بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک-تبدیل انرژی

آنالیز مسأله روانکاری سیالات ویسکواالاستیک غیرخطی برای یاتاقان‌های ژورنال با استفاده از مدل سیال غیرنیوتنی گزیکس

نگارنده: علی عباس‌پور

استاد راهنما

دکتر محمود نوروزی

استاد مشاور

دکتر پوریا اکبرزاده

بهمن ۱۳۹۸

تقدیم اثر

تقدیم به مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگی‌ام، مدیون حضور سبز آن‌هاست

تقدیم به خانواده‌ی عزیزم.

تشکر و قدردانی

از خدای متعال سپاس گزارم که توفیق کسب علم و دانش را به من عطا فرمود تا بتوانم این مرحله از علم آموزی را با موفقیت به پایان برسانم. از خانواده ی عزیزم به خاطر حمایت ها و محبت های بی دریغی که نسبت به من داشته و دارند، کمال تشکر و سپاس را دارم. از استاد ارجمندم، جناب آقای **دکتر محمود نوروزی** به خاطر راهنمایی های ارزشمند و زحمات ایشان در کلیه ی مراحل انجام پایان نامه تقدیر و تشکر می نمایم. همچنین از آقای **دکتر پوریا اکبرزاده** به پاس زحمات و راهنمایی های ارزشمند ایشان در انجام این مطالعه تشکر می نمایم.

در انتها از تمامی اساتید محترم دانشکده ی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود که توفیق شاگردی شان را داشتم، سپاس گزاری نموده از خدای متعال سلامت و توفیق برای ایشان مسألت دارم.

علی عباس پور

بهمن ۱۳۹۸

تعهدنامه

اینجانب **علی عباس‌پور** دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی **مهندسی مکانیک** گرایش **تبدیل انرژی** دانشکده‌ی مهندسی **مکانیک و مکاترونیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی **آنالیز مسئله روانکاری سیالات ویسکواالاستیک غیرخطی برای یاتاقان‌های ژورنال و اسلایدر با استفاده از مدل سیال غیرنیوتنی گزیکس**

تحت راهنمایی **دکتر محمود نوروزی** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط این‌جانب انجام‌شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورداستفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج بانام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده‌شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده‌شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

نظریه‌ی روانکاری کاربردهای گسترده‌ای در مکانیک سیالات دارد؛ که یک از اساسی‌ترین کاربردهای آن در حوزه‌ی طراحی انواع یاتاقان‌ها می‌باشد. مطالعه در این زمینه، کمک شایانی به پژوهشگران در راستای طراحی یاتاقان‌ها و تعیین بهترین شرایط کاری آن‌ها می‌کند. تحقیقات نشان می‌دهد که در اثر افزودن مواد پلیمری به روغن‌های معدنی و تغییر رفتار سیال نیوتنی به مواد ویسکواالاستیک، روانکار موردنظر عملکرد بسیار مطلوبی را در سیستم روانکاری از خود نشان می‌دهد. بنابراین جهت بررسی رفتار واقعی یک روانکار ویسکواالاستیک لازم شد که با تکیه‌بر مدل‌های توانمندی در زمینه‌ی غیرنیوتنی به تجزیه و تحلیل این مسئله بپردازیم. در مطالعه حاضر با استفاده از مدل ویسکواالاستیک غیرخطی گزیکس و انتخاب تئوری اغتشاشات به‌عنوان راهبرد حل، به بررسی مسئله روانکاری برای یاتاقان‌های ژورنال و اسلایدر پرداخته شد؛ و تأثیر پارامترهایی چون عدد وایزنبرگ، ضریب پویایی و تغییرات سایز گپ یاتاقان بر روی نحوه‌ی عملکرد آن مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از یک روانکار ویسکواالاستیک به‌عنوان جایگزینی برای سیال نیوتنی، منجر به افزایش قابل‌توجه توزیع فشار می‌گردد؛ که این خود نشان‌دهنده‌ی افزایش ظرفیت تحمل بار یاتاقان در جهت بار وارده از سوی محور گردان می‌باشد. نکته‌ی دیگر اینکه با افزایش ضریب پویایی و رقیق‌تر شدن سیال در مدل گزیکس، با افت فشار وارده از جانب سیال ویسکواالاستیک بر سطوح یاتاقان مواجه می‌شویم. و درنهایت مشاهده می‌شود که با تنگ‌تر کردن فضای عبور جریان برای یاتاقان اسلایدر، و افزایش نسبت خروج از مرکز در یاتاقان ژورنال، فشاری که از جانب سیال ویسکواالاستیک به دیواره‌های یاتاقان وارد می‌شود؛ افزایش می‌یابد.

کلمات کلیدی: روانکاری یاتاقان، یاتاقان اسلایدر، یاتاقان ژورنال، مدل گزیکس، سیال ویسکواالاستیک، غیرنیوتنی، نظریه‌ی اغتشاشات.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱-

۲-

۳-

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست علائم

P	فشار بی‌بعد
$\tilde{P}(Pa)$	فشار
u, v	مؤلفه‌های سرعت بی‌بعد
$\tilde{u}, \tilde{v}\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$	مؤلفه‌های سرعت
$\tilde{\rho}\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$	چگالی
$\tilde{\eta}(Pa.s)$	لزجت
$t(s)$	زمان
$\tilde{U}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$	سرعت صفحه متحرک
x, y	مختصات کارتزین بی‌بعد
$\tilde{x}, \tilde{y}\ (m)$	مختصات کارتزین
$h(x)$	ضخامت بی‌بعد فیلم سیال
$\tilde{H}(\tilde{x})(m)$	ضخامت فیلم سیال
$\tilde{h}_0(m)$	ضخامت دهانه ورودی یاتاقان
$\tilde{h}_L(m)$	ضخامت دهانه خروجی یاتاقان
$\tilde{L}(m)$	طول یاتاقان
H_L	نسبت ارتفاع دهانه ورودی به خروجی یاتاقان
τ_{xy}	تنش برشی بی‌بعد
$\tilde{\tau}_{xy}(Pa)$	تنش برشی

τ_{xx}, τ_{yy}	تنش‌های اصلی نرمال بی‌بعد
$\tilde{\tau}_{xx}, \tilde{\tau}_{yy}(Pa)$	تابع هندسی سطح
$t(\mathrm{s})$	زمان

فصل۱ : مقدمه

تئوری روانکاری در دینامیک سیالات، معمولاً جریان سیال ویسکوزی را توصیف می‌کند که در یک فضای تنگ جریان دارد؛ به‌طوری‌که در آن، یکی از ابعاد هندسه حرکتی سیال در مقایسه با سایر ابعاد بسیار کوچک‌تر است [۱]. بارزترین مصداق این نظریه بررسی جریان روغن‌های روان‌ساز به‌کاررفته در یاتاقان‌ها است. اصلی‌ترین هدف در هنگام تحلیل چنین جریان‌هایی محاسبه توزیع فشار وارد بر روغن‌های روان‌ساز است که به کمک آن می‌توان نیروهای وارد شونده بر ادوات مکانیکی موجود را محاسبه کرد. هدف از روانکاری کاستن اصطکاک، جلوگیری از تولید حرارت و سایش قطعاتی که نسبت به هم حرکت‌دارند، می‌باشد. برای این منظور ماده‌ای بین قطعات مزبور تزریق و فیلمی تشکیل داده می‌شود تا بین قطعات فاصله ایجادشده و مستقیماً در تماس نباشند این ماده ***روانکار*** نام دارد. ضخامت فیلم سیال در حد میکرومتر است و همگرایی سطوح باعث می‌شود که فشار سیال بر سطح آن‌ها عمود بوده و باعث فاصله گرفتن آن‌ها از هم شود، با توجه به بررسی رفتار روانکارهای مورد استفاده در فرآیند روانکاری، می‌توان بیشتر آن‌ها را به‌عنوان مواد ویسکوالاستیک دسته‌بندی کرد، که به‌منظور تحلیل آن‌ها باید به معادلات حاکم مربوط به سیالات غیرنیوتنی رجوع کرد.

۱-۱ یاتاقان و روانکاری

یاتاقان به‌طورکلی به وسایل مکانیکی که باعث کم شدن اصطکاک شده و کارکرد را در حرکاتی همانند حرکات چرخشی بهبود می‌بخشد، اطلاق می‌شود و به دو دسته‌ی اصلی لغزشی و غلتشی تقسیم می‌شوند.

۱-۱-۱ یاتاقان‌های غلتشی

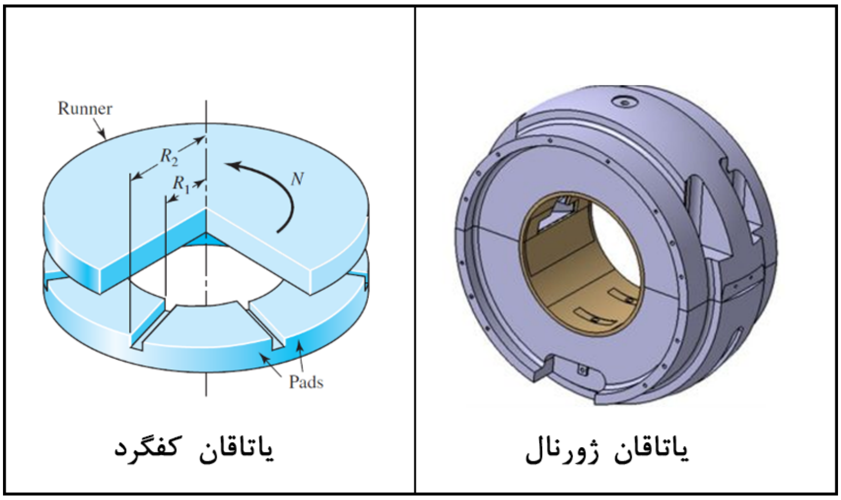
در یاتاقان‌های غلتشی اساس کار، بر مبنای غلتش عضوهای غلتنده (مثل ساچمه‌ها) است؛ به همین روی به آن‌ها اصطلاحاً غلتشی می‌گویند. این نوع یاتاقان‌ها تشکیل‌شده از اجزای غلتنده‌ای هستند که در اثر چرخش محور گردان بر روی اجزای دیگر یاتاقان غلتیده می‌شوند. در این نوع از یاتاقان‌ها بار اصلی بر اجزای غلتنده وارد می‌شود که مستعدترین اجزا برای خرابی هستند.

این نوع یاتاقان‌ها بسته به شکل ساختمانی که دارند می‌توانند بار شعاعی و یا بار محوری و یا ترکیبی از دو نوع بار را تحمل کنند. تقسیم‌بندی یاتاقان‌های غلتشی را در شکل ۱-۱ مشاهده می‌نمایید [۲].

شکل ۱-۱: تقسیم‌بندی انواع یاتاقان‌های غلتشی

۱-۱-۲ یاتاقان‌های لغزشی

در یاتاقان‌های لغزشی، عضو غلتنده‌ای نداریم، و با سایش سطوح محور گردان و یاتاقان مواجه هستیم. در شکل ۲-۲ دسته‌بندی انواع یاتاقان‌های لغزشی را مشاهده می‌نمایید.



شکل ۱-۲: تقسیم‌بندی انواع یاتاقان‌های لغزشی

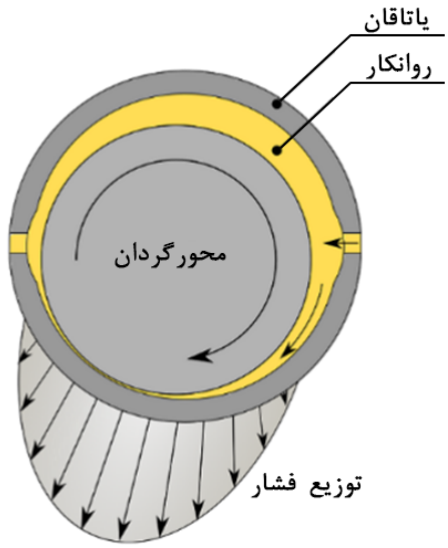
تفاوت اصلی این دو در تحمل نوع نیروی وارده است. یاتاقان‌های ژورنال توانایی تحمل بارهای عمود به محور و یاتاقان‌های کفگرد توانایی حمل بارهای در امتداد محور را دارا هستند [۲].

روانکاری یکی از مؤثرترین راه‌ها برای صرفه‌جویی در انرژی و حفظ ماشین‌آلات از سایش، ازکارافتادگی و فراهم آوردن عمر طولانی است. به‌منظور کاهش اصطکاک بین دو جسمی که نسبت به هم حرکت می‌کنند، معمولاً از یک سیال ویسکوز در فاصله هوایی بین آن‌ها استفاده می‌شود. این فرآیند را ***روانکاری*** می‌گویند. این تئوری کاربرد گسترده‌ای در مکانیک سیالات دارد، یک از اساسی‌ترین کاربردهای این نظریه در طراحی یاتاقان‌ها می‌باشد، که به نظر محققین یکی از مهم‌ترین مسائل حیاتی در این زمینه است. هدف اصلی توسعه نظریه روانکاری تعیین توزیع فشار روغن‌های روان‌کننده است، که پژوهشگران را برای طراحی بهتر و تعیین بهترین شرایط کار برای یاتاقان‌های مکانیکی هدایت می‌کند. کاهش و کنترل اصطکاک با واردکردن ماده‌ای به نام روانکار در محل تماس حاصل می‌شود و به‌موجب آن سطوح دارای حرکت نسبی با فیلمی از روانکار از یکدیگر جدا می‌شوند. ماده روانکار علاوه بر کاهش اصطکاک و سائیدگی برای کاهش خوردگی و افزایش انتقال حرارت نیز به کار می‌رود. امروزه در صنعت، از روش‌های مختلفی برای روانکاری استفاده می‌گردد و این روش‌ها معمولاً بر مبنای نحوه تشکیل فیلم روغن بین سطوح موردنظر، طبقه‌بندی می‌شوند. در ادامه به انواع روش روانکاری می‌پردازیم [۲].

۱-۱-۳ روانکاری هیدرودینامیکی

روانکاری یاتاقان انواع مختلفی دارد که در مطالعه‌ی حاضر نوعی از روانکاری موسوم به روانکاری هیدرودینامیکی موردبررسی قرار می‌گیرد. در روانکاری هیدرودینامیکی، سطوح تحمل‌کننده بار به‌وسیله یک‌لایه روانکار از هم جدا می‌شوند تا از تماس فلز به فلز جلوگیری نماید؛ و حالت پایداری که به‌این‌ترتیب حاصل می‌شود را می‌توان با قوانین مکانیک سیالات توضیح داد. در این نوع روانکاری نیازی به تزریق تحت‌فشار مایع روانکار نیست، هرچند می‌تواند چنین باشد؛ اما در هرلحظه احتیاج به وجود مقادیر کافی مایع روانکار داریم. یک لایه پرفشار در اثر حرکت سریع سطوح و راندن مایع به درون منطقه گوه‌ای

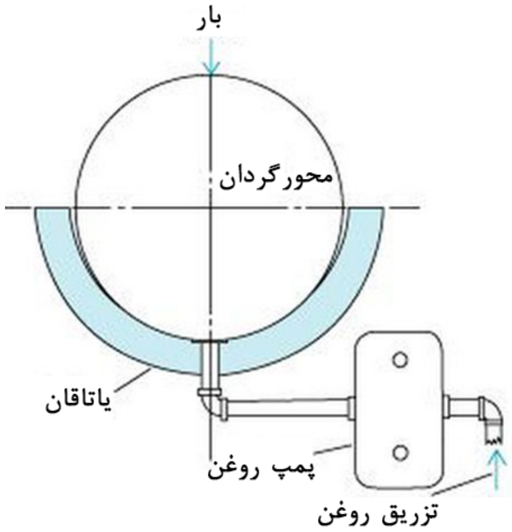
شکل بین یاتاقان و محور به وجود می‌آید که فشار ناشی از آن موجب جدا شدن سطح زیر بار و سطح یاتاقان از یکدیگر می‌شود. روانکاری هیدرودینامیک به ***روانکاری لایه‌کامل*** نیز موسوم است. در شکل ۱-۳ این نوع از روانکاری را مشاهده می‌نمایید.



شکل ۱-۳: روانکاری هیدرودینامیکی یاتاقان ژورنال

۱-۱-۴ روانکاری هیدرواستاتیکی

با وارد کردن یک روانکار تحت فشار بالا به درون منطقه تماس شفت با یاتاقان انجام می‌شود. فشار بالای روانکار موجب تشکیل یک لایه روانکار بین سطوح در حال حرکت می‌شود و از این طریق اصطکاک کاهش می‌یابد. بنابراین برخلاف هیدرودینامیک، این روانکاری نیازی به حرکت نسبی سطوح ندارد. این نوع روانکاری معمولاً در طراحی یاتاقان‌هایی که سرعت نسبی کوچک یا صفر دارند یا نیاز به اصطکاک فوق‌العاده کم است، استفاده می‌شود. شکل ۱-۴ نشان‌دهنده‌ی روانکاری هیدرواستاتیکی می‌باشد.



شکل ۱-۴: نحوه‌ی روانکاری هیدرواستاتیکی

۱-۱-۵ روانکاری الاستوهیدرودینامیک

در مواردی مطرح است که حرکت نسبی سطوح، از نوع غلتش همراه با لغزش باشد. این نوع روانکاری در غلتک‌ها، چرخ‌دنده‌ها، بادامک‌ها و بیرینگ‌های غلتشی رخ می‌دهد. درواقع در این نوع از روانکاری، سطوح با یکدیگر تماس داشته و درگیر می‌باشند.

۱-۱-۶ روانکاری مرزی

ضخامت فیلم روغن بسیار کم بوده و از چند مولکول تجاوز نمی‌کند. معمولاً این نوع روانکاری در صنعت مطلوب نیست و از این نظر به آن روانکاری ناقص نیز اطلاق می‌گردد. علت ایجاد این نوع روانکاری می‌تواند افت سرعت نسبی سطوح، کاهش حجم روانکار ورودی، افزایش بار و دما باشد. در این سیستم بیشترین مقدار اصطکاک رخ می‌دهد.

۱-۱-۷ روانکاری لایه جامد

هنگامی‌که یاتاقان‌ها ناچار به کار در دماهای فوق‌العاده بالا باشند، دیگر روغن‌های معمولی قادر به تحمل

این شرایط نیستند. در نتیجه از روانکارهای جامد مانند گرافیت استفاده می‌شود.

۱-۲ مروری بر تحقیقات پیشین

مطالعه‌ی تحقیقات پیشین در زمینه‌ی روانکاری یاتاقان در دو دسته نیوتنی و غیرنیوتنی تقسیم‌بندی می‌شوند؛ که در ادامه به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

۱-۲-۱ روانکاری نیوتنی

در سال ۱۸۸۰ در آزمایشگاه بوچام تاور[1]، سنگ بناهای اولیه تئوری روانکاری هیدرودینامیک که هم‌اکنون در اختیار ما است شکل گرفت. تاور مشغول مطالعه اصطکاک بر روی یاتاقان‌های لغزشی قطارها و در پی یافتن بهترین روش به‌منظور روانکاری آن‌ها بود؛ که وقوع یک تصادف یا خطا در حین تحقیقات او را وادار به بررسی دقیق‌تر نمود. به دنبال آن موفق به کشفی شد که منجر به پیدایش تئوری هیدرودینامیک گردید. نیازهای صنایع در بحبوحه انقلاب صنعتی بود که تاور را به کشف افزایش فشار یاتاقان در اثر پمپ شدن روانکار رهنمون ساخت. وی سرانجام با اندازه‌گیری فشار لایه روغن در نقاط مختلف طولی و عرضی یاتاقان، به محاسبه توزیع فشار لایه روانکار پرداخت و نتایج خود را در قالب چندین گزارش ارائه نمود [۳]. پتروف[2] نیز در سال ۱۸۸۳ با فرض هم‌مرکز بودن محور گردان و یاتاقان به بررسی پدیده اصطکاک در یاتاقان‌های ژورنال[3] پرداخت. وی پس از اندازه‌گیری اصطکاک به نتایجی مشابه با نتایج تاور رسید [۲].

تئوری روانکاری به فاصله‌ای نزدیک و در سال ۱۸۸۶ توسط رینولدز[4] [۴] دنبال شد. نتایج

---

[1] Beauchamp Tower

[2] Petroff

[3] Journal Bearings

[4] Reynolds

به‌دست‌آمده توسط تاور دارای چنان نظمی بود که رینولدز نتیجه گرفت که می‌بایست رابطه مشخصی بین اصطکاک، فشار و سرعت وجود داشته باشد. تئوری روانکاری ریاضی که اکنون در اختیار ماست بر اساس تحقیقات رینولدز که الهام گرفته از تجربیات تاور بود استوار است. او در مقاله تحلیلی مشهور خود از فرم خلاصه‌تری از معادله ناویر-استوکس به همراه معادله پیوستگی استفاده کرد تا معادله دیفرانسیل مرتبه دومی برای فشار در فضای باریک و همگرا شونده سطوح یاتاقان به دست آورد. نخستین معادله دیفرانسیلی که رینولدز به دست آورد، توسط وی برای توضیح نتایج تاور بکار گرفته شد. حل این معادله، یک مسئله چالش‌برانگیز است که از آن هنگام تاکنون توجه پژوهشگران زیادی را به خود جلب کرده است و هم‌اکنون نیز نقطه شروعی برای مطالعات روانکاری به‌حساب می‌آید. ارائه معادله رینولدز، شروع دانش روانکاری کلاسیک فیلم سیال شد. به کمک فرض‌هایی که او به‌منظور حل شدن مسئله در نظر گرفت، این معادله از معادلات ناویر- استوکس به دست آمد؛ که در آن‌ها اثر تنش برشی سیال با فرض مدل سیال نیوتنی مدل شده است.

سامرفیلد[1] [۵] در سال ۱۹۰۴ معادله دیفرانسیل یاتاقان لغزشی را با فرض ناچیز بودن نشت جانبی حل کرد. وی برای اولین بار مجموعه‌ای از اعداد بی‌بعد مرتبط با یاتاقان‌ها، که معروف‌ترین آن ***عدد سامرفیلد*** می‌باشد؛ را برای نمایش جواب معادلات معرفی کرد. در ادامه داوسون[2] [۶] معادله‌ی رینولدز توسعه‌یافته را برای لایه‌ی روانکار موردمطالعه قرار داد. در سال ۱۹۵۲ بود که برای اولین بار به کمک حل‌های عددی توسط کامپیوتر، ریموندی و بوید[3] [۹-۷] از روش تکرار برای حل معادله رینولدز بر روی یک کامپیوتر عددی استفاده کردند و در سال ۱۹۵۸ سه مقاله در خصوص حل عددی معادله رینولدز بر روی یاتاقان‌های ژورنال ارائه کردند. نتایج به‌دست‌آمده توسط آن‌ها به‌صورت اعداد بی‌بعد ارائه شد و

---

1 Sommerfeld

2 Dowson

3 Raimondi and Boyd

برای اولین بار بود که چنین حجم گسترده‌ای از داده‌ها در اختیار طراحان قرار می‌گرفت. ریموندی [۱۰] در سال ۱۹۶۱ با استفاده از روش تفاضل محدود و فرض روانکار تراکم‌پذیری، به بررسی مسئله روانکاری هیدرودینامیکی یاتاقان‌های ژورنال برای حالات مختلف پرداخت. نتایج حل عددی ریموندی از دقت بالایی برخوردار بود و با نتایج حاصل از آزمایش‌ها تطابق خوبی داشت. در ادامه حل‌های عددی، ردی[۱] [۱۱] با استفاده از روش اجزاء محدود به حل مسئله روانکاری برای روانکار تراکم‌ناپذیر پرداخت. او در مقاله خود به تشریح مزایای روش‌های حل عددی اجزا محدود نسبت به سایر روش‌های عددی در آن زمان پرداخت. در ادامه ردی و چو[۲] [۱۲] موفق به تعمیم روش حل عددی اجزاء محدود برای روانکار تراکم‌پذیر شدند. مالیک[۳] [۱۳] با استفاده از روش عددی اجزا محدود به بررسی یاتاقان‌های گازی پرداخت. وی از شرط لغزش برای سطوح استفاده کرد و پارامترهای مختلف یاتاقان را مورد بررسی قرار داد. سفیریس و چاسالویریز[۴] [۱۴] با فرض سیال نیوتنی و در نظر گرفتن ترم زمانی به حل دقیقی برای معادله رینولدز پرداختند. آن‌ها این حل را برای یک یاتاقان ژورنال محدود پیاده‌سازی کردند. آن‌ها در ادامه‌ی کار خود در مقاله‌ای جداگانه از نتایج حل دقیق خود استفاده کردند و به بررسی مشخصه‌های یاتاقان ژورنال با فرض سیال نیوتنی پرداختند [۱۵]. رائو و همکاران [۱۶] با استفاده از حل تحلیلی و درنظرگرفتن شرط مرزی لغزش به بررسی معادله رینولدز برای یاتاقان‌های لغزنده[۵] و ژورنال پرداختند. گوستاو و همکاران [۱۷] بر مبنای تئوری اغتشاشات[۶] به حل معادله رینولدز برای یک یاتاقان با طول محدود پرداختند. در ادامه‌ی کار آن‌ها گونگ و همکاران [۱۸] با این تفاوت که حل خود را تحت شرایط ناپایا در نظر گرفتند، به حل معادله‌ی رینولدز با استفاده از پارامتر پرتوربیشنی که گوستاو و همکاران

---

[1] Reddi

[2] Chu

[3] Malik

[4] Sfyris and Chasalevris

[5] Slider Bearing

[6] Perturbation Theory

در نظر گرفته بودند، پرداختند.

یکی دیگر از مباحثی که درزمینه یاتاقان‌ها مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است، بررسی اثر انحراف زاویه‌ای است که بین محور ژورنال و یاتاقان ایجاد می‌شود. جانگ و خسرانی[1] [۱۹] به مطالعه بر روی یاتاقان ژورنال منحرف[2] پرداختند و علاوه بر بررسی علت انحراف ژورنال، اثر انحراف را بر روی مشخصه‌های استاتیکی و دینامیکی یاتاقان بررسی کردند. از دیگر پژوهش‌ها در زمینه انحراف ژورنال می‌توان به مطالعات رام و شارما[3] [۲۱ و ۲۰] و همچنین مطالعه شونی و پای[4] [۲۲] اشاره نمود. اخیراً بایولی و همکاران [۲۳] از جنبه ترموهیدرودینامیکی، به بررسی یاتاقان ژورنال منحرف پرداخته‌اند. آن‌ها در مطالعه خود به کمک حل عددی اثر حرکت محوری ژورنال را بر روی پارامترهای ترموهیدرودینامیکی بررسی کرند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که حرکات محوری یک یاتاقان ژورنال منحرف، اثرات واضحی را بر روی مشخصه‌های روانکاری یاتاقان در سرعت پایین، زاویه انحراف بزرگ‌تر[5] و همچنین خروج از مرکز[6] دارد.

۱-۲-۲ روانکاری غیرنیوتنی

همان‌طور که ملاحظه می‌نمایید، وجه اشتراک اکثر مطالعاتی که به بررسی روانکاری یاتاقان می‌پردازند، با معادله معروف رینولدز شروع شده و در ادامه به بررسی و توسعه آن پرداخته می‌شود. به‌عبارتی‌دیگر این معادله، شروع دانش روانکاری کلاسیک فیلم سیال می‌باشد. اما نکته‌ای که باید به آن اشاره نمود

---

[1] Jang and Khonsari

[2] Misalignment

[3] Ram and Sharma

[4] Shenoy and Pai

[5] Larger inclination angle

[6] Eccentricity

این است که، این معادله بر مبنای مدل سیال نیوتنی به‌دست‌آمده است؛ حال‌آنکه در بسیاری از کاربرد-های روانکارها در صنایع مختلف تقریب مدل سیال نیوتنی نمی‌تواند پاسخگوی روانکارها باشد و نتایج مطلوبی را ارائه دهد. تحقیقات نشان می‌دهد، در صورتی مقدار کمی از پلیمرها با زنجیره مولکولی بلند به سیال نیوتنی اضافه گردد، می‌توان روانکار بهتری را به دست آورد که بازده عملکرد آن بسیار بیشتر باشد. افزودن پلیمرها به روغن‌های معدنی از اواسط دهه ۱۹۵۰، به یک رویه متداول تبدیل شد که رفتار روانکارهای تولیدشده را به رفتار مواد غیرنیوتنی و ویسکولاستیک تبدیل می‌کرد [۲۴]. مطالعات نظری و تجربی متعددی در طول دهه گذشته برای تعیین اینکه آیا مایعات پلیمری از همتایان نیوتنی خود کارآمدتر هستند یا خیر، انجام شده است. آزمایش‌ها نشان می‌دهد که در اکثر موارد، اثرگذاری روغن‌های پلیمری در سیستم‌های روانکاری بسیار بهتر از روانکارهای دیگر می‌باشد [۲۵].حال‌آنکه در بسیاری از کاربردهای روانکارها در صنایع مختلف حالت‌هایی وجود دارد که تقریب مدل سیال نیوتنی نمی‌تواند نتایج مطلوبی ارائه دهد (به‌طور مثال هنگامی‌که یاتاقان‌ها ناچار به کار در دماهای بالا هستند). هارویتز و استیدلر[۱] [۲۶] در اولین پژوهش‌هایی که برای بررسی اثر سیال غیرنیوتنی، بر روی مشخصه‌های یاتاقان صورت گرفت، از یک تابع لگاریتمی برای تغییرات ویسکوزیته استفاده کردند. آن‌ها با توجه به اینکه نرخ برش برای یک سیال غیرنیوتنی به‌صورت غیرخطی تغییر می‌کند، ویسکوزیته را تابعی متغیر در نظر گرفتند و مشخصه‌های یاتاقان ژورنال را با فرض عرض محدود[۲] برای آن، به دست آوردند. در ادامه، تنر[۳] [۲۷] با فرض سیال پاورلا[۴] برای یک یاتاقان ژورنال کوتاه[۵]، هسو[۶] [۲۸] با فرض یک رابطه

[1] Horowitz and Steidler
[2] Finite-Width
[3] Tanner
[4] Power-Law
[5] Short journal bearing
[6] Hsu

درجه سه برای تنش برشی و در نظر گرفتن طول نامحدود برای یاتاقان ژورنال و وادا و هایشی[1] [۳۰ و ۲۹] برای یک سیال شبه‌پلاستیک[2] با فرض طول محدود، به بررسی و استخراج پارامترهای لازم برای یاتاقان ژورنال پرداختند. سوامی و همکاران [۳۱] به محاسبه‌ی ظرفیت بارپذیری روانکارهای غیر نیوتنی در یاتاقان‌های ژورنال با طول محدود پرداختند و نشان دادند با استفاده از روانکار غیر نیوتنی، تحمل بار بیشتر می‌گردد. در ادامه آن‌ها به بررسی خواص میرایی در یاتاقان‌های ژورنال تحت روانکاری غیر نیوتنی پرداختند. آن‌ها تأثیر روانکار غیرنیوتنی را بر روی ناپایداری مورد بررسی قرار دادند و چنین گزارش نمودند؛ که روانکارهای غیرنیوتنی نسبت به نیوتنی پایداری یاتاقان را بیشتر افزایش می‌دهند [۳۲]. داس و همکارانش [۳۴ و ۳۳] بر روی عملکرد یاتاقان‌های ژورنال هیدرودینامیکی تحت روانکار میکروپلار، پرداختند. آن‌ها با در نظر گرفتن روانکار میکروپلار[3] به بررسی مشخصه‌های یاتاقان ژورنال پرداختند. گوانیلو و فیلیپ[4] [۳۵] از مدل‌های PTT و Oldroyd-B استفاده کردند و به کمک روشی کاملاً عددی به بررسی حرکت یاتاقان ژورنال پرداختند. آن‌ها پس از گسسته سازی معادلات، به بررسی تأثیر زمان آسودگی و سایز گپ بر روی یاتاقان پرداختند. گریتزوس و همکاران [۳۶] با استفاده از نرم‌افزار تجاری فلوئنت و فرض سیال غیرنیوتنی بینگهام[5] به‌عنوان روانکار به شبیه‌سازی و استخراج مشخصه‌های یاتاقان پرداختند. وایرزهالسکی[6] [۳۷] با استفاده از معادلات ساختاری Rivlin-Ericksen به مدل‌سازی و حل مسئله روانکاری برای یک یاتاقان میکرواستوانه‌ای پرداخت. جیومادی و اویبراهیم[7] [۳۸] با استفاده از مدل ماکسول تعمیم یافته و به‌کارگیری یک روش عددی حجم محدود به بررسی خواص و رفتار سیال

---

[1] Wada and Hayashi

[2] Pseudo-Plastic

[3] Micropolar

[4] Gwynllyw and Phillip

[5] Bingham

[6] Wierzcholski

[7] Guemmadi and Ouibrahim

ویسکواالاستیک برای روانکاری یک یاتاقان ژورنال پرداختند.

در اولین حل‌های تحلیلی که برای یک روانکاری غیرنیوتنی مورد بررسی قرار گرفت، تایچی[1] [۳۹] از مدل همرفتی ماکسول[2] استفاده کرد تا اثر عدد دبرا[3] را، بر روی توزیع فشار بررسی نماید. وی مسئله موردنظر را با استفاده از تئوری اغتشاشات حل نمود و در این حل از عدد دبرا به‌عنوان پارامتر انحراف اغتشاشات استفاده نمود. هوانگ و همکاران [۴۰] با استفاده از مدل سیال مرتبه‌دوم[4] به محاسبه‌ی توزیع فشار بر روی دو نوع از یاتاقان‌ها، یعنی یاتاقان‌های لغزنده و ژورنال پرداختند. آن‌ها با تغییر ضخامت فیلم سیال دریافتند که توزیع تنش نرمال به‌طور قابل‌توجهی به ضخامت وابسته است و با کاهش آن، تنش‌های نرمال برای یک سیال مرتبه‌دوم بیش از یک سیال نیوتونی، افزایش می‌یابد. اکیلدز و بلوت[5] [۴۱] به کمک مدل PTT به بررسی تاثیر عدد دبرا بر روی توزیع فشار یاتاقان برای یک روانکار پرداختند. هاشم‌آبادی و میرنجف‌زاده[6] [۴۲] با استفاده از مدل SPTT به حل تحلیلی مسئله روانکاری پرداختند. آن‌ها تأثیر چندین متغیر را بر روی پروفیل سرعت و توزیع فشار بررسی کردند. آن‌ها همچنین اثرات تغییر شیب یاتاقان لغزنده را نیز بررسی کردند. شین‌کایلی و همکاران [۴۳] با استفاده از مدل فوق همرفتی ماکسول[7] و به کمک پرتوربیشن به بررسی مسئله روانکاری یاتاقان اسلایدر پرداختند. آن‌ها علاوه بر عدد دبرا از پارامتر دیگری به نام ϵ که نشان‌دهنده‌ی نسبت درز یاتاقان به طول یاتاقان می‌باشد، استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که خاصیت ویسکواالاستیک سیال باعث افزایش توزیع فشار روانکار می‌شود و بر روی فرآیند روانکاری تأثیر مثبتی را دارد؛ که با مشاهدات تجربی سازگار است. نسیلی و

[1] Tichy

[2] Convective Maxwell Model

[3] Deborah number

[4] Second-Order

[5] Akyildiz and Bellout

[6] Hashemabadi and Mirnajafizadeh

[7] UCM

همکاران [۴۴] با استفاده از مدل پاورلاو، به بررسی و آنالیز جنبه‌های مختلف تئوری روانکاری ازجمله انتقال حرارت و بحث روی پارامترهای هیدرودینامیکی یاتاقان پرداختند. آن‌ها به کمک حل عددی و شبیه‌سازی نتایج خود دریافتند که اثر توان در مدل پاورلاو سهم بسزایی در توزیع دما دارد. در ادامه به بررسی ظرفیت بار یاتاقان، توزیع فشار، دما و نیروی اصطکاک پرداختند و به این نتیجه رسیدند که این مقادیر برای یک سیال دایلاتنت، نسبت به یک سیال شبه پلاستیک سهم بیشتری را به خود اختصاص می‌دهد. شین‌کایلی[1] [۴۵] به کمک مدل PTT به مطالعه روی روانکاری غیرنیوتنی پرداخت. او تئوری اغتشاشات خود را حول عدد دبرا اعمال نمود. وی در این مطالعه از روش‌های تحلیلی برای استخراج ترم‌های اصلی اغتشاشات و از روش عددی برای باقی ترم‌ها استفاده نمود. مشابه با برخی از مطالعات گذشته، او نیز به این نتیجه رسید که با کاهش ضخامت فیلم سیال به حداقل، افزایش قابل‌توجهی در ترم فشار مشاهده می‌نماییم.

بیشتر مدل‌هایی که به‌منظور بررسی مسئله روانکاری برای یک سیال غیرنیوتنی استفاده شده‌اند، مدل‌های ساده و خطی هستند. برای بررسی رفتار واقعی یک سیال غیرنیوتنی پیشنهاد می‌شود که از مدل‌های پیچیده‌تری همچون Giesekus [46]، FENE-P [47] و Phan-Thein-Tanner (PTT) [48] استفاده شود تا نتایج دقیق‌تری حاصل شود. در مطالعه حاضر با توجه به اهمیت حل‌های تحلیلی و رفتار غیرخطی اکثر روغن‌های روانکار ویسکواالاستیک، با تکیه‌بر مدل غیرخطی ***گزیکس*** به تحلیل مسئله‌ی روانکاری یاتاقان می‌پردازیم.

مدل ویسکواالاستیک گزیکس در سال ۱۹۸۲ توسط گزیکس [۴۶] با تکیه‌بر تئوری و دیدگاه مولکولی استخراج شده و یک مدل استاندارد برای توصیف خواص یک ماده ویسکواالاستیک غیرخطی می‌باشد [۴۹،۵۰]. از توانایی‌های برجسته‌ی این مدل، توصیف ویسکوزیته در ناحیه‌ی توانی و ارائه رفتار پاورلو برای ویسکوزیته و همچنین قادر به بیان صحیحی از اثر اختلاف تنش‌های نرمال می‌باشد [۴۶،۴۹].

---

[1] Xin Kai Li

۱-۳ معرفی تحقیق حاضر

در این بخش ابتدا به معرفی تحقیق حاضر و بیان مشخصات کلی آن خواهیم پرداخت. سپس به اهمیت، کاربردها و موارد نوآوری موضوع پرداخته می‌شود و در پایان نیز مروری اجمالی بر ساختار کلی تحقیق حاضر صورت می‌گیرد.

۱-۳-۱ تعریف مسئله

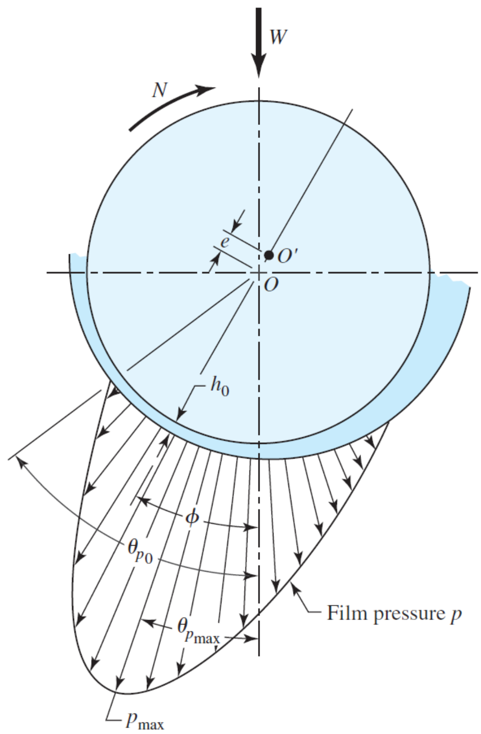
یاتاقان‌های ژورنال برای انواع بارگذاری‌ها در سرعت‌های مختلف و به‌طورکلی شرایط کارکرد مختلف ساخته می‌شوند و اهمیت تحلیل این یاتاقان‌ها با توجه به کاربرد بسیار فراوان آن‌ها در صنعت بر هیچ‌کس پوشیده نیست. در طراحی و ساختار ماشین‌آلات صنعتی، استفاده از یاتاقان‌های هیدرودینامیکی (نظیر یاتاقان‌های ژورنال)، به‌عنوان تکیه‌گاه اصلی آن‌ها، به دلیل هزینه کم، عمر طولانی، سروصدای کم، ظرفیت بارپذیری بالا، سهولت تعمیر و نگهداری از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

مهم‌ترین پارامتر در انتخاب نوع روانکار برای یک یاتاقان، ظرفیت بارگذاری یاتاقان و محدوده‌ی دمایی است که در آن بارگذاری صورت می‌گیرد. شاید بتوان پرکاربردترین روانکارهای مورد استفاده برای یاتاقان را، روغن‌های معدنی SAE0W-SAE60 دانست. روغن‌های معدنی مهم‌ترین روغن‌های گروه مایع هستند که از نفت خام مشتق می‌شوند. مشتقات نفتی ترکیباتی از کربن و هیدروژن هستند که به هیدروکربن‌ها موسوم‌اند، که دارای پایداری شیمیایی بسیار بالا و زنجیره‌های پلیمری غول‌پیکر هستند. در موتورهایی مثل توربین گاز که درجه حرارت زیاد است؛ روغن‌های معدنی قادر به تحمل این درجه حرارت نبوده، زیرا در چنین دمایی روغن‌های حاصل از پالایش نفت خام، تبخیر یا شکسته و تجزیه می‌شوند و به هیدروکربن‌های سنگین تبدیل می‌گردند. بنابراین جوابگوی روغن‌کاری موتورهای توربین گاز نیستند و روغن‌های موردنیاز باید بتواند خصوصیات روغن را در درجه حرارت‌های بالا محفوظ نگه دارد. این روغن‌های جدید موسوم به روغن‌های مصنوعی یا سینتیک هستند؛ زیرا از مواد طبیعی ساخته نمی‌شوند. نمونه‌ای از این روغن‌های مصنوعی با استاندارد Mil-L-7808E در برخی از موتورهای توربین

گاز جدید به کار گرفته می‌شوند، روغن‌های مذبور رفتار ویسکواالاستیک به‌شدت غیرخطی دارند. با توجه به اهمیت حل‌های تحلیلی و رفتار غیرخطی اکثر روغن‌های روانکار، استفاده از مدل ویسکواالاستیک گزیکس پیشنهاد شده است؛ تا علاوه بر آشنایی با نحوه توزیع بار یاتاقان، به دیگر پارامترهای هیدرودینامیکی مربوطه، پرداخته شود. درنتیجه با استفاده از قوانین مکانیک سیالات در زمینه‌ی غیرنیوتنی به تحلیل مسئله‌ی مورد نظر پرداخته، که این امر می‌تواند ما را در طراحی هرچه بهتر یاتاقان مورد نظر، راهنمایی نماید.

۱-۳-۲ اهمیت و کاربرد موضوع

مبحث روانکاری در یاتاقان‌ها از مهم‌ترین مباحثی است که یک طراح باید مدنظر داشته باشد. در شکل ۱-۵ نحوه توزیع فشار سیال درون یاتاقان را مشاهده می‌نمایید.



شکل ۱-۵: نحوه‌ی توزیع فشار سیال متحرک درون یاتاقان ژورنال

همان‌طور که در شکل ۱-۱ مشاهده می‌نمایید؛ گردش محور گردان در داخل یاتاقان، باعث ایجاد یک توزیع فشار نامتقارن می‌شود. چنانچه این توزیع فشار بیش از ظرفیت تحمل سیال مورد نظر درون یاتاقان باشد، منجر به پاره شدن فیلم روانکار شده و به خاطر تشکیل نشدن لایه‌ی روغن مناسب (پایدار)، تماس فلز با فلز بین محور گردان و سطح داخلی استوانه یاتاقان (بوش)، رخ می‌دهد. نتیجه‌ی این تماس، مختل شدن سیستم و خسارات جانبی می‌باشد که در پی دارد. روانکار معمولاً بین ژورنال و محور گردان برای پایین آوردن اصطکاک حاصل از تماس بین محور گردان و بوش استفاده می‌شود. به همین دلیل در این نوع یاتاقان نوع و دقت روانکاری و تحلیل آن بسیار حائز اهمیت است. ازآنجایی‌که سیال مورد استفاده در مبحث روانکاری حاضر، ویسکواالاستیک می‌باشد؛ بنابراین شناخت و بررسی خواص این دسته از مواد و تأثیر آن‌ها بر روی یاتاقان ژورنال، بسیار مهم می‌باشد.

۱-۳-۳ نوآوری مسئله

حل دقیق بسیاری از معادلات در حوزه‌ی مکانیک سیالات که با آن روبرو هستیم؛ اغلب به علت وجود ترم‌های زیاد، ناپایا بودن، غیرخطی بودن معادلات، وجود ضرایب متغیر و شرایط مرزی پیچیده امکان‌پذیر نمی‌باشد. در این صورت برای اینکه بخواهیم اطلاعاتی راجع به حل مسئله به دست آوریم، به‌ناچار نوعی تقریب را باید در نظر گرفت یا اینکه مسئله را به طریق عددی حل نمود. و در بعضی موارد از ترکیب این دو روش استفاده کرد.

تئوری حساب‌اغتشاشات یا همان پرتوربیشن[1] یکی از روش‌های تحلیلی برای حل مسائلی می‌باشد؛ که به‌طور سیستماتیک در معادلات حاکم بر آن مسئله، یک پارامتر خیلی کوچک و یا خیلی بزرگ ظاهر شده است. در این روش جواب را برحسب توان‌های پارامتر خیلی کوچک یا معکوس پارامترهای خیلی بزرگ بسط داده و در معادله دیفرانسیل جایگزین می‌کنیم. متد حل گام‌به‌گام بوده، به‌گونه‌ای که جملات

[1] Perturbation Method

بسط جواب معادله اصلی یکی پس از دیگری محاسبه خواهند شد. ناگفته نماند که اغلب، حداکثر سه جمله از این بسط برای حل مسئله کافی بوده و در حالت حدی هنگامی‌که پارامتر پرتوربیشن به سمت صفر میل کند، جواب مسئله به سمت جواب دقیق مسئله میل می‌کند [۴۹].

با توجه به مطالب گفته‌شده و ذکر این نکته که در معادله ساختاری گزیکس برای یک سیال ویسکواالاستیک، پارامتری به نام ***ضریب تحریک***[1] وجود دارد؛ که بیانگر رفتار غیرایزونتروپیک بروانی در هیدرودینامیک مولکولی است و برای اینکه به‌عنوان پارامتر اغتشاشات انتخاب شود؛ بسیار مناسب می‌باشد. لذا تئوری اغتشاشات را حول این پارامتر اعمال کرده و پارامترهای هیدرودینامیکی لازم را استخراج می‌نماییم.

۱-۳-۴ مروری بر فصول پایان‌نامه

در مطالعه حاضر، ابتدا به بیان معادلات حاکم پرداخته و پس از بررسی انواع معادلات در زمینه‌ی غیرنیوتنی به بیان مزایا و معایب آن‌ها می‌پردازیم. پس از این‌که دلایل لازم برای انتخاب معادله موردنظر(مدل گزیکس) مطرح شد، با تکیه‌بر مدل گزیکس به تحلیل مسئله‌ی روانکاری یاتاقان می‌پردازیم. در مورد مسائل غیرنیوتنی مهم‌ترین بخش، شناخت دقیق مسئله و استخراج اجزای تانسور تنش می‌باشد. پس از حل این قسمت، به کمک معادلات حاکم به بررسی مشخصه‌های یاتاقان ژورنال با فرض سیال غیرنیوتنی پرداخته و پارامترهای هیدرودینامیکی لازم را به دست می‌آوریم؛ و در ادامه به تجزیه و تحلیل نتایج می‌پردازیم. و درنهایت در فصل پایانی به ذکر نتایج حاصل از پژوهش پرداخته و پیشنهادهایی که می‌تواند ادامه‌دهنده‌ی تحقیق حاضر باشد و سبب تکمیل‌تر شدن آن گردد، ذکر می‌شود.

[1] Mobility parameter

فصل ۲ : معادلات حاکم

به‌منظور بررسی و تحلیل جریان موردنظر، در این فصل به بیان معادلات فیزیکی حاکم بر مسئله می-پردازیم. ذکر این نکته ضروری است که جریان سیال در جهت‌های x و y بوده و شرایط آن به‌صورت آرام، پایدار و غیرقابل تراکم می‌باشد. در ابتدا به بیان معادلات حاکم پیوستگی و مومنتوم پرداخته و سپس معادله ساختاری مربوط به سیالات غیرنیوتنی رو معرفی کرده و در ادامه به بررسی معادلات ساختاری حاکم بر سیالات ویسکوالاستیک می‌پردازیم.

۲-۱ معادلات حاکم

معادله‌های دیفرانسیلی پیوستگی و مومنتوم که در اینجا به آن‌ها اشاره می‌شود، برای هر سیال پیوستار قابل استفاده بوده و وابسته به نیوتنی یا غیرنیوتنی بودن سیال ندارد.

۲-۱-۱ معادله پیوستگی

معادله پیوستگی جریان سیال تراکم‌ناپذیر به صورت زیر بیان می‌شود [۱]:

$$\nabla.\boldsymbol{u} = 0 \tag{۲-۱}$$

که در آن $\boldsymbol{u}$ بردار سرعت می‌باشد. معادله پیوستگی جریان سیال تراکم‌ناپذیر برای مختصات دکارتی به‌صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{۲-۲}$$

که در آن u_x، u_y و u_z به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهت‌های x، y و z می‌باشد.

۲-۱-۲ معادله مومنتوم

معادله‌ی مومنتوم برای جریان سیال تراکم‌ناپذیر لزج به صورت زیر نوشته می‌شود [۱]:

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}\right) = -\nabla P + \nabla.\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{g} \tag{۲-۳}$$

در اینجا ρ چگالی سیال، t زمان، P فشار، $\boldsymbol{\tau}$ تانسور تنش و $\mathbf{g}$ شتاب گرانش می‌باشد. معادله مومنتوم را می‌توان به‌صورت زیر برای مختصات دکارتی گسترش داد:

$$
\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\\
&\qquad=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho \mathrm{g}_x\\
&\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\\
&\qquad=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\rho \mathrm{g}_y\\
&\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\\
&\qquad=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}+\rho \mathrm{g}_z
\end{aligned}
\qquad (۴-۲)
$$

۲-۲ معادلات ساختاری

به‌منظور تحلیل یک جریان، مدل‌های سیالی تعریف می‌شوند، که بیان آن‌ها به‌صورت ریاضی با معادلات ساختاری صورت می‌گیرد. یک معادله ساختاری، در حالت کلی ارتباط بین تنش و نرخ برش را بیان می‌کند؛ درواقع نشان می‌دهد که تغییر شکل سیال چه تأثیری را می‌تواند بر روی تنش‌ها بگذارد. هرچند تجربه حاکی از آن است که اغلب معادلات ساختاری کاربردهای محدودی دارند و فقط برای چند حالت خاص از جریان‌ها کاربرد دارند.

تفاوت اساسی سیالات غیرنیوتنی با نیوتنی در معادلات ساختاری آن‌ها می‌باشد. معادلات ساختاری در سیالات غیرنیوتنی، شکلی پیچیده‌تر از سیالات نیوتنی دارد. معادلات بقاء را تحت تأثیر قرار داده و سبب می‌شود که این معادلات نیز به‌نوبه خود پیچیده‌تر شوند.

۲-۲-۱ معادله ساختاری سیال نیوتنی

ویسکوزیته خاصیتی است که سیال به وسیله آن در مقابل تنش برشی مقاومت می‌کند و در حالت کلی تنش مؤثر بر سیال را به آهنگ کرنش حاصله ارتباط می‌دهد. برای سیال نیوتنی ویسکوزیته تابعی از نرخ برش نیست و مقدار آن همیشه ثابت می‌باشد. بدین ترتیب معادله ساختاری که اولین بار توسط نیوتن در سال ۱۶۸۷ میلادی، برای سیالات نیوتنی (سیالات ویسکوز ایده آل) ارائه شد به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱]:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \mu\, \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}\,; \qquad \mu = cte \tag{۲-۵}$$

که در آن μ ویسکوزیته سیال نیوتنی می‌باشد، $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}$ تانسور نرخ برش (تغییر شکل) و $\boldsymbol{\tau}_{ij}$ تانسور تنش می‌باشد، که به‌صورت زیر بسط داده می‌شوند:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \tag{۲-۶}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\gamma}_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y} & \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} & 2\dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x} & \dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y} & 2\dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{۲-۷}$$

با در نظر گرفتن جریان غیرقابل تراکم و ثابت فرض کردن ضریب ویسکوزیته، شکل کلی معادلات ساختاری برای یک سیال نیوتنی که به معادلات ***ناویر–استوکس*** معروف بوده، به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+\rho \mathrm{g}_y \qquad (۸-۲)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$
$$=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\rho \mathrm{g}_z$$

۲-۲-۲ معادلات ساختاری سیالات غیرنیوتنی

سیالات غیرنیوتنی به دو گروه کلی ویسکوز و ویسکواالاستیک تقسیم می‌شوند. و اینکه ما از کدام معادله ساختاری به‌منظور انجام پژوهش خود استفاده می‌کنیم، نیاز به کمی بحث و پیش‌زمینه دارد تا اینکه بتوانیم بهترین مدل را انتخاب کرده و به بررسی مسئله مذبور بپردازیم. در ادامه‌ی کار به معرفی انواع سیالات غیرنیوتنی پرداخته و بعد از آشنایی کامل با آن‌ها بهترین مدل را برای تحقیق خود انتخاب می‌نماییم.

۲-۲-۳ سیالات غیر نیوتنی ویسکوز

اولین گروه از سیالات غیرنیوتنی که به معرفی آن خواهیم پرداخت سیالات ویسکوز می‌باشد؛ که اصطلاحاً به آن‌ها سیالات نیوتنی تعمیم‌یافته[1] گفته می‌شود. گروه ویسکوز خود به دو دسته مستقل از زمان و وابسته به زمان تقسیم می‌شوند.

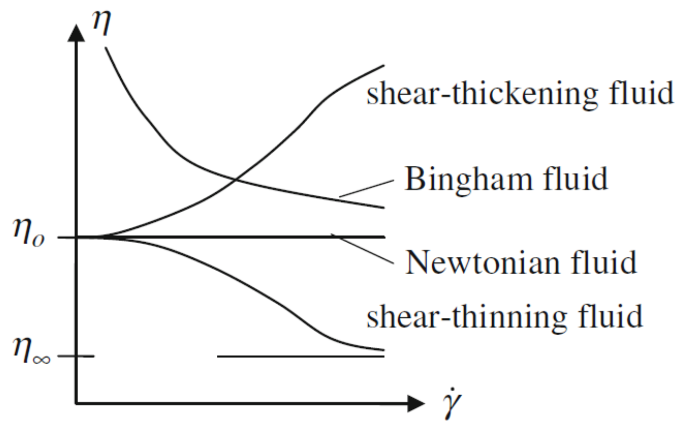
[1] Generalized Newtonian Fluids

۲-۲-۳-۱ سیالات غیرنیوتنی ویسکوز مستقل از زمان

در این گروه از سیالات غیرنیوتنی ویسکوزیته تنها تابعی از نرخ برش است و گذشت زمان تأثیری بر آن نمی‌گذارد. معادلات ساختاری حاکم بر این دسته از سیالات به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \eta \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} \qquad (۲-۹)$$
$$\eta = \eta(\dot{\gamma})$$

شکل ۲-۱ نشان‌دهنده‌ی نحوه‌ی تغییرات ویسکوزیته‌ی سیالات مستقل از زمان می‌باشد.



شکل ۲-۱: نحوه‌ی تغییرات سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان

متداول است که در مکانیک سیالات غیرنیوتنی ویسکوزیته را با نماد η نشان می‌دهند. تابع نرخ برش تعمیم‌یافته برای یک سیال غیرنیوتنی مستقل از زمان به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{II}} \qquad (۲-۱۰)$$
$$\mathrm{II} = tr([\dot{\gamma}][\dot{\gamma}])$$

که در اینجا II، مانای دوم ماتریس می‌باشد. همان‌گونه که مشاهده می‌نمایید نرخ برش تعمیم یافته با مانای دوم ماتریس نرخ برش $[\dot{\gamma}]$ در ارتباط است. معادله‌های متشکله سیالات نیوتنی تعمیم یافته مستقل از زمان، با وجود اینکه تابع ساده‌ای از نرخ برش هستند، اما رفتار غیرنیوتنی سیال را به‌خوبی نشان می‌دهند. در این دسته از سیالات، ویسکوزیته که تابع محلی از نرخ برش است به وسیله برازش

منحنی بر روی داده‌های آزمایشگاهی به دست می‌آید. در ادامه به چند نمونه از مهم‌ترین آن‌ها اشاره می‌نماییم [۵۲].

- **سیال بینگهام**

ای.سی.بینگهام[1]، سیال بینگهام را در کتاب خود تحت عنوان سیالیت و پلاستیسیته در سال ۱۹۲۲ پیشنهاد کرد. تابع ویسکوزیته پیشنهادی مدل وی بدین‌صورت بیان می‌شود [۵۳]:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \eta + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} & \tau_{max} \geq \tau_y \\ \\ \infty & \tau_{max} < \tau_y \end{cases} \tag{۲-۱۱}$$

τ_{max} بیان‌کننده تنش برشی حداکثر و τ_y نشان‌دهنده تنش تسلیم سیال می‌باشد. این سیال در سطح پایین تنش برشی حداکثر، همانند یک جامد رفتار می‌کند، چراکه در این حالت مقدار نرخ برش با $\dot{\gamma} = 0$ برابر است؛ و زمانی که تنش برشی حداکثر در سیال، از تنش برشی تسلیم تجاوز کند؛ همانند سیال لزج خالص عمل می‌کند. این مدل اغلب برای مدل‌سازی گل حفاری به‌عنوان یک روانکار و یک محیط برای تراشه‌های انتقال حفاری استفاده می‌شود.

- **سیال کارئو**

تابع ویسکوزیته سیال کارئو، که توسط پی. جی. کارئو[2] در رساله‌ی دکترای وی در دانشگاه ویسکانسین[3] در سال ۱۹۶۸ پیشنهاد شد، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) \cdot [1 + (\lambda\, \dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \tag{۲-۱۳}$$

---

[1] E. C. Bingham

[2] P.J. Carreau

[3] Wisconsin

که در این رابطه η_0 ویسکوزیته در نرخ برش صفر و η_∞ ویسکوزیته در نرخ برش بی‌نهایت می‌باشد. به‌علاوه مدل شامل پارامتر زمانی λ که نشان‌دهنده زمان رهایی از تنش[1] و شاخص قاعده توانی n می‌باشد.

- **سیال کیسون**

توسط ران‌کیسون[2] در سال ۱۹۵۹ پیشنهاد شد تا جریان مخلوط‌ها، رنگ‌دانه‌ها و روغن را توصیف کند. تابع ویسکوزیته این مدل به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\eta(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \left(\sqrt{\eta} + \sqrt{\frac{\tau_y}{\dot{\gamma}}}\right)^2 & \tau_{max} \geq \tau_y \\ \\ \infty & \tau_{max} \geq \tau_y \end{cases} \qquad (۱۴-۲)$$

مدل سیال کیسون اغلب برای توصیف جریان خون استفاده می‌شود. خون شامل پلاسما و سلول‌های خونی است. کسر حجمی سلول‌ها ***هماتوکریت***[3] نامیده می‌شود و با H نشان داده می‌شود. پلاسمای خون یک سیال نیوتنی می‌باشد. در مقادیر بالای نرخ برش، خون مانند یک سیال نیوتنی رفتار می‌کند و در مقادیر پایین نرخ برش (هنگامی‌که $\dot{\gamma} < 0.1\ s^{-1}$ و $H < 0.4$) جریان به‌صورت غیرنیوتنی می‌باشد.

ذکر این نکته ضروری است که، سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان به همین چند مورد ختم نمی‌شود، و تعداد بسیار زیادی از این مدل‌ها وجود دارد که به بررسی رفتار رئولوژیکی این دسته از سیالات می‌پردازد. درواقع ما در اینجا فقط به چند نمونه از پرکاربردترین آن‌ها اشاره نمودیم.

---

[1] Relaxation time

[2] N. Casson

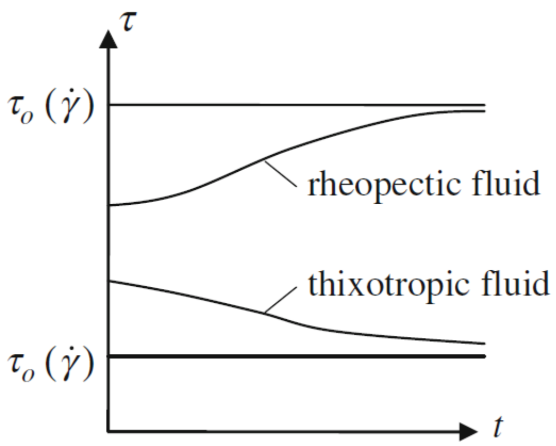
[3] Hematocrit

۲-۲-۳-۲ سیالات غیرنیوتنی ویسکوز وابسته به زمان

در این گروه از سیالات غیرنیوتنی ویسکوزیته علاوه بر اینکه تابعی از نرخ برش است، تابع زمان نیز می‌باشد. معادلات ساختاری حاکم بر این دسته از سیالات به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \eta \cdot \dot{\gamma}_{ij} \qquad \eta = \eta(\dot{\gamma}, t) \tag{۲-۱۵}$$

مدل‌سازی این دسته از سیالات بسیار دشوار است. رفتار آن‌ها به صورتی است که برای یک نرخ برشی ثابت $\dot{\gamma}$ در دمای ثابت، تنش برشی τ به‌طور یکنواخت با گذشت زمان، افزایش یا کاهش می‌یابد. شکل ۲-۱ نشان‌دهنده‌ی این نوع از سیالات غیرنیوتنی می‌باشد.



شکل ۲-۲: نحوه تغییرات سیالات غیرنیوتنی وابسته به زمان

سیالات وابسته به زمان به دو گروه سیالات ***تیکسوتروپیک***[1] و ***رئوپکتیک***[2] تقسیم‌بندی شده‌اند.

- **سیالات تیکسوتروپیک**

در یک نرخ برش ثابت، تنش برشی با گذشت زمان به‌صورت یکنواخت کاهش می‌یابد. از نظر ساختمانی وقتی این سیالات تحت یک سرعت برشی ثابت قرار می‌گیرند، ساختمان فیزیکی داخلی آن‌ها، به‌عنوان

[1] Thixotropic
[2] Rheopectic

مثال پیوندهای واندروالسی (نیروهای بین‌مولکولی) در آن‌ها شروع به شکستن می‌کند. شکستن ساختمانی یعنی کاهش مقاومت در برابر جریان، که درنتیجه‌ی آن کاهش ویسکوزیته را به همراه دارد.

- **سیالات رئوپکتیک**

در یک نرخ برش ثابت، تنش برشی با گذشت زمان به‌صورت یکنواخت افزایش می‌یابد. از نظر ساختمانی در این سیالات تحت یک سرعت برشی ثابت، با گذشت زمان یکسری پیوندهای فیزیکی جدید تشکیل می‌شود. البته در پی هر تشکیلی یک شکست هم به وجود می‌آید تا اینکه حالت تعادل به وجود می‌آید.

مدل سیالات نیوتنی تعمیم‌یافته، ویسکوزیته برشی سیالات غیرنیوتنی را مدل می‌کند اما نمی‌تواند اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم که عامل اصلی وجود خاصیت الاستیک در سیال است را پیش‌بینی کند. ازآنجایی‌که مدل سیال نیوتنی تعمیم‌یافته، تنش را فقط تابعی از نرخ برش می‌بیند؛ بنابراین نمی‌تواند اثر حافظه جریان که مربوط به تاریخچه نرخ برش است را مدل کند. به همین خاطر برای مدل‌سازی سیالات با مدل‌های ساختاری پیچیده، نیاز به معادله‌های ساختاری کامل‌تری می‌باشد.

۲-۲-۴ سیالات غیر نیوتنی ویسکوالاستیک

سیال ویسکوالاستیک، سیالی است که به‌طور هم‌زمان دارای خواص ویسکوز و الاستیک می‌باشد. هرچند تقریباً تمامی مواد جامد و مایع موجود در طبیعت دارای این ویژگی هستند، اما عملاً سیال ویسکوالاستیک ماده‌ای محسوب می‌شود که در آن هر دو خاصیت دارای اثر قابل توجهی هستند. جزء ویسکوز با اعمال تنش، تغییر شکل داده و با برداشتن تنش به حالت اولیه باز نمی‌گردند و در حقیقت کل انرژی وارده را تلف می‌کند؛ این در حالی است که جزء الاستیک وقتی تحت تنش قرار می‌گیرد، تغییر شکل داده و با تنش، به حالت اولیه باز می‌گردد؛ به عبارتی ساده‌تر کل انرژی وارده را در خود ذخیره می‌کنند. درواقع سیال ویسکوالاستیک سیالی است مابین دو حالت فوق، که بخشی از انرژی را در خود ذخیره و بخشی را به‌صورت حرارت به همراه تغییر شکل آزاد می‌نماید.

۲-۲-۵ خواص ویسکوالاستیک‌ها

این سیالات وقتی تحت تنش ثابت قرار می‌گیرند یک تغییر فرم آنی را به خاطر جز الاستیکشان از خود نشان می‌دهند و به دلیل جز ویسکوز یک تغییر فرم با زمان از خود نشان می‌دهند. و چنانچه تنش مورد نظر را حذف کنیم، تغییر فرم مربوط به جزء الاستیک خود را از دست داده و تغییر فرم مربوط به جزء ویسکوز را در خود حفظ می‌کنند. بر همین مبنا طبق مشاهدات آزمایشگاهی صورت گرفته می‌توان خواصی را برای این دسته از سیالات برشمرد که در ادامه به بیان مهم‌ترین آن‌ها می‌پردازیم [۵۲].

۲-۲-۵-۱ حافظه جریان (خاصیت جزئی برگشت‌پذیری)

سیالات ویسکوالاستیک دارای ***خاصیت جزئی برگشت‌پذیری***[۱] هستند؛ یعنی با برداشتن تنش، جزئی از تغییر فرم آن‌ها به حالت اولیه برگردد. و این خاصیت باعث می‌شود که از سایر سیالات جدا شوند، یعنی با حذف تنش به خاطر جزء الاستیک خود دارای خاصیت جزئی برگشت‌پذیر هستند. این پدیده که اصطلاحاً خاصیت ***حافظه‌ای جریان***[۲] نامیده می‌شود، در سیالات ویسکوالاستیک وجود دارد.

در حقیقت سیال ویسکوالاستیک دارای نوعی حافظه تاریخچه تغییر شکل است و از حالت قبلی خود آگاه است. ولی این حافظه با گذشت زمان محو می‌شود. هرچه تغییر شکل قدیمی‌تر و یا طولانی‌تر باشد، میزان کمتری از آن توسط سیال به یاد آورده می‌شود. از نظر ساختمانی یک مذاب پلیمری را در نظر بگیرید و تصور کنید هنگامی را که زنجیرها (مذاب پلیمری) تحت تنش قرار می‌گیرند. به خاطر جز الاستیک کویل‌ها[۳] تغییر فرم می‌دهند و کشیده می‌شوند، که در نتیجه‌ی آن حرکت زنجیرها و بازشدن گره‌ها به خاطر جزء ویسکوز اتفاق می‌افتد. درصورتی‌که تنش برداشته شود، کویل‌های کشیده شده به حالت اولیه برمی‌گردند ولی آن قسمتی که حرکت کرده است (جزء ویسکوز) باز نمی‌گردد. درواقع جزء

---

[1] Partial recovery

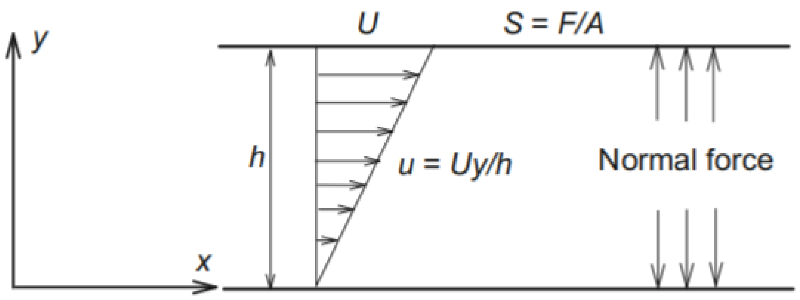
[2] Memory effects

[3] Coil

الاستیک و ویسکوز جدا از هم و قابل تفکیک نیستند و اینکه جزءهای الاستیک کشیده می‌شوند و جزءهای ویسکوز حرکت می‌کنند، به خاطر اثر متقابل جزءهای ویسکوز و الاستیک بر روی یکدیگر است.

۲-۲-۵-۲ اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم

یکی از مهم‌ترین تفاوت‌های سیالات ویسکوالاستیک با سایر سیالات، وجود ***اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم*** [1] در این مواد است. به‌عنوان نمونه در جریان کوئت (شکل ۲-۳) یک سیال معمولی، تنش‌های نرمال اول و دوم همواره ثابت و برابر فشار استاتیکی است؛ بنابراین اختلاف تنش‌های نرمال برای این سیالات برابر صفر است. چنانچه همین جریان را برای یک سیال ویسکوالاستیک مدل نماییم، شاهد اختلاف بین تنش‌های نرمال خواهیم بود. به‌طورکلی جریان برشی این مواد، آرایش و موقعیت مولکول‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد و کشیدگی همراستاشدن مولکول‌های طویل پلیمری در راستای خطوط جریان را در پی دارد که این امر سبب بروز خواص غیرایزوتروپیک در سیال ویسکوالاستیک می‌شود. لذا جهت حفظ این انحراف، میدان تنش نیز تحت تأثیر قرار گرفته و اختلاف تنش‌های نرمال پدید می‌آیند.



شکل ۲-۳: طرح شماتیک جریان برشی ساده (جریان کوئت) برای سیال ویسکوالاستیک

چنانچه سیال تنها در یک‌جهت جریان داشته باشد و تغییرات سرعت تنها در یک‌جهت عمود بر جهت حرکت به وجود بیاید، در این صورت طبق تعریف، جهت ۱ معرف جهت جریان اصلی، جهت ۲

---
[1] First and Second normal stress difference

معرف جهت تغییرات سرعت و جهت ۳ نیز معرف جهت راست‌گرد عمود بر جهات ۱ و ۲ است. برای یک سیال ویسکواالاستیک اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} \quad (۱۶-۲)$$

$$N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} \quad (۱۷-۲)$$

بر این اساس ثابت‌های تنش‌های نرمال به شکل زیر قابل بیان هستند:

$$\Psi_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2} \quad (۱۸-۲)$$

$$\Psi_2 = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} \quad (۱۹-۲)$$

که در روابط فوق Ψ_1 و Ψ_2 ثابت‌های تنش نرمال اول و دوم می‌باشند. اختلاف تنش‌های نرمال و ثابت‌های تنش نرمال همگی توابعی زوج از نرخ برش هستند. در حالت جریان پایدار، ویسکوزیته برای یک سیال وسیسکواالاستیک به شکل زیر قابل است:

$$\eta = \frac{\sigma_{12}}{\dot{\gamma}} \quad (۲۰-۲)$$

که در این رابطه σ_{12}، بیانگر تنش برشی می‌باشد.

۲-۲-۶ دسته‌بندی سیالات ویسکواالاستیک

به‌طورکلی برای مواد ویسکواالاستیک، می‌توان معادله متشکله را به دو دسته‌ی معادلات خطی و غیرخطی تقسیم نمود؛ که در ادامه این معادلات را مورد بحث گذاشته و به شماری از معروف‌ترین آن‌ها اشاره خواهیم کرد [۵۲].

۲-۲-۶-۱ سیالات ویسکواالاستیک خطی

مدل‌های ویسکواالاستیک خطی بر پایه تلفیق خواص جامدات خطی و سیالات نیوتنی ارائه شده‌اند. به عبارتی این مدل‌ها از ترکیب‌های مختلفِ مجموعه‌ای از فنرها و دمپرهای خطی حاصل شده‌اند. این مدل‌ها نسبتاً ساده بوده و به همین واسطه کاربردهای آن‌ها محدود می‌باشد. هنگام استفاده از این

مدل‌ها باید توجه نمود که کرنش‌ها و گرادیان‌های سرعت را در محدوده زمانی کوچک بررسی و فرض نماییم.

مدل‌های ویسکوالاستیک خطی برای شبیه‌سازی جریان محلول‌های رقیق پلیمری و سوسپانسیون-های رقیق ذرات کروی جامد در سیالات نیوتنی بسیار مناسب هستند. اصولاً پاسخ این مدل‌ها برای تغییر شکل‌های کوچک با فیزیک جریان سازگار بوده اما پاسخ آن برای تغییر شکل‌های بزرگ پر خطا است. یا به عبارتی استفاده از این مدل‌ها در محاسبات مربوط به تجهیزات رئومتری و برای تغییر شکل‌های کوچک متداول است. از دیگر کاربردها می‌توان به تحلیل ***پدیده خزش*** در مکانیک جامدات اشاره کرد که بسیار کارساز بوده و به دلیل سادگی به‌عنوان یک پاسخ تقریبی برای بسیاری از مواد ویسکوالاستیک به کار می‌روند.

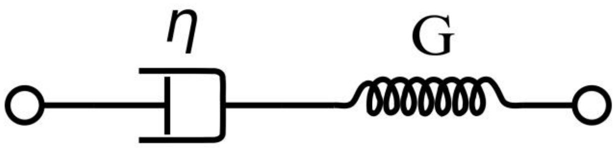
در ادامه به چند نمونه از مهم‌ترین مدل‌ها، که قابل استفاده برای سیالات ویسکوالاستیک خطی همسانگرد و تراکم‌ناپذیر می‌باشد؛ را ارائه می‌دهیم. هر مدل به یک مدل مکانیکی متناظر مربوط است که حاصل ادغام ویسکوزیته و الاستیسیته توسط یک پژوهشگر به حالت‌های مختلف می‌باشد، که خروجی آن به‌صورت یک معادله رئولوژیکی ارائه می‌شود.

- **مدل ماکسول**[1]

یکی از اولین و معروف‌ترین مدل‌های ویسکوالاستیک خطی، که در اولین تلاش‌ها برای ارائه مدلی برای سیالات ویسکوالاستیک حاصل شد، مدل ماکسول است. در این مدل قانون پایه بر اساس یک فنر و دمپر سری تعریف می‌شود. این مدل به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\tau + \lambda\,\dot{\tau} = \eta\,\dot{\gamma} \\ &\lambda = \frac{\eta}{G} \end{aligned} \qquad (۲-۲۱)$$

[1] Maxwell model



شکل ۲-۴: شماتیک مدل ماکسول

در رابطه‌ی فوق η ویسکوزیته و G مدول الاستیسیته (مدول برشی) می‌باشد. فرم η/G که نشان‌دهنده دیمانسون زمان می‌باشد را، معادل λ قرار داده و به آن زمان رهایی از تنش[1] می‌گوییم. مطابق مدل ماکسول، ماده دارای زمان آسودگی از تنش و فاقد زمان رهایی از تغییر شکل است. به‌عبارت‌دیگر در این مدل با توقف برش‌دهی، نرخ تغییر شکل در سرتاسر ماده به‌طور آنی صفر خواهد شد. بنابراین مدل ماکسول برای تغییر شکل‌های کوچک محلول‌های پلیمری رقیق (مواد ویسکوالاستیک دارای خواص ویسکوز و الاستیک تقریباً خطی) که دارای زمان رهایی از تغییر شکل کوچک هستند، مناسب است.

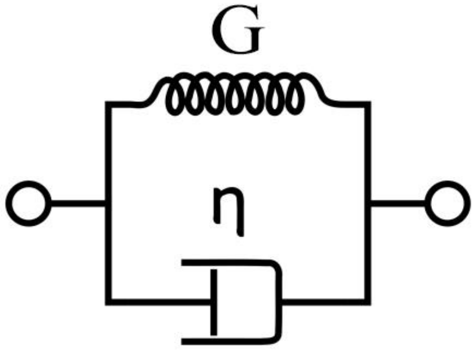
- **مدل کلوین ــ ویت[2]**

در مدل کلوین-ویت، رفتار سیال ویسکوالاستیک بر اساس یک فنر و دمپر موازی خطی شبیه‌سازی شده است. رابطه بین تنش و نرخ برش در این مدل به شکل زیر قابل بیان است:

$$\tau = \frac{G}{\eta}(\gamma + \lambda\,\dot{\gamma}) \qquad (۲۲-۲)$$
$$\lambda = \frac{\eta}{G}$$

[1] Stress relaxation time

[2] Kelvin-Voigt model



شکل ۲-۵: شماتیک مدل کلوین ــ ویت

در این مدل اگر زنجیرهای پلیمری را در نظر بگیریم، جزء الاستیک (فنرها) می‌خواهد باز شود ولی جزء ویسکوز بازشدن آن را به تأخیر می‌اندازد. از مدل کلوین-ویت عموماً برای مدل‌سازی پدیده خزش و ریکویل استفاده می‌شود. البته استفاده مستقیم از این مدل برای شبیه‌سازی‌های عددی چندان مرسوم نبوده و معمولاً جهت ارائه رفتار کامل‌تری از یک ماده ویسکوالاستیک از این المان در ارتباط با سایر المان‌های ویسکوالاستیک استفاده می‌شود. ذکر این نکته ضروری است که بدانید، مدل‌های دیگر حاصل ترکیب و ادغام مدل‌های ماکسول و کلوین-ویت (حاصل ادغام ویسکوزیته و الاستیسیته) به حالت‌های مختلف می‌باشد، که خروجی آن به‌صورت یک معادله رئولوژیکی ارائه می‌شود که در ادامه به چند نمونه از مهم‌ترین‌های آن اشاره می‌کنیم.

- **مدل برگرز**[1]

این مدل به شکل زیر قابل بیان است:

$$\tau + \alpha_1 \dot{\tau} + \alpha_2 \ddot{\tau} = \eta\, [\dot{\gamma} + \beta\, \ddot{\gamma}]$$
$$\alpha_1 = \lambda_1 + \lambda_2\,; \quad \alpha_2 = \lambda_1\, \lambda_2\,; \quad \eta = \eta_1 + \eta_2\,; \quad \beta = \frac{\eta_1 \lambda_2 + \eta_2 \lambda_1}{\eta_1 + \eta_2} \qquad (۲-۲۳)$$

[1] Burgers model

مسلّم است که مدل برگرز رفتار کامل‌تری را از یک ماده ویسکواالاستیک ارائه می‌کند. در مدل برگرز ماده دارای دو ثابت زمان رهایی از تنش λ_1 و λ_2 است؛ که این زمان‌های رهایی از تنش، همان زمان‌های رهایی از تنش تک‌تک المان‌های ماکسول این مدل هستند.

- **مدل جفریز**[1]

مدل ماکسول یک رابطه‌ی خطی مابین τ و $\dot{\gamma}$ می‌باشد، حال‌آنکه در مدل جفریز می‌توان مشتق زمانی $\dot{\gamma}$ را به مدل ماکسول افزوده و رابطه را به‌صورت زیر ارائه نمود:

$$\tau + \lambda\,\dot{\tau} = \eta\,(\dot{\gamma} + \xi\,\ddot{\gamma})$$
$$\lambda = \frac{\eta}{G}\ ; \quad \eta = \eta_1 + \eta_2\ ; \quad \xi = \frac{\lambda\,\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \qquad (۲-۲۴)$$

η ویسکوزیته معادل تمام سیال ویسکواالاستیک، λ ثابت زمانی رهایی از تنش و ξ ثابت زمانی تأخیر[2] مدل می‌باشد. مدل جفریز، مدل بسیار محبوبی برای ارائه رفتار رئولوژیکی محلول‌های رقیق پلیمری به شمار می‌آید. در اینجا η_1 و λ معرف خواص رئولوژیکی ماده حل شونده پلیمری و η_2 معروف ویسکوزیته حلال نیوتنی می‌باشد.

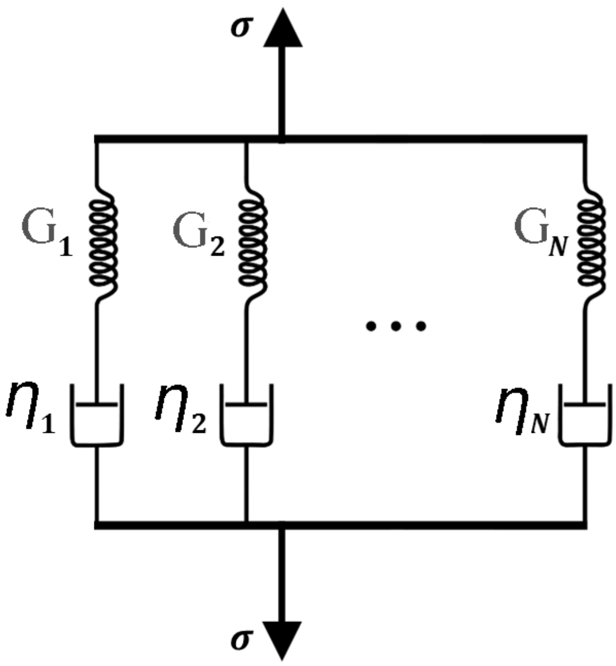
- **مدل ماکسول توسعه‌یافته**[3]

در مدل ماکسول تعمیم یافته فرض بر آن است که تعداد n المان ماکسول به‌طور موازی بسته شده است.

[1] Jeffreys model

[2] Retardation time

[3] Generalized Maxwell model



شکل ۲-۶: شماتیک مدل ماکسول توسعه‌یافته

در این مدل می‌توان تنش کلی را با استفاده از مجموع تنش‌های پاره‌ای به دست آورد:

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^{n} \tau_i(t)$$

$$\tau_i + \lambda_i\, \dot{\tau}_i = \eta_i\, \dot{\gamma}\ ; \qquad \lambda_i = \frac{\eta_i}{G_i} \tag{۲-۲۵}$$

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\, (1 - exp[-t/\lambda_i]); \qquad G(t) = \sum_{i=1}^{n} G_i(exp[-t/\lambda_i])$$

به‌عبارت‌دیگر مدل ماکسول تعمیم یافته، n زمانِ رهایی از تنش وجود دارد، که هر یک از این زمان‌ها مربوط به زمان رهایی از تنش هر شاخه از المان‌های ماکسول هستند. به‌طور مشابه، مدل‌کلوین- ویت توسعه‌یافته نیز از طریق سری کردن المان‌های کلوین- ویت قابل تعریف است (جهت ایجاد زمان‌های رهایی از تغییر شکل مختلف).

- **مشکلات مدل‌های ویسکوالاستیک خطی**

هرچند که مدل‌های ویسکوالاستیک خطی روابط دیفرانسیلی ساده‌ای را بین تنش و نرخ برش پیش‌بینی

می‌کنند، اما این مدل‌ها دارای مشکلات زیر هستند:

۱. رفتار ویسکواالاستیک خطی تنها در محلول‌ها و سوسپانسیون‌های رقیق پلیمری مشاهده شده درحالی‌که محلول‌های غلیظ، مذاب‌های پلیمری و سیالات بیولوژیک رفتاری کاملاً غیرخطی دارند، لذا این مدل‌ها قابل تعمیم به تمامی مواد ویسکواالاستیک نیستند.

۲. مدل‌های ویسکواالاستیک خطی عمدتاً برای تغییر شکل‌های کوچک مناسب هستند و برای مدل‌سازی تغییر شکل‌های بزرگ (جریان ماده) دچار خطای بزرگی می‌شوند؛ به همین دلیل این مدل‌ها بیشتر در مکانیک جامدات کاربرد دارند.

۳. علت بسیاری از رفتارهای متفاوت سیالات ویسکواالاستیک نسبت به سایر سیالات، وجود اختلاف تنش‌های نرمال در این مواد است که مدل‌های خطی قادر به تبیین اختلاف تنش‌های نرمال نیستند.

۴. اصل عدم تغییر حرکت صلب الحاقی که یکی از اصول اساسی مکانیک محیط‌های پیوسته است، بر آن‌ها حاکم نیست.

۵. مدل‌های خطی قادر به مدل‌سازی و نشان دادن وابستگی توابع رئولوژیک به نرخ برش نیستند. به‌عبارت‌دیگر ترم ویسکوزیته در این مدل‌ها همواره دارای مقداری ثابت است ($\eta = \eta_0$).

۲-۲-۶-۲ سیالات ویسکواالاستیک غیرخطی

استفاده از مدل‌های خطی برای تحلیل تغییر شکل‌های کوچک مواد ویسکواالاستیک رایج است. همچنین به دلیل پیچیدگی‌ها و ناپایداری‌های شدید عددی در مدل‌های غیرخطی، توصیه می‌شود که در ابتدا تحلیل جریان با استفاده از مدل‌های خطی انجام شود و پاسخ‌های حاصل از آن به‌عنوان فرض اولیه در مدل‌های غیرخطی به کار رود.

از اوایل دهه ۱۹۵۰ میلادی، مدل‌های تئوری و آزمایشگاهی زیادی ارائه شد که تا حد امکان از اشکالات مدل‌های ویسکواالاستیک خطی مبرا باشند و بتواند به توابع ویسکومتری (تابع لزجت و اختلاف

تنش‌های نرمال اول و دوم) پاسخی مناسب دهد؛ ضمن اینکه علاوه بر پاسخ به تغییر شکل‌های کوچک، برای مدل‌سازی تغییر شکل‌های بزرگ نیز مناسب باشد. بنابراین مدل‌های ویسکواالاستیک غیرخطی که اغلب از معادلات ساختاری پیچیده‌ای تشکیل شده‌اند، ارائه شد تا علاوه بر به دست آوردن نتایج قابل قبول، بتوانیم رفتار فیزیکی بهتر و هرچه واقعی‌تری را از سیال ویسکواالاستیک ارائه دهیم. در ادامه برخی از معروف‌ترین این مدل‌ها معرفی می‌شوند [۴۹].

- **مدل هشت ثابتِ اولروید[1]**

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} + \frac{1}{2}\,\lambda_3\{\dot{\gamma}\cdot\tau + \tau\cdot\dot{\gamma}\} + \frac{1}{2}\,\lambda_5(tr\,\tau)\dot{\gamma} + \frac{1}{2}\,\lambda_6(\tau\!:\!\dot{\gamma})\delta = \eta_0\left[\dot{\gamma} + \lambda_2\dot{\gamma}_{(1)} + \lambda_4\{\dot{\gamma}\cdot\dot{\gamma}\} + \frac{1}{2}\lambda_7(\dot{\gamma}:\dot{\gamma})\delta\right] \quad (۲-۲۶)$$

در این رابطه $\dot{\gamma} = \nabla V + (\nabla V)^{\dagger}$ تانسور نرخ برش (تغییر شکل) و δ تانسور واحد می‌باشد. این مدل قادر به ارائه کلیه توابع ویسکومتریک بوده و رفتار بسیار کاملی از یک سیال ویسکواالاستیک را نشان می‌دهد. ذکر این نکته حائز اهمیت است که انتخاب ثابت‌های مدل می‌تواند بر اساس نوع جریان مورد مطالعه متفاوت باشد؛ تا بتوان پدیده مربوط به جریان مورد نظر را به شکل مؤثری مدل‌سازی کرد. بااین‌حال همان‌طور که مشخص است مدل بسیار پیچیده هست و همچنین ناپایدار عددی آن بالا می‌باشد. و با توجه به تعداد ثابت‌های زیاد مدل، استقبال چندانی از این مدل در مدل‌سازی ویسکواالاستیک نشده است.

- **مدل گزیکس[2]**

معادله‌ی ساختاری مدل سه ثابتِ گزیکس که بر مبنای تئوری مولکولی استخراج شده است، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

---

[1] Oldroyd 8-constant model

[2] Giesekus model

$$\tau + \lambda\, \tau_{(1)} + \frac{\alpha\lambda}{\eta}(\tau \cdot \tau) = \eta\dot{\gamma} \qquad (۲-۲۷)$$

که در اینجا λ زمان آسودگی از تنش و α ضریب پویایی یا تحرک در سیال ویسکواالاستیک است که بیانگر رفتار غیر ایزوتروپیک براونی در هیدرودینامیک مولکولی ماده می‌باشد. η ویسکوزیته ماده در نرخ برش صفر می‌باشد. امتیاز اصلی این مدل آن است که قادر به ارائه ***رفتار پاورلا*** برای ویسکوزیته و همچنین می‌تواند ثابت‌های اختلاف تنش‌های نرمال را به خوبی نشان دهد. ذکر این نکته ضروری است که در تحقیق حاضر از این مدل به‌عنوان معادله ساختاری استفاده شده و در بخش ۲-۲-۸ تحقیق حاضر، گزارش مشروحی از آن ارائه شده است.

- **مدل FENE**

این معادله متشکله بر اساس تئوری سینتیک مولکولی برای محلول‌های رقیق پلیمری به دست آمده است. در اینجا تنش به‌صورت مجموع سهم تنش حلال نیوتنی (τ_s) و تنش پلیمری (τ_p) مدل شده است.

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_s + \tau_p \\ \tau_s &= \eta_s\, \dot{\gamma} \end{aligned} \qquad (۲-۲۸)$$

سهم تنش پلیمری τ_p از حل معادله دیفرانسیلی زیر به دست می‌آید:

$$Z\, \tau_p + \lambda_H \tau_{p(1)} - \lambda_H \left(\tau_p + \frac{b}{b+2} nkTI\right)\frac{DLnz}{Dt} = \left(\frac{b}{b+2}\right) nkT\lambda_H\, \dot{\gamma} \qquad (۲-۲۹)$$

در رابطه فوق Z تابعی از ناوردایی اول تانسور تنش است:

$$Z = 1 + \frac{3}{b}\left(\frac{b}{b+2} + \frac{tr\, \tau_p}{3nkT}\right) \qquad (۲-۳۰)$$

n تعداد دمبل‌های سیال (لینک‌های بین‌مولکولی) پلیمری در واحد حجم ، k ثابت بلتزمن، T دمای مطلق، b نسبت پتانسیل انرژی بین‌مولکولی به انرژی حرارتی و λ_H ثابت زمانی در مدل FENE می‌باشند. این مدل که بر اساس توصیف کشیدگی و تغییر شکل مولکول‌ها به‌دست‌آمده، مدلی بسیار مناسب برای

جریان‌های محلول رقیق پلیمری می‌باشد که به اشکال بسیار متنوعی توسعه و یا ساده شده است. یکی از معایب این مدل، عدم توانایی آن در ارائه اثر اختلاف تنش نرمال دوم است.

- **مدل فان‌تین-تنر[1]**

مدل فان‌تین-تنر که اصطلاحاً به آن PTT نیز می‌گویند، توسط فان‌تین و تنر در طی سال‌های ۱۹۷۷ و ۱۹۷۸ ارائه شده است. مدل درواقع بر اساس تئوری شبکه مولکولی برای مذاب‌های پلیمری به دست آمده است که صورت عمومی این مدل به شکل زیر است:

$$Y\tau + \lambda\tau_{(1)} + \frac{1}{2}\xi\lambda\{\dot{\gamma}\cdot\tau + \tau\cdot\dot{\gamma}\} = \eta_0\dot{\gamma} \tag{۳۱-۲}$$

در رابطه فوق Y تابعی از ناوردایی اول تانسور تنش است:

$$Y = exp[\varepsilon(\lambda/\eta_0)\ tr\ \tau] \approx 1 + \varepsilon(\lambda/\eta_0)\ tr\ \tau \tag{۳۲-۲}$$

مدل دارای دو ثابت مادی جدید ε و ξ افزون بر ویسکوزیته و زمان رهایی از تنش می‌باشد. تخمین ξ از تست‌های ویسکومتریک امکان‌پذیر است، درحالی‌که تعیین ε از تست‌های جریان کششی صورت می‌گیرد. مدل PTT یکی از محبوب‌ترین مدل‌ها جهت مطالعه جریان سیال ویسکواالاستیک محسوب می‌شود که دارای حالت‌های ساده‌تر شده‌ی دیگری می‌باشد. این مدل در برش‌های کوچک به سمت رفتار ویسکواالاستیک خطی میل می‌کند. این مدل همچنین می‌تواند توابع ویسکومتریک را به‌خوبی در جریان‌های دائمی و گذار برای بسیاری از محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری ارائه نماید.

- **مدل کریمینال-اریکسون-فیلیبی[2]**

این مدل که به مدل CEF معروف می‌باشد، مدل مناسبی برای شبیه‌سازی جریان‌های برشی دائمی سیالات ویسکواالاستیک است. معادله ساختاری این مدل به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

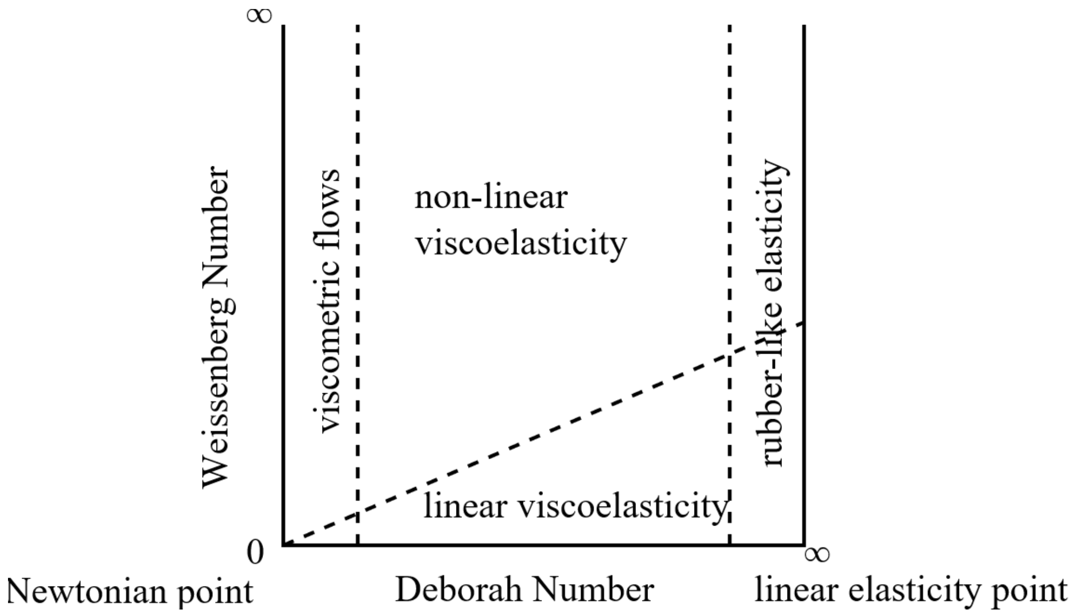
$$\tau = \eta\gamma_{(1)} - \frac{1}{2}\Psi_1\,\gamma_{(2)} + \Psi_2\,\{\gamma_{(1)}\cdot\gamma_{(1)}\} \tag{۳۳-۲}$$

---

[1] Phan-Thein-Tanner model

[2] Criminale-Ericksen-Filbey

ازجمله مزایای این مدل می‌توان به امکان اعمال مستقیم توابع رئولوژیک وابسته به نرخ برش تعمیم یافته (شامل ویسکوزیته و ثابت‌های اختلاف تنش نرمال اول و دوم) در مدل اشاره نمود. پاسخ‌های این مدل در ***ناحیه ویسکومتریک*** دیاگرام پیپ‌کین (اعداد دبورای کوچک و محدوده وسیعی از اعداد وایزنبرگ) دقیق بوده و استفاده از آن، جهت محاسبات صنعتی رایج است. لازم به ذکر است که ناحیه‌ی ویسکومتریک در نمودار ۲-۷ نشان داده شده است.



شکل ۲-۷: نمودار پیپ‌کین به منظور دسته‌بندی ناحیه‌های مختلف جریان ویسکوالاستیک

۲-۲-۷ انتخاب معادله ساختاری مناسب

معادلات ساختاری برای سیالات غیرنیوتنی بسیار گسترده‌تر بوده، اما حتی‌الامکان تا جایی که امکان‌پذیر بود به بیان مهم‌ترین و کاربردی‌ترین آن‌ها پرداخته شد. به‌طورکلی برای بررسی تحلیلی یا عددی یک مسئله خاص غیرنیوتنی توصیه می‌شود که معادله ساختاری به نحوی انتخاب گردد که دارای شرایط زیر باشد:

۱. ترجیحاً با اصول مکانیک محیط‌های پیوسته سازگار باشد و از پتانسیل کاربرد گسترده‌تری برخوردار باشد.

۲. قادر به ارائه خواص توابع ویسکومتریک (شامل ویسکوزیته و ثابت‌های اختلاف تنش نرمال اول و دوم) مسئله مورد نظر باشد.
۳. برای شرایط کلی و عمومی مسئله طراحی شده باشد (برای مثال از مدل‌هایی که برای مسائل جریان‌های دائمی طراحی شده‌اند نمی‌توان در شرایط غیر دائم استفاده نمود).
۴. ضرایب و ثابت‌های معادله موجود بوده و یا اندازه‌گیری و تعیین آن‌ها مقدور باشد.
۵. درعین‌حال که برای مدل‌سازی تغییر شکل‌های کوچک مناسب باشد، قابل استفاده برای مدل‌سازی تغییر شکل‌های بزرگ (جریان ماده) نیز باشد.
۶. این نکته را در نظر داشته باشیم که، با استفاده از مدل مورد نظر بتوانیم حداقل مسئله مورد نظر را به روش تحلیلی حل نماییم.
۷. ضمن آنکه از تعداد ثابت‌های کمتری برخوردار باشد؛ از محبوبیت و کاربرد زیادی برخوردار باشد.
۸. ترجیحاً توسط مراجع معتبری برای حل مسئله مورد نظر و یا مسائل مشابه توصیه شده باشد و جنبه‌ی نوآوری برای حل مسئله مورد نظر داشته باشد.

بنا بر نکات گفته‌شده مدل ویسکواالاستیک انتخاب شده برای مسئله روانکاری، که علاوه بر جنبه نوآوری تمامی ویژگی‌های مذبور را در بر دارد، مدل ویسکواالاستیک غیرخطی ***گزیکس*** می‌باشد؛ که پیش‌تر هم به آن اشاره شد. در ادامه به شرح مفصلی در رابطه با ویژگی‌ها و خواص این مدل غیرنیوتنی می‌پردازیم.

۲-۲-۸ مدل ویسکوالاستیک غیرخطی گزیکس

هانس والتر گیزکس[1] (۱۹۲۲-۲۰۱۷) دانشمند آلمانی بود که در سال ۱۹۹۰ مفتخر به دریافت مدال طلای جایزه انجمن رئولوژی بریتانیا شد. وی مقالات متعددی را در مورد کاهش پسا و پایداری جریان ویسکوالاستیک به چاپ رسانید؛ اما در سال ۱۹۸۲ در طی مقاله‌ای معادله‌ی ساختاری را برای محلول-های پلیمری ارائه نمود که بر مبنای دیدگاه مولکولی به دست آورده بود. جالب است بدانید این مقاله بیشترین بازدید را در میان مقالاتی وی داشته است[۵۴].

شکل ۲-۷: هانس والتر گیزیکس (۲۰۱۷-۱۹۲۲)

معادله‌ی ساختاری که توسط گزیکس پیشنهاد شد به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۴۹, ۵۰, ۵۵]:

$$\tau_p + \lambda_1 \overset{\Delta}{\tau}_p + \frac{\alpha\lambda_1}{\eta}\left(\tau_p \cdot \tau_p\right) = \eta_p(\nabla u + \nabla u^{\dagger}) \qquad (۲-۳۴)$$

[1] Hanswalter Giesekus

τ_p در این مدل مؤلفه ویسکواالاستیک تانسور تنش، توسط پارامترهای η_p، λ و α بیان شده است که در آن η_p ویسکوزیته حل شونده پلیمری در نرخ برش صفر، λ زمان آسودگی از تنش و α که پارامتری بدون بعد می‌باشد را ***ضریب تحرک***[1] (ضریب پویایی) می‌نامند. ∇u گرادیان سرعت و $\nabla u^{\dagger}$ ترانهاده‌ی گرادیان سرعت می‌باشد. ذکر این نکته حائز اهمیت است که مقدار λ برای روانکارهای مورد استفاده در یاتاقان‌ها بین $10^{-6} - 10^{-4}$ می‌باشد [۴۳و۳۹]. همچنین محدوده‌ی فیزیکی قابل قبول برای α نیز بین $0 < \alpha < 0.5$ می‌باشد [۵۶].

عبارت $\overset{\Delta}{\tau}$ مشتق پادهمرفتی تانسور تنش پلیمری است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\overset{\Delta}{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + u.\nabla\tau - (\nabla u^{\dagger}.\tau + \tau.\nabla u) \qquad (۲-۳۵)$$

ثابت ضریب تحرک در مدل گزیکس بیانگر رفتار غیر ایزوتروپیک بروانی (کشش ناهمسانگردی) در هیدرودینامیک مولکولی است که درواقع ویسکوزیته کششی و نسبت اختلاف تنش دوم نرمال به نسبت اختلاف تنش نرمال اول را کنترل می‌کند. محدوده ضریب تحرک بین $0 < \alpha < 1$ می‌باشد، که برای $\alpha = 0$، معادله ساختاری گزیکس به مدل ایزوتروپیک (همسانگرد) UCM تبدیل می‌شود. برای $\alpha > 0$، مدل رفتار سیال shear-thinning را نشان می‌دهد و قادر به ارائه اختلاف تنش نرمال دوم است به‌نحوی‌که:

$$\Psi_2 = -\frac{\alpha}{2}\,\Psi_1 \qquad (۲-۳۶)$$

مدل گزیکس عملاً مدلی محبوب و پراستفاده در رئولوژی محسوب می‌شود و دارای دقت قابل قبولی در توصیف ویسکوزیته کششی و ویسکوزیته مختلط است. این مدل مشابه مدل اولروید هشت ثابتِ، یک مدل غیرخطی صریح است که امتیاز اصلی این مدل آن است که قادر به ارائه رفتار نمایی (پاورلا) برای ویسکوزیته و ثابت‌های اختلاف تنش‌های نرمال است. در این مدل وجود ترم غیرخطی $(\tau_p \cdot \tau_p)$ منجر

[1] Mobility factor

به وابستگی تنش محاسبه شده به پایای سوم III تانسور نرخ برش شده است. برای یک محلول پلیمری مدل گزیکس را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}&\tau = \tau_s + \tau_p\\&\tau_s = \eta_s\dot{\gamma}\\&\tau_p + \lambda_1 \overset{\Delta}{\tau}_p + \frac{\alpha\lambda_1}{\eta}\left(\tau_p \cdot \tau_p\right) = \eta_p(\nabla u + \nabla u^{\dagger})\end{aligned} \qquad (۳۷\text{-}۲)$$

اندیس s نشان‌دهنده خواص حلال و اندیس p خواص مربوط به پلیمر می‌باشد. معادله (۲۲-۳۷) را می‌توان با جایگزینی دوباره به‌عنوان یک معادله ساختاری بازنویسی کرد. با جایگذاری τ_p در آخرین معادله با فرض:

$$\tau_p = \tau - \tau_s = \tau - \eta_s\dot{\gamma} \qquad (۳۸\text{-}۲)$$

می‌توان گفت که، شکل کلی معادله ساختاری برای یک محلول پلیمری به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tau + \lambda_1 \overset{\Delta}{\tau} + \frac{a\lambda_1}{\eta_0}\{\tau \cdot \tau\} + a\,\lambda_2\{\dot{\gamma} \cdot \tau + \tau \cdot \dot{\gamma}\} = \eta_0\left[\dot{\gamma} + \lambda_2 \overset{\Delta}{\dot{\gamma}} - a\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}\{\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}\}\right] \qquad (۳۹\text{-}۲)$$

که در اینجا، τ نشان‌دهنده‌ی تنش کلی جریان محلول، η_0 ویسکوزیته در نرخ برش صفر، λ_2 زمان تأخیر و a پارامتر تحرک اصلاح شده می‌باشند؛ که به‌صورت توابعی از η_s، η_p و α می‌باشند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\eta_0 = \eta_s + \eta_p\,; \qquad \lambda_2 = \lambda_1\frac{\eta_s}{\eta_p}\,; \qquad a = \frac{\alpha}{1 - (\lambda_2/\lambda_1)} \qquad (۴۰\text{-}۲)$$

سه تابع مادی که توابع ویسکومتری نامیده می‌شوند؛ برای مدل گزیکس در جریان برشی دائم به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

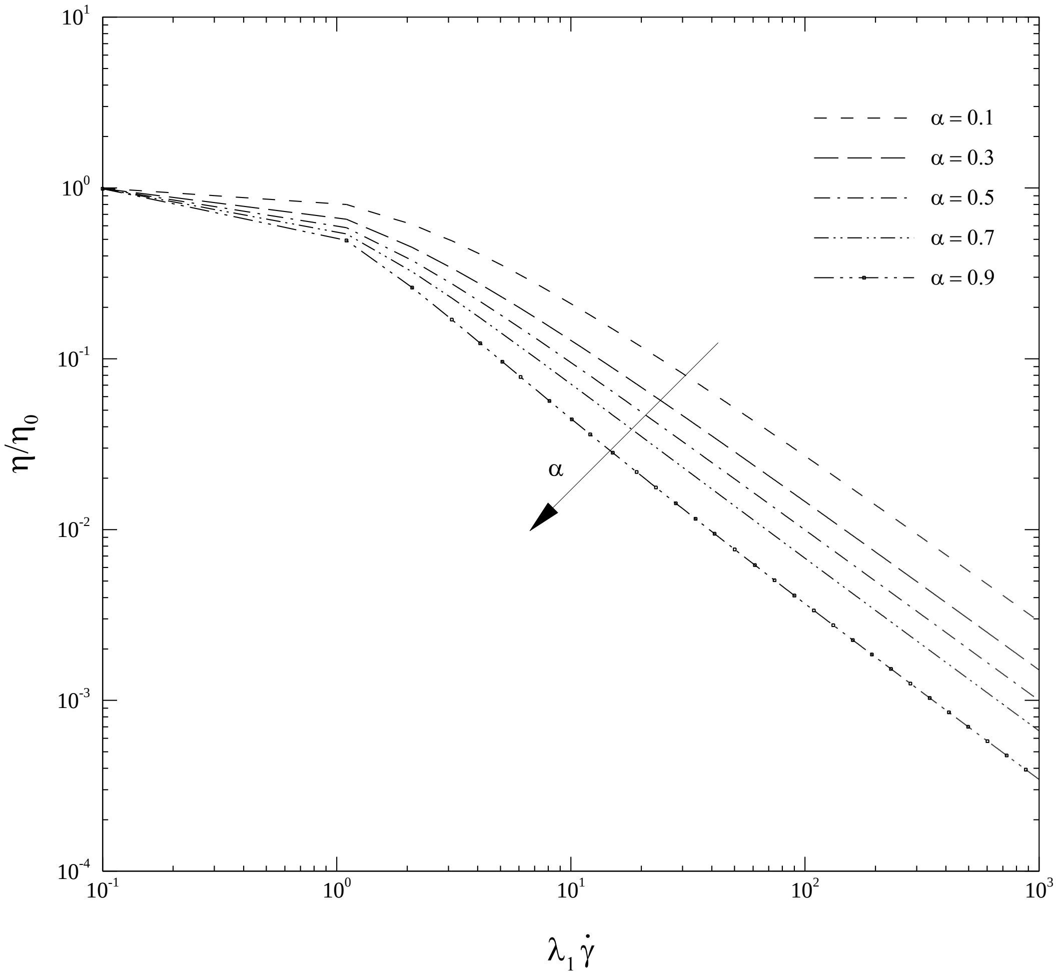
$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\frac{(1-f)^2}{1 + (1-2\alpha)f} \qquad (۴۱\text{-}۲)$$

$$\frac{\Psi_1}{2\eta_0(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{f(1-\alpha f)}{(\lambda_1\dot{\gamma})^2\alpha(1-f)} \qquad (۴۲\text{-}۲)$$

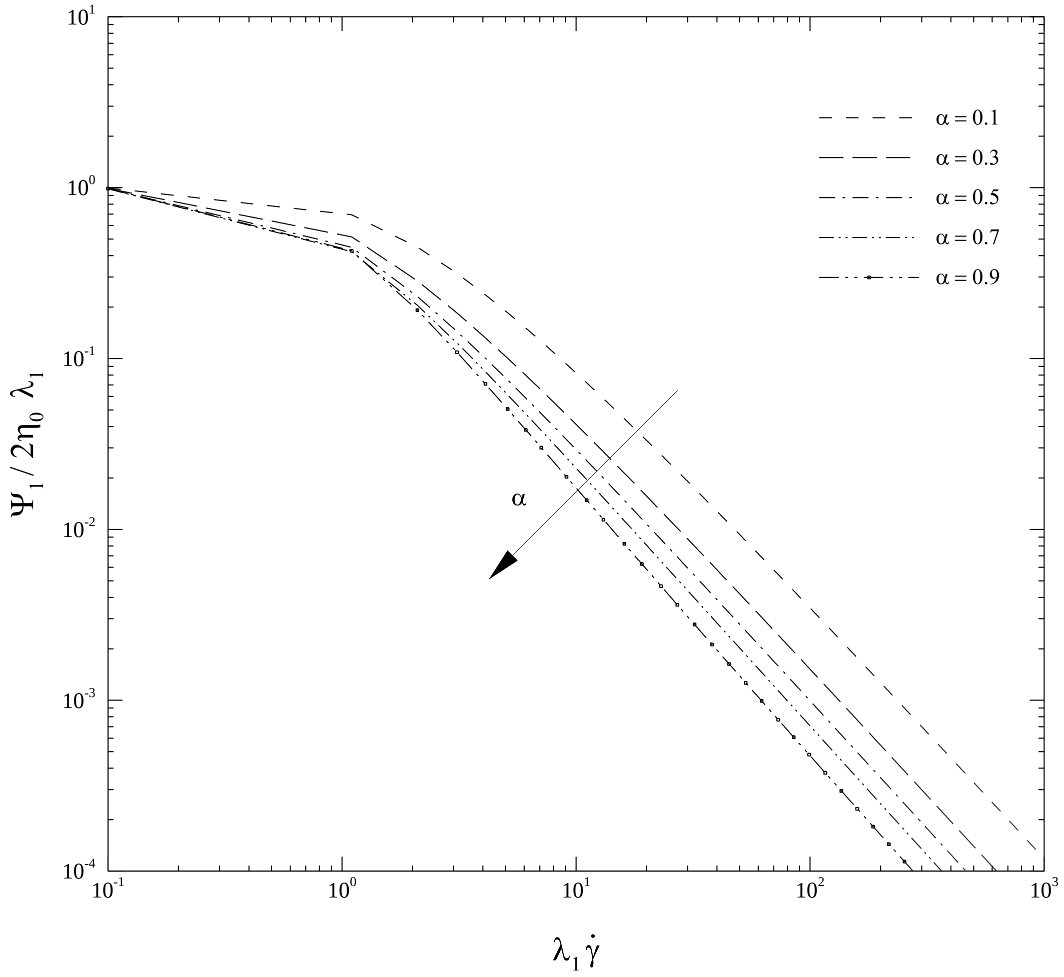
$$\frac{\Psi_2}{\eta_0(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{-f}{(\lambda_1\dot{\gamma})^2} \qquad (۴۳\text{-}۲)$$

$$f=\frac{1-\chi}{1+(1-2\alpha)\chi};\qquad \chi^2=\frac{(1+16\alpha[1-\alpha][(\lambda_1\dot{\gamma})^2])^{1/2}-1}{8\alpha(1-\alpha)(\lambda_1\dot{\gamma})^2} \tag{۴۴-۲}$$

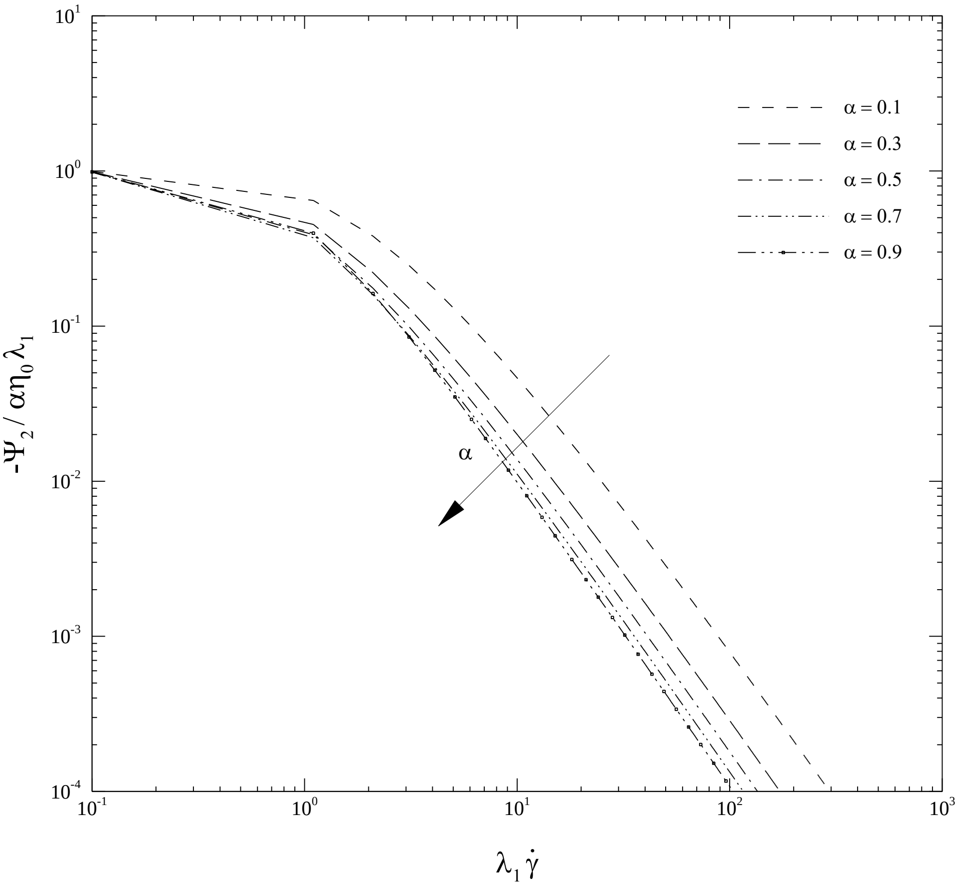
ازآنجایی‌که مسئله‌ی مورد نظر برای جریان پلیمری حل می‌شود، لذا کمیت‌های η_s و λ_2 برابر با صفر بوده و مقدار $a=\alpha$ باشد. در ادامه شاهد نحوه تغییرات توابع ویسکومتریک مدل گزیکس برای ، برحسب ضرایب تحرک مختلف (α) می‌باشیم.



شکل ۲-۸: ویسکوزیته در جریان برشی دائمی بی‌بعد برای مدل گزیکس برحسب ضرایب تحرک مختلف



شکل ۲-۹: ضریب تنش نرمال اولیه در جریان برشی دائمی بی‌بعد، برای مدل گزیکس برحسب ضرایب تحرک مختلف



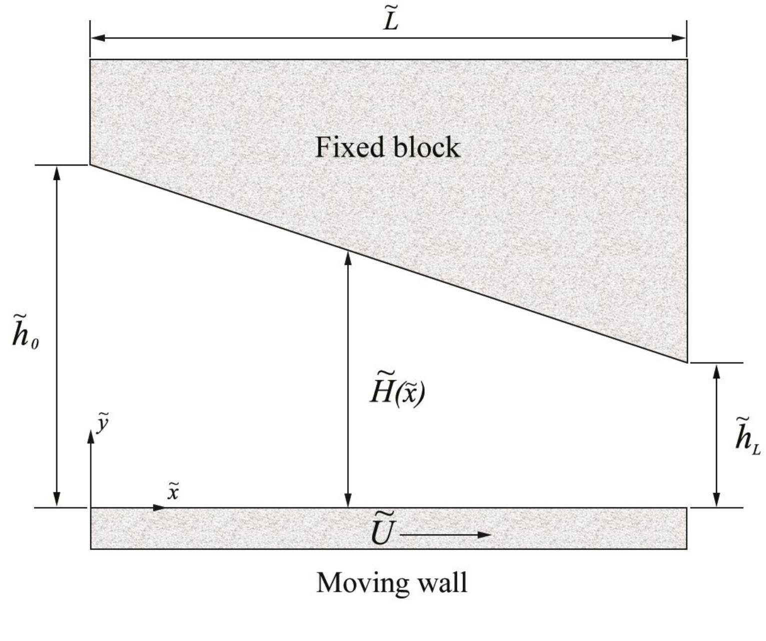
شکل ۲-۱۰: ضریب تنش نرمال ثانویه در جریان برشی دائمی بی‌بعد، برای مدل گزیکس برحسب ضرایب تحرک مختلف

فصل ۳ : حل تحلیلی مسئله

بسیاری از معادلات مهندسی کاربردی که با آن روبرو هستیم؛ اغلب به‌صورت تحلیلی و دقیق قابل‌حل نمی‌باشند. برخی از این مشکلات ناشی از غیرخطی بودن معادلات، وجود ضرایب متغیر، شرایط مرزی پیچیده و دیگر دلایلی بود که پیش‌تر ذکر گردید. در این صورت به‌ناچار نوعی تقریب را باید در نظر گرفت یا اینکه مسئله را به طریق عددی حل نمود. تئوری اغتشاشات یکی از روش‌های تقریبی تحلیلی برای حل مسائلی می‌باشد که در این فصل به کمک آن به حل مسئله روانکاری می‌پردازیم. ذکر این نکته ضروری است که در ابتدا به حل مسئله‌ی روانکاری برای یک ***یاتاقان اسلایدر*** و پس از آن به حل مسئله مورد نظر برای ***یاتاقان ژورنال*** می‌پردازیم.

۳-۱ مسئله‌ی روانکاری یاتاقان اسلایدر

ساده‌ترین حالت مسئله‌ی روانکاری مربوط به یاتاقان از نوع اسلایدر می‌باشد؛ که شکل ۳-۱ نشان‌دهنده‌ی هندسه مسئله روانکاری آن می‌باشد. در این مسئله، قطعه بالایی ساکن بوده و صفحه پایینی با سرعت $\tilde{U}$ حرکت می‌کند.



شکل ۳-۱: هندسه روانکاری یاتاقان اسلایدر در فضای متغیر

همان‌طور که در شکل ۳-۱ مشاهده می‌نمایید، فضای بین قطعه ساکن و صفحه زیر آن بسیار تنگ است و ارتفاع این فضا از h_0 در ورودی تا h_L در خروجی تغییر می‌کند.

پیش‌تر در فصل دوم معادلات حاکم به تفسیر موردبررسی قرارگرفته‌اند. در ادامه به بیان معادلات حاکم و نحوه ساده‌سازی آن‌ها می‌پردازیم. با توجه به اینکه جریان مورد نظر تراکم ناپذیر، آرام، دو بعدی و پایا می‌باشد و این‌که نیروی حجمی قابل صرف‌نظر هست، معادلات پیوستگی و مومنتوم را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}}+\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}}=0\\ \rho\left(\tilde{u}_x\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}}+\tilde{u}_y\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}}\right)=-\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}}+\frac{\partial \tilde{\tau}_{xx}}{\partial \tilde{x}}+\frac{\partial \tilde{\tau}_{yx}}{\partial \tilde{y}}\\ \rho\left(\tilde{u}_x\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{x}}+\tilde{u}_y\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}}\right)=-\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}}+\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial \tilde{x}}+\frac{\partial \tilde{\tau}_{yy}}{\partial \tilde{y}}\end{gathered} \tag{۳-۱}$$

بالانویس ~ به‌منظور بعددار بودن پارامترها استفاده شده است. با توجه به فرضیات مذبور معادله ساختاری مدل گزیکس نیز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}&\tilde{\tau}_{xx}+\frac{\alpha\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}}\left(\tilde{\tau}_{xx}^2+\tilde{\tau}_{xy}^2\right)+\tilde{\lambda}\left(\tilde{u}_x\frac{\partial \tilde{\tau}_{xx}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{u}_y\frac{\partial \tilde{\tau}_{xx}}{\partial \tilde{y}}-2\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}}\tilde{\tau}_{xx}-2\tilde{\tau}_{xy}\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}}\right)\\ &\qquad=2\tilde{\eta}\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}}\\ &\tilde{\tau}_{xy}+\frac{\alpha\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}}\left(\tilde{\tau}_{xx}+\tilde{\tau}_{yy}\right)\tilde{\tau}_{xy}+\tilde{\lambda}\left(\tilde{u}_x\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{u}_y\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial \tilde{y}}-\tilde{\tau}_{xx}\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{x}}-\tilde{\tau}_{yy}\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}}\right)\\ &\qquad=\tilde{\eta}\left(\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{y}}+\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{x}}\right)\\ &\tilde{\tau}_{yy}+\frac{\alpha\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}}\left(\tilde{\tau}_{yy}^2+\tilde{\tau}_{xy}^2\right)+\tilde{\lambda}\left(\tilde{u}_x\frac{\partial \tilde{\tau}_{yy}}{\partial \tilde{x}}+\tilde{u}_y\frac{\partial \tilde{\tau}_{yy}}{\partial \tilde{y}}-2\tilde{\tau}_{xy}\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{x}}-2\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}}\tilde{\tau}_{yy}\right)\\ &\qquad=2\tilde{\eta}\frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}}\end{aligned} \tag{۳-۲}$$

در این مسئله فرض بر آن است که طول مسیر روغن‌کاری ($\tilde{L}$) از اندازه درز یاتاقان ($\tilde{H}(\tilde{x})$) بسیار بزرگ‌تر است. بنابراین جریان درون درز از نیروی اینرسی کمتری نسبت به نیروی ویسکوز برخوردار است؛ یا به عبارتی می‌توان گفت که جریان از نوع جریان استوکس (دارای چگالی ناچیز) است [۱]. با

توجه به فرضیات ذکر شده و همان‌طور که در شکل ۳-۱ مشاهده می‌نمایید، ازآنجایی‌که ضخامت فیلم در نظر گرفته شده بسیار نازک است، می‌توان فرضیات زیر را نیز در نظر گرفت.

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}} \ll \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}\ ; \quad \tilde{u} \gg \tilde{v} \tag{۳-۳}$$

درنهایت می‌توان معادلات مومنتوم و پیوستگی را به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{u}_y}{\partial\tilde{y}} = 0 \tag{۴-۳}$$

$$\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{x}} = \frac{\partial\tilde{\tau}_{yx}}{\partial\tilde{y}} \tag{۵-۳}$$

معادله ساختاری مدل گزیکس نیز به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tau}_{xx} + \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}}\left(\tilde{\tau}_{xx+}^2\tilde{\tau}_{xy}^2\right) = 2\tilde{\lambda}\tilde{\tau}_{xy}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}\\
&\tilde{\tau}_{xy} + \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}}\left(\tilde{\tau}_{xx} + \tilde{\tau}_{yy}\right)\tilde{\tau}_{xy} = \left(\tilde{\lambda}\tilde{\tau}_{yy} + \tilde{\eta}\right)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}\\
&\tilde{\tau}_{yy} + \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\lambda}}{\tilde{\eta}}\left(\tilde{\tau}_{yy+}^2\tilde{\tau}_{xy}^2\right) = 0
\end{aligned} \tag{۶-۳}$$

۳-۱-۱ بی‌بعد سازی معادلات حاکم مربوط به یاتاقان اسلایدر

به‌منظور بی‌بعد سازی معادلات (۳-۴) تا (۳-۶) پارامترهای بی‌بعد زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&Wi = \frac{\tilde{\lambda}\tilde{U}}{\tilde{h}_0}, \qquad \tau = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\eta}\tilde{U}/\tilde{h}_0}, \qquad h(x) = \frac{\tilde{H}(\tilde{x})}{\tilde{h}_0}, \qquad P = \frac{\tilde{P}}{\tilde{\eta}\tilde{U}\tilde{L}/\tilde{h}_0^2},\\
&y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{h}_0}, \qquad x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}}, \qquad v = \frac{\tilde{v}\tilde{L}}{\tilde{h}_0\tilde{U}}, \qquad u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}}.
\end{aligned} \tag{۷-۳}$$

عدد وایزنبرگ(Wi) برای تعیین نسبت نیروی ناشی از خاصیت الاستیک به نیروی حاصل از ویسکوزیته از آن استفاده کرده‌ایم. معادلات (۳-۴) تا (۳-۶) پس از بی‌بعد سازی به کمک معادله (۳-۷) صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{۸-۳}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} \tag{۹-۳}$$

$$\begin{cases}\tau_{xx} + \alpha\, Wi\,(\tau_{xx}^2 + \tau_{xy}^2) = 2\, Wi\, \tau_{xy}\, \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{xy} + \alpha\, Wi(\tau_{xx} + \tau_{yy})\tau_{xy} = (Wi\, \tau_{yy} + 1)\, \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{yy} + \alpha\, Wi(\tau_{yy}^2 + \tau_{xy}^2) = 0\end{cases} \qquad (۳-۱۰)$$

برخی از مهم‌ترین پارامترهای مهم برای یک یاتاقان اسلایدر نیز به‌صورت زیر می‌باشند:

$$W = \int_0^1 (-P + \tau_{yy})\, dx \qquad (۳-۱۱) \text{ الف}$$

$$f = \frac{h_0}{L}\,\frac{|F|}{W} = \frac{h_0}{L}\,\frac{1}{W}\left|\int_0^1 \tau_{xy}\, dx\right| \qquad (۳-۱۱) \text{ ب}$$

W مؤلفه‌های ظرفیت بار[1] و f ضریب اصطکاک می‌باشد. توجه داشته باشید که F نیروی وارد بر سطح یاتاقان می‌باشد.

در این مسئله فرض می‌کنیم تغییرات تابع $\tilde{H}(\tilde{x})$ در شکل ۱-۱ به‌صورت باشد، یعنی:

$$\tilde{H}(\tilde{x}) = \tilde{h}_0 + (\tilde{h}_L - \tilde{h}_0)\frac{\tilde{x}}{\tilde{L}} \qquad (۳-۱۲)$$

با توجه به روابط (۳-۷) و (۳-۱۲) صورت بی‌بعد تابع $h(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$h(x) = 1 + mx; \qquad m = H_L - 1; \qquad H_L = \frac{\tilde{h}_L}{\tilde{h}_0} \qquad (۳-۱۳)$$

در ادامه به کمک روش تئوری اغتشاشات (که در فصل اول به معرفی آن پرداخته شده است)، به حل معادلات (۳-۷) تا (۳-۹) و پس از آن پارامترهای مجهول مسئله را استخراج می‌نماییم.

۳-۱-۲ تئوری حساب‌اغتشاشات

در این بخش با استفاده از تئوری حساب‌اغتشاشات به تجزیه و تحلیل معادلات به دست آمده در بخش قبل می‌پردازیم. ضریب تحرک یا پویایی (α) در معادله ساختاری گزیکس پارامتری کوچکی می‌باشد و

[1] Load capacity

محدوده‌ی فیزیکی قابل قبول برای آن بین $0 < \alpha < 0.5$ می‌باشد [۵۶]. لذا می‌توان سری توانی مربوطه به تئوری حساب‌اغتشاشات را حول این پارامتر کوچک اعمال کرد. ازاین‌رو متغیرهای وابسته در معادلات (۳-۸) تا (۳-۱۰) به شرح زیر گسترش می‌یابند:

$$\begin{aligned}
P &= P_0 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + O(\alpha^3),\\
u &= u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + O(\alpha^3),\\
v &= v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2 + O(\alpha^3),\\
\tau_{xx} &= \tau_{xx_0} + \alpha \tau_{xx_1} + \alpha^2 \tau_{xx_2} + O(\alpha^3),\\
\tau_{yy} &= \tau_{yy_0} + \alpha \tau_{yy_1} + \alpha^2 \tau_{yy_2} + O(\alpha^3),\\
\tau_{xy} &= \tau_{xy_0} + \alpha \tau_{xy_1} + \alpha^2 \tau_{xy_2} + O(\alpha^3).
\end{aligned} \tag{۳-۱۴}$$

همان‌طور که مشاهده می‌نمایید، برای افزایش دقت در محاسبات، سری توانی مربوط به گسترش بسط متغیرها را تا جمله سوم در نظر گرفته، که با توجه به کوچک بودن مقدار پارامتر α، این امر می‌تواند کمک شایانی در جهت اعتبار حل مسئله بنماید. به‌منظور حل معادلات (۳-۸) تا (۳-۱۰) شرایط مرزی کلی زیر را با توجه به هندسه‌ی مسئله که در شکل ۳-۱ آمده است، در نظر می‌گیریم.

شرایط مرزی سرعت در جهت y:

$$\begin{aligned}
y &= 0; \qquad u = 1,\\
y &= h(x); \quad u = 0.
\end{aligned} \tag{۳-۱۵}$$

شرایط مرزی فشار در جهت x:

$$\begin{aligned}
x &= 0; \qquad P = 0,\\
x &= 1; \qquad P = 0.
\end{aligned} \tag{۳-۱۶}$$

در ادامه به کمک شرایط مرزی (۳-۱۵) و (۳-۱۶) به‌منظور حل معادلات به کمک تئوری حساب‌اغتشاشات، به حل مسئله و استخراج ترم‌های صفرم، اول و دوم حساب‌اغتشاشات می‌پردازیم.

نکته‌ی دیگر اینکه، توزیع فشار $P(x)$ باید به‌گونه‌ای باشد که معادله پیوستگی را برای جریان دوبعدی در فضای بین صفحه متحرک و دیواره ثابت برقرار کند:

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{h(x)} \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0;$$
$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\int_0^{h(x)} \frac{\partial v}{\partial y} dy = -v\big(h(x)\big) + v(0). \qquad (۳-۱۷)$$

با فرض عدم تزریق و مکش از دیواره‌ها، مقدار سرعت‌های عمودی $v\big(h(x)\big)$ و $v(0)$ روی دیواره‌ها صفر خواهد بود. بنابراین معادله (۳-۱۷) را به‌صورت زیر می‌توان بازنویسی نمود:

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0 \qquad (۳-۱۸)$$

۳-۱-۳ حل مرتبه صفر حساب‌اغتشاشات

معادلات حاکم و شرایط مرزی برای مرتبه صفرم حساب‌اغتشاشات به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u_0}{\partial x} dy = 0 \qquad \text{(۳-۱۹) الف}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{xy_0}}{\partial y} = \dfrac{dP_0}{dx}, \\ \tau_{xx_0} = 2Wi\, \tau_{xy_0} \dfrac{\partial u_0}{\partial y}, \\ \tau_{xy_0} = \dfrac{\partial u_0}{\partial y}, \\ \tau_{yy_0} = 0. \end{cases} \qquad \text{(۳-۱۹) ب}$$

$$u_0(0) = 1, u_0(h) = 0 \qquad \text{(۳-۲۰) الف}$$

$$, P_0(0) = 0, P_0(1) = 0 \qquad \text{(۳-۲۰) ب}$$

از حل معادلات (۳-۱۹) ب و (۳-۲۰) الف، توزیع سرعت مرتبه صفر به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_0(y) = \frac{1}{2}\frac{dP_0}{dx} y^2 + c_0 y + 1$$
$$c_0 = \frac{-\left(\frac{1}{2}\frac{dP_0}{dx} h^2 + 1\right)}{h} \qquad (۳-۲۱)$$

اکنون به کمک روابط (۳-۱۹) الف و (۳-۲۱)، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را برای توزیع فشار خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dP_0}{dx}h^3\right) = 6\ \frac{\partial h}{\partial x} \tag{۳-۲۲}$$

معادله فوق که به معادله رینولدز معروف است، اولین بار توسط رینولدز در سال ۱۸۸۶ محاسبه شد [۴].

با توجه به شرایط مرزی فشار (رابطه (۳-۲۰) ب) در راستای حرکت جریان، پس از حل معادله دیفرانسیل (۳-۲۲)، توزیع فشار مرتبه صفر به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$P_0(x) = \frac{6mx(x-1)}{(m+2)(mx+1)^2} \tag{۳-۲۳}$$

۳-۱-۴ حل مرتبه یک حساب‌اغتشاشات

معادلات حاکم و شرایط مرزی برای مرتبه یک حساب‌اغتشاشات به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u_1}{\partial x} dy = 0 \tag{۳-۲۴ الف}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial y} = \dfrac{dP_1}{dx}, \\ \tau_{xx_1} - 2\,Wi \dfrac{\partial u_0}{\partial y}\tau_{xy_1} = 2\,Wi \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\tau_{xy_0} - Wi\left(\tau_{xx_0}^2 + \tau_{xy_0}^2\right), \\ \tau_{xy_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = Wi\ \tau_{xy_0}\left(\tau_{yy_1} - \tau_{xx_0}\right), \\ \tau_{yy_1} = -Wi\ \tau_{xy_0}^2. \end{cases} \tag{۳-۲۴ ب}$$

$$u_1(0) = 0, u_1(h) = 0 \tag{۳-۲۵ الف}$$

$$P_1(0) = 0, P_1(1) = 0 \tag{۳-۲۵ ب}$$

از حل معادلات (۳-۲۴) ب و (۳-۲۵) الف، توزیع سرعت مرتبه یک به‌صورت به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u_1(y) = \frac{1}{2}\frac{dP_1}{dx}y^2 + wi^2 \Bigg[\frac{3}{4}\left(\frac{dP_0}{dx}\right)^3 y^4 \\ + 3\left(\frac{dP_0}{dx}\right)^2 c_0 y^3 + \frac{9}{2}\frac{dP_0}{dx}\ c_0^2 y^2 + 3c_0^3 y\Bigg] + c_1 y \end{aligned} \tag{۳-۲۶}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}\frac{dP_1}{dx}h - wi^2\left[\frac{3}{4}\left(\frac{dP_0}{dx}\right)^3 h^3 + 3\left(\frac{dP_0}{dx}\right)^2 c_0 h^2 + \frac{9}{2}\frac{dP_0}{dx}\ c_0^2 h + 3c_0^3\right]$$

با استفاده از روابط (۳-۲۶) و (۳-۲۴) الف، معادله رینولدز اصلاح شده برای مرتبه یک نیز به‌صورت زیر

به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dP_1}{dx}h^3\right) = -9wi^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{20}\left(\frac{dP_0}{dx}\right)^3 h^5 + \frac{dP_0}{dx}h\right] \quad (۳\text{-}۲۷)$$

پس از حل معادله دیفرانسیل (۳-۲۷) به کمک شرایط مرزی (۳-۲۵) ب، توزیع فشار مرتبه یک به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} P_1(x) = -\frac{36}{25}\frac{w^2mx(x-1)}{(mx+1)^6(m+2)^3(m+1)}&[13m^6x^4 + 13m^6x^3 + 34m^5x^4 \\ &+ 112m^5x^3 + 34m^4x^4 + 87m^5x^2 + 238m^4x^3 + 408m^4x^2 \\ &+ 204m^3x^3 + 63m^4x + 714m^3x^2 + 244m^3x + 510m^2x^2 \\ &+ 79m^3 + 490m^2x + 205m^2 + 400mx + 250m + 150] \end{aligned} \quad (۳\text{-}۲۸)$$

۳-۱-۵ حل مرتبه دو حساب‌اغتشاشات

در نهایت، معادلات حاکم و شرایط مرزی برای مرتبه دو حساب‌اغتشاشات نیز به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\int_0^{h(x)}\frac{\partial u_2}{\partial x}dy = 0 \quad \text{(۳-۲۹) الف}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{xy_2}}{\partial y} = \dfrac{dP_2}{dx}, \\ \tau_{xx_2} - 2Wi\tau_{xy_0}\dfrac{\partial u_2}{\partial y} = 2Wi\left[\tau_{xy_0}\left(\tau_{xy_2} - \tau_{xy_1}\right) - \tau_{xx0}\tau_{xx1} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \tau_{yy_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right], \\ \tau_{xy_2} - Wi\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \tau_{yy_2}\tau_{xy_0}\right) = -Wi\left[\tau_{xy_0}\left(\tau_{xx_1} + \tau_{yy_1}\right) + \tau_{xx0}\tau_{xy_1} \right. \\ \qquad\qquad \left. - \tau_{yy_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right] \\ \tau_{yy_2} = -2\,Wi\,\tau_{xy_0}\,\tau_{xy_1} \end{cases} \quad \text{(۳-۲۹) ب}$$

$$u_2(0) = 0, u_2(h) = 0 \quad \text{(۳-۳۰) الف}$$

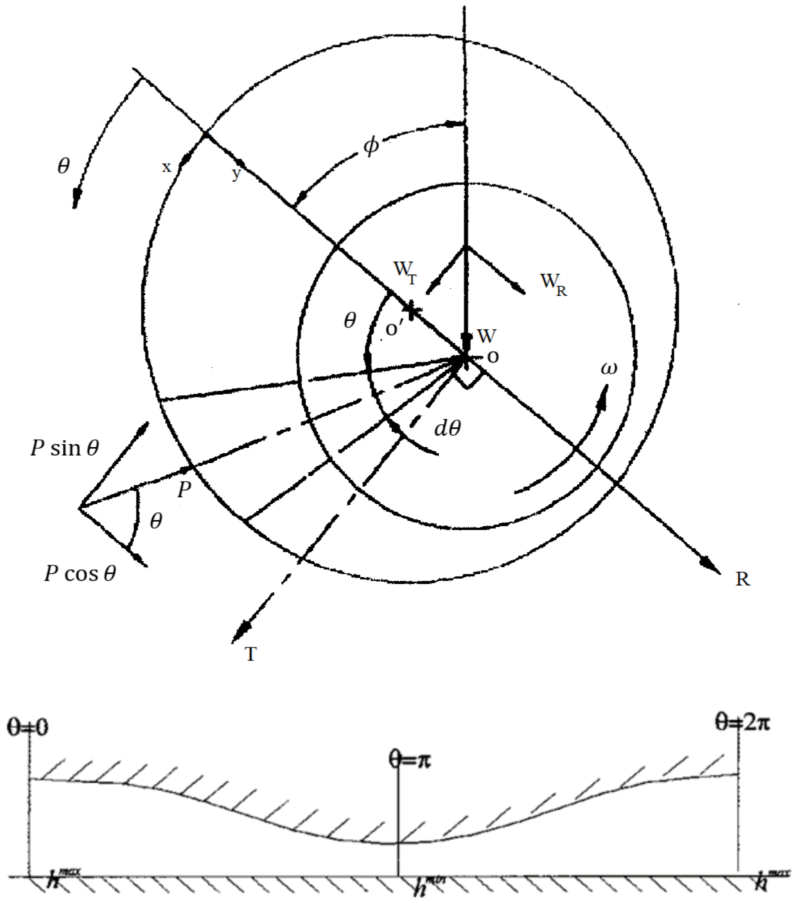
$$P_2(0) = 0, P_2(1) = 0 \quad \text{(۳-۳۰) ب}$$

مشابه با حل‌حساب‌اغتشاشات برای مرتبه‌های صفر و یک، توزیع سرعت و فشار نیز برای مرتبه دوم نیز محاسبه می‌شود. با توجه به بزرگ بودن اندازه معادلات $u_2(y)$ و $P_2(x)$ ، لذا حل این دو ترم در پیوست آورده شده است.

تا به اینجای کار، حل تحلیلی یاتاقان اسلایدر برای مدل ویسکواالاستیک گزیکس موردبررسی قرار گرفت. در ادامه به حل مسئله‌ی روانکاری برای یاتاقان ژورنال می‌پردازیم.

۳-۲ مسئله‌ی روانکاری یاتاقان ژورنال

در این قسمت یاتاقان مورد بحث ما، یاتاقان ژورنال نام دارد. پیش‌تر در فصل اول به یاتاقان ژورنال اشاره شده است. شکل ۳-۲ نشان‌دهنده‌ی هندسه روانکاری یاتاقان ژورنال در فضای متغیر می‌باشد.



شکل ۳-۲: هندسه روانکاری یاتاقان ژورنال در فضای متغیر

ضخامت لایه روانکار که برحسب موقعیت زاویه‌ای θ متغیر می‌باشد، به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\tilde{h} = \delta(1 + \varepsilon \cos\theta); \quad \varepsilon = \frac{e}{\delta} \qquad (۳-۳۱)$$

ε نسبت خروج از مرکز یاتاقان، δ اندازه لقی شعاعی (اختلاف شعاع ژورنال و بوش در حالت هم‌مرکز) بوده و e فاصله بین مراکز محور گردان و بوش (فاصله $o - o'$)، می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌نمایید فضای بین یاتاقان و ژورنال بسیار تنگ است و این فضا از $h + \delta$ تا $h - \delta$ متغیر است.

به‌منظور حل جریان سیال ویسکواالاستیک درون یاتاقان ژورنال می‌توان از معادلات حاکم ساده شده مربوط به یاتاقان اسلایدر استفاده کرد. در ادامه به تعریف پارامترهای لازم جهت بی‌بعد سازی معادلات حاکم (۳-۴) تا (۳-۶) برای یاتاقان ژورنال می‌پردازیم.

۳-۲-۱ بی‌بعد سازی معادلات حاکم

$$Wi = \frac{\tilde{\lambda}\tilde{U}}{\tilde{\delta}}, \qquad \tau = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\eta}\tilde{U}/\tilde{\delta}}, \qquad h = \frac{\tilde{H}(\tilde{x})}{\tilde{\delta}}, \qquad P = \frac{\tilde{P}}{\tilde{\eta}\tilde{U}\tilde{R}/\tilde{\delta}^2},$$
$$y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{\delta}}, \qquad x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{R}}, \qquad v = \frac{\tilde{v}\tilde{R}}{\tilde{\delta}\tilde{U}}, \qquad u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}}. \qquad (۳-۳۲)$$

با توجه به پارامترهای بی‌بعد در نظر گرفته شده (۳-۳۲)، معادلات حاکم بی‌بعد برای یاتاقان ژورنال را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (۳-۳۳)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \qquad (۳-۳۴)$$

$$\begin{cases} \tau_{xx} + \alpha\, Wi\left(\tau_{xx}^2 + \tau_{xy}^2\right) = 2\, Wi\, \tau_{xy}\, \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{xy} + \alpha\, Wi\left(\tau_{xx} + \tau_{yy}\right)\tau_{xy} = \left(Wi\, \tau_{yy} + 1\right) \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{yy} + \alpha\, Wi\left(\tau_{yy}^2 + \tau_{xy}^2\right) = 0 \end{cases} \qquad (۳-۳۵)$$

مؤلفه‌های ظرفیت بار برای یک یاتاقان ژورنال با فرض طول بی‌نهایت به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} W_R = -\int_0^{2\pi} P\cos\theta\, d\theta, \\ W_T = \int_0^{2\pi} P\sin\theta\, d\theta. \end{cases} \quad (۳-۳۶)$$

برآیند ظرفیت بار یاتاقان نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$W = \sqrt{W_R^2 + W_T^2} \quad (۳-۳۷)$$

به‌منظور حل معادلات (۳-۳۳) تا (۳-۳۵) از تئوری حساب‌اغتشاشات استفاده کرده و همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، α در معادله ساختاری گزیکس پارامتری کوچکی می‌باشد، لذا می‌توان سری توانی مربوطه به تئوری حساب‌اغتشاشات را حول این پارامتر اعمال کرد. ازاین‌رو، متغیرهای وابسته در معادلات حاکم به‌صورت زیر گسترش می‌یابند:

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + O(\alpha^3), \\ u &= u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + O(\alpha^3), \\ v &= v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2 + O(\alpha^3), \\ \tau_{xx} &= \tau_{xx_0} + \alpha \tau_{xx_1} + \alpha^2 \tau_{xx_2} + O(\alpha^3), \\ \tau_{yy} &= \tau_{yy_0} + \alpha \tau_{yy_1} + \alpha^2 \tau_{yy_2} + O(\alpha^3), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy_0} + \alpha \tau_{xy_1} + \alpha^2 \tau_{xy_2} + O(\alpha^3). \end{aligned} \quad (۳-۳۸)$$

شرایط مرزی سرعت و فشار نیز برای یاتاقان ژورنال به‌صورت زیر قابل بیان می‌باشند:

$$\begin{cases} y = 0; & u = 1, \\ y = h(\theta); & u = 0. \end{cases} \quad \text{(۳-۳۹) الف}$$

$$\begin{cases} \theta = 0; & P = 0, \\ \theta = 2\pi; & P = 0. \end{cases} \quad \text{(۳-۴۰) ب}$$

در ادامه به کمک تئوری حساب‌اغتشاشات و شرایط مرزی تعریف‌شده به بررسی و حل معادلات پرداخته و ترم‌های مختلف پرتوبیشن را برای یاتاقان ژورنال استخراج می‌نماییم.

۳-۲-۲ حل مرتبه صفر حساباغتشاشات

پیش‌تر در قسمت حل مسئله برای روانکاری یاتاقان اسلایدر، به نحوه به دست آوردن معادله رینولدز اشاره شده است. معادلات حاکم و شرایط مرزی پس از حل معادلات (۳-۳۳) تا (۳-۳۵)، برای مرتبه صفرم حساباغتشاشات یاتاقان ژورنال، به‌صورت به زیر نوشته می‌شوند:

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u_0}{\partial x} dy = 0 \qquad \text{(۳-۴۱) الف}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{xy_0}}{\partial y} = \dfrac{dP_0}{dx}, \\ \tau_{xx_0} = 2Wi\, \tau_{xy_0} \dfrac{\partial u_0}{\partial y}, \\ \tau_{xy_0} = \dfrac{\partial u_0}{\partial y}, \\ \tau_{yy_0} = 0. \end{cases} \qquad \text{(۳-۴۱) ب}$$

$$u_0(0) = 1, u_0(h) = 0 \qquad \text{(۳-۴۲) الف}$$

$$P_0(0) = 0, P_0(2\pi) = 0 \qquad \text{(۳-۴۲) ب}$$

معادله رینولدزی که پس از حل معادلات (۳-۴۱) ب و (۳-۴۲) الف، برای مرتبه صفرم حساباغتشاشات به دست می‌آید به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dP_0}{dx} h^3\right) = 6\ \frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{(۳-۴۳)}$$

با استفاده از تعریف مختصات قطبی $\tilde{x} = R\theta$ و $d\tilde{x} = R\ d\theta$، معادله رینولدز (۳-۳۳) را برای یک یاتاقان ژورنال به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{dP_0}{d\theta} h^3\right) = 6\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \qquad \text{(۳-۴۴)}$$

برای یک یاتاقان ژورنال، ضخامت بی‌بعد فیلم سیال نیز برحسب θ به‌صورت زیر متغیر است:

$$h(\theta) = 1 + \varepsilon \cos\theta \qquad \text{(۳-۴۵)}$$

به‌منظور حل معادله فوق شرایط مرزی زیر را برای ترم فشار در مرتبه صفرم در نظر می‌گیریم:

$$P_0(0) = 0, \;\; P_0(2\pi) = 0 \tag{۴۶-۳}$$

پس از حل معادلات (۳-۴۴) تا (۳-۴۶) توزیع فشار یاتاقان ژورنال به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_0 = 6\left[\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} - h_m \int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\right] + \kappa \tag{۴۷-۳}$$

در اینجا κ در معادله (۳-۴۷) ثابت انتگرال می‌باشد. انتگرال فوق به‌طور مستقیم قابل حل نمی‌باشد؛ لذا به‌منظور حل آن باید از روش تغییر متغیر کمک گرفت. فرض‌های زیر را که نخستین بار توسط سامرفیلد در سال ۱۹۰۴ ارائه شد، را در نظر می‌گیریم [۵].

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin\psi}{1-\varepsilon\cos\psi}, \\ \cos\theta &= \frac{\cos\psi - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos\psi}, \\ d\theta &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos\psi}\,d\psi. \end{aligned} \tag{۴۸-۳}$$

درنهایت به کمک فرض‌های (۳-۴۸)، از حل انتگرال (۳-۴۷) توزیع فشار مرتبه صفر، که نشان‌دهنده توزیع فشار نیوتنی می‌باشد؛ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_0(\theta) = \frac{6\,\varepsilon\sin\theta\;(2+\varepsilon\cos\theta)}{(2+\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \tag{۴۹-۳}$$

ظرفیت بار یاتاقان برای مرتبه صفرم نیز، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W_0 = -12\,\frac{\sqrt{-\varepsilon^2+1}\,\varepsilon\,\pi}{\varepsilon^4+\varepsilon^2-2} \tag{۵۰-۳}$$

۳-۲-۳ حل مرتبه یک حساب‌اغتشاشات

معادلات حاکم و شرایط مرزی پس از حل معادلات (۳-۳۳) تا (۳-۳۵) برای مرتبه یکم حساب‌اغتشاشات یاتاقان ژورنال، به‌صورت به زیر نوشته می‌شوند:

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u_1}{\partial x}\,dy = 0 \tag{۵۱-۳ الف}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \tau_{xy_1}}{\partial y}=\dfrac{dP_1}{dx},\\ \tau_{xx_1}-2\,Wi\dfrac{\partial u_0}{\partial y}\tau_{xy_1}=2\,Wi\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\tau_{xy_0}-Wi\left(\tau_{xx_0}^2+\tau_{xy_0}^2\right),\\ \tau_{xy_1}-\dfrac{\partial u_1}{\partial y}=Wi\,\tau_{xy_0}\left(\tau_{yy_1}-\tau_{xx_0}\right),\\ \tau_{yy_1}=-Wi\,\tau_{xy_0}^2.\end{cases} \qquad (۵۱\text{-}۳)\ \text{ب}$$

$$u_1(0)=0, u_1(h)=0 \qquad (۵۲\text{-}۳)\ \text{الف}$$

$$P_1(0)=0, P_1(2\pi)=0 \qquad (۵۲\text{-}۳)\ \text{ب}$$

مشابه قبل، معادله رینولدز اصلاح‌شده‌ی مرتبه اول برای یاتاقان ژورنال به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{dP_1}{d\theta}h^3\right)=-9Wi^2\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{20}\left(\frac{dP_0}{d\theta}\right)^3h^5+\frac{dP_0}{d\theta}h\right] \qquad (۵۳\text{-}۳)$$

پس از طی مراحلی که برای محاسبه توزیع فشار مرتبه صفر گذراندیم، توزیع فشار مرتبه یک نیز به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}P_1(\theta)=&\frac{324}{5}\frac{\varepsilon Wi^2}{\sqrt{\varepsilon^2-1}(\varepsilon+1)^3(\varepsilon-1)^3(\varepsilon^2+2)^3(1+\varepsilon\cos\theta)^6}\left[\left(\varepsilon^6-\frac{32\varepsilon^4}{3}\right.\right.\\&\left.+\frac{52\varepsilon^2}{3}+\frac{40}{3}\right)(1+\varepsilon\cos\theta)^6\,\varepsilon\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{(\varepsilon-1)(-1+\cos\theta)}{\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin\theta}\right)\\&-\frac{14\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin\theta}{9}\left\{\varepsilon^5\left(-\frac{111\varepsilon^6}{140}-\frac{3\varepsilon^4}{70}-\frac{40\varepsilon^2}{7}-\frac{6}{5}+\varepsilon^8\right)(\cos\theta)^5\right.\\&+\left(-\frac{573\varepsilon^{10}}{70}+\frac{186\varepsilon^8}{35}-30\varepsilon^6-\frac{36\varepsilon^4}{5}+\frac{177\varepsilon^{12}}{28}\right)(\cos\theta)^4\\&+\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{10}+\frac{1146\varepsilon^8}{35}-\frac{2154\varepsilon^6}{35}+\frac{380\varepsilon^4}{7}-\frac{4392\varepsilon^2}{35}-36\right)\varepsilon^3(\cos\theta)^3\\&+\left(-\frac{3819\varepsilon^8}{70}+\frac{375\varepsilon^6}{7}-\frac{2276\varepsilon^4}{35}-24\varepsilon^2+\frac{45\varepsilon^{12}}{14}+\frac{193\varepsilon^{10}}{10}\right)(\cos\theta)^2\\&+\left(-\frac{1089\varepsilon^7}{28}+\frac{3411\varepsilon^5}{70}-\frac{267\varepsilon^3}{7}+\frac{507\varepsilon^{11}}{70}+\frac{81\varepsilon^9}{35}-15\varepsilon\right)\cos\theta-\frac{30}{7}\\&\left.\left.+\frac{36\varepsilon^6}{7}+\frac{143\varepsilon^4}{35}+\frac{407\varepsilon^{10}}{70}-\frac{36\varepsilon^2}{7}-\frac{1731\varepsilon^8}{140}\right\}\right]\end{aligned} \qquad (۵۴\text{-}۳)$$

همین‌طور برای حل مرتبه اول ظرفیت بار یاتاقان داریم:

$$W_1 = \frac{9}{40}\frac{Wi^2\,\pi\,(42\varepsilon^8+93\varepsilon^6-146\varepsilon^4-572\varepsilon^2-320)\,\varepsilon\,\sqrt{-\varepsilon^2+1}}{\varepsilon^{14}+2\varepsilon^{12}-6\varepsilon^{10}-8\varepsilon^8+17\varepsilon^6+6\varepsilon^4-20\varepsilon^2+8} \tag{۳-۵۵}$$

۳-۲-۴ حل مرتبه دوم حساب‌اغتشاشات

درنهایت مشابه با مراحل گذشته، می‌توان معادلات حاکم و شرایط مرزی مرتبه دوم حساب‌اغتشاشات یاتاقان ژورنال را به‌صورت زیر نوشت:

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u_2}{\partial x}\,dy = 0 \tag{۳-۵۶ الف}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{xy_2}}{\partial y} = \dfrac{dP_2}{dx}, \\ \tau_{xx_2} - 2Wi\tau_{xy_0}\dfrac{\partial u_2}{\partial y} = 2Wi\left[\tau_{xy_0}\left(\tau_{xy_2}-\tau_{xy_1}\right) - \tau_{xx_0}\tau_{xx_1} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \tau_{yy_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right], \\ \tau_{xy_2} - Wi\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \tau_{yy_2}\tau_{xy_0}\right) = -Wi\left[\tau_{xy_0}\left(\tau_{xx_1}+\tau_{yy_1}\right) + \tau_{xx_0}\tau_{xy_1} \right. \\ \qquad\qquad \left. - \tau_{yy_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right], \\ \tau_{yy_2} = -2\,Wi\,\tau_{xy_0}\,\tau_{xy_1}. \end{cases} \tag{۳-۵۶ ب}$$

$$u_2(0) = 0, u_2(h) = 0 \tag{۳-۵۷ الف}$$

$$P_2(0) = 0, P_2(2\pi) = 0 \tag{۳-۵۷ ب}$$

معادله رینولدزی که برای مرتبه دوم حساب‌اغتشاشات به دست می‌آید به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{dP_2}{d\theta}h^3\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\Bigg[&-\frac{15}{112}\left(\frac{dP_0}{d\theta}\right)^5 Wi^4\,h^7 + \frac{3}{10}\left(\frac{dP_0}{d\theta}\right)^3 h^5\,Wi^2 \\ &+ 6\left(\frac{dP_0}{d\theta}\right)^3 h^3\,Wi^4 - \frac{27}{20}\left(\frac{dP_0}{d\theta}\right)^2\frac{dP_1}{d\theta}h^5\,Wi^2 + 6\frac{dP_0}{d\theta}Wi^2 h \\ &- 9\frac{dP_1}{d\theta}Wi^2\,h + \frac{29}{h}\frac{dP_0}{d\theta}Wi^4\Bigg] \end{aligned} \tag{۳-۵۸}$$

سرانجام برای حل مرتبه دوم ظرفیت بار یاتاقان داریم:

$$W_2 = -\frac{1}{5600}\frac{\pi\,\varepsilon\,Wi^2\sqrt{-(\varepsilon-1)(\varepsilon+1)}}{(\varepsilon-1)^6(\varepsilon+1)^6(\varepsilon^2+2)^5}[557229W^2\varepsilon^{14} + 35280\varepsilon^{16} + 4488313W^2\varepsilon^{12} + 148680\varepsilon^{14} + 12519072W^2\varepsilon^{10} - 72240\varepsilon^{12} - 11615829W^2\varepsilon^8 - 1101240\varepsilon^{10} - 129992780W^2\varepsilon^6 - 1033200\varepsilon^8 - 238156080W^2\varepsilon^4 + 1706880\varepsilon^6 - 150823680W^2\varepsilon^2 + 2237760\varepsilon^4 - 19712000W^2 - 846720\varepsilon^2 - 1075200] \quad (۵۹\text{-}۳)$$

ترم توزیع فشار مرتبه دوم $P_2(x)$، به دلیل بزرگ بودن رابطه در پیوست آمده است.

۳-۳ مؤلفه‌های یاتاقان اسلایدر

در حالت کلی مؤلفه‌های ظرفیت بار و ضریب اصطکاک برای یاتاقان مورد نظر به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$W = \left(\frac{1}{30625\,m^2(m+1)^4\,(m+2)^5}\right)\{-183750(m+1)^4(m+2)^5\ln(m+1) + (367500 + (-13317074Wi^4 - 382200Wi^2)a^2 + 573300aWi^2)m^9 + (4410000 + (-13317074Wi^4 - 382200Wi^2)a^2 + 573300aWi^2)m^9 + (4410000 - 180416100Wi^4 - 10113600Wi^2)a^2 + 15170400aWi^2)m^7 + (66150000 + (-274282400Wi^4 - 18551400Wi^2)a^2 + 27827100aWi^2)m^6 + (117967500 - 271891200Wi^4 - 19903800Wi^2)a^2 + 29855700aWi^2)m^5 + (132300000 - 161700000Wi^4 - 11760000Wi^2)a^2 + 17640000aWi^2)m^4 + (91140000 - 53900000Wi^4 - 2940000Wi^2)a^2 + 4410000aWi^2)m^3 + 35280000m^2 + 5880000m)\} \quad (۶۰\text{-}۳)$$

$$
\begin{aligned}
f = \frac{h_0}{L} \langle m\{ & 61250(m+1)^4(m+2)^5 \ln(m+1) + 5174906m(a^2(490000/235223 \\
& + m^8 + (16181750/2587453)m^7 + (49521350/2587453)m^6 \\
& + (93629200/2587453)m^5 + (5390000/235223)m^2 \\
& + (119579600/2587453)m^4 + (9310000/235223)m^3 \\
& + (1960000/235223)m)Wi^4 + (78400/2587453(m^2 + (5/8)m \\
& + 5/8))(m+1)^2(m^2 + (5/2)m + 5/2)a(m+2)^2(a \\
& - 3/2)Wi^2 - (91875/5174906)(m+2)^4(m+1)^4)\} \\
& /[(91875(m+1)^4(m+2)^5 \ln(m+1) + (-183750 \\
& + (6658537Wi^4 + 191100Wi^2)a^2 - 286650aWi^2)m^9 \\
& + (-2205000 + (35112450Wi^4 + 1514100Wi^2)a^2 \\
& - 2271150aWi^2)m^8 + (-11392500 + (90208050Wi^4 \\
& + 5056800Wi^2)a^2 - 7585200aWi^2)m^7 + (-33075000 \\
& + (137141200Wi^4 + 9275700Wi^2)a^2 - 13913550aWi^2)m^6 \\
& + (-58983750 + (135945600Wi^4 + 9951900Wi^2)a^2 \\
& - 14927850aWi^2)m^5 + (-66150000 + (80850000Wi^4 \\
& + 5880000Wi^2)a^2 - 8820000aWi^2)m^4 + (-45570000 \\
& + (26950000Wi^4 \\
& + 1470000Wi^2)a^2 - 2205000aWi^2)m^3 - 17640000m^2 \\
& - 2940000m)]\rangle
\end{aligned}
\tag{۳-۶۱}
$$

فصل۴ : نتایج

در این فصل نتایج حاصل از حل تحلیلی به روش حساب‌اغتشاشات برای جریان ویسکواالاستیک مدل گزیکس موردبررسی قرار می‌گیرد. نتایج برای دو نوع از انواع یاتاقان‌ها، یعنی یاتاقان اسلایدر و در ادامه برای یاتاقان ژورنال موردبررسی قرار می‌گیرد. به‌منظور حل تحلیلی معادلات از نرم‌افزارهای Maple و Matlab استفاده گردیده است و خروجی‌ها حاصل به کمک نرم‌افزار تک‌پلات استخراج شده است. در ابتدای این فصل به صحت سنجی حل تحلیلی مورد نظر برای هر دو نوع از یاتاقان پرداخته و پس از آن به ارائه نتایج و تجزیه و تحلیل آن‌ها می‌پردازیم.

۴-۱ صحت سنجی نتایج

صحت سنجی حل تحلیلی پژوهش حاضر در دو قسمت صورت می‌گیرد. قسمت اول به بررسی صحت حل تحلیلی برای یاتاقان اسلایدر بوده و پس از آن به صحت حل تحلیلی برای یاتاقان ژورنال می‌پردازیم.

۴-۱-۱ صحت سنجی حل تحلیلی برای یاتاقان اسلایدر

به‌منظور ارزیابی صحت نتایج برای یاتاقان اسلایدر، به مرجع [س] رجوع کرده‌ایم. در این مرجع با استفاده از مدل گزیکس به بررسی جریان پوازیل صفحه‌ای پرداخته شده است. در این نوع جریان، حرکت سیال تنها بر اثر گرادیان فشار ثابت بین دو صفحه ثابت رخ می‌دهد. تابع توزیع سرعت با فرض مدل گزیکس که به‌صورت تحلیلی برای جریان پوازیل به دست آمده، به‌صورت زیر می‌باشد:

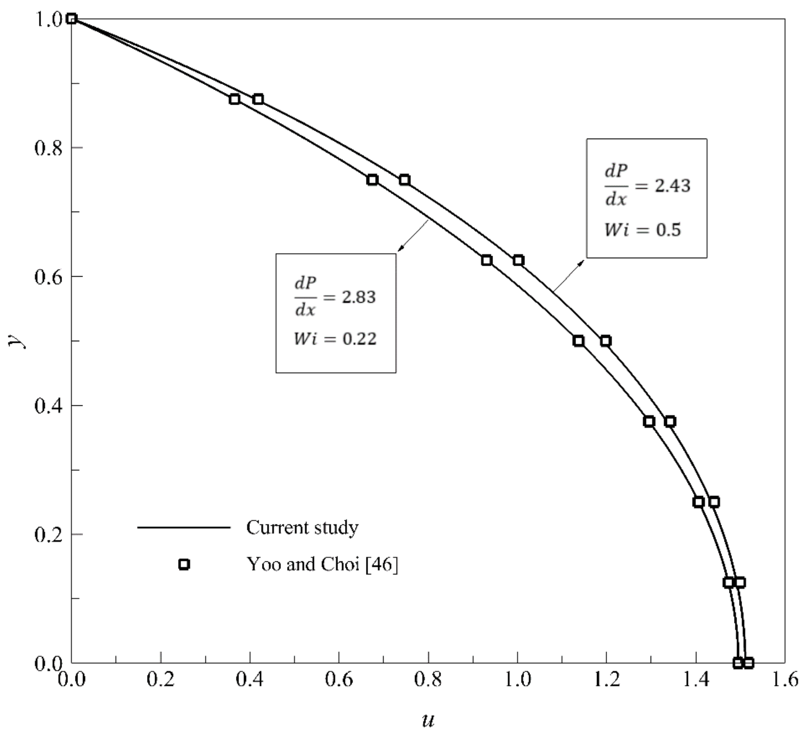
$$u = \frac{1}{\phi}\left\{[1-2(2\alpha-1)^2] ln\frac{2\alpha-1+\sqrt{1-\phi^2y^2}}{2\alpha-1+\sqrt{1-\phi^2}} + (2\alpha-1)(\sqrt{1-\phi^2y^2} - \sqrt{1-\phi^2}) + 4\alpha(2\alpha-1)(1-\alpha)\left(\frac{1}{(2\alpha-1+\sqrt{1-\phi^2y^2})} - \frac{1}{(2\alpha-1+\sqrt{1-\phi^2})}\right)\right\} \quad (۴-۱)$$

$$\phi = 2\alpha wic_1\,; -\frac{dP}{dx} = c_1 = const > 0 \quad (۴-۲)$$

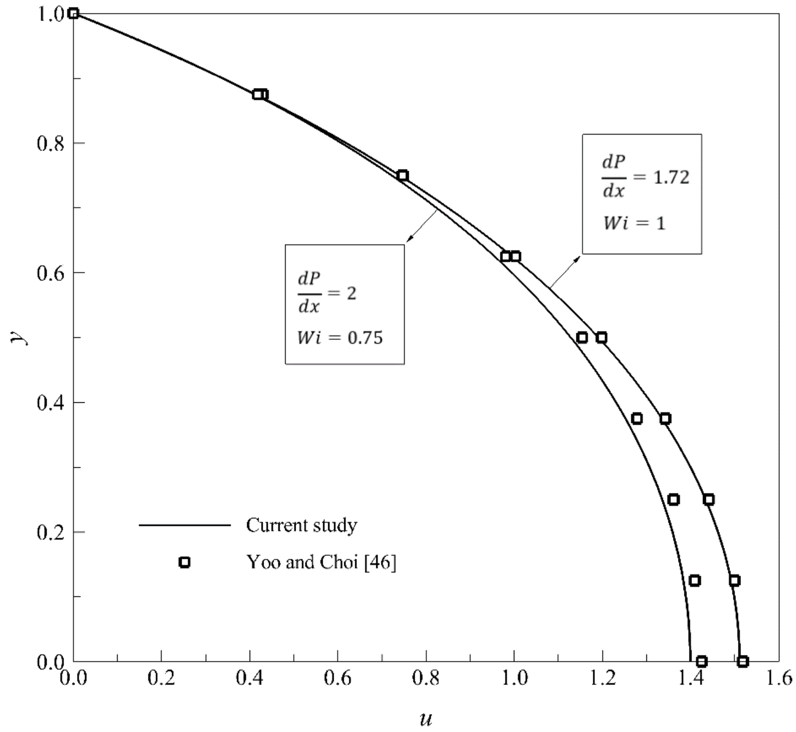
به‌منظور بررسی دقت حساب‌اغتشاشات و نتایج، تئوری حساب‌اغتشاشات خود را بر روی جریان پوازیل پیاده‌سازی کرده و در نهایت تابع توزیع سرعت برای این جریان به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$u = \frac{5}{6}a^2wi^4\left(\frac{dP}{dx}\right)^5(y^6-1) - \frac{1}{2}a^2wi^2\frac{dP}{dx}(y^4-1)^3 + \frac{3}{4}awi^2\frac{dP}{dx}(y^4-1)^3 + \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}(y^2-1) \tag{۳-۴}$$

شکل‌های ۴-۱ و ۴-۲ نشان‌دهنده دقت حساب‌اغتشاشات نسبت به حل تحلیلی مرجع [س] برای جریان پوازیل صفحه‌ای می‌باشد. مقادیر ثابت انتخابی مربوط به عدد وایزنبرگ و فشار، از مرجع مورد نظر انتخاب شده است.



شکل ۴-۱: مقایسه حل دقیق جریان پوازیل و حل حساب‌اغتشاشات برای مدل گزیکس با فرض $\alpha = 0.1$



شکل ۴-۲: مقایسه حل دقیق جریان پوازیل و حل حساب‌اغتشاشات برای مدل گزیکس با فرض $\alpha = 0.1$

همان‌طور که در شکل‌های ۴-۱ و ۴-۲ مشاهده می‌نمایید، حل حساب‌اغتشاشات برای جریان پوازیل، دارای دقت بسیار بالایی بوده و از خطای بسیار کمی، نسبت به حل تحلیلی مرجع مورد نظر برخوردار است. همچنین می‌توان دریافت که انتخاب ضریب پویایی (α) به‌عنوان پارامتر حساب‌اغتشاشات در مدل گزیکس می‌تواند مناسب باشد و ما را به حل دقیق مسئله مورد نظر، بسیار نزدیک نماید.

۴-۱-۲ صحت سنجی حل تحلیلی برای یاتاقان ژورنال

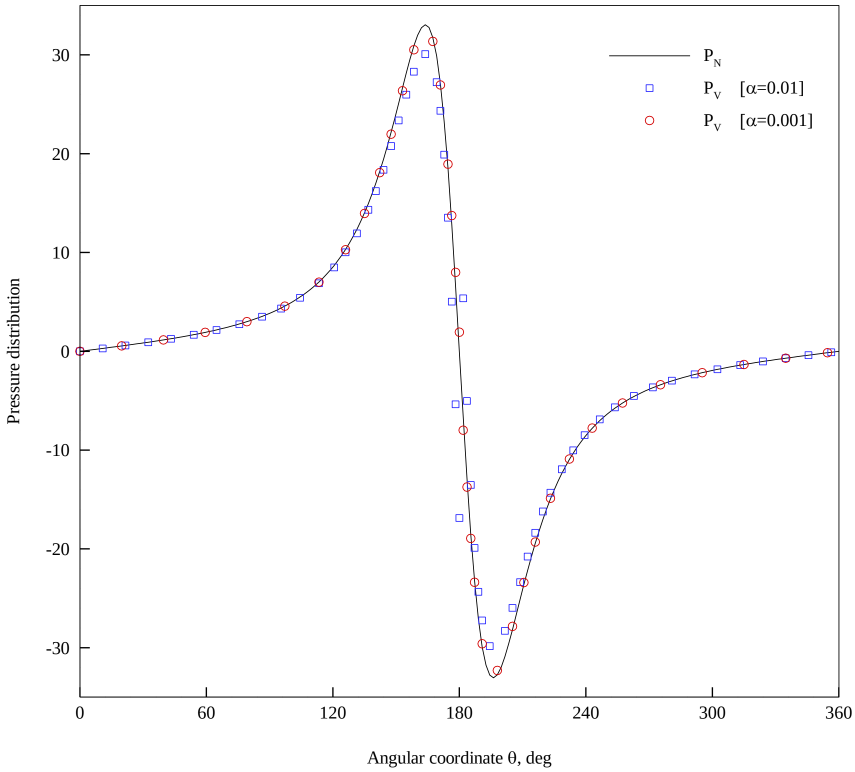
در این قسمت به بررسی صحت نتایج متد حساب‌اغتشاشات برای یاتاقان ژورنال می‌پردازیم. همان‌طور که می‌دانیم حل دقیق معادله توزیع فشار برای یک یاتاقان ژورنال که فرض آن بر مبنای سیال نیوتنی است، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$P_N(\theta) = \frac{6\,\varepsilon \sin\theta\ \ (2+\varepsilon\cos\theta)}{(2+\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \tag{۴-۴}$$

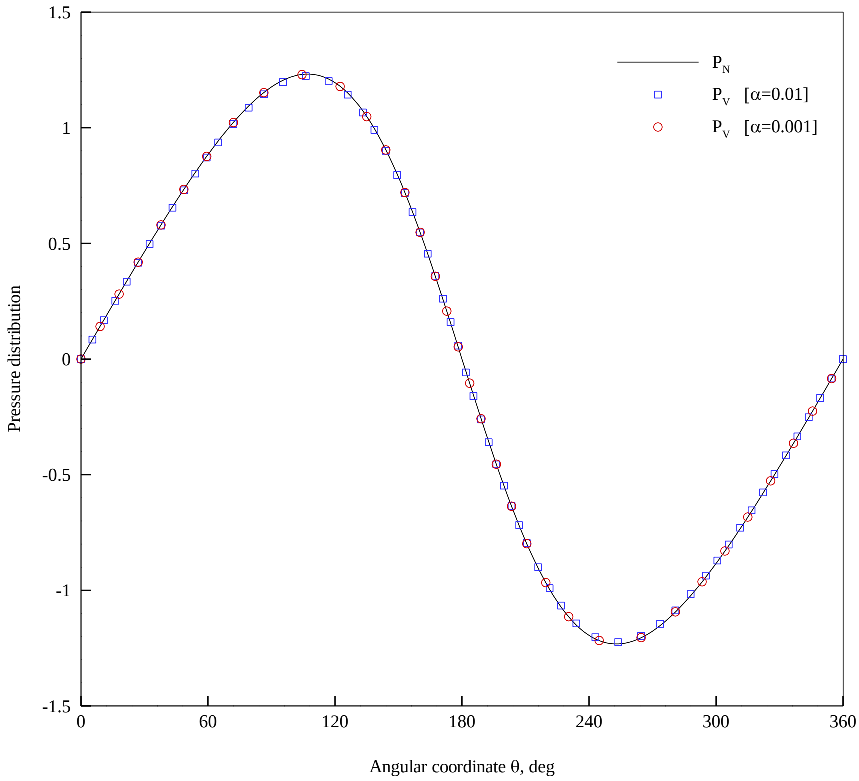
بسط حساب‌اغتشاشات برای توزیع فشار ویسکواالاستیک حول پارامتر ضریب پویایی مدل گزیکس (α) که در فصل سوم به آن اشاره شد، به‌صورت زیر می‌باشد.

$$P_V = P_0 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + O(\alpha^3) \tag{۵-۴}$$

ترم اصلی بسط حساب‌اغتشاشات (P_0) درواقع همان توزیع فشاری است که از حل برای یک سیال نیوتنی به دست می‌آید. لذا درصورتی‌که $\alpha \to 0$ میل کند، باید توزیع فشار معادله (۴-۵) که برای یک سیال ویسکواالاستیک در نظر گرفته‌شده است، به سمت توزیع فشار سیال نیوتنی، یعنی معادله (۴-۴) میل نماید. بدون توجه به دیگر ترم‌های موجود در این معادله از قبیل عدد وایزنبرگ، نسبت خروج از مرکز یاتاقان و ... . در ادامه شکل‌های ۴-۳ تا ۴-۵ نشان‌دهنده‌ی این واقعیت می‌باشند.



شکل ۴-۳: مقایسه حل دقیق توزیع فشار نیوتنی (P_N) با حل حساب‌اغتشاشات برای سیال ویسکواالاستیک (P_V)، هنگامی‌که $\alpha \to 0$ با فرض $\varepsilon = 0.9$



شکل ۴-۴: مقایسه حل دقیق توزیع فشار نیوتنی (P_N) با حل حساب‌اغتشاشات برای سیال ویسکوالاستیک (P_V)، هنگامی‌که $\alpha \to 0$ با فرض $\varepsilon = 0.2$

همان‌طور که در شکل‌های ۴-۳ تا ۴-۵ مشاهده می‌نمایید، هنگامی‌که ضریب پویایی مدل گزیکس به سمت صفر می‌نماید $(\alpha \to 0)$ توزیع فشار ویسکوالاستیک با دقت بسیار زیادی به سمت توزیع فشار نیوتنی میل می‌کند. بنابراین می‌توان گفت که استفاده از تئوری حساب‌اغتشاشات و انتخاب ضریب پویایی (α) به‌عنوان پارامتر حساب‌اغتشاشات در مدل گزیکس می‌تواند برای تحلیل جریان ویسکوالاستیک یاتاقان ژورنال مفید و از خطای بسیار کمی، نسبت به حل دقیق برخوردار باشد. که در نتیجه‌ی آن ما را به حل دقیق مسئله مورد نظر، بسیار نزدیک می‌نماید.

۲-۴ تجزیه و تحلیل نتایج

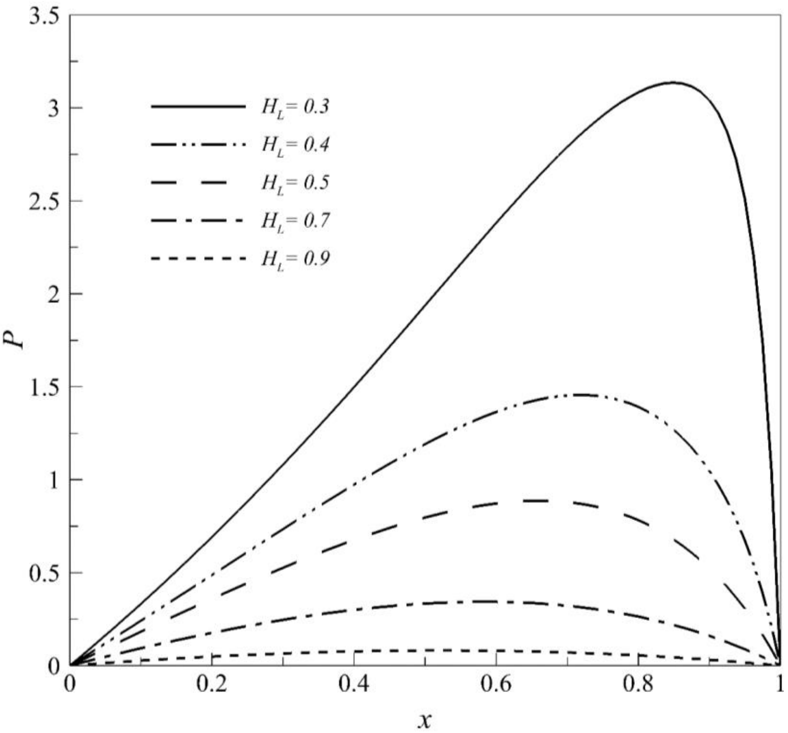
در این قسمت به بررسی نتایج حاصل از حل تحلیلی حساب‌اغتشاشات برای مسئله‌ی روانکاری می-پردازیم. نتایج برای دو نوع از یاتاقان که موردبررسی قرارگرفته‌اند؛ به‌طور جداگانه نمایش داده می‌شوند و پس از آن به تجزیه و تحلیل نتایج می‌پردازیم.

۱-۲-۴ نتایج حل تحلیلی برای یاتاقان اسلایدر

در ادامه با توجه به پارامترهای به دست آمده، از حل مرتبه صفر، اول و دوم حساب‌اغتشاشات، به بررسی توزیع فشار و سرعت یاتاقان می‌پردازیم و تأثیر پارامترهای عدد وایزنبرگ (Wi) ، ضریب پویایی(α) و نسبت ارتفاع خروجی به ورودی (H_L) را بر روی مسئله مورد نظر بررسی می‌نماییم.

- **توزیع فشار**

شکل ۴-۶ نشان‌دهنده‌ی تغییرات توزیع فشار ویسکوالاستیک در راستای حرکت جریان می‌باشد. در این شکل تاثیر نسبت ارتفاع خروجی به ورودی (H_L) بر روی یاتاقان، با فرض Wi=0.3 و $\alpha = 0.1$ را مشاهده می‌نمایید. همان‌طور که در شکل ۳-۱ مشاهده می‌نمایید، با حرکت جریان در راستای خروجی یاتاقان، فضای یاتاقان تنگ‌تر شده و درنتیجه به‌منظور برقراری اصل پیوستگی، که طبق آن آهنگ جرم در تمام مقاطع ثابت است، یک فشار زیاد در فضای بین قطعه و صفحه به وجود می‌آید. این فشار باعث ایجاد یک جریان پوازیل در دو سر فضای درز همگرا می‌شود (این جریان با منحنی‌های سهمی نشان داده شده است). چنانچه فشار وارده بر سطوح بیش از مقدار قابل‌تحمل سیال متحرک درون یاتاقان باشد، این امر می‌تواند منجر به پاره شدن فیلم روغن شود. که در نتیجه‌ی این فرآیند تماس فلز با فلز رخ‌داده که در نتیجه‌ی آن سایش شدیدی ایجاد گردیده که نتیجه مستقیم آن، عمر کمتر یاتاقان خواهد بود.



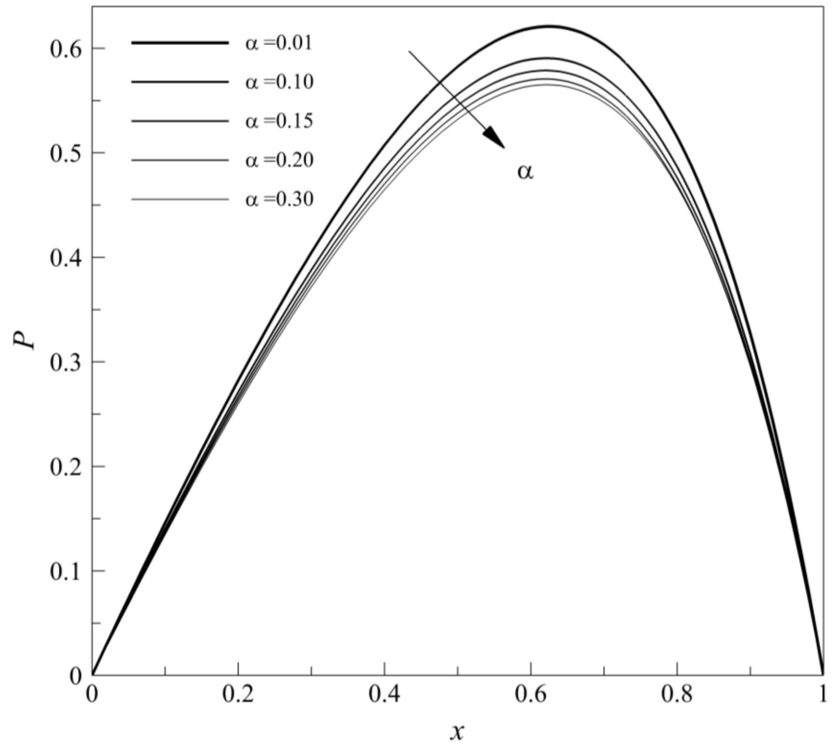
شکل ۴-۵: توزیع فشار ویسکوالاستیک یاتاقان برای H_L های مختلف و با فرض $\boldsymbol{Wi = 0.3}$ و $\boldsymbol{\alpha = 0.1}$

همچنین در این شکل مشاهده می‌نمایید که اگر انقباض فضا در شکل ۳-۱ تدریجی باشد یا به عبارتی با کاهش شیب صفحه ($H_L \to 1$)، صفحات ثابت و متحرک به سمت موازی شدن با یکدیگر پیش رفته و رفتار جریان به سمت جریان کوئت نزدیک می‌شود. در این حالت توزیع فشار تقریباً متقارن خواهد بود و درنهایت پس از موازی شدن کامل صفحات، تنها شاهد جریان کوئت و عدم تغییرات در فشار خواهیم بود.

شکل ۴-۷ نشان‌دهنده‌ی اثر ضریب پویایی بر روی توزیع فشار را نشان می‌دهد. این شکل با فرض Wi=0.2 و $H_L = 0.6$ ترسیم شده است. همان‌طور که پیش‌تر گفته شد تغییرات ضریب پویایی در مدل گزیکس برای هنگامی‌که $\alpha > 0$ باشد؛ باعث می‌شود مدل رفتار رقیق‌شونده[1] را از خود نشان دهد

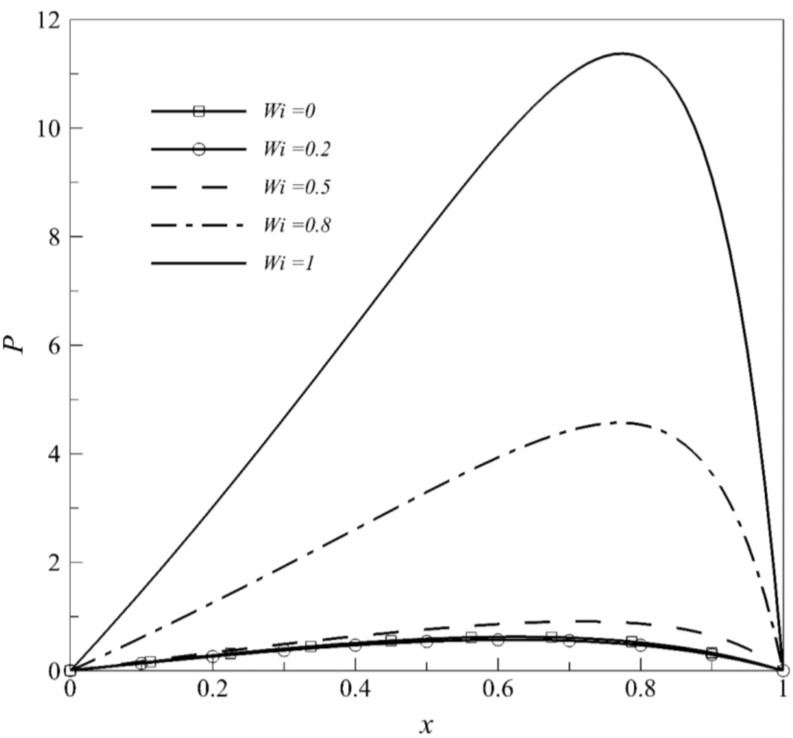
[1] Shear-thinning

[۵۵]. در این شکل واضح است که با افزایش α فشار وارده بر سطوح کاهش یافته، که دلیل این امر میل‌کردن رفتار ماده به سمت سیال با غلظت کمتر (رقیق شوندگی) می‌باشد.



شکل ۴-۶: توزیع فشار ویسکواالاستیک یاتاقان برای ضرایب پویایی (α) مختلف و با فرض $wi = 0.2$ و $H_L = 0.6$

در شکل ۴-۸، اثر عدد وایزنبرگ با فرض $\alpha = 0.2$ و $H_L = 0.6$ بر روی توزیع فشار را مشاهده می‌نمایید. در اعداد وایزنبرگ پایین توزیع فشار، رفتاری تقریباً خطی و قابل پیش‌بینی دارد؛ و مشاهده تغییرات برای فشار در این محدوده بسیار کم است. نکته‌ای که باید در نظر داشته باشید این است که، با نزدیک شدن عدد وایزنبرگ به سمت صفر، رفتار ماده به سمت سیال نیوتنی میل می‌نماید. ضمن اینکه در محدوده اعداد وایزنبرگ پایین، خطوط فشار تقریباً بروی یکدیگر و دارای مقدار تقریباً یکسانی می‌باشند. برای اعداد وایزنبرگ بالا، توزیع فشار در راستای صفحه بسیار زیاد بوده و اندازه‌ی فشار نیز بسیار زیاد می‌شود. مقدار P_{max} نیز تقریباً در تمامی موارد، در نقطه $x \approx 0.8$ اتفاق می‌افتد.



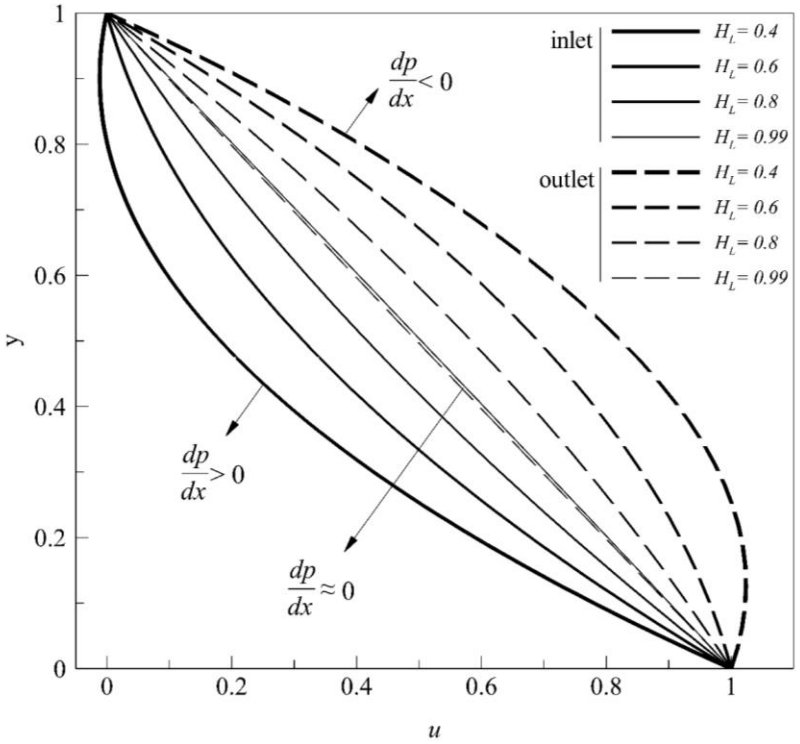
شکل ۴-۷: توزیع فشار ویسکوالاستیک یاتاقان برای اعداد وایزنبرگ مختلف و با فرض $\alpha = 0.2$ و $H_L = 0.6$

افزایش عدد وایزنبرگ باعث می‌شود که رفتار غیر همسانگردی سیال ویسکوالاستیک افزایش یابد؛ که در نتیجه‌ی این امر رفتار غیرخطی ماده افزایش می‌یابد [۵۷]. به عبارتی دیگر افزایش عدد وایزنبرگ، افزایش الاستیسیته‌ی سیال را در پی دارد که این امر باعث می‌شود اختلاف تنش‌های نرمال بزرگ‌تر شده و سیال ویسسکوالاستیک تر گردد [۵۶]. در نتیجه‌ی این مهم، افزایش فشار وارده بر سطوح را انتظار داریم.

- **پروفیل سرعت**

شکل ۴-۹، تاثیر H_L بر روی توزیع سرعت برای $\alpha = 0.1$ و $Wi = 0.3$ را نشان می‌دهد. بیشترین سرعت در *y=0*، یعنی صفحه‌ی متحرک می‌باشد؛ و همان‌طور که مشاهده می‌نمایید، سرعت در راستای عرضی کاهش می‌یابد تا اینکه درنهایت به کمترین مقدار خود یعنی صفر، در صفحه‌ی بالایی می‌رسد. افزایش شیب صفحه‌ی ثابت و تنگ کردن دهانه‌ی خروجی یاتاقان، یا به عبارتی هنگامی‌که $H_L \to 0$،

باعث می‌شود که شاهد افزایش سرعت باشیم، و علت این امر وجود قضیه‌ی پیوستگی می‌باشد.

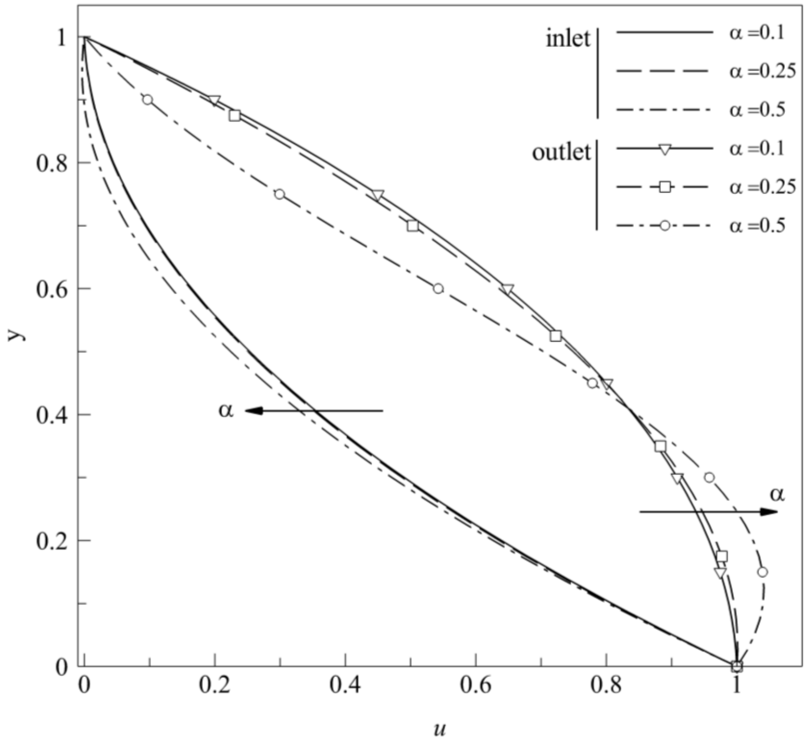


شکل ۴-۸: بررسی اثر تغییرات H_L بر روی پروفیل سرعت ویسکوالاستیک در ورودی و خروجی یاتاقان با فرض $\alpha = 0.1$ و $Wi = 0.3$

نکته‌ی دیگر در شکل ۴-۹، هنگامی‌که $H_L \to 1$ ، صفحه‌ی بالایی به موازات با صفحه‌ی پایینی میل کرده و درنتیجه جریان حاضر به سمت جریان کوئت همگرا می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم در این حالت $dP/dx = 0$ و پروفیل سرعت خطی می‌گردد؛ که شکل ۴-۹، مبین این رفتار می‌باشد.

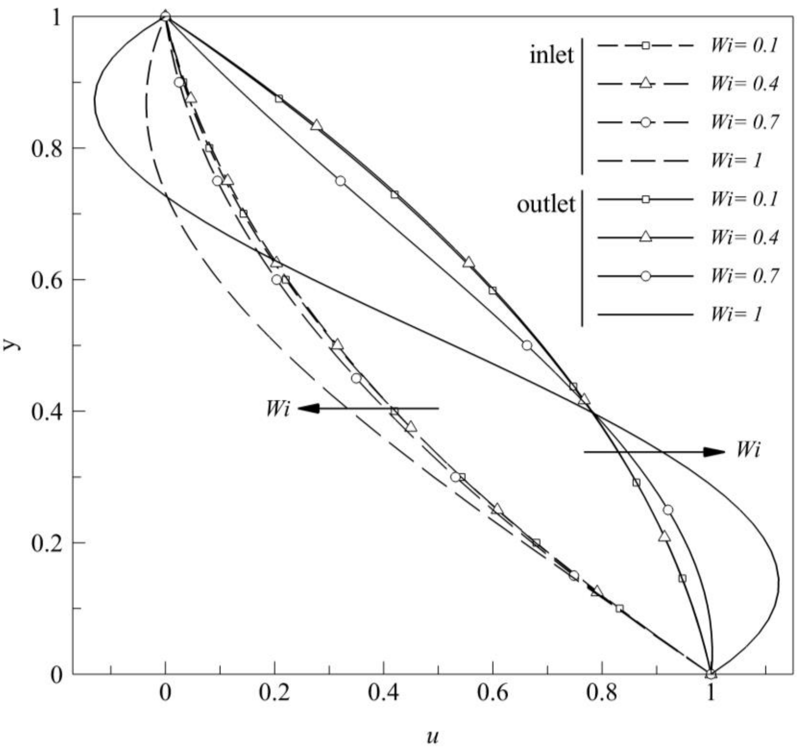
شکل‌های ۴-۱۰ و ۴-۱۱ به ترتیب نشان‌دهنده تغییرات سرعت در ورودی و خروجی یاتاقان و برحسب ضریب پویایی و عدد وایزنبرگ، در راستای محور عرضی می‌باشد. واضح است که روند تغییرات سرعت در راستای محور y، نزولی بوده تا اینکه سرعت درنهایت، به صفر(صفحه‌ی بالا ثابت می‌باشد) می‌رسد. همان‌طور که در شکل ۴-۱۰ مشاهده می‌نمایید، در ورودی یاتاقان شیب فشار مثبت $dP/dx > 0$ و در خروجی آن شیب فشار منفی $dP/dx < 0$، را شاهد هستیم. همچنین با افزایش ضریب پویایی در ورودی یاتاقان افزایش گرادیان فشار مثبت و در خروجی یاتاقان افزایش گرادیان فشار

منفی را ملاحظه می‌نماییم. که مشابه این رفتار را در مرجع [۵۸] برای تغییرات سرعت برحسب ضریب پویایی مشاهده می‌نماییم.



شکل ۴-۹: بررسی اثر تغییرات ضریب تحرک بر روی پروفیل سرعت ویسکوالاستیک در ورودی و خروجی یاتاقان با فرض $Wi = 0.25$ **و** $H_L = 0.5$

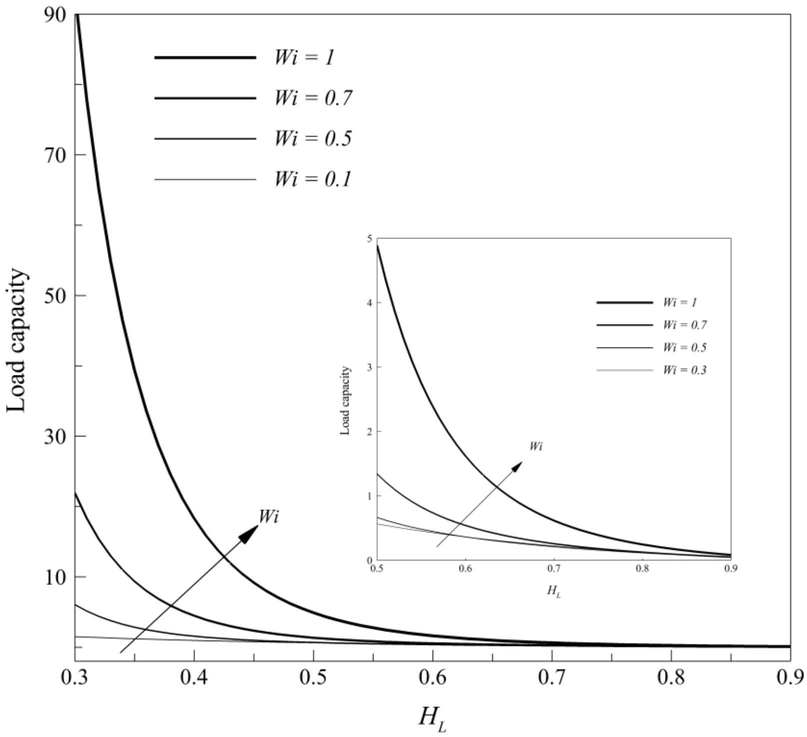
در شکل ۴-۱۱ نیز تقریباً مشابه با شکل ۴-۱۰، افزایش عدد وایزنبرگ باعث افزایش شیب فشار مثبت در ورودی و افزایش شیب فشار منفی در خروجی می‌گردد. نکته‌ی دیگر در مورد این شکل اینکه، برای *Wi<0.4* توزیع سرعت تقریباً وابستگی چندانی به این پارامتر ندارد؛ این در حالی است که به ازای *Wi>0.5* رفتار توزیع سرعت بخصوص در خروجی غیرخطی شده به‌طوری که حتی در خروجی یاتاقان منجر به ایجاد جریان برگشتی برای *Wi=1* هستیم. مشابه این رفتار را در مرجع [۵۸] قابل مشاهده هست.



شکل ۴-۱۰: بررسی اثر تغییرات ضریب تحرک بر روی پروفیل سرعت ویسکوالاستیک در ورودی و خروجی یاتاقان با فرض $\alpha = 0.1$ و $H_L = 0.6$

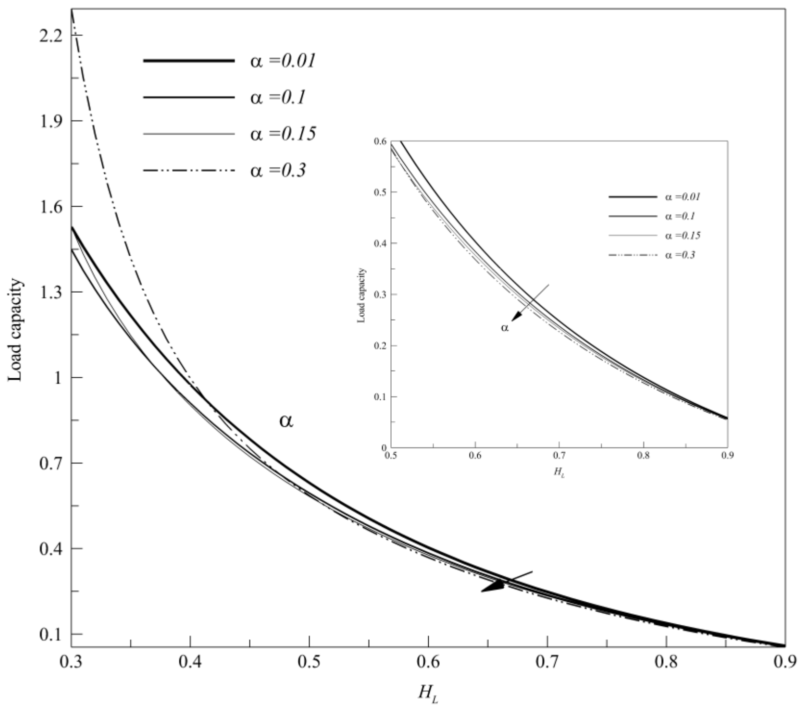
- **ظرفیت بار یاتاقان**

شکل ۴-۱۲ نشان‌دهنده تغییرات ظرفیت بار یاتاقان در مقابل تغییرات H_L برای اعداد مختلف وایزنبرگ و با فرض $\alpha = 0.1$ را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌نمایید با افزایش عدد وایزنبرگ، شاهد افزایش ظرفیت بار یاتاقان نیز هستیم. نکته‌ی دیگر اینکه، افزایش H_L در حالت کلی باعث کاهش ظرفیت بار یاتاقان می‌شود. با توجه به اینکه توزیع بار یاتاقان مساحت زیر نمودار توزیع فشار می‌باشد؛ با توجه به شکل ۴-۶ این واقعیت را انتظار داشتیم. با میل کردن جریان حاضر به سمت جریان کوئت($H_L \to 1$) دیگر شاهد تغییرات فشار نیستیم ($dP/dx = 0$)؛ که در نتیجه‌ی آن باعث می‌شود ظرفیت بار یاتاقان به مقدار ثابتی میل نماید.



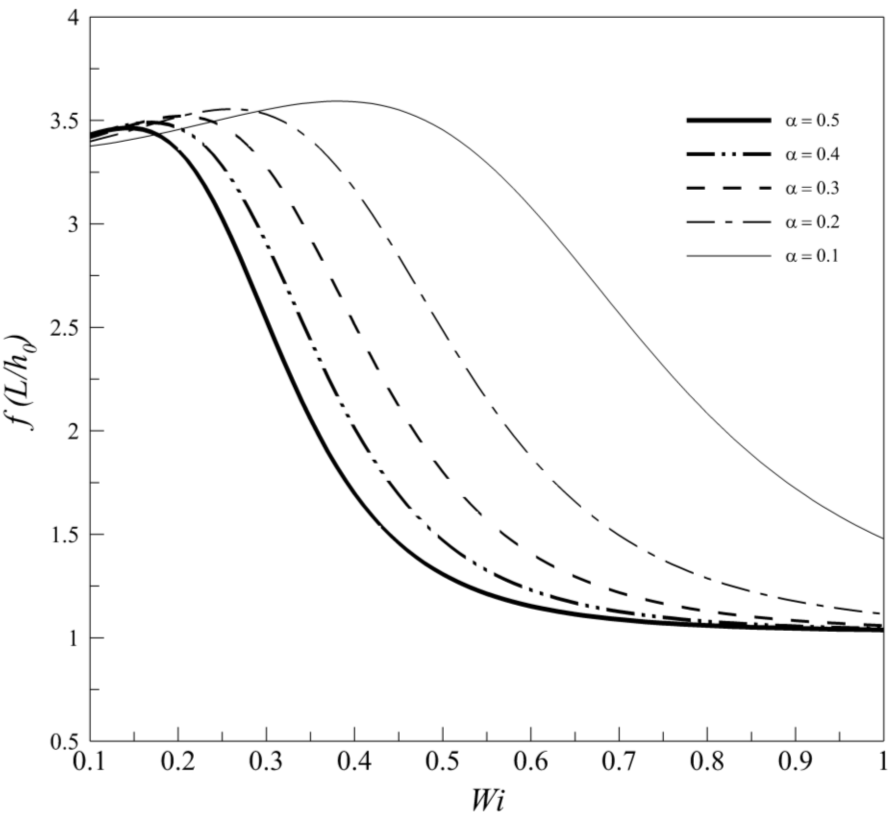
شکل ۴-۱۱: نحوه‌ی تغییرات ظرفیت بار یاتاقان برحسب H_L برای اعداد مختلف وایزنبرگ با فرض $\alpha = 0.1$

شکل ۴-۱۳ نیز به بررسی تاثیر پارامتر ضریب پویایی (α) بر روی توزیع بار یاتاقان با فرض $Wi = 0.2$ می‌پردازد. با توجه به این شکل می‌توان دریافت که افزایش H_L در حالت کلی باعث کاهش ظرفیت بار یاتاقان می‌شود؛ که دلیل این امر پیش‌تر بیان شد. نکته‌ی دیگر اینکه افزایش ضریب پویایی در حالت کلی باعث افزایش توزیع بار یاتاقان می‌شود، که با توجه به شکل ۴-۷ انتظار چنین تغییراتی را داشتیم.



شکل ۴-۱۲: نحوه‌ی تغییرات ظرفیت بار یاتاقان برحسب H_L برای اعداد مختلف ضریب تحرک با فرض $Wi = 0.2$

شکل ۴-۱۴، نحوه‌ی تغییرات ضریب اصطکاک یاتاقان برحسب وایزنبرگ برای ضرایب مختلف تحرک با فرض $H_L = 0.6$ را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌نمایید در حالت کلی افزایش ضریب پویایی که در نتیجه‌ی آن رفتار رقیق شوندگی سیال را به همراه دارد، باعث کاهش ضریب اصطکاک می‌شود که این به خواص این پارامتر برمی‌گردد. و نکته‌ی جالب در مورد این شکل هنگامی‌که عدد وایزنبرگ به سمت بی‌نهایت میل می‌نماید، تمامی نمودارها بدون توجه به مقدار ضریب پویایی (α) به سمت عددی ثابت میل می‌نمایند $\left(\lim_{Wi\to\infty} f = 1.034721352\right)$. شاید بتوان این‌طور تعبیر کرد، هنگامی‌که عدد وایزنبرگ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، درواقع رفتار روانکار مورد استفاده درون یاتاقان به سمت رفتار ماده‌ای با ویسکوالاستیسیته‌ی کامل میل می‌نماید.



شکل ۴-۱۳: نحوه‌ی تغییرات ضریب اصطکاک یاتاقان برحسب وایزنبرگ برای ضرایب مختلف تحرک با فرض $H_L = 0.6$

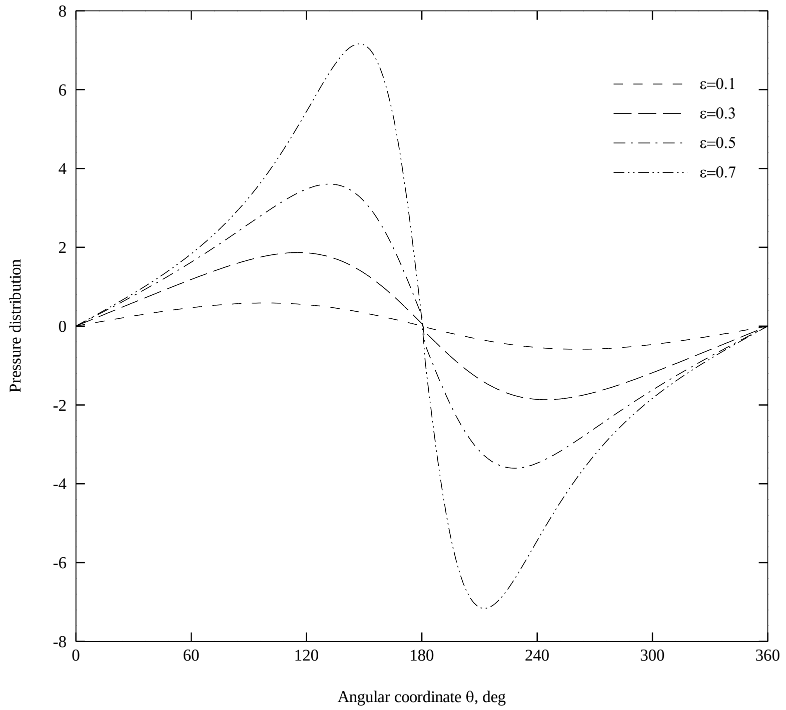
نتایج حل تحلیلی برای یاتاقان ژورنال

با توجه به پارامترهای به‌دست‌آمده از حل حساب‌اغتشاشات مرتبه صفر، اول و دوم، در این قسمت ابتدا به بررسی تغییرات توزیع فشار و تنش برشی می‌پردازیم و در ادامه به‌جای نشان دادن تغییرات τ_{xx} و τ_{yy}، تغییرات اختلاف این دو تنش یعنی اختلاف تنش نرمال اول را بررسی می‌کنیم. در انتها نیز به بررسی ظرفیت بار یاتاقان می‌پردازیم. برای تمامی موارد گفته‌شده تاثیر پارامترهای عدد وایزنبرگ (wi)، ضریب پویایی(α) و نسبت خروج از مرکز یاتاقان (ε) را مورد بررسی می‌نماییم.

- **توزیع فشار**

شکل ۴-۱۵ به بررسی تغییرات نسبت خروج از مرکز بر روی توزیع فشار می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌نمایید با افزایش نسبت خروج از مرکز، فشار تحمل شده توسط سیال افزایش می‌یابد و بیشینه‌ی

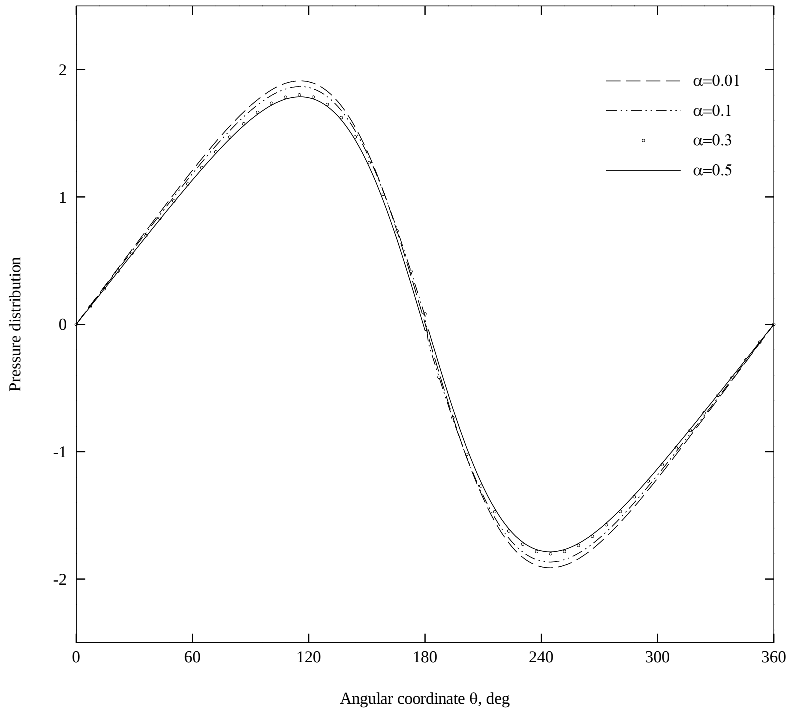
فشار به سمت $\theta = 180$ نزدیک شده و پس از عبور از نقطه‌ی ماکسیمم روند کاهشی خود را طی می‌کند، تا اینکه درنهایت مقدار آن به صفر می‌رسد. نکته دیگر اینکه توزیع فشار به صورت متقارن بوده و مقدار آن در ناحیه همگرای یاتاقان ژورنال $(180 \leq \theta \leq 0)$ مثبت می‌باشد. در ادامه جریان فیلم سیال وارد ناحیه واگرا می‌شود $(360 > \theta > 180)$ و فشار مقادیر منفی را به خود اختصاص می‌دهد تا اینکه درنهایت مقدار آن در محل $\theta = 360$ به صفر می‌رسد.



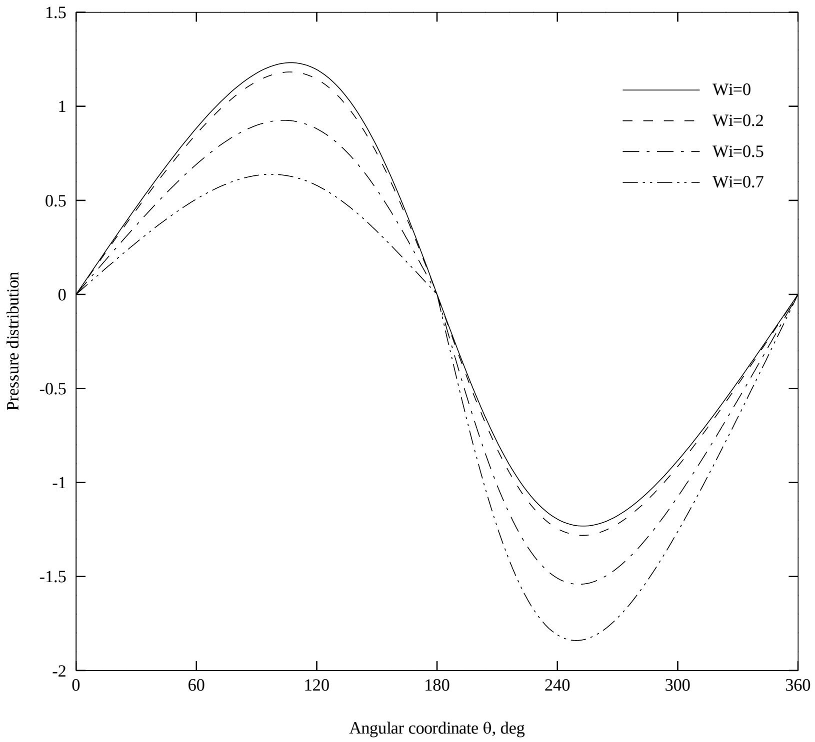
شکل ۴-۱۴: توزیع فشار ویسکواالاستیک بدون بعد برای نسبت خروج از مرکزهای مختلف با فرض $\alpha = 0.1$ **و** $W = 0.2$

در شکل ۴-۱۶ اثر تغییرات ضریب پویایی توزیع فشار را مشاهده می‌نمایید. با افزایش ضریب پویایی مقدار فشار تا قبل از $\theta = 180$ نیز کاهش و بعد از آن روند افزایشی را در پیش می‌گیرد. که دلیل این امر در بخش نمودارهای توزیع فشار مربوط به یاتاقان اسلایدر توضیح داده شد. نکته‌ی دیگر اینکه رفتار توزیع فشار برای تمامی پارامترها تقریباً مشابه یکدیگر بوده و دارای اختلاف اندکی می‌باشد. ماکزیمم فشار نیز تقریباً برای تمامی ضرایب پویایی در محل $\theta \approx 120$ و برای اعداد وایزنبرگ کمی قبل‌تر از آن

اتفاق می‌افتد و به صورتی متقارن مینمم آن برای تمامی ضرایب پویایی در $\theta \approx 240$ و برای اعداد وایزنبرگ کمی بعدتر از آن رخ می‌دهد.



شکل ۴-۱۵: توزیع فشار ویسکوالاستیک بدون بعد برای ضرایب پویایی مختلف با فرض $\mathbf{Wi = 0.2, \varepsilon = 0.3}$

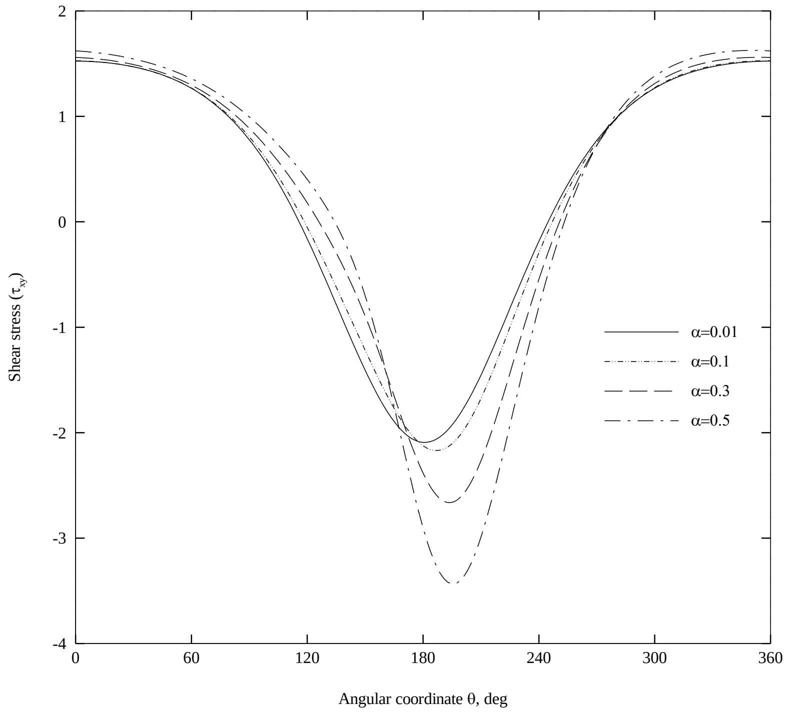


شکل ۴-۱۶: توزیع فشار ویسکواالاستیک بدون بعد برای اعداد وایزنبرگ مختلف با فرض $\alpha = 0.1, \varepsilon = 0.2$

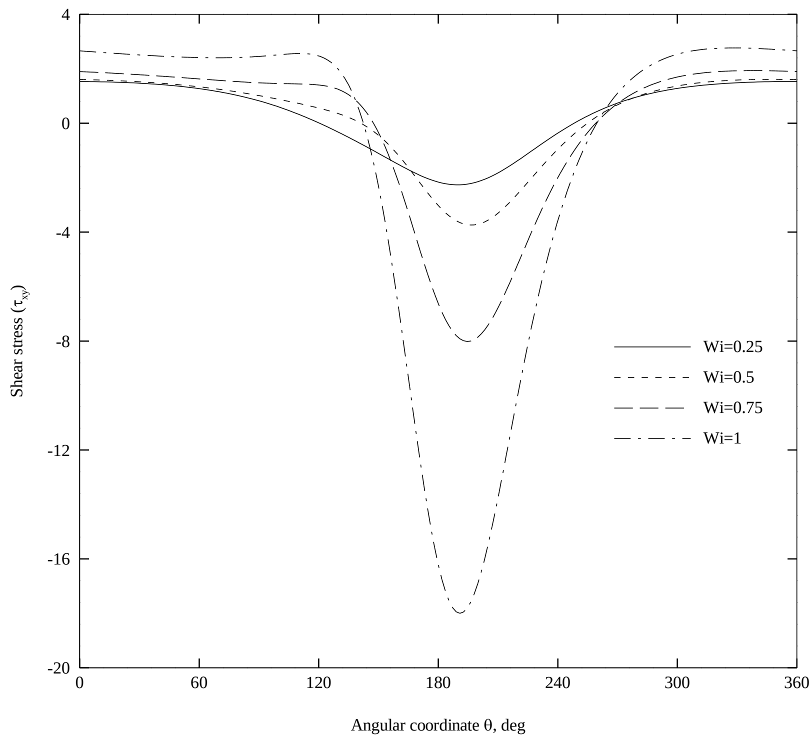
- **تغییرات تنش برشی**

شکل‌های ۴-۱۸ تا ۴-۲۰ نشان دهنده‌ی تغییرات تنش برشی بدون بعد (τ_{xy}) برحسب تغییرات زاویه‌ای می‌باشد. در شکل ۴-۱۸ تاثیر ضریب پویایی بر روی τ_{xy} نشان داده شده است. در ابتدا سیر نزولی تنش برش برشی را تا زمانی که به بیشترین اندازه‌ی خود در $\theta \approx 180$ می‌رسد، مشاهده می‌نمایید و در ادامه روندی صعودی را طی می‌نماید. تفاوت قابل محسوس را در بازه‌ی $180 < \theta < 210$ می‌توان مشاهده نمود. خارج از این ناحیه رفتار τ_{xy} برای تمامی ضرایب پویایی مشابه یکدیگر بوده و مقادیر تنش برشی تقریباً یکسان می‌باشد. تاثیر عدد وایزنبرگ بر روی تنش برشی را در شکل ۴-۱۹ مشاهده می‌نمایید. در ابتدای رفتار τ_{xy} به‌صورت یک تابع ثابت بوده و بعد عبور از $\theta = 120$ روند نزولی خود

را در پیش می‌گیرد، تا اینکه در $\theta \approx 190$ به بیشترین اندازه‌ی خود می‌رسد و در ادامه‌ی آن توزیعی متقارن را نسبت $\theta \approx 180$ به طی می‌نماید.

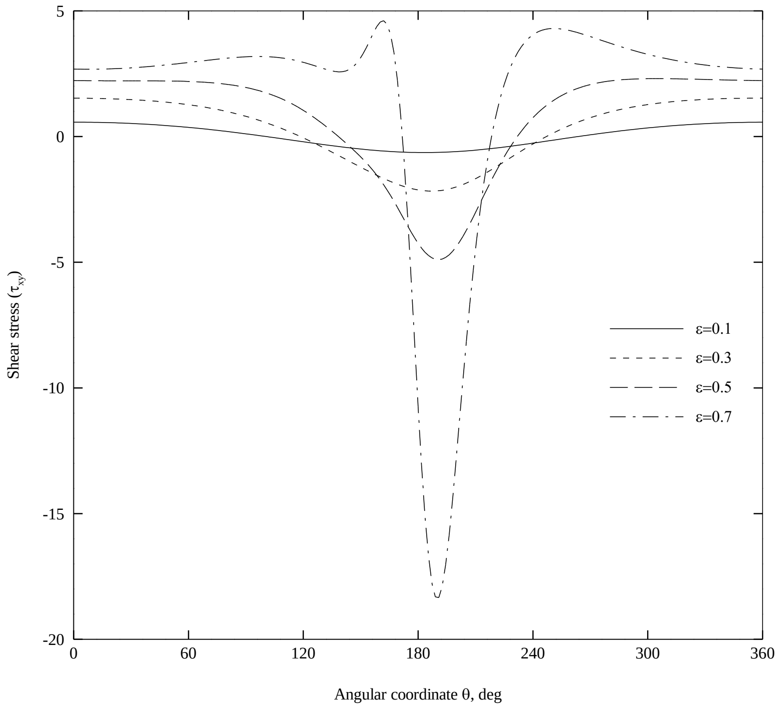


شکل ۴-۱۷: تغییرات تنش برشی برای ضرایب پویایی مختلف با فرض $\mathbf{Wi = 0.2, \varepsilon = 0.3}$



شکل ۴-۱۸: تغییرات تنش برشی برحسب اعداد وایزنبرگ با فرض $\alpha = 0.1, \varepsilon = 0.3$

در شکل ۴-۲۰ که تغییرات تنش برشی برحسب نسبت خروج از مرکزهای مختلف را نشان می‌دهد، برای $\varepsilon > 0.5$ نتایج تقریباً همانند شکل ۴-۱۹ قابل تفسیر است. نکته‌ی قابل‌توجه تغییرات تنش برشی برای $\varepsilon > 0.5$ است که برخلاف بقیه، در ابتدا روندی صعودی، سپس نزولی را دارد و جالب‌تر از آن به وجود آمدن یک مقدار بیشینه است که فاصله‌ی چندانی با مقدار کمینه نداشته و در بازه‌ی زمانی کوتاهی شاهد یک تغییر چشمگیر برای تنش برشی در بازه‌ی تقریباً $170 < \theta < 190$ هستیم و همین تغییر باعث از بین رفتن تقارن تنش برشی برای مقادیر $\varepsilon > 0.5$ شده است. نکته نهایی این اینکه برای مقادیر $\varepsilon > 0.5$ در بازه‌ی $170 < \theta < 200$ تنش برشی به‌طور قابل‌توجهی دارای تغییرات می‌باشد.



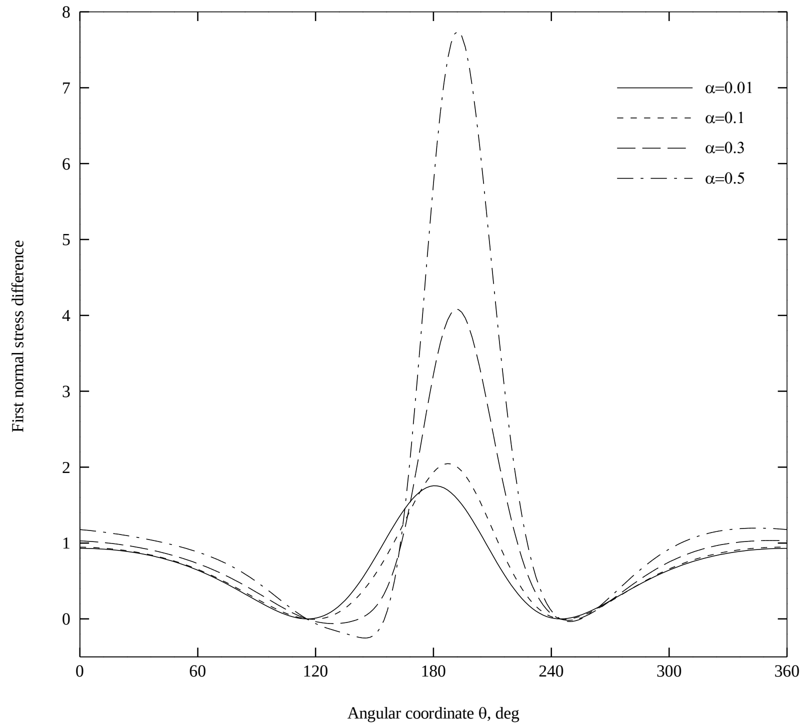
شکل ۴-۱۹: تغییرات تنش برشی برحسب نسبت خروج از مرکزهای مختلف با فرض $\mathbf{Wi = 0.2, \alpha = 0.1}$

- **اختلاف تنش نرمال اول**

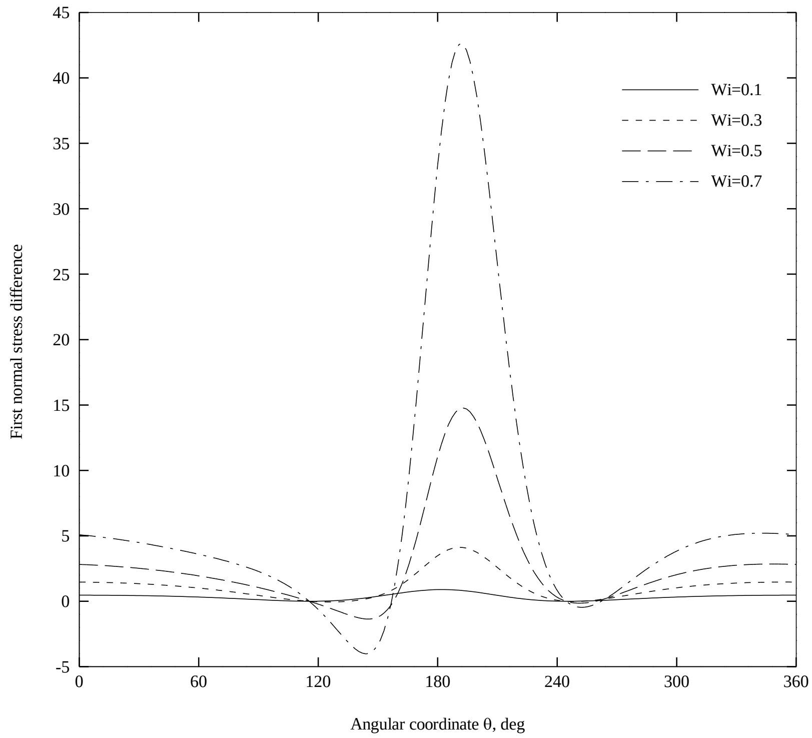
شکل‌های ۴-۲۱ تا ۴-۲۳ نشان‌دهنده‌ی تغییرات اختلاف تنش نرمال اول در راستای تغییرات زاویه‌ای می‌باشد. برای هر سه پارامتر مؤثر یعنی ضریب پویایی، عدد وایزنبرگ و نسبت خروج از مرکز، اختلاف تنش نرمال اول در ابتدا دارای سیر نزولی و سپس روند افزایشی را تجربه می‌کند. با افزایش هر سه پارامتر مقدار اختلاف تنش نرمال نیز افزایش می‌یابد. کمترین مقدار آن در محدوده $120 < \theta < 150$ و ماکسیمم آن تقریباً در $\theta \approx 180$ رخ می‌دهد. که در ادامه‌ی آن روند تغییرات به صورتی متقارن کاهش و پس از رسیدن به مقدار کمینه خود در $\theta \approx 240$ سیر سعودی خود را در پیش می‌گیرد. توجه به شکل‌های ۴-۲۱ و ۴-۲۲ می‌توان گفت که برای مقادیر متفاوت ضریب پویایی و عدد وایزنبرگ

روند تغییرات مشابه بوده و با افزایش آن ضمن آنکه فاصله بین نقاط اکسترمم کاهش می‌یابد، مقدار کمینه اختلاف تنش نرمال نیز به سمت $\theta \approx 180$ پیش می‌رود و در یک فاصله‌ی زمانی کوتاه شاهد تغییرات بسیار زیادی برای اختلاف تنش نرمال اول هستیم. در انتها باید ذکر کرد که در دو نقطه متقارن یعنی $\theta \approx 120, 240$ نیز مقدار اختلاف تنش نرمال به صفر نزدیک می‌شود.

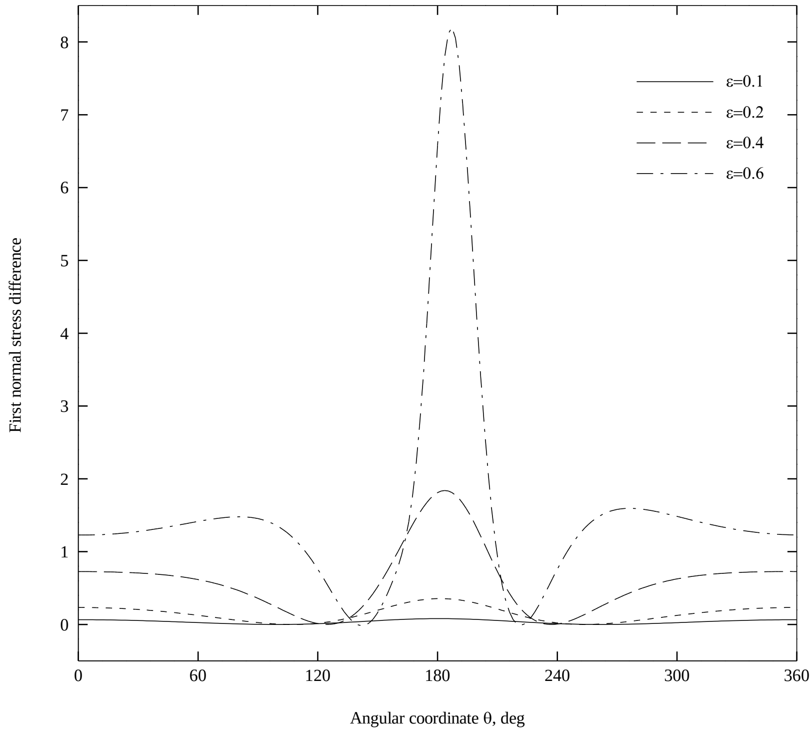
با نگاه به شکل ۴-۲۳ می‌توان دریافت که برای مقادیر $\varepsilon \leq 0.4$ روند تغییرات مشابه بوده و تفاوت آن‌چنانی را نمی‌توان مشاهده کرد. درصورتی‌که با گذر از این مقدار، علاوه بر اینک تغییرات اختلاف تنش نرمال اول به‌طور قابل توجهی تغییر می‌کند (مخصوصاً برای $\theta \approx 180$)، روند تغییرات در ابتدا سیر صعودی به خود می‌گیرد، در صورتی برای مقادیر $\varepsilon \leq 0.4$ روند شروع تغییرات به‌صورت نزولی می‌باشد و این ویژگی مختص نسبت خروج از مرکز می‌باشد.



شکل ۴-۲۰: تغییرات اختلاف تنش نرمال اول برای ضرایب پویایی مختلف با فرض $\mathbf{Wi = 0.2, \varepsilon = 0.3}$



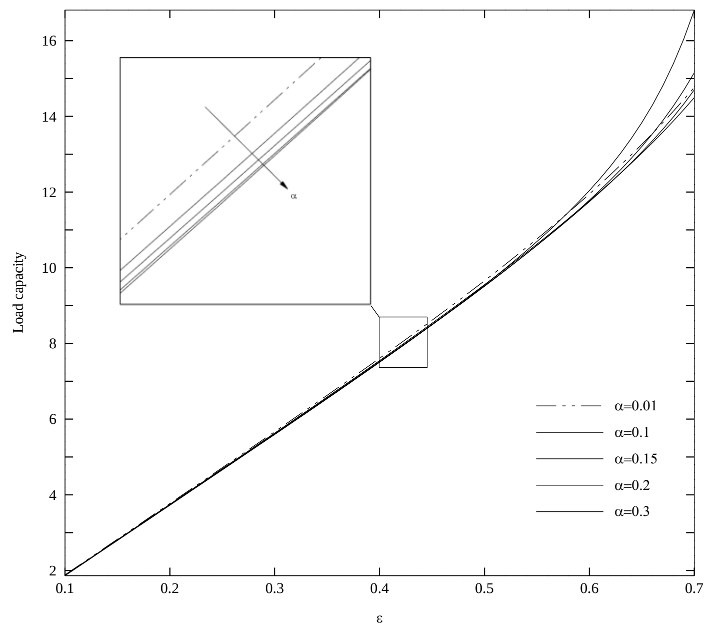
شکل ۴-۲۱: تغییرات اختلاف تنش نرمال اول برای اعداد وایزنبرگ مختلف با فرض $\mathbf{\alpha = 0.1, \varepsilon = 0.3}$



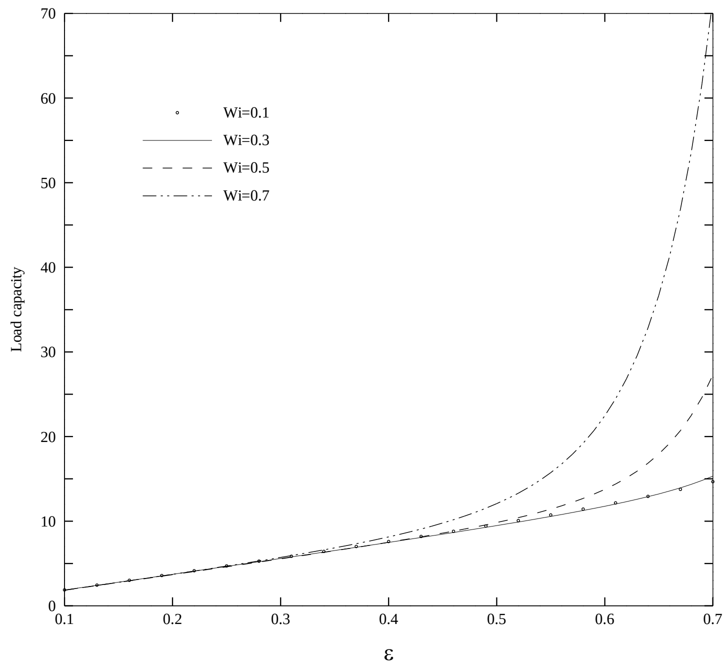
شکل ۴-۲۲: تغییرات اختلاف تنش نرمال اول برای خروج از مرکزهای مختلف با فرض $\mathbf{Wi = 0.1, \alpha = 0.1}$

- **ظرفیت بار یاتاقان**

شکل‌های ۴-۲۴ و ۴-۲۵ نشان‌دهنده‌ی توزیع بار، یک یاتاقان برحسب نسبت خروج از مرکز می‌باشد. در این شکل‌ها تاثیر دو پارامتر ضریب پویایی و عدد وایزنبرگ بر روی ظرفیت بار یاتاقان بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌نمایید نحوه‌ی تغییرات برای هر دو پارامتر در ابتدا ($\varepsilon \leq 0.4$) به‌صورت خطی افزایش یافته و روندی قابل پیش‌بینی را دارد. ضمن اینکه در این ناحیه تغییرات در مقادیر ضریب پویایی و عدد وایزنبرگ تأثیری بر روی توزیع ظرفیت بار یاتاقان نداشته و مقدار تقریباً یکسانی برای را برای آن نشان می‌دهد. در ادامه ($\varepsilon > 0.4$) روند تغییرات به‌صورت نمایی بوده و اثر تغییرات در پارامترها، مخصوصاً برای عدد وایزنبرگ قابل مشاهده است. همچنین با افزایش ضریب پویایی با افت فشار، و با افزایش عدد وایزنبرگ افزایش فشار را مشاهده می‌نماییم که پیش‌تر در مورد علت فیزیکی این رفتارها بحث شده است.



شکل ۴-۲۳: بررسی تاثیر ضریب پویایی بر روی نحوه‌ی تغییرات ظرفیت بار یاتاقان برحسب نسبت خروج از مرکز یاتاقان با فرض $Wi = 0.2$



شکل ۴-۲۴: بررسی تاثیر عدد وایزنبرگ بر روی نحوه‌ی تغییرات ظرفیت بار یاتاقان برحسب نسبت خروج از مرکز یاتاقان با فرض $\alpha = 0.1$

فصل ۵ : نتیجه گیری و پیشنهادها

۵-۱ بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به اینکه که در ابتدا به حل تحلیلی مسئله‌ی روانکاری برای یک ***یاتاقان اسلایدر*** و پس از آن به حل مسئله مورد نظر برای ***یاتاقان ژورنال*** پرداختیم، در این قسمت نتایج برای دو یاتاقان به دو بخش تقسیم می‌شود.

۵-۲ یاتاقان اسلایدر

در مطالعه حاضر با استفاده از مدل گزیکس به بررسی مسئله‌ی روانکاری یاتاقان برای سیال ویسکوالاستیک پرداخته شد و تاثیر مثبت روانکار غیرنیوتنی بر روی توزیع بار یاتاقان بررسی شد. یکی از مهم‌ترین اهداف این مقاله پاسخ به این سؤال اساسی بود که، استفاده از یک سیال غیر نیوتنی می‌تواند تاثیر مثبتی را در جهت تحمل بار وارده از سوی محور گردان بر یاتاقان داشته باشد یا خیر،که در ادامه به آن پاسخ داده می‌شود. در این مقاله با استفاده از تئوری حساب‌اغتشاشات حول ضریب پویایی در معادله ساختاری گزیکس، متغیرهای اصلی برای جریان فیلم سیال در این مسئله گسترش داده شد و نتایج به‌صورت تحلیلی استخراج شد، در ادامه به مهم‌ترین نتایج اشاره می‌شود:

- نتایج نشان می‌دهد که با کاش ضخامت فیلم سیال و یا به عبارتی با حرکت سیال در جهت خروجی یاتاقان، فشار افزایش یافته، تا جایی که کمی قبل‌تر از خروجی، به مقدار ماکزیمم خود می‌رسد و در ادامه به صفر میل می‌کند.
- همانطور که در آزمایش‌های تجربی مشاهده شده است، می‌توان گفت که از استفاده از یک سیال ویسکوالاستیک در مقابل یک سیال نیوتنی می‌تواند باعث افزایش قابل‌توجهی بر روی توزیع فشار یاتاقان شود، که این خود نشان‌دهنده‌ی افزایش ظرفیت تحمل بار یاتاقان در جهت تحمل بار وارده از سوی محور گردان می‌باشد.
- در صورتی که انقباض فضا در شکل تدریجی باشد، توزیع فشار تقریباً متقارن خواهد بود و با افزایش

شدت انقباض فضا، P_{max} نیز افزایش می‌یابد و به مقدار قابل‌توجهی می‌رسد.

۵-۳ یاتاقان ژورنال

در مطالعه حاضر با استفاده از مدل گزیکس به بررسی تاثیر روانکاری سیال ویسکواالاستیک بر روی عملکرد یاتاقان‌های ژورنال پرداخته شد. در این مقاله با استفاده از تئوری حساب‌اغتشاشات حول ضریب پویایی در معادله ساختاری گزیکس، متغیرهای اصلی برای جریان فیلم سیال در این مسئله گسترش داده شد و نتایج به‌صورت تحلیلی استخراج شد، در ادامه به مهم‌ترین نتایج حاصل‌شده اشاره می‌شود:

- با افزایش نسبت خروج از مرکز، و عدد وایزنبرگ توزیع فشار تحمل شده توسط سیال افزایش یافته، در صورتی که با افزایش ضریب پویایی روندی نزولی را دارد.
- افزایش ضریب پویایی باعث کاهش توزیع فشار یاتاقان می‌گردد.
- اختلاف تنش نرمال اول برای هر سه پارامتر مؤثر یعنی ضریب پویایی، عدد وایزنبرگ و نسبت خروج از مرکز، در ابتدا دارای سیر نزولی و سپس روند افزایشی را تجربه می‌کند، ضمن اینکه با افزایش هر سه پارامتر مقدار اختلاف تنش نرمال نیز افزایش می‌یابد.
- توزیع بار ظرفیت یاتاقان را به دو بخش می‌توان تقسیم نمود. ناحیه‌ی خطی که در آن تغییرات ضریب پویایی و وایزنبرگ تأثیری چندانی نداشته و توزیع بار یاتاقان با تغییرات آن‌ها به صورت خطی افزایش می‌یابد و ناحیه‌ی دوم که تغییرات توزیع بار در آن به‌صورت تابعی نمایی می‌باشد.
- استفاده از یک سیال ویسکواالاستیک در مقابل یک سیال نیوتنی می‌تواند باعث افزایش قابل توجهی بر روی توزیع ظرفیت بار یاتاقان شود، که این خود نشان‌دهنده‌ی افزایش ظرفیت تحمل بار یاتاقان در جهت تحمل بار وارده از سوی محور گردان می‌باشد.

۴-۵ پیشنهادها

- بررسی انتقال حرارت روانکاری یاتاقان با استفاده از مدل گزیکس
- استفاده از شرط لغزش برای دیواره ثابت و حل مسئله در شرایط جدید
- بررسی انواع روش‌های حل دقیق و عددی مسئله و استفاده از نتایج حاضر به منظور ارزیابی صحت حل
- انتخاب سایر مدل‌های غیرنیوتنی چون UCM و Olroyd-B و دیگر مدل‌های مشابه غیرنیوتنی که حالتی خاص از مدل گزیکس می‌باشند، و ارزیابی صحت آن‌ها با مطالعه حاضر
- بررسی اثراتی چون زبری سطح و انحراف یاتاقان از محور گردان ژورنال، به عنوان نوآوری‌های جدید در استفاده از مدل گزیکس جهت حل مسئله روانکاری
- در مطالعه‌ای بسیار کاربردی و مهم می‌توان به تجزیه و تحلیل مسئله در زمینه‌ی آزمایشگاهی پرداخت و بهترین نوع روانکار ویسکواالاستیک را به منظور روانکار یاتاقان تولید کرد.

پیوست

- **توزیع سرعت و فشار مرتبه دوم یاتاقان اسلایدر**

$$u_2(y)=\frac{5}{6}Wi^4y^6\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^5+5Wi^4y^5c_0\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^4+\frac{25}{2}Wi^4y^4\mathrm{c}_0^2\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^3$$
$$+\frac{50}{3}Wi^4y^3\mathrm{c}_0^3\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^2-\frac{1}{2}Wi^2y^4\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^3+\frac{9}{4}Wi^2y^4\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}x}$$
$$+\frac{25}{2}Wi^4y^2\mathrm{c}_0^4\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}-2Wi^2y^3c_0\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^2+6Wi^2y^3c_0\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}x}$$
$$+3Wi^2y^3c_1\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^2+5Wi^4\mathrm{c}_0^5y-3Wi^2y^2\mathrm{c}_0^2\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}+\frac{9}{2}Wi^2y^2\mathrm{c}_0^2\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}x}$$
$$+9Wi^2y^2c_0c_1\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}-2Wi^2\mathrm{c}_0^3y+9Wi^2\mathrm{c}_0^2c_1y+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}x}y^2+c_2y$$

$$c_2=-\frac{5}{6}Wi^4h^5\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^5-5Wi^4h^4c_0\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^4-\frac{25}{2}Wi^4h^3\mathrm{c}_0^2\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^3$$
$$-\frac{50}{3}Wi^4h^2\mathrm{c}_0^3\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{1}{2}Wi^2h^3\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^3-\frac{9}{4}Wi^2h^3\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}x}$$
$$-\frac{25}{2}Wi^4h\mathrm{c}_0^4\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}+2Wi^2h^2c_0\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^2-3h^2c_1\left(\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\right)^2$$
$$-6Wi^2h^2c_0\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}x}-5Wi^4\mathrm{c}_0^5+3Wi^2h\mathrm{c}_0^2\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}$$
$$-9Wi^2hc_0c_1\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}x}-\frac{9}{2}Wi^2h\mathrm{c}_0^2\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}x}+2Wi^2\mathrm{c}_0^3-9Wi^2\mathrm{c}_0^2c_1-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}x}h$$

$$P_2(x)=\frac{8}{30625}\frac{Wi^2mx(x-1)}{(mx+1)^{10}(m+1)^3(m+2)^5}[1670216m^{14}Wi^2x^8$$
$$+47775m^{14}x^8+23599033m^{13}Wi^2x^7+15116673m^{12}Wi^2x^8$$
$$+47775m^{14}x^7+13361728m^{13}Wi^2x^6+411600m^{13}x^8$$
$$+84085403m^{12}Wi^2x^7+21590520m^{11}Wi^2x^8+889350m^{13}x^7$$
$$+130728368m^{12}Wi^2x^6+1495725m^{12}x^8+172757250m^{11}Wi^2x^7$$
$$+23672560m^{10}Wi^2x^8+510825m^{13}x^6+48829928m^{12}Wi^2x^5$$
$$+5611725m^{12}x^7+438043885m^{11}Wi^2x^6+2947350m^{11}x^8$$

$$+239577760m^{10}Wi^2x^7 + 15452760m^9Wi^2x^8 + 6497400m^{12}x^6$$
$$+410335765m^{11}Wi^2x^5 + 17904600m^{11}x^7 + 876007345m^{10}Wi^2x^6$$
$$+3314850m^{10}x^8 + 252178360m^9Wi^2x^7 + 5150920m^8Wi^2x^8$$
$$+1797075m^{12}x^5 + 107338945m^{11}Wi^2x^4 + 34107675m^{11}x^6$$
$$+1343050905m^{10}Wi^2x^5 + 32788350m^{10}x^7 + 1198210510m^9Wi^2x^6$$
$$+1999200m^9x^8 + 159678520m^8Wi^2x^7 + 20337450m^{11}x^5$$
$$+840713685m^{10}Wi^2x^4 + 97608000m^{10}x^6 + 2661645670m^9Wi^2x^5$$
$$+35147700m^9x^7 + 1216429970m^8Wi^2x^6 + 499800m^8x^8$$
$$+51509200m^7Wi^2x^7 + 3325875m^{11}x^4 + 116941020m^{10}Wi^2x^3$$
$$+3602962370m^8Wi^2x^5 + 20491800m^8x^7 + 98736225m^{10}x^5$$
$$+2747777240m^9Wi^2x^4 + 166308450m^9x^6 + 746883400m^7Wi^2x^6$$
$$+34986000m^{10}x^4 + 847791551m^9Wi^2x^3 + 268010400m^9x^5$$
$$+5443003580m^8Wi^2x^4 + 169292550m^8x^6 + 3519480600m^7Wi^2x^5$$
$$+4998000m^7x^7 + 231791400m^6Wi^2x^6 + 3877125m^{10}x^3$$
$$+108867806m^9Wi^2x^2 + 160909875m^9x^4 + 2628830953m^8Wi^2x^3$$
$$+440213550m^8x^5 + 7274830800m^7Wi^2x^4 + 94962000m^7x^6$$
$$+2086122600m^6Wi^2x^5 + 38065650m^9x^3 + 757402478m^8Wi^2x^2$$
$$+421044750m^8x^4 + 5019775578m^7Wi^2x^3 + 436296000m^7x^5$$
$$+6803099200m^6Wi^2x^4 + 22491000m^6x^6 + 618110400m^5Wi^2x^5$$
$$+2987775m^9x^2 + 40401068m^8Wi^2x + 165069975m^8x^3$$
$$+2252135773m^7Wi^2x^2 + 675832500m^7x^4 + 6667206100m^6Wi^2x^3$$
$$+239757000m^6x^5 + 3863190000m^5Wi^2x^4 + 27533100m^8x^2$$
$$+273573083m^7Wi^2x + 413334600m^7x^3 + 3944765785m^6Wi^2x^2$$
$$+660397500m^6x^4 + 6367727000m^5Wi^2x^3 + 55860000m^5x^5$$
$$+1081693200m^4Wi^2x^4 + 1392825m^8x + 23384273m^7Wi^2$$
$$+111819225m^7x^2 + 823168635m^6Wi^2x + 644822850m^6x^3$$
$$+4659581750m^5Wi^2x^2 + 359562000m^5x^4 + 3744484800m^4Wi^2x^3$$
$$+12267150m^7x + 140558325m^6Wi^2 + 263835600m^6x^2$$
$$+1451843510m^5Wi^2x + 619943100m^5x^3 + 4016160050m^4Wi^2x^2$$
$$+83202000m^4x^4 + 1074158400m^3Wi^2x^3 + 290325m^7$$
$$+47043675m^6x + 381603045m^5Wi^2 + 393011850m^5x^2$$

$$+1676193050m^4Wi^2x + 334660200m^4x^3 + 2261330400m^3Wi^2x^2$$
$$+2495325m^6 + 104076000m^5x + 605996825m^4Wi^2$$
$$+366301950m^4x^2 + 1379771400m^3Wi^2x + 77086800m^3x^3$$
$$+645428000m^2Wi^2x^2 + 9213225m^5 + 145728450m^4x$$
$$+610593900m^3Wi^2 + 194098800m^3x^2 + 755972000m^2Wi^2x$$
$$+19341525m^4 + 129124800m^3x + 407116500m^2Wi^2$$
$$+44247000m^2x^2 + 215600000mWi^2x + 25453050m^3$$
$$+66003000m^2x + 175175000mWi^2 + 21204750m^2 + 14700000mx$$
$$+40425000Wi^2 + 10290000m + 2205000]$$

- **توزیع فشار مرتبه دوم یاتاقان ژورنال**

$$P_2(\theta) = -\frac{173343}{35}\frac{\varepsilon\, Wi^2}{\sqrt{\varepsilon^2-1}(\varepsilon+1)^5(\varepsilon-1)^5(\varepsilon^2+2)^5(\varepsilon\cos\theta+1)^{10}}\{\varepsilon(\varepsilon\cos\theta+1)^{10}$$
$$\left((-\frac{630\,\varepsilon^{14}}{57781}+\left(Wi^2-\frac{2100}{57781}\right)\varepsilon^{12}+(-\frac{1022613\,Wi^2}{115562}+\frac{4410}{57781})\,\varepsilon^{10}\right.$$
$$+(\frac{1042410\,Wi^2}{57781}+\frac{20160}{57781})\,\varepsilon^8+(-\frac{2460746\,Wi^2}{57781}+\frac{1680}{57781})\,\varepsilon^6+\left(\frac{4977552Wi^2}{57781}-\frac{40320}{57781}\right)\varepsilon^4$$
$$\left.+(\frac{6615168Wi^2}{57781}-\frac{10080}{57781})\,\varepsilon^2+\frac{985600\,Wi^2}{57781}+\frac{26880}{57781})\,arc\,tanh(\frac{(\varepsilon-1)(-1+\cos\theta)}{\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin\theta})\right)$$
$$-\frac{3778256\sqrt{\varepsilon^2-1}}{4333575}\sin\theta\left[(\cos\theta)^9\varepsilon^9\left[(\frac{2625\,\varepsilon^{16}}{472282}+(Wi^2+\frac{81375}{3778256})\,\varepsilon^{14}+(-\frac{23625}{944564}\right.\right.$$
$$-\frac{54102703W^2}{52895584})\,\varepsilon^{12}+(-\frac{28875}{164272}-\frac{536426277\,Wi^2}{105791168})\,\varepsilon^{10}+(-\frac{144375}{1889128}$$
$$+\frac{1244388415Wi^2}{52895584})\,\varepsilon^8+(\frac{149625}{472282}-\frac{643134305\,Wi^2}{26447792})\,\varepsilon^6+\left(-\frac{45312447Wi^2}{574952}+\frac{44625}{236141}\right)\varepsilon^4$$
$$\left.+\left(-\frac{9693881Wi^2}{472282}-\frac{44625}{236141}\right)\varepsilon^2-\frac{1722827\,Wi^2}{1652987}-\frac{15750}{236141})\right]$$
$$+\frac{79898695\,\varepsilon^8(\cos\theta)^8}{7556512}\left[\frac{74550\,\varepsilon^{16}}{15979739}+(Wi^2+\frac{294000}{15979739})\,\varepsilon^{14}\right.$$
$$+\left(-\frac{323785177\,Wi^2}{223716346}-\frac{311850}{15979739}\right)\varepsilon^{12}+\left(-\frac{426973227\,Wi^2}{111858173}-\frac{2354100}{15979739}\right)\varepsilon^{10}$$
$$+\left(\frac{2230398500\,Wi^2}{111858173}-\frac{1129800}{15979739}\right)\varepsilon^8+\left(-\frac{2049894260\,Wi^2}{111858173}+\frac{4183200}{15979739}\right)\varepsilon^6$$
$$+\left(-\frac{7642897608\,Wi^2}{111858173}+\frac{2704800}{15979739}\right)\varepsilon^4+\left(-\frac{295420192\,Wi^2}{15979739}-\frac{2452800}{15979739}\right)\varepsilon^2$$

$$-\frac{110260928\,W^2}{111858173}-\frac{1008000}{15979739}\Bigg]+\frac{1}{2}\,\varepsilon^7(\cos\theta)^7\Bigg[\frac{2625\,\varepsilon^{18}}{472282}+(Wi^2+\frac{380625}{944564})\,\varepsilon^{16}$$

$$+(\frac{1320716333\,Wi^2}{13223896}+\frac{716625}{472282})\,\varepsilon^{14}+(-\frac{5118869373\,Wi^2}{26447792}-\frac{753375}{472282})\,\varepsilon^{12}$$

$$+(-\frac{3124188575\,Wi^2}{13223896}-\frac{2856000}{236141})\,\varepsilon^{10}+(\frac{43081373695\,Wi^2}{26447792}-\frac{5898375}{944564})\,\varepsilon^{8}$$

$$+\left(-\frac{8785229853\,Wi^2}{6611948}+\frac{4982250}{236141}\right)\varepsilon^6+\left(-\frac{38785809379\,Wi^2}{6611948}+\frac{3522750}{236141}\right)\varepsilon^4$$

$$+(-\frac{2748065342\,Wi^2}{1652987}-\frac{2835000}{236141})\,\varepsilon^2-\frac{155054430\,Wi^2}{1652987}-\frac{1417500}{236141}\Bigg]$$

$$+\frac{20335805\,\varepsilon^6(\cos\theta)^6}{3778256}\Bigg[\frac{2550\varepsilon^{18}}{581023}+(Wi^2+\frac{54900}{581023})\,\varepsilon^{16}+(\frac{1424302393Wi^2}{56940254}+\frac{177900}{581023})\varepsilon^{14}$$

$$+\left(-\frac{1829546169\,Wi^2}{28470127}-\frac{213900}{581023}\right)\varepsilon^{12}+(-\frac{950372779\,Wi^2}{56940254}-\frac{1445850}{581023})\,\varepsilon^{10}$$

$$+\left(\frac{9253111340\,Wi^2}{28470127}-\frac{775200}{581023}\right)\varepsilon^8+\left(-\frac{6748098642\,Wi^2}{28470127}+\frac{2456400}{581023}\right)\varepsilon^6$$

$$+(-\frac{36525684584\,Wi^2}{28470127}+\frac{1929600}{581023})\,\varepsilon^4+\left(-\frac{10969133296\,Wi^2}{28470127}-\frac{1322400}{581023}\right)\varepsilon^2$$

$$-\frac{661565568Wi^2}{28470127}-\frac{864000}{581023}\Bigg]+\frac{3}{8}\varepsilon^5(\cos\theta)^5\Bigg[(Wi^2+\frac{52500}{236141})\,\varepsilon^{18}+(\frac{340179998\,Wi^2}{4958961}$$

$$+\frac{555625}{236141})\,\varepsilon^{16}+\left(\frac{2788117636\,Wi^2}{4958961}+\frac{1344875}{236141}\right)\varepsilon^{14}+(-\frac{1927937425Wi^2}{944564}-\frac{2231250}{236141})\,\varepsilon^{12}$$

$$+\left(\frac{18109240955\,Wi^2}{19835844}-\frac{11619125}{236141}\right)\varepsilon^{10}+(\frac{16759421713\,Wi^2}{2833692}-\frac{6141625}{236141})\,\varepsilon^8$$

$$+(-\frac{6635311191\,Wi^2}{1652987}+\frac{18942000}{236141})\,\varepsilon^6+(-\frac{136826988721\,Wi^2}{4958961}+\frac{17017000}{236141})\,\varepsilon^4$$

$$+\left(-\frac{44298669140\,Wi^2}{4958961}-\frac{9142000}{236141}\right)\varepsilon^2-\frac{137826160\,Wi^2}{236141}-\frac{8778000}{236141})\Bigg]$$

$$\frac{٩٥٧٧٥٥}{236141}\,\varepsilon^4(\cos\theta)^4\Bigg[\left(Wi^2+\frac{60375}{1532408}\right)\varepsilon^{18}+\left(\frac{363206783\,Wi^2}{21453712}+\frac{408975}{1532408}\right)\varepsilon^{16}$$

$$+(\frac{7187083473\,Wi^2}{214537120}+\frac{303975}{766204})\,\varepsilon^{14}+(-\frac{54912094541\,Wi^2}{214537120}-\frac{1744575}{1532408})\,\varepsilon^{12}$$

$$+\left(\frac{58427197193\,Wi^2}{214537120}-\frac{6089475}{1532408}\right)\varepsilon^{10}+(\frac{8173219113\,Wi^2}{21453712}-\frac{1441125}{766204})\,\varepsilon^8$$

$$+\left(-\frac{3039920185\,Wi^2}{10726856}+\frac{1155525}{191551}\right)\varepsilon^6+\left(-\frac{67137686771\,Wi^2}{26817140}+\frac{1255800}{191551}\right)\varepsilon^4$$

$$+\left(-\frac{6022513662\,Wi^2}{6704285}-\frac{431550}{191551}\right)\varepsilon^2-\frac{62021772\,Wi^2}{957755}-\frac{774900}{191551}\Bigg]$$

$$+\frac{118170455}{6611948}\,\varepsilon^3(\cos\theta)^3\Bigg[\left(Wi^2+\frac{18375}{1818007}\right)\varepsilon^{18}+(\frac{129973417\,Wi^2}{23634091}+\frac{187425}{3636014})\,\varepsilon^{16}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(-\frac{768423987\,Wi^2}{94536364}+\frac{753375}{23634091}\right)\varepsilon^{14}+\left(-\frac{7388708207\,Wi^2}{189072728}-\frac{5560275}{23634091}\right)\varepsilon^{12}\\
&+\left(\frac{7556773195\,Wi^2}{94536364}-\frac{11421900}{23634091}\right)\varepsilon^{10}+\left(\frac{2896537677\,Wi^2}{189072728}-\frac{7324275}{47268182}\right)\varepsilon^{8}\\
&+\left(-\frac{1487992349\,Wi^2}{47268182}+\frac{14979300}{23634091}\right)\varepsilon^{6}+\left(-\frac{16984551079\,Wi^2}{47268182}+\frac{1719900}{1818007}\right)\varepsilon^{4}\\
&+\left(-\frac{3580561236\,Wi^2}{23634091}-\frac{1705200}{23634091}\right)\varepsilon^{2}-\frac{276211040\,Wi^2}{23634091}-\frac{1323000}{1818007}\Bigg]\\
&+\frac{\text{۲۶۶۱۸۷۲۵۵}}{6611948}\varepsilon^2(\cos\theta)^2\Bigg[\left(Wi^2+\frac{106575}{35491634}\right)\varepsilon^{18}+\left(\frac{1027515817\,Wi^2}{1064749020}+\frac{226625}{17745817}\right)\varepsilon^{16}\\
&+\left(-\frac{6105861431\,Wi^2}{709832680}-\frac{20825}{17745817}\right)\varepsilon^{14}+\left(\frac{2593997537\,Wi^2}{1064749020}-\frac{1098825}{17745817}\right)\varepsilon^{12}\\
&+\left(\frac{7668107995\,Wi^2}{425899608}-\frac{2225825}{35491634}\right)\varepsilon^{10}+\left(-\frac{320710245\,Wi^2}{35491634}+\frac{115150}{17745817}\right)\varepsilon^{8}\\
&+\left(-\frac{479909861\,Wi^2}{532374510}+\frac{926100}{17745817}\right)\varepsilon^{6}+\left(-\frac{16957601204\,Wi^2}{266187255}+\frac{2920400}{17745817}\right)\varepsilon^{4}\\
&+\left(-\frac{2887332896\,Wi^2}{88729085}+\frac{931000}{17745817}\right)\varepsilon^{2}-\frac{140712320\,Wi^2}{53237451}-\frac{2940000}{17745817}\Bigg]\\
&+\cos\theta\Bigg[\left(\frac{617364205\,Wi^2}{13223896}+\frac{10500}{236141}\right)\varepsilon^{19}+\left(-\frac{130720605\,Wi^2}{1652987}+\frac{317625}{1889128}\right)\varepsilon^{17}\\
&+\left(-\frac{1789917055\,Wi^2}{13223896}-\frac{401625}{3778256}\right)\varepsilon^{15}+\left(\frac{4485611875\,Wi^2}{13223896}-\frac{202125}{236141}\right)\varepsilon^{13}\\
&+\left(-\frac{12272079825\,Wi^2}{105791168}-\frac{979125}{3778256}\right)\varepsilon^{11}+\left(-\frac{78088805Wi^2}{3778256}+\frac{527625}{944564}\right)\varepsilon^{9}\\
&+\left(-\frac{435465745\,Wi^2}{26447792}-\frac{160125}{472282}\right)\varepsilon^{7}+\left(-\frac{269340765Wi^2}{472282}+\frac{336000}{236141}\right)\varepsilon^{5}+\left(-\frac{87987200\,Wi^2}{236141}\right.\\
&\left.+\frac{322875}{236141}\right)\varepsilon^{3}+\left(-\frac{7507500\,Wi^2}{236141}-\frac{472500}{236141}\right)\varepsilon\Bigg]+\left(\frac{13125}{1889128}+\frac{149268851\,Wi^2}{6611948}\right)\varepsilon^{18}\\
&+\left(\frac{91875}{3778256}-\frac{2250261303\,Wi^2}{26447792}\right)\varepsilon^{16}+\left(-\frac{23625}{944564}+\frac{3089828299\,Wi^2}{26447792}\right)\varepsilon^{14}+\left(-\frac{485625}{3778256}\right.\\
&\left.-\frac{9056438425Wi^2}{105791168}\right)\varepsilon^{12}+\left(\frac{2094036615Wi^2}{26447792}+\frac{5250}{236141}\right)\varepsilon^{10}+\left(\frac{31500}{236141}-\frac{299018627Wi^2}{3778256}\right)\varepsilon^{8}\\
&+\left(-\frac{36750}{236141}+\frac{153955741\,Wi^2}{3305974}\right)\varepsilon^{6}+\left(\frac{28875}{236141}-\frac{17725692\,Wi^2}{236141}\right)\varepsilon^{4}\\
&+\left(\frac{63000}{236141}-\frac{9829400\,Wi^2}{236141}\right)\varepsilon^{2}-\frac{1155000\,Wi^2}{236141}-\frac{63000}{236141}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

مراجع

[1] White, Frank M., *Viscous fluid flow*, New York: McGraw-Hill, 2005.

[2] Richard Budynas, G., and J. Nisbett Keith. "Shigley's Mechanical Engineering Design 9." (2011).

[3] Beauchamp Tower, “First Report on Friction Experiments,” Proc. Inst. Mech. Eng., November 1883,pp. 632–666; “Second Report,” ibid., 1885, pp. 58–70; “Third Report,” ibid., 1888, pp. 173–205;“Fourth Report,” ibid., 1891, pp. 111–140.

[4] O. Reynolds, "On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, Including an experimental determination of the viscosity of olive oil," Proceedings of the Royal Society of London, vol. 40, pp. 191-203, 1886.

[5] Sommerfeld A (1904) Zur hydrodynamische theorie der schmiermittelreibung. Zeitschrift fur Mathematik und Physik 50: 97-155.

[6] D. Dowson, *History of tribology*: Addison-Wesley Longman Limited, 1979.

[7] Raimondi AA, Boyd J (1958) A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design III. ASLE Trans 1(1): 194-209.

[8] Raimondi AA, Boyd J (1958) A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design I. ASLE Trans 1(1): 159-174.

[9] Raimondi AA, Boyd J (1958) A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design II. ASLE Trans 1(1): 174-193.

[10] Raimondi A A., A numerical solution for the gas lubricated full journal bearing of finite length, ASLE Trans, Vol.4, 1961, pp.131-155.

[11] Reddi M M., Finite Element Solution for Incompressible Lubrication Problem, ASME J. Lubrication Technology, Vol. 91, 1969, pp. 524-533.

[12] M.M. Reddi, T.Y. Chu, Finite Element Solution of the Steady-State Compressible Lubrication Problem, JOLT, 92 Ser. F, (3) (1970) 495–503.

[13] Malik, M. 1984 Theoretical considerations of molecular mean free path influenced slip in selfacting gas-lubricated plain journal bearings Proceedings of the

Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 198, 25-31.

[14] D. Sfyris, A.Chasalevris, An exact analytical solution of the Reynolds equation for the finite journal bearing lubrication, Tribology International, Volume 55 (2012) 46–58.

[15] A. Chasalevris, D. Sfyris, Evaluation of the finite journal bearing characteristics, using the exact analytical solution of the Reynolds equation, Tribology International 57 (2013) 216–234.

[16] T.V.V.L.N. Rao, A.M.A.Rani, T.Nagarajan, F.M.Hashim., Analysis of slider and journal bearing using partially textured slip surface, Tribology International 56 (2012) 121–128.

[17] Gustavo G. Vignolo, Daniel O. Barila´, Lidia M. Quinzani,. Approximate analytical solution to Reynolds equation for finite length journal bearings, Tribology International 44 (2011) 1089–1099.

[18] Ru-Zhi Gong, De-You Li, Hong-Jie Wang, Lei Han and Da-Qing Qin., Analytical solution of Reynolds equation under dynamic conditions, Proc IMechE Part J: J Engineering Tribology, Volume: 230 issue: 4, page(s): 416-427, 2015.

[19] Jang JY, Khonsari MM. On the characteristics of misaligned journal bearings. Lubricants 2015;3(1):27–53.

[20] Ram N, Sharma S. A study of misaligned hole-entry worn journal bearing operating in turbulent regime. Ind Lubr Tribol 2013;65(2):108–18.

[21] Ram N, Sharma S. Influence of wear on the performance of hole-entry hybrid misaligned journal bearing in turbulent regime. Ind Lubr Tribol 2014;66(4):509–19.

[22] Shenoy SB, Pai R. Theoretical investigations on the performance of an externally adjustable fluid-film bearing including misalignment and turbulence effects. Tribol Int 2009;42(7):1088–100.

[23] Biao Li, Jun Sun, Shaoyu Zhu, Yangyang Fu, Xiaoyong Zhao, Hu Wang, Qin Teng, Yanping Ren, Yunqiang Li, Guixiang Zhu. Thermohydrodynamic lubrication analysis of misaligned journal bearing considering the axial movement of journal, Tribology International 135 (2019) 397–407.

[24] H.A. Barnes, J.F. Hutton, K. Walters, An Introduction to Rheology, Elsevier, Amsterdam, 1989.

[25] T.W. Bates, B.P. Williamson, J.A. Spearot, C.K. Murphy, A correlation between engine oil rheology and oil film thickness in engine journal bearing, Soc. Automotive Eng., Paper No. 860376, 1986.

[26] Horowitz H.H. and Steidler F,E. Calculated Performance of Non-Newtonian Lubricants in Finite Width Journal Bearings. ASLE' Trans, 1961, 4, 275-28.

[27] Tanner R.I. Short Bearing Solution for Pressure Distribution a Non-Newtonian Lubricant, J. Applied Mechanics, ASME Trans, 1964, 350-351.

[28] Y. C. Hsu, Non-newtonian flow in infinite length full journal bearing, J. Lub. Teeh., ASME Trans, 1967, 329-333.

[29] Wada, Sanae, and Hirotsugu Hayashi. "Hydrodynamic lubrication of journal bearings by pseudo-plastic lubricants: part 1, theoretical studies." *Bulletin of JSME* 14.69 (1971): 268-278.

[30] Wada, Sanae, and Hirotsugu HAYAsHI. "Hydrodynamic lubrication of journal bearings by pseudo-plastic lubricants: part 2, experimental studies." *Bulletin of JSME* 14.69 (1971): 279-286.

[31] Swami S. T. N., Prabhu B. S. and Rao B. V. A., "Calculated load capacity of non Newtonian lubricants in finite width journal bearings", Wear, vol. 31, pp. 277-285, 1975.

[32] Swami S. T. N., Prabhu B. S. and Rao B. V. A., "Stiffness and damping characteristics of finite width journal bearings with a non-Newtonian film and their application to instability prediction", *Wear,* vol. 32, 379-391, 1975.

[33] Das S., Guha S.K. and Chattopadhyay A.K., "On the steady-state performance of misaligned hydrodynamic journal bearings lubricated with micropolar fluids." tribology International , vol. 35, pp. 201-210, 2002.

[34] Das S., Guha S.K. and Chattopadhyay A.K., "Linear stability analysis of hydrodynamic journal bearings under micropolar lubrication", tribology International, vol. 37,pp. 500-507, 2005.

[35] D.Rh. Gwynllyw, T.N. Phillips, The influence of Oldroyd-B and PTT lubricants on moving journal bearing systems, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 150 (2008) 196–210.

[36] K.P. Gertzos, P.G. Nikolakopoulos, C.A. Papadopoulos, CFD analysis of journal bearing hydrodynamic lubrication by Bingham lubricant, Tribology International 41 (2008) 1190– 1204.

[37] Wierzcholski, K. (2010). The viscoelastic lubrication problem of micro bearing. Tribologia (Poland), 41(3), 231-240.

[38] Guemmadi, M., & Ouibrahim, A. (2011). Generalized maxwell model as viscoelastic lubricant in journal bearing. In Key Engineering Materials (Vol. 478, pp. 64 69). Trans Tech Publications.

[39] Tichy, J. A., 1996, ''Non-Newtonian Lubrication With the Convective Maxwell Model,'' ASME J. Tribol., 118(2), pp. 344–349.

[40] Huang, P., Li, Zhi-Heng, Meng, Yong-Gang, and Wen, Shi-Zhu, 2002, ''Study on Thin Film Lubrication With Second-Order Fluid,'' ASME J. Tribol., 124, pp. 547–552.

[41] Akyildiz, F. T., & Bellout, HViscoelastic lubrication with Phan-Thein Tanner fluid (PTT). Journal of tribology, 126(2), 288-291, 2004.

[42] S.H. Hashemabadi and S.M. Mirnajafizadeh, Analytical Solution of Simplified Phan-Thien Tanner Fluid between Nearly Parallel Plates of a Small Inclination. Journal of Applied Sciences, 7: 1271-1278, 2007.

[43] Xin Kai Li, Yingshe Luo, Yuanwei Qi, Rong Zhang, On non-Newtonian lubrication with the upper convected Maxwell model, Elsevie, Applied Mathematical Modelling., 35, pp. 2309–2323, 2011.

[44] Abdessamed Nessil, Salah Larbi, Hacene Belhaneche, andMaamar Malki, Journal Bearings Lubrication Aspect Analysis Using Non-Newtonian Fluids, Advances in Tribology Volume 2013, Article ID 212568, 9 pages.

[45] Xin Kai Li, Non-Newtonian lubrication with the Phan-Thien–Tanner mode, J Eng Math (2014), Volume 87, pp. 1–17.

[46] Giesekus, H., ''A Simple Constitutive Equation for Polymer Based on the Concept of the Deformation Dependent Tensorial Mobility,'' J. Non-Newtonian Fluid Mech., **11**, pp. 69–109. 1982.

[47] Bird, R. B., Dotson, P. J., and Johnson, N. L., 1980, ''Polymer Solution Rheology Based on a Finitely Extensible Bead-Spring Chain Model,'' J. Non-Newtonian Fluid Mech., **7**, pp. 213–235.

[48] Phan-Thein, N., and Tanner, R. I., 1977, ‘‘A New Constitutive Equation Derived From Network Theory,’’ J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2, pp. 353–365.

[49] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, Dynamics of Polymetric Liquids: Fluid Mechanics, Wiley, New York, 1987.

[50] Bird, R.B. and Wiest, J.M., "Constitutive equations for polymeric liquids", Annu. Rev. Fluid Mech,Vol. 27, pp. 169–193, (1995).

[51] علیرضا حسین‌نژاد دوین، متد Perturbation و کاربرد آن در مهندسی مکانیک، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۹۹۰

[52] Irgens, Fridtjov. *Rheology and non-newtonian fluids*. New York: Springer International Publishing, 2014.

[53] Bingham, E. C. "Fluidity and Plasticity, McGraw-Hill, New York, 1922."

[54] Tanner, Roger I., and Kenneth Walters. "Hanswalter Giesekus 1922–2017." (2018): 691-692.

[55] Cherizol, Robenson, Mohini Sain, and Jimi Tjong. "Review of non-Newtonian mathematical models for rheological characteristics of viscoelastic composites." *Green and Sustainable Chemistry* 5.01 (2015): 6.

[56] J.Y. Yoo, H.C. Choi, On the steady simple shear flows of the one-mode Giesekus fluid, Rheol. Acta 28 (1989) 13–24.

[57] N. Phan-Thien, “Understanding Viscoelasticity. Basics of Rheology,” Advanced Texts in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[58] Raisi, Ahmadreza, et al. "An approximate solution for the Couette–Poiseuille flow of the Giesekus model between parallel plates." *Rheologica Acta* 47.1 (2008): 75-80.

Abstract

Lubrication theory has extensive applications in fluid mechanics which one of the most important that is in the field of design bearing types. Studying in this field helps researchers in the design of bearing and determine their best working conditions. Research shows that by adding polymeric materials to mineral oils and changing the behavior of Newtonian fluid to viscoelastic materials lubricant, cause to observe an excellent performance in the lubrication system. Therefore, to study the actual behavior of a viscoelastic lubricant, it was necessary to analyze this problem by applying efficient models in the non-Newtonian field. In the present study, the problem of lubrication for journal and slider bearings was investigated using the nonlinear viscoelastic model of Giesekus and the perturbation theory selected as the solution strategy. The results show that by using a viscoelastic lubricant as a replacement for a Newtonian fluid, make to have a significant increase in the pressure distribution. As a result, cause to increase load capacity on the bearing from the side of the shaft. Another point is that by increasing the mobility parameter and thinning of the fluid in the Gaussian model, we experience a drop in pressure from the viscoelastic fluid on the bearing surfaces. Finally, it is observed that by decreasing the slope and narrowing the crossing space for the flow in the slider bearings, and also by increasing the eccentricity ratio in the journal bearing, the pressure applied by the viscoelastic fluid to the bearing walls increases.

Keywords: Bearing lubrication, Sliding bearing, Journal bearing, Giesekus model, Viscoelastic fluid, non-Newtonian, Perturbation theory.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

A Thesis submitted in partial Fulfillment of the Requirement for
The Degree of master of Science In
Mechanical Engineering

Analysis of viscoelastic lubrication for journal bearing using the Giesekus model

By: Ali Abbaspur

Supervisor:
Dr. Mahmood Norouzi

Advisor:
Dr. Pooria Akbarzadeh

January 2020