





دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

محاسبه ضرایب شدت تنش در یک ماده ایزوتروپیک دارای ترک با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی

نگارنده: علی فیروزی

اساتید راهنما:

دکتر محمدباقر نظری

دکتر مسعود مهدی زاده رخی

مهرماه ۱۳۹۹

تقدیم اثر:

تقدیم خالصانه به خانواده و عموهایم که با لطف و محبت بی دریغشان اینجانب را در طی این پایان نامه یاری نمودند.

تشکر و قدردانی:

از راهنمایی‌ها و زحمات اساتید محترم راهنما جناب آقایان دکتر محمدباقر نظری و دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی که در طول این پایان‌نامه همراه من بودند، تشکر و قدردانی ویژه می‌نمایم. بدون زحمات و کمک‌های آنها، انجام این تحقیق میسر نبود.

همچنین از کمک‌ها و لطف‌های دوستان خوبم جواد سیم‌خواه، سیده‌ادی بیات و محمد کرمی که در طول این مسیر برایم مانند یک برادر مایه دلگرمی بودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. در آخر نیز از خانواده عزیز و مهربانم که با محبت و دلسوزی مرا در طول تحصیل پشتیبانی و حمایت کرده تا بتوانم این مقطع تحصیلی را با موفقیت به اتمام برسانم، بسیار سپاسگزار هستم.

تعهد نامه

اینجانب علی فیروزی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه محاسبه ضرایب شدت تنش در یک ماده ایزوتروپیک دارای ترک با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی تحت راهنمایی دکتر محمدباقر نظری و دکتر مسعود مهدی زاده رخی متعهد می شوم:

* تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است.

* در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورداستفاده استناد شده است.

* مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.

* کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.

* حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.

* در کلیه مراحل انجام این پایان نامه در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

* کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و ...)

متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد.

* استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه ضرایب شدت تنش در یک محیط ایزوتروپیک همگن دارای ترک و تحت شوک حرارتی کلاسیک، در حالت وابستگی خواص ماده به دما مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. بدین منظور معادلات حاکم کوپل شده برای حل مسئله با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیر خطی حرارتی استخراج شده‌اند. بعد از بی بعد سازی و نوشتن فرم ضعیف معادلات حاکم، روش المان محدود توسعه یافته برای گسسته سازی آنها استفاده شده است. برای حل معادلات ترموالاستیسیته کوپل شده غیر خطی در قلمرو زمانی، روش تکرار مستقیم نیومارک لحاظ شده است. در نهایت ضرایب شدت تنش حرارتی در نوک ترک با استفاده از روش انتگرال برهم کنش استخراج شده‌اند. در ابتدا دو مثال عددی برای صحت سنجی کد نوشته شده آورده شده‌اند. سپس سه مثال عددی دیگر برای استخراج ضرایب شدت تنش و تحلیل آنها در حالاتی که شرایط مرزی و هندسه ترک متفاوت باشند، ارائه شده‌اند. نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی هنگامی که خواص ماده مستقل از دما باشند، با حالت خطی اختلاف ناچیزی داشته اما در هنگامی که خواص ماده وابسته به دما باشند، این اختلاف بیشتر می‌شود.

کلمات کلیدی: ضریب شدت تنش، روش المان محدود توسعه یافته، شوک حرارتی، تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی.

فهرست مطالب

شماره صفحه

عنوان

فصل اول: مقدمه و پیشینه تحقیق

- ۱-۱- مقدمه ۲
- ۲-۱- نوآوری، فرضیات و هدف ۷

فصل دوم: روش المان محدود توسعه یافته و رابطه انتگرال برهم‌کنش

- ۱-۲- مقدمه ۱۰
- ۲-۲- روش المان محدود توسعه یافته (XFEM) ۱۱
- ۲-۲-۱- غنی سازی ناپیوستگی ها ۱۳
- ۲-۲-۲- غنی سازی نزدیک نوک ترک ۱۵
- ۲-۲-۳- انتگرال گیری عددی برای المان های قطع شده توسط ترک ۱۷
- ۳-۲- انتگرال J ۲۰
- ۳-۲-۱- محاسبه ضرایب شدت تنش با استفاده از انتگرال برهم‌کنش ۲۳

فصل سوم: روابط حاکم

- ۱-۳- مقدمه ۲۸
- ۲-۳- معادلات حاکم ۲۸
- ۳-۳- شکل ضعیف معادلات حاکم ۳۴
- ۴-۳- گسسته سازی معادلات حاکم ۳۵
- ۵-۳- روش نیومارک ۳۹
- ۳-۵-۱- سیستم های خطی با روش شتاب متوسط ثابت ۴۰
- ۳-۵-۲- سیستم های غیرخطی با روش تکرار مستقیم ۴۱

فصل چهارم: نتایج و بحث

۴۴	 مقدمه	۱-۴
۴۴	 یک لایه تحت شوک حرارتی	۲-۴
۴۷	 صفحه مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی	۳-۴
۴۹	 صفحه مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی متقارن	۴-۴
۵۵	 صفحه مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی نامتقارن	۵-۴
۵۹	 صفحه مستطیلی دارای ترک داخلی مایل تحت شوک حرارتی	۶-۴

فصل پنجم: نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۶۴	 مقدمه	۱-۵
۶۴	 نتیجه‌گیری	۲-۵
۶۵	 پیشنهادها	۳-۵

مراجع

۶۸	 مراجع	
----	-------------	--

فهرست شکل‌ها

عنوان	شماره صفحه
شکل ۱-۲: ضریب شدت تنش برای یک ترک استاتیکی در یک صفحه محدود.....	۱۲
شکل ۲-۲: مش‌بندی المان‌ها و ترک Γ_D . گره‌های مشخص شده با مربع‌های قرمز به وسیله تابع علامت غنی شده‌اند.....	۱۴
شکل ۳-۲: مختصات قطبی نوک ترک.....	۱۵
شکل ۴-۲: توابع نزدیک نوک.....	۱۶
شکل ۵-۲: استراتژی غنی‌سازی برای ترک مرزی.....	۱۶
شکل ۶-۲: استراتژی مش‌بندی برای انتگرال‌گیری عددی در المان‌های قطع شده توسط ترک با کمک نرم افزار آباکوس..	۱۸
شکل ۷-۲: استراتژی غنی‌سازی یک گره در المان‌های کاملاً برش خورده توسط ترک.....	۲۰
شکل ۸-۲: اصلاح غنی‌سازی گره‌ای در یک المان زمانی که ترک از نزدیکی نقطه گره‌ای عبور کرده است.....	۲۰
شکل ۹-۲: ناحیه انتگرال J حول نوک ترک.....	۲۱
شکل ۱۰-۲: المان‌های انتخاب شده حول نوک ترک برای محاسبه ضریب شدت تنش با استفاده از رابطه انتگرال برهم‌کنش.....	۲۱
شکل ۱-۳: فلوچارت حل مسأله با استفاده از روش نیومارک غیرخطی تکرار مستقیم.....	۴۲
شکل ۱-۴: یک لایه تحت شوک حرارتی از نوع تابع پله واحد در لبه سمت چپ آن.....	۴۵
شکل ۲-۴: توزیع دمای بی بعد در طول لایه بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در سه زمان مختلف.....	۴۵
شکل ۳-۴: توزیع جابجایی بی بعد در طول لایه بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در سه زمان مختلف.....	۴۶
شکل ۴-۴: توزیع تنش بی بعد در طول لایه بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در سه زمان مختلف.....	۴۶
شکل ۵-۴: صفحه مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی در سمت چپ.....	۴۷
شکل ۶-۴: تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود اول در مثال دوم صحت سنجی.....	۴۸
شکل ۸-۴: تاثیر اندازه‌های مختلف مش صفحه در مقدار ضریب شدت تنش مود اول بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت خواص وابسته به دما.....	۵۰
شکل ۹-۴: تاثیر اندازه‌های مختلف مش صفحه در مقدار دمای نوک ترک بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت خواص وابسته به دما.....	۵۱

- شکل ۴-۱۰: تاثیر شعاع‌های مختلف ناحیه انتگرال برهم‌کنش در مقدار ضریب شدت تنش بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت خواص وابسته به دما (H طول مشخصه یک المان می‌باشد). ۵۱
- شکل ۴-۱۱: تاثیر گام زمانی Δt در مقدار ضریب شدت تنش مود اول بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت خواص وابسته به دما. ۵۲
- شکل ۴-۱۲: تاثیر وابستگی خواص ماده به دما بر روی دمای نوک ترک بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک خطی و غیرخطی حرارتی. ۵۳
- شکل ۴-۱۳: تاثیر وابستگی و عدم وابستگی خواص ماده به دما بر روی مقدار ضریب شدت تنش مود اول بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک خطی و غیرخطی حرارتی. ۵۳
- شکل ۴-۱۴: شبکه تغییر شکل یافته در سه زمان مختلف: الف) $t = 0.1$ ب) $t = 0.5$ ج) $t = 0.8$ ۵۴
- شکل ۴-۱۵: کانتور توزیع دمای صفحه در سه زمان مختلف: الف) $t = 0.1$ ب) $t = 0.5$ ج) $t = 0.8$ ۵۵
- شکل ۴-۱۶: صفحه مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی نامتقارن در سمت چپ ۵۶
- شکل ۴-۱۷: تغییرات دمای نوک ترک بر حسب زمان بر اساس تئوری ترموالاستیسیته غیرخطی حرارتی در حالت وابستگی خواص ماده به دما. ۵۷
- شکل ۴-۱۸: تغییرات ضرایب شدت تنش مود اول و دوم بر حسب زمان بر اساس تئوری ترموالاستیسیته غیرخطی حرارتی در حالت وابستگی خواص ماده به دما. ۵۷
- شکل ۴-۱۹: شبکه تغییر شکل یافته در سه زمان مختلف: الف) $t = 0.2$ ب) $t = 0.4$ ج) $t = 1$ ۵۸
- شکل ۴-۲۰: کانتور توزیع دمای صفحه در سه زمان مختلف: الف) $t = 0.2$ ب) $t = 0.4$ ج) $t = 1$ ۵۹
- شکل ۴-۲۱: صفحه مستطیلی دارای ترک داخلی مایل تحت شوک حرارتی در سمت چپ. ۵۹
- شکل ۴-۲۲: تغییرات دمای نوک ۱ و ۲ ترک مایل بر حسب زمان بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت وابستگی خواص ماده به دما ۶۰
- شکل ۴-۲۳: تغییرات ضریب شدت تنش مود اول و دوم بر حسب زمان برای نوک ۱ ترک بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت وابستگی خواص ماده به دما ۶۱
- شکل ۴-۲۴: تغییرات ضریب شدت تنش مود اول و دوم بر حسب زمان برای نوک ۲ ترک بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت وابستگی خواص ماده به دما ۶۱
- شکل ۴-۲۵: شبکه تغییر شکل یافته در سه زمان مختلف: الف) $t = 0.1$ ب) $t = 0.2$ ج) $t = 0.5$ ۶۲
- شکل ۴-۲۶: کانتور توزیع دمای صفحه در سه زمان مختلف: الف) $t = 0.1$ ب) $t = 0.2$ ج) $t = 0.5$ ۶۲

فهرست علامتها

δ_{ij}	دلتای کرونکر
Γ_d	سطوح ترک
$H(X)$	تابع علامت
Ω	ناحیه
N_i	توابع شکل استاندارد روش اجزای محدود
A	مساحت
q	تابع وزنی
$\mathbf{n}$	بردار یکه
$\mathbf{u}$	بردار جابجایی
T	تغییرات دما
$\mathbf{a}$	بردار درجات آزادی اضافه میدان جابجایی مربوط به تابع علامت
$\mathbf{b}$	بردار درجات آزادی اضافه میدان جابجایی مربوط به توابع نزدیک نوک آن
c	درجات آزادی اضافه میدان دما مربوط به تابع علامت
d	درجات آزادی اضافه میدان دما مربوط به تابع نزدیک نوک آن
F_i	توابع غنی سازی نوک ترک (توابع نزدیک نوک)
I	مجموعه تمامی گره‌ها در مش
h	طول مشخصه یک المان
I_H	مجموعه گره‌های غنی شده با تابع علامت
I_T	مجموعه گره‌های غنی شده با توابع نزدیک نوک

چگالی انرژی کرنشی	SE
چگالی انرژی جنبشی	KE
تانسور تنش	σ
تانسور کرنش	ϵ
انتگرال J	J
نرخ رهائش انرژی	G
ضریب شدت تنش برای مود اول شکست	K_I
ضریب شدت تنش برای مود دوم شکست	K_{II}
ضریب شدت تنش برای مود سوم شکست	K_{III}
میدان کمکی	aux
مدول الاستیسیته (مدول یانگ)	E
چگالی	ρ
انتگرال برهم کنش	M

فصل اول: مقدمه و پیشنهادیه تحقیق

۱-۱- مقدمه

ترموالاستیسیته در واقع گسترش یافته تئوری الاستیسیته است که شامل اثرات حرارتی می‌شود. این تئوری مربوط به فعل و انفعالات بین میدان حرارتی و اجسام الاستیک است [۱]. مطالعه بر روی مبحث ترموالاستیسیته کلاسیک با کارهای دوهامل در سال ۱۸۳۷ [۱] و نیومان در سال ۱۸۸۵ [۲] آغاز شده است که معادلات ترموالاستیسیته غیر کوپل خطی را برای اجسام ایزوتروپیک پیشنهاد داده بودند [۳]. بیوت در سال ۱۹۵۶ [۴] برای غلبه بر اولین نقص در تئوری ترموالاستیسیته غیر کوپل خطی که توسط دوهامل و نیومان ارائه شده بود، تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک کوپل خطی را ارائه داد. در واقع آن تئوری دو پدیده را طوری پیش‌بینی کرده بود که با مشاهدات فیزیکی سازگاری نداشت. اولاً اینکه معادله انتقال حرارت شامل هیچگونه ترم الاستیکی نبود [۳]. دوماً معادله انتقال حرارت از نوع سهموی بود که سرعت انتشار بی‌نهایت را برای امواج حرارتی پیش‌بینی می‌کرد. بعدها، تئوری‌های ترموالاستیسیته تعمیم یافته به منظور از بین بردن کاستی‌های ترموالاستیسیته غیر کوپل ارائه شدند. لرد و شولمان در سال ۱۹۶۷ [۵] تئوری ترموالاستیسیته کوپل شده با یک زمان آسایش^۱ را به عنوان یک قانون جدید هدایت حرارتی برای جایگزینی قانون کلاسیک فوریه توسعه داد. از آنجا که معادله انتقال حرارت در این تئوری از نوع موج شکل است، به طور خودکار سرعت‌های متناهی امواج حرارت و الاستیک را تضمین می‌کند. گرین و لیندزی در سال ۱۹۷۲ [۶] نرخ دما را در میان متغیرهای مسئله برای توسعه یک تئوری ترموالاستیسیته وابسته به نرخ دما اضافه کرد که قانون هدایت حرارتی فوریه را هنگامی که جسم مورد نظر دارای تقارن باشد، نقض نکند و همچنین سرعت انتشار امواج حرارتی نیز محدود باشد. این تئوری به تئوری ترموالاستیسیته با دو زمان آسایش مشهور است. تحولات مرتبط توسط گرین و نقدی در سال‌های ۱۹۹۲ و ۱۹۹۳ در مراجع [۷، ۸] آورده شده که آنها به توسعه سه مدل ترموالاستیسیته تعمیم یافته در مواد ایزوتروپیک همگن به عنوان مدل‌های نوع ۱، نوع ۲ و نوع ۳ پرداختند.

¹ Relaxation Time

اصطلاح ترموالاستیسیته دسته بزرگی از پدیده‌ها را در بر می‌گیرد که شامل تئوری کلی هدایت حرارتی، تنش‌های حرارتی و کرنش‌های ایجاد شده توسط جریان حرارتی در اجسام الاستیک و اثر معکوس توزیع دما ناشی از تغییر شکل الاستیک می‌باشد [۴]. در زمینه هوانوردی، سرعت بالای هواپیماهای فوق سریع باعث ایجاد گرمای آیرودینامیکی شده که این به نوبه خود باعث ایجاد تنش‌های حرارتی شدید می‌شود که با کاهش حد الاستیک، مقاومت ساختار هواپیما را کاهش می‌دهد. ثانیاً، در زمینه هسته‌ای، درجه حرارت و گرادیان‌های بسیار بالا که منشاء راکتورهای هسته‌ای هستند، بر طراحی و عملکرد آنها تأثیر می‌گذارد. به همین ترتیب، در توسعه سیستم‌های پیشرفته مانند موتورهای جت و موشک، درجه حرارت بالا همراه با فرآیندهای احتراق منشأ ایجاد تنش‌های حرارتی ناخواسته است. پدیده‌های مشابه در فناوری‌های وسایل نقلیه فضایی و موشک‌ها، در توربین‌های بزرگ بخار که در معرض دماهای بالا و یا تغییرات شدید دمایی قرار دارند و حتی در کشتی سازی نیز دیده می‌شود. این شوک حرارتی باعث ایجاد تنش‌های حرارتی و در نهایت شکست آنها می‌شود. بنابراین احتیاج به درک بهتری از پدیده انتقال حرارت در محیط‌های تحت شوک حرارتی قوی می‌باشد. برای مثال، گرمایش لیزری و نانوتکنولوژی باعث ایجاد مسائلی در زمینه هدایت حرارتی در مقیاس‌های کوچک شده‌اند [۹، ۱۰].

در تحلیل عددی مسائل ترموالاستیسیته خطی، هر دو روش المان محدود و المان مرزی استفاده شده‌اند. روش المان مرزی دوگانه برای مدل‌سازی ترک لبه‌ای در یک صفحه ایزوتروپیک در مرجع [۱۱] ارائه شده است که دو معادله انتگرال مرزی مستقل (جابجایی و ترکشن) را شامل می‌شود. این روش برای تحلیل ترک ترموالاستیک غیرکوپل در حالت گذرا [۱۲] و رشد ترک شبه استاتیک در شرایط بارگذاری ترمومکانیکی [۱۳] و همچنین مسائل دارای ترک در حالت سه بعدی [۱۴] نیز ارائه شده است. روش المان مرزی برای محاسبه ضرایب شدت تنش برای یک ماده هدفمند صفحه‌ای تحت بارگذاری حرارتی در مراجع [۱۵، ۱۶] پیشنهاد شده است. اسلامی، حسینی‌تهرانی و همکارانشان این روش را برای محاسبه ضریب شدت تنش مود یک با استفاده از روش همبستگی تغییر مکان‌ها برای یک ترک لبه‌ای ساکن در یک ناحیه دو بعدی محدود تحت شوک حرارتی بر اساس تئوری‌های ترموالاستیسیته کلاسیک [۱۷]، لرد-شولمان

[۱۸] و گرین-لیندزی [۱۹] توسعه دادند. همچنین اثر ترم‌های اینرسی و کوپل بر مقدار ضریب شدت تنش مود یک بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک [۲۰] و تعمیم یافته لرد-شولمان در این مطالعات گزارش شده است.

کاظمی و گلی [۲۱] به مدل‌سازی ترک در مواد مرکب هدفمند در حالت ایزوتروپیک عرضی به وسیله روش المان محدود توسعه‌یافته پرداختند. زمانی و اسلامی [۲۲] نیز ضریب شدت تنش مود یک را برای یک باریکه ساخته شده از مواد مرکب هدفمند شامل ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک محاسبه کردند. آنها همچنین اثر صوت دوم-یک اغتشاش حرارتی موج شکل که به عنوان صدای معمول (موج) شناخته می‌شود-را بر اساس مدل لرد-شولمان بر روی ضریب شدت تنش برای یک صفحه حاوی ترک عمودی بررسی کردند. در این مطالعه، المان‌های تکین برای رصد مناسب تنش در ناحیه نوک ترک استفاده شده است. همچنین تحلیل شکست ترموالاستیک غیرکوپل دینامیکی یک ترک ساکن [۲۳] و اثر عبارات مرتبه بالاتر در توابع غنی‌سازی نوک ترک بر روی مقدار ضریب شدت تنش محاسبه شده در چارچوب روش المان محدود توسعه‌یافته گزارش شده است [۲۴]. استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته توسط گلی و همکارانش در ترموالاستیسیته شبه استاتیکی، برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مواد مرکب هدفمند با استفاده از انتگرال برهم‌کنش نیز گزارش شده است [۲۵]. لی و همکاران [۲۶] ضرایب شدت تنش دینامیکی یک نوار ترموالاستیک حاوی ترک داخلی به موازات سطح گرم شده را تحت تأثیر شوک حرارتی با تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس مورد بررسی قرار دادند. آنها دریافتند که ضرایب شدت تنش دامنه بالاتر و حالت نوسان‌کننده‌ای در مقایسه با مواردی که در شرایط انتقال حرارت فوریه معمولی بدست آمدند دارند. ونگ و لی [۲۷] شکست یک لایه از جنس ماده پیزوالکتریک با یک ترک داخلی را در چارچوب قانون هدایت حرارتی فوریه مورد مطالعه قرار دادند. علاوه بر مواد همگن، از قانون غیر فوریه در مواد غیرهمگن نیز استفاده شده است. ونگ و هان [۲۸] یک کامپوزیت دو لایه با ترک در سطح مشترک را تحت اعمال شار حرارتی مورد مطالعه قرار دادند. نتایج نشان داد که ترک به طور قابل توجهی شار حرارتی محلی و توزیع دما را افزایش می‌دهد. ونگ [۲۹] با استفاده از مدل

سازی یک لایه از جنس مواد ترموالکتریک به روش المان محدود، تاثیر وابستگی و عدم وابستگی خواص ماده به دما بر روی دمای لایه و تنش حرارتی به وجود آمده در آن را مورد بررسی و تحلیل قرار داد. فو و همکاران [۳۰] بر روی ضریب شدت شار حرارتی در یک پانل ساندویچی با هسته فوم ترک خورده با استفاده از روش های تبدیل فوری و لاپلاس کار کردند. اثر خواص مواد، پارامتر کوپل و هندسه ترک بر روی پاسخ شکست حرارتی مشاهده شده است.

باطنی و اسلامی [۳۱] به مطالعه انتشار امواج دما، جابجایی و تنش در یک باریکه طبق مدل ترموالاستیسیته تعمیم یافته غیرخطی حرارتی لرد-شولمان پرداخته و به این نتیجه رسیدند که اهمیت تحلیل غیرخطی برای مسائلی مناسب است که در آنها تغییرات دمایی زیاد می باشد. همچنین آنها در مرجع [۳۲] به شبیه سازی دقیق شرایط مرزی حرارتی و اثرات آنها در پاسخ میدان دمایی و جابجایی این باریکه پرداختند. کیانی و اسلامی [۳۳] به بررسی پاسخ ترموالاستیسیته غیرخطی حرارتی در یک کره جدار ضخیم بر اساس تئوری لرد-شولمان پرداخته و با نوشتن معادلات حاکم برای یک کره ایزوتروپیک همگن، به این نتیجه رسیدند که تئوری خطی حرارتی برای تحلیل دقیق سازه ها تحت بارهای گرمایی به خصوص شوک های حرارتی، لحاظ کردن اثر کوپل دما- کرنش و زمانهای آسایش بزرگ مناسب نیست. رومن و همکارانش [۳۴] با استفاده از مدل مکانیکی مواد الاستیک غیرخطی به فرمول بندی ترموالاستیسیته غیرخطی به وسیله روش المان محدود پرداختند. نتایج بررسی آنها نشان می دهد که در توزیع دما در دیواره داخلی، اثر تغییرات دمایی بزرگ قابل ملاحظه می باشد. ایگناچاک [۳۵]، هتارسکی و ایگناچاک [۳۶] مدلی ارائه کردند که بر اساس یک متغیر حالت مستقل جدید و جریان حرارتی الاستیک، منجر به یک معادله حاکم شده که اجازه رشد صوت دوم را می داد. این کارها بر اساس تئوری ترموالاستیسیته تعمیم یافته غیرخطی حرارتی در دماهای پایین بود. ابوالنور و همکارانش [۳۷] نیز معادلات یک بعدی ترموالاستیسیته غیرخطی را در یک محیط پیوسته تحت کرنش های محدود و تغییرات دمایی بدست آوردند. سپس با اعمال شرایط مرزی جابجایی، معادلات حاکم را از دو روش بسط مستقیم و مقیاس چندگانه حل کرده و به این نتیجه رسیدند که اثر کوپل حرارتی در تغییر جزئی شاخص های مسئله مهم می باشد. روشنی

زرمهری و همکاران [۳۸] با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته و استخراج ضرایب شدت تنش در یک صفحه ایزوتروپیک تحت شوک حرارتی با استفاده از تئوری گرین-لیندزی به این نتیجه رسیدند که سرعت موجهای تنش و حرارت بر روی مقدار ضرایب شدت تنش به خصوص در زمانهای اولیه اعمال شوک حرارتی تاثیر زیادی دارد. شاهسون [۳۹] به محاسبه ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک حرارتی بر اساس تئوری ترموالاستیسیته گرین-نقدی و با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته پرداخته و به این نتیجه رسید که ضرایب شدت تنش برای تئوری ترموالاستیسیته بدون اتلاف به صورت چشمگیر از نتایج مدل‌های کلاسیک و لرد-شولمان بزرگتر هستند. عصمتی [۴۰] با استفاده از مدلسازی یک صفحه ترک خورده در معرض یک شوک حرارتی غیرفوری‌ای به محاسبه ضریب شدت تنش به روش المان محدود توسعه یافته پرداخته و همچنین اثر زمان آسایش بر روی توزیع دما و ضرایب شدت تنش را نیز مورد بررسی و مقایسه قرار داد. نظری و مهدی‌زاده رخی [۴۱] به بررسی رفتار ترک در یک ماده ایزوتروپیک تحت شوک حرارتی پرداخته و ضرایب شدت تنش را بر اساس تئوری گرین-نقدی و روش المان محدود توسعه یافته بدست آورده و نتایج را با تئوری‌های دیگر ترموالاستیسیته از جمله لرد-شولمان و کلاسیک مقایسه کردند.

در یک محیط با دمای بالا، خصوصیات حرارتی و مکانیکی مواد مانند مدول یانگ، چگالی، حرارت مخصوص، هدایت حرارتی و مقاومت کششی بسیار حساس به دما هستند [۴۲-۴۵]. بر این اساس، هنگامی که گرادیان درجه حرارت نادیده گرفته نشود باید در شرایط بارگذاری حرارتی، خصوصیات مواد وابسته به دما در نظر گرفته شود. نتایج تحقیقات مرتبط در مواد همگن، مواد غیر همگن و مواد تابعی بر اساس مدل انتقال حرارت کلاسیک فوریه گزارش شده‌اند. به عنوان مثال، هان و وان [۴۶] آزمایشی را بر روی سه نمونه تحت شرایط مرزی متفاوت به ترتیب: یک لایه سرامیکی تحت یک شوک حرارتی، یک لایه سرامیکی تحت یک شوک سرد و یک پوشش سرامیکی تحت یک شوک سرد انجام دادند. تمام خواص مواد تابعی از دما فرض شده‌اند. این مطالعات اهمیت ترکیب خواص مواد وابسته به دما را در مقاومت در برابر شوک حرارتی در مواد سرامیکی نشان می‌دهند. نتایج نشان داد که سطح تنش حرارتی بطور قابل توجهی کاهش یافته و

مقاومت در برابر شوک حرارتی مواد سرامیکی برای مدل وابسته به دما نسبت به مدل مستقل از دما تا حد زیادی بهبود می‌یابد. دای و رائو [۴۷] رفتار دینامیکی غیرخطی یک سیلندر توخالی طویل متشکل از ماده تابعی (FGM^۱) وابسته به دما در معرض شوک حرارتی را بررسی کردند. خواص مواد در این سیلندر توخالی FG به جز نسبت پواسون، وابسته به دما فرض شده‌اند.

۱-۲- نوآوری، فرضیات و هدف

بنابر جستجوهای انجام شده، تاکنون گزارشی در مورد مطالعه رفتار یک جسم دارای ترک تحت شوک حرارتی با استفاده از تئوری ترموالاستیسیته غیرخطی حرارتی که در آن اختلاف دمای ایجاد شده در جسم نسبت به دمای مرجع قابل توجه است، انجام نشده است.

بنابراین هدف از انجام این پایان‌نامه، محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترکی در یک محیط محدود ایزوتروپیک با خواص وابسته به دما تحت شوک حرارتی با استفاده از تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی است. همچنین مساله با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته حل می‌شود.

فرضیاتی که در این پایان‌نامه لحاظ شده‌اند، به شرح زیر می‌باشند:

۱- تغییر شکل‌ها بسیار کوچکند اما تغییرات دما نسبت به دمای مرجع قابل ملاحظه است.

۲- رفتار ماده الاستیک در نظر گرفته شده است.

۳- از نیروهای حجمی صرف نظر شده است.

۴- مدل المان محدود به صورت دو بعدی در نظر گرفته شده است.

در فصل بعد این پایان‌نامه، روش عددی المان محدود توسعه یافته و رابطه انتگرال برهم‌کنش شرح داده شده‌اند. در فصل سوم ابتدا معادلات حاکم با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیر خطی

¹ Functionally Graded Material

حرارتی برای یک محیط ایزوتروپیک ارائه شده و سپس با استفاده از شکل ضعیف بی بعد شده و گسسته‌سازی آنها به وسیله روش گالرکین، معادلات کوپل شده به فرم ماتریسی بدست آمده‌اند که بتوان با استفاده از روش غیرخطی نیومارک در قلمرو زمان از آنها برای حل مسئله استفاده کرد. در فصل چهارم نیز با استفاده از معادلات بدست آمده در فصل قبل و استفاده از روش المان محدود توسعه چند مثال دوبعدی دارای ترک حل شده است. کلیه مراحل حل مسئله از جمله المان‌بندی و حل معادلات مربوطه و استخراج نتایج به کمک نرم‌افزار متلب^۱ انجام شده است. در فصل آخر نیز نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی ارائه شده‌اند.

^۱ MATLAB

فصل دوم: روش المان محدود توسعه یافته و

رابطه انتگرال برهم کنش

۲-۱- مقدمه

یکی از بزرگترین کمک‌هایی که دانشمندان در قرن بیستم به بشریت کردند، اختراع رایانه بود که به توسعه صنعت و تحقیقات علمی مرتبط بسیار کمک کرده است. با استفاده از مکانیک محاسباتی به عنوان نمونه، بسیاری از روش‌های جدید مانند روش المان محدود، روش‌های تفاضل محدود و حجم محدود به سرعت همزمان با اختراع رایانه توسعه یافته‌اند. به لطف این روش‌ها، بسیاری از مسائل سنتی در مکانیک را می‌توان به صورت عددی شبیه سازی و تجزیه و تحلیل کرد. مهمتر از همه، تعدادی از مسائل مهندسی و علمی را می‌توان الگوبرداری و حل کرد. همزمان با رشد و توسعه فناوری اطلاعات نوین و علوم محاسباتی، مهندسی و علوم مبتنی بر شبیه سازی در کاوش اسرار علم به دانشمندان کمک کرده و ابزاری مؤثر برای مهندس در اجرای نوآوری‌های مهندسی یا توسعه محصول با قابلیت اطمینان بالا فراهم می‌کند. روش المان محدود (FEM^1) تنها یکی از ابزارهای قدرتمند مهندسی و علوم مبتنی بر شبیه سازی است [۴۸].

از زمان ظهور اولین مقاله FEM در اواسط دهه ۵۰، مقالات و کتب بسیاری در این باره منتشر شده است. برخی از گزارش‌های تجربی موفق و یک سری مقالات نقش مهمی در توسعه FEM داشته‌اند. از دهه ۱۹۶۰ با ظهور نرم افزارهای مبتنی بر المان محدود، FEM تأثیر بسیار زیادی در تجزیه و تحلیل مهندسی به کمک رایانه داشت. ظهور تعداد زیادی نرم افزار پیشرفته نه تنها نیاز مهندسی و علوم مبتنی بر شبیه سازی را برآورده می‌کند، بلکه باعث توسعه بیشتر خود روش اجزاء محدود می‌شود. اگر روش FEM را با یک درخت بزرگ مقایسه کنیم، رشد چندین شاخه مهم این درخت به مانند ایجاد قابلیت‌های جدید در روش FEM من جمله استفاده از المان‌های ترکیبی، المان‌های مرزی، روش بدون شبکه، المان محدود توسعه یافته و غیره بوده که باعث شکوفایی این درخت خاص شده است [۴۸].

¹ Finite Element Method

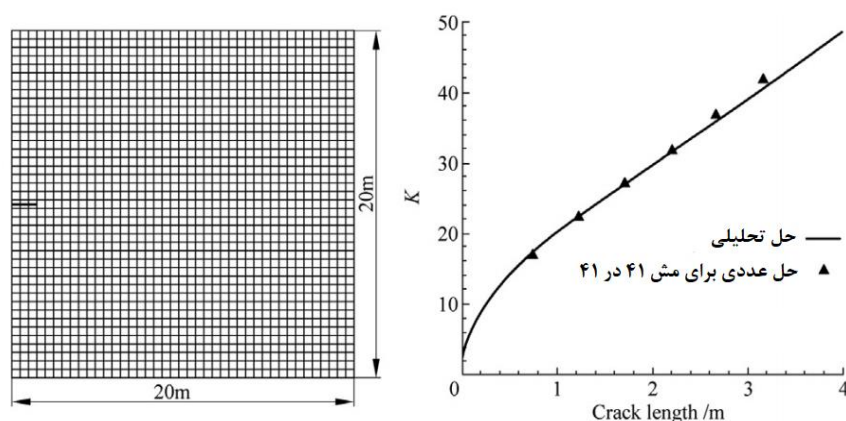
در تجزیه و تحلیل با استفاده از روش المان محدود معمولی، مدل فیزیکی که باید حل شود به یک سری عناصر متصل بهم در یک ترتیب خاص تقسیم شده که معمولاً "مش" نامیده می‌شوند. با این حال هنگامی که برخی از عیوب داخلی مانند ترک‌ها، حفره‌ها و ... در ناحیه مورد بررسی وجود داشته باشند، در روند مش بندی مشکلاتی را ایجاد می‌کنند. از یک طرف، مرز المان باید با لبه هندسی نقص در تلاقی باشد که باعث اعوجاج در المان خواهد شد. از طرف دیگر، اندازه مش بستگی به اندازه هندسی عیوب کوچک دارد که منجر به توزیع غیر یکنواخت مش شده که در آن مش‌های اطراف عیوب ریز بوده در حالی که آنهایی که دور از عیب می‌باشند درشت هستند. از طرفی مش‌های ریز در اطراف عیوب به شدت هزینه‌های محاسباتی را افزایش می‌دهند [۴۸]. با هدف رفع این کاستی‌ها با استفاده از روش المان محدود معمولی برای حل مسائل شامل ترک یا سایر عیوب، بلیچکو و مویز [۴۹] روش جدید محاسباتی به نام "روش المان محدود توسعه یافته" ($XFEM^1$) را پیشنهاد دادند و پیشرفت مهمی در پایه و اساس FEM معمولی ایجاد کردند. در ده سال گذشته، XFEM به طور مداوم بهبود و توسعه یافته و در حال حاضر به روشی قدرتمند و امیدوارکننده برای مقابله با مشکلات پیچیده مکانیک مانند میدان‌های ناپیوسته، تغییر شکل موضعی، شکست و ... تبدیل شده است.

۲-۲- روش المان محدود توسعه یافته ($XFEM$)

ایده اصلی در XFEM استفاده از یک تابع ناپیوسته به عنوان پایه یک تابع شکل برای لحاظ کردن پرش در متغیرهای میدانی (به عنوان مثال جابجایی) در حوزه محاسباتی است. بنابراین در محاسبات، توضیحات مربوط به میدان ناپیوسته کاملاً مستقل از مش بندی است. در نتیجه این روش برای مواجهه با مسائل در زمینه شکست بسیار مناسب است. XFEM نه تنها برای شبیه سازی ترک‌ها بلکه برای شبیه سازی مواد ناهمگن با حفره‌ها نیز استفاده می‌شود. همچنین در هنگام استفاده از FEM معمولی

¹ Extended Finite Element Method

برای مدل سازی میدان تکین مانند میدان تنش در نزدیکی نوک ترک، باید از مش بسیار ریز استفاده شود. با این حال در XFEM با معرفی جابجایی معلوم ترک‌ها یا نابجایی‌ها در توابع شکل غنی‌سازی، می‌توان یک پاسخ رضایت بخشی را تحت یک مش نسبتاً درشت بدست آورد. شکل ۲-۱ صفحه ای را با ترک اولیه‌ای در لبه سمت چپ نشان می‌دهد. ضریب شدت تنش را می‌توان به عنوان تابعی از طول ترک محاسبه کرد. در شبیه سازی XFEM بدون استفاده از مش ریز در نزدیکی نوک ترک، ضریب شدت تنش (SIF^1) محاسبه شده برای یک شبکه ۴۱ در ۴۱ از المان‌های یکسان می‌تواند به خوبی با حل تحلیلی برابری کند [۴۸].



شکل ۲-۱: ضریب شدت تنش برای یک ترک استاتیکی در یک صفحه محدود [۴۸]

با توجه به موارد فوق، خصوصیات و مزایای XFEM را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد [۴۸]:

۱. امکان مدل سازی و رشد ترک در داخل المان را فراهم می‌کند. ترک‌های با هندسه پیچیده را می‌توان با شبکه‌های ساختاری مدل کرده و می‌تواند به صورت المان به المان بدون مش‌بندی دوباره رشد کرده که در نتیجه هزینه محاسباتی را تا حد زیادی کاهش می‌دهد.

¹ Stress Intensity Factor

۲. المان‌های حاوی سطوح و نوک‌های ترک با درجات آزادی اضافی غنی شده‌اند به طوری که از تابع شکل ناپیوسته برای گرفتن تکینگی میدان تنش در نزدیکی نوک ترک استفاده می‌شود. بنابراین با استفاده از یک مش درشت می‌توان پاسخ دقیقی بدست آورد.
 ۳. در مقایسه با تکنیک مش‌زنی دوباره در FEM، نگاشت از متغیرهای میدانی پس از رشد ترک در XFEM ضروری نیست.
 ۴. در مقایسه با روش المان مرزی، XFEM برای مسائل چند ماده‌ای یا چند فازی به ویژه مسائل مربوط به غیرخطی‌های هندسی و تماسی کاربرد دارد.
 ۵. پیاده‌سازی آن در نرم افزارهای تجاری مانند آباکوس، انسیس و ... راحت است.
- تمام ویژگی‌های بالا نشان می‌دهند که چرا XFEM دارای کاربردهای بسیار خوبی است.

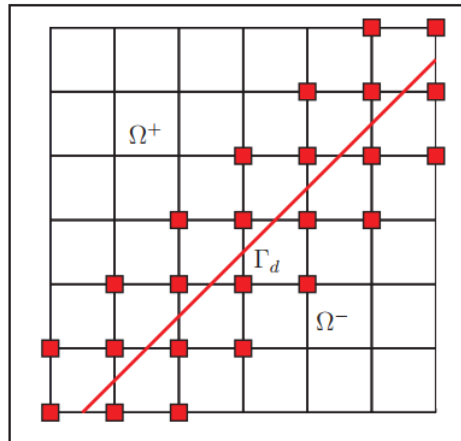
۲-۲-۱- غنی سازی ناپیوستگی‌ها

در این بخش، کاربرد روش المان محدود توسعه‌یافته در زمینه مکانیک شکست الاستیک خطی ارائه شده است. یک ترک که ناحیه‌ای را به دو قسمت مجزا تقسیم می‌کند در شکل ۲-۲ نشان داده شده که در آن Γ_d نشان دهنده سطوح ترک است. با هدف مدل سازی ناپیوستگی قوی در میدان جابجایی در طول ترک، تقریب المان محدود کلاسیک با استفاده از تابع علامت^۱ غنی شده است که مقدار آن در یک سمت ترک مثبت یک و در سمت دیگر آن منفی بوده که به صورت زیر تعریف می‌شود [۵۰]:

$$H(X) = \begin{cases} +1 & \text{if } X \in \Omega^+ \\ -1 & \text{if } X \in \Omega^- \end{cases} \quad (1-2)$$

¹ Sign Function

در صورتی یک گره^۱ با تابع علامت غنی می‌شود که المانی که شامل آن گره می‌باشد توسط ترک به طور کامل قطع شده باشد. شکل ۲-۲ نمونه ای از این روش غنی سازی را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۲: مش‌بندی المان‌ها و ترک Γ_d . گره‌های مشخص شده با مربع‌های قرمز به وسیله تابع علامت غنی شده‌اند.

با استفاده از مجموعه گره‌های غنی شده با تابع علامت که آنها را با I_H نشان می‌دهیم، تقریب XFEM در این حالت برای یک مسئله دوبعدی و دینامیکی به صورت زیر نوشته می‌شود [۵۰]:

$$\mathbf{u}^h(x, y, t) = \sum_{i \in I} N_i^u(x, y) \mathbf{u}(t) + \sum_{j \in I_H} N_j^u(x, y) (H(x, y) - H(x_j, y_j)) \mathbf{a}_j(t) \quad (2-2)$$

که در رابطه فوق $\mathbf{u}$ بردار جابجایی، $\mathbf{a}$ بردار درجات آزادی اضافه مربوط به تابع علامت و N_i توابع شکل استاندارد هستند.

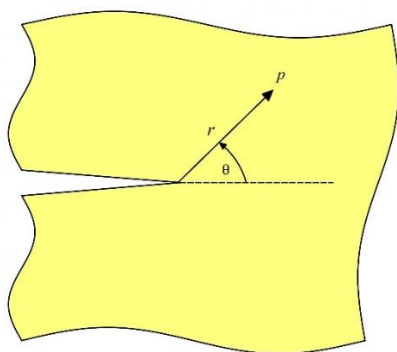
¹ Node

۲-۲-۲- غنی سازی نزدیک نوک ترک

در نزدیکی نوک ترک، میدان تنش حاصل از روابط تئوری به سمت بی نهایت میل می کند. به منظور توصیف بهتر میدان جابجایی، تنش و دما در نزدیکی نوک ترک، می توان تقریب های المان محدود کلاسیک را با توابعی غنی سازی کرد که عبارت حاکم در این روابط مهار شود. مجموعه ای از این توابع با ویژگی فوق به صورت زیر می باشند [۵۱]. برای غنی سازی میدان دما در مواد ایزوتروپیک فقط از تابع اول این مجموعه استفاده می شود:

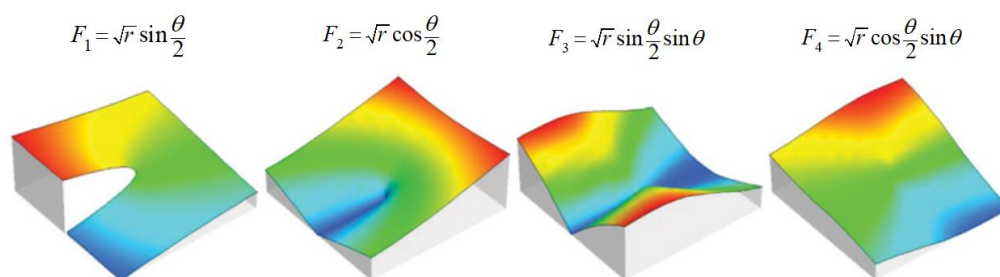
$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, & F_2(r, \theta) &= \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \\ F_3(r, \theta) &= \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, & F_4(r, \theta) &= \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \end{aligned} \quad (۳-۲)$$

در این روابط r و θ مختصات محلی قطبی نقاط نسبت به نوک ترک بوده که در شکل ۳-۲ نیز نشان داده شده است. همچنین توابع F معمولاً توابع غنی سازی نوک ترک یا نزدیک نوک^۱ نامیده می شوند که در شکل ۴-۲ نشان داده شده اند. از این شکل می توان دریافت که F_1 تنها تابع ناپیوسته در طول ترک بوده و سه تابع دیگر توابع پیوسته هستند. این واقعیت که ناپیوستگی F_1 در نوک ترک متوقف می شود، به ما اجازه مدل سازی نوک ترک در داخل المان را می دهد.



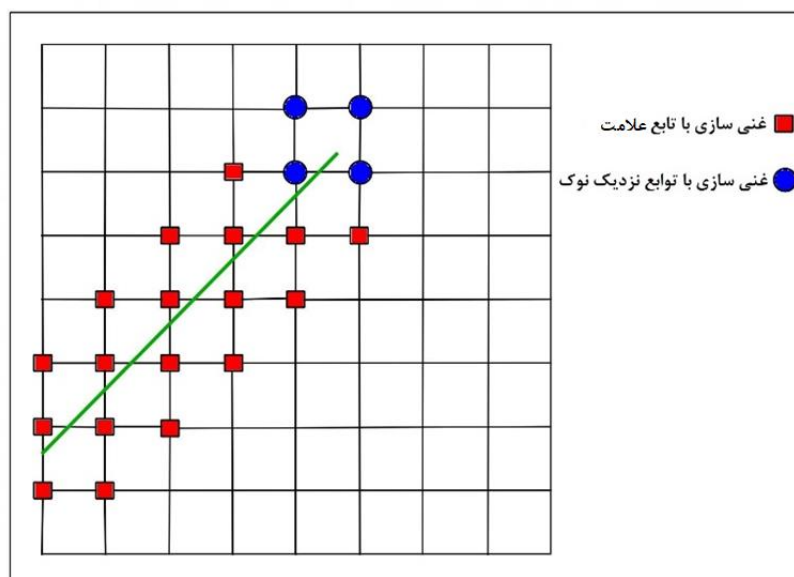
شکل ۳-۲: مختصات قطبی نوک ترک

^۱ Near-tip Functions



شکل ۲-۴: توابع نزدیک نوک [۵۰]

حال یک ترک مطابق شکل ۲-۵ در نظر بگیرید. استراتژی غنی‌سازی در اینجا به این صورت است که گره‌های المان‌هایی که توسط ترک به طور کامل قطع شده‌اند، توسط تابع علامت غنی شوند (همان‌طور که در بخش قبل توضیح داده شد) و گره‌های المان‌هایی که شامل نوک ترک می‌باشند توسط توابع نزدیک نوک غنی شوند.



شکل ۲-۵: استراتژی غنی‌سازی برای ترک مرزی

اگر مجموع تمام گره‌ها را در مش با I ، مجموع گره‌های غنی شده با تابع علامت را با I_H و مجموع گره‌های غنی شده با توابع نزدیک نوک را با I_T نشان دهیم، تقریب میدان‌های جابجایی و دما به شکل زیر خواهند شد [۵۰]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(x, y, t) &= \sum_{i \in I} N_i^u(x, y) \mathbf{u}(t) \\ &+ \sum_{j \in I_H} N_j^u(x, y) (H(x, y) - H(x_j, y_j)) \mathbf{a}_j(t) + \sum_{k \in I_T} N_k^u(x, y) \left(\sum_{m=1}^4 (F_m(x, y) - F_m(x_k, y_k)) \mathbf{b}_k^m(t) \right) \\ T^h(x, y, t) &= \sum_{i \in I} N_i^T(x, y) T(t) \\ &+ \sum_{j \in I_H} N_j^T(x, y) (H(x, y) - H(x_j, y_j)) c_j(t) + \sum_{k \in I_T} N_k^T(x, y) (F_1(x, y) - F_1(x_k, y_k)) d_k(t) \end{aligned} \quad (۴-۲)$$

در رابطه فوق N_i^T و N_i^u توابع شکل استاندارد مربوط به میدان‌های جابجایی و دما، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ به ترتیب مجموعه درجات آزادی اضافه مربوط به تابع علامت برای المان‌های قطع شده توسط ترک در میدان‌های جابجایی و دما و همچنین $\mathbf{b}$ و d نیز به ترتیب مجموعه درجات آزادی اضافه مربوط به هر یک از توابع نزدیک نوک (برای المان‌های شامل نوک ترک) در میدان‌های جابجایی و دما می‌باشند.

۲-۲-۳- انتگرال گیری عددی برای المان‌های قطع شده توسط ترک

با توجه به غنی سازی توابع شکل با استفاده از تابع علامت و توابع نزدیک نوک در روش المان محدود توسعه یافته، باید توجه ویژه‌ای به انتگرال گیری در المان‌های برش خورده توسط ترک (کاملاً برش خورده یا نیمه برش خورده) برای جلوگیری از خطا شود. همچنین استفاده از روش انتگرال گاوس منجر به تخمین ضعیفی می‌شود. برای حل این مشکل، روش مثلث دیلانسی^۱ توسط باربر و همکاران

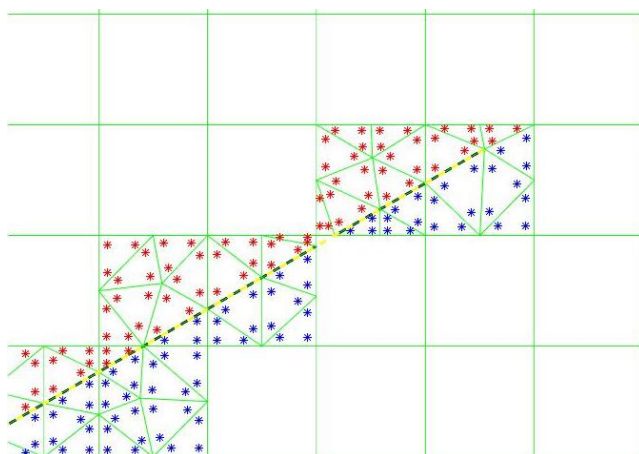
¹ Delaunay Triangulation

[۵۲] برای المان‌های برش خورده توسط ترک در نظر گرفته شده است. بنابراین برای محاسبه انتگرال عددی در نقاط گوسی، این المان‌ها باید به مثلث‌هایی تقسیم بندی شوند که دیگر هیچ کدام توسط ترک قطع نشده باشند. برای بهینه‌سازی دقت انتگرال گیری عددی از نرم افزار آباکوس^۱ برای مش بندی این المان‌های برش خورده استفاده شده و سپس داده‌های مورد نیاز برای محاسبات در نقاط گوسی وارد نرم افزار متلب شده‌اند.

مجموعه نقاط در نظر گرفته شده برای مثلث عبارتند از:

- رئوس المان
- نوک ترک
- نقاط تلاقی ترک با لبه‌های المان

پس از این فرآیند مثلث بندی که در شکل ۲-۶ نشان داده شده است، المان‌های قطع شده توسط ترک به چندین مثلث کوچک تقسیم شده که دیگر توسط ترک قطع نشده‌اند.



شکل ۲-۶: استراتژی مش بندی برای انتگرال گیری عددی در المان‌های قطع شده توسط ترک با کمک نرم افزار آباکوس (نقاط گوسی در بالا و پایین بردار ترک به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند).

¹ Abaqus

اکنون مسئله انتگرال یک تابع $f(X_1, X_2)$ را روی مساحت یک المان Ω^e در نظر بگیرید که به nt

مثلاً $T^i, i = 1, 2, \dots, nt$ تقسیم می‌شود. این انتگرال را می‌توان به صورت زیر نوشت [۵۳]:

$$\int_{\Omega^e} f(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = \sum_{i=1}^{nt} \int_{T^i} f(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \quad (۵-۲)$$

با نوشتن این انتگرال برای هر کدام از مثلث‌ها در مختصات محلی (مربوط به تک تک آنها) خواهیم

داشت [۵۳]:

$$\int_{T^i} f(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = \int_0^1 \int_0^{1-\eta_2} f(X_1, X_2) |J| d\eta_1 d\eta_2 \quad (۶-۲)$$

که در آن دترمینان ژاکوبین برابر است با $|J| = 2A^i$ که A^i مساحت هریک از مثلث‌ها T^i

می‌باشد. روش انتگرال گوس را می‌توان در شکل کلاسیک آن برای سمت راست این معادله استفاده

کرد که در نهایت خواهیم داشت [۵۳]:

$$\int_{T^i} f(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = \sum_{j=1}^{ngp} 2A^i \alpha^j f(X_1(\eta_1^j, \eta_2^j), X_2(\eta_1^j, \eta_2^j)) \quad (۷-۲)$$

که در آن ngp تعداد نقاط گوسی، α^j تابع وزنی و $\eta^j = (\eta_1^j, \eta_2^j)$ مختصات نقاط گوسی

می‌باشند.

همچنین ذکر این نکته ضروریست که برای جلوگیری از به وجود آمدن ماتریس سفتی ناهنجار^۱ در

زمان حل کردن دستگاه معادلات با استفاده از روش نیومارک در حوزه زمان، از این استراتژی برای

غنی‌سازی گره‌ها در المان‌های برش خورده توسط ترک بر اساس تعریف ناحیه اطراف یک گره استفاده

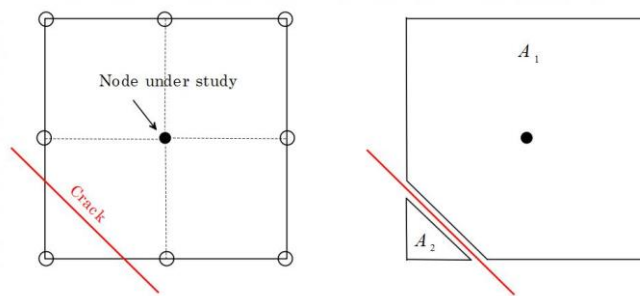
شده است. همان‌طور که در شکل ۷-۲ مشاهده می‌شود، گره تحت بررسی زمانی توسط تابع علامت

علامت غنی می‌شود که مقدار بدست آمده توسط فرمول زیر از حد تیرانس مجاز 10^{-2} بزرگتر باشد

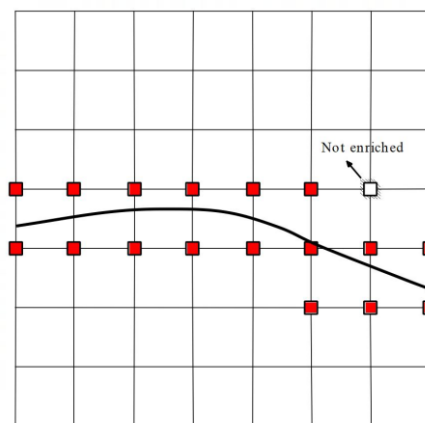
[۵۴]. مثالی در این زمینه در شکل ۸-۲ آورده شده است.

$$\frac{\min(A_1, A_2)}{A_{total}} > tol \quad (۸-۲)$$

¹ Ill Conditioned Stiffness Matrix



شکل ۷-۲: استراتژی غنی سازی یک گره در المان‌های کاملاً برش خورده توسط ترک

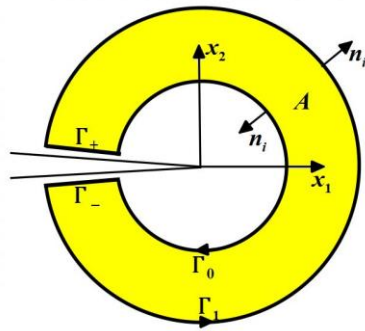


شکل ۸-۲: اصلاح غنی سازی گره‌ای در یک المان زمانی که ترک از نزدیکی نقطه گره‌ای عبور کرده است.

۲-۳- انتگرال J

در سال ۱۹۶۸ جان رایس [۵۵] پدیده شکست را با استفاده از انتگرال کانتوری مستقل از مسیر به نام انتگرال J تجزیه و تحلیل کرد. وی ثابت کرد که این انتگرال معادل است با نرخ رهایش انرژی در یک جسم الاستیک (خطی یا غیرخطی) دارای ترک. مطابق شکل ۲-۹ انتگرال J بر روی یک ناحیه کوچک احاطه شده در نوک ترک به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۲]:

$$J = \int_{\Gamma} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - (SE + KE) \delta_{1i} \right] q n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_+ + \Gamma_-} \sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q d\Gamma \quad (9-2)$$



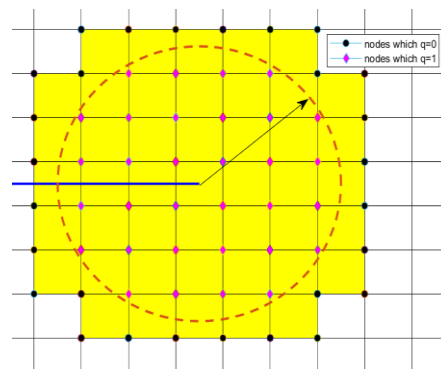
شکل ۲-۹: ناحیه انتگرال J حول نوک ترک [۲۲]

که در آن کانتور بسته به صورت $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_+ + \Gamma_- + \Gamma_0$ ، تابع وزنی، q بردار یکه عمود بر سطح، SE چگالی انرژی کرنشی^۱ و KE چگالی انرژی جنبشی^۲ بوده که مطابق زیر می‌باشند:

$$SE = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^m \quad (۱۰-۲)$$

$$KE = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \quad (۱۱-۲)$$

همانطور که در شکل ۲-۱۰ نشان داده شده است، تابع وزنی q برای تمامی گره‌های داخل دایره احاطه شده در نوک ترک دارای مقدار یک می‌باشد (گره‌های مشخص شده با رنگ قرمز در شکل).



شکل ۲-۱۰: المان‌های انتخاب شده حول نوک ترک برای محاسبه ضریب شدت تنش با استفاده از رابطه

انتگرال برهم‌کنش

^۱ Strain Energy Density

^۲ Kinetic Energy Density

در رابطه فوق کرنش الاستیک (مکانیکی) برابر $\epsilon^m = \epsilon^{total} - \epsilon^{thermal}$ می‌باشد. با فرض عاری از تنش بودن سطوح ترک و اعمال قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$J = \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - (SE + KE) \delta_{li} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA + \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial (SE + KE)}{\partial x_k} \delta_{lk} \right] q dA \quad (۱۲-۲)$$

با بسط رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$J = \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - (SE + KE) \delta_{li} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA + \int_A \left[\sigma_{ij,i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} - \left(\left(\frac{\partial (SE + KE)}{\partial x_k} \right)_{implicit} + \left(\frac{\partial (SE + KE)}{\partial x_k} \right)_{explicit} \right) \delta_{lk} \right] q dA \quad (۱۳-۲)$$

در نهایت با ساده سازی خواهیم داشت:

$$J = \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - (SE + KE) \delta_{li} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA + \int_A \left[\sigma_{ij,i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} - \left(\frac{\partial (SE + KE)}{\partial x_1} \right)_{implicit} - \left(\frac{\partial (SE + KE)}{\partial x_1} \right)_{explicit} \right] q dA \quad (۱۴-۲)$$

ترم $\left(\frac{\partial (SE + KE)}{\partial x_1} \right)_{explicit}$ مشتق صریح چگالی انرژی کرنشی و جنبشی نسبت به x_1 می‌باشد. زمانی که خواص ماده نسبت به مکان تغییر کند، از خواص باید با توجه به قانون هوک و نسبت به مکان مشتق گرفته شود [۲۲] که در اینجا این ترم به دلیل عدم وابستگی خواص به مکان نادیده گرفته می‌شود.

نرخ رهایش انرژی G^1 در مکانیک شکست الاستیک خطی برای مسائل دو بعدی دارای ترک برابر با انتگرال J بوده که در حالت مد ترکیبی مطابق زیر می‌باشد [۵۰]:

¹ Strain Energy Release Rate

$$G \equiv J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (15-2)$$

برای حالات تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای، E^* به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E^* = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} & \text{Plane Strain} \\ E & \text{Plane Stress} \end{cases} \quad (16-2)$$

۲-۳-۱- محاسبه ضرایب شدت تنش با استفاده از انتگرال برهم‌کنش^۱

یایو و همکاران [۵۶] در سال ۱۹۸۰ روش انتگرال برهم‌کنش را برای محاسبه ضرایب شدت تنش مود اول و دوم ارائه کردند.

دو حالت تنش را برای یک جسم دارای ترک در نظر می‌گیریم، حالت اصلی^۲ به صورت $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ و حالت کمکی^۳ به صورت $(\mathbf{u}^{aux}, \boldsymbol{\varepsilon}^{aux}, \boldsymbol{\sigma}^{aux})$ که ضرایب شدت تنش آنها را به ترتیب با (K_I, K_{II}) و $(K_I^{aux}, K_{II}^{aux})$ نشان می‌دهیم. انتگرال J برای جمع این دو حالت در بارگذاری درون صفحه‌ای برابر خواهد شد با [۵۰]:

$$J^{(main+aux)} = \frac{(K_I + K_I^{aux})^2 + (K_{II} + K_{II}^{aux})^2}{E^*} = J + J^{aux} + \frac{2}{E^*} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \quad (17-2)$$

بنابراین رابطه (۲-۱۴) را می‌توان بر حسب دو حالت اصلی و کمکی به صورت زیر نوشت:

¹ Interaction Integral

² Main

³ Auxiliary

$$J^{(main+aux)} = \int_A \left[\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} (u_j + u_j^{aux}) - \frac{1}{2} (\sigma_{kj} + \sigma_{kj}^{aux}) (\varepsilon_{kj} + \varepsilon_{kj}^{aux}) \delta_{1i} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA +$$

$$- \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial t} (u_k + u_k^{aux})^2 \delta_{1i}$$

$$\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux}) \frac{\partial}{\partial x_1} (u_j + u_j^{aux}) + (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_1} (u_j + u_j^{aux}) \right] q dA$$

$$- \left(\frac{\partial (SE + KE)}{\partial x_1} \right)^{main+aux} \quad (18-2)$$

با بسط عبارت فوق به صورت زیر خواهیم داشت:

$$J^{(main+aux)} = J^{(main)} + J^{(aux)} + M^{(main,aux)} \quad (19-2)$$

در رابطه فوق M انتگرال برهم‌کنش نامیده شده که برای دو حالت اصلی و کمکی ذکر شده در قبل مطابق زیر تعریف می‌شود [۲۲]:

$$M^{(main,aux)} = \int_A \left[\sigma_{ij} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1} - \frac{1}{2} \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^{aux} \delta_{1i} - \frac{1}{2} \sigma_{kj}^{aux} \varepsilon_{kj} \delta_{1i} - \rho \dot{u}_k \dot{u}_k^{aux} \delta_{1i} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA +$$

$$\left[\sigma_{ij,i} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij,i}^{aux} u_{j,1} + \sigma_{ij} u_{j,i1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,i1} - \left(\frac{\partial (SE + KE)}{\partial x_1} \right)^{main+aux} \right] q dA \quad (20-2)$$

با نوشتن چگالی انرژی کرنشی و چگالی انرژی جنبشی انتگرال برهم‌کنش (SE^M و KE^M) به صورت زیر خواهیم داشت:

$$SE^M = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} = (2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \beta T \delta_{ij}) \varepsilon_{ij}^{aux} \quad (21-2)$$

$$KE^M = \rho \dot{u}_i \dot{u}_i^{aux} \quad (22-2)$$

مشتق ضمنی دو عبارت فوق نسبت به x_1 به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial SE^M}{\partial x_1} = \frac{\partial SE^M}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} + \frac{\partial SE^M}{\partial \varepsilon_{ij}^{aux}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{aux}}{\partial x_1} + \frac{\partial SE^M}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_1} = \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,1} + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{aux} + \frac{\partial SE^M}{\partial T} T_{,1}$$

$$(23-2)$$

$$\frac{\partial SE^M}{\partial T} = 2 \frac{\partial \mu}{\partial T} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} - \frac{\partial \beta}{\partial T} T \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} - \beta \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux}$$

$$\frac{\partial KE^M}{\partial x_1} = \frac{\partial KE^M}{\partial \dot{u}_i} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_1} + \frac{\partial KE^M}{\partial \dot{u}^{aux}} \frac{\partial \dot{u}_i^{aux}}{\partial x_1} = \rho \dot{u}_i^{aux} \dot{u}_{i,1} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1}^{aux} \quad (24-2)$$

همچنین می دانیم [۵۳]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} u_{j,i1}^{aux} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{aux} \\ \sigma_{ij}^{aux} u_{j,i1} = \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,1} \end{cases}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \Rightarrow \sigma_{ij,1} = C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl,1} \quad (25-2)$$

$$\sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^{aux} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl,1} \varepsilon_{ij}^{aux} = \sigma_{kl}^{aux} \varepsilon_{kl,1}$$

از ترم $C_{ijkl,1}$ که بیانگر مشتق مکانی مولفه های تانسور سفتی می باشد، صرف نظر می شود. در نهایت با قرار دادن روابط بدست آمده در بالا در معادله (۲۰-۲) خواهیم داشت:

$$M^{(main,aux)} = \int_A \left[\sigma_{ij} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1} - SE^M - \rho \dot{u}_k \dot{u}_k^{aux} \delta_{1i} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA + \left[\begin{aligned} & \rho \ddot{u}_j \left(\sigma_{ij,i} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij,i}^{aux} u_{j,1} + \sigma_{ij} u_{j,i1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,i1} \right) \\ & - \left(\underbrace{\sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,1}}_{\sigma_{ij}^{aux} u_{j,i1}^{aux}} + \underbrace{\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{aux}}_{\sigma_{ij} u_{j,i1}^{aux}} + \frac{\partial SE^M}{\partial T} + \rho \dot{u}_i^{aux} \dot{u}_{i,1} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1}^{aux} \right) \end{aligned} \right] q dA \quad (26-2)$$

به علت وجود ترک ساکن ترم های شامل $\dot{\mathbf{u}}^{aux}$ (مشتق زمانی میدان کمکی جابجایی در نوک ترک) از رابطه فوق حذف می شوند. ترم $\sigma_{ij,i}^{aux}$ نیز که معرف مشتق مکانی از مولفه های کمکی میدان تنش می باشد، با توجه به عدم وابستگی خواص ماده به مکان از رابطه فوق حذف می شود. در نهایت با اعمال موارد فوق در رابطه (۲۶-۲) و ساده سازی آن، فرمول نهایی انتگرال برهم کنش به صورت زیر بدست می آید:

$$M^{(main,aux)} = \int_A \left[\sigma_{ij} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1} - SE^M \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA + \left[\rho \ddot{u}_j u_{j,1}^{aux} - \frac{\partial SE^M}{\partial T} \right] q dA \quad (27-2)$$

با توجه به روابط (۱۷-۲)، (۱۹-۲) و (۲۷-۲) خواهیم داشت:

$$M^{(main,aux)} = \frac{2}{E^*} (K_I K_I^{aux} + K_{II}^{aux} K_{II}) \quad (28-2)$$

اگر حالت کمکی به عنوان مود خالص اول ($K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0$) در نظر گرفته شود، ضریب شدت تنش مود اول با استفاده از رابطه (۲۸-۲) به صورت زیر محاسبه می شود [۵۰]:

$$K_I = \frac{E^*}{2} M_{\text{mode I}} \quad (29-2)$$

و همچنین اگر حالت کمکی به عنوان مود خالص دوم $(K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1)$ در نظر گرفته شود، ضریب شدت تنش مود دوم با استفاده از رابطه (28-2) به صورت زیر محاسبه می‌شود [50]:

$$K_{II} = \frac{E^*}{2} M_{\text{mode II}} \quad (30-2)$$

لازم به ذکر است چون در این پایان نامه خواص ماده تابعی از دما می‌باشند، مقدار E^* در روابط فوق در دمای نوک ترک محاسبه می‌شود.

فصل سوم: روابط حاکم

۳-۱- مقدمه

قوانین اساسی ترموالاستیسیته، مشابه قوانین نظریه الاستیسیته، شامل معادلات حرکت، معادلات سازگاری و ساختاری است. به طور کلی، تغییرات میدان دما در یک پیوستار الاستیک منجر به تنش‌های حرارتی می‌شود. ضمن اینکه تأثیر میدان دما در معادلات حاکم ترموالاستیسیته از طریق رابطه ساختاری است. در ترموالاستیسیته کلاسیک که قانون کلاسیک انتقال حرارت فوریه را شامل می‌شود، معادلات حاکم از نوع هذلولوی-سهموی می‌باشند [۵۷]. بدان معناست که اگر یک جسم الاستیک ایزوتروپیک و همگن در معرض شوک حرارتی قرار گیرد، اثر شوک به طور لحظه ای از نقطه اعمال شده به تمام نقاط جسم می‌رسد. از نظر فیزیکی بدان معنی است که سرعت انتشار یک اغتشاش ترموالاستیک در این حالت بی نهایت است. این فصل با استخراج معادلات حاکم بر تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی آغاز می‌شود.

۳-۲- معادلات حاکم

در این بخش، روابط اولیه ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی برای یک محیط همگن و ایزوتروپیک با فرض تغییر شکل های کوچک ارائه می‌شوند. معادله حرکت برای یک نقطه از ماده در یک محیط پیوسته در غیاب نیروهای حجمی به صورت زیر است [۵۸]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (۱-۳)$$

معادلات ساختاری برای یک محیط الاستیک خطی عبارتند از [۵۸]:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (۲-۳)$$

با استفاده از معادله ساختاری برای مواد ایزوتروپیک الاستیک خطی داریم [۵۸]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \beta T) \delta_{ij} \quad (۳-۳)$$

همچنین فرض می‌شود که تحت فرآیند بارگذاری، محیط در محدوده تغییر شکل‌های کوچک باقی می‌ماند. بنابراین روابط جابجایی-کرنش عبارتند از [۵۸]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (۴-۳)$$

با استفاده از معادلات (۱-۳)، (۳-۳) و (۴-۳) برای یک محیط پیوسته‌ی همگن و ایزوتروپیک، به معادلات حرکت (معادلات ناویر)^۱ برحسب میدان‌های دما و جابجایی می‌رسیم:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} - \beta T_{,i} = \rho \ddot{u}_i \quad (۵-۳)$$

در روابط فوق σ تانسور تنش، ε تانسور کرنش، ρ چگالی، λ و μ ثابت‌های لامه و β مدول تنش-دما می‌باشند. همچنین D تانسور سفتی مرتبه ۴ بوده که با در نظر گرفتن شرایط تقارنی و برای یک ماده الاستیک و ایزوتروپیک به فرم زیر در می‌آید [۵۳]:

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (۶-۳)$$

که با توجه به رابطه فوق و در شرایط کرنش صفحه‌ای به صورت یک تانسور مرتبه دوم و به فرم زیر خواهد شد [۵۳]:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (۷-۳)$$

استنتاج معادله انرژی وابسته به تئوری ترموالاستیسیته‌ی غیرخطی حرارتی با روابط ریاضی توان حرارتی شروع می‌شود [۵۸]:

$$Q = -q_{i,i} + R \quad (۸-۳)$$

رابطه فوق بیان می‌کند که کل حرارت ورودی به محیط برابر مجموع شار حرارتی تحمیلی در مرز سطوح و گرمای تولید شده در داخل محیط است. ازطرف دیگر با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک در بیان کلازیوس، توان حرارتی را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت [۵۸]:

¹ Navier Equations

$$\delta Q = Tds \rightarrow Q = T\dot{s} = T \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial s}{\partial T} dT$$

$$\Rightarrow Q = T \left(\frac{ds}{d\varepsilon_{ij}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{ds}{dT} \frac{dT}{dt} \right) = T \beta_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \rho c_\varepsilon \frac{dT}{dt} \quad (9-3)$$

با مساوی قراردادن معادلات (۸-۳) و (۹-۳) درغیاب حرارت تولید شده در داخل R داریم [۵۸]:

$$q_{i,i} = - \left(T \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho c_\varepsilon \dot{T} \right) \quad (10-3)$$

با جایگذاری قانون فوریه در رابطه فوق در نهایت به معادله انرژی حاکم بر تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیر خطی حرارتی برای یک محیط پیوسته‌ی همگن و ناهمسانگرد به فرم زیر می‌رسیم [۵۸]:

$$T \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho c_\varepsilon \dot{T} - k_{ij} T_{,ij} = 0 \quad (11-3)$$

در روابط بالا Q توان حرارتی یا کل حرارت ورودی، $\mathbf{q}$ بردار شار حرارتی، R منبع حرارتی، k هدایت حرارتی، c_ε گرمای ویژه در کرنش ثابت و S آنتروپی ویژه نامیده می‌شوند.

در معادله فوق ترم $T \beta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ غیرخطی حرارتی می‌باشد. اگر T را تغییرات دما نسبت به دمای مرجع T_0 در نظر بگیریم، در اینصورت دما را می‌توان به صورت $T_0 \left(1 + \frac{T}{T_0} \right)$ نوشت. در تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک خطی فرض که بر این بود که تغییرات دما نسبت به دمای مرجع T_0 کوچک بوده یعنی ترم $\frac{T}{T_0} \ll 1$ و صرفنظر می‌شود اما در حالت غیرخطی که در این پایان نامه به آن پرداخته شده است، فرض می‌شود که این ترم کوچک نبوده و دارای تاثیری هرچند کم خواهد بود.

با بازنویسی معادله (۱۱-۳) بر حسب مولفه‌های میدان جابجایی در نهایت به معادله انرژی بر پایه تئوری ترموالاستیسیته‌ی کلاسیک غیرخطی حرارتی برای یک ماده الاستیک و ایزوتروپیک به صورت زیر می‌رسیم:

$$\beta T_0 \left(1 + \frac{T}{T_0} \right) \dot{u}_{i,i} + \rho c_\varepsilon \dot{T} - k T_{,ii} = 0 \quad (12-3)$$

که در اینجا T تغییرات دما نسبت به دمای مرجع فرض می‌شود. بنابراین معادلات کوپل شده و نهایی حاکم بر مسئله بر اساس تئوری ترموالاستیسیته‌ی کلاسیک غیرخطی حرارتی برای یک ماده ایزوتروپیک

و همگن (با فرض عدم وجود نیروهای حجمی و حرارت تولید شده در داخل) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} - \beta T_{,i} - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (۱۳-۳)$$

$$\beta T_0 \left(1 + \frac{T}{T_0} \right) \dot{u}_{i,i} + \rho c_\varepsilon \dot{T} - k T_{,ii} = 0 \quad (۱۴-۳)$$

در حالت دو بعدی معادلات حاکم (۱۳-۳) و (۱۴-۳) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) u_{1,11} + \mu u_{1,22} + (\lambda + \mu) u_{2,21} - \beta T_{,1} - \rho \ddot{u}_1 = 0 \\ (\lambda + 2\mu) u_{2,22} + \mu u_{2,11} + (\lambda + \mu) u_{1,12} - \beta T_{,2} - \rho \ddot{u}_2 = 0 \end{cases} \quad (۱۵-۳)$$

$$\beta T_0 \left(1 + \frac{T}{T_0} \right) (\dot{u}_{1,1} + \dot{u}_{2,2}) + \rho c_\varepsilon \dot{T} - k (T_{,11} + T_{,22}) = 0 \quad (۱۶-۳)$$

رابطه تنش نیز به صورت زیر است [۵۸]:

$$\sigma_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} - \beta T \delta_{ij} \quad (۱۷-۳)$$

برای بی بعد سازی معادلات فوق، ابتدا پارامترهای بی بعد سازی به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$\hat{x}_i = \frac{1}{x_c} x_i; \quad \hat{t} = \frac{1}{t_c} t; \quad \hat{u}_i = \frac{1}{u_c} u_i; \quad \hat{T} = \frac{1}{T_c} T; \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{\sigma_c} \sigma \quad (۱۸-۳)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial (u_c \hat{u}_i)}{\partial (x_c \hat{x}_j)} = \frac{u_c}{x_c} \hat{u}_{i,j}; & \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} &= \frac{\partial (\hat{u}_{i,j})}{\partial (x_c \hat{x}_j)} = \frac{u_c}{x_c^2} \hat{u}_{i,jj}; \\ \frac{\partial T}{\partial x_j} &= \frac{\partial (T_c \hat{T})}{\partial (x_c \hat{x}_j)} = \frac{T_c}{x_c} \hat{T}_{,j}; & \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} &= \frac{T_c}{x_c^2} \hat{T}_{,jj}; & \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial (T_c \hat{T})}{\partial (t_c \hat{t})} = \frac{T_c}{t_c} \dot{\hat{T}}; & \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= \frac{T_c}{t_c^2} \ddot{\hat{T}} \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{\partial (u_c \hat{u}_i)}{\partial (t_c \hat{t})} = \frac{u_c}{t_c} \dot{\hat{u}}_i; & \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{u_c}{t_c^2} \ddot{\hat{u}}_i \\ \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial (\dot{\hat{u}}_i)}{\partial (x_c \hat{x}_j)} = \frac{u_c}{x_c t_c} \dot{\hat{u}}_{i,j}; & \ddot{u}_{i,j} &= \frac{u_c}{x_c t_c^2} \ddot{\hat{u}}_{i,j} \end{aligned} \quad (۱۹-۳)$$

با جایگذاری روابط فوق در معادلات حاکم (۱۵-۳) و (۱۶-۳) خواهیم داشت:

$$\rightarrow (\lambda + 2\mu) \frac{u_c}{x_c^2} \hat{u}_{1,11} + \mu \frac{u_c}{x_c^2} \hat{u}_{1,22} + (\lambda + \mu) \frac{u_c}{x_c^2} \hat{u}_{2,21} - \beta \frac{T_c}{x_c} \hat{T}_{,1} - \rho \frac{u_c}{t_c^2} \ddot{\hat{u}}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{u_c}{x_c^2} = \frac{\beta_b T_b}{l_b (\lambda_b + 2\mu_b)} \rightarrow \begin{cases} u_c = \frac{\beta_b T_b l_b}{(\lambda_b + 2\mu_b)} \\ x_c = l_b \end{cases} \\ \frac{T_c}{x_c} = \frac{T_b}{l_b} \rightarrow T_c = T_b \\ \frac{u_c}{t_c^2} = \frac{u_c}{\left(\frac{l_b}{v_b}\right)^2} \rightarrow t_c = \frac{l_b}{v_b} \end{cases} \quad (۲۰-۳)$$

$$\rightarrow (\lambda + 2\mu) \frac{\beta_b T_b}{l_b (\lambda_b + 2\mu_b)} \hat{u}_{1,11} + \mu \frac{\beta_b T_b}{l_b (\lambda_b + 2\mu_b)} \hat{u}_{1,22} + (\lambda + \mu) \frac{\beta_b T_b}{l_b (\lambda_b + 2\mu_b)} \hat{u}_{2,21}$$

$$- \beta \frac{T_b}{l_b} \hat{T}_{,1} - \rho \frac{\beta_b T_b l_b v_b^2}{l_b^2 (\lambda_b + 2\mu_b)} \ddot{\hat{u}}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{1}{\lambda_b + 2\mu_b} \lambda \\ \hat{\mu} = \frac{1}{\lambda_b + 2\mu_b} \mu \\ \hat{\rho} = \frac{v_b^2}{\lambda_b + 2\mu_b} \rho \\ \hat{\beta} = \frac{\beta}{\beta_b} \end{cases} \quad (۲۱-۳)$$

در روابط بالا و پیش رو، زیر اندیس b مربوط به خواص ماده در دمای مرجع بوده که به دلیل

وابستگی خواص ماده به دما برای روند بی بعد سازی انتخاب شده است.

$$\rightarrow \beta T_b \left(1 + \frac{T_c \hat{T}}{T_b}\right) \frac{u_c}{x_c t_c} (\dot{u}_{1,1} + \dot{u}_{2,2}) + C_\varepsilon \rho \frac{T_c}{t_c} \dot{\hat{T}} - k \frac{T_c}{x_c^2} (\hat{T}_{,11} + \hat{T}_{,22}) = 0$$

$$\beta T_b (1 + \hat{T}) \frac{\beta_b}{(\lambda_b + 2\mu_b)} (\dot{u}_{1,1} + \dot{u}_{2,2}) + \rho c_\varepsilon \dot{\hat{T}} - k \frac{1}{l_b v_b} (\hat{T}_{,11} + \hat{T}_{,22}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{\beta_b T_b}{\rho_b c_{\varepsilon b} (\lambda_b + 2\mu_b)} \beta \\ \hat{c}_\varepsilon = \frac{1}{c_{\varepsilon b}} c_\varepsilon \\ \hat{\rho} = \frac{1}{\rho_b} \rho \\ \hat{k} = \frac{1}{\rho_b c_{\varepsilon b} l_b v_b} k \end{cases} \quad (۲۲-۳)$$

که در بالا، l_b و v_b به ترتیب طول و سرعت مشخصه در دمای مرجع و κ پارامتر کوپل می‌باشد.

بنابراین فرم نهایی بی بعد شده معادلات حاکم (معادلات کوپل حرکت و انرژی) در حالت دو بعدی به

صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{cases} (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{u}_{1,11} + \hat{\mu} \hat{u}_{1,22} + (\hat{\lambda} + \hat{\mu}) \hat{u}_{2,21} - \hat{\beta} \hat{T}_{,1} - \hat{\rho} \ddot{\hat{u}}_1 = 0 \\ (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) \hat{u}_{2,22} + \hat{\mu} \hat{u}_{2,11} + (\hat{\lambda} + \hat{\mu}) \hat{u}_{1,12} - \hat{\beta} \hat{T}_{,2} - \hat{\rho} \ddot{\hat{u}}_2 = 0 \end{cases} \quad (۲۳-۳)$$

$$\kappa (1 + \hat{T}) (\dot{u}_{1,1} + \dot{u}_{2,2}) + \hat{\rho} \hat{c}_\varepsilon \dot{\hat{T}} - \hat{k} (\hat{T}_{,11} + \hat{T}_{,22}) = 0 \quad (۲۴-۳)$$

معادله ساختاری نیز در حالت بی بعد مانند روند فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} - \beta T \delta_{ij} \\ \sigma_{ij} &= \mu \frac{\beta_b T_b}{(\lambda_b + 2\mu_b)} (\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) + \lambda \frac{\beta_b T_b}{(\lambda_b + 2\mu_b)} \hat{u}_{k,k} \delta_{ij} - \beta T_b \hat{T} \delta_{ij} \\ \Rightarrow \left\{ \hat{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\beta_b T_b} \right. \end{aligned} \quad (۲۵-۳)$$

$$\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_c} \rightarrow \beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_c \hat{\alpha} = (3\lambda + 2\mu) \frac{\beta_b}{\lambda_b + 2\mu_b} \hat{\alpha} \rightarrow \{\alpha_c = \frac{\beta_b}{\lambda_b + 2\mu_b}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\lambda_b + 2\mu_b}{\beta_b} \alpha$$

(۲۶-۳)

بنابراین فرم نهایی معادله ساختاری در حالت بی بعد را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\mu}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) + \hat{\lambda}\hat{u}_{k,k}\delta_{ij} - \hat{\beta}\hat{T}\delta_{ij} \quad (۲۷-۳)$$

۳-۳- شکل ضعیف معادلات حاکم

به منظور به دست آوردن شکل ضعیف معادلات حاکم، از روش گسسته سازی گالرکین استفاده می‌شود به طوری که با انتگرال‌گیری از حاصلضرب معادلات فوق در توابع وزنی میدان‌های جابجایی $(\delta \mathbf{u})$ و دما (δT) روی دامنه تعریف شده خواهیم داشت (از اینجا به بعد برای ساده سازی از نوشتن نماد مشخص کننده بی بعد $(\wedge)$ صرفنظر می‌شود):

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} \delta u_1 \left[(\lambda + 2\mu)u_{1,11} + \mu u_{1,22} + (\lambda + \mu)u_{2,21} - \beta T_{,1} - \rho \ddot{u}_1 \right] d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta u_2 \left[(\lambda + 2\mu)u_{2,22} + \mu u_{2,11} + (\lambda + \mu)u_{1,12} - \beta T_{,2} - \rho \ddot{u}_2 \right] d\Omega &= 0 \end{aligned} \right. \quad (۲۸-۳)$$

$$\int_{\Omega} \delta T \left[\kappa(1+T)(\dot{u}_{1,1} + \dot{u}_{2,2}) + \rho c_e \dot{T} - k(T_{,11} + T_{,22}) \right] d\Omega = 0 \quad (۲۹-۳)$$

با اعمال قضیه گرین برای مسائل ناپیوسته (انتگرال‌گیری جزء به جزء)، روابط فوق را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu)\delta u_1 u_{1,1} + \mu\delta u_1 u_{1,2} + \lambda\delta u_1 u_{2,2} + \mu\delta u_1 u_{2,1} - \delta u_1 \beta T \\ & - \int_{\Omega} (\lambda + 2\mu)\delta u_1 u_{1,1} d\Omega - \int_{\Omega} \mu\delta u_1 u_{1,2} d\Omega - \int_{\Omega} \lambda\delta u_1 u_{2,2} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mu\delta u_1 u_{2,1} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_1 \beta T d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_1 \rho \ddot{u}_1 d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (۳۰-۳)$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \delta u_{2,2} u_{2,2} + \mu \delta u_{2,2} u_{2,1} + \lambda \delta u_{2,1} u_{1,1} + \mu \delta u_{2,1} u_{1,2} - \delta u_2 \beta T \\
& - \int_{\Omega} (\lambda + 2\mu) \delta u_{2,2} u_{2,2} d\Omega - \int_{\Omega} \mu \delta u_{2,1} u_{2,1} d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \delta u_{2,2} u_{1,1} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \mu \delta u_{2,1} u_{1,2} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_{2,2} \beta T d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_2 \rho \ddot{u}_2 d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{۳۱-۳}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \kappa (1+T) \delta T (\dot{u}_{1,1} + \dot{u}_{2,2}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho c_{\epsilon} \delta T \dot{T} d\Omega + \int_{\Omega} k (\delta T_{,1} T_{,1} + \delta T_{,2} T_{,2}) d\Omega - k \delta T (T_{,1} + T_{,2}) = 0 \\
& \tag{۳۲-۳}
\end{aligned}$$

با ساده سازی روابط فوق، فرم ضعیف شده معادلات حاکم در حالت بی بعد به صورت زیر در نوشته می شوند:

$$\int_{\Omega} \left((\lambda + 2\mu) \delta u_{1,1} u_{1,1} + \mu \delta u_{1,2} (u_{1,2} + u_{2,1}) \right) d\Omega = \delta u_1 (\sigma_{11} + \sigma_{12}) n_1 \tag{۳۳-۳}$$

$$\int_{\Omega} \left((\lambda + 2\mu) \delta u_{2,2} u_{2,2} + \mu \delta u_{2,1} (u_{1,2} + u_{2,1}) \right) d\Omega = \delta u_2 (\sigma_{22} + \sigma_{21}) n_2 \tag{۳۴-۳}$$

$$\int_{\Omega} (\kappa (1+T) \delta T (\dot{u}_{1,1} + \dot{u}_{2,2}) + \rho c_{\epsilon} \delta T \dot{T} + k (\delta T_{,1} T_{,1} + \delta T_{,2} T_{,2})) d\Omega = \delta T (q_1 n_1 + q_2 n_2) \tag{۳۵-۳}$$

۳-۴- گسسته سازی معادلات حاکم

برای گسسته سازی معادلات انتگرالی (۳۳-۳)، (۳۴-۳) و (۳۵-۳) از روش گسسته سازی المان محدود توسعه یافته برای اعمال غنی سازی المان های قطع شده توسط ترک و المان های شامل نوک ترک با استفاده از توابع شکل غنی شده در میدان های جابجایی و دما مطابق توضیحات بیان شده در فصل قبل استفاده می شود [۵۰]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^h(x, y, t) &= \sum_{i \in I} N_i^u(x, y) \mathbf{u}(t) \\
&+ \sum_{j \in I_H} N_j^u(x, y) (H(x, y) - H(x_j, y_j)) \mathbf{a}_j(t) + \sum_{k \in I_T} N_k^u(x, y) \left(\sum_{m=1}^4 (F_m(x, y) - F_m(x_k, y_k)) \mathbf{b}_k^m(t) \right) \\
T^h(x, y, t) &= \sum_{i \in I} N_i^T(x, y) T(t) \\
&+ \sum_{j \in I_H} N_j^T(x, y) (H(x, y) - H(x_j, y_j)) c_j(t) + \sum_{k \in I_T} N_k^T(x, y) (F_1(x, y) - F_1(x_k, y_k)) d_k(t)
\end{aligned}
\tag{۳۶-۳}$$

تقریب‌های المان محدود غنی شده فوق برای میدان‌های جابجایی و دما را می‌توان به صورت نمادی مطابق زیر نوشت:

$$\mathbf{u}^h(x, y, t) = N_u^{std}(x, y) \mathbf{u}(t) + N_u^{hev}(x, y) \mathbf{a}(t) + N_u^{tip}(x, y) \mathbf{b}(t)
\tag{۳۷-۳}$$

$$T^h(x, y, t) = N_T^{std}(x, y) T(t) + N_T^{hev}(x, y) c(t) + N_T^{tip}(x, y) d(t)$$

در روابط فوق، N_u^{std} ماتریس توابع شکل استاندارد میدان جابجایی، N_u^{hev} و N_u^{tip} به ترتیب ماتریس توابع شکل غنی شده میدان جابجایی مربوط به توابع علامت و نوک ترک می‌باشند. همچنین N_T^{std} ماتریس توابع شکل استاندارد میدان دما، N_T^{tip} و N_T^{hev} به ترتیب ماتریس توابع شکل غنی شده میدان دما مربوط به توابع علامت و نوک ترک بوده که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
N_u^{std} &= \begin{bmatrix} N_i(x, y) & 0 \\ 0 & N_i(x, y) \end{bmatrix}_{i=1..4} \\
N_u^{hev} &= \begin{bmatrix} N_j(x, y) (H(x, y) - H(x_j, y_j)) & 0 \\ 0 & N_j(x, y) (H(x, y) - H(x_j, y_j)) \end{bmatrix}_{j=1..4} \\
N_u^{tip} &= \begin{bmatrix} N_k(x, y) \left(\sum_{m=1}^4 (F_m(x, y) - F_m(x_k, y_k)) \right) & 0 \\ 0 & N_k(x, y) \left(\sum_{m=1}^4 (F_m(x, y) - F_m(x_k, y_k)) \right) \end{bmatrix}_{k=1..4}
\end{aligned}
\tag{۳۸-۳}$$

$$N_T^{\text{std}} = [N_i(x, y)]_{i=1..4}$$

$$N_T^{\text{hev}} = \left[N_j(x, y) (H(x, y) - H(x_j, y_j)) \right]_{j=1..4} \quad (39-3)$$

$$N_T^{\text{tip}} = \left[N_k(x, y) (F_1(x, y) - F_1(x_k, y_k)) \right]_{k=1..4}$$

همچنین مشتق توابع شکل استاندارد و غنی شده مربوط به هر یک از میدان‌های جابجایی و دما را نیز می‌توان به صورت ماتریسی مطابق زیر نوشت:

$$B_u^{\text{std}} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} \end{array} \right]_{i=1..4}$$

$$B_u^{\text{hev}} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_j(x, y)}{\partial x} (H(x, y) - H(x_j, y_j)) & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j(x, y)}{\partial y} (H(x, y) - H(x_j, y_j)) \\ \frac{\partial N_j(x, y)}{\partial y} (H(x, y) - H(x_j, y_j)) & \frac{\partial N_j(x, y)}{\partial x} (H(x, y) - H(x_j, y_j)) \end{array} \right]_{j=1..4}$$

$$B_u^{\text{tip}} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial x} \left(\sum_{m=1}^4 (F_m(x, y) - F_m(x_k, y_k)) \right) + N_k(x, y) \left(\sum_{m=1}^4 \frac{\partial F_m(x, y)}{\partial x} \right) & 0 \\ 0 & \dots \\ \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial y} \left(\sum_{m=1}^4 (F_m(x, y) - F_m(x_k, y_k)) \right) + N_k(x, y) \left(\sum_{m=1}^4 \frac{\partial F_m(x, y)}{\partial y} \right) & 0 \\ 0 & \dots \\ \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial y} \left(\sum_{m=1}^4 (F_m(x, y) - F_m(x_k, y_k)) \right) + N_k(x, y) \left(\sum_{m=1}^4 \frac{\partial F_m(x, y)}{\partial y} \right) & \dots \\ \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial x} \left(\sum_{m=1}^4 (F_m(x, y) - F_m(x_k, y_k)) \right) + N_k(x, y) \left(\sum_{m=1}^4 \frac{\partial F_m(x, y)}{\partial x} \right) & \dots \end{array} \right]_{k=1..4} \quad (40-3)$$

$$\mathbf{B}_T^{\text{std}} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} \end{array} \right]_{i=1..4}$$

$$\mathbf{B}_T^{\text{hev}} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial N_j(x, y)}{\partial x} (H(x, y) - H(x_j, y_j)) \\ \frac{\partial N_j(x, y)}{\partial y} (H(x, y) - H(x_j, y_j)) \end{array} \right]_{j=1..4} \quad (۴۱-۳)$$

$$\mathbf{B}_T^{\text{tip}} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial x} (F_1(x, y) - F_1(x_k, y_k)) + N_k(x, y) \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k(x, y)}{\partial y} (F_1(x, y) - F_1(x_k, y_k)) + N_k(x, y) \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \end{array} \right]_{k=1..4}$$

به طور مشابه می‌توان روابط فوق را برای توابع وزن $\delta \mathbf{u}$ و δT روی دامنه تعریف شده برای هر یک از میدان‌های جابجایی و دما به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^h(x, y, t) &= \sum_{i \in I} N_i^u(x, y) \delta \mathbf{u}(x_i, y_i) \\ &+ \sum_{j \in I_H} N_j^u(x, y) (H(x, y) - H(x_j, y_j)) \delta \mathbf{a}_j + \sum_{k \in I_T} N_k^u(x, y) \left(\sum_{m=1}^4 (F_m(x, y) - F_m(x_k, y_k)) \delta \mathbf{b}_k^m \right) \\ \delta T^h(x, y, t) &= \sum_{i \in I} N_i^T(x, y) \delta T(x_i, y_i) \\ &+ \sum_{j \in I_H} N_j^T(x, y) (H(x, y) - H(x_j, y_j)) \delta c_j + \sum_{k \in I_T} N_k^T(x, y) (F_1(x, y) - F_1(x_k, y_k)) \delta d_k \end{aligned} \quad (۴۲-۳)$$

با جایگزینی روابط بدست آمده در این بخش در فرم ضعیف معادلات حاکم بدست آمده (۳۳-۳) تا (۳۴-۳) و ساده سازی و مرتب کردن معادلات بدست آمده، می‌توان در نهایت آنها را به فرم ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\text{UU}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{C}^{TU}(T) & \mathbf{C}^{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{UU}} & \mathbf{K}^{\text{UT}} \\ 0 & \mathbf{K}^{\text{TT}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^u \\ \mathbf{F}^T \end{Bmatrix} \quad (۴۳-۳)$$

$$M^{UU} = \int_{\Omega} [N_u^{enr}]^T \rho [N_u^{enr}] d\Omega,$$

$$C^{TU}(T) = \int_{\Omega} [N_T^{enr}]^T \kappa (1+T) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} [B_u^{enr}] d\Omega, \quad C^{TT} = \int_{\Omega} [N_T^{enr}]^T \rho c_{\varepsilon} [N_T^{enr}] d\Omega,$$

$$K^{UU} = \int_{\Omega} [B_u^{enr}]^T [D] [B_u^{enr}] d\Omega, \quad K^{UT} = - \int_{\Omega} [B_u^{enr}]^T \beta \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}^T [N_T^{enr}] d\Omega,$$

$$K^{TT} = \int_{\Omega} [B_T^{enr}]^T k [B_T^{enr}] d\Omega$$

(۴۴-۳)

در روابط فوق، بالا نویسی $[...]^T$ نماد ترانپوز برای یک ماتریس و $\{F^u\}$ و $\{F^T\}$ به ترتیب بردارهای نیروهای گیره‌ای مربوط به میدان جابجایی و دما می‌باشند.

۳-۵- روش نیومارک

در سال ۱۹۵۹ نیومارک مجموعه‌ای از روش‌های گام زمانی را بر اساس معادلات زیر توسعه داد [۵۹]:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1-\gamma)\Delta t] \ddot{x}_i + (\gamma\Delta t) \ddot{x}_{i+1} \quad (۴۵-۳)$$

$$x_{i+1} = x_i + (\Delta t) \dot{x}_i + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2] \ddot{x}_i + [\beta(\Delta t)^2] \ddot{x}_{i+1} \quad (۴۶-۳)$$

در روابط فوق، پارامترهای β و γ تغییرات شتاب در هر گام زمانی را مشخص کرده و همچنین

میزان پایداری و دقت روش را تعیین می‌کنند. معمولاً مقدار $\frac{1}{2}$ برای γ و بازه‌ی $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$ برای β

در اکثر موارد می‌تواند پایداری و دقت حل را ارضا نماید. ترکیب دو معادله فوق با معادله تعادل در پایان

گام زمانی، اساس محاسبه مقادیر x_{i+1} ، $\dot{x}_{i+1}$ و $\ddot{x}_{i+1}$ را در زمان $t + 1$ با مشخص بودن مقادیر

معلوم x_i ، $\dot{x}_i$ و $\ddot{x}_i$ در زمان t تشکیل می‌دهند [۵۹].

به دلیل ظاهر شدن ترم $\ddot{x}_{i+1}$ در انتهای معادلات (۴۵-۳) و (۴۶-۳)، برای حل آن به تکرار نیاز است، اما برای سیستم‌های خطی می‌توان معادلات اصلی نیومارک را به گونه‌ای اصلاح کرد که نیازی به تکرار نداشته باشد که در ادامه به آن اشاره خواهد شد.

۳-۵-۱- سیستم‌های خطی با روش شتاب متوسط ثابت^۱

معادله حرکت برای یک سیستم غیراستاتیک به صورت زیر است:

$$M\ddot{x}_{i+1} + C\dot{x}_{i+1} + Kx_{i+1} = F_{i+1} \quad (۴۷-۳)$$

که در آن M ، C و K به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی نامیده می‌شوند. با استفاده از معادله (۴۶-۳) می‌توان $\ddot{x}_{i+1}$ را بر حسب x_{i+1} به صورت زیر نوشت [۵۹]:

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}(x_{i+1} - x_i) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_i \quad (۴۸-۳)$$

با جایگذاری رابطه فوق در معادله (۴۵-۳) می‌توان نوشت [۵۹]:

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(x_{i+1} - x_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{x}_i + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{x}_i \quad (۴۹-۳)$$

در نهایت با جایگذاری روابط (۴۸-۳) و (۴۹-۳) در معادله حرکت سیستم (۴۷-۳) در زمان $i + 1$ خواهیم داشت [۵۹]:

$$\hat{K}x_{i+1} = \hat{F}_{i+1} \quad (۵۰-۳)$$

که در آن:

$$\hat{K} = K + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}C + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}M \quad (۵۱-۳)$$

^۱ Constant Average Acceleration

$$\begin{aligned}\hat{F}_{i+1} = F_{i+1} + & \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C \right] x_i + \left[\frac{1}{\beta \Delta t} M + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) C \right] \dot{x}_i \\ & + \left[\left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) M + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) C \right] \ddot{x}_i\end{aligned}\quad (52-3)$$

با دانستن $\hat{K}$ و $\hat{F}$ از خواص سیستم، ماتریس‌های M ، C و K و همچنین حالت سیستم در زمان i که با x_i ، $\dot{x}_i$ و $\ddot{x}_i$ مشخص می‌شوند، می‌توان جابجایی را در زمان $i + 1$ به صورت زیر محاسبه کرد [۵۹]:
بنابراین زمانی که x_{i+1} از رابطه فوق بدست آمد، سرعت و شتاب در زمان $i + 1$ به ترتیب با استفاده از معادلات (۳-۴۹) و (۳-۴۸) محاسبه می‌شوند. همچنین پارامترهای γ و β برای پایداری بدون قید و شرط در روش شتاب متوسط ثابت به ترتیب برابر با مقادیر $0/5$ و $0/25$ می‌باشند [۵۹].

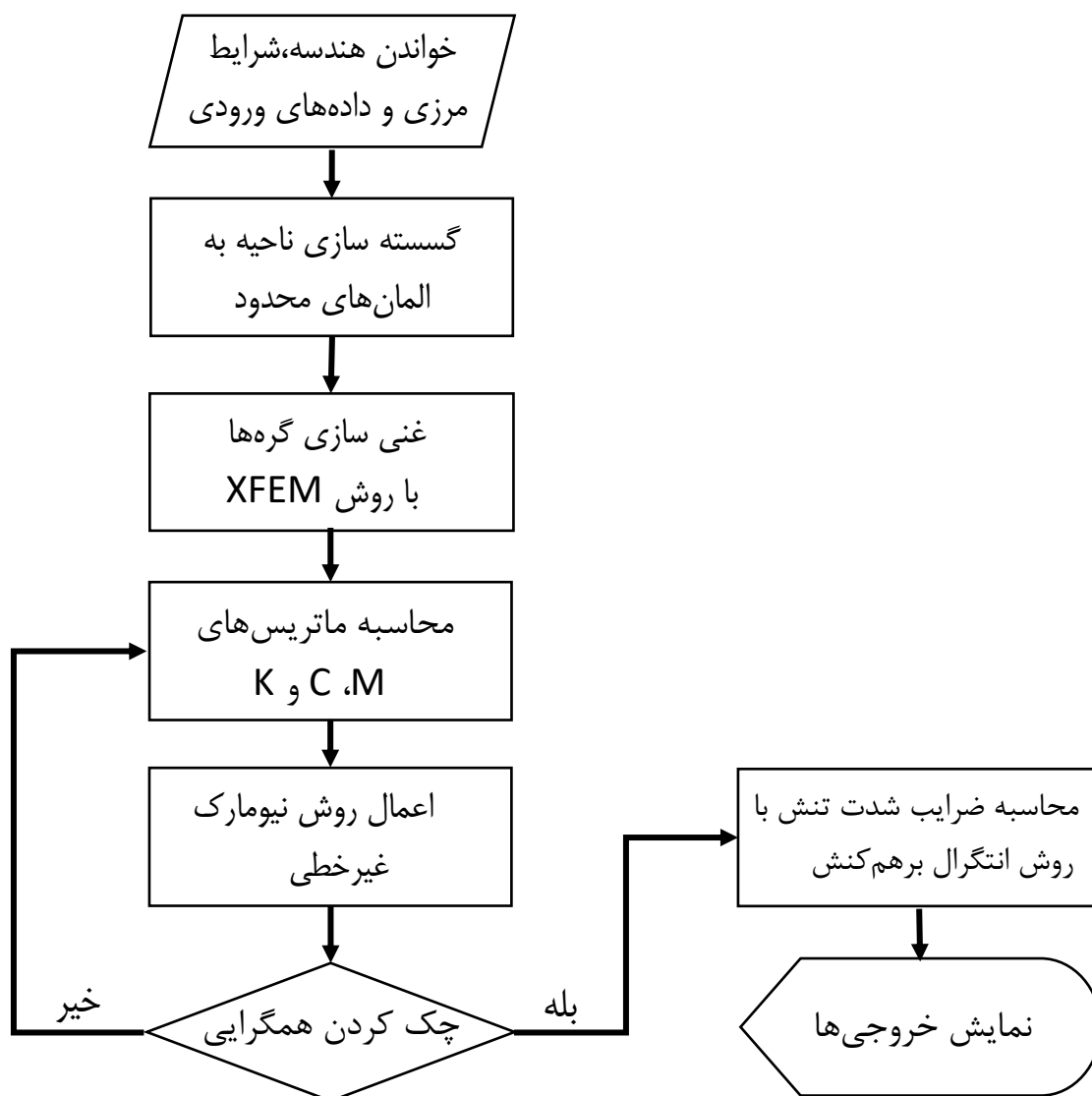
۳-۵-۲- سیستم‌های غیرخطی با روش تکرار مستقیم^۱

در این بخش، روش نیومارک که در ابتدا برای سیستم‌های خطی توضیح داده شده بود، برای سیستم‌های غیرخطی نیز شرح داده می‌شود. چون هرکدام از ماتریس‌های خواص سیستم تابعی غیرخطی نسبت به مجهول x_{i+1} می‌باشند، بنابراین در اینجا در هر گام به تکرار نیاز می‌باشد. در روش تکرار مستقیم، حل در تکرار r ام به صورت زیر می‌باشد [۶۰]:

$$\left[\hat{K} \left(\{x\}^{(r-1)} \right) \right] \{x\}^{(r)} = \{\hat{F}\} \quad (53-3)$$

که ماتریس $\hat{K}$ با استفاده از حل معلوم از تکرار $r - 1$ بدست می‌آید. در هر گام با استفاده از اعمال شرایط مرزی و حل سیستم معادلات، مقادیر مجهول x جدید را بدست آورده و خطای آن را نسبت به تکرار قبل محاسبه می‌کنیم که اگر مقدار این خطا از تolerانس مشخصی کمتر بود، این مقدار قابل قبول بوده، در غیر اینصورت دوباره سیستم معادلات را حل کرده و مقدار x جدیدی بدست می‌آوریم. بنابراین فلوچارت حل مسأله با استفاده از روش نیومارک غیرخطی تکرار مستقیم در شکل زیر آورده شده است:

¹ Direct Iteration Procedure



شکل ۳-۱: فلوچارت حل مسأله با استفاده از روش نیومارک غیرخطی تکرار مستقیم

فصل چہارم: نتایج و بحث

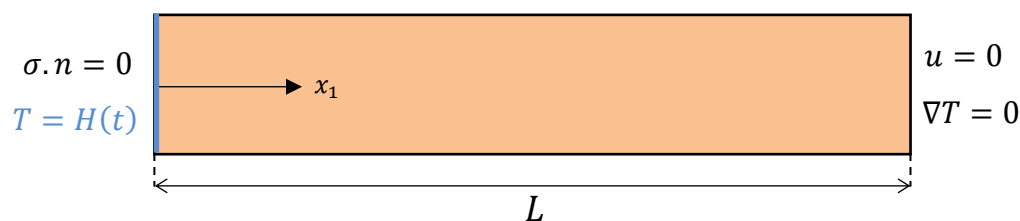
۱-۴- مقدمه

به منظور نشان دادن عملکرد روش المان محدود توسعه یافته‌ی پیشنهادی، چندین مثال به صورت عددی بررسی و تحلیل شده‌اند. مثال اول برای نشان دادن دقت و صحت عملکرد روش نیومارک برای حل مسائل در حالت غیرخطی بودن معادلات حاکم ارائه شده است. در مثال های بعدی اثر وابستگی خواص ماده تشکیل دهنده صفحه به دما و تاثیر آن در ضرایب شدت تنش و دمای نوک ترک بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالات مختلف بارگذاری و مکان ترک بررسی شده‌اند. در تمامی مثال‌های عددی ترک به صورت عایق فرض شده و از نرخ تولید حرارت داخلی و نیروهای حجمی صرف‌نظر شده است. همچنین از المان‌های چهار گره‌ای لاگرانژین با شرط کرنش صفحه‌ای استفاده شده است. ذکر این نکته ضروری است که از نوشتن نماد بی بعد ^۸ در متن مثال‌های این بخش به دلیل سادگی در نوشتن صرف‌نظر شده است.

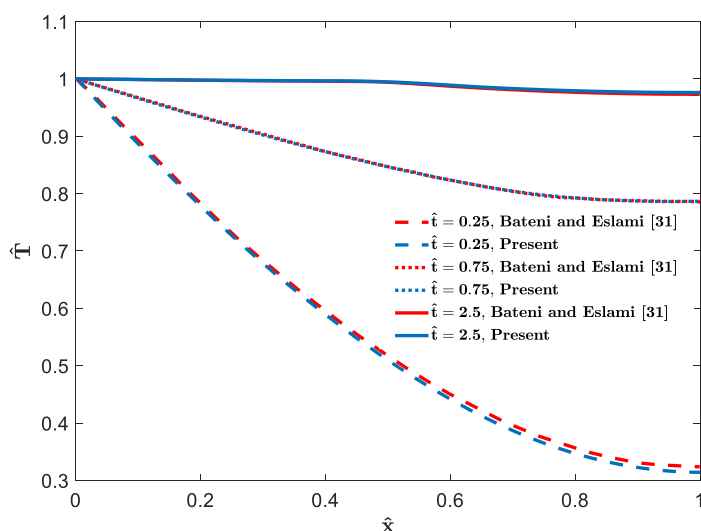
۲-۴- یک لایه تحت شوک حرارتی

اولین مثال در این بخش برای بررسی دقت و صحت کد نوشته شده در اعمال روش غیرخطی تکرار مستقیم بر روی مسائل غیرخطی بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی، انجام شده است. یک لایه یک بعدی ایزوتروپیک و همگن در فضای بی‌بعد مطابق شکل ۴-۱ در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه این مثال عددی برگرفته از مقاله باطنی و اسلامی [۳۱] می‌باشد، شرایط اولیه و مرزی و خصوصیات ماده مطابق با آن مقاله می‌باشند. با در نظر گرفتن مبدا محور X در لبه سمت چپ این لایه و دمای اولیه آن به مقدار $T_0 = 1$ در فضای بی‌بعد، ابتدا شوک حرارتی از نوع تابع پله واحد به صورت $T(t) = H(t)$ به لبه سمت چپ این لایه با فرض عاری از تنش بودن آن اعمال می‌شود. لبه سمت راست آن مقید شده و عایق حرارتی در نظر گرفته شده است. در این مثال خصوصیات ماده طوری در نظر گرفته شده‌اند که سرعت موج تنش، سرعت موج گرما و پارامتر کوپل به ترتیب ۱،

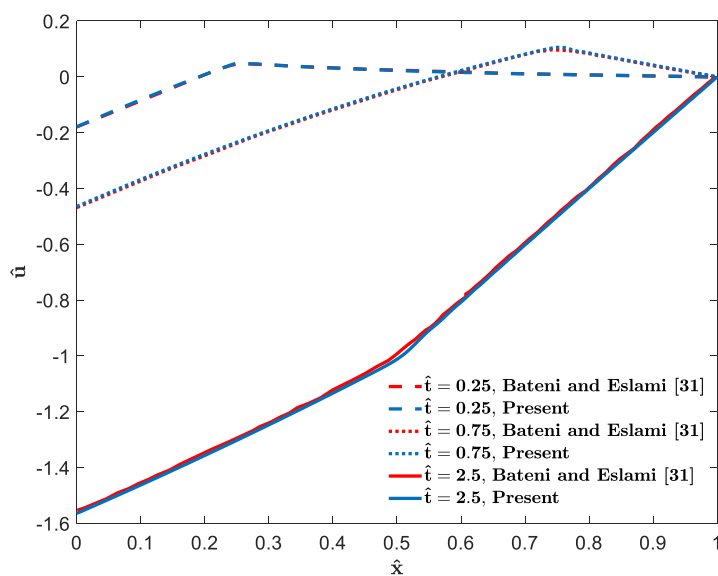
۱ و ۰/۰۵ در فضای بی‌بعد باشند. از روش نیومارک شتاب متوسط ثابت در حالت غیر خطی تکرار مستقیم برای حل معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک غیر خطی حرارتی کوپل شده استفاده شده است. در نهایت، مقادیر دما، جابجایی و تنش در طول لایه در حالت غیر خطی در سه زمان بی بعد 0.25، 0.75 و 2.5 بدست آمده و به ترتیب در شکل ۲-۴، شکل ۳-۴ و شکل ۴-۴ ارائه شده‌اند. همانگونه که مشاهده می‌شود، اختلاف کمی بین نتایج بدست آمده و نتایج مرجع [۳۱] مشاهده می‌شود که موید صحت و دقت کد نوشته شده است.



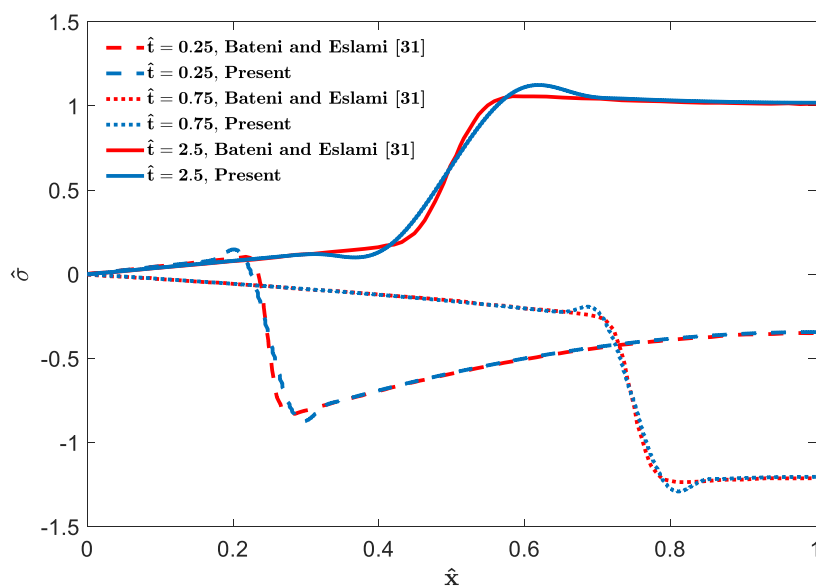
شکل ۴-۱: یک لایه تحت شوک حرارتی از نوع تابع پله واحد در لبه سمت چپ آن



شکل ۴-۲: توزیع دمای بی بعد در طول لایه بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیر خطی حرارتی در سه زمان مختلف



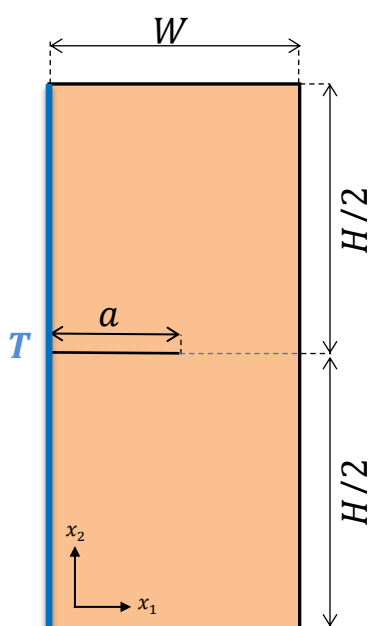
شکل ۳-۴: توزیع جابجایی بی بعد در طول لایه بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیر خطی
حرارتی در سه زمان مختلف



شکل ۴-۴: توزیع تنش بی بعد در طول لایه بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیر خطی حرارتی
در سه زمان مختلف

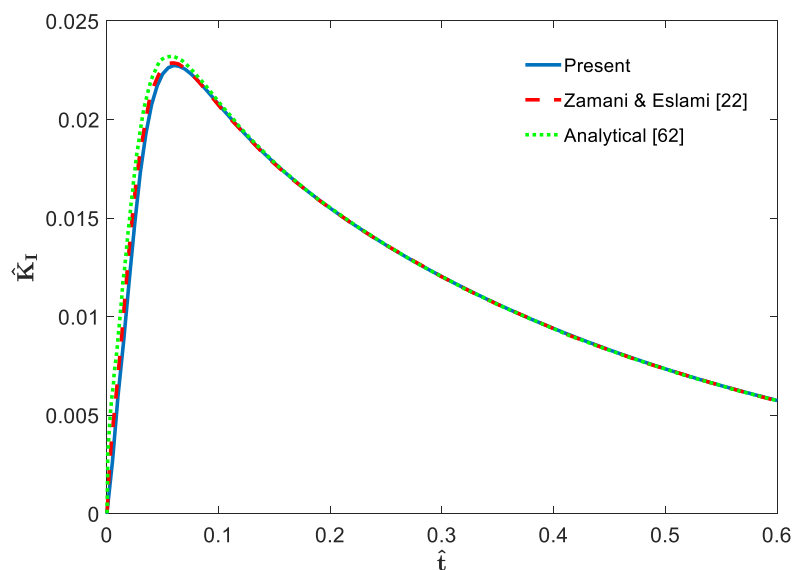
۳-۴- صفحه مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی

دومین مثال برای بررسی دقت و صحت کد نوشته شده در حالت استخراج ضریب شدت تنش حرارتی در یک مسئله دینامیکی از مقاله زمانی و اسلامی در مرجع [۲۲] انتخاب شده است. یک صفحه مستطیلی دارای ترک لبه‌ای مطابق شکل ۴-۵ در نظر گرفته شده است. با فرض برقرار بودن شرط کرنش صفحه‌ای، نسبت طول به عرض صفحه و طول ترک به طول صفحه در فضای بی‌بعد به ترتیب برابر با $\frac{W}{H} = 0.25$ و $\frac{a}{W} = 0.5$ مطابق با مرجع [۴۱] انتخاب شده‌اند. خواص ماده در این مثال عبارتند از [۱۶]: $E = 200$ (GPa), $\nu = 0.3$, $\alpha = 6.68 \times 10^{-6}$ ($\frac{1}{K}$), $k = 17$ ($\frac{W}{mK}$), $\rho = 7833$ ($\frac{Kg}{m^3}$) و $c_\epsilon = 461$ ($\frac{J}{Kg K}$). همچنین طول مشخصه و سرعت مشخصه در این مسئله به ترتیب برابر با مقادیر $l_b = 10^{-3}$ (m) و $v_b = 0.00470782$ ($\frac{m}{s}$) فرض شده‌اند.



شکل ۴-۵: صفحه مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی در سمت چپ

برای اعمال شوک حرارتی، صفحه در ابتدا در دمای اولیه $T_0 = 273 \text{ K}$ نگه داشته شده و سپس ناگهان دمای لبه سمت چپ آن تا صفر کلوین خنک می‌شود. بنابراین شوک حرارتی با مقدار $T = -1$ در فضای بی بعد به لبه سمت چپ این صفحه اعمال می‌شود. سایر لبه های این صفحه عایق حرارتی فرض شده‌اند. برای مش بندی این صفحه از ۹۷۵۱ المان ۴ گره‌ای با ابعاد یکسان استفاده شده است. برای حل مسئله در حوزه زمان، روش نیومارک شتاب متوسط ثابت استفاده شده است. همچنین ترم‌های کوپل و اینرسی نیز در حل این مسئله بر خلاف مرجع [۲۲] لحاظ شده‌اند. با استفاده از تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک خطی، ضریب شدت تنش حرارتی مود اول تا زمان بی بعد $t = 0.6$ استخراج و در شکل ۴-۶ نشان داده شده است. با مقایسه نتیجه بدست آمده با نتایج حل تحلیلی در مرجع [۶۱] و حل عددی توسط روش المان محدود توسعه یافته توسط زمانی و اسلامی در مرجع [۲۲]، تطابق خوبی در این حالت مشاهده می‌شود.



شکل ۴-۶: تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود اول در مثال دوم صحت سنجی

۴-۴- صفحه مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی متقارن

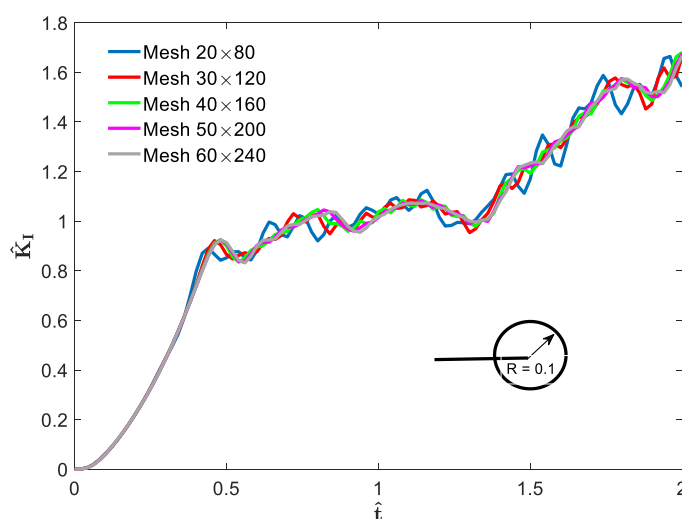
در این مثال یک صفحه مستطیلی ایزوتروپیک و همگن با نسبت طول به عرض صفحه و طول ترک به طول صفحه به ترتیب برابر با $\frac{W}{H} = 0.25$ و $\frac{a}{W} = 0.5$ در فضای بی بعد مطابق با شکل ۴-۵ (شکل مثال قبل) در نظر گرفته شده است. برای این مثال و مثال های بعد $W = 1$ ، $H = 4$ و $a = 0.5$ انتخاب شده‌اند. دمای اولیه این صفحه برابر با ۵۰۰ کلوین فرض شده است. سپس لبه سمت چپ آن (لبه ترک‌دار) به طور ناگهانی تا دمای صفر کلوین خنک شده و بنابراین شوک حرارتی با مقدار $T(t > 0) = -1$ در فضای بی بعد به لبه سمت چپ این صفحه اعمال می‌شود. در اینجا فرض شده که ضریب انتقال حرارت سطح نامحدود بوده به طوریکه شدیدترین بارگذاری ناشی از شوک حرارتی به سطح وارد می‌شود. سطوح دیگر این صفحه بدون هیچ گونه قید مکانیکی و به صورت عایق حرارتی فرض شده‌اند. شرط کرنش صفحه‌ای در حل مسئله در نظر گرفته شده است.

جنس ماده تشکیل دهنده صفحه ZrO_2 در نظر گرفته شده است که خواص آن وابسته به دما بوده و از روابط زیر تعیین می‌شوند [۶۲]:

$$\begin{aligned} k(T) &= 1.71 + 0.21 \times 10^{-3} T + 0.116 \times 10^{-6} T^2 [W / (m K)] \\ c(T) &= 274 + 0.795 T - 6.19 \times 10^{-4} T^2 + 1.71 \times 10^{-7} T^3 [J / (kg K)] \\ \alpha(T) &= 13.31 \times 10^{-6} - 18.9 \times 10^{-9} T + 12.7 \times 10^{-12} T^2 [1 / K] \\ \rho(T) &= 3657 / [1.0 + \alpha(T)(T - 300)]^3 [kg / m^3] \\ E(T) &= 132.2 - 50.3 \times 10^{-3} T - 31.4 \times 10^{-6} T^2 [GPa] \\ \nu &= 0.333 \end{aligned} \quad (۱-۳)$$

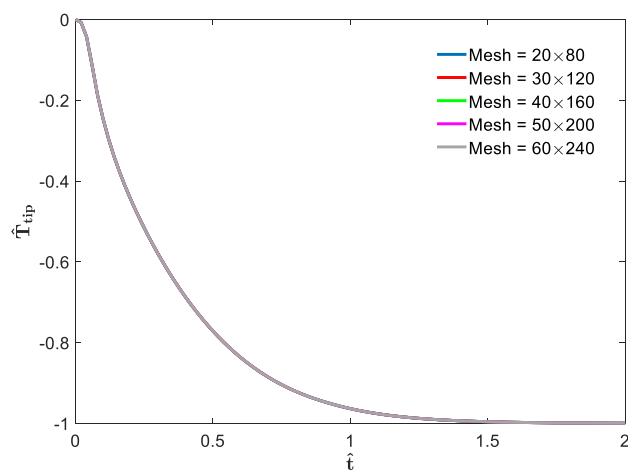
با انتخاب شعاع انتگرال بر هم کنش ثابت $R = 0.1$ و زمان انتهایی $t = 2$ با گام‌های زمانی $\Delta t = 0.02$ و استفاده از المان‌های یکسان ۴ گره‌ای، آزمون همگرایی مش برای چند مش بندی مختلف صفحه جهت انتخاب مش مناسب انجام شده که تاثیر آنها بر مقدار ضریب شدت تنش مود یک و دمای نوک ترک به ترتیب در شکل ۴-۷ و شکل ۴-۸ نشان داده شده‌اند. طبق آزمون همگرایی انجام شده، مش یکنواخت 50×200 به عنوان مش ایده‌آل انتخاب و برای این مثال و مثال‌های بعدی (که ابعاد صفحه در آنها یکسان می‌باشند) در نظر گرفته می‌شود. همچنین تاثیر شعاع‌های مختلف

ناحیه انتگرال برهم‌کنش در مقدار ضریب شدت تنش مود اول نیز در شکل ۴-۹ نشان داده شده است. شایان ذکر است که در تمامی محاسبات انجام شده، اثر ترم اینرسی و پارامتر کوپل نیز لحاظ شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای شعاع‌های انتگرال برهم‌کنش بزرگتر از $1.5h$ (که h طول مشخصه یک المان می‌باشد) تغییر خاصی در ضریب شدت تنش مشاهده نمی‌شود. در همین راستا، مقدار شعاع انتگرال برهم‌کنش $3h$ برای این مثال و مثال‌های بعدی به عنوان مقدار پیش‌فرض در حل مسائل عددی این بخش در نظر گرفته می‌شود. همچنین تاثیر گام زمانی Δt در مقدار ضریب شدت تنش نیز در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است. بعد از انتخاب مش، شعاع انتگرال برهم‌کنش و گام زمانی مناسب، مسئله فعلی با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته در دو حالت خطی و غیرخطی حرارتی زمانی که خواص وابسته به دما و مستقل از آن می‌باشند مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است.



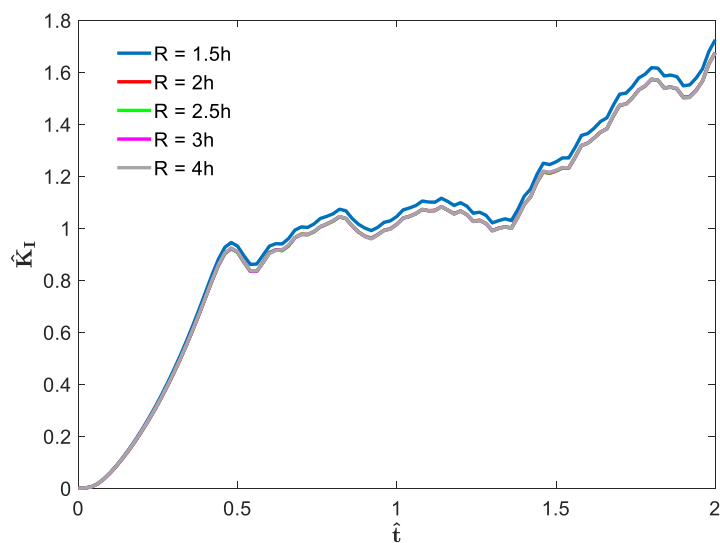
شکل ۴-۷: تاثیر اندازه‌های مختلف مش صفحه در مقدار ضریب شدت تنش مود اول بر اساس تئوری

ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت خواص وابسته به دما



شکل ۴-۸: تاثیر اندازه‌های مختلف مش صفحه در مقدار دمای نوک ترک بر اساس تئوری ترموالاستیسیته

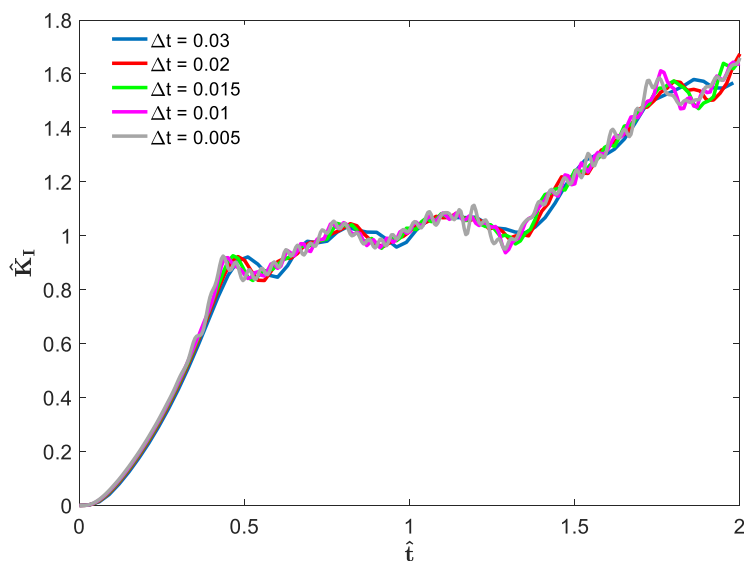
کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت خواص وابسته به دما



شکل ۴-۹: تاثیر شعاع‌های مختلف ناحیه انتگرال برهم‌کنش در مقدار ضریب شدت تنش بر اساس تئوری

ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت خواص وابسته به دما (h طول مشخصه یک المان

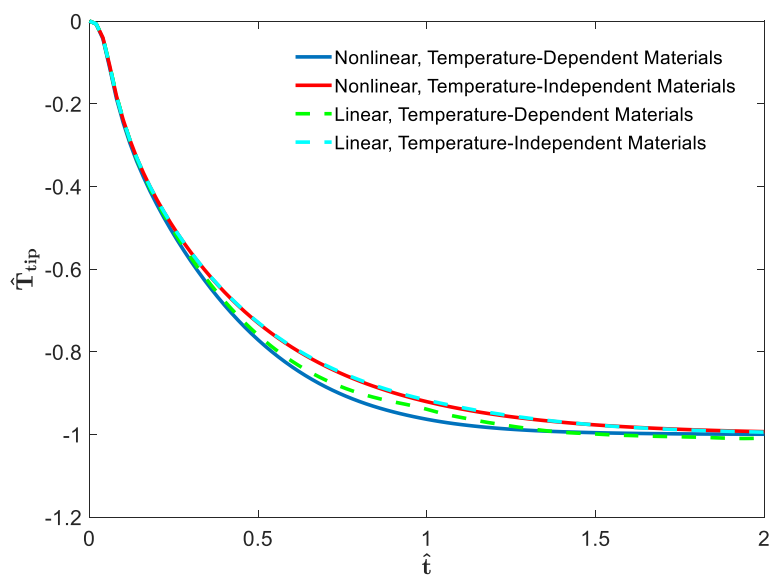
می‌باشد).



شکل ۴-۱۰: تاثیر گام زمانی Δt در مقدار ضریب شدت تنش مود اول بر اساس تئوری ترموالاستیسیته

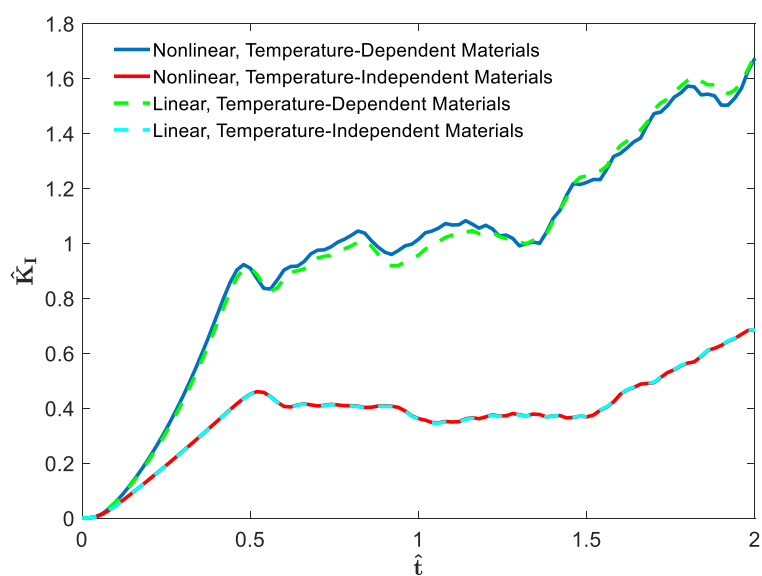
کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت خواص وابسته به دما

با توجه به نمودار تغییرات دمای نوک ترک بر حسب زمان در فضای بی‌بعد که در شکل ۴-۱۱ ترسیم شده است در حالتی غیرخطی و زمانی که خواص ماده وابسته به دما باشند، دمای نوک ترک کمی زودتر به حالت پایدار خود نزدیک می‌شود. همچنین تاثیر وابستگی خواص ماده تشکیل دهنده صفحه به دما بر روی مقدار ضریب شدت تنش مود اول بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی و مقایسه آن با حالت خطی در شکل ۴-۱۲ ارائه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، زمانی که خواص ماده مستقل از دما باشند، حالت غیرخطی با حالت خطی اختلاف ناچیزی داشته اما زمانی که خواص ماده وابسته به دما باشند، این اختلاف بیشتر می‌شود.



شکل ۴-۱۱: تاثیر وابستگی خواص ماده به دما بر روی دمای نوک ترک بر اساس تئوری ترموالاستیسیته

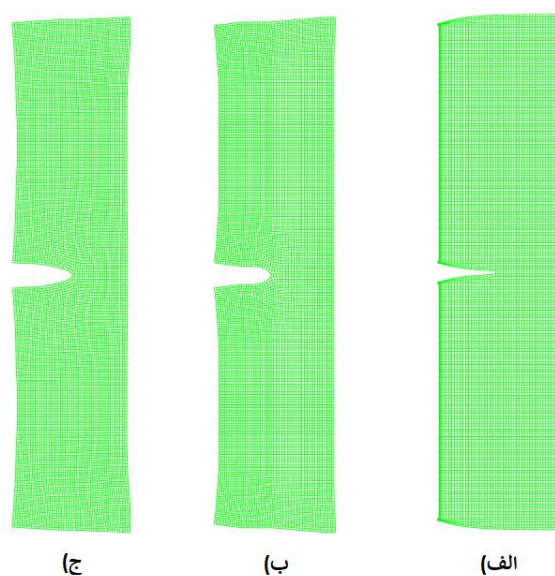
کلاسیک خطی و غیر خطی حرارتی



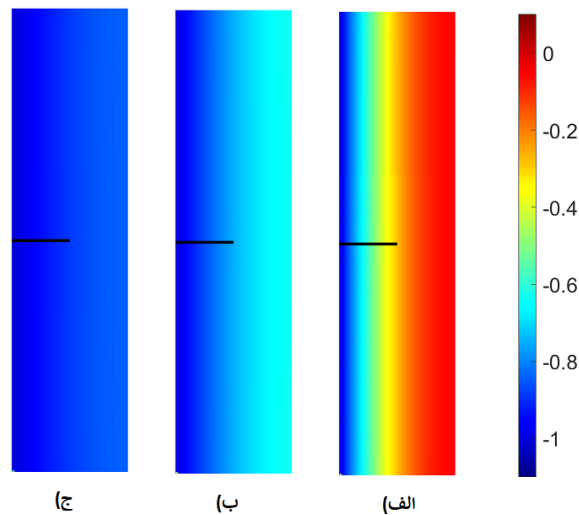
شکل ۴-۱۲: تاثیر وابستگی و عدم وابستگی خواص ماده به دما بر روی مقدار ضریب شدت تنش مود اول بر

اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک خطی و غیر خطی حرارتی

قانون هدایت حرارتی کلاسیک فوریه بیان می‌کند که سرعت انتشار حرارت در ماده نامحدود می‌باشد. بنابراین، زمانی که صفحه در معرض شوک حرارتی قرار می‌گیرد، بلافاصله تمام نقاط صفحه متوجه این اغتشاش حرارتی شده و به همین علت است که از همان ابتدا ضریب شدت تنش مود اول به طور یکنواخت شروع به افزایش کرده و بنابراین ترک کم کم باز می‌شود. با رسیدن موج الاستیک به نوک ترک نیز در این حالت، این افزایش ادامه پیدا می‌کند زیرا در این حالت، سرعت موج الاستیک نیز به دلیل وابستگی خواص ماده به دما تابعی از تغییرات دمای صفحه بوده و بنابراین با آن تغییر می‌کند. در مقابل در حالت عدم وابستگی خواص ماده به دما، روند افزایشی اولیه تا زمان $t \approx 0.5$ در جریان بوده و سپس در فاصله زمانی $0.5 < t < 1.5$ تقریباً بدون تغییر می‌ماند. علت این امر را می‌توان به اثر عبور موج الاستیک از نوک ترک تا زمان برخورد آن به لبه سمت راست و برگشت دوباره آن نسبت داد. بنابراین می‌توان گفت در این حالت، اغتشاش حرارتی اثربخشی کمتری بر روی ضریب شدت تنش مود اول دارد. برای نشان دادن بهتر چگونگی تغییرات جابجایی و دمای صفحه با زمان، شبکه تغییر شکل یافته و کانتورهای دما در سه زمان مختلف رسم و به ترتیب در شکل ۴-۱۳ و شکل ۴-۱۴ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۴-۱۳: شبکه تغییر شکل یافته در سه زمان مختلف: (الف) $t = 0.1$ (ب) $t = 0.5$ (ج) $t = 0.8$

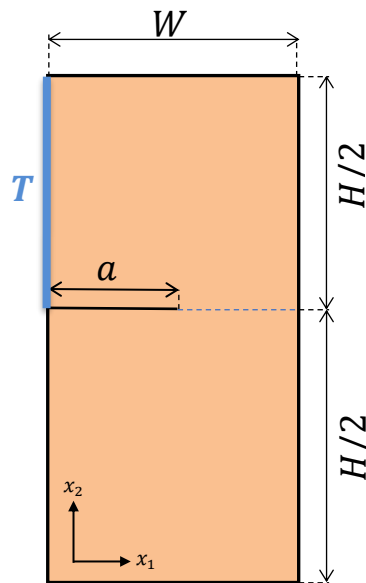


شکل ۴-۱۴: کانتور توزیع دمای صفحه در سه زمان مختلف: (الف) $t = 0.1$ (ب) $t = 0.5$ (ج) $t = 0.8$

0.8

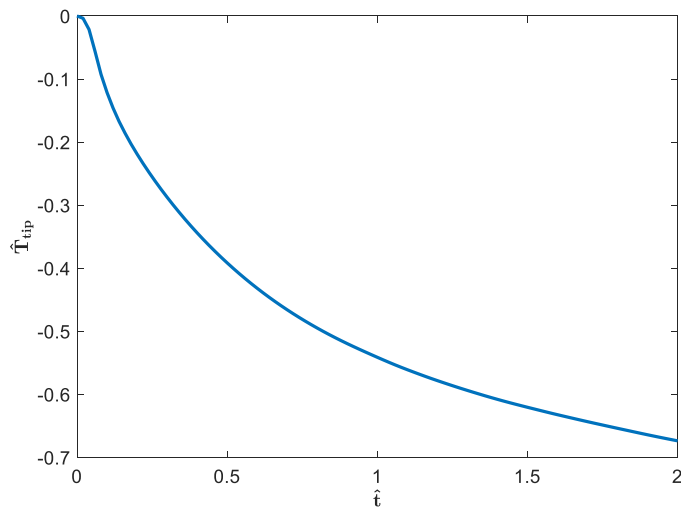
۴-۵- صفحه مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی نامتقارن

در مثال قبل به دلیل متقارن بودن بارگذاری وارده بر صفحه نسبت به مکان ترک، فقط ضریب شدت تنش مود اول وجود داشت. در این مثال با اعمال یک شوک حرارتی نامتقارن نسبت به مکان ترک و اعمال آن به نیمه بالایی صفحه، هر دو ضریب شدت تنش مود اول و دوم مخالف صفر خواهند بود. مطابق شکل ۴-۱۵ صفحه مستطیلی ایزوتروپیک و همگنی با طول و عرض بی‌بعد به ترتیب $W = 1$ و $H = 4$ دارای ترک لبه‌ای به طول بی‌بعد 0.5 در شرایط کرنش صفحه‌ای مدل‌سازی شده است.

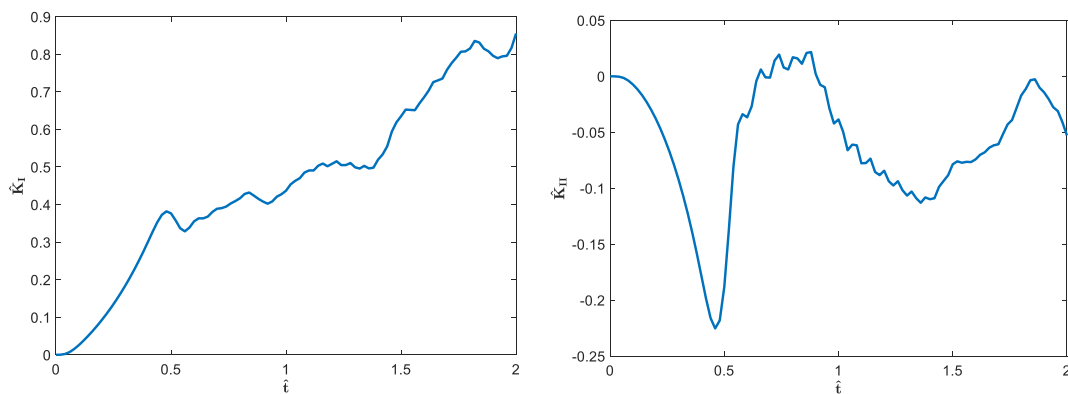


شکل ۴-۱۵: صفحه مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی نامتقارن در سمت چپ

دمای اولیه این صفحه برابر با ۵۰۰ کلوین فرض شده است. در این مثال نیمه بالایی لبه سمت چپ صفحه (نیمه بالایی آن نسبت به مکان ترک) به طور ناگهانی تا دمای صفر کلوین خنک شده که باعث ایجاد یک شوک حرارتی با مقدار بی بعد $T(t > 0) = -1$ می‌شود. خواص ماده تشکیل دهنده صفحه و سایر شرایط مرزی مطابق با مثال قبل می‌باشند. با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته و بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی و با توجه به وابستگی خواص ماده تشکیل دهنده صفحه به دما، تغییرات دمای نوک ترک بر حسب زمان در فضای بی بعد در شکل ۴-۱۶ نشان داده شده است. با مقایسه این شکل با شکل ۴-۱۱ در مثال قبل، درمی‌یابیم که دمای نوک ترک با شیب ملایم‌تری به حالت پایدار خود نزدیک می‌شود که مقدار آن تقریباً نصف مقدار تغییرات دمای نوک ترک در مثال قبل می‌باشد. دلیل آن را می‌توان به اینصورت بیان کرد که مقدار بازشدگی ترک در این حالت کمتر از حالت قبلی بوده زیرا که فقط یکی از لبه‌های ترک در این مثال جابجا می‌شود. تغییرات ضرایب شدت تنش مود اول و دوم بر حسب زمان در فضای بی بعد نیز در شکل ۴-۱۷ نشان داده شده‌اند.



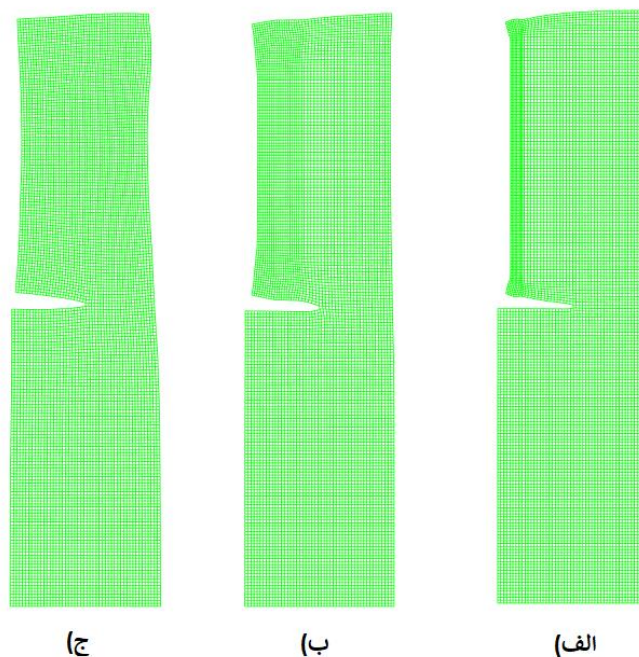
شکل ۴-۱۶: تغییرات دمای نوک ترک بر حسب زمان بر اساس تئوری ترموالاستیسیته غیرخطی حرارتی در حالت وابستگی خواص ماده به دما



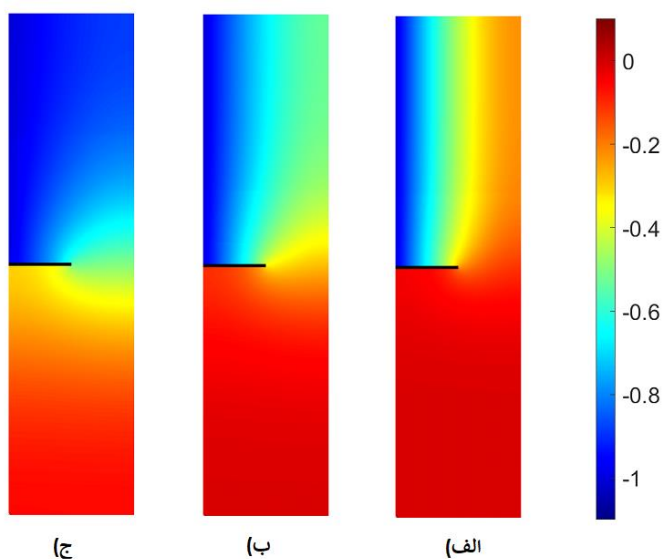
شکل ۴-۱۷: تغییرات ضرایب شدت تنش مود اول و دوم بر حسب زمان بر اساس تئوری ترموالاستیسیته غیرخطی حرارتی در حالت وابستگی خواص ماده به دما

تنها تفاوت این مثال با مثال قبل، وجود ضرایب شدت تنش مود ترکیبی (مود بازشدگی و لغزشی) به علت نوع بارگذاری وارد بر صفحه بوده که باعث تحریک آن شده است. در این حالت، همزمان با ضریب شدت تنش مود اول، ضریب شدت تنش مود دوم نیز از مقدار صفر شروع به حرکت کرده که تا

زمان $t \approx 0.5$ به نصف مقدار ضریب شدت تنش مود اول در پیک اول آن می‌رسد. بعد از این اوج گیری، مقدار آن دوباره به نزدیک صفر رسیده و در بازه زمانی $0.65 < t < 0.9$ تقریباً بدون تغییر در مقدار صفر اولیه باقی می‌ماند. سپس با اوج گیری نسبی ضریب شدت تنش مود اول در زمان $t > 0.9$ ، ضریب شدت تنش مود دوم نیز از مقدار قبلی صفر خود دوباره خیز برداشته که در زمان حدودی $t \approx 1.35$ به دومین پیک خود می‌رسد. سپس از این زمان به بعد، هر دو ضریب شدت تنش تا زمان $t \approx 1.8$ روند افزایشی پیدا می‌کنند. تغییرات جابجایی و توزیع دمای صفحه در چند زمان مختلف برای نشان دادن بهتر این روند به ترتیب در شکل ۴-۱۸ و شکل ۴-۱۹ نشان داده شده‌اند.



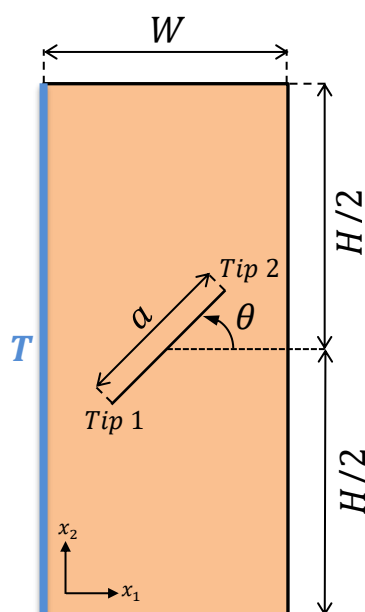
شکل ۴-۱۸: شبکه تغییر شکل یافته در سه زمان مختلف: (الف) $t = 0.2$ (ب) $t = 0.4$ (ج) $t = 1$



شکل ۴-۱۹: کانتور توزیع دمای صفحه در سه زمان مختلف: الف) $t = 0.2$ ب) $t = 0.4$ ج) $t = 1$

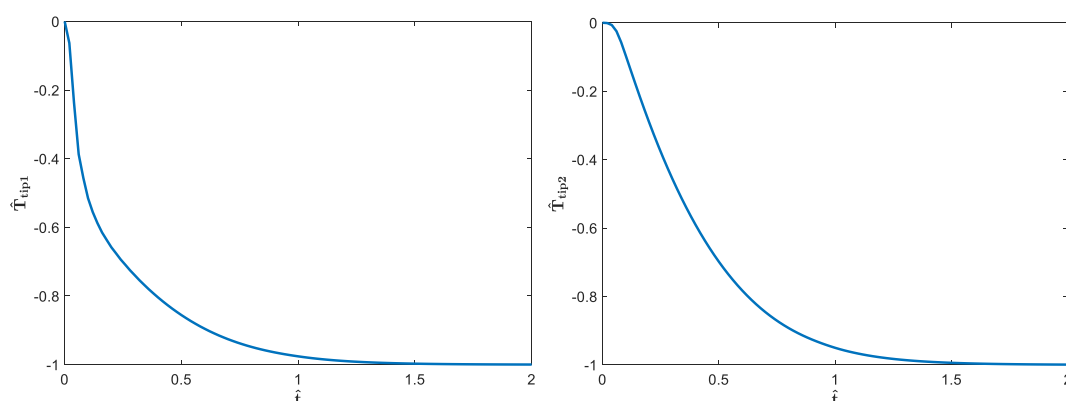
۴-۶- صفحه مستطیلی دارای ترک داخلی مایل تحت شوک حرارتی

یک صفحه ایزوتروپیک و همگن دارای یک ترک داخلی مایل با طول بی‌بعد $a = 0.5$ و با زاویه $\theta = 30^\circ$ نسبت به محور افق را مطابق با شکل ۴-۲۰ در نظر بگیرید. ابعاد صفحه، شرایط مرزی و خواص ماده تشکیل دهنده آن همانند مثال دوم فرض شده‌اند.



شکل ۴-۲۰: صفحه مستطیلی دارای ترک داخلی مایل تحت شوک حرارتی در سمت چپ

با استفاده از تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی و استفاده از روش المان محدود توسعه یافته و با توجه به وابستگی خواص ماده به دما، تغییرات زمانی دمای نوک‌های ۱ و ۲ ترک در فضای بی‌بعد در شکل ۴-۲۱ ترسیم شده‌اند. از همان ابتدا با اعمال شوک حرارتی و با توجه پدیده انتقال حرارت فوریه‌ای، دمای هر دو نوک ترک از مقدار صفر به طور یکنواخت شروع به حرکت کرده که دمای نوک ترک ۱ در ادامه شیب ملایم‌تری گرفته تا اینکه نهایتاً به حالت پایدار خود نزدیک می‌شوند.

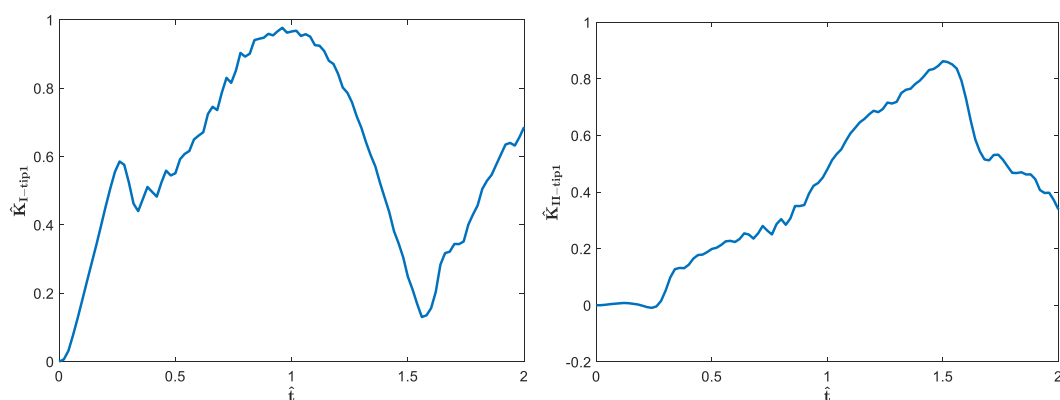


شکل ۴-۲۱: تغییرات دمای نوک ۱ و ۲ ترک مایل بر حسب زمان بر اساس تئوری ترموالاستیسیته

کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت وابستگی خواص ماده به دما

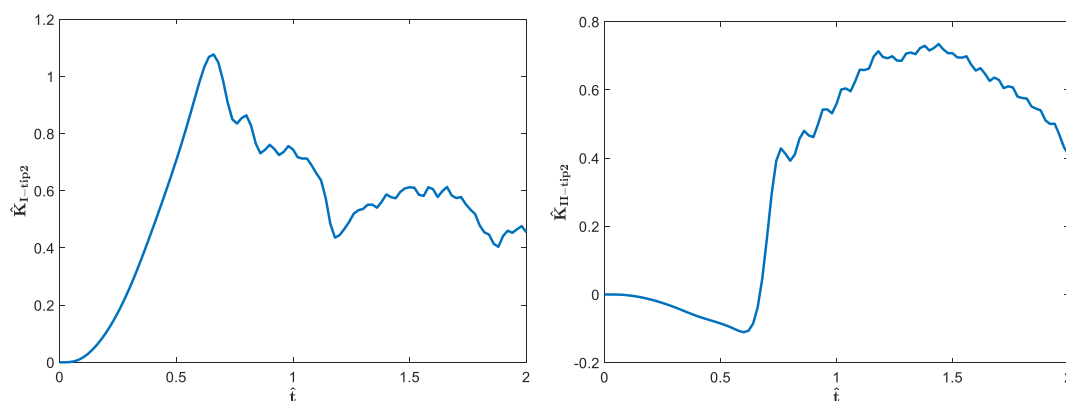
تغییرات زمانی ضرایب شدت تنش مود اول و دوم در فضای بی‌بعد برای نوک ۱ ترک (Tip 1) و نوک ۲ ترک (Tip 2) به ترتیب در شکل ۴-۲۲ و شکل ۴-۲۳ نشان داده شده‌اند. ضرایب شدت تنش مود اول بر خلاف ضرایب شدت تنش مود دوم در این حالات، از همان ابتدا از مقدار صفر با سرعت یکنواختی شروع به حرکت کرده که نشان دهنده تاثیر سرعت نامحدود انتشار امواج حرارتی بر روی آنها می‌باشد. این روند حرکتی آنها تا زمان رسیدن موج‌های الاستیک به نوک‌های ۱ و ۲ ترک به ترتیب در زمان‌های $t \approx 0.25$ و $t \approx 0.65$ (نقاط پیک در نمودارها) ادامه می‌یابد. سپس با رسیدن موج

الاستیک، ضریب شدت تنش مود اول برای نوک ۱ ترک (بر خلاف نوک ۲ ترک که بعد از آن روند کاهشی می‌گیرد) تقویت شده و با سرعت کمتری به حرکت افزایشی خود ادامه می‌دهد. ضرایب شدت تنش مود دوم برای نوک‌های ۱ و ۲ ترک بعد از رسیدن امواج الاستیک به ترتیب در زمان‌های $t \approx 0.25$ و $t \approx 0.65$ روند حرکتی خود را بعد از تغییرات کم اولیه، آغاز می‌کنند. بر این اساس، شبکه تغییر شکل یافته و توزیع دمای صفحه برای ترسیم بهتر این رفتارها به ترتیب در شکل ۴-۲۴ و شکل ۴-۲۵ ارائه شده‌اند.



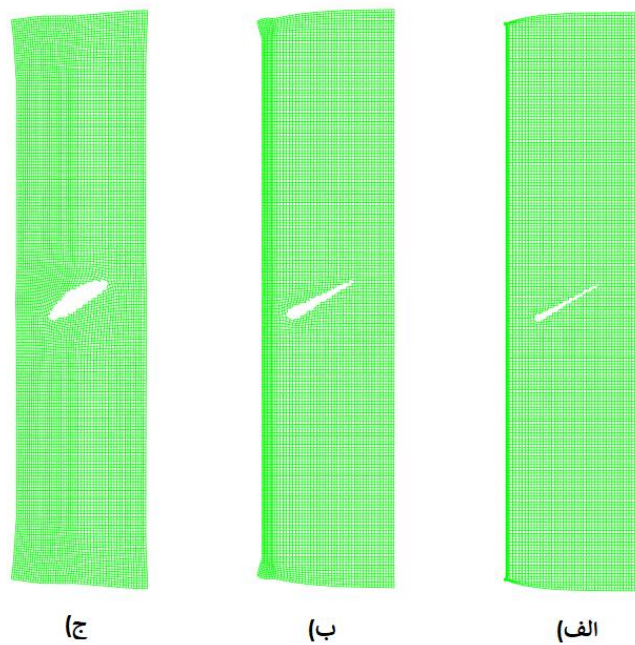
شکل ۴-۲۲: تغییرات ضریب شدت تنش مود اول و دوم بر حسب زمان برای نوک ۱ ترک بر اساس تئوری

ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت وابستگی خواص ماده به دما

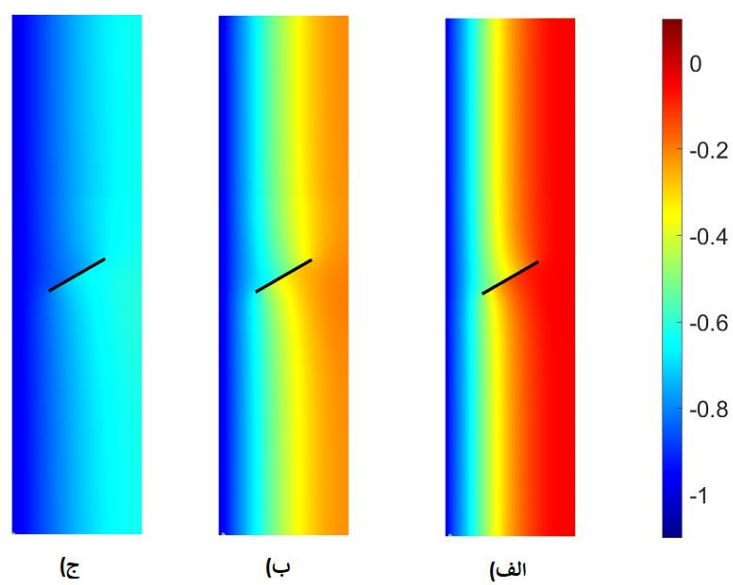


شکل ۴-۲۳: تغییرات ضریب شدت تنش مود اول و دوم بر حسب زمان برای نوک ۲ ترک بر اساس تئوری

ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در حالت وابستگی خواص ماده به دما



شکل ۴-۲۴: شبکه تغییر شکل یافته در سه زمان مختلف: الف) $t = 0.1$ ب) $t = 0.2$ ج) $t = 0.5$



شکل ۴-۲۵: کانتور توزیع دمای صفحه در سه زمان مختلف: الف) $t = 0.1$ ب) $t = 0.2$ ج) $t = 0.5$

فصل پنجم: نتیجه گیری و پیشنهادها

۵-۱- مقدمه

در این پایان نامه، ضرایب شدت تنش در یک ماده ایزوتروپیک دارای ترک (با توجه به وابسته بودن خواص ماده تشکیل دهنده صفحه به دما) با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی محاسبه و بررسی شدند. برای حل این مسئله از روش اجزا محدود توسعه یافته برای مدل سازی ترک و اعمال توابع شکل غنی سازی شده برای المان های قطع شده توسط ترک استفاده شده است.

۵-۲- نتیجه گیری

برای انجام این پایان نامه از نرم افزار پیشرفته برنامه نویسی متلب که برای محاسبات علمی و عددی بسیار مناسب می باشد، استفاده شده است. همچنین از نرم افزار المان محدود آباکوس نیز برای مش زنی دقیق المان های قطع شده توسط ترک با استفاده از المان های مثلثی ۳ گره ای با نسبت ابعادی کم که باعث ایجاد کمترین خطا در محاسبات انتگرال گیری عددی به خصوص در مسائلی که ترک دارای زاویه می باشد، استفاده شده است. بررسی و صحت سنجی نتایج بیان شده در فصل قبل نیز نشان می دهد که کد نوشته شده دارای کمترین خطا می باشد.

نتایج بدست آمده در فصل قبل به طور خلاصه در زیر آورده شده اند:

۱- وابستگی خواص ماده به دما بر روی ضرایب شدت تنش به خصوص در اثر شوک های سرمایشی

قوی به دلیل وجود اختلاف دماهای بالا در صفحه اثر زیادی دارد.

۲- تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک غیرخطی حرارتی در هنگامی که خواص ماده مستقل از دما باشند،

با حالت خطی اختلاف ناچیزی داشته اما در هنگامی که خواص ماده وابسته به دما باشند، این

اختلاف بیشتر می شود.

۵-۳- پیشنهادها

بهبتر است در صورت امکان، موارد زیر برای بررسی و مطالعات پیش رو به کار گرفته شوند:

۱- مطالعه رشد ترک تحت شوک حرارتی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک

غیرخطی حرارتی با استفاده از معیارهای رشد ترک در مواد ایزوتروپیک و استفاده از

میدانهای کمکی برای ترکهای متحرک

۲- محاسبه ضرایب شدت تنش در حالت وابستگی خواص ماده به دما برای مواد تابعی

(FGM) و ارتوتروپیک

۳- اعمال روش المان محدود توسعه یافته در حالت سه بعدی که به واقعیت نزدیک تر می باشد،

از اهمیت به مراتب بیشتری برخوردار خواهد بود.

مراجع

- [1] J. M. Duhamel, "Second memoire sur les phenomenes thermo-mecaniques," *Journal de l'École polytechnique*, vol. 15, no. 25, pp. 1-57, 1837.
- [2] F. E. Neumann, *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers: gehalten an der Universität Königsberg*. BG Teubner, 1885.
- [3] K. Singh and R. Muwal, "Thermoelastic strain and stress fields due to a spherical inclusion in an elastic half-space," *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 55, 2017.
- [4] M. A. Biot, "Thermoelasticity and irreversible thermodynamics," *Journal of applied physics*, vol. 27, no. 3, pp. 240-253, 1956.
- [5] H. W. Lord and Y. Shulman, "A generalized dynamical theory of thermoelasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 15, no. 5, pp. 299-309, 1967.
- [6] A. E. Green and K. A. Lindsay, "Thermoelasticity," *Journal of Elasticity*, vol. 2, no. 1, pp. 1-7, 1972.
- [7] A. Green and P. Naghdi, "On undamped heat waves in an elastic solid," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 15, no. 2, pp. 253-264, 1992.
- [8] A. Green and P. Naghdi, "Thermoelasticity without energy dissipation," *Journal of elasticity*, vol. 31, no. 3, pp. 189-208, 1993.
- [9] M. Gao *et al.*, "Mapping molecular motions leading to charge delocalization with ultrabright electrons," *Nature*, vol. 496, no. 7445, p. 343, 2013.
- [10] V. Kompiš *et al.*, "Parallel computational models for composites reinforced by CNT-fibres," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 36, no. 1, pp. 47-52, 2012.
- [11] A. Portela, M. Aliabadi, and D. Rooke, "The dual boundary element method: effective implementation for crack problems," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 33, no. 6, pp. 1269-1287, 1992.
- [12] N. Prasad, M. Aliabadi, and D. Rooke, "The dual boundary element method for transient thermoelastic crack problems," *International journal of solids and structures*, vol. 33, no. 19, pp. 2695-2718, 1996.
- [13] N. Prasad, M. Aliabadi, and D. Rooke, "Incremental crack growth in thermoelastic problems," *International journal of fracture*, vol. 66, no. 3, pp. R45-R50, 1994.
- [14] D. Dell'Erba, M. Aliabadi, and D. Rooke, "Dual boundary element method for three-dimensional thermoelastic crack problems," *International Journal of Fracture*, vol. 94, no. 1, pp. 89-101, 1998.
- [15] A. Ekhlakov, O. Khay, C. Zhang, J. Sladek, and V. Sladek, "A BDEM for transient thermoelastic crack problems in functionally graded materials under thermal shock," *Computational Materials Science*, vol. 57, pp. 30-37, 2012.
- [16] A. Ekhlakov, O. Khay, C. Zhang, J. Sladek, V. Sladek, and X. Gao, "Thermoelastic crack analysis in functionally graded materials and structures by a BEM," *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 35, no. 8, pp. 742-766, 2012.

- [17] P. Hosseini-Tehrani, M. Eslami, and H. Daghyani, "Dynamic crack analysis under coupled thermoelastic assumption," *Journal of applied mechanics*, vol. 68, no. 4, pp. 584-588, 2001.
- [18] P. Hosseini-Tehrani and A. R. Hosseini-Godarzi, "Dynamic crack analysis under thermal shock considering Lord–Shulman theory," *International journal of thermal sciences*, vol. 43, no. 10, pp. 1003-1010, 2004.
- [19] P. Hosseini-Tehrani, M. R. Eslami, and S. Azari, "Analysis of thermoelastic crack problems using Green–Lindsay Theory," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 29, no. 4, pp. 317-330, 2006.
- [20] P. Hosseini-Tehrani, A. Hosseini-Godarzi, and M. Tavangar, "Boundary element analysis of stress intensity factor KI in some two-dimensional dynamic thermoelastic problems," *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 29, no. 3, pp. 232-240, 2005.
- [21] E. Goli and M. Kazemi, "XFEM modeling of fracture mechanics in transversely isotropic FGMs via interaction integral method," *Procedia Materials Science*, vol. 3, pp. 1257-1262, 2014.
- [22] A. Zamani and M. Reza Eslami, "Coupled dynamical thermoelasticity of a functionally graded cracked layer," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 32, no. 10, pp. 969-985, 2009.
- [23] A. Zamani and M. R. Eslami, "Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, no. 10, pp. 1392-1404, 2010.
- [24] A. Zamani, R. Gracie, and M. R. Eslami, "Higher order tip enrichment of extended finite element method in thermoelasticity," *Computational Mechanics*, vol. 46, no. 6, pp. 851-866, 2010.
- [25] E. Goli, H. Bayesteh, and S. Mohammadi, "Mixed mode fracture analysis of adiabatic cracks in homogeneous and non-homogeneous materials in the framework of partition of unity and the path-independent interaction integral," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 131, pp. 100-127, 2014.
- [26] W. Li, F. Song, J. Li, R. Abdelmoula, and C. Jiang, "Non-Fourier effect and inertia effect analysis of a strip with an induced crack under thermal shock loading," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 162, pp. 309-323, 2016.
- [27] B. Wang and J. E. Li, "Hyperbolic heat conduction and associated transient thermal fracture for a piezoelectric material layer," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, no. 9, pp. 1415-1424, 2013.
- [28] B. Wang and J. Han, "Non-Fourier heat conduction in layered composite materials with an interface crack," *International Journal of Engineering Science*, vol. 55, pp. 66-75, 2012.
- [29] B. Wang, "A finite element computational scheme for transient and nonlinear coupling thermoelectric fields and the associated thermal stresses in thermoelectric materials," *Applied Thermal Engineering*, vol. 110, pp. 136-143, 2017.
- [30] J. Fu, A. Akbarzadeh, Z. Chen, L. Qian, and D. Pasini, "Non-Fourier heat conduction in a sandwich panel with a cracked foam core," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 102, pp. 263-273, 2016.
- [31] M. Bateni and M. Eslami, "Thermally nonlinear generalized thermoelasticity of a layer," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 40, no. 10, pp. 1320-1338, 2017.

- [32] M. Bateni and M. Eslami, "Thermally nonlinear generalized thermoelasticity: a note on the thermal boundary conditions," *Acta Mechanica*, vol. 229, no. 2, pp. 807-826, 2018.
- [33] Y. Kiani and M. Eslami, "The GDQ approach to thermally nonlinear generalized thermoelasticity of a hollow sphere," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 118, pp. 195-204, 2016.
- [34] R. Putanowicz, J. Jaśkowicz, P. Pluciński, and A. Stankiewicz, "Finite element implementation of nonlinear thermo-elasticity as typical coupling of diffusion and momentum balance," *Mechanics and Control*, vol. 32, no. 4, pp. 152--163, 2013.
- [35] J. Ignaczak, "Soliton-like solutions in a nonlinear dynamic coupled thermoelasticity," *Journal of thermal stresses*, vol. 13, no. 1, pp. 73-98, 1990.
- [36] R. B. Hetnarski and J. Ignaczak, "Soliton-like waves in a low temperature nonlinear thermoelastic solid," *International journal of engineering science*, vol. 34, no. 15, pp. 1767-1787, 1996.
- [37] N. Abo-El-Nour, A. Ghaleb, and G. Maugin, "Harmonic wave generation in nonlinear thermoelasticity," *International journal of engineering science*, vol. 32, no. 7, pp. 1103-1116, 1994.
- [38] N. R. Zarmehri, M. B. Nazari, and M. M. Rokhi, "XFEM analysis of a 2D cracked finite domain under thermal shock based on Green-Lindsay theory," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 191, pp. 286-299, 2018.

[39] م. ش. طغان, "محاسبه ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته بدون اتلاف و با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته," پایان نامه کارشناسی ارشد, دانشکده فنی مهندسی مکانیک, دانشگاه صنعتی شاهرود, دانشکده فنی مهندسی مکانیک, ۱۳۹۷.

[40] و. عصمتی, "بررسی رشد ترک در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک حرارتی با در نظر گرفتن نظریه لرد-شولمان و استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته," پایان نامه کارشناسی ارشد, دانشکده فنی مهندسی مکانیک, دانشگاه صنعتی شاهرود, دانشکده فنی مهندسی مکانیک, ۱۳۹۷.

- [41] M. B. Nazari and M. M. Rokhi, "Evaluation of SIFs for cracks under thermal impact based on Green-Naghdi theory," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, p. 102557, 2020.
- [42] K. Kokini, "Thermal shock of a cracked strip: Effect of temperature-dependent material properties," *Engineering fracture mechanics*, vol. 25, no. 2, pp. 167-176, 1986.
- [43] X. Li, T. Bai, Z. Li, and L. Liu, "Influence of the temperature on the hyper-elastic mechanical behavior of carbon black filled natural rubbers," *Mechanics of Materials*, vol. 95, pp. 136-145, 2016.
- [44] Y. Xu, P. Bhargava, and A. Zehnder, "Time and temperature dependent mechanical behavior of HFPE-II-52 polyimide at high temperature," *Mechanics of Materials*, vol. 100, pp. 86-95, 2016.
- [45] T. Cheng and W. Li, "The temperature-dependent ideal tensile strength of ZrB₂, HfB₂, and TiB₂," *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 98, no. 1, pp. 190-196, 2015.

- [46] J.-C. Han and B.-L. Wang, "Thermal shock resistance of ceramics with temperature-dependent material properties at elevated temperature," *Acta Materialia*, vol. 59, no. 4, pp. 1373-1382, 2011.
- [47] H.-L. Dai and Y.-N. Rao, "Nonlinear dynamic behavior of a long temperature-dependent FGM hollow cylinder subjected to thermal shocking," *Science and Engineering of Composite Materials*, vol. 21, no. 2, pp. 267-280, 2014.
- [48] Z. Zhuang, Z. Liu, B. Cheng, and J. Liao, *Extended Finite Element Method: Tsinghua University Press Computational Mechanics Series*. Academic Press, 2014.
- [49] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko, "A finite element method for crack growth without remeshing," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 46, no. 1, pp. 131-150, 1999.
- [50] A. R. Khoei, *Extended finite element method: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2014.
- [51] M. Fleming, Y. Chu, B. Moran, and T. Belytschko, "Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, no. 8, pp. 1483-1504, 1997.
- [52] C. B. Barber, D. P. Dobkin, D. P. Dobkin, and H. Huhdanpaa, "The quickhull algorithm for convex hulls," *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 22, no. 4, pp. 469-483, 1996.
- [53] W. F. Carroll, *A primer for finite elements in elastic structures*. John Wiley & Sons, 1998.
- [54] J. Dolbow and T. Belytschko, "Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods," *Computational mechanics*, vol. 23, no. 3, pp. 219-230, 1999.
- [55] J. R. Rice, "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks," *Journal of applied mechanics*, vol. 35, no. 2, pp. 379-386, 1968.
- [56] J. Yau, S. Wang, and H. Corten, "A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity," *Journal of applied mechanics*, vol. 47, no. 2, pp. 335-341, 1980.
- [57] J. Ignaczak and M. Ostoja-Starzewski, *Thermoelasticity with finite wave speeds*. Oxford University Press, 2010.
- [58] R. B. Hetnarski and M. R. Eslami, *Thermal stresses: advanced theory and applications*. Springer, 2009.
- [59] A. K. Chopra, *Dynamics of structures theory and*. 1995.
- [60] J. N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. OUP Oxford, 2014.
- [61] K. Y. Lee and S. Kwan-Bo, "Thermal shock stress intensity factor by Bueckner's weight function method," *Engineering fracture mechanics*, vol. 37, no. 4, pp. 799-804, 1990.
- [62] Y. Tanigawa, M. Matsumoto, and T. Akai, "Optimization of material composition to minimize thermal stresses in nonhomogeneous plate subjected to unsteady heat supply," *JSME international journal. Ser. A, Mechanics and material engineering*, vol. 40, no. 1, pp. 84-93, 1997.

Abstract

In this thesis, a homogeneous isotropic medium with temperature-dependant material properties containing a crack has been studied under a classical thermal shock. For this purpose, the coupled governing equations for the thermally nonlinear classical theory of thermoelasticity are derived. After nondimensionalizing and writing the weak form of the governing equations, the eXtended finite element method (XFEM) is utilized for their discretization. The Newmark direct iteration method is used for solving the coupled nonlinear thermoelastic equations in the time domain. Finally, the thermal stress intensity factors (SIFs) are extracted using the interaction integral method. First, two numerical examples are given to validate the written code. Then, three more numerical examples are presented to obtain the thermal SIFs and analyze them in cases where boundary conditions and crack geometry are different. The results show that the thermally nonlinear classical theory of thermoelasticity differs slightly from the linear state when the material properties are temperature-independent, but increases when the material properties are temperature-dependent.

Keywords: Stress Intensity Factor, eXtended Finite Element Method, Thermal shock, Thermal Nonlinear Classical Theory of Thermoelasticity.



Shahrood University of Technology

Faculty of Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Computation of Stress Intensity Factors in an Isotropic Cracked Medium Considering the Thermally Nonlinear Classical Theory of Thermoelasticity

By: Ali Firoozi

Supervisors:

Dr. Mohammad Bagher Nazari

Dr. Masoud Mahdizadeh Rokhi

October 2020