





دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترکی در یک محیط ترموالکتریک
تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن خصوصیات وابسته به دما و با
استفاده از روش المان محدود توسعه یافته

نگارنده:

محمد دازی

اساتید راهنما:

دکتر محمد باقر نظری

دکتر مسعود مهدی زاده رخی

شهریور ماه ۱۳۹۸

هر چند نوشته‌ای قابل تقدیم نیست ولی اگر جایی اندک برای تقدیم کردن باشد تقدیم به پدر مادر، خواهران و برادران عزیزم

شکر و قدردانی:

بالاترین شکر از خداوند، سستی بخش و مهربان که همیشه همراه من بوده است.

سلام و صلوات خداوند، سستی بخش و مهربان بر حضرت محمد (ص) باد.

و در ادامه از پدر، مادر، خواهران و برادران عزیزم نهایت شکر و قدردانی را دارم.

همچنین از اساتید راهنمای محترم، جناب آقای دکتر محمد باقر نظری و جناب آقای دکتر مسعود مهدی زاده رخی نهایت شکر و قدردانی را دارم.

از مدیریت محترم آزمایشگاه تحقیقاتی مکانیک محاسباتی جناب آقای دکتر پوریا اکبرزاده نهایت شکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقای مهندس معین درازکیو و جناب آقای مهندس مادی بیات نهایت شکر و قدردانی را دارم.

تعهد نامه

اینجانب محمد دازی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترکی در یک محیط ترموالکتریک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن خصوصیات وابسته به دما و با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته تحت راهنمایی دکتر محمد باقر نظری و دکتر مسعود مهدی زاده رخی متعهد می شوم:

* تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است.

* در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

* مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.

* کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.

* حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.

* در کلیه مراحل انجام این پایان نامه در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

* کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و ...) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد.

* استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، ضرایب شدت تنش و تنش T برای یک ترک عایق در یک محیط ترموالکتریک تحت شوک گرمایی با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته محاسبه شده است. خصوصیات ترموالکتریک صفحه وابسته به دما در نظر گرفته شده است. معادلات غیرخطی حاکم ابتدا در حوزه مکان با روش المان محدود توسعه یافته گسسته و سپس با روش نیومارک در قلمرو زمان حل شده اند. در چند مثال عددی، اثر شوک گرمایی روی ضریب شدت تنش و تنش T بررسی شده است. ضرایب شدت تنش در بارگذاری گرمایی-الکتریکی با رسیدن موج تنش به نوک ترک افزایش می یابد. طبق نتایج این تحقیقات، تنش T اثر قابل توجهی روی زاویه شروع ترک دارد. تنش T در ابتدا با شروع در زمان صفر در تغییر مکان ثابت افزایش یافته و سپس با رسیدن به مقدار ماکزیمم در زمان ثابت و متناسب با تغییر مکان روندی کاهشی یافته و در ادامه، تنش T مقدار ثابتی پیدا می کند. پارامتر B ، در ابتدا در زمان صفر تا مقدار ماکزیمم افزایش یافته و سپس روند کاهشی پیدا می کند و بعد از آن متناسب با زمان و شعاع نوک ترک، مقدار ثابتی می یابد.

کلیدواژگان

مواد ترموالکتریک، ترک، شوک گرمایی، روش المان محدود توسعه یافته، ضرایب شدت تنش، تنش

T

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه ۱

۱-۱- مقدمه ۲

۱-۲- پارامترهای شکست ۲

۱-۳- مروری بر کارهای پیشین ۳

۱-۴- نوآوری ۶

فصل دوم: روش المان محدود توسعه یافته ۹

۲-۱- مقدمه ۱۰

۲-۲- روش المان محدود توسعه یافته ۱۰

۲-۳- انتگرال بر همکنش ۱۳

۲-۴- تعیین ضرایب شدت تنش و انتگرال‌های بر همکنش ترک ساکن ۱۷

فصل سوم: استخراج معادلات حاکم ۱۹

۳-۱- مقدمه ۲۰

۳-۲- معادلات حاکم بر پیوستار ترموالکتریک ۲۰

۳-۳- فرم گسسته معادلات حاکم ۲۱

فصل چهارم: نتایج و بحث ۲۹

۴-۱- مقدمه ۳۰

۴-۲- فرضیات حاکم بر مساله ۳۰

۴-۳- مثال اول: صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی ۳۰

۴-۴- مثال دوم: توزیع دمای گذرا و پایا در صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن

خصوصیات وابسته به دما ۳۸

۴-۵- مثال سوم: صفحه همگن با ترک لبه‌ای مایل تحت شوک گرمایی ۴۰

فصل پنجم: نتیجه‌گیری و پیشنهادها ۴۷

۵-۱- نتیجه‌گیری ۴۸

۵-۲- پیشنهادهایی برای تحقیقات آینده ۴۸

پیوست الف ۴۹

۶-۱- روش کرانک نیکلسون..... ۵۰

۶-۲- فلوجارت برنامه کامپیوتری استخراج ضرایب شدت تنش..... ۵۱

منابع ۵۲

فہرست جدولہ

جدول ۱-۴: خواص مکانیکی صفحہ ۳۱

- شکل ۱-۲: شبکه المان محدود توسعه یافته شامل ترک و گره‌های غنی شده [۲۷] ۱۱
- شکل ۲-۲: مسیر انتگرال J اطراف نوک ترک [۲۳] ۱۴
- شکل ۱-۳: تعادل انرژی در یک دامنه‌ی Ω [۲۷] ۲۰
- شکل ۲-۳: شرایط مرزی برای یک جسم ترموالکتریک ۲۲
- شکل ۱-۴: مشخصات و بارگذاری صفحه با ترک افقی ۳۱
- شکل ۲-۴: آزمون همگرایی ضریب شدت تنش مد اول با تعداد المان‌های متفاوت ۳۲
- شکل ۳-۴: ناحیه انتگرال گیری برای انتگرال بر همکنش برای صفحه همگن با ترک لبه‌ای ۳۲
- شکل ۴-۴: آزمون همگرایی تنش T با تعداد المان‌ها و نواحی انتگرال گیری متفاوت ۳۳
- شکل ۵-۴: آزمون همگرایی پارامتر B با تعداد المان‌ها و نواحی انتگرال گیری متفاوت ۳۴
- شکل ۶-۴: توزیع دما در طول صفحه در زمان‌های متفاوت ۳۵
- شکل ۷-۴: توزیع ولتاژ در طول صفحه در زمان‌های متفاوت ۳۵
- شکل ۸-۴: آزمون همگرایی ضریب شدت تنش مد اول با بررسی اثر ژول با تعداد المان‌های متفاوت ۳۶
- شکل ۹-۴: آزمون همگرایی تنش T با بررسی اثر ژول با تعداد المان‌های متفاوت ۳۷
- شکل ۱۰-۴: آزمون همگرایی پارامتر B با بررسی اثر ژول با تعداد المان‌های متفاوت ۳۸
- شکل ۱۱-۴: توزیع دما در طول صفحه زمان‌های مختلف ۳۹
- شکل ۱۲-۴: مشخصات و بارگذاری صفحه با ترک لبه‌ای مایل ۴۰
- شکل ۱۳-۴: آزمون همگرایی ضریب شدت تنش مد اول با تعداد المان‌های متفاوت ۴۱
- شکل ۱۴-۴: آزمون همگرایی ضریب شدت تنش مد دوم با تعداد المان‌های متفاوت ۴۱
- شکل ۱۵-۴: ناحیه انتگرال گیری برای انتگرال بر همکنش در صفحه همگن با ترک لبه‌ای مایل ۴۲
- شکل ۱۶-۴: آزمون همگرایی تنش T با تعداد المان‌ها و نواحی انتگرال گیری متفاوت ۴۲
- شکل ۱۷-۴: آزمون همگرایی پارامتر B با تعداد المان‌ها و نواحی انتگرال گیری متفاوت ۴۳
- شکل ۱۸-۴: کانتور دما در زمان $t=0.011837s$ ۴۴
- شکل ۱۹-۴: کانتور دما در زمان $t=0.067643s$ ۴۴
- شکل ۲۰-۴: کانتور ولتاژ در زمان $t=0.011837s$ ۴۵
- شکل ۲۱-۴: کانتور ولتاژ در زمان $t=0.067643s$ ۴۵
- شکل ۲۲-۴: تغییر شکل صفحه در زمان $t=0.011837s$ ۴۶
- شکل ۲۳-۴: تغییر شکل صفحه در زمان $t=0.067643s$ ۴۶

شکل الف-۱: شماتیک روش کرانک نیکلسون.....۵۰

فهرست علائم

علائم لاتین

مساحت المان، (m^2)	A
مساحت ناحیه انتگرال برهم کنش، (m^2)	A^*
طول ترک، (m)	a
بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل المان محدود	$\mathbf{a}$
بردار نیروی حجمی، (N/m^3)	$\mathbf{B}$
بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل غنی شده با تابع پله‌ای یک	$\mathbf{b}$
بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل غنی شده نوک ترک	$\mathbf{c}$
ماتریس میرایی	$\mathbf{C}$
سرعت موج تنش	C_p
ظرفیت گرمایی ویژه در کرنش ثابت	c_ε
سرعت موج ریلی، (m/s)	c_r
سرعت موج برشی، (m/s)	c_s
ماتریس خواص ماده، (N/m^2)	$\mathbf{D}$
مدول یانگ، (N/m^2)	E
بردار نیروهای گره‌ای، (N)	$\mathbf{F}$
توابع غنی سازی نوک ترک، ($m^{0.5}$)	F_m
تابع پله‌ای یک و ارتفاع باریکه	H
انتگرال J ، (N/m)	J
هدایت گرمایی، ($W/(m \cdot ^\circ K)$)	k
ماتریس سفتی	$\mathbf{K}$
چگالی انرژی جنبشی، (N/m^2)	K

چقرمگی شکست، ($N.m^{-1.5}$)	K_{Ic}
ضریب شدت تنش دینامیکی معادل، ($N.m^{-1.5}$)	$K_{\theta\theta}$
ضریب شدت تنش مود یک، ($N.m^{-1.5}$)	K_I
ضریب شدت تنش مود دو، ($N.m^{-1.5}$)	K_{II}
طول مشخصه (m)	l
بردار نرمال بر مسیر انتگرال گیری در انتگرال J	m
ماتریس جرم، (kg)	$\mathbf{M}$
انتگرال برهم کنش، (N/m)	M
تعداد توابع شکل المان محدود توسعه یافته	ns
تابع شکل روش المان محدود	N
مجموعه گره‌های شبکه	N_A
مجموعه گره‌های المان‌های اطراف مسیر ترک	N_H
مجموعه گره‌های المان‌های نوک ترک	N_C
تابع وزنی برای محاسبه انتگرال برهم کنش، بی بعد	q
مولفه‌های بردار شار گرمایی بر واحد سطح، (W/m^2)	q_i
گرمای تولید شده بر واحد حجم، (W/m^3)	R
مولفه دستگاه مختصات قطبی، (m)	r
بردار توابع شکل روش المان محدود توسعه یافته	S
دما، ($^{\circ}K$)	T
بردار نیروی سطحی، (N/m^2)	$\mathbf{Tr}$
زمان، (s)	t
زمان آسایش، (s)	t_0
بردار جابه جایی	$\mathbf{u}$
حجم، (m^3)	V
سرعت مشخصه (m/s)	v
عرض نمونه و چگالی انرژی کرنشی (N/m^2)	W

Z تابع فاصله علامت‌دار، (m)

علامت‌های یونانی

α	زاویه بین راستای ترک با محور افقی
α_t	ضریب انبساط گرمایی، ($1/^{\circ}\text{C}$)
α_d	پارامتر تعریف شده
α_s	پارامتر تعریف شده
β	تانسور مدول تنش-دما
β_i	توابع تعریف شده
γ و ζ	پارامترهای فرمول‌بندی نیومارک، بی‌بعد
δ_{ij}	دلتای کرونکر، بی‌بعد
ε	تانسور کرنش، بی‌بعد
θ	تغییر دما، ($^{\circ}\text{K}$)
μ و λ	ثوابت لامه، (N/m^2)
ξ و η	مولفه‌های دستگاه مختصات محلی در المان‌های ایزوپارامتریک
κ	ضریب کلوسوف، بی‌بعد
ν	نسبت پواسون، بی‌بعد
ρ	چگالی، (kg/m^3)
φ	مولفه دستگاه مختصات قطبی، بی‌بعد
σ	تانسور تنش، (N/m^2)
Φ	تابع شکل غنی شده برای المان‌های مسیر ترک، بی‌بعد
Ψ	تابع شکل غنی شده برای المان‌های نوک ترک، بی‌بعد
Δ	بردار مجهولات گره‌ای
Γ	مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J

بالا نویس‌ها

aux	مربوط به میدان‌های کمکی
s	مربوط به حالت برهم‌نهی

مربوط به حالت مکانیکی	m
مربوط به بردار نرمال n	n
مربوط به دما	T
به ترتیب مربوط به جابجایی در جهت محورهای مختصات افقی و قائم	u و v

زیر نویس‌ها

شمارنده، مربوط به گره‌ها در یک المان	h
شمارنده، مربوط به مولفه x دستگاه مختصات دکارتی	i
شمارنده، مربوط به مولفه y دستگاه مختصات دکارتی	j
شمارنده مربوط به توابع شکل و همچنین نشان‌دهنده مختصات محلی	l
شمارنده، مربوط به توابع غنی سازی نوک ترک	m
شمارنده، مربوط به گره‌ها، گام زمانی و مولفه‌های دستگاه مختصات	n
شمارنده، مربوط به گره‌ها در المان e	ne
شمارنده، مربوط به توابع شکل المان محدود توسعه‌یافته	ns
مربوط به حالت اولیه	0
شمارنده	۱ تا ۹
مربوط به سطوح مرزی	s
شمارنده	k
مربوط به مختصات سراسری	g

فصل اول: مقدمه

۱-۱- مقدمه

مواد ترموالکتریک موادی هستند که با اعمال اختلاف دما، جریان الکتریکی در آن‌ها به وجود می‌آید و بر عکس با اعمال اختلاف پتانسیل، گرادیان دمایی ایجاد می‌شود [۱]. این مواد اخیراً به خاطر قابلیتشان در تبدیل مستقیم حرارت اتلافی به الکتریسیته مورد توجه قرار گرفته‌اند [۱]. آن‌ها اغلب در تولید توان و تبرید به کار می‌روند. دستگاه‌های مواد ترموالکتریک دارای مزایای قابل توجهی هستند. به عنوان مثال، آن‌ها قطعات متحرک ندارند، قابل حمل هستند، سر و صدا تولید نمی‌کنند، دوام خوب و قابلیت اطمینان بالایی دارند. مواد ترموالکتریک به عنوان کولر مدارهای الکترونیکی برای خنک کاری IC ها، سنسورهای کنترل دما و شار گرمایی و ... کاربرد دارند [۱]. از طرفی اختلاف دمای دو سر یک المان ترموالکتریک در شرایط کاری باعث ایجاد تنش‌های گرمایی در آن‌ها می‌شود. طبیعت ترد مواد ترموالکتریک باعث می‌شود این المان‌ها تحت تنش‌های گرمایی دچار ترک شوند [۲]. مسأله دیگر کوپل غیر خطی میدان‌های الاستیسیته، دما و الکتریسیته به همراه خصوصیات غیر همگن و وابسته به دمای این مواد باعث پیچیدگی تحلیل آن‌ها می‌شود. طبیعت ترد این مواد ایجاد و رشد ترک در این مواد را در حین کار افزایش می‌دهد. از طرفی، وجود نقص‌هایی مثل گشودگی و ترک در المان‌های ترموالکتریک باعث اخلاف در عملکرد آن‌ها می‌شود [۲].

۱-۲- پارامترهای شکست

با توجه به وجود ناحیه پلاستیک نوک ترک و با مفروض داشتن بزرگی این ناحیه تحلیل میدان‌های تنش و کرنش نوک ترک، با یک پارامتر مانند انتگرال J ، ضریب شدت تنش و باز شدگی سطح ترک کافی به نظر نمی‌رسد. بنابراین پارامترهای شکست شامل ضریب شدت تنش و تنش T و پارامتر B معرفی می‌شود [۳].

ضریب شدت تنش

ضریب شدت تنش پارامتری اساسی در مکانیک شکست بوده که برای مشخص کردن تکینی (برای مثال وجود ترک) به کار می‌رود و به اندازه ترک، تنش اعمالی و هندسه شکل وابسته است.

تنش T

تنش T مولفه تنش با مقدار ثابت در حوزه ترک و موازی با سطح ترک که پایداری مسیر ترک متاثر از این پارامتر بوده و اندازه و شکل ناحیه پلاستیک نوک ترک را کنترل می‌کند. در پیوستار حاوی ترک ماده ترموالکتریک میدان تنش نوک ترک به قرار زیر است:

$$K_I(2\pi r)^{-1/2}f_{ij}^I(\theta) + K_{II}(2\pi r)^{-1/2}f_{ij}^{II}(\theta) + T\delta_{1i}\delta_{1j} \quad (1-1)$$

که k_I و k_{II} ضرایب شدت تنش مد اول و دوم و T مولفه تنش غیر تکین است.

پارامتر B

پارامتر B مستقل از اندازه بارگذاری اما وابسته به هندسه و نوع بارگذاری و بدون بعد است و نرخ تغییر تنش T نسبت به ضریب شدت تنش مد اول را نشان می‌دهد.

۱-۳- مروری بر کارهای پیشین

دی سالوو [۱] اصول دستگاه‌های ترموالکتریک و راهبردهای افزایش بازدهی سنسورهای ترموالکتریک را مورد بررسی قرار داد. وانگ و همکاران [۲] یک ترک افقی در ماده ترموالکتریک Bi_2Te_3 را در طول ضخامت آن بررسی و ضرایب شدت تنش و میدان‌های مرتبط با دما و جریان الکتریکی را در حالت‌های پایا و گذرا تحت شوک حرارتی به دست آوردند. نتایج کار آن‌ها نشان داد که تنش‌های گذرا بسیار بزرگتر از تنش‌های حالت پایا است و شکست المان‌های ترموالکتریک در

حالت گذرا اتفاق می‌افتد. دوین و مانتر [۴] با در نظر گرفتن فرآیندهای ترمودینامیک غیرقابل برگشت^۱ در روش المان محدود مدلی برای تحلیل مواد ترموالکتریک معرفی کردند. آن‌ها استدلال کردند که فرآیندهای ترمودینامیک غیرقابل برگشت رویکردی یکپارچه برای مدل‌سازی سنسور فراهم می‌کند و روش المان محدود برای اصلاح شرایط فعل و انفعالات ترموالکتریک به کار می‌رود. برمودز و همکاران [۵] جهت بررسی رفتار ترموالکتریکی سلول الکترولیت آلومینیومی، فرم ضعیف مسئله مقدار مرزی را به وسیله معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حل کردند. آن‌ها دریافتند که خطوط هم دما و هم پتانسیل با اندازه‌گیری‌های تجربی همخوانی خوبی دارند و نتایج عددی دقت خوبی در مقایسه با راه حل تحلیلی دارند. شیدمنتل و همکاران [۶] روشی برای محاسبه ثابت‌های جابجایی ماده تلوراید بیسموت (Bi_2Te_3) ارائه کردند. پرز و همکاران [۷] الگوریتم المان محدود غیرخطی را برای مواد ترموالکتریک توسعه دادند. نتایج شبیه سازی کامل یک سلول ترموالکتریک نشان داد که میدان الکتریکی تمایل به رفتار خطی دارد، در حالی که میدان حرارتی فاقد آن رفتار است. گوررو [۸] فرمول المان محدود گذرای^۲ غیرخطی برای شبیه سازی تراکنش ترموالکتریک ارائه داد. نتایج کار او نشان دهنده انتشار حرارت و ولتاژ به دلیل کوپل ترموالکتریک بود. لیو [۹] یک مدل پیوسته برای اجزای ترموالکتریک مطابق با اصول کلی ترمودینامیک توسعه داد. نتایج کار او نشان داد که تحت شرایط تغییرات پتانسیل الکتروشیمیایی، دما و گرادیان آن‌ها، معادلات حاکم می‌توانند به یک سیستم بیضوی خطی تبدیل شوند، در حالی که برای حالت‌های ثابت، معادلات حاکم برای میدان‌های محلی غیر خطی هستند. یانگ و همکاران [۱۰] خصوصیات ترموالکتریک مؤثر یک ماده ترموالکتریک لایه‌ای و غیرهمگن را مورد مطالعه قرار دادند. منگ و همکاران [۱۱] مدل کولرهای ترموالکتریک^۳ گذرای سه بعدی را بر مبنای کوپل انتقال حرارت و هدایت الکتریکی در نیمه هادی‌ها ارائه کردند. نتایج شبیه سازی‌های آن‌ها نشان داد که در جریان‌های کوچک، مدل با خواص ثابت برای پیش‌بینی ویژگی‌های

¹ Thermodynamics of Irreversible Processes

² Transient

³ Thermoelectric coolers

دینامیکی و مدل با خواص متغیر، برای پیش‌بینی عملکرد کولرهای ترموالکتریک گذرا مناسبتر است. یانگ و همکاران [۱۲] یک مدل کامپوزیت برای مواد ترموالکتریک مدرج پیشنهاد کردند. آن‌ها معادلات انتقال غیرخطی کوپل ترموالکتریک همگن شده را حل کردند و بازده تبدیل ماده ترموالکتریک را به دست آوردند. سونگ و همکاران [۱۳] مسئله دو بعدی ترک ماده ترموالکتریک تحت جریان گرمایی و جریان الکتریکی را بر اساس روش متغیر مختلط به صورت تحلیلی حل کردند. نتایج کار آن‌ها نشان داد که توزیع جریان گرمایی، جریان الکتریکی و تنش دارای تکینگی در نوک ترک هستند. پرز و همکاران [۱۴] برهمکنش میدان‌های مختلف مکانیکی، الکتریکی، مغناطیسی و گرمایی با میدان تغییر شکل الاستیک را بررسی کردند. یو و همکاران [۱۵] روشی بر اساس متغیر مختلط برای مسئله صفحه‌ای یک جامد ترموالکتریک بی‌نهایت با چند ترک در یک خط مستقیم، تحت بارهای گرمایی-الکتریکی ارائه کردند. نتایج کار آن‌ها نشان داد که میدان چگالی جریان الکتریکی در مجاورت ترک هیچ‌گونه انحرافی ندارد، در حالی که میدان گرمایی و تنش‌ها دارای انحراف هستند. ژانگ و همکاران [۱۶] اثر یک ترک در کاهش بازده یک المان ترموالکتریک را به طور تحلیلی بررسی کردند. یو و همکاران [۱۷] مسئله ترک سکه‌ای را در یک جامد ترموالکتریک بی‌نهایت تحت بارگذاری ترکیبی الکتریکی-گرمایی بررسی کردند. نتایج کار آن‌ها نشان داد که انرژی شار تولیدی وابسته به جهت بارگیری، هدایت الکتریکی، هدایت گرمایی و زاویه مرکزی از ترک است. پنگ و همکاران [۱۸] رفتار یک ترک ساکن در محیط دو بعدی نامحدود ترموالکتریک را با استفاده از روش تابع متغیر مختلط مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها ضرایب شدت چگالی جریان الکتریکی^۱ و شدت تنش را به دست آوردند. وای و همکاران [۱۹] خمش مواد ترموالکتریک و خواص لایه‌لایه شدن^۲ را تحت بارهای مختلف دمایی و چگالی جریان الکتریکی مورد بررسی قرار دادند. نتایج کار آن‌ها مشخص کرد که تغییرات دمای بحرانی به طور پیوسته با لایه لایه شدگی و طول خمش کاهش می‌یابد. آن‌ها

^۱ Electric current density Intensity Factor

^۲ Delamination

همچنین بیان کردند که تفاوت دمای بالا و یا تراکم جریان الکتریکی بالاتر می‌تواند موجب افزایش نرخ میزان آزاد شدن انرژی لایه لایه شدن، انحراف خمشی بزرگتر و نیروی محوری قویتر گردد. وای و همکاران [۲۰] اثر حرارت القایی حاصل از لایه لایه شدن فیلم نازک ترموالکتریک را تحت میدان الاستیک بررسی کردند. نتایج کار آنها نشان داد که افزایش ضرایب شدت تنش زمانی رخ می‌دهد که نوک ترک‌ها به انتهای فیلم نزدیک شوند.

۴-۱- نوآوری

در این پایان نامه، ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود ترموالکتریک تحت شوک گرمایی محاسبه می‌شود. مسئله در حوزه مکان با روش المان محدود توسعه یافته گسسته می‌شود و از روش نیومارک برای حل معادلات در حوزه زمان استفاده می‌شود.

همان‌طور که گفته شد در این پایان‌نامه، از روش المان محدود توسعه یافته برای تحلیل شکست صفحه دوبعدی دارای ترک استفاده شده است. این پایان‌نامه به شرح ذیل سازماندهی شده است: در فصل دوم روش المان محدود توسعه یافته و انتگرال برهمکنش جهت استخراج ضریب شدت تنش مود اول یا دوم بیان شده است. در فصل سوم به گسسته سازی فرم المان محدود توسعه یافته معادلات حاکم پرداخته شده است. در فصل چهارم، در مثال یک، صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی مورد بررسی قرار گرفت که شامل آزمون همگرایی ضریب شدت تنش مد اول و دوم و آزمون همگرایی ضریب شدت تنش و تنش T و آزمون همگرایی پارامتر B با شبکه‌ها و تعداد المان‌ها و نواحی انتگرال‌گیری مختلف است. در مثال دو، توزیع دمای گذرا و پایا در صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن خصوصیات وابسته به دما مورد بررسی قرار گرفت. در مثال سه، صفحه همگن با ترک لبه‌ای مایل تحت شوک گرمایی مورد بررسی قرار گرفت که شامل آزمون همگرایی ضریب شدت تنش مد اول و دوم و آزمون همگرایی تنش T و نیز آزمون همگرایی پارامتر B

با شبکه‌ها و تعداد المان‌ها و مختلف است؛ در ادامه کانتورهای دما و ولتاژ و نیز تغییر شکل صفحه در زمان‌های مختلف ارائه گردیده است. در فصل پنجم، نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای کارهای آینده بیان گردیده است.

فصل دوم: روش المان محدود توسعه یافته

۲-۱- مقدمه

در روش المان محدود توسعه یافته، تقریب روش المان محدود با استفاده از غنی سازی‌های موضعی گسترش می‌یابد به طوری که باعث می‌شود ترک مستقل از شبکه المان محدود مدل سازی شود. در این فصل روش المان محدود توسعه یافته و روش انتگرال برهمکنش برای استخراج ضرایب شدت تنش به طور اجمالی معرفی می‌شود.

۲-۲- روش المان محدود توسعه یافته

روش المان محدود توسعه یافته متشکل از شبکه بندی هندسه مسأله و غنی سازی المان‌های مسیر ترک و نوک ترک است. در روش المان محدود توسعه یافته، تابع تقریب به صورت زیر است [۲۱]:

$$u(x) = \sum_{\forall i} N_i(x)c_i + \sum_{\forall i} \phi_i(x)\Psi(x)d_i \quad (۱-۲)$$

که در آن N_i توابع شکل المان محدود کلاسیک، $\phi_i(\mathbf{x})$ که به طور معمول $\phi_i = N_i(x)$ در نظر گرفته می‌شود توابع شکل، $\Psi(x)$ تابع غنی‌سازی و c_i و d_i متغیرهای گرهی هستند که برای مدل‌سازی ترک اضافه می‌شوند.

تقریب روش المان محدود توسعه یافته را برای یک پیوستار تغییر شکل پذیر می‌توان به صورت زیر توصیف کرد. مطابق شکل (۱-۲) المان‌های هاشور خورده، المان‌های مسیر ترک و المان پر رنگ شده، المان‌های نوک ترک هستند. اشکال مربع گره‌های غنی شده نوک ترک و اشکال دایره گره‌های غنی شده مسیر ترک هستند. فرض می‌شود N_A تعداد گره‌های شبکه المان محدود، N_H تعداد گره‌های المان‌های اطراف مسیر ترک و N_C تعداد گره‌های المان‌های اطراف نوک ترک هستند.

در رابطه (۲-۲)، Z تابع موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک و F_m توابع غنی سازی نوک ترک برحسب مختصات قطبی و محلی نوک ترک (r و φ) هستند که با رابطه زیر بیان می گردد [۲۲]:

$$\{F_m\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\} \quad (۷-۲)$$

جهت به دست آوردن توابع غنی سازی دمای نوک ترک میدان مجانبی دمای نوک ترک در یک ماده ایزوتروپیک به صورت زیر است [۲۸]:

$$\theta = -\frac{K_T}{k} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (۸-۲)$$

که، K_T ضریب شدت تنش گرمایی و k ضریب هدایت گرمایی هستند.

تابع تقریب میدان دما به صورت زیر است [۲۲]:

$$\begin{aligned} \theta(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^T(t) \\ & + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] b_n^T(t) \\ & + \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_n^T(t) \end{aligned} \quad (۹-۲)$$

که، $a_n^T(t)$ ، $b_n^T(t)$ و $c_n^T(t)$ مقادیر تغییرات دمای گره ها هستند.

در تقریب المان محدود توسعه یافته، میدان های جابجایی و دما به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^u(t) + \sum_{n \in N_H} \Phi_n(x, y) b_n^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_C} \sum_{m=1}^4 \Psi_{nm}(x, y) c_{nm}^u(t) \end{aligned} \quad (۱۰-۲)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^v(t) + \sum_{n \in N_H} \Phi_n(x, y) b_n^v(t) \quad (11-2)$$

$$+ \sum_{n \in N_C} \sum_{m=1}^4 \Psi_{nm}(x, y) c_{nm}^v(t)$$

$$\theta(x, y, t) = \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^T(t) + \sum_{n \in N_H} \Phi_n(x, y) b_n^T(t) \quad (12-2)$$

$$+ \sum_{n \in N_C} \Psi_{n1}(x, y) c_{n1}^T(t)$$

Ψ و Φ توابع غنی‌سازی میدان‌های جابه‌جایی و دما و غنی‌کننده به ترتیب مسیر و نوک ترک با استفاده از روابط (۸-۲) و (۹-۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Phi_n(x, y) = N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] \quad (13-2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_n(x, y) = N_n(x, y) & \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right. \\ & - \sqrt{r_n} \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ & - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ & \left. - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (14-2)$$

۲-۳- انتگرال بر همکنش^۱

برای محاسبه پارامترهای شکست (ضریب شدت تنش و تنش T)، انتگرال بر همکنش در سیستم‌های خطی در انتگرال‌های پایستار الاستیسیته از برهمکنش دو بارگذاری متفاوت در پیوستار حاوی ترک و از برهم نهی میدان‌های واقعی و کمکی در انتگرال J مورد استفاده قرار می‌گیرد. انتگرال J اطراف نوک ترک ساکن در مسیر کوچک صفر شونده به صورت زیر است [۲۲ و ۲۴ و ۲۵]:

^۱ Interaction integral

$$J = \lim_{\Gamma_0 \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} [W \delta_{1i} - \sigma_{ij} u_{j,1}] n_i d\Gamma \quad (۱۵-۲)$$

که، W چگالی انرژی کرنشی و n_i بردار نرمال بر مسیر هستند.

انتگرال J جهت محاسبه تنش‌ها و کرنش‌ها در طول مسیر بسیار کوچک به صورت رابطه (۱۶-۲) کاربردی تر است. بنابراین یک مسیر بسته Γ^* ($\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_+ + \Gamma_- + \Gamma_0$) مانند شکل (۲-۲) فرض می‌شود. به کمک یک تابع وزنی q که مقدار آن بر روی Γ_0 ، یک و بر روی Γ_1 ، صفر است، رابطه (۲-۲)

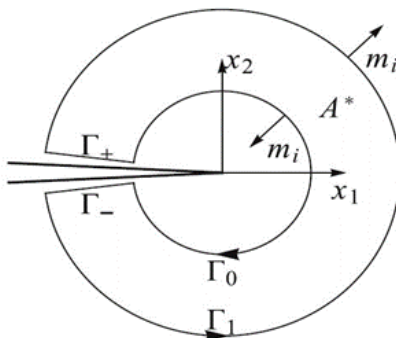
(۱۵) در طول مسیر Γ^* به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۲]:

$$J = \lim_{\Gamma_0 \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma^*} [\sigma_{ij} u_{j,1} - W \delta_{1i}] q m_i d\Gamma - \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} \sigma_{2j} u_{j,1} q m_i d\Gamma \right) \quad (۱۶-۲)$$

و m_i بردار نرمال بر مسیر است.

با به کارگیری نظریه دیورژانس و مفروض داشتن سطوح بدون تنش ترک داریم:

$$J = \int_{A^*} [\sigma_{ij} u_{j,1} - W \delta_{1i}] q_{,i} dA + \int_{A^*} [\sigma_{ij} u_{j,1} - W \delta_{1i}]_{,i} q dA \quad (۱۷-۲)$$



شکل ۲-۲- مسیر انتگرال J اطراف نوک ترک [۲۳]

و W چگالی انرژی کرنشی عبارت است از:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^m \quad (۱۸-۲)$$

و ε_{ij}^m کرنش مکانیکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{ij}^m = \varepsilon_{ij} - \alpha_t \theta \delta_{ij} \quad (۱۹-۲)$$

در رابطه مذکور، ε_{ij} تانسور کرنش کل بی نهایت کوچک، α_t ضریب انبساط حرارتی خطی، θ تغییر دما و δ_{ij} دلتای کرونکر هستند.

بنابراین رابطه (۱۸-۲) به صورت زیر در می آید:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \alpha_t \theta \delta_{ij}) \quad (۲۰-۲)$$

با مشتق گیری از رابطه بالا نسبت به x_1 داریم:

$$W_{,1} = \frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^m \quad (۲۱-۲)$$

که برای مواد همگن، $\sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^m$ به صورت زیر هستند:

$$\sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^m = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m \quad (۲۲-۲)$$

و در ادامه با جایگذاری رابطه (۲۲-۲) در رابطه (۲۱-۲)، رابطه زیر به دست می آید:

$$W_{,1} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m \quad (۲۳-۲)$$

با اعمال روش انتگرال برهم کنش برای مواد همگن داریم: [۲۴]:

$$\begin{aligned} J^s = \int_{A^*} \{ & [(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{j,1} + u_{j,1}^{aux}) - (W + W^{aux} + W^{int})\delta_{1i}]q_{,i} \\ & + [(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{j,1} + u_{j,1}^{aux}) - (W + W^{aux} \\ & + W^{int})\delta_{1i}]_{,i}q \} dA \end{aligned} \quad (۲۴-۲)$$

$$W^{aux} = \frac{1}{2} \sigma_{jk}^{aux} \varepsilon_{jk}^{aux} \quad (۲۵-۲)$$

و W^{int} در رابطه (۲۴-۲) چگالی انرژی کرنشی بر همکنش به صورت زیر است:

$$W^{int} = \frac{1}{2} (\sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{aux} + \sigma_{jk}^{aux} \varepsilon_{jk}^m) = 2\mu \varepsilon_{jk} \varepsilon_{jk}^{aux} + \lambda \varepsilon_{ll} \varepsilon_{mm}^{aux} - \beta \theta \varepsilon_{ll}^{aux} \quad (۲۶-۲)$$

با فرض ماده الاستیک خطی، با مشتق گیری از رابطه (۲۶-۲) نسبت به x_1 داریم:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} = \frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{jk}} \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{jk}^{aux}} \frac{\partial \varepsilon_{jk}^{aux}}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \quad (27-2)$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{jk}} = 2\mu \varepsilon_{jk}^{aux} + \lambda \varepsilon_{mm}^{aux} \delta_{jk} = \sigma_{jk}^{aux} \quad (28-2)$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{jk}^{aux}} = 2\mu \varepsilon_{jk} + \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{jk} - \beta \theta \delta_{jk} = \sigma_{jk} \quad (29-2)$$

$$\frac{\partial W_{int}}{\partial \Delta T} = -\beta \varepsilon_{ll}^{aux} \quad (30-2)$$

رابطه (27-2) با در نظر گرفتن روابط (28-2)، (29-2) و (30-2) به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} = \sigma_{jk}^{aux} u_{k,1j} + \sigma_{jk} u_{k,1j}^{aux} - \beta \varepsilon_{ll}^{aux} \frac{\partial(\theta)}{\partial x_1} \quad (31-2)$$

جهت به دست آوردن M انتگرال بر همکنش رابطه (24-2) را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$J^S = J + J^{aux} + M \quad (32-2)$$

که J^{aux} ، انتگرال کمکی J به صورت زیر است :

$$J^{aux} = \int_{A^*} \left\{ [\sigma_{ij}^{aux} u_{j,1}^{aux} - W^{aux} \delta_{1i}] q_{,i} + [\sigma_{ij}^{aux} u_{j,1}^{aux} - W^{aux} \delta_{1i}]_{,i} q \right\} dA \quad (33-2)$$

و M انتگرال بر همکنش به صورت زیر قابل استخراج است:

$$M = \int_{A^*} (\sigma_{ij} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1} - W^{int} \delta_{1i}) q_{,i} dA \quad (34-2)$$

$$+ \int_{A^*} (\sigma_{ij} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1} - W^{int} \delta_{1i})_{,i} q dA$$

با توجه به $\sigma_{ij,i}^{aux} = 0$ ، M به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} M &= \int_{A^*} (\sigma_{ij} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1} - W^{int} \delta_{1i}) q_{,i} dA \\ &+ \int_{A^*} (\sigma_{ij,i} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij} u_{j,1i}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1i} - W^{int}_{,1}) q dA \\ &= M^{(1)} + M^{(2)} \end{aligned} \quad (35-2)$$

۲-۴- تعیین ضرایب شدت تنش و انتگرال‌های برهمکنش ترک ساکن

در ترک ساکن، رابطه بین ضرایب شدت تنش و انتگرال برهمکنش در حالت مد ترکیبی به صورت زیر است [۲۴]:

$$M = \frac{2}{E'} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \quad (۳۶-۲)$$

E' به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$E' = \begin{cases} E & \text{تنش صفحه‌ای} \\ E/(1 - \nu^2) & \text{کرنش صفحه‌ای} \end{cases} \quad (۳۷-۲)$$

E مدول یانگ و ν نسبت پواسون هستند.

اگر $K_I^{aux} = 1$ و $K_{II}^{aux} = 0$ در نظر گرفته شود. بنابراین K_I به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K_I = \frac{E'}{2} M^{(1)} \quad (۳۸-۲)$$

اگر $K_I^{aux} = 0$ و $K_{II}^{aux} = 1$ در نظر گرفته شود بنابراین K_{II} به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$K_{II} = \frac{E'}{2} M^{(2)} \quad (۳۹-۲)$$

که با توجه به روابط (۳۶-۲)، (۳۸-۲) و (۳۹-۲)، $M^{(1)}$ و $M^{(2)}$ حاصل می‌گردد.

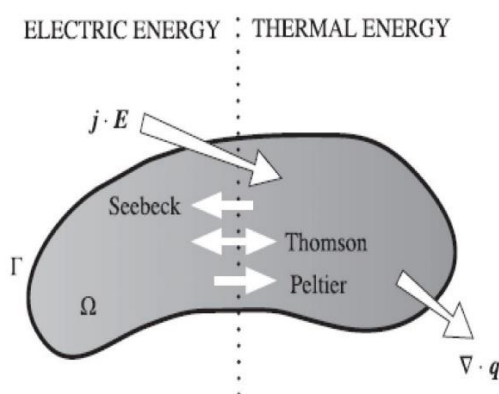
فصل سوم: استخراج معادلات حاکم

۳-۱- مقدمه

در این فصل، معادلات حاکم بر یک پیوستار ترموالکتریک با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته بیان می‌شود.

۳-۲- معادلات حاکم بر پیوستار ترموالکتریک

پیوستار محدود ترموالکتریک در سیستم مختصات x که با سطح S احاطه شده است و فضای Ω را اشغال می‌کند، مطابق شکل زیر مفروض است.



شکل ۳-۱- تعادل انرژی در یک دامنه‌ی Ω [۲۷]

روابط ساختاری هدایت الکتریکی و حرارت برای مواد ترموالکتریک ایزوتروپیک به صورت زیر بیان می‌شود [۲۶]:

$$j_i = -\sigma \frac{\partial V}{\partial x_i} - \sigma S \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (۱-۳)$$

$$q_i = -\sigma S T \frac{\partial V}{\partial x_i} - (k + \sigma S^2 T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (۲-۳)$$

که در آن، σ هدایت الکتریکی است، k ضریب هدایت گرما است، S ضریب سیبک است که این ضریب به دلیل وجود نیروی محرکه الکتریکی E در هنگام توزیع دما T در داخل یک ماده

ترموالکتريک متغير است و اين نيروی محرکه الکتریکي به عنوان گراديان ولتاژ در نظر گرفته شده و در روابط (۱-۳) و (۲-۳) گنجانیده شده است. از اثر سيبک به طور سنتی برای اندازه گیری دما با استفاده از ترموکوپل استفاده می شود. j_i مولفه های بردار جریان الکتریکي J ، گراديان میدان الکتریکي، q_i مولفه های جریان شار حرارتي q و $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ گراديان دما است. از آنجا که جسم ایزوتروپیک است، جریان الکتریسیته و شار گرمایی در جهت پتانسیل الکتریکي و گراديان دما است. معادلات تعادل انرژی الکتریکي و حرارتي به صورت زیر نوشته می شوند [۲۶]:

$$-j_{i,i} = 0 \quad (۳-۳)$$

$$-q_{i,i} - j_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۴-۳)$$

که ρ چگالی جرم، c ظرفیت گرمایی است. رابطه (۱-۳) بر حسب جریان الکتریکي با جایگذاری در معادله (۲-۳) به صورت زیر قابل بیان است [۲۶]:

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} + sTj_i \quad (۵-۳)$$

۳-۳- فرم گسسته معادلات حاکم

برای تجزیه و تحلیل سیستماتیک، یک بردار جریان الکتریکي عمومی $J = jT$ و پارامترهای $D_{22} = k + s^2 D_{11}$ ، $D_{21} = D_{12}$ ، $D_{12} = sD_{11}$ ، $D_{11} = \sigma T$ معرفی می شود. با چنین تعاریفی، معادلات ساختاری هدایت الکتریکي و شار گرمایی به صورت زیر بیان می شوند [۲۶]:

$$J_i = -D_{11} \frac{\partial V}{\partial x_i} - D_{12} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (۶-۳)$$

$$q_i = -D_{21} \frac{\partial V}{\partial x_i} - D_{22} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (۷-۳)$$

با استفاده از روابط ساختاری معادلات (۶-۳) و (۷-۳) معادلات تعادل (۳-۳) و (۴-۳) را می‌توان بر حسب ترم‌های پتانسیل الکتریکی و دما بیان کرد [۲۶]:

$$D_{11}\nabla^2 V + D_{12}\nabla^2 T + J_E = 0 \quad (۸-۳)$$

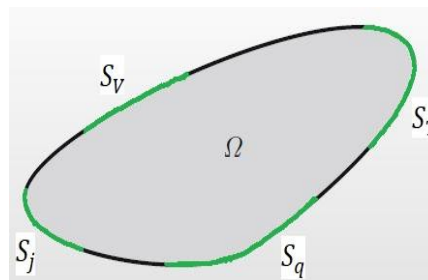
$$D_{21}\nabla^2 V + D_{22}\nabla^2 T + Q_q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۹-۳)$$

۹

$$J_E = j_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (۱۰-۳)$$

$$Q_q = -j_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (۱۱-۳)$$

شرایط مرزی یک جسم ترموالکتریک مطابق شکل (۲-۳) بصورت زیر است:



شکل ۲-۳- شرایط مرزی برای یک جسم ترموالکتریک

$$J_i n_i = \bar{J} \quad \text{روی مرز } S_j \quad (۱۲-۳)$$

$$q_i n_i = \bar{q} \quad \text{روی مرز } S_q \quad (۱۳-۳)$$

$$V = \bar{V} \quad \text{روی مرز } S_V \quad (۱۴-۳)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{روی مرز } S_T \quad (۱۵-۳)$$

که، $S_j + S_V = S_q + S_T = S$ سطح اطراف پیوستار ترموالکتریک است. روی مرزهای S_j و S_q شار الکتریکی و گرمایی معلوم است که جهت آنها اگر به سمت بیرونی پیوستار هدایت شوند، مثبت می‌شوند.

معادلات حاکم اساسی مواد ترموالکتریک (۸-۳) و (۹-۳) به طور کامل کوپل، غیر خطی و گذرا هستند. برای به دست آوردن معادلات المان محدود، فرض شده است که جسم تحت یک تغییر پتانسیل الکتریکی مجازی δV و تغییر درجه حرارت مجازی δT قرار می‌گیرد. با ضرب δV در معادله (۸-۳) و ضرب δT در معادله (۹-۳) و انتگرال گیری در دامنه Ω داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [D_{11} \nabla^2 V + D_{12} \nabla^2 T + J_E] \delta V dV \\ + \int_{\Omega} \left[D_{21} \nabla^2 V + D_{22} \nabla^2 T + Q_q - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] \delta T dV = 0 \end{aligned} \quad (۱۶-۳)$$

برای هر المان با فضای Ω ، پتانسیل الکتریکی و دما در هر نقطه با توجه به مقادیر آنها در نقاط گرهی آنها تقریب زده می‌شوند [۲۶]:

$$V(x_1, x_2, x_3, t) = [N_V] \{\psi\} \quad (۱۷-۳)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = [N_T] \{\psi\} \quad (۱۸-۳)$$

و $[\varphi_V]$ و $[\varphi_T]$ بردارهای تابع شکل^۱ هستند.

که در آن،

^۱ Shape function matrices

$$\{\psi\} = (V_1, T_1, V_2, T_2, \dots, V_n, T_n)^T \quad (۱۹-۳)$$

$$\{N_V\} = (\varphi_1, 0, \varphi_2, 0, \dots, \varphi_n, 0)^T \quad (۲۰-۳)$$

$$\{N_T\} = (0, \varphi_1, 0, \varphi_2, \dots, 0, \varphi_n)^T \quad (۲۱-۳)$$

$\{\Psi\}$ بردار حاوی مقادیر پتانسیل الکتریکی و دما در نقاط گره‌های المان است.

و

$$N_V = \begin{cases} N_i & \text{گره‌های معمولی} \\ [N_V \quad N_i(H - H_i)] & \text{گره المانهایی که توسط ترک بریده می‌شوند} \\ [N_i \quad N_{is}(F_j^U - F_{isj}^U)] & \text{گره المان نوک ترک} \end{cases} \quad (۲۲-۳)$$

$$N_T = \begin{cases} N_i & \text{گره‌های معمولی} \\ [N_i \quad N_i(H - H_i)] & \text{گره المانهایی که توسط ترک بریده می‌شوند} \\ [N_i \quad N_{is}(F_i^T - F_i^T)] & \text{گره المان نوک ترک} \end{cases} \quad (۲۳-۳)$$

که N_i تابع شکل گره i معرفی شده در FEM است. F_j^U و F_{isj}^U توابع شاخه j برای جابجایی هستند که در گره i محاسبه می‌شوند و توابع غنی سازی نوک ترک بر اثر جابجایی هستند. F_i^T و F^T توابع شاخه دما هستند و به عنوان توابع غنی سازی نوک ترک بر اثر دما هستند.

گرادیان پتانسیل الکتریکی و دما در هر نقطه‌ای از المان Ω_e را می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۶]:

$$\{\partial V\} = \{\partial V / \partial x_1, \partial V / \partial x_2, \partial V / \partial x_3\}^T = [B_V]\{\psi\} \quad (۲۴-۳)$$

$$\{\partial T\} = \{\partial T / \partial x_1, \partial T / \partial x_2, \partial T / \partial x_3\}^T = [B_T]\{\psi\} \quad (۲۵-۳)$$

اگر $\{B_V\} = [L][\varphi_V]$ و $\{B_T\} = [L][\varphi_T]$ ماتریس اپراتور دیفرانسیل را نشان می‌دهد، با جایگزینی معادله (۲۴-۳) و (۲۵-۳) با معادله (۶-۳) و (۷-۳) جریان‌های الکتریکی J_i و شارهای حرارتی q_i در المان به صورت زیر به دست می‌آید [۲۶]:

$$\{J\} = \{J_1, J_2, J_3\}^T = -D_{11}[B_V]\{\psi\} - D_{12}[B_T]\{\psi\} \quad (۲۶-۳)$$

$$\{q\} = \{q_1, q_2, q_3\}^T = -D_{21}[B_V]\{\psi\} - D_{22}[B_T]\{\psi\} \quad (۲۷-۳)$$

در نهایت، با جایگزینی معادله (۲۶-۳) و (۲۷-۳) با معادله (۱۶-۳) تقریب المان محدود از معادلات هدایت به دست می‌آید [۲۶]:

$$[C]\{\dot{\psi}\} + [K]\{\psi\} = \{P\} \quad (۲۸-۳)$$

ماتریس‌های المان و بردار نیروی عمومی به صورت زیر بیان می‌شود [۲۶]:

$$[C] = \int_{\Omega} \rho c [\varphi_T]^T [\varphi_T] d\Omega \quad (۲۹-۳)$$

$$[K] = \int_{\Omega} [B_V]^T D_{11} [B_V] d\Omega + 2 \int_{\Omega} [B_V]^T D_{12} [B_T] d\Omega + \int_{\Omega} [B_T]^T D_{22} [B_T] d\Omega \quad (۳۰-۳)$$

$$\{p\} = - \int_{s_j} [\varphi_V]^T \bar{h}_j ds - \int_{s_q} [\varphi_T]^T \bar{h}_q ds + \int_{\Omega} J_E [\varphi_V]^T d\Omega + \int_{\Omega} Q_q [\varphi_T]^T d\Omega \quad (۳۱-۳)$$

رابطه (۲۸-۳) با روش کرنک نیکلسون^۱ و تکراری حل می‌شود.

در حالت خاصی که ترک اثری روی توزیع دما و جریان الکتریسیته ندارد؛ می‌توان مسأله را به صورت

یک بعدی بیان کرد. معادله تعادل (۳-۳) و (۴-۳) به صورت زیر بیان می‌شود [۲۶]:

$$V_{,ii} + sT_{,ii} = 0 \quad (۳۲-۳)$$

^۱ Crank-Nicolson Method

$$KT_{,ii} + \frac{1}{\sigma} j_i j_i = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (33-3)$$

با به کار گیری قضیه دیورژانس داریم [۷]:

$$\oint_{\Gamma} j \cdot n \, d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot j \, d\Omega \quad (34-3)$$

معادله حاکم بر مواد ترموالکتریک در حالت گذرا است:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{j^2}{\sigma} - Tj \frac{ds}{dT} \frac{dT}{dx} = C_v \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (35-3)$$

اولین عبارت سمت چپ، نشان دهنده هدایت حرارتی فوریه است، عبارتهای دوم و سوم به ترتیب منابع گرمای داخلی به علت حرارت ژول و اثر تامسون^۱ نشان هستند. اثر تامسون به صورت شار گرمایی با اثر سبیک در ارتباط است یعنی اگر اثر سبیک از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر کند، اثر تامسون نیز تغییر خواهد کرد. در مواد ترموالکتریک، قانون اهم (رابطه بین پتانسیل الکتریکی V و جریان الکتریکی j) تنها زمانی معتبر است که توزیع دما یکنواخت باشد. هنگامی که T در جسم تغییر کند، گرادیان پتانسیل الکتریکی ϵ ایجاد می‌گردد [۷ و ۸]:

$$\epsilon = -s \nabla T|_{j=0} \quad (36-3)$$

در یک پدیده همرفتی با قرار دادن این اثر در قانون اهم (در دمای ثابت) اولین معادله سازگاری ماده ترموالکتریک به دست می‌آید [۷]:

$$j = \sigma (\epsilon - \nabla V) = -\sigma \nabla V - s \sigma \nabla T \quad (37-3)$$

σ هدایت الکتریکی ماده ترموالکتریک است. با قرار دادن σ در قانون فوریه (در j ثابت)، با جایگذاری معادله (۳۷-۳) در معادله (۵-۳) دومین معادله سازگاری ماده ترموالکتریک وقتی که k هدایت حرارتی ماده ترموالکتریک است، به دست می‌آید [۷]:

¹ Thomson

$$q = -k \nabla T + s T j = -s \sigma T \nabla V - (k + s^2 \sigma T) \nabla T \quad (38-3)$$

در معادله (35-3)، اگر خواص ماده ترموالکتریک به صورت وابسته به دما در نظر گرفته نشود اثر تامسون نادیده گرفته می شود که نتیجه آن $ds/dt = 0$ می شود. بنابراین [26]:

$$k \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{j^2}{\sigma} = C_v \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (39-3)$$

انتقال الکترون ها در نیمه هادی ها از طریق پتانسیل الکتریکی انجام می شود، از این رو، میدان پتانسیل الکتریکی باید به صورت زیر حل شود [2]:

$$\nabla \cdot (\sigma (\nabla \phi - s \nabla T)) = 0 \quad (40-3)$$

ϕ پتانسیل الکتریکی است، و $s \nabla T$ نیروی الکترومغناطیسی سیبک است که از اثر سیبک است. هنگامی که ϕ مشخص است، میدان الکتریکی را می توان با معادله زیر محاسبه کرد:

$$\vec{E} = -\nabla \phi + s \nabla T \quad (41-3)$$

الگوریتم حل به ترتیب شامل اعمال شرایط اولیه و مرزی، مش بندی، اعمال ترک، غنی سازی المان ها و گره های مسیر و نوک ترک و سپس حل مسئله در حوزه زمان که در هر مرحله ضریب شدت تنش و تنش T قابل استخراج است.

فصل چهارم: نتایج و بحث

۴-۱- مقدمه

در این فصل، ضرایب شدت تنش و پارامتر B ، تنش T به همراه توزیع دما و ولتاژ برای ترکی در یک محیط ترموالکتریک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن خصوصیات وابسته به دما و با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته در بررسی شده است. اثر ژول روی ضرایب شدت تنش و تنش T نیز در این مثال بررسی شده است. در مثال دوم، توزیع دمای گذرا با در نظر گرفتن خصوصیات وابسته به دما جهت صحت سنجی برای یک صفحه تحت شوک حرارتی از جنس Bi_2Te_3 بررسی شده است. در مثال سوم ضرایب شدت تنش مد یک و دو، تنش T و پارامتر B برای یک صفحه با زاویه ترک 30° درجه با در نظر گرفتن خصوصیات وابسته به دما و با روش المان محدود توسعه یافته بررسی شده است.

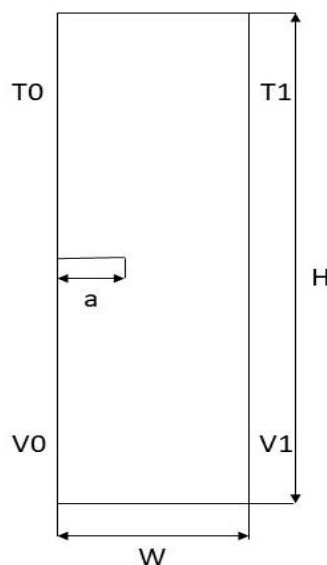
۴-۲- فرضیات حاکم بر مساله

- الف- تغییرشکلها بسیار کوچک، خصوصیات مستقل از دما و تغییر دما در مقایسه با دمای اولیه کوچک است (ترموالاستیسیته خطی).
- ب- جامد همگن همسانگرد است.
- ج- منبع گرمایی و نیروهای کالبدی وجود ندارند.
- د- سطح ترک عایق است.

۴-۳- مثال اول: صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی

به منظور محاسبه ضرایب شدت تنش، تنش T و پارامتر B با استفاده از انتگرال بر همکنش یک صفحه همگن با عرض $W = 0.001524 \text{ m}$ و طول $H = 0.003048 \text{ m}$ برای طول ترک $\frac{a}{W} = 0.3$ و گام زمانی $t_0 = \frac{\rho c L^2}{k}$ مطابق شکل (۴-۱) با سه شبکه مش بندی شامل 81×161 ، 91×181 و 101×201 المان مربعی چهار گره‌ای تحت شوک حرارتی در نظر گرفته شده است. ضخامت صفحه

(در جهت عمود بر صفحه) برای فرض کرنش صفحه‌ای به اندازه کافی بزرگ است. صفحه در شرایط اولیه (بدون تنش) تحت دمای یکسان $T_0 = 293\text{ K}$ قرار دارد. در لحظه $t = 0^+$ دمای لبه دارای ترک صفحه به‌طور ناگهانی به $T_1 = 323\text{ K}$ افزایش می‌یابد و در این دما نگه داشته می‌شود. سایر لبه‌های صفحه از جمله ترک عایق فرض می‌شوند.



شکل ۱-۴ مشخصات و بارگذاری صفحه با ترک افقی

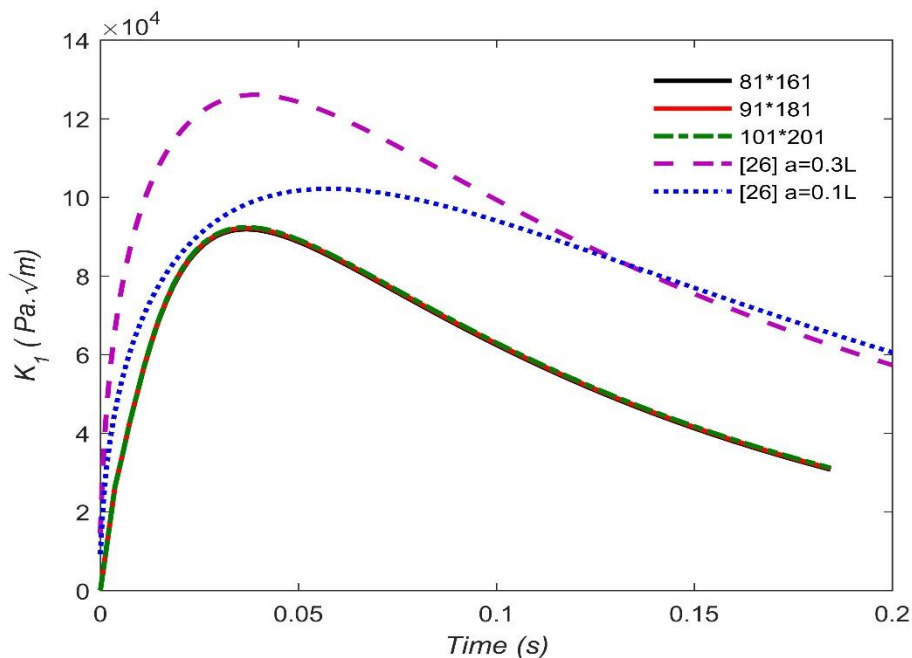
خواص مکانیکی این باریکه در جدول (۱-۴) آورده شده است.

جدول ۱-۴ خواص مکانیکی صفحه [۲]

	λ	σ	s	C_V	α	E (GPa)
	(W/m ² K)	(S/m)	(V/ K)	(J/m ³ °K)	(1/ K)	
<i>Bi₂Te₃</i>	1.60	6.70 × 10 ⁴	2.00 × 10 ⁻⁴	1.28 × 10 ⁶	1.68 × 10 ⁻⁵	47.00

مطابق شکل ۲-۴ برای ضریب شدت تنش مد اول با حل تحلیلی معادله توزیع دما [۲۶] آزمون همگرایی انجام شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد برای شبکه بندی‌های مختلف، نتایج مستقل

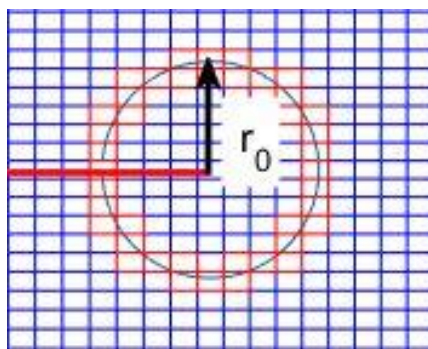
از شبکه بوده و با رسیدن دما به نوک ترک ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد و بعد از عبور دما از نوک ترک روند کاهشی می‌یابد.



شکل ۴-۲ آزمون همگرایی ضریب شدت تنش مد اول با تعداد المان‌های متفاوت

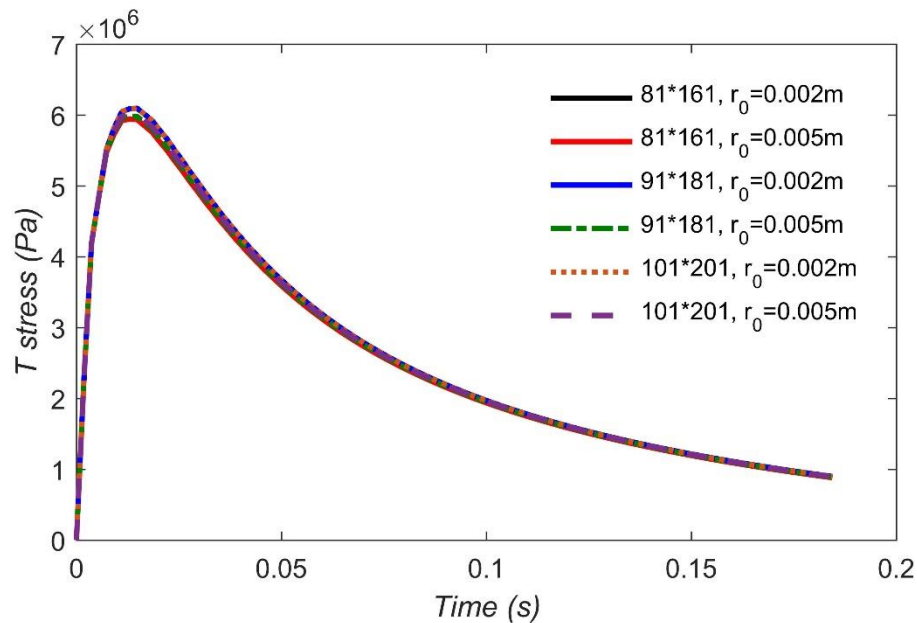
شعاع ناحیه انتگرال گیری r_0 برای انتگرال بر همکنش با مقادیر 0.002 m و 0.005 m مطابق

شکل ۴-۳ مفروض است.



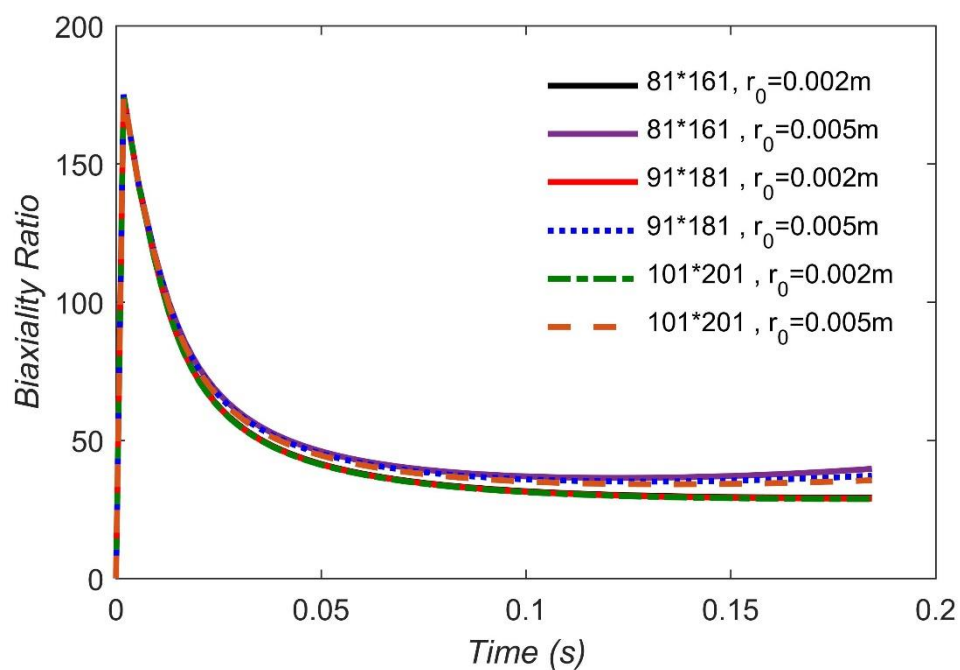
شکل ۴-۳ ناحیه انتگرال گیری برای انتگرال بر همکنش برای صفحه همگن با ترک لبه‌ای

مطابق شکل ۴-۴ تنش T برای شبکه بندی‌ها و نواحی انتگرال گیری مختلف مستقل از شبکه و نواحی انتگرال گیری برای انتگرال بر همکنش بوده و با رسیدن دما به نوک ترک ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد و بعد از عبور دما از نوک ترک روند کاهشی می‌یابد.



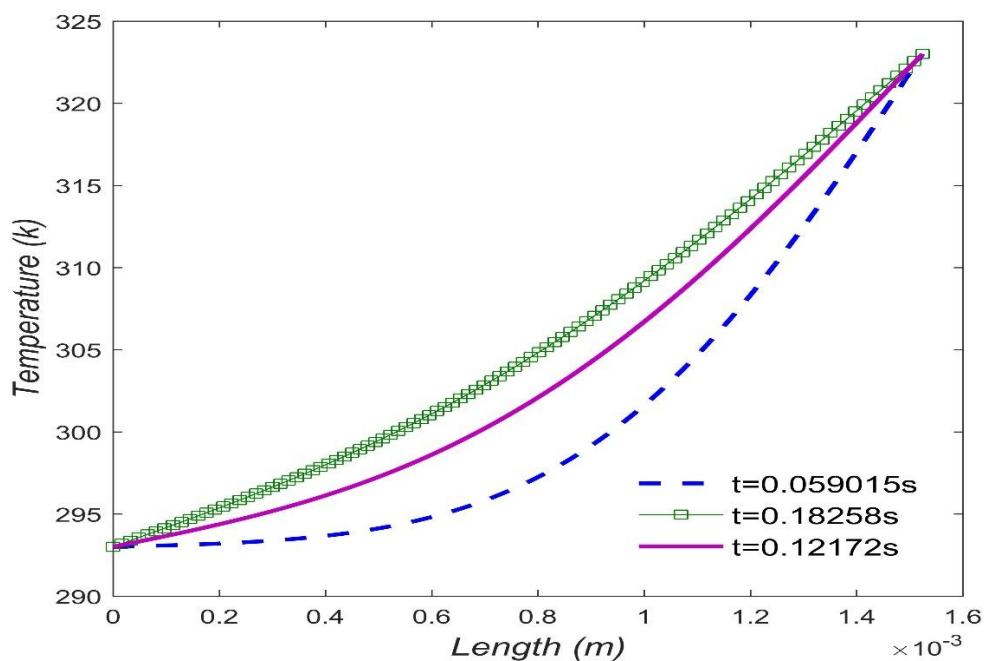
شکل ۴-۴ آزمون همگرایی تنش T با تعداد المان‌ها و شعاع نواحی انتگرال گیری متفاوت

مطابق شکل ۴-۵ پارامتر B نرخ تغییر تنش T نسبت به ضریب شدت تنش مد اول را نشان می‌دهد که با افزایش تنش T به دلیل رسیدن دما به نوک ترک تا زمان $t=0.01$ روند افزایشی پیدا می‌کند و بعد از این زمان با افزایش ضریب شدت تنش مد اول نسبت به تنش T ، روند کاهشی پیدا می‌کند.



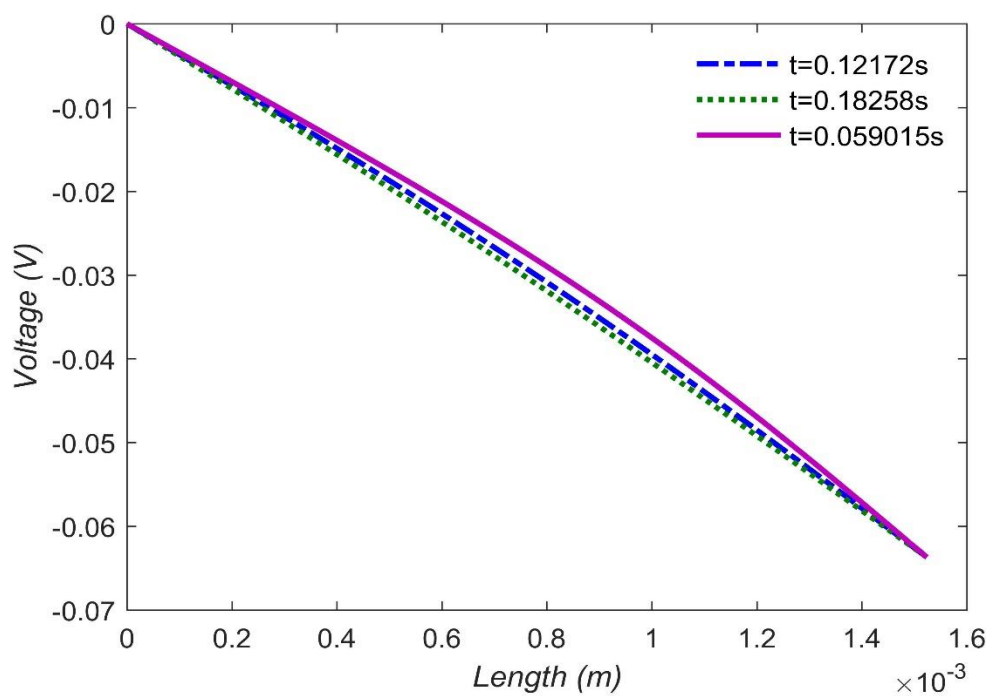
شکل ۴-۵ آزمون همگرایی پارامتر B با تعداد المان‌ها و شعاع نواحی انتگرال گیری متفاوت

مطابق شکل‌های ۴-۶ برای توزیع دما با انتخاب زمان‌های مختلف آزمون همگرایی انجام شده است. در زمان‌های مختلف، دما در طول صفحه روند افزایشی دارد و توزیع خطی دما به توزیع حالت پایا نزدیک می‌شود.



شکل ۴-۶ توزیع دما در طول صفحه در زمان‌های متفاوت

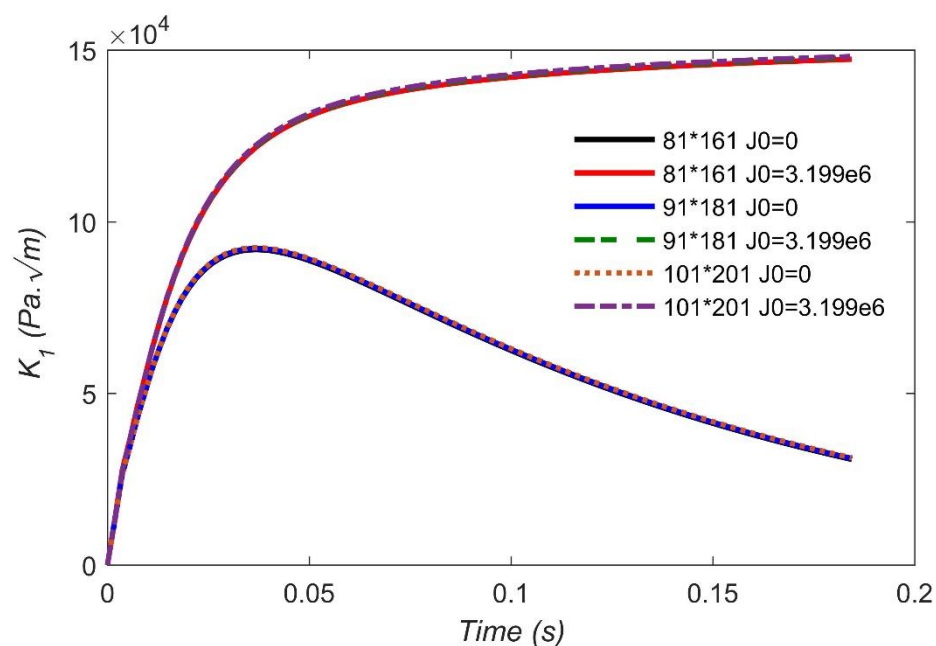
مطابق شکل‌های ۴-۷ برای توزیع ولتاژ با انتخاب زمان‌های متفاوت آزمون همگرایی انجام شده است. در زمان‌های مختلف با افزایش دما در نوک ترک و میانه‌های صفحه اختلاف ولتاژ از نظر قدر مطلق افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۷ توزیع ولتاژ در طول صفحه در زمان‌های متفاوت

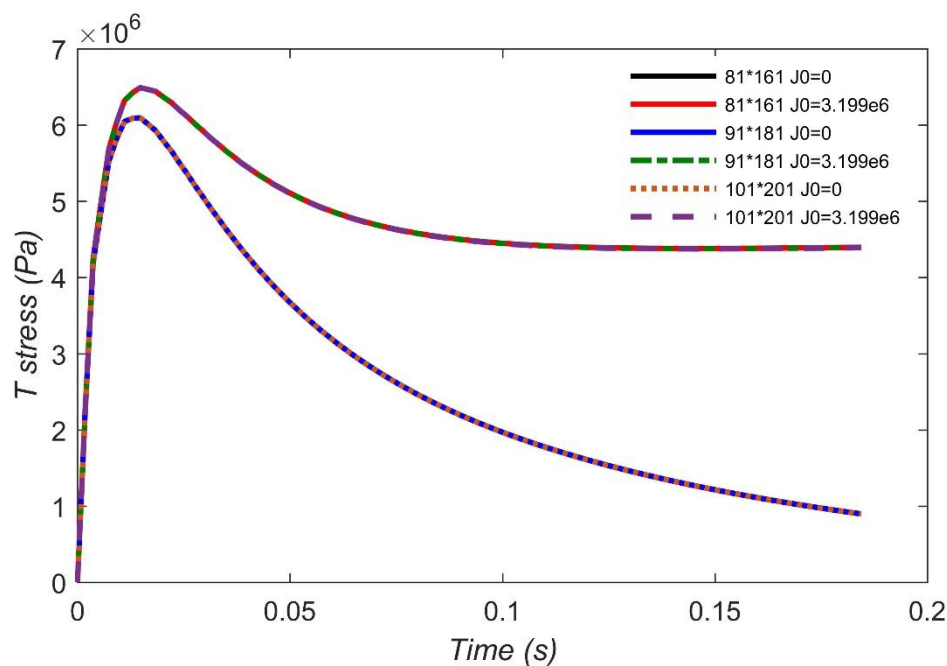
مطابق شکل‌های ۴-۸، ۴-۹ و ۴-۱۰ به منظور بررسی اثر ژول برای ضریب شدت تنش مد اول، تنش T و پارامتر B با انتخاب تعداد المان‌های متفاوت آزمون همگرایی انجام شده است.

در شکل ۴-۸ وقتی که اثر ژول مقدار دارد گرمای داخلی ایجاد می‌شود و در ادامه ضریب شدت تنش مد اول افزایش می‌یابد و به دلیل وجود گرادیان غیرخطی، نمودارها به سمت صفر میل نمی‌کنند.



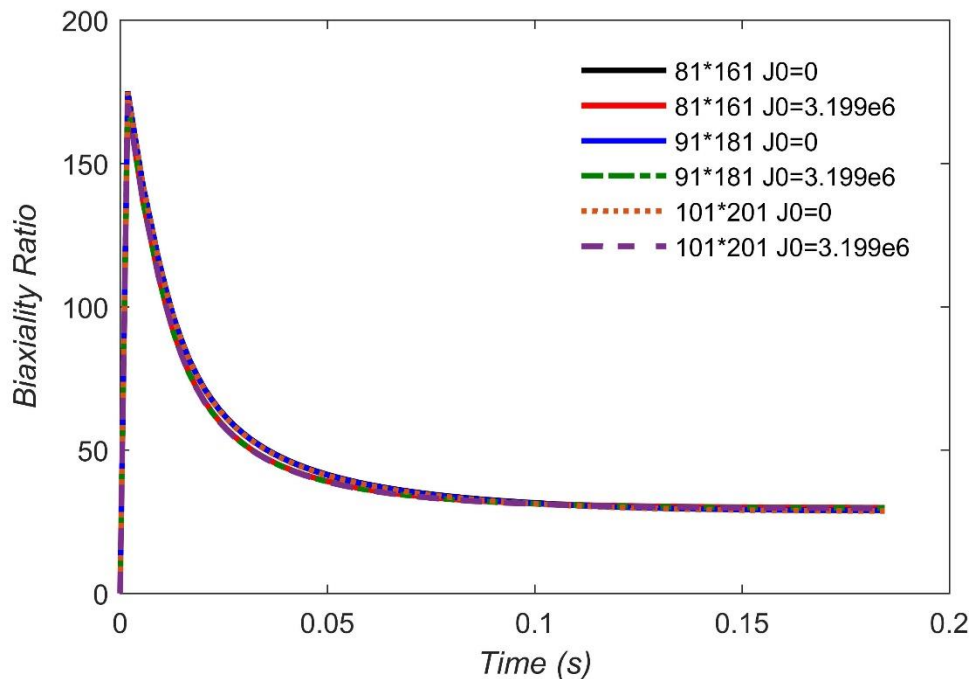
شکل ۴-۸ آزمون همگرایی ضریب شدت تنش مد اول با بررسی اثر ژول با تعداد المان‌های متفاوت

مطابق شکل ۴-۹ به منظور بررسی اثر ژول برای تنش T با انتخاب تعداد المان‌های متفاوت آزمون همگرایی انجام شده است. وقتی که اثر ژول مقدار دارد گرمای داخلی ایجاد می‌شود و در ادامه تنش T افزایش می‌یابد و به دلیل وجود گرادیان غیرخطی، نمودارها به سمت صفر میل نمی‌کنند.



شکل ۴-۹ آزمون همگرایی تنش T با بررسی اثر ژول با تعداد المان‌های متفاوت

مطابق شکل ۴-۱۰ به منظور بررسی اثر ژول برای پارامتر B با انتخاب تعداد المان‌های متفاوت آزمون همگرایی انجام شده است. پارامتر B نرخ تغییر تنش T نسبت به ضریب شدت تنش مد اول را نشان می‌دهد که با افزایش تنش T به دلیل اثر ژول و اختلاف پتانسیل ایجاد شده تا زمان $t=0.01$ روند افزایشی پیدا می‌کند و بعد از این زمان با افزایش ضریب شدت تنش مد اول نسبت به تنش T، روند کاهشی پیدا می‌کند و به دلیل وجود گرادیان غیرخطی، نمودارها به سمت صفر میل نمی‌کنند.



شکل ۴-۱۰ آزمون همگرایی پارامتر B با بررسی اثر ژول با تعداد المان‌های متفاوت

۴-۴- مثال دوم: توزیع دمای گذرا و پایا در صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت

شوک گرمایی با در نظر گرفتن خصوصیات وابسته به دما

مطابق هندسه و شرایط مثال قبل، صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن خصوصیات وابسته به دما در نظر گرفته می‌شود. خصوصیات وابسته به دما در این مثال به صورت زیر است [۲۶]:

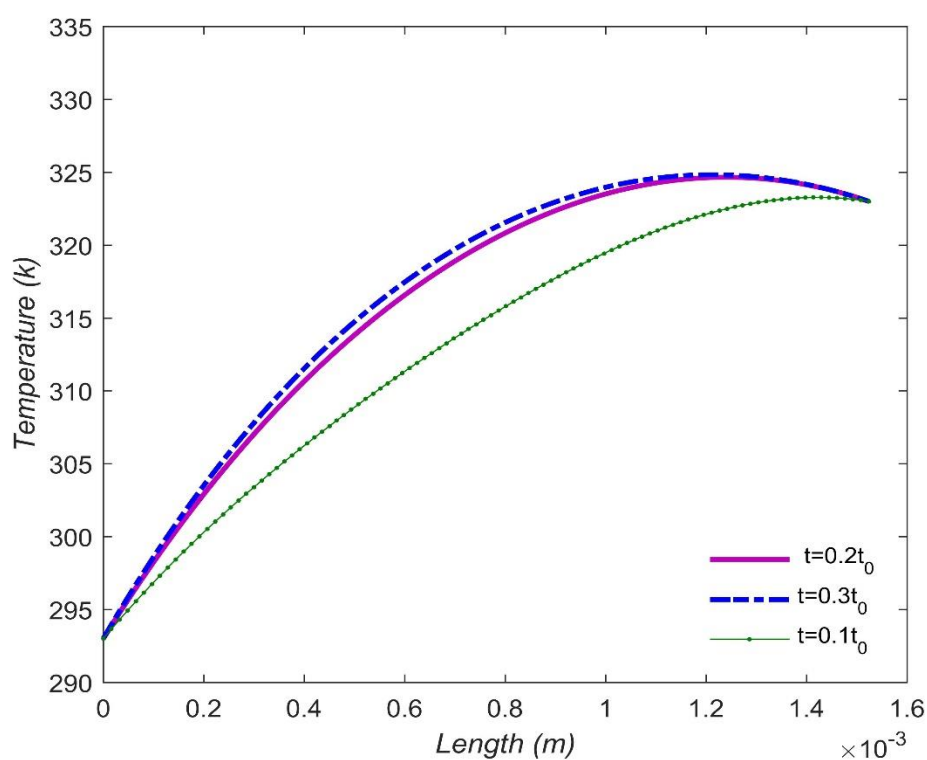
$$j_0 = 3.199 \times 10^6 \text{ A/m}^2 \quad (۱-۴)$$

$$\sigma = 1.028 \times 10^5 - 5.369 \times 10^2 \times (T - 273) + 1.824 \times (T - 273)^2 [V/K] \quad (۲-۴)$$

$$k = 1.758 - 5.290 \times 10^{-3} \times (T - 273) + 4.134 \times 10^{-5} \times (T - 273)^2 [W/(Km)] \quad (۳-۴)$$

$$s = 1.802 \times 10^{-4} + 3.861 \times 10^{-7} \times (T - 273) - 9.582 \times 10^{-10} \times (T - 273)^2 [A/(Vm)] \quad (4-4)$$

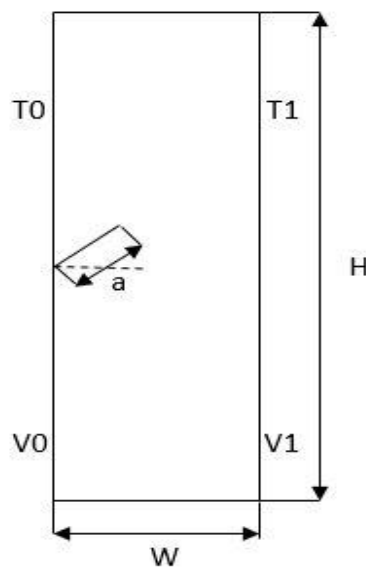
توزیع دمای نوک ترک در صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن خصوصیات وابسته به دما در زمان‌های مختلف در شکل ۴-۱۱ آورده شده است. صفحه در شرایط اولیه (بدون تنش) تحت دمای یکسان $T_0 = 293 \text{ K}$ قرار دارد. در زمان‌های مختلف دمای لبه دارای ترک صفحه به طور ناگهانی به $T_1 = 323 \text{ K}$ افزایش می‌یابد. توزیع دمای نوک ترک مطابق آنچه از توزیع دما انتظار می‌رود، به تدریج افزایش می‌یابد. در زمان‌های مختلف، دما در طول صفحه روند افزایشی دارد و توزیع خطی دما به توزیع حالت پایا نزدیک می‌شود.



شکل ۴-۱۱ توزیع دما در طول صفحه در زمان‌های مختلف

۴-۵- مثال سوم: صفحه همگن با ترک لبه‌ای مایل تحت شوک گرمایی

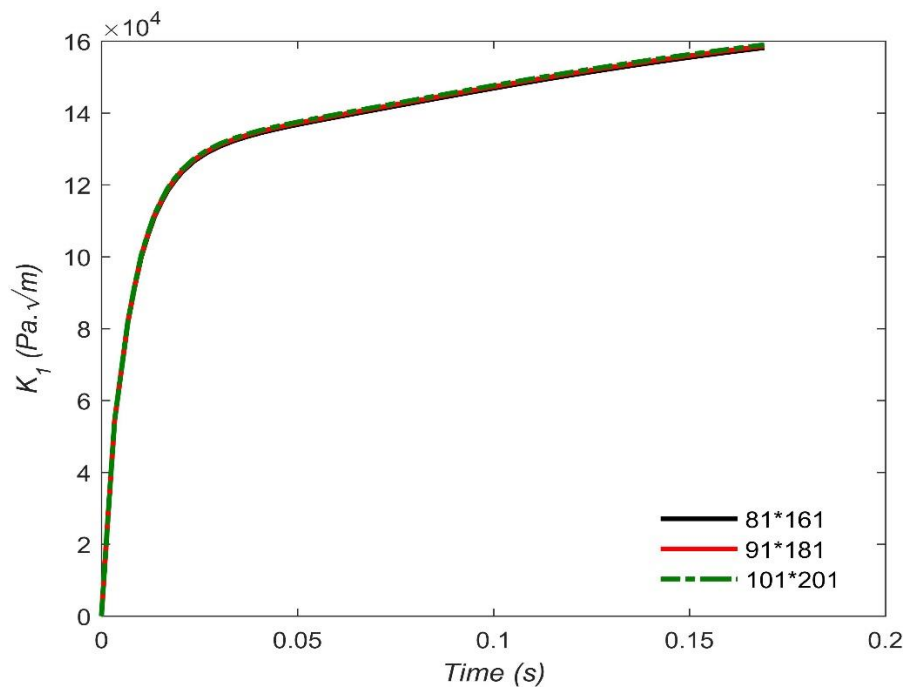
در این مثال، یک صفحه مستطیلی با خصوصیات مکانیکی و ابعاد مثال اول، در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۴-۱۲ صفحه دارای ترک مایل با زاویه $\alpha=30^\circ$ است که در دمای اولیه $T_0 = 273\text{ K}$ و $T_1 = 293\text{ K}$ قرار دارد.



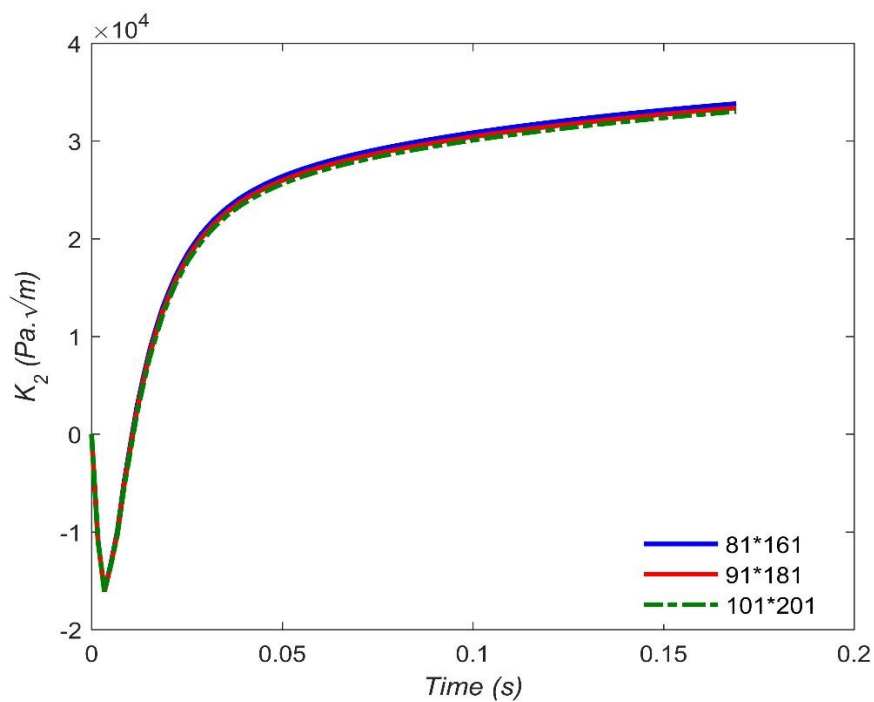
شکل ۴-۱۲ مشخصات و بارگذاری صفحه با ترک لبه‌ای مایل

بنابراین سه شبکه شامل 81×161 ، 91×181 و 101×201 المان مربعی چهار گره‌ای با گام زمانی $\Delta t = 0.001$ با نواحی انتگرال گیری متفاوت جهت حل عددی مساله مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مدل‌سازی ترک، اولین حلقه از المان‌های اطراف المان نوک ترک توسط توابع غنی‌سازی نوک ترک، غنی شده‌اند. ضریب شدت تنش مد اول و دوم بر حسب زمان به ترتیب در شکل‌های ۴-۱۳ و ۴-۱۴ گزارش شده است. پس از اینکه موج تنش برای اولین بار در زمان $t=0$ به نوک ترک می‌رسد، ضرایب شدت تنش مد اول و دوم از صفر شروع به تغییر می‌کنند. تغییر دما به صورت انتشار باعث افزایش

ضریب شدت تنش می‌شود که با رسیدن موج تنش فشاری روند افزایش، کاهش می‌یابد و برای شبکه‌های مختلف، ضرایب شدت تنش مد اول و دوم مستقل از شبکه مش بندی است.

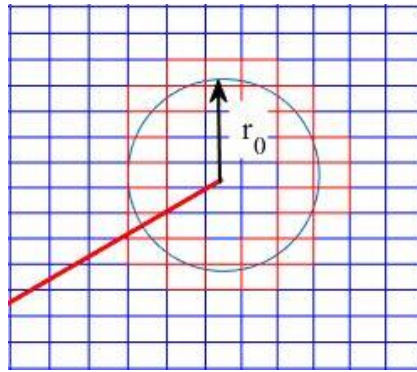


شکل ۴-۱۳ آزمون همگرایی ضریب شدت تنش مد اول با تعداد المان‌های متفاوت



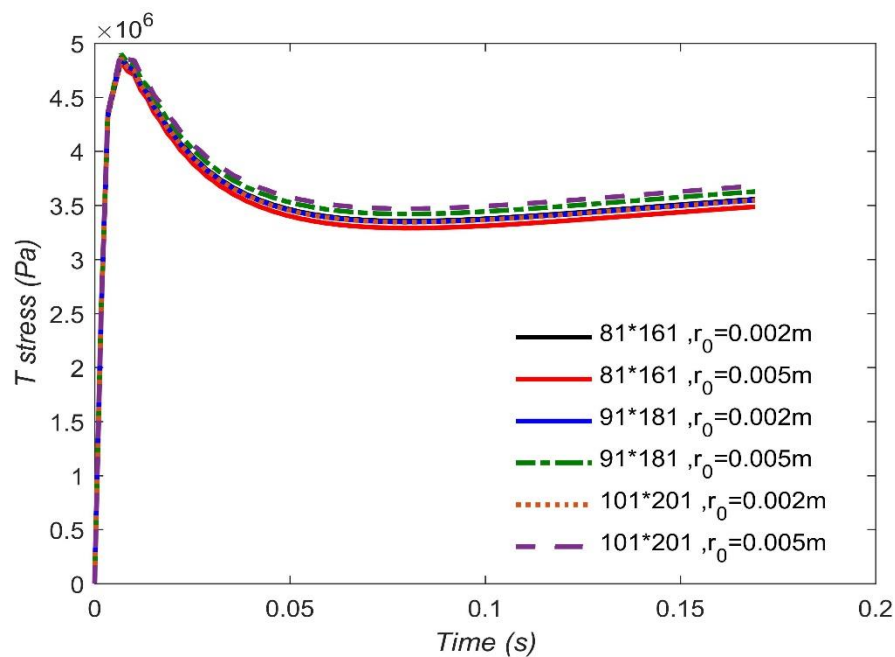
شکل ۴-۱۴ آزمون همگرایی ضریب شدت تنش مد دوم با تعداد المان‌های متفاوت

شعاع ناحیه r_0 انتگرال گیری برای انتگرال بر همکنش در ترک مایل با مقادیر 0.002 m و 0.005 m مطابق شکل ۴-۱۵ مفروض است.



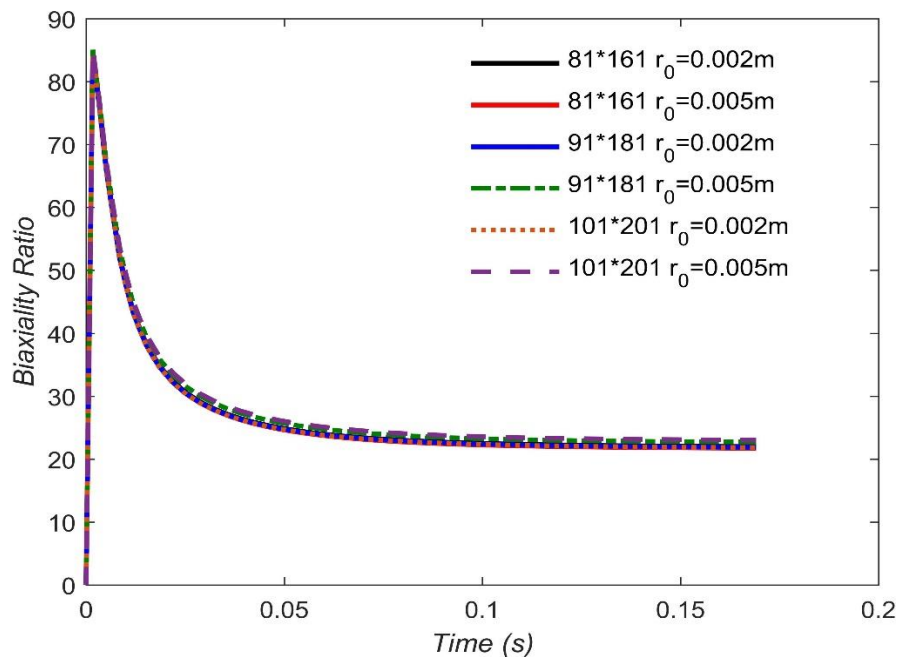
شکل ۴-۱۵ ناحیه انتگرال گیری برای انتگرال بر همکنش در صفحه همگن با ترک لبه‌ای مایل

آزمون همگرایی تنش T با تعداد المان‌ها و نواحی انتگرال گیری متفاوت در شکل‌های ۴-۱۶ گزارش شده است. نتایج نمودار تنش T برای شبکه‌های مختلف مستقل از شبکه و نواحی انتگرال گیری برای انگرال بر همکنش هستند. با رسیدن دما به نوک ترک و تغییر دما به صورت انتشار نمودار تنش T روند افزایشی می‌یابد که با رسیدن موج تنش فشاری روند افزایش، کاهش می‌یابد.



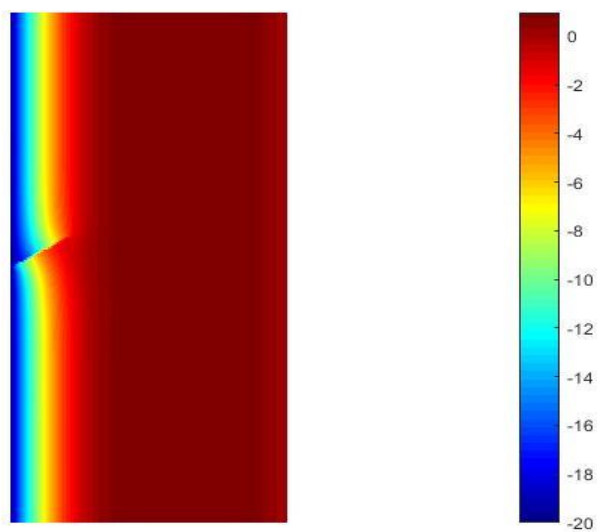
شکل ۴-۱۶ آزمون همگرایی تنش T با تعداد المان‌ها و نواحی انتگرال گیری متفاوت

آزمون همگرایی پارامتر B با تعداد المان‌ها و نواحی انتگرال‌گیری متفاوت در شکل ۴-۱۷ گزارش شده است. نتایج نمودار پارامتر B برای شبکه‌های مختلف مستقل از شبکه و نواحی انتگرال‌گیری برای انتگرال بر همکنش هستند. با رسیدن دما به نوک ترک و تغییر دما به صورت انتشار پارامتر B با افزایش تنش T تا زمان $t=0.02$ روند افزایشی می‌یابد که بعد از این زمان با افزایش ضریب شدت تنش مد اول نسبت به تنش T با رسیدن موج تنش فشاری روند افزایش، کاهش می‌یابد.

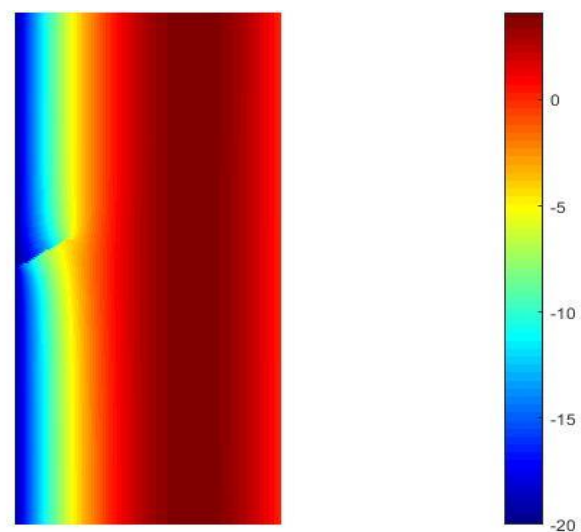


شکل ۴-۱۷ آزمون همگرایی پارامتر B با تعداد المان‌ها و نواحی انتگرال‌گیری متفاوت

کانتورهای دما مطابق شکل‌های ۴-۱۸ و ۴-۱۹ در زمان‌های متفاوت با اعمال شوک گرمایی -20° به لبه سمت چپ گزارش شده است.

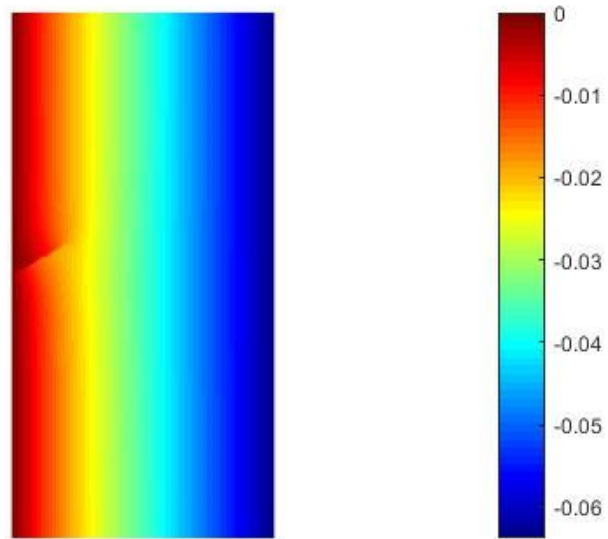


شکل ۴-۱۸ کانتور دما در زمان $t=0.011837s$

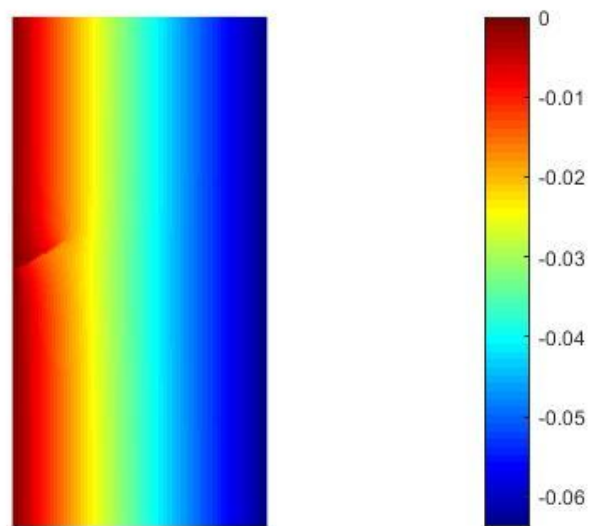


شکل ۴-۱۹ کانتور دما در زمان $t=0.067643s$

کانتورهای ولتاژ مطابق شکل‌های ۴-۲۰ و ۴-۲۱ در زمان‌های متفاوت با اعمال شوک گرمایی و اختلاف ولتاژ -0.06 به لبه سمت چپ گزارش شده است.

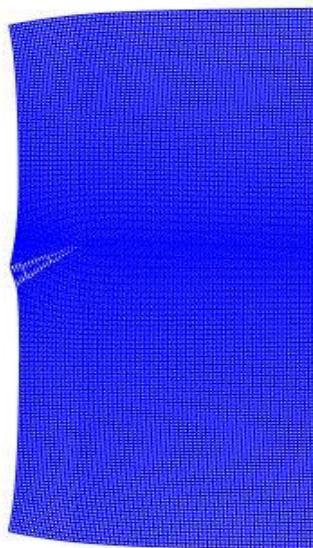


شکل ۴-۲۰ کانتور ولتاژ در زمان $t=0.011837s$

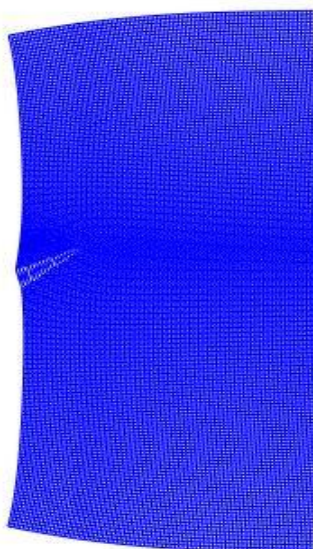


شکل ۴-۲۱ کانتور ولتاژ در زمان $t=0.067643s$

بر اثر اعمال شوک گرمایی، لبه سمت چپ منقبض شده و دهانه ترک باز می‌شود. تغییر شکل صفحه در زمان های متفاوت مطابق شکل ۲۲-۴ و ۲۳-۴ گزارش شده است.



شکل ۲۲-۴ تغییر شکل صفحه در زمان $t=0.011837s$



شکل ۲۳-۴ تغییر شکل صفحه در زمان $t=0.067643s$

فصل پنجم: نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۵-۱- نتیجه‌گیری

در این نوشتار، ضرایب شدت تنش برای ترکی عایق در یک محیط ترموالکتریک تحت شوک گرمایی محاسبه شده است. ترک با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته مدل شده است. خصوصیات ترموالکتریک صفحه وابسته به دما در نظر گرفته شده است.

الف- بارسیدن دما به نوک ترک، ضریب شدت تنش مد اول افزایش پیدا کرده و پس از عبور از نوک ترک کاهش می‌یابد.

ب- با در نظر گرفتن اثر ژول در روابط، ضریب شدت تنش روند افزایشی خود را با شیب کمتری حفظ می‌کند.

ج- برای ترک‌های زاویه دار بر اثر شوک گرمایی ضریب شدت تنش مد دوم هم ایجاد می‌گردد.

د- تغییرات دما موجب ایجاد تغییر ولتاژ در ماده ترموالکتریک می‌شود.

۵-۲- پیشنهادهایی برای تحقیقات آینده

پیشنهادهای زیر را می‌توان برای ادامه کار بیان نمود:

- محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترکی در یک محیط ترموالکتریک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری کاتانو با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته
- محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترک الکترومغناطیسی، در یک محیط الاستو- ترموالکتریک با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته

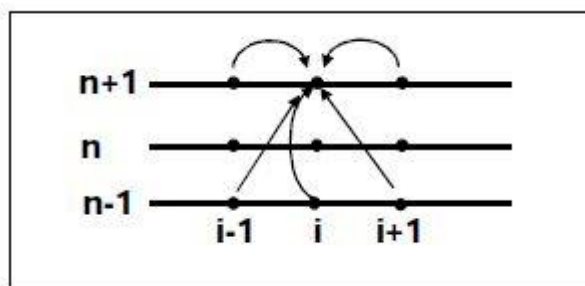
پیوست الف

۶-۱- روش کرانک نیکلسون

روشی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه یک نسبت به زمان است. هنگامی که این روش را بر معادله موج مرتبه اول اعمال کنیم، یک روش نیمه ضمنی با سه سطح زمانی به دست می‌آید:

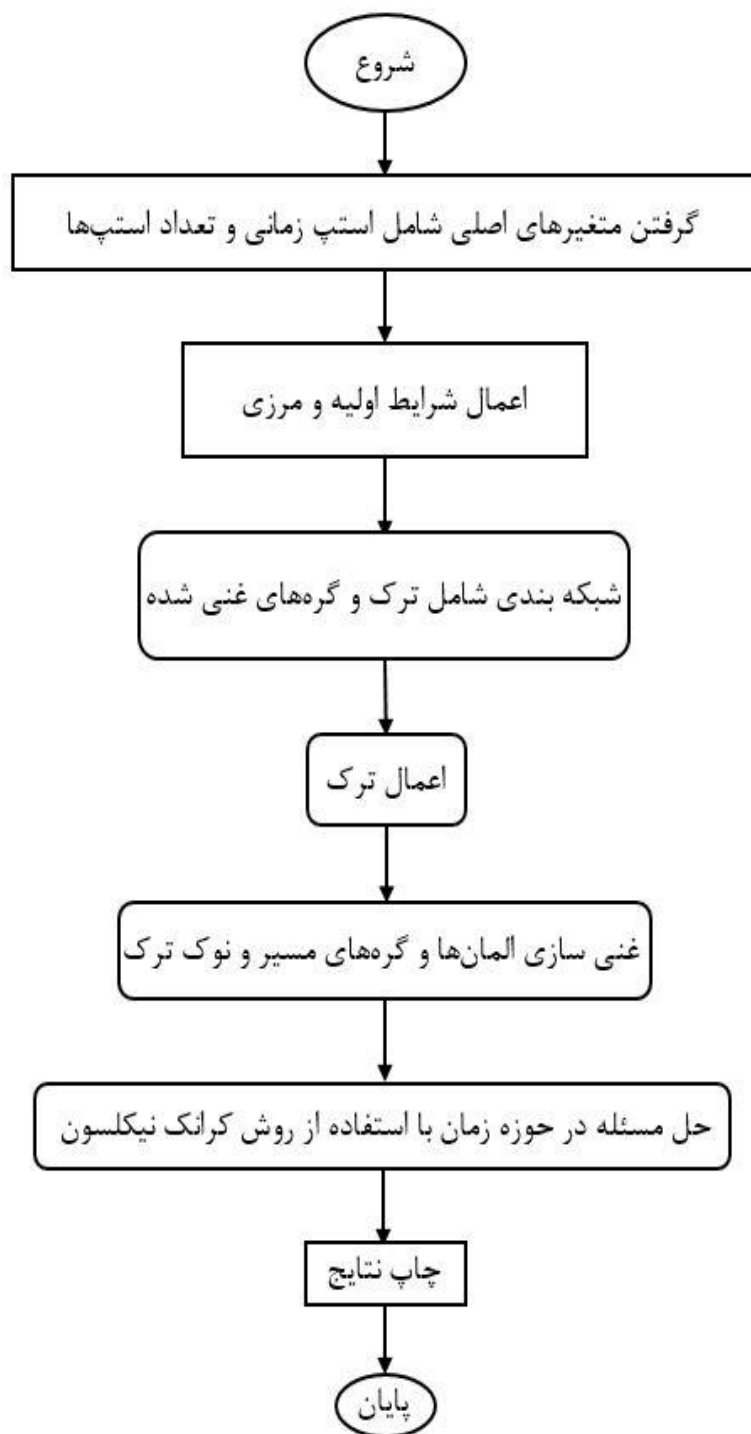
$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{2}c \left[\frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^{j-1} - u_{i-1}^{j-1}}{2\Delta x} \right] = 0 \quad (\text{الف-۱})$$

برای یافتن u در زمان $n+1$ نیاز به معلوم بودن u در زمان‌های n و $n-1$ است. برای شروع بهتر است از روش دیگری دو سطح زمانی را به دست آورده و برای مراحل بعدی از این روش استفاده کرد. سطح زمانی صفر در مرحله اول همان شرایط اولیه است و باید سطح زمانی بعدی را با روش دیگر به دست آورد. در اینجا برای گام اول از روش پسرو استفاده کردیم و باید همان معیار پایداری برای روش پسرو را به کار ببریم. در ضمن در حین استفاده از این روش با ماتریس سه قطری روبرو می‌شویم که برای حل آن از الگوریتم توماس استفاده می‌کنیم. در این برنامه کامپیوتری متغیرهای اصلی در واقع همان تعداد استپ‌های زمانی و مقادیر آن‌ها است. این متغیرها در واقع عامل مقایسه برای اتمام برنامه نیز است. همچنین خود تابع u نیز یک آرایه دوبعدی است که جزو نتایج برنامه است. شماتیکی از روش کرانک نیکلسون در زیر آورده شده است:



شکل الف-۱- شماتیک روش کرانک نیکلسون

۶-۲- فلوچارت برنامه کامپیوتری استخراج ضرایب شدت تنش



منابع

- [1] DiSalvo, Francis J. "Thermoelectric cooling and power generation." *Science* 285, no. 5428 (1999): 703-706.
- [2] Wang, B. L., Y. B. Guo, and C. W. Zhang. "Cracking and thermal shock resistance of a Bi₂Te₃ based thermoelectric material." *Engineering Fracture Mechanics* 152 (2016): 1-9.
- [3] Amit, K. C., and Jeong-Ho Kim. "Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials." *Engineering Fracture Mechanics* 75, no. 8 (2008): 2542-2565.
- [4] van Duyn, D. C., and P. J. A. Munter. "Finite-element modelling of thermoelectric materials and devices." *Sensors and Actuators A: Physical* 32, no. 1-3 (1992): 413-418.
- [5] Bermúdez, A., M. C. Muniz, and P. Quintela. "Numerical solution of a three-dimensional thermoelectric problem taking place in an aluminium electrolytic cell." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 106, no. 1-2 (1993): 129-142.
- [6] Scheidemantel, T. J., C. Ambrosch-Draxl, T. Thonhauser, John V. Badding, and Jorge Osvaldo Sofo. "Transport coefficients from first-principles calculations." *Physical Review B* 68, no. 12 (2003): 125210.
- [7] Pérez-Aparicio, José L., R. L. Taylor, and Daniel Gavela. "Finite element analysis of nonlinear fully coupled thermoelectric materials." *Computational Mechanics* 40, no. 1 (2007): 35-45.
- [8] Palma, R. "Thermodynamic Formulation for Non-linear Finite Element Applied to Multicoupled Materials." PhD diss., PhD thesis, University of Granada, 2012.

- [9] Liu, Liping. "A continuum theory of thermoelectric bodies and effective properties of thermoelectric composites." *International Journal of Engineering Science* 55 (2012): 35-53.
- [10] Yang, Yang, S. H. Xie, F. Y. Ma, and J. Y. Li. "On the effective thermoelectric properties of layered heterogeneous medium." *Journal of Applied Physics* 111, no. 1 (2012): 013510.
- [11] Meng, Jing-Hui, Xiao-Dong Wang, and Xin-Xin Zhang. "Transient modeling and dynamic characteristics of thermoelectric cooler." *Applied energy* 108 (2013): 340-348.
- [12] Yang, Y., F. Y. Ma, CHi Lei, Y. Y. Liu, and J. Y. Li. "Nonlinear asymptotic homogenization and the effective behavior of layered thermoelectric composites." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 61, no. 8 (2013): 1768-1783.
- [13] Song, Hao-Peng, Cun-Fa Gao, and Jiangyu Li. "Two-dimensional problem of a crack in thermoelectric materials." *Journal of Thermal Stresses* 38, no. 3 (2015): 325-337.
- [14] Pérez-Aparicio, José L., Roberto Palma, and Robert L. Taylor. "Multiphysics and thermodynamic formulations for equilibrium and non-equilibrium interactions: Non-linear finite elements applied to multi-coupled active materials." *Archives of Computational Methods in Engineering* 23, no. 3 (2016): 535-583.
- [15] Yu, Chuanbin, Jiangyu Li, Haopeng Song, and Cunfa Gao. "Electrically permeable and thermally insulated collinear cracks in thermoelectric materials." *Acta Mechanica* 230, no. 4 (2019): 1275-1288.
- [16] A. B. Zhang *et al.*, "Zhang, A. B., B. L. Wang, Ji Wang, J. K. Du, Chao Xie, and Y. A. Jin. "Thermodynamics analysis of

- thermoelectric materials: influence of cracking on efficiency of thermoelectric conversion." *Applied Thermal Engineering* 127 (2017): 1442-1450.
- [17] Yu, Chuanbin, Daifeng Zou, Yu-Hao Li, Hai-Bing Yang, and Cun-Fa Gao. "An arc-shaped crack in nonlinear fully coupled thermoelectric materials." *Acta Mechanica* 229, no. 5 (2018): 1989-2008.
- [18] Pang, Sheng-Jie, Yue-Ting Zhou, and Feng-Jun Li. "Analytic solutions of thermoelectric materials containing a circular hole with a straight crack." *International Journal of Mechanical Sciences* 144 (2018): 731-738.
- [19] Cui, Y. J., B. L. Wang, and P. Wang. "Analysis of thermally induced delamination and buckling of thin-film thermoelectric generators made up of pn-junctions." *International Journal of Mechanical Sciences* 149 (2018): 393-401.
- [20] Cui, Y. J., K. F. Wang, B. L. Wang, and Pengxiang Wang. "Analysis of thermally induced delamination of thermoelectric thin film/substrate system." *International Journal of Fracture* 214, no. 2 (2018): 201-208.
- [21] Dell'Erba, D. N., M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke. "Dual boundary element method for three-dimensional thermoelastic crack problems." *International Journal of Fracture* 94, no. 1 (1998): 89-101.
- [22] Mohammadi, Soheil. *Extended finite element method: for fracture analysis of structures*. John Wiley & Sons, 2008.
- [23] Zamani, Arash, and M. Reza Eslami. "Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation." *International Journal of Solids and Structures* 47, no. 10

- (2010): 1392-1404.
- [24] Yau, J. F., S. S. Wang, and H. T. Corten. "A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity." *Journal of applied mechanics* 47, no. 2 (1980): 335-341.
- [25] Kim, Jeong-Ho, and Glaucio H. Paulino. "An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58, no. 10 (2003): 1457-1497.
- [26] Wang, B. L. "A finite element computational scheme for transient and nonlinear coupling thermoelectric fields and the associated thermal stresses in thermoelectric materials." *Applied Thermal Engineering* 110 (2017): 136-143.
- [27] Belytschko, Ted, Robert Gracie, and Giulio Ventura. "A review of extended/generalized finite element methods for material modeling." *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 17, no. 4 (2009): 043001.
- [28] Duflo, Marc. "The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 74, no. 5 (2008): 827-847.

Abstract

In this thesis, stress intensity factors and T stress for an insulating crack in a thermoelectric environment under thermal shock have been calculated using the eXtended Finite Element Method. Thermoelectric properties of the plate are temperature dependent. The nonlinear governing equations are firstly discretized in the domain of space by the eXtended Finite Element Method and then solved by Newmark's integration method in the realm of time. In some numerical examples, the effect of thermal shock on the stress intensity factor and T stress is investigated. The stress intensity factors in the thermal-electric loading are increased with the arrival of the stress wave to the thermal crack tip. According to the results of this research, T stress has a significant effect on the starting angle of the crack. T stress initially increased at constant zero in the time zero, and then, with the maximum value at constant time and proportional to the displacement, the trend was reduced, and then the T stress was stable. Parameter B initially increases at the time of zero to a maximum value, and then decreases, and then it becomes constant in proportion to the time and radius of the tip of the crack.

Keywords

Thermoelectric Materials, Crack, Thermal shock, eXtended Finite Element Method, Stress intensity factors, Stress T



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

**Computation of stress intensity factors in
thermoelectric media subjected to the
thermal shock considering temperature-
dependent properties and using eXtended
Finite Element Method**

By:

Mohammad Dazi

Supervisor(s):

Dr. Mohammad Bagher Nazari

Dr. Masoud Mahdizadeh Rokhi

September 2019