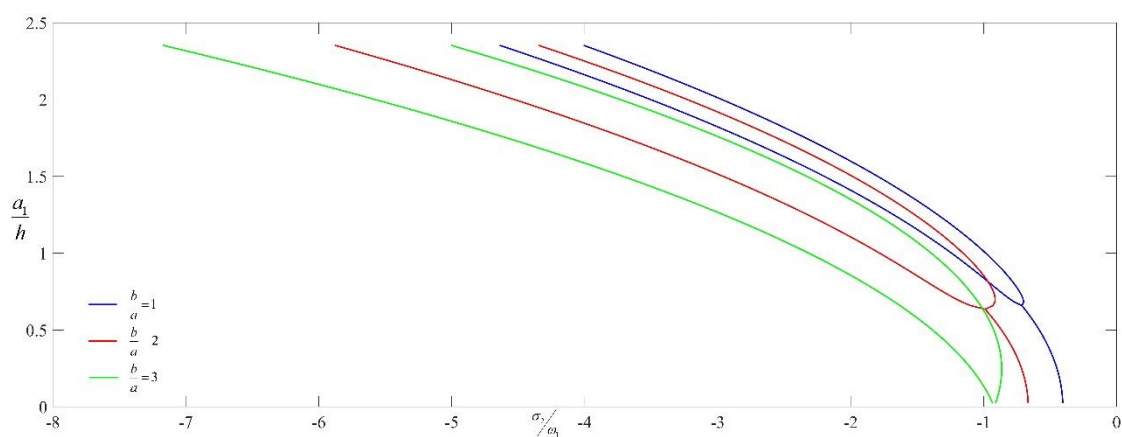
در شکل (۵-۱۸) تغییرات پاسخ فرکانسی به ازای نیروی تحریک کننده مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که قابل مشاهده است، با افزایش نیروی تحریک کننده، ناحیه تشدید افزایش یافته است.



شکل ۵-۱۹. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ با مقادیر مختلفی از

پارامتر غیرمحملی

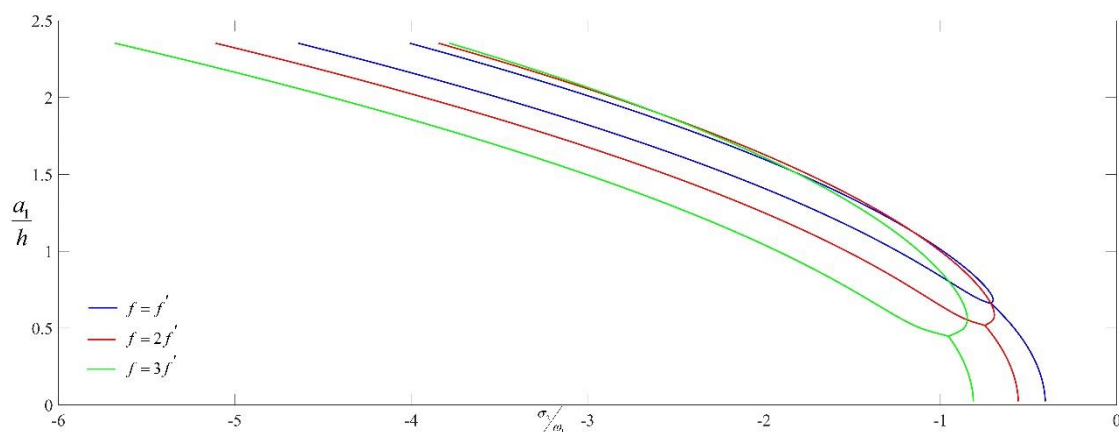
در بررسی رزونانس ثانویه از نوع مادون هارمونیک و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ که در شکل (۵-۱۹) قابل مشاهده است، سیستم نرم‌شونده می‌باشد. همچنین با افزایش پارامتر غیرمحملی، نرم‌شوندگی افزایش می‌یابد.



شکل ۵-۲۰. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ با ابعاد مختلف

در شکل (۵-۲۰) پاسخ فرکانسی به ازای نسبت ابعاد مختلف در تحلیل رزونانس ثانویه مادون هارمونیک و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ را نشان داده شده است. با افزایش نسبت ابعاد نرم‌شوندگی نیز

افزایش می‌یابد.



شکل ۵-۲۱. تغییرات پاسخ فرکانسی رزونانس ثانویه مادون هارمونیک و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ با مقادیر مختلفی از نیروی تحریک کننده

در شکل (۵-۲۱) تغییرات پاسخ فرکانسی به ازای مقادیر مختلفی از نیروی تحریک کننده در رزونانس ثانویه مادون هارمونیک و حالت خاص $\omega_2 \approx 3\omega_1$ نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، هرچه نیروی تحریک کننده افزایش می‌یابد، ناحیه تشدید سیستم نیز افزایش می‌یابد.

نتیجه‌گیری و

پیشنهادهات

۶-۱- نتیجه گیری

در این نوشتار ارتعاشات غیرخطی یک سیستم دنانوصفحه‌ای متصل به هم توسط محیط الاستیک غیرخطی تحت بارگذاری خارجی هارمونیک بررسی شده است. معادلات دیفرانسیل حرکت برای ارتعاشات غیرخطی این سیستم با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر محلی محاسبه گردیده است. با روش گلرکین و با توجه به شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. معادلات دیفرانسیل مربوط به ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم با روش مقیاس چندگانه حل گردیده است. بطور خلاصه نتایج مهم این تحقیق بصورت زیر است:

- در رزونانس اولیه با افزایش پارامتر غیرمحلی، اثر غیرخطی نیز افزایش می‌یابد.
- در رزونانس اولیه با افزایش نسبت ابعاد، سخت شوندگی سیستم افزایش می‌یابد.
- در رزونانس ثانویه از نوع مادون هارمونیک سیستم سخت شونده می‌باشد اما در مافوق هارمونیک سیستم نرم شونده است.
- با افزایش نسبت ابعاد در رزونانس ثانویه، اثر غیرخطی نیز افزایش می‌یابد.
- با افزایش نیروی تحریک در رزونانس اولیه و رزونانس ثانویه، ناحیه رزونانسی افزایش می‌یابد.
- به طور کلی می‌توان گفت که با افزایش پارامتر غیرمحلی اثر غیرخطی نیز افزایش می‌یابد.

۶-۲- پیشنهادات

از آنجایی که شناخت نانوساختارها و به ویژه نانوصفحات در سال‌های اخیر مورد استقبال قرار گرفته است، پیشنهاداتی که می‌تواند هدف مطالعه علاقمندان باشد به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

- ۱- تغییر شرایط مرزی چه تاثیری بر رفتار ارتعاشی سیستم دارد
- ۲- دو نانوصفحه، دایره‌ای فرض شده و نتایج با کار حاضر مقایسه شود
- ۳- اثر محیط دمایی بر آنالیز ارتعاشی سیستم چگونه است

پیوست

ضرایب رابطه (۱۷-۴) و (۱۸-۴)

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \frac{(a^2 + b^2)^2 (cm_2 \mu^2 + (D)g) \pi^4 + a^2 b^2 c (a^2 + b^2) (m_0 \mu^2 + m_2) \pi^2 + m_0 a^4 b^4 c}{(m_2 (a^2 + b^2) \pi^2 + m_0 a^2 b^2) (\mu^2 (a^2 + b^2) \pi^2 + a^2 b^2)} \\ \omega_1^2 &= 2 \frac{\pi^4 (D) (a^2 + b^2)^2}{(\mu^2 (a^2 + b^2) \pi^2 + a^2 b^2) (m_2 (a^2 + b^2) \pi^2 + m_0 a^2 b^2)} \\ \omega_2^2 &= \frac{2(a^2 + b^2)^2 (2k_s \mu^2 + D) \pi^4 + 4((k_w + c) \mu^2 + k_s) a^2 b^2 (a^2 + b^2) \pi^2 + 4a^4 b^4 (k_w + c)}{(\mu^2 (a^2 + b^2) \pi^2 + a^2 b^2) (m_2 (a^2 + b^2) \pi^2 + m_0 a^2 b^2)} \\ c_1 &= \frac{1}{16} \frac{E \pi^4 h (a^4 + b^4)}{b^2 a^2 (\pi^2 a^2 m_2 + \pi^2 m_2 b^2 + m_0 a^2 b^2)} \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= \frac{3}{16} \frac{E \pi^4 h (a^4 + b^4)}{b^2 a^2 (\pi^2 a^2 m_2 + \pi^2 m_2 b^2 + m_0 a^2 b^2)} \\ c_4 &= 0 \\ c_5 &= 0 \\ c_6 &= \frac{3}{16} \frac{E \pi^4 h (a^4 + b^4)}{b^2 a^2 (\pi^2 a^2 m_2 + \pi^2 m_2 b^2 + m_0 a^2 b^2)} \\ c_7 &= 0 \\ c_8 &= \frac{1}{16} \frac{E \pi^4 a^4 h + E \pi^4 b^4 h + 72 a^4 b^4 k_{nl}}{b^2 a^2 (\pi^2 a^2 m_2 + \pi^2 m_2 b^2 + m_0 a^2 b^2)} \\ c_1' &= 8 \frac{a^4 b^4 f}{(m_2 (a^2 + b^2) \pi^2 + m_0 a^2 b^2) (\mu^2 (a^2 + b^2) \pi^2 + a^2 b^2) \pi^2} \\ c_2' &= 0 \end{aligned}$$

- [1] Najafizadeh, M. M., M. Raki, and P. Yousefi. "Vibration Analysis of FG Nanoplate Based on Third-Order Shear Deformation Theory (TSDT) and Nonlocal Elasticity." *Journal of Solid Mechanics* 10, no. 3 (2018): 464-475.
- [2] Sobhy, M. "A comprehensive study on FGM nanoplates embedded in an elastic medium." *Composite Structures* 134 (2015): 966-980.
- [3] Fernández-Sáez, J., A. Morassi, L. Rubio, and R. Zaera. "Transverse free vibration of resonant nanoplate mass sensors: Identification of an attached point mass." *International Journal of Mechanical Sciences* 150 (2019): 217-225.
- [4] Radwan, A. F. "Quasi-3D integral model for thermomechanical buckling and vibration of FG porous nanoplates embedded in an elastic medium." *International Journal of Mechanical Sciences* 157 (2019): 320-335.
- [5] Hosseini, M., M. R. Mofidi, A. Jamalpoor, and M. Safi Jahanshahi. "Nanoscale mass nanosensor based on the vibration analysis of embedded magneto-electro-elastic nanoplate made of FGMs via nonlocal Mindlin plate theory." *Microsystem Technologies* 24, no. 5 (2018): 2295-2316.
- [6] Liu, C., L. L. Ke, Y. S. Wang, and J. Yang. "Nonlinear vibration of nonlocal piezoelectric nanoplates." *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 15, no. 08 (2015): 1540013.
- [7] Arefi, M., M. Kiani, and M. H. Zamani. "Nonlocal strain gradient theory for the magneto-electro-elastic vibration response of a porous FG-core sandwich nanoplate with piezomagnetic face sheets resting on an elastic foundation." *Journal of Sandwich Structures & Materials* 22, no. 7 (2020): 2157-2185.
- [8] Murmu, T., and S. Adhikari. "Nonlocal vibration of bonded double-nanoplate-systems." *Composites Part B: Engineering* 42, no. 7 (2011): 1901-1911.
- [9] Karličić, D., S. Adhikari, T. Murmu, and M. Cajić, "Exact closed-form solution for non-local vibration and biaxial buckling of bonded multi-nanoplate system." *Composites Part B: Engineering* 66 (2014): 328-339.
- [10] Karličić, D., P. Kozić, and R. Pavlović, "Free transverse vibration of nonlocal viscoelastic orthotropic multi-nanoplate system (MNPS) embedded in a viscoelastic medium." *Composite Structures* 115 (2014): 89-99.
- [11] Asemi, S. R., A. Farajpour, H. R. Asemi, and M. Mohammadi. "Influence of initial stress on the vibration of double-piezoelectric-nanoplate systems with various boundary conditions using DQM." *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 63 (2014): 169-179.
- [12] Asemi, S. R., A. Farajpour, "Thermo-electro-mechanical vibration of coupled piezoelectric-nanoplate systems under non-uniform voltage distribution embedded in Pasternak elastic medium." *Current Applied Physics* 14, no. 5 (2014): 814-832.
- [13] Xu, C., D. Rong, Z. Tong, Z. Zhou, J. Hu, and X. Xu, "Coupled effect of in-plane magnetic field and size effect on vibration properties of the completely free double-layered nanoplate system." *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 108 (2019): 215-225.
- [14] Barati, M.R. and, H. Shahverdi. "Dynamic modeling and vibration analysis of double-layered multi-phase porous nanocrystalline silicon nanoplate systems." *European Journal of Mechanics-A/Solids* 66 (2017): 256-268.
- [15] Barati, M.R. and, H. Shahverdi. "Hygro-thermal vibration analysis of graded double-refined-nanoplate systems using hybrid nonlocal stress-strain gradient theory." *Composite Structures* 176 (2017): 982-995.

- [16] Hosseini, M., M. Bahreman, and A. Jamalpoor. "Thermomechanical vibration analysis of FGM viscoelastic multi-nanoplate system incorporating the surface effects via nonlocal elasticity theory." *Microsystem Technologies* 23, no. 8 (2017): 3041-3058.
- [17] Liu, J. C., Y. Q. Zhang, and L. F. Fan. "Nonlocal vibration and biaxial buckling of double-viscoelastic-FGM-nanoplate system with viscoelastic Pasternak medium in between." *Physics letters A* 381, no. 14 (2017): 1228-1235.
- [18] Radić, N., D. Jeremić, and B. Mijatović, "Vibration analysis of orthotropic double-nanoplate system subjected to unidirectional in-plane magnetic field with various boundary conditions."
- [19] Pouresmaeli, S., S. A. Fazelzadeh, and E. Ghavanloo. "Exact solution for nonlocal vibration of double-orthotropic nanoplates embedded in elastic medium." *Composites Part B: Engineering* 43, no. 8 (2012): 3384-3390.
- [20] Hashemi, S. H., H. Mehrabani, and A. Ahmadi-Savadkoobi. "Forced vibration of nanoplate on viscoelastic substrate with consideration of structural damping: An analytical solution." *Composite Structures* 133 (2015): 8-15.
- [21] Mohammadi, M., and A. Rastgoo. "Primary and secondary resonance analysis of FG/lipid nanoplate with considering porosity distribution based on a nonlinear elastic medium." *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 27, no. 20 (2020): 1709-1730.
- [22] Malekzadeh, P., and A. Farajpour. "Axisymmetric free and forced vibrations of initially stressed circular nanoplates embedded in an elastic medium." *Acta Mechanica* 223, no. 11 (2012): 2311-2330.
- [۲۳] هاشمیان م. "ارتعاشات دو صفحه گرافنی حاوی ذره، کوپل شده توسط محیط الاستیک بر اساس تئوری های کلاسیک و میندلین با در نظر گرفتن اثرات سطح." ۲۰۷-۲۱۹.
- [24] Wang, Y., F. M. Li, and Y. Z. Wang. "Nonlinear vibration of double layered viscoelastic nanoplates based on nonlocal theory." *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 67 (2015): 65-76.
- [25] Wang, Y., F. M. Li, X. Jing, and Y. Z. Wang. "Nonlinear vibration analysis of double-layered nanoplates with different boundary conditions." *Physics Letters A* 379, no. 24-25 (2015): 1532-1537.
- [26] Eringen, A. Cemal. "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves." *Journal of applied physics* 54, no. 9 (1983): 4703-4710.
- [27] Reddy, J. N. ed. *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press (1999)
- [28] Su, Y., H. Wei, R. Gao, Z. Yang, J. Zhang, Z. Zhong, and Y. Zhang. "Exceptional negative thermal expansion and viscoelastic properties of graphene oxide paper." *Carbon* 50, no. 8 (2012): 2804-2809.
- [29] Kitipornchai, S., X. Q. He, and K. M. Liew. "Continuum model for the vibration of multilayered graphene sheets." *Physical Review B* 72, no. 7 (2005): 075443.
- [30] Nayfeh, A. H., D. T. Mook, and P. Holmes. "Nonlinear oscillations." (1980): 692-692.
- [31] Pradhan, S. C., and J. K. Phadikar. "Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates." *Journal of Sound and Vibration* 325, no. 1-2 (2009): 206-223.

Abstract

These days, nanostructured materials such as nanobeams and nanoplates have many applications in industry and research. One of the most widely used nanostructured materials is nanoplate, which are used in exchanger, sensors and multi function devices. Usually, the dynamic deformation of these materials is important, so the dynamic and vibration behaviors of nanoplates have been studied by researchers. Therefore, in this work, the nonlinear vibration analysis of a double-nanoplates coupled by a nonlinear elastic medium is investigated. The system is subjected to external harmonic excitation. Nonlocal elasticity theory is used to obtain the nonlinear governing equations of motion. The Galerkin method is used to discretize the nonlinear governing equations into the ordinary nonlinear differential equation. After discretizing of the nonlinear governing equations, the multiple scale method is used to solve the nonlinear differential equation. Finally, the effect of various parameters such as elastic medium, nonlocal parameter and other geometric and structural parameters on the nonlinear vibration of the system is studied.

Keywords: nonlinear vibration, nanoplate, elastic medium, primary resonance, secondary resonance



Shahrood University of Technology
Department of Mechanical Engineering

**Nonlinear vibration analysis of a double-nanoplates coupled
by a nonlinear elastic medium subjected to external harmonic
excitation**

By:

Mohammad Heydari Saraei

Supervisors:

Dr. Habib Ahmadi

Dr. Amir Jalali

February 2021