بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

محاسبه ضرایب شدت تنش برای یک ترک لبه‌ای در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن کوپل کامل میدان‌های جابجایی، دما و رطوبت و با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته

دانشجو:

آرمین غلامی

استادان راهنما:

دکتر محمدباقر نظری

دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی

شهریور ماه ۱۳۹۸

شماره: ۱۳۰/۲۹۸/پ/د
تاریخ: ۹۸/۷/۲۰

باسمه‌تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **آرمین غلامی** با شماره دانشجویی **۹۴۱۳۰۰۴** رشته **مهندسی مکانیک** گرایش **طراحی کاربردی** تحت عنوان **محاسبه ضرایب شدت تنش برای یک ترک لبه‌ای در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن کوپل کامل میدان‌های جابجایی، دما و رطوبت و با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته** که در تاریخ **۱۳۹۸/۰۶/۱۶** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: خوب) ☑ **مردود** ☐

نوع تحقیق: **نظری** ■ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر محمد باقر نظری	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی	استادیار	عدم حضور
۳- استاد مشاور	----	----	----
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی وحدتی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر مهدی قناد کهتویی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر محمد جعفری	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

۳

با افتخار این پایان‌نامه را تقدیم می‌کنم به:

آنان که شوق دیدار نگاه مهربانشان پیمودن مسیرهای دشوار زندگی را آسان می‌سازد و خستگی‌ها در سایه دستانشان رنگ می‌بازد.

تشکر و قدردانی

شکر شایان نثار پروردگار بی‌همتا که دستانم را برای به پایان بردن این مجموعه توانا ساخت.

با امتنان بی کران مراتب سپاس خود را به اساتید گرانقدرم آقایان دکتر محمد باقر نظری و دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی ابراز می‌نمایم که به مدد استفاده از بار علمی و همیاری ایشان انجام این مجموعه میسر گردید.

با سپاس از الطاف جناب آقای مهندس هادی بیات که با همراهی خود در لحظات دشوار نگارش پایان‌نامه با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی دریغ ننمودند.

بسی شایسته است از پدر و مادر دلسوز، همسر مهربانم و دوستانی که سرچشمه زلال محبت‌اند و همواره بی‌دریغ به یاری‌ام شتافته‌اند سپاسگزاری نمایم. همراهی با چنین عزیزانی مایه فخر و مباهات خواهد بود.

تعهد نامه

اینجانب **آرمین غلامی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی** دانشکده **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه **محاسبه ضرایب شدت تنش برای یک ترک لبه‌ای در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن کوپل کامل میدان‌های جابجایی، دما و رطوبت و با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته** تحت راهنمایی **دکتر محمدباقر نظری و دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی** متعهد می‌شوم:

* تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است.

* در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

* مطالب مندرج در پایان نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.

* کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.

* حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.

* در کلیه مراحل انجام این پایان نامه در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

* کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و ...) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد.

* استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، از روش اجزاء محدود توسعه یافته به منظور محاسبه ضرایب شدت تنش برای یک ترک لبه‌ای ساکن در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی استفاده‌شده است. در معادلات حاکم کوپل کامل میدان‌های جابجایی، دما و رطوبت در نظر گرفته‌شده است. قوانین فوریه و فیک به ترتیب برای شار گرما و رطوبت استفاده گردید. برای اعمال اثر دما بر رطوبت از معادله شار سورت استفاده شده‌است. از روش انتگرال برهمکنش برای بارهای گرمایی-رطوبتی به منظور به دست آوردن ضرایب شدت تنش استفاده گردید. معادلات حاکم با استفاده از روش گلرکین گسسته‌سازی شده و سپس با استفاده از روش انتگرال‌گیری نیومارک در قلمرو زمان حل شده‌اند. در چند مثال عددی، اثر شوک حرارتی و رطوبتی روی ضرایب شدت تنش و همچنین توزیع دما و رطوبت نوک ترک بررسی شده‌است. بر اساس نتایج، از ابتدای اعمال بارگذاری تا رسیدن موج تنش به نوک ترک شاهد افزایش ضریب شدت تنش خواهیم بود و در حین عبور این موج تغییرات ضریب شدت تنش کاهش یافته و پس از گذر موج تنش شاهد کاهش سریع ضریب شدت تنش هستیم. همچنین ضریب شدت تنش وابسته به زاویه ترک بوده و هرچه زاویه بیشتر باشد بیشینه مقدار ضریب شدت تنش مود اول کاهش و بیشینه ضریب شدت تنش مود دوم افزایش می‌یابد. مقدار سورت نیز علاوه بر تاثیر بر روند انتشار رطوبت، روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش اثر گذار است.

کلیدواژگان

تنش‌های هایگروترمال، روش اجزای محدود توسعه یافته ،ضرایب شدت تنش، انتگرال برهم‌کنش

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه ۱

۱-۱- مقدمه ۲

۱-۲- مروری بر مطالعات پیشین ۲

۱-۳- نوآوری ۹

فصل دوم

روش اجزا محدود توسعه یافته ۱۱

۲-۱- مقدمه ۱۲

۲-۲- روش اجرا محدود توسعه یافته ۱۲

۲-۳- مدل‌سازی ترک در روش اجزا محدود توسعه یافته ۱۴

۲-۴- انتگرال‌گیری عددی ۱۹

فصل سوم

استخراج معادلات حاکم ۲۳

۳-۱- مقدمه ۲۴

۳-۲- معادلات حاکم ۲۴

۳-۳- گسسته‌سازی معادلات حاکم ۳۰

۳-۴- روش نیومارک ۵۴

۳-۵- سیستم معادلات خطی ۵۷

فصل چهارم

انتگرال برهمکنش ۵۹

۴-۱- انتگرال برهمکنش ۶۰

فصل پنجم

نتایج عددی و بحث ۶۷

۵-۱- مقدمه ۶۸

۵-۲- حل تحلیلی صفحه مستطیلی ایزوتروپیک ۶۸
۵-۳- صفحه‌ای مستطیلی شامل ترک عمود لبه‌ای تحت بارگذاری هایگروترمال متقارن ۷۹
۵-۴- صفحه‌ای مستطیلی شامل ترک عمود لبه‌ای تحت بارگذاری هایگروترمال نامتقارن ۸۵
۵-۵- صفحه‌ای مستطیلی شامل ترک زاویه‌دار تحت بارگذاری هایگروترمال ۹۰

فصل ششم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها ۱۰۱

۶-۱- نتیجه‌گیری ۱۰۲
۶-۲- پیشنهادها ۱۰۳

فهرست مراجع ۱۰۴

فهرست شکل‌ها

شکل ۲-۱- مش بندی یک صفحه برای روش (الف) المان محدود توسعه یافته و (ب) المان محدود استاندارد ۱۲

شکل۲-۲- یک ترک دلخواه در یک شبکه با المان‌های غنی شده مسیر ترک که گره‌های آن با دایره و المان‌های غنی شده نوک ترک که گره‌های آن با مربع مشخص شده‌اند ۱۵

شکل ۲-۳- مختصات قطبی حوزه نوک ترک ۱۶

شکل ۲-۴- تقسیم‌بندی المان‌های مسیر ترک برای انتگرال‌گیری عددی (الف) استفاده از المان‌های مثلثی (ب) استفاده از المان‌های مربعی کوچکتر ۲۰

شکل ۲-۵- تقسیم‌بندی المان شامل نوک ترک برای انتگرال‌گیری عددی ۲۱

شکل ۴-۱- تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به فرم ناحیه‌ای ۶۱

شکل ۵-۱- باریکه ایزوتروپیک تحت بارگذاری هایگروترمال ۶۹

شکل ۵-۲- مقایسه نتایج عددی و تحلیلی دما در طول صفحه برای زمان بی‌بعد t= 0.005 ......۷۷
شکل ۵-۳- مقایسه نتایج عددی و تحلیلی رطوبت در طول صفحه برای زمان بی‌بعد t= 0.005 ......۷۷
شکل ۵-۴- مقایسه نتایج عددی و تحلیلی دما در طول صفحه برای زمان بی‌بعد t= 1.5 ......۷۸
شکل ۵-۵- مقایسه نتایج عددی و تحلیلی رطوبت در طول صفحه برای زمان بی‌بعد t= 1.5 ......۷۸
شکل ۵-۶- یک صفحه ایزوتروپیک محدود دارای ترک لبه‌ای عمود تحت بارگذاری متقارن حرارتی-رطوبتی ۸۰
شکل ۵-۷- مقایسه دمای نوک ترک برای حساسیت‌های مختلف مش ۸۰
شکل ۵-۸- مقایسه غلظت نوک ترک برای حساسیت‌های مختلف مش ۸۱
شکل ۵-۹- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای حساسیت‌های مختلف مش ۸۱
شکل ۵-۱۰- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای گام‌های مختلف زمانی ۸۲
شکل ۵-۱۱- مقایسه دمای نوک ترک در مقدارهای مختلف سورت ۸۳
شکل ۵-۱۲- مقایسه غلظت نوک ترک در مقدارهای مختلف سورت ۸۳
شکل ۵-۱۳- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول در مقدارهای مختلف سورت ۸۴
شکل ۵-۱۴- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف ۸۴
شکل ۵-۱۵- یک صفحه ایزوتروپیک محدود دارای ترک لبه‌ای عمود تحت بارگذاری نامتقارن حرارتی-رطوبتی ۸۶
شکل ۵-۱۶- مقایسه دمای نوک ترک برای حساسیت‌های مختلف مش ۸۷
شکل ۵-۱۷- مقایسه غلظت نوک ترک برای حساسیت‌های مختلف مش ۸۷
شکل ۵-۱۸- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای حساسیت‌های مختلف مش ۸۸
شکل ۵-۱۹- مقایسه ضریب شدت تنش مود دوم برای حساسیت‌های مختلف مش ۸۸
شکل ۵-۲۰- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف ۸۹
شکل ۵-۲۱- مقایسه ضریب شدت تنش مود دوم برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف ۹۰
شکل ۵-۲۲- یک صفحه ایزوتروپیک محدود دارای ترک لبه‌ای مایل تحت بارگذاری متقارن حرارتی-رطوبتی ۹۱
شکل ۵-۲۳- مقایسه دمای نوک ترک در ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف ۹۲

شکل ۵-۲۴- مقایسه غلظت نوک ترک در ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف ۹۲

شکل ۵-۲۵- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف ۹۳

شکل ۵-۲۶- مقایسه ضریب شدت تنش مود دوم برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف ۹۳

شکل ۵-۲۷- مقایسه دمای نوک ترک در مقدارهای مختلف سورت ۹۴

شکل ۵-۲۸- مقایسه غلظت نوک ترک در مقدارهای مختلف سورت ۹۵

شکل ۵-۲۹- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول در مقدارهای مختلف سورت ۹۵

شکل ۵-۳۰- مقایسه ضریب شدت تنش مود دوم در مقدارهای مختلف سورت ۹۶

شکل ۵-۳۱- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول در زاویه‌های مختلف ترک ۹۷

شکل ۵-۳۲- مقایسه ضریب شدت تنش مود دوم در زاویه‌های مختلف ترک ۹۷

شکل ۵-۳۳- یک صفحه ایزوتروپیک محدود دارای ترک لبه‌ای مایل تحت بارگذاری نامتقارن حرارتی-رطوبتی........ ۹۸

شکل ۵-۳۴- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول در دو حالت بارگذاری متقارن و نامتقارن........ ۹۸

شکل ۵-۳۵- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول در دو حالت بارگذاری متقارن و نامتقارن........ ۹۹

فهرست جدول‌ها

جدول۵-۶- شرایط اولیه و مرزی دما و رطوبت ۶۹

جدول۵-۲- شرایط اولیه و مرزی دما و رطوبت ۷۱

جدول۵-۳- خواص فیزیکی صفحه ۷۶

فهرست علامت‌ها

$\mathrm{a_n}$	بردار مجهولات گره‌ای
$\mathrm{b_n}$	بردار مجهولات گره‌ای
b_i	پارامترهای مجهول برای تنظیم غنی‌سازی
$\mathrm{c_{nm}}$	بردار مجهولات گره‌ای
$\mathrm{N_A}$	مجموعه تمام گره‌های شبکه المان
$\mathrm{N_C}$	مجموعه گره‌های المان‌های نوک ترک
$\mathrm{N_H}$	مجموعه گره‌های اطراف مسیر ترک
D_T	ضریب هدایت گرما
D_m	ضریب انتشار رطوبت
F_m	مجموعه توابع غنی‌سازی نوک ترک
J^{aux}	مقدار انتگرال J برای میدان کمکی
K_I	ضریب شدت تنش مد اول
K_{II}	ضریب شدت تنش مد دوم
K_T	ضریب شدت تنش حرارتی، ($\mathrm{N.m^{-1.5}}$)
K_m	ضریب شدت تنش رطوبتی
N_i	توابع شکل روش اجزا محدود استاندارد
S_T	مقدار سورت
T_r	بردار نیروی سطحی بر واحد سطح

a_c	ضریب انبساط رطوبتی
a_t	ضریب انبساط حرارتی
c_e	گرمای ویژه
f_i	بردار نیروی کالبدی
w_i	توابع وزنی
w^{int}	تابع چگالی انرژی کرنشی برهمکنش
δ_{ij}	دلتای کرونکر
ϕ_i	توابع شکل
$[C]$	ماتریس میرایی
$[D]$	ماتریس خواص
$[K]$	ماتریس سفتی
$[M]$	ماتریس جرم
$\{F\}$	بردار نیروهای گره‌ای
$\{\Delta\}$	بردار مجهولات گره‌ای
A	مساحت المان
u و v	جابجایی در جهت محورهای افقی و عمودی
β و γ	به ترتیب تعیین کننده مشخصه‌های پایداری و دقت الگوریتم در روش نیومارک
Γ	مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J
ε	تانسور کرنش
μ و λ	ضرایب لامه

ν	نسبت پواسون
σ	تانسور تنش
Φ	تابع شکل غنی‌سازی شده برای المان‌های مسیر ترک
ψ	تابع غنی‌سازی
Ψ	تابع شکل غنی‌سازی شده برای المان‌های نوک ترک
Ω	محدوده غنی‌سازی
D	ضریب انتشار رطوبت
E	مدول یانگ
$H(Z)$	تابع هویساید
J	انتگرال J، (N/m)
L	طول مشخصه
M	انتگرال برهمکنش
T	میدان دما
V	سرعت مشخصه
W	چگالی انرژی کرنشی مکانیکی
Z	تابع فاصله علامت‌دار، (m)
a	پارامتر اثر حرارتی-رطوبتی
b	پارامتر اثر رطوبتی
c	میدان رطوبت
k	ضریب هدایت گرما

nQ	تعداد نقاط گوسی
r و φ	محورهای مختصات محلی نوک ترک
rc	پارامتر تعریف شده با رابطه (۲-۲۲)
rs	پارامتر تعریف شده با رابطه (۲-۲۳)
ξ	مقادیر نقاط گوسی در انتگرال‌گیری گاوس
ρ	چگالی

فصل اول

مقدمه

۱-۱- مقدمه

ترک یکی از پدیده‌هایی است که به صورت متداول در سازه‌ها و قطعات در مقیاس‌های مختلف ایجاد می‌شود و از آنجایی که این پدیده بر عملکرد و عمر سازه تاثیرگذار است و عدم شناخت آن می‌تواند منجر به خسارت‌های مالی و جانی گردد، بررسی و تحلیل مشخصه‌های آن حائز اهمیت است. ترک می‌تواند بر اثر عوامل مختلفی ایجاد گردد که به عنوان مثال می‌توان به ضعف در مواد سازنده، عیوب ساختاری، شرایط کاری و مدت زمان کارکرد سازه یا قطعه اشاره کرد. یکی از شرایط محیطی که اکثر سازه‌ها و قطعات با آن مواجه هستند میدان‌های دما و رطوبت است. این شرایط که موجب ایجاد تنش هایگروترمال[1] می‌شود خود تحت تاثیر عوامل مختلفی مانند چرخه شبانه روز، تغییرات آب و هوا است و به همین دلیل بررسی رفتار ترک در مقابل تنش‌های هایگروترمال به منظور دستیابی به طراحی دقیق‌تر، ارزیابی ایمنی و طول عمر و ... دارای اهمیت است. از جمله مثال‌هایی که بررسی این تنش در آن‌ها اهمیت بیشتری دارد می‌توان به تنش‌های ایجاد شده در هنگام ساخت مواد مرکب، هنگام ساخت و خشک شدن سازه‌های بتنی، سازه‌ها و قطعاتی که در مجاورت آب و یا محیط‌هایی با رطوبت بالا به کار برده می‌شوند و همچنین پیل‌های سوختی و مبدل و یا ذخیره‌کننده‌هایی با ساختار مشابه اشاره کرد.

۱-۲- مروری بر مطالعات پیشین

در علوم مهندسی، تاثیر میدان‌های دما و رطوبت بر رفتار مواد، انکار ناپذیر است و گاهی تغییرات این میدان‌ها از دلایل عمده آسیب‌های شدید فیزیکی در نظر گرفته می‌شوند [۱]. اهمیت این موضوع از سال‌ها پیش مورد توجه قرار گرفت [۲-۴] و محققان تحقیقات بسیاری را در این زمینه انجام داده‌اند [۵-۹]. به منظور مطالعه یک جسم جامد تحت تاثیر دما و رطوبت از تحلیل هایگروترموالاستیسیته[2] استفاده می‌گردد. در تئوری هایگروترموالاستیسیته رابطه میان تغییر شکل مکانیکی و انتشار دما و

[1] Hygrothermal
[2] Hygrothermoelastic

رطوبت به صورت ریاضی بیان شده است. این تئوری ادغامی از تئوری الاستیسیته، تئوری انتشار رطوبت و انتقال حرارت است، در واقع این تئوری به تاثیر رطوبت و دما بر تنش‌ها و جابجایی‌های الاستیک در انواع مواد می‌پردازد. در اکثر پژوهش‌ها، مسائل هایگروترموالاستیک به صورت غیر کوپل در نظر گرفته شده است، به این معنی که ابتدا میدان‌های رطوبت و دما توسط قانون فیک[1] و فوریه بدست می‌آید و سپس به بررسی خیز ناشی از جذب رطوبت و انتقال حرارت و در ادامه به محاسبه تنش هایگروترمال ایجاد شده توسط این خیز پرداخته می‌شود. در ادامه‌ی تحقیقات فوریه [۱۰]، فیک نشان داد که انتشار رطوبت در مواد جامد از قوانین انتقال حرارت پیروی می‌کند و سپس محققان دیگر به این نتیجه دست یافتند که ضرایب انتقال حرارت و انتشار رطوبت وابسته به دما است [۱۱]. به صورت کلی می‌توان گفت رابطه‌ای میان انتشار حرارت و انتشار رطوبت برقرار است، اما همواره حرارت اندکی سریع‌تر از رطوبت به پایداری می‌رسد [۱۲و۱۳].

به دلیل دشوار بودن ساخت مدل‌های ریاضی و حل‌های تئوری، حل‌های عددی با توسعه کامپیوترها پیشرفت چشمگیری داشتند و روش‌های المان محدود نیز در این راه نقش بسزایی ایفا کردند. گرچه تاکنون مدل‌های بسیاری برای این شرایط عرضه شد، اما به منظور دست یافتن به نتایج مطلوب‌تر و منطبق بر واقعیت بهتر است کوپل میان میدان‌های دما، رطوبت و الاستیسیته در معادلات حاکم لحاظ گردد. تحلیل کوپل کامل میدان‌ها از آن جهت حائز اهمیت است که می‌تواند منجر به فهم بهتر نتایج بدست آمده از روابط تئوری و آزمایشگاهی گردد و از لحاظ فیزیکی تفسیر درستی را در اختیار گذارد. هارت‌رانف و سی [۱۴] و همچنین، سی و شی و چاو [۱۵]، مسئله توزیع رطوبت و دما در یک صفحه کامپوزیت ضخیم با فرض کوپل بین دما و رطوبت را حل کردند. البته این مدل براساس انطباق نتایج آن با نتایج آزمایشگاهی و به صورت تجربی به دست آمده و در آن، از اثر میدان جابجایی بر میدان‌های دما و رطوبت صرف‌نظر شده است. یانگ و همکاران با در نظر گرفتن این مدل و با استفاده از روش

[1] Fick’s Law

تبدیل لاپلاس-تفاضل محدود، اثر کوپل میدان‌های دما و رطوبت بر تنش‌های گذرا در یک استوانه جدار ضخیم بلند را به دست آوردند [۱۶]. تئوری خطی کوپل گرما و رطوبت برای بررسی رفتار گذرا در یک استوانه با طول بی‌نهایت تعمیم داده شد [۱۷و۱۸]. زِکِرِس [۱۹]، روش مطالعه موثری بر روی کوپل میدان گرما و رطوبت ارائه داد که در آن معادلات حاکم برای برخی مسائل عرضه شد. همچنین، زکرس و اِنگل‌برشت [۲۰] با توجه به تشابه انتشار گرما و رطوبت، معادلات حاکم هایگروترموالاستیسیته را استخراج کردند. در این معادلات، میدانهای جابجایی، رطوبت و دما اثر متقابل دارند. آنالیز هایگروترمال ورق کامپوزیت چندلایه با روش المان محدود توسط سینفرا و همکاران انجام گرفت. آن‌ها با در نظر گرفتن آنالوژی میان انتشار رطوبت و انتقال حرارت روشی که برای حل مسائل انتقال حرارت استفاده می‌شد را گسترش دادند تا مسائل هایگروالاستیک پایا را نیز شامل گردد [۲۱]. اُبید و همکاران [۲۲] از روش‌های عددی ترکیبی بر اساس تئوری المان محدود برای گسسته‌سازی فضا، روش تفاضلات محدود برای گسسته‌سازی زمان، روش نیوتون رافسون برای محاسبات غیرخطی و تئوری مکانیک مواد متخلخل به منظور استخراج معادلات حاکم استفاده کردند. گاوین و همکاران نیز با استفاده از یک مدل هایگروترموالاستیسیته برای بتن، تنش‌های دمایی و رطوبتی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها به منظور بررسی گسیختگی و فروپاشی و شبیه‌سازی فرآیند تولید، بتن را ماده‌ای متخلخل چندفازی در نظر گرفتند [۲۳]. بری و همکاران مدلی برای تحلیل کوپل ترمومکانیک بتن‌ها توسعه دادند. مطالعات آن‌ها بر روی رفتار گذرای بتن‌ها تحت اثر دماهای معتدل صورت گرفت [۲۴]. بینس و استفان دیوارهای بتنی تحت بار ترمومکانیک را در دماهای بالا با به کارگیری المان محدود به منظور گسسته سازی فضا و روش نیمه صریح برای گسسته سازی دامنه زمان، تحلیل نمودند [۲۵].

امروزه سازه‌های لایه‌ای، مانند ورق‌های کامپوزیت استفاده گسترده‌ای در صنایع مختلف مانند هوا و فضا دارند. این دسته از سازه‌ها معمولا تحت شرایط محیطی سخت همچون دمای بالا و رطوبت زیاد قرار می‌گیرند که موجب تغییر خواص مواد سازنده و همچنین کاهش استقامت پلیمر و فیبرهای تشکیل

دهنده آن می‌گردد [۱۱و۲۶]. تنش باقی مانده توسط بار هایگروترمال نیز مسئله‌ای مهم در طراحی سازه‌های کامپوزیتی به شمار می‌رود. بِنکداد و همکاران روند انتشار رطوبت را در ورق‌های کامپوزیتی تنها با در نظر گرفتن ضخامت آن مطالعه کردند که منجر به مسئله انتشار یک بعدی شد و تمرکز رطوبت در لحظه مورد نظر توسط روش تفاضل محدود محاسبه گشت [۲۷و۲۸]. همچنین همین روش برای بررسی تنش هایگروسکوپیک گذرا در ورق‌های کامپوزیتی چند لایه یک جهته تحت شرایط محیطی متقارن و نامتقارن توسط تونسی و همکاران [۲۹-۳۲] به کار برده‌شد. پاتل و لوو نیز پاسخ استاتیک ورق‌های چندلایه را با در نظر گرفتن دگرگونی خواص مواد تحت تغییرات دما و رطوبت تحلیل نمودند [۳۳]. آنالیز سه‌بعدی توسط رائو و سینها برای بررسی تاثیرات دما و رطوبت بر روی ارتعاشات آزاد کامپوزیت چندجهتی اعمال شد که در آن از المان چهاروجهی ایزوپارامتریک با ۲۰ گره بهره بردند [۳۴]. بِنخِدا و همکاران [۳۵] مدلی را پیشنهاد دادند تا تنش‌های هایگروترموالاستیک را در ورق‌های کامپوزیتی چند لایه ارزیابی کنند. کوندا و هان با استفاده از المان محدود غیرخطیِ هندسی بر روی آنالیز هایگروترموالاستیسیته پوسته‌های کامپوزیتی با انحنای زیاد، به منظور بررسی رفتار ارتعاشیِ پیش و پس از کمانش آن‌ها مطالعه کردند [۳۶]. اوپادیا و همکاران حل تحلیلی بر اساس سری چبیشف به منظور بررسی پاسخ خمشی غیرخطی ورق مستطیل شکل کامپوزیتی چندلایه نسبتا ضخیم با تکیه‌گاه الاستیک ارائه دادند. آن‌ها ورق را تحت بار هایگروترمومکانیک در نظر گرفتند. تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا و سینماتیک غیرخطی فون-کارمن در تحلیل آن‌ها استفاده شد [۳۷]. آنالیز بارگذاری هایگروترمومکانیک بر روی پاسخ خمشی ورق‌های FG[۱] قرار گرفته روی تکیه‌گاه الاستیک توسط زنکور بررسی شد [۳۸]. حل تحلیلی توسط چیبا و سوگانو برای ورق‌های لایه‌ای تحت کوپل دمایی رطوبتی ارائه شد. آن‌ها کوپل انتشار دما و رطوبت را فرمول بندی کرده و سپس به وسیله راه حل پیشنهادی خود به حل مسئله پرداختند [۳۹]. تحلیل تنش خمشی به وجود آمده توسط کوپل میدان گرما و رطوبت برای ورق دایره‌ای تو خالی با ضخامت متغیر در راستای شعاعی بر اساس تئوری تیرهای کیرشهف

[1] Functionally Graded

توسط ماشات و زنکور ارائه شد [۴۰]. زیدی و همکاران به مطالعه خمش هایگروترمومکانیک ورق FG که روی تکیه‌گاه الاستیک قرار گرفته، با استفاده از تئوری چهار متغیره پالوده شده ورق و بدون استفاده از ضریب اصلاح برش پرداختند [۴۱]. احمد و همکاران تحقیقی تجربی روی تاثیر رطوبت بر رفتار ورق‌های فیبر کربن یک جهته که توسط کامپوزیت پلیمر تقویت شده و تحت تاثیر بار ضربه‌ای با سرعت کم قرار گرفته ارائه دادند. آن‌ها روی مقاومت این نوع ورق‌ها زمانی که ورق غوطه‌ور در آب است مطالعه نمودند [۴۲]. حسینی و قدیری‌راد [۴۳] توزیع رطوبت و تنش را برای یک محیط دوبعدی محدود با درنظر گرفتن کوپل میدان‌های دما، رطوبت و جابجایی گزارش کرده‌اند. ابراهیمی و براتی [۴۴] کمانش یک نانوتیر را تحت میدان‌های دما و رطوبت بررسی کرده‌اند. لی و کیم [۴۵] نیز رفتار پس‌کمانش صفحات ساخته شده از مواد FG تحت تنش‌های گرمایی-رطوبتی را منتشر کردند.

مواد مگنتو-الکتروالاستیک در محیط کاری معمولا در معرض شرایط حرارتی و رطوبتی گوناگونی قرار می‌گیرند و به همین دلیل بررسی رفتار این مواد در چنین شرایطی حائز اهمیت است. کوپل میان الاستیک، الکتریک، مغناطیس، دما و رطوبت بر عملکرد این دسته از مواد هوشمند[1] تاثیرگذار بوده [۴۶و۴۷] و در نتیجه تحقیقات قابل توجهی در رابطه با رفتار مواد هوشمند تحت شرایط هایگروترمال انجام شده است [۴۸-۵۱]. کِرور و قوش [۵۲] با در نظر گرفتن مسئله کوپل گرما-رطوبت و الکترومغناطیس به توسعه فرمول المان محدودی پرداختند تا به کمک آن به ارزیابی خمش غیرخطی سازه‌های هوشمند بپردازند. آلتِی و داکمسی [۵۳] روابط پایه پیزوالکتریک، ترموپیزوالکتریک و هایگرو-ترموپیزوالکتریک را بررسی نمودند. فرمول‌بندی المان محدود توسط راجا و همکاران به منظور آنالیز پیزوترموهایگروالاستیک ورق‌ها مورد استفاده قرار گرفت. آن‌ها از قواعد کار مجازی برای استخراج معادلات حاکم استفاده کردند [۵۴]. اکبرزاده و چن با در نظر گرفتن موادی که خواص آن‌ها وابسته به دما و رطوبت است به بررسی تاثیر بارهای هایگروترمال بر استوانه‌های مگنتو-الکتروالاستیک قرار گرفته

[1] Smart Materials

بر پایه الاستیک پرداختند [۵۵]. همچنین آن‌ها [۵۶] حل تحلیلی برای محاسبه تنش‌های شعاعی گرمایی- رطوبتی یک استوانه پیزوالکتریک ساخته شده از مواد FG را ارائه دادند. اکبرزاده و پاسینی [۵۷] حل تحلیلی برای بررسی تاثیر بار هایگروترمال بر پاسخ حالت پایا سیلندر بلند و بی‌انتها و دیسک نازک از جنس مواد تابعی استخراج نمودند. ساداتفر و خافری پاسخ کره توخالی از جنس مواد تابعی MEE[۱] به کوپل هایگرو-ترمو-مگنتو-الکتروالاستیک را ارزیابی کردند [۵۸]. زنکور و همکارانش نیز در مورد خمش صفحات تحت بارگذاری گرمایی- رطوبتی گزارش‌هایی منتشر کرده‌اند. حل تحلیلی برای قطاعی از دایره با ضخامت متغیر و در نظرگرفتن میدان‌های غیرکوپل دما و رطوبت [۵۹]، تحلیل صفحات مستطیلی از مواد FG [۶۰] و توسعه تئوری برای صفحات روی بستر الاستیک در محیط گرمایی-رطوبتی [۶۱] ازجمله این تحقیقات است. وینیاس و همکاران تیرهای الکتروالاستیک-مغناطیس تحت بار هایگروترمال را توسط روش‌های المان محدود بررسی نمودند [۶۲].

ترک را می‌توان یکی از رایج‌ترین پدیده‌ها در سازه‌ها به شمار آورد. از این رو بررسی رفتار ترک در شرایط هایگروترمال در انواع سازه‌هایی که تحت تاثیر دما و رطوبت قرار دارند مسئله‌ای مهم در طراحی، تحلیل دوام و کارکرد آن‌ها به حساب می‌آید. هارت‌رانف و سی [۶۳] جسمی نامحدود شامل حفره‌ای کروی تحت توزیع دما و رطوبت غیر یکنواخت و وابسته به زمان را بررسی کردند و تنش ایجاد شده را محاسبه نمودند. سی و همکاران [۶۴] روش المان محدود وابسته به زمان را به منظور بررسی تنش‌های هایگروترمال اطراف حفره‌ای دایره‌ای شکل روی صفحه‌ای بی‌انتها تحت شرایط گذرا توسعه دادند. سپس سی و اوگاوا روشی تحلیلی را توسعه دادند که توسط آن توزیع تنش‌های مکانیکی و هایگروترمال به دلیل وجود ترکِ بیضوی شکل را تعیین کنند، آن‌ها شدت تنش وابسته به زمان را به عنوان معیار شکست در نظر گرفتند [۶۵]. در ادامه کارهای پیشین سی [۶۶] تنش‌های هایگروترمال گذرا را در صفحه با فرض وجود و همچنین عدم وجود حفره بررسی نمود تا کوپل میان دما و رطوبت را مورد

[1] Magneto Electro Elastic

بررسی قرار دهد. چائو و چانگ با استفاده از رویکرد متغیر مختلط به بررسی ترک عایق موجود در صفحه هایگروالاستیک غیر ایزوتروپیک تحت شار حرارتی و انتشار تمرکز رطوبت پرداختند و پارامترهای تمرکز تنش، نرخ آزاد سازی انرژی و گسترش ترک را استخراج نمودند [۶۷]. سیح و وو فرمول استروح-لایک[1] را توسعه دادند و توسط آن راه حل صریحی برای لایه‌ای نامحدود دارای ترک بیضوی تحت جریان دما و رطوبت بدست آوردند و نتایج را با گزارش‌های روش المان محدود مقایسه نمودند [۶۸]. رجایی با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته، ضرایب شدت تنش را برای ترکی در محیط ایزوترپیک و ارتوتروپیک در حالت گذرا بدست آورد [۶۹]. دانگ، ژائو و همکاران با استفاده از روش جابجایی ناپیوسته توسعه یافته و اصل برهم‌نهی برای ایجاد ترک، به بررسی ترک صفحه‌ای با شکل دلخواه در محیط سه بعدی ایزوتروپیک پرداختند [۷۰]. ژائو و همکاران به حل عمومی حالت پایا ماده هایگروترموالاستیک ایزوتروپیک در فضای سه بعدی به روش تابع پتانسیل پرداختند. آن‌ها با استفاده از تئوری آلمانسی دو تابع جابجایی به منظور ساده سازی معادلات حالت پایا معرفی کردند و در نهایت با استفاده از تئوری تعمیم یافته تابع پتانسیلِ ترکی صفحه‌ای، تحت باری‌های مکانیکی، دمایی و رطوبتی را مورد بررسی قرار دادند [۷۱]. دگ و همکاران با استفاده از انتگرال‌های J_K، ضرایب شدت تنش را با در نظر گرفتن شرایط پایدار برای رطوبت و حرارت و معادلات غیرکوپل در یک محیط اورتوتروپیک و مواد FG، محاسبه نمودند [۷۲ و ۷۳]. توپال و دگ برای تحلیل ترک در مواد FG از فرض بارگذاری هایگروترمال عمومی استفاده کرده و نتیجه گرفتند که اثرات هایگروسکوپیک[2] بر رفتار شکست بسیار مهم بوده و باید در آنالیز شکست لحاظ شوند [۷۴].

[1] Stroh-Like
[2] Hygroscopic

۱-۳- نوآوری

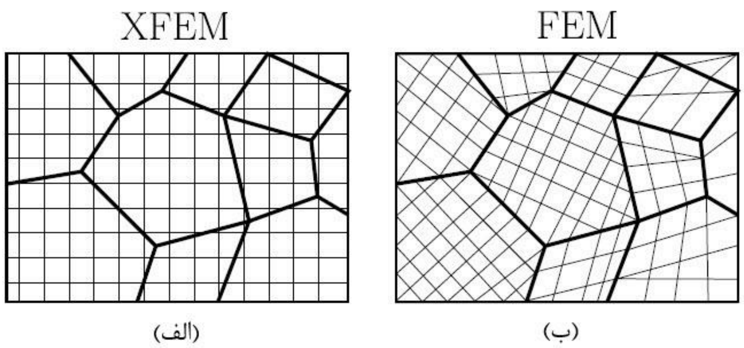
بنابر جستجوی انجام‌شده، تاکنون گزارشی درمورد محاسبه ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی با درنظر گرفتن کوپل کامل میدان‌های جابجایی، دما و رطوبت منتشر نشده است.

فصل دوم

روش اجزا محدود توسعه‌یافته

۲-۱- مقدمه

روش المان محدود توسعه یافته (XFEM[1]) که بر پایه المان محدود استاندارد شکل گرفته، از جمله ابزارهای مناسب برای حل مسائل ناپیوستگی مانند مکانیک شکست، تکین، تغییر شکل‌های محلی و اشکالی با هندسه پیچیده است که روش استاندارد در حل آن‌ها با موانعی روبرو است. این روش می‌تواند مدل‌سازی مواد و اجسام را به منظور حل مسائل به طرز شگفت انگیزی ساده سازد که از شبیه‌سازی و رشد ترک به عنوان یک نمونه از کاربردهای آن می‌توان نام برد. مزیت روش المان محدود توسعه یافته در این است که مش‌بندی کاملا مستقل از ترک و مسیر آن صورت می‌گیرد، یعنی ترک از هندسه مسئله حذف شده و این امر موجب می‌گردد که برای تحلیل رفتار و رشد ترک، نیاز به انطباق المان و مش‌بندی مجدد در حین رشد ترک نباشد. شکل (۲-۱) مقایسه‌ای میان مش‌بندی در روش المان محدود کلاسیک و المان محدود توسعه یافته را نشان می‌دهد که استقلال از مسیر ترک از عمده تفاوت‌های آن است. تفاوت دیگر را می‌توان در شکل و نظم المان‌های استفاده شده یافت.



شکل ۲-۱- مش بندی یک صفحه برای روش (الف) المان محدود توسعه یافته و (ب) المان محدود استاندارد [۷۹]

۲-۲- روش اجزا محدود توسعه یافته

به منظور مدل سازی ترک از روش المان محدود توسعه یافته، از توابع شکل روش اجزا محدود استاندارد استفاده می‌شود، با این تفاوت که المان‌های نوک و مسیر ترک باید غنی سازی گردند. یعنی درجات آزادی این المان‌ها با اضافه نمودن توابع غنی سازی به توابع شکل اجزا محدود استاندارد، افزایش

[1] Extended Finite Element Method

می‌یابد. این روش توسط بلچیکو و همکارانش [۷۵،۷۶و۷۹] جهت مدل سازی ناپیوستگی‌ها در شبکه‌های المان محدود استاندارد پیشنهاد شد. به طور کلی روش اجزا محدود توسعه یافته را می‌توان شامل دو مرحله دانست. مرحله اول، شبکه بندی هندسه مساله و مرحله دوم، غنی سازی المان‌های مسیر و نوک ترک.

پایه روش المان محدود توسعه یافته، مفهوم افراز واحد [1] برای المان‌های غنی سازی شده و یا تقریب‌های بدون المان است [۷۷و۷۸]. تفکیک واحد در محدوده Ω، مجوعه‌ای از توابع $\phi_i(x)$ است به صورتی که:

$$\sum_{\forall i} \phi_i(x) = 1, \ \ \forall x \in \Omega \tag{۱-۲}$$

خاصیت تفکیک واحد استفاده شده در روش المان محدود توسعه یافته این است که هر تابع (x) را می‌توان توسط حاصلضرب توابع تفکیک واحد با $\Psi(x)$، بازیابی کرد [۷۹] یعنی:

$$\sum_{\forall i} \phi_i(x)\Psi(x) = \Psi(x) \tag{۲-۲}$$

در این روش هنگامی‌که جمع بندی با معرفی پارامترهای b_i اصلاح می‌شود، تابع غنی‌سازی می‌تواند به کمک تقریب زیر به دست آید [۷۹]:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\forall i} N_i(\mathbf{x})a_i + \sum_{\forall i} \phi_i(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})b_i \tag{۳-۲}$$

در رابطه (۲-۳) جمله اول شامل تقریب اجزا محدود استاندارد می‌شود که در آن N_i ها توابع شکل روش اجزا محدود استاندارد هستند و برای المان‌های ایزوپارامتریک از رابطه زیر به دست می‌آیند. a_iها هم درجات آزادی اجزا محدود استاندارد هستند.

---

[1] Partition of Unity

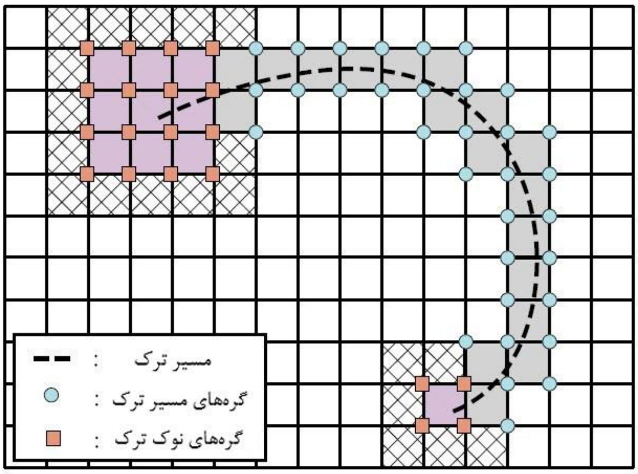
$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) \qquad (۴-۲)$$

جمله دوم رابطه (۲-۳) شامل عبارت‌های غنی‌سازی است که در آن $\phi_i(\mathbf{x})$ توابع شکل، $\Psi(\mathbf{x})$ تابع غنی‌سازی و b_i پارامترهای مجهول به منظور تنظیم غنی سازی هستند. $\Psi(x)$ غالبا مبتنی بر حل‌های مجانبی است که حل‌های دقیقی نیستند. اگرچه لازم نیست توابع شکل برای تقریب اجزا محدود استاندارد و تعمیم‌یافته یکسان باشند، اما می‌توان آن‌ها را توابع یکسانی در نظر گرفت یعنی $\phi_i(\mathbf{x}) = N_i(\mathbf{x})$ [۷۹].

تمام توابع شکل المان محدود لاگرانژی خاصیت تفکیک واحد را ارضاء می‌کنند؛ زیرا این خاصیت برای همگرایی و عبور از آزمون پیوستگی ضروری است. خاصیت تفکیک واحد به تقریب المان محدود این قابلیت را می‌دهد که حرکت جسم صلب را به طور دقیق نمایش دهد. به صورت مشابه، تقریب‌های بدون المان نیز این خاصیت را ارضا می‌کنند [۷۹].

۲-۳- مدل‌سازی ترک در روش اجزا محدود توسعه یافته

مدل المان محدود جسمی شامل ترک مانند شکل (۲-۲) در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود تمام گره‌های شبکه المان محدود با N_A مشخص شوند، مجموعه گره‌های المان‌های اطراف نوک ترک (یا المان‌های جلوی ترک در حالت سه بعدی) با N_C و همچنین مجموعه گره‌هایی المان‌هایی که توسط ترک بریده می‌شوند اما جزوی از N_C نیستند با N_H مشخص شوند. مجموعه المان‌ها با گره N_C می‌توانند توسط شخص انتخاب شوند. معمولا انتخاب تنها یک المان کفایت می‌کند، با این حال انتخاب تعداد المان‌های بیشتر می‌تواند به بهبود اندک در دقت نتایج کمک کند [۷۹]. گره‌ها در N_C و N_H به ترتیب به عنوان گره‌های غنی شده نوک ترک و غنی شده مسیر ترک و مجموعا به عنوان گره‌های غنی شده شناخته می‌شوند.



شکل۲-۲- یک ترک دلخواه در یک شبکه با المان‌های غنی شده مسیر ترک که گره‌های آن با دایره و المان‌های غنی شده نوک ترک که گره‌های آن با مربع مشخص شده‌اند [۷۹]

برای یک المان غنی شده شامل ترک در روش المان محدود توسعه یافته، میدان جابجایی را می‌توان به صورت زیر نوشت [۸۰]:

$$\mathrm{u}(x,y,t)=\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_A}} N_\mathrm{n}(x,y)\mathrm{a_n}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_H}} N_\mathrm{n}(x,y)[\mathrm{H(Z)}-\mathrm{H(Z_n)}]\mathrm{b_n}(t)$$

$$+\sum_{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}} N_\mathrm{n}(x,y)[F_\mathrm{m}(r,\varphi)-F_\mathrm{m}(r_\mathrm{n},\varphi_\mathrm{n})]\mathrm{c_{nm}}(t) \qquad (۵-۲)$$

در این رابطه $\mathrm{a_n}(t)$ ، $\mathrm{b_n}(t)$ و $\mathrm{c_{nm}}(t)$ بردارهای مجهولات گره‌ای بوده که توابعی از زمان هستند.

$$\mathrm{a_n}(t)=\{\mathrm{a_n^u}(t),\mathrm{a_n^v}(t)\}^T \qquad (۶-۲)$$

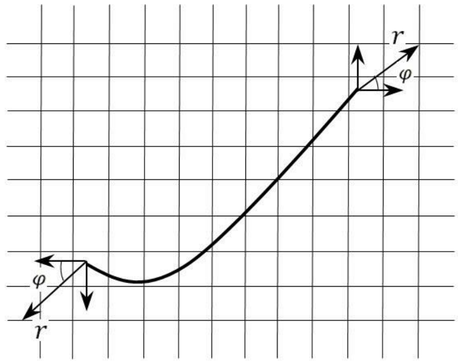
$$\mathrm{b_n}(t)=\{\mathrm{b_n^u}(t),\mathrm{b_n^v}(t)\}^T \qquad (۷-۲)$$

$$\mathrm{c_{nm}}(t)=\{\mathrm{c_{nm}^u}(t),\mathrm{c_{nm}^v}(t)\}^T \qquad (۸-۲)$$

در رابطه (۲-۵) $H(Z)$ تابع هویساید است که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathrm{H(Z)}=\begin{cases}1, & \mathrm{Z}>0\\ 0, & \mathrm{Z}\le 0\end{cases} \qquad (۹-۲)$$

در این رابطه Z تابعی از موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است.



شکل ۲-۳- مختصات قطبی حوزه نوک ترک

در رابطه (۲-۵)، F_{m} مجموعه توابع غنی سازی هستند که رفتار نزدیک نوک ترک را تقریب می‌زنند. این توابع بر حسب مختصات محلی نوک ترک (r و φ) عبارتند از (شکل ۲-۳) [۸۰]:

$$\{F_{\mathrm{m}}\} = \left\{\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\} \qquad (۲-۱۰)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۲-۶) تا (۲-۸) و (۲-۱۰) در رابطه (۲-۵)، مولفه‌های میدان جابجایی در روش المان محدود توسعه یافته در جهت محورهای مختصات سراسری به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}(x,y,t) = &\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_A}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{u}}(t) + \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_H}} N_{\mathrm{n}}(x,y)[\mathrm{H(Z)} - \mathrm{H(Z_n)}]\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{u}}(t) \\
&+ \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n1}}^{\mathrm{u}}(t) \\
&+ \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\cos\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n2}}^{\mathrm{u}}(t) \qquad (۲-۱۱)\\
&+ \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin(\varphi_{\mathrm{n}})\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n3}}^{\mathrm{u}}(t) \\
&+ \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin(\varphi_{\mathrm{n}})\cos\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n4}}^{\mathrm{u}}(t)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{v}(x,y,t) = \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_A}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{v}}(t) + \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_H}} N_{\mathrm{n}}(x,y)[\mathrm{H(Z)} - \mathrm{H(Z_n)}]\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{v}}(t) \qquad (۲-۱۲)$$

$$+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n}1}^{\mathrm{v}}(t)$$

$$+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_{\mathrm{n}}}\cos\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n}2}^{\mathrm{v}}(t)$$

$$+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin(\varphi_{\mathrm{n}})\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n}3}^{\mathrm{v}}(t)$$

$$+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin(\varphi_{\mathrm{n}})\cos\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n}4}^{\mathrm{v}}(t)$$

با فرض عایق بودن ترک، میدان دما در امتداد ترک ناپیوسته است. لذا برای در نظر گرفتن این ناپیوستگی از تابع هویساید استفاده می‌شود. به منظور غنی سازی نوک ترک، باید میدان دمای نوک ترک را بررسی کرد. همچنین شار حرارتی در نوک ترک تکین است. میدان دمای نوک ترک مشابه میدان جابه‌جایی مد پارگی (مد III) ترک به قرار زیر است [۸۱]:

$$T=-\frac{K_T}{D_T}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{۱۳-۲}$$

که در رابطه بالا D_T ضریب هدایت گرما و K_T ضریب شدت تنش گرمایی است.

با در نظر گرفتن رابطه بالا می‌توان میدان دما را مشابه میدان جابجایی گسسته‌سازی کرد، با این تفاوت که فقط از اولین تابع رابطه (۲-۱۰) برای غنی سازی گره‌های نوک ترک استفاده می‌شود [۸۲]. بنابراین میدان تغییر دما را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\theta(x,y,t)=&\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_A}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_H}} N_{\mathrm{n}}(x,y)[\mathrm{H(Z)}-\mathrm{H(Z_n)}]\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)\\&+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)\end{aligned} \tag{۱۴-۲}$$

که در این رابطه $\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)$، $\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)$ و $\mathrm{c}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)$ مقادیر تغییرات دمای گره‌ها برای توابع شکل مربوطه هستند.

مشابه میدان دما، میدان رطوبت نوک ترک را نیز می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$C=-\frac{K_c}{D_c}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{۱۵-۲}$$

که در رابطه بالا D_c ضریب نشر رطوبت و K_c ضریب شدت تنش رطوبتی است. میدان تغییر رطوبت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}C(x,y,t)=&\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_A}}N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{C}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_H}}N_{\mathrm{n}}(x,y)[\mathrm{H(Z)}-\mathrm{H(Z_n)}]\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{C}(t)\\&+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}}N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n}}^{C}(t)\end{aligned} \tag{۱۶-۲}$$

که در این رابطه $\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{C}(t)$، $\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{C}(t)$ و $\mathrm{c}_{\mathrm{n}}^{C}(t)$ مقادیر تغییرات رطوبت گره‌ها برای توابع شکل مربوطه هستند.

روابط (۲-۱۱)، (۲-۱۲)، (۲-۱۴) و (۲-۱۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}&\mathrm{u}(x,y,t)=\\&\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_A}}N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{u}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_H}}\Phi_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{u}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}}\sum_{\mathrm{m}=1}^{4}\Psi_{\mathrm{nm}}(x,y)\mathrm{c}_{\mathrm{nm}}^{\mathrm{u}}(t)\end{aligned} \tag{۱۷-۲}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{v}(x,y,t)=\\&\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_A}}N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{v}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_H}}\Phi_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{v}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}}\sum_{\mathrm{m}=1}^{4}\Psi_{\mathrm{nm}}(x,y)\mathrm{c}_{\mathrm{nm}}^{\mathrm{v}}(t)\end{aligned} \tag{۱۸-۲}$$

$$\begin{aligned}&\theta(x,y,t)=\\&\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_A}}N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_H}}\Phi_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}}\Psi_{\mathrm{n1}}(x,y)\mathrm{c}_{\mathrm{n1}}^{\mathrm{T}}(t)\end{aligned} \tag{۱۹-۲}$$

$$\begin{aligned}&C(x,y,t)=\\&\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_A}}N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{C}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_H}}\Phi_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{C}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}}\Psi_{\mathrm{n1}}(x,y)\mathrm{c}_{\mathrm{n1}}^{C}(t)\end{aligned} \tag{۲۰-۲}$$

در این روابط Φ و Ψ عبارت‌های غنی‌سازی میدان‌های جابجایی، دما و رطوبت هستند که به ترتیب وظیفه غنی‌سازی سطح و نوک ترک را بر عهده دارند. با توجه به روابط (۲-۱۱)، (۲-۱۲)، (۲-۱۴) و (۲-۱۶) این توابع را می‌توان به صورت زیر استخراج کرد:

$$\Phi_{\mathrm{n}}(x,y) = N_{\mathrm{n}}(x,y)[\mathrm{H}(\mathrm{Z}) - \mathrm{H}(\mathrm{Z_n})] \tag{۲-۲۱}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{n}}(x,y) = N_{\mathrm{n}}(\mathrm{x,y}) \Big[&\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &- \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\cos\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right), \\ &\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin(\varphi_{\mathrm{n}})\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right), \\ &\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin(\varphi_{\mathrm{n}})\cos\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\Big]\end{aligned} \tag{۲-۲۲}$$

با قرار دادن روابط (۲-۱۷) تا (۲-۲۰) در معادلات حاکم بر مساله مورد نظر می‌توان این معادلات را گسسته‌سازی نمود.

۲-۴- انتگرال‌گیری عددی

به منظور محاسبه انتگرال‌های حاصله از گسسته‌سازی معادلات در روش المان محدود، لازم است از روش‌های عددی استفاده گردد. یکی از این روش‌های عددی انتگرال‌گیری گاوس است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۸۳]:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{nQ} f(\xi_i)w_i \tag{۲-۲۳}$$

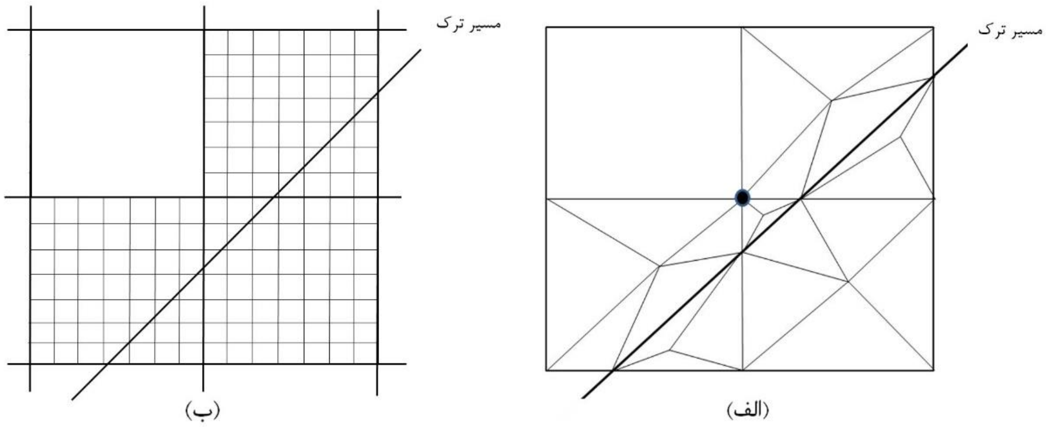
که در رابطه فوق ξ_i مقادیر نقاط گوسی، nQ تعداد نقاط گوسی و w_i توابع وزنی هستند.

در روش المان محدود اغلب انتگرال‌گیری‌ها بر روی سطح المان انجام می‌شود، بنابراین از فرم سطحی انتگرال‌گیری گوس به صورت زیر استفاده می‌گردد:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{nQ}\sum_{j=1}^{nQ} f(\xi_i,\eta_i)w_i w_j \qquad (۲۴-۲)$$

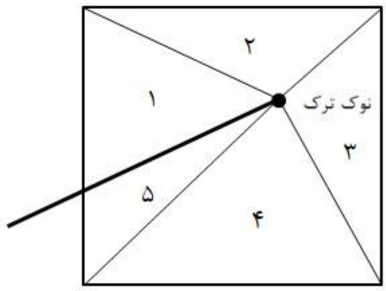
به دلیل عدم توانایی روش گاوس در محاسبه انتگرال توابع غنی‌سازی المان‌هایی که در مسیر ترک قرار داشته و توسط آن بریده شده‌اند، دالبو دو روش برای حل این مشکل ارائه کرد [۸۴]. در روش اول المان‌های دارای ترک به المان‌های مثلثی کوچکتر در دو طرف ترک تقسیم می‌شوند به گونه‌ای که لبه‌های این المان‌های مثلثی منطبق بر سطح ترک باشد. در روش دوم المان‌هایی که توسط ترک بریده شده‌اند، به المان‌های چهار ضلعی کوچکتر تقسیم می‌شوند (شکل (۲-۴)).

در این پایان‌نامه از روش اول استفاده شده و المان‌های مسیر ترک به المان‌های مثلثی کوچکتر در دو طرف آن تقسیم می‌گردد. این روش نسبت به روش دوم دارای دقت بالاتری است، به این دلیل که در روش دوم امکان گذشتن مسیر ترک از لبه‌های المان وجود داشته و این می‌تواند عامل ایجاد خطا در محاسبات گردد [۸۵]. موقعیت مرکز هر یک از این المان‌های مثلثی، معیار انتگرال‌گیری عددی و ارزیابی تابع هویساید قرار می‌گیرد. به این ترتیب که با قرار گرفتن مرکز المان در یک طرف ترک، کل نقاط گوسی برای ارزیابی تابع هویساید در انتگرال‌گیری بر روی آن المان مثلثی در همان طرف در نظر گرفته می‌شوند.



شکل ۲-۴- تقسیم‌بندی المان‌های مسیر ترک برای انتگرال‌گیری عددی (الف) استفاده از المان‌های مثلثی (ب) استفاده از المان‌های مربعی کوچکتر

به منظور حذف اثر تکینی نوک ترک در عبارت زیر انتگرال، المان نوک ترک همانند شکل (۲-۵) به چند مثلث کوچکتر تقسیم می‌شود.



شکل ۲-۵- تقسیم‌بندی المان شامل نوک ترک برای انتگرال‌گیری عددی

فصل سوم

استخراج معادلات حاکم

۳-۱- مقدمه

در این فصل به منظور حل مسائل هایگروترموالاستیسیته به استخراج معادلات حاکم می‌پردازیم و سپس برای استفاده از آن‌ها در روش اجزا محدود توسعه یافته و برنامه مورد استفاده، معادلات را گسسته‌سازی می‌نماییم.

۳-۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم هایگروترموالاستیسیته کوپل به صورت معادله تعمیم یافته حرکت بر حسب مولفه‌های تنش و کوپل معادلات انتقال گرما و رطوبت بیان می‌شود.

معادله حرکت بر حسب مولفه‌های تنش عبارت است از [۸۶]:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \tag{۳-۱}$$

که در این رابطه σ تانسور تنش، f بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم در جهت i، ρ چگالی و u بردار جابجایی هستند. برای تغییر شکل‌های کوچک می‌توان از رابطه زیر، کرنش را بر حسب جایجایی تعریف نمود:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{۳-۲}$$

که در این رابطه ε تانسور کرنش کل است. معادله ساختاری تنش برای مواد همگن و همسانگرد به صورت زیر قابل بیان است [۸۷]:

$$\sigma_{ij} = \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \lambda_1 u_{k,k}\delta_{ij} - \gamma_1 T\delta_{ij} - \gamma_2 c\delta_{ij} \tag{۳-۳}$$

در رابطه فوق T و c به ترتیب نشانگر دما و رطوبت هستند و ضرایب λ_1، γ_1 و γ_2 با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda_1 = \lambda - \frac{\beta_2^2}{b} \tag{۴-۳}$$

$$\gamma_1 = \beta_1 + \frac{a}{b}\beta_2 \tag{۵-۳}$$

$$\gamma_2 = \frac{\beta_2}{b} \tag{۶-۳}$$

a پارامتر اثر حرارتی-رطوبتی ، b پارامتر اثر رطوبتی بوده و β_1 و β_2 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\beta_1 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t \tag{۷-۳}$$

$$\beta_2 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_c \tag{۸-۳}$$

در روابط بالا α_t ضریب انبساط حرارتی و α_c ضریب انبساط رطوبتی است. همچنین در این روابط λ و μ ضرایب لامه بوده و به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{۹-۳}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{۱۰-۳}$$

که در آن ν نسبت پواسون و E مدول یانگ است.

معادلات انرژی و رطوبت به صورت زیر قابل بیان هستند [۸۷]:

$$kT_{,ii} = (T_0\gamma_1\dot{u}_{i,i} + T_0 d_1\dot{T} + T_0 g\dot{c}) \tag{۱۱-۳}$$

$$Dc_{,ii} + S_T T_{,ii} = (\gamma_2\dot{u}_{i,i} + g\dot{T} + n\dot{c}) \tag{۱۲-۳}$$

که در آن k و D به ترتیب ضرایب هدایت گرما و انتشار رطوبت و S_T نشانگر مقدار سورت است. همچنین ضرایب d_1، g و n با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$d_1 = \frac{\rho c_e}{T_0} \tag{۱۳-۳}$$

$$g = \frac{a}{b} \tag{۱۴-۳}$$

$$n = \frac{1}{b} \tag{۱۵-۳}$$

در رابطه (۳-۱۳)، c_e گرمای ویژه ماده است.

به منظور بی‌بعد سازی معادلات حاکم، متغیرهای زیر را تعریف می‌نماییم:

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{L} \tag{۱۶-۳}$$

$$\hat{t} = \frac{V}{L}\vec{t} \tag{۱۷-۳}$$

$$L = \frac{1}{c_1 \eta} \tag{۱۸-۳}$$

$$\eta = \frac{\rho c_e}{k} \tag{۱۹-۳}$$

$${c_1}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \tag{۲۰-۳}$$

$$\hat{u}_i = \frac{u_i}{L} \tag{۲۱-۳}$$

$$\hat{T} = \frac{\beta_1}{\rho {c_1}^2} T \tag{۲۲-۳}$$

$$\hat{c} = \frac{1}{\beta_2} c \tag{۲۳-۳}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (L\hat{u}_i)}{\partial (L\hat{x}_j)} = \hat{u}_{i,j} \tag{۲۴-۳}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial (L\hat{x}_j)}\left(\hat{u}_{i,j}\right) = \frac{1}{L}\hat{u}_{i,jj} \tag{۲۵-۳}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial (L\hat{u}_i)}{\partial (\frac{L}{V}\hat{t})} = V\dot{\hat{u}}_i \tag{۲۶-۳}$$

$$\dot{u}_{i,i} = \frac{V}{L}\dot{\hat{u}}_{i,i} \tag{۲۷-۳}$$

$$\ddot{u}_i = \frac{V^2}{L}\ddot{\hat{u}}_i \tag{۲۸-۳}$$

$$c_{,i} = \frac{\beta_2}{L}\hat{c}_{,i} \tag{۲۹-۳}$$

$$T_{,i} = \frac{\rho {c_1}^2}{L\beta_1}\widehat{T}_{,i} \tag{۳۰-۳}$$

$$\dot{T} = \frac{\rho {c_1}^2 V}{\beta_1 L}\dot{\hat{T}} \tag{۳۱-۳}$$

$$\hat{S}_T = \frac{S_T}{\alpha} \tag{۳۲-۳}$$

$$\ddot{T} = \frac{\rho {c_1}^2 V^2}{\beta_1 L^2}\ddot{\hat{T}} \tag{۳۳-۳}$$

$$\dot{c} = \frac{\beta_2 V}{L}\dot{\hat{c}} \tag{۳۴-۳}$$

$$\ddot{c} = \frac{\beta_2 V^2}{L^2}\ddot{\hat{c}} \tag{۳۵-۳}$$

$$T_{,ii} = \frac{\rho {c_1}^2}{\beta_1 L^2}\widehat{T}_{,ii} \tag{۳۶-۳}$$

$$c_{,ii} = \frac{\beta_2}{L^2}\hat{c}_{,ii} \tag{۳۷-۳}$$

$$\ddot{u}_{i,i} = \frac{V^2}{L^2}\ddot{\hat{u}}_{i,i} \tag{۳۸-۳}$$

که L و V به ترتیب طول و سرعت مشخصه هستند. بنابراین معادلات حاکم بی‌بعد برای یک ماده ایزوتروپیک به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + 2\mu).\frac{1}{L}\hat{u}_{1,11} + \mu.\frac{1}{L}\hat{u}_{1,22} + (\lambda + \mu).\frac{1}{L}\hat{u}_{2,21} - \frac{\gamma_1 \rho {c_1}^2}{L\beta_1}\widehat{T}_{,1} - \frac{\gamma_2\beta_2}{L}\hat{c}_{,1} \\ = \frac{\rho V^2}{L}\ddot{\hat{u}}_1\end{aligned} \tag{۳۹-۳}$$

$$(\lambda_1 + 2\mu).\frac{1}{L}\hat{u}_{2,22} + \mu.\frac{1}{L}\hat{u}_{2,11} + (\lambda + \mu).\frac{1}{L}\hat{u}_{2,12} - \frac{\gamma_1 \rho {c_1}^2}{L\beta_1}\hat{T}_{,2} - \frac{\gamma_2\beta_2}{L}\hat{c}_{,2} = \frac{\rho V^2}{L}\ddot{\hat{u}}_2 \qquad (۴۰\text{-}۳)$$

با تقسیم عبارات فوق بر $(\lambda + 2\mu)$ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\right)\hat{u}_{1,11} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\hat{u}_{1,22} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\hat{u}_{2,21} - \frac{\gamma_1 \rho {c_1}^2}{(\lambda + 2\mu)\beta_1}\hat{T}_{,1} - \frac{\gamma_2\beta_2}{\lambda + 2\mu}\hat{c}_{,1} = \ddot{\hat{u}}_1 \qquad (۴۱\text{-}۳)$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\right)\hat{u}_{2,22} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\hat{u}_{2,11} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\hat{u}_{2,12} - \frac{\gamma_1 \rho {c_1}^2}{(\lambda + 2\mu)\beta_1}\hat{T}_{,2} - \frac{\gamma_2\beta_2}{\lambda + 2\mu}\hat{c}_{,2} = \ddot{\hat{u}}_1 \qquad (۴۲\text{-}۳)$$

به منظور ساده‌نویسی معادلات فوق از عبارات زیر استفاده می‌کنیم:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda + 2\mu} \qquad (۴۳\text{-}۳)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_1} \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\gamma_2\beta_2}{\lambda + 2\mu} \qquad (۴۶\text{-}۳)$$

در نتیجه معادله حرکت بی‌بعد به صورت زیر قابل بیان است:

$$\left(\hat{\lambda}_1 + 2\hat{\mu}\right)\hat{u}_{1,11} + \hat{\mu}\hat{u}_{1,22} + \left(\hat{\lambda} + \hat{\mu}\right)\hat{u}_{2,21} - \hat{\gamma}_1\frac{\rho {c_1}^2}{(\lambda + \mu)}\hat{T}_{,1} - \hat{\gamma}_2\hat{c}_{,1} = \ddot{\hat{u}}_1 \qquad (۴۷\text{-}۳)$$

$$\left(\hat{\lambda}_1 + 2\hat{\mu}\right)\hat{u}_{2,22} + \hat{\mu}\hat{u}_{2,11} + \left(\hat{\lambda} + \hat{\mu}\right)\hat{u}_{2,12} - \hat{\gamma}_1\frac{\rho {c_1}^2}{(\lambda + \mu)}\hat{T}_{,2} - \hat{\gamma}_2\hat{c}_{,2} = \ddot{\hat{u}}_1 \qquad (۴۸\text{-}۳)$$

با استفاده از عبارت‌های بی‌بعد سازی تعریف شده ((۳-۱۶) تا (۳-۳۸)) معادله بی‌بعد انرژی را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{T_0\gamma_1 V}{L}\left(\dot{\hat{u}}_{1,1}+\dot{\hat{u}}_{2,2}\right)+\frac{T_0 d_1\rho {c_1}^2 V}{\beta_1 L}\dot{\hat{T}}+\frac{T_0 g\beta_2 V}{L}\dot{\hat{c}}=\frac{k\rho {c_1}^2}{\beta_1 L^2}\left(T_{,11}+T_{,22}\right) \tag{۴۹-۳}$$

باضرب معادله فوق در $\beta_1 L^2 / k\rho {c_1}^2$ داریم:

$$\frac{T_0\gamma_1\beta_1 L}{k\rho c_1}\left(\dot{\hat{u}}_{1,1}+\dot{\hat{u}}_{2,2}\right)+\frac{T_0 d_1 L V}{k}\dot{\hat{T}}+\frac{T_0 g\beta_1\beta_2 L}{k\rho c_1}\dot{\hat{c}}=\left(T_{,11}+T_{,22}\right) \tag{۵۰-۳}$$

به منظور ساده‌نویسی معادله فوق عبارت‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$W_1=\frac{T_0\gamma_1\beta_1 L}{k\rho c_1} \tag{۵۱-۳}$$

$$W_2=\frac{T_0 d_1 L V}{k} \tag{۵۲-۳}$$

$$W_3=\frac{T_0 g\beta_1\beta_2 L}{k\rho c_1} \tag{۵۳-۳}$$

در نهایت معادله (۳-۴۹) به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$W_1\left(\dot{\hat{u}}_{1,1}+\dot{\hat{u}}_{2,2}\right)+W_2\dot{\hat{T}}+W_3\dot{\hat{c}}=\left(T_{,11}+T_{,22}\right) \tag{۵۴-۳}$$

به کمک عبارت‌های بی‌بعد سازی تعریف شده، معادله رطوبت به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_2 V}{L}\left(\dot{\hat{u}}_{1,1}+\dot{\hat{u}}_{2,2}\right)+\frac{g\rho {c_1}^2 V}{\beta_1 L}\dot{\hat{T}}+\frac{n\beta_2 V}{L}\dot{\hat{c}}\\ =\frac{D\beta_2}{L^2}\left(\hat{c}_{,11}+\hat{c}_{,22}\right)+\frac{S_T\rho {c_1}^2}{\beta_1 L^2}\left(\hat{T}_{,11}+\hat{T}_{,22}\right)\end{aligned} \tag{۵۵-۳}$$

با ضرب معادله فوق در عبارت $\frac{L^2}{D\beta_2}$ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_2 L c_1}{D\beta_2}\left(\dot{\hat{u}}_{1,1}+\dot{\hat{u}}_{2,2}\right)+\frac{g\rho {c_1}^3 L}{D\beta_1\beta_2}\dot{\hat{T}}+\frac{n c_1 L}{D}\dot{\hat{c}}\\ =\left(\hat{c}_{,11}+\hat{c}_{,22}\right)+\frac{S_T\rho {c_1}^2}{D\beta_1\beta_2}\left(\hat{T}_{,11}+\hat{T}_{,22}\right)\end{aligned} \tag{۵۶-۳}$$

به منظور سهولت در نوشتار، عبارت‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$V_1 = \frac{\gamma_2 L c_1}{D\beta_2} \tag{۳-۵۷}$$

$$V_2 = \frac{g\rho {c_1}^3 L}{D\beta_1\beta_2} \tag{۳-۵۸}$$

$$V_3 = \frac{n c_1 L}{D} \tag{۳-۵۹}$$

$$V_4 = \frac{S_T \rho {c_1}^2}{D\beta_1\beta_2} \tag{۳-۶۰}$$

در نتیجه معادله (۳-۵۵) به فرم زیر قابل بیان است:

$$V_1\left(\dot{\hat{u}}_{1,1} + \dot{\hat{u}}_{2,2}\right) + V_2\dot{\hat{T}} + V_3\dot{\hat{c}} = \left(\hat{c}_{,11} + \hat{c}_{,22}\right) + V_4(\hat{T}_{,11} + \hat{T}_{,22}) \tag{۳-۶۱}$$

از این پس تمامی معادلات ذکر شده بر حسب معادلات بی‌بعد بوده و به منظور سادگی از نوشتن علامت ˆ خودداری می‌شود.

۳-۳- گسسته‌سازی معادلات حاکم

به منظور گسسته‌سازی معادلاتِ بی‌بعد شده (۳-۴۷) و (۳-۴۸) و (۳-۵۴) و (۳-۶۱) که معادلات حاکم بر مسئله هستند، از روش گلرکین استفاده می‌گردد. برای یک المان مبنا (e) که تمامی گره‌های آن توسط هر دو تابع غنی‌سازی، غنی شده‌اند؛ مولفه‌های جابه‌جایی، تغییر دما و تغییر رطوبت به صورت زیر است:

$$\mathrm{u}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Phi_h(x,y)\mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}(t) \tag{۳-۶۲}$$

$$\mathrm{v}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Phi_h(x,y)\mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}(t) \tag{۳-۶۳}$$

$$\theta^e(x,y,t) = N_h(x,y)\mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}(t) + \Phi_h(x,y)\mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}(t) \tag{۳-۶۴}$$

$$C^e(x,y,t) = N_h(x,y)\mathrm{a}_h^{C}(t) + \Phi_h(x,y)\mathrm{b}_h^{C}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\mathrm{c}_{hm}^{C}(t) \tag{۳-۶۵}$$

$$h = 1, \dots, ne, \quad m = 1, \dots, 4$$

در روابط فوق ne تعداد گره‌های المان مبنا (e) است. در این روابط مولفه‌های جابه‌جایی، تغییر دما و تغییر رطوبت در هر گره تابع زمان هستند. توابع شکل $N_h(x,y)$، $\Phi_h(x,y)$ و $\Psi_{hm}(x,y)$ تابعی از متغیرهای مکان هستند. مشتقات مرتبه اول و دوم مولفه‌های جابه‌جایی، تغییر دما و تغییر رطوبت به قرار زیر است:

$$\dot{\mathrm{u}}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Phi_h(x,y)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}}(t) \qquad (۶۶\text{-}۳)$$

$$\ddot{\mathrm{u}}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Phi_h(x,y)\ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}}(t) \qquad (۶۷\text{-}۳)$$

$$\dot{\mathrm{v}}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Phi_h(x,y)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}}(t) \qquad (۶۸\text{-}۳)$$

$$\ddot{\mathrm{v}}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Phi_h(x,y)\ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}}(t) \qquad (۶۹\text{-}۳)$$

$$\dot{\theta}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}}(t) + \Phi_h(x,y)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}}(t) \qquad (۷۰\text{-}۳)$$

$$\dot{C}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\dot{\mathrm{a}}_h^{C}(t) + \Phi_h(x,y)\dot{\mathrm{b}}_h^{C}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{C}(t) \qquad (۷۱\text{-}۳)$$

$h = 1, \dots, ne, \quad m = 1, \dots, 4$

تقریب گلرکین با استفاده از انتگرال باقی‌مانده وزنی نسبت به توابع وزنی $S_l(x,y)$، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\int_{V(e)} \left(\sigma_{ij,j} + B_i - \rho\ddot{u}_i\right) S_l dV = 0 \qquad l = 1,2,\dots,ns, \quad i,j = 1,2 \qquad (۷۲\text{-}۳)$$

در رابطه بالا $S_l(x,y)$ توابع شکل اجزای محدود توسعه یافته هستند که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$S_l = \{N_1, N_2, N_3, N_4, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Psi_{1m}, \Psi_{2m}, \Psi_{3m}, \Psi_{4m}\} \quad m = 1, \dots, 4 \qquad (۷۳\text{-}۳)$$

با اعمال فرمول‌بندی ضعیف[1] به اولین عبارت رابطه (۳-۷۲) و استفاده از تئوری گاوس رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\int_{V(e)} (\sigma_{ij,j}) S_l dV = \int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j S_l dA - \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \qquad (۳\text{-}۷۴)$$

در رابطه بالا n_j مولفه‌های بردار یکه نرمال بر مرز و $A(e)$ مساحت مرزی المان e است. با جایگذاری رابطه (۳-۷۴) در (۳-۷۲) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j S_l dA - \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV + \int_{V(e)} B_i S_l dV - \int_{V(e)} \rho \ddot{u}_i S_l dV = 0 \qquad (۳\text{-}۷۵)$$

شرایط مرزی مکانیکی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Tr_i^{\boldsymbol{n}} = \sigma_{ij} n_j \qquad (۳\text{-}۷۶)$$

که در آن $Tr_i^{\boldsymbol{n}}$ مولفه‌های بردار تنش سطحی و $\boldsymbol{n}$ بردار یکه نرمال بر سطح هستند.

با توجه به فرمول کوشی (۳-۷۶)، عبارت اول رابطه (۳-۷۵) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j S_l dA = \int_{A(e)} Tr_i^n S_l dA \qquad (۳\text{-}۷۷)$$

با استفاده از عبارت‌های بی‌بعد سازی، σ_{ij} بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda_1 u_{k,k} \delta_{ij} - \gamma_1 T \delta_{ij} - \gamma_2 c \delta_{ij} \qquad (۳\text{-}۷۸)$$

حال با جایگذاری σ_{ij} از رابطه (۳-۷۸) در عبارت دوم رابطه (۳-۷۵) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV = \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \left[\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda_1 u_{k,k} \delta_{ij} - \gamma_1 T \delta_{ij} - \gamma_2 c \delta_{ij}\right] dV \qquad (۳\text{-}۷۹)$$

[1] Weak formulation

با جایگذاری روابط (۳-۷۷) و (۳-۷۹) در رابطه (۳-۷۵)، رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\int_{V(e)}\rho\ddot{u}_i S_l dV+\int_{V(e)}\frac{\partial S_l}{\partial x_j}\left[\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)+\lambda_1 u_{k,k}\delta_{ij}\right]dV\\&-\int_{V(e)}(\gamma_1 T+\gamma_2 c)\frac{\partial S_l}{\partial x_i}dV=\int_{V(e)}B_i S_l dV+\int_{A(e)}Tr_i^n S_l dA\qquad i,j=1,2\end{aligned}\tag{۸۰-۳}$$

حال با در نظر گرفتن المان مبنای e که تعداد ne گره داشته و تمامی گره‌های آن شامل هر دو تابع غنی‌سازی می‌شوند و جایگذاری مولفه‌های جابه‌جایی، تغییر دما و تغییر رطوبت این المان (معادلات (۳-۶۲) تا (۳-۶۵)) در رابطه (۳-۸۰)، می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}&\left(\int_{V(e)}\rho S_l N_h dV\right)\ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}}+\left(\int_{V(e)}\rho S_l \Phi_h dV\right)\ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}}+\left(\int_{V(e)}\rho S_l \Psi_{hm} dV\right)\ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}}\\&\quad+\int_{V(e)}S_{l,x}\left[(\lambda_1+2\mu)\left(N_{h,x}\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}+\Phi_{h,x}\mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}+\Psi_{hm,x}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}\right)\right.\\&\qquad\qquad\left.+\lambda_1\left(N_{h,y}\mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}+\Phi_{h,y}\mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}+\Psi_{hm,y}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}\right)\right]dV\\&\quad+\int_{V(e)}\mu S_{l,y}\left(N_{h,y}\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}+\Phi_{h,y}\mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}+\Psi_{hm,y}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}+N_{h,x}\mathrm{a}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{v}}+\Phi_{h,x}\mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}\right.\\&\qquad\qquad\left.+\Psi_{hm,x}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}\right)dV\\&\quad-\int_{V(e)}\gamma_1 S_{l,x}\left(N_h\mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}+\Phi_h\mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}+\Psi_{hm}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}\right)dV\\&\quad-\int_{V(e)}\gamma_2 S_{l,x}\left(N_h\mathrm{a}_h^{C}+\Phi_h\mathrm{b}_h^{C}+\Psi_{hm}\mathrm{c}_{hm}^{C}\right)dV\\&\quad=\int_{V(e)}B_x S_l dV+\int_{A(e)}Tr_x^n S_l dA\end{aligned}\tag{۸۱-۳}$$

$$\begin{aligned}&\left(\int_{V(e)}\rho S_l N_h dV\right)\ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}}+\left(\int_{V(e)}\rho S_l \Phi_h dV\right)\ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}}+\left(\int_{V(e)}\rho N S_l \Psi_{hm} dV\right)\ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}}\\&\quad+\int_{V(e)}\mu S_{l,x}\left(N_{h,x}\mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}+\Phi_{h,x}\mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}+\Psi_{hm,x}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}+N_{h,y}\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}+\Phi_{h,y}\mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}\right.\\&\qquad\qquad\left.+\Psi_{hm,y}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}\right)dV\end{aligned}\tag{۸۲-۳}$$

$$+\int_{V(e)} S_{l,y}\big[(\lambda_1+2\mu)\big(N_{h,y}\mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}+\Phi_{h,y}\mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}+\Psi_{hm,y}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}\big)$$
$$+\lambda_1\big(N_{h,x}\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}+\Phi_{h,x}\mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}+\Psi_{hm,x}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}\big)\big]dV$$
$$-\int_{V(e)} \gamma_1 S_{l,y}\big(N_h\mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}+\Phi_h\mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}+\Psi_{hm}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}\big)dV$$
$$-\int_{V(e)} \gamma_2 S_{l,y}\big(N_h\mathrm{a}_h^{C}+\Phi_h\mathrm{b}_h^{C}+\Psi_{hm}\mathrm{c}_{hm}^{C}\big)dV$$
$$=\int_{V(e)} B_y S_l dV+\int_{A(e)} Tr_y^n S_l dA$$

$l=1,2,\ldots,ns,\qquad h=1,\ldots,ne\quad m=1,\ldots,4$

معادلات (۳-۸۱) و (۳-۸۲) تقریب المان محدود توسعه یافته معادله حرکت هستند. تقریب گلرکین معادله انرژی (معادله (۳-۵۴))، به صورت زیر است:

$$\int_{V(e)} (T_{,ii}-W_1\dot{u}_{i,i}-W_2\dot{T}-W_3\dot{c})S_l dV=0 \tag{۳-۸۳}$$

$l=1,2,\ldots,ns,\quad i,j=1,2$

با بکارگیری فرمول‌بندی ضعیف در اولین عبارت رابطه (۳-۸۳) و استفاده از نظریه گاوس نتیجه می‌شود:

$$\int_{V(e)} \big(T_{,ii}\big)S_l dV=\int_{A(e)} (T_{,i}n_i)S_l dA-\int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_i}T_{,i}dV \tag{۳-۸۴}$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۳-۸۳) نتیجه می‌شود:

$$\int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_i}T_{,i}dV+\int_{V(e)} (W_1\dot{u}_{i,i}+W_2\dot{T}+W_3\dot{c})S_l dV=\int_{A(e)} (T_{,i}n_i)S_l dA \tag{۳-۸۵}$$

$l=1,2,\ldots,ns,\quad i,j=1,2$

با جایگذاری مولفه‌های جابه‌جایی u_i و v_i، تغییر دما θ و تغییر رطوبت C از روابط (۳-۶۲) تا (۳-۶۵) در رابطه (۳-۸۵)، معادله انرژی در قالب تقریب المان محدود توسعه یافته به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\left(\int_{V(e)} S_{l,x}N_{h,x}dV\right)\mathrm{a}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} S_{l,x}\Phi_{h,x}dV\right)\mathrm{b}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} S_{l,x}\Psi_{hm,x}dV\right)c_{hm}^{\mathrm{T}}$$

$$+\left(\int_{V(e)} S_{l,y}N_{h,y}dV\right)\mathrm{a}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} S_{l,y}\Phi_{h,y}dV\right)\mathrm{b}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} S_{l,y}\Psi_{hm,y}dV\right)c_{hm}^{\mathrm{T}}$$

$$+\left(\int_{V(e)} W_1S_lN_{h,x}dV\right)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} W_1S_l\Phi_{h,x}dV\right)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} W_1S_l\Psi_{hm,x}dV\right)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}}$$

$$+\left(\int_{V(e)} W_1S_lN_{h,y}dV\right)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} W_1S_l\Phi_{h,y}dV\right)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} W_1S_l\Psi_{hm,y}dV\right)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}}$$

$$+\left(\int_{V(e)} W_2S_lN_hdV\right)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} W_2S_l\Phi_hdV\right)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} W_2S_l\Psi_{hm}dV\right)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}}$$

$$+\left(\int_{V(e)} W_3S_lN_hdV\right)\dot{\mathrm{a}}_h^{C} + \left(\int_{V(e)} W_3S_l\Phi_hdV\right)\dot{\mathrm{b}}_h^{C} + \left(\int_{V(e)} W_3S_l\Psi_{hm}dV\right)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{C}$$

$$= \int_{A(e)} T_{,x}n_xS_ldA + \int_{A(e)} T_{,y}n_yS_ldA$$

$$l = 1,2,..,ns \qquad h = 1,\dots,ne \qquad m = 1,\dots,4$$ (۳-۸۶)

تقریب گلرکین معادله رطوبت (معادله (۳-۶۱))، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{V(e)} \left(c_{,ii} + V_4T_{,ii} - V_1\dot{u}_{i,i} - V_2\dot{T} - V_3\dot{c}\right)S_ldV$$

$$l = 1,2,\dots,ns, \quad i,j = 1,2$$ (۳-۸۷)

با بکارگیری فرمول‌بندی ضعیف در اولین و دومین عبارت رابطه (۳-۸۷) و استفاده از نظریه گاوس نتیجه می‌شود:

$$\int_{V(e)} c_{,ii}S_ldV = \int_{A(e)} (c_{,i}n_i)S_ldA - \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_i}c_{,i}dV$$ (۳-۸۸)

$$\int_{V(e)} (V_4T_{,ii})S_ldV = \int_{A(e)} (V_4T_{,i}n_i)S_ldA - \int_{V(e)} V_4\frac{\partial S_l}{\partial x_i}T_{,i}dV$$ (۳-۸۹)

با جایگذاری روابط (۳-۸۸) و (۳-۸۹) در رابطه (۳-۸۷) خواهیم داشت:

$$\int_{V(e)} \left(V_1 \dot{u}_{i,i} + V_2 \dot{T} + V_3 \dot{c}\right) S_l dV + \int_{V(e)} V_4 \frac{\partial S_l}{\partial x_i} T_{,i} dV + \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_i} c_{,i} dV = \int_{A(e)} \left(V_4 T_{,i} n_i\right) S_l dA + \int_{A(e)} \left(c_{,i} n_i\right) S_l dA \qquad (۹۰-۳)$$

$$l = 1,2,\dots,ns, \quad i,j = 1,2$$

با جایگذاری مولفه‌های جابه‌جایی u_i و v_i، تغییر دما θ و تغییر رطوبت C از روابط (۳-۶۲) تا (۳-۶۵) در رابطه (۳-۹۰)، معادله رطوبت در قالب تقریب المان محدود توسعه یافته به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{V(e)} V_1 S_l N_{h,x} dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} V_1 S_l \Phi_{h,x} dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} V_1 S_l \Psi_{hm,x} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}} \\
&+ \left(\int_{V(e)} V_1 S_l N_{h,y} dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} V_1 S_l \Phi_{h,y} dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} V_1 S_l \Psi_{hm,y} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}} \\
&+ \left(\int_{V(e)} V_2 S_l N_h dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} V_2 S_l \Phi_h dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} V_2 S_l \Psi_{hm} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}} \\
&+ \left(\int_{V(e)} V_3 S_l N_h dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{C} + \left(\int_{V(e)} V_3 S_l \Phi_h dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{C} + \left(\int_{V(e)} V_3 S_l \Psi_{hm} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{C} \\
&+ \left(\int_{V(e)} V_4 S_{l,x} N_{h,x} dV\right) \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} V_4 S_{l,x} \Phi_{h,x} dV\right) \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} V_4 S_{l,x} \Psi_{hm,x} dV\right) c_{hm}^{\mathrm{T}} \\
&+ \left(\int_{V(e)} V_4 S_{l,y} N_{h,y} dV\right) \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} V_4 S_{l,y} \Phi_{h,y} dV\right) \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} V_4 S_{l,y} \Psi_{hm,y} dV\right) c_{hm}^{\mathrm{T}} \\
&+ \left(\int_{V(e)} S_{l,x} N_{h,x} dV\right) \mathrm{a}_h^{C} + \left(\int_{V(e)} S_{l,x} \Phi_{h,x} dV\right) \mathrm{b}_h^{C} + \left(\int_{V(e)} S_{l,x} \Psi_{hm,x} dV\right) c_{hm}^{C} \\
&+ \left(\int_{V(e)} S_{l,y} N_{h,y} dV\right) \mathrm{a}_h^{C} + \left(\int_{V(e)} S_{l,y} \Phi_{h,y} dV\right) \mathrm{b}_h^{C} + \left(\int_{V(e)} S_{l,y} \Psi_{hm,y} dV\right) c_{hm}^{C} \\
&= \int_{A(e)} \left(V_4 T_{,x} n_{,x}\right) S_l dA + \int_{A(e)} \left(V_4 T_{,y} n_{,y}\right) S_l dA + \int_{A(e)} \left(c_{,x} n_{,x}\right) S_l dA \\
&\qquad + \int_{A(e)} \left(c_{,y} n_{,y}\right) S_l dA
\end{aligned}$$

$$l = 1,2,\dots,ns \qquad h = 1,\dots,ne \qquad m = 1,\dots,4 \qquad (۹۱-۳)$$

با مرتب سازی عبارت‌های روابط (۳-۸۱)، (۳-۸۲)، (۳-۸۶) و (۳-۹۱)، معادلات حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV\right) \ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV\right) \ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Psi_{hm} dV\right) \ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}} \\
&+\left(\int_{V(e)} \left[(\lambda+2\mu) S_{l,x} N_{h,x} + \mu S_{l,y} N_{h,y}\right] dV\right) \mathrm{a}_h^{\mathrm{u}} \\
&+\left(\int_{V(e)} \left[(\lambda+2\mu) S_{l,x} \Phi_{h,x} + \mu S_{l,y} \Phi_{h,y}\right] dV\right) \mathrm{b}_h^{\mathrm{u}} \\
&+\left(\int_{V(e)} \left[(\lambda+2\mu) S_{l,x} \Psi_{hm,x} + \mu S_{l,y} \Psi_{hm,y}\right] dV\right) \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}} \\
&+\left(\int_{V(e)} \left[\lambda S_{l,x} N_{h,y} + \mu S_{l,y} N_{h,x}\right] dV\right) \mathrm{a}_h^{\mathrm{v}} \\
&+\left(\int_{V(e)} \left[\lambda S_{l,x} \Phi_{h,y} + \mu S_{l,y} \Phi_{h,x}\right] dV\right) \mathrm{b}_h^{\mathrm{v}} \\
&+\left(\int_{V(e)} \left[\lambda S_{l,x} \Psi_{hm,y} + \mu S_{l,y} \Psi_{hm,x}\right] dV\right) \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}} \\
&-\int_{V(e)} \gamma_1 S_{l,x}\left(N_h \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}} + \Phi_h \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}} + \Psi_{hm} \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}\right) dV \\
&-\int_{V(e)} \gamma_2 S_{l,x}\left(N_h \mathrm{a}_h^{C} + \Phi_h \mathrm{b}_h^{C} + \Psi_{hm} \mathrm{c}_{hm}^{C}\right) dV \\
&= \int_{V(e)} B_x S_l dV + \int_{A(e)} Tr_x^n S_l dA
\end{aligned}
\tag{۳-۹۲}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV\right) \ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV\right) \ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Psi_{hm} dV\right) \ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}} \\
&+\left(\int_{V(e)} \left[\mu S_{l,x} N_{h,y} + \lambda S_{l,y} N_{h,x}\right] dV\right) \mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}
\end{aligned}
\tag{۳-۹۳}
$$

$$+\left(\int_{V(e)}\left[\mu S_{l,x}\Phi_{h,y}+\lambda S_{l,y}\Phi_{h,x}\right]dV\right)\mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}$$

$$+\left(\int_{V(e)}\left[\mu S_{l,x}\Psi_{hm,y}+\lambda S_{l,y}\Psi_{,x}\right]dV\right)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}$$

$$+\left(\int_{V(e)}\left[\mu S_{l,x}N_{h,x}+(\lambda+2\mu)S_{l,y}N_{h,y}\right]dV\right)\mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}$$

$$+\left(\int_{V(e)}\left[\mu S_{l,x}\Phi_{h,x}+(\lambda+2\mu)S_{l,y}\Phi_{h,y}\right]dV\right)\mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}$$

$$+\left(\int_{V(e)}\left[\mu S_{l,x}\Psi_{hm,x}+(\lambda+2\mu)S_{l,y}\Psi_{hm,y}\right]dV\right)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}$$

$$-\int_{V(e)}\gamma_1 S_{l,y}\left(N_h\mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}+\Phi_h\mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}+\Psi_{hm}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}\right)dV$$

$$-\int_{V(e)}\gamma_2 S_{l,y}\left(N_h\mathrm{a}_h^{C}+\Phi_h\mathrm{b}_h^{C}+\Psi_{hm}\mathrm{c}_{hm}^{C}\right)dV$$

$$=\int_{V(e)}B_yS_l dV+\int_{A(e)}Tr_y^n S_l dA$$

$$\left(\int_{V(e)}\left(S_{l,x}N_{h,x}+S_{l,y}N_{h,y}\right)dV\right)\mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}+\left(\int_{V(e)}\left(S_{l,x}\Phi_{h,x}+S_{l,y}\Phi_{h,y}\right)dV\right)\mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}$$

$$+\left(\int_{V(e)}\left(S_{l,x}\Psi_{hm,x}+S_{l,y}\Psi_{hm,y}\right)dV\right)c_{hm}^{\mathrm{T}}$$

$$+\left(\int_{V(e)}W_1S_lN_{h,x}dV\right)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}}+\left(\int_{V(e)}W_1S_l\Phi_{h,x}dV\right)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}}+\left(\int_{V(e)}W_1S_l\Psi_{hm,x}dV\right)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}} \quad (۹۴-۳)$$

$$+\left(\int_{V(e)}W_1S_lN_{h,y}dV\right)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}}+\left(\int_{V(e)}W_1S_l\Phi_{h,y}dV\right)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}}+\left(\int_{V(e)}W_1S_l\Psi_{hm,y}dV\right)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}}$$

$$+\left(\int_{V(e)}W_2S_lN_hdV\right)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}}+\left(\int_{V(e)}W_2S_l\Phi_hdV\right)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}}+\left(\int_{V(e)}W_2S_l\Psi_{hm}dV\right)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}}$$

$$+\left(\int_{V(e)}W_3S_lN_hdV\right)\dot{\mathrm{a}}_h^{C}+\left(\int_{V(e)}W_3S_l\Phi_hdV\right)\dot{\mathrm{b}}_h^{C}+\left(\int_{V(e)}W_3S_l\Psi_{hm}dV\right)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{C}$$

$$= \int_{A(e)} T_{,x} n_x S_l dA + \int_{A(e)} T_{,y} n_y S_l dA$$

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{V(e)} \left(V_4 S_{l,x} N_{h,x} + V_4 S_{l,y} N_{h,y}\right) dV\right) \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} \left(V_4 S_{l,x} \Phi_{h,x} + V_4 S_{l,y} \Phi_{h,y}\right) dV\right) \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}} \\
&+ \left(\int_{V(e)} \left(V_4 S_{l,x} \Psi_{hm,x} + V_4 S_{l,y} \Psi_{hm,y}\right) dV\right) c_{hm}^{\mathrm{T}} \\
&+ \left(\int_{V(e)} \left(S_{l,x} N_{h,x} + S_{l,y} N_{h,y}\right) dV\right) \mathrm{a}_h^{C} + \left(\int_{V(e)} \left(S_{l,x} \Phi_{h,x} + S_{l,y} \Phi_{h,y}\right) dV\right) \mathrm{b}_h^{C} \\
&+ \left(\int_{V(e)} \left(S_{l,x} \Psi_{hm,x} + S_{l,y} \Psi_{hm,y}\right) dV\right) c_{hm}^{C} \\
&+ \left(\int_{V(e)} V_1 S_l N_{h,x} dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} V_1 S_l \Phi_{h,x} dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} V_1 S_l \Psi_{hm,x} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}} \\
&+ \left(\int_{V(e)} V_1 S_l N_{h,y} dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} V_1 S_l \Phi_{h,y} dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} V_1 S_l \Psi_{hm,y} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}} \\
&+ \left(\int_{V(e)} V_2 S_l N_h dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} V_2 S_l \Phi_h dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} V_2 S_l \Psi_{hm} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}} \\
&+ \left(\int_{V(e)} V_3 S_l N_h dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{C} + \left(\int_{V(e)} V_3 S_l \Phi_h dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{C} + \left(\int_{V(e)} V_3 S_l \Psi_{hm} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{C} \\
&= \int_{A(e)} \left(V_4 T_{,x} n_{,x}\right) S_l dA + \int_{A(e)} \left(V_4 T_{,y} n_{,y}\right) S_l dA + \int_{A(e)} \left(c_{,x} n_{,x}\right) S_l dA \\
&\qquad + \int_{A(e)} \left(c_{,y} n_{,y}\right) S_l dA
\end{aligned} \tag{۹۵-۳}$$

$$l = 1,2,..,ns \qquad h = 1,\dots,ne \qquad m = 1,\dots,4$$

معادلات (۳-۹۲) تا (۳-۹۵) را می توان در غالب یک معادله ماتریسی در کنار هم قرار داد. این معادله ماتریسی، همان معادله کوپل اجزا محدود توسعه‌یافته است که به شکل زیر بیان می‌شود:

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{\Delta}\} + [\mathrm{C}]\{\dot{\Delta}\} + [\mathrm{K}]\{\Delta\} = \{\mathrm{F}\} \tag{۹۶-۳}$$

در رابطه بالا ماتریس‌های [M]، [C] و [K] به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی، و سفتی هستند. {Δ} بردار مجهولات گره‌ای و {F} بردار نیروهای گره‌ای است. برای یک المان مبنا (e) این ماتریس‌ها و بردارها به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$[\mathrm{M}]^{(e)} = \begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] & [M_{13}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [M_{24}] & [M_{25}] & [M_{26}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}$$

(۹۷-۳)

$$[\mathrm{C}]^{(e)} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [C_{31}] & [C_{32}] & [C_{33}] & [C_{34}] & [C_{35}] & [C_{36}] & [C_{37}] & [C_{38}] & [C_{39}] & [C_{310}] & [C_{311}] & [C_{312}] \\ [C_{41}] & [C_{42}] & [C_{43}] & [C_{44}] & [C_{45}] & [C_{46}] & [C_{47}] & [C_{48}] & [C_{49}] & [C_{410}] & [C_{411}] & [C_{412}] \end{bmatrix}$$

(۹۸-۳)

$$[\mathrm{K}]^{(e)} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] & [K_{15}] & [K_{16}] & [K_{17}] & [K_{18}] & [K_{19}] & [K_{110}] & [K_{111}] & [K_{112}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] & [K_{25}] & [K_{26}] & [K_{27}] & [K_{28}] & [K_{29}] & [K_{210}] & [K_{211}] & [K_{212}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [K_{37}] & [K_{38}] & [K_{39}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [K_{47}] & [K_{48}] & [K_{49}] & [K_{410}] & [K_{411}] & [K_{412}] \end{bmatrix}$$

(۹۹-۳)

$$\{\Delta\}^{(e)} = \left\{\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}, \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}, \mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}, \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}, \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}, \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}, \mathrm{a}_h^{C}, \mathrm{b}_h^{C}, \mathrm{c}_{hm}^{C}\right\}^T \qquad (۱۰۰-۳)$$

$$h = 1, \dots, ne, \quad m = 1, \dots, 4$$

$$\{F\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \int_{V(e)} B_x S_l dV + \int_{A(e)} Tr_x^n S_l dA \\ \int_{V(e)} B_y S_l dV + \int_{A(e)} Tr_y^n S_l dA \\ \int_{A(e)} T_{,x} n_x S_l dA + \int_{A(e)} T_{,y} n_y S_l dA \\ \int_{A(e)} (V_4 T_{,x} n_{,x}) S_l dA + \int_{A(e)} (V_4 T_{,y} n_{,y}) S_l dA + \int_{A(e)} (c_{,x} n_{,x}) S_l dA + \int_{A(e)} (c_{,y} n_{,y}) S_l dA \end{Bmatrix}$$

(۱۰۱-۳)

مولفه‌های ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی از معادلات (۳-۹۷)، (۳-۹۸) و (۳-۹۹) به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$[M_{11}] = [M_{24}] = \left[\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV\right]$$ (۱۰۲-۳)

$$[M_{12}] = [M_{25}] = \left[\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV\right]$$ (۱۰۳-۳)

$$[M_{13}] = [M_{26}] = \left[\int_{V(e)} \rho S_l \Psi_{hm} dV\right]$$ (۱۰۴-۳)

$$[C_{31}] = \left[\int_{V(e)} W_1 S_l N_{h,x} dV\right]$$ (۱۰۵-۳)

$$[C_{32}] = \left[\int_{V(e)} W_1 S_l \Phi_{h,x} dV\right]$$ (۱۰۶-۳)

$$[C_{33}] = \left[\int_{V(e)} W_1 S_l \Psi_{hm,x} dV\right]$$ (۱۰۷-۳)

$$[C_{34}] = \left[\int_{V(e)} W_1 S_l N_{h,y} dV\right]$$ (۱۰۸-۳)

$$[C_{35}] = \left[\int_{V(e)} W_1 S_l \Phi_{h,y} dV\right]$$ (۱۰۹-۳)

$$[C_{36}] = \left[\int_{V(e)} W_1 S_l \Psi_{hm,y} dV\right]$$ (۱۱۰-۳)

$$[C_{37}] = \left[\iint_{V(e)} W_2 S_l N_h dV\right]$$ (۱۱۱-۳)

$$[C_{38}] = \left[\iint_{V(e)} W_2 S_l \Phi_h dV\right]$$ (۱۱۲-۳)

$$[C_{39}] = \left[\iint_{V(e)} W_2 S_l \Psi_{hm} dV\right]$$ (۱۱۳-۳)

$$[C_{310}] = \left[\iint_{V(e)} W_3 S_l N_h dV\right]$$ (۱۱۴-۳)

$$[C_{311}] = \left[\iint_{V(e)} W_3 S_l \Phi_h dV\right]$$ (۱۱۵-۳)

$$[C_{312}] = \left[\iint_{V(e)} W_3 S_l \Psi_{hm} dV\right]$$ (۱۱۶-۳)

$$[C_{41}] = \left[\iint_{V(e)} V_1 S_l N_{h,x} dV\right]$$ (۱۱۷-۳)

$$[C_{42}] = \left[\iint_{V(e)} V_1 S_l \Phi_{h,x} dV\right]$$ (۱۱۸-۳)

$$[C_{43}] = \left[\iint_{V(e)} V_1 S_l \Psi_{hm,x} dV\right]$$ (۱۱۹-۳)

$$[C_{44}] = \left[\iint_{V(e)} V_1 S_l N_{h,y} dV\right]$$ (۱۲۰-۳)

$$[C_{45}] = \left[\iint_{V(e)} V_1 S_l \Phi_{h,y} dV\right]$$ (۱۲۱-۳)

$$[C_{46}] = \left[\iint_{V(e)} V_1 S_l \Psi_{hm,y} dV\right]$$ (۱۲۲-۳)

$$[C_{47}] = \left[\iint_{V(e)} V_2 S_l N_h dV\right]$$ (۱۲۳-۳)

$$[C_{48}] = \left[\iint_{V(e)} V_2 S_l \Phi_h dV\right]$$ (۱۲۴-۳)

$$[C_{49}] = \left[\iint_{V(e)} V_2 S_l \Psi_{hm} dV\right] \quad (۳-۱۲۵)$$

$$[C_{410}] = \left[\iint_{V(e)} V_3 S_l N_h dV\right] \quad (۳-۱۲۶)$$

$$[C_{411}] = \left[\iint_{V(e)} V_3 S_l \Phi_h dV\right] \quad (۳-۱۲۷)$$

$$[C_{412}] = \left[\iint_{V(e)} V_3 S_l \Psi_{hm} dV\right] \quad (۳-۱۲۸)$$

$$[K_{11}] = \left[\iint_{V(e)} \left[(\lambda + 2\mu) S_{l,x} N_{h,x} + \mu S_{l,y} N_{h,y}\right] dV\right] \quad (۳-۱۲۹)$$

$$[K_{12}] = \left[\iint_{V(e)} \left[(\lambda + 2\mu) S_{l,x} \Phi_{h,x} + \mu S_{l,y} \Phi_{h,y}\right] dV\right] \quad (۳-۱۳۰)$$

$$[K_{13}] = \left[\iint_{V(e)} \left[(\lambda + 2\mu) S_{l,x} \Psi_{hm,x} + \mu S_{l,y} \Psi_{hm,y}\right] dV\right] \quad (۳-۱۳۱)$$

$$[K_{14}] = \left[\iint_{V(e)} \left[\lambda S_{l,x} N_{h,y} + \mu S_{l,y} N_{h,x}\right] dV\right] \quad (۳-۱۳۲)$$

$$[K_{15}] = \left[\iint_{V(e)} \left[\lambda S_{l,x} \Phi_{h,y} + \mu S_{l,y} \Phi_{h,x}\right] dV\right] \quad (۳-۱۳۳)$$

$$[K_{16}] = \left[\iint_{V(e)} \left[\lambda S_{l,x} \Psi_{hm,y} + \mu S_{l,y} \Psi_{hm,x}\right] dV\right] \quad (۳-۱۳۴)$$

$$[K_{17}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_1 S_{l,x} N_h dV\right] \quad (۳-۱۳۵)$$

$$[K_{18}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_1 S_{l,x} \Phi_h dV\right] \quad (۳-۱۳۶)$$

$$[K_{19}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_1 S_{l,x} \Psi_{hm} dV\right] \quad (۳-۱۳۷)$$

$$[K_{110}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_2 S_{l,x} N_h dV\right] \quad (۳-۱۳۸)$$

$$[K_{111}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_2 S_{l,x} \Phi_h dV\right]$$ (۱۳۹-۳)

$$[K_{112}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_2 S_{l,x} \Psi_{hm} dV\right]$$ (۱۴۰-۳)

$$[K_{21}] = \left[\int_{V(e)} \left[\mu S_{l,x} N_{h,y} + \lambda S_{l,y} N_{h,x}\right] dV\right]$$ (۱۴۱-۳)

$$[K_{22}] = \left[\int_{V(e)} \left[\mu S_{l,x} \Phi_{h,y} + \lambda S_{l,y} \Phi_{h,x}\right] dV\right]$$ (۱۴۲-۳)

$$[K_{23}] = \left[\int_{V(e)} \left[\mu S_{l,x} \Psi_{hm,y} + \lambda S_{l,y} \Psi_{,x}\right] dV\right]$$ (۱۴۳-۳)

$$[K_{24}] = \left[\int_{V(e)} \left[\mu S_{l,x} N_{h,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} N_{h,y}\right] dV\right]$$ (۱۴۴-۳)

$$[K_{25}] = \left[\int_{V(e)} \left[\mu S_{l,x} \Phi_{h,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} \Phi_{h,y}\right] dV\right]$$ (۱۴۵-۳)

$$[K_{26}] = \left[\int_{V(e)} \left[\mu S_{l,x} \Psi_{hm,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} \Psi_{hm,y}\right] dV\right]$$ (۱۴۶-۳)

$$[K_{27}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_1 S_{l,y} N_h dV\right]$$ (۱۴۷-۳)

$$[K_{28}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_1 S_{l,y} \Phi_h dV\right]$$ (۱۴۸-۳)

$$[K_{29}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_1 S_{l,y} \Psi_{hm} dV\right]$$ (۱۴۹-۳)

$$[K_{210}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_2 S_{l,y} N_h dV\right]$$ (۱۵۰-۳)

$$[K_{211}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_2 S_{l,y} \Phi_h dV\right]$$ (۱۵۱-۳)

$$[K_{212}] = \left[-\int_{V(e)} \gamma_2 S_{l,y} \Psi_{hm} dV\right]$$ (۱۵۲-۳)

$$[K_{37}] = \left[\iint_{V(e)} \left(S_{l,x}N_{h,x} + S_{l,y}N_{h,y}\right)dV\right]$$ (۱۵۳-۳)

$$[K_{38}] = \left[\iint_{V(e)} \left(S_{l,x}\Phi_{h,x} + S_{l,y}\Phi_{h,y}\right)dV\right]$$ (۱۵۴-۳)

$$[K_{39}] = \left[\iint_{V(e)} \left(S_{l,x}\Psi_{hm,x} + S_{l,y}\Psi_{hm,y}\right)dV\right]$$ (۱۵۵-۳)

$$[K_{47}] = \left[\iint_{V(e)} \left(V_4 S_{l,x}N_{h,x} + V_4 S_{l,y}N_{h,y}\right)dV\right]$$ (۱۵۶-۳)

$$[K_{48}] = \left[\iint_{V(e)} \left(V_4 S_{l,x}\Phi_{h,x} + V_4 S_{l,y}\Phi_{h,y}\right)dV\right]$$ (۱۵۷-۳)

$$[K_{49}] = \left[\iint_{V(e)} \left(V_4 S_{l,x}\Psi_{hm,x} + V_4 S_{l,y}\Psi_{hm,y}\right)dV\right]$$ (۱۵۸-۳)

$$[K_{410}] = \left[\iint_{V(e)} \left(S_{l,x}N_{h,x} + S_{l,y}N_{h,y}\right)dV\right]$$ (۱۵۹-۳)

$$[K_{411}] = \left[\iint_{V(e)} \left(S_{l,x}\Phi_{h,x} + S_{l,y}\Phi_{h,y}\right)dV\right]$$ (۱۶۰-۳)

$$[K_{412}] = \left[\iint_{V(e)} \left(S_{l,x}\Psi_{hm,x} + S_{l,y}\Psi_{hm,y}\right)dV\right]$$ (۱۶۱-۳)

مولفه های ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی برای المان (e) را می توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$[M_{11}] = [M_{24}] = \int_{V(e)} \rho[S]^T[N]dV$$ (۱۶۲-۳)

$$[M_{12}] = [M_{25}] = \int_{V(e)} \rho[S]^T[\Phi]dV$$ (۱۶۳-۳)

$$[M_{13}] = [M_{26}]$$
$$= \int_{V(e)} [\rho[S]^T[\Psi_1] \quad \rho[S]^T[\Psi_2] \quad \rho[S]^T[\Psi_3] \quad \rho[S]^T[\Psi_4]]\, dV$$ (۱۶۴-۳)

$$[C_{31}] = \int_{V(e)} W_1 [S]^T [G_1] dV$$ (۱۶۵-۳)

$$[C_{32}] = \int_{V(e)} W_1 [S]^T [G_3] dV$$ (۱۶۶-۳)

$$[C_{33}] = \int_{V(e)} [W_1 [S]^T [\mathrm{G}_5] \quad W_1 [S]^T [\mathrm{G}_6] \quad W_1 [S]^T [\mathrm{G}_7] \quad W_1 [S]^T [\mathrm{G}_8]]\, dV$$ (۱۶۷-۳)

$$[C_{34}] = \int_{V(e)} W_1 [S]^T [G_2] dV$$ (۱۶۸-۳)

$$[C_{35}] = \int_{V(e)} W_1 [S]^T [G_4] dV$$ (۱۶۹-۳)

$$[C_{36}] = \int_{V(e)} [W_1 [S]^T [\mathrm{G}_9] \quad W_1 [S]^T [\mathrm{G}_{10}] \quad W_1 [S]^T [\mathrm{G}_{11}] \quad W_1 [S]^T [\mathrm{G}_{12}]]\, dV$$ (۱۷۰-۳)

$$[C_{37}] = \int_{V(e)} W_2 [S]^T [N] dV$$ (۱۷۱-۳)

$$[C_{38}] = \int_{V(e)} W_2 [S]^T [\Phi] dV$$ (۱۷۲-۳)

$$[C_{39}] = \int_{V(e)} [W_2 [S]^T [\Psi_1] \quad W_2 [S]^T [\Psi_2] \quad W_2 [S]^T [\Psi_3] \quad W_2 [S]^T [\Psi_4]]\, dV$$ (۱۷۳-۳)

$$[C_{310}] = \int_{V(e)} W_3 [S]^T [N] dV$$ (۱۷۴-۳)

$$[C_{311}] = \int_{V(e)} W_3 [S]^T [\Phi] dV$$ (۱۷۵-۳)

$$[C_{312}] = \int_{V(e)} [W_3 [S]^T [\Psi_1] \quad W_3 [S]^T [\Psi_2] \quad W_3 [S]^T [\Psi_3] \quad W_3 [S]^T [\Psi_4]]\, dV$$ (۱۷۶-۳)

$$[C_{41}] = \int_{V(e)} V_1 [S]^T [G_1] dV$$ (۱۷۷-۳)

$$[C_{42}] = \int_{V(e)} V_1 [S]^T [G_3] dV$$ (۱۷۸-۳)

$$[C_{43}] = \int_{V(e)} [V_1 [S]^T [\mathrm{G}_5] \quad V_1 [S]^T [\mathrm{G}_6] \quad V_1 [S]^T [\mathrm{G}_7] \quad V_1 [S]^T [\mathrm{G}_8]]\; dV$$ (۱۷۹-۳)

$$[C_{44}] = \int_{V(e)} V_1 [S]^T [G_2] dV \tag{۱۸۰-۳}$$

$$[C_{45}] = \int_{V(e)} V_1 [S]^T [G_4] dV \tag{۱۸۱-۳}$$

$$[C_{46}] = \int_{V(e)} [V_1 [S]^T [\mathrm{G}_9] \quad V_1 [S]^T [\mathrm{G}_{10}] \quad V_1 [S]^T [\mathrm{G}_{11}] \quad V_1 [S]^T [\mathrm{G}_{12}]]\, dV \tag{۱۸۲-۳}$$

$$[C_{47}] = \int_{V(e)} V_2 [S]^T [N] dV \tag{۱۸۳-۳}$$

$$[C_{48}] = \int_{V(e)} V_2 [S]^T [\Phi] dV \tag{۱۸۴-۳}$$

$$[C_{49}] = \int_{V(e)} [V_2 [S]^T [\Psi_1] \quad V_2 [S]^T [\Psi_2] \quad V_2 [S]^T [\Psi_3] \quad V_2 [S]^T [\Psi_4]]\, dV \tag{۱۸۵-۳}$$

$$[C_{410}] = \int_{V(e)} V_3 [S]^T [N] dV \tag{۱۸۶-۳}$$

$$[C_{411}] = \int_{V(e)} V_3 [S]^T [\Phi] dV \tag{۱۸۷-۳}$$

$$[C_{412}] = \int_{V(e)} [V_3 [S]^T [\Psi_1] \quad V_3 [S]^T [\Psi_2] \quad V_3 [S]^T [\Psi_3] \quad V_3 [S]^T [\Psi_4]]\, dV \tag{۱۸۸-۳}$$

$$[K_{11}] = \int_{V(e)} \big((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_1] + \mu [G_{14}]^T [G_2]\big)\, dV \tag{۱۸۹-۳}$$

$$[K_{12}] = \int_{V(e)} \big((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_3] + \mu [G_{14}]^T [G_4]\big)\, dV \tag{۱۹۰-۳}$$

$$\begin{aligned}
[K_{13}] = \Bigg[&\int_{V(e)} \big((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_5] + \mu [G_{14}]^T [G_9]\big)\, dV \\
&\int_{V(e)} \big((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_6] + \mu [G_{14}]^T [G_{10}]\big)\, dV \\
&\int_{V(e)} \big((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_7] + \mu [G_{14}]^T [G_{11}]\big)\, dV \\
&\int_{V(e)} \big((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_8] + \mu [G_{14}]^T [G_{12}]\big) dV \Bigg]
\end{aligned} \tag{۱۹۱-۳}$$

$$[K_{14}] = \int_{V(e)} (\lambda[G_{13}]^T[G_2] + \mu[G_{14}]^T[G_1])dV \tag{۱۹۲-۳}$$

$$[K_{15}] = \int_{V(e)} (\lambda[G_{13}]^T[G_4] + \mu[G_{14}]^T[G_3])dV \tag{۱۹۳-۳}$$

$$[K_{16}] = \int_{V(e)} [(\lambda[G_{13}]^T[G_9] + \mu[G_{14}]^T[G_5]) \quad (\lambda[G_{13}]^T[G_{10}] + \mu[G_{14}]^T[G_6]) \quad (\lambda[G_{13}]^T[G_{11}] + \mu[G_{14}]^T[G_7]) \quad (\lambda[G_{13}]^T[G_{12}] + \mu[G_{14}]^T[G_8])]dV \tag{۱۹۴-۳}$$

$$[K_{17}] = -\int_{V(e)} \gamma_1[G_{13}]^T[N]dV \tag{۱۹۵-۳}$$

$$[K_{18}] = -\int_{V(e)} \gamma_1[G_{13}]^T[\Phi]dV \tag{۱۹۶-۳}$$

$$[K_{19}] = -\int_{V(e)} \left[\gamma_1[G_{13}]^T[\Psi_1] \quad \gamma_1[G_{13}]^T[\Psi_2] \quad \gamma_1[G_{13}]^T[\Psi_3] \quad \gamma_1[G_{13}]^T[\Psi_4]\right] dV \tag{۱۹۷-۳}$$

$$[K_{110}] = -\int_{V(e)} \gamma_2[G_{13}]^T[N]dV \tag{۱۹۸-۳}$$

$$[K_{111}] = -\int_{V(e)} \gamma_2[G_{13}]^T[\Phi]dV \tag{۱۹۹-۳}$$

$$[K_{112}] = -\int_{V(e)} \left[\gamma_2[G_{13}]^T[\Psi_1] \quad \gamma_2[G_{13}]^T[\Psi_2] \quad \gamma_2[G_{13}]^T[\Psi_3] \quad \gamma_2[G_{13}]^T[\Psi_4]\right] dV \tag{۲۰۰-۳}$$

$$[K_{21}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_2] + \lambda[G_{14}]^T[G_1])dV \tag{۲۰۱-۳}$$

$$[K_{22}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_4] + \lambda[G_{14}]^T[G_3])dV \tag{۲۰۲-۳}$$

$$[K_{23}] = \int_{V(e)} [(\mu[G_{13}]^T[G_9] + \lambda[G_{14}]^T[G_5]) \quad (\mu[G_{13}]^T[G_{10}] + \lambda[G_{14}]^T[G_6]) \quad (\mu[G_{13}]^T[G_{11}] + \lambda[G_{14}]^T[G_7]) \quad (\mu[G_{13}]^T[G_{12}] + \lambda[G_{14}]^T[G_8])]dV \tag{۲۰۳-۳}$$

$$[K_{24}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_1] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_2])dV$$ (۲۰۴-۳)

$$[K_{25}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_3] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_4])dV$$ (۲۰۵-۳)

$$[K_{26}] = \left[\int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_5] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_9])dV \right.$$
$$\int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_6] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{10}])dV$$
$$\int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_7] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{11}])dV$$
$$\left.\int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_8] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{12}])dV\right]$$ (۲۰۶-۳)

$$[K_{27}] = -\int_{V(e)} \gamma_1[G_{14}]^T[N]dV$$ (۲۰۷-۳)

$$[K_{28}] = -\int_{V(e)} \gamma_1[G_{14}]^T[\Phi]dV$$ (۲۰۸-۳)

$$[K_{29}] = -\int_{V(e)} \left[\gamma_1[G_{14}]^T[\Psi_1] \quad \gamma_1[G_{14}]^T[\Psi_2] \quad \gamma_1[G_{14}]^T[\Psi_3] \quad \gamma_1[G_{14}]^T[\Psi_4]\right] dV$$ (۲۰۹-۳)

$$[K_{210}] = -\int_{V(e)} \gamma_2[G_{14}]^T[N]dV$$ (۲۱۰-۳)

$$[K_{211}] = -\int_{V(e)} \gamma_2[G_{14}]^T[\Phi]dV$$ (۲۱۱-۳)

$$[K_{212}] = -\int_{V(e)} \left[\gamma_2[G_{14}]^T[\Psi_1] \quad \gamma_2[G_{14}]^T[\Psi_2] \quad \gamma_2[G_{14}]^T[\Psi_3] \quad \gamma_2[G_{14}]^T[\Psi_4]\right] dV$$ (۲۱۲-۳)

$$[K_{37}] = \int_{V(e)} ([G_{13}]^T[G_1] + [G_{14}]^T[G_2])dV$$ (۲۱۳-۳)

$$[K_{38}] = \int_{V(e)} ([G_{13}]^T[G_3] + [G_{14}]^T[G_4])dV$$ (۲۱۴-۳)

$$[K_{39}] = \left[\int_{V(e)} ([G_{13}]^T[G_5] + [G_{14}]^T[G_9])dV \right.$$

$$\int_{V(e)} ([G_{13}]^T[G_6] + [G_{14}]^T[G_{10}])dV$$

(۲۱۵-۳)

$$\int_{V(e)} ([G_{13}]^T[G_7] + [G_{14}]^T[G_{11}])dV$$

$$\left. \int_{V(e)} ([G_{13}]^T[G_8] + [G_{14}]^T[G_{12}])dV \right]$$

$$[K_{47}] = \int_{V(e)} (V_4[G_{13}]^T[G_1] + V_4[G_{14}]^T[G_2])dV \quad (۲۱۶-۳)$$

$$[K_{48}] = \int_{V(e)} (V_4[G_{13}]^T[G_3] + V_4[G_{14}]^T[G_4])dV \quad (۲۱۷-۳)$$

$$[K_{49}] = \left[\int_{V(e)} (V_4[G_{13}]^T[G_5] + V_4[G_{14}]^T[G_9])dV \right.$$

$$\int_{V(e)} (V_4[G_{13}]^T[G_6] + V_4[G_{14}]^T[G_{10}])dV$$

(۲۱۸-۳)

$$\int_{V(e)} (V_4[G_{13}]^T[G_7] + V_4[G_{14}]^T[G_{11}])dV$$

$$\left. \int_{V(e)} (V_4[G_{13}]^T[G_8] + V_4[G_{14}]^T[G_{12}])dV \right]$$

$$[K_{410}] = \int_{V(e)} ([G_{13}]^T[G_1] + [G_{14}]^T[G_2])dV \quad (۲۱۹-۳)$$

$$[K_{411}] = \int_{V(e)} ([G_{13}]^T[G_3] + [G_{14}]^T[G_4])dV \quad (۲۲۰-۳)$$

$$[K_{412}] = \left[\int_{V(e)} ([G_{13}]^T[G_5] + [G_{14}]^T[G_9])dV \right.$$

(۲۲۱-۳)

$$\int_{V(e)} ([G_{13}]^T[G_6] + [G_{14}]^T[G_{10}])dV$$

$$\int_{V(e)}([G_{13}]^T[G_7]+[G_{14}]^T[G_{11}])dV$$

$$\left.\int_{V(e)}([G_{13}]^T[G_8]+[G_{14}]^T[G_{12}])dV\right]$$

ماتریس‌ها و بردارهای استفاده شده در روابط فوق برای یک المان چهار گره‌ای با ۴ = ne به شرح زیر هستند:

$$[S]=[N_1 \quad \cdots \quad N_4 \quad \Phi_1 \quad \cdots \quad \Phi_4 \quad \Psi_{11} \quad \cdots \quad \Psi_{44}] \tag{۲۲۲-۳}$$

$$[N]=[N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \tag{۲۲۳-۳}$$

$$[\Phi]=[\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4] \tag{۲۲۴-۳}$$

$$[\Psi_1]=[\Psi_{11},\Psi_{12},\Psi_{13},\Psi_{14}] \tag{۲۲۵-۳}$$

$$[\Psi_2]=[\Psi_{21},\Psi_{22},\Psi_{23},\Psi_{24}] \tag{۲۲۶-۳}$$

$$[\Psi_3]=[\Psi_{31},\Psi_{32},\Psi_{33},\Psi_{34}] \tag{۲۲۷-۳}$$

$$[\Psi_4]=[\Psi_{41},\Psi_{42},\Psi_{43},\Psi_{44}] \tag{۲۲۸-۳}$$

$$[G_1]=[N_{1,x} \quad N_{2,x} \quad N_{3,x} \quad N_{4,x}] \tag{۲۲۹-۳}$$

$$[G_2]=[N_{1,y} \quad N_{2,y} \quad N_{3,y} \quad N_{4,y}] \tag{۲۳۰-۳}$$

$$[G_3]=[\Phi_{1,x} \quad \Phi_{2,x} \quad \Phi_{3,x} \quad \Phi_{4,x}] \tag{۲۳۱-۳}$$

$$[G_4]=[\Phi_{1,y} \quad \Phi_{2,y} \quad \Phi_{3,y} \quad \Phi_{4,y}] \tag{۲۳۲-۳}$$

$$[G_5]=[\Psi_{11,x} \quad \Psi_{12,x} \quad \Psi_{13,x} \quad \Psi_{14,x}] \tag{۲۳۳-۳}$$

$$[G_6]=[\Psi_{21,x} \quad \Psi_{22,x} \quad \Psi_{23,x} \quad \Psi_{24,x}] \tag{۲۳۴-۳}$$

$$[G_7] = [\Psi_{31,x} \quad \Psi_{32,x} \quad \Psi_{33,x} \quad \Psi_{34,x}] \tag{۲۳۵-۳}$$

$$[G_8] = [\Psi_{41,x} \quad \Psi_{42,x} \quad \Psi_{43,x} \quad \Psi_{44,x}] \tag{۲۳۶-۳}$$

$$[G_9] = [\Psi_{11,y} \quad \Psi_{12,y} \quad \Psi_{13,y} \quad \Psi_{14,y}] \tag{۲۳۷-۳}$$

$$[G_{10}] = [\Psi_{21,y} \quad \Psi_{22,y} \quad \Psi_{23,y} \quad \Psi_{24,y}] \tag{۲۳۸-۳}$$

$$[G_{11}] = [\Psi_{31,y} \quad \Psi_{32,y} \quad \Psi_{33,y} \quad \Psi_{34,y}] \tag{۲۳۹-۳}$$

$$[G_{12}] = [\Psi_{41,y} \quad \Psi_{42,y} \quad \Psi_{43,y} \quad \Psi_{44,y}] \tag{۲۴۰-۳}$$

$$[G_{13}] = [N_{1,x} \quad \cdots \quad N_{4,x} \quad \Phi_{1,x} \quad \cdots \quad \Phi_{4,x} \quad \Psi_{11,x} \quad \cdots \quad \Psi_{44,x}] \tag{۲۴۱-۳}$$

$$[G_{14}] = [N_{1,y} \quad \cdots \quad N_{4,y} \quad \Phi_{1,y} \quad \cdots \quad \Phi_{4,y} \quad \Psi_{11,y} \quad \cdots \quad \Psi_{44,y}] \tag{۲۴۲-۳}$$

به منظور ساده‌تر شدن ماتریس‌ها جهت سهولت در برنامه‌نویسی، معادلات را به گونه‌ای جابجا کرده تا بردار مجهولات گره‌ای برای المان مبنای (e) به صورت زیر درآید:

$$[M]^{(e)} = \begin{bmatrix} [M_1] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \tag{۲۴۳-۳}$$

$$[C]^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ [C_1] & [C_2] & [C_3] \\ [C_4] & [C_5] & [C_6] \end{bmatrix} \tag{۲۴۴-۳}$$

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] & [K_3] \\ [0] & [K_4] & [0] \\ [0] & [K_5] & [K_6] \end{bmatrix} \tag{۲۴۵-۳}$$

المان‌های ماتریس جرم، میرایی و سفتی به ترتیب زیر بیان می‌شوند:

$$[M_1] = \int_{V(e)} \rho [B]^T [B] dV \tag{۲۴۶-۳}$$

$$[C_1] = \int_{V(e)} W_1 [St]^T [S1] dV \tag{۲۴۷-۳}$$

$$[C_2] = \int_{V(e)} W_2 [St]^T [St] dV \quad (\text{۳-۲۴۸})$$

$$[C_3] = \int_{V(e)} W_3 [St]^T [St] dV \quad (\text{۳-۲۴۹})$$

$$[C_4] = \int_{V(e)} V_1 [St]^T [S1] dV \quad (\text{۳-۲۵۰})$$

$$[C_5] = \int_{V(e)} V_2 [St]^T [St] dV \quad (\text{۳-۲۵۱})$$

$$[C_6] = \int_{V(e)} V_3 [St]^T [St] dV \quad (\text{۳-۲۵۲})$$

$$[K_1] = \int_{V(e)} [S2]^T [D] [S2] dV \quad (\text{۳-۲۵۳})$$

$$[K_2] = -\int_{V(e)} \gamma_1 [S1]^T [St] dV \quad (\text{۳-۲۵۴})$$

$$[K_3] = -\int_{V(e)} \gamma_2 [S1]^T [St] dV \quad (\text{۳-۲۵۵})$$

$$[K_4] = \int_{V(e)} [S3]^T [S3] dV \quad (\text{۳-۲۵۶})$$

$$[K_5] = \int_{V(e)} V_4 [S3]^T [S3] dV \quad (\text{۳-۲۵۷})$$

$$[K_6] = \int_{V(e)} [S3]^T [S3] dV \quad (\text{۳-۲۵۸})$$

که در این روابط:

$$[St] = [N_1 \quad \cdots \quad N_4 \quad \Phi_1 \quad \cdots \quad \Phi_4 \quad \Psi_{11} \quad \cdots \quad \Psi_{44}] \quad (\text{۳-۲۵۹})$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & N_4 & 0 & \cdots & 0 & \Phi_1 & \cdots & \cdots & 0 & \Psi_{11} & \cdots & \Psi_{44} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_1 & \cdots & N_4 & 0 & \cdots & \cdots & \Phi_4 & 0 & \cdots & 0 & \Psi_{11} & \cdots & \Psi_{44} \end{bmatrix}$$

(۳-۲۶۰)

$$[S1] = [N_{1,x} \quad \cdots \quad N_{4,x} \quad N_{1,y} \quad \cdots \quad N_{4,y} \quad \Phi_{1,x} \quad \cdots \quad \Phi_{4,x} \quad \Phi_{1,y} \quad \cdots \quad \Phi_{4,y}$$

$$\Psi_{11,x} \quad \cdots \quad \Psi_{44,x} \quad \Psi_{11,y} \quad \cdots \quad \Psi_{44,y}] \qquad (۳-۲۶۱)$$

$$[S2] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{1,x} & \Phi_{2,x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & 0 & 0 \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & \Phi_{1,y} & \Phi_{2,y} \end{bmatrix.$$

$$\begin{matrix} \Phi_{3,x} & \Phi_{4,x} & 0 & \ldots & 0 & \Psi_{11,x} & \ldots & \Psi_{44,x} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{1,y} & \ldots & \Phi_{4,y} & 0 & \ldots & 0 & \Psi_{11,y} & \ldots & \Psi_{44,y} \\ \Phi_{3,y} & \Phi_{4,y} & \Phi_{1,x} & \ldots & \Phi_{4,x} & \Psi_{11,y} & \ldots & \Psi_{44,y} & \Psi_{11,x} & \ldots & \Psi_{44,x} \end{matrix}\Bigg] \qquad (۳-۲۶۲)$$

$$[S3] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & \Phi_{1,x} & \Phi_{2,x} & \Phi_{3,x} & \Phi_{4,x} & \Psi_{11,x} & \cdots & \Psi_{44,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & \Phi_{1,y} & \Phi_{2,y} & \Phi_{3,y} & \Phi_{4,y} & \Psi_{11,y} & \cdots & \Psi_{44,y} \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۶۳)$$

ماتریس سفتی $[D]$ برای حالت کرنش صفحه‌ای در فضای بی‌بعد عبارتند از:

$$[D] = \begin{bmatrix} \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} & \hat{\lambda} & 0 \\ \hat{\lambda} & \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mu} \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۶۷)$$

۳-۴- روش نیومارک

در سال ۱۹۵۹ نیومارک خانواده‌ای از روش‌های گامِ زمانی را بر اساس معادلات زیر توسعه داد [۸۸]:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma \Delta t \Delta)\ddot{u}_{i+1} \qquad (۳-۲۶۸)$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{u}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{u}_{i+1} \qquad (۳-۲۶۹)$$

پارامترهای β و γ تغییرات شتاب در هر گام زمانی را مشخص کرده و همچنین میزان پایداری و دقت روش را تعیین می‌کنند. معمولا مقدار $\frac{1}{2}$ برای γ و بازه‌ی $\frac{1}{4} \geq \beta \geq \frac{1}{6}$ در اکثر جنبه‌ها می‌تواند پایداری و دقت حل را ارضا نماید. ترکیب دو معادله فوق با معادله تعادل زیر در پایان گامِ زمانی، اساس محاسبه

مقادیر u_{i+1}، $\dot{u}_{i+1}$ و $\ddot{u}_{i+1}$ در زمان $i+1$ با مشخص بودن u_i، $\dot{u}_i$ و $\ddot{u}_i$ در زمان i را تشکیل می‌دهد.

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + f(s)_{i+1} = \mathrm{F}_{i+1} \tag{۲۷۰-۳}$$

به دلیل ظاهر شدن عبارت $\ddot{u}_{i+1}$ در انتهای معادلات (۳-۲۶۸) و (۳-۲۶۹)، تکرار برای حل آن نیاز است، اما برای سیستم‌های خطی می‌توان معادلات اصلی نیومارک را به گونه‌ای اصلاح کرد که نیازی به تکرار نداشته باشد که در ادامه به آن اشاره خواهد شد.

استفاده از دو حالت خاص در خانواده نیومارک بسیار رایج است که یکی از آن‌ها روش شتاب متوسط[۱] و دیگری شتاب خطی[۲] است.

برای حالت شتاب متوسط روابط میان مقادیر u_{i+1}، $\dot{u}_{i+1}$ و $\ddot{u}_{i+1}$ در زمان $i+1$ با u_i، $\dot{u}_i$ و $\ddot{u}_i$ در زمان i به صورت معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \tag{۲۷۱-۳}$$

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \tag{۲۷۲-۳}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \tag{۲۷۳-۳}$$

$$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i\tau + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \tag{۲۷۴-۳}$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \tag{۲۷۵-۳}$$

[1] Average Acceleration Method
[2] Linear Acceleration Method

معادله (۳-۲۷۱) بیان می‌کند که تغییرات شتاب در یک گام زمانی ثابت و یا برابر متوسط شتاب است. با انتگرال‌گیری از $\ddot{u}(\tau)$ معادله (۳-۲۷۲) بدست می‌آید که تغییرات سرعت در یک گام زمانی را بیان می‌کند. با در نظر گرفتن $\tau = \Delta t$ معادله (۳-۲۷۳) حاصل می‌شود که میزان $\dot{u}_{i+1}$ در زمان $i + 1$ را نشان می‌دهد. معادله (۳-۲۷۴) تغییرات جابجایی در گام زمانی را نشان می‌دهد که با در نظر گرفتن $\tau = \Delta t$ معادله (۳-۲۷۵) حاصل شده که از آن می‌توان u_{i+1} را در زمان $i + 1$ بدست آورد. با مقایسه معادلات (۳-۲۷۳) و (۳-۲۷۵) با معادلات (۳-۲۶۸) و (۳-۲۶۹) می‌توان نشان داد اگر در معادلات نیومارک $\gamma = \frac{1}{2}$ و $\beta = \frac{1}{4}$ در نظر گرفته شود، معادلات حاصل با حالت شتاب متوسط برابر خواهد بود.

برای حالت شتاب خطی روابط میان مقادیر u_{i+1}، $\dot{u}_{i+1}$ و $\ddot{u}_{i+1}$ در زمان $i + 1$ با u_i، $\dot{u}_i$ و $\ddot{u}_i$ در زمان i به صورت معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \tag{۳-۲۷۶}$$

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i\tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \tag{۳-۲۷۷}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \tag{۳-۲۷۸}$$

$$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i\tau + \ddot{u}_i\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \tag{۳-۲۷۹}$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i\Delta t + (\Delta t)^2\left(\frac{1}{6}\ddot{u}_{i+1} + \frac{1}{3}\ddot{u}_i\right) \tag{۳-۲۸۰}$$

معادله (۳-۲۷۶) بیان می‌کند که تغییرات شتاب در یک گام زمانی ثابت و یا به صورت خطی تغییر می‌کند. با انتگرال‌گیری از $\ddot{u}(\tau)$ معادله (۳-۲۷۷) بدست می‌آید که تغییرات سرعت در یک گام زمانی را بیان می‌کند. با در نظر گرفتن $\tau = \Delta t$ معادله (۳-۲۷۸) حاصل می‌شود که میزان $\dot{u}_{i+1}$ در زمان

$i + 1$ را نشان می‌دهد. معادله (۳-۲۷۹) تغییرات جابجایی در گام زمانی را نشان می‌دهد که با در نظر گرفتن $\tau = \Delta t$ معادله (۳-۲۸۰) حاصل شده که از آن می‌توان u_{i+1} را در زمان $i + 1$ بدست آورد. با مقایسه معادلات (۳-۲۷۸) و (۳-۲۸۰) با معادلات (۳-۲۶۸) و (۳-۲۶۹) می‌توان نشان داد اگر در معادلات نیومارک $\gamma = \frac{1}{2}$ و $\beta = \frac{1}{6}$ در نظر گرفته شود، معادلات حاصل با حالت شتاب خطی برابر خواهد بود.

۳-۵- سیستم معادلات خطی:

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، برای سیستم‌های خطی می‌توان معادلات نیومارک را به گونه‌ای اصلاح کرد که نیازی به تکرار نداشته باشند. معادله تعادل برای سیستم‌های خطی به صورت زیر قابل بیان است:

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = \mathrm{F}_{i+1} \qquad (۳-۲۸۱)$$

از معادله (۳-۲۶۹) عبارت $\ddot{u}_{i+1}$ را می‌توان بر اساس u_{i+1} به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_i \qquad (۳-۲۸۲)$$

با جایگذاری معادله (۳-۲۸۲) در معادله (۳-۲۶۸) داریم:

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(u_{i+1} - u_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{u}_i + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_i \qquad (۳-۲۸۳)$$

حال با جایگذاری معادلات (۳-۲۸۲) و (۳-۲۸۳) در معادله (۳-۲۸۱) و حل آن برای زمان $i + 1$ خواهیم داشت:

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{F}_{i+1} \qquad (۳-۲۸۴)$$

که در آن عبارت‌های $\hat{k}$ و $\hat{F}_{i+1}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m \tag{۲۸۵-۳}$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i+1} = F_{i+1} &+ \left[\frac{1}{\beta (\Delta t)^2 m} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c\right] u_i \\ &+ \left[\frac{1}{\beta \Delta t} m + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) c\right] \dot{u}_i \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) c\right] \ddot{u}_i \end{aligned} \tag{۲۸۶-۳}$$

با معلوم بودن $\hat{k}$ و $\hat{F}_{i+1}$ از شرایط مرزی و اولیه و محاسبه m، k و c بر طبق معادلات به دست آمده و استفاده از روش شتاب متوسط، مشخصات سیستم در زمان i که با مولفه‌های u_i، $\dot{u}_i$ و $\ddot{u}_i$ تعریف می‌شود، جابجایی در زمان $i + 1$ از معادله زیر بدست می‌آید:

$$u_{i+1} = \frac{\hat{F}_{i+1}}{\hat{k}} \tag{۲۸۷-۳}$$

با معلوم بودن u_{i+1}، سرعت $\dot{u}_{i+1}$ و شتاب $\ddot{u}_{i+1}$ به ترتیب به کمک معادلات (۳-۲۸۳) و (۳-۲۸۲) قابل محاسبه هستند. همچنین شتاب را می‌توان به کمک معادله زیر نیز حساب کرد:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{F_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1}}{m} \tag{۲۸۸-۳}$$

فصل چهارم

انتگرال برهمکنش

۴-۱- انتگرال برهمکنش

میدان‌های تنش، کرنش و جابجایی در رفتار الاستیک خطی را می‌توان با مفهوم ضریب شدت تنش در ناحیه اطراف نوک ترک تخمین زد. بنابراین محاسبه ضریب شدت تنش برای محاسبات المان محدود در محدوده رفتار الاستیک خطی حائز اهمیت است. یکی از روش‌های کارآمد برای محاسبه این ضرایب، انتگرال J است که در سال ۱۹۶۸ توسط رایس [۸۹] به منظور محاسبه نرخ آزادسازی انرژی در ترک به کمک سیستم مختصات محلی نوک ترک معرفی شد. انتگرال برهمکنش، نتیجه برهمکنش دو حالت بارگذاری مستقل میدان اصلی و کمکی برای سازه حاوی ترک است. فرم معمول انتگرال J برای یک ترک که نیرویی به سطوح آن وارد نمی‌شود به صورت رابطه زیر است.

$$J = \lim_{\Gamma \to 0} \int_{\Gamma} \left(w\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \qquad (۴-۱)$$

که در آن w چگالی انرژی کرنشی بوده و به صورت رابطه (۴-۲) تعریف می‌شود.

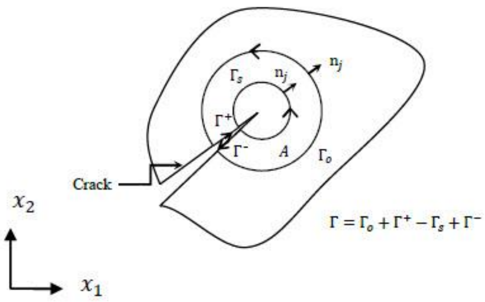
$$w = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \qquad (۴-۲)$$

همچنین σ_{ij} تانسور تنش، u_i مولفه‌های بردار جابجایی، و n_j بردار یکه و عمود رو به خارج بر ناحیه Γ است. انتگرال J در غیاب نیروهای حجمی و عدم وجود اصطکاک در سطوح ترک، مستقل از مسیر بوده و بر اساس تغییر شکل‌های کوچک، رفتار الاستیک ماده و رفتار شبه-پایا در شرایط ایزوترمال است.

استفاده مستقیم از معاده (۴-۱) موجب وابستگی حل به نوع مش و مسیر می‌شود، در سال ۱۹۸۵ لی، شیح و نیدلمن روشی را ارائه دادند تا فرم کانتوری انتگرال J را به فرم ناحیه‌ای تبدیل کرده و حل مستقل از مسیر گردد. با کاربرد قضیه دیورژانس و در نظر گرفتن تابع وزنی q با مقدار ۱ روی مرز داخلی و صفر روی مرز خارجی، انتگرال ناحیه‌ای معادل برای انتگرال J به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود [۹۰].

$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - w\delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - w\delta_{1j})_{,j} q dA \qquad (۳-۴)$$

در رابطه فوق، A مطابق با شکل (۴-۱) ناحیه محصور به منحنی Γ است.



شکل ۴-۱- تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به فرم ناحیه‌ای [۷۰]

میدان‌های اصلی را با σ_{ij}، ε_{ij} و u_i و میدان‌های کمکی را با σ_{ij}^{aux}، ε_{ij}^{aux} و u_i^{aux} نشان می‌دهیم، انتگرال J برای اعمال هم‌زمان دو حالت بارگذاری ذکر شده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$J^s = J + J^{aux} + M \qquad (۴-۴)$$

در این رابطه J مقدار انتگرال J برای حالت اصلی، J^{aux} مقدار انتگرال J برای حالت کمکی و M انتگرال برهمکنش است که به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} M = &\int_A (\sigma_{ij} {u_{i,1}}^{aux} + {\sigma_{ij}}^{aux} u_{i,1} - w^{int}\delta_{1j}) q_{,j} dA \\ &+ \int_A \left(\sigma_{ij} {u_{i,1}}^{aux} + {\sigma_{ij}}^{aux} u_{i,1} - w^{int}\delta_{1j}\right)_{,j} q dA \end{aligned} \qquad (۵-۴)$$

در معادله (۴-۵) w^{int} تابع چگالی انرژی کرنشی برهمکنش بوده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$w^{int} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux} = \sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij} \qquad (۶-۴)$$

با اعمال مشتق در عبارت دوم رابطه (۴-۵) و با توجه به رابطه تعادل ($\sigma_{ij,j} = 0$) و همچنین با در نظر گرفتن اینکه $\sigma_{ij,j}{}^{aux} = 0$، انتگرال برهمکنش به صورت رابطه (۴-۷) به دست می‌آید.

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}{}^{aux} + \sigma_{ij}{}^{aux} u_{i,1} - w^{int} \delta_{ij}) q_{,j} dA + \int_A \left(\sigma_{ij} u_{i,1j}{}^{aux} + \sigma_{ij}{}^{aux} u_{i,1j} - w_{,1}{}^{int}\right) q dA \qquad (۴-۷)$$

نرخ آزادسازی انرژی برای حالت دوبعدی با ترکیب مود اول و دوم ترک به شکل زیر قابل بیان است [۸۹]:

$$J = \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2) \qquad (۴-۸)$$

که E' برای حالت کرنش صفحه‌ای به شکل رابطه (۴-۹) است.

$$E' = \frac{E}{(1-\nu^2)} \qquad (۴-۹)$$

انتگرال J با در نظر گرفتن هر دو میدان اصلی و کمکی به صورت معادله (۴-۱۰) نوشته می‌شود:

$$J^s = J + J^{aux} + \frac{2}{E'}(K_I K_I^{aux} + K_{II}^{aux} K_{II}) \qquad (۴-۱۰)$$

با مقایسه معادلات (۴-۴) و (۴-۱۰) می‌توان گفت انتگرال برهمکنش برابر با رابطه (۴-۱۱) است.

$$M = \frac{2}{E'}(K_I K_I^{aux} + K_{II}^{aux} K_{II}) \qquad (۴-۱۱)$$

مشتق جزئی w^{int} نسبت به x_1 در انتگرال دوم رابطه (۴-۷) به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} = \frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{lk}{}^{aux}} \frac{\partial \varepsilon_{lk}{}^{aux}}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial (\Delta T)} \frac{\partial (\Delta T)}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial (\Delta C)} \frac{\partial (\Delta C)}{\partial x_1} \qquad (۴-۹)$$

با در نظر گرفتن میدان تنش بی‌بعد برای حالت کرنش صفحه‌ای به صورت رابطه (۴-۱۲)

$$\sigma_{ij} = [D]\varepsilon_{ij} - \hat{\gamma}_1 \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - \hat{\gamma}_2 \Delta C \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{۱۲-۴}$$

که در آن $[D]$ ماتریس خواص بوده و به شکل رابطه (۳-۲۶۷) تعریف می‌شود و مشتق گیری از تابع چگالی انرژی کرنشی نسبت به ΔT و ΔC داریم:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} = \hat{\gamma}_1(\varepsilon_{11}^{aux} + \varepsilon_{22}^{aux}) \tag{۱۳-۴}$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta C)} = \hat{\gamma}_2(\varepsilon_{11}^{aux} + \varepsilon_{22}^{aux}) \tag{۱۴-۴}$$

با استفاده از دو رابطه فوق و رابطه (۴-۷)، فرم نهایی انتگرال برهمکنش برای بارگذاری هایگروترمال را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}{}^{aux} + \sigma_{ij}{}^{aux} u_{i,1} - W^{int}\delta_{ij}) q_{,j} dA \\ + \int_A \left((\hat{\gamma}_1 \sigma_i^{aux}) \times \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1} \right) q dA \\ + \int_A \left((\hat{\gamma}_2 \sigma_i^{aux}) \times \frac{\partial(\Delta C)}{\partial x_1} \right) q dA \end{aligned} \tag{۱۵-۴}$$

با استفاده از میدان‌های کمکی تنش و جابجایی برای مودهای اول و دوم ترک زیر:

$Mode\ I$:

$$\sigma_{11}^{aux} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \tag{۱۶-۴}$$

$$\sigma_{22}^{aux} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \tag{۱۷-۴}$$

$$\sigma_{12}^{aux} = \sigma_{21}^{aux} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \tag{۱۸-۴}$$

$$u_x = K_I \frac{(1+\nu)}{E\sqrt{r/_{2\pi}}} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{۱۹-۴}$$

$$\frac{du_x}{dr} = K_I \times (1+\nu) \times \sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\frac{\kappa - 1 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4E\sqrt{r/_{\pi}} \times \pi}\right) \tag{۲۰-۴}$$

$$\frac{du_x}{d\theta} = K_I \times \sqrt{2} \times \sqrt{r/_{\pi}} \times (1+\nu) \times \left(6\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \kappa - 1\right) \times \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4E} \tag{۲۱-۴}$$

$$u_y = K_I \frac{(1+\nu)}{E\sqrt{r/_{2\pi}}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{۲۲-۴}$$

$$\frac{du_y}{dr} = K_I \times (1+\nu) \times \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\frac{\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4E \times \sqrt{r/_{\pi}} \times \pi}\right) \tag{۲۳-۴}$$

$$\frac{du_y}{d\theta} = -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times K_I \times \sqrt{2} \times \sqrt{r/_{\pi}}\,(1+\nu) \times \left(\frac{6\cos^2\frac{\theta}{2} - \kappa - 5}{4E}\right) \tag{۲۴-۴}$$

$Mode\ II$:

$$\sigma_{11}^{aux} = \left(\frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \tag{۲۵-۴}$$

$$\sigma_{22}^{aux} = \left(\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \tag{۲۶-۴}$$

$$\sigma_{12}^{aux} = \sigma_{21}^{aux} = \left(\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \tag{۲۷-۴}$$

$$u_x = K_{II} \frac{(1+\nu)}{E\sqrt{r/_{2\pi}}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\kappa + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{۲۸-۴}$$

$$\frac{du_x}{dr} = K_{II} \times (1+\nu) \times \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\frac{\kappa + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4E\sqrt{r/_{\pi}} \times \pi}\right) \tag{۲۹-۴}$$

$$\frac{du_x}{d\theta} = K_{II} \times \sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \sqrt{{r}/{\pi}} \times (1+\nu) \times \left(\frac{6\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \kappa - 3}{4E}\right) \tag{۴-۳۰}$$

$$u_y = -K_{II}\frac{(1+\nu)}{E\sqrt{{r}/{2\pi}}} \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\kappa - 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{۴-۳۱}$$

$$\frac{du_y}{dr} = -K_{II} \times (1+\nu) \times \sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\frac{\kappa - 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4E\sqrt{{r}/{\pi}} \times \pi}\right) \tag{۴-۳۲}$$

$$\frac{du_y}{d\theta} = K_{II} \times \sqrt{2} \times \sqrt{{r}/{\pi}}\,(1+\nu)\left(6\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \kappa - 3\right) \times \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4E} \tag{۴-۳۳}$$

و انتگرال برهمکنش از رابطه (۴-۱۵)، ضرایب شدت تنش مود اول و دوم به فرم زیر استخراج می‌شوند:

$$K_I = \frac{E_{tip}}{2}M^{(1)}, \quad (K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0) \tag{۴-۳۴}$$

$$K_{II} = \frac{E_{tip}}{2}M^{(2)}, \quad (K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1) \tag{۴-۳۵}$$

فصل پنجم

نتایج عددی و بحث

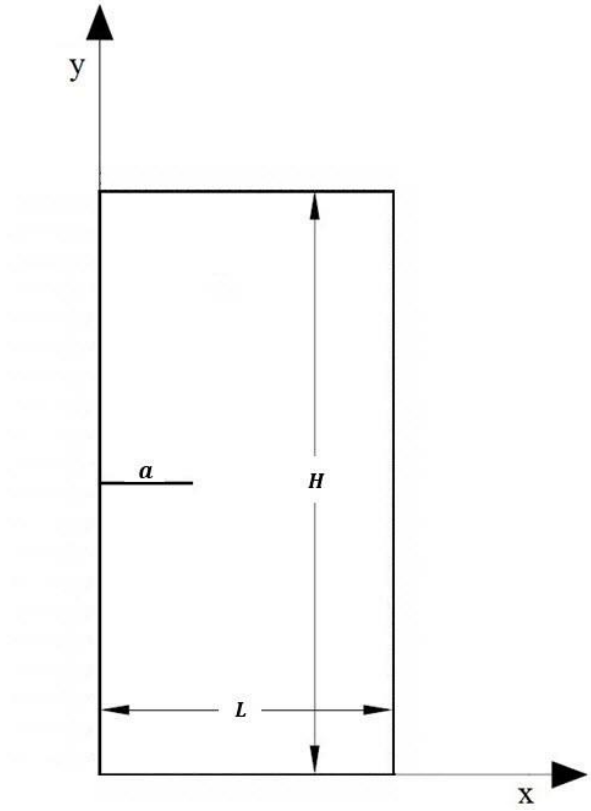
۵-۱- مقدمه

در بخش اول از این فصل به منظور صحت‌سنجی روش حل عددی به کار برده شده، مسئله به صورت تحلیلی حل گشته و سپس نتایج آن با نتایج عددی بدست آمده توسط مقایسه شد. در مثال اول، توزیع دما و رطوبت نوک ترک و همچنین ضریب شدت تنش مود اول برای صفحه‌ای دارای ترک لبه‌ای عمود برای تعداد مش‌های مختلف گزارش شده و با هم مقایسه شده‌است. سپس تاثیر گام‌های زمانی، مقادیر مختلف سورت و شعاع‌های انتگرال‌گیری بر ضریب شدت تنش مود اول بررسی و مقایسه شده‌است. با توجه به اینکه در شرایط متقارن بارگذاری نسبت به سطح ترک تنها ضریب شدت تنش مود اول استخراج شد، به منظور بررسی ضریب شدت تنش در مود دوم بارگذاری به صورت نامتقارن اعمال گردید. در این مثال تاثیر حساسیت مش و ناحیه انتگرال‌گیری بررسی و گزارش شد. در مثال سوم تاثیر زاویه بر توزیع دما و رطوبت نوک ترک و ضرایب شدت تنش مود اول دوم با در نظر گرفتن ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف و مقادیر مختلف سورت بررسی شد. همچنین تاثیر زوایای مختلف بر ضرایب شدت تنش مود اول و دوم گزارش شد.

۵-۲- حل تحلیلی صفحه مستطیلی ایزوتروپیک

به منظور صحت‌سنجی روش عددی استفاده شده در این نوشتار، ابتدا معادلات حاکم به صورت تحلیلی حل شده و نتایج به دست آمده از آن با نتایج به دست آمده از روش عددی مقایسه شده‌است.

با توجه به شکل (۵-۱)، باریکه‌ای که تحت بارگذاری هایگروترمال قرار دارد، در نظر گرفته شده‌است. شرایط اولیه و مرزی در جدول (۵-۱) نشان داده‌شده است. زیرنویس‌های i و j به ترتیب حالت اولیه و نهایی را نشان می‌دهند.



شکل ۵-۱- باریکه ایزوتروپیک تحت بارگذاری هایگروترمال

جدول ۵-۱ شرایط اولیه و مرزی دما و رطوبت

$T(0,t) = T_f$	$C(L,t) = C_i$
$C(0,t) = C_f$	$T(x,0) = T_i$
$T(L,t) = T_i$	$C(x,0) = T_i$

با صرف‌نظر از کوپل دما و جابجایی و در نظر گرفتن مسئله به صورت یک بعدی معادله (۳-۵۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$W_2\dot{T} + W_3\dot{C} = T_{,11} \tag{۵-۱}$$

همچنین با صرف‌نظر از کوپل رطوبت و جابجایی و در نظر گرفتن تنها یک بعد، معادله (۳-۶۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$V_2\dot{T} + V_3\dot{C} = C_{,11} \tag{۲-۵}$$

با تقسیم طرفین معادله (۵-۱) بر W_2 و معادله (۵-۲) بر V_3، معادلات فوق به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\dot{T} + \frac{W_3}{W_2}\dot{C} = \frac{1}{W_2}T_{,11} \tag{۳-۵}$$

$$\frac{V_2}{V_3}\dot{T} + \dot{C} = \frac{1}{V_2}T_{,11} \tag{۴-۵}$$

به منظور ساده‌نویسی عبارت‌های زیر را تعریف شده‌است:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{W_2} \tag{۵-۵}$$

$$\nu = \frac{W_3}{W2} \tag{۶-۵}$$

$$D = \frac{1}{V_3} \tag{۷-۵}$$

$$\lambda = \frac{V_2}{V_3} \tag{۸-۵}$$

با استفاده ار عبارت‌های تعریف شده فوق، معادلات (۳-۵) و (۴-۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathfrak{D}\frac{\partial^2 T(x_1,t)}{\partial {x_1}^2} - \frac{\partial}{\partial t}\big(T(x_1,t) + \nu C(x_1,t)\big) = 0 \tag{۹-۵}$$

$$D\frac{\partial^2 C(x_1,t)}{\partial {x_1}^2} - \frac{\partial}{\partial t}\big(C(x_1,t) + \lambda T(x_1,t)\big) = 0 \tag{۱۰-۵}$$

با کمک تغییر متغیر به شکل روابط زیر:

$$T^*(x_1,t) = \frac{T(x_1,t) - T_i}{T_i - T_f} \tag{۱۱-۵}$$

$$C^*(x_1,t) = \frac{C(x_1,t) - C_i}{\lambda\big(T_i - T_f\big)} \tag{۱۲-۵}$$

روابط (۵-۹) و (۵-۱۰) به شکل روابط (۵-۱۳) و (۵-۱۴) بیان می‌شوند. همچنین در این روابط T_i و C_i به ترتیب دما و رطوبت مرجع و T_f دمای نهایی لبه سمت چپ است.

$$\mathfrak{D}\frac{\partial^2 T^*(x_1,t)}{\partial {x_1}^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(T^*(x_1,t) + \lambda\nu C^*(x_1,t)\right) = 0 \quad (۱۳\text{-}۵)$$

$$D\frac{\partial^2 C^*(x_1,t)}{\partial {x_1}^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(C^*(x_1,t) + T^*(x_1,t)\right) = 0 \quad (۱۴\text{-}۵)$$

با توجه به روابط (۵-۱۱) و (۵-۱۲) و شرایط مرزی تعریف شده در جدول (۵-۱)، شرایط مرزی و اولیه حاکم بر مسئله به صورت جدول زیر تعریف شده‌است:

جدول ۵-۲ شرایط اولیه و مرزی دما و رطوبت

$T^*(0,t) = -1$	$T^*(b,t) = 0$
$C^*(L,t) = 0$	$C^*(0,t) = 0$
$T^*(x_1,t) = 0$	$C^*(x_1,t) = 0$

دستگاه معادلات کوپل (۵-۱۳) و (۵-۱۴) را می‌توان به صورت دو معادله مستقل بر حسب یک ترکیب خطی از $\mathfrak{D}T^*(x_1,t)$ و $DC^*(x_1,t)$ به صورت:

$$s_1\mathfrak{D}T^*(x_1,t) + DC^*(x_1,t) \quad (۱۵\text{-}۵)$$

نوشت. برای این منظور معادله (۵-۱۳) در s_1 ضرب شده و با معادله (۵-۱۴) جمع می‌شود:

$$\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}\left(s_1\mathfrak{D}T^*(x_1,t) + DC^*(x_1,t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[(s_1+1)T^*(x_1,t) + (1+s_1\lambda\nu)C^*(x_1,t)\right] \quad (۱۶\text{-}۵)$$

برای به دست آمدن یک معادله با طبیعت پخش ساده در معادله (۵-۱۶) بر حسب $s_1\mathfrak{D}T^* + DC^*$ باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{s_1+1}{\mathfrak{D}s_1} = \frac{1+s_1\lambda\nu}{D} = d_1^2 \quad (۱۷\text{-}۵)$$

حال معادله (۵-۱۶) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 F_1(x_1,t)}{\partial x^2} = d_1^2 \frac{\partial F_1(x_1,t)}{\partial t} \qquad (۵-۱۸)$$

همچنین متغیر s_1 با حل معادله (۵-۱۷) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_1 = \frac{-(D+\mathfrak{D}) \pm \sqrt{(\mathfrak{D}+D)^2 + 4\lambda\nu\mathfrak{D}D}}{2\lambda\nu\mathfrak{D}} \qquad (۵-۱۹)$$

شرایط مرزی و اولیه مسئله برای رابطه (۵-۱۸) با در نظر گرفتن شرایط مرزی و اولیه اصلی مسئله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_1(0,t) = -\mathfrak{D}s_1 \qquad (۵-۲۰)$$

$$F_1(L,t) = 0 \qquad (۵-۲۱)$$

$$F_1(x_1,t) = 0 \qquad (۵-۲۲)$$

به صورت مشابه معادله (۵-۱۳) در $-s_2$ ضرب شده و با معادله (۵-۱۴) به صورت زیر جمع می‌شود:

$$\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}\left(-s_2\mathfrak{D}T^*(x_1,t) + DC^*(x_1,t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}[(1-s_2)T^*(x_1,t) + (1-s_2\lambda\nu)C^*(x_1,t)] \qquad (۵-۲۳)$$

در این معادله برای به دست آوردن یک معادله پخش ساده بر حسب $-s_2\mathfrak{D}T^* + DC^*$ باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{1-s_2}{-\mathfrak{D}s_2} = \frac{1-s_2\lambda\nu}{D} = d_2^2 \qquad (۵-۲۴)$$

در این حالت معادله (۵-۲۳) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial^2 F_2(x_1,t)}{\partial x^2} = d_2^2 \frac{\partial F_2(x_1,t)}{\partial t} \qquad (۵-۲۵)$$

متغیر s_2 با حل معادله (۵-۲۴) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_2 = \frac{(\mathfrak{D} - D) \pm \sqrt{(\mathfrak{D} - D)^2 - 4\lambda\nu\mathfrak{D}D}}{2\lambda\nu\mathfrak{D}} \qquad (۵-۲۶)$$

و شرایط مرزی و اولیه برای رابطه (۵-۲۵) با توجه به شرایط مرزی و اولیه اصلی مسئله به صورت روابط زیر بیان می‌شود:

$$F_2(0,t) = \mathfrak{D}s_2 \qquad (۵-۲۷)$$

$$F_2(L,t) = 0 \qquad (۵-۲۸)$$

$$F_2(x_1,t) = 0 \qquad (۵-۲۹)$$

دستگاه معادلات کوپل (۵-۱۳) و (۵-۱۴) به صورت دستگاه معادلات غیر کوپل حاصل از روابط (۱۸-۵) و (۵-۲۵) بیان شده‌است. با حل این دستگاه با روش جداسازی متغیرها و با توجه به شرایط مرزی و اولیه آن‌ها، مقدار $F_1(x_1,t)$ و $F_2(x_1,t)$ به صورت روابط زیر خواهد بود.

$$F_1(x_1,t) = \frac{\mathfrak{D}s_1}{b}x_1 - \mathfrak{D}s_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mathfrak{D}s_1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x_1}{b}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{bd_1}\right)^2 t} \qquad (۵-۳۰)$$

$$F_2(x_1,t) = -\frac{\mathfrak{D}s_2}{b}x_1 + \mathfrak{D}s_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2\mathfrak{D}s_2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x_1}{b}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{bd_2}\right)^2 t} \qquad (۵-۳۱)$$

با مشخص بودن توابع $F_1(x_1,t)$ و $F_2(x_1,t)$ مقدار دما و رطوبت با حل دستگاه زیر بدست خواهد آمد.

$$\begin{cases} F_1(x_1,t) = s_1\mathfrak{D}T^*(x_1,t) + DC^*(x_1,t) \\ F_2(x_1,t) = -s_2\mathfrak{D}T^*(x_1,t) + DC^*(x_1,t) \end{cases} \qquad (۵-۳۲)$$

با حل دستگاه فوق، فرم نهایی دما و رطوبت به صورت روابط زیر خواهد بود:

$$T^*(x_1,t) = \frac{F_1(x_1,t) - F_2(x_1,t)}{\mathfrak{D}(s_1 + s_2)} \qquad (۵-۳۳)$$

$$C^*(x_1,t) = \frac{s_2F_1(x_1,t) + s_1F_2(x_1,t)}{D(s_1 + s_2)} \qquad (۵-۳۴)$$

با توجه به اینکه صفحه به صورت یک باریکه بلند و شرایط تنش صفحه‌ای در نظر گرفته‌شده است و همچنین شار دما و رطوبت فقط در راستای x_1 وجود داشته و هیچ‌گونه بارگذاری مکانیکی در مرزها وجود ندارد، روابط زیر برقرار است:

$$\sigma_{11}(x_1,t)=0 \tag{۳۵-۵}$$

$$\sigma_{22}(x_1,t)=0 \tag{۳۶-۵}$$

$$\sigma_{12}(x_1,t)=\sigma_{12}(x_1,t)=0 \tag{۳۷-۵}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه سازگاری:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{22}(x_1,t)}{\partial {x_1}^2}=0 \tag{۳۸-۵}$$

و حل این معادله، کرنش به صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon_{22}(x_1,t)=A(t)x_1+B(t) \tag{۳۹-۵}$$

با استفاده از قانون هوک و رابطه کرنش فوق، رابطه تنش به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{yy}(x_1,t)=E[A(t)x_1+B(t)-\gamma_1\Delta T(x_1,t)-\gamma_2\Delta C(x_1,t)] \tag{۴۰-۵}$$

با توجه به اینکه باریکه تحت بارگذاری مکانیکی قرار ندارد، روابط تعادل نیرو و گشتاور به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_0^L \sigma_{22}(x_1,t)dx_1=0 \tag{۴۱-۵}$$

$$\int_0^L \sigma_{22}(x_1,t)x_1dx_1=0 \tag{۴۲-۵}$$

در نتیجه با استفاده از روابط فوق ضرایب $A(t)$ و $B(t)$ به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$A(t) = \frac{-6}{L^2}\left(T_0 - T_f\right)\left\{\gamma_1 \int_0^L T^*(x_1,t)dx_1 + \lambda\gamma_2 \int_0^L C^*(x_1,t)dx_1 + \frac{2}{L}\left[\gamma_1 \int_0^L T^*(x_1,t)x_1 dx_1 + \lambda\gamma_2 \int_0^L C^*(x_1,t)x_1 dx_1\right]\right\} \quad (۴۳\text{-}۵)$$

$$B(t) = \frac{\left(T_0 - T_f\right)}{L^2}\left\{\gamma_1 \int_0^L T^*(x_1,t)x_1 dx_1 + \lambda\gamma_2 \int_0^L C^*(x_1,t)x_1 dx_1\right\} - \frac{L}{3}A(t) \quad (۴۴\text{-}۵)$$

ضریب شدت تنش برای صفحه‌ای شامل ترک لبه‌ای عمود مطابق شکل (۵-۱)، با استفاده از تابع وزنی توسط انتگرال عددی رابطه زیر قابل بیان است:

$$K_I = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\left(1 - \frac{a}{L}\right)^{-\frac{3}{2}} \int_0^L - \frac{\sigma_{22}(x_1,t)F(x_1,t)}{\sqrt{a^2 - {x_1}^2}} dx_1 \quad (۴۵\text{-}۵)$$

مقدار تابع وزنی $F(x_1,t)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F(x_1,t) = f_0 + f_1\left(\frac{x_1}{a}\right) + f_2\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + f_3\left(\frac{x_1}{a}\right)^3$$

$$f_0 = 0.46 + 3.06\tilde{a} + 0.84(1-\tilde{a})^5 + 0.66\tilde{a}^2(1-\tilde{a})^2$$

$$f_1 = -3.52\tilde{a}^2$$

$$f_2 = 6.17 - 28.22\tilde{a} + 34.54\tilde{a}^2 - 14.39\tilde{a}^3 - (1-\tilde{a})^{1.5} - 5.88(1-\tilde{a})^5 - 2.64\tilde{a}^2(1-\tilde{a})^2$$

$$f_3 = -6.63 + 25.16\tilde{a} - 31.04\tilde{a}^2 + 14.41\tilde{a}^3 + 2(1-\tilde{a})^{1.5} + 5.04(1-\tilde{a})^5 + 1.98\tilde{a}^2(1-\tilde{a})^2$$

$$\tilde{a} = \frac{a}{L} \quad (۴۶\text{-}۵)$$

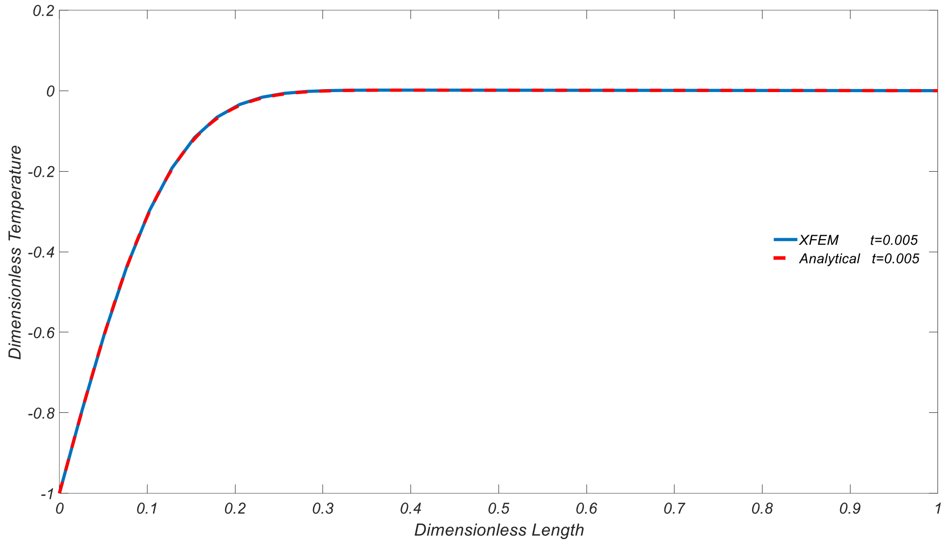
مثال عددی

صفحه‌ای دو بعدی مانند شکل (۵-۱) با ارتفاع $H = 2$ و طول $L = 1$ واحد شامل ترک لبه‌ای با طول $a = 0.3L$ در نظر گرفته شده‌است. دمای و رطوبت لبه سمت چپ در لحظه شروع به میزان منفی یک کاهش یافته و در لبه سمت راست نیز در میزان اولیه خود ثابت نگه داشته می‌شود. سایر لبه‌ها عایق گرمایی و رطوبتی در نظر گرفته شده‌است. خصوصیات ماده مطابق با منبع [۸۷] به صورت جدول زیر است.

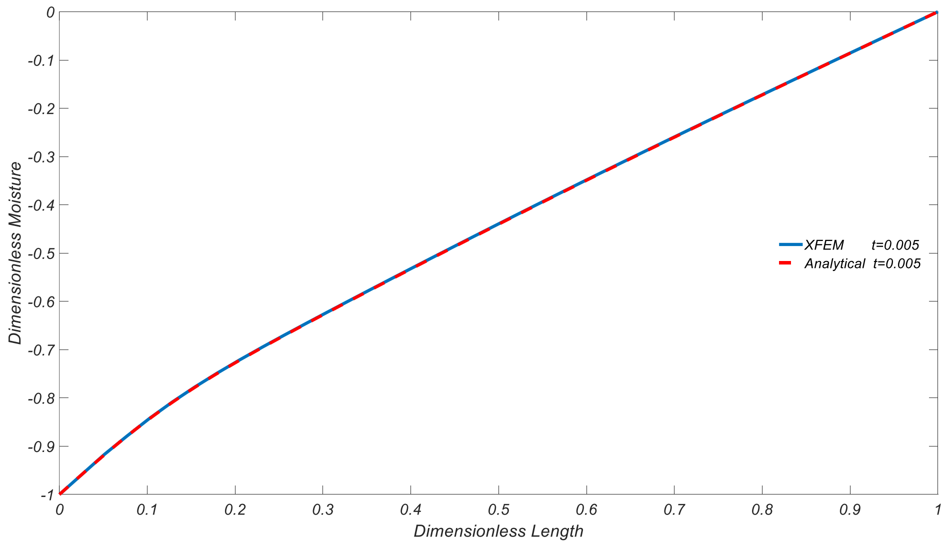
جدول ۵-۳ خواص فیزیکی صفحه [۸۷]

$\lambda = 7.76 \times 10^{10}\,\mathrm{kg/ms^2}$	$\mu = 3.86 \times 10^{10}\,\mathrm{kg/ms^2}$	$\rho = 8954\,\mathrm{kg/m^3}$
$\kappa = 386\,\mathrm{W/(mK)}$	$D = 8.5 \times 10^{-9}\,\mathrm{kgs/m^3}$	$\alpha_c = 1.98 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3/kg}$
$\alpha_t = 1.78 \times 10^{-5}\mathrm{K^{-1}}$	$C_e = 383.1\,\mathrm{J/(kgK)}$	$a = 1.2 \times 10^4\,\mathrm{m^2/(s^2K)}$
$b = 9 \times 10^5\,\mathrm{m^5/(kgs^2)}$	$T_0 = 293°\mathrm{K}$	

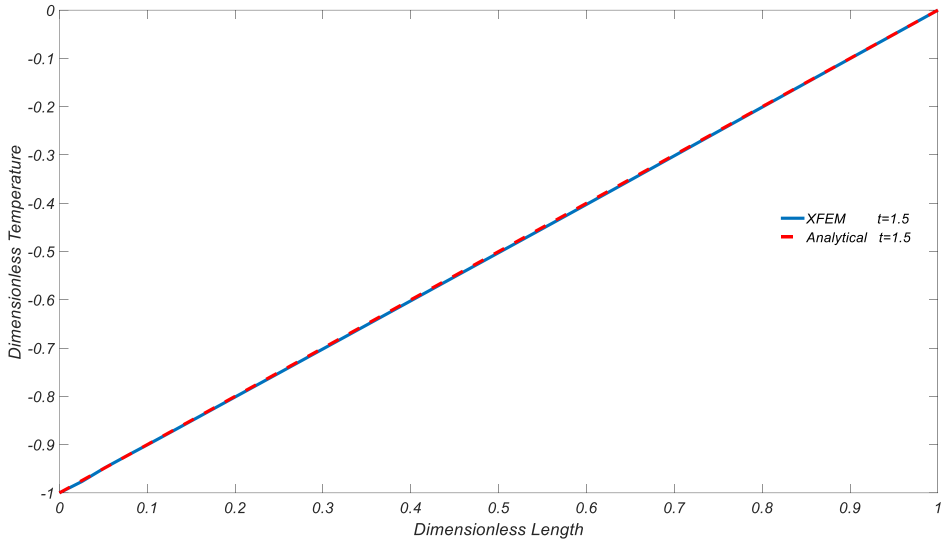
مقادیر دما و رطوبت در طول صفحه در شکل‌های (۵-۲) تا (۵-۵) ترسیم شده و با حل از روش المان محدود توسعه یافته مقایسه شده‌است.



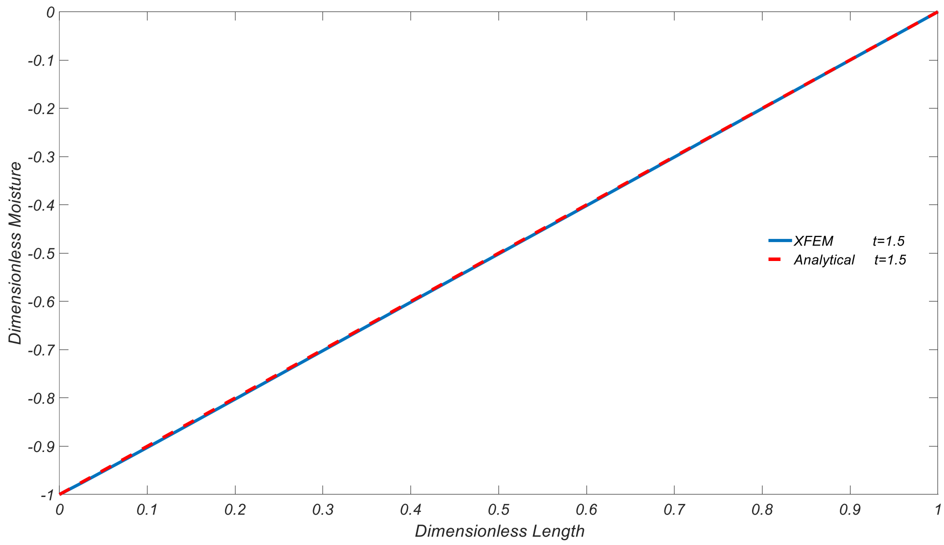
شکل ۵-۲- مقایسه نتایج عددی و تحلیلی دما در طول صفحه برای زمان بی‌بعد t= 0.005



شکل ۵-۳- مقایسه نتایج عددی و تحلیلی رطوبت در طول صفحه برای زمان بی‌بعد t= 0.005



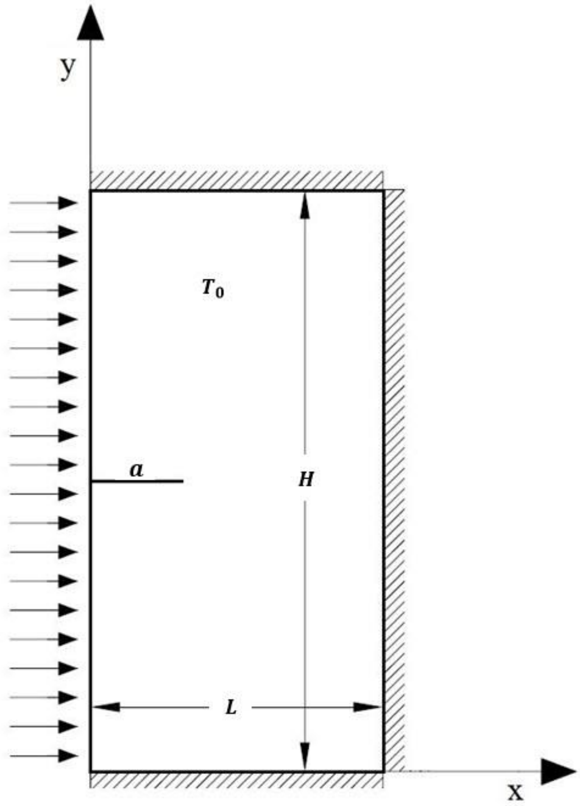
شکل ۵-۴- مقایسه نتایج عددی و تحلیلی دما در طول صفحه برای زمان بی‌بعد t= 1.5



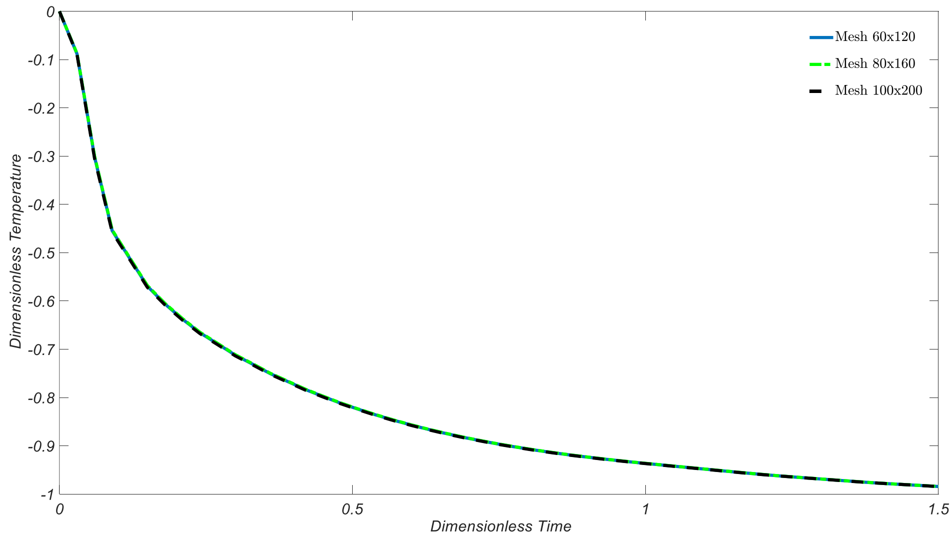
شکل ۵-۵- مقایسه نتایج عددی و تحلیلی رطوبت در طول صفحه برای زمان بی‌بعد t= 1.5

۵-۳- صفحه‌ای مستطیلی شامل ترک عمود لبه‌ای تحت بارگذاری هایگروترمال متقارن

در این مثال یک صفحه ساخته شده از مِس با خواص جدول (۵-۳) شامل ترک لبه‌ای عمود در نظر گرفته شده‌است. مطابق شکل (۵-۶) طول صفحه در جهت محور x برابر ۱ واحد بی‌بعد و ارتفاع آن در جهت محور y دو برابر طول آن در نظر گرفته‌شده است. دمای اولیه صفحه برابر $T_0 = 293°K$ بوده و ترکی عمود بر لبه‌ی سمت چپ صفحه و به طول $a = 0.3$ بی‌بعد در نظر گرفته شد. لبه‌های ترک و تمام وجوه صفحه به جز وجه سمت چپ عایق هستند. در زمان $t = 0^+$ به لبه‌ی سمت چپ مدل شوک حرارتی و رطوبتی وارد می‌گردد که مقدار هر دو منفی یک می‌باشد. در بخش اول این مثال نمودارهای دما و رطوبت نوک ترک و همچنین ضریب شدت تنش با در نظر گرفتن گام زمانی $\Delta t = 0.03$ بی‌بعد و مقدار سورت $ST = -0.2$ برای تعداد مش‌های مختلف در شکل‌های (۵-۷) تا (۵-۹) ترسیم شده‌است.

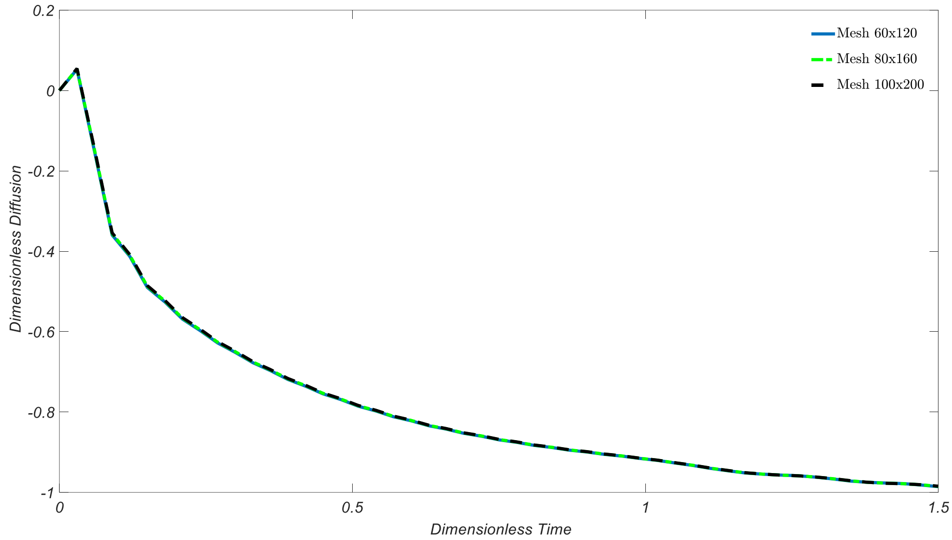


شکل ۵-۶- یک صفحه ایزوتروپیک محدود دارای ترک لبه‌ای عمود تحت بارگذاری متقارن حرارتی-رطوبتی



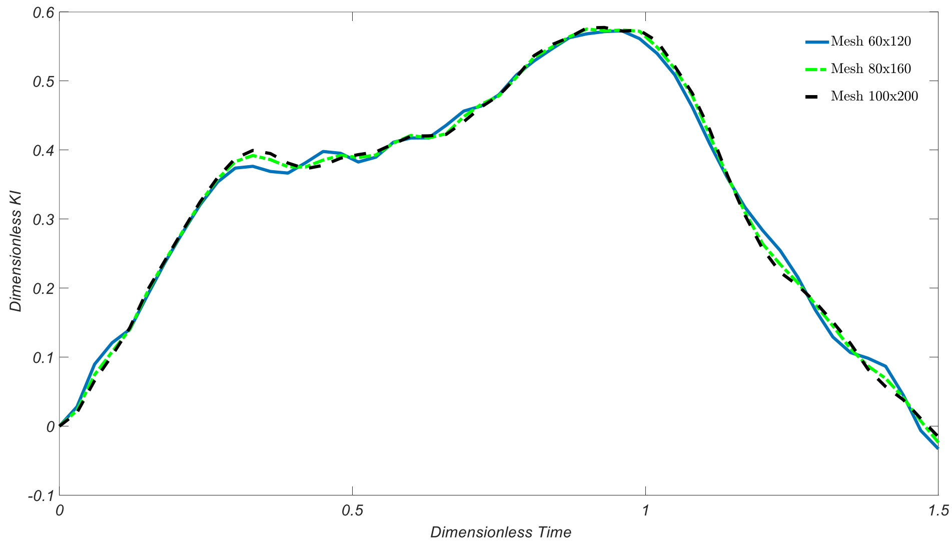
شکل ۵-۷- مقایسه دمای نوک ترک برای حساسیت‌های مختلف مش

با توجه به شکل (۵-۷) مشاهده می‌شود که دما به صورت نمایی کاهش یافته که با معادله فوریه همخوانی دارد. همچنین با توجه به نتایج، همگرایی خوبی برای تعداد مش‌های مختلف بدست آمده‌است.



شکل ۵-۸- مقایسه رطوبت نوک ترک برای حساسیت‌های مختلف مش

در شکل (۵-۸) تغییرات رطوبت نوک ترک ترسیم شده که همانطور که انتظار می‌رفت، همانند تغییرات دما به صورت نمایی کاهش یافته و همچنین برای تعداد مش‌های مختلف همگرایی خوبی مشاهده می‌شود.



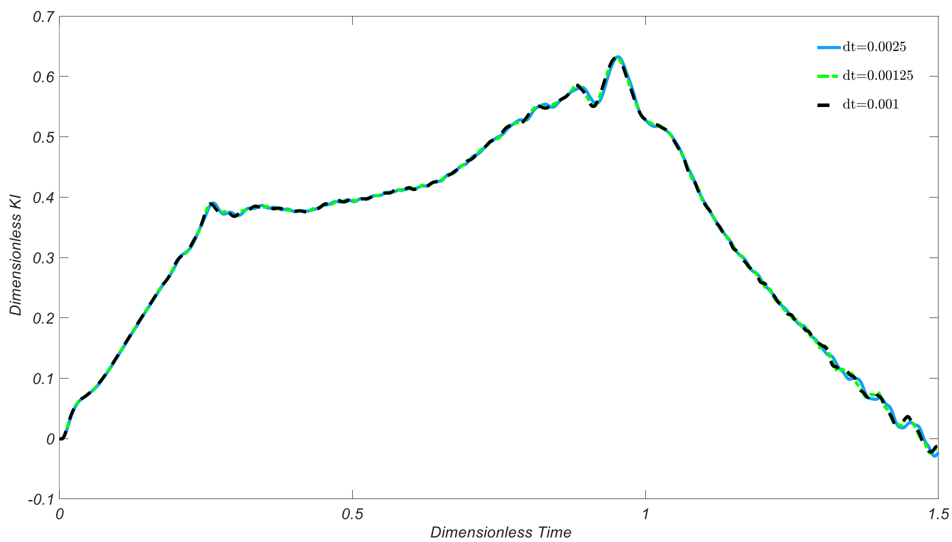
شکل ۵-۹- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای حساسیت‌های مختلف مش

تغییرات زمانی ضریب شدت تنش در طول زمان در شکل (۵-۹) ترسیم شده‌است. با توجه به سرعت انتشار موج تنش بی‌بعد، از ابتدای اعمال بارگذاری تا رسیدن موج تنش به نوک ترک در زمان

$t = 0.304$ بی‌بعد شاهد افزایش ضریب شدت تنش مود اول هستیم، سپس نرخ این تغییرات در حین عبور موج تنش کاهش یافته و پس از عبور این موج شاهد کاهش ضریب شدت تنش مود اول مشاهده می‌شود. با توجه به شکل (۵-۹) همگرایی خوبی برای تعداد مش‌های مختلف مشاهده می‌گردد.

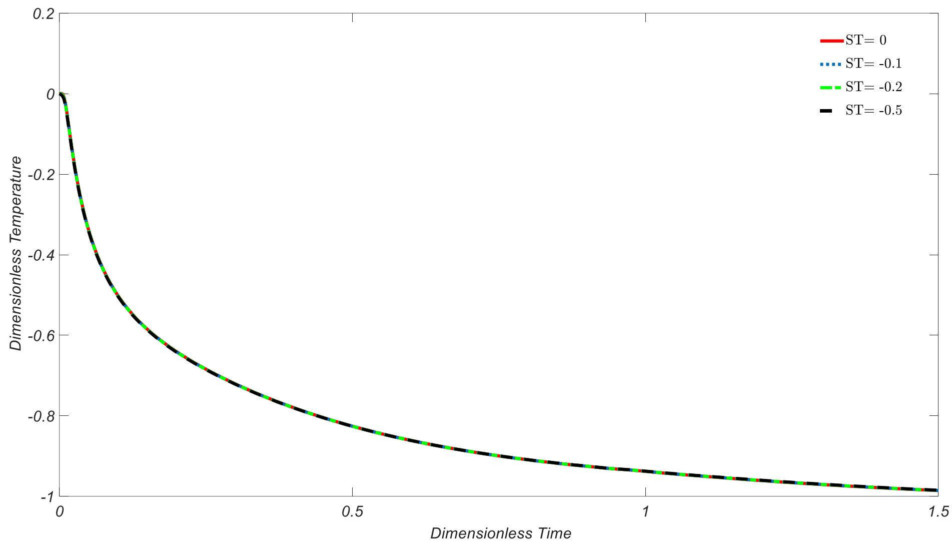
با در نظر گرفتن نتایج به دست آمده می‌توان گفت تعداد مش 160×80 و بیش‌تر از آن نتایج قابل قبولی را ارائه داده و برای کمتر شدن زمان محاسبات از این پس در این مثال از تعداد 160×80 استفاده خواهد شد.

در بخش بعد اثر گام‌های زمانی مختلف بر روی نتایج بررسی شد و با توجه به شکل (۵-۱۰) که نشان دهنده ضریب شدت تنش اول برای گام‌های زمانی مختلف است، می‌توان دریافت که با استفاده از گام‌زمانی $\Delta T = 0.0025$ و کوچک‌تر از آن همگرایی مطلوبی نتیجه می‌شود.



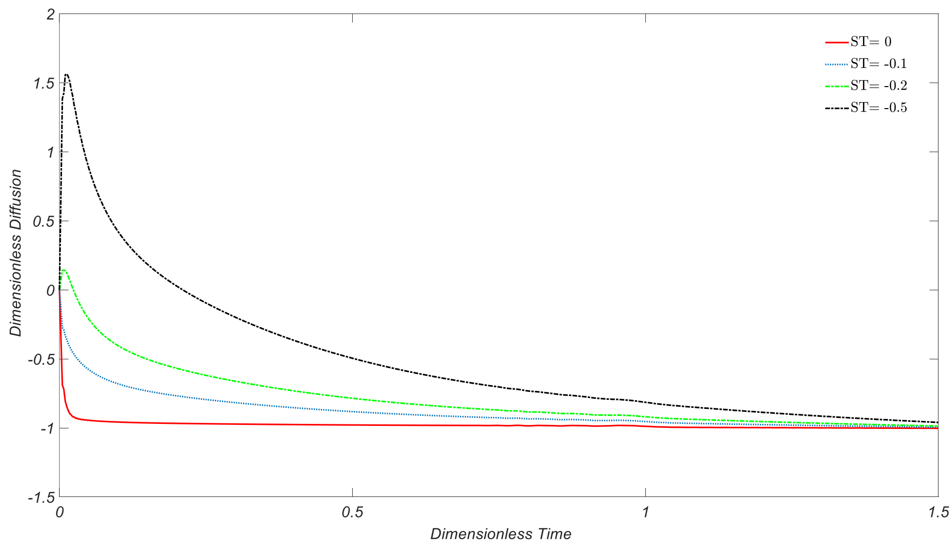
شکل ۵-۱۰- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای گام‌های مختلف زمانی

با توجه به نتایج دو بخش قبل و در نظر گرفتن میزان مش و گام زمانی مناسب، تاثیر مقادیر مختلف سورت را بر دما و غلظت نوک ترک و همچنین ضریب شدت تنش مود اول بررسی گردید.

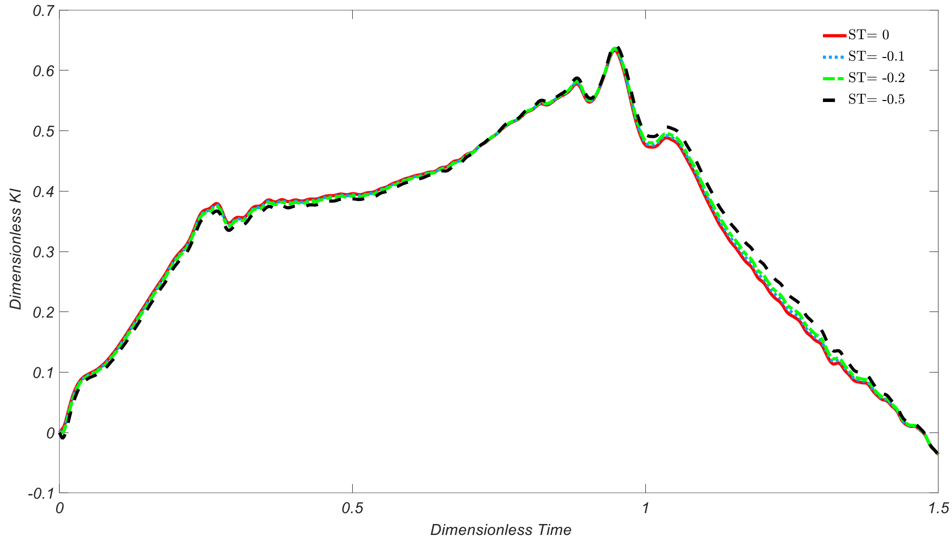


شکل ۵-۱۱- مقایسه دمای نوک ترک در مقدارهای مختلف سورت

در شکل (۵-۱۱) دمای نوک ترک برای مقادیر مختلف سورت ترسیم و مقایسه شده‌است. همانطور که از معادلات حاکم برداشت می‌شود عدد سورت روی تغییرات دما تاثیری ندارد که این موضوع در شکل (۵-۱۱) نیز به خوبی مشخص است. اما بر اساس معادلات حاکم و قانون فیک، مقدار سورت تاثیر متقابل دما بر رطوبت است که در شکل (۵-۱۲) به خوبی این موضوع قابل مشاهده است.

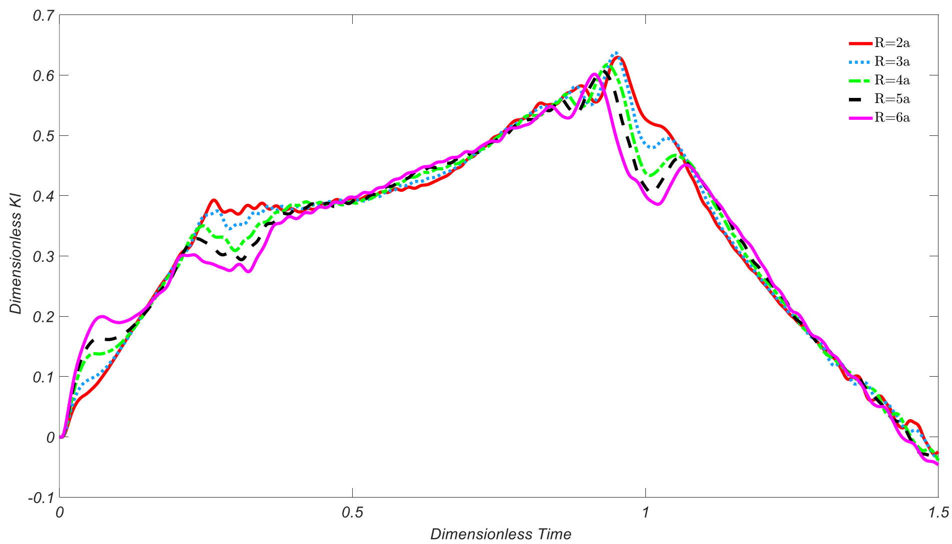


شکل ۵-۱۲- مقایسه رطوبت نوک ترک در مقدارهای مختلف سورت



شکل ۵-۱۳- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول در مقدارهای مختلف سورت

ضریب شدت برای مقادیر مختلف سورت در شکل (۵-۱۳) ترسیم و مقایسه شده‌است. با توجه به اینکه سرعت موج تنش بی‌بعد مستقل از دما و رطوبت است انتظار می‌رود که روند افزایش و یا کاهش این ضریب برای مقادیر مختلف سورت یکسان باشد، اما مقدار این ضریب تحت تاثیر دما و رطوبت خواهد بود که در شکل (۵-۱۳) گزارش شده‌است. در بخش آخر از مثال اول، تاثیر ناحیه انتگرال‌گیری بر ضریب شدت تنش مود اول بررسی شده و نتایج در شکل (۵-۱۴) آمده‌است.

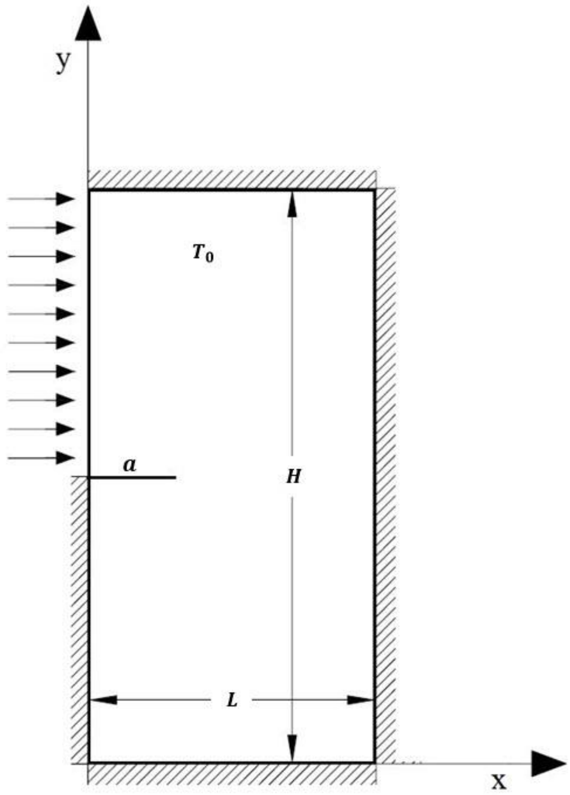


شکل ۵-۱۴- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف

در شکل (۵-۱۴) ضریب شدت تنش مود اول برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف رسم و با یکدیگر مقایسه شده‌است. با توجه به تغییر شکل ترک در طول زمان و تاثیر متفاوت این تغییر شکل بر شعاع‌های مختلف اطراف نوک ترک، انتظار تفاوت‌هایی در ضریب شدت می‌رود که در شکل (۵-۱۴) گزارش شد. این پدیده نشان می‌دهد که برای مسائل غیر استاتیک، حل کاملا مستقل از مسیر نیست.

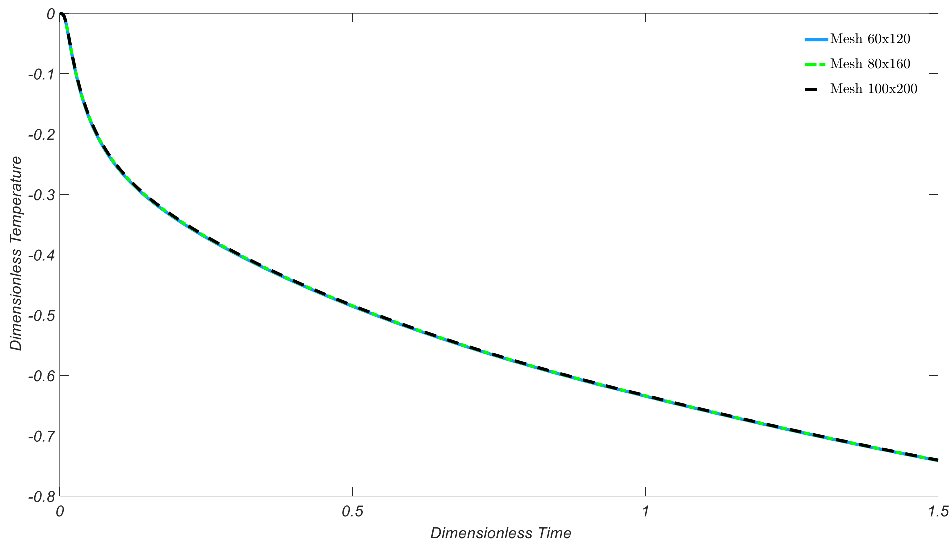
۵-۴- صفحه‌ای مستطیلی شامل ترک عمود لبه‌ای تحت بارگذاری هایگروترمال نامتقارن

در مثال قبل به علت بارگذاری متقارن نسبت به ترک، تنها ضریب شدت تنش مود اول استخراج گردید. در این مثال به علت بارگذاری نامتقارن نسبت به ترک، ضریب شدت تنش مود اول و دوم را خواهیم داشت. خصوصیات فیزیکی صفحه مورد نظر در این مثال همانند صفحه مثال قبل بوده که در جدول (۵-۳) ذکر شده است و شرایط مرزی و بارگذاری در شکل (۵-۱۵) نشان داده شده‌است. همچنین از گام زمانی $\Delta t = 0.0025$ و مقدار سورت $ST = -0.2$ در کل این مثال استفاده شده‌است.



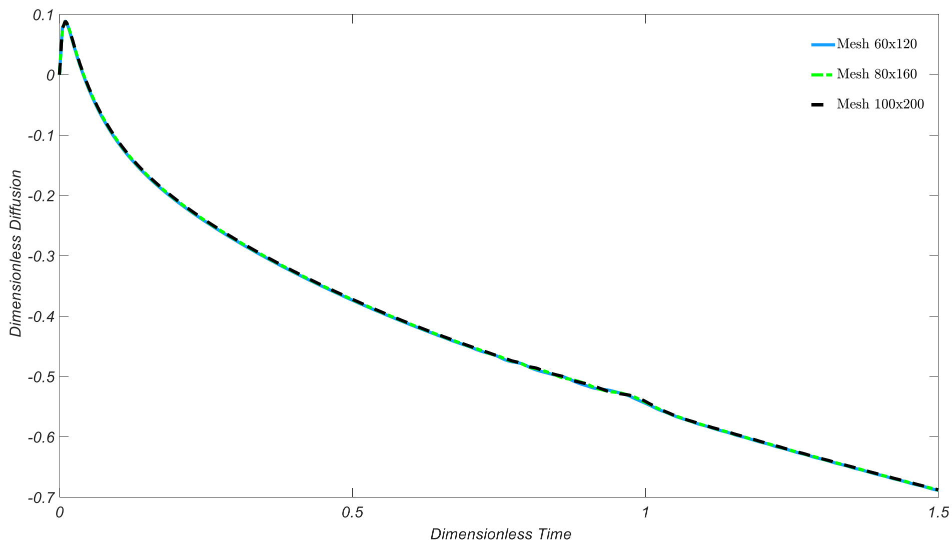
شکل ۵-۱۵- یک صفحه ایزوتروپیک محدود دارای ترک لبه‌ای عمود تحت بارگذاری نامتقارن حرارتی-رطوبتی

در اولین بخش از مثال دوم، تاثیر حساسیت مش بر دما و رطوبت نوک ترک در طول زمان و همچنین ضرایب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده و در نمودارهای مربوطه (شکل (۵-۱۶) تا (۵-۱۹))، تاثیر سه حساسیت مش مختلف ترسیم و مقایسه شده‌است.



شکل ۵-۱۶- مقایسه دمای نوک ترک برای حساسیت‌های مختلف مش

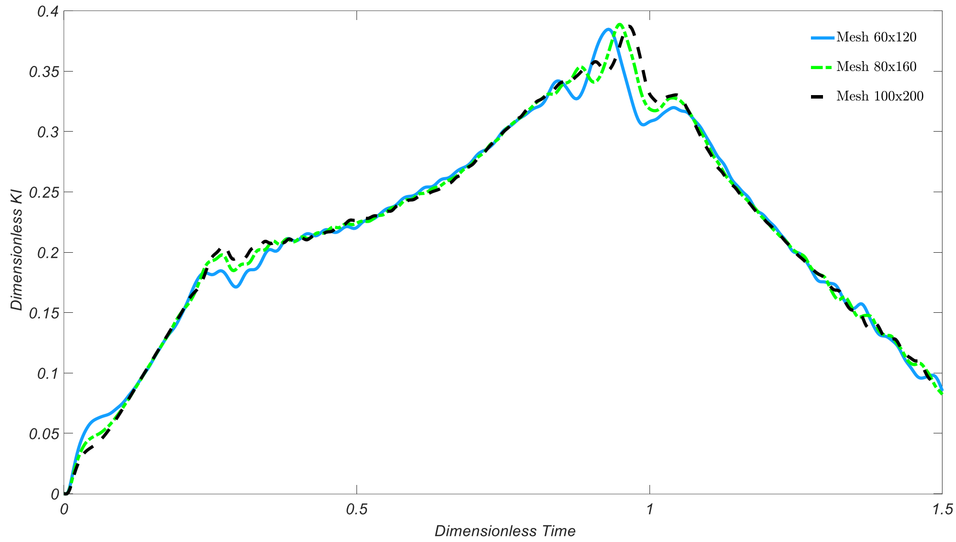
مطابق شکل (۵-۱۶) تغییرات دمای نوک ترک طبق انتظار فرم نمایی خود را حفظ کرده و همچنین برای تعداد مش‌های مختلف همگرایی کاملی حاصل شده‌است.



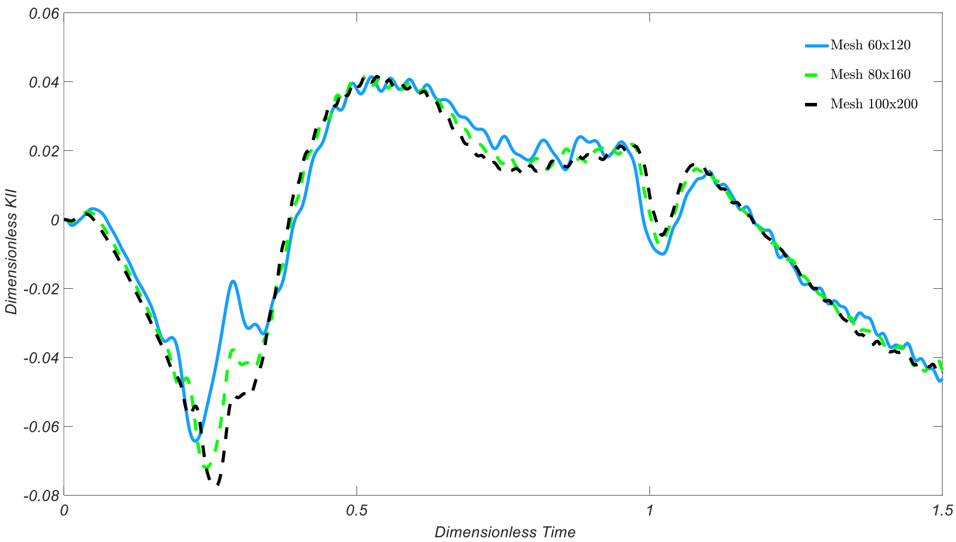
شکل ۵-۱۷- مقایسه رطوبت نوک ترک برای حساسیت‌های مختلف مش

همانند تغییرات دمای نوک ترک، رطوبت نوک ترک نیز به صورت نمایی کاهش یافته‌است. به دلیل وارد کردن اثر دما بر رطوبت در روابط حاکم، در ابتدا شاهد افزایش رطوبت و سپس روند کاهشی آن هستیم.

همچنین مطابق شکل (۵-۱۷) تغییرات رطوبت نوک ترک برای تعداد مش‌های مختلف از همگرایی خوبی برخوردار است.



شکل ۵-۱۸- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای حساسیت‌های مختلف مش

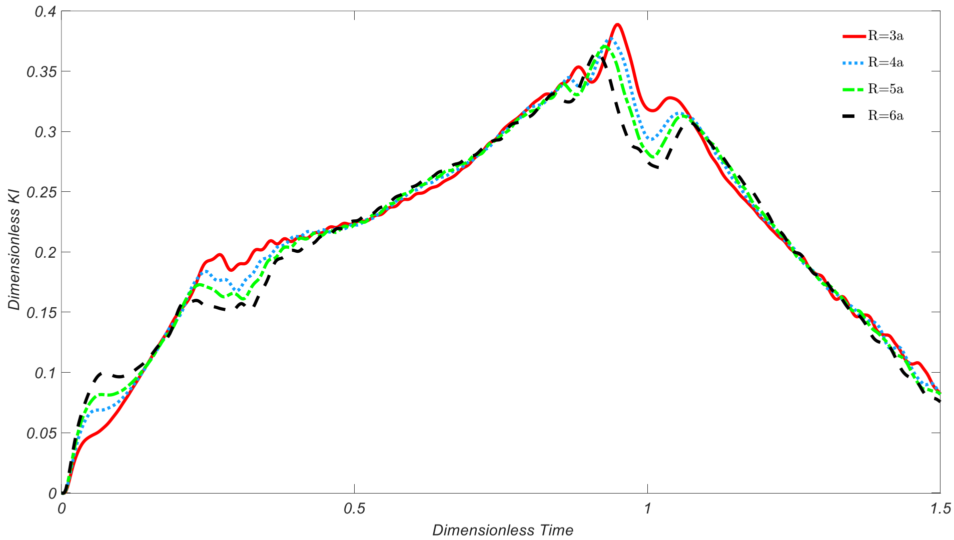


شکل ۵-۱۹- مقایسه ضریب شدت تنش مود دوم برای حساسیت‌های مختلف مش

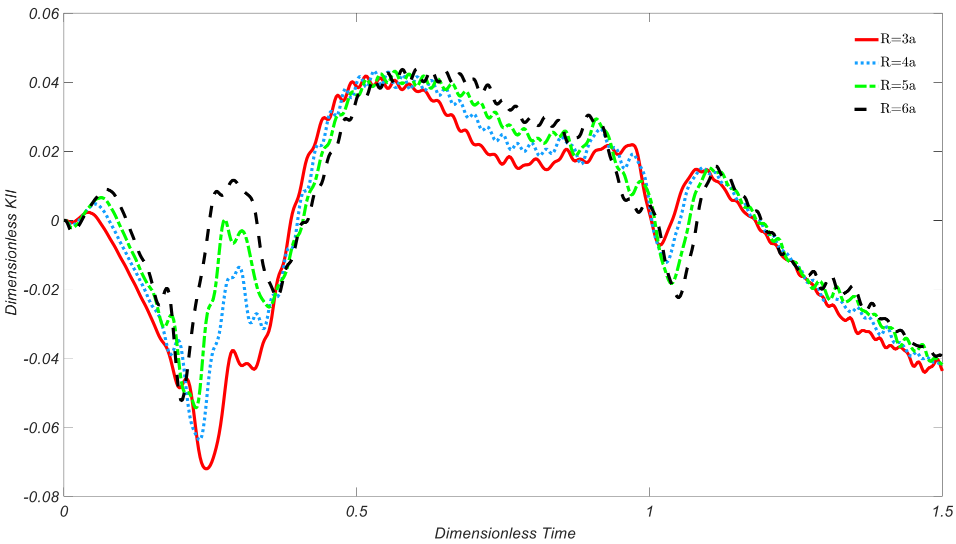
در شکل‌های (۵-۱۸) و (۵-۱۹) به ترتیب ضرایب شدت تنش مود اول و مود دوم برای تعداد مش‌های مختلف گزارش شده‌است. مطابق شکل (۵-۱۸) ضریب شدت تنش مود اول از ابتدای اعمال بارگذاری تا رسیدن موج تنش به نوک ترک افزایش سریع را تجربه کرده و در حین عبور این موج با میزان کمتری

تغییر می‌نماید و پس از گذشت موج تنش از نوک ترک مجدد شاهد ضریب شدت تنش خواهیم بود. با مقایسه ضریب شدت تنش گزارش شده در مثال اول که بارگذاری متقارن بر روی تمام لبه سمت چپ صفحه بود با ضریب شدت تنش در این مثال می‌توان نتیجه گرفت که علی‌رقم فرم مشابه تغییرات ضریب شدت تنش، میزان این تغییرات در حالت دوم کمتر بوده و در نتیجه تمایب به بازشدگی ترک کمتر است، اما در این حالت ترک علاوه بر بازشدگی تمایل به برش صفحه‌ای دارد که ضریب شدت تنش مود دوم مطابق شکل (۵-۱۹) بیانگر آن است. مطابق با دو شکل (۵-۱۸) و (۵-۱۹) نتایج گزارش شده برای تعداد مش‌های مختلف از همگرایی مطلوبی برخوردار است.

در بخش دوم مثال، تاثیر ناحیه‌های مختلف انتگرال‌گیری با در نظر گرفتن حساسیت مش 80×160، عدد سورت $ST = -0.2$ و گام زمانی $\Delta t = 0.0025$ بررسی شده و نمودارهای ضرایب شدت تنش مود اول و دوم در گذر زمان برای چهار ناحیه انتگرال‌گیری مختلف در شکل‌های (۵-۲۰) و (۵-۲۱) ترسیم و مقایسه شده‌است.



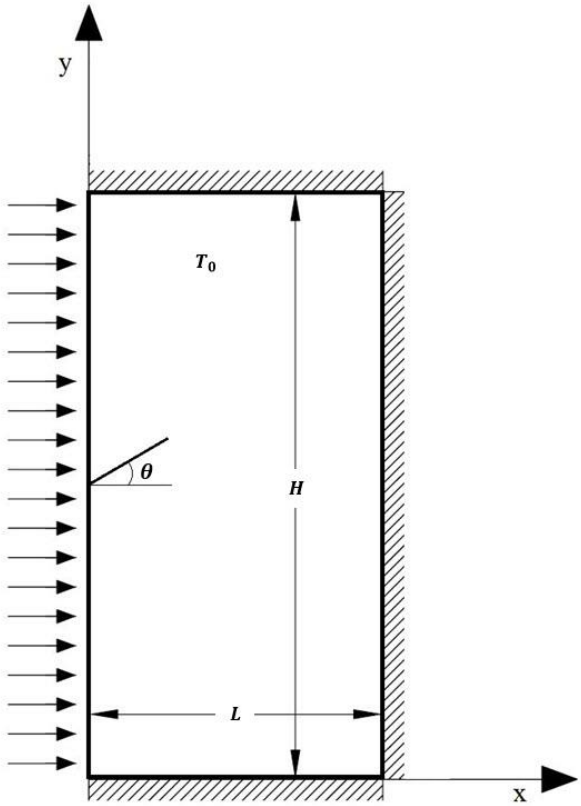
شکل ۵-۲۰- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف



شکل ۵-۲۱- مقایسه ضریب شدت تنش مود دوم برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف

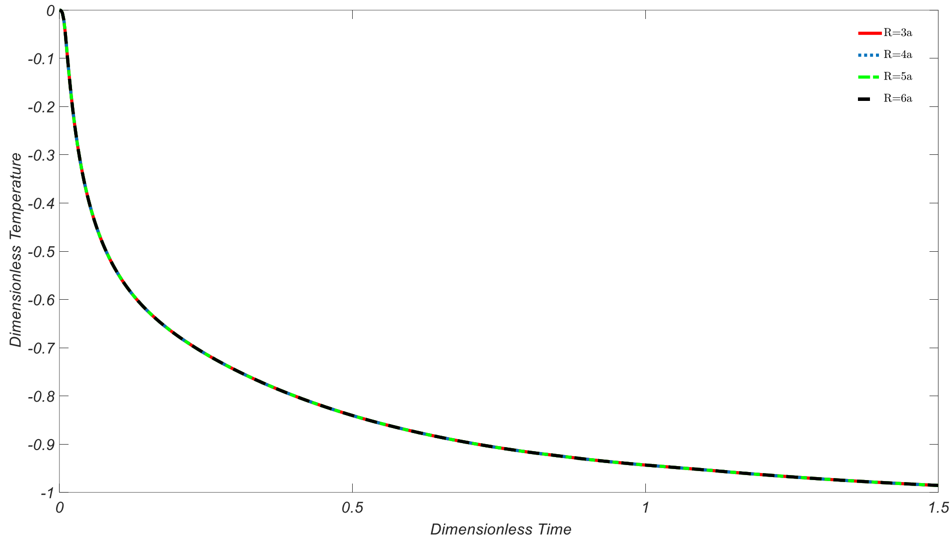
۵-۵- صفحه‌ای مستطیلی شامل ترک زاویه‌دار تحت بارگذاری هایگروترمال

ضریب شدت تنش مود یک در مثال اول تحت بارگذاری متقارن و ضرایب شدت تنش مود اول و دوم تحت بارگذاری نامتقارن در مثال دوم برای یک ترک عمود بدست آمد. در سومین مثال، تاثیر زاویه ترک بر ضرایب شدت تنش مود یک و دو و همچنین دما و غلظت نوک ترک، با شرایط بارگذاری متقارن بررسی شد. هندسه مسئله و همچنین شرایط مرزی در شکل (۵-۲۲) نشان داده شده و خصوصیات فیزیکی ماده تشکیل دهنده صفحه در جدول (۵-۳) ذکر شده‌است. ترکی به طول $a = 0.3L$ از میانه لبه سمت چپ مدل با زاویه ۳۰ درجه در صفحه در نظر گرفته شد، همچنین در کل مثال از حساسیت مش 160×80 وگام زمانی $\Delta t = 0.0025$ استفاده گردید.

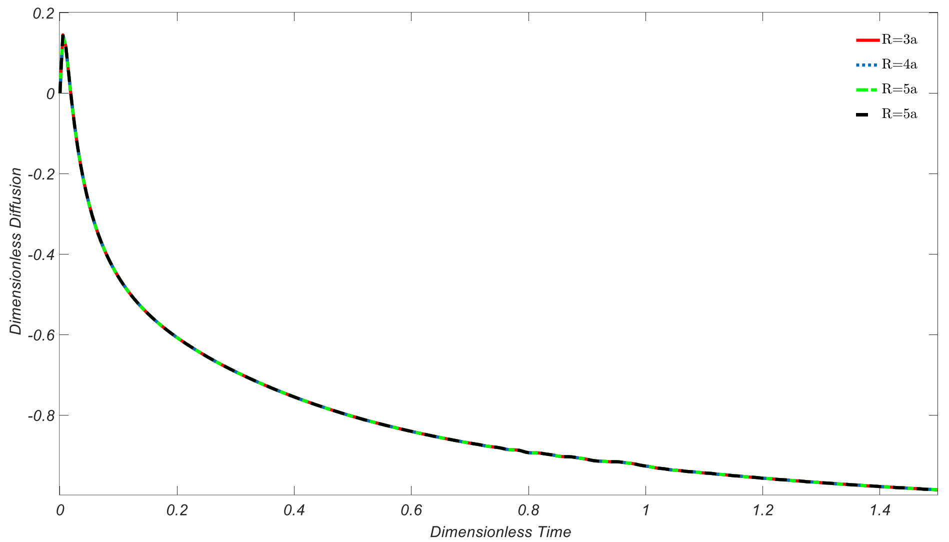


شکل ۵-۲۲- یک صفحه ایزوتروپیک محدود دارای ترک لبه‌ای مایل تحت بارگذاری متقارن حرارتی-رطوبتی

در بخش اول از این مثال، تاثیر ناحیه انتگرال‌گیری بر تغییرات دما و رطوبت نوک ترک و ضرایب شدت تنش در طی زمان مورد مطالعه قرار گرفت و نتایج برای چهار ناحیه انتگرال‌گیری مختلف استخراج گردید. در شکل‌های (۵-۲۳) تا (۵-۲۶) نمودار تغییرات این پارامترها برای هر ناحیه انتگرال‌گیری ترسیم و با یکدیگر مقایسه شده‌است.



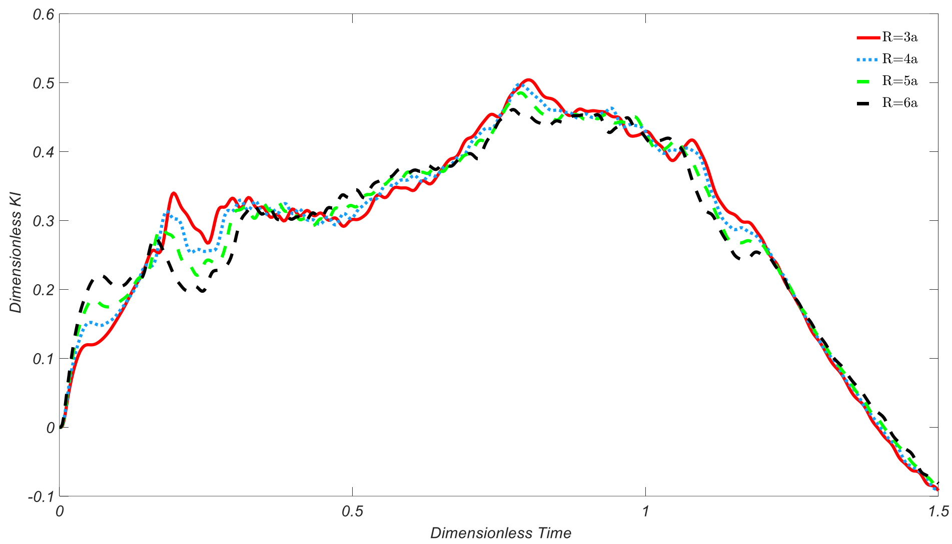
شکل ۵-۲۳- مقایسه دمای نوک ترک در ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف



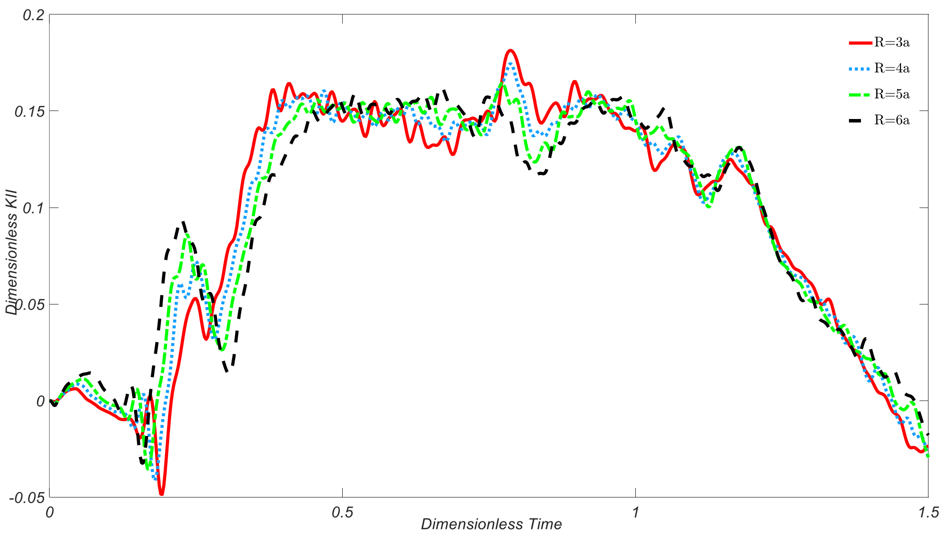
شکل ۵-۲۴- مقایسه رطوبت نوک ترک در ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف

در شکل (۵-۲۳) تغییرات دمای نوک ترک در گذر زمان برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف رسم شده‌است. فرم تغییرات دما همانند دو مثال قبل با تابعیت از معادلات حاکم نمایی است. همچنین با در نظر گرفتن زاویه ۳۰ درجه، نوک ترک به لبه اعمال بارگذاری نزدیک‌تر خواهد بود و انتظار می‌رفت که کاهش دما سریع‌تر از حالت بدون زاویه رخ بدهد که با مقایسه نمودار شکل‌های (۵-۱۰) و (۵-۱۶) با

شکل (۵-۲۳) چنین نتیجه‌ای حاصل می‌شود. شرایط ذکر شده برای تغییرات رطوبت در نوک ترک نیز صادق است که در شکل (۵-۲۴) گزارش شده‌است.



شکل ۵-۲۵- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف

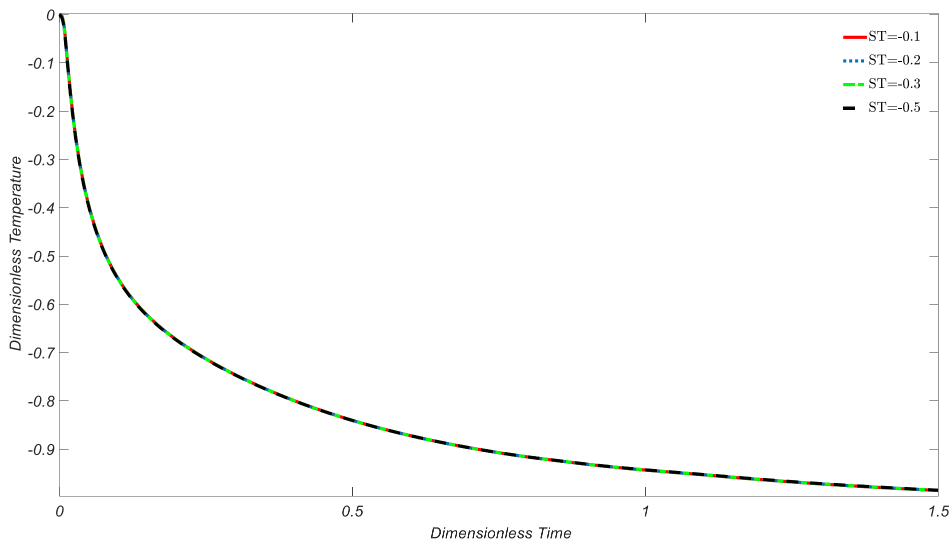


شکل ۵-۲۶- مقایسه ضریب شدت تنش مود دوم برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف

در شکل (۵-۲۵) ضریب شدت تنش مود اول برای ترک با زاویه ۳۰ درجه با در نظر گرفتن ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف گزارش شده‌است. همانند مثال قبل از زمان شروع بارگذاری تا رسیدن موج تنش بی‌بعد به نوک ترک شاهد افزایش سریع ضریب شدت تنش مود اول هستیم و در حین عبور این موج

از نوک ترک، میزان تغییرات ملایم‌تر و پس از گذر موج تنش ضریب شدت تنش با سرعت بیشتری کاهش می‌یابد. ضریب شدت تنش مود دوم برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری مختلف در شکل (۵-۲۶) گزارش شده‌است. با توجه به نتایج به‌دست آمده در ابتدا ترک در جهت منفی در صفحه برش خورده و سپس جهت آن تغییر کرده به بیشتری مقدار خود می‌رسد و پس از گذر موج تنش از نوک ترک، مجدد جهت برش تغییر کرده و جهت منفی را در پیش می‌گیرد.

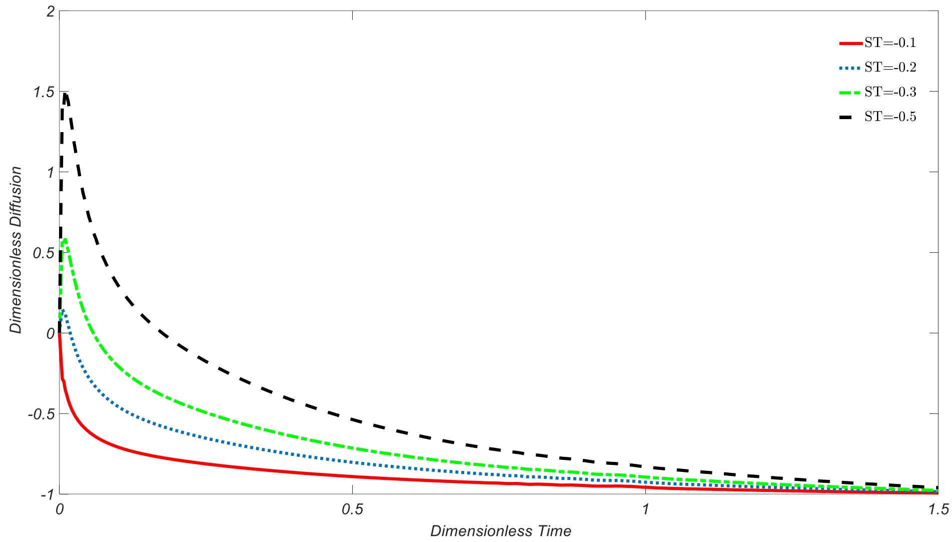
در بخش دوم از مثال سوم، تاثیر مقادیر مختلف سورت بر تغییرات دما و رطوبت در نوک ترک و همچنین ضرایب شدت تنش بررسی شده‌است. نتایج مورد نظر در شکل‌های (۵-۲۷) تا (۵-۳۰) ترسیم و با یکدیگر مقایسه گردید.



شکل ۵-۲۷- مقایسه دمای نوک ترک در مقدارهای مختلف سورت

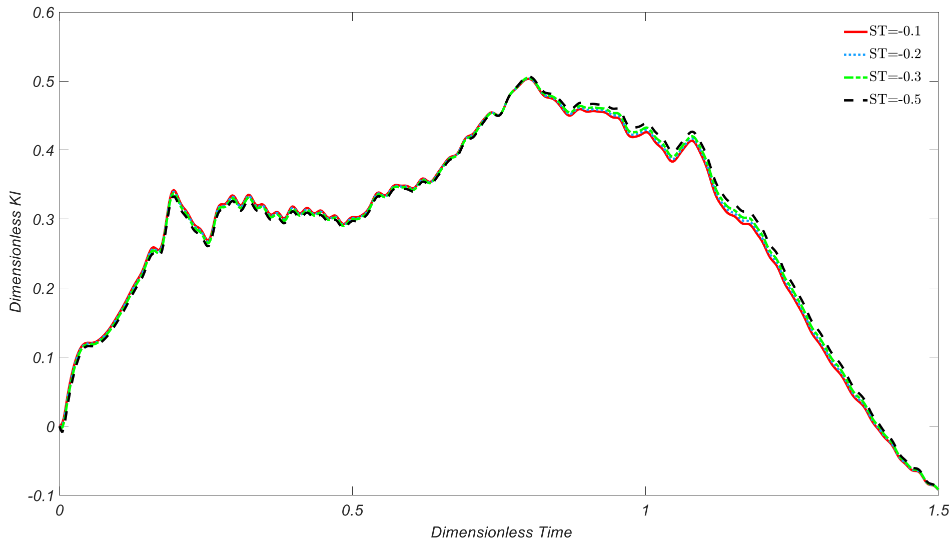
در شکل (۵-۲۷) تغییرات دمای نوک ترک برای ترکی با زاویه ۳۰ درجه با در نظر گرفتن مقادیر مختلف سورت گزارش شده‌است. با توجه به شکل دما حالت کاهش نمایی خود را حفظ نموده و همگرایی خوبی برای مقادیر مختلف سورت به‌دست آمده‌است و با توجه به معادلات حاکم مقدار سورت نباید تاثیری بر توزیع دما داشته باشد که در همین اتفاق در نتایج مشهود است. همچنین با در نظر گرفتن زاویه ترک

و اینکه در این حالت نوک ترک به لبه اعمال بارگذاری نزدیک‌تر است، کاهش دما در نوک ترک سریع‌تر از حالت بدون ترک اتفاق می‌افتد.

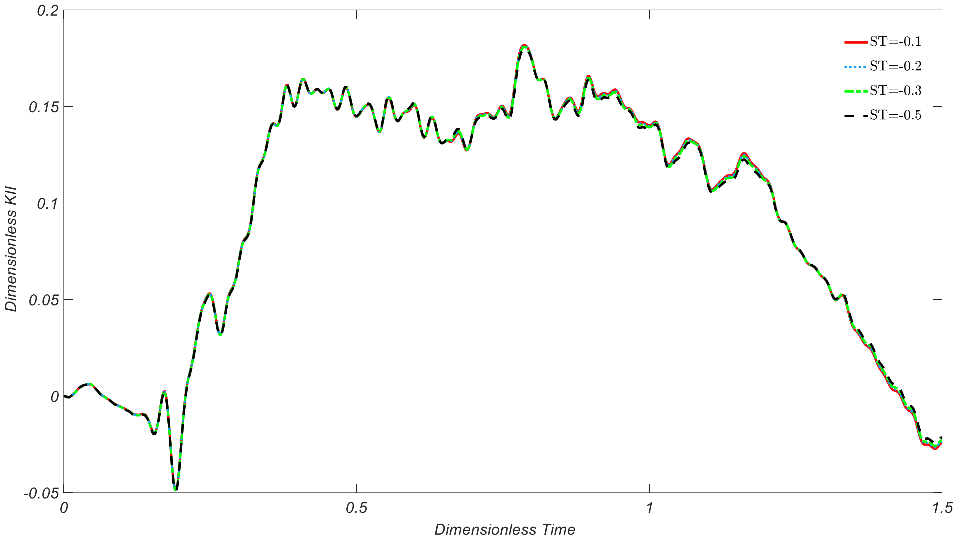


شکل ۵-۲۸- مقایسه رطوبت نوک ترک در مقدارهای مختلف سورت

در شکل (۵-۲۸) تغییرات رطوبت نوک ترک با در نظر گرفتن مقادیر مختلف سورت گزارش شده‌است. همانطور که انتظار می‌رود مقدار سورت بر روی تغییرات رطوبت تاثیر گذار بوده‌است.



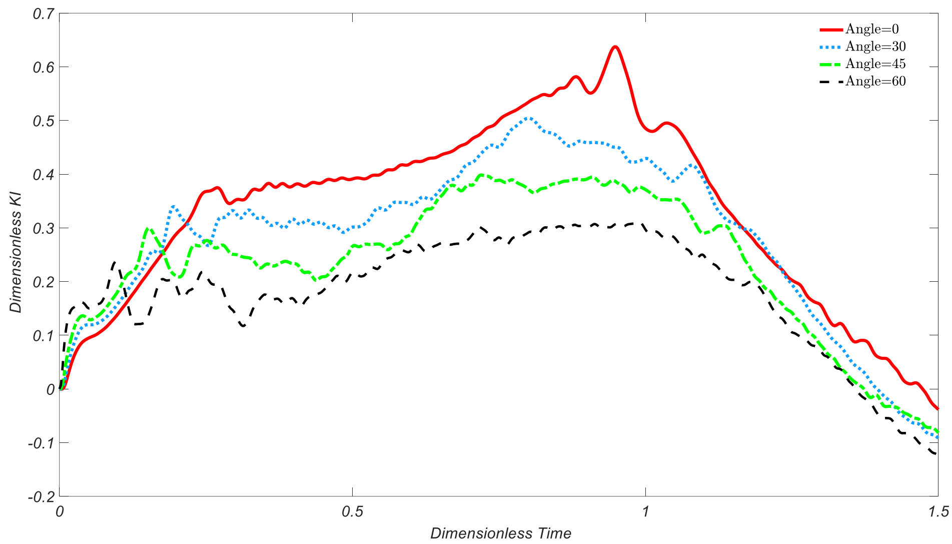
شکل ۵-۲۹- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول در مقدارهای مختلف سورت



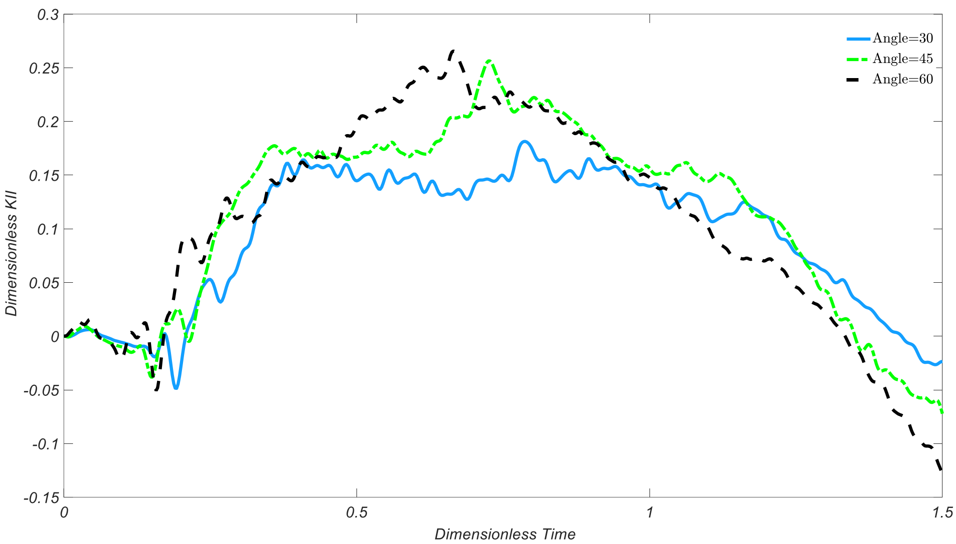
شکل ۵-۳۰- مقایسه ضریب شدت تنش مود دوم در مقدارهای مختلف سورت

در شکل‌های (۵-۲۹) و (۵-۳۰) ضرایب شدت تنش مود اول و دوم برای مقادیر مختلف سورت گزارش شده‌است. با بررسی نتایج می‌توان دریافت اختلاف‌های کم مقدار سورت در روند تغییرات ضریب شدت تنش تاثیر هرچند کوچکی را خواهد داشت و با بزرگ‌تر شدن این مقدار تاثیر آن نیز چشم‌گیرتر خواهد بود به اینگونه که با افزایش میزان این مقدار برای مود اول در ابتدا تمایل ترک به بازشدگی کمتر بوده اما با گذشت زمان و نفوذ رطوبت در ترک بیشینه ضریب شدت تنش افزایش خواهد یافت و ترک بازشدگی بیشتری را تجربه می‌کند و در نهایت پس از عبور موج تنش از نوک ترک، تمایل ترک به بسته شدن کمتر خواهد بود. تاثیر افزایش میزان عدد سورت بر مود دوم ترک کمتر از مود اول بوده، با این حال با افزایش میزان آن تمایل ترک به سر خوردن کمتر می‌شود.

در بخش سوم از این مثال، تاثیر زوایای مختلف با در نظر گرفتن حساسیت مش 160×80، عدد سورت $ST = -0.2$ و گام زمانی $\Delta t = 0.0025$ روی ضرایب شدت تنش مود اول و دوم بررسی و با هم مقایسه شده‌است.

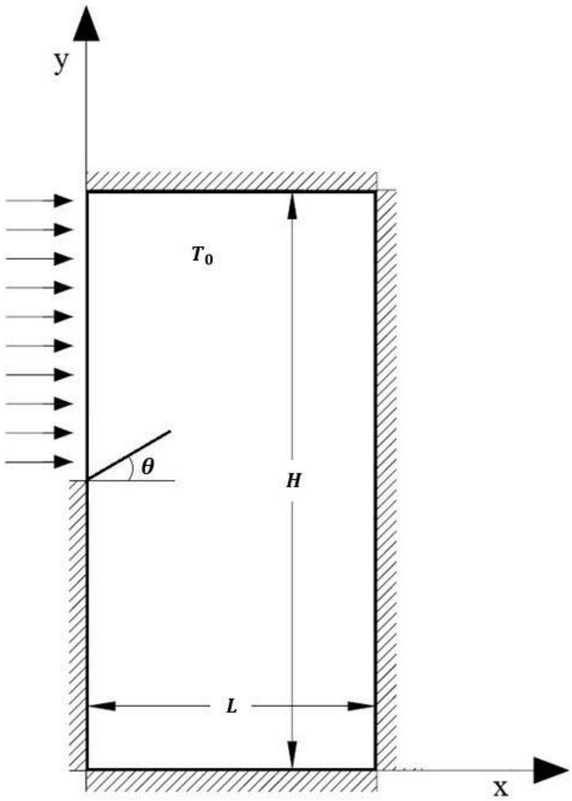


شکل ۵-۳۱- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول در زاویه‌های مختلف ترک



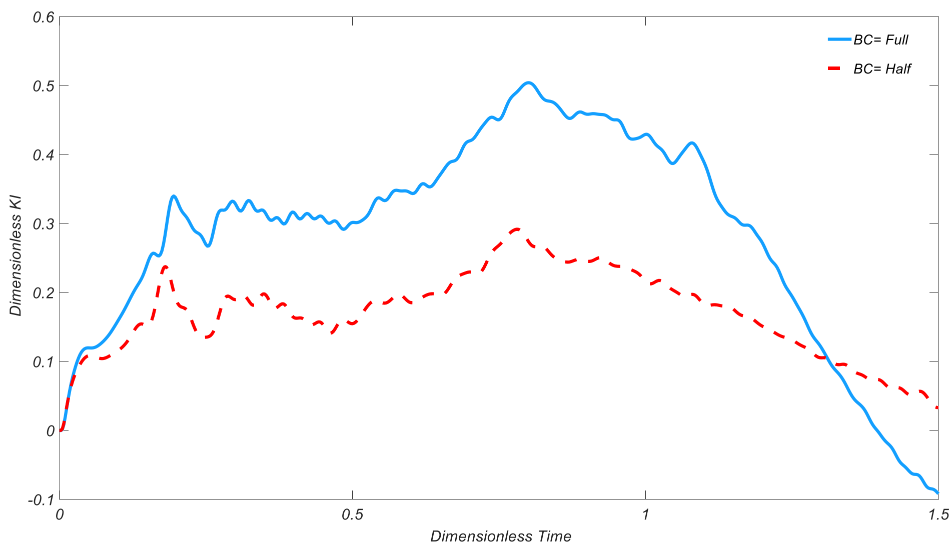
شکل ۵-۳۲- مقایسه ضریب شدت تنش مود دوم در زاویه‌های مختلف ترک

شکل (۵-۳۱) ضریب شدت تنش مود اول با در نظر گرفتن زاویه‌های مختلف ترک را نشان می‌دهد. با توجه به نتایج، با افزایش زاویه ترک، نوک ترک به لبه اعمال بارگذاری نزدیک‌تر شده و بنابراین موج تنش در زمان زودتری به آن می‌رسد که در شکل به خوبی قابل مشاهده است. همچنین با افزایش زاویه تمایل به بازشدگی در ترک کاهش یافته، اما تمایل به برش صفحه‌ای در آن افزایش می‌یابد که در شکل (۵-۳۲) مشاهده می‌شود.

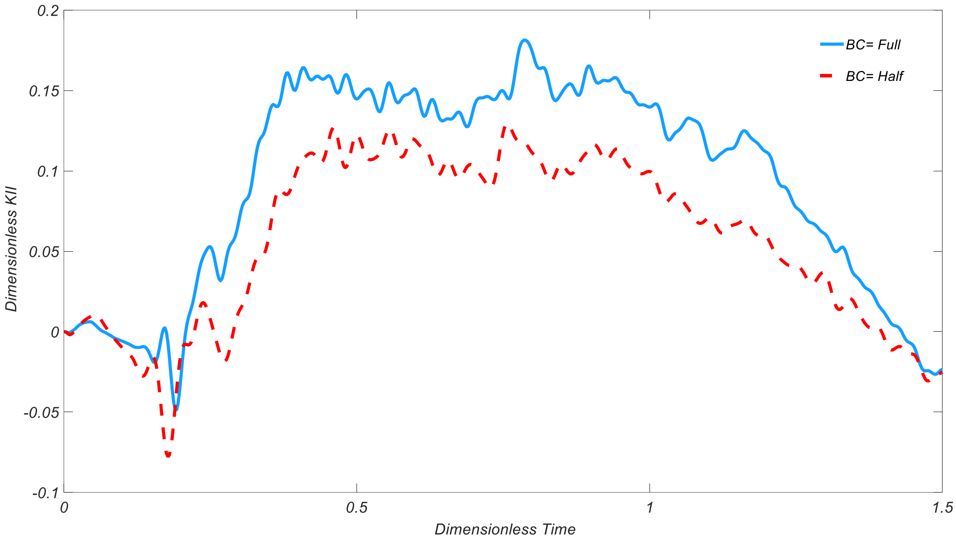


شکل ۵-۳۳- یک صفحه ایزوتروپیک محدود دارای ترک لبه‌ای مایل تحت بارگذاری نامتقارن حرارتی-رطوبتی

در بخش آخر این مثال ضرایب شدت تنش مود اول و دوم برای ترک با زاویه ۳۰ درجه تحت بارگذاری نامتقارن (شکل ۵-۳۳) بررسی شده‌است.



شکل ۵-۳۴- مقایسه ضریب شدت تنش مود اول در دو حالت بارگذاری متقارن و نامتقارن



شکل ۵-۳۵- مقایسه ضریب شدت تنش مود دوم در دو حالت بارگذاری متقارن و نامتقارن

شکل (۵-۳۴) ضریب شدت تنش مود اول برای یک ترک با زاویه ۳۰ درجه در دو حالت بارگذاری متقارن نسبت به صفحه (شکل ۵-۲۲) و بارگذاری نامتقارن نسبت به صفحه (شکل ۵-۳۳) را نشان می‌دهد. با توجه به نتایج به‌دست آمده تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود اول در حالت بارگذاری نامتقارن کمتر از حالت متقارن بوده و تمایل ترک برای بازشدگی کمتر است. همچنین با توجه به شکل (۵-۳۵) که ضریب شدت تنش مود دوم را برای این دو حالت بارگذاری نشان می‌دهد می‌توان همان نتیجه‌ای که برای مود اول بیان شد را بازگو کرد.

فصل ششم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۶-۱- نتیجه‌گیری

در این نوشتار، ضرایب شدت تنش برای یک محیط محدود دارای ترک لبه‌ای در معرض بارگذاری هایگروترمال با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته و با در نظر گرفتن کوپل کامل میدان‌های جابجایی، دما و رطوبت به‌دست آمده‌اند. معادلات حاکم با روش گلرکین گسسته سازی شده و با استفاده از معادلات نیومارک حل شده‌اند. برای استخراج ضرایب شدت تنش از روش انتگرال برهمکنش استفاده شده‌است. مثال‌های متعددی با در نظر گرفتن تقارن بارگذاری و زاویه ترک آورده شده‌است. این مطالعه نشان می‌دهد بارگذاری متقارن نسبت به سطح ترک تنها منجر به پیدایش ضریب شدت تنش مود اول شده و ترک تمایلی به برش صفحه‌ای ندارد. اما در حالت بارگذاری نامتقارن ترک علاوه بر بازشدگی، برش صفحه‌ای را نیز تجربه خواهد کرد. با افزایش زاویه ترک ضریب شدت تنش مود اول کاهش و ضریب شدت تنش مود دوم افزایش می‌یابد. همچنین زمان رسیدن موج تنش به نوک ترک با افزایش زاویه ترک، کاهش یافته که موجب می‌شود ضرایب شدت تنش در زمان سریع‌تری به حالت حداکثری خود برسند. همچنین مقدار سورت علاوه بر تاثیر روی انتشار رطوبت، بر نحوه‌ی تغییرات زمانی ضرایب شدت تنش اثرگذار خواهد بود. با افزایش اندازه‌ی مقدار سورت، ضریب شدت تنش مود اول آهسته‌تر به میزان حداکثری خود می‌رسد اما بیشینه آن افزایش خواهد یافت. همچنین پس از گذر موج تنش از نوک ترک ضریب شدت تنش مود اول آهسته‌تر کاهش خواهد یافت. شرایط ذکر شده بیانگر این است که در ابتدا به دلیل افزایش میزان رطوبت ترک تمایل کمتری به بازشدگی داشته اما پس از گذر زمان و نفوذ رطوبت به داخل ترک میزان بازشدگی ترک بیشتر شده و تمایل برای بسته شدن کاهش خواهد یافت. تاثیر مقدار سورت بر ضریب شدت تنش مود دوم کمتر از ضریب شدت تنش مود اول است اما با این حال با افزایش میزان مقدار سورت تمایل ترک برای برش خوردن کاهش می‌یابد.

۶-۲- پیشنهادها

حل مسئله هایگروترمال با استفاده از معادلاتی غیر از معادلات فوریه و فیک

فهرست مراجع

[1] T. Gasch, R. Malm and A. Ansell (2016) “A Coupled Hygro-Thermo-Mechanical Model for Concrete Subjected to Variable Environmental Conditions” **Int. J. Solids Struct.**, 91, pp. 143–156.

[2] Y. Weitsman (1991) “Chapter 9 - Moisture in Composites: Sorption and Damage” in **Composite Materials Series**, vol. 4, Ed.: K. L. Reifsnider, Elsevier, pp. 385-429.

[3] Y. J. Weitsman (2000) “2.11 - Effects of Fluids on Polymeric Composites—A Review” **Comprehensive Composite Materials**, Eds.: A. Kelly and C. Zweben, Oxford: Pergamon, pp. 369-401.

[4] M. Gigliotti, F. Jacquemin, J. Molimard and A. Vautrin (2007) “Transient and Cyclical Hygrothermoelastic Stress in Laminated Composite Plates: Modelling and Experimental Assessment” **Mech. Mater.**, 39 (8), pp. 729–745.

[5] R. C. Chang and C. K. Chao (1993) “General Solution to the Hygrothermoelastic Interface Problem With Discontinuity Between Dissimilar Anisotropic Media” **J. Appl. Phys.**, 74 (12), pp. 7085–7093.

[6] J. Aboudi and T. O. Williams (2000) “A Coupled Micro-Macromechanical Analysis of Hygrothermoelastic Composites” **Int. J. Solids Struct.**, 37 (30), pp. 4149–4179.

[7] G. A. Altay and M. C. Dokmeci (2000) “Some Hamilton-Type Variational Principle for Motions of a Hygrothermoelastic Medium” **J. Therm. Stresses**, 23 (3), pp. 273–284.

[8] M. C. Hsieh and C. Hwu (2006) “Hygrothermal Stresses in Unsymmetric Laminates Disturbed by Elliptical Holes” **J. Appl. Mech.**, 73 (2), pp. 228–239.

[9] X. Wang and E. Pan (2008) “Three-Dimensional Quasi-Steady-State Problem of Moving Heat and Diffusion Sources in an Infinite Solid” **Mech. Res. Commun.**, 35 (7), pp. 475–482.

[10] J. B. J. Fourier (2009) “The Analytical Theory of Heat” **Cambridge Library Collection – Mathematics**, Cambridge, Cambridge University Press.

[11] G. C. Sih, J. Michopoulos and S. C. Chou (2012) “Hygrothermoelasticity” Springer Science & Business Media, Dordrecht, Netherlands.

[12] C. H. Shen and G. S. Springer (1976) “Moisture Absorption and Desorption of Composite Materials” **J. Comp. Mater.**, 10 (1), pp. 2–20.

[13] N. L. Hancox (1988) “Composites design: S.W. Tsai Think Composites, 1987” **Composites**, Vol. 19 (1), p. 75.

[14] R. J. Hartranft and G. C. Sih (1980) “The Influence of Coupled Diffusion of Heat and Moisture on the State of Stress in a Plate” **Mech. Comp. Mater.,** 16 (1), pp. 44-56.

[15] G. C. Sih, M. T. Shih and S. C. Chou (1980) “Transient Hygrothcrmal Stresses in Composites: Coupling of Moisture and Heat With Temperature Varying Diffusivity” **Int. J. Eng. Sci.**, 18 (1), pp. 19-42.

[16] Y. C. Yang, S. S. Chu, H. L. Lee and S. L. Lin (2006) “Hybrid Numerical Method Applied to Transient Hygrothermal Analysis in an Annular Cylinder” **Int. Commun. Heat Mass Transfer**, 33 (1), pp. 102–111.

[17] W. J. Chang, T. C. Chen, and C. I. Weng (1991) “Transient Hygrothermal Stresses in an Infinitely Long Annular Cylinder: Coupling of Heat and Moisture” **J. Therm. Stresses**, 14 (4), pp. 439–454.

[18] W. J. Chang (1994) “Transient Hygrothermal Responses in a Solid Cylinder by Linear Theory of Coupled Heat and Moisture” **Appl. Math. Model.**, 18 (8), pp. 467–473.

[19] A. Szekeres (2000) “Analogy Between Heat and Moisture Thermo-Hygro-Mechanical Tailoring of Composites by Taking Into Account the Second Sound Phenomenon” **Comput. Struct.**, 76 (1), pp. 145–152.

[20] A. Szekeres and J. Engelbrecht (2000) “Coupling of Generalized Heat and Moisture Transfer” **Period. Polytech. Mech. Eng.**, 44 (1), pp. 161–170.

[21] M. Cinefra, M. Petrolo, G. Li and E. Carrera (2017)” Hygrothermal Analysis of Multilayered Composite Plates by Variable Kinematic Finite Elements” **J. Therm. Stresses**, 40 (12), pp. 1502-1522.

[22] W. Obeid, G. Mounajed and A. Alliche (2001) “Mathematical Formulation of Thermo-Hygro-Mechanical Coupling Problem in Non-Saturated Porous Media” **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 190 (39), pp. 5105–5122.

[23] D. Gawin, F. Pesavento and B. A. Schrefler (2003) “Modelling of Hygro-Thermal Behaviour of Concrete at High Temperature With Thermo-Chemical and Mechanical Material Degradation” **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 192 (13), pp. 1731–1771.

[24] B. Bary, G. Ranc, S. Durand and O. Carpentier (2008) “A Coupled Thermo-Hydro-Mechanical-Damage Model for Concrete Subjected to Moderate Temperatures” **Int. J. Heat Mass Transfer**, 51 (11), pp. 2847–2862.

[25] M. Beneš and R. Štefan (2015) “Hygro-Thermo-Mechanical Analysis of Spalling in Concrete Walls at High Temperatures as a Moving Boundary Problem” **Int. J. Heat Mass Transfer**, 85, pp. 110–134.

[26] R. B. Pipes, J. R. Vinson and T.W. Chou (1976) “On the Hygrothermal Response of Laminated Composite Systems” **J. Comp. Mater.**, 10 (2), pp. 129–148.

[27] A. Benkeddad, M. Grediac and A. Vautrin (1995) “On the Transient Hygroscopic Stresses in Laminated Composite Plates” **Comp. Struct.**, 30 (2), pp. 201–215.

[28] A. Benkeddad, M. Grediac and A. Vautrin (1996) “Computation of Transient Hygroscopic Stresses in Laminated Composite Plates” **Comp. Sci. Tech.**, 56 (7), pp. 869–876.

[29] A. Tounsi, M. Bouazza and E. A. Bedia (2004) “Computation of Transient Hygroscopic Stresses in Unidirectional Laminated Composite Plates with Cyclic and Asymmetrical Environmental Conditions” **Int. J. Mech. Mater. Des.**, 1 (3), pp. 271–286.

[30] A. Tounsi and E. A. Bedia (2003) “Simplied Method for Prediction of Transient Hygroscopic Stresses in Polymer Matrix Composites with Symmetric Environmental Conditions” **Appl. Comp. Mater.**, 10 (1), pp. 1–18.

[31] A. Tounsi and E. A. Bedia (2003) “Some Observations on the Evolution of Transversal Hygroscopic Stresses in Laminated Composites Plates: Effect of Anisotropy” **Comp. Struct.**, 59 (4), pp. 445–454.

[32] A. Tounsi, E. A. Bedia and A. Benachour (2005) “A New Computational Method for Prediction of Transient Hygroscopic Stresses during Moisture Desorption in Laminated Composite Plates with Different Degrees of Anisotropy” **J. Thermoplast. Comp. Mater.**, 18 (1), pp. 37–58.

[33] B. Patel, M. Ganapathi and D. Makhecha (2002) “Hygrothermal Effects on the Structural Behavior of Thick Composite Laminates Using Higher-order Theory” **Comp. Struct.**, 56 (1), pp. 25–34.

[34] V. V. S. Rao and P. K. Sinha (2004) “Dynamic Response of Multidirectional Composites in Hygrothermal Environments” **Comp. Struct.**, 64 (3), pp. 329–338.

[35] A. Benkhedda, A. Tounsi and E. A. Adda Bedia (2008) “Effect of temperature and humidity on transient hygrothermal stresses during moisture desorption in laminated composite plates” **Comp. Struct.**, 82 (4), pp. 629–635.

[36] C. K. Kundu and J.-H. Han (2009) “Vibration Characteristics and Snapping Behavior of Hygro-thermo-elastic Composite Doubly Curved Shells” **Comp. Struct.**, 91 (3), pp. 306–317.

[37] A. K. Upadhyay, R. Pandey and K. K. Shukla (2010) “Nonlinear Flexural Response of Laminated Composite Plates Under Hygro-thermo-mechanical Loading” **Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat.**, 15 (9), pp. 2634–2650.

[38] A. M. Zenkour (2010) “Hygro-thermo-mechanical Effects on FGM Plates Resting on Elastic Foundations” **Comp. Struct.**, 93 (1), pp. 234–238.

[39] R. Chiba and Y. Sugano (2011) “Transient Hygrothermoelastic Analysis of Layered Plates with One-dimensional Temperature and Moisture Variations Through the Thickness” **Comp. Struct.**, 93 (9), pp. 2260–2268.

[40] D. S. Mashat and A. M. Zenkour (2014) “Hygrothermal Bending Analysis of a Sector-shaped Annular Plate with Variable Radial Thickness” **Comp. Struct.**, 113, pp. 446–458.

[41] M. Zidi, A. Tounsi, M. S. A. Houari, E. A. A. Bedia and O. A. Bég (2014) “Bending Analysis of FGM Plates Under Hygro-thermo-mechanical Loading Using a Four Variable Refined Plate Theory” **Aerosp. Sci. Tech.**, 34, pp. 24–34.

[42] F. Ahmad, J. W. Jung-Wuk Hong, H. S. Choi and M. K. Park (2016) “Hygro Effeects on the Low-velocity Impact Behavior of Unidirectional CFRP Composite Plates for Aircraft Applications” **Comp. Struct.**, 135, pp. 276–285.

[43] S. M. Hosseini, M. H. Ghadiri Rad (2016) “Application of Meshless Local Integral Equations for Two-Dimensional Transient Coupled Hygrothermoelasticity Analysis: Moisture and Thermoelastic Wave Propagations Under Shock Loading” **J. Therm. Stresses**, 40 (1), pp. 40-54.

[44] F. Ebrahimi, M. R. Barati (2016) “Hygrothermal Buckling Analysis of Magnetically Actuated Embedded Higher Order Functionally Graded Nanoscale Beams Considering the Neutral Surface Position” **J. Therm. Stresses**, 39 (10), pp. 1210–1229.

[45] C.-Y. Lee and J.-H. Kim (2013) “Hygrothermal Postbuckling Behavior of Functionally Graded Plates” **Comp. Struct.**, 95, pp. 278–282.

[46] W. Smittakorn and P. R.Heyliger (2001) “An AdaptiveWood Composite: Theory” **Wood Fib. Sci.**, 33, pp. 595–608.

[47] W. Smittakorn and P. R. Heyliger (2003) “An Adaptive Wood Composite: Experiment” **J. Struct. Eng.**, 129, pp. 699–702.

[48] W. Chen and T. Shioya (2001) “Piezothermoelastic Behavior of a Pyroelectric Spherical Shell,” **J. Therm. Stresses**, 24 (2), pp. 105–120.

[49] M. Saadatfar and M. Aghaie-Khafri (2015) “On the Behavior of a Rotating Functionally Graded Hybrid Cylindrical Shell with Imperfect Bonding Subjected to Hygrothermal Condition,” **J. Therm. Stresses**, 38 (8), pp. 854–881.

[50] W. Smittakorn and P. R. Heyliger (2000) “A Discrete-layer Model of Laminated Hygro-thermopiezoelectric Plates,” **Mech. Comp. Mater. Struct.**, 7 (1), pp. 79–104.

[51] A. M. Zenkour (2014) “Hygro-thermoelastic Responses of Inhomogeneous Piezoelectric and Exponentially Graded Cylinders,” **Int. J. Pressure Vessels and Piping.**, 119, pp. 8–18.

[52] S. B. Kerur and A. Ghosh (2013) “Geometrically Non-linear Bending Analysis of Piezoelectric Fiber-reinforced Composite (MFC/AFC) Cross-ply Plate Under Hygrothermal Environment” **J. Therm. Stresses**, 36 (12), pp. 1255–1282.

[53] G. Altay and M. C. Dokmeci (2000) “Some Hamiltonian-type Variational Principles for Motions of a Hygro-thermoelastic Medium” **J. Therm. Stresses**, 23 (3), pp. 273–284.

[54] S. Raja, P. K. Sinha, G. Prathap and D. Dwarakanathan (2004) “Influence of Active Stiffening on Dynamic Behaviour of Piezo-hygro-thermo-elastic Composite Plates and Shells” **J. Sound and Vibration.**, 278 (1), pp. 257–283.

[55] A. H. Akbarzadeh and Z. T. Chen (2012) “Magnetoelectroelastic Behavior of Rotating Cylinders Resting on an Elastic Foundation Under Hygrothermal Loading,” **Smart Mater. Struct.**, 21 (12), p. 125013.

[56] A. H. Akbarzadeh and Z. T. Chen (2013) “Hygrothermal stresses in one-dimensional functionally graded piezoelectric media in constant magnetic field” **Comp. Struct.**, 97, pp. 317–331.

[57] A. H. Akbarzadeh and D. Pasini (2014) “Multiphysics of Multilayered and Functionally Graded Cylinders under Prescribed Hygrothermomagnetoelectromechanical Loading” **J. Appl. Mech.**, 81 (4), p. 041018.

[58] M. Saadatfar and A. M. Khafri (2014) “Hygro-thermomagnetoelectroelastic Analysis of a Functionally Graded Magneto-electroelastic Hollow Sphere Resting on an Elastic Foundation” **Smart Mater. Struct.**, 23 (4), p. 035004.

[59] D. S. Mashat and A. M. Zenkour (2014) “Hygrothermal bending analysis of a sector-shaped annular plate with variable radial thickness” **Comp. Struct.**, 113, pp. 446–458.

[60] A. Zenkour (2013) “Hygrothermal Analysis of Exponentially Graded Rectangular Plates” **J. Mech. Mater. Struct.**, 7, pp. 687–700.

[61] S. A. Al Khateeb and A. M. Zenkour (2014) “A Refined Four-Unknown Plate Theory for Advanced Plates Resting on Elastic Foundations in Hygrothermal Environment” **Comp. Struct.**, 111, pp. 240–248.

[62] M. Vinyas, S. Ch. Kattimani and Sh. Joladarashi (2018) “Hygrothermal Coupling Analysis of Magneto-Electroelastic Beams Using Finite Element Methods” **J. Therm. Stresses**, 41 (8), pp. 1063–1079.

[63] R. J. Hartranft and G. C. Sih (1981) “Stresses Induced in an Infinite Medium by the Coupled Diffusion of Heat and Moisture from a Spherical Hole” **Eng. Fract. Mech.**, 14 (2), pp. 261–287.

[64] G. C. Sih, A. Ogawa and S. C. Chou (1981) “Two-Dimensional Transient Hygrothermal Stresses in Bodies With Circular Cavities: Moisture and Temperature Coupling Effects” **J. Therm. Stresses**, 4 (2), pp. 193-222.

[65] G. C. Sih and A. Ogawa (1982) “Transient Hygrothermal and Mechanical Stress Intensities Around Cracks” **Fract. Comp. Mater.**, pp. 79–90.

[66] G. C. Sih (1983) “Transient Hygrothermal Stresses in Plates With and Without Cavities” **Fibre Sci. Tech.**, 18 (3), pp. 181–201.

[67] C. K. Chao and R. C. Chang (1993) “Hygrothermal Stresses for a Plane Crack in a Generally Anisotropic Plate” **Eng. Fract. Mech.**, 45 (6), pp. 831–841.

[68] M. C. Hsieh and C. Hwu (2006) “Hygrothermal Stresses in Unsymmetric Laminates Disturbed by Elliptical Holes” **J. Appl. Mech.**, 73 (2), pp. 228–239.

[۶۹] رجائی، حمید (۱۳۹۵) "محاسبه ضرایب شدّت تنش برای ترکی در محیط دوبعدی ارتوتروپیک مستطیلی در معرض تنشهای حرارتی و رطوبتی با روش المان محدود توسعه یافته" پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[70] H. Y. Dang, M. H. Zhao, C. Y. Fan and Z. T. Chen (2018) “Analysis of Arbitrarily Shaped Planar Cracks in Three-Dimensional Isotropic Hygrothermoelastic Media” **J. Therm. Stresses**, 41 (6), pp. 776–803.

[71] M. H. Zhao, H. Y. Dang, C. Y. Fan and Z. T. Chen (2018) “Threedimensional Steady-State General Solution for Isotropic Hygrothermoelastic Media” **J. Therm. Stresses**, 41 (8), pp. 951–972.

[72] S. Dag, E.E. Arman and B. Yildirim (2010) “Computation of Thermal Fracture Parameters for Orthotropic Functionally Graded Materials Using Jk- Integral” **Int. J. Solids Struct.**, 47 (25), pp. 3480–3488.

[73] S. Dag, B. Yildirim, O. Arslan and E.E. Arman (2012) “Hygrothermal Fracture Analysis of Orthotropic Materials Using Jk-Integral” **J. Therm. Stresses**, 35 (7), pp. 596–613.

[74] S. Topal and S. Dag (2014) “Mixed-Mode Hygrothermal Fracture Analysis of Orthotropic Functionally Graded Materials Using J-Integral” 12th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, Copenhagen, Denmark

[75] M. S. Kirugulige (2007), Ph.D thesis, “A Study of Mixed-Mode Dynamic Fracture in Advanced Particulate Composites by Optical Interferometry, Digital Image Correlation and Iinite Element Methods”, Auburn University, Alabama, US.

[76] N. Moës, J. Dolbow and T. Belytschko (1999) “A Finite Element Method for Crack Growth Without Remeshing” **Int. J. Num. Meth. Eng.**, 46, pp. 131–150.

[77] C. A. Duarte and J. T. Oden (1996) “An h-p Adaptive Method Using Clouds” **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 139 (1), pp. 237–262.

[78] J. M. Melenk and I. Babuska (1996) “The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications” **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 139 (1), pp. 289–314.

[79] T. Belytschko, R. Gracie and G. Ventura G (2009) “A Review of Extended/Generalized Finite Element Methods for Material Modelling” **Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.**, 17 (4), pp. 1–24.

[80] S. Mohammadi (2008) “Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of Structures” **Oxford; Malden**, MA: Blackwell Pub.

[81] M. Duflot (2008) “The Extended Finite Element Method in Thermoelastic Fracture Mechanics” **Int. J. Num. Meth. Eng.**, 74, pp. 827–847.

[82] A. Zamani and M. R. Eslami (2010) “Implementation of the Extended Finite Element Method for Dynamic Thermoelastic Fracture Initiation” **Int. J. Solids Struct.**, 47 (10), pp. 1392–1404.

[۸۳] پورپاک ع. م. (۱۳۸۳) **"محاسبات عددی، آنالیز عددی کاربردی"** انتشارات جهاد دانشگاهی، واحد تهران، دانشکده فنی.

[84] J. E. Dolbow (1999) “An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics” Northwestern University.

[85] A. R. Khoei (2015) “Extended Finite Element Method: Theory and Applications” Extended Finite Element Method: Theory and Applications, pp. 1-565.

[86] R. B. Hetnarski and M. R. Eslami (2009) “Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications” **Solid Mechanics and its Applications**, vol. 158.

[87] Chenlin Li, Huili Guo & Xiaogeng Tian (2017) “Soret Effect on the Shock Responses of Generalized Diffusion-Thermoelasticity” **J. Therm. Stresses**, 40 (12), pp. 1563-1574.

[88] Anil K. Chopra "Dynamic of Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering" Fourth Edition, University of California, California, US.

[89] J. R. Rice (1968) "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks" **J. Appl. Mech.,** 35 (2), pp. 379-386.

[90] P. Hosseini-Tehrani, M. R. Eslami and H. R. Daghyani (2001) "Dynamic Crack Analysis Under Coupled Thermoelastic Assumption" **J. Appl. Mech**., 68 (4), pp. 584-588.

[91] J. Chen, A. K. Soh, J. Liu and Z. Liu (2004) "Thermal Fracture Analysis of a Functionally Graded Orthotropic Strip with a Crack" **Int. J. Mech. Mater. Des.**, 1 (2), pp. 131–141.

Abstract

In this research, eXtended Finite Element Methode (XFEM) is used in computation of Stress Intensity Factors (SIFs) for an isotropic 2D finite domain with stationary edge crack subjected to thermal shock. Fully coupled displacement, temperature and moisture fields are considered in governing equations. Fourier's and Fick's law used for heat and moisture flux respectively. Also Soret flux is used for the caused moisture flux by heat. Interaction integral method is used for hygrothermal loadings to obtain stress intensity factors. Galerkin's Method is used to discrete the governing equations and then the Newmark time integration scheme is used to solve them. In several numerical examples, the effect of hygrothermal shock on stress intensity factors as well as temperature and moisture distribution is studied. Based on the results, from the beginning of hygrothermal load untill the stress wave reaches to crack tip, the stress intensity factors increases and as the stress wave passes through the crack tip the stress intensity factor changes are small and then when the stress wave passes the crack tip, the stress intensity factors decrease with fast speed. Also the maximum of stress intensity factors depends on crack angle and when the angle of crack increases the stress intensity for mode I decreases and mode II increases. The Soret number also have effect on stress intensity factors beside the effect on moisture diffusion.

Keywords

Hygrothermal Stresses, Extended Finite Element Method (XFEM), Stress Intensity Factors (SIFs), Interaction Integral, Newmark Method

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Computation of Stress Intensity Factors for a ledge crack in fully coupled media subjected to the thermal shock and using eXtended Finite Element Method

By:

Armin Gholami

Supervisors:

Dr. Mohammad Bagher Nazari
Dr. Masoud Mahdizadeh Rokhi

September 2019