

اللهم صل على محمد



دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک-تحلیل تنش

تحلیل خزش در پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد
ناهمگن FG تحت بار مکانیکی و گرادیان شعاعی دما بر اساس نظریه‌ی
الاستیسیته‌ی مستوی

نگارنده

علی دانایی

استاد راهنما

دکتر مهدی قنّاد کهنوی

شهریور ۱۳۹۹

شماره: ۳۰ / ۲۶۹ / ۱۳۷
تاریخ: ۹۹ / ۶ / ۱۹

باسمه تعالی



فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای علی داناوی با شماره دانشجویی ۹۵۰۵۸۳۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش تحلیل تنش تحت عنوان تحلیل خزش در پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد ناهمگن FGI تحت بار مکانیکی و گرازیان شعاعی دما بر اساس نظریه الاستیسیته‌ی مستوی که در تاریخ ۹۹/۰۷/۲۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۸
ج) درجه خوب: نمره ۱۷/۹۹-۱۶ د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹-۱۴
ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
نوع تحقیق: نظری عملی

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاذ اهنمای اول	دکتر مهدی قنات کهنوی	دانشیار	
۲- استاذ اهنمای دوم			
۳- استاذ مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد جعفری	دانشیار	
۵- استاذ امتحان اول	دکتر حسین نوزنده جلی	استادیار	
۶- استاذ امتحان دوم	دکتر محسن‌نگار نظاری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی گردویی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

۹۹، ۶، ۱۵

تقدیم اثر

تقدیم بہ مہربان فرشتگانی کہ:

بخطات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربہ بایکیتا و زیبائیندگی ام، مدیون حضور

سبز آن ہاست

تقدیم بہ خانوادہ ہی عزیزم.

شکر و قدردانی

از خدای متعال سپاس گزارم که توفیق کسب علم و دانش را به من عطا فرمود تا بتوانم این مرحله از علم آموزی را با موفقیت به پایان برسانم. از خانواده‌ی عزیزم به خاطر حمایت‌ها و محبت‌های بی‌دینگی که نسبت به من داشته و دارند، کمال شکر و سپاس را دارم. از استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر مهدی قناد که توفیق به خاطر راهنمایی‌های ارزشمند و زحمات ایشان در کلیه‌ی مراحل انجام پایان نامه تقدیر و شکر می‌نمایم.

در انتها از تمامی اساتید محترم دانشکده‌ی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود که توفیق‌آوردی‌شان را داشتم، سپاس گزارم. از خدای متعال سلامت و توفیق برای ایشان مسألت دارم.

علی دانایی

شهریور ۱۳۹۹

تجدید نام

اینجانب **علی دانایی** دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی تحلیل خزش در پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد ناهمگن FG تحت بار مکانیکی و گرادیان شعاعی دما بر اساس نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهن‌تویی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط این‌جانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورداستفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

قطعات استفاده شده در صنعت احتمال وقوع پدیده‌ی خزش در آن‌ها وجود دارد. پدیده‌ی خزش تغییر شکل آرامی است که ممکن است باعث گسیختگی، شکست و از هم پاشیدگی تجهیزات گردد. از اینرو، بررسی این تنش‌ها با توجه به کارآمد بودن قطعات و تجهیزات، دارای اهمیت می‌باشد. از پرکاربردترین این تجهیزات در صنایع امروز پوسته‌های استوانه‌ای و کروی هستند. مواد FG که خواص آن‌ها به صورت تابعی تغییر می‌کنند، به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام ماده می‌شوند.

در این پژوهش رفتار خزش حالت پایا برای استوانه‌ی جدار ضخیم با ضخامت ثابت ساخته شده از مواد ناهمگن FG تحت تاثیر بارگذاری مکانیکی و گرادیان شعاعی دما با استفاده از رابطه‌ی ساختاری بیلی-نورتن بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی: خزش، پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم، مواد مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM)، بار مکانیکی، گرادیان شعاعی دما.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

-۱

-۲

-۳

فهرست مطالب

۱	فصل ۱: مقدمه
۲	۱-۱ مقدمه
۳	۲-۱ پوسته‌ها
۳	۱-۲-۱ انواع پوسته‌ها
۵	۴-۱ تئوری پوسته‌های جدار ضخیم
۶	۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی
۷	۵-۱ موّاد با تغییرات تابعی خواص (FGM)
۹	۱-۵-۱ ویژگی‌های موّاد FG
۹	۲-۵-۱ تاریخچه و سابقه‌ی موّاد FG
۱۰	۳-۵-۱ مدل‌سازی ریاضی موّاد FG
۱۲	۶-۱ خزش
۱۳	۱-۶-۱ مفهوم خزش و منحنی خزش
۱۶	۷-۱ اهداف پایان‌نامه
۱۶	۸-۱ نوآوری
۱۶	۹-۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه
۱۹	فصل ۲: مبانی تحلیل خزش
۲۰	۱-۲ مقدمه
۲۰	۲-۲ خزش
۲۳	۳-۲ تاثیرات خزش بر ساختار ماده
۲۴	۴-۲ روابط ساختاری
۲۵	۵-۲ خزش حالت پایا
۳۰	۶-۲ تاریخچه‌ی خزش
	فصل ۳: استخراج معادلات خزش حالت پایا در پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم همگن تحت بار
۳۳	مکانیکی و گرادینان شعاعی دما
۳۴	۱-۳ مقدمه
۳۵	۲-۳ استخراج معادلات
۳۹	۱-۲-۳ نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی
۴۰	۳-۳ شرایط انتهایی استوانه

۴۳	۴-۳ تنش مؤثر
۴۳	۵-۳ انتقال حرارت در استوانه ی جدار ضخیم
۴۵	۶-۳ استخراج معادلات
۴۹	۷-۳ مطالعه ی موردی
۵۰	۱-۷-۳ حالت تنش صفحه ای
۵۱	۲-۷-۳ کرنش صفحه‌های
۵۳	۸-۳ تحلیل خزش در استوانه‌ی جدار ضخیم همگن تحت فشار یکنواخت داخل و خارج و گرادیان شعاعی دما
۵۳	۱-۸-۳ مقدمه
۵۴	۲-۸-۳ معادلات خزشی
۵۸	۳-۸-۳ بحث تکمیلی تحلیل خزش حالت پایا
۵۸	۹-۳ بررسی نتایج
۵۸	۱-۹-۳ مطالعه موردی
	فصل ۴ فصل چهارم: تحلیل خزش در پوسته های استوانه ای جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی و
۶۱	گرادیان شعاعی دما
۶۲	۴-۱ مقدمه
۶۲	۴-۲ روابط اساسی
۶۳	۴-۲-۱ بررسی انتقال حرارت
۶۴	۴-۲-۲ تحلیل استوانه ی ناهمگن FG تحت بارگذاری مکانیکی و گرادیان شعاعی دما
۶۸	۴-۳ مطالعه‌ی موردی
۷۲	۴-۴ تحلیل خزش
۷۲	۴-۴-۱ مقدمه
۷۲	۴-۴-۲ تحلیل خزش
۷۶	۴-۴-۳ بحث تکمیلی خزش در استوانه ی FGM
۷۷	۴-۵ بررسی نتایج
۷۷	۴-۵-۱ مقدمه
۷۷	۴-۵-۲ مطالعه ی موردی
۷۹	فصل ۵ نتیجه گیری و پیشنهادها
۸۰	۵-۱ مقدمه
۸۰	۵-۲ نتیجه گیری
۸۱	۵-۳ پیشنهادات
۸۲	مراجع

فهرست جداول

جدول (۱-۱) خلاصه‌ای از پیشینه‌ی پژوهش مواد ناهمگن ----- ۱۱

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱: مراحل خزش براساس منحنی خزش طبیعی [۹]----- ۱۴
- شکل ۱-۲: تاثیر افزایش تنش بر خزش در یک دمای مشخص [۶].----- ۱۵
- شکل ۱-۳: تاثیر افزایش دما بر خزش در تنش ثابت [۶].----- ۱۵
- شکل ۱-۲: منحنی خزش طبیعی شامل سه مرحله خزش است ----- ۲۱
- شکل ۲-۲: منحنی خزش مورد بررسی از داده‌های آزمایشگاهی ----- ۲۳
- شکل ۳-۲: نمودار زمان-تغییر شکل همراه با خزش ----- ۲۵
- شکل ۱-۳: هندسه و شرایط مرزی پوسته‌ی استوانه‌ای [۲].----- ۳۴
- شکل ۲-۳: توزیع تنش شعاعی بی‌بعد در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما - ۵۰
- شکل ۳-۳: توزیع تنش محیطی بی‌بعد در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما- ۵۰
- شکل ۳-۴: توزیع تنش موثر بی‌بعد در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما --- ۵۱
- شکل ۳-۵: توزیع تنش شعاعی بی‌بعد در حالت کرنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما ----- ۵۱
- شکل ۳-۶: توزیع تنش محیطی بی‌بعد در حالت کرنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما ----- ۵۲
- شکل ۳-۷: توزیع تنش محوری بی‌بعد در حالت کرنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما ----- ۵۲
- شکل ۳-۸: توزیع تنش موثر بی‌بعد در حالت کرنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما ----- ۵۳
- شکل ۳-۹: توزیع کرنش خزشی در حالت تنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما ----- ۵۹
- شکل ۳-۱۰: توزیع خزش در حالت کرنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما ----- ۶۰
- شکل ۱-۴: توزیع تنش شعاعی در حالت تنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی ----- ۶۹
- شکل ۲-۴: توزیع تنش محیطی در حالت تنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی ----- ۶۹
- شکل ۳-۴: توزیع تنش موثر در حالت تنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی ----- ۷۰

- شکل ۴-۴: توزیع تنش شعاعی در حالت کرنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی ----- ۷۰
- شکل ۴-۵: توزیع تنش محیطی در حالت کرنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی ----- ۷۱
- شکل ۴-۶: توزیع تنش محوری در حالت کرنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی ----- ۷۱
- شکل ۴-۷: توزیع تنش موثر در حالت کرنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی ----- ۷۲
- شکل ۴-۸: توزیع کرنش خزشی در حالت تنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی ----- ۷۸
- شکل ۴-۹: توزیع کرنش خزشی در حالت کرنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی ----- ۷۸

فهرست علائم

ε^{cr}	کرنش خزشی	E	مدول یانگ
α_i	ضریب انبساط حرارتی جدار داخلی	E_i	مدول یانگ جدار داخلی
S_{ij}	تنش انحرافی	t	زمان
$\bar{\varepsilon}$	کرنش معادل	T	دما
$\dot{\varepsilon}^p$	نرخ کرنش پلاستیک	T_m	دمای ذوب
ε_e^{cr}	کرنش مؤثر خزش	ε	کرنش
$\bar{\varepsilon}^{cr}$	کرنش معادل خزش	ε_θ	کرنش محیطی
ε_θ	کرنش نصف‌النهاری	ε_r	کرنش شعاعی
ε_e	کرنش مؤثر	ν	ضریب پواسون
σ_θ	تنش نصف‌النهاری	σ	تنش
R	شعاع بی‌بعد	σ_θ	تنش محیطی
b	پارامتر مواد	σ_r	تنش شعاعی
α	ضریب انبساط حرارتی	σ_e	تنش مؤثر
λ	ضریب انتقال حرارتی	$\dot{\varepsilon}$	نرخ کرنش
λ_i	ضریب انتقال حرارتی جدار داخلی	b_i	پارامتر مواد در جدار داخلی
u_r	جاب‌جایی شعاعی	$\dot{\varepsilon}_e^{cr}$	نرخ کرنش مؤثر خزش
u_θ	جاب‌جایی محیطی	R_i	شعاع داخلی
u_θ	جاب‌جایی نصف‌النهاری	R_o	شعاع خارجی
$\dot{\varepsilon}^{cr}$	نرخ کرنش خزشی	$/R_i R_o$	شعاع بی‌بعد

فصل اول: مقدمه

۱-۱ مقدمه

پیشرفت لحظه‌ای علم باعث می‌شود تا هرکسی در هر سطحی از نیاز و با برداشت‌های متفاوت از محیط اطراف، پاسخ مناسب برای نیاز خود را در علم جست و جو کند. علم مکانیک بدون شک پیشرو تغییرات علمی چند قرن اخیر می‌باشد. سازه‌های مهندسی با توجه به کاربردهای خود دچار تغییراتی شده‌اند. از جمله‌ی این تغییرات می‌توان به جنس مواد سازه‌ها اشاره کرد که منجر به تولید مواد با تغییرات تابعی خواص شد که قابلیت تغییر مطابق نیاز در جهات مختلف را دارد. پوسته‌ها از سازه‌های مهندسی با کاربرد فراوان هستند، از این رو مطالعه و بررسی پوسته‌ها اهمیت زیادی را در مهندسی پیدا کرده است. با توجه به اینکه سازه‌ها در شرایط مختلف بارگذاری از جمله بارگذاری حرارتی و مکانیکی قرار می‌گیرند، مقاومت سازه در مقابل این نوع بارگذاری‌ها ضرورت استفاده از مواد با تغییرات تابعی خواص را بیش از پیش آشکار می‌سازد. اعمال بارگذاری مکانیکی و حرارتی روی سازه‌ها در طول زمان باعث بروز پدیده‌ی خزش می‌شود. با توجه به فراگیری استفاده از مواد با تغییرات تابعی خواص در صنایع مختلف، بررسی خزش در این مواد می‌تواند خیلی از مشکلاتی که در سازه به وجود می‌آیند را کنترل کند. با گذشت زمان تأثیرات حرارت بیشتر می‌شود و این موضوع توجه به خزش را امری جدی و غیر قابل چشم پوشی قلمداد می‌کند از طرفی با توجه به لزوم کارکرد برخی از سازه‌ها در دماهای بالا، باید به جنس سازه‌ها نیز توجه کرد. با توجه به اینکه فلزات کاربردی در دماهای بالا کاهش مقاومت نشان می‌دهند و موادی همچون سرامیک در مقابل ضربه شکننده هستند، لذا نیاز به موادی با خواص قابل انتخاب، محققان را به سوی بررسی و استفاده از موادی با قابلیت‌های حرارتی و مکانیکی مطلوب سوق می‌دهد. در شرایط بارگذاری مکانیکی و حرارتی، سازه‌هایی که مدت زمان طولانی تحت بارگذاری قرار می‌گیرند به واسطه‌ی زمان تغییر شکل پیدا می‌کنند. این تغییر شکل برخلاف تغییر شکل الاستیک و پلاستیک ماده به زمان و نوع بارگذاری وابسته است. این تغییر شکل می‌تواند تا جایی ادامه پیدا کند که منجر به شکست قطعه شود.

در این فصل ابتدا به معرفی پوسته‌ها، اهمیت و کاربرد آن‌ها می‌پردازیم. سپس به معرفی مواد با تغییرات تابعی خواص، تاریخچه‌ای از این مواد، کاربرد و نیاز به این مواد خواهیم پرداخت. در ادامه پدیده‌ی خزش، لزوم بررسی این پدیده در سازه و همچنین عوامل تأثیر گذار بر آن را بررسی می‌کنیم. سپس به سابقه‌ی موضوع و کارهای انجام شده به همراه نتایج آن‌ها خواهیم پرداخت.

۲-۱ پوسته‌ها

پوسته‌ها^۱ سازه‌هایی خمیده هستند که ضخامت آن‌ها در برابر سایر ابعادشان کوچک است. پوسته‌ها از نظر رفتاری در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده مطلوبیت ویژه‌ای دارند. مطالعه‌ی این رفتار از گذشته‌ای نه‌چندان دور مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته و به دلیل کاربرد فراوان، این توجه همچنان ادامه دارد. از میان انواع سازه‌های پوسته‌ای، پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک و جدار ضخیم اهمیت ویژه‌تری دارند. و همواره پژوهشگران در پی اعمال تغییراتی روی ضخامت و ماده‌ی این پوسته‌ها بوده‌اند مقاومت آن‌ها را در برابر نیروهای وارد شده افزایش و در صورت امکان وزن آن‌ها را کاهش دهند [۱].

۱-۲-۱ انواع پوسته‌ها

به طور کلی پوسته‌ها را می‌توان از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری بررسی کرد [۲].

الف- از دیدگاه هندسی

پوسته‌ی حاصل از انتقال^۲: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس حاصل می‌شود.

^۱Shells

^۲Shell of Translation

پوسته‌ی حاصل از دوران^۱: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس تشکیل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک^۲: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن کمتر از $\frac{1}{20}$ باشد.
پوسته جدار ضخیم^۳: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بیشتر از $\frac{1}{20}$ باشد.

ب- از دیدگاه مادی

پوسته‌ی همگن^۴: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته، در نقاط مختلف آن یکسان بوده و تابع موقعیت نمی‌باشد.

پوسته‌ی ناهمگن^۵: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته، در نقاط مختلف آن یکسان نبوده و تابع موقعیت می‌باشد.

پوسته‌ی همسانگرد^۶: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته، در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان است.

پوسته‌ی ناهمسانگرد^۷: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته، در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان نیست.

ج- از دیدگاه رفتاری

پوسته با تغییر شکل کوچک^۸: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و بدون بارگذاری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییر شکل بزرگ^۹: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و بدون بارگذاری، کوچک نیست (رفتار غیر خطی از نظر هندسی).

¹ Shell of Revolution

² Thin Walled Shell

³ Thick Walled Shell

⁴ Homogeneous Shell

⁵ Inhomogeneous Shell

⁶ Isotropic Shell

⁷ Anisotropic Shell

⁸ Small Deformation

⁹ Large Deformation

پوسته با رفتار کشسان^۱: تغییر شکل‌ها بازگشت پذیرند و معادله‌ی تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کند (رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان^۲: تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و معادله‌ی تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کند (رفتار غیر خطی از نظر مادی).

۳-۱ تئوری پوسته‌های جدار نازک

در پوسته‌های جدار نازک نسبت ضخامت پوسته به شعاع لایه‌ی میانی کوچکتر از $\frac{1}{20}$ می‌باشد. تئوری این دسته از پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به طور کلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود؛ بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی-تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک به دست می‌آورند. دقت نتایج تئوری‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد [۱].

۴-۱ تئوری پوسته‌های جدار ضخیم

در پوسته‌های جدار ضخیم، نسبت ضخامت پوسته به شعاع لایه‌ی میانی بیشتر از $\frac{1}{20}$ است. تئوری این دسته از پوسته‌ها نیز بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به دلیل نسبت قابل ملاحظه‌ی ضخامت نسبت به ابعاد دیگر نمی‌توان از تئوری پوسته‌های نازک استفاده کرد و باید از تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده کرد ولیکن به دلیل پیچیدگی تحلیل با ساده‌سازی و اعمال فرضیاتی می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی بهره گرفت. اولین بار لامه^۳ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دوبعدی (مستوی)، حل دقیق استوانه‌ی ضخیم‌تقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار

^۱Elastic Behavior

^۲Plastic Behavior

^۳Lame

یکنواخت داخلی و ساخته شده از ماده‌ی همگن و همسانگرد را ارائه کرد [۳]. نقدی با لحاظ کردن اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود [۴]. گرینسپن^۱ مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم محاسبه نمود و با یکدیگر مقایسه کرد [۵].

۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی

در تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله (سه معادله‌ی تعادل، شش معادله‌ی سینماتیک و شش معادله‌ی رفتاری) و ۱۵ مجهول (شش مولفه‌ی تانسور تنش متقارن، شش مولفه‌ی تانسور کرنش متقارن و سه مولفه‌ی جابه‌جایی) وجود دارد که منجر به حل دقیق مسأله می‌شود ولی حل این معادلات بسیار پیچیده و در بسیاری از موارد عملاً غیر ممکن است. به کمک فرضیاتی می‌توان تعداد این معادلات و تعداد مجهولات آن‌ها را کاهش داد و حل نمود. یک نمونه از این فرضیات ساده کننده منجر به شکل‌گیری تئوری الاستیسیته دو بعدی^۲ (مستوی) می‌شود.

در این تئوری فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پس از بارگذاری و تغییر شکل همچنان مستوی و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند. در حقیقت از تنش برشی و کرنش برشی سطح موازی با صفحه‌ی میانی پوسته چشم‌پوشی می‌شود. این تئوری به تئوری کلاسیک استوانه‌های جدار ضخیم نیز مشهور است. این تئوری را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد استفاده کرد و توزیع تنش را در استوانه بدست آورد [۶]. لخنیتسکی^۳ تئوری الاستیسیته را برای اجسام مرکب فرمول‌بندی کرد [۷].

معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌ی ضخیم جدار ثابت عبارت است از:

¹ Greenspon

² Plane Elasticity

³ Lekhnitskii

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0 \quad \text{or} \quad r^2 u_r'' + 2r u_r' - 2u_r = 0 \quad (1-1)$$

و جابه‌جایی استوانه u_r برابر است با:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (1-2)$$

که r شعاع استوانه، C_1 و C_2 ثابت‌های معادله هستند.

۱-۵ مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM)^۱

در سال‌های اخیر در صنایع مختلف محدودیت‌هایی در کارکرد سازه‌های مربوطه بر اثر تنش‌های مکانیکی و حرارتی به دلیل استفاده از مواد همگن و همسانگرد ایجاد شده است. مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص مانند: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی، خزش و... کارایی لازم را نداشته و از نظر علمی و اقتصادی توصیه نمی‌شود. در گذشته در صنایع هوا و فضا از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش و روکش قطعات با کارکرد حرارتی بالا استفاده می‌شد. این مواد عایق‌های خوبی بودند ولی مقاومت زیادی در برابر تنش‌های پسماند نداشتند. تنش‌های پسماند در این قطعات باعث ایجاد حفره و ترک می‌شد. با توجه به این مشکلات طرح ماده‌ای مرکب (کامپوزیت‌ها)^۲ که مقاومت حرارتی و مکانیکی بالایی داشته باشد و مشکل لایه‌لایه شدن را نداشته باشد ضرورت پیدا کرد. این موضوع باعث شد موادی که دارای خواص متغیر به صورت تابعی پیوسته مورد توجه قرار گیرند. به دلیل تغییرات تدریجی در میکرو ساختارهای این مواد، تغییرات خواص آن نیز به صورت تدریجی است.

در سال‌های اخیر با توسعه‌ی موتورهای پرقدرت صنایع هوا و فضا، توربین‌ها، راکتورها و دیگر ماشین‌ها نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالا و مقاوم‌تر از لحاظ مکانیکی احساس شده است. بعدها برای رفع این مشکل از مواد کامپوزیتی لایه‌ای استفاده شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی

¹ Functionally Graded Material

² Composite Materials

ناهمساز به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. در پوسته‌های ساخته شده از مواد مرکب به دلیل تغییر ناگهانی ساختار ماده و یا ترکیب دو ماده ناهمساز در کنار یکدیگر و در نتیجه تغییر ناگهانی در رفتار مواد، مسائل و نواقصی در پوسته‌ها به وجود می‌آیند که باعث ایجاد تمرکز تنش و گسستگی در مرز لایه‌ها می‌شوند. تغییر ناگهانی مواد و خواص آن‌ها که موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به ویژه در مرز لایه‌ها می‌گردد، از اشکالات عمده‌ی آن‌ها است. لذا ایده‌ی استفاده از موادی که خواص آن‌ها به صورت تدریجی تغییر کند مطرح شد. در مواد FG به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی و حرارتی تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند. تغییرات تدریجی خواص در مواد FG موجب استحکام بین لایه‌های مختلف می‌شود. در مواد مرکب کامپوزیتی تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف نوعی ناهماهنگی در خواص ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیتی در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود [۸]. مواد با تغییرات تابعی خواص موادی کامپوزیتی با ریز ساختار ناهمگنی می‌باشند، که خواص مکانیکی آن‌ها بطور تدریجی و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این مواد با توجه به ترکیب مواد تشکیل دهنده، خواص مکانیکی مؤثری نسبت به مواد کامپوزیتی لایه‌ای دارند [۹]. مواد با تغییرات تابعی خواص، نقش مهمی در پیشرفت فناوری دارند. این مواد دارای تغییر خواص پیوسته در جهت مورد نیاز هستند. ایجاد شرایطی مانند مقاومت به دمای بالا در یک سمت و خواص مکانیکی مطلوب در سمت دیگر، خصوصیتی است که توجه طراحان را در چند دهه‌ی اخیر به خود جلب کرده است. مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM) گروه جدیدی از مواد هستند که برای استفاده در محیط‌هایی با دمای بالا و شرایطی که یک قطعه بایستی خواص متفاوتی در قسمت‌های مختلف داشته باشد، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱-۵-۱ ویژگی‌های مواد FG

مواد با تغییرات تابعی خواص دارای ویژگی‌هایی هستند که آن‌ها را نسبت به سایر مواد موجود برتری می‌دهد. با توجه به نیاز و محدودیت‌های موجود، جنس قطعات مورد استفاده در صنایع مختلف با توجه به شرایط استفاده برای مقاومت در برابر محدودیت‌ها مورد توجه قرار می‌گیرد. به چند نمونه از محدودیت‌هایی که با استفاده از مواد FG می‌توان آن‌ها را برطرف کرد در زیر اشاره شده است [۱۰]:

۱- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی، به کمک مواد FG می‌توان مقاومت مواد در ناحیه‌ای که در مقابل بار مکانیکی اعمال شده ضعیف هستند، را افزایش داد.

۲- مقاوت بالا در برابر گرادیان دمایی، به کمک مواد FG می‌توان تنش‌های حرارتی را در نواحی بحرانی کنترل کرد.

۳- در بسیاری از سازه‌های امروزی تمرکز تنش یکی از مهمترین موضوعات قابل بررسی است. در اجسام مختلف در برخی نواحی تمرکز تنش به وجود می‌آید. سوراخ‌ها، گشودگی‌ها، تغییر ناگهانی در سطح مقطع و... با استفاده از مواد FG می‌توان تمرکز تنش موجود را کنترل کرد و کاهش داد.

۴- برخی مواقع نیاز است که جسم در سطوح مختلف خواص متفاوتی داشته‌باشد، اگر این تغییر خواص در سطوح مختلف به صورت ناگهانی انجام شود ممکن است باعث شود که لایه‌های مختلف از یکدیگر جدا شوند.

۲-۵-۱ تاریخچه و سابقه‌ی مواد FG

باستان شناسان در ژاپن شمشیرهای فولادی پیدا کرده‌اند که سختی آن‌ها در قسمت‌های مختلف متفاوت است. تاریخچه‌ی مواد FG از نظر علمی به چندین سال اخیر برمی‌گردد. مفهوم اولیه‌ی FGM توسط نینو و همکارانش در سال ۱۹۸۴ در سازمان هوا و فضای ژاپن مطرح و از سال ۱۹۸۶

مطالعات امکان سنجی تولید FGM در این کشور شروع شد [۱۱]. مرحله‌ی اول پژوهش ملی «فناوری گسترش FGM» طی سال‌های ۱۹۸۷ تا ۱۹۸۹ در ژاپن انجام شد. در این پروژه، سه گروه: ساخت مواد، پردازش و ارزیابی مواد با یکدیگر همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید ماده‌ای جدید با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و همچنین فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب بود، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد. در این صورت شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی لایه‌ی درونی شاتل ارضا می‌شود [۱۲].

فوکویی^۱ و یاماناکا^۲ (۱۹۹۲) روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم ساخته شده از مواد FG را تحت فشار داخلی و در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج کردند و با استفاده از روش عددی رانگ-کوتا حل آن‌ها را بررسی کردند [۱۳]. آباتا و نودا (۱۹۹۴) روابط تنش‌های حرارتی را برای استوانه و کره‌ی توخالی ساخته شده از مواد FG استخراج کردند [۱۴].

۳-۵-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد FG

ویژگی برتر مواد FG تغییر پیوسته در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی آن‌ها می‌باشد. این ویژگی باعث می‌شود که با بررسی شرایط موجود و نیازها، تغییر خواص را با یک تابع پیوسته‌ی ریاضی تقریب زد، و از آن تابع برای استفاده در روش‌های حل بهره گرفت. تابع ریاضی مورد استفاده برای توزیع پیوسته‌ی خواص در مواد FG معمولاً یک تابع توانی یا یک تابع نمایی است. تغییرات تاثیرگذار در خواص مواد FG معمولاً تغییر در ضریب هدایت حرارتی، مدول کشسان^۳، ضریب انبساط حرارتی و چگالی است. و می‌توان از تغییرات نسبت پواسون^۴ به دلیل ناچیز بودن مقدار نسبت پواسون و

¹ Fukui

² Yamanaka

³ Elasticity Modulus, Young Modulus

⁴ Poisson's

در نتیجه‌ی آن ناچیز بودن تأثیر تغییرات نسبت پواسون صرف نظر کردیم یعنی می‌توان ماده را ناهمگن و همسانگرد در نظر گرفت.

هورگان و چان (۱۹۹۹) معادلات حاکم بر استوانه توخالی ساخته شده از موّاد FG را در حالت کرنش صفحه‌ای و با در نظر گرفتن توزیع توانی خواص برای مدول الاستیسیته در راستای شعاعی با استفاده از معادلات لامه استخراج کردند و توزیع تنش را به ازای توان‌های مثبت به دست آوردند [۱۵]. آن‌ها همچنین با همین منطق، تنش‌ها را در دیسک‌های دوار ساخته شده از موّاد FG به دست آوردند [۱۶].

جدول (۱-۱) خلاصه‌ای از پیشینه‌ی پژوهش موّاد ناهمگن

سال	نوع تابع انتخاب شده	پژوهشگر-پژوهشگران
(۱۹۹۴)	تابع توانی	أباتا و نودا ^۱ [۱۴]
(۲۰۰۰)	تابع توانی	یانگ ^۲ [۱۷]
(۲۰۰۱)	تابع توانی	توتونچو ^۳ [۱۸]
(۲۰۰۱)	تابع توانی	تارن ^۴ [۱۹]
(۲۰۰۶)	تابع نمایی	اراسلان و آکیز ^۵ [۲۰]
(۲۰۰۶)	تابع نمایی	هونگجون و ژیفای ^۶ [۲۱]

تلفیق فلز-سرامیک^۷ با افزودن برخی آلیاژهای دیگر، رایج‌ترین ماده FG را تولید می‌کند. پراوین و

ردی (۱۹۹۸) تغییر خواص برای یک ورق FGM با ضخامت h را با رابطه‌ی زیر بیان کردند [۲۲].

$$P(z) = (P_c - P_m)V^n + P_m \quad (۱-۳)$$

¹ Obata & Noda

² Yang

³ Tutuncu

⁴ Tam

⁵ Eraslan & Akis

⁶ Hongjun & Zhifei

⁷ Metal-ceramic

که در رابطه‌ی بالا P_m خواص فلز، P_c خواص سرامیک، V نسبت حجمی و n ثابت ناهمگنی در جسم است. اگر $n = 0$ باشد ورق همگن از سرامیک بدست می‌آید.

$$V = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) , \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1-4)$$

اگر $z = \frac{h}{2}$ باشد، خاصیت سرامیک و اگر $z = -\frac{h}{2}$ خاصیت فلز بدست می‌آید. با توجه به اینکه فلزات در برابر بارهای مکانیکی و سرامیک در برابر گرادیان دمایی مقاوم هستند. لذا همچنین ماده‌ای برای اجسامی که از یک طرف در معرض گرادیان دمایی و از طرف دیگر تحت بار مکانیکی قرار گرفته‌اند مفید است. رابطه (۱-۳) یک رابطه کلی است و می‌تواند برای هر دو خاصیت دلخواه و برای دو لایه مختلف نوشته شود:

$$P(z) = (P_1 - P_2)V^n + P_2 \quad (1-5)$$

که P_1 و P_2 خواص ماده در دولایه مختلف هستند. برای مثال مدول الاستیسیته یک استوانه‌ی توخالی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{cases} E(r) = (E_0 - E_i)^n + E_i \\ V = \frac{r/r_i - 1}{r_0/r_i - 1} \end{cases} \quad (1-6)$$

که در رابطه بالا E_0 و E_i مدول یانگ ماده در شعاع داخلی و بیرونی می‌باشند.

۱-۶ خزش

زمان طولانی اعمال بار باعث ایجاد تغییر شکل تدریجی در قطعه می‌شود، این پدیده را خزش می‌گویند. خزش تحت تاثیر شرایط مختلف می‌تواند ایجاد شود. حرارت تاثیر زیادی بر شروع و افزایش خزش دارد.

با گذشت زمان و با افزایش روزافزون جمعیت و محدودیت منابع نیاز به استفاده از موادی جدید مانند مواد FG به وضوح روشن است. در چنین شرایطی بشر به دنبال استفاده‌ی بهینه و مناسب از منابع

می‌باشد. با توجه به اینکه اکثر سازه‌های موجود مانند نیروگاه‌ها، موتورهای توربین گاز، تجهیزات تولید برق، طراحی قطعات مکانیکی، صنایع نفت، پتروشیمی و نظامی از قطعات فلزی ساخته شده‌اند و کاربرد این سازه‌ها نیاز به کارکرد در دماهای بالا دارد. انتظار می‌رود در آینده‌ی نه‌چندان دور استفاده از این مواد که توانایی کار در دماهای بالا را دارند بیشتر شود، این موضوع ضرورت نگرشی دیگر در طراحی قطعات مهندسی را روشن می‌سازد.

۱-۶-۱ مفهوم خزش و منحنی خزش

در دماهای معمولی قطعات می‌توانند بارگذاری طراحی را برای زمان نامحدود تحمل کنند. ولی وقتی بحث کارکرد قطعات در دماهای بالا مطرح می‌شود حتی در برابر بارگذاری کمتر از بارگذاری طراحی، عمر قطعه محدود می‌شود. کارکرد قطعات در دماهای بالا^۱ کرنش غیرالاستیکی ایجاد کند که با گذشت زمان افزایش پیدا می‌کند. تغییر شکل پلاستیک معمولاً تقریباً بلافاصله رخ می‌دهد، اما خزش می‌تواند به عنوان تغییر شکل وابسته به زمان تغییر شکل پلاستیک تحت بار پایدار و دمای بالا بررسی شود. خزش در هر فلزی که تحت بارهای پایدار قرار می‌گیرد، در دمای قابل توجهی بالاتر از دمایی که در آن تبلور مجدد اتفاق می‌افتد (دمای تبلور مجدد خود) رخ می‌دهد. در این دماها به طور کامل متحرک می‌شوند و دگرگونی‌های وابسته به زمان در ساختار فلز ایجاد می‌شود. کرنش تحت بار ثابت و پایدار افزایش پیدا می‌کند تا شکست اتفاق بیفتد. این پدیده به عنوان خزش شناخته شده است. اگر خزش برای مدت زمان زیادی اتفاق بیفتد تغییر شکل‌های بیش از اندازه (واماندگی خزشی^۲) و شکست (شکست خزشی^۳) اتفاق می‌افتد. دما، بار و زمان که باعث ایجاد خزش و واماندگی خزشی یا شکست خزشی احتمالی در عضو می‌شوند به ماده و محیط بستگی دارند. در طبیعت شکل‌های ساده‌ای از خزش قابل مشاهده هستند مانند حرکت بسیار آرام ذرات خاک و صخره‌ها بر اثر گرانش

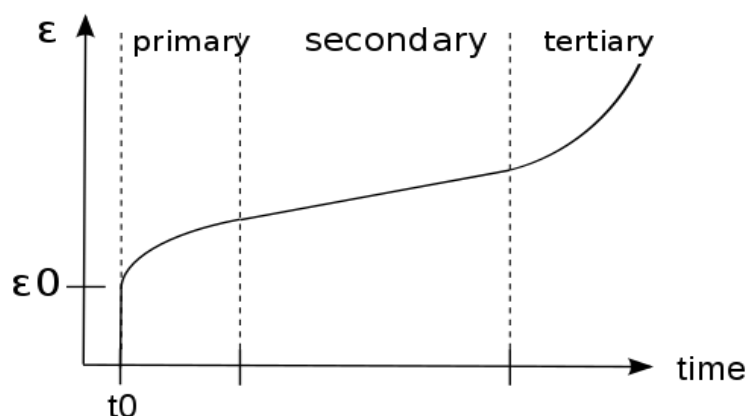
¹ Elevated temperature

² Creep failure

³ Creep fracture

زمین [۲۳]. بسیاری از تاریخچه‌ی خزش فلزات، ریشه در انقلاب صنعتی دارد که منجر به استفاده از ماشین‌آلات در بالاترین درجه حرارت برای دستیابی به راندمان مطلوب‌تر شد.

آزمایش‌های خزش یک نمونه‌ی بارگذاری‌شده تحت کشش یا فشار ساده، معمولاً در بار ثابت، درون یک کوره که در دمای ثابت T نگهداری می‌شود، انجام می‌شود. فرمت نمونه به عنوان تابع زمان اندازه‌گیری می‌شود. منحنی خزش برای فلزات، پلیمرها و سرامیک در شکل زیر نشان داده شده است.

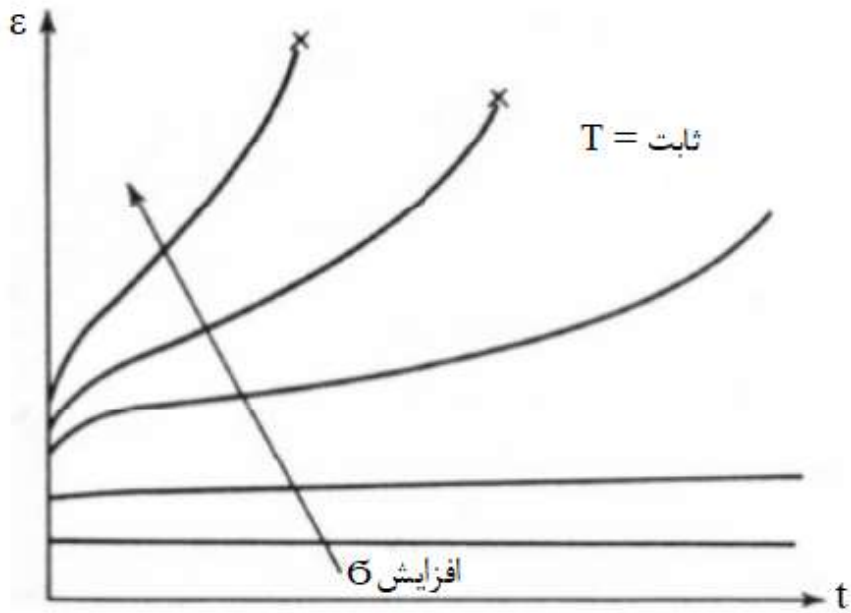


شکل ۱-۱: مراحل خزش براساس منحنی خزش طبیعی [۹]

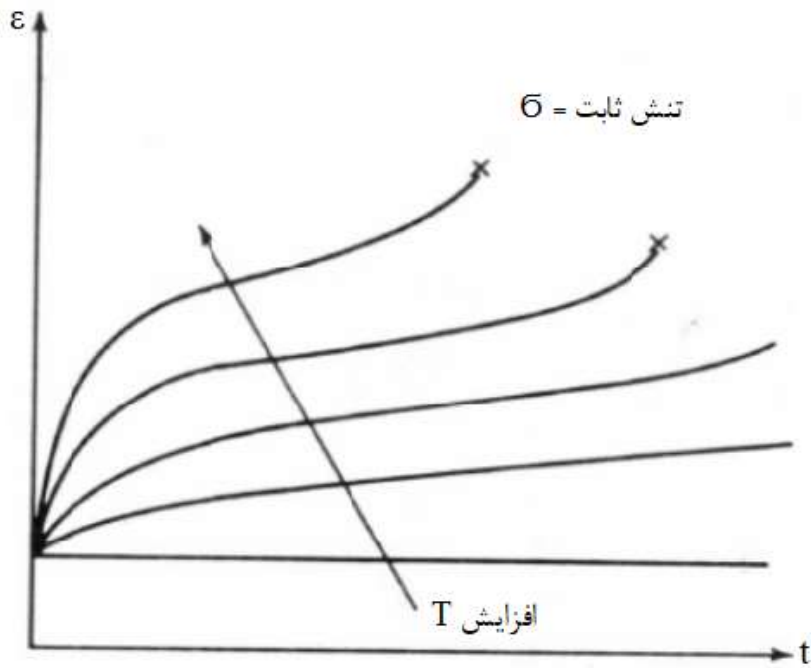
شکل (۱-۱) رفتار معمول کرنش خزشی را نشان می‌دهد. مشخص است که کرنش خزشی مستقل از تنش است و با گذشت زمان افزایش می‌یابد. در ابتدا که بارگذاری انجام می‌شود یک پاسخ الاستیک فوری داریم، با گذشت زمان تغییراتی در ساختار ماده ایجاد می‌شود که باعث ایجاد کرنش خزشی می‌شود. خزش در مرحله‌ی اول نرخ تغییر زیادی دارد که با گذشت زمان کاهش می‌یابد. کاهش نرخ تغییر کرنش خزشی در مرحله‌ی اول تا جایی که تقریباً نرخ ثابتی دارد ادامه پیدا می‌کند. در مرحله‌ی دوم کرنش خزشی با شیب در ابتدا نرخ کرنش با نرخ زیادی انجام می‌شود ولی به تدریج کاهش می‌یابد تا به حالت پایدار steady state برسد (خزش مرحله دوم). بعد نرخ کرنش افزایش می‌یابد و با شتاب بیشتری انجام می‌شود تا شکست اتفاق بیفتد [۲۴].

شکل‌های (۱-۲) و (۱-۳) تاثیر حرارت و تنش را بر خزش ماده در شرایط مشخص و ثابت نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که حرارت می‌تواند تاثیر زیادی بر خزش دارد، همچنین برای تاثیر تنش روی

خزش مشاهده می‌کنیم که سرعت افزایش خزش با افزایش تنش افزایش می‌یابد.



شکل ۱-۲: تاثیر افزایش تنش بر خزش در یک دمای مشخص [۶].



شکل ۱-۳: تاثیر افزایش دما بر خزش در تنش ثابت [۶].

۷-۱ اهداف پایان نامه

در این پایان نامه تحلیل خزش در پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM) تحت بار مکانیکی و گرادیان شعاعی دما مورد بررسی قرار گرفته است.

۸-۱ نوآوری

در این پایان نامه برای استوانه‌ی جدار ضخیم بدون در نظر گرفتن شرایط انتهایی استوانه، حل کلی ارائه می‌شود. در انتها برای مشخص شدن روابط حاکم برای حالت‌های تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای ثابت‌هایی معرفی می‌شوند. خزش در حالت پایا با استفاده از روابط در حالت الاستیک بررسی می‌شود.

۹-۱ مروری بر فصل‌های پایان نامه

این پایان نامه از یک فصل به عنوان مقدمه (فصل حاضر) و چهار فصل اصلی و یک بخش جهت معرفی مراجع مورد استفاده تشکیل شده است. در فصل اول در مورد جنس ماده مورد استفاده در صنایع مختلف و نیاز به بررسی رفتار این مواد در مقابل بارگذاری مکانیکی حرارتی مطالبی توضیح داده شد. مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM) توصیف و ضمن بیان ویژگی‌ها تاریخچه‌ای از آن‌ها و روابط ریاضی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت. همچنین خزش به عنوان رفتاری از مواد در دمای کاری بالا توضیح داده شد. در فصل دوم مفاهیم استفاده شده در این مطالعه به تفصیل توضیح داده شده است. خزش، رفتار خزشی ماده و روابط ریاضی حاکم بر خزش توضیح داده می‌شود. در فصل سوم روابط اساسی حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم همگن در حالت الاستیک و تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی ارائه می‌شود. همچنین با استفاده از یک مثال موردی نتایجی برای بررسی روابط حاکم توصیف می‌شود. سپس با استفاده از قانون توانی نورتون معادلات خزشی حاکم استخراج و با

یک مدل‌سازی عددی رفتار خزشی تحت شرایط حاکم بررسی می‌شود. در فصل چهارم با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی برای مواد FG با تغییرات توانی خواص تحت بارگذاری مکانیکی و گرادینان شعاعی روابط ساختاری ارائه می‌شود. سپس شرایط خزشی حاکم بررسی و روابط اساسی برای تحلیل خزش ارائه و با یک مثال عددی توصیف می‌شوند. در فصل پنجم به معرفی نتایج این پایان‌نامه و ارائه‌ی پیشنهادها و نکات مهم و مورد نیاز برای ادامه تحلیل در شرایط متفاوت و ارتقای سطح کیفی این تحقیق می‌پردازیم.

فصل دوم: مبانی تحلیلی خزش

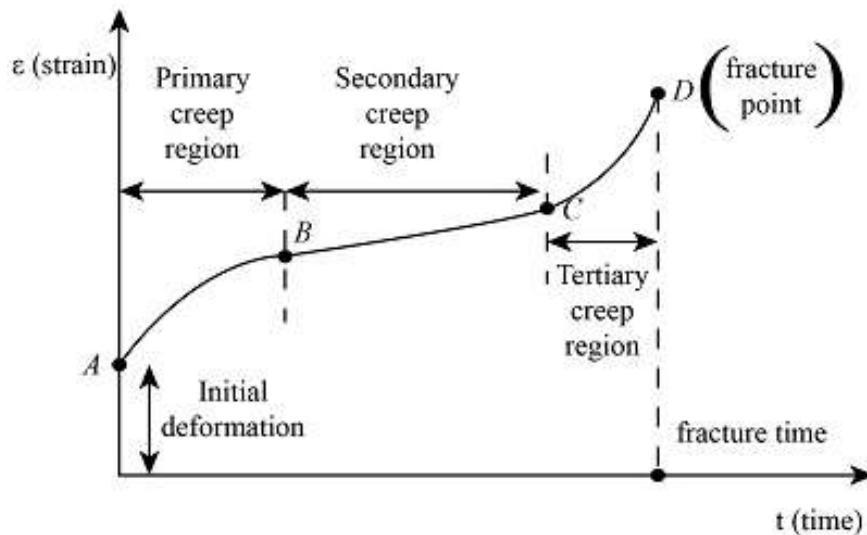
۱-۲ مقدمه

با گذشت زمان و محدودیت منابع، استفاده از موادی که کارکرد مناسب‌تر و بهتر داشته باشند موضوع مهم در طراحی قطعات است. اکثر سازه‌های موجود مانند نیروگاه‌ها، موتورهای توربین گاز، تجهیزات تولید برق، صنایع نفت، پتروشیمی و نظامی از قطعات فلزی ساخته شده‌اند و کارکرد این سازه‌ها نیاز به استفاده از قطعات در دماهای بالا دارد. انتظار می‌رود در آینده‌ای نه‌چندان دور استفاده از این مواد که توانایی کار در دماهای بالا را دارند بیشتر شود. قطعات استفاده شده در سازه‌های گوناگون در شرایط حرارتی و با گذشت زمان دچار تغییر شکل خزشی می‌شوند. با توجه به اهمیت افزایش کارکرد طولانی مدت تجهیزات در دمای بالا، بررسی رفتار مواد در زمینه‌ی خزش مهم و ضروری است. در این فصل به بیان پدیده خزش، انواع خزش، عوامل موثر بر آن و بررسی روابط ریاضی حاکم می‌پردازیم.

۲-۲ خزش

به تغییر شکل تدریجی قطعات تحت تنش ثابت که به واسطه‌ی زمان طولانی بارگذاری ایجاد می‌شود خزش گفته می‌شود، به عبارت دیگر خزش تغییر شکل وابسته به زمان قطعه است. عمر قطعات مورد استفاده در انواع سازه‌ها که دمای کاری بالایی دارند تحت تاثیر عامل خزش محدود می‌شود، و با افزایش زمان تا مرحله‌ی شکست قطعه ادامه پیدا می‌کند. خزش در انواع مختلف مواد مشاهده می‌شود: مانند فلزات، پلاستیک، سنگ، بتن و... . تغییر شکل خزش به میزان قابل توجهی به نوع بارگذاری بستگی دارد. حرارت بیشترین تاثیر را بر خزش ماده دارد. دمایی که مواد شروع به خزش می‌کنند بستگی به نقطه‌ی ذوب آن‌ها T_m دارد. به عنوان مثال برای فلزات $T > 0.4T_m$ و برای سرامیک $T > 0.5T_m$ است.

در برخی شرایط مرحله‌ی اول وجود ندارد و نمودار کرنش-زمان از ابتدا خطی است. در برخی شرایط دیگر خزش حالت ماندگار وجود ندارد و... . اگر مقدار تنش اعمال شده و مدت زمان اعمال آن ناچیز باشد، خزش مرحله‌ی سوم به وجود نمی‌آید. خزش مرحله سوم با شکست همراه است [۲۵].



شکل ۱-۲: منحنی خزش طبیعی شامل سه مرحله خزش است

شکل بالا نشان دهنده کرنش خزشی ماده است. در بخش اول این نمودار و در ابتدای زمان بارگذاری یک تغییر شکل الاستیک و یا غیر الاستیک داریم. ماهیت این تغییر شکل به نوع بارگذاری و شیوه‌ی این بارگذاری بستگی دارد. بخش اول این نمودار مربوط به شرایط اولیه‌ی بارگذاری است. حتی اگر تنش وارد شده کمتر از تنش تسلیم ماده باشد، تمام کرنش اولیه کشسان نیست. بخشی از تغییر شکل قطعه که با برداشتن بار برمی‌گردد تغییر شکل الاستیک ماده است. بخشی از تغییر شکل قطعه که پس از باربرداری با گذشت زمان کم می‌شود تغییر شکل غیر الاستیک است. بخش دیگری از تغییر شکل که با گذشت بر نمی‌گردد و در قطعه ماندگار است، کرنش پلاستیک است.

تفاوت تعیین کننده بین کرنش‌های الاستیک و پلاستیک با کرنش خزشی تاثیر زمان است. کرنش‌های الاستیک و پلاستیک با اعمال بار و یا برداشتن بار، قابل بررسی هستند، ولی کرنش خزشی وابسته به زمان است. در ناحیه‌ی الاستیک تنش و کرنش با رابطه‌ی هوک بررسی می‌شوند. برای

خزش رابطه‌ی واحدی وجود ندارد. بسته به نوع بارگذاری روابط متفاوتی بین تنش و کرنش وجود دارد که برخلاف قانون هوک می‌توانند غیر خطی باشند. با بررسی منحنی خزش مراحل خزش قطعه مشخص می‌شود. در مرحله‌ی اول خزش، با افزایش زمان، کرنش خزشی نیز افزایش می‌یابد ولی نرخ افزایش کرنش خزشی کاهش پیدا می‌کند. در مرحله‌ی دوم نرخ کرنش خزشی تقریباً ثابتی داریم که حالت پایدار خزش نام دارد. در مرحله‌ی سوم با افزایش زمان نرخ افزایش کرنش خزشی افزایش پیدا می‌کند.

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 / E(T) + \varepsilon_p(\sigma_0, T) \quad (2-1)$$

که $E(T)$ مدول الاستیسیته است.

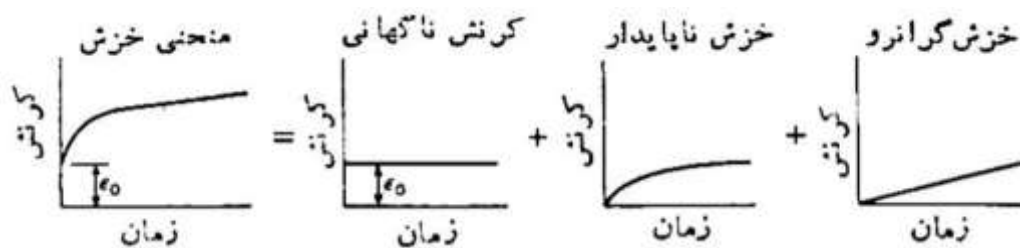
کرنش خزشی نشان داده شده در شکل (۱-۲) می‌تواند به صورت زیر نشان داده شود.

$$\varepsilon_c = \varepsilon(t) - \varepsilon_0(\sigma_0, T) \propto t^k \quad (2-2)$$

اگر $k < 1$ باشد خزش مرحله‌ی اول (اولیه)، اگر $k = 1$ باشد خزش مرحله‌ی دوم (ثانویه) و اگر $k > 1$ باشد خزش مرحله‌ی سوم است.

گاروفالو^۱ فعالیت‌های گسترده‌ای در زمینه‌ی خزش انجام داد که برای درک خزش بسیار مناسب و مفید بود. او فرض کرد که منحنی خزش در تنش ثابت، از انطباق دو فرآیند خزش جداگانه که پس از کرنش ناگهانی حاصل از اعمال بار ناشی می‌شوند، به وجود می‌آید. اولین مؤلفه منحنی خزش، خزش ناپایداری است که در آن آهنگ خزش با زمان کم می‌شود. یک مؤلفه خزش گرانبو با آهنگ ثابت به اولین مؤلفه اضافه می‌شود.

^۱ Garofalo



شکل ۲-۲: منحنی خزش مورد بررسی از داده‌های آزمایشگاهی

گالفارو معادله‌ی زیر را از داده‌های آزمایشگاهی برای بررسی خزش ارائه کرد.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_t(1 - e^{-rt}) + \varepsilon_s t \quad (2-3)$$

در رابطه‌ی بالا ε_0 کرنش در لحظه‌ی بارگذاری، ε_t حد کرنش خزشی ناپایدار، r نسبت آهنگ خزش ناپایدار به کرنش خزشی ناپایدار و ε_s آهنگ خزش حالت پایدار است. واضح است که در رابطه‌ی بالا با صرف نظر کردن از کرنش خزشی مرحله‌ی اول، کرنش خزشی فقط به زمان خزش با آهنگ ثابت تغییر می‌کند.

بررسی پدیده خزش معمولاً به شکل تنش ثابت و نیرو ثابت انجام می‌گیرد. حالت تنش ثابت به دلیل اینکه همراه با تغییر شکل و کاهش سطح مقطع نیاز به وسایل آزمایشگاهی با دقت بالا دارد معمولاً به صورت آزمایشگاهی بررسی نمی‌شود و از روش نیرو ثابت برای بررسی آزمایشگاهی خزش استفاده می‌شود. بررسی خزش در حالت تنش ثابت معمولاً با روابط ریاضی و حل تحلیلی انجام می‌گیرد.

۳-۲ تاثیرات خزش بر ساختار ماده

منحنی خزش نشان دهنده‌ی کاهش شدید نرخ کرنش خزشی با گذشت زمان تا رسیدن به مرحله خزش حالت پایدار است. با توجه به ثابت بودن تنش و دما، تغییرات نرخ کرنش خزشی همزمان با تغییر در ساختار داخلی ماده سازنده‌ی قطعه مورد نظر است. در مرحله‌ی دوم حالت پایدار و تعادل در ساختار داخلی ماده و تغییرات ناشی از خزش ایجاد می‌شود. مرحله‌ی سوم خزشی زمانی رخ می‌دهد

که تعادل حاکم در مرحله‌ی دوم خزش از بین برود، این مرحله که با گلوئی شدن، خوردگی، تشکیل حفره و تعدادی تغییر مخرب دیگر در ساختار قطعه همراه است معمولاً تا شکست قطعه ادامه پیدا می‌کند.

۲-۲ روابط ساختاری

خزش تابع زمان، تنش و دما است.

$$\varepsilon_c = f(t, T, \sigma) \quad (۲-۴)$$

تاثیر تنش (σ)، زمان (t) و دما (T) در تحلیل خزش به صورت جداگانه فرض می‌شود. کرنش خزشی را در حالت کلی با توابع مختلفی از تنش، زمان، و دما به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\varepsilon_c = \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(T) h_i(\sigma) \quad (۲-۵)$$

معادلات ساختاری زیادی با استفاده از تحلیل خزش در آزمایشگاه یا بررسی نمودارهای خزش معرفی شده‌اند مانند:

$$\varepsilon_c = \frac{at}{1 + bt} \quad (۲-۶)$$

$$\varepsilon_c = A\sigma^n t^m \quad (۲-۷)$$

$$\varepsilon_c = [M(\sigma - \sigma_0)]^m \quad (۲-۸)$$

اما پرکاربردترین رابطه را بیلی-نورتن^۱ معرفی کردند.

$$\varepsilon_c = A\sigma^n t^m \quad (۲-۹)$$

که پارامترهای A , n , m ثوابت ماده هستند که به دما بستگی دارند. آن‌ها را می‌توان از آزمایش خزش تک محوره بدست آورد. اگر در رابطه‌ی بالا σ ثابت در نظر گرفته شود نرخ خزش $\dot{\varepsilon}_c \approx d$ با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شود:

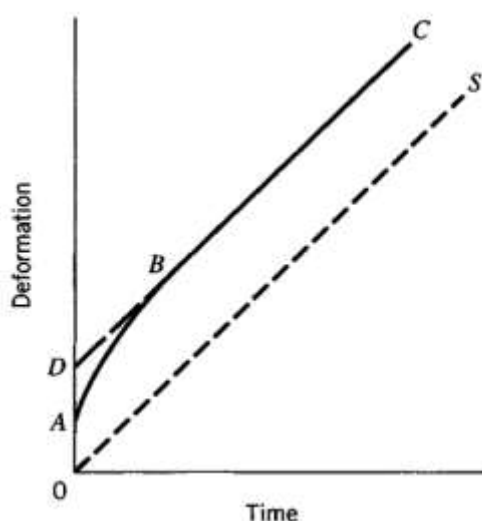
^۱ Bailey-Norton

$$\dot{\epsilon}_c = A\sigma^n m t^{m-1}$$

(۲-۱۰)

۵-۲ خزش حالت پایا

یک عضو از سازه‌ای را تحت تنش و دمای ثابت برای مدت طولانی قرار می‌دهیم. اگر تغییر شکل‌ها به اندازه‌ای کوچک باشند که مانع از خزش مرحله سوم شوند (خزش مرحله‌ی سوم رخ ندهد) نمودار زمان-تغییر شکل^۱ برای این عضو به صورت زیر است.



شکل ۲-۳: نمودار زمان-تغییر شکل همراه با خزش

قسمت OA مربوط به مرحله‌ی اول خزش است که ماده دچار تغییر شکل ناگهانی می‌شود. OA می‌تواند الاستیک، پلاستیک و یا ترکیبی از هر دو باشد. بعد از آن BC مربوط به خزش حالت پایا می‌باشد که بعد از گذشت زمان اتفاق می‌افتد. اگر مدت زمان خزش زیاد باشد و یا در صورت کوتاه بودن مرحله ابتدایی خزش، تغییر شکل خزش حالت پایا به صورت OS تقریب می‌شود. در این تقریب فرض شده است که دما و تنش برای هر المان حجم در عضو مورد نظر با زمان تغییر نمی‌کنند.

^۱ deformation-time

خزش در مرحله دوم خود حالت تقریباً پایداری پیدا می‌کند و نرخ کرنش خزشی با تغییر کمی دنبال می‌شود.

تنش در هر نقطه از جسم در حالت کلی با سه تنش اصلی σ_1 ، σ_2 و σ_3 در جهت‌های اصلی تنش مشخص می‌شود. به طور مشابه کرنش در هر نقطه با سه کرنش اصلی ε_1 ، ε_2 و ε_3 در جهت‌های کرنش اصلی مشخص می‌شود. برای ماده‌ای همگن و الاستیک خطی محورهای اصلی تنش و محورهای اصلی کرنش برهم منطبق هستند. با استفاده از محورهای اصلی روابط تنش-کرنش برای مواد همگن و الاستیک خطی به صورت زیر است:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (2-11)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \quad (2-12)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (2-13)$$

که σ_1 ، σ_2 و σ_3 تنش‌های اصلی هستند.

در تئوری الاستیک خطی تاریخچه‌ی بارگذاری نادیده گرفته می‌شود. اما در تغییرات غیر الاستیک مانند خزش زمان روی تغییر شکل‌ها تأثیرگذار است. کرنش حجمی کل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$e = \bar{I}_1 + 2\bar{I}_2 + 4\bar{I}_3 \quad (2-14)$$

در رابطه‌ی بالا \bar{I}_1 ، \bar{I}_2 و \bar{I}_3 نامتغیرهای^۱ تانسور کرنش هستند. با توجه به تئوری کرنش‌های بسیار کوچک می‌توان از \bar{I}_2 و \bar{I}_3 صرف نظر کرد و در نتیجه کرنش کل را می‌توان به صورت زیر نشان داد.

$$e \approx \bar{I}_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (2-15)$$

با توجه به ثابت بودن اولین نامتغیر تانسور کرنش می‌توان نوشت.

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = cte \quad (2-16)$$

¹ Invariants

در نتیجه با فرض اینکه کرنش‌های الاستیک و خزشی تنها کرنش‌های وارد شده می‌باشند می‌توان گفت که مجموع کرنش‌های اصلی کل برابر است با مجموع کرنش‌های اصلی الاستیک و مجموع کرنش‌های اصلی خزش.

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)_{\text{الاستیک}} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)_{\text{خزش}} \quad (2-17)$$

روابط نرخ کرنش-تنش برای مسائل خزش معمولاً غیر الاستیک هستند. با توجه به اینکه تغییر شکل غیر الاستیک شامل تغییر در حجم نمی‌شود (تغییر حجم یک تغییر الاستیک است). بنابراین در تئوری پلاستیسیته فرض می‌کنیم که تغییر حجم به وجود آمده به واسطه‌ی خزش صفر است.

$$\varepsilon_{1C} + \varepsilon_{2C} + \varepsilon_{3C} = 0 \quad \text{یا} \quad (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)_{\text{خزش}} = 0 \quad (2-18)$$

که ε_{1C} ، ε_{2C} و ε_{3C} کرنش‌های اصلی مربوط به خزش هستند. برای تغییر شکل‌های حالت پایای خزش که توزیع تنش با زمان تغییر نمی‌کند، محورهای اصلی تنش و کرنش روی هم منطبق می‌شوند و جهت‌های اصلی کرنش در طول خزش چرخش ندارند. اگر از رابطه بالا نسبت به زمان مشتق بگیریم به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\dot{\varepsilon}_{1C} + \dot{\varepsilon}_{2C} + \dot{\varepsilon}_{3C} = 0 \quad (2-19)$$

که $\dot{\varepsilon}_{1C}$ ، $\dot{\varepsilon}_{2C}$ و $\dot{\varepsilon}_{3C}$ نرخ کرنش خزشی در جهات اصلی می‌باشند.

معادلات سه بعدی مربوط به تغییرات کرنش نسبت به انحرافات تنش توسط لیوی^۱ به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$\frac{d\varepsilon_x}{S_x} = \frac{d\varepsilon_y}{S_y} = \frac{d\varepsilon_z}{S_z} = \frac{d\varepsilon_{xy}}{S_{xy}} = \frac{d\varepsilon_{yz}}{S_{yz}} = \frac{d\varepsilon_{zx}}{S_{zx}} = d\lambda \quad (2-20)$$

به صورت خلاصه می‌توان نوشت.

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ij}d\lambda \quad (2-21)$$

که S_{ij} تانسور تنش انحرافی است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

^۱ LEVI

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (3-22)$$

رابطه بالا در حالت خزشی به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{1C} - \dot{\varepsilon}_{2C}}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\dot{\varepsilon}_{2C} - \dot{\varepsilon}_{3C}}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\dot{\varepsilon}_{3C} - \dot{\varepsilon}_{1C}}{\sigma_3 - \sigma_1} = C(x, y, z, t) \quad (2-23)$$

که C تابعی از موقعیت جسم (x, y, z) و زمان t است. در مراحل مختلف خزش C متفاوت است. در مرحله اول و سوم خزش که نرخ کرنش خزشی با زمان تغییر می‌کند C نیز با زمان تغییر می‌کند. در مرحله دوم خزش یا خزش حالت پایدار C در زمان ثابت باقی می‌ماند (مستقل از زمان).

از معادله‌ی (۲-۱۳) استفاده می‌کنیم و با استفاده از معدلات (۲-۱۴)، روابط زیر برای $\dot{\varepsilon}_{1C}$ ، $\dot{\varepsilon}_{2C}$ و $\dot{\varepsilon}_{3C}$ به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{1C} = \frac{2}{3} C \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ \dot{\varepsilon}_{2C} = \frac{2}{3} C \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right] \\ \dot{\varepsilon}_{3C} = \frac{2}{3} C \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{cases} \quad (2-24)$$

برای تعیین C رفتار خزشی ماده باید مشخص باشد. برای اینکار از مفاهیمی مانند تئوری پلاستیسیته استفاده می‌کنیم. و تنش مؤثر، کرنش مؤثر و نرخ کرنش مؤثر را تعریف می‌کنیم. باید یادآور شویم که تسلیم بسیاری از فلزات توسط معیار فون مایزس^۱ پیش بینی می‌شود. برای معیار فون مایزس تنش مؤثر با استفاده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{0.5} \quad (2-25)$$

برای کرنش مؤثر و نرخ کرنش مؤثر نیز داریم:

$$\varepsilon_e = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{0.5} \quad (2-26)$$

و

^۱ von Mises

$$\dot{\varepsilon}_e = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2)^2 + (\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3)^2 + (\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1)^2]^{0.5} \quad (2-27)$$

اگر خزش در مرحله‌ی دوم خود باشد، تاثیر زمان و دما نادیده گرفته می‌شود و خزش به صورت تابعی از تنش در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از رابطه‌ی (۲-۲) و با توجه به شکل (۳-۲) رابطه‌ی نرخ کرنش خزشی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\dot{\varepsilon}_{eC} = C(\sigma_e)^n \quad (2-28)$$

تابع C می‌تواند روابط مختلفی داشته باشد. معمولاً از رابطه‌ی بیلی نورتن استفاده می‌شود که این رابطه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{\varepsilon}_e^{cr} = B(\sigma_e)^n \quad (2-29)$$

این رابطه علاوه بر دقت کافی، استفاده راحتی نیز دارد. در یک تست کشش ساده با تنش σ_1 و نرخ کرنش خزشی $\dot{\varepsilon}_{1C}$ و با استفاده از رابطه (۱۷-۲) داریم:

$$\dot{\varepsilon}_{2C} = \dot{\varepsilon}_{3C} = -\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{1C} \quad (2-30)$$

بنابراین با در نظر گرفتن روابط (۱۸-۲) تا (۲۰-۲) می‌توان نوشت:

$$\sigma_e = \sigma_1 \quad (2-31)$$

$$\dot{\varepsilon}_e^{cr} = \dot{\varepsilon}_{1C} \quad (2-32)$$

سپس با استفاده از روابط (۱۵-۲) تا (۱۹-۲) و همچنین به کارگیری روابط (۲۲-۲) و (۲۳-۲) می‌توان برای C رابطه‌ای مانند زیر پیدا کرد:

$$C = \frac{3 \dot{\varepsilon}_e^{cr}}{2 \sigma_e} \quad (2-33)$$

در نتیجه می‌توان روابط (۱۵-۲) را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{1C} = B(\sigma_e)^{n-1} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ \dot{\varepsilon}_{2C} = B(\sigma_e)^{n-1} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \\ \dot{\varepsilon}_{3C} = B(\sigma_e)^{n-1} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{cases} \quad (2-34)$$

با فرض $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ برای تنش مؤثر و نرخ کرنش خزشی مؤثر خواهیم داشت:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (2-35)$$

$$\dot{\varepsilon}_e^{cr} = \dot{\varepsilon}_{1C} - \dot{\varepsilon}_{3C} \quad (2-27)$$

بنابراین معادلات (2-25) را به این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{1C} = \frac{2 \dot{\varepsilon}_e^{cr}}{3 \sigma_e} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ \dot{\varepsilon}_{2C} = \frac{2 \dot{\varepsilon}_e^{cr}}{3 \sigma_e} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \\ \dot{\varepsilon}_{3C} = \frac{2 \dot{\varepsilon}_e^{cr}}{3 \sigma_e} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \end{cases} \quad (2-36)$$

۶-۲ تاریخچه‌ی خزش

ریمروت^۱ [۲۴] یک استوانه‌ی توخالی، دو سر بسته و جدار ضخیم ساخته شده از ماده‌ای همگن و همسانگرد^۲ تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار داد و در شرایط کرنش صفحه‌ای و تراکم‌ناپذیری روابطی برای تنش و کرنش‌های ناشی از خزش ارائه کرد.

بهتانگار و همکاران [۲۵] تنش‌ها و کرنش‌های خزشی در یک کره‌ی ساخته شده از ماده‌ی همگن و ارتوتروپ تحت فشار داخلی را با استفاده از روش تقریب‌های متوالی^۳ و با فرض ثابت ماندن حجم و اینکه کرنش کل، مجموع کرنش‌های الاستیک و خزش است، مطالعه کردند. آن‌ها همچنین تأثیر ناهمسانگردی بر تنش‌ها و کرنش‌ها را بررسی کردند.

¹ Rimrott

² Isotropic

³ Successive approximation

گوپتا و پلاک [۲۶] خزش دمایی را در پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم همگن در حالت تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر بودن ماده بررسی کردند. نتایجی که آن‌ها به دست آوردند نشان می‌داد که مقدار تنش محیطی وارد شده به سطح خارجی استوانه تراکم‌ناپذیر از مقدار تنش محیطی وارد شده به سطح خارجی استوانه‌ی تراکم‌پذیر بیشتر است و علاوه بر این دریافتند که در نظر گرفتن بار حرارتی باعث کاهش نرخ خزش در سطح خارجی پوسته نسبت به حالتی که بار حرارتی وجود نداشت و فقط تأثیرات فشار بررسی می‌شد.

یو و همکاران [۲۷] خزش حالت پایدار را در مخازن استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد ناهمگن FG تحت فشار داخلی مورد بررسی قرار دادند و با استفاده از قانون نورتن روابط سازگاری، تنش-کرنش و معادله‌ی تعادل را ارائه دادند. آن‌ها همچنین تأثیر تغییر در ضرایب قانون نورتن را روی تنش‌های خزشی بررسی کردند.

لقمان و همکاران [۲۸] خزش وابسته به زمان پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد FG را که تحت فشار داخلی و میدان گرمایی و مغناطیسی قرار داشتند و پارامترهای مربوط به جنس به صورت تابع توانی در راستای شعاع تغییر می‌کردند مورد بررسی قرار دادند.

آن‌ها همچنین [۲۹] تنش خزشی وابسته به زمان را در یک دیسک دوار ساخته شده از کامپوزیت Al-SiC تحت نیروی اینرسی و توزیع دما به علت رسانش بررسی کردند. با استفاده از معادله‌ی تعادل، روابط تنش-کرنش و کرنش-جابه‌جایی یک معادله دیفرانسیل شامل کرنش‌های خزشی به دست آوردند و سپس با حل این معادله تنش‌ها و کرنش‌های مربوط به خزش را محاسبه کردند. این بررسی در شرایطی انجام شد که همه خواص مکانیکی به غیر از ضریب پواسون وابسته به شعاع و درصد حجمی ذرات بودند. آن‌ها دریافتند که تنش‌ها، کرنش‌ها و نرخ کرنش خزشی مؤثر با گذشت زمان با نرخ کمتری تغییر می‌کنند بطوری که بعد از گذشت ۵۰ سال، شرایط به حالت پایا نزدیک می‌شود و تغییرات قابل ملاحظه‌ای اتفاق نمی‌افتد.

زمانی نژاد و همکاران [۳۰] یک حل دقیق برای رفتار خزشی استوانه‌ی جدار ضخیم چرخان تحت فشار داخلی-خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای ارائه نمودند که پاسخ خزشی ماده را با قانون نورتن توصیف کرده‌اند و تأثیر سرعت زاویه‌ای را بر توزیع تنش بررسی کردند.

لقمان و همکاران [۳۱] تنش خزشی وابسته به زمان را در یک کره‌ی جدار ضخیم ساخته شده از موّاد FG که تحت فشار داخلی و میدان دمایی و مغناطیسی قرار داشته را با استفاده از قانون نورتن بررسی کردند. آن‌ها دریافتند که بعد از گذشت ۵۰ سال شرایط به حالت پایا نزدیک می‌شود و تغییر محسوسی در تنش‌ها، کرنش‌ها و نرخ کرنش خزشی ایجاد نمی‌شود. خواص ماده طبق قانون خزش نورتن طبق یک رابطه‌ی توانی با شعاع تغییر داشتند.

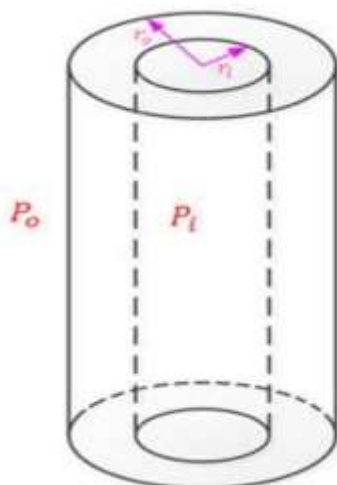
زمانی نژاد و همکاران [۳۲] در سال ۲۰۱۵ یک حلّ تحلیلی برای تنش‌های خزشی مخزن استوانه‌ای تحت فشار چرخان ساخته شده از موّاد ناهمگن FG ارائه دادند. در این حلّ، رفتار خزشی موّاد با استفاده از قانون نورتن تحت شرایط کرنش صفحه‌ای بررسی شد و با تعریف شعاعی پارامترهای وابسته به موّاد در قانون نورتن، نشان دادند که خواص موّاد FG تأثیر قابل توجهی بر نرخ کرنش خزشی معادل و توزیع تنش در راستای شعاعی دارد.

فصل سوم: استخراج معادلات خزش
حالت پایا در پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم، ممکن
تحت بار مکانیکی و گرا دیان شعاعی دما

۱-۳ مقدمه

در این فصل با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی^۱، و همچنین به کمک مدل خزشی نورتون، برای یک استوانه‌ی جدار ضخیم همگن که تحت فشار داخل و همچنین گرادیان شعاعی دما قرار دارد معادلات مربوط به جابه‌جایی شعاعی، تنش‌های الاستیک شعاعی، محیطی و محوری استخراج می‌شود. همچنین تنش مؤثر برای بررسی خزش استخراج می‌شود. خزش مرحله‌ی دوم (حالت پایا) در استوانه-ی جدار ضخیم همگن تحت فشار داخل، دمای داخل و دمای خارجی بررسی می‌شود. دمای خارجی برابر با دمای محیط در نظر گرفته می‌شود. در پایان مطالعه موردی با حل یک استوانه‌ی همگن در شرایط مشخص مکانیکی و حرارتی ارائه می‌گردد. قانون خزشی نورتون را می‌توان مناسب برای بررسی موضوع دانست چون علاوه بر دقت مناسب، برای بررسی آزمایشگاهی و تحلیلی قابل استفاده است.

استوانه‌ی مورد بررسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود. که می‌تواند علاوه بر فشار، حرارت و یا حتی چرخش داشته باشد. که با توجه به موضوع فقط فشار و حرارت بررسی می‌شوند.



شکل ۱-۳: هندسه و شرایط مرزی پوسته‌ی استوانه‌ای [۲].

¹ Plane Elasticity Theory (PET)

۲-۳ استخراج معادلات

در تئوری الاستیسته‌ی مستوی، ۱۵ معادله داریم. معادلات حاکم شامل ۳ معادله‌ی تعادل، ۶ معادله‌ی سینماتیک و ۶ معادله‌ی ساختاری که به شرح زیر می‌باشند [۲]:

معادلات تعادل^۱ در دستگاه خمیده خط متعامد^۲ (در غیاب نیروهای حجمی^۳ و لنگرهای حجمی^۴) به صورت زیر است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 \sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 \sigma_{21}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 \sigma_{31}) \\ + h_3 \sigma_{21} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + h_2 \sigma_{31} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - h_3 \sigma_{22} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} - h_2 \sigma_{33} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 \sigma_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 \sigma_{22}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 \sigma_{32}) \\ + h_3 \sigma_{12} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + h_1 \sigma_{32} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} - h_3 \sigma_{11} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} - h_1 \sigma_{33} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 \sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 \sigma_{23}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 \sigma_{33}) \\ + h_2 \sigma_{13} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} + h_1 \sigma_{23} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} - h_2 \sigma_{11} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - h_1 \sigma_{22} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} = 0 \end{array} \right. \quad (3-1)$$

و معادلات سینماتیک^۵ (برای جابه‌جایی‌های کوچک^۶):

¹ Equilibrium Equations

² Orthogonal Curvilinear Coordinates

³ Body Forces

⁴ Body Moments

⁵ Kinematic Equations

⁶ Small Displacements

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \right) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial q_2} + \frac{u_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right) \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{h_3} \left(\frac{\partial u_3}{\partial q_3} + \frac{u_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} + \frac{u_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} \right) \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} - \frac{u_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} - \frac{u_2}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right) \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial u_2}{\partial q_3} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_3}{\partial q_2} - \frac{u_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} - \frac{u_3}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} \right) \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial u_3}{\partial q_1} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_3} - \frac{u_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - \frac{u_3}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right) \end{array} \right. \quad (3-2)$$

مختصات متعامد q_i و ضرایب مقیاس h_i ($i=1,2,3$) به صورت زیر می‌باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = r \quad , \quad q_2 = \theta \quad , \quad q_3 = x \\ h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = r \quad , \quad h_3 = 1 \end{array} \right. \quad (3-3)$$

تانسور تنش متقارن را به صورت زیر داریم:

$$[\sigma_{ij}]_{r\theta z} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (3-3) در رابطه‌ی (3-1) معادلات تعادل در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت

زیر است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\theta}{r} = 0 \end{array} \right. \quad (3-5)$$

تانسور کرنش به صورت زیر داریم.

¹ Scale Factors

$$[\varepsilon_{ij}]_{r\theta x} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{\gamma_{r\theta}}{2} & \frac{\gamma_{rx}}{2} \\ \frac{\gamma_{r\theta}}{2} & \varepsilon_\theta & \frac{\gamma_{\theta x}}{2} \\ \frac{\gamma_{rx}}{2} & \frac{\gamma_{\theta x}}{2} & \varepsilon_x \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

و با جایگذاری رابطه (3-3) در رابطه (2-3) معادلات سازگاری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r \gamma_{r\theta}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{\theta x}}{\partial \theta} + \gamma_{rx} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial}{\partial x} \right) \varepsilon_x \\ \frac{\partial^2 \gamma_{rx}}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial r^2} \\ \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial x \partial \theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial x} (r^2 \gamma_{r\theta}) - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \gamma_{\theta x}) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \gamma_{rx} \right) \\ 2r \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} (r \varepsilon_\theta) - 2r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} (r \gamma_{r\theta}) + 2r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r \gamma_{\theta x}) - \frac{\partial^2 \gamma_{rx}}{\partial \theta^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \varepsilon_x \right) = - \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial z^2} + r \frac{\partial^2}{\partial r \partial x} \left(\frac{1}{r} \gamma_{\theta z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{rx}}{\partial \theta \partial x} \end{cases} \quad (3-7)$$

معادلات سینماتیک (کرنش-جابجایی):

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ \gamma_{\theta x} = \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \\ \gamma_{rx} = \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \end{cases} \quad (3-8)$$

معادلات رفتاری (تنش-کرنش):

$$\begin{cases} \sigma_i = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k)] \\ \tau_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{ij} \quad i \neq j \neq k \end{cases} \quad (3-9)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_i = \frac{1}{E} [\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)] \\ \gamma_{ij} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{ij} \quad i \neq j \neq k \end{cases} \quad (3-10)$$

پوسته‌ای که نسبت به محور مرکزی از نظر هندسی، مادی، بارگذاری و شرایط مرزی دارای تقارن باشد، پوسته‌ی متقارن محوری نامیده می‌شود. شرایط تقارن محوری به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \text{axisymmetric: } \frac{\partial ()}{\partial \theta} = 0, \quad u_\theta = 0 \\ \Rightarrow \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta x} = 0 \Rightarrow \tau_{r\theta} = \tau_{\theta x} = 0 \end{cases} \quad (3-11)$$

در شرایط تقارن محوری روابط الاستیسیته‌ی حاکم بر استوانه به شکل زیر قابل بررسی می‌باشند:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & \tau_{rx} \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ \tau_{rx} & 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{rx}}{r} = 0 \end{cases} \quad (3-12)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & \frac{\gamma_{rx}}{2} \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ \frac{\gamma_{rx}}{2} & 0 & \varepsilon_x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \gamma_{rx}}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{rx}}{\partial r \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial r^2} \\ \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3-13)$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ 0 \\ u_x \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \gamma_{rx} = \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \end{cases} \quad (3-14)$$

معادلات تعادل تنش، نامعین ایستایی هستند (۲ معادله و ۴ مجعول)، لذا به تنهایی برای تحلیل تنش کافی نیستند. در این شرایط به فرضیاتی نیاز داریم که با استفاده از آنها میان تعداد مجهولات و معلومات تعادل برقرار کنیم.

۳-۲-۱ نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی

در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور مرکزی استوانه باقی می‌مانند. تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور استوانه، متقارن می‌باشند و مقدارشان در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند. تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می‌کند، به عبارت دیگر، تغییر مکان شعاعی فقط تابع شعاع است [۶]. وجود تقارن محوری در مسأله شرایطی را به وجود می‌آورد که برای ساده‌سازی معادلات حاکم بسیار مفید است، مانند:

- ❖ هندسه‌ی شکل نسبت به محور مرکزی استوانه متقارن باشد.
- ❖ جنس ماده‌ی استفاده شده برای استوانه نسبت به محور مرکزی استوانه متقارن باشد.
- ❖ بارگذاری باید نسبت به محور مرکزی استوانه متقارن باشد.
- ❖ شرایط مرزی مسأله نسبت به محور مرکزی استوانه متقارن باشد.

پس در استوانه با توجه به تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، کرنش برشی γ_{rx} و تنش برشی τ_{rx} در نظر گرفته نمی‌شود. یعنی محورهای استوانه محورهای اصلی و تنش‌های عمودی تنش‌های اصلی هستند. با قرار دادن $\tau_{rx} = 0$ در معادلات (۳-۱۲) و ساده‌سازی، معادلات تعادل به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3-15)$$

با قرار دادن $\gamma_{rx} = 0$ در معادلات (۳-۱۳) و ساده‌سازی، معادلات سازگاری به شکل زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} \right) + \frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0 \\ \frac{d\varepsilon_x}{dx} = 0 \end{cases} \quad (3-16)$$

معادلات سینماتیک به صورت زیر حاصل می‌شود.

با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۵) و (۳-۱۶) می‌توان نتیجه گرفت که تنش طولی و کرنش طولی دارای مقادیر ثابتی هستند.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \sigma_x = const. \\ \frac{d\varepsilon_x}{dx} = 0 \Rightarrow \varepsilon_x = const. \end{cases} \quad (3-17)$$

که ثابت بودن در رابطه‌ی (۳-۱۸) می‌تواند در برخی شرایط به عنوان صفر در نظر گرفته شود.

۳-۳ شرایط انتهایی استوانه

استوانه به صورت کلی یکی از شرایط زیر را به عنوان شرایط انتهایی دارد:

- تنش صفحه‌ای^۱ (استوانه با دوسر باز-نامقید)

$$\varepsilon_x \neq 0, \quad \sigma_x = 0$$

$$\sigma_x = 0 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)] \quad (3-18)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = -\frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_r + \sigma_\theta)$$

با جایگذاری رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (۳-۲۰) تنش‌های طولی و محیطی نتیجه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (3-19)$$

- کرنش صفحه‌ای^۱ (استوانه با دوسر بسته-مقید)

^۱ Plane Stress

$$\varepsilon_x = 0 = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \quad (3-20)$$

$$\sigma_x = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)$$

• استوانه‌ی بسته^۲ (استوانه با دو سر بسته نامقید)

$$\varepsilon_x = 0 \quad , \quad \sigma_x = 0 \quad (3-21)$$

شرایط تعادل در یک مقطع طولی در مرز مشترک استوانه با سرپوش‌های دایروی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{r_i}^{r_o} \sigma_x (2\pi r dr) = P(\pi r^2) \quad (3-22)$$

$$\sigma_x (\pi r_o^2 - \pi r_i^2) = P(\pi r_i^2) \Rightarrow \sigma_x = \frac{P r_i^2}{(r_o^2 - r_i^2)}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{P}{k^2 - 1} \\ \varepsilon_x = \frac{(1 - 2\nu)P}{(k^2 - 1)E} \\ k = \frac{r_o}{r_i} \end{cases} \quad (3-23)$$

با جایگذاری رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (۳-۹) تنش‌های طولی و محیطی نتیجه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 2 - \nu & 3\nu \\ 3\nu & 2 - \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (3-24)$$

و رابطه‌ی تنش طولی-کرنش طولی به صورت زیر است:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 - 2\nu)} \varepsilon_x \quad (3-25)$$

¹ Plane Strain

² Closed Cylinder(unrestrained)

می‌توان روابط تنش-کرنش را در حالت کلی و خارج از بحث شرایط انتهایی برای استوانه‌های متقارن

محوری در الاستیسیته‌ی مستوی به صورت زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (3-26)$$

$$\sigma_x = \beta(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (3-27)$$

که A و B توابعی از نسبت پواسون هستند. و بر اساس شرایط انتهایی استوانه تعریف می‌شوند.

• تنش صفحه‌ای

$$\begin{cases} A = \frac{1}{1-\nu^2} \\ B = \frac{\nu}{1-\nu^2} \\ \beta = 0 \end{cases} \quad (3-28)$$

• کرنش صفحه‌ای

$$\begin{cases} A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \beta = \nu \end{cases} \quad (3-29)$$

• استوانه‌ی دوسر بسته‌ی نامقید

$$\begin{cases} A = \frac{2-\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \\ B = \frac{3\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \beta = 0.5 \end{cases} \quad (3-30)$$

۳-۴ تنش مؤثر

برای تحلیل شرایط خزش، تنش مؤثر استفاده می‌شود. برای محاسبه‌ی تنش مؤثر از معیار تسلیم فون-میزس^۱ استفاده می‌شود. بر اساس این معیار تازمانی که تنش معادل که با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود از تنش تسلیم ماده بیشتر نباشد، تسلیم رخ نمی‌دهد.

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]} \quad (3-31)$$

برای محاسبه‌ی کرنش از مؤثر رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$\varepsilon_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)_c^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)_c^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_c^2]} \quad (3-32)$$

۳-۵ انتقال حرارت در استوانه‌ی جدار ضخیم

برای بررسی تأثیرات حرارتی از قانون فوریه^۲ استفاده می‌کنیم.

$$\nabla^2(k_t T) + \dot{q} = \rho c_p \dot{T} \quad (3-33)$$

در رابطه‌ی بالا هدایت حرارتی (k)، گرمای ویژه (c)، چگالی (ρ) مربوط به جنس ماده، تولید حرارت (\dot{q}) و توزیع دما (T) به شرایط استفاده بستگی دارد.

رابطه‌ی فوریه برای استوانه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k(r) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(r) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3-34)$$

با فرض شرایط حاکم بر استوانه مانند تقارن محوری $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ ، در حالت یک بعدی $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ ، فاقد

منبع حرارتی، حالت پایا و همچنین برای ماده‌ی همگن و همسانگرد $k(r) = k$ در رابطه بالا به صورت

زیر ساده می‌شود:

¹ Von Mises

² Fourier

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (3-35)$$

رابطه‌ی بالا در شکل بی‌بعد شده به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(KR \frac{\partial T}{\partial R} \right) = 0 \quad (3-36)$$

که $R = \frac{r}{r_i}$ در نظر گرفته می‌شود. با حل معادله‌ی بالا به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$T(R) = D_1 \ln(R) + D_2 \quad (3-37)$$

شرایط مرزی حاکم بر مسأله به صورت زیر است.

$$\begin{cases} T(r_i) = T(R = 1) = T_i \\ T(r_o) = T(R = k) = T_o \end{cases} \quad (3-38)$$

با جایگذاری شرایط مرزی در معادله‌ی (3-37) داریم:

$$\begin{cases} D_2 = T_i \\ D_1 = \frac{(T_o - T_i)}{\ln k} \end{cases} \quad (3-39)$$

در نتیجه

$$T(R) = T_i + \frac{(T_o - T_i)}{\ln k} \ln(R) \quad (3-40)$$

تغییرات دما در دیواره استوانه در راستای شعاع به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\theta(R) = T(R) - T^* = \frac{\Delta(\theta)}{\ln k} \ln\left(\frac{R}{k}\right) + \theta_0 \quad (3-41)$$

که

$$\Delta(\theta) = \theta_0 - \theta_i \quad (3-42)$$

$$\theta_0 = T_o - T^* \quad (3-43)$$

$$\theta_i = T_i - T^* \quad (3-44)$$

در روابط بالا T_i دمای سطح داخلی استوانه، T_o دمای سطح خارجی استوانه، $\Delta(\theta)$ اختلاف دمای

سطح داخلی و خارجی استوانه، θ_i اختلاف دمای سطح داخلی استوانه با محیط می‌باشد.

۳-۶ استخراج معادلات

در این قسمت معادلات مربوط به استوانه‌ی همگن تحت گرادیان شعاعی دما را استخراج می‌کنیم. معادلات تعادل را به شکل زیر داریم.

$$\operatorname{div} \tilde{\sigma} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{d\sigma_x}{dx} = 0 \end{cases} \quad (3-45)$$

کرنش را به صورت مجموع کرنش الاستیک $\tilde{\varepsilon}^e$ و کرنش حرارتی $\tilde{\varepsilon}^T$ در نظر می‌گیریم و معادلات سینماتیک را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^T \quad (3-46)$$

که برای کرنش الاستیک داریم.

$$\tilde{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \vec{u}) + (\vec{\nabla} \vec{u})^T] \quad (3-47)$$

و برای کرنش حرارتی داریم.

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}^T = \alpha \Delta T \tilde{I} \\ \Delta T = T - T^* \end{cases} \quad (3-48)$$

در رابطه‌ی بالا T^* دمای منبع می‌باشد. برای معادلات سازگاری داریم:

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}] \quad (3-49)$$

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (3-50)$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] + \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (3-51)$$

$$\begin{cases} \sigma_i = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k)] - \frac{E}{(1 - 2\nu)} \alpha \Delta T \delta_{ij} \\ \tau_{ij} = 0 \end{cases} \quad (3-52)$$

معادلات رفتاری را برای استوانه در حالت کلی و بدون توجه به شرایط انتهایی استوانه به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{pmatrix} = E \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{pmatrix} - E \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} \alpha \Delta T \quad (3-53)$$

برای حالت تنش صفحه‌ای داریم $\varepsilon_x \neq 0$ و $\sigma_x = 0$ که A ، B و C به صورت زیر است.

$$\begin{cases} A = \frac{1}{1-\nu^2} \\ B = \frac{\nu}{1-\nu^2} \\ C = \frac{1}{1-2\nu} \end{cases} \quad (3-54)$$

در نتیجه برای کرنش محوری:

$$\varepsilon_x = \frac{-\nu}{1+\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta T \quad (3-55)$$

برای حالت کرنش صفحه‌ای $\sigma_x \neq 0$ و $\varepsilon_x = 0$ که A ، B و C به صورت زیر است.

$$\begin{cases} A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C = \frac{1}{1-2\nu} \end{cases} \quad (3-56)$$

و برای تنش محوری داریم:

$$\sigma_x = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E\alpha\Delta T = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T \quad (3-57)$$

رابطه‌ی (۳-۴۸) را در معادله‌ی تعادل (۳-۴۶) می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dr} [E(A\varepsilon_r + B\varepsilon_\theta) - EC\alpha\theta] + \frac{1}{r} [E(A-B)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)] = 0 \quad (3-58)$$

کرنش‌های شعاعی و محیطی را از رابطه‌ی (۳-۱۷) با استفاده از روابط سینماتیک (۳-۱۵) و جایگذاری

در رابطه‌ی بالا داریم:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = \frac{C\alpha}{A} \frac{d\theta}{dr} \quad (3-59)$$

که به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\left[\frac{1}{r} (ru_r)_{,r} \right]_{,r} = \frac{C\alpha}{A} \frac{d\theta}{dr} \quad (3-60)$$

در نتیجه u_r به صورت زیر بدست می‌آید.

$$u_r(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{C\alpha}{A} \int_{r_i}^r \theta(r) r dr \quad (3-61)$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = u_{r,r} = c_1 - \frac{c_2}{r^2} + \frac{C\alpha}{A} \left(\theta - \frac{I}{r^2} \right) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} u_r = c_1 + \frac{c_2}{r^2} + \frac{C\alpha}{A} \frac{I}{r^2} \end{cases} \quad (3-62)$$

که

$$\begin{cases} I = \int_{r_i}^r \theta(r) r dr \\ I_i = I(r = r_i) = 0, I_o = I(r = r_o) \end{cases} \quad (3-63)$$

با جایگذاری روابط سینماتیک (۳-۵۷) روابط معادله‌ی تعادل (۳-۴۶) تنش در حالت کلی به صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_r = E \left[(A+B)c_1 - (A-B) \frac{c_2}{r^2} \right] - E(A-B) \frac{C\alpha}{A} \frac{I}{r^2} \quad (3-64)$$

$$\sigma_\theta = E \left[(A+B)c_1 + (A-B) \frac{c_2}{r^2} \right] - E(A-B) \frac{C\alpha}{A} \left(\theta - \frac{I}{r^2} \right) \quad (3-65)$$

شرایط مرزی را به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=r_i} = -P_i \\ \sigma_r|_{r=r_o} = 0 \end{cases} \quad (3-66)$$

ثابت‌های c_1 و c_2 به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} c_1 = \frac{P_i r_i^2}{E(A+B)(r_o^2 - r_i^2)} - \frac{B-A}{(A+B)(r_o^2 - r_i^2)} \frac{C\alpha}{A} I_o \\ c_2 = \frac{P_i r_i^2 r_o^2}{E(A-B)(r_o^2 - r_i^2)} + \frac{r_i^2}{(r_o^2 - r_i^2)} \frac{C\alpha}{A} I_o \end{cases} \quad (3-67)$$

با جایگذاری $R = \frac{r}{r_i}$ و $K = \frac{r_o}{r_i}$ رابطه‌ی (۳-۶۲) را در شکل بی بعد به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$u_R = C_3 R + \frac{C_4}{R} + \frac{C \alpha}{A R} \int_1^R \theta R dR \quad (3-68)$$

در نتیجه رابطه‌ی (۳-۶۳) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \varepsilon_R = C_3 - \frac{C_4}{R^2} + \frac{C \alpha}{A} \left(\theta - \frac{1}{R^2} \int_1^R \theta R dR \right) \\ \varepsilon_\theta = C_3 + \frac{C_4}{R^2} + \frac{C \alpha}{A R^2} \int_1^R \theta R dR \end{cases} \quad (3-69)$$

با جایگذاری روابط سینماتیک (۳-۱۷) در روابط رفتاری (۳-۴۸) تنش در حالت کلی به صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R = E \left[(A+B)C_3 - (A-B) \frac{C_4}{R^2} \right] - E(A-B) \frac{C \alpha}{A R^2} \int_1^R \theta R dR \quad (3-70)$$

$$\sigma_\theta = E \left[(A+B)C_3 + (A-B) \frac{C_4}{R^2} \right] - E(A-B) \left(\frac{C \alpha}{A} \right) \left(\frac{1}{R^2} \int_1^R \theta R dR - \theta \right) \quad (3-71)$$

شرایط مرزی نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} \sigma_R|_{R=1} = -P_i \\ \sigma_R|_{R=k} = 0 \end{cases} \quad (3-72)$$

با جایگذاری شرایط مرزی در معادله‌ی (۳-۷۱) ضرایب C_3 و C_4 بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_3 = \frac{P_i}{E(A+B)(k^2-1)} + \frac{A-B}{(A+B)(k^2-1)} \frac{C \alpha}{A} \int_1^k \theta R dR \\ C_4 = \frac{k^2 P_i}{E(A-B)(k^2-1)} + \frac{1}{(k^2-1)} \frac{C \alpha}{A} \int_1^k \theta R dR \end{cases} \quad (3-73)$$

در نتیجه روابط تنش شعاعی و محوری و همچنین جابه‌جایی شعاعی را به صورت زیر داریم:

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^2-1} \left(1 - \frac{K^2}{R^2} \right) + \frac{E(A-B) C \alpha \Delta \theta}{2 \ln(k) A} \left[\frac{\ln(k)}{k^2-1} \left(1 - \frac{K^2}{R^2} \right) + \ln \left(\frac{k}{R} \right) \right] \quad (3-74)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^2-1} \left(1 + \frac{K^2}{R^2} \right) \quad (3-75)$$

$$+ \frac{E(A-B) C \alpha \Delta \theta}{2 \ln(k) A} \left[\frac{\ln(k)}{k^2-1} \left(1 + \frac{K^2}{R^2} \right) + \ln \left(\frac{k}{R} \right) - 1 \right]$$

که برای حالت تنش صفحه‌ای با جایگذاری A و B و C از رابطه‌ی (۳-۵۵) به صورت زیر داریم.

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^2 - 1} \left(1 - \frac{K^2}{R^2} \right) + \frac{E\alpha\Delta\theta}{2\ln(k)} \left[\frac{\ln(k)}{k^2 - 1} \left(1 - \frac{K^2}{R^2} \right) + \ln\left(\frac{k}{R}\right) \right] \quad (3-76)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^2 - 1} \left(1 + \frac{K^2}{R^2} \right) + \frac{E\alpha\Delta\theta}{\ln(k)} \left[\frac{\ln(k)}{k^2 - 1} \left(1 + \frac{K^2}{R^2} \right) + \ln\left(\frac{k}{R}\right) - 1 \right] \quad (3-77)$$

و برای حل کرنش صفحه‌ای خواهیم داشت:

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^2 - 1} \left(1 - \frac{K^2}{R^2} \right) + \frac{E\alpha\Delta\theta}{2(1-\nu)\ln(k)} \left[\frac{\ln(k)}{k^2 - 1} \left(1 - \frac{K^2}{R^2} \right) + \ln\left(\frac{k}{R}\right) \right] \quad (3-78)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^2 - 1} \left(1 + \frac{K^2}{R^2} \right) + \frac{E\alpha\Delta\theta}{2(1-\nu)\ln(k)} \left[\frac{\ln(k)}{k^2 - 1} \left(1 + \frac{K^2}{R^2} \right) + \ln\left(\frac{k}{R}\right) - 1 \right] \quad (3-79)$$

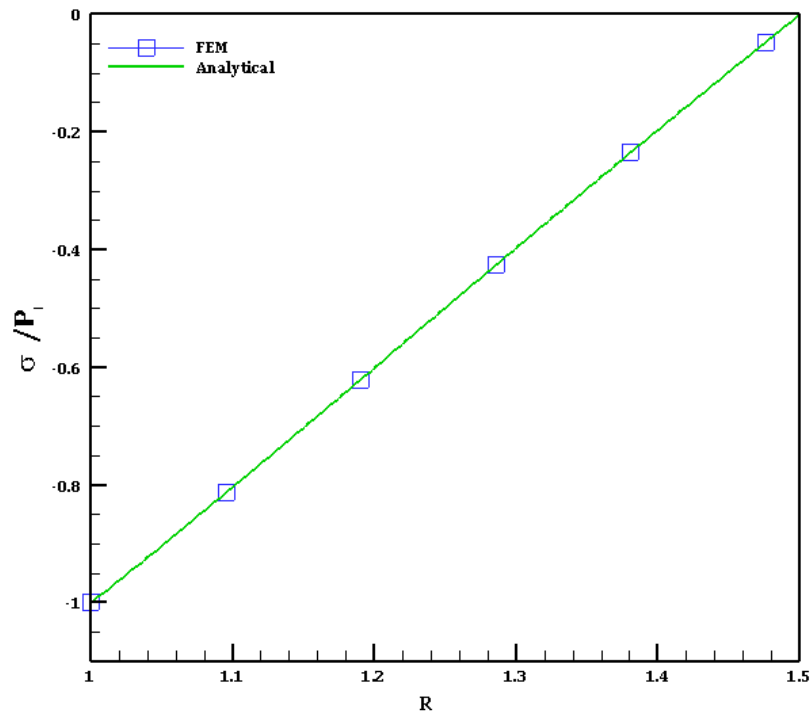
$$\sigma_x = \frac{2\nu P_i}{(k^2 - 1)r_i} + \frac{E\alpha\Delta\theta}{2(1-\nu)\ln(k)} \frac{C\alpha}{A} \left[\left(\frac{2\ln(k)}{k^2 - 1} + \frac{2}{\nu} \ln\left(\frac{k}{R}\right) - 1 \right) + E\alpha\theta_o \right] \quad (3-80)$$

۷-۳ مطالعه‌ی موردی

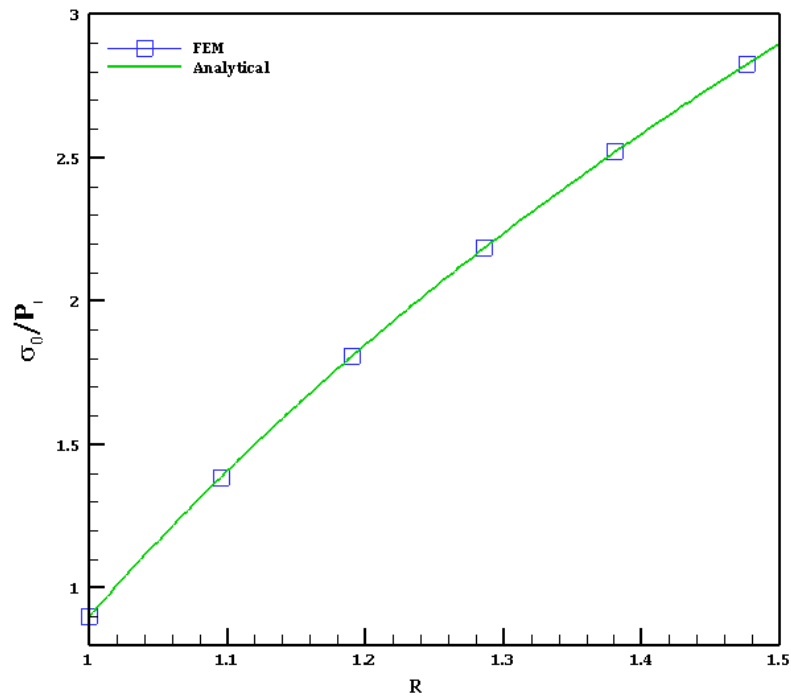
در این بخش با استفاده از یک مثال عددی به بررسی استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما می‌پردازیم.

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج المان محدود، یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم همگن و همسانگرد با جدار ثابت تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی با مشخصات شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ و شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ و تحت فشار یکنواخت داخلی $P = 80 \text{ MPa}$ را در نظر می‌گیریم. مدول الاستیسیته، چگالی، هدایت گرمایی و ضریب انبساط حرارتی به ترتیب برابر با $E = 200 \text{ GPa}$ ، $\rho = 7860 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ ، $K = 5/60 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ ، $\nu = 0/3$ ، $\alpha = 12 \times 10^{-6}$ می‌باشد. دما در جدار داخلی 125°C و در جدار خارجی 25°C می‌باشد. دما در راستای شعاع استوانه تغییر می‌کند و در هر شعاع مقدار ثابتی دارد. همچنین دمای مرجع 25°C می‌باشد.

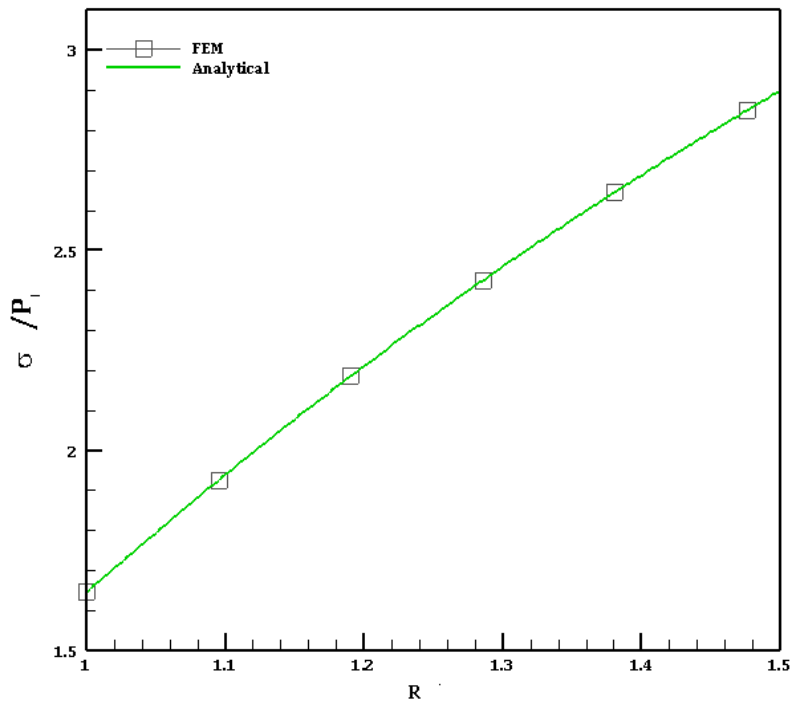
۳-۷-۱ حالت تنش صفحه‌ای



شکل ۳-۲: توزیع تنش شعاعی بی‌بعد در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما

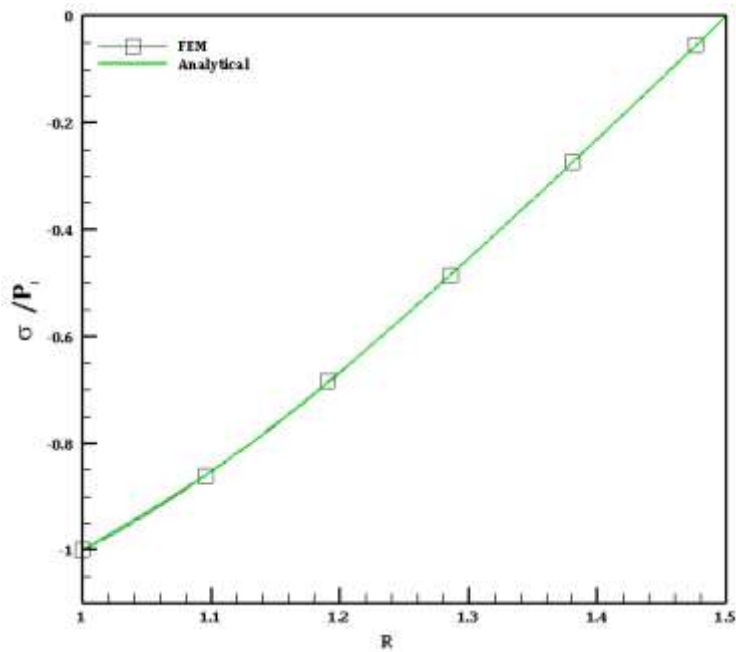


شکل ۳-۳: توزیع تنش محیطی بی‌بعد در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما

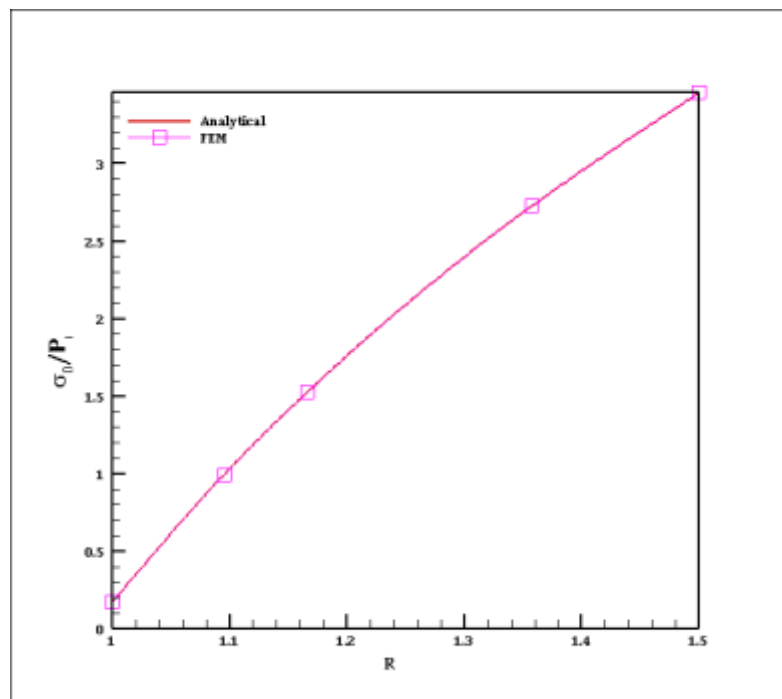


شکل ۳-۴: توزیع تنش موثر بی‌بعد در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما

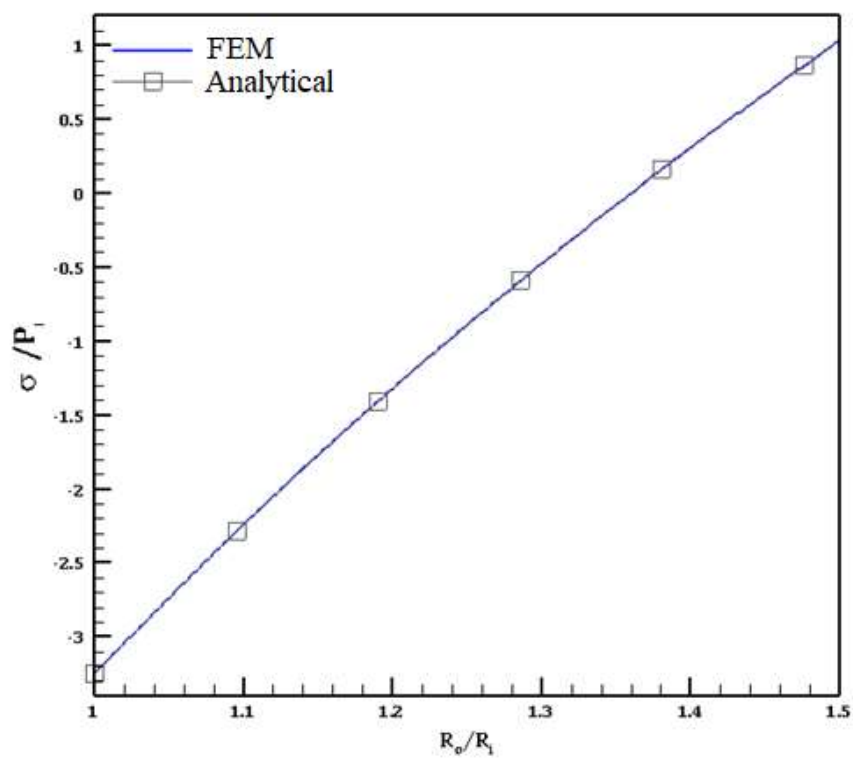
۳-۷-۲ کرنش صفحه‌ای



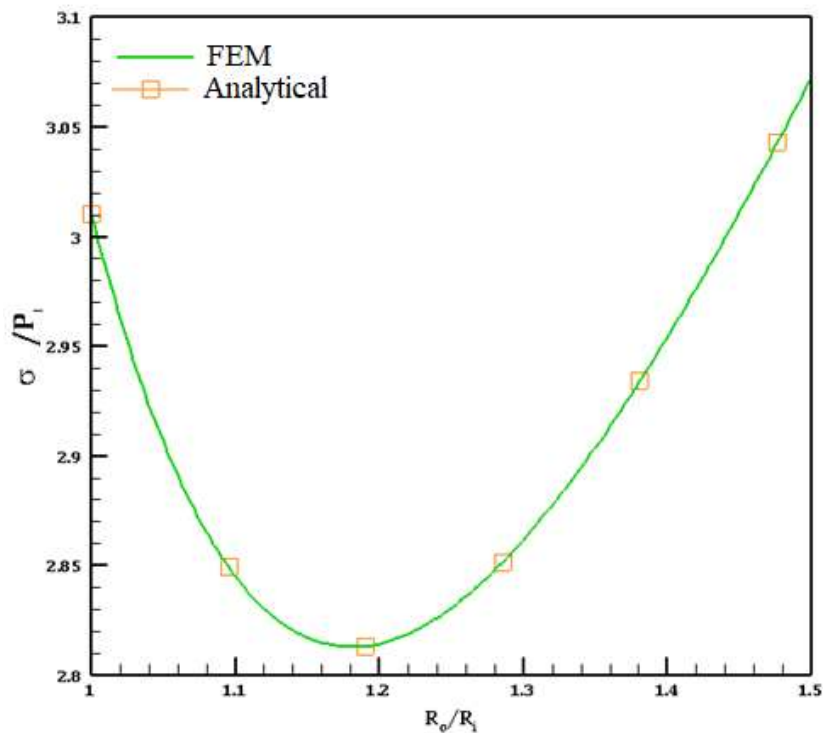
شکل ۳-۵: توزیع تنش شعاعی بی‌بعد در حالت کرنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما



شکل ۳-۶: توزیع تنش محیطی بی‌بعد در حالت کرنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما



شکل ۳-۷: توزیع تنش محوری بی‌بعد در حالت کرنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما



شکل ۳-۸: توزیع تنش موثر بی‌بعد در حالت کرنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما

۳-۸ تحلیل خزش در استوانه‌ی جدار ضخیم همگن تحت فشار یکنواخت داخل و

خارج و گرادیان شعاعی دما

۳-۸-۱ مقدمه

در قسمت قبل در حالت الاستیک برای استوانه‌ی همگن و همسانگرد تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما بررسی شد. تنش‌های وارد بر استوانه در جهات مختلف بررسی شد. این تنش‌ها، تنش‌های اولیه هستند که با زمان تغییر می‌کنند و بعد از گذشت زمان به مقدار ثابتی می‌رسند و بدون تغییر اعمال می‌شوند. خزش در حالت پایا تاثیر تنش ثابت شده در قطعه با گذشت زمان است. با توجه به ثابت بودن تنش در بررسی خزش حالت پایا در این قسمت فقط از تنش موثر استفاده می‌شود.

۲-۸-۳ معادلات خزشی

همانگونه که اشاره شد خزش حالت پایا در حالت تنش ثابت بررسی می‌شود. نرخ کرنش خزشی در حالت پایا ثابت در نظر گرفته می‌شود. برای بررسی درستی فرض ثابت بودن تنش ابتدا معادلات خزش برای استوانه‌ی تحت فشار بررسی می‌شود و سپس خزش برای استوانه‌ی تحت فشار و گرادیان شعاعی دما بررسی می‌شود.

معادلات پراندتل-روس برای تحلیل پلاستیسیته به شکل زیر است.

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_e^p}{\sigma_e} S_{ij} \quad (3-81)$$

برای بدست آوردن روابط خزش از رابطه‌ی پراندتل روس استفاده می‌کنیم.

$$d\varepsilon_{ij}^{cr} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{ij}^{cr}}{\sigma_e} S_{ij} \quad (3-82)$$

که S_{ij} تانسور تنش انحرافی می‌باشد و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (3-83)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳-۸۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_r \\ \dot{\varepsilon}_\theta \\ \dot{\varepsilon}_z \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_e}{\sigma_e} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Or (3-84)

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = \frac{\dot{\varepsilon}_e}{2\sigma_e} (2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_z)) \\ \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{\varepsilon}_e}{2\sigma_e} (2\sigma_\theta - (\sigma_r + \sigma_z)) \\ \dot{\varepsilon}_z = \frac{\dot{\varepsilon}_e}{2\sigma_e} (2\sigma_z - (\sigma_\theta + \sigma_r)) \end{cases}$$

که $\dot{\varepsilon}_r$ ، $\dot{\varepsilon}_\theta$ و $\dot{\varepsilon}_z$ به ترتیب کرنش خزشی در راستای شعاع، محیط و محور استوانه هستند. نرخ کرنش خزشی معادل و σ_e تنش موثر است.

برای حالت کرنش صفحه‌ای در رابطه‌ی بالا $\dot{\varepsilon}_z = 0$ خواهیم داشت:

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (3-85)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (3-84) در روابط (3-83) نرخ کرنش شعاعی و محیطی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{3}{4} \frac{\dot{\varepsilon}_e}{\sigma_e} [\sigma_r - \sigma_\theta] \quad (3-86)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{3}{4} \frac{\dot{\varepsilon}_e}{\sigma_e} [\sigma_r - \sigma_\theta] \quad (3-87)$$

قانون نورتن¹ برای محاسبه کرنش خزشی به صورت زیر است:

$$\varepsilon_e^{cr} = B \sigma^n t^m \quad (3-88)$$

که m و n پارامترهای مربوط به ماده هستند. نرخ کرنش خزشی با مشتق گرفتن نسبت به زمان از رابطه‌ی (3-87) به صورت زیر است:

$$\dot{\varepsilon}_e^{cr} = B \sigma^n m t^{m-1} \quad (3-89)$$

برای خزش حالت پایا با جایگذاری $m=1$ نرخ کرنش خزشی به دست می‌آید.

$$\dot{\varepsilon}_e^{cr} = B \sigma_e^n \quad (3-90)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (3-84) در رابطه‌ی تنش معادل فومن مایرز داریم:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (3-91)$$

رابطه‌ی بین نرخ کرنش‌های شعاعی و محیطی با نرخ جابه‌جایی در حالت تقارن محوری با استفاده از روابط سینماتیک (3-17) به فرم زیر است.

¹ Norton

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = \frac{d\dot{u}_r}{dr} \\ \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{u}_r}{r} \end{cases} \quad (3-92)$$

برای ماده‌ی تراکم ناپذیر رابطه‌ی زیر برای نرخ کرنش‌های خزشی حاکم است.

$$\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\theta + \dot{\varepsilon}_z = 0 \quad (3-93)$$

برای حالت کرنش صفحه‌ای با جایگذاری روابط (۳-۹۱) در رابطه‌ی (۳-۹۲) و همچنین حذف \dot{u}_r به رابطه‌ی زیر می‌رسیم.

$$r \frac{d\dot{\varepsilon}_\theta}{dr} + \dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_r = 0 \quad (3-94)$$

با جایگذاری روابط (۳-۸۵) و (۳-۸۶) در رابطه‌ی (۳-۹۳) و انجام عملیات ریاضی لازم، تنش معادل به صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$\sigma_e = \left(\frac{c_1}{r^2}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (3-95)$$

با برابر قرار دادن رابطه‌ی (۳-۹۴) و رابطه‌ی (۳-۹۰) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم.

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{c_1}{r^2}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (3-96)$$

در غیاب نیروهای حجمی و باتوجه به حالت تقارن محوری حاکم بر مساله، معادله‌ی تعادل برای پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم همگن به صورت زیر است:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (3-97)$$

رابطه‌ی (۲-۶۴) را در معادله‌ی تعادل جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \left(-\frac{2}{r\sqrt{3}} \left(\frac{c_1}{r^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = 0 \quad (3-98)$$

در نتیجه تنش شعاعی طبق رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود.

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} c_1^{\frac{1}{n}} \int_{r_i}^r r^{-\left(\frac{2+n}{n}\right)} dr + c_2 \quad (3-99)$$

شرایط مرزی حاکم بر مساله به صورت زیر آورده شده است.

$$\begin{cases} r = r_i \rightarrow \sigma_r = -p_i \\ r = r_o \rightarrow \sigma_r = 0 \end{cases} \quad (3-100)$$

با جایگذاری (۳-۹۹) در رابطه‌ی (۳-۹۸)، شرایط در مرز داخلی استوانه، ضرایب C_1 و C_2 بدست می‌آید.

$$\begin{cases} C_1 = \left[\frac{\sqrt{3}(p_i)}{-n \left\{ r_o^{-\frac{2}{n}} - r_i^{-\frac{2}{n}} \right\}} \right]^n \\ C_2 = -p_i \end{cases} \quad (3-101)$$

در نتیجه تنش شعاعی σ_r و محیطی σ_θ با روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$\sigma_r = \frac{p_i}{\left\{ r_o^{-\frac{2}{n}} - r_i^{-\frac{2}{n}} \right\}} \left\{ r^{-\frac{2}{n}} - r_i^{-\frac{2}{n}} \right\} - p_i$$

Or

$$\begin{cases} \sigma_R = \frac{p_i}{k^{-\frac{2}{n}} - 1} R^{-\frac{2}{n}} + \frac{p_i k^{-\frac{2}{n}}}{k^{-\frac{2}{n}} - 1} \\ K = \frac{r_o}{r_i}, \quad R = \frac{r}{r_i} \end{cases} \quad (3-102)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_i - p_o}{k^{-\frac{2}{n}} - 1} \left(\frac{n-2}{n} \right) R^{-\frac{2}{n}} + \frac{p_i k^{-\frac{2}{n}} - p_o}{k^{-\frac{2}{n}} - 1} \quad (3-103)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳-۸۴) برای تنش محوری داریم:

$$\sigma_x = \frac{p_i - p_o}{k^{-\frac{2}{n}} - 1} \left(\frac{n-1}{n} \right) R^{-\frac{2}{n}} + \frac{p_i k^{-\frac{2}{n}} - p_o}{k^{-\frac{2}{n}} - 1} \quad (3-104)$$

همچنین تنش موثر و نرخ کرنش خزشی به صورت زیر نتیجه می‌شوند.

$$\sigma_e = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{p_i - p_o}{k^{-\frac{2}{n}} - 1} R^{-\frac{2}{n}} \quad (3-105)$$

$$\dot{\varepsilon}_e = B \left[-\sqrt{3} \frac{p_i - p_o}{n \left(k^{-\frac{2}{n}} - 1 \right)} \right]^n R^{-2} \quad (3-106)$$

۳-۸-۳ بحث تکمیلی تحلیل خزش حالت پایا

در قسمت الاستیک با صرف نظر کردن از بارگذاری حرارتی و با در نظر گرفتن فقط بارگذاری مکانیکی معادلات (۳-۷۸) و (۳-۷۹) به صورت زیر داریم.

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^2 - 1} \left(1 - \frac{K^2}{R^2} \right) \quad (۳-۱۰۷)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^2 - 1} \left(1 + \frac{K^2}{R^2} \right) \quad (۳-۱۰۸)$$

که این معادلات مشابه معادلات (۳-۱۰۱) و (۳-۱۰۲) برای تحلیل خزش در حالت پایا می‌باشند. در نتیجه برای تحلیل خزش حالت پایا معادلات مربوط به تنش تغییر نمی‌کنند. که این نشان دهنده و تایید کننده‌ی روش حل برای این پایان نامه است.

در این تحلیل با بدست آوردن معادلات تنش در حالت الاستیک برای استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما که تنش موثر به عنوان تنش ثابت در استوانه در نظر گرفته می‌شود استخراج و سپس با قرار دادن در رابطه‌ی خزش نورتن، کرنش خزشی بررسی می‌شود.

۳-۹ بررسی نتایج

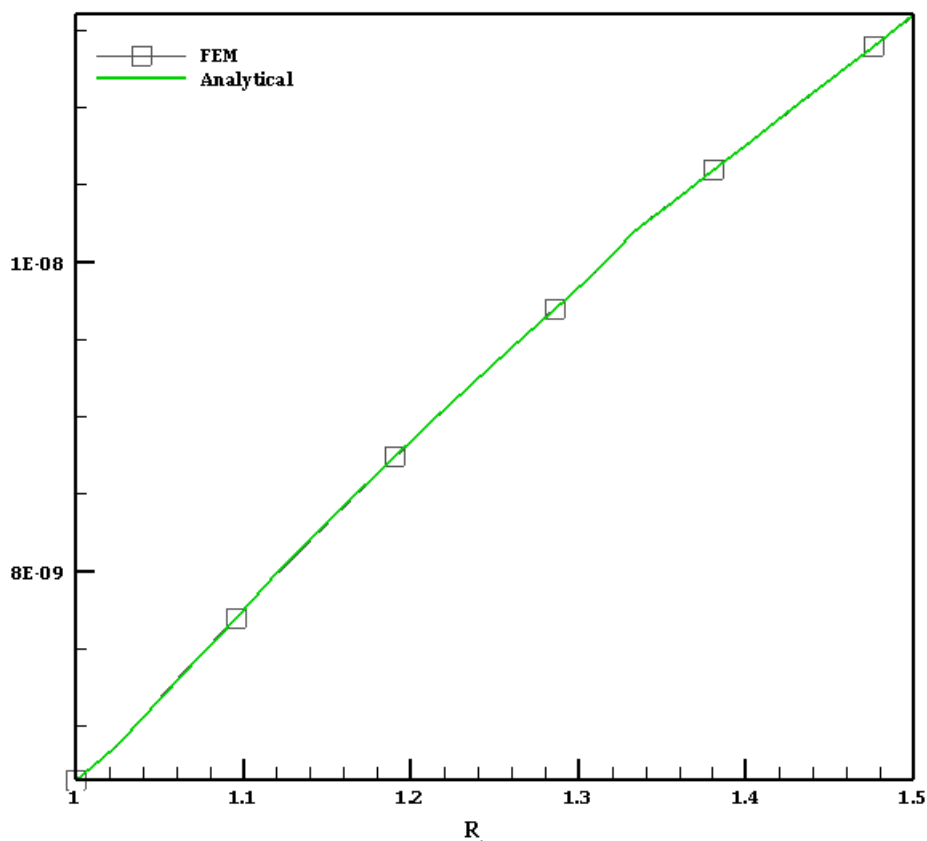
برای بررسی نتایج تنش موثر در حالت الاستیک استوانه را در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای مرور می‌کنیم. سپس خزش مربوط به استوانه تحت تنش موثر ثابت بررسی می‌شود.

۳-۹-۱ مطالعه موردی

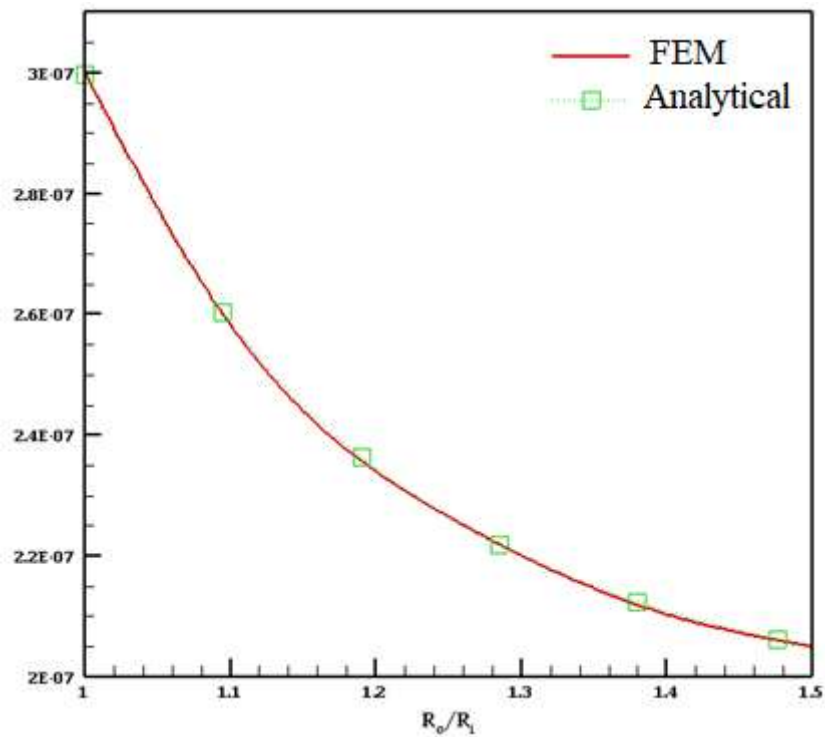
برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به دست آمده از نتایج المان محدود، یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم همگن و همسانگرد جدار ثابت تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی با مشخصات شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ و شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ و تحت فشار یکنواخت داخلی $P = 80 \text{ MPa}$ را در نظر می‌گیریم. مدول الاستیسیته، چگالی، هدایت گرمایی و ضریب انبساط حرارتی به ترتیب

برابر با $E = 200 \text{ GPa}$ ، $\rho = 7860 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ ، $K = 5/60 \frac{w}{\text{m}^2 \text{k}}$ ، نسبت پواسون $\nu = 0.3$ ، $\alpha = 12 \times 10^{-6}$ می‌باشد. دما در جدار داخلی 125°C و در جدار خارجی 25°C می‌باشد. دما در راستای شعاع استوانه تغییر می‌کند و در هر شعاع مقدار ثابتی دارد. همچنین دمای مرجع 25°C می‌باشد. همچنین پارامترهای ماده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} B = 5 \times 10^{-19} \\ n = 1 \\ m = 0 \end{cases}$$



شکل ۳-۹: توزیع کرنش خزشی در حالت تنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما



شکل ۳-۱۰: توزیع خزش در حالت کرنش صفحه‌ای در استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی
دما

فصل چهارم: تحلیل خزش در پوسته‌های
استوانه‌ای جدار ضخیم FGM تحت فشار
داخلی و کرادیان شعاعی دما

۴-۱ مقدمه

هدف این پایان نامه تحلیل استوانه‌ای ساخته شده از مواد با تغییرات تابعی خواص تحت شرایط مشخص و از پیش تعیین شده‌ای بود. مواد FG برای نیازهای مختلف استفاده می‌شوند، این مواد در مواردی که ما نیاز داریم قطعه تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی استفاده شود عملکردی قابل توجه دارند. در این فصل ابتدا حل دقیق برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد FG در حالت الاستیک و تحت فشار داخل و گرادیان شعاعی دما بدست می‌آوریم. در این بخش توزیع تنش‌های شعاعی، محیطی، محوری و مؤثر فون مایرز در راستای شعاع بی‌بعد برای این پوسته‌ها بررسی می‌شود. سپس با استفاده از نرم‌افزار انسیس یک حل عددی برای هندسه و شرایط مشخص استوانه‌ای FGM انجام می‌گردد. در این بخش به مقایسه توزیع تنش و جابجایی و همچنین خزش می‌پردازیم اثر ناهمگنی روی تنش‌ها نیز به صورت نمودارهایی ارائه شده است.

فرضیات حاکم در فصل قبل مانند نظریه‌ی الاستیسیته مستوی برای تحلیل مواد FG نیز کاربرد دارد.

۴-۲ روابط اساسی

برای بررسی روابط ترموالاستیک حاکم، مدول الاستیک، تنش تسلیم، ضریب انبساط حرارتی و ضریب هدایت حرارتی را به ترتیب زیر در نظر می‌گیریم.

$$E(r) = E_i r^{n_1} \quad (۴-۱)$$

$$\alpha(r) = \alpha_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^{n_2} \quad (۴-۲)$$

$$K(r) = K_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^{n_3} \quad (۴-۳)$$

که با نوشتن $R = \frac{r}{r_i}$ شکل بی بعد شده‌ی روابط بالا را خواهیم داشت.

$$E(R) = E_i(R)^{n_1} \quad (4-4)$$

$$\alpha(R) = \alpha_i(R)^{n_2} \quad (4-5)$$

$$K(R) = K_i(R)^{n_3} \quad (4-6)$$

۴-۱-۲ بررسی انتقال حرارت

انتقال حرارت در استوانه‌ی ناهمگن با فرض مساله در شرایط حالت پایا، تقارن محوری، بدون منبع حرارتی و گرادیان شعاعی دما به صورت زیر است.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K(r)r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (4-7)$$

شکل بی بعد رابطه‌ی بالا به صورت زیر است.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(K(R)R \frac{\partial T}{\partial R} \right) = 0 \quad (4-8)$$

که $R = \frac{r}{r_i}$ ، با قرار دادن $K(R) = K_i(R)^{n_4}$ در رابطه‌ی بالا توزیع دما در استوانه‌ی ناهمگن FG

به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(K_i R^{n_4+1} \frac{\partial T}{\partial R} \right) = 0 \quad (4-9)$$

با حل رابطه‌ی بالا

$$T(R) = D_3 \left(-\frac{1}{n_4} R^{-n_4} \right) + D_4 \quad (4-10)$$

شرایط مرزی حرارتی را به صورت زیر قرار می دهیم.

$$\begin{cases} T(r_i) = T(R = 1) = T_i \\ T(r_o) = T(R = k) = T_o \end{cases} \quad (4-11)$$

با جایگذاری شرایط مرزی ثابت‌های D_3 و D_4 نتیجه می شوند. سپس با قرار دادن این ثابت‌ها در

معادله‌ی (۴-۱۰) توزیع انتقال حرارت در استوانه‌ی ناهمگن FG به صورت زیر نتیجه می شود.

$$T(R) = T_i + (T_o - T_i) \frac{1 - R^{-n_3}}{1 - k^{-n_3}} \quad (4-12)$$

تغییرات دما در استوانه‌ی ناهمگن FG به صورت زیر خواهد بود.

$$\theta(R) = T(R) - T^* = \theta_i + \frac{1 - R^{-n_3}}{1 - k^{-n_3}} \Delta(\theta) \quad (4-13)$$

که

$$\Delta(\theta) = \theta_0 - \theta_i \quad (4-14)$$

$$\theta_0 = T_0 - T^* \quad (4-15)$$

$$\theta_i = T_i - T^* \quad (4-16)$$

۴-۲-۲ تحلیل استوانه‌ی ناهمگن FG تحت بارگذاری مکانیکی و گرادیان شعاعی دما

کرنش را به صورت مجموع کرنش الاستیک $\tilde{\varepsilon}^e$ و کرنش حرارتی $\tilde{\varepsilon}^T$ در نظر می‌گیریم و معادلات

سینماتیک را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^T \quad (4-17)$$

که کرنش الاستیک و کرنش حرارتی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\tilde{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \vec{u}) + (\vec{\nabla} \vec{u})^T] \quad (4-18)$$

$$\tilde{\varepsilon}^T = \alpha(r) \theta(r) \vec{I} \quad (4-19)$$

$$\begin{cases} \alpha(r) = \alpha_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^{n_3} \\ \theta(r) = \Delta T = T - T^* \end{cases} \quad (4-20)$$

روابط تنش کرنش را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{pmatrix} = E(r) \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{pmatrix} - E(r) \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} \alpha(r) \theta(r) \quad (4-21)$$

$$\sigma_x = \beta(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{E\alpha\theta}{\nu} \quad (4-22)$$

با جایگذاری روابط سینماتیک در روابط رفتاری تنش (دو رابطه بالا) و سپس جایگذاری در رابطه‌ی تعادل معادله‌ی حاکم به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (n_1 + 1)r \frac{du_r}{dr} + \left(\frac{B}{A}n_1 - 1\right)u_r \\ = \frac{C\alpha_i}{A}(r^{n_3+1}) \left((n_3 + n_1)\theta(r) + r \frac{d\theta(r)}{dr} \right) \end{aligned} \quad (4-23)$$

برای حل معادله‌ی (۴-۲۳) با فرض $u_r = r^m$ معادله مشخصه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$m^2 + n_1 m + \frac{n_1 B}{A} - 1 = 0 \quad (4-24)$$

پاسخ معادله دیفرانسیل (۴-۲۴) به صورت مجموع حل عمومی و خصوصی به صورت در نظر گرفته می‌شود.

$$u_r = u_r^g + u_r^p \quad (4-25)$$

ریشه‌های حقیقی معادله‌ی (بالا) به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\Delta = n_1^2 - 4 \left(\frac{n_1 B}{A} - 1 \right) \quad (4-26)$$

$$m_1 = \frac{-n_1 + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (4-27)$$

$$m_2 = \frac{-n_1 - \sqrt{\Delta}}{2} \quad (4-28)$$

در نتیجه جواب عمومی معادله‌ی (۴-۲۵) به شکل زیر می‌باشد.

$$u_r^g = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} \quad (4-29)$$

جواب خصوصی معادله به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$u_r^p = U_1(r)u_{r1} + U_2(r)u_{r2} \quad (4-30)$$

$$U_1(r) = - \int_{r_i}^r \frac{u_{r2} F(r, T)}{W(r)} \quad (4-31)$$

$$U_2(r) = \int_{r_i}^r \frac{u_{r1} F(r, T)}{W(r)} \quad (4-32)$$

که $W(r)$ تابع رونسکین است و به شکل زیر محاسبه می‌گردد.

$$W(r) = \begin{vmatrix} u_{r1} & u_{r2} \\ \frac{\partial u_{r1}}{\partial r} & \frac{\partial u_{r2}}{\partial r} \end{vmatrix} \quad (4-33)$$

با حل جواب خصوصی با استفاده از معادلات (بالا)، جواب معادله‌ی (۴-۲۳) به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$u_r(r) = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} + \frac{r^{n_3+1}}{L} (L_1 r^{-n_4} - L_2) \quad (4-34)$$

پارامترهای استفاده شده در رابطه‌ی بالا به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$L = \left(\left(n_3 - n_4 + \frac{B}{A} \right) n_1 + (n_3 - n_4 + 2)(n_3 - n_4) \right) \quad (4-35)$$

$$L_1 = G(n_1 + n_3 - n_4) \left(\frac{C \alpha_i \theta_i}{A(1 - K^{-n_4})} \right) \quad (4-36)$$

$$G = \left(\left(n_3 + \frac{B}{A} + 1 \right) n_1 + 2n_3 + n_3^2 \right) \quad (4-37)$$

$$L_2 = L(n_1 + n_3) \left(\frac{C \alpha_i \theta_i}{A(1 - K^{-n_4})} \right) K^{-n_4} \quad (4-38)$$

شکل بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$u_R(R) = C_1 R^{m_1} + C_2 R^{m_2} + \frac{R^{n_3+1}}{L} (L_1 R^{-n_4} - L_2) \quad (4-39)$$

با جایگذاری معادله‌ی (بالا) در معادلات سینماتیک و سپس جایگذاری معادلات سینماتیک در معادلات رفتاری به رابطه‌ی زیر برای تنش شعاعی و تنش محیطی می‌رسیم.

$$\sigma_R = E_i R^{n_1} \left((Am_1 + B)C_1 R^{m_1-1} + (Am_2 + B)C_2 R^{m_2-1} + \frac{R^{n_3}}{L} (L_{11} R^{-n_4} - L_{22}) - L_3 R^{n_3} (R^{-n_4} - k^{-n_4}) \right) + \quad (4-40)$$

$$\sigma_\theta = E_i R^{n_1} \left((Bm_1 + A)C_1 R^{m_1-1} + (Bm_2 + A)C_2 R^{m_2-1} - L_3 R^{n_3} (R^{-n_4} - k^{-n_4}) + \frac{R^{n_3}}{L} (L_1 R^{-n_4} (B(n_3 - n_4 + 1) + A) - L_2 (B(n_3 + 1) + A)) \right) \quad (4-41)$$

$$L_{11} = L_1 (A(n_3 - n_4 + 1) + B) \quad (4-42)$$

$$L_{22} = L_2 (A(n_3 + 1) + B) \quad (4-43)$$

$$L_3 = \frac{(A + 2B)}{1 - k^{-n_4}} \alpha_i \theta_i \quad (4-44)$$

شرایط مرزی استوانه تحت فشار داخلی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \sigma_R|_{R=1} = -P_i \\ \sigma_R|_{R=k} = 0 \end{cases} \quad (4-45)$$

با قرار دادن رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (4-40) و حل همزمان دو معادله‌ی موجود برای تنش شعاعی

ضرایب C_1 و C_2 به دست می‌آید.

$$C_1 = \frac{1}{(Am_1 + B)(k^{m_2-1} - k^{m_1-1})} \left(\frac{-P_i k^{m_2-1}}{E_i} - \frac{k^{m_2-1}}{L} (L_{11} - L_{22}) + L_3 k^{m_2-1} (1 - K^{-n_4}) + \frac{k^{n_3}}{L} (L_{11} K^{-n_4} - L_{22}) \right) \quad (4-46)$$

$$C_2 = \frac{1}{(Am_2 + B)(k^{m_2-1} - k^{m_1-1})} \left(\frac{P_i k^{m_1-1}}{E_i} + \frac{k^{m_2-1}}{L} (L_{11} - L_{22}) \right. \\ \left. - L_3 k^{m_2-1} (1 - K^{-n_4}) - \frac{k^{n_3}}{L} (L_{11} K^{-n_4} - L_{22}) \right. \\ \left. + (k^{m_2-1} - k^{m_1-1}) \left(L_3 (1 - K^{-n_4}) - \frac{1}{L} (L_{11} - L_{22}) \right) \right) \quad (4-47)$$

۴-۳ مطالعه‌ی موردی

در این بخش با استفاده از یک مثال به بررسی استوانه ناهمگن FG تحت فشار داخلی و گرادیان

شعاعی دما می‌پردازیم

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از تحلیلی، یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار

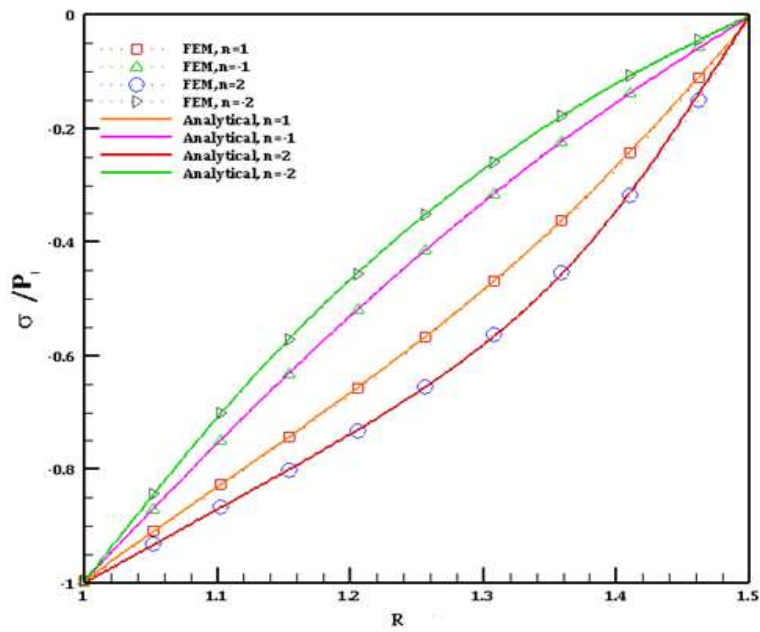
ضخیم ناهمگن FG و با جدار ثابت تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی با مشخصات شعاع داخلی $r_i =$

۴۰ mm و شعاع خارجی $r_o = ۶۰$ mm و تحت فشار یکنواخت داخلی $P = ۸۰$ MPa را در نظر می‌-

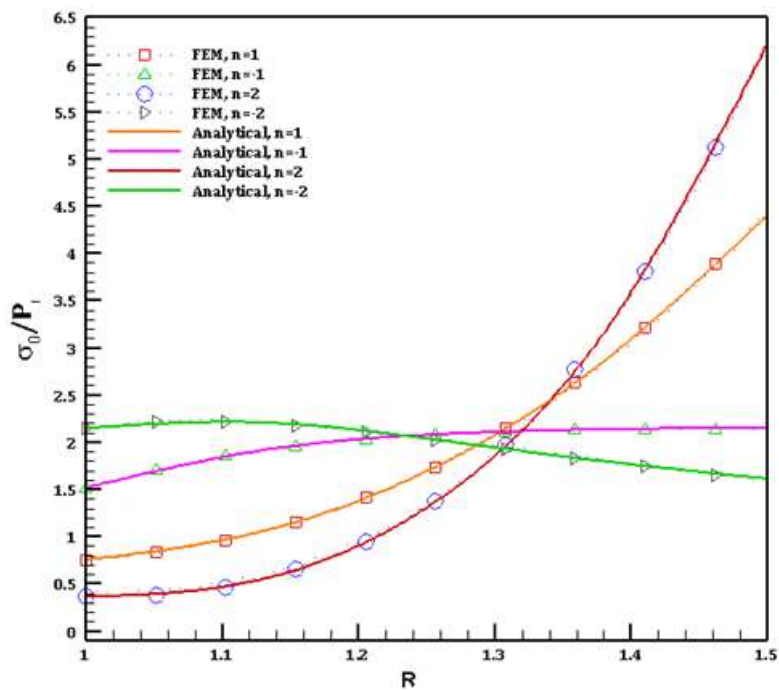
گیریم. سایر مشخصات استوانه را بدین صورت داریم که مدول الاستیسیته $E_i = 200$ GPa،

$\nu = ۰/۳$ ، نسبت پواسون $K_i = ۵/۶۰ \frac{w}{m^3 k}$ ، $۷۸۶۰ \frac{Kg}{m^3}$ ، $K_i = ۱۲ \times ۱۰^{-۶}$ می‌باشد. دما در جدار داخلی

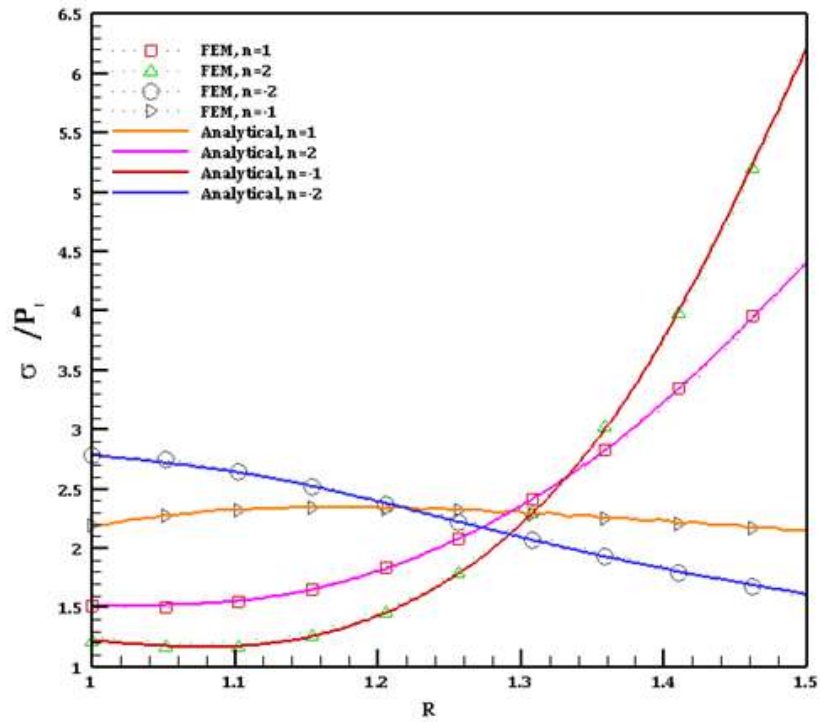
۱۲۵°C و در جدار خارجی ۲۵°C می‌باشد. همچنین دمای مرجع ۲۵°C می‌باشد.



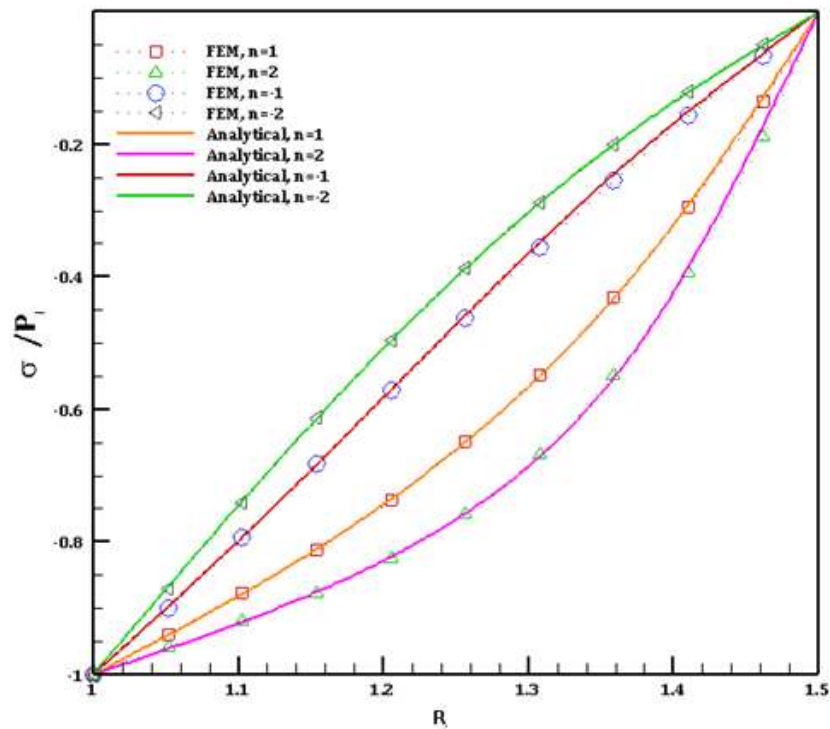
شکل ۴-۱: توزیع تنش شعاعی در درحالت تنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی



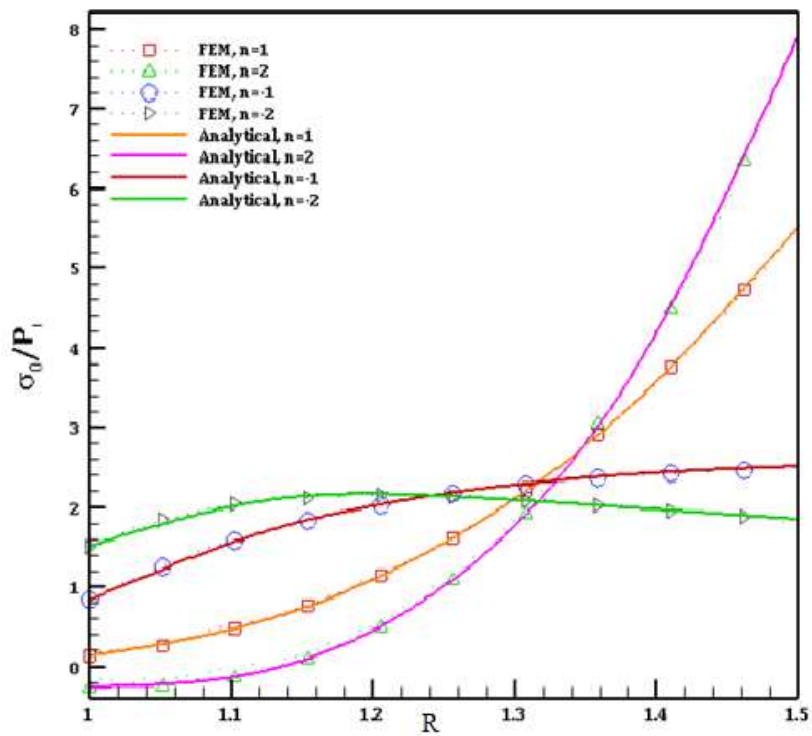
شکل ۴-۲: توزیع تنش محیطی در درحالت تنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی



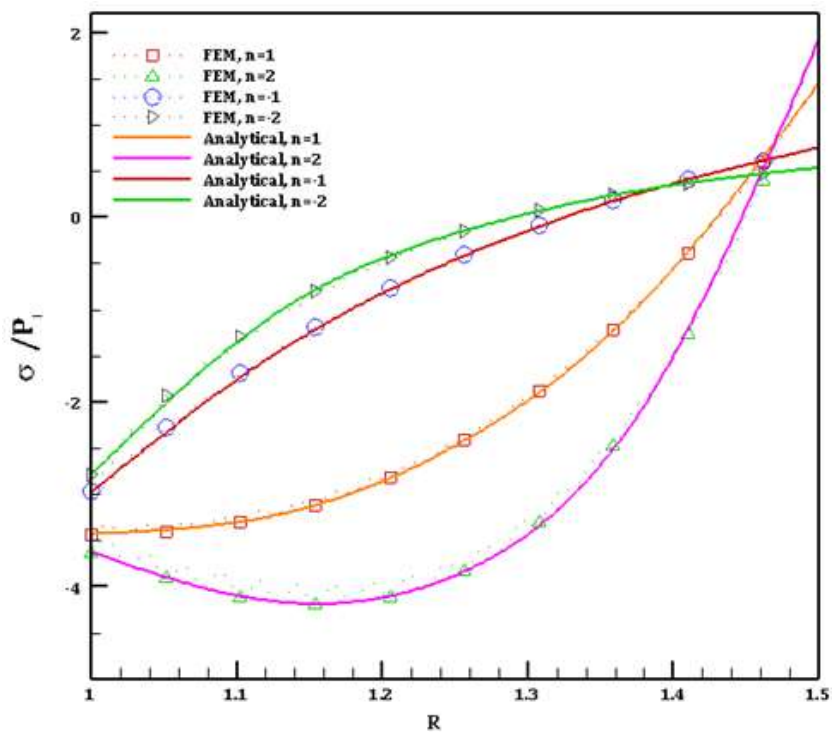
شکل ۳-۴: توزیع تنش موثر در حالت تنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی



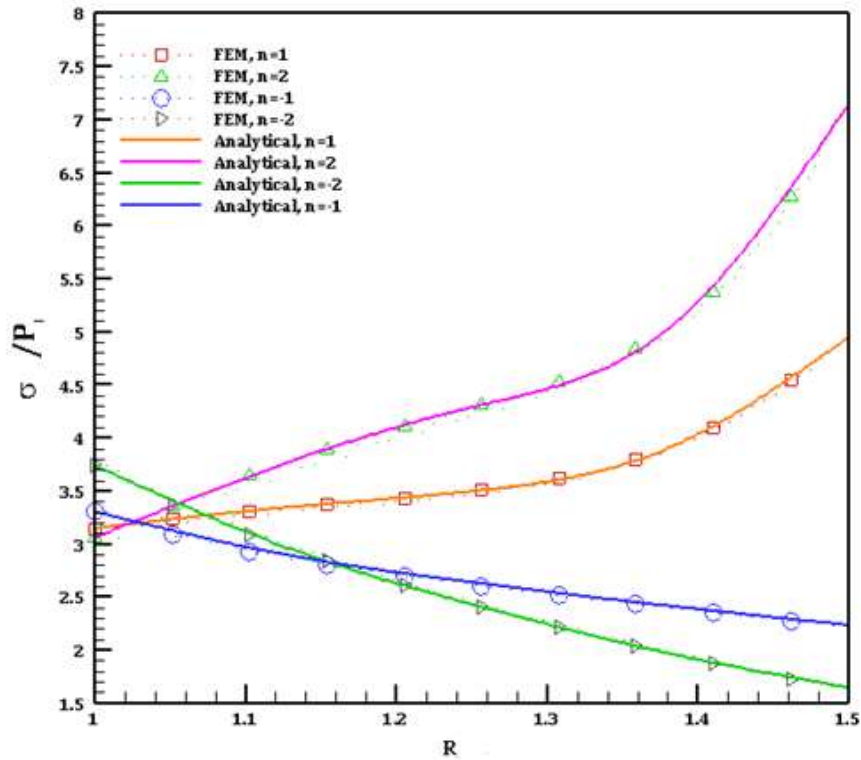
شکل ۴-۴: توزیع تنش شعاعی در حالت کرنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی



شکل ۴-۵: توزیع تنش محیطی در حالت کرنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی



شکل ۴-۶: توزیع تنش محوری در حالت کرنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی



شکل ۴-۷: توزیع تنش موثر در حالت کرنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی

۴-۴ تحلیل خزش

۴-۴-۱ مقدمه

مواد FG با توجه به اهمیت زیادی که در صنعت دارند، نیاز به بررسی دقیق رفتار تحت شرایط مختلف بارگذاری را دارند. خزش در این مواد که در دمای بالا مورد استفاده قرار می گیرند رفتاری بسیار بااهمیت است.

۴-۴-۲ تحلیل خزش

معادلات تعادل را مانند رابطه‌ی (۴-۲) داری که در حالت کلی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rx}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\theta}{r} + F_x = 0 \end{cases} \quad (4-48)$$

که در آن F_r ، F_θ و F_x به ترتیب نیروهای جرمی در راستای r ، θ و x هستند.

با در نظر گرفتن شرایط حاکم بر مساله و اعمال قرضیات ساده شونده مربوط نظریه‌ی الاستیسته‌ی

مستوی معادله‌ی تعادل بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (4-49)$$

رابطه‌ی کرنش خزشی معادل برای استوانه‌ی ساخته شده از مواد ناهمگن FG همانند استوانه‌ی همگن

طبق قانون نورتن بیان می‌شود با این تفاوت که پارامترهای ماده در این مواد تابع شعاع هستند که به-

صورت زیر نشان داده می‌شوند.

$$\varepsilon_e^{cr} = B(r) \sigma_e^{n(r)} \quad (4-50)$$

که $B(r)$ و $n(r)$ پارامترهای ماده هستند. $B(r)$ و $n(r)$ در مواد همگن ثابت و در مواد

FGM تابعی از شعاع هستند. در این تحلیل پارامترهای ماده مطابق زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{cases} B(r) = b_0 r^{b_1} \\ n(r) = n_0 \end{cases} \quad (4-51)$$

روابط نرخ کرنش خزشی در راستای شعاعی، محیطی و طولی به صورت زیر است:

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\dot{\varepsilon}_e}{2\sigma_e} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_z)] \quad (4-52)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{\varepsilon}_e}{2\sigma_e} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_z)] \quad (4-53)$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{\dot{\varepsilon}_e}{2\sigma_e} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_z)] \quad (4-54)$$

برای حالت کرنش صفحه‌ای $\dot{\varepsilon}_z = 0$ و $\sigma_z = 0.5(\sigma_r + \sigma_\theta)$ و همچنین جایگذاری روابط (3-5) و

(3-6) نرخ کرنش خزشی شعاعی و محیطی به دست می‌آید:

$$\dot{\varepsilon}_r = -\frac{\sqrt{3}}{2} B(r) \sigma_e^{n_0} \quad (4-55)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} B(r) \sigma_e^{n_0} \quad (4-56)$$

همچنین تنش موثر فون مایرز به صورت زیر بیان می شود:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2]^{0.5} \quad (4-57)$$

برای حالت کرنش صفحه‌ای:

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (4-58)$$

نرخ کرنش محیطی و شعاعی به صورت زیر است.

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{d\dot{u}_r}{dr} \quad (4-59)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{u}_r}{r} \quad (4-60)$$

با حذف \dot{u}_r از روابط بالا به معادله‌ی ساختاری می‌رسیم.

$$r \frac{d\dot{\varepsilon}_\theta}{dr} + \dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_r = 0 \quad (4-61)$$

با جایگذاری روابط (4-52) و (4-53) در معادله‌ی سازگاری رابطه‌ی تنش موثر رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

شود:

$$(b_1 + 2) \sigma_e^{n_0} + \frac{d\sigma_e^{n_0}}{dr} = 0 \quad (4-62)$$

با انتگرال گیری از رابطه‌ی بالا تنش معادل به دست می‌آید:

$$\sigma_e = \left(\frac{c_1}{r^2}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (4-63)$$

با برابر قرار دادن رابطه‌ی (3-18) و رابطه‌ی (3-13) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{c_1}{r^{(b_1+2)}}\right)^{\frac{1}{n_0}} \quad (4-64)$$

رابطه‌ی بالا را در معادله‌ی تعادل قرار می‌دهیم:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \left(-\frac{2}{r\sqrt{3}} \left(\frac{c_1}{r^{(b_1+2)}} \right)^{\frac{1}{n_0}} \right) = 0 \quad (4-65)$$

در نتیجه

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} c_1^{\frac{1}{n_0}} \int_{r_i}^r r^{-\left(\frac{b_1+2+n_0}{n_0}\right)} dr + c_2 \quad (4-66)$$

با حل انتگرال بالا داریم:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} c_1^{\frac{1}{n_0}} \left(-\frac{n_0}{b_1+2} \right) \left[r^{-\frac{b_1+2}{n_0}} - r_i^{-\frac{b_1+2}{n_0}} \right] + c_2 \quad (4-67)$$

شرایط مرزی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} r = r_i \rightarrow \sigma_r = -p_i \\ r = r_o \rightarrow \sigma_r = -p_o \end{cases} \quad (4-68)$$

با جایگذاری شرایط مرزی در رابطه‌ی (۲-۲۲)، ثابت‌های انتگرال گیری بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} c_1 = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(p_i - p_o)}{\left\{ r_o^{-\frac{b_1+2}{n_0}} - r_i^{-\frac{b_1+2}{n_0}} \right\}} \left(-\frac{b_1+2}{n_0} \right) \right]^{n_0} \\ c_2 = -p_i \end{cases} \quad (4-69)$$

ثابت‌های بدست آمده را در معادله‌ی (۴-۶۰) قرار می‌دهیم و تنش شعاعی با فرمول زیر حاصل می‌-

شود:

$$\sigma_r = \frac{p_i - p_o}{\left\{ r_o^{-\left(\frac{b_1+2}{n_0}\right)} - r_i^{-\left(\frac{b_1+2}{n_0}\right)} \right\}} \left\{ r^{\left(\frac{b_1+2}{n_0}\right)} - r_i^{\left(\frac{b_1+2}{n_0}\right)} \right\} - p_i \quad (4-70)$$

یا می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\sigma_r = \frac{p_i - p_o}{k^\beta - 1} (R^\beta - 1) - p_i \quad (4-71)$$

که پارامترهای استفاده شده در روابط به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$\begin{cases} R = \frac{r}{r_i} \\ k = \frac{r_o}{r_i} \\ \beta = -\frac{b_1 + 2}{n_0} \end{cases} \quad (4-72)$$

با توجه به رابطه‌ی (۴-۵۷) می‌توان تنش محیطی را با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد.

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{c_1}{r^{(b_1+2)}} \right)^{\frac{1}{n_0}} \quad (4-73)$$

در نتیجه

$$\sigma_\theta = \frac{p_i - p_o}{k^\beta - 1} ((1 + B)R^\beta - 1) - p_i \quad (4-74)$$

برای تنش محوری نیز می‌توان نوشت

$$\sigma_x = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{p_i - p_o}{k^\beta - 1} \left(\left(\frac{\beta + 2}{2} \right) R^\beta - 1 \right) - p_i \quad (4-75)$$

تنش معادل نیز از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) = \frac{\sqrt{3}}{2} \beta \frac{p_i - p_o}{k^\beta - 1} R^\beta \quad (4-76)$$

و نرخ کرنش خزشی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\dot{\epsilon}_e = B(r) \sigma_e^{n(r)} = b_0 r^{b_1} \frac{\sqrt{3}}{2} \beta \frac{p_i - p_o}{k^\beta - 1} R^{-2} \quad (4-77)$$

۴-۴-۳ بحث تکمیلی خزش در استوانه‌ی FGM

تحلیل خزش استوانه‌ی جدار ضخیم ساخته شده از مواد ناهمگن FG موضوع مورد بررسی این پایان-نامه بود. برای استوانه‌ی FGM نیز می‌توان با استفاده از تنش‌های بدست آمده از حل الاستیک، تنش موثر لازم برای تحلیل خزش در حالت پایا را محاسبه کرد. تنش موثر به دست آمده از حالت الاستیک به دلیل ثابت بودن در فرایند تحلیل خزش حالت پایا، در معادله‌ی خزشی قرار داده می‌شود.

برای تحلیل خزش پایا در پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن FG معادله‌ی نورتون معرفی شده (معادله-۱) (قرمز) تعریف می‌شود. فقط تنش موثر را از حل الاستیک بدست می‌آوریم و در معادله‌ی نورتون قرار می‌دهیم.

۴-۵ بررسی نتایج

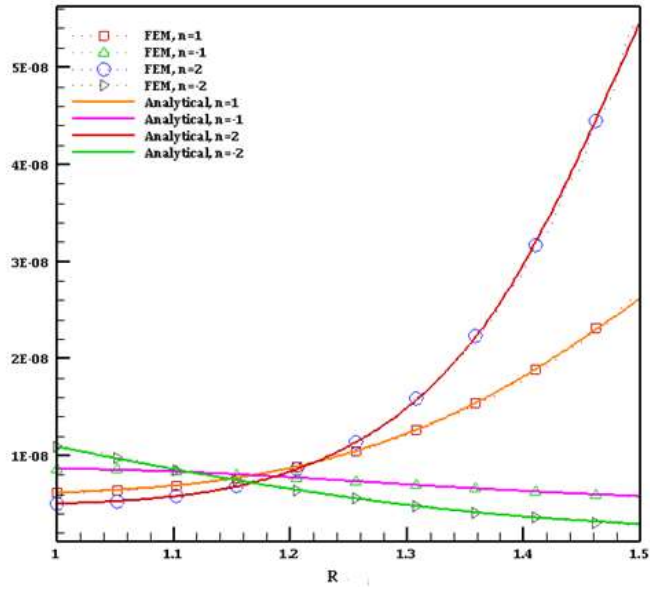
۴-۵-۱ مقدمه

برای بررسی نتایج تنش موثر در حالت الاستیک استوانه را در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای مرور می‌کنیم. سپس خزش مربوط به استوانه تحت تنش موثر ثابت بررسی می‌شود. در این بخش با استفاده از یک مثال به بررسی استوانه ناهمگن FG تحت فشار داخلی و گرادیان شعاعی دما می‌پردازیم.

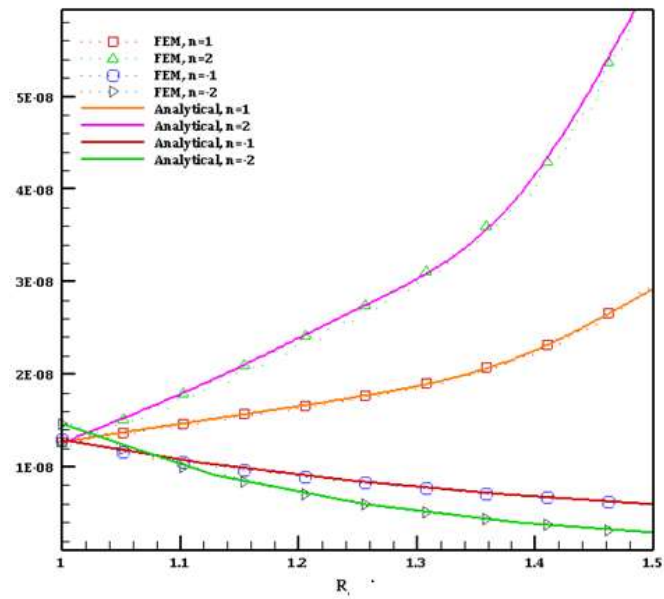
۴-۵-۲ مطالعه‌ی موردی

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از تحلیلی، یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم ناهمگن FG و با جدار ثابت تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی با مشخصات شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ و شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ و تحت فشار یکنواخت داخلی $P = 80 \text{ MPa}$ را در نظر می‌گیریم. سایر مشخصات استوانه را بدین صورت داریم که مدول الاستیسیته $E_i = 200 \text{ GPa}$ ، $\rho = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ، $K_i = 5/60 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$ ، $\nu = 0.3$ ، $K_i = 12 \times 10^{-6}$ می‌باشد. دما در جدار داخلی 125°C و در جدار خارجی 25°C می‌باشد. همچنین دمای مرجع 25°C می‌باشد. همچنین پارامترهای مواد که برای تحلیل خزش استفاده شده است به صورت زیر است.

$$\begin{cases} b_i = 5 \times 10^{-6} \\ n = 1 \\ m = 0 \end{cases}$$



شکل ۴-۸: توزیع کرنش خزشی در حالت تنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی



شکل ۴-۹: توزیع کرنش خزشی در حالت کرنش صفحه ای در استوانه ناهمگن FG تحت گرادیان شعاعی دما و بار مکانیکی

فصل پنجم نتیجه گیری و پیشنهادها

۵-۱ مقدمه

مواد FG کاربرد و اهمیت زیادی در صنایع مختلف دارند. تحلیل این مواد می‌تواند به استفاده بهتر و مناسب‌تری از این مواد منجر شود. با توجه به استفاده از مواد FG در شرایط مختلف دمایی، بررسی تاثیر حرارت بر رفتار این مواد در شرایط مختلف محیطی و بارگذاری‌های مختلف نیازی غیر قابل چشم‌پوشی است. تحلیل خزش به عنوان تاثیر غالب حرارت و بارگذاری بر قطعات مختلف نیاز به دقت و شناخت دقیق از شرایط محیطی قطعات دارد.

۵-۲ نتیجه گیری

تحلیل خزش در حالت پای برای استوانه‌ی جدار ضخیم در حالت تنش ثابت انجام می‌گیرد. در بررسی انجام شده علاوه بر ارائه‌ی نتایجی برای بررسی تاثیر مشخصات ماده بر خزش، توصیف کاملی از خزش در حالت‌های مختلف خود به بررسی شرایط ایجاد خزش در قطعات پرداخته شد.

با بررسی تنش‌ها در حالت الاستیک و بدست آوردن تنش مؤثر، رفتار ماده تحت تاثیر بارگذاری مکانیکی و گرادیان شعاعی دما با تحلیل خزش انجام شده می‌توان نتیجه گرفت که:

۱- بارگذاری حرارتی تاثیر زیادی بر تنش مؤثر دارد. که این تاثیر رفتار خزشی ماده را تحت تاثیر قرار می‌دهد. فشار به نسبت حرارت اهمیت کمتری دارد، در نتیجه دقت در انتخاب نوع بارگذاری حرارتی لازمه رسیدن به تحلیلی مطلوب است.

۲- ثابت ناهمگنی، با توجه به تاثیر مستقیم بر مشخصات ماده در هر لایه از مواد FG در بررسی خزش بسیار مؤثر است.

۳- پارامترهای مواد که برای تحلیل خزش استفاده می‌شود تاثیر زیادی بر کرنش خزشی دارد. انتخاب پارامتر مناسب با مرحله‌ی دوم خزش اهمیت زیادی دارد.

۴- در صورتی که بارگذاری در شرایطی با اختلاف زیاد از تنش تسلیم انجام گیرد. خزش مرحله‌ی دوم

زمان بیشتری در قطعه اثر می‌کند.

۵-۳ پیشنهادات

- ۱ تحلیل خزش مرحله‌ی اول و مرحله‌ی سوم همزمان با مرحله‌ی دوم برای بررسی دقیق‌تر تاثیر خزش.
- ۲ بررسی تاثیر خزش بر استوانه‌ی FG در حالت ترموالاستوپلاستیک.
- ۳ تحلیل خزش در بارگذاری‌های مختلف و بررسی تاثیر نوع بارگذاری بر رفتار خزشی ماده.

مراجعه

[1] M. Ghanad, G.H. Rahimi, S. Esmailzadeh Khademi, **General plane elasticity solution of axisymmetric functionally graded thick cylindrical shells.**

[۲] قنّاد مهدی، (۱۳۸۷)، تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت متغیر از موادناهمگن FG تحت فشار داخلی، رساله دکتری، دانشگاه تربیت مدرس.

[3] Timoshenko S.P., Goodier J.N.: **Theory of Elasticity**, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.

[4] Naghdi P.M., Cooper R.M., (1956): **Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia**, J. Acoustical Sci. America, vol. 28, 1, pp 56-63.

[5] Greenspan J. E., (1960): **Vibration of a thick-walled cylindrical shell, comparison of the exact theory with approximate theories**, J. Acoustical Sci. America 32, 5, pp 571-578.

[6] Timoshenko S. P.: **Strength of Materials: Part II (Advanced Theo. and Prob.)**, 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1976.

[7] Lekhnitskii S. G.: **Theory of Elasticity of an Anisotropic Body**, Mir Pub., Moscow. 1981.

[8] Koizumi. M, Niino. M., (1995): Overview of FGM research in Japan. MRS Bulletin, Vol. 20, pp.19-21.

[9] H. SH. Shen, Functionally graded of materials, **Nonlinear analysis of plates and shells**, 1th ed., Taylor and Francis Group, United States of America, (2009).

[10] Suresh S. & Mortensen A., (1998): **Fundamentals of Functionally Graded Materials**, Cambridge Pub., London.

[11] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M. R., (2002): **Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads**, Int. J. Pressure Vessel and Piping, vol. 79, pp 493-497.

[12] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R., (2003); **General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads**, J. App. Mech.; 70, 111-118.

[13] Fukui Y. & Yamanaka N., (1992): **Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded materials subjected to internal pressure**, JSME, Ser. I, 35(4), 891-900

- [14] Obata Y. & Noda N., (1994): **Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material**, *J. Thermal Stresses*, 17, 471-487.
- [15] Horgan C.O & Chan A. M., (1999): **The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials**, *J. Elasticity*, 55, 43-59.
- [16] Horgan C.O., Chan A. M., (1999): **The stress response of functionally graded isotropic linearly elastic rotating disks**, *J. Elasticity*; 55, 219-230.
- [17] Yang Y.Y. (2000): **Time-dependet stress analysis in functionally graded materials**, *Int. J. Solids and Struc.* vol. 37, pp 7593-7608.
- [18] Tutuncu N. & Ozturk M., (2001): **Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels**, *J. Composites: Part B (Engineering)*, 32B, 683-686.
- [19] Tarn J.Q. (2001): **Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads**, *Int. J. Solds and Struc.*, vol. 38, pp 9189-8206.
- [20] Eraslan A.N. & Akis T, (2006): **On the plain strain and plane stress solution of functionally graded solid shaft and solid disk problems**, *Acta Mechanica*, 181, 43-63.
- [21] Hongjun X. & Zhifei S. & Taotao Z. (2007): **Elastic analysis of heterogeneous elastic hollow cylinders**, *J. Composite Struc.*, 79, 140-147
- [22] Praveen G.N. & Reddy J.N. (1998): **Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded Ceramic-Metal plates**, *Int. J. Solids and Struc.* Vol. 35, pp 4457-4476.
- [23] Boresi A. B., Schmidt R. J.: **Advanced Mechanics of Materials**, 6th ed., John Wiley & Sons, Inc., United States of America, 2003.
- [24] F. P. J. Rimrott, (1959): **Creep of thick-walled tubes under internal pressure considering large strains**, *Journal of Applied Mechanics*, 271–275.
- [25] N. S. Bhatnagar, P. S. Kulkarni, V. K. Arya, (1984): **Creep analysis of an internally pressurize orthotropic rotating cylinder**, *Nuclear Engineering and Design*, 379–388.
- [26] Gupta, S.K., Pathak, Sonia, (2001): **Thermo creep transition in a thick-walled circular cylinder under internal pressure**, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 32, No. 2, pp. 237-253.
- [27] You, L.H. Zhang, J.J. and You. X. Y, (2005): **Elastic Analysis of Internally Pressurized Thick-Walled Spherical Pressure Vessels of Functionally Graded Materials**, *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, No. 5, pp. 347–354.
- [28] Loghma, A., Ghorbanpour Arani, A., Amir, S., Vajedi, A., (2010): **Magneto thermoelastic creep analysis of functionally graded cylinders**, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 87, No. 7, pp. 389- 395.

- [29] A. Loghman, A. Ghorbanpour Arani, A. R. Shajari, S. Amir, (2011): **Time-dependent thermoelastic creep analysis of rotating disk made of Al–SiC composite**, Archive of Applied Mechanics, 1853–1864.
- [30] M. Zamani-Nejad, Z. Hoseini, A. Niknejad, M. Ghannad, (2011): **New Exact solution for Creep Behavior of Rotating Thich-Walled Cylinders**, J. Basic. Apple. Res.,1(10)1704-1708.
- [31] A. Loghman, S. M. A. Aleayoub, M. Hasani Sadi, (2012): **Time-dependent magnetothermoelastic creep modeling of FGM spheres using method of successive elastic solution**, Applied Mathematical Modelling, 836–845.
- [32] M. Zamani-Nejad, Z. Hoseini, A. Niknejad, M. Ghannad, (2015): **Steady-State creep deformations and stresses in FGM rotating thick cylindrical pressure vessels**, J. Mechanics, Vol. 31, No. 1, pp. 1-6.

Abstract

There is a variety of equipment in power plants, aerospace and petrochemical industries, where creep is likely to occur. The creep phenomenon is a slow deformation that may cause equipment to rupture, break, and disintegrate. Therefore, it is important to study these stresses due to the efficiency of components and equipment. The most widely used of these equipments in today's industries are cylindrical and spherical shells. FGM materials, whose properties change functionally, due to the continuity in their mechanical, thermal and magnetic properties, their stresses and gradients become continuous, which strengthens the material. In this study the behavior of steady state creep in thick_walled cylinder made of unhomegons FGM Under the effect mechanical loads an radial temperature gradient are studied by using the Billy-Norton low. steady state creep of thick_walled cylindrical shells made of functionally graded materias subjected to mechanical loads an radial temperature gradient

Keywords: Creep, Thick spherical shell, FGM, PET, Radial gradient temperature.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

A Thesis submitted in partial Fulfillment of the Requirement for
The Degree of master of Science In
Mechanical Engineering

Creep analysis of functionally graded thick cylindrical shell under mechanical load and radial gradient temperature

By:

Ali Danayi

Supervisor:

Dr. MehdiGhanad

September 2020