بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

عنوان:

محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترک در یک محیط محدود ارتوتروپیک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری گرین-نقدی و استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته

نگارنده:

محمد کرمی

استاد راهنما

دکتر محمد باقر نظری

بهمن۹۸

تقدیم اثر

این اثر را به خانواده عزیزم ، بخصوص پدر و مادر عزیزم که دعای خیرشان همیشه پشت و پناه من بوده تقدیم می کنم.

محله ما یک رفتگر دارد، صبح که با ماشین از درب خانه خارج می شوم سلامی گرم می کند و من هم از ماشین پیاده می شوم و دستی محترمانه به او می دهم، حال و احوال را می پرسد و مشغول کارش می شود.
همسایه طبقه زیرین ما نیز دکتر جراح است، گاهی اوقات که درون آسانسور می بینمش سلامی می کنم و او فقط سرش را تکان می دهد و درب آسانسور باز نشده برای بیرون رفتن خیز می کند.
به شخصه اگر روزی برای زنده ماندن نیازمند این دکتر شوم، جارو زدن سنگ قبرم به دست آن رفتگر، بشدت لذت بخش تر از طبابت آن دکتر برای ادامه حیاتم است.

"پرفسور سمیعی"

تشکر و قدردانی

اکنون که به یاری پروردگار و یاری و راهنمایی اساتید بزرگ موفق به پایان این رساله شده‌ام وظیفه خود دانسته که نهایت سپاسگزاری را از تمامی عزیزانی که در این راه به من کمک کرده‌اند را به عمل آورم

در آغاز از استاد عزیز جناب آقای دکتر محمد باقر نظری که راهنمایی این پایان نامه را به عهده داشته‌اند و همچنین دوستان خوبم آقایان مهندس بیات و مهندس لطفی که مرا در انجام این کار یاری کردند، کمال تشکر را دارم.

از داوران گرامی جناب آقایان دکتر جعفری و دکتر توزنده جانی که زحمت داوری و تصحیح این پایان نامه را به عهده داشتند کمال سپاس را دارم.

خالصانه از تمامی اساتید و معلمان و مدرسانی که در مقاطع مختلف تحصیلی به من علم آموخته و مرا از سرچشمه دانایی سیراب کرده‌اند متشکرم

از کلیه هم دانشگاهیان و همراهان عزیز، دوستان خوبم نهایت سپاس را دارم .

تعهدنامه

اینجانب **محمد کرمی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترک در یک محیط محدود ارتوتروپیک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری گرین-نقدی و استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته تحت راهنمائی دکتر محمد باقر نظری متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

چکیده:

در این پایان‌نامه، یک محیط اورتوتروپیک محدود تحت شوک گرمایی مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات ترموالاستیسیته دینامیکی کوپل براساس تئوری ترموالاستیسیته گرین-نقدی در نظر گرفته شده، همچنین از روش المان محدود توسعه یافته برای گسسته سازی معادلات در فضا و روش ضمنی نیومارک برای انتگرال‌گیری زمانی استفاده شده است. از توابع غنی‌سازی مکانیکی و دمایی برای مدل سازی ترک در روش المان محدود استفاده شده است. ضرایب شدت تنش با استفاده از روش انتگرال برهم کنش محاسبه شده و برای زوایای مختلف الیاف در یک ماده اورتوتروپیک مقایسه شده است. همچنین نتایج برای چند شعاع مختلف انتگرال‌گیری بررسی شده است. در ادامه توزیع دمای حول نوک ترک که موجب ایجاد آشفتگی در توزیع دما می‌شود؛ براساس دو تئوری گرین-نقدی نوع IIوIII مقایسه شده اند. ضرایب شدت تنش دو مودIوII برای یک صفحه داری ترک لبه‌ای برای زوایای مختلف الیاف با مقاله اسدپور و محمدی اعتبار سنجی شده است . که نتایج از دقت خوبی برخوردار است. همچنین ضرایب شدت تنش در دو مود I و II برای یک صفحه دارای یک ترک داخلی صاف برای یک ماده اورتوتروپیک تحت بارگذاری مکانیکی با نتایج مقاله سانچز اعتبار سنجی شد که نتایج از دقت بالایی برخوردار بود. نتایج برای دو ترک لبه ای صاف و داخلی مایل تحت شوک حرارتی یکنواخت برای زوایای مختلف الیاف مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: ضریب شدت تنش، المان محدود توسعه یافته، تئوری گرین-نقدی، ترموالاستیسیته تعمیم یافته ، شوک گرمایی

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست علامت‌ها

a	طول ترک، (m)
$\mathbf{B^U}$	ماتریس مشتق توابع شکل جابجایی
$\boldsymbol{B^T}$	ماتریس مشتق توابع شکل دمایی
$[\mathbf{C}]$	ماتریس میرایی
$\mathbf{C}_{ijkl}$	تنسور سفتی

E	مدول یانگ، ($N/m^۲$)
$\mathbf{F}$	بردار نیروهای گره‌ای، (N)
F_m	توابع غنی‌سازی نوک ترک، ($m^{۰.۵}$)
$\mathbf{f}$	بردار نیروی حجمی، ($N/m^۳$)
G	مدول برشی
$H_{(z)}$	تابع پله‌ای یکه
J	انتگرال J، (N/m)
J^{aux}	انتگرال J برای میدان کمکی
$[\mathbf{K}]$	ماتریس سختی
K_I	ضریب شدت تنش مود یک، ($N.m^{-۱.۵}$)
K_{II}	ضریب شدا تنش مود دو، ($N.m^{-۱.۵}$)
l	طول مشخصه، (m)
$[\mathbf{M}]$	ماتریس جرم، (kg)
M	انتگرال برهم‌کنش، (N/m)
$\mathbf{m_j}$	بردار نرمال بر مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J

N_I	توابع شکل استاندارد
$\mathbf{n_j}$	بردار نرمال بر مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J
q	تابع وزنی برای محاسبه انتگرال برهم‌کنش
q_I	مقادیر گره‌ای مجهول
h	شعاع ناحیه انتگرال‌گیری، (m)
S_A	گره‌های بریده نشده توسط ترک
S_c	گره‌های غنی‌سازی شده نوک ترک
t	زمان، (s)
$\mathbf{u}$	بردار جابجایی
$\dot{\mathbf{u}}$	بردار سرعت
$\ddot{\mathbf{u}}$	بردار شتاب
w	چگالی انرژی کرنشی، $(N/m^۲)$
w^{int}	چگالی انرژی کرنشی برهم‌کنش، $(N/m^۲)$
$x۱$	مولفه افقی دستگاه مختصات دکارتی
$x۲$	مولفه عمودی دستگاه مختصات دکارتی

T	دما، (K)
T_0	دمای اولیه، (K)

علامت های یونانی

σ	تنسور تنش، (N/m^2)
ρ	چگالی، (kg/m^3)
ε	تنسور کرنش
δ	تابع دلتای کرونیکر
υ	نسبت پواسون
ψ	تابع شکل غنی‌سازی شده برای المان‌های نوک ترک
φ_I	تابع شکل غنی سازی شده برای المان‌های مسیر ترک
$\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{U}}$	توابع شکل جابجایی
$\boldsymbol{\varphi}^{T}$	توابع شکل دما
Γ_s	مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J

κ	ضریب کوپل
$\boldsymbol{\kappa}$	تابع دلتای دیراک
β	مدول تنش دما

بالانویس‌ها

aux	مخفف واژه auxiliary ، مربوط به میدان کمکی
int	مخفف واژه interaction ، مربوط به برهم کنش
s	مربوط به حالت برهم‌نهی

زیرنویس‌ها

۰	مربوط به حالت اولیه
I	شمارنده، مربوط به تابع شکل ، شمارنده مود ضریب شدت تنش
(z)	مربوط به تابع z
m	شمارنده، مربوط به تابع غنی‌سازی نوک ترک
n	شمارنده، مربوط به بردار مجهولات گره‌ای
nm	شمارنده، مربوط به بردار مجهولات گره‌ای

s	مربوط به سطوح مرزی
tip	مربوط به نوک ترک
j	شمارنده، مربوط به بردار نرمال بیرونی
C	نامگذاری برای موقعیت المان‌های نوک

فصل ۱ : مقدمه و مروری بر کارهای پیشین

۱-۱ مروری بر کارهای انجام شده

برخی از قوانین رایجی که براساس مکانیک محیط های پیوسته کلاسیک توسعه یافته‌اند، نمی‌توانند دقیقا پدیده‌هایی را در حالت های خاص توضیح دهند. قانون فوریه یک نمونه شناخته شده است، که ممکن است برای مطالعه مسائل هدایت حرارت ساده مناسب باشد، اما نتایج ضعیفی را در برخورد با مسائل شوک حرارتی ارائه می دهد. قانون فوریه پیش بینی می کند که اگر یک ناحیه محدود در یک محیط پیوسته بی نهایت در معرض یک شوک حرارتی قرار گیرد، اثر آن در همه جا در همان زمان احساس می شود.که این اصل علیت را نقض می کند[۱]. انتشار موج گرما ابتدا در سال ۱۹۴۶ گزارش شد. سپس انرژی گرمایی با سرعت محدود در مایع هلیومII شناسایی شد[۲].علاوه بر این، مشاهدات تجربی نشان دهنده سرعت محدود موج گرما در مسائل اساسی[۳] و همچنین هدایت گرما در زمان بسیار کوتاه است[۴]. به لحاظ تئوری، سرعت انتقال انرژی حرارتی در نظریه ی ترموالاستیسیته کلاسیک (CTE)، بی نهایت است. بنابراین، برخی از نظریه های ترموالاستیسیته پیشنهاد شده که در آن انتشار انرژی حرارتی با سرعت محدود انجام می‌شود[۵-۸]. معمولاً شوک حرارتی با استفاده از راه‌حل تحلیلی برای پروفایل های دما مدل‌سازی می‌شود [۹] شرایط مرزی گرمایی برای این راه‌حل ممکن است تغییرات آنی در دمای سطح ، ضریب انتقال حرارت جابجایی اجباری ،یا نرخ گرمایش(سرمایش) ثابت باشد . بسیاری از مطالعات پیشین بر روی مسائل حرارتی ، شوک حرارتی سازه‌های کامپوزیتی یا نیمه تقویت‌شده با فیبر را مورد بررسی قرار دادند . به عنوان مثال ، لیسین [۱۰] مسئله شوک حرارتی اولیه را فرمول‌بندی کرد و دریافت که حل معادلات ان مشابه حل معادلات فوریه با ضریب انتشار اصلاح‌شده است. دیوتو و کیل[۱۱] شکل مجانب زمانی دقیق یک مساله متقارن محوری را در مرز فضای نیمه الاستیک به دست آوردند. مخرجی و سینها [۱۲] پاسخ دینامیکی کوپل شده یک صفحه کامپوزیتی را که با استفاده از روش اجزای محدود در معرض یک شوک حرارتی قرار گرفت ، بررسی کردند . عزت و یوسف [۱۴] یک مدل سه‌بعدی از ترمو الاستیسیته تعمیم‌یافته را با یک زمان آسایش برای یک مسئله خاص از نیم صفحه در معرض شوک حرارتی و سطح آزاد کشش ایجاد کردند . سارکار و لاهیری[۱۵] یک مساله سه بعدی را برای یک نیم صفحه همگن ، ایزوتروپیک و ترموالاستیک در نظر گرفتند . این نیمه صفحه در معرض یک منبع حرارتی وابسته به زمان در مرز بدون کشش قرار دارد، آن‌ها از تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته براساس مدل گرین-نقدی نوع II [۱۶] (بدون اتلاف انرژی) استفاده کردند .

با توجه به مقاله بیوت نظریه کلاسیک کوپل شده کلاسیک منجر به یک معادله رسانش گرمایی به شکل پارابولیک می‌شود که معادله انتشار نامیده می‌شود . این نظریه توسط بیوت[۱۷] با معرفی عبارت نرخ

کرنش در معادله انتقال حرارت فوریه پیشنهاد شد . او سرعت انتشار محدود را برای موج الاستیک و سرعت بی‌نهایت برای اغتشاش حرارتی را پیش‌بینی کرد .

نظریه‌های مختلف ترموالاستیسیته برای غلبه بر چنین مشکلاتی ارایه شده‌اند (مثلا ، لرد -شولمان [۱۳] و گرین - لیندسی [۱۸]) از وجود سرعت موج گرمایی محدود در جامدات دفاع کردند . بسیاری از محققین این نظریه‌ها را با معرفی یک یا دو زمان آسایش در فرآیند ترموالاستیک و با تغییر معادله هدایت حرارتی فوریه یا با اصلاح معادله انرژی و رابطه نیومن - دوهامل ، توسعه دادند .

نظریه لرد - شولمان بر اساس قانون تغییر در هدایت گرمایی فوریه است و یک زمان آسایش را می‌پذیرد . با این حال ، نظریه گرین - لیندسی ، هر دو معادله انرژی و رابطه نیومن - دوهامل را تغییر می‌دهد و اجازه می‌دهد که دو زمان ارامش انجام شود. در آخر ، گرین و نقدی [۱۶و۱۹]اصلاحات اساسی کافی در معادلات بنیادی که اجازه بهبود یک مرتبه بالاتر از مسائل جریان گرما را می‌دهند ، فراهم می‌کنند . توسعه کاملاً عمومی است و مشخصات واکنش مواد برای پدیده حرارتی براساس سه نوع تابع گرین-نقدی [۲۰-۲۲] قابل مشاهده است . ماهیت این نوع معادلات به گونه ای است که تئوری های مربوطه به صورت خطی می شوند ، نوع I مشابه معادله حرارت کلاسیک (براساس قانون فوریه) است در حالی که نوع های خطی شده انواع II و III اجازه انتشار امواج گرمایی با سرعت محدود را می‌دهند . بردار شار آنتروپی در انواع II و III (یعنی ترموالاستیسیته بدون اتلاف انرژی و گرمازدایی با اتلاف انرژی) از نظر پتانسیل تعیین می‌شود که تنش‌ها را تعیین می‌کند .

روشنی زرمهری به بررسی ضرایب شدت تنش در یک محیط همسانگرد محدود دوبعدی دارای ترک ساکن با استفاده از روش انتگرال برهمکنش و بهره‌گیری از روش المان محدود توسعه‌یافته با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کوپل تعمیم‌یافته بر پایه مدل گرین-لیندزی پرداخت [۲۴] همچنین عصمتی به بررسی رشد ترک در یک محیط محدود همسانگرد در معرض شوک حرارتی با در نظر گرفتن نظریه لرد-شولمان و استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته پرداخت[۲۵] شاهسون نیز ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته گرین-نقدی و با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته را محاسبه کرد [۲۶] لطفی نیز ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود اورتوتروپیک ترک دار تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته لرد شولمان و استفاده از روش المان محدود توسعه یافته را محاسبه کرد.[۲۷] سانچز و همکاران به کمک روش المان مرزی ، ترک را در یک ماده جامد الاستیک دو بعدی و ناهمسانگرد تحت بار دینامیکی بررسی کردند[۲۳].اسد پور و محمدی به توسعه تابع غنی سازی برای شبیه سازی یک ترک در فیلم اورتوتروپیک و با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته پرداخت[۲۸]

۱-۲ خلاصه ای از مباحث ارائه شده این پایان‌نامه

در این پایان نامه ، برای یک صفحه اورتوتروپیک در حالت دوبعدی تنش صفحه‌ای ضرایب شدت تنش دینامیکی تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت به کمک انتگرال مستقل از مسیر برهم‌کنش محاسبه شده است. تئوری ترموالاستیسیته حاکم بر این مسئله تئوری گرین-نقدی نوع GNIII،GNII می‌باشد. نتایج برای یک صفحه بدون ترک ، دارای ترک لبه ای صاف و همچنین برای ترک داخلی مایل برای زوایای مختلف الیاف مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است.

۱-۳ نوآوری این پایان‌نامه

در این پایان نامه ، برای اولین بار ضرایب شدت تنش برای ترک در یک محیط محدود ارتوتروپیک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری گرین-نقدی و استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته محاسبه شده‌است.همچنین نتایج برای دو ترک لبه ای صاف و داخلی مایل به کمک تئوری گرین-نقدی برای یک محیط محدود ارتوتروپیک بررسی شده است.

فصل ۲ روش المان محدود توسعه یافته و انتگرال برهم کنش

۲-۱ مقدمه

در این بخش به معرفی المان محدود توسعه یافته و همچنین روش حل انتگرال برهم کنش می‌پردازیم.

۲-۲ روش المان محدود

روش المان محدود یکی از رایج‌ترین روش‌های عددی برای یافتن جواب‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل جزئی است که در بسیاری از حوزه‌های علوم مهندسی برای مطالعه ، مدل‌سازی و پیش‌بینی رفتار سازه استفاده شده‌است . گستره استفاده از این روش در مهندسی هوا فضا ، صنعت خودرو ، مهندسی مکانیک ، مهندسی عمران ، بیومکانیک ، ژئومکانیک ، علوم مادی و بسیاری دیگر است .

روش المان محدود به منظور پیش‌بینی بارگذاری شکست و هم‌چنین رفتار سازه پس از شکست استفاده می‌شود . الگوریتم‌های محاسباتی که برای تحلیل مجموعه‌های کاملاً غیرخطی معادلات حاکم هستند مواردی را به وجود می‌اورند که در آن‌ها روش اجزا محدود معمولی محدودیت‌هایی را در کاربرد کارآمد این روش ایجاد می‌کند .

روش‌های المان محدود برای بدست آوردن نتایج درست و بهینه اغلب نیازمند راه‌حل‌های ساده هستند . با این حال ، اگر جواب شامل یک رفتار پیچیده باشد ، مانند شیب‌های زیاد ، نقاط تکین در میدان تنش و کرنش ، ناپیوستگی های زیاد در میدان جابجایی مانند اجسام ترک دار ، روش المان محدود برای رسیدن به هم‌گرایی بهینه بسیار هزینه بر و زمان بر می‌شود .

سازه‌های مهندسی که در معرض بارگذاری های قوی قرار می‌گیرند ممکن است منجر به تنش‌هایی بیش ازحد تنش تسلیم در جسم شوند و در نتیجه منجر به شکست و گسترش ان شوند . این شکست‌ها اغلب توسط ترک‌های سطحی یا نزدیک به سطح شروع می‌شوند . این ترک‌ها استحکام مواد را کاهش می‌دهند . این فرآیندهای شکست مواد ، خود را در مواد شبه ترد مانند سنگ و بتن به عنوان قسمت های فرآیند شکست ، نوارهای برشی (موضعی) در فلزات نرم یا ناپیوستگی های ترک گسسته در مواد ترد آشکار می‌سازند . این امر نیازمند مدل‌سازی دقیق و تحلیل دقیق ساختار برای ارزیابی مقاومت واقعی جسم است . علاوه بر آن ، مدل‌های شامل نا پیوستگی و همچنین طراحی این عیوب شکل دیگری از مسائل را نشان می‌دهند که در آن‌ها روش المان محدود یک انتخاب هزینه بر برای رسیدن به هم‌گرایی جواب بهینه است. مدلسازی ترک در سازه‌ها و به ویژه ترک در حال رشد نیازمند مش روش المان محدود برای مطابقت با هندسه ترک و در نتیجه نیاز به بروز رسانی هر زمان به هنگام رشد ترک می‌باشد . این مساله نه تنها از نظر محاسباتی پرهزینه و طاقت‌فرسا است ، بلکه منجر به از دست دادن دقت نیز می‌شود .

روش اجزای محدود توسعه‌یافته روش عددی است که امکان استفاده از توابع غنی‌سازی محلی را فراهم می‌سازد . ترکیب هر تابع ، معمولاً غیر چندجمله‌ای ، از طریق مفهوم افراز واحد تحقق می‌یابد . به همین دلیل امکان استفاده از هر نوع تابعی برای تقریب محلی میدان وجود دارد . این توابع ممکن است شامل هر راه‌حل تحلیلی مساله یا راه‌حل از نتایج آزمایشگاهی تجربی باشند .

اساس غنی‌سازی با ترکیب توابع شکل گرهی همراه با مش و حاصل‌ضرب توابع شکل گرهی با توابع ناپیوسته تشکیل شده‌است .

این ساختار اجازه مدل‌سازی هندسه‌های مستقل از شبکه را می‌دهد . علاوه بر این غنی‌سازی فقط به صورت محلی اضافه می‌شود ، از جمله جایی که باید غنی شود . سیستم جبری حاصل از معادلات شامل دو نوع مجهول است . درجه آزادی کلاسیک و درجات آزادی غنی شده ، افزودن توابع غنی‌سازی با استفاده از مفهوم تقسیم واحد ، حفظ معیاری از پراکندگی در سیستم معادلات را تضمین می‌کند . تمام ویژگی‌های بالا روشی را با مزایای متمایز نسبت به المان محدود استاندارد برای مدلسازی ناپیوستگی های دل‌خواه ارائه می‌دهند . [۴۹]

۲-۳ روش المان محدود توسعه یافته

در ادامه به بررسی روش المان محدود توسعه یافته می‌پردازیم.

۲-۳-۱ مقدمه ای بر روش المان محدود توسعه یافته

روش المان محدود توسعه یافته [۱] مثل روش المان محدود است که درجات آزادی المان‌های نوک ترک افزایش یافته است . این افزایش تعداد المان های نوک ترک برای افزایش دقت جواب ها استفاده می شود.

در روش المان محدود برای هر گره از المان یک تابع شکل تعریف می‌شود، همچنین در حالت دو بعدی هر گره ۲ درجه آزادی دارد. در المان محدود توسعه یافته از همان توابع شکل المان محدود استاندارد استفاده می‌شود و تنها درجات آزادی گره‌های اطراف ترک افزایش پیدا می‌کند ، که این کار بر اساس مفهوم پارتیشن واحد[۲] انجام می‌شود. [**۵۰و۵۱**]

۲-۳-۲ پارتیشن واحد المان‌های محدود غنی شده

اساس روش المان محدود توسعه‌یافته با پارتیشن واحد برای المان‌های محدود غنی شده است. پارتیشن واحد در یک محدوده مشخص مثل Ω، یک مجموعه از توابع شکل $\phi_i(\mathrm{x})$ است به نحوی که معادله (۲-۱) صادق باشد.

$$\sum_{\forall i} \phi_i(x) = 1 \qquad (۲-۱)$$

در معادله فوق x بردار موقعیت است و داریم:

---

[۱] XFEM (Extended Finite Element Method)

[۲] Partition of unity

$$\forall x \in \Omega \qquad (۲-۲)$$

یکی از خواص پارتیشن واحد در المان محدود توسعه یافته هر تابع h که بر حسب بردار موقعیت است را می‌توان به صورت مجموع حاصل‌ضرب توابع پارتیشن واحد در تابع h نوشت . به معادله زیر توجه کنید.

$$\sum_{\forall i} \phi_i(x)h(x) = h(x)$$

به کمک این خاصیت در المان محدود توسعه یافته می‌توان معادله (۲-۱) را به صورت معادله زیر بازنویسی کرد. [۵۰و۵۲]

$$u(x) = \sum_{\forall i} N_i(x)\,\mathrm{u}_i + \sum_{\forall i} \phi_i(x) h_i(x) b_i \qquad (۳-۲)$$

در این رابطه u_i درجات آزادی گره‌های ساده می باشد. منظور از گره‌های ساده گره المان‌هایی است که شامل ترک نمی باشند. N_i نیز توابع شکل در روش المان محدود می باشند. مقدارهای گره‌ای b_i پارامترهای مجهول مجازی هستند که باعث افزایش دقت غنی سازی می شوند. $\phi_i(x)$ تابع شکل در حالت توسعه یافته است.

در حالت کلی توابع شکل برای تقریب مورد استفاده در روش‌های المان محدود ساده (کلاسیک) و تعمیم یافته (XFEM) ممکن است یکسان نباشند؛ اما در حالت کلی می توان از توابع یکسان در حل مسئله استفاده کرد [۵۳].

یکی از مزیت های روش المان محدود توسعه یافته نسبت به سایر روش‌های تحلیل عددی مکانیک شکست ، رشد و موقعیت ترک در این روش کاملا مستقل از مش‌بندی است، فقط باید توجه داشت که نوک ترک نباید روی گره‌ها باشد.

۲-۴ مدل سازی ترک در روش المان محدود توسعه یافته

ابتدا چند تعریف که در مدل‌سازی ترک مورد نیاز است را بیان می‌کنیم، سپس در این بخش مراحل مدل‌سازی ترک در روش المان محدود توسعه یافته شرح داده می‌شود.

در روش المان محدود توسعه یافته المان‌ها و گره‌ها به سه نوع کلی دسته بندی می‌شوند (مشابه شکل ۲-۱) **انواع المان ها:**

1) **المان‌های معمولی،** المان‌هایی که دور از ناحیه ترک هستند.

۲) **المان‌های قطع شده توسط ترک(اسپیلیت)**[1]، المان‌هایی هستند که توسط ترک بریده شده‌اند و ترک در این المان‌ها واقع شده اند.

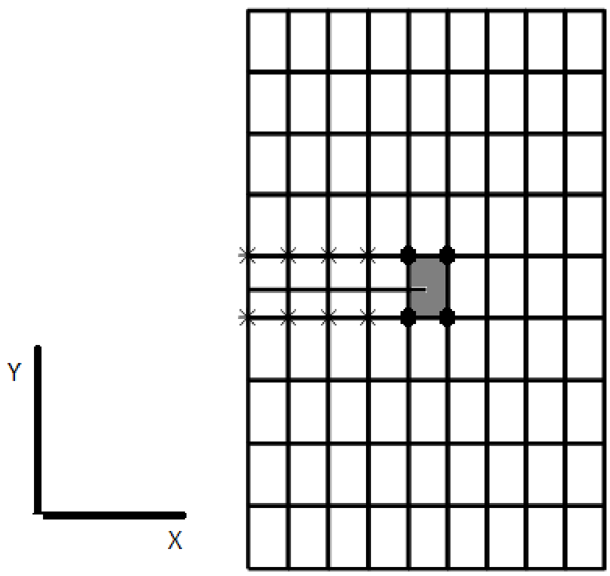
۳) **المان نوک ترک ،**المانی است که نوک ترک در آن حضور دارد.

انواع گره‌ها:

۱) **گره‌های معمولی**[2]، گره‌های المان‌های معمولی هستند.

۲) **گره‌های المان‌های قطع شده توسط ترک ،** گره‌های المان‌هایی که ترک از انها عبور کرده هستند.

۳) **گره‌های نوک ترک،** گره‌های مربوط به المان نوک ترک هستند.



شکل ۲-۱)نمایش یک شبکه المان محدود توسعه یافته شامل ترک و گرههای غنی شده

با توجه به شکل ۲ المان خاکستری رنگ المان نوک ترک و چهار المان سمت چپ آن (که توسط ترک بریده شده‌اند) المان اسپلیت و المان‌های دیگر نیز المان‌های معمولی هستند. چهار گره نوک ترک وجود دارد که با دایره سیاه مشخص شده اند، هشت گره اسپلیت وجود دارد که با ستاره مشخص شده‌اند و ما بقی گره‌ها نیز گره‌های ساده هستند.

[1] Split elements

[2] Normal nodes

۲-۵ روابط غنی سازی

مفهوم و مبنا روش المان محدود توسعه‌یافته مفهوم پارتیشن واحد برای المان‌های محدود غنی شده است. با فرض وجود نقطه ای مانند x در یک محیط دو بعدی درون مدل المان محدود و مجموعه گره‌ای T به صورت $T=\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ که m تعداد گره‌های یک المان هست، در این صورت طبق معادله (۲-۴) تابع تقریبی غنی شده برای میدان جابجایی $u(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود. [۵۴]

$$u^h(x) = \sum_{\substack{n \\ n_I \in T}} N_I(x) u_I + \sum_{\substack{J \\ n_J \in T^E}} N_J(x) h(x) u_J \qquad (۲\text{-}۴)$$

در رابطه (۲-۴) u_i درجات آزادی گره معمولی در مدل المان محدود است و u_j درجات آزادی اضافی تغییر مکانی نسبت به مجموعه استاندارد مدل المان محدود است. درجات آزادی اضافی به ازای هر گره اسپلیت یک و به ازا هر گره نوک ترک به تعداد توابع غنی‌سازی می باشد. N_I تابع شکل مربوط به گره‌های معمولی (T) همچنین N_j تابع شکل در حالت توسعه یافته است. $h(x)$ تابع غنی‌سازی و T^E شامل تمام نقاطی است که ترک را شامل می‌شود. تعداد توابع غنی‌سازی با توجه به نوع مسئله و جنس ماده تعیین می‌شوند .

هر تابعی که در سرتاسر فضا دو بعدی ناپیوسته است که می‌تواند برای مدل کردن یک ترک دلخواه در $u^h(x)$ استفاده شود اما ساده‌ترین تابع،تابع ثابتی است که در طول ترک تغییر علامت می‌دهد؛ بنابراین برای راحتی تابع پله واحد را در نظر می‌گیریم .

$$H(z) = \begin{cases} +1 & ; z > 0 \\ -1 & ; z < 0 \end{cases} \qquad (۲\text{-}۵)$$

در معادله فوق، z تابعی از مکان یک نقطه نسبت به مسیر ترک است. در واقع اگر نقطه ما بالای سطح ترک باشد مقدار تابع برابر ۱ و در غیر این صورت ۱- است. به این تغییر علامت در مکانیک شکست پرش از سطح ترک می‌گویند [۵۴].

۲-۵-۱ روابط تحلیل ترک در المان محدود توسعه یافته

میدان جا به جایی در روش المان محدود توسعه یافته برای یک المان غنی شده شامل ترک را می‌توان به صورت معادله زیر نوشت. تعداد توابع غنی سازی برای ماده اورتوتروپیک معمولا چهار تابع می‌باشد. [۵۵]

$$u^h(x) = \sum_n N_n(x) u_n + \sum_I N_I(x) H(x) b_I + \sum_{k \in J} N_k(x) \left(\sum_{l=1}^{4} C_k^l F_l(\mathrm{r}, \theta) \right) \qquad (۲\text{-}۶)$$

در رابطه فوق عبارت اول مربوط به روش المان محدود ، عبارت دوم برای غنی سازی المان‌های شامل ترک و عبارات سوم جهت غنی سازی المان‌های نوک ترک استفاده می شود. در رابطه فوق $\mathbf{N_n}$، $\mathbf{N_I}$ و $\mathbf{N_k}$ به ترتیب توابع شکل المان‌های معمولی، شامل ترک و نوک ترک هستند، $\mathbf{H(X)}$ نیز تابع هویسایدی است که برای پرش از سطح ترک در المان‌های شامل نوک ترک درنظر گرفته شده‌است، $\mathbf{U_n}$ درجات آزادی گره ساده و b_I و C_k^l درجات آزادی گره های اضافی‌اند. همچنین $F_l\ (\mathrm{r},\theta)$ توابغ غنی‌سازی ماده اورتوتروپیک هستند. این توابع برحسب مختصات محلی نوک ترک ($\mathbf{r\theta}$) تعریف می شوند .

۲-۶-۱ توابع غنی‌سازی جا به جایی برای مواد اورتوتروپیک

جابجایی‌های مماسی نزدیک نوک ترک و میدان تنش در نزدیکی نوک ترک در جسم دو بعدی اورتوتروپیک به‌صورت زیر است [۵۵]:

$$u_i = K_I\sqrt{\frac{2r}{\pi}}g_i^I(\theta) + K_{II}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}g_i^{II}(\theta) \qquad (۲-۷)$$

$$\sigma_{ij} = K_I(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^I(\theta) + K_{II}(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta) \qquad (۲-۸)$$

که در آن، K_I و K_{II} ضرایب شدت تنش مود I و II می‌باشد، توابع $f_{ij}(\theta)$ و $g_i(\theta)$ به صورت زیر بیان شده‌اند [۵۵].

$$f_{11}^I(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \qquad (۲-۹)$$

$$f_{11}^{II}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_2^{\,2}}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{\mu_1^{\,2}}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \qquad (۲-۱۰)$$

$$f_{22}^I(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \qquad (۲-۱۱)$$

$$f_{22}^{II}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \qquad (۲-۱۲)$$

$$f_{12}^{I}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}}\right\}\right] \quad (۱۳-۲)$$

$$f_{12}^{II}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left\{\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}}\right\}\right] \quad (۱۴-۲)$$

$$g_{1}^{I}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left\{\mu_1 p_2\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - \mu_2 p_1\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\right\}\right] \quad (۱۵-۲)$$

$$g_{1}^{II}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left\{p_2\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - p_1\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\right\}\right] \quad (۱۶-۲)$$

$$g_{2}^{I}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left\{\mu_1 q_2\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - \mu_2 q_1\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\right\}\right] \quad (۱۷-۲)$$

$$g_{2}^{II}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left\{q_2\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - q_1\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\right\}\right] \quad (۱۸-۲)$$

مقدار p_k و q_k به صورت زیر بیان می شوند:

$$p_k = a_{11}{\mu_k}^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \longrightarrow k = 1,2 \quad (۱۹-۲)$$

$$q_k = a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} \longrightarrow k = 1,2 \quad (۲۰-۲)$$

که μ ریشه معادله مشخصه زیر می باشد:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (۲۱-۲)$$

در رابطه فوق a_{ij} درایه های ماتریس نرمی کاهش یافته می‌باشند که براساس فرض تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه ای به‌صورت تابعی از ماتریس نرمی می‌باشند [۵۶].

$$a_{ij} = S_{ij} \quad , \quad i, j = 1,2,6 \qquad \text{تنش صفحه ای} \quad (۲۲-۲)$$

$$a_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}} \quad , \quad i, j = 1,2,6 \qquad \text{کرنش صفحه ای} \quad (۲۳-۲)$$

ثابت می‌شود که معادله فوق چهار ریشه موهومی دارد. چهار ریشه این معادله را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\mu_1 = \mu_{1x} + i\mu_{1y} \quad , \quad \mu_3 = \overline{\mu_1}$$
$$\mu_2 = \mu_{2x} + i\mu_{2y} \quad , \quad \mu_4 = \overline{\mu_2} \qquad (۲-۲۴)$$

پس تابع چهار جمله‌ای زیر برای غنی‌سازی گره‌های اطراف نوک ترک مورد استفاده قرار می‌گیرد [۵۷]:

$$\{F_l(r,\theta)\} = \{\sqrt{r}\cos\frac{\theta_1}{2}\sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta_2}{2}\sqrt{g_2(\theta)},$$
$$\sqrt{r}\sin\frac{\theta_1}{2}\sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta_2}{2}\sqrt{g_2(\theta)}\} \qquad (۲-۲۵)$$

که $g_k(\theta)$ و θ_k از روابط زیر بدست می‌آیند [۵۸].

$$g_k(\theta) = \sqrt{(\cos\theta + \mu_{kx}\sin\theta)^2 + (\mu_{ky}\sin\theta)^2} \qquad (۲-۲۶)$$

$$\theta_k = arctg(\frac{\mu_{ky}\sin\theta}{\cos\theta + \mu_{kx}\sin\theta}) \qquad (۲-۲۷)$$

طبق معادلات فوق، توابع غنی سازی برحسب مختصات محلی نوک ترک نوشته شده‌اند. می دانیم که این مختصات محلی کاملا منطبق بر نوک ترک می‌باشند[۵۸].

۲-۱-۱ توابع غنی‌سازی دمایی برای ماده اورتوتروپیک

برای محاسبه توابع غنی‌سازی درجه آزادی دمایی از روندی مشابه روند محاسبه توابع غنی‌سازی جا به جایی استفاده می کنیم.[۶۷]

تابع دما در نوک ترک برای یک جسم اورتوتروپیک به صورت معادله زیر می باشد.[۶۷]

$$T = h_0\sqrt{2ar}\,\mathrm{Re}[\frac{-1}{k}\sqrt{\cos\theta + \mu_t\sin\theta}] \qquad (۲-۲۸)$$

که در معادله فوق .h ضریب هدایت گرمایی و k ضریب هدایت گرمایی و μ_t ریشه معادله مشخصه می باشد.

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \mathrm{k}_{21} = k_{12} \qquad (۲-۲۹)$$

(۲-۳۰)

$$k_{22}\mu_t^2 + (k_{12} + k_{21})\mu_t + k_{11} = 0$$

معادله فوق دو ریشه دارد باید توجه داشت تنها ریشه ای قبول است که بخش موهومی مثبت دارد.

$$\{F_l(r,\theta)\} = \{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}\} \qquad (۳۱-۲)$$

که $g_k(\theta)$ و θ_k از روابط زیر محاسبه می شوند.

$$g = \sqrt{(\cos\theta + \mu\sin\theta)^2} \qquad (۳۲-۲)$$

$$\theta = \arctan(\frac{\mu_t \sin\theta}{\cos\theta + \mu_t \sin\theta}) \qquad (۳۳-۲)$$

درجات آزادی گره‌ها به صورت یکپارچه در قالب بردار u به صورت زیر بیان می شوند.

$$\{u\} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ . \\ . \\ . \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} \qquad (۳۴-۲)$$

تمام درجات آزادی در حالت کوپل داخل یک بردار واحد قراردارند. بنابراین عدم برابری توابع غنی‌سازی باعث اختلال در ابعاد ماتریس توابع شکل برای جا به جایی و دما می‌شود، که این اتفاق سبب حل نشدن

معادلات شده و جوابی بدست نمی‌آید. بنابراین برای برابر کردن تعداد توابع غنی‌سازی دمایی در حالت کوپل هر دو تابع را در تابع زاویه‌ای $\sin(\theta)$ ضرب می‌کنیم که داریم : [۶۷]

$$\{F_l(r,\theta)\} = \{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}\sin(\theta), \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}\sin(\theta)\} \quad (۳۵-۲)$$

۲-۲ روش انتگرال بر هم کنش

این روش یک نمونه از روش های انرژی است که در حل مسائل المان محدود توسعه یافته کاربردی است. این روش را در ادامه بررسی می‌کنیم.

۲-۲-۱ معرفی روش انتگرال برهم کنش

میدان تنش در اطراف نوک ترک در یک جسم جامد از معادله زیر محاسبه می شود.

$$\sigma_{ij} = K_I(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^I(\theta) + K_{II}(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta) \quad (۳۶-۲)$$

در این معادله k_I وk_{II} به ترتیب ضرایب شدت تنش مود اول و دوم هستند.[۵۸و۶۱]

روش محاسبه ضرایب شدت تنش را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم بندی کرد.

- روش‌های مستقیم: روش‌هایی که مقادیر ضرایب شدت تنش در آنها از نتایج عددی به طور مستقیم محاسبه می شوند. به عنوان مثال می توان از روش انطباق نقطه‌ای نام برد که با استفاده از تغییر مکان گره‌ها ضرایب شدت تنش را محاسبه می‌کند.
- روش انرژی: در این روش ضرایب شدت تنش با محاسبه انرژی کرنشی کل محاسبه می‌شود. یکی از روش هایی که در ادامه ما از آن استفاده می‌کنیم ، روش انتگرال برهم‌کنش می باشد.

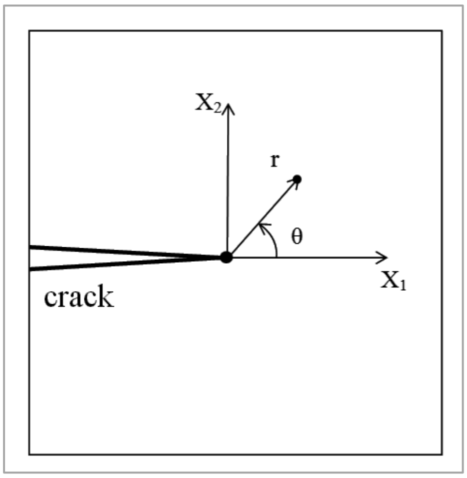
در حالت کلی استفاده از روش‌های با مبنای انرژی نتایج دقیق تری به ما می‌دهند. در این پایان نامه از روش انتگرال برهم‌کنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش در یک ماده اورتوتروپیک استفاده شده است .

برای محاسبه ضرایب شدت تنش از روش انتگرال برهم‌کنش از میدان‌های کمکی مانند میدان جابجایی، میدان تنش و میدان کرنش استفاده می‌کنیم.

۲-۲-۲ میدان‌های کمکی در روش انتگرال برهم کنش

برای استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش باید میدان‌های کمکی جا به جایی u^{aux} ، تنش σ^{aux} و کرنش ε^{aux} محاسبه شوند. میدان‌های کمکی بر اساس کمیت مورد محاسبه ، تعریف می‌شوند. این میدان‌ها معمولا یا از روش‌های عددی ویا روش های تحلیلی قابل محاسبه هستند.در اینجا کمیت مورد نظر ما ضریب شدت تنش هست.

در شکل زیر یک صفحه شامل یک ترک لبه‌ای با مختصات محلی دکارتی $(X1،X2)$و قطبی $(r،\theta)$ مشاهده می‌شود.



شکل ۲-۲ صفحه دوبعدی اورتوتروپیک شامل ترک لبه‌ای به همراه مختصات‌های قطبی و دکارتی محلی نوک ترک

توابع شکل در شکل ۲-۲ در معادلات زیر بیان شده‌است.

$$\sigma_{ij}^{aux} = K_I^{aux}(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{I}(\theta) + K_{II}^{aux}(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta) \qquad (۳۷-۲)$$

$$u_i^{aux} = K_I^{aux}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\, g_i^{I}(\theta) + K_{II}^{aux}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\, g_i^{II}(\theta) \qquad (۳۸-۲)$$

در معادلات فوق K_I^{aux} و K_{II}^{aux} ضرایب شدت تنش مودهای I و II کمکی هستند.

۲-۲-۳ فرمول‌بندی حل با انتگرال برهم کنش

فرم کلی انتگرال J برای یک ترک بدون منبع خارجی ، بصورت زیر بیان می‌شود [۶۰]:

$$J = \lim_{\Gamma_s \to 0} \int_{\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j d\Gamma_s \qquad (۲-۳۹)$$

در رابطه فوق u_i مولفه‌های بردار تغییرمکان ، W چگالی انرژی کرنشی و n_j بردار یکه و عمود رو به خارج منحنی شکل۲-۳ است .چگالی انرژی کرنشی به کمک رابطه زیر بدست می‌اید :

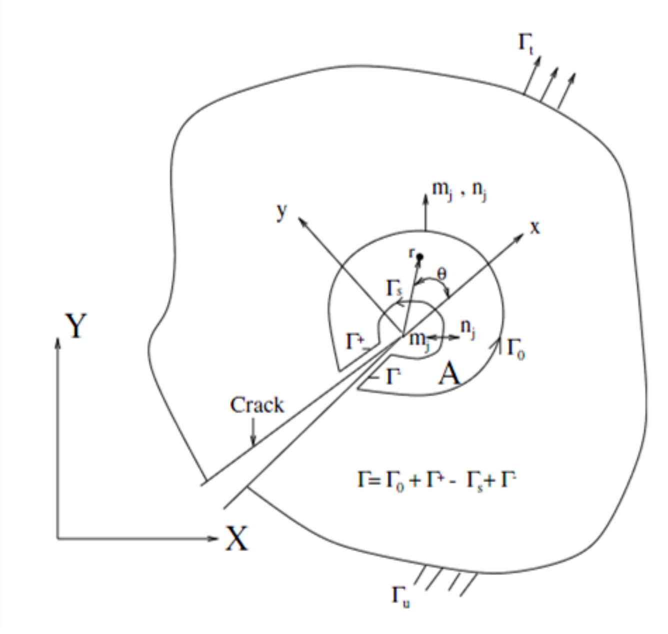
$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}{}^{m} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th}) \qquad (۲-۴۰)$$

که در ان ε_{ij} کرنش کل و ε_{ij}^{th} کرنش حرارتی است.

برای محاسبه ساده تر انتگرال‌های سطح به‌صورت عددی باید از یک انتگرال ناحیه‌ای معادل به شکل زیر استفاده کرد.

$$I = \oint_{\Gamma} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma \qquad (۲-۴۱)$$

که در آن، $\Gamma = \Gamma_o + \Gamma^+ - \Gamma_s + \Gamma^-$ و m_i بردار یکه و عمود رو به خارج کانتور Γ می‌باشد. (یعنی $m_i =$ n_i روی Γ_o و $m_i = -n_i$ روی Γ_s) در این رابطه، q تابع وزنی دلخواهی است که از $q = ۱$ روی Γ_s تا $q =$ ۰ روی Γ_o مانند شکل زیر تغییر می‌کند.



شکل ۲-۳ تبدیل فرم توزیعی انتگرال J به فرم ناحیه‌ای

با فرض اینکه سطوح ترک بدون تنش باشند رابطه انتگرال ناحیه ای معادل به صورت رابطه زیر ساده می‌شود.

$$J = -\lim_{\Gamma_s \to 0} I = -\lim_{\Gamma_s \to 0} \oint_{\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma \tag{۴۲-۲}$$

با استفاده از قضیه دیورژانس و با توجه به تغییرات تابع وزنی q انتگرال ناحیه‌ای معادل به صورت رابطه زیر قابل بیان است:

$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j})_{,j} qdA \tag{۴۳-۲}$$

برای یک سیستم خطی، انتگرال J برای اعمال همزمان بارگذاری‌های اصلی و کمکی بصورت زیر تعریف می شود:

$$J^s = \int_A \left[(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}{}^{aux}) - \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}{}^{aux})\delta_{1j} \right] q_{,j} dA \tag{۴۴-۲}$$
$$+ \int_A \left[(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}{}^{aux}) - \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}{}^{aux})\delta_{1j} \right]_{,j} qdA$$

با جدا سازی توابع کمکی و اصلی ، رابطه‌ی بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$J^{s} = J + J^{aux} + M \qquad (۴۵-۲)$$

که انتگرال J کمکی به صورت زیر قابل بیان است:

$$J^{aux} = \int_A \left(\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}{}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j}\right) q_{,j}\, dA + \int_A \left(\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}{}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j}\right)_{,j} q dA \qquad (۴۶-۲)$$

پس انرژی کرنشی کمکی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$W^{aux} = \frac{1}{2}\sigma_{ik}^{aux}\varepsilon_{ik}^{aux} \qquad (۴۷-۲)$$

همچنین انتگرال بر هم کنش به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود [۶۱]:

$$\begin{aligned} M &= \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}{}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{\text{int}}\delta_{1j}) q_{,j}\, dA \\ &+ \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}{}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{\text{int}}\delta_{1j})_{,j}\, q dA \end{aligned} \qquad (۴۸-۲)$$

که در آن W^{int} تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی برهم‌کنش است و به صورت زیر قابل محاسبه است [۶۱و۵۸]:

$$W^{\text{int}} = \sigma_{ik}\varepsilon_{ik}{}^{aux} \qquad (۴۹-۲)$$

۲-۲-۳-۱ استخراج ضرایب شدت تنش

رابطه بین انتگرال برهم‌کنش و ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} بصورت زیر است [۶۳]:

$$M = 2c_{11}K_I K_I^{aux} + c_{12}(K_I K_{II}^{aux} + K_I^{aux}K_{II}) + 2c_{22}K_{II}K_{II}^{aux} \qquad (۵۰-۲)$$

ثابت های c در معادله فوق بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -\frac{a_{22}}{2}\,\text{Im}\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\mu_2}\right) \\ c_{12} &= -\frac{a_{22}}{2}\,\text{Im}\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}\right) + \frac{a_{11}}{2}\,\text{Im}(\mu_1\mu_2) \\ c_{22} &= \frac{a_{11}}{2}\,\text{Im}(\mu_1 + \mu_2) \end{aligned} \qquad (۵۱-۲)$$

در رابطه بالا a_{ij} اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته است. با انتخاب مناسب میدان‌های کمکی ضرایب شدت تنش، مودI و II از معادلات زیر بدست می‌آید[۶۱].

$$M^{(1)} = 2c_{11}K_I + c_{12}K_{II} \longleftarrow (K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0)$$
$$M^{(2)} = c_{12}K_I + 2c_{22}K_{II} \longleftarrow (K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1) \qquad (۵۲-۲)$$

با حل دو معادله ، دو مجهول بالا بر حسب $M^{(1)}$ و $M^{(2)}$ ، مقادیر ضرایب شدت تنش محاسبه می‌شود[۶۱].

فصل ۳ : استخراج معادلات و تحلیل مسئله ترموالاستیسیته گرین- نقدی نوع II

۳-۱ مقدمه

در این بخش یک مدل از ماده کامپوزیتی بدون ترک تحت شوک حرارتی یکنواخت با تئوری ترموالاستیسیته تعمیم یافته گرین-نقدی نوع II را معرفی و با مقاله ابراهیم عباس و همکاران[۶۲] مقایسه می‌شود ، سپس به تحلیل زوایای مختلف الیاف بین مختصات محلی و مرجع ، همچنین بررسی حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای می پردازیم. در ادامه یک صفحه کامپوزیتی با ترک لبه ای را برای زوایای مختلف الیاف بررسی می‌کنیم. در انتها به تحلیل یک ترک مایل برای زوایای مختلف الیاف می‌پردازیم.

۳-۲ مقدمه ای بر تئوری ترموالاستیسیته گرین - نقدی

از ان‌جایی که تئوری گرین-نقدی ساختار مستحکم ترمودینامیکی دارد ، از این تئوری می‌توان علاوه بر مسائل هدایت گرمایی صلب ، در مسائل کوپل مثل ترموالاستیسیته و نیز سیالات ترموویسکوز استفاده کرد. این تئوری در سه مدل مختلف ارائه شده است. تفاوت مدل های تئوری گرین-نقدی تفاوت در متغیرهای حالت انتخابی برای این تئوری است. منظور از حالت مجموعه های از متغیرهای حالت مستقل است که مقدار لحظه‌ای آنها در یک نقطه از فضا، حالت موضعی جاری جسم در طول فرایند ترمودینامیکی را تعیین می‌کند.در ادامه به تحلیل روابط این تئوری ها می‌پردازیم.

۳-۳ معادلات حاکم بر مسئله و بی بعد سازی معادلات

در این بخش از پایان نامه به بررسی معادلات حاکم و بی بعد سازی آن‌ها می‌پردازیم.

معادلات ترمو الاستیسیته حاکم بر مسئله اورتوتروپیک برای تئوری GNII به صورت زیر است:[۶۳]

$$\rho \ddot{u}_i = C_{ijkl} u_{k,lj} - \beta_{ij} \theta_{,j} \qquad (۳-۱)$$

$$\rho c \ddot{\theta} = \kappa_{ij} \theta_{,ij} - T_0 \beta_{ij} \ddot{u}_{i,j} \qquad (۳-۲)$$

برای بی بعد سازی معادلات فوق از متغیرهای بی بعد زیر استفاده می شود.

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_i &= \frac{x_i}{L} \\
\hat{t} &= \frac{vt}{L} \\
\hat{\theta} &= \frac{\theta}{\theta_0} \\
\hat{u}_i &= \frac{v^2 \rho u_i}{\beta_{11} L T_0}
\end{aligned}
\qquad (۳-۳)
$$

برای تکمیل متغیرها به کمک مشتق گیری داریم:

$$u_{k,lj} = \frac{\beta_{11} T_0}{v^2 \rho L} \hat{u}_{k,lj}$$

$$
\begin{aligned}
\theta_{,j} &= \frac{\theta_0}{L} \hat{\theta}_{,j} \\
\ddot{\theta} &= \frac{v^2}{L^2} \ddot{\hat{\theta}} \\
\dot{u}_{i,j} &= \frac{\beta_{11} T_0}{\rho L} \hat{\dot{u}}_{i,j} \\
\ddot{u}_i &= \frac{\beta_{11} T_0}{\rho L} \hat{\ddot{u}}_i
\end{aligned}
\qquad (۴-۳)
$$

معادلات (۳-۱) و (۳-۲) پس از جایگذاری متغیرهای فوق بی بعد شده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\ddot{\hat{u}}_i = \frac{C_{ijkl}}{\rho v^2} \hat{u}_{k,lj} - \frac{\beta_{ij}}{\beta_{11}} \hat{\theta}_{,j} \qquad (۵-۳)$$

$$\ddot{\hat{\theta}} = \frac{\kappa_{ij}}{\rho c v^2} \hat{\theta}_{,ij} - \frac{\beta_{ij}\beta_{11}}{\rho c v^2} \ddot{\hat{u}}_{i,j} \qquad (۶-۳)$$

که معادله (۳-۱)مربوط به معادله ناویر و معادله (۳-۲)مربوط به معادله انرژی می‌باشد.

ضرایب مجهول معادلات فوق C_{ijkl} و β_{ij} و β_{11} و κ_{ij} می باشد که برای یک ماده اورتوتروپیک به صورت زیر تعریف می‌شوند:[۴۸]

$$C_{ijkl}^{planestrain}=\begin{pmatrix}\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0\\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0\\ 0 & 0 & G_{12}\end{pmatrix} \quad (۷-۳)$$

$$C_{ijkl}^{planestress}=\begin{pmatrix}\frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0\\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}}\end{pmatrix}^{-1} \quad (۸-۳)$$

$$\alpha_{ij}=\begin{Bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{22}\\ 0\end{Bmatrix} \quad (۹-۳)$$

$$\beta_{ij}=C_{ijkl}*\alpha_{ij} \quad (۱۰-۳)$$

پارامتر β_{11} درایه اول ماتریس بتا است که برای حالت کرنش صفحه ای با زاویه الیاف صفر درجه بصورت زیر است.

$$\beta_{11}=\alpha_{11}*\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}+\alpha_{22}*\frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad (۱۱-۳)$$

$$\kappa_{ij}=\begin{bmatrix}\kappa_{11} & 0\\ 0 & \kappa_{22}\end{bmatrix} \quad (۱۲-۳)$$

۳-۳-۱ روابط تبدیل ضرایب برای زوایای مختلف الیاف

در ساخت صفحه‌های کامپوزیتی , لایه‌های کامپوزیتی تقویت شده با الیاف به صورت موازی روی هم قرار می‌گیرند ، اما هر کدام جهت الیاف خود را دارند .

فرض کنید (x، y، z) ، سیستم مختصات استفاده‌شده برای نوشتن معادلات حاکم بر یک چند لایه را نشان می‌دهد ، و همچنین (x_1, x_2, x_3) ، مختصات مادی اصلی یک تک لایه معمولی در یک چند لایه باشد. به طوری که محور x۳ محور اصلی باشد(محوری که لایه ها عمود بر ان هستند).به عنوان مثال z را موازی محور x۳ به عنوان محور اصلی در نظر میگیریم که داریم:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$ (۱۳-۳)

تآثیر تغییرات مختصات در مولفه های تنش به صورت زیر اورده شده است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$ (۱۴-۳)

یا

$$\{\sigma\}_p = [T] * \{\sigma\}_m$$ (۱۵-۳)

تآثیر تغییرات مختصات در مولفه های کرنش به صورت زیر اورده شده است.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$ (۱۶-۳)

یا

$$\{\varepsilon\}_p = [R]^T * \{\varepsilon\}_m$$ (۱۷-۳)

تآثیر تغییرات مختصات در مولفه های ثابت های ماده به صورت زیر اورده شده است.

$$\{\bar{C}\} = [T] * \{C\} * [T]^T$$ (۱۸-۳)

بیشتر تک لایه ها نازک هستند و حالت تنش صفحه ای را تجربه می کنند. برای یک تک لایه در صفحه ی $x_2 - x_1$ مولفه های تنش عرضی(مربوط به جهت ۳) شامل σ_{33}و σ_{23}و σ_{13} می باشند. اگرچه این مولفه های تنش نسبت به مولفه های σ_{11}و σ_{22}و σ_{12} بسیار کوچک هستند ، اما به دلیل ضعیف بودن کامپوزیت های تک لایه تقویت شده با الیاف در جهت محورz می تواند باعث شکست شوند، به همین دلیل , مولفه‌های تنش برشی عرضی در نظریه‌های تغییر شکل برشی نادیده گرفته نمی‌شوند . با این حال در بیشتر معادلات در تئوری ها لایه ها از σ_{33} صرف نظر می شود. بنابراین معادلات ساختاری باید برای این مسئله اصلاح شوند .

ماتریس های انتقال برای حالت تنش صفحه ای به شکل زیر اصلاح می شوند.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{۱۹-۳}$$

همچنین برای حالت کرنش صفحه ای به شکل زیر اصلاح می شوند.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{۲۰-۳}$$

$$\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & -2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۲۱-۳}$$

$$K_{ij}' = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{xy} & K_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$\kappa_{ij}' = \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} \\ \kappa_{xy} & \kappa_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \kappa_{11} & 0 \\ 0 & \kappa_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{۲۲-۳}$$

۳-۳-۲ گسسته سازی معادلات حاکم

در این بخش به گسسته سازی معادلات حاکم می‌پردازیم.

برای سادگی کار، ضرایب زیر را تعریف می‌کنیم:

$$D = \frac{C_{ijkl}{}'}{\rho v^2}$$
$$\hat{\beta} = \frac{\beta_{ij}{}'}{\beta_{11}} \qquad (۳-۲۳)$$
$$\hat{\kappa} = \frac{\kappa_{ij}{}'}{\rho c v^2}$$
$$\hat{\zeta} = \frac{\beta_{ij}{}'\beta_{11}}{\rho c v^2}$$

فرم ماتریسی معادلات پس از گسسته سازی به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} M^{UU} & 0 \\ M^{U\theta} & M^{\theta\theta} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^{UU} & K^{U\theta} \\ 0 & K^{\theta\theta} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} U \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_U \\ F_\theta \end{Bmatrix} \qquad (۳-۲۴)$$

که داریم:

$$M^{UU} = \oint_{\Omega^e} N^{U^T} * N^U * d\Omega$$
$$M^{U\theta} = \oint_{\Omega^e} B^{U^T} * \hat{\xi} * N^\theta * d\Omega$$
$$M^{\theta\theta} = \oint_{\Omega^e} N^{\theta^T} * N^\theta * d\Omega$$
$$K^{UU} = \oint_{\Omega^e} B^{U^T} * D * B^U * d\Omega \qquad (۳-۲۵)$$
$$K^{U\theta} = \oint_{\Omega^e} B^{\theta^T} * \hat{\beta} * N^U * d\Omega$$
$$K^{\theta\theta} = \oint_{\Omega^e} B^{\theta^T} * \hat{\kappa} * B^\theta * d\Omega$$

برای فرم GNII ماتریس C که مربوط به ترم مستهلک کننده است برابر صفر است.
توابع تقریب دو بعدی را به صورت زیر داریم:

$$u_i^h = N^U U_i = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & . & . & . & . & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & . & . & . & . & 0 & N_n \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ . \\ . \\ . \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix} \qquad (۲۶-۳)$$

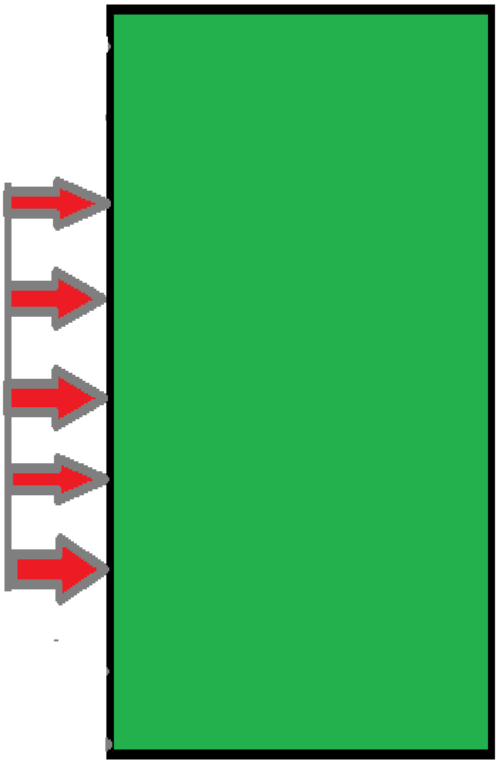
$$\theta^h = N^\theta * \theta_i = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & . & . & . & N_n \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \theta_n \end{Bmatrix}$$

$$B^u = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & . & . & . & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & . & . & . & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & . & . & . & N_{n,y} & N_{n,x} \end{bmatrix} \qquad (۲۷-۳)$$

$$B^\theta = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & . & . & . & N_{n,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & . & . & . & N_{n,y} \end{bmatrix}$$

۴-۳ مشخصات و هندسه مسئله

هندسه مسئله این تحقیق مشابه مسئله ابراهیم عباس و همکاران [۶۲] می‌باشد. در این مسئله یک نیم صفحه کامپوزیتی را تحت شوک حرارتی یکنواخت در یک طرف (سمت چپ) در نظر گرفته‌ایم. در این مسئله عرض بدون بعد ۱و طول بدون بعد ۴ می باشد که در شکل زیر آورده شده‌است.



شکل ۳-۱ نمایش شکل مسئله و نوع نحوه بارگذاری

در جداول زیر مشخصات ماده اورتوتروپیک و همچنین گام زمانی و زمان انتهایی مسئله ، ابعاد مسئله و همچنین شرایط بارگذاری داده شده است.

جدول ۳-۱.مشخصات مسئله(هندسی –مکانیکی)

نام پارامتر	واحد	اندازه
طول بدون بعد	-	۴
عرض بدون بعد	-	۱
مش بندی در راستای x	-	۴۰
مش بندی در راستای Y	-	۱۶۰
گام زمانی	S	۰/۰۱
زمان نهایی	S	۰/۲و۰/۱

E۱	GPa	۱۱۵
E۲	GPa	۴/۹۰
G۱۲	GPa	۶۶/۳۸
ν_{12}	-	۰/۰۲۸

جدول ۳-۲.مشخصات حرارتی ماده

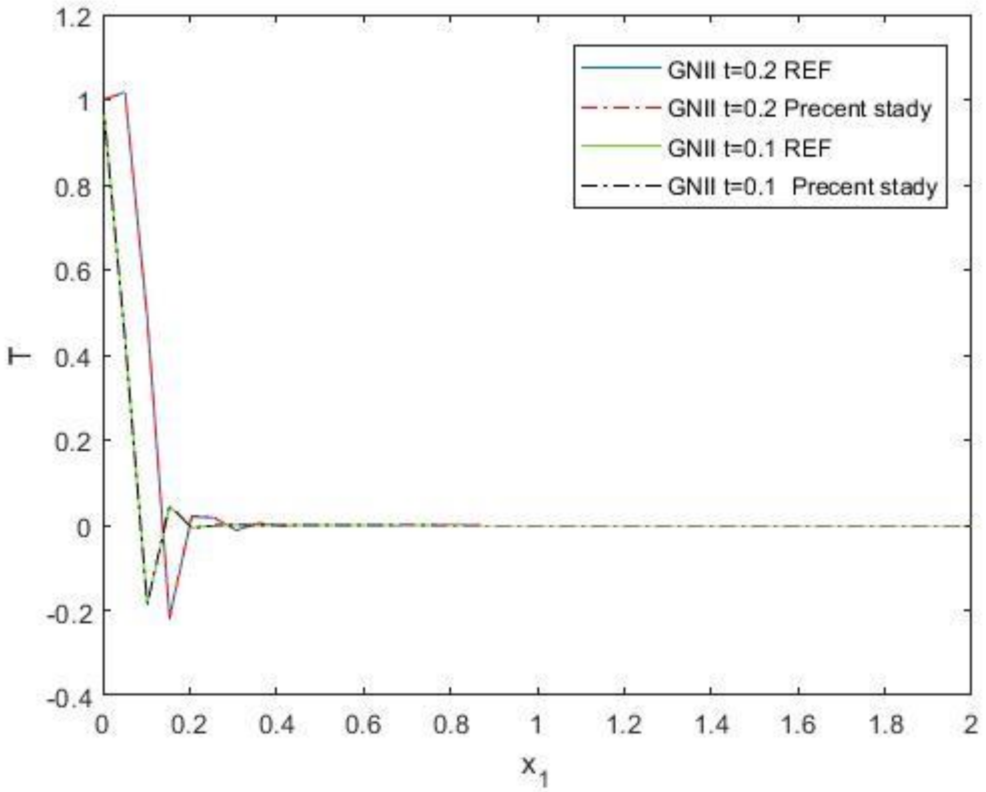
نام پارامتر	واحد	اندازه
K۱۱	W/mK	۹۲/۱
K۲۲	W/mK	۹۶/۳
κ_{11}	-	۰/۲۵
κ_{22}	-	۰/۲۵
α_{11}	m/K	۰/۱۷e-۴
α_{22}	m/K	۰/۱۵e-۴
T۱	-	۱
T۰	درجه سانتی گراد	۱۰-۲۷۳
ρ	kg/m^۳	۲۶۶۰

۳-۵ نتایج

در این مسئله نتایج را برای یک صفحه ارتوتروپیک بدون ترک که تحت یک شوک حرارتی در سمت چپ خود می‌باشد (مطابق **شکل** ۳-۱) و با اطلاعات ذکر شده در جداول فوق (جداول ۳-۱و ۳-۲) برای زاویه الیاف صفر درجه (on axis) به کمک روش المان محدود محاسبه شده است. از تئوری ترموالاستیسیته تعمیم یافته گرین نقدی نوع ۲(GN II) برای بدست اوردن این نتایج استفاده شده است. ضمناً این مثال

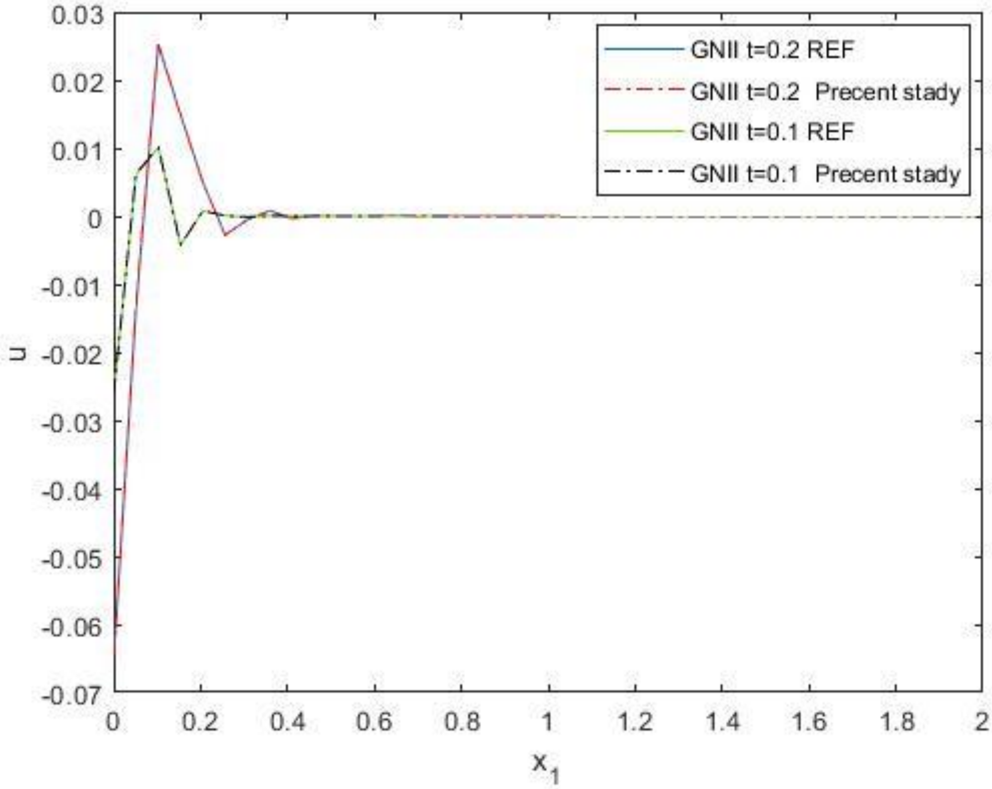
در حالت تنش صفحه‌ای بررسی می‌شود. نتایج بدست آمده با مقاله ابراهیم عباس[۶۲] مقایسه و اعتبار سنجی شده است.

در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای دمای صفحه در راستای محور X می پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان‌های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می‌کنیم.نتایج نشان می‌دهد ،که نتایج این دو روش حل همگرایی خوبی نسبت به هم دارند.



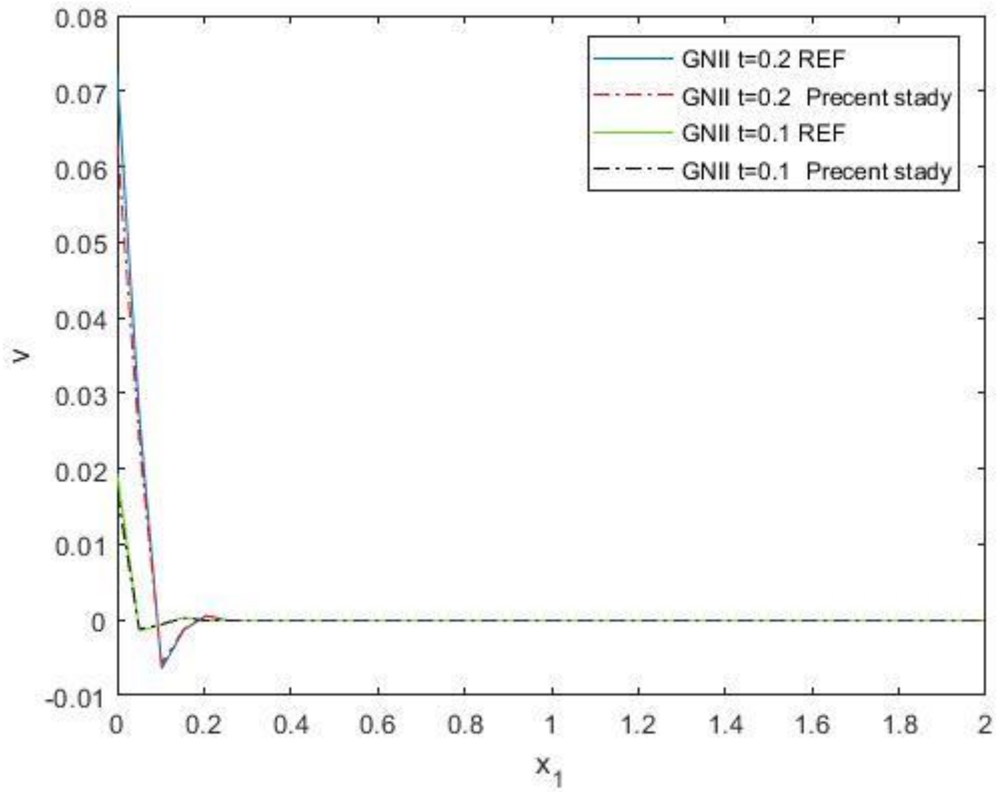
شکل ۳-۳ مقایسه تغییرات دمایی در جهت X۱برای GNII

در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای جابجایی افقی می‌پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می‌کنیم.که نتایج این دو روش حل همگرایی خوبی نسبت به هم دارند.



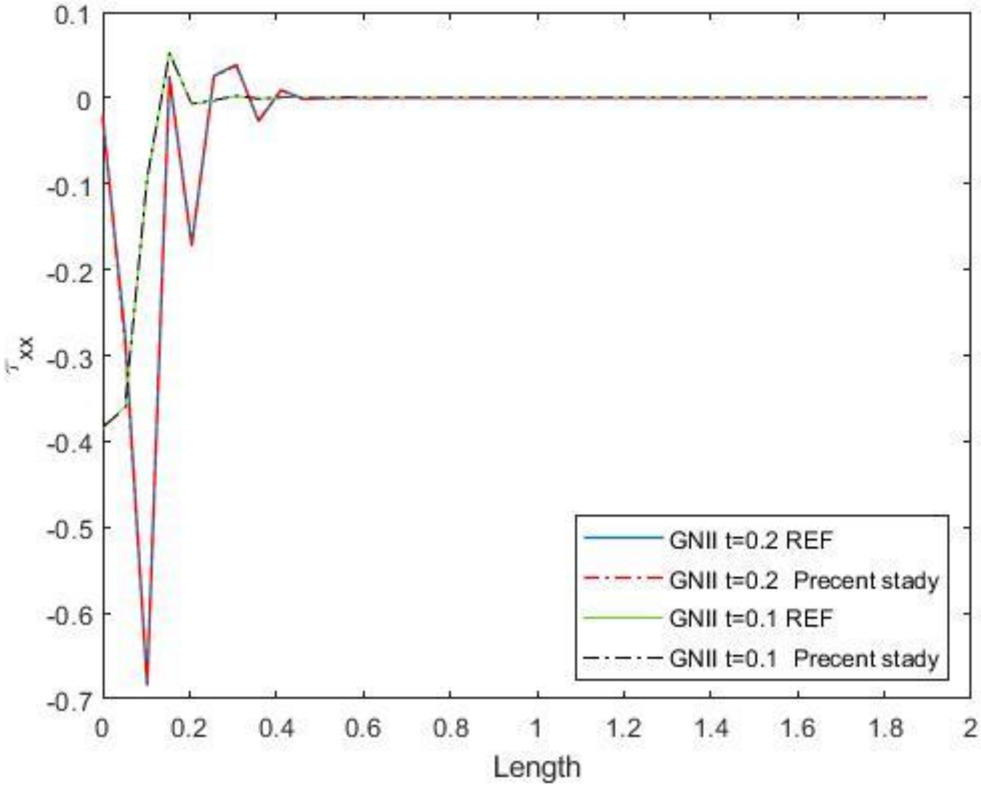
شکل ۳-۴ مقایسه جابجایی در راستای X در جهت X۱برای GNII

در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای جابجایی عمودی(در راستای Y) می‌پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می‌کنیم.که نتایج این دو روش حل همگرایی کمتری نسبت به دو متغیر قبلی دارند، اما بازهم نتایج همگرایی خیلی خوبی نسبت به نتایج مقاله دارد.



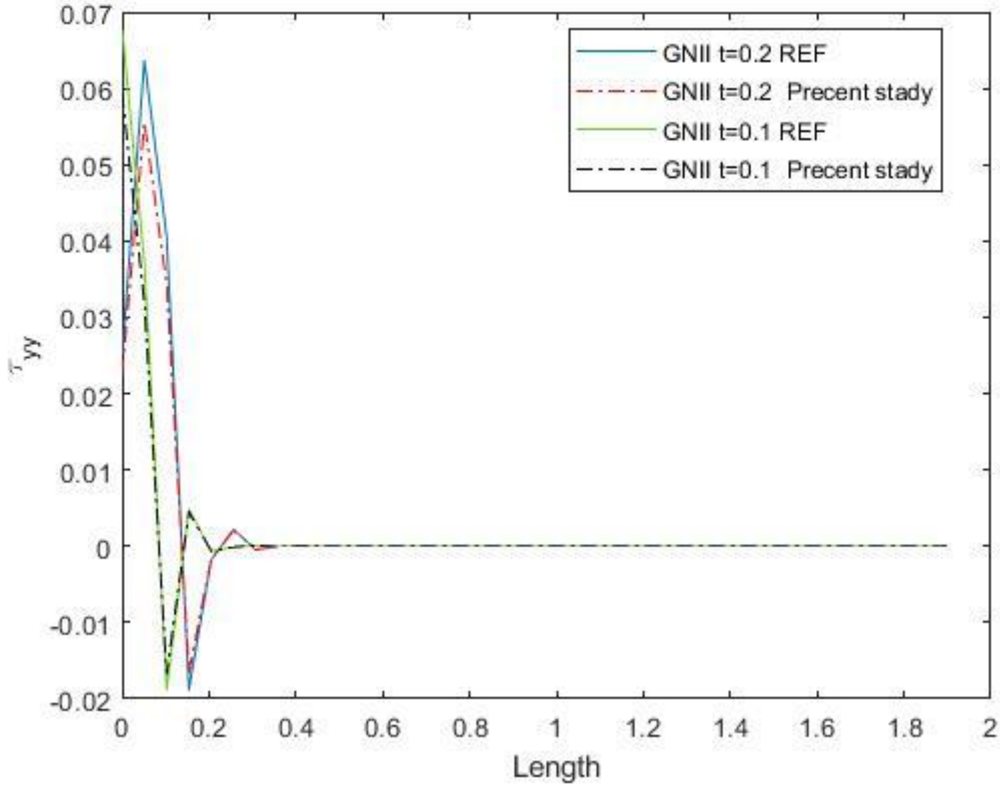
شکل ۳-۵ مقایسه جابجایی در راستای Y در جهت X۱ برای GNII

در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای σ_{xx} می‌پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می‌کنیم.که نتایج این دو روش حل در زمان t=۰/۱ نتیجه همگرایی مناسبی نسبت به هم دارند اما در زمان t=۰/۲ کمی دیرتر به همگرایی می‌رسد.



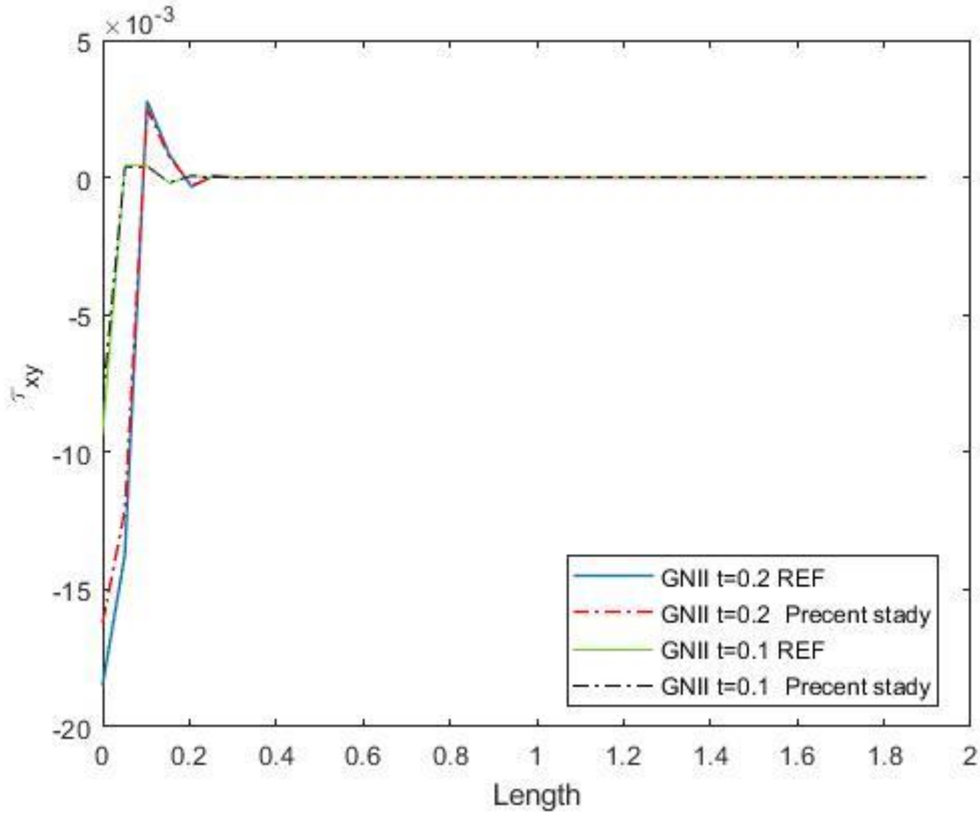
شکل ۳-۶ مقایسه σ_{xx} در جهت X۱ برای GNII

در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای σ_{yy} می‌پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می‌کنیم.که نتایج این دو روش حل در هر دو زمان خوب است.



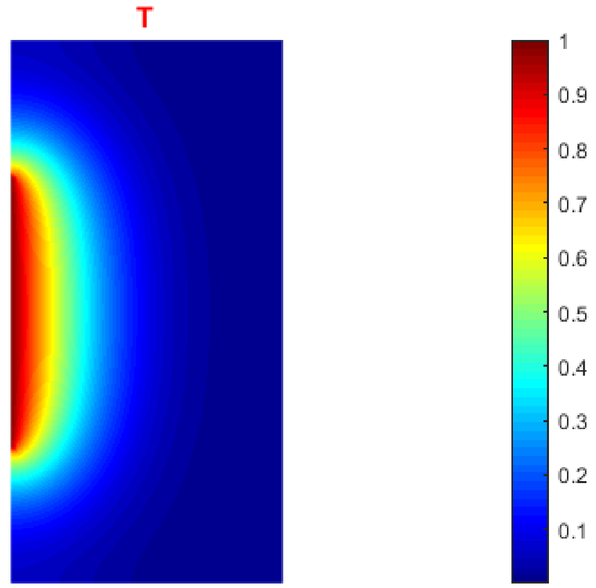
شکل ۳-۷ مقایسه σ_{yy} در جهت X۱برای GNII

در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای σ_{xy} می‌پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می‌کنیم.که نتایج این دو روش حل در زمان t=۰/۱خوب است(در کل دورتر از دو پارامتر دیگر تنش) اما نتایج در زمان t=۰/۲ دیرتر به همگرایی می رسد(تقریباً در طول ۰/۴).



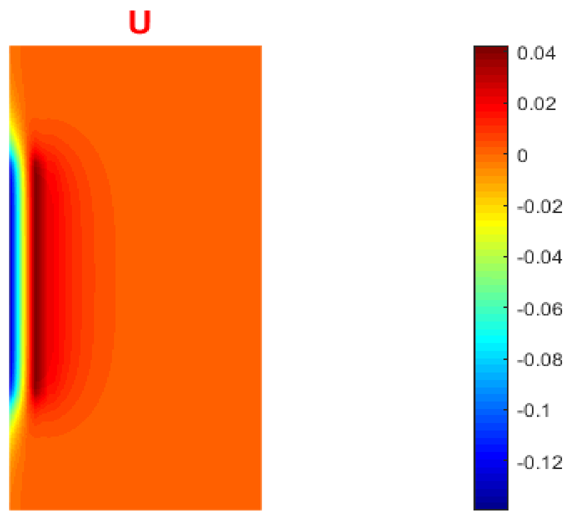
شکل ۳-۸ مقایسه σ_{xy} در جهت X۱برای GNII

در شکل زیر توزیع دمایی رسم شده که تغییرات ان بخصوص در محل اعمال شرایط مرزی قابل مشاهده است(بخش قرمز رنگ)



شکل ۳-۹ ***نمایش*** توزیع دما در صفحه

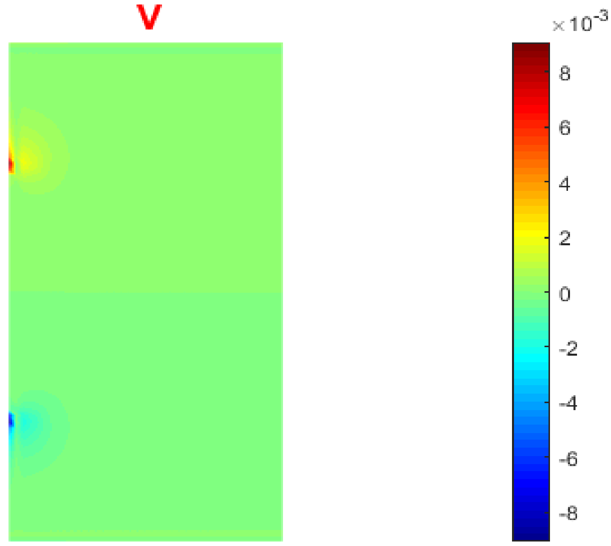
در شکل زیر توزیع جابجایی در راستای x مشخص شده که مقادیر آن در ابتدای شرط مرزی منفی و سپس به سمت مثبت و در انتها نزدیک به صفر همگرا می‌شود.



شکل ۳-۱۰ تغییرات جابجایی در راستایx

در شکل زیر توزیع دمایی را در راستایy رسم شده که در کل مقدار ان ناچیز است(بجز در نزدیکی شرایط مرزی و اعمال نیرو).همچنین تقارن در اعمال بارگذاری و برابر بودن اندازه جابجایی در ابتدا مشهود

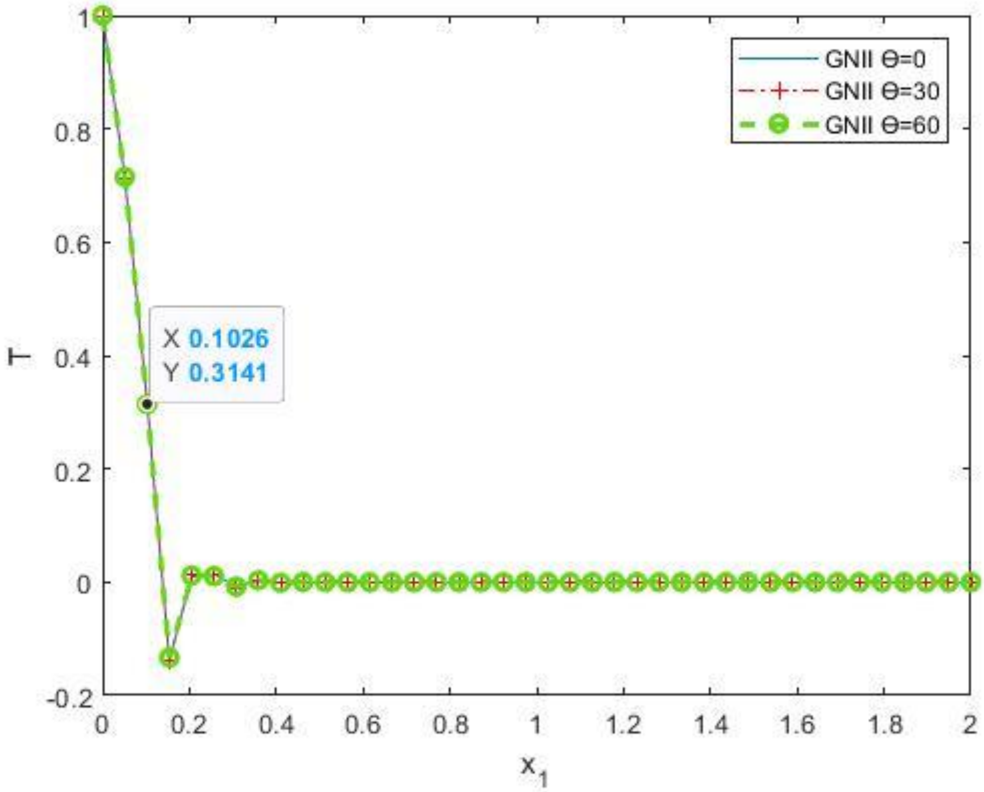
است.



شکل ۳-۱۱ تغییرات جابجایی در راستای y

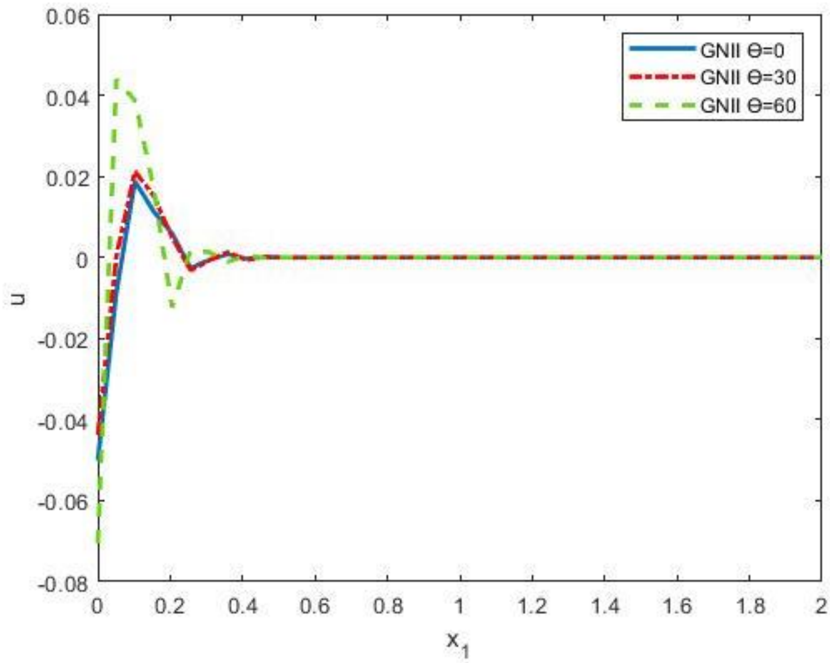
۳-۵-۱ مقایسه نتایج زوایای مختلف الیاف در حالت کرنش صفحه ای

با توجه به اعتبار سنجی مثال بالا ، حالا یک مثال با همان هندسه و اطلاعات (شکل۳-۱و جداول ۳-۱و۳-۲) و همچنین همان روابط GN II برای زوایای مختلف الیاف(off axis) و برای حالت کرنش صفحه‌ای بررسی می‌کنیم. در این مسئله از زمان نهایی ۰/۲ در حل نیومارک استفاده می‌کنیم.
نمودار زیر برای دما است که تغییرات زاویه های الیاف هیچ تآثیری در این نمودار ندارد. باید توجه داشت این می‌تواند به دلیل یکنواختی شرط مرزی دمایی مسئله و همچنین اختلاف کم بین خواص دمایی در دو راستای مختلف باشد.



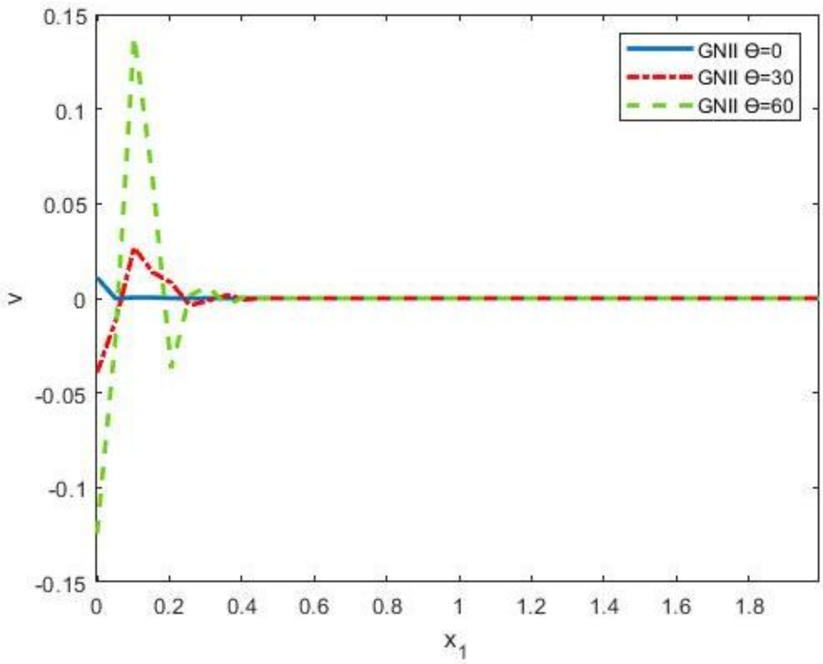
شکل۳-۱۲) مقایسه دما برای زوایای مختلف الیاف

نمودار زیر مربوط به جابجایی محوری است که نتایج برای زایه‌های ۰و۳۰درجه نزدیک به هم است، اما برای زاویه۶۰درجه تغییرات مقداری بیشتر از دو زاویه دیگر است. این تغییرات به دلیل تفاوت بین خواص مکانیکی ماده است. در واقع ماتریس چرخش بر ترم های مکانیکی ما اثر می‌نهد.



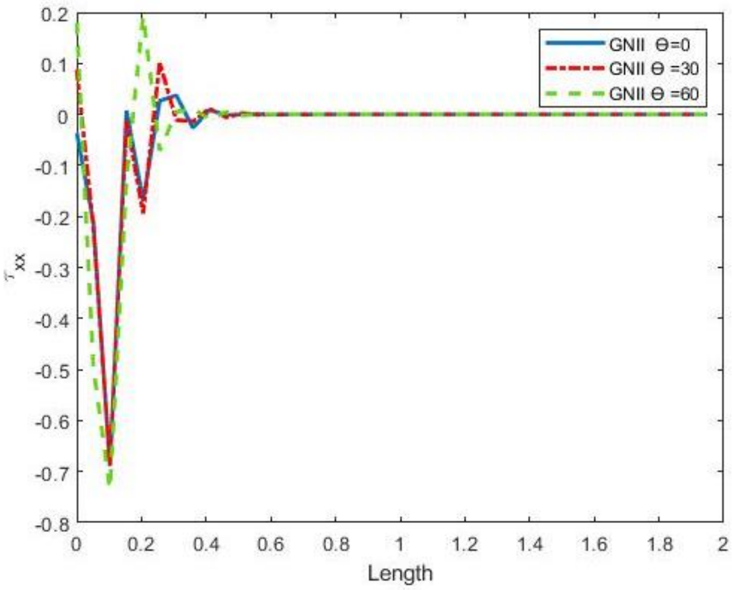
شکل ۳-۱۳) مقایسه جابجایی در راستای x برای زوایای مختلف الیاف

نمودار زیر مربوط به جابجایی در راستای y است که مقدار شروع آن برای زوایای مختلف الیاف متفاوت است و این اختلاف تا حدود طول ۰/۵ ادامه دارد. این تغییرات به دلیل تفاوت بین خواص مکانیکی ماده است که در بالا بیان شد.



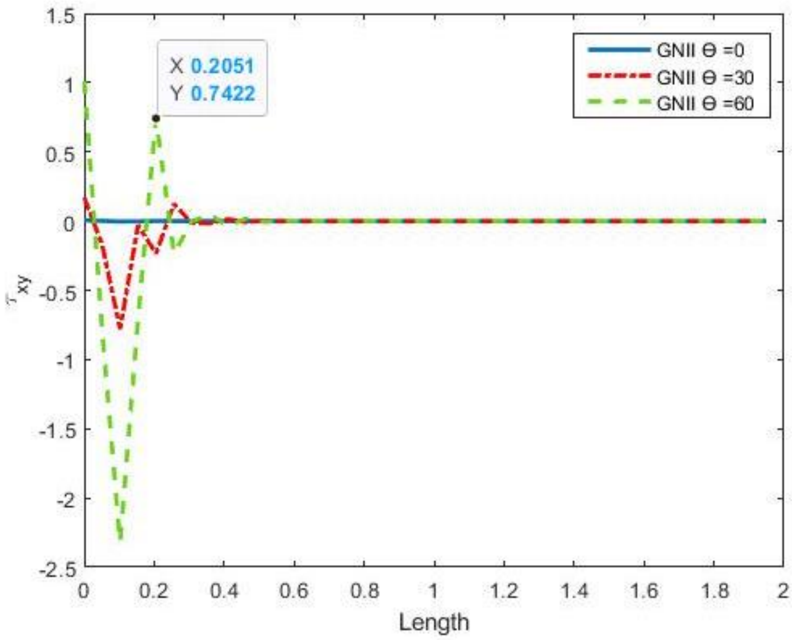
شکل ۳-۱۴) مقایسه جابجایی در راستای Y برای زوایای مختلف الیاف

نمودار زیر مربوط به σ_{xx} است که برای دو زاویه ۰ و ۳۰درجه تقریباً همگرا ولی برای زاویه ۶۰درجه متفاوت است.بازهم در حدود طول ۰/۵ نمودار ها همگرا می شوند. دلیل تغییرات کم در این منحنی می‌تواند تغییرات کم در جابجایی در راستای x باشد.



شکل ۳-۱۵) مقایسه σ_{xx} برای زوایای مختلف الیاف

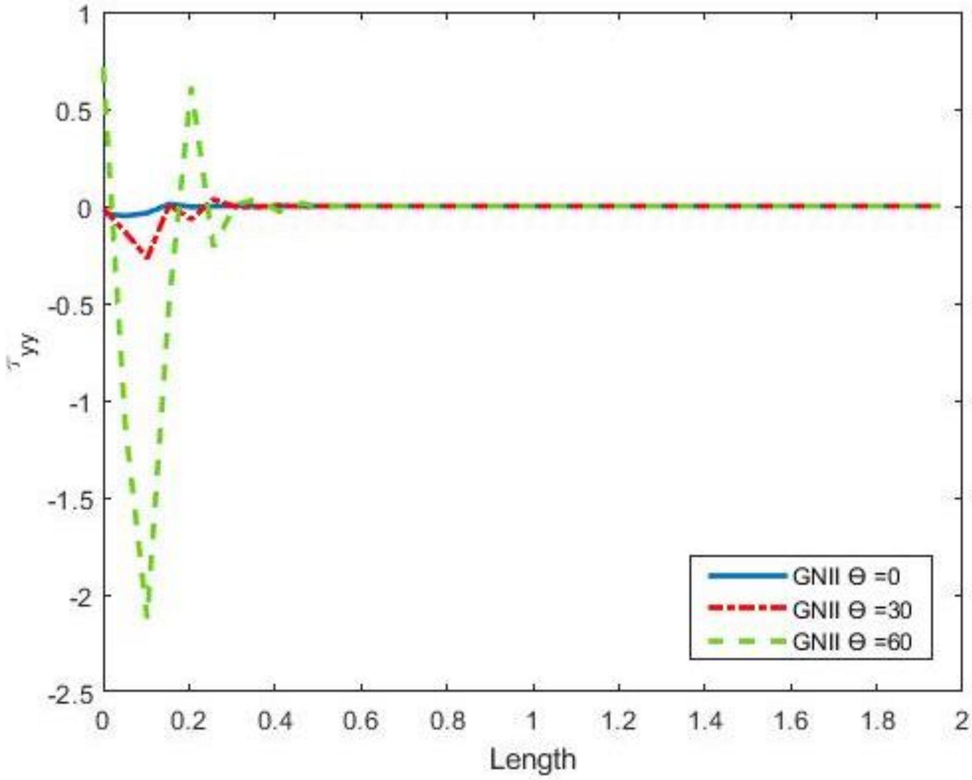
نمودار زیر مربوط به σ_{xy} است که برای زاویه صفر درجه به نسبت بقیه زوایا ناچیز و برای زاویه ۶۰درجه به بیشترین مقدار خود می‌رسد. این تغییرات به دلیل افزایش زاویه و تغییرات در ترم ماتریس تنش می‌باشد.



شکل ۳-۱۶) مقایسه σ_{xy} برای زوایای مختلف الیاف

در نمودار زیر به بررسی σ_{yy} می پردازیم.جایی که باز هم مقدار تنش در زاویه الیاف صفر درجه بسیار

ناچیز است و در زاویه ۶۰درجه این اختلاف بسیار محسوس است. این تغییرات می‌تواند به دلیل تغییرات زیاد جابجایی در راستای y باشد.

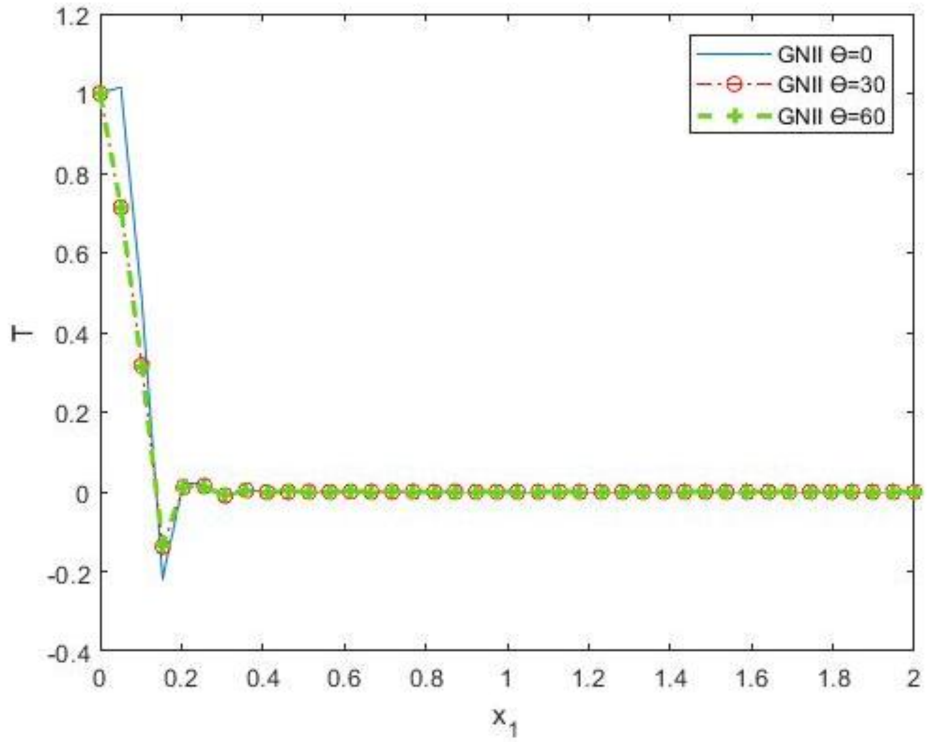


شکل۳-۱۲) مقایسه σ_{yy} برای زوایای مختلف الیاف

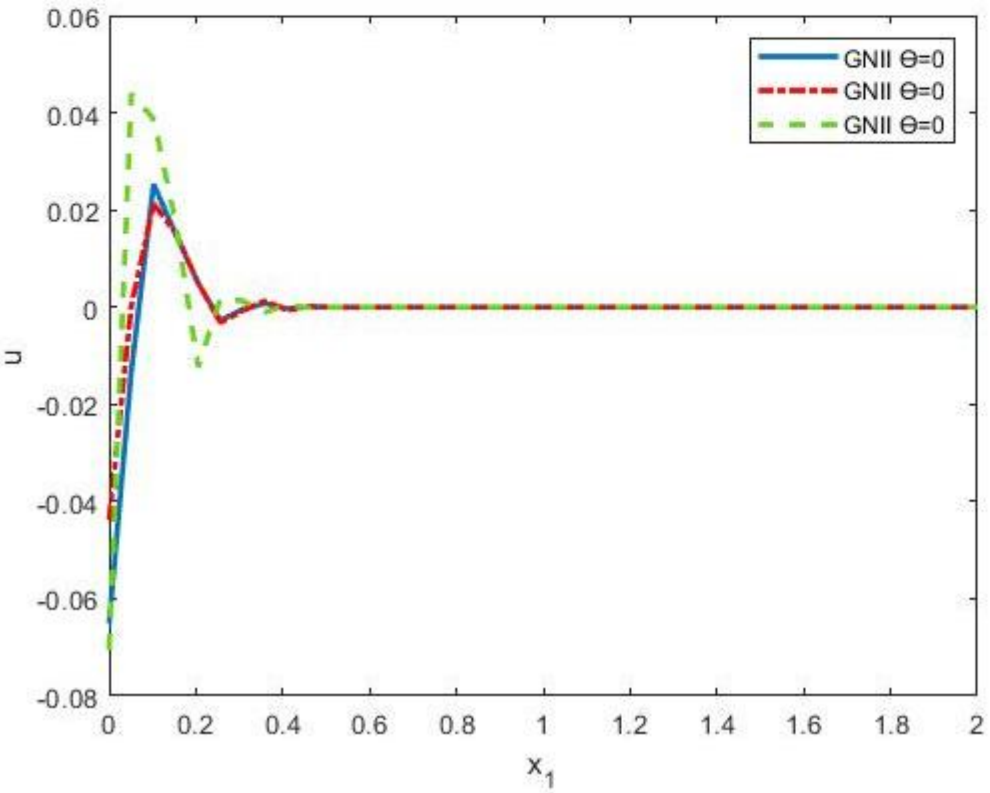
۳-۵-۲ مقایسه نتایج زوایای مختلف الیاف با هم برای حالت تنش صفحه ای

با توجه به اعتبار سنجی مثال اول ما ، حالا یک مثال با همان هندسه و اطلاعات (شکل۳-۱و جداول ۳-۱و۳-۲) و همچنین همان روابطGN II برای زوایای مختلف الیاف(off axis) و برای همان حالت تنش صفحه‌ای بررسی می‌کنیم. در این مسئله از زمان نهایی ۰/۲ در حل نیومارک استفاده می‌کنیم.

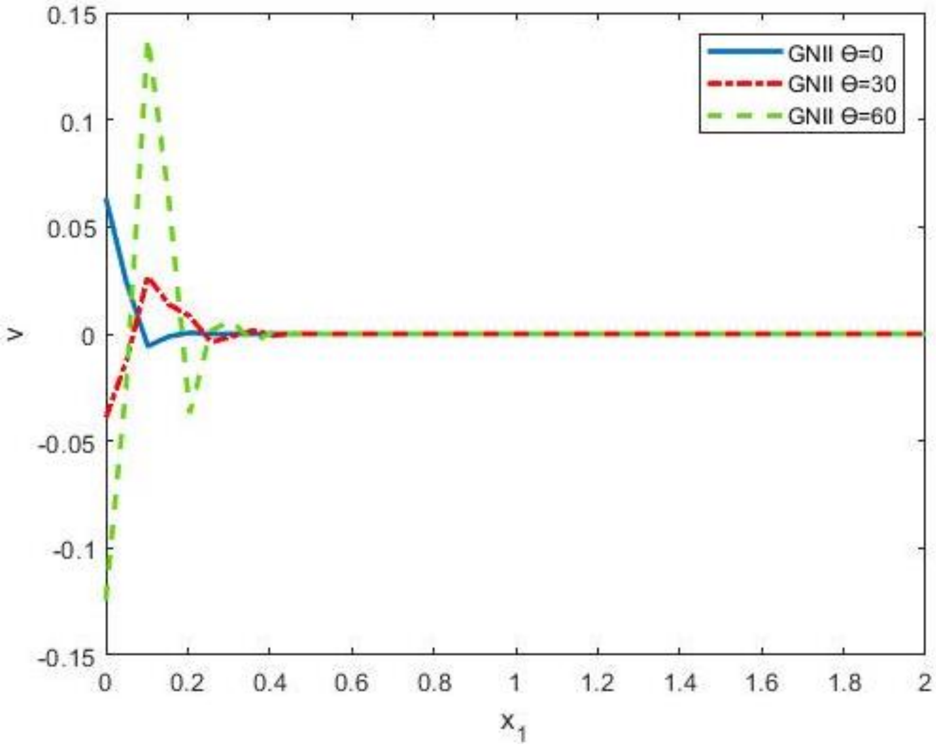
در اینجا نتایجی مشابه حالت قبل به ما می‌دهد فقط مقدارهای نزدیک به بارگذاری نسبت به قبل متفاوت است. این میزان تفاوت به دلیل وجود تغییر در فرضیه های تئوری است که بیشترین میزان خود را در ماتریس سفتی و نرمی نشان می‌دهد.



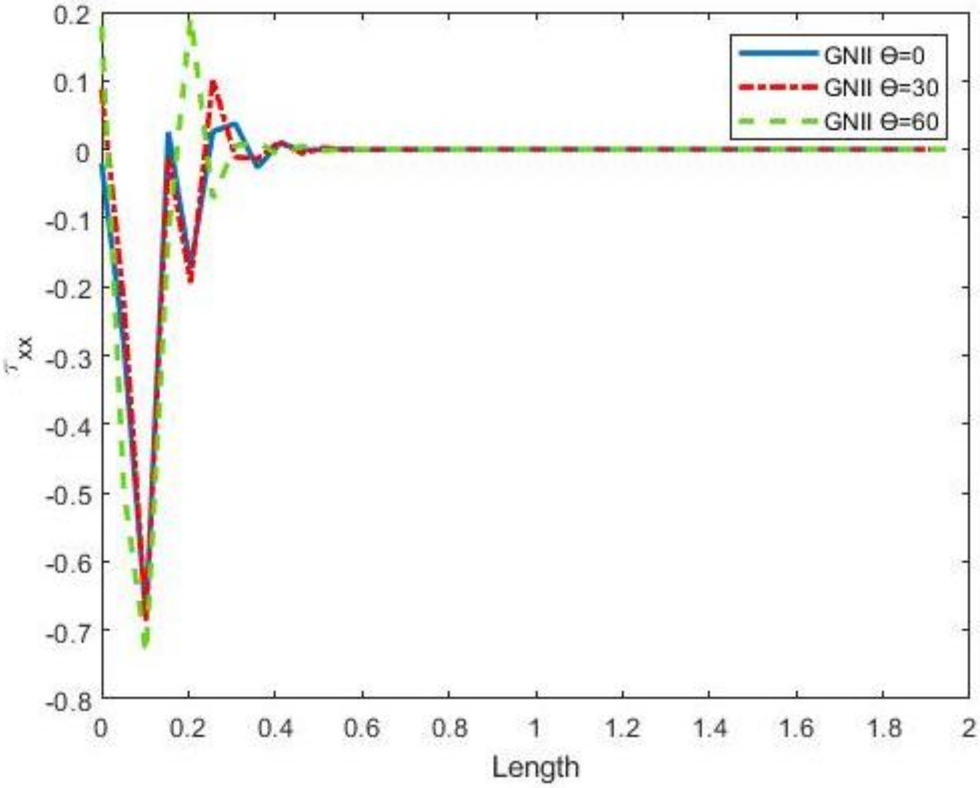
شکل۳-۱۸) مقایسه دما برای زوایای مختلف الیاف



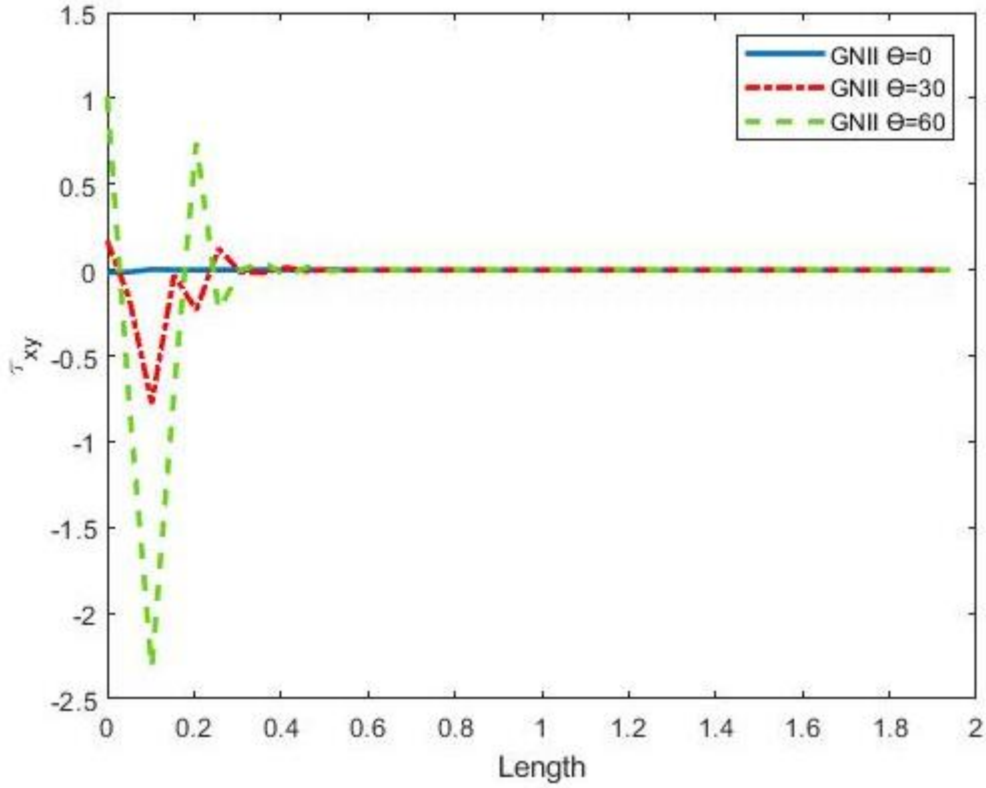
شکل۳-۱۹) مقایسه جابجایی در راستایX برای زوایای مختلف الیاف



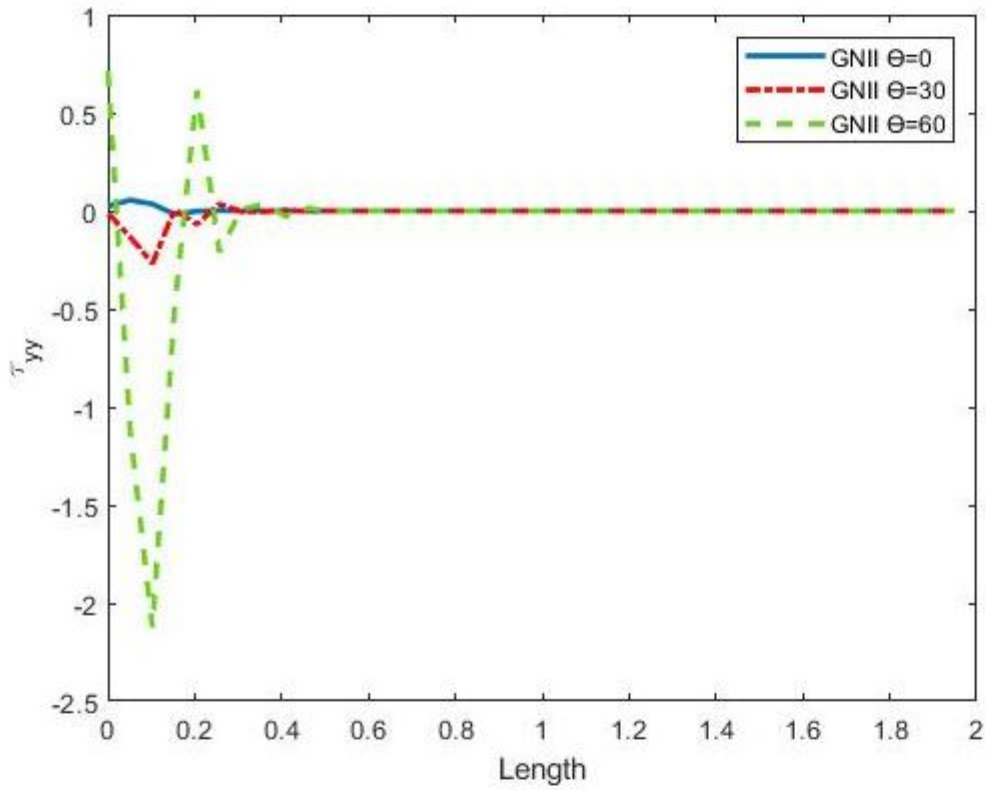
شکل ۳-۲۰) مقایسه جابجایی در راستای Y برای زوایای مختلف الیاف



شکل ۳-۲۱) مقایسه σ_{xx} برای زوایای مختلف الیاف



شکل۳-۲۲) مقایسه σ_{xy} برای زوایای مختلف الیاف



شکل۳-۲۳) مقایسه σ_{yy} برای زوایای مختلف الیاف

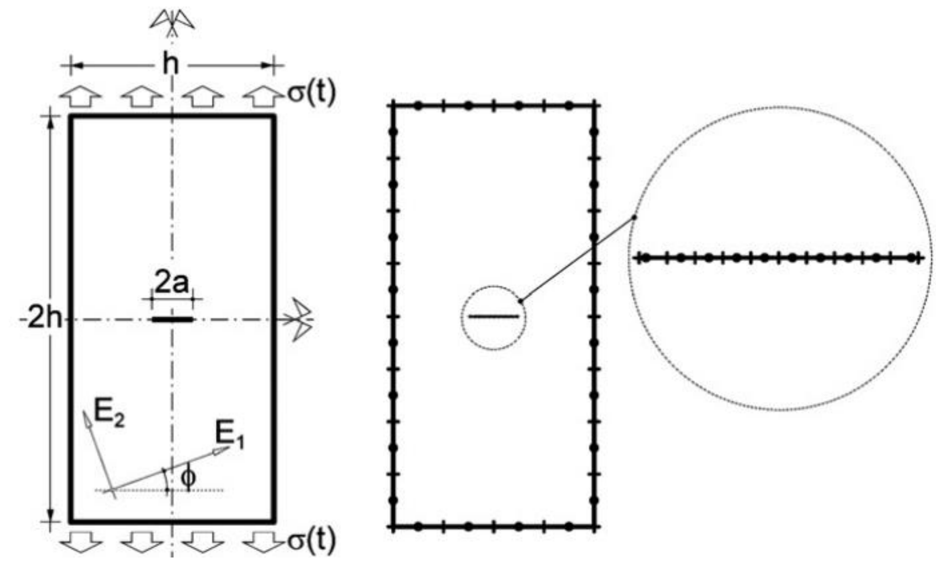
۳-۶ تحلیل نتایج صفحه شامل ترک

نتایج دارای ترک از معادلات مربوط به تئوری گرین –نقدی نوع ۲ (GN II) و با استفاده از المان محدود توسعه یافته بررسی می‌شود.

برای صحت سنجی کد از نتایج مربوط به مقاله سانچز[۶۴] و همچنین نتایج مقاله محمدی[۵۵] کمک می گیریم که به ترتیب در ادامه به آن ها می پردازیم .

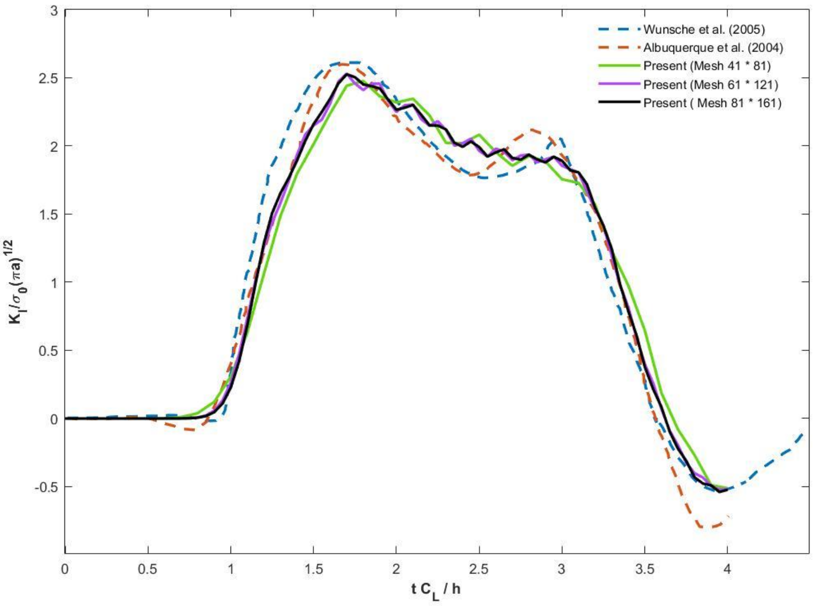
۳-۶-۱ اعتبارسنجی با مقاله سانچز[۶۴]

این کد را برای مثال۱ مقاله آقای سانچز [۶۴]برای یک صفحه مستطیلی با طول ۲۰ میلی متر و ارتفاع ۴۰ میلی متر دارای ترک داخلی متقارن نسبت به مرکز صفحه به طول۴/۸ میلی متر بررسی می کنیم.این صفحه تحت بارگذاری یکنواخت مکانیکی است شکل زیر شکل کلی مثال۶.۱مقاله آقای سانچز است که به کمک کد ما بررسی شده و در ادامه با نمودار خود مقاله مقایسه شده است.



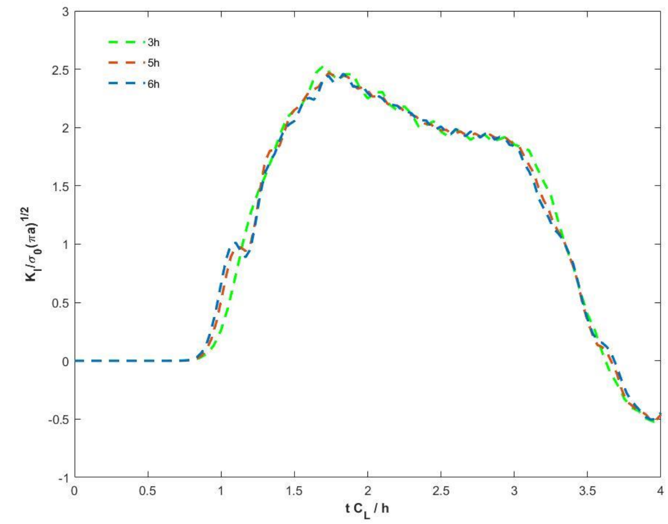
شکل۳-۲۴ورق ارتوتروپیک دارای ترک مرکزی

مقایسه نتایج مربوط به این مقاله در شکل های زیر آمده است. در شکل زیر مشاهده می شود که مش ۶۱*۱۲۱و۸۱*۱۶۱همگرایی خوبی نسبت به هم دارند. همچنین اختلاف نمودارها بسیار ناچیز است که صحت کد را برای مثال تحت بارگذاری مکانیکی نشان می دهد. در این نمودار محور افقی زمان بی بعد و محور عمودی ضریب شدت تنش نوعI بی بعد است.



شکل ۳-۲۵مقایسه ضریب شدت تنش مود I با مقاله سانچز برای مش بندی های مختلف

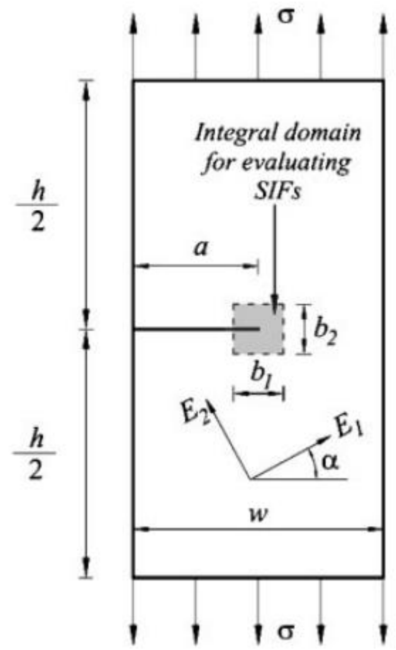
در شکل زیر به بررسی شعاع انتگرال برهمکنش می‌پردازیم که در کل همگرایی خوبی نسبت به هم دارند و تغییرات ان تاثیر چندانی در جواب ها ندارد. باید توجه کرد افزایش این شعاع مقداری دقت نتایج را بالاتر برده اما زمان نتیجه گیری را بسیار افزایش می‌دهد .بنابراین در حل این مثال از شعاع بهینه استفاده می‌کنیم.



شکل ۳-۲۶ مقایسه شعاع انتگرال گیری مختلف برای این مثال

۳-۶-۲ اعتبارسنجی با مقاله محمدی[۶۵]

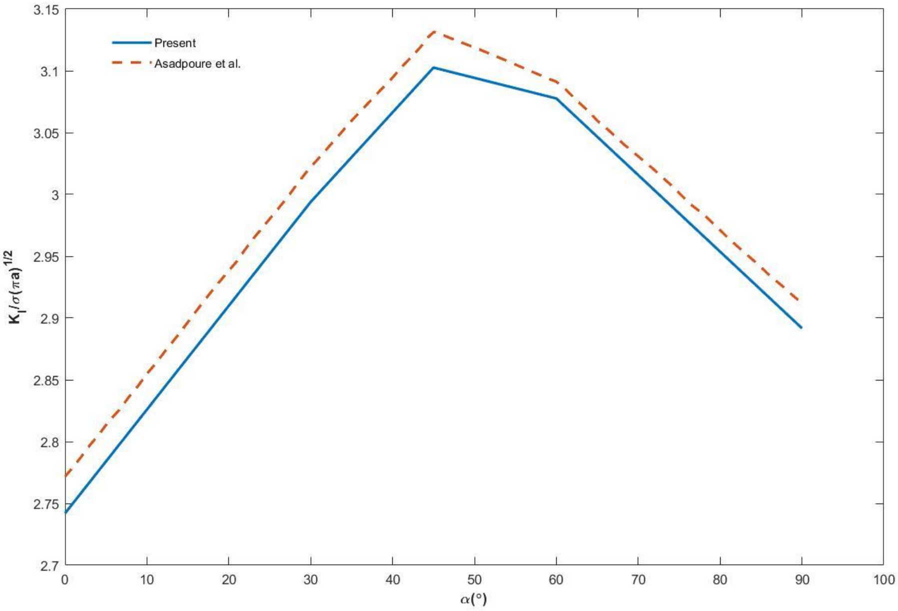
نتایج مقاله دکتر محمدی[۶۵] برای یک صفحه دارای ترک لبه ای با ابعاد معلوم و برای زوایای الیاف متفاوت در ماده ارتوترپیک و تحت بار یکنواخت را بررسی می‌کنیم ،که نتایج خروجی را در ادامه مورد بررسی قرار می‌دهیم.[۶۵]



شکل۳-۲۷صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه ای[۶۵]

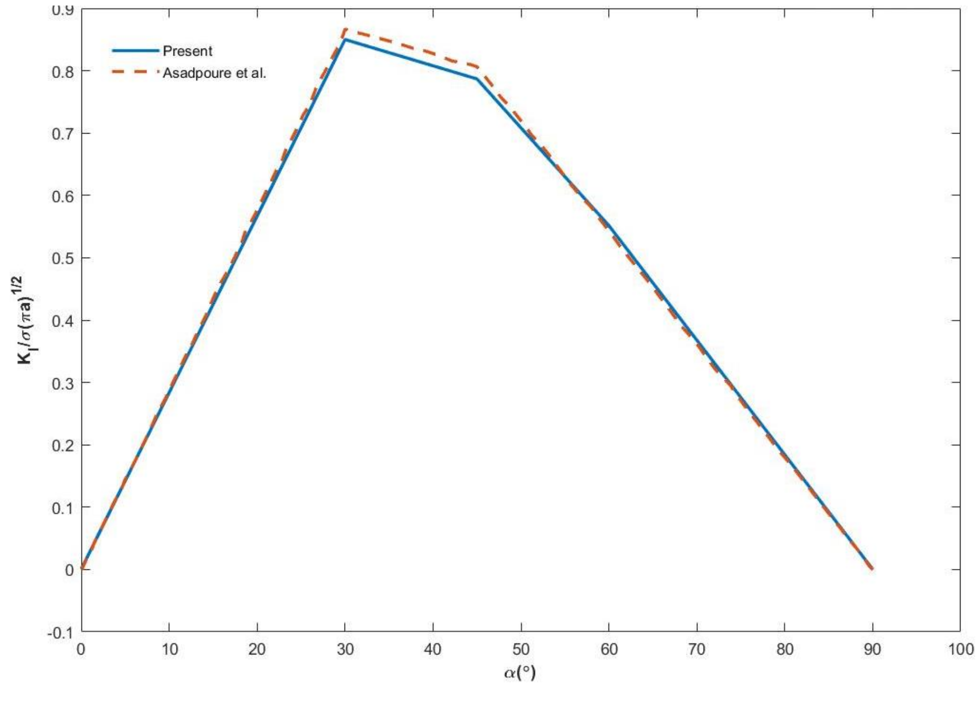
مقایسه نتایج مربوط به این مقاله در شکل‌های زیر آمده است:

در نمودار زیر مقایسه ضریب شدت تنش نوعI را در زوایای مختلف الیاف در مقایسه با نمودار مقاله دکتر محمدی مشاهده می‌کنیم که همگرایی مناسبی با نتایج [۶۵]دارد.



شکل۳-۲۸ مقایسه ضریب شدت تنش مودI با [۶۵]

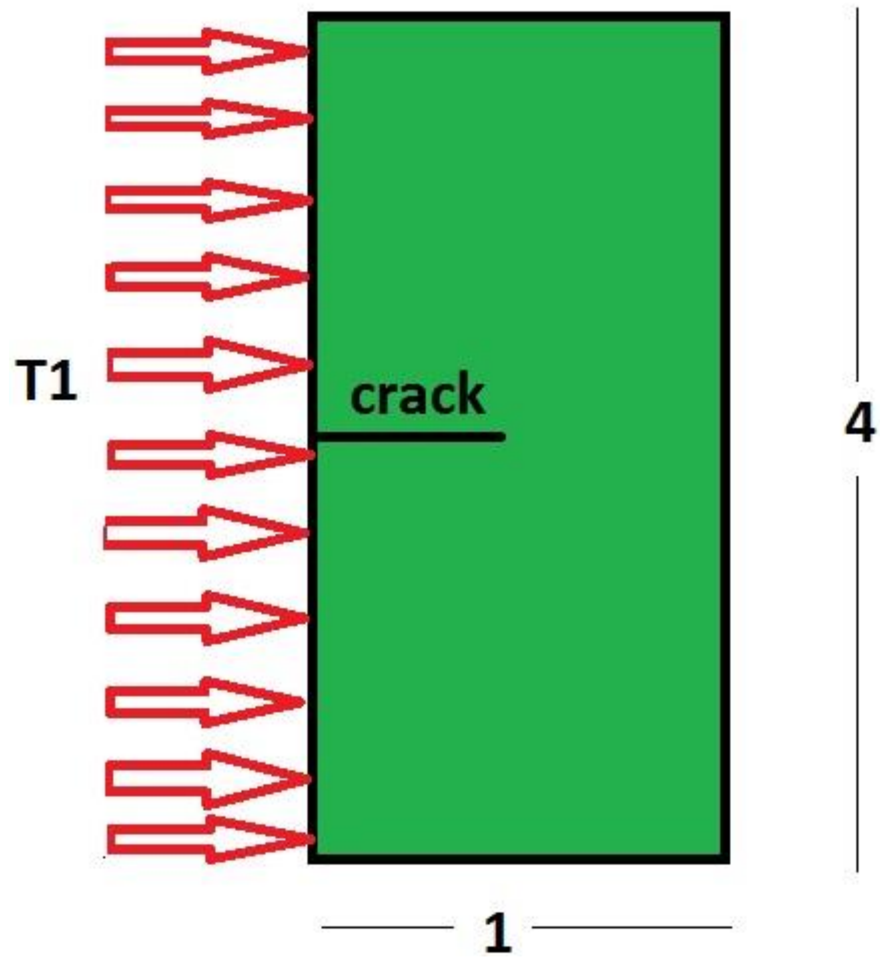
در نمودار زیر مقایسه ضریب شدت تنش نوعII را در زوایای مختلف الیاف در مقایسه با نمودار مقاله دکتر محمدی مشاهده می کنیم که همگرایی مناسبی نسبت به مقاله دارد.



شکل۳-۲۹ مقایسه ضریب شدت تنش مودII با [۶۵]

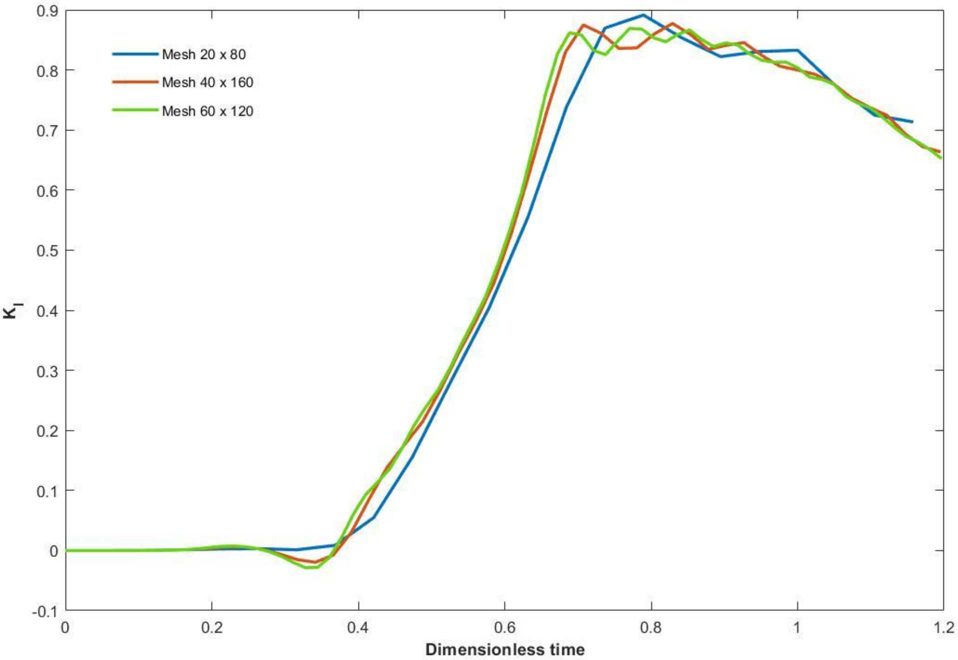
۳-۷ نتایج برای ترک لبه ای تحت شوک حرارتی

در این مثال یک صفحه مستطیلی با ترک لبه ای (شکل۳-۳۰) را با اطلاعات جداول(۳-۱و۳-۲) را تحت شوک حرارتی یکنواخت به کمک تئوری GN II بررسی می کنیم. این صفحه دارای طول ۴و ارتفاع ۱و همچنین طول ترک ۰/۵بدون بعد در لبه سمت چپ و ارتفاع۲ می باشد،که تحت شوک حرارتی به اندازه منفی۱درجه در سمت چپ صفحه قرار دارد (شکل۳-۳۰).



شکل۳-۳۰ هندسه و شرط مرزی مسئله

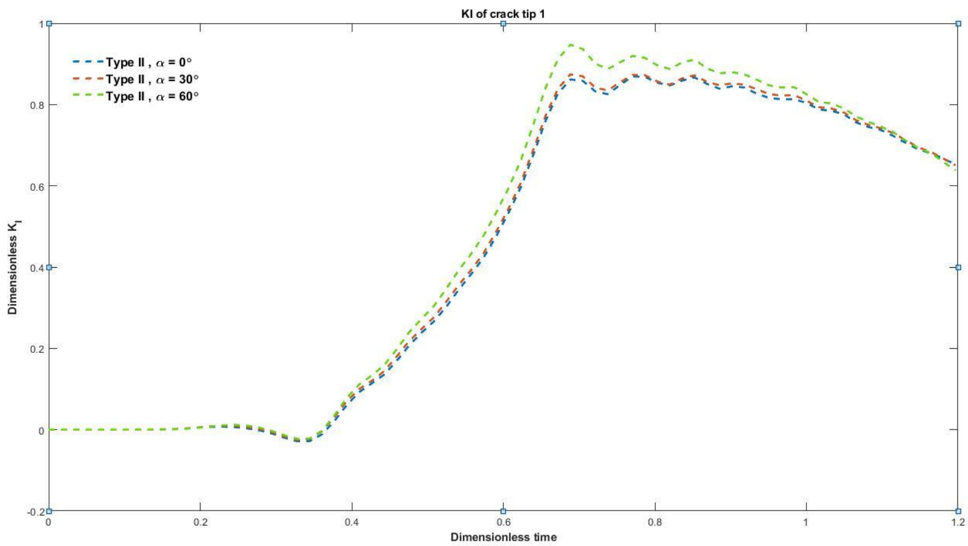
ابتدا در نمودار زیر همگرایی مش را برای معادلات گرین نقدی نوع II و ماده اورتوتروپیک بررسی می‌کنیم.که قابل مشاهده است مش های ۴۰*۱۶۰و۶۰*۲۴۰ همگرایی خوبی دارند. بنابراین در ادامه از مش بهینه ی ۴۰*۱۶۰ استفاده می‌شود.



شکل۳-۳۱ همگرایی مش

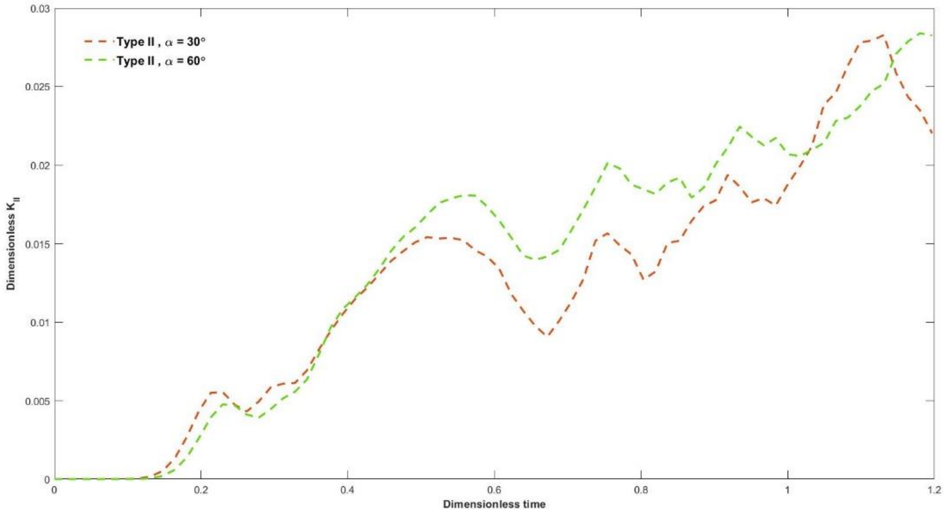
در ادامه به بررسی ضرایب شدت تنش مود IوII برای زوایای مختلف الیاف می پردازیم:

در شکل زیر با بررسی ضرایب شدت تنش مود I برای زوایای الیاف مختلف و همچنین مقایسه آن با تئوری گرین نقدی نوعIII پرداخته ایم، تاثیر زاویه الیاف پس از عبور از نوک ترک قابل مشاهده است هرچند در این تئوری این تاثیر زیاد نمی باشد. این تغییرات بیشتر ناشی از توابع غنی سازی دمایی ما است. باید توجه داشت تغییرات بیشتر آن بعد از عبور از نوک ترک قابل مشاهده می‌باشد.



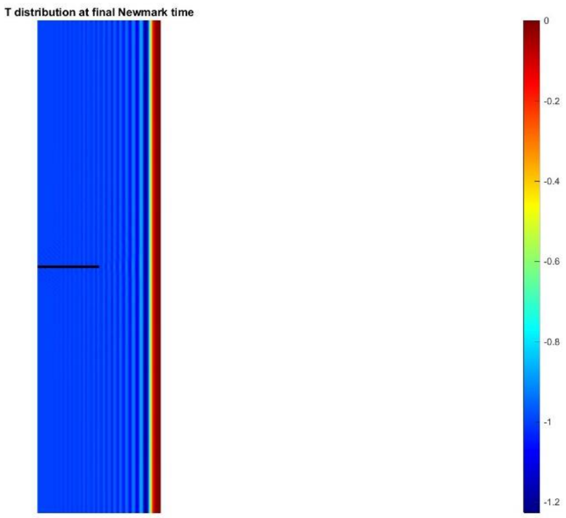
شکل۳-۳۲ مقایسه ضریب شدت تنش مودI در زوایای مختلف الیاف و همچنین با تئوری گرین نقدی نوعIII

در شکل زیر به بررسی ضریب شدت تنش نوعII برای دو زاویه مختلف می پردازیم که تفاوت بیشتری به نسبت ترم ضریب شدت تنش نوعI دارد.



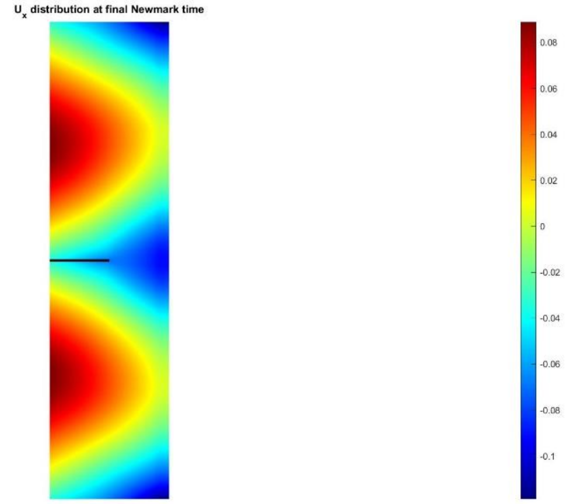
شکل۳-۳۳ مقایسه ضریب شدت تنش مودII برای زوایای مختلف الیاف

در ادامه توزیع دما در لحظه آخر برای زاویه صفر درجه الیاف اورده شده است.

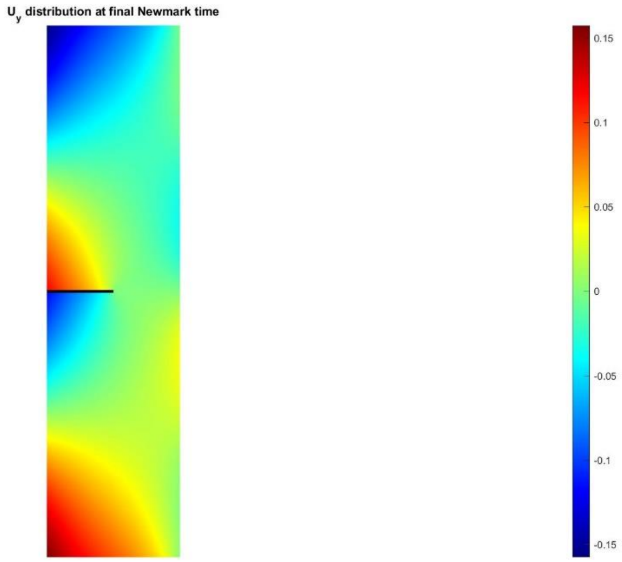


شکل۳-۳۴ توزیع دما در لحظه آخر

در ادامه نیز توزیع جابجایی ها در راستای X،Y نیز برای زاویه صفر الیاف اورده شده است.



شکل۳-۳۵ توزیع جابجایی در راستای X

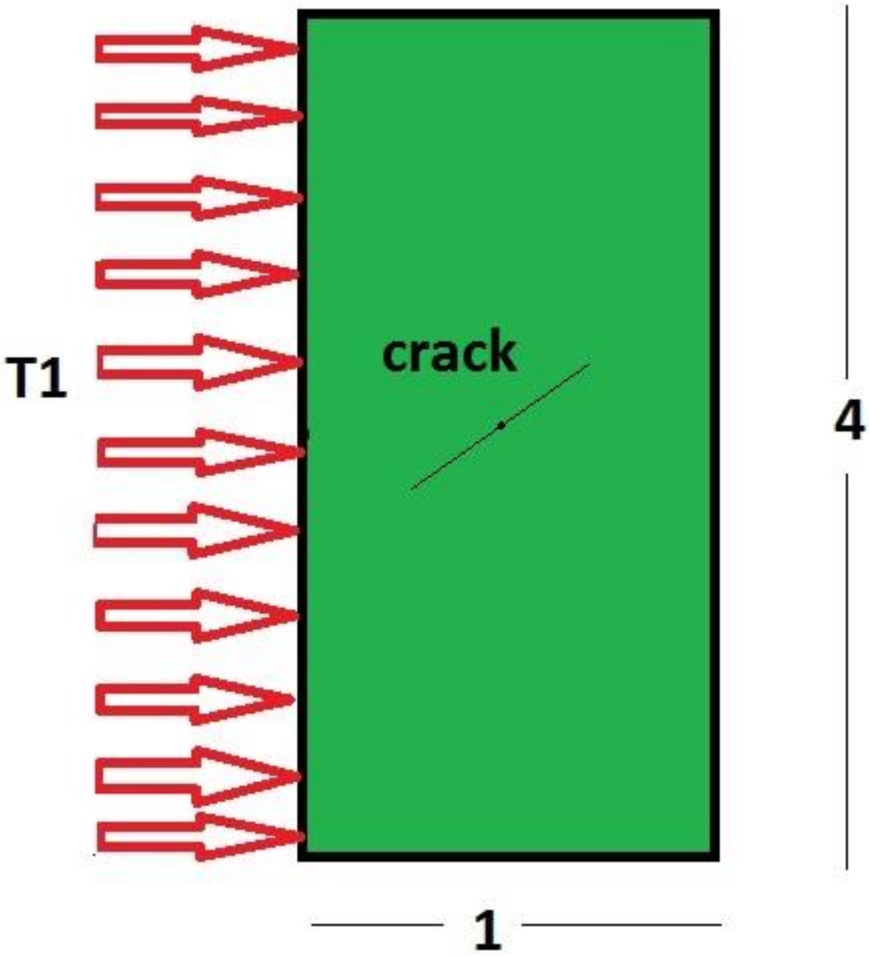


شکل۳-۳۶ توزیع جابجایی در راستای Y

۳-۸ ترک مایل داخلی تحت شوک حرارتی

در اینجا به تحلیل یک ترک مایل داخلی با زاویه ۳۰ درجه نسبت به محور x تحت شوک حرارتی یکنواخت می‌پردازیم. مثال را برای یک صفحه مستطیلی با اطلاعات مسئله قبل اما برای ترک داخلی با طول ۰,۵ و زاویه ۳۰درجه نسبت به محور x و متقارن در مرکز صفحه برای زوایای مختلف الیاف تحت

همان شوک حرارتی مورد بررسی قرار می‌دهیم.(شکل۳-۳۷) اطلاعات مسئله مشابه حالت های قبل و قابل مشاهده در جدول (جداول۳-۱و۳-۲ بجز اطلاعات تعداد المان در راستای y،x) می‌باشد. تعداد المان در نظر گرفته شده در جهت محور x برابر ۸۲ و در جهت محور y برابر ۳۳۲ می‌باشد.

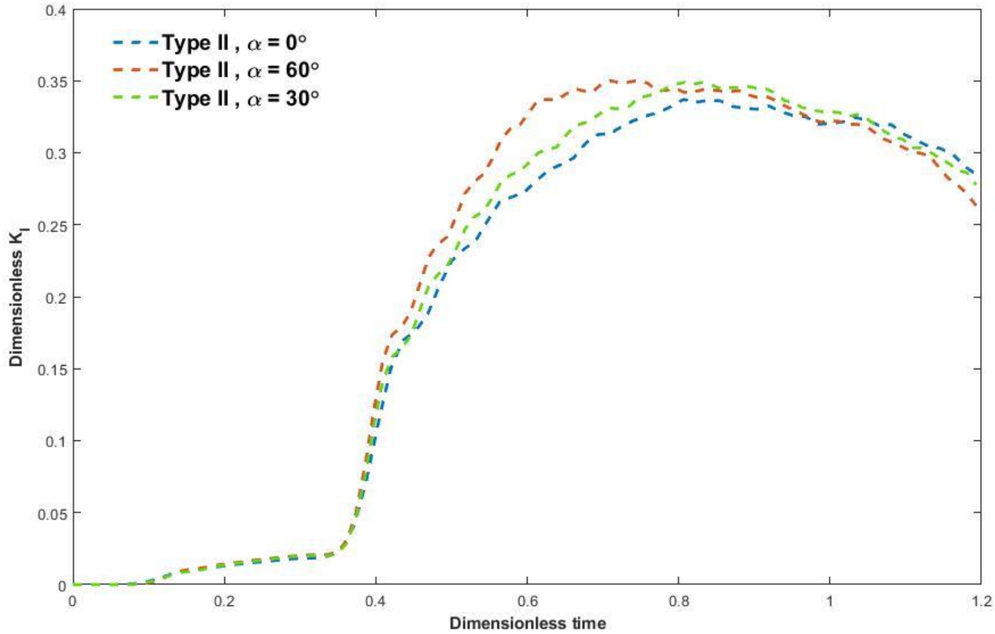


شکل۳-۳۷ صفحه دارای ترک مایل داخلی تحت شوک حرارتی یکنواخت

۳-۸-۱ نتایج ترک مایل داخلی برای زوایای مختلف الیاف تحت شوک حرارتی

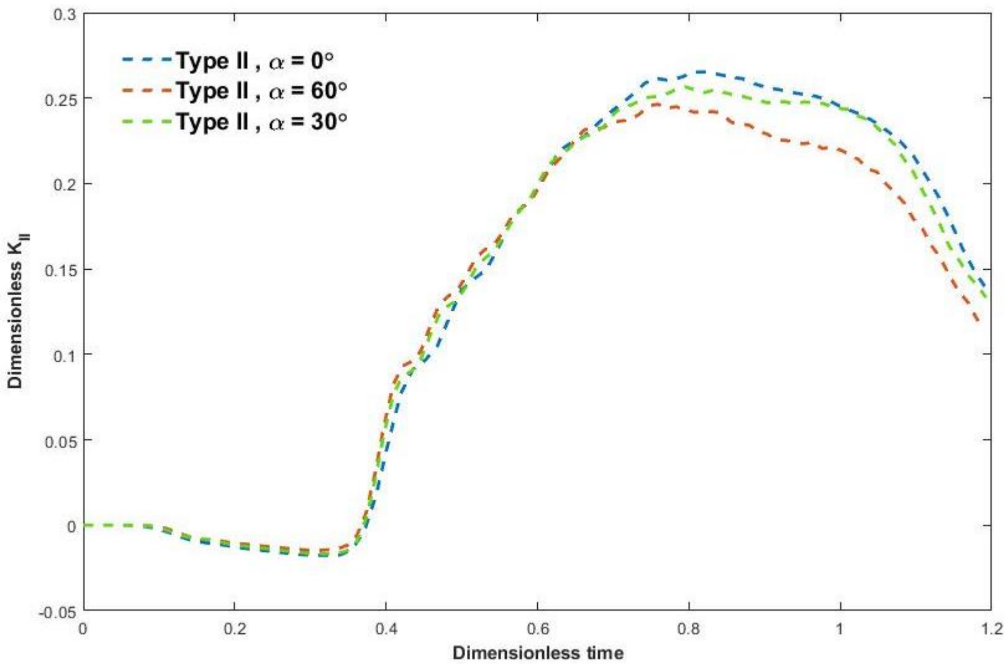
در اینجا نتایج را برای ترک داخلی با زاویه الیاف مختلف بررسی می‌کنیم.

نمودار ضریب شدت تنش مود I برای زوایای مختلف ، اختلاف محسوس برای این تحلیل را نشان می دهد. این اختلاف پس از عبور از نوک ترک قابل مشاهده است. مهمترین دلیل این میزان اختلاف توابع غنی سازی نوک ترک (یا به عبارت دیگر وجود نا پیوستگی در جسم و محل برخورد ترک با الیاف) می‌باشد.



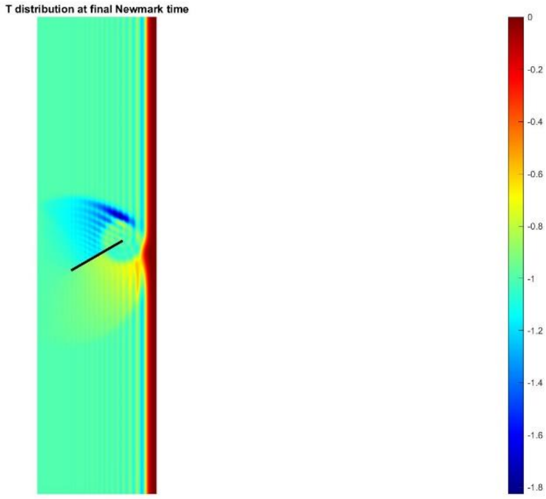
شکل۳-۳۸ ضریب شدت تنش مود I برای زوایای مختلف الیاف

نمودار ضریب شدت تنش مود II برای زوایای مختلف الیاف ، اختلاف محسوس برای این تحلیل را نشان می دهد.



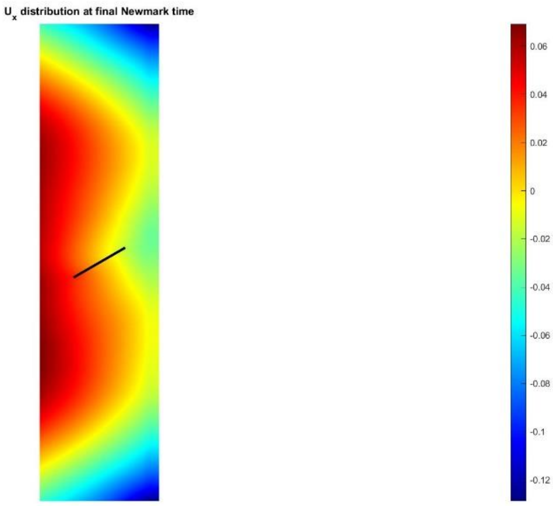
شکل۳-۳۹ ضریب شدت تنش مود II برای زوایای مختلف الیاف

در اینجا توزیع دما را برای زمان انتهایی و برای زاویه الیاف صفر درجه (on axis) مشاهده می‌کنیم.



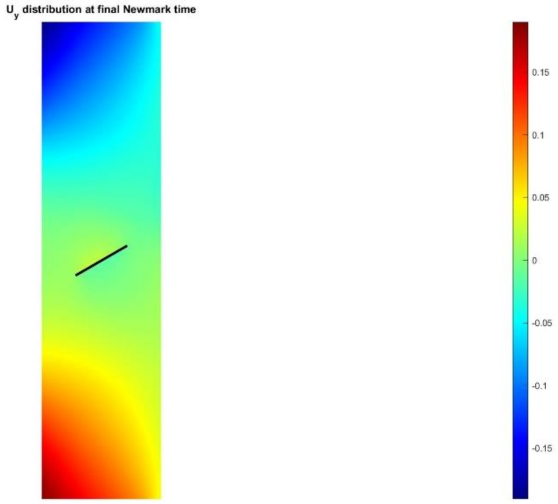
شکل ۳-۴۰ توزیع دمایی برای زاویه الیاف صفر درجه

در اینجا توزیع جابجایی در راستای x را برای زمان انتهایی و برای زاویه الیاف صفر درجه (on axis) مشاهده می‌کنیم.



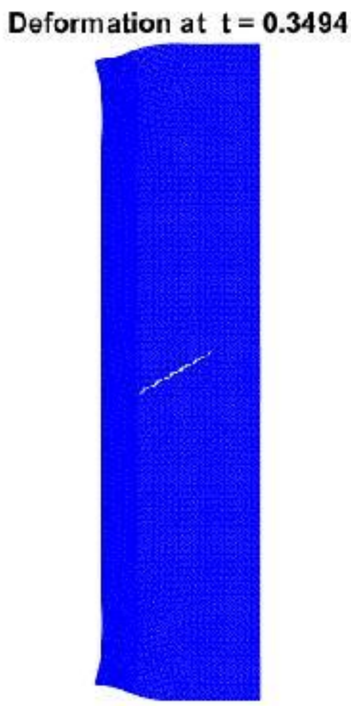
شکل ۳-۴۱ توزیع جابجایی در راستای x برای زاویه الیاف صفر درجه

در اینجا توزیع جابجایی در راستای y را برای زمان انتهایی و برای زاویه الیاف صفر درجه (on axis) مشاهده می‌کنیم.

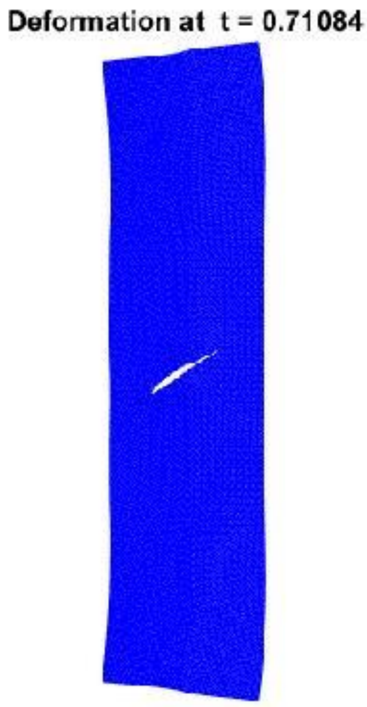


شکل۳-۴۲ توزیع جابجایی در راستای y برای زاویه الیاف صفر درجه

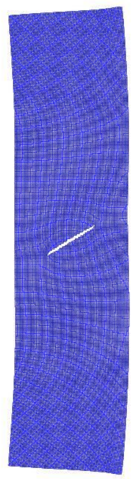
در ادامه توزیع تغییر شکل را برای چند زمان مختلف مشاهده می‌کنیم.



شکل۳-۴۳ توزیع تغییر شکل در زمان t=۰,۳۴۹۴

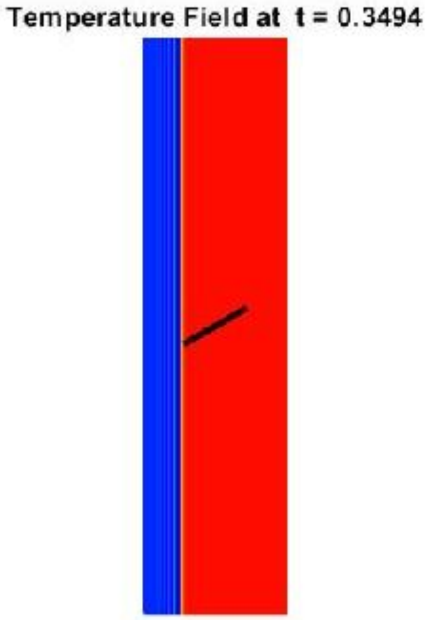


شکل۳-۴۴ توزیع تغییر شکل در زمان t=۰,۷۱۰۸۴

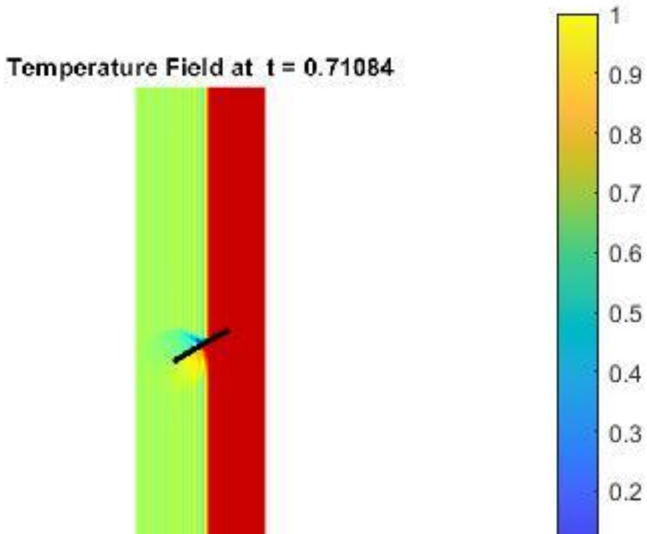


شکل۳-۴۵ توزیع تغییر شکل در زمان انتهایی

در ادامه توزیع تغییر دما را برای چند زمان مختلف مشاهده می‌کنیم.



شکل۳-۴۶ توزیع تغییر دما در زمان t=۰,۳۴۹۴



شکل۳-۴۷ توزیع تغییر دما در زمان t=۰,۷۱۰۸۴

فصل ۴ : استخراج معادلات و تحلیل مسئله ترموالاستیسیته گرین- نقدی نوع III

۴-۱ مقدمه

در این بخش یک مدل از ماده کامپوزیتی بدون ترک تحت شوک حرارتی یکنواخت با تئوری ترموالاستیسیته تعمیم یافته گرین-نقدی نوع III را معرفی و با مقاله ابراهیم عباس[۶۲] مقایسه می‌شود، سپس به تحلیل زوایای مختلف الیاف بین مختصات محلی و مرجع همچنین حالت تنش صفحه ای و کرنش صفحه‌ای پرداخته می‌شود. در ادامه یک صفحه کامپوزیتی با ترک لبه ای را برای زوایای مختلف الیاف بررسی شده، و در انتها تحلیل ترک مایل و نتایج آن بیان شده است.

۴-۲ معادلات

در این بخش از معادلات گرین –نقدی نوع III استفاده شده است.

۴-۲-۱ معادلات حاکم بر مسئله و بی بعد سازی معادلات

در این بخش از پایان نامه به بررسی معادلات حاکم و بی بعد سازی آن‌ها می پردازیم.

معادلات ترمو الاستیسیته حاکم بر مسئله اورتوتروپیک برای تئوری GNIII به صورت زیر است:[۶۳]

$$\rho \ddot{u}_i = C_{ijkl} u_{k,lj} - \beta_{ij} \theta_{,j} \tag{۱-۴}$$

$$\rho c \ddot{\theta} = K_{ij} \dot{\theta}_{,ij} + \kappa_{ij} \theta_{,ij} - T_0 \beta_{ij} \ddot{u}_{i,j} \tag{۲-۴}$$

۴-۲-۲ گسسته سازی معادلات حاکم

در این بخش معادلات حاکم گسسته شده را مشابه فصل قبل بیان می‌کنیم.

فرم ماتریسی معادلات پس از گسسته سازی به صورت زیر است:

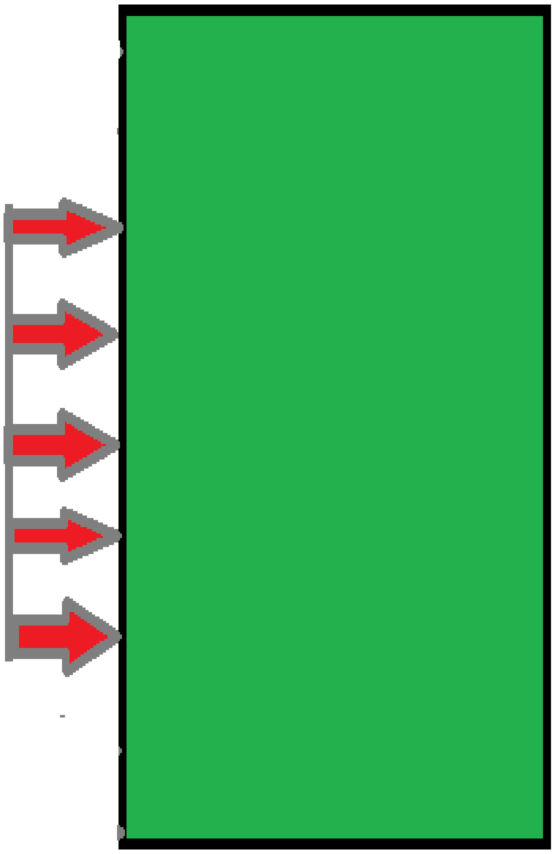
$$\begin{bmatrix} M^{UU} & 0 \\ M^{U\theta} & M^{\theta\theta} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^{\theta\theta} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^{UU} & K^{U\theta} \\ 0 & K^{\theta\theta} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} U \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_U \\ F_\theta \end{Bmatrix} \tag{۳-۴}$$

که داریم:

$$
\begin{aligned}
M^{UU} &= \oint_{\Omega^e} N^{U^T} * N^U * d\Omega \\
M^{U\theta} &= \oint_{\Omega^e} B^{U^T} * \hat{\xi} * N^{\theta} * d\Omega \\
M^{\theta\theta} &= \oint_{\Omega^e} N^{\theta^T} * N^{\theta} * d\Omega \\
C^{\theta\theta} &= \oint_{\Omega^e} B^{\theta^T} * \hat{K} * N^{\theta} * d\Omega \\
K^{UU} &= \oint_{\Omega^e} B^{U^T} * D * B^U * d\Omega \\
K^{U\theta} &= \oint_{\Omega^e} B^{\theta^T} * \hat{\beta} * N^U * d\Omega \\
K^{\theta\theta} &= \oint_{\Omega^e} B^{\theta^T} * \hat{\kappa} * B^{\theta} * d\Omega
\end{aligned}
\tag{۴-۴}
$$

۴-۳ مشخصات و هندسه مسئله

هندسه مسئله این تحقیق مشابه مسئله ابراهیم عباس و همکاران [۶۲] می‌باشد. در این مسئله یک نیم صفحه کامپوزیتی را تحت شوک دمایی یکنواخت در یک طرف(سمت چپ) آن در نظر گرفته‌ایم. در این مسئله عرض بدون بعد ۱و طول بدون بعد ۴ می‌باشد که در شکل زیر آورده شده است.



شکل ۴-۱ نمایش شکل و بارگذاری حرارتی مسئله

در جداول زیر مشخصات ماده اورتوتروپیک و همچنین گام زمانی و زمان انتهایی مسئله ، ابعاد مسئله و همچنین شرایط بارگذاری داده شده است.

جدول ۴-۱.مشخصات مسئله(هندسی –مکانیکی)

نام پارامتر	واحد	اندازه
طول بدون بعد	–	۴
عرض بدون بعد	–	۱
مش بندی در راستای x	–	۴۰
مش بندی در راستای Y	-	۱۶۰
گام زمانی	S	۰,۰۱
زمان نهایی	S	۰,۲و۰,۱

E۱	Gpa	۱۱۵
E۲	Gpa	۹۰,۴
G۱۲	Gpa	۳۸,۶۶
Nu۱۲	-	۰,۰۲۸

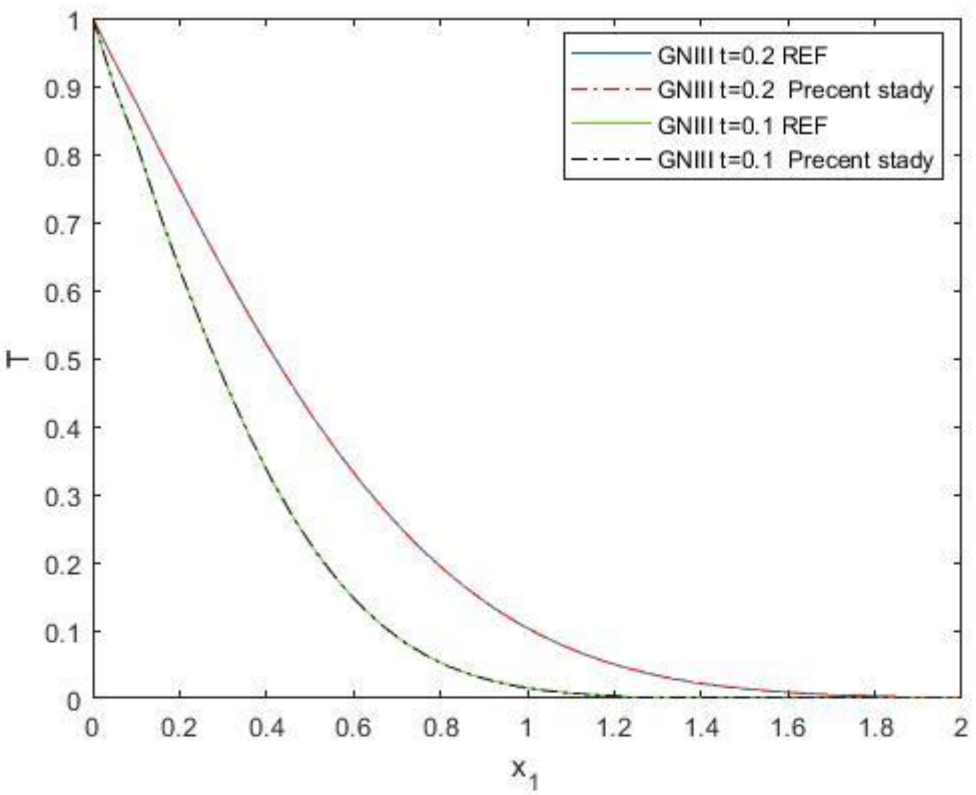
جدول ۴-۲.مشخصات حرارتی ماده

نام پارامتر	واحد	اندازه
K۱۱	W/mK	۹۲,۱
K۲۲	W/mK	۹۶,۳
Kapa۱۱	-	۰,۲۵
Kapa۲۲	-	۰,۲۵
Alfa۱۱	m/K	۰,۰۱۷e-۴
Alfa۱۱	m/K	۰,۰۱۵e-۴
T۱	-	۱
T۰	درجه سانتی گراد	۱۰-۲۷۳
چگالی	kg/m^۳	۲۶۶۰

۴-۴ نتایج

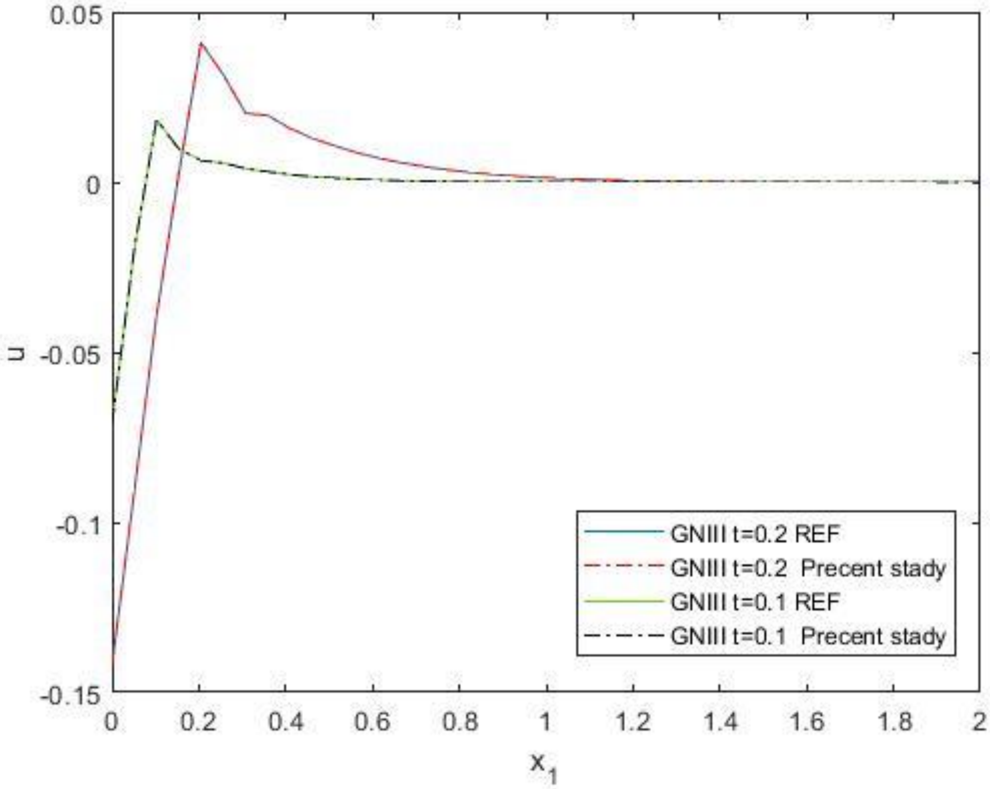
در این مسئله نتایج را برای یک صفحه ارتوتروپیک بدون ترک که تحت یک شوک حرارتی در سمت چپ خود می‌باشد (مطابق **شکل۴-۱**) و با اطلاعات ذکر شده در جداول فوق (جداول ۴-۱ و ۴-۲) برای زاویه

الیاف صفر درجه (on axis) به کمک روش المان محدود محاسبه شده است. از تئوری ترموالاستیسیته تعمیم یافته گرین نقدی نوع ۳(GN III) برای بدست آوردن این نتایج استفاده شده است. ضمناً این مثال در حالت تنش صفحه ای بررسی می‌شود. نتایج بدست امده با مقاله ابراهیم عباس[۶۲] مقایسه و اعتبار سنجی شده است.
در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای دمای صفحه در راستای محور X می‌پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می‌کنیم.که نتایج این دو روش حل همگرایی خوبی نسبت به هم دارند.



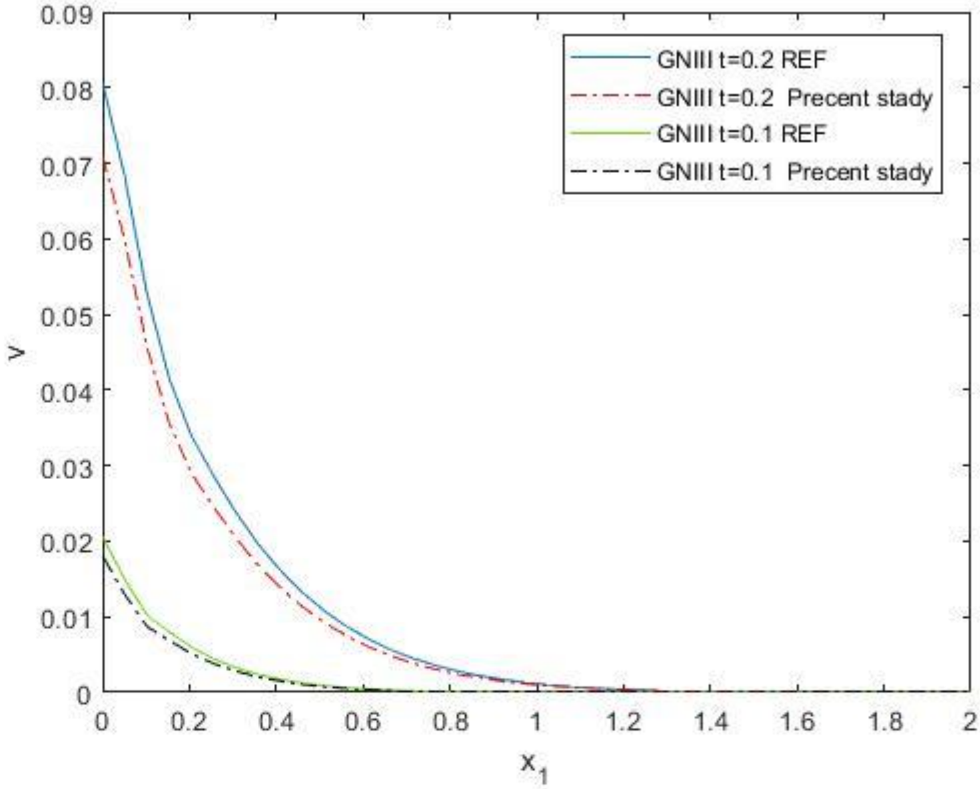
شکل۴-۲ مقایسه تغییرات دمایی در جهت X۱برای GNIII

در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای جابجایی افقی می‌پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می‌کنیم.که نتایج این دو روش حل همگرایی خوبی نسبت به هم دارند.



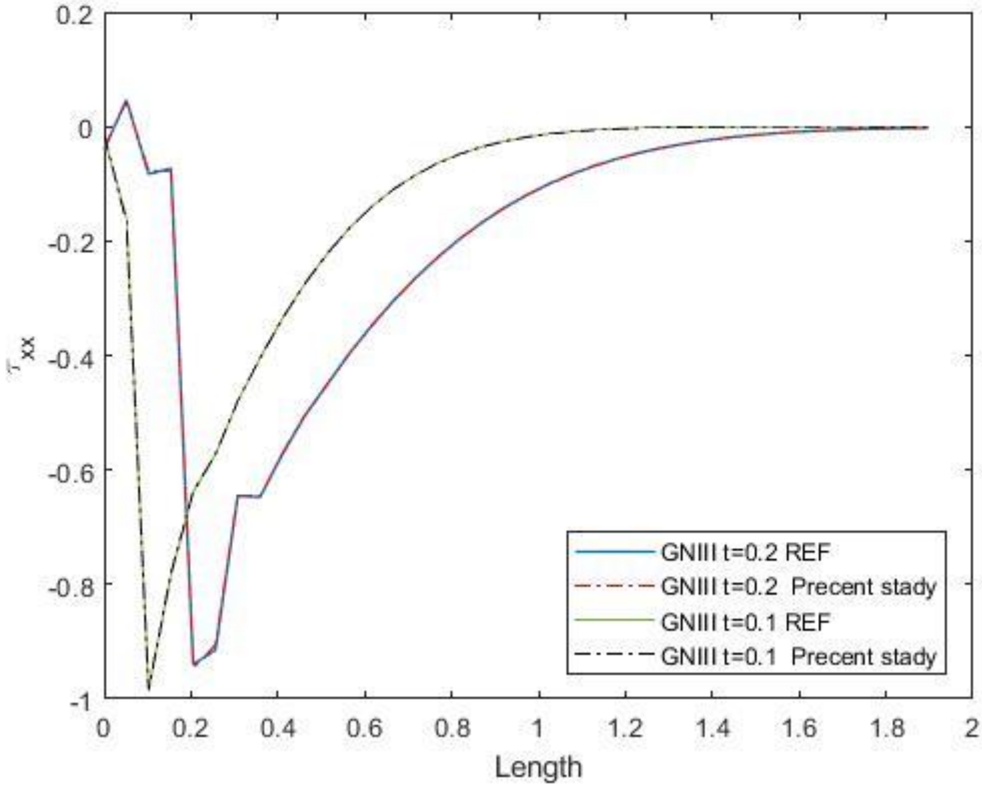
شکل۴-۳ تغییرات جابجایی در راستای X در جهت X۱برای GNIII

در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای جابجایی عمودی می-پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می‌کنیم.که نتایج این دو روش حل همگرایی خوبی نسبت به هم دارند.



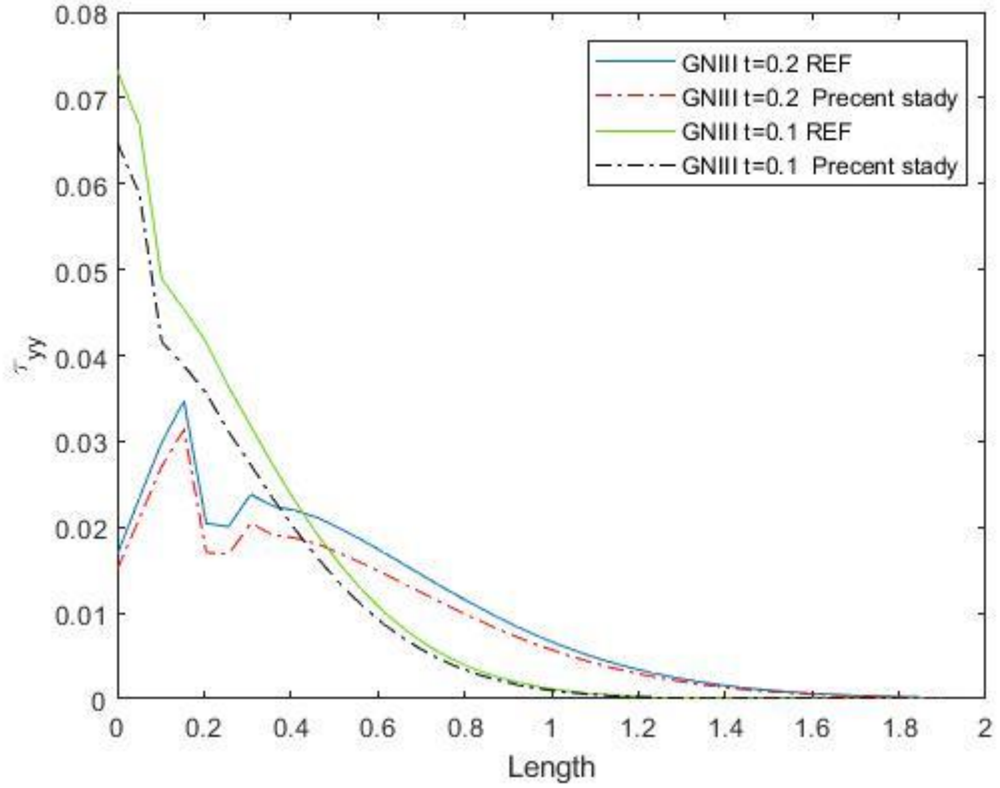
شکل۴-۴ مقایسه جابجایی در راستای Y در جهت X۱برای GNIII

در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای σ_{xx} می‌پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می‌کنیم.که نتایج این دو روش حل در زمان t=۰/۱ نتیجه همگرایی مناسبی نسبت به هم دارند اما در زمان t=۰/۲ کمی دیرتر به همگرایی می‌رسد.



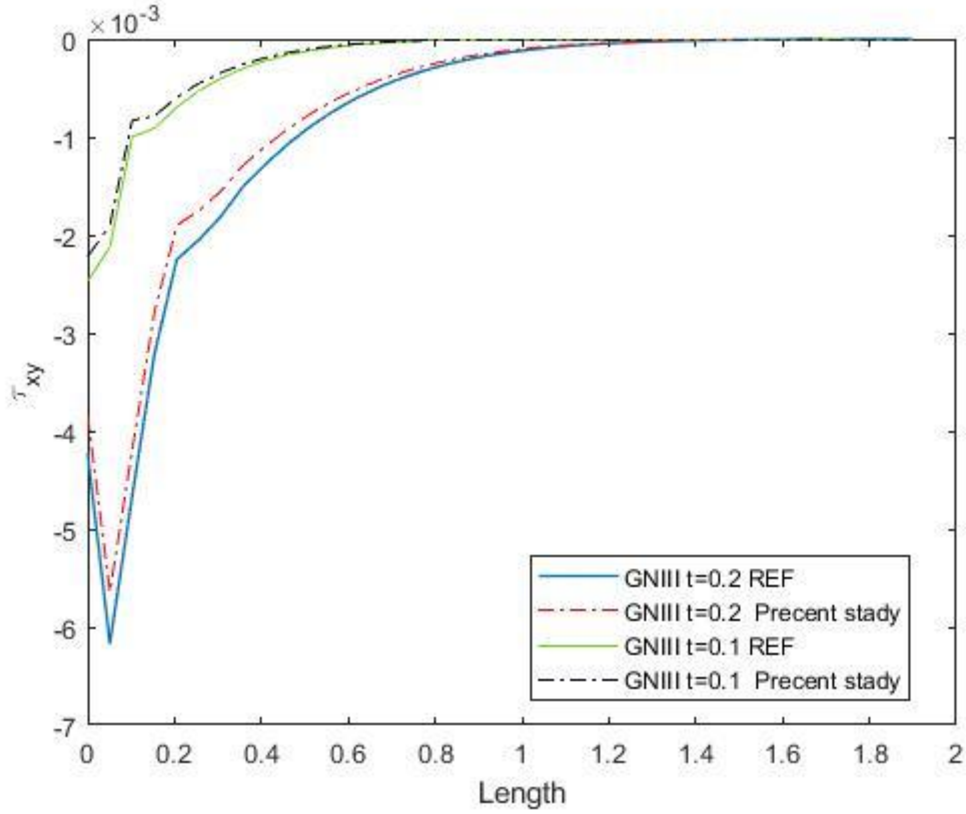
شکل۴-۵ مقایسه σ_{xx} در جهت X۱ برای GNIII

در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای σ_{yy} می پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می کنیم.که نتایج این دو روش تا موقعیت حدود۱ تفاوت دارد و در موقعیت مکانی بعد از آن یکنواخت می شود.



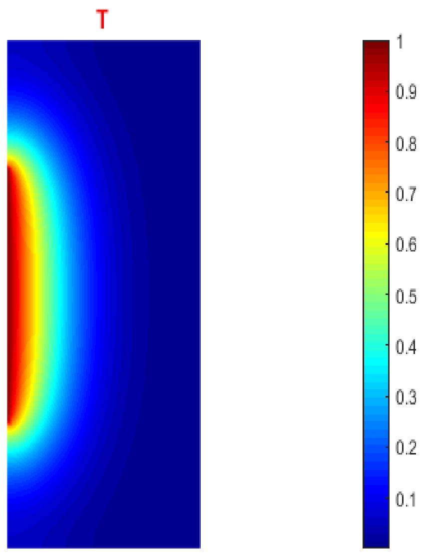
شکل۴-۶ مقایسه σ_{yy} در جهت X۱برای GNIII

در نمودار زیر به مقایسه نتایج مقاله ابراهیم عباس و نتایج روش حل ما برای تنش σ_{xy} می‌پردازیم. همچنین نتایج را برای زمان های نهایی مختلف در حل نیومارک بررسی می‌کنیم.که نتایج این دو روش حل در تمام زمان ها مطلوب است.



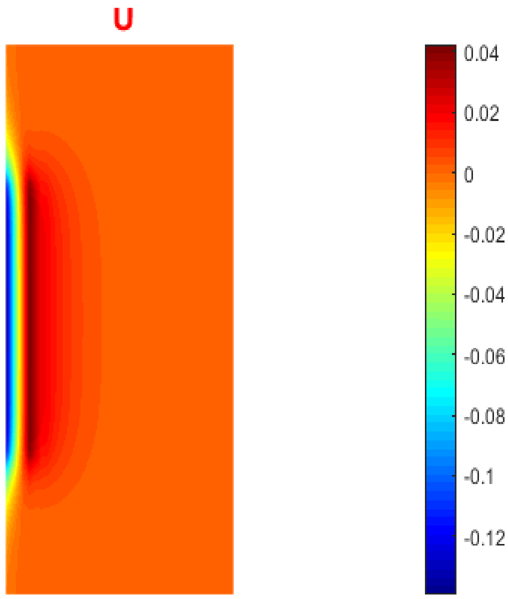
شکل۴-۷ مقایسه σ_{xy} در جهت X۱برای GNIII

در شکل زیر تغییرات دما در صفحه رسم شده ،که تغییرات آن بخصوص در محل اعمال شرایط مرزی قابل مشاهده است(بخش قرمز رنگ).



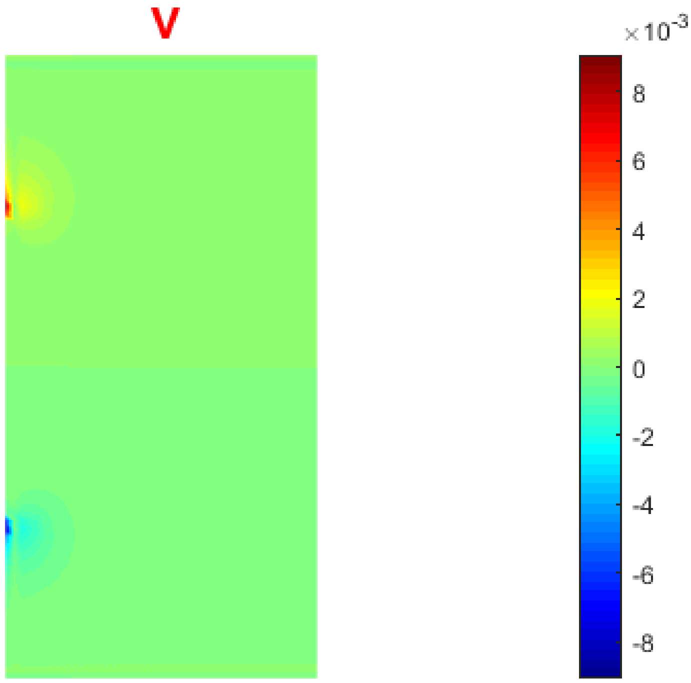
شکل۴-۸ -تغییرات دما در صفحه

در شکل زیر توزیع جابجایی در راستای xمشخص شده که مقادیر آن در ابتدای شرط مرزی منفی و سپس به سمت مثبت و در انتها نزدیک به صفر همگرا می شود.



شکل۴-۹ توزیع جابجایی در راستایx

در شکل زیر توزیع دمایی را در راستایy رسم شده که در کل مقدار آن ناچیز است(بجز در نزدیکی شرایط مرزی و اعمال نیرو).همچنین تقارن در اعمال بارگذاری و برابر بودن اندازه جابجایی در ابتدا مشهود است.

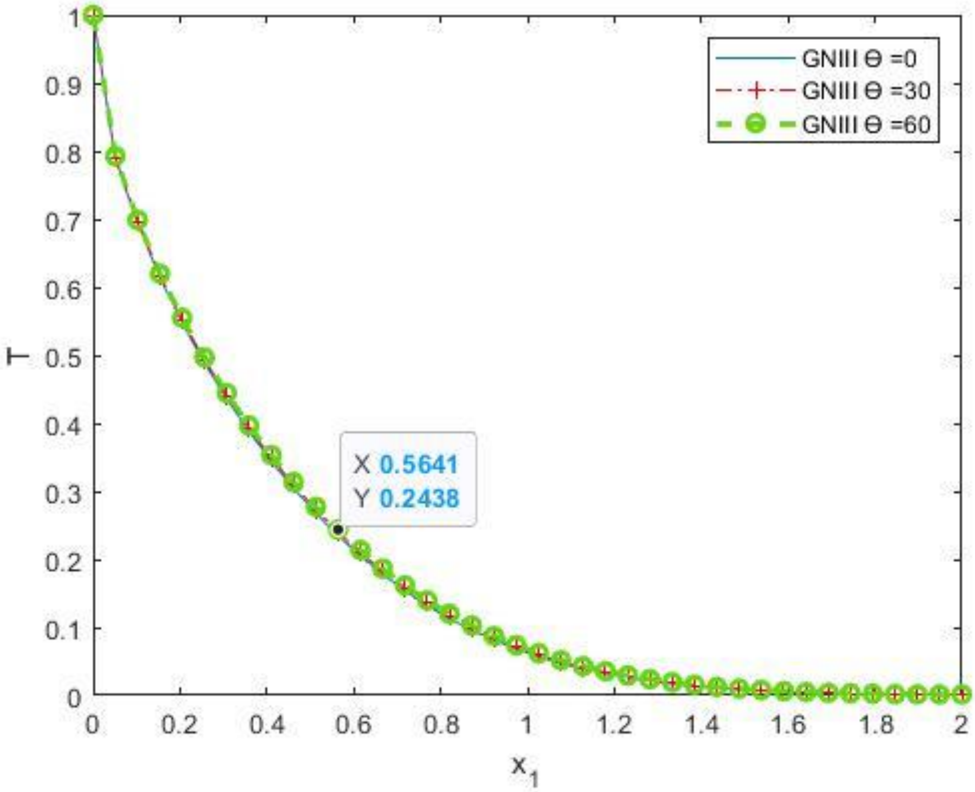


شکل۴-۱۰ توزیع جابجایی در راستای y

۴-۴-۱ مقایسه نتایج زوایای مختلف الیاف برای حالت کرنش صفحه ای

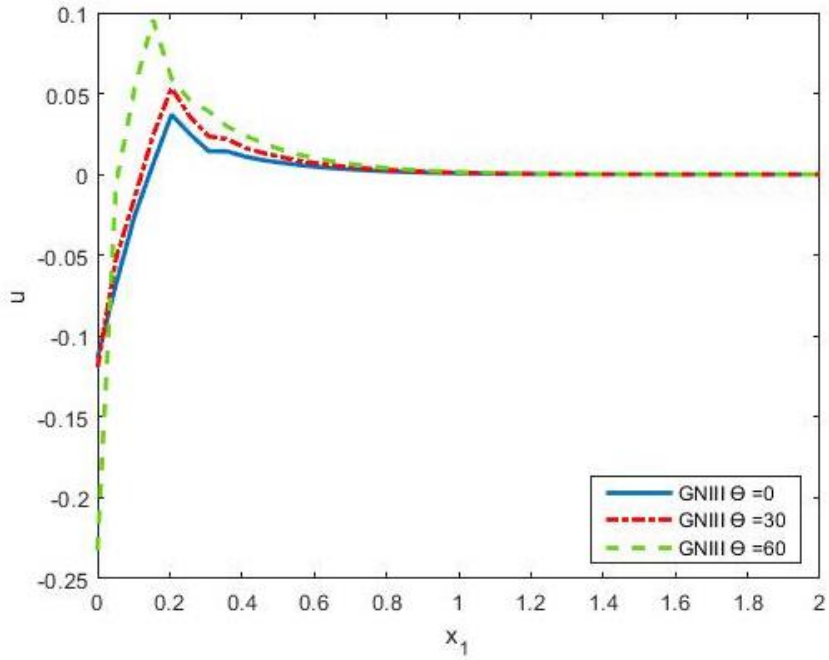
با توجه به اعتبار سنجی مثال بالا ، حالا یک مثال با همان هندسه و اطلاعات (شکل۴-۱و جداول ۴-۱و۴-۲) و همچنین همان روابطGN II برای زوایای مختلف الیاف(off axis) و برای حالت کرنش صفحه ای بررسی می‌کنیم. در این مسئله از زمان نهایی ۰/۲ در حل نیومارک استفاده می‌کنیم.

نمودار زیر برای دما است که تغییرات زوایای مختلف الیاف هیچ تآثیری در این نمودار ندارد. باید توجه داشت این می‌تواند به دلیل یکنواختی شرط مرزی دمایی مسئله و همچنین اختلاف کم بین خواص دمایی در دو راستای مختلف باشد.



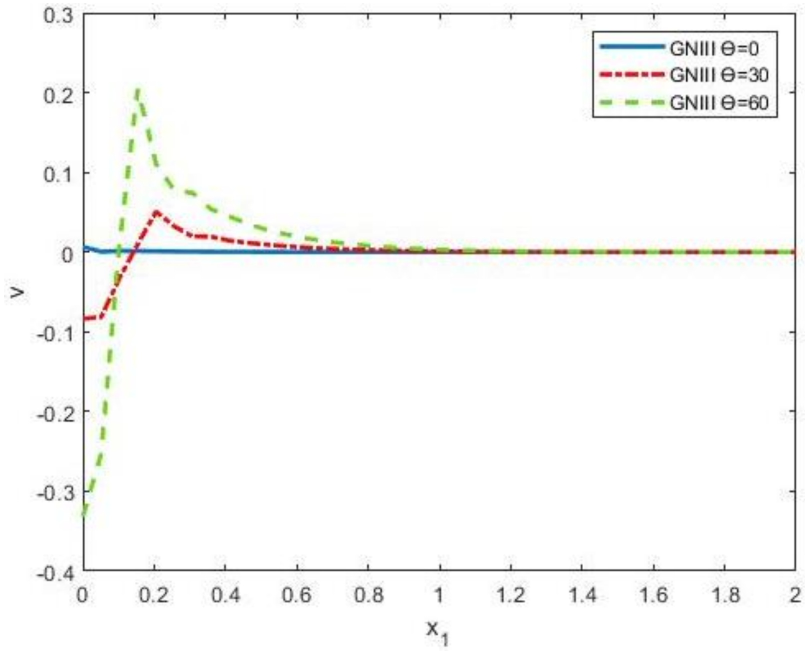
شکل۴-۱۱ مقایسه دما برای زوایای مختلف الیاف

نمودار زیر مربوط به جابجایی محوری است که نتایج برای زوایای الیاف ۰و۳۰درجه نزدیک به هم اما برای زاویه الیاف۶۰ درجه تغییرات مقداری بیشتر از دو زاویه دیگر است. این تغییرات به دلیل تغییر در ماتریس های سفتی و نرمی است.



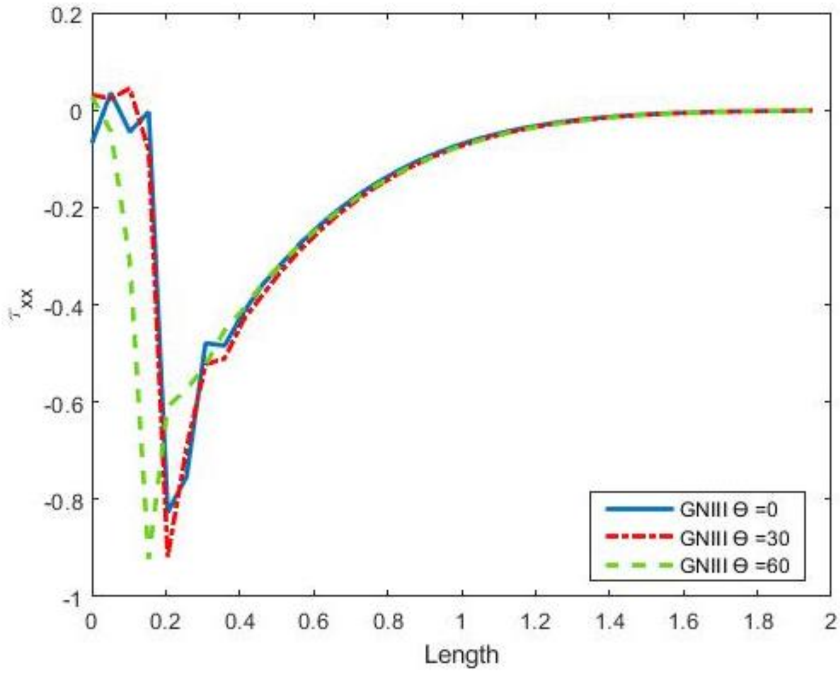
شکل۴-۱۲ مقایسه جابجایی در راستایX برای زوایای مختلف الیاف

نمودار زیر مربوط به جابجایی در راستای y است که مقدار شروع آن برای زوایای مختلف الیاف متفاوت است و این اختلاف تا حدود طول ۱ ادامه دارد. این تغییرات به دلیل تغییر در ماتریس های سفتی و نرمی است.



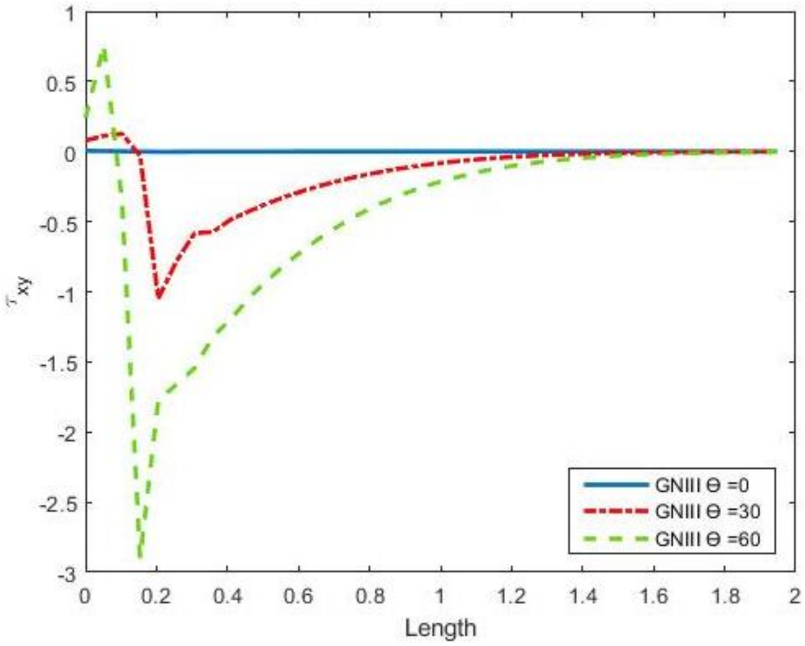
شکل۴-۱۳ مقایسه جابجایی در راستایY برای زوایای مختلف الیاف

نمودار زیر مربوط به تنش σ_{xx}است که برای دو زاویه۰و۳۰درجه تقریباً همگرا ولی برای زاویه۶۰درجه متفاوت است.بازهم در حدود طول۰/۵ نمودارها همگرا می‌شوند.دلیل تغییرات کم در این منحنی می‌تواند تغییرات کم در جابجایی در راستای x باشد.



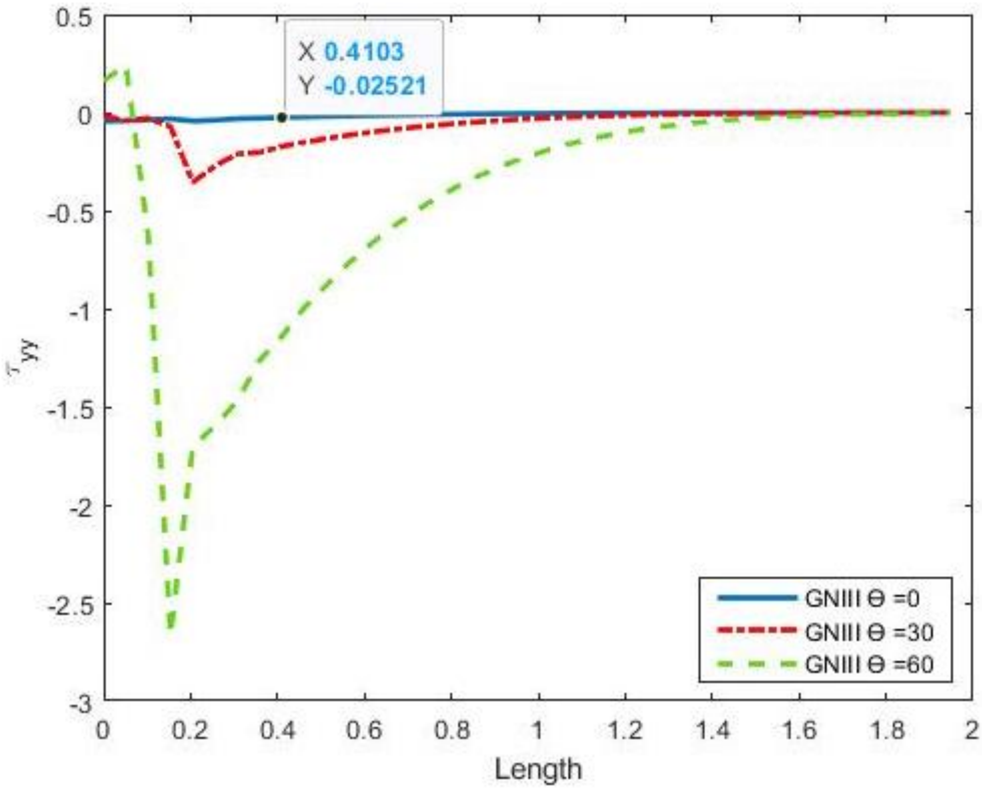
شکل۴-۱۴ مقایسه σ_{xx}برای زوایای مختلف الیاف

نمودار زیر مربوط به σ_{xy}است که برای زاویه صفر درجه به نسبت بقیه زوایا ناچیز و برای زاویه ۶۰درجه به بیشترین مقدار خود می‌رسد. این تغییرات به دلیل افزایش زاویه و تغییرات در ترم ماتریس تنش می‌باشد.



شکل۴-۱۵ مقایسه σ_{xy}برای زوایای مختلف الیاف

در نمودار زیر به بررسی σ_{yy} می پردازیم.جایی که باز هم مقدار تنش در زاویه الیاف صفر درجه بسیار ناچیز است و در زاویه ۶۰درجه این اختلاف بسیار محسوس است. این تغییرات می‌تواند به دلیل تغییرات زیاد جابجایی در راستای y باشد.

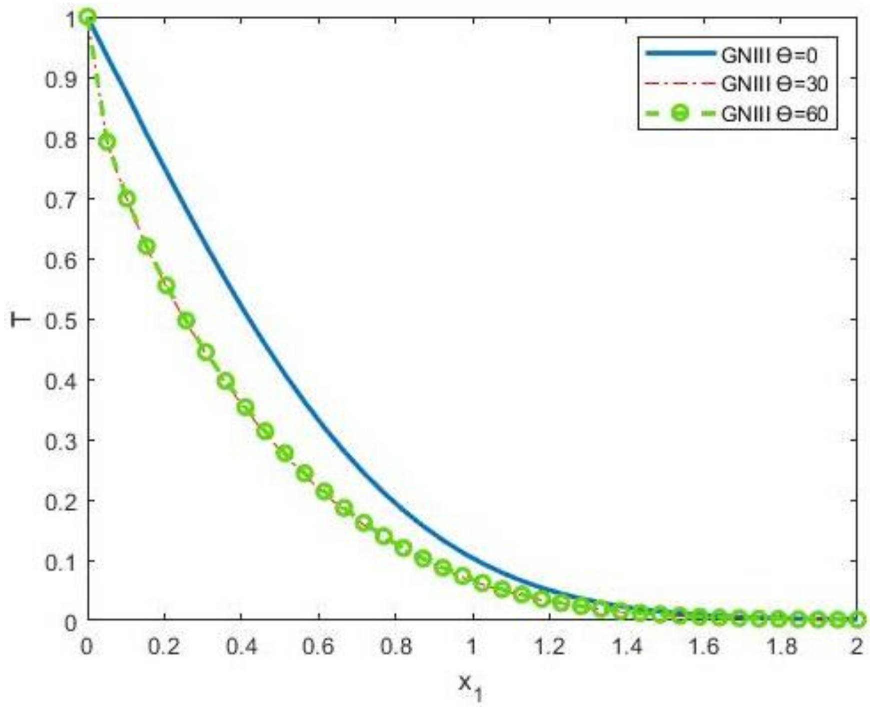


شکل۴-۱۶ مقایسه σ_{yy} برای زوایای مختلف الیاف

۴-۴-۲ مقایسه نتایج زوایای مختلف الیاف برای حالت تنش صفحه ای

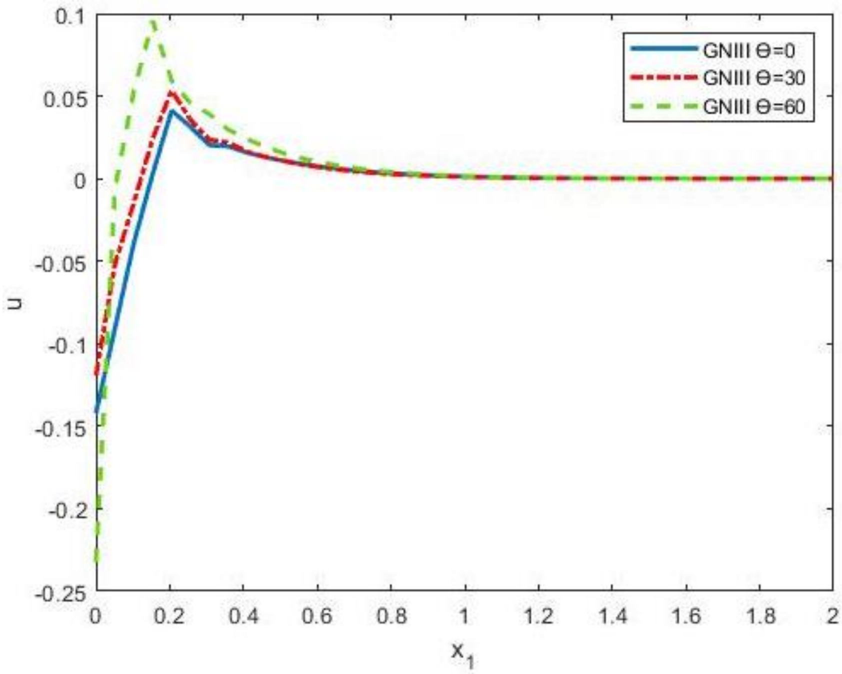
با توجه به اعتبار سنجی مثال اول ما ، حالا یک مثال با همان هندسه و اطلاعات (شکل۴-۱و جداول ۴-۱و۴-۲) و همچنین همان روابطGN II برای زوایای مختلف الیاف(off axis) و برای همان حالت تنش صفحه ای بررسی می کنیم. در این مسئله از زمان نهایی ۰,۲ در حل نیومارک استفاده می‌کنیم.

نمودار زیر نمودار توزیع دما است که برای دو زاویه ۳۰و۶۰ مشابه(همگرا) هستند اما زاویه صفر درجه تفاوت های نسبت به دو زاویه دیگر دارد.



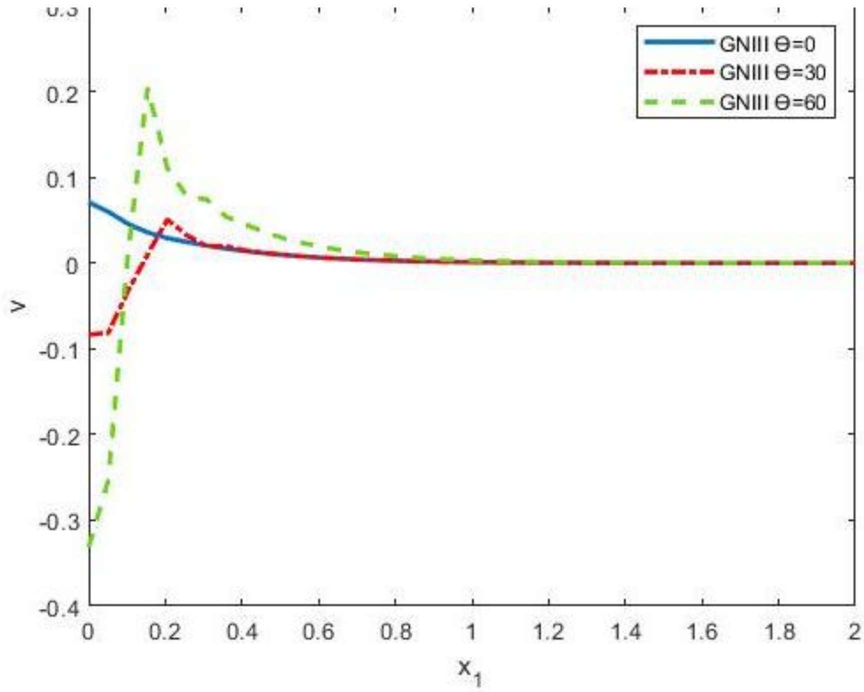
شکل۴-۱۷ مقایسه دما برای زوایای مختلف الیاف

نمودار زیر مربوط به جابجایی افقی است که در این مورد دو زاویه ۰و۳۰همگرایی خوبی دارند اما زاویه۶۰درجه تفاوت محسوسی نسبت به دو زاویه دیگر دارد.



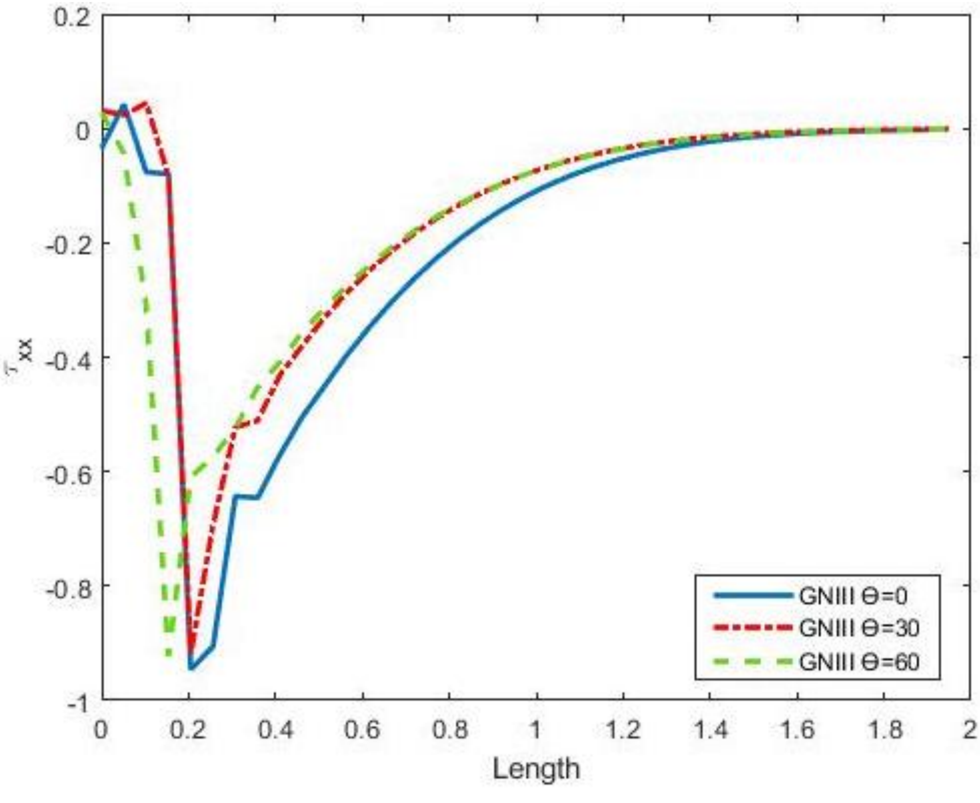
شکل۴-۱۸ مقایسه جابجایی در راستای x برای زوایای مختلف الیاف

نمودار زیر مربوط به جابجایی در راستای y است در این نمودار تفاوت بسیار زیاد این تئوری در ترم جابجایی عددی را مشاهده می کنیم که در عرض حدود ۱ همگرا می شوند.



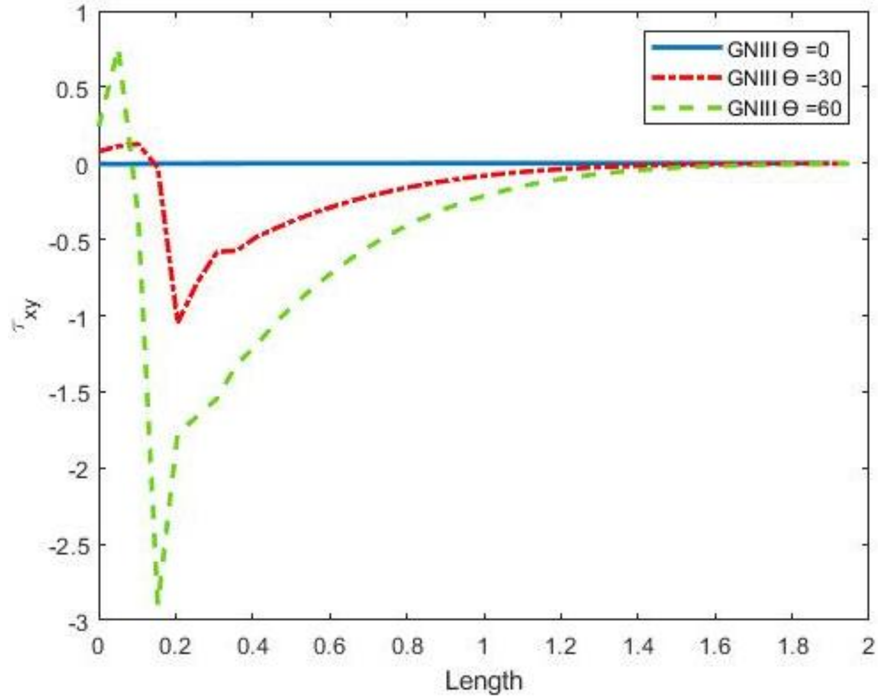
شکل۴-۱۹ مقایسه جابجایی در راستای Y برای زوایای مختلف الیاف

نمدار زیر مربوط به تنش σ_{xx} است که تفاوت زیادی در نتایج زوایا مشاهده می شود.



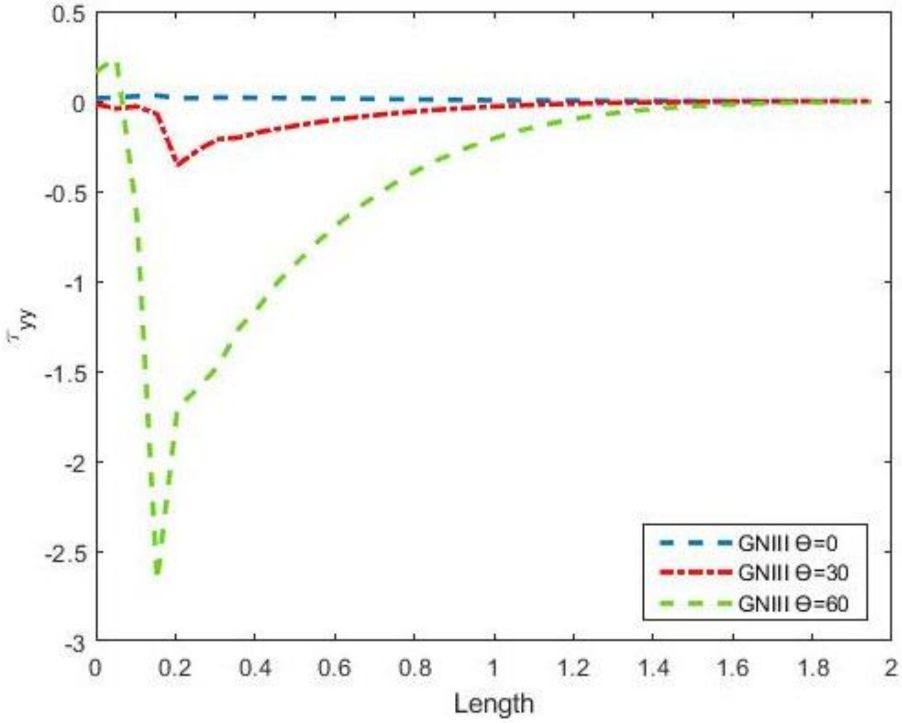
شکل۴-۲۰ مقایسه σ_{xx} برای زوایای مختلف الیاف

نمودار زیر مربوط به تنش σ_{xy} است که برای زاویه صفر درجه به نسبت بقیه زوایا ناچیز و برای زاویه ۶۰درجه به ماکسیمم حد خود می رسد.



شکل۴-۲۱ مقایسه σ_{xy}برای زوایای مختلف الیاف

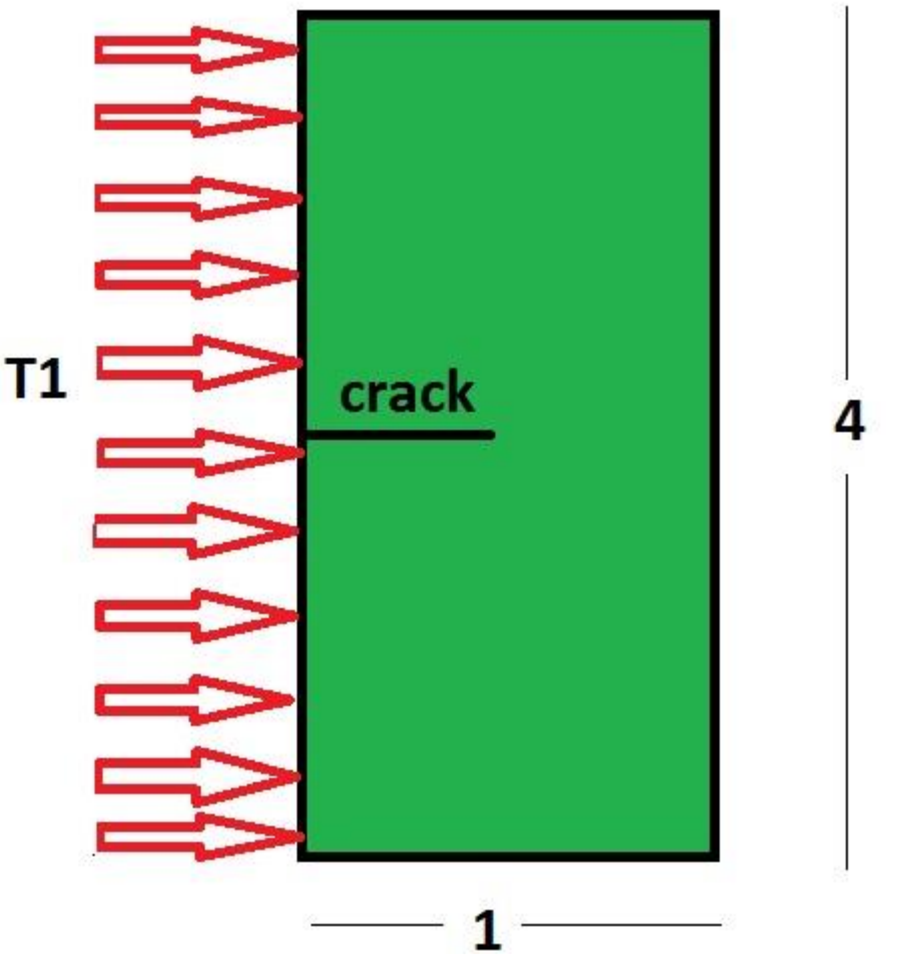
در نمودار زیر به بررسی σ_{yy} می پردازیم.جایی که باز هم مقدار تنش در زاویه الیاف صفر درجه بسیار ناچیز است و در زاویه ۶۰درجه این اختلاف بسیار محسوس است.



شکل۴-۲۲ مقایسه σ_{yy} برای زوایای مختلف الیاف

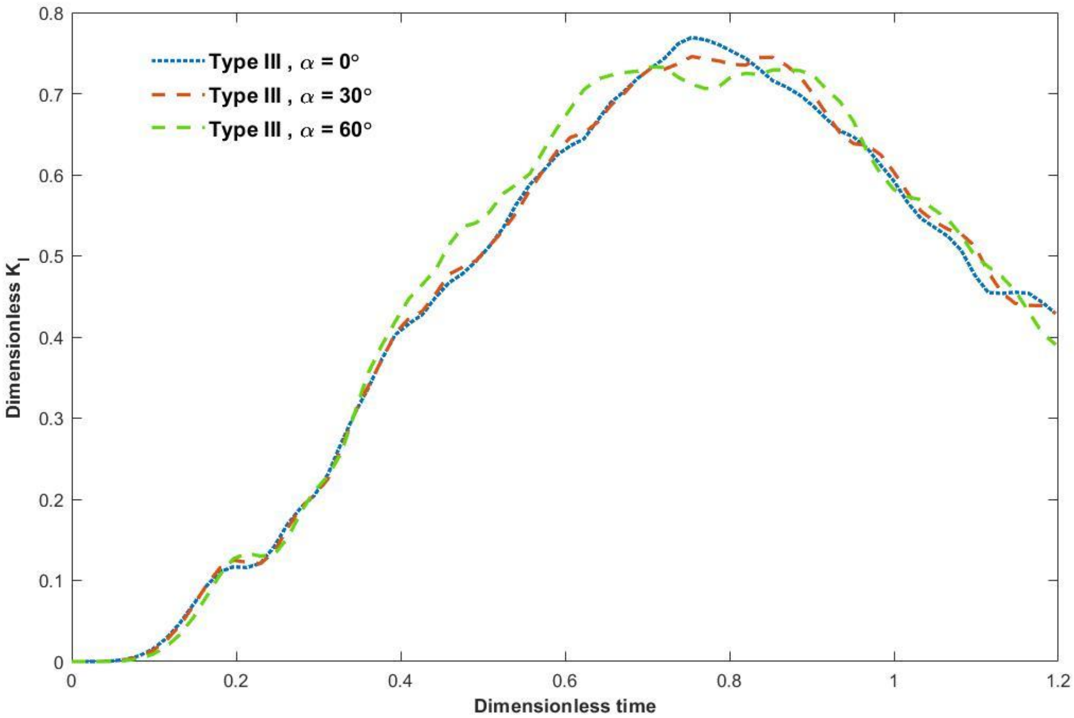
۴-۵ تحلیل نتایج برای ترک لبه ای تحت شوک حرارتی یکنواخت

در این مثال یک صفحه مستطیلی با ترک لبه ای (شکل۴-۲۳) را با اطلاعات جداول(۴-۱و۴-۲) را تحت شوک حرارتی یکنواخت به کمک تئوری GN III بررسی می کنیم. این صفحه دارای طول ۴و ارتفاع ۱و همچنین طول ترک ۰,۵ بدون بعد در لبه سمت چپ و ارتفاع۲ می باشد،که تحت شوک حرارتی به اندازه ی -۱درجه در سمت چپ صفحه قرار دارد (شکل۴-۲۳).



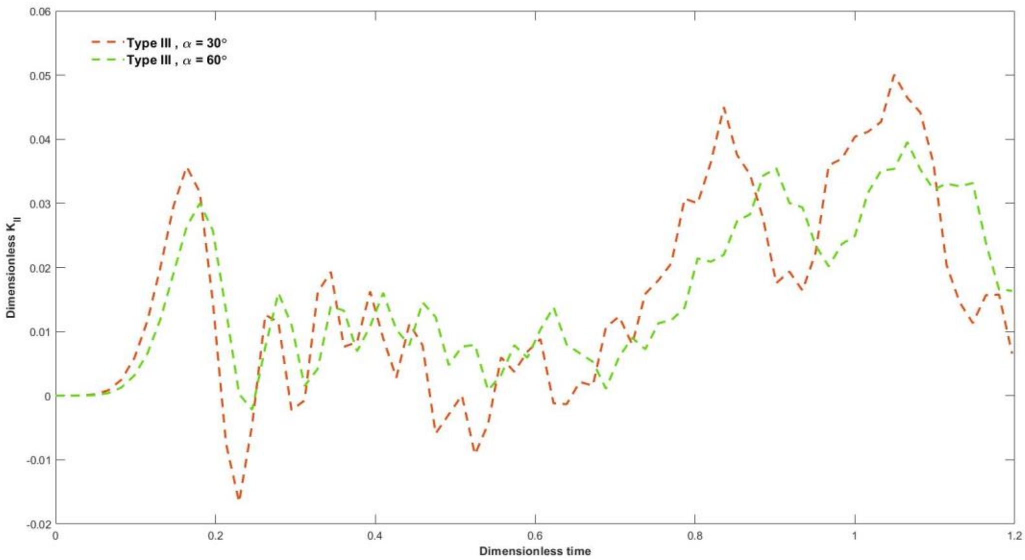
شکل۴-۲۳ صفحه دارای ترک صاف لبه ای تحت شوک حرارتی یکنواخت

در نمودار زیر با بررسی ضرایب شدت تنش مود I برای زوایای الیاف مختلف پرداخته ایم .که تاثیر زاویه الیاف پس از عبور از نوک ترک قابل مشاهده است هرچند در این تئوری این تآثیر زیاد نمی باشد. این تغییرات بیشتر ناشی از توابع غنی سازی دمایی ما است.



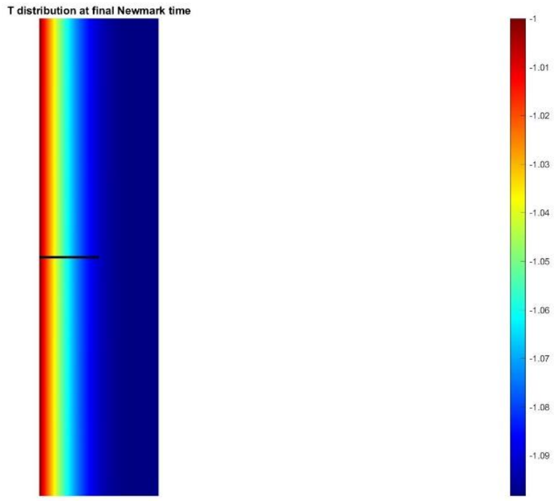
شکل۴-۲۴ مقایسه ضریب شدت تنش مودI در زوایای مختلف الیاف

در شکل زیر به بررسی ضریب شدت تنش نوعII برای دو زاویه مختلف الیاف می پردازیم که تفاوت بیشتری به نسبت ترم ضریب شدت تنش نوعI دارد.



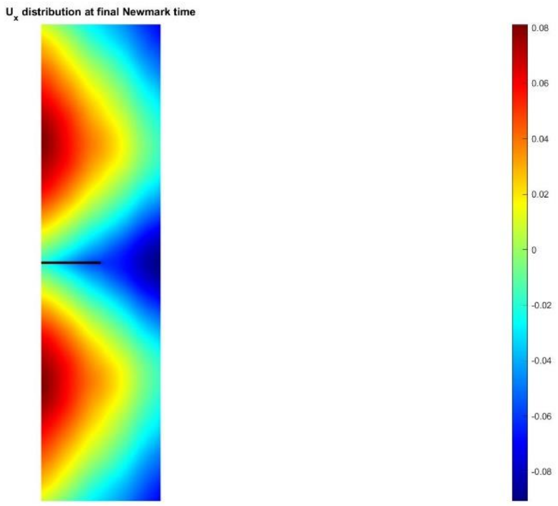
شکل۴-۲۵ مقایسه ضریب شدت تنش مودII برای زوایای مختلف الیاف

در ادامه توزیع دما در لحظه آخر برای زاویه صفر درجه الیاف اورده شده است.

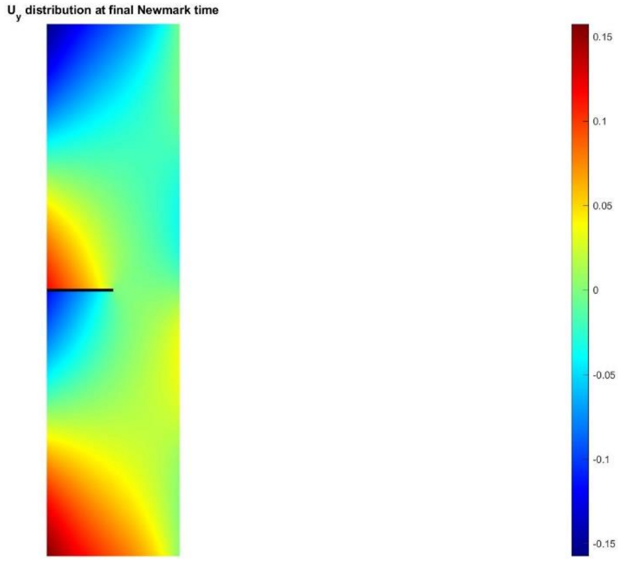


شکل۴-۲۶ توزیع دما در لحظه آخر

در ادامه نیز توزیع جابجایی ها در راستای X،Y نیز برای زاویه صفر الیاف اورده شده است.

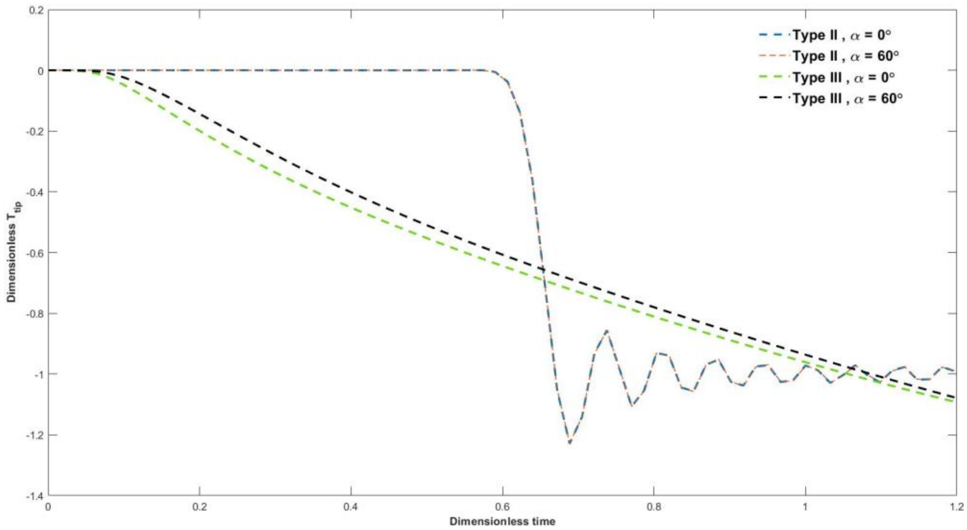


شکل۴-۲۷ توزیع جابجایی در راستای X



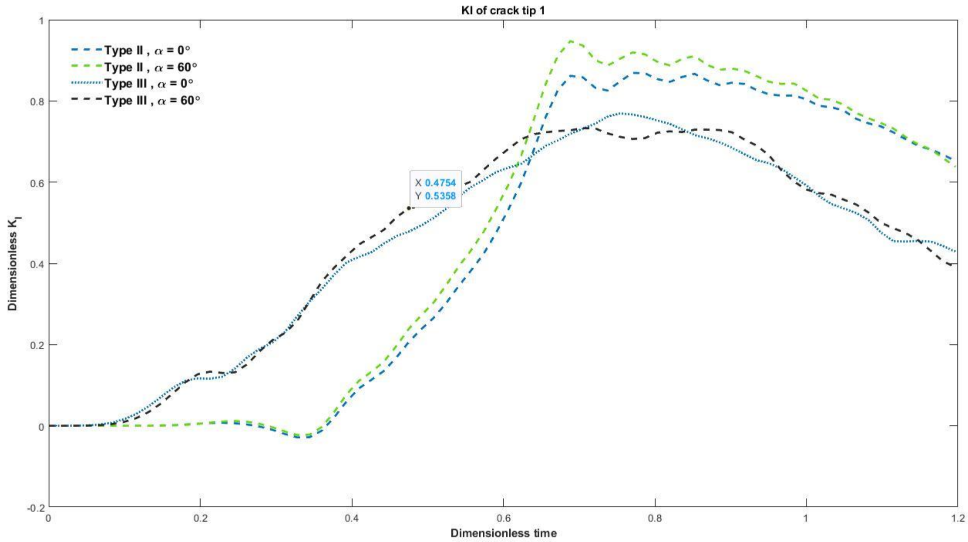
شکل۴-۲۸ توزیع جابجایی در راستای Y

نمودار زیر مقایسه دمای نوک ترک برای تئوری گرین نقدی نوعIIوIII بررسی شده است.



شکل۴-۲۹ دمای نوک ترک

نمودار زیر مقایسه ضریب شدت تنش مودI برای تئوری گرین نقدی نوعIIوIII بررسی شده است.



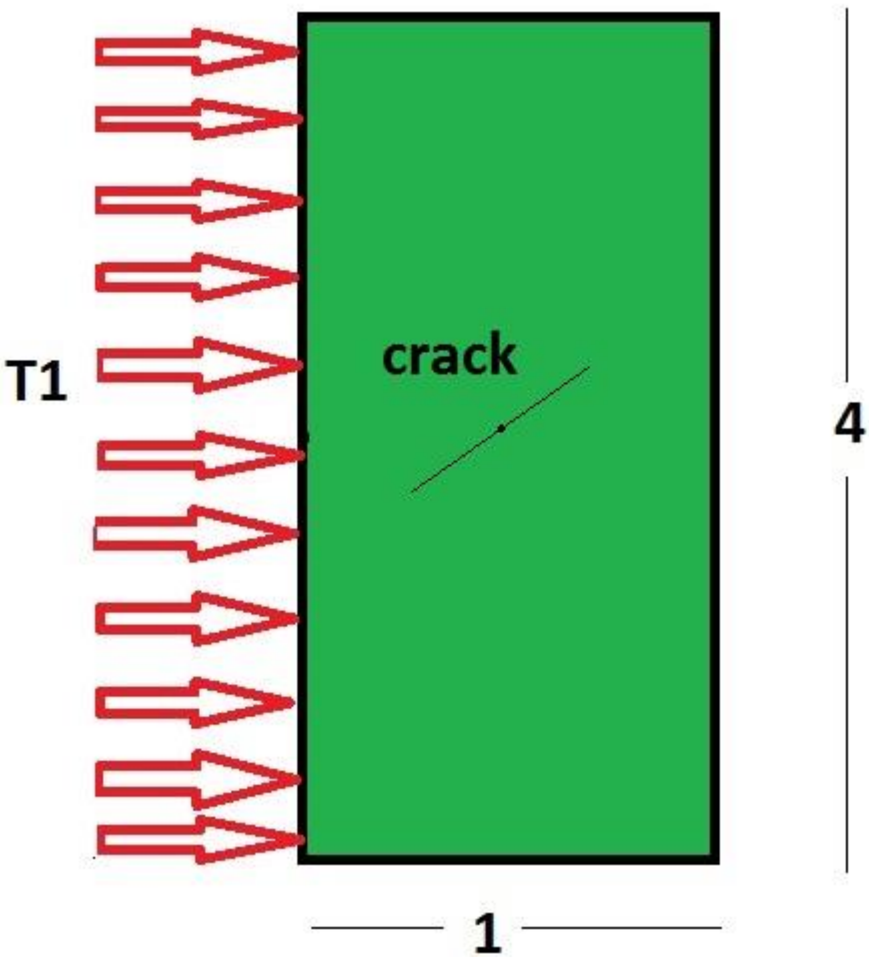
شکل۴-۳۰ مقایسه ضریب شدت تنش مود I

۴-۶ ترک مایل داخلی تحت شوک حرارتی

در اینجا به تحلیل یک ترک مایل داخلی می پردازیم. مثال را برای یک صفحه مستطیلی با اطلاعات مسئله قبل اما برای ترک داخلی با طول ۰،۵ و زاویه ۳۰درجه نسبت به محور x و برای زوایای مختلف الیاف مورد بررسی قرار می دهیم. تعداد مش در نظر گرفته شده در جهت محورx برابر۸۲ و در جهت محورy برابر۳۳۲ می باشد.

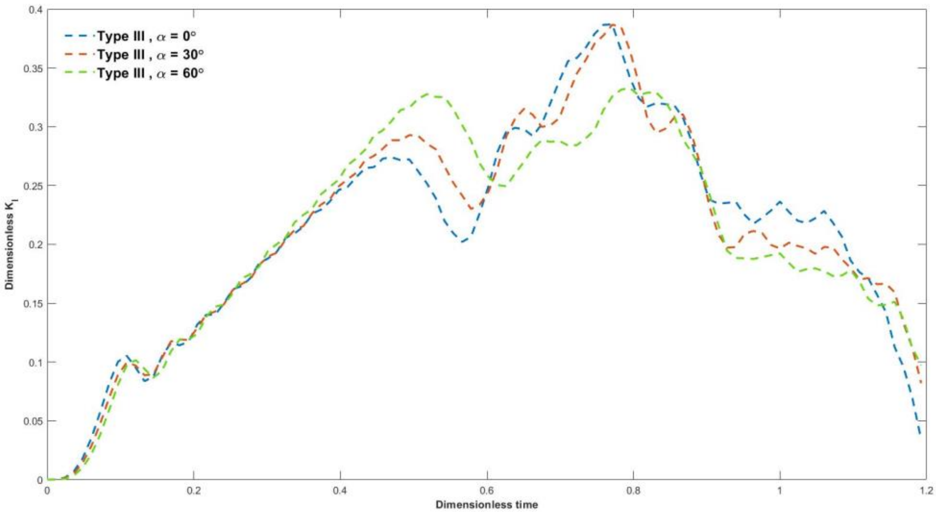
۴-۶-۱ نتایج ترک مایل داخلی تحت شوک حرارتی

در اینجا نتایج را برای ترک داخلی با زاویه الیاف مختلف الیاف بررسی می‌کنیم.



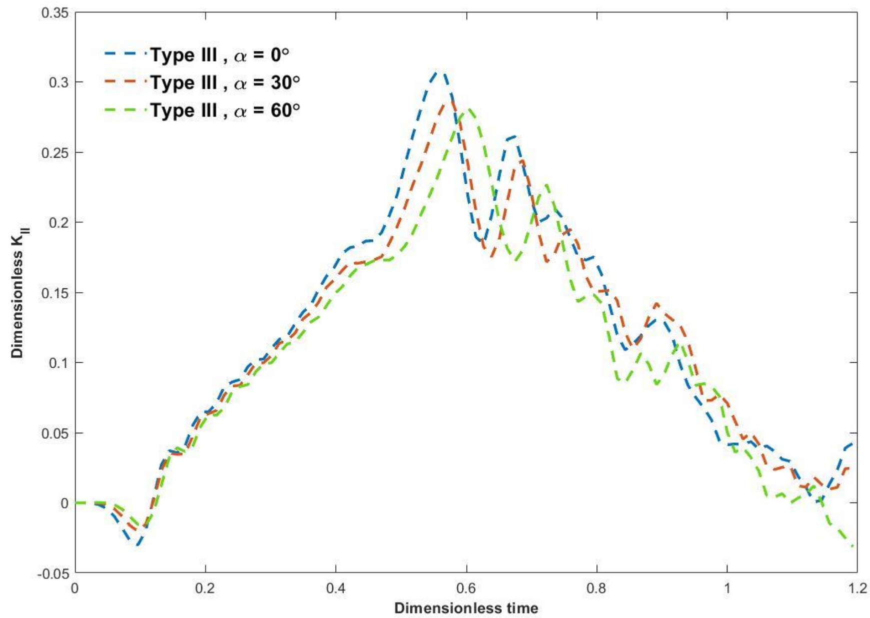
شکل۴- ۳۱ صفحه دارای ترک مایل داخلی تحت شوک حرارتی یکنواخت

نمودار ضریب شدت تنش مود I برای زوایای مختلف الیاف ، اختلاف محسوس برای این تحلیل را نشان می دهد. این اختلاف پس از عبور از نوک ترک قابل مشاهده است. مهمترین دلیل این میزان اختلاف توابع غنی سازی نوک ترک (یا به عبارت دیگر وجود نا پیوستگی در جسم و محل برخورد ترک با الیاف) می‌باشد.



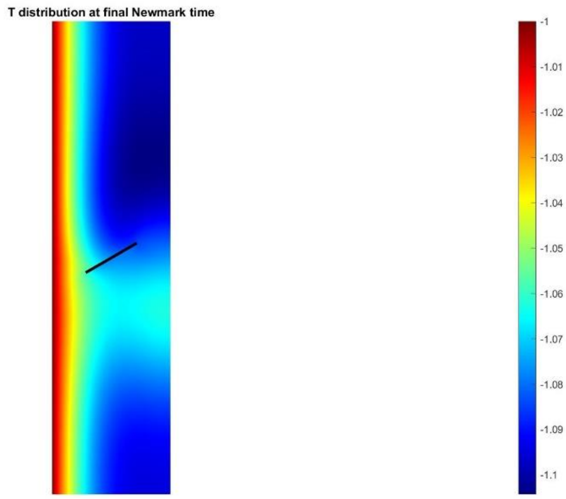
شکل۴-۳۲ ضریب شدت تنش مود I برای زوایای مختلف الیاف

نمودار ضریب شدت تنش مود II برای زوایای مختلف الیاف ، اختلاف محسوس برای این تحلیل را نشان می دهد.



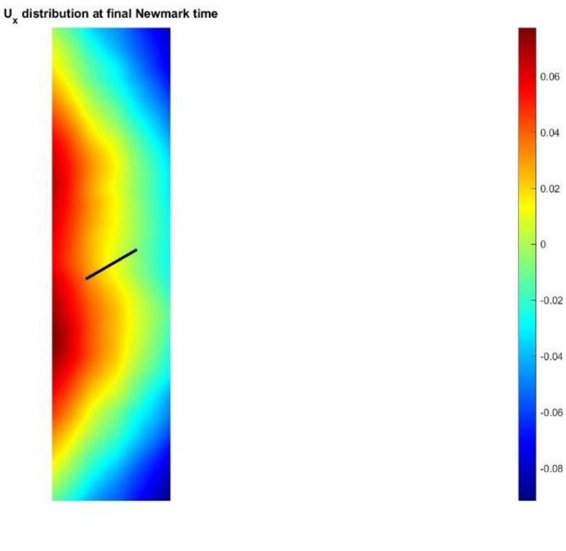
شکل۴-۳۳ ضریب شدت تنش مود II برای زوایای مختلف الیاف

در اینجا توزیع دما را برای زمان انتهایی و برای زاویه صفر درجه الیاف(on axis) مشاهده می کنیم.



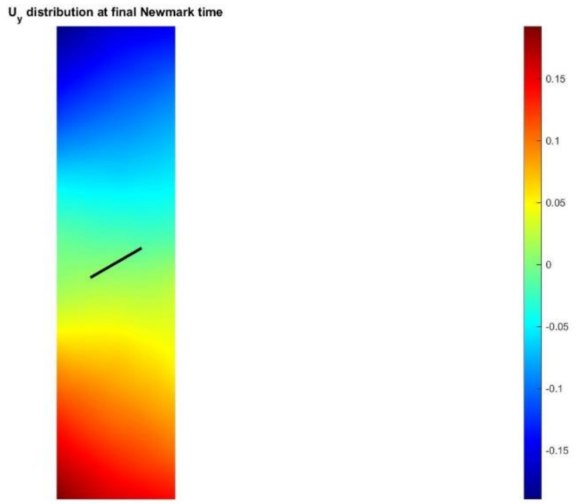
شکل۴-۳۴ توزیع دمایی نزدیک نوک ترک برای زاویه صفر درجه الیاف

در اینجا توزیع جابجایی در راستای x را برای زمان انتهایی و برای زاویه صفر درجه الیاف(on axis) مشاهده می کنیم. دلیل این گونه تغییرات تقارن ترک نسبت به نقطه مرکز جسم است. همچنین تغییرات موج در حین عبور از ترک باعث اینگونه تغییر شکل ها می‌شود.



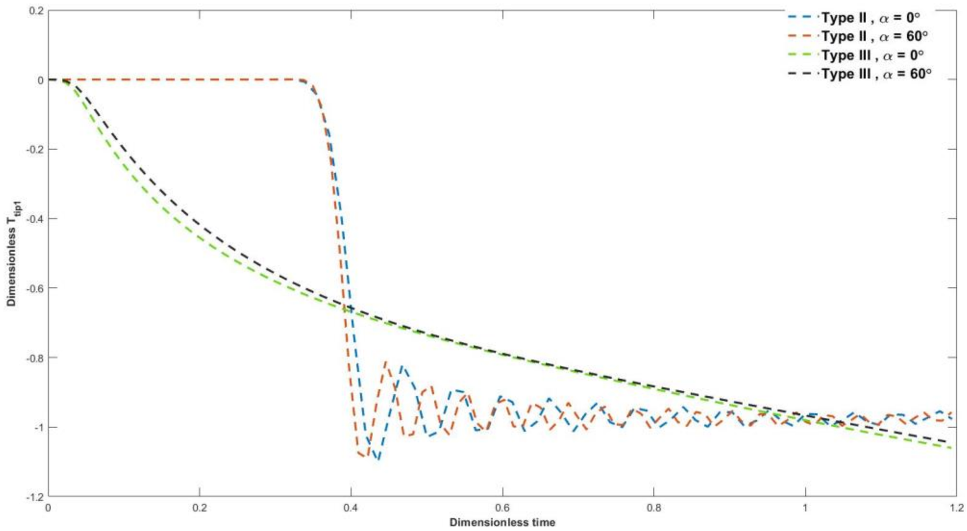
شکل۴-۳۵ توزیع جابجایی در راستای X برای زاویه صفر درجه الیاف

در اینجا توزیع جابجایی در راستای y را برای زمان انتهایی و برای زاویه صفر درجه الیاف(on axis) مشاهده می کنیم.

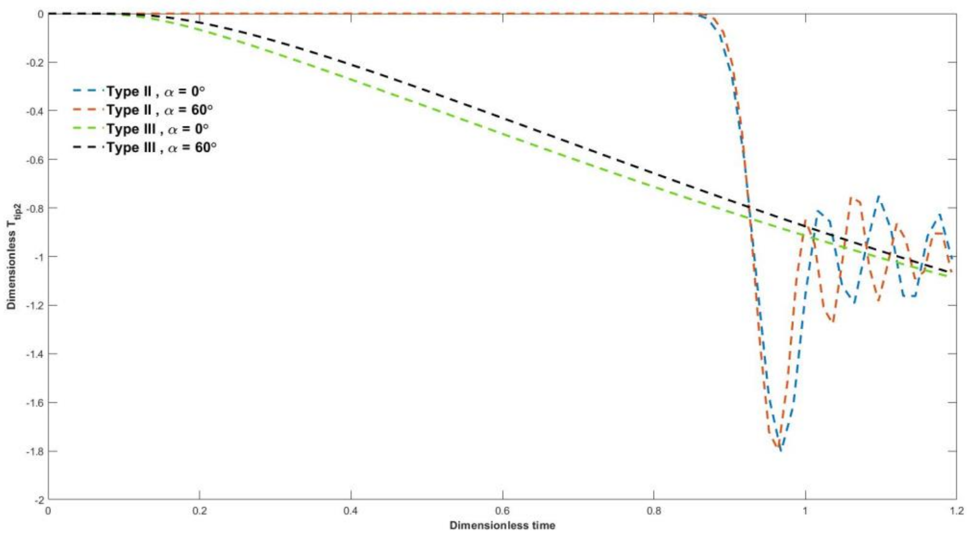


شکل۴-۳۶ توزیع جابجایی در راستای y برای زاویه صفر درجه الیاف

در نمودار زیر دمای نوک ترک برای دو لبه ی سمت چپ و سمت راست بررسی شده است.

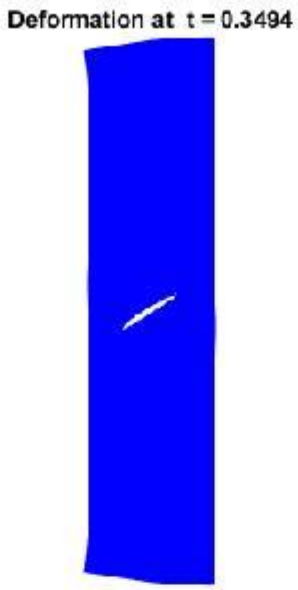


شکل۴-۳۷ دمای نوک ترک برای نوک ترک سمت چپ

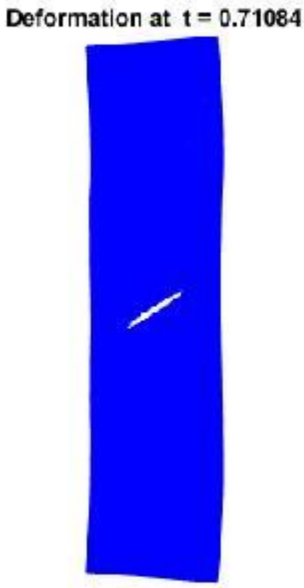


شکل۴-۳۸ دمای نوک ترک برای نوک ترک سمت راست

در ادامه توزیع تغییر شکل را برای چند زمان مختلف مشاهده میکنیم.



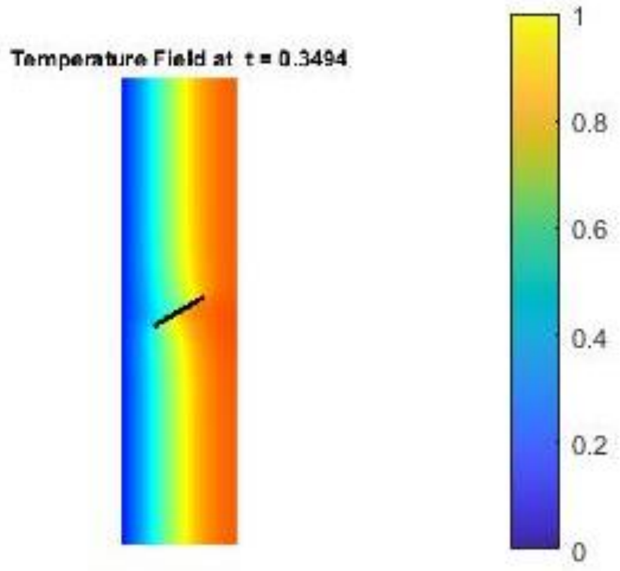
شکل۳-۳۹ توزیع تغییر شکل در زمان t=۰,۳۴۹۴



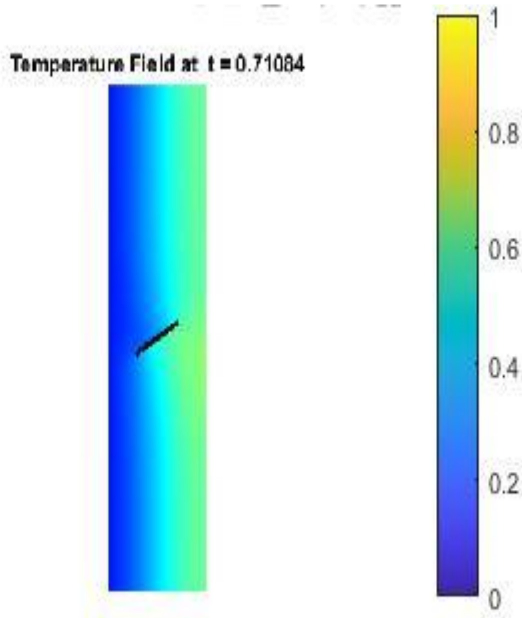
شکل۳- ۴۰ توزیع تغییر شکل در زمان t=۰,۷۱۰۸۴

شکل۳- ۴۱ توزیع تغییر شکل در زمان انتهایی

در ادامه توزیع تغییر دما را برای چند زمان مختلف مشاهده میکنیم.



شکل۳-۴۲ توزیع تغییر دما در زمان t=۰,۳۴۹۴



شکل۳-۴۳ توزیع تغییر دما در زمان t=۰,۷۱۰۸۴

فصل ۵ نتیجه گیری و پیشنهادات

۵-۱ خلاصه نتایج

در این پایان نامه از روش المان محدود توسعه یافته برای تحلیل دینامیکی مسائل مکانیک شکست در محیط‌های دوبعدی در مواد اورتوتروپیک تحت بارگذاری حرارتی با تئوری ترموالاستیسته گرین نقدی نوع IIو III بررسی شد. با آوردن چند مثال از جمله صفحه بدون ترک ابراهیم عباس صفحه با ترک داخلی سانچز و صفحه با ترک لبه ای دکتر محمدی دقت روش حل را با روش‌های دیگر مقایسه کردیم. در انتها مقادیر ضریب شدت تنش در صفحه اورتوتروپیک تحت بارگذاری حرارتی بدست آمده است. همچنین تآثیر زوایای الیاف را بر نتایج دیدیم و همچنین اثر ترم مستهلک کننده را در مثالی مورد بررسی قرار دادیم. پس از آن دو صفحه با ترک لبه ای صاف و ترک مایل داخلی تحت شوک حرارتی یکنواخت را مورد بررسی قرار دادیم. تفاوت نتایج در دو تئوری گرین –نقدی نوع II وIII نشان داد در تئوری نوعIII با توجه به ترم مستهلک کننده انرژی ضرایب شدت تنش دو مود IوII کمتر از تئوری برای نوعII می‌باشد.

۵-۲ پیشنهادها برای تحقیقات آینده

موضوعات برای تحقیقات اینده پیشنهاد می شود:

- بررسی رشد ترک در مواد اورتوتروپیک
- تحلیل و بررسی تئوری های غیر خطی ترموالاستیسیته
- بررسی ضرایب شدت تنش دینامیکی تحت بار ترکیبی مکانیکی و حرارتی برای انواع مواد
- بررسی تئوری های ترموالاستیسیته و شکست در موادFGM

مراجع

[۱] Peshkov V. Determination of the velocity of propagation of the second sound in helium II. J Phys USSR ۱۹۴۶;۱۰:۳۸۹-۹۸.

[۲] Peshkov V. Second sound in liquid helium. J Phys ۱۹۴۴;۸:۳۸۱.

[۳] Mitra K, Kumar S, Vedavarz A, Moallemi MK. Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat. J Heat Transf ۱۹۹۵;۱۱۷:۵۶۸–۵۷۳.

[۴] Tzou DY. The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating. Int J Heat Mass Transf ۱۹۹۵;۳۸:۳۲۳۱–۳۲۳۴.

[۵] Chandrasekharaiah DS. Thermoelasticity with second sound: A Review. Appl Mech Rev ۱۹۸۶;۳۹:۳۵۵–۳۷۶.

[۶] Chandrasekharaiah DS. Hyperbolic Thermoelasticity: A Review of Recent Literature. Appl Mech Rev ۱۹۹۸;۵۱:۷۰۵–۷۲۹.

[۷] Joseph DD, Preziosi L. Heat waves. Rev Mod Phys ۱۹۸۹;۶۱:۴۱–۷۳.

[۸] Joseph DD, Preziosi L. Heat waves: addendum. Rev Mod Phys ۱۹۹۰;۶۲:۳۷۵–۳۹۱.

[۹] W. Nowacki, Dynamic Problems of Thermoelasticity, Springer, New York, ۱۹۷۵.

[۱۰] M. Lessen, Thermoelasticity and thermal shock, J. Mech. Phys. Solids ۵ (۱) (۱۹۵۶) ۵۷–۶۱.

[۱۱] M.V. Dolotov, I.D. Kill’, The thermal shock at the boundary of a half-space in the case of axial symmetry, J. Appl. Math. Mech. ۵۹ (۲) (۱۹۹۵) ۲۲۷–۲۳۴.

[۱۲] N. Mukherjee, P.K. Sinha, Thermal shocks in composite plates: a coupled thermoelastic finite element analysis, Compos. Struct. ۳۴ (۱) (۱۹۹۶) ۱–۱۲.

[۱۳] H. Tianhu, S. Yapeng, T. Xiaogeng, A two-dimensional generalized thermal shock problem for a half-space in electromagneto-thermoelasticity, Int. J. Eng. Sci. ۴۲ (۸–۹) (۲۰۰۴) ۸۰۹–۸۲۳.

[۱۴] M.A. Ezzat, H.M. Youssef, Three-dimensional thermal shock problem of generalized thermoelastic half-space, Appl. Math. Model. ۳۴ (۱۱) (۲۰۱۰) ۳۶۰۸–۳۶۲۲.
[۱۵] N. Sarkar, A. Lahiri, A three-dimensional thermoelastic problem for a half space without energy dissipation, Int. J. Eng. Sci. ۵۱ (۲۰۱۲) ۳۱۰–۳۲۵.
[۱۶] A.E. Green, P.M. Naghdi, An unbounded heat wave in an elastic solid, J. Therm. Stresses ۱۵ (۱۹۹۲) ۲۵۳–۲۶۴.
[۱۷] M. Biot, Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, J. Appl. Phys. ۲۷ (۱۹۵۶) ۲۴۰–۲۵۳.
[۱۸] A.E. Green, K.A. Lindsay, Thermoelasticity, J. Elast. ۲ (۱۹۷۲) ۱–۷.
[۱۹] A.E. Green, P.M. Naghdi, Thermoelasticity without energy dissipation, J. Elast. ۳۱ (۱۹۹۳) ۱۸۹–۲۰۸.
[۲۰] A.E. Green, P.M. Naghdi, A unified procedure for construction of theories of deformable media. ۱. Classical continuum physics, Proc. R. Soc. London Ser.
A ۴۴۸ (۱۹۹۵) ۳۳۵–۳۵۶.
[۲۱] A.E. Green, P.M. Naghdi, A unified procedure for construction of theories of deformable media. ۲. Classical continuum physics, Proc. R. Soc. London Ser.
A ۴۴۸ (۱۹۹۵) ۳۵۷–۳۷۷.
[۲۲] A.E. Green, P.M. Naghdi, A unified procedure for construction of theories of deformable media. ۳. Classical continuum physics, Proc. R. Soc. London Ser.
A ۴۴۸ (۱۹۹۵) ۳۷۹–۳۸۸.
[۲۳] García-Sánchez, F., Zhang, C., & Sáez, A. (۲۰۰۸). A two-dimensional time-domain boundary element method for dynamic crack problems in anisotropic solids. *Engineering Fracture Mechanics*, ٧٥(٦), ١٤١٢-١٤٣٠.

[۲۴]بررسی ضرایب شدت تنش در یک محیط همسانگرد محدود دوبعدی دارای ترک ساکن با استفاده از روش انتگرال برهمکنش و بهره‌گیری از روش المان محدود توسعه‌یافته با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کوپل تعمیم‌یافته بر پایه مدل گرین-لیندزی روشنی زرمهری ، پایان نامه، دانشگاه صنعتی شاهرود
[۲۵]بررسی رشد ترک در یک محیط محدود همسانگرد در معرض شوک حرارتی با در نظر گرفتن

نظریه لرد-شولمان و استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته وحید عصمتی، پایان نامه، دانشگاه صنعتی شاهرود

[۲۶]محاسبه ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته گرین-نقدی و با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته ، محمد شاهسون طغان، پایان نامه، دانشگاه صنعتی شاهرود

[۲۷]محاسبه ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود اورتوتروپیک ترک دار تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته لرد شولمان و استفاده از روش المان محدود توسعه یافته، جوانشیر لطفی، پایان نامه، دانشگاه صنعتی شاهرود

[۲۸] Asadpoure A., Mohammadi S., “Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method” Int J Numer Meth Engng, Vol. ۶۹, ۲۰۰۷, pp. ۲۱۵۰–۲۱۷۲.

[۲۹]Kashtalyan M, Soutis C. Stiffness degradation in cross-ply laminates damaged by transverse cracking and splitting. Compos A Appl Sci Manuf ۲۰۰۰;۳۱:۳۳۵–۵۱.

[۳۰] Farrokhabadi A, Naghdi NM. Micromechanical study of fibre/matrix debonding and matrix cracking using cohesive zone model and extended finite element method; ۲۰۱۶.

[۳۱] Lasn K, Echtermeyer AT, Klauson A, Chati F, Décultot D. An experimental study on the effects of matrix cracking to the stiffness of glass/epoxy cross plied laminates. Compos B Eng ۲۰۱۵;۸۰:۲۶۰–۸.

[۳۲] Abrate S. Matrix cracking in laminated composites: a review. Compos Eng۵۳–۱:۳۳۷;۱۹۹۱ .

[۳۳] Fang X-Q, Zhu C-S. Size-dependent nonlinear vibration of nonhomogeneous shell embedded with a piezoelectric layer based on surface/interface theory. Compos Struct ۲۰۱۷;۱۶۰:۱۱۹۱–۷.

[۳۴] Zhu C-S, Fang X-Q, Liu J-X, Li H-Y. Surface energy effect on nonlinear free vibration behavior of orthotropic piezoelectric cylindrical nano-shells. Eur J Mech-A/Solids ۲۰۱۷;۶۶:۴۲۳–۳۲.

[۳۵] Cox H. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. Br J Appl Phys ۱۹۵۲;۳:۷۲.

[۳۶] Lim S, Hong CS. Prediction of transverse cracking and stiffness reduction in cross- ply laminated composites. J Compos Mater ۱۹۸۹;۲۳:۶۹۵–۷۱۳.

[۳۷] Zhang J, Herrmann K. Application of the laminate plate theory to the analysis of symmetric laminates containing a cracked mid-layer. Comput Mater Sci ۱۹۹۸;۱۳:۱۹۵–۲۱۰.

[۳۸] Talreja R, Singh CV. Damage and failure of composite materials. Cambridge University Press; ۲۰۱۲.

[۳۹] Isometsii J, Lahtinen H. Criteria for matrix failure in continuous frp-composites-a literature study. Part ۱: matrix cracking; ۱۹۹۶.

[۴۰] Johnson P, Chang F-K. Characterization of matrix crack-induced laminate fail- ure—part II: analysis and verifications. J Compos Mater ۲۰۰۱;۳۵:۲۰۳۷–۷۴.

[۴۱] Hashin Z. Analysis of orthogonally cracked laminates under tension. J Appl Mech ۱۹۸۷;۵۴:۸۷۲–۹.

[۴۲] Nairn JA. The strain energy release rate of composite microcracking: a variational approach. J Compos Mater ۱۹۸۹;۲۳:۱۱۰۶–۲۹.

[۴۳] McCartney L. Predicting transverse crack formation in cross-ply laminates۱. Compos Sci Technol ۱۹۹۸;۵۸:۱۰۶۹–۸۱.

[۴۴] Farrokhabadi A, Hosseini Toudeshky H, Mohammadi B. Damage analysis of laminated composites using a new coupled micro-meso approach. FatigueFract Eng Mater Struct ۲۰۱۰;۳۳:۴۲۰–۳۵

[۴۵] Farrokhabadi A, Hosseini-Toudeshky H, Mohammadi B. Development of a damage analysis method in laminated composites using finite fracture toughness of single lamina. Mech Adv Mater Struct ۲۰۱۳;۲۰:۱۷۷–۸۸.

[۴۶] Farrokhabadi A, Mohammadi B, Hosseini-Toudeshky H. A generalized plane-strain crack density-based model for evaluating the finite fracture toughness of composite laminates. Mech Adv Mater Struct ۲۰۱۷;۲۴:۱۳۱–۴۱.

[۴۷] McCartney L. Model to predict effects of triaxial loading on ply cracking in general symmetric laminates. Compos Sci Technol ۲۰۰۰;۶۰:۲۲۵۵–۷۹.

[۴۸] Reddy, J. N. (۲۰۰۳). Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press.

[۴۹] Ahmed, A., & Auricchio, F. (۲۰۰۹). Extended finite element method (XFEM)-modeling arbitrary discontinuities and failure analysis.

[۵۰]محاسبه پارامترهای دینامیکی شکست در مواد مرکب تحت بار حرارتی با روش اجزای محدود

توسعه یافته، مجتبی حاجی محمدی، پایان نامه، دانشگاه صنعتی شاهرود

[۵۱] Melenk J.M. and Babuska I., “The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. ۱۳۹, ۱۹۹۶, pp.۲۸۹ -۳۱۴.

[۵۲] Belytschko T., Y.Krongauz ., D.Organ ., M,Fleming , and P.Krysl., “Meshless method : An overview and recent developments”. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering ۱۳۹, ۳-۴۷،۱۹۹۶.

[۵۳] Belytschko T., Gracie R. and Ventura G. (۲۰۰۹) “A Review of Extended/Generalized Finite Element Methods for Material Modelling” Modelling Simul. Mater. Sci. Eng., ۱۷(۴), pp ۱-۲۴.

[۵۴] Alan T. Zehnder (auth.), Fracture Mechanics-Springer Netherlands (۲۰۱۲)

[۵۶] Timoshenko, Theory of Elasticity (۱۹۵۱)

[۵۷] Asadpoure A., Mohammadi S., Vafai A., “Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method” Thin-Walled Struct, Vol. ۴۴, No. ۹, ۲۰۰۶, pp. ۱۰۳۱–۱۰۳۸.

[۵۸] KC A. and Kim J. H. (۲۰۰۸) “Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials” Eng. Frac. Mech. ۷۵, ۸, pp ۲۵۴۲-۲۵۶۵

[۵۹] Chao, C. K., and R. C. Chang. "Thermal interface crack problems in dissimilar anisotropic media." Journal of applied physics ۷۲,۷ (۱۹۹۲): ۲۵۹۸-۲۶۰۴.

[۶۰] Rice JR. “Path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks” Journal of Applied Mechanics, Transactions (ASME), Vol. ۳۵, No. ۲, ۱۹۶۸, pp. ۳۷۹–۳۸۶.

[۶۱] Kim J.H, Paulino G.H., The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors. Int J Solids Struct, Vol. ۴۰, ۲۰۰۳, pp. ۳۹۶۷-۴۰۰۱

[۶۲] Abbas, I. A. (۲۰۱۱). A two-dimensional problem for a fibre-reinforced anisotropic thermoelastic half-space with energy dissipation. *Sadhana*, ۳٦(۳), ٤۱۱.

Abstract

In this thesis، a finite orthotropic environment under heat shock is studied. Coupled dynamical thermoelasticity equations based on Green-Naghdi thermoelasticity theory are considered، as well as the finite element method developed for discretization in space and the implicit Newmark method for temporal integration. Mechanical and temperature enrichment functions have been used to model the crack in the finite element method. Stress intensity coefficients were calculated using the interaction integral method and compared for different angles of fibers in an orthotropic material. The results are also investigated for several different integral radii. In the following، the temperature distribution around the crack tip which causes the temperature distribution to be perturbed is compared based on two type-III and III-Green theory. The stress intensity coefficients of the two modes I and II for an edge cracked plate for different angles of the fibers have been validated by Mohammadi's paper. The results are very accurate. Also، the stress intensity coefficients in two modes I and II for a plate having a smooth internal crack for an orthotropic material under mechanical loading were validated with the results of the Sanchez paper which results were highly accurate. The results have been investigated for two smooth and inner rim edges under uniform heat shock for different angles of fibers.

Keywords (۵ to ۷ keywords): heat shock، Extended finite element، Stress intensity factor، Green-Naghdi Theory، Generalized thermoelasticity

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Mechanical Engineering

Determination of stress intensity factors in a cracked orthotropic media under thermal shock considering Green-Naghdi theory and using Extended Finite Element Method

By:
Mohammad Karami

Supervisor:
Dr. Mohammad Bagher Nazari

January، ۲۰۲۰