

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی ساخت و تولید

مطالعه اثر تنش در راستای ضخامت ورق فلزی بر شکل پذیری آن با استفاده از روش اجزاء محدود
پلاستیسیته بلور

نگارنده: محمدرضا کارگر درونکلایی

استاد راهنما:

دکتر سیدهادی قادری

بهمن ۱۳۹۹

شماره: ۲/۲۹۹۱/۱۶۲
تاریخ: ۱۴۰۲/۰۲/۱۵

باسمه تعالی



فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای محمدرضا کارگر درونکلانی با شماره دانشجویی ۹۶۱۲۲۲۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش ساخت و تولید تحت عنوان مطالعه اثر تنش در راستای ضخامت ورق فلزی بر شکل پذیری آن با استفاده از روش اجزاء محدود پلاستیسیته بلور که در تاریخ ۱۳۹۹/۱۱/۲۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☒ الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸-۱۸/۹۹
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۶-۱۷/۹۹	☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۴-۱۵/۹۹
☐ ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد	
نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی	

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر سید هادی قادری	استادیار	
۲- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سید وحید حسینی	استادیار	
۳- استاد ممتحن اول	دکتر مهدی گردویی	دانشیار	
۴- استاد ممتحن دوم	دکتر محمد باقر نظری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی گردویی

تاریخ و امضاء:



سپاس‌گزاری

یرفع الله الذین آمنوا منکم والذین اوتوا العلم درجات والله به ما تعملون خبیر (۱۱مجادله)
که ایزد مقامی ببخشد بلند بر آنان که در بحر دانش‌اند و خداوند بر آنچه که انجام می‌دهید آگاه است.

استاد برجسته جناب آقای دکتر سید هادی قادری

به استناد آیه شریفه ۱۰ از سوره مبارکه فاطر که خداوند می‌فرماید "الیه یصعد الکلم الطیب والعمل الصالح یرفعه"، سخنان و کلام ارزشمند به سوی خدا صعود می‌کند و با ابدیت سنخیت پیدا کرده و همواره آثار خود را ظاهر می‌سازند. بسی شایسته است از تلاش‌های مداوم و کوشش‌های مستمر حضرت عالی در اشاعه تعلیم و تربیت و بسط و توسعه علم و دانش و نیز از راهنمایی روشن گرایانه شما در این رساله به عنوان استاد راهنما، در کمال امتنان و افتخار تقدیر و تشکر نمایم.

همچنین از هیات داوران و نماینده شورای تحصیلی محترم، اساتید گرامی جناب آقای دکتر مهدی گردویی و جناب آقای دکتر سید وحید حسینی که شاگردی محضرشان از بزرگترین افتخارات زندگی علمی‌ام می‌باشد، و نیز جناب آقای دکتر محمد باقر نظری، کمال تشکر را دارم.

تقدیم اثر

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به :

- محضر ارزشمند یگانه منجی عالم بشریت، حضرت صاحب الزمان (عج).
- به پدر و مادر عزیزم به خاطر همه‌ی تلاش‌های محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند و با مهربانی، چگونه زیستن را به من آموخته‌اند.
- به همسر مهربانم که در تمام طول تحصیل همراه و همگام من بوده است.
- به استادان فرزانه و فرهیخته‌ای که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند.
- به آنان که در راه کسب دانش راهنمایم بوده‌اند.
- به آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بود.

الها به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته‌ی آنان جامه‌ی عمل بپوشانم.

پروردگارا حسن عاقبت ، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.

خدایا توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با علم و دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران کهنسال عنایت بفرما.

تعهد نامه

اینجانب **محمدرضا کارگر درونکلائی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک گرایش ساخت و تولید دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه **مطالعه اثر تنش در راستای ضخامت ورق فلزی بر شکل‌پذیری آن با استفاده از روش اجزاء محدود پلاستیسیته بلور تحت راهنمایی آقای دکتر سید هادی قادری** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در سال‌های اخیر با توجه به کاربردهای فراوان و متنوع ورق‌های فلزی، تحقیقات قابل توجهی در زمینه شکل‌پذیری آنها صورت گرفته است. در بسیاری از پژوهش‌های انجام شده در این زمینه، مسئله به صورت تنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده، از تنش در راستای ضخامت صرف نظر می‌شود. در حالی که به نظر می‌رسد، یکی از عوامل تاثیرگذار بر شکل‌پذیری، تنش اعمال شده در راستای ضخامت ورق باشد. از دیگر سوی، مطالعه‌ی رفتار ورق‌های فلزی نازک، نیازمند در نظر گرفتن مشخصات ریزساختار مانند اندازه دانه و بافت است. روش المان محدود پلاستیسته بلور (CPFEM) می‌تواند در این موارد به کار گرفته شود. در این پایان‌نامه، برای بررسی اثر فشار در راستای ضخامت ورق بر شکل‌پذیری آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4 از CPFEM استفاده شد. یک رفتار خود-کار سخت‌شوندگی برای سیستم‌های لغزش در نظر گرفته شد. نیز، برای پیش‌بینی ایجاد گلویی و رشد آن، در آزمون کشش تک محوره از معیار بیشینه کرنش برشی و در آزمون کشش دو محوره از معیارهای بیشینه کرنش برشی و کرنش مومسان اصلی برای شروع و تکامل آسیب در مدل رفتاری ماده استفاده شد. برای به کارگیری مدل در بسته‌ی المان محدود آباکوس، کد VUMAT بر اساس معادلات ساختاری گسسته‌سازی شده و تکنیک انتگرال‌گیری پیشرو اویلر توسعه یافت. پس از صحت‌سنجی کد توسعه یافته، پارامترهای آن بر اساس نتایج آزمون کشش تک محوره کالیبره شد. برای شبیه‌سازی آزمون کشش ورق به ضخامت ۱ mm، یک حجم نماینده به ابعاد $3 \times 1/5 \times 0/5 \text{ mm}^3$ ، با توسعه‌ی یک اسکریپت پایتون، در محیط Abaqus/CAE به ۱۴۷۹۰ دانه تقسیم‌بندی و با المان‌های چهاروجهی خطی با ابعاد $50 \text{ }\mu\text{m}$ گسسته‌سازی شد. با استفاده از داده‌های تجربی موجود در ادبیات موضوع و در نظر گرفتن بافت مناسب برای ورق، جهت‌های بلوری برای هر بلور با اختصاص زوایای اویلر تعیین شد. سپس، آزمون کشش تک محوره با در نظر گرفتن فشار در راستای ضخامت روی حجم نماینده انجام شد. نتایج نشان داد، وجود تنش فشاری در راستای ضخامت، شکل‌پذیری ماده را بهبود می‌بخشد. در کشش تک محوره، با اعمال فشار ۷۰ MPa، کرنش محوری لحظه‌ی گلویی ۱۱/۷٪ بیشتر شده، و در نتیجه، گلویی به تاخیر می‌افتد. همچنین، نیروی مورد نیاز برای شکل‌دهی، ۱۲/۳٪ درصد کاهش یافت. در کشش دو محوره نیز آزمایش‌هایی برای حالت بدون فشار و تحت فشار انجام شد، اما به علت اشباع شدن حداکثر کرنش برشی در گام‌های ابتدایی و عدم رشد آن، پارامتر آسیب تکامل نیافت و گلویی مشاهده نشد، که نشان از نامناسب بودن مدل آسیب حداکثر کرنش برشی، برای آزمون کشش دو محوره دارد. لذا در ادامه از مدل آسیب کرنش مومسان

اصلی استفاده شد که نتایج حاکی از کاهش ۱۸٪ نیروی مورد نیاز برای شکل‌دهی در اثر اعمال فشار MPa ۷۰ بود. اما شکل‌پذیری تغییر چشمگیری نیافت.

واژگان کلیدی: روش المان محدود پلاستیسیته بلور، زیربرنامه VUMAT، آزمون کشش، شکل‌پذیری ورق فلزی، تنش در راستای ضخامت، آلیاژ آلومینیوم

مقالات مستخرج از پایان نامه /رساله

- ۱- کارگر درونکلائی. م و قادری. س. ه، مطالعه‌ی اجزاء محدود پلاستیسیته‌ی بلور رفتار گلویی ورق آلیاژ آلومینیوم تحت اثر تنش ضخامت، نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، ارسال شده و داوری نشده.

فهرست عنوان‌ها

فصل ۱ مقدمه..... ۱

۱-۱- دسته بندی مواد جامد..... ۲

۱-۲- شکل پذیری..... ۲

۱-۳- پلاستیسیته بلور..... ۴

۱-۴- خواص مواد..... ۵

۱-۵- ناپایداری نیرویی و پارگی..... ۵

۱-۵-۱- گلوئی شدن موضعی یا پارگی..... ۶

۱-۵-۲- شکست..... ۶

۱-۵-۳- چروکیدگی..... ۶

۱-۶- پیشینه تحقیق..... ۶

۱-۷- ساختار پایان نامه..... ۹

فصل ۲ تئوری..... ۱۱

۲-۱- نگاشت تغییر شکل..... ۱۱

۲-۲- گرادیان تغییر شکل..... ۱۳

۲-۳- تئوری تجزیه قطبی..... ۱۶

۲-۴- اندازه گیری های کرنش..... ۱۸

۲-۵- نرخ تغییر شکل..... ۱۹

۲-۵-۱- تفسیر فیزیکی D ۲۱

۲-۵-۲- تفسیر فیزیکی W ۲۳

۲-۶- اندازه گیری های تنش..... ۲۵

۲۹	۲-۷- اصول مکانیک محیط پیوسته
۲۹	۲-۷-۱ بقای جرم
۲۹	۲-۷-۲ تعادل اندازه حرکت خطی
۳۱	۲-۷-۳ تعادل اندازه حرکت زاویه‌ای
۳۲	۲-۷-۴ بقای انرژی
۳۳	۲-۷-۵ آنتروپی
۳۴	۲-۸- عینیت و نرخ‌ها
۳۷	۲-۹- بلور شناسی
۳۷	۲-۹-۱ شبکه بلوری
۴۰	۲-۹-۲ سیستم‌های لغزش، صفحات و جهت‌های متراکم
۴۴	۲-۹-۳ تصویر استریوگرافی
۴۵	۲-۹-۴ مختصات دکارتی و کروی

فصل ۳ مدل‌سازی ساختاری..... ۴۷

۴۷	۳-۱- سینماتیک تغییر شکل بلور
۴۹	۳-۱-۱ تجزیه F برای پلاستیسیته تک بلور
۵۱	۳-۲- محوره‌های بلوری در برابر محوره‌های عمومی
۵۳	۳-۲-۱ چرخش یک بردار واحد در طی تغییر شکل مومسان
۵۴	۳-۳- ماتریس الاستیسیته
۵۵	۳-۴- انتگرال‌گیری معادلات الاستوپلاستیک
۵۹	۳-۵- مدول مماسی مستقل از نرخ
۵۹	۳-۵-۱ الاستیسیته

۶۰	۳-۵-۲ پلاستیسیته
۶۵	۳-۶-۳ مدل آسیب و سخت‌شوندگی
۶۷	۳-۶-۱ مدل آسیب حداکثر کرنش برشی
۶۷	۳-۶-۲ اجرای عددی تکامل آسیب
۷۰	۳-۶-۳ خواص ماده
۷۱	۳-۶-۴ بررسی تحلیلی
۷۵	۳-۷-۳ تشریح مدل تحلیل
۷۵	۳-۷-۱ مدل المان محدود برای تست
۷۸	۳-۷-۲ تعیین روابط سخت‌شوندگی سیستم لغزش
۷۹	۳-۸ گردش کار زیربرنامه VUMAT

فصل ۴ نتایج و بحث..... ۸۱

۸۱	۴-۱ تعیین پارامترهای مدل آسیب
۸۴	۴-۲ شروع و تکامل آسیب
۸۸	۴-۳ بررسی اثر تنش در راستای ضخامت بر شکل‌پذیری ورق
۸۸	۴-۳-۱ نتایج برای کشش تک محوره
۹۲	۴-۳-۲ نتایج برای کشش دو محوره

فصل ۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها..... ۹۹

۹۹	۵-۱ نتیجه‌گیری
۱۰۰	۵-۲ پیشنهادها

منبع‌ها..... ۱۰۲

چکیده انگلیسی..... ۱۰۴

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱: منحنی FLD و مسیرهای بارگذاری متداول [۱] ۳
- شکل ۲-۱: پیکره‌بندی مرجع در برابر پیکره‌بندی تغییرشکل یافته ۱۲
- شکل ۲-۲: گرادیان تغییرشکل، هر نقطه محیط پیوسته را از حالت مرجع به حالت تغییرشکل یافته نگاشت می‌کند ۱۳
- شکل ۲-۳: (الف) کشش یک ذره مادی بسیار کوچک و (ب) تغییر جهت‌گیری نسبی بین دو ذره مادی بسیار کوچک ۱۴
- شکل ۲-۴: (الف) تغییر سطح بسیار کوچک و (ب) حجم بسیار کوچک [۲۲] ۱۶
- شکل ۲-۵: تجزیه قطبی F ۱۸
- شکل ۲-۶: جهت‌گیری یک بردار واحد m در پیکره‌بندی فعلی [۲۲] ۲۴
- شکل ۲-۷: بردار کششی t که بر روی یک حجم مثلثی دلخواه dV در پیکره‌بندی فعلی عمل می‌کند ۲۶
- شکل ۲-۸: حالت مرجع و حالت‌های تغییرشکل یافته قبل و بعد از ایجاد یک حرکت جسم صلب ۳۶
- شکل ۲-۹: شبکه‌های براویس [۲۲] ۳۸
- شکل ۲-۱۰: آرایش اتم‌ها در دو ساختار بلوری متداول فلزات، BCC (چپ) و FCC (راست) [۲۲] ۴۱
- شکل ۲-۱۱: سیستم‌های لغزش یک بلور (الف) BCC و (ب) FCC ۴۱
- شکل ۲-۱۲: نمونه تک بلور در معرض کشش تک‌محوری، با برجسته نشان دادن بردارهای واحد عمود و لغزش یک سیستم لغزش دلخواه ۴۴
- شکل ۲-۱۳: مختصات دکارتی x_1, x_2, x_3 و مختصات کروی r, θ, ϕ یک نقطه P [۲۲] ۴۵
- شکل ۳-۱: تجزیه ضربی گرادیان تغییرشکل [۲۲] ۵۰
- شکل ۳-۲: دستگاه مختصات بلوری موضعی $n(i)$ و دستگاه مختصات عمومی ei ۵۱
- شکل ۳-۳: منحنی تنش-کرنش یک نمونه فلزی معمولی در حالت متأثر از آسیب و بدون آسیب ۶۶
- شکل ۳-۴: منحنی اثر حساسیت به نرخ کرنش بر تنش برشی مؤلفه شده ۶۹
- شکل ۳-۵: منحنی اثر نرخ کرنش اولیه بر تنش برشی مؤلفه شده ۶۹

- شکل ۳-۶: مدل تک المان به منظور بررسی و تأیید روابط ۷۲
- شکل ۳-۷: سیستم‌های لغزش برای ماده با ساختار FCC ۷۲
- شکل ۳-۸: نتایج تحلیل برای زوایای اولیه $(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$ ۷۳
- شکل ۳-۹: نتایج تحلیل تک المان با زوایای اولیه $(0^\circ, 0^\circ, 45^\circ)$ ۷۴
- شکل ۳-۱۰: تنش معیار محاسبه شده آلیاژ AA6022-T4 ۷۵
- شکل ۳-۱۱: توصیف دامنه محاسباتی و شرایط مرزی مدل تحلیلی ۷۶
- شکل ۳-۱۲: توصیف مدل شبکه‌بندی الف) مدل کامل، ب) حالت بزرگ نمایی شده، ج) دانه الماسی شکل ۷۶
- شکل ۳-۱۳: توزیع تصادفی جهت‌گیری مدل ۷۷
- شکل ۳-۱۴: تصویر قطبی صفحات (110) و (111) آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4 ۷۸
- شکل ۳-۱۵: تأثیر توان کرنش سختی n بر استحکام سیستم لغزش ۷۹
- شکل ۳-۱۶: دیاگرام گردش کار زیربرنامه VUMAT ۷۹
- شکل ۴-۱: منحنی نیرو-جابجایی حاصل از الف) آزمایش تجربی کیم و همکارانش، ب) اندازه المان‌های متفاوت ۸۲
- شکل ۴-۲: تطابق منحنی نیرو-جابجایی حاصل از CPFEM با آزمایش تجربی کیم ۸۳
- شکل ۴-۳: مدول یانگ مدل تحلیلی ۸۴
- شکل ۴-۴: توزیع تنش در طی اعمال کشش ۸۶
- شکل ۴-۵: توزیع پارامتر آسیب (D) در طی اعمال کشش ۸۷
- شکل ۴-۶: نمایش توزیع پارامتر آسیب (D) بر روی نمودار کالیبره شده الف) $0.236 \text{ } \varepsilon g$ ، ب) $0.270 \text{ } \varepsilon g$ ۸۷
- شکل ۴-۷: توزیع نرخ کرنش در قبل و بعد از گلوئی ۸۸
- شکل ۴-۸: مقایسه منحنی نیرو-جابجایی مدل تحت فشارهای مختلف و بدون فشار ۸۹
- شکل ۴-۹: منحنی نیروی بیشینه شکل‌دهی در آزمون‌های مختلف فشار ۹۰
- شکل ۴-۱۰: منحنی کرنش گلوئی در آزمون‌های مختلف فشار ۹۰

- شکل ۴-۱۱: یک نقطه از منحنی حد شکل‌دهی ورق تحت فشارهای مختلف ۹۱
- شکل ۴-۱۲: مقایسه توزیع آسیب در آزمون بدون فشار و آزمون با اعمال فشار ۵۰ MPa ۹۱
- شکل ۴-۱۳: توصیف مدل المان محدود در آزمایش دو محوره ۹۲
- شکل ۴-۱۴: مقایسه منحنی نیرو-جابجایی در جهت طولی مدل، تحت فشار ۵۰ MPa و بدون فشار ۹۳
- شکل ۴-۱۵: مقایسه منحنی نیرو-جابجایی در جهت عرضی مدل، تحت فشار ۵۰ MPa و بدون فشار ۹۳
- شکل ۴-۱۶: توزیع پارامتر حداکثر کرنش برشی در کرنش‌های طولی متفاوت ۹۴
- شکل ۴-۱۷: توزیع پارامتر آسیب در کرنش‌های طولی متفاوت ۹۴
- شکل ۴-۱۸: مقایسه منحنی نیرو-جابجایی مدل، تحت فشارهای مختلف و بدون فشار (الف) جهت طولی، (ب) جهت عرضی ۹۶
- شکل ۴-۱۹: منحنی نیروی پیشینه شکل‌دهی در آزمون‌های مختلف فشار (الف) جهت طولی، (ب) جهت عرضی ۹۷
- شکل ۴-۲۰: منحنی کرنش گلویی در آزمون‌های مختلف فشار (الف) جهت طولی، (ب) جهت عرضی ۹۸

فهرست جدول‌ها

جدول ۲-۱: جفت‌های نرخ تنش-کرنش مزدوج با نرخ کار [۲۲].....	۲۸
جدول ۲-۲: نرخ‌های عینی یک تانسور مرتبه دوم اویلری [۲۲].....	۳۶
جدول ۲-۳: سیستم محورهای بلوری [۲۲].....	۳۹
جدول ۲-۴: سیستم لغزش بلورهای FCC.....	۴۲
جدول ۳-۱: خواص مکانیکی آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4.....	۷۱
جدول ۳-۲: ترکیب شیمیایی آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4 [۳۷].....	۷۱
جدول ۴-۱: پارامترهای مدل آسیب.....	۸۴

فهرست نشانه‌ها

N_i	جهت لاگرانژی	$\mathfrak{B}_0$	پیکره‌بندی مرجع
E	تانسور کششی	$\mathfrak{B}_t$	پیکره‌بندی تغییرشکل یافته
$\mathbf{b}$	چگالی نیروی حجمی	$\hat{\mathbf{X}}$	مختصات نقطه مادی
$\mathbf{t}$	نیروی کشش سطحی		مختصات نقطه در پیکره‌بندی
σ	تنش کوشی	$\hat{\mathbf{x}}$	تغییرشکل یافته
τ	تنش کرششف	$\hat{\mathbf{v}}$	سرعت نقطه مادی
$\mathbf{T}$	تنش نامی	$\hat{\mathbf{a}}$	شتاب نقطه مادی
$\mathbf{P}$	تنش پیولا-کرششف مرتبه اول	F_{ij}	تانسور گرادیان تغییرشکل
$\mathbf{S}$	تنش پیولا-کرششف مرتبه دوم	$\mathbf{F}$	گرادیان تغییرشکل
Σ	تنش ماندل	$\mathbf{C}$	تانسور کوشی گرین راست
$\mathbf{F}^e$	مؤلفه کشسان گرادیان تغییرشکل	$\mathbf{B}$	تانسور کوشی گرین چپ
$\mathbf{F}^p$	مؤلفه مومسان گرادیان تغییرشکل	J	دترمینان گرادیان تغییرشکل
dV	المان حجم	λ	نسبت کشش
l	اندازه حرکت خطی	$\mathbf{R}$	تانسور دوران
$\dot{l}$	نرخ اندازه حرکت خطی	$\mathbf{U}$	تانسور تغییرشکل
V	حجم	$\mathbf{V}$	تانسور تغییرشکل
$\mathbf{H}$	اندازه حرکت زاویه‌ای	λ_i	مقادیر ویژه تانسور تغییرشکل
E	انرژی کل	$\mathbf{E}^{(m)}$	کرنش لاگرانژی
$\mathbf{v}$	سرعت محیط پیوسته	$\mathbf{e}^{(m)}$	کرنش اویلری
u	انرژی درونی در واحد سطح	$\mathbf{L}$	تانسور گرادیان سرعت
K	انرژی جنبشی	∇	گرادیان
U	انرژی درونی	$\mathbf{D}$	نرخ تغییرشکل
Q	توان حرارتی	$\mathbf{W}$	تانسور دوران
$\mathbf{q}$	توان حرارتی در واحد سطح	$\mathbf{n}_i$	جهت اویلری

I	منبع انرژی جسم	بردار واحد در امتداد لغزش
R	مؤلفه حرارتی	در پیکره‌بندی جاری
r	گرمای تولید شده در واحد جرم	بردار واحد عمود بر سیستم لغزش
S	آنتروپی	در پیکره‌بندی جاری
s	آنتروپی در واحد جرم	آسیب
I_s	نرخ ورودی آنتروپی	تنش بدون آسیب
θ	درجه حرارت مطلق	حد الاستیک
ψ	انرژی آزاد هلمهولتز	تنش نهایی
h, k, l	اندیس‌های میلر	کرنش مومسان معادل در شکست
L^p	مؤلفه مومسان گرادیان سرعت	حداکثر کرنش برشی
	بردار واحد در امتداد لغزش	کرنش برشی شروع کننده آسیب
s_0^α	در پیکره‌بندی مرجع	کرنش برشی در حداکثر آسیب
	بردار واحد عمود بر سیستم لغزش	توان کنترل کننده رشد آسیب
m_0^α	در پیکره‌بندی مرجع	تنش جریان با استفاده از کرنش
$n^{(i)}$	بردارهای واحد پایه بلور	مومسان
e_i	بردارهای واحد دستگاه دکارتی	تنش جریان اصلاح شده با آسیب
C_{11}, C_{12}, C_{44}	ثوابت الاستیک ماده	$\bar{\sigma}_D(\bar{\epsilon}, D)$
$\mathcal{A}_{n+1}$	مجموعه سیستم‌های لغز فعال	تنش برشی مؤلفه شده
E^e	تانسور کرنش کشسان گرین	استحکام سیستم لغزش
	تنش کشسان مرتبه دوم	حساسیت به نرخ کرنش
S^e	پیولا-کرشهف	نرخ کرنش مرجع
D^p	نرخ تغییر شکل مومسان	کرنش انباشته
D^e	نرخ تغییر شکل کشسان	نرخ کرنش انباشته
$\mathcal{L}^e$	ماتریس کشسان سیستم بلوری	نرخ کرنش در هر سیستم لغزش
$\overline{\mathcal{L}^e}$	ماتریس کشسان سیستم عمومی	نمو آسیب
W^p	تانسور دوران مومسان	توان کرنش سختی

ε_n	کرنش گلوبی	a	ثابت مقاومت
$\varepsilon_{n,y}$	کرنش گلوبی در جهت عرضی	$\Delta\Omega$	نمو و دوران
$\varepsilon_{n,x}$	کرنش گلوبی در جهت طولی	ρ	چگالی
ε_1	کرنش مومسان اصلی	R	ضریب همستگی
$\varepsilon_{1,ini}$	کرنش مومسان اصلی شروع کننده آسیب	ε_g	اندازه کرنش
$\varepsilon_{1,max}$	کرنش مومسان اصلی در حداکثر آسیب	u	جابجایی کششی مدل
		l_0	طول اولیه مدل
		P	فشار در راستای ضخامت

فصل ۱ مقدمه

ابداع روش‌های جدید تولید و توسعه روش‌های موجود، همواره یکی از موضوعات مهم برای پژوهشگران بوده است. در بین روش‌های تولید، فرآیندهای شکل‌دهی فلزات و بهبود شکل‌پذیری آن‌ها از جایگاه ویژه‌ای برخوردار می‌باشد که در طی سال‌های اخیر پیشرفت‌های قابل توجهی در تمام زمینه‌های آن حاصل شده است.

فرآیند شکل‌دهی ورق‌های فلزی عبارت است از؛ یک تغییرشکل پلاستیک که روی ورق انجام می‌پذیرد تا یک قطعه مهندسی با شکل دلخواه تولید شود. رفتار یک ورق فلزی در یک شکل‌دهی وابسته به چند عامل می‌باشد که اهمیت هرکدام از این عوامل بستگی به فرآیند به کار گرفته شده دارد. از جمله‌ی این عوامل می‌توان به نمودار تنش-کرنش، ناهمسانگردی، ناهمگنی ورق، مسیر کرنش، ویژگی سطح ورق، حساسیت به نرخ کرنش و بافت بلوری فلز اشاره کرد.

درمقیاس وسیع، اهمیت شکل‌دهی ورق به‌خاطر در دسترس بودن تسمه‌های نورد تخت شده با کیفیت بالا و قیمت نسبتاً پایین است. اساساً، ورق فلزی در فرآیند با سرعت بالای نورد تخت کلاف‌ها، تولید می‌شود که ممکن است دارای وزن چند کیلوگرم تا چند هزارتن باشد. تغییرشکل موضعی بعدی تسمه نورد سرد شده با روش‌های فلزکاری ورق، شکل‌های بسیار کاربردی در صنایع مختلف تولید می‌کند. در ابتدا بسیاری از عملیات فلزکاری بدون دانش اولیه واقعی علم مکانیک مربوطه، تدوین شده بود. این برای اغلب عملیات

شکل‌دهی ورق صادق بود که با سعی و خطا تدوین شده و به مهارت اپراتور بستگی داشته است. درعین حال، با توسعه صنعت و تقاضای افزایش تولید سریع و موفق محصول و توسعه فرآیند، نیاز به روش‌های تحلیلی را الزامی نمود تا بتوان عملکرد مورد انتظار را پیش‌بینی کرد.

۱-۱- دسته بندی مواد جامد

در حالت کلی مواد جامد دو نوع ساختار اتمی دارند، یک دسته ساختار بلوری (کریستالی) دارند؛ یعنی آرایش اتم‌ها در ساختمان آن‌ها براساس یک نظم و الگوی تکرار شونده از واحدهایی به نام سلول واحد می‌باشد. به عبارت دیگر ساختار مواد دارای شبکه بلوری، با کنار هم قرار گرفتن تعداد بسیار زیادی از سلول‌های واحد تشکیل شده است. فلزات و آلیاژهای آن، جزء مواد با ساختار بلوری هستند. گونه دیگر مواد جامد، دارای نظم مشخصی در ساختار خود نیستند که در اصطلاح به آن‌ها آمورف گفته می‌شود؛ مانند شیشه و بسیاری از مواد سرامیکی، پلاستیک و لاستیک که به‌طور معمول دارای ساختار آمورف می‌باشند.

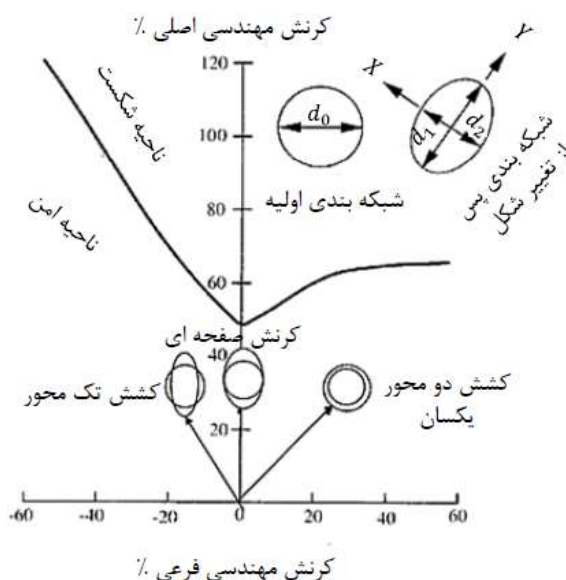
۱-۲- شکل پذیری

ورق‌های فلزی به علت استحکام بالا و شکل‌پذیری مناسب در بسیاری از صنایع از قبیل صنایع خودروسازی، لوازم خانگی، محصولات ساختمانی و صنایع نظامی کاربرد وسیعی یافته‌اند. برای استفاده از ورق‌های فلزی در مصارفی چون کشش عمیق و عملیات‌های شکل‌دهی لازم است که قابلیت شکل‌پذیری ورق مناسب باشد. عمده‌ترین محدودیت در شکل‌دادن ورق‌های فلزی، ایجاد ناپایداری و رشد ناگهانی گلوئی موضعی است که منجر به پارگی می‌شود. در واقع شکل‌پذیری ورق را می‌توان قابلیت آن برای تغییرشکل و تبدیل شدن به شکل مورد نظر بدون وقوع گلوئی موضعی یا پارگی تعریف کرد.

یکی از ابزارهای سودمند در بررسی کمی شکل‌پذیری ورق‌های فلزی، نمودار حد شکل‌دهی (FLD)^۱ می‌باشد. درواقع ورق‌ها را تا حد معینی می‌توان تغییرشکل داد که منحنی کرنش اصلی بزرگتر برحسب کرنش اصلی کوچکتر در لحظه‌ی آغاز گلوئی این حد را مشخص می‌کند. تا هنگامی که کرنش‌های اصلی پایین‌تر از منحنی حد شکل‌دهی قرار دارند، در ناحیه مذکور در ورق گلوئی و پارگی رخ نداده است،

¹ Forming limit diagrams

ولی اگر بالای آن قرار گیرند گلوبی و پارگی اتفاق می‌افتد. شکل ۱-۱ یک نمونه FLD و مسیرهای کرنش متداول در شکل‌دهی ورق را نمایش می‌دهد.



شکل ۱-۱: منحنی FLD و مسیرهای بارگذاری متداول [۱]

امروزه لزوم کاهش هزینه، بهبود عملکرد قطعات و افزایش نسبت استحکام به وزن ورق‌های فلزی سبب شده تا تحقیقات فراوانی در زمینه شکل‌پذیری ورق صورت بگیرد. در پژوهش‌های انجام شده در این زمینه، در بسیاری از تحلیل‌ها، مسئله به صورت تنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده و از تنش در راستای ضخامت صرف نظر می‌شود. در حالی که یکی از پارامترهای تاثیرگذار بر شکل‌پذیری ورق فلزی، تنش اعمال شده در راستای ضخامت ورق می‌باشد. به‌طور کلی تغییرشکلی که در فلزات مشاهده می‌شود، ناشی از لغزش صفحات بلوری رو یکدیگر است. به صفحاتی که روی یکدیگر می‌لغزند، صفحه‌ی لغزش می‌گویند. این صفحات دارای چگالی اتمی بیشتری می‌باشند. همچنین به جهتی که این صفحات بر روی یکدیگر می‌لغزند، جهت لغزش می‌گویند. روی جهت‌های لغزش چگالی اتمی بیشترین است. عامل اصلی این لغزش‌ها تنش برشی است که روی صفحه لغزش ایجاد می‌شود.

روش پلاستیسیته بلور با رویکردی میکروسکوپی می‌تواند فرآیند شکل‌گیری جریان فلز را توصیف نماید چرا که این مدل، لغزش بلوری را به عنوان عامل اصلی تغییرشکل پلاستیک در نظر می‌گیرد و می‌تواند رفتار ناهمسانگردی مومسان و تکامل آن یعنی کارسختی ناهمسانگرد را پیش‌بینی نماید. هنگامی که روش

پلاستیسته بلور در چهارچوب المان محدود به کار گرفته می‌شود به آن روش المان محدود پلاستیسته بلور (CPFEM) می‌گویند که در ادامه به تمام مفاهیم ذکر شده می‌پردازیم.

۳-۱- پلاستیسته بلور

اصول اساسی روش پلاستیسته بلور در بخش مکانیک بلور قرار می‌گیرد. در واقع در میان مکانیک جابجایی و مکانیک محیط‌های پیوسته قرار دارد و از مبانی موجود در هر کدام به‌خوبی استفاده می‌کند. ساختار اساسی این مدل جدید نیست. اشمید و باوس در کتابی با نام کریستال پلاستیسته^۱ در سال ۱۹۳۵ به بررسی مکانیک لغزش و دوقلویی در تک بلورها پرداختند. اما بیشتر مباحثی که منجر به فهم ما از رفتار مومسان چند بلورها و چگونگی ارتباط آن با رفتار مومسان تک بلور میشوند را می‌توان مدیون کارهای تیلور در سال ۱۹۳۸ دانست.

پلاستیسته بلور، تحلیلی جامع از رفتار فلزات در مقیاس مزو^۲ در سطوح بلوری و جهات لغزش ارائه داده است. فلزات ساختاری بلوری دارند و جریان مومسان فلزات محدود به صفحات بلوری و در جهات معینی رخ می‌دهد. روش پلاستیسته بلور با رویکردی میکروسکوپی سعی دارد فرآیند شکل‌گیری جریان مومسان را توصیف نماید. از جمله دلایل برتری روش پلاستیسته بلور بر روش‌های گذشته را می‌توان در ۳ مورد برشمرد؛ اول اینکه این مدل، لغزش بلوری را عامل اصلی تغییرشکل مومسان در نظر گرفته است. دوم اینکه مدل بلوری مناسبی منطبق بر فیزیک تغییرشکل ارائه داده است و سوم به دلیل بررسی جزئی‌تر رفتار فلزات در سطوح بلورها، نتایج آن دقت بیشتری نسبت به سایر مدل‌ها خواهد داشت.

به کمک روش پلاستیسته بلور امکان شبیه‌سازی کرنش سختی سامانه لغزش و گسترش تنش‌های داخلی در سرتاسر توده بلوری فراهم شده است. این مدل اجازه داده تا هر گره فازی به تعدادی اجزاء محدود تجزیه شده و قوانین تعادل برای هر بلور به صورت مجزا محاسبه شده و بر اساس آن تغییرشکل بلورها استخراج شود. در یک ماده چند بلور توده‌ای از تک بلورها وجود دارد که با اندازه و جهات کریستالی متفاوت در کنار هم قرار گرفته‌اند. در تحلیل رفتار مکانیکی یک ماده چندبلور در مقیاس میکرو، چالش‌هایی وجود

^۱ Kristalplastizitat

^۲ Meso Scale

دارد. زیرا با مدل پلاستیسیته بلور و معادلات ساختاری مربوط به تک بلورها فقط می‌توان رفتار میکرومکانیکی یک تک بلور را تعیین کرد. لذا برای تحلیل مواد چند بلور باید ارتباطی بین رفتار یک تک بلور در حالت میکرو و یک چند بلور در حالت ماکرو ایجاد کرد و سپس ماده چند بلور را تحلیل نمود.

۴-۱- خواص مواد

مهمترین معیارها در انتخاب یک ماده به عواملی از قبیل عملکرد قطعه مورد نظر، کیفیت‌هایی مانند استحکام، چگالی، سفتی و مقاومت به خوردگی وابسته است. برای مواد به شکل ورق، قابلیت شکل یافتن در یک فرآیند معین که اغلب قابلیت شکل‌پذیری نیز نامیده می‌شود، باید مدنظر قرار گیرد. برای ارزیابی قابلیت شکل‌پذیری، باید بتوان رفتار ورق را با یک روش دقیق تعریف نمود و خواص آن را در قابل ریاضی بیان کرد؛ همچنین لازم است بدانیم که چطور می‌توان از روی آزمایش‌های مکانیکی، خواص مواد را استخراج کرد.

در شکل‌دهی ورق‌های فلزی، دو رفتار وجود دارد که عبارتند از تغییر شکل کشسان و مومسان. شکل‌دهی یک ورق به یک شکل معین در واقع شامل جریان مومسان دایمی بوده و کرنش‌های ایجاد شده در ورق ممکن است بسیار بزرگ باشد. هنگامی که تنش در یک ورق وجود دارد، قطعا کرنش کشسانی هم وجود خواهد داشت. این کرنش نوعاً کوچک است و معمولاً کمتر از 0.001 می‌باشد که اغلب از آن صرف نظر می‌شود، اما می‌تواند تاثیر مهمی داشته باشد. برای مثال هنگامی که یک درب خودرو تغییر شکل یافته از روی قالب برداشته می‌شود و نیروهای شکل‌دهی باربرداری می‌شوند، تغییر شکل کشسان زیادی در آن به‌وجود می‌آید که به آن برگشت فنی گفته می‌شود.

از جمله خصوصیات از ماده که در فرآیند شکل‌دهی موثر هستند می‌توان به مواردی از قبیل شکل نمودار تنش-کرنش حقیقی، ناهمسان‌گردی، شکست، همگنی، اثرات سطحی، عیوب میکروساختاری و حساسیت به نرخ کرنش اشاره کرد.

۵-۱- ناپایداری نیرویی و پارگی

در طی عملیات شکل‌دهی در تغییر شکل مومسان ممکن است در یک لحظه خاص فرآیند به‌خاطر برخی عوامل محدود شود و یا اینکه خاتمه یابد. در ادامه به معرفی برخی از این عوامل محدود کننده می‌پردازیم.

۱-۵-۱- گلویی شدن موضعی یا پارگی

بروز هرگونه گلویی موضعی که به سرعت موجب پارگی و گسیختگی می‌شود آشکارا به پایان یافتن یک عملیات شکل‌دهی منجر می‌گردد. این حالت را می‌توان به عنوان ناپایداری موضعی در نظر گرفت که می‌تواند با در نظر گرفتن یک جزء موضعی بدون شامل کردن کل فرآیند مورد تحلیل قرار گیرد.

۱-۵-۲- شکست

ممکن است یک جزء شکل‌دهنده مومسان تقریباً تردگونه بشکند. این امر در ورق‌های مورد استفاده در شکل‌دهی که اغلب در معرض برخی ناپایداری‌های موضعی قرار می‌گیرد، رایج نیست.

۱-۵-۳- چروکیدگی

اگر یکی از تنش‌های اصلی در یک جزء فشاری باشد، ورق ممکن است کمانش کرده یا چروکیده شود. این حالت یک ناپایداری فشاری بوده و مشابه کمانش یک ستون است. پیش‌بینی این ناپایداری در ورق کار آسانی نیست.

۱-۶- پیشینه تحقیق

در زمینه تاثیر تنش در راستای ضخامت ورق بر شکل‌پذیری، تا کنون تحقیقات متعددی انجام شده است. عاصم‌پور و همکاران [۲] در سال ۲۰۱۰ مطالعه‌ای در مورد اثر تنش عمودی فشاری بر منحنی حد شکل‌دهی (FLD) به کمک معیار تسلیم هیل درجه دوم و بر مبنای مدل مارسنیاک-کوزینسکی (M-K) [۳] انجام دادند و دریافتند که در اثر افزایش تنش نرمال فشاری تا حدود ۰/۵۶ تنش تسلیم ورق AA6011، منحنی حد شکل‌دهی به اندازه ۱۹٪ رشد می‌کند و برای ورق STKM-11A با اعمال فشاری حدود ۰/۳۳ تنش تسلیم، ۲۷٪ بهبود شکل‌پذیری را گزارش کردند. آن‌ها برای بررسی نتایج، از داده‌های منتشر شده برای AA6011 و STKM-11A استفاده کردند. ما و همکارانش [۴] در سال ۲۰۱۶ در پژوهشی که در مورد اثر تنش عمودی در راستای ضخامت بر منحنی حد شکل‌دهی انجام دادند، آن‌ها با تجزیه و تحلیل تنش در آزمون ناکازیمای [۵]، رابطه‌ای بین تنش‌های اصلی در ضخامت‌های مختلف ورق پیدا کردند. آن‌ها نشان دادند که یک رابطه‌ی خطی بین ضخامت ورق و افزایش منحنی حد شکل‌دهی در حالت بارگذاری کشش-کشش وجود دارد. گوتو و همکاران [۶] در سال ۱۹۹۵ به کمک تئوری سوئیفت و معیار تسلیم هیل درجه دوم، اثر

تنش‌های برون صفحه‌ای را بر شکل‌پذیری ورق‌های فلزی بررسی و سپس مشاهده کردند که تنش فشاری سبب می‌شود تا گلوپی شدن دیرتر اتفاق بیفتد و در نتیجه شکل‌پذیری بهبود یابد. نصیری و همکاران [۷] در سال ۲۰۱۶ براساس تابع تسلیم ناهمسانگرد Yld2011 و مدل اصلاح شده M-K، نمودار حد شکل‌دهی را برای آلیاژ آلومینیوم AA3104-H19 به دست آوردند. آنها دریافتند که شکل‌پذیری، با اعمال تنش عمودی در راستای ضخامت ورق، ۳۵٪ افزایش می‌یابد. در سال ۲۰۱۴ ژانگ و همکارانش [۸] بر اساس معیار Yld2003 و مدل M-K با صرف نظر از اثر تنش هیدرواستاتیک بر تغییرشکل پلاستیک، تاثیر تنش در راستای ضخامت بر روی منحنی حد شکل‌دهی را برای آلیاژ آلومینیوم AA6111-T43 بررسی کردند و نتیجه گرفتند که با افزایش تنش در راستای ضخامت، منحنی حد شکل‌دهی بالا می‌رود. وو و همکاران [۹] در سال ۲۰۱۰ اثر فشار هیدرواستاتیک را بر شکل‌پذیری ورق‌های فلزی به روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند و در این بررسی از معیار گارسون استفاده کردند. در این پژوهش آنها مشاهده کردند افزایش فشار هیدرواستاتیک تاثیری بر شروع گلوپی ندارد اما با کنترل جوانه زنی، رشد حفره‌ها و ترک‌های ریز به طور قابل توجهی کرنش پارگی افزایش یافت. لنگ و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۱۴ اثر تنش در راستای ضخامت را طبق مدل M-K، بر روی شکل‌پذیری آلیاژ آلومینیوم 5A06 در فرآیند هیدروفرمینگ بررسی کردند و نتایجی که به دست آوردند حاکی از آن است که با افزایش دمای فرآیند و افزایش تنش در راستای ضخامت، شکل‌پذیری افزایش می‌یابد. عباسی و گردویی [۱۱] در سال ۱۳۹۳ پژوهشی در مورد ناپایداری پلاستیک تحت بارگذاری سه محوره روی یک ورق تخت فلزی به کمک تئوری گلوپی شدن پخشی سوئفت انجام دادند که در این تحقیق، اثر ناهمسانگردی پلاستیک در ورق با معیار تسلیم هیل درجه دو مورد بررسی قرار گرفت. آنها در نتایج خود متوجه شدند که شکل‌پذیری کرنش صفحه‌ای به دو پارامتر توان کارسختی و نسبت تنش عمودی وابسته بوده و با افزایش قدر مطلق نسبت تنش عمودی و توان کارسختی، منحنی حد شکل‌دهی به صورت خطی افزایش می‌یابد. آنها منحنی حد شکل‌دهی را برای ورق AA6011 در فشارهای مختلف به دست آوردند که نتایج نشان می‌دهد با افزایش تنش عمودی، سطح منحنی حد شکل‌دهی در تمام مسیرهای کرنش افزایش می‌یابد. حسین‌پور و همکاران [۱۲] اثر فشار سیال بر کشش عمیق ورق آلومینیوم ۵۰۵۲ را به کمک فرآیند هیدروفرمینگ گرم بررسی کردند و مشخص شد افزایش فشار تا یک مقدار معین باعث بهبود ضخامت فنجان تولید شده می‌شود، اگرچه نیروی سنبه برای انجام کشش عمیق افزایش پیدا کرد.

از سوی دیگر، روش پلاستیسیته بلور مورد تحقیق محققان در زمینه‌های مختلف از جمله شکل‌پذیری ورق قرار گرفته است. گاهی اوقات برای اثر بخشی محاسباتی، تجزیه و تحلیل المان محدود پلاستیسیته بلور در حالت تنش صفحه‌ای دوبعدی یا در چارچوب کرنش صفحه‌ای انجام می‌شود. با این حال، تجزیه و تحلیل دوبعدی قادر به پیش‌بینی تغییر شکل‌های سه‌بعدی از جمله برون صفحه‌ای نمی‌باشد [۱۳]. علاوه بر این، تغییر شکل موضعی پس از گلویی شدن سه بعدی می‌باشد و این تغییر شکل موضعی را نمی‌توان در تجزیه و تحلیل دوبعدی به درستی مدل‌سازی کرد [۱۴]. در سال ۲۰۱۵ کیم و یون [۱۵] امکان اینکه تمرکز تنش در یک مرزدانه (ناشی از عدم انطباق آرایش دانه‌ها) به عنوان نقص عمل کند و در نهایت سبب گلویی شدن شود را بررسی کردند. آن‌ها با پیشنهاد چندین مدل آسیب برای آلومینیوم AA6022-T4 در چارچوب CPFEM، رفتار گلویی شدن را با این روش پیش‌بینی کرده، با نتایج تجربی کرنش گلویی، شکل و جهت گلویی مقایسه کردند. حداکثر خطای شکل پیش‌بینی شده‌ی ناحیه گلویی با نتایج تجربی حدود ۲۴٪ درصد بود. وانگ و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۱ نقص‌های اولیه ارائه شده توسط مارسنیاک و کوزینسکی [۳] را برای پیش‌بینی گلویی موضعی و تشکیل FLD برای ورق آلیاژ منیزیم AZ31B، به کمک روش پلاستیسیته بلور بررسی کردند. نتایج عددی با نتایج تجربی مطابقت خوبی داشت. یون و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۰۵ رفتار سخت‌شوندگی ناهمسانگرد ورق‌های آلیاژ آلومینیومی 1050-O و 6022-T4 را به کمک روش پلاستیسیته بلور بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که بعید است جابجایی ریز ساختار تاثیر قابل توجهی بر اختلاف منحنی تنش-کرنش مشاهده شده در طول آزمون برش ساده داشته باشد. ژانگ و همکارانش [۱۸] در سال ۲۰۱۴ رفتار ناهمسانگردی ورق AA3103 را در حالت سرد و حالت آنیل شده به صورت عددی و تجربی مورد بررسی قرار دادند. در مدل تجربی، از آزمایش کشش تک محوره استفاده کردند و برای حل عددی از ۵ مدل پلاستیسیته بلوری شامل CPFEM استفاده کردند. به علاوه یک روش ترکیبی Yld2004 با CPFEM، برای پیش‌بینی ناهمسانگردی پلاستیک در ورق استفاده شد. بر اساس مقایسه بین نتایج تجربی و نتایج عددی، روش مدل‌سازی ترکیبی دقیق‌ترین روش معرفی شد. هو و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۱۶ خواص ناهمسانگردی مکانیکی آلیاژ آلومینیوم ۵۰۵۲ را در یک بس‌بلور با در نظر گرفتن اثرات نرخ کرنش و دما در تغییر شکل‌های بزرگ مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق، آن‌ها اثر حرارت و سیر تکامل آسیب را به صورت همزمان در روش CPFEM در نظر گرفتند. این مدل پلاستیسیته بلور در یک تجزیه و تحلیل تک بلور برای شرایط مختلف جهت‌گیری، درجه حرارت و نرخ کرنش پیاده‌سازی شد و در نهایت این مدل با دمای ۴۷۳ کلون در روش اجزاء محدود به کار گرفته شد. آن‌ها از مدل تیلور برای مقایسه این شبیه‌سازی با

داده‌های تجربی استفاده کرده و نشان دادند که مدل آسیب پیشنهاد شده روش پلاستیسیته بلور قادر به پیش‌بینی پاسخ مکانیکی آلیاژ آلومینیوم ۵۰۵۲ است. نزویچ و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۱۰ اثر کرنش سختی ناهمسانگرد بر رفتار دوقلویی AZ31 را به کمک روش المان محدود پلاستیسیته بلور بررسی کردند. آدزیم و همکاران [۲۱] در سال ۲۰۱۷ مدل‌های Hill1948 و Bron&Besson را با مدل CPFEM در توانایی آن‌ها برای توصیف واکنش مکانیکی ورق مسی بسیار نازک تحت مسیرهای کرنش مختلف مقایسه کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که Hill1948 نمی‌تواند به‌طور همزمان تنش و کرنش ناهمسانگرد را توصیف کند. همچنین نتایج هردو مدل Hill1948 و Bron&Besson به داده‌های تجربی در نظر گرفته شده برای کالیبراسیون بسیار حساس بوده و کیفیت پیش‌بینی این دو مدل ضعیف ارزیابی شد. در حالی که در طرف مقابل، CPFEM توصیف خوبی از تنش و کرنش ناهمسانگرد در کل مسیر دارد.

۷-۱- ساختار پایان‌نامه

کاربرد وسیع ورق‌های فلزی سبب شد که بررسی پارامترهای مؤثر بر شکل‌پذیری ورق‌های فلزی همواره در اولویت پژوهش‌های حوزه‌ی شکل‌دهی ورق قرار داشته باشد. در این میان تئوری‌های فیزیکی به سبب ویژگی‌های منحصربه‌فرد، از اهمیت بالایی برخوردار هستند. تئوری پلاستیسیته بلور از جمله‌ی این تئوری‌ها است. این تئوری با رویکردی میکروسکوپی می‌تواند فرآیند شکل‌گیری جریان فلز را توصیف نماید چرا که این مدل، لغزش بلوری را به عنوان عامل اصلی تغییر شکل پلاستیک در نظر می‌گیرد و می‌تواند رفتار ناهمسانگردی مومسان و تکامل آن یعنی کارسختی ناهمسانگرد را پیش‌بینی نماید. هنگامی که روش پلاستیسیته بلور در چهارچوب المان محدود به کار گرفته می‌شود آن را روش المان محدود پلاستیسه بلور (CPFEM) می‌گویند. با گسترش روش‌های نوین شکل‌دهی ورقی مانند هیدروفرمینگ و شکل‌دهی الکترومغناطیس، نیازمند درک بهتر از رفتار ورق فلزی تحت اثر تنش در راستای ضخامت هستیم. در سال‌های اخیر مطالعاتی در مورد اثر فشار در راستای ضخامت ورق بر روی شکل‌پذیری آن توسط محققین انجام گرفته است. به‌جز مطالعات تجربی، بیشتر مطالعات تحلیلی انجام شده بر اساس مدل نقص هندسی مانند M-K صورت پذیرفته است. همچنین، CPFEM برای مطالعه شکل‌پذیری ورق فلزی مورد توجه قرار گرفته است. این روش می‌تواند بدون در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه، ناپایداری پلاستیک در ورق را پیش‌بینی نماید.

در این پایان‌نامه اثر تنش در راستای ضخامت، بر شکل‌پذیری ورق AA6022-T4 به روش المان محدود پلاستیسیته بلور در پنج فصل مطالعه شد. در فصل اول و دوم، مبانی تئوری حوزه‌ی شکل‌پذیری و پلاستیسیته بلور به همراه تحقیقات پیشین در این زمینه بیان شد. در فصل سوم، روابط ساختاری مورد نیاز برای مدل‌سازی بیان و مدل المان محدود ساخته شد. در فصل چهارم در ابتدا، نتایج حاصل از تست کشش مدل تحلیلی با نتایج مرجع [۱۵] مقایسه و پارامترها کالیبره شد، سپس با انجام آزمایش‌هایی اثر تنش در راستای ضخامت ورق AA6022-T4، طی کشش تک محوره و دو محوره بررسی و نتایج ارائه شد. فصل پنجم، به نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای ادامه کار اختصاص دارد.

فصل ۲ تئوری

در این فصل در ابتدا به تعاریف مباحث اولیه و تئوری‌های مورد نیاز از مبحث مکانیک محیط پیوسته و همچنین روابط مربوطه پرداخته خواهد شد. سپس به کلیاتی در مورد بلورشناسی از قبیل انواع شبکه‌های بلوری، سیستم‌ها و صفحات لغزش، استریوگرافی و سیستم‌های مختصات دکارتی و کروی اشاره می‌شود.

۲-۱- نگاشت تغییر شکل

یک محیط پیوسته شامل مجموعه‌ای از بسیار نقاط مادی است. برای توصیف دقیق تغییر شکل، اندازه و جهت‌گیری محیط پیوسته، پیکره‌بندی اولیه $\mathcal{B}_0$ (پیکره‌بندی مرجع) در زمان $t_0 = 0$ تعریف می‌شود. همچنین، پیکره‌بندی تغییر شکل یافته $\mathcal{B}_t$ ، برای این محیط پیوسته در زمان دلخواه t در نظر گرفته می‌شود. مفهوم تغییر شکل به معنای هر انحراف در هندسه پیکره‌بندی نسبت به پیکره‌بندی مرجع می‌باشد. فرض می‌شود، حرکت محیط پیوسته را می‌توان با معرفی یک تابع نگاشت هموار و مشتق‌پذیر $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ توصیف کرد تا هر نقطه مادی $\hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{B}_0$ ، به یک نقطه $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_t$ در زمان t ، نگاشت شود.

بطور کلی:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t): \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_t \quad (2-1)$$

حال فرض کنید که نقاط مادی موجود را نمی‌توان از بین برد و نقاط جدید مادی را نمی‌توان به مجموعه اضافه کرد. در این حالت، نگاشت، معکوس‌پذیر و همچنین دوطرفه (دوسویی) است به این معنا که یک نقطه مادی واحد در حالت غیر تغییرشکل یافته، با یک نقطه واحد در حالت تغییرشکل یافته مطابقت دارد و بالعکس. به صورت ریاضی:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

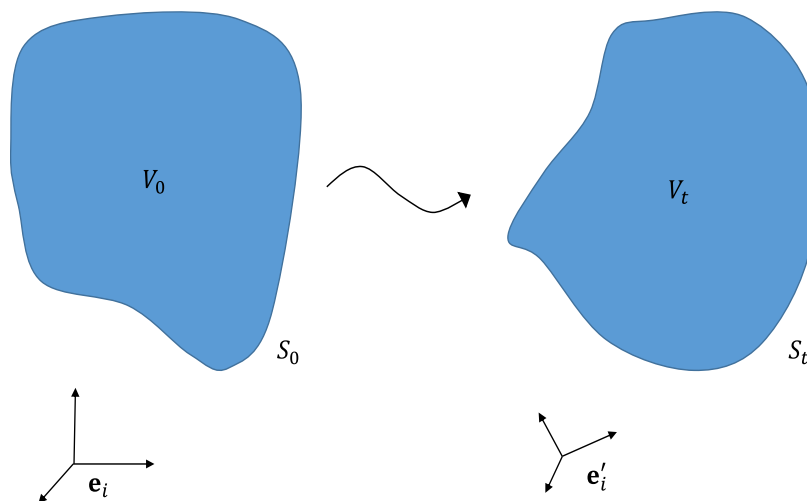
با این حال، اگر تغییر در هر دوی $\mathbf{X}$ و t حفظ شود، تعبیر فیزیکی از تابع نگاشت، دشوار است. می‌توان دو تعبیر متفاوت را با فرض تغییر در یکی از آن متغیرها در یک زمان بدست آورد، در حالی که دیگری ثابت فرض می‌شود. در نتیجه با قرار دادن یک نقطه مادی $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} = ct$ (۲-۱) می‌توان بدست آورد:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}, t) \Rightarrow \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t)$$

که در اصل معادله حرکت برای نقطه مادی $\hat{\mathbf{X}}$ را مشخص می‌کند. حال فرض می‌شود که تابع نگاشت در زمان، قابلیت دو مرتبه مشتق گرفتن را داشته باشد، حال می‌توان سرعت $\hat{\mathbf{v}}(t)$ و شتاب $\hat{\mathbf{a}}(t)$ نقطه مادی $\hat{\mathbf{X}}$ را تعریف کرد:

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt}, \quad \hat{\mathbf{a}}(t) = \frac{d^2\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt^2}$$

چنین عباراتی برای مطالعه دینامیک یک نقطه مادی مورد نظر ممکن است از اهمیت زیادی برخوردار باشد، اما توضیحات سینماتیک تغییرشکل محیط پیوسته را تسهیل نمی‌کند.



شکل ۲-۱: پیکره‌بندی مرجع در برابر پیکره‌بندی تغییرشکل یافته

۲-۲- گرادیان تغییرشکل

حال اگر تابع نگاشت در یک زمان معین $t = \hat{t}$ ارزیابی شود، آنگاه خواهیم داشت:

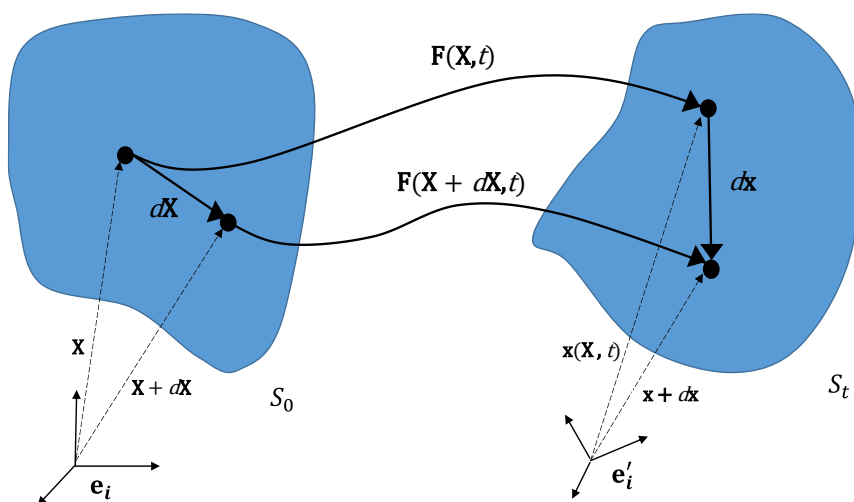
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t = \hat{t}) \Rightarrow \mathbf{x}_{\hat{t}} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad (2-2)$$

این عبارت در اصل هر نقطه مادی را از حالت مرجع $\mathfrak{B}_0$ در زمان t_0 به یک نقطه واحد در حالت فعلی (تغییرشکل یافته) $\mathfrak{B}_{\hat{t}}$ در $\hat{t}$ نگاشت می‌کند. حال فرض می‌شود یک ذره مادی $d\mathbf{X}$ از نقطه $\mathbf{X}$ در $\mathfrak{B}_0$ نشأت بگیرد. اگر بتوان این ذره مادی را در پیکره‌بندی فعلی $d\mathbf{x}$ تعیین کرد، یک درک فوری از تغییرشکل بسیار کوچک نزدیک به نقطه $\mathbf{X}$ بدست می‌آید. در اینجا با مشتق گرفتن معادله (۲-۲) نسبت به $\mathbf{X}$ و گذاشتن اندیس $\hat{t}$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) \Rightarrow d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X}$$

کمیت $\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$ یک تانسور مرتبه دوم را تعریف می‌کند که اصطلاحاً گرادیان تغییرشکل نامیده می‌شود.

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{یا} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2-3)$$



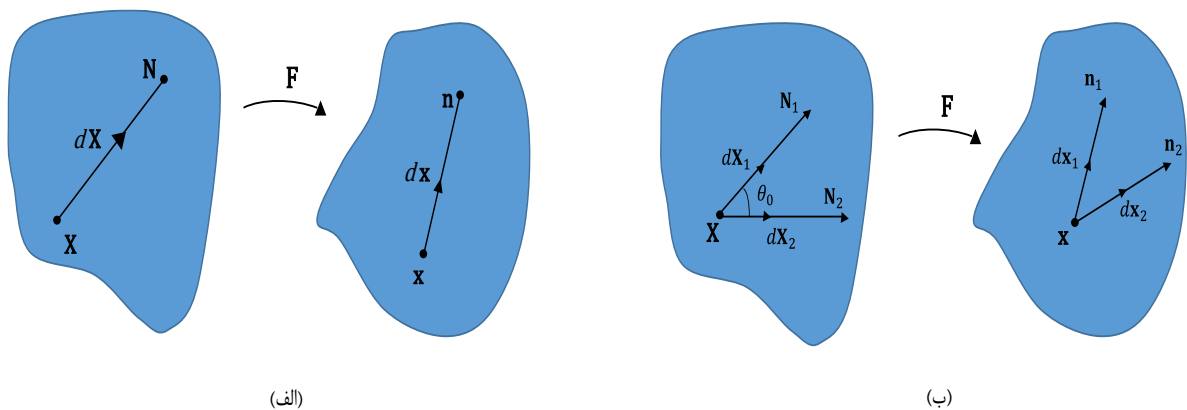
شکل ۲-۲: گرادیان تغییرشکل، هر نقطه محیط پیوسته را از حالت مرجع به حالت تغییرشکل یافته نگاشت می‌کند

گرادیان تغییرشکل یکی از مهمترین کمیت‌های تعریف شده در مکانیک محیط پیوسته است. این واقعیت که ذره‌های مادی را از پیکره‌بندی مرجع به پیکره‌بندی فعلی نگاشت می‌کند، نشان می‌دهد که $\mathbf{F}$

شامل کلیه اطلاعات مربوط به تغییر شکل نقطه‌ای است که ذره مادی از آنجا نشأت می‌گیرد. از طرف دیگر، تعریف (۳-۲) نیز می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (۲-۴)$$

گرادیان تغییر شکل از تعریف ماتریس ژاکوبین^۱ انتقال از $\mathfrak{B}_0$ به $\mathfrak{B}_t$ ناشی شده است و بنابراین کمیت‌ها را از مرجع به حالت فعلی تعیین می‌کند. از این رو تغییرات شکل، اندازه و جهت‌گیری باید از نظر $\mathbf{F}$ بیان شود. در واقع با آنالیز تانسور می‌توان نشان داد که تغییر در طول و جهت‌گیری نسبی ذره مادی و همچنین سطح و حجم تغییراتی که در محیط پیوسته وجود دارد همه توسط عباراتی بیان می‌شود که شامل گرادیان تغییر شکل $\mathbf{F}$ است.



شکل ۳-۲: الف) کشش یک ذره مادی بسیار کوچک و ب) تغییر جهت‌گیری نسبی بین دو ذره مادی بسیار کوچک

یک ذره مادی $d\mathbf{X} = ds_0 \mathbf{N}$ را در پیکره‌بندی مرجع در نظر بگیرید، که در پیکره‌بندی تغییر شکل به $d\mathbf{x} = ds \mathbf{n}$ تبدیل می‌شود. طول‌های بسیار کوچک ds_0 و ds را می‌توان به ترتیب از نظر $d\mathbf{X}$ و $d\mathbf{x}$ به صورت زیر بیان کرد:

$$ds_0^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (۲-۵)$$

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad (۲-۶)$$

¹ Jacobian

می‌توان ثابت کرد که نسبت کشش λ ذره مادی به صورت $\lambda = ds/ds_0$ تعریف شده که به صورت زیر است:

$$\lambda = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}} \quad \text{در جاییکه} \quad \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{X}}{ds_0} \quad (2-7)$$

کمیت $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ در آنالیز تغییرشکل محیط پیوسته ظاهر می‌شود و تانسور کوشی-گرین^۱ را به این صورت تعریف می‌کند:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (2-8)$$

تانسور کوشی-گرین چپ که با نماد $\mathbf{B}$ نمایش داده شده است هم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2-9)$$

زاویه در حالت تغییرشکل یافته، بین دو ذره مادی $(d\mathbf{X}_1, \mathbf{N}_1)$ و $(d\mathbf{X}_2, \mathbf{N}_2)$ (شکل ۲-۳ ب) در واقع زاویه بین بردارهای واحد جدید $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ است. کسینوس آن به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\cos(\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2) = \frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}_2}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (2-10)$$

که در آن λ_1 و λ_2 به ترتیب نسبت‌های کشش مربوط به $d\mathbf{X}_1$ و $d\mathbf{X}_2$ هستند و در (۲-۷) تعریف شده‌اند. سطح بسیار کوچک ds_0 که بردار عمود آن در حالت مرجع $\hat{\mathbf{N}}$ بود، در پیکره‌بندی تغییرشکل یافته (شکل ۲-۴ الف) مطابق فرمول نانسون^۲ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

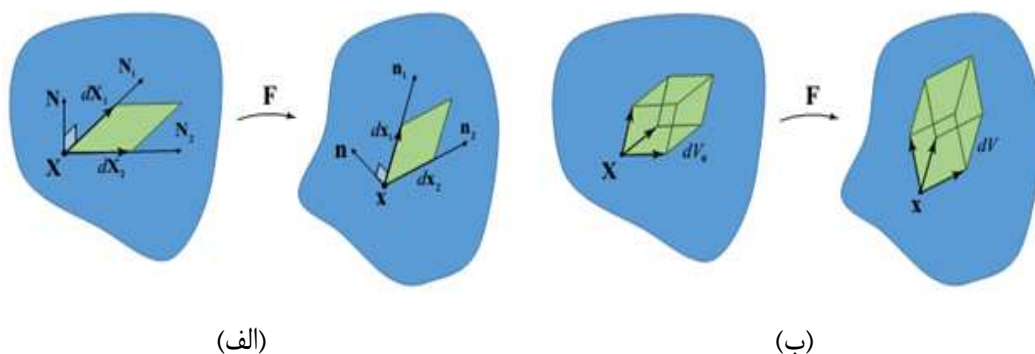
$$\frac{dS}{ds_0} = (\det \mathbf{F}) \sqrt{\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{N}}} \quad (2-11)$$

در حالی که بردار عمود جدید $\hat{\mathbf{n}}$ به صورت زیر است:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{N}}}} \cdot (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \quad (2-12)$$

¹ Cauchy-Green

² Nanson



شکل ۲-۴: الف) تغییر سطح بسیار کوچک و ب) حجم بسیار کوچک [۲۲]

این نکته باید مورد توجه قرار گیرد که تبدیل بردار عمود از $\hat{\mathbf{N}}$ به $\hat{\mathbf{n}}$ به طور کلی از ذره مادی پیروی نمی‌کند. تبدیل در (۲-۱۲) ناشی از این است که $\mathbf{n}$ در طول تمام زمان‌های تغییر شکل، عمود بر سطح بسیار کوچک باقی بماند.

سرانجام می‌توان نشان داد که حجم بسیار کوچک dV_0 طبق فرمول زیر به dV (شکل ۲-۴ ب) تبدیل می‌شود:

$$\frac{dV}{dV_0} = J = \det \mathbf{F} \quad (2-13)$$

۲-۳- تجزیه قطبی

هر تانسور معکوس پذیر مرتبه دوم را می‌توان به صورت حاصلضرب یک تانسور متقارن و یک تانسور متعامد بیان کرد. در زمینه مکانیک پیوسته، $\mathbf{F}$ می‌تواند، با یک تانسور متعامد که چرخش‌های صلب همراه با حرکت $\mathbf{F}$ را نشان می‌دهد، تجزیه شود، در حالی که تانسور متقارن تغییر شکل خالص را بیان می‌کند. به صورت ریاضی:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2-14)$$

می‌توان نشان داد که [۲۳] تانسورهای $\mathbf{U}$ ، $\mathbf{V}$ منحصربه‌فرد هستند و عبارت (۲-۱۴) تجزیه قطبی $\mathbf{F}$ را نشان می‌دهد. تانسور $\mathbf{R}$ متعامد است در حالیکه $\mathbf{U}$ ، $\mathbf{V}$ متقارن و همیشه مثبت هستند. همچنین به ترتیب به تانسورهای $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ ، تانسورهای کشش راست و چپ گفته می‌شود. متقارن و همیشه مثبت بودن $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$

نشان می‌دهد که مقادیر ویژه آنها حقیقی و مثبت هستند در حالی که بردار ویژه آنها نیز یک پایه متعامد را تعریف می‌کند. $\mathbf{N}_i$ به عنوان پایه لاگرانژی بردارهای ویژه $\mathbf{U}$ و $\mathbf{n}_i$ را به عنوان پایه اویلری بردارهای ویژه $\mathbf{V}$ در نظر گرفته می‌شود. در اینصورت تانسورهای کشش راست و چپ می‌توانند از نظر امتداد اصلی خود به صورت زیر بیان شوند:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \quad (۱۵-۲ \text{ الف})$$

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \quad (۱۵-۲ \text{ ب})$$

که در آن λ_i نمایانگر مقادیر ویژه $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ است. تانسورهای $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ می‌توانند از نظر تانسورهای کوشی-گرین راست و چپ که قبلاً آن را تعریف کردیم به صورت زیر بیان شود:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$$

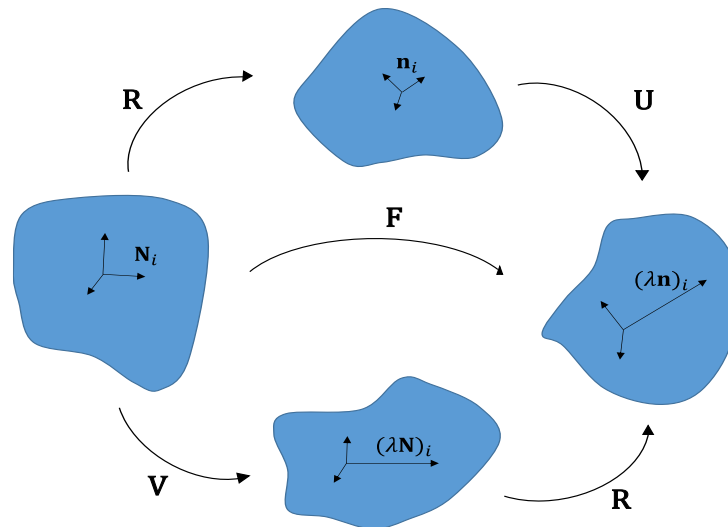
با توجه به این نکته که جذر یک تانسور مرتبه دوم فقط می‌تواند به عنوان جذر مقادیر ویژه تانسور در صورتی که تانسور از نظر دستگاه مختصات، محورهای آن با امتدادهای اصلی تانسور هم راستا باشد، ارزیابی شود. بنابراین، فرآیند تعیین جذر یک ماتریس معکوس پذیر دلخواه مستقل $\mathbf{A}$ ، همیشه شامل حل یک مسئله مقدار ویژه است. عبارت $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ به ترتیب به عنوان جذر $\mathbf{C}$ و $\mathbf{B}$ ، نشان می‌دهد که تانسورهای کوشی-گرین چپ و راست نیز می‌توانند با توجه به امتدادهای اصلی آنها بیان شوند:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i$$

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i$$

سرانجام، تانسور متعامد $\mathbf{R}$ را می‌توان از نظر $\mathbf{n}_i$ اویلری و جهت‌های $\mathbf{N}_i$ لاگرانژی به شرح زیر بیان کرد:

$$\mathbf{R} = \mathbf{nN} \quad (۱۶-۲)$$



شکل ۵-۲: تجزیه قطبی F

۴-۲- اندازه‌گیری‌های کرنش

همانطور که در بالا گفته شد، گرادیان تغییرشکل **F** حاوی هر اطلاعات مربوط به تغییرشکل برای هر نقطه مادی در محیط پیوسته است. علاوه بر این، تجزیه قطبی **F** نشان می‌دهد که می‌توان چرخش‌های صلب **F** را از بین برد و تغییرشکل خالص را از نظر تانسورهای کشش **U** و **V** بیان کرد. بنابراین تانسورهای کرنش باید با هر یک از **U** یا **V** هم محور^۱ باشند، که منجر به تعریف دو اندازه‌گیری کلی کرنش می‌شوند:

$$\mathbf{E}^{(m)} = f^{(m)}(\lambda_i) \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \quad (۱۷-۲ \text{ الف})$$

$$\mathbf{e}^{(m)} = f^{(m)}(\lambda_i) \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \quad (۱۷-۲ \text{ ب})$$

تمام اندازه‌گیری‌های کرنش به دست آمده از (۱۷-۲ الف) بعد از سه‌گان^۲ $\mathbf{N}_i$ ، به عنوان کرنش‌های لاگرانژی گفته می‌شود، درحالی‌که اندازه‌گیری‌های کرنش به دست آمده از (۱۷-۲ ب)، کرنش‌های اویلری^۳

^۱ دو تانسور دلخواه **A** و **B** اگر هم بتوانند در همان دستگاه مختصات به صورت قطری باشند، هم محور هستند. در نتیجه هم محور بودن، خاصیت

تعویض پذیری به معنای زیر است: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

^۲ triad

^۳ کرنش‌های لاگرانژی با **U** هم محور هستند، در حالی که کرنش‌های اویلری با **V** هم محور هستند.

هستند. توابع $f(\lambda_i)$ باید به گونه‌ای انتخاب شوند که برای کرنش‌های کوچک^۱، اندازه‌گیری‌های کرنش تعریف شده با تئوری کرنش بسیار کوچک، سازگار باشد. با یادآوری اینکه نسبت کشش λ به عنوان نسبت فعلی به طول اصلی ذره مادی تعریف می‌شود، نظریه کرنش بسیار کوچک نشان می‌دهد:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 = \lambda - 1 \quad (2-18)$$

حال، در ساده‌ترین حالت کرنش تک‌محوری، می‌توان $f^{(m)}(\lambda)$ را در اطراف $\lambda = 1$ (کرنش‌های کوچک) گسترش داد و نتیجه گرفت:

$$E(\lambda)|_{\lambda \rightarrow 1} = f^{(m)}(1) + \left. \frac{df^{(m)}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda \rightarrow 1} (\lambda - 1) + O((\lambda - 1)^2) \quad (2-19)$$

برای اطمینان از سازگاری گفته شده در بالا، عبارت (۲-۱۹) باید به سمت $\lambda - 1$ تقلیل یابد. این منجر به محدودیت‌های زیر برای توابع $f^{(m)}(\lambda_i)$ می‌شود:

$$f^{(m)}(1) = 0, \quad \left. \frac{df^{(m)}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda \rightarrow 1} = 1$$

در حالی که به طور همزمان $\dot{f}(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda > 0$. خانواده‌ای از کرنش‌ها که همه محدودیت‌های فوق را برآورده می‌کند به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$f^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m}(\lambda^m - 1), & m \neq 0 \\ \ln \lambda, & m = 0 \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2-20)$$

۵-۲- نرخ تغییر شکل

هنگام مطالعه دینامیک جسم در حال حرکت، علاوه بر موقعیت $\mathbf{x}(t)$ برای توصیف حرکت به سرعت آن $\mathbf{v}(t)$ هم نیاز است. به همین صورت هنگام مطالعه سینماتیک تغییر شکل در محیط پیوسته، نرخ تغییر شکل

^۱ کرنش‌های کوچک مطابق $\lambda \cong 1$ یا معادل $\lambda - 1 \cong 0$ هستند.

در جسم جدا از تغییرشکل خود $\mathbf{F}$ تعیین می‌شود. برای شروع در ابتدا میدان سرعت که مطابق با حرکت $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X}), t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2-21)$$

با دنبال کردن همین منطق در بخش‌های بعدی مشاهده می‌شود که برای یک زمان معین t ، میدان سرعت $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ تابعی از $\mathbf{x}$ است. ازینرو تغییرات یک میدان سرعت $d\mathbf{v}$ در یک همسایگی به اندازه $d\mathbf{x}$ در اطراف نقطه $\mathbf{x}$ مورد بررسی قرار می‌گیرد، لذا:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}), t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X}), t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} \quad (2-22)$$

رابطه فوق منجر به تعریف تانسور گرادیان سرعت به شرح زیر می‌شود:

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (2-23)$$

و عبارت (۲-۲۲) قابل بازنویسی به صورت زیر است:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (2-24)$$

حال با یادآوری رابطه $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$ که پیشتر در بخش (۲-۴) ذکر شد و با توجه به اینکه $d\mathbf{v} = d\dot{\mathbf{x}}$ و به طور کلی $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ می‌توان نوشت:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(d\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} \Rightarrow d\mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}$$

با:

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (2-25)$$

عبارات (۲-۲۳) و (۲-۲۵) به وضوح بیان می‌کنند که تانسور گرادیان سرعت می‌تواند به صورت متناوب از نظر گرادیان تغییرشکل به صورت زیر بیان شود:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2-26)$$

همانطور که می‌دانید هر تانسور مرتبه دوم را می‌توان به صورت مجموع یک تانسور متقارن و یک تانسور پاد متقارن بیان کرد. نرخ تغییر شکل $\mathbf{D}$ به عنوان قسمت متقارن $\mathbf{L}$ تعریف می‌شود، در حالیکه قسمت پاد متقارن $\mathbf{W}$ ، تانسور دوران را تعریف می‌کند. به صورت ریاضی:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2-27)$$

$$\mathbf{D} = \text{symm}(\mathbf{L}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (2-28)$$

$$\mathbf{W} = \text{skew}(\mathbf{L}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \Rightarrow \mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (2-29)$$

۱-۵-۲- تفسیر فیزیکی $\mathbf{D}$

با بررسی مجدد ذره مادی $d\mathbf{X} = ds_0 \mathbf{N}$ در پیکره‌بندی مرجع، که در پیکره‌بندی تغییر شکل یافته به $d\mathbf{x} = ds \mathbf{n}$ تبدیل می‌شود و طول نامحدود ds_0 و ds به ترتیب توسط عبارات (۲-۵) و (۲-۶) ارائه می‌شود. برای تعیین نرخ تغییر طول بسیار کوچک ds ، از (۲-۶) با توجه به t به صورت زیر مشتق گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(ds^2) = \frac{\partial}{\partial t}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}) \Rightarrow 2ds \frac{\partial}{\partial t}(ds) = \frac{\partial}{\partial t}(d\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(d\mathbf{x}) \Rightarrow$$

$$2ds \frac{\partial}{\partial t}(ds) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}^T \cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{x} \cdot \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \Rightarrow 2ds \frac{\partial}{\partial t}(ds) = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \cdot d\mathbf{x}$$

$$2ds \frac{\partial}{\partial t}(ds) = 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x} \Rightarrow \frac{ds}{ds^2} \frac{\partial}{\partial t}(ds) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds}$$

$$\frac{1}{ds} \frac{\partial}{\partial t}(ds) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \quad (2-30)$$

معادله (۲-۳۰) نشان می‌دهد که مؤلفه‌های مستقیم $\mathbf{D}$ ، (D_{nn}) ، نرخ انبساط در واحد طول یک ذره مادی را نشان می‌دهند که در پیکره‌بندی فعلی، برای لحظاتی هم راستا با امتداد $\mathbf{n}$ قرار می‌گیرد.

قبل از شروع تفسیر فیزیکی مؤلفه‌های برشی $\mathbf{D}$ ، ابتدا باید نرخ تغییر یک بردار واحد $\mathbf{m}$ را که به یک ذره مادی $d\mathbf{x} = d\mathbf{s}\mathbf{m}$ متصل شده است، تعریف شود. از این رو، با استفاده از معادله (۳۰-۱) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{m}} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \frac{1}{ds} \frac{\partial}{\partial t} (d\mathbf{x}) - \frac{d\mathbf{x}}{ds^2} \frac{\partial}{\partial t} (ds) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) = \\ &= (\mathbf{W} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) = \mathbf{W} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) = \\ &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \underbrace{\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}}_1 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) = (\mathbf{W} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} - \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D}) \cdot \mathbf{m}\end{aligned}$$

عبارت بالا نشان می‌دهد که نرخ $\dot{\mathbf{m}}$ یک بردار واحد $\mathbf{m}$ که به یک ذره مادی متصل است می‌تواند به شرح زیر بیان شود:

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{W}^{\mathbf{m}} \quad (2-31)$$

جایی که:

$$\mathbf{W}^{\mathbf{m}} = \mathbf{W} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} - \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \quad (2-32)$$

حال دو بردار واحد دلخواه $\mathbf{n}$ و $\mathbf{m}$ را که به ذره‌های مادی $d\mathbf{x}_1$ و $d\mathbf{x}_2$ در موقعیت جاری متصل شده‌اند را در نظر بگیرید، که در مقطع $\mathbf{x}$ همانطور که در شکل ۲-۳ ب، نشان داده شده است یکدیگر را قطع می‌کنند. با یادآوری این نکته که کسینوس زاویه θ بین $d\mathbf{x}_1$ و $d\mathbf{x}_2$ را می‌توان به عنوان حاصلضرب داخلی بین $\mathbf{n}$ و $\mathbf{m}$ بیان کرد، خواهیم داشت:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \cos \theta \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) \quad (2-33)$$

حال با بررسی مشتق $\partial(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})/\partial t$ را بر حسب $\mathbf{D}$ ، نرخ تغییر جهت‌گیری نسبی بین این ذره‌های دلخواه را تعیین می‌شود.

$$(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) \cdot = \dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{n}} \xrightarrow{(31-2)} -\mathbf{m} \cdot \mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{W}^{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} =$$

$$= \mathbf{m} \cdot (\mathbf{W}^{\mathbf{n}} - \mathbf{W}^{\mathbf{m}}) \cdot \mathbf{n} \xrightarrow{(32-2)} \mathbf{m} \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} - \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} + \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D}) \cdot \mathbf{n} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} - \cos \theta (D_{nn} + D_{mm}) + \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \\
 &= 2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} - \cos \theta (D_{nn} + D_{mm}) \quad (۲-۳۴)
 \end{aligned}$$

و با جایگذاری کردن (۳۴-۲) در (۳۳-۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\sin \theta} [(D_{mm} + D_{nn}) \cos \theta - 2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}] \quad (۲-۳۵)$$

تفسیر عبارت (۳۵-۲) در این حالت کلی نسبتاً دشوار است، بنابراین عبارت $\mathbf{m} = \mathbf{e}_1$ و $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$ در نظر گرفته می‌شود که $\cos \theta = 0$ و $\sin \theta = 1$ می‌باشد، سپس خواهیم داشت:

$$\dot{\theta} = -2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_2 = -2 D_{12} \Rightarrow D_{12} = -\frac{1}{2} \dot{\theta}$$

حال این نتیجه نشان می‌دهد که مؤلفه‌های برشی $\mathbf{D}$ ، (D_{ij}) ، نرخ کاهش زاویه بین یک جفت ذره مادی را بیان می‌کنند که در پیکره‌بندی فعلی در مقطع $\mathbf{x}$ قرار دارند و برای لحظاتی با امتدادهای $\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{e}_j$ هم راستا می‌شوند.^۱ مورد بعدی نیز دلالت بر این دارد که نرخ تغییر جهت‌گیری نسبی ذره‌های مادی که در حالت فعلی برای لحظاتی با امتدادهای اصلی $\mathbf{D}$ هم راستا هستند، صفر است.

با نتیجه‌گیری از این بحث با توجه به تفسیر فیزیکی $\mathbf{D}$ ، جالب است در نظر بگیرید که حتی اگر مؤلفه‌های $\mathbf{D}$ بتوانند نرخ تغییر شکل را بطور بسیار کوچک نزدیک به نقطه مورد نظر بیان کنند، هیچ گونه تانسور کششی $\mathbf{E}$ وجود ندارد که $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D}$ باشد.

۲-۵-۲- تفسیر فیزیکی $\mathbf{W}$

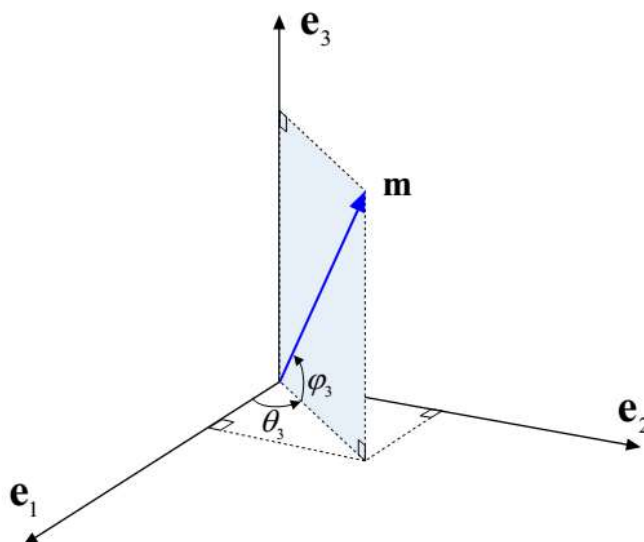
با یادآوری معادلات (۳۱-۲) و (۳۲-۲) که برای تعریف نرخ تغییر بردار واحد دلخواه $\mathbf{m}$ مورد استفاده قرار گرفت. در مورد خاص در جایی که بردار واحد $\mathbf{m}$ در امتداد ذره مادی است، برای لحظاتی با یکی از امتدادهای اصلی $\mathbf{D}$ ^۲ هم راستا می‌شود، معادله (۳۲-۲) نشان می‌دهد که $\mathbf{W}^m = \mathbf{W}$. این بدان معنی است که تانسور دوران $\mathbf{W}$ را می‌توان به عنوان دوران ذره مادی که بلافاصله با امتدادهای اصلی $\mathbf{D}$ منطبق

^۱ و بنابراین عمود بر یکدیگر هستند.

^۲ امتدادهای اصلی $\mathbf{D}$ به طور کلی با ذره‌های مادی مختلف در زمان‌های مختلف هم راستا می‌شوند.

می‌شوند، در نظر گرفت. با این حال با توجه به تحقیقات آراواس^۱ و آیفنتیس^۲ [۲۴]، میتوان تفسیر فیزیکی جالب دیگری از $\mathbf{W}$ بدست آورد. از آنجا که $\mathbf{W}$ از تعریف یک تانسور پادمتقارن ناشی می‌شود، می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{W} = w_3(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + w_1(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) + w_2(-\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)$$



شکل ۲-۶: جهت‌گیری یک بردار واحد $\mathbf{m}$ در پیکره‌بندی فعلی [۲۲]

که $\mathbf{e}_i$ بردارهای واحد در امتداد محورهای مختصات هستند. همچنین بردار واحد دلخواه $\mathbf{m}$ که در شکل ۲-۶ نشان داده شده است به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{m} = \cos \theta_3 \cos \phi_3 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_3 \cos \phi_3 \mathbf{e}_2 + \sin \phi_3 \mathbf{e}_3$$

و نرخ تغییر θ_3 را می‌توان به صورت زیر یافت:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_3 = w_3 + \tan \phi_3 (-w_2 \sin \theta_3 + w_1 \cos \theta_3) + \frac{1}{2} (D_{22} - D_{11}) \sin 2\theta_3 \\ + D_{12} \cos 2\theta_3 + \tan \phi_3 (-D_{13} \sin \theta_3 + D_{23} \cos \theta_3) \end{aligned} \quad (2-36)$$

میانگین نرخ چرخش موضعی در محور x_3 به صورت زیر تعریف شده است:

¹ Aravas

² Aifantis

$$\langle \dot{\theta}_3 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \dot{\theta}_3 d\theta_3 d\phi \quad (2-37)$$

که وقتی با (۲-۳۶) ترکیب شود به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$\langle \dot{\theta}_3 \rangle = w_3 \quad (2-38)$$

به طور مشابه، با توجه به چرخش‌های مربوط به محورهای x_1 و x_2 ، می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\langle \dot{\theta}_1 \rangle = w_1 \quad (2-39)$$

$$\langle \dot{\theta}_2 \rangle = w_2 \quad (2-40)$$

معادلات (۲-۳۸ تا ۲-۴۰) نشان می‌دهد که تانسور دوران $\mathbf{W}$ ، میانگین دوران تمام امتدادهای اطراف یک نقطه مادی است.

۲-۶- اندازه‌گیری‌های تنش

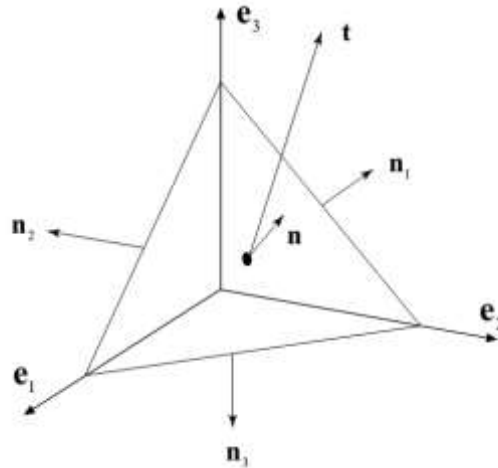
در اکثر مسائل مکانیک محیط پیوسته، عمدتاً دو نوع نیرو در نظر گرفته می‌شود [۲۳]، نیروهای حجمی^۱ و نیروهای کشش سطحی. نیروهای حجمی به عنوان چگالی نیرو تعریف می‌شوند، به این معنی که چگالی نیروی حجمی $\mathbf{b}$ که بر روی یک جزء حجمی dV عمل می‌کند منجر به ایجاد یک نیروی $\mathbf{b}dV$ می‌شود. از طرف دیگر کشش سطحی به طور منطقی به عنوان نیرویی تعریف می‌شود که در واحد سطح حجم عمل می‌کند و با عنوان $\mathbf{t}$ مشخص می‌شود. به منظور توصیف کامل کشش سطحی، لازم است بردار عمود $\mathbf{n}$ را در عنصر سطحی که در $\mathbf{t}$ آن عمل می‌کند، قرار داد.

چهار وجهی که در شکل ۲-۷ در پیکره‌بندی فعلی، به عنوان چهار وجهی کوشی شناخته شده است را در نظر بگیرید. $\mathbf{n}_i$ ، عمودهای واحد به سه وجه از چهار وجهی در امتداد جهت $\mathbf{e}_i$ می‌باشد. چهاروجهی حجم dV را اشغال می‌کند، در حالی که وجه‌هایی با عمودهای $\mathbf{n}_i$ ، به ترتیب دارای مساحت سطح dA_i هستند. سرانجام، مساحت سطح وجه مورب dA و عمود واحد مربوط به آن به صورت $\mathbf{n}$ مشخص می‌شود.

^۱ نمونه‌های شاخص نیروی حجمی می‌تواند نیروهای گرانشی، نیروهای الکترواستاتیک، نیروهای مغناطیسی و غیره باشد.

اکنون نیروهای کششی $\mathbf{t}_i$ که بر روی سطوح dA_i با توجه به سیستم مختصات $\mathbf{e}_i$ عمل میکنند را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{t}_i = \sigma_{i1}\mathbf{e}_1 + \sigma_{i2}\mathbf{e}_2 + \sigma_{i3}\mathbf{e}_3 = \sigma_{ij}\mathbf{e}_j \quad (۲-۴۱)$$



شکل ۲-۷: بردار کششی $\mathbf{t}$ که بر روی یک حجم مثلثی دلخواه dV در پیکره‌بندی فعلی عمل می‌کند

با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن در چهار وجهی، می‌توان نوشت:

$$\sum \mathbf{F} = \rho \mathbf{a} dV \Rightarrow \mathbf{t} dA - \mathbf{t}_i dA_i + \rho \mathbf{b} dV = \rho \mathbf{a} dV \Rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}_i \underbrace{\frac{dA_i}{dA}}_{\mathbf{n}_i} + \rho(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \underbrace{\frac{dV}{dA}}_{\frac{1}{3}h}$$

جایی که h ارتفاع چهار وجهی یا کوتاه‌ترین فاصله بین وجه مایل و مبدأ است. در مورد حد $h \rightarrow 0$

معادله فوق را می‌توان به صورت زیر تنظیم کرد:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_i \mathbf{n}_i \Rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \overbrace{\mathbf{e}_i \sigma_{ij} \mathbf{e}_j}^{\boldsymbol{\sigma}} \Rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (۲-۴۲)$$

معادله (۲-۴۲) نشان می‌دهد که هر بردار کششی که بر روی هر سطح بسیار کوچک دلخواه محیط

پیوسته عمل کند، می‌تواند از لحاظ کمیت‌های σ_{ij} بیان شود و منجر به تعریف تنش کوشی شود:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (۲-۴۳)$$

مؤلفه σ_{ij} ، مؤلفه j ام نیرو در واحد سطح در پیکره‌بندی فعلی، روی یک عنصر سطح پیکره‌بندی فعلی که عمود آن در امتداد i است، را بیان می‌کند. ما همچنین تنش کرشهف^۱ را در پیکره‌بندی فعلی از σ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau = J \sigma \quad (2-44)$$

تانسور تنش کرشهف τ به طور گسترده‌ای در الگوریتم‌های عددی برای پلاستیسیته فلزی مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا تغییرشکل مومسان فلزات رایج، فرآیندی با حجم ثابت است. هر دو تنش کوشی و کرشهف در حالت فعلی و همچنین برای اندازه‌گیری نیرو در هر واحد سطح تغییرشکل یافته، تعریف شده‌اند. عمود واحد n یک عنصر سطحی در حالت فعلی، با تغییرشکل دائماً در حال تغییر است که تعیین آن دشوار است. در مقابل، عمود واحد N یک عنصر سطحی در حالت مرجع است که تعیین آن آسان‌تر است، زیرا هندسه بدون تغییرشکل آن شناخته شده است. این امر موجب تعریف تنش نامی σ به صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{T} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma \quad (2-45)$$

در این حالت مؤلفه T_{ij} ، مؤلفه j ام نیروی در واحد سطح را در پیکره‌بندی مرجع، بر روی یک عنصر سطحی از پیکره‌بندی فعلی که عمود آن در امتداد i در حالت بدون تغییرشکل بود، بیان می‌کند.

تنش نامی از طریق تنش کوشی با بیان عمود واحد n بر حسب N حاصل می‌شود که می‌توان با بکارگیری معادلات (۲-۱۱ و ۲-۱۲) بدست آورد. توجه داشته باشید که تنش نامی متقارن نمی‌باشد چرا که $\mathbf{F}$ متقارن نیست. همچنین تنش پیولا-کرشهف^۲ مرتبه اول به عنوان ترانهاد تنش نامی به صورت تعریف می‌شود:

$$\mathbf{P} = J \sigma^T \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{T}^T \quad (2-46)$$

تنش پیولا-کرشهف مرتبه دوم در پیکره‌بندی مرجع تعریف شده و از نظر تنش کرشهف و کوشی به صورت زیر بیان شده است:

¹ Kirchhoff

² Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2-47)$$

تنش ماندل^۱ در الاستوپلاستیسیته تغییرشکل محدود که در آن گرادیان تغییرشکل $\mathbf{F}$ به یک مؤلفه الاستیک $\mathbf{F}^e$ و یک مؤلفه پلاستیک $\mathbf{F}^p$ تجزیه می‌شود، به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{S}^e \quad (2-48)$$

جایی که $\mathbf{C}^e$ تانسور راست کوشی-گرین مربوط به $\mathbf{F}^e$ و $\mathbf{S}^e$ تنش الاستیک پیولا-کرشلف مرتبه دوم است.

دلیل تعریف همه این اندازه‌گیری‌های تنش و کرنش در این فرضیه اصلی نهفته است که حالت‌های مرجع و فعلی ممکن است به طور کلی متفاوت باشند. با این حال، انتخاب تنش و کرنش برای کاربردهای مهندسی یک فرآیند دلخواه نیست. تنش‌ها و کرنش‌ها باید به صورت جفتی انتخاب شوند که به صورت مزدوج در جهت کار هستند، به این معنا که حاصلضرب نرخ تنش و کرنش باید نوعی کار مجازی را بیان کند. جدول ۱-۲ برخی از جفت‌های نرخ تنش-کرنش مزدوج در جهت کار را که معمولاً در کتابشناسی با آنها روبرو می‌شویم، خلاصه می‌کند [۲۲].

جدول ۱-۲: جفت‌های نرخ تنش-کرنش مزدوج با نرخ کار [۲۲]

تنش	نرخ کرنش	نرخ کار
$\boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{D}$	$\sigma_{ij} D_{ij}$
$\boldsymbol{\tau}$	$\mathbf{D}$	$\tau_{ij} D_{ij}$
$\mathbf{T}$	$\dot{\mathbf{F}}$	$T_{ij} \dot{F}_{ij}$
$\mathbf{P}$	$\dot{\mathbf{F}}^T$	$P_{ij} \dot{F}_{ji}$
$\mathbf{S}$	$\dot{\mathbf{E}}^G$	$S_{ij} \dot{E}_{ij}^G$
$\boldsymbol{\Sigma}$	$\dot{\mathbf{E}}^G$	$\Sigma_{ij} \dot{E}_{ij}^G$

¹ Mandel

۲-۷- اصول مکانیک محیط پیوسته

۲-۷-۱- بقای جرم

جرم کلی هر المان حجم dV در یک جسم تغییرشکل پذیر باید حفظ شود. این گفته اولین اصل مکانیک محیط پیوسته است و می تواند به صورت انتگرالی زیر بیان شود:

$$\dot{m} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad \forall V \Rightarrow \int_V \rho dV = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 \quad \forall V \Rightarrow \int_V \rho dV = \int_{V_0} \frac{\rho_0}{J} dV \quad \forall V \Rightarrow$$

$$\int_V \left(\rho - \frac{\rho_0}{J} \right) dV = 0 \quad \forall V \Rightarrow \rho J = \rho_0 \quad (2-49)$$

که $J = \det \mathbf{F}$ این نتیجه نشان می دهد که جرم مخصوص یک محیط پیوسته محدود است، به این معنا که حاصلضرب ρJ باید در تمامی زمان ها در محیط پیوسته در طی تغییرشکل، ثابت باشد. علاوه بر این، می توان فرم نرخ (۲-۴۹) را به صورت زیر بدست آورد:

$$\frac{d}{dt} (\rho J) = \frac{d}{dt} (\rho_0) \Rightarrow \dot{\rho} J + \rho \dot{J} = 0 \quad (2-50)$$

اما توجه کنید که

$$\dot{J} = J L_{kk} = J D_{kk} = J v_{k,k} = J \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2-51)$$

بنابراین، با ترکیب (۲-۵۰) و (۲-۵۱) داریم:

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2-52)$$

که معادله پیوستگی را تعریف می کند.

۲-۷-۲- تعادل اندازه حرکت خطی

اندازه حرکت خطی $\mathbf{l}$ یک محیط پیوسته تغییرشکل پذیر که حجم V را اشغال می کند به شرح زیر است:

$$\mathbf{l} = \int_V \rho \mathbf{v} dV \quad (2-53)$$

و نرخ اندازه حرکت خطی، که به صورت $\dot{\mathbf{l}}$ است، می‌تواند مستقیماً از (۲-۵۳) با استفاده از تئوری انتقال رینولد^۱ حاصل شود:

$$\dot{\mathbf{l}} = \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{a} dV \quad (2-54)$$

نیروهای کلی $\Sigma \mathbf{F}$ که در المان حجم دلخواه V یک محیط پیوسته عمل می‌کنند، به طور کلی به صورت مجموع نیروهای جسمی و بارهای سطحی بیان می‌شود:

$$\Sigma \mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS \quad (2-55)$$

اصل تعادل اندازه حرکت خطی خواستار آن است که نیروهای کلی که بر روی هر المان حجم V جسم عمل می‌کنند باید با نرخ اندازه حرکت خطی آن المان حجم برابر باشند. مورد دوم به شرح زیر است:

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{l}} \quad \forall V \quad (2-56)$$

با جایگذاری (۲-۵۴) و (۲-۵۵) در (۲-۵۶) و انجام محاسبات جبری معادله زیر بدست می‌آید:

$$\int_V (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \rho \mathbf{b} - \rho \mathbf{a}) dV \quad \forall V \Rightarrow$$

از آنجا که معادله فوق باید برای هر المان حجم V در محیط پیوسته برقرار باشد، می‌توان از قضیه موضعی سازی استفاده کرد:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (2-57)$$

عبارت (۲-۵۷) به معادلات تعادلی گفته می‌شود که همراه با سینماتیک و معادلات ساختاری، معادلات مقدار مرزی (BVP)^۲ را تشکیل می‌دهند.

¹ Reynold

² Boundary Value Problem

۳-۷-۲- تعادل اندازه حرکت زاویه‌ای

اندازه حرکت زاویه‌ای $\mathbf{H}$ جسم تغییرشکل پذیر پیوسته، که حجم V را اشغال می‌کند به صورت زیر است:

$$\mathbf{H} = \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV \quad (۲-۵۸)$$

که $\mathbf{r}$ نشان دهنده بردار نقطه مادی است. مجدداً، با استفاده از تئوری انتقال رینولد، نرخ اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{\mathbf{H}} = \int_V \rho (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) dV = \int_V \rho (\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a}) dV = \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{a} dV \quad (۲-۵۹)$$

مجموع ممان‌هایی که در یک المان حجم V محیط پیوسته عمل می‌کنند به طور کلی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\Sigma \mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS \quad (۲-۶۰)$$

اصل بقای اندازه حرکت زاویه‌ای ایجاب می‌کند تا مجموع ممان‌ها در هر المان حجم در محیط پیوسته تغییرشکل پذیر، برابر با نرخ اندازه حرکت زاویه‌ای آن المان حجم باشد که به شرح زیر است:

$$\dot{\mathbf{H}} = \Sigma \mathbf{M} \quad \forall V \quad (۲-۶۱)$$

با جایگذاری (۲-۵۹) و (۲-۶۰) در (۲-۶۱) و انجام محاسبات جبری^۱ در نهایت نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (۲-۶۲)$$

با محاسبه عبارت^۲ فوق برای ۳ و ۳۱ داریم:

^۱ قضیه واگرایی نیز برای تبدیل انتگرال‌های سطحی به انتگرال‌های حجمی مورد نیاز است.

^۲ توجه داشته باشید که عبارت (۲-۶۲) در اصل ۳ معادله است زیرا i یک اندیس آزاد است.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2-63)$$

که نشان می‌دهد تانسور تنش کوشی $\boldsymbol{\sigma}$ متقارن است.

۴-۷-۲- بقای انرژی

با فرض اینکه محیط پیوسته فقط پدیده‌های مکانیکی و حرارتی^۱ را متحمل می‌شود، می‌توان انرژی کل را به صورت مجموع انرژی‌های جنبشی و درونی آن به شرح زیر بیان کرد:

$$E = K + U = \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \rho u dV \quad (2-64)$$

که $\mathbf{v}$ نشان دهنده میدان سرعت محیط پیوسته است و u نشانگر انرژی درونی جسم در واحد سطح است. اکنون منبع انرژی جسم می‌تواند به عنوان مجموع یک مؤلفه حرارتی، یک مؤلفه شار گرمایی سطحی و یک مؤلفه به دلیل وجود نیروهای خارجی، به صورت زیر بیان شود:

$$I = R + Q + P = \int_V \rho r dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS \quad (2-65)$$

که r گرمای تولید شده در واحد جرم و $\mathbf{q}$ توان حرارتی در هر واحد سطح است. بقای اصل انرژی ایجاب می‌کند که منبع انرژی جسم باید برابر با نرخ انرژی کلی در جسم باشد که می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$I = \dot{E} \quad \forall V \quad (2-66)$$

با جایگذاری $\dot{E}$ و I از (۲-۶۴ و ۲-۶۵) و انجام محاسبات جبری^۳، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2-67)$$

^۱ این فرض را می‌توان با فرض پدیده‌های دیگر (یعنی الکترواستاتیک، مغناطیسی و غیره) نیز بیان کرد. اما در این بخش به خاطر سادگی فقط پدیده‌های مکانیکی و حرارتی در محیط پیوسته فرض می‌شوند.

^۲ تئوری انتقال رینولد برای بررسی $\dot{E}$ از E مورد نیاز است.

^۳ قضیه واگرایی نیز برای تبدیل انتگرال‌های سطحی به انتگرال‌های حجمی مورد نیاز است.

۵-۷-۲- آنتروپی

آنتروپی S برابر سطح زیر ناحیه V در محیط پیوسته است که به شرح زیر است:

$$S = \int_V \rho s dV \quad (2-68)$$

که s آنتروپی در واحد جرم است. سپس نرخ ورودی آنتروپی I_s را در المان حجم V ، به صورت مجموع دو مؤلفه اصلی؛ یک مؤلفه تولید حرارت و یک مؤلفه شار گرمای سطحی، تعریف می‌شود:

$$I_s = \int_V \frac{\rho r}{\theta} dV - \int_S \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2-69)$$

که در آن θ درجه حرارت مطلق است. قانون دوم ترمودینامیک ایجاب می‌کند که نرخ آنتروپی همیشه باید بیشتر یا مساوی^۱ نرخ ورودی آنتروپی در هر المان حجم V محیط پیوسته باشد. به صورت ریاضی داریم:

$$\dot{S} \geq I_s \quad \forall V \quad (2-70)$$

این نامساوی می‌تواند به صورت زیر دوباره بیان شود:

$$\dot{s} \geq \frac{r}{\theta} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \quad (2-71)$$

به محدودیت فوق، نامساوی کلازیوس-دوهم^۲ نیز گفته می‌شود. از تعادل انرژی موجود در (۲-۶۷) عبارت زیر را می‌توان بدست آورد:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta - \rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) \geq 0 \quad (2-72)$$

جایی که ψ انرژی آزاد هلمهولتز^۱ به صورت $\psi = u - s\theta$ تعریف شده است. نامساوی کلازیوس-دوهم از اهمیت بسیاری در توسعه یک مدل ساختاری خاص، با ارائه محدودیت‌هایی برای توابع ساختاری مورد استفاده و همچنین متغیرهای وابسته به آنها، برخوردار است.

^۱ مساوی فقط در فرآیندهای برگشت پذیر صورت می‌گیرد.

^۲ Clausius-Duhem

۸-۲- عینیت و نرخ‌ها

حرکت $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ را با گرادیان تغییرشکل $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ در نظر بگیرید و حرکت یک جسم صلب را تصور کنید، در نتیجه:

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{c}(t)$$

که $\mathbf{Q}(t)$ یک تانسور متعامد با $\mathbf{Q}(0) = \delta$ است و انتقال $\mathbf{c}(t)$ مانند $\mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$ است. دو حرکت $\bar{\mathbf{x}}$ و $\mathbf{x}$ به صورت شماتیک در شکل ۸-۲ نشان داده شده است. گرادیان تغییرشکل $\bar{\mathbf{F}}$ مربوط به حرکت جدید $\bar{\mathbf{x}}$ را می‌توان با دیفرانسیل معادله فوق به آسانی به صورت زیر بیان کرد:

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$$

عینیت درواقع به این معناست که، ویژگی‌های کمی و کیفی یک مقدار عینی، تحت تاثیر شرایط مختلف قرار نمی‌گیرد. با فرض اینکه دو حرکت $\bar{\mathbf{x}}$ و $\mathbf{x}$ توسط دو ناظر مختلف ثبت شده است، می‌توان تانسورهای عینی را به صورت زیر تعریف کرد:

۱. تانسورهای لاگرانژی تعریف شده در $\mathfrak{B}_0$ تنها در صورتی عینی هستند که تحت حرکت ناظر بی‌تأثیر باشند:

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$$

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$$

۲. تانسورهای اویلری تعریف شده در $\mathfrak{B}_t$ نیز تنها در صورتی عینی هستند که مطابق با شرایط زیر تغییر کنند:

$$\bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$$

$$\bar{A}(\bar{x}, t) = Q(t) \cdot A(X, t) \cdot Q^T(t)$$

۳. تانسورهای مرتبه دوم دو نقطه‌ای هم تنها در صورتی عینی هستند که مطابق با شرایط زیر تغییر کنند:

$$\bar{A} = Q(t) \cdot A \quad \text{یا} \quad \bar{A} = A \cdot Q^T(t)$$

با استفاده از این تعاریف به راحتی می‌توان نشان داد که گرادیان تغییرشکل F عینی دو نقطه‌ای، تنش‌های کوشی σ و کرشلف τ عینی اویلری هستند. همچنین نرخ تغییرشکل D نیز عینی اویلری و تنش عمود T عینی دو نقطه‌ای است، در حالی که S و Σ عینی لاگرانژی هستند. علاوه بر این، اگر یک تانسور مرتبه دوم A عینی لاگرانژی باشد، می‌توان ثابت کرد که نرخ $\dot{A}$ نیز عینی لاگرانژی است. در مقابل، اگر A یک تانسور عینی اویلری باشد، نرخ $\dot{A}$ یک تانسور عینی نیست^۱. با این حال، نرخ‌های تانسورهای عینی اویلری مانند تنش‌های کوشی و کرشلف اغلب در مکانیک محیط پیوسته، خصوصاً در قوانین ساختاری برای تغییرشکل‌ها و چرخش‌های محدود، ضروری هستند. مورد بعدی منجر به تعریف اصطلاح نرخ عینی اویلری چرخشی باهم می‌شود که متداول‌ترین آنها [۲۵] در جدول ۲-۳ ارائه شده است.

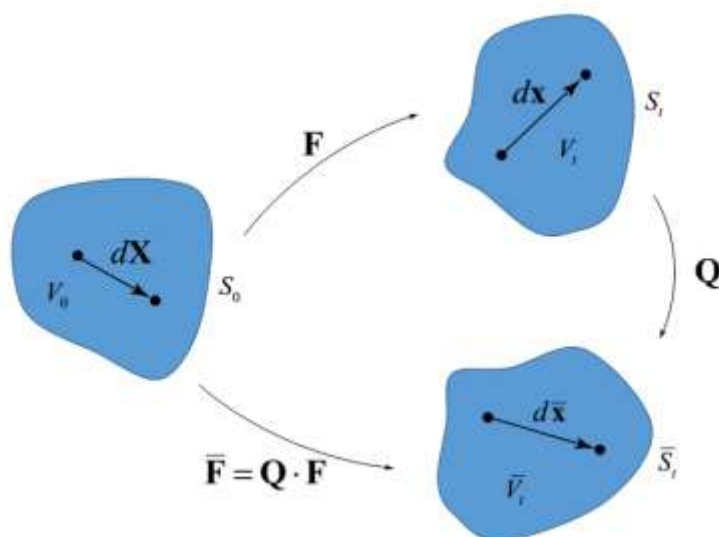
اصل عینیت می‌خواهد که نرخ‌های تنش و کرنش مورد استفاده در قانون ساختاری به گونه‌ای باشد که مدل ساختاری عینی باشد. بنابراین، تعریف قانون ساختاری^۲ از نظر تنش کوشی نیازمند اجرای یکی از نرخ‌های عینی تعریف شده در جدول ۲-۲ است، زیرا σ عینی اویلری است.

^۱ به عنوان مثال، نرخ تنش کوشی $\dot{\sigma}$ عینی نیست، حتی اگر خود تنش کوشی نیز عینی اویلری باشد.

^۲ این بدان معناست که قانون ساختاری به شکل نرخ معرفی می‌شود.

جدول ۲-۲: نرخ‌های عینی یک تانسور مرتبه دوم اویلری [۲۲]

نرخ	تعریف
تروسدل ^۱	$\mathbf{A}^\circ = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}^T + \text{tr}[\mathbf{L}]\mathbf{A}$
اولدروید ^۲	$\mathbf{A}^\square = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}^T$
کاتر-ریولین ^۳	$\mathbf{A}^* = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}$
گرین-نقدی ^۴	$\mathbf{A}^\Delta = \dot{\mathbf{A}} - (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T)$
جوومن ^۵	$\mathbf{A}^\nabla = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}$



شکل ۲-۸: حالت مرجع و حالت‌های تغییرشکل یافته قبل و بعد از ایجاد یک حرکت جسم صلب

¹ Truesdell

² Oldroyd

³ Cotter-Rivlin

⁴ Green-Naghdi

⁵ Jaumann

۲-۹- بلور شناسی

۱-۲-۹- شبکه بلوری

اکثریت فلزات هنگامی که از حالت مایع به حالت جامد تبدیل شوند، جامدات بلورین را تشکیل می‌دهند. جامدات بلورین، بر خلاف همتایان بی‌شکل (آمورف) خود و مایعات، چیدمان متناوبی از اتم‌ها در فضا را نشان می‌دهند. به کوچکترین واحدی که متقارن بوده و بیانگر خصوصیات بلوری باشد، سلول واحد می‌گویند. چیدمان متناوب سلول‌های واحد در فضای سه بعدی متعاقباً شبکه بلوری را مشخص می‌کند و بردار موقعیت $\mathbf{r}$ هر نقطه دلخواه در شبکه به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{r} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c} \quad (2-73)$$

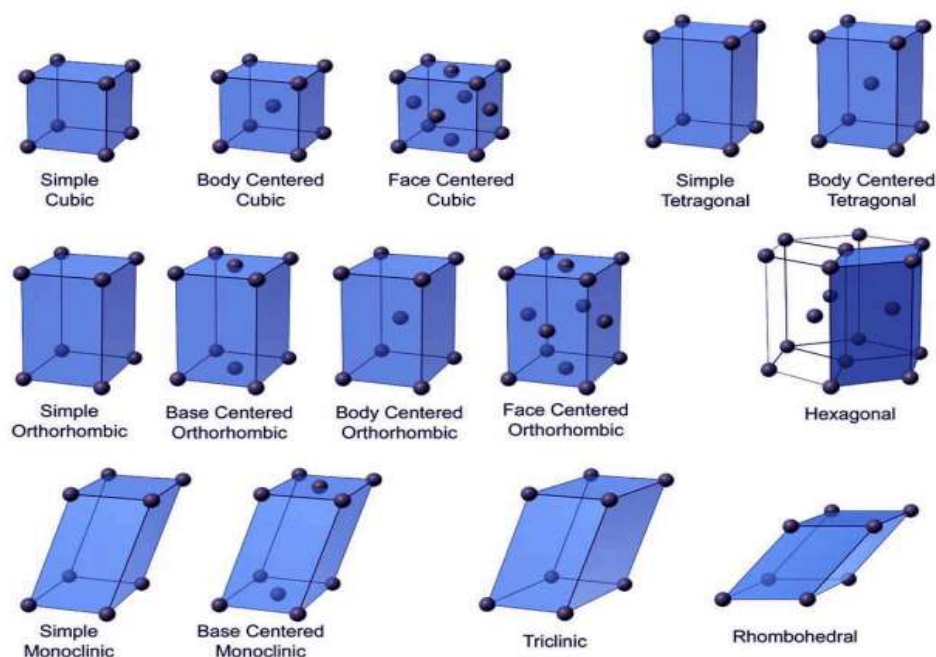
که در آن $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ محورهای بلوری، که طول و جهت‌گیری آنها به بلور مورد نظر بستگی دارد، هستند. در نظر گرفتن تمام ترکیبات ممکن زاویه و طول بین محورهای بلوری منجر به تعریف ۱۴ شبکه براویس^۱ می‌شود که در شکل ۲-۹ نشان داده شده‌اند. هر شبکه براویس به یک سیستم محور بلوری اختصاص داده شده است تا بتواند شرح هر بردار موقعیت را، همانگونه که معادله (۲-۱) پیشنهاد می‌کند، نشان دهد. مورد بعدی، ۷ سیستم بلوری مجزا را تعریف می‌کند که اساس طبقه‌بندی هر بلور را مشخص می‌کند. ۷ سیستم محور بلوری در جدول ۲-۳، به همراه روابط مربوط طول و زاویه محورهای آنها، در ادامه آورده شده است.

در زمینه بلورشناسی، برای تسهیل در مطالعه بلورها و خواص آنها، اغلب به جهت‌ها و صفحه‌های بلورشناسی مراجعه می‌شود. بنابراین به یافتن روشی مناسب برای توصیف آنها با توجه به سیستم محورهای بلوری مناسب نیاز می‌باشد. در مورد جهت‌های بلوری، در این پروژه از علامت $[uvw]$ برای اشاره به جهت بلوری

$\mathbf{r} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$ استفاده می‌شود. این علامت در اصل یک شکل فشرده از عبارت (۲-۷۳) است، که در آن u, v, w کوچکترین عدد صحیح ممکن هستند که می‌توانند جهت مورد نظر را توصیف کنند. مؤلفه‌های

¹ Bravais

منفی بردار با یک نوار در بالای شماره^۱ نشان داده شده‌اند و جهت‌های بلورشناسی که به همان خانواده‌های جهت تعلق دارند، به دلیل اختصار^۲ به صورت $<uvw>$ بیان می‌شوند.



شکل ۹-۲: شبکه‌های براویس [۲۲]

از طرف دیگر صفحه‌های بلورشناسی با استفاده از اندیس‌های میلر شرح داده شده‌اند. اندیس‌های میلر قادر به توصیف جهت یک صفحه مورد نظر بدون در نظر گرفتن فاصله آن از نقطه مبدأ هستند. از این رو، صفحه‌های موازی با اندیس‌های میلر یکسان مشخص می‌شوند که برای پیدا کردن آن باید موارد زیر را انجام داد [۲۲]:

• نقاط تقاطع بین صفحه و محورهای بلوری مورد نظر را پیدا کنید

• این اعداد را معکوس کنید

• سه‌گان را به کوچکترین اعداد صحیح ممکن h, k, l ساده کنید

• اندیس‌های میلر به ترتیب h, k, l هستند

^۱ یعنی جهت کریستال $\hat{r} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ باید به صورت $[\bar{1}1\bar{3}]$ مشخص شود.

^۲ به طور ویژه در مورد کریستال‌های مکعبی، جهت‌ها با قطرهای مکعب، هم راستا تصور می‌شوند و یک خانواده جهت را تشکیل می‌دهند که به صورت $<111>$ مشخص می‌شوند.

اندیس‌های میلر، h, k, l در داخل پرانتز قرار می‌گیرند و برای صفحه مربوطه به صورت (hkl) نشان داده می‌شوند. البته توجه داشته باشید که علامت (hkl) که نشان دهنده یک صفحه است منحصر به فرد نیست، زیرا تمام صفحات به موازات آن با اندیس‌های میلر یکسان تعریف می‌شوند. صفحات خاص، که در آن آرایش اتمی یکسان است، فرض می‌شود که معادل هستند و همه آنها با استفاده از آکولاد به صورت $\{hkl\}$ مشخص شده‌اند.

جدول ۳-۲: سیستم محوره‌های بلوری [۲۲]

سیستم بلوری	محورها و زاویه‌ها ^۱	نمونه‌ها
تری کلینیک ^۲	$a \neq b \neq c$ $\hat{\alpha} \neq \hat{\beta} \neq \hat{\gamma} \neq 90$	K_2CrO_7
مونو کلینیک ^۳	$a \neq b \neq c$ $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 90 \neq \hat{\beta}$	$\beta - S, CaSO_4$
ارتورومبیک ^۴	$a \neq b \neq c$ $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = \hat{\beta} = 90$	$\alpha - S, Fe_3C$
تتراگونال ^۵	$a = b \neq c$ $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = \hat{\beta} = 90$	TiO_2
مکعبی	$a = b = c$ $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = \hat{\beta} = 90$	Fe, Cu, Ni, Au
هگزاگونال	$a_1 = a_2 = a_3 \neq c$ $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 90, \hat{\gamma} = 120$	Zn, Mg
رمبوهدرال ^۶	$a = b = c$ $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = \hat{\beta} \neq 90$	Sb, Bi

^۱ توجه داشته باشید که a, b, c محوره‌های کریستالی را نشان می‌دهد در حالی که $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\beta}$ زاویه‌های مربوط به آنها را نشان می‌دهد.

^۲ Triclinic

^۳ Monoclinic

^۴ Orthorhombic

^۵ Tetragonal

^۶ Rhombohedral

حال برای ساده‌سازی، اتم‌ها را در شبکه‌های بلوری فلزات، به صورت کره‌های هم اندازه و صلب تجسم می‌کنند. اکنون ساختارهای بلوری واحد می‌توانند به صورت روش‌های مختلفی تعریف شوند که می‌توان این کره‌ها را برای پرکردن فضا ترتیب داد. طبق گفته‌های گلدشمیت^۱ و لاوس^۲، پرکردن فضا تحت ۳ اصل اساسی قرار دارد:

- اتم‌های موجود در ساختارهای بلوری به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که بتوانند به طور مؤثر فضا را پر کنند.
 - فضاهای اشغال شده توسط اتم‌ها به گونه‌ای است که حداکثر تقارن ممکن را در ساختار ایجاد می‌کند.
 - اتم‌ها به گونه‌ای قرار گرفته‌اند تا عدد کوئوردیناسیون (CN)^۳ آنها به حداکثر برسد.
- این اصول نشان می‌دهد که اتم‌ها به گونه‌ای ترتیب داده می‌شوند، که ساختارهای متراکم شکل می‌گیرد. اکثر فلزات یکی از ساختارهای بلوری مکعبی متراکم زیر را تشکیل می‌دهند:

• مکعبی مرکز پر (BCC)

• مکعبی مرکز وجوه پر (FCC)

• شش گوشه (هگزاگونال) فشرده (HCP)

سلول‌های واحد ساختارهای BCC و FCC در شکل ۲-۱۰ نشان داده شده است، جایی که کره‌ها، اتم‌های اشاره شده در بالا را نشان می‌دهند و اندازه کره‌ها با فواصل بین آنها متناسب است.

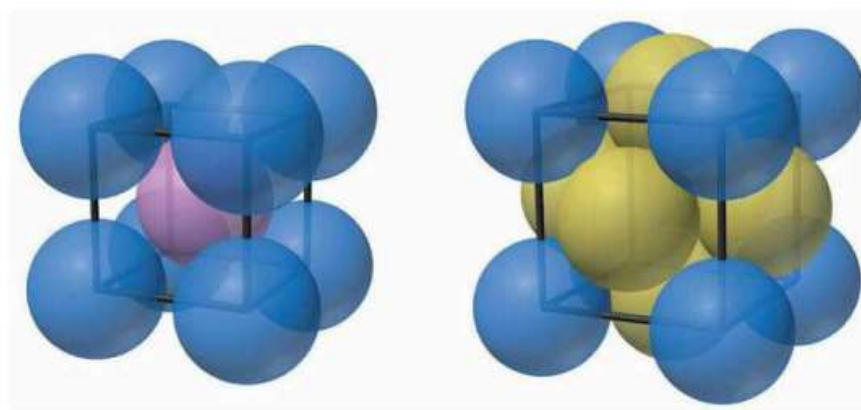
۲-۹-۲- سیستم‌های لغزش، صفحات و جهت‌های متراکم

در بیشتر ساختارهای بلوری متراکم، اتم‌ها در امتداد صفحات و جهت‌های متراکم تماس دارند. به عنوان مثال، صفحات خانواده صفحه {111} صفحات متراکم و جهت‌های بلورشناسی $\langle 110 \rangle$ جهت‌های متراکم ساختار FCC هستند. از طرف دیگر، صفحات {110} صفحات متراکم ساختار BCC هستند در حالی که جهت‌های متراکم آنها $\langle 111 \rangle$ است.

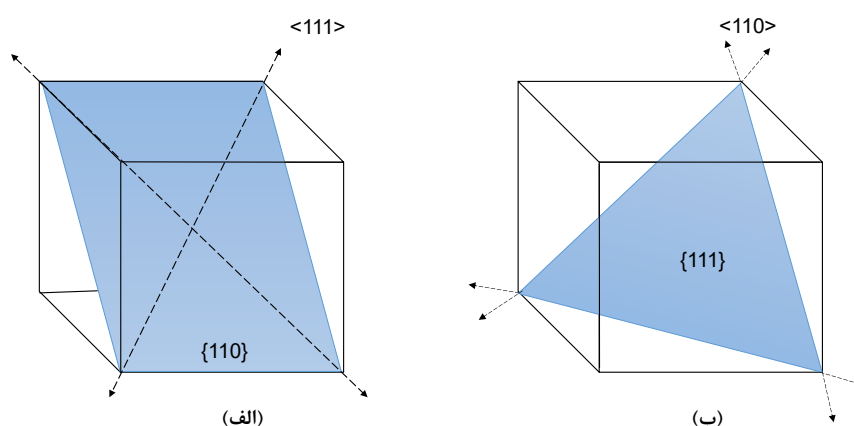
¹ Goldschmidt

² Laves

³ coordination number



شکل ۱۰-۲: آرایش اتم‌ها در دو ساختار بلوری متداول فلزات، BCC (چپ) و FCC (راست) [۲۲]



شکل ۱۱-۲: سیستم‌های لغزش یک بلور BCC (الف) و FCC (ب)

ترکیبی از جهت‌های متراکم و صفحات به صورت $\{hkl\} <abc>$ سیستم‌های لغزش ساختار را مشخص می‌کند. سیستم‌های لغزش برای پلاستیسیته تک بلورهای فلزی بسیار مهم هستند، زیرا لغزش اتمی تنها می‌تواند در امتداد جهت‌های متراکم واقع در صفحات متراکم اتفاق بیفتد. همچنین جهت‌های متراکم نیز معمولاً به عنوان جهت لغزش و صفحات متراکم به عنوان صفحات لغزش، گفته می‌شوند. فلزات FCC شامل ۱۲ سیستم لغزش $\{111\} <110>$ هستند، در حالی که فلزات با ساختار BCC تنها شامل ۵ سیستم خانواده $\{110\} <111>$ هستند. موقعیت نسبی صفحات و جهت‌های متراکمی که سیستم‌های لغزش بلورهای BCC و FCC را تشکیل می‌دهند، به ترتیب در شکل‌های ۱۱-۲ الف و ۱۱-۲ ب، نشان داده شده است.

بلورهای FCC از نظر ایجاد یک مدل ساختاری که رفتارهای ناکشسان دارند چالش برانگیزتر هستند، زیرا بیشترین تعداد سیستم لغزش موجود را دارند. جدول ۲-۴، ۱۲ سیستم لغزش بلورهای FCC را نشان می‌دهد که صفحات لغزش و جهت لغزش مربوطه را نشان می‌دهند.

جدول ۴-۲: سیستم لغزش بلورهای FCC

سیستم لغزش	صفحه لغزش	جهت لغزش
1		$[01\bar{1}]$
2	(111)	$[\bar{1}01]$
3		$[1\bar{1}0]$
4		$[\bar{1}0\bar{1}]$
5	$(\bar{1}11)$	$[110]$
6		$[0\bar{1}1]$
7		$[011]$
8	$(\bar{1}\bar{1}1)$	$[\bar{1}\bar{1}0]$
9		$[10\bar{1}]$
10		$[0\bar{1}\bar{1}]$
11	$(11\bar{1})$	$[101]$
12		$[\bar{1}10]$

قبل از نتیجه‌گیری در مورد سیستم‌های لغزش ساختارهای بلوری، ابتدا ضروری است که با مفهوم سیستم‌هایی با جهت بهینه و تأثیر جهت‌یابی سیستم لغزش به تغییرشکل یک تک بلور پرداخته شود. به همین دلیل یک آزمایش کشش تک‌محوری یک تک بلور در نظر گرفته می‌شود که در آن تنش‌ها به صورت ساده زیر است:

$$\sigma = \sigma_{PP} \quad (۲-۷۴)$$

که P نشان دهنده بردار واحد در امتداد جهت بارگذاری است. با توجه به اینکه تغییرشکل مومسان فقط در یک سیستم لغزش معین می‌تواند رخ دهد، لذا یک صفحه لغزش با عمود واحد n در نظر گرفته می‌شود، که در امتداد آن جهت لغزش تعریف شده توسط بردار واحد s قرار می‌گیرد. تنش برشی مؤلفه شده بر روی آن سیستم، با توجه به معادله (۷۴-۲)، می‌تواند به آسانی به صورت زیر بیان شود:

$$\tau = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \tau = \sigma (\mathbf{s} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \quad (2-75)$$

زاویه ϕ به عنوان زاویه بین $\mathbf{p}$ و $\mathbf{n}$ و همچنین زاویه λ به عنوان زاویه بین $\mathbf{s}$ و $\mathbf{p}$ تعریف می‌شود. با استفاده از این تعاریف و با فرض اینکه بردارهای $\mathbf{n}$ ، $\mathbf{s}$ ، $\mathbf{p}$ به عنوان بردارهای واحد معرفی می‌شوند، داریم:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{p} = \cos \lambda$$

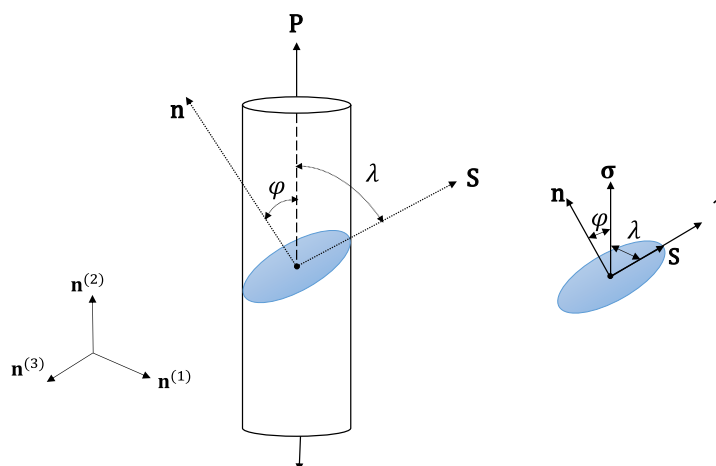
$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = \cos \phi$$

و تنش برشی مؤلفه شده بر روی سیستم لغزش $(\mathbf{s}, \mathbf{n})$ در (۷۵-۲) می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\tau = \sigma \cos \phi \cos \lambda \quad (2-76)$$

شکل ۲-۱۲ یک تصویر شماتیکی از قرارگرفتن تنش تک‌محوری ذکر شده در بالا را در جهت‌های $\mathbf{s}$ ، $\mathbf{p}$ و $\mathbf{n}$ و زاویه‌های ϕ و λ نشان می‌دهد. حاصلضرب کسینوسی $\cos \phi \cos \lambda$ ، فاکتور اشمید^۱ را تعریف می‌کند، که در واقع تعیین‌کننده جهت‌گیری بهینه برای یک سیستم لغزش معین است. برای یک جهت بارگذاری معین، سیستم‌های لغزش با بیشترین فاکتور اشمید، برای σ ماکروسکوپی اعمال شده یکسان در معرض τ بیشتری قرار می‌گیرند. بنابراین سیستمی که فاکتور اشمید آن بزرگترین باشد، می‌تواند به صورت جهت بهینه برای لغزش مومسان اعلام شود. در یک آزمایش کشش تک‌محوری که در آن تنها یک سیستم در ابتدا در جهت بهینه است، پس از فعال شدن اولین سیستم، بلور تا وقتی می‌چرخد که جهت لغزش با محور بارگذاری هم راستا شود و فاکتور اشمید مربوطه صفر شود. با این حال، در واقع چرخش بلور باعث فعال شدن یک سیستم لغزش دوم می‌شود که جهت چرخش را تغییر می‌دهد.

¹ Schmid



شکل ۱۲-۲: نمونه تک بلور در معرض کشش تک محوری، با برجسته نشان دادن بردارهای واحد عمود و لغزش یک سیستم لغزش دلخواه

بدیهی است، توصیف و درک مفاهیم اساسی بلور (به عنوان مثال سیستم‌های لغزش، صفحات و جهت‌های متراکم و غیره) شامل فرآیند تجسم ساختار بلوری و جهت‌های مورد نظر در فضای سه بعدی است که نسبتاً دشوار است و همیشه آسان نیست. بنابراین باید روشی ساده‌تر یافت. روش تصویر استریوگرافی^۱ از محبوب‌ترین روش‌هایی است که برای این منظور استفاده می‌شود و در بخش زیر ارائه شده است.

۳-۹-۲- تصویر استریوگرافی

تصویر استریوگرافی روشی گرافیکی است که از آن برای ترسیم اطلاعات هندسی از فضای ۳ بعدی بر روی یک صفحه استفاده می‌شود. این روش می‌تواند برای تصویر کردن جهت‌های بلورشناسی بر روی صفحه و نشان دادن جهت‌های بلوری مورد استفاده قرار گیرد. با این حال، باید توجه داشت که این تصویرسازی، کلی است و کاربرد های آن فقط به بلورشناسی محدود نمی‌شوند.

در پلاستیسیته بلور، از تصویرسازی عمدتاً برای نظارت بر تحولات جهت‌ها و بردارهای بلوری استفاده می‌شود، زیرا بلور تحت تغییر شکل مومسان قرار دارد.

¹ Stereographic

۴-۹-۲- مختصات دکارتی و کروی

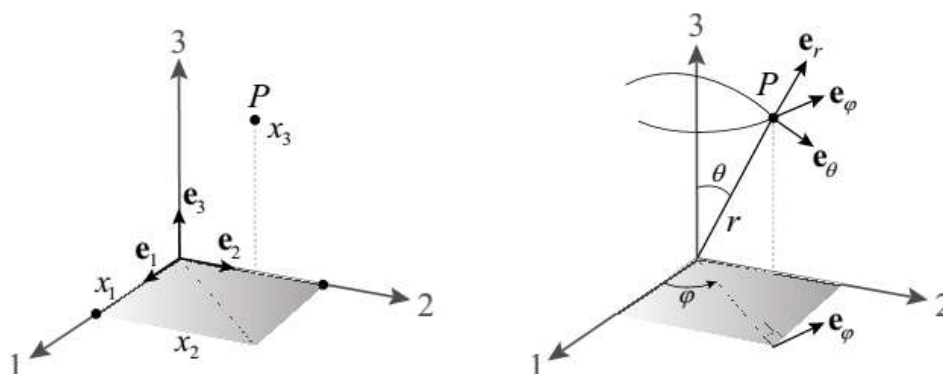
روند تعیین جهت بلوری که مربوط به یک نقطه خاص در نمودار تصویر قطبی است و محاسبه مؤلفه‌های قطبی برای تصویرسازی یک جهت معین، دو موردی هستند که نیاز به تبدیل بین سیستم‌های مختصات دکارتی و کروی دارند. جدای از خود بلورشناسی، روش‌های مذکور غالباً در محاسبات درون یک مدل پلاستیسیته بلور مورد نیاز هستند. در ادامه روابطی مطرح می‌شوند که مختصات کروی یک نقطه را با توجه به مقادیر آنها در سیستم دکارتی و برعکس ارائه می‌دهند.

شکل ۲-۱۳، توصیف یک نقطه P را به ترتیب با استفاده از سیستم‌های مختصات دکارتی و کروی نشان می‌دهد. روابطی که مختصات دکارتی (x_1, x_2, x_3) یک نقطه P با مختصات کروی (r, θ, ϕ) داده شده را تعریف می‌کنند، به صورت زیر است:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi \quad (\text{الف } ۲-۷۷)$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \phi \quad (\text{ب } ۲-۷۷)$$

$$x_3 = r \cos \theta \quad (\text{ج } ۲-۷۷)$$



شکل ۲-۱۳: مختصات دکارتی (x_1, x_2, x_3) و مختصات کروی (r, θ, ϕ) یک نقطه P [۲۲]

همچنین روابط مورد نیاز برای تعریف مختصات کروی (r, θ, ϕ) که به ازای (x_1, x_2, x_3) داده شده‌اند به صورت زیر می‌باشد [۲۶]:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (۲-۷۸ \text{ الف})$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad (۲-۷۸ \text{ ب})$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} \quad (۲-۷۸ \text{ ج})$$

سرانجام بردارهای سیستم مختصات کروی می‌توانند از نظر سیستم مختصات دکارتی به این صورت بیان شوند [۲۶]:

$$\mathbf{e}_r(\theta, \phi) = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \quad (۲-۷۹ \text{ الف})$$

$$\mathbf{e}_\theta(\theta, \phi) = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 - \sin \theta \mathbf{e}_3 \quad (۲-۷۹ \text{ ب})$$

$$\mathbf{e}_\phi(\theta, \phi) = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2 \quad (۲-۷۹ \text{ ج})$$

با معکوس کردن معادلات فوق، پایه دکارتی را از پایه کروی به صورت زیر می‌توان به دست آورد [۲۶]:

$$\mathbf{e}_1 = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \mathbf{e}_\phi \quad (۲-۸۰ \text{ الف})$$

$$\mathbf{e}_2 = \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_\theta + \cos \phi \mathbf{e}_\phi \quad (۲-۸۰ \text{ ب})$$

$$\mathbf{e}_3 = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (۲-۸۰ \text{ ج})$$

فصل ۳ مدل سازی ساختاری

توصیف فیزیکی پلاستیسیته بلور منجر به تعریف یک فرم منحصر به فرد برای قسمت مومسان تانسور گرادین سرعت L^p می شود. علاوه بر این، بر خلاف پلاستیسیته فلزات پلی کریستالی، رفتار کشسان-مومسان تک بلورها را نمی توان با استفاده از یک معیار تسلیم خاص تعیین کرد. همانطور که در مباحث قبلی مطرح شد، بلورهای FCC که محور اصلی این پایان نامه هستند، شامل ۱۲ سیستم لغزش می باشند که لغزش مومسان انجام شده منجر به تعریف ۱۲ تابع تسلیم متمایز برای تعیین رفتار سیستم مربوطه می شود.

در این فصل ضمن ارائه توضیحات تکمیلی در باب سینماتیک تغییر شکل بلور، مدل آسیب و روابط سخت شوندگی مورد استفاده در این مطالعه هم معرفی خواهند شد و در انتها، این روابط بر روی یک مدل تک المان تست می شوند تا تأییدیه اولیه برای انجام تحلیل مدل اصلی حاصل شود.

۳-۱- سینماتیک تغییر شکل بلور

در اکثر فلزات، تغییر شکل مومسان عمدتاً توسط لغزش نابجایی ایجاد می شود. نابجایی ها عیوب خطی هستند، که در تعادل ترمودینامیکی در شبکه های بلوری تمام فلزات وجود دارند. تغییر شکل مومسان غیر برگشت پذیر ماکروسکوپی، به برهم نهی بسیاری از حرکات نابجایی که در سیستم های لغزش هر دانه در میکروساختار فلز اتفاق می افتد، نسبت داده می شود. این واقعیت که نابجایی ها فقط قادر به لغزش در امتداد جهت های ترجیحی هستند نشان می دهد که تغییر شکل ایجاد شده در اثر یک لغزش مومسان بسیار ناهمسانگرد است.

پلاستیسیته همسانگرد فقط در فلزاتی وجود دارد که میکروساختار آنها از تعداد زیادی دانه با جهت و اندازه تصادفی تشکیل شده باشد. تنوع ذاتی جهت گیری دانه، ناهمسانگردی ناشی از لغزش مومسان روی هر دانه را از بین می برد و از نظر ماکروسکوپی رفتاری شبیه به همسانگردی ارائه می دهد.

با این حال یک تک بلور، جامدی است که شبکه بلوری آن به طور پیوسته و ناگسستنی یک دانه واحد با جهت گیری شبکه بلوری منحصربه فرد را تشکیل می دهد. در نتیجه، ناهمسانگردی میکروسکوپی مرتبط با لغزش نابجایی، به شکل پلاستیسیته ناهمسانگرد در مقیاس ماکرو نشان داده می شود. تعداد محدود احتمالات^۱ لغزش نابجایی نشان می دهد که پلاستیسیته ماکروسکوپی باید از نظر میکروسکوپی به صورت برهم نهی لغزش های نابجایی گسسته بر سیستم های لغزش موجود تفسیر شود.

تغییر شکل مومسان تک بلورهای فلزی را می توان به یک حرکت برشی ساده تشبیه کرد، زیرا نابجایی ها فقط می توانند بر روی سیستم های لغزش هر ساختار بلوری بلغزند، در نتیجه در امتداد جهت های لغزش، و بر روی صفحات لغزش قرار می گیرند. به طور دقیق تر، در هر زمان معین که یک تک بلور به طور مومسان تغییر شکل می دهد، لغزش نابجایی ها بر روی چندین سیستم لغزش همزمان می لغزد که آن را سیستم فعال می نامند. فرض فیزیکی مبنی بر این که، پلاستیسیته بلور نتیجه برش های ساده همزمان در امتداد سیستم های فعال بلور است، به ما اجازه می دهد تا گرادیان سرعت مرتبط با لغزش پلاستیک را به صورت زیر بیان کنیم (آراواس [۲۴]):

$$\mathbf{L}_i^p = \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^{\alpha}(t) \mathbf{s}_0^{\alpha} \mathbf{m}_0^{\alpha} \quad (3-1)$$

که در آن $\mathbf{s}_0^{\alpha}$ ، $\mathbf{m}_0^{\alpha}$ به ترتیب بردارهای واحد در امتداد لغزش و عمود سیستم لغزش هستند، که در پیکره بندی مرجع $\mathcal{B}_0$ تعریف شده اند. حال با یادآوری معادلات (۲۸-۲ و ۲۹-۲) که نرخ تغییر شکل $\mathbf{D}$ و تانسور دوران $\mathbf{W}$ به ترتیب به عنوان اجزای متقارن و پادمتقارن $\mathbf{L}$ معرفی شده اند، می توان تعریف کرد:

$$\mathbf{D}_i^p = \text{symm}(\mathbf{L}_i^p) = \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^{\alpha}(t) \text{symm}[\mathbf{s}_0^{\alpha} \mathbf{m}_0^{\alpha}] \Rightarrow \mathbf{D}_i^p = \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^{\alpha}(t) \mathbf{M}_0^{\alpha} \quad (3-2)$$

^۱ در امتداد جهت های متراکم کریستال

$$\mathbf{W}_i^p = \text{skew}(\mathbf{L}_i^p) = \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\alpha(t) \text{skew}[\mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha] \Rightarrow \mathbf{W}_i^p = \sum_{\alpha=1}^{Nas} \gamma^\alpha(t) \mathbf{\Omega}_0^\alpha \quad (3-3)$$

۱-۱-۳- تجزیه F برای پلاستیسیته تک بلور

تک بلورهای فلزی، همانند فلزات همسانگرد، تغییرشکل کلی حاصل از اعمال نیروهای خارجی را به یک جزء کاملاً کشسان و یک جزء کاملاً مومسان تفسیر می کنند. نظریه تغییرشکل های ناکشسان^۱ محدود، اساساً بر این فرض استوار است که در یک مقیاس طول، یک پیکره بندی میانی $\mathbf{B}_i$ ، که عاری از نیروهای داخلی و خارجی است، وجود دارد. در اکثر موارد در دنیای واقعی، چنین پیکره بندی بعید است تولید شود، اما از منظر مکانیک محیط پیوسته برای فرموله کردن تغییرشکل های ناکشسان ضروری است. پیکره بندی میانی در الاستوپلاستیسیته تغییرشکل محدود از پیکره بندی تغییرشکل یافته تنش صفر بدست می آید. به این معنا که، $\mathbf{B}_i$ با اعمال یک تغییرشکل مومسان برگشتناپذیر از $\mathbf{B}_0$ به دست می آید و با تغییرشکل کشسان برگشت پذیر از $\mathbf{B}_i$ تفاوت دارد.

در زمینه پلاستیسیته بلور، پیکره بندی میانی، به صورت یک حالت فرضی^۲ تعریف می شود که لغزش مومسان باعث تغییر جهت بلوری در یک دستگاه مختصات عمومی، نمی شود. در این حالت به پیکره بندی میانی، ایزوکلینیک^۳ گفته می شود.

با نادیده گرفتن زیرساختار نابجایی گسسته ذاتی [۲۷]، فرض می کنیم که تغییرشکل پلاستیک به صورت برش صاف بر روی صفحات و جهت های لغزش رخ می دهد تا بتواند فرمولاسیون یک مدل پلاستیسیته پیوسته را انجام دهد (هیل^۴ [۲۸]). یک رویکرد پیوسته همراه با تعریف مناسب از پیکره بندی مرجع $\mathbf{B}_0$ ، میانی $\mathbf{B}_i$ و تغییرشکل یافته $\mathbf{B}_f$ منجر به تجزیه ضربی گرادیان تغییرشکل $\mathbf{F}$ به شرح زیر می شود:

¹ inelastic

^۲ در بیشتر موارد، حالت میانی از نظر فیزیکی حاصل نمی شود و بنابراین یک مفهوم ریاضی فرضی را تشکیل می دهد

³ isoclinic

⁴ Hill

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (۳-۴)$$

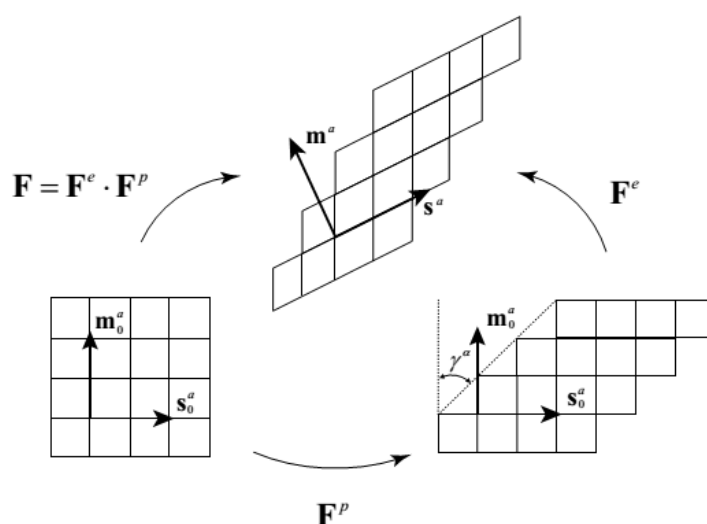
که:

$$\mathbf{F} : \mathfrak{B}_0 \rightarrow \mathfrak{B}_t$$

$$\mathbf{F}^p : \mathfrak{B}_0 \rightarrow \mathfrak{B}_i$$

$$\mathbf{F}^e : \mathfrak{B}_i \rightarrow \mathfrak{B}_t$$

شکل ۱-۳ شماتیکی از تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل کلی و همچنین حالت مرجع $\mathfrak{B}_0$ میانی $\mathfrak{B}_i$ و حالت تغییر شکل یافته $\mathfrak{B}_t$ را نشان می دهد.



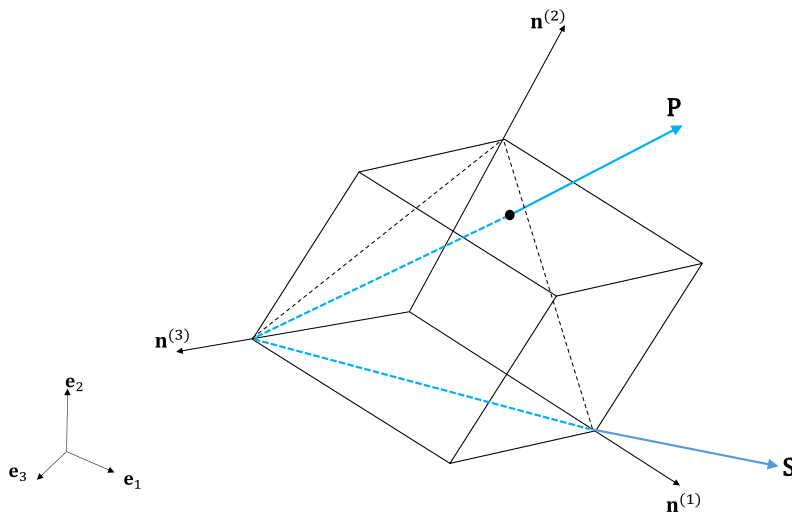
شکل ۱-۳: تجزیه ضربی گرادیان تغییر شکل [۲۲]

بردار جهت لغزش $\mathbf{s}_0^\alpha$ در شبکه قرار می گیرد و در طی یک تغییر شکل به $\mathbf{s}^\alpha = \mathbf{F}^\alpha \cdot \mathbf{s}_0^\alpha$ تبدیل می شود. در مقابل، عمود واحد برای صفحه لغزش $\mathbf{m}_0^\alpha$ به صورت $\mathbf{m}^\alpha = \mathbf{m}_0^\alpha \cdot \mathbf{F}^{e-1}$ تبدیل می شود، به طوری که مرتباً عمود بر صفحه لغزش می ماند.

همانطور که گفته شد، تعریف پیکره بندی میانی بر اساس وجود یک دستگاه مختصات مادی است که توسط $\mathbf{F}^p$ بی تأثیر باقی می ماند. با این وجود جدای از تعریف خود سیستم، بیان مؤلفه های آن با توجه به یک سیستم مرجع عمومی نیز مهم است. یک روش کاربردی برای تعریف چنین سیستم مادی، در بخش بعدی ارائه می شود.

۲-۳- محوره های بلوری در برابر محوره های عمومی

یک روش برای تعریف جهت گیری نسبی بلور، تعریف دو مجموعه از دستگاه مختصات، یعنی یک سیستم بلوری و یک سیستم عمومی می باشد. $\mathbf{n}^{(i)}$ بردارهای واحد پایه بلور و $\mathbf{e}_i$ بردارهای واحد دستگاه مختصات دکارتی عمومی می باشند. برای قرار دادن بلور در فضا، فرض می کنیم که دو بردار واحد دلخواه $\mathbf{p}$ و $\mathbf{s}$ با توجه به محوره های بلوری و محوره های عمومی شناخته شده اند. این دو بردار می توانند جهت بارگذاری $\mathbf{p}$ و جهت لغزش $\mathbf{s}$ باشند (البته با توجه به دلخواه بودن، انتخاب های دیگر نیز ممکن است). در اینجا داریم:



شکل ۲-۳: دستگاه مختصات بلوری موضعی $\mathbf{n}^{(i)}$ و دستگاه مختصات عمومی $\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{p} = p^{(1)}\mathbf{n}^{(1)} + p^{(2)}\mathbf{n}^{(2)} + p^{(3)}\mathbf{n}^{(3)} = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3 \quad (3-5)$$

$$\mathbf{s} = s^{(1)}\mathbf{n}^{(1)} + s^{(2)}\mathbf{n}^{(2)} + s^{(3)}\mathbf{n}^{(3)} = s_1\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2 + s_3\mathbf{e}_3 \quad (3-6)$$

این بردارهای بار و لغزش، یک صفحه را تعیین می کنند. بردار سوم $\mathbf{m}$ می تواند عمود بر صفحه به صورت زیر معرفی شود:

$$\mathbf{m} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{n}^1 & \mathbf{n}^2 & \mathbf{n}^3 \\ s^{(1)} & s^{(2)} & s^{(3)} \\ p^{(1)} & p^{(2)} & p^{(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{m} = m^{(1)}\mathbf{n}^{(1)} + m^{(2)}\mathbf{n}^{(2)} + m^{(3)}\mathbf{n}^{(3)} = m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3 \quad (3-7)$$

از آنجا که همه مؤلفه‌های $p^{(i)}, p_i, s^{(i)}, s_i$ شناخته شده‌اند، می‌توانیم مؤلفه‌های $m^{(i)}, m_i$ را محاسبه کنیم:

$$m^{(1)} = s^{(2)}p^{(3)} - p^{(2)}s^{(3)} \quad m_1 = s_2p_3 - p_2s_3$$

$$m^{(2)} = -s^{(1)}p^{(3)} + p^{(1)}s^{(3)} \quad m_2 = -s_1p_3 - p_1s_3$$

$$m^{(3)} = s^{(1)}p^{(2)} - p^{(1)}s^{(2)} \quad m_3 = s_1p_2 - p_1s_2$$

برای بدست آوردن یک عبارت تحلیلی برای تبدیل بین بردارهای پایه بلوری $\mathbf{n}^{(i)}$ و بردارهای پایه سیستم عمومی $\mathbf{e}_i$ ، معادلات (۳-۵)، (۳-۶) و (۳-۷) به شکل ماتریس زیر نوشته می‌شوند:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p^{(1)} & p^{(2)} & p^{(3)} \\ s^{(1)} & s^{(2)} & s^{(3)} \\ m^{(1)} & m^{(2)} & m^{(3)} \end{bmatrix}}_{[A]} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(1)} \\ \mathbf{n}^{(2)} \\ \mathbf{n}^{(3)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}}_{[B]} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(1)} \\ \mathbf{n}^{(2)} \\ \mathbf{n}^{(3)} \end{bmatrix} = \underbrace{[A]^{-1} \cdot [B]}_{[Q]} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = [Q] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

و به شکل فشرده‌تر:

$$\mathbf{n}^{(i)} = Q_{ij}\mathbf{e}_j = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j \quad (۳-۸)$$

که:

$$[Q] = [A]^{-1} \cdot [B] \quad , \quad [Q]^{-1} = [Q]^T \quad , \quad \mathbf{Q} = Q_{ij}\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}^{(j)} = Q_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$$

که ماتریس $[A]$ به عنوان ماتریسی با ۳ مؤلفه برداری در سیستم بلوری تعریف شده است، در حالی که ماتریس $[B]$ شامل مؤلفه‌های همان بردارها در سیستم عمومی است.

۱-۲-۳- چرخش یک بردار واحد در طی تغییر شکل مومسان

یک بردار واحد $\mathbf{p}$ که در پیکره‌بندی مرجع $\mathcal{B}_0$ تعریف شده را در نظر بگیرید، که با توجه به سیستم بلوری شناخته شده است و جهت بلوری را نمایان می‌کند. با فرض اینکه جسم، پلاستیسیته $\mathbf{F}^p$ را تجربه می‌کند، باید موقعیت فعلی جهت بلوری $\mathbf{p}'$ را از نظر $\mathbf{F}^p$ تعیین کنیم. در ابتدا فرض می‌کنیم که جهت بلور $\mathbf{p}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{p} = p_i \mathbf{n}^{(i)} \quad (3-9)$$

گرادینان تغییر شکل همراه با تغییر شکل مومسان از نظر سیستم عمومی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{F}^p = F_{ij}^p \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (3-10)$$

با استفاده از تبدیل تعریف شده در (۳-۸) می‌توان $\mathbf{F}^p$ را با توجه به محورهای بلوری به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{F}^p = \hat{F}_{ij}^p \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(j)} \quad (3-11)$$

که

$$[\hat{F}^p] = [Q][F^p][Q]^T \quad (3-12)$$

اکنون با استفاده از تعریف گرادینان تغییر شکل، موقعیت هر بردار می‌تواند از پیکره‌بندی مرجع به پیکره‌بندی فعلی تغییر کند. در این حالت، از $\mathbf{F}^p$ استفاده می‌شود:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{F}^p \cdot \mathbf{p} \quad (3-13)$$

با استفاده از معادلات (۳-۱۱ تا ۳-۱۳) نتیجه می‌گیریم:

$$[p'] = [Q][F^p][Q]^T \{p\} \quad (3-14)$$

معادله (۳-۱۴) موقعیت فعلی بردار را که در ابتدا $\mathbf{p}$ بود، تعریف می‌کند.

۳-۳- ماتریس الاستیسیته

رابطه ساختاری که برای رفتار کشسان یک تک بلور فلزی FCC در نظر گرفته شده است، به صورت یک جامد خطی با تقارن مکعبی به نظر می رسد. در این حالت قانون ساختاری با توجه به ۳ ثابت مستقل مواد و محورهای بلوری می تواند به صورت زیر پارامترسازی شود (آراواس [۲۶]):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ & C_{11} & C_{12} & & & \\ & & C_{11} & & & \\ & sym & & C_{44} & & \\ & & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\sigma\} = [\mathcal{L}^e] \cdot \{\varepsilon\} \quad (3-15)$$

که $\mathcal{L}^e = \mathcal{L}_{ijkl}^e \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(j)} \mathbf{n}^{(k)} \mathbf{n}^{(l)}$ و:

$$\mathcal{L}_{1111}^e = \mathcal{L}_{2222}^e = \mathcal{L}_{3333}^e \equiv C_{11}$$

$$\mathcal{L}_{1122}^e = \mathcal{L}_{2211}^e = \mathcal{L}_{1133}^e = \mathcal{L}_{3311}^e \equiv C_{12}$$

$$\mathcal{L}_{1212}^e = \mathcal{L}_{2112}^e = \mathcal{L}_{1221}^e = \mathcal{L}_{2121}^e =$$

$$= \mathcal{L}_{1313}^e = \mathcal{L}_{3113}^e = \mathcal{L}_{1331}^e =$$

$$= \mathcal{L}_{2323}^e = \mathcal{L}_{3131}^e = \mathcal{L}_{3223}^e = \mathcal{L}_{2332}^e = \mathcal{L}_{3232}^e = C_{44}$$

معادلات فوق نشان می دهد که می توان ماتریس الاستیسیته $\mathcal{L}^e$ را با توجه به محورهای بلوری و بر طبق

C_{ij} بازنویسی کرد:

$$\mathcal{L}^e = C_{11}(\mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)}) +$$

$$C_{12}(\mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)} + \mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)}) +$$

$$C_{44}(\mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(1)}) +$$

$$C_{44}(\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(3)} + \mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(3)} + \mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(1)}) +$$

$$C_{44}(\mathbf{n}^{(2)}\mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(2)}\mathbf{n}^{(3)} + \mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(2)}\mathbf{n}^{(2)}\mathbf{n}^{(3)} + \mathbf{n}^{(2)}\mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(2)}\mathbf{n}^{(3)}\mathbf{n}^{(2)}) \quad (3-16)$$

با یادآوری اینکه محورهای عمومی $\mathbf{e}_i$ می‌توانند با استفاده از معادله (۳-۸) از نظر محورهای بلوری $\mathbf{n}^{(i)}$ بیان شوند، می‌توان پاسخ الاستیک در سیستم بلوری را در دستگاه مختصات عمومی بیان کرد:

$$\overline{\mathcal{L}}_{ijkl}^e = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{lq}\mathcal{L}_{mnpq}^e \quad (3-17)$$

۳-۴- انتگرال گیری معادلات الاستوپلاستیک

به طور سنتی، معادلات ساختاری مدل های ماده که برای تغییر شکل های الاستوپلاستیک محدود ایجاد شده‌اند به شکل نرخ بیان شده و اجرای محاسباتی آنها نیاز به انتگرال گیری عددی دارد. راه حل محاسباتی همه مسائل غیرخطی بصورت نمووی توسعه می‌یابد. هر نموو با فاصله زمانی $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ تعریف شده است که در طی آن باید معادلات ساختاری انتگرال گیری شوند. تمام کمیت های مربوط به تغییر شکل در $t = t_n$ که از نموو قبلی عبور کرده‌اند را باید در t_{n+1} انتگرال گیری کرد.

در پلاستیسیته بلور مستقل از نرخ، با توجه به $\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_n^p, \gamma_n^\alpha, \tau_{cr}^\alpha|_n$ در t_n به همراه Δt و $\mathbf{F}_{n+1}$ باید جزء مومسان گرادیان تغییر شکل $\mathbf{F}_{n+1}^p$ ، تانسور تنش کوشی $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ، مجموعه سیستم های لغزش فعال $\mathcal{A}_{n+1}$ و همچنین کرنش های مومسان γ_{n+1}^α و تنش های بحرانی $\tau_{cr}^\alpha|_{n+1}$ از هر سیستم لغزش $\alpha \in \mathcal{P}$ ، در t_{n+1} به روزرسانی شوند. با این حال قبل از فرآیند انتگرال گیری معادلات الاستوپلاستیک، ابتدا باید آنها را به شکلی انتگرال پذیر درآورد. با یادآوری معادله (۲-۲۶) می‌توان تانسور گرادیان سرعت $\mathbf{L}$ را از نظر $\dot{\mathbf{F}}$ بیان کرد:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (3-18)$$

اکنون با یادآوری تجزیه ضربی $\mathbf{F}$ که در رابطه (۳-۴) معرفی شد می‌توان نوشت:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (3-19 \text{ الف})$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{F}^{e-1} \quad (3-19 \text{ ب})$$

با جایگذاری (۱۹-۳) الف و (۱۹-۳) ب) در (۱۸-۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \overline{\dot{\mathbf{F}}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p} \cdot (\mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{F}^{e-1}) = \\
 &= (\dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p) \cdot (\mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{F}^{e-1}) = \\
 &= \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \cdot (\dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1}) \cdot \mathbf{F}^{e-1}
 \end{aligned} \tag{۳-۲۰}$$

معادله آخر نشان می دهد که گرادیان سرعت به صورت جمعی به صورت زیر تجزیه می شود:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p \tag{۳-۲۱}$$

جایی که:

$$\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e-1} \tag{۳-۲۲) الف}$$

$$\mathbf{L}^p = \mathbf{F}^e \cdot (\dot{\mathbf{L}}_i^p) \cdot \mathbf{F}^{e-1} \tag{۳-۲۲) ب}$$

$$\dot{\mathbf{L}}_i^p = \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1} \tag{۳-۲۲) ج}$$

کمیت $\mathbf{L}_i^p$ حاصل از تعریف گرادیان سرعت مربوط به $\mathbf{F}^p$ در پیکره بندی میانی است. از این رو، برای مشارکت در گرادیان سرعت کل $\mathbf{L}$ ، همانطور که معادله (۲۱-۳) پیشنهاد می کند، باید از پیکره بندی میانی به پیکره بندی فعلی از طریق $\mathbf{F}^e$ منتقل شود. در بخش ۳-۱ نشان داده شد که گرادیان سرعت مرتبط با نابجایی در هر سیستم لغزش، $\dot{\mathbf{L}}_i^p$ ، به شکل زیر است:

$$\dot{\mathbf{L}}_i^p = \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\alpha \mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha \tag{۳-۲۳}$$

بنابراین، با ترکیب روابط (۲۲-۳) ج) و (۲۳-۳) داریم:

$$\dot{\mathbf{F}}^p(\dot{\gamma}^\alpha) = \left(\sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\alpha \mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha \right) \cdot \mathbf{F}^p(\dot{\gamma}^\alpha) \tag{۳-۲۴}$$

معادله (۲۴-۳) یک معادله دیفرانسیل معمولی را با تابع تانسور ناشناخته $\mathbf{F}^p(\dot{\gamma}^\alpha)$ تعریف می کند. راه حل تانسور مرتبه اول ODE^۱ به فرم زیر:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}(t) \quad t \in [t_1, t_2]$$

به شرح زیر است (گورتین^۲ و همکاران [۲۹]):

$$\mathbf{Z}(t) = \exp[(t_2 - t_1)\mathbf{A}] \cdot \mathbf{Z}(t_1)$$

معادله (۲۴-۳) باید در طول زمان تعریف شده t_n و t_{n+1} انتگرال گیری شود. بنابراین، اگر فرض کنیم $\dot{\gamma}^\alpha$ در طول افزایش بازه زمانی به صورت $t \in [t_n, t_{n+1}]$ ، ثابت باقی بماند. باید از رابطه (۲۴-۳) برای به دست آوردن رابطه زیر انتگرال گرفت:

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp\left(\sum_{\alpha=1}^{Nas} \Delta\gamma^\alpha \mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha\right) \cdot \mathbf{F}_n^p \quad (۳-۲۵)$$

در حالی که $\mathbf{F}_{n+1}^{p-1}$ با معکوس کردن عبارت فوق به آسانی به صورت زیر بیان می شود:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{p-1} = \mathbf{F}_n^{p-1} \cdot \exp\left(\sum_{\alpha=1}^{Nas} -\Delta\gamma^\alpha \mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha\right) \quad (۳-۲۶)$$

با فرض اینکه $\Delta\gamma^\alpha$ برای هر سیستم لغزش $\alpha \in Nas \equiv \mathcal{A}$ شناخته شده باشد، می توان با موفقیت $\mathbf{F}_{n+1}^p$ را به روزرسانی کرد. حال با شناخته شدن $\mathbf{F}_{n+1}^p$ و $\mathbf{F}_{n+1}^e$ می توان $\mathbf{F}_{n+1}^e$ را نیز از معادله (۱۹-۳ الف) به صورت زیر به روزرسانی کرد:

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_{n+1}^{p-1} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_n^{p-1} \cdot \exp[\mathbf{B}(\Delta\gamma^\alpha)] \Rightarrow$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha) = \mathbf{F}_{trial}^e \cdot \exp[\mathbf{B}(\Delta\gamma^\alpha)] \quad (۳-۲۷)$$

^۱ ordinary differential equation

^۲ Gurtin

$$\mathbf{F}_{trial}^e = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_n^{p-1} \quad (۳-۲۸) \text{ الف}$$

$$\mathbf{B} = \sum_{\alpha=1}^{Nas} -\Delta\gamma^\alpha \mathbf{s}_0^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha \quad (۳-۲۸) \text{ ب}$$

اکنون که همه مؤلفه‌های گرادیان تغییرشکل $(\mathbf{F}_{n+1}^p, \mathbf{F}_{n+1}^e, \mathbf{F}_{n+1})$ شناخته شده‌اند، می‌توان بقیه متغیرها را نیز به شرح زیر به‌روزرسانی کرد. از جمله تانسور تغییرشکل کوشی-گرین مربوط به $\mathbf{F}_{n+1}^e$ به صورت زیر به‌روزرسانی می‌شود:

$$\mathbf{C}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha) = (\mathbf{F}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha))^T \cdot \mathbf{F}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha) \quad (۳-۲۹)$$

که منجر به به‌روزرسانی تانسور کرنش کشسان گرین به صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{E}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha) - \delta) \quad (۳-۳۰)$$

تنش کشسان مرتبه دوم پیولا-کرشلف از نظر ماتریس الاستیسیته $\mathcal{L}^e$ و $\mathbf{E}_{n+1}^e$ به شرح زیر است:

$$\mathbf{S}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha) = \mathcal{L}^e : (\mathbf{E}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha)) \quad (۳-۳۱)$$

با استفاده از $\mathbf{S}_{n+1}^e$ که اکنون شناخته شده است، می‌توان تنش ماندل غیر متقارن Σ که در پیکره‌بندی میانی تعریف شده و همچنین تانسور تنش کرشلف τ را به صورت زیر به‌روزرسانی کرد:

$$\Sigma_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha) = \mathbf{S}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha) \cdot \mathbf{C}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha) \quad (۳-۳۲)$$

$$\tau_{n+1}(\Delta\gamma^\alpha) = \mathbf{F}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha) \cdot \mathbf{S}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha) \cdot (\mathbf{F}_{n+1}^e(\Delta\gamma^\alpha))^T \quad (۳-۳۳)$$

از تانسور تنش کرشلف τ می‌توان برای به‌روزرسانی تانسور تنش واقعی کوشی σ استفاده کرد زیرا از تعریف دو تنش داریم:

$$\sigma_{n+1}(\Delta\gamma^\alpha) = J_{n+1} \tau_{n+1}(\Delta\gamma^\alpha) \quad \text{که} \quad J_{n+1} = \det[\mathbf{F}_{n+1}] \quad (۳-۳۴)$$

سپس تنش‌ها با استفاده از انتگرال‌گیری معادلات (۳-۲۵ تا ۳-۳۴) به صورت تدریجی به‌روزرسانی و کامل می‌شوند. با این حال توجه داشته باشید که همه $\Delta\gamma^\alpha$ قبل از انتگرال‌گیری تنش‌ها، مورد نیاز هستند.

در حقیقت، انتگرال‌گیری تنش و محاسبه $\Delta \gamma^\alpha \forall \alpha \in \mathcal{A}_{n+1}$ به عنوان یک مسئله با اجرای محاسباتی آن که معمولاً به عنوان الگوریتم‌های به‌روزرسانی تنش شناخته می‌شوند، انجام می‌شوند.

۳-۵- مدول مماسی مستقل از نرخ

۳-۵-۱- الاستیسیته

ابتدا فرض می‌شود که یک پتانسیل الاستیک Φ در پیکره‌بندی میانی وجود دارد (آواراس [۳۰]) به گونه‌ای که:

$$\mathbf{S}^e = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}^e} \quad \text{یا} \quad \overline{\mathbf{S}}^e = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}^e} \quad (3-35)$$

جایی که $\mathbf{S}^e = J^e \mathbf{F}^{e-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{e-T}$ تنش مرتبه دوم پیولا-کرشلف، $\overline{\mathbf{S}}^e = (J/J^e) \mathbf{S}^e$ است. اکنون می‌توان فرم نرخ معادله ساختاری هایپرالاستیک فوق را با مشتق گرفتن نسبت به زمان بدست آورد:

$$\dot{\overline{\mathbf{S}}}^e = \overline{\mathcal{L}}^e : \dot{\mathbf{E}}^e \quad \text{که} \quad \overline{\mathcal{L}}^e = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{E}^e \partial \mathbf{E}^e} \quad (3-36)$$

با توجه به نتایج دافالیاس^۱ [۳۱] و نیدلمن^۲ [۳۲]، می‌توان عبارت فوق را در پیکره‌بندی فعلی که در فرم زیر شکل می‌گیرد قرار داد:

$$\boldsymbol{\tau}^e = \mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{D}^e \quad (3-37)$$

که:

$$\boldsymbol{\tau}^e = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^e - \mathbf{W}^e \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3-38)$$

$$\mathbf{W}^e = \mathbf{W} - \mathbf{W}^p \quad (3-39)$$

¹ Dafalias

² Needleman

$$\mathcal{L}^{e\tau} = \mathcal{L}^e + \tau \quad (3-40)$$

و

$$\mathcal{L}_{ijkl}^e = F_{im}^e F_{jn}^e F_{kp}^e F_{lq}^e \bar{\mathcal{L}}_{mnpq}^e \quad (3-41)$$

$$\tau_{ijkl} = \frac{1}{2} (\tau_{ik} \delta_{jl} + \tau_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \tau_{jl} + \delta_{il} \tau_{jk}) \quad (3-42)$$

البته به یاد بیاورید که $\bar{\mathcal{L}}^e$ با توجه به (۳-۱۷) مربوط به $\mathcal{L}^e$ باشد، در حالی که مدول $\mathcal{L}^e$ از ثابت الاستیک C_{ij} با توجه به محورهای بلوری مطابق با (۳-۱۶)^۱ ایجاد می شود. در ادامه نرخ عینی جومن^۲ برای نوشتن معادله (۳-۳۷) به فرم زیر معرفی می شود:

$$\tau^\nabla = \mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{D}^e + \tau \cdot \mathbf{W}^p - \mathbf{W}^p \cdot \tau \quad (3-43)$$

۳-۵-۲- پلاستیسیته

با در نظر گرفتن تجزیه نرخ تغییر شکل به صورت $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$ ، رابطه ساختاری در (۳-۴۳) را می توان در فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\tau^\nabla = \mathcal{L}^{e\tau} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) + \tau \cdot \mathbf{W}^p - \mathbf{W}^p \cdot \tau \quad (3-44)$$

اما نرخ تغییر شکل مومسان $\mathbf{D}^p$ و تانسور دوران $\mathbf{W}^p$ ، هر دو از نظر فعالیت لغزش در هر سیستم لغزش به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\mathbf{D}^p = \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\alpha \mathbf{M}^\alpha, \quad \mathbf{W}^p = \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\alpha \boldsymbol{\Omega}^\alpha$$

که:

^۱ نماد $\mathcal{L}^e$ نشانگر ماتریس کشسان با توجه به محورهای بلوری است در حالی که نماد $\bar{\mathcal{L}}^e$ با استفاده از ماتریس چرخش تبدیل، ماتریس کشسان را در سیستم عمومی بیان می کند [Q].

^۲ نرخ جائومن با تانسور دوران مومسان $\mathbf{W}^p$ همبستگی دارد و یکی از متداول ترین نرخ های عینی در مدل ساختاری مواد جامد است.

$$\mathbf{M}^\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{s}^\alpha \mathbf{m}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha \mathbf{s}^\alpha) \quad (۳-۴۶ \text{ الف})$$

$$\mathbf{\Omega}^\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{s}^\alpha \mathbf{m}^\alpha - \mathbf{m}^\alpha \mathbf{s}^\alpha) \quad (۳-۴۶ \text{ ب})$$

در اینجا به یاد بیاورید که $\mathbf{s}^\alpha$ ، $\mathbf{m}^\alpha$ نمایانگر بردار جهت لغزش و بردار عمود بر صفحه لغزش سیستم α است. علاوه بر این، بردارهای واحد عمود و لغزش که در پیکره بندی مرجع $\mathfrak{B}_0$ تعریف شده اند، به ترتیب با $\mathbf{s}_0^\alpha$ و $\mathbf{m}_0^\alpha$ مشخص می شوند. از آنجا که قبلاً فرض شد یک پیکره بندی میانی $\mathfrak{B}_i$ وجود دارد که در آن بردارهای لغزش و عمود همانند پیکره بندی های مرجع $\mathfrak{B}_0$ هستند، لذا جهت های $\mathbf{s}^\alpha$ ، $\mathbf{m}^\alpha$ از نظر $\mathbf{s}_0^\alpha$ و $\mathbf{m}_0^\alpha$ به صورت زیر بیان می شوند:

$$\mathbf{s}^\alpha = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{s}_0^\alpha \quad \mathbf{m}^\alpha = \mathbf{m}_0^\alpha \cdot \mathbf{F}^{e-1}$$

و نرخ های مربوطه $\dot{\mathbf{s}}^\alpha$ و $\dot{\mathbf{m}}^\alpha$ نیز می تواند به صورت زیر بیان شوند:

$$\dot{\mathbf{s}}^\alpha = \mathbf{L}^e \cdot \mathbf{s}^\alpha \quad \dot{\mathbf{m}}^\alpha = -\mathbf{m}^\alpha \cdot \mathbf{L}^e$$

اکنون با ترکیب روابط (۳-۴۴) و (۳-۴۵) داریم:

$$\boldsymbol{\tau}^\nabla = \mathcal{L}^{e\tau} : \left(\mathbf{D} - \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\alpha \mathbf{M}^\alpha \right) - \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\alpha (\mathbf{\Omega}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{\Omega}^\alpha)$$

$$= \mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{D} - \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\alpha (\mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{M}^\alpha + \mathbf{\Omega}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{\Omega}^\alpha)$$

عبارت بالا منجر به تعریف $\mathbf{B}^\alpha$ و Φ^α می شود:

$$\mathbf{B}^\alpha = \mathbf{\Omega}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{\Omega}^\alpha \quad (۳-۴۷)$$

$$\Phi^\alpha = \mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{M}^\alpha + \mathbf{B}^\alpha \quad (۳-۴۸)$$

و توجه داشته باشید که:

$$\mathbf{B}^\alpha = \frac{1}{2} [(\mathbf{s}^\alpha \mathbf{m}^\alpha - \mathbf{m}^\alpha \mathbf{s}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{s}^\alpha \mathbf{m}^\alpha - \mathbf{m}^\alpha \mathbf{s}^\alpha)] \quad (3-49)$$

$$= \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{m}^\alpha \mathbf{s}^\alpha) - (\mathbf{m}^\alpha \mathbf{s}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3-49)$$

اکنون با تعاریف فوق، می توان عبارت (۳-۴۴) را ساده تر کرد:

$$\boldsymbol{\tau}^\nabla = \mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{D} - \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\alpha \boldsymbol{\Phi}^\alpha \quad (3-50)$$

توجه داشته باشید که اگر قادر به بیان $\dot{\gamma}^\alpha$ از منظر $\mathbf{D}$ باشیم، آنگاه عبارت (۳-۵۰) مدول مماسی الاستوپلاستیک را تعریف می کند. برای انجام این کار از شرایط ثابت و تسلیم در هر سیستم لغزش استفاده می شود:

$$\phi^\alpha = \tau^\alpha - \tau_{cr}^\alpha = 0 \quad (3-51 \text{ الف})$$

$$\dot{\phi}^\alpha = \dot{\tau}^\alpha - \dot{\tau}_{cr}^\alpha = 0 \Rightarrow \dot{\tau}^\alpha - \sum_{\beta=1}^N h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\beta = 0 \quad (3-51 \text{ ب})$$

که به ترتیب توسط معادلات (۳-۵۱ الف) و (۳-۵۱ ب) تعریف شده اند. تنش برشی بر روی سیستم لغزش α را می توان با توجه به تنش کرشهف $\boldsymbol{\tau}$ به صورت زیر بیان کرد:

$$\tau^\alpha = \mathbf{m}_0^\alpha \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{s}_0^\alpha = \mathbf{m}_0^\alpha \cdot \mathbf{F}^{e-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{s}_0^\alpha = \mathbf{m}_0^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{s}_0^\alpha \quad (3-52)$$

سپس با دیفرانسیل گرفتن از رابطه (۳-۵۲) با توجه به زمان t و ربط دادن نتیجه به (۳-۵۱ ب) داریم:

$$\dot{\tau}^\alpha = \dot{\mathbf{m}}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{s}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{s}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{s}}^\alpha =$$

$$= -\mathbf{m}^\alpha \cdot \mathbf{L}^e \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{s}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha \cdot \dot{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{s}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L}^e \cdot \mathbf{s}^\alpha =$$

$$= \mathbf{m}^\alpha \cdot (-\mathbf{L}^e \cdot \boldsymbol{\tau} + \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L}^e) \cdot \mathbf{s}^\alpha$$

$$= \mathbf{m}^\alpha \cdot [-(\mathbf{D}^e + \mathbf{W}^e) \cdot \boldsymbol{\tau} + \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{D}^e + \mathbf{W}^e)] \cdot \mathbf{s}^\alpha =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{m}^\alpha \cdot [(\dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}^e - \mathbf{W}^e \cdot \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{D}^e \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^e] \cdot \mathbf{s}^\alpha = \\
&= \mathbf{m}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}^e \cdot \mathbf{s}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha \cdot (-\mathbf{D}^e \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^e) \cdot \mathbf{s}^\alpha = \\
&= \mathbf{m}^\alpha \cdot (\mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{D}^e) \cdot \mathbf{s}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha \cdot (-\mathbf{D}^e \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^e) \cdot \mathbf{s}^\alpha = \\
&= I + J \tag{۳-۵۳}
\end{aligned}$$

جایی که:

$$I = \mathbf{m}^\alpha \cdot (\mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{D}^e) \cdot \mathbf{s}^\alpha \tag{۳-۵۴}$$

$$J = \mathbf{m}^\alpha \cdot (-\mathbf{D}^e \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^e) \cdot \mathbf{s}^\alpha \tag{۳-۵۵}$$

ولی:

$$I = m_i^\alpha \mathcal{L}_{ijkl}^{e\tau} D_{kl}^e s_j^\alpha = (\mathbf{m}^\alpha \mathbf{s}^\alpha)_{ij} \mathcal{L}_{ijkl}^{e\tau} D_{kl}^e = \mathbf{M}^\alpha : \mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{D}^e \tag{۳-۵۶}$$

و:

$$\begin{aligned}
J &= -m_i^\alpha D_{ij}^e \tau_{jk} s_k^\alpha + m_i^\alpha \tau_{ij} D_{jk}^e s_k^\alpha = -(-m_i^\alpha \tau_{jk} s_k^\alpha) D_{ij}^e + (m_i^\alpha \tau_{ij} s_k^\alpha) D_{jk}^e = \\
&= -(\mathbf{m}^\alpha \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{s}^\alpha)_{ij} D_{ij}^e + (\mathbf{m}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{s}^\alpha)_{jk} D_{jk}^e = -(\mathbf{m}^\alpha \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{s}^\alpha) : \mathbf{D}^e + (\mathbf{m}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{s}^\alpha) : \mathbf{D}^e = \\
&= (\mathbf{m}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{s}^\alpha - \mathbf{m}^\alpha \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{s}^\alpha) : \mathbf{D}^e = (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}^\alpha \mathbf{s}^\alpha - \mathbf{m}^\alpha \mathbf{s}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}) : \mathbf{D}^e = \mathbf{B}^\alpha : \mathbf{D}^e \tag{۳-۵۷}
\end{aligned}$$

عبارات (۳-۵۶) و (۳-۵۷) سبب می شوند که بتوان معادله (۳-۵۳) را به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^\alpha = \mathbf{M}^\alpha : \mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{D}^e + \mathbf{B}^\alpha : \mathbf{D}^e = (\mathbf{M}^\alpha : \mathcal{L}^{e\tau} + \mathbf{B}^\alpha) : \mathbf{D}^e \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\tau}}^\alpha = \boldsymbol{\Phi}^\alpha : \mathbf{D}^e \tag{۳-۵۸}$$

جایی که از معادله (۳-۴۸) استفاده شد، با یادآوری این نکته که هدف، بیان $\dot{\gamma}^\alpha$ از نظر $\mathbf{D}$ است، اکنون $\mathbf{D}^e$ را با $\mathbf{D} - \mathbf{D}^p$ جایگزین کرده و $\mathbf{D}^p$ را همانطور که در معادله (۳-۴۵) پیشنهاد شده است، به صورت زیر بیان می کنیم:

$$\dot{\mathbf{t}}^\alpha = \mathbf{\Phi}^\alpha : \mathbf{D} - \mathbf{\Phi}^\alpha : \sum_{\beta=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\beta \mathbf{M}^\beta \quad (3-59)$$

اکنون عبارت فوق را در شرایط سازگاری (۳-۵۱ ب) جایگزین می کنیم:

$$\mathbf{\Phi}^\alpha : \mathbf{D} - \mathbf{\Phi}^\alpha : \sum_{\beta=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\beta \mathbf{M}^\beta - \sum_{\beta=1}^N h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\beta = 0 \Rightarrow \sum_{\beta=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\beta (\mathbf{\Phi}^\alpha : \mathbf{M}^\beta + h^{\alpha\beta}) = \mathbf{\Phi}^\alpha : \mathbf{D} \Rightarrow$$

$$\sum_{\beta=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\beta \Upsilon^{\alpha\beta} = \mathbf{\Phi}^\alpha : \mathbf{D} \quad (3-60)$$

که در آن مؤلفه های ماتریس $[\Upsilon]$ به صورت $\Upsilon^{\alpha\beta} = \mathbf{\Phi}^\alpha : \mathbf{M}^\beta + h^{\alpha\beta}$ تعریف شده اند. همچنین $\Psi^{\alpha\beta}$ را با مؤلفه های معکوس $\Upsilon^{\alpha\beta} ([\Psi] = [\Upsilon]^{-1})$ تعریف کرده و در نتیجه این تعاریف، عبارت (۳-۶۰) می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\dot{\gamma}^\alpha = \sum_{\beta=1}^{Nas} \Psi^{\alpha\beta} \mathbf{\Phi}^\alpha : \mathbf{D} \quad (3-61)$$

و با تعریف $\mathbf{\Lambda}^\alpha$ به صورت زیر داریم:

$$\mathbf{\Lambda}^\alpha = \sum_{\beta=1}^{Nas} \Psi^{\alpha\beta} \mathbf{\Phi}^\beta \quad (3-62)$$

بیان $\mathbf{D}$ از نظر $\dot{\gamma}^\alpha$ منجر می شود:

$$\dot{\gamma}^\alpha = \mathbf{\Lambda}^\alpha : \mathbf{D} \quad (3-63)$$

با ترکیب روابط (۳-۵۰) و (۳-۶۳)، یک عبارت تحلیلی برای مدول مماسی به دست می آید:

$$\boldsymbol{\tau}^\nabla = \mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{D} - \sum_{\alpha=1}^{Nas} \dot{\gamma}^\alpha \mathbf{\Phi}^\alpha = \mathcal{L}^{e\tau} : \mathbf{D} - \sum_{\alpha=1}^{Nas} \mathbf{\Phi}^\alpha \mathbf{\Lambda}^\alpha : \mathbf{D} = \left(\mathcal{L}^{e\tau} - \sum_{\alpha=1}^{Nas} \mathbf{\Phi}^\alpha \mathbf{\Lambda}^\alpha \right) : \mathbf{D}$$

کمیت درج شده در پرانتز بالا مدول مماسی را برای پلاستیسیته تک بلور به صورت زیر تعریف می کند:

$$\mathcal{L}^J = \mathcal{L}^{e\tau} - \sum_{\alpha=1}^{Nas} \Phi^\alpha \Lambda^\alpha = \mathcal{L}^{e\tau} - \sum_{\alpha=1}^{Nas} \Phi^\alpha \sum_{\beta=1}^{Nas} \Psi^{\alpha\beta} \Phi^\beta = \mathcal{L}^{e\tau} - \sum_{\alpha=1}^{Nas} \sum_{\beta=1}^{Nas} \Psi^{\alpha\beta} \Phi^\alpha \Phi^\beta \quad (3-64)$$

و در نهایت،

$$\mathcal{L}^J = \mathcal{L}^{e\tau} - \sum_{\alpha=1}^{Nas} \sum_{\beta=1}^{Nas} \Psi^{\alpha\beta} \Phi^\alpha \Phi^\beta \quad (3-65)$$

$$\tau^\nabla = \mathcal{L}^J : \mathbf{D} \quad (3-66)$$

با این حال، فرم (۳-۶۵) دو نگرانی مهم را ایجاد می کند [۲۳]. اول، ماتریس $\Psi^{\alpha\beta}$ ممکن است همیشه وجود نداشته باشد، زیرا $\Upsilon^{\alpha\beta}$ یک ماتریس همیشه معکوس پذیر نیست. چراکه وجود ماتریس معکوس $\Psi^{\alpha\beta}$ به شدت به انتخاب دقیق مدول سخت شوندگی $h^{\alpha\beta}$ بستگی دارد. در چندین مورد، عدم توانایی در پیدا کردن معکوس $\Upsilon^{\alpha\beta}$ نشان می دهد که یک راه حل منحصر به فرد وجود ندارد^۱ و اطلاعات اضافی مورد نیاز است. ثانیاً، در مواردی که $\Psi^{\alpha\beta}$ وجود دارد، یک ماتریس نامتقارن را تعریف می کند و همچنین $\mathcal{L}^J$ را بلافاصله نامتقارن اعلام می کند.

۳-۶- مدل آسیب و سخت شوندگی

مدل های آسیب متفاوت توسط بسیاری از محققین برای تجزیه و تحلیل رفتار شکست در فلزات مطرح شده است. کاک کرافت و همکاران [۳۳] در سال ۱۹۶۸ یک مدل آسیب بر پایه تنش اصلی و کرنش موثر ارائه کردند. ویرزیسکی و همکاران [۳۴] در سال ۲۰۰۵ فرض کردند هنگامی شکست رخ می دهد که کرنش پلاستیک انباشته شده ای که توسط تنش سه محوری و متغیرهای انحرافی اصلاح شده است، به یک مقدار بحرانی برسد. زو و همکاران [۳۵] در سال ۲۰۰۹ یک معیار گلوبی و شکست بر پایه تنش ارائه دادند و این مدل آسیب را برای پیش بینی شکست در فرآیند شکل دهی ورق با موفقیت تست کردند.

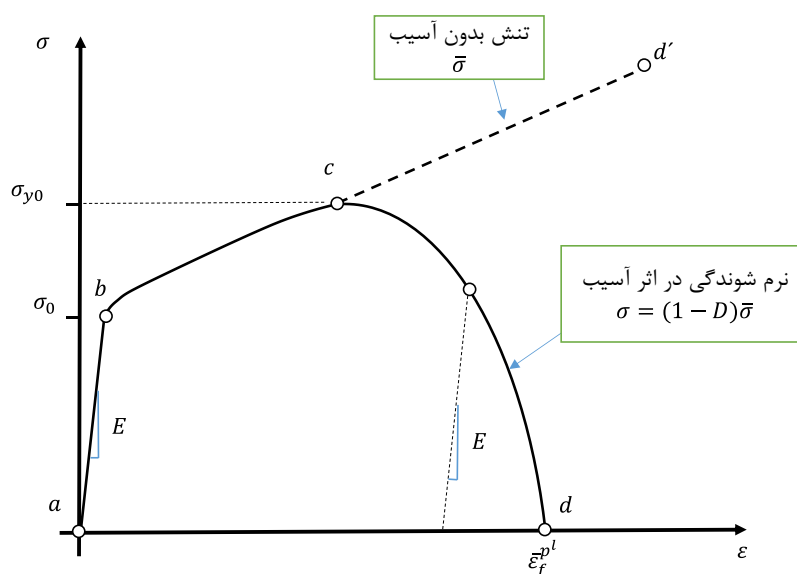
در مطالعه ای حاضر از مدل آسیب حداکثر کرنش برشی استفاده شد. بسیاری از مطالعات نشان دادند که آسیب به صورت ناهمسانگرد تکامل می یابد و مدل ناهمسانگرد می تواند نتایج دقیق تری داشته باشد. در این

^۱ مجموعه سیستم های فعال منحصر به فرد نیست.

مطالعه برای پیش‌بینی رفتار گلولی از مدل آسیب همسانگرد استفاده شده است و اثر ناهمسانگردی به‌طور غیرمستقیم از طریق مدل پلاستیسیته بلور در نظر گرفته می‌شود.

برای درک بهتر پدیده آسیب، به شکل ۳-۳ توجه کنید که پاسخ یک نمونه فلزی معمولی را در طی یک آزمایش کشش ساده نمایش می‌دهد. پاسخ تنش-کرنش در این منحنی شامل چند مرحله می‌باشد. مرحله اول (a-b)، پاسخ خطی الاستیک ماده را نشان می‌دهد، در ادامه نقطه b، نقطه حد الاستیک و منحنی b تا c، ناحیه پلاستیک را که تحت کرنش سختی قرار گرفته است نمایش می‌دهد. تغییر شکل در انتهای این مرحله، در ناحیه گلولی متمرکز می‌شود.

نقطه c وضعیت ماده در ابتدای آسیب را مشخص می‌کند که از آن به عنوان معیار شروع آسیب یاد می‌شود. پس از نقطه c، دو مسیر (c-d) و (c-d') قابل مشاهده می‌باشد. در مسیر (c-d) شاهد کاهش قابل توجهی از ظرفیت تحمل تنش در ماده هستیم که این کاهش در اثر آسیب رخ داده است و ماده دچار نرم‌شوندگی شده است، در صورتی که مسیر (c-d') منحنی ظرفیت تحمل تنش ماده را بدون آسیب نشان می‌دهد.



شکل ۳-۳: منحنی تنش-کرنش یک نمونه فلزی معمولی در حالت متأثر از آسیب و بدون آسیب

در این منحنی D متغیر آسیب، $\bar{\sigma}$ تنش بدون آسیب و σ تنشی است که تحت تاثیر آسیب قرار گرفته است. σ_0 حد الاستیک و σ_{y0} تنش نهایی در شروع آسیب است و $\bar{\epsilon}_f^{pl}$ کرنش پلاستیک معادل در شکست می‌باشد و زمانی اتفاق می‌افتد که متغیر آسیب یعنی $D=1$ شود.

۱-۶-۳- مدل آسیب حداکثر کرنش برشی

این مدل می گوید آسیب زمانی آغاز شده و تکامل می یابد که حداکثر کرنش برشی از یک مقدار بحرانی معین بیشتر شود:

$$D = \begin{cases} 0 & (\gamma_m \leq \gamma_{m,ini}) \\ \frac{D_{max}}{(\gamma_{m,max} - \gamma_{m,ini})^M} (\gamma_m - \gamma_{m,ini})^M & (\gamma_{m,ini} < \gamma_m < \gamma_{m,max}) \\ D_{max} & (\gamma_{m,max} \leq \gamma_m) \end{cases} \quad (3-66)$$

که در این معادله γ_m حداکثر کرنش برشی، $\gamma_{m,ini}$ حداکثر کرنش برشی که آسیب آغاز می شود، $\gamma_{m,max} = \gamma_{m,ini} + \Delta\gamma_m$ حداکثر کرنش برشی که اندازه آسیب به حداکثر مقدار خود یعنی D_{max} می رسد و M توان کنترل کننده رشد آسیب می باشد. وقتی M برابر یک باشد، سبب یک تغییر ناگهانی می شود و این تغییر ناگهانی گاهی اوقات سبب ایجاد مشکل در حل و تحلیل استاتیکی می شود. در این مطالعه برای اینکه تغییرات آرامتر اتفاق بیفتد و همگرایی بهبود یابد، از $M = 2$ استفاده می شود [۱۵].

۲-۶-۳- اجرای عددی تکامل آسیب

همراه با تجمع آسیب در ماده، ظرفیت تحمل بار کاهش می یابد. برای سنجیدن میزان کاهش ظرفیت تحمل بار از فرمول زیر استفاده می شود:

$$\bar{\sigma}_D(\bar{\epsilon}, D) = (1 - D)\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}) \quad (3-67)$$

در این معادله $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$ تنش جریان محاسبه شده با استفاده از کرنش پلاستیک معادل و $\bar{\sigma}_D(\bar{\epsilon}, D)$ تنش جریان اصلاح شده با در نظر گرفتن تکامل آسیب می باشد. در اینجا فرض شده است که آسیب و کرنش سختی همسانگرد هستند. با فرض یک تکامل آسیب همسانگرد ساده، مقدار آسیب در یک نقطه انتگرالی محاسبه شده و با حل معادله غیر خطی (۳-۷۰) به سیستم لغزش اعمال می شود و آسیب به روش صریح^۱ طبق مراحل زیر محاسبه می شود.

^۱ Explicit

الف. محاسبه تنش آزمایشی

تنش آزمایشی در سیستم لغزش با فرض تغییر شکل کاملاً یکسان توسط یون و همکاران [۱۷] به صورت زیر محاسبه شد:

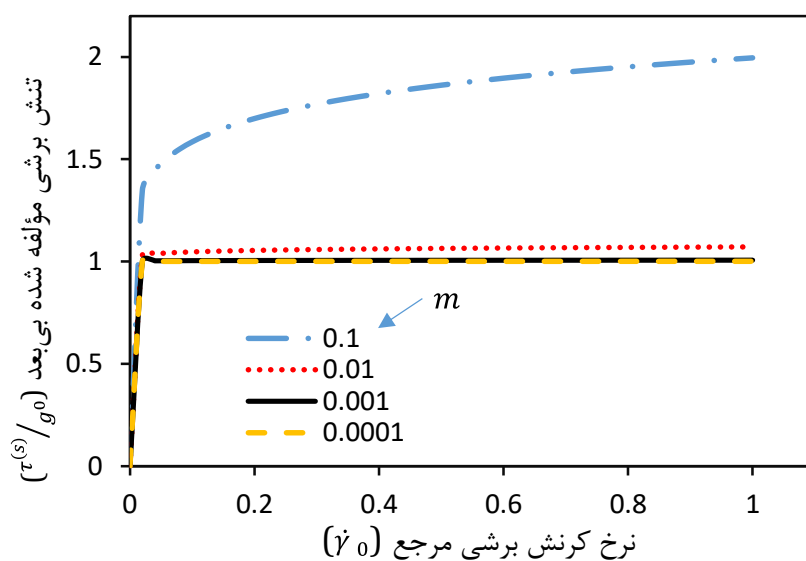
$$\tau_{(n+1)}^{T(s)} = \tau_{(n)}^{(s)} + \Delta t \dot{\tau}^{(s)} = \tau_{(n)}^{(s)} + \Delta t \mathbf{R}_{(s)} : \mathbf{D} \quad (3-68)$$

در معادله (۳-۶۸)، $\tau_{(n+1)}^{T(s)}$ تنش برشی مؤلفه شده در گام جاری و $\tau_{(n)}^{(s)}$ تنش برشی مؤلفه شده در گام قبلی است که از معادله (۳-۷۳) محاسبه می شود. $\mathbf{R}$ یک تانسور چرخشی می باشد که به عمود بر صفحه لغزش، جهت لغزش، مدول کشسان و تنش وابسته است [۱۵]. تنش برشی مؤلفه شده هم از رابطه ی زیر به دست می آید:

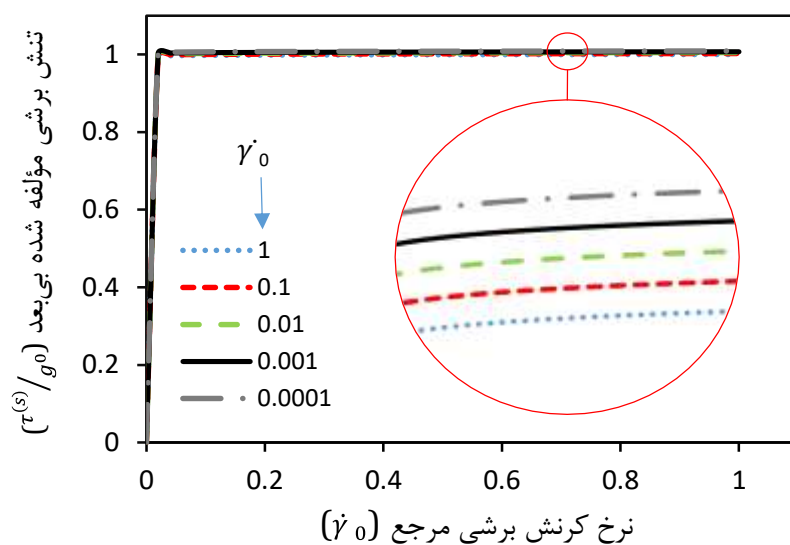
$$\tau^{(s)} = g^0 \left(\frac{|\dot{\gamma}^{(s)}|}{\dot{\gamma}_0} \right)^m \text{sign}(\dot{\gamma}^{(s)}) \quad (3-69)$$

که $g^0 = a(\varepsilon_0 + \Gamma)^n$ استحکام سخت شونده گی در مقیاس دانه است. Γ لغزش انباشته بر روی تمام سیستم لغزش است و به صورت $\Gamma = \Gamma_n + \dot{\Gamma} \Delta t$ بیان می شود که $\dot{\Gamma} = \Sigma |\dot{\gamma}^{(s)}|$ است [۱۵]. همچنین m حساسیت به نرخ کرنش و $\dot{\gamma}_0$ نرخ کرنش مرجع است. در این مطالعه برای رفتار مستقل از نرخ کرنش توان $m = 0.001$ و $\dot{\gamma}_0 = 0.001$ در نظر گرفته می شوند، این مقادیر به هنگام کالیبراسیون در فصل ۴ بدست آمدند.

شکل ۳-۴ و ۳-۵ به ترتیب تاثیر پارامترهای حساسیت به نرخ کرنش m و نرخ کرنش مرجع $\dot{\gamma}_0$ را بر تنش برشی مؤلفه شده بی بعد نشان می دهند.



شکل ۳-۴: منحنی اثر حساسیت به نرخ کرنش بر تنش برشی مؤلفه شده



شکل ۳-۵: منحنی اثر نرخ کرنش اولیه بر تنش برشی مؤلفه شده

ب. محاسبه نرخ کرنش مومسان $\dot{\gamma}^{(s)}$ با توجه به معادله غیرخطی زیر

هنگامی که مواد به صورت مومسان تغییر شکل می دهند، تنش سیستم لغزش در معادله ی (۳-۶۸) باید با

تنش برشی مؤلفه شده در معادله ی (۳-۶۹) برابر شود. با حل معادله ی غیرخطی زیر:

$$F(\dot{\gamma}^{(s)}) = \tau_{(n+1)}^{T(s)} - \Delta t \sum_{\alpha} \dot{\gamma}^{(\alpha)} R_{(s)} : P_{(\alpha)} - (1 - D_{(n)}) \tau^{(s)} = 0 \quad (3-70)$$

در معادله‌ی (۷۰-۳)، $D_{(n)}$ آسیب در گام قبلی می‌باشد. برای مقابله با آسیب پذیری، جریان تنش کاهش یافته است و این با کاری که یون و همکاران [۱۷] انجام دادند متفاوت است. در طی تکرار هر گام، $D_{(n)}$ به منظور همگرایی بهتر به روز نمی‌شود و تنها پس از رسیدن به همگرایی در پایان هر گام به روز می‌شود.

ج. محاسبه نمو آسیب و به روزرسانی تنش

$$\Delta D_{(n+1)} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dD \quad (3-71)$$

$$D_{(n+1)} = D_{(n)} + \Delta D_{(n+1)} \quad (3-72)$$

$$\tau_{(n+1)}^{(s)} = (1 - \Delta D_{(n+1)}) \left(\tau_{(n+1)}^{(s)} - \Delta t \sum_{\alpha} \dot{\gamma}^{(\alpha)} R_{(s)} : P_{(\alpha)} \right) \quad (3-73)$$

در معادله‌ی (۷۱-۳) تا (۷۳-۳)، $\Delta D_{(n+1)}$ نمو آسیب در هر نقطه‌ی انتگرال گیری و $\tau_{(n+1)}^{(s)}$ تنش به روز شده سیستم لغزش در گام جاری است. از آنجا که نرم شدن تنش^۱ به کمک رابطه (۷۳-۳) محاسبه می‌شود، از نمو آسیب به جای آسیب کل در رابطه (۷۳-۳) استفاده می‌شود.

۳-۶-۳- خواص ماده

همانطور که پیش تر عنوان شد، مدل مورد استفاده در این تحقیق از جنس آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4 می‌باشد. در خواص کشسانی ماده مورد نظر بدلیل تقارن سیستم مکعبی FCC سه ثابت الاستیک C_{11} ، C_{12} و C_{44} برای معرفی خواص کشسانی ماده استفاده می‌شوند. این خواص از مرجع [۳۶] استخراج شدند که در جدول ۱-۳ قابل مشاهده می‌باشد. همچنین جدول ۲-۳ ترکیب شیمیایی این آلیاژ را نشان می‌دهد.

¹ Stress softening

جدول ۳-۱: خواص مکانیکی آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4

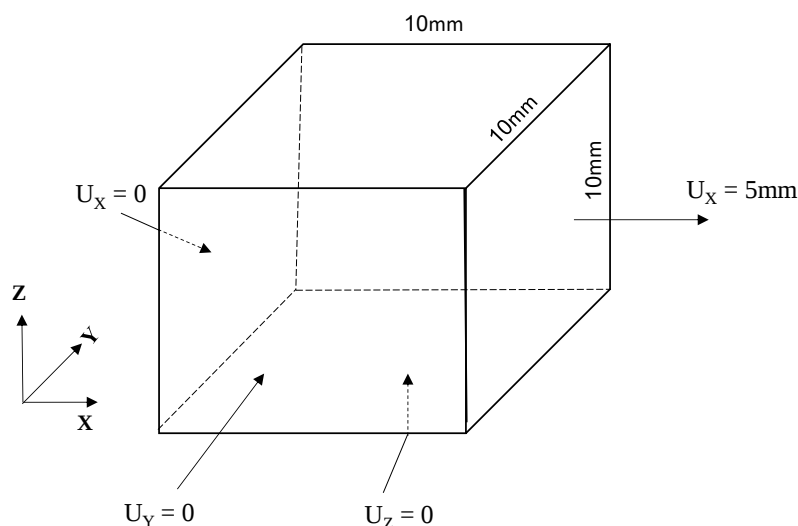
مدول یانگ	چگالی	C_{44}	C_{12}	C_{11}
(GPa)	(Kg/mm ³)	(GPa)	(GPa)	(GPa)
۷۰	2.708×10^{-6}	۲۸/۵	۶۱/۳	۱۰۸/۲

جدول ۳-۲: ترکیب شیمیایی آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4 [۳۷]

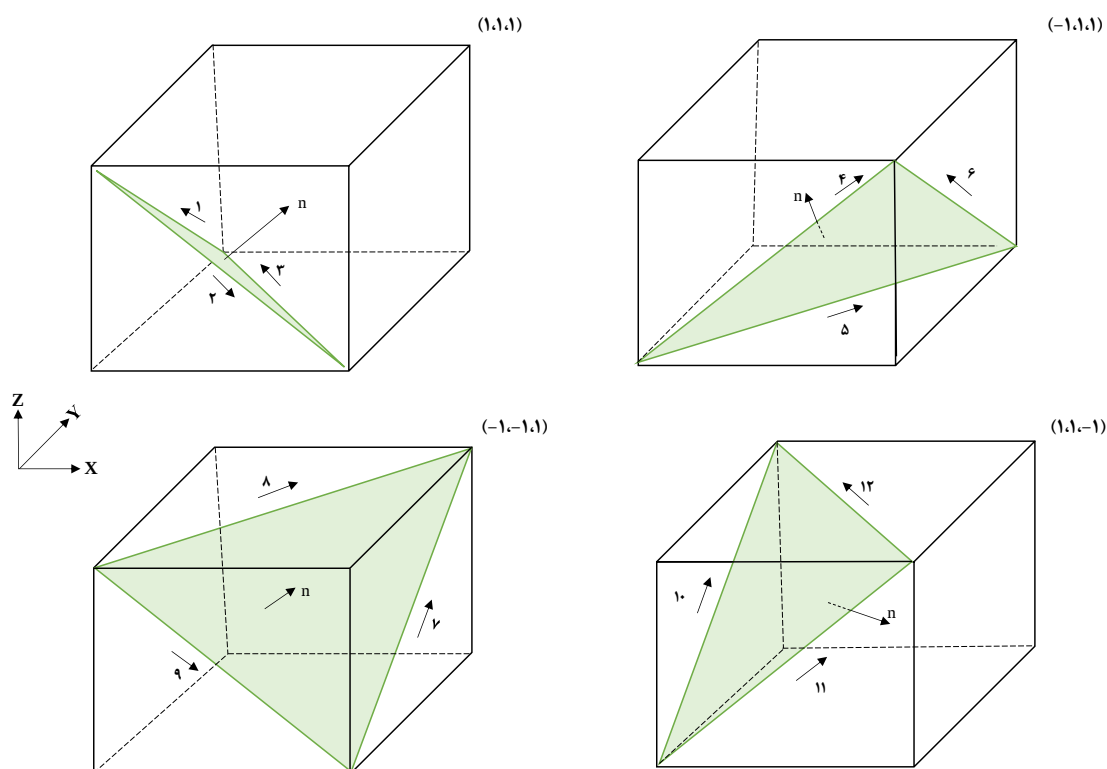
عنصر	Al	Tin	Ti	Zn	Cr	Mg	Mn	Cu	Fe	Si
درصد وزنی	$\cong 98.2$	< 0.2	۰/۰۲۵	۰/۰۱۶	۰/۰۲۷	۰/۵۷	۰/۰۵۳	۰/۰۴۵	۰/۱۰	۰/۹۰

۴-۶-۳- بررسی تحلیلی

به منظور بررسی و تأیید روش انتگرال گیری تنش و مدل تکامل آسیب، تحلیل برای حالت تک المان انجام شد. شکل ۳-۶ مدل تک المان را نشان می دهد. تجزیه و تحلیل برای دو مجموعه زوایای اویلر (0° ، 0° ، 0°) و (0° ، 0° ، 45°) انجام شده است. ۱۲ سیستم لغزش بلور FCC در شکل ۳-۷ نشان داده شده است. مقادیر حداکثر کرنش برشی که آسیب را آغاز می کند و کرنش برشی که باعث می شود آسیب بعد از شروع به حداکثر مقدار خود برسد به ترتیب برابر $\frac{\gamma_{m,ini}}{2} = 0.2$ و $\frac{\gamma_{m,max}}{2} = \frac{\gamma_{m,ini}}{2} + 0.0188$ می باشند. برای سخت شونده گی سیستم لغزش از رابطه (۳-۷۵) استفاده شد که در قسمت (۳-۷-۲) توضیح داده می شود. شکل ۳-۸، نتایج تحلیل برای زوایای اویلر (0° ، 0° ، 0°) را نشان می دهد. برای همگرایی بهتر، حداکثر مقدار آسیب برابر ۰/۵ در نظر گرفته شد.



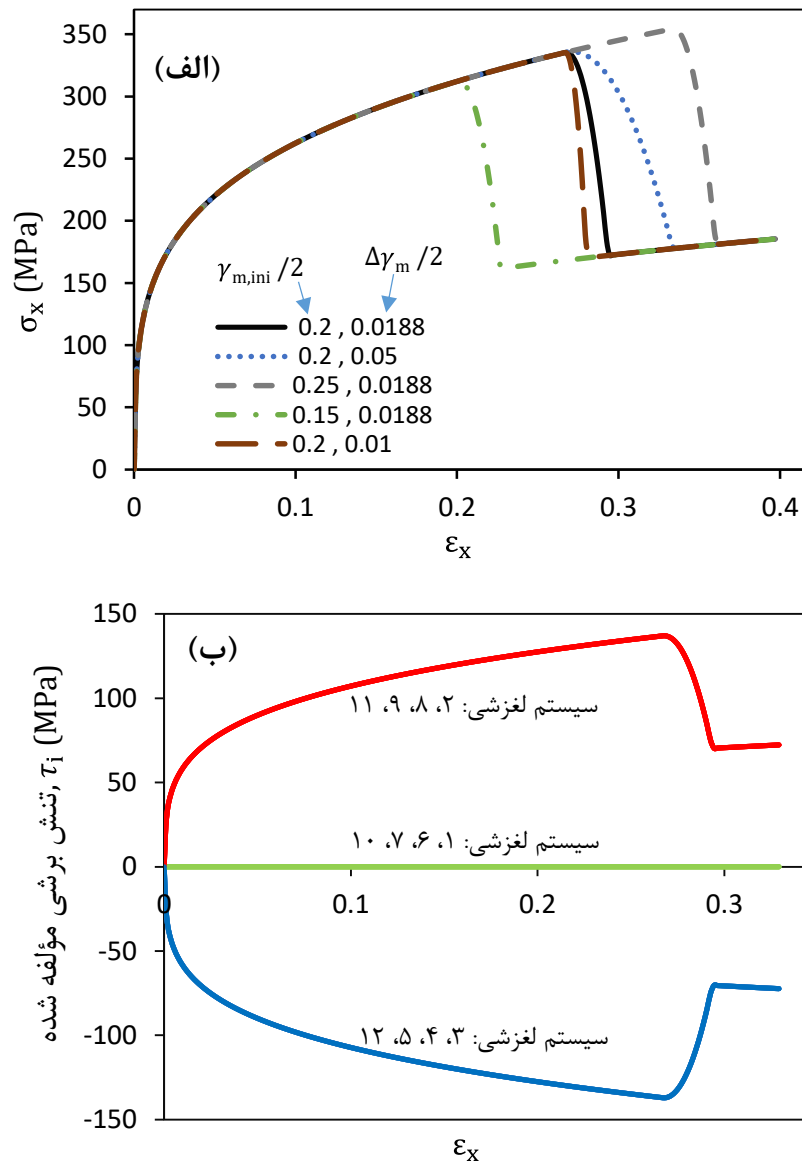
شکل ۶-۳: مدل تک المان به منظور بررسی و تأیید روابط



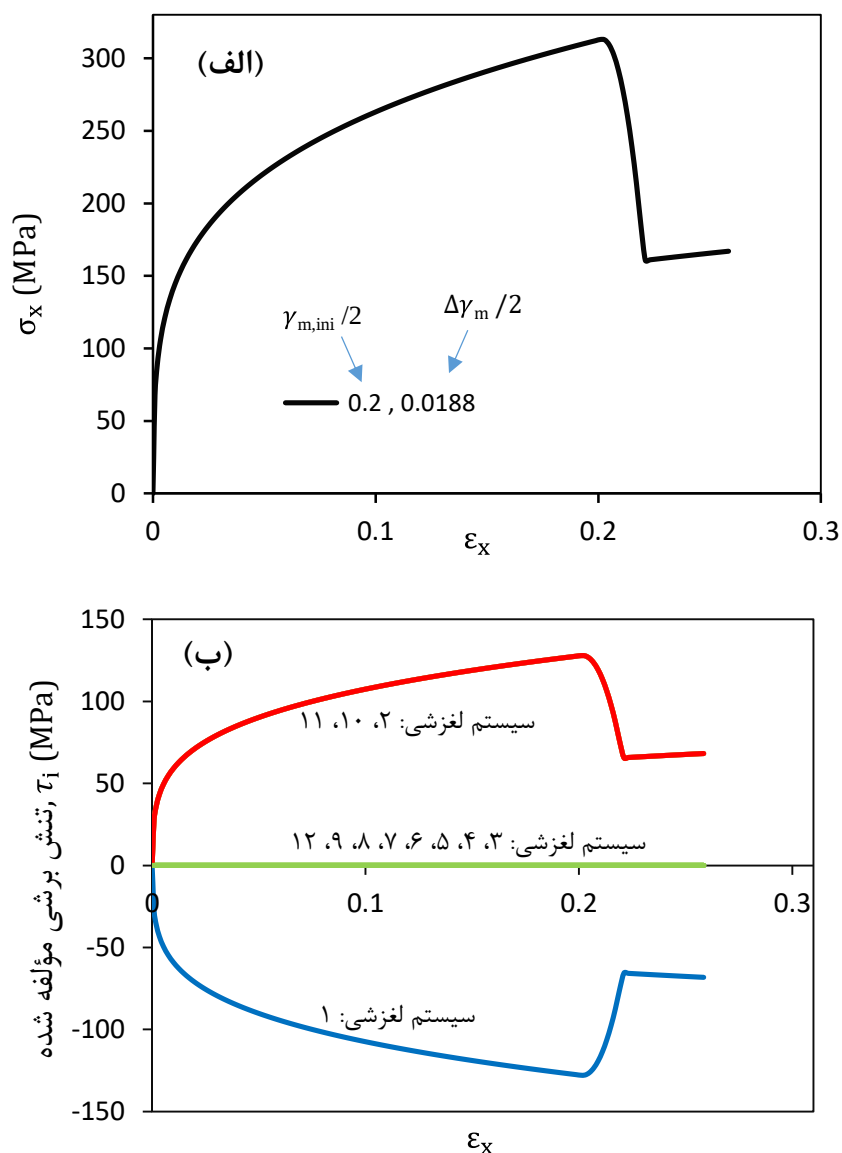
شکل ۷-۳: سیستم های لغزش برای ماده با ساختار FCC

در شکل ۸-۳ الف، با رسیدن حداکثر کرنش برشی به مقدار 0.2 ، آسیب آغاز شده و با تکامل آسیب، تنش طولی کاهش می یابد (به علت نرم شوندگی در اثر آسیب). شکل ۸-۳ ب، تنش برشی مؤلفه شده را در طول سیستم لغزش نشان می دهد. سیستم های لغزش ۱، ۶، ۷، ۱۰ عمود بر جهت کشش هستند و به همین خاطر تنش برشی مؤلفه شده در آنها صفر است. در سیستم های لغزش ۲، ۸، ۹، ۱۱ جهت لغزش با محور بارگذاری زاویه 45° می سازد بنابراین تنش برشی مؤلفه شده هم مثبت است. برای سیستم های لغزش ۳، ۴،

۵، ۱۲ تنش برشی مؤلفه شده منفی می‌باشد، چراکه حاصلضرب عمود صفحه و صفحه لغزش این سیستم‌ها منفی است.



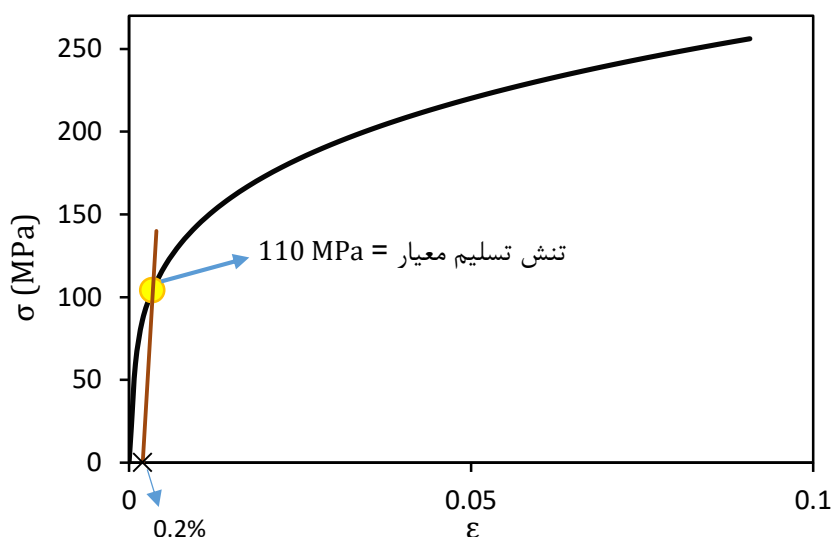
شکل ۸-۳: نتایج تحلیل برای زوایای اویلر (0° ، 90° ، 180°)



شکل ۹-۳: نتایج تحلیل تک المان با زوایای اولیه $(0^\circ, 0^\circ, 45^\circ)$

شکل ۹-۳، نتایج تحلیل را برای زوایای اولیه $(0^\circ, 0^\circ, 45^\circ)$ نشان می‌دهد. در این مورد بلور حول محور Z به اندازه 45° دوران کرده و سیستم‌های لغزش که در شکل ۳-۷ نشان داده شده‌اند هم دوران کرده‌اند. با دوران 45° درجه‌ای ساختار بلور، سیستم‌های لغزش ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۲ موازی یا عمود بر جهت بارگذاری شده‌اند. بنابراین تنش برشی مؤلفه شده در آنها صفر است. همانند شکل ۳-۸، تنش برشی مؤلفه شده در سیستم‌های لغزش ۱، ۲، ۱۰، ۱۱ مثبت‌اند و برعکس در سیستم لغزش ۱ منفی می‌باشد.

همچنین تنش تسلیم مدل به روش تنش معیار^۱ استخراج شده است. شکل ۳-۱۰، تنش تسلیم معیار مدل مورد آزمایش که از جنس آلیاژ AA6022-T4 می باشد را نشان می دهد.



شکل ۳-۱۰: تنش معیار محاسبه شده آلیاژ AA6022-T4

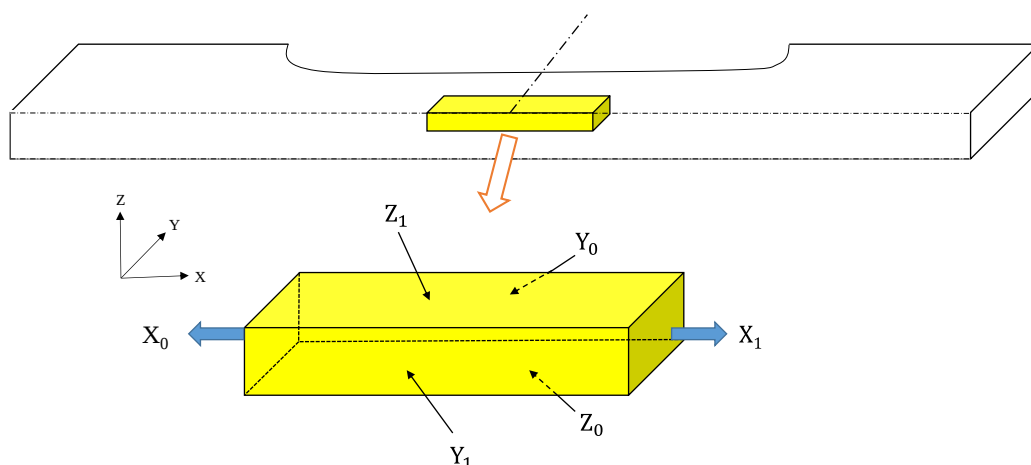
۳-۷- تشریح مدل تحلیل

۳-۷-۱- مدل المان محدود برای تست

برای پیش بینی رفتار گلوپی و تاثیر تنش در راستای ضخامت بر ورق آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4، تحلیل المان محدود یک تست کشش با روش پلاستیسته بلور انجام شد. روش پلاستیسته بلور و مدل آسیب استفاده شده که در بخش های قبلی توضیح داده شد، به کمک VUMAT در نرم افزار تجاری آباکوس^۲ به کار گرفته شد. تعداد زیادی المان برای انجام تست کشش مورد نیاز است لذا برای اثربخشی محاسبات، دامنه ی مدل مورد تحلیل را مطابق شکل ۳-۱۱ کاهش می دهیم. مدل مورد تحلیل این مطالعه، دارای ابعادی با ۳ mm در طول، ۱/۵ mm در عرض و ۰/۵ mm در ضخامت می باشد. در واقع ضخامت ورق ۱ mm فرض شد و با در نظر گرفتن تقارن آن، نصف این ضخامت برای تحلیل در نظر گرفته شد.

^۱ Proof Stress

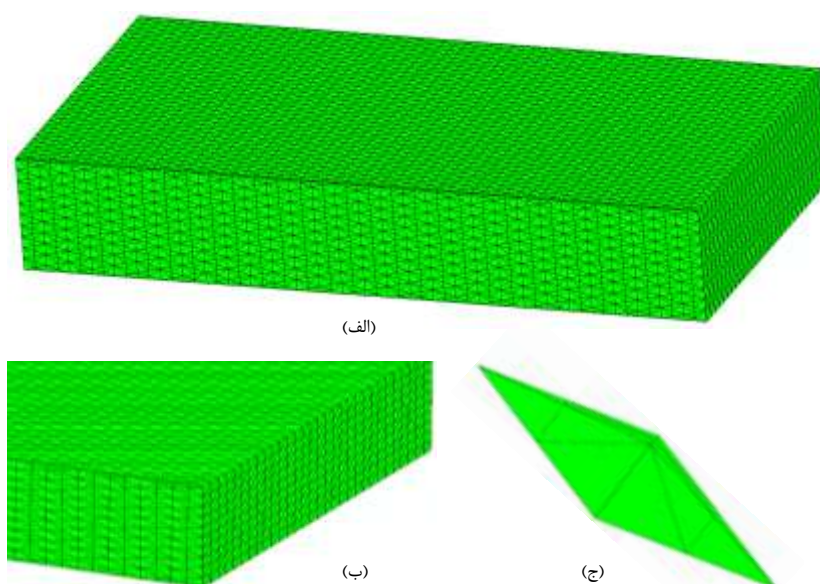
^۲ Abaqus



شکل ۱۱-۳: توصیف دامنه محاسباتی و شرایط مرزی مدل تحلیلی

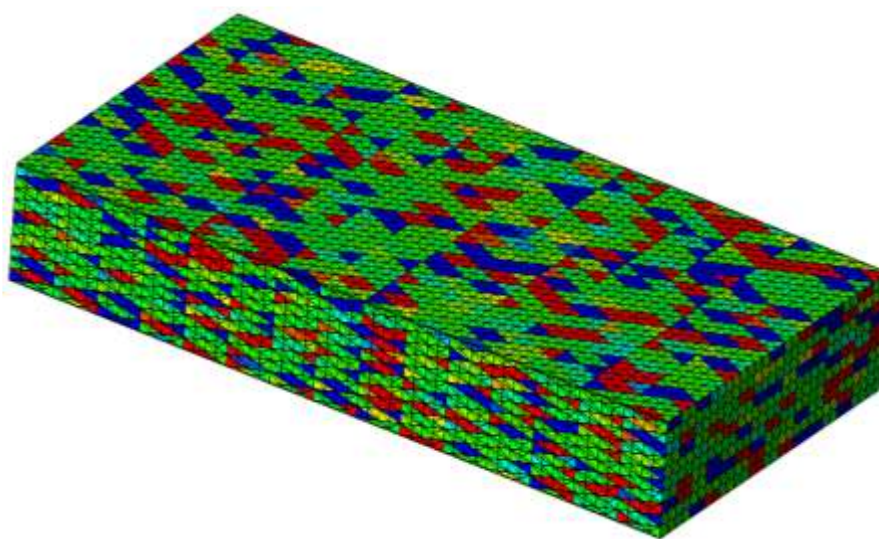
در جهت X مدل با یک سرعت با دامنه هموار کشیده می شود. در جهت های Y_0 و Z_0 جابجایی تمام گره ها به هم وابسته است تا در شرایط کششی و کاهش ضخامت ورق، تمام این نقاط با هم حرکت کنند.

شکل ۳-۱۲ تقسیم دامنه مورد تحلیل به ۱۴۷۹۰ دانه ی هشت وجهی را نشان می دهد. طبق مطالعات یون و همکارانش [۱۷]، اندازه متوسط دانه های آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4 حدود ۰/۰۵ mm می باشد و در این مطالعه نیز اندازه دانه همین مقدار در نظر گرفته شدند. هریک از دانه ها به اندازه کافی المان بندی شده اند و زاویه اوایلر مشابه به تمام المان های یک دانه اختصاص داده شد. المان به کار رفته در این مدل از نوع کانتینیوم چهار وجهی خطی با چهار گره (C3D4) می باشد.



شکل ۱۲-۳: توصیف مدل شبکه بندی (الف) مدل کامل، (ب) حالت بزرگ نمایی شده، (ج) دانه الماسی شکل

شکل ۳-۱۳ توزیع جهت‌گیری^۱ مدل را نشان می‌دهد. به‌طور کلی در این مطالعه تعداد هزار جهت‌گیری تولید شده است و این تعداد به صورت تصادفی به دانه‌ها اختصاص داده شده است. تصویر قطبی^۲ آلیاژ آلومینیوم AA 6022-T4 هم در شکل ۳-۱۴ نشان داده شده است. این تصویر به صورت ترجیحی به کمک نرم‌افزار متلب به نحوی تولید شده است تا مشابه شکل قطبی به‌دست آمده توسط یون و همکاران [۱۷] باشد. آن‌ها این تصویر را به‌صورت تجربی با استفاده از پراش پرتو- X^3 و OIM^۴ به‌دست آورده‌اند. از تصویر قطبی برای نمایش دادن جهت‌های هر دانه بلور در یک سیستم مرجع استفاده می‌شود و شکل ۳-۱۴ نشان دهنده متنوع بودن جهت‌های بلور در این مدل است.



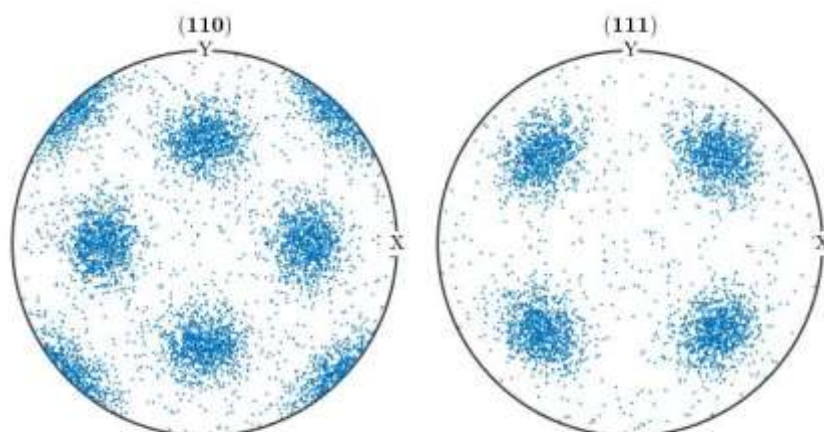
شکل ۳-۱۳: توزیع تصادفی جهت‌گیری مدل

¹ Orientation

² Pole figure

³ X-ray diffraction

⁴ Orientation imaging microscopy



شکل ۱۴-۳: تصویر قطبی صفحات (۱۱۰) و (۱۱۱) آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4

۲-۷-۳- تعیین روابط سخت‌شوندگی سیستم لغزش

رابطه‌ی تنش- کرنش آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4 که توسط کیم و همکارانش [۱۵] از طریق آزمایش کشش در جهت نورد به دست آمد، مطابق زیر می‌باشد:

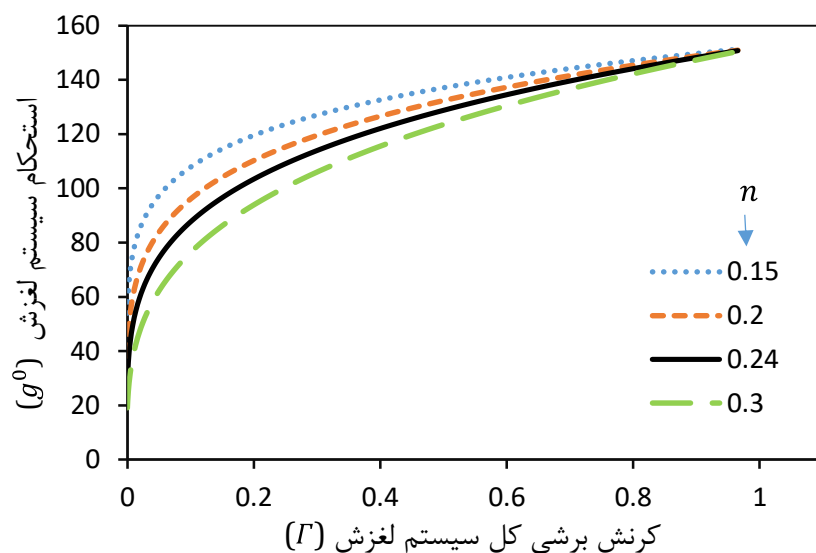
$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = 479.9(\bar{\varepsilon} + 0.001)^{0.258} \quad (3-74)$$

رابطه‌ی (۷۴-۳) در واقع حاصل میانگین پاسخ هر سیستم لغزش می‌باشد و بنابراین رابطه‌ی تنش-کرنش در سطح دانه با رابطه‌ی (۷۴-۳) تفاوت دارد. در این مطالعه، سخت‌شوندگی دانه رفتاری مشابه رابطه (۷۴-۳) دارد و قسمت استاتیکی رابطه تنش-کرنش در مقیاس دانه مطابق رابطه‌ی زیر می‌باشد:

$$g^0 = a(\varepsilon_0 + \Gamma)^n = 151.5(0.001 + \Gamma)^{0.24} \quad (3-75)$$

که در رابطه‌ی (۷۵-۳)، g^0 استحکام سیستم لغزش، a ثابت مقاومت، n توان کرنش سختی و Γ کرنش برشی انباشته در کل سیستم لغزش می‌باشد.

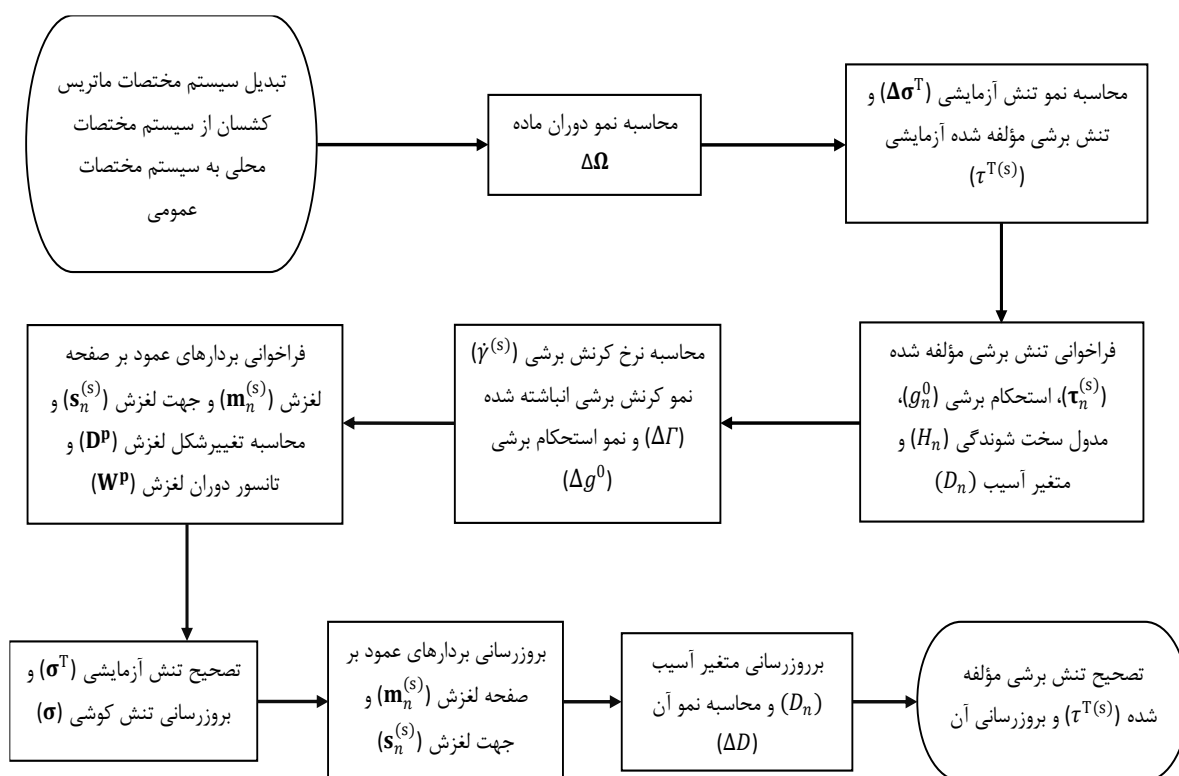
شکل ۱۵-۳ تاثیر متغیر توان کرنش سختی n ، را بر استحکام سیستم لغزش g^0 نشان می‌دهد. که تغییر n سبب تغییر در شیب منحنی می‌شود.



شکل ۳-۱۵: تاثیر توان کرنش سختی n بر استحکام سیستم لغزش

۳-۸- گردش کار زیربرنامه VUMAT

شکل ۳-۱۶، دیاگرام گردش کار و مراحل اجرای زیربرنامه VUMAT را نشان می دهد.



شکل ۳-۱۶: دیاگرام گردش کار زیربرنامه VUMAT

فصل ۴ نتایج و بحث

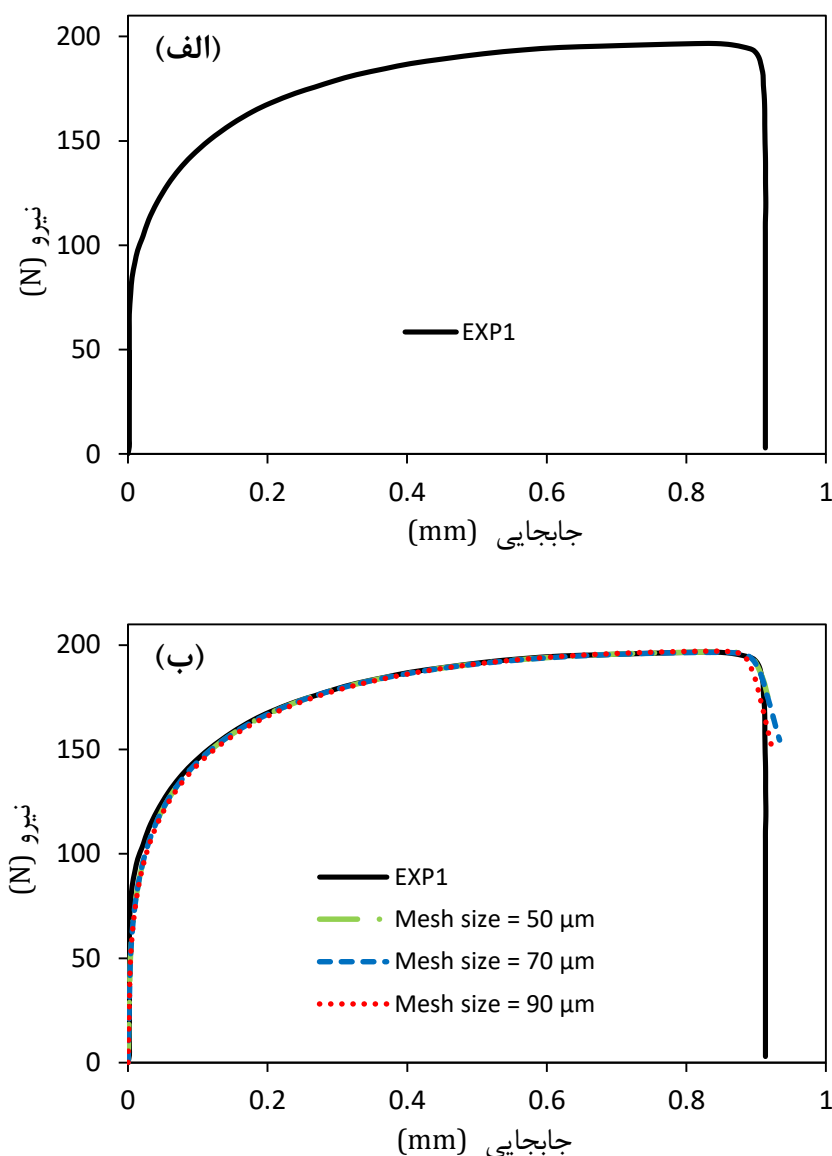
بر اساس روابطی که در فصل‌های دوم و سوم بیان شده‌اند، در این فصل زیر برنامه نوشته شده بر اساس آن روابط به نرم‌افزار آباکوس معرفی و نتایج حاصل از آن ارائه می‌شود و هدف اصلی پایان‌نامه، که تاثیر تنش در راستای ضخامت بر شکل‌پذیری ورق می‌باشد، پس از طی چند آزمایش برای کشش تک محوره و دو محوره، بررسی می‌شود. در ابتدا کالیبراسیون پارامترهای آسیب انجام شد، سپس اثر فشار عمودی بر روی شروع گلویی و نیروی شکل‌دهی بررسی و در آخر منحنی آن‌ها ارائه شد.

۴-۱- تعیین پارامترهای مدل آسیب

برای تطابق نتایج تحلیلی حاصل از تست کشش، از کار تجربی مرجع [۱۵] در این زمینه، استفاده شد. آن‌ها، ۳ آزمایش کشش یکسان را بر روی آلیاژ آلومینیوم AA6022-T4 انجام داده‌اند. رفتار سخت شوندگی هر ۳ آزمایش مشابه هم شد. اما طول منحنی تا شکست کمی متفاوت شد که این تفاوت چشمگیر نیست، لذا از آزمایش اول (EXP1)^۱ که نتایج آن در میان دو آزمایش دیگر قرار داشت، به عنوان مرجع در این مطالعه استفاده می‌شود. منحنی نیرو-جابجایی حاصل از آزمایش اول آن‌ها، در شکل ۴-۱ الف، نمایش داده شده است.

¹ Experiment

در تجزیه و تحلیل گلوله‌ی شدن همراه با درنظر گرفتن آسیب، مشخص شد که نرم‌شدن علت عدم ثبات ماده است و نتایج ممکن است وابسته به اندازه المان باشد [۳۸]. در این مطالعه نیز وابستگی به اندازه المان مورد بررسی قرار گرفت و تجزیه و تحلیل برای اندازه‌های مختلف و مناسب المان انجام شد.



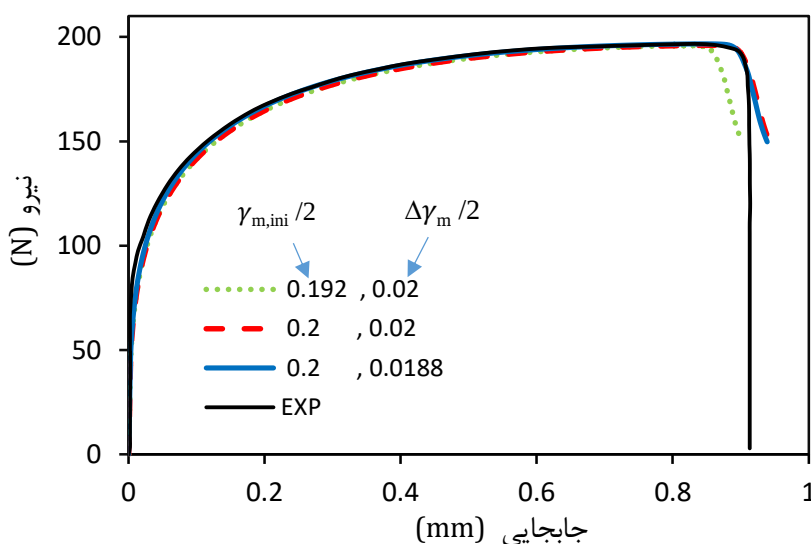
شکل ۴-۱: منحنی نیرو-جابجایی حاصل از الف) آزمایش تجربی کیم و همکارانش، ب) اندازه المان‌های متفاوت

همانطور که از شکل ۴-۱ مشخص است، نیرو ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. دلیل این امر را می‌توان اینگونه بیان کرد که پس از اعمال فرآیند کشش، ماده شروع به جریان می‌کند و در اثر کارسختی، مقاومت به تغییر شکل افزایش می‌یابد. همزمان ورق هم شروع به کاهش مقطع می‌کند اما در ابتدا نرخ افزایش کارسختی از کاهش نیرو بر اثر نازک شدن ورق، بیشتر می‌باشد و لذا نیرو افزایش می‌یابد. این افزایش نیرو تا نقطه‌ی تنش نهایی ادامه دارد، اما پس از آن کاهش سطح مقطع نمونه و در نتیجه کاهش نیرو بر

افزایش نیروی ناشی از از کارسختی غلبه می‌کند. این شرایط در ابتدا در نقطه‌ای ایجاد می‌شود که نرخ کرنش در آن بالاتر و لذا ضعیفتر از بقیه نمونه است. از این رو تمام تغییرشکل مومسان بعدی در این ناحیه متمرکز می‌شود و نمونه شروع به گلویی شدن می‌کند. حال چون سطح مقطع سریعتر از افزایش بار ناشی از کارسختی کم می‌شود، نیروی واقعی لازم برای تغییرشکل نمونه افت می‌کند.

منحنی‌های نیرو-جابجایی حاصل از تحلیل‌های این مطالعه برای اندازه‌المان‌های متفاوت در قیاس با آزمایش اول کیم در شکل ۴-۱ ب، نشان داده شده است. هنگامی که اندازه‌المان برابر ۵۰ و ۷۰ μm است، رفتار گلویی به مراتب بهتر از حالتی است که اندازه‌المان ۹۰ μm است. رفتار گلویی برای اندازه‌المان ۵۰ نیز بهتر از ۷۰ μm دیده شد. اگرچه نتایج برای این دو اندازه‌المان نزدیک به هم است ولی در این مطالعه به دلیل دستیابی به نتایج دقیق‌تر از اندازه‌المان ۵۰ μm استفاده می‌شود.

شکل ۴-۲، رابطه نیرو-جابجایی بدست آمده از CPFEM در حین کالیبراسیون با مدل آسیب حداکثر کرنش برشی را نشان می‌دهد. همانطور که می‌بینید، اگرچه در نزدیکی ناحیه گلویی کمی خطا را می‌توان مشاهده کرد اما به‌طور کلی می‌توان گفت، روابط بدست آمده از CPFEM با آزمایش تجربی کیم تطابق خوبی دارد و منحنی به درستی توسط CPFEM پیش‌بینی شده است.



شکل ۴-۲: تطابق منحنی نیرو-جابجایی حاصل از CPFEM با آزمایش تجربی کیم

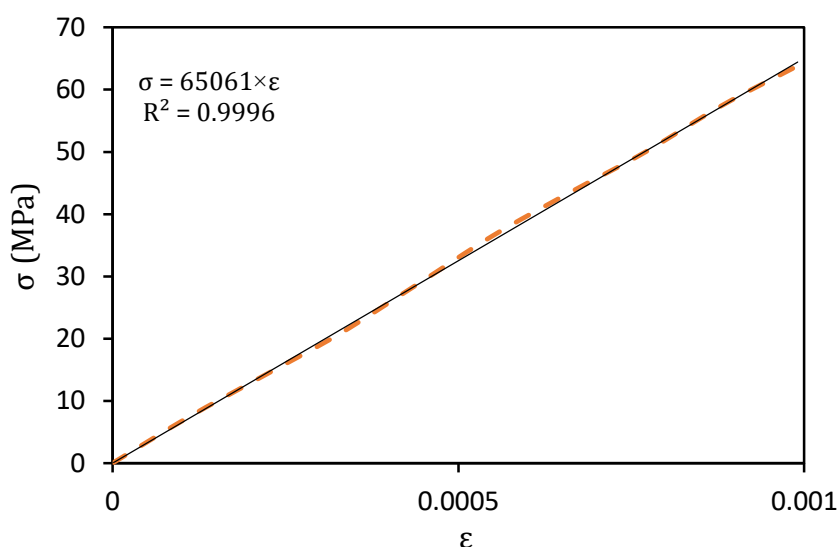
ابعاد قطعه در آزمایش تجربی کیم، با مدل به‌کار گرفته شده در این مطالعه متفاوت است. طول مدل تجربی کیم برابر ۶۰ mm است درحالی‌که طول مدل تحلیلی در این مطالعه برابر ۳ mm در نظر گرفته شد.

پارامترهایی که بهترین تناسب را با رابطه‌ی نیرو-جابجایی آزمایش تجربی کیم داشته‌اند، در جدول ۱-۴ نشان داده شده‌اند.

جدول ۱-۴: پارامترهای مدل آسیب

پارامتر	n	$\dot{\gamma}_0$	m	a	M	D_{max}	$\gamma_{m.max}/2$	$\gamma_{m.ini}/2$
مقدار	۰/۲۴	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۱۵۱/۵	۲	۰/۵	۰/۲۱۸۸	۰/۲

در هنگام شبیه‌سازی، مدول یانگ مدل تحلیلی محاسبه شد و انطباق خوبی با مدول یانگ واقعی آلومینیوم AA6022-T4 دارد. مقدار واقعی مدول یانگ این ورق، در جدول ۳-۱ در بخش خواص ماده آورده شد که برابر ۷۰ GPa می‌باشد و مدول یانگ به‌دست آمده از مدل تحلیلی برابر ۶۵/۰۶۱ GPa می‌باشد. شکل ۳-۴، مدول یانگ مدل تحلیلی را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۴: مدول یانگ مدل تحلیلی

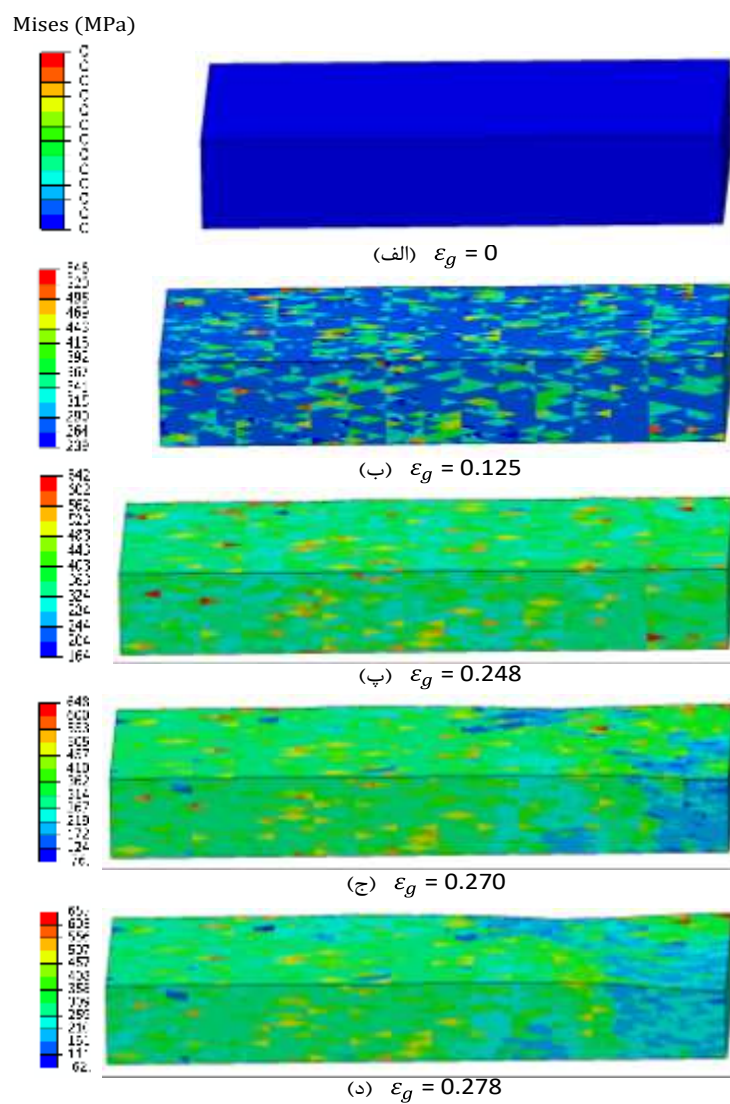
R ضریب همبستگی می‌باشد که نشان می‌دهد داده‌های تحلیل تا حد زیادی منطبق بر خط برازش شده می‌باشند.

۲-۴- شروع و تکامل آسیب

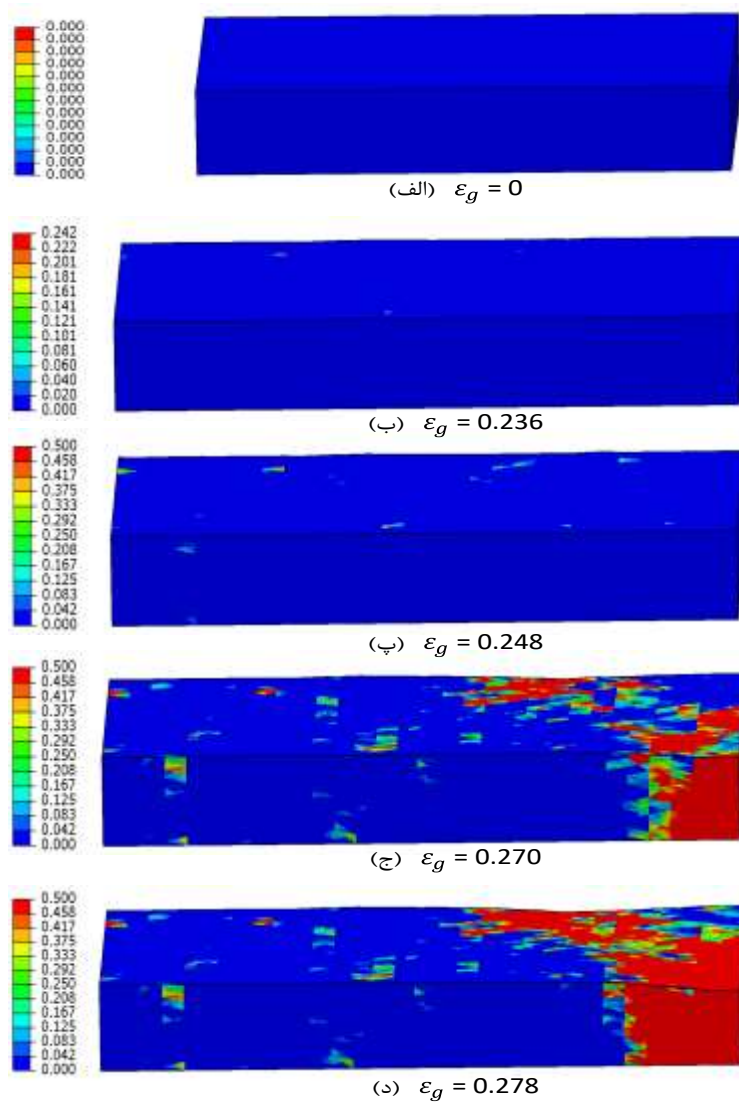
شکل ۴-۴ توزیع تنش را در چند گام نشان می‌دهد. ε_g اندازه کرنش طولی است و به کمک طول اولیه (l_0) و جابجایی کششی (u) مطابق رابطه‌ی $\varepsilon_g = \ln((l_0 + u)/l_0)$ محاسبه می‌شود. همانطور که انتظار

می‌رود تمرکز تنش در مرزدانه‌ها اتفاق می‌افتد. این تمرکز تنش در اثر اختلاف جهت‌گیری‌ها بین دانه‌های همسایه رخ می‌دهد. با افزایش کرنش کششی، همانطور که در شکل ۴-۴ نشان داده شد، ناحیه تمرکز تنش افزایش می‌یابد. در شکل ۴-۴ ج و د، مشاهده می‌شود که میزان تنش در مقایسه با شکل ۴-۴ پ، که لحظه‌ی آغاز گلوپی است، کاهش می‌یابد. چرا که ظرفیت تحمل بار پس از شروع گلوپی کاهش می‌یابد.

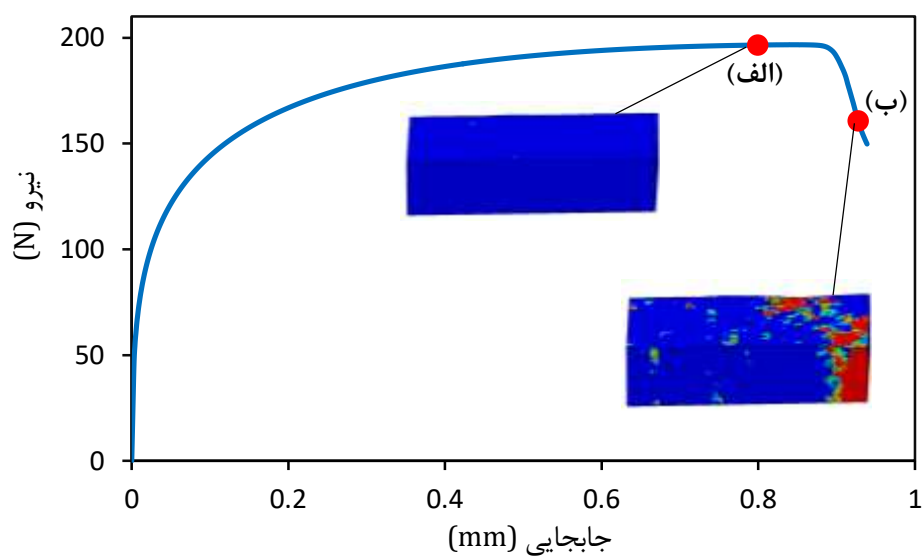
شکل ۴-۵ توزیع آسیب را برای کرنش‌های متفاوت نشان می‌دهد. طبق این شکل، تا زمانی که اندازه کرنش کوچکتر مساوی ۰/۲۳۶ باشد، آسیب آغاز نشده است و شکل ۴-۵ ب، لحظه‌ی شروع آسیب را نشان می‌دهد. هرچه اندازه کرنش بیشتر می‌شود، ناحیه آسیب افزایش می‌یابد و منجر به ترکیب مناطق آسیب دیده همسایه می‌شود. در نهایت بیشتر عناصر موجود در ناحیه گلوپی آسیب دیده می‌شوند. در تحلیل حاضر، گلوپی زمانی آغاز می‌شود که اندازه کرنش به مقدار ۰/۲۴۸ برسد و شکل ۴-۵ پ، توزیع آسیب در لحظه آغاز گلوپی را نشان می‌دهد. در شکل ۴-۵ ج و د، مشاهده می‌شود که با افزایش کرنش منطقه وسیعی در پیرامون ناحیه گلوپی دچار آسیب شده است.



شکل ۴-۴: توزیع تنش در طی اعمال کشش



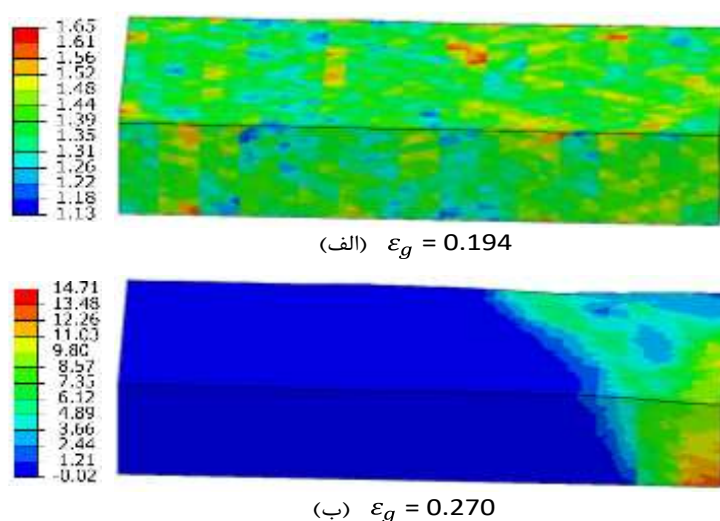
شکل ۴-۵: توزیع پارامتر آسیب (D) در طی اعمال کشش



شکل ۴-۶: نمایش توزیع پارامتر آسیب (D) بر روی نمودار کالیبره شده (الف) $\varepsilon_g = 0.236$ ، (ب) $\varepsilon_g = 0.270$

شکل ۴-۶، لحظه شروع پارامتر آسیب در کرنش ۰/۲۳۶ و توزیع پارامتر آسیب در کرنش ۰/۲۷۰ را بر روی نمودار با پارامترهای کالیبره شده نشان میدهد.

در شکل ۴-۷، پارامتر نرخ کرنش و ناحیه تغییر شکل نمونه در زمان قبل و بعد از گلوپی به تصویر کشیده شد. همانطور که در شکل ۴-۷ الف، مشخص است، تا قبل از شروع گلوپی، تمام نمونه دچار تغییر شکل می‌شود، اما در جایی که نرخ کرنش بالا هست (شکل ۴-۷ ب)، تغییر شکل در آن ناحیه متمرکز شده و گلوپی رخ می‌دهد، پس از آن تمام تغییر شکل معطوف به این ناحیه شده است و در دیگر نقاط نمونه تغییر شکل کمتری رخ می‌دهد.



شکل ۴-۷: توزیع نرخ کرنش در قبل و بعد از گلوپی

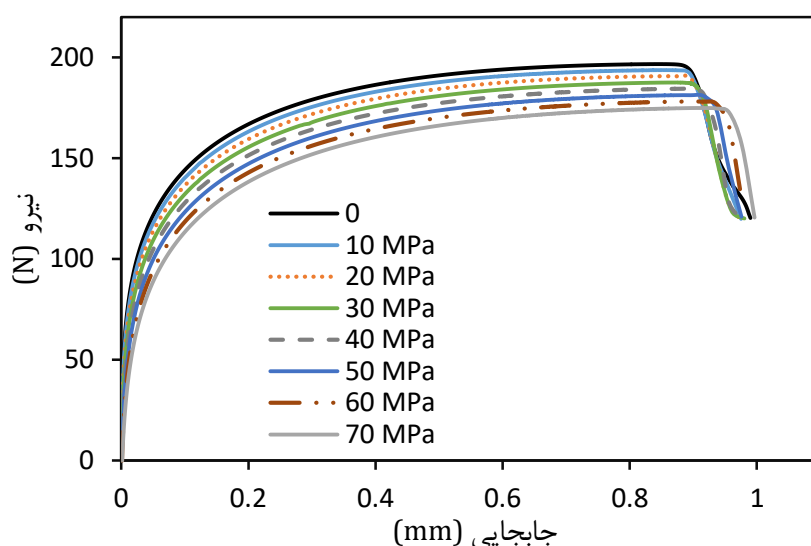
۴-۳- بررسی اثر تنش در راستای ضخامت بر شکل‌پذیری ورق

۴-۳-۱- نتایج برای کشش تک محوره

برای بررسی اثر تنش در راستای ضخامت بر شکل‌پذیری ورق در حالت کشش تک محوره، ۷ آزمایش تحت فشارهای ۱۰ تا ۷۰ MPa انجام شد. مدل مورد آزمایش، مشابه مدلی است که در بخش ۳-۷-۱ توضیح داده شد و شرایط مرزی هم به همان صورت می‌باشد. در این آزمایش‌ها، ابتدا در گام اول فشار در راستای ضخامت یعنی در جهت Z، با یک دامنه هموار اعمال شد و تا انتهای تحلیل ورق تحت فشار خواهد ماند. سپس در گام دوم، نمونه بدون سرعت اولیه و با یک دامنه هموار سرعت، در جهت X، کشیده شد. در انتها با

مقایسه نتایج با حالت بدون فشار، اثر فشار بر نیروی شکل‌دهی، شروع گلویی و یک نقطه از منحنی حد شکل‌دهی بررسی شد.

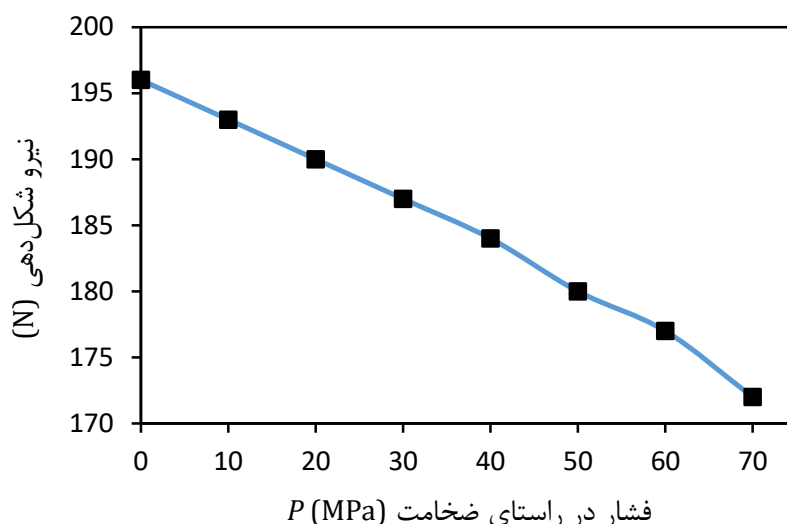
شکل ۴-۸، منحنی نیرو-جابجایی حاصل از آزمایش‌های تحت فشار در مقایسه با حالت بدون فشار را نشان می‌دهد.



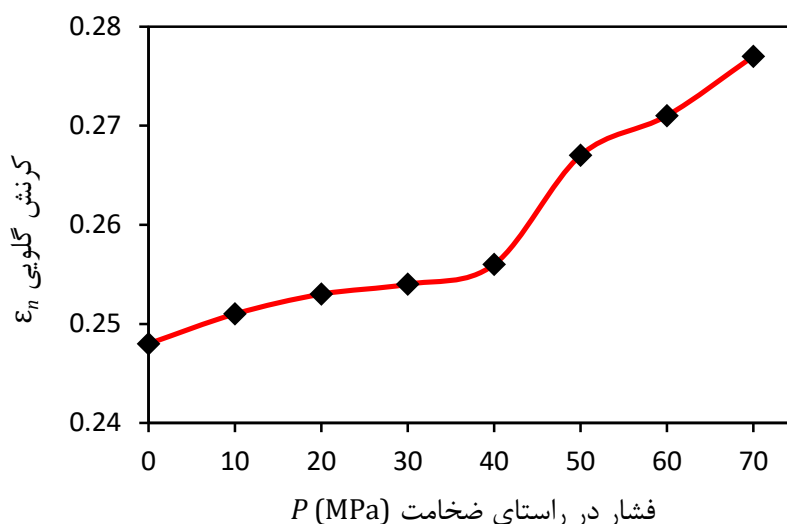
شکل ۴-۸: مقایسه منحنی نیرو-جابجایی مدل تحت فشارهای مختلف و بدون فشار

از نتایج آزمایش چنین برمی‌آید که نیروی مورد نیاز برای شکل‌دهی در اثر افزایش فشار، کاهش پیدا می‌کند. به‌طوری‌که در حالت بدون فشار، نیرو در لحظه‌ی گلویی برابر ۱۹۶ N است، در شرایطی که اگر فشار ۷۰ MPa اعمال شود، نیرو در لحظه‌ی گلویی به ۱۷۲ N کاهش می‌یابد. لذا در صورت اعمال فشار ۷۰ MPa، نیرو حدود ۱۲/۳ درصد کاهش پیدا می‌کند. شکل ۴-۹، تاثیر فشار بر نیرو را طی آزمایش‌هایی با فشارهای متفاوت نشان می‌دهد.

از دیگر نتایج قابل مشاهده در این آزمایش‌ها، به تأخیر افتادن گلویی در اثر اعمال فشار می‌باشد. در آزمایش‌های انجام شده، در حالت بدون اعمال فشار، گلویی در کرنش ۰/۲۴۸ اتفاق افتاد، در صورتی که تحت فشار ۷۰ MPa، در کرنش ۰/۲۷۷ گلویی مشاهده شد. درواقع با افزایش فشار، گلویی دیرتر اتفاق می‌افتد. شکل ۴-۱۰، به تأخیر افتادن گلویی در آزمایش‌های متفاوت را نشان می‌دهد.

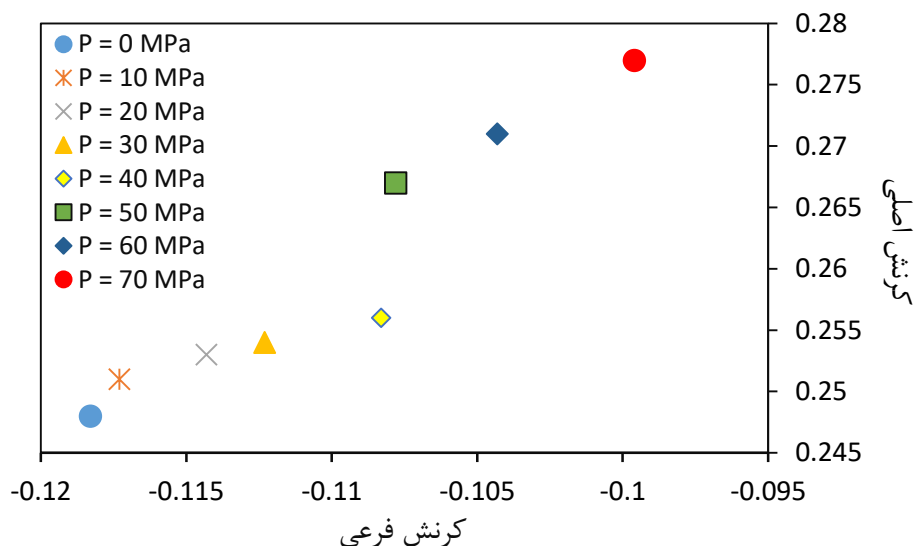


شکل ۴-۹: منحنی نیروی بیشینه شکل‌دهی در آزمون‌های مختلف فشار



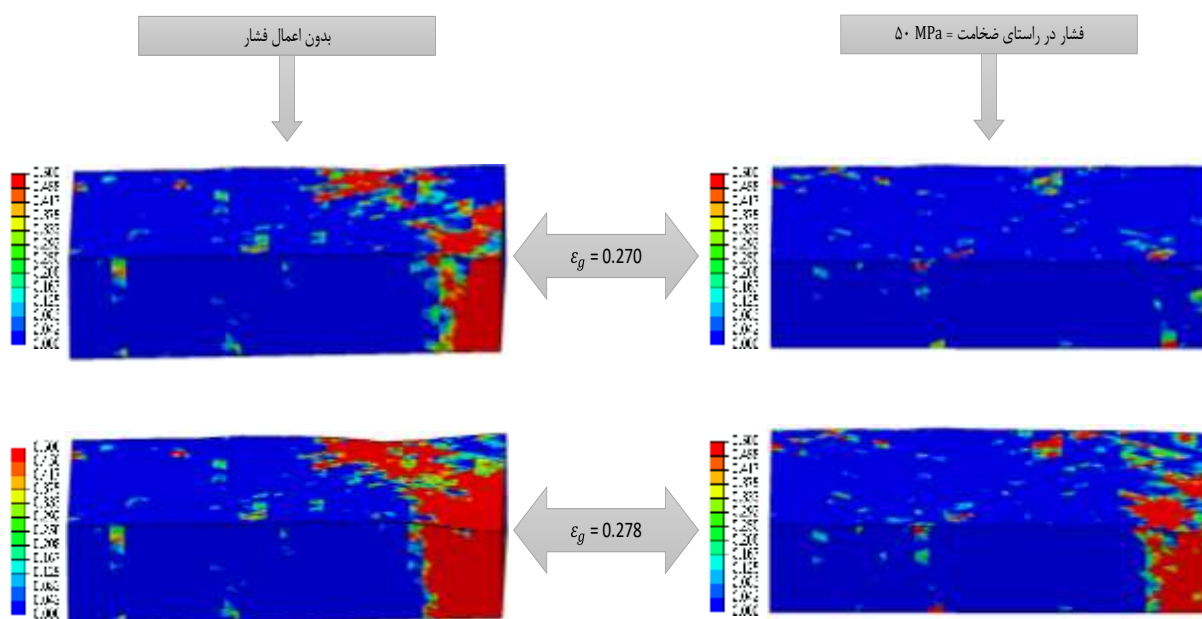
شکل ۴-۱۰: منحنی کرنش گلویی در آزمون‌های مختلف فشار

شکل ۴-۱۱، یک نقطه از منحنی حد شکل‌دهی را در آزمایش‌های انجام شده نشان می‌دهد. مطابق این شکل، با اعمال فشار و با افزایش آن، این نقطه به سمت بالا رفته و در اثر فشار ۷۰ MPa این نقطه ۱۱/۷ درصد رشد می‌کند، در نتیجه شکل‌پذیری بهبود می‌یابد. که با نتیجه به‌دست آمده حاصل از مطالعه عاصم‌پور و همکاران [۲] همخوانی دارد. آن‌ها اثر فشار بر منحنی حد شکل‌دهی را بر مبنای مدل مارسینیاک-کوزینسکی بر روی ورق‌های AA6011 و STKM-11A انجام دادند و دریافتند برای ورق AA6011 در اثر فشار ۶۲ MPa، نمودار حد شکل‌دهی ۱۹/۴ درصد و برای ورق STKM-11A تحت فشار ۲۳۱ MPa، ۲۷/۴ درصد بالا می‌رود.



شکل ۴-۱۱: یک نقطه از منحنی حد شکل‌دهی ورق تحت فشارهای مختلف

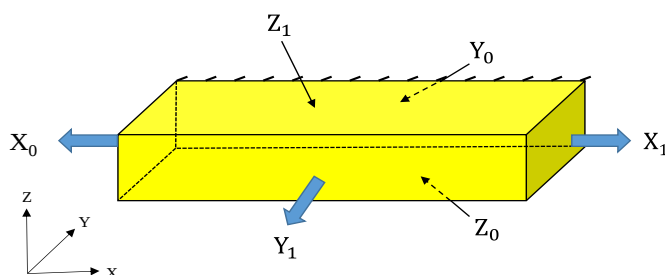
در شکل ۴-۱۲، پارامتر آسیب در آزمون بدون فشار و آزمون فشار ۵۰ MPa در دو کرنش یکسان مقایسه شد. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، در اثر اعمال فشار، توزیع آسیب در ورق کاهش پیدا کرده و لذا بر نتایج به‌دست آمده قبلی مبنی بر اثر مثبت تنش ضخامت‌ی بر شکل‌پذیری ورق، صحه می‌گذارد.



شکل ۴-۱۲: مقایسه توزیع آسیب در آزمون بدون فشار و آزمون با اعمال فشار ۵۰ MPa

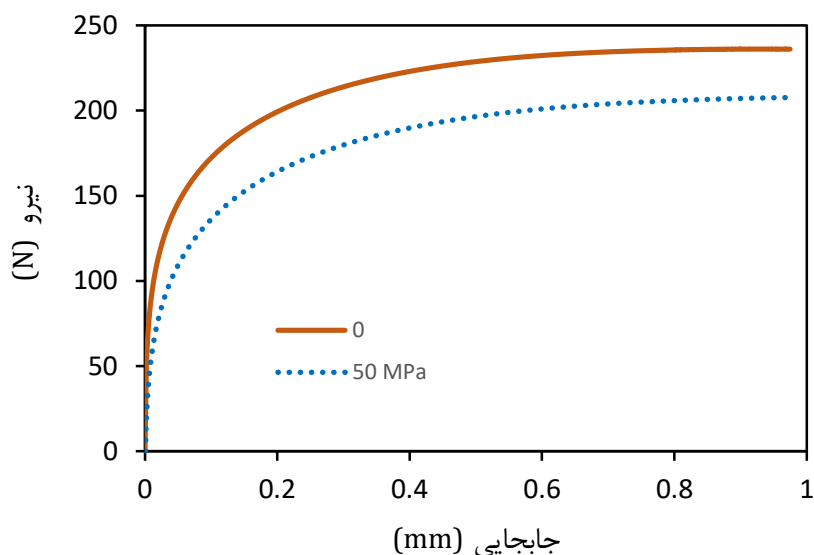
۲-۳-۴- نتایج برای کشش دو محوره

برای بررسی اثر فشار در حالت کشش دو محوره نیز از مدل المان محدود توضیح داده شده در بخش ۱-۷-۳، اما با شرایط مرزی متفاوت استفاده شد که در شکل ۴-۱۳ قابل مشاهده است. در گام اول فشار در راستای ضخامت یعنی در جهت Z ، با یک دامنه هموار اعمال شد و تا انتهای تحلیل ورق تحت فشار خواهد ماند. سپس در گام دوم در جهت‌های X و Y_1 ، مدل تحت سرعتی با دامنه هموار کشیده شد. در جهت Z_0 جابجایی تمام گره‌ها به هم وابسته است تا در شرایط کششی و کاهش ضخامت ورق، تمام این نقاط باهم حرکت کنند. در انتها با انجام آزمایشی در حالت بدون فشار و با اعمال فشار 50 MPa مشاهده شد، نیروی مورد نیاز برای شکل‌دهی کاهش معناداری پیدا می‌کند اما پارامتر حداکثر کرنش برشی به اشباع می‌رسد، توزیع آسیب صورت نمی‌گیرد و گلویی هم اتفاق نمی‌افتد. درواقع تحلیل، رفتاری غیرواقعی به خود می‌گیرد، لذا می‌توان نتیجه گرفت، مدل آسیب حداکثر کرنش برشی که در این مطالعه در نظر گرفته شد، برای مسائل کشش دو محوری مناسب نمی‌باشد.

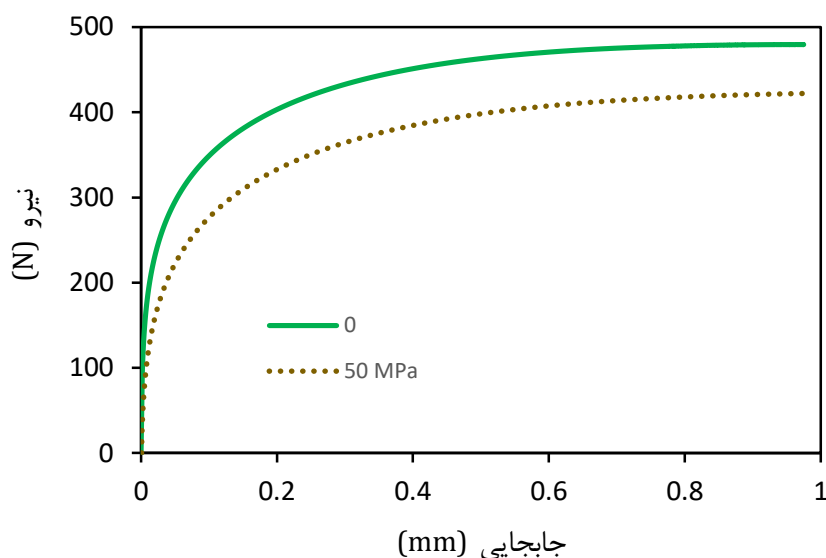


شکل ۴-۱۳: توصیف مدل المان محدود در آزمایش دو محوره

شکل ۴-۱۴ و شکل ۴-۱۵، به ترتیب منحنی نیرو-جابجایی در جهت طولی و عرضی نمونه را که حاصل از آزمایش کشش دو محوره تحت فشار 50 MPa و بدون فشار است، نشان می‌دهد. همانطور که از شکل پیداست، نیروی شکل‌دهی در اثر اعمال فشار، حدود 12% کاهش پیدا می‌کند.

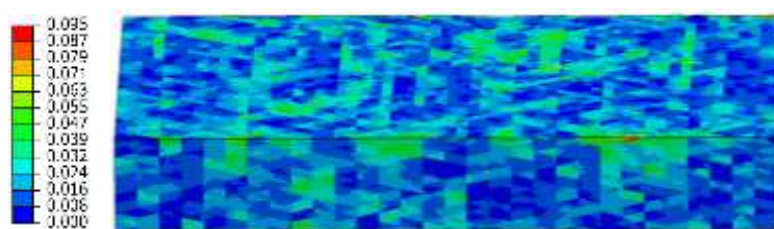
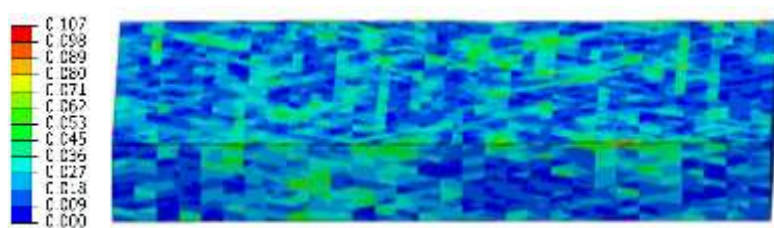


شکل ۴-۱۴: مقایسه منحنی نیرو-جابجایی در جهت طولی مدل، تحت فشار ۵۰ MPa و بدون فشار

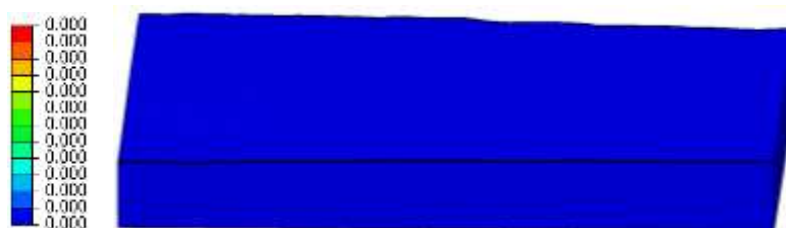


شکل ۴-۱۵: مقایسه منحنی نیرو-جابجایی در جهت عرضی مدل، تحت فشار ۵۰ MPa و بدون فشار

شکل ۴-۱۶، پارامتر حداکثر کرنش برشی را در دو کرنش طولی متفاوت نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است، علی‌رغم افزایش ۳۰ درصدی کرنش طولی، پارامتر حداکثر کرنش برشی افزایش بسیار جزئی را به همراه داشته که این مقدار برای تشکیل آسیب و گلویی شدن کافی نیست. شکل ۴-۱۷، در دو کرنش طولی متفاوت، نشان می‌دهد که آسیب در مدل تشکیل نمی‌شود. لذا می‌توان نتیجه گرفت مدل آسیب حداکثر کرنش برشی برای آزمون کشش دو محوره مناسب نمی‌باشد و قابلیت پیش‌بینی گلویی را در این آزمون ندارد و باید از مدل آسیب دیگری استفاده کرد.

(الف) $\varepsilon_g = 0.181$ (ب) $\varepsilon_g = 0.240$

شکل ۴-۱۶: توزیع پارامتر حداکثر کرنش برشی در کرنش‌های طولی متفاوت

(الف) $D = 0.256$ (ب) $D = 0.460$

شکل ۴-۱۷: توزیع پارامتر آسیب در کرنش‌های طولی متفاوت

با توجه به نتایج بدست آمده و مناسب نبودن مدل آسیب حداکثر کرنش برشی در کشش دو محوره، در ادامه برای بررسی تاثیر تنش در راستای ضخامت ورق، از مدل آسیب کرنش مومسان اصلی^۱ استفاده شد. این مدل می‌گوید آسیب زمانی آغاز شده و تکامل می‌یابد که کرنش مومسان اصلی از یک مقدار بحرانی معین بیشتر شود:

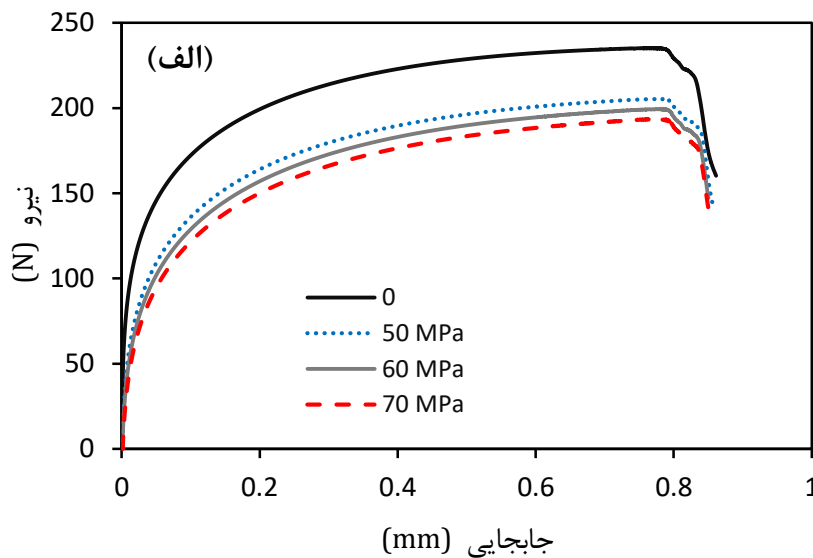
¹ Principal plastic strain damage model

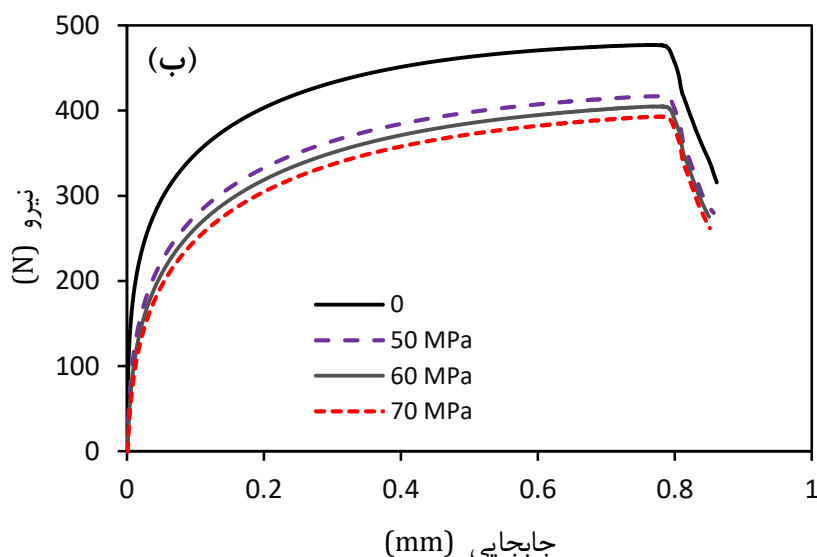
$$D = \begin{cases} 0 & (\varepsilon_1 \leq \varepsilon_{1,ini}) \\ \frac{D_{max}}{(\varepsilon_{1,max} - \varepsilon_{1,ini})^M} (\varepsilon_1 - \varepsilon_{1,ini})^M & (\varepsilon_{1,ini} < \varepsilon_1 < \varepsilon_{1,max}) \\ D_{max} & (\varepsilon_{1,max} \leq \varepsilon_1) \end{cases} \quad (۴-۱)$$

که در این معادله ε_1 کرنش مومسان اصلی، $\varepsilon_{1,ini}$ کرنش مومسان اصلی که آسیب آغاز می‌شود، $\varepsilon_{1,max} = \varepsilon_{1,ini} + \Delta\varepsilon_1$ حداکثر کرنش مومسان اصلی که اندازه آسیب به حداکثر مقدار خود یعنی D_{max} می‌رسد و M توان کنترل کننده رشد آسیب می‌باشد.

برای بررسی اثر تنش در راستای ضخامت بر شکل‌پذیری ورق در حالت کشش دو محوره با مدل آسیب جدید، ۳ آزمایش تحت فشارهای ۵۰ تا ۷۰ MPa و یک آزمایش در حالت بدون اعمال فشار انجام شد. در انتها با مقایسه نتایج، اثر فشار بر نیروی شکل‌دهی، شروع گلویی بررسی شد.

شکل ۴-۱۸، منحنی نیرو-جابجایی حاصل از آزمایش‌های تحت فشار در مقایسه با حالت بدون فشار را در جهت‌های طولی و عرضی مدل نشان می‌دهد.

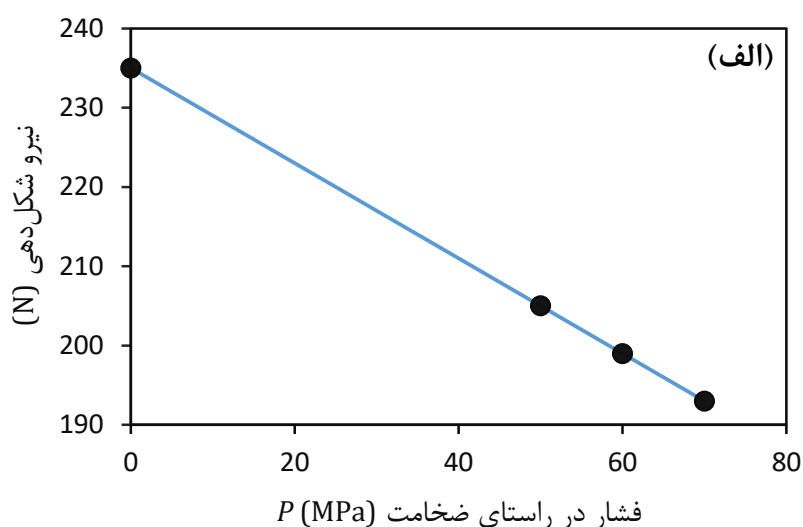


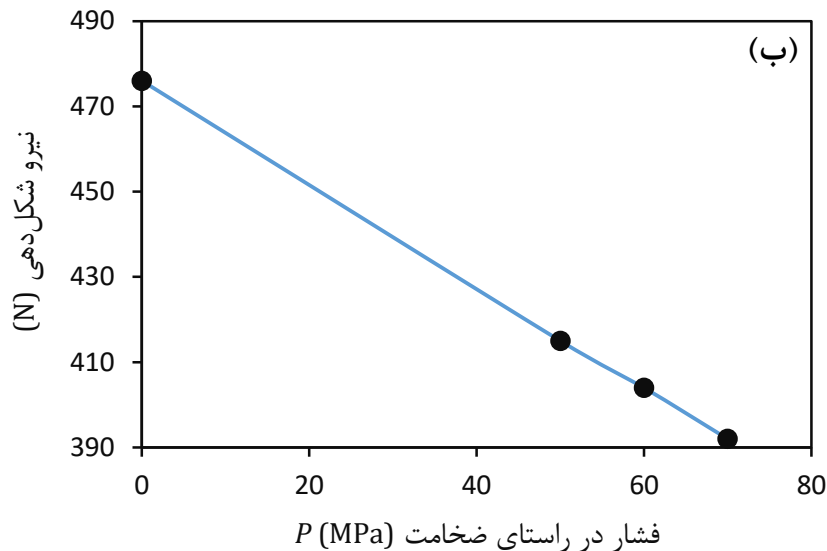


شکل ۱۸-۴: مقایسه منحنی نیرو-جابجایی مدل، تحت فشارهای مختلف و بدون فشار الف) جهت طولی، ب)

جهت عرضی

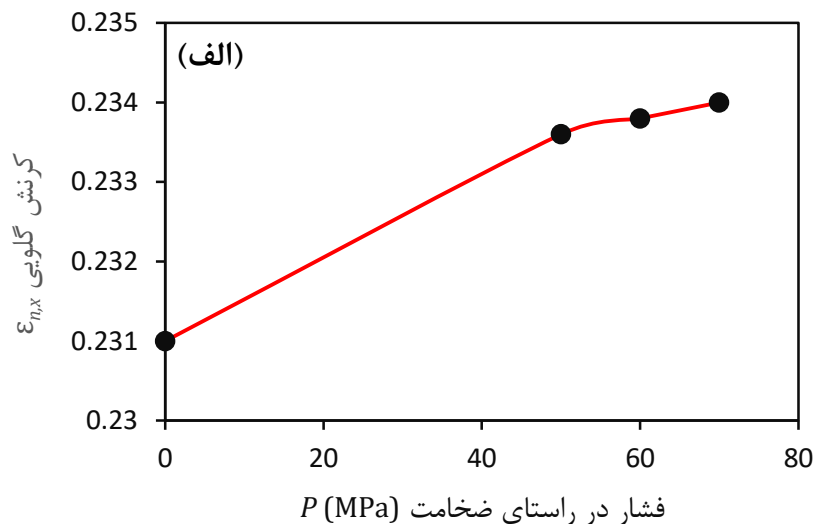
از نتایج آزمایش چنین برمی آید که نیروی مورد نیاز برای شکل‌دهی در اثر افزایش فشار، کاهش پیدا می‌کند. به‌طوری‌که در حالت بدون فشار، در جهت طولی و عرضی نیرو در لحظه‌ی گلوبی به‌ترتیب برابر ۲۳۵ و ۴۷۶ N است، در شرایطی که اگر فشار ۷۰ MPa اعمال شود، نیرو در لحظه‌ی گلوبی در جهت طولی و عرضی به‌ترتیب به مقادیر ۱۹۳ و ۳۹۲ N کاهش می‌یابد. لذا در صورت اعمال فشار ۷۰ MPa، نیرو حدود ۱۸ درصد کاهش پیدا می‌کند. شکل ۴-۱۹، تاثیر فشار بر نیرو را طی آزمایش‌هایی با فشارهای متفاوت در راستای طولی و عرضی مدل نشان می‌دهد.

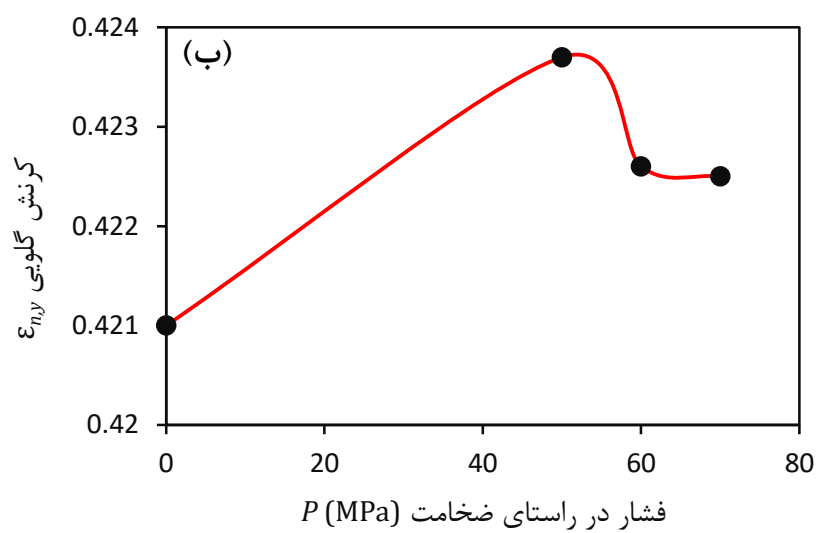




شکل ۴-۱۹: منحنی نیروی بیشینه شکل دهی در آزمون های مختلف فشار (الف) جهت طولی، (ب) جهت عرضی

از دیگر نتایج قابل بررسی در این آزمایش ها، تاثیر اعمال فشار در راستای ضخامت بر شروع گلویی می باشد. در آزمایش های انجام شده، در حالت بدون اعمال فشار، در جهت طولی و عرضی گلویی به ترتیب در کرنش 0.231 و 0.421 و در اثر اعمال فشار 50 MPa در کرنش 0.2337 و 0.4237 اتفاق افتاد لذا گلویی به تاخیر افتاده و شکل پذیری بهبود می یابد. اما با اعمال فشار بیشتر تا مقدار 70 MPa، تغییرات معناداری در شروع گلویی مشاهده نشد. شکل ۴-۲۰، کرنش گلویی در آزمایش های متفاوت را نشان می دهد.





شکل ۲۰-۴: منحنی کرنش گلویی در آزمون‌های مختلف فشار الف) جهت طولی، ب) جهت عرضی

فصل ۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این فصل جمع‌بندی نتایج حاصل از مطالعه اثر تنش در راستای ضخامت ورق فلزی AA6022-T4 بر شکل‌پذیری آن با استفاده از روش اجزاء محدود پلاستیسیته بلور آورده شده و پاسخ مسئله پژوهش تبیین می‌شود و در پایان پیشنهادهایی برای ادامه مسیر پژوهش توسط علاقه‌مندان ارائه شده است.

۱-۵- نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه از روش المان محدود پلاستیسیته بلور (CPFEM) برای بررسی اثر تنش در راستای ضخامت ورق AA6022-T4 بر شکل‌پذیری استفاده شد. یک مدل سه بعدی از قسمت کوچکی از ورق تحت اثر کشش تک محوره و دو محوره یکسان با فشارهای مختلف در راستای ضخامت، مورد تحلیل قرار گرفت. مدل تیلور در CPFEM به کار گرفته شد. ماده ورق فلزی مورد بررسی دارای ساختار بلورین وجوه‌مرکزپر (FCC) با ۱۲ سیستم لغزشی در نظر گرفته شد. رفتار کار سخت شوندگی حین تسلیم و نیز نرم‌شوندگی ناشی از تکامل آسیب در کشش تک محوره بر مبنای مدل حداکثر کرنش برشی و در کشش دو محوره بر مبنای مدل کرنش مومسان اصلی در نظر گرفته شد. بر اساس معادلات حاکم بر رفتار بلور مطابق مدل تیلور، یک زیر برنامه VUMAT توسعه داده شده، در آبکوس به کار گرفته شد. با طراحی آزمایش‌های مختلف اثر فشار بر شروع گلویی مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج کلی به‌دست آمده شامل موارد ذیل می‌باشد:

۱. از روش پلاستیسیته بلور می‌توان برای مدل‌سازی میکروسکوپی شروع گلویی استفاده کرد.

۲. اعمال تنش در راستای ضخامت، سبب بهبود شکل‌پذیری ورق می‌شود. در فرآیند کشش تک محوره، با اعمال فشار ۷۰ MPa، شکل‌پذیری ۱۱/۷٪ بهبود یافت.
۳. اعمال تنش در راستای ضخامت، نیروی مورد نیاز برای شکل‌دهی را کاهش داد. در فرآیند کشش تک محوره با اعمال فشار ۷۰ MPa، نیروی شکل‌دهی ۱۲/۳٪ کاهش یافت.
۴. مدل آسیب حداکثر کرنش برشی که در ابتدا برای این مطالعه در نظر گرفته شد، برای آزمون کشش دو محوری مناسب نمی‌باشد و قابلیت پیش‌بینی گلوپی را در این آزمون ندارد.
۵. نتایج حاصل از مدل آسیب کرنش مومسان اصلی در آزمون کشش دو محوری، حاکی از کاهش ۱۸٪ نیروی مورد نیاز برای شکل‌دهی در اثر اعمال فشار ۷۰ MPa بود. اما شکل‌پذیری با اعمال فشارهای متفاوت تغییر چشمگیری نیافت.

۲-۵- پیشنهادها

به منظور ادامه پژوهش در این زمینه، پیشنهادهای زیر ارائه می‌شود:

۱. در این پایان‌نامه از یک اندازه دانه ثابت استفاده شده است. پیشنهاد می‌شود با طراحی آزمایش‌هایی با اندازه دانه متفاوت، تاثیر اندازه دانه بر رفتار گلوپی بررسی شود.
۲. در این پایان‌نامه، به منظور کالیبراسیون پارامترهای آسیب و سخت‌شوندگی با کار تجربی مرجع [۱۵]، بافت در نظر گرفته شده مشابه مرجع ذکر شده می‌باشد. با توجه به قابلیت روش پلاستیسته بلور در این زمینه، پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های بعدی تاثیر بافت بر رفتار گلوپی بررسی شود.
۳. مدل آسیب مورد استفاده برای بررسی رفتار گلوپی در این مطالعه، از نوع حداکثر کرنش برشی و کرنش مومسان اصلی می‌باشد. می‌توان در مطالعات بعدی از مدل‌های آسیب دیگر استفاده و رفتار گلوپی را مورد بررسی قرار داد.
۴. در مطالعه‌ی حاضر، هندسه مدل به کمک کد پایتون ساخته شد، در مطالعات بعدی به منظور نوآوری، می‌توان به کمک روش ورونی^۱ هندسه مدل را ایجاد کرد.
۵. در این مطالعه از مدل المان کانتینیوم چهار وجهی خطی استفاده شده است، در مطالعات بعدی می‌توان از نوع درجه دوم این المان استفاده کرد.

¹ Voroni-Tesselation Method

منبع‌ها

1. تحلیل تجربی تنش و کرنش در فرایندهای شکل دهی ورق های فلزی با استفاده از پردازش تصاویر دیجیتال. ۱۳۹۴، دولتی - وزارت علوم، تحقیقات، و فناوری - دانشگاه صنعتی شاهرود - دانشکده مهندسی مکانیک.
2. Assempour, A., H.K. Nejadkhaki, and R. Hashemi, *Forming limit diagrams with the existence of through-thickness normal stress*. Computational Materials Science, 2010. 48(3): p. 504-508.
3. Marciniak, Z. and K. Kuczyński, *Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal*. International journal of mechanical sciences, 1967. 9(9): p. 609-620.
4. Ma, B., et al., *The effect of the through-thickness normal stress on sheet formability*. Journal of Manufacturing Processes, 2016. 21: p. 134-140.
5. Nakazima, K., T. Kikuma, and K. Hasuka, *Study on the formability of steel sheets*. YAWATA TECH REP, SEPT. 1968,--264--, 8517-8530, 1968.
6. Gotoh, M., T. Chung, and N. Iwata, *Effect of Out-of-Plane Stress on the Forming Limit Strain of Sheet Metals*. JSME international journal. Ser. A, Mechanics and material engineering, 1995. 38(1): p. 123-132.
7. Mirfalah-Nasiri, S., A. Basti, and R. Hashemi, *Forming limit curves analysis of aluminum alloy considering the through-thickness normal stress, anisotropic yield functions and strain rate*. International Journal of Mechanical Sciences, 2016. 117: p. 93-101.
8. Zhang, F., J. Chen, and J. Chen, *Effect of through-thickness normal stress on forming limits under Yld2003 yield criterion and MK model*. International Journal of Mechanical Sciences, 2014. 89: p. 92-100.
9. Wu, P.D., et al., *Effects of superimposed hydrostatic pressure on fracture in sheet metals under tension*. International Journal of Mechanical Sciences, 2010. 52(2): p. 236-244.
10. Lang, L., et al., *Investigation on the effect of through thickness normal stress on forming limit at elevated temperature by using modified MK model*. International Journal of Material Forming, 2015. 8(2): p. 211-228.
11. عباسی، ا.، بررسی تحلیلی و عددی اثر تنش در راستای ضخامت بر ناپایداری پلاستیک ورق های فلزی. ۱۳۹۳، دانشگاه صنعتی شاهرود.
12. Hosseinpour, M., A. Gorji, and M. Bakhshi, *On the experimental and numerical study of formability of Aluminum sheet in warm hydroforming process*. Modares Mechanical Engineering, 2015. 15(2).
13. Roters, F., et al., *Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods in crystal plasticity finite-element modeling: Theory, experiments, applications*. Acta Materialia, 2010. 58(4): p. 1152-1211.
14. Simha, C.H.M., K. Inal, and M.J. Worswick, *Orientation and Path Dependence of Formability in the Stress- and the Extended Stress-Based Forming Limit Curves*. Journal of Engineering Materials and Technology, 2008. 130(4).
15. Kim, J.-B. and J.W. Yoon, *Necking behavior of AA 6022-T4 based on the crystal plasticity and damage models*. International Journal of Plasticity, 2015. 73: p. 3-23.
16. Wang, H., et al., *On crystal plasticity formability analysis for magnesium alloy sheets*. International Journal of Solids and Structures, 2011. 48(6): p. 1000-1010.

17. Yoon, J.W., et al., *Anisotropic strain hardening behavior in simple shear for cube textured aluminum alloy sheets*. International Journal of Plasticity, 2005. 21(12): p. 2426-2447.
18. Zhang, K., et al., *Modelling the plastic anisotropy of aluminum alloy 3103 sheets by polycrystal plasticity*. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 2014. 22(7): p. 075015.
19. Hu, P., et al., *Crystal plasticity extended models based on thermal mechanism and damage functions: Application to multiscale modeling of aluminum alloy tensile behavior*. International Journal of Plasticity, 2016. 86: p. 1-25.
20. Knezevic, M., et al., *Deformation twinning in AZ31: Influence on strain hardening and texture evolution*. Acta Materialia, 2010. 58(19): p. 6230-6242.
21. Adzima, F., et al., *Crystal plasticity and phenomenological approaches for the simulation of deformation behavior in thin copper alloy sheets*. International Journal of Plasticity, 2017. 94: p. 171-191.
22. VASIOS, N., *Crystal plasticity*. 2015.
23. Asaro, R. and V. Lubarda, *Mechanics of solids and materials*. 2006: Cambridge University Press.
24. Aravas, N. and E. Aifantis, *On the geometry of slip and spin in finite plastic deformation*. International Journal of Plasticity, 1991. 7(3): p. 141-160.
25. Bonet, J. and R.D. Wood, *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. 1997: Cambridge university press.
26. Aravas, N., *Mechanics of Materials Volume I: An Introduction to the Mechanics of Deformable bodies and Linear Elasticity*. 2014, Tziolas Publications.
27. Lubarda, V.A., *Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics*. Appl. Mech. Rev., 2004. 57(2): p. 95-108.
28. Hill, R., *Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1966. 14(2): p. 95-102.
29. Gurtin, M.E., E. Fried, and L. Anand, *The mechanics and thermodynamics of continua*. 2010: Cambridge University Press.
30. Aravas, N., *Finite elastoplastic transformations of transversely isotropic metals*. International journal of solids and structures, 1992. 29(17): p. 2137-2157.
31. Dafalias, Y.F., *A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformations*. Plasticity today, modelling, methods and applications, 1985.
32. Needleman, A., *On finite element formulations for large elastic-plastic deformations*, in *Advances and Trends in Structures and Dynamics*. 1985, Elsevier. p. 247-257.
33. Cockcroft, M. and D. Latham, *Ductility and the workability of metals*. J Inst Metals, 1968. 96(1): p. 33-39.
34. Wierzbicki, T., et al., *Calibration and evaluation of seven fracture models*. International Journal of Mechanical Sciences, 2005. 47(4): p. 719-743.
35. Xue, L., *Stress based fracture envelope for damage plastic solids*. Engineering Fracture Mechanics, 2009. 76(3): p. 419-438.
36. Meyers, M.A. and K.K. Chawla, *Mechanical behavior of materials*. 2008: Cambridge university press.
37. Knezevic, M., et al., *Strengthening of alloy AA6022-T4 by continuous bending under tension*. Materials Science and Engineering: A, 2019. 758: p. 47-55.
38. Jirásek, M. and Z.P. Bazant, *Inelastic analysis of structures*. 2001: John Wiley & Sons.

Abstract

Due to the widespread and diverse applications of sheet metals, recently, considerable studies have been focused on the formability of metal sheets. Many of these researches, consider a plane stress model and neglect the effect of thickness stress. Additionally, study of thin sheet metal behavior, demands considering microstructure parameters such as grain size and texture. Crystal plasticity finite element method (CPFEM) can be applied to such problems. In this dissertation, the effect of through-thickness pressure stress on the formability of aluminum alloy AA6022-T4 sheet is investigated based on CPFEM analysis. A self-hardening behavior is considered for the strain hardening behavior of the slip systems. Further, for prediction of necking initiation and growth, maximum shear strain criterion is used for damage initiation and evolution. In order to implement the model in Abaqus finite element package, a VUMAT was developed based on the discretized equations forward Euler integration scheme. After verification of the developed code, the parameters of the model were calibrated against the tensile test results. For simulating tensile test of 1 mm thick sheet, a representative volume of $3 \times 1.5 \times 0.5 \text{ mm}^3$ was partitioned into 14790 grains through a python code in Abaqus/CAE environment and then discretized using $50 \text{ }\mu\text{m}$ tetrahedral linear elements. Using the experimental data available in literature and considering appropriate texture for the simulation domain, the crystal orientations were determined through Euler angles. Then, tensile tests were performed on the sample in the presence of the thickness pressure stress. The results show that application of the through thickness stress increases the strain corresponding to the necking initiation by 11.7% and thus postpones necking. A decrease of about 12.3% in tensile load is observed in this case. In biaxial tensile tests, the results show that the maximum shear strain is saturated at the initial stage of deformation and thus prevent evolution of damage variable and necking was not observed. Therefore, in this case, principal plastic strain damage model was employed. Results showed that application of the through thickness stress decreased tensile load about 18%, but the necking initiation did not change significantly.

Keywords: Crystal plasticity finite element method, tensile test, sheet metal formability, Through-thickness stress, Aluminum alloy, VUMAT subroutine.



Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering
M.Sc. Thesis in Manufacturing and Production Engineering

**Study on Effect of Through-Thickness Stress on Sheet Metal Formability Using
Crystal Plasticity Finite Element Method**

By

Mohammadreza Kargar Daroonkolaee

Supervisor

Dr. S. H. Ghaderi

February 2021