بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک

شبیه سازی جریان جت مدور به روش حل مستقیم عددی

دانشجو : محمد رضا کریمی

استاد راهنما:
دکتر محمد جواد مغربی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۸۹

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده :

گروه :

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای محمد رضا کریمی

تحت عنوان : شبیه سازی جریان جت مدور به روش حل مستقیم عددی

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تا کی ز چراغ مسجد و دود کنشت

تا کی ز زیان دوزخ و سود بهشت

رو بر سر لوح بین که استاد قضا

اندر ازل آنچه بودنی بود نوشت

خیام

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

با سپاس از خداوند یکتا، لازم می دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، بخصوص جناب آقای دکتر مغربی که مرا در انجام این پایان نامه راهنمایی کردند، صمیمانه قدر دانی نمایم. همچنین از کمک های بی دریغ دوستان خوبم آقایان بابک حقیقی و حمید رضا الله بخش کمال تشکر را دارم و برای همه این عزیزان در زندگی سلامت و خشنودی آرزو می کنم.

محمد رضا کریمی

بهمن ۱۳۸۹

amin_karimi@rocketmail.com

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

بهمن ۸۹

چکیده

جت مدور آزاد زمانی حاصل می شود که سیال با یک ممنتوم اولیه داده شده، از یک نازل دایره ای به محیطی نامحدود تخلیه شود. جریان های جت مدور بخاطر هندسه ساده ای که دارند، در بسیاری از کاربرد های مهندسی مانند پیشرانش، اختلاط و آیرواکوستیک یافت می شوند. آنها همچنین از نقطه نظر تئوری مهم هستند زیرا الگویی مناسب برای جریان های آزاد ارائه می کنند.

معادلات حاکم در مکانیک سیالات عموما معادلات ناویر- استوکس می باشند. از آنجا که این معادلات ماهیتا غیر خطی هستند، حل های دقیق آنها بندرت یافت می شود. بنابراین پاسخ های دقیق تنها می توانند با حل کردن عددی معادلات ناویر- استوکس بدست آیند. در اینجا ما به نوع خاصی موسوم به شبیه سازی مستقیم عددی (DNS) اشاره داریم که در آن همه مشخصات جریان با جزئیات محاسبه می شوند.

در کار پیش رو شبیه سازی مستقیم عددی جریان یک جت مدور در حال توسعه مکانی انجام شده است. معادلات ناویر- استوکس تراکم ناپذیر دو بعدی در یک سیستم مختصات استوانه ای حل شده اند. این معادلات در یک دامنه که در جهت جریان (x) محدود و در جهت عمود بر جریان (r) نا محدود می باشد، حل می شوند. برای محاسبه مشتقات مکانی یک طرح تفاضل محدود فشرده در جهت x و یک روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی در جهت r بکار رفته است. روش رانج-کوتای مرتبه سوم فشرده برای توسعه شبیه سازی عددی در زمان استفاده شده است. نتایج شبیه سازی در عدد رینولدز پایین بدست آمده و رابطه توانی برای نقصان خط مرکزی و نیم عرض جت بعنوان تابعی از فاصله از ورودی جریان بررسی شده است. پروفیل های سرعت و ورتیسیته در ایستگاههای مختلف در جهت جریان رسم شده و پدیده خود تشابهی مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین با اعمال برخی اغتشاشات در ورودی جریان، سرعت های متوسط و نوسانی بدست آمده و توزیعات تنش رینولدز بررسی شده است.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل اول

پیشگفتار

۱-۱) مقدمه

با جریان های جت در محدوده وسیعی از کاربرد های مهندسی شامل احتراق، فرایند های شیمیایی، تصفیه آلاینده ها و فرایند های خنک کردن، مخلوط کردن و خشک کردن مواجه می شویم. جت ها همچنین از جریان های پایه محسوب می شوند که از اهمیت تئوری قابل توجهی برخوردارند. جریان جت با استفاده از سه گونه تحقیق علمی مورد بررسی قرار گرفته است: تئوری، شبیه سازی محاسباتی یا مدل سازی و آزمایش. در حال حاضر پذیرفته شده است که هر جریان برشی با ساختارهای منسجمی[1] توصیف می شود که از اندازه های مختلف بوده و عهده دار تبادل انرژی بین جریان متوسط و اغتشاش می باشند، بخصوص در ناحیه دوردست یک جت. تحول و اثر متقابل آنها یک میدان جریان سه بعدی پیچیده را بوجود می آورد که سرانجام به سمت یک حالت خود متشابه[2] میل می کند. علیرغم بررسی های آزمایشگاهی بی شمار در مورد جریان های جت، بسیاری از جنبه های جریان بخاطر دشواری های موجود در پیش بینی دقیق برهم کنش ساختارهای جریان ناشناخته مانده است [۱].

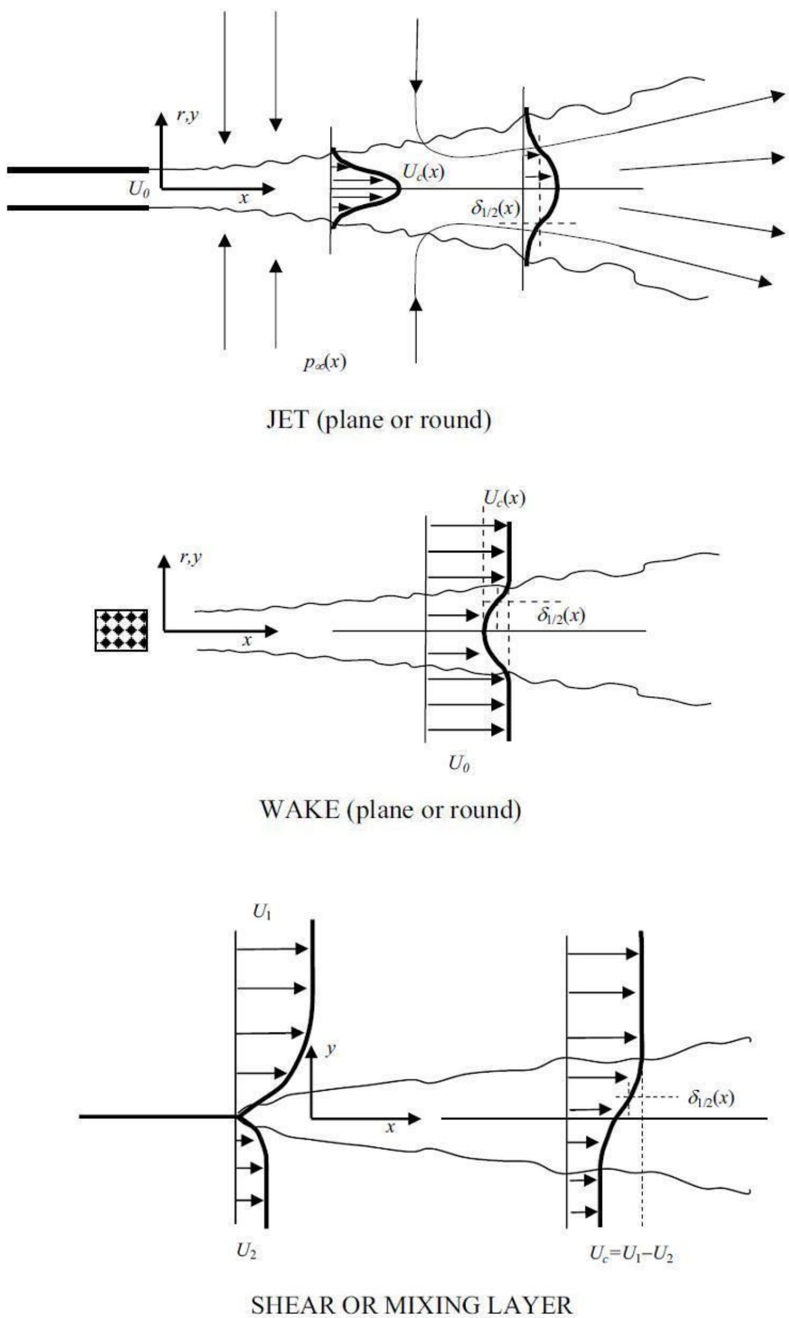
۱-۲) جریان های برشی آزاد[3]

لایه های بدون برش توسط دیوار محصور نمی شوند و در یک سیال باز ایجاد شده و گسترش می یابند. آنها گرادیان های سرعتی دارند که توسط مکانیزم هایی از بالادست ایجاد می شوند و توسط انتشار لزجت از بین می روند. سه مثال از این جریان ها عبارتند از: (۱) لایه بدون برش بین جریان های موازی در حال حرکت، (۲) یک جت، (۳) دنباله ای که پشت یک جسم غوطه ور در یک جریان ایجاد می شود.

درست در پایین دست اختلالی که باعث ایجاد گرادیان سرعت شده است (نقطه برخورد دو جریان به یکدیگر، خروجی جت، پشت جسم غوطه ور)، جریان در حال گسترش و غیر متشابه است. اما کمی

[1] coherent structures
[2] self-similar state
[3] free shear flows

دورتر در پایین دست، جریان متشابه خواهد شد و پروفیل های سرعت همگی در صورت انتخاب مقیاس مناسب، شبیه به هم خواهند بود [۲].



شکل ۱-۱ : مثال هایی از جریان برشی آزاد [۳].

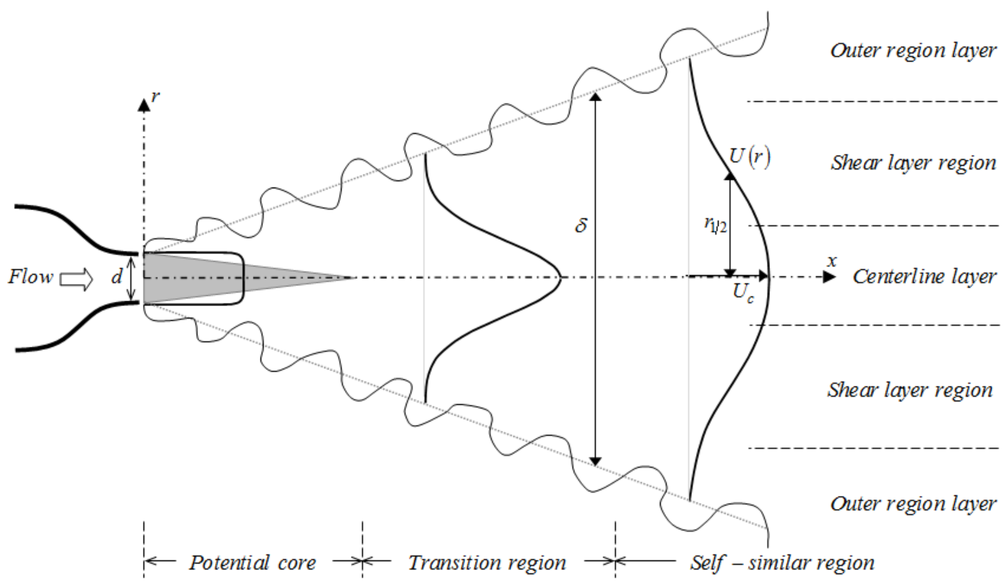
۱-۳) توصیف جریان

جت آزاد مدور که طرح آن در شکل ۱-۲ نمایش داده شده است بخشی از خانواده بزرگ جریان های برشی آزاد است. مولفه های سرعت در مختصات قطبی x ، r و θ به ترتیب با U ، V و W علامت گذاری شده اند. ترم های موجود در تفکیک رینولدز به شکل $U=\bar{U}+u'$ مشخص گردیده اند که در آن $\bar{U}$ سرعت متوسط و u' سرعت نوسانی در جهت جریان می باشند. در نازل با قطر مجرای خروجی d ، سرعت متوسط خروجی برابر U_j بوده و سرعت متوسط خط مرکزی محلی با U_c نشان داده می شود. مرز به هم پیچیده در شکل ۱-۲ لبه بیرونی لایه برشی بین جریان جت مملو از ورتیسیته بالا و سیال محیط تقریبا در حال سکون را نمایش می دهد. دو مقیاس طول مشخصه رایج در شکل ۱-۲ نشان داده شده اند که شامل نیم عرض[۴] جت $r_{1/2}$ و قطر متوسط زمانی محلی[۵] δ می شوند.

سه منطقه متفاوت را می توان در جت مدور متقارن تعریف کرد: ناحیه نزدیک، ناحیه میانی و ناحیه دوردست. ناحیه نزدیک (اغلب بعنوان منطقه ای که شامل هسته پتانسیل[۶] می باشد از آن نام برده می شود) ناحیه ای است که در آن مشخصات جریان نظیر جریان خروجی از نازل است و معمولا در محدوده $0 \le x/d \le 6$ یافت می شود. ناحیه دور دست در حدود $x/d \ge 30$ قرار گرفته و منطقه کاملا توسعه یافته یا خود متشابه است. ناحیه میانی بین نواحی نزدیک و دور دست قرار می گیرد. نواحی نزدیک و میانی (به اختصار NIF) با هم قسمت توسعه جت را در بر دارند. NIF معمولا در کاربرد های عملی جت حکمفرما است چون شرایط بالادست می تواند تاثیر مهمی بر انتقال حرارت، جرم و ممنتوم داشته باشد. بنابراین قابلیت کنترل توسعه جریان در این ناحیه ممکن است اثر حیاتی بر بسیاری از کاربرد های مهندسی داشته باشد. در جهت شعاعی سه منطقه دیگر قابل تشخیص اند: ناحیه خط مرکزی، لایه برشی و لایه بیرونی. ناحیه خط مرکزی جایی است که سرعت میانگین

[4] half-width
[5] local time-averaged diameter
[6] potential core

محوری در ماکزیمم خود قرار دارد. در مناطق نزدیک و میانی، اغتشاش نمو می کند تا در نهایت با ورود به منطقه دوردست جت به یک حالت متعادل برسد. در لایه برشی هسته های گردابه[۷] شکل گرفته و تحول می یابند تا گرداب های بزرگ را بخاطر گرادیان سرعت بالا در جهت شعاعی بوجود آورند. سرعتها در لایه بیرونی حدود ۱۰٪ مقدار U_c بوده و البته به سرعت به مقادیر جریان آزاد در $r \to \infty$ تنزل می یابند [۱].



شکل ۱-۲ : طرح جت آزاد مدور و سیستم مختصات.

۱-۴) حل عددی جریان ها

سه نوع عمده از روش های عددی سنتی وجود دارند که می توان از آنها برای پیش بینی جریان ها استفاده کرد. این روش ها شبیه سازی مستقیم عددی[۸] (DNS)، شبیه سازی گردابه های بزرگ[۹] (LES)، و مدل های توربولانس بر پایه معادلات ناویر- استوکس میانگین گیری شده رینولدز[۱۰] $(RANS)$ می باشند. این سه روش همگی بر اساس معادلات گسسته شده حاکم بر حرکت می باشند.

[7] vortex cores
[8] direct numerical simulation
[9] large eddy simulation
[10] Reynolds averaged Navier-Stokes

هر کدام از اینها مزایا و معایب خاص خود را در ارتباط با کاربرد و سهولت دارند.

در یک DNS معادلات گسسته شده ناویر- استوکس برای کوچکترین مقیاس های طول و زمان در سراسر دامنه محاسباتی حل می شوند. در نتیجه DNS به لحاظ محاسباتی پر هزینه است (هزینه محاسبات با Re^3 افزایش می یابد) و بنابراین یک DNS بجز برای دامنه های کوچک از جریان های مغشوش با عدد رینولدز پایین غیر عملی است. حل بعدی به لحاظ دقت شبیه سازی گردابه های بزرگ (LES) است.

در یک LES از منابع محاسباتی با بکار بردن محتاطانه معادلات ناویر- استوکس فیلتر شده حفاظت می شود. رفتار ساختارهای مقیاس کوچک که کمابیش در جریان های اغتشاش عمومیت دارند، بخاطر نقش عمده شان در پراکندگی انرژی به ویسکوزیته مدلسازی می شود. گردابه های با مقیاس بزرگ که برای هر جریان داده شده منحصر به فرد می باشند (بخاطر وابستگی شان به مقیاس های طول و سرعت اغتشاش)، بطور مستقیم با استفاده از معادلات ناویر- استوکس فیلتر شده حل می شوند. در نتیجه یک LES می تواند در یک شبکه درشت تر جهت پیش بینی جریان های علمی که بیشتر مورد توجه اند (جریان های با رینولدز بالاتر و دامنه بزرگتر)، انجام گیرد.

در مدل های $RANS$ مقیاس های مختلف اغتشاش نه مستقیما حل می شوند و نه حل نمی شوند. در عوض حرکات اغتشاش با میدان های متوسط گیری شده زمانی ترکیب می گردند که بوسیله یک مدل ویسکوزیته پیش بینی شده اند. ویسکوزیته مغشوش از یک رابطه جبری یا بطور معمول از معادلات انرژی بدست می آید. مدل های اغتشاش چندان برای تحقیقات اغتشاش مناسب نیستند.

روش های دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) می توانند در تدارک کارهای آزمایشگاهی استفاده شوند. با این مزیت که تمام یک میدان سه بعدی می تواند به شکل نسبتا آسانی مورد تحقیق قرار گیرد، یک روش CFD اجازه انجام یک بررسی اولیه را جهت مشخص ساختن مناطقی می دهد که باید به طور کامل با اندازه گیری آزمایشگاهی قابل اعتماد بررسی شوند.

در وهله اول مطالعات تصویر سازی جریان[11] با استفاده از روش های *CFD* می توانند خیلی مفید باشند. با یک مجموعه کامل از داده ها (تغییر زمان در فضای سه بعدی مورد نظر) می توان به آسانی تحول جریان را دید و تفسیر کرد تا کیفیت هایی که دارای مزیت برای بررسی های بیشترند، کشف شوند. این کیفیت ها معمولا به سادگی بواسطه تصویر سازی مقادیر متوسط مثل سرعت، ورتیسیته و غیره تعیین می شوند.

دوم اینکه روش های *CFD* می توانند همگام با روش های آزمایشگاهی برای توسعه محدوده یک مطالعه پارامتری استفاده شوند. با تنظیم یک حالت جریان در فضای محاسباتی، می توان به طور مستقیم شرایط جریان را جهت مطالعه اثرات حاصله بهبود داد، بطور مثال شرایط ورودی جت. با یک روش *CFD* پروفیل های سرعت متوسط و نوسانی هر دو مستقیما در پیش پردازش یک شبیه سازی جریان مشخص می شوند. در مقابل در یک آزمایش عموما تغییر مقادیر جریان متوسط و نوسانی بطور مستقل، عملی نمی باشد [۴].

۱-۵) شبیه سازی مستقیم عددی

دقیق ترین شیوه شبیه سازی جریان، حل معادلات ناویر- استوکس بدون میانگین گیری و تقریب زدن می باشد، بجز در گسسته سازی عددی که خطای آن قابل محاسبه و کنترل می باشد. در شبیه سازی های مستقیم عددی تمام حرکاتی که جریان در بر دارد حل می شوند. این شیوه ساده ترین رویکرد را از نقطه نظر مفهومی دارا می باشد. با *DNS* می توانیم به اطلاعات جامعی درباره سرعت و فشار و هر متغیر سودمندی در تعداد نقاط زیادی از شبکه برسیم. این نتایج را می توان بعنوان معادل نتایج آزمایشگاهی در نظر گرفت و از آن برای تولید اطلاعات آماری و یا تصویر سازی عددی جریان استفاده کرد[۵].

DNS بطور موفقیت آمیزی برای جریان های داخلی مانند کانال و یا لوله بکار رفته است. هر چند که شبیه سازی جریان های برشی آزاد مشکل تر است. به دلیل اینکه مرز مشخصی که جریان را محدود

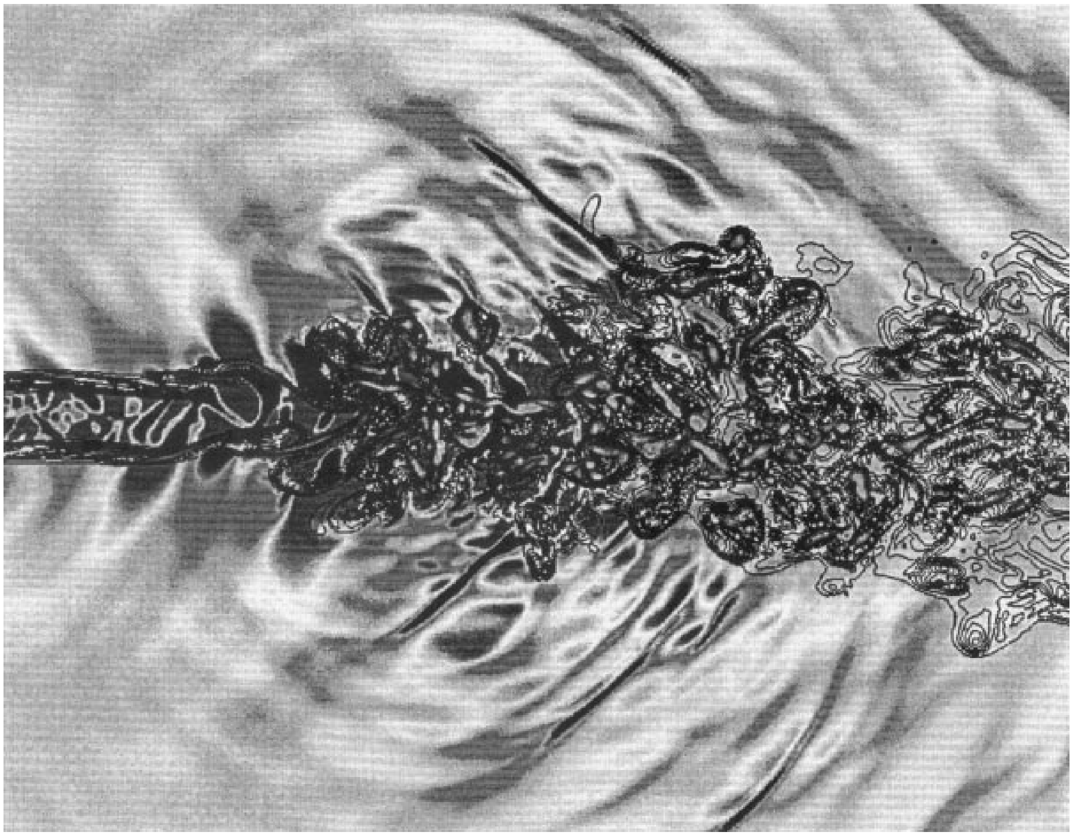
[11] flow visualization

می سازد وجود ندارد و بنابراین دامنه محاسباتی باید ابعاد وسیعی داشته باشد تا بتواند تمامی میدان جریان را در بر گیرد. علاوه بر این با توسعه مکانی[12] بعنوان نتیجه ای از ورود سیال پیرامون به داخل جریان سروکار داریم. با توجه به مشکل اخیر، بیشتر مطالعات مربوط به شبیه سازی جریان برشی آزاد محدود به جریان های در حال توسعه زمانی شده اند تا اینکه به توسعه مکانی آن بپردازد[۶].

بیشتر جریان های برشی آزاد مورد مطالعه در مهندسی مغشوش اند. این بدین خاطر است که پروفیل های سرعت عموما شامل نقاط عطف می باشند، بنابر این جریان ها کاملا ناپایدارند [۷]. رفتار پیچیده اغتشاش نتیجه مجموعه ای از معادلات نسبتا ساده یعنی معادلات ناویر- استوکس می باشد. اگرچه حل تحلیلی ساده ترین جریان های مغشوش نیز وجود ندارند. بنابراین یک توصیف کامل از یک جریان مغشوش، که در آن متغیر های جریان (بعنوان مثال سرعت و فشار) تابعی از مکان و زمان می باشند، می تواند تنها با حل کردن عددی معادلات ناویر- استوکس بدست آید. شبیه سازی های مستقیم عددی در تحقیقات اغتشاش در دهه های اخیر نقش موثری داشته اند. در دسترس بودن اطلاعات خام مربوط به *DNS* مسیر جدیدی را گشوده است که محققان را از حوزه های مختلف و با دیدگاه های متفاوت گرد هم آورده است. هرچند تولید داده ها زمان بر است، تحلیل اطلاعات ذخیره شده کم هزینه می باشد. بنابراین ایده ها و تئوری های جدید براحتی قابل آزمودن می باشند.

آینده *DNS* در تحقیقات اغتشاش درخشان است. به نظر می رسد بزرگترین توانایی *DNS* امکان کنترل دقیق جریان مورد مطالعه می باشد. حوزه های بنیادی مرتبط با آیرواکوستیک[13]، کنترل جریان، جریان های با سرعت بالا و جریان های واکنش دهنده، احتمالا پیشرفت های قابل توجهی در دهه های پیش رو خواهند داشت. با امکانات کامپیوترهای کنونی عدد رینولدز محاسبات نسبتا کم می باشد. افزایش قدرت کامپیوترها باعث بهبود نمونه های آماری و بررسی محدوده وسیعتری از دیگر پارامتر های فیزیکی خواهد شد [۸].

[12] spatial development
[13] aeroacoustic



شکل ۱-۳ : صوت منتشر شده بوسیله جت مدور با عدد ماخ ۱.۹، کانتور های ورتیسیته (سیاه) و کانتور های اتساع (خاکستری) روی هم قرار گرفته اند. محاسبات بوسیله J Freund ، SK Lele و P Moin انجام شده است [۸].

در این پروژه سعی داریم جریان جت مدور غیر قابل تراکم را به کمک روش حل مستقیم عددی مورد مطالعه قرار دهیم. با توجه به اینکه معادلات بدون تقریب زدن و ساده سازی حل می شوند انتظار نتایجی دقیق تر از روش های عددی دیگر را داریم. همچنین با بکار گیری طرح های عددی با دقت بالا برای گسسته سازی های مکانی و زمانی معادلات، تا حد امکان سعی در کاهش خطاهای محاسباتی می شود. روش مورد استفاده امکان تغییر مستقیم شرایط مسئله را به ما می دهد. به این ترتیب می توانیم بعنوان مثال شرط اولیه متفاوتی را بکار برده و یا نوساناتی را در ورودی دامنه محاسباتی قرار دهیم. سر فصل های پیش رو شامل مطالب زیر است: در فصل دوم کارهای قبلی انجام شده بر روی جت مدور مرور می شوند. در فصل سوم معادلات مورد استفاده در شبیه سازی بیان شده و شرایط مرزی مسئله مشخص می شود. روش های عددی برای محاسبه مشتقات و توسعه زمانی

معادلات در فصل چهارم معرفی می شوند. در فصل پنجم نتایج حاصل از شبیه سازی برای دو حالت آرام و حالت همراه با اغتشاشات را مشاهده خواهید کرد. در انتها نتایج بدست آمده به اختصار جمع بندی شده و پیشنهاداتی جهت بهبود پروژه ارائه شده است.

فصل دوم

کارهای گذشته

۲-۱) مقدمه

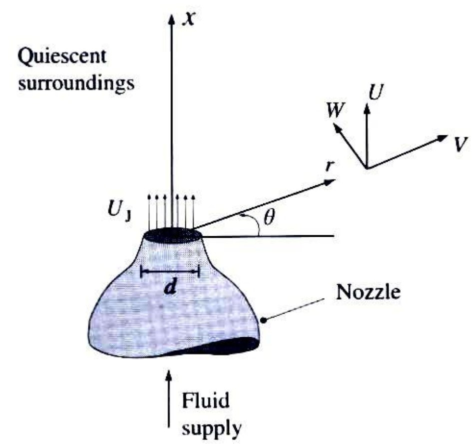
جت های مدور بطور گسترده ای در دهه های اخیر مورد مطالعه قرار گرفته اند. شمار زیاد مقالات موجود، شامل تحلیل های تئوری، آزمایشگاهی و عددی، گویای اهمیت عملی و بنیادی جت های مدور می باشد. در این فصل در ابتدا با ویژگی های فیزیکی و نیز برخی مفاهیم مورد نیاز برای مطالعه جریان جت آشنا می شویم. سپس به حل های تحلیلی ارائه شده برای جت مدور می پردازیم. این حل ها بر اساس این فرض ارائه شده اند که در جت مدور، یک جهت جریان غالب (جهت x) وجود دارد، سرعت شعاعی نسبتا کوچک است و جریان به تدریج گسترش می یابد. به این ترتیب گرادیان های محوری در مقایسه با گرادیان های شعاعی کوچک می باشند. علاوه بر این از آنجا که دیوار های محصور کننده ای وجود ندارد، گرادیان فشار برابر صفر است. این خصوصیات که برای همه جریان های برشی آزاد مشترک است اجازه می دهد معادلات لایه مرزی بجای معادلات کامل ناویر- استوکس استفاده شوند. در انتها خلاصه ای از کارهای تجربی و عددی صورت گرفته در زمینه جت مدور شرح داده می شود.

۲-۲) مشاهدات آزمایشگاهی [۹].

شکل آزمایشگاهی و سیستم مختصات ایده آل جت مدور در شکل ۲-۱ نمایش داده شده است. یک سیال نیوتنی از نازلی به قطر d خارج می شود بطوری که یک پروفیل یکنواخت با سرعت U_j می سازد. جت از نازل به یک محیط پیرامونی از همان سیال که در بینهایت ساکن است، جریان می یابد. از آنجا که جریان متقارن می باشد کمیت ها به مختصات محوری و شعاعی (x و r) وابسته اند اما مستقل از مختصه محیطی (θ) می باشند.

در آزمایش ایده آل، جریان بطور کامل با U_j ، d و ν تعریف می گردد و بنابر این تنها پارامتر بی بعد عدد رینولدز است که بشکل $Re=U_j d/\nu$ تعریف می شود. البته در عمل جزئیات نازل و محیط اثرگذار می باشند.

همانطور که انتظار می رود سرعت غالبا در جهت محوری است. پروفیل های شعاعی اندازه گیری شده از سرعت محوری در شکل ۲-۲ دیده می شوند (توجه کنید که $r=0$ محوری است که پروفیل U حول آن متقارن است). آنچه در شکل ۲-۲ نمایش داده نشده است، ناحیه توسعه ابتدایی ($0 \le x/d \le 25$) است که در آن پروفیل ها از حالت تقریبا صاف و مساوی به شکل مدور در می آیند. سرعت پیرامونی برابر صفراست (یعنی $W=0$) در صورتیکه سرعت شعاعی V، با یک مرتبه از بزرگی کوچکتر از U است.



شکل ۲-۱ : طرحی از یک جت مدور آزمایشگاهی، سیستم مختصات استوانه ای بکار رفته نشان داده شده است [۹].

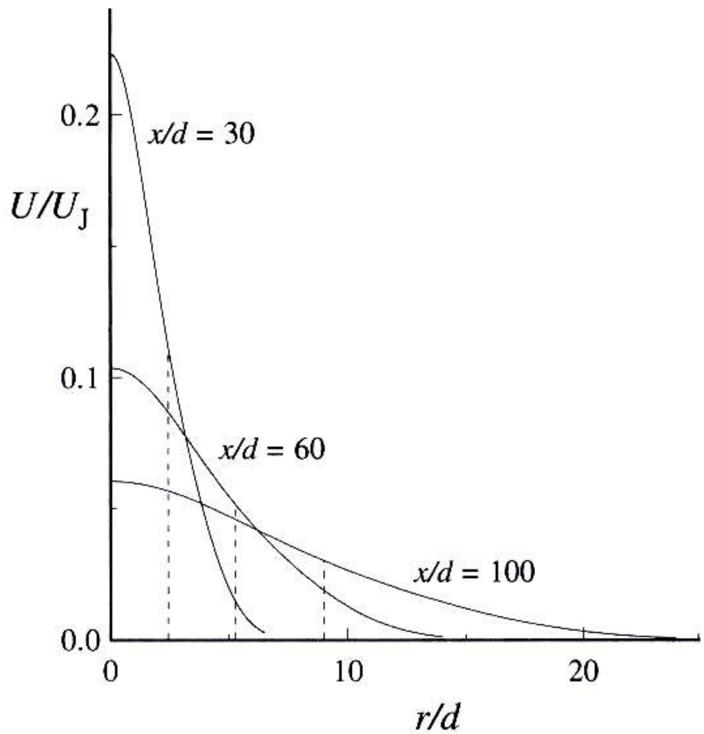
بر حسب میدان سرعت محوری، $U(x,r,\theta)$ (که مستقل از θ می باشد)، سرعت خط مرکزی برابر است با:

$$U_c(x) = U(x,0,0) \qquad (۲-۱)$$

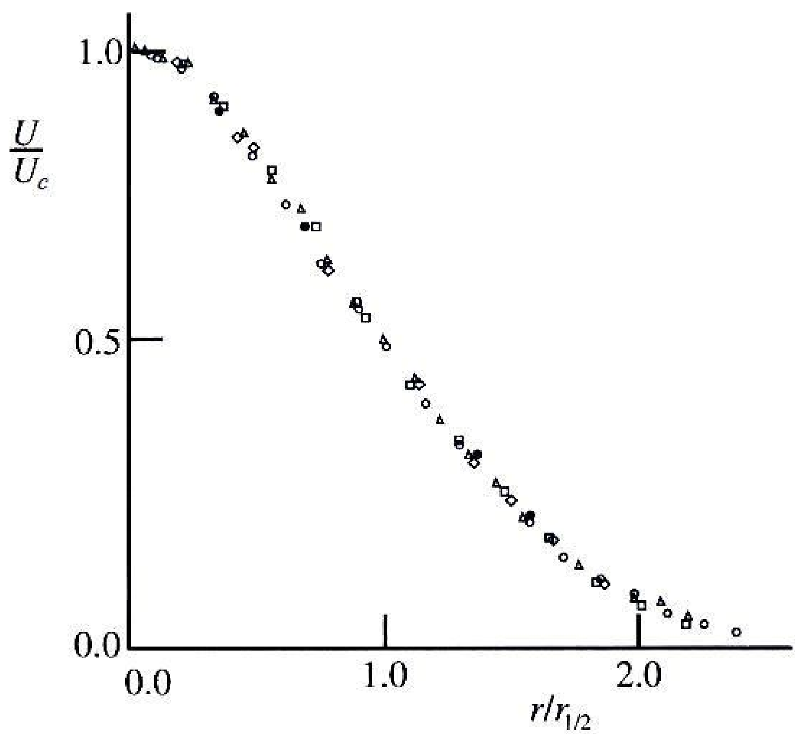
و نیم عرض جت $r_{1/2}(x)$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$U(x, r_{1/2}(x), 0) = \frac{1}{2} U_c(x) \qquad (۲-۲)$$

دو نکته قابل ملاحظه از شکل ۲-۲ این است که با افزایش فاصله محوری، جت ضعیف می شود (به عبارتی $U_c(x)$ کاهش می یابد) و دیگر اینکه جت گسترش می یابد (یعنی $r_{1/2}(x)$ افزایش می یابد). با ضعیف شدن و گسترش جت، پروفیل های سرعت مانند آنچه در شکل ۲-۲ دیده می شود تغییر می کنند



شکل ۲-۲ : پروفیل شعاعی سرعت محوری در یک جت مدور، خطوط نقطه چین نشان دهنده نیم عرض پروفیل می باشند [۹].



شکل ۲-۳ : سرعت محوری بر حسب فاصله شعاعی در یک جت مدور، علائم: ○ $x/d=40$ ، ▵ $x/d=50$ ، □ $x/d=60$ ، ◊ $x/d=75$ ، ● $x/d=97.5$ [۹].

اما شکل پروفیل ها بدون تغییر می ماند. آنسوی ناحیه در حال توسعه (مثلا $x/d \geq 30$) پروفیل های رسم شده $U/U_c(x)$ برحسب $r/r_{1/2}(x)$ ، روی منحنی واحدی قرار می گیرند. شکل ۲-۳ داده های آزمایشگاهی ویگنانسکی و فیدلر[1] (۱۹۶۹) را برای x/d های بین ۴۰ تا ۱۰۰ نمایش می دهد. نتیجه مهم این است که پروفیل سرعت خود متشابه شده است.

۲-۲-۱) خود تشابهی

خود تشابهی مفهوم با اهمیتی است که در زمینه های مختلف مورد مطالعه در جریان ها مطرح می گردد. برای درک ایده کلی، کمیت $Q(x,y)$ را که تابعی از دو متغیر مستقل است در نظر بگیرید. بعنوان تابعی از x، مقیاس های مشخصه $Q_0(x)$ و $\delta(x)$ به ترتیب برای متغیر وابسته Q و متغیر مستقل y تعریف می شوند. سپس متغیرهای مقیاس بندی شده به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\xi \equiv \frac{y}{\delta(x)} \tag{۲-۳}$$

$$\tilde{Q}(\xi,x) \equiv \frac{Q(x,y)}{Q_0(x)} \tag{۲-۴}$$

چنانچه متغیر وابسته مقیاس بندی شده مستقل از x باشد ، یعنی تابعی مثل $\hat{Q}(\xi)$ وجود داشته باشد که:

$$\tilde{Q}(\xi,x) = \hat{Q}(\xi) \tag{۲-۵}$$

آنگاه $Q(x,y)$ خود متشابه است. در این حالت $Q(x,y)$ می تواند بصورت تابعی از متغیرهای مستقل تکی مثل $Q_0(x)$ ، $\delta(x)$ و $\hat{Q}(\xi)$ بیان گردد. نکات زیر قابل ذکر می باشد:

۱- مقیاس های $Q_0(x)$ و $\delta(x)$ می بایست به شکل مناسبی انتخاب شوند. آنها معمولا یک وابستگی توانی با x دارند.

[1] Wygnanski & Fiedler

۲- در بعضی مواقع به تغییرات بیشتری نیاز است. بطور مثال:

$$\tilde{Q}(\xi, x) = \left[Q(x,y) - Q_\infty(x)\right] / Q_0(x) \qquad (۶-۲)$$

۳- رفتار خود متشابه ممکن است در محدوده ای از x مشاهده شود و نه برای همه مقادیر x.

۴- چنانچه کمیت $Q(x,y)$ با یک معادله دیفرانسیل جزئی بیان گردد، آنگاه $Q_0(x)$ ، $\delta(x)$ و $\hat{Q}(\xi)$ با معادلات دیفرانسیل معمولی بیان می شوند.

۲-۲-۲) تغییرات محوری سرعت خط مرکزی و نیم عرض

ما نیاز داریم که تغییرات محوری $U_c(x)$ و $r_{1/2}(x)$ را مشخص نمائیم. شکل ۲-۴ معکوس $U_c(x)$ را برای جت مدور بصورت $U_j/U_c(x)$ بر حسب x/d نشان می دهد. ظاهرا در محدوده x/d های موجود، داده های آزمایشگاهی روی یک خط راست قرار می گیرند. محل تقاطع این خط با محور افقی به عنوان مبدا موهومی[2] معرفی و با x_0 نشان داده می شود. بنابراین خط راست در شکل ۲-۴ مطابق است با:

$$\frac{U_c(x)}{U_j} = \frac{B}{(x - x_0)/d} \qquad (۷-۲)$$

که در آن B یک ثابت تجربی می باشد. بدیهی است رفتار خط راست و معادله فوق در منطقه در حال توسعه و در نزدیکی دهانه نازل صحت ندارد. نرخ رشد جت بصورت زیر تعریف می شود:

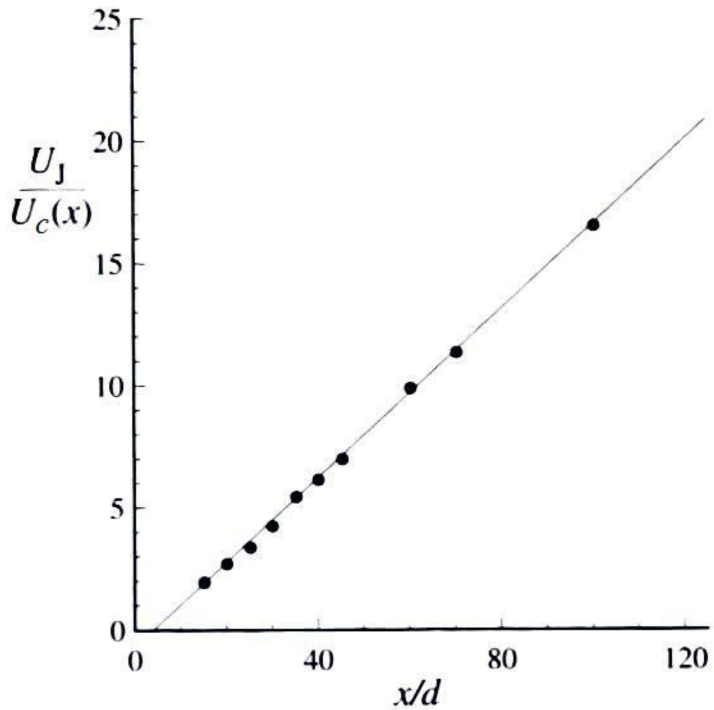
$$S \equiv \frac{dr_{1/2}(x)}{dx} \qquad (۸-۲)$$

با توجه به اینکه جت بصورت خطی گسترش می یابد، قانون تجربی برای $r_{1/2}(x)$ در ناحیه خود متشابه بشکل زیر می باشد:

$$r_{1/2}(x) = S(x - x_0) \qquad (۹-۲)$$

بقای ممنتوم بر این نکته دلالت می کند که حاصلضرب $r_{1/2}(x)U_c(x)$ مستقل از x می باشد زیرا که

[2] virtual origin



شکل ۲-۴ : تغییرات سرعت روی خط مرکزی با فاصله محوری در یک جت مدور، نقاط مربوط به داده های آزمایشگاهی و خط بر اساس معادله ۲-۷ با $x_0/d = 4$ و $B = 5.8$ می باشند [۹].

$r_{1/2} \sim x$ و $U_c \sim x^{-1}$.این تغییرات همچنین نشان می دهد که عدد رینولدز محلی که عبارتست از:

$$Re_0(x) = r_{1/2}(x) U_c(x) / \nu \tag{۱۰-۲}$$

مستقل از x است.

در آزمایش جت مدور ایده آل، تنها پارامتر بی بعد عدد رینولدز جت می باشد. در ناحیه خود متشابه در جت های با رینولدز بالا ثابت های تجربی در معادلات ۲-۷ و ۲-۹ مستقل از عدد رینولدز می باشند. تفاوت های کوچک در مقادیر اندازه گیری شده B و S ناشی از خطای اندازه گیری است. همچنین با توجه به ملاحظات دیداری، نرخ رشد جت ها با عدد رینولدزی هزاران برابر بزرگتر عددی یکسان است. عدد رینولدز بر جریان اثر گذار است: ساختار های با مقیاس کوچک در عدد رینولدز بالاتر کوچکتر می باشند اگرچه پروفیل سرعت و نرخ رشد مستقل از Re می باشند.

متغیر تشابهی در عرض جریان را می توانیم:

$$\xi \equiv r/r_{1/2} \tag{۱۱-۲}$$

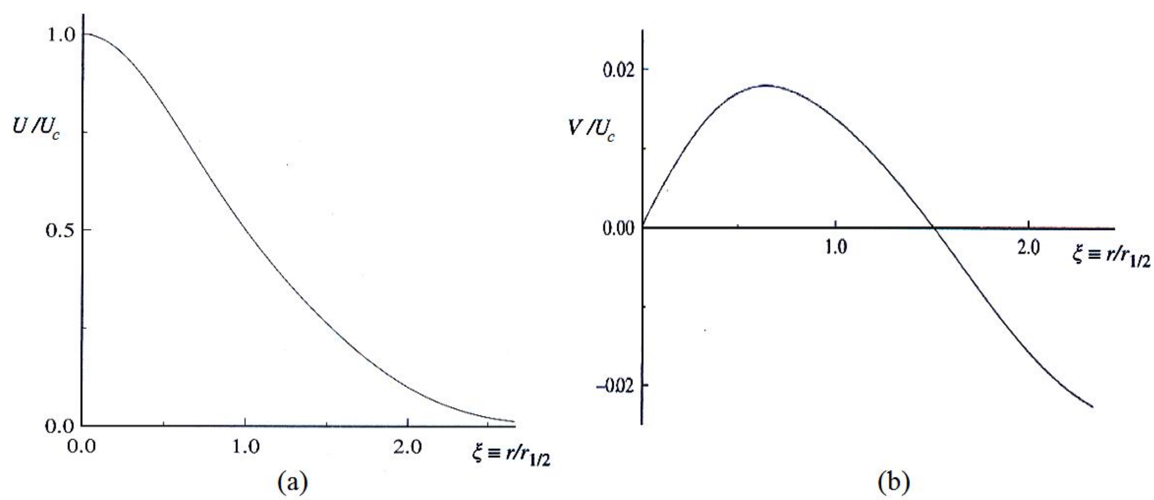
یا:

$$\eta \equiv r/\left(x-x_0\right) \tag{۱۲-۲}$$

در نظر بگیریم. این دو با $\eta = S\xi$ به همدیگر مرتبط می شوند. پروفیل سرعت خود متشابه به این صورت تعریف می شود:

$$f\left(\eta\right)=\overline{f}\left(\xi\right)=U\left(x,r\right)/U_c\left(x\right) \tag{۱۳-۲}$$

این پروفیل در شکل ۲-۵ قسمت a نشان داده شده است.



شکل ۲-۵ : پروفیل خود متشابه (a) سرعت محوری، (b) سرعت شعاعی.

در ناحیه خود متشابه جت مدور، سرعت عرضی V می تواند از U با استفاده از معادله پیوستگی مشخص شود. شکل ۲-۵ قسمت b پروفیل خود متشابه V/U_c را که از این طریق به دست آمده نمایش می دهد. مشاهده می شود که V خیلی کوچکتراز U_c می باشد. توجه کنید V در لبه جت مقدار منفی دارد که بیانگر این است که سیال اطراف به داخل جت جریان دارد و به اصطلاح ربوده[۳] می شود.

[3] entrained

۲-۳) حل تحلیلی جت مدور [۱۰].

ابتدا جت مدور لایه ای را در نظر می گیریم که یک دهانه کوچک دایره ای را ترک می کند و با سیال پیرامون مخلوط می شود. در بیشتر حالتهای کاربردی جت مدور مغشوش می باشد اما از آنجایی که منجر به یک معادله دیفرانسیل یکسان با حالت آرام می گردد، مورد اخیر را با جزئیات بیشتری مورد بررسی قرار می دهیم.

با فرض ثابت بودن فشار، شار مومنتوم (J) در جهت x ثابت می باشد:

$$J=\int_0^{\infty}\rho U^2 dA=2\pi\rho\int_0^{\infty}U^2 r dr=const \qquad (۲-۱۴)$$

با سیستم مختصات انتخاب شده معادله حرکت در جهت x، با ساده سازی های معمول لایه مرزی، به همراه معادله پیوستگی می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) \qquad (۲-۱۵)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV)=0 \qquad (۲-۱۶)$$

شرایط مرزی عبارتند از :

$$\begin{aligned} &r=0: \quad V=0\ ,\ \frac{\partial U}{\partial r}=0 \\ &r=\infty: \quad U=0 \end{aligned} \qquad (۲-۱۷)$$

پروفیل سرعت $U(x,r)$ را می توان متشابه فرض کرد. عرض جت متناسب با x^n در نظر گرفته می شود. متغیر تشابهی و تابع جریان به شکل زیر فرض می شوند:

$$\psi \sim x^p F(\eta) \qquad , \qquad \eta=\frac{r}{x^n} \qquad (۲-۱۸)$$

به منظور تعیین p و n می توانیم از دو شرط زیر استفاده کنیم: اول اینکه شار مومنتوم از معادله ۲-۱۴ باید مستقل از x باشد و دیگر اینکه ترمهای اینرسی و ویسکوز در معادله ۲-۱۵ باید از یک مرتبه بزرگی

باشند. بنابراین:

$$U \sim x^{p-2n} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial x} \sim x^{p-2n-1} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial r} \sim x^{p-3n} \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) \sim x^{p-4n} \qquad (۱۹\text{-}۲)$$

در نتیجه دو معادله زیر برای p و n بدست می آیند:

$$2p-4n+2n=0 \quad , \quad 2p-4n-1=p-4n \qquad (۲۰\text{-}۲)$$

پس $p=n=1$ و بنابراین قرار می دهیم:

$$\psi = \nu x F(\eta) \quad , \quad \eta = \frac{r}{x} \qquad (۲۱\text{-}۲)$$

که از آن مولفه های سرعت به شکل زیر خواهند بود:

$$U = \frac{\nu}{x}\frac{F'}{\eta} \quad , \quad V = \frac{\nu}{x}\left(F' - \frac{F}{\eta}\right) \qquad (۲۲\text{-}۲)$$

قرار دادن این مقادیر در رابطه ۲-۱۵، معادله زیر را برای تابع جریان نتیجه می دهد:

$$\frac{FF'}{\eta^2} - \frac{F'^2}{\eta} - \frac{FF''}{\eta} = \frac{d}{d\eta}\left(F'' - \frac{F'}{\eta}\right) \qquad (۲۳\text{-}۲)$$

که با یکبار انتگرال گیری می دهد:

$$FF' = F' - \eta F'' \qquad (۲۴\text{-}۲)$$

شرایط مرزی در $r=0$ عبارتند از: $U=U_c$ و $V=0$. از این شرایط برمی آید که در $\eta=0$، $F'=0$ و $F=0$ می باشند. از آنجا که U یک تابع زوج می باشد، می بایست F'/η زوج، F' فرد و F زوج باشند. بخاطر اینکه $F(0)=0$ است، ترم عدد ثابت در بسط F به توان η باید حذف شود که یک ثابت انتگرال گیری را مشخص می کند. ثابت دوم انتگرال گیری که با α نمایش داده می شود، می تواند به شکل زیر معین گردد: اگر $F(\eta)$ یک حل معادله ۲-۲۴ باشد آنگاه $F(\alpha\eta)=F(\gamma)$ نیز یک حل می باشد. یک پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل:

$$F\frac{dF}{d\gamma}=\frac{dF}{d\gamma}-\gamma\frac{d^2F}{d\gamma^2} \qquad (۲-۲۵)$$

که شرط مرزی: $F=F'=0$ را در $\gamma=0$ ارضا نماید، به شکل زیر است:

$$F=\frac{\gamma^2}{1+\frac{1}{4}\gamma^2} \qquad (۲-۲۶)$$

بنابراین از معادله ۲-۲۲ بدست می آوریم:

$$U=\frac{\nu}{x}\alpha^2\frac{1}{\gamma}\frac{dF}{d\gamma}=\frac{\nu}{x}\frac{2\alpha^2}{\left(1+\frac{1}{4}\gamma^2\right)^2}$$

(۲-۲۷)

$$V=\frac{\nu}{x}\alpha\left(\frac{dF}{d\gamma}-\frac{F}{\gamma}\right)=\frac{\nu}{x}\alpha\frac{\gamma-\frac{1}{4}\gamma^3}{\left(1+\frac{1}{4}\gamma^2\right)^2}$$

در اینجا $\gamma=\alpha\frac{r}{x}$ می باشد و ثابت انتگرال گیری α می تواند از مقدار داده شده ممنتوم حاصل شود. از معادله ۲-۱۴، برای ممنتوم جت به دست می آید:

$$J=\frac{16}{3}\pi\rho\alpha^2\nu^2 \qquad (۲-۲۸)$$

در نهایت با تعریف ممنتوم سینماتیک[4] به شکل $K=J/\rho$ خواهیم داشت:

$$U=\frac{3}{8\pi}\frac{K}{\nu x}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\gamma^2\right)^2} \qquad (۲-۲۹)$$

$$V=\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\frac{\sqrt{K}}{x}\frac{\gamma-\frac{1}{4}\gamma^3}{\left(1+\frac{1}{4}\gamma^2\right)^2} \qquad (۲-۳۰)$$

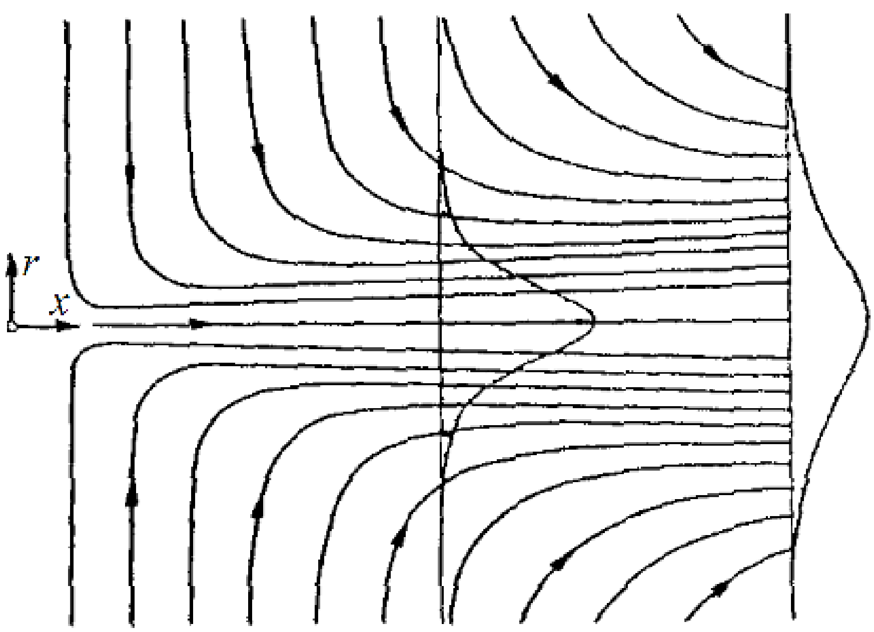
[4] kinematic momentum

$$\gamma=\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\frac{\sqrt{K}}{\nu}\frac{r}{x} \qquad (۳۱-۲)$$

شکل۲-۶ الگوی خطوط جریان را که از معادلات فوق محاسبه شده اند، نشان می دهد. نرخ حجمی جریان، $Q=2\pi\int_0^\infty Urdr$ ، که با فاصله از اوریفیس به علت وجود جریان از محیط افزایش می یابد، با معادله ساده زیر بیان می شود:

$$Q=8\pi\nu x \qquad (۳۲-۲)$$

برخلاف انتظار دیده می شود نرخ حجمی جریان در یک فاصله داده شده از اوریفیس مستقل از ممنتوم جت است، یعنی مستقل از اضافه فشاری است که تحت آن جت اوریفیس را ترک می کند. یک جت که تحت یک اختلاف فشار بزرگ (سرعت زیاد) خارج می شود از جتی که با یک اختلاف فشار کوچک (سرعت کم) خارج می گردد، باریک تر باقی می ماند. جت دوم سیال ساکن نسبتا بیشتری با خود حمل می کند بگونه ای که نرخ حجمی جریان در یک فاصله داده شده از اوریفیس، برابر با مقدار مربوط به جت سریعتر می باشد، به شرطی که ویسکوزیته سینماتیک در دو حالت با هم برابر باشند.



شکل ۲-۶ : مسیر خطوط جریان برای یک جت مدور آرام [۱۰].

اولین کار تئوری برای جت مدور مغشوش بوسیله تولمین[5] ارائه شد که مطالعاتش بر اساس تئوری طول اختلاط پراندل[6] انجام شده است. عرض جت متناسب با x و سرعت خط مرکزی متناسب با x^{-1} می باشد. بنابراین ویسکوزیته سینماتیک موهومی[7] برابر است با:

$$\nu_T = cr_{1/2}U_c \sim x^0 = const \tag{۳۳-۲}$$

که در آن c یک ثابت تجربی است. در این حالت معادله دیفرانسیل با آن چه از جت آرام داشتیم یکسان می باشد بنابراین معادلات ۲-۲۹ تا ۲-۳۱ می توانند استفاده شوند فقط لازم است ویسکوزیته سینماتیک ν برای جریان آرام با ویسکوزیته سینماتیک موهومی ν_T برای جریان مغشوش جایگزین شود.

مطابق اندازه گیری های صورت گرفته بوسیله ریکارت[8]، عرض جت با $r_{1/2} = 0.0848x$ داده می شود. با $\gamma = 1.286$ در $U = \frac{1}{2}U_c$ داریم: $r_{1/2} = 5.27x\frac{\nu_T}{\sqrt{K}}$ ، و بنابراین:

$$\frac{\nu_T}{\sqrt{K}} = 0.0161 \tag{۳۴-۲}$$

از طرف دیگر داریم: $\sqrt{K} = 1.59r_{1/2}U_c$. به این ترتیب:

$$\nu_T = 0.0256r_{1/2}U_c \tag{۳۵-۲}$$

دبی حجمی در فاصله x از اوریفیس می تواند با قرار دادن مقدار ν_T در معادله ۲-۳۲ بدست آید:

$$Q = 0.404\sqrt{K}x \tag{۳۶-۲}$$

۲-۴) بررسی تحقیقات صورت گرفته بر روی جت مدور [۴].

پدیده های دوردست جت آزاد بخوبی مورد مطالعه قرار گرفته اند. در یک کار آزمایشگاهی اولیه گسترده روی جریان از یک جت مدور، ویگنانسکی و فیدلر (۱۹۶۹) پروفیل های سرعت متوسط، روابط تک

[5] Tollmien
[6] Prandtl
[7] virtual kinematic viscosity
[8] Reichardt

نقطه ای مرتبه دوم و سوم، توازن انرژی و مقیاس های طول را ارائه کردند. سپس رودی[۹] (۱۹۷۵) یک روش جدید را برای تحلیل سیگنال های سیم داغ جهت اندازه گیری پروفیل های سرعت متوسط و شدت اغتشاش بکار برد. در یک تحلیل ثانویه از مجموعه این دو نتیجه، سیف[۱۰] (۱۹۸۱) افت ممنتوم قابل توجهی را کشف کرد که قوانین بقا را نقض می کرد.

کپ[۱۱] و همکاران (۱۹۸۳) و نیز جرج[۱۲] و همکاران (۱۹۸۸) اینگونه پنداشتند که ممنتوم به این خاطر کاهش یافته که تجهیزات استفاده شده برای جت به اندازه کافی بزرگ نبوده اند. صحت این ادعا بعدا بوسیله کپ و همکاران (۱۹۹۰) و حسین[۱۳] و همکاران (۱۹۹۴) بررسی شد. برای اینکار از یک دستگاه جت مشابه دستگاه ویگنانسکی و فیدلر (۱۹۶۹) با یک نازل کوچکتر و یک اتاقک خیلی بزرگتر استفاده شد تا جتی در محیط بی نهایت همانند سازی شود. یک معیار برای مرتبط ساختن شار جرمی جت و اندازه اتاقک به افت ممنتوم مورد انتظار توسط جرج و همکاران (۱۹۸۸) بدست آمد. با وجود این نتایج جدید هنوز برخی چالشها در اندازه گیری پوشیده مانده بود.

برای اندازه گیری میزان ربایش[۱۴] (کشیده شدن سیال پیرامون به داخل جریان جت) در یک جت مدور، ریکو و اسپالدینگ[۱۵] (۱۹۶۱) وسیله ای مبتکرانه ساختند که شامل یک جت پوشیده شده بوسیله استوانه های متخلخل می شد. از درون سیلندرها هوای فشرده شده برای رسیدن به نرخ حجمی جریان هوایی که در نبود سیلندرها به داخل کشیده می شد، تزریق می گشت. همانند سازی نرخ جریان ربایش با دانستن این مسئله که در نبود سیلندرها، منبع بزرگ سیال پیرامون (بجز در نزدیکی محور جت) در فشار یکنواخت می ماند، ممکن شد. در این دستگاه نرخ جریان از محفظه متخلخل بگونه ای تنظیم شده بود تا

[9] Rodi
[10] Seif
[11] Capp
[12] George
[13] Hussein
[14] entrainment
[15] Ricou & Spalding

هیچ گرادیان محوری وجود نداشته باشد. این نرخ جریان اندازه گیری و برابر با نرخ جریان ربایش یک جت بدون محفظه (طبیعی) در نظر گرفته شد.

اثرات مختلفی در محدوده عدد رینولدز $500 \le Re \le 80000$ و ناحیه محوری $2.4 \le x/d \le 418$ اندازه گیری شد. ریکو و اسپالدینگ (۱۹۶۱) موفق شدند یک قانون ربایش برای ارتباط دادن نرخ جرمی جریان، ممنتوم جت، فاصله محوری و دانسیته هوا به شکل زیر ارائه کنند:

$$\frac{m}{xM^{1/2}\rho_1^{1/2}} = K_1 \qquad (۳۷-۲)$$

که m نرخ جرمی در جهت جریان جت، x موقعیت محوری، M شار ممنتوم مازاد جت، ρ_1 دانسیته سیال پیرامون و K_1 ثابت ربایش می باشد. در یک بررسی مقدماتی، اثر عدد رینولدز روی نسبت ربایش (نسبت نرخ جرمی جریان اوریفیس به نرخ جرمی جریان ربایش، m_1/m_0) در سرتاسر محدوده رینولدز آزمایشات مختلف بررسی شد. نتیجه بدست آمده این بود که نسبت m_1/m_0 برای اعداد رینولدز بزرگتر از ۲۵۰۰۰ تقریبا ثابت است. با توجه به این نکته ریکو و اسپالدینگ (۱۹۶۱) $Re \ge 25000$ را برای انجام آزمایشاتشان برگزیدند.

در مقابل روش کلاسیک هینز[16] (۱۹۷۵)، در یک تحلیل تئوری بوسیله جرج (۱۹۸۹) بیان شد که جریان های مغشوش مجانب وار به سمت حالت های خود متشابه گوناگون می روند که بوسیله شرایط اولیه تعیین می گردند. بررسی مقاله های مربوط به خودتشابهی میدان اسکالر منجر به نتایج متناقضی می شود. بعنوان نمونه نتیجه گیری های ریچاردز و پیتز (۱۹۹۳) نظریه خودتشابهی یک جریان جت را تائید می کند. حالت حدی میدان اسکالر (که با نرخ رشد، نرخ افت سرعت خط مرکزی و نوسانات *r.m.s* نرمالیز شده محلی توصیف می شود) کمترین وابستگی را به شرایط اولیه دارد. در ضمن داولینگ و

[16] Hinze

دیموتاکیس[۱۷] (۱۹۹۰) یک وابستگی به عدد رینولدز برای نرخ افت در دوردست میدان شدت متوسط و توزیع شعاعی $r.m.s$ یافتند. در مقایسه جریان از یک جت متقارن ($Re = 16000$) با دو شرط اولیه متفاوت، می[۱۸] و همکاران (۲۰۰۱) میدان جریان را برای محدوده $0 \le x/d \le 70$ جهت بررسی نتایج تحلیلی جرج (۱۹۸۹) مورد آزمایش قرار دادند. با مقایسه جریان های دو جت (یکی با یک شرط اولیه پله ای[۱۹] و دیگری با جریان کاملا توسعه یافته در لوله بعنوان شرط اولیه) این نکته تائید شد که ویژگی های کمی مغشوش در سراسر جریان جت به شرایط اولیه بستگی دارد و تصریح شد که وجود یک حالت حدی عمومی اغتشاش، مستقل از شرایط اولیه، غیر محتمل به نظر می رسد.

نظریه کلاسیک خود تشابهی عمومی همچنین درباره مقادیر سرعت مورد بررسی قرار گرفت. تلاشها برای درک اثرات شرایط اولیه روی توسعه جریان در یک جت تازگی ندارد. برادشاو[۲۰] (۱۹۶۶) از یک جت مدور برای اندازه گیری هایی در ناحیه شبه مسطح لایه اختلاطی (در حدود چند قطر اول در پایین دست جت) استفاده کرد تا اثر شرایط اولیه را روی توسعه یک لایه برشی آزاد بیان کند. در بسیاری از تحقیقات دیگر، توجه تماما بر روی توسعه جت بوده است. جدیدتر از آن در یک شبیه سازی مستقیم عددی (DNS) جت مدور ($Re = 2400$) بوئرسما[۲۱] و همکاران (۱۹۹۸) در یافتند شرایط متفاوت در خروجی نازل می تواند روی سرعت های متوسط و نوسانی اثر کند. اگرچه ناحیه اندازه گیری این مطالعه ($x/d \le 42$ ، بخاطر محدودیت های محاسباتی) نمی تواند به ناحیه واقعا خود متشابه تعمیم داده شود، نتایج بدست آمده نظریه جرج را مبنی بر اینکه حالت حدی جریان با شرایط اولیه تغییر خواهد کرد، تائید می نماید.

کارهای آزمایشگاهی و محاسباتی جدیدتر، ناحیه محوری را برای بررسی اثرات شرایط اولیه توسعه دادند.

[17] Dowling & Dimotakis
[18] Mi
[19] top-hat
[20] Bradshaw
[21] Boersma

فردمن[22] و همکاران (۲۰۰۰) مطالعاتی را در مورد تاثیر پروفیل های سرعت متوسط اولیه روی مقادیر متوسط و مغشوش پایین دست انجام دادند. آنها با مقایسه نتایج برای کمیت های اغتشاش از دو جت متفاوت ($Re = 2400$) در ناحیه $0 \le x/d \le 80$ با آنچه توسط دیگر محققان بدست آمده بود، دریافتندکه نرخ های افت مربوط به دوردست در جت ها با پروفیل خروجی از لوله کمتر از آنهایی است که پروفیل های سرعت پله ای دارند.

در یک فاصله پنج ساله از سال ۲۰۰۰، گروه تحقیق آنتونیا[23] در دانشگاه نیوکاسل چندین مطالعه را بر اثرات شرایط اولیه روی یک جت دایروی انجام دادند. در تحقیق رومانو[24] و آنتونیا (۲۰۰۱)، مقادیر متفاوت v'/u' و اختلافات غیر قابل صرفنظر در ویژگی های با مقیاس کوچک در نواحی دوردست جت های دایروی هوا و آب با شرایط اولیه اندکی متفاوت مشاهده شد. آنتونیا و ژائو[25] (۲۰۰۱) طیف های انرژی و نوسانات سرعت را در ناحیه $0 \le x/d \le 50$ برای دو جت، یکی با خروجی لوله کاملا توسعه یافته و دیگری با یک پروفیل پله ای و هر دو با $Re = 37000$ مقایسه کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که دو جت در نواحی نزدیک و میانی رفتار متفاوتی دارند، اما در یک x/d حدودا برابر به یک حالت یکسان خود القایی می رسند. اما ژو و آنتونیا (۲۰۰۲) گزارش کرده اند برای همان دو جت با $Re = 86000$، برای سرعت متوسط و تنش های رینولدز جت انقباضی[26] سریعتر از جت جریان لوله توسعه می یابد و به خود تشابهی می رسد. این مسئله به تفاوت در ساختار های مغشوش در هر دو ناحیه نزدیک و دور دست دو جریان مربوط می شود.

اخیرا در مقاله اودین و پولارد[27] (۲۰۰۷) وجود خود تشابهی، مبدا موهومی و مقیاس طول بطور فیزیکی

[22] Ferdman
[23] Antonia
[24] Romano
[25] Zhao
[26] contraction jet
[27] Uddin & Pollard

مناسب، بررسی شده اند. آنها اثرات شرایط اولیه را روی یک جت با جریان های هم جهت[۲۸] در حال توسعه مکانی، با استفاده از شبیه سازی گردابه های بزرگ (LES) مورد مطالعه قرار داده اند. جریان با $Re = 7300$ و نسبت سرعت درونی به بیرونی برابر ۱۱ در ناحیه $0 \le x/d \le 90$ بررسی شد. چهار شرط ورودی مختلف در هر دو بخش نوسانی و متوسط سرعت بکار برده شدند، در نتیجه امکان برقرار کردن ارتباط بین انواع شرایط اولیه و اثرات پایین دست ممکن شد. دریافتند که کاهش سرعت خط مرکزی متوسط و پروفیل های شعاعی سرعت متوسط نسبت به شرایط اولیه غیر حساسند در حالیکه مقادیر اغتشاش بسیار به شدت اغتشاش شرایط اولیه حساس می باشند.

اودین و پولارد (۲۰۰۷) استدلال کردند مادامی که خود القایی پروفیل های سرعت متوسط می بایست با انتخاب های محتاطانه مقیاس های طول و سرعت قابل بیان باشد، هیچ مدرک قطعی وجود ندارد که نتیجه مشابهی را بتوان در خصوص ممان های بالاتر دریافت کرد. اگرچه انتخاب مقیاس های طول و سرعت می بایست مهم باشد، به نظر می رسد مقیاس طول رایج صرفا بطور قراردادی مناسب باشد تا به لحاظ فیزیکی. با نتایج شبیه سازی ارائه شده در مقاله دیگری از آنها، استدلال شد که واریانس توزیع سرعت محلی، عرض موثر جت Δ، انتخاب بهتری است. این مقیاس طول سینماتیک بازتاب دهنده اثر شکل گیری لایه ویسکوز در خروجی اوریفیس است و به شکل زیر تعریف می شود:

$$\Delta^2 = \frac{\int_0^\infty \left[\left(U(r) - U_1 \right) r^2 \right] dr}{\int_0^\infty \left[\left(U(r) - U_1 \right) \right] dr} \qquad (۳۸-۲)$$

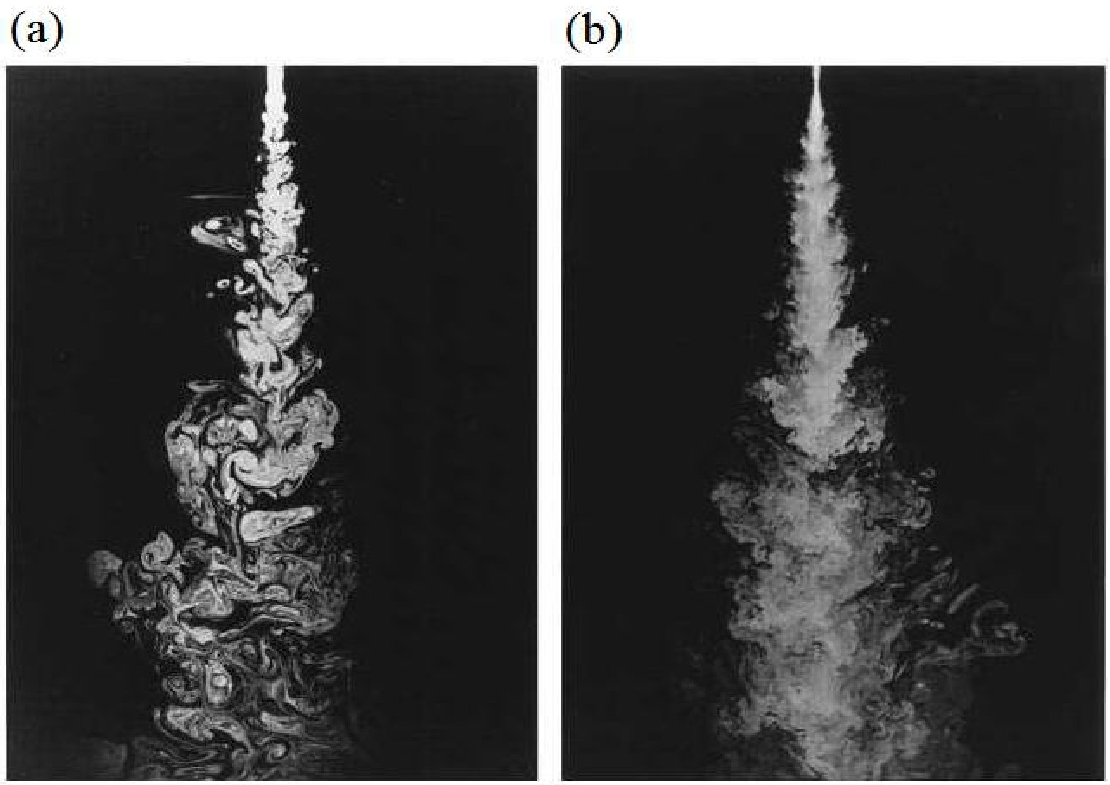
که U_1 سرعت بیرونی در جریان های هم جهت می باشد و برای جت آزاد برابر صفر است. اودین و پولارد (۲۰۰۷) یافته های بوئرسما و همکاران (۱۹۹۸) را به شکل زیر خلاصه کرده اند:

- مقادیر متوسط به نظر می رسد نسبت به شرایط اولیه غیر حساسند.

[28] co-flowing jet

- مقادیر اغتشاش به شکل قابل توجهی تحت تاثیر شرایط اولیه اند.
- تنش برشی رینولدز کمترین وابستگی را به شرایط ورودی دارد و تنش نرمال محوری بیشترین را.
- با تحول جریان به سمت پایین دست، اثر حاصل از تغییرات شرایط اولیه تقویت می شود.

سودمندی فاکتور مقیاس بندی جدید تنها برای جریان های جت با شرایط ورودی مختلف آزمایش شد. تاثیرات عدد رینولدز ناشناخته است. در خصوص نقش مبدا موهومی باید به تحقیقات جرج (۱۹۸۹) رجوع شود که بر طبق آن حالت خود القا به شرایط اولیه بستگی دارد و نمی توان فرض کرد که از نقطه ای در منبع ممنتوم رشد می کند.



شکل ۲-۷ : تمرکز سیال جت در صفحه تقارن یک جت مدور، (a) $Re \approx 2500$ $(0 \le x/d \le 35)$، (b) $Re \approx 10000$ $(0 \le x/d \le 200)$. عکس ها از دیموتاکیس و همکاران (۱۹۸۳) [۴].

ریکو و اسپالدینگ (۱۹۶۱) دریافتند که ربایش در یک جت مدور در عدد رینولدزی حدود ۲۰۰۰۰ اشباع می شود. دیموتاکیس (۲۰۰۰) نشان داد که در چنین عدد رینولدزی یک گذار اتفاق می افتد که در آن

مقیاس های بزرگ و مقیاس های کوچک تحت تاثیر ویسکوزیته از هم جدا می شوند. آزمایشات دیموتاکیس و همکاران (۱۹۸۳) نشان دهنده تفاوت های کیفی در میدان اسکالر جریان های جت پایین تر و بالاتر از رینولدز انتقالی (حدود 10^4) می باشند. این انتقال در شکل ۲-۷ قابل دیدن است. در شکل (a) سیال در سرتاسر ناحیه مغشوش با با عدد رینولدز کمتر دیده می شود. در شکل (b) تغییراتی هموار در تمرکز سیال جت در جریان با عدد رینولدز بالاتر دیده می شود.

فصل سوم

معادلات حاکم و شرایط مرزی

۳-۱) مقدمه

در این فصل ابتدا معادلات حاکم بر جریان جت مدور بیان می گردد سپس شرایط مرزی و شرط اولیه برای شبیه سازی مستقیم عددی توضیح داده می شوند. این معادلات در یک دامنه محاسباتی که در جهت x محدود و در جهت r نامحدود می‌باشد، در نظر گرفته شده و سپس حل می گردند. پارامترهای جریان مانند سرعت و ورتیسیته بوسیلهٔ مقیاس های طول و سرعت مناسب بی‌بعد شده‌اند. تمامی طول ها و سرعت ها به ترتیب بوسیله نیم عرض $\left(r_{1/2}\right)$ و سرعت خط مرکزی $\left(U_c\right)$ پروفیل اولیه یکه شده‌اند. عدد رینولدز براساس این پارامترها بصورت $Re = U_c r_{1/2} / \nu$ می‌باشد که در آن ν ویسکوزیته سینماتیک سیال جت می‌باشد.

۳-۲) معادلات حاکم

معادله ناویر- استوکس (بقای ممنتوم) به همراه معادله پیوستگی، معادلات حاکم بر جریان می‌باشند. فرم بی بعد شده این معادلات برای جریان تراکم ناپذیر به شکل زیر است:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}.\nabla)\vec{U} = -\nabla p + \frac{1}{Re}(\nabla^2 \vec{U}) \qquad (۱-۳)$$

$$\nabla.\vec{U} = 0 \qquad (۲-۳)$$

بررسی ترم فشار در معادلات ناویر- استوکس دارای مشکلات خاص خود می باشد. با توجه به اینکه برای حل معادلات ناویر- استوکس نیاز به دانستن شرایط در مرزها داریم، در صورتیکه هیچ گونه اطلاعاتی از فشار در مرزها موجود نباشد، یا باید ترم فشار را به گونه ای از معادلات حذف کنیم و یا از شبکه بندی بسیار ریز و فشرده برای گسسته سازی استفاده کنیم که هزینه محاسبات را بالا می برد. در نتیجه باید از معادلات ناویر- استوکس ناشی از حذف ترم فشار استفاده کنیم و یا معادلات ناویر- استوکس را با در نظر گرفتن معادله ای برای میدان فشار حل کنیم که ما در اینجا راهبرد اول را مورد بررسی قرار می دهیم.

رابطه زیر برای هر بردار دلخواه A و B صادق است:

$$\nabla(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\nabla)\vec{A} + (\vec{A}.\nabla)\vec{B} + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) \qquad (۳-۳)$$

اگر در نظر بگیریم: $A = B = \vec{U}$، معادله ۳-۳ به صورت زیر در می آید:

$$(\vec{U}.\nabla).\vec{U} = \vec{\omega}\times\vec{U} + \frac{1}{2}\nabla\left(\vec{U}.\vec{U}\right) \qquad (۴-۳)$$

که $\vec{\omega} = \left(\omega_x, \omega_r, \omega_\theta\right) \equiv \nabla\times\vec{U}$ بردار ورتیسیته است. اگر معادله ۳-۴ را در ۳-۱ جایگزین کنیم معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} = \vec{H} - \nabla(p + \frac{\vec{U}.\vec{U}}{2}) + \frac{1}{Re}(\nabla^2\vec{U}) \qquad (۵-۳)$$

که در آن $\vec{H} = (H_x, H_r, H_\theta) \equiv \vec{U}\times\vec{\omega}$ می باشد. اگر از طرفین معادله ۳-۵ کرل بگیریم، در این صورت داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{U}\right) = \nabla\times\vec{H} - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}(p + \frac{\vec{U}.\vec{U}}{2}) + \frac{1}{Re}\nabla^2(\nabla\times\vec{U}) \qquad (۶-۳)$$

عبارت $p + \vec{U}.\vec{U}/2$ یک مقدار اسکالر است. می دانیم که $\nabla\times\nabla(scalar) = 0$ است، بنابر این ترم دوم سمت راست معادله ۳-۶ از بین می رود و با توجه به تعریف ورتیسیته معادله به شکل زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = \nabla\times\vec{H} + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{\omega} \qquad (۷-۳)$$

در این رابطه ترم فشار حذف شده و به این ترتیب مشکلات ناشی از تعیین آن در مرزها از بین رفته است.

اما نیاز به معادله ای برای سرعت داریم بنابراین مجددا از معادله کرل می گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\left(\nabla\times\vec{U}\right)\right) = \nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right) + \frac{1}{Re}\nabla^2\left(\nabla\times\left(\nabla\times\vec{U}\right)\right) \qquad (۸-۳)$$

اتحاد زیر را در نظر بگیرید:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{U}\right) = \nabla\left(\nabla.\vec{U}\right) - \nabla^2\vec{U} \qquad (۹-۳)$$

بنابر رابطه فوق و با استفاده از معادله پیوستگی داریم: $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{U}\right)=-\nabla^2\vec{U}$. در نتیجه معادله ۳-۸ به شکل زیر باز نویسی می شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\vec{U}=-\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)+\frac{1}{Re}\nabla^4\vec{U} \qquad (۳-۱۰)$$

رابطه ۳-۱۰ یک فرم چرخشی[1] معادله ناویر- استوکس می باشد. در این معادله از تعداد متغیر های مستقل مسئله یکی کاسته شده است که باعث افزایش سرعت محاسبات می شود. ولی در مقابل درجه معادله دیفرانسیل به چهار افزایش یافته است.

در مسئله موجود با توجه به اینکه $W=0$ و $\partial/\partial\theta=0$ می باشد، داریم : $\omega_x=\omega_r=H_\theta=0$. ترم اول رابطه ۳-۱۰ به شکل زیر بدست می آید:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\frac{\partial H_r}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial r}\right)\right)\hat{e}_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_x}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial x}\right)\hat{e}_r \qquad (۳-۱۱)$$

با توجه به رابطه ۳-۱۱ برای مولفه سرعت در جهت جریان (x) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 U=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_x}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 H_r}{\partial r\partial x}\right)+\frac{1}{Re}\nabla^4 U \qquad (۳-۱۲)$$

در پیوست A می توانید روابط مورد نیاز برای بدست آوردن معادلات فوق را ملاحظه کنید.

معادله ۳-۱۲ معادله اصلی در شبیه سازی جریان می‌باشد. سرعت در جهت عمود بر جریان (r) با استفاده از معادله پیوستگی (رابطه ۳-۲) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV\right)=0 \qquad (۳-۱۳)$$

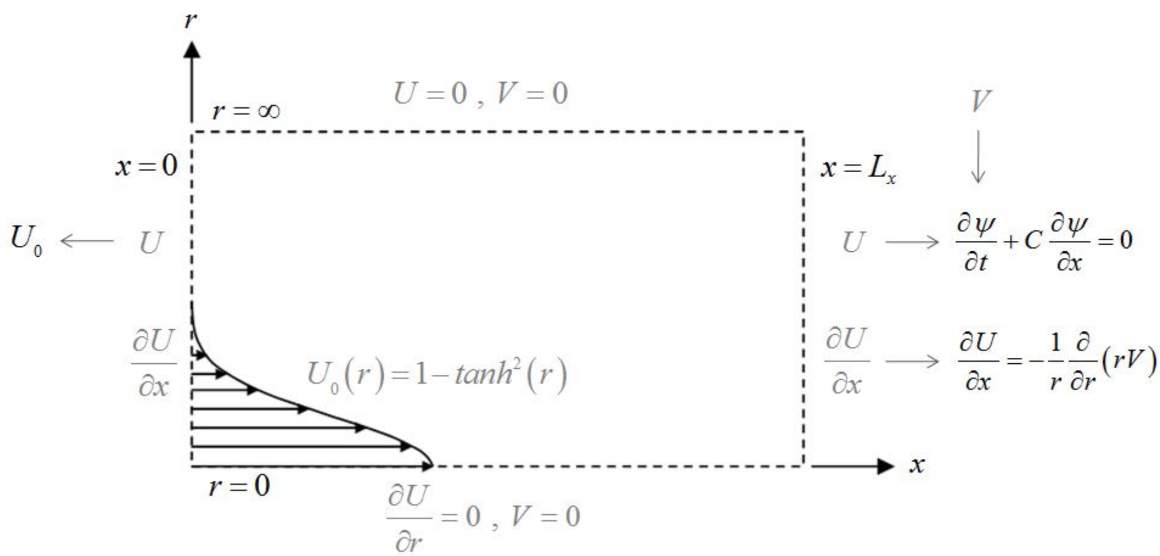
۳-۳) شرایط مرزی و اولیه

در شکل ۳-۱ دامنه محاسباتی و مرزهای آن نشان داده شده است. سه نوع مرز قابل تشخیص می باشد:

[1] rotational form

مرز ورودی، خروجی و جانبی. هریک از اینها به شرط مرزی متفاوتی نیاز دارند. شرایط در مرزهای جانبی با توجه به متقارن بودن سرعت ها در محور جت و از بین رفتن آنها در بینهایت تعیین می شوند:

$$r=0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial r}=0 \ , \ V=0$$
$$r=\infty \quad ; \quad U=0 \ , \ V=0 \qquad (۱۴\text{-}۳)$$



شکل ۳-۱ : شکل شماتیک دامنه محاسباتی.

معادله ۳-۱۲ یک معادله دیفرانسیل جزئی درجه چهار است بنابراین به چهار شرط مرزی نیاز دارد. مقادیر U می بایست در مرز ورودی و مرز خروجی مجموعه محاسباتی مشخص باشند. همچنین با کمک معادله پیوستگی، $\partial U/\partial x$ در مرزهای ورودی و خروجی معلوم می گردد. این شرایط به ترتیب بعنوان شرایط مرزی دیریشله[۲] و نیومن[۳] شناخته می شوند.

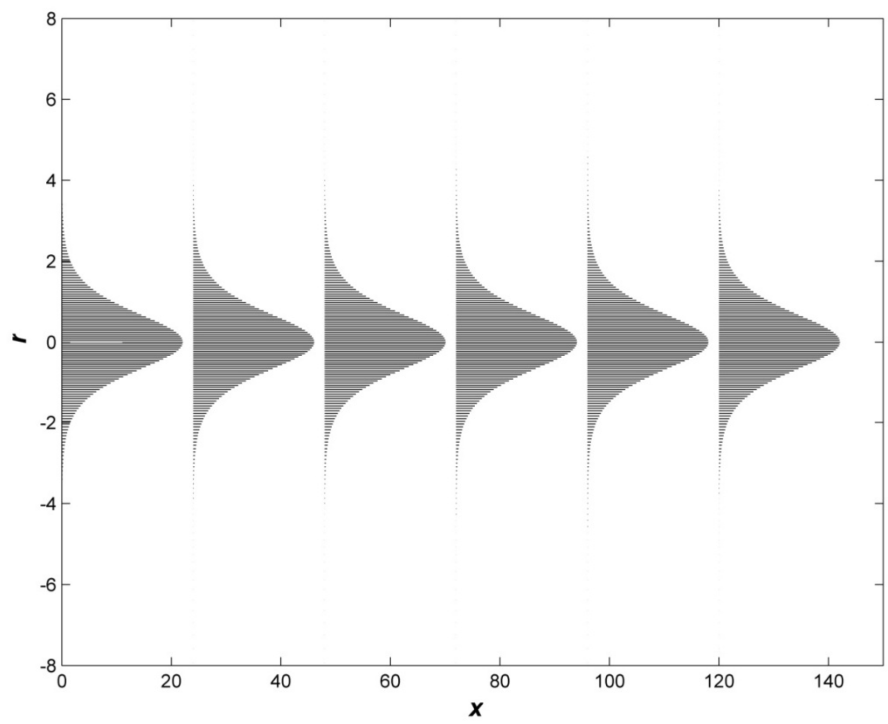
در خروجی، باید از یک شرط مرزی انعکاس ناپذیر[۴] استفاده شود، بطوریکه جریان بصورت طبیعی از مرز خروجی عبور کند و هیچگونه برگشت جریان به داخل دامنه محاسباتی نداشته باشیم. همانگونه که

[2] Dirichlet
[3] Neumann
[4] non-reflective

سنندجی [۱۱] بحث کرده می توانیم از انواع شرایط مرزی انتقالی (خطی، غیر خطی، ویسکوز-خطی، ویسکوز-غیرخطی) با توجه به نوع مسئله استفاده کنیم. ما از یک معادله جابجایی خطی برای تولید شرط مرزی دیریشله برای هر دو مولفه سرعت استفاده می کنیم:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + C\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{۱۵-۳}$$

در معادله ۳-۱۵ مولفه های سرعت U و V جایگزین ψ می گردند. ضریب C برابر با سرعت کلی انتقال موج و یا سرعت جریان در جهت اصلی در مرز خروجی است. به عبارت دیگر C سرعت جابجایی ساختار جریان است که توسط سعی و خطا بدست می آید و در عمل باید با سرعت حرکت امواج در دامنه محاسباتی یکسان گردد.



شکل ۳-۲ : نمای شماتیک پروفیل سرعت اولیه.

شرط اولیه مسئله یک پروفیل سرعت گاوسی است. معادله این پروفیل به شکل زیر است:

$$U_0\left(r\right)=1-tanh^2\left(r\right) \qquad (۱۶-۳)$$

همانطور که در شکل ۳-۲ نشان داده ایم، در لحظه $t=0$ سرعت U_0 را بطور یکنواخت در تمام ایستگاههای x قرار می دهیم.

۴-۳) الگوریتم حل

برای سهولت در انجام محاسبات سرعت لحظه ای را به صورت ترکیبی از سرعت جریان اصلی و سرعت محاسباتی در نظر گرفته ایم:

$$U(x,r,t)=u(x,r,t)+U_0(r) \qquad (۱۷-۳)$$

$$V(x,r,t)=v(x,r,t) \qquad (۱۸-۳)$$

با تفکیک انجام شده بررسی سرعت در مرزها و یا به عبارتی ارزیابی شرایط مرزی سرعت آسان تر خواهد شد. معادلات ناویر- استوکس و پیوستگی برای متغیر های محاسباتی حل می شوند و در نتیجه شرایط مرزی نیز بر روی متغیر های محاسباتی اعمال می شوند. سرعت مبنا U_0، تنها تابعی از r است بنابراین معادله ۳-۱۲ به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_x}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 H_r}{\partial r\partial x}\right)+\frac{1}{Re}\nabla^4 U \qquad (۱۹-۳)$$

پروسه حل شامل مراحل زیر است:

۱- با معلوم بودن سرعت u، با استفاده از رابطه پیوستگی v محاسبه می شود.

۲- مولفه های $\vec{\omega}$ و $\vec{H}$ بدست می آیند:

$$\omega_\theta=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$H_x=V\omega_\theta \qquad (۲۰-۳)$$

$$H_r=-U\omega_\theta$$

۳- با محاسبه مشتقات جزئی، سمت راست معادله ۳-۱۹ بدست می آید. بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u = RHS \tag{۲۱-۳}$$

۴- با پیشروی زمانی، مقدار $\nabla^2 u$ در زمان جدید حاصل می شود:

$$\nabla^2 u = const \tag{۲۲-۳}$$

۵- معادله بالا فرم دو بعدی معادله پوآسون است. بخاطر اپراتورهای مورد استفاده برای مشتق گیری، معادله ۳-۲۲ در فرم ماتریسی به شکل $AU + UB = C$ در می آید. برای بدست آوردن U از الگوریتم پیشنهادی بارتلز و استوارت [۱۲] استفاده می کنیم. U بدست آمده بعنوان شرط اولیه برای مرحله جدید استفاده می شود.

۶- شرط های مرزی را به روز می کنیم.

مراحل فوق در هر گام زمانی تکرار می شوند تا در نهایت جریان به حالت پایدار برسد. برای اجرای الگوریتم بالا باید بتوانیم کارهای زیر را انجام دهیم:

- محاسبه مشتقات مادی
- انتگرال گیری از معادله پیوستگی
- حل معادله پواسون
- پیشروی زمانی

جزئیات این موارد را در فصل بعد بررسی می کنیم.

فصل چهارم

روش عددی

۴-۱) مقدمه

در فصل قبل معادلات حاکم بر مسئله به فرم خاصی از معادله ناویر- استوکس بدست آمدند. در ادامه به چگونگی حل عددی این معادلات می پردازیم. واضح است که ابتدا باید به گسسته سازی معادله دیفرانسیل بپردازیم. برای محاسبه مشتقات بکار رفته در هر معادله روشهای گوناگونی مانند اجزای محدود، حجم محدود و یا تفاضل محدود وجود دارد که بکارگیری هر یک از این روشها بستگی به نوع معادله و نیز هندسه مسئله مورد نظر دارد. ما در این تحلیل از روش تفاضل محدود فشرده استفاده می کنیم که دارای دقت بسیار خوبی در تقریب مشتقات می باشد. در جهت x از روش تفاضل محدود فشرده مرتبه بالا[1] و در جهت r از روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی[2] استفاده شده است. در این فصل ابتدا این روش مورد بحث قرار می گیرد. سپس مشتق چند تابع ریاضی محاسبه و نتیجه با جواب تحلیلی مقایسه می گردد. در ادامه نگاشت استفاده شده و تاثیر آن بر روابط مشتقات در راستای عمود بر جریان را بررسی می کنیم. در پایان نیز به روش بکارگرفته شده برای توسعه زمانی معادلات یعنی روش رانج-کوتای فشرده درجه سوم می پردازیم.

۴-۲) روش تفاضلات محدود فشرده

طرح های تفاضل محدود مرتبه بالا به طور وسیعی در حل معادلات ناویر- استوکس استفاده شده اند. مزیت طرح های تفاضل محدود فشرده نسبت به طرح های تفاضل محدود استاندارد، دقت خوب برای دامنه وسیعی از اعداد موج[3] به همراه پراکندگی عددی پایین و انتشار خطای کوچک می باشد. به این دلیل گاهی اصطلاح تفکیک پذیری طیفی[4] همراه طرح های تفاضل محدود فشرده بکار می رود. علاوه بر این روش های تفاضل محدود فشرده به لحاظ محاسباتی کارآمد تر از روش های المان محدود (بطور مثال

[1] high-order compact finite difference
[2] mapped compact finite difference
[3] wave numbers
[4] spectral resolution

المان های طیفی) از همان مرتبه دقت هستند. از طرح های تفاضل محدود فشرده برای مسائلی که در آنها ترم های غیر خطی نقش مهمی ایفا می کنند (مثلا یک جریان مغشوش)، استفاده می شود [۱۳].

طرح های تفاضل محدود مرتبه بالا می توانند به دو گونه دسته بندی شوند: طرح های صریح و طرح های از نوع *Pade* یا طرح های فشرده. طرح های صریح مشتقات عددی را مستقیما در هر گره با استفاده از الگوهای بزرگ محاسبه می کنند. در حالیکه طرح های فشرده همه مشتقات عددی را در سراسر یک خط شبکه با استفاده از الگوهای کوچکتر و حل یک دستگاه معادلات بدست می آورند. تجربیات گذشته نشان داده است که طرح های فشرده از طرح های صریح متناظر از همان مرتبه دقیق تر می باشند [۱۴].

مشتقات جزئی با روش تفاضلات محدود از نوع *Pade*، ارائه شده توسط لیله [۱۵] محاسبه شده اند. در این روش مشتق اول تابعی دلخواه مانند $f\left(x\right)$ بطور ضمنی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha\ f'_{j-1}+f'_j+\alpha\ f'_{j+1}=\frac{\alpha+2}{3\Delta x}(f_{j+1}-f_{j-1})+\frac{4\alpha-1}{12\Delta x}(f_{j+2}-f_{j-2}) \tag{۱-۴}$$

مشتق گیری در بازه ای به طول $L_x=N\times\Delta x$ صورت می گیرد، بنابراین $1\le j\le N+1$. اگر در رابطه بالا $\alpha=1/3$ و $\alpha=1/4$ قرار دهیم به طرح هایی با دقت مرتبه ششم و چهارم می رسیم. این طرح ها به ترتیب برای نقاط مرکزی $\left(2\le j\le N\right)$ و همسایگی مرزها $\left(j=2,N\right)$ استفاده می شوند. با این مقادیر برای α، قطر اصلی در سمت راست معادله بالا سه یا چهار برابر کوچکتر از دو قسمت دیگر است. بنابراین معادله ۴-۱ تحت شرایط ناهنجاری[5] می باشد [۱۶]. برای رفع این مشکل دو طرف رابطه ۴-۱ را در $1/\alpha$ ضرب می کنیم:

$$f'_{j-1}\ +\ \frac{1}{\alpha}f'_j\ +f'_{j+1}=\frac{1+2/\alpha}{3\Delta x}(f_{j+1}-f_{j-1})+\frac{4-1/\alpha}{12\Delta x}(f_{j+2}-f_{j-2}) \tag{۲-۴}$$

در مرزهای جریان $\left(j=1,N+1\right)$ یک طرح یک طرفه درجه سه برای مشتق اول بکار برده می شود که به صورت زیر است:

[5] ill-conditioning

$$f_1^{'} + 2f_2^{'} = \frac{1}{2\Delta x}(-5f_1 + 4f_2 + f_3) \tag{۴-۳}$$

$$f_{N+1}^{'} + 2f_N^{'} = \frac{1}{2\Delta x}(5f_{N+1} - 4f_N - f_{N-1}) \tag{۴-۴}$$

لیله همچنین بیان می کند که جایگزین کردن α با $\alpha' = (16\alpha + 32)/(40\alpha - 1)$ در $j = 3$ و $j = N - 1$ پایداری و بقای عددی معادله $(\partial/\partial t)u = (\partial/\partial) f(u)$ را تضمین می کند [۱۶].

معادلهٔ زیر نمایانگر مشتق مرتبهٔ دوم تابعی دلخواه مانند $f(x)$ است که با $\alpha = 1/4$ شکل مرتبه چهارم تفاضلات محدود فشرده را ارائه می کند:

$$\alpha f_{j-1}^{"} + f_j^{"} + \alpha f_{j+1}^{"} = \frac{4(1-\alpha)}{3\Delta x^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10\alpha - 1}{12\Delta x^2}(f_{j-2} - 2f_j + f_{j+2}) \tag{۴-۵}$$

در اینجا نیز برای غلبه بر شرایط ناهنجار طرفین رابطه ۴-۵ را در $1/\alpha$ ضرب می‌کنیم:

$$f_{j-1}^{"} + \frac{1}{\alpha} f_j^{"} + f_{j+1}^{"} = \frac{4(1/\alpha - 1)}{3\Delta x^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10 - 1/\alpha}{12\Delta x^2}(f_{j-2} - 2f_j + f_{j+2}) \tag{۴-۶}$$

در مرزهای جریان، طرح های یک طرفه مرتبه سوم به کار برده می‌شود که به صورت زیر است:

$$f_1^{"} + 11f_2^{"} = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_1 - 27f_2 + 15f_3 - f_4) \tag{۴-۷}$$

$$f_{N+1}^{"} + 11f_N^{"} = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_{N+1} - 27f_N + 15f_{N-1} - f_{N-2}) \tag{۴-۸}$$

با مشتق گیری از طرفین رابطه (۴-۳) داریم:

$$f_1^{"} + 2f_2^{"} = \frac{1}{2\Delta x}(-5f_1^{'} + 4f_2^{'} + f_3^{'}) \tag{۴-۹}$$

که به شکل زیر ساده می شود:

$$f_1^{"} + 2f_2^{"} = \frac{-3}{\Delta x} f_1^{'} + \frac{1}{2\Delta x}(f_1^{'} + 4f_2^{'} + f_3^{'}) \tag{۴-۱۰}$$

با جاگذاری طرف چپ رابطه ۴-۲ (با فرض $\alpha = 1/4$) بجای ترمهای داخل پرانتز در رابطه ۴-۱۰، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$f_1^{"} + 2f_2^{"} = \frac{-3}{\Delta x}\frac{df}{dx}|_{(x=0)} - \frac{3}{2\Delta x^2}(f_1 - f_3) \qquad (۱۱-۴)$$

معادله ۴-۱۱ در مرز ورودی، زمانی که که مقدار تابع و مشتق آن هر دو معلوم باشند بکار برده می‌شود. با روشی مشابه مشتق دوم در مرز خروجی در این حالت بدست می آید:

$$f_{N+1}^{"} + 2f_N^{"} = \frac{3}{\Delta x}\frac{df}{dx}|_{(x=L_x)} - \frac{3}{2\Delta x^2}(f_{N+1} - f_{N-1}) \qquad (۱۲-۴)$$

در نزدیکی مرزها از رابطه ۴-۶ با $\alpha = 1/10$ استفاده می‌شود. مشتقات مراتب بالاتر موجود در معادلات با تکرار مشتق های اول و دوم بدست می آیند.

۴-۳) محدود کردن دامنه در راستای r

جریان جت جریانی آزاد و بدون مرز می باشد پس نباید در جهت r محدودیتی داشته باشیم. برای گنجاندن r در یک دامنه محاسباتی از یک تابع یک به یک مثلثاتی استفاده می کنیم که مختصات فیزیکی $0 \le r \le \infty$ را تبدیل به مختصات محاسباتی $0 \le \zeta \le 1$ می کند. اینکار علاوه بر متناهی کردن دامنه محاسبات، این امکان را می دهد که بدون بکار گیری نقاط محاسباتی زیاد برای r های بزرگ، محاسبات دقیقی در نواحی نزدیک به محور جت داشته باشیم. نگاشت استفاده شده به شکل زیر است:

$$r = \beta tan\left(\frac{\pi\zeta}{2}\right) \qquad (۱۳-۴)$$

پارامتر β بیانگر میزان تراکم گره ها در نزدیکی $r = 0$ است (هرچه β کوچکتر باشد، نقاط بیشتری در نزدیکی خط مرکزی داریم). به این ترتیب از یک روش تفاضل فشرده تطبیقی برای محاسبه مشتقات در جهت شعاعی استفاده شده است. فواصل در مجموعه فیزیکی یکسان نیستند اما در مجموعه محدود شده فاصله گره ها از هم مساوی است.

با توجه به رابطه ۴-۱۳ برای مشتق اول تابع f نسبت به r داریم:

$$\frac{df}{dr}=\frac{df}{d\zeta}\times\frac{d\zeta}{dr}=\frac{2}{\pi\beta}cos^2\left(\frac{\pi\zeta}{2}\right)\times\frac{df}{d\zeta} \qquad (۱۴\text{-}۴)$$

با تعریف $\lambda_1=\frac{2}{\pi\beta}cos^2\left(\frac{\pi\zeta}{2}\right)$ می توانیم بنویسیم:

$$\frac{df}{dr}=\lambda_1\frac{df}{d\zeta} \qquad (۱۵\text{-}۴)$$

به طریقی مشابه برای مشتق دوم بدست می آوریم:

$$\frac{d^2f}{dr^2}=\lambda_2\frac{d^2f}{d\zeta^2}+\lambda_3\frac{df}{d\zeta} \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

که λ_2 و λ_3 به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\lambda_2=\lambda_1^2 \qquad (۱۷\text{-}۴)$$

$$\lambda_3=-\frac{4}{\pi\beta^2}sin\left(\frac{\pi\zeta}{2}\right)cos^3\left(\frac{\pi\zeta}{2}\right) \qquad (۱۸\text{-}۴)$$

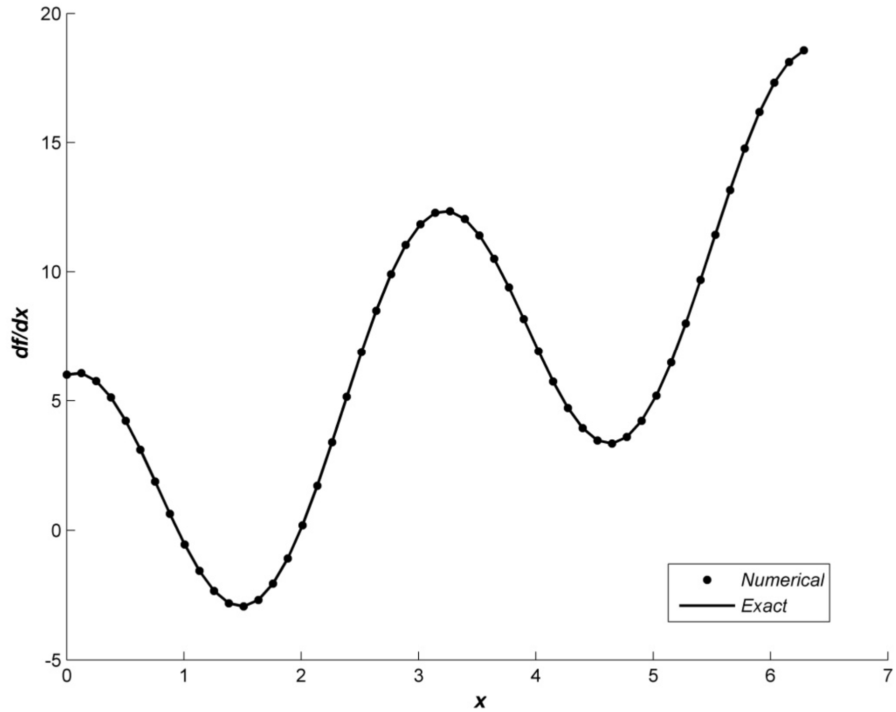
مشتق گیری با استفاده از تفاضلات محدود فشرده در دامنه ζ انجام می گیرد و با استفاده از معادلات ۴-۱۵ و ۴-۱۶ به دامنه r مربوط می شود.

۴-۴) ارزیابی مشتقات

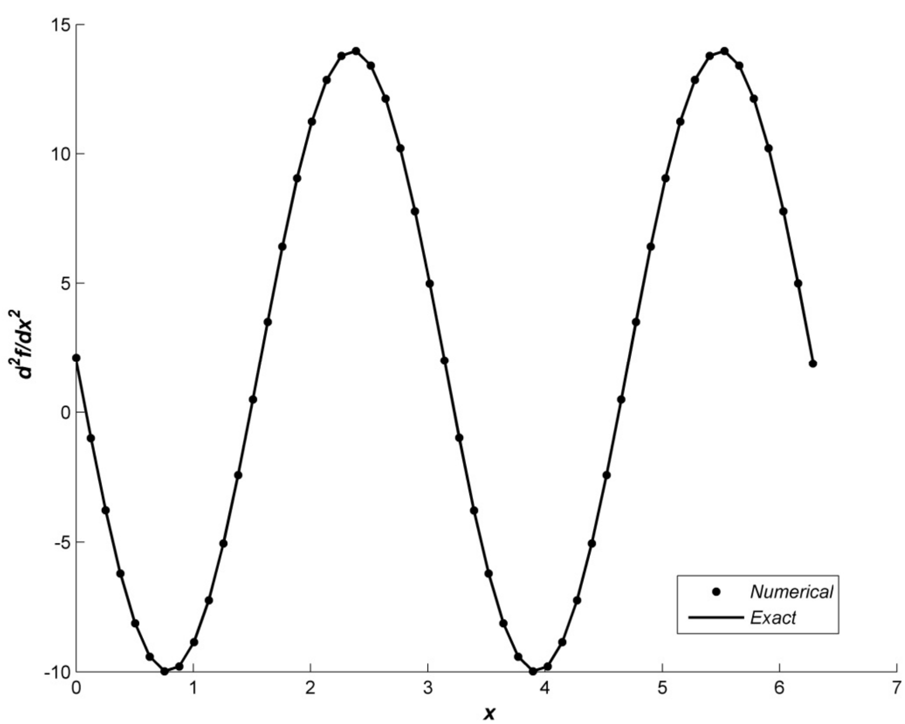
برای ارزیابی مشتقات عددی حاصل از روش تفاضلات محدود فشرده، آن را با مقدار تحلیلی مشتقات برای تابع دلخواه مقایسه می کنیم. از دو تابع نمونه، یکی برای تست مشتق گیری در جهت x و دیگری در جهت r استفاده می کنیم. این توابع به شکل زیر می باشند:

$$f=3sin(2x)+x^2 \qquad (۱۹\text{-}۴)$$

$$f=re^{-r^2} \qquad (۲۰\text{-}۴)$$



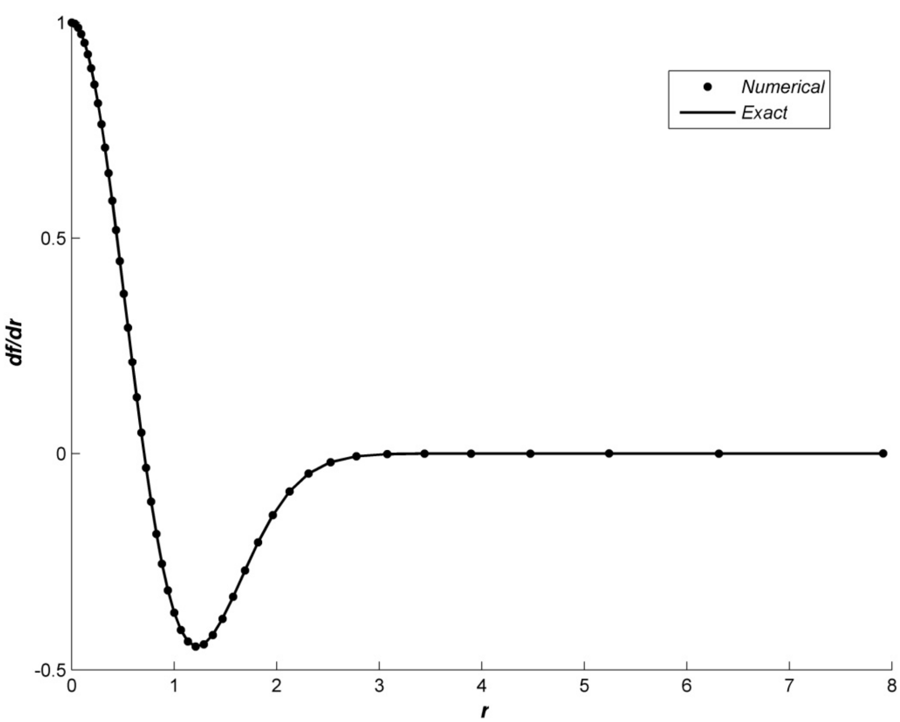
شکل۴-۱ : تقریب مشتق اول معادله ۴-۱۹.



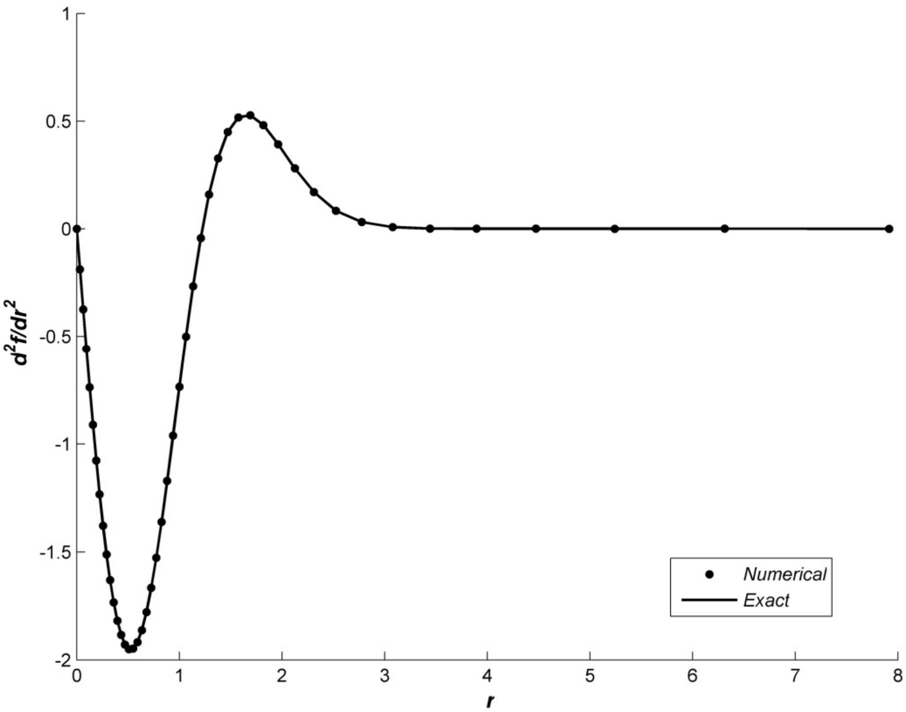
شکل۴-۲ : تقریب مشتق دوم معادله ۴-۱۹.

دقت مشتق گیری در جهت جریان در شکل های ۴-۱ و ۴-۲ ملاحظه می شود. با استفاده از کد نوشته شده مشتقات اول و دوم معادله ۴-۱۹ با $N_x = 50$ و $L_x = 2\pi$ محاسبه شده و به همراه مشتق تحلیلی این تابع نمایش داده شده است. برای ارزیابی دقت مشتقات در جهت شعاعی از معادله ۴-۲۰ در یک فاصله نامتناهی نسبت به r مشتق گرفته ایم. نتیجه برای بخشی از بازه که نزدیکتر به محور است، در شکل های ۴-۳ و ۴-۴ دیده می شود. $N_r = 50$ و $\beta = 1$ می باشند.

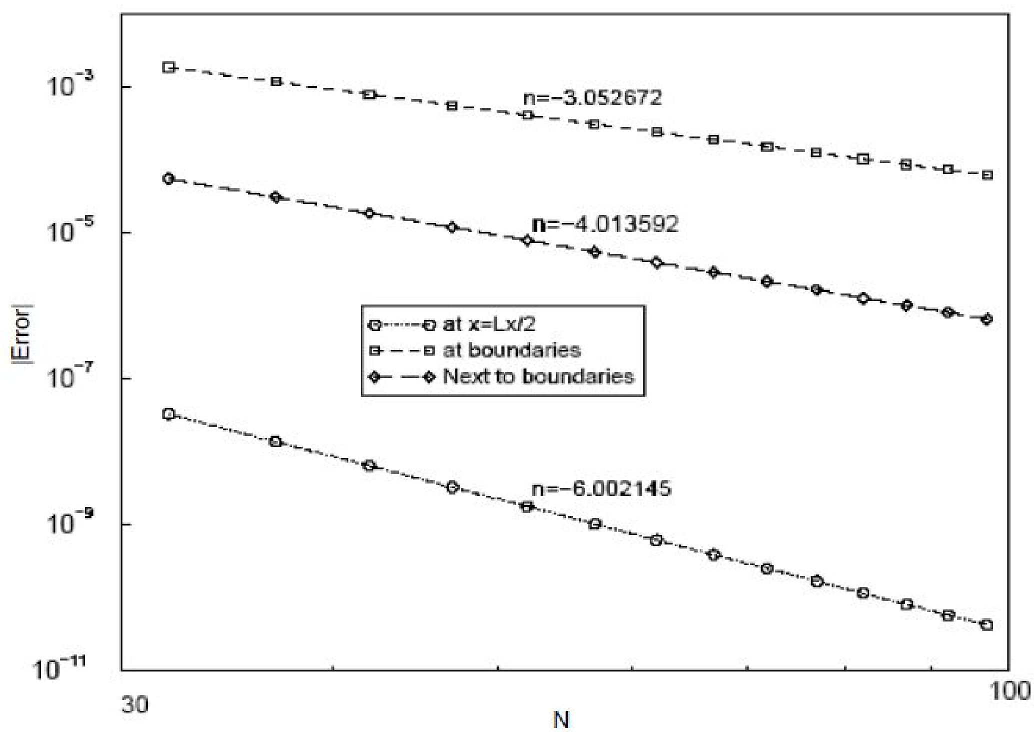
طرح اختلاف محدود فشرده یک طرح ضمنی است، بنابراین بالاترین دقت در بیشترین فاصله از مرزها که در آنها از طرحی با مرتبه دقت پایین تر استفاده شده، قابل دستیابی است. مرتبه دقت برای مشتق های اول و دوم را به ترتیب در شکل ۴-۵ و ۴-۶ می توانید ملاحظه کنید.



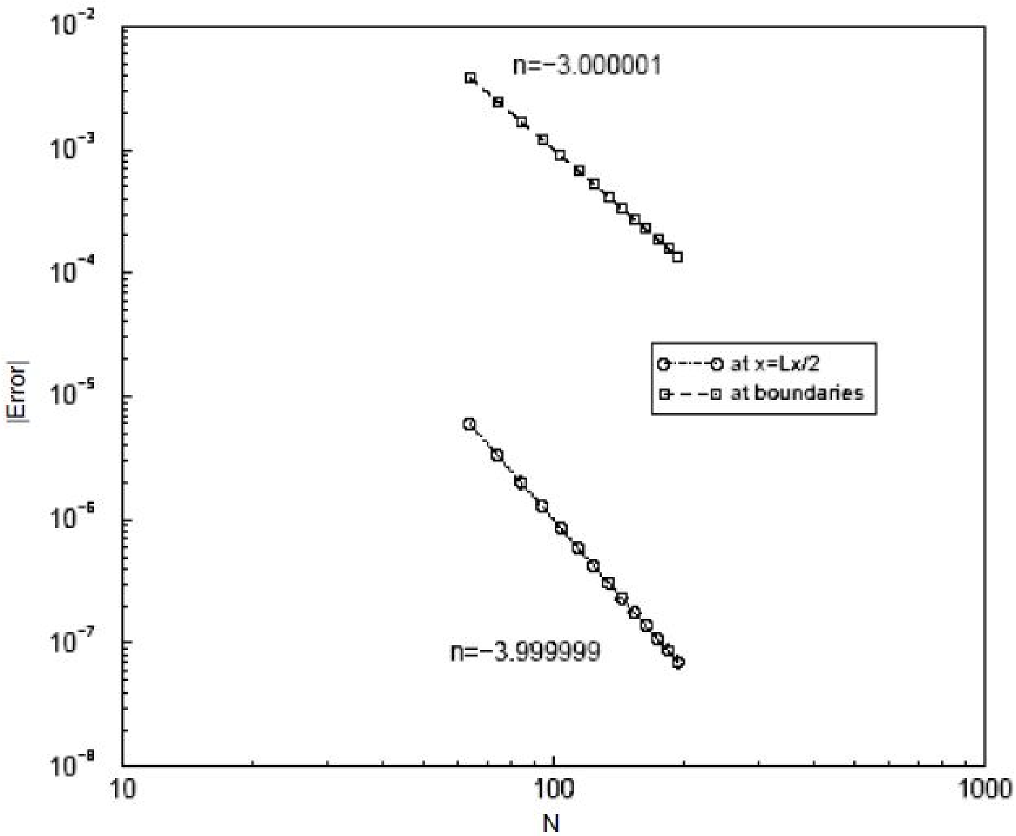
شکل۴-۳ : تقریب مشتق اول معادله ۴-۲۰.



شکل۴-۴ : تقریب مشتق دوم معادله ۴-۲۰.



شکل ۴-۵ : مرتبه دقت برای مشتق اول با بکار گیری طرح تفاضل محدود فشرده [۱۶].



شکل ۴-۶ : مرتبه دقت برای مشتق دوم با بکار گیری طرح تفاضل محدود فشرده [۱۶].

۴-۵) انتگرال گیری از معادله پیوستگی

برای محاسبه سرعت در جهت شعاعی از معادله پیوستگی استفاده می کنیم. این معادله را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv) = -r\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (۲۱-۴)$$

با انتگرال گیری از عبارت فوق rv و با تقسیم آن بر r سرعت شعاعی بدست می آید. با توجه به رابطه ۴-۲ می بینیم که ماتریس سمت راست برای مشتق اول، مقدار صفر را روی قطر اصلی دارد. این مسئله مانع انتگرال گیری می شود. جهت غلبه بر این مشکل از طرفین رابطه نسبت به r مشتق می گیریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv)=\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+r\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial x}\right) \quad (۲۲\text{-}۴)$$

حال می توانیم با دو شرط موجود در مرز های جانبی $\left(r=0,\infty \rightarrow v=0\right)$ معادله ۴-۲۲ را حل کنیم.

۴-۶) پیشروی در زمان

روش های توسعه زمانی معمول در DNS و LES از دقتی از مرتبه دو تا چهار برخوردارند. روش های رانج-کوتا بیشتر از بقیه استفاده شده اند اما برخی هم از آدامز- بشفورث[۶] و لیپ فراگ[۷] استفاده کرده اند. بطور کلی برای یک میزان دقت معین، روش های رانج-کوتا به محاسبات بیشتری احتیاج دارند. علیرغم این نکته، آنها بخاطر اینکه برای یک گام زمانی داده شده خطایی بسیار کوچکتر از روش های دیگر تولید می کنند، ترجیح داده می شوند. بنابراین در عمل این روش ها اجازه استفاده از یک گام زمانی بزرگتر را با همان میزان دقت می دهند و این افزایش میزان محاسبات را جبران می کند [۵].

جدول۴-۱: طرح پیشروی زمانی رانج-کوتای مرتبه سوم.

زمان	اولین موقعیت	دومین موقعیت
t^n	u^n	$R(u^n)$
$t'=t^n+c_1\Delta t$	$u'=u^n+c_1\Delta tR$	$R'=R(u')$
$t''=t'+(c_2+d_2)\Delta t$	$u''=u'+(c_2R'+d_2R)\Delta t$	$R''=R(u'')$
$t^{n+1}=t^n+\Delta t$	$u^{n+1}=u''+(c_3R''+d_3R')\Delta t$	

طرح اختلاف زمانی رانج-کوتای مرتبه سوم فشرده که توسط رای و حسینی [۱۷] توسعه یافته است، برای پیشرفت زمانی محاسبات بکار برده می‌شود. پیشروی زمانی برای معادله ای به شکل:

$$\frac{du}{dt}=R\left(u\right) \quad (۲۳\text{-}۴)$$

در سه مرحله مطابق جدول ۴-۱ صورت می گیرد. در هر مرحله زمان به اندازه $(c_i+d_i)\Delta t$ جلو می رود

[6] Adams-Bashforth
[7] Leapfrog

و u با یک ترکیب خطی از R در زمان فعلی و زمان قبلی بدست می آید. بعد از گذشت مرحله سوم، مقدار u محاسبه شده برابر u بعد از یک Δt زمانی است.

ضرایب بکار رفته در این روش را می توان با بسط سری تیلور برای R' و R'' و سپس برابر قرار دادن ترم های هم مرتبه بدست آورد. با اینکار داریم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1$$

$$c_1 c_2 + c_3[\frac{d_2}{c_2}(1+\frac{d_3}{c_3}) + c_2(1+\frac{d_2}{c_2})] = \frac{1}{2}$$

$$c_1^2 c_2 + c_3[c_1 + c_2(1+\frac{d_2}{c_2})]^2 + c_1^2 d_3 = \frac{1}{3}$$

$$c_1 c_2 c_3 = \frac{1}{6}$$

با در نظر گرفتن $d_1 = 0$، به یک حل برای این مجموعه از معادلات می رسیم:

$$c_1 = 8/15 \quad , \quad d_1 = 0$$

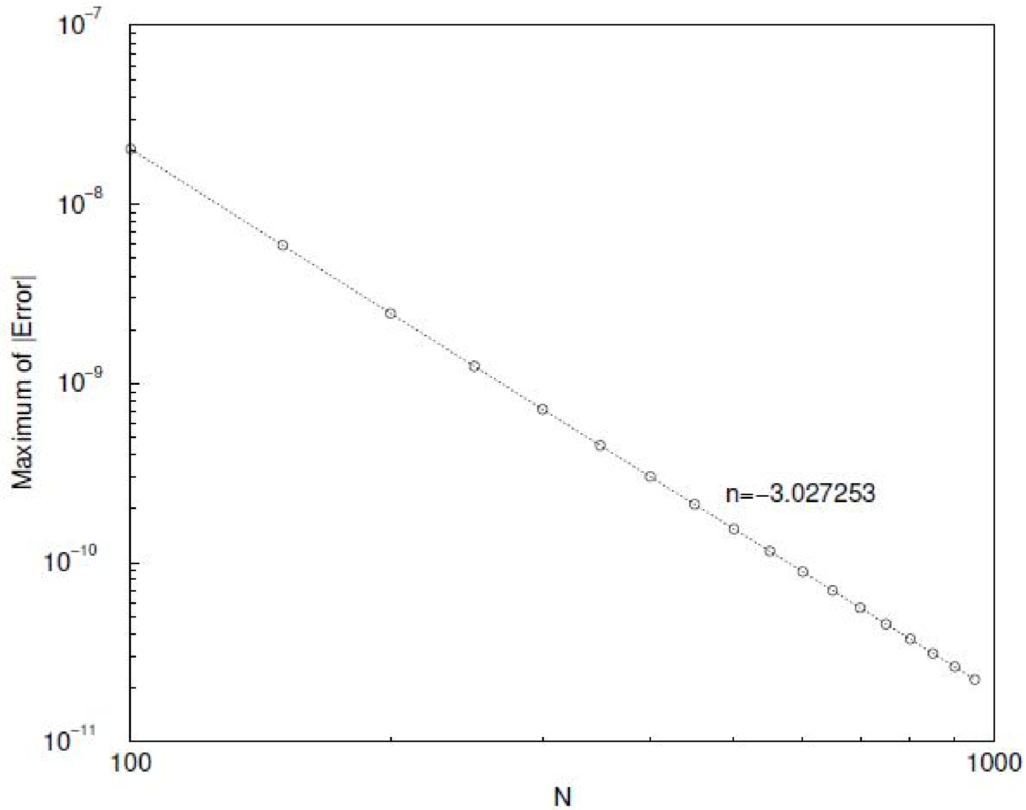
$$c_2 = 5/12 \quad , \quad d_2 = -17/60$$

$$c_3 = 3/4 \quad , \quad d_3 = -5/12$$

تست زیر برای تعیین دقت طرح رانج-کوتای مرتبه سوم انجام شده است. می دانیم $u(t) = e^{-t}$ با شرط اولیه $u(0) = 1$ یک جواب تحلیلی برای معادله:

$$\frac{du}{dt} = -u(t) \qquad (۲۴-۴)$$

می باشد. ماکزیمم خطا بین نتیجه عددی و حل دقیق در شکل ۴-۷ رسم شده است که دقت مرتبه سوم این طرح را نشان می دهد.



شکل ۴-۷ : مرتبه دقت طرح پیشروی زمانی برای $\frac{du}{dt}=-u(t)$ با $u(0)=1$ [۱۶].

فصل پنجم

نتایج شبیه سازی

۵-۱) مقدمه

در این فصل نتایج بدست آمده از شبیه سازی جریان جت مدور تراکم ناپذیر را ارائه می کنیم. در بخش اول حل انجام شده برای جت آرام بررسی می شود. در این حالت سرعت ورودی به شکل یک پروفیل گاوسی بوده و اغتشاشی نداریم. مقادیر سرعت و ورتیسیته بدست آمده در دامنه محاسباتی رسم شده و پدیده خود تشابهی برای آنها بررسی می گردد. نیم عرض و سرعت خط مرکزی و تغییرات آنها با فاصله محوری نیز تعیین می شود. همچنین با مقایسه حل تحلیلی موجود برای مسئله، صحت جواب های حاصل از شبیه سازی را بررسی می کنیم. در بخش بعدی با بالا بردن عدد رینولدز و نیز اعمال اغتشاشاتی در ورودی، جریان را مغشوش می کنیم. سپس با محاسبه مولفه های متوسط و نوسانی سرعت، ترم های تنش رینولدز را بدست می آوریم. در این بخش نیز خود تشابهی کمیت های جریان مورد توجه قرار می گیرد.

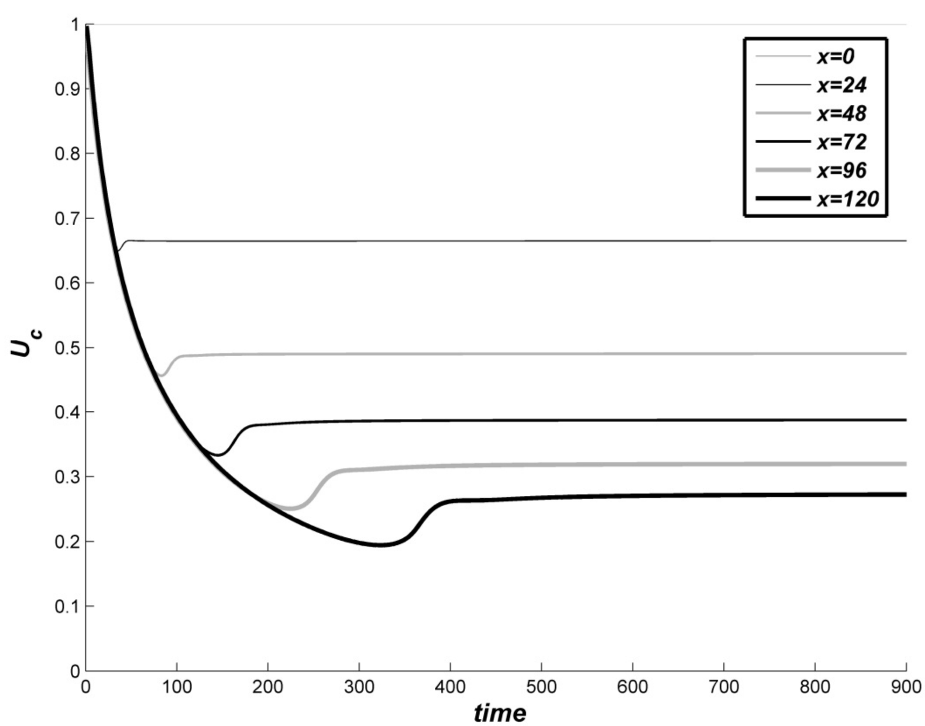
۵-۲) جت مدور آرام

شبیه سازی در حالت آرام در دامنه محاسباتی $0 \le x \le 120$ و $0 \le r \le \infty$ و برای $Re = 200$ انجام شده است. سرعت اولیه در سراسر دامنه یکسان و مطابق معادله ۳-۱۶ قرار داده شده است. دیگر پارامتر های مورد استفاده عبارتند از: $N_x = 160$ ، $N_r = 100$ ، $\beta = 3$ ، $\Delta t = 1/6$ و $C = 0.2$. مقادیر استفاده شده برای N_r و β بگونه ای است که تقریبا $2/3$ گره ها در جهت شعاعی در محدوده $0 \le r \le 5$ قرار می گیرند که تقریبا نواحی مرکزی و لایه برشی جت را شامل می شود. همچنین تراکم زیاد گره ها در نزدیکی محور (کوچک بودن β) از عوامل واگرایی در تحلیل می باشد.

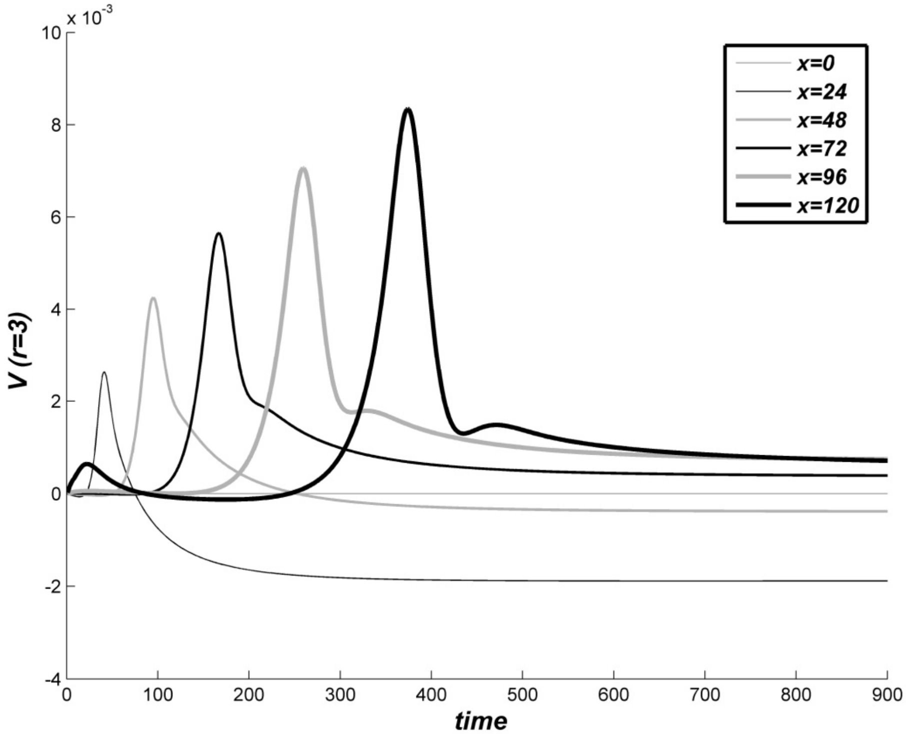
همانطور که انتظار می رود جریان پس از گذشت مدت زمانی به حالت پایدار می رسد. یعنی مقادیر سرعت محوری و شعاعی در هر نقطه ای از دامنه ثابت می شوند. شکل ۵-۱ پایدار شدن سرعت U را

نشان می دهد. به همین ترتیب تغییرات V با زمان در یک شعاع انتخابی (V در خط مرکزی برابر صفر است) در شکل ۵-۲ دیده می شود.

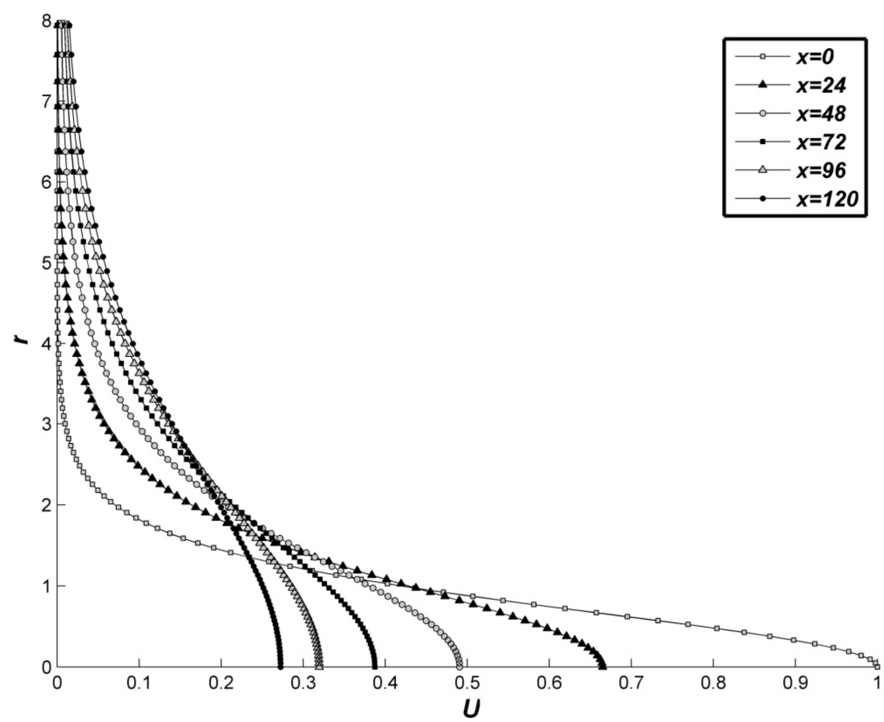
همانطور که در شکل ۵-۳ دیده می شود با افزایش فاصله محوری، مقدار U در نزدیکی محور کاهش و در نقاط دورتر افزایش می یابد. می توان گفت منحنی سرعت از یک مقدار ماکزیمم افت کرده و بعد از گذشتن از یک نقطه عطف (در $r \to \infty$) به صفر می رسد. در این شکل سرعت محوری بر حسب r در ایستگاه های مختلف رسم شده است. شکل های مشابهی برای سرعت شعاعی و ورتیسیته رسم شده اند. در شکل ۵-۴ مقدار منفی سرعت شعاعی از نقطه خاصی به بعد، بخاطر کشیده شدن سیال از اطراف به داخل جت می باشد. شکل ۵-۵ نیز ورتیسیته را بر حسب فاصله شعاعی نمایش می دهد. با دقت در این شکل می توان فهمید شعاع هایی که ورتیسیته در آنها بیشترین مقدار را دارد، تقریبا مطابق با نقاط ماکزیمم سرعت شعاعی می باشند.



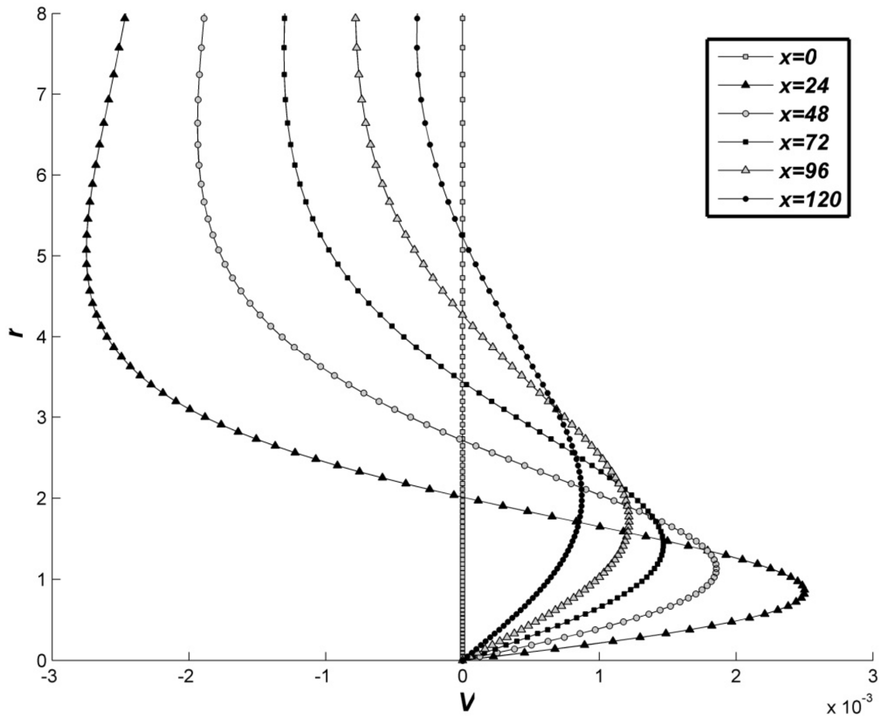
شکل ۵-۱ : گذر زمانی سرعت محوری روی خط مرکزی.



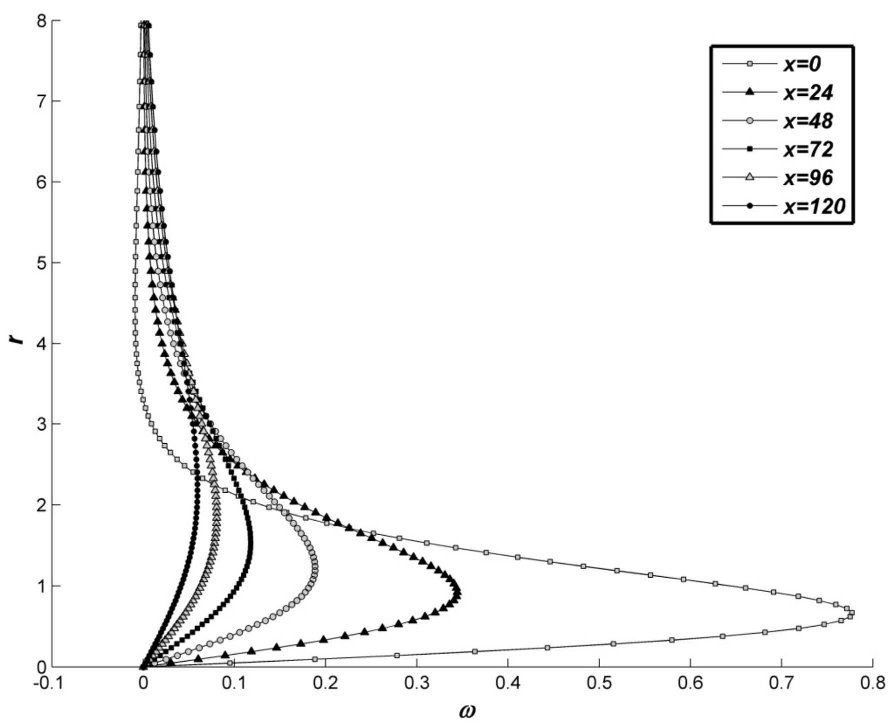
شکل ۵-۲ : گذر زمانی سرعت شعاعی در $r=3$.



شکل ۵-۳ : سرعت محوری در ایستگاههای مختلف.

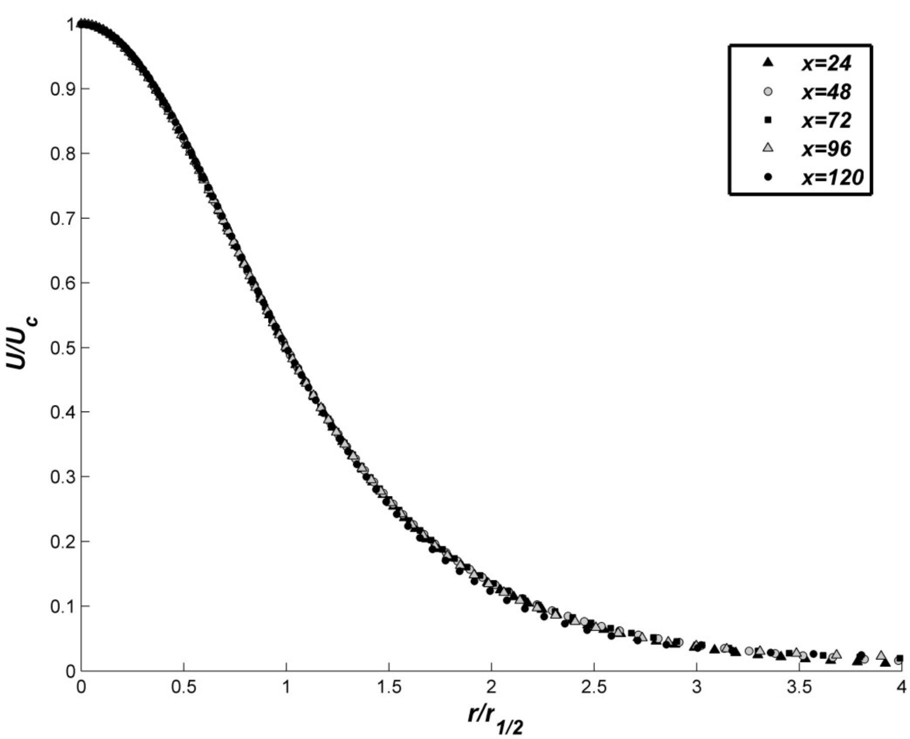


شکل ۵-۴ : سرعت شعاعی در ایستگاههای مختلف.

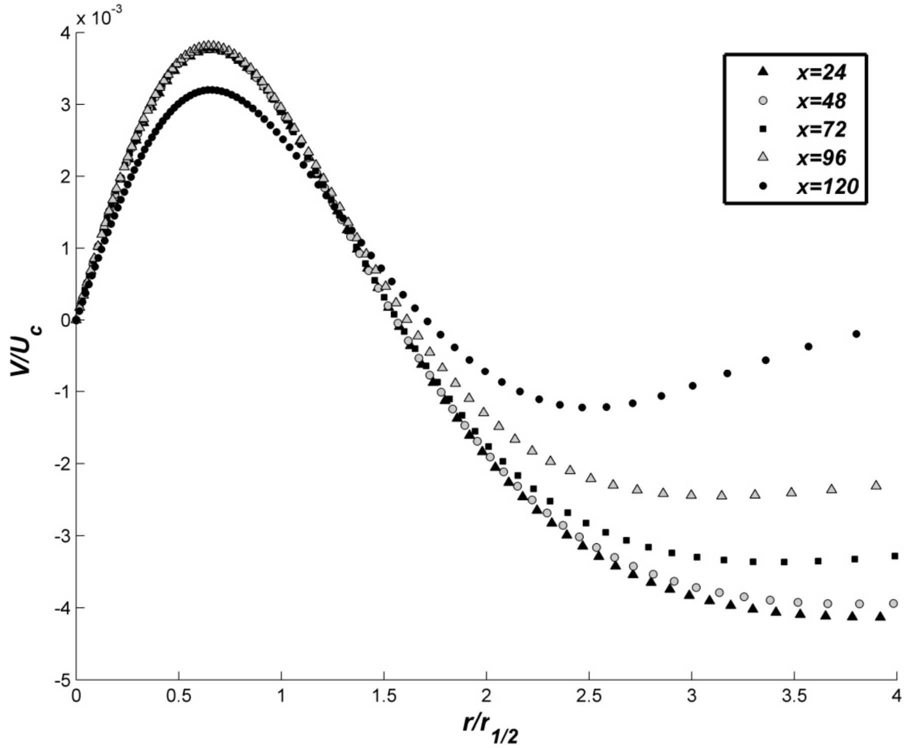


شکل ۵-۵ : ورتیسیته در ایستگاههای مختلف.

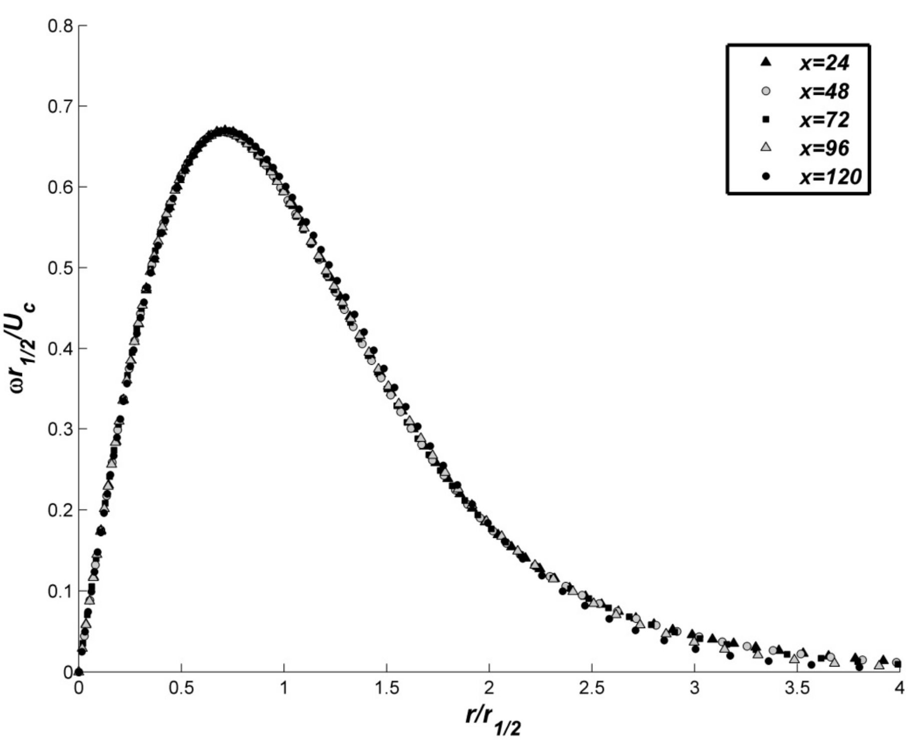
همانطور که قبلا اشاره کردیم، جریان جت یک جریان خود متشابه است. یعنی با بکارگیری متغیر های تشابهی مناسب، پروفیل های سرعت و ورتیسیته شکل واحدی خواهند داشت. در اینجا سرعت را بر U_c (سرعت خط مرکزی) و ورتیسیته را بر $U_c/r_{1/2}$ تقسیم کرده و بر حسب $r/r_{1/2}$ رسم نموده ایم. نتیجه در شکل های ۵-۶ ، ۵-۷ و ۵-۸ دیده می شود. مشاهده می شود منحنی های سرعت محوری و ورتیسیته در مختصات خود متشابه کاملا بر روی هم قرار می گیرند. خود تشابهی برای مولفه V در مرز خروجی $\left(x=L_x\right)$ کمتر دیده می شود که علت آن کارآمدی کمتر شرط جابجایی نسبت به مولفه محوری سرعت است. همینطور سرعت شعاعی برای r های بزرگ خیلی دیر به حالت پایدار می رسد و به همین دلیل در این نواحی پروفیل ها مشابه نشده اند. این مسئله با توجه به اینکه U سرعت غالب در جریان می باشد (مقدار V در مقایسه با U کوچک است) چندان حائز اهمیت نمی باشد.



شکل ۵-۶ : پروفیل خود متشابه سرعت U در ایستگاه های مختلف.



شکل ۵-۷ : پروفیل خود متشابه سرعت V در ایستگاه های مختلف.



شکل ۵-۸ : پروفیل خود متشابه ورتیسیته ω در ایستگاه های مختلف.

در فصل دوم گفتیم عرض و سرعت خط مرکزی جت مدور به ترتیب متناسب با x و x^{-1} می باشند. نتیجه شبیه سازی را برای نیم عرض $\left(r_{1/2}\right)$ و سرعت خط مرکزی $\left(U_c\right)$ با استفاده از روش تقریب حداقل مربعات[1] با منحنی هایی به شکل زیر برازش کرده ایم:

$$r_{1/2}\left(x\right)=S(x-x_0) \qquad (۵-۱)$$

$$U_c\left(x\right)=B(x-x_0)^{-1} \qquad (۵-۲)$$

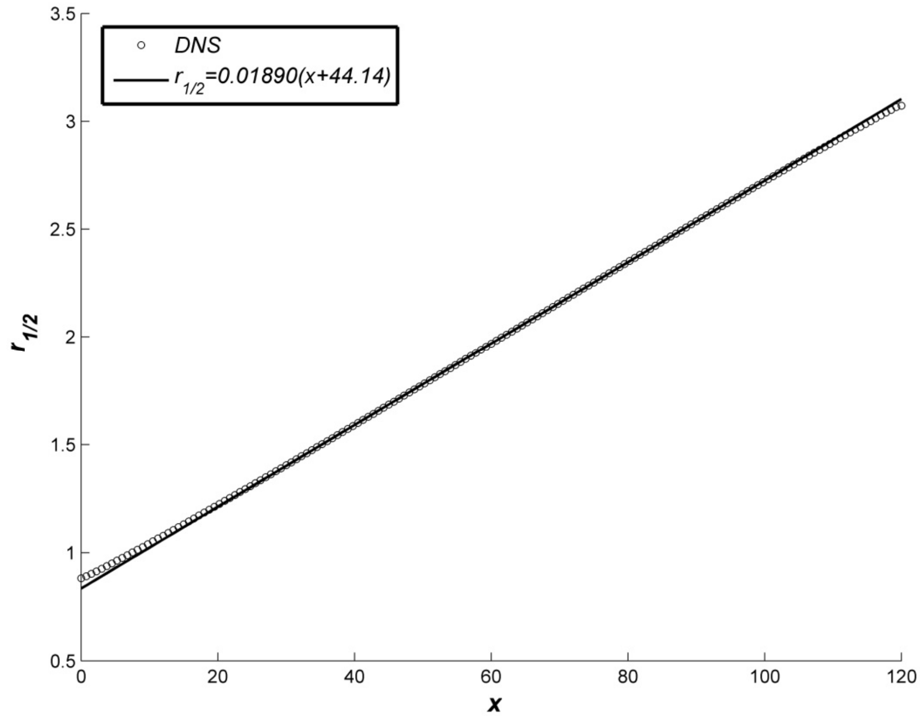
در روابط فوق S و B به ترتیب نرخ های رشد و افت سرعت جت می باشند. با انجام این کار، روابط $r_{1/2}=0.01890(x+44.14)$ و $U_c=44.21\left(x+42.13\right)^{-1}$ را بدست آوردیم که در شکل های ۵-۹ و ۵-۱۰ به همراه نتیجه عددی رسم شده اند. همانطور که می بینیم تغییرات به خوبی با روابط تئوری همخوانی دارند. مقدار منفی بدست آمده برای x_0 ، بخاطر استفاده از یک پروفیل توسعه یافته در ورودی دامنه محاسباتی می باشد. قابل ذکر است هر چه شکل پروفیل اولیه به شکل ایده آل (پروفیل پله ای) برای جت مدور نزدیک تر باشد، مقدار کوچکتری برای x_0 بدست خواهد آمد. همچنین تفاوت کوچک در مقادیر بدست آمده از دو منحنی برای x_0، حاکی از دقت نتایج می باشد.

بنابر معادله ۲-۱۴ شار ممنتوم در هر مقطع $\left(x=const\right)$ ثابت است. با توجه به تراکم ناپذیر بودن جریان، ممنتوم سینماتیک نیز ثابت خواهد بود:

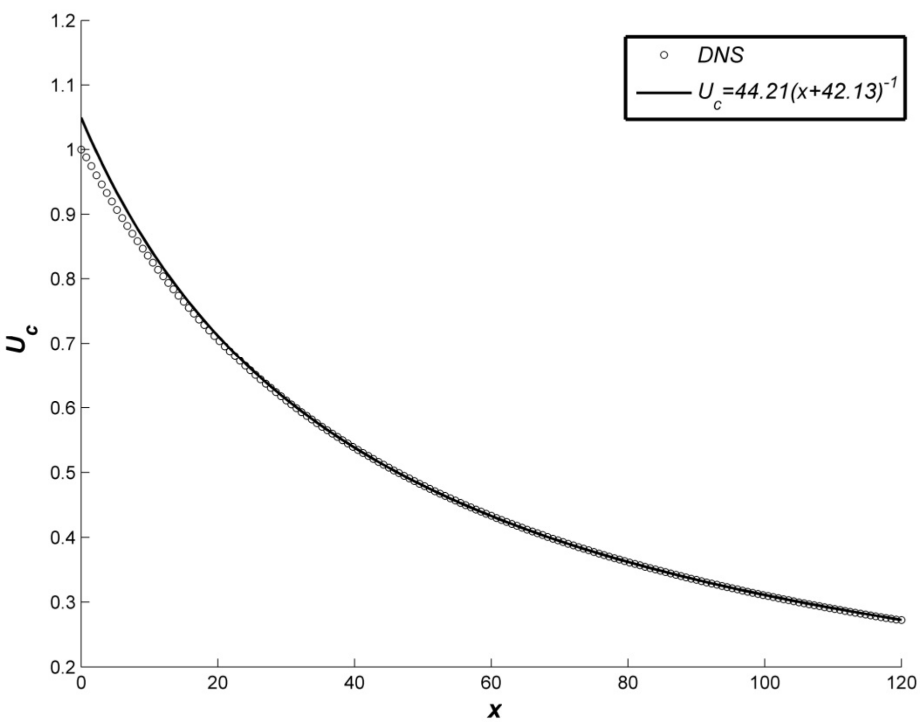
$$K=2\pi\int_0^\infty U^2 r dr=const \qquad (۵-۳)$$

با بدست آمدن سرعت در تمامی نقاط شبکه محاسباتی، می توانیم K را برای هر یک از مقادیر x بدست آوریم. شکل ۵-۱۱ تغییرات K را به ما نشان می دهد. با توجه به شکل می توان گفت شار ممنتوم (علیرغم تغییرات اندک) ثابت باقی مانده است.

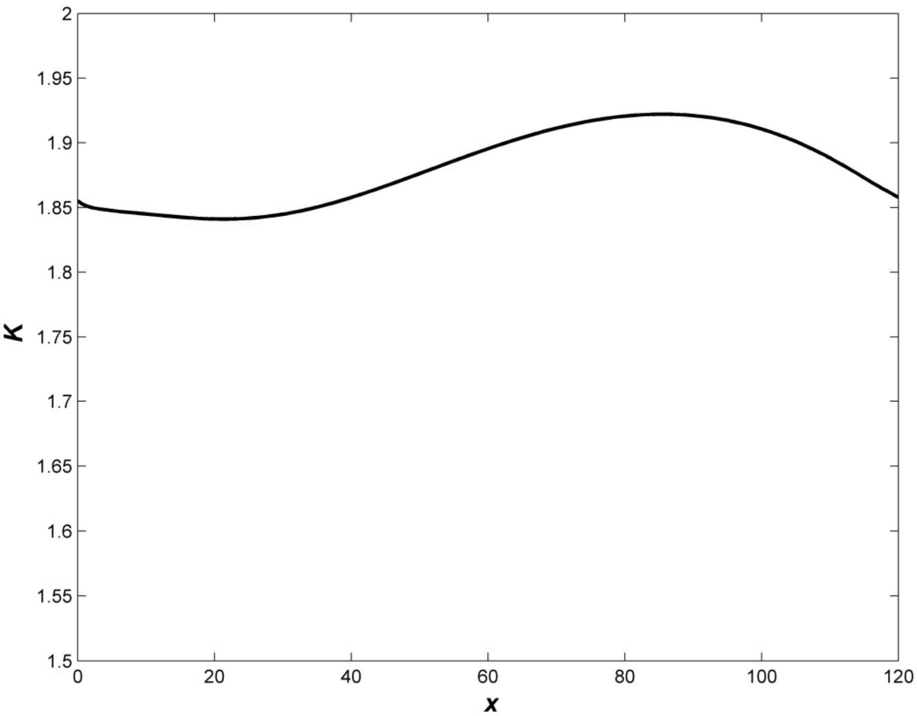
[1] least square



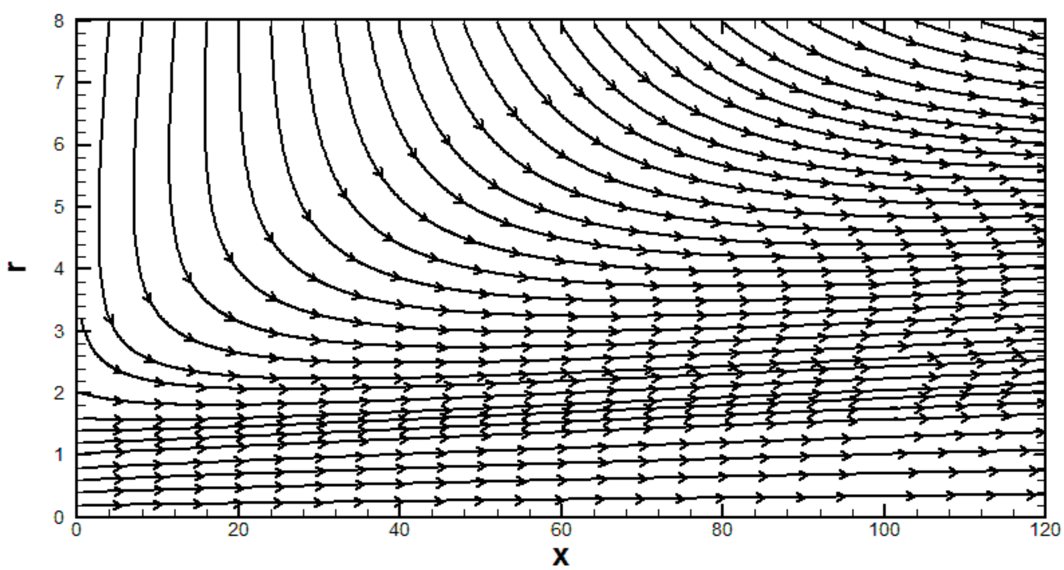
شکل۵-۹ : رشد نیم عرض جت در جهت جریان.



شکل ۵-۱۰ : افت سرعت خط مرکزی جت در جهت جریان.



شکل ۵-۱۱ : ممنتوم سینماتیک بر حسب x .

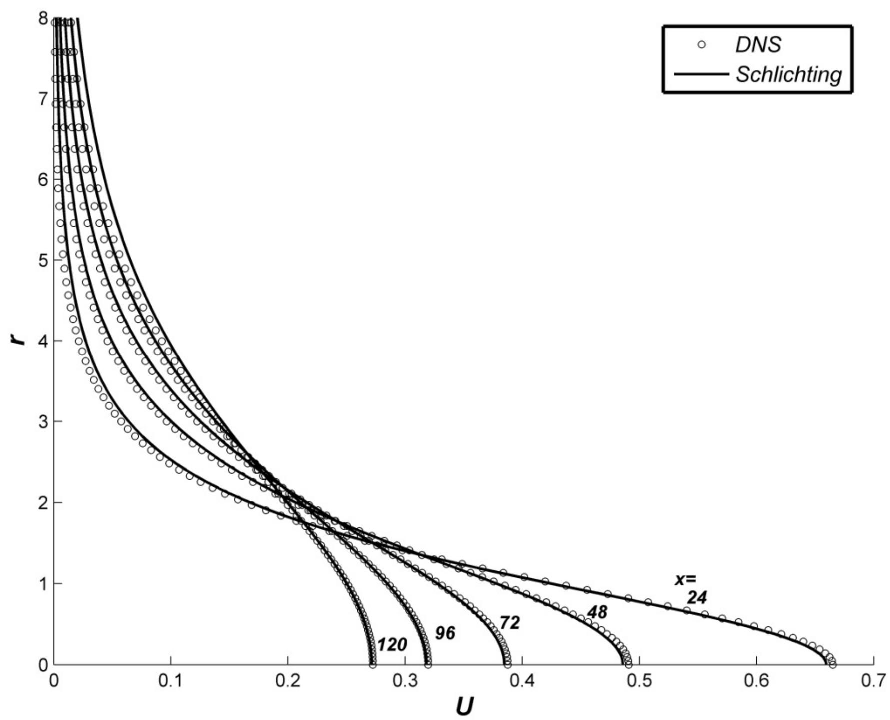


شکل ۵-۱۲ : مسیر خطوط جریان بدست آمده برای جت مدور آرام.

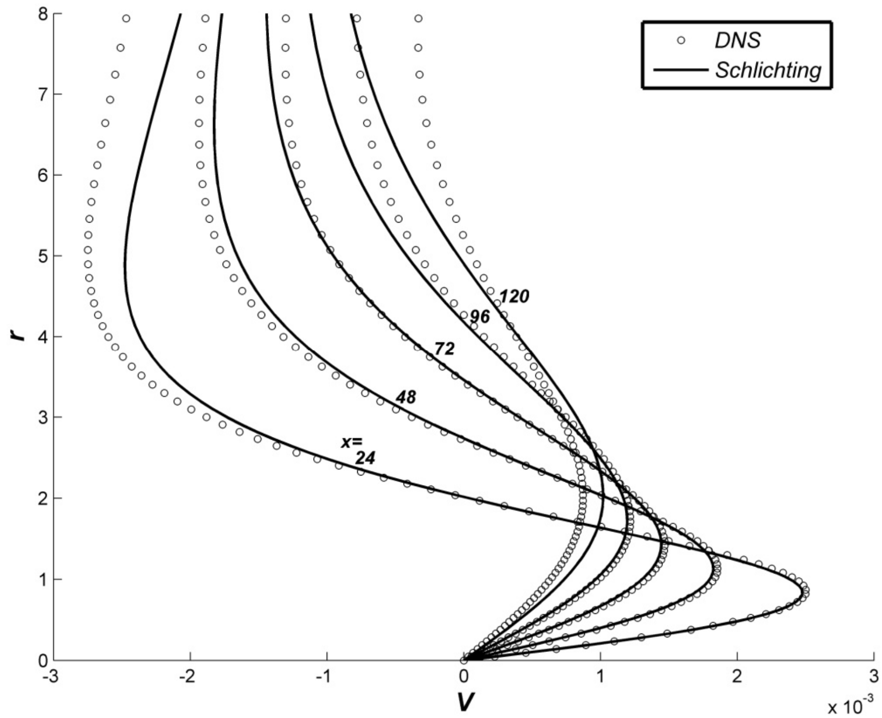
از بحث های پیشین می دانیم که با ورود جت، سیال اطراف به حرکت در می آید و توسط جریان جت به داخل کشیده می شود. در اینجا با توجه به شکل ۲-۶، الگوی خطوط جریان را با استفاده از مقادیر سرعت حاصل از شبیه سازی رسم کرده ایم. شکل ۵-۱۲ بخوبی ورود سیال ساکن پیرامون را نشان می دهد.

روابط ۲-۲۹ تا ۲-۳۱ حل تحلیلی جت مدور آرام بر مبنای فرضیات لایه مرزی می باشد که توسط شیلیختینگ ارائه شده است. در شکل های ۵-۱۳ و ۵-۱۴ سرعت های U و V بدست آمده از این معادلات را با نتایج شبیه سازی مقایسه کرده ایم. در روابط از K و v مسئله استفاده شده است. تطابق خوبی بین داده ها و نتیجه تحلیلی به خصوص در مورد مولفه غالب سرعت (سرعت محوری) دیده می شود. همانطور که قبلا هم اشاره شد دقت برنامه در پیش بینی V در r های بزرگ کم می باشد.

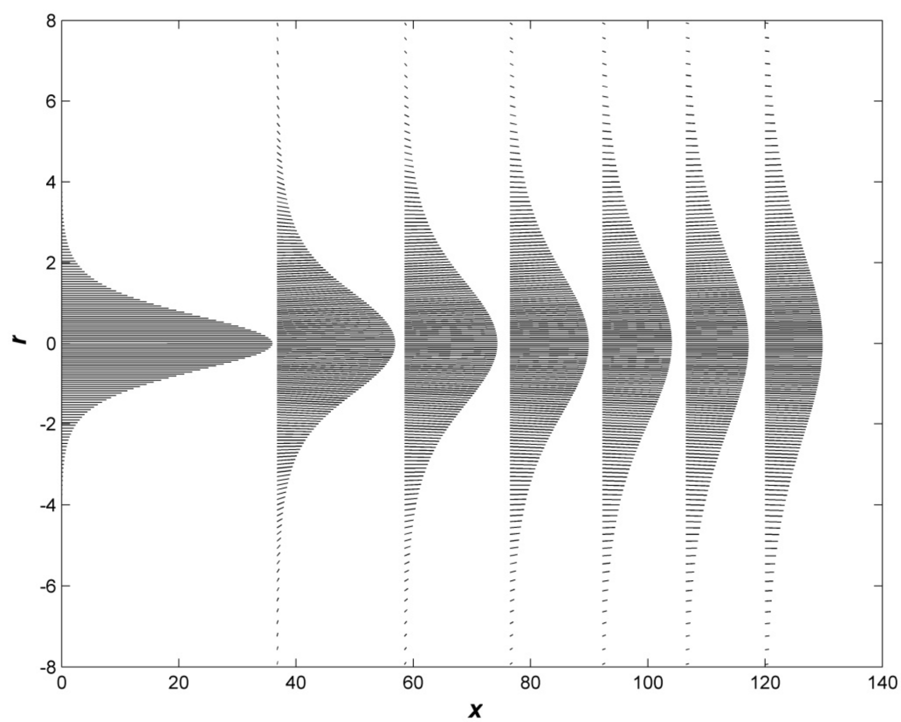
شکل ۵-۱۵ توسعه مکانی جت را نمایش می دهد.



شکل ۵-۱۳ : مقایسه سرعت محوری بدست آمده با معادله ۲-۲۹.



شکل ۵-۱۴ : مقایسه سرعت شعاعی بدست آمده با معادله ۲-۳۰.



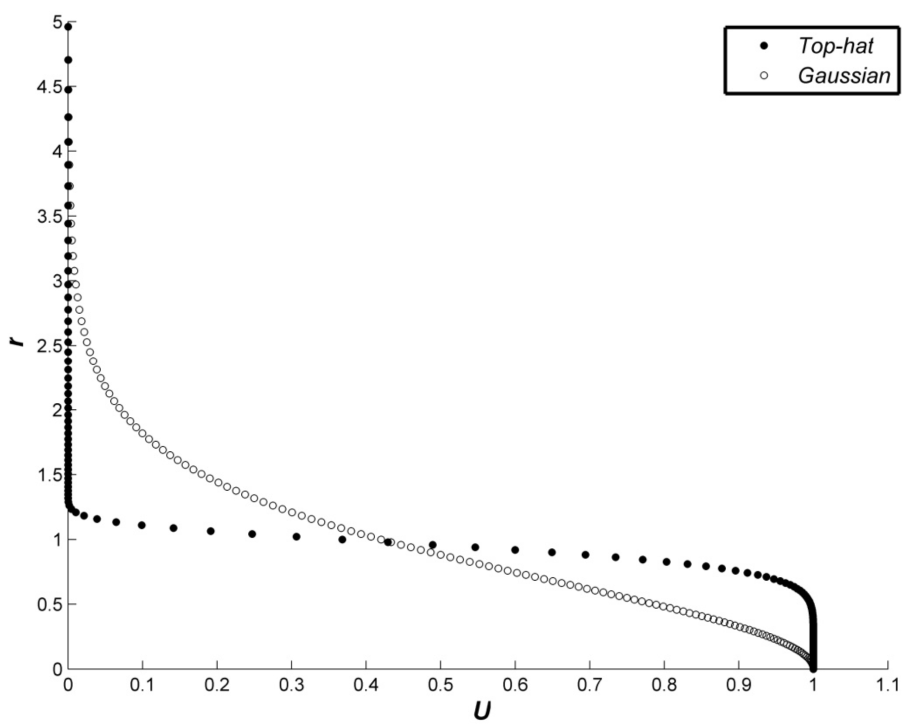
شکل ۵-۱۵ : نمای شماتیک جت توسعه یافته.

۵-۲-۱) تاثیر استفاده از یک پروفیل سرعت ورودی متفاوت

رابطه زیر را در برای سرعت اولیه در نظر بگیرید:

$$U_0\left(r\right)=exp(-r^m) \qquad (۴-۵)$$

در رابطه فوق چنانچه $m=2$ باشد، پروفیلی تقریبا یکسان با رابطه ۳-۱۶ بدست می آید. با افزایش توان در رابطه ۵-۴ شکل پروفیل به شکل واقعی برای جت یعنی پروفیل پله ای نزدیک می شود. جهت بررسی اثر شرط اولیه، شبیه سازی را برای سرعت ورودی مطابق رابطه ۵-۴ (با همان پارامتر های محاسباتی قبلی) ترتیب دادیم. برای تولید پروفیلی نزدیک به حالت پله ای، مقدار m را (با توجه به محدودیت های محاسباتی) برابر ۸ قرار داده ایم. در شکل ۵-۱۶ توزیع این سرعت را همراه با پروفیل گاوسی رابطه ۳-۱۶ مشاهده می کنید که هر کدام با مقدار ماکزیمم خود یکه شده اند.



شکل ۵-۱۶ : مقایسه پروفیل های سرعت پله ای و گاوسی.

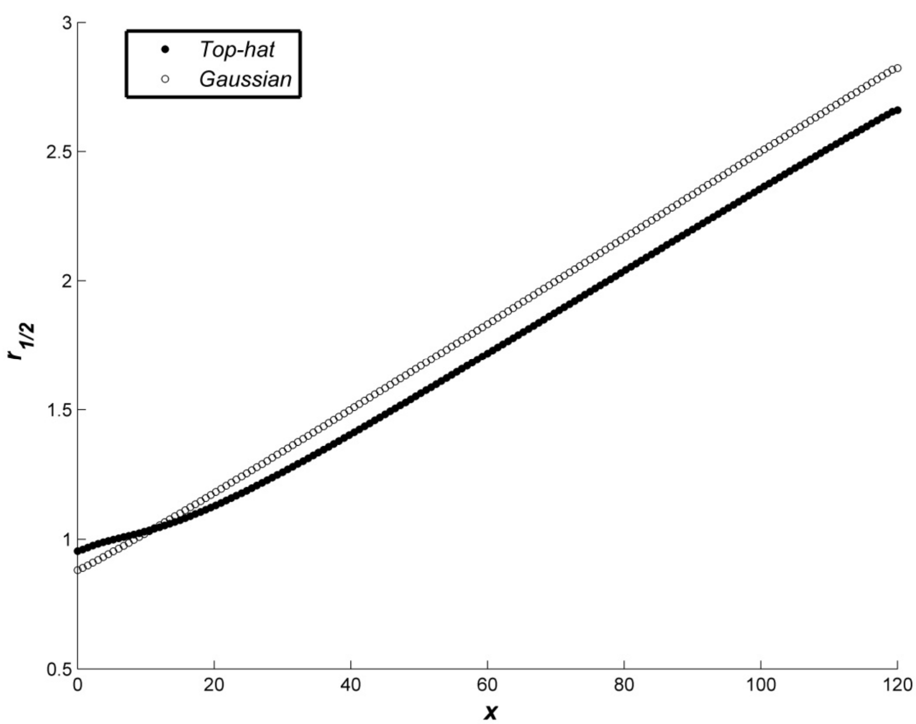
دو جت زمانی یکسان می باشند که ممنتوم برابری داشته باشند. به این ترتیب از یک فاکتور اصلاح (MF) برای سرعت گاوسی استفاده می کنیم:

$$U_0(r) = MF \times \left(1 - tanh^2(r)\right) \tag{۵-۵}$$

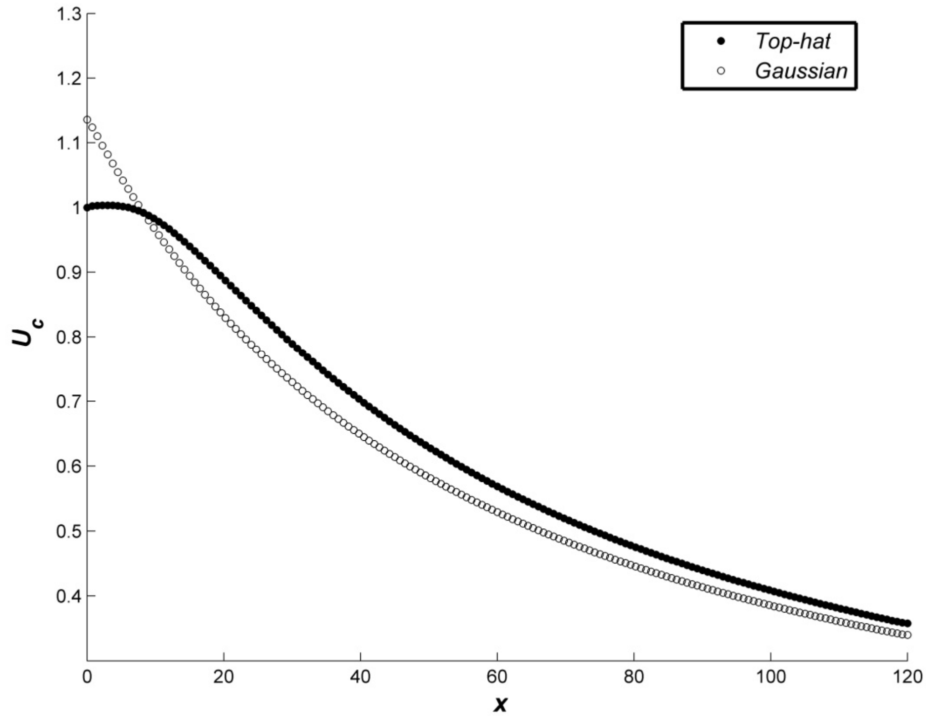
با توجه به رابطه شار ممنتوم (معادله ۲-۱۴) داریم:

$$MF = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} \left(exp\left(-r^8\right)\right)^2 rdr}{\int_0^{\infty} \left(1 - tanh^2(r)\right)^2 rdr}} \tag{۶-۵}$$

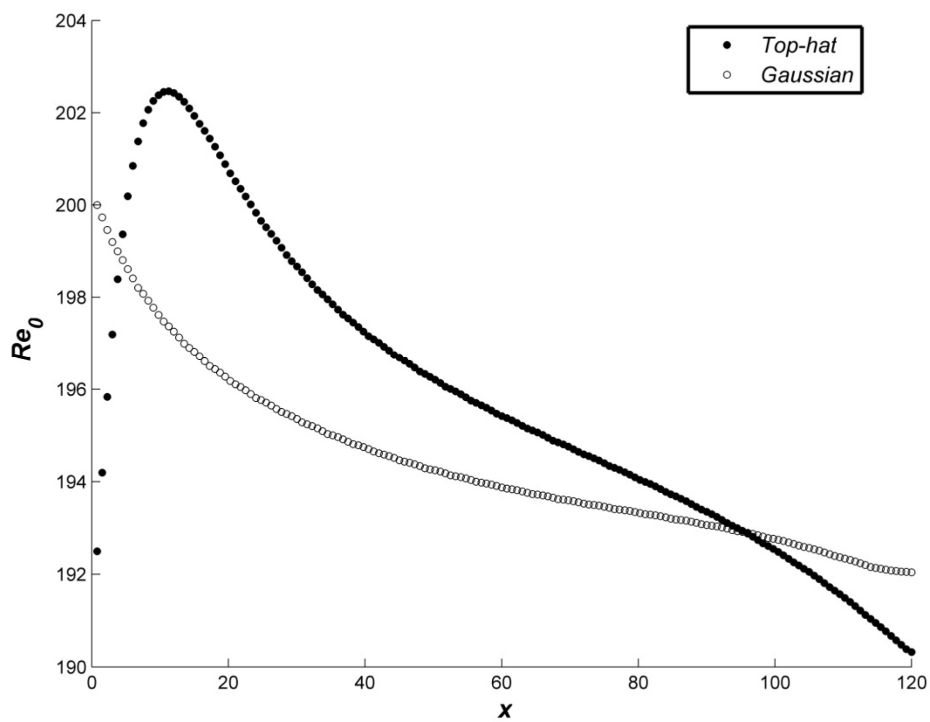
با محاسبه رابطه فوق $MF = 1.1358$ بدست می آید. شکل های ۵-۱۷ و ۵-۱۸ به ترتیب رشد نیم عرض و افت سرعت خط مرکزی را برای دو پروفیل سرعت اولیه نشان می دهند. مشاهده می کنیم که جریان جت با پروفیل گاوسی نرخ رشد بیشتری نسبت به جت با پروفیل پله ای دارد و سریعتر توسعه می یابد.



شکل ۵-۱۷ : نیم عرض در جت ها با پروفیل سرعت پله ای و گاوسی.



شکل ۵-۱۸ : سرعت خط مرکزی در جت ها با پروفیل سرعت پله ای و گاوسی.



شکل ۵-۱۹ : تغییرات عدد رینولدز محلی در جت ها با پروفیل سرعت پله ای و گاوسی.

شکل ۵-۱۹ مقدار عدد رینولدز محلی (رابطه ۲-۱۰) را برای دو جت در طول دامنه محاسباتی نشان می دهد. دیده می شود که Re_0 در جت با سرعت ورودی گاوسی تغییرات ملایم تری نسبت به x دارد.

۵-۳) جت مدور همراه با اغتشاشات ورودی

تمامی جریان های لایه ای بالاخره ناپایدار شده و در حالتی که پارامتری از سرعت (بسته به نوع جریان) به مقدار کافی بالاست، در یک تحول به جریان مغشوش تبدیل می شوند. این پارامتر می تواند عدد رینولدز، عدد گراشف یا عدد تیلور باشد. پایداری هر جریان را می توان با اضافه کردن اختلالات کوچک در جریان لایه ای اصلی مورد مطالعه قرار داد [۲].

از نتیجه بدست آمده برای جت مدور دو بعدی در حالت پایدار زمانی و بدون اغتشاشات ورودی، بعنوان نقطه شروع برای شبیه سازی جریان برای حالت همراه با اغتشاشات استفاده می گردد. با قرار دادن یک اغتشاش در ورودی، جریان لایه ای منظم را به جریان مغشوش تبدیل می کنیم. این اغتشاش بر روی مولفه شعاعی سرعت (V) اعمال می گردد زیرا برای مولفه V به عنوان شرط مرزی ورودی، قیدی به عنوان شرایط حل پذیری[2] وجود ندارد [۱۶]. این اغتشاش به شکل زیر است:

$$V_p = Ae^{-r^2} sin(\omega t) \qquad (۵-۷)$$

که در آن ω فرکانس و A دامنه نوسانات می باشند.

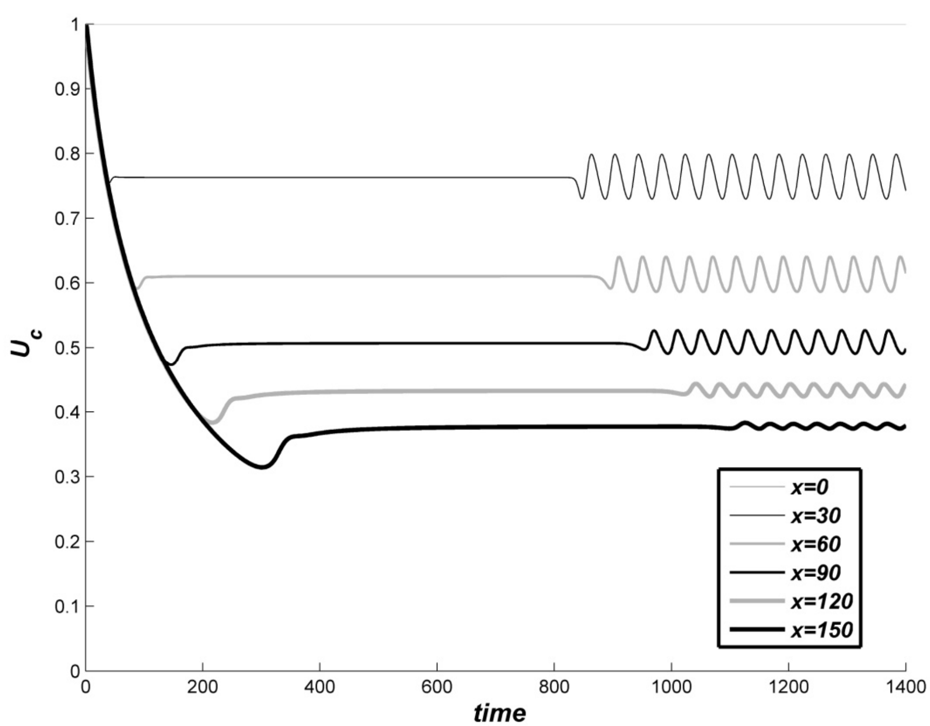
در برنامه نوشته شده برای جریان همراه با اغتشاشات، از یک شبکه با مشخصات $N_x = 200$ ، $N_r = 140$ و $L_x = 150$ استفاده شده است. عدد رینولدز جریان را برابر با 400 گرفته ایم. دیگر مشخصات عبارتند از: $\beta = 3$ ، $\Delta t = 1/6$ و $C = 0.2$. اغتشاشات نیز به فرم معادله ۵-۷ و با $A = 0.05$ و $\omega = \pi/20$ اعمال شده اند.

هر یک از مولفه های سرعت به یک بخش متوسط و یک بخش نوسانی تفکیک می شوند. به عبارتی:

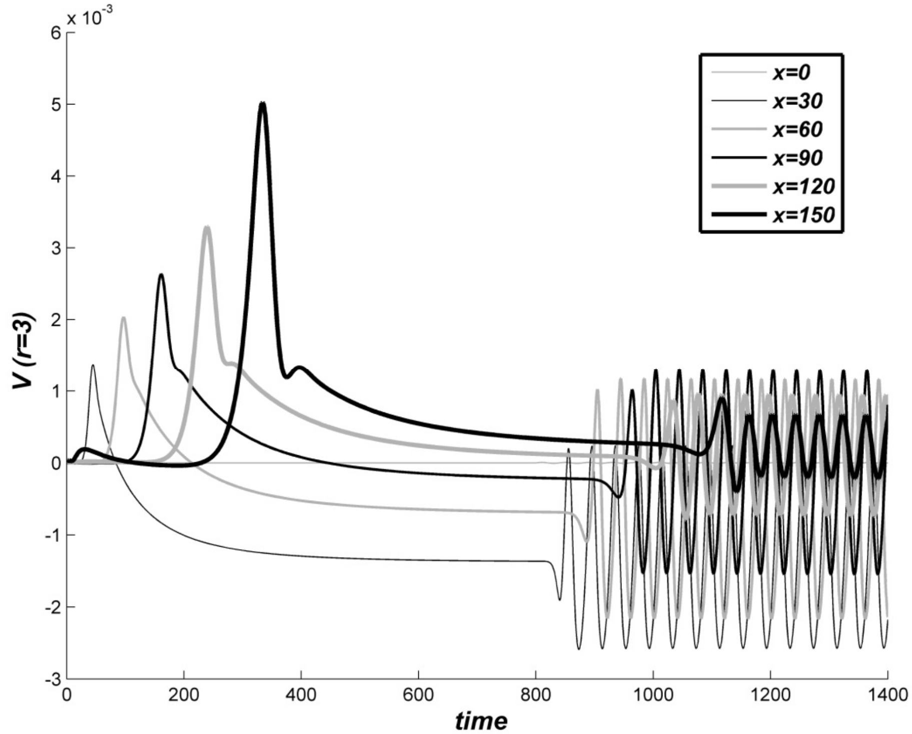
[2] solvability condition

$$U = \bar{U} + u'$$
$$V = \bar{V} + v' \qquad (۸-۵)$$

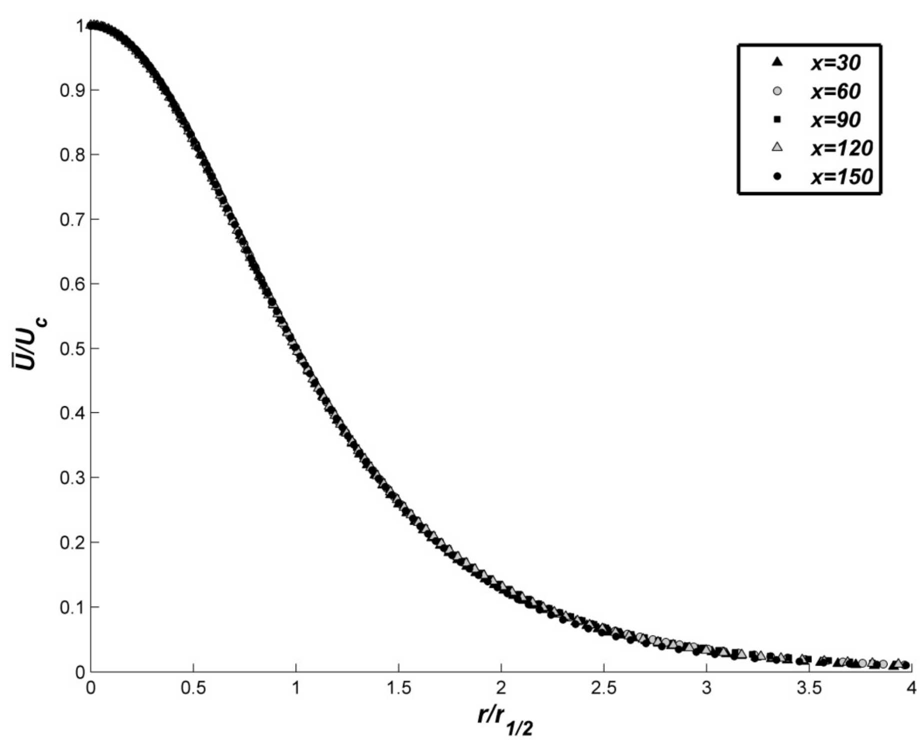
سرعت لحظه ای در شبیه سازی همراه با اغتشاشات باید به لحاظ آماری ساکن شود. در این حالت مقادیر متوسط سرعت مستقل از زمان می باشند. بنابر این شروع متوسط گیری زمانی را لحظه ای قرار می دهیم که اغتشاشات کاملا توسعه یافته و به حالت پایدار رسیده باشند. در شکل های ۵-۲۰ و ۵-۲۱ تغییرات مولفه های لحظه ای سرعت را در حالت همراه با اغتشاش مشاهده می کنید. اختلال ورودی در $t = 800$ اعمال شده است. مشاهده می کنیم با قرار دادن نوسانات، اغتشاش تقریبا بلا فاصله در ایستگاه نزدیک تر به ورودی دیده شده و بعد از مدتی در همه ایستگاهها فراگیر می شود. متوسط گیری زمانی از مقادیر سرعت در بازه زمانی بین 1200 تا 1400 انجام گرفته است.



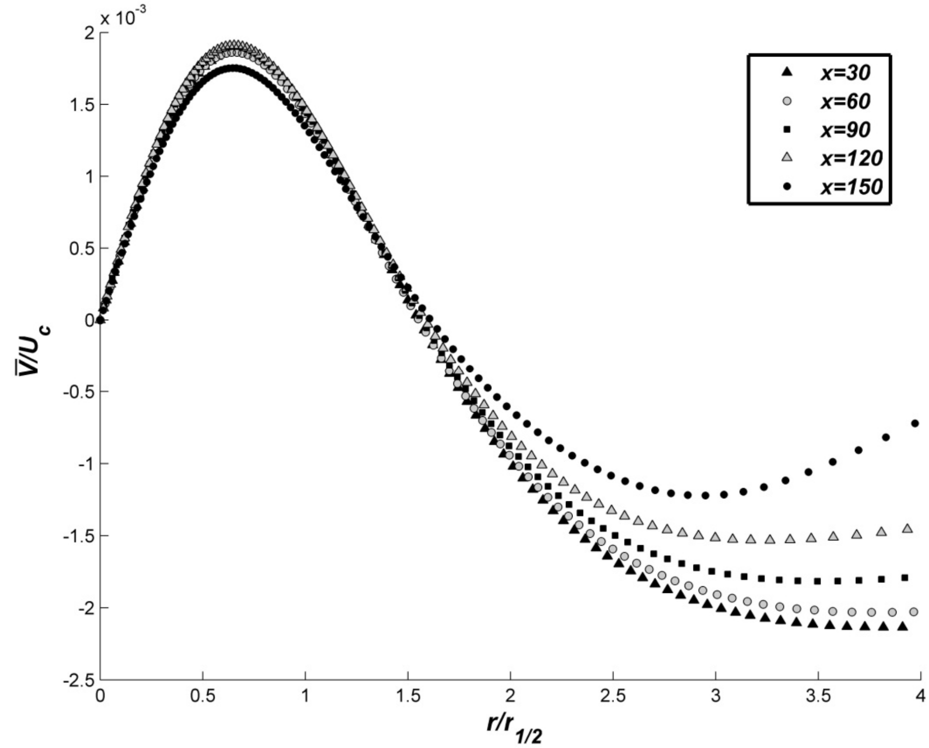
شکل ۵-۲۰ : گذر زمانی سرعت محوری روی خط مرکزی جت در ایستگاههای مختلف.



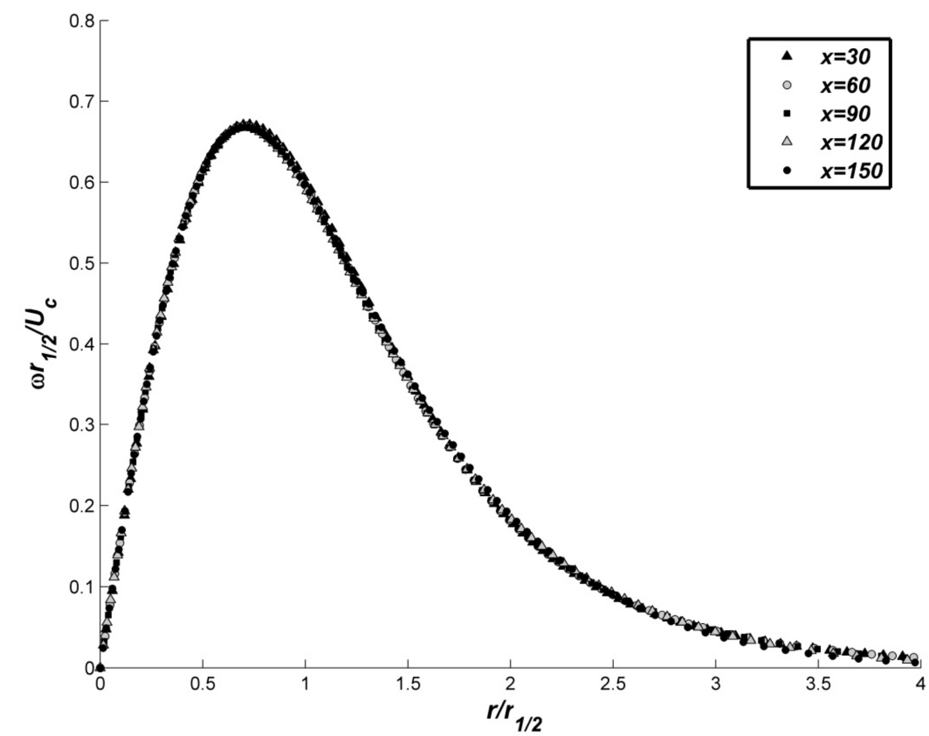
شکل ۵-۲۱ : گذر زمانی سرعت شعاعی در $r=3$ در ایستگاههای مختلف.



شکل ۵-۲۲ : پروفیل سرعت متوسط محوری در مختصات خود متشابه.



شکل ۵-۲۳ : پروفیل سرعت متوسط شعاعی در مختصات خود متشابه.



شکل ۵-۲۴ : پروفیل ورتیسیته در مختصات خود متشابه

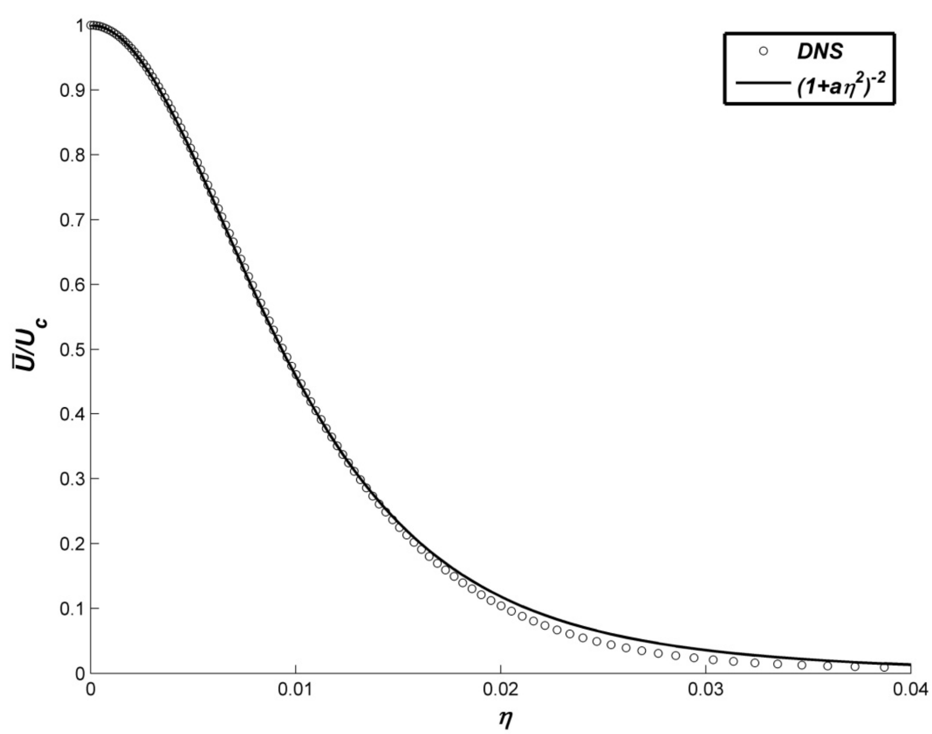
خود تشابهی پروفیل های سرعت متوسط و ورتیسیته در شکل های ۵-۲۲ تا ۵-۲۴ دیده می شود. یک تقریب برای برای پروفیل سرعت خود متشابه عبارتست از:

$$\frac{\bar{U}}{U_c} = \left(1 + a\eta^2\right)^{-2} \qquad , \qquad \eta = \frac{r}{\left(x - x_0\right)} \tag{۵-۹}$$

ثابت a به شکل زیر با S (معادله ۵-۱) رابطه دارد [۹]:

$$a = \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)}{S^2} \tag{۵-۱۰}$$

مقدار a را با استفاده از S خروجی برنامه محاسبه کرده و با قرار دادن در رابطه ۵-۹، پروفیل بدست آمده برای سرعت را مورد ارزیابی قرار داده ایم. نتیجه را برای ایستگاه خروجی در شکل ۵-۲۵ مشاهده می کنید.

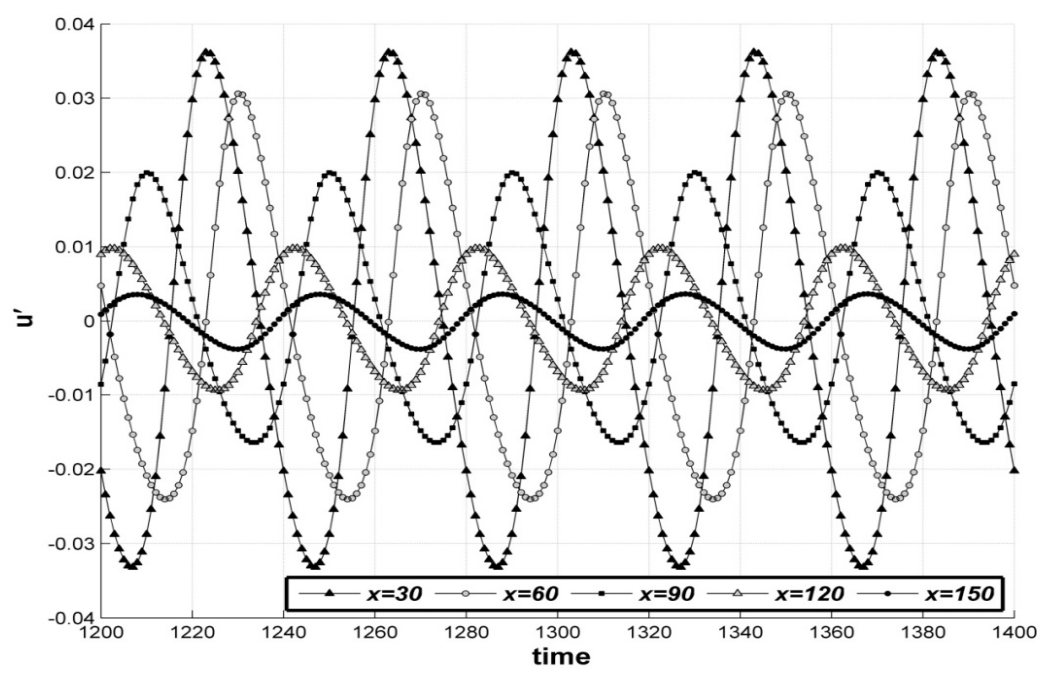


شکل ۵-۲۵ : مقایسه پروفیل خود متشابه سرعت متوسط با معادله ۵-۹ در $x = 150$.

شکل های ۵-۲۶ و ۵-۲۷ به ترتیب نوسانات محوری و شعاعی سرعت را در ایستگاههای مختلف نشان می دهند. نوسانات بدست آمده کاملا پریودیک هستند که این به خاطر نیروی خارجی اعمالی در ابتدای دامنه محاسباتی می باشد. متوسط زمانی هر کدام از نوسان ها برابر صفر است $\left(\overline{u'}=\overline{v'}=0\right)$. در نتیجه برای نشان دادن بزرگی نوسان، از مقدار متوسط مجذور آن استفاده می کنیم. تانسور تنش رینولدز برای جت مدور با توجه به تقارن محیطی[3] مسئله، بصورت زیر تعریف می شود:

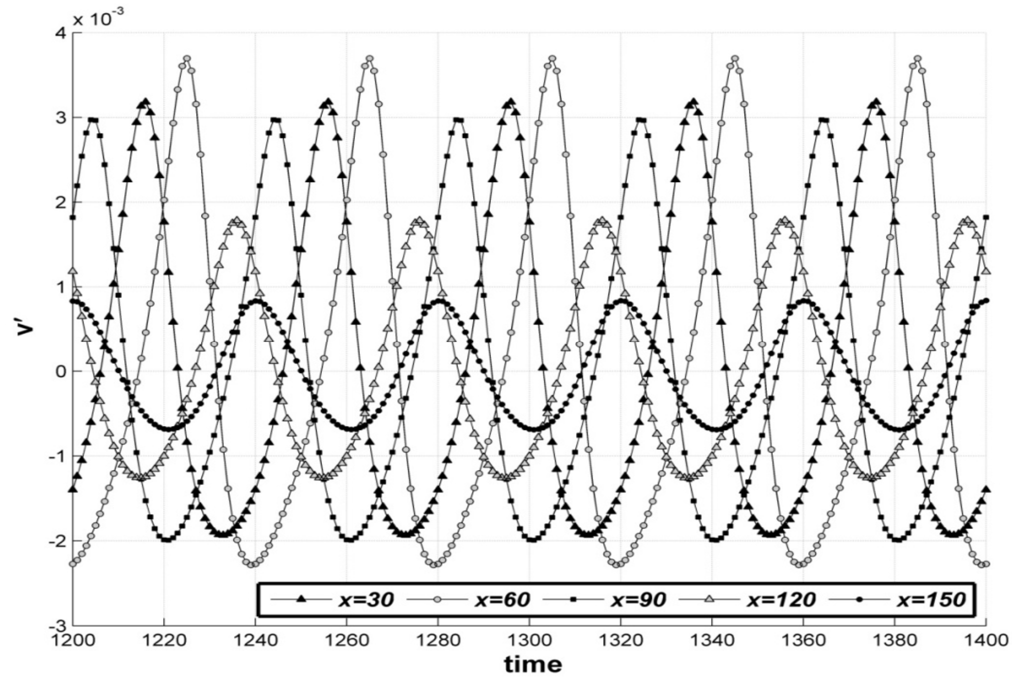
$$\begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{uv} \\ \overline{uv} & \overline{v'^2} \end{bmatrix} \tag{۵-۱۱}$$

ترم های $\overline{u'^2}$ و $\overline{v'^2}$ تنش های نرمال و ترم $\overline{uv}$ تنش برشی رینولدز نامیده می شوند.

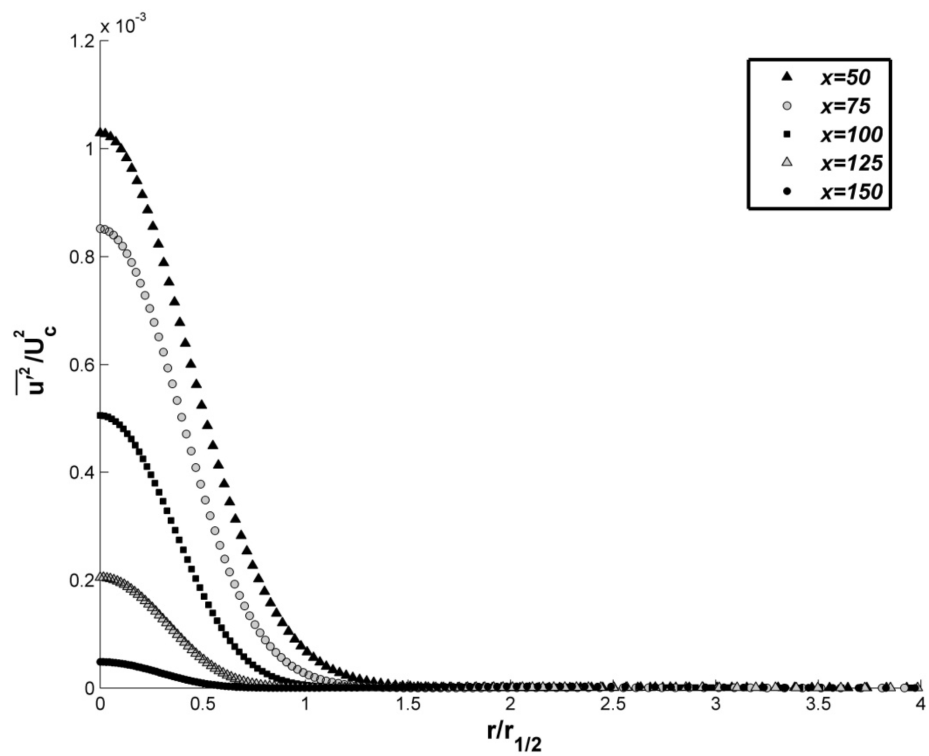


شکل ۵-۲۶ : نوسانات سرعت محوری در ایستگاههای مختلف.

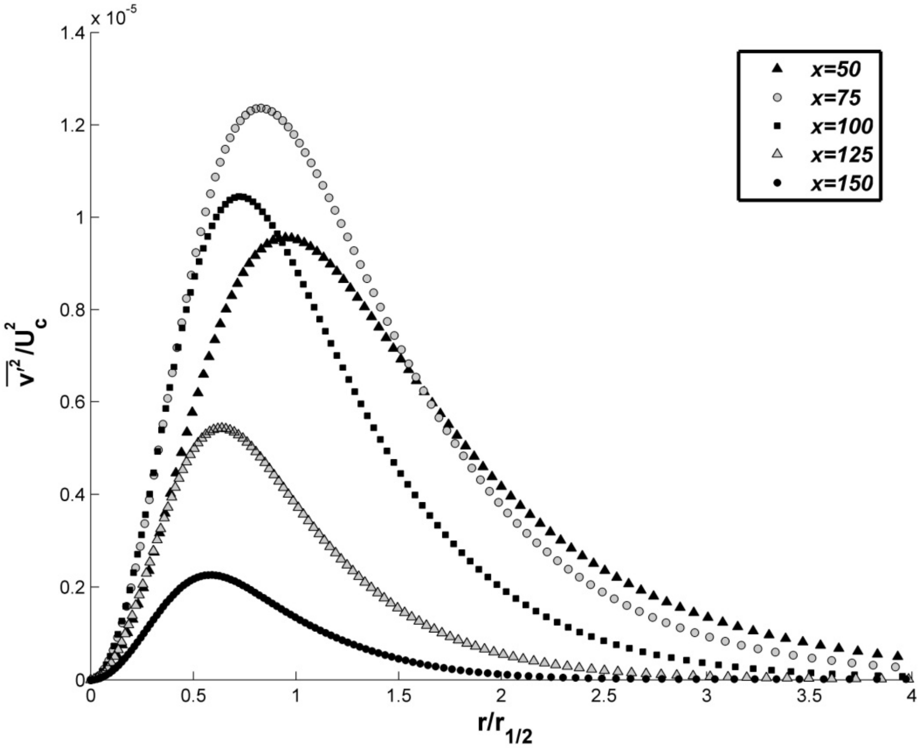
[3] circumferential symmetry



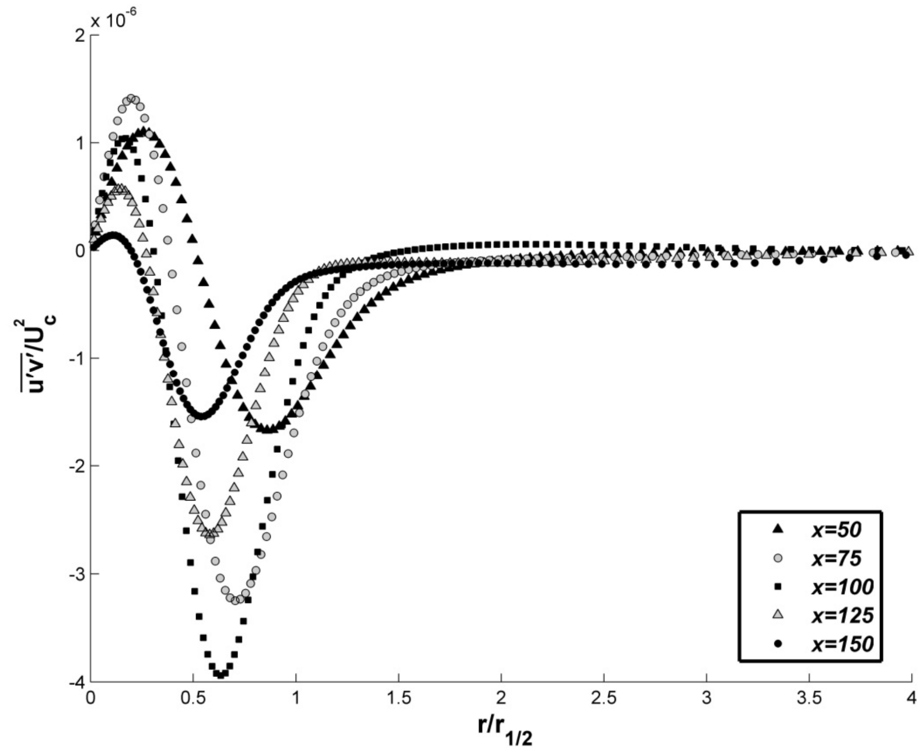
شکل ۵-۲۷ : نوسانات سرعت شعاعی در ایستگاههای مختلف.



شکل ۵-۲۸ : توزیع تنش رینولدز برای نوسانات سرعت محوری در مختصات خود متشابه.



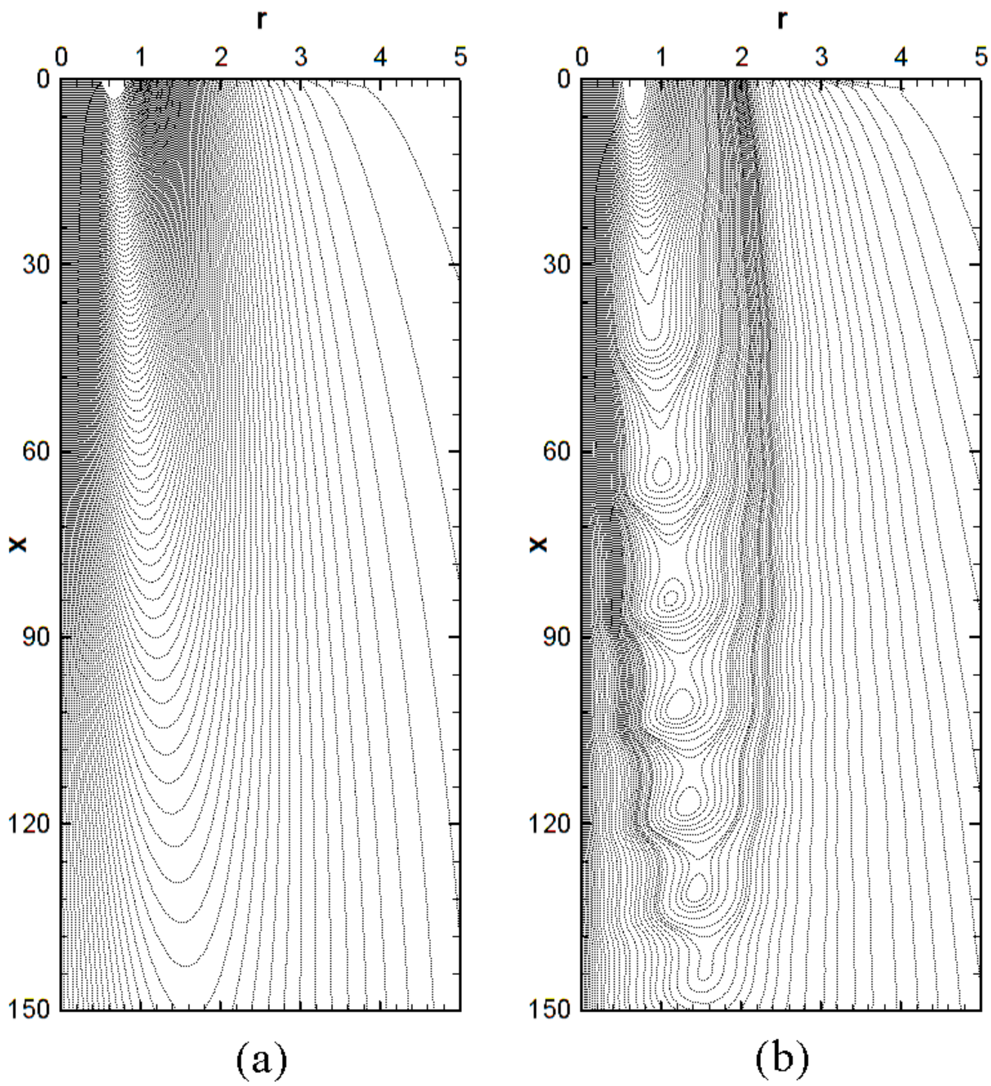
شکل ۵-۲۹ : توزیع تنش رینولدز برای نوسانات سرعت شعاعی در مختصات خود متشابه.



شکل ۵-۳۰ : توزیع تنش برشی رینولدز در مختصات خود متشابه.

در شکل های ۵-۲۸ ، ۵-۲۹ و ۵-۳۰ توزیع تنش های رینولدز بدست آمده در اثر اختلالات اعمال شده، مشاهده می شوند. یکه سازی مقادیر مانند دیگر نمودار ها بوسیله $\bar{U}_c$ و $r_{1/2}$ انجام شده است ولی بر خلاف پروفیل های سرعت و ورتیسیته، خود تشابهی برای تنش ها دیده نمی شود.

در شکل ۵-۳۱ کانتورهای ورتیسیته را در ابتدا و انتهای شبیه سازی جریان همراه با اغتشاشات ملاحظه می کنید.



شکل ۵-۳۱ : کانتور های اسکالر ورتیسیته (a) قبل از اعمال اغتشاشات، (b) بعد از توسعه اغتشاشات.

برای انجام شبیه سازی از کامپیوتری با مشخصات زیر استفاده کرده ایم:

جدول ۵-۱ : مشخصات سخت افزاری.

System Manufacturer	**Dell Inc.**
System Model	**Studio 1537**
Processor	**Intel® Core™ 2 Duo CPU T9550 @ 2.66GHz**
System Type	**32-bit Operating System**
Physical Memory	**4.00 GB**

از شبکه بندی و زمان نهایی متفاوتی برای شبیه سازی جریان آرام و جریان همراه با اغتشاشات استفاده کرده ایم. در جدول زیر زمان انجام برنامه برای هر یک آمده است:

جدول ۵-۲ : زمان اجرای کد.

Case	Resolution	Iteration	Time (min)
Laminar	160×100	5400	30
With Perturbation	200×140	8400	70

نتیجه گیری

در شبیه سازی انجام شده فرم بی بعد معادله ناویر- استوکس استوانه ای برای جریان جت مدور تراکم ناپذیر حل شد. از روش تفاضلات محدود فشرده برای محاسبه مشتقات مکانی و از طرح رانج-کوتای مرتبه سوم برای پیشرفت زمانی معادلات استفاده شده است. با توجه به نامتناهی بودن دامنه جریان در جهت r، یک روش تطبیقی برای تفاضلات محدود فشرده در این جهت بکار برده شد. با گذشت زمان سرعت های لحظه ای به مقدار خاصی رسیده و در آن مقدار ثابت می مانند. با بدست آمدن میدان سرعت در حالت پایدار، کمیت های مختلف جریان مانند سرعت خط مرکزی و نیم عرض جت محاسبه و با استفاده از آنها خود تشابهی مولفه های سرعت و ورتیسیته مورد بررسی قرار گرفت. پس از رسیدن به حالت پایدار، با ایجاد اختلالاتی در ورودی جریان مغشوش شد. با میانگین گیری زمانی مقادیر متوسط و نوسانی سرعت بدست آمدند. نوسانات بدست آمده برای سرعت کاملا پریودیک می باشند که این به خاطر نیروی خارجی اعمالی در ابتدای دامنه محاسباتی می باشد. نتایج حاکی از خود تشابهی کامل پروفیل های سرعت و ورتیسیته می باشند. قابل ذکر است برای اغتشاشات اعمال شده، خود تشابهی برای تنش ها در ایستگاههای مختلف دیده نمی شود.

پیشنهادات برای تحقیقات آینده

به منظور تکمیل و بهبود تحقیق صورت گرفته موارد زیر پیشنهاد می شوند:

- ✓ با ارتقا نرم افزاری کد نوشته شده (استفاده از یک زبان برنامه نویسی مناسب تر) و امکانات سخت افزاری (پردازش اطلاعات با استفاده از کامپیوترهای موازی) جهت افزایش سرعت و در نتیجه حل جریان های با رژیم بالاتر اقدام شود.
- ✓ در برنامه از تخمین هایی برای برآورد مقادیر در $r=0$ استفاده شده است (بخاطر حضور ترم هایی مثل $\frac{1}{r}$، $\frac{1}{r^2}$ و غیره در معادلات). پیشنهاد می شود از روش کارآمد تری نظیر بکارگیری سری های توانی در این گره استفاده شود.
- ✓ با وابسته کردن اختلالات اعمال شده به مختصات مکانی، اغتشاشات ایجاد شده در دامنه محاسباتی بهبود یابند.
- ✓ می توان از روش عددی به کار رفته در تحلیل مسائل پیچیده تری مانند جت های واکنش دهنده یا جت های با جریان های هم جهت استفاده کرد.

پیوست A – روابط در مختصات استوانه ای

گرادیان یک اسکالر:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{e}_x$$

گرادیان یک بردار:

$\vec{V} = \left(V_r, V_\theta, V_x\right)$

$$\nabla\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_r}{\partial r} & \dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} & \dfrac{\partial V_x}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_r}{\partial\theta} - \dfrac{V_\theta}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{V_r}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial V_r}{\partial x} & \dfrac{\partial V_\theta}{\partial x} & \dfrac{\partial V_x}{\partial x} \end{pmatrix}$$

دیورژانس یک بردار:

$$\nabla.\vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

لاپلاسین یک اسکالر:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

لاپلاسین یک بردار:

$$\nabla^2\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2} - \dfrac{V_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial V_r}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V_\theta}{\partial\theta^2} - \dfrac{V_\theta}{r^2} + \dfrac{\partial^2 V_\theta}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_x}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V_x}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

اپراتور ∇^4 با

صرفنظر از $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r\partial x^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial r^2\partial x^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{\partial^4}{\partial r^4}$$

پیوست B – کد برنامه نویسی

در اینجا کد M-File نوشته شده با نرم افزار MATLAB برای شبیه سازی جریان ارائه می شود. در متن برنامه دو M-File دیگر فراخوانی می شوند که اولی برای تعریف ماتریس مشتقات و دومی برای ارائه خروجی استفاده شده اند. این دو را می توانید به ترتیب در صفحات ۸۸ و ۹۲ ملاحظه کنید.

Contents


```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%    DNS CODE FOR ROUND JET    %%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear all
close all
```

COMPUTATIONAL CHARACTERISTICS:

```
digits(128)
% ----------- Geometry ----------- %
Nx=160;
Ny=100;
Lx=120;
beta=3;
% ----- Flow Characteristics ----- %
Re=200; %Reynolds number
C=0.2; %convection velocity
```

```
% ---------- Intervals ----------- %
hx=Lx/Nx;
h=1/Ny;
den=6; %inverse of time interval
Dt=1/den;
dtdx=Dt/hx; %ratio of intervals
% ------------ Domain ------------ %
xi=linspace(0,1,Ny+1); %computational domain in r-direction
x=linspace(0,Lx,Nx+1); %domain in x-direction
r=beta*tan(pi*xi/2); %domain in r-direction
%Lambda:
for j=1:Ny+1
    for i=1:Ny+1
        L1(i,j)=2/(pi*beta)*(cos((pi*xi(i))/2))^2;
        L2(i,j)=L1(i)^2;
        L3(i,j)=-4/(pi*beta^2)*sin((pi*xi(i))/2)*(cos((pi*xi(i))/2))^3;
    end
end
% ------------ Inputs ------------ %
fprintf('\n Lx=%g , dt=%1.3f , C=%g , Re=%g\n',Lx,Dt,C,Re)
pause
fprintf('\n Nx=%g , Ny=%g , beta=%g \n\n',Nx,Ny,beta)
itr=input(' Iteration= '); %iteration
LT=itr*Dt; %final time in laminar case
fprintf('\n LT=%g\n\n',LT)
% --- Initial Velocity Profile --- %
for i=1:Nx+1
    for j=1:Ny+1
        U0(i,j)=1-tanh(r(j))^2;
    end
end
% ------- Selected Station --------%
si=[1 fix(0.2*Nx)+1 fix(0.4*Nx)+1 fix(0.6*Nx)+1 fix(0.8*Nx)+1 Nx+1];
%selected nodes in x direction
for i=1:6
    sx(i)=x(si(i)); %x stations
end
sr=[1 2 3]; %r stations
for i=1:3;
    rsr=abs(r-sr(i));
    [TT(i) T(i)]=min(rsr); %selected nodes in r direction
end
RAN=[ 0.5 0.5 0  ;  1 0 0  ;  0 0 1  ;  1 1 0  ;  1 0 1 ; 0 0 0 ];
%colors RGB values
SiS=fix(itr/10); %select 10 equal steps in time
T1=fix(Ny/4); %arbitrary node in r-direction
T2=fix(Ny/2); %arbitrary node in r-direction
T3=fix(3*Ny/4); %arbitrary node in r-direction
 Lx=120 , dt=0.167 , C=0.2 , Re=200

 Nx=160 , Ny=100 , beta=3
```

MATRICES:

```
derivativematrices %run for matrices
```

```
% DERIVATION OPERATORS:
% --------- Respect To r --------- %
Dk=A1R^-1*B1R;
Dr=L1.*Dk; %1st (f'=Dr*f)
DDk=A2R^-1*B2R;
DDr=L2.*DDk+L3.*Dk; %2nd (f"=DDr*f)
% --------- Respect To x --------- %
Dx=A1X^-1*B1X; %1st (f'=Dx*f):
DDx=A2X^-1*B2X; %2nd (f"=DDx*f)
% RUNGE-KUTTA COEFFICIENTS:
c=[8/15 5/12 ¾];
d=[0 -17/60 -5/12];
% USEFUL MATRICES:
A=A2XU^-1*B2XU;
A1=A;
A1(1,:) =[];
A1(:,1)=[];
A1(Nx,:) =[];
A1(:,Nx)=[];
Vb=zeros(Nx+1,1);
p=xi(2:Ny+1);
pp=linspace(0,1,Ny+1);
rr1=zeros(Ny+1,Ny+1); %(r before a Ny+1*Nx+1)
for i=1:Ny+1
    rr1(i,:)=r(i);
end
D=Dr-rr1.*DDr;
D(1,:)=[];
D(:,1)=[];
D(Ny,:)=[];
D(:,Ny)=[];
rr2=zeros(Ny+1,Nx+1); %(r before a Ny+1*Nx+1)
for i=1:Ny+1
    rr2(i,:)=r(i).^2;
end
r1=r;
r1(1)=1;
for i=1:Nx+1
    ir1(i,:)=1./r1; %(1/r before a Nx+1*Ny+1)
end
for i=1:Nx+1
    ir2(i,:)=1./(r1.^2); %(1/r^2 before a Nx+1*Ny+1)
end
for i=1:Nx+1
    ir3(i,:)=1./(r1.^3); %(1/r^3 before a Nx+1*Ny+1)
end
ir=zeros(Ny+1,Ny+1); %(1/r before a Ny+1*Ny+1)
for i=2:Ny+1
    ir(i,:)=1/r(i);
end
B=DDr'+(ir.*Dr)';
```

START POINT:

```
t=0; %time
```

```
e=1; %counter of current figure
n=0; %counter of integer times
RHS0=zeros(Nx+1,Ny+1);
R(1:Nx+1,1:Ny+1,1)=RHS0;
RSU0=zeros(Nx+1,Ny+1);
RSU(1:Nx+1,1:Ny+1,1)=RSU0;
RSV0=zeros(Nx+1,Ny+1);
RSV(1:Nx+1,1:Ny+1,1)=RSV0;
U=U0;
u=U-U0; %U=u+U0
NV=zeros(1,Ny+1);
NVB=zeros(1,Ny+1);
DXI=zeros(1,Ny+1);
DXO=zeros(1,Ny+1);
lu(:,:,2)=zeros(Nx+1,Ny+1);
BDX(1,:)=(-3/hx)*DXI;
BDX(Nx+1,:)=(3/hx)*DXO;
```

L O O P :

```
for l=1:itr
    for k=2:4 %Runge-Kutta
```

Step1: Continuity Equation

```
        %d2/dr2(rV)=-d/dx(U)-r*d2/dxdr(U)
        H=rr2.*(Dr*(Dx*u)’); %DEC
        H(1,:)=[];
        H(Ny,:)=[];
        RV=linsolve(D,H);
        RV=RV’;
        for i=1:Nx+1
            for j=1:Ny-1
                Vint(i,j)=RV(i,j)/r(j+1);
            end
        end
        V=[Vb Vint Vb];
        V(1,:)=NVB;
        V(Nx+1,:)=NV;
        %end Step1
```

Step2: Vorticity

```
        DX=Dx*V;
        DR=Dr*U’;
        W=DX-DR’;
        %end Step2
```

Step3: H

```
        Hx=V.*W;
```

```
Hr=-U.*W;
%end Step3
```

Step4: Term I

```
DR=Dr*Hx';
DX=Dx*Hr;
I1=DR'-DX;
I=ir1.*I1;
%end Step4
```

Step5: Term II

```
D2R=DDr*Hx';
DX=Dx*Hr;
DXDR=Dr*DX';
II=D2R'-DXDR';
%end Step5
```

Step6: Term III

```
%d/dr:
DR=Dr*U';
%d2/dr2:
D2R=DDr*U';
%d3/dr3:
D2pR=Dr*DR;
D3R=Dr*D2pR;
%d4/dr4:
D4R=Dr*D3R;
%d2/dx2:
D2X=DDx*U;
%d3/dx2dr:
D2XDR=Dr*D2X';
%d4/dx2dr2:
D2XD2R=DDr*D2X';
%d4/dx4:
D4X=DDx*D2X;
D3R1=ir1.*D3R';
D2R1=ir2.*D2R';
DR1=ir3.*DR';
D2XDR1=ir1.*D2XDR';
III1=D4R'+2*D3R1-D2R1+DR1+2*D2XD2R'+2*D2XDR1+D4X;
III=(1/Re)*III1;
%end Step6
```

Step7: RHS

```
RHS=I+II+III;
for i=1:Nx+1
    q=RHS(i,2:Ny+1);
```

```
    qq = pchip(p,q,pp);
    RHS(i,1)=qq(1); %evaluate value at r=0
end
%end Step7
```

Step8: RK3

```
R(:,:,k)=RHS;
lu(:,:,k+1)=lu(:,:,k)+(c(k-1)*R(:,:,k)+d(k-1)*R(:,:,k-1))*Dt;
t=t+(c(k-1)+d(k-1))*Dt;
%end Step8
```

Step9: Update Boundary Conditions

```
dt=(c(k-1)+d(k-1))*Dt;
%--- U ---%
%du/dt=-C*du/dx,RK3
u_0=u;
DX=Dx*u_0;
RSU(:,:,2)=-C*DX;
u_1=u_0+c(1)*RSU(:,:,2)*dt;
DX=Dx*u_1;
RSU(:,:,3)=-C*DX;
u_2=u_1+(c(2)*RSU(:,:,3)+d(2)*RSU(:,:,2))*dt;
DX=Dx*u_2;
RSU(:,:,4)=-C*DX;
u_3=u_2+(c(3)*RSU(:,:,4)+d(3)*RSU(:,:,3))*dt;
NU=u_3(Nx+1,:); %updated u (outlet)
%U(x=0)=U0
NUB=0; %DEC %updated u (inlet)
%--- V ---%
%dV/dt=-C*dV/dx,RK3
V_0=V;
DX=Dx*V_0;
RSV(:,:,2)=-C*DX;
V_1=V_0+c(1)*RSV(:,:,2)*dt;
DX=Dx*V_1;
RSV(:,:,3)=-C*DX;
V_2=V_1+(c(2)*RSV(:,:,3)+d(2)*RSV(:,:,2))*dt;
DX=Dx*V_2;
RSV(:,:,4)=-C*DX;
V_3=V_2+(c(3)*RSV(:,:,4)+d(3)*RSV(:,:,3))*dt;
NV=V_3(Nx+1,:); %updated v (outlet)
%V(x=0)=0
NVB=V(1,:); %updated v (inlet)
%--- du/dx ---%
%du/dx=-(1/r)(d/dr(rV))
f=(r.*NV)';
G=B1R*f;
DRz=linsolve(A1R,G);
for i=1:Ny+1
     DrVR(i)=L1(i)*DRz(i);
end
```

```
        for j=2:Ny+1
            DXO(j)=-(1/r(j))*DrVR(j); %updated du/dx (outlet)
        end
        q=DXO(2:Ny+1);
        qq = pchip(p,q,pp);
        DXO(1)=qq(1); %evaluate DXO at r=0
        f=(r.*NVB)';
        G=B1R*f;
        DRz=linsolve(A1R,G);
        for i=1:Ny+1
             DrVR(i)=L1(i)*DRz(i);
        end
        for j=2:Ny+1
            DXI(j)=-(1/r(j))*DrVR(j); %updated du/dx (inlet)
        end
        q=DXI(2:Ny+1);
        qq = pchip(p,q,pp);
        DXI(1)=qq(1); %evaluate DXI at r=0
        %altenative formulation for 2nd derivative respect to r
        %[A2XU][U"]=[B2XU][U]+[BDX]
        BDX=zeros(Nx+1,Ny+1);
        BDX(1,:)=(-3/hx)*DXI;
        BDX(Nx+1,:)=(3/hx)*DXO;
        %end Step9
```

Step10: Poisson Equation

```
        lu1=lu(:,:,k+1)-(A2XU^-1*BDX);
        u(1,:)=NUB;
        u(Nx+1,:)=NU;
        lu1(1,:)=[];
        lu1(Nx,:)=[];
        lu1=lu1-A(2:Nx,1)*u(1,:)-A(2:Nx,Nx+1)*u(Nx+1,:);
        u1=lyap(A1,B,-lu1);
        u(2:Nx,:)=u1;
        u(:,Ny+1)=zeros(Nx+1,1);
        U=u+U0;
        for i=2:Nx+1 %overwrite centerline U velocity using du/dr(r=0)=0
            U(i,1)=-(((r(1)-r(2))*(r(1)-r(3))*(r(1)-r(4))*(r(1)-
r(5)))/((r(1)-r(3))*(r(1)-r(4))*(r(1)-r(5))+(r(1)-r(2))*(r(1)-
r(4))*(r(1)-r(5))+(r(1)-r(2))*(r(1)-r(3))*(r(1)-r(5))+(r(1)-r(2))*(r(1)-
r(3))*(r(1)-r(4))))*(  …
            (U(i,2)*((r(1)-r(3))*(r(1)-r(4))*(r(1)-r(5))+(r(1)-
r(1))*(r(1)-r(4))*(r(1)-r(5))+(r(1)-r(1))*(r(1)-r(3))*(r(1)-r(5))+(r(1)-
r(1))*(r(1)-r(3))*(r(1)-r(4)))/((r(2)-r(1))*(r(2)-r(3))*(r(2)-
r(4))*(r(2)-r(5))))+ …
            (U(i,3)*((r(1)-r(1))*(r(1)-r(2))*(r(1)-r(4))+(r(1)-
r(1))*(r(1)-r(2))*(r(1)-r(5))+(r(1)-r(1))*(r(1)-r(4))*(r(1)-r(5))+(r(1)-
r(2))*(r(1)-r(4))*(r(1)-r(5)))/((r(3)-r(1))*(r(3)-r(2))*(r(3)-
r(4))*(r(3)-r(5))))+ …
            (U(i,4)*((r(1)-r(1))*(r(1)-r(2))*(r(1)-r(3))+(r(1)-
r(1))*(r(1)-r(2))*(r(1)-r(5))+(r(1)-r(1))*(r(1)-r(3))*(r(1)-r(5))+(r(1)-
r(2))*(r(1)-r(3))*(r(1)-r(5)))/((r(4)-r(1))*(r(4)-r(2))*(r(4)-
r(3))*(r(4)-r(5))))+ …
```

```
            (U(i,5)*((r(1)-r(1))*(r(1)-r(2))*(r(1)-r(3))+(r(1)-
r(1))*(r(1)-r(2))*(r(1)-r(4))+(r(1)-r(1))*(r(1)-r(3))*(r(1)-r(4))+(r(1)-
r(2))*(r(1)-r(3))*(r(1)-r(4)))/((r(5)-r(1))*(r(5)-r(2))*(r(5)-
r(3))*(r(5)-r(4)))));
        end
        %end Step10
    end %end Runge-Kutta
    lu(:,:,2)=lu(:,:,k+1);
    clc
    L=100*l/itr; %percentage
    fprintf('\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n process
completed: \n')
    fprintf('%2.0f %% \n',L)
```

Figures In Process

```
    if rem(l,SiS)==0
        figure(e) %current x-velocity
        title(['t=',num2str(t)])
        hold on
        for i=1:6
            y=U(si(i),1:T3);
            plot(y,r(1:T3),'-o','Color',RAN(i,:),'MarkerSize',1.5)
        end
        xlabel('\bf U');
        ylabel('\bf r');
        set(get(gca,'Ylabel'),'Rotation',0.0);

legend(['x=',num2str(round(sx(1)))],['x=',num2str(round(sx(2)))],['x=',nu
m2str(round(sx(3)))],['x=',num2str(round(sx(4)))],['x=',num2str(round(sx(
5)))],['x=',num2str(round(sx(6)))]);
        e=e+1;
    end
    if abs(t-round(t))<1e-4 %velocities vs time for integer values of t
        n=n+1;
        for i=1:Nx+1
            Uc(i,n)=U(i,1);
            V1(i,n)=V(i,T(1));
            V2(i,n)=V(i,T(2));
            V3(i,n)=V(i,T(3));
        end
    end
end
%end L O O P
```

OUTPUTS:

```
outputpresentation %run for outputs
```

Published with MATLAB® 7.7

Contents


```
%%%%%%%%%%   derivativematrices   %%%%%%%%%%
```

Matrices For First Derivative Respect To r

```
a=1/3; %inner nodes
for i=3:Ny-1
    A1R(i,i-1)=1;
    A1R(i,i)=1/a;
    A1R(i,i+1)=1;
    B1R(i,i-2)=-(4-1/a)/(12*h);
    B1R(i,i-1)=-(1+2/a)/(3*h);
    B1R(i,i)=0;
    B1R(i,i+1)=(1+2/a)/(3*h);
    B1R(i,i+2)=(4-1/a)/(12*h);
end
a=1/4; %next to boundaries
i=2;
A1R(i,i-1)=1;
A1R(i,i)=1/a;
A1R(i,i+1)=1;
B1R(i,i-1)=-(1+2/a)/(3*h);
B1R(i,i)=0;
B1R(i,i+1)=(1+2/a)/(3*h);
i=Ny;
A1R(i,i-1)=1;
A1R(i,i)=1/a;
A1R(i,i+1)=1;
B1R(i,i-1)=-(1+2/a)/(3*h);
B1R(i,i)=0;
B1R(i,i+1)=(1+2/a)/(3*h);
A1R(1,1)=1; %at boundaries
A1R(1,2)=2;
B1R(1,1)=(1/(2*h))*-5;
B1R(1,2)=(1/(2*h))*4;
B1R(1,3)=(1/(2*h))*1;
A1R(Ny+1,Ny+1)=1;
A1R(Ny+1,Ny)=2;
B1R(Ny+1,Ny+1)=(1/(2*h))*5;
B1R(Ny+1,Ny)=(1/(2*h))*-4;
B1R(Ny+1,Ny-1)=(1/(2*h))*-1;
```

Matrices For Second Derivative Respect To r

```
a=1/4; %inner nodes
for i=3:Ny-1
    A2R(i,i-1)=1;
    A2R(i,i)=1/a;
    A2R(i,i+1)=1;
    B2R(i,i-2)=(10-1/a)/(12*h^2);
    B2R(i,i-1)=(4/a-4)/(3*h^2);
    B2R(i,i)=-2*((4/a-4)/(3*h^2)+(10-1/a)/(12*h^2));
    B2R(i,i+1)=(4/a-4)/(3*h^2);
    B2R(i,i+2)=(10-1/a)/(12*h^2);
end
a=1/10; %next to boundaries
i=2;
A2R(i,i-1)=1;
A2R(i,i)=1/a;
A2R(i,i+1)=1;
B2R(i,i-1)=(4/a-4)/(3*h^2);
B2R(i,i)=-2*(4/a-4)/(3*h^2);
B2R(i,i+1)=(4/a-4)/(3*h^2);
i=Ny;
A2R(i,i-1)=1;
A2R(i,i)=1/a;
A2R(i,i+1)=1;
B2R(i,i-1)=(4/a-4)/(3*h^2);
B2R(i,i)=-2*(4/a-4)/(3*h^2);
B2R(i,i+1)=(4/a-4)/(3*h^2);
A2R(1,1)=1; %at boundaries
A2R(1,2)=11;
B2R(1,1)=(1/h^2)*13;
B2R(1,2)=(1/h^2)*-27;
B2R(1,3)=(1/h^2)*15;
B2R(1,4)=(1/h^2)*-1;
A2R(Ny+1,Ny+1)=1;
A2R(Ny+1,Ny)=11;
B2R(Ny+1,Ny+1)=(1/h^2)*13;
B2R(Ny+1,Ny)=(1/h^2)*-27;
B2R(Ny+1,Ny-1)=(1/h^2)*15;
B2R(Ny+1,Ny-2)=(1/h^2)*-1;
```

Matrices For First Derivative Respect To x

```
a=1/3; %inner nodes
for i=3:Nx-1
    A1X(i,i-1)=1;
    A1X(i,i)=1/a;
    A1X(i,i+1)=1;
    B1X(i,i-2)=-(4-1/a)/(12*hx);
    B1X(i,i-1)=-(1+2/a)/(3*hx);
    B1X(i,i)=0;
    B1X(i,i+1)=(1+2/a)/(3*hx);
    B1X(i,i+2)=(4-1/a)/(12*hx);
end
a=1/4; %next to boundaries
i=2;
A1X(i,i-1)=1;
```

```
A1X(i,i)=1/a;
A1X(i,i+1)=1;
B1X(i,i-1)=-(1+2/a)/(3*hx);
B1X(i,i)=0;
B1X(i,i+1)=(1+2/a)/(3*hx);
i=Nx;
A1X(i,i-1)=1;
A1X(i,i)=1/a;
A1X(i,i+1)=1;
B1X(i,i-1)=-(1+2/a)/(3*hx);
B1X(i,i)=0;
B1X(i,i+1)=(1+2/a)/(3*hx);
A1X(1,1)=1; %at boundaries
A1X(1,2)=2;
B1X(1,1)=(1/(2*hx))*-5;
B1X(1,2)=(1/(2*hx))*4;
B1X(1,3)=(1/(2*hx))*1;
A1X(Nx+1,Nx+1)=1;
A1X(Nx+1,Nx)=2;
B1X(Nx+1,Nx+1)=(1/(2*hx))*5;
B1X(Nx+1,Nx)=(1/(2*hx))*-4;
B1X(Nx+1,Nx-1)=(1/(2*hx))*-1;
```

Matrices For Second Derivative Respect To x

```
a=1/4; %inner nodes
for i=3:Nx-1
    A2X(i,i-1)=1;
    A2X(i,i)=1/a;
    A2X(i,i+1)=1;
    B2X(i,i-2)=(10-1/a)/(12*hx^2);
    B2X(i,i-1)=(4/a-4)/(3*hx^2);
    B2X(i,i)=-2*((4/a-4)/(3*hx^2)+(10-1/a)/(12*hx^2));
    B2X(i,i+1)=(4/a-4)/(3*hx^2);
    B2X(i,i+2)=(10-1/a)/(12*hx^2);
end
a=1/10; %next to boundaries
i=2;
A2X(i,i-1)=1;
A2X(i,i)=1/a;
A2X(i,i+1)=1;
B2X(i,i-1)=(4/a-4)/(3*hx^2);
B2X(i,i)=-2*(4/a-4)/(3*hx^2);
B2X(i,i+1)=(4/a-4)/(3*hx^2);
i=Nx;
A2X(i,i-1)=1;
A2X(i,i)=1/a;
A2X(i,i+1)=1;
B2X(i,i-1)=(4/a-4)/(3*hx^2);
B2X(i,i)=-2*(4/a-4)/(3*hx^2);
B2X(i,i+1)=(4/a-4)/(3*hx^2);
A2X(1,1)=1; %at boundaries
A2X(1,2)=11;
B2X(1,1)=(1/hx^2)*13;
B2X(1,2)=(1/hx^2)*-27;
```

```
B2X(1,3)=(1/hx^2)*15;
B2X(1,4)=(1/hx^2)*-1;
A2X(Nx+1,Nx+1)=1;
A2X(Nx+1,Nx)=11;
B2X(Nx+1,Nx+1)=(1/hx^2)*13;
B2X(Nx+1,Nx)=(1/hx^2)*-27;
B2X(Nx+1,Nx-1)=(1/hx^2)*15;
B2X(Nx+1,Nx-2)=(1/hx^2)*-1;
```

Alternative Matrices For Second Derivative Respect To x

```
A2XU=A2X;
B2XU=B2X;
A2XU(1,1)=1; %at boundaries
A2XU(1,2)=2;
B2XU(1,1)=(-3/(2*hx^2))*1;
B2XU(1,2)=(-3/(2*hx^2))*0;
B2XU(1,3)=(-3/(2*hx^2))*-1;
B2XU(1,4)=(-3/(2*hx^2))*0;
A2XU(Nx+1,Nx+1)=1;
A2XU(Nx+1,Nx)=2;
B2XU(Nx+1,Nx+1)=(-3/(2*hx^2))*1;
B2XU(Nx+1,Nx)=(-3/(2*hx^2))*0;
B2XU(Nx+1,Nx-1)=(-3/(2*hx^2))*-1;
B2XU(Nx+1,Nx-2)=(-3/(2*hx^2))*0;
```

Published with MATLAB® 7.7

Contents


```
%%%%%%%%%%   outputpresentation   %%%%%%%%%%
for i=1:Nx+1 %calculate half-width
    for j=1:Ny+1
        if abs(U(i,j))<abs(0.5*U(i,1))
            b(i)=r(j)+(((r(j-1)-r(j))*(U(i,j)-0.5*U(i,1)))/(U(i,j)-U(i,j-
1)));
            break
        end
    end
end
Undefined function or method 'U' for input arguments of type 'double'.
```

transverse velocity

```
figure(11)
hold on
for i=1:6
    y=V(si(i),1:T3);
    plot(y,r(1:T3),'-o','Color',RAN(i,:),'MarkerSize',1.5)
end
xlabel('\bf V');
ylabel('\bf r');
set(get(gca,'Ylabel'),'Rotation',0.0);
legend(['x=',num2str(round(sx(1)))],['x=',num2str(round(sx(2)))],['x=',nu
m2str(round(sx(3)))],['x=',num2str(round(sx(4)))],['x=',num2str(round(sx(
5)))],['x=',num2str(round(sx(6)))]);
```

vorticity

```
figure(12)
hold on
for i=1:6
    y=W(si(i),1:T3);
    plot(y,r(1:T3),'-o','Color',RAN(i,:),'MarkerSize',1.5)
end
xlabel('\bf W');
ylabel('\bf r');
```

```
set(get(gca,'Ylabel'),'Rotation',0.0);
legend(['x=',num2str(round(sx(1)))],['x=',num2str(round(sx(2)))],['x=',nu
m2str(round(sx(3)))],['x=',num2str(round(sx(4)))],['x=',num2str(round(sx(
5)))],['x=',num2str(round(sx(6)))]);
```

centerline x-velocity vs time

```
yt=1:1:LT;
figure(13)
hold on
for i=1:6
    y=Uc(si(i),:);
    plot(yt,y,'Color',RAN(i,:))
end
xlabel('\bf time');
ylabel('\bf U_c');
set(get(gca,'Ylabel'),'Rotation',0.0);
legend(['x=',num2str(round(sx(1)))],['x=',num2str(round(sx(2)))],['x=',nu
m2str(round(sx(3)))],['x=',num2str(round(sx(4)))],['x=',num2str(round(sx(
5)))],['x=',num2str(round(sx(6)))]);
ylim([0.1 1])
```

r-velocity vs time

```
figure(14) % 1st station
hold on
for i=1:6
    y=V1(si(i),:);
    plot(yt,y,'Color',RAN(i,:))
end
xlabel('\bf time');
ylabel(['\bf V (r=',num2str(sr(1)),')']);
legend(['x=',num2str(round(sx(1)))],['x=',num2str(round(sx(2)))],['x=',nu
m2str(round(sx(3)))],['x=',num2str(round(sx(4)))],['x=',num2str(round(sx(
5)))],['x=',num2str(round(sx(6)))]);
figure(15) % 2nd station
hold on
for i=1:6
    y=V2(si(i),:);
    plot(yt,y,'Color',RAN(i,:))
end
xlabel('\bf time');
ylabel(['\bf V (r=',num2str(sr(2)),')']);
legend(['x=',num2str(round(sx(1)))],['x=',num2str(round(sx(2)))],['x=',nu
m2str(round(sx(3)))],['x=',num2str(round(sx(4)))],['x=',num2str(round(sx(
5)))],['x=',num2str(round(sx(6)))]);
figure(16) % 3rd station
hold on
for i=1:6
    y=V3(si(i),:);
    plot(yt,y,'Color',RAN(i,:))
end
xlabel('\bf time');
```

```
ylabel('\bf V_o');
ylabel(['\bf V (r=',num2str(sr(3)),')']);
legend(['x=',num2str(round(sx(1)))],['x=',num2str(round(sx(2)))],['x=',nu
m2str(round(sx(3)))],['x=',num2str(round(sx(4)))],['x=',num2str(round(sx(
5)))],['x=',num2str(round(sx(6)))]);
```

x-velocity self-similar profile

```
figure(17)
hold on
for i=2:6
    y1=U(si(i),1:T3)/U(si(i),1);
    y2=r(1:T3)/b(si(i));
    plot(y2,y1,'.','Color',RAN(i,:))
end
xlabel('\bf r/b');
ylabel('\bf U/U_c     ');
set(get(gca,'Ylabel'),'Rotation',0.0)
legend(['x=',num2str(round(sx(2)))],['x=',num2str(round(sx(3)))],['x=',nu
m2str(round(sx(4)))],['x=',num2str(round(sx(5)))],['x=',num2str(round(sx(
6)))]);
xlim([0 5])
```

r-velocity self-similar profile

```
figure(18)
hold on
for i=2:6
    y1=V(si(i),1:T3)/U(si(i),1);
    y2=r(1:T3)/b(si(i));
    plot(y2,y1,'.','Color',RAN(i,:))
end
xlabel('\bf r/b');
ylabel('\bf V/U_c     ');
set(get(gca,'Ylabel'),'Rotation',0.0)
legend(['x=',num2str(round(sx(2)))],['x=',num2str(round(sx(3)))],['x=',nu
m2str(round(sx(4)))],['x=',num2str(round(sx(5)))],['x=',num2str(round(sx(
6)))]);
xlim([0 5])
```

half –width

```
figure(19)
plot(x,b,'r.')
xlabel('\bf x')
ylabel('\bf b')
set(get(gca,'Ylabel'),'Rotation',0.0);
```

centerline velocity

```
figure(20)
```

```
y=U(:,1);
plot(x,y,'.')
xlabel('\bf x');
ylabel('\bf U_c');
set(get(gca,'Ylabel'),'Rotation',0.0);
```

characteristics

```
figure(21)
xlim([0 1])
ylim([0 1])
text(0.25,0.7,['N_x=',num2str(Nx)],'fontsize',12)
text(0.25,0.6,['N_y=',num2str(Ny)],'fontsize',12)
text(0.25,0.5,['L_x=',num2str(Lx)],'fontsize',12)
text(0.25,0.4,['\beta=',num2str(beta)],'fontsize',12)
text(0.25,0.3,['Re=',num2str(Re)],'fontsize',12)
text(0.25,0.2,['C=',num2str(C)],'fontsize',12)
text(0.65,0.7,['LT=',num2str(LT)],'fontsize',12)
text(0.65,0.6,['\Deltax=',num2str(hx)],'fontsize',12)
text(0.65,0.5,['\Delta\xi=',num2str(h)],'fontsize',12)
text(0.65,0.4,['\Deltat=',num2str(Dt)],'fontsize',12)
text(0.65,0.3,['\Deltat/\Deltax=',num2str(dtdx)],'fontsize',12)
```

save

```
fprintf('saving figures,please wait …\n')
print -f1 -r600 -djpeg 1
print -f2 -r600 -djpeg 2
print -f3 -r600 -djpeg 3
print -f4 -r600 -djpeg 4
print -f5 -r600 -djpeg 5
print -f6 -r600 -djpeg 6
print -f7 -r600 -djpeg 7
print -f8 -r600 -djpeg 8
print -f9 -r600 -djpeg 9
print -f10 -r600 -djpeg 10
print -f11 -r600 -djpeg 11
print -f12 -r600 -djpeg 12
print -f13 -r600 -djpeg 13
print -f14 -r600 -djpeg 14
print -f15 -r600 -djpeg 15
print -f16 -r600 -djpeg 16
print -f17 -r600 -djpeg 17
print -f18 -r600 -djpeg 18
print -f19 -r600 -djpeg 19
print -f20 -r600 -djpeg 20
print -f21 -r600 -djpeg 21
clc
fprintf('\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n\n "finish" \n')
```

Published with MATLAB® 7.7

منابع

1- Fellouah H., Ball C.G., Pollard A., 2009, “Reynolds number effects within the development region of a turbulent round jet”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, pp. 3943–3954.

۲- وایت ف، ۱۳۸۴، "*مکانیک سیالات پیشرفته*"، رضایی نیا م، چاپ دوم، انتشارات امید انقلاب.

3- Mastorakof E., 2010, “*Turbulence and Vortex Dynamics*”, Part II: Turbulence, Lecture Notes, Cambridge University Engineering Department.

4- Ball C.G., Pollard A., 2007, *“A review of experimental and computational studies of flow from the round jet”*, Department of Mechanical and Materials Engineering, Queen’s University, Kingston, Canada.

5- Ferziger J.H., Peric M., 2002, “*Computational Methods for Fluid Dynamics*”, 3rd ed., Springer, Germany.

6- Boersma B.J., Brethouwer G., Nieuwstadt F.T.M., 1998, “A numerical investigation on the effect of the inflow conditions on the self-similar region of a round jet”, *PHYSICS OF FLUIDS*, v. 10, n. 4, pp. 899-909.

7- Schetz J.A., 1993, “*Boundary layer analysis*”, Prentice Hall, New Jersey.

8- Moin P., Mahesh K., 1998, “Direct Numerical Simulation: A Tool in Turbulence Research”, *Annu. Rev. Fluid Mechanics*, v. 30, pp. 539–578.

9- Pope S.B., 2001, “*Turbulent flows*”, Cambridge University Press, United Kingdom.

10- Schlichting H., 1979, “*Boundary layer theory*”, Kestin J., 7th ed., McGraw Hill.

۱۱- سنندجی ح، ۱۳۸۷، پایان نامه ارشد، "*بررسی شرط مرزی خروجی در جریان اختلاطی آزاد غیر قابل تراکم*"، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

12- Bartlez R.H., Stewart G.W., 1972, “Solution of the Matrix Equation AX+XB=C”, *Communications of the ACM*, v. 15, n. 9.

13- Boersma B.J., 2005, “A staggered compact finite difference formulation for the compressible Navier-Stokes equations”, *Journal of Computational Physics*, v. 208, pp. 675-690.

14- Li J., 2005, “High-order finite difference schemes for differential equations containing higher derivatives”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 171, pp. 1157-1176.

15- Lele S.K., 1992, “Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution”, *Journal of Computational Physics*, v. 103, pp. 16-42.

16- Maghrebi M.J., 1999, “A Study of the Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three-Dimensional Plane Wake”, PhD. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia.

17- Wray A., Hussaini M.Y., 1984, “Numerical Experiments in Boundary Layer Stability”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 392, pp. 373-389.

Abstract

Free round jet results when fluid is issued with a given initial momentum, out of a circular nozzle into an infinite environment. Round jet flows, due to their simple geometry, are found in many engineering applications, e.g. propulsions, mixings and aeroacoustics. They are also important from theoretical point of view because they represent a convenient prototype of free flows.

The equations in fluid mechanics are generally governed by the Navier-Stokes equations. Since, these equations are essentially non-linear, exact solutions are rarely found. The exact solutions can therefore only be obtained by numerically solving the Navier-Stokes equations. Here, we refer in particular to so-called direct numerical simulation (DNS) in which all flow characteristics are computed in detail.

In this work, the direct numerical simulation of a spatially developing round jet flow is performed. The two dimensional incompressible Navier-Stokes equations in a cylindrical system are solved. These are solved in a domain which is finite in streamwise (x) direction and infinite in cross stream (r) direction. To compute the spatial derivatives, a compact finite difference scheme is used in x and a mapped compact finite difference method is employed in r. The compact third order Runge-Kutta method is used to advance the numerical simulation in time. The result of simulation in low Reynolds number is obtained and the power law relationship for the centerline deficit and the jet half-width as a function of the distance from the inflow is investigated. The velocity and vorticity profiles in different stations of the streamwise extent are depicted and the self-similarity phenomenon is studied. Also by imposing some perturbations at inflow, mean and fluctuating velocities are obtained and Reynolds stress distributions are studied.