

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک

رساله‌ی دکتری مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم متغیر FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

نگارنده: محمد پرهیزکار یعقوبی

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد

خرداد ماه ۱۳۹۹

شماره: ۳۵/۲۹۹/۱۰۴
تاریخ: ۹۹/۴/۲۵
ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۱: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود آقای محمد پرهیزکار یعقوبی دانشجوی دکتری رشته مهندسی مکانیک به شماره دانشجویی ۹۲۱۶۳۱۵ ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۲ در تاریخ ۱۳۹۹/۰۴/۱۹ از رساله نظری ☒ عملی ☐ خود با عنوان: تحلیل ترموالاستیک پوسته های استوانه ای ضخیم متغیر FGM بیژوالکتریک به کمک نظریه ی تغییر شکل برشی مرتبه ی اول دفاع و با اخذ نمره به درجه : عالی نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ☒	ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۷ ☐
ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹-۱۵ ☐	د) مردود: کمتر از ۱۵ ☐

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر مهدی قنّاد	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر محمد شرعیات	استاد مدعو خارجی	استاد	
۳	دکتر حمیدرضا ایپکچی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۴	دکتر محمدباقر نظری	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۵	دکتر حبیب احمدی	نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده	دانشیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای محمد پرهیزکار یعقوبی آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی گردویی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: ۹۹/۴/۲۳

تقديم

این اثر تقديم شد به پدر و مادرم.

تشکر و قدردانی

پروردگارا، سپاسگزارم که به من نعمت حیات عطا فرمودی تا لذت بندگی تو را بچشم. بارالها، تو مرا از تاریکی‌های نفسم نجات ده و با نور خود روشن‌گر میسر باش.

با تشکر از پدر بزرگوار و روح مادر عزیزم که با حمایت‌های معنوی و مادی‌شان زمینه‌ی رشد و تحصیل را برای این‌جانب فراهم آوردند. قطعاً گذشتن از این مسیر پر فراز و نشیب تنها بخش کوچکی از حمایت‌های کانون گرم خانواده‌ی عزیزم می‌باشد. از صمیم قلبم از تمامی اعضای خانواده‌ام سپاسگزارم.

از استاد راهنمایم، جناب آقای دکتر قنّاد و استاد‌های گرانقدر دانشکده به‌ویژه آقای دکتر ایپک‌چی سپاسگزارم. قطعاً این‌جانب با راهنمایی‌های ایشان در این زمینه توانسته‌ام گام بردارم و به پیش بروم. در انتها از کلیه‌ی دوستان به‌ویژه آقایان دکتر حامد قارونی، مهندس پهلوانی و سرکار خانم دکتر صدیقی سپاسگزارم که در این مدت کمک‌های شایانی به این‌جانب داشته‌اند.

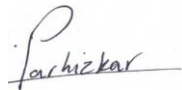
محمد پرهیزکار یعقوبی

تعهدنامه

این جانب محمد پرهیزکار یعقوبی دانشجوی دوره‌ی دکترای رشته‌ی مهندسی مکانیک دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی رساله با عنوان "تحلیل ترموالا ستیک پو سته‌های ۱ ستوانه‌ای ضخیم متغیر FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول" تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط این جانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی رساله تأثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌شود.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است؛ اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ ۱۳۹۹/۰۳/۰۴



امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پژوهش یک حل تحلیلی برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک که تحت بارگذاری مکانیکی، حرارتی و الکتریکی در لایه‌های داخلی و خارجی خود قرار دارند، ارائه می‌شود. توزیع ناهمگنی مواد به صورت توانی در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از تئوری پتانسیل الکتریکی مرتبه‌ی اول، تئوری دمای مرتبه‌ی اول و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و به کارگیری روش انرژی د دستگاه معادلات حاکم برای شرایط مرزی مختلف در دو سر استوانه استخراج می‌شود. دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ای با ضرایب متغیر است که با استفاده از روش تحلیلی تطابق مجانب‌ها زیرمجموعه‌ی تکنیک اغتشاشات، حل آن برای استوانه با دو سر گیردار و دارای پتانسیل الکتریکی و دمای مشخص انجام می‌شود. نتایج مربوط به توزیع پتانسیل الکتریکی، دما، میدان جابه‌جایی و توزیع تنش برای استوانه‌های جدار متغیر استخراج می‌شود و آثار ناهمگنی خواص بر روی رفتار الکتروترمو مکانیکی استوانه بررسی شده و با نتایج پیش‌بینی شده به روش اجزای محدود، مقایسه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که ناهمگنی خواص، اثری چشم‌گیر بر رفتار الکتروترمو مکانیکی جسم دارد و می‌توان از حل تحلیلی حاضر می‌توان به عنوان یک تابع هدف جهت بهینه سازی بهره جست و سازه‌ای با رفتار مطلوب طراحی نمود.

واژگان کلیدی: استوانه‌ی جدار متغیر، ماده‌ی ناهمگن پیزوالکتریک (FGPM)،

نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول (FSDT)، روش اجزای محدود (FEM)، تحلیل الکتروترمو مکانیکی،

لیست مقالات مستخرج از رساله

1- Mohammad Parhizkar Yaghoobi, Mehdi Ghannad; "An analytical Solution for Heat Conduction of FGM Cylinders with Varying Thickness Subjected to non-uniform Heat Flux Using a First-Order Temperature Theory and Perturbation Technique", International Communications in Heat and Mass Transfer, Accepted, 2020, (ISI).

2- Mohammad Parhizkar Yaghoobi, Mehdi Ghannad; "Electro-elastic Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Variable Thickness Cylindrical Shells by Using First-Order Electric Potential Theory and Perturbation Technique", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Accepted, 2020, (ISI).

3- Mohammad Parhizkar Yaghoobi, Mehdi Ghannad; "An Analytical Solution for Temperature Distribution and Thermal Strain of FGM Cylinders with Varying Thickness and Temperature-Dependent Properties Using Perturbation Technique", Journal of Computational Applied Mechanics (JCAMECH), Accepted, 2020, (ISC).

4- Mohammad Parhizkar Yaghoobi, Mehdi Ghannad; "Electro-Elastic Analysis of Finite Length FGPM Cylinders Subjected to Electromechanical Loading Using First-Order Electric Potential Theory", Mechanics of Advanced Composite Structures (MACS), Accepted, 2020, (ISC).

۵- محمد پرهیزکار یعقوبی، مهدی قنّاد؛ "تحلیل دوبعدی الکتروالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم پیزوالکتریک با استفاده از نظریه‌های تغییر شکل برشی و پتانسیل الکتریکی مرتبه‌ی یک"، نشریه‌ی مهندسی مکانیک امیرکبیر، پذیرفته‌شده، انتشار آنلاین از تاریخ ۲۴ آبان ۱۳۹۸، (ISC).

6- Mehdi Ghannad, Mohammad Parhizkar Yaghoobi; "2D thermo elastic behavior of a FG cylinder under thermomechanical loads using a first order temperature theory", International Journal of Pressure Vessels and Piping, Published, Vol. 149, 2017, (ISI).

مطالب

فصل ۱ مقدمه	۱
۱-۱ پیش‌گفتار	۲
۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها	۴
۳-۱ نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها	۶
۱-۳-۱ نظریه‌ی پوسته‌های نازک	۶
۲-۳-۱ نظریه‌ی پوسته‌های ضخیم	۸
۴-۱ روند بهبود مواد	۱۲
۱-۴-۱ مواد پیزوالکتریک	۱۳
۲-۴-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد FG	۱۴
۵-۱ پیشینه‌ی پژوهش	۱۷
۱-۵-۱ تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ثابت و متغیر	۱۷
۲-۵-۱ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ثابت و متغیر	۲۱
۳-۵-۱ تحلیل استوانه‌های پیزوالکتریک جدار ثابت و متغیر	۲۷
۶-۱ جمع‌بندی	۴۰
فصل ۲ معادلات حاکم	۴۳
۱-۲ پیش‌گفتار	۴۴
۲-۲ معادلات حاکم	۴۴
۱-۲-۲ فرضیات حاکم بر مسأله	۴۴

- ۲-۲-۲ به کارگیری نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول ۴۵
- ۲-۲-۳ معادلات گرادیان در مختصات استوانه‌ای ۴۸
- ۲-۲-۴ معادلات ساختاری استوانه‌ی مورد مطالعه ۵۰
- ۲-۲-۵ انرژی پتانسیل الکتروترمو مکانیکی ۵۲
- ۲-۲-۶ کار بارگذاری الکتروترمو مکانیکی ۵۴
- ۲-۲-۷ اصل کار مجازی ۵۶
- ۲-۲-۸ دستگاه معادلات حاکم ۵۷
- ۲-۳ حل تحلیلی ۶۱
- ۲-۳-۱ بی‌بعدسازی معادلات حاکم ۶۱
- ۳ فصل ۳ تحلیل حرارتی استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن ۶۵
- ۳-۱ پیش‌گفتار ۶۶
- ۳-۲ حل تحلیلی رسانش حرارتی ۶۶
- ۳-۲-۱ حل خارجی ۶۶
- ۳-۲-۲ حل داخلی در مرز پایین استوانه ($x^*=0$) ۶۷
- ۳-۲-۳ حل داخلی در مرز بالا استوانه ($x^*=1$) ۷۰
- ۳-۲-۴ حل ترکیبی ۷۲
- ۳-۳ تحلیل اجزای محدود ۷۳
- ۳-۳-۱ تحلیل عددی الکتروترمو مکانیکی ۷۳
- ۳-۳-۲ انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله ۷۴

۳-۳-۳	مدل سازی عددی	۷۵
۴-۳	مطالعه‌ی موردی	۷۶
۵-۳	جمع‌بندی	۸۹
فصل ۴	تحلیل الکتروالاستیک استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن	۹۳
۱-۴	پیش‌گفتار	۹۴
۲-۴	حل تحلیلی الکتروالاستیک	۹۴
۱-۲-۴	حل خارجی	۹۶
۲-۲-۴	حل داخلی در مرز پایین استوانه ($x^*=0$)	۹۹
۳-۲-۴	حل داخلی در مرز بالا استوانه ($x^*=1$)	۱۰۶
۴-۲-۴	حل ترکیبی	۱۰۷
۳-۴	تحلیل اجزای محدود	۱۰۸
۴-۴	مطالعه‌ی موردی	۱۰۸
۵-۴	جمع‌بندی	۱۲۶
فصل ۵	تحلیل الکتروترموالاستیک استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک	۱۲۹
۱-۵	پیش‌گفتار	۱۳۰
۲-۵	حل تحلیلی الکتروترموالاستیک	۱۳۰
۳-۵	تحلیل اجزای محدود	۱۳۱
۴-۵	مطالعه‌ی موردی	۱۳۱
۵-۵	جمع‌بندی	۱۴۹

فصل ۶ نتیجه‌گیری و پیشنهادها ۱۵۳

۶-۱ پیش‌گفتار ۱۵۴

۶-۲ بحث و نتیجه‌گیری ۱۵۵

۶-۳ پیشنهادها ۱۵۶

مراجع ۱۵۸

شکل‌ها

- شکل ۱-۱ دسته‌بندی پژوهش حاضر از دیدگاه‌های هندسی، مادی و رفتار ۶
- شکل ۲-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف ۱۳
- شکل ۳-۱ توزیع خواص در استوانه‌ی ناهمگن ۱۶
- شکل ۴-۱ توزیع خواص به‌صورت کسر حجمی در استوانه‌ی ناهمگن ۱۶
- شکل ۵-۱ آثار ناشی از تغییرات هندسه، ماده و بارگذاری بر معادلات حاکم ۴۱
- شکل ۱-۲ شماتیک مقطع استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن ۴۵
- شکل ۲-۲ مقطع استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن ۵۵
- شکل ۱-۳ نمودار همگرایی تحلیل اجزای محدود ۷۵
- شکل ۲-۳ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر تغییرات دما (حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی) ۷۸
- شکل ۳-۳ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک تغییرات دما (حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی) ۷۹
- شکل ۴-۳ توزیع دما در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$) برای پروفیل‌های مختلف بارگذاری حرارتی ۸۰
- شکل ۵-۳ توزیع شار حرارتی در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$) برای پروفیل‌های مختلف بارگذاری حرارتی ۸۲
- شکل ۶-۳ توزیع کرنش حرارتی در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$) برای پروفیل‌های مختلف بارگذاری حرارتی ۸۳
- شکل ۷-۳ توزیع دما در استوانه‌ی همگن ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$) ۸۴
- شکل ۸-۳ توزیع مؤلفه‌ی محوری شار حرارتی در استوانه‌ی همگن ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$) ۸۵

شکل ۳-۹ توزیع کرنش حرارتی در استوانه‌ی همگن ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$) ۸۵

شکل ۳-۱۰ توزیع دما در لایه‌ی داخلی استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$)

..... ۸۶

شکل ۳-۱۱ توزیع شار حرارتی در لایه‌ی میانی استوانه‌های ناهمگن ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$) ۸۶

شکل ۳-۱۲ توزیع شار حرارتی برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$) ۸۷

شکل ۳-۱۳ توزیع کرنش حرارتی در لایه‌ی خارجی استوانه‌های ناهمگن ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$)

..... ۸۸

شکل ۴-۱ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی محوری به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم

اغتشاشاتی ۱۱۰

شکل ۴-۲ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی محوری به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم

اغتشاشاتی ۱۱۰

شکل ۴-۳ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی شعاعی به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم

اغتشاشاتی ۱۱۱

شکل ۴-۴ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم

اغتشاشاتی ۱۱۱

شکل ۴-۵ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر پتانسیل الکتریکی به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم

اغتشاشاتی ۱۱۲

شکل ۴-۶ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک پتانسیل الکتریکی به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم

اغتشاشاتی ۱۱۲

شکل ۴-۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$) ۱۱۴

شکل ۴-۸ توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$) ۱۱۵

شکل ۴-۹ توزیع پتانسیل الکتریکی در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$) ۱۱۶

- شکل ۴-۱۰ تغییر شکل استوانه‌های ناهمگن بر اثر بارگذاری الکترومکانیکی ($n=1$)..... ۱۱۸
- شکل ۴-۱۱ توزیع مقدار و جهت میدان الکتریکی در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$) بر اثر بارگذاری الکترومکانیکی..... ۱۱۹
- شکل ۴-۱۲ توزیع میدان الکتریکی در داخل استوانه‌ی جدار متغیر به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف..... ۱۲۰
- شکل ۴-۱۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن در لایه‌ی میانی..... ۱۲۱
- شکل ۴-۱۴ توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن در لایه‌ی داخلی..... ۱۲۱
- شکل ۴-۱۵ توزیع تنش‌ها در استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن در لایه‌ی میانی ((a) تنش محیطی، (b) تنش برشی و (c) تنش مؤثر)..... ۱۲۳
- شکل ۴-۱۶ توزیع مؤلفه‌ی محوری میدان الکتریکی در لایه‌ی داخلی استوانه‌های ناهمگن..... ۱۲۴
- شکل ۴-۱۷ توزیع مؤلفه‌ی شعاعی میدان الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌های ناهمگن..... ۱۲۵
- شکل ۵-۱ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر تغییرات دما..... ۱۳۲
- شکل ۵-۲ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک تغییرات دما..... ۱۳۳
- شکل ۵-۳ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی محوری..... ۱۳۴
- شکل ۵-۴ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی محوری..... ۱۳۴
- شکل ۵-۵ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی شعاعی..... ۱۳۵
- شکل ۵-۶ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی..... ۱۳۵
- شکل ۵-۷ مشتق مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر پتانسیل الکتریکی..... ۱۳۶
- شکل ۵-۸ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک پتانسیل الکتریکی..... ۱۳۶
- شکل ۵-۹ توزیع دما، پتانسیل الکتریکی و جابه‌جایی در استوانه‌ی ناهمگن ($n=1$)..... ۱۳۷
- شکل ۵-۱۰ توزیع شار حرارتی، میدان الکتریکی و تغییر شکل استوانه‌ی ناهمگن ($n=1$)..... ۱۳۹
- شکل ۵-۱۱ توزیع شار حرارتی داخل استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک..... ۱۴۰

- شکل ۵-۱۲ توزیع میدان الکتریکی داخل استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک ۱۴۱
- شکل ۵-۱۳ توزیع میدان جابه‌جایی و تغییر شکل استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک
تحت بارگذاری ۱۴۲
- شکل ۵-۱۴ توزیع دما در استوانه‌ی همگن پیزوالکتریک ۱۴۳
- شکل ۵-۱۵ توزیع دما در سطح خارجی استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک ۱۴۳
- شکل ۵-۱۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی همگن پیزوالکتریک ۱۴۴
- شکل ۵-۱۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی در سطح داخلی استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک ۱۴۴
- شکل ۵-۱۸ توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی همگن پیزوالکتریک ۱۴۵
- شکل ۵-۱۹ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک ۱۴۵
- شکل ۵-۲۰ توزیع تنش‌ها در استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن در لایه‌ی میانی ((a) تنش شعاعی،
(b) تنش محیطی و (c) تنش محوری) ۱۴۶
- شکل ۵-۲۱ توزیع تنش‌ها در استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن در لایه‌ی میانی ((a) تنش برشی و
(b) تنش مؤثر) ۱۴۷
- شکل ۵-۲۲ توزیع مؤلفه‌ی محوری میدان الکتریکی در لایه‌ی داخلی استوانه‌های ناهمگن ۱۴۸
- شکل ۵-۲۳ توزیع مؤلفه‌ی شعاعی میدان الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌های ناهمگن ۱۴۸

جدول‌ها

جدول ۱-۱ پژوهش‌های انجام‌شده	۳۶
جدول ۱-۳ خواص لایه‌ی داخلی استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن	۷۷
جدول ۲-۳ پروفیل‌های مختلف بارگذاری حرارتی در سطوح داخلی و خارجی استوانه	۷۷
جدول ۳-۳ نتایج بارگذاری حرارتی ($H_i = H_{i1}$, $H_o = H_{o1}$) در وسط طول استوانه‌ی ناهمگن جدار متغیر	۸۹
جدول ۱-۴ خواص لایه‌ی داخلی استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک	۱۰۹
جدول ۲-۴ نتایج عددی در وسط طول استوانه‌ی ناهمگن جدار متغیر پیزوالکتریک	۱۲۶
جدول ۱-۵ نتایج عددی در وسط طول استوانه‌ی ناهمگن جدار متغیر پیزوالکتریک	۱۴۹

علائم

u_r	جابه‌جایی شعاعی
r	فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (در پوسته‌ی استوانه‌ای، شعاع استوانه یا مختصه‌ی شعاعی)
C_1, C_2	ثابت‌های معادله‌ی دیفرانسیل ناشی از نظریه‌ی لامه برای استوانه
R	فاصله‌ی سطح میانی پوسته از محور تقارن (در پوسته‌ی استوانه‌ای، شعاع صفحه‌ی میانی استوانه)
z	فاصله‌ی هر نقطه از سطح میانی پوسته
u_r^0	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی شعاعی
u_r^1	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی
u_r^2	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی دو جابه‌جایی شعاعی
$\vec{U}$	میدان جابه‌جایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\vec{U}^0$	مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر میدان جابه‌جایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\vec{U}^1$	مؤلفه‌های مرتبه‌ی یک میدان جابه‌جایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_x	جابه‌جایی محوری در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_x^0	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی محوری در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_x^1	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی محوری در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_θ	جابه‌جایی محیطی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_θ^0	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی محیطی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_θ^1	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی محیطی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_z	جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_z^0	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_z^1	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
r_i	شعاع داخلی استوانه
r_o	شعاع خارجی استوانه
Pr_i	خاصیت ماده در لایه‌ی داخلی استوانه
Pr_o	خاصیت ماده در لایه‌ی خارجی استوانه
n_{Pr}	ثابت ناهمگنی خاصیت
$\bar{r}$	نسبت شعاع به شعاع داخلی در استوانه
T^*	دمای ثابت مثبت مرجع
ϕ	پتانسیل الکتریکی

Θ	تغییرات دمایی از دمای ثابت مثبت مرجع
V	انرژی پتانسیل الکتروترمودمکانیکی
W	کار ناشی از نیروهای مکانیکی، الکتریکی و حرارتی
θ	مختصه‌ی محیطی استوانه
x	مختصه‌ی محوری استوانه
u_z	جابه‌جایی شعاعی
u_θ	جابه‌جایی محیطی
u_x	جابه‌جایی محوری
h	ضخامت دیواره‌ی پوسته‌ی استوانه‌ای
L_C	طول پوسته‌ی استوانه‌ای
φ^0	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر پتانسیل الکتریکی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
φ^1	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
Θ^0	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر تغییرات دمایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
Θ^1	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک تغییرات دمایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_x$	کرنش‌های نرمال در مختصات استوانه‌ای
$\varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \varepsilon_x$	کرنش‌های نرمال در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\gamma_{r\theta}, \gamma_{rx}, \gamma_{\theta x}$	کرنش‌های برشی در مختصات استوانه‌ای
$\gamma_{z\theta}, \gamma_{zx}, \gamma_{\theta x}$	کرنش‌های برشی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\tilde{\varepsilon}$	تانسور میدان کرنش در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
E_r, E_θ, E_x	مؤلفه‌های بردار میدان الکتریکی در مختصات استوانه‌ای
E_z, E_θ, E_x	مؤلفه‌های بردار میدان الکتریکی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\vec{E}$	بردار میدان الکتریکی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
e_r, e_θ, e_x	مؤلفه‌های بردار میدان حرارتی در مختصات استوانه‌ای
e_z, e_θ, e_x	مؤلفه‌های بردار میدان حرارتی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\vec{e}$	بردار میدان حرارتی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
c_{11}, c_{12}, c_{22}	ثابت‌های الاستیک
c_{23}, c_{44}, c_{55}	
e_{11}, e_{12}, e_{35}	ثابت‌های پیزوالکتریک-تنش
$\lambda_{11}, \lambda_{22}$	ثابت‌های تنش حرارتی-دما
$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$	ثابت‌های دی‌الکتریک

ضرایب هدایت حرارتی ماده	k_{11}, k_{22}
ثابت‌های الاستیک در شعاع داخلی استوانه	$c_{11}^0, c_{12}^0, c_{22}^0$ c_{23}^0, c_{55}^0
ثابت ناهمگنی کل	n
ثابت‌های پیزوالکتریک-تنش در شعاع داخلی استوانه	$e_{11}^0, e_{12}^0, e_{35}^0$
ثابت‌های تنش حرارتی-دما در شعاع داخلی استوانه	$\lambda_{11}^0, \lambda_{22}^0$
ثابت‌های دی‌الکتریک در شعاع داخلی استوانه	$\epsilon_{11}^0, \epsilon_{22}^0$
ضرایب هدایت حرارتی در شعاع داخلی استوانه	k_{11}^0, k_{22}^0
ضرایب انبساط حرارتی در شعاع داخلی استوانه	$\alpha_{11}^0, \alpha_{22}^0$
چگالی انرژی جنبشی	T^*
چگالی انرژی الکتروترمودینامیکی	V^*
منتجه‌های مکانیکی	N_z^m, N_θ^m N_x^m
منتجه‌های مکانیکی	M_θ^m, M_x^m
منتجه‌های مکانیکی	M_{xz}^m, Q_x^m
ضریب تصحیح برشی	K_s
منتجه‌های الکتریکی	N_z^e, N_x^e
منتجه‌های الکتریکی	M_x^e
منتجه‌های حرارتی	N_z^t, N_x^t
منتجه‌های حرارتی	M_x^t
فشار داخلی	P_i
شار الکتریکی وارده به لایه‌ی داخلی استوانه	Q_i
شار حرارتی وارده به لایه‌ی داخلی استوانه	H_i
فشار خارجی	P_o
شار الکتریکی وارده به لایه‌ی خارجی استوانه	Q_o
شار حرارتی وارده به لایه‌ی خارجی استوانه	H_o
ثابت‌های انتگرال‌گیری از سطر اول، پنجم و هفتم دستگاه معادلات دیفرانسیل	K_1, K_2, K_3
مقادیر ویژه	λ, λ_i
ضخامت لایه‌های استوانه‌ی چندلایه	d
خاصیت در لایه‌ی n ام	Pr^n

شعاع متوسط لایه‌ی n ام	r_m^n
شعاع داخلی لایه‌ی n ام	r_i^n
مساحت هر لایه با خواص ثابت	A_{Layer}

فصل ١ مقَدِّمه



۱-۱ پیش‌گفتار

این فصل، خلاصه‌ای درباره‌ی مسأله مورد پژوهش، تعریف و اهمیت آن ارائه می‌دهد. ابتدا دسته‌بندی پوسته‌ها^۱ از دیدگاه‌های مختلف ارائه و نظریه‌های موجود برای تحلیل آنها بیان شده است. هریک از این نظریه‌ها بررسی و دامنه کاربرد آنها بیان می‌شود. در ادامه، تاریخچه‌ی سیر تکامل مواد به اختصار بیان و مواد ناهمگن پیزوالکتریک^۲ معرفی می‌گردند. در پایان، پژوهش‌های انجام شده در این راستا مورد تحقیق و بررسی قرار می‌گیرند و با جمع‌بندی جنبه‌ی نوآوری این پژوهش بیان می‌شود.

امروزه، پژوهشگران به دنبال موادی هستند که علاوه بر دارا بودن خاصیت‌های مطلوب سازه‌ای نظیر وزن کم، استحکام بالا و ... دارای ویژگی‌های مطلوب دیگری نیز باشند تا بتوان توسط این دسته از مواد، پیشرفتی شگرف را در سازه‌ها، دستگاه‌ها و تجهیزات مکانیکی ایجاد کنند. پیزوالکتریک‌ها موادی هستند که بر اثر ایجاد تغییر شکل در آنها، میدان الکتریکی در آنها تولید می‌شود و بر اثر اعمال میدان الکتریکی بر روی آنها دچار تغییر شکل می‌گردند. پیزوالکتریک‌ها را می‌توان به عنوان مواد هوشمند^۳ تلقی کرد، زیرا که رفتار الکترومکانیکی این دسته مواد باعث می‌شود که تا بتوان از این مواد به عنوان حسگرها، محرک‌ها و یا کنترل‌کننده‌ی فعال^۴ سازه استفاده نمود. در راستای افزایش مطلوبیت خواص مواد، ایده‌ی مواد متغیر تابعی^۵ یا مواد ناهمگن نیز مطرح و عملیاتی گردید که این امر سبب می‌شود تغییرات توزیع خواص بهبود یابد و این مواد نسبت به مواد کامپوزیتی متداول از پیوستگی و یکپارچگی خواص بهتری برخوردار باشند. یکپارچگی تغییرات توزیع خواص در جسم متغیر تابعی سبب می‌شود، توزیع تنش‌ها و گرادیان‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا کنند و استحکام ماده افزایش یابد. از این‌رو امروزه، تحلیل رفتار سازه‌هایی از این نوع توجه بسیاری از پژوهشگران را جلب کرده و آنها از دیدگاه‌های مختلف به مطالعه و بررسی مواد متغیر تابعی پرداخته‌اند.

-
1. Shells
 2. Piezoelectric
 3. Smart Materials
 4. Active Controller
 5. Functionally Graded Materials (FGMs)

در میان سازه‌های مختلف، پوسته‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند که از جمله دلایل این امر را می‌توان بازدهی بالای رفتاری آنها در برابر تحمل بار دانست [۱]. در میان پوسته‌ها، پوسته‌ی استوانه‌ای به دلیل فروانی ساخت و کاربرد زیاد در صنایع گوناگون مانند هوافضا، ریلی، خودرو، پزشکی و ...، نظر صنعتگران و پژوهشگران را از دیرباز به خود جلب کرده است. به‌ویژه، به دلیل استفاده این پوسته‌ها در محیط‌های فشار نایک‌نواخت، متغیر و اهمیت بهینه سازی وزن سازه‌ها در برخی کاربردها، طراحان و مهندسان توجه خود را معطوف به استفاده از پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متغیر ساخته‌اند.

هدف از انجام این پژوهش، ارائه روشی تحلیلی برای بررسی رفتار الکتروترموالاستیک یک پوسته استوانه‌ای متقارن محوری، ناهمگن و ناهمسانگرد با ضخامت متغیر تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در لایه‌ی داخلی استوانه است. ناهمگنی خواص به صورت توانی در نظر گرفته می‌شود و فرض می‌شود که استوانه در راستای شعاعی پلاریزه^۱ است. تغییرات ضخامت و بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در لایه‌ی داخل استوانه تابعی از متغیر مسأله در راستای طول پوسته است.

امروزه حل مسائل با استفاده از کامپیوتر و بهره‌گیری از نرم‌افزارهای صنعتی و روش‌های عددی بسیار رواج یافته است، اما تمایل به استفاده از روش‌های تحلیلی در حل مسائل همچنان به قوت خود پابرجاست. از جمله دلایل پابرجا بودن استفاده از روش‌های تحلیلی می‌توان به ذکر این موارد پرداخت. در تحلیلی ارتباط رفتار سیستم با پارامترهای آن از قبیل هندسه، بارگذاری، شرایط مرزی و ... به راحتی قابل توصیف است. به‌ویژه زمانی که هدف مطالعه‌ی پارامتریک اثر یک متغیر بر روی رفتار سیستم و بهینه سازی آن باشد، روش تحلیلی می‌تواند زمان محاسبات را به مقدار قابل توجهی کاهش دهد. همچنین شایان توجه است که روش‌های عددی، بحث اعتبارسنجی و تأیید نتایج را به همراه خود دارند. در واقع استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی با توجه به محدودیت‌های هر کدام، می‌تواند ابزاری سودمند را برای پژوهشگران جهت تحلیل مسائل و پیش‌بینی نتایج فراهم آورد.

۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند [۲].

الف) دیدگاه هندسی

پوسته‌ای حاصل از انتقال^۱: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ای حاصل از دوران^۲: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ای جدار نازک^۳: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی^۴ آن کوچک‌تر از

$$\frac{1}{20} \text{ باشد.}$$

پوسته‌ای جدار ضخیم^۵: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگ‌تر از

$$\frac{1}{20} \text{ باشد.}$$

ب) دیدگاه مادی

پوسته‌ای همگن و همسانگرد^۶: خواص مکانیکی پوسته در نقاط مختلف و جهات مربوط به هر نقطه یکسان است.

پوسته‌ای همگن و ناهمسانگرد^۷: خواص مکانیکی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است ولی در جهات مربوط به هر نقطه یکسان نیست.

پوسته‌ای ناهمگن و همسانگرد^۸: خواص مکانیکی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست ولی

-
1. Shell of Translation
 2. Shell of Rotation
 3. Thin Shell
 4. Middle Surface
 5. Thick Shell
 6. Homogeneous and Isotropic Shell
 7. Homogeneous and Anisotropic Shell
 8. Inhomogeneous and Isotropic Shell

در جهات مربوط به هر نقطه یکسان است.

پوسته‌ی ناهمگن و ناهمسانگرد^۱: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته هم در نقاط مختلف جسم و هم

در جهات مربوط به هر نقطه یکسان نیست.

ج) دیدگاه رفتاری

پوسته با تغییر شکل‌های کوچک^۲: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری،

کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ^۳: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری،

کوچک نیست (رفتار غیرخطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان^۴: تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک

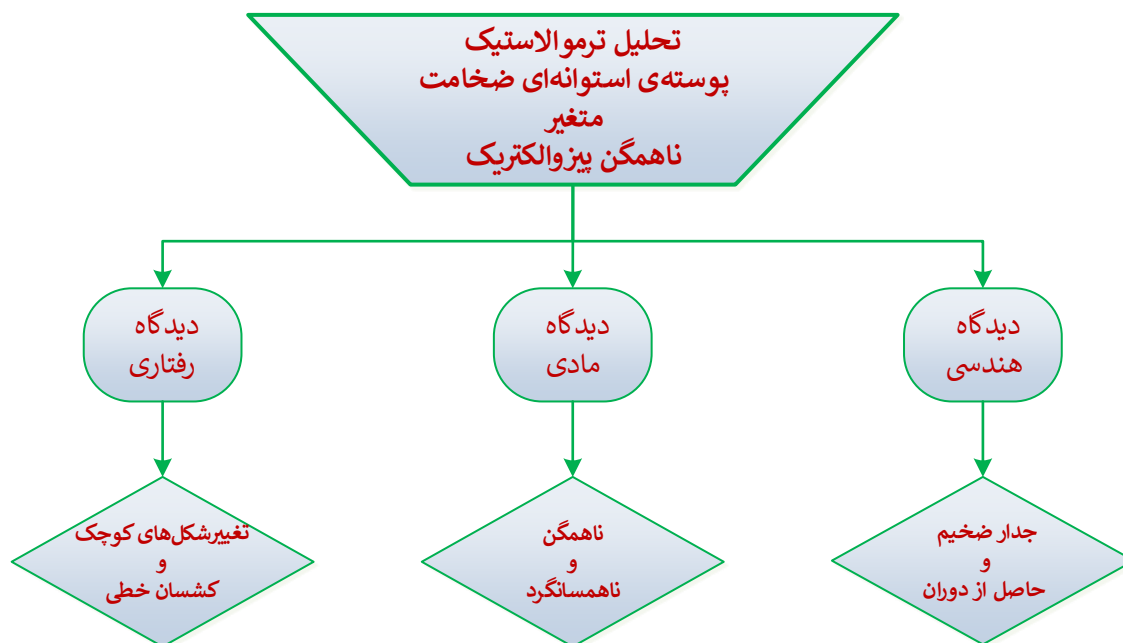
پیروی می‌کنند (رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان^۵: تغییر شکل‌ها بازگشت‌ناپذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی

هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیرخطی از نظر مادی).

شکل ۱-۱ تقسیم‌بندی پژوهش حاضر را از دیدگاه‌های مختلف هندسی، و رفتاری نشان می‌دهد.

-
1. Inhomogeneous and Anisotropic Shell
 2. Small Deflection
 3. Large Deflection
 4. Elastic Behavior
 5. Plastic Behavior



شکل ۱-۱ دسته‌بندی پژوهش حاضر از دیدگاه‌های هندسی، مادی و رفتار

۳-۱ نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها

در این بخش نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها به دو بخش نظریه‌ی پوسته‌های نازک و ضخیم

تقسیم‌بندی می‌شوند و سپس به شرح و توضیح مختصر برخی از این نظریه‌ها پرداخته می‌شود.

۱-۳-۱ نظریه‌ی پوسته‌های نازک

در پوسته‌های نازک، نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی R کوچک‌تر از $\frac{1}{20}$ می‌باشد.

نظریه‌ی این دسته از پوسته‌ها بر مبنای نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به طور کلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود؛ بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی-تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک به دست می‌آورند. دقت نتایج نظریه‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد. اولین فرضیات را کیرشهف^۱ (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط نظریه‌ی پوسته‌ها به کار

1. Kirchhoff

برده شد. ارون^۱ (۱۸۷۴) نظریه‌ی پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لاو^۲ (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌های نازک یا نظریه‌ی لاو-کیرشهف مشهور است. فرضیات لاو-کیرشهف عبارتند از [۳]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم‌پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

رایسنر^۳ (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لاو تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری^۴ را ارائه نمود. فلوگه^۵ (۱۹۳۲) اولین کسی است که نظریه‌ی پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشند. با ساده‌سازی آن‌ها نظریه‌ی پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به دست می‌آیند. نظریات فلوگه توسط بیرنه^۶ (۱۹۴۴) تکمیل شد. نقدی (۱۹۵۷) نظریه‌ی غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که به کارگیری آن‌ها مشکل است. سندرز^۷ (۱۹۵۹) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلوف^۸ (۱۹۶۴) امکان

-
1. Aron
 2. Love
 3. Reissner
 4. Axisymmetric Shell of Revolution
 5. Flugge
 6. Byrne
 7. Sanders
 8. Novozhilov

ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

نظریه‌ی عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به این گونه تقسیم‌بندی کرد.

۱- نظریه با تقریب مرتبه‌ی صفر (نظریه‌ی غشایی^۱)؛

۲- نظریه با تقریب مرتبه‌ی یک (نظریه‌ی خمشی^۲)؛

۳- نظریه با تقریب مرتبه‌ی دو (نظریه‌ی فلوگه).

۱-۳-۲ نظریه‌ی پوسته‌های ضخیم

اولین بار لامه^۳ (۱۸۵۲) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی^۴، حل دقیق استوانه‌های جدار

ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت را که تحت فشار یکنواخت داخلی قرار داشت برای ماده‌ی همگن

و همسانگرد ارائه کرد [۴]، که تاکنون نیز در حل مسائل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است.

گالرکین^۵ (۱۹۳۰) روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به دست آورد.

ولاسف^۶ (۱۹۴۹) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلی برای پوسته‌های

ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، نظریه‌ی تغییر شکل برشی^۷

را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود. میرسکی^۸ و هرمان^۹ (۱۹۵۸) با به کارگیری نظریه‌ی تغییر

1. Membrane Theory

2. Bending Theory

3. Lamé

4. Plane Elasticity Theory (PET)

5. Galerkin

6. Vlassov

7. Shear Deformation Theory (SDT)

8. Mirsky

9. Hermann

شکل برشی مرتبه‌ی اول^۱، تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند [۵].

گرینسپن^۲ (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم را با نظریه‌های مختلف پوسته‌های نازک و

ضخیم مقایسه نمود.

نظریه‌ی عمومی پوسته‌های ضخیم را می‌توان به این‌گونه تقسیم‌بندی کرد.

۱- نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی؛

۲- نظریه‌ی تغییر شکل برشی.

الف) نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی

به طور کلی در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان با حل آنها، ۱۵ مجهول را به‌دست آورد؛ معادلات عبارت‌اند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جاب‌جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارت‌اند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جاب‌جایی (بردار جاب‌جایی). نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه بعدی هرچند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به طور کامل توصیف می‌کند و منجر به حل دقیق می‌شود ولی حل معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به‌کارگیری آن‌ها امکان‌ناپذیر است. با فرضیات ساده‌شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و نظریه‌ی الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه‌ها به کار برد. در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور باقی می‌مانند. درحقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌های نازک، جاب‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جاب‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این نظریه را لامه برای استوانه‌ی

1. First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)
2. Greenspon

جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد استفاده کرد و توزیع تنش را در استوانه‌ها به‌دست آورد. نظریه‌ی لامه به نظریه‌ی کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است [۴].

معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌ی ضخیم جدار ثابت، عبارت است از:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = 0 \quad \text{or} \quad r^2 u_r'' + r u_r' + u_r = 0 \quad (1-1)$$

و جابه‌جایی استوانه u_r برابر است با:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (2-1)$$

r شعاع استوانه، C_1 و C_2 ثابت‌های معادله هستند که با شرایط مرزی می‌آیند.

ب) نظریه‌ی تغییر شکل برشی

در این نظریه، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف نمی‌شود بلکه با مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌شود. به طور کلی فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (r) برابر است با فاصله‌ی سطح میانی از محور تقارن (R) بعلاوه فاصله‌ی آن نقطه از سطح میانی (z)، یعنی:

$$r = R + z \quad ; \quad \left| \frac{z}{R} \right| < 1 \quad (3-1)$$

این کار، سبب تغییر مختصه و جزء دیفرانسیلی^۱، از r به z می‌شود

$dr, (r, \theta, x) \Rightarrow dz, (z, \theta, x)$ و میدان جابه‌جایی هر نقطه پوسته به‌صورت رابطه (۴-۱) است.

$$\begin{cases} U_z = U_z(z, \theta, x) \\ U_\theta = U_\theta(z, \theta, x) \\ U_x = U_x(z, \theta, x) \end{cases} \quad (4-1)$$

در رابطه‌ی فوق U_z ، U_θ و U_x مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در راستای شعاعی، محیطی و

محوری می‌باشند؛ با استفاده از بسط تیلور و نوشتن بسط تیلور مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی حول لایه میانی پوسته خواهیم داشت.

$$\begin{cases}
 U_z = U_z(0, \theta, x) + z \frac{\partial U_z(z, \theta, x)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 U_z(z, \theta, x)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{z^3}{3!} \frac{\partial^3 U_z(z, \theta, x)}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \\
 + \dots \\
 U_\theta = U_\theta(0, \theta, x) + z \frac{\partial U_\theta(z, \theta, x)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 U_\theta(z, \theta, x)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{z^3}{3!} \frac{\partial^3 U_\theta(z, \theta, x)}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \\
 + \dots \\
 U_x = U_x(0, \theta, x) + z \frac{\partial U_x(z, \theta, x)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 U_x(z, \theta, x)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{z^3}{3!} \frac{\partial^3 U_x(z, \theta, x)}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \\
 + \dots
 \end{cases} \quad (5-1)$$

رابطه فوق را به صورت ساده تر به شکل زیر می توان بازنویسی کرد.

$$\begin{cases}
 U_z = U_z^0(x, \theta) + z U_z^1(x, \theta) + z^2 U_z^2(x, \theta) + z^3 U_z^3(x, \theta) + \dots \\
 = U_z^0 + z U_z^1 + z^2 U_z^2 + z^3 U_z^3 + \dots \\
 U_\theta = U_\theta^0(x, \theta) + z U_\theta^1(x, \theta) + z^2 U_\theta^2(x, \theta) + z^3 U_\theta^3(x, \theta) + \dots \\
 = U_\theta^0 + z U_\theta^1 + z^2 U_\theta^2 + z^3 U_\theta^3 + \dots \\
 U_x = U_x^0(x, \theta) + z U_x^1(x, \theta) + z^2 U_x^2(x, \theta) + z^3 U_x^3(x, \theta) + \dots \\
 = U_x^0 + z U_x^1 + z^2 U_x^2 + z^3 U_x^3 + \dots
 \end{cases} \quad (6-1)$$

بر اساس رابطه‌ی بالا، جابه‌جایی شعاعی را یک چند جمله‌ای بر حسب z می توان نوشت. اگر (

$z = 0$) باشد، نشانگر جابه‌جایی سطح میانی پوسته است. اگر فقط جمله‌ی اول در نظر گرفته شود (

$u_r = u_r^0$)، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی صفر پوسته‌های جدار ضخیم می شود که مشابه نظریه‌ی خمشی

(نظریه‌ی مرتبه‌ی یک در پوسته‌های نازک) و اگر دو جمله از این بسط در نظر گرفته شود

$u_r = u_r^0 + z u_r^1$ ، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی یک پوسته‌های جدار ضخیم می شود که مشابه نظریه‌ی

فلوگه (نظریه‌ی مرتبه‌ی دو در پوسته‌های نازک) می باشد.

در این نظریه، علاوه بر اثر نیروهای محوری، برش، خمش و پیچش، می توان اینرسی دورانی و

میدان حرارتی^۱ را نیز گرفت. نظریه با تقریب مرتبه‌ی یک به نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

میرسکی-هرمان شهرت دارد که تعمیم نظریه‌ی تیموشنکو در تیرها و هم‌چنین نظریه‌ی میندلین^۲ در

ورق‌ها می باشد. میدان جابه‌جایی $\bar{U}$ در این نظریه عبارت است از:

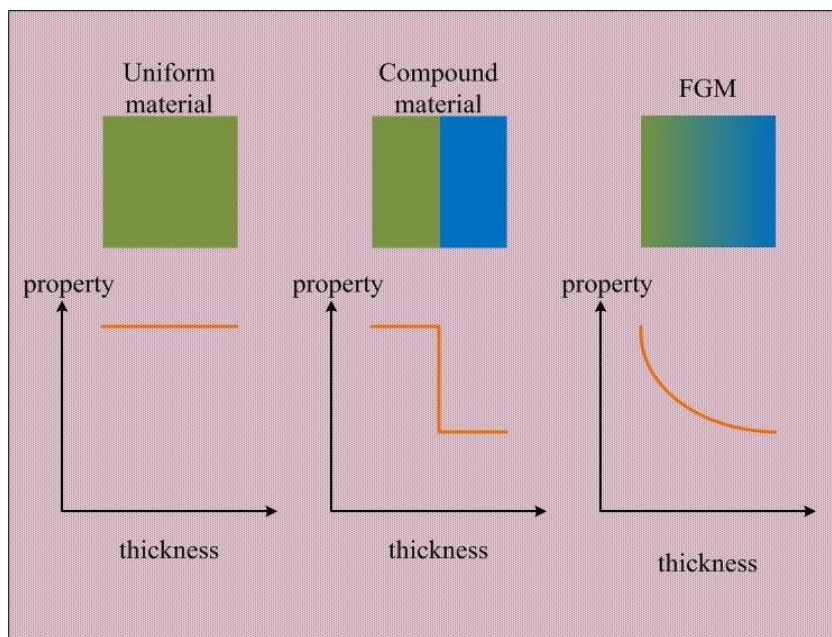
1. Thermal Field
2. Mindlin

$$\begin{cases} U_x = U_x^0 + z U_x^1 \\ U_\theta = U_\theta^0 + z U_\theta^1 \Rightarrow \bar{U} = \bar{U}^0 + z \bar{U}^1 \\ U_z = U_z^0 + z U_z^1 \end{cases} \quad (7-1)$$

در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، مستوی باقی می‌مانند ولیکن الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند. هرچند به کارگیری نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه بعدی، منجر به حل دقیق مسائل می‌شود، ولیکن به دلیل اینکه تاکنون هیچ راه حل کاملی برای پوسته‌های جدار ضخیم (به غیر از موارد خاص) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه بعدی ارائه نشده است، نظریه‌ی تغییر شکل برشی برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای مختلف با انواع جداره، انواع مواد، انواع بارگذاری و شرایط مرزی، حتی نامتقارن محوری^۱، روش مناسبی می‌باشد.

۴-۱ روند بهبود مواد

مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص، محدودیت‌هایی در صنایع مختلف ایجاد می‌کنند؛ بنابراین پژوهشگران همواره در تلاش بوده‌اند که از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها) در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهمسانساز به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، ولیکن از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند. اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آنها است، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پیریزی شد که سبب گردید؛ تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد شود. مواد FG ناهمگن هستند. شکل ۲-۱ مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و FGM را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۲ تغییرات خواص در مواد مختلف

۱-۴-۱ مواد پیزوالکتریک

مواد پیزوالکتریک، موادی هستند که تحت تأثیر کرنش مکانیکی، یک میدان الکتریکی در آنها پدید می‌آید، ایجاد میدان الکتریکی در این مواد به عنوان اثر پیزوالکتریکی شناخته می‌شود. کرنش مکانیکی فوق می‌تواند توسط هر عامل خارجی از قبیل نیرو، فشار، شوک حرارتی و ... به وجود آید؛ همچنین ممکن است برای ایجاد کرنش در مواد پیزوالکتریک این مواد را تحت تأثیر یک میدان الکتریکی قرار دهند که این پدیده به عنوان اثر پیزوالکتریک معکوس موسوم است [۶]. مواد پیزوالکتریک از گستردگی زیادی برخوردار است؛ پوست و استخوان انسان نیز خاصیت پیزوالکتریکی دارند [۷]. در صورتی که مواد پیزوالکتریک خاصیت پیزوالکتریک خود را از دست دهند، دی‌پلاریزه می‌گردند؛ در حین دی‌پلاریزه شدن دو قطبی‌های موجود در ماده از بین می‌روند. دی‌پلاریزه شدن می‌تواند منشأ الکتریکی، مکانیکی و یا حرارتی داشته باشد.

کاربردهای بسیاری را می‌توان برای مواد پیزوالکتریک متصور شد، که بخشی از این کاربردها که در مرجع [۸] آمده است. یکی از کاربردهای اساسی، سرامیک‌های پیزوالکتریک استفاده به عنوان

آتش‌زنه‌ی گاز^۱ می‌باشد. ولتاژ بسیار بالای تولید شده در سرامیک پیزوالکتریک به وسیله‌ی تنش مکانیکی، سبب جرقه^۲ و مشتعل شدن گاز می‌شود. همچنین سرامیک‌های پیزوالکتریک می‌توانند به عنوان شتاب‌سنج‌ها و تنش‌سنج‌ها مورد استفاده قرار گیرند. ارتعاشگرهای پیزوالکتریک در تجهیزات ارتعاشاتی مکانیکی می‌توانند به عنوان صافی^۳، محرک و یا نوسانگر^۴ استفاده شوند. همچنین امواج فراصوتی^۵ در زمینه‌های گوناگونی مورد استفاده قرار می‌گیرند و کاربرد پیزوالکتریک‌ها در میکروفن‌های^۶ فراصوتی، آشکارساز زیرآبی و ردیاب ماهی، سنجش‌گرهای غیر مخرب، زمینه‌های پزشکی-الکترونیکی در گستره‌ی تشخیص تا درمان و جراحی و ... نمونه‌ای از این کاربردها می‌باشند.

۱-۴-۲ مدل‌سازی ریاضی مواد FG

مطابق شکل ۱-۲ خواص در مواد متغیر تابعی به‌صورت تدریجی و پیوسته تغییر می‌کند. توزیع خواص این دسته از مواد را در استوانه، معمولاً با تابعی از شعاع آن بیان می‌کنند [۹-۱۰]؛ که عمدتاً از این قرارند.

الف) توزیع توانی^۷

$$Pr(r) = Pr_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{n_{Pr}} = Pr_i \bar{r}^{-n_{Pr}} \quad (۸-۱)$$

ب) توزیع نمایی^۸

$$Pr(r) = Pr_i e^{n_{Pr} \left(\frac{r}{r_i} - 1 \right)} = Pr_i e^{n_{Pr} (\bar{r} - 1)} \quad (۹-۱)$$

ج) توزیع کسر حجمی^۹

-
1. Gas igniter
 2. Spark
 3. Filter
 4. Oscillator
 5. Ultrasonic
 6. Microphones
 7. Power
 8. Exponential
 9. Volume Fraction

$$Pr(r) = (Pr_o - Pr_i) \left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^{n_{pr}} + Pr_i \quad (10-1)$$

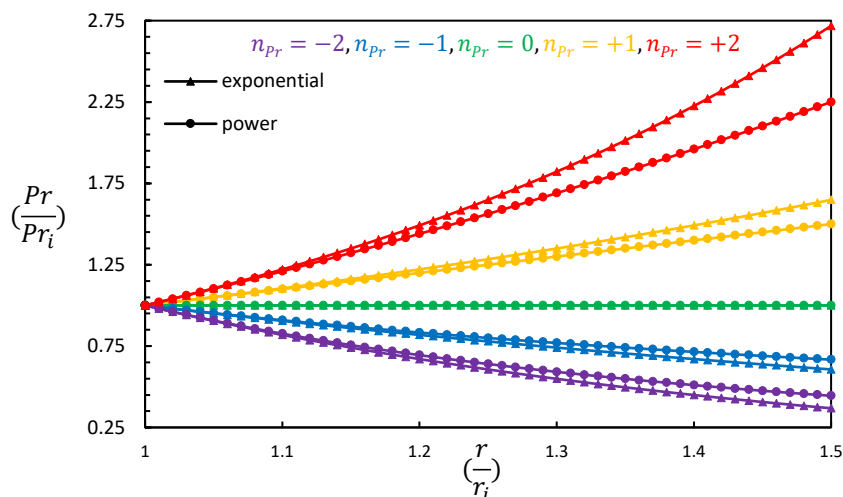
در روابط فوق r_o ، r_i شعاع استوانه و Pr_o ، Pr_i خاصیت ماده به ترتیب در لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه می‌باشد که Pr_o و Pr_i می‌تواند خاصیت مکانیکی، حرارتی و الکتریکی از قبیل مدول الاستیسیته^۱، چگالی^۲، نسبت پواسون^۳، ضریب هدایت حرارتی^۴، ضریب انبساط خطی حرارتی^۵، ثابت‌های پیزوالکتریک^۶ و ثابت‌های دی‌الکتریک^۷ باشد. در روابط فوق ثابت ناهمگنی خاصیت است؛ جز رابطه‌ی (۱۰-۱) که ثابت ناهمگنی فقط می‌تواند مقادیر حقیقی مثبت را اختیار کند در روابط (۸-۱) و (۹-۱) مقادیر حقیقی منفی را نیز می‌تواند اختیار کند. در $n_{pr} = 0$ در کلیه‌ی توزیع‌ها، نشان‌دهنده مواد همگن است.

طبق روابط (۸-۱) و (۹-۱) برای مشخص شدن توزیع خواص به‌صورت توانی و نمایی در استوانه‌ای با هندسه‌ی مشخص، کافی است خواص در لایه‌ی داخلی استوانه و ثابت ناهمگنی مربوط به آن تعیین شود؛ حال آنکه در توزیع کسر حجمی علاوه بر تعیین خواص لایه‌ی داخلی و ثابت ناهمگنی مربوط به آن، نیاز به تعیین خواص در لایه‌ی خارجی استوانه نیز می‌باشد.

الف) توزیع توانی و نمایی

شکل ۳-۱ توزیع خواص ناهمگنی را در استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن، نسبت به خواص در لایه‌ی داخلی استوانه، به صورت توانی و نمایی نشان می‌دهد. همان طور که از شکل ۳-۱ پیداست؛ توزیع نمایی سبب می‌شود تا تغییرات خواص با اختلاف بیشتری از حالت اولیه (خواص در لایه‌ی داخلی استوانه)، صورت گیرد. این امر بدان معناست که می‌توان توزیع نمایی با n_{pr} خاص را، با توزیع توانی که $|n_{pr}|$ آن بزرگ‌تر از حالت نمایی می‌باشد، مدل‌سازی کرد.

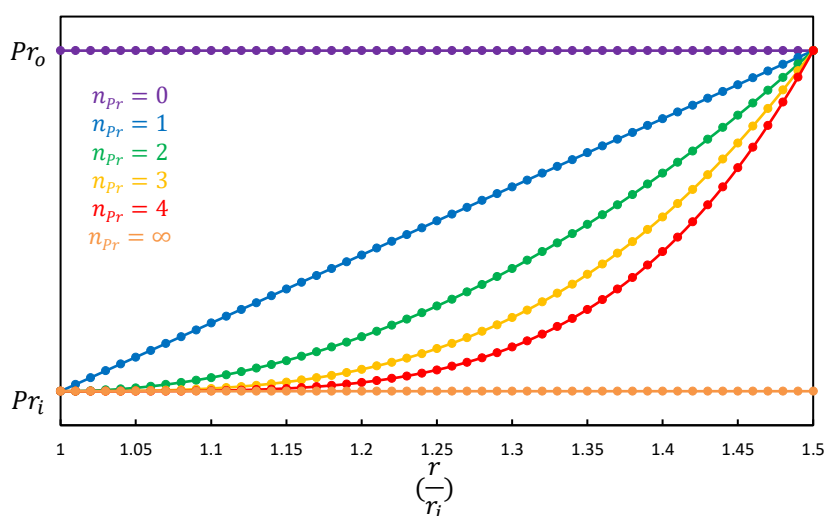
-
1. Elasticity Modulus
 2. Density
 3. Poisson's Ratio
 4. Heat Conduction Coefficient
 5. Thermal Linear Expansion Coefficient
 6. Piezoelectric Constants
 7. Dielectric Constants



شکل ۳-۱ توزیع خواص در استوانه‌ی ناهمگن

ب) توزیع کسر حجمی

شکل ۴-۱ توزیع خواص مکانیکی را به صورت کسر حجمی در استوانه نشان می‌دهد. همان طور که از شکل پیداست خواص مکانیکی در استوانه‌ی ناهمگن بین خواص مکانیکی در لایه‌ی داخلی و خارجی آن تغییر می‌کند. هنگامی که ثابت ناهمگنی صفر است خواص مکانیکی در کل لایه‌ها ثابت و برابر خاصیت لایه‌ی خارجی است؛ هم‌چنین با افزایش ثابت ناهمگنی و میل کردن آن به سمت بی‌نهایت، خواص مکانیکی در کل لایه‌ها ثابت و برابر خاصیت لایه‌ی داخلی می‌شود. همان طور که از شکل پیداست، در توزیع کسر حجمی، دو حالت $n_{Pr} = 0, \infty$ ، بیانگر مواد همگن می‌باشند.



شکل ۴-۱ توزیع خواص به صورت کسر حجمی در استوانه‌ی ناهمگن

۵-۱ پیشینه پژوهش

همان‌طور که در ابتدای فصل نیز گفته شد؛ پژوهش‌های بسیاری بر روی پوسته‌ها به‌ویژه پوسته‌های استوانه‌ای از گذشته تا به امروز، به دلیل اهمیت و کاربرد فراوان آن‌ها انجام گرفته است. هر کدام از این پژوهش‌ها از دیدگاهی خاص، پوسته‌های استوانه‌ای را مورد تحلیل و بررسی قرار داده‌اند؛ آنچه که در پیرو مطلب ذکر می‌شود، تنها بخش اندکی از پژوهش‌های موجود می‌باشد که با توجه به ارتباط موضوعی و نزدیکی آن‌ها به پژوهش حاضر، انتخاب شده‌اند؛ با نظر به تقدم تاریخی هر یک، به این صورت ارائه می‌گردند.

۵-۱-۱ تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ثابت و متغیر

استوانه‌های جدار ضخیم برای اولین بار در سال ۱۸۵۲ توسط لامه [۴] مورد تحلیل قرار گرفت. وی جنس استوانه‌ها را همگن و همسانگرد در نظر گرفت و با استفاده از نظریه الاستیسیته‌ی مستوی^۱ معادلات حاکم را استخراج کرد و حل دقیق آن‌ها را به‌دست آورد.

در سال ۱۹۹۹ هورگان و چان [۱۱] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، معادلات حاکم بر استوانه‌ها و دیسک‌های جدار ضخیم ساخته شده از مواد FG را که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند، حل کردند. ایشان ضریب پواسون را ثابت و مدول الاستیسیته را به صورت توانی در راستای شعاعی، متغیر فرض کردند؛ هم‌چنین نشان دادند خلاف استوانه‌های همگن که پیشینه تنش محیطی الزاماً در شعاع داخلی رخ می‌دهد، این امر در استوانه‌های ناهمگن صادق نبوده و ممکن است در شعاع خارجی رخ دهد که این موضوع بستگی به ثابت ناهمگنی مواد دارد.

هونگ-جان و همکاران [۱۲] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، استوانه‌ی جدار ضخیمی را که ضریب پواسون و مدول الاستیسیته‌ی آن به صورت خطی و نمایی تغییر می‌کرد، در سال ۲۰۰۶ مورد تحلیل قرار دادند. استوانه تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشت و در تمامی

1. Plane Elasticity Theory (PET)

حالت‌ها جز حالت مربوط به حل تحلیلی برای استوانه‌ای با خواص متغیر خطی، ضریب پواسون را ثابت در نظر گرفتند. حل به دست آمده مربوط به حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای بود. نتایج نشان می‌داد که تغییر خواص از نمایی به خطی و یا بالعکس، باعث تغییر چندانی بر روی توزیع تنش شعاعی نمی‌شود اما این امر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را با شدت بیشتری دست‌خوش تغییر می‌کند.

در اوایل سال ۲۰۰۷ ژیفای و همکاران [۱۳] معادلات حاکم را بر استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند، با استفاده از الاستیسیته‌ی مستوی، تنها در حالت کرنش صفحه‌ای استخراج نمودند. ایشان تغییرات خواص در استوانه‌ی ناهمگن را تنها برای مدول الاستیسیته‌ی آن در نظر گرفتند و به صورت خطی مدل کردند. سپس معادلات حاکم را با دو روش، یک بار با استفاده از چندلایه کردن استوانه به لایه‌هایی با خواص ثابت و به کارگیری حل لایه همراه با روش بازگشتی که از شرایط مرزی پیوستگی بر روی تنش و جابه‌جایی شعاعی بین لایه‌ها استفاده می‌کرد و بار دیگر با در نظرگیری استوانه با خواص متغیر، حل کردند. همچنین نشان دادند که در روش چندلایه کردن با افزایش تعداد لایه‌ها، مقدار جابه‌جایی شعاعی به دست آمده در داخل استوانه کاهش می‌یابد. اندکی بعد در همین سال، توتونچو [۱۴] پژوهشی مشابه با کار گذشته [۱۲] را انجام داد. ایشان با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به کارگیری سری فریبینیوس، استوانه جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی قرار داشت و مدول الاستیسیته آن به صورت نمایی تغییر می‌کرد، در حالت کرنش صفحه‌ای حل کرد. در این پژوهش اثر تغییر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع تنش شعاعی و محیطی و جابه‌جایی شعاعی مورد مطالعه قرار گرفت.

لی و پنگ [۱۵] در سال ۲۰۰۹ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به کارگیری روش انتگرال فردهولم^۱ حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن تحت فشار داخلی را به دست آوردند. ایشان توزیع ناهمگنی خواص را در استوانه به صورت دلخواه در نظر گرفتند اما نتایج را تنها برای حالتی که مدول الاستیسیته، به صورت توزیع توانی و کسر حجمی ساده شده تغییر می‌کرد، بیان کردند.

1. Fredholm

هم‌چنین مانند مرجع [۱۲] نشان دادند که تغییر نحوه‌ی توزیع خواص، در تغییر نتایج به‌دست آمده برای تنش شعاعی اثری کم و در تنش محیطی اثری مشهود دارد.

در سال ۲۰۱۰، قنّاد و زمانی‌نژاد [۱۶] با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استوانه‌ی همگن دو سرگیردار را که تحت فشار داخلی قرار داشت، مورد تحلیل قرار دادند و تنش برشی را در استوانه بررسی کردند. ایشان نشان دادند که در مناطق دور از مرزهای دو سراسطوانه تنش برشی به سمت صفر میل می‌کند و سبب می‌شود تا تنش و جابه‌جایی، تابعی تنها از شعاع استوانه باشد درحالی‌که در حوالی مرز تابعی از شعاع و طول استوانه است و هم‌چنین مشاهده کردند در نقاط دور از مرز توافقی خوبی بین نظریه‌ی تغییر شکل برشی و الاستیسیته‌ی مستوی وجود دارد. اندکی بعد، قنّاد و زمانی‌نژاد [۱۷] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و تعریف روابط ساختاری در حالت کلی (تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای)، حل کامل استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را به‌دست آوردند. ایشان ناهمگنی خواص برای مدول الاستیسیته به‌صورت توانی در نظر گرفتند و فرض کردند ضریب پواسون ثابت می‌باشد. هم‌چنین نشان دادند برای افزایش یا کاهش تنش و جابه‌جایی، باید مقادیر مثبت یا منفی برای ثابت ناهمگنی اختیار گردد. در همین زمان ایشان [۱۸] با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند، مورد تحلیل قرار دادند. ایشان با بررسی و مقایسه نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی در نواحی دور از دو سراسطوانه نشان دادند با افزایش ضخامت استوانه، حل نیمه تحلیلی یا نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول از حل دقیق یا نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی دور می‌شود و هم‌چنین بیان نمودند که اختلاف نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول از الاستیسیته‌ی مستوی در میزان جابه‌جایی شعاعی، وقتی ضخامت جداره‌ی استوانه برابر شعاع لایه‌ی میانی آن است، در حدود ۲۵٪ می‌باشد.

در سال ۲۰۱۳ قنّاد و همکاران [۱۹] تحلیل الاستیک استوانه‌های ناهمگن جدار ضخیم متغیر را

که تحت فشار داخلی قرار داشتند با استفاده از تئوری اغتشاشات^۱ و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول ارائه کردند. در این پژوهش تغییرات مدول الاستیک به صورت توانی در راستای ضخامت و محور در نظر گرفته شد و به دلیل تغییرات اندک ضریب پواسون، این خاصیت ماده به صورت مقداری ثابت در نظر گرفته شد. دستگاه معادلات حاکم به دست آمده در این پژوهش دستگاه معادلات مرتبه‌ای با ضریب متغیر بود که با استفاده از روش تئوری اغتشاشات اقدام به حل آن انجام شد. در این پژوهش اثر گیردار بودن دو سر استوانه و ناهمگنی خواص بر روی رفتار الاستیک استوانه و توزیع تنش در آن مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت.

زمانی‌نژاد و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۱۵ با استفاده از روش نیمه-تحلیلی چندلایه کردن حل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم متغیر ناهمگن چرخان را که تحت توزیع دلخواه فشار داخلی قرار داشت، به دست آوردند. در این پژوهش جز ضریب پواسون که به دلیل تغییرات اندک ثابت در نظر گرفته شد؛ تغییرات چگالی و مدول الاستیک استوانه به صورت توانی در راستای محور استوانه فرض شد. با استفاده از روش انرژی معادلات حاکم بر مسأله استخراج گردید که دستگاه معادلات مرتبه‌ای ناهمگن با ضرایب متغیر است. این دستگاه معادلات ناهمگن مرتبه‌ای با ضریب متغیر با استفاده از روش چندلایه کردن و تبدیل استوانه جدار ضخیم متغیر به چندین دیسک جدار ثابت که بر روی هم قرار گرفته است تبدیل به چندین دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ای ناهمگن با ضرایب ثابت شد که به صورت تحلیلی و روش‌های مرسوم قابل حل می‌باشند، همچنین معادلات مربوط به شرایط پیوستگی بین دیسک‌ها با توجه به یکسان بودن جابه‌جایی و شیب در بالا و پایین دیسک‌های میانی در نظر گرفته شد. این پژوهش اثر توزیع فشار و ناهمگنی خواص را بر روی رفتار مکانیکی استوانه ناهمگن جدار متغیر چرخان را مورد مطالعه قرار داد. شرعیات و علیپور در سال ۲۰۱۷ [۲۱] تحلیل خمش و تنش را برای استوانه‌های جدار متغیر و مخروط‌های ناقص ناهمگن با نسبت پواسون منفی^۲

۱. Perturbations Theory

2. Auxetic

که تحت بارگذاری عمومی قرار داشت، تحقیق نمودند. در این تحقیق، ایشان با استفاده از FSDT و اصل انرژی پتانسیل کل کمینه، معادلات حاکم را استخراج نمودند و با استفاده از تبدیل تیلور حل آن را به دست آوردند.

۱-۵-۲ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ثابت و متغیر

زیرمان و لوتر [۲۲] در سال ۱۹۹۹ حل دقیق استوانه‌های FG را که تحت گرمای یکنواخت قرار داشتند، تحت شرایط کرنش صفحه‌ای به دست آوردند. در این پژوهش تنش‌های شعاعی و محیطی مورد بررسی قرار گرفت و ضریب انبساط حرارتی مؤثر برای استوانه ناهمگن محاسبه گردید. توزیع دما و تنش‌های حرارتی استوانه‌های ناهمگن FG که به صورت گذرا در حال خنک شدن در سطح داخلی خود بودند، توسط آواجی و سیواکومار [۲۳] در سال ۲۰۰۱ ارائه شد. ناهمگنی خواص به صورت کسر حجمی، استوانه‌ی ناهمگن به صورت طویل (حالت کرنش صفحه‌ای) و انتقال حرارت به صورت یک بعدی (انتقال حرارت در راستای ضخامت) در نظر گرفته شد. نتایج مربوطه به تنش‌های حرارتی و دمای گذرا در حالت خنک‌کاری لایه‌ی داخلی استوانه ترسیم و مورد ارزیابی قرار گرفت. در سال ۲۰۰۲ ال نگار و همکاران [۲۴] با استفاده از روش عددی تفاضل محدود تنش‌های حرارتی گذرا را در استوانه‌های ناهمگن و ناهمسانگرد (ارتوتروپیک) چرخان را به دست آوردند. ایشان نیز انتقال حرارت را یک بعدی و استوانه ناهمگن را در حالت کرنش صفحه‌ای فرض کردند. ناهمگنی خواص در این پژوهش به صورت یک تابع توانی در نظر گرفته شد.

حل نیمه تحلیلی ترموالاستیسیته استوانه‌های ناهمگن با طول محدود با استفاده از روش چندلایه کردن در سال ۲۰۰۵ [۲۵-۲۶] ارائه شد. دو سرانته‌ای استوانه‌های ناهمگن (شرایط مرزی) به صورت تکیه‌گاه ساده مکانیکی و دارای دمای ثابت در نظر گرفته شد. ایشان با استفاده از روش چندلایه کردن^۱ استوانه ناهمگن را به مجموعه‌ای از استوانه همگن که با یکدیگر در تماس بودند، تبدیل کردند و

سپس با اعمال شرایط پیوستگی در سطح تماس استوانه‌ها، به حل ترموالاستیسیته آنها اقدام نمودند. تحلیل یک بعدی گذرای ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن با استفاده از تبدیل لاپلاس انجام شد [۲۷-۲۸]. در سال ۲۰۰۷ بهتویی و اسلامی [۲۹] تحلیل ترموالاستیسیته جفت‌شده استوانه‌های ناهمگن با طول محدود را به‌دست آوردند. ایشان با استفاده از FSDT و تئوری دمای مرتبه اول^۱ معادلات حرکت و انرژی را برای استوانه‌های ناهمگن تحت شوک حرارتی استخراج نمودند. معادلات حاکم را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس از حوزه‌ی زمان به حوزه‌ی مکان تبدیل کردند. با روش گالرکین معادلات حاکم را در حوزه‌ی مکان حل نمودند و سپس با روش عددی تبدیل معکوس لاپلاس حل نهایی ترموالاستیسیته استوانه‌های ناهمگن تحت شوک حرارتی را استخراج نمودند.

حیدرپور و همکاران [۳۰] در سال ۲۰۱۲ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته، معادلات حاکم بر استوانه ناهمگن چرخان که تحت فشار داخلی و انتقال حرارت پایدار در راستای ضخامت (یک بعدی) قرار داشت را در حالت کلی استخراج کردند و با استفاده از روش‌های چندلایه کردن استوانه و گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم با روش مربعات دیفرانسیلی^۲ همراه با اعمال شرایط پیوستگی و مرزی جابه‌جایی، تنشی، دمایی و انتقال حرارتی منجر به ایجاد دستگاه معادلات خطی شدند و آن را حل کردند. ایشان ناهمگنی خواص را تنها به‌صورت کسر حجمی و وابسته به دما در نظر گرفتند و نشان دادند وابستگی خواص به دما تأثیر مشهودی بر روی جابه‌جایی و تنش دارد.

سیفی در سال ۲۰۱۵ [۳۱] حل دقیق و تخمینی را برای تنش‌های ترموالاستیک در استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به‌دست آورد. در این پژوهش، با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی و صرف نظر از تنش برشی و فرض انتقال حرارت در راستای شعاعی حل دقیق و تخمینی برای استوانه‌های ناهمگن با توزیع توانی و نمایی خواص به‌دست آمد. معادله تعادل برای استوانه ناهمگن به‌صورت معادله دیفرانسیل مرتبه‌ای است که در این پژوهش برای استوانه ناهمگن با توزیع توانی با استفاده از

1. First-order temperature theory (FTT)
2. Differential Quadrature Method (DQM)

روش اویلر اقدام به حل آن صورت می‌گیرد و برای استوانه ناهمگن با توزیع نمایی با استفاده از تغییر متغیر و استفاده از توابع بسل حل آن انجام می‌شود. حل تخمینی با استفاده از روش چندلایه کردن که استوانه را به لایه‌های همگنی با ضخامت یکسان تبدیل می‌کند و شرایط پیوستگی جابه‌جایی شعاعی، تنش شعاعی و دمایی را در مرز تماس هر لایه اعمال می‌کند به دست می‌آید. نتایج نشان می‌دهند حل تخمینی در صورت تقسیم استوانه به تعداد لایه‌های زیاد از دقت بالایی برخوردار است و نتایج آن بر حل دقیق منطبق است. همچنین اثر بارگذاری حرارتی غالب بر اثر بارگذاری فشاری می‌باشد.

کوچکزاده و انتظاری در سال ۲۰۱۵ [۳۲] حل تحلیلی ترموالاستیسیته جفت‌شده کلاسیک را برای دیسک‌های چرخان به دست آوردند. در این پژوهش سازه تحت شوک حرارتی در نظر گرفته می‌شود همین امر سبب می‌شود دیگر نتوان از تحلیل ترموالاستیسیته جفت‌نشده استفاده کرد در واقع علاوه بر این که تغییر دما ایجاد تغییر شکل در سازه می‌کند؛ تغییر شکل نیز سبب ایجاد تغییر دما در جسم می‌شود. ایشان با صرف نظر از تنش برشی و استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی و در نظرگیری جفت‌شدگی کلاسیک میدان دما و جابه‌جایی معادلات حاکم را که دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی است، به دست آوردند. سپس با استفاده از روش تحلیلی تبدیلات فوریه^۱-بسل^۲ حل بسته‌ای را برای میدان جابه‌جایی و دما در جسم ارائه دادند. در این پژوهش آثار سرعت دورانی و پارامتر جفت‌کننده بر روی رفتار ترمومکانیکی دیسک مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت.

جباری و همکاران در سال ۲۰۱۵ [۳۳] با استفاده از روش چندلایه کردن مشابه [۲۰] حل ترموالاستیک نیمه-تحلیلی برای استوانه جدار متغیر چرخان ناهمگن به دست آوردند. در این پژوهش انتقال حرارت به صورت یک بعدی در نظر گرفته شد و فرض شد انتقال حرارت تنها در راستای شعاعی در استوانه جدار متغیر رخ می‌دهد. با توجه به فرض انتقال حرارت یک بعدی و استفاده از روش

1. Fourier
2. Bessel

چندلایه کردن و اعمال شرط مرزی دمای معلوم در جدار داخلی و خارجی استوانه، حل معادله انتقال حرارت برای دیسک‌های همگن که بر روی هم قرار گرفته بود و استوانه جدار متغیر ناهمگن را تشکیل می‌داد انجام شد. بر اثر این پژوهش اثر بارگذاری مکانیکی، حرارتی و ناهمگنی خواص بر روی رفتار مکانیکی استوانه مورد بررسی قرار گرفت.

عارفی در سال ۲۰۱۵ [۳۴] فرمول‌بندی تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ثابت ناهمگن را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا برای توزیع‌های مختلف ناهمگنی ارائه نمود. ایشان با در نظر گرفتن فرض معلوم بودن توزیع دما در جسم، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا و روش انرژی، معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ثابت ناهمگن با تابع دلخواه توزیع خواص را ارائه نمود و حل معادلات به‌دست آمده را برای توزیع توانی و نمایی خواص نشان داد. همچنین اثر ناهمگنی خواص بر روی رفتار مکانیکی استوانه تحت بارگذاری مکانیکی بررسی شد. در همین سال ایشان [۳۵] تحلیل حرارتی غیرخطی استوانه‌های ناهمگنی را که خواص آنها با دما تغییر می‌کرد، به دست آوردند. در این پژوهش ناهمگنی خواص را به صورت توانی و وابستگی خواص به دما به صورت نمایی در نظر گرفته شد. متغیر بودن خواص ماده با دما و انتقال حرارت تنها در راستای شعاعی منجر به ایجاد یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه‌ای برای معادله تعادل حرارتی حاکم می‌شود. که ایشان با استفاده از روش تحلیلی و تقریبی که معادله را به دو بخش خطی و غیر خطی تقسیم می‌نمود اقدام به حل این معادله کردند. حل به دست آمده به صورت سری بازگشتی است که با محاسبه جمله‌ی اول (مربوط به بخش خطی معادله دیفرانسیل) می‌توان جمله‌ی دوم و به همین ترتیب جملات بعدی را به دست آورد و معیار همگرایی در این روش محاسبه انتگرال خطا می‌باشد که می‌باید از میزان مجاز در نظر گرفته شده کمتر باشد. شایان به ذکر است در این پژوهش، آثار ناهمگنی خواص و وابستگی دمایی خواص بر روی توزیع میدان دمایی در جسم مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت.

قنّاد و پرهیزکار یعقوبی در سال ۲۰۱۵ [۳۶] حل دو بعدی ترموالاستیسیته استوانه‌های جدار ضخیم را که در لایه داخلی خود تحت فشار و شار حرارتی قرار داشتند را برای شرایط مرزی

مختلف در دو سراسر استوانه ارائه کردند. ایشان با استفاده از روش انرژی و به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و فرض تغییرات خطی میدان دمایی در راستای ضخامت، دستگاه معادلات حاکم را به دست آوردند. با استفاده از روش حل معادلات اقدام به حل این دستگاه معادلات حاکم صورت گرفت و نتایج برای دو دسته استوانه نشان دادند. استوانه‌های دسته‌ی اول به صورت مکانیکی در دو سر گیردار بودند و از لحاظ دمایی دارای دمایی معین در دو سر بودند و دسته‌ی دوم استوانه‌هایی بودند که یک سر گیردار و دارای دمای معین بودند و سر دیگر آنها آزاد بود و از لحاظ حرارتی عایق شده بودند. در این پژوهش شرایط مرزی مختلف بر روی رفتار ترموالاستیک استوانه مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت و حل دوبعدی ترموالاستیسیته استوانه‌های جدار ضخیم ارائه گردید.

موسایی در سال ۲۰۱۶ [۳۷] تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن غیرقابل تراکمی را انجام داد که خواص آنها وابسته به دما بود. در این پژوهش با فرض طول بودن استوانه مورد تحلیل انتقال حرارت بدون وجود منبع تولید حرارت داخلی در حالت پایدار و به صورت یک بعدی در نظر گرفته شد. وابستگی خواص به دما منجر به این امر شد که معادله انتقال حرارت یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ای غیرخطی باشد که به وسیله تئوری اغتشاشات حل این معادله انجام شد و توزیع میدان دمایی در جسم به دست آمد. در ادامه با استفاده از فرض طول بودن استوانه، صرف نظر از تنش‌های برشی و استفاده از تئوری کلاسیک معادله تعادل ترموالاستیک حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم با استفاده از روش ناویر در دو حالت کرنش صفحه‌ای و بارگذاری فشاری محوری با معلوم بودن میدان دمایی در جسم حل می‌شود و تنش‌ها و جابه‌جایی در استوانه به دست می‌آید و اثر ناهمگنی خواص و وابستگی دمایی آنها مورد بررسی واقع می‌شود.

عارفی و همکاران در سال ۲۰۱۶ [۳۸] آثار بارهای غیریکنواخت و متغیر مکانیکی و حرارتی را بر روی پاسخ ترموالاستیک دو بعدی (در راستای شعاعی و طول استوانه) استوانه‌های FG بررسی کردند. ایشان در ابتدا با استفاده از روش جداسازی متغیرها معادله انتقال حرارت رسانشی در استوانه ناهمگن را به صورت تحلیلی حل و توزیع میدان دما در استوانه را به دست آوردند، سپس با استفاده از تئوری

تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول دستگاه معادلات تعادل حاکم را استخراج و با روش مقدار ویژه و بردار ویژه آن را حل کردند. در سال ۲۰۱۷ یا سین-ا سکای^۱ و توکواوا^۲ [۳۹] تحلیل یک بعدی گذرای دما و تنش‌های حرارتی را در استوانه ناهمگن انجام دادند. حل ارائه شده با استفاده از کاهش به یک مسئله معکوس ترموالاستیسیته به دست آمد. این تحلیل شناسایی دما وابسته به زمان در یکی از لایه‌های محدود کننده استوانه ناهمگن را با توجه به معلوم بودن اطلاعات دما و جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی محدود کننده دیگر، انجام می‌دهد.

زمانی‌نژاد و همکاران در سال ۲۰۱۷ [۴۰] فرمول‌بندی کلی روش چندلایه کردن^۳ را برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های ضخیم حاصل از دوران با پروفیل و ضخامت جدار دلخواه ارائه کردند. در این پژوهش سازه به تعدادی دیسک با ضخامت یکسان در راستای طول تبدیل شد که با در نظر گرفتن انتقال حرارت به صورت یک بعدی (در راستای شعاعی) و استفاده از FSDT، معادلات حاکم بر پوسته‌های ضخیم حاصل از دوران جدار متغیر استخراج شد، سپس با اعمال شرایط پیوستگی در سطح تماس دیسک‌ها، حل الاستیسیته آنها ارائه شد. در ادامه جباری و همکاران [۴۱] با استفاده از روش [۴۰]، تحلیل تنش را برای مخروط‌های ناقص جدار ضخیم متغیر که بارگذاری حرارتی و مکانیکی قرارداشتند، ارائه نمودند. تحلیل ترموالاستیک مخروط‌های ناقص جدار ثابت چرخان با استفاده از روش چندجمله‌ای مبتنی بر مربعات تفاضلات و بسط فوریه توسط مهدی‌تبار و همکاران در سال ۲۰۱۸ [۴۲] ارائه شد. در این تحقیق فرض شد که انتقال حرارت تنها به صورت یک بعدی (در راستای ضخامت مخروط ناقص) رخ می‌دهد و با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی معادلات تعادل حاکم بر مخروط ناقص جدار ثابت استخراج شد. سپس دستگاه معادلات حاکم با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل^۴ حل شد.

تحلیل غیرخطی گذرای ترموالاستیک در لوله‌های FG^۱ استفاده شده در تأسیسات گاز طبیعی

1. Yasinsky

2. Tokova

3. Multi Layer Method

4. Differential Quadrature Method (DQM)

توسط سلیمان و همکاران [۴۳] در سال ۲۰۱۸ بررسی شد. در این پژوهش توزیع ناهمگنی خواص به صورت توابع توانی و سیگموئید^۱ در نظر گرفته شد. با استفاده از روش عددی و فرض حالت کرنش صفحه‌ای، حل مسأله مذکور ارائه شد. امیدی بیدگلی و همکاران در سال ۲۰۱۸ [۴۴] تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن چرخان را که بر روی بستر اصطکاکی قرار داشته و تحت گشتاور خارجی و بارگذاری حرارتی قرار داشتند را، مورد پژوهش و تحقیق قرار دارند. ایشان انتقال حرارت در استوانه ناهمگن را به صورت یک بعدی در نظر گرفته، حل کردند و میدان دما را در استوانه ناهمگن به دست آوردند. سپس با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول معادلات حاکم بر استوانه را به دست آوردند و با استفاده از روش مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن را حل کردند.

۱-۵-۳ تحلیل استوانه‌های پیزوالکتریک جدار ثابت و متغیر

نظریه‌ی پیزوترموالاستیک^۲ پوسته‌ی نازک، بر اساس نظریه‌ی پیزوالکتریک خطی و فرضیات لاو-کیر شیف توسط تزو و هووارد [۴۵] در سال ۱۹۹۴ استخراج گردید؛ در این پژوهش ماده به صورت همسانگرد عرضی^۳ در نظر گرفته شد، سپس ایشان با استفاده از ساده‌سازی‌هایی که مبتنی بر پارامترهای لامه و شعاع انحناها بود کاربرد این نظریه را برای محیط‌های مختلف پیزوالکتریکی، از قبیل پوسته‌ی استوانه‌ای، حلقه‌ی دایروی^۴ و تیر نشان دادند. در سال بعد، تزو و باو [۴۶] کاری مشابه پژوهش پیشین انجام دادند با این تفاوت که ماده را به صورت ناهمسانگرد در نظر گرفتند و معادلات ترموالکترومکانیکی^۵ حاکم بر پوسته‌ی چندلایه را با استفاده از اصل همیلتون^۶ استخراج کردند.

در سال ۱۹۹۶ کاپوریا و همکاران [۴۷] با استفاده از توابع پتانسیلی که شرایط مرزی را در دو سر پوسته‌ی استوانه‌ای ارضا می‌کرد؛ حل تحلیلی پیزوترموالاستیک پوسته‌ی استوانه‌ای متقارن محوری

-
1. Sigmoid
 2. Piezothermoelastic
 3. Transversely isotropic
 4. Circular ring
 5. Thermo-electromechanical
 6. Hamilton

محدود را با استفاده از سری‌ها به دست آوردند. در این پژوهش جنس پوسته‌ی استوانه‌ای، همسانگرد عرضی در نظر گرفته شده بود که در راستای محور خود پلاریزه شده بود؛ همچنین بارگذاری متقارن محوری از گسترش سری فوریه^۱ در راستای محوری در نظر گرفته شده بود و ضرایب در مجموعه‌ی توابع پتانسیل نامحدود برای هر مؤلفه‌ی فوریه، از حل شش معادله‌ی جبری که ناشی از ارضا شرایط مرزی در لایه‌ی داخلی و خارجی پوسته‌ی استوانه‌ای بود، به دست می‌آمد. ایشان نشان دادند؛ حداکثر میزان تنش محوری و جابه‌جایی شعاعی را، می‌توان با کاربرد مناسب بار الکتریکی سطحی، کاهش داد. در سال ۲۰۰۰ بن‌جی دو [۴۸] مطالعه‌ی اجمالی بر پیشرفت مدل‌سازی اجزای محدود پیزوالکتریک‌المان‌های سازه‌ای انطباقی^۲ انجام داد. در طی این مطالعه، ایشان نحوه‌ی استخراج معادلات وردشی^۳ برای محیط الکترومکانیک^۴ را نیز ارائه کردند. پینتو کورریا و همکاران در سال ۲۰۰۲ کنترل فعال مخروط ناقص با لایه‌های پیزوالکتریک را ارائه نمودند [۴۹]. در این پژوهش یک روش اجزای محدود^۵ ترکیبی استفاده شده که ترکیبی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا^۶ معادل تک‌لایه برای نشان دادن رفتار مکانیکی با تفکیک لایه‌ای در راستای ضخامت برای نشان دادن توزیع پتانسیل الکتریکی هر لایه پیزوالکتریک در اجزای مخروط ناقص است. همچنین در این پژوهش برای تحقق فرآیند کنترل فعال از جفت‌شدگی بین لایه‌های محرک پیزوالکتریک و سنسور پیزوالکتریک استفاده شده و نتایج برای ارتعاش آزاد و اجباری یک استوانه تیتانات زیرکونات سرب-۷۴ نشان داده شده است.

حل دقیق پیزوترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FG با استفاده از سری توانی و فوریه، توسط ژیاو-هونگ و همکاران [۵۰] در سال ۲۰۰۳ ارائه شد. ایشان توزیع ناهمگنی را در استوانه به صورت

-
1. Fourier
 ۲. Adaptive
 3. Variational
 4. Electro-mechanical
 5. Finite Element Method (FEM)
 6. Higher Order Shear Deformation Theory (HSDT)
 7. PZT-4

توانی مورد مطالعه قرار دادند و با استفاده از تبدیل هانکل^۱ معادله‌ی انتقال حرارت هدایتی فوریه در حالت پایدار را حل و میدان دما را به صورت معین در معادلات فرض کردند؛ ایشان معادلات حاکم را در حالتی حل کردند که شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی دو سر استوانه به صورت تکیه گاه ساده^۲ و اتصال زمین در نظر گرفته شود. در این پژوهش نشان داده شد ثابت ناهمگنی اثری مشهود بر روی رفتار پیزوالکتریکی دارد.

در اوایل سال ۲۰۰۵ بن جی دو و آندریان آری سون [۵۱] نظریه‌ی ترموپیزوالکتریک همراه با حساب تغییرات را برای کامپوزیت‌های چندلایه‌ی هوشمند^۳ ارائه کردند. در همین سال، ژیفای و ینگ تحلیل یک استوانه‌ی ساخته شده از مواد متغیر تابعی پیزوترموالاستیک تحت شرایط کرنش صفحه‌ای^۴ را به دست آوردند [۵۲]. در این پژوهش یکی از ثابت‌های پیزوالکتریک-تنش به صورت یک تابع درجه دو که در راستای ضخامت استوانه تغییر می‌کرد، فرض شد و با استفاده از فرض طویل بودن استوانه (شرایط کرنش صفحه‌ای) حل دقیق مسأله استخراج گردید.

در سال ۲۰۰۶، سنتوس و همکاران با ارائه یک مدل اجزای محدود اقدام به تحلیل سه بعدی پوسته‌های چندلایه متقارن محوری دارای سنسورها و محرک‌های پیزوالکتریک نمودند [۵۳]. در این پژوهش با توسعه مدل نیمه تحلیلی اجزای محدود پوسته با استفاده از تئوری سه بعدی الاستیسیته خطی تحلیل الکتروالاستیک ارائه شد. در این پژوهش، معادله حرکت با بیان میدان جابه جایی به صورت بسط توسعه یافته فوریه در راستای محیطی به معادلات دوبعدی شامل هارمونیک‌های محیطی تبدیل شد. همچنین در فرمول بندی اجزای محدود استفاده شده، متغیرهای وابسته، پتانسیل الکتریکی و بارگذاری به صورت بسط فوریه برش خورده در نظر گرفته شد و تحلیل الکتروالاستیک به دست آمد. نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از سایر حل‌های اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار گرفت و توافق خوبی میان نتایج مشاهده شد.

1. Hankel
2. Simply support
3. Smart
4. Plane strain

وو و تسای [۵۴] حل سه بعدی مگنتوالکتروالاستیک^۱ پوسته های FG دارای دو انحنا را، که دارای شرایط مرزی مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی کاملاً ساده تکیه گاهی در لبه ی خود بودند، در سال ۲۰۰۷ ارائه کردند. در همین زمان، ایشان توزیع ناهمگنی خواص را به صورت کسر حجمی در نظر گرفتند و نشان دادند؛ میدان سینماتیک به دست آمده از نظریه ی جفت شده ی^۲ کلاسیک پوسته ممکن است برای پوسته های متغیر تابعی و مگنتوالکتروالاستیک مناسب نباشد؛ به ویژه زمانی که بارهای مغناطیسی و الکتریکی وجود دارد. در همین سال، ونگ و دینگ یک حل دقیق برای کنترل تنش در استوانه های طویل (شرایط کرنش صفحه ای) چرخان چندلایه پیزوالکتریک ارائه نمودند [۵۵]. این حل دقیق توسط روش حالت-فضا استخراج گردید و نتایج مربوط به تنش شعاعی و محیطی ترسیم و مورد بحث و بررسی قرار گرفت. دای و همکاران تحلیل رفتار الکترومگنتوالاستیک استوانه و کره های جامد ساخته شده از ماده متغیر تابعی پیزوالکتریک^۳ را انجام دادند [۵۶]. در این پژوهش توزیع ناهمگنی خواص در راستای ضخامت سازه ها در نظر گرفته شد و با استفاده از تحلیل یک بعدی رفتار سازه ها در راستای ضخامتشان حل تحلیلی دقیق به دست آمد. آثار ناهمگنی خواص بر روی رفتار تنش ها، پتانسیل الکتریکی و بردار میدان مغناطیسی مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

دای و همکاران در سال ۲۰۱۰ [۵۷] با استفاده از نظریه الاستیسیته مستوی تحلیل الکتروترمو مگنتوالاستیک استوانه های ناهمگن را به دست آوردند. ایشان توزیع ناهمگنی خواص را در استوانه به صورت توانی در نظر گرفتند، همچنین در این پژوهش انتقال حرارت و تعادل الکتروستاتیک به صورت یک بعدی و در راستای شعاعی در نظر گرفته شد و فرض شد استوانه در میدان یکنواخت مغناطیسی در راستای محور خود قرار دارد این امر منجر به ایجاد معادلات دیفرانسیل مرتبه ای ناهمگن شد. ایشان با حل این معادلات و اعمال شرایط مرزی به مطالعه و بررسی رفتار الکتروترمو مکانیکی استوانه تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی پرداختند. در همین سال، دای و

1. Magneto-electro-elastic

2. Coupled

3. Functionally Graded Piezoelectric Material (FGPM)

همکاران [۵۸] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی حل تحلیلی سازه‌های توخالی از جنس مواد پیزوالکتریک متغیر تابعی را به دست آوردند. طبق این پژوهش استوانه و کره‌ی توخالی که تحت بارهای مکانیکی و الکتریکی قرار داشت و خواص آن به صورت توانی تغییر می‌کرد، مورد بررسی قرار گرفت؛ نتایج نشان می‌داد، ثابت ناهمگنی تأثیر زیادی بر روی تنش و پتانسیل الکتریکی دارد همچنین با ایجاد بار الکتریکی مناسب می‌توان توزیع تنش را در جسم کنترل کرد. اندکی بعد، لی و همکاران [۵۹] کاری مشابه پژوهش پیشین [۵۸] انجام دادند. ایشان با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به کارگیری انتگرال فرد هولم حل دقیق استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک را برای هر توزیع دلخواه ناهمگنی خواص، به دست آوردند و نتایج را، تنها برای زمانی که خواص به صورت توانی و کسر حجمی تغییر می‌کرد، نشان دادند و نتایجی مشابه [۵۸] به دست آوردند.

در سال ۲۰۱۰، حل‌های تحلیلی برای دو نوع محرک‌های پیزوالکتریک تحت بارهای برشی توسط تائوتائو^۱ و ژیفای ارائه شد [۶۰]. در ادامه، یک حل دقیق یک بعدی (در راستای شعاعی) با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی در شرایط کرنش صفحه‌ای برای استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک و ساندویچی سه لایه که دارای هسته‌ای از جنس مواد متغیر تابعی پیزوالکتریک بودند، توسط ونگ [۶۱]، [۶۲]، ارائه شد. در این مقاله، تغییرات خواص را به صورت نمایی در راستای ضخامت برای هسته ناهمگن پیزوالکتریک در نظر گرفته شد و آثار آن بر روی رفتار الکترواستیک سیلندر ساندویچی مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

در سال ۲۰۱۲، رحیمی و همکاران [۶۳] به وسیله‌ی نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن را مورد تحلیل قرار دادند. در این پژوهش ناهمگنی خواص به صورت توانی مدل سازی شد و استوانه تحت فشار داخلی قرار داشت. ایشان نشان دادند نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مقادیر جابه‌جایی را با دقت خوبی پیش‌بینی می‌کند و در نواحی دور از مرز تطابق خوبی با نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی دارد. در ادامه، عارفی و رحیمی معادلات حرکت سه بعدی

1. Taotao

حاکم بر پوسته‌های ناهمگن پیزوالکتریک حاصل از دوران با شعاع انحنای و جدار متغیر دلخواه که دارای توزیع ناهمگنی دلخواه در سازه بودند را با استفاده از روش انرژی استخراج و بیان کردند [۶۴].

دای و همکاران تحلیل تنش را در استوانه‌های چرخان ناهمگن پیزوالکتریک که تحت بارگذاری حرارتی، مکانیکی و الکتریکی قرار داشت، انجام دادند [۶۵]. با استفاده از فرض طویل بودن استوانه (شرایط کرنش صفحه‌ای) و تغییر خواص ماده در راستای ضخامت به صورت یک تابع توانی در استوانه ناهمگن، حل دقیق یک بعدی مسأله مذکور انجام و توزیع تنش به دست آمد. تحلیل کنترل فعال ارتعاشات پوسته‌های مخروطی با استفاده از مواد پیزوالکتریک توسط لی و همکاران انجام شد [۶۶].

ایشان با استفاده از روش انرژی و اصل همپلتون معادلات حاکم پیچیده و دارای کوپلینگ الکترومکانیکی را برای پوسته مخروطی استخراج نمودند، سپس با استفاده از روش بازخورد سرعت و تنظیم‌کننده درجه‌ی دوم خطی اقدام به تحلیل کنترل فعال ارتعاشات با تکنیک اجزای محدود نمودند. تحلیل الکتروالاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک ساندویچی چندلایه را که به ترتیب تحت بارگذاری الکترومکانیکی در لایه‌های داخلی و خارجی استوانه قرار داشتند، توسط وو و تسای [۶۷] ارائه شد. در این پژوهش شرایط مرزی تکیه‌گاهی دو سراسر استوانه به صورت کاملاً ساده برای میدان جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و دما در نظر گرفته شد و با استفاده از فرض تغییر ناهمگنی خواص به صورت یک تابع نمایی در راستای ضخامت و روش موفقیت‌آمیز پاجنو^۱ مسأله مذکور تحلیل شد. عارفی و همکاران [۶۸] حل دقیق استوانه‌های طویل ناهمگن پیزوالکتریک را که تحت بارگذاری یک بعدی الکتروترمو مکانیکی قرار گرفته و در میدان مغناطیسی قرار داشتند، مشابه [۶۵] به دست آوردند و ارائه نمودند. تحلیل دوبعدی الکتروالاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک در راستای شعاعی و محیطی توسط جعفری‌فشارکی و همکاران انجام شد [۶۹] و با استفاده از روش جدا سازی متغیرها و به دست فوریه مختلط، یک حل تحلیل برای استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک با تغییرات خواص در راستای

1. Pagano

ضخامت ارائه شد. شاه^۱ و رای^۲، کنترل فعال ارتعاشات پوسته‌های مخروطی ناقص کامپوزیتی تقویت شده با ۳-۱ کامپوزیت پیزوالکتریک را با استفاده از روش اجزای محدود ارائه کردند [۷۰].

لقمان و پارسا در سال ۲۰۱۴ [۷۱] حل دقیق مگنتو ترموالاستیک استوانه دولایه‌ای طویل را که جنس استوانه داخلی ناهمگن و خارجی همگن بود را به‌دست آوردند. در این پژوهش استوانه تحت میدان یک بعدی دمایی و مغناطیسی قرار داشت که تنها در راستای شعاعی تغییر می‌کردند و هم‌چنین در شعاع داخلی و خارجی تحت بارگذاری فشاری قرار داشت. با استفاده از شرایط الاستیسیته مستوی (عدم وجود تنش برشی) و طویل بودن استوانه (حالت کرنش صفحه‌ای)، استخراج معادلات حاکم انجام شد که معادلات حاکم به صورت دو معادله دیفرانسیل مرتبه‌ای ناهمگن با ضرایب متغیر برای استوانه ناهمگن داخلی و همگن خارجی است. در این پژوهش با استفاده از روش اویلر-کوشی حل معادلات حاکم انجام شد و شرایط پیوستگی برای ناحیه‌ی تماس استوانه داخلی و خارجی برابر بودن جابه‌جایی شعاعی و تنش شعاعی در نظر گرفته شد و اثر ناهمگنی و بارگذاری مگنتو ترموالاستیک بر روی استوانه جدار ثابت دولایه بررسی و مطالعه شد. در ادامه، ونگ^۳ تحلیل الکتروالاستیک یک بعدی استوانه‌های چندلایه کامپوزیتی تقویت‌شده با فایبر همراه با محرک‌های پیزوالکتریک را ارائه نمودند [۷۲]. در این تحقیق از روش حالت-فضا برای استخراج حل دقیق الکتروالاستیک استفاده گردید.

جباری و اقدم در سال ۲۰۱۵ [۷۳] تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های سه لایه که از دو استوانه همگن پیزوالکتریک و یک استوانه ناهمگن تشکیل می‌شد، را به‌دست آوردند. در این پژوهش، استوانه ناهمگن در بین دو استوانه‌ی همگن پیزوالکتریک قرار می‌گیرد. هدف از استوانه‌های پیزوالکتریک در لایه‌ی داخلی و خارجی استفاده به عنوان حسگر و محرک است تا بتوان به وسیله آنها رفتار مکانیکی استوانه را کنترل نمود. ایشان با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی حالت کرنش صفحه‌ای و

1. Shah
2. Ray
3. Wang

فرض تغییرات یک بعدی میدان حرارتی و الکتریکی در راستای شعاعی معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ای حاکم بر مسأله را استخراج کردند و با استفاده از شرایط مرزی و پیوستگی اقدام به حل معادلات حاکم نمودند. شرایط پیوستگی برای میدان دما و مکانیکی به ترتیب برابر بودن دما و انتقال حرارت در محل تماس و یکسان بودن جابه‌جایی و تنش شعاعی در نظر گرفته شد. در این پژوهش اثر ناهمگنی خواص و کنترل رفتار مکانیکی سیلندر توسط لایه‌های پیزوالکتریک مشاهده و بررسی شد.

دای و جیانگ در سال ۲۰۱۵ [۷۴] با استفاده از تئوری خطی پوسته فن کارمن^۱ تحلیل ترمومگنتوالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن را انجام دادند. در این پژوهش تغییرات دما به صورت یک بعدی و در راستای شعاعی در نظر گرفته شد و فرض شد استوانه تحت میدان یکنواخت مغناطیسی در راستای شعاعی استوانه قرار گرفته که سبب ایجاد نیروی حجمی در داخل سیلندر می‌شود. روش به کار گرفته شده و فرضیات سبب گرید تا معادلات حاکم بر مسأله به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ای باشد که با استفاده از روش حل معادلات اقدام به حل دستگاه انجام شد. در این پژوهش ناهمگنی خواص به صورت تابع کسر حجمی در نظر گرفته شد و آثار ناهمگنی، بارگذاری ترمومگنتوالاستیک و شرایط مرزی بر رفتار مگنتومکانیکی استوانه مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت.

عطریان و همکاران در سال ۲۰۱۵ [۷۵] تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک را که تحت بارگذاری نامتقارن محوری بود را به دست آوردند. در این پژوهش فرض شد استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن بلند می‌باشند و از رفتار آنها در راستای طولی می‌توان صرف نظر کرد؛ رفتار الکتروترمو مکانیکی استوانه جدار ضخیم ناهمگن به صورت دوبعدی و در راستای شعاعی و محیطی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. جز ضریب پواسون، سایر خواص به صورت ناهمگن فرض شدند و ناهمگنی خواص به صورت تابع توانی که در راستای شعاعی تغییر می‌کرد مدل سازی گردید. همچنین از فرض قرار داشتن استوانه تحت پتانسیل الکتریکی متقارن محوری استفاده شد که منجر به ساده سازی جفت‌شدگی معادلات تعادل میدان مکانیکی و الکتریکی گردید و با استفاده از روش جداسازی متغیرها

1. Von Karman

و استفاده از سری فوریه حل دقیق مسئله به دست آمد. همچنین شایان توجه است که حل معادله انتقال حرارت با استفاده از روش سری فوریه که توسط [۷۶] ارائه شده بود، انجام گردید. در این پژوهش اثر ناهمگنی و تاثیر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی بر روی رفتار استوانه‌ی ناهمگن مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت.

در سال ۲۰۱۶، لقمان و پارسا حل دقیق الکتروترموگنتوالاستیک را برای یک استوانه‌ی توخالی دولایه که لایه خارجی آن از مواد متغیر تابعی پیزوالکتریک بود را به دست آوردند [۷۷]. در این تحلیل، با استفاده از فرض طول بودن استوانه و حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم، حل دقیق در راستای شعاعی به دست آمد و نشان دادند که می‌توان، مقدار بهینه تنش مؤثر بر اساس تئوری شکست فن میزس را توسط مقدار ثابت ناهمگنی، تعیین نمود. حل دقیق برای رفتار الکتروترموالاستیک یک استوانه جدار نازک ناهمگن پیزوالکتریک پر شده از سیال توسط دای و همکاران در سال ۲۰۱۷ ارائه شد [۷۸]. در این پژوهش، انتقال حرارت و تعادل الکتریکی در راستای ضخامت و به صورت یک بعدی در نظر گرفته شد و جهت استخراج معادلات میدان مکانیکی از تئوری کلاسیک پوسته‌های استوانه‌ای استفاده گردید. این پژوهش اثر ناهمگنی مواد را بر روی رفتار الکتروترموالاستیک اندرکنش سازه و سیال را در استوانه ناهمگن پیزوالکتریک مورد تحقیق و بررسی قرار داد.

در سال ۲۰۱۸، مهدی تبار و همکاران تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان ناهمگن پیزوالکتریک را که تحت اثر بارهای دینامیکی قرار داشتند ارائه نمودند [۷۹]. ایشان با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی تحلیل دوبعدی دینامو-ترمو-الاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک را به دست آوردند و اثر ناهمگنی خواص را بر روی آن بررسی کردند. تحلیل تنش و کنترل فعال استوانه‌ها و دیسک‌های ناهمگن پیزوالکتریک با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی به ترتیب در حالت‌های کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی توسط پرهیزکار یعقوبی و همکاران [۸۰] ارائه شد. در این پژوهش اثر ناهمگنی مواد بر روی رفتار یک بعدی الکتروترمو مکانیکی استوانه‌ها و دیسک‌ها در راستای شعاعی مورد تحقیق و بررسی قرار گرفت.

در سال ۲۰۱۹، تحلیل الکتروالاستیک تنش و جابه‌جایی در پوسته‌های دارای دو انحنا پیزوالکتریک بر روی بستر وینکلر^۱ و تحت ولتاژ اعمالی توسط عارفی و بیدگلی ارائه شد [۸۱]. با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و فرض معلوم بودن نحوه تغییرات پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت پوسته معادلات حاکم با استفاده از اصل کمینه سازی انرژی پتانسیل استخراج گردید. در این پژوهش با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده مکانیکی و همگن پتانسیل الکتریکی در لبه‌های پوسته، حل عددی ارائه شد و تاثیر پارامترهای مهم نظیر ولتاژ اعمالی و پارامترهای بستر وینکلر بر روی رفتار الکتروالاستیک جسم مورد تحلیل و مطالعه قرار گرفت. محمدی و همکاران تحلیل الکتروالاستیک مخازن تحت فشار ساندویچی استوانه‌ای با هسته متخلخل و ورقه‌های جانبی پیزوالکتریک بر روی یک بستر پاسترناک^۲ را ارائه کردند [۸۲]. ایشان با استفاده از روش [۸۳]، اقدام به استخراج دستگاه معادلات حاکم نمودند و سپس با استفاده از روش کلاسیک مسائل مقدار ویژه، حل تحلیلی مسأله را ارائه نمودند. در این پژوهش آثار ضرایب بستر و ضرایب هسته متخلخل بر روی تغییر شکل جسم مورد بررسی و واکاوی قرار گرفت.

جدول ۱-۱ پژوهش‌های انجام شده را به صورت فهرستوار ارائه می‌شود.

جدول ۱-۱ پژوهش‌های انجام شده

سال	پژوهشگر	موضوع پژوهش
۱۸۵۲	لامه [۴]	حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم همگن با PET
۱۹۹۴	تزو و هووارد [۴۵]	ارائه تئوری پیزوترموالاستیک پوسته‌ی نازک بر اساس نظریه‌ی پیزوالکتریک خطی و فرضیات لاو-کیرشهف
۱۹۹۵	تزو و باو [۴۶]	ارائه تئوری پیزوترموالاستیک پوسته‌ی چندلایه ناهمسانگرد با استفاده از اصل همپلتون (مشابه [۴۵])
۱۹۹۶	کاپوریا و همکاران [۴۷]	تحلیل الکتروترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم به روش سری فوریه با تئوری الاستیسیته
۱۹۹۹	هورگان و چان [۱۱]	حل دقیق استوانه‌ها و دیسک‌های جدار ضخیم ناهمگن با PET

1. Winkler
2. Pasternak

۱۹۹۹	زیرمان و لوتر [۲۲]	حل دقیق ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با PET
۲۰۰۰	بن‌جی‌دو [۴۸]	ارائه مطالعه‌ای اجمالی بر پیشرفت مدل‌سازی اجزای محدود پیزوالکتریک المان‌های سازه‌ای انطباقی
۲۰۰۱	آواجی و سیواکومار [۲۳]	تحلیل ترموالاستیک گذرای استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش چندلایه‌سازی با PET
۲۰۰۲	ال نگار و همکاران [۲۴]	تحلیل ترموالاستیک گذرای استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن چرخان به روش عددی تفاضل محدود با PET
۲۰۰۲	پینتو کورریا و همکاران [۴۹]	کنترل فعال مخروط ناقص با لایه‌های پیزوالکتریک به روش اجزای محدود با HSDT
۲۰۰۳	ژیاو-هونگ و همکاران [۵۰]	حل دقیق پیزوترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش سری توانی و فوریه با تئوری الاستیسیته
۲۰۰۵	شائو [۲۵]	تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش چندلایه‌سازی و حل سری گونه با تئوری الاستیسیته
۲۰۰۵	روحی و همکاران [۲۶]	تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش چندلایه‌سازی و بسط سری فوریه با تئوری الاستیسیته (مشابه [۲۵])
۲۰۰۵	بن‌جی‌دو و آندریان‌آری‌سون [۵۱]	ارائه ترموپیزوالکتریک همراه با وردش برای کامپوزیت‌های چندلایه‌ی هوشمند
۲۰۰۵	ژیغای و ینگ [۵۲]	تحلیل پیزوترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با PET
۲۰۰۶	هونگ-جان و همکاران [۱۲]	تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش چندلایه‌سازی با PET
۲۰۰۶	اوتائو و تانیجاوا [۲۷]	تحلیل ترموالاستیک گذرای استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش تبدیلات لاپلاس با PET
۲۰۰۶	شائو و ما [۲۸]	تحلیل ترموالاستیک گذرای استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با توزیع نمایی خواص به روش تبدیلات لاپلاس با PET (مشابه [۲۷])
۲۰۰۶	سنتوس و همکاران [۵۳]	ارائه یک مدل اجزای محدود جهت تحلیل سه‌بعدی پوسته‌های چندلایه متقارن محوری دارای سنسورها و محرک‌های پیزوالکتریک
۲۰۰۷	ژیغای و همکاران [۱۳]	تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با PET (مشابه [۱۲])
۲۰۰۷	توتونچو [۱۴]	حل استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش سری توانی با PET (مشابه [۱۲])
۲۰۰۷	بهتویی و اسلامی [۲۹]	تحلیل ترموالاستیک کوپل‌شده استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش تبدیلات لاپلاس و گالرکین با FSDT
۲۰۰۷	وو و تسای [۵۴]	تحلیل سه‌بعدی مگنتوالکتروالاستیک پوسته‌های ناهمگن دارای دو انحنا با تئوری الاستیسیته
۲۰۰۷	ونگ و دینگ [۵۵]	حل دقیق کنترل تنش در استوانه‌های چندلایه پیزوالکتریک چرخان به روش حالت-فضا با PET
۲۰۰۷	دای و همکاران [۵۶]	تحلیل الکترومگنتوالاستیک استوانه و کره‌های جامد ناهمگن با PET

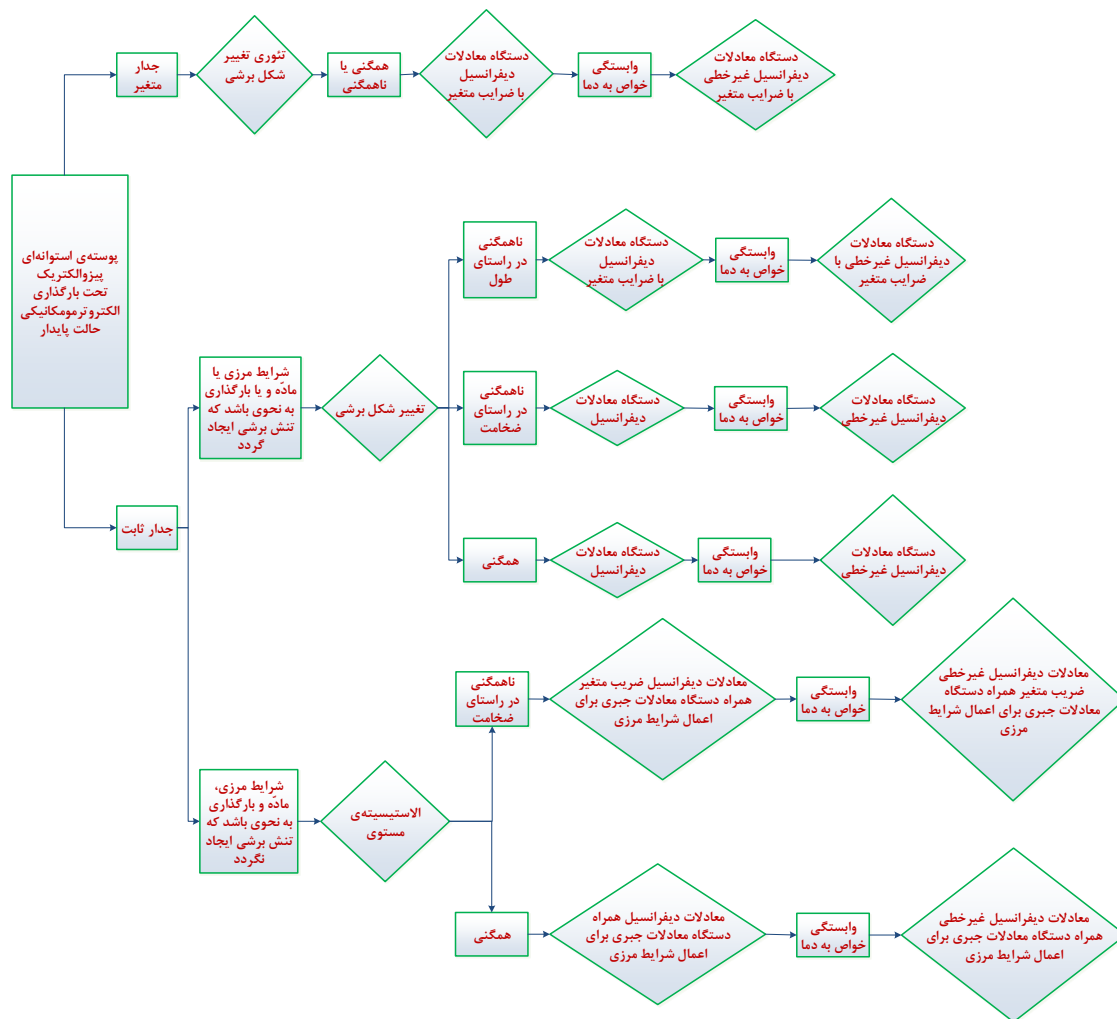
۲۰۰۹	لی و پنگ [۱۵]	حل استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش انتگرال فرد هولم با PET (مشابه [۱۲])
۲۰۱۰	قنّاد و زمانی‌نژاد [۱۶]	حل تحلیلی استوانه‌های جدار ضخیم همگن با FSDT
۲۰۱۰	دای و همکاران [۵۷]	تحلیل الکتروترموگنتوالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با PET
۲۰۱۰	دای و همکاران [۵۸]	تحلیل الکتروالاستیک سازه‌های پوسته‌ای توخالی ناهمگن با PET
۲۰۱۰	لی و همکاران [۵۹]	تحلیل الکتروالاستیک سازه‌های پوسته‌ای توخالی ناهمگن با PET (مشابه [۵۸])
۲۰۱۰	تائوتائو و ژیفای [۶۰]	تحلیل الکتروالاستیک دو نوع استوانه محرک‌های پیزوالکتریک تحت بارهای برشی به روش چندلایه‌سازی با PET
۲۰۱۱	ونگ [۶۱]	حل دقیق الکتروالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با PET
۲۰۱۲	قنّاد و زمانی‌نژاد [۱۷]	حل کامل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با PET (در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای)
۲۰۱۲	قنّاد و زمانی‌نژاد [۱۸]	حل تحلیلی استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با FSDT
۲۰۱۲	حیدرپور و همکاران [۳۰]	تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن چرخان به روش چندلایه‌سازی و مربع‌سازی دیفرانسیلی با تئوری الاستیسیته
۲۰۱۲	ونگ [۶۲]	حل دقیق الکتروالاستیک استوانه‌های ساندویچی سه لایه دارای هسته ناهمگن پیزوالکتریک با PET
۲۰۱۲	رحیمی و همکاران [۶۳]	تحلیل الکتروالاستیک استوانه‌های ناهمگن جدار ضخیم پیزوالکتریک با FSDT
۲۰۱۲	عارفی و رحیمی [۶۴]	ارائه معادلات حرکت سه‌بعدی حاکم بر پوسته‌های ناهمگن پیزوالکتریک حاصل از دوران با شعاع انحنا دلخواه و جدار متغیر
۲۰۱۲	دای و همکاران [۶۵]	تحلیل الکتروالاستیک استوانه‌های ناهمگن جدار ضخیم چرخان پیزوالکتریک با PET
۲۰۱۲	لی و همکاران [۶۶]	تحلیل اجزای محدود کنترل فعال ارتعاشات پوسته‌های مخروطی به وسیله مواد پیزوالکتریک با FSDT
۲۰۱۲	وو و تسای [۶۷]	تحلیل الکتروالاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک ساندویچی چندلایه به روش پانجو با تئوری الاستیسیته
۲۰۱۲	عارفی و همکاران [۶۸]	حل دقیق الکتروالاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک در میدان مغناطیسی با PET
۲۰۱۲	جعفری‌فشارکی و همکاران [۶۹]	تحلیل دوبعدی الکتروالاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک در راستای شعاعی و محیطی با تئوری الاستیسیته
۲۰۱۲	شاه و رای [۷۰]	تحلیل اجزای محدود کنترل فعال ارتعاشات پوسته‌های مخروطی ناقص کامپوزیتی تقویت شده با یک تا سه کامپوزیت پیزوالکتریک با FSDT
۲۰۱۳	قنّاد و همکاران [۱۹]	تحلیل الاستیک استوانه‌های ناهمگن جدار ضخیم متغیر به روش تئوری اغتشاشات با FSDT

۲۰۱۴	لقمان و پارسا [۷۱]	حل دقیق مگنتو ترموالاستیک استوانه دولایه با هسته ناهمگن با PET
۲۰۱۴	ونگ [۷۲]	حل دقیق الکتروالاستیک استوانه‌های چندلایه کامپوزیتی تقویت شده با فایبر همراه با محرک‌های پیزوالکتریک با PET
۲۰۱۵	زمانی‌نژاد و همکاران [۲۰]	حل نیمه تحلیلی الاستیک استوانه‌های ناهمگن جدار ضخیم متغیر به روش چندلایه‌سازی با FSDT
۲۰۱۵	سیفی [۳۱]	حل دقیق و تخمینی ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش چندلایه‌سازی با PET (مشابه [۱۲])
۲۰۱۵	کوچکزاده و انتظاری [۳۲]	تحلیل ترموالاستیک کوپل‌شده دیسک‌های چرخان به روش تبدیلات فوریه-لاپلاس با PET
۲۰۱۵	جباری و همکاران [۳۳]	تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار متغیر ضخیم ناهمگن چرخان به روش چندلایه‌سازی با FSDT
۲۰۱۵	عارفی [۳۴]	ارائه فرمول‌بندی تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با FSDT
۲۰۱۵	عارفی [۳۵]	تحلیل حرارتی غیرخطی استوانه‌های ناهمگن خواص وابسته به دما
۲۰۱۵	قناد و پرهیزکار یعقوبی [۳۶]	تحلیل دوبعدی ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم با FSDT و تئوری دمای مرتبه‌ی اول
۲۰۱۵	جباری و اقدم [۷۳]	حل دقیق الکتروترموالاستیک استوانه‌های سه‌لایه ساخته شده از هسته ناهمگن و لایه‌های پیزوالکتریک با PET
۲۰۱۵	دای و جیانگ [۷۴]	تحلیل دوبعدی ترمومگنتوالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن با FSDT
۲۰۱۵	عطریان و همکاران [۷۵]	تحلیل دوبعدی ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک تحت بارگذاری نامتغیرن محور با تئوری الاستیسیته
۲۰۱۶	موسایی [۳۷]	تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن تراکم‌ناپذیر خواص وابسته به دما با PET
۲۰۱۶	عارفی و همکاران [۳۸]	تحلیل دوبعدی ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش تفکیک متغیرها و مقادیر ویژه با FSDT
۲۰۱۶	لقمان و پارسا [۷۷]	حل دقیق الکتروترموگنتوالاستیک استوانه دولایه تشکیل شده از لایه‌ی خارجی ناهمگن پیزوالکتریک با PET
۲۰۱۷	شرعیات و علیپور [۲۱]	تحلیل الاستیک استوانه‌های ناهمگن جدار ضخیم متغیر به روش تبدیل تیلور با FSDT
۲۰۱۷	یاسین-اسکای و توکواوا [۳۹]	تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن خواص وابسته به دما به روش تبدیل‌سازی به مسئله معکوس با PET
۲۰۱۷	زمانی‌نژاد و همکاران [۴۰]	ارائه فرمول‌بندی کلی روش چندلایه‌سازی برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های ضخیم حاصل از دوران با پروفیل و ضخامت جدار دلخواه
۲۰۱۷	جباری و همکاران [۴۱]	تحلیل ترموالاستیک مخروط‌های ناقص جدار متغیر ضخیم به روش چندلایه‌سازی با FSDT
۲۰۱۷	دای و همکاران [۷۸]	حل دقیق الکتروترموالاستیک استوانه جدار نازک ناهمگن پیزوالکتریک پر شده از سیال با تئوری خطی کلاسیک پوسته‌ها

۲۰۱۸	مهدی تبار و همکاران [۴۲]	تحلیل ترموالاستیک مخروط‌های ناقص جدار ثابت چرخان به روش مربع‌سازی تفاضلات و بسط فوری به تئوری الاستیسیته
۲۰۱۸	سلیمان و همکاران [۴۳]	تحلیل غیرخطی گذرای ترموالاستیک لوله‌های ناهمگن استفاده‌شده در تاسیسات گاز طبیعی به روش عددی با PET
۲۰۱۸	امیدی بیدگلی و همکاران [۴۴]	تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن چرخان بر روی بستر اصطکاکی با FSDT
۲۰۱۸	مهدی تبار و همکاران [۷۹]	تحلیل الکتروترموالاستیک استوانه‌های چرخان ناهمگن پیزوالکتریک به روش مربع‌سازی دیفرانسیلی و تفاضل محدود با تئوری الاستیسیته
۲۰۱۸	پرهیزکار یعقوبی و همکاران [۸۰]	تحلیل تنش و کنترل فعال استوانه‌ها و دیسک‌های ناهمگن پیزوالکتریک با PET
۲۰۱۹	عارفی و بیدگلی [۸۱]	تحلیل الکتروالاستیک پوسته‌های دارای دو انحنا پیزوالکتریک بر روی بستر وینکلر با FSDT
۲۰۱۹	محمدی و همکاران [۸۲]	تحلیل الکتروالاستیک مخازن ناهمگن ساندویچی استوانه‌ای با هسته متخلخل و ورقه‌های جانبی پیزوالکتریک بر روی یک بستر پاسترناک با FSDT

۶-۱ جمع‌بندی

مرور پژوهش‌های گذشته مقالاتی نشان می‌دهد؛ تحلیل الکتروترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک جدار ضخیم متغیر، انجام نشده است و در مواردی با اعمال فرض‌های ساده شونده نظیر تغییر میدان دمایی تنها در راستای شعاعی و استفاده از روش‌های تحلیلی-تقریبی چندلایه‌سازی اقدام به تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن انجام شده است. در اغلب موارد تحلیل الکتروترموالاستیک استوانه‌ها ناهمگن با جدار ثابت تحت شرایط مرزی خاص یا فرضیات ساده شونده انجام شده است. شکل ۱-۵ آثار هندسه، جنس و بارگذاری را بر روی معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای پیزوالکتریک تحت بارگذاری الکترومکانیکی با استفاده از نتایج به دست آمده از بررسی مقالات، نشان می‌دهد.



شکل ۵-۱ اثر ناشی از تغییرات هندسه، ماده و بارگذاری بر معادلات حاکم

در پژوهش پیشرو برای نخستین بار با استفاده از تئوری پتانسیل الکتریکی مرتبه اول^۱، تئوری دمای مرتبه اول^۲ و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول اقدام به استخراج دستگاه معادلات حاکم بر روی استوانه جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک با استفاده از روش کار مجازی و کمینه‌سازی انرژی پتانسیل انجام می‌شود. استوانه جدار متغیر در لایه داخلی و خارجی خود تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی قرار داشته و دارای شرایط مرزی دلخواه الکتریکی و مکانیکی در دو سر خود می‌باشد. سپس با استفاده از روش تحلیلی تطابق مجانبها^۳ زیرمجموعه‌ی تکنیک اغتشاشات، معادلات حاکم حل می‌شود. حل ارائه شده از دقت مطلوب و بلایی برخوردار بوده و همچنین همگرایی آن بسیار

1. First Order Electrical Potential Theory (FEPT)
2. First Order Temperature Theory (FTT)
3. Matched Asymptotic Expansion (MAE)

سریع است. در این پژوهش آثار ناهمگنی خواص، بارگذاری در سطوح لایه‌های داخلی و خارجی استوانه جدار متغیر و پروفیل‌های مختلف جدار استوانه بر روی رفتار استوانه جدار متغیر تحت بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین نتایج پژوهش حاضر با نتایج حاصل از روش اجزای محدود مورد مقایسه و ارزیابی قرار می‌گیرد که توافق خوبی میان دو روش مشاهده می‌شود.

فصل ۲ معادلات حاکم

۲-۱ پیش‌گفتار

در این فصل به کمک منابع موجود و با استفاده از اصل همیلتون توسعه‌یافته، با توجه به فرضیات استخراج معادلات حاکم انجام می‌گیرد. پس از استخراج دستگاه معادلات حاکم، نحوه‌ی حل آن بیان می‌شود.

۲-۲ معادلات حاکم

در این بخش به کمک اصل همیلتون توسعه‌یافته و با استفاده از فرضیات حاکم بر مسأله، به استخراج معادلات حاکم پرداخته می‌شود.

۲-۲-۱ فرضیات حاکم بر مسأله

پوسته‌ی استوانه‌ای مورد تحلیل از نظر هندسه، جنس، بارگذاری و شرایط مرزی متقارن محوری است و می‌توان از تغییرات در راستای محیطی استوانه θ صرف‌نظر کرد ($\frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) = 0$)؛ بنابراین توابع بیان‌کننده‌ی رفتار مکانیکی، الکتریکی و حرارتی تنها تابعی از شعاع r و محور x استوانه می‌باشند. با توجه به آنچه که بیان شد؛ میدان جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و دما در این حالت به شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} u_r = u_r(r, x) \\ u_\theta = 0 \\ u_x = u_x(r, x) \end{cases} \quad (۱-۲)$$

$$\varphi = \varphi(r, x) \quad (۲-۲)$$

$$T = T(r, x) \quad (۳-۲)$$

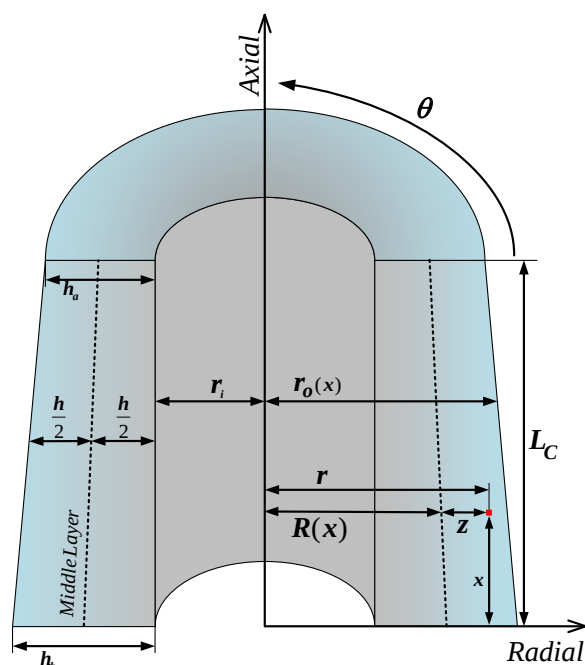
u_r ، u_θ و u_x مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای شعاعی، محیطی و محوری هستند که u_r و u_x ، توابعی نامعلوم از شعاع و محور استوانه $u_r(r, x)$ و $u_x(r, x)$ می‌باشند. همچنین φ و T به ترتیب پتانسیل الکتریکی و توزیع دما در استوانه جدار متغیر است که تابعی از شعاع و محور استوانه

می باشند.

پوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه دارای جداری متغیر است و از جنس مواد ناهمگن و همسانگرد عرضی^۱ است که خاصیت ماده‌ی آن در راستای شعاعی متفاوت از دو راستای دیگر می باشد. ناهمگنی خواص در این پژوهش به صورت توانی در نظر گرفته می شود و با استفاده از رابطه‌ی (۷-۱) که در فصل اول به آن اشاره شد، به مدل سازی ناهمگنی خواص جهت تحلیل پرداخته می شود.

۲-۲-۲ به کارگیری نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

به منظور به کارگیری نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، مطابق شکل ۱-۲ فاصله‌ی هر نقطه از پوسته‌ی استوانه‌ای تا محور تقارن آن r به صورت فاصله‌ی آن تا لایه‌ی میانی استوانه z بعلاوه فاصله‌ی لایه‌ی میانی تا محور تقارن استوانه $R(x)$ بیان می شود. این کار، سبب تغییر مختصه و جزء دیفرانسیلی^۲، از r به z می شود $(dr, (r, x) \Rightarrow dz, (z, x))$.



شکل ۱-۲ شماتیک مقطع استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن

1. Transversely Isotropic
2. Differential Element

برای تغییر مختصه‌ی شعاعی r و نتایج آن داریم.

$$r = R + z, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad dr = dz \quad ; \quad (r, \theta, x) \Rightarrow (z, \theta, x) \quad (4-2)$$

در روابط فوق $h(x)$ ضخامت استوانه است که تابع طول استوانه است. همچنین در ادامه، رابطه‌ی میان شعاع داخلی r_i و خارجی $r_o(x)$ استوانه با شعاع لایه‌ی میانی استوانه $R(x)$ و ضخامت $h(x)$ بیان می‌شود.

$$R(x) = \frac{r_o(x) - r_i}{2} \quad (5-2)$$

$$h(x) = r_o(x) - r_i \quad (6-2)$$

رابطه‌ی مختصه‌ی محوری x و طول استوانه L_C نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$0 \leq x \leq L_C \quad (7-2)$$

میدان جابه‌جایی مرتبه‌ی اول

در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول فرض بر این است که خطوط راست و عمود بر صفحه میانی، پس از تغییر شکل، راست باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود بر صفحه میانی نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی لحاظ می‌شود. میدان جابه‌جایی برای پوسته‌ی استوانه‌ی متقارن محوری با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی یک همانند رابطه‌ی (۶-۱) به صورت زیر بیان می‌شود [۱۹].

$$\begin{cases} U_z = U_z(z, x) = U_z(0, x) + z \frac{\partial U_z(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=0} = U_z^0(x) + z U_z^1(x) = U_z^0 + z U_z^1 \\ U_\theta = 0 \\ U_x = U_x(z, x) = U_x(0, x) + z \frac{\partial U_x(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=0} = U_x^0(x) + z U_x^1(x) = U_x^0 + z U_x^1 \end{cases} \quad (8-2)$$

در رابطه‌ی فوق U_z ، U_θ و U_x مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در راستای شعاعی، محیطی و

محوری می‌باشند؛ همچنین با توجه به نظریه‌ی تغییر شکل برشی، U_z^0 و U_z^1 به ترتیب مؤلفه‌های

مرتبه‌ی صفر و یک جابه‌جایی شعاعی و U_x^0 و U_x^1 به ترتیب مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر و یک جابه‌جایی

محوری است که تنها تابعی از مختصه‌ی محوری x می‌باشد.

پتانسیل الکتریکی مرتبه‌ی اول

با توجه به این که میتوان بسط تیلور تابع بیان کننده توزیع پتانسیل الکتریکی φ را حول لایه میانی استوانه ($z = 0$) نوشت و در تئوری پتانسیل الکتریکی مرتبه اول فرض بر این است که تغییرات پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت به صورت خطی است. بنابراین می‌توان رفتار تابع را با تقریب خوبی با دو جمله از سری تیلور آن در نظر گرفت [۴۸].

$$\varphi = \varphi(z, x) = \varphi(0, x) + z \left. \frac{\partial \varphi(z, x)}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{z^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi(z, x)}{\partial z^2} \right|_{z=0} + \dots = \varphi^0 + z \varphi^1 \quad (9-2)$$

که φ^0 و φ^1 به ترتیب مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر و یک پتانسیل الکتریکی φ بوده که تنها تابعی از مختصه‌ی محوری x است.

تغییرات دمایی مرتبه‌ی اول

همانند پتانسیل الکتریکی، می‌توان بسط تیلور تابع بیان کننده توزیع دما را نیز حول لایه میانی استوانه ($z = 0$) نوشت و در تئوری دمای مرتبه اول فرض بر این است که تغییرات دما در راستای ضخامت به صورت خطی است [۲۹]. بنابراین رفتار دما را با تقریب خوبی با دو جمله از سری تیلور تابع آن می‌توان، در نظر گرفت.

$$T = T(z, x) = T(0, x) + z \left. \frac{\partial T(z, x)}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{z^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 T(z, x)}{\partial z^2} \right|_{z=0} + \dots = T^0 + z T^1 \quad (10-2)$$

با توجه به تئوری دمای مرتبه‌ی اول، در رابطه‌ی (۱۰-۲) T^0 و T^1 به ترتیب مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر و یک دما است که تنها تابعی از مختصه‌ی محوری x هستند.

با در نظر گرفتن T^* به عنوان دمای مرجع، برای تغییرات دما از دمای مرجع $\Theta = T - T^*$ خواهیم داشت.

$$\Theta = T - T^* = \Theta^0(x) + z \Theta^1(x) = \Theta^0 + z \Theta^1 \quad (11-2)$$

در رابطه‌ی (۱۱-۲) Θ^0 و Θ^1 به ترتیب مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر و یک تغییرات دمایی Θ

می‌باشند که تنها تابع مختصه‌ی محوری x هستند.

۳-۲-۲ معادلات گرادیان در مختصات استوانه‌ای

در این بخش با استفاده از روابط گرادیان در مختصات استوانه‌ای [۵۱ و ۸۴] و استفاده از روابط (۸-۲) تا (۱۱-۲) برای میدان جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و تغییرات دمایی، به استخراج میدان کرنش، میدان الکتریکی و میدان حرارتی پرداخته می‌شود.

الف- میدان کرنش

در ادامه، ابتدا روابط کرنش‌های نرمال شعاعی ε_r ، محیطی ε_θ و محوری ε_x با میدان جابه‌جایی در مختصات استوانه‌ای بیان می‌شود، سپس با استفاده از رابطه‌ی (۸-۲) کرنش‌های نرمال شعاعی ε_z ، محیطی ε_θ و محوری ε_x ، برای نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول یا مختصات (z, θ, x) استخراج می‌شود.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = U_z^1 \quad (12-2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{R+z} = \frac{U_z^0 + z U_z^1}{R+z} \quad (13-2)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{dU_x^0}{dx} + z \frac{dU_x^1}{dx} \quad (14-2)$$

هم‌چنین، روابط کرنش‌های برشی شعاعی-محیطی $\gamma_{r\theta}$ ، شعاعی-محوری γ_{rx} و محیطی-محوری $\gamma_{\theta x}$ در مختصات استوانه‌ای بیان می‌گردند و با به‌کارگیری میدان جابه‌جایی بیان شده در رابطه‌ی (۸-۲) کرنش‌های برشی شعاعی-محیطی $\gamma_{z\theta}$ ، شعاعی-محوری γ_{zx} و محیطی-محوری $\gamma_{\theta x}$ برای مختصات (z, θ, x) استخراج می‌شود.

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \quad \rightarrow \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial U_z}{(R+z)\partial \theta} - \frac{U_\theta}{R+z} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z} = 0 \quad (15-2)$$

$$\gamma_{rx} = \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \quad \rightarrow \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{dU_z^0}{dx} + z \frac{dU_z^1}{dx} + U_x^1 \quad (16-2)$$

$$\gamma_{\theta x} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \rightarrow \gamma_{\theta x} = \frac{\partial U_{\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial U_x}{\partial \theta} = 0 \quad (17-2)$$

برای تانسور میدان کرنش $\tilde{\varepsilon}$ ، در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول داریم.

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} U_z^1 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{dU_z^0}{dx} + z \frac{dU_z^1}{dx} + U_x^1 \right) \\ 0 & \frac{U_z^0 + z U_z^1}{R+z} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dU_z^0}{dx} + z \frac{dU_z^1}{dx} + U_x^1 \right) & 0 & \frac{dU_x^0}{dx} + z \frac{dU_x^1}{dx} \end{bmatrix} \quad (18-2)$$

ب- میدان الکتریکی

در این بخش ابتدا به استخراج مؤلفه‌های شعاعی E_r ، محیطی E_{θ} و محوری E_x ، میدان الکتریکی در مختصات استوانه‌ای پرداخته می‌شود، سپس با توجه به تئوری پتانسیل الکتریکی مرتبه اول (رابطه‌ی (۹-۲)) مؤلفه‌های شعاعی E_z ، محیطی E_{θ} و محوری E_x ، میدان الکتریکی در مختصات (z, θ, x) به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} E_r \\ E_{\theta} \\ E_x \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} E_z \\ E_{\theta} \\ E_x \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{1}{(R+z)} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \phi^1 \\ 0 \\ \frac{d\phi^0}{dx} + z \frac{d\phi^1}{dx} \end{Bmatrix} \quad (19-2)$$

برای بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ ، در تئوری پتانسیل الکتریکی مرتبه اول داریم.

$$\vec{E} = - \begin{Bmatrix} \phi^1 \\ 0 \\ \frac{d\phi^0}{dx} + z \frac{d\phi^1}{dx} \end{Bmatrix} \quad (20-2)$$

پ- میدان حرارتی

همانند بخش پیش، مؤلفه‌های شعاعی e_r ، محیطی e_{θ} و محوری e_x ، میدان حرارتی در مختصات استوانه‌ای تعیین می‌گردند، سپس با استفاده از روابط (۱۰-۲) و (۱۱-۲)، مؤلفه‌های شعاعی e_z ، محیطی e_{θ} و محوری e_x ، میدان حرارتی برای تئوری دمای مرتبه اول مشخص می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_x \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} e_z \\ e_\theta \\ e_x \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \\ \frac{1}{(R+z)} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Theta^1 \\ 0 \\ \frac{d\Theta^0}{dx} + z \frac{d\Theta^1}{dx} \end{Bmatrix} \quad (21-2)$$

برای بردار میدان حرارتی $\vec{e}$ ، داریم.

$$\vec{e} = - \begin{Bmatrix} \Theta^1 \\ 0 \\ \frac{d\Theta^0}{dx} + z \frac{d\Theta^1}{dx} \end{Bmatrix} \quad (22-2)$$

۴-۲-۲ معادلات ساختاری استوانه‌ی مورد مطالعه

معادلات ساختاری برای استوانه ناهمگن و همسانگرد عرضی با در نظر گرفتن قطبی بودن آن در

راستای شعاعی با استفاده از [۸۵] و [۸۶]، بیان می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{z\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{\theta x} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{35} \\ 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_z \\ E_\theta \\ E_x \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Theta \quad (23-2)$$

$$\begin{Bmatrix} D_z \\ D_\theta \\ D_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_z \\ E_\theta \\ E_x \end{Bmatrix} \quad (24-2)$$

$$\begin{Bmatrix} h_z \\ h_\theta \\ h_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_z \\ e_\theta \\ e_x \end{Bmatrix} \quad (25-2)$$

که $c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{23}, c_{44}$ و c_{55} ثابت‌های الاستیک، e_{11}, e_{12} و e_{35} ثابت‌های پیزوالکتریک-

تنش، λ_{11} و λ_{22} ثابت‌های تنش حرارتی-دما، ϵ_{11} و ϵ_{22} ثابت‌های دی‌الکتریک و k_{11} و k_{22} ضرایب

هدایت حرارتی ماده، در روابط فوق می‌باشند. شایان ذکر است؛ اندیس‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر جهت‌های شعاعی، محیطی و محوری هستند.

با توجه به این نکته که برخی از مؤلفه‌های میدان کرنش، میدان الکتریکی و میدان حرارتی صفر هستند؛ می‌توان روابط ساختاری (۲۳-۲) تا (۲۵-۲) را به شکل کاهش‌یافته‌ی زیر بیان نمود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & 0 \\ e_{12} & 0 \\ e_{12} & 0 \\ 0 & e_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \\ E_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{22} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta \quad (26-2)$$

$$\begin{bmatrix} D_z \\ D_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \\ E_x \end{bmatrix} \quad (27-2)$$

$$\begin{bmatrix} h_z \\ h_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_x \end{bmatrix} \quad (28-2)$$

مدل‌سازی ناهمگنی در خواص

جهت مدل‌سازی ناهمگنی در خواص، همان‌طور که در بخش فرضیات حاکم بر مسأله بیان شد؛ از رابطه‌ی (۸-۱) یا توزیع توانی استفاده می‌شود. لذا توزیع خواص در جسم به‌صورت توانی، فرض می‌شود.

$$\begin{aligned} c_{ij} &= c_{ij}^0 \left(\frac{h_a - h_b}{2L_C r_i} x + \frac{h_b}{2r_i} + 1 + \frac{z}{r_i} \right)^n; i=1..5, j=1..5 \\ e_{ij} &= e_{ij}^0 \left(\frac{h_a - h_b}{2L_C r_i} x + \frac{h_b}{2r_i} + 1 + \frac{z}{r_i} \right)^n; i=1..5, j=1..5 \\ \lambda_{ij} &= \lambda_{ij}^0 \left(\frac{h_a - h_b}{2L_C r_i} x + \frac{h_b}{2r_i} + 1 + \frac{z}{r_i} \right)^n; i=1..2, j=1..2 \\ \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ij}^0 \left(\frac{h_a - h_b}{2L_C r_i} x + \frac{h_b}{2r_i} + 1 + \frac{z}{r_i} \right)^n; i=1..2, j=1..2 \\ k_{ij} &= k_{ij}^0 \left(\frac{h_a - h_b}{2L_C r_i} x + \frac{h_b}{2r_i} + 1 + \frac{z}{r_i} \right)^n; i=1..2, j=1..2 \end{aligned} \quad (29-2)$$

شایان ذکر است؛ برای بررسی بهتر ناهمگنی خواص، کلیه ناهمگنی‌های خواص در رابطه (۹-۲)

برابر n در نظر گرفته می‌شود، همچنین مطابق رابطه (۲-۱۰) ناهمگنی خواص در استوانه جدار متغیر ناهمگن تابعی از دو متغیر (شعاع- z) و (طول- x) است. c_{ij}^0 مقدار ثابت‌های الاستیک، e_{ij}^0 مقدار ثابت‌های پیزوالکتریک-تنش، λ_{ij}^0 مقدار ثابت‌های تنش حرارتی-دما، ϵ_{ij}^0 مقدار ثابت‌های دی‌الکتریک و k_{ij}^0 ضرایب هدایت حرارتی در لایه‌ی داخلی استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن می‌باشند.

۲-۲-۵ پتانسیل الکتروترمودومکانیکی

برای محاسبه انرژی پتانسیل الکتروترمودومکانیکی و چگالی انرژی پتانسیل الکتروترمودومکانیکی V^* مطابق [۴۸ و ۵۱] داریم.

$$V = \int_{\Omega} V^* d\Omega; V^* = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\epsilon_{ij} - D_i E_i - h_i e_i) \quad (۳۰-۲)$$

همچنین برای تغییرات انرژی پتانسیل الکتروترمودومکانیکی داریم [۴۸ و ۵۱].

$$\delta V = \delta \int_{\Omega} \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\epsilon_{ij} - D_i E_i - h_i e_i) d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} - D_i\delta E_i - h_i\delta e_i) d\Omega \quad (۳۱-۲)$$

با گسترش و بیان روابط فوق بر حسب مختصه‌های نظریه‌ی تغییر شکل برشی (z, θ, x) ، برای

تغییرات انرژی پتانسیل الکتروترمودومکانیکی خواهیم داشت.

$$\delta V = 2\pi \int_0^{L_c} \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_z \delta\epsilon_z + \sigma_{\theta} \delta\epsilon_{\theta} + \sigma_x \delta\epsilon_x + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx} \quad (۳۲-۲)$$

$$-D_z \delta E_z - D_x \delta E_x - h_z \delta e_z - h_x \delta e_x] R(1 + \frac{z}{R}) dz dx$$

اکنون به کمک روابط (۲-۱۲) تا (۲-۲۲)، رابطه‌ی (۲-۳۲) به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{2\pi} = & \int_0^{L_c} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_z \delta U_z^1 + \sigma_{\theta} \left(\frac{\delta U_z^0 + z \delta U_z^1}{R + z} \right) + \sigma_x \left(\frac{d}{dx} (\delta U_x^0) + z \frac{d}{dx} (\delta U_x^1) \right) \right. \\ & + \tau_{zx} \left(\left(\frac{d}{dx} (\delta U_z^0) + \delta U_x^1 \right) + z \frac{d}{dx} (\delta U_z^1) \right) \\ & + D_z \delta \phi^1 + D_x \left(\frac{d}{dx} (\delta \phi^0) + z \frac{d}{dx} (\delta \phi^1) \right) \\ & \left. + h_z \delta \Theta^1 + h_x \left(\frac{d}{dx} (\delta \Theta^0) + z \frac{d}{dx} (\delta \Theta^1) \right) \right] R(1 + \frac{z}{R}) dz dx \end{aligned} \quad (۳۳-۲)$$

تعریف منته‌ها

اکنون به تعریف منته‌های مکانیکی، الکتریکی و حرارتی پرداخته می‌شود تا به کمک آن‌ها، ساده‌سازی رابطه‌ی (۳۳-۲) صورت گیرد.

منته‌های مکانیکی

منته‌های مکانیکی N_z^m ، N_θ^m و N_x^m به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} N_z^m \\ N_\theta^m \\ N_x^m \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_z (1 + \frac{z}{R}) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x (1 + \frac{z}{R}) \end{Bmatrix} dz \quad (34-2)$$

هم‌چنین برای منته‌های مکانیکی M_θ^m و M_x^m داریم.

$$\begin{Bmatrix} M_\theta^m \\ M_x^m \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_x (1 + \frac{z}{R}) \end{Bmatrix} z dz \quad (35-2)$$

منته‌های مکانیکی Q_x^m و M_{zx}^m با استفاده از تنش برشی τ_{zx} تعریف می‌شوند. پژوهشگران معتقدند توزیع تنش برشی τ_{zx} در جدار استوانه به صورت سهمی‌وار یا به شکل درجه‌ی دو است؛ حال آنکه با توجه به رابطه‌ی (۱۶-۲)، نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول توزیع تنش برشی τ_{zx} را در داخل جدار استوانه به صورت خطی پیش‌بینی می‌کند، بنابراین ایشان استفاده از ضریب تصحیح برشی K_s را جهت رفع این تفاوت پیشنهاد کرده‌اند که این ضریب تصحیح در این حالت برابر $\frac{5}{6}$ می‌باشد [۸۷]. با توجه به آنچه بیان شد؛ برای Q_x^m و M_{zx}^m داریم.

$$Q_x^m = \int_{-h/2}^{h/2} K_s \tau_{zx} (1 + \frac{z}{R}) dz \quad ; \quad M_{zx}^m = \int_{-h/2}^{h/2} K_s \tau_{zx} (1 + \frac{z}{R}) z dz \quad (36-2)$$

منته‌های الکتریکی

منته‌های الکتریکی N_z^e و N_x^e در ادامه تعریف می‌گردند.

$$\begin{Bmatrix} N_z^e \\ N_x^e \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} D_z \\ D_x \end{Bmatrix} (1 + \frac{z}{R}) dz \quad (37-2)$$

همچنین برای نتیجه‌ی الکتریکی M_x^e داریم.

$$M_x^e = \int_{-h/2}^{h/2} D_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z \, dz \quad (38-2)$$

منتجه‌های حرارتی

برای نتیجه‌های حرارتی N_z^t و N_x^t رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} N_z^t \\ N_x^t \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} h_z \\ h_x \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (39-2)$$

و همچنین برای M_x^t داریم.

$$M_x^t = \int_{-h/2}^{h/2} h_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z \, dz \quad (40-2)$$

اکنون با استفاده از نتیجه‌های مکانیکی، حرارتی و الکتریکی، رابطه‌ی (۳۳-۲) را می‌توان بر

حسب نتیجه‌ها به شکل ساده‌تر زیر بیان نمود.

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{2\pi} = & \int_0^{L_c} R \left[N_z^m \delta U_z^1 + N_\theta^m \frac{\delta U_z^0}{R} + N_x^m \left(\frac{d}{dx} (\delta U_x^0) \right) \right. \\ & + M_\theta^m \frac{\delta U_z^1}{R} + M_x^m \left(\frac{d}{dx} (\delta U_x^1) \right) \\ & + Q_x^m \left(\frac{d}{dx} (\delta U_z^0) + \delta U_x^1 \right) + M_{zx}^m \left(\frac{d}{dx} (\delta U_z^1) \right) \\ & + N_z^e \delta \phi^1 + N_x^e \left(\frac{d}{dx} (\delta \phi^0) \right) + M_x^e \left(\frac{d}{dx} (\delta \phi^1) \right) \\ & \left. + N_z^t \delta \Theta^1 + N_x^t \left(\frac{d}{dx} (\delta \Theta^0) \right) + M_x^t \frac{d}{dx} (\delta \Theta^1) \right] dx \end{aligned} \quad (41-2)$$

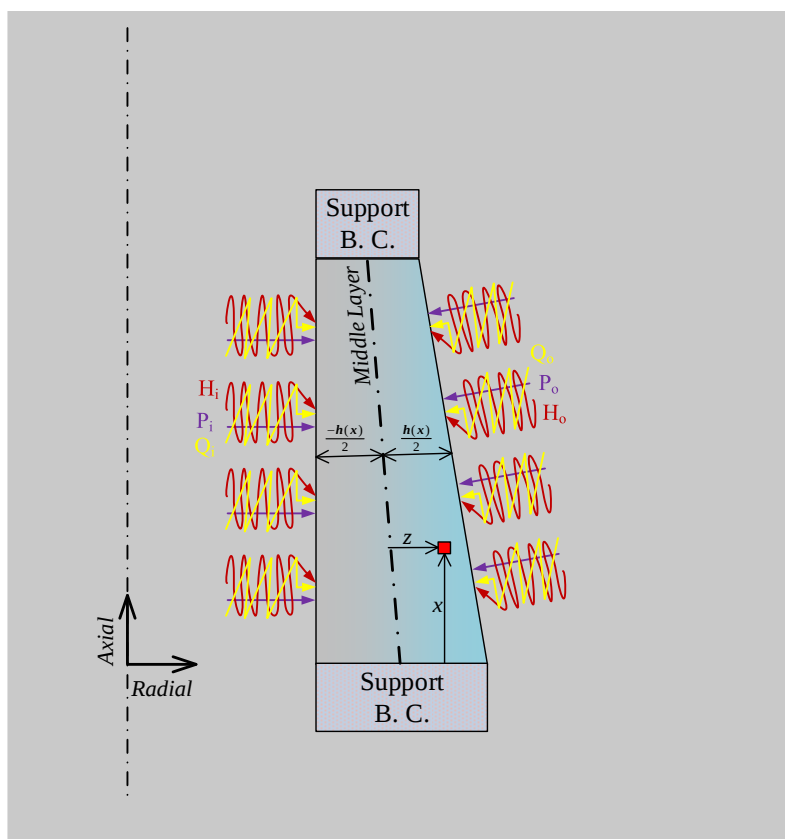
۲-۲-۶ کار بارگذاری الکتروترمو مکانیکی

شکل ۲-۲ مقطع استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک را نشان می‌دهد که تحت بارگذاری

مکانیکی، الکتریکی و حرارتی قرار دارد. استوانه در سطح داخلی تحت فشار P_i ، شار الکتریکی وارده‌ی

Q_i و شار حرارتی وارده‌ی H_i و در سطح خارجی خود تحت فشار P_o ، شار الکتریکی وارده‌ی Q_o و

شار حرارتی وارده‌ی H_o قرار دارد.



شکل ۲-۲ مقطع استوانه‌ای جدار متغیر ناهمگن
برای کار ناشی از نیروهای مکانیکی، الکتریکی و حرارتی داریم [۴۸ و ۵۱].

$$\begin{aligned}
 W = & \int_0^{L_C} \int_0^{2\pi} P_i u_r|_{r=r_i} r_i d\theta dx - \int_0^{L_C} \int_0^{2\pi} P_{oz} u_r|_{r=r_o} r_o d\theta dx - \int_0^{L_C} \int_0^{2\pi} P_{ox} u_x|_{r=r_o} r_o d\theta dx \\
 & - \int_0^{L_C} \int_0^{2\pi} Q_i \phi|_{r=r_i} r_i d\theta dx - \int_0^{L_C} \int_0^{2\pi} Q_o \phi|_{r=r_o} r_o d\theta dx \\
 & - \int_0^{L_C} \int_0^{2\pi} H_i \Theta|_{r=r_i} r_i d\theta dx - \int_0^{L_C} \int_0^{2\pi} H_o \Theta|_{r=r_o} r_o d\theta dx
 \end{aligned} \quad (۴۲-۲)$$

در رابطه (۴۲-۲) P_{ox} و P_{oz} به ترتیب مولفه‌های فشار وارده به سطح خارجی در راستای شعاعی و

محوری است. با بیان رابطه‌ی (۴۲-۲) در مختصات (z, θ, x) و استفاده از روابط (۱۲-۲) تا (۲۲-۲)

خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{L_C} \int_0^{2\pi} P_i \left(U_z^0 - \frac{h(x)}{2} U_z^1 \right) \left(R(x) - \frac{h(x)}{2} \right) d\theta dx \\
&- \int_0^{L_C} \int_0^{2\pi} \left(P_{oz} \left(U_z^0 + \frac{h(x)}{2} U_z^1 \right) + P_{ox} \left(U_x^0 + \frac{h(x)}{2} U_x^1 \right) \right) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) d\theta dx \\
&- \int_0^{L_C} \int_0^{2\pi} \left(Q_i \left(\varphi^0 - \frac{h(x)}{2} \varphi^1 \right) \left(R(x) - \frac{h(x)}{2} \right) + Q_o \left(\varphi^0 + \frac{h(x)}{2} \varphi^1 \right) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) \right) d\theta dx \\
&- \int_0^{L_C} \int_0^{2\pi} \left(H_i \left(\Theta^0 - \frac{h(x)}{2} \Theta^1 \right) \left(R(x) - \frac{h(x)}{2} \right) + H_o \left(\Theta^0 + \frac{h(x)}{2} \Theta^1 \right) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) \right) d\theta dx
\end{aligned} \tag{۴۳-۲}$$

و برای تغییرات کار داریم.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta W}{2\pi} &= \int_0^{L_C} P_i \left(\delta U_z^0 - \frac{h(x)}{2} \delta U_z^1 \right) \left(R - \frac{h(x)}{2} \right) dx \\
&- \int_0^{L_C} \left(P_{oz} \left(\delta U_z^0 + \frac{h(x)}{2} \delta U_z^1 \right) + P_{ox} \left(\delta U_x^0 + \frac{h(x)}{2} \delta U_x^1 \right) \right) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) dx \\
&- \int_0^{L_C} Q_i \left(\delta \varphi^0 - \frac{h}{2} \delta \varphi^1 \right) \left(R - \frac{h(x)}{2} \right) dx - \int_0^{L_C} Q_o \left(\delta \varphi^0 + \frac{h}{2} \delta \varphi^1 \right) \left(R + \frac{h(x)}{2} \right) dx \\
&- \int_0^{L_C} H_i \left(\delta \Theta^0 - \frac{h}{2} \delta \Theta^1 \right) \left(R - \frac{h(x)}{2} \right) dx - \int_0^{L_C} H_o \left(\delta \Theta^0 + \frac{h}{2} \delta \Theta^1 \right) \left(R + \frac{h(x)}{2} \right) dx
\end{aligned} \tag{۴۴-۲}$$

۷-۲-۲ اصل کار مجازی

بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی پتانسیل الکترومکانیکی سازه، برابر با

تغییرات کار ناشی از نیروهای خارجی الکترومکانیکی اعمالی به سازه است ($\delta W = \delta V$) (۴۸ و ۵۱).

با انجام عملیات ریاضی بر روی رابطه‌ی (۴۲-۲) و بازنویسی آن خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta V}{2\pi} = & \int_0^{L_C} \left(\left(N_\theta^m - \frac{d(RQ_x^m)}{dx} \right) \delta U_z^0 + \left(M_\theta^m + RN_z^m - \frac{d(RM_{zx}^m)}{dx} \right) \delta U_z^1 \right. \\
& - \frac{d(RN_x^m)}{dx} \delta U_x^0 + \left(RQ_x^m - \frac{d(RM_x^m)}{dx} \right) \delta U_x^1 \\
& - \frac{d(RN_x^e)}{dx} \delta \varphi^0 + \left(RN_z^e - \frac{d(RM_x^e)}{dx} \right) \delta \varphi^1 \\
& \left. - \frac{d(RN_x^t)}{dx} \delta \Theta^0 + \left(RN_z^t - \frac{d(RM_x^t)}{dx} \right) \delta \Theta^1 \right) dx \\
& + \left[R(N_x^m \delta U_x^0 + M_x^m \delta U_x^1 + Q_x^m \delta U_z^0 + M_{zx}^m \delta U_z^1) \right] \Big|_{0, L_C} \\
& + \left[R(N_x^e \delta \varphi^0 + M_x^e \delta \varphi^1) \right] \Big|_{0, L_C} \\
& + \left[R(N_x^t \delta \Theta^0 + M_x^t \delta \Theta^1) \right] \Big|_{0, L_C}
\end{aligned} \tag{۴۵-۲}$$

۸-۲-۲ دستگاه معادلات حاکم

اکنون با استفاده از روابط (۴۴-۲) و (۴۵-۲)، دستگاه معادلات حاکم و شرایط مرزی بر حسب متغیرهای مکانیکی، الکتریکی و حرارتی و مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی، الکتریکی و حرارتی به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}
1 - \delta U_x^0 \rightarrow \frac{d(R N_x^m)}{dx} = P_{ox}(x)(R + \frac{h}{2}) \\
2 - \delta U_x^1 \rightarrow R Q_x^m - \frac{d(R M_x^m)}{dx} = -\frac{h}{2} P_{ox}(x)(R + \frac{h}{2}) \\
3 - \delta U_z^0 \rightarrow N_\theta^m - \frac{d(R Q_x^m)}{dx} = P_i(x)(R - \frac{h}{2}) - P_{oz}(x)(R + \frac{h}{2}) \\
4 - \delta U_z^1 \rightarrow M_\theta^m + R N_z^m - \frac{d(R M_{xz}^m)}{dx} = -\frac{h}{2} (P_i(x)(R - \frac{h}{2}) + P_{oz}(x)(R + \frac{h}{2})) \\
5 - \delta \varphi^0 \rightarrow \frac{d(R N_x^e)}{dx} = Q_i(x)(R - \frac{h}{2}) + Q_o(x)(R + \frac{h}{2}) \\
6 - \delta \varphi^1 \rightarrow (R N_z^e - \frac{d(R M_x^e)}{dx}) = \frac{h}{2} (Q_i(x)(R - \frac{h}{2}) - Q_o(x)(R + \frac{h}{2})) \\
7 - \delta \Theta^0 \rightarrow \frac{d(R N_x^t)}{dx} = H_i(x)(R - \frac{h}{2}) + H_o(x)(R + \frac{h}{2}) \\
8 - \delta \Theta^1 \rightarrow (R N_z^t - \frac{d(R M_x^t)}{dx}) = \frac{h}{2} (H_i(x)(R - \frac{h}{2}) - H_o(x)(R + \frac{h}{2}))
\end{cases} \quad (46-2)$$

در ادامه روابط بیانگر شرایط مرزی که در دو سراسه‌توانه برقرار هستند، ارائه می‌شود. برای شرایط

مرزی مکانیکی داریم.

$$\begin{cases}
R(x) N_x^m \delta U_x^0 \Big|_{x=0, L_C} = 0 \\
R(x) M_x^m \delta U_x^1 \Big|_{x=0, L_C} = 0 \\
R(x) Q_x^m \delta U_z^0 \Big|_{x=0, L_C} = 0 \\
R(x) M_{zx}^m \delta U_z^1 \Big|_{x=0, L_C} = 0
\end{cases} \quad (47-2)$$

هم‌چنین برای شرایط مرزی الکتریکی داریم.

$$\begin{cases}
R(x) N_x^e \delta \varphi^0 \Big|_{x=0, L_C} = 0 \\
R(x) M_x^e \delta \varphi^1 \Big|_{x=0, L_C} = 0
\end{cases} \quad (48-2)$$

برای شرایط مرزی حرارتی نیز داریم.

$$\begin{cases}
R(x) N_x^t \delta \Theta^0 \Big|_{x=0, L_C} = 0 \\
R(x) M_x^t \delta \Theta^1 \Big|_{x=0, L_C} = 0
\end{cases} \quad (49-2)$$

در دستگاه معادلات (46-2)، معادلات ۱ تا ۶ مربوط به تعادل الکترواستاتیک و معادلات ۷ و ۸

مربوط به تعادل حرارتی (رسانش حرارتی) در استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن است. با توجه به اینکه

کوپلینگ معادلات تعادل حرارتی با معادلات تعادل الکترواستاتیک یک سوپه است (تغییرات دما منجر به تغییر شکل و تغییر میدان الکتریکی در جسم می‌شود، اما عکس آن صادق نیست). می‌توان معادلات ۷ و ۸ را مستقلاً حل نمود و از نتیجه آن برای حل معادلات ۱ تا ۶ بهره جست و نیازی به حل کل دستگاه به صورت هم زمان نیست. برای ساده سازی دستگاه معادلات (۲-۴۶)، از معادلات اول، پنجم و هفتم این دستگاه انتگرال گرفته می‌شود و خواهیم داشت.

$$\left\{ \begin{array}{l} R(x) N_x^m = \int P_{ox}(x) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) dx + K1 \\ R(x) Q_x^m - \frac{d(R(x) M_x^m)}{dx} = -\frac{h(x)}{2} P_{ox}(x) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) \\ N_\theta^m - \frac{d(R(x) Q_x^m)}{dx} = P_i(x) \left(R(x) - \frac{h(x)}{2} \right) - P_{oz}(x) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) \\ M_\theta^m + R(x) N_z^m - \frac{d(R(x) M_{xz}^m)}{dx} = -\frac{h(x)}{2} \left(P_i(x) \left(R(x) - \frac{h(x)}{2} \right) + P_{oz}(x) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) \right) \\ R(x) N_x^e = \int \left(Q_i(x) \left(R(x) - \frac{h(x)}{2} \right) + Q_o(x) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) \right) dx + K2 \\ R(x) N_z^e - \frac{d(R(x) M_x^e)}{dx} = \frac{h(x)}{2} \left(Q_i(x) \left(R(x) - \frac{h(x)}{2} \right) - Q_o(x) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) \right) \\ R(x) N_x^t = \int \left(H_i(x) \left(R(x) - \frac{h(x)}{2} \right) + H_o(x) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) \right) dx + K3 \\ R(x) N_z^t - \frac{d(R(x) M_x^t)}{dx} = \frac{h(x)}{2} \left(H_i(x) \left(R(x) - \frac{h(x)}{2} \right) - H_o(x) \left(R(x) + \frac{h(x)}{2} \right) \right) \end{array} \right. \quad (2-50)$$

که $K1$ ، $K2$ و $K3$ ثابت‌های حاصل از عملیات انتگرال‌گیری از معادله اول، پنجم و هفتم دستگاه

معادلات (۲-۴۶) می‌باشد. این دستگاه را می‌توان به صورت اختصاری به فرم زیر نشان داد.

$$\left\{ \begin{array}{l}
N_x^m - F1(x) = 0; F1(x) = \left(\frac{1}{R} \right) \left(\int P_{ox} \left(R + \frac{h}{2} \right) dx + K1 \right) \\
RQ_x^m - \frac{d(RM_x^m)}{dx} - F2(x) = 0; F2(x) = -\frac{h}{2} P_{ox} \left(R + \frac{h}{2} \right) \\
N_\theta^m - \frac{d(RQ_x^m)}{dx} - F3(x) = 0; F3(x) = P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_{oz} \left(R + \frac{h}{2} \right) \\
M_\theta^m + RN_z^m - \frac{d(RM_{xz}^m)}{dx} - F4(x) = 0; F4(x) = -\frac{h}{2} \left(P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_{oz} \left(R + \frac{h}{2} \right) \right) \\
N_x^e - F5(x) = 0; F5(x) = \left(\frac{1}{R} \right) \left(\int Q_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + Q_o \left(R + \frac{h}{2} \right) dx + K2 \right) \\
RN_z^e - \frac{d(RM_x^e)}{dx} - F6(x) = 0; F6(x) = \frac{h}{2} \left(Q_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - Q_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right) \\
N_x^t - F7(x) = 0; F7(x) = \left(\frac{1}{R} \right) \left(\int H_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + H_o \left(R + \frac{h}{2} \right) dx + K2 \right) \\
RN_z^e - \frac{d(RM_x^e)}{dx} - F8(x) = 0; F8(x) = \frac{h}{2} \left(H_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - H_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right)
\end{array} \right. \quad (51-2)$$

با جایگذاری معادلات (۳۴-۲) تا (۴۰-۲) در دستگاه معادلات (۵۱-۲) و استفاده از معادلات

گرادیان ((۱۲-۲) تا ((۲۲-۲) و معادلات ساختاری ((۲۶-۲) تا ((۲۹-۲)، این دستگاه معادلات بر

حسب مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک میدان جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و دما (U_x^1, U_x^0)

$(U_z^1, U_z^0, \varphi^1, \varphi^0, \Theta^1, \Theta^0)$ به دست می‌آید. این دستگاه معادلات که یک دستگاه دیفرانسیل

مرتبه‌ای خطی با ضرایب متغیر می‌باشد؛ فرم کلی آن بدین صورت است.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\Gamma_1 \left[x, \frac{d}{dx}, U_x^0(x), U_x^1(x), U_z^0(x), U_z^1(x), \varphi^1(x), \Theta^0(x), \Theta^1(x), F1(x), R(x), h(x), c_{ij}^0, e_{ij}^0, \lambda_{ii}^0, n \right] = 0 \\
\Gamma_2 \left[x, \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, U_x^0(x), U_x^1(x), U_z^0(x), U_z^1(x), \varphi^0(x), \varphi^1(x), \Theta^0(x), \Theta^1(x), F2(x), R(x), h(x), c_{ij}^0, e_{ij}^0, \lambda_{ii}^0, n \right] = 0 \\
\Gamma_3 \left[x, \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, U_x^0(x), U_x^1(x), U_z^0(x), U_z^1(x), \varphi^0(x), \varphi^1(x), \Theta^0(x), \Theta^1(x), F3(x), R(x), h(x), c_{ij}^0, e_{ij}^0, \lambda_{ii}^0, n \right] = 0 \\
\Gamma_4 \left[x, \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, U_x^0(x), U_x^1(x), U_z^0(x), U_z^1(x), \varphi^0(x), \varphi^1(x), \Theta^0(x), \Theta^1(x), F4(x), R(x), h(x), c_{ij}^0, e_{ij}^0, \lambda_{ii}^0, n \right] = 0 \\
\Gamma_5 \left[x, \frac{d}{dx}, U_x^1(x), U_z^0(x), U_z^1(x), \varphi^0(x), \varphi^1(x), F5(x), R(x), h(x), e_{ij}^0, \epsilon_{ij}^0, n \right] = 0 \\
\Gamma_6 \left[x, \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, U_x^0(x), U_x^1(x), U_z^0(x), U_z^1(x), \varphi^0(x), \varphi^1(x), F6(x), R(x), h(x), e_{ij}^0, \epsilon_{ij}^0, n \right] = 0 \\
\Gamma_7 \left[x, \frac{d}{dx}, \Theta^0(x), \Theta^1(x), F7(x), R(x), h(x), k_i^0, n \right] = 0 \\
\Gamma_8 \left[x, \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, \Theta^0(x), \Theta^1(x), F8(x), R(x), h(x), k_i^0, n \right] = 0
\end{array} \right. \quad (52-2)$$

که Γ_1 تا Γ_8 اپراتورهای دیفرانسیلی می باشند.

۳-۲ حل تحلیلی

۱-۳-۲ بی بعدسازی معادلات حاکم

برای حل تحلیلی دستگاه معادلات حاکم (۵۱-۲) در این پژوهش از روش تطابق مجانب ها زیرمجموعه ی تکنیک اغتشاشات استفاده می شود. برای این منظور، ضروری است در ابتدا دستگاه معادلات حاکم بی بعد سازی شود. با استفاده از پارامترهای تعریف شده ذیل، بی بعد سازی دستگاه معادلات حاکم صورت می گیرد.

$$\left\{ \begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L_C}; h^* = \frac{h}{h_0}; R^* = \frac{R}{h_0}; c_{ij}^{0*} = \frac{c_{ij}^0}{c_m^0}; e_{ij}^{0*} = \frac{e_{ij}^0}{e_m^0}; \lambda_{ij}^{0*} = \frac{\lambda_{ij}^0}{\lambda_m^0}; \\ k_{ij}^{0*} &= \frac{k_{ij}^0}{k_m^0}; \epsilon_{ij}^{0*} = \frac{\epsilon_{ij}^0}{\epsilon_m^0}; \epsilon_m^0 = \frac{e_m^{02}}{c_m^0}; \varepsilon = \frac{h_0}{L_C}; \varsigma = \frac{2R+h}{2R-h}; \\ m^* &= \ln\left(\frac{2R+h}{2R-h}\right); U_x^{0*} = \frac{U_x^0}{h_0}; U_x^{1*} = U_x^1; U_z^{0*} = \frac{U_z^0}{h_0}; \\ U_z^{1*} &= U_z^1; V^* = \varepsilon \times \frac{dU_x^{0*}}{dx^*}; \varphi^{0*} = \varphi^0 \times \frac{\bar{\epsilon}_m}{h_0 \bar{e}_m}; \varphi^{1*} = \varphi^1 \times \frac{\bar{\epsilon}_m}{\bar{e}_m}; \\ \psi^* &= \varepsilon \times \frac{d\varphi^{0*}}{dx^*}; \Theta^{0*} = \Theta^0 \times \frac{\lambda_m^0}{c_m^0}; \Theta^{1*} = \Theta^1 \times \frac{h_0 \lambda_m^0}{c_m^0}; g^* = \varepsilon \times \frac{d\Theta^{0*}}{dx^*}; \\ F1^* &= \frac{F1}{h_0 \bar{e}_m}; F2^* = \frac{F2}{h_0^2 \bar{e}_m}; F3^* = \frac{F3}{h_0 \bar{e}_m}; F4^* = \frac{F4}{h_0^2 \bar{e}_m}; \\ F5^* &= \frac{F5}{h_0 \bar{e}_m}; F6^* = \frac{F6}{h_0^2 \bar{e}_m}; F8^* = \frac{F8 \lambda_m^0}{h_0 c_m^0 k_m^0}; F7^* = \frac{F7 \lambda_m^0}{c_m^0 k_m^0}; \end{aligned} \right. \quad (53-2)$$

در رابطه (۵۳-۲) k_m^0 و $\lambda_m^0, e_m^0, c_m^0$ به ترتیب میانگین مقدار ثابت های الاستیک، مقدار ثابت های پیزوالکتریک-تنش، مقدار ثابت های تنش حرارتی-دما و ضرایب هدایت حرارتی در لایه داخلی استوانه جدار متغیر می باشند. همچنین h_0 ضخامت شاخص بوده و ε یک پارامتر اغتشاشاتی کوچک می باشد. وجود علامت ستاره (*) بر روی پارامترها نشانگر کمیت های بی بعد است. در این پژوهش، ε به عنوان پارامتر اغتشاشات انتخاب می شود. با استفاده از پارامترهای بی بعد (۵۳-۲)، فرم بی بعدسازی شده دستگاه معادلات (۵۱-۲) به دست می آید.

به منظور کاهش حجم نوشتاری معادلات حاکم بی بعد سازی شده، از فرض ثابت ناهمگنی برابر صفر (

$n = 0$) برای ارائه معادلات در ادامه استفاده می شود. لذا دستگاه معادلات حاکم بی بعد سازی شده با

عنایت به $n = 0$ به فرم زیر به دست می آید.

$$c_{22}^0 * \frac{dU_x^1}{dx} h^{*3} \varepsilon + 12 c_{12}^0 * U_z^1 * h^* R^* + 12 c_{23}^0 * U_z^0 * h^* - \lambda_{22}^0 * h^{*3} \Theta^1 * \quad (54-2)$$

$$\begin{aligned} & -12 \lambda_{22}^0 * \Theta^0 * h^* R^* + 12 c_{22}^0 * V^* h^* R^* + 12 e_{12}^0 * \varphi^1 * h^* R^* - 12 F1^* R^* = 0 \\ & - \left(c_{22}^0 * \frac{d^2 U_x^1}{dx^2} h^{*3} R^* + c_{22}^0 * \frac{dU_x^1}{dx} h^{*3} \frac{dR^*}{dx} + 3 c_{22}^0 * \frac{dU_x^1}{dx} h^{*2} R^* \frac{dh^*}{dx} \right) \varepsilon^2 \\ & + \left(12 K_s h^* R^* c_{55}^0 * \frac{dU_z^0}{dx} - 3 c_{23}^0 * \frac{dh^*}{dx} U_z^1 * h^{*2} - h^{*3} c_{12}^0 * \frac{dU_z^1}{dx} \right. \\ & \left. + \lambda_{22}^0 * h^{*3} R^* \frac{d\Theta^1}{dx} + \lambda_{22}^0 * h^{*3} \frac{d\Theta^0}{dx} + \lambda_{22}^0 * h^{*3} \frac{dR^*}{dx} \Theta^1 * \right. \end{aligned} \quad (55-2)$$

$$\begin{aligned} & \left. + 3 \lambda_{22}^0 * R^* \frac{dh^*}{dx} h^{*2} \Theta^1 * + 3 \lambda_{22}^0 * \frac{dh^*}{dx} h^{*2} \Theta^0 * - c_{23}^0 * h^{*3} \frac{dU_z^1}{dx} \right. \\ & \left. - 3 h^{*2} \frac{dh^*}{dx} c_{12}^0 U_z^1 * - 3 h^{*2} \frac{dh^*}{dx} c_{22}^0 V^* + K_s h^{*3} c_{55}^0 * \frac{dU_z^1}{dx} \right. \\ & \left. + K_s h^{*3} e_{35}^0 * \frac{d\varphi^1}{dx} - h^{*3} c_{22}^0 * \frac{dV^*}{dx} - h^{*3} e_{12}^0 * \frac{d\varphi^1}{dx} - 3 h^{*2} \frac{dh^*}{dx} e_{12}^0 * \varphi^1 * \right) \varepsilon \\ & - 12 F2^* + 12 K_s h^* R^* e_{35}^0 * \psi^* + 12 K_s h^* R^* c_{55}^0 * U_x^1 * = 0 \\ & - K_s \left(12 \frac{dR^*}{dx} h^* c_{55}^0 \frac{dU_z^0}{dx} + 3 h^{*2} \frac{dh^*}{dx} c_{55}^0 * \frac{dU_z^1}{dx} + 3 h^{*2} \frac{dh^*}{dx} e_{35}^0 * \frac{d\varphi^1}{dx} \right. \\ & \left. + 12 R^* h^* c_{55}^0 * \frac{d^2 U_z^0}{dx^2} + 12 \frac{dh^*}{dx} R^* c_{55}^0 * \frac{dU_z^0}{dx} + h^{*3} c_{55}^0 * \frac{d^2 U_z^1}{dx^2} \right. \\ & \left. + h^{*3} e_{35}^0 * \frac{d^2 \varphi^1}{dx^2} \right) \varepsilon^2 - K_s \left(12 \frac{dh^*}{dx} R^* e_{35}^0 * \psi^* + 12 \frac{dR^*}{dx} h^* e_{35}^0 * \psi^* \right. \end{aligned} \quad (56-2)$$

$$\begin{aligned} & \left. + 12 * \frac{dR^*}{dx} h^* c_{55}^0 * U_x^1 * + 12 R^* h^* c_{55}^0 * \frac{dU_x^1}{dx} + 12 \frac{dh^*}{dx} R^* c_{55}^0 * U_x^1 * \right. \\ & \left. + 12 R^* h^* e_{35}^0 * \frac{d\psi^*}{dx} \right) \varepsilon + 12 e_{12}^0 * \varphi^1 * h^* + 12 c_{12}^0 * U_z^1 * h^* + 12 c_{22}^0 * U_z^1 * h^* \\ & - 12 c_{22}^0 * R^* U_z^1 * m^* + 12 c_{23}^0 * h^* V^* - 12 F3^* + 12 c_{22}^0 * U_z^0 * m^* - 12 \lambda_{22}^0 * \Theta^0 * h^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -K_s \left(R^* h^{*3} c_{55}^0 * \frac{d^2 U_z^1 *}{dx^{*2}} + R^* h^{*3} e_{35}^0 * \frac{d^2 \varphi^1 *}{dx^{*2}} + \frac{dR^*}{dx^*} h^{*3} e_{35}^0 * \frac{d\varphi^1 *}{dx^*} \right. \\
& + h^{*3} c_{55}^0 * \frac{d^2 U_z^0 *}{dx^{*2}} + 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 * \frac{dU_z^0 *}{dx^*} + \frac{dR^*}{dx^*} h^{*3} c_{55}^0 * \frac{dU_z^1 *}{dx^*} \\
& \left. + 3R^* h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 * \frac{dU_z^1 *}{dx^*} + 3R^* h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 * \frac{d\varphi^1 *}{dx^*} \right) \varepsilon^2 + \left(c_{23}^0 * h^{*3} \frac{dU_x^1 *}{dx^*} \right. \\
& - 3K_s h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 * U_x^1 * - k_s h^{*3} c_{55}^0 * \frac{dU_x^1 *}{dx^*} + c_{12}^0 * h^{*3} \frac{dU_x^1 *}{dx^*} \\
& \left. - 3k_s h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 * \psi^* - k_s h^{*3} e_{35}^0 * \frac{d\psi^*}{dx^*} \right) \varepsilon + 12R^{*2} c_{22}^0 * U_z^1 * m^* \\
& - h^{*3} \lambda_{22}^0 * \Theta^1 * + 12c_{22}^0 * h^* U_z^0 * - 12c_{22}^0 * R^* h^* U_z^1 * + 12e_{11}^0 * \varphi^1 * R^* h^* \\
& + 12c_{11}^0 * U_z^1 * R^* h^* - 12R^* h^* \lambda_{11}^0 * \Theta^0 * - h^{*3} \lambda_{11}^0 * \Theta^1 * + 12c_{12}^0 * V^* h^* R^* \\
& - 12F4^* - 12c_{22}^0 * R^* U_z^0 * m^* + 12c_{12}^0 * U_z^0 * h^* = 0
\end{aligned} \tag{57-2}$$

$$\left(12h^* R^* e_{35}^0 * \frac{dU_z^0 *}{dx^*} + e_{35}^0 * h^{*3} \frac{dU_z^1 *}{dx^*} - \varepsilon_{22}^0 * h^{*3} \frac{d\varphi^1 *}{dx^*} \right) \varepsilon \tag{58-2}$$

$$\begin{aligned}
& -12h^* R^* \varepsilon_{22}^0 * \psi^* - 12F5^* R^* + 12h^* R^* e_{35}^0 * U_x^1 * = 0 \\
& \left(\frac{dR^*}{dx^*} h^{*3} \varepsilon_{22}^0 * \frac{d\varphi^1 *}{dx^*} + h^{*3} R^* \varepsilon_{22}^0 * \frac{d^2 \varphi^1 *}{dx^{*2}} - h^{*3} e_{35}^0 * \frac{d^2 U_z^0 *}{dx^{*2}} \right. \\
& - \frac{dR^*}{dx^*} h^{*3} e_{35}^0 * \frac{dU_z^1 *}{dx^*} - h^{*3} R^* e_{35}^0 * \frac{d^2 U_z^1 *}{dx^{*2}} - 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} R^* e_{35}^0 * \frac{dU_z^1 *}{dx^*} \\
& \left. + 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} R^* \varepsilon_{22}^0 * \frac{d\varphi^1 *}{dx^*} - 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 * \frac{dU_z^0 *}{dx^*} \right) \varepsilon^2 + \left(e_{12}^0 * h^{*3} \frac{dU_x^1 *}{dx^*} \right. \\
& \left. + 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} \varepsilon_{22}^0 * \psi^* - h^{*3} e_{35}^0 * \frac{dU_x^1 *}{dx^*} - 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 * U_x^1 * + h^{*3} \varepsilon_{22}^0 * \frac{d\psi^*}{dx^*} \right) \varepsilon \\
& + 12e_{11}^0 * U_z^1 * h^* R^* + 12e_{12}^0 * U_z^0 * h^* + 12e_{12}^0 * V^* h^* R^* \\
& - 12\varepsilon_{11}^0 * \varphi^1 * h^* R^* - 12F6^* = 0
\end{aligned} \tag{59-2}$$

$$\left(k_{22}^0 * h^{*3} \frac{d\Theta^1 *}{dx^*} \right) \varepsilon - 12F7^* R^* - 12k_{22}^0 * \vartheta^* R^* h^* = 0 \tag{60-2}$$

$$\left(k_{22}^0 * R^* h^{*3} \frac{d^2 \Theta^1 *}{dx^{*2}} \right) \varepsilon^2 + \left(k_{22}^0 * h^{*3} \frac{d\vartheta^*}{dx^*} \right) \varepsilon - 12R^* k_{11}^0 * h^* \Theta^1 * - 12F8^* = 0 \tag{61-2}$$

معادلات دیفرانسیل (۵۴-۲) تا (۶۱-۲) معادلات دیفرانسیل مرتبه ۲ است که با حذف ترم‌های

شامل اغتشاشات (ε)، مرتبه‌ی آنها ۲ مرتبه کاهش یافته و تبدیل به معادلات جبری می‌شوند؛ مطابق

تئوری اغتشاشات؛ این موضوع بیانگر این است که دو لایه مرزی در دو سرپو سته وجود دارد. یا به

عبارتی حل مسأله شامل دو بخش است؛ یک بخش مربوط به حل خارجی در نواحی دور از مرزها بوده

و بخش دیگر مربوط به حل داخلی در نواحی مرزی یا دو سرپوسته می‌باشد [۸۸].

همانگونه که بیان شد؛ جهت سهولت و کاهش حجم نوشتاری معادلات بی‌بعد سازی شده، ثابت ناهمگنی برابر صفر در نظر گرفته شد ($n = 0$). برای سایر مقادیر ثابت‌های ناهمگنی نیز، روند حل مشابه است و تنها کافی است بی‌بعد سازی معادلات با توجه به مقدار ثابت ناهمگنی انجام شود. در فصل‌های آتی به تحلیل حرارتی (حل معادلات (۶۰-۲) و (۶۱-۲))، تحلیل الکتروالاستیک (حل معادلات (۵۴-۲) تا (۶۰-۲)) بدون در نظر گرفتن اثر حرارت یا دما و تحلیل الکتروترموالاستیک (معادلات (۵۴-۲) تا (۶۱-۲)) یا به عبارتی، به ارائه حل خارجی و داخلی با توجه به معادلات حاکم بی‌بعد سازی شده پرداخته می‌شود.

فصل ۳ تحلیل حرارتی استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن

۱-۳ پیش‌گفتار

در این فصل ابتدا نحوه‌ی حل تحلیلی رسانش حرارتی به کمک تئوری اغتشاشات در استوانه جدار متغیر تو ضیح داده می‌شود، سپس به تحلیل اجزای محدود حرارتی پرداخته می‌شود؛ در پایان برای تحلیل‌های ارائه شده، مطالعه‌ی موردی انجام می‌شود و نتایج بررسی می‌شوند.

۲-۳ حل تحلیلی رسانش حرارتی

همانطور که در فصل گذشته بیان شد؛ برای تحلیل حرارتی استوانه‌های ناهمگن جدار متغیر که تحت بارگذاری حرارتی در سطوح داخلی و خارجی خود قرار داشته و دارای شرایط مرزی در دو سر خود است، معادلات (۲-۶۰) و (۲-۶۱) که به کمک ترم اغتشاشاتی (ε) بی‌بعد شده‌اند؛ می‌بایست حل شوند. مطابق آنچه پیشتر بیان شد؛ حل معادلات فوق شامل دو بخش است؛ حل خارجی که مربوط به نواحی دور از مرزهاست و حل داخلی که مربوط به نواحی مرزی یا دو سراسطوانه است.

۱-۲-۳ حل خارجی

حل خارجی به صورت یک سری یکنواخت از ترم اغتشاشاتی (ε) در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری این سری یکنواخت در معادلات (۲-۶۰) و (۲-۶۱) و در نظر گرفتن جملات غالب، این سری (حل خارجی) بدین صورت بیان می‌شود و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Y_{outer} = Y_0 + \varepsilon Y_1 \\ Y_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_0(x^*) \\ \Theta_0^1(x^*) \end{bmatrix}; \quad Y_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1(x^*) \\ \Theta_1^1(x^*) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-3)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۱-۳) در معادلات (۲-۶۰) و (۲-۶۱) و در نظرگیری ضرایب ترم‌های ε^0

و ε^1 دستگاه معادلات جبری مربوط به حل خارجی مرتبه‌ی صفر و یک به فرم زیر به دست می‌آید.

$$O(\varepsilon^0) \rightarrow \begin{cases} (k_{22}^0 * h^*) \mathcal{G}_0 + F7^* = 0 \\ (k_{11}^0 * R * h^*) \Theta_0^1 + F8^* = 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

$$O(\varepsilon^1) \rightarrow \begin{cases} h^{*2} \frac{d\Theta_0^1}{dx^*} + 12R^* \mathcal{G}_1 = 0 \\ \left(k_{22}^0 * h^{*2}\right) \frac{d\mathcal{G}_0}{dx^*} - (12R^* k_{11}^0 *) \Theta_1^1 = 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

دستگاه معادلات (۲-۳) و (۳-۳) به ترتیب دستگاه معادلات جبری مربوط به حل خارجی مرتبه‌ی

صفر و یک می‌باشند که به راحتی قابل حل است و می‌توان حل خارجی مرتبه‌ی صفر (Y_0) و حل

خارجی مرتبه‌ی یک (Y_1) را تعیین نمود. لذا خواهیم داشت:

$$Y_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_0(x^*) \\ \Theta_0^1(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{F7^*}{(k_{22}^0 * h^*)} \\ -\frac{F8^*}{(k_{11}^0 * R^* h^*)} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1(x^*) \\ \Theta_1^1(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{h^{*2}}{12R^*}\right) \frac{d}{dx^*} \left(\frac{F8^*}{(k_{11}^0 * R^* h^*)}\right) \\ -\left(\frac{k_{22}^0 * h^{*2}}{12R^* k_{11}^0 *}\right) \frac{d}{dx^*} \left(\frac{F7^*}{(k_{22}^0 * h^*)}\right) \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

۲-۲-۳ حل داخلی در مرز پایین استوانه ($x^*=0$)

مطابق روش تطابق مجانب‌ها زیرمجموعه‌ی تکنیک اغتشاشات برای انجام حل در نواحی مرزی

می‌بایست از متغیر سریع استفاده گردد. برای انجام حل داخلی در نواحی مرزی نزدیک به پایین

سیلندر، $\eta = \frac{x^*}{\varepsilon}$ به عنوان متغیر سریع انتخاب می‌شود و بسط تیلور بارگذاری، ضخامت، شعاع لایه

میانی در حوالی مرز پایین ($x^*=0$) نوشته می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} R^*(x^*) = R_0^* + \varepsilon \eta dR_0 + \dots; R_0^* = R^*(0), dR_0 = \frac{dR^*}{dx^*} \Big|_{x^*=0} \\ h^*(x^*) = h_0^* + \varepsilon \eta dh_0 + \dots; h_0^* = h^*(0), dh_0 = \frac{dh^*}{dx^*} \Big|_{x^*=0} \\ F7^*(x^*) = F7_0^* + \varepsilon \eta dF7_0 + \dots; F7_0^* = F7^*(0), dF7_0 = \frac{dF7^*}{dx^*} \Big|_{x^*=0} \\ F8^*(x^*) = F8_0^*(0) + \varepsilon \eta dF8_0 + \dots; F8_0^* = F8^*(0), dF8_0 = \frac{dF8^*}{dx^*} \Big|_{x^*=0} \end{cases} \quad (6-3)$$

حل داخلی به این صورت در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} Y_{inner} = Y_{0i} + \varepsilon Y_{1i} \\ Y_{0i} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{0i}(\eta) \\ \Theta_{0i}^1(\eta) \end{bmatrix}; \quad Y_{1i} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1i}(\eta) \\ \Theta_{1i}^1(\eta) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7-3)$$

با جایگذاری معادلات (7-3) و (6-3) در معادلات (2-60) و (2-61) و در نظرگیری ضرایب

ترم‌های ε^0 و ε^1 دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به حل داخلی مرتبه‌ی صفر و یک به فرم زیر

برای مرز پایین به دست می‌آید.

$$O(\varepsilon^0) \rightarrow \begin{cases} L_{2i}[Y_{0i}] = \{F0i\}; \\ L_{2i}[\bullet] = [D2i] \frac{d^2\{\bullet\}}{d\eta^2} + [D1i] \frac{d\{\bullet\}}{d\eta} + [D0i]\{\bullet\} \\ [D2i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D2i_{22} \end{bmatrix}, [D1i] = \begin{bmatrix} 0 & D1i_{12} \\ D1i_{21} & 0 \end{bmatrix}, [D0i] = \begin{bmatrix} D0i_{11} & 0 \\ 0 & D0i_{22} \end{bmatrix} \\ \{F0i\} = \begin{Bmatrix} F0i_1 \\ F0i_2 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (8-3)$$

$$O(\varepsilon^1) \rightarrow \begin{cases} L_{2i}[Y_{1i}] = \{F1i\}; \\ \{F1i\} = \begin{Bmatrix} F1i_1 \\ F1i_2 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (9-3)$$

که در این دستگاه‌های معادلات $[D2i]_{2 \times 2}, [D1i]_{2 \times 2}, [D0i]_{2 \times 2}$ ماتریس‌های ضرایب، $\{F0i\}, \{F1i\}$

بردارها (ترم ناهمگنی دستگاه معادلات دیفرانسیل) می‌باشند. مولفه‌های غیر صفر این ماتریس‌ها و

بردارها به شرح ذیل می‌باشند.

$$\begin{cases} D2i_{22} = k_{22}^0 * h_0 *^3 R_0 * \\ D1i_{12} = -k_{22}^0 * h_0 *^3; \quad D1i_{21} = k_{22}^0 * h_0 *^3 \\ D0i_{11} = -12k_{22}^0 * h_0 * R_0 *; \quad D1i_{22} = -12k_{11}^0 * h_0 * R_0 * \\ F0i_1 = 12F7_0 * R_0 *; \quad F0i_2 = 12F8_0 * \\ F1i_1 = \left(12F7_0 * dR_0 + 12dF7_0 * R_0 * - 12k_{22}^0 * h_0 * dR_0 \mathcal{G}_{0i}(\eta) \right. \\ \left. - 12k_{22}^0 * dh_0 R_0 * \mathcal{G}_{0i}(\eta) - 3k_{22}^0 * h_0 *^2 \frac{d\Theta_{0i}^1(\eta)}{d\eta} \right) \eta \\ F1i_2 = \left(12dF8_0 - (12k_{11}^0 * h_0 * dR_0 + 12k_{11}^0 * dh_0 R_0 *) \Theta_{0i}^1(\eta) \right. \\ \left. + (k_{22}^0 * h_0^3 * dR_0 + 3k_{22}^0 * h_0^2 * dh_0 R_0 *) \frac{d^2\Theta_{0i}^1(\eta)}{d\eta^2} + 3k_{22}^0 * h_0 *^2 \frac{dh_0}{d\eta} \frac{d\mathcal{G}_{0i}(\eta)}{d\eta} \right) \eta \end{cases} \quad (10-3)$$

حل عمومی دستگاه معادلات (۸-۳) و (۹-۳) به صورت $\{Y\} = \{V_i\} e^{\lambda_i \eta}$ در نظر گرفته می‌شود که λ_i مقادیر ویژه و $\{V_i\}$ بردار ویژه متناظر با آن می‌باشد [۸۹]. برای به دست آوردن مقادیر ویژه کافی است، حل عمومی را در فرم همگن دستگاه معادلات (۸-۳) و (۹-۳) جای گذاری کنیم. با عنایت به اینکه فرم همگن دستگاه معادلات (۸-۳) و (۹-۳) یکی می‌باشد، لذا حل عمومی هر دو دستگاه (۸-۳) و (۹-۳) یکسان بوده و خواهیم داشت.

$$[C]_{2 \times 2} \{V_i\} = \{0\}; [C] = \lambda_i^2 [D2i] + \lambda_i [D1i] + [D0i] \quad (۱۱-۳)$$

به منظور یافتن مقادیر λ_i می‌بایست؛ دستگاه معادلات (۱۱-۳) دارای جواب غیر بدیهی ($\{V_i\} \neq 0$) باشد. بنابراین با قراردادن دترمینان ضرایب برابر صفر ($\det[C] = \{0\}$)، معادله مشخصه دستگاه به دست آمده که با حل آن، مقادیر ویژه یا همان مقادیر به دست می‌آید. این معادله مشخصه، یک معادله درجه ۲ جبری بوده که حل آن سبب می‌شود دو مقدار برای مقادیر ویژه تعیین گردد و با توجه به هر مقدار ویژه، بردار ویژه متناظر با آن محاسبه می‌شود. باید توجه داشت؛ با توجه به اینکه باید مقدار حل داخلی در نواحی دور از مرزها باید مقداری محدود داشته باشد لذا ریشه‌هایی از معادله مشخصه (مقادیر ویژه)، انتخاب می‌شوند قسمت حقیقی آنها منفی بوده و مقدار آنها در بی‌نهایت محدود می‌شود. بنابراین یک مقدار ویژه (دارای مقدار حقیقی منفی) و بردار ویژه متناظر با آن، انتخاب می‌شود و برای حل عمومی خواهیم داشت.

$$\{Y\}_g = C_1 \{V_1\} e^{\lambda_1 \eta} \quad (۱۲-۳)$$

حل خصوصی دستگاه معادلات (۸-۳) و (۹-۳) با توجه به بخش ناهمگن آنها به ترتیب $\{F0i\}$ و $\{F1i\}$ تعیین می‌شود. با توجه به اینکه بخش ناهمگن معادلات (۸-۳) مقداری ثابت می‌باشد؛ لذا حل خصوصی برای دستگاه معادلات (۸-۳) به صورت $\{Y\}_{p0} = \{K_0\}$ در نظر گرفته می‌شود که با جایگذاری حل در نظر گرفته شده در دستگاه معادلات (۸-۳)، بردار $\{K_0\}$ تعیین می‌شود. حل کلی دستگاه معادلات (۸-۳)، به صورت $\{Y\} = \{Y\}_g + \{Y\}_{p0}$ به دست می‌آید که ثابت C_1 موجود در حل با اعمال شرایط مرزی مربوط به ترم آخر بردار $\{Y\}$ در $x^* = 0$ به دست می‌آید.

قسمت ناهمگن دستگاه معادلات (۹-۳) دارای دو بخش می‌باشد که یک بخش شامل ترم‌های چندجمله‌ای^۱ و بخش دیگر شامل ترم‌های نمایی^۲ است. بنابراین، با توجه به بخش‌های ترم ناهمگن دستگاه معادلات (۹-۳)، حل خصوصی نیز به صورت دو بخش در نظر گرفته می‌شود. بخش مربوط به چندجمله‌ای حل خصوصی به صورت $\{Y\}_{p11} = \{K_1\}\eta + \{K_0\}$ در نظر گرفته می‌شود. $\{K_1\}$ و $\{K_0\}$ بردارهای ثابت بوده که با جایگذاری حل خصوصی در دستگاه معادلات (۹-۳)، با توجه به بخش چندجمله‌ای ترم ناهمگنی تعیین می‌شوند. با توجه به اینکه بخش نمایی ناهمگنی دستگاه معادلات (۹-۳) شامل حل عمومی نیز می‌باشد؛ لذا، بخش نمایی حل خصوصی به صورت $\{Y\}_{p12} = (\{V_{2i}\}\eta^2 + \{V_{1i}\}\eta + \{V_{0i}\})e^{\lambda_i\eta}$ در نظر گرفته می‌شود که $\{V_{0i}\}$ ، $\{V_{1i}\}$ و $\{V_{2i}\}$ بردارهای ثابت بوده و با جایگذاری در دستگاه معادلات (۹-۳)، با توجه به بخش نمایی ترم ناهمگنی تعیین می‌شوند. حل کلی دستگاه معادلات (۹-۳)، به صورت $\{Y\} = \{Y\}_g + \{Y\}_{p11} + \{Y\}_{p12}$ به دست می‌آید که ثابت موجود در آن با اعمال شرایط مرزی مربوط به ترم آخر بردار $\{Y\}$ در $x^* = 0$ به دست می‌آید.

۳-۲-۳ حل داخلی در مرز بالا استوانه ($x^*=1$)

مطابق آنچه در بخش قبل توضیح داده شد، در مرز بالا نیز از متغیر سریع استفاده می‌شود. برای انجام حل داخلی در نواحی مرزی نزدیک به بالای سیلندر، $\zeta = \frac{x^*-1}{\varepsilon}$ به عنوان متغیر سریع استفاده می‌شود و بسط تیلور بارگذاری، ضخامت، شعاع لایه میانی در حوالی مرز بالا ($x^*=1$) نوشته می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

1. polynomial
2. exponential

$$\begin{cases} R^*(x^*) = R_1^* + \varepsilon \zeta \, dR_1 + \dots; R_1^* = R^*(1), dR_1 = \frac{dR^*}{dx^*} \Big|_{x^*=1} \\ h^*(x^*) = h_1^* + \varepsilon \zeta \, dh_1 + \dots; h_1^* = h^*(1), dh_1 = \frac{dh^*}{dx^*} \Big|_{x^*=1} \\ F7^*(x^*) = F7_1^* + \varepsilon \zeta \, dF7_1 + \dots; F7_1^* = F7^*(1), dF7_1 = \frac{dF7^*}{dx^*} \Big|_{x^*=1} \\ F8^*(x^*) = F8_1^*(0) + \varepsilon \zeta \, dF8_1 + \dots; F8_1^* = F8^*(1), dF8_1 = \frac{dF8^*}{dx^*} \Big|_{x^*=1} \end{cases} \quad (13-3)$$

حل داخلی در مرز بالا به این صورت در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} Y_{Inner} = Y_{0I} + \varepsilon Y_{1I} \\ Y_{0I} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{0I}(\zeta) \\ \Theta_{0I}^1(\zeta) \end{bmatrix}; Y_{1I} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1I}(\zeta) \\ \Theta_{1I}^1(\zeta) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (14-3)$$

با جایگذاری معادلات (13-3) و (14-3) در معادلات (2-60) و (2-61) و در نظرگیری ضرایب

ترم‌های ε^0 و ε^1 دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به حل داخلی مرتبه‌ی صفر و یک به فرم زیر

برای مرز بالا به دست می‌آید.

$$O(\varepsilon^0) \rightarrow \begin{cases} L_{2I}[Y_{0I}] = \{F0I\}; \\ L_{2I}[\bullet] = [D2I] \frac{d^2\{\bullet\}}{d\zeta^2} + [D1I] \frac{d\{\bullet\}}{d\zeta} + [D0I]\{\bullet\} \\ [D2I] = [D2i], [D1I] = [D1i], [D0I] = [D0i] \\ \{F0I\} = \begin{Bmatrix} F0I_1 \\ F0I_2 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (15-3)$$

$$O(\varepsilon^1) \rightarrow \begin{cases} L_{2I}[Y_{1I}] = \{F1I\}; \\ \{F1I\} = \begin{Bmatrix} F1I_1 \\ F1I_2 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (16-3)$$

که در این دستگاه‌های معادلات $[D2I]_{2 \times 2}, [D1I]_{2 \times 2}, [D0I]_{2 \times 2}$ ماتریس‌های ضرایب،

$\{F0I\}, \{F1I\}$ بردارها (ترم ناهمگنی دستگاه معادلات دیفرانسیل) می‌باشند. مولفه‌های غیر صفر

این بردارها بدین صورت می‌باشند.

$$\left\{ \begin{array}{l} F0I_1 = 12F7_1 * R_1^*; F0I_2 = 12F8_1^* \\ F1I_1 = \left(12F7_1 * dR_1 + 12dF7_1 * R_1^* - 12k_{22}^0 * h_1 * dR_1 \mathcal{G}_{0I}(\zeta) \right. \\ \left. - 12k_{22}^0 * dh_1 R_1^* \mathcal{G}_{0I}(\zeta) - 3k_{22}^0 * h_1^2 * dh_1 \frac{d\Theta_{0I}^1(\zeta)}{d\zeta} \right) \zeta \\ F1I_2 = \left(12dF8_1 - \left(12k_{11}^0 * h_1 * dR_1 + 12k_{11}^0 * dh_1 R_1^* \right) \Theta_{0I}^1(\zeta) \right. \\ \left. + \left(k_{22}^0 * h_1^3 * dR_1 + 3k_{22}^0 * h_1^2 * dh_1 R_1^* \right) \frac{d^2\Theta_{0I}^1(\zeta)}{d\zeta^2} + 3k_{22}^0 * h_1^2 * dh_1 \frac{d\mathcal{G}_{0I}(\zeta)}{d\zeta} \right) \zeta \end{array} \right. \quad (17-3)$$

حل دستگاه معادلات (۱۵-۳) و (۱۶-۳) به ترتیب مشابه حل دستگاه معادلات (۸-۳) و (۹-۳) می‌باشد. شایان توجه است؛ در فرآیند حل دستگاه معادلات (۱۵-۳) و (۱۶-۳) با عنایت به اینکه پاسخ در نواحی دور از مرز بالا (بی‌نهایت منفی)، می‌بایست مقداری محدود داشته باشد؛ لذا مقادیر ویژه دارای بخش حقیقی مثبت انتخاب می‌گردند.

۴-۲-۳ حل ترکیبی

مطابق روش تطابق مجانب‌ها زیرمجموعه‌ی تکنیک اغتشاشات، حل ترکیبی $Y_{composite}$ ، مجموع حل‌های داخلی و خارجی منهای نواحی هم پوشانی می‌باشد. بنابراین، برای حل ترکیبی خواهیم داشت.

$$Y_{composite} = Y_{outer} + Y_{inner} + Y_{Inner} - (Y_{outer})^{inner} - (Y_{outer})^{Inner} \quad (18-3)$$

$(Y_{outer})^{inner}$ و $(Y_{outer})^{Inner}$ بخش‌های مشترک (یکسان) حل داخلی و خارجی در نواحی مرزی (نزدیک دو سر استوانه) می‌باشند که با استفاده از اصل منطبق سازی^۱ و ن دیاک^۲ به دست می‌آیند [۸۸]. با انتگرال گیری از مؤلفه‌ی اول حل ترکیبی، تابع $\Theta^0 *$ به دست می‌آید (۸۸). با اعمال شرایط مرزی $\Theta^0 *$ در دو سر استوانه، ثابت‌های $K3$ و $K4$ تعیین می‌گردند.

عملیات ریاضی بیان شده، جهت انجام حل تحلیلی، توسط برنامه‌ی نوشته شده در نرم‌افزار میپل

۱۳ انجام می‌شود که در ادامه نتایج حاصل از مطالعه‌ی عددی توسط این نرم‌افزار نشان داده خواهد شد.

۳-۳ تحلیل اجزای محدود

به منظور تحلیل اجزای محدود از نرم‌افزار انسیس ۱۲,۰^۲ در این پژوهش، استفاده می‌شود.

۳-۳-۱ تحلیل عددی الکتروترمو مکانیکی

تحلیل میدان-جفت شده^۳، ترکیبی از تحلیل رشته‌های مهندسی (میدان‌های فیزیکی) متفاوت با اثر متقابل می‌باشد که برای حل مسأله‌ی کلی مهندسی استفاده می‌شوند، بنابراین اغلب از تحلیل میدان-جفت شده به عنوان تحلیل چند فیزیکی^۴ یاد می‌شود. زمانی که ورودی تحلیل یک میدان وابسته به نتایج تحلیل میدان دیگری باشد، تحلیل جفت شده می‌باشد [۹۰].

برخی تحلیل‌ها می‌توانند جفت شدگی یک سو^۵ داشته باشند. برای مثال در مسائل تنش حرارتی، میدان دمایی کرنش حرارتی را در میدان سازه‌ای ایجاد می‌کند اما به طور کلی کرنش سازه‌ای تأثیری بر توزیع دما ندارد، بنابراین نیازی به انجام تکرار متوالی حل‌های دو میدان نیست. نمونه‌های پیچیده‌تر شامل جفت شدگی دو سو^۶ می‌باشند. برای مثال تحلیل پیزوالکتریک که تأثیر متقابل میدان الکتریکی و سازه‌ای را به کار می‌برد برای حل توزیع ولتاژ بر اثر جابه‌جایی اعمالی و یا برعکس، استفاده می‌شود. این دسته مسائل نیاز به انجام تکرار متوالی حل بین دو میدان فیزیکی تا همگرا شدن دارند [۹۰].

فرآیند تحلیل میدان-جفت شده بستگی به این امر دارد که چه میدان‌هایی باهم جفت شده‌اند، اما دو روش مجزای مستقیم و انتقال بار، برای این منظور در انسیس به کار گرفته شده است [۹۰].

3. Maple 13
4. ANSYS 12.0
5. Coupled-field
1. Multiphysics
2. One-way
3. Two-way

الف) روش مستقیم

روش مستقیم اغلب شامل تنها یک تحلیل می‌باشد که از یک المان میدان-جفت شده با تمامی درجات آزادی مورد نیاز، استفاده می‌کند. جفت‌شدگی با محاسبه‌ی ماتریس‌های المان و بردارهای نیروی المان که شامل عبارات مورد نیاز می‌باشند، اعمال می‌شود. نمونه‌ای از روش مستقیم تحلیل میدان-جفت‌شده، تحلیل پیزوالکتریک با استفاده از المان‌های صفحه^{۱۲۳}، جامد^{۲۲۶} و جامد^{۲۲۷} و تحلیل سیستم‌های میکروالکترومکانیک^۴ با استفاده از المان ترنس^۵ ۱۲۶ می‌باشد [۹۰].

ب) روش انتقال بار

روش انتقال بار شامل دو یا چند تحلیل است که هر کدام در طول میدان متفاوتی انجام می‌شود. با اعمال نتایج میدان اول به عنوان بار برای میدان دوم، دو میدان با یکدیگر جفت می‌شوند. نوع‌های متفاوتی از تحلیل انتقال بار وجود دارد [۹۰].

با توجه به آنچه که گفته شد، به دلیل خاصیت پیزوالکتریک موجود در پوسته‌ی استوانه‌ای و نیاز به انجام تحلیل الکتروترمو مکانیکی باید تحلیل اجزای محدود آن را در انسیس ۱۲،۰ به روش مستقیم انجام داد [۹۰].

۳-۲- انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله

نظر به آنچه که در بخش فرضیات حاکم بر مسأله، در فصل دوم بیان شد؛ مسأله حالت متقارن محوری دارد. در این حالت نیازی به مدل‌سازی سه‌بعدی نیست و می‌توان از المان‌های دو بعدی نرم‌افزار که قابلیت تقارن محوری دارند، استفاده کرد و حتی نتایج را به صورت سه‌بعدی استخراج کرد [۹۱].

در نرم‌افزار انسیس با استفاده از المان صفحه^{۲۲۳} می‌توان پوسته‌های حاصل از دوران را تحلیل

4. PLANE223

5. SOLID226

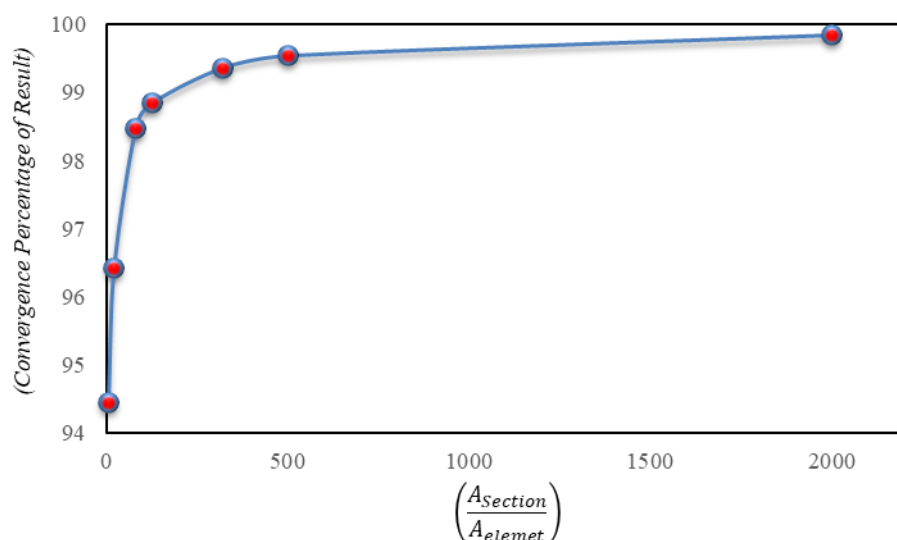
6. SOLID227

7. Micro-Electromechanical Systems (MEMS)

8. TRANS126

الکتروترموالاستیک کرد. این المان دو بعدی از هشت گره تشکیل شده که تا چهار درجه آزادی (دو درجه برای جابه‌جایی، یک درجه برای پتانسیل الکتریکی و یک درجه برای دما) را برای هر گره تأمین می‌کند. این المان دارای دقت بالا برای تحلیل مسائل متقارن محوری است.

بنابراین مدل سازی مسئله به صورت دو بعدی انجام می‌شود. برای این منظور مطابق شکل ۲-۲ مقطع استوانه جدار متغیر به صورت دو بعدی مدل سازی می‌شود. شبکه‌بندی باید به صورتی انجام گیرد که تحلیل اجزای محدود مستقل از شبکه‌بندی باشد و نتایج به دست آمده قابل اطمینان باشند. برای این منظور المان صفحه ۲۲۳ به شکل شبه‌مربعی^۱ بر روی مقطع دوزنقه‌ای شکل استوانه‌ی جدار متغیر قرار می‌گیرد.



شکل ۱-۳ نمودار همگرایی تحلیل اجزای محدود

شکل ۱-۳ شبکه‌بندی مناسب جهت تحلیل را نشان می‌دهد، زمانی که مساحت مقطع ($A_{Section}$) حدود ۱۵۰ برابر مساحت المان شبه‌مربعی شکل ($A_{Element}$) باشد؛ نتایج حاصل از تحلیل اجزای محدود به همگرایی حدود ۹۹٪ می‌رسد و نتایج تحلیل با تقریب خوبی قابل پذیرش خواهد بود.

۳-۳-۳ مدل سازی عددی

همان طور که در فصل اول بیان شد در مواد ناهمگن خواص به صورت تدریجی تغییر می‌کند. در

1. Quasi-Square

نرم‌افزار انسیس ۱۲,۰ المانی جهت تعریف و مدل‌سازی مواد ناهمگن وجود ندارد؛ بنابراین برای تحلیل، استوانه جدار متغیر به لایه‌های زیادی با ضخامت یکسان d در راستای شعاع تقسیم می‌شود؛ به طوری که تغییرات خواص در هر لایه اندک باشد (تغییرات خواص در یک لایه بیش از ۲٪ نباشد) و بتوان خواص ثابتی را به هر لایه نسبت داد.

$$Pr^n = Pr|_{r=r_m^n}; r_m^n = \left(r_i^n + \frac{d}{2} \right) \quad (۱۹-۳)$$

در رابطه‌ی (۱۹-۳)، Pr^n خاصیت در لایه‌ی n ام است که با توجه به شعاع متوسط آن r_m^n تعیین می‌شود، r_i^n نیز شعاع داخلی لایه‌ی n ام است. با استفاده از رابطه (۲۹-۲) خواص برای هر لایه محاسبه می‌شود و به آن اختصاص می‌یابد، سپس این لایه‌ها به هم متصل می‌شوند و استوانه‌ی ناهمگن جدار متغیر را به وجود می‌آورند، در حقیقت این کار تقریب بسیار خوبی از تغییر تدریجی خواص در استوانه می‌باشد [۹۱].

بنابراین، جهت مدل‌سازی مسأله به صورت دو بعدی، کافی است مطابق شکل ۲-۲ مقطع دوزنقه‌ای شکل استوانه‌ی جدار متغیر به صورت دو بعدی مدل‌سازی گردد؛ سپس با توجه به ابعاد هندسی مسأله و چندلایه کردن آن، مقطع آن به لایه‌هایی تقسیم می‌شود که تغییرات خواص در اندک است و با استفاده از رابطه‌ی (۱۹-۳) خواص به هر لایه اختصاص می‌یابد.

هم‌چنین برای شبکه‌بندی، مقطع استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن به لایه‌های یکسان تقسیم می‌شود و هر لایه با المان‌های شبه‌مربعی شکل به گونه‌ای پوشانده می‌شوند که نسبت مساحت هر لایه از استوانه به مساحت المان‌های شبه‌مربعی شکل حدود ۱۵۰ یا بیشتر باشد.

۴-۳ مطالعه‌ی موردی

به منظور مطالعه عددی یک استوانه جدار متغیر ناهمگن با مشخصات $h_o = 20mm$, $r_i = 40mm$ ، $h_o = 10mm$ و $h_a = 10mm$ که دارای طول ۸۰۰ میلی‌متر است، در نظر گرفته می‌شود. لایه داخلی

این استوانه ناهمگن از جنس آلیاژ تیتانیوم با ۶٪ آلومینیوم و ۴٪ وانادیوم^۱ بوده و خواص آن در دمای مثبت مرجع $T^* = 25^\circ\text{C}$ مطابق جدول ۱-۳ می باشد [۹۲].

جدول ۱-۳ خواص لایه‌ی داخلی استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن

<i>Metal Alloy (Ti-6Al-4V)</i>	
مدول الاستیک (Gpa)	$E = 66.2$
نسبت پواسون	$\nu = 0.3$
ضریب انبساط حرارتی ($1/^\circ\text{K}$)	$\alpha = 10.3$
ضریب هدایت حرارتی ($\text{W/m}^\circ\text{K}$)	$k = 18.1$

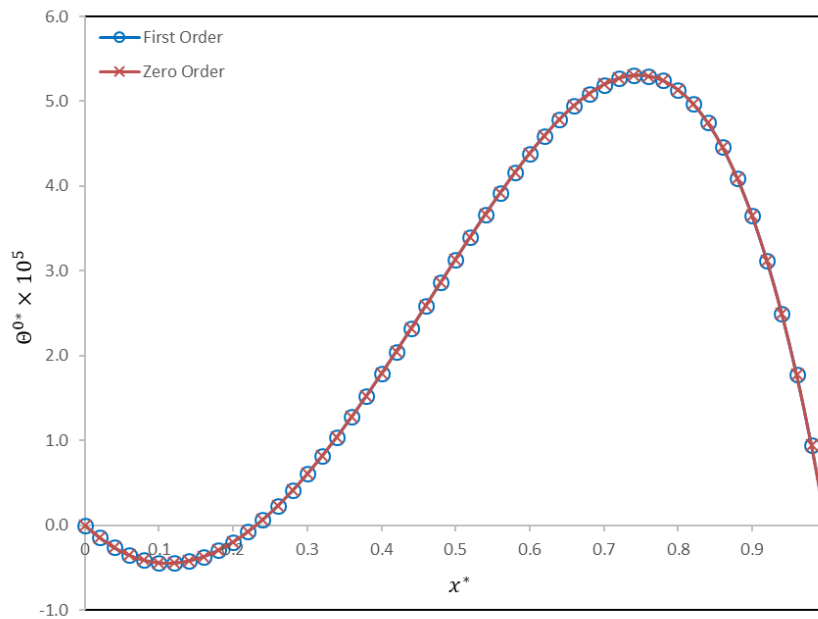
به منظور بررسی آثار بارگذاری حرارتی بر روی رفتار استوانه جدار متغیر، پروفیل‌های مختلف گرم کردن در لایه داخلی و سرد کردن در لایه خارجی مطابق جدول ۲-۳ در نظر گرفته می‌شود و دو سراستوانه نیز دارای ثابت مثبت مرجع $T = 25^\circ\text{C}$ می‌باشد. همچنین جهت بررسی ناهمگنی خواص بر روی رفتار استوانه، استوانه با پروفیل گرم کردن H_{i3} در لایه داخلی و با پروفیل سرد کردن H_{o2} در لایه خارجی در نظر گرفته می‌شود و ثابت ناهمگنی n به ازای مقادیر ۲، ۱، ۰، -۱ و -۲ مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.

جدول ۲-۳ پروفیل‌های مختلف بارگذاری حرارتی در سطوح داخلی و خارجی استوانه

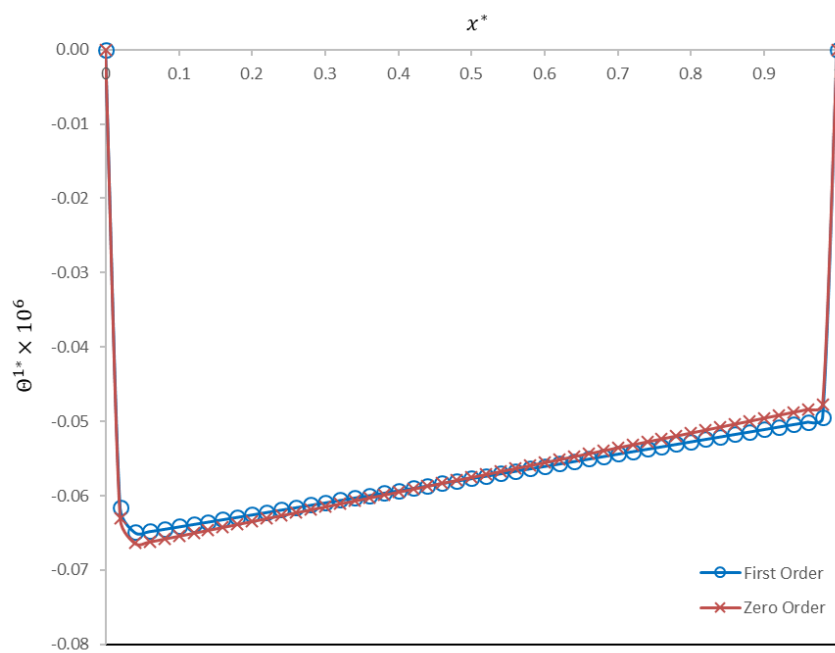
پروفیل خنک کردن لایه‌ی خارجی استوانه	پروفیل گرم کردن لایه‌ی داخلی استوانه
$H_o (W/m^2)$	$H_i (W/m^2)$
$H_{o1} = -100$	$H_{i1} = 150$
$H_{o2} = 125x - 150$	$H_{i2} = -125x + 200$
$H_{o3} = -125x - 50$	$H_{i3} = 125x + 100$

شکل ۲-۳ و شکل ۳-۳ به ترتیب توابع Θ^0 و Θ^1 به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی برای معادلات رسانش حرارتی برای استوانه‌ی ناهمگن ($n=1$) تحت بارگذاری حرارتی (

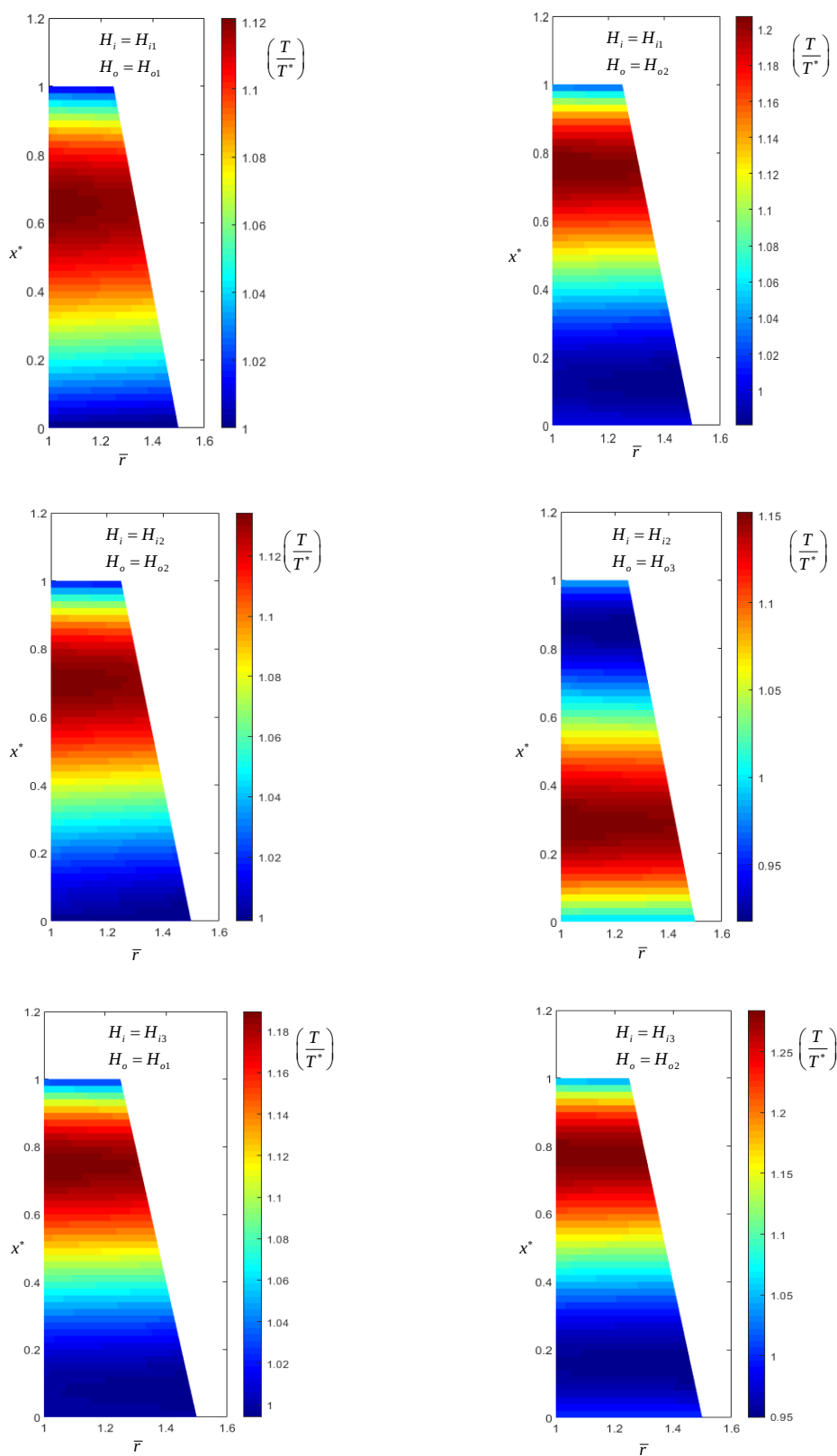
نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود؛ روش تطابق مجانب‌ها
 زیرمجموعه‌ی تکنیک اغتشاشات بسیار سریع همگرا شده و حل مرتبه ۱ به دست آمده از این روش
 اصلاح چشمگیری بر روی توابع ایجاد نمی‌کند. اصلاح ایجاد شده بر روی تابع Θ^1 نسبت به تابع
 Θ^0 در نواحی نزدیک به دو سراسطوانه قابل ملاحظه تر بوده و در بیشترین حالت، مقدار این اصلاح
 حدوداً کمتر از ۲ درصد است.



شکل ۲-۳ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر تغییرات دما (حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی)



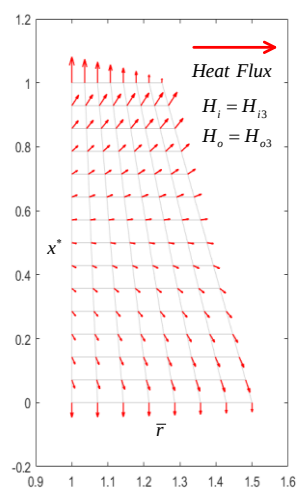
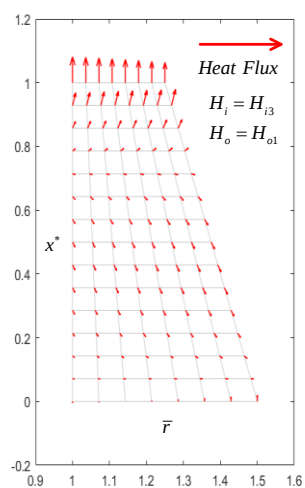
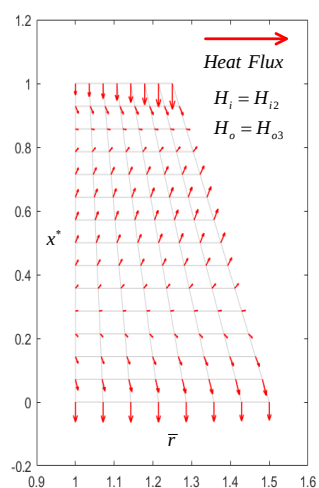
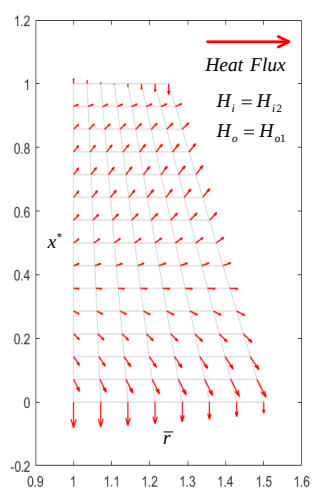
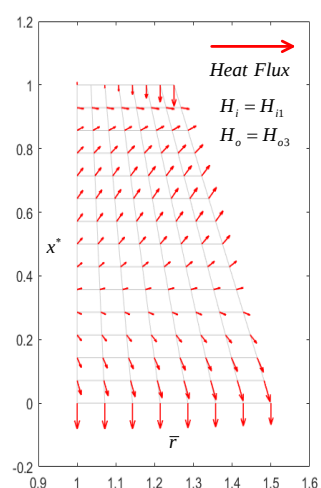
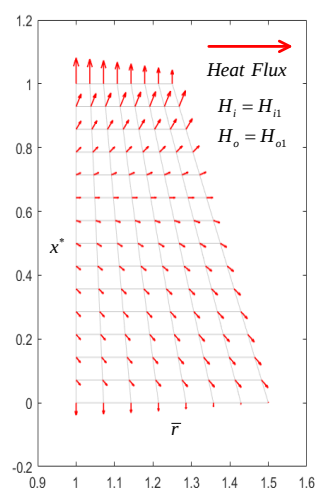
شکل ۳-۳ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک تغییرات دما (حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی)



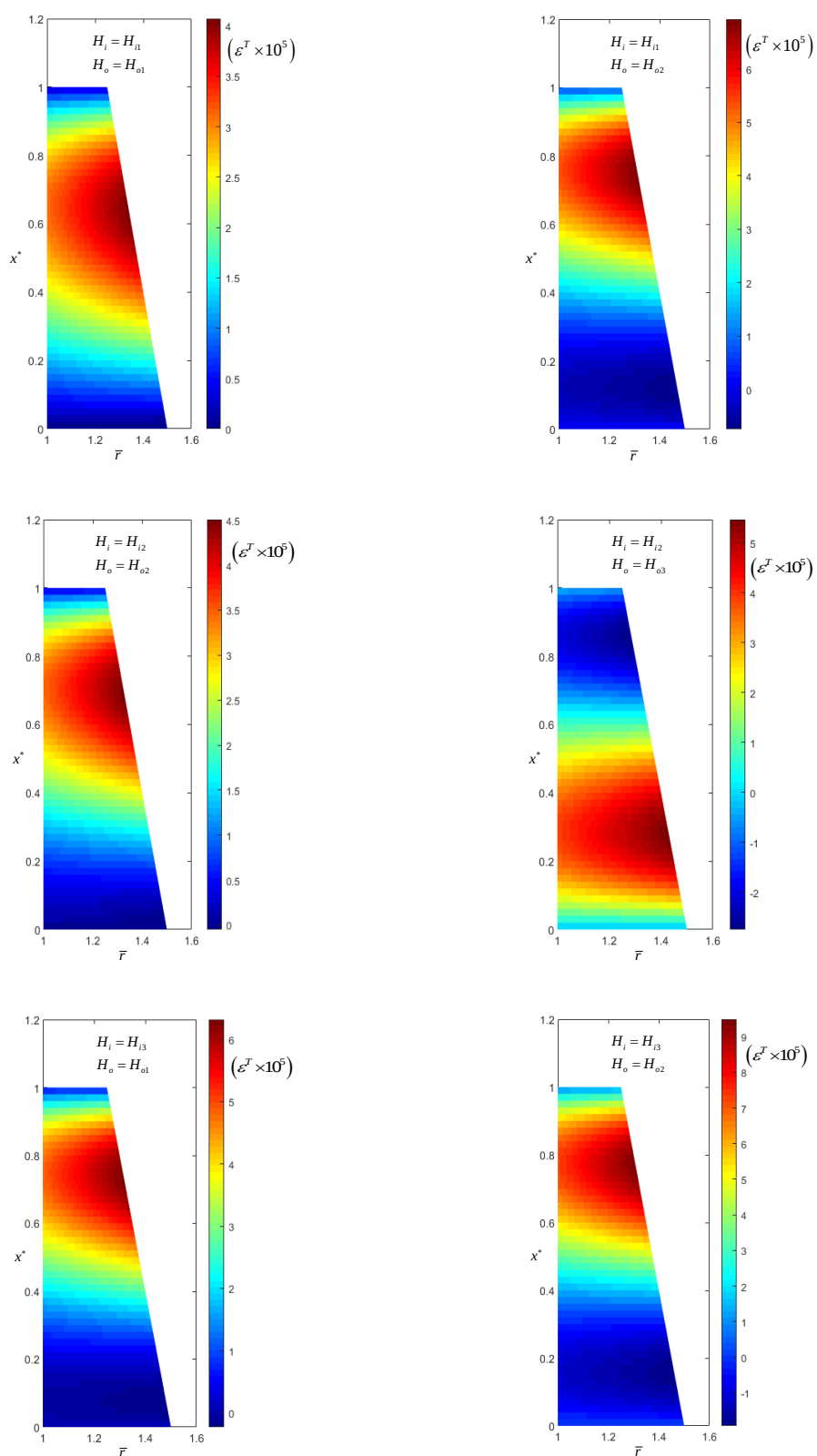
شکل ۳-۴ توزیع دما در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$) برای پروفیل‌های مختلف بارگذاری حرارتی
شکل ۳-۴ توزیع دما را در مقطع استوانه‌های ناهمگن جدار متغیر ضخیم برای پروفیل‌های

مختلف گرم کردن لایه داخلی و سرد کردن لایه خارجی نشان می‌دهد. اگرچه مقدار بارگذاری حرارتی در لایه‌های داخلی و خارجی استوانه‌های ناهمگن ثابت بوده، اما تغییر پروفیل بارگذاری حرارتی سبب تغییرات مقدار و نحوه توزیع دما در استوانه جدار متغیر شده است. بیشترین کاهش دما و افزایش دما در استوانه‌ها به ترتیب حدود ۱۰ و ۳۰ درصد نسبت به دمای دو سراسر استوانه بوده که بر اثر بارگذاری‌های حرارتی مختلف در استوانه‌ها رخ داده است. هم‌چنین بیشترین و کمترین اختلاف دما رخ داده در استوانه‌ها به ترتیب حدود ۳۵ و ۱۱ درصد نسبت به دمای دو سراسر استوانه است. در حقیقت با کنترل و استفاده از پروفیل‌های مناسب خنک کاری لایه خارجی و یا گرم کردن لایه داخلی می‌توان میزان حداکثر یا حداقل دمای ایجاد شده در استوانه‌های ناهمگن را کنترل نمود و از تغییر ساختار مواد یا ایجاد تنش‌های حرارتی بالا در جسم جلوگیری نمود.

شکل ۳-۵ توزیع شار حرارتی را در استوانه‌های ناهمگن برای بارگذاری‌های مختلف حرارتی در لایه‌های داخلی و خارجی استوانه نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود؛ مقدار و جهت شار حرارتی در استوانه‌ها را می‌توان با استفاده از بارگذاری حرارتی مناسب در لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه، محدود و کنترل نمود. به عبارتی، اگر هدف جلوگیری از خروج شار حرارتی از یکی از دو سراسر استوانه جدار متغیر باشد، می‌توان بارگذاری حرارتی را در لایه داخلی و خارجی استوانه به نحوی انجام داد تا از خروجی شار حرارتی (جریان حرارت) از آن سراسر استوانه جلوگیری به عمل آید.

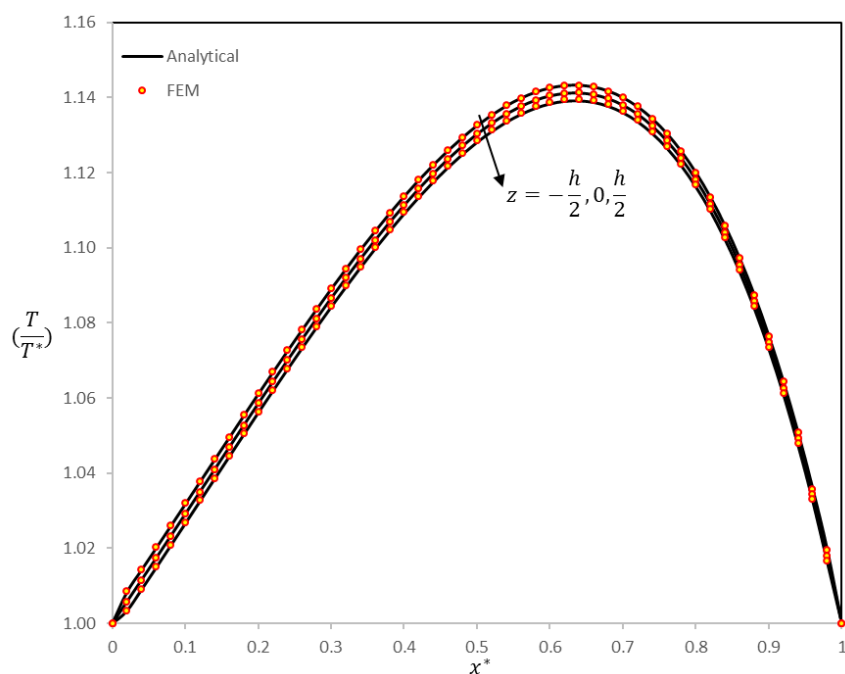


شکل ۳-۵ توزیع شار حرارتی در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$) برای پروفیل‌های مختلف بارگذاری حرارتی

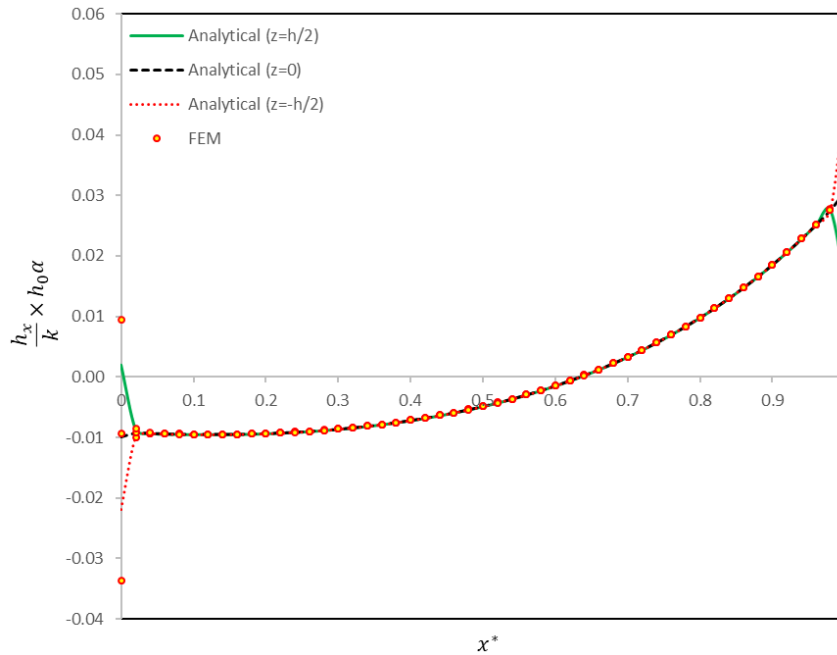


شکل ۳-۶ توزیع کرنش حرارتی در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$) برای پروفیل‌های مختلف بارگذاری حرارتی
شکل ۳-۶ توزیع کرنش حرارتی (ϵ^T) را در مقطع استوانه‌های ناهمگن جدار متغیر ضخیم برای

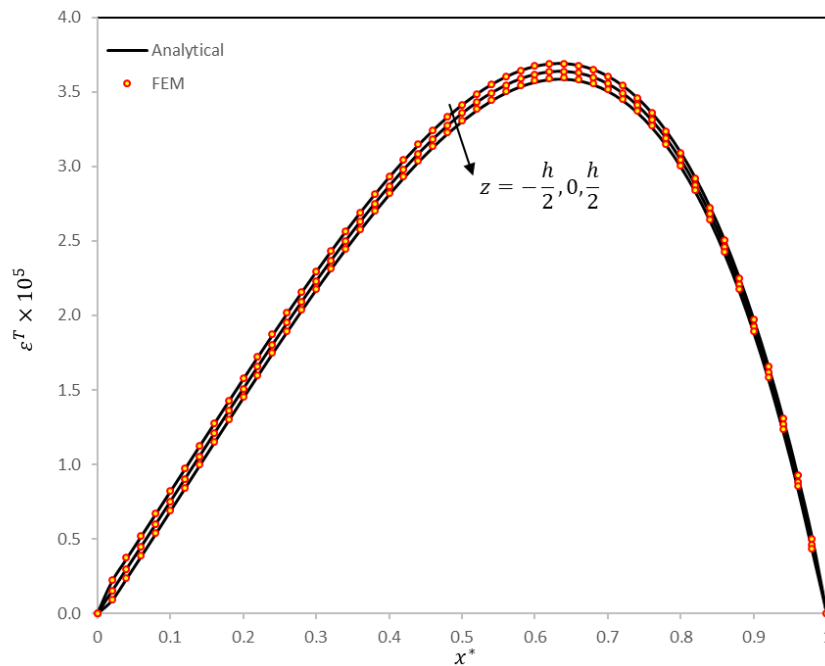
پروفیل‌های مختلف بارگذاری حرارتی در لایه‌های داخلی و خارجی نشان می‌دهد. اگرچه مقدار بارگذاری حرارتی در این لایه‌ها ثابت است، اما تغییر پروفیل بارگذاری حرارتی سبب تغییرات مقدار و نحوه توزیع کرنش حرارتی در استوانه جدار متغیر ناهمگن می‌شود. بیشترین کرنش حرارتی انبساطی و انقباضی در استوانه‌ها به ترتیب حدود ۱۰۰ و ۲۵ میکرون است که بر اثر بارگذاری‌های حرارتی مختلف در استوانه‌ها رخ داده است. همچنین بیشترین و کمترین اختلاف کرنش حرارتی رخ داده در استوانه‌ها به ترتیب حدود ۱۱۰ و ۴۰ میکرون بوده است. شایان توجه است؛ برخلاف میدان دما که بیشترین مقدار دما در لایه داخلی استوانه ناهمگن رخ داده است ولیکن بیشترین کرنش حرارتی در لایه خارجی استوانه جدار متغیر رخ می‌دهد. در حقیقت، اثر ضریب انبساط حرارتی در لایه‌های خارجی استوانه‌های ناهمگن غالب می‌باشد. با استفاده از پروفیل‌های مناسب بارگذاری حرارتی می‌توان میزان حداکثر کرنش حرارتی انبساطی و انقباضی ایجاد شده در استوانه‌های ناهمگن را محدود نمود و رفتارهای مکانیکی سازه (خمش) را کنترل نمود.



شکل ۳-۷ توزیع دما در استوانه‌ی همگن ($H_i = H_{il}$, $H_o = H_{ol}$)

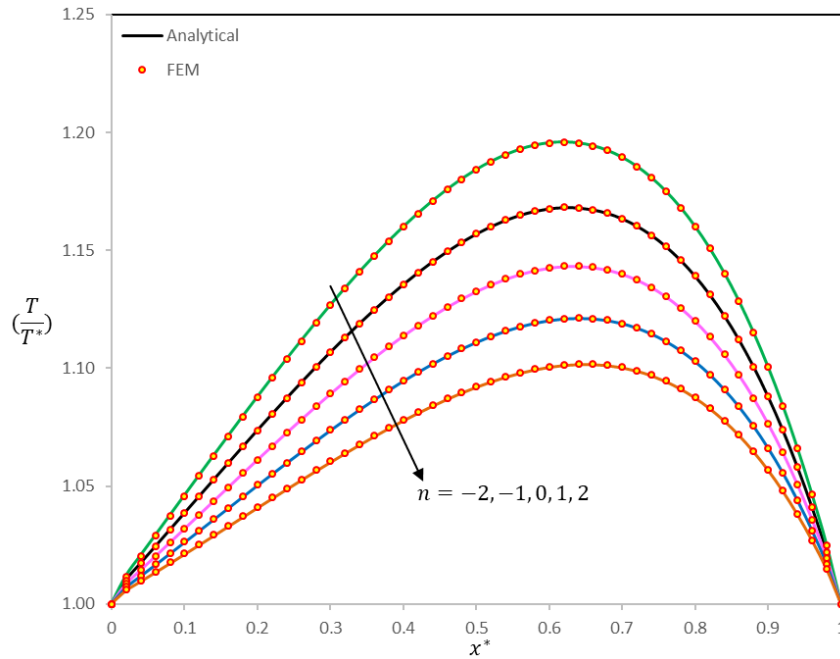


شکل ۳-۸ توزیع مؤلفه‌ی محوری شار حرارتی در استوانه‌ی همگن ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$)

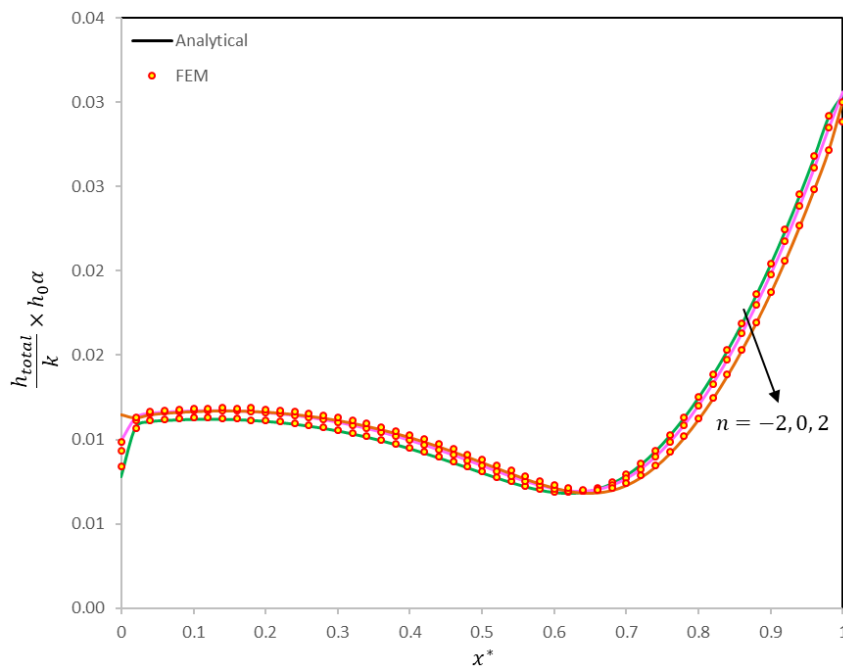


شکل ۳-۹ توزیع کرنش حرارتی در استوانه‌ی همگن ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$)

شکل ۳-۷ تا شکل ۳-۹ توزیع دما، مؤلفه‌ی محوری شار حرارتی و کرنش حرارتی را در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود؛ نتایج به‌دست آمده از حل تحلیلی و روش اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار انسیس ۱۲٫۰ رفتاری مشابه و مقداری یکسان را برای آنها پیش‌بینی می‌کنند. نتایج به‌دست آمده از دو روش برهم منطبق بوده و دو روش از توافق خوبی برخوردار می‌باشند.



شکل ۳-۱۰ توزیع دما در لایه‌ی داخلی استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$)
 شکل ۳-۱۰ اثر تغییرات ناهمگنی را بر روی توزیع دما در لایه داخلی استوانه‌های ناهمگن جدار متغیر نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود؛ با افزایش ثابت ناهمگنی مقدار ماکزیمم دما در لایه داخلی کاهش می‌یابد. هم‌چنین با افزایش ثابت ناهمگنی، مکان بیشینه دما تغییر محل می‌دهد و به بالای استوانه‌ی جدار متغیر نزدیک‌تر می‌شود.

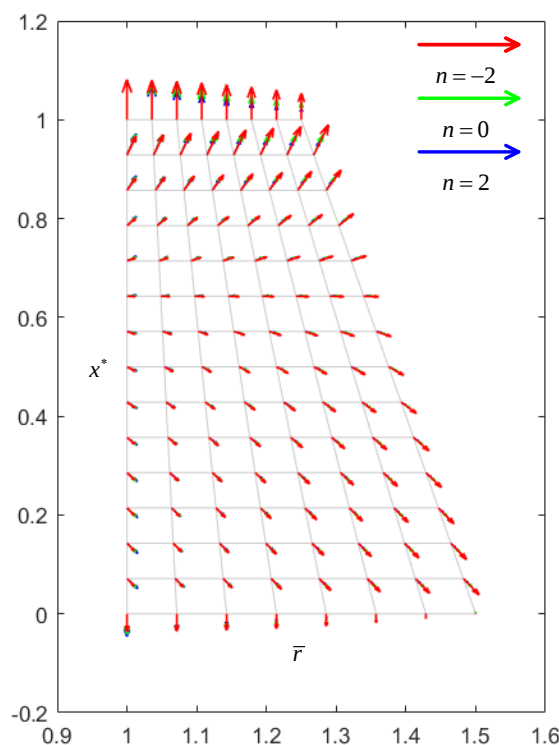


شکل ۳-۱۱ توزیع شار حرارتی در لایه‌ی میانی استوانه‌های ناهمگن ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$)
 شکل ۳-۱۱ توزیع مقدار شار حرارتی کل را که براساس رابطه‌ی (۳-۲۰) محاسبه شده است، در

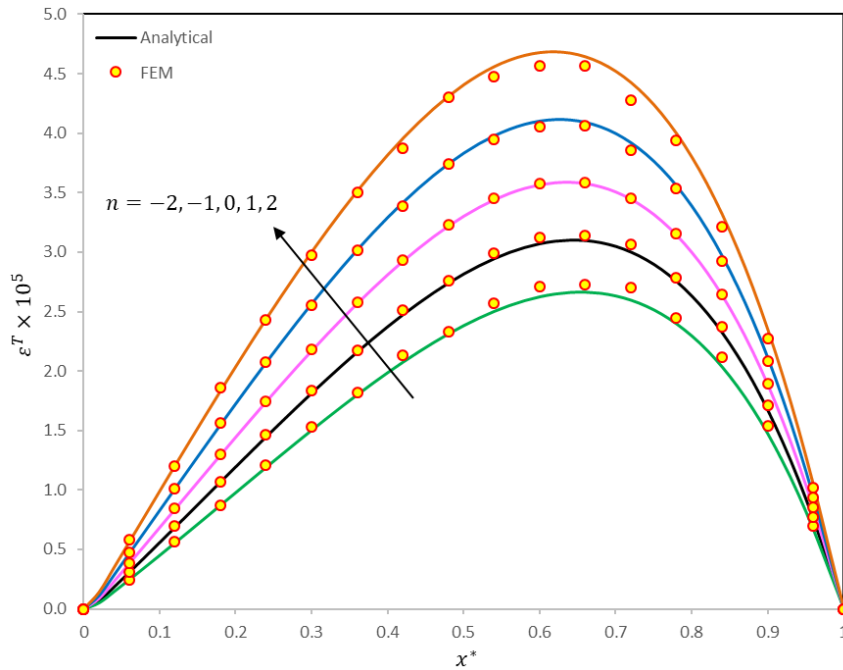
لایه‌ی میانی استوانه‌های ناهمگن نشان می‌دهد. تغییرات ثابت ناهمگنی سبب تغییرات مشهود بر روی مقدار شار حرارتی کل در لایه میانی نمی‌شود و بیشترین تغییرات ایجاد شده در اثر تغییر ثابت ناهمگنی حدود ۶ درصد، بنابراین با تقریب خوبی می‌توان از آثار ثابت ناهمگنی بر روی مقدار شار حرارتی کل در لایه میانی صرف‌نظر کرد. بیشینه مقدار شار حرارتی کل در نواحی مرزی استوانه‌ی جدار متغیر رخ می‌دهد.

$$h_{total} = \sqrt{h_z^2 + h_x^2} \quad (3-20)$$

شکل ۳-۱۲ توزیع شار حرارتی را در استوانه‌های ناهمگن جدار متغیر نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود؛ تغییرات ثابت ناهمگنی، تنها سبب ایجاد تغییر در اندازه (مقدار) شار حرارتی شده و تاثیری بر روی جهت بردارهای شار حرارتی ندارد. همچنین، افزایش ثابت ناهمگنی می‌تواند باعث افزایش، کاهش و یا عدم تغییر در مقدار شار حرارتی گردد که بستگی به نحوه بارگذاری (گرم‌کردن لایه داخلی و خنک‌کردن لایه خارجی) و پروفیل تغییرات جدار استوانه ناهمگن دارد.



شکل ۳-۱۲ توزیع شار حرارتی برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف ($H_i = H_{i1}, H_o = H_{o1}$)



شکل ۳-۱۳ توزیع کرنش حرارتی در لایه‌ی خارجی استوانه‌های ناهمگن ($H_i = H_{i1}$, $H_o = H_{o1}$)
 شکل ۳-۱۳ توزیع کرنش حرارتی را در لایه‌ی بیرونی استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن نشان
 می‌دهد. اثر ثابت ناهمگنی بر روی کرنش حرارتی چشمگیر بوده و با افزایش ثابت ناهمگنی مقدار کرنش
 حرارتی افزایش می‌یابد. هم‌چنین با افزایش ثابت ناهمگنی، مکان بیشینه کرنش حرارتی تغییر محل
 می‌دهد و به پایین استوانه جدار متغیر نزدیک‌تر می‌شود.
 جدول ۳-۳ نتایج جدار متغیر را مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود؛
 اتفاق نظر خوبی بین نتایج پیش‌بینی شده از دو روش مشاهده می‌شود. شایان ذکر است؛ درصد اختلاف
 در نتایج، با مبنا قرار دادن نتایج روش تحلیلی بیان شده است.

جدول ۳-۳ نتایج بارگذاری حرارتی ($H_i = H_{i1}$, $H_o = H_{o1}$) در وسط طول استوانه‌ی ناهمگن جدار متغیر

			$n = -2$	$n = 0$	$n = 2$
Middle layer	T (°C)	Analytical	29.53	28.26	27.26
		FEM	29.54	28.26	27.26
		Difference (%)	0.03	0.00	0.00
Outer layer	T (°C)	Analytical	29.46	28.21	27.22
		FEM	29.46	28.22	27.23
		Difference (%)	0.00	0.04	0.04
Middle layer	h_{total} (W/m ²)	Analytical	141.41	148.38	151.80
		FEM	142.14	148.60	154.74
		Difference (%)	0.52	0.15	1.93
Outer layer	h_{total} (W/m ²)	Analytical	103.67	148.36	206.97
		FEM	115.23	132.05	161.42
		Difference (%)	11.15	10.99	22.01
Middle layer	ε^T (10 ⁵)	Analytical	3.31	3.36	3.28
		FEM	3.32	3.36	3.28
		Difference (%)	0.30	0.00	0.00
Outer layer	ε^T (10 ⁵)	Analytical	2.38	3.30	4.41
		FEM	2.45	3.31	4.32
		Difference (%)	2.94	0.30	2.04

۵-۳ جمع‌بندی

در این فصل حل تحلیلی استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن که تحت بارگذاری حرارتی در سطوح داخلی و خارجی خود قرار داشتند، ارائه شد. نتایج برای استوانه جدار متغیر با دو سردارای دمای ثابت استخراج شد و آثار ناهمگنی و بارگذاری حرارتی مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفت. همچنین این نتایج با نتایج تحلیل حاصل از روش اجزای محدود نیز مورد مقایسه شد که توافق خوبی میان نتایج حاصل از دو روش مشاهده گردید. جمع‌بندی نتایج به‌دست آمده از این فصل را می‌توان به طور خلاصه بدین شرح ارائه نمود.

۱- در این فصل یک حل تحلیلی دوبعدی سری گونه برای میدان حرارتی و کرنش حرارتی ارائه شد که نسبت به سایر روش‌های حل سری گونه با سرعت بسیار بالاتری همگرا می‌شود. در حقیقت حل ارائه شده تنها با دو جمله از سری خود به همگرایی و دقت بسیار بالا و قابل قبول در پاسخ می‌رسد و نیاز به استفاده از سایر جملات سری را ندارد. لذا دارای حجم محاسبات کمتر، دقت بالاتر و نیاز به زمان کمتر جهت محاسبات نسبت به سایر روشها است. روشن است که به خوبی می‌توان از این حل به عنوان یک تابع هدف جهت بهینه سازی و دست یابی به مقادیر بهینه‌ی مواردی نظیر پروفیل تغییر ضخامت، ثابت ناهمگنی، پروفیل بارگذاری سطوح خارجی و داخلی و ... استفاده کرد.

۲- بررسی و ارزیابی نتایج حاصل از بارگذاری‌های مختلف حرارتی در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌های جدار متغیر نشان می‌دهد؛ با انتخاب یک پروفیل مناسب بارگذاری حرارتی در لایه‌ی داخلی و یا لایه‌ی خارجی می‌توان جریان حرارتی (شار حرارتی) را به نحوی محدود نمود که جریان حرارت (شار حرارتی) تنها از یک سر استوانه خارج گردد. بنابراین اگر هدف هدایت جریان حرارتی از یک سر استوانه باشد؛ می‌توان با استفاده از پروفیل مناسب خنک کاری در سطح خارجی و یا پروفیل مناسب گرم کردن در سطح داخلی، این امر را محقق ساخت. این موضوع در خصوص مقدار و محل بیشینه دما و کرنش حرارتی رخ داده در داخل استوانه جدار متغیر نیز صادق است و می‌توان این موضوع را نیز با استفاده از بارگذاری حرارتی مناسب محدود و کنترل نمود. محدود نمودن کرنش حرارتی در استوانه جدار متغیر این امکان را فراهم می‌سازد تا رفتار مکانیکی سازه کنترل گردد.

۳- بررسی نتایج نشان داد که در استوانه جدار متغیر ناهمگن الزاماً حداکثر کرنش حرارتی در محل حداکثر دما ایجاد شده در جسم رخ نمی‌دهد و می‌تواند در محل دیگری رخ دهد که بستگی به نحوه‌ی توزیع خواص نظیر ضریب انبساط حرارتی در داخل سیلندر دارد.

۴- بررسی و مقایسه نتایج حاصل از دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد؛ ضمن آنکه روش حاضر بسیار سریع همگرا می‌شود، از دقت مطلوبی نیز برخوردار بوده و نتایج به دست آمده از دو روش دارای توافق بسیار خوبی می‌باشند.

۵- نتایج نشان می‌دهد؛ ثابت ناهمگنی آثار چشمگیری بر روی میدان دما و کرنش حرارتی ایجاد شده در داخل استوانه جدار متغیر دارد. با افزایش ثابت ناهمگنی، میدان دما در استوانه کاهش یافته اما کرنش حرارتی در استوانه افزایش می‌یابد. لذا در طراحی سازه‌های ناهمگن باید به دنبال مقدار بهینه ثابت ناهمگنی بود زیرا که با کاهش ثابت ناهمگنی ضمن ایجاد میدان دمایی کمتر در سازه، کرنش حرارتی بیشتر و به تبع آن تنش حرارتی بیشتری ایجاد می‌شود که عامل مطلوبی در طراحی نیست.

۶- نتایج نشان می‌دهند؛ تغییرات ثابت ناهمگنی مقدار شار حرارتی را در داخل استوانه‌های ناهمگن دستخوش تغییرات چشمگیر نمی‌کند و بر روی جهت بردار شار حرارتی اثری ندارد. در واقع جهت بردار شار حرارتی (جریان حرارت) در داخل استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن تابعی از پروفیل بارگذاری حرارتی و پروفیل تغییر ضخامت استوانه است.

فصل ۴ تحلیل الکتروالاستیک استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن

۱-۴ پیش‌گفتار

در این فصل ابتدا نحوه‌ی حل تحلیلی الکتروالاستیک استوانه‌ای جدار متغیر به کمک تئوری اغتشاشات ارائه می‌شود، سپس تحلیل اجزای محدود مسأله بحث می‌شود و در پایان مطالعه‌ی موردی انجام گرفته و نتایج بررسی می‌شوند.

۲-۴ حل تحلیلی الکتروالاستیک

همانطور که در فصل ۳ بیان شد؛ برای تحلیل الکتروالاستیک استوانه‌های ناهمگن جدار متغیر پیزوالکتریک که تحت بارگذاری الکترومکانیکی در سطوح داخلی و خارجی خود قرار داشته و دارای شرایط مرزی در دو سر خود است، معادلات (۲-۵۶) تا (۲-۵۹) که به کمک ترم اغتشاشاتی (ε) بی‌بعد شده‌اند؛ با فرض عدم بارگذاری حرارتی ($\Theta^{0*} = \Theta^{1*} = 0$)، می‌بایست حل شوند. لذا، با در نظرگیری فرض مذکور برای دستگاه معادلات حاکم خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
 & c_{22}^0 * \frac{dU_x^{1*}}{dx^*} h^{*3} \varepsilon + 12 c_{12}^0 * U_z^{1*} h^* R^* + 12 c_{23}^0 * U_z^{0*} h^* \\
 & + 12 c_{22}^0 * V^* h^* R^* + 12 e_{12}^0 * \varphi^{1*} h^* R^* - 12 F1^* R^* = 0 \\
 & - \left(c_{22}^0 * \frac{d^2 U_x^{1*}}{dx^{*2}} h^{*3} R^* + c_{22}^0 * \frac{dU_x^{1*}}{dx^*} h^{*3} \frac{dR^*}{dx^*} + 3 c_{22}^0 * \frac{dU_x^{1*}}{dx^*} h^{*2} R^* \frac{dh^*}{dx^*} \right) \varepsilon^2 \\
 & + \left(12 K_s h^* R^* c_{55}^0 * \frac{dU_z^{0*}}{dx^*} - 3 c_{23}^0 * \frac{dh^*}{dx^*} U_z^{1*} h^{*2} - h^{*3} c_{12}^0 * \frac{dU_z^{1*}}{dx^*} \right. \\
 & - c_{23}^0 * h^{*3} \frac{dU_z^{1*}}{dx^*} - 3 h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{12}^0 U_z^{1*} - 3 h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{22}^0 * V^* + K_s h^{*3} c_{55}^0 * \frac{dU_z^{1*}}{dx^*} \\
 & + K_s h^{*3} e_{35}^0 * \frac{d\varphi^{1*}}{dx^*} - h^{*3} c_{22}^0 * \frac{dV^*}{dx^*} - h^{*3} e_{12}^0 * \frac{d\varphi^{1*}}{dx^*} - 3 h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{12}^0 * \varphi^{1*} \left. \right) \varepsilon \\
 & - 12 F2^* + 12 K_s h^* R^* e_{35}^0 * \psi^* + 12 K_s h^* R^* c_{55}^0 * U_x^{1*} = 0
 \end{aligned}
 \tag{۲-۴}$$

$$\begin{aligned}
 & -K_s \left(12 \frac{dR^*}{dx^*} h^* c_{55}^0 \frac{dU_z^0}{dx^*} + 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 \frac{dU_z^1}{dx^*} + 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 \frac{d\varphi^1}{dx^*} \right. \\
 & + 12R^* h^* c_{55}^0 \frac{d^2 U_z^0}{dx^{*2}} + 12 \frac{dh^*}{dx^*} R^* c_{55}^0 \frac{dU_z^0}{dx^*} + h^{*3} c_{55}^0 \frac{d^2 U_z^1}{dx^{*2}} \\
 & \left. + h^{*3} e_{35}^0 \frac{d^2 \varphi^1}{dx^{*2}} \right) \varepsilon^2 - K_s \left(12 \frac{dh^*}{dx^*} R^* e_{35}^0 \psi^* + 12 \frac{dR^*}{dx^*} h^* e_{35}^0 \psi^* \right. \\
 & + 12 \frac{dR^*}{dx^*} h^* c_{55}^0 U_x^1 + 12 R^* h^* c_{55}^0 \frac{dU_x^1}{dx^*} + 12 \frac{dh^*}{dx^*} R^* c_{55}^0 U_x^1 \\
 & \left. + 12 R^* h^* e_{35}^0 \frac{d\psi^*}{dx^*} \right) \varepsilon + 12 e_{12}^0 \varphi^1 h^* + 12 c_{12}^0 U_z^1 h^* + 12 c_{22}^0 U_z^1 h^* \\
 & - 12 c_{22}^0 R^* U_z^1 m^* + 12 c_{23}^0 h^* V^* - 12 F_3^* + 12 c_{22}^0 U_z^0 m^* = 0 \\
 & - K_s \left(R^* h^{*3} c_{55}^0 \frac{d^2 U_z^1}{dx^{*2}} + R^* h^{*3} e_{35}^0 \frac{d^2 \varphi^1}{dx^{*2}} + \frac{dR^*}{dx^*} h^{*3} e_{35}^0 \frac{d\varphi^1}{dx^*} \right. \\
 & + h^{*3} c_{55}^0 \frac{d^2 U_z^0}{dx^{*2}} + 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 \frac{dU_z^0}{dx^*} + \frac{dR^*}{dx^*} h^{*3} c_{55}^0 \frac{dU_z^1}{dx^*} \\
 & \left. + 3R^* h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 \frac{dU_z^1}{dx^*} + 3R^* h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 \frac{d\varphi^1}{dx^*} \right) \varepsilon^2 + \left(c_{23}^0 h^{*3} \frac{dU_x^1}{dx^*} \right. \\
 & - 3K_s h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 U_x^1 - ks h^{*3} c_{55}^0 \frac{dU_x^1}{dx^*} + c_{12}^0 h^{*3} \frac{dU_x^1}{dx^*} \\
 & \left. - 3ks h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 \psi^* - ks h^{*3} e_{35}^0 \frac{d\psi^*}{dx^*} \right) \varepsilon + 12 R^{*2} c_{22}^0 U_z^1 m^* \\
 & - h^{*3} \lambda_{22}^0 \Theta^1 + 12 c_{22}^0 h^* U_z^0 - 12 c_{22}^0 R^* h^* U_z^1 + 12 e_{11}^0 \varphi^1 R^* h^* \\
 & + 12 c_{11}^0 U_z^1 R^* h^* - 12 R^* h^* \lambda_{11}^0 \Theta^0 - h^{*3} \lambda_{11}^0 \Theta^1 + 12 c_{12}^0 V^* h^* R^* \\
 & - 12 F_4^* - 12 c_{22}^0 R^* U_z^0 m^* + 12 c_{12}^0 U_z^0 h^* = 0 \\
 & \left(12 h^* R^* e_{35}^0 \frac{dU_z^0}{dx^*} + e_{35}^0 h^{*3} \frac{dU_z^1}{dx^*} - \epsilon_{22}^0 h^{*3} \frac{d\varphi^1}{dx^*} \right) \varepsilon \\
 & - 12 h^* R^* \epsilon_{22}^0 \psi^* - 12 F_5^* R^* + 12 h^* R^* e_{35}^0 U_x^1 = 0
 \end{aligned} \tag{۳-۴}$$

$$\begin{aligned}
 & + 12 \frac{dR^*}{dx^*} h^* c_{55}^0 U_x^1 + 12 R^* h^* c_{55}^0 \frac{dU_x^1}{dx^*} + 12 \frac{dh^*}{dx^*} R^* c_{55}^0 U_x^1 \\
 & + 12 R^* h^* e_{35}^0 \frac{d\psi^*}{dx^*} \Big) \varepsilon + 12 e_{12}^0 \varphi^1 h^* + 12 c_{12}^0 U_z^1 h^* + 12 c_{22}^0 U_z^1 h^* \\
 & - 12 c_{22}^0 R^* U_z^1 m^* + 12 c_{23}^0 h^* V^* - 12 F_3^* + 12 c_{22}^0 U_z^0 m^* = 0 \\
 & - K_s \left(R^* h^{*3} c_{55}^0 \frac{d^2 U_z^1}{dx^{*2}} + R^* h^{*3} e_{35}^0 \frac{d^2 \varphi^1}{dx^{*2}} + \frac{dR^*}{dx^*} h^{*3} e_{35}^0 \frac{d\varphi^1}{dx^*} \right. \\
 & + h^{*3} c_{55}^0 \frac{d^2 U_z^0}{dx^{*2}} + 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 \frac{dU_z^0}{dx^*} + \frac{dR^*}{dx^*} h^{*3} c_{55}^0 \frac{dU_z^1}{dx^*} \\
 & \left. + 3R^* h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 \frac{dU_z^1}{dx^*} + 3R^* h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 \frac{d\varphi^1}{dx^*} \right) \varepsilon^2 + \left(c_{23}^0 h^{*3} \frac{dU_x^1}{dx^*} \right. \\
 & - 3K_s h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 U_x^1 - ks h^{*3} c_{55}^0 \frac{dU_x^1}{dx^*} + c_{12}^0 h^{*3} \frac{dU_x^1}{dx^*} \\
 & \left. - 3ks h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 \psi^* - ks h^{*3} e_{35}^0 \frac{d\psi^*}{dx^*} \right) \varepsilon + 12 R^{*2} c_{22}^0 U_z^1 m^* \\
 & - h^{*3} \lambda_{22}^0 \Theta^1 + 12 c_{22}^0 h^* U_z^0 - 12 c_{22}^0 R^* h^* U_z^1 + 12 e_{11}^0 \varphi^1 R^* h^* \\
 & + 12 c_{11}^0 U_z^1 R^* h^* - 12 R^* h^* \lambda_{11}^0 \Theta^0 - h^{*3} \lambda_{11}^0 \Theta^1 + 12 c_{12}^0 V^* h^* R^* \\
 & - 12 F_4^* - 12 c_{22}^0 R^* U_z^0 m^* + 12 c_{12}^0 U_z^0 h^* = 0 \\
 & \left(12 h^* R^* e_{35}^0 \frac{dU_z^0}{dx^*} + e_{35}^0 h^{*3} \frac{dU_z^1}{dx^*} - \epsilon_{22}^0 h^{*3} \frac{d\varphi^1}{dx^*} \right) \varepsilon \\
 & - 12 h^* R^* \epsilon_{22}^0 \psi^* - 12 F_5^* R^* + 12 h^* R^* e_{35}^0 U_x^1 = 0
 \end{aligned} \tag{۴-۴}$$

$$\begin{aligned}
 & - 3K_s h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 U_x^1 - ks h^{*3} c_{55}^0 \frac{dU_x^1}{dx^*} + c_{12}^0 h^{*3} \frac{dU_x^1}{dx^*} \\
 & - 3ks h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 \psi^* - ks h^{*3} e_{35}^0 \frac{d\psi^*}{dx^*} \Big) \varepsilon + 12 R^{*2} c_{22}^0 U_z^1 m^* \\
 & - h^{*3} \lambda_{22}^0 \Theta^1 + 12 c_{22}^0 h^* U_z^0 - 12 c_{22}^0 R^* h^* U_z^1 + 12 e_{11}^0 \varphi^1 R^* h^* \\
 & + 12 c_{11}^0 U_z^1 R^* h^* - 12 R^* h^* \lambda_{11}^0 \Theta^0 - h^{*3} \lambda_{11}^0 \Theta^1 + 12 c_{12}^0 V^* h^* R^* \\
 & - 12 F_4^* - 12 c_{22}^0 R^* U_z^0 m^* + 12 c_{12}^0 U_z^0 h^* = 0 \\
 & \left(12 h^* R^* e_{35}^0 \frac{dU_z^0}{dx^*} + e_{35}^0 h^{*3} \frac{dU_z^1}{dx^*} - \epsilon_{22}^0 h^{*3} \frac{d\varphi^1}{dx^*} \right) \varepsilon \\
 & - 12 h^* R^* \epsilon_{22}^0 \psi^* - 12 F_5^* R^* + 12 h^* R^* e_{35}^0 U_x^1 = 0
 \end{aligned} \tag{۵-۴}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{dR^*}{dx^*} h^{*3} \epsilon_{22}^0 * \frac{d\phi^1^*}{dx^*} + h^{*3} R^* \epsilon_{22}^0 * \frac{d^2 \phi^1^*}{dx^{*2}} - h^{*3} e_{35}^0 * \frac{d^2 U_z^0^*}{dx^{*2}} \right. \\
 & - \frac{dR^*}{dx^*} h^{*3} e_{35}^0 * \frac{dU_z^1^*}{dx^*} - h^{*3} R^* e_{35}^0 * \frac{d^2 U_z^1^*}{dx^{*2}} - 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} R^* e_{35}^0 * \frac{dU_z^1^*}{dx^*} \\
 & \left. + 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} R^* \epsilon_{22}^0 \frac{d\phi^1^*}{dx^*} - 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 * \frac{dU_z^0^*}{dx^*} \right) \epsilon^2 + \left(e_{12}^0 * h^{*3} \frac{dU_x^1^*}{dx^*} \right. \\
 & \left. + 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} \epsilon_{22}^0 * \psi^* - h^{*3} e_{35}^0 * \frac{dU_x^1^*}{dx^*} - 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 * U_x^1^* + h^{*3} \epsilon_{22}^0 * \frac{d\psi^*}{dx^*} \right) \epsilon \\
 & + 12e_{11}^0 * U_z^1^* h^* R^* + 12e_{12}^0 * U_z^0^* h^* + 12e_{12}^0 * V^* h^* R^* \\
 & - 12\epsilon_{11}^0 * \phi^1^* h^* R^* - 12F6^* = 0
 \end{aligned} \tag{۶-۴}$$

حل معادلات (۱-۴) تا (۶-۴) فوق شامل دو بخش است؛ حل خارجی که مربوط به نواحی دور از

مرزهاست و حل داخلی که مربوط به نواحی مرزی یا دو سراسر استوانه است.

۱-۲-۴ حل خارجی

حل خارجی به صورت یک سری یکنواخت از ترم اغتشاشاتی (ϵ) در نظر گرفته می شود.

باجایگذاری این سری یکنواخت در معادلات (۱-۴) تا (۶-۴) و در نظر گرفتن جملات غالب، این سری

(حل خارجی) بدین صورت بیان می شود و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Y_{outer} = Y_0 + \epsilon Y_1 \\ Y_0 = \begin{bmatrix} V_0(x^*) \\ U_{x0}^1(x^*) \\ U_{z0}^0(x^*) \\ U_{z0}^1(x^*) \\ \psi_0(x^*) \\ \phi_0^1(x^*) \end{bmatrix}; Y_1 = \begin{bmatrix} V_1(x^*) \\ U_{x1}^1(x^*) \\ U_{z1}^0(x^*) \\ U_{z1}^1(x^*) \\ \psi_1(x^*) \\ \phi_1^1(x^*) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{۷-۴}$$

با جای گذاری رابطه ی (۷-۴) در در معادلات (۱-۴) تا (۶-۴) و در نظرگیری ضرایب ترم های ϵ^0 و

ϵ^1 دستگاه معادلات جبری مربوط به حل خارجی مرتبه ی صفر و یک به فرم زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 &12 c_{12}^0 * U_{z0}^1 h * R^* + 12 c_{23}^0 * U_{z0}^0 h^* + 12 c_{22}^0 * V_0 h * R^* \\
 &+ 12 e_{12}^0 * \varphi_0^1 h^* R^* + 12 F1^* R^* = 0 \\
 &12 k s h^* R^* e_{35}^0 * \psi_0 + 12 k s h^* R^* c_{55}^0 * U_{x0}^1 + 12 F2^* = 0 \\
 &12 e_{12}^0 * \varphi_0^1 h^* + 12 c_{12}^0 * U_{z0}^1 h^* + 12 c_{22}^0 * U_{z0}^1 h^* - 12 c_{22}^0 * R^* U_{z0}^1 m^* \\
 &+ 12 c_{23}^0 * h^* V_0 + 12 c_{22}^0 * U_{z0}^0 m^* + 12 F3^* = 0 \\
 O(\varepsilon^0) \rightarrow &\left\{ \begin{aligned}
 &12 R^{*2} c_{22}^0 * U_{z0}^1 m^* - 12 c_{22}^0 * R^* h^* U_{z0}^1 + 12 e_{11}^0 * \varphi_0^1 R^* h^* \\
 &+ 12 c_{11}^0 * U_{z0}^1 R^* h^* + 12 c_{12}^0 * V_0 h^* R^* - 12 c_{22}^0 * R^* U_{z0}^0 m^* \\
 &+ 12 c_{12}^0 * U_{z0}^0 h^* + 12 F4^* = 0 \\
 &12 h^* R^* e_{35}^0 * U_{x0}^1 - 12 h^* R^* \epsilon_{22}^0 * \psi_0 + 12 F5^* R^* = 0 \\
 &12 e_{11}^0 * U_{z0}^1 h^* R^* + 12 e_{12}^0 * U_{z0}^0 h^* + 12 e_{12}^0 * V_0 h^* R^* \\
 &+ 12 e_{11}^0 * U_{z0}^1 h^* R^* + 12 e_{12}^0 * U_{z0}^0 h^* + 12 e_{12}^0 * V_0 h^* R^* \\
 &- 12 \epsilon_{11}^0 * \varphi_0^1 h^* R^* + 12 F6^* = 0
 \end{aligned} \right. \quad (8-4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 12c_{12}^0 * U_{z1}^1 h^* R^* + 12c_{23}^0 * U_{z1}^0 h^* + 12c_{22}^0 * V_1 h^* R^* \\
 & + 12e_{12}^0 * \varphi_1^1 h^* R^* + c_{22}^0 * \frac{dU_{x0}^1}{dx^*} h^{*3} = 0 \\
 & 12ks h^* R^* e_{35}^0 * \psi_1 + 12ks h^* R^* c_{55}^0 * U_{x1}^1 + 12ks h^* R^* c_{55}^0 * \frac{dU_{z0}^0}{dx^*} \\
 & + \left(ks h^{*3} c_{55}^0 * - h^{*3} c_{12}^0 * - c_{23}^0 * h^{*3} \right) \frac{dU_{z0}^1}{dx^*} - 3c_{23}^0 * \frac{dh^*}{dx^*} U_{z0}^1 h^{*2} \\
 & - 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{12}^0 U_{z0}^1 - 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{22}^0 * V_0 - h^{*3} c_{22}^0 * \frac{dV_0}{dx^*} \\
 & + \left(ks h^{*3} e_{35}^0 * - h^{*3} e_{12}^0 * \right) \frac{d\varphi_0^1}{dx^*} - 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{12}^0 * \varphi_0^1 = 0 \\
 & 12e_{12}^0 * \varphi_1^1 h^* + 12c_{12}^0 * U_{z1}^1 h^* + 12c_{22}^0 * U_{z1}^1 h^* - 12c_{22}^0 * R^* U_{z1}^1 m^* \\
 & + 12c_{23}^0 * h^* V_1 + 12c_{22}^0 * U_{z1}^0 m^* - ks \left(12 \frac{dh^*}{dx^*} R^* e_{35}^0 * \psi_0 \right. \\
 & + 12 * \frac{dR^*}{dx^*} h^* c_{55}^0 * U_{x0}^1 + 12 R^* h^* c_{55}^0 * \frac{dU_{x0}^1}{dx^*} + 12 \frac{dR^*}{dx^*} h^* e_{35}^0 * \psi_0 \\
 & \left. + 12 \frac{dh^*}{dx^*} R^* c_{55}^0 * U_{x0}^1 + 12 R^* h^* e_{35}^0 * \frac{d\psi_0}{dx^*} \right) = 0 \\
 O(\varepsilon^1) \rightarrow & \left(12 R^{*2} c_{22}^0 * m^* - 12 c_{22}^0 * R^* h^* \right) U_{z1}^1 + 12 e_{11}^0 * \varphi_1^1 R^* h^* \\
 & + \left(\left(12 \frac{c_{12}^0}{R^*} * - 12 c_{22}^0 * \frac{m^*}{h^*} \right) U_{z1}^0 + \left(12 c_{11}^0 * U_{z1}^1 + 12 c_{12}^0 * V_1 \right) \right) h^* R^* \\
 & + \left(c_{23}^0 * h^{*3} - ks h^{*3} c_{55}^0 * \right) \frac{dU_{x0}^1}{dx^*} - 3ks h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} c_{55}^0 * U_{x0}^1 \\
 & + c_{12}^0 * h^{*3} \frac{dU_{x0}^1}{dx^*} - 3ks h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 * \psi_0 - ks h^{*3} e_{35}^0 * \frac{d\psi_0}{dx^*} = 0 \\
 & 12 h^* R^* e_{35}^0 * U_{x1}^1 - 12 h^* R^* \in_{22}^0 * \psi_1 + 12 h^* R^* e_{35}^0 * \frac{dU_{z0}^0}{dx^*} \\
 & + e_{35}^0 * h^{*3} \frac{dU_{z0}^1}{dx^*} - \in_{22}^0 * h^{*3} \frac{d\varphi_0^1}{dx^*} = 0 \\
 & 12 e_{11}^0 * U_{z1}^1 h^* R^* + 12 e_{12}^0 * U_{z1}^0 h^* + 12 e_{12}^0 * V_1 h^* R^* \\
 & + 12 e_{11}^0 * U_{z1}^1 h^* R^* + 12 e_{12}^0 * U_{z1}^0 h^* + 12 e_{12}^0 * V_1 h^* R^* \\
 & - 12 \in_{11}^0 * \varphi_1^1 h^* R^* + e_{12}^0 * h^{*3} \frac{dU_{x0}^1}{dx^*} + 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} \in_{22}^0 * \psi_0 \\
 & - h^{*3} e_{35}^0 * \frac{dU_{x0}^1}{dx^*} - 3h^{*2} \frac{dh^*}{dx^*} e_{35}^0 * U_{x0}^1 + h^{*3} \in_{22}^0 * \frac{d\psi_0}{dx^*} = 0
 \end{aligned} \tag{۹-۴}$$

دستگاه معادلات (۸-۴) و (۹-۴) به ترتیب دستگاه معادلات جبری مربوط به حل خارجی مرتبه‌ی

صفر و یک است که به راحتی قابل حل بوده و می‌توان حل خارجی مرتبه‌ی صفر (Y_0) و حل خارجی

مرتبه‌ی یک (Y_1) را تعیین نمود.

۲-۲-۴ حل داخلی در مرز پایین استوانه ($x^*=0$)

مطابق روش تطابق مجانب‌ها زیرمجموعه‌ی تکنیک اغتشاشات برای انجام حل در نواحی مرزی

می‌بایست از متغیر سریع استفاده گردد. برای انجام حل داخلی در نواحی مرزی نزدیک به پایین

سیلندر، $\eta = \frac{x^*}{\varepsilon}$ به عنوان متغیر سریع انتخاب می‌شود و بسط تیلور بارگذاری، ضخامت، شعاع لایه

میانی در حوالی مرز پایین ($x^*=0$) نوشته می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} R^*(x^*) = R_0^* + \varepsilon \eta dR_0 + \dots; R_0^* = R^*(0), dR_0 = \left. \frac{dR^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} \\ h^*(x^*) = h_0^* + \varepsilon \eta dh_0 + \dots; h_0^* = h^*(0), dh_0 = \left. \frac{dh^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} \\ m^*(x^*) = m_0^* + \varepsilon \eta dm_0 + \dots; m_0^* = m^*(0), dm_0 = \left. \frac{dm^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} \\ F1^*(x^*) = F1_0^* + \varepsilon \eta dF1_0 + \dots; F1_0^* = F1^*(0), dF1_0 = \left. \frac{dF1^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} \\ F2^*(x^*) = F2_0^*(0) + \varepsilon \eta dF2_0 + \dots; F2_0^* = F2^*(0), dF2_0 = \left. \frac{dF2^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} \\ F3^*(x^*) = F3_0^*(0) + \varepsilon \eta dF3_0 + \dots; F3_0^* = F3^*(0), dF3_0 = \left. \frac{dF3^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} \\ F4^*(x^*) = F4_0^*(0) + \varepsilon \eta dF4_0 + \dots; F4_0^* = F4^*(0), dF4_0 = \left. \frac{dF4^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} \\ F5^*(x^*) = F5_0^*(0) + \varepsilon \eta dF5_0 + \dots; F5_0^* = F5^*(0), dF5_0 = \left. \frac{dF5^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} \\ F6^*(x^*) = F6_0^*(0) + \varepsilon \eta dF6_0 + \dots; F6_0^* = F6^*(0), dF6_0 = \left. \frac{dF6^*}{dx^*} \right|_{x^*=0} \end{array} \right. \quad (۱۰-۴)$$

حل داخلی به این صورت در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} Y_{inner} = Y_{0i} + \varepsilon Y_{1i} \\ Y_{0i} = \begin{bmatrix} V_{0i}(\eta) \\ U_{x0i}^1(\eta) \\ U_{z0i}^0(\eta) \\ U_{z0i}^1(\eta) \\ \psi_{0i}(\eta) \\ \phi_{0i}^1(\eta) \end{bmatrix}; \quad Y_{1i} = \begin{bmatrix} V_{1i}(\eta) \\ U_{x1i}^1(\eta) \\ U_{z1i}^0(\eta) \\ U_{z1i}^1(\eta) \\ \psi_{1i}(\eta) \\ \phi_{1i}^1(\eta) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (11-4)$$

با جایگذاری معادلات (۱۱-۴) و (۱۰-۴) در معادلات (۱-۴) تا (۶-۴) در نظرگیری ضرایب ترم‌های

ε^0 و ε^1 دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به حل داخلی مرتبه‌ی صفر و یک به فرم زیر برای مرز پایین به دست می‌آید.

$$O(\varepsilon^0) \rightarrow \begin{cases} L_{2i}[Y_{0i}] = \{F0i\}; \\ L_{2i}[\bullet] = [D2i] \frac{d^2\{\bullet\}}{d\eta^2} + [D1i] \frac{d\{\bullet\}}{d\eta} + [D0i]\{\bullet\} \end{cases} \quad (12-4)$$

$$O(\varepsilon^1) \rightarrow L_{2i}[Y_{1i}] = \{F1i\} \quad (13-4)$$

که در این دستگاه‌های معادلات $[D2i]_{6 \times 6}, [D1i]_{6 \times 6}, [D0i]_{6 \times 6}$ ماتریس‌های ضرایب،

$\{F0i\}_{6 \times 1}, \{F1i\}_{6 \times 1}$ بردارها (ترم ناهمگنی دستگاه معادلات دیفرانسیل) می‌باشند. مولفه‌های غیر صفر

این ماتریس‌ها و بردارها بدین شرح می‌باشند.

$$\left\{ \begin{aligned}
 &D2i_{22} = -c_{22}^0 * h_0 *^3 R_0 *; D2i_{33} = -12 ks c_{55}^0 * h_0 * R_0 *; D2i_{34} = -ks c_{55}^0 * h_0 *^3; \\
 &D2i_{36} = -ks e_{35}^0 * h_0 *^3; D2i_{43} = -ks c_{55}^0 * h_0 *^3; D2i_{44} = -ks c_{55}^0 * h_0 *^3 R_0 *; \\
 &D2i_{46} = -ks e_{35}^0 * h_0 *^3 R_0 *; D2i_{63} = -e_{35}^0 * h_0 *^3; D2i_{64} = -e_{35}^0 * h_0 *^3 R_0 *; \\
 &D2i_{66} = \epsilon_{22}^0 * h_0 *^3 R_0 * \\
 &D1i_{12} = c_{22}^0 * h_0 *^3; D1i_{21} = -c_{22}^0 * h_0 *^3; D1i_{23} = 12 ks c_{55}^0 * h_0 * R_0 *; \\
 &D1i_{24} = ks c_{55}^0 * h_0 *^3 - c_{12}^0 * h_0 *^3 - c_{23}^0 * h_0 *^3; D1i_{32} = -12 ks c_{55}^0 * h_0 * R_0 *; \\
 &D1i_{35} = -12 ks e_{35}^0 * h_0 * R_0 *; D1i_{42} = -ks c_{55}^0 * h_0 *^3 + c_{23}^0 * h_0 *^3 + c_{12}^0 * h_0 *^3; \\
 &D1i_{44} = -ks c_{55}^0 * h_0 *^3 R_0 *; D1i_{45} = -ks e_{35}^0 * h_0 *^3; D1i_{53} = 12 e_{35}^0 * h_0 * R_0 *; \\
 &D1i_{54} = e_{35}^0 * h_0 *^3; D1i_{56} = -\epsilon_{22}^0 * h_0 *^3; D1i_{62} = -e_{35}^0 * h_0 *^3 + e_{12}^0 * h_0 *^3; \\
 &D1i_{65} = \epsilon_{22}^0 * h_0 *^3; \\
 &D0i_{11} = 12 c_{22}^0 * h_0 * R_0 *; D0i_{13} = 12 c_{23}^0 * h_0 *; D0i_{14} = 12 c_{12}^0 * h_0 * R_0 *; \\
 &D0i_{16} = 12 e_{12}^0 * h_0 * R_0 *; D0i_{24} = 12 ks c_{55}^0 * h_0 * R_0 *; D0i_{25} = 12 ks e_{35}^0 * h_0 * R_0 * \\
 &D0i_{31} = 12 c_{23}^0 * h_0 *; D0i_{33} = 12 c_{22}^0 * m_0 *; D0i_{36} = 12 e_{12}^0 * h_0 * \\
 &D0i_{34} = 12 c_{12}^0 * h_0 * + 12 c_{22}^0 * h_0 * - 12 c_{22}^0 * R_0 * m_0 *; D0i_{41} = 12 c_{12}^0 * h_0 * R_0 *; \\
 &D0i_{43} = 12 c_{22}^0 * h_0 * + 12 c_{12}^0 * h_0 * - 12 c_{22}^0 * R_0 * m_0 *; \\
 &D0i_{44} = 12 c_{11}^0 * h_0 * R_0 * + 12 c_{22}^0 * R_0 *^2 m_0 * - 12 c_{22}^0 * R_0 * h_0 *; \\
 &D0i_{46} = 12 e_{11}^0 * h_0 * R_0 *; D0i_{52} = 12 e_{35}^0 * h_0 * R_0 *; D0i_{55} = -12 \epsilon_{22}^0 * h_0 * R_0 * \\
 &D0i_{61} = 12 e_{12}^0 * h_0 * R_0 *; D0i_{63} = 12 e_{12}^0 * h_0 *; D0i_{64} = 12 e_{11}^0 * h_0 * R_0 *; \\
 &D0i_{66} = -12 \epsilon_{11}^0 * h_0 * R_0 * \\
 &F0i_1 = -12 F1_0 * R_0 *; F0i_2 = -12 F2_0 *; F0i_3 = -12 F3_0 * \\
 &F0i_4 = -12 F4_0 *; F0i_5 = -12 F5_0 * R_0 *; F0i_6 = -12 F6_0 * \\
 &F1i_1 = -3\eta \left(4 c_{12}^0 * dR_0 h_0 * U_{z0i}^1 + 4 e_{12}^0 * R_0 * dh_0 \varphi_{0i}^1 + 4 c_{23}^0 * dh_0 U_{z0i}^0 \right. \\
 &\quad \left. + 4 c_{12}^0 * R_0 * dh_0 U_{z0i}^1 + c_{22}^0 * h_0 *^2 dh_0 \frac{dU_{x0i}^1}{d\eta} + 4 e_{12}^0 * dR_0 h_0 * \varphi_{0i}^1 \right. \\
 &\quad \left. + 4 c_{22}^0 * dR_0 h_0 * V_{0i} + 4 c_{22}^0 * R_0 * dh_0 V_{0i} + 4 F1_0 * dR_0 \right)
 \end{aligned} \right. \quad (۱۴-۴)$$

$$\begin{aligned}
 F1i_2 = & -12ks c_{55}^0 * \eta dR_0 h_0 * U_{x0i}^1 - 3ks c_{55}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{dU_{z0i}^1}{d\eta} \\
 & -12ks c_{55}^0 * R_0 * \eta dh_0 U_{x0i}^1 - 12ks c_{55}^0 * R_0 * \eta dh_0 \frac{dU_{z0i}^0}{d\eta} + 3dh_0 c_{23}^0 * h_0 *^2 U_{z0i}^1 \\
 & -3ks e_{35}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{d\varphi_{0i}^1}{d\eta} - 12ks e_{35}^0 * R_0 * \eta dh_0 \psi_{0i} - 12ks e_{35}^0 * \eta dR_0 h_0 * \psi_{0i} \\
 & -12ks c_{55}^0 * \eta dR_0 h_0 * \frac{dU_{z0i}^0}{d\eta} + 3c_{22}^0 * h_0 *^2 \eta R_0 * dh_0 \frac{d^2 U_{x0i}^1}{d\eta^2} \\
 & + 3dh_0 e_{12}^0 * h_0 *^2 \varphi_{0i}^1 + 3dh_0 c_{12}^0 * h_0 *^2 U_{z0i}^1 + 3dh_0 c_{22}^0 * h_0 *^2 V_{0i} \\
 & + dR_0 c_{22}^0 * h_0 *^3 \frac{dU_{x0i}^1}{d\eta} + c_{22}^0 * h_0 *^3 \eta dR_0 \frac{d^2 U_{x0i}^1}{d\eta^2} + 3c_{12}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{dU_{z0i}^1}{d\eta} \\
 & + 3c_{23}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{dU_{z0i}^1}{d\eta} + 3e_{12}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{d\varphi_{0i}^1}{d\eta} + 3c_{22}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{dV_{0i}}{d\eta} \\
 & + 3dh_0 c_{22}^0 * h_0 *^2 R_0 * \frac{dU_{x0i}^1}{d\eta}
 \end{aligned} \tag{۱۶-۴}$$

$$\begin{aligned}
 F1i_3 = & -12e_{12}^0 * \eta dh_0 \varphi_{0i}^1 - 12c_{22}^0 * \eta dh_0 U_{z0i}^1 + 3ks c_{55}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{d^2 U_{z0i}^1}{d\eta^2} \\
 & -12c_{22}^0 * \eta dm_0 U_{z0i}^0 + 3ks e_{35}^0 * h_0 *^2 dh_0 \frac{d\varphi_{0i}^1}{d\eta} + 12ks c_{55}^0 * dR_0 h_0 * \frac{dU_{z0i}^0}{d\eta} \\
 & + 12ks c_{55}^0 * dR_0 h_0 * U_{x0i}^1 + 3ks c_{55}^0 h_0 *^2 dh_0 \frac{dU_{z0i}^1}{d\eta} + 12ks c_{55}^0 dh_0 R_0 * \frac{dU_{z0i}^0}{d\eta} \\
 & + 12c_{22}^0 * R_0 * \eta dm_0 U_{z0i}^1 + 12c_{22}^0 * \eta dR_0 m_0 * U_{z0i}^1 + 12ks c_{55}^0 * R_0 * \eta dh_0 \frac{dU_{x0i}^1}{d\eta} \\
 & + 12dR_0 ks e_{35}^0 * h_0 * \psi_{0i} + 12ks dh_0 e_{35}^0 * R_0 * \psi_{0i} + 12ks c_{55}^0 * R_0 * \eta dh_0 \frac{d^2 U_{z0i}^0}{d\eta^2} \\
 & + 12ks c_{55}^0 * \eta dR_0 h_0 * \frac{dU_{x0i}^1}{d\eta} + 12ks c_{55}^0 * \eta dR_0 h_0 * \frac{d^2 U_{z0i}^0}{d\eta^2} + 12ks dh_0 c_{55}^0 * R_0 * U_{x0i}^1 \\
 & + 12ks e_{35}^0 * \eta dR_0 h_0 * \frac{d\psi_{0i}}{d\eta} + 3ks e_{35}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{d^2 \varphi_{0i}^1}{d\eta^2} - 12c_{12}^0 * \eta dh_0 U_{z0i}^1 \\
 & + 12ks e_{35}^0 * R_0 * \eta dh_0 \frac{d\psi_{0i}}{d\eta}
 \end{aligned} \tag{۱۷-۴}$$

$$\begin{aligned}
 F1i_4 = & -12c_{12}^0 * \eta dh_0 U_{z0i}^0 - 12c_{22}^0 * \eta dh_0 U_{z0i}^0 + 3ks c_{55}^0 * h_0^2 * \eta dh_0 R_0 * \frac{d^2 U_{z0i}^1}{d\eta^2} \\
 & + 12c_{22}^0 * \eta dR_0 h_0 * U_{z0i}^1 - 12c_{22}^0 * R_0^2 * \eta dm_0 U_{z0i}^1 + 3ks e_{35}^0 * h_0^2 * \eta dh_0 \frac{d\psi_{0i}}{d\eta} \\
 & + 12c_{22}^0 * \eta dR_0 m_0 * U_{z0i}^0 + 12c_{22}^0 * R_0 * \eta dh_0 U_{z0i}^1 + 3ks e_{35}^0 * h_0^2 * \eta dh_0 R_0 * \frac{d^2 \varphi_{0i}^1}{d\eta^2} \\
 & - 12c_{12}^0 * R_0 * \eta dh_0 V_{0i} - 12c_{12}^0 * dR_0 \eta h_0 * V_{0i} + 3ks dh_0 c_{55}^0 * h_0^2 * R_0 * \frac{dU_{z0i}^1}{d\eta} \\
 & - 12c_{11}^0 * \eta dR_0 h_0 * U_{z0i}^1 - 12e_{11}^0 * R_0 * \eta dh_0 \varphi_{0i}^1 + ks c_{55}^0 * h_0^3 * \eta dR_0 \frac{d^2 U_{z0i}^1}{d\eta^2} \\
 & + 3ks dh_0 e_{35}^0 * h_0^2 * \psi_{0i} + 3ks dh_0 c_{55}^0 * h_0^2 * U_{x0i}^1 + dR_0 ks e_{35}^0 * h_0^3 * \frac{d\varphi_{0i}^1}{d\eta} \\
 & - 3c_{12}^0 * h_0^2 * \eta dh_0 \frac{dU_{x0i}^1}{d\eta} - 3c_{23}^0 * h_0^2 * \eta dh_0 \frac{dU_{x0i}^1}{d\eta} + dR_0 ks c_{55}^0 * h_0^3 * \frac{dU_{z0i}^1}{d\eta} \\
 & + 3ks dh_0 c_{55}^0 * h_0^2 * \frac{d^2 U_{z0i}^0}{d\eta^2} + 3ks c_{55}^0 * h_0^2 * \eta dh_0 \frac{d^2 U_{z0i}^0}{d\eta^2} - 12e_{11}^0 * \eta dR_0 h_0 * \varphi_{0i}^1 \\
 & + ks e_{35}^0 * h_0^3 * \eta dR_0 \frac{d^2 \varphi_{0i}^1}{d\eta^2} - 24c_{22}^0 * R_0 * \eta dR_0 m_0 * U_{z0i}^1 - 12c_{11}^0 * R_0 * \eta dh_0 U_{z0i}^1 \\
 & + 3ks dh_0 e_{35}^0 * h_0^2 * R_0 * \frac{d\varphi_{0i}^1}{d\eta} + 3ks c_{55}^0 * h_0^2 * \eta dh_0 \frac{dU_{x0i}^1}{d\eta} + 12c_{22}^0 * R_0 * \eta dm_0 U_{z0i}^0 \\
 F1i_5 = & -3\eta \left(-\epsilon_{22}^0 * h_0^2 * dh_0 \frac{d\varphi_{0i}^1}{d\eta} + 4e_{35}^0 * dR_0 h_0 * U_{x0i}^1 + 4e_{35}^0 * R_0 * dh_0 U_{x0i}^1 \right. \\
 & - 4\epsilon_{22}^0 * dR_0 h_0 * \psi_{0i} + 4dR_0 F5_0 * - 4\epsilon_{22}^0 * R_0 * dh_0 \psi_{0i} + 4e_{35}^0 * dR_0 h_0 * \frac{dU_{z0i}^0}{d\eta} \\
 & \left. + e_{35}^0 * h_0^2 * dh_0 \frac{dU_{z0i}^1}{d\eta} + 4e_{35}^0 * R_0 * dh_0 \frac{dU_{z0i}^0}{d\eta} \right)
 \end{aligned}
 \tag{۱۸-۴}$$

$$\begin{aligned}
 F1i_6 = & -3 \epsilon_{22}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 R_0 * \frac{d^2 \varphi_{0i}^1}{d\eta^2} + 3 e_{35}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 R_0 * \frac{d^2 U_{z0i}^1}{d\eta^2} \\
 & + 3 e_{35}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{d^2 U_{z0i}^0}{d\eta^2} + e_{35}^0 * h_0 *^3 \eta dR_0 \frac{d^2 U_{z0i}^1}{d\eta^2} - 12 e_{12}^0 * \eta dR_0 h_0 * V_{0i} \\
 & - 12 e_{11}^0 * \eta dR_0 h_0 * U_{z0i}^1 + 3 e_{35}^0 * h_0 *^2 dh_0 R_0 * \frac{dU_{z0i}^1}{d\eta} - \epsilon_{22}^0 * h_0 *^3 \eta dR_0 \frac{d^2 \varphi_{0i}^1}{d\eta^2} \\
 & + 12 \epsilon_{11}^0 * \eta dR_0 h_0 * \varphi_{0i}^1 - 12 e_{12}^0 * R_0 * \eta dh_0 V_{0i} - 12 e_{11}^0 * R_0 * \eta dh_0 U_{z0i}^1 \\
 & - 3 e_{12}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{dU_{x0i}^1}{d\eta} - 3 \epsilon_{22}^0 * h_0 *^2 dh_0 R_0 * \frac{d\varphi_{0i}^1}{d\eta} - 3 \epsilon_{22}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{d\psi_{0i}}{d\eta} \quad (۲۰-۴) \\
 & + 12 \epsilon_{11}^0 * R_0 * \eta dh_0 \varphi_{0i}^1 + 3 e_{35}^0 * h_0 *^2 \eta dh_0 \frac{dU_{x0i}^1}{d\eta} + 3 e_{35}^0 * h_0 *^2 dh_0 \frac{dU_{z0i}^0}{d\eta} \\
 & - dR_0 \epsilon_{22}^0 * h_0 *^3 \frac{d\varphi_{0i}^1}{d\eta} - 3 \epsilon_{22}^0 * h_0 *^2 dh_0 \psi_{0i} + 3 dh_0 e_{35}^0 * h_0 *^2 U_{x0i}^1 \\
 & + dR_0 e_{35}^0 * h_0 *^3 \frac{dU_{z0i}^1}{d\eta} - 12 e_{12}^0 * \eta dh_0 U_{z0i}^0
 \end{aligned}$$

حل عمومی دستگاه معادلات (۱۲-۴) و (۱۳-۴) به صورت $\{Y\} = \{\xi_i\} e^{\lambda_i \eta}$ در نظر گرفته می شود که λ_i مقادیر ویژه و $\{\xi_i\}$ برادر ویژه متناظر با آن می باشد [۸۹]. برای به دست آوردن مقادیر ویژه کافی است، حل عمومی را در فرم همگن دستگاه معادلات (۱۲-۴) و (۱۳-۴) جای گذاری کنیم. با عنایت به اینکه فرم همگن دستگاه معادلات (۱۲-۴) و (۱۳-۴) یکی می باشد، لذا حل عمومی هر دو دستگاه (۱۲-۴) و (۱۳-۴) یکسان بوده و خواهیم داشت.

$$[S]_{6 \times 6} \{\xi_i\} = \{0\}; \quad [S] = \lambda_i^2 [D2i] + \lambda_i [D1i] + [D0i] \quad (۲۱-۴)$$

به منظور یافتن مقادیر λ_i می بایست؛ دستگاه معادلات (۲۱-۴) دارای جواب غیر بدیهی ($\{\xi_i\} \neq 0$) باشد. بنابراین با قراردادن دترمینان ضرایب برابر صفر ($\det[S] = \{0\}$)، معادله مشخصه دستگاه به دست آمده که با حل آن، مقادیر ویژه یا همان مقادیر به دست می آید. این معادله مشخصه، یک معادله درجه ۸ جبری بوده که حل آن سبب می شود هشت مقدار برای مقادیر ویژه تعیین گردد و با توجه به هر مقدار ویژه، بردار ویژه متناظر با آن محاسبه می شود. باید توجه داشت؛ با توجه به اینکه باید مقدار حل داخلی در نواحی دور از مرزها باید مقداری محدود داشته باشد لذا ریشه هایی از معادله مشخصه (مقادیر ویژه)، انتخاب می شوند قسمت حقیقی آنها منفی بوده و مقدار آنها در بی نهایت

محدود می‌شود. بنابراین چهار مقدار ویژه (دارای مقدار حقیقی منفی) و بردار ویژه متناظر با آن، انتخاب می‌شود و برای حل عمومی خواهیم داشت.

$$\{Y\}_g = C_1 \{\xi_1\} e^{\lambda_1 \eta} + C_2 \{\xi_2\} e^{\lambda_2 \eta} + C_3 \{\xi_3\} e^{\lambda_3 \eta} + C_4 \{\xi_4\} e^{\lambda_4 \eta} \quad (22-4)$$

حل خصوصی دستگاه معادلات (۱۲-۴) و (۱۳-۴) با توجه به بخش ناهمگن آنها به ترتیب $\{F0i\}$ و $\{F1i\}$ تعیین می‌شود. با توجه به اینکه بخش ناهمگن معادلات (۱۲-۴) مقداری ثابت می‌باشد؛ لذا حل خصوصی برای دستگاه معادلات (۱۲-۴) به صورت $\{Y\}_{p0} = \{K_0\}$ در نظر گرفته می‌شود که با جایگذاری حل در نظر گرفته شده در دستگاه معادلات (۱۲-۴)، بردار $\{K_0\}$ تعیین می‌شود. حل کلی دستگاه معادلات (۱۲-۴)، به صورت $\{Y\} = \{Y\}_g + \{Y\}_{p0}$ به دست می‌آید که ثابت‌های C_1 تا C_4 موجود در حل با اعمال شرایط مرزی مربوط به ترم آخر بردار $\{Y\}$ در $x^* = 0$ به دست می‌آید.

قسمت ناهمگن دستگاه معادلات (۱۳-۴) دارای دو بخش می‌باشد که یک بخش شامل ترم‌های چندجمله‌ای و بخش دیگر شامل ترم‌های نمایی است. بنابراین، با توجه به بخش‌های ترم ناهمگن دستگاه معادلات (۱۳-۴)، حل خصوصی نیز به صورت دو بخش در نظر گرفته می‌شود. بخش مربوط به چندجمله‌ای حل خصوصی به صورت $\{Y\}_{p11} = \{K_1\} \eta + \{K_0\}$ در نظر گرفته می‌شود. $\{K_1\}$ و $\{K_0\}$ بردارهای ثابت بوده که با جایگذاری حل خصوصی در دستگاه معادلات (۱۳-۴)، با توجه به بخش چندجمله‌ای ترم ناهمگنی تعیین می‌شوند. با توجه به اینکه بخش نمایی ناهمگنی دستگاه معادلات (۱۳-۴) شامل حل عمومی نیز می‌باشد؛ لذا، بخش نمایی حل خصوصی به صورت

$$\{Y\}_{p12} = \sum_{i=1}^4 \left(\{V_2\}_i \eta^2 + \{V_1\}_i \eta + \{V_0\}_i \right) e^{\lambda_i \eta}$$

که $\{V_0\}_i$ ، $\{V_1\}_i$ و $\{V_2\}_i$ بردارهای ثابت بوده و با جایگذاری در دستگاه معادلات (۱۳-۴)، با توجه به بخش نمایی ترم ناهمگنی

تعیین می‌شوند. حل کلی دستگاه معادلات (۱۳-۴)، به صورت $\{Y\} = \{Y\}_g + \{Y\}_{p11} + \{Y\}_{p12}$ به دست می‌آید که ثابت موجود در آن با اعمال شرایط مرزی مربوط به ترم‌های دوم، سوم، چهارم و آخر بردار $\{Y\}$ در $x^* = 0$ به دست می‌آید.

۳-۲-۴ حل داخلی در مرز بالا استوانه ($x^*=1$)

مطابق آنچه در بخش قبل توضیح داده شد، در مرز بالا نیز از متغیر سریع استفاده می‌شود. برای

انجام حل داخلی در نواحی مرزی نزدیک به بالای سیلندر، $\zeta = \frac{x^*-1}{\varepsilon}$ به عنوان متغیر سریع استفاده

می‌شود و بسط تیلور بارگذاری، ضخامت، شعاع لایه میانی در حوالی مرز بالا ($x^*=1$) نوشته می‌شود.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} R^*(x^*) = R_1^* + \varepsilon \zeta \, dR_1 + \dots; R_1^* = R^*(1), dR_0 = \left. \frac{dR^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} \\ h^*(x^*) = h_1^* + \varepsilon \zeta \, dh_1 + \dots; h_1^* = h^*(1), dh_0 = \left. \frac{dh^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} \\ m^*(x^*) = m_1^* + \varepsilon \zeta \, dm_1 + \dots; m_1^* = m^*(1), dm_1 = \left. \frac{dm^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} \\ F1^*(x^*) = F1_1^* + \varepsilon \zeta \, dF1_1 + \dots; F1_1^* = F1^*(1), dF1_1 = \left. \frac{dF1^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} \\ F2^*(x^*) = F2_1^*(1) + \varepsilon \zeta \, dF2_1 + \dots; F2_1^* = F2^*(1), dF2_1 = \left. \frac{dF2^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} \\ F3^*(x^*) = F3_1^*(1) + \varepsilon \zeta \, dF3_1 + \dots; F3_1^* = F3^*(1), dF3_1 = \left. \frac{dF3^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} \\ F4^*(x^*) = F4_1^*(1) + \varepsilon \zeta \, dF4_1 + \dots; F4_1^* = F4^*(1), dF4_1 = \left. \frac{dF4^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} \\ F5^*(x^*) = F5_1^*(1) + \varepsilon \zeta \, dF5_1 + \dots; F5_1^* = F5^*(1), dF5_1 = \left. \frac{dF5^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} \\ F6^*(x^*) = F6_1^*(1) + \varepsilon \zeta \, dF6_1 + \dots; F6_1^* = F6^*(1), dF6_1 = \left. \frac{dF6^*}{dx^*} \right|_{x^*=1} \end{array} \right. \quad (23-4)$$

حل داخلی در مرز بالا به این صورت در نظر گرفته می‌شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{Inner} = Y_{0I} + \varepsilon Y_{1I} \\ Y_{0I} = \begin{bmatrix} V_{0I}(\zeta) \\ U_{x0I}^1(\zeta) \\ U_{z0I}^0(\zeta) \\ U_{z0I}^1(\zeta) \\ \psi_{0I}(\zeta) \\ \phi_{0I}^1(\zeta) \end{bmatrix}; Y_{1I} = \begin{bmatrix} V_{1I}(\zeta) \\ U_{x1I}^1(\zeta) \\ U_{z1I}^0(\zeta) \\ U_{z1I}^1(\zeta) \\ \psi_{1I}(\zeta) \\ \phi_{1I}^1(\zeta) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (24-4)$$

با جایگذاری معادلات (۲۳-۴) و (۲۴-۴) در معادلات (۱-۴) تا (۶-۴) و در نظرگیری ضرایب

ترم‌های ε^0 و ε^1 دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به حل داخلی مرتبه‌ی صفر و یک به فرم زیر برای مرز بالا به دست می‌آید.

$$O(\varepsilon^0) \rightarrow \begin{cases} L_{2I}[Y_{0I}] = \{F0I\}; \\ L_{2I}[\bullet] = [D2I] \frac{d^2\{\bullet\}}{d\zeta^2} + [D1I] \frac{d\{\bullet\}}{d\zeta} + [D0I]\{\bullet\} \\ [D2I] = [D2i], [D1I] = [D1i], [D0I] = [D0i] \\ \{F0I\} = \begin{Bmatrix} F0I_1 \\ F0I_2 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (25-4)$$

$$O(\varepsilon^1) \rightarrow \begin{cases} L_{2I}[Y_{1I}] = \{F1I\}; \\ \{F1I\} = \begin{Bmatrix} F1I_1 \\ F1I_2 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (26-4)$$

که در این دستگاه‌های معادلات $[D2I]_{6 \times 6}, [D1I]_{6 \times 6}, [D0I]_{6 \times 6}$ ماتریس‌های ضرایب، $\{F0I\}_{6 \times 1}, \{F1I\}_{6 \times 1}$ بردارها (ترم ناهمگنی دستگاه معادلات دیفرانسیل) می‌باشند.

ماتریس‌های ضرایب و بردارهای ترم ناهمگنی معادلات (۲۵-۴) و (۲۶-۴) مشابه ماتریس‌ها و بردارهای معادلات (۱۲-۴) و (۱۳-۴) است. با این تفاوت که در ضرایب غیر صفر ماتریس‌ها و بردارهای معادلات (۲۵-۴) و (۲۶-۴) ترم‌های مربوط به بسط تیلور حول مرز بالا ($x^* = 1$) با بیان برحسب متغیر سریع در مرز بالا (ζ)، جایگزین ترم‌های مربوط به بسط تیلور حول مرز پایین ($x^* = 1$) با بیان برحسب متغیر سریع در مرز پایین (η) در ضرایب غیر صفر ماتریس‌ها و بردارهای معادلات (۱۲-۴) و (۱۳-۴) شده است.

حل دستگاه معادلات (۲۵-۴) و (۲۶-۴) به ترتیب مشابه حل دستگاه معادلات (۱۲-۴) و (۱۳-۴) است. شایان توجه است؛ در فرآیند حل دستگاه معادلات (۲۵-۴) و (۲۶-۴) با عنایت به اینکه پاسخ در نواحی دور از مرز بالا (بی‌نهایت منفی)، می‌بایست مقداری محدود داشته باشد؛ لذا مقادیر ویژه دارای بخش حقیقی مثبت انتخاب می‌گردند.

۴-۲-۴ حل ترکیبی

مطابق روش تطابق مجانب‌ها زیرمجموعه‌ی تکنیک اغتشاشات، حل ترکیبی $Y_{composite}$ ، مجموع

حل‌های داخلی و خارجی منهای نواحی هم پوشانی می‌باشد. بنابراین، برای حل ترکیبی خواهیم داشت.

$$Y_{composite} = Y_{outer} + Y_{inner} + Y_{Inner} - (Y_{outer})^{inner} - (Y_{outer})^{Inner} \quad (۲۷-۴)$$

$(Y_{outer})^{inner}$ و $(Y_{outer})^{Inner}$ بخش‌های مشترک (یکسان) حل داخلی و خارجی در نواحی مرزی (نزدیک دو سراسطوانه) می‌باشند که با استفاده از اصل منطبق‌سازی ون دیاک به‌دست می‌آیند [۸۸].

با انتگرال‌گیری از مؤلفه‌ی اول و پنجم حل ترکیبی، توابع ϕ^0 و U_x^0 به‌دست می‌آید (

$$U_x^0 = \frac{1}{\varepsilon} \int V^* dx^* + K5, \phi^0 = \frac{1}{\varepsilon} \int \psi^* dx^* + K6$$

سراسطوانه، ثابت‌های $K1, K2, K5$ و $K6$ تعیین می‌گردند.

عملیات ریاضی بیان شده، جهت انجام حل تحلیلی، توسط برنامه‌ی نوشته شده در نرم‌افزار میپل

۱۳ انجام می‌شود که در ادامه نتایج حاصل از مطالعه‌ی عددی توسط این نرم‌افزار نشان داده خواهد شد.

۳-۴ تحلیل اجزای محدود

تحلیل اجزای محدود الکتروالاستیک استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک مشابه تحلیل

حرارتی استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن است. در این بخش نیز با استفاده از المان صفحه ۲۲۳ نرم‌افزار

انسیس و به کمک لایه-لایه سازی هندسه اقدام به تحلیل اجزای محدود آن همانند فصل قبل صورت

می‌گیرد.

۴-۴ مطالعه‌ی موردی

به منظور مطالعه عددی و بررسی هندسه ۳ استوانه در نظر گرفته می‌شود. استوانه (۱) جدار متغیر

با مشخصات $h_b = 20 \text{ mm}$ و $h_a = 10 \text{ mm}$ و استوانه‌های (۲) و (۳) با جدار ثابت به ترتیب با ضخامت

۱۰ میلی‌متر و ۲۰ میلی‌متر می‌باشد. سایر مشخصات هندسی این سه استوانه یکسان بوده و عبارتند از

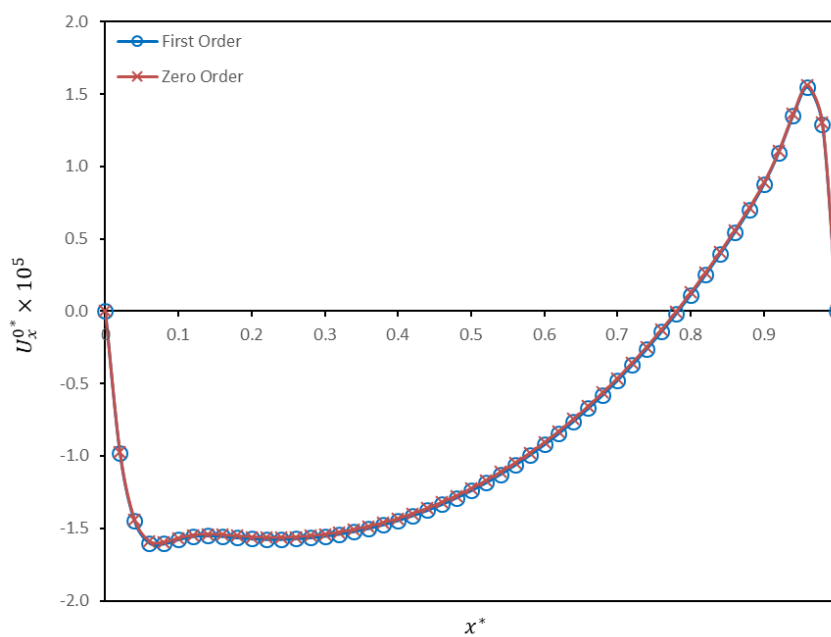
$h_0 = 10 \text{ mm}$ ، $r_i = 40 \text{ mm}$ و طول ۸۰۰ میلی‌متر است. این استوانه‌ها ناهمگن بوده و لایه داخلی هر

سه آنها از جنس تیتانات زیرکونات سرب-۱۴ می‌باشد که خواص آن مطابق است [۸۰، ۹۳ و ۹۴].

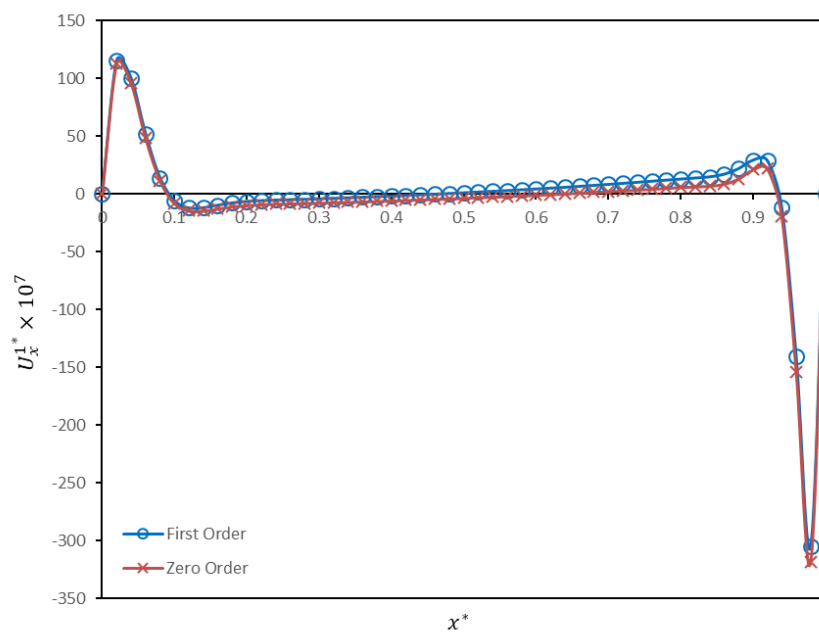
جدول ۱-۴ خواص لایه‌ی داخلی استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک

ثابت‌های الاستیک (GPa)				
c_{55}	c_{23}	c_{22}	c_{12}	c_{11}
25.6	78	139	74	115
ثابت‌های پیزوالکتریک-تنش (C/m^2)				
e_{35}		e_{12}		e_{11}
12.7		-5.2		15.1
ثابت‌های دی‌الکتریک ($10^{-8}C/Vm$)				
	ϵ_{22}		ϵ_{11}	
	0.646		0.562	
ضریب انبساط حرارتی ($10^{-6}1/^{\circ}K$)				
	α_{22}		α_{11}	
	1.97		2.62	
ضریب هدایت حرارتی ($W/(m^{\circ}K)$)				
	k_{22}		k_{11}	
	2.1		5.1	

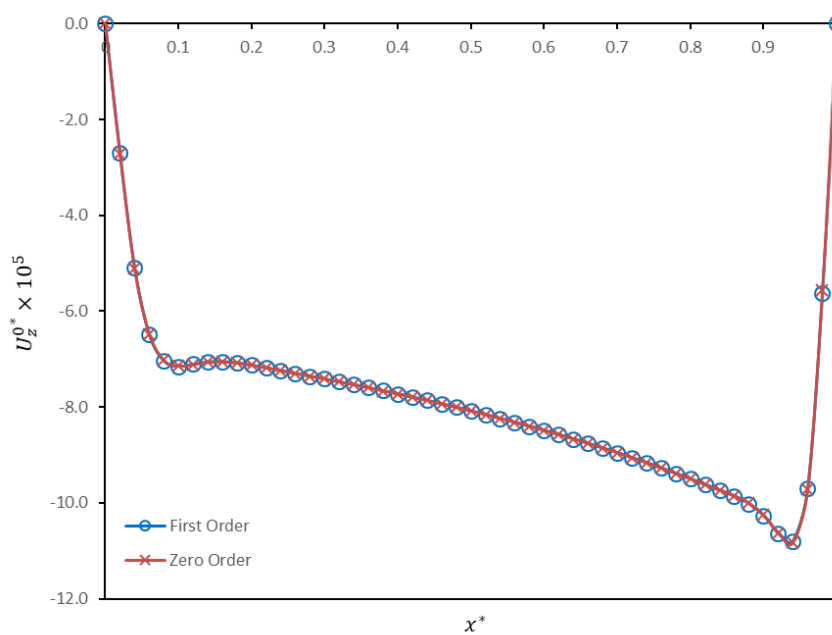
لایه‌ی داخلی این استوانه‌ها، تحت چگالی بار الکتریکی سطحی $Q_i = 15 \times 10^{-7} (C / m^2)$ و لایه‌ی خارجی آن تحت فشار $P_o = 600 (kPa)$ بوده و شرایط مرزی دو سر این استوانه‌های پیزوالکتریک گیردار با پتانسیل الکتریکی صفر است. همچنین جهت بررسی ناهمگنی خواص بر روی رفتار استوانه‌ها، ثابت ناهمگنی n به ازای مقادیر ۱، ۰، ۱- و ۲- مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.



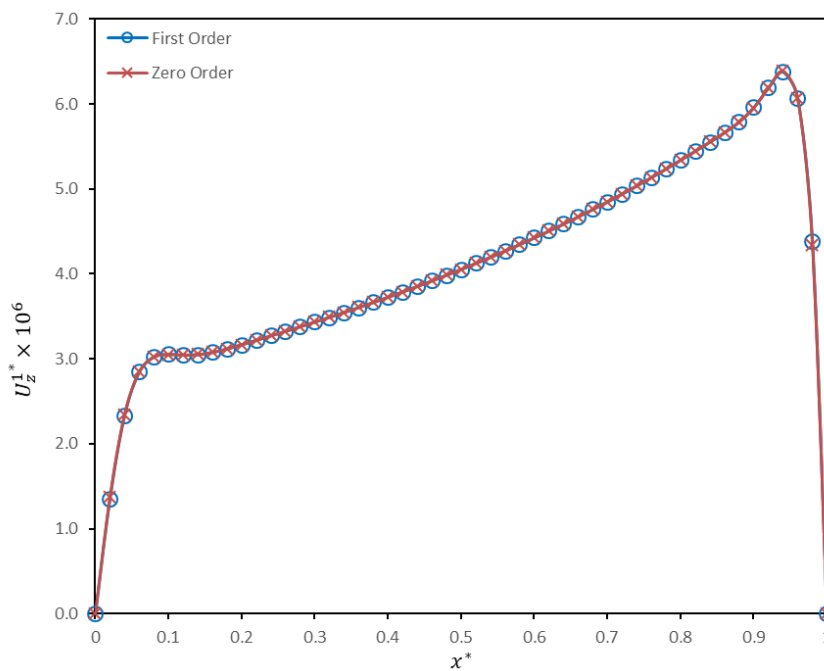
شکل ۴-۱ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی محوری به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی



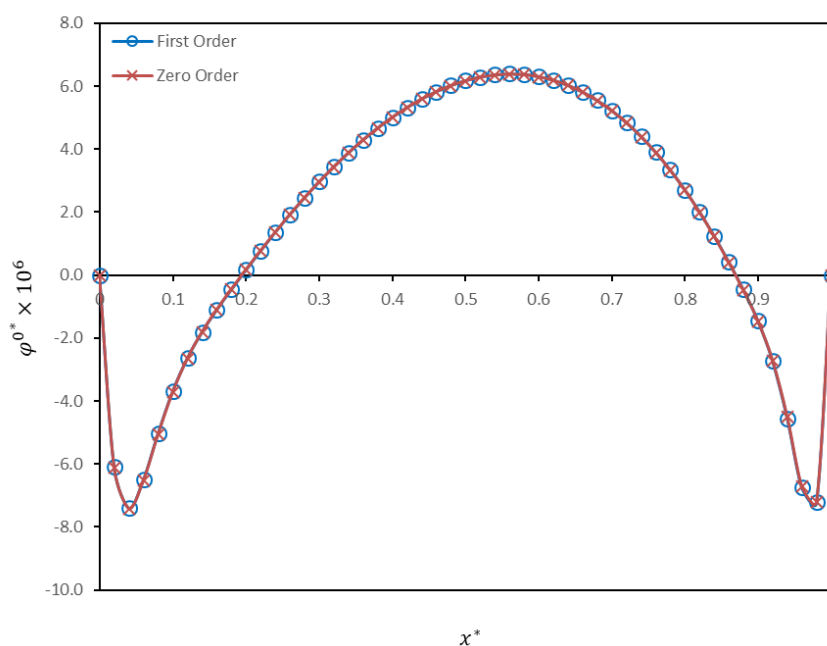
شکل ۴-۲ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی محوری به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی



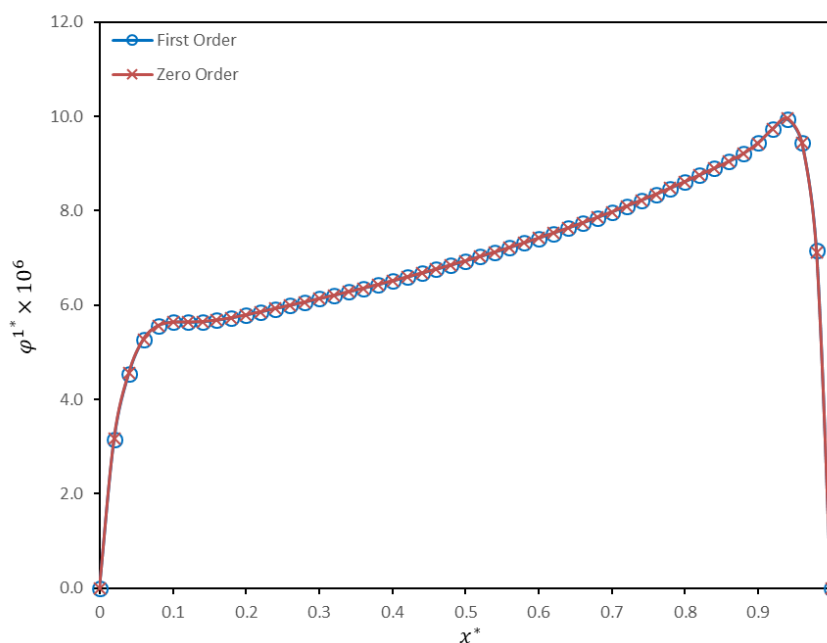
شکل ۳-۴ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی شعاعی به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی



شکل ۴-۴ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی

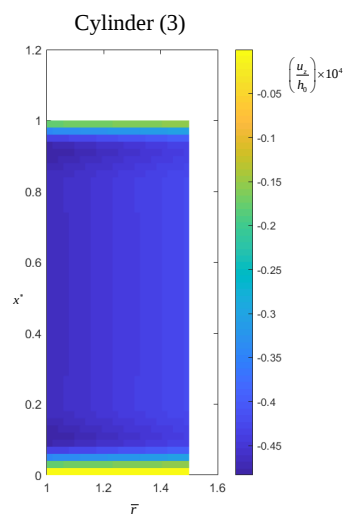
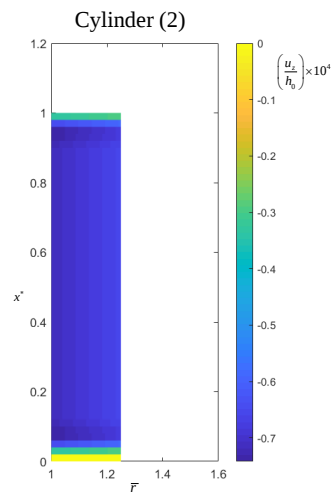
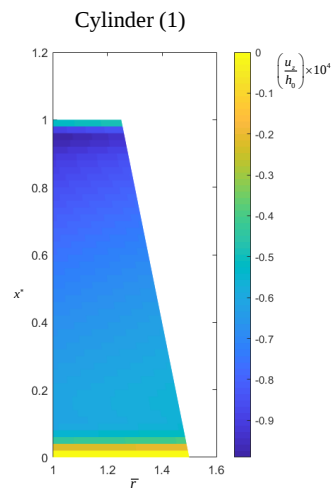


شکل ۴-۵ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر پتانسیل الکتریکی به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی

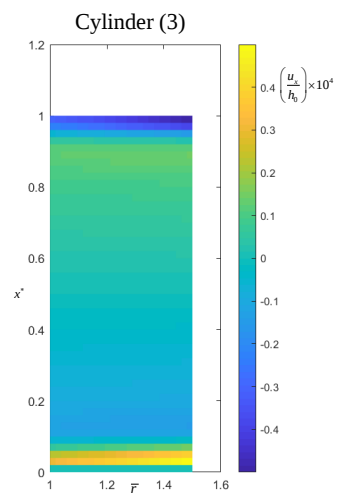
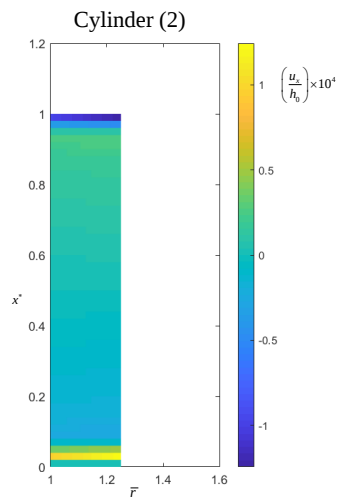
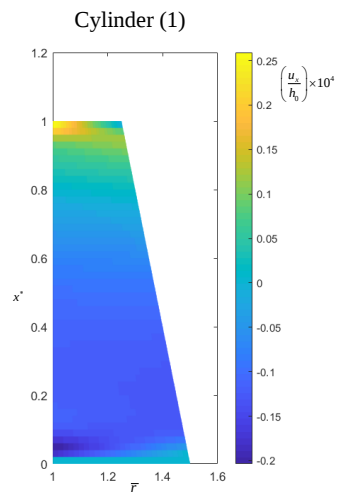


شکل ۴-۶ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک پتانسیل الکتریکی به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی
 شکل ۴-۱ تا شکل ۴-۶، توابع ϕ^0* , U_z^1* , U_z^0* , U_x^1* , U_x^0* و ϕ^1* را به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی برای معادله‌ی (۴-۲۷) نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود؛ روش تطابق مجانب‌ها زیرمجموعه‌ی تکنیک اغتشاشات بسیار سریع همگرا شده و حل مرتبه ۱ به دست آمده از این روش اصلاح چشمگیری بر روی توابع ایجاد نمی‌کند. اصلاح ایجاد شده بر روی تابع U_x^1* نسبت به سایر توابع در نواحی دور از دو سر استوانه قابل ملاحظه تر می‌باشد.

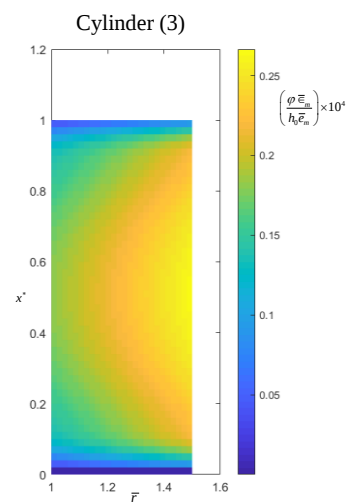
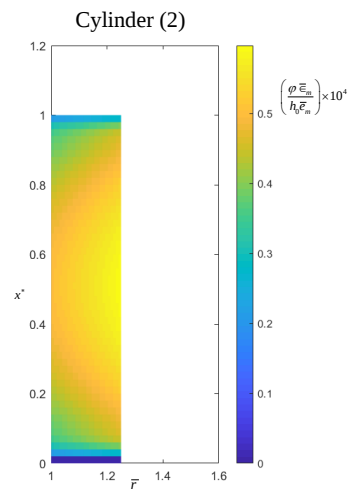
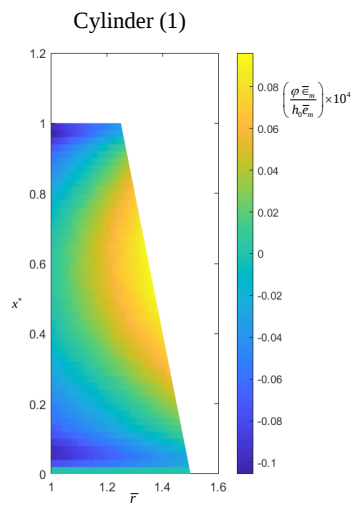
شکل ۴-۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی را در مقطع استوانه‌های ناهمگن ضخیم پیزوالکتریک نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود؛ در استوانه‌های جدار ثابت در نواحی دور از مرز می‌توان از تغییرات جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی صرف نظر نمود. استوانه جدار متغیر (۱) به لحاظ مقاومت در برابر جابه‌جایی شعاعی در مقایسه با استوانه‌های جدار ثابت (۲) و (۳) از عملکرد ضعیف‌تری برخوردار است. بنابراین در طراحی اگر هدف مقید نمودن جابه‌جایی شعاعی استوانه است؛ می‌بایست طراحی استوانه به‌گونه‌ای انجام پذیرد که تا حد امکان تغییرات جدار استوانه زیاد نباشد.



شکل ۷-۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$)



شکل ۴-۸ توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$)

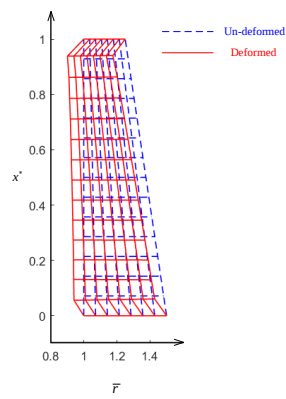


شکل ۹-۴ توزیع پتانسیل الکتریکی در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$)

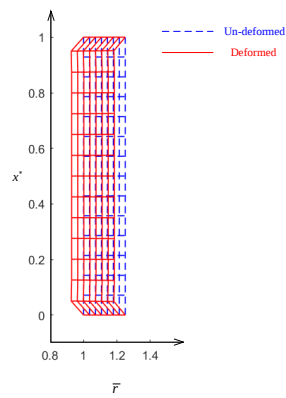
شکل ۴-۸ و شکل ۴-۹ به ترتیب توزیع جابه‌جایی محوری و پتانسیل الکتریکی را در مقطع استوانه‌های ناهمگن ضخیم پیزوالکتریک نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود؛ تغییرات و مقدار ماکزیمم جابه‌جایی محوری استوانه‌های جدار متغیر نسبت به استوانه‌های جدار ثابت اندک است. مقدار و دامنه تغییرات توزیع پتانسیل الکتریکی در استوانه (۱) جدار متغیر نسبت به استوانه‌های جدار ثابت به مقدار قابل توجهی کمتر است که این امر سبب می‌شود؛ عملکرد و کارکرد استوانه‌های جدار متغیر نسبت به استوانه‌های جدار ثابت در مقابل بارگذاری‌های یکسان اما سیکلی و متناوب، مطلوب‌تر باشد.

شکل ۴-۱۰ تغییر شکل استوانه‌های جدار ثابت و جدار متغیر را بر اثر بارگذاری الکترومکانیکی نشان می‌دهد. به منظور مشاهده بهتر تغییر شکل استوانه‌ها بر اثر بارگذاری الکترومکانیکی، میدان جابه‌جایی استوانه‌ها ۱۰۰۰ مرتبه بزرگنمایی شده است یا به عبارت دقیق‌تر میدان جابه‌جایی در عدد ۱۰۰۰ ضرب شده است. همانطور که مشاهده می‌شود؛ اگرچه توزیع تنش برشی در استوانه‌های جدار متغیر در نواحی دور از دو سر استوانه نیز مفهوم داشته و دارای مقدار می‌باشد اما مقدار غالب توزیع آن در استوانه‌ها در مناطق مرزی یا دو سر استوانه وجود دارد. هم‌چنین مشاهده می‌شود؛ مقدار و جهت تغییر شکل در استوانه‌ها را می‌توان با استفاده از پروفیل هندسه ضخامت مناسب در استوانه، محدود نمود.

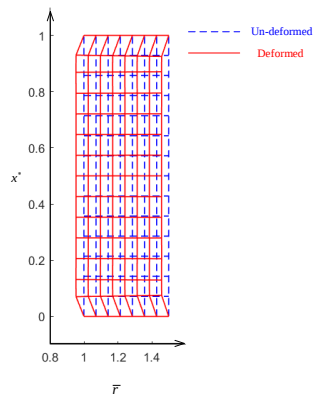
Cylinder (1)



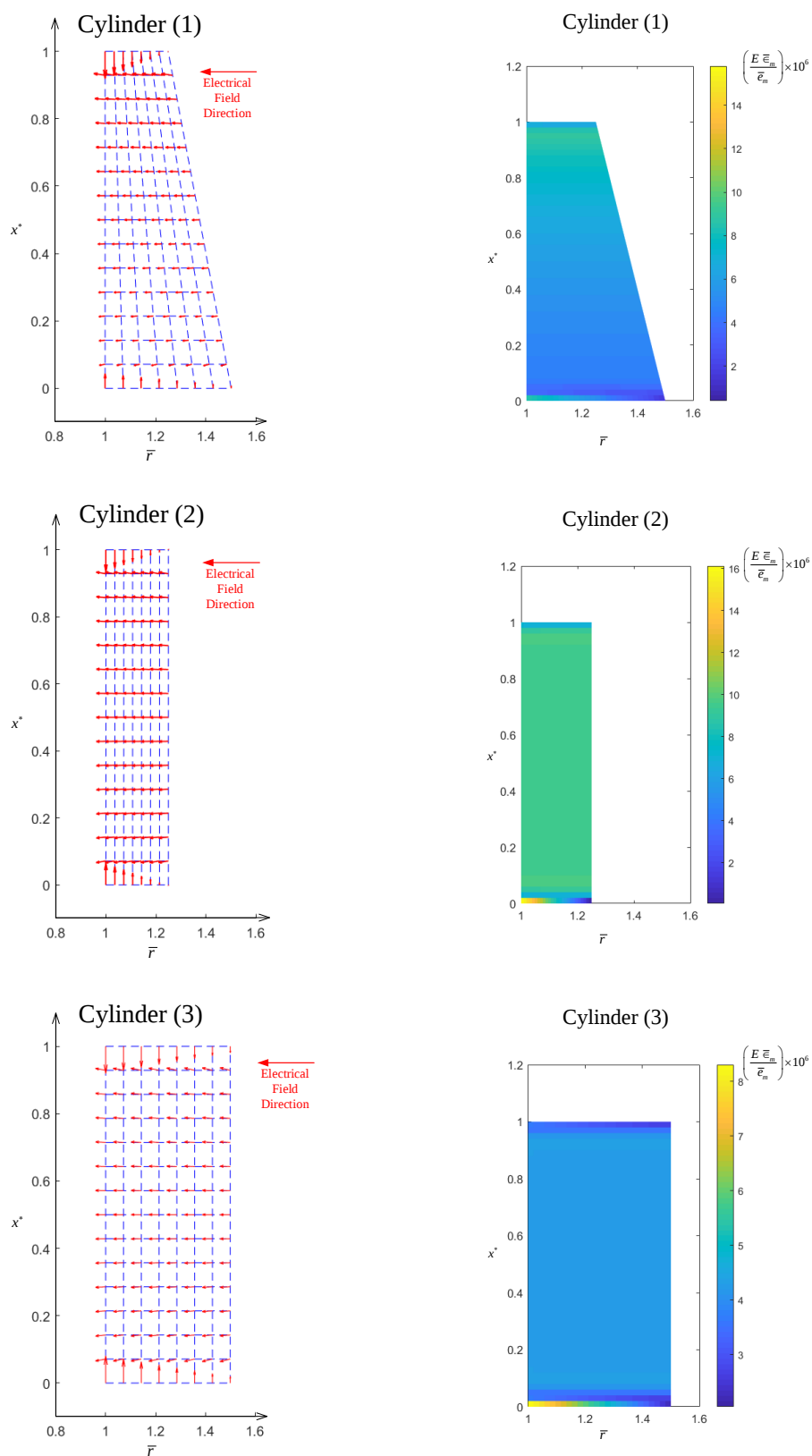
Cylinder (2)



Cylinder (3)

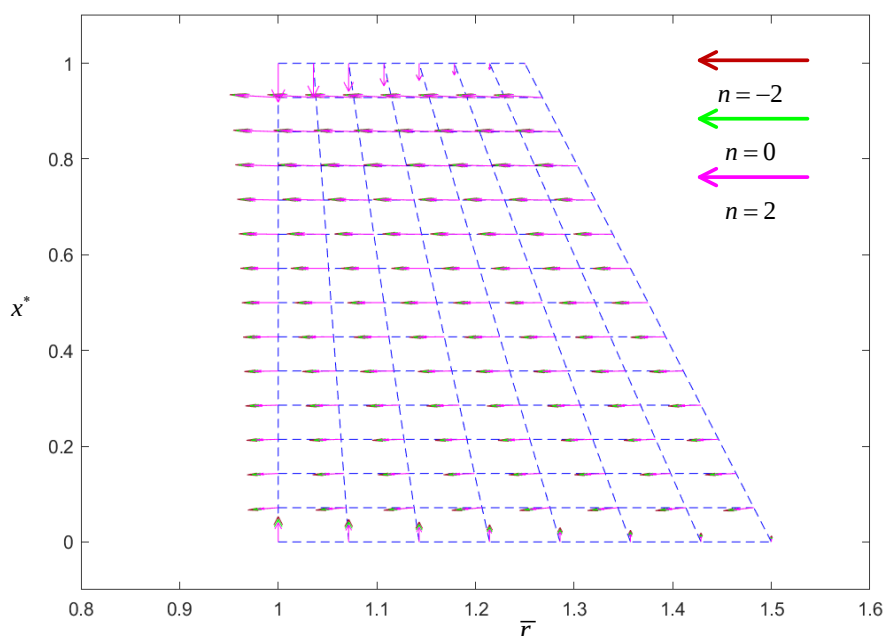


شکل ۴-۱۰ تغییر شکل استوانه‌های ناهمگن بر اثر بارگذاری الکترومکانیکی ($n = 1$)



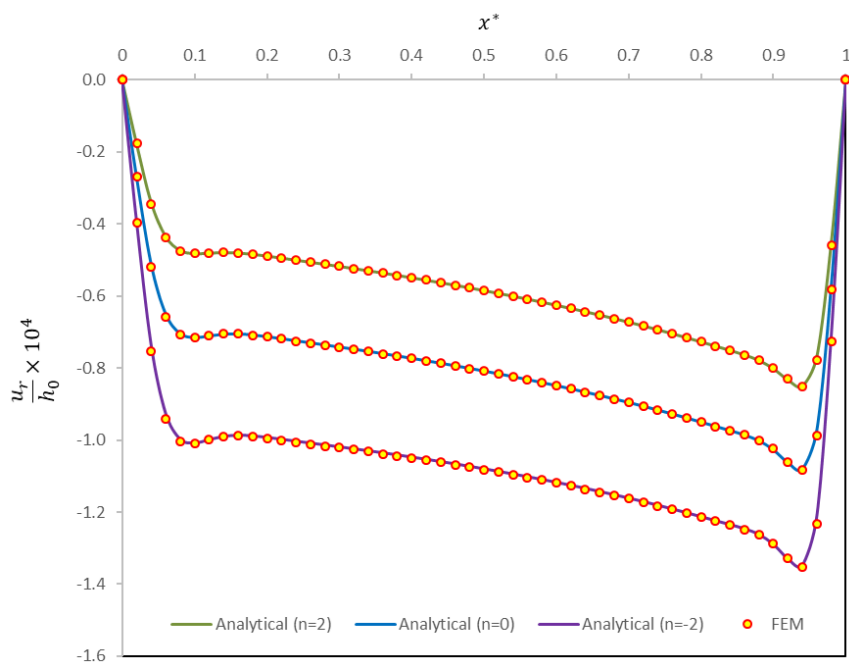
شکل ۴-۱۱ توزیع مقدار و جهت میدان الکتریکی در استوانه‌های ناهمگن ($n=1$) بر اثر بارگذاری الکترومکانیکی
 شکل ۴-۱۱ مقدار و جهت‌گیری میدان الکتریکی را در داخل جدار استوانه‌های ناهمگن نشان

می‌دهد. در استوانه‌های ناهمگن جدار ثابت در نواحی دور از دو سر استوانه، می‌توان از تغییرات مقدار میدان الکتریکی در راستای طول و مؤلفه‌ی محوری میدان الکتریکی صرف نظر نمود. بیشترین مقدار توزیع میدان الکتریکی به دلیل وجود چگالی بار الکتریکی سطحی در لایه داخلی، در نواحی مرزی لایه‌ی داخلی رخ می‌دهد که می‌بایست در طراحی اجزاء پیزوالکتریک به این موضوع توجه داشت. همچنین با استفاده از پروفیل‌های هندسه مناسب برای تغییرات جدار استوانه، می‌توان مقدار و جهت‌گیری میدان الکتریکی ایجاد شده را در استوانه‌های ناهمگن کنترل و محدود نمود و به رفتارهای دلخواه الکتریکی و مکانیکی سازه دست یافت.

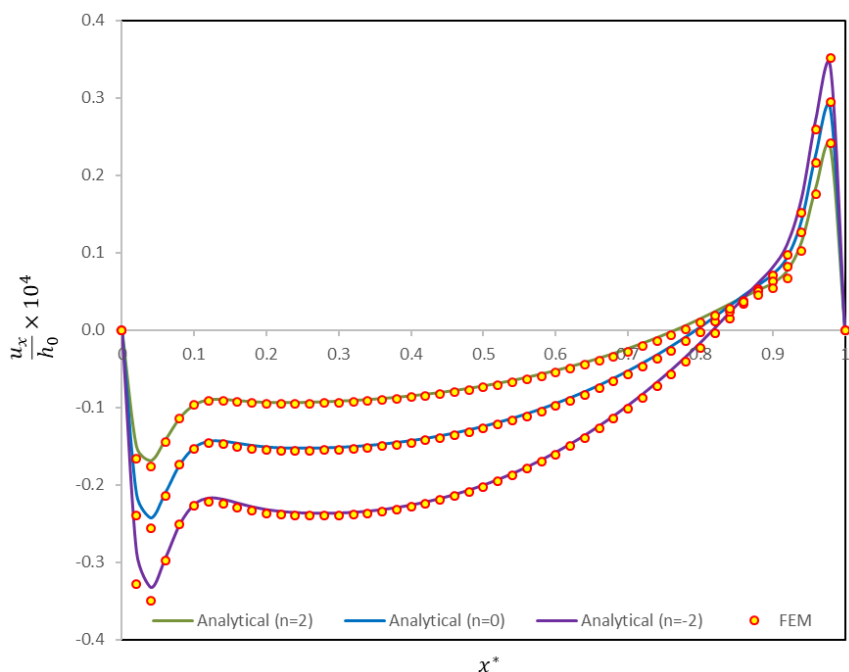


شکل ۴-۱۲ توزیع میدان الکتریکی در داخل استوانه‌ی جدار متغیر به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف
 شکل ۴-۱۲ توزیع میدان الکتریکی را در داخل استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف، نشان می‌دهد. جهت‌گیری میدان الکتریکی در نواحی دور از دو سر استوانه، تقریباً در راستای شعاعی بوده و می‌توان از مؤلفه‌ی میدان الکتریکی در راستای طولی صرف نظر کرد. همانطور که مشاهده می‌شود؛ کاهش ثابت ناهمگنی سبب افزایش مقدار میدان الکتریکی در استوانه جدار متغیر شده و جهت‌گیری مؤلفه‌های میدان الکتریکی را در داخل استوانه تغییر نمی‌دهد. بنابراین اگر هدف در طراحی استوانه‌های جدار متغیر، تغییر مقدار میدان الکتریکی است؛ می

بایست ثابت ناهمگنی تغییر کند و اگر هدف تغییر جهت میدان الکتریکی ایجاد شده در جسم است؛ می‌بایست پروفیل هندسه جدار استوانه یا نحوه اعمال بارگذاری (به‌ویژه چگالی بار الکتریکی سطحی) در سطوح خارجی و داخلی تغییر یابد.



شکل ۴-۱۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن در لایه‌ی میانی



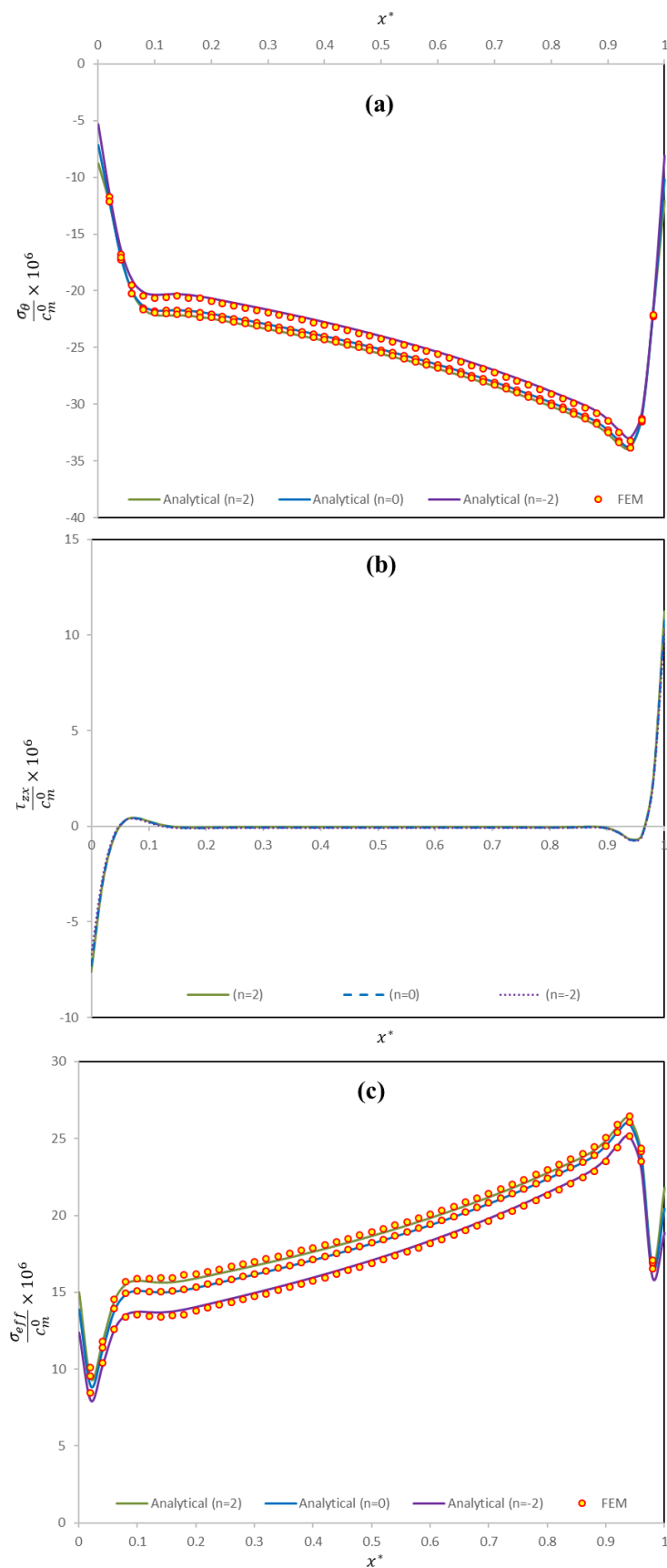
شکل ۴-۱۴ توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن در لایه‌ی داخلی

شکل ۴-۱۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی را در استوانه جدار متغیر ناهمگن نشان می‌دهد؛ همانطور که

مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار ثابت ناهمگنی مقدار جابه‌جایی شعاعی درون استوانه کاهش می‌یابد. توزیع جابه‌جایی شعاعی دارای دو نقطه اکسترمم در نزدیکی مرزهای استوانه جدار متغیر است که بیشترین مقدار جابه‌جایی شعاعی در نزدیک مرز بالای استوانه (قسمتی از استوانه جدار متغیر که دارای ضخامت اندک است)، رخ می‌دهد. شکل ۴-۱۴ توزیع جابه‌جایی محوری را در استوانه جدار متغیر ناهمگن نشان می‌دهد؛ همانند جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری نیز دارای دو نقطه اکسترمم است و بیشینه مقدار آن در نزدیک مرز بالای استوانه رخ می‌دهد. برخلاف جابه‌جایی شعاعی که تمام مقادیر توزیع آن منفی بوده و در راستای شعاعی استوانه منقبض شده است؛ اما استوانه در راستای طولی در بخش نزدیک به مرز بالایی دچار کشش (افزایش طول) شده و در بخش دیگر دچار کوتاه‌شدگی شده است.

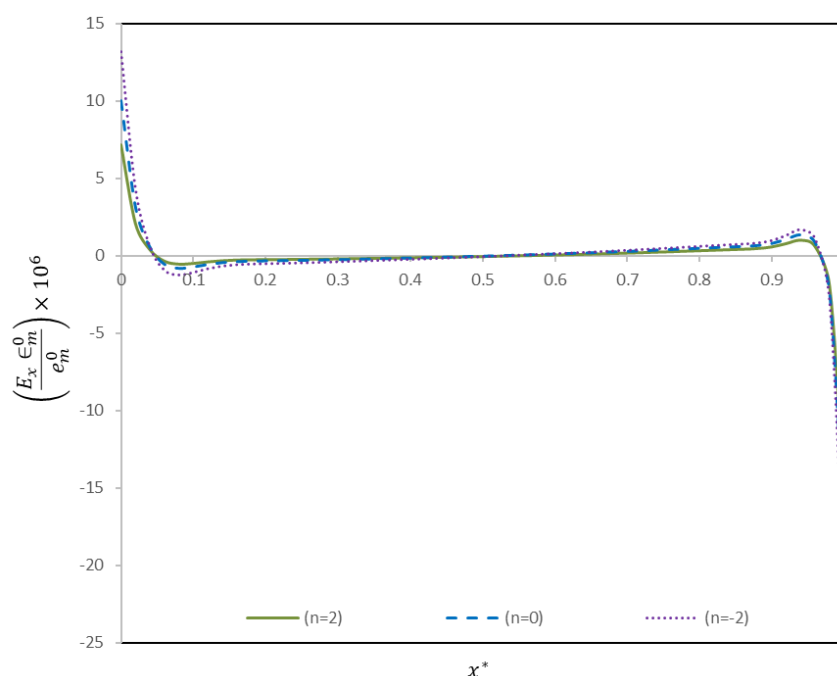
شکل ۴-۱۵ توزیع تنش محیطی (a)، تنش برشی (b) و تنش مؤثر (c) را که براساس تئوری شکست فن‌میسز رابطه‌ی (۴-۲۸) محاسبه شده است، در لایه‌ی میانی استوانه‌های ناهمگن نشان می‌دهد. تغییرات ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی حدود ۶ درصد بوده و با افزایش ثابت ناهمگنی مقدار تنش محیطی در استوانه افزایش می‌یابد. تغییرات تنش برشی بر اثر تغییر ثابت ناهمگنی اندکی بوده و با تقریب خوبی میتوان از آثار ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی استوانه صرف‌نظر کرد. همچنین، تغییرات ایجاد شده بر روی تنش مؤثر بر اثر ثابت ناهمگنی حدود ۹ درصد بوده و با توجه به غالب بودن اثر تنش محیطی رفتار تنش مؤثر نزدیک به رفتار تنش محیطی است.

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_x - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + 6\tau_{zx}^2 \right]^{0.5} \quad (4-28)$$

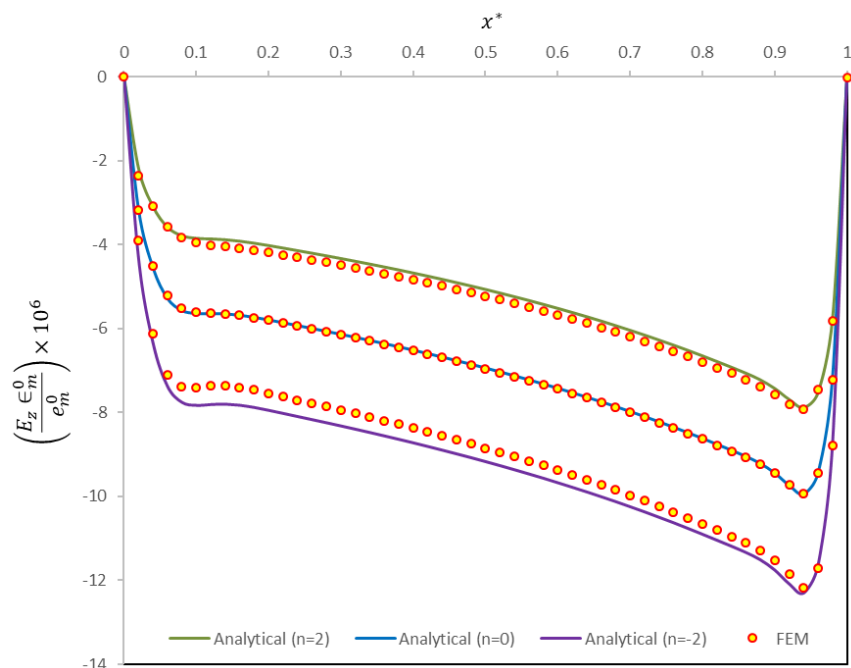


شکل ۴-۱۵ توزیع تنش‌ها در استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن در لایه‌ی میانی (a) تنش محیطی، (b) تنش برشی و (c) تنش مؤثر

شکل ۴-۱۵، شکل ۴-۱۶ و شکل ۴-۱۷ به ترتیب توزیع مولفه‌های محوری و شعاعی میدان الکتریکی را داخل استوانه ناهمگن جدار متغیر نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌شود؛ آثار ثابت ناهمگنی بر روی مؤلفه‌ی محوری میدان الکتریکی ناچیز بوده و میتوان با فرض نسبتاً خوبی رفتار مؤلفه‌ی محوری میدان الکتریکی را مستقل از ثابت ناهمگنی دانست. در حالیکه وابستگی رفتار مؤلفه‌ی شعاعی میدان الکتریکی به ثابت ناهمگنی کاملاً مشهود بوده و با تغییر ثابت ناهمگنی می‌توان این مولفه را حدود ۸۰ درصد دستخوش تغییر نمود. این در صد تغییرات، مقدار قابل ملاحظه‌ایی بوده که می‌بایست به آن هنگام طراحی توجه ویژه‌ایی نمود.



شکل ۴-۱۶ توزیع مؤلفه‌ی محوری میدان الکتریکی در لایه‌ی داخلی استوانه‌های ناهمگن



شکل ۴-۱۷ توزیع مؤلفه‌ی شعاعی میدان الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌های ناهمگن
جدول ۴-۲ نتایج حاصل از حل تحلیلی و حل اجزای محدود را مورد مقایسه و بررسی قرار
می‌دهد. همانطور که در شکل‌های قبل نیز ملاحظه گردید؛ اتفاق نظر خوبی بین نتایج پیش‌بینی شده
از دو روش مشاهده می‌شود. شایان ذکر است؛ درصد اختلاف در نتایج، با مبنا قرار دادن نتایج روش
تحلیلی بیان شده است.

جدول ۴-۲ نتایج عددی در وسط طول استوانه‌ی ناهمگن جدار متغیر پیزوالکتریک

			$n = -2$	$n = 0$	$n = 2$
Middle layer	u_r (mm)	Analytical	-0.00108	-0.00081	-0.00058
		FEM	-0.00108	-0.00081	-0.00058
		Difference (%)	0.00	0.00	0.00
Inner layer	u_r (mm)	Analytical	-0.00112	-0.00083	-0.00060
		FEM	-0.00114	-0.00085	-0.00061
		Difference (%)	1.79	2.41	1.67
Middle layer	σ_θ (kPa)	Analytical	-2074.3	-2174.9	-2206.5
		FEM	-2092.6	-2177.2	-2198.7
		Difference (%)	0.88	0.11	0.35
Inner layer	σ_θ (kPa)	Analytical	-3654.3	-2726.1	-1967.4
		FEM	-3326.0	-2553.3	-1895.6
		Difference (%)	8.98	6.34	3.65

۵-۴ جمع‌بندی

در این فصل حل تحلیلی برای استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک تحت بارگذاری الکترومکانیکی در سطوح داخلی و خارجی و شرایط مرزی الکترومکانیکی در دو سر استوانه ارائه شد. مطالعه عددی برای حالت استوانه جدار متغیر با دو سرگردار و دارای پتانسیل الکتریکی صفر انجام شد و آثار ناهمگنی بر روی رفتار الکترومکانیکی استوانه‌ی جدار ثابت و متغیر مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفت. همچنین این نتایج با نتایج حاصل از روش اجزای محدود نیز مورد مقایسه و بررسی گرفت که توافق خوبی میان نتایج حاصل از دو روش مشاهده گردید. نتایج حاصل از این پژوهش را می‌توان به طور خلاصه بدین شرح ارائه کرد.

۱- در این فصل یک حل تحلیلی سری گونه برای رفتار الکتریکی و مکانیکی ارائه شد که نسبت به سایر روش‌های حل سری گونه دارای سرعت همگرایی بسیار بالاتری می‌باشد. در حقیقت حل ارائه شده تنها با دو جمله از سری خود به همگرا و به دقت قابل قبول در پاسخ می‌رسد و نیاز به استفاده از

سایر جملات سری را ندارد. لذا این حل دارای حجم محاسبات کمتر، دقت بالاتر و نیاز به زمان کمتر جهت محاسبات نسبت به سایر روشها است. واضح است که به خوبی می‌توان از این حل به عنوان یک تابع هدف جهت بهینه سازی و دست یابی به مقادیر بهینه‌ی مواردی نظیر پروفیل تغییر ضخامت، ثابت ناهمگنی و ... استفاده کرد.

۲- بررسی و ارزیابی نتایج حاصل از استوانه‌های جدار متغیر و جدار ثابت نشان می‌دهد؛ با انتخاب یک پروفیل مناسب برای تغییرات جدار استوانه می‌توان میدان الکتریکی ایجاد شده در جسم را به نحوی محدود نمود که دارای جهت گیری در بازه مطلوب و مناسب طراحی باشند. در واقع جهت میدان الکتریکی در داخل استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن تابعی از پروفیل تغییر ضخامت استوانه و پروفیل بارگذاری است.

۳- در خصوص مقدار و محل ایجاد بیشینه میدان جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی در داخل استوانه ناهمگن جدار متغیر پیزوالکتریک می‌توان با استفاده از پروفیل مناسب تغییرات ضخامت جدار استوانه، مقدار و محل آن را دستخوش تغییر نمود.

۴- بررسی نتایج نشان می‌دهد؛ در استوانه جدار متغیر ناهمگن، تنش دارای مقدار غالب در ما بین تنش‌ها، تنش محیطی بوده که سبب می‌شود رفتار تنش مؤثر که بر اساس معیار تسلیم فن میسز محاسبه می‌شود؛ تحت تاثیر آن باشد. همچنین اگرچه تنش برشی در نواحی دور از مرز در استوانه‌ی جدار متغیر دارای مقادیر است اما این مقادیر ناچیز بوده و قابل چشم پوشی می‌باشد. مؤلفه‌ی محوری میدان الکتریکی نیز در استوانه جدار متغیر دارای مقدار اندک است و میدان الکتریکی تشکیل شده عمدتاً ناشی از مولفه شعاعی میدان می‌باشد.

۵- بررسی و مقایسه نتایج حاصل از دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد؛ ضمن اینکه روش حاضر سریع همگرا شده، از دقت مطلوبی نیز برخوردار بوده و نتایج به‌دست آمده از دو روش دارای توافق بسیار خوبی می‌باشند.

۶- نتایج نشان می‌دهد؛ ثابت ناهمگنی آثار چشمگیری بر روی میدان جابه‌جایی و مولفه شعاعی

میدان الکتریکی ایجاد شده در داخل استوانه جدار متغیر دارد. با افزایش ثابت ناهمگنی، میدان جابه‌جایی و مولفه شعاعی میدان الکتریکی (میدان الکتریکی) در استوانه کاهش می‌یابد ولیکن تنش مؤثر در استوانه افزایش می‌شود. لذا در طراحی سازه‌های ناهمگن باید به دنبال مقدار بهینه ثابت ناهمگنی بود زیرا که با کاهش ثابت ناهمگنی ضمن ایجاد میدان جابه‌جایی و میدان الکتریکی کمتر در سازه، تنش مؤثر بیشتر در آن ایجاد می‌شود که عامل مطلوبی در طراحی نیست.

فصل ۵ تحلیل الکتروترموالاستیک استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک

۵-۱ پیش‌گفتار

در این فصل به جمع‌بندی تحلیل‌های انجام شده در فصل‌های گذشته پرداخته شده و تحلیل الکتروترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک جدار متغیر تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی ارائه می‌شود. در ادامه به تحلیل اجزای محدود، مطالعه عددی و بررسی نتایج پرداخته می‌شود و با پیشنهادهایی به منظور پژوهش در آینده، این فصل خاتمه می‌یابد.

۵-۲ حل تحلیلی الکتروترموالاستیک

همانطور که در فصل ۲ بیان شد؛ برای تحلیل الکتروترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک جدار متغیر که تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در سطوح داخلی و خارجی خود قرار دارند، می‌بایست معادلات (۲-۵۴) تا (۲-۶۱) حل شوند. به دلیل اینکه تعداد مجهولات (۹ عدد شامل Θ^0* , Θ^1* , g^* , ϕ^1* , ψ^* , U_z^1* , U_z^0* , U_x^1* , V^*) با تعداد معادلات (۸ عدد) برابر نیست، امکان حل این معادلات به‌صورت همزمان وجود ندارد. لذا، برای تحلیل الکتروترموالاستیک ابتدا به حل معادلات (۲-۶۰) و (۲-۶۱) پرداخته می‌شود که تعداد مجهولات (۲ عدد شامل g^* و Θ^1*) در آنها با تعداد این معادلات برابر است. حل معادلات (۲-۶۰) و (۲-۶۱) در فصل ۳ به طور کامل مورد بحث قرار گرفت. با حل معادلات (۲-۶۰)، (۲-۶۱) و استفاده از رابطه‌ی $g^* = \varepsilon \times \frac{d\Theta^0*}{dx^*}$ مجهولات Θ^0* , Θ^1* , g^* تعیین می‌شود و معادلات (۲-۵۴) تا (۲-۵۹) را می‌توان حل نمود. حل معادلات (۲-۵۴) تا (۲-۵۹) نیز روندی مشابه آنچه که در فصل ۴ ذکر شد، دارد و دارای یک حل خارجی و دو حل داخلی در مرز بالا و پایین است.

روند حل خارجی معادلات (۲-۵۴) تا (۲-۵۹) در تحلیل الکتروترموالاستیک مشابه و مطابق آنچه در فصل گذشته ذکر شد، است. با جایگذاری حل خارجی در معادلات بی‌بعد شده و مرتب‌سازی آنها براساس مرتبه‌ی ترم اغتشاشاتی، دستگاه معادلات جبری مربوط به حل خارجی مرتبه‌ی صفر و یک به‌دست می‌آید. با حل این دستگاه معادلات جبری، حل خارجی مرتبه‌ی صفر و یک به‌دست می‌آید.

روند حل داخلی معادلات (۵۴-۲) تا (۵۹-۲) در تحلیل الکتروترموالاستیک مشابه فصل گذشته است. ابتدا می‌بایست، بسط تیلور کلیه‌ی توابع معلوم از محور را با توجه به اینکه حل داخلی در مرز پایین یا بالا است، حول مرز پایین یا بالا همانند روابط (۴-۱۰) یا (۴-۲۳) در معادلات بی‌بعدشده (۵۴-۲) تا (۵۹-۲) نوشت. باتوجه به اینکه وضعیت توابع Θ^0* و Θ^1* در قسمت قبل (حل معادلات (۶۰-۲) و (۶۱-۲)) معلوم شد، می‌بایست بسط تیلور این توابع نیز حول مرز پایین یا بالا بدین صورت نوشته شود.

$$\Theta^0*(x^*) = \delta_0^* + \varepsilon\eta d\delta_0 + \dots; \delta_0^* = \Theta^0*(0), d\delta_0 = \left. \frac{d\Theta^0*}{dx^*} \right|_{x^*=0} \quad (۱-۵)$$

$$\Theta^1*(x^*) = \Delta_0^* + \varepsilon\eta d\Delta_0 + \dots; \Delta_0^* = \Delta^*(0), d\Delta_0 = \left. \frac{d\Theta^1*}{dx^*} \right|_{x^*=0}$$

$$\Theta^0*(x^*) = \delta_1^* + \varepsilon\zeta d\delta_1 + \dots; \delta_1^* = \Theta^0*(1), d\delta_1 = \left. \frac{d\Theta^0*}{dx^*} \right|_{x^*=1} \quad (۲-۵)$$

$$\Theta^1*(x^*) = \Delta_1^* + \varepsilon\zeta d\Delta_1 + \dots; \Delta_1^* = \Delta^*(1), d\Delta_1 = \left. \frac{d\Theta^1*}{dx^*} \right|_{x^*=1}$$

سپس با جایگذاری حل داخلی مرز پایین یا بالا در معادلات بی‌بعد شده و مرتب‌سازی آنها براساس مرتبه‌ی ترم اغتشاشاتی، دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به حل داخلی مرتبه‌ی صفر و یک برای مرز پایین یا بالا به‌دست می‌آید. با حل این دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ای، حل داخلی مرتبه‌ی صفر و یک در مرز پایین یا بالا به‌دست می‌آید.

۳-۵ تحلیل اجزای محدود

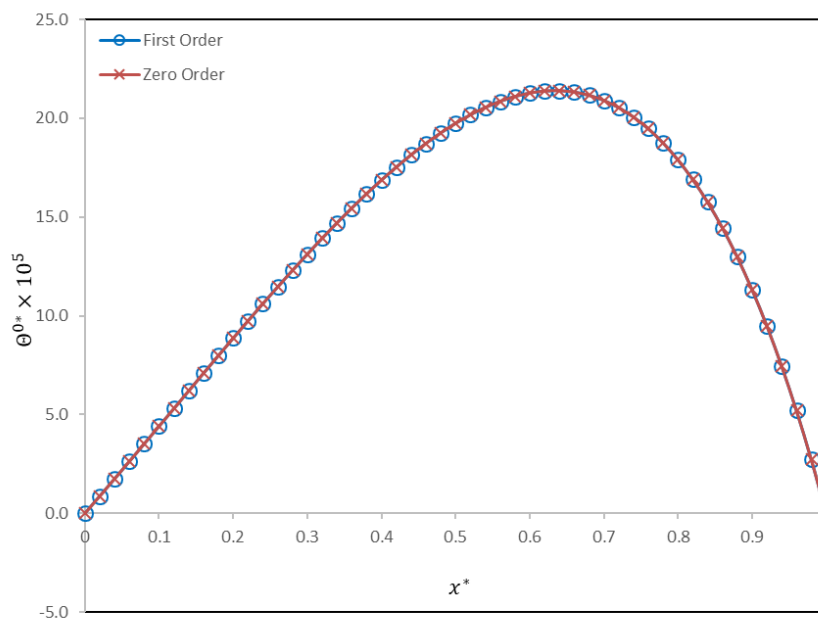
تحلیل اجزای محدود الکتروترموالاستیک استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک مشابه تحلیل الکتروالاستیک آنها در فصل گذشته است. در این بخش نیز با استفاده از المان صفحه ۲۲۳ نرم‌افزار انسیس و به کمک لایه-لایه سازی هندسه اقدام به تحلیل اجزای محدود آن صورت می‌گیرد.

۴-۵ مطالعه‌ی موردی

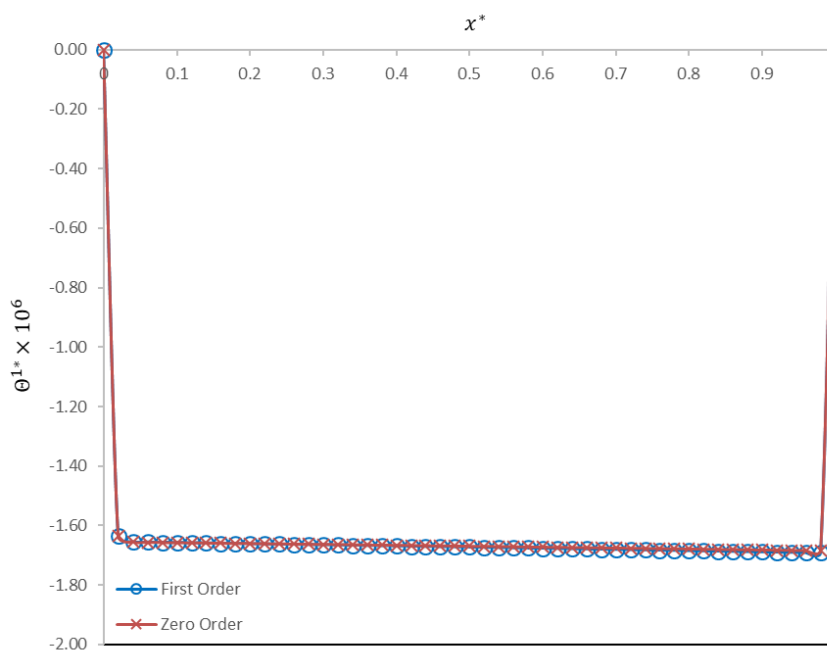
به منظور مطالعه عددی و بررسی هندسه یک استوانه‌ی جدار متغیر با مشخصات $h_b = 20 \text{ mm}$,

این استوانه ناهمگن بوده و لایه داخلی آن از جنس تیتانات زیرکونات سرب-۴ است که خواص آن مطابق جدول ۱-۴ است.

لایه‌ی داخلی این استوانه‌ها، تحت چگالی بار الکتریکی سطحی $Q_i = 15 \times 10^{-7} (C / m^2)$ و شار حرارتی گرم‌کننده $H_i = 150 (W / m^2)$ و لایه‌ی خارجی آن تحت فشار $P_o = 600 (kPa)$ و شار حرارتی خنک‌کننده $H_o = -100 (W / m^2)$ است. شرایط مرزی دو سر این استوانه‌های پیزوالکتریک گیردار با پتانسیل الکتریکی صفر و دمای ثابت مثبت مرجع است. همچنین جهت بررسی ناهمگنی خواص بر روی رفتار استوانه‌ها، ثابت ناهمگنی n به ازای مقادیر ۲، ۱، ۰، -۱ و -۲ مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.



شکل ۵-۱ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر تغییرات دما



شکل ۵-۲ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک تغییرات دما

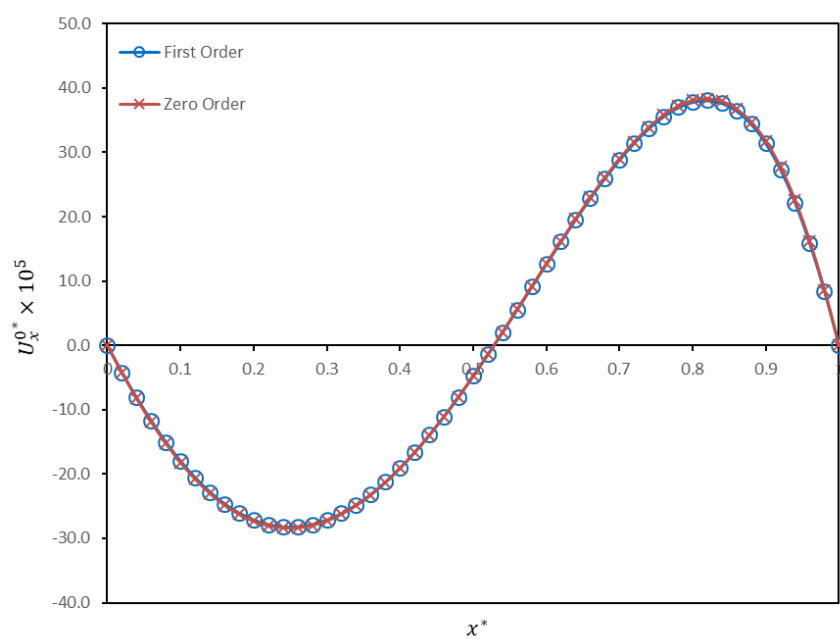
شکل ۵-۱ و شکل ۵-۲ به ترتیب توابع Θ^0^* و Θ^1^* به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم

اغتشاشاتی برای معادلات رسانش حرارتی در استوانه‌ی همگن پیزوالکتریک تحت بارگذاری حرارتی

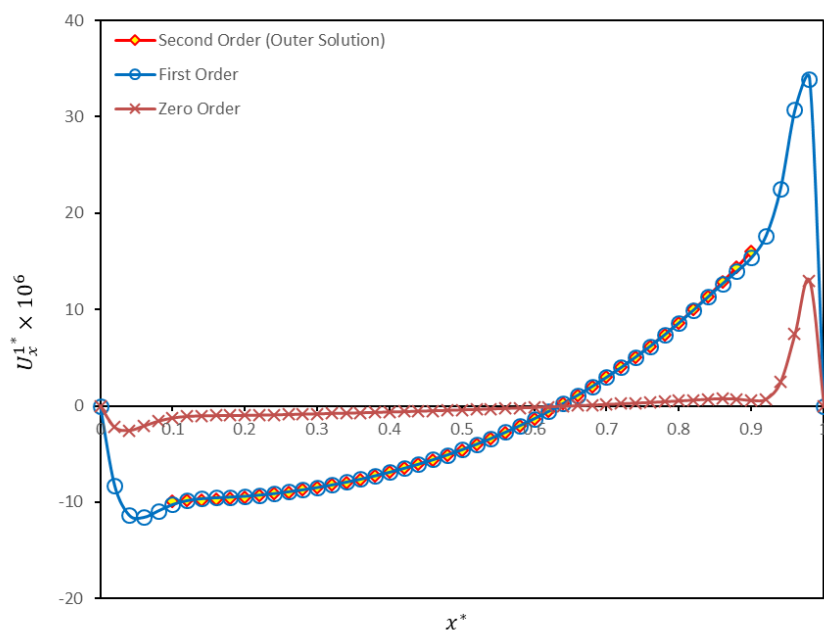
(معادلات (۶۰-۲) و (۶۱-۲)) نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود؛ همگرایی سریع نتایج کاملاً

مشهود است. اصلاح ایجاد شده توسط حل مرتبه‌ی یک بر روی تابع Θ^1^* نسبت به تابع Θ^0^* بیشتر

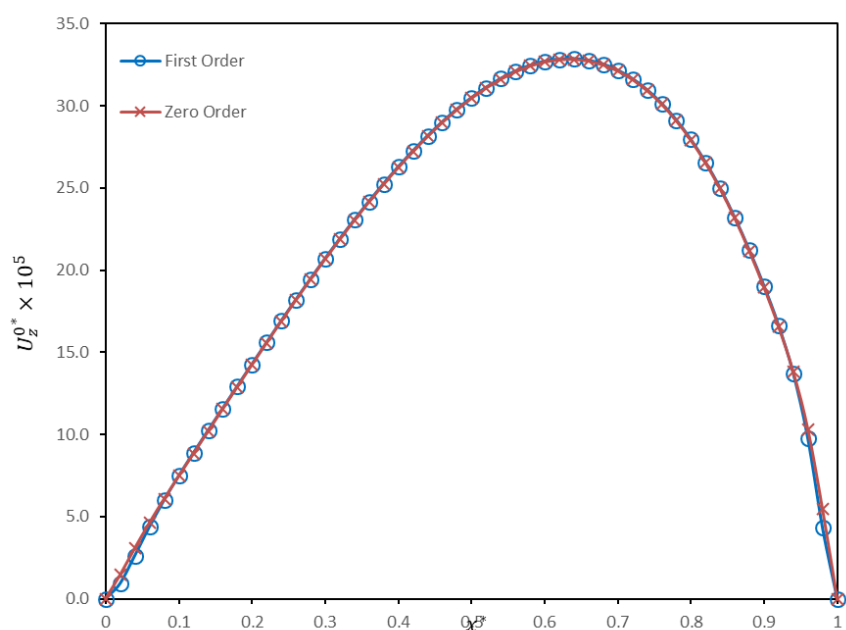
است و در بیشترین حالت به مقداری حدوداً کمتر از ۰/۵ درصد می‌رسد.



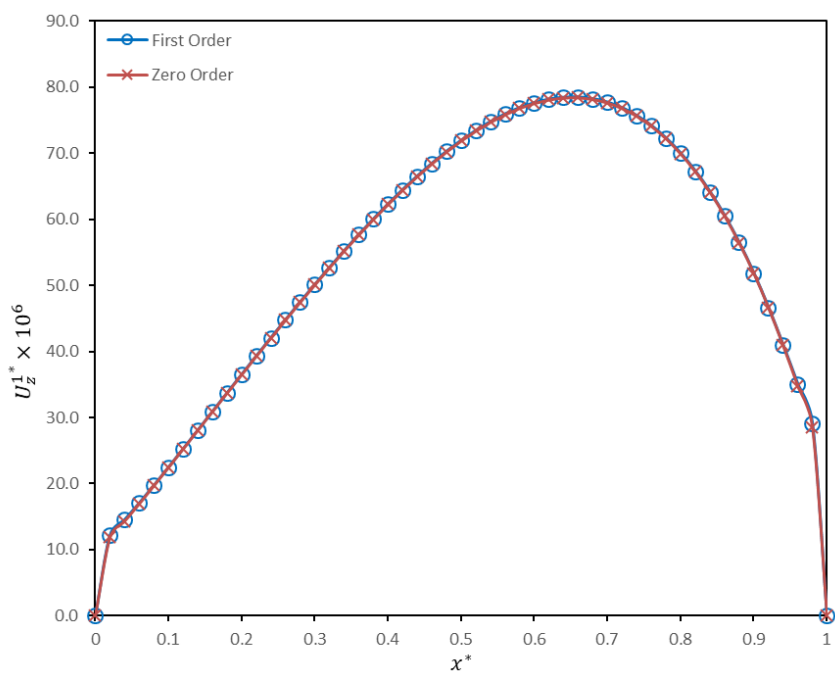
شکل ۳-۵ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی محوری



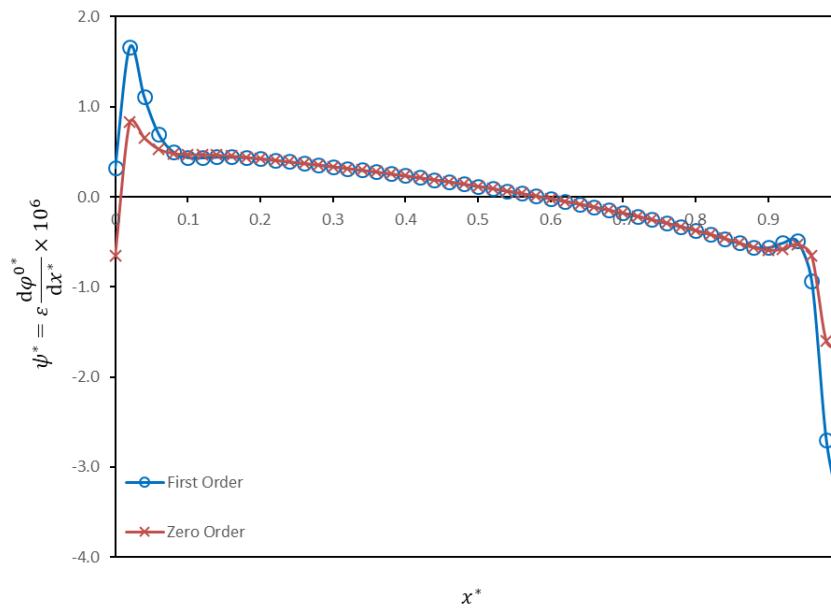
شکل ۴-۵ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی محوری



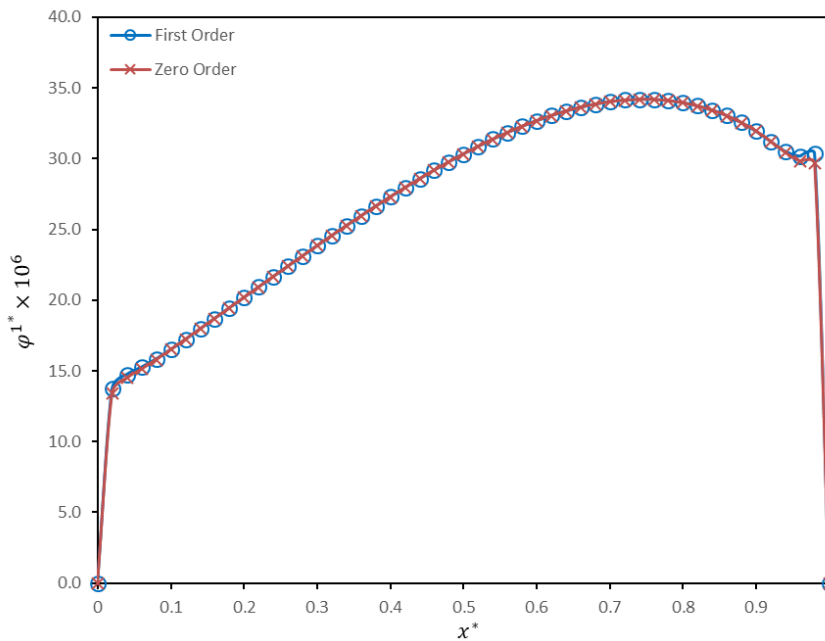
شکل ۵-۵ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی شعاعی



شکل ۵-۶ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی



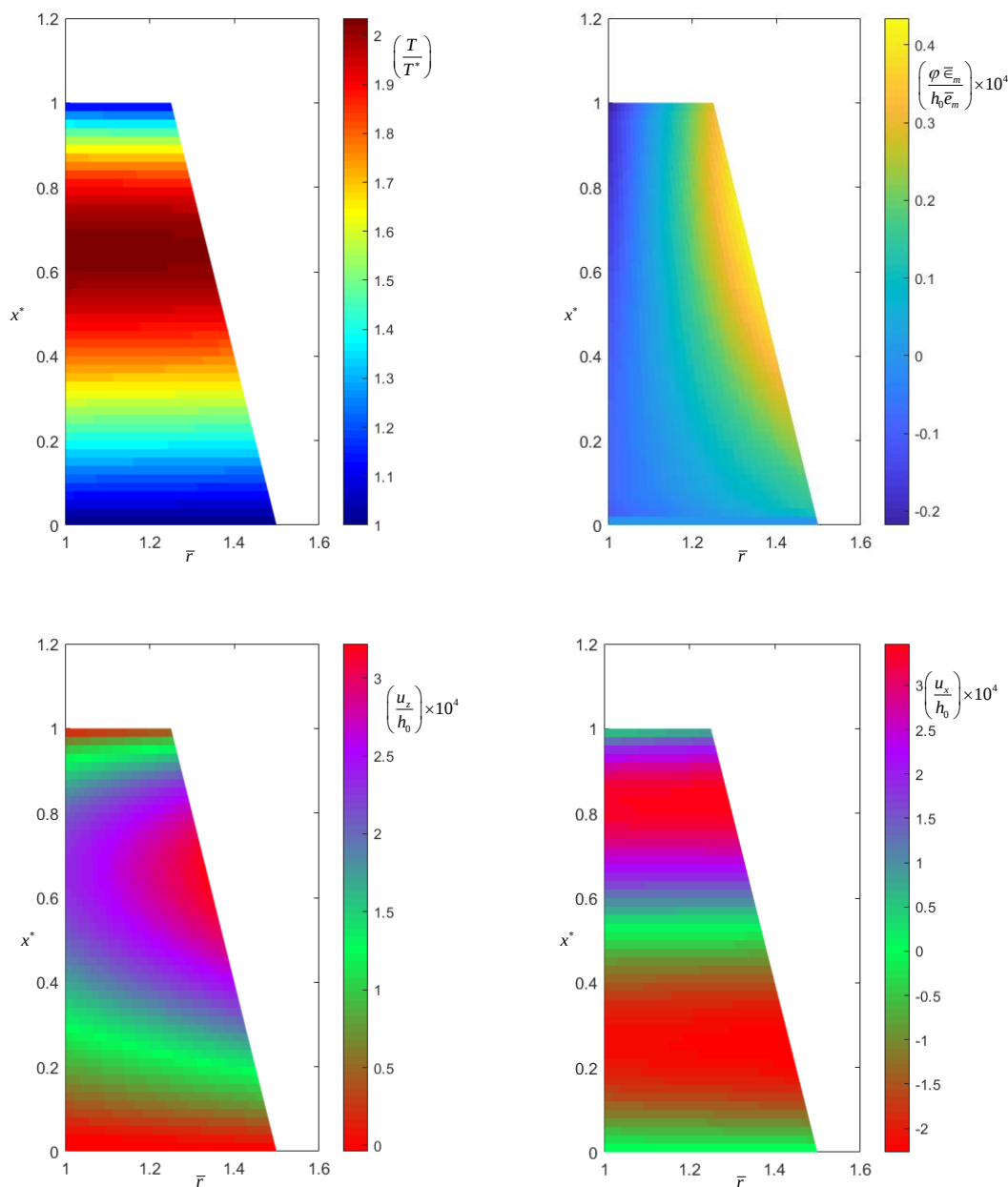
شکل ۷-۵ مشتق مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر پتانسیل الکتریکی



شکل ۸-۵ مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک پتانسیل الکتریکی

شکل ۳-۵ تا شکل ۸-۵، توابع $\psi^*, U_z^0, U_z^1, U_x^0, U_x^1$ و ϕ^1 را به ازای حل مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی یک ترم اغتشاشاتی برای معادلات تعادل الکتروترموالاستیک در استوانه‌ی همگن پیزوالکتریک تحت بار گذاری الکتروترمو مکانیکی (معادلات (۲-۵۴) تا (۲-۵۹)) نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود؛ روش تطابق مجانب‌ها زیرمجموعه‌ی تکنیک اغتشاشات سریع همگرا شده و حل مرتبه‌ی یک به دست آمده از این روش اصلاح چشمگیری را بر روی توابع ψ^* و U_x^1 ایجاد

می‌کند. بیشینه مقدار اصلاح ایجاد شده بر روی توابع U_x^* و ψ^* به ترتیب حدود ۱۰۰ و ۵۰ درصد است.



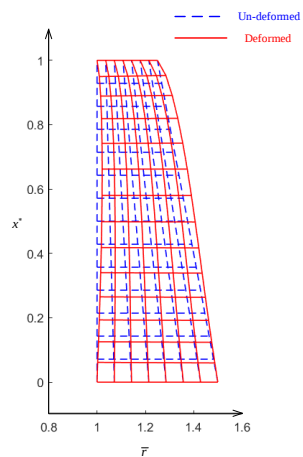
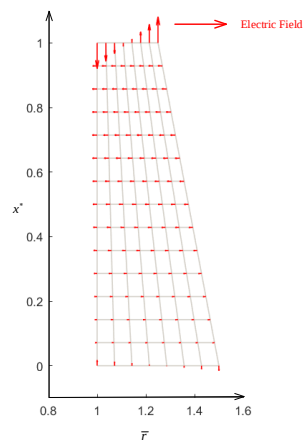
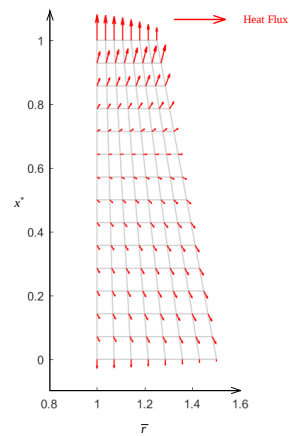
شکل ۵-۹ توزیع دما، پتانسیل الکتریکی و جابه‌جایی در استوانه‌ی ناهمگن ($n=1$)

شکل ۵-۹ توزیع دما، پتانسیل الکتریکی، جابه‌جایی شعاعی و محوری را در مقطع استوانه‌ی جدار

متغیر ناهمگن پیزوالکتریک نشان می‌دهد. اگرچه رفتار الکتروترمو مکانیکی استوانه تابعی از شعاع و

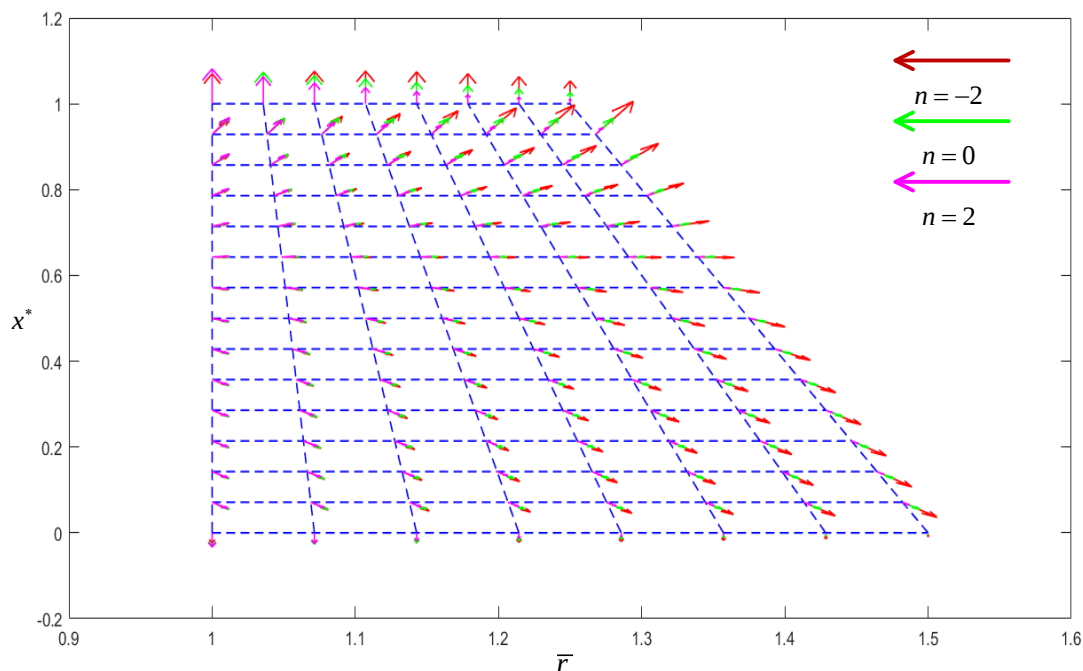
محور استوانه است و در هر دو راستا تغییر می‌کند اما تغییرات دما و جابه‌جایی محوری در راستای

محوری نسبت به راستای شعاعی قابل ملاحظه‌تر است.



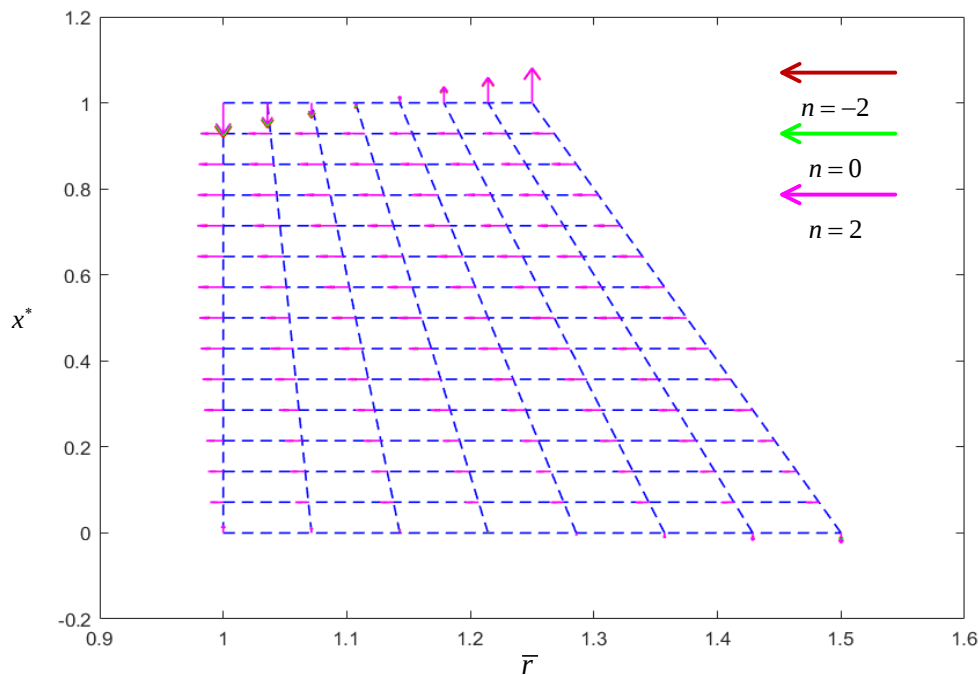
شکل ۵-۱۰ توزیع شار حرارتی، میدان الکتریکی و تغییر شکل استوانه‌ی ناهمگن ($n=1$)

شکل ۵-۱۰ شار حرارتی، میدان الکتریکی و تغییر شکل استوانه‌ی ناهمگن پیزوالکتریک را تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی نشان می‌دهد. حرارت اعمالی به لایه داخلی استوانه بخشی از سمت بالا و بخشی دیگر از سمت پایین استوانه خارج می‌شود. جهت‌گیری میدان الکتریکی ایجاد شده در داخل استوانه عمدتاً در راستای شعاعی بوده و با تقریب خوبی می‌توان فرض نمود که میدان الکتریکی ایجاد شده در استوانه تنها در راستای شعاعی است برخلاف شار حرارتی جهت‌گیری شعاعی و محوری داخل استوانه دارد. همچنین با مقایسه نتایج شکل ۵-۱۰ با نتایج فصل گذشته، مشخص می‌شود بارگذاری حرارتی سبب شده تا استوانه از تغییر شکل از انقباضی به انبساطی در راستای شعاعی تغییر یابد. شایان ذکر است؛ در این بخش به دلیل بارگذاری حرارتی و افزایش میزان میدان جابه‌جایی شعاعی، به منظور مشاهده بهتر تغییر شکل استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی، میدان جابه‌جایی استوانه‌ها ۱۰۰ مرتبه بزرگ‌نمایی شده است یا به عبارت دقیق‌تر میدان جابه‌جایی در عدد ۱۰۰ ضرب شده است.



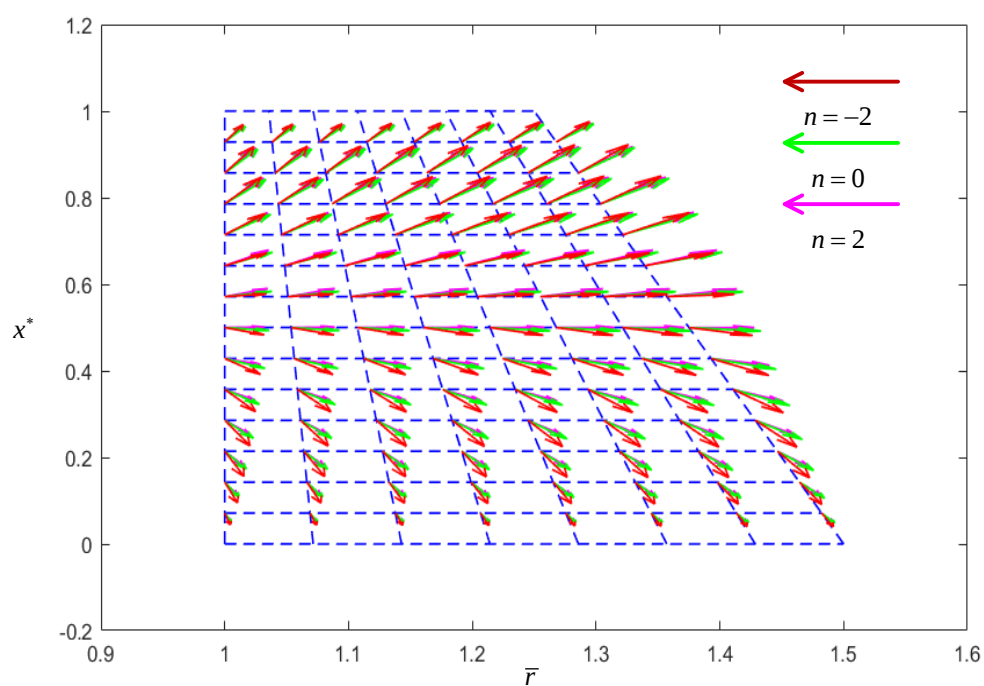
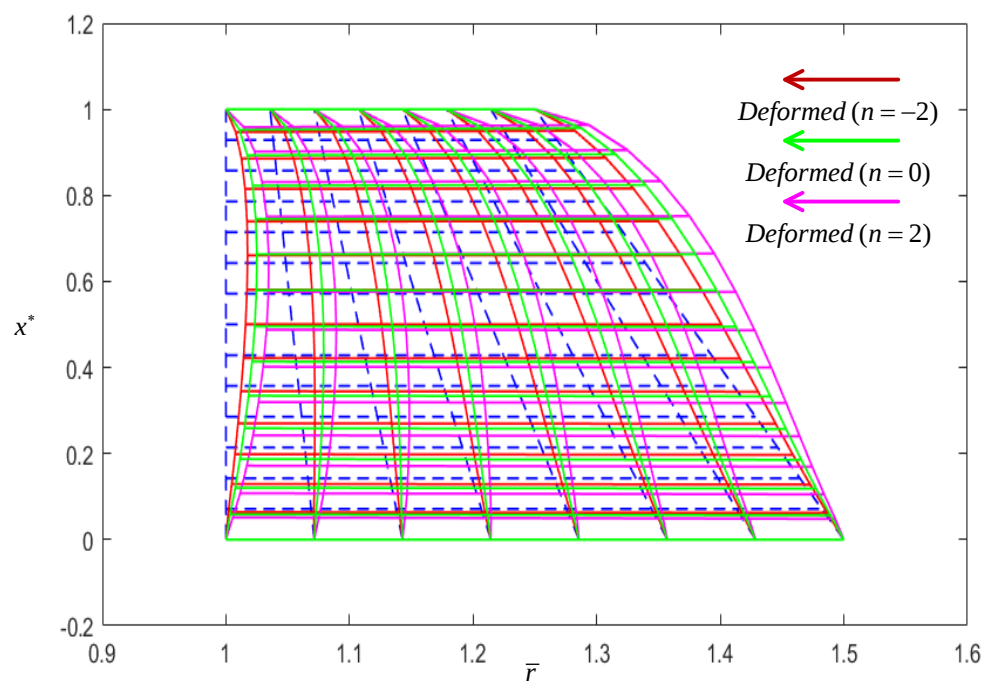
شکل ۵-۱۱ توزیع شار حرارتی داخل استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک
شکل ۵-۱۱ توزیع شار حرارتی را در استوانه‌های ناهمگن جدار متغیر پیزوالکتریک نشان می‌دهد.

همانطور که مشاهده می‌شود؛ تغییرات ثابت ناهمگنی، اثر چشمگیری بر روی جهت بردارهای شار حرارتی ندارد. هم‌چنین، کاهش ثابت ناهمگنی سبب می‌شود مقدار شار حرارتی خروجی از سطح خارجی سیلندر افزایش یابد و خنک کاری سطح خارجی استوانه جدار متغیر ناهمگن بهتر انجام شود.



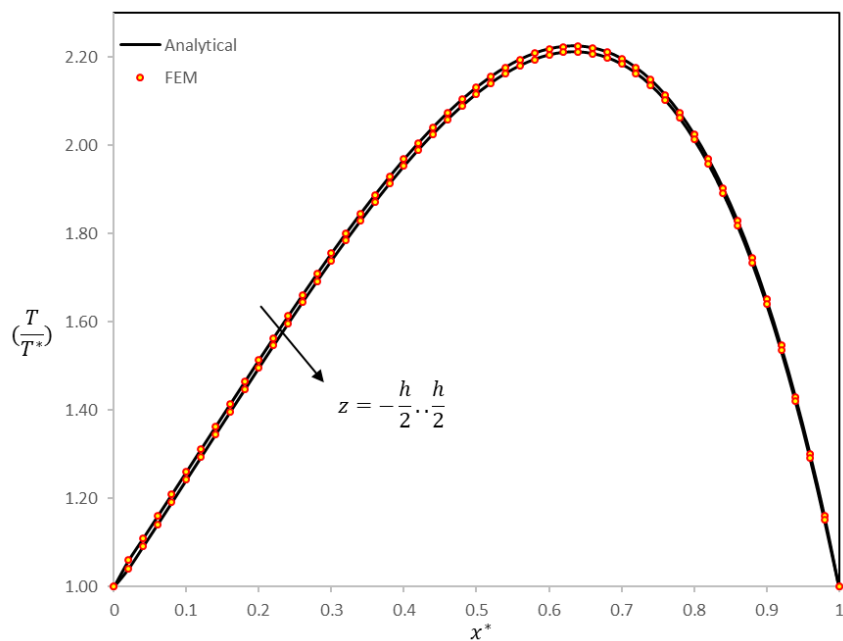
شکل ۵-۱۲ توزیع میدان الکتریکی داخل استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک
 شکل ۵-۱۲ توزیع میدان الکتریکی را در داخل استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی، نشان می‌دهد. جهت گیری میدان الکتریکی در نواحی دور از دو سراسطوانه، تقریباً تنها در راستای شعاعی است. همانطور که مشاهده می‌شود؛ کاهش ثابت ناهمگنی سبب افزایش مقدار میدان الکتریکی در استوانه جدار متغیر به‌ویژه در سطوح خارجی آن شده و تقریباً جهت گیری مولفه‌های میدان الکتریکی را در داخل استوانه تغییر نمی‌دهد.

شکل ۵-۱۳ توزیع میدان جابه‌جایی و تغییر شکل استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک را بر اثر بارگذاری، نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود؛ افزایش ثابت ناهمگنی علاوه بر آنکه بر مقدار میدان جابه‌جایی تاثیر گذاشته و باعث کاهش آن می‌شود، سبب تغییر جهت بردارهای جابه‌جایی نیز می‌شود.

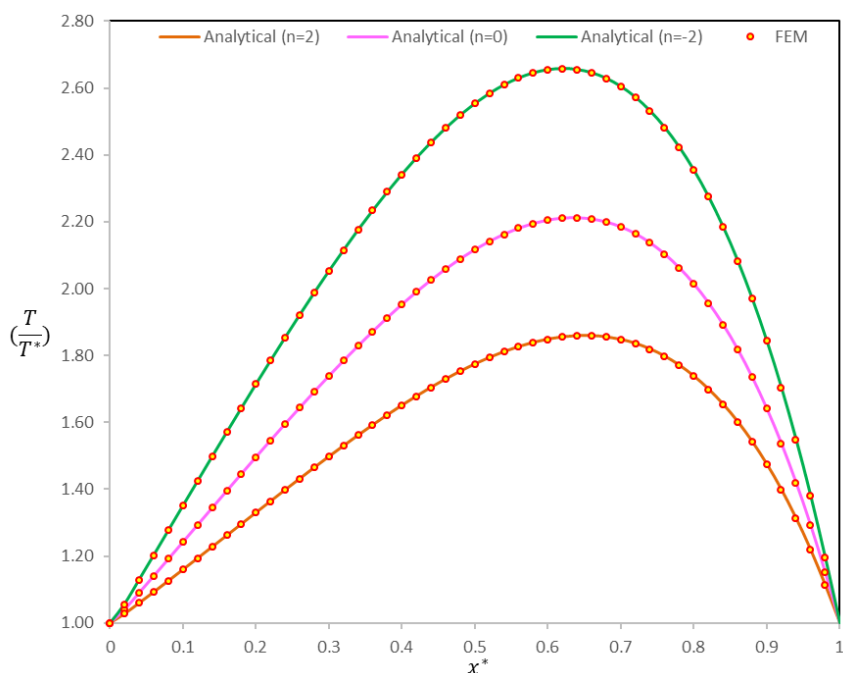


شکل ۵-۱۳ توزیع میدان جابه‌جایی و تغییر شکل استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک تحت بارگذاری
 شکل ۵-۱۴ و شکل ۵-۱۵ به ترتیب توزیع دما را در استوانه‌ی جدار متغیر همگن پیزوالکتریک و
 در لایه‌ی خارجی استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده
 می‌شود؛ نتایج به‌دست آمده برای توزیع دما از روش اجزای محدود و حل تحلیلی از انطباق خوبی

برخوردار بوده و با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع دما در داخل استوانه‌ها کاهش می‌یابد.



شکل ۱۴-۵ توزیع دما در استوانه‌ی همگن پیزوالکتریک



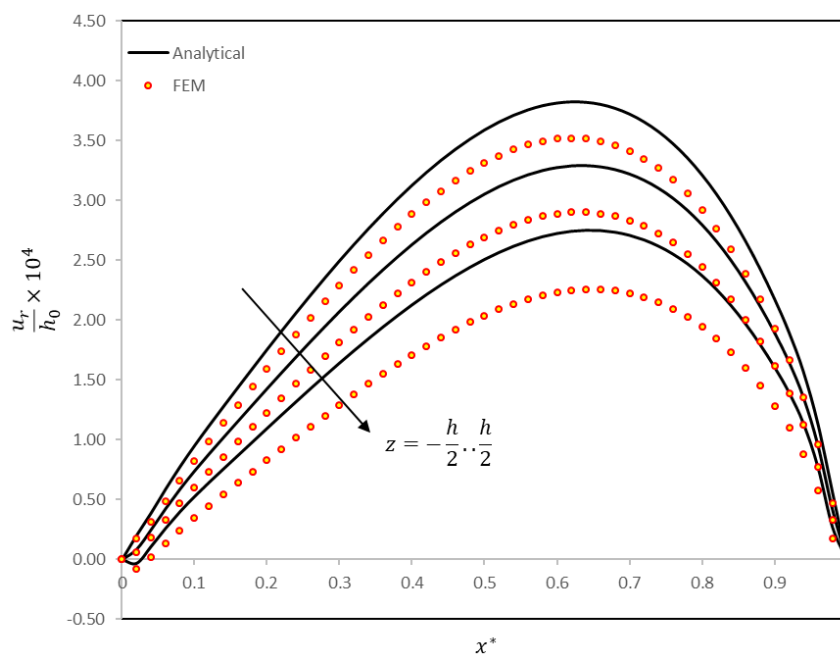
شکل ۱۵-۵ توزیع دما در سطح خارجی استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک

شکل ۱۶-۵ و شکل ۱۷-۵ به ترتیب توزیع جابه‌جایی شعاعی را در استوانه‌ی جدار متغیر همگن

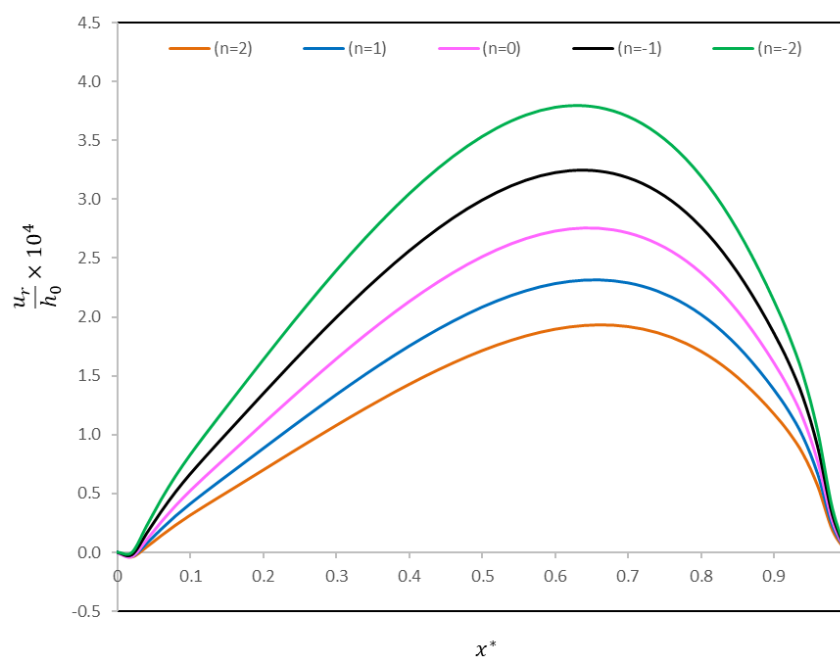
پیزوالکتریک و در لایه‌ی داخلی استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک نشان می‌دهد. همانطور

که مشاهده می‌شود؛ با افزایش ثابت ناهمگنی، مقدار توزیع جابه‌جایی شعاعی در داخل استوانه‌ها

کاهش می‌یابد.

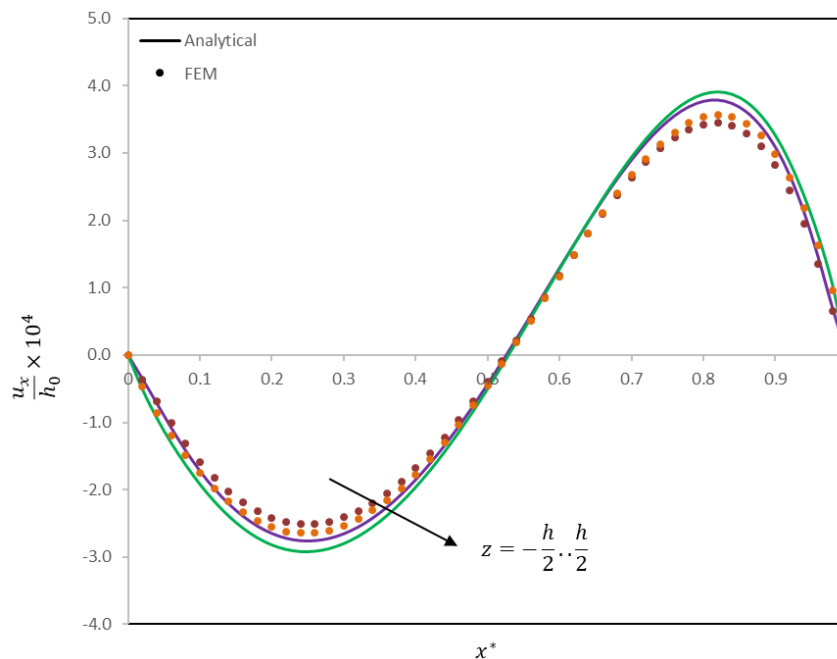


شکل ۱۶-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی همگن پیزوالکتریک

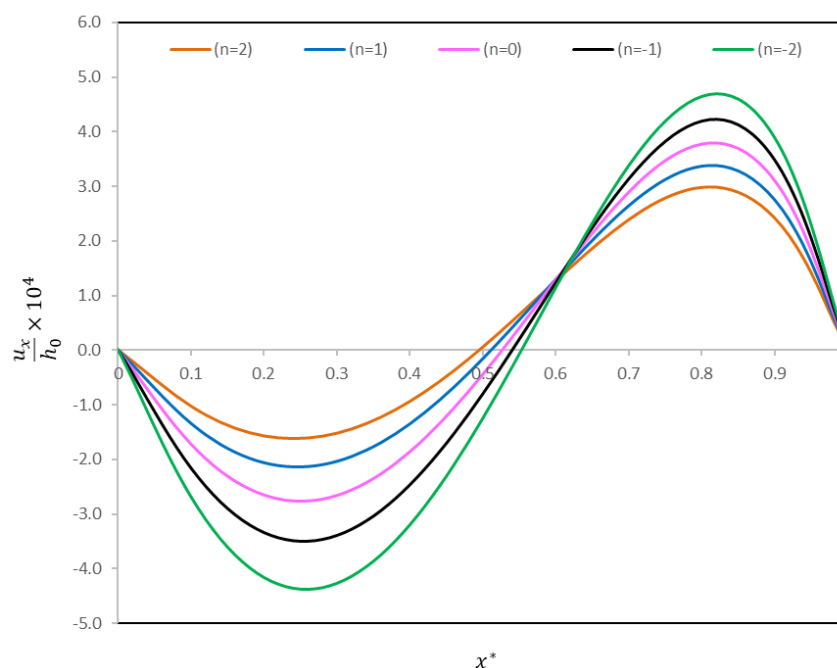


شکل ۱۷-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در سطح داخلی استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک

شکل ۱۸-۵ و شکل ۱۹-۵ به ترتیب توزیع جابه‌جایی محوری را در استوانه‌ی جدار متغیر همگن پیزوالکتریک و در لایه‌ی میانی استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود؛ با افزایش ثابت ناهمگنی، قدر مطلق مقدار توزیع جابه‌جایی محوری و دامنه تغییرات توزیع جابه‌جایی محوری در داخل استوانه‌ها کاهش می‌یابد.



شکل ۱۸-۵ توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی همگن پیزوالکتریک



شکل ۱۹-۵ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک

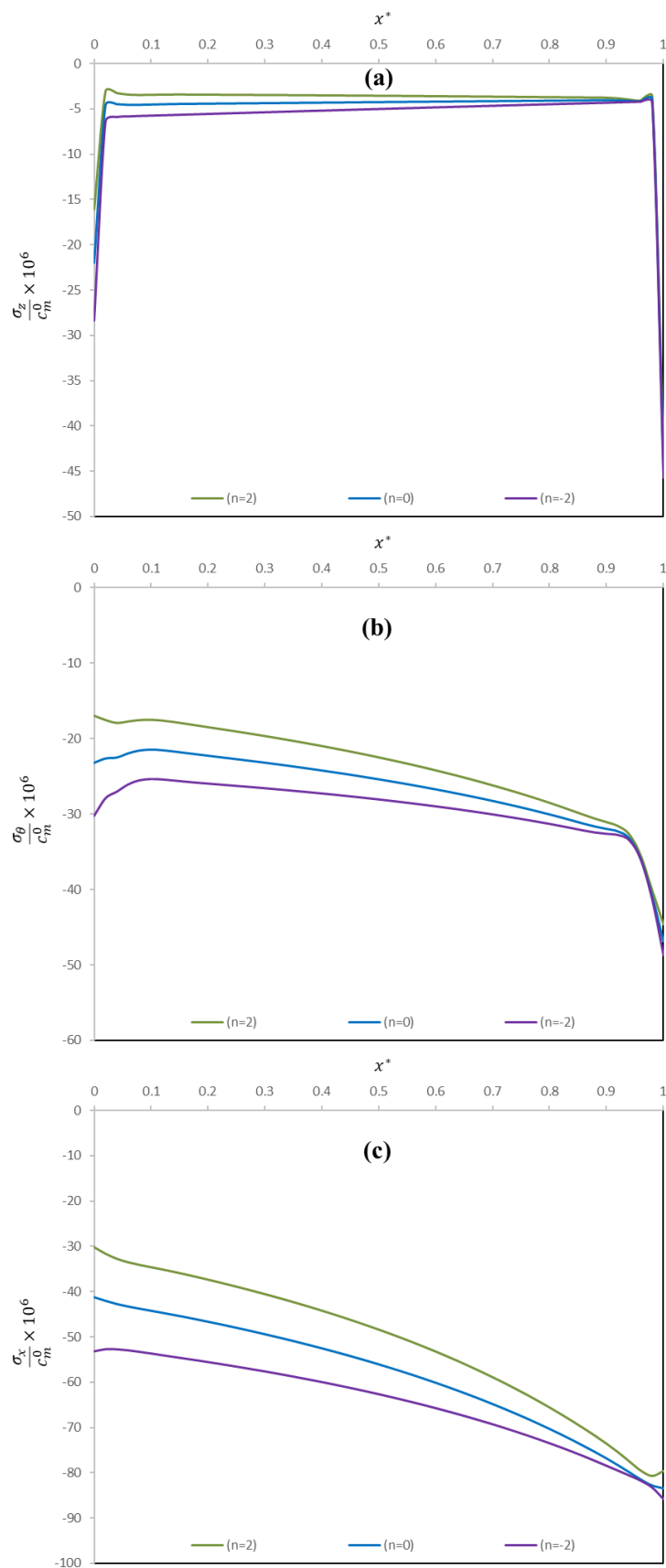
شکل ۲۰-۵ توزیع تنش‌های شعاعی (a)، محیطی (b) و محوری (c) را در لایه‌ی میانی استوانه‌های

ناهمگن پیزوالکتریک نشان می‌دهد. تغییرات ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در مقایسه با

تنش‌های محیطی و شعاعی اندک است و با افزایش مقدار ثابت ناهمگنی مقدار این تنش‌ها در استوانه

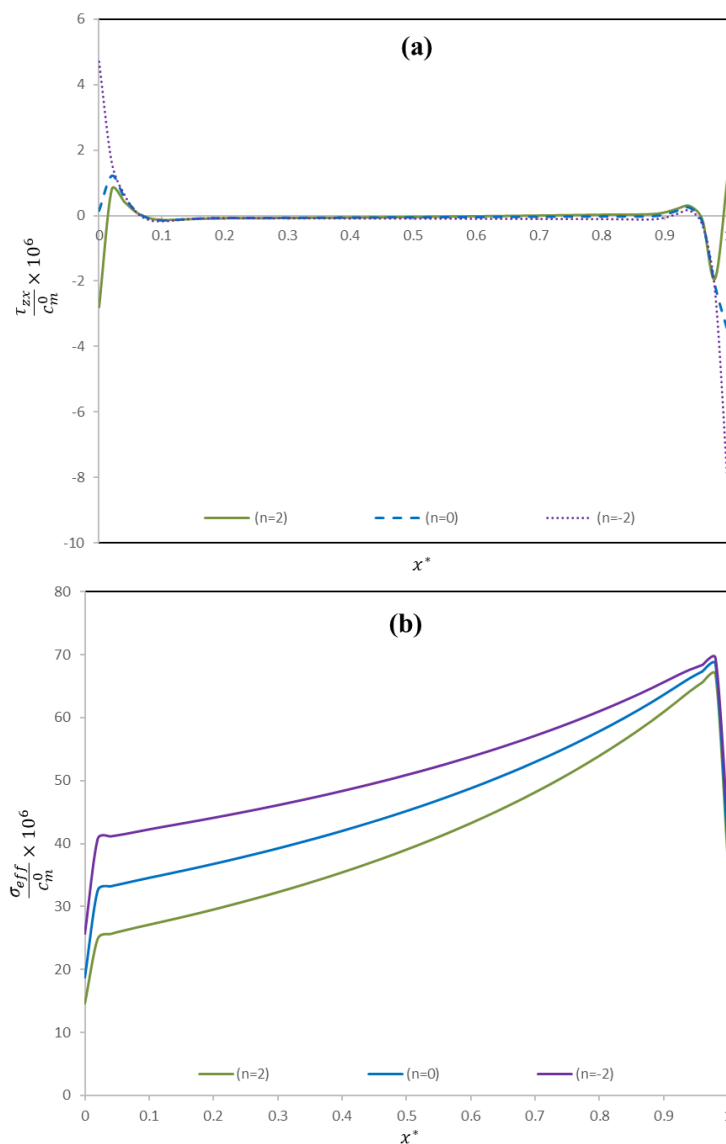
جدار متغیر ناهمگن افزایش می‌یابد. شایان توجه است که تنش نرمال غالب تنش محوری بوده که در

سر بالای استوانه (بخش نازک‌ترین ضخامت استوانه‌ی جدار متغیر) رخ داده است.



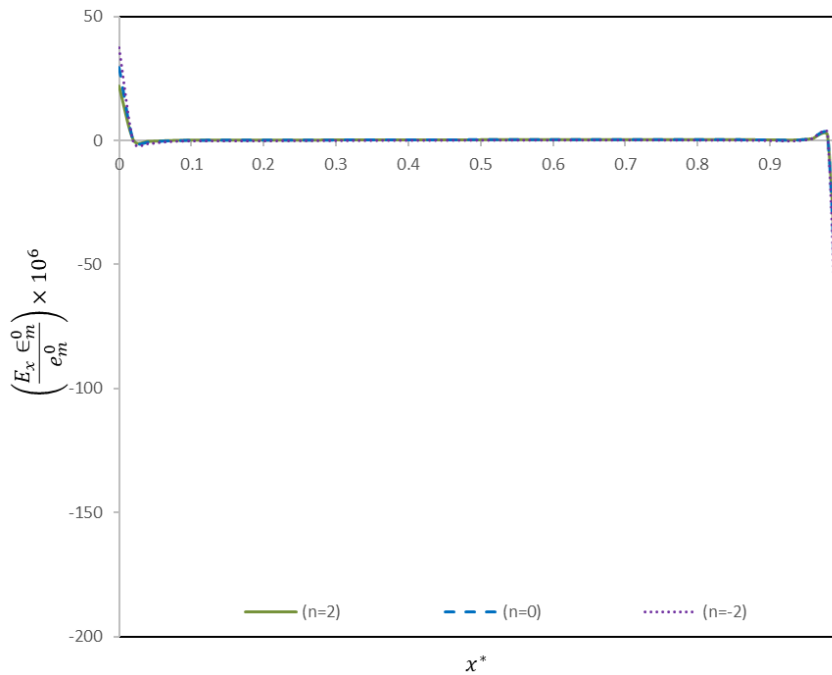
شکل ۵-۲۰ توزیع تنش‌ها در استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن در لایه میانی (a) تنش شعاعی، (b) تنش محیطی و (c) تنش محوری

شکل ۵-۲۱ توزیع تنش‌های برشی (b) و مؤثر (c) را که براساس تئوری شکست فن میسز رابطه‌ی (۴-۲۸) محاسبه شده است، در لایه‌ی میانی استوانه‌های ناهمگن نشان می‌دهد. مقدار تنش برشی در نواحی دور از مرزها و تغییرات آن بر اثر تغییر ثابت تاهمگنی اندکی است و با تقریب خوبی می‌توان از اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی استوانه صرف‌نظر کرد. همچنین، با توجه به غالب بودن مقدار تنش نرمال محوری در بین سایر تنش‌ها رفتار تنش مؤثر نزدیک به رفتار تنش محوری است.

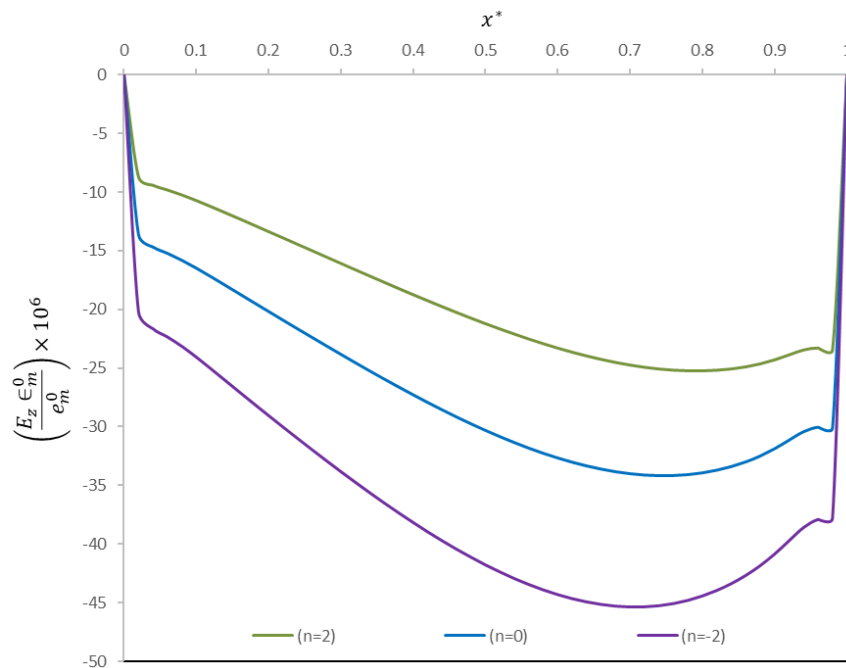


شکل ۵-۲۱ توزیع تنش‌ها در استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن در لایه‌ی میانی (a) تنش برشی و (b) تنش مؤثر
شکل ۵-۲۲ و شکل ۵-۲۳ به ترتیب توزیع مولفه‌های محوری و شعاعی میدان الکتریکی را داخل

استوانه ناهمگن جدار متغیر نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌شود؛ آثار ثابت ناهمگنی بر روی مؤلفه‌ی محوری میدان الکتریکی ناچیز است، در حالیکه وابستگی رفتار مؤلفه‌ی شعاعی میدان الکتریکی به ثابت ناهمگنی کاملاً مشهود بوده و با تغییر ثابت ناهمگنی می‌توان این مولفه را دچار تغییرات قابل توجه نمود.



شکل ۲۲-۵ توزیع مؤلفه‌ی محوری میدان الکتریکی در لایه‌ی داخلی استوانه‌های ناهمگن



شکل ۲۳-۵ توزیع مؤلفه‌ی شعاعی میدان الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌های ناهمگن

جدول ۵-۱ نتایج حاصل از حل تحلیلی و حل اجزای محدود را مورد مقایسه و بررسی قرار

می‌دهد.

جدول ۵-۱ نتایج عددی در وسط طول استوانه‌ی ناهمگن جدار متغیر پیزوالکتریک

			$n = -2$	$n = 0$	$n = 2$
Middle layer	u_r (mm)	Analytical	0.00428	0.00305	0.00209
		FEM	0.00268	0.00276	0.00286
		Difference (%)	37.5	8.6	36.6
Inner layer	u_r (mm)	Analytical	0.00353	0.00251	0.00172
		FEM	0.00188	0.00218	0.00236
		Difference (%)	46.7	9.9	37.4
Middle layer	σ_{eff} (kPa)	Analytical	4397.2	3900.2	3370.6
		FEM	2305.0	3553.6	4598.8
		Difference (%)	47.6	8.9	36.4
Inner layer	σ_{eff} (kPa)	Analytical	6225.6	3916.3	2400.6
		FEM	7667.2	4148.0	2048.3
		Difference (%)	14.7	5.9	23.2

۵-۵ جمع‌بندی

در این فصل حل تحلیلی برای استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در سطوح داخلی و خارجی و شرایط مرزی الکترومکانیکی در دو سر استوانه ارائه شد. مطالعه عددی برای حالت استوانه جدار متغیر با دو سر گیردار، دارای دمای ثابت مثبت مرجع و دارای پتانسیل الکتریکی صفر انجام شد و آثار ناهمگنی بر روی رفتار الکتروترمو مکانیکی استوانه‌ی جدار متغیر مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفت. نتایج حاصل از کل پژوهش را می‌توان به طور خلاصه بدین شرح ارائه کرد.

۱- در این پژوهش با استفاده از روش انرژی به استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار

متغیر ناهمگن پیزوالکتریک پرداخته شد که در سطوح داخلی و خارجی خود تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی بوده و در دو سر خود دارای شرایط مرزی الکتروترمو مکانیکی هستند. اگرچه روش استفاده شده در استخراج معادلات حاکم روش نسبتاً جامعی است اما گاهی در مواردی که سطوح داخلی یا خارجی تحت شرایط بارگذاری نباشند برای مثال زمانی که یک شفت صلب با قطری بیشتر داخل استوانه جدار متغیر جازنی شده باشد دیگر روش استفاده شده در این پژوهش برای استخراج دستگاه معادلات حاکم کاربرد ندارد. همچنین شرایطی که دمای سطوح داخلی و خارجی استوانه ثابت است که این شرایط زمانی اتفاق می‌افتد که استوانه در سطوح داخلی یا خارجی خود با سیالی در تماس باشد که در حال جوشش یا میعان است.

۲- این پژوهش یک حل تحلیلی سری گونه برای رفتار الکتریکی، حرارتی و مکانیکی ارائه می‌دهد که نسبت به سایر روش‌های حل سری گونه دارای سرعت همگرایی بالا می‌باشد. حل ارائه شده معمولاً با دو جمله از سری خود به همگرایی و دقت قابل قبول در پاسخ می‌رسد و اغلب نیاز به استفاده از جملات مرتبه بالاتر (بیش از مرتبه‌ی دو) را ندارد. لذا این حل دارای حجم محاسبات کمتر، دقت بالاتر و نیاز به زمان کمتر جهت محاسبات نسبت به سایر روشها است. پر واضح است که می‌توان از این حل به عنوان یک تابع هدف جهت بهینه سازی و دست یابی به مقادیر بهینه‌ی مواردی نظیر پروفیل تغییر ضخامت، ثابت ناهمگنی و ... استفاده کرد.

۳- نتایج نشان می‌دهند؛ جهت گیری میدان الکتریکی و شار حرارتی ایجاد شده در داخل جسم بر خلاف جهت گیری میدان جابه‌جایی مستقل از تغییرات ثابت ناهمگنی بوده و با تغییر ثابت ناهمگنی تنها مقادیر میدان الکتریکی و شار حرارتی ایجاد شده در جسم تغییر می‌کنند.

۴- نتایج نشان می‌دهند؛ با اعمال بارگذاری غیر یکنواخت یا تغییر پروفیل ضخامت استوانه جدار متغیر می‌توان جهت شار حرارتی و میدان الکتریکی ایجاد شده در جسم را تغییر داد.

۵- بررسی نتایج نشان داد که در استوانه جدار متغیر ناهمگن الزاماً حداکثر کرنش حرارتی در محل حداکثر دما ایجاد شده رخ نمی‌دهد و می‌تواند در محل دیگری رخ دهد که بستگی به نحوه‌ی

توزیع خواص به‌ویژه ضریب انبساط حرارتی دارد.

۶- بررسی و مقایسه نتایج حاصل از دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد؛ زمانی که تحلیل چندفیزیکی به‌صورت الکتروترمو مکانیکی باشد، اغلب به دلیل اینکه ورودی تحلیل میدان الکترومکانیکی وابسته به نتایج تحلیل میدان حرارتی است؛ بروز اختلاف‌های کوچک در میدان حرارتی منجر به اختلاف‌های نسبتاً بزرگ در پیش‌بینی‌های نتایج الکتروترمو مکانیکی می‌شود. حال آنکه در تحلیل‌های ترمومکانیکی و الکترومکانیکی نتایج به‌دست آمده از دو روش دارای توافق بسیار خوبی می‌باشند.

۷- نتایج نشان می‌دهد؛ ثابت ناهمگنی آثار چشمگیری بر روی میدان دما، کرنش حرارتی، میدان جابه‌جایی و مولفه شعاعی میدان الکتریکی ایجاد شده در داخل استوانه جدار متغیر دارد. با افزایش ثابت ناهمگنی، میدان دما، میدان جابه‌جایی و مولفه شعاعی میدان الکتریکی (میدان الکتریکی) در استوانه کاهش می‌یابد اما کرنش حرارتی در استوانه افزایش می‌شود. لذا در طراحی سازه‌های ناهمگن باید به دنبال مقدار بهینه ثابت ناهمگنی بود زیرا که با کاهش ثابت ناهمگنی ضمن کاهش مطلوب برخی پارامترها ممکن است سایر پارامترها افزایش نامطلوب پیدا کنند که با قیود طراحی ناسازگار باشد.

فصل ۶ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۱-۶ پیش‌گفتار

در این پژوهش به تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، پرداخته شد. در فصل اول، پژوهش‌های گذشته که ارتباطی نزدیک با موضوع این پژوهش داشتند، مورد بررسی و تحقیق قرار گرفتند. در فصل دوم، با استفاده از روش کار مجازی و اصل کمینه سازی انرژی الکتروترمو مکانیکی سیستم، دستگاه معادلات حاکم برای استوانه‌های ناهمگن پیزوالکتریک که در لایه‌ی داخلی و خارجی خود تحت بارگذاری الکتریکی، مکانیکی و حرارتی قرار داشتند، استخراج شد و بی بعد سازی آن انجام گرفت. این دستگاه معادلات (شامل تعادل مکانیکی، الکتریکی و حرارتی)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه ۲ است که با حذف ترم‌های شامل اغتشاشات (ε)، مرتبه‌ی آن ۲ مرتبه کاهش می‌یابد و تبدیل به معادلات جبری می‌شود؛ مطابق تئوری اغتشاشات، این موضوع بیانگر این است که دو لایه مرزی در دو سر پوسته وجود دارد. به عبارتی حل مسئله شامل دو بخش است؛ یک بخش مربوط به حل خارجی در نواحی دور از مرزها و بخش دیگر مربوط به حل داخلی در نواحی مرزی یا دو سر استوانه است. در فصل سوم، تحلیل حرارتی استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن با استفاده از روش تحلیلی تطابق مجانب‌ها زیرمجموعه‌ی تکنیک اغتشاشات انجام شد و نتایج مربوط به توزیع میدان دما، شار حرارتی و کرنش حرارتی مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در فصل چهارم، تحلیل الکتروالاستیک استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک با استفاده از روش تحلیلی تطابق مجانب‌ها انجام شد و نتایج مربوط به توزیع میدان جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی، میدان الکتریکی و تنش‌های ایجاد شده در جسم مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در فصل پنجم، تحلیل الکتروترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن جدار متغیر پیزوالکتریک ارائه شد و نتایج مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در ادامه به بحث و بررسی کلی نتایج این پژوهش پرداخته می‌شود.

۲-۶ بحث و نتیجه‌گیری

در حالیکه استفاده از روش کار مجازی یا کمینه سازی انرژی پتانسیل در سیستم‌های مکانیکی امری رایج و مرسوم است اما استفاده از آن در سیستم‌های الکتریکی و حرارتی به صورت فرمول‌بندی ارائه شده، نسبتاً امری بکر و جدید است که می‌توان از مزایای آن در حل معادلات انتقال حرارت و تعادل الکترواستاتیک استفاده کرد. استفاده از مذکور روش به همراه نظریه‌ی مرتبه‌ی اول، سبب می‌گردد؛ و وضعیت میدان مورد مطالعه نسبت به یکی از متغیرهای مستقل مشخص شود. به عبارتی تعداد متغیرهای مستقل در دستگاه معادلات دیفرانسیل کاهش یابد.

در این پژوهش از حل تحلیلی تطابق مجانب‌ها زیرمجموعه‌ی تکنیک اغتشاشات استفاده شد که نسبت به سایر روش‌های حل سری‌گونه با سرعت بسیار بالاتری همگرا می‌شود. زیرا حل ارائه شده اغلب با دو جمله از سری خود به همگرایی و دقت قابل قبول در پاسخ می‌رسد و نیاز به استفاده از سایر جملات سری را ندارد. لذا حل تحلیلی استفاده شده، حجم محاسباتی و زمان کمتر را برای دستیابی به حل، در مقایسه با سایر روش‌های حل سری‌گونه نیاز دارد. واضح است که به خوبی می‌توان از این حل به عنوان یک تابع هدف جهت بهینه سازی و دست‌یابی به مقادیر بهینه‌ی مواردی نظیر پروفیل تغییر ضخامت، ثابت ناهمگنی و ... استفاده کرد.

همانطور که در فصل‌های سوم، چهارم و پنجم مشاهده شد؛ جهت‌گیری میدان الکتریکی و شار حرارتی ایجاد شده در داخل جسم بر خلاف جهت‌گیری میدان جابه‌جایی مستقل از تغییرات ثابت ناهمگنی است و با تغییر ثابت ناهمگنی تنها مقادیر میدان الکتریکی و شار حرارتی ایجاد شده در جسم تغییر می‌کنند. می‌توان با استفاده از پروفیل بارگذاری غیریکنواخت الکتریکی و حرارتی یا ایجاد تغییر در پروفیل تغییر ضخامت جداره، جهت‌گیری میدان الکتریکی و شار حرارتی ایجاد شده در داخل جسم را تغییر داد.

نتایج تحلیل حرارتی در استوانه‌های ناهمگن نشان می‌دهند؛ الزاماً حداکثر کرنش حرارتی در محل حداکثر دما ایجاد شده در جسم رخ نمی‌دهد و می‌تواند در محل دیگری رخ دهد که بستگی به

نحوه‌ی توزیع ضریب انبساط حرارتی و ضریب هدایت حرارتی دارد. شایان توجه است؛ مقدار و محل ایجاد بیشینه‌ی دما، کرنش حرارتی، میدان جابه‌جایی، تنش‌ها، پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی را در داخل استوانه ناهمگن جدار متغیر پیزوالکتریک می‌توان با استفاده از پروفیل مناسب تغییرات ضخامت جدار استوانه، دستخوش تغییر نمود.

بررسی و مقایسه نتایج حاصل از دو روش تحلیلی و اجزای محدود در فصل‌های سوم، چهارم و پنجم نشان می‌دهد؛ نتایج به دست آمده از دو روش برای تحلیل‌های حرارتی و الکتروالاستیک دارای توافق خوبی هستند اما زمانی که تحلیل چندفیزیکی به صورت الکتروترموالاستیک باشد، به دلیل اینکه نتایج تحلیل میدان الکتروالاستیک وابسته به نتایج تحلیل میدان حرارتی هستند؛ وجود اختلاف جزئی در نتایج میدان حرارتی منجر به بروز اختلاف‌های بیشتر در پیش‌بینی نتایج الکتروالاستیک می‌شود. درحالی‌که نتایج پیش‌بینی شده برای تحلیل‌های ترمومکانیکی و الکترومکانیکی از دو روش دارای توافق خوبی برخوردار می‌باشند.

نتایج فصل‌های سوم، چهارم و پنجم نشان می‌دهد؛ ثابت ناهمگنی آثار چشمگیری بر روی رفتار الکتروترمو مکانیکی استوانه‌های ناهمگن جدار متغیر پیزوالکتریک دارد. با افزایش ثابت ناهمگنی، میدان دما، میدان جابه‌جایی و میدان الکتریکی (مولفه‌ی شعاعی) در استوانه کاهش می‌یابد اما کرنش حرارتی در استوانه افزایش می‌یابد. لذا در طراحی سازه‌های ناهمگن باید به دنبال مقدار بهینه‌ی ثابت ناهمگنی بود زیرا که با کاهش ثابت ناهمگنی ضمن ایجاد دما، میدان جابه‌جایی و میدان الکتریکی کمتر در سازه، کرنش حرارتی و تنش مؤثر بیشتر در آن ایجاد می‌شود که عامل مطلوبی در طراحی نیست.

۳-۶ پیشنهادها

با عنایت به پژوهش انجام شده در گذشته، می‌توان پیشنهادهای مختلفی را جهت انجام پژوهش در آینده ارائه نمود که برخی از این پیشنهادها به قرار زیر است.

- ۱- تحلیل ارتعاشی الکتروترمو مکانیکی استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن با استفاده از نظریه^۳ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول؛
 - ۲- تحلیل کمادشی الکتروترمو مکانیکی استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن با استفاده از نظریه^۳ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول؛
 - ۳- تحلیل غیرخطی خمشی الکتروترمو مکانیکی استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن با استفاده از نظریه^۳ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول؛
 - ۴- تحلیل الکتروترمو مکانیکی استوانه‌های جدار متغیر ناهمگن پیزوالکتریک با در نظرگیری وابستگی خواص به میدان دمایی در جسم؛
 - ۵- تحلیل الکتروترمو مکانیکی استوانه‌های جدار متغیر نامتقارن محوری با استفاده از نظریه^۳ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول؛
 - ۶- تحلیل سه بعدی حرارتی گذرا در استوانه‌های جدار متغیر نامتقارن محوری؛
- موارد مطرح شده تنها بخش کوچکی از مسائل پژوهشی قابل تصور است، چرا که تغییر در تحلیل، بارگذاری، هندسه، جنس و شرایط مرزی هر کدام سبب ایجاد موضوعات بدیع و تازه برای پژوهش در آینده می‌شود.

مراجع

[1] Ventsel E., Krauthammer T.; **Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications**, Marcel Dekker, New York, 2001.

[۲] قنّاد م.; تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت متغیر از مواد ناهمگن FG

تحت فشار داخلی، رساله‌ی دکتری، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده‌ی فنی و مهندسی، ۱۳۸۷.

[3] Ugural A.C.; **Stresses in Plates and Shells**, McGraw-Hill, New York, 1981.

[4] Ugural A.C., Fenster S.K.; **Advanced Strength and Applied Elasticity**, 4th ed., Prentice Hall, New Jersey, 2003.

[5] Mirsky I., Hermann G.; **Axially motions of thick cylindrical shells**, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 97-102, 1958.

[6] Gautschi G.; **Piezoelectric Sensorics: Force, Strain, Pressure, Acceleration and Acoustic Emission Sensors, Materials and Amplifiers**, Springer, Berlin, 2002.

[7] Skoog D.A., Holler F.J., Crouch S.R.; **Principles of Instrumental Analysis**, 7th ed., Cengage Learning, Boston, 2017.

[8] Uchino K.; **Advanced piezoelectric materials: Science and technology**, Woodhead Publishing Limited, Cambridge, 2010.

[۹] قارونی ح.; تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی

مدول الاستیسیته به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، پایان‌نامه‌ی کارشناسی

ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، ۱۳۹۰.

[۱۰] پرهیزکار یعقوبی م.; تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM

پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با توزیع توانی خواص،

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، ۱۳۹۲.

[11] Horgan C.O., Chan A.M.; **The Pressurized Hollow Cylinder or Disk Problem for Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Materials**, *Journal of Elasticity*, Vol. 55, pp. 43-59, 1999.

- [12] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z.; **Elastic Analysis of Heterogeneous Hollow Cylinders**, *Mechanics Research Communications*, Vol. 33, pp. 681-691, 2006.
- [13] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X.; **Exact Solutions of Heterogeneous Elastic Hollow Cylinders**, *Composite Structures*, Vol. 79, pp. 140-147, 2007.
- [14] Tutuncu N., **Stresses in Thick-Walled FGM Cylinders with Exponentially-Varying Properties**, *Engineering Structures*, Vol. 29, pp. 2032-2035, 2007.
- [15] Li X.F., Peng X.L., **A Pressurized Functionally Graded Hollow Cylinder with Arbitrarily Varying Material Properties**, *Journal of Elasticity*, Vol. 96, pp. 81-95, 2009.
- [16] Ghannad M., Zamani-Nejad M.; **Elastic Analysis of Pressurized Thick Hollow Cylindrical Shells with Clamped-Clamped Ends**, *Mechanika*, Vol. 85, No. 5, pp. 11-18, 2010.
- [17] Ghannad M., Zamani-Nejad M.; **Complete Elastic Solution of Pressurized Thick Cylindrical Shells Made of Heterogeneous Functionally Graded Materials**, *Mechanika*, Vol. 18, No. 6, pp. 640-649, 2012.
- [18] Ghannad M., Zamani-Nejad M.; **Elastic Analysis of Heterogeneous Thick Cylinders Subjected to Internal or External Pressure Using Shear Deformation Theory**, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 9, No. 6, pp. 117-136, 2012.
- [19] Ghannad M., Rahimi G.H., Zamani Nejad M., **Elastic analysis of pressurized thick cylindrical shells with variable thickness made of functionally graded materials**, *Composites Part B: Engineng*, Vol. 45, pp. 388–396, 2013.
- [20] Zamani Nejad M., Jabbari M., Ghannad M.; **Elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylinder with variable thickness under non-uniform arbitrarily pressure loading**, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 89, pp. 86–99, 2015.
- [21] Shariyat M., Alipour M., **Analytical Bending and Stress Analysis of Variable Thickness FGM Auxetic Conical/Cylindrical Shells with General Traction**, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, pp. 805-843, 2017.
- [22] Zimmerman R.W., Lutz M.P.; **Thermal stresses and thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder**, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 22, pp. 177-188, 1999.

- [23] Awaji H., Sivakumar R.; **Temperature and Stress Distributions in a Hollow Cylinder of Functionally Graded Material: The Case of Temperature-Independent Material Properties**, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 84, pp. 1059-1065, 2001.
- [24] El-Naggar A., Abd-Alla A., Fahmy M., Ahmed S.; **Thermal stresses in a rotating non-homogeneous orthotropic hollow cylinder**, *Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 41-46, 2002.
- [25] Shao Z.S.; **Mechanical and Thermal Stresses of a Functionally Graded Circular Hollow Cylinder With Finite Length**, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 82, pp. 155-163, 2005.
- [26] Ruhi M., Angoshtari A., Naghdabadi R.; **Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials**, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 28, pp. 391-408, 2005.
- [27] Ootao Y., Tanigawa Y.; **Transient thermoelastic analysis for a functionally graded hollow cylinder**, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 29, pp. 1031-1046, 2006.
- [28] Shao Z., Ma G.; **Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature**, *Composite Structures*, Vol. 83, pp. 259-265, 2008.
- [29] Bahtui A., Eslami M.; **Coupled thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells**, *Mechanics Research Communications*, Vol. 34, pp. 1-18, 2007.
- [30] Heydarpour Y., Malekzadeh P., Golbahar-Haghighi M.R., Vaghefi M.; **Thermoelastic Analysis of Rotating Laminated Functionally Graded Cylindrical Shells Using Layerwise Differential Quadrature Method**, *Acta Mechanica*, Vol. 223, pp. 81-93, 2012.
- [31] Seifi R.; **Exact and Approximate Solutions of Thermoelastic Stresses in Functionally Graded Cylinders**, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 38, pp. 1263–1182, 2015.
- [32] Kouchakzadeh M.A., Entezari A.; **Analytical Solution of Classic Coupled Thermoelasticity Problem in a Rotating Disk**, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 38, pp. 1269–1291, 2015.

- [33] Jabbari M., Zamani Nejad M., Ghannad M.; **Thermo-Elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylindrical pressure vessels with variable thickness under mechanical loading**, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 96, pp. 1–18, 2015.
- [34] Arefi M.; **Two-Dimensional thermoelastic analysis of a functionally graded cylinder for different functionalities by using the higher-order shear deformation theory**, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 56, pp. 494-501, 2016.
- [35] Arefi M.; **Nonlinear thermal analysis of a hollow functionally graded cylinder with temperature-variable material properties**, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 56, pp. 267-273, 2016.
- [36] Ghannad M., Parhizkar Yaghoobi M.; **A Thermoelasticity Solution for Thick Cylinders Subjected to Thermo-Mechanical Loads under Various Boundary Conditions**, *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology*, Vol. 8, pp. 1-12, 2015.
- [37] Moosaie A.; **A Nonlinear Analysis of Thermal Stresses in an Incompressible Functionally Graded Hollow Cylinder with Temperature-Dependent Material Properties**, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 55, pp. 212-220, 2016.
- [38] Arefi M., Faegh R.K., Loghman A.; **The Effect of Axially Variable Thermal and Mechanical Loads on the 2D Thermoelastic Response of FG Cylindrical Shell**, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 39, pp. 1539-1559, 2016.
- [39] Yasinsky A., Tokova L.; **Inverse Problem on the Identification of Temperature and Thermal Stresses in an FGM Hollow Cylinder by the Surface Displacements**, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 40, pp. 1471-1483, 2017.
- [40] Nejad M.Z., Jabbari M., Ghannad M.; **A General Disk Form Formulation for Thermo-Elastic Analysis of Functionally Graded Thick Shells of Revolution with Arbitrary Curvature and Variable Thickness**, *Acta Mechanica*, Vol. 228, pp. 215-231, 2017.
- [41] Jabbari M., Zamani Nejad M., Ghannad M.; **Stress Analysis of Rotating Thick Truncated Conical Shells with Variable Thickness under Mechanical and Thermal Loads**, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 9, pp. 100-114, 2017.

- [42] Mehditabar A., Rahimi G.H., Fard K.M.; **Thermoelastic Analysis of Rotating Functionally Graded Truncated Conical Shell by the Methods of Polynomial Based Differential Quadrature and Fourier Expansion-Based Differential Quadrature**, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2018, pp. 1-19, 2018.
- [43] Soliman A.E., Eltaher M.A., Attia M.A., Alshorbagy A.E.; **Nonlinear Transient Analysis of FG Pipe Subjected to Internal Pressure and Unsteady Temperature in a Natural Gas Facility**, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 66, pp. 85-96, 2018)
- [44] Bidgoli M.O., Arefi M., Loghman A.; **Thermoelastic Behaviour of FGM Rotating Cylinder Resting on Friction Bed Subjected to a Thermal Gradient and an External Torque**, *Australian Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 16, pp. 1-9, 2018.
- [45] Tzou H.S., Howard R.V.; **A Piezothermoelastic Thin Shell Theory Applied to Active Structures**, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 116, pp. 295-302, 1994.
- [46] Tzou H.S., Bao Y., **A Theory on Anisotropic Piezothermoelastic Shell Laminates with Sensor/Actuator Applications**, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, pp. 453-473, 1995.
- [47] Kapuria S., Dumir P.C., Sengupta S., **Exact Piezothermoelastic Axisymmetric Solution of a Finite Transversely Isotropic Cylindrical Shell**, *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 6, pp. 1085-1099, 1996.
- [48] Benjeddou A., **Advances in Piezoelectric Finite Element Modeling of Adaptive Structural Elements: a Survey**, *Computers & Structures*, Vol. 76, pp. 347-363, 2000.
- [49] Pinto Correia I.F., Soares C.M.M., Soares C.A.M., Herskovits J., **Active Control of Axisymmetric Shells with Piezoelectric Layers: a Mixed Laminated Theory With a High Order Displacement Field**, *Computers & structures*, Vol. 80, pp. 2265-2275, 2002.
- [50] Xiao-Hong W., Ya-Peng S., Changqing C., **An Exact Solution for Functionally Graded Piezothermoelastic Cylindrical Shell as Sensors or Actuators**, *Materials Letters*, Vol. 57, pp. 3532-3542, 2003.
- [51] Benjeddou A., Andrianarison O., **A Thermopiezoelectric Mixed Variational Theorem for Smart Multilayered Composites**, *Computers and Structures*, 83, pp. 1266-1276, 2005.
- [52] Ying C., Zhifei S., **Analysis of a Functionally Graded Piezothermoelastic Hollow Cylinder**, *Journal of Zhejiang University-Science A*, Vol. 6, pp. 956-961, 2005.

- [53] Santos H., Soares C.M.M., Soares C.A.M., Reddy J., **A finite element model for the analysis of 3d axisymmetric laminated shells with piezoelectric sensors and actuators**, *Composite Structures*, Vol. 75, pp. 170-178, 2006.
- [54] Wu C.P., Tsai Y.H., **Static Behavior of Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Shells under Electric Displacement and Magnetic Flux**, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, pp. 744-769, 2007.
- [55] Wang H., Ding H., **Control of Stress Response in a Rotating Infinite Hollow Multilayered Piezoelectric Cylinder**, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 77, pp. 11-20, 2007.
- [56] Dai H., Fu Y., Yang J., **Electromagnetoelastic Behaviors of Functionally Graded Piezoelectric Solid Cylinder and Sphere**, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 23, pp. 55-63, 2007.
- [57] Dai H. L., Hong L., Fu Y.M., Xiao X., **Analytical Solution for Electromagnetothermoelastic Behaviors of a Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinder**, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 343–357, 2010,
- [58] Dai H.L., Xiao X., Fu Y.M.; **Analytical Solutions of Stresses in Functionally Graded Piezoelectric Hollow Structures**, *Solid State Communications*, Vol. 150, pp. 763-767, 2010.
- [59] Li X.F., Peng X.L., Lee K.Y.; **Radially Polarized Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinders as Sensors and Actuators**, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 29, pp. 704-713, 2010.
- [60] Taotao Z., Zhifei S., **Analytical Solutions of Two Kinds of Piezoelectric Actuators Under Shearing Load**, *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, pp. 115023 (10pp), 2010.
- [61] Wang H., **Parametric Analysis of Composite Cylinders with an Embedded Exponentially Graded Piezoelectric Layer**, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, Vol. 24, pp. 13-28, 2011.
- [62] Wang H., **Elastic Analysis of Exponentially Graded Piezoelectric Cylindrical Structures as Sensors and Actuators**, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 26, pp. 4047-4053, 2012.

- [63] Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J., **Electro Elastic Analysis of a Pressurized Thick-Walled Functionally Graded Piezoelectric Cylinder Using The First Order Shear Deformation Theory and Energy Method**, *Mechanika*, Vol. 18, pp. 292-300, 2012.
- [64] Arefi M., Rahimi G., **Three-Dimensional Multi-Field Equations of a Functionally Graded Piezoelectric Thick Shell with Variable Thickness, Curvature and Arbitrary Nonhomogeneity**, *Acta Mechanica*, Vol. 223, pp. 63-79, 2012.
- [65] Dai H.L., Dai T., Zheng H.Y., **Stresses Distributions in a Rotating Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinder**, *Meccanica*, Vol. 47, pp. 423-436, 2012.
- [66] Li F.M., Song Z.G., Chen Z.B., **Active Vibration Control of Conical Shells Using Piezoelectric Materials**, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 18, pp. 2234-2256, 2012.
- [67] Wu C.P., Tsai T.C., **Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method**, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 1910-1930, 2012.
- [68] Arefi M., Rahimi G., Khoshgoftar M., **Exact Solution of a Thick Walled Functionally Graded Piezoelectric Cylinder Under Mechanical, Thermal and Electrical Loads in The Magnetic Field**, *Smart Structures and Systems*, Vol. 9, pp. 427-439, 2012.
- [69] Fesharaki J.J., Fesharaki V.J., Yazdipoor M., Razavian B., **Two-Dimensional Solution for Electro-Mechanical Behavior of Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinder**, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 5521-5533, 2012.
- [70] Shah P., Ray M., **Active Control of Laminated Composite Truncated Conical Shells using Vertically and Obliquely Reinforced 1-3 Piezoelectric Composites**, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 32, pp. 1-12, 2012.
- [71] Loghman A., Parsa H., **Exact Solution for Magneto-Thermo-Elastic Behaviour of Double-Walled Cylinder Made of an Inner FGM and an Outer Homogeneous Layer**, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 88, pp. 93-99, 2014.
- [72] Wang H.M., **Electro-Elastic Analysis of Fiber-Reinforced Multilayered Cylindrical Composites With Integrated Piezoelectric Actuators**, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 84, pp. 491-503, 2014.

- [73] Jabbari M., Aghdam M. B., **Asymmetric Thermal Stresses of Hollow FGM Cylinders with Piezoelectric Internal and External Layers**, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 7, pp. 327–343, 2015.
- [74] Dai H. L., Jiang H. J., **Magnetothermoelastic Bending Analysis of a FGM Cylindrical Shell**, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 22, pp. 281–289, 2015.
- [75] Atrian A., Jafari Fesharaki J., Nourbakhsh S. H., **Thermo-Electromechanical Behavior of Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinder under Non-Axisymmetric Load**, *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, Vol. 36, pp. 939–954, 2015.
- [76] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M. R., **General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads**, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 70, pp. 111–118, 2003.
- [77] Loghman A., Parsa H., **Closed Form Solution for Electro-Magneto-Thermo-Elastic Behaviour of Double-Layered Composite Cylinder**, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 8, pp. 31–44, 2016.
- [78] Dai H.L., Luo W.F., Dai T., Luo W.F., **Exact Solution of Thermoelastoelectric Behavior of a Fluid-Filled FGPM Cylindrical Thin-Shell**, *Composite Structures*, Vol. 162, pp. 411–423, 2017.
- [79] Mehditabar A., Rahimi G., Tarahhomi M., **Thermo-Elastic Analysis of a Functionally Graded Piezoelectric Rotating Hollow Cylindrical Shell Subjected to Dynamic Loads**, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 25, pp. 1068–1079, 2018.
- [80] Parhizkar Yaghoobi M., Ghaffari I., Ghannad M.; **Stress and Active Control Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Material Cylinder and Disk under Electro-Thermo-Mechanical Loading**, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 29, pp. 924–937, 2018.
- [81] Arefi M., Bidgoli E.M.R., **Electro-Elastic Displacement and Stress Analysis of The Piezoelectric Doubly Curved Shells Resting on Winkler's Foundation Subjected to Applied Voltage**, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 26 , pp. 1–14, 2019.

- [82] Mohammadi M., Bamdad M., Alambeigi K., Dimitri R., Tornabene F., **Electro-Elastic Response of Cylindrical Sandwich Pressure Vessels with Porous Core and Piezoelectric Face-Sheets**, *Composite Structures*, Vol. 225, pp. 111119 (pp. 16), 2019.
- [83] Li W., Shen H., **A Layerwise Finite Element Formulation of Laminated Composite Cylindrical Shells with Piezoelectric Layers**, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 32, pp. 731-741, 2018.
- [84] Reddy J.N.; **An Introduction to Continuum Mechanics: with Applications**, Cambridge University Press, New York, 2008.
- [85] Wang X., Zhong Z., **The General Solution of Spherically Isotropic Magneto-electroelastic Media and Its Applications**, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 22, pp. 953-969, 2003.
- [86] Ozisik M.N.; **Heat Conduction**, John Wiley, New York, 1993.
- [87] Reddy J.N.; **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis**, 2nd ed., CRC Press, New York, 2004.
- [88] Nayfeh A.H.; **Introduction to Perturbation Techniques**, John Wiley, New York, 2011.
- [89] Wylie C.R., Barrett L.C.; **Advanced Engineering Mathematics**, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 1995.
- [90] Ansys Co.; **Coupled-Field Analysis Guide**, ANSYS Inc., USA, 2009.

[۹۱] پرهیزکار م.، قنّاد م.؛ تحلیل عددی استوانه‌ای FGM دارای گشودگی از نوع دایروی و

مربعی، یازدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران،

۳-۱ اسفند، ۱۳۹۰.

- [92] Heydarpour Y., Malekzadeh P., Dimitri R., Tornabene F., **Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Cylindrical Panels with Piezoelectric Layers**, *Applied Sciences*, Vol. 10, pp. 1397 (pp. 22), 2020.
- [93] Yang J.; **The Mechanics of Piezoelectric Structures**, World Scientific Publishing, Singapore, 2006.
- [94] Akbari Alashti R., Khorsand M., **Three-Dimensional Dynamo-Thermo-Elastic Analysis of a Functionally Graded Cylindrical Shell with Piezoelectric Layers by DQ-FD Coupled**, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vols. 96-97, pp. 49-67, 2012.

Abstract

In this research, an analytical solution is presented for piezoelectric heterogeneous variable wall cylindrical shells that are subjected to mechanical, thermal, and electrical loads in their inner and outer layers. The non-homogeneity variations of properties are considered as a power function. Using the first-order electric potential theory, the first-order temperature theory, and the first-order shear deformation theory, and applying the energy method, the governing equations for different boundary conditions at the two ends of the cylinder are derived. The governing differential equation system is a system of ordinary differential equations with variable coefficients, which is solved by using the analytical method of the matched asymptotic expansion method of the perturbation technique, for a cylinder with two clamped heads and with specific potential and temperature. The results of the electric potential distribution, temperature, displacement field, and stress distribution for variable wall cylinders are extracted and the non-homogeneity effects of the properties on the electro-thermo-mechanical behavior of the cylinder are investigated and compared with the results predicted by the finite element method. The results show that the non-homogeneity of properties has a significant effect on the electro-thermo-mechanical behavior of the structure and the present analytical solution can be used as an objective function to optimize and, design a structure with optimal behavior.

Key words: varying thickness cylinder, functionally graded piezoelectric material (FGPM), first-order shear deformation theory (FSDT), finite element method (FEM), electro-thermo-mechanical analysis,



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical And Mechatronics Engineering

**Thermo elastic analysis of piezoelectric FGM cylindrical shells
with varying thickness using first-order shear deformation theory**

Mohammad Parhizkar Yaghoobi

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

July 2020