





دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

حل تحلیلی و عددی پوسته‌ی استوانه‌ای ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد تحت فشار داخلی متحرک به کمک تئوری کلاسیک پوسته‌ها

نگارنده: سپیده احمدی

استاد راهنما:

دکتر حمیدرضا ایپک چی

شهریور ۱۳۹۵



مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

نام و نام خانوادگی رئیس (یا معاون آموزشی و پژوهشی) دانشکده: تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

فرم شماره ۷: صورت جلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سید احمدی به شماره دانشجویی ۹۲۱۶۴۴۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان حل تحلیلی و عددی پوسته استوانه‌ای ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد تحت فشار داخلی متحرک به کمک تئوری کلاسیک پوسته‌ها که در تاریخ ۹۵/۶/۱۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: خوب امتیاز ۱۷٫۵۵) ☒	دفاع مجدد ☐	مردود ☐
نوع تحقیق: نظری ☐ عملی ☐		

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)

۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	امیرحسین	دانشیار	
۲- استاد مشاور	—	—	—
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	محمدصادق	دانشیار	
۴- استاد ممتحن اول	کریمی	دانشیار	
۵- استاد ممتحن دوم	امیرحاجلی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



خدایا

نه شناخت ترا توان و نه شنای تورا زبان و نه دریای جلال و کبریای تورا کران؛

پس تورا مدح و ثنا چون توان...

باسپاس از خانواده ام

و

استاد بزرگوار جناب آقای دکتر حمید رضا ایک چی

تعهد نامه

اینجانب سپیده احمدی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه شاهرود نویسنده پایان نامه حل تحلیلی و عددی پوسته‌ای استوانه‌ای ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد تحت فشار داخلی متحرک به کمک تئوری کلاسیک پوسته‌ها تحت راهنمایی دکتر حمیدرضا ایپک‌چی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا «**Shahrood University of Technology**» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

در این پایان نامه تحلیل ریاضی و عددی پوسته‌ی ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد، تحت بار متحرک ارائه شده است. در استخراج معادلات، میدان جابه‌جایی به کمک تئوری کلاسیک پوسته‌ها تخمین زده می‌شود. روابط تنش-کرنش از رابطه‌ی هوک و کرنش-جابه‌جایی از رابطه‌ی فن-کارمن تبعیت می‌کنند. معادلات حاکم بر حرکت پوسته، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با مشتقات جزئی و با ضرایب ثابت هستند که به یکدیگر کوپل بوده و به کمک اصل همیلتون تعیین شده‌اند. حل تحلیلی به کمک تئوری اغتشاشات و روش بسط مستقیم تعیین شده است. همچنین حل عددی مسأله با نرم افزار انسیس انجام شده است.

موارد بررسی شده در این تحلیل عبارتند از: تعیین فرکانس‌های طبیعی پوسته، تعیین پاسخ بر حسب مکان و زمان، تعیین سرعت بحرانی، بررسی تأثیر پارامترهای هندسی و ماده‌ی ویسکوالاستیک بر روی فرکانس، پاسخ و سرعت بحرانی و مقایسه‌ی نتایج در تعیین فرکانس با حل عددی.

کلمات کلیدی:

پوسته‌ی ویسکوالاستیک، تئوری کلاسیک، تحلیل فرکانسی، تئوری اغتشاشات، خیز نسبتاً زیاد، سرعت بحرانی

فهرست مطالب

فصل اول	۱
تاریخچه و مرور مقالات	۱
۱-۱- مقدمه:	۲
۲-۱- بار متحرک :	۲
۳-۱- تئوریهای ورقها و پوستهها:	۳
۱-۳-۱- تئوری کلاسیک:	۵
۲-۳-۱- نظریهی تغییر شکل برشی مرتبه اول:	۷
۴-۱- ویسکوالاستیک:	۸
۵-۱- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک:	۹
۶-۱- فرضیات متداول در ویسکوالاستیسیتیه:	۱۱
۷-۱- مدلهای ساختاری ویسکوالاستیسیتیهی خطی:	۱۲
۱-۷-۱- مدل ماکسول:	۱۲
۲-۷-۱- مدل کلون-ویت:	۱۳
۳-۷-۱- مدل جامد استاندارد خطی (مدل زنر):	۱۴
۴-۷-۱- مدل ماکسول تعمیم یافته:	۱۵
۸-۱- سری پرونی:	۱۵
۹-۱- مرور مقالات:	۱۶
۱۰-۱- جمعبندی:	۱۹
فصل دوم	۲۱
استخراج و حل معادلات حاکم	۲۱
۱-۲- مقدمه:	۲۲
۲-۲- تعریف مسأله:	۲۳
۳-۲- محاسبهی انرژی پتانسیل:	۲۴
۴-۲- محاسبهی انرژی جنبشی:	۲۵
۵-۲- کار نیروی خارجی:	۲۵
۶-۲- تعیین معادلات حرکت:	۲۶
۷-۲- تعمیم معادلات حرکت به پوستهی ویسکوالاستیک [۴۶]:	۲۶
۱-۷-۲- قانون هوک:	۲۷

۲۷	۲-۷-۲- تعیین منتجههای تنش:
۲۸	۳-۷-۲- انتخاب مدل ويسکوالاستیک:
۲۸	۴-۷-۲- تعیین معادلات براساس مدل انتخابی:
۳۰	۸-۲- حل تحلیلی:
۳۰	۱-۸-۲- بیبعد سازی معادلات:
۳۲	۲-۸-۲- تعیین فرکانسهای طبیعی:
۳۸	۹-۲- تعیین پاسخ:
۴۰	۱۰-۲- سرعت بحرانی:
۴۱	۱۱-۲- جمعبندی:
۴۳	فصل سوم
۴۳	حل عددی
۴۴	۱-۳- مقدمه:
۴۴	۲-۳- تعیین خصوصیات ويسکوالاستیک براساس سری پرونی [۴۸]:
۴۵	۳-۳- تعیین مدول رهايش برشی و بالک:
۴۵	۱-۳-۳- مدول رهايش برشی:
۴۷	۲-۳-۳- مدول بالک:
۴۷	۴-۳- معرفی المان [۴۹]:
۴۸	۵-۳- تعیین مش بهینه:
۴۹	۶-۳- حل مودال:
۵۰	۷-۳- جمعبندی:
۵۱	فصل چهارم
۵۱	بررسی نتایج
۵۲	۱-۴- مقدمه:
۵۲	۲-۴- فرکانس طبیعی:
۵۵	۳-۴- پاسخ:
۶۰	۴-۴- سرعت بحرانی:
۶۲	۵-۴- جمعبندی:
۶۳	فصل پنجم
۶۳	نتیجه گیری و پیشنهادها
۶۴	۱-۵- مقدمه:

۵-۲- نتایج: ----- ۶۴

۵-۳- پیشنهادها: ----- ۶۵

پیوست الف ----- ۶۷

منابع ----- ۷۶

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۱) منحنی تنش-کرنش برای مواد ویسکوالاستیک خطی و مواد الاستیک-پلاستیک [۱۲]----- ۹
- شکل (۲-۱) مدل ماکسول [۱۲]----- ۱۲
- شکل (۳-۱) مدل کلین-ویت [۱۲]----- ۱۳
- شکل (۴-۱) اولین مدل جامد استاندارد خطی [۱۲]----- ۱۴
- شکل (۵-۱) دومین مدل جامد استاندارد خطی [۱۲]----- ۱۴
- شکل (۱-۲) پوسته‌ی استوانه‌ای----- ۲۳
- شکل (۱-۳) المان Plane183 [۴۸]----- ۴۷
- شکل (۲-۳) یک نمونه‌ی مشبندی شده‌ی سازه----- ۴۹
- شکل (۱-۴) اثر تغییرات نسبت شعاع به ضخامت بر فرکانس طبیعی $(\omega = a.zs^b, a=1656, b=-0.797)$ ----- ۵۳
- شکل (۲-۴) اثر تغییرات نسبت شعاع به طول بر فرکانس طبیعی $(\omega = a.N^b, a=10.24, b=-0.753)$ ----- ۵۳
- شکل (۳-۴) شکل مد عرضی----- ۵۴
- شکل (۴-۴) خیز عرضی پوسته تحت بارگذاری‌های مختلف----- ۵۵
- شکل (۵-۴) خیز عرضی پوسته تحت بار متحرک----- ۵۶
- شکل (۶-۴) مقایسه خیز عرضی پوسته در $x^*=0.3$ ----- ۵۶
- شکل (۷-۴) پاسخ عرضی مرکز پوسته----- ۵۷
- شکل (۸-۴) تأثیر تعداد جملات بسط مستقیم بر همگرایی پاسخ $x^*=1/2$ ----- ۵۷
- شکل (۹-۴) اثر نسبت R/h به همگرایی پاسخ $x^*=1/2$ ----- ۵۸
- شکل (۱۰-۴) اثر نسبت h/l به همگرایی پاسخ $x^*=1/2$ ----- ۵۸
- شکل (۱۱-۴) اثر تغییرات ویسکوزیته بر خیز عرضی در بار متحرک $x^*=1/2$ ----- ۵۹
- شکل (۱۲-۴) اثر تغییرات G_1 بر خیز عرضی در بار متحرک $x^*=1/2$ ----- ۵۹
- شکل (۱۳-۴) اثر تغییرات G_2 بر خیز عرضی در بار متحرک $x^*=1/2$ ----- ۶۰
- شکل (۱۴-۴) ضریب تقویت دینامیکی مرکز پوسته تحت بار متحرک به ازای سرعت‌های مختلف----- ۶۰
- شکل (۱۵-۴) اثر تغییرات R/h بر سرعت بحرانی----- ۶۱
- شکل (۱۶-۴) اثر تغییرات h/l بر سرعت بحرانی----- ۶۲

فهرست جدول‌ها

- جدول (۱-۳) مشخصات پوسته ----- ۴۸
- جدول (۲-۳) مقادیر فرکانس طبیعی به ازای مش‌های مختلف در مدلسازی دو بعدی (rad/s) ---- ۴۹
- جدول (۱-۴) فرکانس‌های طبیعی (rad/s) ----- ۵۲
- جدول (۲-۴) تاثیر مدول الاستیسیته G_1 بر فرکانس طبیعی ----- ۵۲
- جدول (۳-۴) فرکانس‌های طبیعی پوسته با تکیه‌گاه ساده و گیردار (rad/s) ----- ۵۴
- جدول (۴-۴) اثر تغییرات ویسکوزیته بر سرعت بحرانی ----- ۶۱

علائم و اختصارات

v^*	τ سرعت بی بعد	زمان رهایش
x^*	u^0_1, u^0_2, w^0 مکان بی بعد	جابه جایی صفحه ی میانی
t^*	$\alpha\varphi$ زمان بی بعد	زوایای چرخش صفحه ی میانی
u^*, w^*	K جابه جایی های بی بعد	ضریب تصحیح برشی
w_6	K ماکزیمم جابه جایی شعاعی	مدول رهایش بالک
t_0	G شاخص زمان	مدول برشی
h_0	E شاخص ضخامت	مدول الاستیسیته
c	v سرعت موج	ضریب پواسون
ε	$H(t)$ پارامتر اغتشاش	تابع پله ای
G_0^*, G_1^*	L مدول های ویسکوالاستیک بی بعد	طول پوسته
ω	R_0 فرکانس طبیعی	شعاع میانی پوسته
$[B_i]$	H ماتریس های ضرایب	ضخامت پوسته
η	ρ ضریب ویسکوزیته	چگالی
ds	(x, θ, z) المان سطح	مختصات استوانه ای
D	u_x, u_z, u_θ اپراتور مشتق زمانی	مؤلفه ی میدان جابه جایی
$\sigma_\theta, \sigma_x, \sigma_z$	$\gamma_{\theta z}, \gamma_{\theta x}, \gamma_{xz}$ تنش های نرمال	کرنش های برشی
U^*	$\varepsilon_\theta, \varepsilon_x, \varepsilon_z$ چگالی انرژی کرنشی	کرنش های نرمال
T^*	$\tau_\theta, \tau_x, \tau_z$ چگالی انرژی جنبشی	تنش های برشی
N_x, N_z, M_x	f_x, f_z منتهجه های تنش	مؤلفه های فشار
Q_x, M_{xz}		
N_θ, M_θ		

فصل اول

تاریخچه و مرور مقالات
پ

۱-۱- مقدمه:

در این فصل ابتدا به معرفی بار متحرک و اثر آن در محاسبات پرداخته شده، سپس تئوری‌های حاکم بر ورق‌ها و پوسته‌ها به‌طور اجمالی معرفی می‌شوند. با توجه به اهمیت آشنایی با ساختار، خصوصیات و رفتار یک ماده در بررسی آن، در ادامه‌ی فصل به معرفی مواد ویسکوالاستیک و خصوصیات آن‌ها پرداخته شده است. سپس معادلات بنیادین تنش-کرنش، مدل‌های رئولوژیکی مورد استفاده در مدل-سازی مواد ویسکوالاستیک و فرضیات متداول در تحلیل تنش این مواد بیان شده و در نهایت مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه آورده شده است.

۱-۲- بار متحرک :

سازه‌های مهندسی تحت بارهای متغیر با مکان و زمان، در اصطلاح مکانیکی بار متحرک نامیده می‌شوند [۱]. به عبارت دیگر باری که با گذشت زمان محل اعمالش تغییر می‌کند، بار متحرک است؛ مانند: وسایل نقلیه در حال عبور از پل، قطار در مسیر، هدایت کننده‌ها^۱ و... [۲]. در سال‌های اخیر در تمام شاخه‌های حمل و نقل پیشرفت‌های بزرگی در زمینه‌ی میزان سرعت و وزن وسایل نقلیه صورت گرفته است. در این پژوهش‌ها ارتعاشات و تنش‌های دینامیکی از اهمیت زیادی برخوردارند و بار متحرک به علت ایجاد ارتعاشات شدید، به‌خصوص در سرعت‌های بالا اثر زیادی بر تنش دینامیکی در سازه می‌گذارد. ارتعاشات یک جسم سه‌بعدی معمولاً با یک رابطه‌ی اپراتوری بین بردارهای جابه‌جایی $r(x,y,z,t)$ و بار خارجی $p(x,y,z,t)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$L[r(x,y,z,t)] = P(x,y,z,t) \quad (1-1)$$

¹ Guideways

نماد L نشان‌دهنده‌ی یک اپراتور دیفرانسیلی خطی یا غیرخطی است. باتوجه به شرایط مرزی و اولیه، معادله‌ی بالا (معمولا معادله با مشتقات جزئی) رفتار سازه را تعریف می‌کند [۱].

در مدل‌های محاسباتی بار معمولا به شکل‌های زیر اعمال می‌شود:

۱- یک نیروی ساده بدون جرم

۲- یک نوسان‌ساز

۳- یک نیروی اینرسی (جرم و نیروی بدون جرم)

در مسائل ارتعاشات سازه‌ها تحت بار متحرک، تقریبا تمام مسائل مربوط به بارهای غیر اینرسی هستند و در مقابل مسائل گسترده‌ای که در این حوزه وجود دارد، تعداد کمی از آنها به صورت کد کامپیوتری منعکس شده‌اند. نرم افزارهای تجاری شناخته شده قادر به تجزیه و تحلیل مسائل پیچیده مکانیکی با هندسه و ماده‌ی غیرخطی هستند اما درمورد بار متحرک خیلی موفق نبوده‌اند [۲]. در واقع اگر یک بار متحرک، مانند یک جرم در حال حرکت در یک مسیر منحنی روی سازه‌ی مورد بررسی در نظر گرفته شود؛ باتوجه به اصل دالامبر، اثرات آن شامل این موارد است: اثر وزن یا گرانش، اثر بار متحرک و اثرات اینرسی جرم بار در ساختار تغییر شکل. اگر تنها اثر وزن در نظر گرفته شود و از جرم بار متحرک در برابر جرم سازه صرف‌نظر شود، محاسبه‌ی کرنش آسان خواهد بود و در صورتی که جرم سازه در برابر جرم بار قابل اغماض باشد، شرایط پیچیده‌تر خواهد شد. اما دشوارترین حالت زمانی است که اثرات گرانش و اینرسی بارهای متحرک با یکدیگر در نظر گرفته شوند.

۱-۳- تئوری‌های ورق‌ها و پوسته‌ها:

طراحی بسیاری از سازه‌ها از قبیل مخازن تحت فشار، هواپیماها، پل‌ها، پوشش‌های گنبدی و موشک‌ها براساس نظریه‌های ورق‌ها و پوسته‌هاست. باتوجه به درجه‌ی سادگی طراحی سازه‌های مختلف از نظر نوع ساختار و دقت مورد نیاز، تئوری مناسب اتخاذ می‌شود. به‌طور مثال، یک مخزن ذخیره‌سازی آب

را می‌توان با تئوری پوسته‌ی غشایی^۱ به‌طور رضایت بخشی طراحی کرد. درحالی‌که طراحی یک کلاهک موشکی نیاز به تجزیه و تحلیل دقیق‌تر به‌منظور به حداقل رساندن وزن و مواد دارد. به‌طور مشابه طراحی یک اتصال نازل به سیلندر در یک راکتور هسته‌ای نیاز به تجزیه و تحلیل اجزای محدود پیچیده‌ای برای جلوگیری از شکست خستگی دارد؛ درحالی‌که همان نازل در یک باتری هوا در یک ایستگاه گاز توسط معادلات ساده‌تری طراحی می‌شود که شرایط تعادل را برآورده سازد.

عموماً منابعی که تمام جنبه‌های تئوری ورق‌ها و پوسته‌ها را پوشش دهد، وجود ندارد. برخی از منابع نظریه‌هایی خاص مانند: خمش صفحات، کمانش، ارتعاشات یا تئوری پوسته‌ها را مطرح می‌کنند و درمقابل منابعی به بررسی موضوعات خاص مانند: سازه‌های بتنی، مخازن تحت فشار، مخازن آب و... می‌پردازند [۳].

ورق‌ها و پوسته‌ها جزء سازه‌های جدارنازک می‌باشند. ورق‌ها سطوحی تخت هستند که به علت کوچک بودن بعد ضخامت، می‌توان آن‌ها را تنها به کمک دو محور از سه محور X, Y و Z بیان نمود. درواقع چنانچه از ضخامت ورق به‌خاطر کوچک بودن آن صرف‌نظر شود، می‌توان ورق را یک جسم دوبعدی در فضای دوبعدی به‌حساب آورد. پوسته‌ها سطوحی دارای انحنا و تابع هر سه محور X و Y و Z هستند و به دو دسته‌ی پوسته‌های نازک و پوسته‌های ضخیم تقسیم می‌شوند. پوسته‌ها به‌خاطر داشتن انحنای اولیه، دارای مقاومت خمشی بیشتری نسبت به ورق‌ها هستند و اغلب از طریق تنش‌های غشایی درمقابل بارهای خارجی مقاومت می‌کنند. در یک جمله باید گفت که اختلاف بین رفتار ورق‌ها و پوسته‌ها را می‌توان ناشی از انحنای اولیه‌ی پوسته‌ها دانست [۴].

برخی مواد تحت کرنش‌های کوچک دچار تغییر شکل‌های بزرگ می‌شوند. تئوری الاستیسیته‌ی کلاسیک تنها مواردی را پوشش می‌دهد که در آن‌ها جابه‌جایی و مشتقات آنها کوچک هستند. بنابراین ضروری است برای پیش‌بینی رفتار این مواد تئوری‌های غیرخطی الاستیسیته معرفی شوند. به‌طور کلی تئوری‌ها شامل دو دسته‌اند: تئوری‌های کلاسیک و تئوری‌های پیشرفته. تئوری‌های

¹ Membrane shell theory

کلاسیک عمدتاً تغییر شکل‌های برشی را در نظر نمی‌گیرند، درحالی‌که در تئوری‌های جدیدتر برش نیز در مسأله لحاظ می‌گردد [۵].

۱-۳-۱- تئوری کلاسیک:

یک صفحه‌ی نازک، سازه‌ای تخت در معرض بارهایی است که سبب خمش آن می‌شود. هرچند در واقع چنین عضوی یک جسم سه‌بعدی است، اما تحلیل توسط تئوری سه‌بعدی الاستیسیته چنانچه ضخامت آن در مقایسه با ابعاد ورق کوچک است، ضروری نیست. با تغییرات معقول و منطقی از طریق ضخامت، جابه‌جایی، کرنش‌ها و تنش‌ها می‌توان مسأله را به یک یا دو بعد کاهش داد. این نظریه‌ی دوبعدی که رایج‌ترین و کاربردی‌ترین مورد برای تجزیه و تحلیل علمی است، نظریه‌ی کلاسیک (CPT)^۱ نامیده می‌شود؛ که همچنین به عنوان نظریه‌ی صفحه‌ی نازک نیز شناخته می‌شود [۶].

فرضیات سینماتیکی که در این تئوری استفاده شده‌اند عبارتند از:

۱- خطوط مستقیم و عمود بر صفحه‌ی میانی بعد از تغییر شکل، مستقیم باقی می‌مانند.

۲- خطوط مستقیم و عمود بر صفحه‌ی میانی بعد از تغییر شکل، عمود باقی می‌مانند.

۳- ضخامت صفحه در حین تغییر شکل تغییر نمی‌کند [۷].

الف- میدان جابه‌جایی [۷]:

میدان جابه‌جایی در این تئوری عبارت است از:

$$u_{\alpha}(x) = u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w^0}{\partial x_{\alpha}} = u_{\alpha}^0 - x_3 w_{\alpha}^0, \alpha = 1, 2 \quad (1-2)$$

$$w_3(x) = w^0(x_1, x_2)$$

¹ Classical plate theory

x_1 و x_2 مختصات دکارتی روی صفحه‌ی میانی ورق تغییر نیافته هستند و x_3 محور در راستای ضخامت است. u_1^0 و u_2^0 جابه‌جایی‌های صفحه‌ای^۱، صفحه‌ی میانی هستند و w^0 جابه‌جایی صفحه‌ی میانی در راستای x_3 است.

ب- روابط کرنش-جابه‌جایی [۷]:

برای وضعیتی که کرنش‌ها در ورق بی‌نهایت کوچک‌اند و چرخش‌های صفحه‌ی میانی معمولاً کمتر از ده درجه هستند، روابط کرنش-جابه‌جایی عبارتند از:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0) - x_3 w_{,\alpha\beta}^0 \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= -w_{,\alpha}^0 + w_{,\alpha}^0 = 0 \\ \varepsilon_{33} &= 0\end{aligned}\quad (۱-۳)$$

بنابراین تنها کرنش‌هایی که در جهت‌های درون صفحه‌ای هستند، غیر صفر خواهند بود. اگر چرخش صفحه‌ی میانی بین ۱۵-۱۰ درجه باشد می‌توان از کرنش‌های فن-کارمن^۲ استفاده کرد. فرضیات سینماتیکی به شکل زیر درمی‌آیند:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0 + w_{,\alpha}^0 w_{,\beta}^0) - x_3 w_{,\alpha\beta}^0 \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= -w_{,\alpha}^0 + w_{,\alpha}^0 = 0 \\ \varepsilon_{33} &= 0\end{aligned}\quad (۱-۴)$$

به دلیل وجود جمله‌های درجه دوم در روابط کرنش-جابه‌جایی این تئوری غیرخطی است.

^۱ In-plane

^۲ Von karman

۱-۳-۲- نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه اول:

نظریه‌ی ورق میندلین-رایسنر یک بسط از نظریه‌ی ورق کیرشهف-لاو است که براساس محاسبه‌ی تغییرشکل برشی از طریق ضخامت ورق است. این نظریه در سال ۱۹۵۱ توسط ریموند میندلین پیشنهاد شده است [۸]. مشابه این نظریه، در سال ۱۹۴۵ توسط اریک رایسنر پیشنهاد شده بود؛ ولی این دو کاملاً باهم یکسان نیستند. هردو نظریه برای ورق‌های ضخیم هستند که در آن‌ها سطح میانی بعد از تغییر شکل صاف است اما لزوماً عمود باقی نمی‌ماند [۹].

نظریه‌ی میندلین-رایسنر برای محاسبه‌ی تغییرشکل و تنش‌های صفحه‌هایی که درجه بعد ضخامت در آن‌ها یک دهم ابعاد دیگر است مورد استفاده قرار می‌گیرد، درحالی‌که نظریه‌ی کیرشهف-لاو در صفحه‌های نازک قابل استفاده است.

نظریه‌ی میندلین-رایسنر شامل کرنش‌های برشی درون صفحه‌ای بوده و توسعه یافته‌ی نظریه‌ی کیرشهف-لاو است، که با اثرات برشی مرتبه‌ی اول ترکیب شده. این نظریه اغلب نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه اول نامیده می‌شود [۱۰].

الف- میدان جابه‌جایی [۷]:

میدان جابه‌جایی در این تئوری عبارت است از:

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(x) &= u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - x_3 \varphi_{\alpha}, \alpha = 1, 2 \\ w_3(x) &= w^0(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1-5)$$

x_1 و x_2 مختصات دکارتی روی صفحه‌ی میانی ورق تغییر نیافته هستند و x_3 محور در راستای

ضخامت است. u_1^0 و u_2^0 جابه‌جایی‌های صفحه‌ای، صفحه‌ی میانی هستند و w^0 جابه‌جایی صفحه‌ی

میانی در راستای x_3 است. φ زوایای چرخش صفحه‌ی میانی هستند.

ب- روابط کرنش-جابه‌جایی [۷]:

با توجه به میزان چرخش صفحه، دو تقریب متفاوت برای کرنش‌ها می‌تواند وجود داشته باشد که بر پایه‌ی فرضیات سینماتیکی هستند. برای کرنش‌ها و چرخش‌های کوچک، روابط کرنش-جابه‌جایی عبارتند از:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^0 + u_{\beta,\alpha}^0) - \frac{x_3}{2}(\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}) \quad (1-6)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(w_{,\alpha}^0 + \varphi_{\alpha})$$

$$\varepsilon_{33} = 0$$

کرنش برشی و به تبع آن تنش برشی در سراسر ضخامت ورق در نظر گرفته شده، هرچند کرنش برشی مقدار ثابت دارد، که فرض دقیقی نیست چون تنش برشی حتی برای ورق‌هایی با هندسه‌ی ساده، سهموی شکل است. به سبب عدم دقت در کرنش برشی، یک ضریب تصحیح برشی اعمال می‌شود تا مقدار صحیحی از انرژی داخلی توسط این تئوری پیش‌بینی شود:

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}k(w_{,\alpha}^0 + \varphi_{\alpha}) \quad (1-7)$$

۱-۴- ویسکوالاستیک:

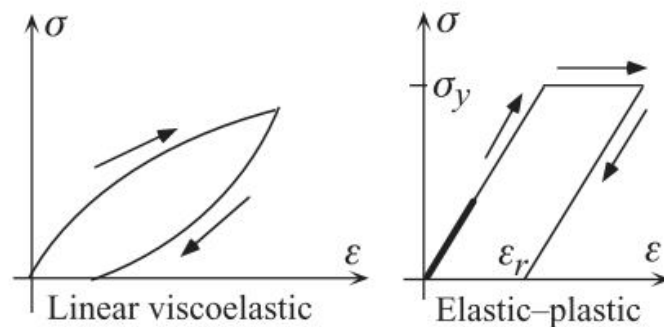
ویسکوالاستیسیته از جمله ویژگی‌های موادی است که تحت تغییر شکل، هر دو ویژگی الاستیسیته و ویسکوزیته را نمایش می‌دهند. مواد چسبناک مانند عسل در برابر جریان برشی و کرنش خطی که با اعمال تنش بروز می‌یابد، مقاومت می‌کنند. در کرنش مواد الاستیک پس از کشش و با حذف تنش، ماده به سرعت به حالت اولیه‌ی خود بازمی‌گردد. مواد ویسکوالاستیک، موادی هستند که این عناصر را باهم دارند. به عنوان مثال، کرنش وابسته به زمان است. الاستیسیته معمولاً نتیجه‌ی پیوستگی کشش در امتداد صفحه‌های کریستالوگرافی^۱ در یک جامد و ویسکوزیته نتیجه‌ی نفوذ اتم‌ها یا مولکول‌ها درون یک ماده‌ی آمورف^۲ است [۱۱].

^۱ Crystallographic

^۲ Amorphous

در مواد ویسکوالاستیک چنانچه تنش ثابت نگه داشته شود، کرنش با زمان افزایش می یابد که به این خاصیت خزش^۱ گفته می شود. همچنین با ثابت نگه داشتن کرنش، تنش با زمان کاهش می یابد که به آن رهایش^۲ اطلاق می شود.

همه ی مواد پاسخ ویسکوالاستیک از خود نشان می دهند. در فلزات معمولی مانند فولاد یا آلومینیوم و همچنین کوارتز، در دمای اتاق و کرنش کوچک، رفتار به گونه ای است که انحراف از الاستیسیته ی خطی ناچیز است. پلیمرهای مصنوعی، چوب و بافت های انسانی و همچنین فلزات در دمای بالا، اثرات ویسکوالاستیک قابل توجهی را نشان می دهند [۱۲].



شکل (۱-۱) منحنی تنش-کرنش برای مواد ویسکوالاستیک خطی و مواد الاستیک-پلاستیک [۱۲]

۵-۱- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک:

بیان معادلات بنیادین تنش-کرنش در مواد ویسکوالاستیک، به دو شکل کلی انتگرالی و دیفرانسیلی امکان پذیر است، در ادامه به بیان روش دیفرانسیلی پرداخته می شود.

معادله ی ساختاری برای یک ماده ی ایزوتروپیک که پاسخ آن به مشتق های تنش و کرنش نیز حساس است، به صورت کلی زیر نوشته می شود:

$$f(\sigma, \sigma', \sigma'', \dots, \epsilon, \epsilon', \epsilon'', \dots) = 0 \quad (1-8)$$

که در آن تنش و کرنش وابسته به زمان می باشند. شکل اپراتوری معادله ی فوق به صورت زیر است:

$$-P(D)\sigma_{ij}(t) = Q(D)\epsilon_{ij}(t) \quad (1-9)$$

¹ Creep

² Relaxation

که $P(D)$ و $Q(D)$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$P(D) = \sum_{r=0}^N P^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad ; \quad Q(D) = \sum_{r=0}^N Q^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad (1-10)$$

$D = \frac{d}{dt}$ و P^r و Q^r ثابت می باشند و به مدل رئولوژیکی انتخابی وابسته اند.

جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک یک سیستم تحت کشش چند محوری، قسمت برشی^۱ و اتساعی^۲ تنش را از هم جدا می کنند. این قاعده به دلیل پاسخ متفاوت ماده‌ی ویسکوالاستیک به برش و اتساع (بالک) می باشد. باتوجه به این نکته، مؤلفه‌های برش و اتساع را می توان به صورت زیر جدا کرد:

$$P_1 \sigma_{ij}^d = Q_1 \varepsilon_{ij}^d \quad P_2 \sigma_{ij} = Q_2 \varepsilon_{ij} \quad ; \quad (1-11)$$

بالانویس d معرف بخش انحرافی و P_1 ، P_2 ، Q_1 و Q_2 اپراتورهایی به شکل کلی زیر می باشند:

$$P_1 = p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad (1-12)$$

K و G که به ترتیب مدول رهایش بالک و برش می باشند، به صورت زیر تعیین می شوند:

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{P_1} \right) \quad K = \frac{1}{3} \left(\frac{Q_2}{P_2} \right) \quad ; \quad (1-13)$$

و رابطه‌ی مدول الاستیسیته و ضریب پواسون بر حسب مدول رهایش بالک و برش عبارت است از:

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad ; \quad (1-14)$$

با جایگذاری روابط (۱-۱۳) در عبارات فوق، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به شکل اپراتوری به-

دست می آیند (۱۳) و (۱۴).

¹ Deviatoric
² Dilatational

۱-۶- فرضیات متداول در ویسکوالاستیسیته:

از آنجا که جمع‌آوری اطلاعات وابسته به زمان برای خصوصیات مواد ویسکوالاستیک مشکل و زمان‌بر است، برای حل مسائل تحلیل تنش در این حوزه، اعمال فرض‌هایی بر روی خصوصیات ماده ضروری است. بنابراین اغلب برای ماده‌ی ویسکوالاستیک، یکی از خصوصیات مدول برش $G(t)$ یا مدول یانگ $E(t)$ تعریف می‌شود و مدول دیگر براساس یکی از فرضیات زیر تعیین می‌شود:

۱- تراکم‌ناپذیری: برای تغییر شکل‌های کوچک در حوزه‌ی مسائل الاستیک خطی، در حالت تراکم‌ناپذیری، ضریب پواسون برابر با ۰.۵ یا مدول بالک بی‌نهایت است. تحت شرایط مشابه، برای یک ماده‌ی تراکم‌ناپذیر ویسکوالاستیک، ضریب پواسون برابر ۰.۵ و مدول بالک بی‌نهایت می‌باشد. بنابراین با وجود این شرط، کرنش‌های اتساعی صفر می‌باشند.

۲- الاستیک در اتساع (بالک): در این حالت مدول بالک، مقدار ثابت k_0 را داشته و $K(t) = k_0$ می‌باشد، که $H(t)$ تابع پله‌ای^۱ است. این فرض بر این اساس است که تغییرات مدول بالک نسبت به مدول برشی، با دما و زمان بسیار کم است. در این حالت ضریب پواسون، تابعی از زمان است. بنابراین، فرض رفتار الاستیک، برای ماده‌ی ویسکوالاستیک در اتساع، معمولاً فرض مناسبی است.

۳- هم‌زمانی^۲ مدول بالک و برشی: در این حالت فرض می‌شود که نسبت مدول بالک به برشی مقدار ثابتی باشد، به‌طوری که $K(t) = c_1 G(t)$ که c_1 مقداری ثابت است. بنابراین در این حالت وابستگی زمانی این دو یکسان بوده و فقط مقادیر آن‌ها متفاوت می‌باشد. صحت این فرض به‌شدت وابسته به دماست. در این حالت ضریب پواسون یک مقدار ثابت است [۱۴].

¹ Heaviside Step Function

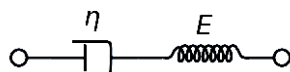
² Synchronous

۱-۷- مدل‌های ساختاری ویسکوالاستیسیته‌ی خطی:

مواد ویسکوالاستیک مانند پلیمرهای آمورف، پلیمرهای نیمه بلورین، زیست بسپارها^۱ و حتی بافت‌های زنده و سلول را می‌توان به‌منظور تعیین تنش و کرنش یا نیرو و جابه‌جایی و سایر فعل و انفعالات مثل وابستگی زمانی آن‌ها، مدل کرد. این مدل‌ها مانند: مدل ماکسول، مدل کلوین-ویت و مدل جامد استاندارد خطی، برای پیش‌بینی رفتار یک ماده در شرایط بارگذاری استفاده می‌شوند. رفتار ویسکوالاستیک دارای اجزای الاستیک و ویسکوز است که با ترکیب خطی فنرها و دشیپت‌ها^۲ مدل می‌شود.

۱-۷-۱- مدل ماکسول^۳:

مدل ماکسول شامل یک فنر صرفا الاستیک و یک دمپر صرفا ویسکوز است که به‌طور سری به هم متصل شده‌اند.



شکل (۱-۲) مدل ماکسول [۱۲]

این مدل از طریق فرمول زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_0}{dt} + \frac{d\varepsilon_s}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (۱-۱۵)$$

براساس این مدل، اگر ماده تحت کرنش ثابت باشد، تنش به تدریج رها می‌شود. وقتی ماده تحت تنش ثابت باشد کرنش دو مؤلفه دارد؛ مورد اول در جزء الاستیک رخ می‌دهد؛ این مورد مربوط به فنر است که بعد از کاهش تنش بلافاصله رها می‌شود. مورد دوم در جزء ویسکوز است که تا زمانی تنش اعمال می‌شود با گذشت زمان رشد می‌کند که تقریباً در مورد پلیمرها صادق است. این مدل قادر به پیش-

^۱ Biopolymers

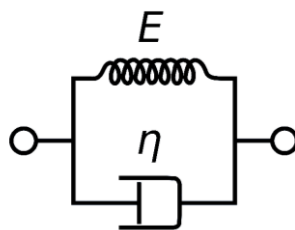
^۲ Dashpots

^۳ Maxwell Model

بینی خزش با دقت نیست و برای شرایط خزش یا تنش ثابت ادعا می‌کند که فشار به‌طور خطی با زمان افزایش خواهد یافت؛ درحالی‌که در پلیمرها در بیشتر قسمت‌ها نرخ کرنش با زمان افزایش می‌یابد [۱۵].

۱-۷-۲- مدل کلوین-ویت^۱:

این مدل شامل یک دمپر نیوتنی و یک فنر الاستیک است که به موازات هم وصل شده‌اند و از آن برای توضیح رفتار خزش پلیمرها استفاده می‌شود.



شکل (۱-۳) مدل کلوین-ویت [۱۲]

رابطه‌ی ساختاری به شکل یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول بیان می‌شود.

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (1-16)$$

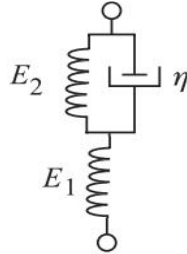
این مدل نشان‌دهنده‌ی یک جامد برگشت‌پذیر تحت کرنش ویسکوالاستیک است. به محض اعمال یک تنش ثابت تغییرات ماده با یک نرخ کاهشی، به‌صورت مجانبی به کرنش حالت پایدار نزدیک می‌شود. زمانی که تنش آزاد می‌شود ماده به‌تدریج در حالت تغییر نیافته رها می‌شود. در تنش ثابت (خزش)، مدل کاملاً واقع‌بینانه پیش‌بینی می‌کند که کرنش در زمان بی‌نهایت به $\frac{\sigma}{E}$ میل می‌کند. مانند مدل ماکسول، مدل کلوین-ویت نیز محدودیت‌هایی دارد؛ این مدل در خزش در بسیاری از موارد موفق است اما در زمینه‌ی رهایش دقت بسیار کمی دارد [۱۶].

¹ Kelvin-Voigt Model

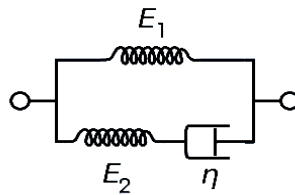
۱-۷-۳- مدل جامد استاندارد خطی (مدل زنر)^۱:

ترکیبی از المان کلویین-ویت به صورت سری با فنر (شکل (۴-۱)) یا المان ماکسول موازی با فنر (شکل

(۵-۱)) است.



شکل (۴-۱) اولین مدل جامد استاندارد خطی [۱۲]



شکل (۵-۱) دومین مدل جامد استاندارد خطی [۱۲]

رابطه‌ی ساختاری مدل اول عبارت است از:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\frac{E_2}{\eta} + \left(\frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma - E_1 \varepsilon \right)}{E_1 + E_2} \quad (۱-۱۷)$$

و رابطه ساختاری مدل دوم:

$$\frac{\sigma}{\eta} + \frac{\sigma}{E_2} = \varepsilon \frac{E_1}{\eta} + \varepsilon^o \left[1 + \frac{E_1}{E_2} \right] \quad (۱-۱۸)$$

مدول رهایش در معادله‌ی اول:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{E_1}{E_1 + E_2} \left[E_2 + E_1 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] \quad (۱-۱۹)$$

$$\tau = \frac{\eta}{E_1}$$

¹ Standard Solid (Zener) Model

مدول رهایش در معادله دوم:

$$G(t) = E_1 + E_2 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad (1-20)$$

تحت تنش ثابت ماده فوراً تغییر می‌کند و بخشی از کرنش رخ می‌دهد که قسمت الاستیک آن است و بعد از آن تغییر شکل ادامه می‌یابد و به صورت مجانبی به حالت پایدار کرنش نزدیک می‌شود که این بخش قسمت ویسکوزیته کرنش است. اگرچه مدل جامد استاندارد خطی از مدل ماکسول و کلوین-ویت در پیش‌بینی پاسخ مواد دقیق‌تر است، اما از نظر ریاضی برای کرنش تحت شرایط بارگذاری خاص که محاسبه نسبتاً دشوار است، نتایج نادرستی را برمی‌گرداند ([۱۳]، [۱۷]، [۱۸]).

۱-۷-۴- مدل ماکسول تعمیم یافته:

مدل ماکسول تعمیم یافته به مدل ماکسول-ویچرت^۱ نیز معروف است که عمومی‌ترین شکل مدل خطی برای ویسکوالاستیسیته است. این مدل می‌تواند رهایشی را که در زمان واحد رخ نمی‌دهد گزارش کند که البته در یک توزیع زمانی صورت می‌گیرد. با توجه به توزیع مولکولی طول‌های مختلف و اینکه طول‌های کوتاه‌تر از طول‌های بلندتر مشارکت کمتری دارند، توزیع‌های زمانی مختلفی وجود دارد. مدل ریچرت نشان می‌دهد که با داشتن تعداد زیادی فنر و دشیپات ماکسول می‌توان این توزیع را با دقت نشان داد [۱۹].

۱-۸- سری پرونی:

در یک آزمایش رهایش یک بعدی، ماده تحت یک کرنش ناگهانی قرار می‌گیرد که در طی آزمون ثابت نگه داشته می‌شود و تنش در طول زمان اندازه‌گیری می‌شود. تنش اولیه ناشی از پاسخ الاستیک ماده است و بعد از آن رها شدن تنش در طول زمان با توجه به اثرات ویسکوزیته ماده است. به طور معمول هریک از مقاومت کششی، فشاری، فشار بالک یا کرنش برشی اعمال می‌شوند. تنش‌های حاصل

^۱ Maxwell-Wiechert نویسنده

درمقابل داده‌های زمان را می‌توان با معادلاتی به نام مدل تطبیق داد. تغییرات نمادها وابسته به کرنش اعمالی است؛ رهایش فشاری-کششی با نماد E ، برشی با نماد G و بالک با نماد K نشان داده می‌شود. سری پرونی برای رهایش برشی عبارت است:

$$G(t) = G_{\infty} - \sum_{i=1}^N G_i \exp\left(\frac{-t}{\tau_i}\right) \quad (1-21)$$

که در آن G_{∞} مدول بلند مدت پس از رهایش کامل ماده است. τ_i زمان‌های رهایش هستند. مقادیر بزرگتر آن‌ها به این معنی است که تنش در مدت زمان طولانی‌تری رها می‌شود. داده‌ها با استفاده از یک الگوریتم کمینه‌سازی با معادله تطبیق داده می‌شوند تا پارامترهای $(\tau_i, G_i, G_{\infty})$ تنظیم شوند و خطای بین مقادیر پیش‌بینی شده و مقادیر به‌دست آمده کاهش یابد [۲۰].

شکل جایگزینی که باتوجه به ارتباط بین مدول الاستیک و مدول بلند مدت حاصل می‌شود، عبارت است از:

$$G(t=0) = G_0 = G_{\infty} + \sum_{i=1}^N G_i$$

$$G(t) = G_0 - \sum_{i=1}^N G_i [1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_i}\right)] \quad (1-22)$$

این شکل برای زمانی مناسب است که مدول برشی الاستیک G_0 مستقل از داده‌های رهایش به‌دست می‌آید؛ یا در محاسبات کامپیوتری، هنگامی که هدف مشخص کردن خواص الاستیک به‌طور جداگانه از خواص ویسکوالاستیک است [۲۱].

۹-۱- مرور مقالات:

ریسمان در سال ۱۹۶۸ اثر سرعت بار بر پاسخ دینامیکی، نیروی غشایی و ممان خمشی در پوسته‌ی جدار نازک الاستیک، تحت فشار متحرک را با تئوری کلاسیک بررسی کرد [۲۲]. در سال ۱۹۷۱، استیل با روش بسط مجانبی به مطالعه‌ی تیر تیموشینکو و اوایلر برنولی بر بستر الاستیک تحت بار

متحرک پرداخته و نتایج تیر تیموشینکو را با پوسته مقایسه نمود [۲۳]. لارسن و پوپوف در سال ۱۹۷۳ با روش عددی رفتار پس کمانش پوسته‌ی الاستیک کروی و کمانش خزشی یک کلاهک کروی را با تئوری کلاسیک بررسی کردند [۲۴]. هانگ در سال ۱۹۷۶ پوسته‌ی الاستیک و در سال ۱۹۷۸ پوسته‌ی ویسکوالاستیک تحت بار متحرک را با تئوری برشی مرتبه اول مطالعه کرد [۲۵]، [۲۷]. فیزلقی و همکاران در سال ۱۹۷۷ روی پوسته‌ی ویسکوالاستیک تحت بارهای سطحی متقارن با تئوری کلاسیک کار کردند [۲۶]. در سال ۱۹۹۲، پالیوال و راش به بررسی پوسته‌ی الاستیک تحت بار نقطه‌ای ثابت پرداخته و اثر پارامترهای پوسته و فونداسیون بر رفتار استاتیکی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای روی یک فونداسیون الاستیک مطالعه کردند [۲۸]. کارگرنوین و همکاران در سال ۲۰۰۵، پاسخ و اثر فرکانس بار بر سرعت را در تیر تحت بار متحرک هارمونیک توسط تئوری تیر تیموشینکو و اوایلر برنولی تعیین نمودند [۲۹]. روزن و باز در سال ۲۰۰۶ اثر تقویت کننده‌ها بر پاسخ و سرعت بحرانی را در پوسته‌ی الاستیک تحت بار متحرک بررسی کردند [۳۰]. یانگ و همکاران در سال ۲۰۰۸ یک پوسته‌ی کامپوزیتی تحت بار متحرک را با تئوری کلاسیک و روش تفاضل محدود مطالعه کرده و اثر اندازه و عمق لایه‌ها، پارامترهای هندسی و خواص مواد را بررسی کردند [۳۱]. در همین سال فربس و راندا نیز حلقه‌ی الاستیک تحت بار متحرک را با تئوری کلاسیک بررسی کرده و فرکانس را با محاسبه‌ی حرکت دینامیکی در حالت بار با اندازه‌ی متغیر، فاز متغیر و توزیع غیریکنواخت، تعیین نمودند [۳۲]. در سال ۲۰۱۰ چیوپین و همکاران، پنل نیم‌استوانه‌ای ویسکوالاستیک تحت بار متحرک را به منظور تعیین پاسخ با فرض لغزش لایه‌ی میانی توسط تئوری کلاسیک به صورت عددی و تحلیلی مطالعه کردند [۳۳]؛ همچنین سوفیه نیز ضریب مقاومت تقویت دینامیکی، سرعت بحرانی و اثر خواص مواد و هندسه‌ی پوسته بر آنها را در پوسته‌ی FGM تحت بار متحرک و نیروی محوری با تئوری کلاسیک بررسی کرد [۳۴]. ساکسا و همکاران در سال ۲۰۱۲ بر روی پنل ویسکوالاستیک تحت بار متحرک مطالعه نموده و اثر خواص مواد بر تشدید در شرایط مرزی مختلف با روش تفاضل محدود بررسی کردند [۳۵]. ملک‌زاده و حیدرپور در همان سال به حل عددی پوسته‌ی FGM تحت

بار متحرک و فشار حرارتی پرداختند [۳۶]. اکسو و همکاران در سال ۲۰۱۳، کمانش و خرابی پوسته-ی الاستیک تحت فشار جانبی با تئوری دانیل مطالعه نمودند [۳۷]. در سال ۲۰۱۴ ملک‌زاده و همکاران مشخصات ماده، هندسه، شرایط مرزی و تقارن یا عدم تقارن بر پاسخ را در مخروط ناقص تحت بار متحرک با تئوری برشی مرتبه‌ی اول بررسی کردند [۳۸]. کارتونن و هرتزن نیز پارامترهای فونداسیون بر سرعت بحرانی در حالت کرنش صفحه‌ای در یک پوسته‌ی الاستیک تحت بار متحرک توسط تئوری تیموشینکو را مطالعه کردند [۳۹]. در سال ۲۰۱۵ عبدالغنی تیر اوایلر برنولی تحت بار متحرک با روش گالرکین و رانچ کوتا به منظور بررسی سرعت بر پاسخ بررسی کرد [۴۰]. در همین سال حسینی و همکاران یک پنل ویسکوالاستیک هدفمند (FGV) را برای بررسی ارتعاشات آزاد ماده با تئوری برشی مرتبه اول مطالعه کردند [۴۱].

۱-۱۰- جمع‌بندی:

در این فصل، ابتدا به معرفی بار متحرک و چگونگی بررسی آن در مسائل پرداخته شده سپس تئوری‌های ورق‌ها و پوسته‌ها بیان شده، تئوری کلاسیک و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به اختصار توضیح داده شدند. مواد ویسکوالاستیک، رفتار و ویژگی‌ها و معادلات حاکم بر آنها بررسی شدند. فرضیات متداول بر ویسکوالاستیسیته مطرح شده و پس از آن مدل‌های ساختاری ویسکوالاستیسیته‌ی خطی به‌طور اجمالی معرفی شدند. سری پرونی و روابط آن نیز مورد بحث قرار گرفته و در نهایت مقالات مرتبط با موضوع پایان‌نامه بررسی شده؛ در اکثر مقالات بار متحرک است و اخیراً مواد ویسکوالاستیک و FGM مورد توجه بیشتری قرار گرفته‌اند. در حل معادلات روش‌های عددی بیشتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

فصل دوم

استخراج و حل معادلات حاکم

۲-۱- مقدمه:

در این فصل، ابتدا به استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات پوسته‌ای استوانه‌ای تحت فشار داخلی متحرک پرداخته می‌شود. این مطالعه براساس تئوری کلاسیک و با استفاده از اصل همپلتون انجام می‌شود. سپس با در نظر گرفتن رفتار ماده‌ی پوسته به صورت ویسکوالاستیک در برش و الاستیک در اتساع، معادلات استخراج شده برای حالت ویسکوالاستیک، تعمیم داده شده است. در استخراج معادلات حرکت، فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود:

خیز نسبتاً زیاد بوده و رابطه‌ی کرنش-جاب‌جایی مطابق رابطه‌ی فن-کارمن است.

پوسته، ویسکوالاستیک و همگن است.

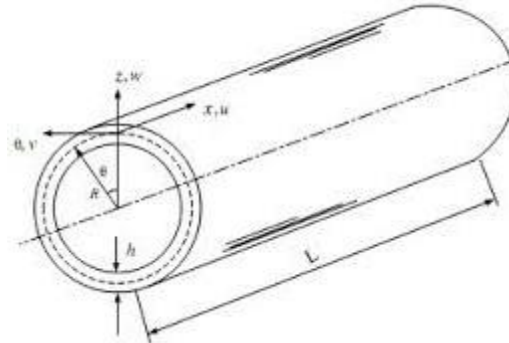
رابطه‌ی تنش-کرنش مطابق قانون هوک است.

سرعت حرکت بار و مقدار فشار ثابت است.

مسأله، متقارن محوری است.

معادلات به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، شامل دو معادله با مشتقات جزئی نسبت به مکان و زمان هستند. از آنجا که در تعیین حل این دستگاه معادلات از تئوری اغتشاشات استفاده می‌شود، معادلات بی‌بعد خواهند شد و پس از آن فرکانس‌های طبیعی، پاسخ و در نهایت سرعت بحرانی محاسبه می‌شود.

۲-۲- تعریف مسأله:



شکل (۱-۲) پوسته‌ای استوانه‌ای

پوسته‌ای استوانه‌ای مطابق شکل (۱-۲) با طول l ، شعاع میانی R_0 ، ضخامت h و چگالی ρ مفروض است. پوسته تحت بار P قرار دارد. برای فرمول‌بندی از سیستم مختصات استوانه‌ای (x, θ, z) استفاده شده است.

براساس تئوری کلاسیک، میدان جابه‌جایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۴۵]:

$$u_x = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2-1)$$

$$u_\theta = 0$$

$$u_z = w_0(x, t)$$

که در آن u_x ، u_θ و u_z به ترتیب سه مؤلفه‌ی میدان جابه‌جایی در راستای محورهای مختصات x و

θ و z هستند. u_0 و w_0 دارای بعد طول بوده و معرف جابه‌جایی صفحه‌ی میانی می‌باشند. کرنش‌ها

براساس روابط کرنش-جابه‌جایی فن-کارمن به صورت زیر هستند [۴۲]:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 & \gamma_{xz} &= 0 \\ e_{\theta\theta} &= \frac{u_z}{r} & \gamma_{x\theta} &= 0 \\ e_{zz} &= 0 & \gamma_{\theta z} &= 0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

براساس میدان جابه‌جایی (۱-۲)، میدان کرنش به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 & \gamma_{xz} &= 0 \\ e_{\theta\theta} &= \frac{w_0}{r} & \gamma_{x\theta} &= 0 \\ e_{zz} &= 0 & \gamma_{\theta z} &= 0 \end{aligned} \quad (۲-۳)$$

۲-۳- محاسبه‌ی انرژی پتانسیل:

چگالی انرژی کرنشی به شکل زیر تعریف می‌شود [۴۳]:

$$2U^* = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \tau_{\theta x} \gamma_{\theta x} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \quad (۲-۴)$$

و تغییرات^۱ چگالی انرژی کرنشی U^* با جایگزینی مقادیر صفر برخی از مؤلفه‌های تنش، عبارت است از:

$$2\delta U^* = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta \quad (۲-۵)$$

انرژی کرنشی U با انتگرال‌گیری چگالی انرژی کرنشی بر روی حجم بدست می‌آید. المان حجم به-صورت $dv = r dx d\theta dz$ که $r = z + R$ در نظر گرفته شده است و در آن محدوده‌ی تغییرات مؤلفه‌های محوره‌ای مختصات به صورت $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-h/2 \leq z \leq h/2$ می‌باشد.

$$\delta U = 2\pi \int \left[\begin{aligned} &RN_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} - RM_x \delta \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ &+ RN_x \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ &+ N_\theta \delta w_0 \end{aligned} \right] dx \quad (۲-۶)$$

در انرژی کرنشی منته‌های تنش به‌صورت زیر تعریف شده‌اند [۴۴]:

¹ Variation

$$\begin{aligned}
N_x &= \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz & N_\theta &= \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_\theta dz & Q_x &= \int_{h/2}^{-h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\
N_z &= \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz & M_\theta &= \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_\theta z dz & M_{xz} &= \int_{h/2}^{-h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \\
M_x &= \int_{h/2}^{-h/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz
\end{aligned} \tag{۲-۷}$$

۴-۲- محاسبه‌ی انرژی جنبشی:

چگالی انرژی جنبشی، T^* عبارت است از [۴۴]:

$$T^* = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] \tag{۲-۸}$$

با جایگذاری میدان جابه‌جایی (۱-۲) و انتگرال‌گیری از چگالی انرژی جنبشی روی حجم، انرژی

جنبشی پوسته به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
T &= \iiint T^* dx d\theta dz \\
\delta T &= 2\pi \int_{-l/2}^{l/2} \rho \left[\begin{aligned} &Rh \frac{\partial u_0}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + Rh \frac{\partial w_0}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right) \\ &+ \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right) - \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right) \\ &- \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \end{aligned} \right] dx
\end{aligned} \tag{۲-۹}$$

۵-۲- کار نیروی خارجی:

کار حاصل از نیروهای خارجی ناشی از فشار متحرک عبارت است از [۴۴]:

$$\delta W_0 = \iint_S (f_x \delta u_x + f_z \delta u_z) ds \tag{۲-۱۰}$$

که در آن f_x و f_z مؤلفه‌های فشار و ds المان سطح بوده و براساس هندسه مسأله به‌صورت زیر تعیین

می‌شود:

$$ds = 2\pi r_i dx \tag{۲-۱۱}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۱۱) در (۲-۱۰) و انتگرال‌گیری از تغییرات آن در راستای طول، تغییرات ناشی از فشار خارجی W_0 تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned}\delta W_0 &= 2\pi \int_{-l/2}^{l/2} [P \delta w_0] \left(R - \frac{h}{2} \right) dx \\ &= 2\pi \int_{-l/2}^{l/2} P \left(R - \frac{h}{2} \right) \delta w_0 dx\end{aligned}\quad (2-12)$$

۲-۶- تعیین معادلات حرکت:

معادلات حاکم بر حرکت پوسته در بازه‌ی زمانی (t_1, t_2) باید اصل همیلتون را ارضا کنند. براساس اصل همیلتون [۴۵]:

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= 0 \\ L &= T - U - W\end{aligned}\quad (2-13)$$

با به‌کارگیری روابط (۲-۶)، (۲-۹) و (۲-۱۲) در اصل همیلتون، معادلات حرکت پوسته‌ی الاستیک تعیین می‌شوند. معادلات برحسب منته‌های تنش عبارتند از:

$$\begin{aligned}R \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \right) + \frac{h^3}{12} \rho \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \right) - Rh \rho \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) &= 0 \\ R \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \right) + R \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + RN_x \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ - N_\theta - Rh \rho \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) - \frac{h^3}{12} \rho \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \right) \\ + (R - \frac{h}{2}) P + \frac{h^3}{12} \rho R \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \right) &= 0\end{aligned}\quad (2-14)$$

۲-۷- تعمیم معادلات حرکت به پوسته‌ی ویسکوالاستیک [۴۶]:

جهت توصیف رفتار ماده‌ی ویسکوالاستیک یک سیستم، اثر مؤلفه‌ی برشی را از مؤلفه‌ی تغییر حجم خالص جدا می‌کنند. زیرا بخش‌های انحرافی و حجمی تنش، رفتارهای رهایش متفاوتی دارند. همان-

طور که قبلاً بیان شد در این مطالعه رفتار ماده در بالک (اتساع)، الاستیک و در برش، ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود. بنابراین تعیین معادلات حاکم در حوزه‌ی ویسکوالاستیک شامل مراحل زیر است.

۲-۷-۱- قانون هوک:

روابط تنش- کرنش یک جسم جامد سه‌بعدی ایزوتروپیک الاستیک که از قانون هوک پیروی می‌کند به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left(K - \frac{2G}{3}\right)(e_x + e_\theta + e_z) + 2Ge_x \\ \sigma_\theta &= \left(K - \frac{2G}{3}\right)(e_x + e_\theta + e_z) + 2Ge_\theta \\ \sigma_z &= \left(K - \frac{2G}{3}\right)(e_x + e_\theta + e_z) + 2Ge_z\end{aligned}\quad (2-15)$$

که ضرایب K و G به صورت روابط (۱-۱۳) هستند.

۲-۷-۲- تعیین نتیجه‌های تنش:

با جایگزین کردن روابط فوق در معادلات (۷-۲) نتیجه‌های تنش به این صورت حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{h}{R} b_0 w_0 - \frac{h^3}{12R} b_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{h}{2} b_1 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + h b_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ M_x &= -\frac{h^3}{12} b_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{h^3}{12R} b_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h^3}{24R} b_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ N_\theta &= h b_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h}{2} b_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + \alpha_0(x) b_1 w_0 \\ b_0 &= \left(K - \frac{2}{3}G\right), b_1 = \left(K + \frac{4}{3}G\right) \\ \alpha_0(x) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{dz}{R+z}\end{aligned}\quad (2-16)$$

۲-۷-۳- انتخاب مدل ویسکوالاستیک:

برای مدل سازی ویسکوالاستیک از اولین مدل جامد استاندارد خطی استفاده شده و رابطه ی تنش- کرنش آن مطابق رابطه ی (۱۷-۱) است. در این حالت اپراتورهای P_1 و Q_1 در رابطه ی (۱۳-۱) به- صورت زیر جایگزین می شوند:

$$P_1 = \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) + \frac{\tau}{G_1} D \quad \tau = \frac{\eta}{G_2} \quad (2-17)$$

$$Q_1 = 2(1 + \tau D) \quad D = \frac{\partial}{\partial t}$$

که τ زمان رهایش و D اپراتور مشتق زمانی می باشند. اپراتورهای P_2 و Q_2 نیز عبارتند از:

$$P_2 = 1 \quad (2-18)$$

$$Q_2 = 3K, K = K_0$$

۲-۷-۴- تعیین معادلات براساس مدل انتخابی:

براساس مدل انتخابی، مقادیر P_1, P_2, Q_1, Q_2 تعیین می شوند. سپس مدول های K و G محاسبه شده و در روابط (۲-۱۶) جایگزین می شوند، به این ترتیب منتهی های تنش در حالت ویسکوالاستیک به دست می آیند؛ چنانچه روابط حاصل در رابطه ی (۲-۱۴) جایگزین شوند و حاصل در $P_1 P_2$ ضرب شود، معادلات پوسته ی ویسکوالاستیک با خیز نسبتا زیاد، برحسب جابه جایی به صورت زیر خواهند بود:

$$\frac{h^3}{12} \left\{ \rho d_2 \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \right) - d_1 \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \right\} + h \left\{ d_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + R \rho d_2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) \right\} \\ + h R d_1 \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right\} = 0 \quad (2-19)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^3 \rho}{12} d_2 \left\{ R \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \right) - \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \right) \right\} + h d_0 \left\{ w_0 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right\} \\
& - \frac{h^3 d_1}{6} \left\{ \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) - \frac{R}{2} \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) + \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right) + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \\
& + h R d_2 \left\{ \rho \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) + \left(\frac{3}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + 1 \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right\} \\
& + h R d_1 \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right\} - \alpha_0(x) d_1 w_0 + d_2 \left(\frac{h}{2} - R \right) P = 0
\end{aligned}$$

که ضرایب d_0 ، d_1 و d_2 عبارتند از:

$$\begin{aligned}
d_0 &= (G_0^* + G_1^* \tau D) - \frac{2}{3} (1 + \tau D) \\
d_1 &= (G_0^* + G_1^* \tau D) + \frac{4}{3} (1 + \tau D) \\
d_2 &= \left(\frac{G_0^* + G_1^* \tau D}{K} \right)
\end{aligned} \tag{۲-۲۰}$$

و همچنین:

$$\begin{aligned}
G_0^* &= \frac{K}{G_1} + \frac{K}{G_2} \\
G_1^* &= \frac{K}{G_1}
\end{aligned} \tag{۲-۲۱}$$

معادلات حاضر، یک دستگاه معادلات شامل دو معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی است که معادلات به یکدیگر کوپل هستند. با استفاده از اصل همیلتون شرایط مرزی نیز به دست می‌آیند. شرایط مرزی پسته براساس منته‌های تنش به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}
N_x \delta u_0 \Big|_0^l &= 0, M_x \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} \Big|_0^l = 0 \\
\left(R N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (R M_x) \right) \delta w_0 &= 0
\end{aligned} \tag{۲-۲۲}$$

از (۲-۲۲) شرایط مرزی مسأله را می‌توان تعیین نمود. مثلاً برای شرایط مرزی گیردار نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 0 \quad x = 0, l \quad at \\
 w_0 &= 0 \quad x = 0, l \quad at \\
 \frac{\partial w_0}{\partial x} &= 0 \quad x = 0, l \quad at
 \end{aligned}
 \tag{۲-۲۳}$$

۲-۸- حل تحلیلی:

در تعیین حل این دستگاه معادلات، از تئوری اغتشاشات استفاده می‌شود. در ابتدا به بی‌بعد سازی معادلات پرداخته می‌شود سپس فرکانس‌های طبیعی سیستم و در قسمت بعد پاسخ تعیین می‌شود.

۲-۸-۱- بی‌بعد سازی معادلات:

پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{x}{l} & R^* &= \frac{R}{R_0} \\
 t^* &= \frac{t}{t_0} & w^* &= \frac{w_0}{w_6} \\
 h^* &= \frac{h}{h_0} & u^* &= \frac{u_0}{w_6}
 \end{aligned}
 \tag{۲-۲۴}$$

x^* و t^* به ترتیب مکان و زمان بی‌بعد، u^* و w^* جابه‌جایی‌های بی‌بعد مؤلفه‌های u_0 و w_0 بوده،

w_6 معرف ماکزیمم جابه‌جایی شعاعی و h_0 و t_0 شاخص‌های ضخامت و زمان هستند که مقادیر آن‌ها

به صورت $h_0 = h$ و $t_0 = l/c$ در نظر گرفته شده است. c معرف سرعت موج بوده و برابر است با :

$$c = \sqrt{\frac{K_0}{\rho}}
 \tag{۲-۲۵}$$

با اعمال پارامترهای بی‌بعد در معادلات (۲-۱۹)، پارامترهای بی‌بعد زیر نیز قابل تعریف هستند:

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{\tau}{t_0} & P^* &= \frac{P}{k_0} \\
e &= \frac{\rho}{k_0} \left(\frac{h_0}{t_0} \right)^2 & z_2 &= \frac{R_0}{h_0} & \alpha_6 &= \frac{w_6}{h_0} \\
\varepsilon &= \frac{h_0}{l} & w_6 &= \frac{h_0^2}{l}
\end{aligned} \tag{۲-۲۶}$$

ε پارامتری کوچک است و به عنوان پارامتر اغتشاش در نظر گرفته می شود. در نهایت معادلات بی بعد

شده، شامل دو معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی و به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}
& \left\{ a_0 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) + a_1 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*2} \partial t^*} \right) - a_2 \right\} \varepsilon \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) + a_0 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \right) \\
& - a_4 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} \right) + \left\{ a_1 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) - a_3 \right\} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial t^*} \right) \\
& + a_1 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial x^{*2} \partial t^*} \right) - a_5 \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial t^{*3}} \right) - a_6 \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}} \right) \\
& - a_7 \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*3} \partial t^*} \right) + a_8 \varepsilon \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^* \partial t^{*2}} \right) + a_9 \varepsilon \left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^* \partial t^{*3}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{۲-۲۷}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ a_0 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) + a_1 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*2} \partial t^*} \right) + a_2 \right\} \varepsilon \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) - a_2 w^* \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) \quad (2-28) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ 3a_0 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) + 3a_1 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*2} \partial t^*} \right) - a_2 \right\} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 \\
& + \left\{ a_0 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \right) + 3a_1 \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial t^*} \right) \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) \right. \\
& \left. - a_3 \varepsilon \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial t^*} \right) + a_1 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial x^{*2} \partial t^*} \right) \right\} \varepsilon \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \\
& - \left\{ a_3 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) + a_{10} \alpha_0(x^*) \right\} \varepsilon \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) + a_1 \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial t^*} \right) \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \right) \\
& + \left\{ a_1 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right) + a_3 \right\} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial t^*} \right) + a_6 \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial x^{*3}} \right) - a_4 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} \right) \\
& - a_8 \varepsilon \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^* \partial t^{*2}} \right) - a_5 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial t^{*3}} \right) - a_{11} \alpha_0(x^*) w^* + a_7 \varepsilon^3 \left(\frac{\partial^4 u^*}{\partial x^{*3} \partial t^*} \right) \\
& - z2R^* \varepsilon^2 \left\{ a_6 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} \right) + a_8 \left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} \right) \right. \\
& \left. - a_7 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^5 w^*}{\partial x^{*4} \partial t^*} \right) + a_9 \left(\frac{\partial^5 w^*}{\partial x^{*2} \partial t^{*3}} \right) \right\} - a_3 w^* \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*2} \partial t^*} \right) \\
& - a_9 \varepsilon \left(\frac{\partial^4 u^*}{\partial x^* \partial t^{*3}} \right) + \left(G_0^* P^* + \frac{h_0 \beta G_1^*}{k_0} \left(\frac{\partial P^*}{\partial t^*} \right) \right) \left(\frac{h^*}{2} - z2R^* \right) = 0
\end{aligned}$$

G_0^* و G_1^* مدول‌های ویسکوالاستیک در حالت بی‌بعد هستند که قبلاً تعریف شده‌اند.

۲-۸-۲- تعیین فرکانس‌های طبیعی:

در تعیین فرکانس‌های طبیعی پوسته، تحریک دینامیکی تاثیری بر مقدار فرکانس طبیعی نخواهد داشت. جهت یافتن فرکانس‌های طبیعی با تعریف $X = x^*/\varepsilon$ در معادلات (۲-۲۷) و (۲-۲۸) نتیجه

می‌شود:

$$\left\{ a_0 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X^2} \right) + a_1 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial X^2 \partial t^*} \right) - a_2 \right\} \left(\frac{\partial w^*}{\partial X} \right) + a_0 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial X^2} \right) \quad (2-29)$$

$$\begin{aligned} & -a_4 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} \right) + \left\{ a_1 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X^2} \right) - a_3 \right\} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X \partial t^*} \right) \\ & + a_1 \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial X^2 \partial t^*} \right) - a_5 \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial t^{*3}} \right) - a_6 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial X^3} \right) \\ & - a_7 \left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial X^3 \partial t^*} \right) + a_8 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial X \partial t^{*2}} \right) + a_9 \left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial X \partial t^{*3}} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ a_0 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X^2} \right) + a_1 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial X^2 \partial t^*} \right) + a_2 \right\} \left(\frac{\partial u^*}{\partial X} \right) - a_2 w^* \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X^2} \right) \quad (2-30)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \left\{ 3a_0 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X^2} \right) + 3a_1 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial X^2 \partial t^*} \right) - a_2 \right\} \left(\frac{\partial w^*}{\partial X} \right)^2 \\ & + \left\{ a_0 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial X^2} \right) + 3a_1 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X \partial t^*} \right) \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X^2} \right) \right\} \left(\frac{\partial w^*}{\partial X} \right) \\ & - \left\{ -a_3 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X \partial t^*} \right) + a_1 \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial X^2 \partial t^*} \right) \right\} \left(\frac{\partial w^*}{\partial X} \right) \\ & - \left\{ a_3 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X^2} \right) + a_{10} \alpha_0(X) \right\} \left(\frac{\partial w^*}{\partial X} \right) + a_1 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X \partial t^*} \right) \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial X^2} \right) \\ & + \left\{ a_1 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial X^2} \right) + a_3 \right\} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial X \partial t^*} \right) + a_6 \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial X^3} \right) - a_4 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} \right) \\ & - a_8 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial X \partial t^{*2}} \right) - a_5 \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial t^{*3}} \right) - a_{11} \alpha_0(X) w^* + a_7 \left(\frac{\partial^4 u^*}{\partial X^3 \partial t^*} \right) \\ & - z2R^* \left\{ a_6 \left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial X^4} \right) + a_8 \left(\frac{\partial^4 w^*}{\partial X^2 \partial t^{*2}} \right) \right\} - a_3 w^* \left(\frac{\partial^3 w^*}{\partial X^2 \partial t^*} \right) \\ & - a_7 \left(\frac{\partial^5 w^*}{\partial X^4 \partial t^*} \right) + a_9 \left(\frac{\partial^5 w^*}{\partial X^2 \partial t^{*3}} \right) \\ & - a_9 \left(\frac{\partial^4 u^*}{\partial X \partial t^{*3}} \right) + \left(G_0^* P^* + \frac{h_0 \beta G_1^*}{k_0} \left(\frac{\partial P^*}{\partial t^*} \right) \right) \left(\frac{h^*}{2} - z2R^* \right) = 0 \end{aligned}$$

در معادلات فوق ضرایب عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= h^* R^* z 2 a_{11} & a_6 &= \frac{h^{*3}}{12} a_{11} \\
 a_1 &= h^* R^* z 2 a_{10} & & \\
 a_2 &= h^* \left(\frac{2}{3} - G_0^* \right) & a_7 &= \frac{h^{*3}}{12} a_{10} \\
 a_3 &= h^* \beta \left(\frac{2}{3} - G_1^* \right) & a_8 &= \frac{h^{*3}}{12} e G_0^* \\
 a_4 &= h^* R^* z 2 e G_0^* & a_9 &= \frac{h^{*3}}{12} e \beta G_1^* \\
 a_5 &= h^* R^* z 2 e \beta G_1^* & a_{10} &= \beta \left(\frac{4}{3} + G_1^* \right) \\
 a_6 &= \frac{h^{*3}}{12} a_{11} & a_{11} &= \left(\frac{4}{3} + G_0^* \right)
 \end{aligned} \tag{۲-۳۱}$$

برای حل تقریبی معادلات فوق، از روش بسط مستقیم^۱ در تئوری اغتشاشات استفاده می‌گردد. در

ابتدا مؤلفه‌های دامنه‌ی ارتعاشات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$w^*(X, t^*) = \varepsilon \left(w_0(X, t^*) + \varepsilon w_1(X, t^*) \right) \tag{۲-۳۲}$$

$$u^*(X, t^*) = \varepsilon \left(u_0(X, t^*) + \varepsilon u_1(X, t^*) \right)$$

با جایگزینی روابط (۲-۳۲) در معادلات (۲-۲۹) و (۲-۳۰)، معادلات براساس مرتبه‌های مختلف ε

حاصل می‌شوند. جملات با کوچکترین مرتبه، (مرتبه‌ی یک) عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 & -a_2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial X} \right) + a_0 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2} \right) - a_4 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^{*2}} \right) - a_3 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X \partial t^*} \right) \\
 & + a_1 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial X^2 \partial t^*} \right) - a_5 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^{*3}} \right) - a_6 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial X^3} \right) \\
 & - a_7 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial X^3 \partial t^*} \right) + a_8 \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial X \partial t^{*2}} \right) + a_9 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial X \partial t^{*3}} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{۲-۳۳}$$

¹ Straight Forward Expansion

$$\begin{aligned}
& a_2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial X} \right) - a_{10} \alpha_0(X) \left(\frac{\partial w_0}{\partial X} \right) + a_3 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X \partial t^*} \right) + a_6 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial X^3} \right) \\
& - a_4 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^{*2}} \right) - a_8 \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial X \partial t^{*2}} \right) - a_5 \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^{*3}} \right) - a_{11} \alpha_0(X) w_0 \\
& - z 2 R^* \left\{ a_6 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial X^4} \right) + a_8 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial X^2 \partial t^{*2}} \right) - a_7 \left(\frac{\partial^5 w_0}{\partial X^4 \partial t^*} \right) + a_9 \left(\frac{\partial^5 w_0}{\partial X^2 \partial t^{*3}} \right) \right\} \\
& + a_7 \left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial X^3 \partial t^*} \right) - a_9 \left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial X \partial t^{*3}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{۲-۳۴}$$

معادلات (۲-۳۳) و (۲-۳۴) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی هستند که می‌توان به شکل

ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned}
& [\overline{B}_5] \frac{d^4 y^*}{dX^4} + [\overline{B}_4] \frac{d^3 y^*}{dX^3} + [\overline{B}_3] \frac{d^2 y^*}{dX^2} + [\overline{B}_2] \frac{dy^*}{dX} + [\overline{B}_1] y^* \\
& + [\overline{B}_9] \frac{d^3 y^*}{dt^{*3}} + [\overline{B}_8] \frac{d^2 y^*}{dt^{*2}} + [\overline{B}_7] \frac{dy^*}{dt^*} + [\overline{B}_6] y^* = \{0\} \\
& \{y^*\} = \begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{۲-۳۵}$$

که $\{y^*\}$ شامل توابع وابسته‌ی هر دستگاه و عناصر ماتریس‌های $\overline{B}_1$ تا $\overline{B}_9$ ، ضرایب جملات معادلات

(۲-۳۳) و (۲-۳۴) هستند. با در نظر گرفتن حل به صورت:

$$\{y^*\} = \{V(X)\} e^{i\omega t^*} \tag{۲-۳۶}$$

که در آن ω فرکانس طبیعی بی‌بعد است و با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۳۶) در (۲-۳۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
& [\overline{B}_5] \frac{d^4 V}{dX^4} + [\overline{B}_4] \frac{d^3 V}{dX^3} + [\overline{B}_3] \frac{d^2 V}{dX^2} + [\overline{B}_2] \frac{dV}{dX} + [\overline{B}_1] V = \{0\} \\
& [\overline{B}_0] = [\overline{B}_6] + i \left(\omega [\overline{B}_7] - \omega^3 [\overline{B}_9] \right) - \omega^2 [\overline{B}_8]
\end{aligned} \tag{۲-۳۷}$$

پاسخ معادله‌ی (۲-۳۷) را که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت است می‌توان به صورت

زیر در نظر گرفت:

$$\{V(X)\} = \{A\} e^{\beta X} \tag{۲-۳۸}$$

$\{A\}$ بردارهای ویژه و β مقادیر ویژه می‌باشند. با جایگذاری (۳۸-۲) در (۳۷-۲)، معادله مشخصه‌ی سیستم به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\left[\overline{B_5}\beta^4 + \overline{B_4}\beta^3 + \overline{B_3}\beta^2 + \overline{B_2}\beta + \overline{B_1} \right] \{A\} = \{0\} \quad (2-39)$$

شرط داشتن جواب غیر صفر برای معادله‌ی فوق این است که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد.

$$\det(\overline{B_5}\beta^4 + \overline{B_4}\beta^3 + \overline{B_3}\beta^2 + \overline{B_2}\beta + \overline{B_1}) = 0 \quad (2-40)$$

رابطه‌ی (۲-۴۰)، معادله‌ی تفرق^۱ است و از حل آن شش مقدار ویژه β_j ($j=1,2,3,4,5,6$) تعیین می‌شود. به ازای هر مقدار ویژه یک بردار ویژه وجود دارد که از معادله‌ی (۳۸-۲) به دست می‌آید. این مقادیر ویژه و بردارهای ویژه شامل مقادیری از ω هستند. پس از یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه پاسخ کلی معادله‌ی (۳۷-۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{V\} = \sum_{j=1}^6 C_j \{A\}_j e^{\beta_j X} \quad (2-41)$$

C_j ثابت است و از شرایط مرزی تعیین می‌شود. با اعمال شرایط مرزی در دولبه، یک دستگاه معادلات جبری به صورت $[ax]\{C\} = \{0\}$ حاصل می‌شود که $\{C\}$ شامل عناصر C_j است. شرط وجود جواب غیر صفر، صفر بودن دترمینان ماتریس $[ax]$ است. این معادله یک رابطه‌ی پیچیده بین ω و β_j است؛ مقادیر β_j نیز تابع ω است و از حل آن مقادیر ω تعیین می‌شوند. برای تعیین ω از روش‌های محاسبات عددی استفاده می‌شود. در این پایان‌نامه از الگوریتم تنصیف^۲ برای حل معادله‌ی فوق استفاده شده است. پس از تعیین مقادیر فرکانس طبیعی هر دستگاه، به کمک رابطه‌ی (۳۹-۲)، شکل مدها نیز تعیین می‌شوند. برای ادامه‌ی حل به کمک معادلات مرتبه‌ی اول، با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۳۲) در معادلات (۲۹-۲) و (۳۰-۲)، معادلات مرتبه‌ی دوم حاصل می‌شوند:

¹ Dispersion

² Bisection

$$\begin{aligned}
& -a_2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial X} \right) - a_4 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}} \right) - a_3 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X \partial t^*} \right) \\
& + a_1 \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial X^2 \partial t^*} \right) - a_5 \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^{*3}} \right) - a_6 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X^3} \right) \\
& - a_7 \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial X^3 \partial t^*} \right) + a_8 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X \partial t^{*2}} \right) + a_9 \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial X \partial t^{*3}} \right) = k_1
\end{aligned} \tag{۲-۴۲}$$

$$\begin{aligned}
& -z2R^* \left\{ \begin{aligned} & a_6 \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial X^4} \right) + a_8 \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial X^2 \partial t^{*2}} \right) \\ & -a_7 \left(\frac{\partial^5 w_1}{\partial X^4 \partial t^*} \right) + a_9 \left(\frac{\partial^5 w_1}{\partial X^2 \partial t^{*3}} \right) \end{aligned} \right\} + a_7 \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial X^3 \partial t^*} \right) \\
& + a_6 \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial X^3} \right) - a_8 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X \partial t^{*2}} \right) - a_4 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^{*2}} \right) + a_3 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X \partial t^*} \right) \\
& - a_5 \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial t^{*3}} \right) + a_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial X} \right) - a_{11} \alpha_0(X) w_1 + a_{10} \alpha_0(X) \left(\frac{\partial w_1}{\partial X} \right) = k_2
\end{aligned} \tag{۲-۴۳}$$

که k_1 و k_2 بخش‌های ناهمگن معادلات بوده و به‌صورت زیر هستند:

$$k_1 = \left(\frac{d^2 A_1(X)}{dX^2} \right) \left(\frac{dA_1(X)}{dX} \right) (2i\omega_0 a_1 + a_0) e^{2i\omega_0 t^*} \tag{۲-۴۴}$$

$$k_2 = \left\{ \begin{aligned} & (2i\omega_0 a_1 + a_0) \left(\left(\frac{d^2 A_1(X)}{dX^2} \right) \left(\frac{dA_2(X)}{dX} \right) + \left(\frac{d^2 A_2(X)}{dX^2} \right) \left(\frac{dA_1(X)}{dX} \right) \right) \\ & - (2a_3 i\omega_0 + a_2) A_1(X) \left(\frac{d^2 A_1(X)}{dX^2} \right) - \left(a_3 i\omega_0 + \frac{a_2}{2} \right) \left(\frac{dA_1(X)}{dX} \right)^2 \end{aligned} \right\} e^{2i\omega_0 t^*}$$

ω_0 فرکانس طبیعی حاصل از حل معادلات مرتبه صفر می‌باشد. همچنین:

$$w_0 = A_1(X) e^{i\omega_0 t^*} \tag{۲-۴۵}$$

$$u_0 = A_2(X) e^{i\omega_0 t^*}$$

با دقت در بخش ناهمگن معادلات مشخص می‌شود که جمله‌های سکولار وجود ندارند. با حل این معادلات مقادیر فرکانس تغییر نخواهند کرد. چنانچه در رابطه‌ی (۲-۳۲) بسط تا مرتبه‌ی ε^3 ادامه یابد، در معادلات مرتبه‌ی سوم جمله‌های سکولار ظاهر خواهند شد؛ در این صورت می‌توان وابستگی فرکانس به دامنه را با فرمول‌بندی مسأله به روش مقیاس‌های چندگانه تعیین کرد.

۲-۹- تعیین پاسخ:

در تعیین فرکانس طبیعی به روش بسط مستقیم در تئوری اغتشاشات اشاره شد و معادلات برحسب ε تعیین شدند؛ در ادامه برای تعیین پاسخ، حل به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$w_0(X, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}(t^*) \sin\left(\frac{n\pi}{l_p} X\right) \quad (2-46)$$

$$u_0(X, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}(t^*) \cos\left(\frac{n\pi}{l_p} X\right)$$

که در آن، $l_p = 1/h$ است. با جایگذاری حل در معادلات (۲-۳۳) و (۲-۳۴)، دستگاه معادلات به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{1n} \sin\left(\frac{n\pi}{l_p} X\right) = F_1 \quad (2-47)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} \cos\left(\frac{n\pi}{l_p} X\right) = F_2$$

p_{1n} و p_{2n} عباراتی برحسب $f_{1n}(t^*)$ و $f_{2n}(t^*)$ و مشتقات آنها و $F_1=0$ و $F_2=Q^*$ می‌باشند. براساس بسط نیم دامنه‌ی فوریه از روابط (۲-۴۷) می‌توان مقادیر p_{1n} و p_{2n} را به صورت زیر به دست آورد:

$$p_{1n} = \frac{2}{l_p} \int_0^{l_p} F_1 \sin\left(\frac{n\pi}{l_p} X\right) dX \quad (2-48)$$

$$p_{2n} = \frac{2}{l_p} \int_0^{l_p} F_2 \cos\left(\frac{n\pi}{l_p} X\right) dX$$

معادلات (۴۸-۲) دو معادله‌ی کوپل به هم هستند که برای حل آن‌ها از روش تبدیل لاپلاس استفاده شده است.

در ادامه با در نظر گرفتن ضرایب ε^2 ، معادلات مرتبه‌ی دو به صورت (۴۲-۲) و (۴۳-۲) خواهند بود. حل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} w_0(X, t^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}(t^*) \sin\left(\frac{n\pi}{l_p} X\right) \\ u_0(X, t^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}(t^*) \cos\left(\frac{n\pi}{l_p} X\right) \\ w_1(X, t^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} ff_{1n}(t^*) \sin\left(\frac{n\pi}{l_p} X\right) \\ u_1(X, t^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} ff_{2n}(t^*) \cos\left(\frac{n\pi}{l_p} X\right) \end{aligned} \quad (۲-۴۹)$$

که در روابط فوق مقادیر $f_{1n}(t^*)$ و $f_{2n}(t^*)$ در حل معادلات مرتبه‌ی یک بدست آمده‌اند. سپس بخش همگن و ناهمگن معادلات جدا می‌شوند. حل بخش همگن شبیه معادلات مرتبه‌ی یک خواهد بود با این تفاوت که در رابطه‌ی (۴۷-۲) مقدار F_2 نیز صفر است [۴۷]. در بخش ناهمگن یک حل خصوصی برای جملات $ff_{1n}(t^*)$ و $ff_{2n}(t^*)$ در نظر گرفته می‌شود:

$$ff_{1n}(t^*) = \sum_{m=1}^n a_m F_m \quad (۲-۵۰)$$

$$ff_{2n}(t^*) = \sum_{m=1}^n b_m F_m$$

a_m و b_m ضرایب مجهول، F_m شامل جملات موجود در بخش ناهمگن معادلات و n تعداد این جملات است. با جایگذاری روابط (۵۰-۲) در معادلات و جداسازی ضرایب مجهول، معادلات برحسب این ضرایب حل می‌شوند.

۲-۱۰- سرعت بحرانی:

برای بدست آوردن سرعت بحرانی، در معادلات پاسخ برای بار متحرک، مقدار سرعت مجهول قرار داده شده، مراحل حل مانند قبل است؛ یعنی روابط (۲-۴۶) را در معادلات جایگزین کرده و بخش همگن و ناهمگن معادلات از هم جدا می‌شوند. برای حل بخش همگن بردار V تعریف می‌شود:

$$V = [p_1, p_2] e^{mt^*} \quad (2-51)$$

که در واقع حل در نظر گرفته شده برای $f_{1n}(t^*)$ و $f_{2n}(t^*)$ است. رابطه‌ی فوق در بخش همگن هردو معادله جایگزین شده و معادله‌ی اول برحسب p_1 حل می‌شود و پاسخ در معادله‌ی دوم جایگزین می‌شود. معادله‌ی حاصل که نسبت به m از مرتبه‌ی شش است برحسب m حل شده و با فرض $p_2=1$ و جایگزینی مقادیر حاصل در بردار V ، حل عمومی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$Fg = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3 + c_4 V_4 + c_5 V_5 + c_6 V_6 \quad (2-52)$$

در قسمت ناهمگن حل به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$fv = \sum_{i=1}^n (a_0(i) + a_1(i)t^*) axa(i) + (a_0(0) + a_1(0)t^*) \quad (2-53)$$

که در آن n ، تعداد جملات معادله‌ی ناهمگن است و axa ، توابع $\exp$ موجود در معادلات ناهمگن است.

با جمع این حل و حل عمومی و اعمال شرایط اولیه، حل معادلات برحسب مجهولات صورت می‌گیرد و تنها مجهول باقی‌مانده V خواهد بود. چنانچه نمودار قدرمطلق پاسخ به ازای سرعت رسم شود، مقدار می‌نیمم در نمودار، سرعت بحرانی خواهد بود.

همچنین با محاسبه‌ی حداکثر خیز برای سرعت‌های مختلف و رسم گراف این خیزهای حداکثر بر حسب سرعت، نقطه پیک گراف، نقطه متناظر با سرعت بحرانی است. یا می‌توان در حل معادلات، ریشه‌های مخرج را به دست آورد تا سرعت بحرانی تعیین شود.

۲-۱۱- جمع‌بندی:

در این فصل، نخست معادلات حاکم بر ارتعاشات پوسته‌ی الاستیک با خیز نسبتاً زیاد براساس تئوری کلاسیک استخراج شده، سپس با اعمال روش اپراتوری برای مدل ویسکوالاستیک جامد استاندارد خطی، معادلات برای پوسته‌ی ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد بدست آمد. در معادلات حرکت، جملات غیرخطی هندسی مربوط به روابط کرنش-جابجایی فن-کارمن ظاهر می‌شوند. معادلات به-صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، شامل دو معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان هستند که به یکدیگر کوپل بوده و برای تعیین مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به‌طور هم‌زمان باید حل شوند. در ادامه بی‌بعدسازی معادلات صورت گرفته و با استفاده از روش بسط مستقیم و تبدیلات لاپلاس و شرط حل‌پذیری، پاسخ به‌دست آمد. در نهایت نحوه‌ی محاسبه‌ی سرعت بحرانی نیز بیان شد. در فصل چهارم نتایج حاصل از این فصل ارائه خواهد شد.

فصل سوم

حل عددی

۳-۱- مقدمه:

در این فصل حل عددی مسأله با استفاده از نرم‌افزار انسیس^۱ ارائه خواهد شد. در ابتدای فصل به تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک با استفاده از سری پرونی پرداخته شده، سپس المان‌های استفاده شده در تحلیل معرفی می‌شوند. در نهایت مراحل حل مودال و تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها نیز بررسی می‌شوند.

۳-۲- تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک براساس سری پرونی [۴۸]:

برای تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک ماده، از مدول رهایش بالک و برشی استفاده می‌شود. در نرم-افزار انسیس این توابع را می‌توان برحسب جملاتی از سری توانی پرونی به‌صورت زیر بیان کرد:

$$G = G_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^G}\right)} \quad (3-1)$$

$$K = K_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^K}\right)}$$

G_i و G_{∞} مدول الاستیک برشی، K_i و K_{∞} مدول الاستیک بالک، τ_i^K و τ_i^G زمان رهایش برای هرکدام از اجزای سری پرونی است. با معرفی مدول‌های تناسبی^۲ به‌شکل:

$$\alpha_i^G = \frac{G_i}{G_0} \quad \alpha_i^K = \frac{K_i}{K_0} \quad (3-2)$$

که در آن:

$$G_0 = G_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \quad K_0 = K_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \quad (3-3)$$

توابع رهایش و بالک را به‌شکل زیر می‌توان بازنویسی کرد:

¹ Ansys 12.1

² Relative Moduli

$$G = G_0 \left(\alpha_{\infty}^G + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i^G e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^G} \right)} \right) \quad (3-4)$$

$$K = K_0 \left(\alpha_{\infty}^K + \sum_{i=1}^{n_K} \alpha_i^K e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^K} \right)} \right)$$

در اینجا G_0 و K_0 به ترتیب مدول برشی و مدول بالک در بارگذاری سریع یا مدول آنی و G_{∞} و K_{∞} مدول مربوط به بارگذاری‌های کند یا مدول نهایی می‌باشند. تعداد جملات سری پرونی برای برش n_G و برای رفتار بالک n_K است که لازم نیست این دو مشابه باشند. این مطلب در مورد زمان‌های رهایش τ_i^K و τ_i^G نیز صادق است.

۳-۳- تعیین مدول رهایش برشی و بالک:

براساس فرضیات فصل قبل، رفتار ماده در برش ویسکوالاستیک بوده و برای مدل‌سازی این رفتار از اولین مدل جامد استاندارد خطی استفاده می‌شود و مدول رهایش G به صورت تابعی از زمان تعیین می‌شود. همچنین رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته شده و به این ترتیب مدول بالک K عددی ثابت و بدون وابستگی به زمان است.

۳-۳-۱- مدول رهایش برشی:

یکی از بهترین روش‌های تعیین خصوصیات مواد ویسکوالاستیک در انسیس استفاده از سری پرونی است. روش‌های مختلفی برای تعیین این سری در انسیس وجود دارد. اولین روش این است که داده های مدول رهایش برشی نسبت به زمان، که از آزمایش رهایش به دست آمده است، به طور مستقیم وارد انسیس شود. در این صورت نرم افزار سری پرونی را بر این داده ها منطبق می کند. انسیس در هنگام انطباق تابع نمایی بر داده ها، G_0 و G_{∞} را به ترتیب اولین و آخرین داده در نظر می گیرد و مقدار α_i و τ_i را محاسبه می کند، ولی بعد از آن، G_0 و G_{∞} را در حافظه نگه نمی دارد. از این رو مقدار

مجهول (G_0 و G_∞)، G_0 مدول آنی و با تعیین مدول الاستیک E و ضریب پواسون ν ، انسیس آن را براساس فرمول زیر محاسبه می‌کند.

$$G_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3-5)$$

نکته دیگر این است که در داده‌های آزمایشگاهی، در صورتی که آخرین داده صفر باشد، مدول رهایش المان ماکسول به‌دست می‌آید.

روشی که در این تحلیل برای تعیین سری پرونی مورد استفاده قرار گرفته، این است که با توجه به این که در حل تحلیل مسأله از مدل جامد استاندارد برای شبیه‌سازی رفتار برشی ماده استفاده شده است، ضرایب سری پرونی به‌صورت زیر تعیین گردیده است.

$$G(t) = G_\infty + G_i e^{\left[\frac{-t}{\tau_i^G} \right]} \quad (3-6)$$

که در آن:

$$G_\infty = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \quad \tau_i^G = \frac{\eta}{G_1 + G_2} \quad , \quad G_i = \frac{G_1^2}{G_1 + G_2} \quad , \quad (3-7)$$

و مقدار مدول برشی آنی G_0 نیز با قرار دادن $t=0$ در رابطه‌ی اول (3-4) به‌صورت زیر تعیین شده است.

$$G_0 = G_1 \quad (3-8)$$

در نتیجه ضرایب سری پرونی رابطه‌ی (3-4) از روابط (3-8)، (3-7) و (3-2) تعیین می‌شود.

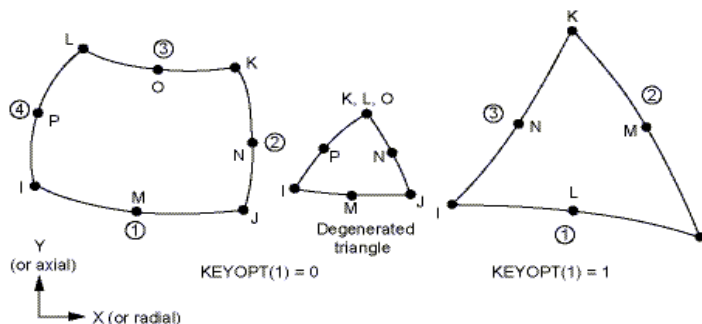
حال ضرایب سری پرونی مورد نظر α_i و τ_i به طور مستقیم وارد انسیس می‌شود، ولی G_0 را نمی‌توان وارد انسیس کرد و همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، انسیس این مقدار را برحسب مدول الاستیک E و ضریب پواسون ν محاسبه می‌کند.

۳-۳-۲- مدول بالک:

با توجه به اینکه رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته می‌شود، برای حالت بالک سری پرونی تعریف نمی‌شود و با وارد کردن مدول الاستیک و ضریب پواسون، انسیس مقدار مدول بالک را براساس رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کند:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (3-9)$$

۳-۴- معرفی المان [۴۹]:



شکل (۳-۱) المان Plane183 [۴۸]

Plane183، المانی دو بعدی با قابلیت تحلیل پلاستیسیت^۱، خزش، هایپرلاستیسیت^۲، تنش تقویتی^۳، خیز زیاد و کرنش بزرگ است. این المان دارای شش یا هشت گره و هر گره دارای دو درجه-ی آزادی است که مربوط به حرکت انتقالی در جهت‌های X و Y هستند. المان‌های هشت گره‌ای نتایج

¹ Plasticity

² Hyperelasticity

³ Stress Stiffening

خوبی را برای مش‌بندی اتوماتیک مثلثی و مربعی ارائه می‌دهند و برای شکل‌های نامنظم نسبتاً خوب هستند؛ این المان‌ها برای مدل‌هایی با مرزهای منحنی سازگاری خوبی دارند.

۳-۵- تعیین مش بهینه:

مشخصات پوسته و خواص مکانیکی مطابق جدول (۳-۱) است. در مدل‌سازی به‌صورت دوبعدی، با توجه به مقارن‌محور بودن مسأله مستطیلی به ابعاد طول و ضخامت پوسته تعریف می‌شود که تکیه‌گاه آن به‌صورت گیردار می‌باشد. پس از تعیین خواص مکانیکی، تیر مش‌بندی می‌شود. شکل (۳-۲) یک نمونه‌ی مش‌بندی شده‌ی سازه را نشان می‌دهد.

جدول (۳-۱) مشخصات پوسته

$l=0.4$	طول (m)
$R_i=0.155$	شعاع داخلی (m)
$R_o=0.165$	شعاع خارجی (m)
$h=0.01$	ضخامت (m)
$K=2.12e7$	مدول بالک (N/m^2)
$G_1=9.8e6$	مدول‌های ویسکوالاستیک (Pa)
$G_2=2.45e6$	
$\eta=2.74e3$	ضریب ویسکوزیته (Pa.s)
$\nu=0.3$	ضریب پواسون
$\rho=7800$	چگالی (kg/m^3)



شکل (۲-۳) یک نمونه‌ی مش‌بندی شده‌ی سازه

برای بررسی حساسیت مش، آنالیز مودال انجام شده و به ازای المان‌های مختلف، فرکانس طبیعی اول گزارش شده که نتیجه به قرار زیر است. براساس نتایج مش بهینه به ازای ۹۸ المان نتیجه می‌شود (جدول (۲-۳)).

جدول (۲-۳) مقادیر فرکانس طبیعی به ازای مش‌های مختلف در مدل‌سازی دو بعدی (rad/s)

تعداد	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۹۶	۹۸	۱۰۰	۱۱۰
المان								
فرکانس	۱۷۵.۵۸	۱۷۵.۵۸	۱۷۵.۵۸	۱۷۵.۵۸	۱۷۵.۵۸	۱۷۵.۵۸	۱۷۵.۵۸	۱۷۵.۵۸
طبیعی	۶	۴	۳	۲	۲	۲	۱	۱

۳-۶- حل مودال:

از آنالیز مودال جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مد آن، در فرکانس مورد نظر استفاده می‌شود. مقدار فرکانس طبیعی هر سازه بستگی به شکل، جنس و تکیه‌گاه‌های آن سازه دارد. درعین حال، مقدار بارگذاری‌ها و نوع آن نیز می‌تواند در مقدار فرکانس طبیعی موثر باشد. به همین دلیل نرم‌افزار دو نوع آنالیز مودال (بدون تنش و پیش‌تنش) را ارائه کرده است. در این پایان‌نامه از روش بدون تنش استفاده شده است.

۳-۷- جمع‌بندی:

در این فصل روند حل عددی مسأله ارائه شد. در ابتدای فصل به چگونگی تعیین خصوصیات مواد ویسکوالاستیک (مدول رهايش برشی و بالک) براساس سری پرونی پرداخته شد. سپس المان به‌کار رفته در تحلیل معرفی شده و توضیح مختصری از نحوه‌ی مدل‌سازی و حل مودال بیان شد. در فصل چهارم نتایج حاصل از این فصل ارائه خواهد شد.

فصل چہارم

بررسی نتایج

۴-۱- مقدمه:

در این فصل به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل‌های دوم و سوم پرداخته خواهد شد. محاسبات در محیط Maple15 انجام شده است. ابتدا نتایج مربوط به فرکانس طبیعی ارائه شده و تاثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس اول بررسی شده است، سپس به بیان نتایج پاسخ کلی و سرعت بحرانی پرداخته شده است. محاسبات براساس جدول (۳-۱) است مگر خلاف آن ذکر شود.

۴-۲- فرکانس طبیعی:

ابتدا فرکانس‌های طبیعی برای حالت ویسکوالاستیک محاسبه و با نتایج حل عددی مقایسه می‌شود. جدول (۴-۱) نشان می‌دهد که نتایج مطابقت خوبی دارند و خطا کمتر از ده درصد است.

جدول (۴-۱) فرکانس‌های طبیعی (rad/s)

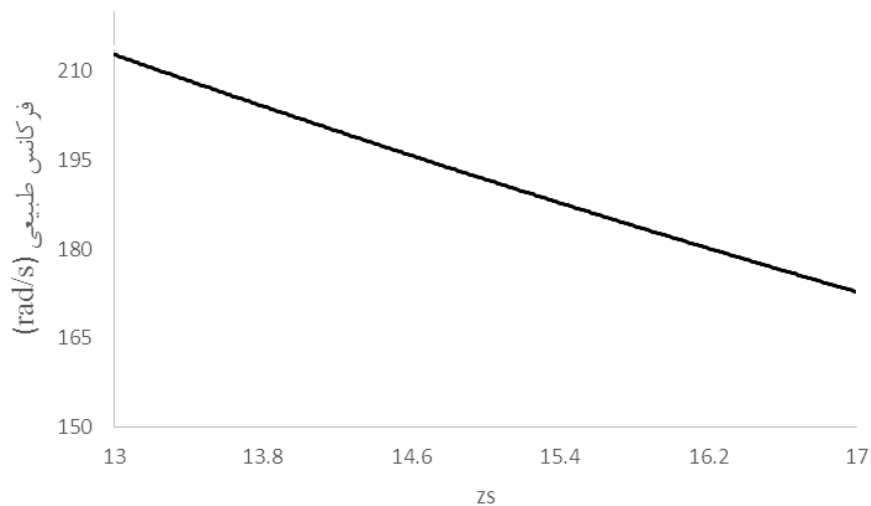
شماره مد	۱	۲	۳	۴	۵
نتایج حل تحلیلی	۱۸۱.۹۱	۱۹۴.۳۹	۲۰۷.۵۳	۲۱۸.۶۹	۲۵۸.۱۰
نتایج حل عددی	۱۷۵.۳۵	۱۸۳.۸۸	۱۹۱.۷۷	۲۰۴.۲۴	۲۳۶.۴۳

جدول (۴-۲) تغییرات فرکانس طبیعی با مدول الاستیسیته G_1 را نشان می‌دهد. همچنین محاسبات نشان می‌دهد، با تغییر در مدول الاستیسیته G_2 ، در محدوده $(1e3 < G_2 < 1e11)$ ، تغییری در فرکانس طبیعی مشاهده نمی‌شود. تغییر در ضریب ویسکوزیته نیز در محدوده $(1e5 < \eta < 1e11)$ ، بر فرکانس طبیعی اثر ندارد.

جدول (۴-۲) تاثیر مدول الاستیسیته G_1 بر فرکانس طبیعی

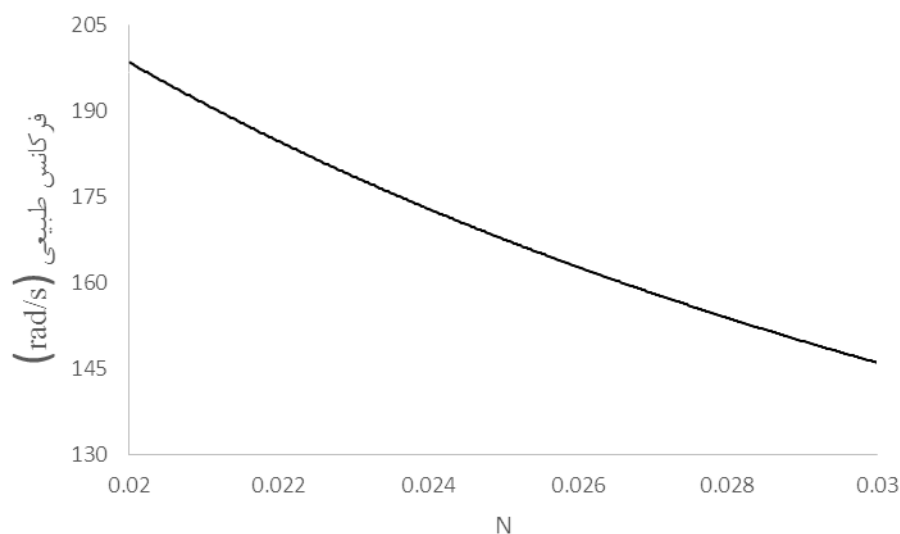
G_1 (Pa)	۶e۹.۸۱	۷e۳.۸۱	۷e۶.۸۱	۷e۹.۸۱	۸e۹.۸۱	۹e۹.۸۱
فرکانس طبیعی (rad/s)	۱۷۹.۹۵	۱۸۰.۶	۱۸۱.۲۶	۱۸۱.۹۱	۱۸۸.۸۷	۱۹۳.۰۸

شکل (۴-۱) اثر تغییرات نسبت شعاع به ضخامت، بر فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد. نمودار فرکانس طبیعی به ازای تغییرات zs ارائه شده که $zs=R/h$ شعاع میانی و h ضخامت پوسته است. با توجه به نمودار مشاهده می‌شود که افزایش zs سبب کاهش فرکانس طبیعی خواهد شد.



شکل (۴-۱) اثر تغییرات نسبت شعاع به ضخامت بر فرکانس طبیعی ($\omega=a.zs^b$, $a=1656$, $b=-0.797$)

شکل (۴-۲) اثر تغییرات نسبت ضخامت به طول، بر فرکانس را نشان می‌دهد. نمودار فرکانس طبیعی به ازای تغییرات N رسم شده است که $N=h/l$ ، h ضخامت و l طول پوسته است. مطابق نمودار با افزایش مقدار N ، فرکانس کاهش می‌یابد.

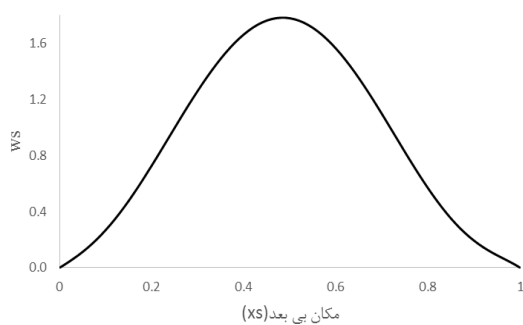


شکل (۴-۲) اثر تغییرات نسبت شعاع به طول بر فرکانس طبیعی ($\omega=a.N^b$, $a=10.24$, $b=-0.753$)

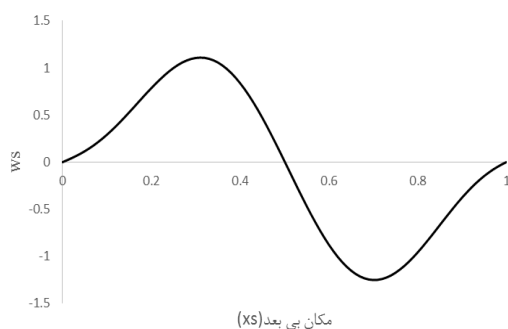
در جدول (۳-۴) پنج فرکانس طبیعی اول برای پوسته با تکیه‌گاه گیردار و ساده ارائه شده است. و همچنین شکل (۳-۴) دو شکل مد مربوط به حرکت عرضی پوسته با تکیه‌گاه ساده و گیردار است.

جدول (۳-۴) فرکانس‌های طبیعی پوسته با تکیه‌گاه ساده و گیردار (rad/s)

نوع تکیه‌گاه	مد اول	مد دوم	مد سوم	مد چهارم	مد پنجم
تکیه‌گاه ساده	۱۷۱.۴۱	۱۸۷.۸۳	۲۰۰.۳۰	۲۱۰.۷۷	۲۴۹.۱۱
تکیه‌گاه گیردار	۱۸۱.۹۱	۱۹۴.۳۹	۲۰۷.۵۳	۲۱۸.۶۹	۲۵۸.۱۰



شکل مد اول تکیه‌گاه گیردار

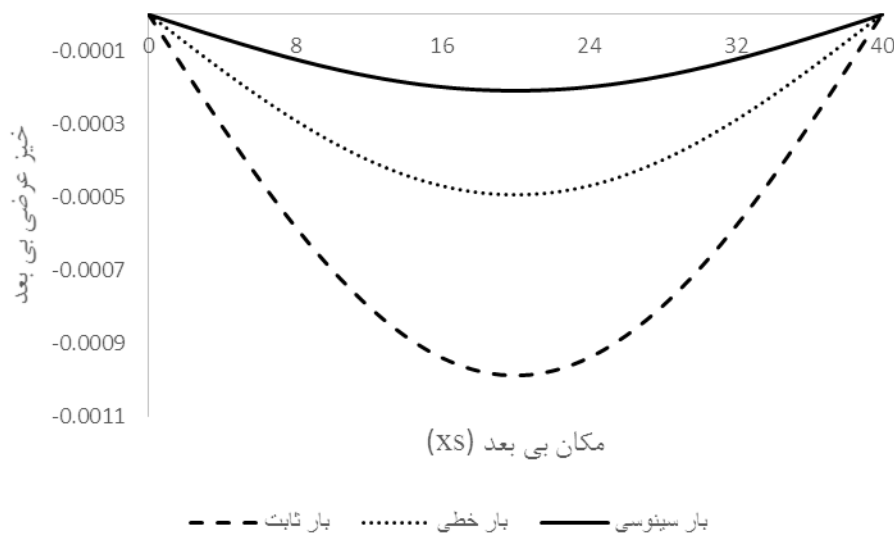


شکل مد دوم تکیه‌گاه گیردار

شکل (۳-۴) شکل مد عرضی

۴-۳- پاسخ:

در این بخش به بررسی پاسخ پوسته تحت بارگذاری‌های ثابت با شدت 100 N/m ، سینوسی، خطی و در نهایت بار متحرک با سرعت 10 m/s پرداخته می‌شود. در شکل (۴-۴) جابه‌جایی عرضی پوسته در زمان $t^*=3$ رسم شده است. چون بار متحرک دارای معادل استاتیکی متفاوتی با سایر بارگذاری‌هاست، به‌صورت جدا بررسی می‌شود.

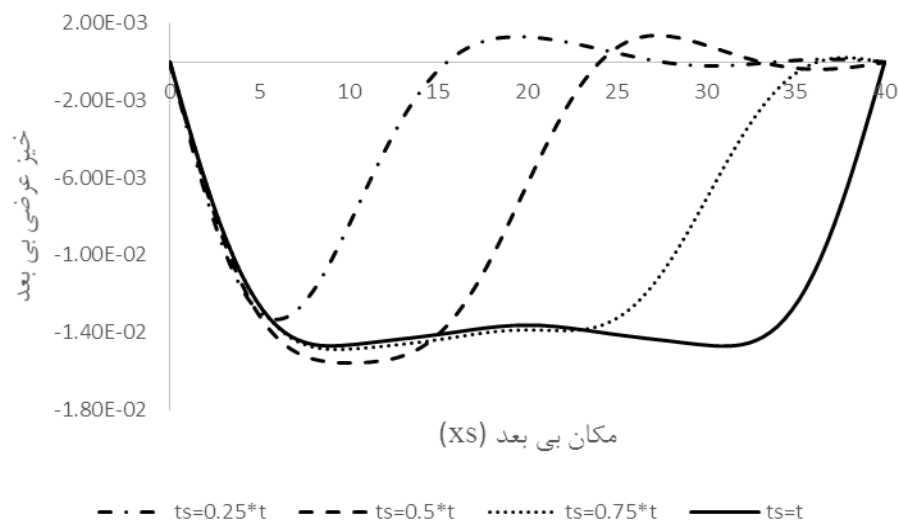


شکل (۴-۴) خیز عرضی پوسته تحت بارگذاری‌های مختلف

$$Q = \frac{x}{l} \left(1 - H \left(t^* - \frac{l}{t_0} \right) \right) \quad \text{بار خطی:} \quad Q = 100 \left(1 - H \left(t^* - \frac{l}{t_0} \right) \right) \quad \text{بار ثابت:}$$

$$Q = \frac{100l}{1 - \cos(l)} \sin(X) \left(1 - H \left(t^* - \frac{l}{t_0} \right) \right) \quad \text{بار سینوسی:}$$

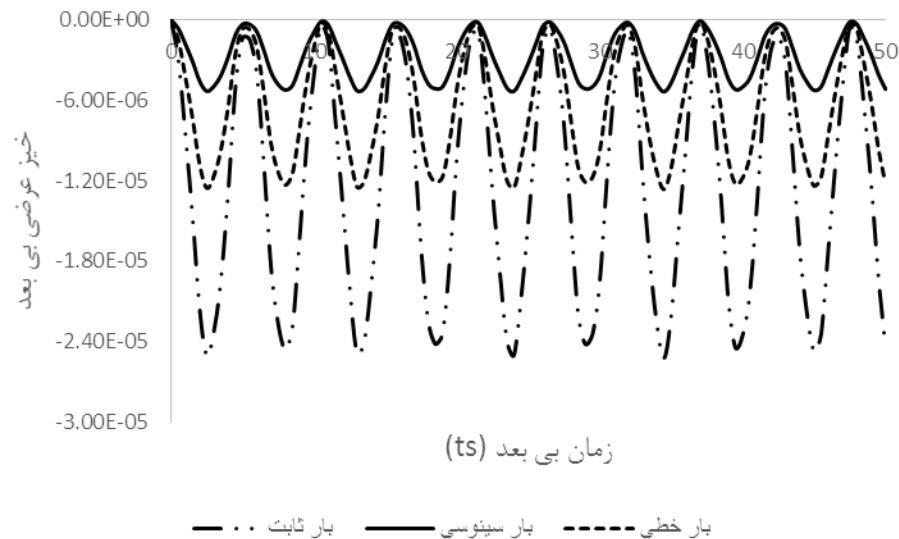
شکل (۴-۵) خیز عرضی بار متحرک را به ازای زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. در شکل t زمان رسیدن بار به انتهای پوسته است که برابر با زمان بی‌بعد ۴ می‌باشد.



شکل (۴-۵) خیز عرضی پوسته تحت بار متحرک

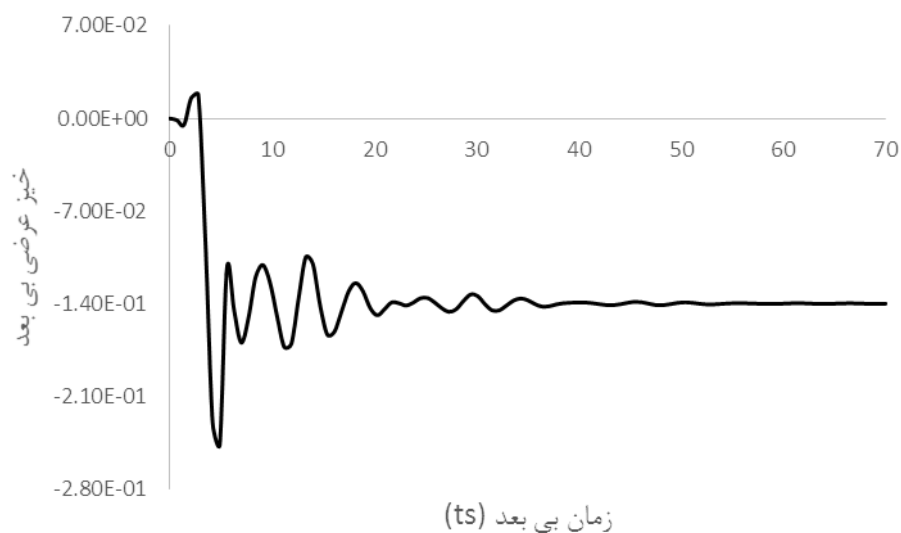
$$Q = (1 - H(X - V^*t^*))$$

شکل (۴-۶) جابه‌جایی برحسب زمان را به ازای سه نوع بارگذاری نشان می‌دهد.



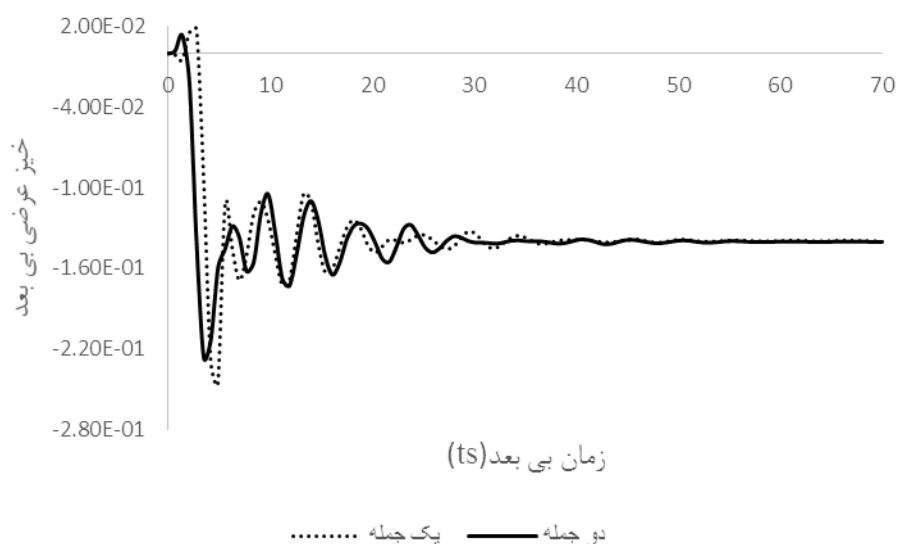
شکل (۴-۶) مقایسه خیز عرضی پوسته در $x^*=0.3$

شکل (۷-۴) خیز عرضی مرکز پوسته تحت بار متحرک را نشان می‌دهد.



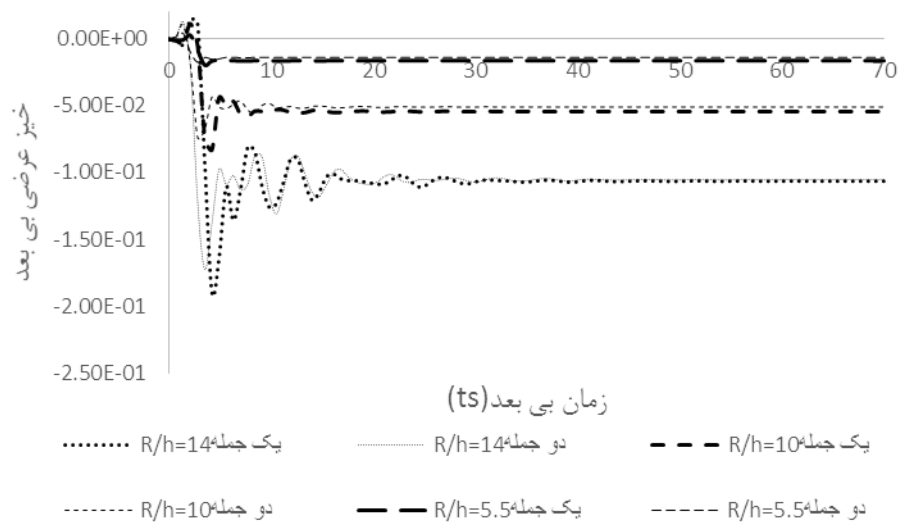
شکل (۷-۴) پاسخ عرضی مرکز پوسته

شکل (۸-۴) تاثیر تعداد جملات بسط مستقیم، در همگرایی پاسخ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل پاسخ به ازای یک جمله از بسط، همگرا خواهد بود.

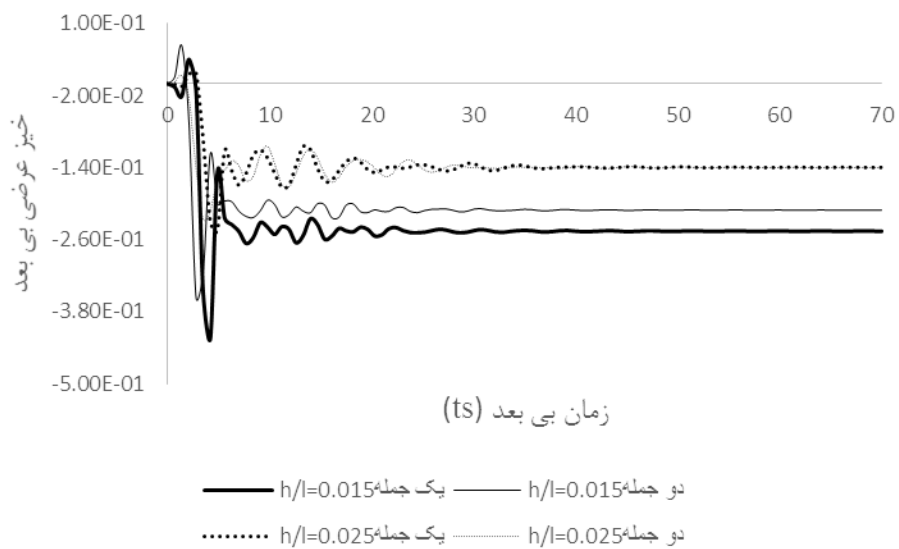


شکل (۸-۴) تأثیر تعداد جملات بسط مستقیم بر همگرایی پاسخ $x^* = 1/2$

اثر ضرایب هندسی بر همگرایی پاسخ در شکل‌های (۹-۴) و (۱۰-۴) بررسی شده است. کاهش نسبت R/h سبب افزایش همگرایی حل خطی و غیرخطی می‌شود. همچنین کاهش نسبت h/l نیز اثر مشابه دارد.

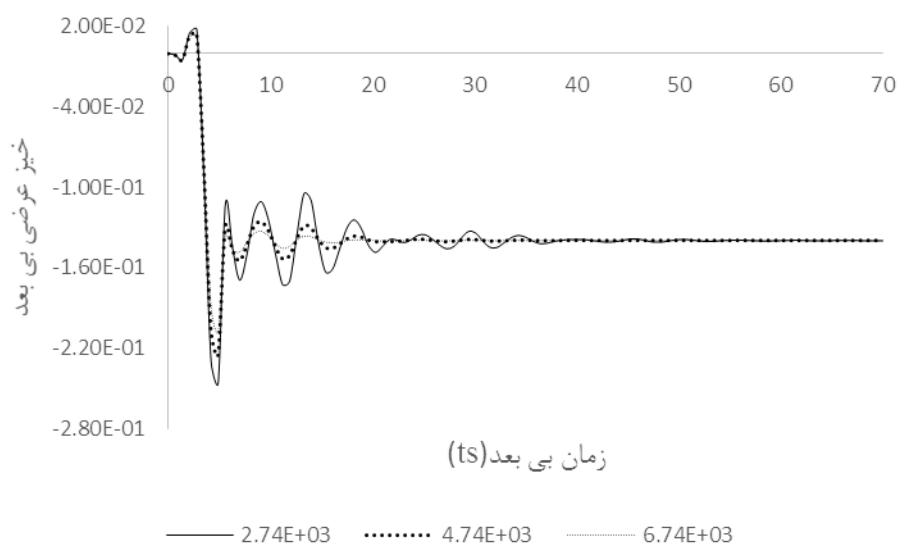


شکل (۹-۴) اثر نسبت R/h به همگرایی پاسخ $x^*=l/2$

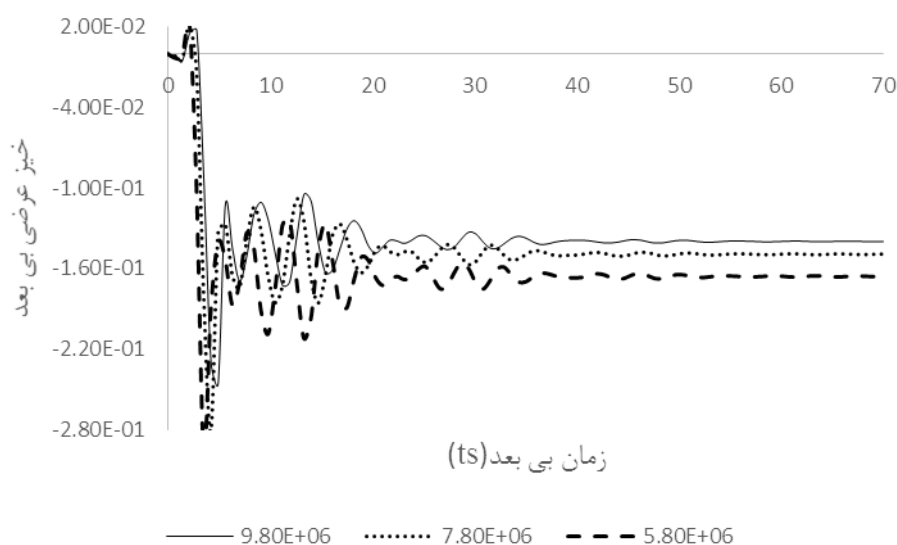


شکل (۱۰-۴) اثر نسبت h/l به همگرایی پاسخ $x^*=l/2$

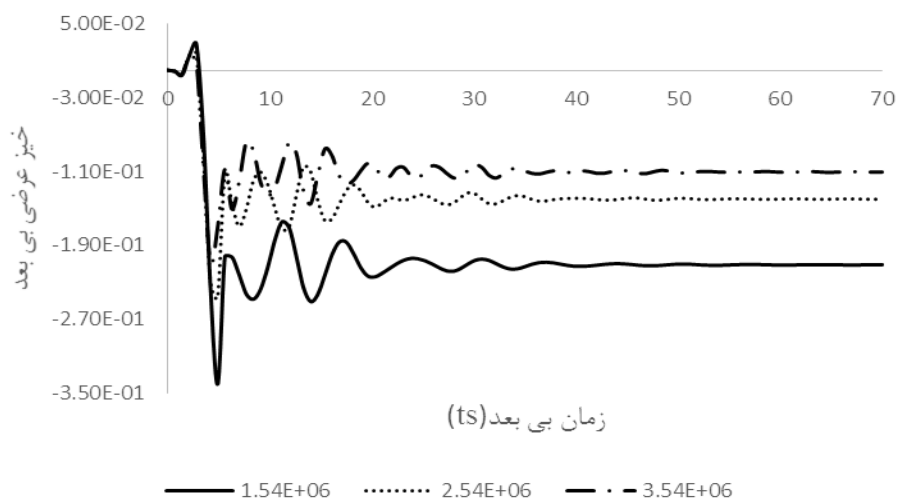
در شکل (۴-۱۱) اثر تغییرات ویسکوزیته بر خیز عرضی برای بار متحرک مشاهده می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رود اثر ویسکوزیته، کاهش دامنه و میل نوسانات به صفر با افزایش زمان است. شکل‌های (۴-۱۲) و (۴-۱۳) نیز به ترتیب اثر تغییرات G_1 و G_2 را نشان می‌دهند. افزایش G_1 و G_2 نیز سبب کاهش دامنه نوسانات خواهد شد.



شکل (۴-۱۱) اثر تغییرات ویسکوزیته بر خیز عرضی در بار متحرک $x^*=l/2$



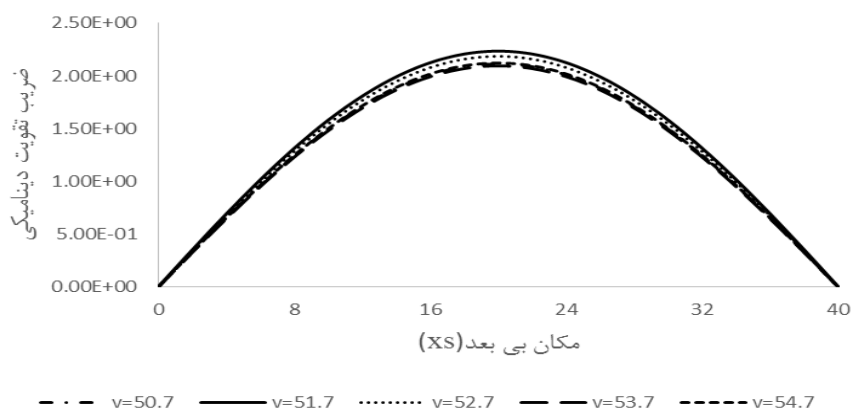
شکل (۴-۱۲) اثر تغییرات G_1 بر خیز عرضی در بار متحرک $x^*=l/2$



شکل (۴-۱۳) اثر تغییرات G_2 بر خیز عرضی در بار متحرک $x^*=l/2$

۴-۴- سرعت بحرانی:

اگر به ازای سرعت‌های مختلف نمودار ضریب تقویت دینامیکی^۱ که عبارت است از نسبت خیز دینامیکی به خیز استاتیکی، برای مرکز پوسته رسم شود؛ سرعتی که در آن dla ماکزیمم باشد، سرعت بحرانی است. خیز استاتیکی برای پوسته‌های نازک تحت فشار استاتیکی ثابت P_0 ، از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود [۴۹].



شکل (۴-۱۴) ضریب تقویت دینامیکی مرکز پوسته تحت بار متحرک به ازای سرعت‌های مختلف

¹ Dynamic Load Amplification

$$W_{sta.} = \frac{P_0 R_0^2}{Eh} \quad (4-1)$$

با توجه به نمودار فوق در سرعت بی بعد ۵۱.۷ ضریب تقویت دینامیکی بیشتر از سرعت‌های بالاتر است. نتایج محاسبات با داده‌های جدول (۳-۱) نشان می‌دهد، مقدار سرعت بحرانی اول ۱۵ و سرعت بحرانی دوم ۵۱.۷ می‌باشد که معادل ۷۵ m/s و ۲۵۸ m/s هستند.

در ادامه اثر تغییرات ویسکوزیته، G_1 ، G_2 ، نسبت R/h و نسبت h/l بر سرعت بحرانی بررسی می‌شود.

جدول (۴-۴) اثر تغییرات ویسکوزیته بر سرعت بحرانی

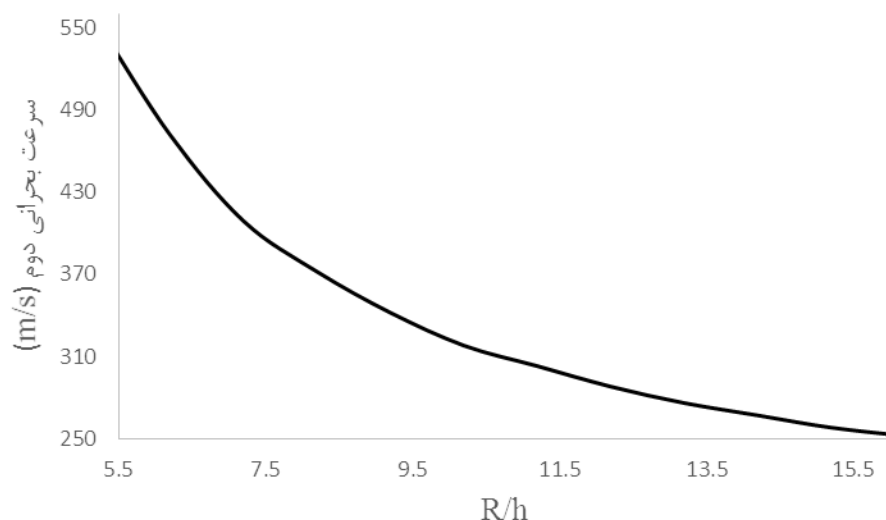
$\eta(\text{Pa.s})$	۴۱.۰۷۴	۴۵.۰۷۴	۴۹.۰۷۴	۵۱.۳۰۷	۵۱.۷۰۷	۵۲.۱۰۷
سرعت بحرانی دوم (m/s)	۲۵۸	۲۶۳	۲۶۸	۲۷۱	۲۷۳	۲۷۵

جدول (۴-۵) اثر تغییرات G_1 بر سرعت بحرانی

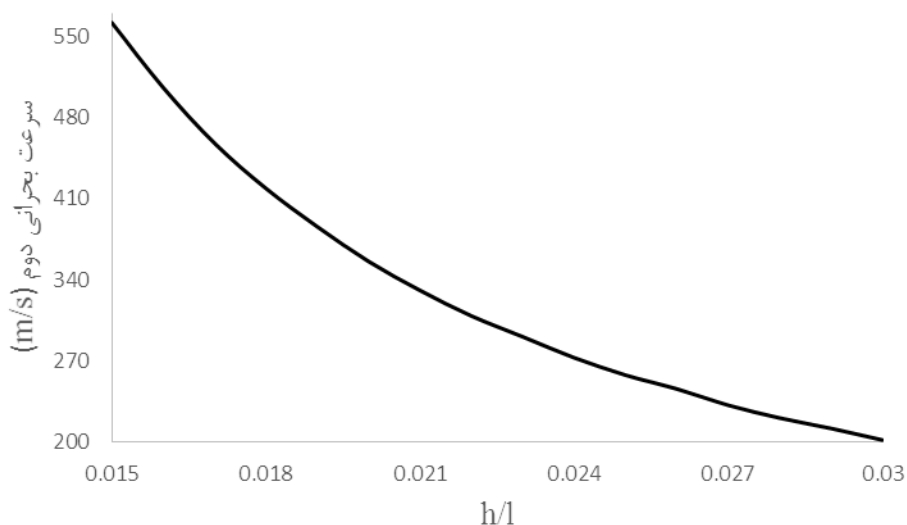
$G_1(\text{Pa})$	۵۹.۸۰۸	۶۴.۹۸۰	۶۹.۸۰۸	۷۴.۹۸۰	۷۹.۸۰۸
سرعت بحرانی دوم (m/s)	۲۷۶	۲۷۳	۲۷۱	۲۶۱	۲۵۸

جدول (۴-۶) اثر تغییرات G_2 بر سرعت بحرانی

$G_2(\text{Pa})$	۶۲.۴۵	۷۲.۴۵	۸۲.۴۵	۹۲.۴۵	۱۰۲.۴۵
سرعت بحرانی دوم (m/s)	۲۵۴	۲۵۸	۲۷۱	۲۷۶	۲۷۷



شکل (۴-۱۵) اثر تغییرات R/h بر سرعت بحرانی



شکل (۴-۱۶) اثر تغییرات h/l بر سرعت بحرانی

از جدول‌های (۴-۶) تا (۴-۹) مشخص می‌شود افزایش ویسکوزیته با افزایش سرعت بحرانی همراه است، همچنین افزایش G_1 باعث کاهش سرعت بحرانی اما افزایش G_2 آن را افزایش می‌دهد. توجه به شکل (۴-۱۵) و (۴-۱۶) افزایش مقدار R/h و h/l نیز سبب کاهش سرعت بحرانی خواهند شد.

۴-۵- جمع‌بندی:

در این فصل به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل‌های دوم و سوم پرداخته شد. نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی، پاسخ و سرعت بحرانی و حساسیت آن‌ها به پارامترهای سیستم بررسی شد. همچنین مقایسه‌ای بین نتایج عددی و تحلیلی صورت گرفت.

فصل پنجم

نتیجہ گیری و پیشہادہ

۵-۱- مقدمه:

در این پایان نامه به حل تحلیلی و عددی پوسته‌ی ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد تحت بار متحرک پرداخته شد. در ابتدا، براساس تئوری کلاسیک، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی پوسته استخراج شد. این معادلات شامل مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای مکان و زمان بوده و به کمک اصل همیلتون استخراج شدند. پس از بی‌بعد کردن معادلات، از تئوری اغتشاشات استفاده و فرکانس‌های طبیعی، پاسخ و سرعت بحرانی سیستم تعیین گردید. هم‌چنین حل مودال سیستم نیز به صورت عددی با کمک نرم‌افزار انسیس ارائه شد.

۵-۲- نتایج:

- ۱- فرکانس طبیعی برای پوسته‌ی جدار نازک توسط تئوری کلاسیک محاسبه شده و نتایج با محاسبات عددی انجام شده توسط ANSYS خطای کمتر از ده درصد دارند.
- ۲- مقادیر کوچک G_1 اثری بر فرکانس طبیعی ندارد، در مقادیر بزرگتر با افزایش G_1 فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.
- ۳- تغییر در مدول الاستیسیته‌ی G_2 در محدوده‌ی $1e3 < G_2 < 1e11$ در فرکانس طبیعی اثر ندارد.
- ۴- افزایش نسبت شعاع به ضخامت، سبب کاهش فرکانس طبیعی خواهد شد.
- ۵- افزایش نسبت ضخامت به طول، سبب کاهش فرکانس طبیعی خواهد شد.
- ۶- فرکانس طبیعی در دو حالت تکیه‌گاهی ساده و گیردار بررسی شده و شکل مدهای اول و دوم هرکدام گزارش شده‌اند. فرکانس طبیعی در حالت گیردار مقدار بیشتری دارد.
- ۷- چهار نوع بارگذاری ثابت، سینوسی، خطی و متحرک در این پایان نامه مورد بررسی قرار گرفته‌اند و مقایسه بین خیز عرضی پوسته در زمان $t^* = 3$ ، در سه نوع اول به جهت دارا بودن معادل استاتیکی یکسان صورت گرفت، بین آنها بار ثابت دارای خیز بیشتری است.

- ۸- در مکان $x^*=0.3$ ، نمودار خیز عرضی برحسب زمان برای هر سه نوع بارگذاری دارای اول رسم شده است؛ دامنه‌ی نوسانات در بار ثابت بیشترین و در بار سینوسی کمترین مقدار را دارد.
- ۹- خیز عرضی مرکز پوسته تحت بار متحرک برای سیستم خطی و غیرخطی تا مرتبه‌ی ۴، رسم شده است و مشخص شد سیستم به ازای یک جمله از بسط اغتشاشی همگراست.
- ۱۰- همان طور که مورد انتظار است افزایش ویسکوزیته سبب کاهش دامنه و میل نوسانات به صفر با افزایش زمان است.
- ۱۱- افزایش مدول‌های الاستیسیته‌ی G_1 و G_2 ، سبب کاهش دامنه‌ی نوسانات خواهد شد.
- ۱۲- سرعت بحرانی پوسته هم از طریق رسم نمودار ضریب تقویت دینامیکی برحسب مکان به ازای سرعت‌های مختلف بار متحرک و هم از طریق حل معادلات پاسخ با مجهول قرار دادن سرعت محاسبه شده است. مقدار سرعت بحرانی اول ۱۵ و سرعت بحرانی دوم ۵۱.۷ می‌باشد.
- ۱۳- به علت اینکه سرعت بحرانی دوم بازه‌ی تغییرات بزرگتری را داراست، بررسی نتایج روی این سرعت صورت گرفته است. افزایش ویسکوزیته سبب افزایش سرعت بحرانی خواهد شد.
- ۱۴- افزایش مدول الاستیسیته‌ی G_1 ، سبب کاهش سرعت بحرانی می‌شود.
- ۱۵- افزایش مدول الاستیسیته‌ی G_2 ، سبب افزایش سرعت بحرانی می‌شود.
- ۱۶- افزایش نسبت R/h ، سبب کاهش سرعت بحرانی می‌شود. این روند در مقادیر کوچک R/h شیب بیشتری دارد.
- ۱۷- افزایش نسبت h/l ، سبب کاهش سرعت بحرانی می‌شود.

۵-۳- پیشنهادها:

بررسی مساله با تئوری‌های تغییر شکل برشی

بررسی مساله تحت بار با سرعت متغیر

بررسی استوانه FG با خواص وابسته به زمان

پوست الف

همانطور که در فصل دوم بیان شد در معادلات مرتبه‌ی سوم جملات سکولار ظاهر خواهند شد؛ برای

بیان وابستگی فرکانس به دامنه ، فرمول‌بندی مسأله به روش مقیاس‌های چندگانه صورت می‌گیرد.

حل معادلات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$w^*(X, T_0, T_1, T_2) = \varepsilon(w_0(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon w_1(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_2(X, T_0, T_1, T_2)) \quad (\text{الف-۱})$$

$$u^*(X, T_0, T_1, T_2) = \varepsilon(u_0(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(X, T_0, T_1, T_2))$$

با جایگذاری روابط فوق در معادلات (۲-۲۹) و (۲-۳۰)، معادلات مرتبه یک به صورت زیر خواهند بود:

(الف-۲)

$$\begin{aligned} eq1_1 := & \left(\left(-e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T_0^3} u0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T_0} u0 \right) \right) \beta - e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} u0 \right) \right. \\ & + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} u0 \right) \left. \right) z2 \hs \hs Rs + \left(\right. \\ & \left(\frac{1}{12} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T_0^3} w0 \right) + \left(-\frac{1}{9} - \frac{Gs1}{12} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T_0} w0 \right) \right) \beta + \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T_0^2} w0 \right) \\ & + \left(-\frac{1}{9} - \frac{Gs0}{12} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^3} w0 \right) \left. \right) hs^3 \\ & + \left(\left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T_0} w0 \right) \beta + \left(Gs0 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) \right) hs \end{aligned}$$

(الف-۳)

$$\begin{aligned} eq1_2 := & \left(\left(\left(\frac{1}{12} e Gs1 \left(\frac{\partial^5}{\partial X^2 \partial T_0^3} w0 \right) + \left(-\frac{1}{9} - \frac{Gs1}{12} \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial X^4 \partial T_0} w0 \right) \right) \beta \right. \right. \\ & + \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial T_0^2} w0 \right) + \left(-\frac{1}{9} - \frac{Gs0}{12} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^4} w0 \right) \left. \right) z2 \hs^3 \\ & + \left(-e \beta Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T_0^3} w0 \right) - e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} w0 \right) \right) z2 \hs \left. \right) Rs + \left(\right. \\ & \left(-\frac{1}{12} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T_0^3} u0 \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{Gs1}{12} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T_0} u0 \right) \right) \beta - \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T_0^2} u0 \right) \\ & + \left(\frac{1}{9} + \frac{Gs0}{12} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^3} u0 \right) \left. \right) hs^3 \\ & + \left(\left(-Gs1 + \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T_0} u0 \right) \beta + \left(\frac{2}{3} - Gs0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} u0 \right) \right) hs \end{aligned}$$

$$+ \left(-\frac{4}{3} - Gs1 \right) \alpha_0 \left(\frac{\partial}{\partial T0} w0 \right) \beta + \left(-Gs0 w0 - \frac{4}{3} w0 \right) \alpha_0$$

برای تعیین فرکانس‌های طبیعی، حل به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$w_0(X, T_0, T_1, T_2) = A_1(X, T_1, T_2) e^{i\omega T_0} \quad (\text{الف-۴})$$

$$u_0(X, T_0, T_1, T_2) = A_2(X, T_1, T_2) e^{i\omega T_0}$$

که می‌توان بخش مکانی و زمانی آن را نیز جدا نمود:

$$A_1(X, T_1, T_2) = a_1(T_1, T_2) e^{\beta_{11} X} \quad (\text{الف-۵})$$

$$A_2(X, T_1, T_2) = a_2(T_1, T_2) e^{\beta_{11} X}$$

در هر دو معادله ضرایب a_1 و a_2 را محاسبه کرده و در ماتریسی قرار داده شود، سپس با صفر قرار دادن دترمینان این ماتریس، مقادیر β_{11} به دست می‌آیند که دارای سه مقدار متفاوت است و با احتساب علامت، شش جواب برای این پارامتر حاصل می‌شود.

معادله‌ی اول را برحسب a_1 حل می‌کنیم، سپس بردار V تعریف می‌شود که شامل درایه‌های a_1 و a_2 هستند که به جای a_1 ، حل معادله‌ی اول برحسب آن و به جای a_2 عدد یک جایگزین می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} e^{\beta_{11} X} \quad (\text{الف-۶})$$

همانطور که توضیح داده شد برای β_{11} شش مقدار وجود دارد، در نتیجه حل عمومی به شکل زیر خواهد بود:

$$Yg = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 + C_4 V_4 + C_5 V_5 + C_6 V_6 \quad (\text{الف-۷})$$

با توجه به اینکه معادلات همگن بودند با اعمال شرایط مرزی حل کلی حاصل می‌شود.

فرمول‌بندی معادلات مرتبه‌ی دوم در این روش عبارتند از:

(الف-٨)

$$\begin{aligned}
eq2_1 := & \left(\left(\left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w0 \right) \right. \right. \\
& - 3 e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T1 \partial T0^2} u0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T1} u0 \right) - e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T0^3} u1 \right) \\
& + \left. \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} u1 \right) \right) \beta + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) \\
& - 2 e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T1 \partial T0} u0 \right) - e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T0^2} u1 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} u1 \right) \Big) z2 \hs Rs + \left(\left(\frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T1 \partial T0^2} w0 \right) + \left(-\frac{Gs1}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T1} w0 \right) + \frac{1}{12} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T0^3} w1 \right) \right. \right. \\
& + \left. \left(-\frac{Gs1}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T0} w1 \right) \right) \Big) \beta + \frac{1}{6} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T1 \partial T0} w0 \right) \\
& + \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T0^2} w1 \right) + \left(-\frac{Gs0}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^3} w1 \right) \Big) hs^3 + \\
& \left(\left(\left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T1} w0 \right) + \left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w1 \right) \right) \beta + \left(Gs0 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w1 \right) \right) hs
\end{aligned}$$

(الف-٩)

$$\begin{aligned}
eq2_2 := & \left(\left(\left(\frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^5}{\partial X^2 \partial T1 \partial T0^2} w0 \right) + \left(-\frac{Gs1}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial X^4 \partial T1} w0 \right) \right. \right. \right. \\
& + \frac{1}{12} e Gs1 \left(\frac{\partial^5}{\partial X^2 \partial T0^3} w1 \right) + \left. \left(-\frac{Gs1}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial X^4 \partial T0} w1 \right) \right) \Big) \beta \\
& + \frac{1}{6} e Gs0 \left(\frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial T1 \partial T0} w0 \right) + \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial T0^2} w1 \right) + \left(-\frac{Gs0}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^4} w1 \right) \Big) \\
& z2 \hs^3 + \left(\left(\left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} u0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} u0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) \right. \right. \\
& + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} u0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} u0 \right) \\
& - e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T0^3} w1 \right) - 3 e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T1 \partial T0^2} w0 \right) \Big) \beta + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} u0 \right) \\
& + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} u0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) - 2 e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T1 \partial T0} w0 \right) - e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T0^2} w1 \right) \Big) z2 \hs \\
& \Big) Rs + \left(\left(-\frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T1 \partial T0^2} u0 \right) + \left(\frac{Gs1}{12} + \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T1} u0 \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T0^3} u1 \right) + \left(\frac{Gs1}{12} + \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T0} u1 \right) \beta \\
& -\frac{1}{6} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T1 \partial T0} u0 \right) - \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T0^2} u1 \right) + \left(\frac{Gs0}{12} + \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^3} u1 \right) \hs^3 + \\
& \left(\left(\left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial T0} w0 \right) + \left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) \right. \right. \\
& + \left(\frac{2}{3} - Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T1} u0 \right) + \left(\frac{2}{3} - Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} u1 \right) \\
& + \left. \left(Gs1 w0 - \frac{2}{3} w0 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} w0 \right) \right) \beta + \left(\frac{2}{3} - Gs0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} u1 \right) \\
& + \left(-\frac{1}{3} + \frac{Gs0}{2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right)^2 + \left(Gs0 w0 - \frac{2}{3} w0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \hs \\
& + \left(\left(-\frac{4}{3} - Gs1 \right) \alpha_0 \left(\frac{\partial}{\partial T1} w0 \right) + \left(-\frac{4}{3} - Gs1 \right) \alpha_0 \left(\frac{\partial}{\partial T0} w1 \right) \right) \beta \\
& + \left(-\frac{4}{3} w1 - Gs0 w1 \right) \alpha_0
\end{aligned}$$

مشابه قبل روابط (الف-۵) را در معادلات جایگزین می‌شوند. اگر در معادلات حاصل روابط (الف-۱۰)

جایگزین شوند، وابستگی معادلات به T_1 از بین رفته و ضریب جمله $e^{i\omega T_0}$ ، صفر خواهد شد.

$$A_1(X, T_1, T_2) = A_1(X, T_2) \quad (\text{الف-۱۰})$$

$$A_2(X, T_1, T_2) = A_2(X, T_2)$$

در ادامه حل معادلات به این صورت در نظر گرفته می‌شود:

$$W_1(X, T_0, T_1, T_2) = B_1(X, T_2) e^{2i\omega T_0} \quad (\text{الف-۱۱})$$

$$W_2(X, T_0, T_1, T_2) = B_2(X, T_2) e^{2i\omega T_0}$$

ضرایب A_1 و A_2 در رابطه (الف-۱۰) عبارتند از:

$$A_1(X, T_2) = Y_1[1]C_1(T_2) \quad (\text{الف-۱۲})$$

$$A_2(X, T_2) = Y_1[2]C_1(T_2)$$

پس از جایگزینی روابط فوق در معادلات تعریف می‌شود:

$$U_P = \sum_{n=1}^m a(n)eq(n) \quad (\text{الف-۱۳})$$

$$W_P = \sum_{n=1}^m b(n)eq(n)$$

این روابط در هرکدام از معادلات جایگزین می‌شوند که m تعداد جملات موجود در آن معادله، و $eq(n)$ خود آن معادله است. برای هر معادله ۱۸ جمله خواهد بود و در مجموع ۳۶ معادله به همراه ۳۶ ضریب مجهول ایجاد می‌شود که از حل این دستگاه معادلات جواب نهایی حاصل می‌گردد.

معادلات مرتبه‌ی سوم در این روش عبارتند از:

(الف-۱۴)

$$\begin{aligned} eq3_1 := & \left(\left(\left(\left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T1} w0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} w1 \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) \right. \right. \\ & + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w1 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w0 \right) \\ & + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T1} w0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \\ & - 3 e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T2 \partial T0^2} u0 \right) - 3 e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T1^2 \partial T0} u0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T2} u0 \right) \\ & - 3 e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T1 \partial T0^2} u1 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T1} u1 \right) - e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T0^3} u2 \right) \\ & + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} u2 \right) \Big) \beta + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) \\ & + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w1 \right) - 2 e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T2 \partial T0} u0 \right) - e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T1^2} u0 \right) \\ & - 2 e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T1 \partial T0} u1 \right) - e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T0^2} u2 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} u2 \right) \Big) z2 \hspace{0.5cm} Rs + \left(\left(\right. \right. \\ & \frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T2 \partial T0^2} w0 \right) + \frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T1^2 \partial T0} w0 \right) \\ & \left. \left. + \left(-\frac{Gs1}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T2} w0 \right) + \frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T1 \partial T0^2} w1 \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{Gs1}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T1} w1 \right) + \frac{1}{12} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T0^3} w2 \right) \\
& + \left(-\frac{Gs1}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T0} w2 \right) \Big) \beta + \frac{1}{6} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T2 \partial T0} w0 \right) \\
& + \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T1^2} w0 \right) + \frac{1}{6} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T1 \partial T0} w1 \right) + \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T0^2} w2 \right) \\
& + \left(-\frac{Gs0}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^3} w2 \right) \Big) h s^3 + \left(\left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T2} w0 \right) + \left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T1} w1 \right) + \left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w2 \right) \right) \beta \\
& + \left(Gs0 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w2 \right) \Big) h s
\end{aligned}$$

(الف-١٥)

$$\begin{aligned}
eq3_2 := & \left(\left(\left(\frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^5}{\partial X^2 \partial T2 \partial T0^2} w0 \right) + \frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^5}{\partial X^2 \partial T1^2 \partial T0} w0 \right) \right. \right. \right. \\
& + \left(-\frac{Gs1}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial X^4 \partial T2} w0 \right) + \frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^5}{\partial X^2 \partial T1 \partial T0^2} w1 \right) \\
& + \left(-\frac{Gs1}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial X^4 \partial T1} w1 \right) + \frac{1}{12} e Gs1 \left(\frac{\partial^5}{\partial X^2 \partial T0^3} w2 \right) \\
& + \left(-\frac{Gs1}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^5}{\partial X^4 \partial T0} w2 \right) \Big) \beta + \frac{1}{6} e Gs0 \left(\frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial T2 \partial T0} w0 \right) \\
& + \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial T1^2} w0 \right) + \frac{1}{6} e Gs0 \left(\frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial T1 \partial T0} w1 \right) + \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial T0^2} w2 \right) \\
& + \left(-\frac{Gs0}{12} - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^4} w2 \right) \Big) z2 h s^3 + \left(\left(\left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T1} w0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} w1 \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} u0 \right) \right. \\
& + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} u1 \right) + \left(\frac{3 Gs1}{2} + 2 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right)^2 + \left(\right. \\
& (4 + 3 Gs1) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T1} u0 \right) \\
& + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} u1 \right) \Big) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} u0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w1 \right) \\
& + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} u0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T1} u0 \right) \\
& + \left(\left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T1} w0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w1 \right) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} u0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} u1 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} u1 \right) \\
& - e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T0^3} w2 \right) - 3 e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T2 \partial T0^2} w0 \right) - 3 e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T1^2 \partial T0} w0 \right) \\
& - 3 e Gs1 \left(\frac{\partial^3}{\partial T1 \partial T0^2} w1 \right) \Big) \beta + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} u0 \right) \\
& + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} u1 \right) + \left(2 + \frac{3 Gs0}{2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right)^2 \\
& + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} u1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) + \left(\frac{4}{3} + Gs0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} u0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w1 \right) - e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T0^2} w2 \right) \\
& - 2 e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T1 \partial T0} w1 \right) - 2 e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T2 \partial T0} w0 \right) - e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T1^2} w0 \right) \Big) z2 hs \Big) Rs + \left(\right. \\
& \left(-\frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T2 \partial T0^2} u0 \right) - \frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T1^2 \partial T0} u0 \right) \right. \\
& + \left(\frac{Gs1}{12} + \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T2} u0 \right) - \frac{1}{4} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T1 \partial T0^2} u1 \right) \\
& + \left(\frac{Gs1}{12} + \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T1} u1 \right) - \frac{1}{12} e Gs1 \left(\frac{\partial^4}{\partial X \partial T0^3} u2 \right) + \left(\frac{Gs1}{12} + \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^4}{\partial X^3 \partial T0} u2 \right) \Big) \beta \\
& - \frac{1}{6} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T2 \partial T0} u0 \right) - \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T1^2} u0 \right) - \frac{1}{6} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T1 \partial T0} u1 \right) \\
& - \frac{1}{12} e Gs0 \left(\frac{\partial^3}{\partial X \partial T0^2} u2 \right) + \left(\frac{Gs0}{12} + \frac{1}{9} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^3} u2 \right) \Big) hs^3 + \left(\left(\right. \right. \\
& \left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial T0} w0 \right) + \left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial T1} w0 \right) \\
& + \left(\left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T1} w0 \right) + \left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w1 \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) \\
& + \left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial T0} w1 \right) + \left(Gs1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} w0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w1 \right) \\
& + \left(\frac{2}{3} - Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T2} u0 \right) + \left(\frac{2}{3} - Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T1} u1 \right) + \left(\frac{2}{3} - Gs1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T0} u2 \right) \\
& + \left(-\frac{2}{3} w1 + Gs1 w1 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} w0 \right) + \left(Gs1 w0 - \frac{2}{3} w0 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T1} w0 \right) \\
& + \left(Gs1 w0 - \frac{2}{3} w0 \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial T0} w1 \right) \Big) \beta + \left(\frac{2}{3} - Gs0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} u2 \right) \\
& + \left(Gs0 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} w0 \right) + \left(-\frac{2}{3} w1 + Gs0 w1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w0 \right) \\
& + \left(Gs0 w0 - \frac{2}{3} w0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} w1 \right) \Big) hs + \left(\right. \\
& \left(-\frac{4}{3} - Gs1 \right) \alpha_0 \left(\frac{\partial}{\partial T2} w0 \right) + \left(-\frac{4}{3} - Gs1 \right) \alpha_0 \left(\frac{\partial}{\partial T1} w1 \right) + \left(-\frac{4}{3} - Gs1 \right) \alpha_0 \left(\frac{\partial}{\partial T0} w2 \right) \Big)
\end{aligned}$$

$$\beta + \left(-\frac{4}{3}w^2 - Gs0\ w^2\right)\alpha_0$$

حل معادلات مرتبه‌ی سوم در این پایان‌نامه آورده نشده است.

منابع

- [1] Fryba L. (1972), “**Vibration of solids & structures under moving load**”, Vol. 1, Springer, New York.
- [2] Czestaw I. Bajer, Barttomiej Dyniewicz (2012), “**Numerical analysis of vibrations of structures under moving inertial load**”, Vol. 65, Springer, Berlin.
- [3] Maan H. Javad (2004), “**Theory & design of plate & shell structures**”, The American Society of Mechanical Engineers Three Park Avenue, New York.
- [۴] علی نیا م م، (۱۳۸۹) “تئوری صفحات و پوسته‌ها” چاپ دوم، انتشارات آشیان، تهران.
- [5] M. Amabili (2008), “**Nonlinear vibrations and stability of shells and plates**”, 1st ed., Cambridge University Press, chapters 1 and 2.
- [6] K. Bhaskar, T. K. Varadan (2014), “**plates**”, John Wiley & Sons.
- [7] J. N. Reddy (1998), “**Theory & analysis of elastic plates**”, Taylor & Francis.
- [8] R. D. Mindlin (1951), “Influence of rotatory inertia & shear on flexural motions of isotropic elastic plates”, **ASME Journal of Applied Mechanics**, Vol. 18, pp. 31-38.
- [9] E. Reissner (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates ”, **ASME Journal of Applied Mechanics**, Vol. 12, pp. A68-77.
- [10] Wang C. m. and Lim G. T. and Reddy J. N. and Lee K. H. (2001), “Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories”, **Engineering Structures**, Vol. 23, pp. 838-849.
- [11] Meyers and Chawla (2008), “**Mechanical behavior of materials**”, Vol. 2, pp. 98-103.
- [12] Lakes R. (2009), “**Viscoelastic materials**”, Cambridge university press, New York.
- [13] Riande E., Diaz-Calleja R., Prolongo M.G., Masegosa R.M. and Salom C. (2000), “**Polymer viscoelasticity; stress and strain in practice**”, Marcel Dekker INC.,

New York.

[14] Brinson H.F. and Brinson C.L. (2008), “ **Polymer engineering science and viscoelasticity; an introduction**”, Springer, New York.

[15] N. G. McCrum, C. P. Buckley and C. B. Bucknall (2003), “**principles of polymer engineering**”, Vol. 2, Oxford University Press, pp. 117-176.

[16] Rogner I. Tanner (1988), “**Engineering rheology**”, Vol. 2, Oxford University Press, P. 27.

[17] Christensen R. M. (1982), “**Theory of viscoelasticity: an introduction**”, Academic Press, New York.

[18] Roderic S. L. (2000), “**Viscoelastic solids**”, University of Washington.

[19] Roylance David (2001), “Engineering viscoelasticity”, **Institute of technology Cambridge**, pp. 14-15.

[20] E. J. Barbero (2011), “Time-temperature-age superposition principle for predicting long-term response of linear viscoelastic materials”, **West Virginia University**, chapter 2.

[21] E. J. Barbero (2007), “**Finite element analysis of composite marerials**”, Vol. 2, CRC Press, Boca Raton, Florida.

[22] H. Reisman (1968), “Response of a cylindrical shell to an inclined moving pressure discontinuity (shock wave)”, **J. Sound Vib.**, 8, 2, pp. 240-255.

[23] C. R. Steele (1971), “ Beams and shells with moving loads”, **J. Solids Structures**, Vol. 7, pp. 1171-1198.

[24] P. K. Larsen and E. P. Popov (1974), “Large displacement analysis of viscoelastic shells of revolution”, **Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering**, 3, pp. 237-253.

[25] C. C. Huang (1976), “Moving load on elastic cylindrical shells”, **Journal of Sound and vibration**, 49, 2, pp. 215-220.

- [26] S. F. Felszeghy (1977), “Forced axisymmetric motions of viscoelastic cylindrical shells”, **J. Solids Structures**, Vol. 13, pp. 877-895.
- [27] C. C. Huang (1978), “Moving load on viscoelastic cylindrical shells”, **Journal of Sound and vibration**, 60, 3, pp. 351-358.
- [28] M. H. Kargarnovin, D. younesian, D. J. Thompson and C. J. C. Jones (2005), “Response of beams on nonlinear viscoelastic foundations to harmonic moving loads”, **Computers and Structures**, 83, pp. 1865-1877.
- [30] M. Ruzzene and A. Baz (2006), “Dynamic stability of periodic shells with moving loads”, **Journal of Sound and vibration**, 296, pp. 830-844.
- [31] Yang Jinhua, Chen Deliang, Fu Yiming (2008), “Calculation of energy release rate in composite delaminated cylindrical shells under circumferential concentrated dynamic load”, **International Journal of Solids and Structures**, 45, pp. 513–527.
- [32] G. L. Forbes and R. B. Randall (2008), “Resonance phenomena of an elastic ring under a moving load”, **Journal of Sound and Vibration**, 318, pp. 991–1004.
- [33] O. Chupin, A. Chabot, J. M. Piau and D. Duhamel (2010), “Influence of sliding interfaces on the response of a layered viscoelastic medium under a moving load”, **International Journal of Solids and Structures**, 47, pp. 3435–3446.
- [34] A. H. Sofiyev (2010), “Dynamic response of an FGM cylindrical shell under moving loads”, **Composite Structures**, 93, pp. 58–66.
- [35] Tytti Saksa, Nikolay Banichuk, Juha Jeronen, Matti Kurki and Tero Tuovinen (2012), “Dynamic analysis for axially moving viscoelastic panels”, **International Journal of Solids and Structures**, 49, pp. 3355–3366.
- [36] P. Malekzadeh and Y. Heydarpour (2012), “Response of functionally graded cylindrical shells under moving thermo-mechanical loads”, **Thin-Walled Structures**, 58, pp. 51–66.

- [37] Jianghong Xue, Ding Yuan, Feng Han and Renhuai Liu (2013), “An extension of Karman-Donnell’s theory for non-shallow, long cylindrical shells undergoing large deflection”, **European Journal of Mechanics A/Solids**, 37, pp. 329-335.
- [38] P. Malekzadeh and M. Daraie (2014), “Dynamic analysis of functionally graded truncated conical shells subjected to asymmetric moving loads”, **Thin-Walled Structures**, 84, pp. 1–13.
- [39] Anssi T. Karttunen and Raimo von Hertzen (2014), “Dynamic response of a cylinder cover under a moving load”, **International Journal of Mechanical Sciences**, 82, pp. 170–178.
- [40] S. M. Abdelghany, K. M. Ewis, A. A. Mahmoud and Mohamed M. Naser (2015), “Dynamic response of non-uniform beam subjected to moving load and resting on non-linear viscoelastic foundation”, **Journal of basic and applied sciences**, 8, pp. 1-8.
- [41] SH. Hosseini-Hashemi, M. R. Ilkhani and A. R. Abaei (2015), “Free vibrations of functionally graded viscoelastic cylindrical panel under various boundary conditions”, **Composite Structures**, 15, 1, pp. 5-10.
- [42] Amabili M. (2008), “ **Nonlinear vibration and stability of shells and plates**”, Cambridge University Press, New York.
- [43] Boresi A. P., Chong K.P. (2000), “**Elasticity in engineering mechanics**”, Vol. 2, John Willy & Sons, New York.
- [44] I. Mirsky and G. Herman (1958), “Axially motions of thick cylindrical shells”, **J. Appl.**, Vol. 25, pp. 97-102.
- [45] Rao S.S. (2007), “**Vibration of continuous system**”, John Willey & Sons , New Jersey.
- [46] Reddy J. N. (2008), “**An Introduction to continuum mechanics with applications**”, Cambridge University Press, New York.

- [47] Nayfeh A. H. (1993), “**Introduction to perturbation techniques**”, John Willy & Sons, New York.
- [48] Ansys user manual
- [49] A. C. Ugural. (1981), “**Stresses In Plates & Shells**”, McGraw-Hill. Inc., United States of America, pp. 259.

Abstract

In this research, the mathematical and numerical analysis of viscoelastic cylindrical shells with moderately large deflection under moving load are presented. These equation are derived using the Hamilton's principle based on the classical plate theory. The kinematic of problem is according to the von-Karman strain-displacement relations and the Hook's law is used as the constitutive equation. The governing equations are a system of coupled nonlinear partial differential equations with constant coefficients. They are solved analytically with the perturbation technique and straight forward expansion method. The response of the system, the critical velocity and the natural frequencies, are determined for a given set of initial values. Finally, a parametric study is performed to investigate the effects of the various parameters such as the thickness, radius, modulus of viscosity and elasticity on the system response, natural frequencies and critical velocity. The results of natural frequencies are compare with the numerical method too.

Keywords: Viscoelastic shell, Classical shell theory, Frequency analysis, Perturbation teqnique, Moderately large deflection, Critical velocity



Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

**Analytical and numerical solution of viscoelastic cylindrical
shell with moderately large deflection under internal
moving pressure using classic shell theory**

By: Sepideh Ahmadi

Supervisor:

Dr. Hamid Reza Eipakchi

September 2016