

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مکانیک و مکاترونیک
رشته مهندسی طراحی کاربردی گرایش دینامیک، کنترل و ارتعاشات

رساله دکتری

تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مایل بر بستر ویسکوالاستیک تحت تحریک خارجی و پارامتریک

نگارنده: کامران فروتن

استاد راهنما
دکتر حبیب احمدی

آبان ۱۳۹۹

شماره: ۲۵/۲۹۹/۱۱۸
تاریخ: ۹۹/۸/۱۷
ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۱: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود آقای کامران فروتن دانشجوی دکتری رشته مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی (دینامیک، کنترل و ارتعاشات) به شماره دانشجویی ۹۵۳۶۵۹۵ ورودی بهمن سال ۱۳۹۵ در تاریخ ۱۳۹۹/۸/۱۶ از رساله نظری / عملی خود با عنوان: تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته های استوانه ای با تقویت کننده های مایل بر بستر ویسکوالاستیک تحت تحریک خارجی و پارامتریک

دفاع و با اخذ نمره ۲۰ به درجه عالی نائل گردید.

جدول تعیین درجه نمره رساله برای ورودیه های ۹۴ و مابین

الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۲
ج) درجه خوب: نمره ۱۵-۱۶/۹۹	د) مردود: کمتر از ۱۵

جدول تعیین درجه نمره رساله برای ورودیه های ۹۵ و مابعد

الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۸
ج) درجه خوب: نمره ۱۶-۱۷/۹۹	د) مردود: کمتر از ۱۶

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر حبیب احمدی	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر علیرضا شاطرزاده	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۳	دکتر حمیدرضا ایک چی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۴	دکتر محمد شرعیات	استاد مدعو خارجی	استاد	
۵	دکتر سید علی سینا	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای کامران فروتن بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی گردویی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقدیم اثر

تمامی تلاش چندین ساله‌ی خود را در این تحقیق به همسر عزیزم که با صبر و حوصله و همراهی‌های بی‌دریغش، اینجانب را در پیشرفت هر چه بهتر این رساله یاری و مساعدت نموده است، تقدیم می‌نمایم. امید است بتوانم ذره‌ای از محبت‌ها و دلداری‌های شبانه‌روزی این یار همیشگی را جبران نمایم.

تشکر و قدردانی

اکنون که در سایه الطاف خداوند متعال سرانجام این کار به پایان رسیده است، بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر حبیب احمدی که در منصب استاد راهنما توصیه‌های بی‌شائبه‌ی خود را در جهت‌گیری صحیح تدوین و گردآوری این رساله ارائه نموده‌اند، مراتب سپاس را به‌جا آورم و از درگاه ایزد منان توفیق روزافزون ایشان را خواستار می‌شوم.

تعهدنامه

اینجانب کامران فروتن دانشجوی دوره دکتری رشته مهندسی طراحی کاربردی دانشکده مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مایل بر بستر ویسکوالاستیک تحت تحریک خارجی و پارامتریک تحت راهنمایی دکتر حبیب احمدی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی رساله تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این رساله یک روش تحلیلی به منظور بررسی رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های مایل ارائه شده است که توسط بستر ویسکوالاستیک احاطه شده و تحت تحریک خارجی و پارامتریک قرار دارد. بارگذاری اعمال شده به صورت شعاعی بر سطح پوسته و به صورت محوری بر دو لبه پوسته استوانه‌ای اعمال می‌گردد. شرط مرزی پوسته به صورت دو سر ساده در نظر گرفته شده است. بستر ویسکوالاستیک غیرخطی از یک بستر خطی بر اساس مدل پیشنهادی وینکلر-پاسترناک و یک بستر غیرخطی بر اساس مدل کلونین ویت (شامل یک جمله غیرخطی مرتبه سوم و یک جمله میرایی خطی) تشکیل شده است. روابط کرنش-جابجایی با توجه به روابط غیرخطی فن کارمن و معادلات حاکم با توجه به تئوری کلاسیک پوسته‌ها به دست آمده است. لازم به ذکر است که برای مدل‌سازی تقویت‌کننده‌ها بر پوسته از روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای استفاده شده است. برای استخراج معادلات دیفرانسیل معمولی از روش گالرکین استفاده شده است. به منظور بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته به صورت تحلیلی از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شده است. در این راستا در ابتدا با فرض چشم‌پوشی از تشدید داخلی به تحلیل‌های مربوط به پدیده تشدید، شامل تشدید اولیه، تشدید فراهارمونیک، تشدید فروهارمونیک، تشدید ترکیبی و تشدید هم‌زمان برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با نقص اولیه و یا بدون نقص اولیه، احاطه شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی تحت تحریک خارجی بر اساس تک-مود، پرداخته شده است. در ادامه به تحلیل ارتعاشات غیرخطی آزاد و ارتعاشات غیرخطی اجباری با فرض تشدید داخلی و یکی از تشدیدهای فروهارمونیک یا فراهارمونیک برای پوسته استوانه‌ای پرداخته شده است. لذا در این حالت خیز بر اساس چندمود پیشنهاد شده و پس از یافتن تابع تنش از معادله سازگاری و جایگذاری آن‌ها در معادله حرکت پوسته، با اعمال روش گالرکین سیستم معادلات با مودهای کوپل شده به دست آمده است. همچنین پوسته استوانه‌ای علاوه بر تحریک خارجی، تحت بارگذاری محوری به عنوان تحریک پارامتریک قرار گرفته است که در این حالت با فرض یکی از حالت‌های تشدید و در نظر گرفتن نقص اولیه، به بررسی رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته پرداخته شده است. در این قسمت خیز بر اساس سه مود

برجسته اول در نظر گرفته شده و در نتیجه سه معادله با موده‌های کوپل شده به دست آمده است. به منظور تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای با یکی از حالت‌های تشدید، نمودارهای چندشاخگی برای فرکانس تحریک نسبت به دامنه رسم شده است، که با توجه به این نمودارها، حرکت آشوبی برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده اتفاق می‌افتد. تأثیر زوایای مختلف تقویت کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: پوسته استوانه‌ای تقویت شده، تحلیل ارتعاشات غیرخطی، حل تحلیلی، بستر ویسکوالاستیک غیرخطی، مواد مدرج تابعی، تحریک خارجی و پارامتریک

مقالات مستخرج از پایان نامه

- Foroutan, K., & Ahmadi, H. (2020). Nonlinear free vibration analysis of SSMFG cylindrical shells resting on nonlinear viscoelastic foundation in thermal environment, *Applied Mathematical Modelling*, 85, 294-317.
- Foroutan, K., & Ahmadi, H. (2020). Combination resonances of imperfect SSFG cylindrical shells rested on viscoelastic foundations, *Structural Engineering and Mechanics*, 60(4), 87-100.
- Foroutan, K., & Ahmadi, H. (2020). Simultaneous resonances of SSMFG cylindrical shells resting on viscoelastic foundations, *Steel and Composite Structures*, 37(1), 51-73.
- Ahmadi, H., & Foroutan, K. (2019). Nonlinear vibration of stiffened multilayer FG cylindrical shells with spiral stiffeners rested on damping and elastic foundation in thermal environment, *Thin-Walled Structures*, 145, 106388.
- Ahmadi, H., & Foroutan, K. (2019). Superharmonic and subharmonic resonances of spiral stiffened functionally graded cylindrical shells under harmonic excitation, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 19(10), 1950114.
- Ahmadi, H., & Foroutan, K. (2019). Nonlinear primary resonance of spiral stiffened functionally graded cylindrical shells with damping force using the method of multiple scales, *Thin-Walled Structures*, 135, 33-44.

فهرست مطالب

۱	فصل ۱: پیشگفتار
۲	۱-۱- مقدمه
۴	۲-۱- روش تقویت کننده های تکه ای
۵	۳-۱- بستر الاستیک
۶	۴-۱- مروری بر پیشینه تحقیق
۶	۱-۴-۱- تحلیل دینامیکی و ارتعاشی پوسته های ایزوتروپیک
۸	۲-۴-۱- تحلیل دینامیکی و ارتعاشی پوسته های استوانه ای کامپوزیتی یا چندلایه
۹	۳-۴-۱- تحلیل دینامیکی و ارتعاشی پوسته های مدرج تابعی
۱۲	۴-۴-۱- تحلیل دینامیکی و ارتعاشی پوسته های تقویت شده
۱۴	۵-۱- معرفی رساله حاضر و اهداف تحقیق
۱۷	فصل ۲: معادلات حاکم بر پوسته های استوانه ای تقویت شده
۱۸	۱-۲- مقدمه
۱۸	۲-۲- معرفی هندسه
۱۸	۳-۲- فرضیات حاکم بر پوسته
۲۱	۴-۲- مشخصات مواد مدرج تابعی
۲۳	۱-۴-۲- خواص مواد وابسته به دما
۲۳	۵-۲- روابط بنیادی و معادلات حاکم
۲۶	۱-۵-۲- استخراج منتهای نیرو و گشتاور
۳۱	فصل ۳: تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه ای بر اساس تکمود
۳۲	۱-۳- مقدمه
۳۲	۲-۳- رهیافت گالرکین جهت استخراج معادله دیفرانسیل معمولی پوسته استوانه ای بر اساس تکمود
۳۴	۱-۲-۳- تحلیل ارتعاشات آزاد
۳۴	۳-۳- حل معادلات غیرخطی پوسته استوانه ای بر اساس تکمود
۳۵	۱-۳-۳- تشدید اولیه
۳۸	۲-۳-۳- تشدید فروهارمونیک ۱/۳ و تشدید فراهارمونیک ۳/۱
۴۰	۳-۳-۳- تشدید فراهارمونیک ۳/۱
۴۱	۴-۳-۳- تشدید فروهارمونیک ۱/۳
۴۲	۵-۳-۳- تشدید فروهارمونیک ۱/۲ و تشدید فراهارمونیک ۲/۱
۴۳	۶-۳-۳- تشدید فراهارمونیک ۲/۱
۴۵	۷-۳-۳- تشدید فروهارمونیک ۱/۲
۴۶	۸-۳-۳- تشدید ترکیبی

۵۰ ۳-۳-۹- تشدید همزمان

فصل ۴: تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس چندمود

۵۴ ۴-۱- مقدمه

۴-۲- رهیافت گالرکین جهت استخراج معادله دیفرانسیل معمولی پوسته استوانه‌ای بر اساس

۵۴ چندمود

۴-۳- حل معادلات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس چندمود ۵۷

۴-۳-۱- تحلیل روش مقیاس‌های چندگانه ۵۷

۴-۳-۲- تشدید فروهارمونیک $1/3$ و تشدید داخلی $1:3:9$ ۵۸

۴-۳-۳- ارتعاشات غیرخطی پوسته با تشدید فراهارمونیک $2/1$ و تشدید داخلی

۶۱ $1:1/2:1/4$

۴-۳-۴- ارتعاشات غیرخطی پوسته با تشدید فراهارمونیک $3/1$ و تشدید داخلی

۶۲ $1:1/3:1/9$

۴-۳-۵- ارتعاشات غیرخطی پوسته با تشدید فروهارمونیک $1/2$ ، تشدید پارامتریک

۶۳ اصلی و تشدید داخلی $1:2:4$

فصل ۵: نتایج

۶۸ ۵-۱- مقدمه

۶۸ ۵-۲- نتایج حاصل از ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس تک‌مود

۶۹ ۵-۲-۱- معتبر سازی رهیافت حاضر

۷۵ ۵-۲-۲- تحلیل تشدید اولیه

۸۷ ۵-۲-۳- تحلیل تشدید فراهارمونیک $3/1$

۹۸ ۵-۲-۴- تحلیل تشدید فروهارمونیک $1/3$

۱۰۷ ۵-۲-۵- تحلیل تشدید فراهارمونیک $2/1$

۱۱۲ ۵-۲-۶- تحلیل تشدید ترکیبی $(\omega_{mn} \approx \Omega_2 + 2\Omega_1)$

۱۱۹ ۵-۲-۷- تحلیل تشدید همزمان $(\Omega_1 \approx \frac{1}{3}\omega_{mn} \& \Omega_2 \approx 3\omega_{mn})$

۱۲۷ ۵-۳- نتایج حاصل از ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس چندمود

۱۲۷ ۵-۳-۱- معتبر سازی رهیافت حاضر

۱۲۸ ۵-۳-۲- تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی

۵-۳-۳- تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فروهارمونیک $1/3$

۱۳۹ و تشدید داخلی $1:3:9$

۵-۳-۴- تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فراهارمونیک $3/1$

۱۴۹ و تشدید داخلی $1:1/3:1/9$

۵-۳-۵- تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فراهارمونیک $2/1$

۱۶۴ و تشدید داخلی $1:1/2:1/4$

- ۵-۳-۶- تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فروهارمونیک ۱/۲،
 تشدید پارامتریک اصلی و تشدید داخلی ۱:۲:۴ ۱۸۰
 ۵-۴- مرور کلی بر نتایج ۱۸۹
 ۵-۴-۱- نتایج حاصل از ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس تک‌مود ۱۸۹
 ۵-۴-۲- نتایج حاصل از ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس چندمود ۱۹۶
 ۵-۵- پیشنهادهایی برای ادامه کار ۲۰۶

۲۰۷

پیوست‌ها

۲۱۷

مراجع

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۲) پوسته استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مایل بر بستر ویسکوالاستیک غیرخطی ۲۰
- شکل (۲-۲) توزیع مواد پوسته استوانه‌ای و تقویت‌کننده‌ها در جهت ضخامت ۲۱
- شکل (۱-۵) مقایسه فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک بدون تقویت‌کننده ۷۰
- شکل (۲-۵) مقایسه فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک با تقویت‌کننده خارجی ۷۱
- شکل (۳-۵) مقایسه فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک با تقویت‌کننده داخلی ۷۱
- شکل (۴-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای متخلخل مدرج تابعی ۷۲
- شکل (۵-۵) نمودارهای فرکانس-دامنه بدست آمده برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای با روش‌های عددی و تحلیلی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۷۴
- شکل (۶-۵) نمودارهای فرکانس-دامنه بدست آمده برای تشدید فراهارمونیک پوسته استوانه‌ای با روش‌های عددی و تحلیلی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۷۴
- شکل (۷-۵) نمودارهای فرکانس-دامنه بدست آمده برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای با روش‌های عددی و تحلیلی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۷۵
- شکل (۸-۵) نمودارهای فرکانس-دامنه بدست آمده برای تشدید همزمان پوسته استوانه‌ای با روش‌های عددی و تحلیلی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۷۵
- شکل (۹-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ۷۶
- شکل (۱۰-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک ۷۷
- شکل (۱۱-۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۷۸
- شکل (۱۲-۵) تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۷۸
- شکل (۱۳-۵) پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز تحت توزیع حرارت یکنواخت و خطی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۷۹
- شکل (۱۴-۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۸۰
- شکل (۱۵-۵) تأثیر پارامترهای مختلف بستر الاستیک غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۸۱
- شکل (۱۶-۵) تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ۸۲

- شکل (۵-۱۷) تأثیر دامنه تحریک خارجی را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۸۲
- شکل (۵-۱۸) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۸۳
- شکل (۵-۱۹) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ۸۴
- شکل (۵-۲۰) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک ۸۵
- شکل (۵-۲۱) تأثیر پارامترهای مختلف بستر الاستیک غیرخطی بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۸۶
- شکل (۵-۲۲) تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۸۶
- شکل (۵-۲۳) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ ۸۸
- شکل (۵-۲۴) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ ۸۹
- شکل (۵-۲۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ ۹۰
- شکل (۵-۲۶) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ ۹۱
- شکل (۵-۲۷) تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ ۹۱
- شکل (۵-۲۸) پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۹۲
- شکل (۵-۲۹) تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ ۹۳
- شکل (۵-۳۰) تأثیر پارامتر میرایی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ ۹۴
- شکل (۵-۳۱) تأثیر دامنه تحریک خارجی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ ۹۵

- شکل (۳۲-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز..... ۹۶
- شکل (۳۳-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک..... ۹۷
- شکل (۳۴-۵) تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)..... ۹۸
- شکل (۳۵-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز..... ۹۹
- شکل (۳۶-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک..... ۱۰۰
- شکل (۳۷-۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)..... ۱۰۰
- شکل (۳۸-۵) تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)..... ۱۰۱
- شکل (۳۹-۵) پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز تحت توزیع حرارت یکنواخت و خطی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)..... ۱۰۲
- شکل (۴۰-۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)..... ۱۰۳
- شکل (۴۱-۵) تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز..... ۱۰۴
- شکل (۴۲-۵) تأثیر دامنه تحریک خارجی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)..... ۱۰۴
- شکل (۴۳-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز..... ۱۰۵
- شکل (۴۴-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک..... ۱۰۶
- شکل (۴۵-۵) تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)..... ۱۰۶
- شکل (۴۶-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده..... ۱۰۸

- شکل (۴۷-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ۱۰۹
- شکل (۴۸-۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۱۰
- شکل (۴۹-۵) تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۱۰
- شکل (۵۰-۵) تأثیر دامنه تحریک خارجی را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۱۱
- شکل (۵۱-۵) تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۱۲
- شکل (۵۲-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی ۱۱۳
- شکل (۵۳-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی ۱۱۴
- شکل (۵۴-۵) تأثیر ضریب کسر حجمی متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۱۴
- شکل (۵۵-۵) تأثیر توزیع مواد بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۱۵
- شکل (۵۶-۵) تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۱۶
- شکل (۵۷-۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۱۷
- شکل (۵۸-۵) تأثیر بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۱۸
- شکل (۵۹-۵) تأثیر دامنه تحریک ($\Gamma 1$) بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۱۸
- شکل (۶۰-۵) تأثیر دامنه تحریک ($\Gamma 2$) بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۱۹
- شکل (۶۱-۵) پاسخ فرکانس-دامنه تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای بدون تقویت‌کننده ۱۲۰
- شکل (۶۲-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی ۱۲۱
- شکل (۶۳-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی ۱۲۲

- شکل (۶۴-۵) تأثیر ضخامت لایه سرامیکی پوسته بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید هم‌زمان پوسته
استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$ ۱۲۳
- شکل (۶۵-۵) تأثیر ضخامت لایه فلزی پوسته بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای
مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$ ۱۲۳
- شکل (۶۶-۵) تأثیر بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید هم‌زمان پوسته
استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$ ۱۲۴
- شکل (۶۷-۵) تأثیر فاز نسبی $(\theta_1 - \theta_2)$ دو تحریک بر پاسخ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با
تقویت‌کننده‌های داخلی $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ, \theta_1 = 0)$ ۱۲۵
- شکل (۶۸-۵) تأثیر فاز نسبی $(\theta_1 - \theta_2)$ دو تحریک بر پاسخ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با
تقویت‌کننده‌های داخلی $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ, \theta_1 = \pi/2)$ ۱۲۶
- شکل (۶۹-۵) تأثیر فاز نسبی $(\theta_1 - \theta_2)$ دو تحریک بر پاسخ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با
تقویت‌کننده‌های داخلی $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ, \theta_1 = 3\pi/2)$ ۱۲۶
- شکل (۷۰-۵) شکل مودهای برجسته اول پوسته استوانه‌ای ۱۲۹
- شکل (۷۱-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ)$
..... ۱۳۰
- شکل (۷۲-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 0^\circ, \beta = 30^\circ)$
..... ۱۳۱
- شکل (۷۳-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 0^\circ, \beta = 60^\circ)$
..... ۱۳۱
- شکل (۷۴-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$
..... ۱۳۲
- شکل (۷۵-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 30^\circ, \beta =)$
..... ۱۳۲
- شکل (۷۶-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 30^\circ, \beta =)$
..... ۱۳۳
- شکل (۷۷-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 30^\circ, \beta =)$
..... ۱۳۳
- شکل (۷۸-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 60^\circ, \beta =)$
..... ۱۳۴
- شکل (۷۹-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 60^\circ, \beta =)$
..... ۱۳۴
- شکل (۸۰-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 90^\circ, \beta =)$
..... ۱۳۵

- شکل (۵-۸۱) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک غیرخطی بر رفتار ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۳۹
- شکل (۵-۸۲) نمودار چندشاخگی برای فرکانس تحریک (Ω_1) نسبت به دامنه (x_1) برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ۱۴۰
- شکل (۵-۸۳) تأثیر ضریب میرایی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی پوسته با تشدید فروهارمونیک $1/3$ و تشدید داخلی $1:3:9$ ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۴۲
- شکل (۵-۸۴) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ$) ۱۴۳
- شکل (۵-۸۵) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 30^\circ$) ۱۴۳
- شکل (۵-۸۶) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 60^\circ$) ۱۴۴
- شکل (۵-۸۷) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۴۴
- شکل (۵-۸۸) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 30^\circ$) ۱۴۵
- شکل (۵-۸۹) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 60^\circ$) ۱۴۵
- شکل (۵-۹۰) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۴۶
- شکل (۵-۹۱) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ$) ۱۴۶
- شکل (۵-۹۲) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۴۷
- شکل (۵-۹۳) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 90^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۴۷
- شکل (۵-۹۴) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۴۸
- شکل (۵-۹۵) تأثیر دماهای مختلف بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۴۹
- شکل (۵-۹۶) نمودار چندشاخگی برای فرکانس تحریک (Ω_1) نسبت به دامنه (x_1) برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ۱۵۰
- شکل (۵-۹۷) تأثیر ضریب میرایی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی با تشدید فراهارمونیک $3/1$ و تشدید داخلی $1/9:1/3:1$ ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۵۱
- شکل (۵-۹۸) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ$) ۱۵۲
- شکل (۵-۹۹) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 30^\circ$) ۱۵۳
- شکل (۵-۱۰۰) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 60^\circ$) ۱۵۳
- شکل (۵-۱۰۱) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۵۴
- شکل (۵-۱۰۲) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 30^\circ$) ۱۵۴
- شکل (۵-۱۰۳) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 60^\circ$) ۱۵۵
- شکل (۵-۱۰۴) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۵۵
- شکل (۵-۱۰۵) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ$) ۱۵۶

- شکل (۵-۱۰۶) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۵۶
- شکل (۵-۱۰۷) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 90^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۵۷
- شکل (۵-۱۰۸) تأثیر ضخامت لایه سرامیکی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۵۸
- شکل (۵-۱۰۹) تأثیر ضخامت لایه فلزی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۵۹
- شکل (۵-۱۱۰) تأثیر دماهای مختلف بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۶۱
- شکل (۵-۱۱۱) تأثیر بستر الاستیک خطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۶۲
- شکل (۵-۱۱۲) تأثیر بستر الاستیک غیرخطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۶۳
- شکل (۵-۱۱۳) نمودار چندشاخگی برای فرکانس تحریک (Ω_1) نسبت به دامنه (x_1) برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ۱۶۴
- شکل (۵-۱۱۴) تأثیر ضریب میرایی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی با تشدید فراهارمونیک $2/1$ و تشدید داخلی $1/4:1/2$ ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۶۶
- شکل (۵-۱۱۵) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ$) ۱۶۸
- شکل (۵-۱۱۶) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 30^\circ$) ۱۶۸
- شکل (۵-۱۱۷) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 60^\circ$) ۱۶۹
- شکل (۵-۱۱۸) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۶۹
- شکل (۵-۱۱۹) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 30^\circ$) ۱۷۰
- شکل (۵-۱۲۰) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 60^\circ$) ۱۷۰
- شکل (۵-۱۲۱) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۷۱
- شکل (۵-۱۲۲) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ$) ۱۷۱
- شکل (۵-۱۲۳) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۷۲
- شکل (۵-۱۲۴) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 90^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۷۲
- شکل (۵-۱۲۵) تأثیر ضخامت لایه سرامیکی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۷۴
- شکل (۵-۱۲۶) تأثیر ضخامت لایه فلزی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۷۵
- شکل (۵-۱۲۷) تأثیر دماهای مختلف بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$) ۱۷۶

- شکل (۵-۱۲۸) تأثیر بستر الاستیک خطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$ ۱۷۸
- شکل (۵-۱۲۹) تأثیر بستر الاستیک غیرخطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$ ۱۷۹
- شکل (۵-۱۳۰) نمودار چندشاخگی برای فرکانس تحریک (Ω_1) نسبت به دامنه (x_1) برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ۱۸۱
- شکل (۵-۱۳۱) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی $(\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ)$ ۱۸۲
- شکل (۵-۱۳۲) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی $(\theta = 30^\circ, \beta = 30^\circ)$ ۱۸۲
- شکل (۵-۱۳۳) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی $(\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ)$ ۱۸۳
- شکل (۵-۱۳۴) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی $(\theta = 90^\circ, \beta = 90^\circ)$ ۱۸۳
- شکل (۵-۱۳۵) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی $(\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ)$ ۱۸۴
- شکل (۵-۱۳۶) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی $(\theta = 30^\circ, \beta = 30^\circ)$ ۱۸۵
- شکل (۵-۱۳۷) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی $(\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ)$ ۱۸۵
- شکل (۵-۱۳۸) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی $(\theta = 90^\circ, \beta = 90^\circ)$ ۱۸۶
- شکل (۵-۱۳۹) تأثیر پارامترهای مختلف نقص اولیه بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ)$ ۱۸۷
- شکل (۵-۱۴۰) تأثیر ضخامت لایه سرامیکی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده $(\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ)$ ۱۸۸
- شکل (الف-۱) دوران دستگاه مختصات ۲۰۸
- شکل (الف-۲) شبکه تقویت‌کننده مایل ۲۰۹

فهرست جدول‌ها

۶۹	جدول (۱-۵) خواص مواد تشکیل‌دهنده [۴۹].....
	جدول (۲-۵) پارامترهای استفاده‌شده مورد نیاز برای تحلیل‌های مربوط به پدیده تشدید پوسته استوانه‌ای
۶۹	[۴۸].....
۶۹	جدول (۳-۵) مشخصات بستر الاستیک خطی و غیرخطی [۴۸].....
	جدول (۴-۵) مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک ($L = 0.2 \text{ m}, R = 0.1 \text{ m}, h =$
۷۲	$0.247 \times 10^{-3} \text{ m}, E = 7.12 \times 10^{10} \text{ Nm}^2, \rho = 2796 \text{ kgm}^3, \nu = 0.31$).....
	جدول (۵-۵) مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک بدون تقویت‌کننده با بستر الاستیک
۷۲	
	جدول (۶-۵) مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده ($L = 0.6096 \text{ m}, R =$
	$0.242 \text{ m}, h = 0.65 \times 10^{-3} \text{ m}, E = 68.95 \times 10^9 \text{ Nm}^2, \rho = 2714 \text{ kgm}^3, \nu =$
۷۲	$0.3, n_s = 60$).....
	جدول (۷-۵) مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($L = 0.75 \text{ m}, R =$
	$0.5 \text{ m}, R_h = 250, m = 1, E_m = 7 \times 10^{10} \text{ Nm}^2, \rho_m = 2702 \text{ kgm}^3, E_c =$
۷۳	$38 \times 10^{10} \text{ Nm}^2, \rho_c = 3800 \text{ kgm}^3, \nu = 0.3, d_s = d_r = 0.0025 \text{ m}, h_s = h_r = 0.01 \text{ m}$).....
	جدول (۸-۵) پارامترهای استفاده‌شده مورد نیاز برای تحلیل‌های مربوط به پدیده تشدید پوسته استوانه‌ای
۱۲۷	
۱۲۷	جدول (۹-۵) مشخصات بستر الاستیک خطی و غیرخطی [۴۸].....
۱۲۸	جدول (۱۰-۵) مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدون بعد پوسته استوانه‌ای
	جدول (۱۱-۵) مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدون بعد پوسته استوانه‌ای با بستر الاستیک وینکلر
۱۲۸	$(m = 1, L = 1 \text{ m}, R = 0.5 \text{ m}, E = 7 \times 10^{10} \text{ Nm}^2, \nu = 0.3, d = 0.0025 \text{ m}, h_s = 0.01 \text{ m})$
	جدول (۱۲-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر فرکانس طبیعی (rad/s) پوسته استوانه‌ای
۱۳۶	$(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$
	جدول (۱۳-۵) تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته بر فرکانس طبیعی (rad/s) پوسته استوانه‌ای ($\theta = 0^\circ, \beta =$
۱۳۷	90°).....
	جدول (۱۴-۵) فرکانس طبیعی (rad/s) پوسته استوانه‌ای تحت توزیع حرارت یکنواخت ($\theta = 0^\circ, \beta =$
۱۳۷	90°).....
	جدول (۱۵-۵) فرکانس طبیعی (rad/s) پوسته استوانه‌ای تحت توزیع حرارت خطی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)
۱۳۷	
	جدول (۱۶-۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر فرکانس طبیعی (rad/s) پوسته استوانه‌ای
۱۳۸	$(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$

فصل ۱ :

پیشگفتار

۱-۱- مقدمه

سازه‌های جدار نازک در شاخه‌های مختلف مکانیک، عمران، هوافضا، شیمی و ... کاربرد دارند. شناخت خواص دینامیکی سازه‌های پوسته‌ای از مسائل مورد توجه طراحان می‌باشد و یکی از مهم‌ترین انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای است که کاربرد فراوانی در صنعت و بسیاری از شاخه‌های مهندسی دارد. یکی از روش‌های افزایش نسبت استحکام به وزن، در چنین سازه‌هایی، استفاده از تقویت‌کننده‌ها می‌باشد. صفحات و پوسته‌های تقویت‌شده به‌طور گسترده در پوسته و عرشه کشتی‌ها، پل‌ها، تجهیزات زمینی و فضایی و ساختمان‌ها و ... استفاده می‌شود. به‌منظور مطالعه ارتعاشات سازه‌های تقویت‌شده، از روش‌های مختلف تحلیلی و عددی استفاده می‌شود که روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای^۱ یک مدل رایج می‌باشد [۱]. در عمل به‌منظور تقویت سازه جهت تحمل بارهای اعمالی از تقویت‌کننده‌هایی با وزن کم استفاده می‌شود. پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده در مهندسی مدرن، کاربردهای مختلفی دارد. با توجه به کاربرد وسیع پوسته‌های استوانه‌ای و اهمیت خواص دینامیکی سازه‌های پوسته‌ای، بررسی رفتار ارتعاشی چنین سازه‌هایی اهمیت ویژه‌ای دارد.

مواد مدرج تابعی^۲ نیز مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگنی می‌باشند که خواص مکانیکی آن‌ها به‌طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این خاصیت ویژه به‌وسیله تغییر یکنواخت در نسبت حجمی مواد تشکیل‌دهنده آن‌ها به دست می‌آید. در سال‌های اخیر با توسعه‌ی موتورهای پرقدرت الکتریکی، توربین‌ها، راکتورها و تجهیزات صنایع هوافضا و دیگر ماشین‌آلات صنعتی، استفاده از موادی با مقاومت حرارتی بالا و مقاوم از لحاظ مکانیکی یک نیاز ضروری به شمار می‌رود. مواد مدرج تابعی در صنعت، جهت استفاده در محیط‌هایی با درجه حرارت بسیار بالا مانند راکتورهای هسته‌ای به شمار می‌روند و پیش‌بینی می‌گردد با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد این مواد، کاربردهای صنعتی آن‌ها در طی سال‌های آتی توسعه یابد. در سال‌های قبل در صنایع هوافضا از

¹ Smeared stiffeners technique

² Functionally graded material

مواد سرامیکی خالص جهت پوشش دهی و روکش نمودن قطعات تحت اثر دمای کاری بالا استفاده می‌شد. این مواد عایق‌های بسیار خوبی بودند ولی مقاومت زیادی در برابر تنش‌های اعمالی نداشتند. به‌ویژه تنش‌های پسماند در این مواد مشکلات زیادی از جمله حفره و ترک ایجاد می‌نمود بعدها برای رفع این مشکل از مواد کامپوزیت لایه‌ای استفاده شد. تنش‌های حرارتی در این مواد نیز موجب پدیده لایه‌لایه شدن می‌گردید. با توجه به این مشکلات، طرح ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا داشته و هم مشکل لایه‌لایه شدن را نداشته باشد، ضرورت پیدا کرد. به این ترتیب با توجه به مشکلاتی که در صنایع مختلف برای مواد تحت تنش‌های حرارتی بالا وجود داشت، دانشمندان علم مواد برای اولین بار مواد مدرج تابعی را به عنوان ماده‌ای با تحمل حرارتی بالا پیشنهاد نمودند و نخستین نمونه از این مواد را در سال ۱۹۸۴ در منطقه سندایی ژاپن در آزمایشگاه هوافضای نینو تولید کردند.

نوع رایج این مواد ترکیب پیوسته‌ای از فلزات و سرامیک‌ها می‌باشد که از مخلوط نمودن پودر آن‌ها به دست می‌آیند به طوری که تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملاً پیوسته می‌باشد. به گونه‌ای که مثلاً یک سطح از جنس سرامیک خالص و سطح دیگر از جنس فلز خالص است و بین دو سطح ترکیب پیوسته‌ای از هر دو ماده می‌باشد. از این رو خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت دارد. این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب اجزای تشکیل‌دهنده‌شان دارای خواص مکانیکی مؤثرتری نسبت به مواد کامپوزیت لایه‌ای می‌باشند. نسبت این ترکیب در راستای ضخامت جسم متغیر بوده و چگالی ذرات فلز معلق در بستر سرامیک از سطح فلزی تا سطح سرامیکی توسط یک تابع معین که می‌تواند خطی، غیرخطی یا نمایی باشد کاهش یا افزایش می‌یابد.

از جمله کاربردهای اصلی این مواد می‌توان استفاده در راکتورهای هسته‌ای (مواد تشکیل‌دهنده دیوار داخلی راکتور)، استفاده در صنایع شیمیایی (غشاهای کاتالیست‌ها)، استفاده در مهندسی پزشکی

(کاشت دندان مصنوعی، استخوان‌ها یا اندام‌های مصنوعی) و سایر فناوری‌های نوین مانند موتورهای سرامیکی و پوشش در برابر خوردگی و حرارت را نام برد. همچنین این مواد در ساخت صفحات و پوسته‌های مخازن-راکتورها، توربین‌ها و دیگر اجزای ماشین‌ها نیز کاربرد زیادی دارند؛ زیرا این قطعات آمادگی بالایی جهت واماندگی ناشی از کمانش حرارتی را دارند. از دیگر مزایای مواد مدرج تابعی نسبت به مواد کامپوزیت لایه‌ای، عدم گسستگی در محل اتصال لایه‌ها می‌باشد، زیرا همان‌طور که گفته شد در مواد مدرج تابعی ترکیب عناصر پیوسته و تدریجی می‌باشد. از دیگر مزایای مواد درجه‌بندی‌شده‌ی تابعی می‌توان به استفاده از آن‌ها در ساخت پوشش عایق‌های حرارتی نیز اشاره نمود. مواد درجه‌بندی‌شده‌ی تابعی موادی کامپوزیت می‌باشند که از نظر میکروسکوپی غیر همگن بوده و خصوصیات ساختاری آن‌ها از قبیل نوع توزیع، اندازه فازها، به‌طور تدریجی از سطحی به سطح دیگر تغییر می‌کند و همین تغییر تدریجی منجر به تغییر تدریجی خواص در آن‌ها می‌شود. این مواد عموماً از مخلوط سرامیک با فلز و یا ترکیبی از فلزات مختلف (با ضرایب حرارتی متفاوت) ساخته می‌شوند. ماده سرامیک مقاومت دمایی بالایی را به خاطر رسانایی گرمایی کم دارا می‌باشد و ماده فلزی به علت خاصیت چکش‌خواری، از شکستگی یا ترک به علت تنش حرارتی ممانعت به عمل می‌آورد.

با توجه به کاربردهای تقویت‌کننده‌ها و مواد مدرج تابعی، بررسی رفتار ارتعاشی سازه‌های مدرج تابعی تقویت‌شده، اهمیت ویژه‌ای دارد. بنابراین، تحقیق در مورد رفتار ارتعاشات غیرخطی این سازه‌ها مورد توجه دانشمندان و بسیاری از محققان در سراسر جهان، قرار گرفته است.

۱-۲- روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای

کشف زودرس روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای، مناسب‌ترین روش برای تقریب و پیش‌بینی سریع ارتعاشات می‌باشد. از آنجاکه مدل‌های روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای صفحه تقویت‌شده، معادل صفحه ارتوتروپیک می‌باشد، تئوری استاندارد برای صفحات ارتوتروپیک می‌تواند بدون هیچ‌گونه مطالعه اضافی، برای صفحات ارتوتروپیک تکه‌ای نیز به کار رود. در این صورت با یک مدل، می‌توان یک صفحه

تقویت شده را معادل صفحه ارتوتروپیک تکه‌ای در نظر گرفت و خواص این مدل می‌تواند، برای هر برنامه تجاری که با صفحات ارتوتروپیک سر و کار دارد، تخمین زده شود. روش تکه‌ای در سال ۱۹۷۰ توسعه داده شده است. همچنین به روش تقویت کننده‌های تکه‌ای، روش سیلارد^۱ نیز گفته می‌شود [۱].

۱-۳- بستر الاستیک^۲

یکی از رایج‌ترین شیوه‌های مدل‌سازی و آنالیز شمع‌ها^۳، شالوده‌ها^۴ و روسازی راه^۵ و راه‌آهن، استفاده از تئوری فنرهای ارتجاعی وینکلر^۶ می‌باشد که این تئوری، خاک را به صورت مجموعه‌ای از فنرهای مجزا در نظر گرفته و بدین صورت تغییر مکان نقطه اثر بار را متناسب با بار اعمالی در نظر می‌گیرد. امروزه با وجود مدل‌های رفتاری پیشرفته، این روش هنوز هم رایج‌ترین مدل مورد استفاده در بین طراحان است. محبوبیت مدل وینکلر، به علت سهولت کاربرد آن در روش‌های تحلیلی و نیز امکان اعمال آن در برنامه‌های کامپیوتری موجود برای طراحی می‌باشد. وینکلر در مدل پیشنهادی خود، برای هر نقطه از پی یک تنش تماسی q (فشار) و یک تغییر مکان Δ در نظر می‌گیرد، در نتیجه رفتار خاک مشابه فنرهایی با سختی k که طبق رابطه $(k = \frac{q}{\Delta})$ قابل محاسبه می‌باشد، مدل می‌گردد. در این مدل خاک به صورت فنرهای کاملاً مجزا با سختی یکسان در سطح پی تقریب زده می‌شود، یعنی از انتقال برش در توده خاک صرف نظر گردیده و خاک با مدول برشی صفر فرض می‌شود.

روش تحلیل تیر بر روی بستر ارتجاعی پیوسته نخستین بار توسط وینکلر [۲] در سال ۱۸۶۷

¹ Szilard's technique

² Elastic foundation

³ Stanchions

⁴ Foundations

⁵ Road paving

⁶ Winkler

ارائه گردیده است و سپس در سال ۱۸۸۷ توسط زیمرمن توسعه یافته است [۳].

مدل وینکلر به صورت مجموعه‌ای از فنرهای عمودی و غیر وابسته به هم مدل می‌شود؛ اما اثر نیروهای برشی منتقل شده را در نظر نمی‌گیرد. به منظور در نظرگیری اثر نیروی‌های عمودی و برشی از مدل دیگری به نام پاسترناک^۱، استفاده می‌شود که این مدل از مدل وینکلر دقیق تر می‌باشد. در مدل پاسترناک، المان‌های محیط الاستیک به هم پیوسته شبیه سازی می‌شوند.

۱-۴-۲- مروری بر پیشینه تحقیق

در تحقیقات پیشین، ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای از دیدگاه‌های مختلف، مثل در نظرگیری اثر بسترهای گوناگون، تقویت کننده‌ها، بارگذاری‌های متفاوت و تأثیر خواص مواد مورد بررسی قرار گرفته است که در این تحقیق، به ترتیب چهار دسته شامل تحلیل دینامیکی و ارتعاشی پوسته‌های ایزوتروپیک، پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی یا چندلایه، پوسته‌های مدرج تابعی و پوسته‌های تقویت شده با تقویت کننده‌های طولی و حلقوی در نظر گرفته شده است که در ادامه، مطالعات صورت گرفته در این حوزه‌ها ارائه می‌شود.

۱-۴-۱- تحلیل دینامیکی و ارتعاشی پوسته‌های ایزوتروپیک

تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای با استفاده از روش ریلی ریتز برای شرایط مرزی متفاوت، توسط لی و کواک [۴] بررسی شده است. آن‌ها مدل دینامیکی را بر اساس تئوری‌های مختلف پوسته در نظر گرفته‌اند. ارتعاشات آزاد پوسته‌های کم عمق دارای دو انحنا با توجه به روش جمع آثار برای شرط مرزی‌های تکیه گاه ساده و گیردار، توسط موچیدا و همکاران [۵] مورد تحلیل قرار گرفته است. تانگ و همکاران [۶]، رفتار ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته‌های استوانه‌ای چند پله‌ای^۲ را با شرایط

^۱ Pasternak

^۲ Multi-stepped

مرزی دلخواه و با استفاده از تئوری پوسته نازک فلوگه^۱ مورد مطالعه قرار داده‌اند. یه و همکاران [۷] به تحلیل ارتعاشات هیگروترمال سه‌بعدی پوسته‌های استوانه‌ای با استفاده از روش نمونه‌برداری طیفی^۲ برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، گیردار، آزاد و انعطاف‌پذیر، پرداخته‌اند. رودریگس و همکاران [۸] به تحلیل تشدید داخلی پوسته‌های استوانه‌ای با نقص اولیه و شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده تحت تحریک عرضی پرداخته‌اند. آن‌ها از تئوری پوسته غیرخطی دائل به‌منظور مدل‌سازی پوسته و روش گالرکین برای استخراج معادله دیفرانسیل معمولی استفاده نموده‌اند. تزار [۹]، پاسخ مربوط به پدیده تشدید پوسته‌های نازک استوانه‌ای را مورد بررسی قرار داده و معادلات حرکت را با استفاده از رهیافت انتگرال مستقیم زمانی^۳ حل نموده‌اند. همچنین، تزار [۱۰]، تحلیل رفتار مربوط به پدیده تشدید سه‌بعدی پوسته‌های نازک استوانه‌ای را با استفاده از فرمول‌بندی لاگرانژ به‌روز شده^۴ مورد بررسی قرار داده است و معادلات تشدید غیرخطی حرکت را با استفاده از روش‌های عددی خاص تحلیل نموده است. پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای میرا با شرایط مرزی متفاوت برای تشدید داخلی ۱:۳ با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه^۵ توسط روسیخین و شیتیکوا [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. محمودخانی و همکاران [۱۲]، پاسخ تشدید اولیه پوسته‌های استوانه‌ای را با استفاده از روش اغتشاشات مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها با استفاده از تئوری پوسته غیرخطی دائل و روش گالرکین، معادلات حرکت را استخراج نموده‌اند. رفتار تشدید داخلی پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای شامل حرکت محوری با استفاده از روش تعادل هارمونیک^۶ توسط ونگ و همکاران [۱۳] مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها از تئوری غیرخطی پوسته دائل و روش گالرکین استفاده نموده‌اند. ابه و همکاران [۱۴] به بررسی رفتار تشدید داخلی پوسته‌های لایه‌ای کم‌عمق با لبه‌های گیردار پرداخته‌اند. آن‌ها از روش

¹ Flügge thin shell theory

² Spectral-sampling surface method

³ Direct time integration procedures

⁴ Updated Lagrangian formulation

⁵ Multiple scales method

⁶ Harmonic balance method

گالرکین و شوتینگ^۱ استفاده نموده‌اند. علیجانی و آمابیلی [۱۵] به بررسی رفتار مربوط به پدیده تشدید پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای پر شده از مایع دلخواه تحت نیروی شعاعی هارمونیک پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از روش انرژی و تئوری تغییر شکل برشی غیرخطی مرتبه بالای ردی-آمابیلی، به استخراج معادلات حاکم پرداخته‌اند.

۱-۴-۲- تحلیل دینامیکی و ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی یا چندلایه

برخی از محققان به تحلیل دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی و تعدادی نیز به تحلیل پوسته استوانه‌ای چندلایه پرداخته‌اند. صوفیه و همکاران [۱۶] به تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ارتوتروپیک کامپوزیت^۲ احاطه شده توسط بستر الاستیک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی و روش گالرکین پرداخته‌اند. تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای کامپوزیتی تحت بارگذاری شعاعی و محوری متناوب توسط دی و رامچاندرا [۱۷] ارائه شده است. آن‌ها از تئوری ترکیب شده تغییر شکل برشی مرتبه اول و پوسته دائل و روش گالرکین در تحلیل مذکور استفاده نموده‌اند. چو و همکاران [۱۸] به بررسی پاسخ ارتعاشات پوسته‌های کامپوزیتی لایه‌ای نامتقارن چرخان دارای دو انحنا با شرایط مرزی عمومی^۳ و با در نظر گرفتن هندسه متقارن محوری و با استفاده از روش ژاکوبی-ریتز پرداخته‌اند. جاود و همکاران [۱۹]، پاسخ ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی با ضخامت غیر یکنواخت و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، بررسی نموده‌اند. رفتار ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای کامپوزیتی مدور تحت جریان هوا با سرعت مافوق صوت در محیط هیگروترمال توسط لی و همکاران [۲۰] ارائه شده است. آن‌ها از تئوری غیرخطی لاو، اصل همیلتون و روش گالرکین در تحلیل‌های خود استفاده نموده‌اند. چن و لی [۲۱] به

¹ Shooting method

² Composite

³ General boundary condition

مطالعه رفتار تشدید داخلی پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای کامپوزیتی تحت تحریک هارمونیک شعاعی، نیروی فشاری درون-صفحه‌ای و فشار آیرودینامیکی پرداخته‌اند. آن‌ها از تئوری پوسته دابل و روش مقیاس‌های چندگانه استفاده نموده‌اند. پاسخ مربوط به پدیده تشدید پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای کامپوزیتی با غشاهای شعاعی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه توسط ژانگ و همکاران [۲۲] مورد بررسی قرار گرفته است. رفتار مربوط به پدیده تشدید پوسته‌های کم‌عمق دارای دو انحنا با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه توسط علیجانی و همکاران [۲۳] ارائه شده است. آن‌ها از تئوری پوسته غیرخطی دابل برای مدل‌سازی پوسته استفاده نموده‌اند و با استفاده از روش گالرکین معادلات دیفرانسیل معمولی را استخراج نموده‌اند. لی و یائو [۲۴] رفتار تشدید فروهارمونیک پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای کامپوزیتی تحت تحریک هارمونیک شعاعی و تحت جریان هوا با سرعت مافوق صوت با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه را بررسی نموده‌اند. آن‌ها از تئوری پوسته غیرخطی دابل برای مدل‌سازی پوسته استفاده نموده و با استفاده از روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل معمولی را استخراج نموده‌اند. ونگ و همکاران [۲۵]، ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس فوم فلزی تقویت‌شده با صفحه‌های گرافنی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها از تئوری غیرخطی پوسته دابل بهبودیافته، اصل همپلتون و روش گالرکین استفاده نموده‌اند. یانگ و همکاران [۲۶] به بررسی تشدید داخلی پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای تقویت‌شده با فیبر کربنی و شرایط مرزی پرداخته‌اند. آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی غیرخطی مرتبه اول و روش گالرکین در این مطالعه استفاده نموده‌اند.

۱-۴-۳- تحلیل دینامیکی و ارتعاشی پوسته‌های مدرج تابعی

برخی از محققان در مطالعات خود، تحلیل دینامیکی پوسته‌های مدرج تابعی را مورد توجه قرار داده‌اند. مواد مدرج تابعی مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگن می‌باشند که خواص مکانیکی آن‌ها به‌طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. نیاز بشر برای یافتن موادی که دارای ویژگی‌های بهتری نسبت به مواد خالص و مرکب موجود در صنایع باشد، دانشمندان را به سمت تولید

مواد مدرج تابعی هدایت نمود. هرچند اولین پیشنهاد در مورد ساخت و تولید مواد دارای تغییرات تابعی در خواص، سال ۱۹۷۲ توسط بور و دووز ارائه شد و قبل از آن هم تحقیقاتی در مورد آن به صورت گسسته صورت گرفته بود ولی برای اولین بار نام مواد مدرج تابعی توسط محققان ژاپنی در دهه ۱۹۸۰ به این مواد داده شد و پس از آن به تدریج این مواد در سطح بین‌المللی ساخته شدند. نینو و کویزومی از جمله افرادی بودند که در آن زمان در ژاپن مأمور تحقیق در مورد مواد جدید شدند و به علت نیاز این کشور به این مواد برای توسعه صنایع هوایی این تحقیقات به صورت جدی دنبال شد [۲۷]. در سال‌های اخیر با توسعه موتوره‌ای پرقدرت الکتریکی، توربین‌ها، رآکتورها و تجهیزات صنایع هوافضا و دیگر ماشین‌آلات صنعتی، استفاده از موادی با مقاومت حرارتی بالا و مقاوم از لحاظ مکانیکی یک نیاز ضروری به شمار می‌رود. از جمله کاربردهای اصلی این مواد می‌توان به استفاده آن‌ها در رآکتورهای هسته‌ای (مواد تشکیل‌دهنده دیوار داخلی رآکتور)، استفاده در صنایع شیمیایی (غشاه‌ها و کاتالیست‌ها)، استفاده در مهندسی پزشکی (کاشت دندان مصنوعی، استخوان‌ها یا اندام‌های مصنوعی) و سایر فناوری‌های نوین مانند موتوره‌ای سرامیکی و پوشش در برابر خوردگی و حرارت را نام برد. هم‌چنین این مواد در ساخت صفحات و پوسته‌های مخازن-رآکتورها، توربین‌ها و دیگر اجزای ماشین‌ها نیز کاربرد زیادی دارند. دارابی و همکاران [۲۸] با استفاده از تئوری تغییر شکل‌های بزرگ به تحلیل پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بارگذاری محوری پرداخته‌اند. آن‌ها هم‌چنین از روش گالرکین و بولوتین^۱ در مطالعه خود استفاده نموده‌اند. تحلیل پایداری پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بارگذاری محوری متناوب توسط صوفیه [۲۹] مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها در این مطالعه از تئوری پوسته لاو^۲ و اصل لاگرانژ-همیلتون استفاده نموده‌اند. شنگ و ونگ [۳۰] به تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی حاوی جریان سیال، احاطه‌شده توسط بستر الاستیک و تحت بارگذاری ترمومکانیکی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

^۱ Bolotin's method

^۲ Love's shell theory

پرداخته‌اند. چو و همکاران [۳۱] به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های چرخان دارای دو انحنا مدرج تابعی با شرایط مرزی عمومی و با استفاده از روش ریتز-ژاکوبی^۱ و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداخته‌اند. شن و یانگ [۳۲]، تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی مدرج تابعی لایه‌ای در محیط هیگروترمال را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا، مورد بررسی قرار داده‌اند. شنگ و ونگ [۳۳]، ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی را تحت تحریک‌های پارامتریک و خارجی، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، مورد تحلیل قرار داده‌اند. آن‌ها برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل غیرخطی از روش گالرکین و تراکم استاتیک^۲ استفاده نموده‌اند. تحلیل رفتار دینامیک غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با شرط مرزی گیردار توسط ژانگ و همکاران [۳۴] بررسی شده است. آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش گالرکین استفاده نموده‌اند. دو و لی [۳۵]، تشدید داخلی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی را در محیط حرارتی بررسی نموده‌اند. آن‌ها با توجه به تئوری پوسته غیرخطی دائل، انرژی پتانسیل و جنبشی پوسته را فرمول‌بندی کرده‌اند. تحلیل تشدید پارامتری یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با سرعت زاویه‌ای چرخشی متناوب در محیط حرارتی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه توسط لی و همکاران [۳۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها معادلات دینامیکی پوسته را بر اساس تئوری پوسته نازک لاو و با استفاده از اصل همیلتون به دست آورده‌اند. رفتار ارتعاشات غیرخطی پانل‌های استوانه‌ای متخلخل مدرج تابعی لایه‌ای با استفاده از روش اجزای محدود و تئوری تغییر شکل برشی غیرخطی مرتبه بالا، توسط امیر و تالها [۳۷] مورد بررسی قرار گرفته است. گائو و همکاران [۳۸] به تحلیل تشدید اولیه غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای متخلخل مدرج تابعی شامل میرایی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و تئوری پوسته دائل پرداخته‌اند. تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه-

¹ Jacobi-Ritz Method

² Static condensation

ای متخلخل مدرج تابعی^۱ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی و روش ریلی ریتز^۲ تحت شرایط مرزی متفاوت، توسط ونگ و وو [۳۹] مورد بررسی قرار گرفته است. دو و لی [۴۰] به تحلیل تشدید غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی در محیط‌های حرارتی با استفاده از تئوری پوسته غیرخطی دائل پرداخته‌اند. هائو و همکاران [۴۱] به بررسی تشدید داخلی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی در محیط حرارتی پرداخته‌اند. آن‌ها از تئوری پوسته مرتبه اول ردی و روش گالرکین استفاده نموده‌اند. تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ارتوتروپیک مدرج تابعی بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش گالرکین، توسط صوفیه و همکاران [۴۲] بررسی شده است. تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های کامپوزیتی مدرج تابعی که توسط نانولوله‌های کربنی تقویت‌شده توسط زقال و همکاران [۴۳] ارائه شده است. شن و همکاران [۴۴]، پاسخ ارتعاشات پانل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی مدرج تابعی که توسط گرافن تقویت‌شده بر بستر الاستیک تحت بارگذاری حرارتی را با استفاده از روش اغتشاشات بررسی نموده‌اند. آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای پوسته استفاده نموده‌اند. کیانی و همکاران [۴۵] به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی مدرج تابعی که توسط نانولوله‌های کربنی تقویت‌شده، پرداخته‌اند. آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و فرمول‌بندی چبیشف-ریتز^۳ استفاده نموده‌اند.

۱-۴-۴- تحلیل دینامیکی و ارتعاشی پوسته‌های تقویت‌شده

برخی از محققان در مطالعات خود، تحلیل دینامیکی پوسته‌های تقویت‌شده را مورد توجه قرار داده‌اند. ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی با استفاده از تئوری‌های مختلف پوسته‌ها، روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای و روش نیمه‌تحلیلی توسط خیاط و همکاران [۴۶] مورد بررسی قرار گرفته است. شنگ و ونگ [۴۷] به تحلیل پایداری دینامیکی و پاسخ-

^۱ Functionally graded porous

^۲ Rayleigh-Ritz

^۳ Chebyshev-Ritz formulation

های تشدید اولیه پوسته‌های استوانه مدرج تابعی تقویت‌شده در محیط حرارتی پرداخته‌اند. آن‌ها از روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای، گالرکین، تحلیل مودال و بولوتین در مطالعه خود استفاده نموده‌اند. همچنین آن‌ها تقویت‌کننده‌ها را به صورت طولی و حلقوی در نظر گرفته‌اند. دانگ و نام [۴۸] به بررسی پاسخ ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده بر بستر الاستیک تحت بارگذاری خارجی با استفاده از روش گالرکین و روش عددی رانگ-کوتا مرتبه چهارم پرداخته‌اند. آن‌ها از روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای، تئوری کلاسیک پوسته و روش گالرکین در این مطالعه استفاده نموده‌اند و تقویت‌کننده‌ها را به صورت طولی و حلقوی در نظر گرفته‌اند. رفتار دینامیک غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های طولی و حلقوی بر بستر الاستیک شامل نقص اولیه تحت میرایی و بارگذاری مکانیکی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش رانگ-کوتا، توسط داک و تانگ [۴۹] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای اورتوگونال تقویت‌شده توسط ترکمنی و همکاران [۵۰] مورد بررسی قرار گرفته است. آن‌ها از روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای، تئوری پوسته دائل و تئوری تشابه^۱ در این مطالعه استفاده نموده‌اند. بیچ و همکاران [۵۱] به تحلیل غیرخطی استاتیکی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده شامل نقص اولیه تحت بارگذاری محوری پرداخته‌اند. آن‌ها از روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای، تئوری کلاسیک پوسته و روش گالرکین در این مطالعه استفاده نموده‌اند. شاطرزاده و فروتن [۵۲] به تحلیل کمانش دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های مایل احاطه‌شده توسط بستر الاستیک غیرخطی تحت فشار خارجی عرضی با استفاده از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم^۲ پرداخته‌اند. فروتن و همکاران [۵۳] به تحلیل دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های مایل احاطه‌شده توسط بستر الاستیک غیرخطی و میرایی تحت فشار محوری پرداخته‌اند. آن‌ها از روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای، تئوری کلاسیک پوسته و روش رانگ-کوتا مرتبه

^۱ Similitude theory^۲ Fourth order Runge-Kutta method

چهارم استفاده نموده‌اند.

۱-۵- معرفی رساله حاضر و اهداف تحقیق

با توجه به مطالعات صورت گرفته توسط محققان که در قسمت قبل بیان شد، می‌توان مشاهده نمود که ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های مایل شامل بستر ویسکوالاستیک غیرخطی، بررسی نشده است. همچنین اثر تحریک پارامتریک بر چنین سازه‌هایی بررسی نشده است. با توجه به اینکه مطالعه رفتار دینامیکی غیرخطی این قبیل سازه‌ها از منظر عملی دارای اهمیت است، لذا در این رساله هدف این است که تحلیل رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته مذکور بررسی و تحلیل پاسخ‌های مربوط به پدیده تشدید تحت تأثیر بارگذاری‌های خارجی و پارامتریک انجام شود. همچنین در کار حاضر، اثر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، بستر ویسکوالاستیک خطی و غیرخطی، نقص اولیه، محیط حرارتی و تأثیر ضخامت لایه‌های مختلف پوسته مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این، به بررسی اثر جنس پوسته و تقویت‌کننده‌ها (فلز، سرامیک و مواد مدرج تابعی) با خواص وابسته به دما پرداخته شده است. لذا به‌طور خلاصه نوآوری‌های این تحقیق به شرح زیر می‌باشد:

- تحلیل تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده مایل در دو حالت داخلی و خارجی برای حالت تک‌مود.
- بررسی تشدید فراهارمونیک، تشدید فروهارمونیک، تشدیدهای ترکیبی و هم‌زمان برای پوسته مذکور.
- در نظر گرفتن پوسته به‌صورت مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های مایل احاطه‌شده با بستر ویسکوالاستیک در محیط حرارتی که در این حالت، روابط تنش-کرنش و در نتیجه منته‌های نیرو و گشتاور و معادلات حاکم بایستی مجدداً استخراج گردد.
- برای نزدیک‌تر شدن مسئله به واقعیت، برای پوسته، نقص اولیه نیز در نظر گرفته می‌شود. لذا

در این وضعیت اثر نقص اولیه بر پاسخ‌های مربوط به پدیده تشدید پوسته بررسی می‌شود.

- بررسی ارتعاشات غیرخطی با فرض تشدید داخلی برای پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده برای حالت چندمودی و در نتیجه استخراج معادلات حرکت برای حالت چندمود.
- قرار گرفتن پوسته مذکور تحت تحریک پارامتریک و تأثیر این تحریک بر پاسخ ارتعاشات غیرخطی با فرض تشدید داخلی.

در ادامه تحقیق، فصل‌بندی به ترتیب موارد زیر در نظر گرفته شده است:

در فصل دوم روابط حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده‌های مایل شامل بستر ویسکوالاستیک غیرخطی استخراج شده است.

در فصل سوم به تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس تک‌مود پرداخته شده است.

در فصل چهارم به تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس چندمود پرداخته شده است.

در فصل پنجم نتایج حاصل از تحلیل پوسته استوانه‌ای مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

فصل ۲ :

معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای

تقویت شده

۲-۱- مقدمه

در این فصل، معادلات حرکت حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ارائه می‌شود. پوسته مذکور بر بستر ویسکوالاستیک غیرخطی قرار داشته و تحت تحریک خارجی و پارامتریک می‌باشد. روابط اساسی و معادلات تعادل بر اساس روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای و تئوری کلاسیک پوسته و با توجه به روابط غیرخطی فن کارمن به دست آمده است. سپس با استفاده از روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل معمولی حاکم بر پوسته استخراج می‌شود. در ادامه هندسه مورد مطالعه معرفی و فرضیات حاکم بر پوسته نیز ارائه می‌گردد.

۲-۲- معرفی هندسه

هندسه مورد مطالعه مطابق شکل (۲-۱) یک پوسته نازک استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده به طول L ، شعاع R ، ضخامت h است که بر بستر ویسکوالاستیک غیرخطی تشکیل شده از یک بستر خطی و یک بستر غیرخطی قرار دارد. بستر خطی بر اساس مدل پیشنهادی وینکلر-پاسترناک (k_w, k_s) و بستر غیرخطی بر اساس مدل کلونین ویت است که شامل یک جمله غیرخطی مرتبه سوم (k_{nl}) و یک جمله میرایی خطی (c) می‌باشد. طول تقویت‌کننده d ، فاصله بین دو تقویت‌کننده s و جنس تقویت‌کننده‌ها نیز مدرج تابعی می‌باشند. مختصات اصلی x ، y و z به ترتیب در راستای محوری، محیطی و شعاعی می‌باشد. در شکل (۲-۱الف) پوسته تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های مایل تحت تحریک خارجی و پارامتریک نمایش داده شده است. در شکل (۲-۱ب) خواص هندسی و مختصات پوسته نمایش داده شده است. در این شکل h_s ، h_b ، h_u و h_m به ترتیب ضخامت تقویت‌کننده‌ها، لایه فلزی، لایه سرامیکی و لایه مدرج تابعی و θ ، β زوایای تقویت‌کننده‌ها می‌باشد.

۲-۳- فرضیات حاکم بر پوسته

در بررسی و تحلیل مسئله مورد مطالعه، فرضیات زیر لحاظ می‌شود:

- ۱- پوسته نازک و استوانه‌ای می‌باشد.
- ۲- پوسته مدرج تابعی است.
- ۳- جنس تقویت‌کننده‌ها مدرج تابعی می‌باشد که در حالت خاص می‌تواند ایزوتروپیک در نظر گرفته شود.
- ۴- تئوری به کار برده شده، تئوری کلاسیک پوسته^۱ است.
- ۵- تقویت‌کننده‌ها می‌توانند داخل و یا در خارج پوسته قرار داشته باشند.
- ۶- بستر ویسکوالاستیک غیرخطی، از یک بستر خطی بر اساس مدل پیشنهادی وینکلر-پاسترناک و یک بستر غیرخطی بر اساس مدل کلوین ویت (شامل یک جمله غیرخطی مرتبه سوم و یک جمله میرایی خطی) تشکیل شده است.
- ۷- بارگذاری خارجی بر حسب زمان و به صورت هارمونیک به طور یکنواخت بر سطح پوسته در راستای شعاعی اعمال می‌گردد.
- ۸- به پوسته بار هارمونیک محوری در لبه‌ها نیز اعمال می‌شود.
- ۹- مسئله کرنش کوچک (رابطه تنش-کرنش خطی) و خیز نسبتاً بزرگ (رابطه کرنش-جابجایی فن-کارمن) است.
- ۱۰- فاصله بین تقویت‌کننده‌ها یکسان می‌باشد.
- ۱۱- نصب تقویت‌کننده‌ها بر روی پوسته به گونه‌ای است که در محل عبور بر روی هم برآمدگی ایجاد نمی‌شود.
- ۱۲- از شتاب در جهت‌های محوری و محیطی صرف نظر شده است.
- ۱۳- نیروی تحریک اعمالی کمتر از نیروی کمانشی سازه می‌باشد.

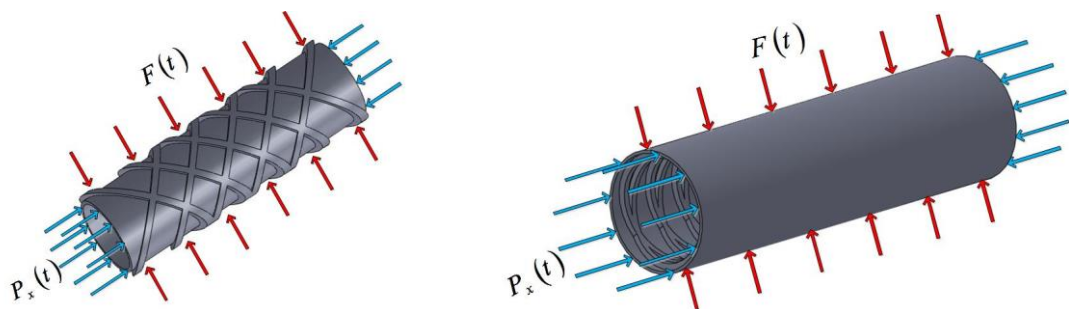
¹ Classical shell theory

۱۴- به منظور در نظر گرفتن پوسته در محیط حرارتی، از کرنش‌های برشی در اثر حرارت و تنش حرارتی تقویت‌کننده‌ها صرف نظر می‌شود.

۱۵- به منظور در نظر گرفتن نقص اولیه، تابع آن مشابه تابع خیز پیشنهادی در نظر گرفته می‌شود.

۱۶- ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود.

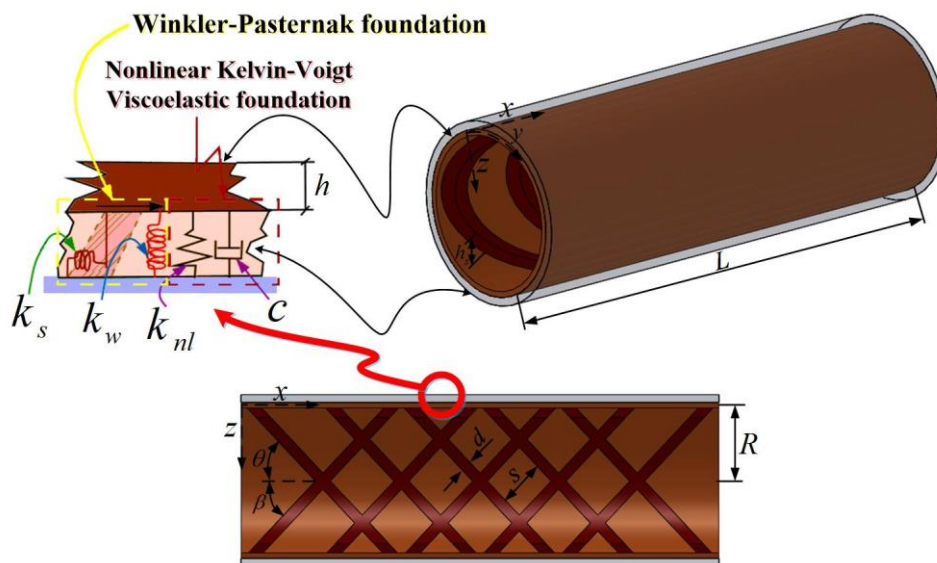
۱۷- توزیع دما به صورت یک‌بعدی می‌باشد.



۲. پوسته با تقویت‌کننده‌های خارجی

۱. پوسته با تقویت‌کننده‌های داخلی

الف) پوسته با تقویت‌کننده‌های مایل تحت تحریک خارجی و پارامتریک



ب) هندسه و مختصات پوسته

شکل (۱-۲) پوسته استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مایل بر بستر ویسکوالاستیک غیرخطی

۲-۴- مشخصات مواد مدرج تابعی

ضخامت پوسته استوانه‌ای مطابق با شکل (۲-۲) به صورت مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. مواد مدرج تابعی مورد مطالعه در لایه مربوطه، ترکیبی از فلز و سرامیک می‌باشد و به دو صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

الف) سطح درونی سرامیک و سطح خارجی فلز

ب) سطح درونی فلز و سطح خارجی سرامیک

با اعمال قانون توانی^۱، کسر حجمی^۲ به صورت رابطه (۱-۲) می‌باشد [۵۴-۵۲]:

$$V_c(z) = \left(\frac{2z + h}{2H} \right)^N ; H = h, h_s ; N = K_{sh}, K_{st} \quad (1-2)$$

$$V_m(z) = 1 - V_c(z)$$

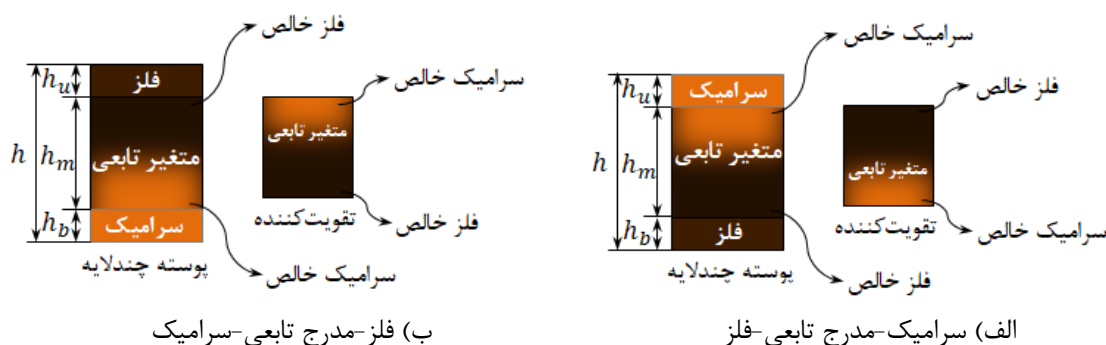
که $K_{sh} \geq 0$ و $K_{st} \geq 0$ به ترتیب شاخص کسر حجمی تقویت‌کننده و پوسته می‌باشد. z مختصات

ضخامت که بین $-h/2$ و $h/2$ می‌باشد؛ زیرنویس c و m به ترتیب مربوط به ماده سرامیکی و فلزی

می‌باشد. مشخصه مؤثر (P_{eff}) پوسته مدرج تابعی بر اساس قانون ترکیب خطی به صورت رابطه (۲-۲)

تعیین می‌شود:

$$P_{eff} = P_m(z)V_m(z) + P_c(z)V_c(z) \quad (2-2)$$



شکل (۲-۲) توزیع مواد پوسته استوانه‌ای و تقویت‌کننده‌ها در جهت ضخامت

¹ Power law

² Volume-fraction

بر طبق قانون ذکرشده، مدول یانگ^۱، دانسیته جرمی^۲، ضریب انبساط و هدایت حرارتی برای پوسته و تقویت کننده‌ها در دو حالت مختلف الف و ب بر اساس شکل (۲-۲)، با روابط (۲-۳) و (۲-۴) بیان می‌شود:

I. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز

• پوسته

$$[P_{sh}(z, T)] = \begin{cases} P_c(T) & -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{h}{2} + h_u \\ P_c(T) + P_{mc}(T) \left(\frac{2z + h - 2h_u}{2h_m} \right)^{K_{sh}} & -\frac{h}{2} + h_u \leq z \leq \frac{h}{2} - h_b \\ P_m(T) & \frac{h}{2} - h_b \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (2-3 \text{ الف})$$

• تقویت کننده‌های داخلی

$$P_{st}(z, T) = P_m(T) + P_{cm}(T) \left(\frac{2z + h}{2h_s} \right)^{K_{st}} \quad \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_s \quad (2-3 \text{ ب})$$

• تقویت کننده‌های خارجی

$$P_{st}(z, T) = P_c(T) + P_{mc}(T) \left(\frac{2z + h}{2h_s} \right)^{K_{st}} \quad -\left(\frac{h}{2} + h_s \right) \leq z \leq -\frac{h}{2} \quad (2-3 \text{ ج})$$

II. حالت اول: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

• پوسته

$$[P_{sh}(z, T)] = \begin{cases} P_m(T) & -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{h}{2} + h_u \\ P_m(T) + P_{cm}(T) \left(\frac{2z + h - 2h_u}{2h_m} \right)^{K_{sh}} & -\frac{h}{2} + h_u \leq z \leq \frac{h}{2} - h_b \\ P_c(T) & \frac{h}{2} - h_b \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (2-4 \text{ الف})$$

• تقویت کننده‌های داخلی

¹ Young's modulus

² Mass density

$$P_{st}(z, T) = P_c(T) + P_{mc}(T) \left(\frac{2z + h}{2h_s} \right)^{K_{st}} \quad \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_s \quad (۴-۲)$$

• تقویت‌کننده‌های خارجی

$$P_{st}(z, T) = P_m(T) + P_{cm}(T) \left(\frac{2z + h}{2h_s} \right)^{K_{st}} - \left(\frac{h}{2} + h_s \right) \leq z \leq -\frac{h}{2} \quad (۴-۲)$$

که در روابط (۳-۲) و (۴-۲):

$$P_{mc}(T) = P_m(T) - P_c(T); \quad P_i = E_i, \rho_i, \alpha_i, K_i \quad (i = sh, st, c, m, mc, cm) \quad (۵-۲)$$

که E, ρ, α و K به ترتیب مدول یانگ و دانسیته جرمی، ضریب انبساط و هدایت حرارتی می‌باشد. همچنین اندیس‌های sh و st به ترتیب بیانگر پوسته و تقویت‌کننده می‌باشد.

۲-۴-۱- خواص مواد وابسته به دما

اگر خواص مواد وابسته به دما باشد، مدول یانگ، دانسیته جرمی و ضریب انبساط حرارتی سرامیک و فلز در مواد مدرج تابعی از رابطه (۶-۲) در دمای مشخص و داشتن ضرایب دمایی، استخراج می‌گردد.

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (۶-۲)$$

که T مقدار دما بر حسب کلوین، P نشانگر خواص مواد می‌باشد و P_0, P_{-1}, P_1, P_2 و P_3 ضرایب دمایی می‌باشند که برای هر ماده مشخص می‌بایست از جداول استخراج گردد [۵۵، ۵۶].

۲-۵- روابط بنیادی و معادلات حاکم

کرنش‌ها در سراسر ضخامت پوسته در فاصله z از سطح میانی به صورت رابطه (۷-۲) می‌باشند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \chi_x = w_{,xx}, \quad \chi_y = w_{,yy}, \quad \chi_{xy} = w_{,xy} \quad (۷-۲)$$

که ε_x^0 و ε_y^0 کرنش‌های نرمال و γ_{xy}^0 کرنش برشی در سطح میانی پوسته و χ_x, χ_y و χ_{xy} تغییرات انحنا و پیچش پوسته می‌باشد.

بر طبق روابط غیرخطی کرنش جابه‌جایی فن‌کارمن [۵۷]، مؤلفه‌های کرنش بر روی سطح میانی

پوسته‌های استوانه‌ای با نقص اولیه به شکل رابطه (۸-۲) می‌باشد:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + w_{,x}w_{0,x}, \\ \varepsilon_y^0 &= v_{,y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + w_{,y}w_{0,y}, \\ \gamma_{xy}^0 &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} + w_{,y}w_{0,x} + w_{,x}w_{0,y}\end{aligned}\quad (۸-۲)$$

که $u = u(x, y)$ ، $v = v(x, y)$ و $w = w(x, y)$ به ترتیب جابه‌جایی در راستای محورهای x ، y و z

(روی صفحه میانی) می‌باشد. $w_0 = w_0(x, y)$ نقص اولیه پوسته استوانه‌ای می‌باشد. همچنین پوسته

استوانه‌ای باید شرایط بسته محیطی را ارضا کند [۴۸]، یعنی شرایط عدم حرکت در راستای محیطی

با اعمال شرایط $v = 0$ در $y = 0, 2\pi R$ برقرار باشد؛ بنابراین رابطه (۹-۲) را به صورت زیر خواهیم

داشت:

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L v_{,y} dx dy = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[\varepsilon_y^0 + \frac{w}{R} - \frac{1}{2}w_{,y}^2 - w_{,y}w_{0,y} \right] dx dy = 0 \quad (۹-۲)$$

با توجه به رابطه (۸-۲)، معادله سازگاری به صورت رابطه (۱۰-۲) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = \\ -\frac{1}{R}w_{,xx} + (w_{,xy} + w_{0,xy})^2 - (w_{,xx} + w_{0,xx})(w_{,yy} + w_{0,yy})\end{aligned}\quad (۱۰-۲)$$

روابط تنش-کرنش برای پوسته‌های مدرج تابعی به صورت رابطه (۱۱-۲) قابل بیان است [۴۸، ۵۲،

۵۳]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{sh} \\ \sigma_y^{sh} \\ \tau_{xy}^{sh} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{sh}(z, T)}{1 - \nu^2} & \frac{\nu E_{sh}(z, T)}{1 - \nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E_{sh}(z, T)}{1 - \nu^2} & \frac{E_{sh}(z, T)}{1 - \nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{sh}(z, T)}{2(1 + \nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E(z, T)}{1 - \nu} \alpha \Delta T(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۱۱-۲)$$

در روابط فوق ضریب پواسون^۱ (ν) ثابت فرض می‌شود، σ_x^{sh} و σ_y^{sh} تنش نرمال در مختصات x و y ، همچنین τ_{xy}^{sh} تنش برشی بر روی پوسته بدون تقویت‌کننده می‌باشد. همچنین به‌منظور بدست آوردن معادله حالت پایدار برای انتقال حرارت یک‌بعدی، توزیع دما در طول ضخامت به شکل رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود [۵۸-۶۰]:

$$\frac{d}{dz} \left[K(z) \frac{dT}{dz} \right] = 0; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (12-2)$$

که $K(z)$ ضریب انتقال حرارت هدایتی است و توزیع دما یک‌بعدی و در جهت ضخامت می‌باشد. رابطه (۱۲-۲) راه‌حل سری چندجمله‌ای زیر را برای توزیع دمای خطی تأیید می‌نماید [۵۸، ۵۹]:

I. حالت اول: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

$$T(z) = T_m + \frac{(T_c - T_m) \left(\frac{2z + h - 2h_u}{2h_m} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(- \left(\frac{2z + h - 2h_u}{2h_m} \right)^{K_{sh}} \frac{K_{cm}}{K_m} \right)^i}{iK_{sh} + 1}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(- \frac{K_{cm}}{K_m} \right)^i}{iK_{sh} + 1}} \quad (13-2)$$

II. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز

$$T(z) = T_c + \frac{(T_m - T_c) \left(\frac{2z + h - 2h_u}{2h_m} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(- \left(\frac{2z + h - 2h_u}{2h_m} \right)^{K_{sh}} \frac{K_{cm}}{K_m} \right)^i}{iK_{sh} + 1}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(- \frac{K_{cm}}{K_m} \right)^i}{iK_{sh} + 1}} \quad (14-2)$$

همچنین برای ماده مدرج تابعی، توزیع حرارتی در روابط (۱۳-۲) و (۱۴-۲) می‌تواند به‌صورت زیر نیز فرض شود [۶۱، ۶۲]:

$$T(z) = \Delta T(a + bz) \quad (15-2)$$

¹ Poisson's ratio

که در این تحلیل، برای توزیع دمای یکنواخت، بایستی $a = 1$ و $b = 0$ و به تبع آن، رابطه (۲-۱۵) به شرح زیر کاهش می‌یابد:

$$T(z) = \Delta T \quad (۲-۱۶)$$

روابط تنش- کرنش تقویت‌کننده‌های مایل که نحوه استخراج آن‌ها در پیوست (الف) آورده شده است، به صورت رابطه (۲-۱۷) می‌باشد [۵۲، ۵۳]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{st} \\ \sigma_y^{st} \\ \tau_{xy}^{st} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \varepsilon_x \\ h_2 \varepsilon_y \\ h_3 \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۲-۱۷)$$

σ_x^{st} ، σ_y^{st} و τ_{xy}^{st} به ترتیب تنش‌های نرمال و تنش برشی تقویت‌کننده‌ها می‌باشد. همچنین مقدار ضرایب H_{ij} و h_i ($i, j = 1, 2, 3$) در پیوست (ب) ارائه شده است. علاوه بر آن فرض می‌شود که تنش حرارتی تقویت‌کننده‌ها که به طور یکنواخت در کل ساختار پوسته توزیع می‌شوند، نامحسوس است؛ بنابراین می‌توان آن را نادیده گرفت [۴۹]. با توجه به این توضیحات، اگرچه تقویت‌کننده‌ها با افزایش دما تغییر شکل و اندازه می‌دهند، اما در این مطالعه فرض می‌شود که تقویت‌کننده‌ها شکل سطح مقطع خود را حفظ می‌نمایند و پس از تغییر شکل حرارتی، ابعاد هندسی تقویت‌کننده‌ها تغییر نموده که این تغییرات به صورت رابطه (۲-۱۸) محاسبه می‌شود [۴۹]:

$$(d^T, s^T, h_s^T) = (d, s, h_s)[1 + \alpha_s(z, T)T(z)] \quad (۲-۱۸)$$

که به جای d ، s و h_s در روابط قبلی به ترتیب d^T ، s^T و h_s^T جایگذاری می‌شود.

۲-۵-۱- استخراج منتجه‌های نیرو و گشتاور

روابط منتجه‌های نیرو و گشتاور برای پوسته‌های استوانه‌ای به صورت رابطه (۲-۱۹) قابل بیان است:

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{sh}, \sigma_y^{sh}, \tau_{xy}^{sh}) dz \quad (۲-۱۹)$$

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{sh}, \sigma_y^{sh}, \tau_{xy}^{sh}) z dz$$

همچنین روابط منتجه‌های نیرو و گشتاور برای تقویت‌کننده‌ها به صورت روابط (۲-۲۰) قابل بیان است:

• تقویت‌کننده‌های داخلی:

$$\begin{aligned}(N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{h/2}^{h/2+h_s} (\sigma_x^{st}, \sigma_y^{st}, \tau_{xy}^{st}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{h/2}^{h/2+h_s} (\sigma_x^{st}, \sigma_y^{st}, \tau_{xy}^{st}) z dz\end{aligned}\quad (20-الف)$$

• تقویت‌کننده‌های خارجی:

$$\begin{aligned}(N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-(h/2+h_s)}^{-h/2} (\sigma_x^{st}, \sigma_y^{st}, \tau_{xy}^{st}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-(h/2+h_s)}^{-h/2} (\sigma_x^{st}, \sigma_y^{st}, \tau_{xy}^{st}) z dz\end{aligned}\quad (20-ب)$$

N_x, N_y, N_{xy} به ترتیب نیروهای نرمال و نیروی برشی در صفحه می‌باشند. M_x, M_y, M_{xy} نیز به ترتیب گشتاورهای خمشی و گشتاور پیچشی صفحه‌ای می‌باشند. برای لحاظ کردن اثر تقویت-کننده‌ها بر پوسته از روش تقویت‌کننده‌های تکه‌ای استفاده می‌شود. بنابراین با یکپارچه‌سازی معادلات تنش-کرنش و محاسبه منته‌های نیرو و گشتاور برای پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت-کننده و با توجه به روابط (2-19) و (2-20)، روابط (2-21) و (2-22) به دست می‌آیند:

• منته‌های نیرو:

$$\begin{aligned}(N_x, N_y) &= [(J_{11}, J_{21})\varepsilon_x^0 + (J_{12}, J_{22})\varepsilon_y^0 - (J_{14}, J_{24})\chi_x - (J_{15}, J_{25})\chi_y \\ &\quad + \phi_1(1, 1)]\end{aligned}\quad (21-2)$$

$$N_{xy} = J_{33}\gamma_{xy}^0 - 2J_{36}\chi_{xy}$$

• منته‌های گشتاور:

$$(M_x, M_y) = [(J_{14}, J_{24})\varepsilon_x^0 + (J_{15}, J_{25})\varepsilon_y^0 - (J_{41}, J_{51})\chi_x - (J_{42}, J_{52})\chi_y + \phi_2(1, 1)]\quad (22-2)$$

$$M_{xy} = J_{36}\gamma_{xy}^0 - 2J_{63}\chi_{xy}$$

که ϕ_1 و ϕ_2 مؤلفه‌های حرارتی پوسته می‌باشد. همچنین J_{ij} مؤلفه‌های سفتی کششی، خمشی و کوپل‌شده پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده می‌باشند که مقدار آن‌ها در پیوست (ب) آورده شده است.

با مرتب‌سازی رابطه (2-21) بر حسب کرنش‌ها، رابطه (2-23) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0) &= [(J_{22}^*, J_{11}^*)N_x - (J_{12}^*, J_{21}^*)N_y + (A_{11}^*, A_{21}^*)\chi_x + (A_{12}^*, A_{22}^*)\chi_y \\ &\quad - \{(J_{22}^* - J_{12}^*), (J_{11}^* - J_{12}^*)\}\phi_1] \\ \gamma_{xy}^0 &= J_{33}^*N_{xy} + 2A_{36}^*\chi_{xy} \end{aligned} \quad (23-2)$$

ضرایب در رابطه (۲۳-۲) به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \Delta &= J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}, \quad J_{22}^* = \frac{J_{22}}{\Delta}, \quad J_{12}^* = \frac{J_{12}}{\Delta} \\ J_{11}^* &= \frac{J_{11}}{\Delta}, \quad J_{21}^* = \frac{J_{21}}{\Delta}, \quad J_{33}^* = \frac{1}{J_{33}}, \quad A_{36}^* = \frac{J_{36}}{J_{33}} \\ A_{11}^* &= J_{22}^*J_{14} - J_{12}^*J_{24}, \quad A_{12}^* = J_{22}^*J_{15} - J_{12}^*J_{25} \\ A_{21}^* &= J_{11}^*J_{24} - J_{21}^*J_{14}, \quad A_{22}^* = J_{11}^*J_{25} - J_{21}^*J_{15} \end{aligned} \quad (24-2)$$

با جایگزینی معادلات (۲۳-۲) در معادلات (۲۲-۲)، رابطه (۲۵-۲) به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} (M_x, M_y) &= [(A_{11}^*, A_{12}^*)N_x + (A_{21}^*, A_{22}^*)N_y - (A_{11}^{**}, A_{21}^{**})\chi_x - (A_{12}^{**}, A_{22}^{**})\chi_y \\ &\quad - (A_{13}^*, A_{23}^*)\phi_1 + \phi_2(1, 1)] \\ M_{xy} &= A_{36}^*N_{xy} - 2A_{36}^*\chi_{xy} \end{aligned} \quad (25-2)$$

ضرایب در رابطه (۲۵-۲) به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} A_{11}^{**} &= A_{11}^*J_{14} - A_{21}^*J_{15} - J_{41}, \quad A_{12}^{**} = A_{12}^*J_{14} - A_{22}^*J_{15} - J_{42} \\ A_{21}^{**} &= A_{11}^*J_{24} - A_{21}^*J_{25} - J_{51}, \quad A_{22}^{**} = A_{12}^*J_{24} - A_{22}^*J_{25} - J_{52} \\ A_{36}^{**} &= A_{36}^*J_{36} - J_{63} \end{aligned} \quad (26-2)$$

معادلات غیرخطی حرکت پوسته استوانه ای نازک تحت تحریک هارمونیک $(F(t))$ بر بستر

ویسکوالاستیک غیرخطی، بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و با فرض $u \ll w$ و $v \ll w$ و

$$\rho_1 \partial^2 v / \partial t^2 \rightarrow 0, \quad \rho_1 \partial^2 u / \partial t^2 \rightarrow 0 \quad \text{در رابطه (۲۷-۲) آورده شده است} \quad [48, 51, 63]:$$

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x(w_{,xx} + w_{0,xx}) + 2N_{xy}(w_{,xy} + w_{0,xy}) \\ + N_y\left(w_{,yy} + w_{0,yy} + \frac{1}{R}\right) + F(t) - k_w w + k_s(w_{,xx} + w_{,yy}) \\ - k_{nl}w^3 = \rho_1 w_{,tt} + 2\rho_1 c w_{,t} \end{aligned} \quad (27-2)$$

k_w مدول بسترالاستیک وینکلر، k_{nl} مدول بسترالاستیک غیرخطی و k_s سفتی لایه برشی بر اساس

مدل پاسترناک، c ضریب میرایی و $F(t)$ تحریک خارجی گسترده بر پوسته می باشد. انتگرال دانسیته

جرمی در راستای ضخامت پوسته (ρ_1) و تحریک خارجی $(F(t))$ به صورت روابط (۲۸-۲) بیان می -

شود:

$$F(t) = Q_F \cos \Omega_1 t \delta(y - \tilde{y}) \quad (28-الف)$$

که Q_F نیروی گسترده بر یال بالا و پایین می‌باشد.

I. حالت اول: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

$$\rho_1 = \left(\rho_m + \frac{\rho_{cm}}{K_{sh} + 1} \right) h_m + 2 \left(\rho_c + \frac{\rho_{mc}}{K_{st} + 1} \right) \frac{dh_s}{s} + \rho_m h_u + \rho_c h_b \quad (28-ب)$$

II. حالت دوم: سرامیک-مدرج تابعی-فلز

$$\rho_1 = \left(\rho_c + \frac{\rho_{mc}}{K_{sh} + 1} \right) h_m + 2 \left(\rho_m + \frac{\rho_{cm}}{K_{st} + 1} \right) \frac{dh_s}{s} + \rho_c h_u + \rho_m h_b \quad (28-ج)$$

با توجه به دو رابطه اول معادله (28-2) تابع تنش $\varphi(x, y)$ به صورت رابطه (29-2) تعریف می‌شود:

$$N_x = \varphi_{,yy}; \quad N_y = \varphi_{,xx}; \quad N_{xy} = -\varphi_{,xy} \quad (29-2)$$

با جایگزینی معادلات (23-2) در رابطه (2-10) و معادلات (25-2) در سومین معادله (27-2) و

با توجه به معادلات (7-2)، (8-2) و (29-2)، به ترتیب روابط (30-2) و (31-2) به دست می‌آیند:

$$J_{11}^* \varphi_{,xxxx} + (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*) \varphi_{,xxyy} + J_{22}^* \varphi_{,yyyy} + A_{21}^* w_{,xxxx} + (A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) w_{,xxyy} + A_{12}^* w_{,yyyy} + \frac{1}{R} w_{,xx} + [w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy}] \quad (30-2)$$

$$-2w_{,xy} w_{0,xy} + w_{,xx} w_{0,xx} + w_{,yy} w_{0,yy} = 0$$

$$\rho_1 w_{,tt} + 2\rho_1 c w_{,t} + A_{11}^{**} w_{,xxxx} + (A_{12}^{**} + A_{21}^{**} + 4A_{36}^{**}) w_{,xxyy} + A_{22}^{**} w_{,yyyy} - A_{21}^* \varphi_{,xxxx} - (A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) \varphi_{,xxyy} - A_{12}^* \varphi_{,yyyy} - \frac{1}{R} \varphi_{,xx} \quad (31-2)$$

$$- \varphi_{,yy} (w_{,xx} + w_{0,xx}) + 2\varphi_{,xy} (w_{,xy} + w_{0,xy}) - \varphi_{,xx} (w_{,yy} + w_{0,yy})$$

$$-F(t) + k_w w - k_s (w_{,xx} + w_{,yy}) - k_{nl} w^3 = 0$$

روابط (30-2) و (31-2)، به ترتیب معادله سازگاری و معادله حرکت غیرخطی پوسته بر حسب دو

پارامتر مجهول w و φ می‌باشد.

فصل ۳ :

تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای

بر اساس تک‌مود

۳-۱- مقدمه

در این قسمت مدنظر است پس از استخراج معادله دیفرانسیل معمولی پوسته بر اساس تک‌مود، به تحلیل‌های مربوط به پدیده تشدید پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با نقص اولیه، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی و تحت تحریک خارجی و پارامتریک، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه پرداخته شود. لذا در ادامه به تحلیل‌های مربوط به پدیده تشدید نظیر تشدید اولیه^۱، تشدید فراهارمونیک^۲، تشدید فروهارمونیک^۳، تشدید ترکیبی و تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای تحت تحریک خارجی و احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی با فرض چشم‌پوشی از تشدید داخلی، برای حالت تک‌مود پرداخته می‌شود.

۳-۲- رهیافت گالرکین جهت استخراج معادله دیفرانسیل معمولی پوسته استوانه‌ای بر اساس تک‌مود

شرایط تکیه‌گاهی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده، دو سر ساده می‌باشد. بنابراین رابطه (۳-۱) را به صورت زیر خواهیم داشت [۴۸]:

$$w = 0, \quad M_x = 0, \quad N_{xy} = 0 \quad \text{at } x = 0, L \quad (۳-۱)$$

با توجه به شرایط مرزی، بایستی خیز پوسته استوانه‌ای طوری انتخاب گردد که رابطه (۳-۱) را ارضا نماید. بنابراین خیز پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (۳-۲) در نظر گرفته شده است [۶۵، ۶۴، ۵۳]:

$$[w, w_0] = [W_{mn}(t), \mu h] \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n y}{R} \quad (۳-۲)$$

که $W(t)$ دامنه مجهول وابسته به زمان و μ پارامتر نقص اولیه می‌باشد. m و n به ترتیب بیانگر تعداد نیم موج و تعداد موج کامل در راستای محوری و محیطی می‌باشد. با جایگزینی معادله (۳-۲)

¹ Primary resonance

² Superharmonic resonance

³ Subharmonic resonance

به صورت تک‌مودی در معادله (۳۱-۲) و ساده‌سازی آن و حل معادله حاصل، تابع مجهول φ به صورت رابطه (۳-۳) حاصل می‌شود:

$$\varphi = \varphi_1 \cos \frac{2m\pi x}{L} + \varphi_2 \cos \frac{2ny}{R} - \varphi_3 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + N_{y0} \frac{x^2}{2} + N_{x0} \frac{y^2}{2} \quad (۳-۳)$$

ضرایب φ_i ($i = 1, 2, 3$) در رابطه (۳-۳) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{n^2 \lambda^2}{32 I_{11}^* m^2 \pi^2} W_{mn}(t) (W_{mn}(t) + \mu h) (W_{mn}(t) + 2\mu h) \\ \varphi_2 &= \frac{m^2 \pi^2}{32 I_{22}^* n^2 \lambda^2} W_{mn}(t) (W_{mn}(t) + \mu h) (W_{mn}(t) + 2\mu h) \\ \varphi_3 &= \frac{B}{A} W_{mn}(t) \end{aligned} \quad (۴-۳)$$

ضریب‌های A و B در پیوست (ب) ارائه شده است. همچنین فرض می‌شود که پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده تحت بارگذاری فشار محوری P_X که به صورت یکنواخت بر مرزهای لبه پوسته استوانه‌ای در $x = 0, L$ اعمال می‌شود، قرار دارد. بنابراین رابطه (۵-۳) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$N_{x0} = -P_X(t)h \quad (۵-۳)$$

که بارگذاری محوری به صورت پارامتریک بر حسب زمان و هارمونیک به صورت زیر می‌باشد:

$$P_X(t) = K_P \cos \Omega_2 t \quad (۶-۳)$$

که K_P دامنه تحریک پارامتریک می‌باشد. با جایگزینی معادلات (۲-۳) و (۳-۳) در معادله (۹-۲)

(شرایط بسته محیطی) و با استفاده از معادله (۸-۲)، رابطه (۷-۳) به دست می‌آید:

$$N_{y0} = \frac{m^2 \pi^2}{8 L^2 I_{22}^*} W_{mn}(t) (W_{mn}(t) + 2\mu h) - \frac{(I_{12}^* - I_{22}^*)}{I_{22}^*} \phi_1 \quad (۷-۳)$$

با جایگزینی معادلات (۲-۳)-(۷-۳) در معادله (۳۱-۲) و با اعمال روش گالرکین در بازه $0 \leq x \leq L$ و

رابطه $0 \leq y \leq 2\pi R$ (۸-۳) به دست می‌آید:

$$\ddot{W}_{mn} + 2\hat{c}\dot{W}_{mn} + a_1 W_{mn} + \hat{a}_2 W_{mn}^2 + \hat{a}_3 W_{mn}^3 - a_4 P_X(t) W_{mn} = \tilde{Q} \cos \Omega_1 t \quad (۸-۳)$$

که ضرایب a_1 و a_4 به صورت زیر و دیگر ضرایب در قسمت بعدی تعریف می شوند. همچنین لازم به ذکر است که در ادامه، اثر تحریک پارامتریک صفر در نظر گرفته می شود و در قسمت بعدی یعنی تحلیل ارتعاشات غیرخطی بر اساس چندمود، اثر تحریک پارامتریک در نظر گرفته خواهد شد.

$$a_1 = \frac{1}{L^4 \rho_1} \left(D + \frac{BB^*}{A} + 2G\mu^2 h^2 + L^4 k_w + L^2 k_s [(\lambda n)^2 + (m\pi)^2] \right) \quad (9-3)$$

$$a_4 = \frac{(m\pi)^2 h}{L^2 \rho_1}$$

که ضرایبهای B, B^*, λ, G و D در پیوست (ب) ارائه شده است. رابطه (۸-۳)، معادله دیفرانسیل معمولی پوسته بر اساس تک مود می باشد.

۳-۲-۱- تحلیل ارتعاشات آزاد

با فرض ارتعاش آزاد بدون میرایی خطی و صرف نظر از جملات مرتبه بالا، معادله (۸-۳) به صورت رابطه (۱۰-۳) کاهش می آید:

$$\ddot{W}_{mn} + a_1 W_{mn} = 0 \quad (10-3)$$

بنابراین فرکانس طبیعی پوسته استوانه ای مدرج تابعی تقویت شده به صورت رابطه (۱۱-۳) محاسبه می گردد:

$$\omega_{mn} = \sqrt{a_1} \quad (11-3)$$

که ω_{mn} فرکانس طبیعی پوسته استوانه ای مدرج تابعی تقویت شده می باشد.

۳-۳- حل معادلات غیرخطی پوسته استوانه ای بر اساس تک مود

در این قسمت به تحلیل های مربوط به پدیده تشدید پوسته های استوانه ای مدرج تابعی تقویت شده، احاطه شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی و تحت تحریک خارجی با توجه به معادله معمولی پوسته بر اساس تک مود، با استفاده از روش مقیاس های چندگانه و با فرض چشم پوشی از تشدید داخلی پرداخته شده است.

۳-۳-۱- تشدید اولیه

در این قسمت تحلیل تشدید اولیه پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده تحت تحریک هارمونیک، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه با فرض چشم‌پوشی از تشدید داخلی ارائه شده است. به‌منظور تحلیل تشدید اولیه ($\Omega_1 \approx \omega_{mn}$)، بایستی عبارات غیرخطی، میرایی و تحریک را به قسمی انتخاب کرد که در یک مرتبه از ε ظاهر شوند. برای رسیدن به این هدف، فرض می‌شود که [۶۶]:

$$\hat{c} = \varepsilon^2 c, \quad \hat{a}_2 = \varepsilon a_2, \quad \hat{a}_3 = \varepsilon^2 a_3, \quad \tilde{Q} = \varepsilon^2 Q \quad (۱۲-۳)$$

در رابطه فوق $1 \ll \varepsilon$ پارامتر اغتشاشات می‌باشد؛ و ضرایب a_2 ، a_3 و Q به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a_2 = \frac{2G\mu h}{L^4 \rho_1}, \quad a_3 = \frac{G}{L^4 \rho_1} + \frac{9}{16\rho_1} k_{nl}, \quad Q = \frac{Q_F}{L^4 \rho_1} \quad (۱۳-۳)$$

با توجه به روابط (۸-۳) و (۱۲-۳)، معادله حرکت به‌صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\ddot{W}_{mn} + 2\varepsilon^2 c \dot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 W_{mn} + \varepsilon a_2 W_{mn}^2 + \varepsilon^2 a_3 W_{mn}^3 = \varepsilon^2 Q \cos \Omega_1 t \quad (۱۴-۳)$$

به‌جای استفاده از فرکانس تحریک (Ω_1)، پارامتر σ به نام پارامتر تنظیم^۱ معرفی می‌شود، این پارامتر از لحاظ کمی میزان نزدیکی فرکانس تحریک (Ω_1) به فرکانس طبیعی (ω_{mn}) را توصیف می‌کند. این روش از این مزیت برخوردار است که می‌توان با به‌کارگیری σ بین عباراتی که سکولار هستند و عبارات شبه سکولار^۲ تمایز قائل شد. بدین منظور می‌توان نوشت [۶۶، ۱۲]:

$$\Omega_1 = \omega_{mn} + \varepsilon^2 \sigma \quad (۱۵-۳)$$

مبنای اصلی روش مقیاس‌های چندگانه این است که در آن تابع بسط داده‌شده، تابعی از چند متغیر زمانی مستقل به‌صورت زیر استفاده شود:

$$T_n = \varepsilon^n t; \quad n = 0, 1, 2 \quad (۱۶-۳)$$

بر این اساس مشتقات بر حسب t نیز باید بر حسب متغیرهای جدید، تغییر یابند. به عبارتی:

^۱ Detuning parameter

^۲ Small divisor

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{d}{dT_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{d}{dT_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \dots = D_0 + \epsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= (D_0 + \epsilon D_1 + \dots)^2 = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \dots\end{aligned}\quad (۱۷-۳)$$

که

$$D_i = \frac{\partial}{\partial T_i} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (۱۸-۳)$$

در این روش فرض می‌شود که پاسخ معادله (۱۴-۳) را بتوان به صورت سری زیر نمایش داد:

$$W(t, \epsilon) = W_0(T_0, T_1, T_2) + \epsilon W_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 W_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (۱۹-۳)$$

همچنین با توجه به روابط (۱۵-۳) و (۱۶-۳)، می‌توان نیروی تحریک را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\epsilon^2 Q \cos \Omega_1 t = \epsilon^2 Q \cos(\omega_{mn} T_0 + \sigma T_2) \quad (۲۰-۳)$$

با جایگذاری روابط (۱۶-۳) و (۱۹-۳) در رابطه (۱۴-۳) و برابر صفر قرار دادن ضرایب توان‌های

مختلف از ϵ روابط زیر حاصل می‌شود:

$$D_0^2 W_0 + \omega_{mn}^2 W_0 = 0 \quad (۲۱-۳)$$

$$D_0^2 W_1 + \omega_{mn}^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - a_2 W_0^2 \quad (۲۲-۳)$$

$$\begin{aligned}D_0^2 W_2 + \omega_{mn}^2 W_2 &= -2D_0 D_1 W_1 - 2D_0 D_2 W_0 - D_1^2 W_0 - 2c D_0 W_0 \\ &\quad - 2a_2 W_0 W_1 - a_3 W_0^3 + Q \cos(\omega_{mn} T_0 + \sigma T_2)\end{aligned} \quad (۲۳-۳)$$

همان‌طور که در رابطه (۲۳-۳) مشاهده می‌شود، نیروی تحریک، عبارت غیرخطی و نیروی

میرایی در یک مرتبه از ϵ ظاهر شده‌اند تا بتوانند همدیگر را محدود کنند [۶۶]. در این روش مرسوم

است که پاسخ معادلات (۲۱-۳)-(۲۳-۳) را در حوزه اعداد مختلط بیان کنند. به عبارتی پاسخ معادله

(۲۱-۳) عبارت است از:

$$W_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_{mn} T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega_{mn} T_0} \quad (۲۴-۳)$$

که در رابطه (۲۴-۳)، A یک تابع مختلط نامعلوم است و $\bar{A}$ مزدوج مختلط آن است. با جایگذاری

رابطه (۲۴-۳) در رابطه (۲۲-۳)، رابطه (۲۵-۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$D_0^2 W_1 + \omega_{mn}^2 W_1 = -2i\omega_{mn} D_1 A e^{i\omega_{mn} T_0} - a_2 [A^2 e^{2i\omega_{mn} T_0} + A\bar{A}] + c. c. \quad (۲۵-۳)$$

که در رابطه (۲۵-۳)، C. C. مزدوج مختلط^۱ می‌باشد. برای حذف جملات سکولار در پاسخ رابطه (۳-)

(۲۵)، با برابر صفر قرار دادن ضریب $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ رابطه (۲۶-۳) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$D_1 A = 0 \rightarrow A = A(T_2) \quad (26-3)$$

با توجه به رابطه (۲۶-۳)، پاسخ خصوصی معادله (۲۵-۳) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$W_1 = \frac{a_2}{\omega_{mn}^2} \left[-2A\bar{A} + \frac{1}{3}A^2 e^{2i\omega_{mn}T_0} + \frac{1}{3}\bar{A}^2 e^{-2i\omega_{mn}T_0} \right] \quad (27-3)$$

با جایگذاری روابط (۲۴-۳) و (۲۷-۳) در رابطه (۲۳-۳) و بیان $\cos(\omega_{mn}T_0 + \sigma T_2)$ به‌صورت

مختلط، رابطه (۲۸-۳) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$D_0^2 W_2 + \omega_{mn}^2 W_2 = - \left[2i\omega_{mn}(A' + cA) + \left(3a_3 - \frac{10a_2^2}{3\omega_{mn}^2} \right) A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} Q e^{i\sigma T_2} \right] e^{i\omega_0 T_0} - \left[\frac{2a_2^2 A^3}{3\omega_{mn}^2} - a_3 A^3 \right] e^{3i\omega_0 T_0} + c. c. \quad (28-3)$$

که در رابطه (۲۸-۳)، $(\cdot)'$ مشتق نسبت به T_2 می‌باشد. برای حذف جملات سکولار در پاسخ رابطه (۳-)

(۲۸)، با برابر صفر قرار دادن ضریب $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ رابطه (۲۹-۳) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$2i\omega_{mn}(A' + cA) + \left(3a_3 - \frac{10a_2^2}{3\omega_{mn}^2} \right) A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} Q e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (29-3)$$

برای حل رابطه (۲۹-۳)، از شکل قطبی A به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (30-3)$$

که در رابطه (۳۰-۳)، a و β ، هر دو تابعی از T_2 هستند. یعنی $a = a(T_2)$ و $\beta = \beta(T_2)$. با

جایگذاری رابطه (۳۰-۳) در رابطه (۲۹-۳) و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر

قرار دادن آن‌ها روابط (۳۱-۳) و (۳۲-۳) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$a' = -ca + \frac{Q}{2\omega_{mn}} \sin(\sigma T_2 - \beta) \quad (31-3)$$

$$a\beta' = \frac{9a_3\omega_{mn}^2 - 10a_2^2}{24\omega_{mn}^3} a^3 - \frac{Q}{2\omega_{mn}} \cos(\sigma T_2 - \beta) \quad (32-3)$$

¹ Complex conjugate

روابط (۳۱-۳) و (۳۲-۳) را می‌توان به شکل یک سیستم خودگردان^۱ (که در آن T_2 به صورت صریح در معادله ظاهر نمی‌شود) تبدیل کرد. بدین منظور از تغییر متغیر به شکل رابطه (۳۳-۳) استفاده می‌شود:

$$\gamma = \sigma T_2 - \beta \quad (۳۳-۳)$$

با توجه به روابط (۳۱-۳)-(۳۳-۳)، روابط (۳۴-۳) و (۳۵-۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$a' = -ca + \frac{Q}{2\omega_{mn}} \sin(\gamma) \quad (۳۴-۳)$$

$$a\gamma' = a\sigma - \frac{9a_3\omega_{mn}^2 - 10a_2^2}{24\omega_{mn}^3} a^3 + \frac{Q}{2\omega_{mn}} \cos(\gamma) \quad (۳۵-۳)$$

حرکت حالت مانا زمانی اتفاق می‌افتد که $a' = \gamma' = 0$ ، درواقع معادل نقاط تکین روابط (۳۴-۳) و (۳۵-۳) می‌باشد و از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$ca = \frac{Q}{2\omega_{mn}} \sin(\gamma) \quad (۳۶-۳)$$

$$\sigma a - \frac{9a_3\omega_{mn}^2 - 10a_2^2}{24\omega_{mn}^3} a^3 = -\frac{Q}{2\omega_{mn}} \cos(\gamma) \quad (۳۷-۳)$$

با به توان دو رساندن طرفین روابط (۳۶-۳) و (۳۷-۳) و جمع آن‌ها با یکدیگر، رابطه (۳۸-۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\left[c^2 a^2 + \left(\frac{9a_3\omega_{mn}^2 - 10a_2^2}{24\omega_{mn}^3} a^3 - a\sigma \right)^2 \right] = \frac{Q^2}{4\omega_{mn}^2} \quad (۳۸-۳)$$

رابطه (۳۸-۳)، یک معادله ضمنی برای دامنه نوسانات (a)، بر حسب تابع تنظیم (σ) (درواقع بر حسب فرکانس تحریک (Ω_1) و دامنه تحریک (Q) می‌باشد و به آن معادله پاسخ فرکانسی^۲ می‌گویند.

۳-۳-۲- تشدید فروهارمونیک ۱/۳ و تشدید فراهارمونیک ۳/۱

در این قسمت تحلیل تشدیدهای فروهارمونیک ۱/۳ و فراهارمونیک ۳/۱، پوستهای استوانه‌ای مدرج

^۱ Autonomous system

^۲ Frequency-response equation

تابعی تقویت‌شده، تحت تحریک هارمونیک، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه با فرض چشم-پوشی از تشدید داخلی ارائه شده است. به‌منظور یافتن تشدیدهای فروهارمونیک $1/3$ ($\Omega_1 \approx 3\omega_{mn}$) و فراهارمونیک $3/1$ ($\Omega_1 \approx \frac{1}{3}\omega_{mn}$)، عبارت غیرخطی مرتبه ۳ و میرایی را به قسمی انتخاب کرد که در یک مرتبه از ϵ ظاهر شوند. برای رسیدن به این هدف، فرض می‌شود که [۶۶]:

$$\hat{c} = \epsilon c, \quad \hat{a}_2 = \epsilon^2 a_2, \quad \hat{a}_3 = \epsilon a_3 \quad (39-3)$$

با توجه به روابط (۳-۸) و (۳۹-۳)، معادله حرکت به‌صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\ddot{W}_{mn} + 2\epsilon c \dot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 W_{mn} + \epsilon^2 a_2 W_{mn}^2 + \epsilon a_3 W_{mn}^3 = Q \cos \Omega_1 t \quad (40-3)$$

در این روش فرض می‌شود که پاسخ معادله (۳-۴۰) را بتوان به‌صورت سری زیر نمایش داد:

$$W(t, \epsilon) = W_0(T_0, T_1) + \epsilon W_1(T_0, T_1) + \dots \quad (41-3)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۴۱) در رابطه (۳-۴۰) و برابر صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف از ϵ

روابط زیر حاصل می‌شود:

$$D_0^2 W_0 + \omega_{mn}^2 W_0 = Q \cos \Omega_1 t \quad (42-3)$$

$$D_0^2 W_1 + \omega_{mn}^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - 2c D_0 W_0 - a_3 W_0^3 \quad (43-3)$$

پاسخ معادله (۳-۴۲) عبارت است از:

$$W_0 = A(T_1) e^{i\omega_{mn} T_0} + \Lambda e^{i\Omega T_0} + c.c. \quad (44-3)$$

که Λ عبارت است از:

$$\Lambda = \frac{Q}{2(\omega_{mn}^2 - \Omega_1^2)} \quad (45-3)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۴۴) در رابطه (۳-۴۳)، رابطه (۳-۴۶) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} D_0^2 W_1 + \omega_{mn}^2 W_1 = & -[2i\omega_{mn}(A' + cA) + 6a_2 A \Lambda + 3a_2 A^2 \bar{A}] e^{i\omega_{mn} T_0} \\ & -a_2 \{A^3 e^{3i\omega_{mn} T_0} + \Lambda^3 e^{3i\Omega_1 T_0} + 3A^2 \Lambda e^{i(2\omega_{mn} + \Omega_1) T_0} \\ & + 3\bar{A}^2 \Lambda e^{i(\Omega_1 - 2\omega_{mn}) T_0} + 3A \Lambda^2 e^{i(\omega_{mn} + 2\Omega_1) T_0} + 3A \Lambda^2 e^{i(\omega_{mn} - 2\Omega_1) T_0}\} \\ & -\Lambda[2ic\Omega_1 + 3a_2 \Lambda^2 + 6a_2 A \bar{A}] e^{i\Omega_1 T_0} + c.c. \end{aligned} \quad (46-3)$$

برای حذف جملات سکولار در پاسخ رابطه (۳-۴۶)، با برابر صفر قرار دادن ضریب $\exp(i\omega_{mn} T_0)$

رابطه (۴۷-۳) به صورت زیر حاصل می شود:

$$2i\omega_{mn}(A' + cA) + 6a_2A\Lambda + 3a_2A^2\bar{A} = 0 \quad (۴۷-۳)$$

۳-۳-۳- تشدید فراهارمونیک ۳/۱

تشدید فراهارمونیک ۳/۱، زمانی اتفاق می افتد که فرکانس تحریک به $\frac{1}{3}\omega_{mn}$ نزدیک شود $(\Omega_1 \approx \frac{1}{3}\omega_{mn})$. در این حالت پارامتر تنظیم (σ) به صورت زیر تعریف می شود [۶۶]:

$$3\Omega_1 = \omega_{mn} + \epsilon\sigma \quad (۴۸-۳)$$

لذا در این وضعیت علاوه بر عباراتی که متناسب با $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ هستند، عبارتهای دیگری نیز تولید عبارات سکولار در پاسخ معادله (۴۶-۳) می نمایند. این عبارات درواقع ضریب $\exp(\pm 3i\Omega_1 T_0)$ خواهند بود. برای حذف عبارات سکولار در ابتدا باید $3\Omega_1 T_0$ را بر حسب $\omega_{mn}T_0$ به صورت زیر جایگذاری نمود:

$$3\Omega_1 T_0 = (\omega_{mn} + \epsilon\sigma)T_0 = \omega_{mn}T_0 + \sigma T_1 \quad (۴۹-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۴۹-۳) در (۴۶-۳) و با برابر صفر قرار دادن ضریب $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ عبارات سکولار به صورت رابطه (۵۰-۳) حذف می شود:

$$2i\omega_{mn}(A' + cA) + 6a_2A\Lambda + 3a_2A^2\bar{A} + a_2\Lambda^3 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (۵۰-۳)$$

با جایگذاری شکل قطبی A (رابطه (۳۰-۳)) در رابطه (۵۰-۳) و جدا کردن قسمت های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن ها روابط (۵۱-۳) و (۵۲-۳) به صورت زیر حاصل می شود:

$$a' = -ca - \frac{a_2\Lambda^3}{\omega_{mn}} \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (۵۱-۳)$$

$$a\beta' = \frac{3a_2}{\omega_{mn}} \left(\Lambda^2 + \frac{1}{8}a^2 \right) a + \frac{a_2\Lambda^3}{\omega_{mn}} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (۵۲-۳)$$

روابط (۵۱-۳) و (۵۲-۳) را می توان به شکل یک سیستم خودگردان (که در آن T_1 به صورت صریح در معادله ظاهر نمی شود) تبدیل کرد. بدین منظور از تغییر متغیر به شکل رابطه (۵۳-۳) استفاده می شود:

$$\gamma_1 = \sigma T_1 - \beta \quad (53-3)$$

با توجه به روابط (51-3)-(53-3)، روابط (54-3) و (55-3) به صورت زیر حاصل می شود:

$$a' = -ca - \frac{a_2 \Lambda^3}{\omega_{mn}} \sin \gamma_1 \quad (54-3)$$

$$a\gamma_1' = \left(\sigma - \frac{3a_2 \Lambda^2}{\omega_{mn}} \right) a - \frac{3a_2}{8\omega_{mn}} a^3 - \frac{a_2 \Lambda^3}{\omega_{mn}} \cos \gamma_1 \quad (55-3)$$

حرکت حالت مانا زمانی اتفاق می افتد که $a' = \gamma_1' = 0$ ، درواقع معادل نقاط تکین روابط (3-3)

(54) و (55-3) می باشد و با به توان دو رساندن طرفین روابط منتهی و جمع آن ها با یکدیگر، رابطه

(56-3) به صورت زیر حاصل می شود:

$$\left[c^2 + \left(\sigma - \frac{3a_2 \Lambda^2}{\omega_{mn}} - \frac{3a_2}{8\omega_{mn}} a^2 \right)^2 \right] a^2 = \frac{a_2^2 \Lambda^6}{\omega_{mn}^2} \quad (56-3)$$

۳-۳-۴- تشدید فروهارمونیک ۱/۳

تشدید فروهارمونیک ۱/۳، زمانی اتفاق می افتد که فرکانس تحریک به $3\omega_{mn}$ نزدیک شود

($\Omega_1 \approx 3\omega_{mn}$)، در این حالت پارامتر تنظیم (σ) به صورت زیر تعریف می شود [۶۶]:

$$\Omega_1 = 3\omega_{mn} + \epsilon\sigma \quad (57-3)$$

لذا در این وضعیت علاوه بر عباراتی که متناسب با $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ هستند، عبارتهای دیگری نیز

تولید عبارات سکولار در پاسخ معادله (3-۴۶) می نمایند. این عبارات درواقع ضریب $\exp(\pm i(\Omega_1 -$

$2\omega_{mn})T_0$) خواهند بود. برای حذف عبارات سکولار در ابتدا باید $(\Omega_1 - 2\omega_{mn})T_0$ را بر حسب

$\omega_{mn}T_0$ جایگذاری نمود و سپس با برابر صفر قرار دادن ضریب $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ عبارات سکولار

به صورت رابطه (3-۵۸) حذف می شود:

$$2i\omega_{mn}(A' + cA) + 6a_2A\Lambda + 3a_2A^2\bar{A} + 3a_2\bar{A}^2\Lambda e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (58-3)$$

با جایگذاری شکل قطبی A (رابطه (3-۳۰)) در رابطه (3-۵۸) و جدا کردن قسمت های حقیقی و

موهومی و برابر صفر قرار دادن آن ها روابط (3-۵۹) و (3-۶۰) به صورت زیر حاصل می شود:

$$a' = -ca - \frac{3a_2\Lambda}{4\omega_{mn}} a^2 \sin(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (59-3)$$

$$a\beta' = \frac{3a_2}{\omega_{mn}} \left(\Lambda^2 + \frac{1}{8} a^2 \right) a + \frac{3a_2\Lambda}{4\omega_{mn}} a^2 \cos(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (60-3)$$

روابط (59-3) و (60-3) را می‌توان به شکل یک سیستم خودگردان (که در آن T_1 به صورت صریح در معادله ظاهر نمی‌شود) تبدیل کرد. بدین منظور از تغییر متغیر به شکل رابطه (61-3) استفاده می‌شود:

$$\gamma_2 = \sigma T_1 - 3\beta \quad (61-3)$$

با توجه به روابط (59-3)-(61-3)، روابط (62-3) و (63-3) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$a' = -ca - \frac{3a_2\Lambda}{4\omega_{mn}} a^2 \sin \gamma_2 \quad (62-3)$$

$$a\gamma_2' = \left(\sigma - \frac{9a_2\Lambda^2}{\omega_{mn}} \right) a - \frac{9a_2}{8\omega_{mn}} a^3 - \frac{9a_2\Lambda}{4\omega_{mn}} a^2 \cos \gamma_2 \quad (63-3)$$

حرکت حالت مانا زمانی اتفاق می‌افتد که $a' = \gamma_2' = 0$ ، درواقع معادل نقاط تکین روابط (62-3) و (63-3) می‌باشد و با به توان دو رساندن طرفین روابط منتهی به جمع آن‌ها با یکدیگر، رابطه (64-3) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\left[9c^2 + \left(\sigma - \frac{9a_2\Lambda^2}{\omega_{mn}} - \frac{9a_2}{8\omega_{mn}} a^2 \right)^2 \right] a^2 = \frac{81a_2^2\Lambda^2}{16\omega_{mn}^2} a^4 \quad (64-3)$$

۳-۳-۵- تشدید فروهارمونیک ۱/۲ و تشدید فراهارمونیک ۲/۱

در این قسمت تحلیل تشدیدهای فروهارمونیک ۱/۲ و فراهارمونیک ۲/۱، پوسترهای استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، تحت تحریک هارمونیک، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه با فرض چشم-پوشی از تشدید داخلی ارائه شده است. به منظور یافتن تشدیدهای فروهارمونیک ۱/۲ ($\Omega_1 \approx 2\omega_{mn}$) و فراهارمونیک ۲/۱ ($\Omega_1 \approx \frac{1}{2}\omega_{mn}$)، عبارت غیرخطی مرتبه ۲ و میرایی را به قسمی انتخاب کرد که در یک مرتبه از ϵ ظاهر شوند. برای رسیدن به این هدف، فرض می‌شود که [۶۶]:

$$\hat{c} = \epsilon c, \quad \hat{a}_2 = \epsilon a_2, \quad \hat{a}_3 = \epsilon^2 a_3 \quad (65-3)$$

با توجه به روابط (۳-۸) و (۳-۶۵)، معادله حرکت به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\ddot{W}_{mn} + 2\epsilon c \dot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 W_{mn} + \epsilon a_2 W_{mn}^2 + \epsilon^2 a_3 W_{mn}^3 = Q \cos \Omega_1 t \quad (۳-۶۶)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۴۱) در رابطه (۳-۶۶) و برابر صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف از ϵ روابط زیر حاصل می‌شود:

$$D_0^2 W_0 + \omega_{mn}^2 W_0 = Q \cos \Omega_1 t \quad (۳-۶۷)$$

$$D_0^2 W_1 + \omega_{mn}^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - 2\mu D_0 W_0 - a_2 W_0^2 \quad (۳-۶۸)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۴۴) (پاسخ معادله (۳-۶۷)) در رابطه (۳-۶۸)، رابطه (۳-۶۹) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} D_0^2 W_1 + \omega_{mn}^2 W_1 = & -2i\omega_{mn}(A' + \mu A)e^{i\omega_{mn}T_0} - 2ic\Lambda\Omega e^{i\Omega_1 T_0} \\ & - a_2 \{ A^2 e^{2i\omega_{mn}T_0} + \Lambda^2 e^{2i\Omega_1 T_0} + A\bar{A} + \Lambda^2 + 2\bar{A}\Lambda e^{i(\Omega_1 - \omega_{mn})T_0} \\ & + 2A\Lambda e^{i(\Omega_1 + \omega_{mn})T_0} \} + \text{c. c.} \end{aligned} \quad (۳-۶۹)$$

برای حذف جملات سکولار در پاسخ رابطه (۳-۶۹)، با برابر صفر قرار دادن ضریب $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ رابطه (۳-۷۰) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$2i\omega_{mn}(A' + \mu A) = 0 \quad (۳-۷۰)$$

۳-۳-۶- تشدید فراهارمونیک ۲/۱

تشدید فراهارمونیک ۲/۱، زمانی اتفاق می‌افتد که فرکانس تحریک به $\frac{1}{2}\omega_{mn}$ نزدیک شود $(\Omega_1 \approx \frac{1}{2}\omega_{mn})$. در این حالت پارامتر تنظیم (σ) به صورت زیر تعریف می‌شود [۶۶]:

$$2\Omega_1 = \omega_{mn} + \epsilon\sigma \quad (۳-۷۱)$$

لذا در این وضعیت علاوه بر عباراتی که متناسب با $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ هستند، عبارتهای دیگری نیز تولید عبارات سکولار در پاسخ معادله (۳-۶۹) می‌نمایند. این عبارات درواقع ضریب $\exp(\pm 2i\Omega_1 T_0)$ خواهند بود. برای حذف عبارات سکولار در ابتدا باید $2\Omega_1 T_0$ را بر حسب $\omega_{mn}T_0$ به صورت زیر

جایگذاری نمود:

$$2\Omega_1 T_0 = (\omega_{mn} + \epsilon\sigma)T_0 = \omega_{mn}T_0 + \sigma T_1 \quad (72-3)$$

با جایگذاری رابطه (72-3) در (69-3) و با برابر صفر قرار دادن ضریب $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ عبارات سکولار به صورت رابطه (73-3) حذف می شود:

$$2i\omega_{mn}(A' + cA) + a_2\Lambda^2 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (73-3)$$

با جایگذاری شکل قطبی A (رابطه (30-3)) در رابطه (73-3) و جدا کردن قسمت های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن ها روابط (74-3) و (75-3) به صورت زیر حاصل می شود:

$$a' = -ca - \frac{a_2\Lambda^2}{\omega_{mn}} \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (74-3)$$

$$a\beta' = \frac{a_2\Lambda^2}{\omega_{mn}} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (75-3)$$

روابط (74-3) و (75-3) را می توان به شکل یک سیستم خودگردان (که در آن T_1 به صورت صریح در معادله ظاهر نمی شود) تبدیل کرد. بدین منظور از تغییر متغیر به شکل رابطه (76-3) استفاده می شود:

$$\gamma_3 = \sigma T_1 - \beta \quad (76-3)$$

با توجه به روابط (74-3)-(76-3)، روابط (77-3) و (78-3) به صورت زیر حاصل می شود:

$$a' = -ca - \frac{a_2\Lambda^2}{\omega_{mn}} \sin \gamma_3 \quad (77-3)$$

$$a\gamma_3' = \sigma a - \frac{a_2\Lambda^3}{\omega_{mn}} \cos \gamma_3 \quad (78-3)$$

حرکت حالت مانا زمانی اتفاق می افتد که $a' = \gamma_3' = 0$ ، درواقع معادل نقاط تکین روابط (77-3) و (78-3) می باشد و با به توان دو رساندن طرفین روابط منتهی و جمع آن ها با یکدیگر، رابطه (79-3) به صورت زیر حاصل می شود:

$$(c^2 + \sigma^2)a^2 = \frac{a_2^2\Lambda^4}{\omega_{mn}^2} \quad (79-3)$$

۳-۳-۷- تشدید فروهارمونیک ۱/۲

تشدید فروهارمونیک ۱/۲، زمانی اتفاق می‌افتد که فرکانس تحریک به $2\omega_{mn}$ نزدیک شود ($\Omega_1 \approx 2\omega_{mn}$). در این حالت پارامتر تنظیم (σ) به صورت زیر تعریف می‌شود [۶۶]:

$$\Omega_1 = 2\omega_{mn} + \epsilon\sigma \quad (۸۰-۳)$$

لذا در این وضعیت علاوه بر عباراتی که متناسب با $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ هستند، عبارت‌های دیگری نیز تولید عبارات سکولار در پاسخ معادله (۶۹-۳) می‌نمایند. این عبارات درواقع ضریب $\exp(\pm i(\Omega_1 - \omega_{mn})T_0)$ خواهند بود. برای حذف عبارات سکولار در ابتدا باید $(\Omega_1 - \omega_{mn})T_0$ را بر حسب $\omega_{mn}T_0$ جایگذاری نمود و سپس با برابر صفر قرار دادن ضریب $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ عبارات سکولار به صورت رابطه (۸۱-۳) حذف می‌شود:

$$2i\omega_{mn}(A' + cA) + a_2\bar{A}\Lambda e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (۸۱-۳)$$

در ادامه A به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$A = \frac{1}{2}B e^{i\sigma T_1} \quad (۸۲-۳)$$

که در رابطه (۸۲-۳)، B یک عدد مختلط می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۸۲-۳) در رابطه (۸۱-۳)، رابطه (۸۳-۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$i\omega_{mn}\left(B' + \frac{1}{2}i\sigma B + cB\right) + a_2B\Lambda = 0 \quad (۸۳-۳)$$

که در رابطه (۸۳-۳)، B به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$B = B_r + iB_i \quad (۸۴-۳)$$

که B_r و B_i مقادیری حقیقی هستند. با جایگذاری رابطه (۸۴-۳) در رابطه (۸۳-۳) و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها روابط (۸۵-۳) و (۸۶-۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$B_r' + cB_r - \left(\frac{1}{2}\sigma + \frac{a_2\Lambda}{\omega_{mn}}\right)B_i = 0 \quad (۸۵-۳)$$

$$B'_i + cB_i + \left(\frac{1}{2}\sigma - \frac{a_2\Lambda}{\omega_{mn}}\right)B_r = 0 \quad (۸۶-۳)$$

روابط (۸۵-۳) و (۸۶-۳) یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی خطی با ضرایب ثابت می باشد که از حل آن نتیجه گرفته می شود که:

$$B_r = b_r e^{\lambda T_1}; \quad B_i = b_i e^{\lambda T_1} \quad (۸۷-۳)$$

که b_r, b_i و λ ثابت هستند. با جایگذاری رابطه (۸۷-۳) در روابط (۸۵-۳) و (۸۶-۳)، رابطه (۸۸-۳) به صورت زیر حاصل می شود:

$$\lambda = -c \pm \left(\frac{a_2^2\Lambda^2}{\omega_{mn}^2} - \frac{\sigma^2}{4}\right)^{1/2} \quad (۸۸-۳)$$

که بر اساس رابطه (۸۸-۳):

- اگر $\sigma^2 > 4a_2^2\Lambda^2/\omega_{mn}^2$ ، نوسانی و کاهنده است.
- اگر $4(a_2^2\Lambda^2/\omega_{mn}^2 - c^2) > \sigma^2 > 4a_2^2\Lambda^2/\omega_{mn}^2$ ، غیر نوسانی و کاهنده است.
- اگر $4(a_2^2\Lambda^2/\omega_{mn}^2 - c^2) > \sigma^2$ ، بدون محدودیت افزایش دامنه می یابد.

در حالت واقعیت دامنه نمی تواند بدون محدودیت افزایش یابد. اگر دامنه افزایش یابد، سیستم دیگر از حالت غیرخطی ضعیف خارج شده و تحلیل حاضر بر آن صادق نمی باشد؛ اما تحلیل فوق از آن جهت دارای اهمیت است که می توان به وضوح شرایطی را که باعث تغییرات فاحش در مسئله می شود را بدست آورد.

۳-۳-۸- تشدید ترکیبی

در این قسمت فرض می شود که تحریک مسئله مشتمل بر دو عبارت به صورت زیر باشد:

$$F(t) = -Q_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) - Q_2 \cos(\Omega_3 t + \theta_2) \quad (۸۹-۳)$$

با جایگذاری تحریک پیشنهادی (رابطه (۸۹-۳)) در رابطه (۸-۳)، رابطه (۹۰-۳) به صورت زیر حاصل می شود:

$$\ddot{W}_{mn} + 2\hat{c}\dot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 W_{mn} + \hat{a}_2 W_{mn}^2 + \hat{a}_3 W_{mn}^3 = k_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + k_2 \cos(\Omega_3 t + \theta_2) \quad (90-3)$$

که

$$k_1 = \frac{Q_1}{L^4 \rho_1}, \quad k_2 = \frac{Q_2}{L^4 \rho_1} \quad (91-3)$$

با توجه به معادله (۹۰-۳)، معادله دیفرانسیل معمولی پوسته شامل عبارت‌های غیرخطی مرتبه ۲ و ۳ می‌باشد؛ بنابراین می‌توان تحلیل‌های مربوط به پدیده تشدید را بر اساس هر یک از این عبارات غیرخطی بررسی نمود. بدین منظور بایستی عبارت غیرخطی و میرایی را به قسمی انتخاب کرد که در یک مرتبه از ϵ ظاهر شوند. با توجه به این توضیحات، در این قسمت تشدید ترکیبی بر اساس غیرخطی مرتبه ۳ مورد بررسی قرار گرفته است که در این صورت عبارت غیرخطی مرتبه ۳ و میرایی را به قسمی انتخاب می‌شود که در یک مرتبه از ϵ ظاهر شوند [۶۶]. برای رسیدن به این هدف، فرض می‌شود که

$$\hat{c} = \epsilon c, \quad \hat{a}_2 = \epsilon^2 \alpha_2, \quad \hat{a}_3 = \epsilon \alpha_3 \quad (92-3)$$

با جایگذاری رابطه (۹۲-۳) در رابطه (۹۰-۳)، رابطه (۹۳-۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\ddot{W}_{mn} + 2\epsilon c \dot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 W_{mn} + \epsilon^2 \alpha_2 W_{mn}^2 + \epsilon \alpha_3 W_{mn}^3 = k_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + k_2 \cos(\Omega_3 t + \theta_2) \quad (93-3)$$

با جایگذاری رابطه (۹۱-۳) در رابطه (۹۳-۳) و برابر صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف از ϵ روابط زیر حاصل می‌شود:

$$D_0^2 W_0 + \omega_{mn}^2 W_0 = k_1 \cos(\Omega_1 T_0 + \theta_1) + k_2 \cos(\Omega_3 T_0 + \theta_2) \quad (94-3)$$

$$D_0^2 W_1 + \omega_{mn}^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - 2c D_0 W_0 - \alpha_3 W_0^3 \quad (95-3)$$

پاسخ معادله (۹۴-۳) عبارت است از:

$$W_0 = A(T_1) e^{i\omega_{mn} T_0} + \Lambda_1 e^{i\Omega_1 T_0} + \Lambda_2 e^{i\Omega_3 T_0} + c. c. \quad (96-3)$$

که Λ_1 و Λ_2 عبارت است از:

$$\Lambda_1 = \frac{k_1 e^{i\theta_1}}{2(\omega_{mn}^2 - \Omega_1^2)}, \quad \Lambda_2 = \frac{k_2 e^{i\theta_2}}{2(\omega_{mn}^2 - \Omega_3^2)} \quad (97-3)$$

با جایگذاری رابطه (۹۶-۳) در رابطه (۹۵-۳)، رابطه (۹۸-۳) به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} D_0^2 W_1 + \omega_{mn}^2 W_1 = & -[2i\omega_{mn}(A' + cA) \\ & + 3\alpha_3(A\Lambda + 2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)A]e^{i\omega_{mn}T_0} \\ & - \Lambda_1[2i\Omega_1 c + 3\alpha_3(2A\bar{A} + \Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)]e^{i\Omega_1 T_0} \\ & - \Lambda_2[2i\Omega_1 c + 3\alpha_3(2A\bar{A} + 2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + \Lambda_2\bar{\Lambda}_2)]e^{i\Omega_3 T_0} \\ & - \alpha_3\{A^3 e^{3i\omega_{mn}T_0} + \Lambda_1^3 e^{3i\Omega_1 T_0} + \Lambda_2^3 e^{3i\Omega_3 T_0} \\ & + 3A^2\Lambda_1 e^{i(2\omega_{mn}+\Omega_1)T_0} + 3A^2\Lambda_2 e^{i(2\omega_{mn}+\Omega_3)T_0} \\ & + 3A^2\bar{\Lambda}_1 e^{i(2\omega_{mn}-\Omega_1)T_0} + 3A^2\bar{\Lambda}_2 e^{i(2\omega_{mn}-\Omega_3)T_0} \\ & + 3A\Lambda_1^2 e^{i(\omega_{mn}+2\Omega_1)T_0} + 3A\Lambda_2^2 e^{i(\omega_{mn}+2\Omega_3)T_0} \\ & + 3A\bar{\Lambda}_1^2 e^{i(\omega_{mn}-2\Omega_1)T_0} + 6A\bar{\Lambda}_1\Lambda_2 e^{i(\omega_{mn}-\Omega_1+\Omega_3)T_0} \\ & + 6A\Lambda_1\bar{\Lambda}_2 e^{i(\omega_{mn}+\Omega_1-\Omega_3)T_0} + 3\Lambda_1^2\Lambda_2 e^{i(2\Omega_1+\Omega_3)T_0} \\ & + 3\Lambda_1^2\bar{\Lambda}_2 e^{i(2\Omega_1-\Omega_3)T_0} + 3\Lambda_1\Lambda_2^2 e^{i(\Omega_1+2\Omega_3)T_0} \\ & + 3\bar{\Lambda}_1\Lambda_2^2 e^{i(2\Omega_3-\Omega_1)T_0}\} + \text{c. c.} \end{aligned} \quad (98-3)$$

همان طور که مشاهده می شود در رابطه (۹۸-۳)، تعداد زیادی حالت های تشدید وجود دارد که برخی از آن ها در قسمت های قبلی مورد بررسی قرار داده شد که حالت تکفرکانسی بوده اند؛ اما برخی از آن ها ماهیت چندفرکانسی دارند که ناشی از تعداد تحریک ها می باشد. حالت های مربوط به پدیده تشدید ایجاد شده عبارت اند از:

• تشدید فراهارمونیک:

$$\omega_{mn} \approx \frac{1}{3}\Omega_k \quad (99-3)$$

• تشدید فروهارمونیک:

$$\omega_{mn} \approx 3\Omega_k \quad (100-3)$$

• تشدید ترکیبی:

$$\begin{aligned} \omega_{mn} & \approx |\pm 2\Omega_l \pm \Omega_k| \\ \omega_{mn} & \approx \frac{1}{2}(\Omega_l \pm \Omega_k) \end{aligned} \quad (101-3)$$

که در رابطه (۱۰۱-۳)، $k, l = 1, 3$ می باشد. لازم به ذکر است که از طرف دیگر در حالت تحریک های

چندگانه ممکن است بیش از یک حالت تشدید به صورت هم‌زمان اتفاق بیفتد. مثلاً به صورت هم‌زمان تشدید فراهارمونیک و فروهارمونیک داشته باشیم. برای یک سیستم با تحریک دوگانه، حداکثر دو تشدید هم‌زمان قابل اتفاق خواهد بود. اگر فرض کنیم فرکانس‌های تحریک معادل Ω_1 و Ω_3 بوده و $\Omega_3 > \Omega_1$ ، در این صورت تنها حالت تشدیدهای ثانویه ممکن برای مسئله فوق عبارت است از:

$$\begin{aligned}\omega_{mn} &\approx 3\Omega_1 \text{ or } 3\Omega_3 \\ \omega_{mn} &\approx \frac{1}{3}\Omega_1 \text{ or } \frac{1}{3}\Omega_3 \\ \omega_{mn} &\approx \Omega_3 \pm 2\Omega_1 \text{ or } 2\Omega_1 - \Omega_3 \\ \omega_{mn} &\approx 2\Omega_3 \pm \Omega_1 \\ \omega_{mn} &\approx \frac{1}{2}(\Omega_3 \pm \Omega_1)\end{aligned}\quad (102-3)$$

با بررسی این حالت‌های تشدید، می‌توان مشاهده نمود که اگر بیش از یک تشدید به صورت هم‌زمان داشته باشیم، در این صورت بایستی:

$$\begin{aligned}\text{I. } \Omega_3 &\approx 9\Omega_1 \approx 3\omega_{mn} \\ \text{II. } \Omega_3 &\approx \Omega_1 \approx 3\omega_{mn} \\ \text{III. } \Omega_3 &\approx \Omega_1 \approx \frac{1}{3}\omega_{mn} \\ \text{IV. } \Omega_3 &\approx 5\Omega_1 \approx \frac{5}{3}\omega_{mn} \\ \text{V. } \Omega_3 &\approx 7\Omega_1 \approx \frac{7}{3}\omega_{mn} \\ \text{VI. } \Omega_3 &\approx 2\Omega_1 \approx \frac{2}{3}\omega_{mn} \\ \text{VII. } \Omega_3 &\approx \frac{7}{3}\Omega_1 \approx 7\omega_{mn} \\ \text{VIII. } \Omega_3 &\approx \frac{5}{3}\Omega_1 \approx 5\omega_{mn}\end{aligned}\quad (103-3)$$

از آنجا که حالت‌های تک‌فرکانسی تشدید اولیه، فراهارمونیک و فروهارمونیک در قسمت‌های قبلی بررسی شده است، در این قسمت به بررسی یکی از حالت‌های تشدید ترکیبی پرداخته می‌شود. بدین منظور فرض می‌شود که حالتی بررسی گردد که $\omega_{mn} \approx \Omega_3 + 2\Omega_1$ ، در این صورت پارامتر تنظیم به صورت زیر تعریف می‌شود [۶۶]:

$$\omega_{mn} = \Omega_3 + 2\Omega_1 - \epsilon\sigma \quad (104-3)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۰۴) در (۳-۹۸) و با برابر صفر قرار دادن ضریب $\exp(i\omega_{mn}T_0)$ عبارات سکولار به صورت رابطه (۳-۱۰۵) حذف می شود:

$$2i\omega_{mn}(A' + cA) + 3\alpha_3(A\Lambda + 2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)A + 3\alpha_3\Lambda_1^2\Lambda_2e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (۳-۱۰۵)$$

با جایگذاری شکل قطبی A (رابطه (۳-۳۰)) در رابطه (۳-۱۰۵) و جدا کردن قسمت های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن ها روابط (۳-۱۰۶) و (۳-۱۰۷) به صورت زیر حاصل می شود:

$$a' = -\mu a - \alpha_3 \Gamma_1 \sin(\gamma_4) \quad (۳-۱۰۶)$$

$$a\gamma_4' = (\sigma - \alpha_3 \Gamma_2)a - \frac{3\alpha_3}{8\omega_{mn}}a^3 - \alpha_3 \Gamma_1 \cos(\gamma_4) \quad (۳-۱۰۷)$$

که

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{3}{8}k_1^2k_2\omega_{mn}^{-1}(\omega_{mn}^2 - \Omega_1^2)^{-2}(\omega_{mn}^2 - \Omega_3^2)^{-1} \\ \Gamma_2 &= \frac{3}{4}\omega_{mn}^{-1}[k_1^2(\omega_{mn}^2 - \Omega_1^2)^{-2} + k_2^2(\omega_{mn}^2 - \Omega_3^2)^{-2}] \\ \gamma_4 &= \sigma T_1 - \beta + 2\theta_1 + \theta_2 \end{aligned} \quad (۳-۱۰۸)$$

حرکت حالت مانا زمانی اتفاق می افتد که $a' = \gamma_4' = 0$ ، درواقع معادل نقاط تکین روابط (۳-۱۰۶) و (۳-۱۰۷) می باشد و با به توان دو رساندن طرفین روابط منتهی و جمع آن ها با یکدیگر، رابطه (۳-۱۰۹) به صورت زیر حاصل می شود:

$$\left[c^2 + \left(\sigma - \alpha_3 \Gamma_2 - \frac{3\alpha_3}{8\omega_{mn}}a^2 \right)^2 \right] a^2 = \alpha_3^2 \Gamma_1^2 \quad (۳-۱۰۹)$$

۳-۳-۹- تشدید هم زمان

در این قسمت وضعیتی مورد بررسی می باشد که تشدید فراهارمونیک و فروهارمونیک به صورت هم- زمان در سیستم اتفاق بیفتد ($\omega_{mn} \approx 3\Omega_1$ و $\omega_{mn} \approx \frac{1}{3}\Omega_3$). در این حالت لازم است که از پارامتر تنظیم به صورت زیر در مسئله استفاده شود:

$$3\Omega_1 = \omega_{mn} + \epsilon\sigma_1 \quad \text{and} \quad \Omega_3 = 3\omega_{mn} + \epsilon\sigma_2 \quad (۳-۱۱۰)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۱۰) در (۳-۹۸) و با برابر صفر قرار دادن ضریب $\exp(i\omega_{mn}T_0)$

عبارات سکولار به صورت رابطه (۱۱۱-۳) حذف می‌شود:

$$2i\omega_{mn}(A' + cA) + 3\alpha_3(A\bar{A} + 2\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + 2\Lambda_2\bar{\Lambda}_2)A + \alpha_3\Lambda_1^3 e^{i\sigma_1 T_1} + 3\alpha_3\bar{A}^2\Lambda_2 e^{i\sigma_2 T_1} = 0 \quad (111-3)$$

با جایگذاری شکل قطبی A (رابطه (۳۰-۳)) در رابطه (۱۱۱-۳) و جدا کردن قسمت‌های حقیقی

و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها روابط (۱۱۲-۳) و (۱۱۳-۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$a' + \mu a - \alpha_3 \Gamma_1 \sin(\sigma_1 T_1 + 3\theta_1 - \beta) + \alpha_3 \Gamma_2 a^2 \sin(\sigma_2 T_1 + \theta_2 - 3\beta) = 0 \quad (112-3)$$

$$a\beta' + \frac{3\alpha_3}{8\omega_{mn}} a^3 + \alpha_3 \Gamma_3 a + \alpha_3 \Gamma_1 \cos(\sigma_1 T_1 + 3\theta_1 - \beta) + \alpha_3 \Gamma_2 a^2 \cos(\sigma_2 T_1 + \theta_2 - 3\beta) = 0 \quad (113-3)$$

که

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{8} k_1^3 \omega_{mn}^{-1} (\omega_{mn}^2 - \Omega_1^2)^{-3} \\ \Gamma_2 &= \frac{3}{8} k_2 \omega_{mn}^{-1} (\omega_{mn}^2 - \Omega_1^2)^{-1} \\ \Gamma_3 &= \frac{3}{4} \omega_{mn}^{-1} [k_1^2 (\omega_{mn}^2 - \Omega_1^2)^{-2} + k_2^2 (\omega_{mn}^2 - \Omega_3^2)^{-2}] \end{aligned} \quad (114-3)$$

با استفاده از رابطه (۱۱۰-۳)، رابطه (۱۱۵-۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{749}{4096} k_1^3 \omega_{mn}^{-7} + O(\epsilon) \\ \Gamma_2 &= \frac{3}{64} k_2 \omega_{mn}^{-3} + O(\epsilon) \\ \Gamma_3 &= \frac{3}{256} \omega_{mn}^{-5} [81k_1^2 + k_2^2] + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (115-3)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مقادیر Γ_1 ، Γ_2 و Γ_3 مستقل نبوده و تابعی از k_1 و k_2 می‌باشند که تنها

پارامترهای مستقل بیانگر میزان دامنه تحریک هستند. با بررسی رابطه (۱۱۲-۳) می‌توان دریافت که

پاسخ حالت ماندگار ($a' = 0$) وجود دارد، اگر و تنها اگر $\sigma_1 T_1 - \beta$ و $\sigma_2 T_1 - 3\beta$ مقادیری ثابت

باشند. به عبارتی:

$$\sigma_1 = \beta' \text{ \& } \sigma_2 = 3\beta \quad (116-3)$$

لذا پاسخ حالت ماندگار تنها زمانی وجود دارد که $\sigma_2 = 3\sigma_1 = 3\sigma$. در این صورت بر اساس رابطه

(۱۱۰-۳)، $\Omega_2 = 9\Omega_1$. اگر پاسخ حالت ماندگار اتفاق بیفتد، بر اساس روابط (۱۱۲-۳) و (۱۱۳-۳)،

این پاسخ، متناظر با حل روابط زیر می باشد:

$$\mu a + \alpha_3 \Gamma_1 \sin(\gamma + 3\theta_1) + \alpha_3 \Gamma_2 a^2 \sin(\gamma + \theta_2) = 0 \quad (۱۱۷-۳)$$

$$\begin{aligned} -a\sigma + \frac{3\alpha_3}{8\omega_{mn}} a^3 + \alpha_3 \Gamma_3 a + \alpha_3 \Gamma_1 \cos(\gamma + 3\theta_1) \\ + \alpha_3 \Gamma_2 a^2 \cos(\gamma + \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (۱۱۸-۳)$$

که

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta \quad (۱۱۹-۳)$$

فصل ۴ :

تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای

بر اساس چندمود

۴-۱- مقدمه

در این قسمت مدنظر است پس از استخراج معادله دیفرانسیل معمولی پوسته، به تحلیل تشدید داخلی پوسته پرداخته شود که در این قسمت خیز بر اساس سه مود برجسته اول در نظر گرفته شده است. همچنین در این حالت اثر بارگذاری محوری که تابعی از زمان می باشد به عنوان تحریک پارامتریک، بر رفتار ارتعاشی و رفتار مربوط به پدیده تشدید پوسته نیز در نظر گرفته می شود.

۴-۲- رهیافت گالرکین جهت استخراج معادله دیفرانسیل معمولی پوسته استوانه ای بر اساس چندمود

در تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه ای مدرج تابعی با تقویت کننده با شرایط تکیه گاهی دو سر ساده، فرکانس موده های پایین از فرکانس موده های بالا قابل توجه تر هستند؛ بنابراین، در مطالعه حاضر، ما بر روی ارتعاشات عرضی غیرخطی پوسته در سه مود برجسته اول تمرکز می کنیم. انتخاب توابع مود مناسب باید به گونه ای باشد که سه مود برجسته اول ارتعاشات عرضی غیرخطی و شرایط مرزی پوسته استوانه ای مدرج تابعی با تقویت کننده را ارضا نماید. با توجه به شرایط مرزی، خیز پوسته استوانه ای به صورت رابطه (۴-۱) در نظر گرفته شده است [۵۳، ۵۷ و ۵۸]:

$$w(x, y, t) = W_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{y}{R} + W_2(t) \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{3y}{R} + W_3(t) \sin \frac{3\pi x}{L} \sin \frac{y}{R} \quad (۴-۱)$$

$$w_0(x, y) = \mu h \left(\sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{y}{R} + \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{3y}{R} + \sin \frac{3\pi x}{L} \sin \frac{y}{R} \right)$$

که $W_1(t)$ ، $W_2(t)$ و $W_3(t)$ به ترتیب دامنه های مجهول وابسته به زمان سه مود برجسته اول و $\sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{y}{R}$ ، $\sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{3y}{R}$ و $\sin \frac{3\pi x}{L} \sin \frac{y}{R}$ به ترتیب توابع شکل سه مود برجسته اول می باشد. با جایگزینی معادله (۴-۱) در معادله (۲-۳) و ساده سازی آن و حل معادله حاصل، تابع مجهول φ به صورت رابطه (۴-۲) حاصل می شود:

$$\varphi = F_1 \cos \frac{2y}{R} + F_2 \cos \frac{4y}{R} + F_3 \cos \frac{2\pi x}{L} + F_4 \cos \frac{4\pi x}{L} \quad (۴-۲)$$

$$\begin{aligned}
 &+F_5 \cos\left(\frac{-4\pi Rx + 4Ly}{LR}\right) + F_6 \cos\left(\frac{4\pi Rx + 2Ly}{LR}\right) \\
 &+F_7 \cos\left(\frac{4\pi Rx + 4Ly}{LR}\right) + F_8 \cos\left(\frac{-\pi Rx + Ly}{LR}\right) \\
 &+F_9 \cos\left(\frac{\pi Rx + Ly}{LR}\right) + F_{10} \cos\left(\frac{-\pi Rx + 3Ly}{LR}\right) \\
 &+F_{11} \cos\left(\frac{\pi Rx + 3Ly}{LR}\right) + F_{12} \cos\left(\frac{-3\pi Rx + Ly}{LR}\right) \\
 &+F_{13} \cos\left(\frac{3\pi Rx + Ly}{LR}\right) + F_{14} \cos\left(\frac{6\pi Rx + 2Ly}{LR}\right) \\
 &+F_{15} \cos\left(\frac{-4\pi Rx + 2Ly}{LR}\right) + F_{16} \cos\left(\frac{-2\pi Rx + 2Ly}{LR}\right) \\
 &+F_{17} \cos\left(\frac{2\pi Rx + 2Ly}{LR}\right) + F_{18} \cos\left(\frac{-2\pi Rx + 4Ly}{LR}\right) \\
 &+F_{19} \cos\left(\frac{-2\pi Rx + 6Ly}{LR}\right) + F_{20} \cos\left(\frac{2\pi Rx + 6Ly}{LR}\right) \\
 &+F_{21} \cos\left(\frac{-6\pi Rx + 2Ly}{LR}\right) + F_{22} \cos\left(\frac{2\pi Rx + 4Ly}{LR}\right) \\
 &+F_{23}x^4 + N_{y0}\frac{x^2}{2} + N_{x0}\frac{y^2}{2}
 \end{aligned}$$

که ضرایب F_i و F_{ij} توابعی از π ، R ، L ، J_{ij}^* ، A_{ij}^* ، μ ، $W_1(t)$ ، $W_2(t)$ و $W_3(t)$ می‌باشد و با توجه به اینکه این ضرایب خیلی حجیم هستند، لذا از آوردن آن‌ها در این رساله صرف‌نظر شده است. با جایگزینی معادلات (۱-۴) و (۲-۴) در معادله (۲-۱۰) و با استفاده از معادله (۲-۸)، رابطه (۳-۴) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 N_{y0} = & \frac{1}{24L^2R^2I_{22}^*} [-2L^2R^2\pi^2W_1^2 + \mu h(R^2\pi^2 + L^2)W_1 - 18L^2R^2\pi^2W_2^2 \\
 & + 162\mu h\left(\frac{1}{9}R^2\pi^2 + L^2\right)W_2 - 18L^2R^2\pi^2W_3^2 + \mu h(9R^2\pi^2 + L^2)W_3 \\
 & + 6L^2R^2\mu h(W_1 + 9W_2 + W_3) + \frac{1}{2}W_1^2 + \frac{9}{2}W_2^2 + \frac{1}{2}W_3^2] - \frac{(I_{12}^* - I_{22}^*)}{I_{22}^*}\phi_1
 \end{aligned} \quad (۳-۴)$$

اگر معادله (۳۲-۲) به صورت $\Gamma = 0$ در نظر گرفته شود، روش گالرکین در بازه $0 \leq x \leq L$ و

$0 \leq y \leq 2\pi R$ به صورت رابطه (۴-۴) نوشته می‌شود:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{y}{R} \Gamma dy dx = 0 \quad (۴-۴)$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{3y}{R} \Gamma dy dx = 0$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} \sin \frac{3\pi x}{L} \sin \frac{y}{R} \Gamma dy dx = 0$$

پس از جایگزینی معادلات (۵-۳)، (۶-۳) و (۱-۴)-(۳-۴) در معادله (۲-۳۲)، نتیجه را در معادله (۴-۴)

(۴) جایگذاری نموده و پس از محاسبه و ساده‌سازی، معادله حرکت معمولی پوسته استوانه‌ای به صورت

رابطه (۵-۴) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \ddot{W}_1 + 2c\dot{W}_1 + \omega_{11}^2 W_1 + L_{11}W_1^3 + L_{12}W_1^2 + L_{13}W_1^2 W_2 + L_{14}W_1^2 W_3 \\ + L_{15}W_2^3 + L_{16}W_2^2 + L_{17}W_1 W_2^2 + L_{18}W_3 W_2^2 + L_{19}W_3^3 + L_{110}W_3^2 \\ + L_{111}W_1 W_3^2 + L_{112}W_2 W_3^2 + L_{113}W_1 W_2 W_3 + L_{114}W_2 + L_{115}W_3 \\ + L_{116}W_1 W_2 + L_{117}W_1 W_3 + L_{118}W_2 W_3 + \bar{f}_{11} \cos \Omega_2 t W_1 = \bar{f}_{12} \cos \Omega_1 t \\ \ddot{W}_2 + 2c\dot{W}_2 + \omega_{22}^2 W_2 + L_{21}W_1^3 + L_{22}W_1^2 + L_{23}W_1^2 W_2 + L_{24}W_1^2 W_3 \\ + L_{25}W_2^3 + L_{26}W_2^2 + L_{27}W_3^2 + L_{28}W_1 W_3^2 + L_{29}W_2 W_3^2 \\ + L_{210}W_1 W_2 W_3 + L_{211}W_1 + L_{212}W_3 + L_{213}W_1 W_2 + L_{214}W_1 W_3 \\ + L_{215}W_2 W_3 + \bar{f}_{21} \cos \Omega_2 t W_2 = \bar{f}_{22} \cos \Omega_1 t \\ \ddot{W}_3 + 2c\dot{W}_3 + \omega_{33}^2 W_3 + L_{31}W_1^3 + L_{32}W_1^2 + L_{33}W_1^2 W_2 + L_{34}W_1^2 W_3 \\ + L_{35}W_2^2 + L_{36}W_1 W_2^2 + L_{37}W_3 W_2^2 + L_{38}W_3^3 + L_{39}W_3^2 + L_{310}W_1 W_3^2 \\ + L_{311}W_1 W_2 W_3 + L_{312}W_1 + L_{313}W_2 + L_{314}W_1 W_2 + L_{315}W_1 W_3 \\ + L_{316}W_2 W_3 + \bar{f}_{31} \cos \Omega_2 t W_3 = \bar{f}_{32} \cos \Omega_1 t \end{aligned} \quad (5-4)$$

که ضرایب $\bar{f}_{ij}$ ، ω_{ii} ، L_i ، L_{ij} و L_{ijk} تابعی از π ، R ، L ، J_{ij}^* ، A_{ij}^* ، A_{ij}^{**} ، μ ، ρ_1 ، k_w ، k_s و k_{nl} می‌باشد

و با توجه به اینکه این ضرایب خیلی حجیم هستند، لذا از آوردن آن‌ها در این رساله صرف نظر شده

است. رابطه (۵-۴)، معادله دیفرانسیل معمولی برای پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با

نقص اولیه، احاطه شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی و تحت تحریک

خارجی و پارامتریک بر اساس سه مود برجسته اول می‌باشد. در صورتیکه پوسته بدون نقص اولیه و

تنها تحت تحریک خارجی باشد، رابطه (۵-۴) به صورت رابطه (۶-۴) ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{W}_1 + 2c\dot{W}_1 + \omega_1^2 W_1 + g_{11}W_1^3 + g_{12}W_1^2 W_2 + g_{13}W_1^2 W_3 + g_{14}W_1 W_2^2 \\ + g_{15}W_1 W_2 W_3 + g_{16}W_1 W_3^2 + g_{17}W_2^2 W_3 + g_{18}W_2 W_3^2 + g_{19}W_3^3 \\ + g_{110}W_1 W_2 + g_{111}W_1 W_3 = f_1 \cos \Omega_1 t \end{aligned} \quad (6-4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{W}_2 + 2c\dot{W}_2 + \omega_2^2 W_2 + g_{21}W_1^3 + g_{22}W_1^2 W_2 + g_{23}W_1^2 W_3 + g_{24}W_1 W_2 W_3 \\ + g_{25}W_1 W_3^2 + g_{26}W_2^3 + g_{27}W_2^2 W_3 + g_{28}W_1^2 + g_{29}W_1 W_3 = f_2 \cos \Omega_1 t \\ \ddot{W}_3 + 2c\dot{W}_3 + \omega_3^2 W_3 + g_{31}W_1^3 + g_{32}W_1^2 W_2 + g_{33}W_1^2 W_3 + g_{34}W_1 W_2^2 \\ + g_{35}W_1 W_2 W_3 + g_{36}W_1 W_3^2 + g_{37}W_2^2 W_3 + g_{38}W_3^3 + g_{39}W_1^2 \\ + g_{310}W_1 W_2 = f_3 \cos \Omega_1 t \end{aligned}$$

که ضرایب f_i ، ω_i و g_{ijk} در پیوست (ج) ارائه شده است. رابطه (۴-۶)، معادله دیفرانسیل معمولی برای پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی و تحت تحریک خارجی بر اساس سه مود برجسته اول می‌باشد.

۴-۳- حل معادلات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس چندمود

در این قسمت در ابتدا به تحلیل‌های تشدید داخلی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی و تحت تحریک خارجی با توجه به معادله پوسته بر اساس سه مود برجسته اول، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه پرداخته شده است و سپس تحلیل‌های تشدید داخلی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با نقص اولیه، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی و تحت تحریک خارجی و پارامتریک، مورد بررسی قرار گرفته است.

۴-۳-۱- تحلیل روش مقیاس‌های چندگانه

برای بدست آوردن پاسخ ارتعاشی معادله (۴-۵) و یا (۴-۶)، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شده است. لذا در این روش فرض می‌شود که پاسخ معادله (۴-۵) و یا (۴-۶) را بتوان به صورت سری زیر نمایش داد:

$$W_j(t, \epsilon) = W_{j0}(T_0, T_1) + \epsilon W_{j1}(T_0, T_1) + \dots \quad (۷-۴)$$

که $j = 1, 2, 3$ و متغیرهای زمانی مستقل جدید T_0 و T_1 به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$T_n = \epsilon^n t; \quad n = 0, 1 \quad (۸-۴)$$

۴-۳-۲- تشدید فروهارمونیک ۱/۳ و تشدید داخلی ۱:۳:۹

در این قسمت به تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی، تحت تحریک خارجی شامل تشدید فروهارمونیک ۱/۳ و تشدید داخلی ۱:۳:۹ پرداخته شده است؛ بنابراین پارامترهای تنظیم به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Omega_1 = 3\omega_1 + \epsilon\sigma_1; \omega_2 = 3\omega_1 + \epsilon\sigma_2; \omega_3 = 9\omega_1 + \epsilon\sigma_3 \quad (۹-۴)$$

که در رابطه (۹-۴)، $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ پارامترهای تنظیم می‌باشند. با جایگذاری روابط (۷-۴)-(۹-۴) در

رابطه (۶-۴) و برابر صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف از ϵ روابط زیر حاصل می‌شود:

ϵ^0 :

$$\begin{aligned} D_0^2 W_{10} + \omega_1^2 W_{10} &= 0 \\ D_0^2 W_{20} + 9\omega_1^2 W_{20} &= 0 \\ D_0^2 W_{30} + 81\omega_1^2 W_{30} &= 0 \end{aligned} \quad (۱۰-۴)$$

ϵ :

$$\begin{aligned} D_0^2 W_{11} + \omega_1^2 W_{11} &= -2D_0 D_1 W_{10} - 2cD_0 W_{10} - \sigma_1 W_{10} - g_{11} W_{10}^3 \\ &\quad - g_{12} W_{10}^2 W_{20} - g_{13} W_{10}^2 W_{30} - g_{14} W_{10} W_{20}^2 - g_{15} W_{10} W_{20} W_{30} \\ &\quad - g_{16} W_{10} W_{30}^2 - g_{17} W_{20}^2 W_{30} - g_{18} W_{20} W_{30}^2 - g_{19} W_{30}^3 \\ &\quad - g_{110} W_{10} W_{20} - g_{111} W_{10} W_{30} + f_1 \cos \Omega_1 t \\ D_0^2 W_{21} + 9\omega_1^2 W_{21} &= -2D_0 D_1 W_{20} - 2cD_0 W_{20} - 3\sigma_2 W_{20} - g_{21} W_{10}^3 \\ &\quad - g_{22} W_{10}^2 W_{20} - g_{23} W_{10}^2 W_{30} - g_{24} W_{10} W_{20} W_{30} - g_{25} W_{10} W_{30}^2 \\ &\quad - g_{26} W_{20}^3 - g_{27} W_{20}^2 W_{30} - g_{28} W_{10}^2 - g_{29} W_{10} W_{30} + f_2 \cos \Omega_1 t \\ D_0^2 W_{31} + 81\omega_1^2 W_{31} &= -2D_0 D_1 W_{30} - 2cD_0 W_{30} - 9\sigma_3 W_{30} - g_{31} W_{10}^3 \\ &\quad - g_{32} W_{10}^2 W_{20} - g_{33} W_{10}^2 W_{30} - g_{34} W_{10} W_{20}^2 - g_{35} W_{10} W_{20} W_{30} \\ &\quad - g_{36} W_{10} W_{30}^2 - g_{37} W_{20}^2 W_{30} - g_{38} W_{30}^3 - g_{39} W_{10}^2 - g_{310} W_{10} W_{20} \\ &\quad + f_3 \cos \Omega_1 t \end{aligned} \quad (۱۱-۴)$$

پاسخ معادله (۱۰-۴) عبارت است از:

$$\begin{aligned} W_{10} &= A_1(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1(T_1)e^{-i\omega_1 T_0} \\ W_{20} &= A_2(T_1)e^{3\omega_1 i T_0} + \bar{A}_2(T_1)e^{-3\omega_1 i T_0} \\ W_{30} &= A_3(T_1)e^{9\omega_1 i T_0} + \bar{A}_3(T_1)e^{-9\omega_1 i T_0} \end{aligned} \quad (۱۲-۴)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲-۴) در رابطه (۱۱-۴)، رابطه (۱۳-۴) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 D_0^2 W_{11} + \omega_1^2 W_{11} &= -(2\omega_1 D_1 A_1 i + 2\omega_1 c A_1 i + \sigma_1 A_1 + 3g_{11} A_1^2 \bar{A}_1 \\
 &+ 2g_{14} A_2 \bar{A}_2 A_1 + 2g_{16} A_3 \bar{A}_3 A_1 + g_{12} A_2 \bar{A}_1^2) e^{i\omega_1 T_0} \\
 &+ c.c. + NST \\
 D_0^2 W_{21} + 9\omega_1^2 W_{21} &= - \left(6\omega_1 D_1 A_2 i + 6\omega_1 c A_2 i + 9\sigma_2 A_2 + 3g_{26} A_2^2 \bar{A}_2 \right. \\
 &+ 2g_{22} A_1 \bar{A}_1 A_2 + 2g_{27} A_3 \bar{A}_2^2 + g_{21} A_1^3 - \frac{1}{2} f_2 \left. \right) e^{3\omega_1 i T_0} \\
 &+ c.c. + NST
 \end{aligned} \tag{۱۳-۴}$$

$$\begin{aligned}
 D_0^2 W_{31} + 81\omega_1^2 W_{31} &= -(18\omega_1 D_1 A_3 i + 18\omega_1 c A_3 i + 81\sigma_3 A_3 + 3g_{38} A_3^2 \bar{A}_3 \\
 &+ 2g_{37} A_2 \bar{A}_2 A_3 + 2g_{33} A_1 \bar{A}_1 A_3) e^{9\omega_1 i T_0} + c.c. + NST
 \end{aligned}$$

که در رابطه (۱۳-۴)، c.c. مزدوج مختلط و NST مشخص کننده جملات غیر سکولار می باشد. برای حذف جملات سکولار در پاسخ روابط (۱۳-۴)، ضرایب $e^{i\omega_1 T_0}$ ، $e^{3\omega_1 i T_0}$ و $e^{9\omega_1 i T_0}$ به صورت زیر برابر صفر قرار داده می شود:

$$\begin{aligned}
 D_1 A_1 &= -\mu A_1 + \frac{1}{2\omega_1} \left(\sigma_1 A_1 + 3g_{11} A_1^2 \bar{A}_1 + 2g_{14} A_2 \bar{A}_2 A_1 + 2g_{16} A_3 \bar{A}_3 A_1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} g_{110} A_2 \bar{A}_1 + g_{12} A_2 \bar{A}_1^2 \right) i \\
 D_1 A_2 &= -\mu A_2 + \frac{1}{6\omega_1} \left(9\sigma_2 A_2 + 3g_{26} A_2^2 \bar{A}_2 + 2g_{22} A_1 \bar{A}_1 A_2 + 2g_{27} A_3 \bar{A}_2^2 \right. \\
 &\quad \left. + g_{21} A_1^3 + \frac{1}{2} f_2 \right) i \\
 D_1 A_3 &= -\mu A_3 + \frac{1}{18\omega_1} (81\sigma_3 A_3 + 3g_{38} A_3^2 \bar{A}_3 + 2g_{37} A_2 \bar{A}_2 A_3 \\
 &\quad + 2g_{33} A_1 \bar{A}_1 A_3) i
 \end{aligned} \tag{۱۴-۴}$$

برای حل رابطه (۱۴-۴)، $A_i (i = 1, 2, 3)$ به صورت زیر فرض می شود:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= x_1 + ix_2 \\
 A_2 &= x_3 + ix_4 \\
 A_3 &= x_5 + ix_6
 \end{aligned} \tag{۱۵-۴}$$

که در رابطه (۱۵-۴)، $x_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ توابع مربوط به دامنه و فاز ارتعاشات غیرخطی پوسته هستند. با جایگذاری رابطه (۱۵-۴) در رابطه (۱۴-۴) و جدا کردن قسمت های حقیقی و موهومی و

برابر صفر قرار دادن آن‌ها رابطه (۱۶-۴) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -cx_1 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{1}{2}\sigma_1 x_2 - \frac{3}{2}g_{11}x_1^2 x_2 - \frac{3}{2}g_{11}x_2^3 - g_{14}x_3^2 x_2 - g_{14}x_4^2 x_2 \right. \\
&\quad - g_{16}x_5^2 x_2 - g_{16}x_6^2 x_2 - \frac{1}{2}g_{12}x_1^2 x_4 + g_{12}x_1 x_2 x_3 \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}g_{12}x_2^2 x_4 \right) \\
\dot{x}_2 &= -cx_2 + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{2}\sigma_1 x_1 + \frac{3}{2}g_{11}x_2^2 x_1 + \frac{3}{2}g_{11}x_1^3 + g_{14}x_3^2 x_1 + g_{14}x_4^2 x_1 \right. \\
&\quad + g_{16}x_5^2 x_1 + g_{16}x_6^2 x_1 - \frac{1}{2}g_{12}x_2^2 x_3 + g_{12}x_1 x_2 x_4 \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}g_{12}x_1^2 x_3 \right) \\
\dot{x}_3 &= -cx_3 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{3}{2}\sigma_2 x_4 - \frac{1}{2}g_{26}x_4^3 - \frac{1}{3}g_{22}x_2^2 x_4 - \frac{1}{3}g_{22}x_1^2 x_4 \right. \\
&\quad - \frac{1}{6}g_{27}x_3^2 x_6 + \frac{1}{6}g_{27}x_4^2 x_6 - \frac{1}{2}g_{26}x_3^2 x_4 + \frac{1}{6}g_{21}x_2^3 \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}g_{21}x_1^2 x_2 + \frac{1}{3}g_{27}x_3 x_4 x_5 \right) \tag{۱۶-۴} \\
\dot{x}_4 &= -cx_4 + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{3}{2}\sigma_2 x_3 + \frac{1}{2}g_{26}x_3^3 + \frac{1}{3}g_{22}x_1^2 x_3 + \frac{1}{3}g_{22}x_2^2 x_3 - \frac{1}{6}g_{27}x_4^2 x_5 \right. \\
&\quad + \frac{1}{6}g_{27}x_3^2 x_5 + \frac{1}{2}g_{26}x_4^2 x_3 + \frac{1}{6}g_{21}x_1^3 - \frac{1}{2}g_{21}x_2^2 x_1 \\
&\quad \left. + \frac{1}{3}g_{27}x_3 x_4 x_6 + \frac{1}{12}f_2 \right) \\
\dot{x}_5 &= -cx_5 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{9}{2}\sigma_3 x_6 - \frac{1}{6}g_{38}x_6^3 - \frac{1}{6}g_{38}x_5^2 x_6 - \frac{1}{9}g_{33}x_2^2 x_6 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{9}g_{33}x_1^2 x_6 - \frac{1}{9}g_{37}x_3^2 x_6 - \frac{1}{9}g_{37}x_4^2 x_6 \right) \\
\dot{x}_6 &= -cx_6 + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{9}{2}\sigma_3 x_5 + \frac{1}{6}g_{38}x_5^3 + \frac{1}{6}g_{38}x_6^2 x_5 + \frac{1}{9}g_{33}x_2^2 x_5 + \frac{1}{9}g_{33}x_1^2 x_5 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{9}g_{37}x_3^2 x_5 + \frac{1}{9}g_{37}x_4^2 x_5 \right)
\end{aligned}$$

۳-۳-۴- ارتعاشات غیرخطی پوسته با تشدید فراهارمونیک ۲/۱ و تشدید داخلی ۱/۴: ۱/۲

در این قسمت به تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی، تحت تحریک خارجی شامل تشدید فراهارمونیک ۲/۱ و تشدید داخلی ۱/۴: ۱/۲ پرداخته شده است. مشابه قسمت قبلی، در این قسمت نیز عمل می‌شود؛ بنابراین پارامترهای تنظیم به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}\omega_1 + \epsilon\sigma_1; \omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1 + \epsilon\sigma_2; \omega_3 = \frac{1}{4}\omega_1 + \epsilon\sigma_3 \quad (۱۷-۴)$$

سپس روابط (۷-۴)، (۸-۴) و (۱۷-۴) در رابطه (۶-۴) جایگذاری نموده و ضرایب توان‌های مختلف از ϵ را برابر صفر قرار می‌دهیم. سپس پاسخ ضرایب ϵ^0 را در ضرایب ϵ جایگذاری نموده و با برابر صفر قرار دادن جملات سکولار، معادله حل‌پذیری بدست می‌آید. درنهایت با جایگذاری رابطه (۱۵-۴) در معادله حل‌پذیری و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها رابطه (۴-۱۸) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -cx_1 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{1}{2}\sigma_1x_2 + \frac{3}{2}g_{11}x_1^2x_2 + \frac{3}{2}g_{11}x_2^3 - g_{14}x_3^2x_2 - g_{14}x_4^2x_2 \right. \\ & - g_{16}x_5^2x_2 - g_{16}x_6^2x_2 - \frac{1}{2}g_{18}x_5^2x_4 - g_{18}x_5x_6x_3 \\ & \left. + \frac{1}{2}g_{18}x_6^2x_4 \right) \\ \dot{x}_2 = & -cx_2 + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{2}\sigma_1x_1 - \frac{3}{2}g_{11}x_2^2x_1 - \frac{3}{2}g_{11}x_1^3 + g_{14}x_3^2x_1 + g_{14}x_4^2x_1 \right. \\ & + g_{16}x_6^2x_1 + g_{16}x_5^2x_1 + \frac{1}{2}g_{18}x_5^2x_3 - g_{18}x_5x_6x_4 \\ & \left. - \frac{1}{2}g_{18}x_6^2x_3 \right) \\ \dot{x}_3 = & -cx_3 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{1}{4}\sigma_2x_4 - 3g_{26}x_4^3 - 2g_{22}x_2^2x_4 - 2g_{22}x_1^2x_4 - 3g_{26}x_3^2x_4 \right. \\ & \left. + g_{25}x_6^2x_2 - g_{25}x_5^2x_2 + 2g_{25}x_1x_5x_6 \right) \\ \dot{x}_4 = & -cx_4 + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{4}\sigma_2x_3 + 3g_{26}x_3^3 + 2g_{22}x_1^2x_3 + 2g_{22}x_2^2x_3 + 3g_{26}x_4^2x_3 \right. \\ & \left. - g_{25}x_6^2x_1 + g_{25}x_5^2x_1 + 2g_{25}x_2x_5x_6 + \frac{1}{2}f_2 \right) \end{aligned} \quad (۱۸-۴)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_5 &= -cx_5 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{1}{8}\sigma_3x_6 - 6g_{38}x_6^3 - 6g_{38}x_5^2x_6 - 4g_{33}x_2^2x_6 - 4g_{33}x_1^2x_6 \right. \\ &\quad \left. + 2g_{35}x_1x_3x_6 + 2g_{35}x_1x_4x_5 - 2g_{35}x_2x_3x_5 - 2g_{35}x_2x_4x_6 \right) \\ \dot{x}_6 &= -cx_6 + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{8}\sigma_3x_5 + 6g_{38}x_5^3 + 6g_{38}x_6^2x_5 + 4g_{33}x_2^2x_5 + 4g_{33}x_1^2x_5 \right. \\ &\quad \left. + 2g_{35}x_2x_3x_6 + 2g_{35}x_2x_4x_5 + 2g_{35}x_1x_3x_5 - 2g_{35}x_1x_4x_6 \right)\end{aligned}$$

۴-۳-۴- ارتعاشات غیرخطی پوسته با تشدید فراهارمونیک ۳/۱ و تشدید داخلی ۱/۹: ۱/۳

در این قسمت به تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی، تحت تحریک خارجی شامل تشدید فراهارمونیک ۳/۱ و تشدید داخلی ۱/۹: ۱/۳ پرداخته شده است؛ بنابراین پارامترهای تنظیم به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Omega_1 = \frac{1}{3}\omega_1 + \epsilon\sigma_1; \omega_2 = \frac{1}{3}\omega_1 + \epsilon\sigma_2; \omega_3 = \frac{1}{9}\omega_1 + \epsilon\sigma_3 \quad (۱۹-۴)$$

مشابه قسمت‌های قبلی، روابط (۷-۴)، (۸-۴) و (۱۹-۴) در رابطه (۴-۶) جایگذاری نموده و

ضرایب توان‌های مختلف از ϵ را برابر صفر قرار می‌دهیم. سپس پاسخ ضرایب ϵ^0 را در ضرایب ϵ جایگذاری نموده و با برابر صفر قرار دادن جملات سکولار، معادله حل‌پذیری بدست می‌آید. درنهایت با جایگذاری رابطه (۱۵-۴) در معادله حل‌پذیری و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها رابطه (۲۰-۴) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -cx_1 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{1}{2}\sigma_1x_2 - \frac{3}{2}g_{11}x_1^2x_2 - \frac{3}{2}g_{11}x_2^3 - g_{14}x_3^2x_2 - g_{14}x_4^2x_2 \right. \\ &\quad \left. - g_{16}x_5^2x_2 - g_{16}x_6^2x_2 \right) \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{2}\sigma_1x_1 + \frac{3}{2}g_{11}x_2^2x_1 + \frac{3}{2}g_{11}x_1^3 + g_{14}x_3^2x_1 + g_{14}x_4^2x_1 \right. \\ &\quad \left. + g_{16}x_6^2x_1 + g_{16}x_5^2x_1 \right) \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{1}{6}\sigma_2x_4 - \frac{9}{2}g_{26}x_4^3 - 3g_{22}x_2^2x_4 - 3g_{22}x_1^2x_4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{2}g_{26}x_3^2x_4 \right)\end{aligned} \quad (۲۰-۴)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_4 &= -cx_4 + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{6} \sigma_2 x_3 + \frac{9}{2} g_{26} x_3^3 + 3g_{22} x_1^2 x_3 + 3g_{22} x_2^2 x_3 + \frac{9}{2} g_{26} x_4^2 x_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} f_2 \right) \\ \dot{x}_5 &= -cx_5 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{1}{18} \sigma_3 x_6 - \frac{27}{2} g_{38} x_6^3 - \frac{27}{2} g_{38} x_5^2 x_6 - 9g_{33} x_2^2 x_6 \right. \\ &\quad \left. - 9g_{33} x_1^2 x_6 - 9g_{37} x_3^2 x_6 - 9g_{37} x_4^2 x_6 \right) \\ \dot{x}_6 &= -cx_6 + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1}{18} \sigma_3 x_5 + \frac{27}{2} g_{38} x_5^3 + \frac{27}{2} g_{38} x_6^2 x_5 + 9g_{33} x_2^2 x_5 \right. \\ &\quad \left. + 9g_{33} x_1^2 x_5 + 9g_{37} x_3^2 x_5 + 9g_{37} x_4^2 x_5 \right)\end{aligned}$$

۴-۳-۵- ارتعاشات غیرخطی پوسته با تشدید فروهارمونیک ۱/۲، تشدید پارامتریک اصلی و تشدید داخلی ۱:۲:۴

در این قسمت به تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با نقص اولیه، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی و تحت تحریک خارجی و پارامتریک شامل تشدید فروهارمونیک ۱/۲، تشدید پارامتریک اصلی و تشدید داخلی ۱:۲:۴ پرداخته شده است؛ بنابراین پارامترهای تنظیم به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega; \quad \Omega = 2\omega_1 + \epsilon\sigma_1; \quad \omega_2 = 2\omega_1 + \epsilon\sigma_2; \quad \omega_3 = 4\omega_1 + \epsilon\sigma_3 \quad (۲۱-۴)$$

مشابه قسمت‌های قبلی، روابط (۷-۴)، (۸-۴) و (۲۱-۴) در رابطه (۵-۴) جایگذاری نموده و

ضرایب توان‌های مختلف از ϵ را برابر صفر قرار می‌دهیم. سپس پاسخ ضرایب ϵ^0 را در ضرایب ϵ

جایگذاری نموده و با برابر صفر قرار دادن جملات سکولار، معادله حل‌پذیری بدست می‌آید. درنهایت

با جایگذاری رابطه (۱۵-۴) در معادله حل‌پذیری و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی و برابر

صفر قرار دادن آن‌ها رابطه (۲۲-۴) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -cx_1 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\sigma_1 x_2 - \frac{3}{2} L_{111} x_2^3 - L_{17} x_3^2 x_2 - L_{17} x_4^2 x_2 - L_{111} x_5^2 x_2 \right. \\
&\quad - L_{111} x_6^2 x_2 - \frac{3}{2} L_{111} x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} L_{113} x_2 x_4 x_6 + \frac{1}{2} L_{113} x_1 x_4 x_5 \\
&\quad + \frac{1}{2} L_{113} x_2 x_3 x_5 - \frac{1}{2} L_{113} x_1 x_3 x_6 - \frac{1}{2} L_{117} x_1 x_4 + \frac{1}{2} L_{117} x_2 x_3 \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \bar{f}_{11} x_2 - \frac{1}{2} \bar{L}_{11} \Delta T x_2 \right) \\
\dot{x}_2 &= -cx_2 + \frac{1}{\omega_1} \left(\sigma_1 x_1 + \frac{3}{2} L_{111} x_1^3 + L_{17} x_3^2 x_1 + L_{17} x_4^2 x_1 + L_{111} x_5^2 x_1 \right. \\
&\quad + L_{111} x_6^2 x_1 + \frac{3}{2} L_{111} x_2^2 x_1 + \frac{1}{2} L_{113} x_1 x_4 x_6 + \frac{1}{2} L_{113} x_1 x_3 x_5 \\
&\quad + \frac{1}{2} L_{113} x_2 x_3 x_6 - \frac{1}{2} L_{113} x_2 x_4 x_5 + \frac{1}{2} L_{117} x_1 x_3 + \frac{1}{2} L_{117} x_2 x_4 \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \bar{f}_{11} x_1 + \frac{1}{2} \bar{L}_{11} \Delta T x_1 \right) \\
\dot{x}_3 &= -cx_3 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\sigma_2 x_4 - \frac{3}{4} L_{25} x_4^3 - \frac{1}{2} L_{23} x_2^2 x_4 - \frac{1}{2} L_{23} x_1^2 x_4 \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} L_{212} x_5^2 x_4 - \frac{1}{2} L_{212} x_6^2 x_4 - \frac{3}{4} L_{25} x_3^2 x_4 - \frac{1}{4} L_{24} x_1^2 x_6 \\
&\quad + \frac{1}{4} L_{24} x_2^2 x_6 + \frac{1}{2} L_{24} x_1 x_2 x_5 - \frac{1}{2} L_{22} x_1 x_2 - \frac{1}{4} L_{219} x_3 x_6 \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} L_{219} x_4 x_5 - \frac{1}{4} \bar{L}_{22} \Delta T x_4 \right) \tag{22-4} \\
\dot{x}_4 &= -cx_4 + \frac{1}{\omega_1} \left(\sigma_2 x_3 + \frac{3}{4} L_{25} x_3^3 + \frac{1}{2} L_{23} x_2^2 x_3 + \frac{1}{2} L_{23} x_1^2 x_3 + \frac{1}{2} L_{212} x_5^2 x_3 \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} L_{212} x_6^2 x_3 + \frac{3}{4} L_{25} x_4^2 x_3 + \frac{1}{4} L_{24} x_1^2 x_5 - \frac{1}{4} L_{24} x_2^2 x_5 \\
&\quad + \frac{1}{2} L_{24} x_1 x_2 x_6 + \frac{1}{4} L_{22} x_1^2 - \frac{1}{4} L_{22} x_2^2 + \frac{1}{4} L_{219} x_3 x_5 \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} L_{219} x_4 x_6 + \frac{1}{8} \bar{f}_{22} + \frac{1}{4} \bar{L}_{22} \Delta T x_3 \right) \\
\dot{x}_5 &= -cx_5 + \frac{1}{\omega_1} \left(-\sigma_3 x_6 - \frac{3}{8} L_{39} x_6^3 - \frac{3}{8} L_{39} x_5^2 x_6 - \frac{1}{4} L_{34} x_2^2 x_6 - \frac{1}{4} L_{34} x_1^2 x_6 \right. \\
&\quad - \frac{1}{4} L_{38} x_3^2 x_6 - \frac{1}{4} L_{38} x_4^2 x_6 - \frac{1}{8} L_{33} x_1^2 x_4 + \frac{1}{8} L_{33} x_2^2 x_4 \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} L_{33} x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{4} L_{36} x_3 x_4 + \frac{1}{4} L_{219} x_4 x_6 - \frac{1}{8} \bar{L}_{33} \Delta T x_6 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_6 = -cx_6 + \frac{1}{\omega_1} & \left(\sigma_3 x_5 + \frac{3}{8} L_{39} x_5^3 + \frac{3}{8} L_{39} x_6^2 x_5 + \frac{1}{4} L_{34} x_2^2 x_5 + \frac{1}{4} L_{34} x_1^2 x_5 \right. \\ & + \frac{1}{4} L_{38} x_3^2 x_5 + \frac{1}{4} L_{38} x_4^2 x_5 + \frac{1}{8} L_{33} x_1^2 x_3 - \frac{1}{8} L_{33} x_2^2 x_3 \\ & \left. - \frac{1}{4} L_{33} x_1 x_2 x_4 + \frac{1}{8} L_{36} x_3^2 - \frac{1}{8} L_{36} x_4^2 + \frac{1}{8} \bar{L}_{33} \Delta T x_5 \right)\end{aligned}$$

که ضرایب $\bar{L}_{il}$ توابعی از π, R, L, μ و ρ_1 می‌باشد.

فصل ٥ :

نتائج

۵-۱- مقدمه

بعد از تکمیل فرمول‌بندی مسئله و نوشتن کدهای مربوط توسط نرم‌افزارهای متلب^۱ و میپل^۲، در این فصل به بررسی نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت-شده با نقص اولیه، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی و تحت تحریک خارجی و پارامتریک، پرداخته‌شده است. در این قسمت در ابتدا نتایج مربوط به پوسته استوانه‌ای بر اساس تک‌مود و سپس نتایج مربوط به پوسته استوانه‌ای بر اساس چندمود ارائه‌شده که به صورت مجزا آورده شده است. همچنین مقادیر پارامترهای مورد نیاز برای تحلیل ارتعاشات غیرخطی در ابتدای هر قسمت به صورت جدول بیان‌شده است، در صورتی که اندازه پارامتری با جدول‌های ذکرشده متفاوت باشد، اندازه آن در همان قسمت بیان می‌شود.

۵-۲- نتایج حاصل از ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس تک‌مود

در این قسمت به بررسی پاسخ مربوط به پدیده تشدید پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با نقص اولیه و یا بدون نقص اولیه، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی و تحت تحریک خارجی، پرداخته‌شده است. لازم به ذکر است که نتایج حاصل در این قسمت برای پوسته بر اساس تک‌مود (مود بحرانی پوسته استوانه‌ای) می‌باشد. اندازه کلیه پارامترهای مورد نیاز برای تحلیل‌های مربوط به پدیده تشدید در این قسمت به ترتیب در جدول‌های (۵-۱)-(۵-۳) بیان‌شده است.

¹ Matlab

² Maple

جدول (۵-۱) خواص مواد تشکیل دهنده [۴۹]

ماده	خواص	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Si_3N_4 (سرامیک)	E (Pa)	3.48e11	0	-3.07e-4	2.16e-7	-8.95e-11
	ρ (Kg/m ³)	2370	0	0	0	0
	α (K ⁻¹)	5.87e-6	0	9.10e-4	0	0
	κ (W/mK)	13.723	0	-1.03e-3	5.47e-7	-7.88e-11
SUS304 (فلز)	E (Pa)	2.01e11	0	3.08e-4	-6.53e-7	0
	ρ (Kg/m ³)	8166	0	0	0	0
	α (K ⁻¹)	1.23e-5	0	8.09e-4	0	0
	κ (W/mK)	15.379	0	-1.26e-3	2.09e-6	-7.22e-10

جدول (۵-۲) پارامترهای استفاده شده مورد نیاز برای تحلیل های مربوط به پدیده تشدید پوسته استوانه ای [۴۸]

خواص هندسی	مقدار	خواص هندسی	مقدار
h_s	0.01 m	R	0.5 m
d	0.0025 m	L	0.75 m
m	1	h_m	0.003 m
$K_{sh} = K_{st}$	1	$h_u = h_b$	0.001 m

جدول (۵-۳) مشخصات بستر الاستیک خطی و غیرخطی [۴۸]

k_w (kN/m)	k_s (kN/m)	k_w (MN/m ⁵)
500	250	±500

۵-۲-۱- معتبر سازی رهیافت حاضر

برای راستی آزمایی فرمول بندی حاضر، در ابتدا مقایسه بین مطالعه حاضر و کارهای دیگر محققان انجام شده است. سپس علاوه بر این، نتایج تحلیلی بدست آمده در این مطالعه با روش های عددی نیز مقایسه شده است. این دو روش اعتبار سنجی در ادامه شرح داده شده است.

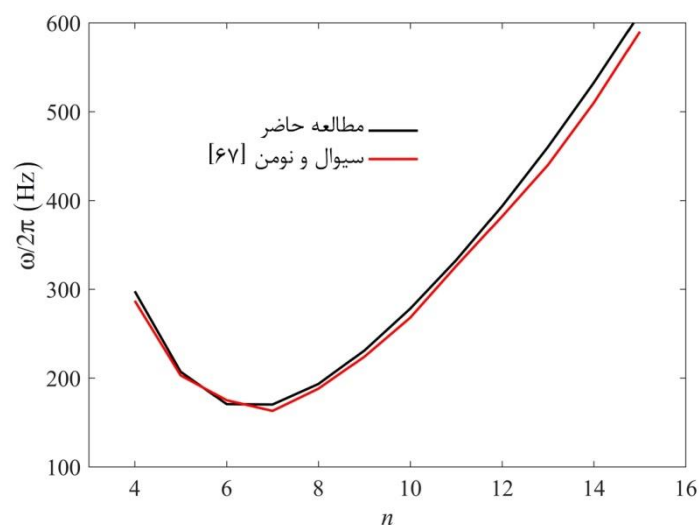
در اولین روش اعتبار سنجی، به منظور راستی آزمایی فرمول بندی موجود در رساله حاضر، فرکانس های طبیعی پوسته های استوانه ای ایزوتروپیک بدون بستر الاستیک با تقویت کننده و بدون تقویت کننده در شکل (۵-۱)-(۵-۳) آورده شده است که با تحلیل سیوال و نومن [۶۷] و سیوال و همکاران [۶۸] مقایسه شده است. که آن ها نتایج خود را به صورت تحلیلی و تجربی بدست آورده اند و این اختلافی که در شکل های (۵-۲) و (۵-۳) با نمودار آبی رنگ مشاهده می شود به این دلیل می باشد که این نمودار به صورت تجربی بدست آمده است. همچنین فرکانس های طبیعی پوسته

استوانه‌ای ایزوتروپیک بدون تقویت‌کننده و بدون بستر الاستیک در جدول (۴-۵) آورده شده است که با نتایج پلیکانو [۶۹] و چین و همکاران [۷۰]، فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک بدون تقویت‌کننده با بستر الاستیک در جدول (۵-۵) آورده شده است که با نتایج صوفیه و همکاران [۷۱] و پالیوال و همکاران [۷۲]، فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک تقویت‌شده بدون بستر الاستیک در جدول (۶-۵) آورده شده است که با نتایج مصطفی و علی [۷۳] و فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده در جدول (۷-۵) آورده شده است که با نتایج دانگ و نام [۴۸] مقایسه شده است. از بررسی نتایج فوق می‌توان دریافت که نتایج حاصل با سایر مراجع هم‌خوانی مناسبی دارد. همچنین رابطه محاسبه درصد اختلاف به‌صورت زیر می‌باشد:

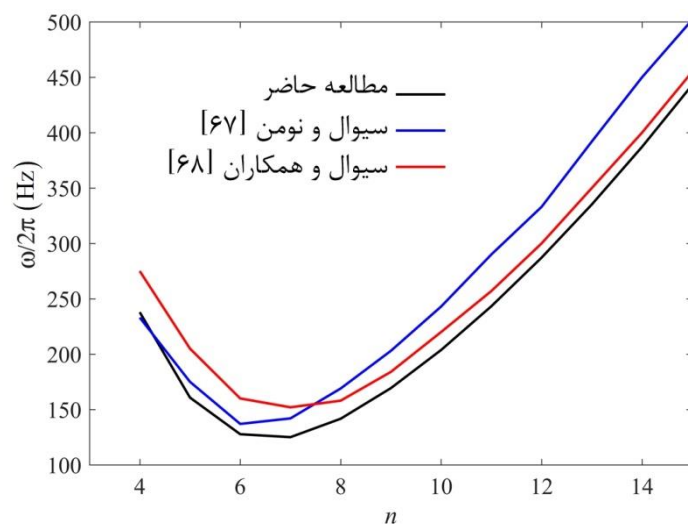
$$(۱-۵) \quad \text{درصد اختلاف} = \frac{\text{مقدار محاسبه شده سایر مراجع} - \text{مقدار محاسبه شده مطالعه حاضر}}{\text{مقدار محاسبه شده مطالعه حاضر}} \times 100$$

همچنین برای تحلیل تشدید اولیه، پاسخ-فرکانس دامنه پوسته متخلخل مدرج تابعی در شکل (۴-۵) نشان داده شده است که با تحلیل گائو و همکاران [۳۸] مقایسه شده است. لازم به توضیح است که برای این مقایسه، رابطه خواص ماده به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

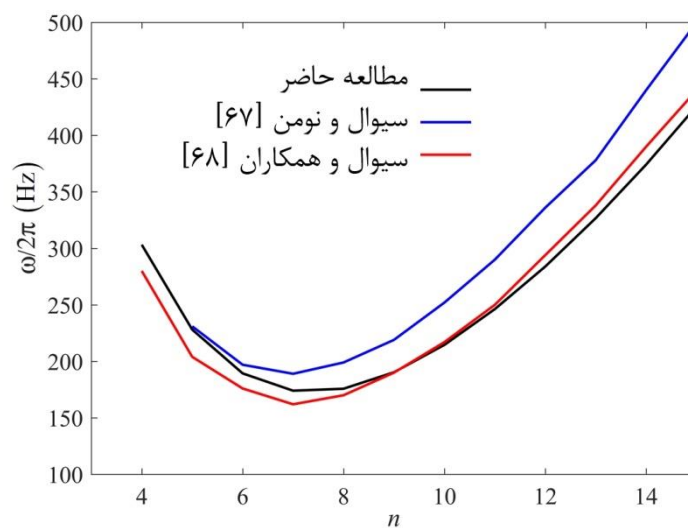
$$(۲-۵) \quad P(z) = P_{\max} \left[1 - N_0 \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right]$$



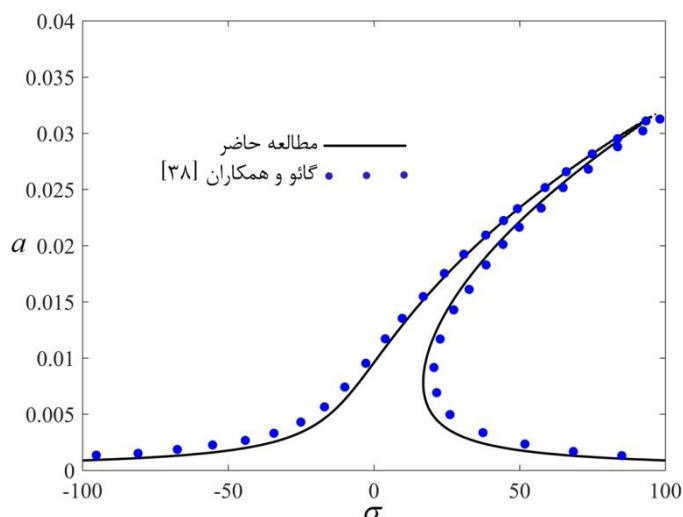
شکل (۱-۵) مقایسه فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک بدون تقویت‌کننده



شکل (۲-۵) مقایسه فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک با تقویت‌کننده خارجی



شکل (۳-۵) مقایسه فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک با تقویت‌کننده داخلی



شکل (۴-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای متخلخل مدرج تابعی

جدول (۴-۵) مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک

$$L = 0.2 \text{ m}, R = 0.1 \text{ m}, h = 0.247 \times 10^{-3} \text{ m}, E =$$

$$(7.12 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \rho = 2796 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.31$$

m	n	مطالعه حاضر	پلیکانو [۶۹]		چین و همکاران [۷۰]	
			درصد اختلاف (%)		درصد اختلاف (%)	
1	7	486.0	484.6	0.28	484.6	0.28
1	8	490.3	489.6	0.14	489.6	0.14
1	9	545.8	546.2	0.07	546.2	0.07
1	6	555.8	553.3	0.44	553.3	0.44
1	10	634.8	636.8	0.31	636.8	0.31
2	10	962.3	968.1	0.60	968.1	0.60
2	11	976.6	983.4	0.69	983.4	0.69

جدول (۵-۵) مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک بدون

تقویت‌کننده با بستر الاستیک

n	مطالعه حاضر	پالیوال و همکاران [۷۲]		صوفیه و همکاران [۷۱]	
		درصد اختلاف (%)		درصد اختلاف (%)	
1	0.67480	0.67882	0.60	0.67921	0.65
2	0.36223	0.36394	0.47	0.36463	0.66
3	0.20670	0.20526	0.70	0.20804	0.65

جدول (۶-۵) مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده

$$L = 0.6096 \text{ m}, R = 0.242 \text{ m}, h = 0.65 \times 10^{-3} \text{ m}, E =$$

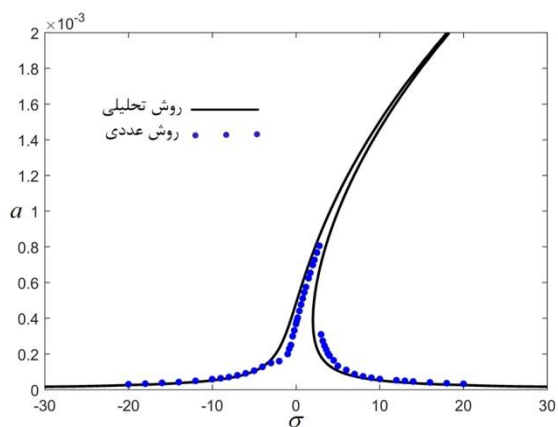
$$(68.95 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \rho = 2714 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.3, n_s = 60$$

(m, n)		مطالعه حاضر	مصطفی و علی [۷۳]	درصد اختلاف (%)
(1,5)		228.1	226.0	0.92
(1,6)		189.4	191.0	0.84
(1,7)		174.0	179.0	2.87

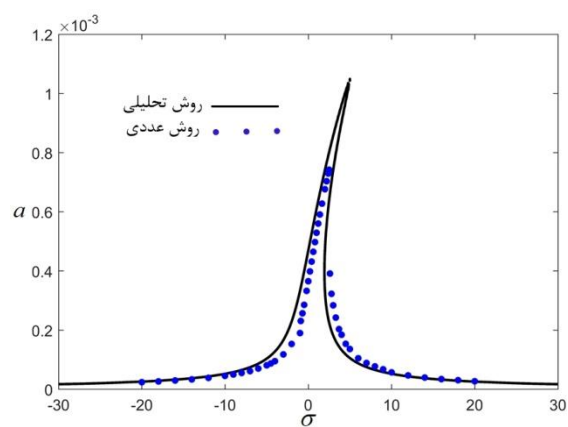
جدول (۷-۵) مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($L = 0.75 \text{ m}, R = 0.5 \text{ m}, R/h = 250, m = 1, E_m = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3, E_c = 38 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.3, d_s = d_r = 0.0025 \text{ m}, h_s = h_r = 0.01 \text{ m}$)

درصد اختلاف (%)	دانگ و نام [۴۸]	مطالعه حاضر
بدون تقویت‌کننده	1654.0	1654.0
با تقویت‌کننده داخلی	2539.4	2539.4

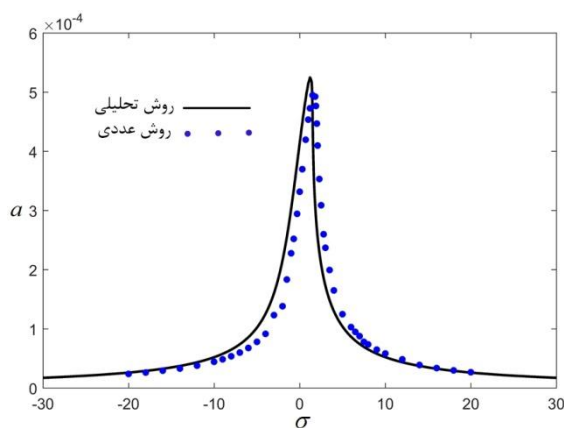
در روش اعتبارسنجی دوم، روش تحلیلی با روش عددی مقایسه شده است. در روش عددی، از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم برای تجزیه و تحلیل معادله (۳-۸) استفاده شده است. شرایط اولیه در حل عددی $W(0) = \dot{W}(0) = 0$ می‌باشد. در این روش، ماکزیمم دامنه‌های مربوط به فرکانس‌های مختلف تحریک مربوط به پاسخ حالت پایای سیستم استخراج شده و رسم می‌شوند. در شکل‌های (۵-۵) منحنی‌های پاسخ فرکانسی تحلیلی و عددی برای تشدیدهای اولیه، فراهارمونیک، ترکیبی و هم‌زمان نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل‌ها نشان داده شده است، نتایج عددی تقریباً مشابه نتایج تحلیلی است. بنابراین، این نتایج نشان می‌دهد که شبیه‌سازی عددی روش تحلیلی را تأیید می‌کند.



الف. $c = 0.2$

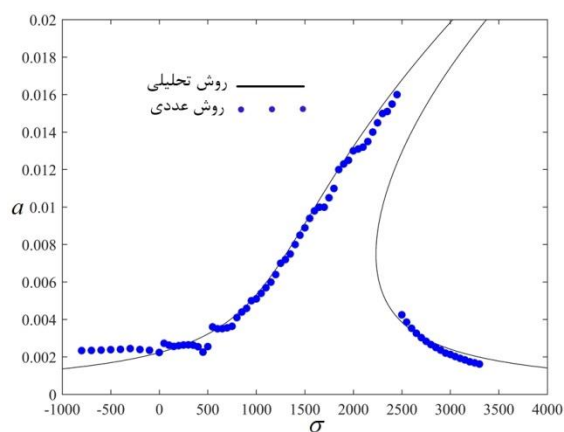


ب. $c = 0.5$

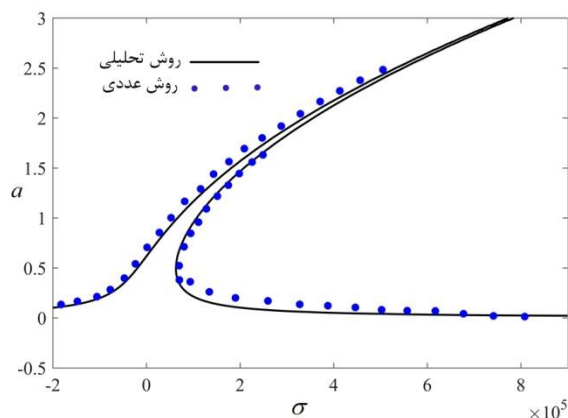


ج. $c = 1$

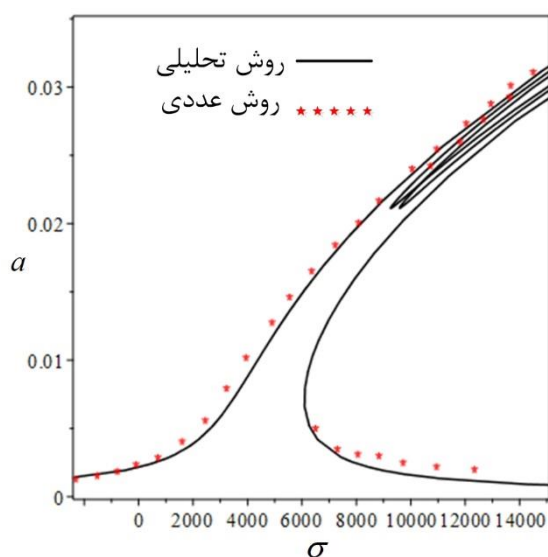
شکل (۵-۵) نمودارهای فرکانس-دامنه بدست آمده برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای با روش‌های عددی و تحلیلی
 $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$



شکل (۶-۵) نمودارهای فرکانس-دامنه بدست آمده برای تشدید فراهارمونیک پوسته استوانه‌ای با روش‌های عددی و تحلیلی
 $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$



شکل (۷-۵) نمودارهای فرکانس-دامنه بدست آمده برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای با روش‌های عددی و تحلیلی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)



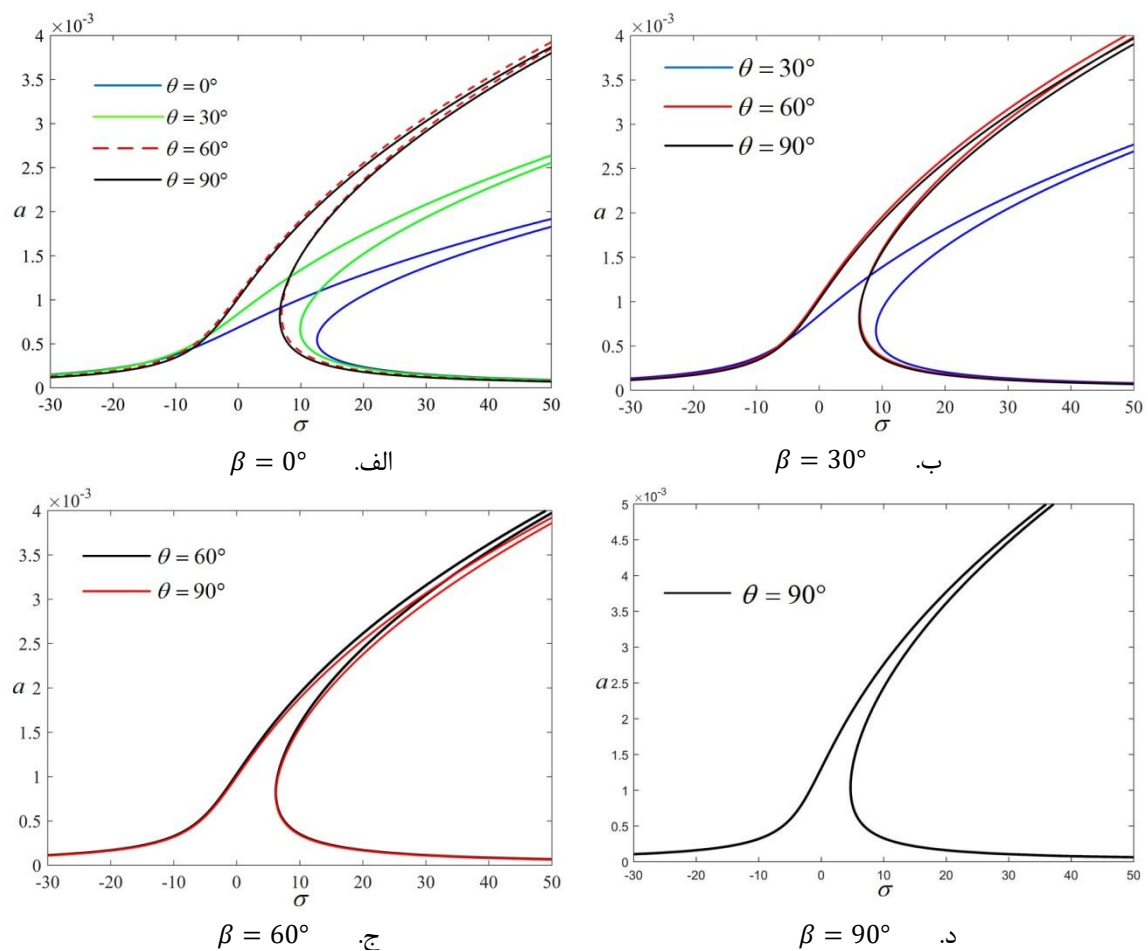
شکل (۸-۵) نمودارهای فرکانس-دامنه بدست آمده برای تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای با روش‌های عددی و تحلیلی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

۵-۲-۲- تحلیل تشدید اولیه

در این بخش، به بررسی تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده پرداخته شده است. در این قسمت تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

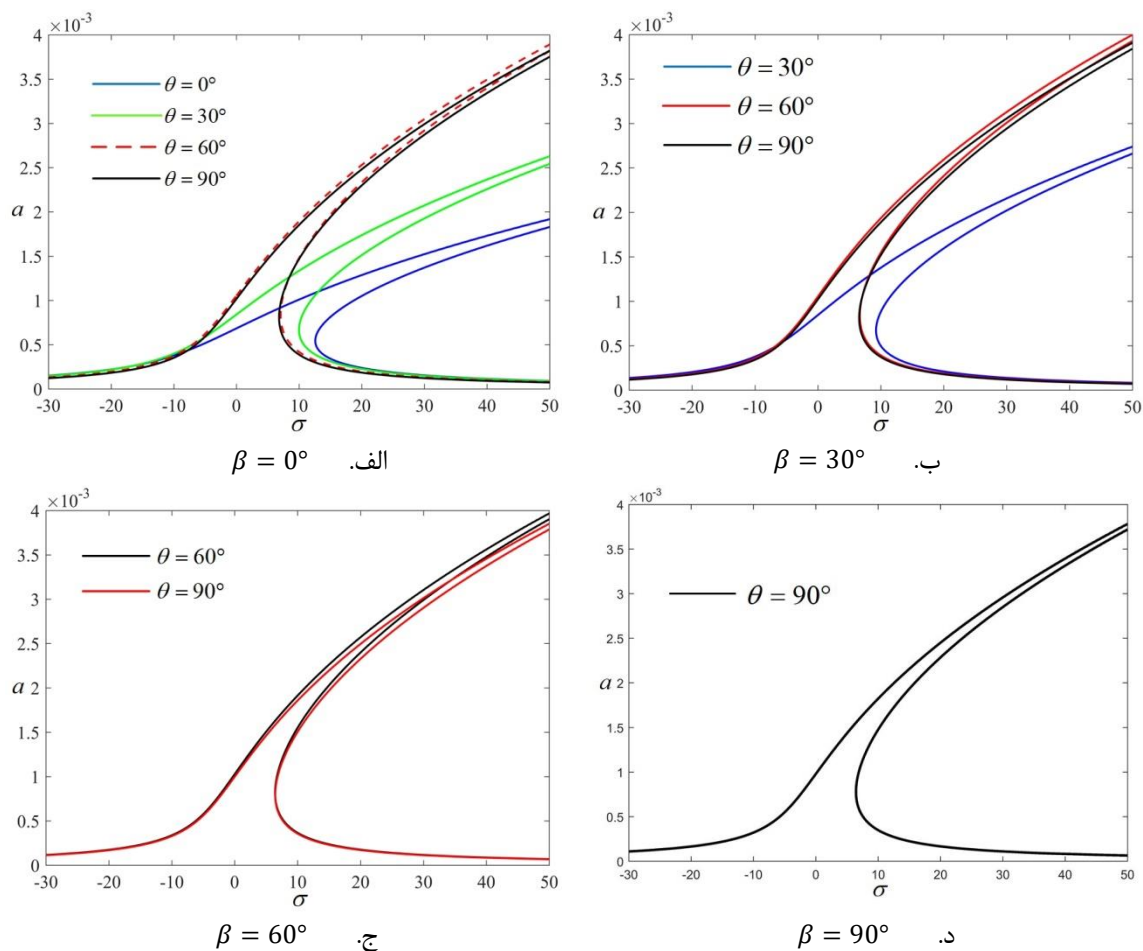
تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای

مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب در شکل‌های (۵-۹) و (۵-۱۰) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها وقتی که فرکانس تحریک پوسته به فرکانس طبیعی نزدیک می‌شود ($\Omega_1 \approx \omega_{mn}$)، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ) و β ، صفر درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی^۱ پوسته بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در واقع رفتار سخت‌شوندگی بدین معناست که علامت ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت معمولی، مثبت می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب نود و شصت درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.



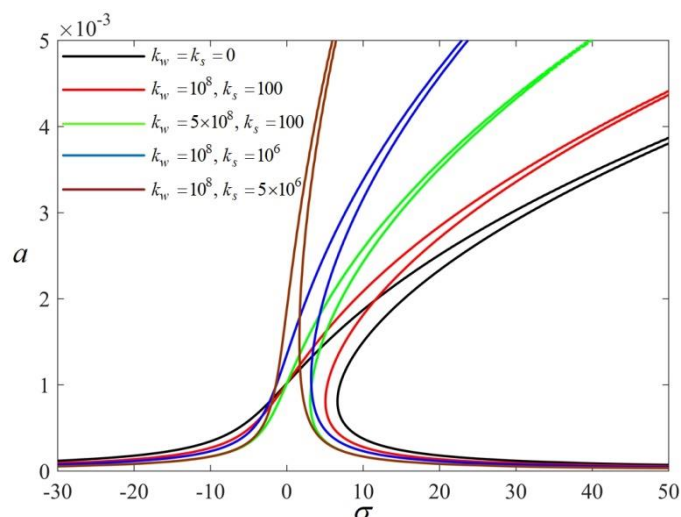
شکل (۵-۹) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز

¹ Hardening behavior



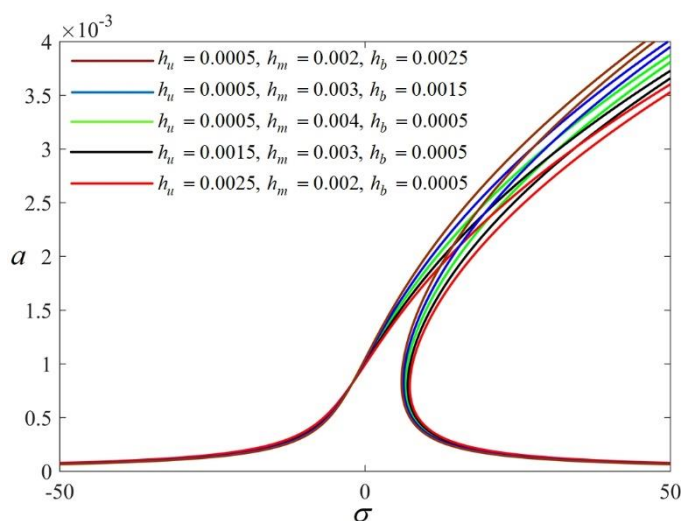
شکل (۵-۱۰) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک

تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه-ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز در شکل (۵-۱۱) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی پوسته با ضریب بستر الاستیک پاسترناک کمتر از پوسته با ضریب بستر الاستیک وینکلر می‌باشد. به عبارتی دیگر، زمانی که پوسته با بستر الاستیک وینکلر در نظر گرفته می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی بیش‌تر از زمانی است که پوسته با بستر پاسترناک در نظر گرفته شود.



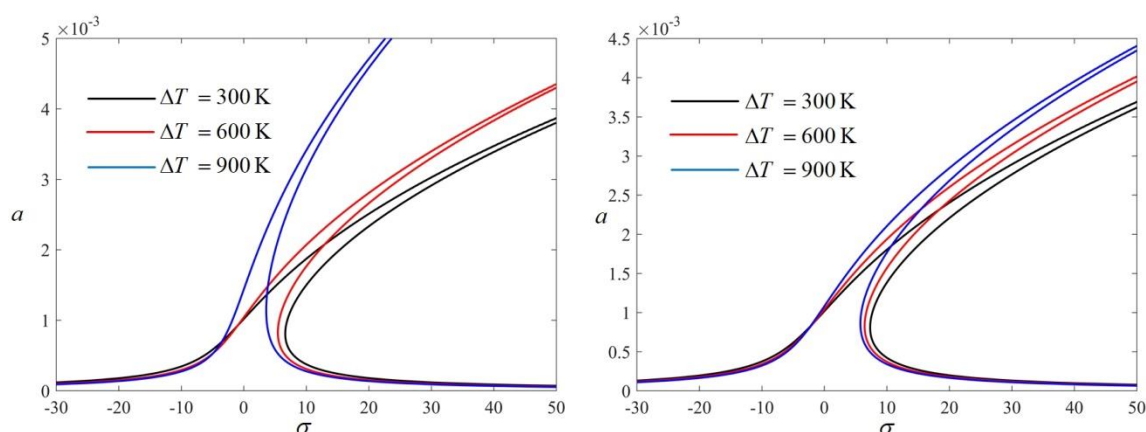
شکل (۵-۱۱) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

شکل (۵-۱۲)، تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، افزایش ضخامت لایه‌های سرامیک و فلز به ترتیب منجر به افزایش و کاهش رفتار سخت-شوندگی پوسته می‌شود. به عبارتی دیگر، با نزدیک شدن جنس پوسته به سرامیک، رفتار سخت‌شوندگی پوسته افزایش می‌یابد و این نشان می‌دهد که جنس سرامیک منجر به افزایش ضرایب غیرخطی می‌شود.



شکل (۵-۱۲) تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز تحت توزیع حرارت یکنواخت و خطی در شکل (۵-۱۳) نشان داده شده است. با توجه به این شکل، افزایش دما منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود. اما رفتار سخت‌شوندگی پوسته تحت توزیع حرارت خطی بیش‌تر از تحت توزیع حرارت یکنواخت می‌باشد. به عبارتی دیگر، با افزایش دما، رفتار سخت‌شوندگی به تدریج به یک رفتار نرم‌شونده تبدیل می‌شود ولی با توجه به نتایج نشان داده شده، کاهش سخت‌شوندگی برای پوسته، زمانی که تحت توزیع حرارت خطی قرار دارد بیش‌تر می‌باشد.

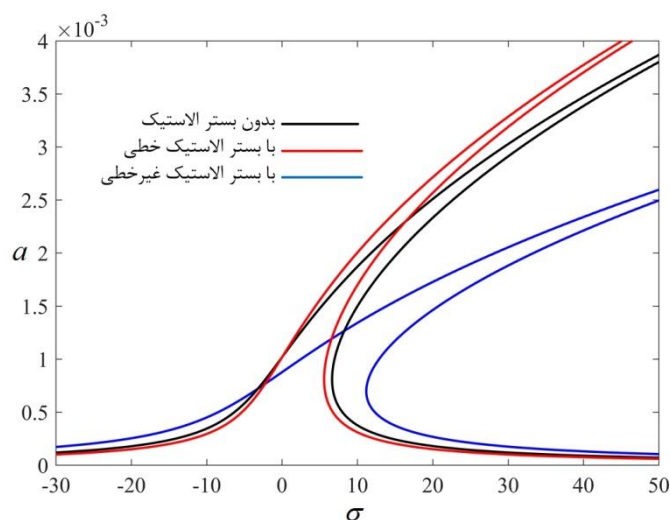


الف. توزیع حرارت یکنواخت
ب. توزیع حرارت خطی
شکل (۵-۱۳) پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز تحت توزیع حرارت یکنواخت و خطی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

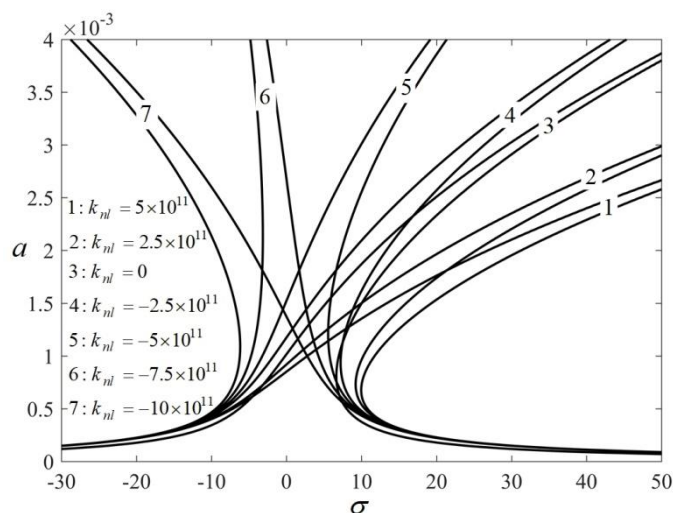
در شکل (۵-۱۴)، تأثیر بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان داده شده است. تغییرات پارامترهای خطی (k_s و k_w) و غیرخطی (k_{nl}) بستر الاستیک منجر به تغییر در ضرایب اصطلاحات خطی و غیرخطی مرتبه سوم می‌شود (با توجه به روابط (۳-۹)، (۳-۱۳) و (۳-۳)).

(۱۴)). بنابراین، در اینجا، علاوه بر تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی، اثرات شرایط خطی و غیرخطی پاسخ تشدید اولیه پوسته نیز بررسی می‌شود. با توجه به این شکل، بستر الاستیک خطی و غیرخطی به ترتیب منجر به کاهش و افزایش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود. در حقیقت با افزایش دامنه، میزان $a_3 W_{mn}^3$ بیش‌تر از $a_1 W_{mn}$ می‌شود (با توجه به روابط (۳-۹)، (۳-۱۳) و (۳-۱۴)) و در نتیجه با افزایش میزان غیر خطی در معادله حرکت پوسته، رفتار سخت‌شوندگی نیز افزایش می‌یابد.

تأثیر مقادیر مختلف پارامتر بستر الاستیک غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز در شکل (۵-۱۵)، نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پارامتر بستر الاستیک غیرخطی منفی و مثبت به ترتیب منجر به کاهش و افزایش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود. در واقع پارامتر بستر الاستیک مثبت، رفتار سخت‌شوندگی را به یک رفتار سخت‌شونده و پارامتر بستر الاستیک منفی، رفتار سخت‌شوندگی را به یک رفتار نرم‌شونده تغییر می‌دهد [۷۴-۷۶].

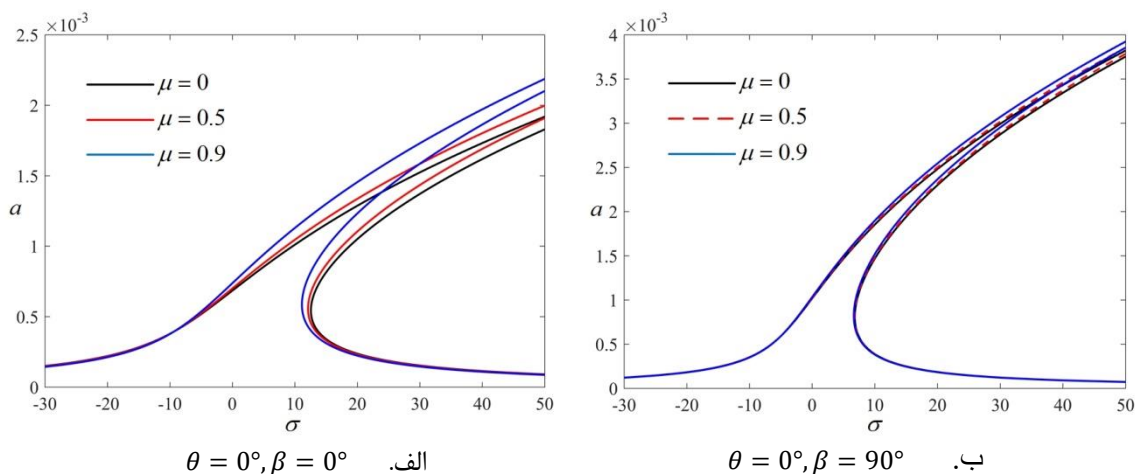


شکل (۵-۱۴) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)



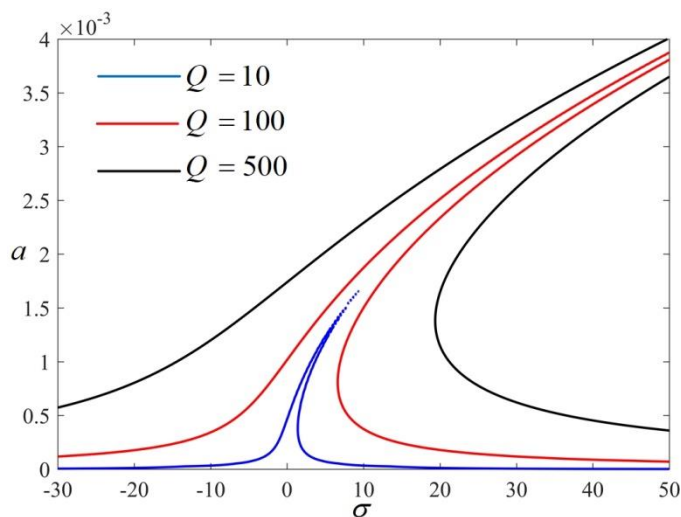
شکل (۵-۱۵) تأثیر پارامترهای مختلف بستر الاستیک غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

در شکل (۵-۱۶)، تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان داده شده است. با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، رفتار سخت‌شوندگی پوسته کاهش می‌یابد. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، علی‌رغم اینکه رفتار سخت‌شوندگی پوسته با زاویه تقویت‌کننده‌های صفر درجه بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد، اما تأثیر پارامتر نقص اولیه بر روی آن بیش‌تر می‌باشد؛ بنابراین با توجه به نتایج نشان داده شده با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، رفتار سخت‌شوندگی پوسته در این وضعیت بیش‌تر از پوسته با دیگر زوایای تقویت‌کننده کاهش می‌یابد.



شکل (۵-۱۶) تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز

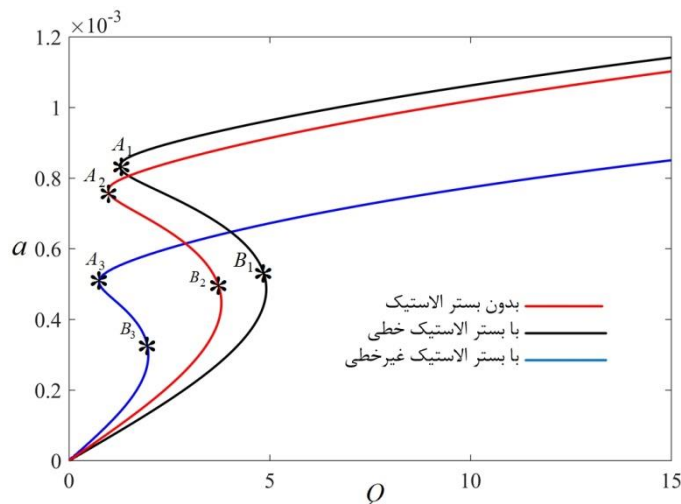
شکل (۵-۱۷)، تأثیر دامنه تحریک خارجی را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، افزایش دامنه تحریک خارجی منجر به افزایش میزان پرش^۱ و چند برابر شدن نمودار پاسخ فرکانس-دامنه می‌شود.



شکل (۵-۱۷) تأثیر دامنه تحریک خارجی را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

¹ Jump value

شکل (۵-۱۸)، تأثیر بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، بستر الاستیک خطی و غیرخطی به ترتیب منجر به ماکزیمم مینیمم مقدار پرش می‌شود. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌گردد، لازم به ذکر است که منحنی A_i تا B_i که ($i = 1, 2, 3$)، ناحیه ناپایدار پاسخ می‌باشد که در این ناحیه پاسخی فیزیکی وجود ندارد. لذا می‌توان مشاهده نمود زمانی که پوسته بر بستر الاستیک غیرخطی قرار دارد، ناحیه ناپایدار کاهش می‌یابد.

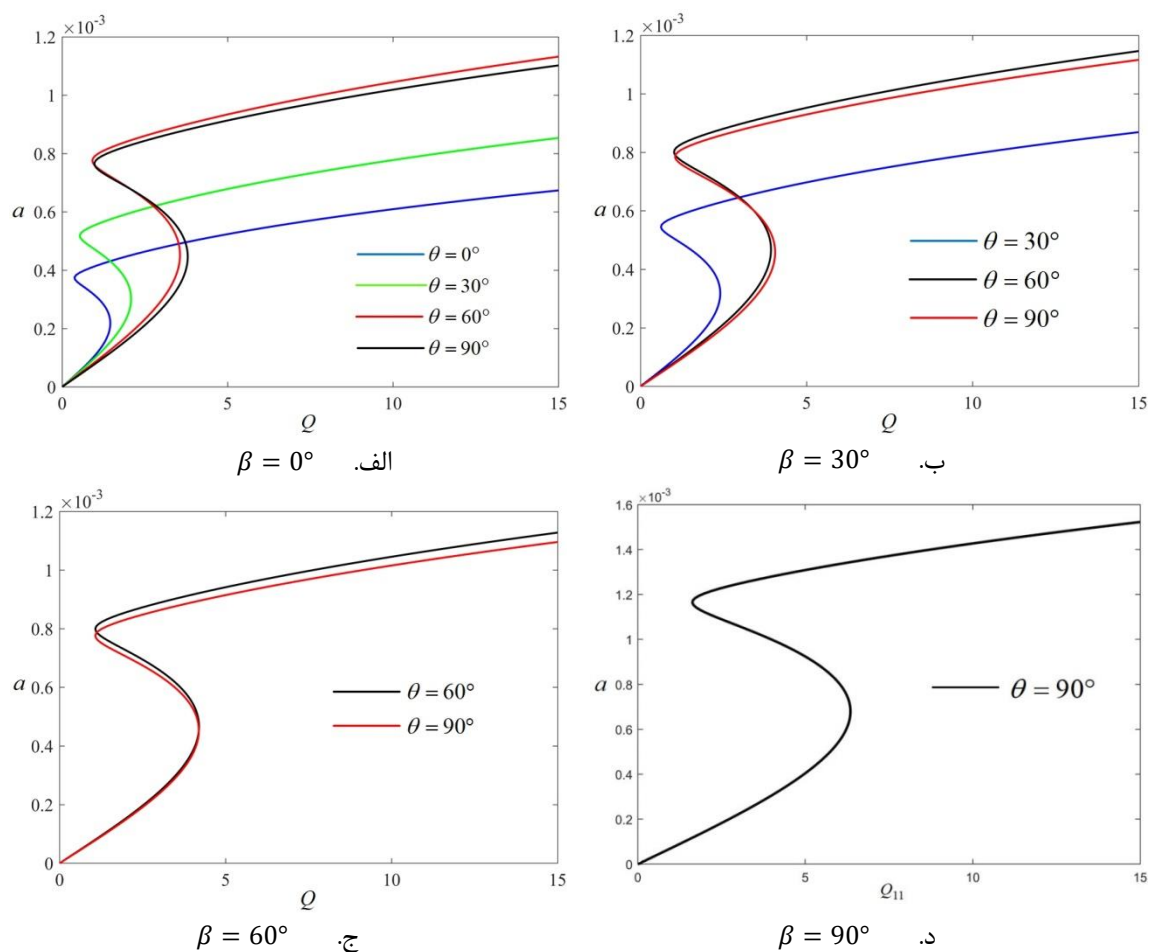


شکل (۵-۱۸) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

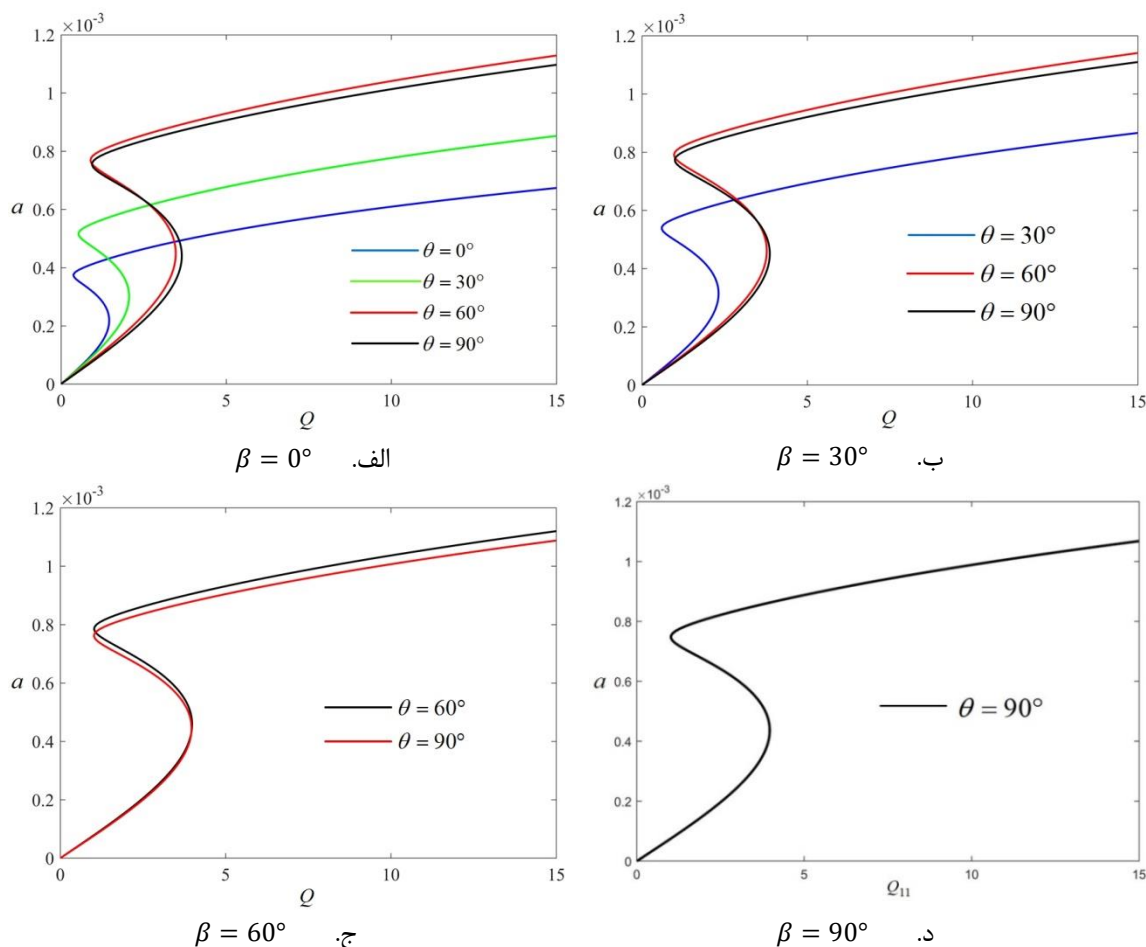
شکل‌های (۵-۱۹) و (۵-۲۰) به ترتیب تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در دامنه‌های تحریک پایین، یک پدیده پرش^۱ اتفاق می‌افتد. با توجه به این شکل‌ها، زمانی که زاویه

^۱ Jump phenomenon

تقویت‌کننده‌ها (θ و β)، صفر درجه باشد، میزان پرش کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب نود و شصت درجه باشد، میزان پرش بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. همچنین با افزایش میزان پرش ناحیه ناپایدار پاسخ نیز افزایش می‌یابد.

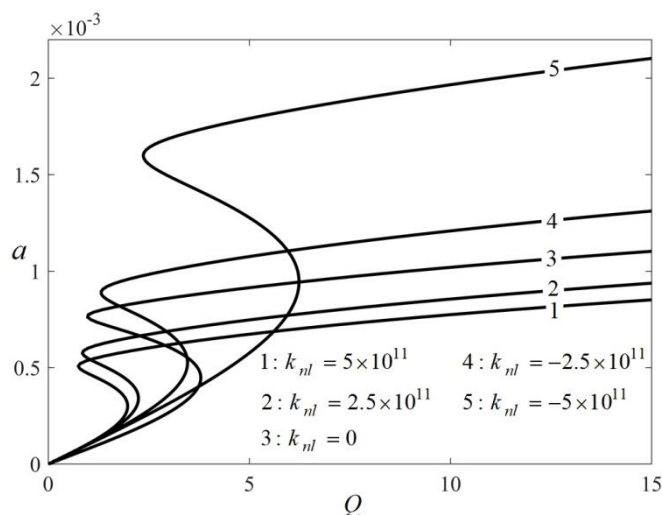


شکل (۵-۱۹) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز



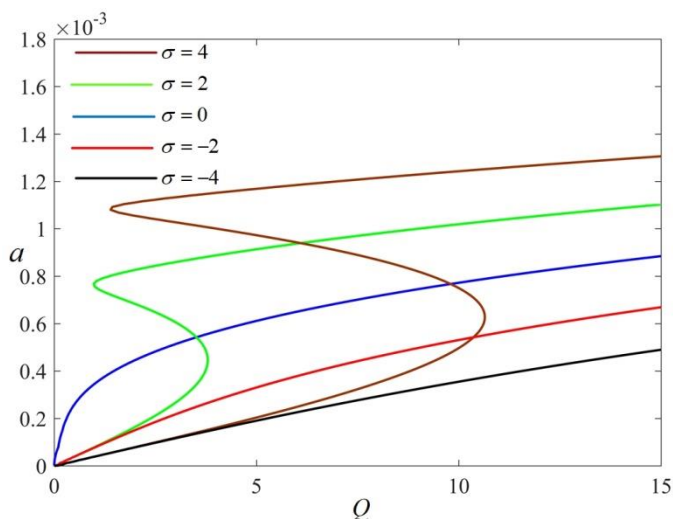
شکل (۵-۲۰) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک

تأثیر مقادیر مختلف پارامتر بستر الاستیک غیرخطی بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز در شکل (۵-۲۱)، نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، کاهش میزان پارامتر بستر الاستیک غیرخطی منفی و افزایش پارامتر بستر الاستیک غیرخطی مثبت به ترتیب منجر به افزایش و کاهش میزان پرش می‌شود. در حقیقت کاهش میزان پارامتر بستر الاستیک غیرخطی منفی و افزایش پارامتر بستر الاستیک غیرخطی مثبت به ترتیب باعث افزایش و کاهش ناحیه ناپایدار پاسخ می‌شود.



شکل (۵-۲۱) تأثیر پارامترهای مختلف بستر الاستیک غیرخطی بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز در شکل (۵-۲۲) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای پارامترهای تنظیم مثبت، پدیده چندمقداری^۱ اتفاق می‌افتد، در حالیکه بقیه پارامترها، تک‌مقداری^۲ می‌باشد. همچنین افزایش پارامتر تنظیم منجر به افزایش میزان پرش و ناحیه ناپایدار پاسخ می‌شود.



شکل (۵-۲۲) تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید اولیه پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

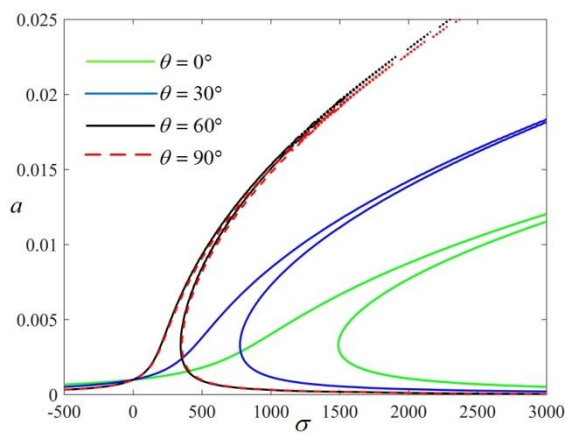
¹ Multi-valued phenomenon

² Single-valued

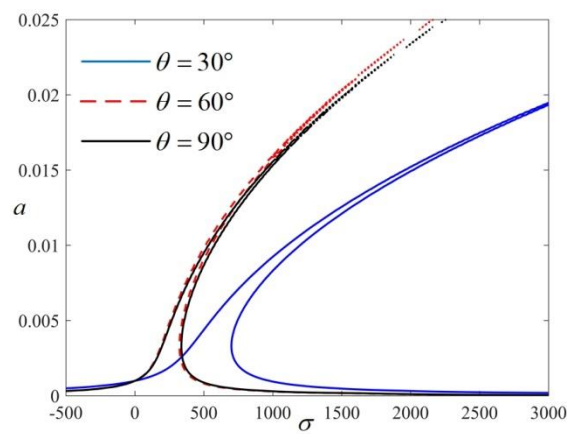
۵-۲-۳- تحلیل تشدید فراهارمونیک ۳/۱

در این بخش، به بررسی تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده پرداخته شده است. در این قسمت تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

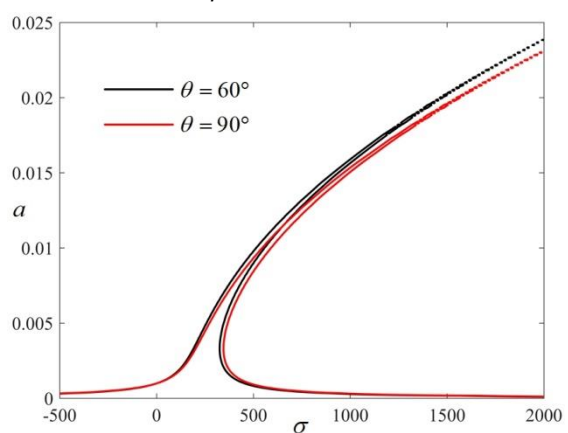
تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب در شکل‌های (۵-۲۳) و (۵-۲۴) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β) صفر درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی پوسته بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب نود و شصت درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حقیقت یعنی وقتی که فرکانس تحریک پوسته به $1/3$ فرکانس طبیعی نزدیک می‌شود ($\Omega_1 \approx \frac{1}{3}\omega_{mn}$)، رفتار سخت‌شوندگی پوسته برای زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با صفر درجه بیش‌تر افزایش می‌یابد و برای پوسته با توزیع مواد سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک رفتار سخت‌شوندگی پوسته به ترتیب برای زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با نود و شصت درجه بیش‌تر کاهش می‌یابد.



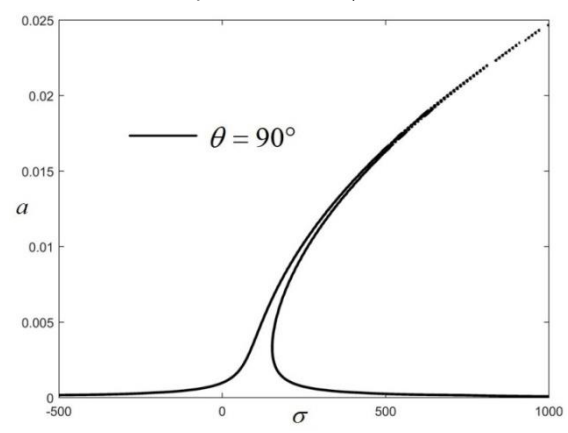
الف. $\beta = 0^\circ$



ب. $\beta = 30^\circ$

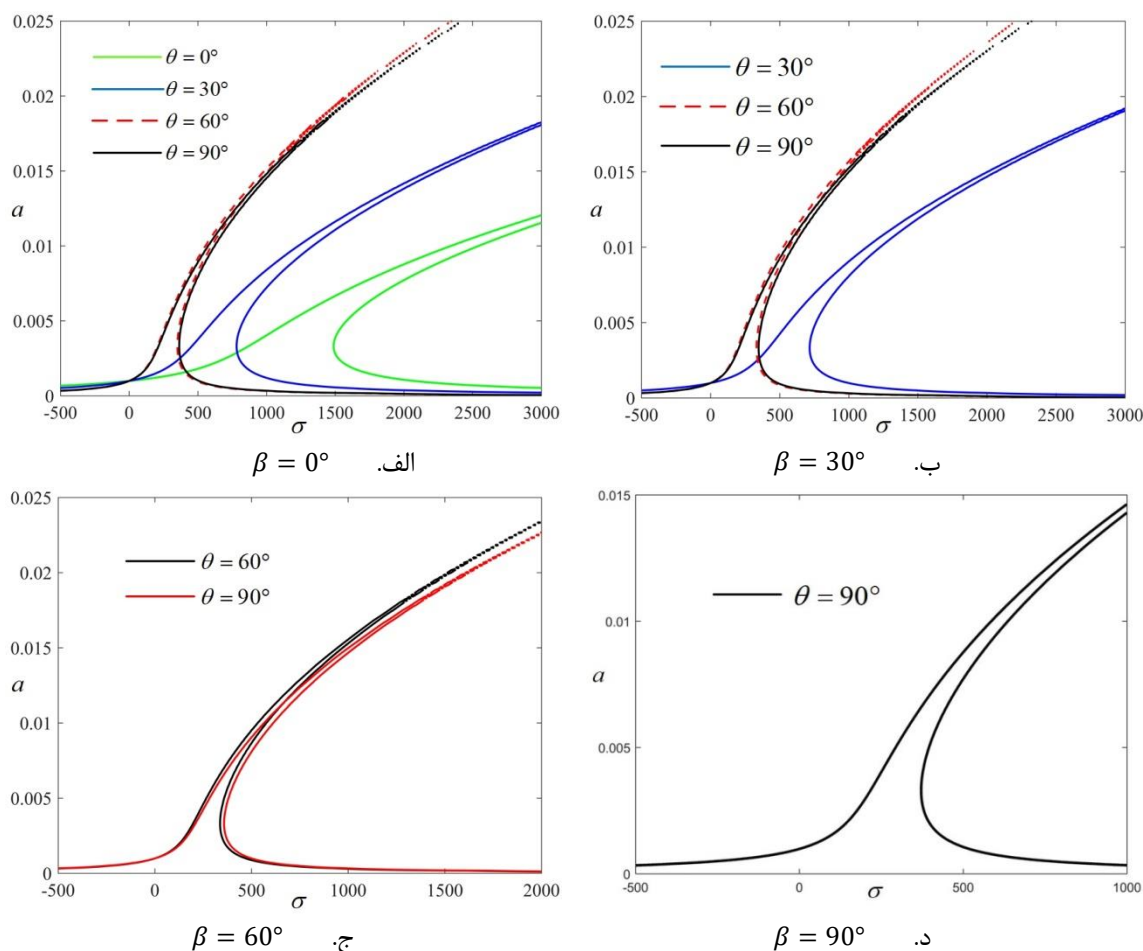


ج. $\beta = 60^\circ$



د. $\beta = 90^\circ$

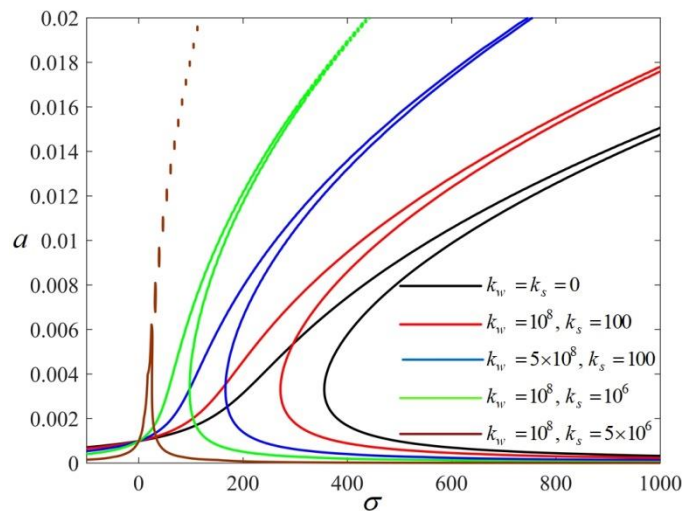
شکل (۵-۲۳) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز



شکل (۲۴-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهرمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک

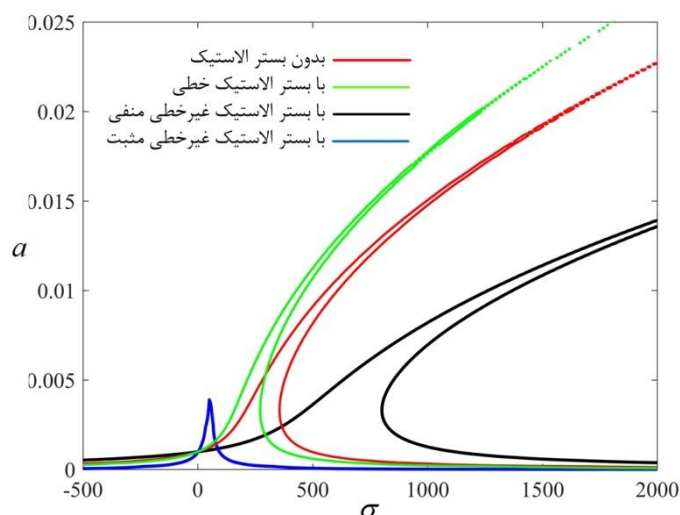
در شکل (۲۵-۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهرمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز، نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی پوسته با ضریب بستر الاستیک پاسترناک کم‌تر از پوسته با ضریب بستر الاستیک وینکлер می‌باشد. درحالی‌که، بستر پاسترناک به دلیل سختی ناشی از آن، دامنه تشدید را به‌طور قابل توجهی سرکوب کرده است. از طرف دیگر، سرکوب دامنه پاسخ به نسبت $\frac{\Omega_1}{\omega_{mn}}$ بستگی دارد. به‌طور کلی، وقتی این نسبت بیش‌تر باشد (یعنی تحریک از شرایط تشدید دورتر باشد)، دامنه پاسخ کم‌تر می‌شود. بنابراین، برای یک فرکانس تحریک ثابت (Ω_1 ثابت)، دامنه پاسخ به ω_{mn} بستگی دارد. این بحث با نتایج نشان داده شده

در شکل (۵-۲۵) مطابقت دارد.



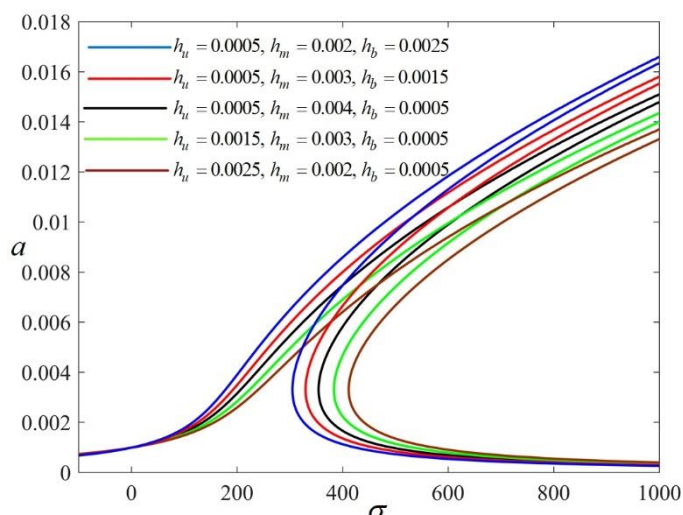
شکل (۵-۲۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

در شکل (۵-۲۶)، تأثیر بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان داده شده است. تغییرات پارامترهای خطی (k_w و k_s) و غیرخطی (k_{nl}) بستر الاستیک منجر به تغییر در ضرایب اصطلاحات خطی و غیرخطی مرتبه سوم می‌شود (با توجه به روابط (۳-۹)، (۳-۱۳) و (۳-۴۰)). بنابراین، در اینجا، علاوه بر تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی، اثرات شرایط خطی و غیرخطی پاسخ تشدید فراهمونیک پوسته نیز بررسی می‌شود. با توجه به این شکل، پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی منفی منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته و پارامتر بستر الاستیک مثبت منجر به افزایش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود. در واقع پارامتر بستر الاستیک منفی، رفتار سخت‌شوندگی را به یک رفتار نرم‌شونده تغییر می‌دهد. همچنین، همان‌طور که انتظار می‌رود، پارامتر بستر الاستیک غیرخطی منفی مقدار قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی را افزایش می‌دهد.



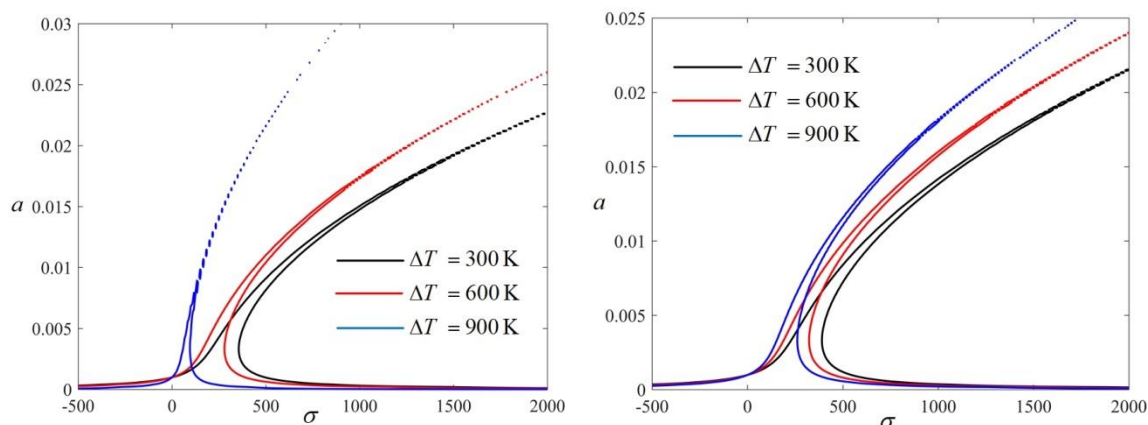
شکل (۵-۲۶) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

شکل (۵-۲۷)، تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، افزایش ضخامت لایه‌های سرامیک و فلز به ترتیب منجر به افزایش و کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود. لذا با توجه به نتایج نشان داده شده، می‌توان دریافت که با نزدیک شدن جنس پوسته به سرامیک، رفتار سخت‌شوندگی پوسته افزایش می‌یابد و این نشان می‌دهد که جنس سرامیک منجر به افزایش ضریب غیرخطی مرتبه سوم (با توجه به روابط (۳-۱۳) و (۳-۴۰)) می‌شود.



شکل (۵-۲۷) تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز تحت توزیع حرارت یکنواخت و خطی در شکل (۵-۲۸) نشان داده شده است. با توجه به این شکل، افزایش دما منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود؛ اما رفتار سخت‌شوندگی پوسته تحت توزیع حرارت خطی بیش‌تر از تحت توزیع حرارت یکنواخت می‌باشد. این بدان معناست که با افزایش دما، رفتار سخت‌شوندگی به تدریج به یک رفتار نرم‌شونده تبدیل می‌شود ولی با توجه به نتایج نشان داده شده، کاهش سخت‌شوندگی برای پوسته، زمانی که تحت توزیع حرارت خطی قرار دارد بیش‌تر می‌باشد.

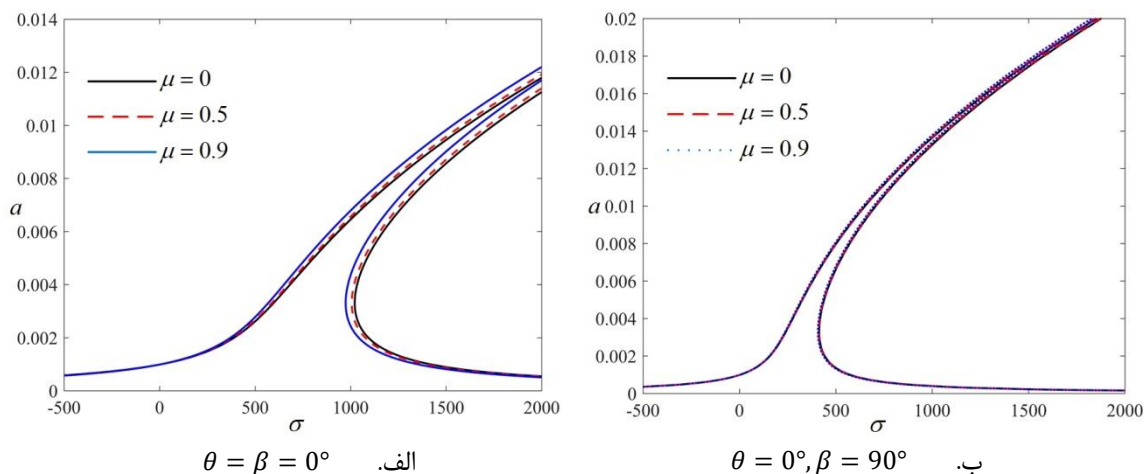


الف. توزیع حرارت یکنواخت

ب. توزیع حرارت خطی

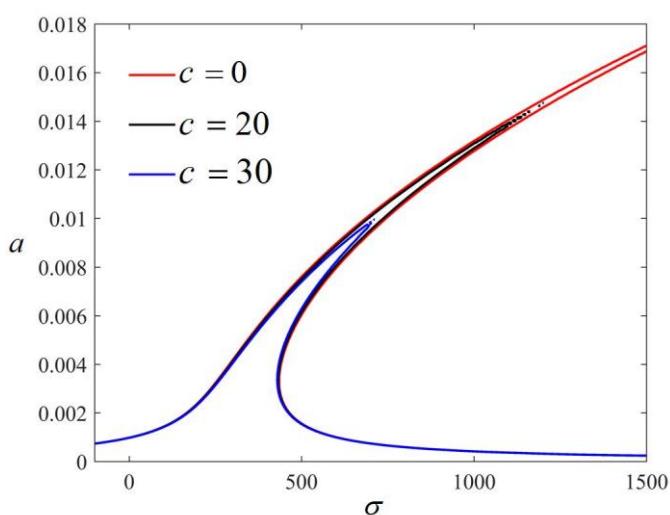
شکل (۵-۲۸) پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز تحت توزیع حرارت یکنواخت و خطی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

در شکل (۵-۲۹)، تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان داده شده است. با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، رفتار سخت‌شوندگی پوسته کاهش می‌یابد. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، علی‌رغم اینکه رفتار سخت‌شوندگی پوسته با زاویه تقویت-کننده‌های صفر درجه بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد، اما تأثیر پارامتر نقص اولیه بر روی آن بیش‌تر می‌باشد؛ بنابراین با توجه به نتایج نشان داده شده با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، رفتار سخت-شوندگی پوسته در این وضعیت بیش‌تر از پوسته با دیگر زوایای تقویت‌کننده کاهش می‌یابد.



شکل (۵-۲۹) تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز

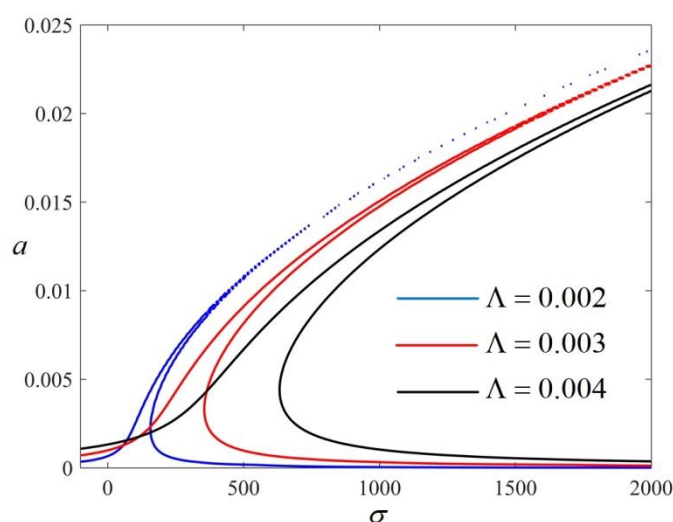
تأثیر پارامتر میرایی (لزجت میرایی)^۱ متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز در شکل (۵-۳۰) نشان داده شده است. همان‌طور نشان داده شده است، با افزایش پارامتر میرایی میزان ماکزیمم قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی کاهش می‌یابد. به عبارتی دیگر با افزایش لزجت میرایی، میزان پرش و در نتیجه میزان ناحیه ناپایداری کاهش می‌یابد.



شکل (۵-۳۰) تأثیر پارامتر میرایی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

¹ Viscosity of the foundation

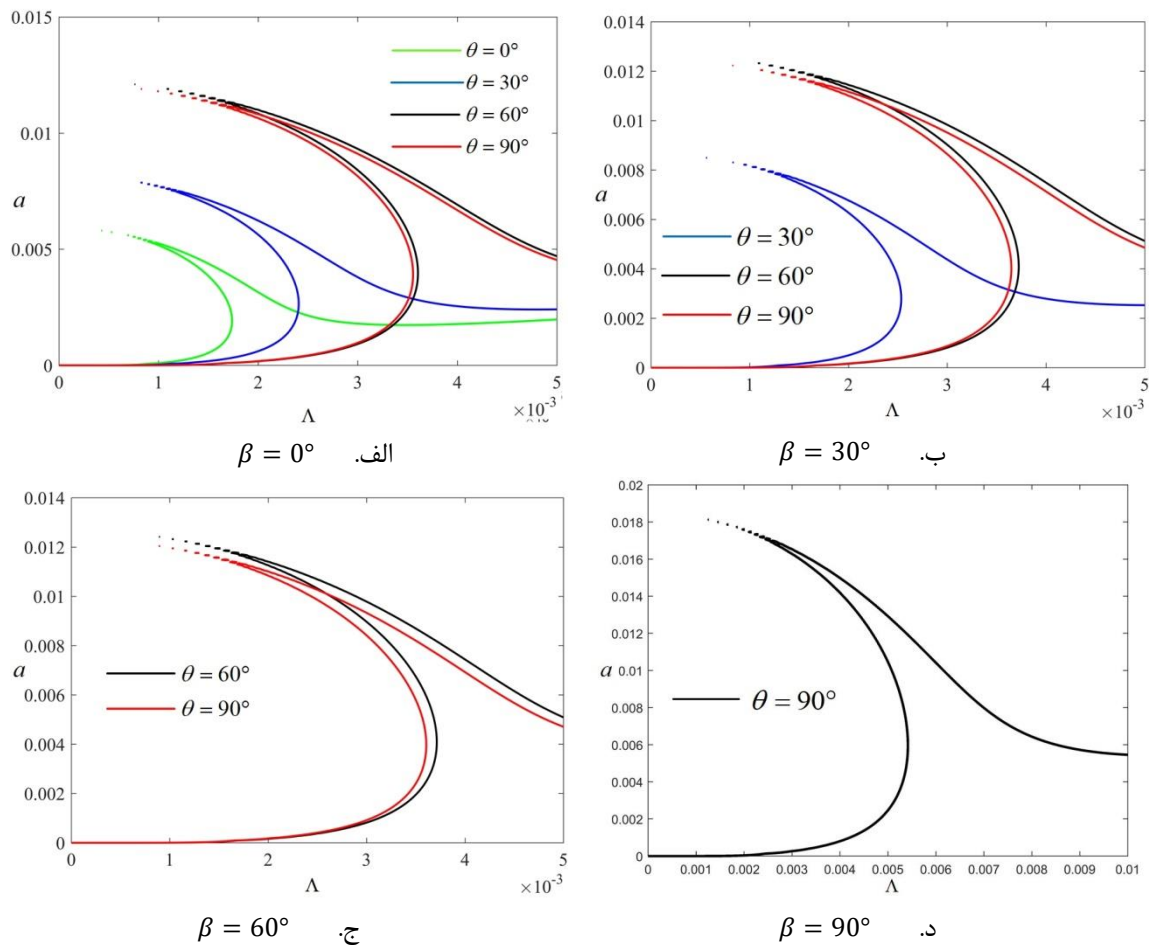
شکل (۵-۳۱)، تأثیر دامنه تحریک خارجی را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، افزایش دامنه تحریک خارجی منجر به افزایش میزان پرش می‌شود. همچنین، می‌توان مشاهده نمود که با افزایش دامنه تحریک نمودار به سمت راست نیز انتقال می‌یابد.



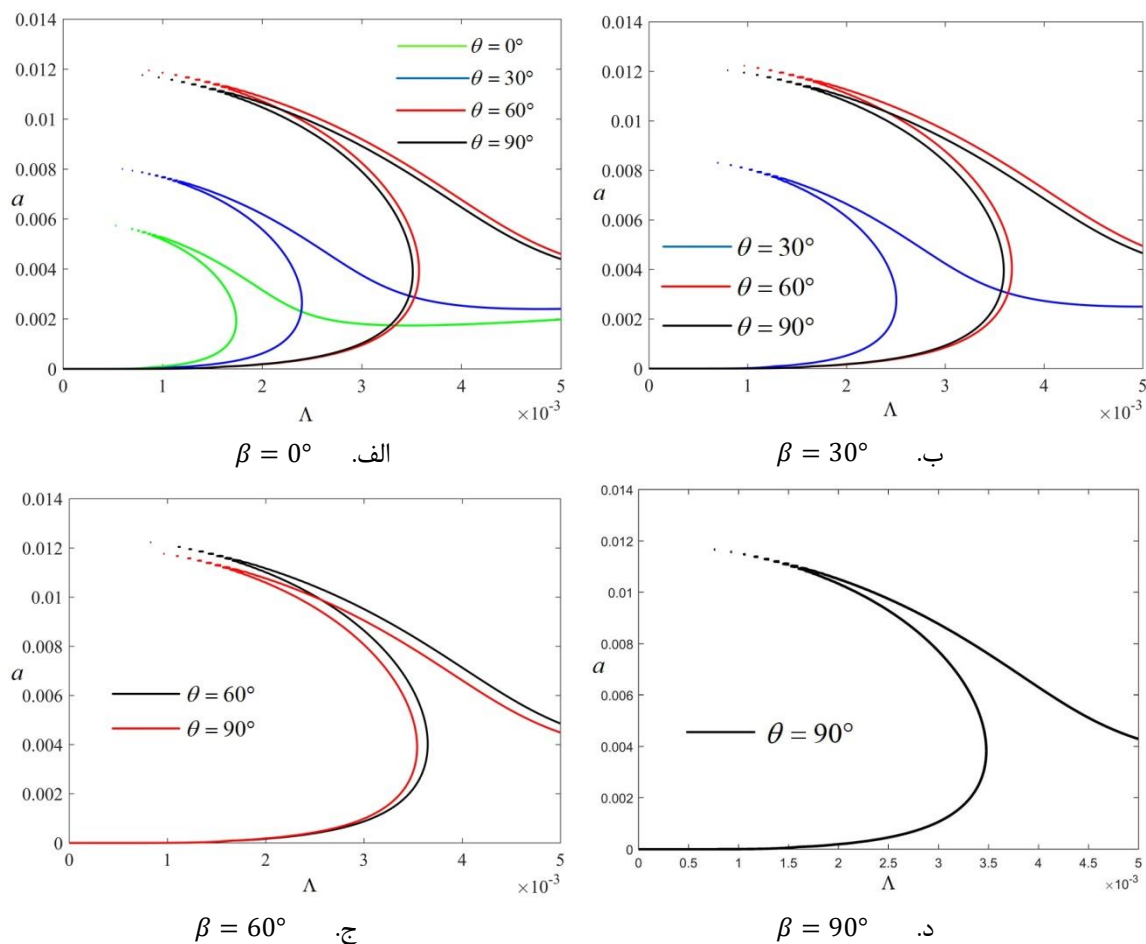
شکل (۵-۳۱) تأثیر دامنه تحریک خارجی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

شکل‌های (۵-۳۲) و (۵-۳۳) به ترتیب تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت-های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در دامنه‌های تحریک پایین، یک پدیده پرش اتفاق می‌افتد. با توجه به این شکل‌ها، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β) صفر درجه باشد، میزان پرش کمتر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته استوانه‌ای برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب نود و شصت درجه باشد، میزان پرش بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد و این بدان معناست که وقتی زاویه تقویت‌کننده‌ها برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج

تابعی-سرامیک به ترتیب نود و شصت درجه باشد، ناحیه ناپایدار پاسخ (ناحیه‌ای که در آن پاسخ فیزیکی وجود ندارد)، بیش‌تر از پوسته با دیگر زوایای تقویت‌کننده افزایش می‌یابد.

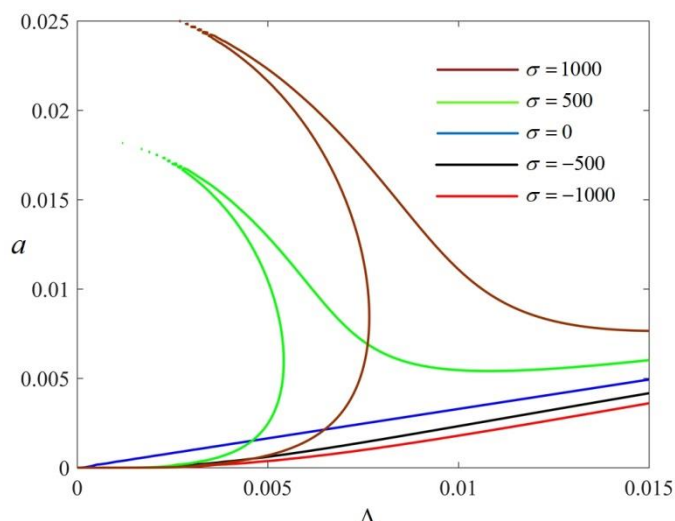


شکل (۵-۳۲) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی فلز



شکل (۳۳-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک

تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز در شکل (۳۴-۵) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای پارامترهای تنظیم مثبت، پدیده چندمقداری اتفاق می‌افتد، در حالیکه بقیه پارامترها، تک‌مقداری می‌باشد. همچنین افزایش پارامتر تنظیم منجر به افزایش میزان پرش می‌شود.



شکل (۵-۳۴) تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فروهارمونیک ۳/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

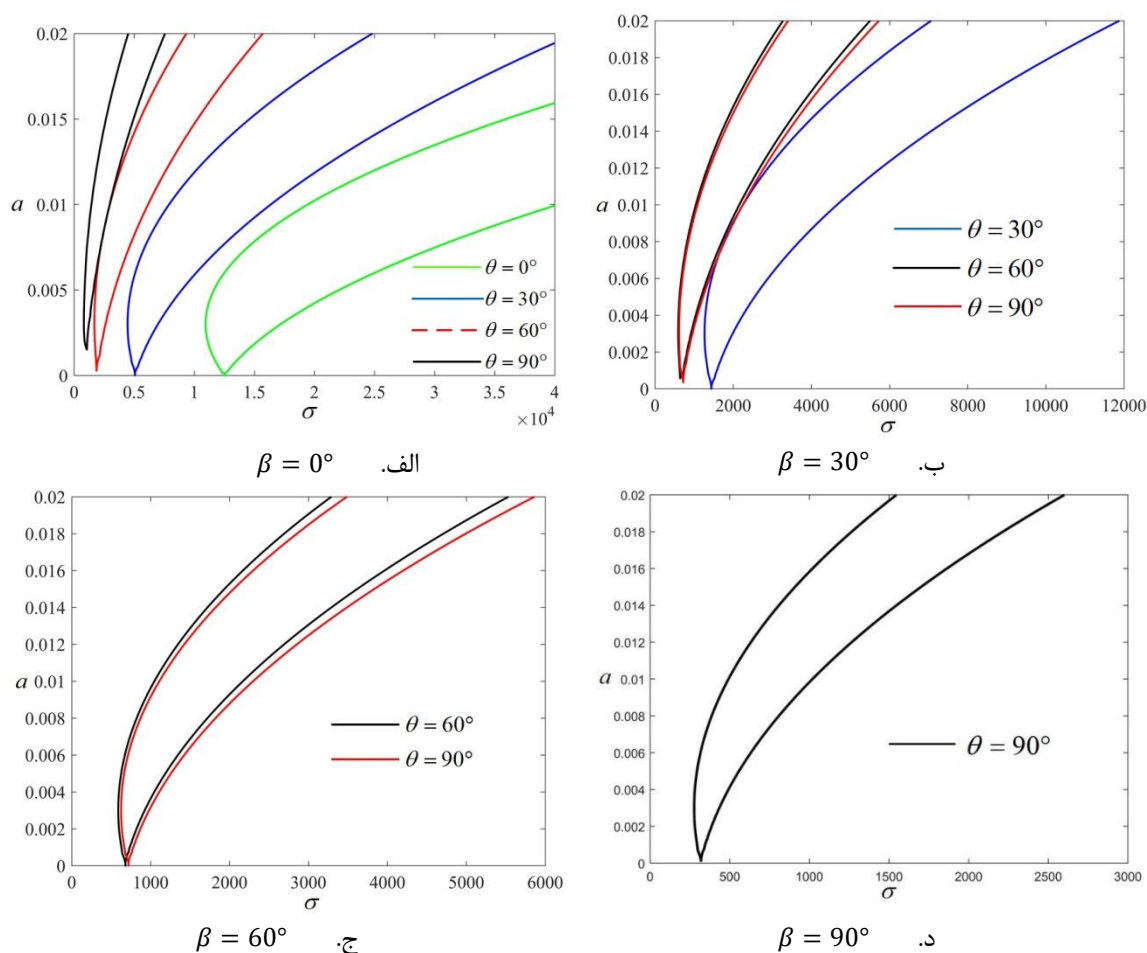
۵-۲-۴- تحلیل تشدید فروهارمونیک ۱/۳

در این بخش، به بررسی تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده پرداخته شده است. در این قسمت تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

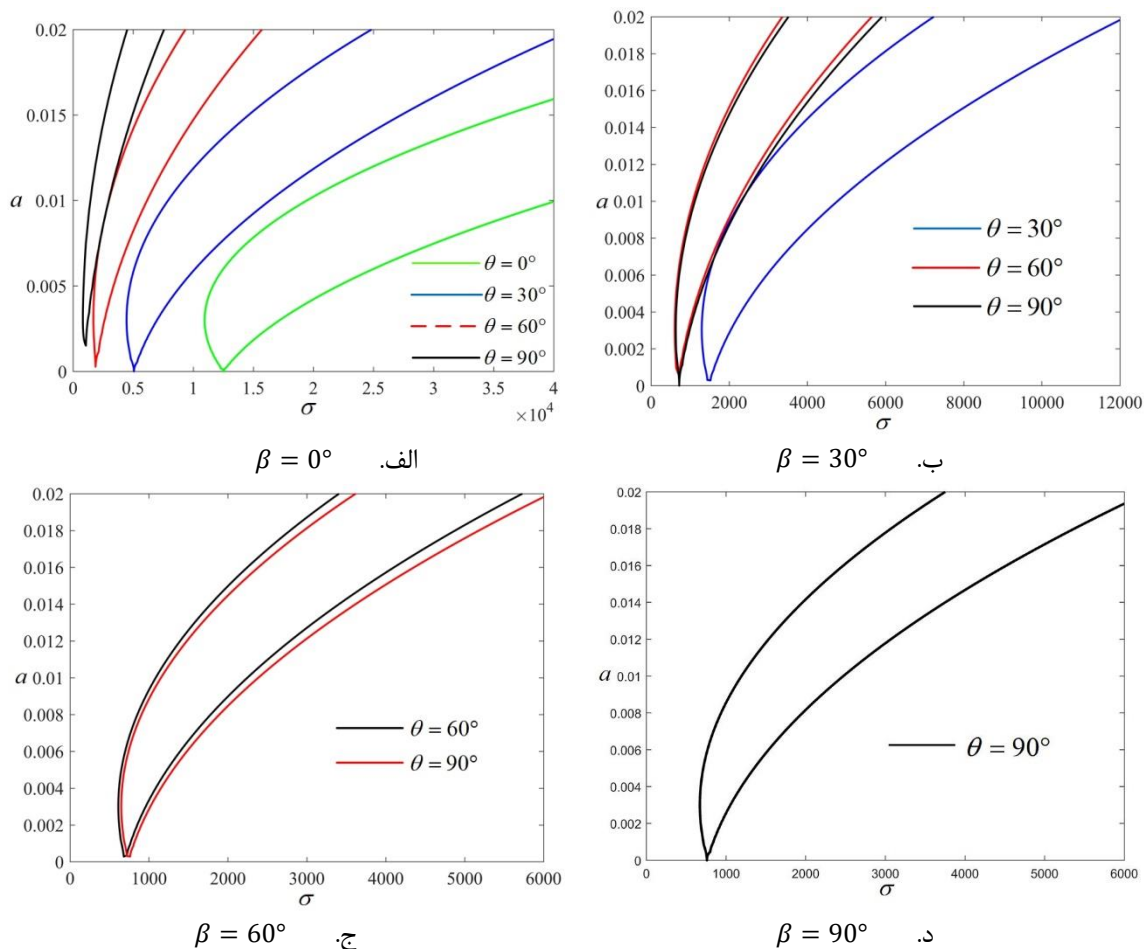
تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب در شکل‌های (۵-۳۵) و (۵-۳۶) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β) صفر درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی پوسته بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب نود و شصت درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در این قسمت نیز همان‌گونه که مشاهده می‌شود رفتار سخت‌شوندگی پوسته استوانه‌ای برای زوایای مختلف تقویت‌کننده مشابه حالت تشدید فروهارمونیک ۳/۱ می‌باشد.

در شکل (۵-۳۷)، تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز

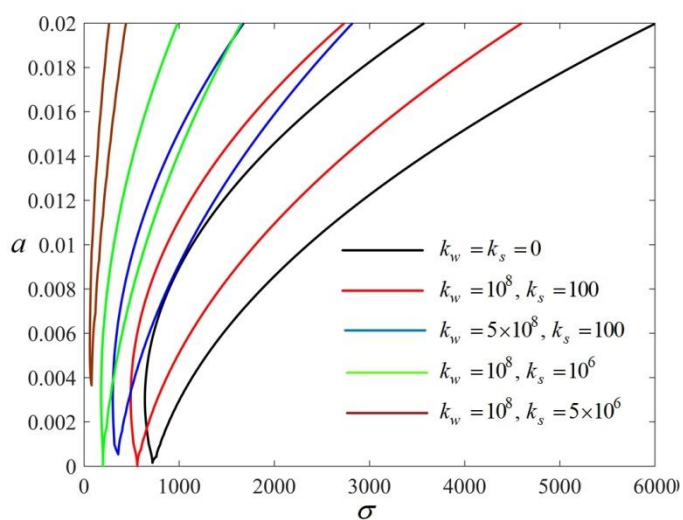
نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مشابه حالت تشدید فروهارمونیک ۳/۱، رفتار سخت‌شوندگی پوسته با ضریب بستر الاستیک پاسترناک کمتر از پوسته با ضریب بستر الاستیک وینکلر می‌باشد.



شکل (۵-۳) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز

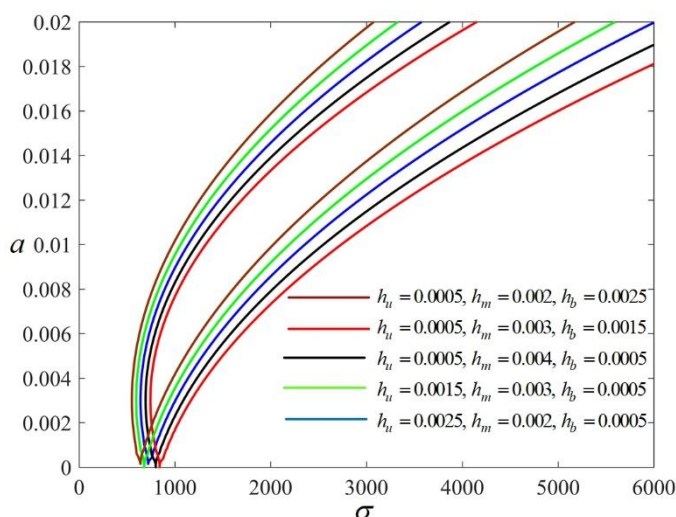


شکل (۳۶-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک $1/3$ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک



شکل (۳۷-۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک $1/3$ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

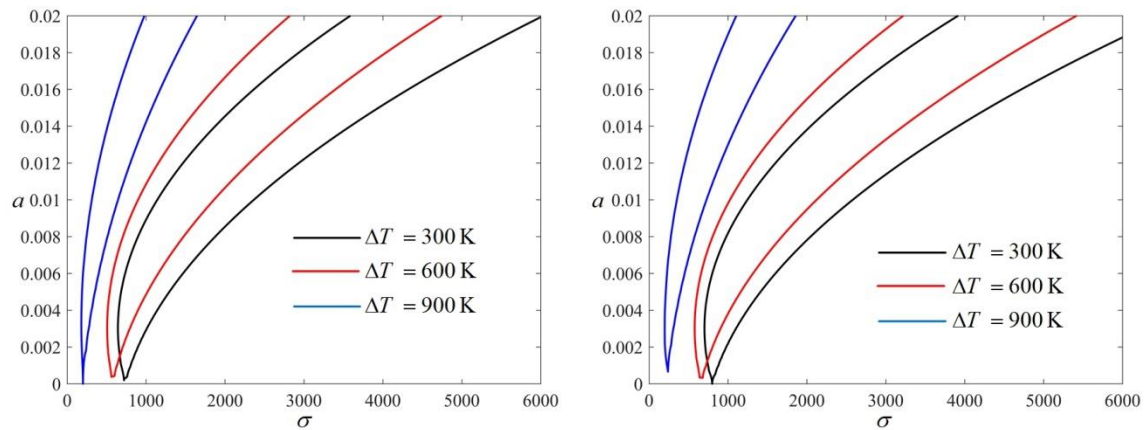
شکل (۵-۳۸)، تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک $1/3$ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، افزایش ضخامت لایه‌های سرامیک و فلز به ترتیب منجر به افزایش و کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود. لذا مشابه حالت تشدید فراهارمونیک $3/1$ ، با توجه به نتایج نشان داده شده، می‌توان دریافت که با نزدیک شدن جنس پوسته به سرامیک، رفتار سخت‌شوندگی پوسته افزایش می‌یابد و این نشان می‌دهد که جنس سرامیک منجر به افزایش ضریب غیرخطی مرتبه سوم می‌شود.



شکل (۵-۳۸) تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک $1/3$ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک $1/3$ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز تحت توزیع حرارت یکنواخت و خطی در شکل (۵-۳۹) نشان داده شده است. با توجه به این شکل، افزایش دما منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود؛ اما کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته تحت توزیع حرارت خطی بیش‌تر از تحت توزیع حرارت یکنواخت می‌باشد و این بدان معناست که با افزایش دما، رفتار سخت‌شوندگی به تدریج به یک رفتار

نرم‌شونده تبدیل می‌شود ولی با توجه به نتایج نشان داده شده، کاهش سخت‌شوندگی برای پوسته، زمانی که تحت توزیع حرارت خطی قرار دارد بیش‌تر می‌باشد.

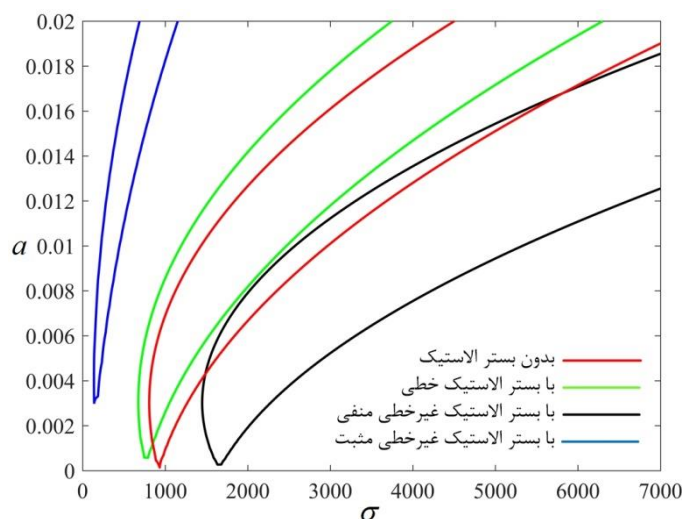


الف. توزیع حرارت یکنواخت

ب. توزیع حرارت خطی

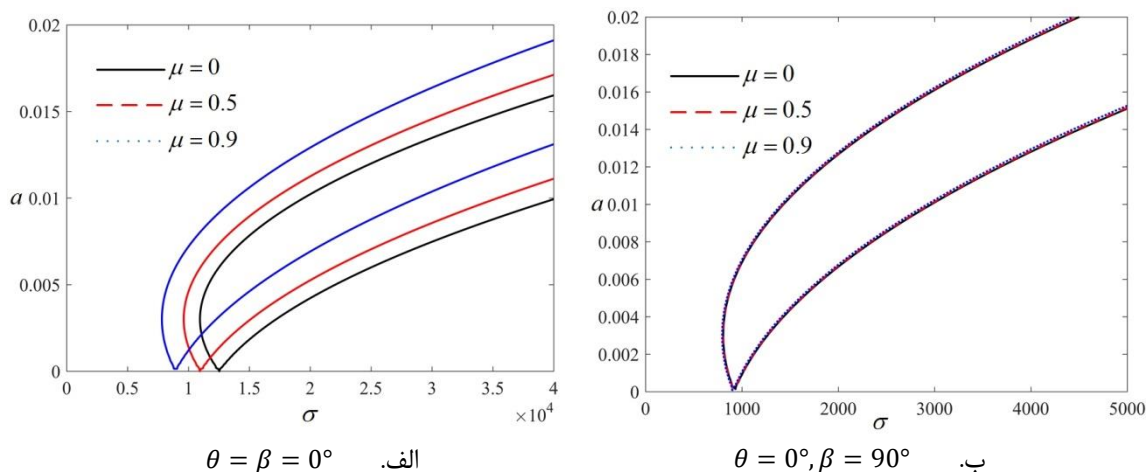
شکل (۵-۳۹) پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز تحت توزیع حرارت یکنواخت و خطی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

در شکل (۵-۴۰)، تأثیر بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان داده شده است. با توجه به این شکل، پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی منفی منجر به افزایش رفتار سخت‌شوندگی پوسته و مینیمم پاسخ دامنه می‌شود. همچنین پارامتر بستر الاستیک غیرخطی مثبت منجر به افزایش رفتار سخت‌شوندگی می‌شود، درحالی‌که مینیمم پاسخ دامنه کاهش می‌یابد.



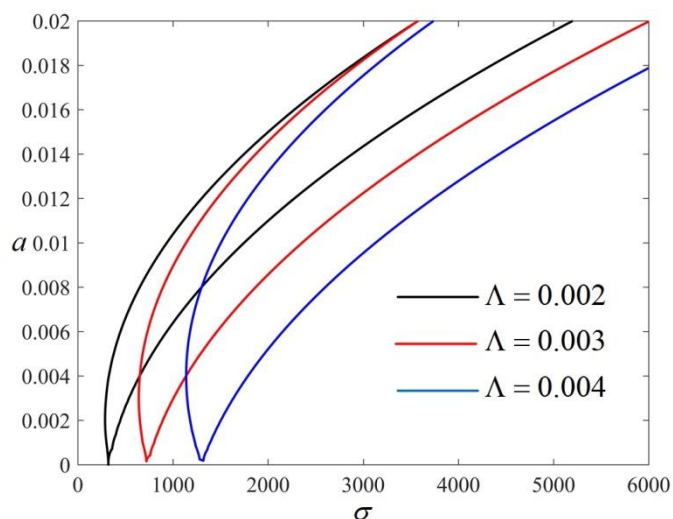
شکل (۵-۴۰) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

در شکل (۵-۴۱)، تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان داده شده است. علی‌رغم اینکه رفتار سخت‌شوندگی پوسته با زاویه تقویت‌کننده‌های صفر درجه بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد، اما تأثیر پارامتر نقص اولیه بر روی آن بیش‌تر می‌باشد؛ بنابراین با توجه به نتایج نشان داده شده با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، رفتار سخت‌شوندگی پوسته در این وضعیت بیش‌تر از پوسته با دیگر زوایای تقویت‌کننده کاهش می‌یابد. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی پوسته بدون نقص اولیه بیش‌تر از پوسته با نقص اولیه می‌باشد و این نشان می‌دهد که در نظر گرفتن نقص اولیه برای پوسته منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود.



شکل (۴۱-۵) تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک $1/3$ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز

شکل (۴۲-۵)، تأثیر دامنه تحریک خارجی را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک $1/3$ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، افزایش دامنه تحریک خارجی منجر به میزان پرش می‌شود. همچنین، می‌توان مشاهده نمود که با افزایش دامنه تحریک نمودار به سمت راست نیز انتقال می‌یابد.

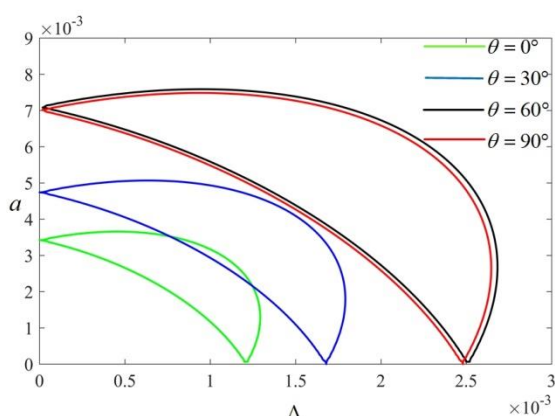


شکل (۴۲-۵) تأثیر دامنه تحریک خارجی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فروهارمونیک $1/3$ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

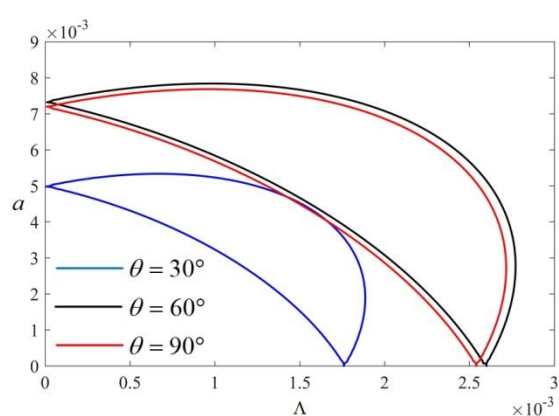
شکل‌های (۴۳-۵) و (۴۴-۵) به ترتیب تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فروهارمونیک $1/3$ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت-

های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک نشان می‌دهد. با توجه به این شکل‌ها، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β) صفر درجه باشد، میزان پرش کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌ها برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب نود و شصت درجه باشد، میزان پرش بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

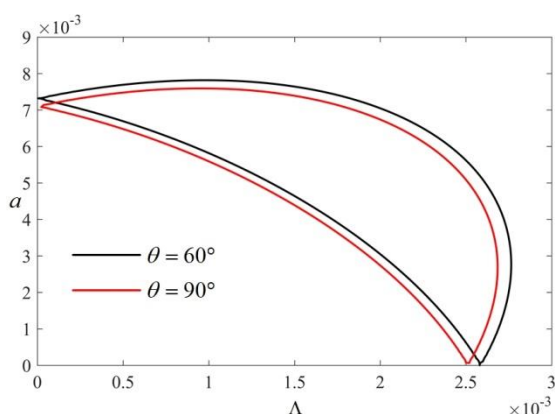
تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فروهارمونیک $1/3$ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز در شکل (۴۵-۵) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش پارامتر تنظیم منجر به افزایش میزان پرش می‌شود.



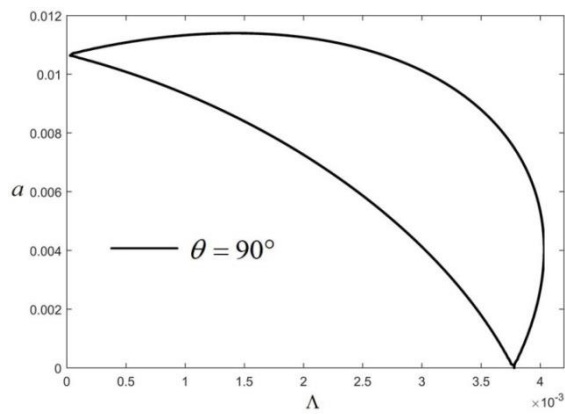
الف. $\beta = 0^\circ$



ب. $\beta = 30^\circ$

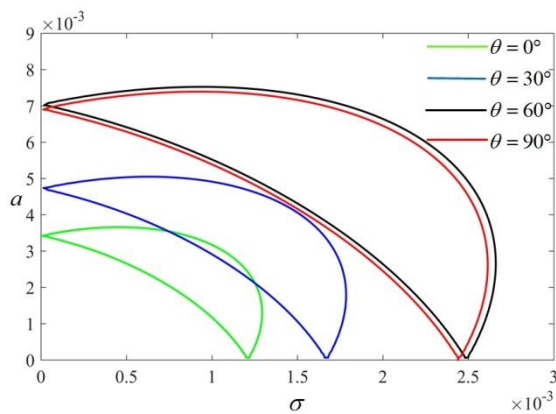


ج. $\beta = 60^\circ$

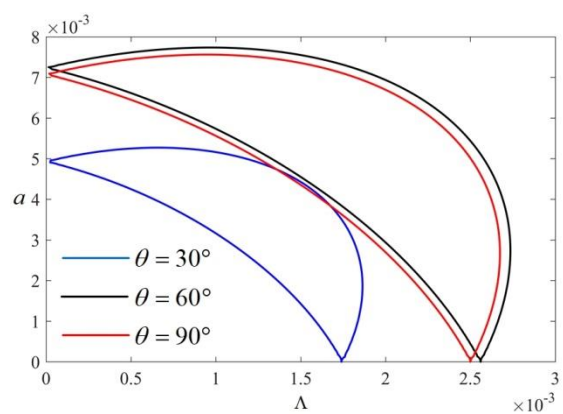


د. $\beta = 90^\circ$

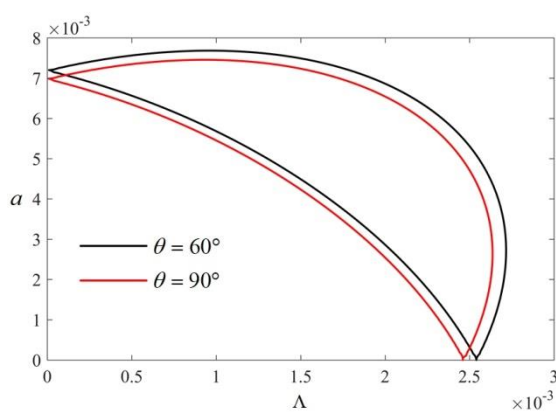
شکل (۴۳-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فروهارمونیک $1/3$ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز



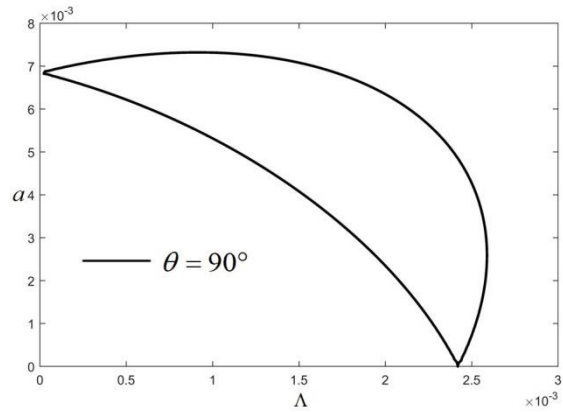
الف. $\beta = 0^\circ$



ب. $\beta = 30^\circ$

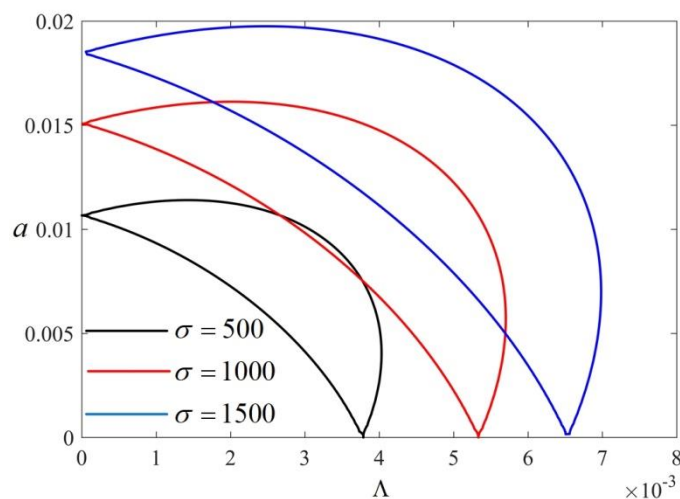


ج. $\beta = 60^\circ$



د. $\beta = 90^\circ$

شکل (۴۴-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک

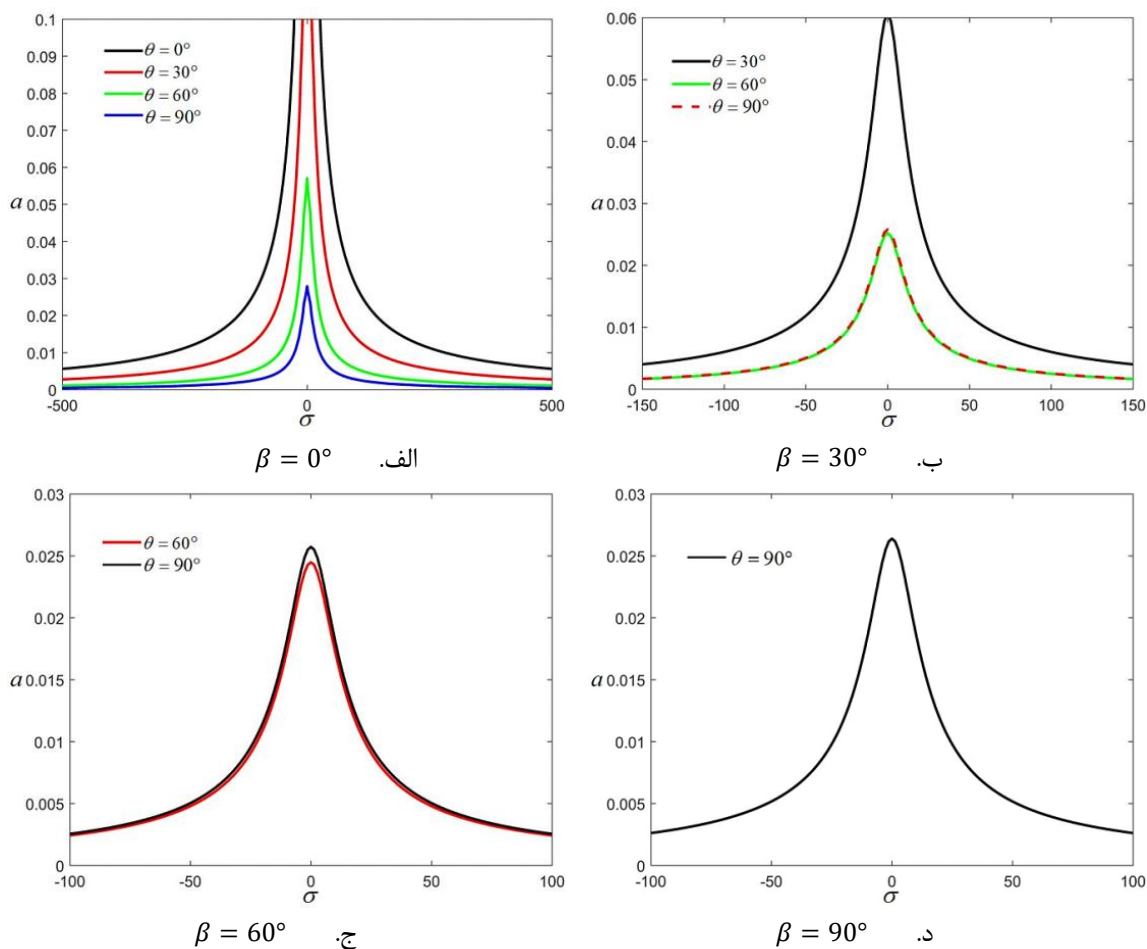


شکل (۴۵-۵) تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

۵-۲-۵- تحلیل تشدید فراهارمونیک ۲/۱

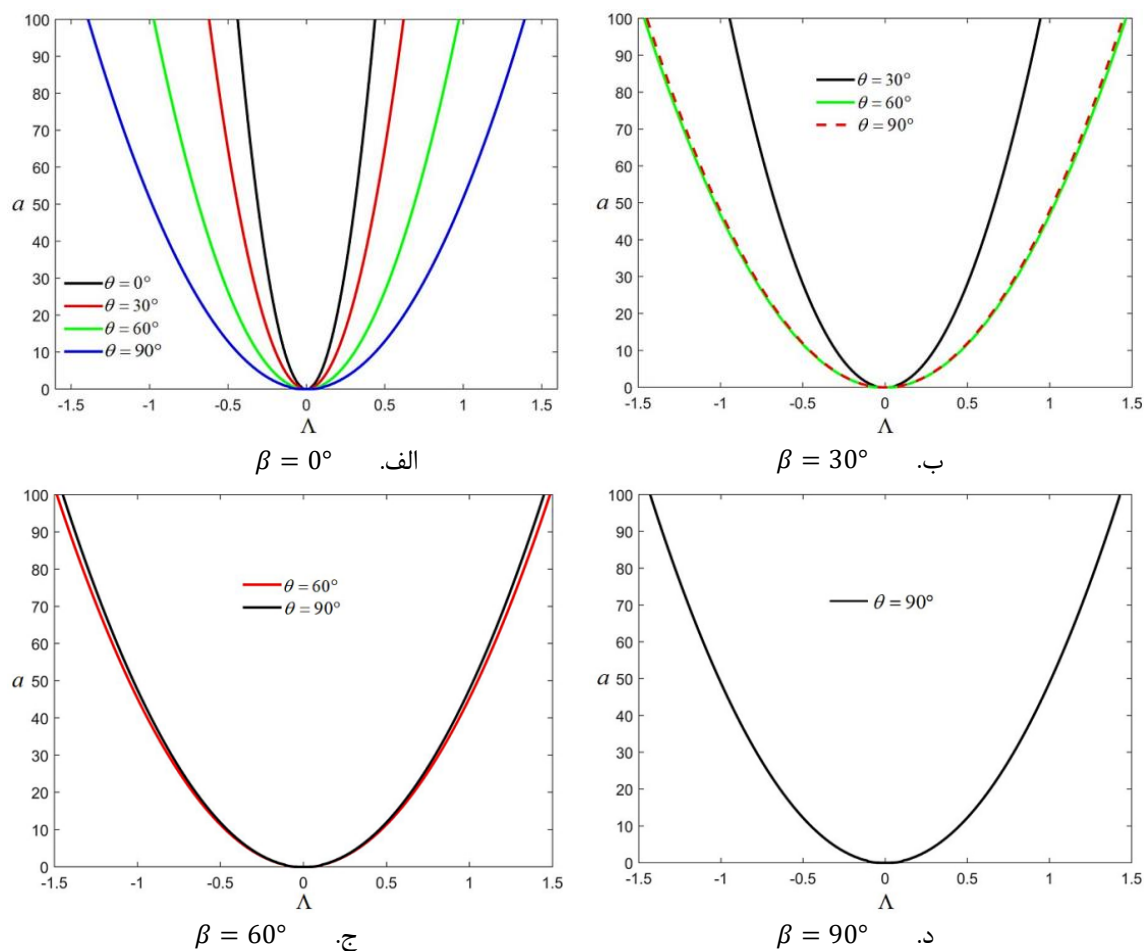
در این بخش، به بررسی تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت-کننده‌های خارجی پرداخته شده است. در این قسمت تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده در شکل (۵-۴۶) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ماکزیمم و مینیمم قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی، زمانی اتفاق می‌افتد که زاویه تقویت-کننده‌ها (θ و β) به ترتیب صفر درجه یا بزرگ‌تر-مساوی از شصت درجه باشد. به عبارتی دیگر زمانی که فرکانس تحریک به $1/2$ فرکانس طبیعی پوسته نزدیک می‌شود، ماکزیمم و مینیمم قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی، زمانی اتفاق می‌افتد که زاویه تقویت‌کننده‌ها به ترتیب صفر درجه یا بزرگ‌تر-مساوی از شصت درجه باشد. همچنین همان‌طور که مشاهده می‌شود، با اینکه هندسه مورد مطالعه غیرخطی می‌باشد و تشدید زمانی رخ داده که فرکانس تحریک به $1/2$ فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای نزدیک می‌شود، ولی رفتاری مشابه با حالت خطی دارد. لذا برای هندسه با معادلات حرکت دارای غیر خطی مرتبه سوم و دوم، وقتی تحلیل‌های مربوط به تشدید فراهارمونیک انجام می‌شود، چون در قسمت دوم (ضرایب ϵ) اثر دامنه تحریک از بین می‌رود، راه حل بدست آمده به تحلیل‌های خطی نزدیک می‌شود [۶۶].



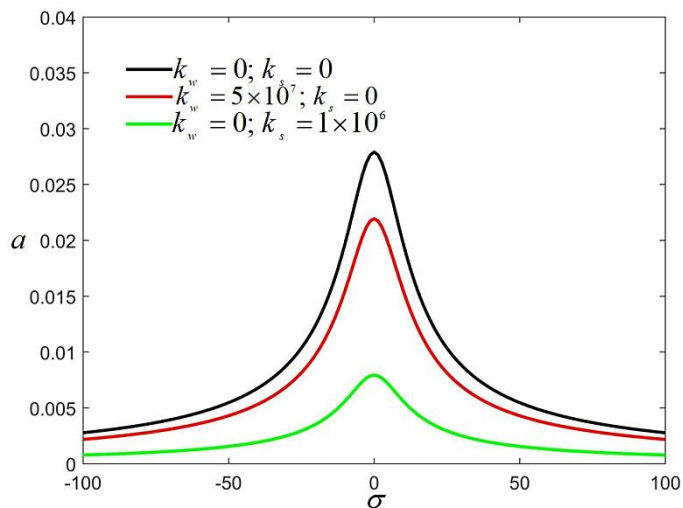
شکل (۴۶-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده

شکل (۴۷-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها بزرگ‌تر-مساوی از شصت درجه باشد، پاسخ دامنه نسبت به افزایش دامنه تحریک حساسیت کم‌تری نشان می‌دهد، درحالی‌که زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با صفر درجه باشد (یعنی پوسته با تقویت‌کننده طولی باشد)، میزان این حساسیت افزایش می‌یابد.



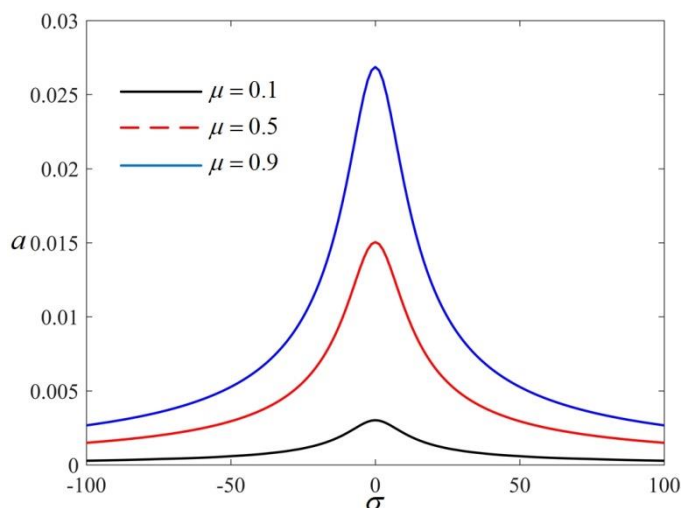
شکل (۴۷-۵) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده

تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده در شکل (۴۸-۵) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، بستر الاستیک خطی باعث کاهش میزان قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی می‌شود، اما مقدار ماکزیمم قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی برای پوسته با ضریب بستر الاستیک پاسترناک کم‌تر از پوسته با ضریب بستر الاستیک وینکلر می‌باشد. این بدان معناست که ضریب بستر الاستیک پاسترناک دامنه تشدید را بیش‌تر از ضریب بستر الاستیک وینکلر کاهش می‌دهد.



شکل (۴۸-۵) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱
پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

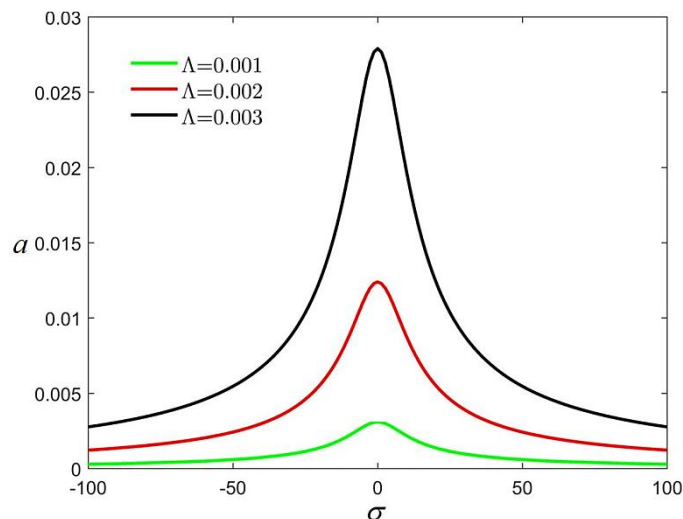
در شکل (۴۹-۵)، تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده نشان داده شده است. با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، مقدار قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی افزایش می‌یابد و نمودار پاسخ فرکانس-دامنه چند برابر می‌شود. این نشان می‌دهد که افزایش پارامتر نقص اولیه منجر به افزایش دامنه تشدید می‌شود.



شکل (۴۹-۵) تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱
پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

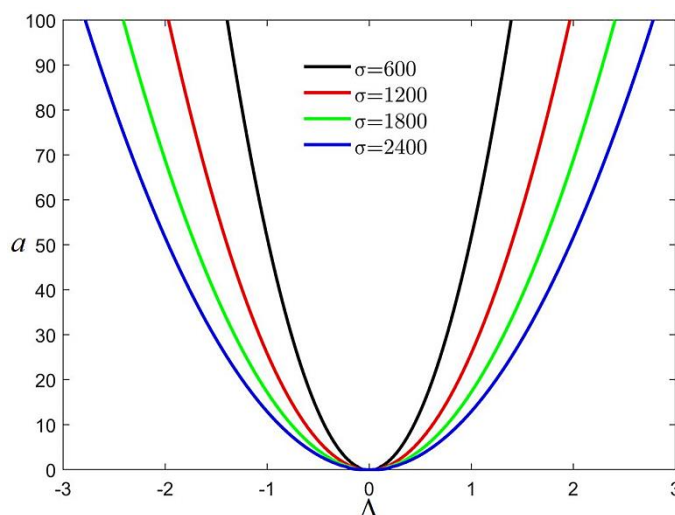
شکل (۵۰-۵)، تأثیر دامنه تحریک خارجی را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک

۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، افزایش دامنه تحریک خارجی منجر به افزایش مقدار ماکزیمم قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی و در نتیجه دامنه تشدید می‌شود.



شکل (۵-۵) تأثیر دامنه تحریک خارجی را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده در شکل (۵-۵۱) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای یک دامنه تحریک ثابت، افزایش پارامتر تنظیم منجر به افزایش پاسخ دامنه می‌شود.



شکل (۵-۵۱) تأثیر پارامترهای تنظیم (σ) مختلف بر پاسخ دامنه نسبت به دامنه تحریک برای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

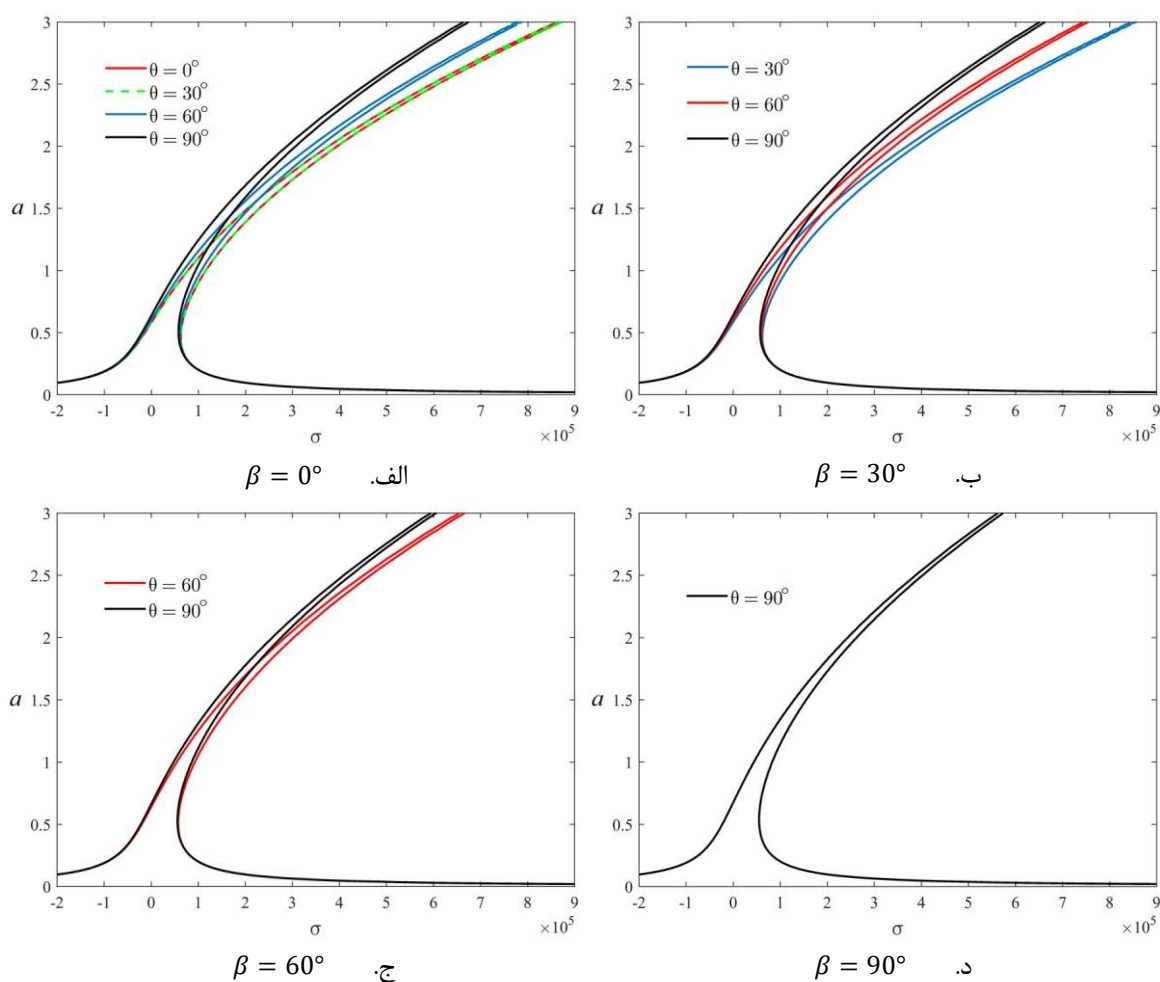
۵-۲-۶- تحلیل تشدید ترکیبی ($\omega_{mn} \approx \Omega_2 + 2\Omega_1$)

در این بخش، به بررسی تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده پرداخته شده است. در این قسمت تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

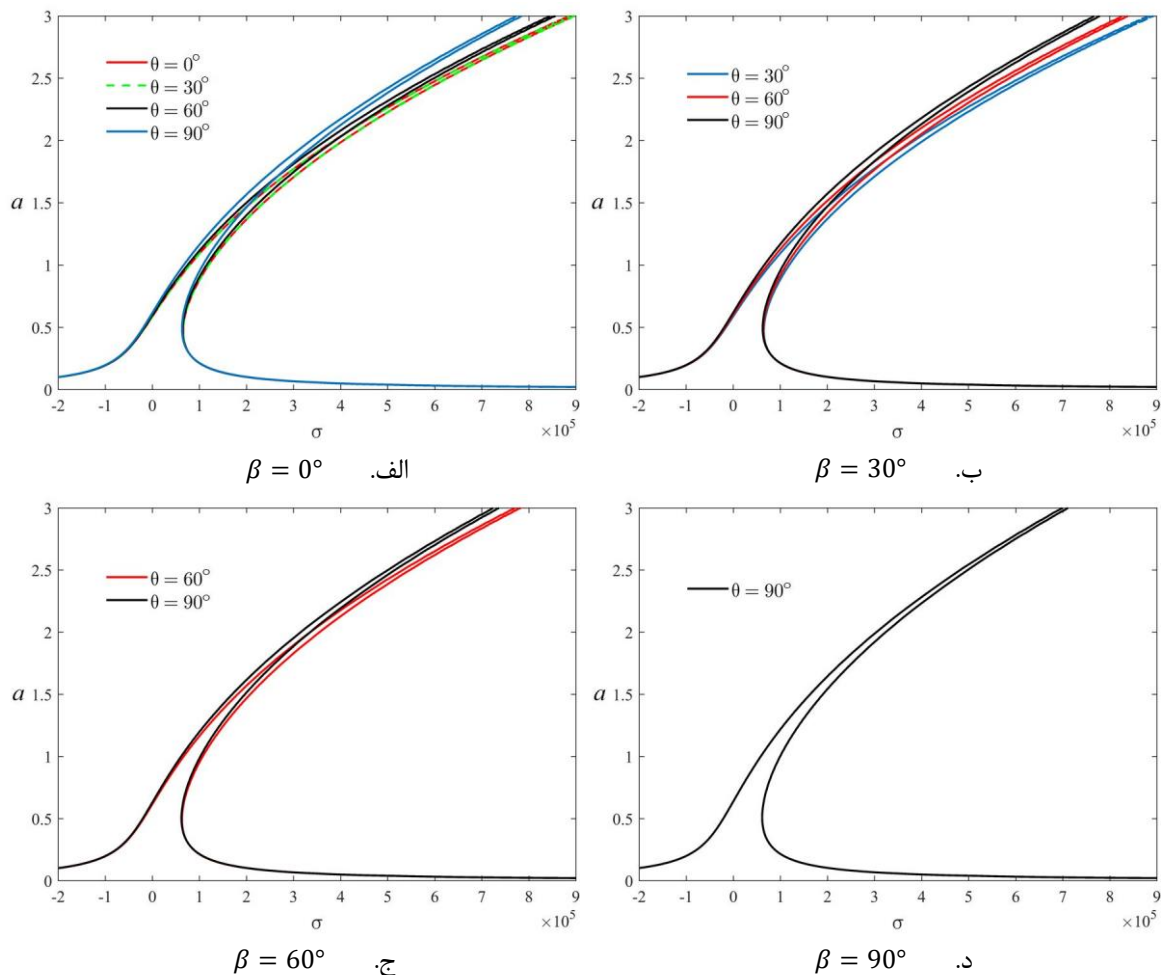
تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی و داخلی به ترتیب در شکل‌های (۵-۵۲) و (۵-۵۳) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β) بین صفر و سی درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی پوسته بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته بین نود و شصت درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حقیقت یعنی وقتی که تحریک مسئله مشتمل بر دو عبارت با فرکانس‌های Ω_1 و Ω_2 باشد، زمانی که مجموع فرکانس تحریک دوم با دو برابر فرکانس تحریک اول به فرکانس طبیعی نزدیک می‌شود ($\omega_{mn} \approx \Omega_2 + 2\Omega_1$)، رفتار سخت‌شوندگی پوسته به ترتیب برای زاویه تقویت‌کننده‌های بین صفر و سی درجه و زاویه تقویت‌کننده‌های بین نود و شصت درجه بیش‌تر افزایش و کاهش می‌یابد.

تأثیر ضریب کسر حجمی متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای

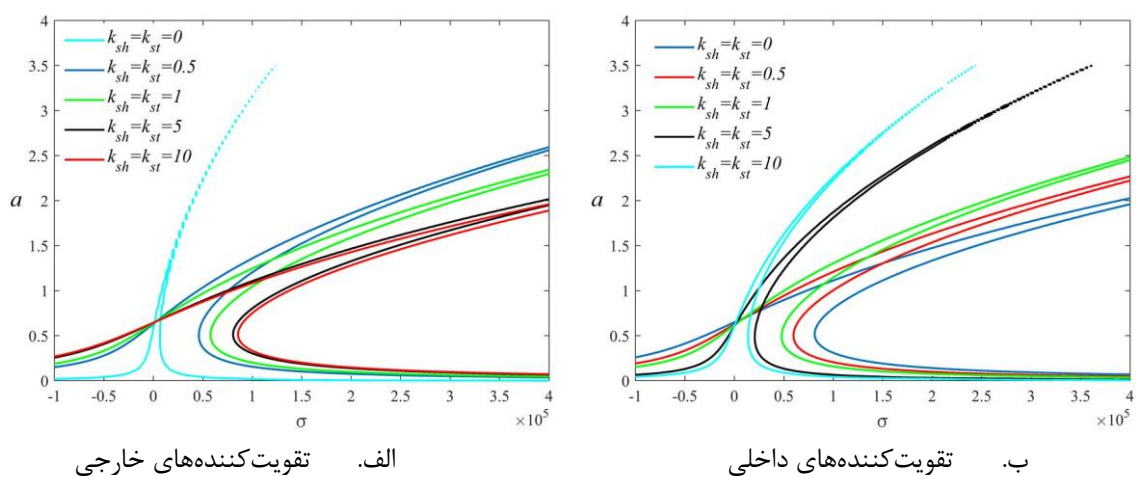
مدرج تابعی تقویت‌شده در شکل (۵-۵۴) نشان داده شده است. با توجه به شکل (۵-۵۴-الف)، زمانی که ضریب کسر حجمی افزایش می‌یابد، رفتار سخت‌شوندگی پوسته با تقویت‌کننده‌های خارجی افزایش می‌یابد. درحالی‌که با توجه به شکل (۵-۵۴-ب) برای پوسته با تقویت‌کننده‌های داخلی، زمانی که ضریب کسر حجمی افزایش می‌یابد، رفتار سخت‌شوندگی پوسته کاهش می‌یابد.



شکل (۵-۵۲) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی

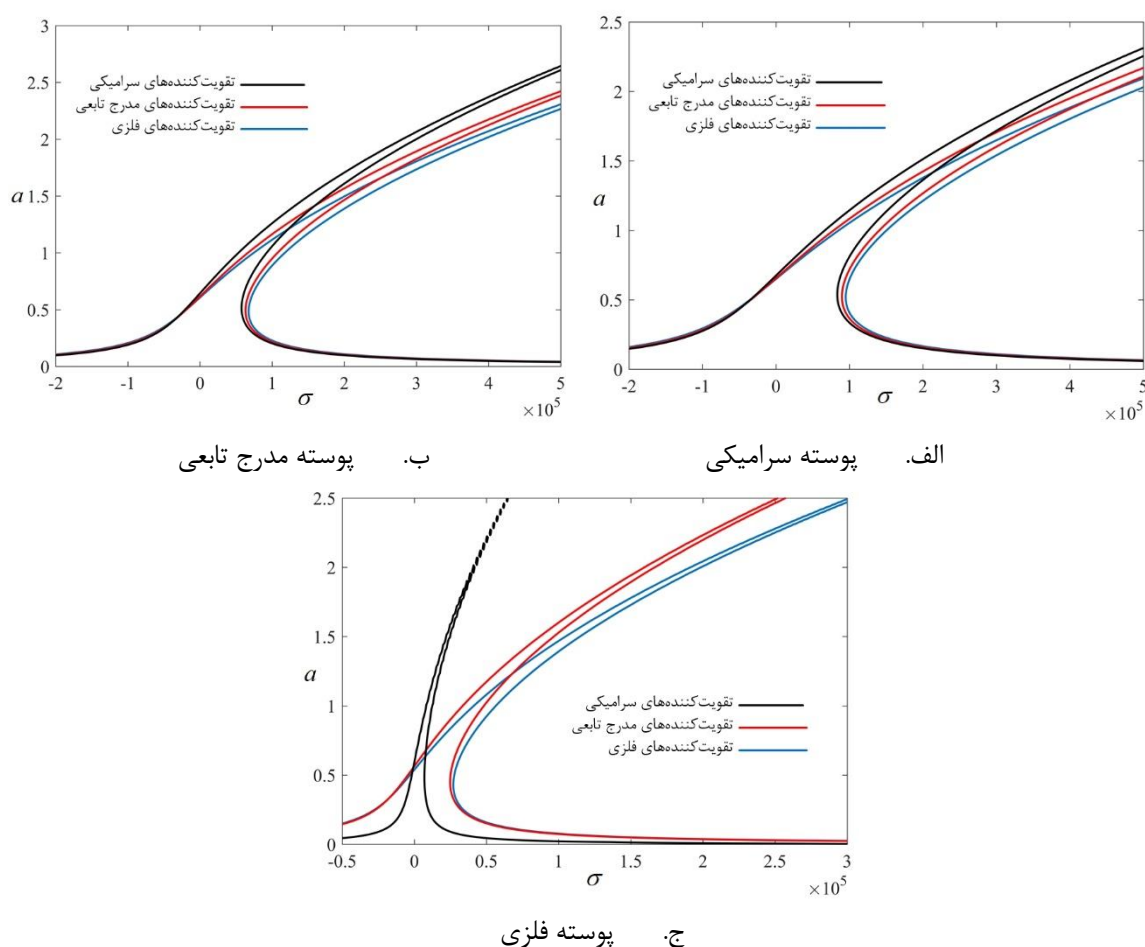


شکل (۵۳-۵) نمودار پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت-کننده‌های داخلی



شکل (۵۴-۵) تأثیر ضریب کسر حجمی متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

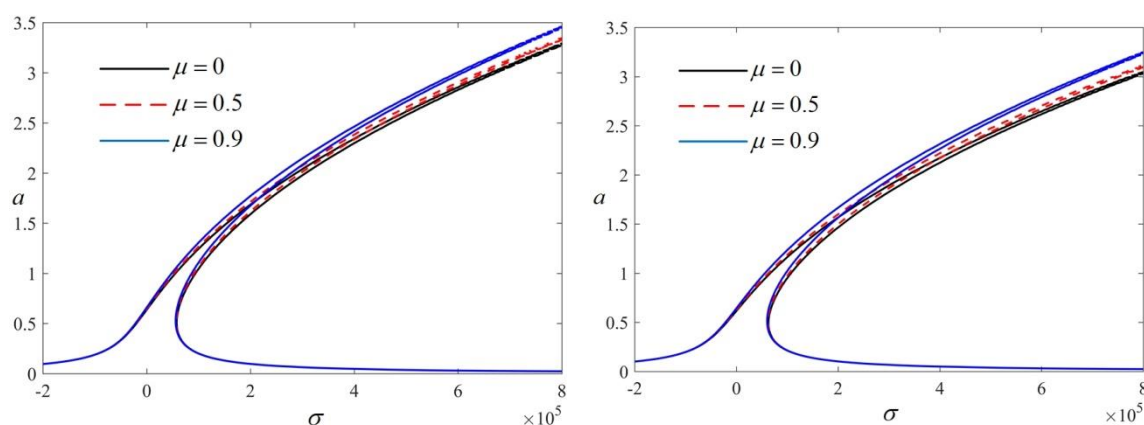
در شکل (۵-۵۵) تأثیر توزیع مواد بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده داخلی نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای پوسته استوانه‌ای سرامیکی با تقویت‌کننده فلز، رفتار سخت‌شوندگی پوسته بیش‌تر از حالت‌های دیگر می‌باشد و برای پوسته استوانه‌ای فلزی با تقویت‌کننده سرامیکی، رفتار سخت‌شوندگی پوسته کم‌تر از حالت‌های دیگر می‌باشد.



شکل (۵-۵۵) تأثیر توزیع مواد بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

در شکل (۵-۵۶)، تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده نشان داده شده است. با افزایش مقدار پارامتر نقص

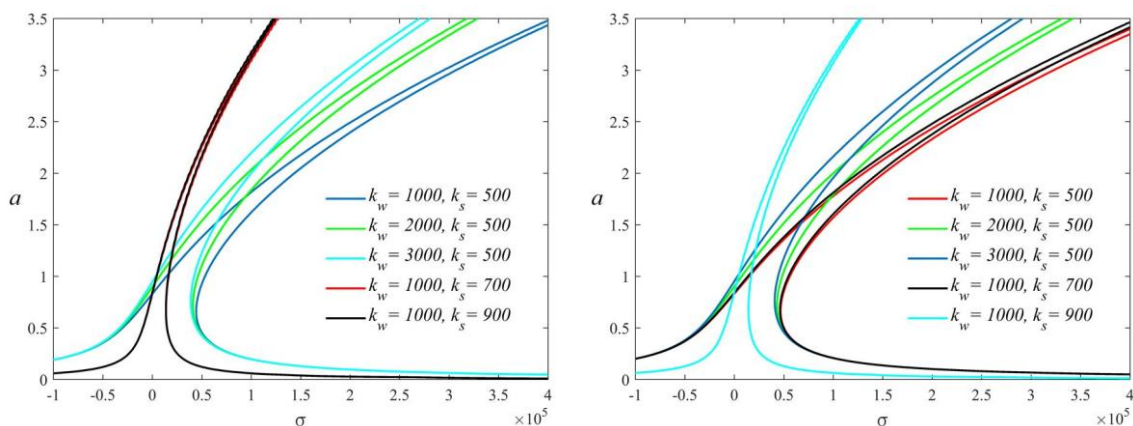
اولیه، رفتار سخت‌شوندگی پوسته کاهش می‌یابد. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، تأثیر پارامتر نقص اولیه بر روی پوسته با تقویت‌کننده‌های داخلی بیش‌تر می‌باشد و در نتیجه در شرایط یکسان رفتار سخت‌شوندگی پوسته با تقویت‌کننده‌های داخلی بیش‌تر از پوسته با تقویت‌کننده‌های خارجی می‌باشد.



الف. تقویت‌کننده‌های داخلی ب. تقویت‌کننده‌های خارجی

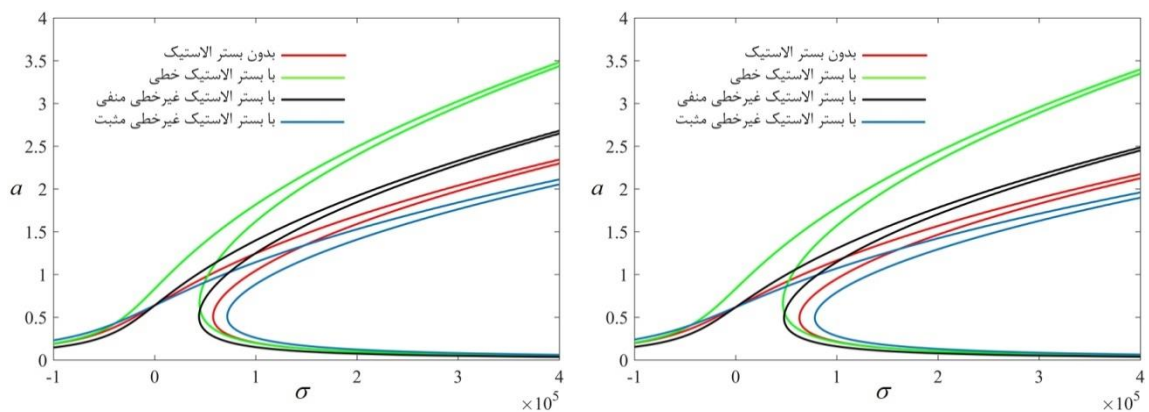
شکل (۵-۵۶) تأثیر پارامتر نقص اولیه (μ) متفاوت بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده در شکل (۵-۵۷) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، رفتار سخت‌شوندگی پوسته با ضریب بستر الاستیک پاسترناک بیش‌تر از پوسته با ضریب بستر الاستیک وینکлер می‌باشد.



الف. تقویت‌کننده‌های داخلی
 ب. تقویت‌کننده‌های خارجی
 شکل (۵-۵۷) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

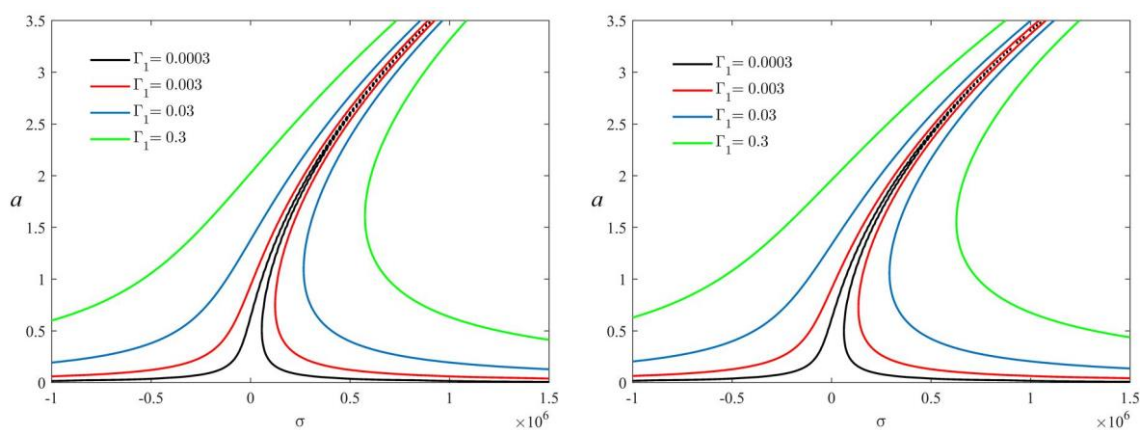
در شکل (۵-۵۸)، تأثیر بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده نشان داده شده است. در این قسمت نیز لازم به توضیح است که تغییرات پارامترهای خطی (k_w و k_s) و غیرخطی (k_{nl}) بستر الاستیک منجر به تغییر در ضرایب اصطلاحات خطی و غیرخطی مرتبه سوم می‌شود (با توجه به روابط (۳-۹)، (۳-۱۳) و (۳-۹۰)). بنابراین، در اینجا، علاوه بر تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی، اثرات شرایط خطی و غیرخطی پاسخ تشدید ترکیبی پوسته نیز بررسی می‌شود. با توجه به این شکل، بستر الاستیک غیرخطی منفی و مثبت به ترتیب منجر به کاهش و افزایش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود. به علاوه، بستر الاستیک غیرخطی منفی منجر به کاهش مقدار ماکزیمم قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی می‌شود. همچنین رفتار سخت‌شوندگی پوسته با بستر الاستیک خطی نسبت به پوسته با بستر الاستیک غیرخطی بیش‌تر کاهش می‌یابد.



الف. تقویت کننده‌های داخلی ب. تقویت کننده‌های خارجی

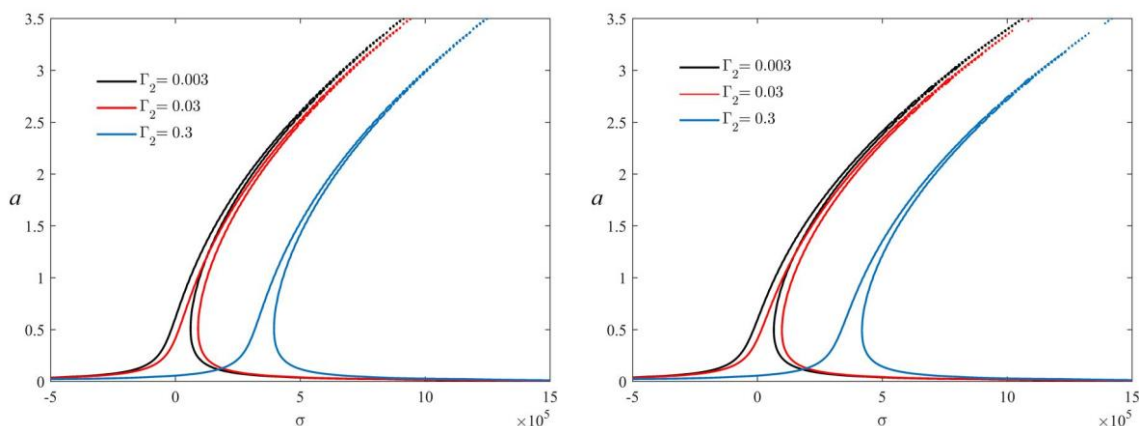
شکل (۵-۵۸) تأثیر بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

تأثیر دامنه‌های تحریک (Γ_1) و (Γ_2) بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه-ای مدرج تابعی تقویت شده به ترتیب در شکل‌های (۵-۵۹) و (۵-۶۰)، نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۵-۵۹) مشاهده می‌شود، با افزایش دامنه تحریک (Γ_1) منحنی پاسخ فرکانس-دامنه چند برابر می‌شود. درحالی‌که با توجه به شکل (۵-۶۰)، با افزایش دامنه تحریک (Γ_2) در مقادیر بزرگ پارامتر تنظیم، پدیده پرش اتفاق و همچنین نمودار به سمت راست انتقال می‌یابد.



الف. تقویت کننده‌های داخلی ب. تقویت کننده‌های خارجی

شکل (۵-۵۹) تأثیر دامنه تحریک (Γ_1) بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)



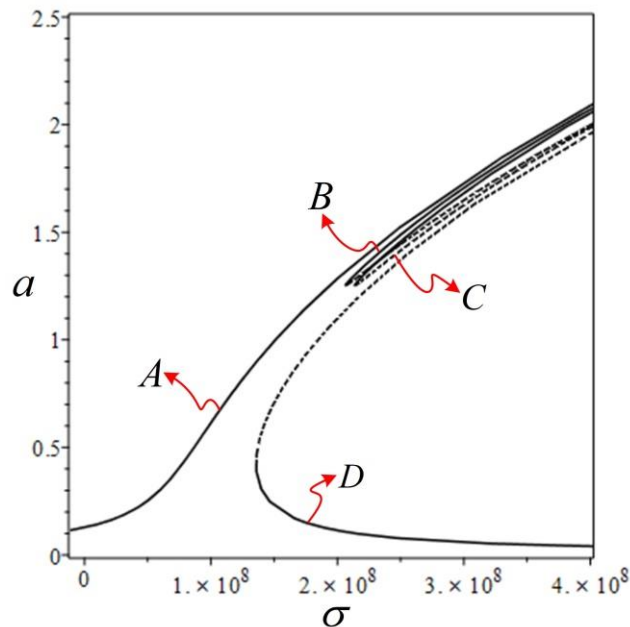
الف. تقویت‌کننده‌های داخلی
ب. تقویت‌کننده‌های خارجی
شکل (۵-۶۰) تأثیر دامنه تحریک (Γ_2) بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید ترکیبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

۵-۲-۷- تحلیل تشدید هم‌زمان ($\Omega_1 \approx \frac{1}{3}\omega_{mn}$ & $\Omega_2 \approx 3\omega_{mn}$)

در این بخش، به بررسی تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی یعنی حالتی که تشدیدهای فروهارمونیک و فراهارمونیک به‌صورت هم‌زمان اتفاق می‌افتد، پرداخته شده است. در این قسمت تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

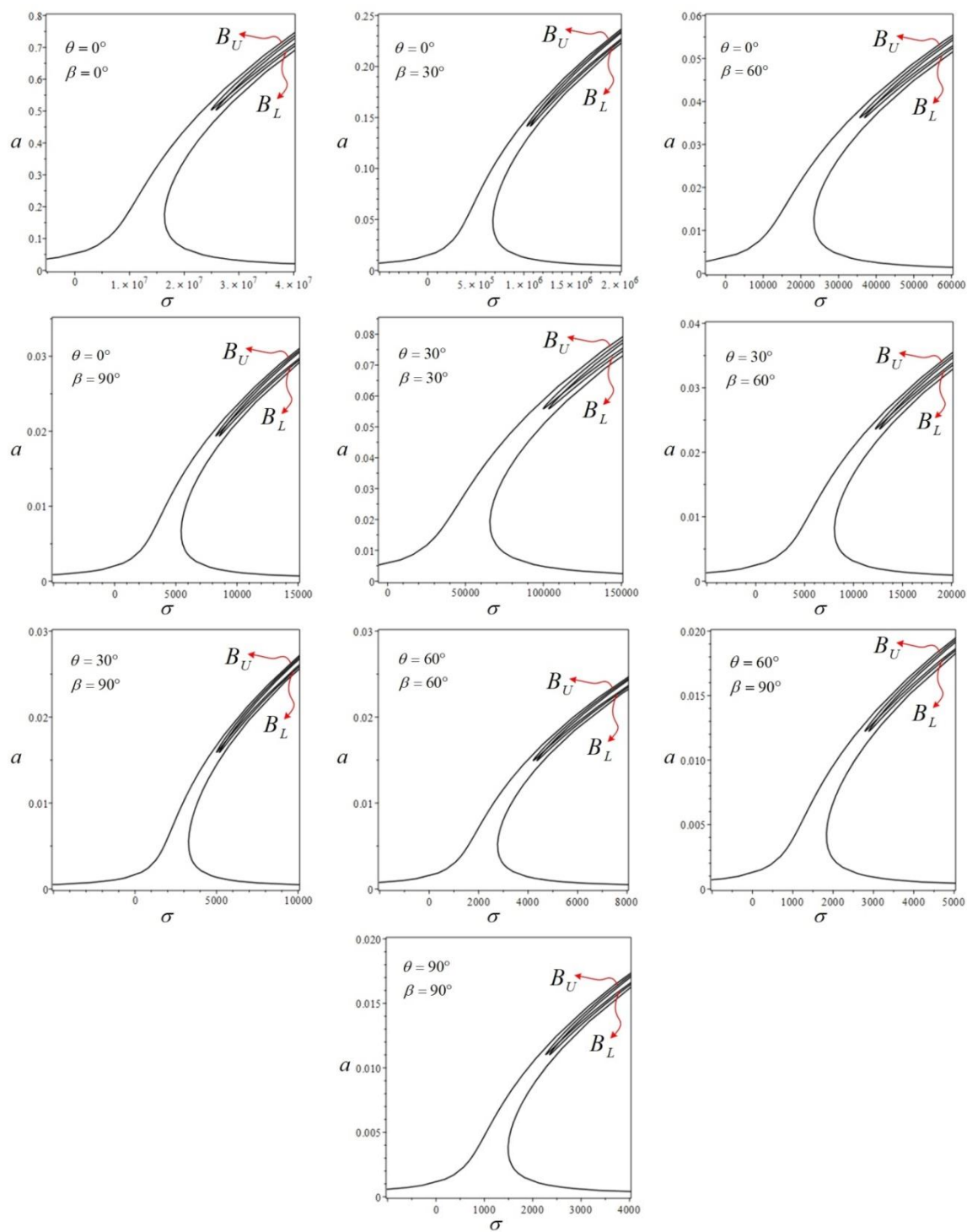
در شکل (۵-۶۱)، پاسخ فرکانس-دامنه تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای بدون تقویت‌کننده، نشان داده شده است. در این شکل، دو شاخه A و D مربوط به تشدید فراهارمونیک و دو شاخه باقی-مانده B و C مربوط به تشدید فروهارمونیک می‌باشند. از بررسی این شکل می‌توان نتیجه گرفت که ظهور هم‌زمان تشدیدهای فروهارمونیک و فراهارمونیک، ذات منحنی پاسخ فرکانسی را تحت تأثیر قرار می‌دهد به‌طوری‌که با توجه به اینکه در حالت تشدید فروهارمونیک دو حالت مختلف امکان‌پذیر می‌باشد: یا یک پاسخ و یا سه پاسخ که یکی از آن‌ها بدیهی و دو تای دیگر ناپایدار است و برای حالت فراهارمونیک نیز دو حالت: یا یک پاسخ غیر بدیهی یا سه پاسخ غیر بدیهی که یکی از آن‌ها ناپایدار باشد، در تشدید هم‌زمان چهار حالت مختلف امکان ظهور می‌یابد: (الف) یک پاسخ غیر بدیهی پایدار،

(ب) سه پاسخ غیر بدیهی که یکی از آنها ناپایدار است، (ج) پنج پاسخ غیر بدیهی که دو تای آنها ناپایدار است، (د) هفت پاسخ غیر بدیهی که سه تای آنها ناپایدار است.

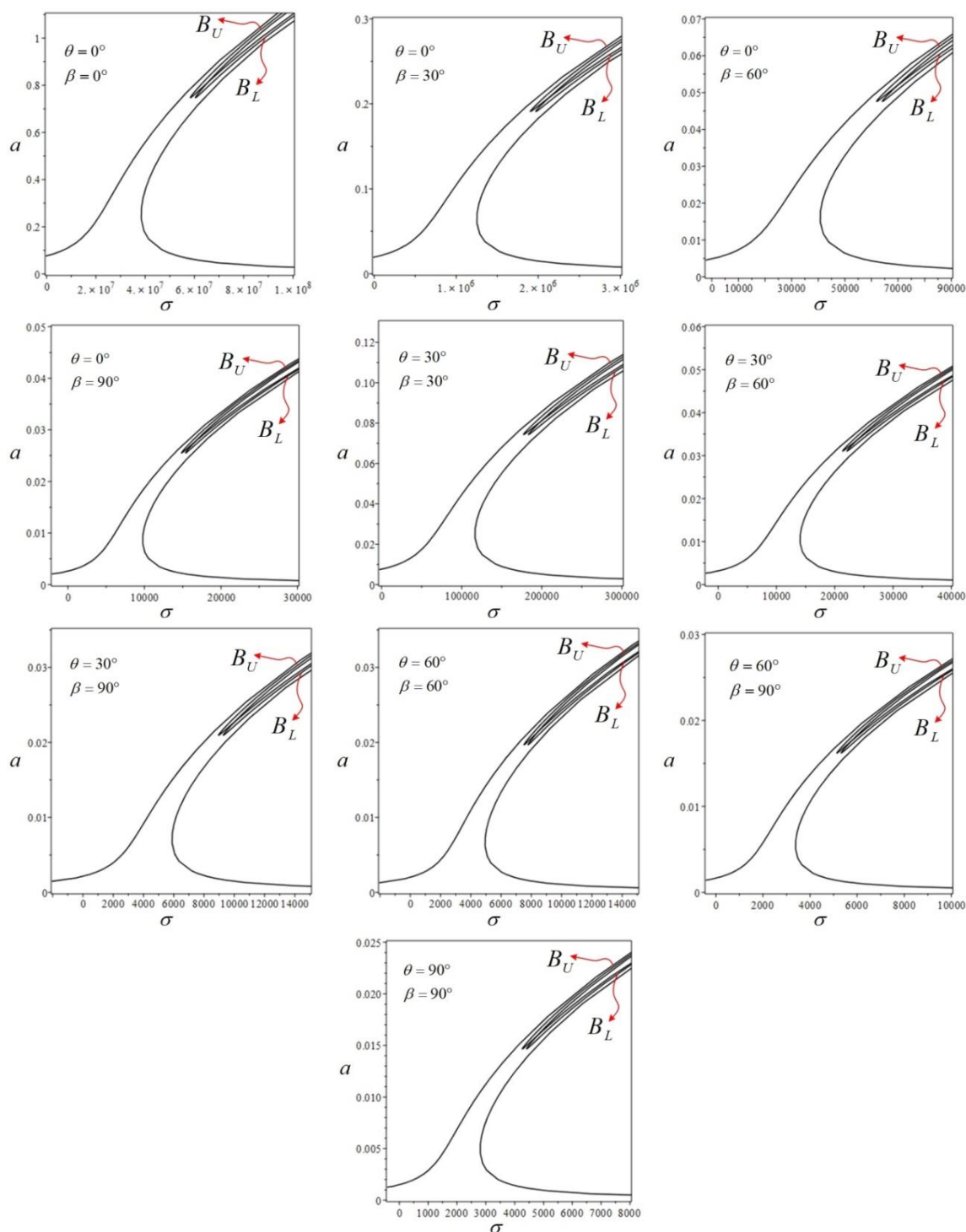


شکل (۵-۶۱) پاسخ فرکانس-دامنه تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای بدون تقویت‌کننده

تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید هم‌زمان پوسته استوانه-ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی و خارجی به ترتیب در شکل‌های (۵-۶۲) و (۵-۶۳) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β) بین صفر و سی درجه باشد و یا هر دوی زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با سی درجه باشد، دوشاخه (شاخه بالا B_U) و شاخه پایین (B_L) به هم نزدیک می‌شوند. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته بین سی و نود درجه باشد و یا هر دوی زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با شصت درجه باشد، دوشاخه از هم فاصله می‌گیرند. همچنین همان‌طور که مشاهده می‌شود، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β)، شصت درجه یا بین سی و شصت درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی پوسته بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته استوانه‌ای صفر درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.



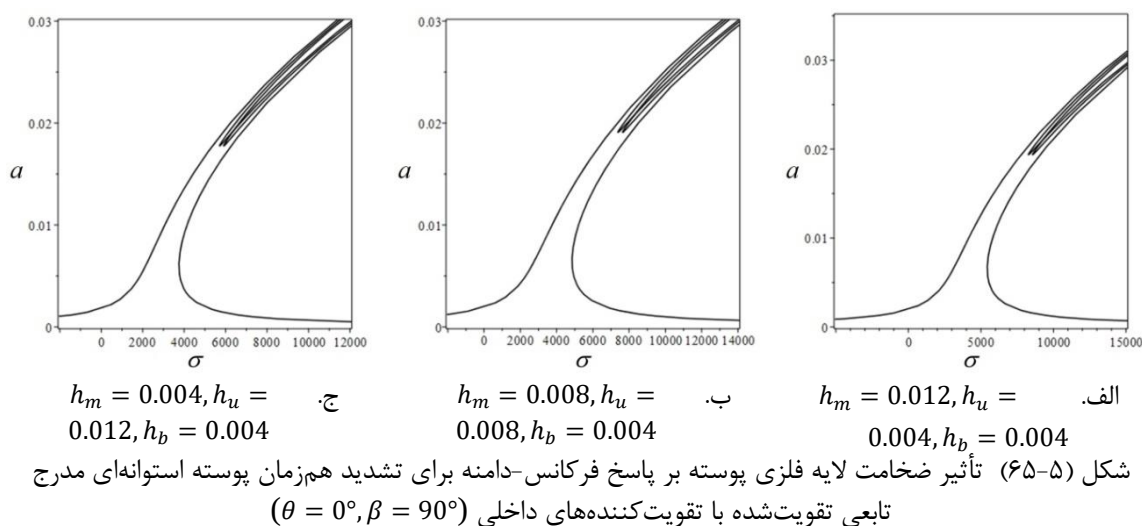
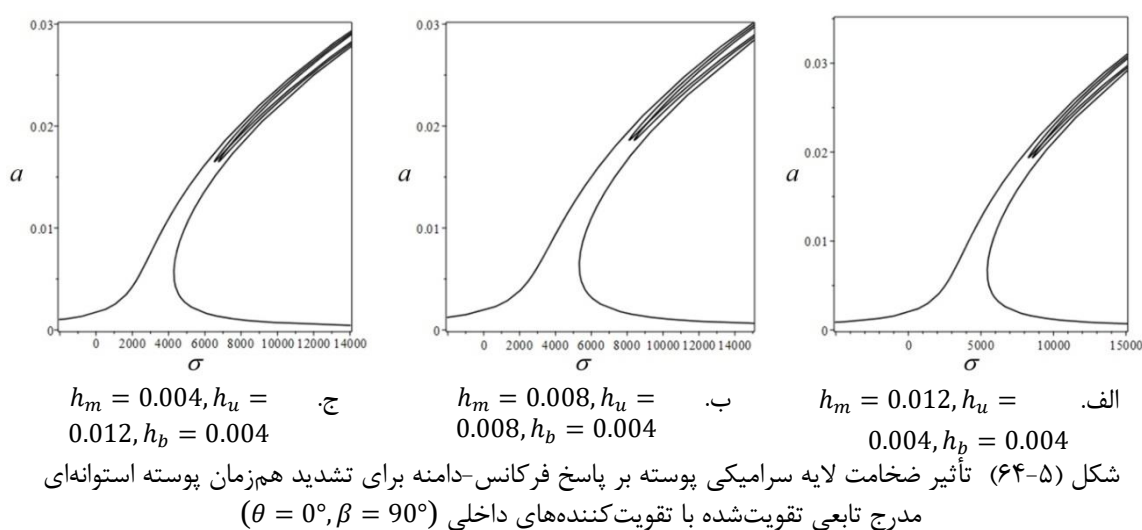
شکل (۵-۶۲) تأثیر زوایای مختلف تقویت کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با تقویت کننده‌های داخلی



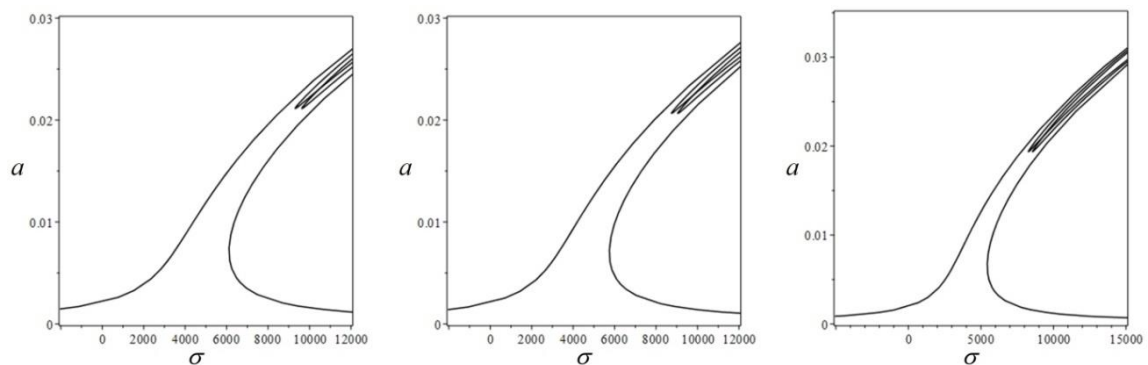
شکل (۵-۶۳) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی

شکل‌های (۵-۶۴) و (۵-۶۵)، تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته را بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده داخلی نشان می‌دهند. با توجه به این شکل‌ها، با افزایش لایه‌های سرامیکی و فلزی، دوشاخه از هم فاصله می‌گیرند. همچنین

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش لایه سرامیکی رفتار سخت‌شوندگی پوسته افزایش می‌یابد، اما با افزایش لایه فلزی رفتار سخت‌شوندگی پوسته کاهش می‌یابد. لذا با توجه به نتایج نشان داده شده، می‌توان دریافت که با نزدیک شدن جنس پوسته به سرامیک، رفتار سخت‌شوندگی پوسته افزایش می‌یابد و این نشان می‌دهد که جنس سرامیک منجر به افزایش ضریب غیرخطی مرتبه سوم (با توجه به روابط (۳-۱۳) و (۳-۹۰)) می‌شود.



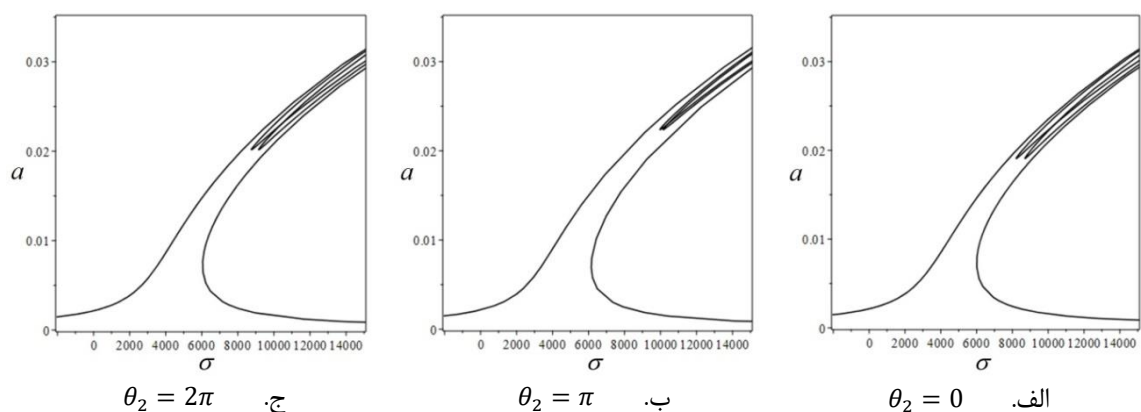
در شکل (۵-۶۶)، تأثیر بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی نشان داده شده است. با توجه به این شکل، بستر الاستیک منجر به افزایش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود و دوشاخه نیز به یکدیگر نزدیک می‌شوند. همچنین، رفتار سخت‌شوندگی پوسته با بستر الاستیک غیرخطی بیش‌تر از پوسته با بستر الاستیک خطی می‌شود.



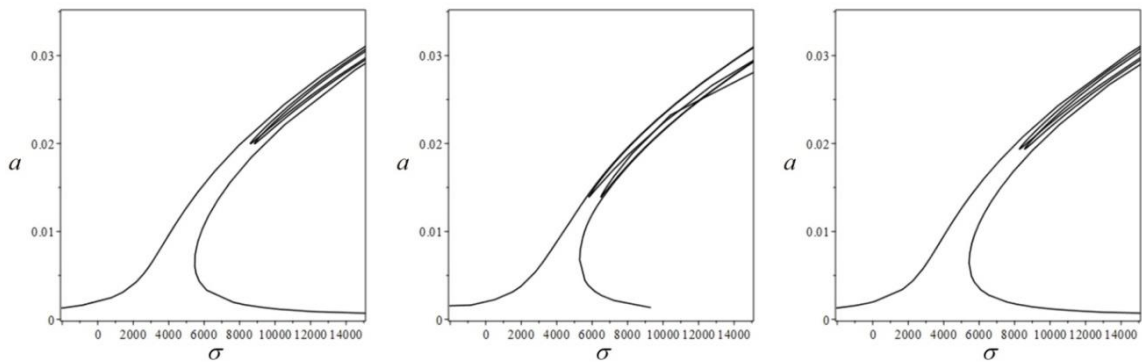
الف. بدون بستر الاستیک ب. بستر الاستیک خطی ج. بستر الاستیک غیرخطی
 شکل (۵-۶۶) تأثیر بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر پاسخ فرکانس-دامنه برای تشدید هم‌زمان پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

در شکل‌های (۵-۶۷) تا (۵-۶۹)، تأثیر فاز نسبی ($\theta_1 - \theta_2$) دو تحریک بر پاسخ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی نشان داده شده است. این فاز نسبی تنها تأثیر جزئی بر روی منحنی‌های فرآهرمونیک (شاخه‌های A و D که در شکل (۵-۶۱) نشان داده شده است) دارد، اما بر روی منحنی‌های فروهارمونیک (شاخه‌های B و C که در شکل (۵-۶۱) نشان داده شده است) تأثیر قابل توجهی دارد. در شکل (۵-۶۷) که θ_1 برابر صفر است، با افزایش θ_2 از صفر به 2π ، منحنی‌های B و C به سمت راست منتقل می‌شوند، در حالیکه منحنی C به سمت بالا و منحنی B به سمت پایین منتقل می‌شود تا زمانی که $\theta_2 = \pi$ ، آن‌ها تودرتو می‌شوند. همچنین با افزایش بیش‌تر θ_2 ، تغییر به سمت بالا و پایین منحنی‌های B و C ادامه می‌یابد و علاوه بر این، آن‌ها به سمت چپ نیز تغییر جهت می‌دهند. هنگامی که $\theta_2 = 2\pi$ ، منحنی پاسخ فرکانسی همانند موردی است که $\theta_2 = 0$ است، با این تفاوت که منحنی‌های B و C باهم عوض می‌شوند. در شکل (۵-۶۸) که θ_1 برابر $\pi/2$

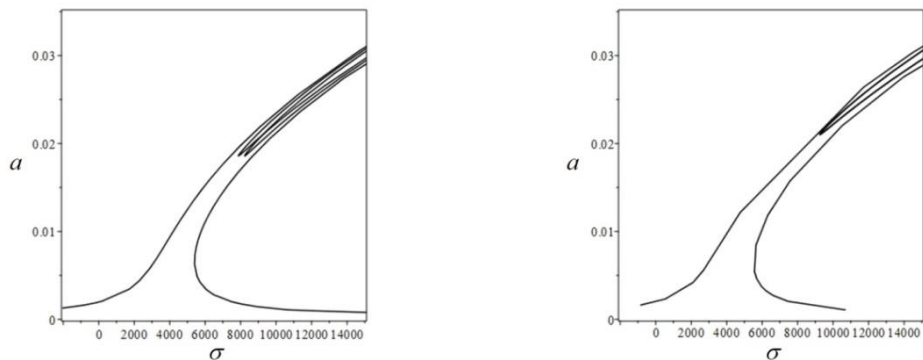
است، هنگامی که $\theta_2 = \pi/2$ ، منحنی پاسخ فرکانسی همانند موردی است که $\theta_2 = 3\pi/2$ ، با این تفاوت که منحنی‌های B و C از یکدیگر فاصله می‌گیرند. همچنین، هنگامی که $\theta_2 = 2\pi$ ، منحنی پاسخ فرکانسی همانند موردی است که $\theta_2 = 0, \pi$ است، با این تفاوت که منحنی‌های B و C باهم عوض می‌شوند. در شکل (۶۹-۵) که θ_1 برابر $3\pi/2$ است، زمانی که $\theta_2 = 3\pi/2$ منحنی پاسخ فرکانسی همانند موردی است که θ_2 برابر با $0, \pi, 2\pi$ و $3\pi/2$ است، با این تفاوت که منحنی‌های B و C باهم عوض می‌شوند و زمانی که $\theta_2 = 3\pi/2$ ، منحنی‌های B و C به هم نزدیک می‌شوند.



شکل (۶۷-۵) تأثیر فاز نسبی $(\theta_1 - \theta_2)$ دو تحریک بر پاسخ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت-کننده‌های داخلی $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ, \theta_1 = 0)$

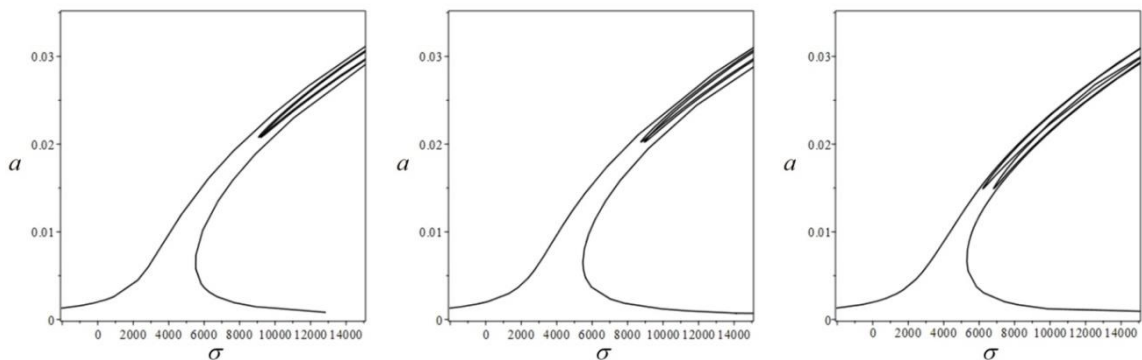


الف. $\theta_2 = 0$ ب. $\theta_2 = \pi/2$ ج. $\theta_2 = \pi$

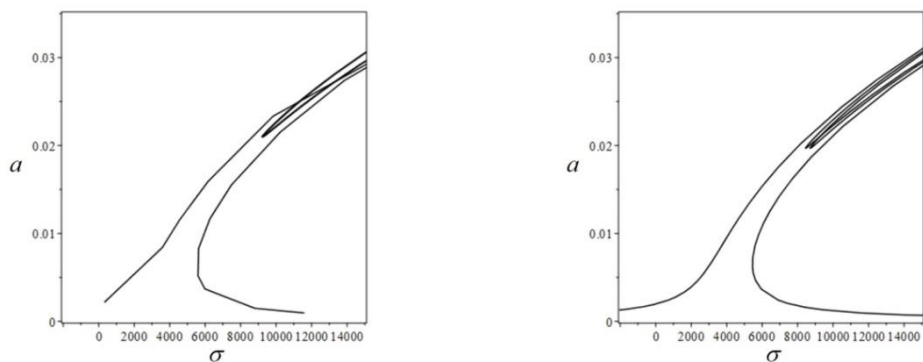


د. $\theta_2 = 3\pi/2$ هـ. $\theta_2 = 2\pi$

شکل (۶۸-۵) تأثیر فاز نسبی $(\theta_1 - \theta_2)$ دو تحریک بر پاسخ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت-کننده‌های داخلی $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ, \theta_1 = \pi/2)$



الف. $\theta_2 = 0$ ب. $\theta_2 = \pi/2$ ج. $\theta_2 = \pi$



د. $\theta_2 = 3\pi/2$ هـ. $\theta_2 = 2\pi$

شکل (۶۹-۵) تأثیر فاز نسبی $(\theta_1 - \theta_2)$ دو تحریک بر پاسخ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت-کننده‌های داخلی $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ, \theta_1 = 3\pi/2)$

۵-۳- نتایج حاصل از ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس چندمود

در این قسمت به بررسی پاسخ ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با نقص اولیه و یا بدون نقص اولیه، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی و تحت تحریک خارجی و یا تحریک خارجی و پارامتریک، پرداخته‌شده است. لازم به ذکر است که نتایج حاصل در این قسمت برای پوسته استوانه‌ای بر اساس سه‌مود برجسته اول می‌باشد. اندازه کلیه پارامترهای مورد نیاز برای تحلیل‌های این قسمت همان مقادیری است که به ترتیب در جدول‌های (۵-۱)، (۵-۸) و (۵-۹) بیان‌شده است.

جدول (۵-۸) پارامترهای استفاده‌شده مورد نیاز برای تحلیل‌های مربوط به پدیده تشدید پوسته استوانه‌ای

مقدار	خواص هندسی	مقدار	خواص هندسی
0.5 m	R	0.01 m	h_s
0.75 m	L	0.0025 m	d
0.0012 m	h_m	1	m
0.0004 m	$h_u = h_b$	1	$K_{sh} = K_{st}$

جدول (۵-۹) مشخصات بستر الاستیک خطی و غیرخطی [۴۸]

k_w (kN/m)	k_s (kN/m)	k_w (MN/m ⁵)
1000	100	±100

۵-۳-۱- معتبر سازی رهیافت حاضر

برای راستی آزمایی فرمول‌بندی حاضر در این قسمت، مقایسه بین مطالعه حاضر و کارهای دیگر محققان انجام شده است. لذا به‌منظور راستی آزمایی فرمول‌بندی موجود در رساله حاضر، فرکانس‌های طبیعی بدون بعد^۱ پوسته‌های استوانه‌ای در جدول (۵-۱۰) آورده شده است که با نتایج یانگ و همکاران [۲۶]، سنگ و همکاران [۷۷] و ژانگ و همکاران [۷۸] و فرکانس‌های طبیعی بدون بعد

¹ Dimensionless

پوسته استوانه‌ای با بستر الاستیک وینکلر در جدول (۵-۱۱) آورده شده است که با نتایج دانگ و نام [۴۸]، صوفیه و همکاران [۷۱] و پالیوال و همکاران [۷۲] مقایسه شده است. از بررسی نتایج فوق می‌توان دریافت که نتایج حاصل با سایر مراجع هم‌خوانی مناسبی دارد. همچنین با توجه به این مراجع، رابطه فرکانس بدون بعد به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{\omega}_n = \omega_n R \sqrt{(1 - \nu^2) \frac{\rho}{E}} \quad (۳-۵)$$

جدول (۵-۱۰) مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدون بعد پوسته استوانه‌ای

		مطالعه حاضر	یانگ و همکاران [۲۶]	سنگ و همکاران [۷۷]	ژانگ و همکاران [۷۸]
$h/R = 0.05$	$\omega_1 (n = 1)$	0.0151266	0.0151185	0.0161299	0.0161065
	$\omega_2 (n = 3)$	0.1097431	0.1096523	0.1097653	0.1098113
$h/R = 0.002$	$\omega_1 (n = 1)$	0.0161008	0.0161003	0.0161011	0.0161011
	$\omega_2 (n = 3)$	0.0050421	0.0050423	0.0050424	0.0050418

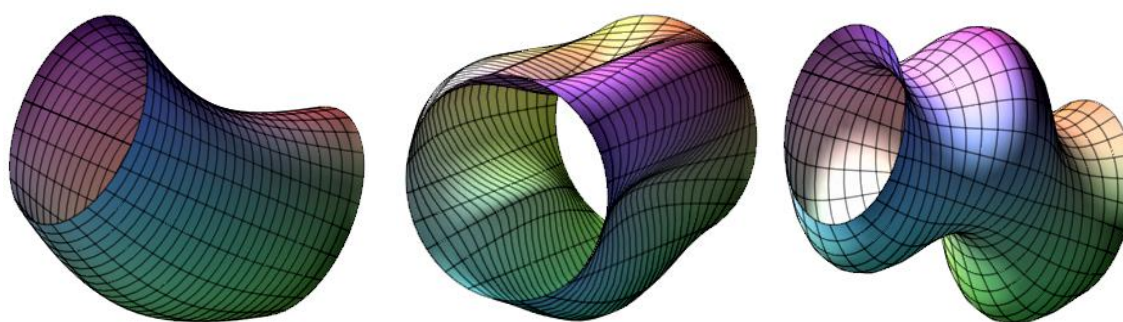
جدول (۵-۱۱) مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدون بعد پوسته استوانه‌ای با بستر الاستیک وینکلر
($m = 1, L = 1 \text{ m}, R = 0.5 \text{ m}, E = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \nu = 0.3, d = 0.0025 \text{ m}, h_s = 0.01 \text{ m}$)

	مطالعه حاضر	دانگ و نام [۴۸]	صوفیه و همکاران [۷۱]	پالیوال و همکاران [۷۲]
$\omega_1 (n = 1)$	0.67480	0.67480	0.67921	0.67882
$\omega_2 (n = 3)$	0.20670	0.36223	0.20804	0.20526

۵-۳-۲- تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی

در این بخش، به بررسی پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده بر اساس چندمود پرداخته شده است. در این قسمت تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

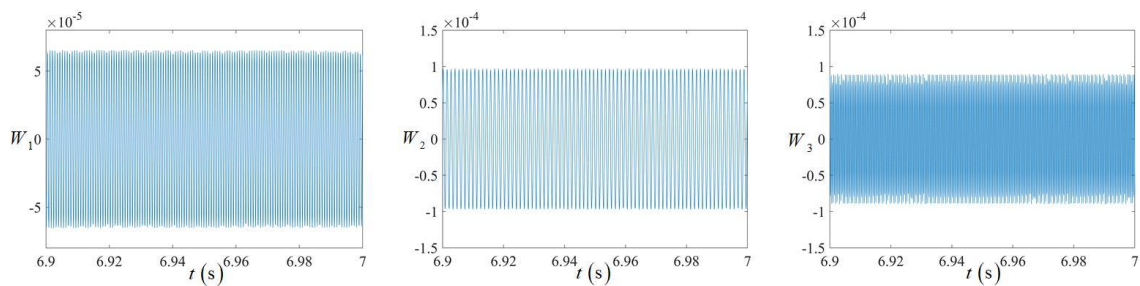
سه شکل مود برجسته اول پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی که تمامی نتایج عددی در این تحقیق بر اساس آن‌ها به‌دست آمده است، به‌صورت سه‌بعدی در شکل (۵-۷۰) نشان داده شده است.



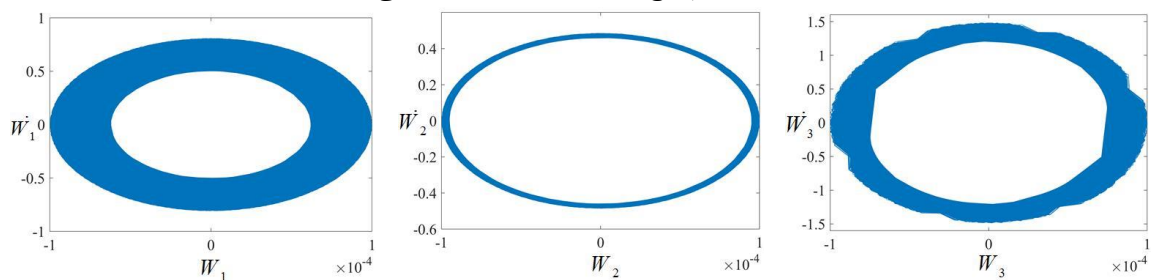
الف. $m = 1, n = 1$ ب. $m = 1, n = 3$ ج. $m = 3, n = 1$

شکل (۷۰-۵) شکل مودهای برجسته اول پوسته استوانه‌ای

تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر رفتار ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای دو حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک در شکل‌های (۷۱-۵)-(۸۰-۵) نشان داده شده است. همچنین، در شکل‌های (۷۱-۵)-(۸۰-۵) نمودارهای صفحه فاز رسم شده‌اند. با توجه به این شکل‌ها، دامنه ارتعاشی پوسته برای مود محوری و محیطی اول ($m = 1, n = 1$) و مود محوری اول و مود محیطی سوم ($m = 1, n = 3$)، به ترتیب مینیمم و ماکزیمم می‌باشد. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، دامنه ارتعاشی پوسته برای دو حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک با مودهای $m = 1, n = 3$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها به ترتیب برابر با $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ و $\theta = \beta = 30^\circ$ باشد، کمتر از حالت‌های دیگر می‌باشد. همچنین، دامنه ارتعاشی پوسته برای مود محوری و محیطی اول ($m = 1, n = 1$) و مود محوری سوم و مود محیطی اول ($m = 3, n = 1$)، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 90^\circ$ باشد، کمتر از حالت‌های دیگر می‌باشد.

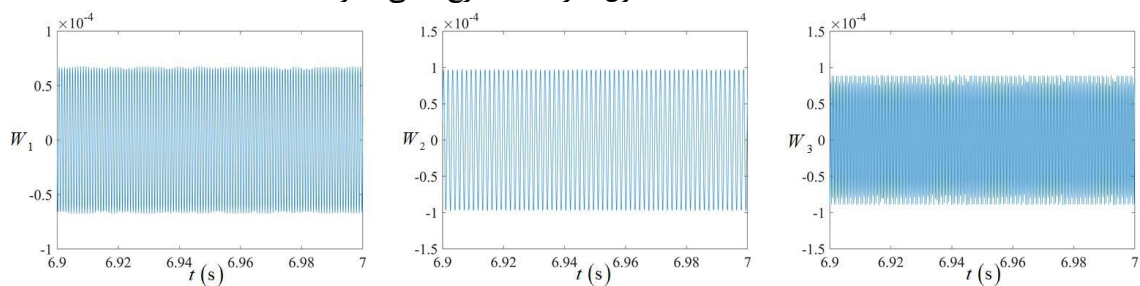


I. پاسخ‌های ارتعاشات آزاد غیرخطی

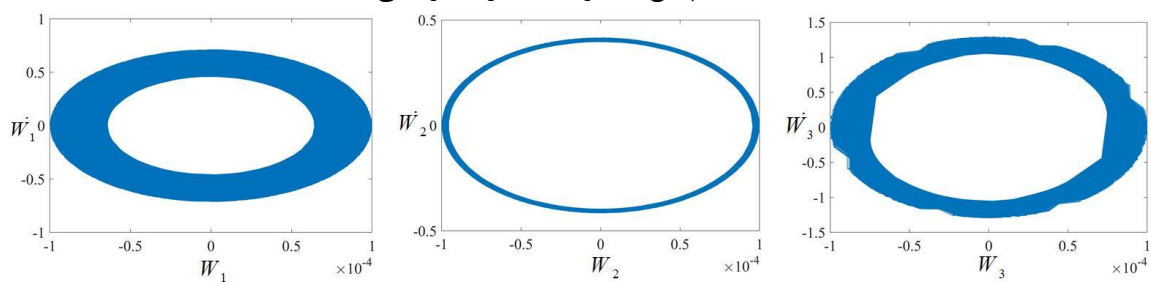


II. صفحه‌های فاز ارتعاشات آزاد غیرخطی

الف. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز



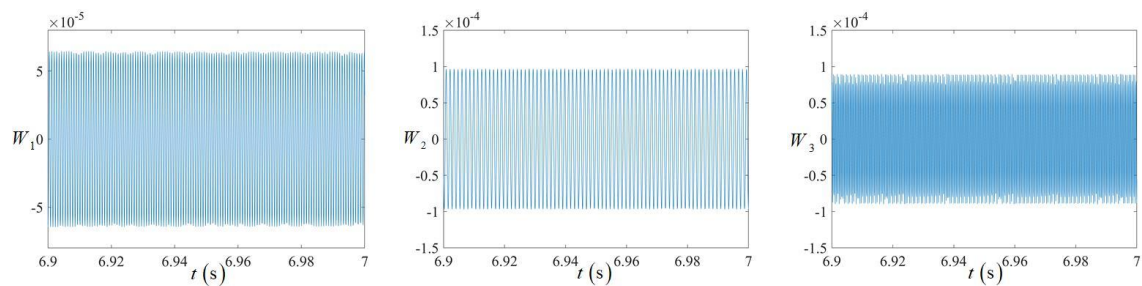
I. پاسخ‌های ارتعاشات آزاد غیرخطی



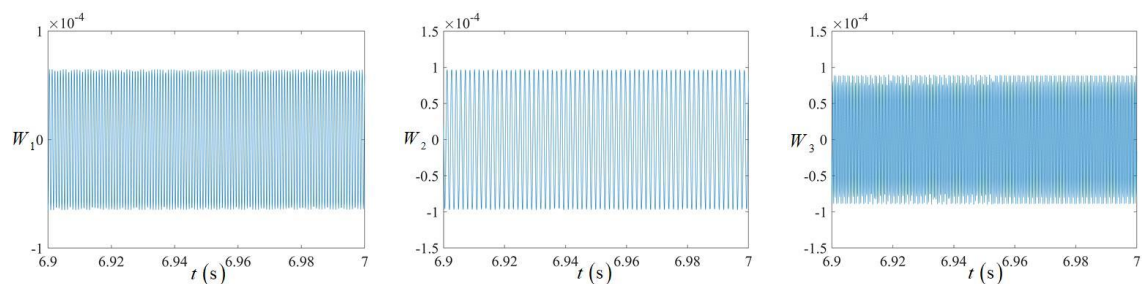
II. صفحه‌های فاز ارتعاشات آزاد غیرخطی

ب. حالت دوم: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

شکل (۷۱-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ$)

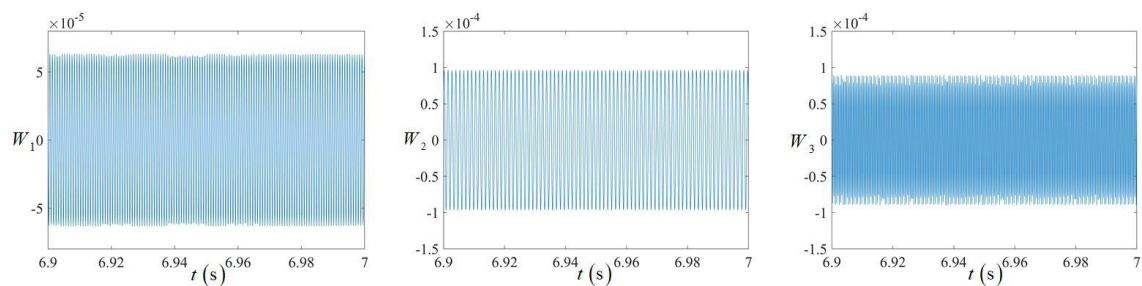


الف. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز

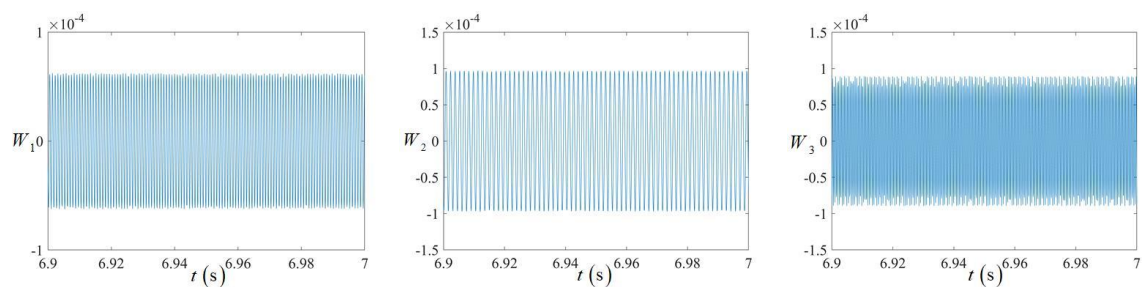


ب. حالت دوم: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

شکل (۷۲-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 30^\circ$)

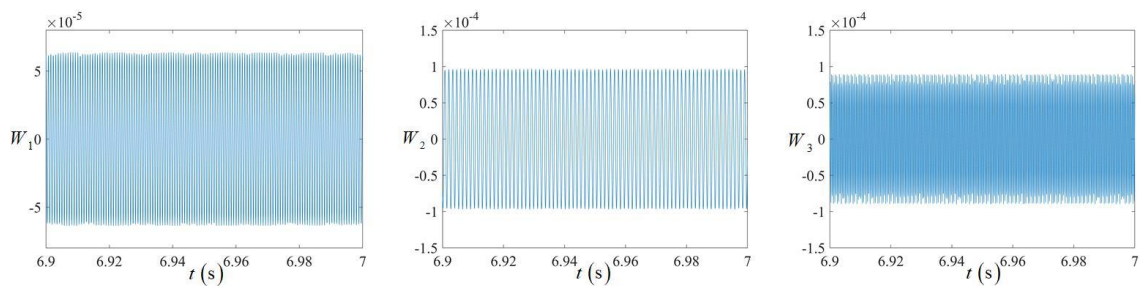


الف. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز

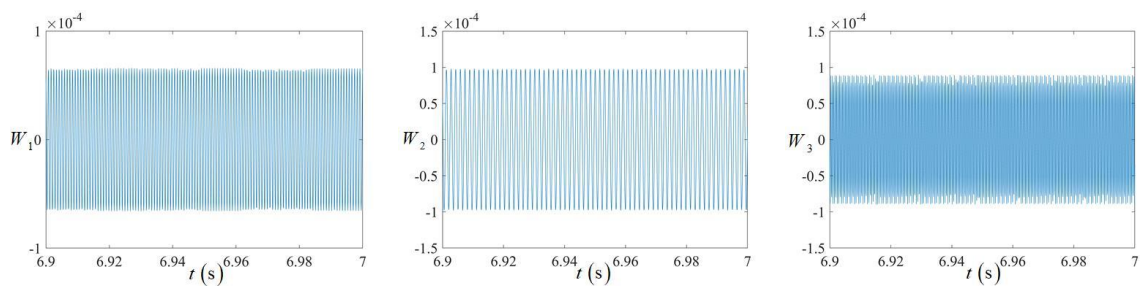


ب. حالت دوم: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

شکل (۷۳-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 60^\circ$)

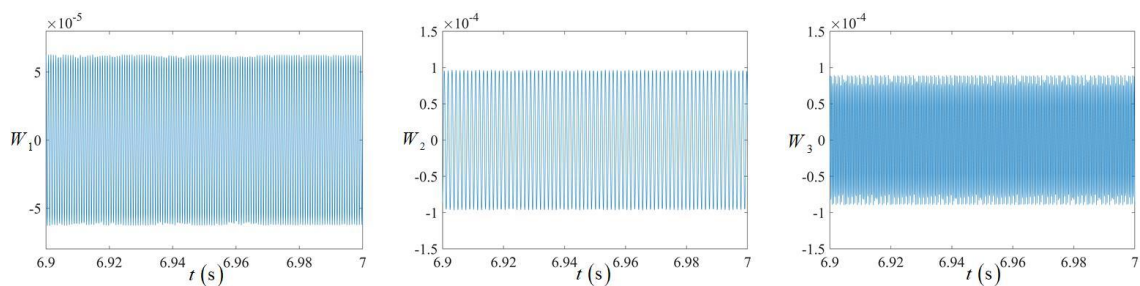


الف. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز

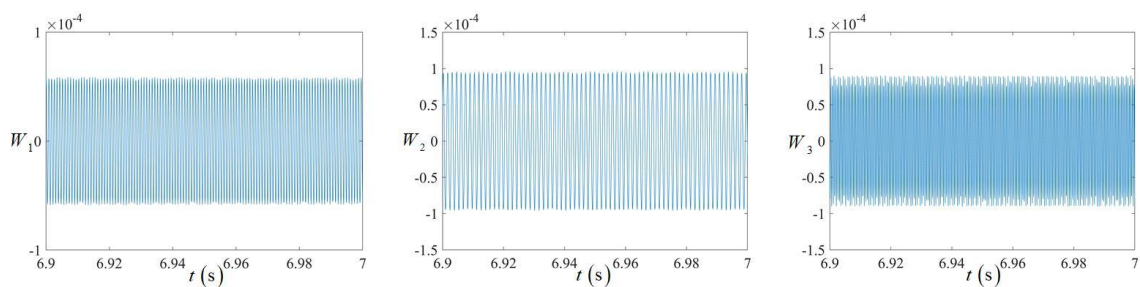


ب. حالت دوم: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

شکل (۷۴-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

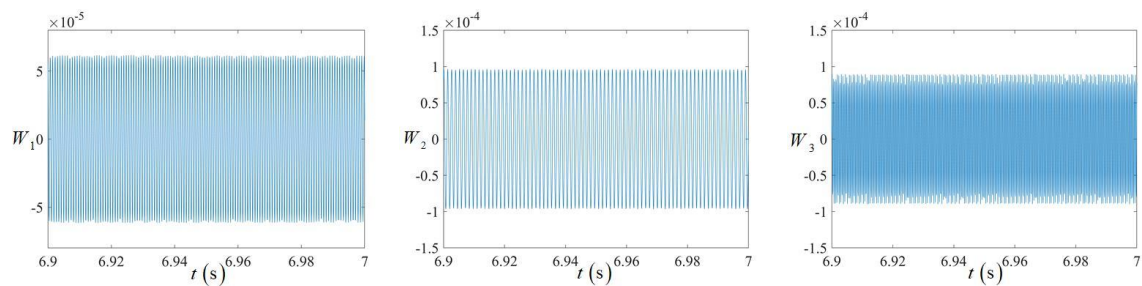


الف. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز

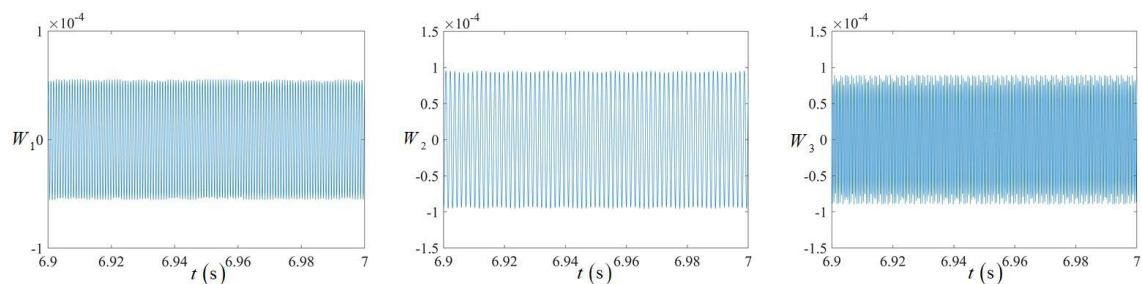


ب. حالت دوم: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

شکل (۷۵-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 30^\circ$)

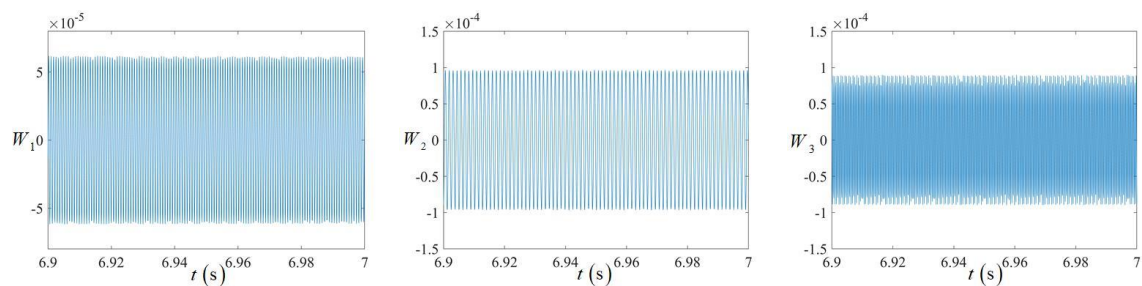


الف. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز

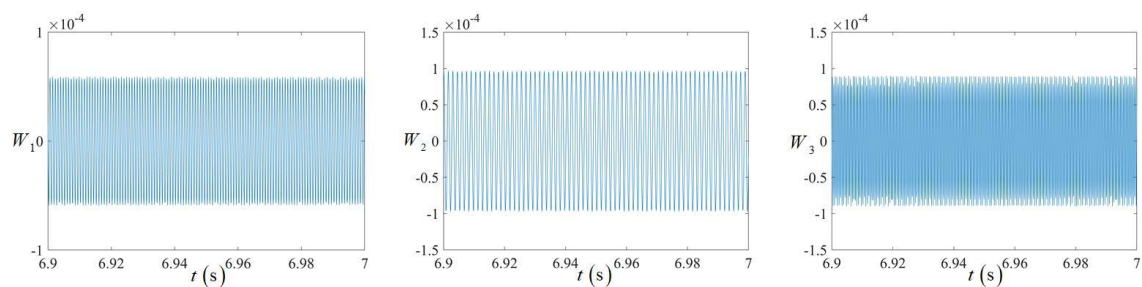


ب. حالت دوم: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

شکل (۷۶-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 60^\circ$)

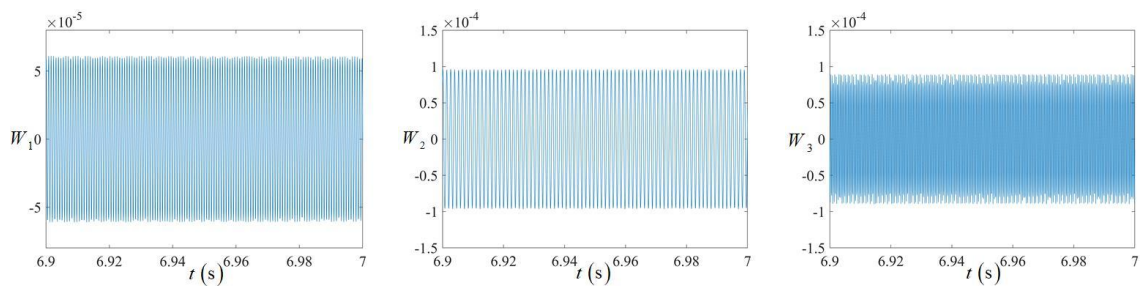


الف. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز

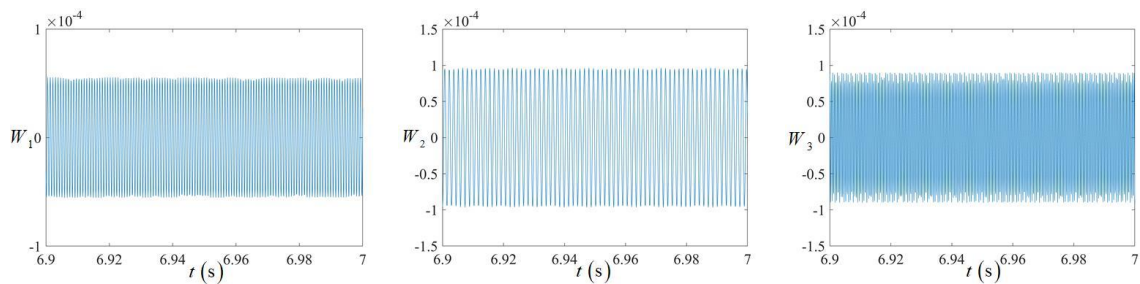


ب. حالت دوم: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

شکل (۷۷-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 90^\circ$)

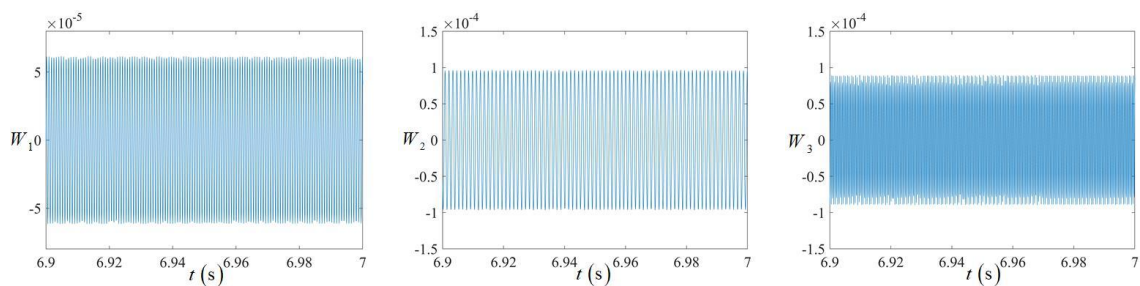


الف. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز

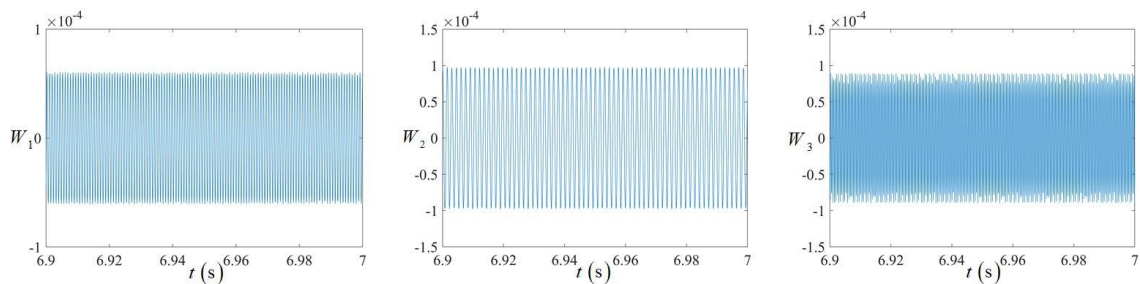


ب. حالت دوم: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

شکل (۷۸-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ$)

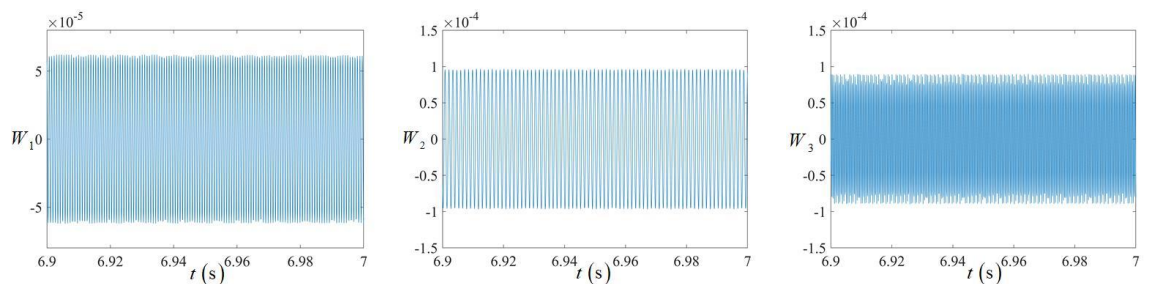


الف. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز

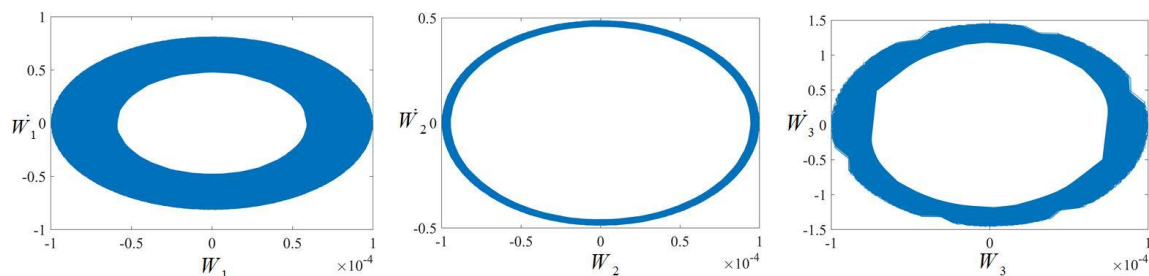


ب. حالت دوم: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

شکل (۷۹-۵) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 90^\circ$)

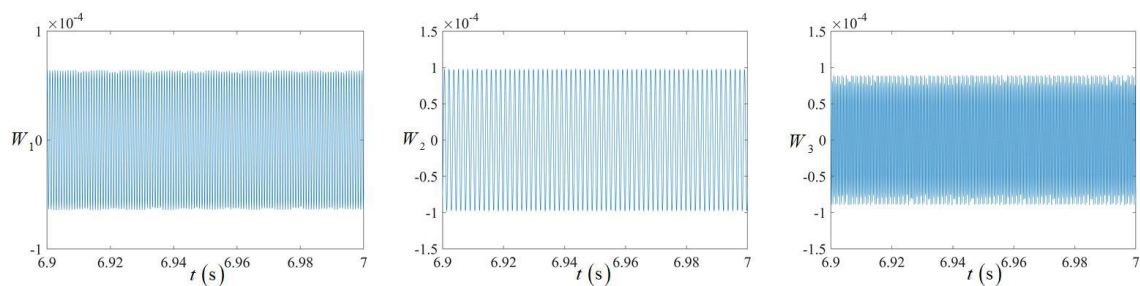


I. پاسخ‌های ارتعاشات آزاد غیرخطی

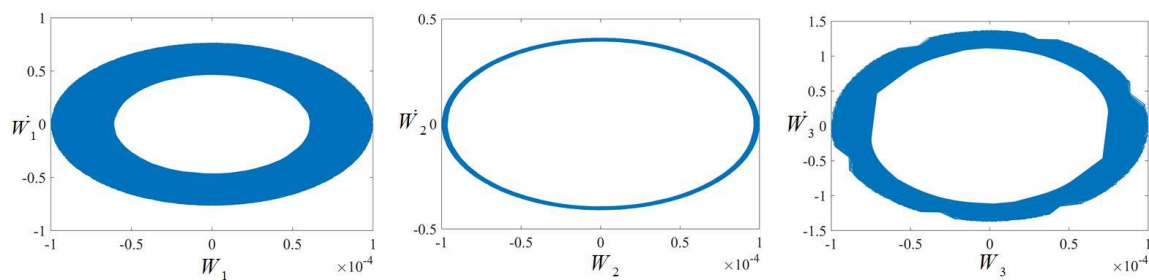


II. صفحه‌های فاز ارتعاشات آزاد غیرخطی

الف. حالت اول: سرامیک-مدرج تابعی-فلز



I. پاسخ‌های ارتعاشات آزاد غیرخطی



II. صفحه‌های فاز ارتعاشات آزاد غیرخطی

ب. حالت دوم: فلز-مدرج تابعی-سرامیک

شکل (۵-۸) پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 90^\circ, \beta = 90^\circ$)

تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت-شده برای دو حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک در جدول (۵-۱۲) نشان داده شده است. با توجه به این جدول، فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای برای حالت فلز-مدرج

تابعی-سرامیک کمتر از سرامیک-مدرج تابعی-فلز می‌باشد. همچنین همان‌طور که مشاهده می‌شود، فرکانس طبیعی پوسته برای مدهای $m = 1, n = 3$ برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز با زاویه تقویت‌کننده $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ و برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک $\theta = \beta = 30^\circ$ بیش‌تر از حالت‌های دیگر می‌باشد. همچنین زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 90^\circ$ باشد، فرکانس‌های طبیعی پوسته برای مدهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ بیش‌تر از حالت‌های دیگر می‌باشد.

جدول (۵-۱۲) تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر فرکانس طبیعی (rad/s) پوسته استوانه‌ای ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

θ	β	سرامیک-مدرج تابعی-فلز			فلز-مدرج تابعی-سرامیک		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
0°	0°	1135.7	659.4	2074.2	1135.0	659.6	2053.2
	30°	1144.8	665.9	2039.3	1144.3	656.9	2022.1
	60°	1167.1	668.6	2039.6	1166.7	668.1	2027.8
	90°	1179.4	656.1	2133.5	1179.2	654.9	2122.3
30°	30°	1166.0	684.1	1969.5	1165.8	683.4	1961.0
	60°	1191.4	684.4	1967.9	1191.5	682.9	1967.1
	90°	1198.7	668.7	2040.5	1198.9	666.6	2041.6
60°	60°	1214.2	678.0	2010.1	1214.5	675.8	2014.4
	90°	1213.8	660.3	2099.7	1214.1	657.8	2102.9
90°	90°	1217.0	651.7	2174.6	1217.1	649.2	2175.0

در جدول (۵-۱۳)، تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته بر فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای دو حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک نشان داده شده است. با توجه به این جدول با افزایش ضخامت لایه‌های فلزی و سرامیکی، فرکانس‌های طبیعی پوسته برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. درحالی‌که برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز این نتیجه برعکس می‌باشد، به‌طوری‌که با افزایش ضخامت لایه‌های فلزی و سرامیکی، فرکانس‌های طبیعی پوسته برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد.

جدول (۵-۱۳) تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته بر فرکانس طبیعی (rad/s) پوسته استوانه‌ای
 $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$

h_u	h_m	h_b	سرامیک-مدرج تابعی-فلز			فلز-مدرج تابعی-سرامیک		
			ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
0.0004	0.0012	0.0004	1179.4	656.1	2133.5	1179.2	654.9	2122.3
0.0008	0.0008	0.0004	1256.3	699.7	2268.7	1256.3	699.2	2257.8
0.0012	0.0004	0.0004	1343.0	750.0	2424.6	1343.0	749.9	2413.7
0.0004	0.0008	0.0008	1110.1	616.9	2013.5	1110.0	616.5	2003.3
0.0004	0.0004	0.0012	1047.1	582.2	1906.9	1047.1	582.1	1897.3

فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای دو حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک در محیط حرارتی با توزیع حرارت یکنواخت و خطی به ترتیب در جدول‌های (۵-۱۴) و (۵-۱۵) نشان داده شده است. با توجه به این جدول‌ها، فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای تحت توزیع حرارت یکنواخت کم‌تر از فرکانس طبیعی پوسته تحت توزیع حرارت خطی می‌باشد. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، زمانی که دما افزایش می‌یابد، فرکانس‌های طبیعی پوسته کاهش می‌یابد.

جدول (۵-۱۴) فرکانس طبیعی (rad/s) پوسته استوانه‌ای تحت توزیع حرارت یکنواخت
 $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$

T (K)	سرامیک-مدرج تابعی-فلز			فلز-مدرج تابعی-سرامیک		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
300	1175.4	588.7	2131.3	1175.2	587.4	2120.1
350	1174.8	576.7	2130.9	1174.6	575.4	2119.7
400	1174.1	564.4	2130.6	1173.9	563.1	2119.3
450	1173.5	551.9	2130.2	1173.2	550.6	2119.0
500	1172.8	539.1	2129.8	1172.6	537.7	2118.6

جدول (۵-۱۵) فرکانس طبیعی (rad/s) پوسته استوانه‌ای تحت توزیع حرارت خطی
 $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$

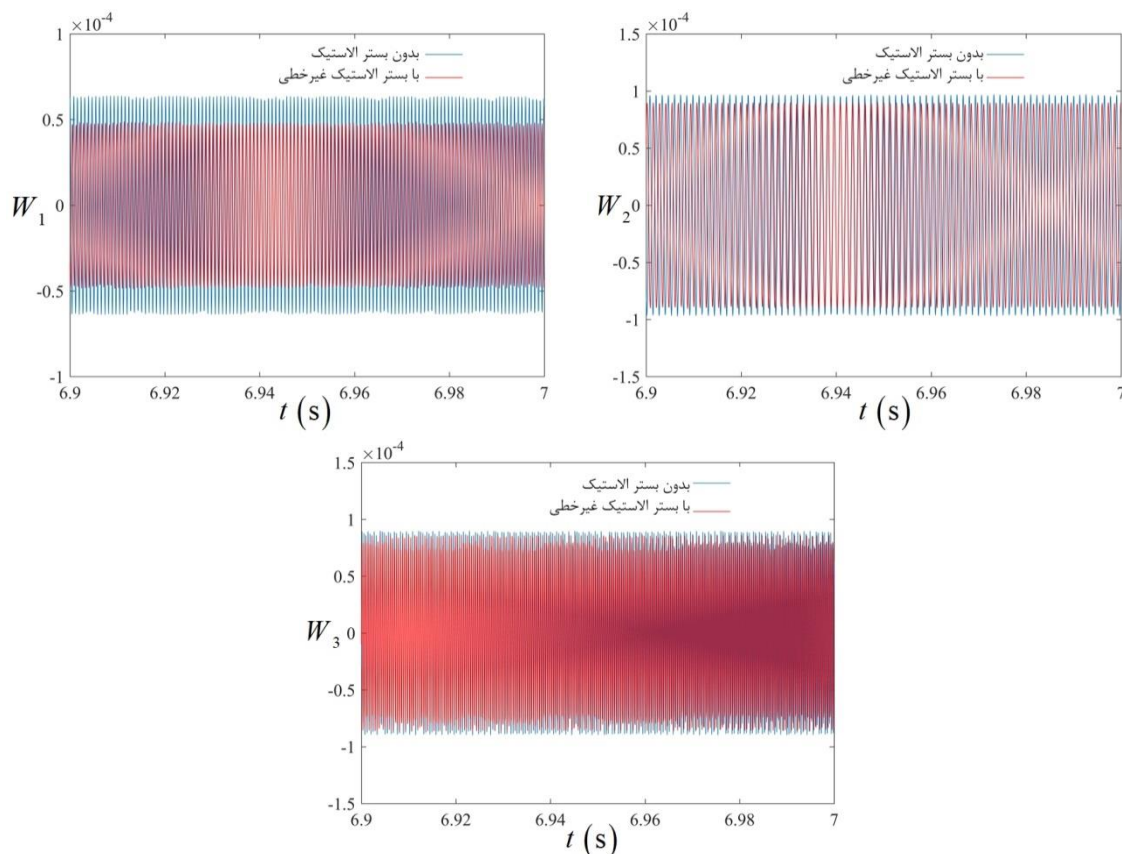
T (K)	سرامیک-مدرج تابعی-فلز			فلز-مدرج تابعی-سرامیک		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
300	1177.4	622.9	2132.4	1177.2	622.6	2121.2
350	1177.1	617.1	2132.2	1176.9	617.0	2121.0
400	1176.7	611.4	2132.0	1176.6	611.4	2120.8
450	1176.4	605.6	2131.8	1176.3	605.7	2120.6
500	1176.1	599.7	2131.6	1175.9	600.0	2120.5

در جدول (۵-۱۶)، تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه-ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای دو حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک نشان داده شده است. با توجه به این جدول، بستر الاستیک خطی منجر به افزایش فرکانس طبیعی پوسته می‌شود. اما، پارامتر بستر الاستیک پاسترناک نسبت به پارامتر بستر الاستیک وینکлер، تأثیر بیشتری بر پاسخ فرکانس‌های طبیعی پوسته دارد.

جدول (۵-۱۶) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر فرکانس طبیعی (rad/s)
پوسته استوانه‌ای ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

k_s	k_w	سرامیک-مدرج تابعی-فلز			فلز-مدرج تابعی-سرامیک		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
0	0	1179.4	656.1	2133.5	1179.2	654.9	2122.3
100	10^6	1180.2	657.5	2133.9	1180.0	656.4	2122.7
100	5×10^6	1183.3	663.0	2135.6	1183.0	661.9	2124.4
10^4	5×10^6	1183.4	663.8	2136.3	1183.2	662.6	2125.1
5×10^4	5×10^6	1184.1	666.7	2139.1	1183.9	665.6	2127.9

در شکل (۵-۸۱)، تأثیر پارامترهای بستر الاستیک غیرخطی بر رفتار ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده نشان داده شده است. با توجه به این شکل، بستر الاستیک غیرخطی منجر به کاهش دامنه ارتعاشی پوسته می‌شود. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای برای مدهای $m = 1, n = 1$ بیش‌تر از حالت‌های دیگر کاهش می‌یابد.



شکل (۵-۸۱) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک غیرخطی بر رفتار ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

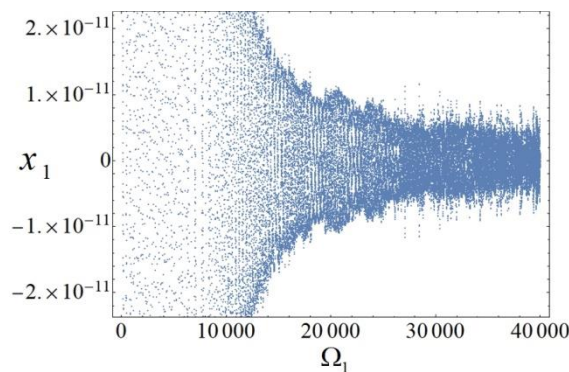
۵-۳-۳- تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فروهارمونیک $1/3$ و تشدید داخلی $1:3:9$

در این بخش، به بررسی پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده دارای تشدید فروهارمونیک $1/3$ و تشدید داخلی $1:3:9$ پرداخته شده است. در این قسمت تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

به‌منظور تحلیل پاسخ‌های آشوبی^۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، ابتدا نمودار چندشاخگی^۱ برای فرکانس تحریک (Ω_1) نسبت به دامنه (x_1) در شکل (۵-۸۲) مورد بررسی قرار

^۱ Chaotic responses

گرفته است. در این وضعیت، فرکانس طبیعی پوسته معادل با $\omega_1 = 7407.4$ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با توجه به اینکه فرکانس تحریک (Ω_1) نزدیک به $3\omega_1$ در نظر گرفته شده است، در نزدیکی $3\omega_1$ حرکت آشوبی برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده اتفاق می‌افتد.



شکل (۵-۸۲) نمودار چندشاخگی برای فرکانس تحریک (Ω_1) نسبت به دامنه (x_1) برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده

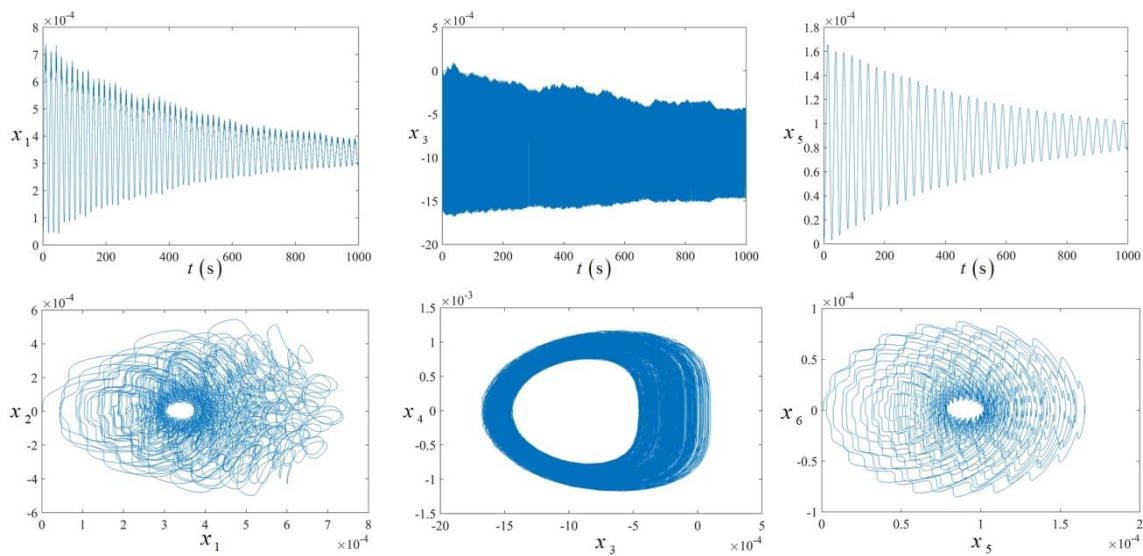
تأثیر ضریب میرایی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی و نمودار فازی^۲ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده داخلی با تشدید فروهارمونیک $1/3$ و تشدید داخلی $1:3:9$ در شکل (۵-۸۳) نشان داده شده است. همان‌طور که نشان داده شده است با در نظر گرفتن میرایی بر پوسته، دامنه ارتعاشی پوسته کاهش می‌یابد. همچنین نمودار فازی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده سریعاً به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود و در نتیجه پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته به سرعت پایدار می‌شود. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، میزان بی‌نظمی بر روی نمودار فازی پوسته با مدهای $m = 3, n = 1$ و $m = n = 1$ بیش‌تر کاهش می‌یابد.

تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر حرکت آشوبی و نمودار فازی ارتعاشات غیرخطی با تشدید فروهارمونیک $1/3$ و تشدید داخلی $1:3:9$ برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده داخلی در شکل‌های (۵-۸۴)-(۵-۹۳) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای مدهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$

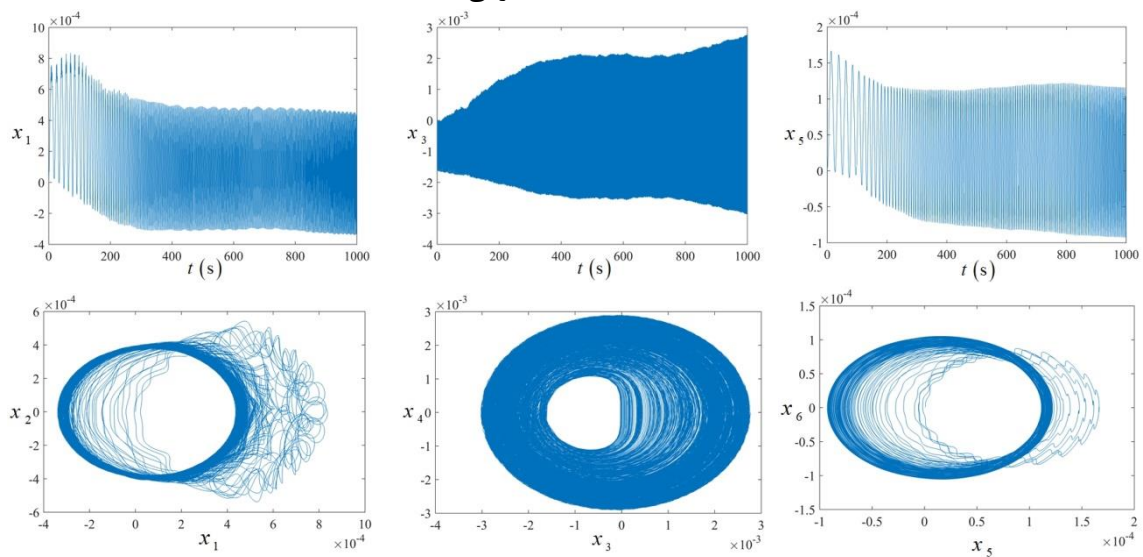
¹ Bifurcation diagram

² Phase portrait

زمانی که زاویه تقویت کننده‌ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 30^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ باشد، شروع به بی-نظمی زیاد می‌نماید، درحالی‌که، زمانی که زاویه تقویت کننده‌ها برابر با $\theta = 60^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ باشد، نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده برای مودهای مذکور شروع به کاهش زیاد می‌نماید. همان‌طور که مشاهده می‌شود، زمانی که زاویه تقویت کننده‌ها برابر با $\theta = 90^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ باشد، منحنی دامنه-زمانی آشفته‌تر می‌شود و نمودار فازی به شکل بیضوی همگرا می‌شود. همچنین، با توجه به این نمودارها، دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت کننده-ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 30^\circ$ ، دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 3$ با زاویه تقویت کننده‌ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 30^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ یا $\theta = \beta = 30^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 3, n = 1$ با زاویه تقویت کننده‌ها برابر با $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ ، کمتر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. اما، دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 60^\circ$ یا $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ ، دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 3$ با زاویه تقویت کننده‌ها برابر با $\theta = 90^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ یا $\theta = \beta = 60^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 3, n = 1$ با زاویه تقویت کننده‌ها برابر با $\theta = 60^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ و $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ یا $\theta = \beta = 90^\circ$ ، بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

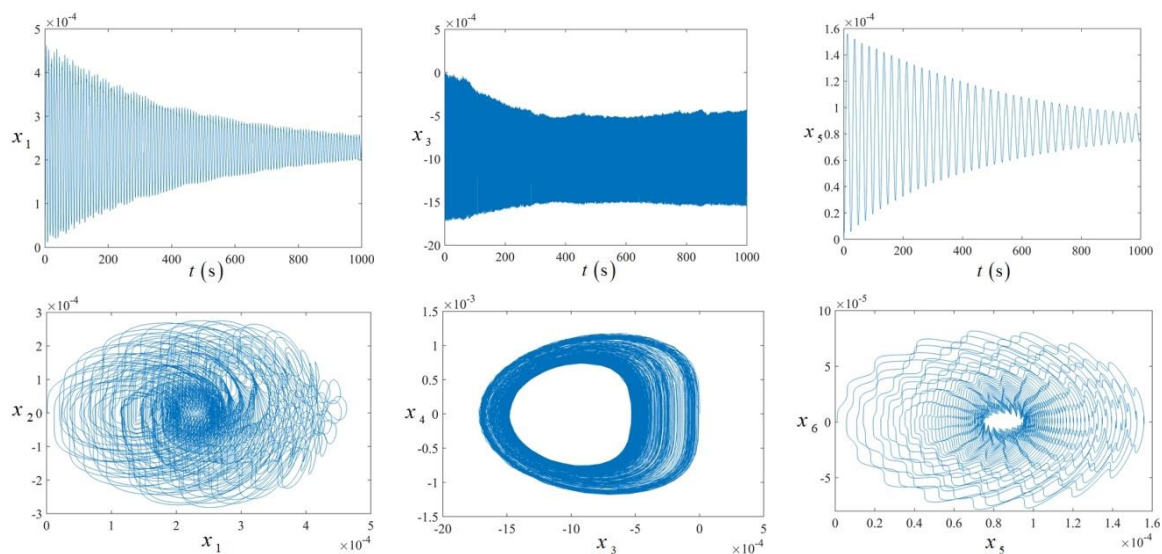


الف. با میرایی

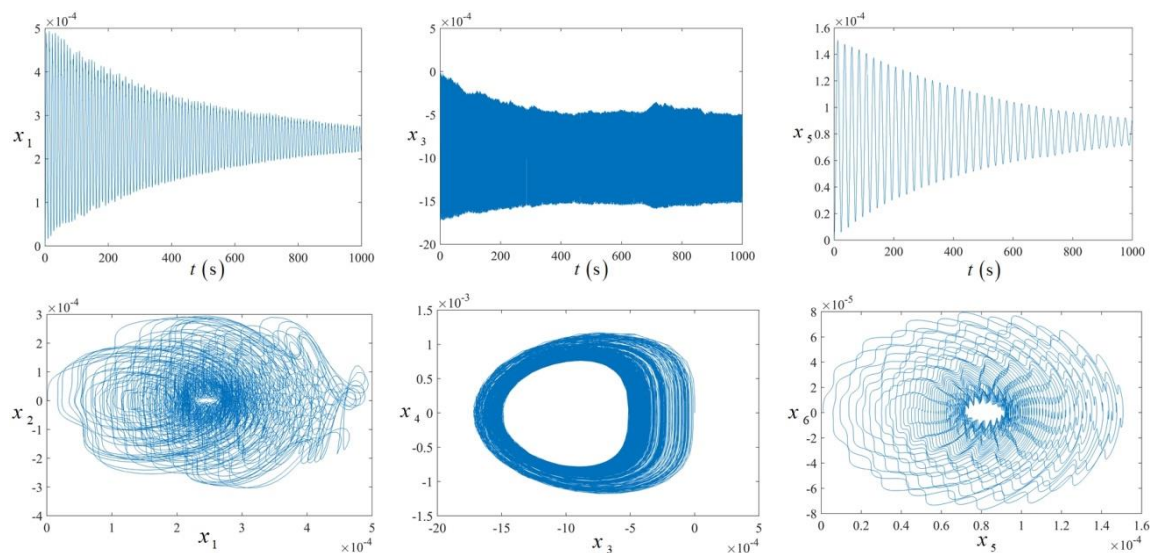


ب. بدون میرایی

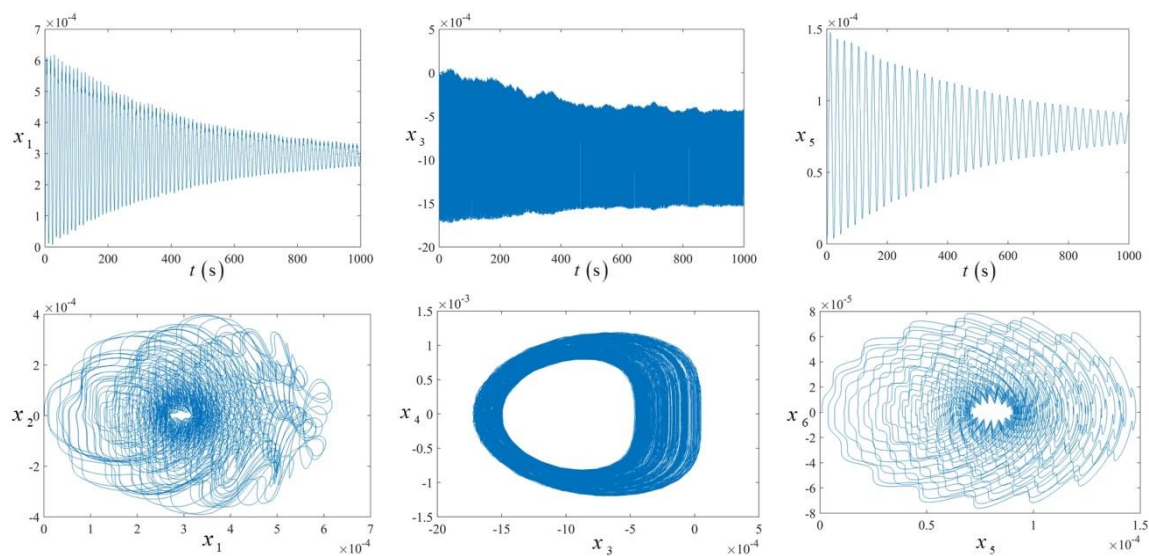
شکل (۵-۸۳) تأثیر ضریب میرایی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت-کننده‌های داخلی پوسته با تشدید فروهارمونیک $1/3$ و تشدید داخلی $1:3:9$ ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)



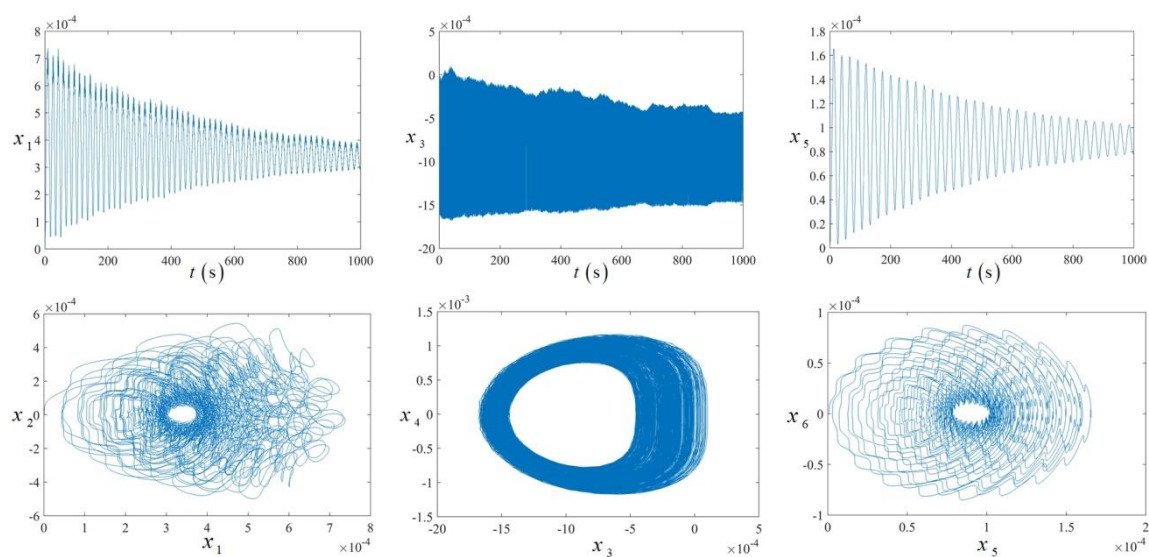
شکل (۸۴-۵) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ$)



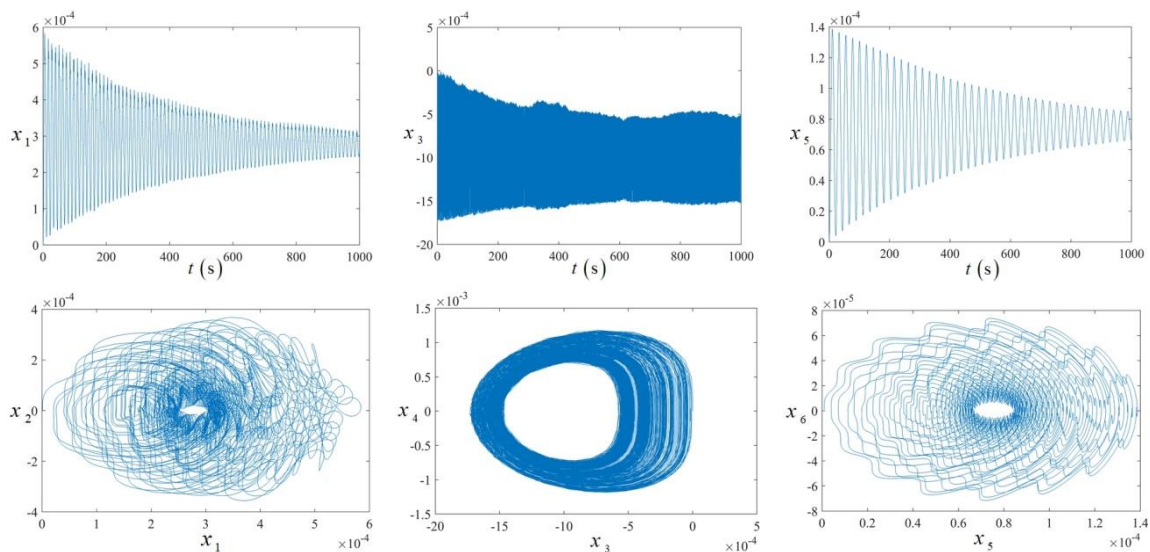
شکل (۸۵-۵) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 30^\circ$)



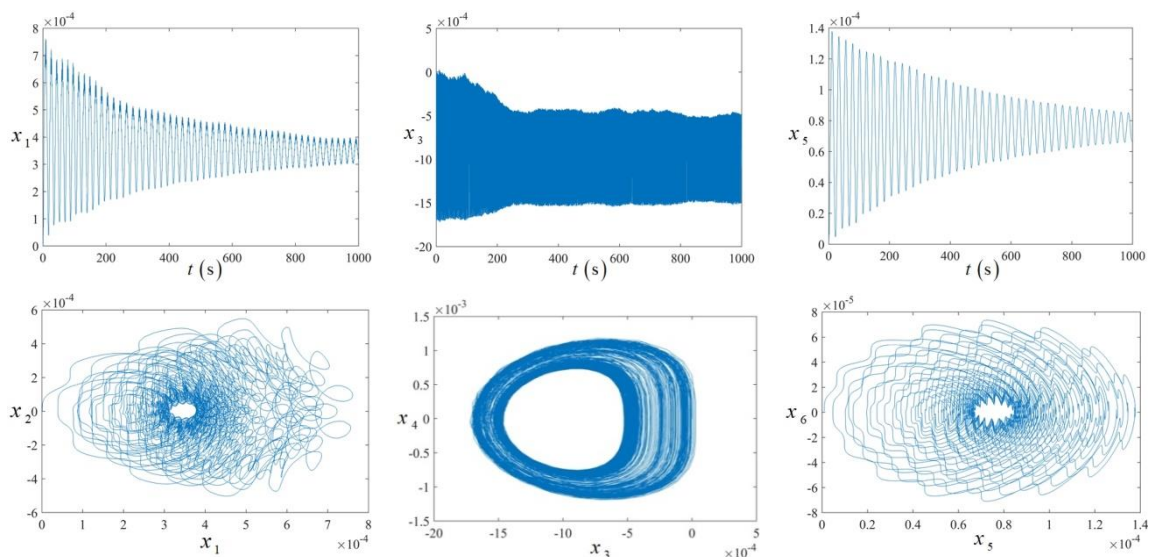
شکل (۵-۸۶) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 60^\circ$)



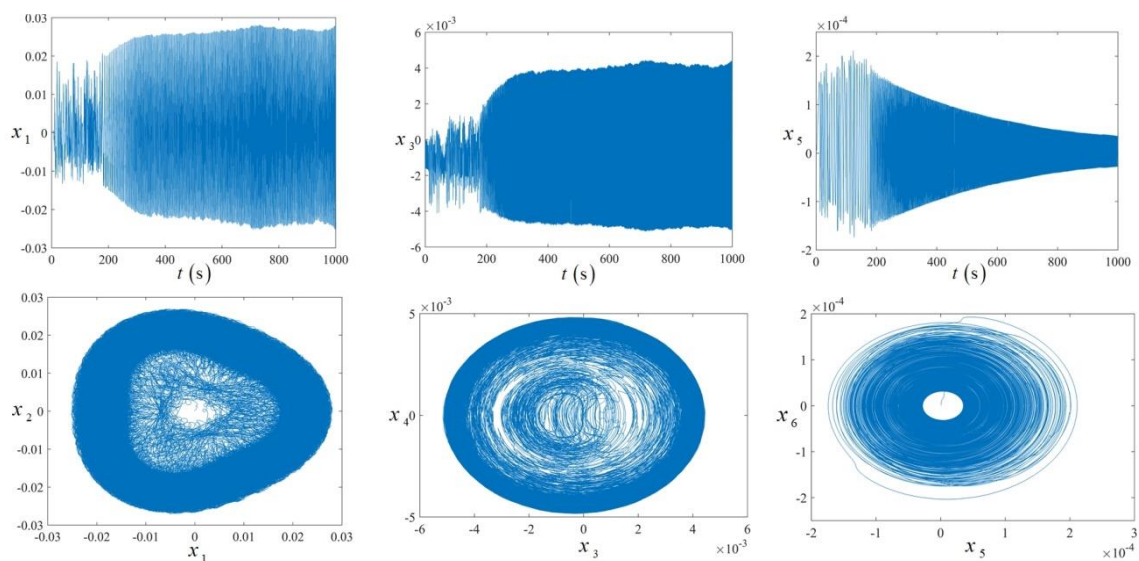
شکل (۵-۸۷) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)



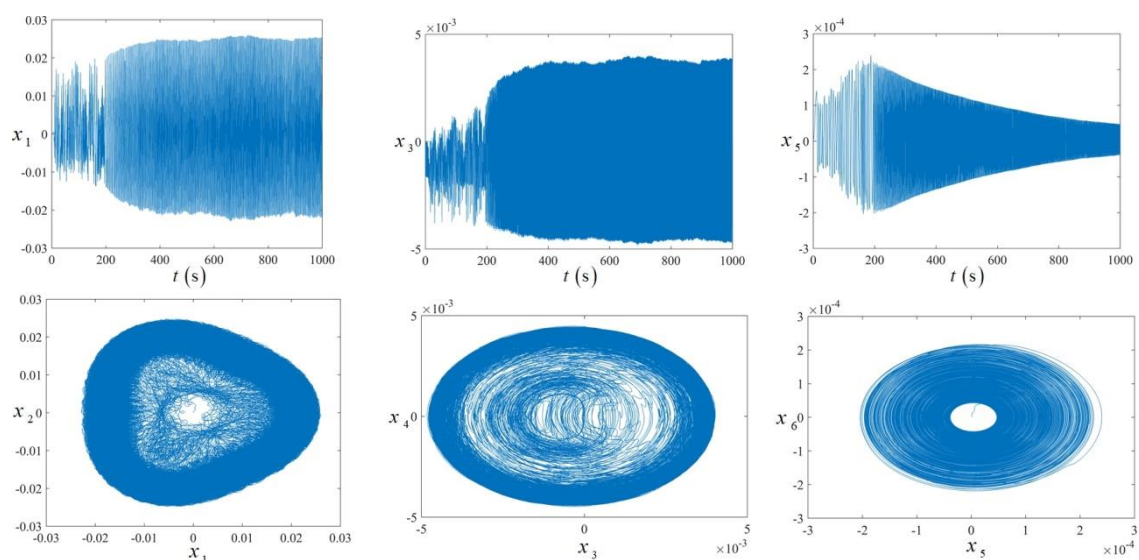
شکل (۵-۸۸) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 30^\circ$)



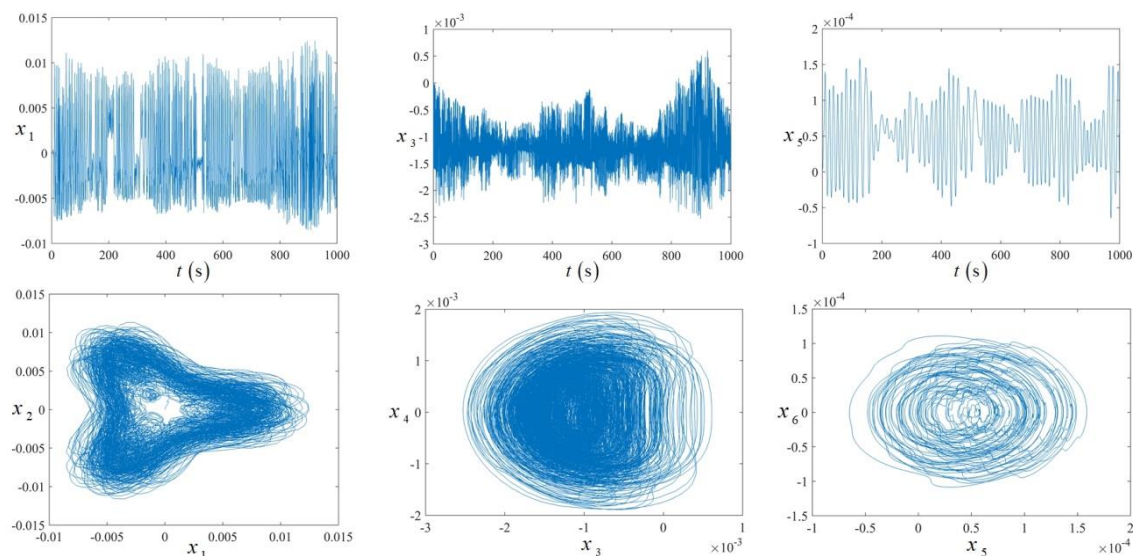
شکل (۵-۸۹) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 60^\circ$)



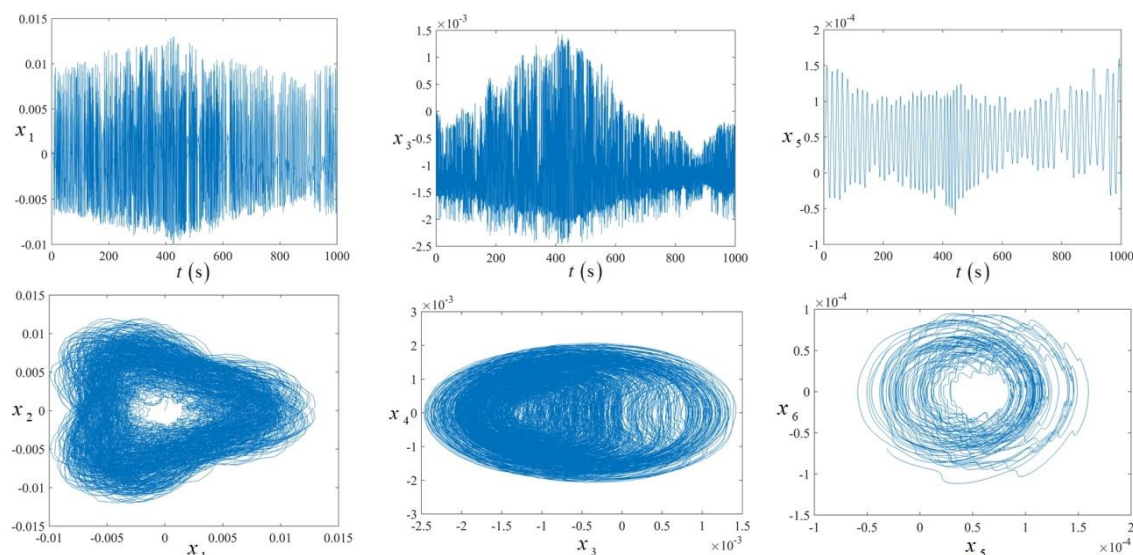
شکل (۵-۹۰) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 90^\circ$)



شکل (۵-۹۱) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ$)



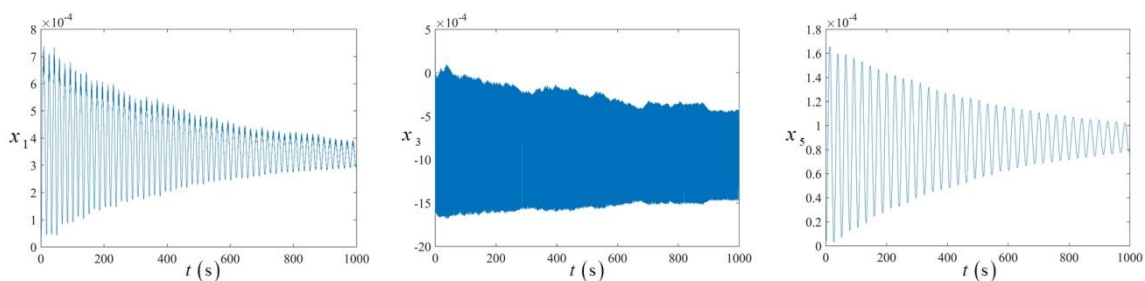
شکل (۵-۹۲) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 90^\circ$)



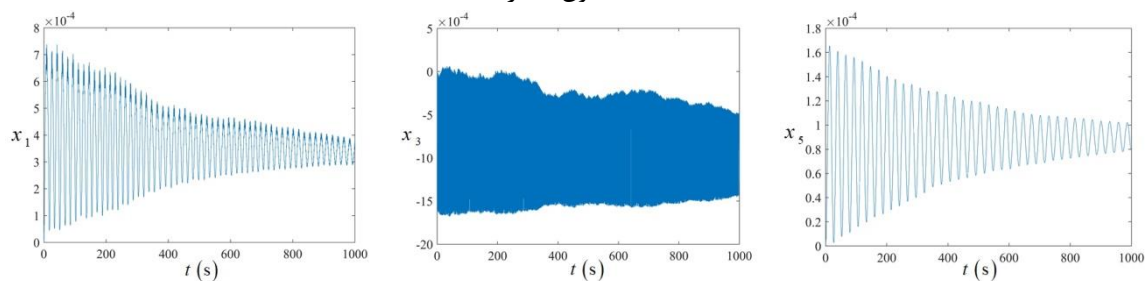
شکل (۵-۹۳) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 90^\circ, \beta = 90^\circ$)

در شکل (۵-۹۴)، تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده داخلی نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با استفاده از بستر الاستیک خطی بر روی پوسته، دامنه ارتعاشی و فرکانس پوسته برای مدهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. همچنین با توجه به این شکل، استفاده از بستر الاستیک غیرخطی بر روی پوسته منجر به کاهش دامنه ارتعاشی می‌-

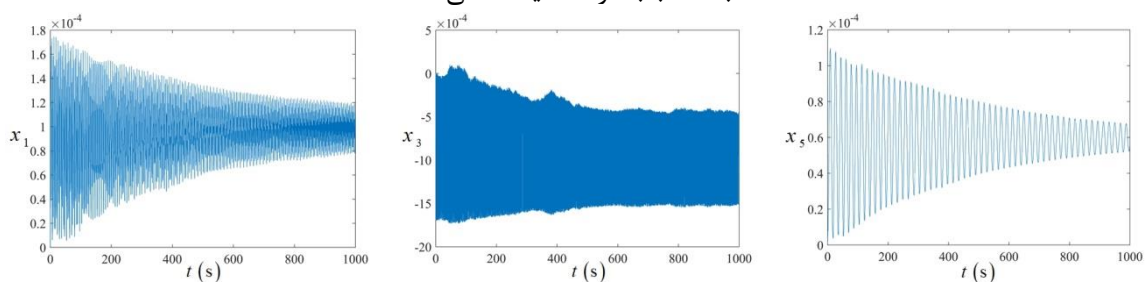
شود. تأثیر بستر الاستیک غیرخطی منفی بر روی پوسته از تأثیر بستر الاستیک غیرخطی مثبت بر روی پوسته بیش تر می باشد.



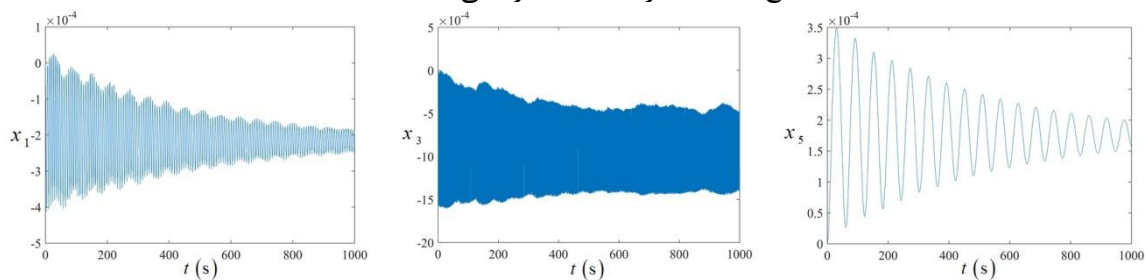
الف. بدون بستر الاستیک



ب. با بستر الاستیک خطی



ج. با بستر الاستیک غیرخطی مثبت

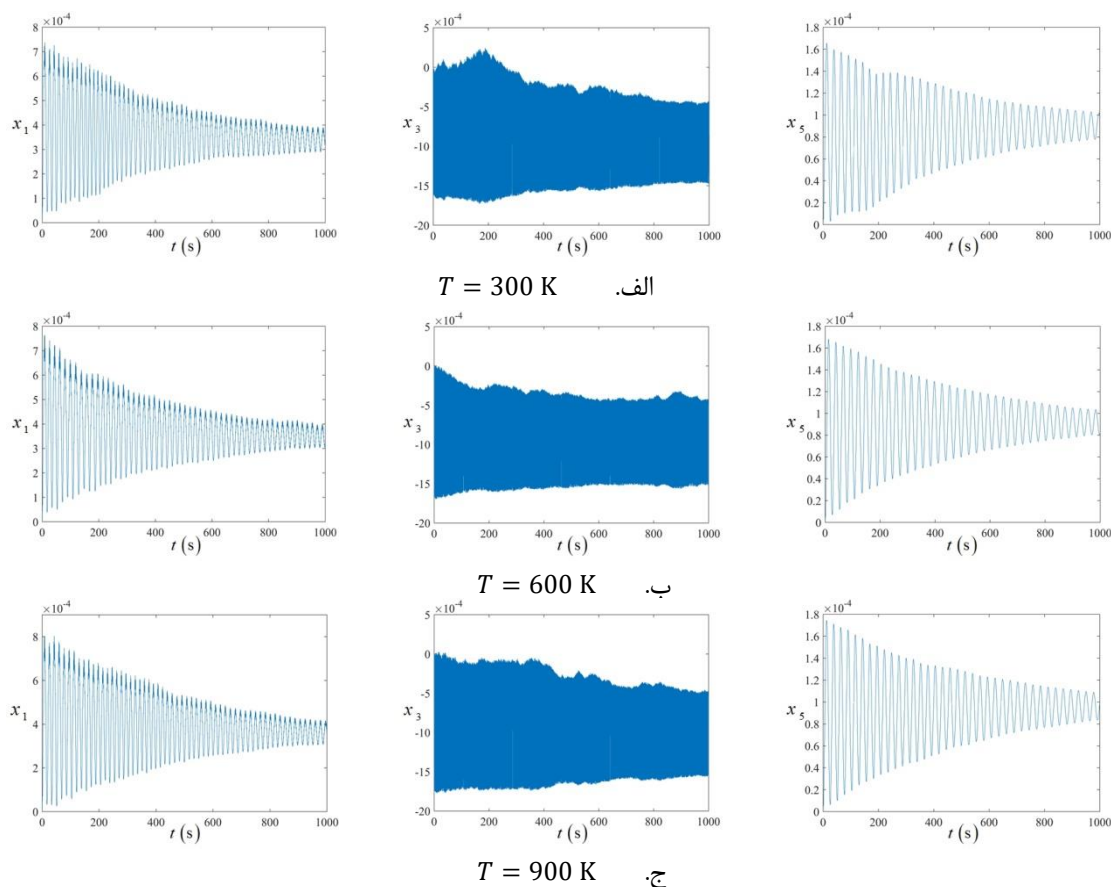


د. با بستر الاستیک غیرخطی منفی

شکل (۵-۹۴) تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

تأثیر دماهای مختلف بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با تقویت کننده‌های داخلی در شکل (۵-۹۵) نشان داده شده است. با توجه به این شکل، با افزایش دما،

دامنه ارتعاشی پوسته برای مدهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ افزایش می‌یابد، دامنه ارتعاشی پوسته برای مدهای $m = 3, n = 1$ کاهش می‌یابد.

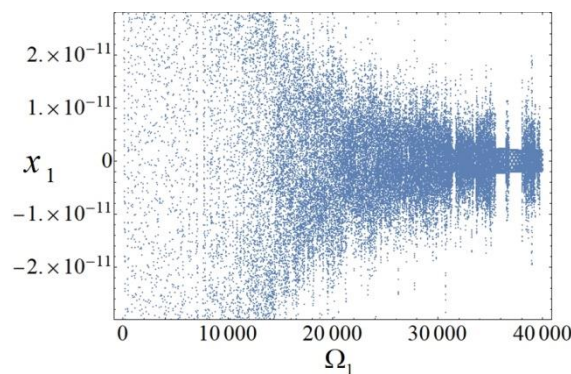


شکل (۵-۹۵) تأثیر دماهای مختلف بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

۵-۳-۴- تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فراهمونیک ۳/۱ و تشدید داخلی ۱/۹:۱/۳

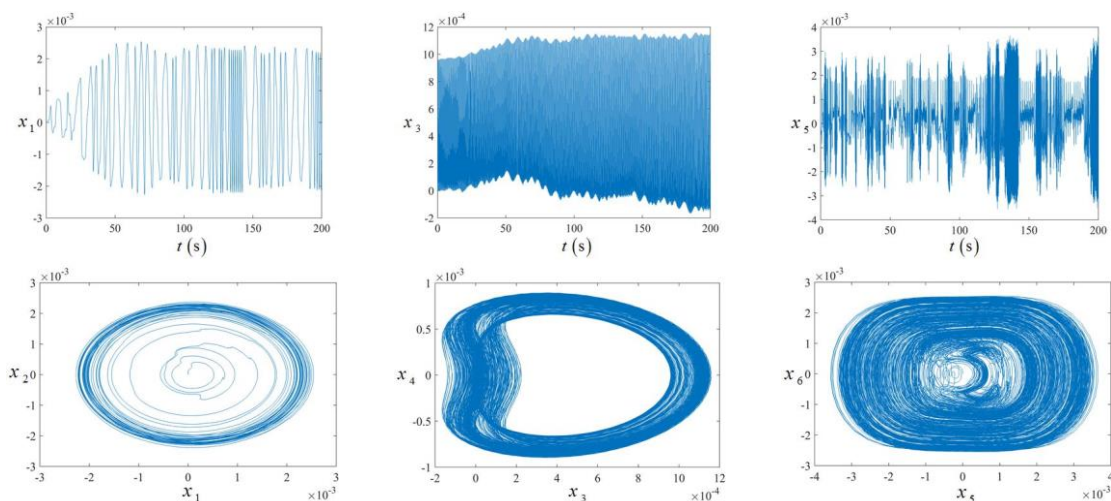
در این بخش، به بررسی پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده دارای تشدید فراهمونیک ۳/۱ و تشدید داخلی ۱/۹:۱/۳ پرداخته شده است. در این قسمت تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

به منظور تحلیل پاسخ‌های آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، ابتدا نمودار چندشاخگی برای فرکانس تحریک (Ω_1) نسبت به دامنه (x_1) در شکل (۵-۹۶) مورد بررسی قرار گرفته است. در این وضعیت، فرکانس طبیعی پوسته معادل با $\omega_1 = 7407.4$ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با توجه به اینکه فرکانس تحریک (Ω_1) نزدیک به $\frac{1}{3}\omega_1$ در نظر گرفته شده است، در نزدیکی $\frac{1}{3}\omega_1$ حرکت آشوبی برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده اتفاق می‌افتد.

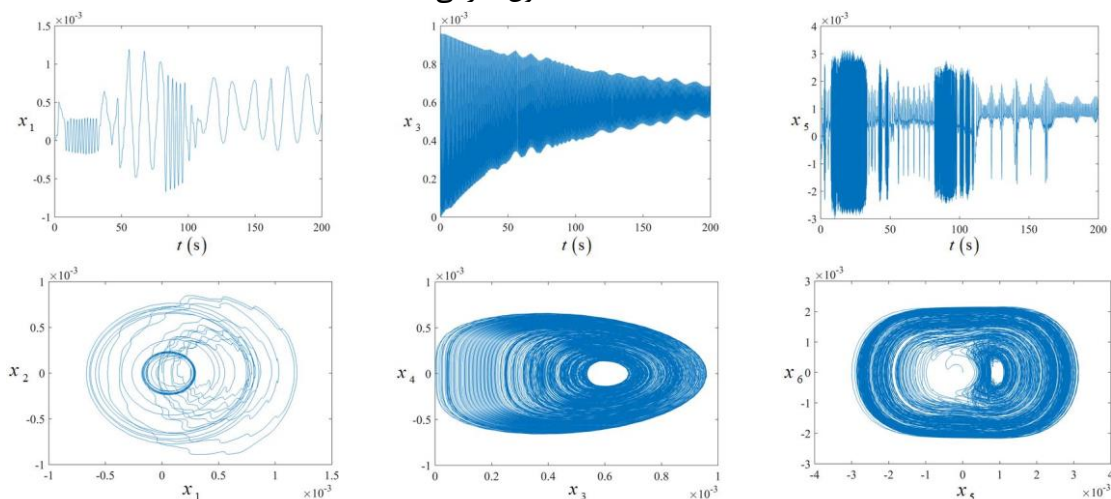


شکل (۵-۹۶) نمودار چندشاخگی برای فرکانس تحریک (Ω_1) نسبت به دامنه (x_1) برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده

تأثیر ضریب میرایی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی و نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده داخلی با تشدید فراهارمونیک $\frac{3}{1}$ و تشدید داخلی $\frac{1}{9}$: $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{1}$ در شکل (۵-۹۷) نشان داده شده است. همان‌طور که نشان داده شده است با در نظر گرفتن میرایی بر پوسته، دامنه ارتعاشی پوسته کاهش می‌یابد. همچنین نمودار فازی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده سریعاً به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود و در نتیجه پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته به سرعت پایدار می‌شود. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، میزان بی‌نظمی بر روی نمودار فازی پوسته برای سه مود برجسته اول، بیش‌تر کاهش می‌یابد.



الف. بدون میرایی

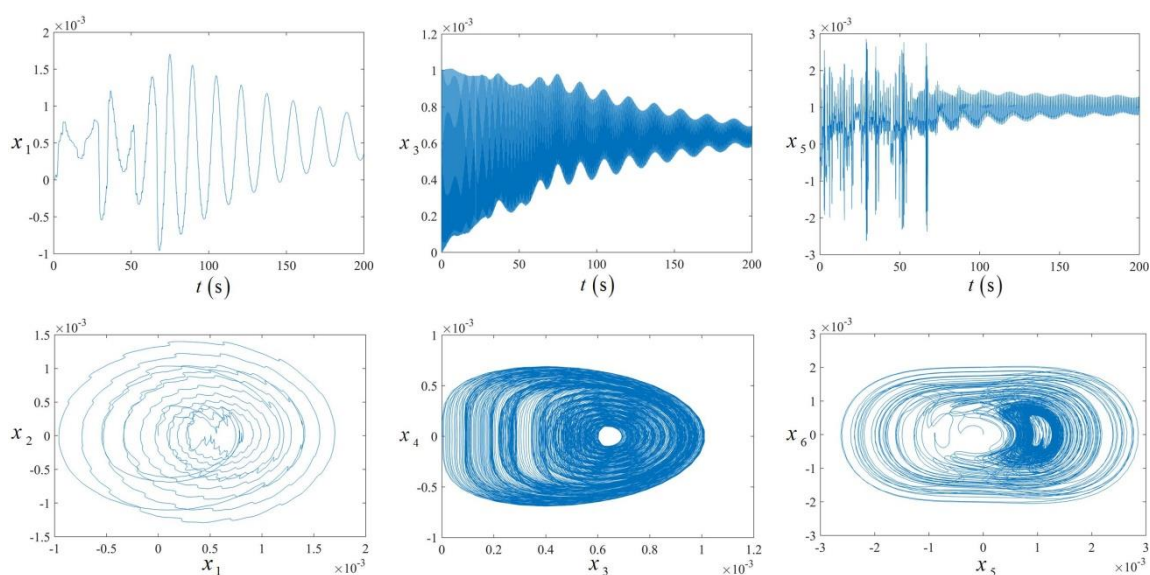


ب. با میرایی

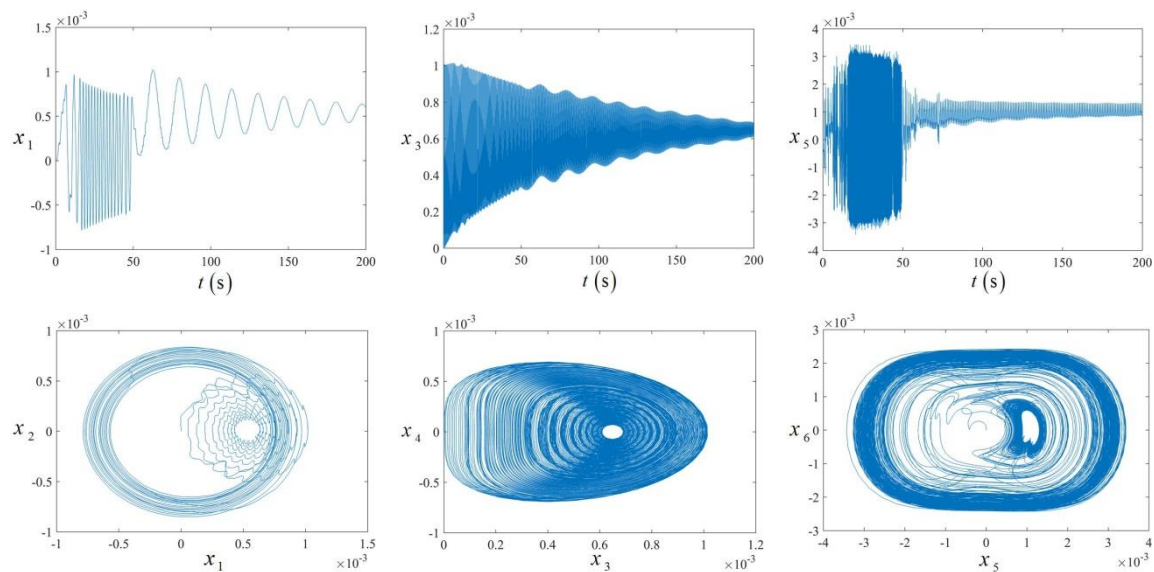
شکل (۵-۹۷) تأثیر ضریب میرایی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت-کننده‌های داخلی با تشدید فراهارمونیک ۳/۱ و تشدید داخلی ۱/۹: ۱/۳: ۱ (θ = 0°, β = 90°)

تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر حرکت آشوبی و نمودار فازی ارتعاشات غیرخطی با تشدید فراهارمونیک ۳/۱ و تشدید داخلی ۱/۹: ۱/۳: ۱ برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی در شکل‌های (۵-۹۸)-(۵-۱۰۷) نشان داده شده است. با توجه به این شکل-ها، دامنه ارتعاشی پوسته برای مدهای $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 30^\circ$ ، دامنه ارتعاشی برای مدهای $m = 1, n = 3$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 90^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای مدهای $m = 3, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با

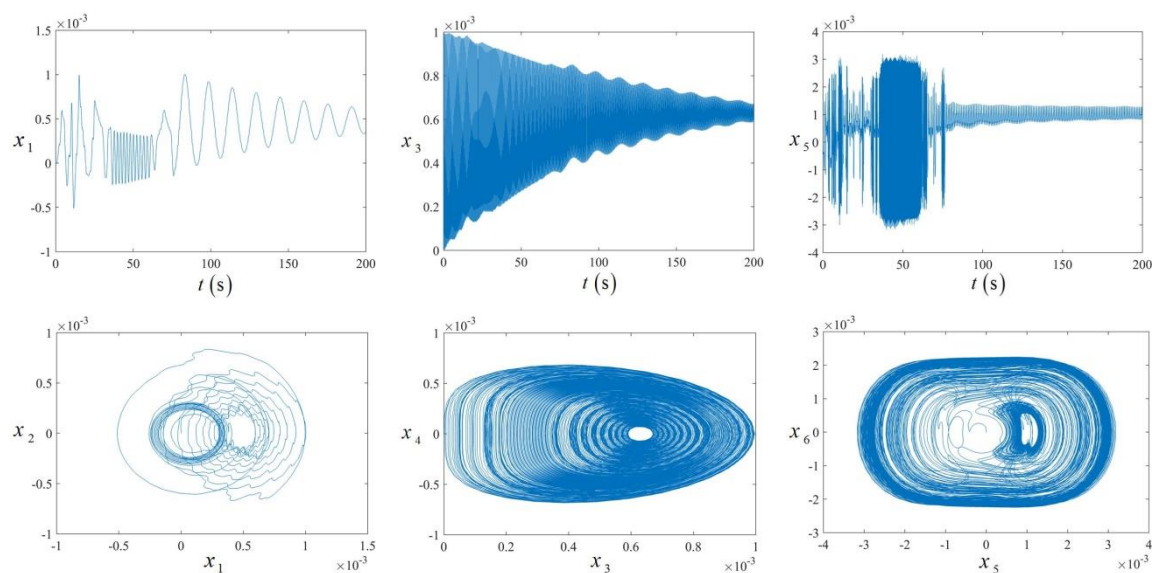
$\theta = \beta = 30^\circ$ ، کمتر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. اما، دامنه ارتعاشی پوسته برای مدهای $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 0^\circ$ ، دامنه ارتعاشی برای مدهای $m = 1, n = 3$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 30^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای مدهای $m = 3, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ ، بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت- شده برای مدهای $m = 1, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ باشد و برای مدهای $m = 3, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 60^\circ$ یا $\theta = 90^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ باشد، سریع‌تر به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود. همچنین میزان بی‌نظمی نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای مدهای $m = 1, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ باشد و برای مدهای $m = 3, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 90^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ یا $\theta = \beta = 60^\circ$ باشد بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.



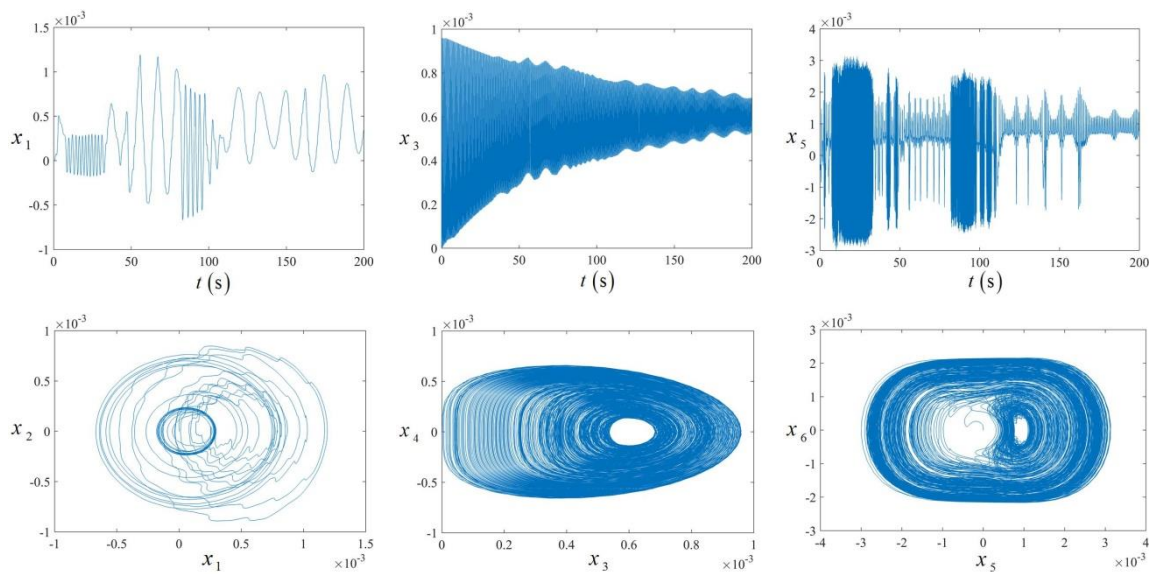
شکل (۵-۹۸) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ$)



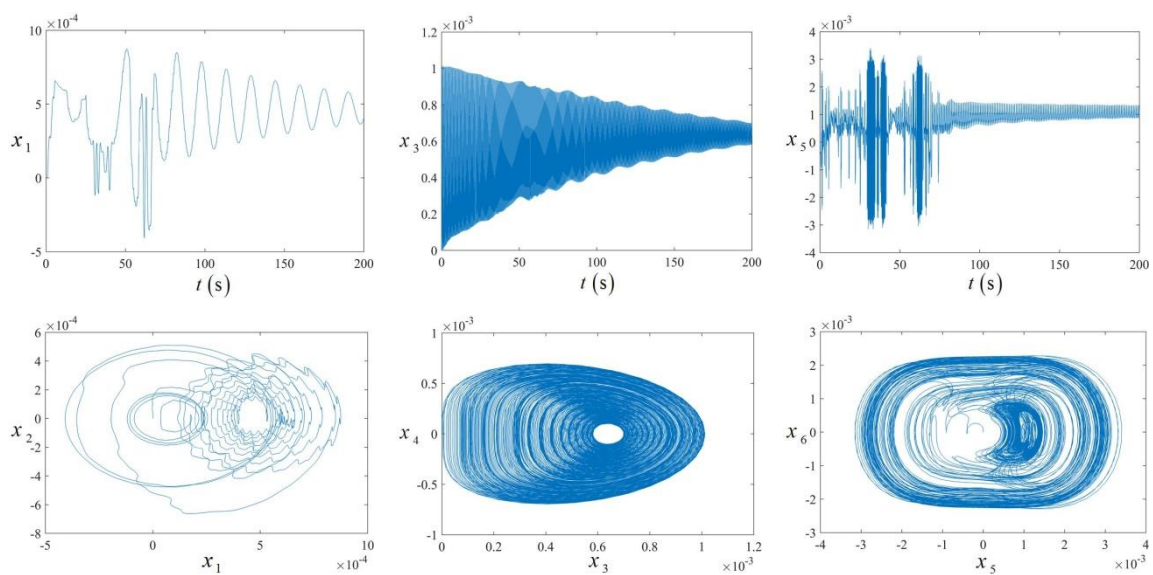
شکل (۵-۹۹) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 30^\circ$)



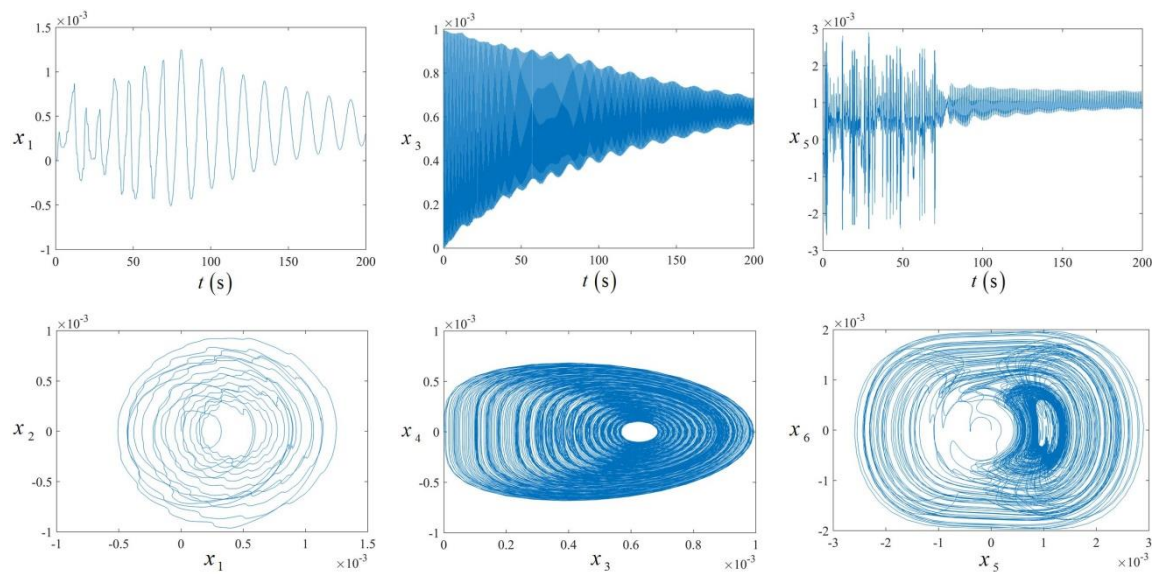
شکل (۵-۱۰۰) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 60^\circ$)



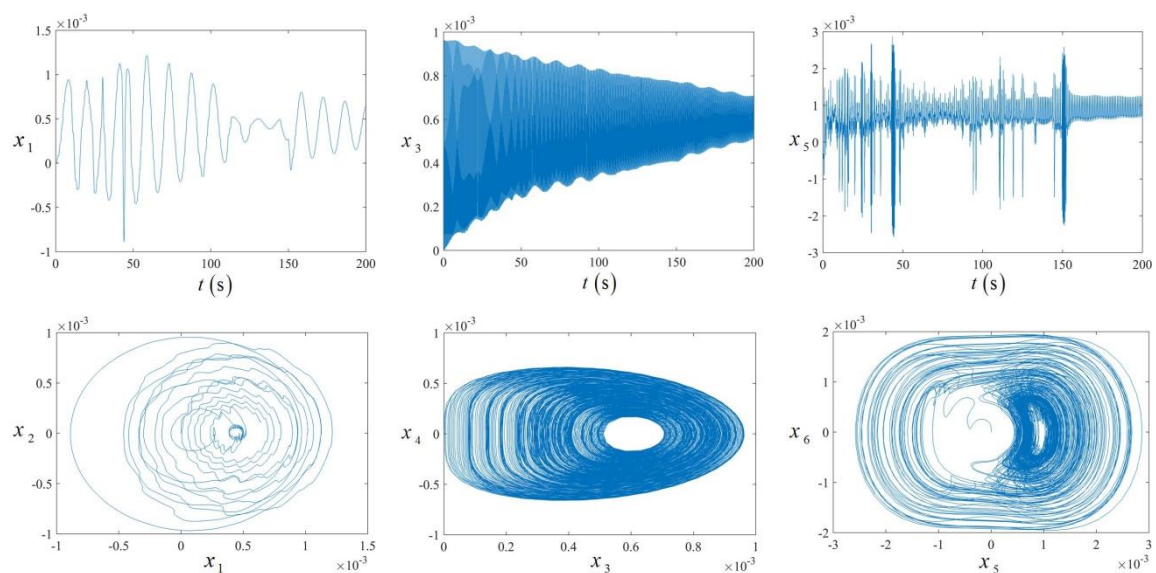
شکل (۵-۱۰) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)



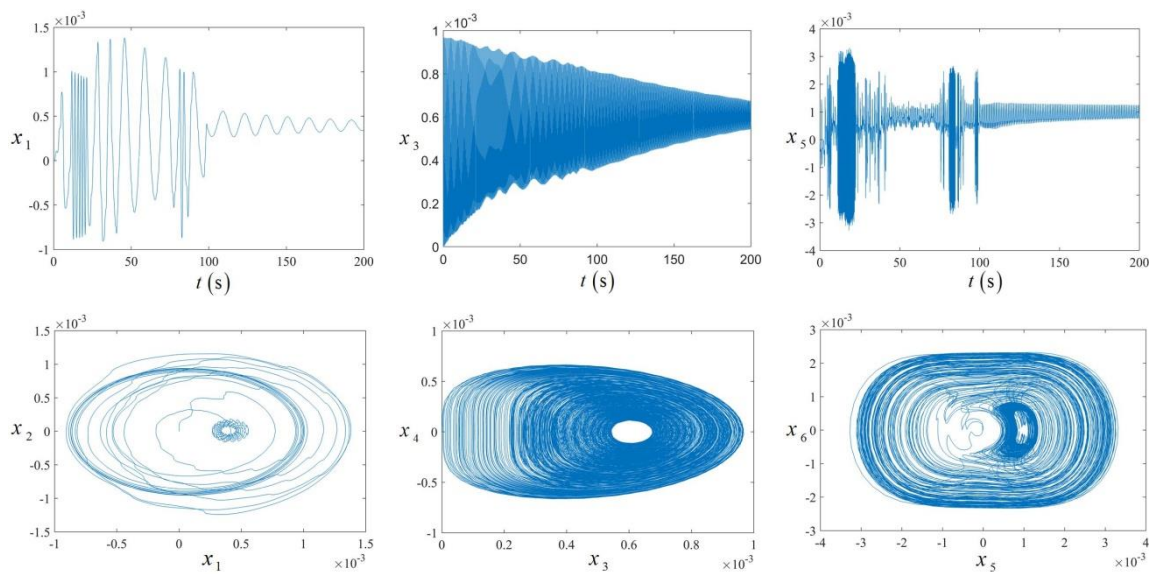
شکل (۵-۱۱) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 30^\circ$)



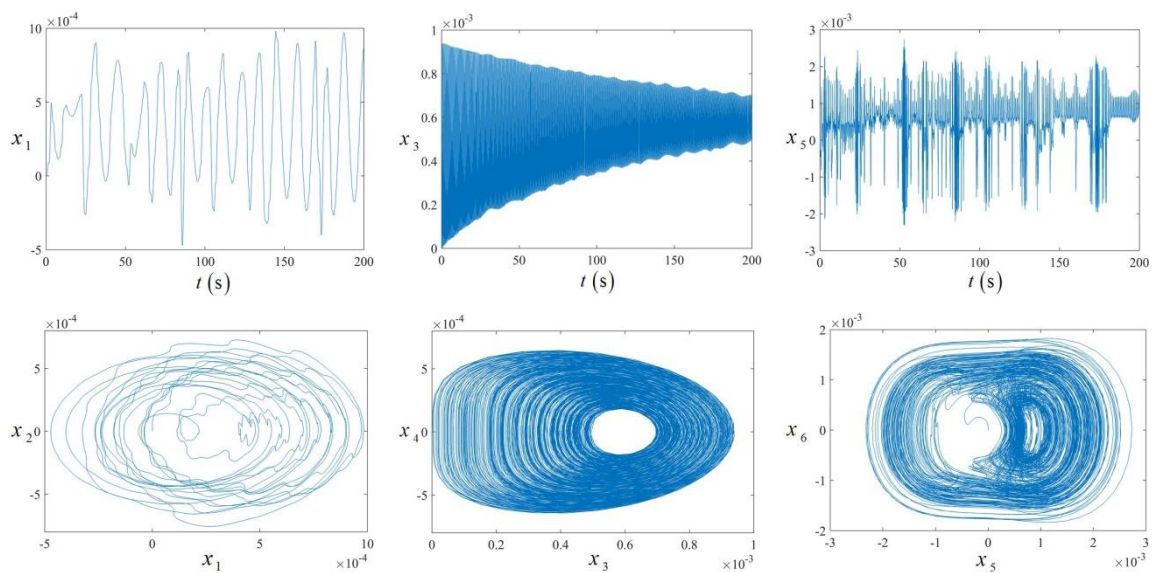
شکل (۵-۱۰۳) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 60^\circ$)



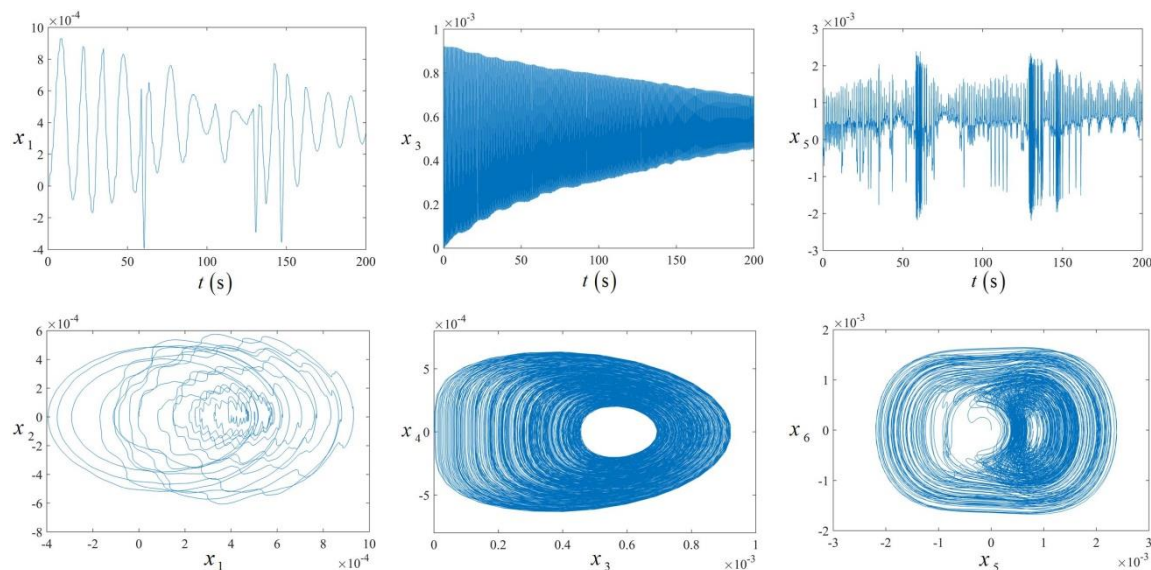
شکل (۵-۱۰۴) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 90^\circ$)



شکل (۵-۱۰) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ$)

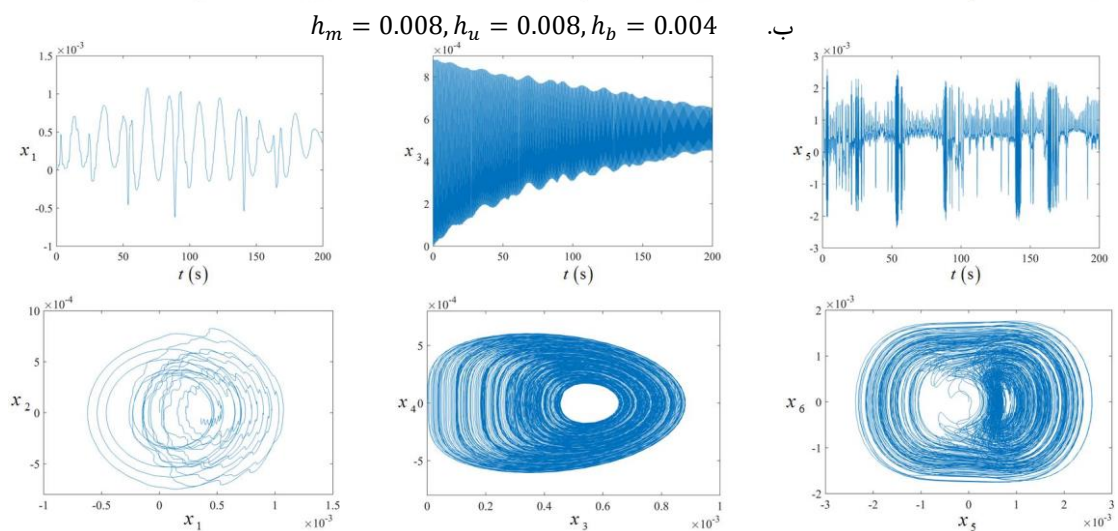
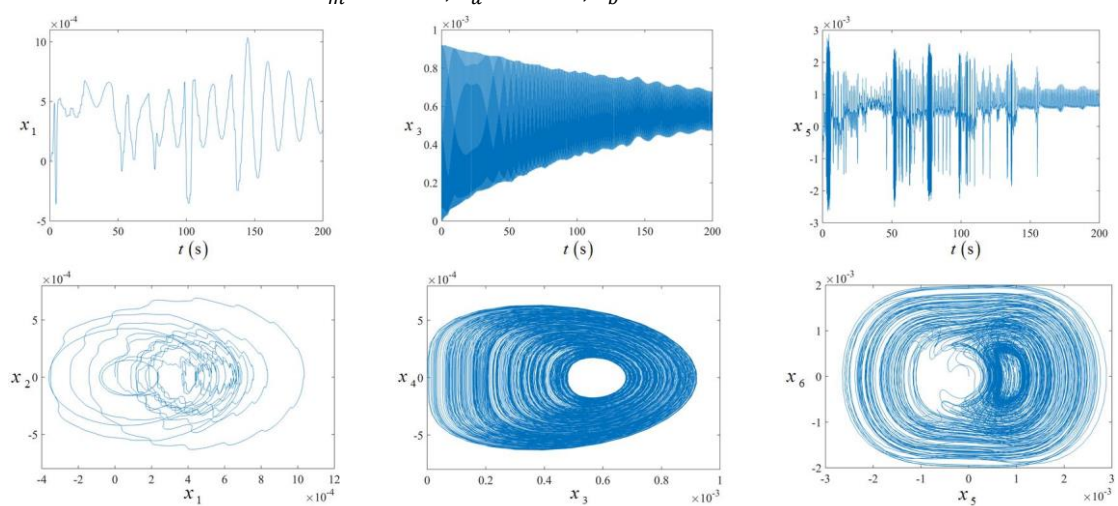
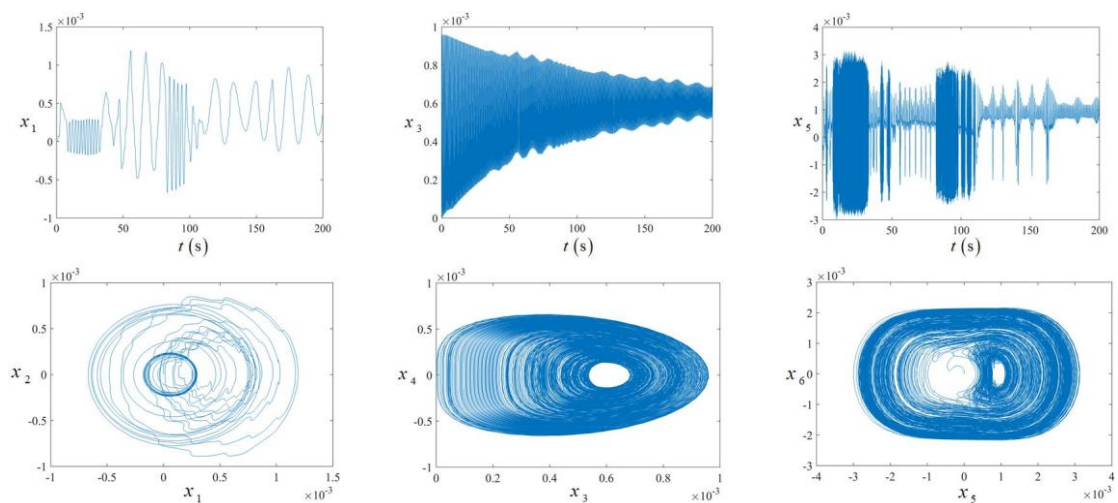


شکل (۵-۱۱) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 90^\circ$)

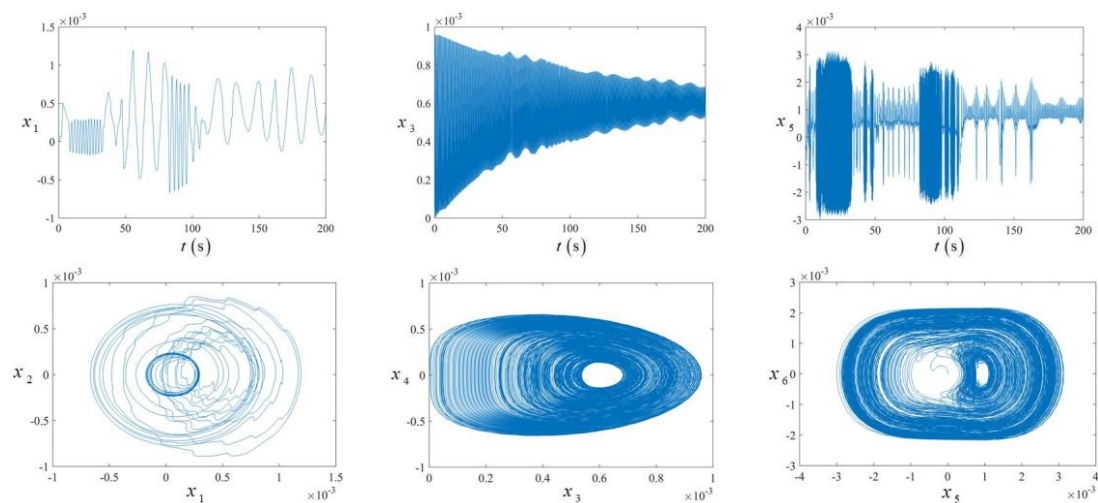


شکل (۵-۱۰۷) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 90^\circ, \beta = 90^\circ$)

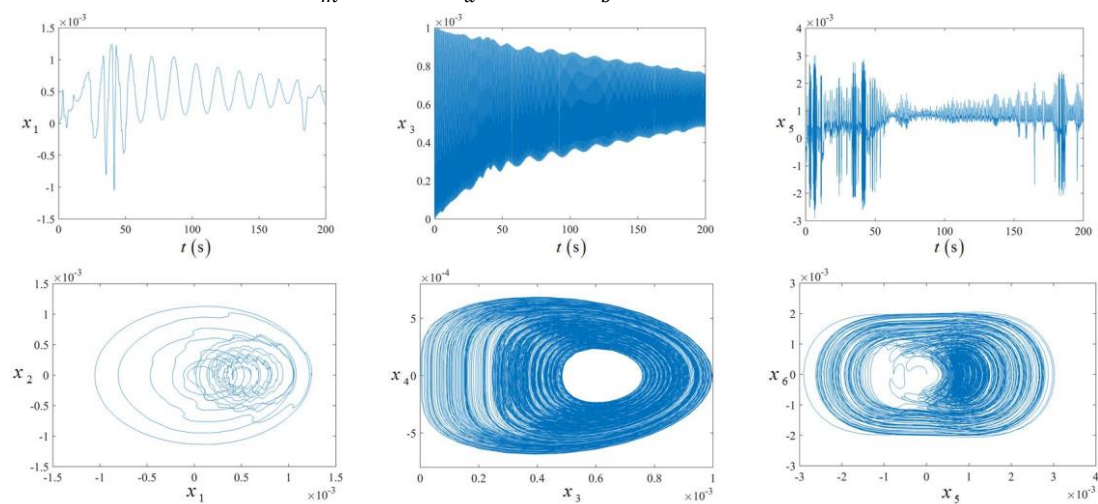
شکل‌های (۵-۱۰۸) و (۵-۱۰۹)، تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته را بر پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده نشان می‌دهد. با توجه به این شکل‌ها، زمانی که ضخامت لایه سرامیکی افزایش می‌یابد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مدهای $m = 3, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ کاهش می‌یابد. درحالی‌که با افزایش ضخامت لایه فلزی، تنها دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مدهای $m = 1, n = 3$ کاهش می‌یابد. همچنین، زمانی که ضخامت لایه سرامیکی برابر با ضخامت لایه مدرج تابعی باشد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مدهای $m = 3, n = 1$ و زمانی که ضخامت لایه فلزی برابر با ضخامت لایه مدرج تابعی باشد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مدهای $m = 1, n = 1$ کاهش می‌یابد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت لایه فلزی یا سرامیکی، نمودار فازی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، به آرامی به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود.



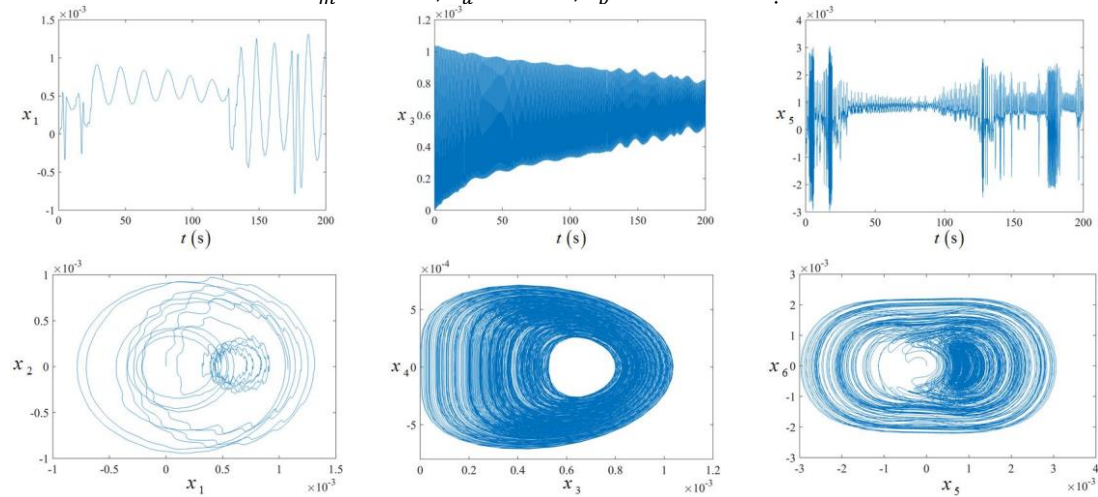
شکل (۵-۱۰) تأثیر ضخامت لایه سرامیکی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)



الف. $h_m = 0.012, h_u = 0.004, h_b = 0.004$



ب. $h_m = 0.008, h_u = 0.004, h_b = 0.008$



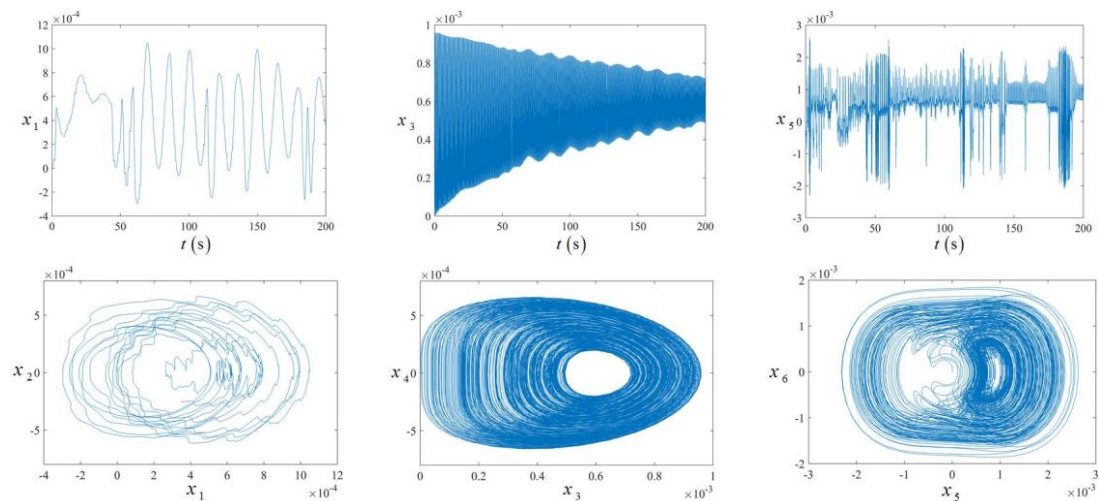
ج. $h_m = 0.004, h_u = 0.004, h_b = 0.012$

شکل (۵-۱۰۹) تأثیر ضخامت لایه فلزی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

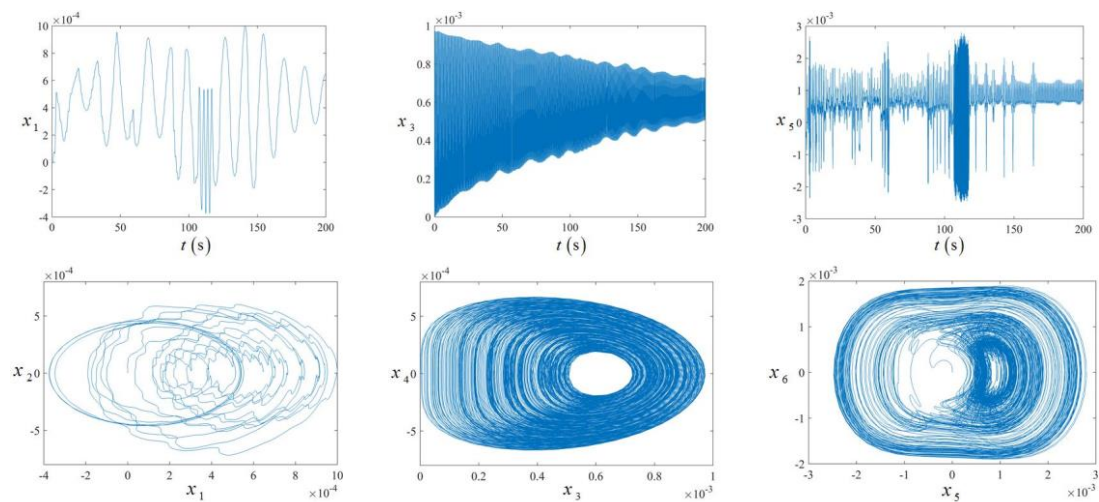
تأثیر دماهای مختلف بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی با تشدید فراهارمونیک $3/1$ و تشدید داخلی $1/9:1/3:1$ در شکل (۵-۱۱۰) نشان داده شده است. با توجه به این شکل، با افزایش دما، میزان بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با موده‌های $m=1, n=1$ و $m=3, n=1$ کاهش می‌یابد در حالیکه دامنه ارتعاشی پوسته برای سه مود برجسته اول افزایش می‌یابد.

در شکل (۵-۱۱۱)، تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی نشان داده شده است. با توجه به این شکل، بستر الاستیک خطی منجر به افزایش بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای هر سه مود برجسته اول می‌شود. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، بستر الاستیک خطی، دامنه ارتعاشی پوسته با موده‌های $m=3, n=1$ را کاهش می‌دهد.

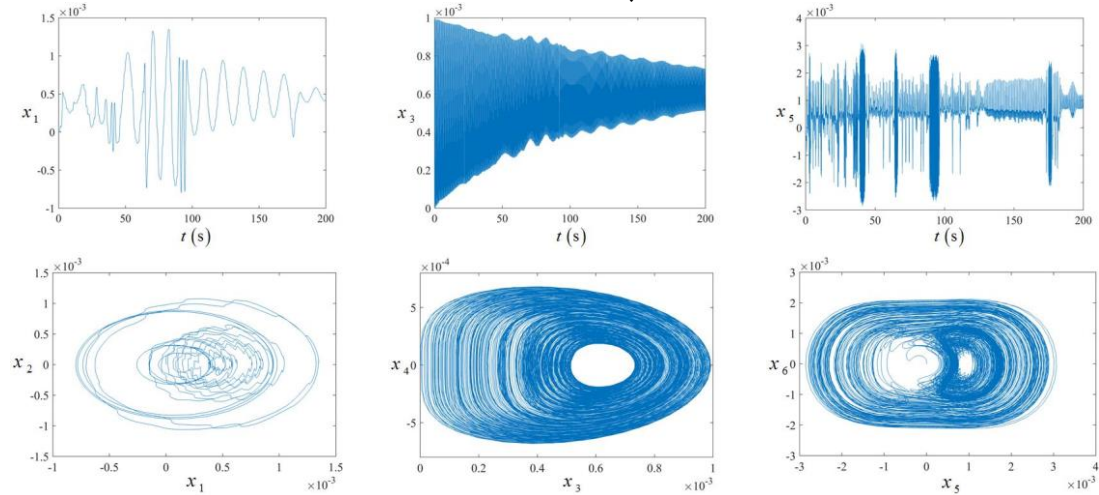
در شکل (۵-۱۱۲)، تأثیر پارامترهای بستر الاستیک غیرخطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی نشان داده شده است. با توجه به این شکل، بستر الاستیک غیرخطی منجر به کاهش دامنه ارتعاشی و بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای سه مود برجسته اول می‌شود.



الف. $T = 300 \text{ K}$

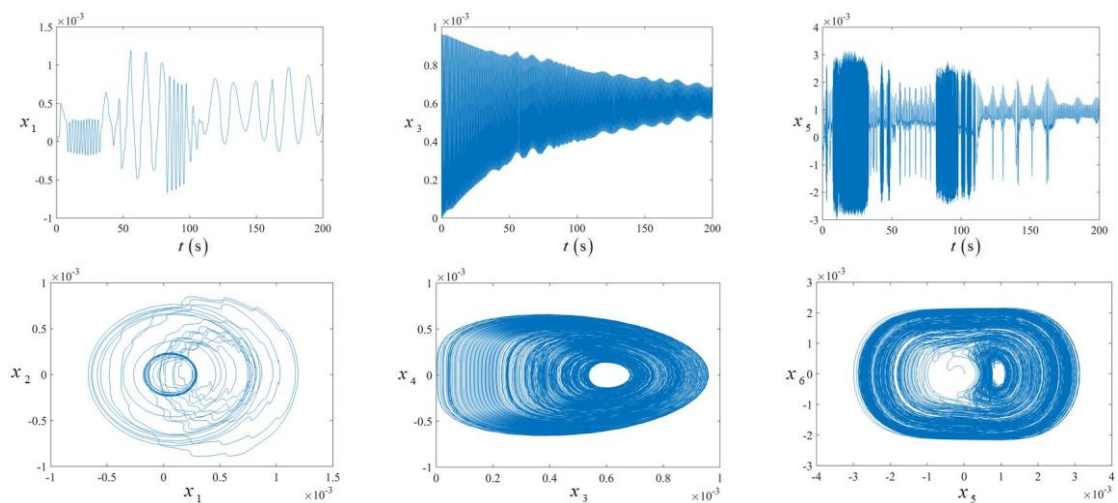


ب. $T = 500 \text{ K}$

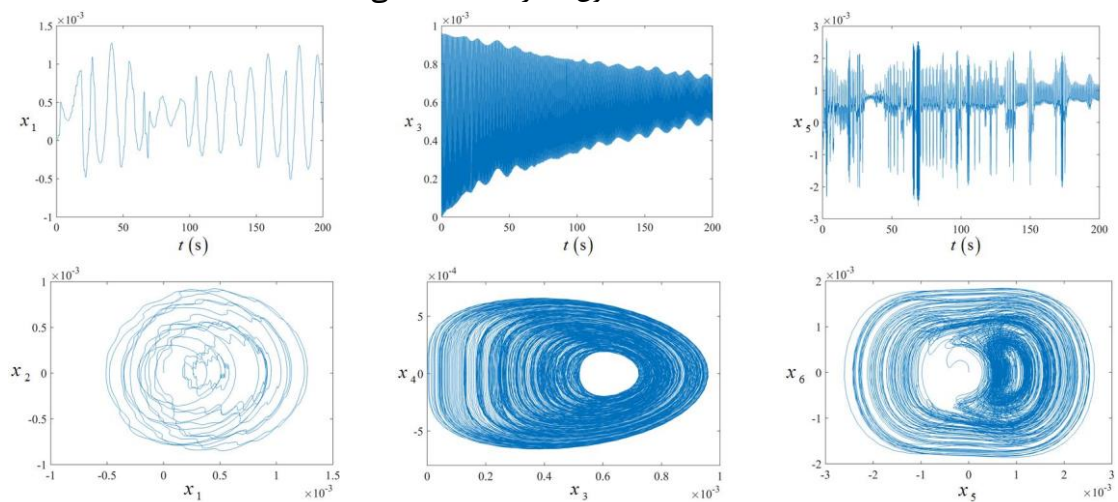


ج. $T = 700 \text{ K}$

شکل (۵-۱۱) تأثیر دماهای مختلف بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

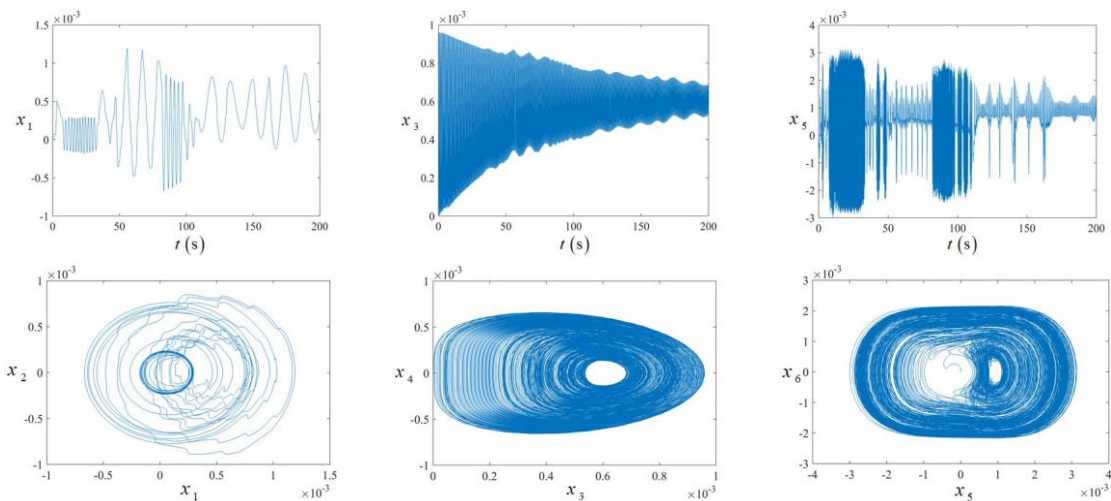


الف. بدون بستر الاستیک خطی

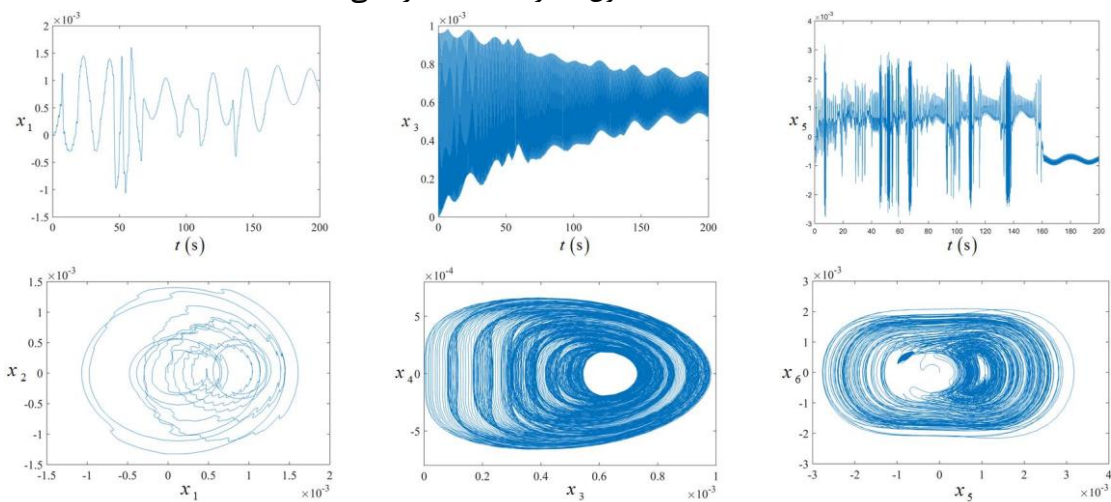


ب. با بستر الاستیک خطی

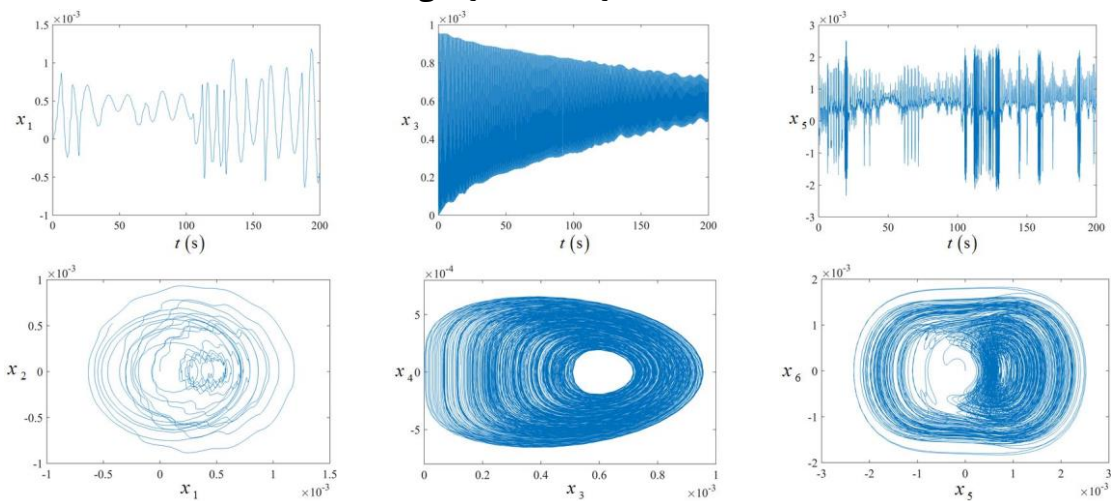
شکل (۵-۱۱) تأثیر بستر الاستیک خطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده
 $(\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ)$



الف. بدون بستر الاستیک غیرخطی



ب. با بستر الاستیک غیرخطی مثبت



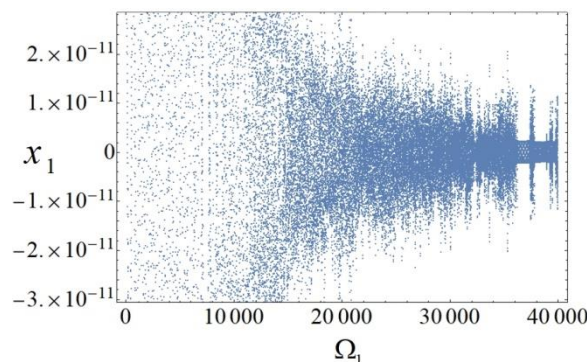
ج. با بستر الاستیک غیرخطی منفی

شکل (۵-۱۱۲) تأثیر بستر الاستیک غیرخطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

۵-۳-۵- تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ و تشدید داخلی ۱/۴: ۱/۲

در این بخش، به بررسی پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده دارای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ و تشدید داخلی ۱/۴: ۱/۲ پرداخته شده است. در این قسمت تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

به منظور تحلیل پاسخ‌های آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، ابتدا نمودار چندشاخگی برای فرکانس تحریک (Ω_1) نسبت به دامنه (x_1) در شکل (۵-۱۱۳) مورد بررسی قرار گرفته است. در این وضعیت، فرکانس طبیعی پوسته معادل با $\omega_1 = 7407.4$ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با توجه به اینکه فرکانس تحریک (Ω_1) نزدیک به $\frac{1}{2}\omega_1$ در نظر گرفته شده است، در نزدیکی $\frac{1}{2}\omega_1$ حرکت آشوبی برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده اتفاق می‌افتد.

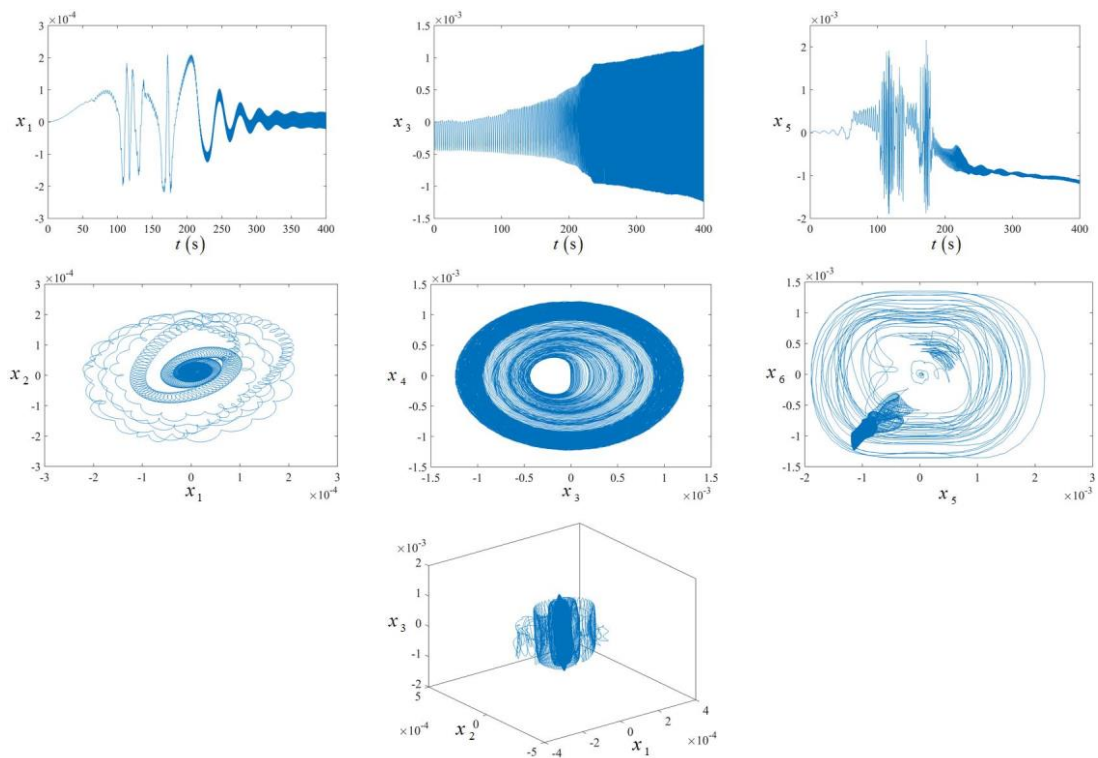


شکل (۵-۱۱۳) نمودار چندشاخگی برای فرکانس تحریک (Ω_1) نسبت به دامنه (x_1) برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده

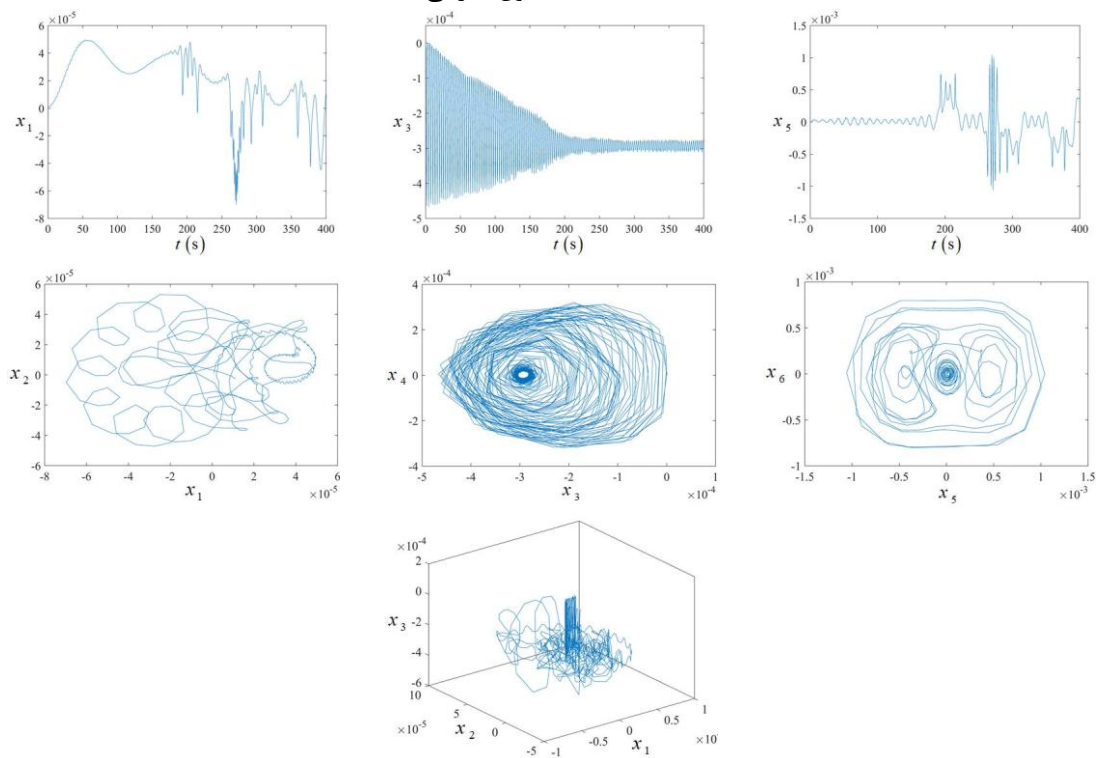
تأثیر ضریب میرایی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی و نمودار فاز^۱ پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی با تشدید فراهارمونیک ۲/۱ و تشدید داخلی ۱/۴: ۱/۲ در شکل (۵-۱۱۴) نشان داده شده است. همان‌طور که نشان داده شده است نمودار فاز ارتعاشات

¹ Phase portrait

پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با موده‌های $m = 3, n = 1$ و $m = 3, n = 1$ سریع‌تر به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود و در نتیجه پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته سریع‌تر پایدار می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای پوسته بدون میرایی، نمودار فازی ارتعاشات پوسته با موده‌های $m = n = 1$ سریع‌تر به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود. همچنین با در نظر گرفتن میرایی بر روی پوسته، میزان بی‌نظمی بر روی نمودار فازی سه‌بعدی پوسته در فضای x_1, x_2, x_3 بیش‌تر کاهش می‌یابد.



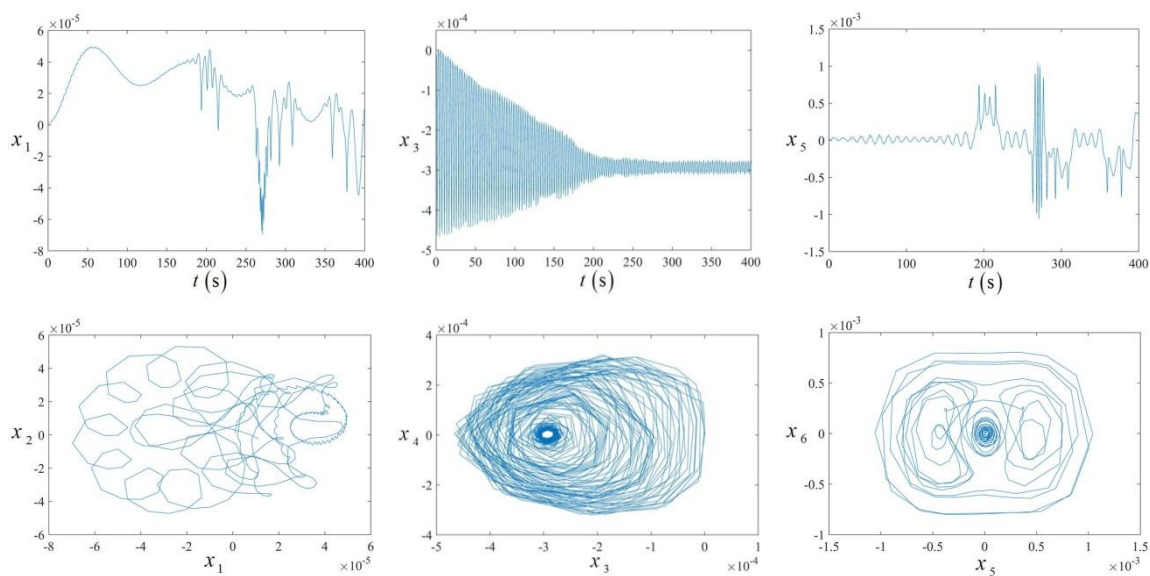
الف. بدون میرایی



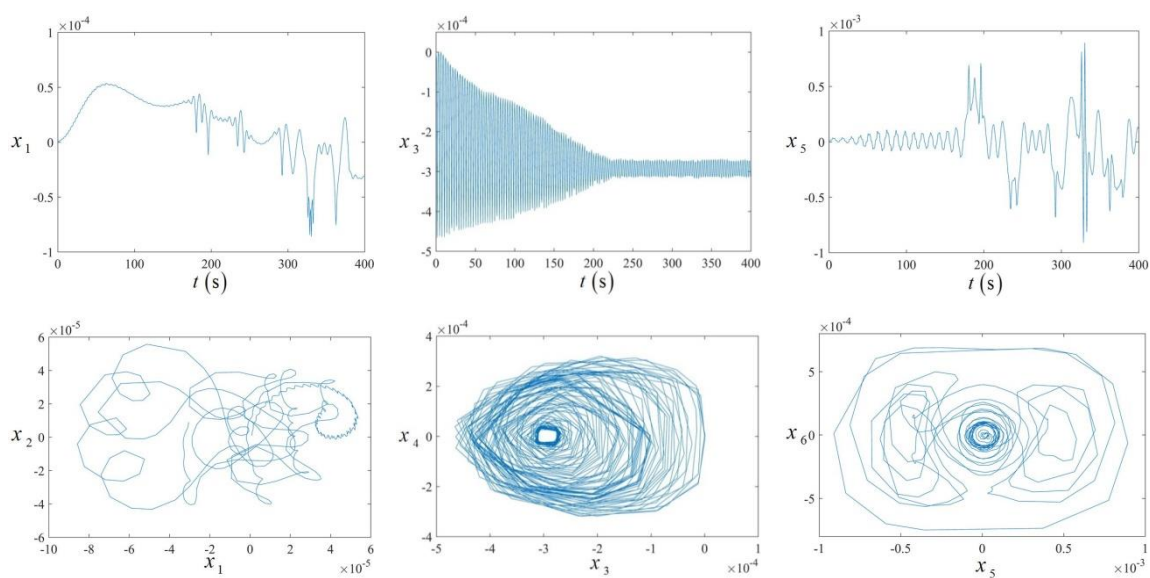
ب. با میرایی

شکل (۵-۱۱۴) تأثیر ضریب میرایی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی با تشدید فراهارمونیک ۲/۱ و تشدید داخلی ۱/۴:۱/۲:۱ (θ = 0°, β = 90°)

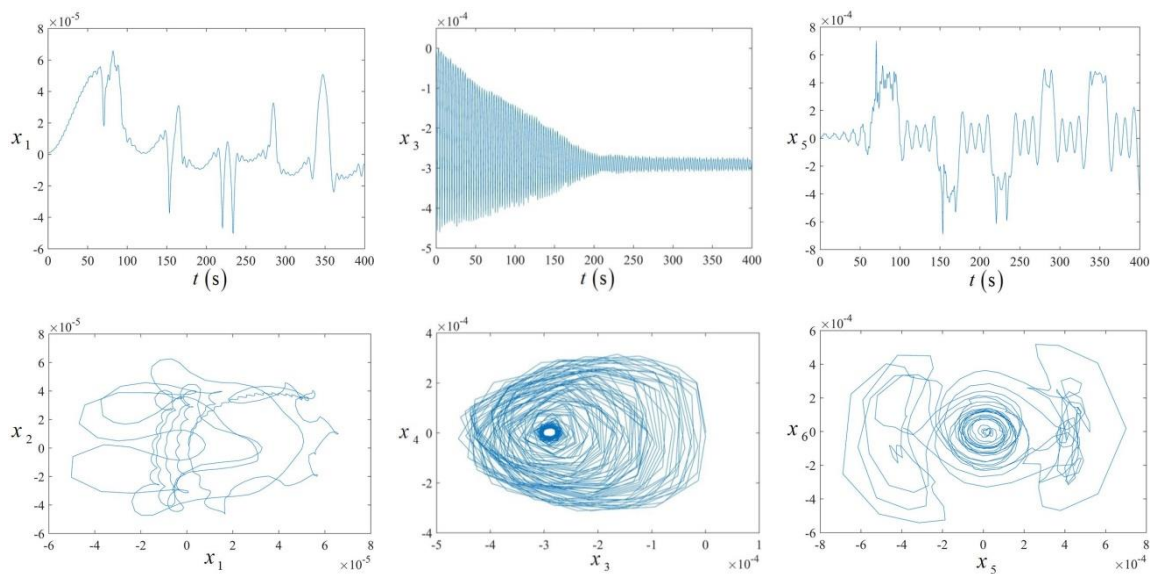
تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر حرکت آشوبی و نمودار فازی ارتعاشات غیرخطی با تشدید فراهارمونیک $2/1$ و تشدید داخلی $1/4 : 1/2$ برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی در شکل‌های (۵-۱۱۵)-(۵-۱۲۴) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، میزان بی‌نظمی در نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای موده‌های $m = 1, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 60^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ باشد، کاهش می‌یابد، اما نمودار فازی به آرامی به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود. نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای موده‌های $m = 1, n = 3$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 0^\circ$ یا $\theta = \beta = 30^\circ$ یا $\theta = 60^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ باشد و برای موده‌های $m = 3, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 0^\circ$ یا $\theta = \beta = 60^\circ$ یا $\theta = 30^\circ$ یا $\beta = 0^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ باشد، سریع‌تر به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود و در نتیجه پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته سریع‌تر پایدار می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، دامنه ارتعاشی برای موده‌های $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 90^\circ$ و $\theta = 60^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای موده‌های $m = 3, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 90^\circ$ ، کمتر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالی که دامنه ارتعاشی برای موده‌های $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 60^\circ$ و $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای موده‌های $m = 3, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ ، بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.



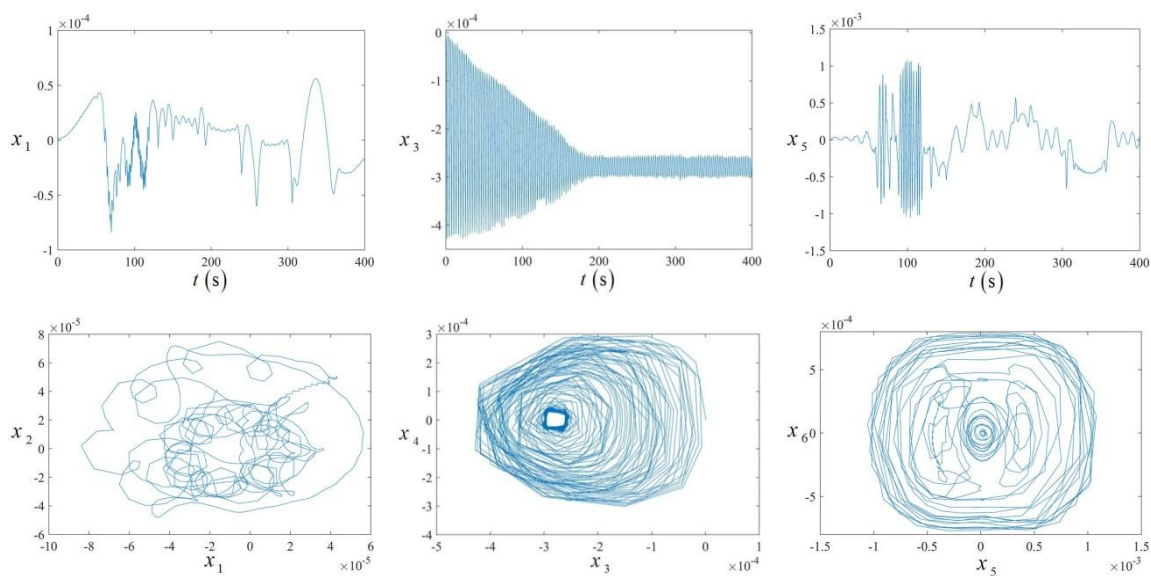
شکل (۵-۱۱۵) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ$)



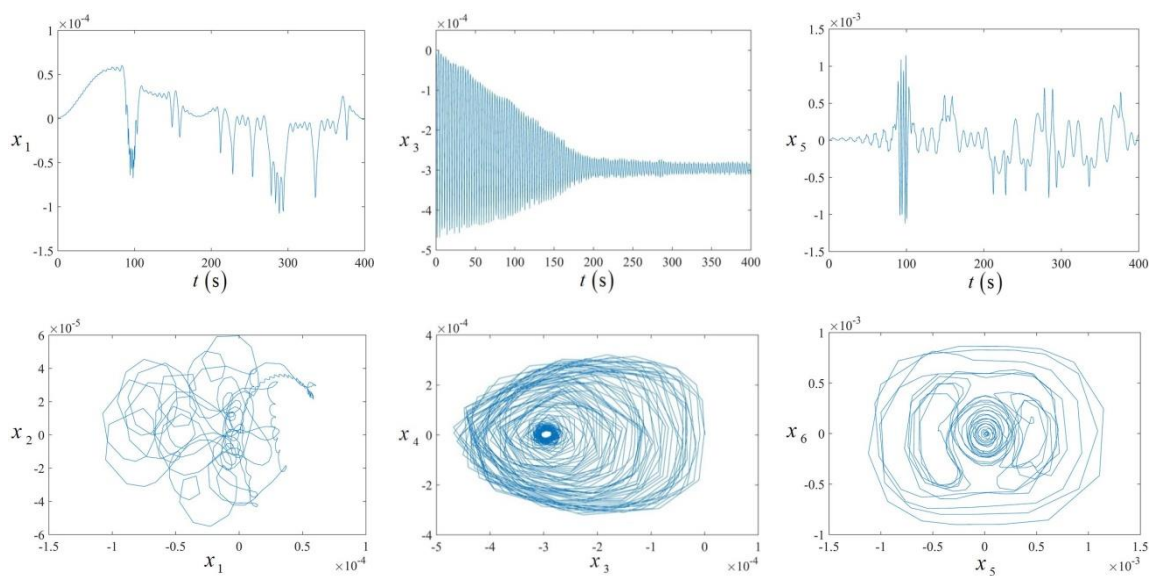
شکل (۵-۱۱۶) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 30^\circ$)



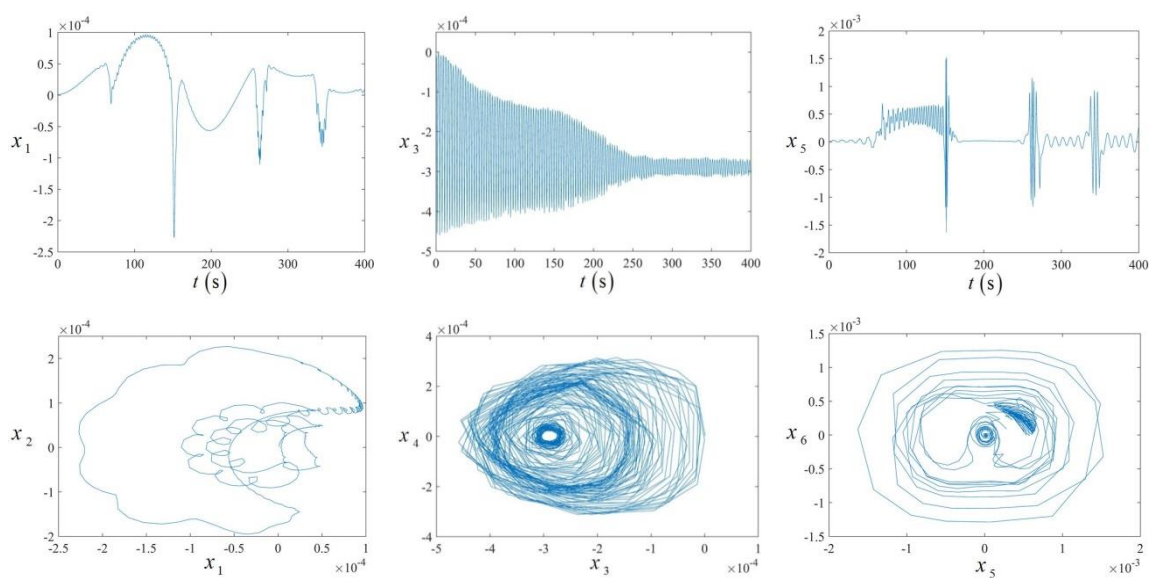
شکل (۵-۱۱۷) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 60^\circ$)



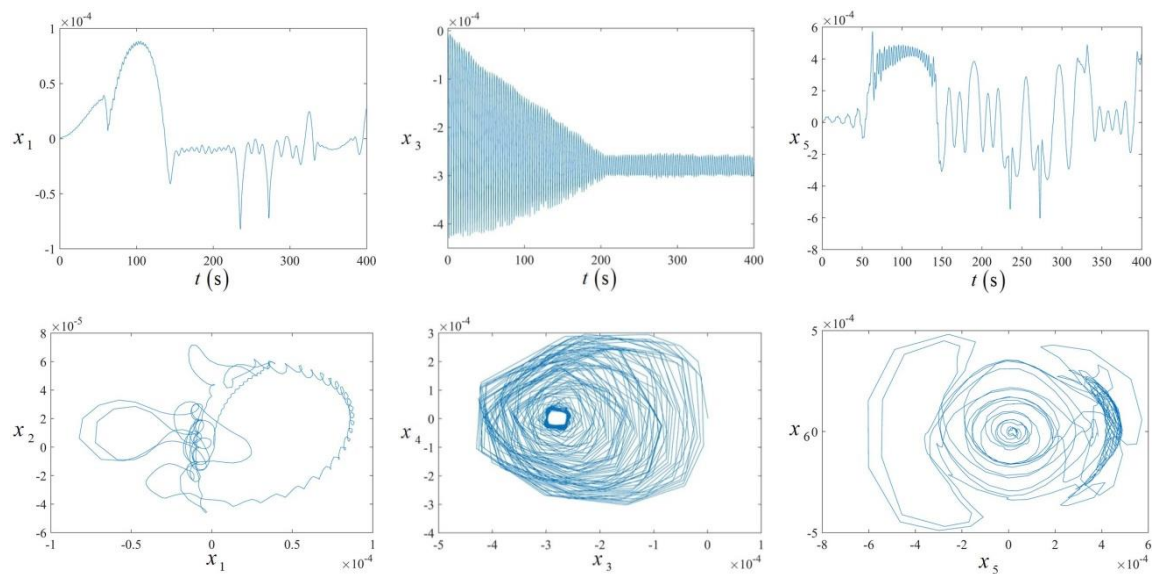
شکل (۵-۱۱۸) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)



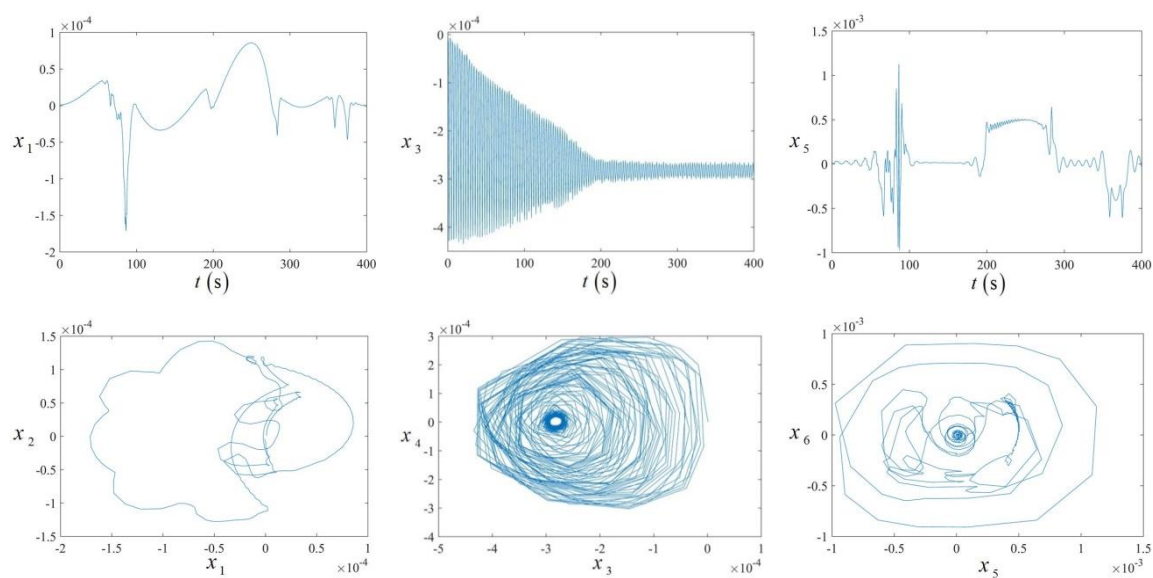
شکل (۵-۱۱۹) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 30^\circ$)



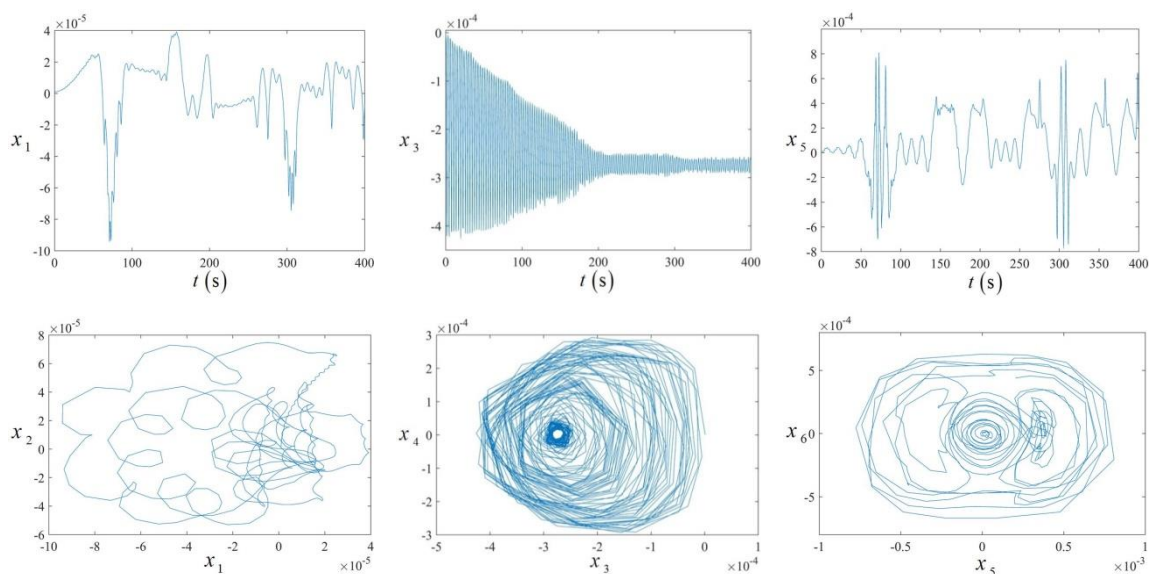
شکل (۵-۱۲۰) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 60^\circ$)



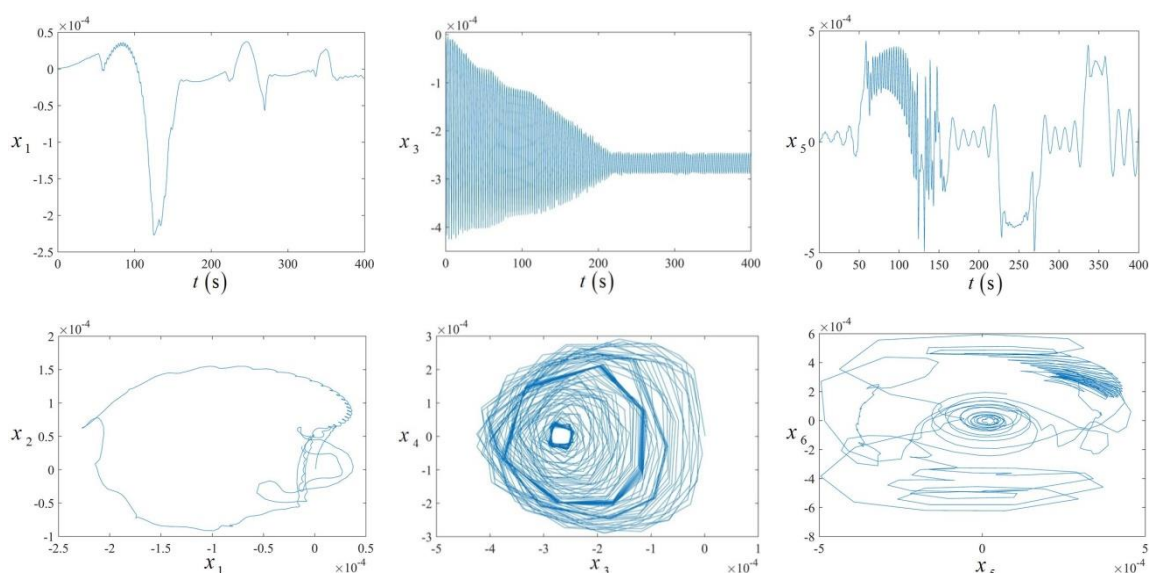
شکل (۵-۱۲۱) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 30^\circ, \beta = 90^\circ$)



شکل (۵-۱۲۲) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ$)



شکل (۵-۱۲۳) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 90^\circ$)

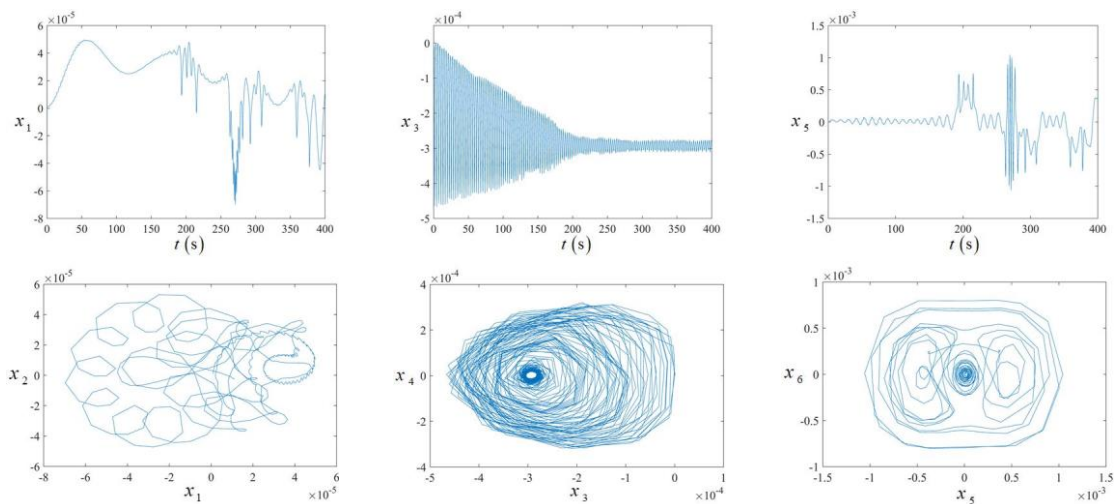


شکل (۵-۱۲۴) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 90^\circ, \beta = 90^\circ$)

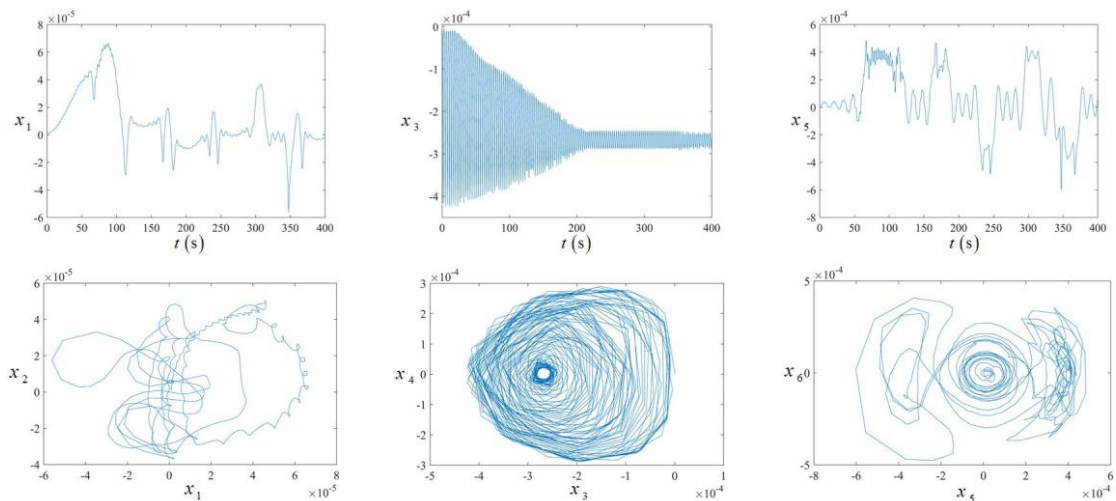
شکل‌های (۵-۱۲۵) و (۵-۱۲۶)، تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته را بر پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده نشان می‌دهد. با توجه به این شکل‌ها، زمانی که ضخامت لایه سرامیکی افزایش می‌یابد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 1, n = 3$ و $m = 1, n = 1$ به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد و زمانی که ضخامت لایه فلزی افزایش می‌یابد، دامنه ارتعاشی و نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای

$m = 3, n = 1$ کاهش می‌یابد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، زمانی که ضخامت لایه سرامیکی برابر با ضخامت لایه مدرج تابعی باشد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 3, n = 1$ و زمانی که ضخامت لایه فلزی برابر با ضخامت لایه مدرج تابعی باشد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ کاهش می‌یابد. با توجه به این شکل‌ها، با افزایش ضخامت لایه سرامیکی یا فلزی، میزان بی‌نظمی نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای مودهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ افزایش می‌یابد.

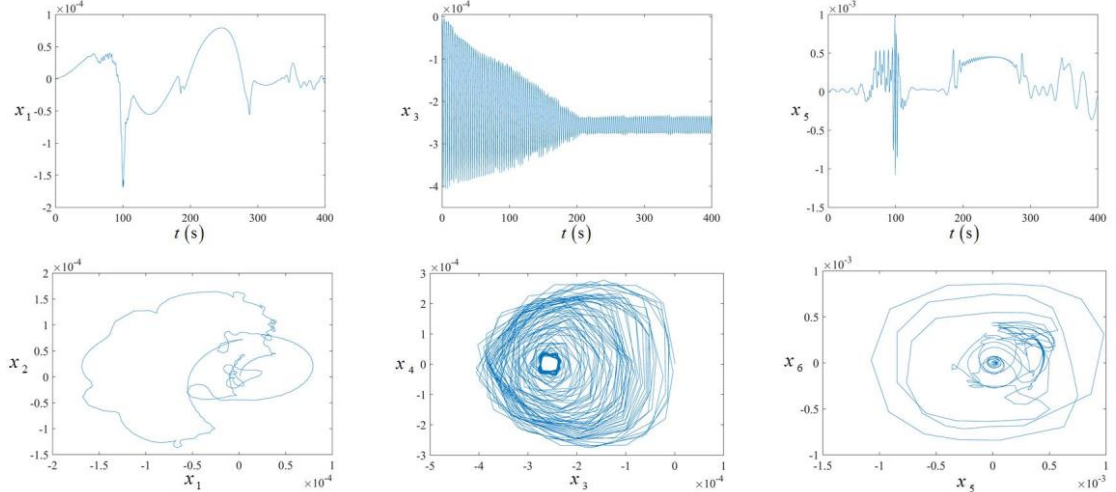
تأثیر دماهای مختلف بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی با تشدید فراهارمونیک $2/1$ و تشدید داخلی $1/4:1/2$ در شکل (۵-۱۲۷) نشان داده شده است. با توجه به این شکل، با افزایش دما، میزان بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 1, n = 1$ و $m = 3, n = 1$ کاهش می‌یابد در حالیکه دامنه ارتعاشی پوسته برای سه مود برجسته اول افزایش می‌یابد.



الف. $h_m = 0.012, h_u = 0.004, h_b = 0.004$

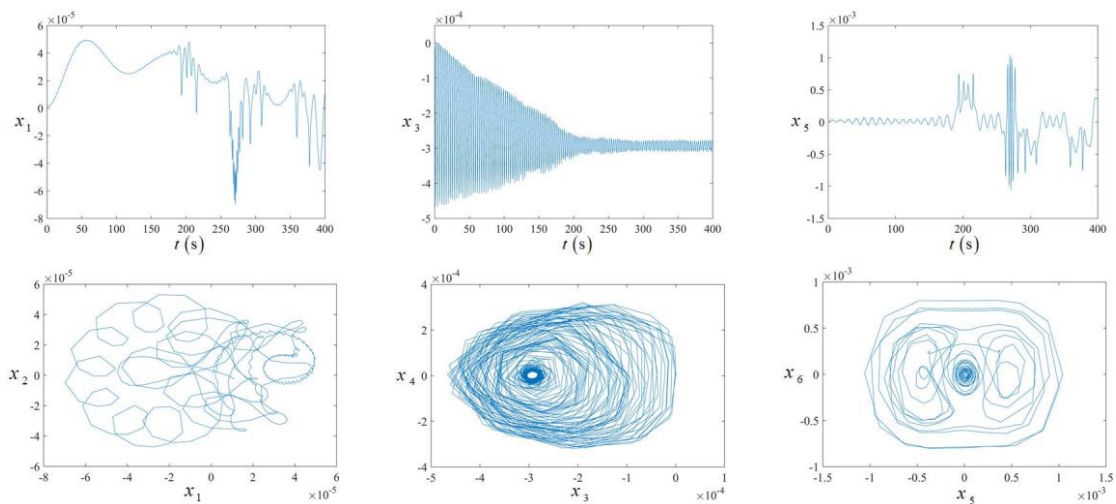


ب. $h_m = 0.008, h_u = 0.008, h_b = 0.004$

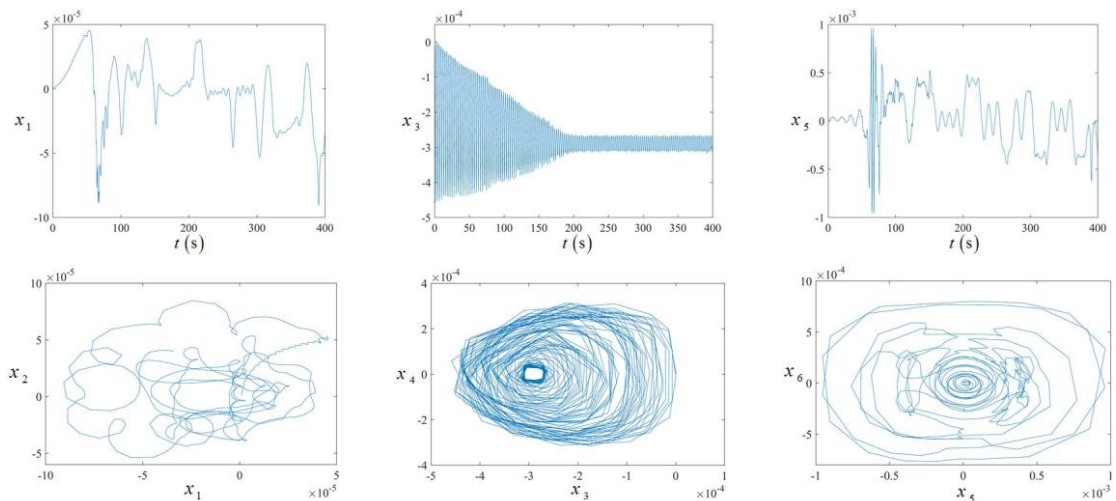


ج. $h_m = 0.004, h_u = 0.012, h_b = 0.004$

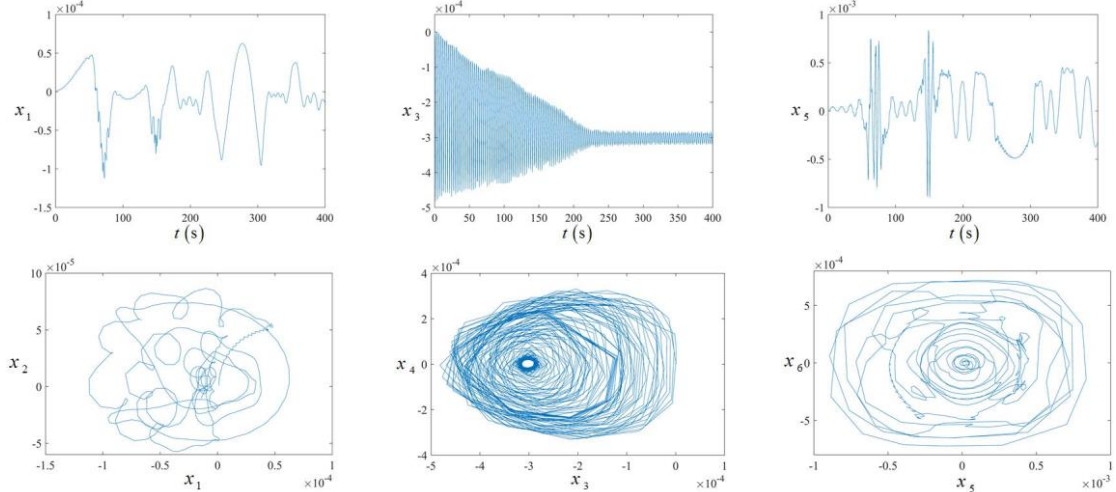
شکل (۵-۱۲۵) تأثیر ضخامت لایه سرامیکی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)



الف. $h_m = 0.012, h_u = 0.004, h_b = 0.004$

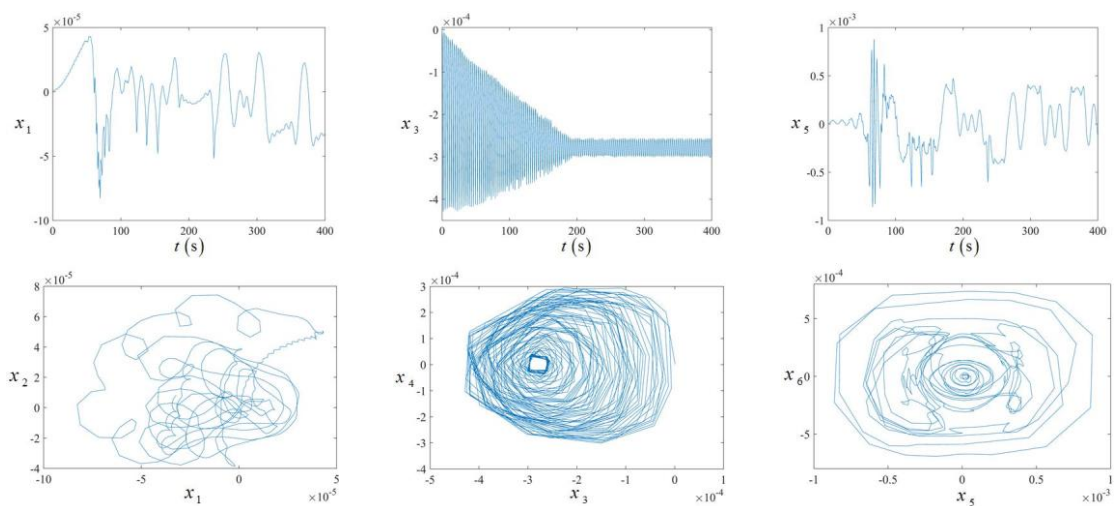


ب. $h_m = 0.008, h_u = 0.004, h_b = 0.008$

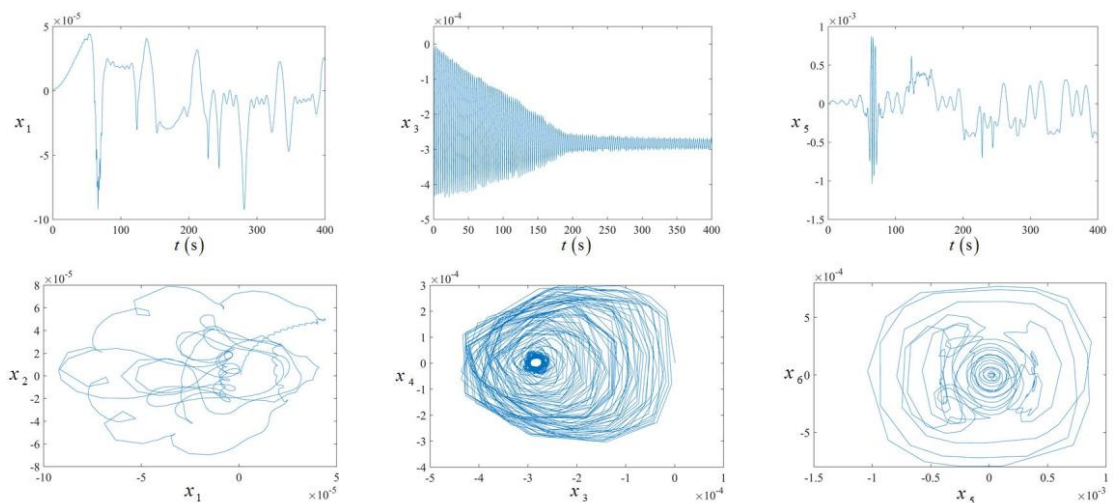


ج. $h_m = 0.004, h_u = 0.004, h_b = 0.012$

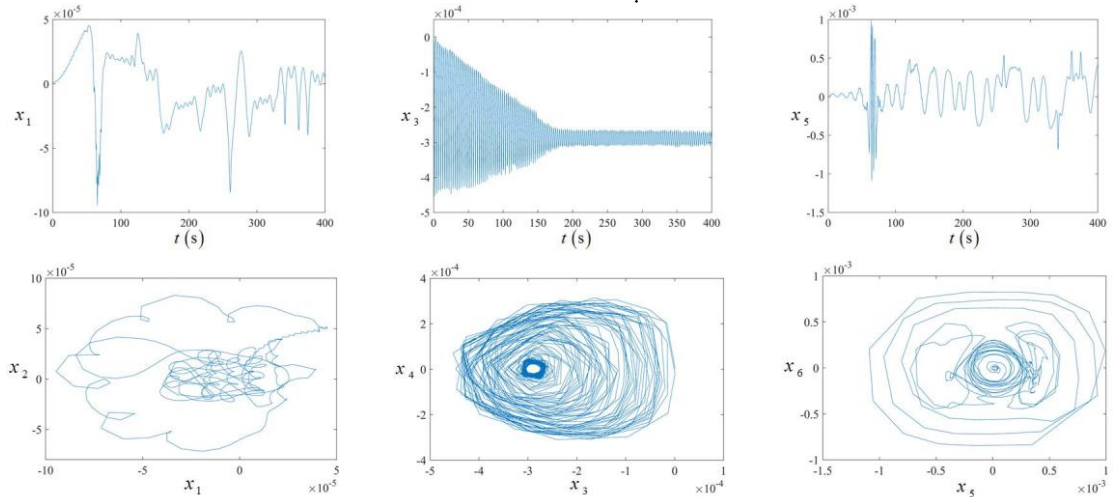
شکل (۵-۱۲۶) تأثیر ضخامت لایه فلزی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده
($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)



الف. $T = 300 \text{ K}$



ب. $T = 500 \text{ K}$

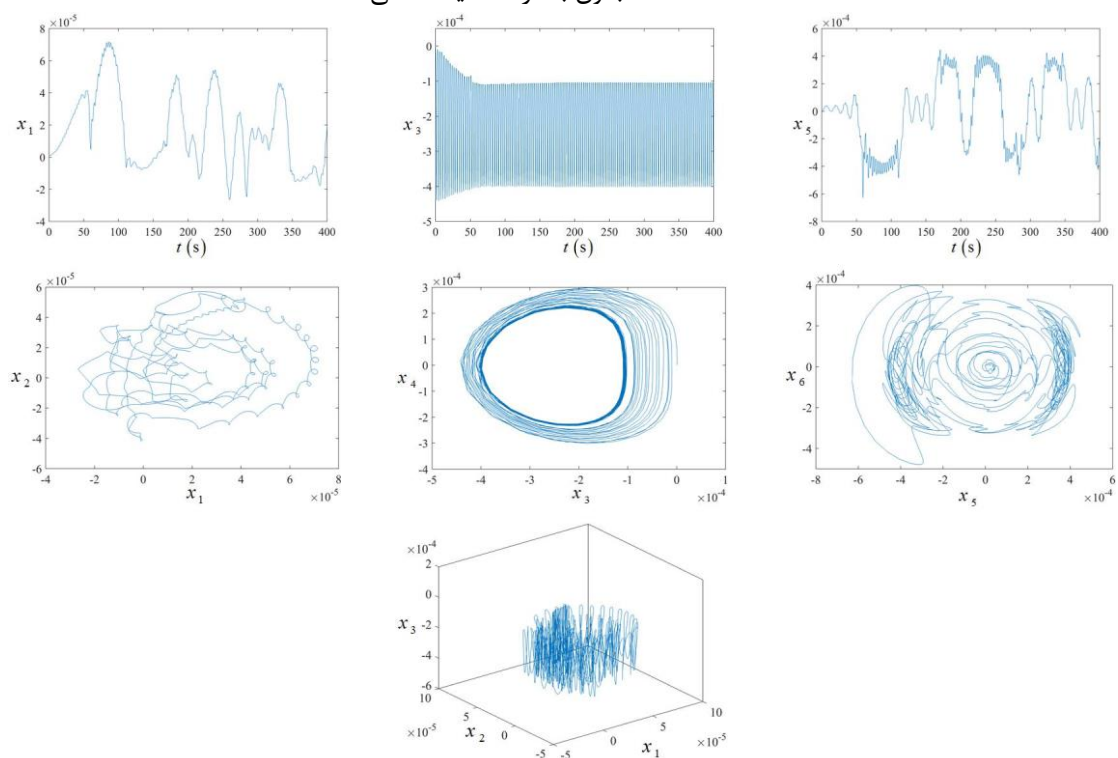
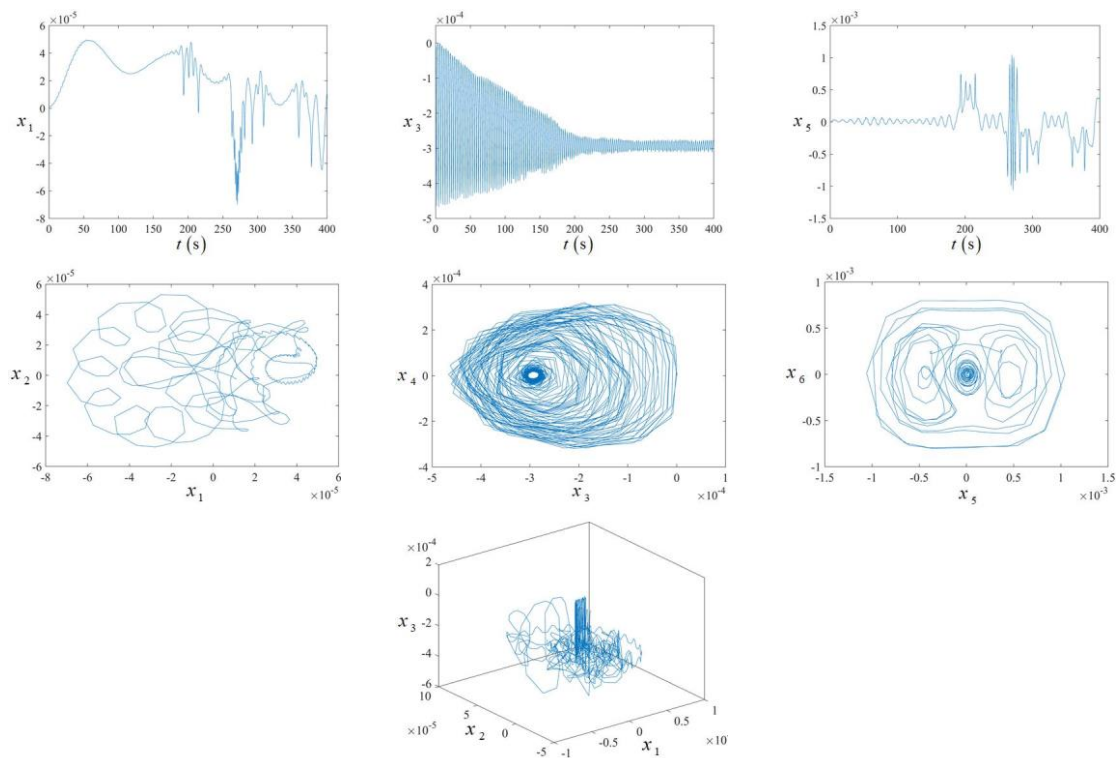


ج. $T = 700 \text{ K}$

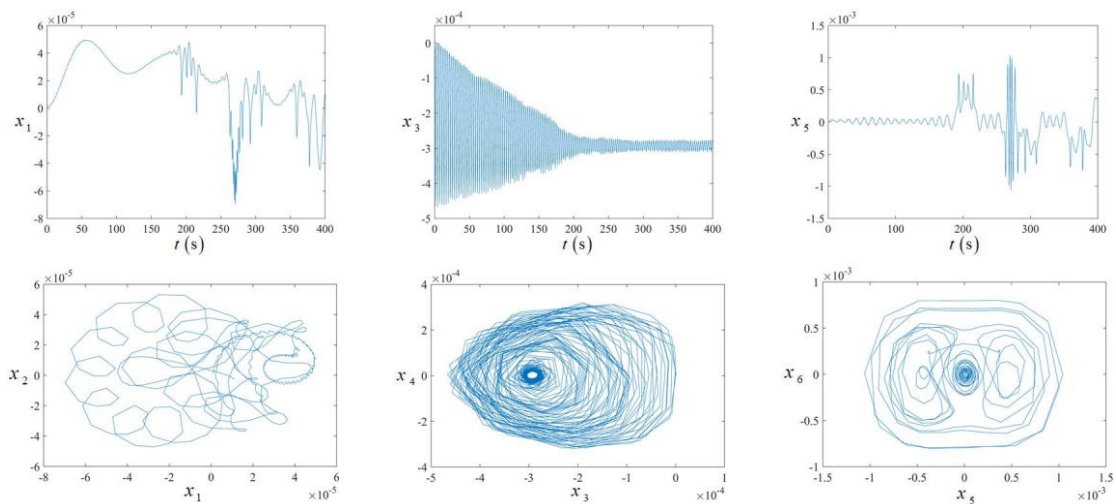
شکل (۵-۱۲۷) تأثیر دماهای مختلف بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده
($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

در شکل (۵-۱۲۸)، تأثیر پارامترهای بستر الاستیک خطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی نشان داده شده است. با توجه به این شکل، بستر الاستیک خطی منجر به کاهش بی‌نظمی در نمودارهای فازي پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای موده‌های $m = 1, n = 3$ و افزایش بی‌نظمی در نمودارهای فازي پوسته برای موده‌های $m = 1, n = 1$ و $m = 3, n = 1$ می‌شود. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، با در نظر گرفتن بستر الاستیک خطی بر روی پوسته، دامنه ارتعاشی پوسته افزایش و میزان بی‌نظمی بر روی نمودار فازي سه‌بعدی پوسته در فضای x_1, x_2, x_3 نیز بیش‌تر افزایش می‌یابد.

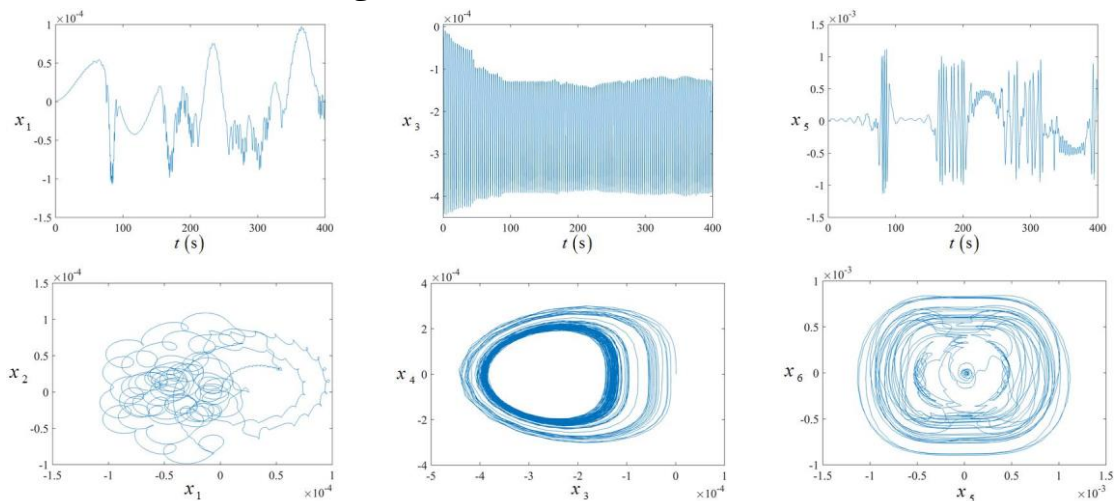
در شکل (۵-۱۲۹)، تأثیر پارامترهای بستر الاستیک غیرخطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی نشان داده شده است. با توجه به این شکل، با استفاده از بستر الاستیک غیرخطی، نمودار فازي ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای موده‌های $m = 3, n = 1$ سریعاً به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود و برای موده‌های $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ به آرامی به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود. همچنین، با در نظر گرفتن بستر الاستیک غیرخطی بر روی پوسته، میزان بی‌نظمی در نمودارهای فازي پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای موده‌های $m = 3, n = 1$ افزایش می‌یابد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با در نظر گرفتن پارامتر بستر الاستیک غیرخطی مثبت و منفی بر روی پوسته، به ترتیب میزان بی-نظمی در نمودارهای فازي پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای موده‌های $m = 1, n = 1$ و $m = 3, n = 1$ افزایش و کاهش می‌یابد.



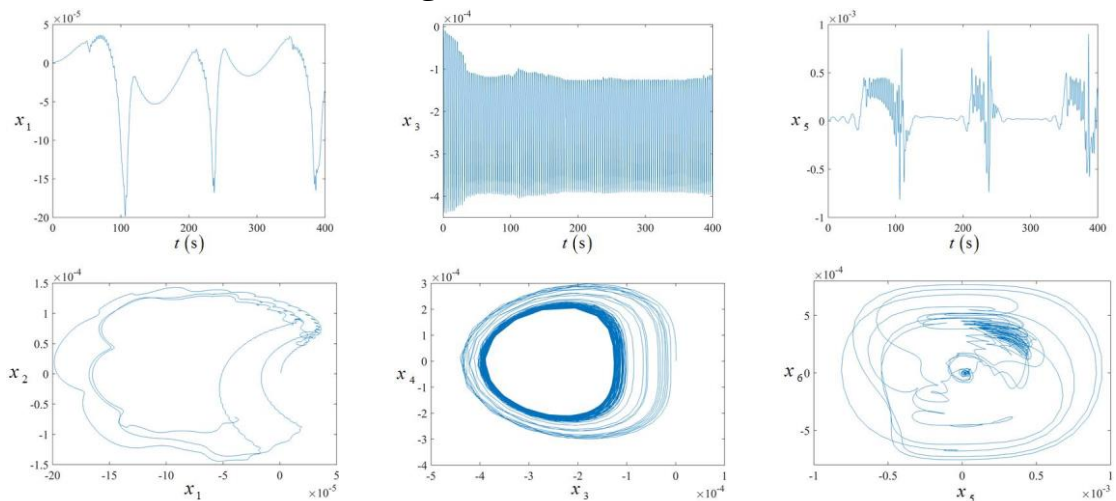
شکل (۵-۱۲۸) تأثیر بستر الاستیک خطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)



الف. بدون بستر الاستیک غیرخطی



ب. با بستر الاستیک غیرخطی مثبت



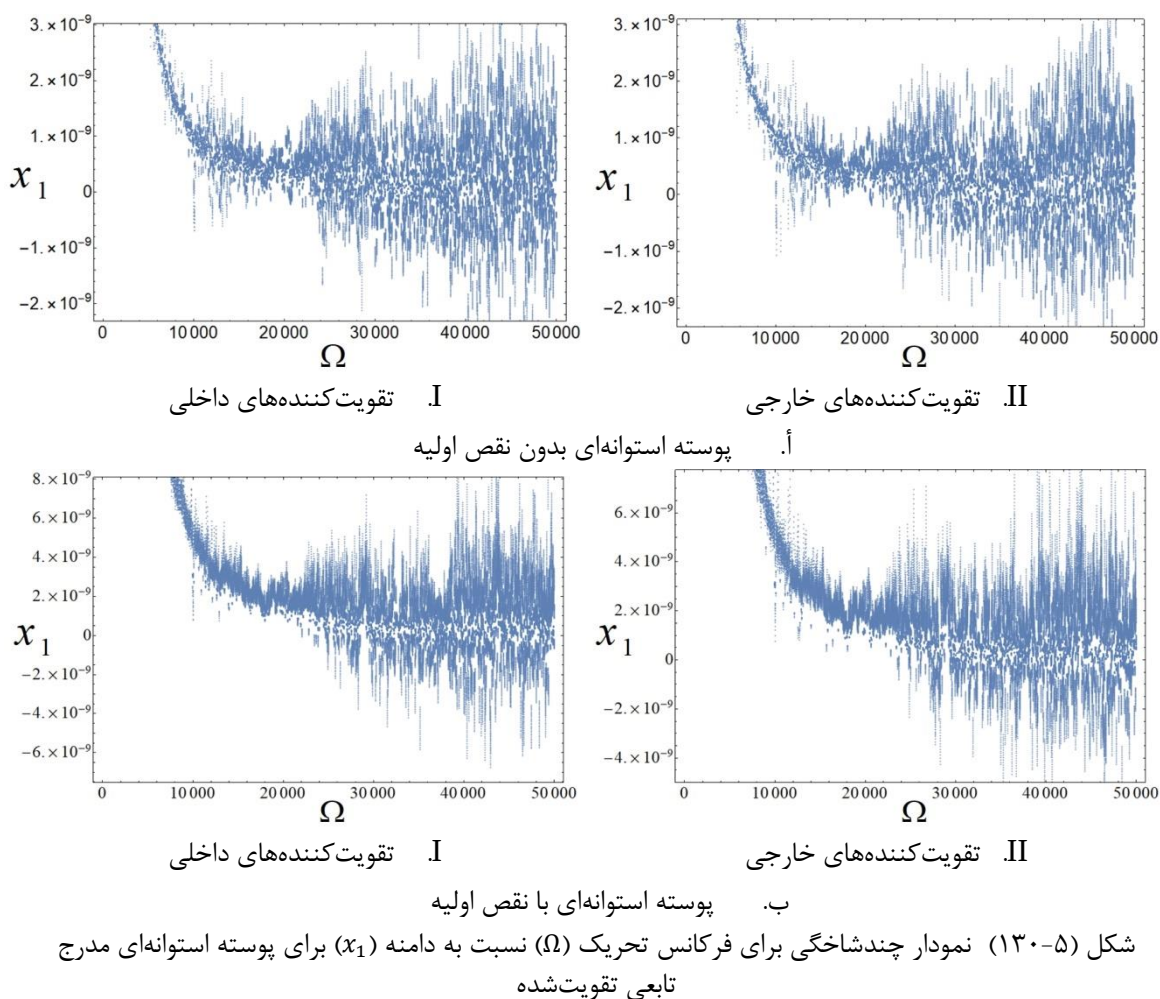
ج. با بستر الاستیک غیرخطی منفی

شکل (۵-۱۲۹) تأثیر بستر الاستیک غیرخطی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 0^\circ, \beta = 90^\circ$)

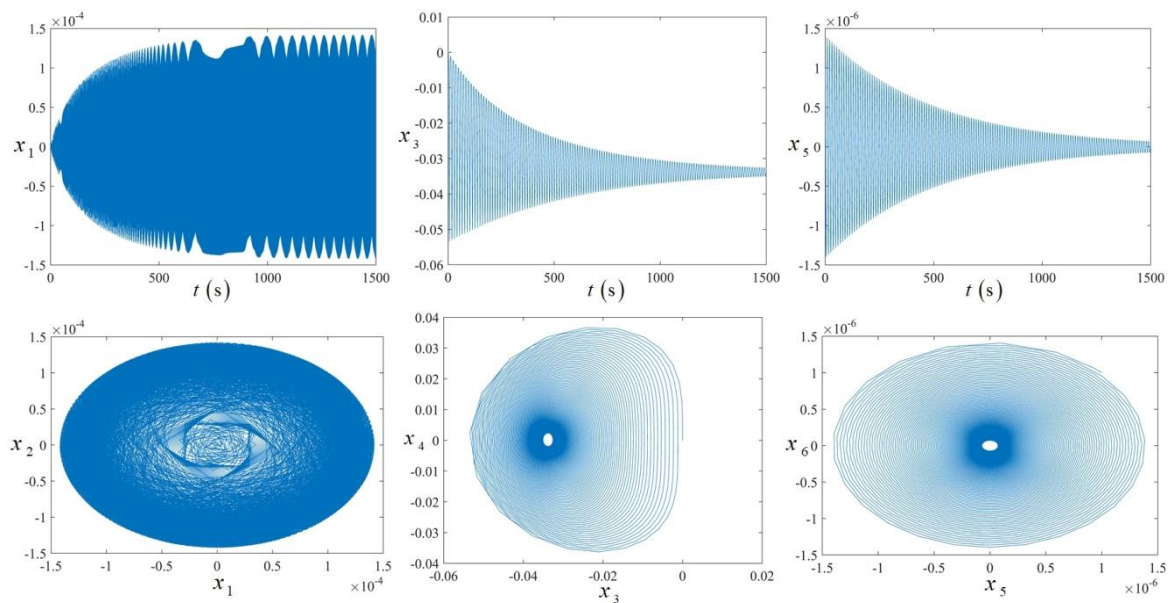
۵-۳-۶- تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فروهارمونیک ۱/۲، تشدید پارامتریک اصلی و تشدید داخلی ۱:۲:۴

در این بخش، به بررسی پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده دارای تشدید فروهارمونیک ۱/۲، تشدید پارامتریک اصلی و تشدید داخلی ۱:۲:۴ پرداخته شده است. تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها، پارامترهای مختلف هندسی و بستر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

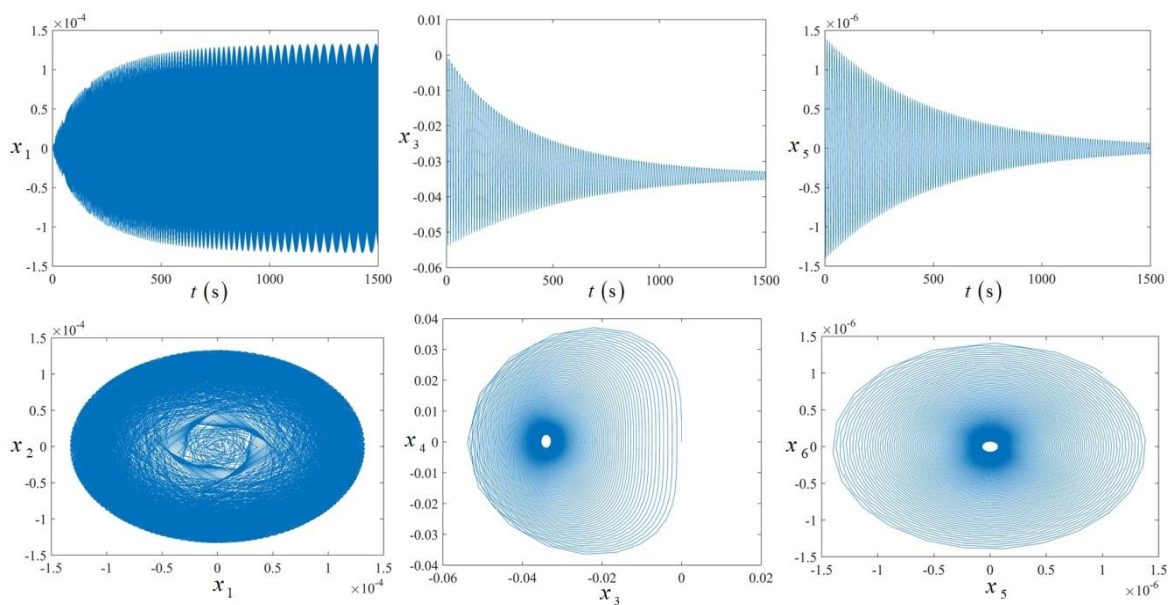
به منظور تحلیل پاسخ‌های آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، ابتدا نمودار چندشاخگی برای فرکانس تحریک (Ω_1) نسبت به دامنه (x_1) برای پوسته استوانه‌ای با زاویه تقویت‌کننده برابر با $\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ$ در شکل (۵-۱۳۰) مورد بررسی قرار گرفته است. در این وضعیت، فرکانس طبیعی پوسته معادل با $\omega_1 = 7629.04$ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با توجه به اینکه فرکانس تحریک (Ω_1) نزدیک به $2\omega_1$ در نظر گرفته شده است، در نزدیکی $2\omega_1$ حرکت آشوبی برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده اتفاق می‌افتد.



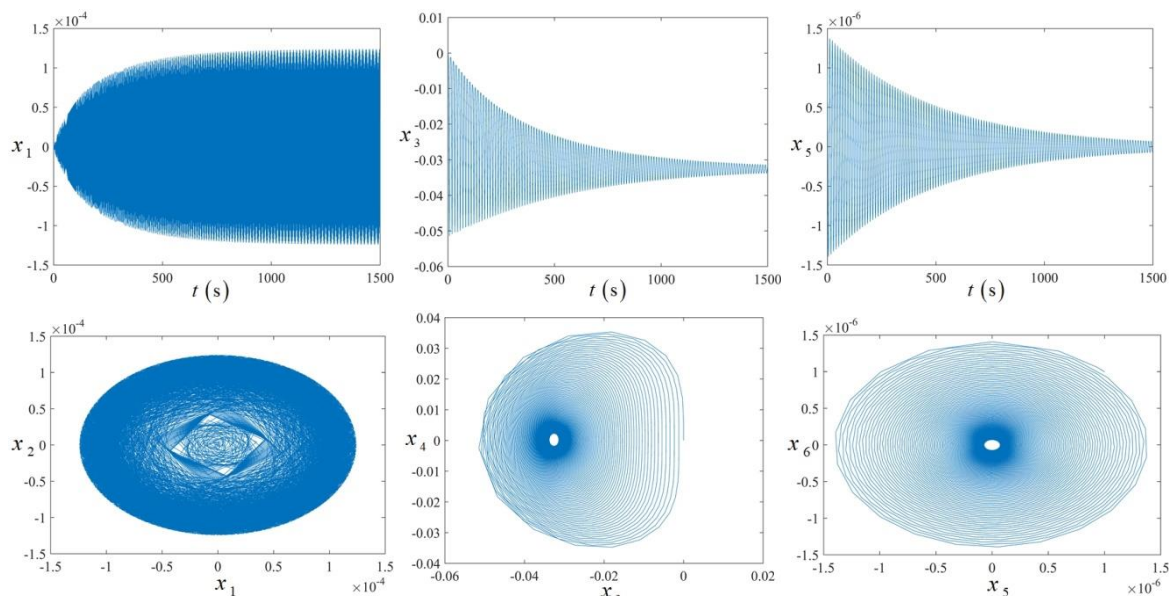
تأثیر زوایای مختلف تقویت کننده‌ها بر حرکت آشوبی و نمودار فازای ارتعاشات غیرخطی با تشدید فروهارمونیک $1/2$ ، تشدید پارامتریک اصلی و تشدید داخلی $1:2:4$ برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با تقویت کننده‌های داخلی در شکل‌های (۵-۱۳۱) تا (۵-۱۳۴) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، روند تمامی شکل‌ها تقریباً مانند یکدیگر هستند، اما ماکزیمم دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده، زمانی که زاویه تقویت کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 0^\circ$ و زمانی که زاویه بین تقویت کننده‌ها برابر با شصت و نود درجه باشد، به ترتیب بیش‌تر و کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود ماکزیمم دامنه ارتعاشی پوسته برای مودهای $m = 1, n = 3$ و $m = 3, n = 1$ به ترتیب بیش‌تر و کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.



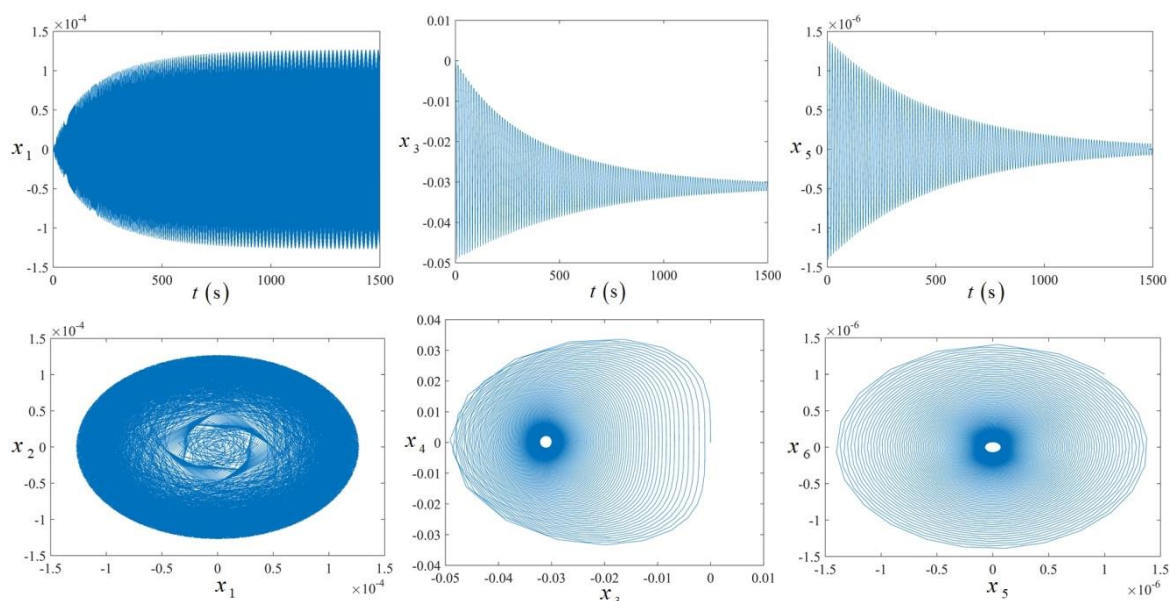
شکل (۵-۱۳۱) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی ($\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ$)



شکل (۵-۱۳۲) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی ($\theta = 30^\circ, \beta = 30^\circ$)



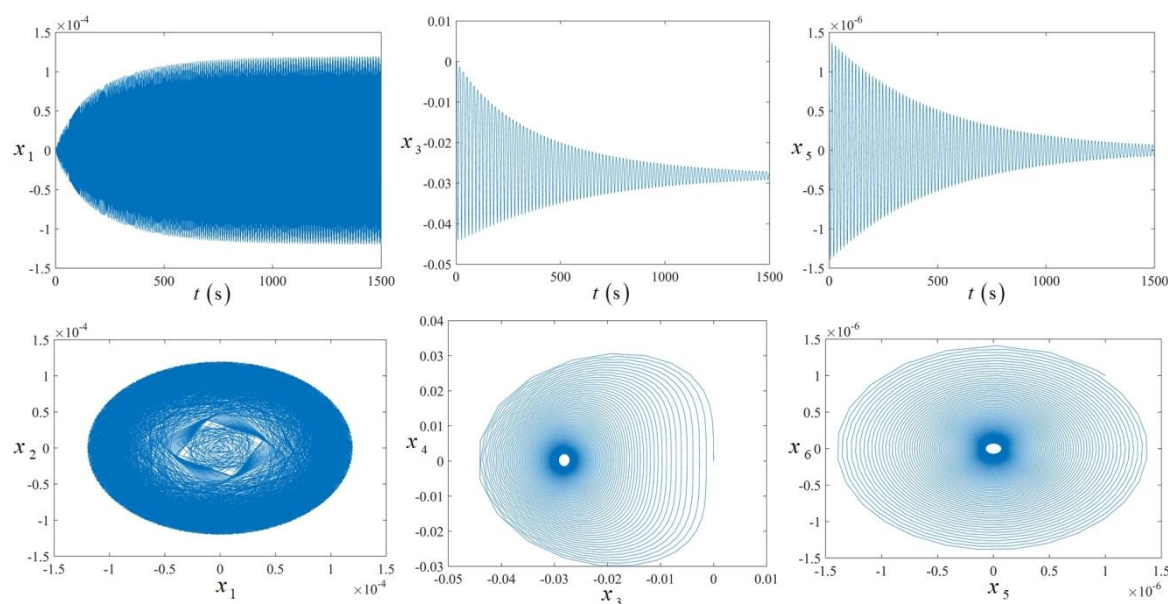
شکل (۱۳۳-۵) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی ($\theta = 60^\circ, \beta =$)
(60°)



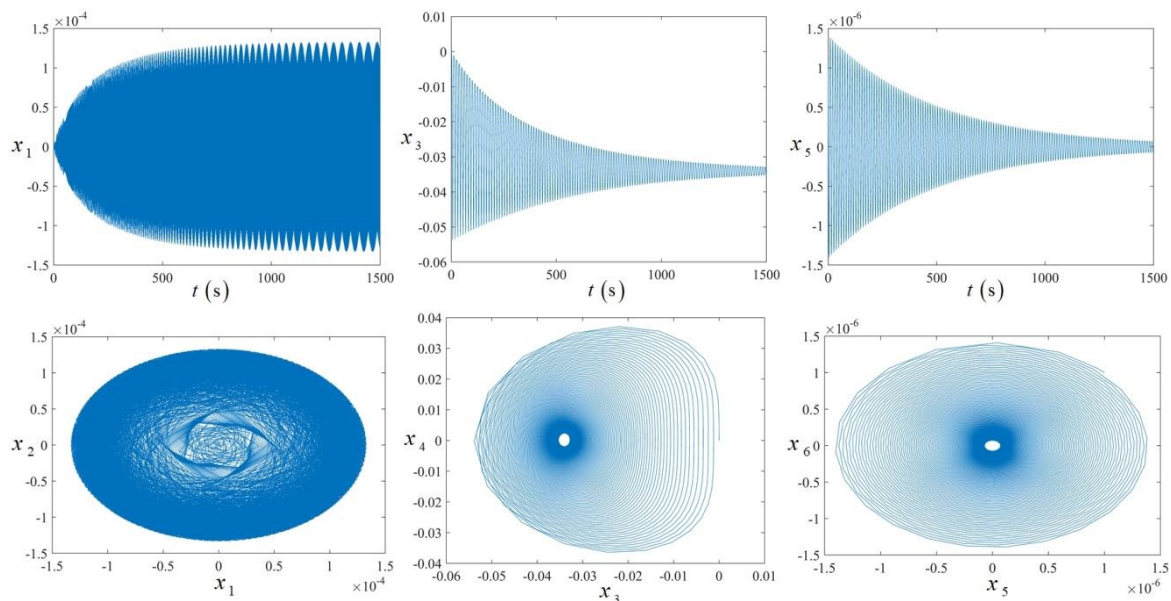
شکل (۱۳۴-۵) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی ($\theta = 90^\circ, \beta =$)
(90°)

تأثیر زوایای مختلف تقویت‌کننده‌ها بر حرکت آشوبی و نمودار فازی ارتعاشات غیرخطی با تشدید فروهارمونیک $1/2$ ، تشدید پارامتریک اصلی و تشدید داخلی $1:2:4$ برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی در شکل‌های (۱۳۵-۵)-(۱۳۸-۵) نشان داده شده است. با

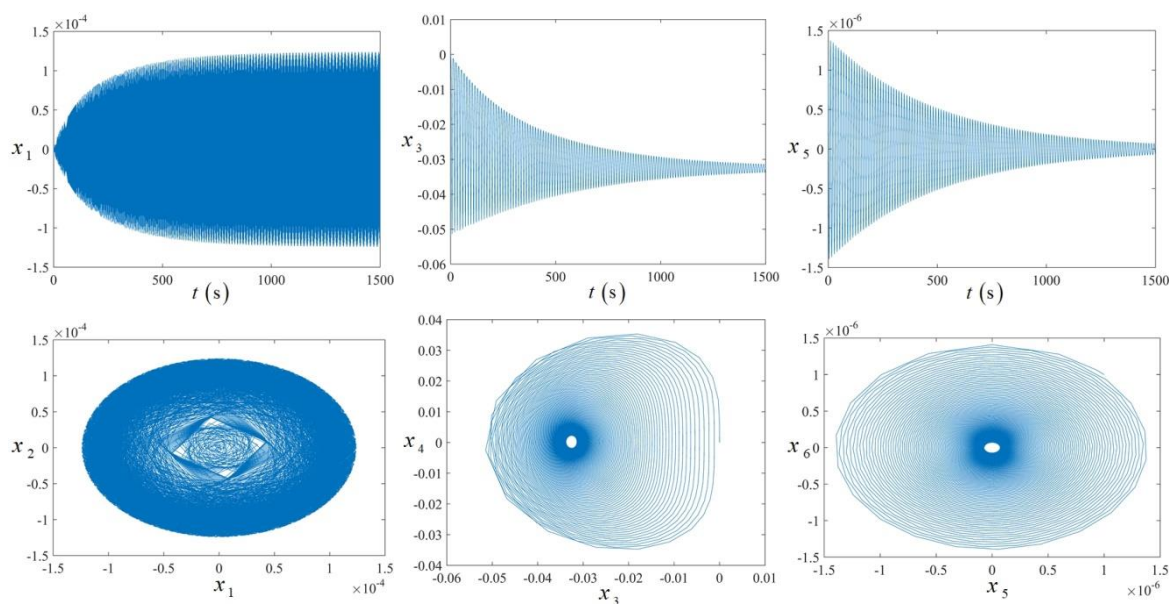
توجه به این شکل‌ها، روند تمامی شکل‌ها تقریباً مانند یکدیگر هستند، اما ماکزیمم دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 30^\circ$ و زمانی که زاویه بین تقویت‌کننده‌ها برابر با شصت و نود درجه باشد، به ترتیب بیشتر و کمتر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود ماکزیمم دامنه ارتعاشی پوسته برای مدهای $m = 1, n = 3$ و $m = 3, n = 1$ به ترتیب بیشتر و کمتر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. علاوه براین، با توجه به شکل‌های (۵-۱۳۱) تا (۵-۱۳۸) برای تقویت‌کننده‌های داخلی و خارجی، همان‌طور که نشان داده شده است ماکزیمم دامنه ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی بیشتر از ماکزیمم دامنه ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی می‌باشد.



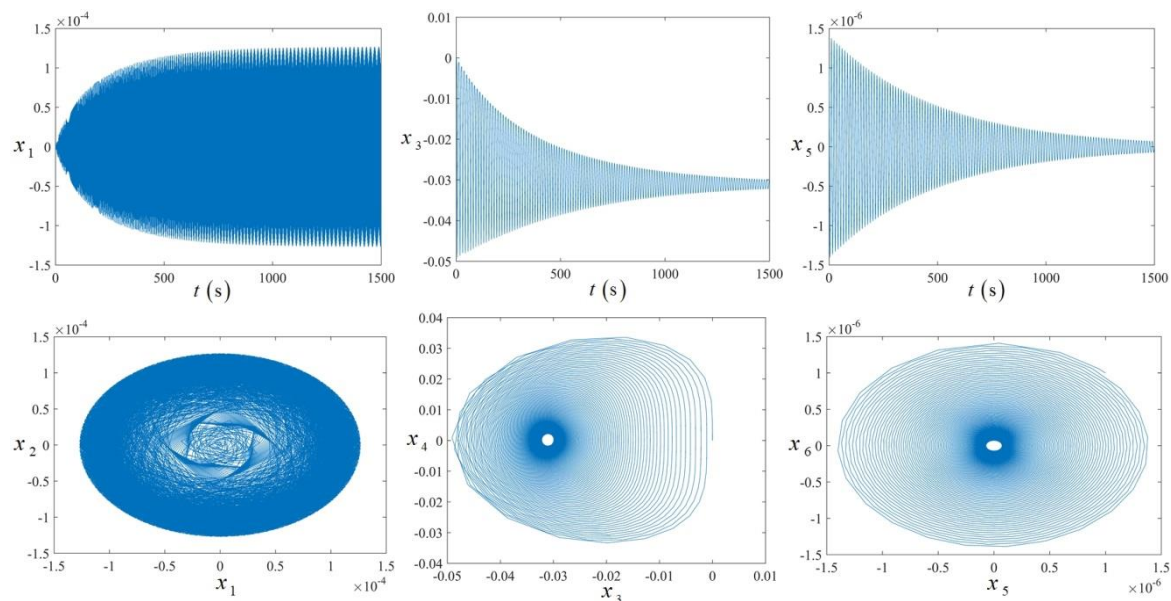
شکل (۵-۱۳۵) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی ($\theta = 0^\circ, \beta = 0^\circ$)



شکل (۵-۱۳۶) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی $(\theta = 30^\circ, \beta =)$ (30°)

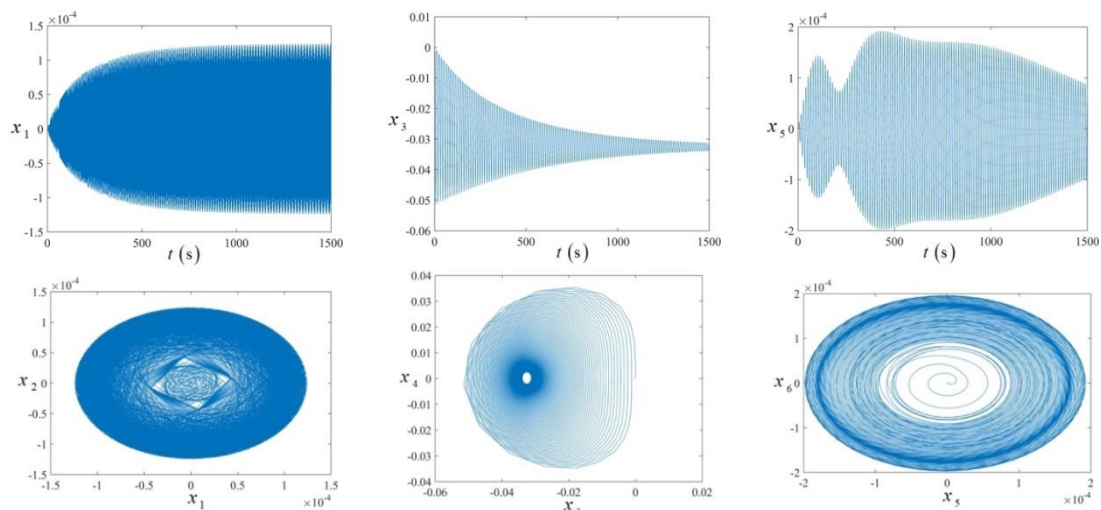


شکل (۵-۱۳۷) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی $(\theta = 60^\circ, \beta =)$ (60°)

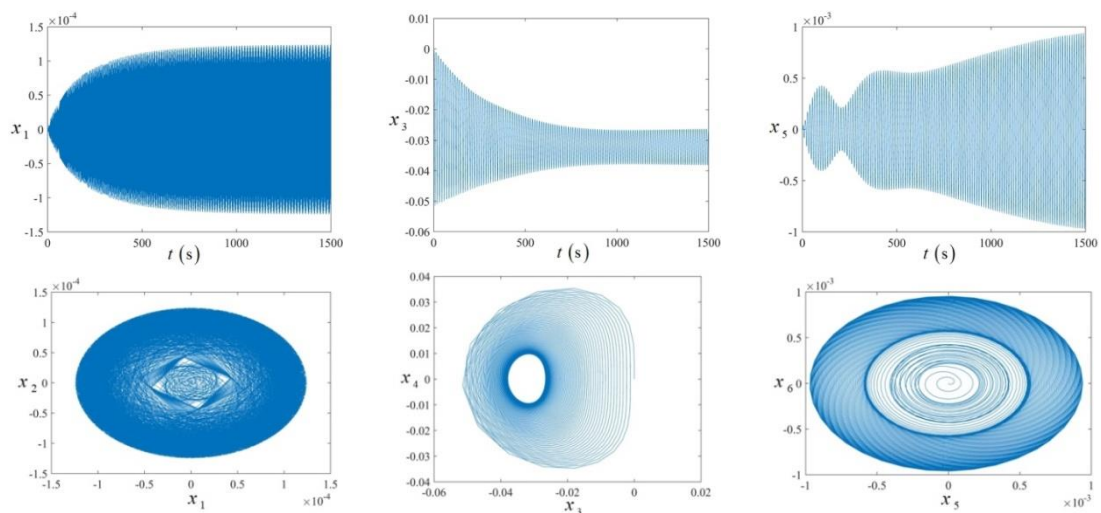


شکل (۵-۱۳۸) حرکت آشوبی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی $(\theta = 90^\circ, \beta = 90^\circ)$

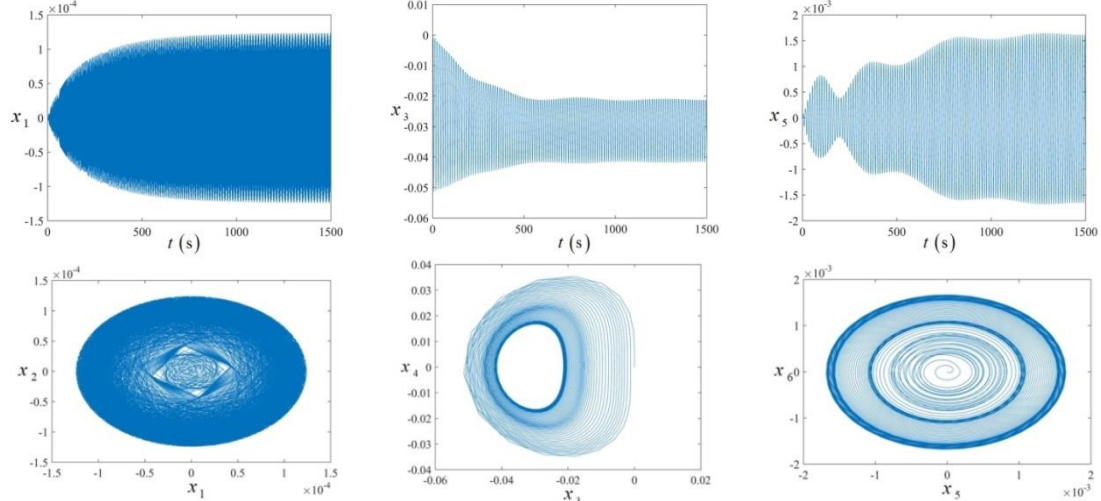
در شکل (۵-۱۳۹)، تأثیر پارامتر نقص اولیه بر حرکت آشوبی و نمودار فازی ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، نشان داده شده است. با توجه به این شکل، افزایش پارامتر نقص اولیه منجر به افزایش دامنه ارتعاشی پوسته می‌شود. همچنین با افزایش پارامتر نقص اولیه، دامنه ارتعاشی پوسته برای مدهای $m = 1, n = 3$ و $m = 3, n = 1$ بیش‌تر افزایش می‌یابد، درحالی‌که روند شکل‌ها برای مدهای $m = 1, n = 3$ و $m = 1, n = 1$ تقریباً با یکدیگر مشابه هستند.



الف. $\mu = 0.1$



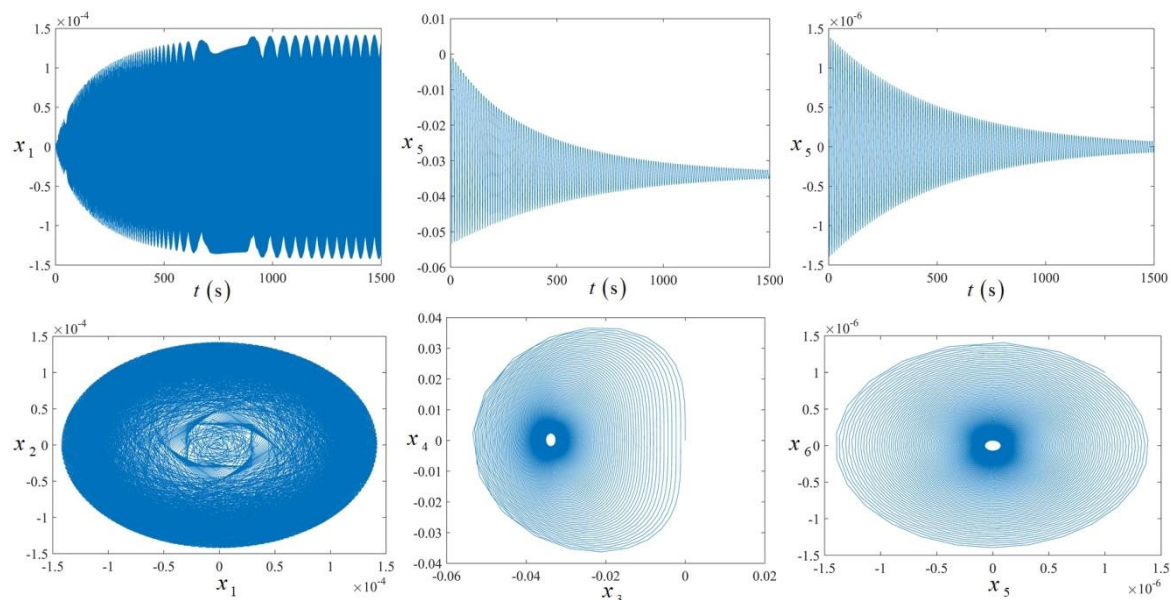
ب. $\mu = 0.3$



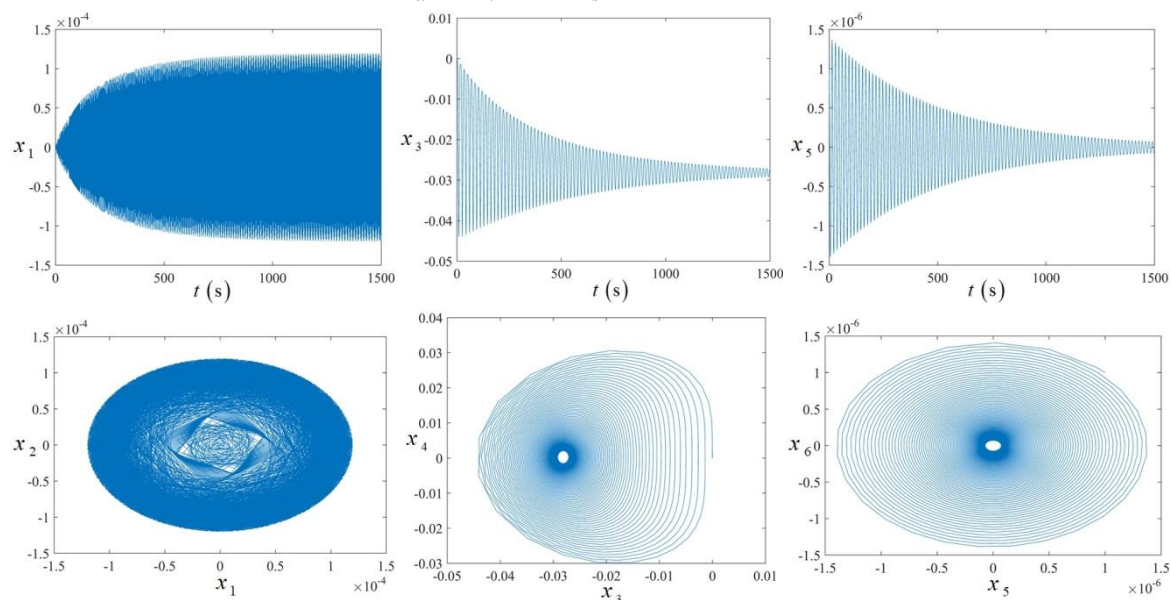
ج. $\mu = 0.6$

شکل (۵-۱۳۹) تأثیر پارامترهای مختلف نقص اولیه بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ$)

شکل (۵-۱۴۰)، تأثیر ضخامت لایه سرامیکی را بر پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، زمانی که ضخامت لایه سرامیکی افزایش می‌یابد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده کاهش می‌یابد.



الف. $h_u = h_m = 0.2, h_b = 0.1$



ب. $h_u = 0.3, h_m = h_b = 0.1$

شکل (۵-۱۴۰) تأثیر ضخامت لایه سرامیکی بر رفتار ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده ($\theta = 60^\circ, \beta = 60^\circ$)

۵-۴- مرور کلی بر نتایج

در این قسمت به بررسی خلاصه نتایج حاصل از پاسخ مربوط به پدیده تشدید پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده پرداخته شده است. بدین منظور در ابتدا نتایج حاصل از پاسخ مربوط به پدیده تشدید پوسته استوانه‌ای بر اساس تک‌مود و در قسمت بعد نتایج حاصل از پوسته استوانه‌ای بر اساس چندمود ارائه شده است.

۵-۴-۱- نتایج حاصل از ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس تک‌مود

در این قسمت به بررسی خلاصه نتایج حاصل از پاسخ مربوط به پدیده تشدید پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده و در حالت خاص به صورت تک‌لایه مدرج تابعی با نقص اولیه و یا بدون نقص اولیه، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی و تحت تحریک خارجی بر اساس تک‌مود، پرداخته شده است. بعضی از نتایج به دست آمده از این تحقیق عبارت است از:

• تحلیل تشدید اولیه و فراهارمونیک ۳/۱:

أ. زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β)، صفر درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی پوسته

بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته برای

حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب نود و

شصت درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

ب. رفتار سخت‌شوندگی پوسته با ضریب بستر الاستیک پاسترناک کم‌تر از پوسته با

ضریب بستر الاستیک وینکلر می‌باشد.

ج. افزایش ضخامت لایه‌های سرامیک و فلز به ترتیب منجر به افزایش و کاهش رفتار

سخت‌شوندگی پوسته می‌شود.

د. افزایش دما منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود؛ اما رفتار سخت-شوندگی پوسته تحت توزیع حرارت خطی بیش‌تر از تحت توزیع حرارت یکنواخت می‌باشد.

ه. بستر الاستیک خطی و غیرخطی به ترتیب منجر به کاهش و افزایش رفتار سخت-شوندگی پوسته می‌شود.

و. پارامتر بستر الاستیک غیرخطی منفی و مثبت به ترتیب منجر به کاهش و افزایش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود.

ز. با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، رفتار سخت‌شوندگی پوسته کاهش می‌یابد. همچنین، علی‌رغم اینکه رفتار سخت‌شوندگی پوسته با زاویه تقویت‌کننده‌های صفر درجه بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد، اما تأثیر پارامتر نقص اولیه بر روی آن بیش‌تر می‌باشد.

ح. افزایش دامنه تحریک خارجی منجر به افزایش میزان پرش می‌شود.

ط. در دامنه‌های تحریک پایین، یک پدیده پرش اتفاق می‌افتد. لذا، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β)، صفر درجه باشد، میزان پرش کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب نود و شصت درجه باشد، میزان پرش بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

ی. بستر الاستیک خطی و غیرخطی به ترتیب منجر به ماکزیمم و مینیمم مقدار پرش می‌شود و زمانی که پوسته بر بستر الاستیک غیرخطی قرار دارد، ناحیه ناپایدار کاهش می‌یابد.

- ک. کاهش میزان پارامتر بستر الاستیک غیرخطی منفی و افزایش پارامتر بستر الاستیک غیرخطی مثبت به ترتیب منجر به افزایش و کاهش میزان پرش می‌شود.
- ل. با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، میزان پرش کاهش می‌یابد.
- م. برای پارامترهای تنظیم مثبت، پدیده چندمقداری اتفاق می‌افتد، در حالیکه بقیه پارامترها، تکمقداری می‌باشد. همچنین افزایش پارامتر تنظیم منجر به افزایش میزان پرش می‌شود.

• تحلیل تشدید فروهارمونیکی ۱/۳

- أ. زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β)، صفر درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی پوسته بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.
- ب. وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته برای حالت‌های سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب نود و شصت درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.
- ج. رفتار سخت‌شوندگی پوسته با ضریب بستر الاستیک پاسترناک کم‌تر از پوسته با ضریب بستر الاستیک وینکلر می‌باشد.
- د. افزایش ضخامت لایه‌های سرامیک و فلز به ترتیب منجر به افزایش و کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود.
- ه. افزایش دما منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود؛ اما کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته تحت توزیع حرارت خطی بیش‌تر از تحت توزیع حرارت یکنواخت می‌باشد.
- و. پارامترهای بستر الاستیک خطی و غیرخطی منفی منجر به افزایش رفتار سخت-

شوندگی پوسته و مینیمم پاسخ دامنه می‌شود.

ز. پارامتر بستر الاستیک غیرخطی مثبت منجر به افزایش رفتار سخت‌شوندگی می‌شود،

درحالی‌که مینیمم پاسخ دامنه کاهش می‌یابد.

ح. با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، رفتار سخت‌شوندگی پوسته زمانی‌که زاویه

تقویت‌کننده‌ها صفر درجه باشد، بیش‌تر از پوسته با دیگر زوایای تقویت‌کننده کاهش

می‌یابد. همچنین، رفتار سخت‌شوندگی پوسته بدون نقص اولیه بیش‌تر از پوسته با

نقص اولیه می‌باشد و این نشان می‌دهد که در نظر گرفتن نقص اولیه برای پوسته

منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود.

ط. زمانی‌که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β)، صفر درجه باشد، میزان پرش کم‌تر از بقیه

حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته برای حالت‌های

سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب نود و صفر درجه

باشد، میزان پرش بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

ی. افزایش پارامتر تنظیم منجر به افزایش میزان پرش می‌شود.

• تحلیل تشدید فراهارمونیک ۲/۱

أ. ماکزیمم و مینیمم قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی، زمانی اتفاق می‌افتد که زاویه

تقویت‌کننده‌ها (θ و β) به ترتیب صفر درجه یا بزرگ‌تر-مساوی از شصت درجه

باشد. به عبارتی دیگر زمانی‌که فرکانس تحریک به $1/2$ فرکانس طبیعی پوسته نزدیک

می‌شود، ماکزیمم و مینیمم قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی، زمانی اتفاق می‌افتد

که زاویه تقویت‌کننده‌ها به ترتیب صفر درجه یا بزرگ‌تر-مساوی از شصت درجه

باشد.

- ب. زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها بزرگ‌تر-مساوی از شصت درجه باشد، پاسخ دامنه نسبت به افزایش دامنه تحریک حساسیت کم‌تری نشان می‌دهد، درحالی که زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌های صفر درجه باشد (یعنی پوسته با تقویت‌کننده طولی باشد)، میزان این حساسیت افزایش می‌یابد.
- ج. مقدار ماکزیمم قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی، با ضریب بستر الاستیک پاسترناک کم‌تر از پوسته با ضریب بستر الاستیک وینکلر می‌باشد.
- د. با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، مقدار قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، نمودار پاسخ فرکانس-دامنه چند برابر می‌شود.
- ه. افزایش دامنه تحریک خارجی منجر به افزایش مقدار ماکزیمم قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی می‌شود.
- و. برای یک دامنه تحریک ثابت، افزایش پارامتر تنظیم منجر به افزایش پاسخ دامنه می‌شود.

• تحلیل تشدید ترکیبی ($\omega_{mn} \approx \Omega_2 + 2\Omega_1$)

- أ. زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β) بین صفر و سی درجه باشد، رفتار سخت-شوندگی پوسته بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده-های پوسته بین نود و شصت درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.
- ب. زمانی که ضریب کسر حجمی افزایش می‌یابد، رفتار سخت‌شوندگی پوسته با تقویت-کننده خارجی افزایش می‌یابد. درحالی که برای پوسته با تقویت‌کننده داخلی،

زمانی که ضریب کسر حجمی افزایش می‌یابد، رفتار سخت‌شوندگی پوسته کاهش می‌یابد.

ج. برای پوسته استوانه‌ای سرامیکی با تقویت‌کننده فلز، رفتار سخت‌شوندگی پوسته بیش‌تر از حالت‌های دیگر می‌باشد و برای پوسته استوانه‌ای فلزی با تقویت‌کننده سرامیک، رفتار سخت‌شوندگی پوسته کم‌تر از حالت‌های دیگر می‌باشد.

د. با افزایش مقدار پارامتر نقص اولیه، رفتار سخت‌شوندگی پوسته کاهش می‌یابد.

ه. رفتار سخت‌شوندگی پوسته با ضریب بستر الاستیک پاسترناک بیش‌تر از پوسته با ضریب بستر الاستیک وینکلر می‌باشد.

و. بستر الاستیک غیرخطی منفی و مثبت به ترتیب منجر به کاهش و افزایش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود. به‌علاوه، بستر الاستیک غیرخطی منفی منجر به کاهش مقدار ماکزیمم قله در نمودارهای پاسخ فرکانسی می‌شود. همچنین رفتار سخت‌شوندگی پوسته با بستر الاستیک خطی نسبت به پوسته با بستر الاستیک غیرخطی بیش‌تر کاهش می‌یابد.

ز. با افزایش دامنه تحریک (Γ_1) منحنی پاسخ فرکانس-دامنه چند برابر می‌شود. درحالی‌که با افزایش دامنه تحریک (Γ_2) در مقادیر بزرگ پارامتر تنظیم، پدیده پرش اتفاق می‌افتد.

• تحلیل تشدید هم‌زمان ($\Omega_1 \approx \frac{1}{3}\omega_{mn}$ & $\Omega_2 \approx 3\omega_{mn}$)

أ. در حالت تشدید فروهارمونیک دو حالت مختلف امکان‌پذیر می‌باشد: یا یک پاسخ و یا سه پاسخ که یکی از آن‌ها بدیهی و دو تای دیگر ناپایدار است.

ب. برای حالت تشدید فراهارمونیک نیز دو حالت وجود دارد: حالت اول، یک پاسخ غیر بدیهی یا سه پاسخ غیر بدیهی که یکی از آن‌ها ناپایدار باشد.

- ج. در حالت کلی در تشدید هم‌زمان چهار حالت مختلف امکان ظهور می‌یابد: (الف) یک پاسخ غیر بدیهی پایدار، (ب) سه پاسخ غیر بدیهی که یکی از آن‌ها ناپایدار است، (ج) پنج پاسخ غیر بدیهی که دو تای آن‌ها ناپایدار است، (د) هفت پاسخ غیر بدیهی که سه تای آن‌ها ناپایدار است.
- د. زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β) بین صفر و سی درجه باشد و یا هر دوی زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با سی درجه باشد، دوشاخه (شاخه بالا و پایین) به هم نزدیک می‌شوند.
- ه. وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته بین سی و نود درجه باشد و یا زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با شصت درجه باشد، دوشاخه از هم فاصله می‌گیرند. همچنین، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها (θ و β)، شصت درجه و یا بین سی و شصت درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی پوسته بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد. در حالیکه وقتی زاویه تقویت‌کننده‌های پوسته صفر درجه باشد، رفتار سخت‌شوندگی کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.
- و. با افزایش لایه‌های سرامیکی و فلزی، دوشاخه از هم فاصله می‌گیرند. همچنین، با افزایش لایه سرامیکی رفتار سخت‌شوندگی پوسته افزایش می‌یابد، اما با افزایش لایه فلزی رفتار سخت‌شوندگی پوسته کاهش می‌یابد.
- ز. بستر الاستیک منجر به افزایش رفتار سخت‌شوندگی پوسته می‌شود و دوشاخه نیز به یکدیگر نزدیک می‌شوند. همچنین، رفتار سخت‌شوندگی پوسته با بستر الاستیک غیرخطی بیش‌تر از پوسته با بستر الاستیک خطی می‌شود.

۵-۴-۲- نتایج حاصل از ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای بر اساس چندمود

در این قسمت به بررسی خلاصه نتایج حاصل از پاسخ مربوط به پدیده تشدید پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با نقص اولیه و یا بدون نقص اولیه، احاطه‌شده توسط بستر ویسکوالاستیک غیرخطی در محیط حرارتی و تحت تحریک خارجی و تحریک پارامتریک بر اساس چندمود، پرداخته‌شده است. بعضی از نتایج به‌دست‌آمده از این مطالعات عبارت است از:

• تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی

- أ. دامنه ارتعاشی پوسته برای مود محوری و محیطی اول ($m = 1, n = 1$) و محوری اول و مود محیطی سوم ($m = 1, n = 3$)، به ترتیب مینیمم و ماکزیمم می‌باشد.
- ب. دامنه ارتعاشی پوسته برای دو حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز و فلز-مدرج تابعی-سرامیک با مودهای $m = 1, n = 3$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها به ترتیب برابر با $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ و $\theta = \beta = 30^\circ$ باشد، کم‌تر از حالت‌های دیگر می‌باشد.
- ج. دامنه ارتعاشی پوسته برای مود محوری و محیطی اول ($m = 1, n = 1$) و محوری سوم و مود محیطی اول ($m = 3, n = 1$)، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 90^\circ$ باشد، کم‌تر از حالت‌های دیگر می‌باشد.
- د. فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک کم‌تر از سرامیک-مدرج تابعی-فلز می‌باشد. همچنین، فرکانس طبیعی پوسته برای مودهای $m = 1, n = 3$ برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز با زاویه تقویت‌کننده $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ و برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک $\theta = \beta = 30^\circ$ بیش‌تر از حالت‌های دیگر می‌باشد.

- ه. زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 90^\circ$ باشد، فرکانس‌های طبیعی پوسته برای مدهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ بیش‌تر از حالت‌های دیگر می‌باشد.
- و. با افزایش ضخامت لایه‌های فلزی و سرامیکی، فرکانس‌های طبیعی پوسته برای حالت فلز-مدرج تابعی-سرامیک به ترتیب افزایش و کاهش و برای حالت سرامیک-مدرج تابعی-فلز به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد.
- ز. فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای تحت توزیع حرارت یکنواخت کم‌تر از فرکانس طبیعی پوسته تحت توزیع حرارت خطی می‌باشد و زمانی که دما افزایش می‌یابد، فرکانس‌های طبیعی پوسته کاهش می‌یابد.
- ح. بستر الاستیک خطی منجر به افزایش فرکانس طبیعی پوسته می‌شود؛ اما پارامتر بستر الاستیک پاسترناک نسبت به پارامتر بستر الاستیک وینکلر، تأثیر بیش‌تری بر پاسخ فرکانس‌های طبیعی پوسته دارد.
- ط. بستر الاستیک غیرخطی منجر به کاهش دامنه ارتعاشی پوسته می‌شود. همچنین، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای برای مدهای $m = 1, n = 1$ بیش‌تر از حالت‌های دیگر کاهش می‌یابد.

• تحلیل ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فروهارمونیک ۱/۳ و

تشدید داخلی ۱:۳:۹

- أ. با در نظر گرفتن میرایی بر پوسته، دامنه ارتعاشی پوسته کاهش می‌یابد.

ب. با در نظر گرفتن میرایی بر پوسته، نمودار فازی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده سریعاً به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود و در نتیجه پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته به سرعت پایدار می‌شود.

ج. با در نظر گرفتن میرایی بر پوسته، میزان بی‌نظمی بر روی نمودار فازی پوسته با مودهای $m = 3, n = 1$ و $m = n = 1$ بیش‌تر کاهش می‌یابد.

د. نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای مودهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 30^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ باشد، شروع به بی‌نظمی زیاد می‌نماید، درحالی‌که، زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 60^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ باشد، نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای مودهای مذکور شروع به کاهش زیاد می‌نماید.

ه. زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 90^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ باشد، منحنی دامنه-زمانی آشفته‌تر می‌شود و دیگر تناوبی نیست و نمودار فازی به شکل بیضوی همگرا می‌شود.

و. دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 30^\circ$ ، دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 3$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 30^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ یا $\theta = \beta = 30^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 3, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ ، کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

ز. دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 60^\circ$ یا $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ ، دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 3$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 90^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$

$\beta = 90^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ و $\theta = \beta = 60^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 3, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 60^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ و $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ یا $\theta = \beta = 90^\circ$ ، بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

ح. با استفاده از بستر الاستیک خطی بر روی پوسته، دامنه ارتعاشی و فرکانس پوسته برای مودهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. همچنین، استفاده از بستر الاستیک غیرخطی بر روی پوسته منجر به کاهش دامنه ارتعاشی می‌شود. تأثیر بستر الاستیک غیرخطی منفی بر روی پوسته از تأثیر بستر الاستیک غیرخطی مثبت بر روی پوسته بیش‌تر می‌باشد.

ط. با افزایش دما، دامنه ارتعاشی پوسته برای مودهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ افزایش می‌یابد، دامنه ارتعاشی پوسته برای مودهای $m = 3, n = 1$ کاهش می‌یابد.

• تحلیل ارتعاش غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فراهارمونیک ۳/۱ و تشدید

داخلی ۱/۹: ۱/۳

- أ. با در نظر گرفتن میرایی بر پوسته، دامنه ارتعاشی پوسته کاهش می‌یابد.
- ب. با در نظر گرفتن میرایی بر پوسته، نمودار فازی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده سریعاً به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود و در نتیجه پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته به سرعت پایدار می‌شود.
- ج. با در نظر گرفتن میرایی بر پوسته، میزان بی‌نظمی بر روی نمودار فازی پوسته برای سه مود برجسته اول بیش‌تر کاهش می‌یابد.

د. دامنه ارتعاشی پوسته برای مودهای $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 30^\circ$ دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 3$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 90^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 3, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 30^\circ$ کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

ه. دامنه ارتعاشی پوسته برای مودهای $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 0^\circ$ دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 3$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 30^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 3, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

و. نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای مودهای $m = 1, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ باشد و برای مودهای $m = 3, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 60^\circ$ یا $\theta = 90^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ باشد، سریع‌تر به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود.

ز. میزان بی‌نظمی نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای مودهای $m = 1, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 0^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ باشد، برای مودهای $m = 3, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 90^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ یا $\theta = \beta = 60^\circ$ باشد بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

- ح. زمانی که ضخامت لایه سرامیکی افزایش می‌یابد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 1, n = 3$ و $m = 3, n = 1$ کاهش می‌یابد.
- ط. با افزایش ضخامت لایه فلزی، تنها دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 1, n = 3$ کاهش می‌یابد.
- ی. زمانی که ضخامت لایه سرامیکی برابر با ضخامت لایه مدرج تابعی باشد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 3, n = 1$ و زمانی که ضخامت لایه فلزی برابر با ضخامت لایه مدرج تابعی باشد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 1, n = 1$ کاهش می‌یابد.
- ک. با افزایش ضخامت لایه فلزی یا سرامیکی، نمودار فازی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، به آرامی به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود.
- ل. با افزایش دما، میزان بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 1, n = 1$ و $m = 3, n = 1$ کاهش می‌یابد در حالیکه دامنه ارتعاشی پوسته برای سه مود برجسته اول افزایش می‌یابد.
- م. بستر الاستیک خطی منجر به افزایش بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای هر سه مود برجسته اول می‌شود.
- ن. بستر الاستیک خطی، دامنه ارتعاشی پوسته با مودهای $m = 3, n = 1$ را کاهش می‌دهد.
- س. بستر الاستیک غیرخطی به‌طور برجسته منجر به کاهش دامنه ارتعاشی و بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای سه مود برجسته اول می‌شود.

- تحلیل ارتعاش غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فراهارمونیک ۲/۱ و تشدید

داخلی ۱/۴:۱/۲

- ا. نمودار فازی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 3, n = 1$ و $m = 3, n = 1$ سریع‌تر به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود و در نتیجه پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته سریع‌تر پایدار می‌شود.
- ب. برای پوسته بدون میرایی، نمودار فازی ارتعاشات پوسته با مودهای $m = n = 1$ سریع‌تر به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود. همچنین با در نظر گرفتن میرایی بر روی پوسته، میزان بی‌نظمی بر روی نمودار فازی سه‌بعدی پوسته در فضای x_1, x_2, x_3 بیش‌تر کاهش می‌یابد.
- ج. میزان بی‌نظمی در نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای مودهای $m = 1, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 60^\circ$ و $\beta = 30^\circ$ یا $\beta = 60^\circ$ یا $\beta = 90^\circ$ باشد، کاهش می‌یابد، اما، نمودار فازی به آرامی به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود.
- د. نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای مودهای $m = 1, n = 3$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 0^\circ$ یا $\theta = \beta = 30^\circ$ یا $\theta = 60^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ باشد و برای مودهای $m = 3, n = 1$ زمانی که زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 0^\circ$ یا $\theta = \beta = 60^\circ$ یا $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 0^\circ$ باشد، سریع‌تر به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود و در نتیجه پاسخ ارتعاشات غیرخطی پوسته سریع‌تر پایدار می‌شود.
- ه. دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 90^\circ$ و $\theta = 60^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای مودهای

با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 90^\circ$ ، کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

و. دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 1, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 60^\circ$ و $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ و دامنه ارتعاشی برای مودهای $m = 3, n = 1$ با زاویه تقویت‌کننده‌ها برابر با $\theta = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ ، بیش‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

ز. زمانی که ضخامت لایه سرامیکی افزایش می‌یابد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 1, n = 3$ و $m = 1, n = 1$ به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد و زمانی که ضخامت لایه فلزی افزایش می‌یابد، دامنه ارتعاشی و نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 3, n = 1$ کاهش می‌یابد.

ح. زمانی که ضخامت لایه سرامیکی برابر با ضخامت لایه مدرج تابعی باشد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 3, n = 1$ و زمانی که ضخامت لایه فلزی برابر با ضخامت لایه مدرج تابعی باشد، دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با مودهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ کاهش می‌یابد.

ط. با افزایش ضخامت لایه سرامیکی یا فلزی، میزان بی‌نظمی نمودار فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای مودهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ افزایش می‌یابد.

ی. با افزایش دما، میزان بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با موده‌های $m = 1, n = 1$ و $m = 3, n = 1$ کاهش می‌یابد در حالیکه دامنه ارتعاشی پوسته برای سه مود برجسته اول افزایش می‌یابد.

ک. بستر الاستیک خطی منجر به کاهش بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای موده‌های $m = 1, n = 3$ و افزایش بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته برای موده‌های $m = 1, n = 1$ و $m = 3, n = 1$ می‌شود.

ل. با در نظر گرفتن بستر الاستیک خطی بر روی پوسته، دامنه ارتعاشی پوسته افزایش و میزان بی‌نظمی بر روی نمودار فازی سه‌بعدی پوسته در فضای x_1, x_2, x_3 نیز بیش‌تر افزایش می‌یابد.

م. با استفاده از بستر الاستیک غیرخطی، نمودار فازی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای موده‌های $m = 3, n = 1$ سریعاً به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود و برای موده‌های $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ به آرامی به حلقه‌های بسته همگرا می‌شود.

ن. با در نظر گرفتن بستر الاستیک غیرخطی بر روی پوسته، میزان بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای موده‌های $m = 3, n = 1$ افزایش می‌یابد.

س. با در نظر گرفتن پارامتر بستر الاستیک غیرخطی مثبت و منفی بر روی پوسته، به ترتیب میزان بی‌نظمی در نمودارهای فازی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده برای موده‌های $m = 1, n = 1$ و $m = 3, n = 1$ افزایش و کاهش می‌یابد.

• تحلیل ارتعاش غیرخطی پوسته استوانه‌ای دارای تشدید فروهارمونیک $1/2$ ، تشدید

پارامتریک اصلی و تشدید داخلی ۱:۲:۴

- أ. برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی، ماکزیمم دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، زمانی که زاویه تقویت-کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 0^\circ$ و زمانی که زاویه بین تقویت‌کننده‌ها برابر با شصت و نود درجه باشد، به ترتیب بیش‌تر و کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.
- ب. برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های داخلی، ماکزیمم دامنه ارتعاشی پوسته برای مودهای $m = 3, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ به ترتیب بیش‌تر و کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.
- ج. برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی، ماکزیمم دامنه ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده، زمانی که زاویه تقویت-کننده‌ها برابر با $\theta = \beta = 30^\circ$ و زمانی که زاویه بین تقویت‌کننده‌ها برابر با شصت و نود درجه باشد، به ترتیب بیش‌تر و کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.
- د. برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی، ماکزیمم دامنه ارتعاشی پوسته برای مودهای $m = 3, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ به ترتیب بیش‌تر و کم‌تر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.
- ه. ماکزیمم دامنه ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت-کننده‌های داخلی بیش‌تر از ماکزیمم دامنه ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های خارجی می‌باشد.
- و. افزایش پارامتر نقص اولیه منجر به افزایش دامنه ارتعاشی پوسته می‌شود.
- ز. با افزایش پارامتر نقص اولیه، دامنه ارتعاشی پوسته برای مودهای $m = 1, n = 3$ و $m = 3, n = 1$ بیش‌تر افزایش پیدا می‌کند، درحالی‌که روند برای مودهای $m = 1, n = 1$ و $m = 1, n = 3$ تقریباً با یکدیگر مشابه هستند.

۵-۵- پیشنهادهایی برای ادامه کار

با توجه به اهمیت این بحث و کاربرد آن در صنایع مختلف مهندسی نظیر صنایع هوافضا، دریایی، هسته‌ای و پتروشیمی، نیاز به کارهای بیش‌تر در این زمینه امری ضروری به نظر می‌رسد؛ بنابراین موضوعات زیر برای ادامه کار پیشنهاد می‌گردند:

- ۱- استفاده از تئوری‌های متفاوت نظیر تئوری تغییر شکل مرتبه اول^۱، تئوری تغییر شکل مرتبه بالا^۲ و... برای استخراج معادلات.
- ۲- استفاده از فرمول‌بندی تعمیم‌یافته کررا^۳ و روش اجزای محدود^۴ برای حل مسئله. این روش وقتی استفاده می‌شود که بخواهیم یک میدان جابه‌جایی سه‌بعدی را به صورت یک صفحه دو‌بعدی با تابعی مشخص در راستای ضخامت بسط داد.
- ۳- تعداد مودهای خیلی بیش‌تری در نظر گرفته شود.
- ۴- هندسه پوسته کره یا مخروط در نظر گرفته شود.

¹ First-order shear deformation theory (FSDT)

² High-order shear deformation theory (HSDT)

³ Carrera unified formulation (CUF)

⁴ Finite element method (FEM)

پیوست‌ها

پیوست (الف):

نحوه استخراج روابط تنش- کرنش تقویت کننده‌های مایل [۵۲، ۵۳]:

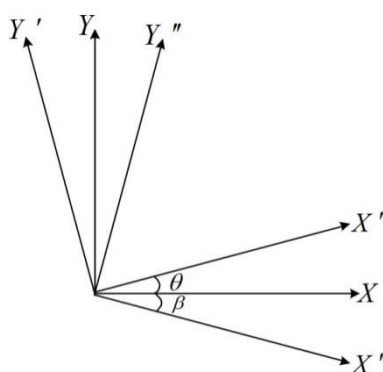
روابط تنش-کرنش تقویت کننده‌های مایل با زوایای مایل با چرخش محور کرنش‌ها با زاویه θ از دستگاه مختصات XY به دستگاه مختصات $X'Y'$ و زاویه β از دستگاه مختصات XY به دستگاه مختصات $X''Y''$ که در شکل (الف-۱) نشان داده شده است، به صورت روابط (الف-۱) و (الف-۲) به دست می‌آید [۵۲]:

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2 \theta + 2\gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta \quad (\text{الف-۱})$$

$$\varepsilon_{y'} = \varepsilon_x \sin^2 \theta - 2\gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta$$

$$\varepsilon_{x''} = \varepsilon_x \cos^2 \beta - 2\gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \varepsilon_y \sin^2 \beta \quad (\text{الف-۲})$$

$$\varepsilon_{y''} = \varepsilon_x \sin^2 \beta + 2\gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \varepsilon_y \cos^2 \beta$$



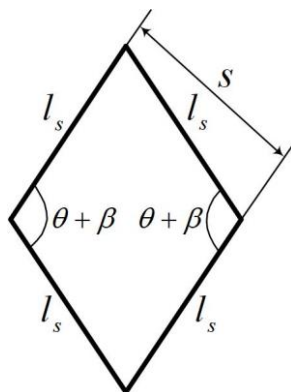
شکل (الف-۱) دوران دستگاه مختصات

روابط نیرو و کرنش تقویت کننده بر اساس قانون هوک تک محوری به صورت رابطه (الف-۳) می‌باشد [۵۲]:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{F'}{h_s d E_s}; \quad \varepsilon_{x''} = \frac{F''}{h_s d E_s} \quad (\text{الف-۳})$$

که F' و F'' به ترتیب نیروی تقویت کننده در دستگاه مختصات $X'Y'$ و $X''Y''$ و d عرض تقویت کننده‌ها می‌باشد.

با توجه به شکل (الف-۲)، طول شبکه تقویت کننده به صورت رابطه (الف-۴) قابل بیان است:



شکل (الف-۲) شبکه تقویت‌کننده مایل

$$l_s = \frac{S}{\sin(\theta + \beta)} \quad (\text{الف-۴})$$

با توجه به روابط (الف-۱)-(الف-۴) روابط تنش کرنش به صورت روابط (الف-۵) و (الف-۶) می‌باشد:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{st} &= \frac{F' \cos \theta}{l_s h (\sin \theta + \sin \beta)} + \frac{F'' \cos \beta}{l_s h (\sin \theta + \sin \beta)} \\ &= \frac{F' \cos \theta + F'' \cos \beta}{l_s h (\sin \theta + \sin \beta)} = \frac{h_s dE_s (\varepsilon'_x \cos \theta + \varepsilon''_x \cos \beta)}{l_s h_s (\sin \theta + \sin \beta)} \\ &= \frac{h_s dE_s (\varepsilon'_x \cos \theta + \varepsilon''_x \cos \beta)}{sh_s (\sin \theta + \sin \beta)} \sin(\theta + \beta) \\ &= h_1 \left[\varepsilon_x (\cos^3 \theta + \cos^3 \beta) + 2\gamma_{xy} (\sin \theta \cos^2 \theta - \sin \beta \cos^2 \beta) + \varepsilon_y (\sin^2 \theta \cos \theta + \sin^2 \beta \cos \beta) \right] \end{aligned} \quad (\text{الف-۵})$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned} \sigma_y^{st} &= \frac{h_s dE_s (\varepsilon'_y \sin \theta + \varepsilon''_y \sin \beta)}{sh_s (\cos \theta + \cos \beta)} \sin(\theta + \beta) \\ &= h_2 \left[\varepsilon_x (\sin \theta \cos^2 \theta + \sin \beta \cos^2 \beta) + 2\gamma_{xy} (\sin^2 \theta \cos \theta - \sin^2 \beta \cos \beta) + \varepsilon_y (\sin^3 \theta + \sin^3 \beta) \right] \\ \tau_{xy}^{st} &= \frac{h_s dE_s (\varepsilon'_x - \varepsilon''_x)}{2sh_s} \sin(\theta + \beta) \\ &= h_3 \left[\varepsilon_x (\cos^2 \theta - \cos^2 \beta) + 2\gamma_{xy} (\sin \theta \cos \theta + \sin \beta \cos \beta) + \varepsilon_y (\sin^2 \theta - \sin^2 \beta) \right] \end{aligned} \quad (\text{الف-۶})$$

پیوست (ب):

مقدار ضرایب H_{ij} و h_i ($i, j = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} H_{11} &= \cos^3 \theta + \cos^3 \beta; H_{21} = \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \beta \cos^2 \beta \\ H_{31} &= \cos^2 \theta - \cos^2 \beta; H_{12} = \sin^2 \theta \cos \theta + \sin^2 \beta \cos \beta \\ H_{22} &= \sin^3 \theta + \sin^3 \beta; H_{32} = \sin \theta \cos \theta + \sin \beta \cos \beta \\ H_{13} &= 2(\sin \theta \cos^2 \theta - \sin \beta \cos^2 \beta); H_{33} = \sin^2 \theta - \sin^2 \beta \\ H_{23} &= 2(\sin^2 \theta \cos \theta - \sin^2 \beta \cos \beta) \\ \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} &= \frac{h_s dE_s}{sh_s} \sin(\theta + \beta) \begin{pmatrix} 1/(\sin \theta + \sin \beta) \\ 1/(\cos \theta + \cos \beta) \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ب-۱)

مقدار مؤلفه‌های سفتی کششی، خمشی و کوپل‌شده‌ی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با تقویت‌کننده:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu^2} + h_1 E_{1s} (\cos^3 \theta + \cos^3 \beta), J_{12} = \frac{E_1 \nu}{1-\nu^2} + h_1 E_{1s} (\sin^2 \theta \cos \theta + \sin^2 \beta \cos \beta) \\ J_{14} &= \frac{E_2}{1-\nu^2} + h_1 E_{2s} (\cos^3 \theta + \cos^3 \beta), J_{15} = \frac{E_2 \nu}{1-\nu^2} + h_1 E_{2s} (\sin^2 \theta \cos \theta + \sin^2 \beta \cos \beta) \\ J_{21} &= \frac{E_1 \nu}{1-\nu^2} + h_2 E_{1s} (\sin \theta \cos^2 \theta + \sin \beta \cos^2 \beta), J_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2} + h_2 E_{1s} (\sin^3 \theta + \sin^3 \beta) \\ J_{24} &= \frac{E_2 \nu}{1-\nu^2} + h_2 E_{2s} (\sin \theta \cos^2 \theta + \sin \beta \cos^2 \beta), J_{25} = \frac{E_2}{1-\nu^2} + h_2 E_{2s} (\sin^3 \theta + \sin^3 \beta) \\ J_{33} &= \frac{E_1}{2(1+\nu)} + 2h_3 E_{1s} (\sin \theta \cos \theta + \sin \beta \cos \beta), J_{36} = \frac{E_2}{2(1+\nu)} + 2h_3 E_{2s} (\sin \theta \cos \theta + \sin \beta \cos \beta) \\ J_{41} &= \frac{E_3}{1-\nu^2} + h_1 E_{3s} (\cos^3 \theta + \cos^3 \beta), J_{42} = \frac{E_3 \nu}{1-\nu^2} + h_1 E_{3s} (\sin^2 \theta \cos \theta + \sin^2 \beta \cos \beta) \\ J_{51} &= \frac{E_3 \nu}{1-\nu^2} + h_2 E_{3s} (\sin \theta \cos^2 \theta + \sin \beta \cos^2 \beta), J_{55} = \frac{E_3}{1-\nu^2} + h_2 E_{3s} (\sin^3 \theta + \sin^3 \beta) \\ J_{63} &= \frac{E_3}{2(1+\nu)} + 2h_3 E_{3s} (\sin \theta \cos \theta + \sin \beta \cos \beta) \end{aligned}$$

(ب-۲)

$$A = J_{11}^* m^4 \pi^4 + (J_{33}^* - J_{12}^* - J_{21}^*) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2 + J_{22}^* n^4 \lambda^4$$

$$B = J_{21}^{**} m^4 \pi^4 + (J_{11}^* + J_{22}^* - 2J_{36}^{**}) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2$$

$$+ J_{12}^{**} n^4 \lambda^4 - \frac{L^2}{R} m^2 n^2$$

$$B^* = A_{21}^* m^4 \pi^4 + (A_{11}^* + A_{22}^* - 2J_{36}^{**}) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2$$

$$+ J_{12}^{**} n^4 \lambda^4 - \frac{L^2}{R} m^2 n^2$$

$$D = A_{11}^{**} m^4 \pi^4 + (A_{12}^{**} + A_{21}^{**} + 4A_{36}^{**}) m^2 n^2 \pi^2 \lambda^2$$

$$+ A_{22}^{**} n^4 \lambda^4$$

$$G = \left(\frac{n^4 \lambda^4}{16J_{11}^*} + \frac{m^4 \pi^4}{16J_{22}^*} \right), \quad \lambda = \frac{L}{R}$$

(ب-۳)

پیوست (ج):

ضرایب f_i , ω_i , $\mathcal{G}_{ij}$ و $\mathcal{G}_{ijk}$:

$$\begin{aligned}
\omega_1 = & \left[\frac{2}{\rho_1 R L \pi} \left(\frac{L \pi k_s}{2R} + \frac{L \pi A_{22}^{**}}{2R^3} + \frac{R \pi^3 k_s}{2L} + \frac{\pi^3 A_{12}^{**}}{2LR} + \frac{R \pi^5 A_{11}^{**}}{2L^3} + \frac{\pi^3 A_{21}^{**}}{2LR} + \frac{2\pi^3 A_{36}^{**}}{LR} + \frac{LR \pi k_w}{2} \right. \right. \\
& + \frac{\pi^3 (A_{21}^* \pi^4 R^4 + (A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{2L^5 R^4 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& - \frac{\pi^3 A_{11}^* (A_{21}^* \pi^4 R^4 + (A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{2L^5 R^5 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& - \frac{\pi A_{12}^* (A_{21}^* \pi^4 R^4 + (A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{2L^3 R^7 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& + \frac{\pi^3 A_{36}^* (A_{21}^* \pi^4 R^4 + (A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{2L^5 R^5 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& - \frac{\pi^5 A_{21}^* (A_{21}^* \pi^4 R^4 + (A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{2L^7 R^3 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& \left. - \frac{\pi^3 A_{22}^* (A_{21}^* \pi^4 R^4 + (A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{2L^5 R^5 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} + \frac{(J_{12}^* - J_{22}^*) H}{R^2 J_{22}^*} \Delta T \right) \Bigg]^{0.5} \\
\omega_2 = & \left[\frac{2}{\rho_1 R L \pi} \left(\frac{9L \pi k_s}{2R} + \frac{81L \pi A_{22}^{**}}{2R^3} + \frac{R \pi^3 k_s}{2L} + \frac{9\pi^3 A_{12}^{**}}{2LR} + \frac{R \pi^5 A_{11}^{**}}{2L^3} + \frac{9\pi^3 A_{21}^{**}}{2LR} + \frac{18\pi^3 A_{36}^{**}}{LR} + \frac{LR \pi k_w}{2} \right. \right. \\
& + \frac{\pi^3 (A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + 81A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{2L^5 R^4 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{9\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{81J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& - \frac{9\pi^3 A_{11}^* (A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + 81A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{2L^5 R^5 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& - \frac{81\pi A_{12}^* (A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + 81A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{2L^3 R^7 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& + \frac{9\pi^3 A_{36}^* (A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + 81A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{L^5 R^5 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& - \frac{\pi^5 A_{21}^* (A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + 81A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{2L^7 R^3 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& \left. - \frac{9\pi^3 A_{22}^* (A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + 81A_{12}^* L^4 - L^2 \pi^2 R^3)}{2L^5 R^5 \left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} + \frac{9(J_{12}^* - J_{22}^*) H}{R^2 J_{22}^*} \Delta T \right) \Bigg]^{0.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_3 = & \left[\frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{L\pi k_s}{2R} + \frac{L\pi A_{22}^{**}}{2R^3} + \frac{9R\pi^3 k_s}{2L} + \frac{9\pi^3 A_{12}^{**}}{2LR} + \frac{81R\pi^5 A_{11}^{**}}{2L^3} + \frac{9\pi^3 A_{21}^{**}}{2LR} + \frac{18\pi^3 A_{36}^{**}}{LR} + \frac{LR\pi k_w}{2} \right. \right. \\
& + \frac{9\pi^3 (81A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - 9L^2 \pi^2 R^3)}{2L^5 R^4 \left(\frac{81\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{9\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& - \frac{9\pi^3 A_{11}^* (81A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - 9L^2 \pi^2 R^3)}{2L^5 R^5 \left(\frac{81\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{9\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& - \frac{\pi A_{12}^* (81A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - 9L^2 \pi^2 R^3)}{2L^3 R^7 \left(\frac{81\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{9\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& + \frac{9\pi^3 A_{36}^* (81A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - 9L^2 \pi^2 R^3)}{2L^5 R^5 \left(\frac{81\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{9\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& - \frac{81\pi^5 A_{21}^* (81A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - 9L^2 \pi^2 R^3)}{2L^7 R^3 \left(\frac{81\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{9\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \\
& \left. \left. - \frac{9\pi^3 A_{22}^* (81A_{21}^* \pi^4 R^4 + 9(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*) L^2 \pi^2 R^2 + A_{12}^* L^4 - 9L^2 \pi^2 R^3)}{2L^5 R^5 \left(\frac{81\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{9\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} + \frac{(J_{12}^* - J_{22}^*) H}{R^2 J_{22}^*} \Delta T \right) \right]^{0.5} \\
f_1 = f_3 = & \frac{X}{\rho_1 L^4}; \quad f_2 = \frac{-X}{\rho_1 L^4} \\
g_{11} = & \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{-9k_{nl} RL\pi}{32} + \frac{R\pi^5}{64L^3 J_{22}^*} + \frac{L\pi}{64R^3 J_{11}^*} \right) \\
g_{12} = & \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{9k_{nl} RL\pi}{32} - \frac{17R\pi^5}{64L^3 J_{22}^*} - \frac{\pi^5}{32L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \right) \\
g_{13} = & \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{9k_{nl} RL\pi}{32} - \frac{17L\pi}{64R^3 J_{11}^*} - \frac{\pi^5}{32L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4} \right)} \right) \\
g_{14} = & \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(-\frac{9k_{nl} RL\pi}{16} + \frac{R\pi^5}{2L^3 J_{22}^*} + \frac{9\pi^5}{4L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{16\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{136J_{22}^*}{R^4} \right)} + \frac{9L\pi}{64R^3 J_{11}^*} \right) \\
g_{15} = & \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(-\frac{3k_{nl} RL\pi}{16} + \frac{3\pi^5}{L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{16\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{136J_{22}^*}{R^4} \right)} \right. \\
& \left. + \frac{3\pi^5}{L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{16\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{136J_{22}^*}{R^4} \right)} \right) \\
g_{16} = & \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(-\frac{9k_{nl} RL\pi}{16} + \frac{9R\pi^5}{64L^3 J_{22}^*} + \frac{9\pi^5}{4L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{136\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2 (J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{16J_{22}^*}{R^4} \right)} + \frac{L\pi}{2R^3 J_{11}^*} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{17} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{3k_{nl}RL\pi}{16} - \frac{621L\pi}{64R^3J_{11}^*} - \frac{58\pi^5}{136L^3R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{18} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{3k_{nl}RL\pi}{16} - \frac{9R\pi^5}{64L^3J_{22}^*} - \frac{58\pi^5}{136L^3R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{19} &= \frac{27}{32R^4J_{11}^*\rho_1} \\
g_{110} &= \frac{-5\pi^2}{16L^6R^6} \frac{(-2A_{21}^*\pi^4R^4 - 2(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*)L^2\pi^2R^2 - 2A_{12}^*L^4 + 2L^2\pi^2R^3)}{\left(\frac{\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \\
g_{111} &= \frac{-5\pi^2}{16L^6R^6} \frac{(-2A_{21}^*\pi^4R^4 - 2(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*)L^2\pi^2R^2 - 2A_{12}^*L^4 + 2L^2\pi^2R^3)}{\left(\frac{\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \\
g_{21} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{3k_{nl}RL\pi}{32} - \frac{R\pi^5}{64L^3J_{22}^*} - \frac{\pi^5}{32L^3R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{22} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(-\frac{9k_{nl}RL\pi}{16} + \frac{R\pi^5}{2L^3J_{22}^*} + \frac{9\pi^5}{4L^3R^3} \frac{1}{\left(\frac{16\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{136J_{22}^*}{R^4}\right)} + \frac{9L\pi}{64R^3J_{11}^*} \right) \\
g_{23} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(-\frac{3k_{nl}RL\pi}{32} + \frac{\pi^5}{8L^3R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3\pi^5}{L^3R^3} \frac{1}{\left(\frac{136\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{16J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{24} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{3k_{nl}RL\pi}{8} - \frac{9L\pi}{4R^3J_{11}^*} + \frac{27\pi^5}{4L^3R^3} \frac{1}{\left(\frac{16\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{136J_{22}^*}{R^4}\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{29\pi^5}{68L^3R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{25} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{3k_{nl}RL\pi}{16} - \frac{9R\pi^5}{64L^3J_{22}^*} + \frac{27\pi^5}{4L^3R^3} \frac{1}{\left(\frac{136\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{16J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{26} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{-9k_{nl}RL\pi}{32} + \frac{R\pi^5}{64L^3J_{22}^*} + \frac{81L\pi}{64R^3J_{11}^*} \right) \\
g_{27} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(-\frac{3k_{nl}RL\pi}{8} + \frac{100\pi^5}{17L^3R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{28} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{-5\pi^2}{16L^6 R^6} \frac{(-2A_{21}^* \pi^4 R^4 - 2(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*)L^2 \pi^2 R^2 - 2A_{12}^* L^4 + 2L^2 \pi^2 R^3)}{\left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{29} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{3k_{nl} RL\pi}{16} + \frac{41\pi^3}{16L^5 R^5} \frac{(-2A_{21}^* \pi^4 R^4 - 2(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*)L^2 \pi^2 R^2 - 2A_{12}^* L^4 + 2L^2 \pi^2 R^3)}{\left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{50\pi^5}{L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{256\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{64\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{16J_{22}^*}{R^4}\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{8\pi^5}{L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{16\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{16\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{16J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{31} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{3k_{nl} RL\pi}{32} - \frac{L\pi}{64R^3 J_{11}^*} - \frac{\pi^5}{32L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{32} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(-\frac{3k_{nl} RL\pi}{32} + \frac{\pi^5}{8L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3\pi^5}{L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{16\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{136J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{33} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(-\frac{9k_{nl} RL\pi}{16} + \frac{9R\pi^5}{64L^3 J_{22}^*} + \frac{9\pi^5}{4L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{136\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{16J_{22}^*}{R^4}\right)} + \frac{L\pi}{2R^3 J_{11}^*} \right) \\
g_{34} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{3k_{nl} RL\pi}{16} - \frac{621L\pi}{4352R^3 J_{11}^*} + \frac{27\pi^5}{4L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{16\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{136J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{35} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{3k_{nl} RL\pi}{8} - \frac{9R\pi^5}{4L^3 J_{22}^*} + \frac{27\pi^5}{4L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{136\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{40\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{16J_{22}^*}{R^4}\right)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{29\pi^5}{68L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{36} &= \frac{27}{32R^4 J_{11}^* \rho_1} \\
g_{37} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(-\frac{3k_{nl} RL\pi}{8} + \frac{100\pi^5}{17L^3 R^3} \frac{1}{\left(\frac{\pi^4 J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2 R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)} \right) \\
g_{38} &= \frac{2}{\rho_1 RL\pi} \left(\frac{-9k_{nl} RL\pi}{32} + \frac{81R\pi^5}{64L^3 J_{22}^*} + \frac{L\pi}{64R^3 J_{11}^*} \right)
\end{aligned}$$

$$g_{39} = \frac{-5\pi^2}{16L^6R^6} \frac{(-2A_{21}^*\pi^4R^4 - 2(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*)L^2\pi^2R^2 - 2A_{12}^*L^4 + 2L^2\pi^2R^3)}{\left(\frac{\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)}$$

$$g_{310} = \frac{41\pi^2}{8L^6R^6} \frac{(-2A_{21}^*\pi^4R^4 - 2(A_{11}^* + A_{22}^* - 2A_{36}^*)L^2\pi^2R^2 - 2A_{12}^*L^4 + 2L^2\pi^2R^3)}{\left(\frac{\pi^4J_{11}^*}{L^4} + \frac{\pi^2(J_{33}^* - J_{12}^* + J_{21}^*)}{L^2R^2} + \frac{J_{22}^*}{R^4}\right)}$$

مراجع

- [١] Y. Luan, M. Ohlrich, and F. Jacobsen, *Modeling structural acoustic properties of loudspeaker cabinets*. Technical University of Denmark (DTU), 2011.
- [٢] E. Winckler, "Die lehre von elastizitat und festigkeit (On elasticity and fixity)," *Prague, 182p*, 1867.
- [٣] H. Zimmerman, "Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues (Railway permanent way design)," ed: Ernst & Sohn, Berlin, 1941.
- [٤] H. Lee and M. K. Kwak, "Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh–Ritz method and comparison of different shell theories," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 353, pp. 344-377, 2015.
- [٥] Y. Mochida, S. Ilanko, M. Duke, and Y. Narita, "Free vibration analysis of doubly curved shallow shells using the superposition-Galerkin method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 6, pp. 1413-1425, 2012.
- [٦] D. Tang, X. Yao, G. Wu, and Y. Peng, "Free and forced vibration analysis of multi-stepped circular cylindrical shells with arbitrary boundary conditions by the method of reverberation-ray matrix," *Thin-Walled Structures*, vol. 116, pp. 154-168, 2017.
- [٧] T. Ye, G. Jin, and S. Gao, "Three-dimensional hygrothermal vibration of multilayered cylindrical shells," *Composite Structures*, vol. 201, pp. 867-881, 2018.
- [٨] L. Rodrigues, P. B. Gonçalves, and F. M. Silva, "Internal resonances in a transversally excited imperfect circular cylindrical shell," *Procedia engineering*, vol. 199, pp. 838-843, 2017.
- [٩] A. Tesár, "Nonlinear interactions in resonance response of thin shells," *Computers & structures*, vol. 18, no. 6, pp. 1047-1055, 1984.
- [١٠] A. Tesar, "Nonlinear three-dimensional resonance analysis of shells," *Computers & structures*, vol. 21, no. 4, pp. 797-805, 1985.
- [١١] Y. A. Rossikhin and M. V. Shitikova, "Nonlinear dynamic response of a fractionally damped cylindrical shell with a three-to-one internal resonance," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 257, pp. 498-525, 2015.
- [١٢] S. Mahmoudkhani, H. Navazi, and H. Haddadpour, "An analytical study of the non-linear vibrations of cylindrical shells," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 46, no. 10, pp. 1361-1372, 2011.
- [١٣] Y. Q. Wang, L. Liang, and X. H. Guo, "Internal resonance of axially moving laminated circular cylindrical shells," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, no. 24, pp. 6434-6450, 2013.
- [١٤] A. Abe, Y. Kobayashi, and G. Yamada, "Nonlinear dynamic behaviors of clamped laminated shallow shells with one-to-one internal resonance," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 304, no. 3-5, pp. 957-968, 2007.
- [١٥] F. Alijani and M. Amabili, "Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid filled arbitrary laminated circular cylindrical shells," *Composite Structures*, vol. 108, pp. 951-962, 2014.

- [۱۶] A. Sofiyev, Z. Karaca, and Z. Zerín, "Non-linear vibration of composite orthotropic cylindrical shells on the non-linear elastic foundations within the shear deformation theory," *Composite Structures*, vol. 159, pp. 53-62, 2017.
- [۱۷] T. Dey and L. Ramachandra, "Non-linear vibration analysis of laminated composite circular cylindrical shells," *Composite Structures*, vol. 163, pp. 89-100, 2017.
- [۱۸] K. Choe, Q. Wang, and J. Tang, "Vibration analysis for coupled composite laminated axis-symmetric doubly-curved revolution shell structures by unified Jacobi-Ritz method," *Composite Structures*, vol. 194, pp. 136-157, 2018.
- [۱۹] S. Javed, K. Viswanathan, and Z. Aziz, "Free vibration analysis of composite cylindrical shells with non-uniform thickness walls," *Steel Compos. Struct.*, vol. 20, no. 5, pp. 1087-1102, 2016.
- [۲۰] X. Li, Y. Li, and T. Xie, "Vibration characteristics of a rotating composite laminated cylindrical shell in subsonic air flow and hygrothermal environment," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 150, pp. 356-368, 2019.
- [۲۱] J. Chen and Q.-S. Li, "Nonlinear aeroelastic flutter and dynamic response of composite laminated cylindrical shell in supersonic air flow," *Composite Structures*, vol. 168, pp. 474-484, 2017.
- [۲۲] W. Zhang, T. Liu, A. Xi, and Y. Wang, "Resonant responses and chaotic dynamics of composite laminated circular cylindrical shell with membranes," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 423, pp. 65-99, 2018.
- [۲۳] F. Alijani, M. Amabili, and F. Bakhtiari-Nejad, "On the accuracy of the multiple scales method for non-linear vibrations of doubly curved shallow shells," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 46, no. 1, pp. 170-179, 2011.
- [۲۴] F.-M. Li and G. Yao, "1/3 Subharmonic resonance of a nonlinear composite laminated cylindrical shell in subsonic air flow," *Composite Structures*, vol. 100, pp. 249-256, 2013.
- [۲۵] Y. Q. Wang, C. Ye, and J. W. Zu, "Nonlinear vibration of metal foam cylindrical shells reinforced with graphene platelets," *Aerospace Science and Technology*, vol. 85, pp. 359-370, 2019.
- [۲۶] S. Yang, W. Zhang, and J. Mao, "Nonlinear vibrations of carbon fiber reinforced polymer laminated cylindrical shell under non-normal boundary conditions with 1: 2 internal resonance," *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 74, pp. 317-336, 2019.
- [۲۷] م. حسینی سعدی، "مواد FGM (Functionally Graded Materials) و روش ساخت آن،" *مجله فنی مهندسی ساخت و تولید*، شماره ۴۵، ص ۳۸-۳۹، ۱۳۹۲.
- [۲۸] M. Darabi, M. Darvizeh, and A. Darvizeh, "Non-linear analysis of dynamic stability for functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading," *Composite Structures*, vol. 83, no. 2, pp. 201-211, 2008.
- [۲۹] A. Sofiyev, "The stability of compositionally graded ceramic-metal cylindrical shells under aperiodic axial impulsive loading," *Composite structures*, vol. 69, no. 2, pp. 247-257, 2005.

- [۳۰] G. Sheng and X. Wang, "Thermomechanical vibration analysis of a functionally graded shell with flowing fluid," *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 27, no. 6, pp. 1075-1087, 2008.
- [۳۱] K. Choe, J. Tang, C. Shui, A. Wang, and Q. Wang, "Free vibration analysis of coupled functionally graded (FG) doubly-curved revolution shell structures with general boundary conditions," *Composite Structures*, vol. 194, pp. 413-432, 2018.
- [۳۲] H. S. Shen and D. Q. Yang, "Nonlinear vibration of functionally graded fiber-reinforced composite laminated cylindrical shells in hygrothermal environments," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 5-6, pp. 1480-1499, 2015.
- [۳۳] G. Sheng and X. Wang, "Nonlinear vibrations of FG cylindrical shells subjected to parametric and external excitations," *Composite Structures*, vol. 191, pp. 78-88, 2018.
- [۳۴] W. Zhang, Y. Hao, and J. Yang, "Nonlinear dynamics of FGM circular cylindrical shell with clamped-clamped edges," *Composite Structures*, vol. 94, no. 3, pp. 1075-1086, 2012.
- [۳۵] C. Du and Y. Li, "Nonlinear internal resonance of functionally graded cylindrical shells using the Hamiltonian dynamics," *Acta Mechanica Sinica*, vol. 27, no. 6, pp. 635-647, 2014.
- [۳۶] X. Li, C. Du, and Y. Li, "Parametric resonance of a FG cylindrical thin shell with periodic rotating angular speeds in thermal environment," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 59, pp. 393-409, 2018.
- [۳۷] M. Amir and M. Talha, "Nonlinear vibration characteristics of shear deformable functionally graded curved panels with porosity including temperature effects," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2019.
- [۳۸] K. Gao, W. Gao, B. Wu, D. Wu, and C. Song, "Nonlinear primary resonance of functionally graded porous cylindrical shells using the method of multiple scales," *Thin-Walled Structures*, vol. 125, pp. 281-293, 2018.
- [۳۹] Y. Wang and D. Wu, "Free vibration of functionally graded porous cylindrical shell using a sinusoidal shear deformation theory," *Aerospace Science and Technology*, vol. 66, pp. 83-91, 2017.
- [۴۰] C. Du and Y. Li, "Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments," *Composite Structures*, vol. 102, pp. 164-174, 2013.
- [۴۱] Y. Hao, W. Zhang, and J. Yang, "Nonlinear dynamics of cantilever FGM cylindrical shell under 1: 2 internal resonance relations," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 20, no. 10, pp. 819-833, 2013.
- [۴۲] A. Sofiyev, D. Hui, V. C. Hacıyev, H. Erdem, G. Q. Yuan, E. Schnack, and V. Guldal, "The nonlinear vibration of orthotropic functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation within first order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 116, pp. 170-185, 2017.
- [۴۳] S. Zghal, A. Frikha, and F. Dammak, "Free vibration analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded composite shell structures," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 53, pp. 132-155, 2018.

- [۴۴] H.-S. Shen, Y. Xiang, Y. Fan, and D. Hui, "Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments," *Composites Part B: Engineering*, vol. 136, pp. 177-186, 2018.
- [۴۵] Y. Kiani, R. Dimitri, and F. Tornabene, "Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew cylindrical shells using the Chebyshev-Ritz formulation," *Composites Part B: Engineering*, vol. 147, pp. 169-177, 2018.
- [۴۶] M. Khayat, S. M. Dehghan, M. A. Najafgholipour, and A. Baghlani, "Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells with different shell theories using semi-analytical method," *Steel and Composite Structures*, vol. 28, no. 6, pp. 735-748, 2018.
- [۴۷] G. Sheng and X. Wang, "The dynamic stability and nonlinear vibration analysis of stiffened functionally graded cylindrical shells," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 56, pp. 389-403, 2018.
- [۴۸] D. Van Dung and V. H. Nam, "Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under external pressure and surrounded by an elastic medium," *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 46, pp. 42-53, 2014.
- [۴۹] N. D. Duc and P. T. Thang, "Nonlinear dynamic response and vibration of shear deformable imperfect eccentrically stiffened S-FGM circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations," *Aerospace Science and Technology*, vol. 40, pp. 115-127, 2015.
- [۵۰] S. Torkamani, H. Navazi, A. Jafari, and M. Bagheri, "Structural similitude in free vibration of orthogonally stiffened cylindrical shells," *Thin-Walled Structures*, vol. 47, no. 11, pp. 1316-1330, 2009.
- [۵۱] D. H. Bich, D. Van Dung, V. H. Nam, and N. T. Phuong, "Nonlinear static and dynamic buckling analysis of imperfect eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under axial compression," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 74, pp. 190-200, 2013.
- [۵۲] A. Shaterzadeh and K. Foroutan, "Non-Linear Analysis of Asymmetrical Eccentrically Stiffened FGM Cylindrical Shells with Non-Linear Elastic Foundation," *Journal of Solid Mechanics Vol*, vol. 9, no. 4, pp. 849-864, 2017.
- [۵۳] K. Foroutan, A. Shaterzadeh, and H. Ahmadi, "Nonlinear dynamic analysis of spiral stiffened functionally graded cylindrical shells with damping and nonlinear elastic foundation under axial compression," *Structural Engineering And Mechanics*, vol. 66, no. 3, pp. 295-303, 2018.
- [۵۴] D. Van Dung, "Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure," *Thin-Walled Structures*, vol. 63, pp. 117-124, 2013.
- [۵۵] S. Ghiasian, Y. Kiani, and M. Eslami, "Dynamic buckling of suddenly heated or compressed FGM beams resting on nonlinear elastic foundation," *Composite structures*, vol. 106, pp. 225-234, 2013.

- [۵۶] A. Hadi, H. R. Ovesy, S. Shakhesi, and J. Fazilati, "Large amplitude dynamic analysis of FGM cylindrical shells on nonlinear elastic foundation under thermomechanical loads," *International Journal of Applied Mechanics*, vol. 9, no. 07, p. 1750105, 2017.
- [۵۷] D. O. Brush and B. O. Almroth, *Buckling of bars, plates, and shells* (no. 6). McGraw-Hill New York, 1975.
- [۵۸] H. S. Shen and N. Noda, "Postbuckling of FGM cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environments," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, no. 16-17, pp. 4641-4662, 2005.
- [۵۹] H. S. Shen, "Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium," *Composite Structures*, vol. 94, no. 3, pp. 1144-1154, 2012.
- [۶۰] S. Mahmoudkhani, "Aerothermoelastic analysis of imperfect FG cylindrical shells in supersonic flow," *Composite Structures*, vol. 225, p. 111160, 2019.
- [۶۱] M. Eslami, A. Ziaii, and A. Ghorbanpour, "Thermoelastic buckling of thin cylindrical shells based on improved stability equations," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 19, no. 4, pp. 299-315, 1996.
- [۶۲] M. Darvizeh, A. Darvizeh, A. Shaterzadeh, and R. Ansari, "Active control of thermal buckling of shells of revolution using piezoelectric patches," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 34, no. 1, pp. 75-93, 2011.
- [۶۳] A. S. Volmir, *Non-linear Dynamics of Plates and Shells*, Science Edition M, 1972. (in Russian)
- [۶۴] Y. M. Grigorenko and V. Gulyaev, "Nonlinear problems of shell theory and their solution methods," *Soviet applied mechanics*, vol. 27, no. 10, pp. 929-947, 1991.
- [۶۵] D. H. Bich, D. Van Dung, and V. H. Nam, "Nonlinear dynamical analysis of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical panels," *Composite Structures*, vol. 94, no. 8, pp. 2465-2473, 2012.
- [۶۶] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 2008.
- [۶۷] J. L. Sewall, and E. C. Naumann, "An experimental and analytical vibration study of thin cylindrical shells with and without longitudinal stiffeners," NASA technical, note D-4705, 1968.
- [۶۸] J. L. Sewall, R. R. Clary, and S. A. Leadbetter, "An Experimental and Analytical Vibration Study of a Ring-stiffened Cylindrical Shell Structure with Various Support conditions," NASA TN. D-2398, 1964.
- [۶۹] F. Pellicano, "Vibrations of circular cylindrical shells: theory and experiments," *Journal of sound and vibration*, vol. 303, no. 1-2, pp. 154-170, 2007.
- [۷۰] Z. Qin, F. Chu, and J. Zu, "Free vibrations of cylindrical shells with arbitrary boundary conditions: a comparison study," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 133, pp. 91-99, 2017.
- [۷۱] A. Sofiyev, M. Avcar, P. Ozyigit, and S. Adigozel, "The Free Vibration of non-homogeneous truncated conical shells on a winkler foundation," *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, vol. 1, no. 1, pp. 34-41, 2009.

- [٧٢] D. Paliwal, R. K. Pandey, and T. Nath, "Free vibrations of circular cylindrical shell on Winkler and Pasternak foundations," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 69, no. 1, pp. 79-89, 1996.
- [٧٣] B. Mustafa and R. Ali, "An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells," *Computers & structures*, vol. 32, no. 2, pp. 355-363, 1989.
- [٧٤] D. Wagg and S. Neild, *Nonlinear vibration with control*. Springer, 2016.
- [٧٥] I. A. Karnovsky and E. Lebed, *Theory of vibration protection*. Springer, 2016.
- [٧٦] L. Manevitch and A. I. Manevich, *The mechanics of nonlinear systems with internal resonances*. World Scientific, 2005.
- [٧٧] Z.-G. Song and F.-M. Li, "Aerothermoelastic analysis and active flutter control of supersonic composite laminated cylindrical shells," *Composite Structures*, vol. 106, pp. 653-660, 2013.
- [٧٨] X. Zhang, G. Liu, and K. Lam, "Vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach," *Journal of sound and vibration*, vol. 239, no. 3, pp. 397-403, 2001.

Abstract

In this thesis, an analytical method is presented to investigate the nonlinear vibration behavior of the spiral stiffened functionally graded cylindrical shells surrounded by a nonlinear viscoelastic foundation exposed to the external and parametric excitations. These loads are applied radially on the surface of the shell and axially on the two edges of the cylindrical shell. The boundary condition is assumed simply supported. The nonlinear viscoelastic foundation consists of a two-parameter Winkler-Pasternak foundation augmented by a Kelvin-Voigt viscoelastic model with a nonlinear cubic stiffness and viscose damping. The strain-displacement relations and the governing equations are obtained based on the von Kármán nonlinear equations and the classical shells theory, respectively. The smeared stiffener technique is used to model the stiffeners on the shell. To obtain the discretized motion equation, the Galerkin method is used. In order to investigate the response of the nonlinear vibration, the multiple scales method is utilized. In this regard, at first, neglecting the internal resonance, the resonance analyses consist of primary, superharmonic, subharmonic, combination, and simultaneous resonances for the spiral stiffened functionally graded cylindrical shell with or without the initial imperfection surrounded by a nonlinear viscoelastic foundation exposed to the external excitation based on the single-mode are performed. In continue, the free nonlinear vibrations and forced nonlinear vibrations with the assumption of internal resonance and one of the subharmonic or superharmonic resonances are analyzed for the cylindrical shell. So, in this case, based on the proposed multi modes, after finding the stress function from the compatibility equation and substituting outcome in the motion equation of the shell, by applying the Galerkin method, the equations system with coupled modes is obtained. Also, the cylindrical shell, in addition to external excitation, is subjected to axial loading as a parametric excitation, in which case, assuming one of the resonance cases and considering the initial imperfection, the nonlinear vibrations behavior of the shell is examined. In this part, the deflection is considered based on the first three prominent modes, and consequently, three equations with coupled modes are obtained. To analyze the nonlinear vibrations of the cylindrical shell with one of the resonance cases, the bifurcation diagram is depicted for the excitation frequency versus the amplitude. According to these diagrams, it is observed that the chaotic motion occurs for the spiral stiffened functionally graded cylindrical shell. The effects of different angles of stiffeners, various geometrical characteristics, and nonlinear viscoelastic foundation are investigated.

Keywords: Spiral stiffened cylindrical shell, Nonlinear vibration analysis, Analytical solution, Nonlinear viscoelastic foundation, Functionally graded materials; External and parametric excitations



Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

Nonlinear vibration analysis of spiral stiffened cylindrical shells surrounded
by viscoelastic foundation subjected to external and parametric excitation

Kamran Foroutan

Supervisor:
Dr. Habib Ahmadi

October 2020