بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک

گروه جامدات

تحلیل رزونانس اولیه پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت تحریک خارجی

دانشجو : علی‌اکبر بیات

استاد راهنما :

دکتر امیر جلالی

دکتر حبیب احمدی

پایان نامه جهت دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

شهریورماه ۱۳۹۸

شماره: ۹۸/۲۹۸/۱۲۷ د م
تاریخ: ۹۸/۷/۱۵

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای علی اکبر بیات با شماره دانشجویی۹۶۰۳۹۹۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل رزونانس اولیه پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت تحریک خارجی که در تاریخ ۱۳۹۸/۰۶/۱۶ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: خیلی خوب) ☑ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	امیر جلالی	استادیار	عدم حضور
۲- استادراهنمای دوم	حبیب احمدی	استادیار	
۳- استاد مشاور	—	—	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	سید علی سینا	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	اردشیر کرمی محمدی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	حمیدرضا ایپکچی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: محمدمحسن شاهمردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیر و تشکر:

از راهنمایی های آقایان دکتر امیر جلالی و دکتر حبیب احمدی، اساتید راهنمای اینجانب و همچنین راهنمایی های ارزنده آقای دکتر حمیدرضا ایپک چی در به ثمر رسیدن این اثر کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم اثر:

این اثر را که حاصل زحمات و تلاش بی‌وقفه اینجانب در طول دوره کارشناسی ارشد می‌باشد را به پدرم، مادرم، خواهرم و برادرم تقدیم می‌کنم.

تعهد نامه

اینجانب علی‌اکبر بیات دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان نامه‌ی تحلیل رزونانس اولیه پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت تحریک خارجی تحت راهنمایی دکتر امیر جلالی و دکتر حبیب احمدی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

در این پژوهش یک پوسته استوانه‌ای نازک با دو تکیه‌گاه ساده از جنس ماده مدرج تابعی شامل فلز و سرامیک با دو لایه پیزوالکتریک شامل یک لایه حسگر در قسمت درونی لایه مدرج تابعی و یک لایه عملگر در قسمت بیرونی لایه مدرج تابعی تحت یک تحریک خارجی و یک تحریک پارامتریک به‌صورت نیروی محوری در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت این مدل بر اساس اصل هامیلتون با در نظر گرفتن جملات غیرخطی فون کارمن و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و اختصاص قانون کنترل فیدبک سرعت منفی به دست آمده است. برای به‌دست آوردن معادله حرکت در جهت عرضی استوانه از روش گالرکین برای از بین بردن بخش مکانی مختصه‌ها و روش چگالش استاتیک برای حذف مختصه‌ها در جهت‌های دیگر بهره برده شده تا دو معادله کوپل به‌هم در جهت عرضی به‌دست آید. برای تحلیل رفتار سیستم از روی معادلات حرکت، روش مقیاس‌های چندگانه از تئوری اغتشاشات استفاده شده و تأثیر پارامترهای مختلف بر تحلیل‌های رزونانسی مطرح شده بررسی شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل رزونانسی، پوسته استوانه‌ای، ارتعاشات غیرخطی، روش مقیاس‌های چندگانه، مدرج تابعی، پیزوالکتریک

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها و نمودارها

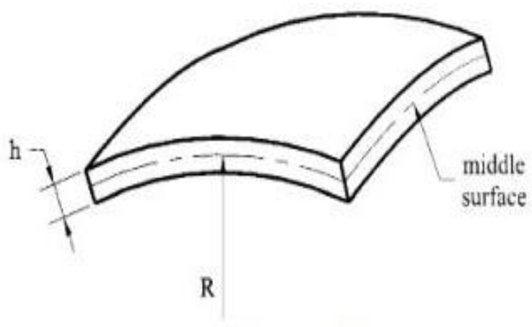
فهرست جدول‌ها

فصل اول:

مقدمه

۱-۱ معرفی پوسته[۱]

پوسته به جسمی گفته می‌شود که مکان هندسی نقاط بین دو سطح منحنی شکل است که نسبت به ابعاد دیگر به فاصله کمی از یکدیگر قرار دارند. به این فاصله‌ی کم ضخامت می‌گویند و می‌تواند ثابت یا متغیر باشد که در شکل (۱-۱) نمایش داده شده است. مکان هندسی نقاطی که از دو سطح منحنی به یک فاصله هستند، صفحه‌ی میانی[۲]نامیده می‌شود. R، شعاع انحنای صفحه‌ی میانی و h، ضخامت می‌باشد [۱].



شکل (۱-۱) نمایی کلّی از پوسته [۱]

یک پوسته دارای سه پارامتر اصلی می‌باشد: سطح مرجع، ضخامت و شرایط لبه‌ها. از این سه مورد سطح مرجع از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، زیرا شکل پوسته را تعیین می‌کند. سطح مرجع را معمولاً سطح میانی در نظر می‌گیرند. به دلیل شکل سه بعدی سازه‌های پوسته‌ای، رفتار آن‌ها با رفتار تیرها[۳]و ورق‌ها[۴] تفاوت دارد. بارهای خارجی توسط هر دو نیروی غشایی و خمشی تحمل می‌شود، در نتیجه توصیف ریاضی ویژگی‌های پوسته بسیار پرکارتر از تیرها و ورق‌ها می‌باشد. از این رو تئوری‌های مختلفی برای توصیف آن‌ها ارائه شده است [۱].

---

۱ Shell

۲ Middle Surface

۳ Beam

۴ Plate

۱-۱-۱ کاربرد پوسته‌ها

پوسته‌ها و سازه‌های پوسته‌ای کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف مهندسی و صنعت دارند، که از آن جمله می‌توان به حوزه‌های عمده‌ای در مهندسی هوافضا، مکانیک، عمران، معماری و صنایع دریایی اشاره نمود. دماغه و بدنه هواپیماها، فضاپیماها، مخازن سوخت هواپیما، کشتی‌ها، زیردریایی‌ها، لوله‌ها، مخازن آب، مخازن تحت فشار، دیگ‌های بخار، تانکرها، مخازن ذخیره‌سازی مایعات، سیلندرهای گاز، توربین‌ها، برج‌های خنک کن، خشک‌کن‌های دوار، لاستیک‌های خودرو، لامپ، تجهیزات نیروگاه‌های هسته ای، سقف‌های به کار رفته در سازه‌های عمرانی با دهانه‌های وسیع، سدهای بتنی، مسیر تخلیه دود در مسیرهای احتراقی، خطوط انتقال نفت، گاز و مواد پتروشیمی مصداق‌هایی از کاربرد پوسته‌ها در حوزه‌های مذکور می‌باشند.

۲-۱-۱ تقسیم‌بندی پوسته‌ها

پوسته ها بسته به انحنای صفحه تقسیم بندی می‌شوند که استوانه‌ای[۱] (دایروی و غیر دایروی)، مخروطی،[۲] کروی،[۳] بیضوی،[۴] سهموی،[۵] مارپیچی[۶] و هذلولی‌گون[۷] انواع آن می‌باشد. در یک دسته بندی کلی‌تر نیز پوسته‌ها به دو صورت پوسته‌های نازک[۸] و ضخیم[۹] در نظر گرفته می‌شوند. در پوسته‌های نازک عموماً حداکثر نسبت مقدار ضخامت به شعاع انحنا (h / R) آن‌ها کمتر از ۰,۰۵ و در در پوسته‌های ضخیم مقدار ضخامت به شعاع انحنا (h / R) آن‌ها بیشتر از ۰,۰۵ در نظر گرفته می‌شود [۲].

---

۱ Cylindrical

۲ Conical

۳ Spherical

۴ Elliptically

۵ Parabolic

۶ Spiral

۷ Hyperbolic

۸ Thin

۹ Thick

مطالعه‌ی رفتار پوسته‌ها و به کارگیری نظریه‌های مختلف از گذشته‌ی نه چندان دور مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته و به دلیل کاربرد فراوان، این توجه همچنان ادامه دارد و دستاوردهای گوناگونی را به‌همراه داشته است و یکی از موضوعات مورد استقبال پژوهشگران حوزه علوم مهندسی به‌شمار می‌رود. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای به‌دلیل کاربرد آن‌ها در صنایع مختلف از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و بسیار پرکاربرد می‌باشند.

۱-۱-۳ ضرورت مطالعه پوسته‌ها

در بسیاری از کاربردهای ذکر شده، پوسته‌ها تحت بارهای دینامیکی[۱]قرار دارند و ممکن است دچار ارتعاش[۲]شوند. بنابراین تحلیل رفتار ارتعاشی آن‌ها از اهمیت ویژه برخوردار است.

۱-۴ آشنایی با تئوری‌های مختلف پوسته

۱-۴-۱ تئوری پوسته کلاسیک

تئوری پوسته کلاسیک[۳]بر اساس فرضیات لاو-کیرشهف[۴]است که عبارت‌است‌از [۳]:

۱. ضخامت پوسته در مقایسه با دیگر ابعاد آن کوچک است.

۲. تغییر شکل پوسته کوچک است.

۳. تنش نرمال عرضی[۵]قابل صرف‌نظر کردن است.

۴. صفحات عمود بر سطح مرجع بعد از تغییر شکل به‌صورت عمود باقی می‌ماند.

---

[۱] Dynamics Loads

[۲] Vibration

[۳] Classical Shell Theory (CST)

[۴] Love-Kirchhoff

[۵] Transverse Normal Stress

۱-۱-۴-۲ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[۱]

فرضیات تئوری برشی مرتبه اول به شرح زیر است:

۱. پوسته می‌تواند در مقایسه با شرایط ذکر شده در تئوری کلاسیک از ضخامت بیشتری برخوردار باشد و شعاع پوسته حداقل ۸ برابر ضخامت آن ($h / R < 1/8$) باشد.

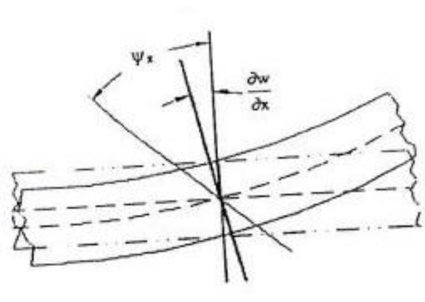
۲. هر خط مستقیمی که پیش از تغییر شکل بر لایه میانی پوسته عمود است، پس از تغییر شکل لزوماً بر آن عمود باقی نخواهد ماند.

۳. خطوط مذکور همچنان خط راست باقی خواهند ماند (خمیده نمی‌شود).

۴. از کرنش در راستای ضخامت پوسته صرف‌نظر شده و این کرنش همیشه صفر فرض می‌شود.

۵. تمامی کرنش‌ها کوچک فرض می‌شود به نحوی که می‌توان از مراتب بالاتر آن‌ها در مقایسه با مرتبه یک آن‌ها صرف‌نظر کرد.

شکل (۱-۲) مقایسه بین تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری کلاسیک در زاویه خط عمود بر سطح میانی انجام داده است که نشان می‌دهد در تئوری تغییر شکل مرتبه اول، خط عمود بر لایه میانی بعد از تغییر شکل عمود باقی نخواهد ماند [۴].



شکل (۲-۱) تفاوت زاویه خط عمود بر سطح میانی در تئوری برشی مرتبه اول و تئوری کلاسیک [۴]

[۱] First-Order Shear Deformation Shell Theory (FSDT)

بر این اساس روابط میدان جابجایی برای پوسته در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به شرح رابطه (۱-۱) است:

$$
\begin{aligned}
u(x,\theta,z,t) &= u_0(x,\theta,t) + z\varphi_x(x,\theta,t) \\
v(x,\theta,z,t) &= v_0(x,\theta,t) + z\varphi_\theta(x,\theta,t) \\
w(x,\theta,z,t) &= w_0(x,\theta,t)
\end{aligned}
\tag{۱-۱}
$$

که در آن u_0، v_0 و w_0 تغییر مکان‌های لایه میانی پوسته، z موقعیت نقطه مورد بررسی نسبت به لایه میانی، φ_x و φ_θ دوران‌های خطوطی که پیش از بارگذاری بر لایه میانی عمود بوده است، به‌ترتیب در جهت‌های x و θ است [۴و۵].

۱-۱-۴-۳ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم[1]

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم در میان تئوری‌های پوسته، دقیق‌ترین آن‌ها است. میدان جابجایی برای تئوری برشی مرتبه سوم به‌صورت رابطه (۱-۲) است [۶]:

$$
\begin{aligned}
u(x,\theta,z,t) &= u_0(x,\theta,t) + z\varphi_x(x,\theta,t) - \frac{4}{3h^2} z^3 (\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) \\
v(x,\theta,z,t) &= v_0(x,\theta,t) + z\varphi_\theta(x,\theta,t) - \frac{4}{3h^2} z^3 (\varphi_\theta + \frac{\partial w_0}{\partial x}) \\
w(x,\theta,z,t) &= w_0(x,\theta,t)
\end{aligned}
\tag{۲-۱}
$$

با توجه به افزایش حجم محاسبات تئوری مرتبه سوم نسبت به تئوری مرتبه اول و تأثیر اندک در افزایش دقت نتایج، می‌توان از تئوری مرتبه اول نیز نتایج مطلوب را گرفت.

۱-۱-۴-۴ منتجه‌های تنش[2]

برای تحلیل نیروهای داخلی، یک المان خیلی کوچک از پوسته (شکل(۱-۳)) در نظر گرفته می‌شود [۳]. محورهای مختصات x و y مماس بر خطوط انحنای پوسته و محور z عمود بر سطح میانی فرض

[1] Third-Order Shear Deformation Shell Theory (TSDT)

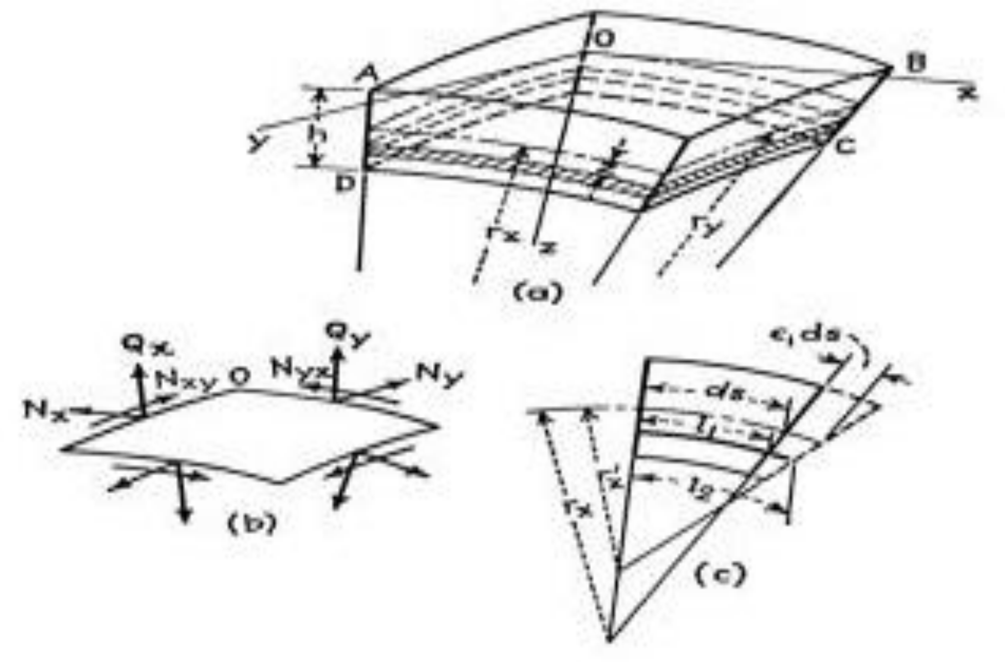
[2] Stress-Resultants

می‌شود. شعاع اصلی انحنا که در صفحه‌های xz و yz قرار می‌گیرند، به ترتیب با r_x و r_y مشخص می‌گردند. مؤلفه‌های تنش با σ_x، σ_y، $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ و τ_{xz} مشخص می‌گردند. نیروهای منتجه بر واحد طول عبارتند از [۳]:

$$
\begin{aligned}
N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \left(1-\frac{z}{r_y}\right) dz \qquad N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \left(1-\frac{z}{r_y}\right) dz \qquad Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \left(1-\frac{z}{r_y}\right) z dz \\
N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \left(1-\frac{z}{r_x}\right) dz \qquad N_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} \left(1-\frac{z}{r_x}\right) dz \qquad Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{zx} \left(1-\frac{z}{r_y}\right) z dz
\end{aligned}
\tag{۳-۱}
$$

ممان‌های خمشی و پیچشی بر واحد طول به‌وسیله روابط زیر ارائه می‌شود [۳]:

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z \left(1-\frac{z}{r_y}\right) dz \qquad M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z \left(1-\frac{z}{r_x}\right) dz \\
M_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z \left(1-\frac{z}{r_y}\right) dz \qquad M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z \left(1-\frac{z}{r_x}\right) dz
\end{aligned}
\tag{۴-۱}
$$



شکل (۱-۳) شکل یک المان کوچک از پوسته و منتجه‌های تنش وارد بر آن [۳]

۱-۲ معرفی مواد مدرج تابعی[۱]

در صنایعی که سازه در مجاورت دماهای بسیار بالا قرار دارد، استفاده از مواد همگن که خواسته‌های طراح را برآورده کنند بسیار مشکل است. در حرارت‌های زیاد، فلزات[۲] و آلیاژهای فلزی به شدت در معرض اکسیداسیون، خوردگی، خزش و ... قرار می‌گیرند و این در حالی است که استفاده تنها از مواد با خواص ترمودینامیکی مطلوب همچون سرامیک‌ها[۳] بسیاری از خواص مورد نظر در طراحی، مانند چقرمگی و استحکام بالا را برآورده نمی‌کنند. برای رفع این مشکل از فلزات یا مواد مرکب با پوشش عایق حرارتی استفاده می‌شود ولی تغییر ناگهانی خواص مکانیکی از لایه‌ای به لایه دیگر در مواد مرکب موجب افزایش تنش‌های حرارتی[۴] و ایجاد ترک در سطوح مشترک و گسیختگی سازه در تغییرات دمایی بالا می‌شود. از این رو در سال‌های اخیر دستیابی به موادی که دارای تغییرات یکنواخت خواص مکانیکی و حرارتی در راستای ضخامت باشند، مورد توجه محققان قرار گرفته است. به این مواد در اصطلاح علمی مدرج تابعی گفته می‌شود. مواد مدرج تابعی در زمره مواد همسانگرد و غیرهمگن قرار دارند که خصوصیات آن‌ها به طور پیوسته از یک نقطه به یک نقطه دیگر تغییر می‌کند. در بیشتر آن‌ها، ماده سرامیکی به عنوان پوشش محافظ در برابر حرارت روی سازه فلزی که دارای چقرمگی و استحکام و دیگر خواص مطلوب طراحی است، قرار می‌گیرد. تغییرات تدریجی و پیوسته نسبت حجمی آن‌ها موجب جلوگیری از تغییر ناگهانی خواص مکانیکی بین پوشش سرامیکی و فلز شده و موجب کاهش تنش‌های حرارتی و تنش‌های پس‌ماند در سطح تماس پوشش و فلز می‌شوند [۷و۸].

عموماً مواد مدرج تابعی از ترکیب یک سرامیک (با قابلیت خاص در دماهای بالا) و یک فلز (با خواص مکانیک مطلوب) و یا ترکیب دو فلز با خواص متفاوت ساخته می‌شوند.

---

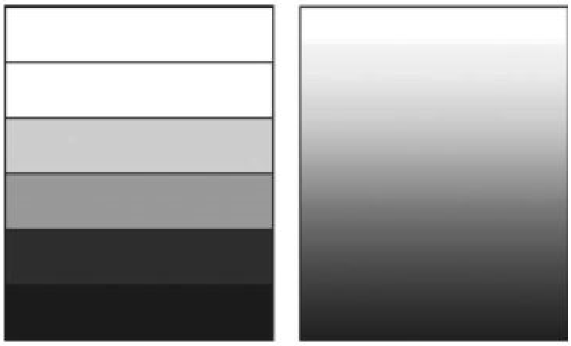
۱ Functionally Graded Materials (FGM)

۲ Metals

۳ Ceramics

۴ Thermal Stress

در شکل (۱-۴) شماتیکی از مقایسه توزیع خواص بین مواد مدرج تابعی و کامپوزیت[1]دیده می‌شود [۸].



شکل (۱-۴) سمت راست ماده مدرج تابعی و سمت چپ کامپوزیت [۸]

۱-۲-۱ پیشینه مواد مدرج تابعی

استفاده از تغییرات تدریجی و پیوسته در مواد به عنوان یک ایده در سال ۱۹۷۲ در آمریکا توسط بور و دیوز بیان شد و بر پایه این تئوری، یک تحقیق ملی در زمینه مواد با تغییر عملکرد تدریجی برای اولین بار در سال ۱۹۸۴ به وسیله نینو و همکاران در آزمایشگاه ملی هوافضای ژاپن به دنبال راهی برای تولید مواد مقاوم در برابر حرارت انجام شد [۹]. اولین نمونه‌های آزمایش مواد مدرج تابعی در سال‌های ۱۹۸۷-۱۹۸۹ انجام شد که نمونه آزمایش، الیافی با قطر حدود ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلی‌متر بود که می‌توانست دمای ۲۰۰۰ کلوین و همچنین اختلاف دمای حدود ۱۰۰۰ کلوین را تحمل کند. سپس در سال‌های ۱۹۹۰-۱۹۹۱ قطعات بزرگتری از مواد مدرج تابعی ساخته شدند، مانند یک پوسته مربعی و کاسه‌های نیمکره‌ای که در سفینه‌های فضایی مورد استفاده قرار می‌گیرند که با موفقیت مورد آزمایش قرار گرفتند. در اواخر دهه ۱۹۸۰ و اوایل دهه ۱۹۹۰ خارج از ژاپن در کشورهای آلمان، سوئیس، آمریکا، روسیه و چین نیز بررسی بر روی مواد مدرج تابعی به یک موضوع جالب برای تحقیق تبدیل شد و از آن زمان تاکنون در سراسر دنیا مطالعات بسیاری برروی مواد مدرج تابعی صورت گرفته است.

[1] Composite

۱-۲-۲ کاربرد مواد مدرج تابعی

مواد مدرج تابعی کاربرد گسترده‌ای در مهندسی پزشکی، آکوستیک، مهندسی مکانیک، مهندسی برق، ترموشیمی، سیستم‌های تبدیل انرژی، مهندسی شیمی، مغناطیس، اپتیک و مهندسی هسته‌ای دارند. فضاپیماها، موتور توربین‌های گاز، پوشش مقاوم در برابر سایش و خوردگی در ابزار برش، چرخ‌دنده‌ها، بلبرینگ‌ها، مواد با روکش پلاسما، ورق‌های ساطع حرارت، راکتورهای هسته‌ای، مواد دندان‌سازی (پروتز)، اورتوپدی (اندام مصنوعی)، مقاومت‌های الکتریکی، ترموژنراتورها، خطوط تخلیه موتور، سطح سازه‌های هوایی و فضایی، کوره‌ها، فیبرهای نوری و ... از جمله این کاربردهاست [۱۰و۱۱]. استفاده از مواد با تغییرات تدریجی در پیزوالکتریک‌ها[۱] و فروالکتریک‌ها[۲] نیز به چشم می‌خورد [۱۲].

۱-۲-۳ مدل‌های ریاضی مواد مدرج تابعی

در مواد مدرج تابعی، خواص مکانیکی با استفاده از پروفیل مشخصی به‌صورت پیوسته مدل می‌شود، به‌طوری که در ابتدا و انتهای تابع، فاز سرامیک و فلز خالص برقرار باشد. مواد مدرج تابعی را برحسب پروفیل توزیع فلز و سرامیک، اغلب به سه دسته که نام‌گذاری آن‌ها بر اساس شکل پروفیل توزیع خواص ماده می‌باشد، تقسیم می‌کنند [۱۰]:

۱. پروفیل با قانون توانی.[۳]

۲. پروفیل با قانون sigmoid.[۴]

۳. پروفیل با قانون نمایی.[۵]

---

۱ Piezoelectrics

۲ Ferroelectrics

۳ Exponent Law

۴ Sigmoid Law

۵ Exponential Law

اگر دستگاه مختصات در سطح میانی در نظر گرفته شود، پروفیل با قانون توانی، طبق رابطه (۱-۵) تعریف می‌شود [۱۰]:

$$F(z) = g(z)F_1 + \left[1 - g(z)\right]F_2$$
$$g(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \qquad (p \geq 0) \tag{۱-۵}$$

$F(z)$ نشانگر خواصی از جمله مدول الاستیسیته[۱]، ضریب پوآسون[۲] و چگالی[۳] می‌باشد. F_1 و F_2 به ترتیب خواص ذکر شده فلز و سرامیک می‌باشند. $g(z)$ تابع کسر حجمی[۴] و p توان پروفیل است.

اگر خاصیت ماده مدرج تابعی وابسته به دما باشد، پروفیل غیرخطی طبق رابطه (۶-۱) خواهد بود.

$$F(z,T) = F(z)(F_{-1}T^{-1} + 1 + F_1T^1 + F_2T^2 + F_3T^3) \tag{۱-۶}$$

که F_{-1}، F_1، F_2 و F_3 ضرایب حرارتی در دمای محیط برای خاصیت مورد نظر است.

پروفیل با قانون sigmoid، طبق رابطه (۱-۷) تعریف می‌شود [۱۰]:

$$F(z) = g_1(z)F_1 + [1 - g_1(z)]F_2 \qquad 0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$
$$F(z) = g_2(z)F_1 + [1 - g_2(z)]F_2 \qquad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \tag{۱-۷}$$

$g_1(z)$ و $g_2(z)$ به‌صورت رابطه (۱-۸) تعریف می‌شود [۱۰]:

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{2z}{h})^p \qquad 0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$
$$g_2(z) = \frac{1}{2}(1 + \frac{2z}{h})^p \qquad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \tag{۱-۸}$$

۱ Elasticity Modoule
۲ Poisson's Ratio
۳ Density
۴ Volume Fraction

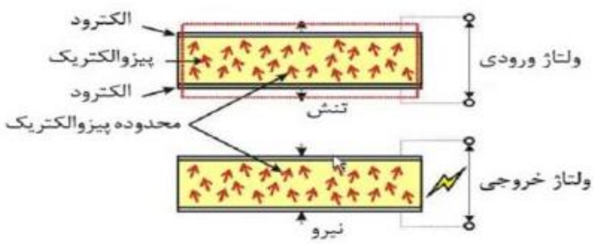
پروفیل با قانون نمایی، مطابق با رابطه (۱-۹) تعریف می‌شود [۱۰]:

$$F(z) = Ae^{B(z+\frac{h}{2})}$$

$$A = F_2 \qquad B = \frac{1}{h}\ln(\frac{F_1}{F_2}) \tag{۱-۹}$$

۱-۳ معرفی مواد پیزوالکتریک

مواد هوشمند[۱]موادی هستند که یک یا برخی از ویژگی‌هایشان می‌تواند به کمک محرک‌های خارجی مانند فشار، حرارت، رطوبت، الکتریسیته و یا مغناطیس، تغییر کند. مواد هوشمند نسبت به محرک‌های محیطی در برخی موارد با تغییراتی خاص واکنش نشان می‌دهند. بسته به بعضی از تغییرات شرایط خارجی، مواد هوشمند یکی از ویژگی‌های مواد هوشمند تغییر می‌کند. این تغییرات ممکن است در ساختار آن‌ها و یا ترکیبات آن‌ها و یا حتی در کارکردشان صورت بگیرد. مواد پیزوالکتریک زمانی که در شرایط تنش قرار می‌گیرند، ولتاژ تولید می‌کنند (مطابق شکل (۱-۵)) [۱۳]. از آنجایی‌که این اثر در حالت معکوس نیز ایجاد می‌گردد، القای ولتاژ در این مواد، فشاری را در طول نمونه تولید خواهد کرد.



شکل (۱-۵) عملکرد پیزوالکتریک در سازه [۱۳]

موضوع ساختارهای هوشمند، مبحث بسیار گسترده‌ای است که تخصص‌های فراوانی را در برمی‌گیرد. بنابراین به‌دست آوردن دانش مناسب در این زمینه نیازمند داشتن آگاهی نسبتاً کامل از مفاهیم متنوعی از علوم مختلف ازجمله تئوری کنترل (از مهندسی برق)، روش‌های مدل‌سازی (از مهندسی مکانیک)،

[۱] Smart Materials

شناخت خواص مواد مختلف (از مهندسی مواد) و همچنین شناخت انواع حسگرها[۱] و عملگرها[۲] است. با توجه به این مهم می‌توان گفت که مبحث ساختارهای هوشمند، موضوعی بین رشته‌ای است [۱۳و۱۴].

سیستم‌های الکترومکانیکی تبدیل به یک تکنولوژی تثبیت شده با کاربردهای فراوان شده‌اند و استفاده از مواد پیزوالکتریک به‌عنوان عملگر یا حسگر در زمینه‌هایی چون آکوستیک[۳] و صوت یا کنترل ارتعاشات در سال‌های اخیر گسترش چشم‌گیری داشته است به‌طوری‌که زمانی‌که در سیستم‌های مکانیکی، ارتعاشات ناخواسته باعث ایجاد ترک در قطعات، لق شدن اتصالات، شکست سازه‌ها، نقص عملکرد وسایل الکترونیکی و بسیاری از موارد دیگر می‌شود، با اندازه گیری مشخصات نوسانی سیستم همچون فرکانس‌های طبیعی[۴] آن می‌توان سرعت‌های دور از حالت تشدید[۵] را انتخاب و از بسیاری از آثار نامطلوب ارتعاشات جلوگیری نمود. برای رفع این قبیل مشکلات، مواد پیزوالکتریک به دنیای صنعت معرفی شدند.

از جمله ویژگی‌های مواد پیزوالکتریک نیز می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. توانایی به‌کار رفتن همزمان به عنوان حسگر و عملگر در سازه‌ها.

۲. حساسیت به الکتریسیته و امکان کوپل شدن مناسب با سیستم‌های کنترلی.

۳. فراهم ساختن سیستم ها و عمل‌کننده‌های پیوسته در سیستم‌ها.

۴. امکان مدل‌سازی و تحلیل معادلات حاکم بر سازه‌های پیزوالکتریک.

۵. امکان تولید نیروهای نسبتاً بزرگ.

۶. وسعت سریع پاسخ.

---

[۱] Sensors

[۲] Actuators

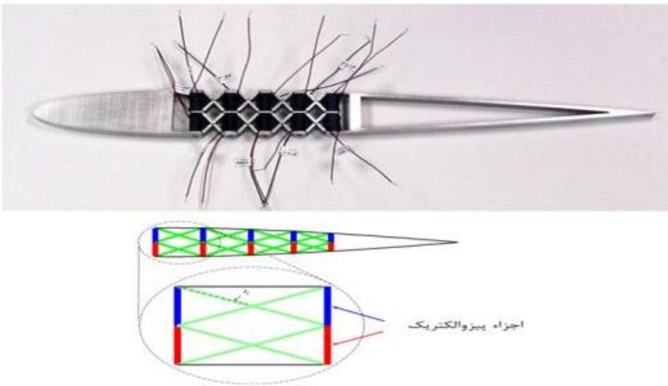
[۳] Acoustics

[۴] Natural Frequencies

[۵] Resonance

۱-۳-۱ کاربرد سازه‌های پیزوالکتریک

از جمله موارد استفاده مواد کامپوزیتی به همراه لایه‌های پیزوالکتریک در ساخت باله‌های موشک، پره‌های روتور هلیکوپتر، بال هواپیما (شکل (۱-۶))، موشک، زیردریایی، آینه‌های نوری، درایوهای گرداننده ساعت‌های مچی، زنگ اخبار، اسکنر، پرینتر، صفحه کلید، میکرو گیره‌های پزشکی و تصویربرداری فراصوت می‌باشد.



شکل (۱-۶) محل قرارگیری ماده پیزوالکتریک در سازه [۱۵]

در صنایع پیشرفته به‌طور وسیعی از این حسگرها استفاده می‌شود؛ مثلاً صنایع نفت، غذایی و آشامیدنی و دارویی همگی از این حسگرها برای کنترل سطح جریان سیال استفاده می‌کنند. حسگرهای جریان سیال و سطح و مبدل‌های داپلر، تخلیه اتوماتیک مخازن نفت و خطوط لوله را کنترل می‌کنند. صنایعی دیگر از حسگرها برای تست‌های غیر مخرب استفاده می‌کنند؛ مانند تست‌های غیرمخرب تیرهای فولادی، خطوط راه‌آهن و بدنه هواپیما. در بخش مراقبت‌های پزشکی نیز از پیزوسرامیک‌ها در مبدل تصویرگرهای تشخیصی استفاده می‌شود که هزینه پایین و ایمنی بالا دلیل کارایی این فراورده است. کاربردهای دیگر آن سمعک برای کمک به شنوایی، تفنگ‌های لیزری برای درمان آب‌مروارید چشم، چاقوهای کوچک جراحی و کالبدشکافی، مته‌ها و پاک‌کننده‌های دندانی، پمپ‌های قلب و دستگاه سنجش فشار خون را شامل می‌شود. مبدل‌های کوچک که در مجاری خون برای ثبت تغییرات متناوب ضربان قلب بیمار قرار داده می‌شوند نیز از حسگرهای پیزوالکتریک ساخته می‌شوند. یک استفاده مهم

سرامیک پیزوالکتریک در ایجاد و دریافت کردن امواج صوتی است. گستره کاربرد این مواد از ابزارها و تجهیزات اولتراسونیکی برای عمق‌یابی در دریا و پیدا کردن محل تجمع ماهی‌ها تا تجهیزات ردیاب زیردریایی‌ها می‌باشد [۱۵].

۱-۳-۲ انواع پیزوالکتریک‌ها

انواع مختلفی از پیزوالکتریک‌ها در صنعت به عنوان حسگر و عملگر برای کنترل ارتعاش و صدا مورد استفاده قرار می‌گیرند. از مهمترین آن‌ها برای کنترل ارتعاش می‌توان به سرامیک‌های پیزوالکتریک و پلیمرهای پیزوالکتریک اشاره کرد. مهمترین سرامیک‌های پیزوالکتریک عبارت‌اند از: زیرکنات تیتانات سرب و استرانسیوم تیتانات باریم که PZT به‌طور گسترده‌ای برای بازه وسیع فرکانسی مورد استفاده قرار می‌گیرد و شامل کاربردهای فراصوتی نیز می‌شود. همچنین از بین پلیمرهای پیزوالکتریک می‌توان به پلی‌وینیلیدین‌فلوراید اشاره کرد که عموماً پیزوپلیمرها به عنوان حسگر استفاده می‌شوند [۱۵].

۱-۴ ارتعاشات غیرخطی

اکثر سیستم‌هایی که با مدل ریاضی خطی تحلیل می‌شوند، در واقع سیستم‌های غیرخطی هستند که از عوامل غیرخطی آن‌ها صرف نظر شده است. حذف این عوامل در مواقعی که دقت پاسخ مورد نظر تحت تأثیر قرار می‌گیرد، باعث به‌وجود آمدن پاسخ‌های دور از واقعیت می‌شود. وقوع پدیده‌هایی مانند پرش[۱]، تشدید داخلی[۲]، تشدید زیرهارمونیک[۳]، تشدید سوپرهارمونیک[۴]، آشوب[۵] و دوشاخگی[۶] در رفتار ارتعاشی غیرخطی سازه‌ها دیده می‌شود [۱۶].

---

[۱] Jump

[۲] Internal Resonance

[۳] Subharmonic Resonance

[۴] Superharmonic Resonance

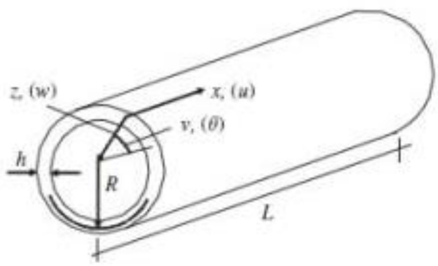
[۵] Chaos

[۶] Bifurcation

اثرات غیرخطی مادی در موادی که در آن‌ها رابطه‌ی تنش-کرنش را نمی‌توان به‌صورت خطی و با استفاده از قانون هوک[۱]مدل کرد اتفاق می‌افتد. اثرات غیرخطی اینرسی[۲]در تابع انرژی جنبشی[۳]سیستم ظاهر می‌شود. اثرات غیرخطی هندسی به‌علت تغییر شکل‌های بزرگ و یا روابط هندسی غیرخطی بین اجزای سیستم به‌وجود می‌آیند و عموماً توسط رابطه غیرخطی بین کرنش-جابجایی[۴]بیان می‌شوند. اثرات غیرخطی هندسی در تابع پتانسیل[۵]سیستم ظاهر می‌شوند. در صورت وجود عوامل غیرخطی در سازه‌ها، رفتارهای فیزیکی اتفاق می‌افتد که با نظریه سیستم‌های خطی قابل پیش‌بینی و توضیح نیست. ارتعاشات غیرخطی را می‌توان به دو دسته کلی ارتعاشات کرنش محدود و ارتعاشات با تغییر شکل بزرگ تقسیم کرد، ارتعاشات با تغییر شکل بزرگ عموماً با استفاده از فرضیات فون کارمن[۶]مدل می‌شوند [۱۷].

۱-۴-۱ مفاهیم ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای

در شکل (۱-۷) یک پوسته استوانه‌ای به‌همراه یک سیستم مختصات استوانه‌ای با مشخصه $(O; x, \theta, z)$ را با سطح $\rho = R$ بر سطح میانی نشان داده شده است. متغیرهای u، v و w جابجایی‌های نقاطی بر روی صفحه‌ی میانی پوسته هستند (صفحه‌ی میانی در موقعیت $z = 0$ قرار دارد) [۱۷].



شکل (۱-۷) پوسته استوانه‌ای و دستگاه مختصات آن [۱۷]

---

۱ Hook’s Law

۲ Inertia

۳ Kinetic Energy

۴ Strain-Displacement

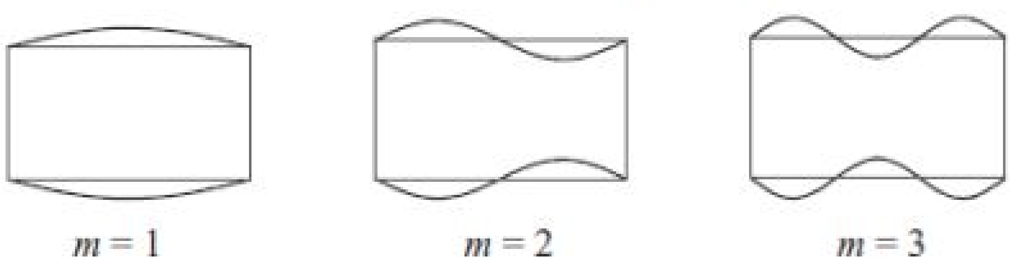
۵ Potential Function

۶ Von-Karman

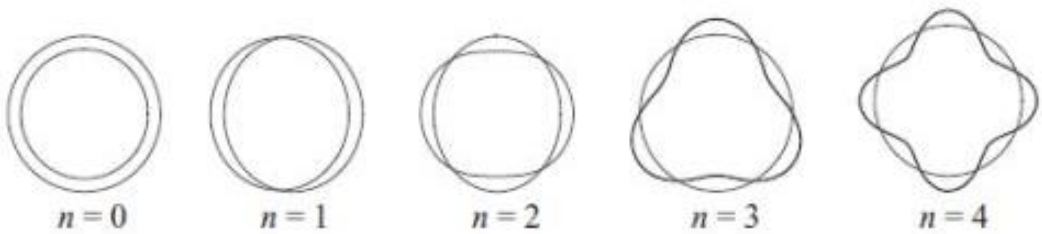
۱-۴-۱-۱ شکل مود ارتعاشی در پوسته استوانه‌ای

شکل مود[۱] تابعی است وابسته به زمان و پارامترهای هندسی یک سازه که تغییر شکل‌های صحیح آن سازه را تحت شرایط مرزی،[۲] شرایط اولیه و بارگذاری‌های مختلف اعمال شده به نمایش می‌گذارد.

جهت تعریف مناسب تغییر شکل شعاعی $w(x,\theta,t)$، برای یک پوسته استوانه‌ای دو پارامتر m و n، به‌ترتیب به‌عنوان متغیرهای محوری و محیطی تعریف می‌شوند. همان‌طور که در شکل (۸-۱) نشان داده شده است، m تعداد نیم‌موج‌هایی[۳] است که در راستای طولی پوسته استوانه‌ای تشکیل می‌شود و همان‌طور که در شکل (۱-۹) نشان داده شده است، n تعداد موج‌هایی است که در جهت محیطی ایجاد می‌شود [۱۷].



شکل (۱-۸) تعداد نیم‌موج‌های ایجاد شده در طول پوسته استوانه‌ای

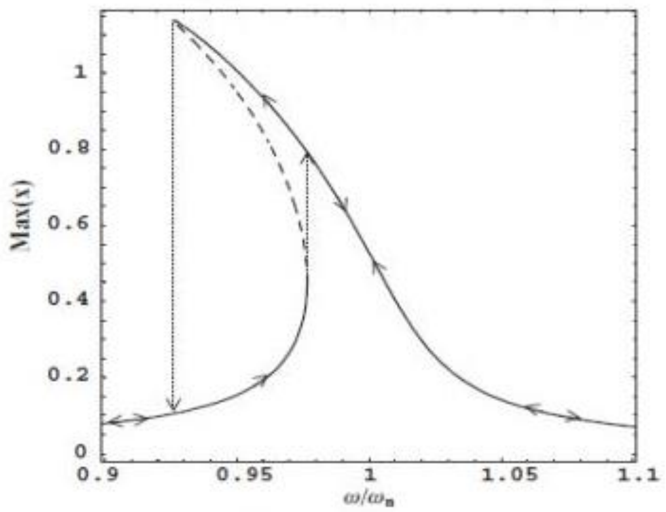


شکل (۱-۹) تعداد موج‌های ایجاد شده در عرض پوسته استوانه‌ای

[۱] Mode Shape
[۲] Boundary Conditions
[۳] Half-Wave

۱-۴-۲ نرم‌شوندگی[1] و سخت‌شوندگی[2] غیرخطی

شکل‌های (۱-۱۰) و (۱-۱۱) پاسخ‌های فرکانسی[3] یک سیستم غیرخطی را با دامنه نوسانات X نشان می‌دهند. محور افقی، بیان‌گر فرکانس طبیعی مود تحریک شده، و محور عمودی ماکزیمم دامنه ارتعاشی بعد مود تحریک شده در وضعیتی است که سیستم، ارتعاش گذرای خود را پشت سر گذاشته است. حال اگر ماکزیمم دامنه در نسبت فرکانسی کوچک‌تر از یک رخ دهد، گویند سیستم دارای رفتار غیرخطی نرم‌شونده است (شکل (۱-۱۰)). اگر ماکزیمم دامنه در نسبت فرکانسی بزرگ‌تر از یک رخ دهد، گویند سیستم دارای رفتار سخت‌شونده است (شکل (۱-۱۱)). به بیانی ساده‌تر، در رفتار غیرخطی نرم‌شونده، نسبت ماکزیمم دامنه به نسبت فرکانسی به سمت چپ انحنا دارد و در رفتار غیرخطی سخت‌شونده، نسبت ماکزیمم دامنه به نسبت فرکانسی به سمت راست انحنا دارد [۱۶].



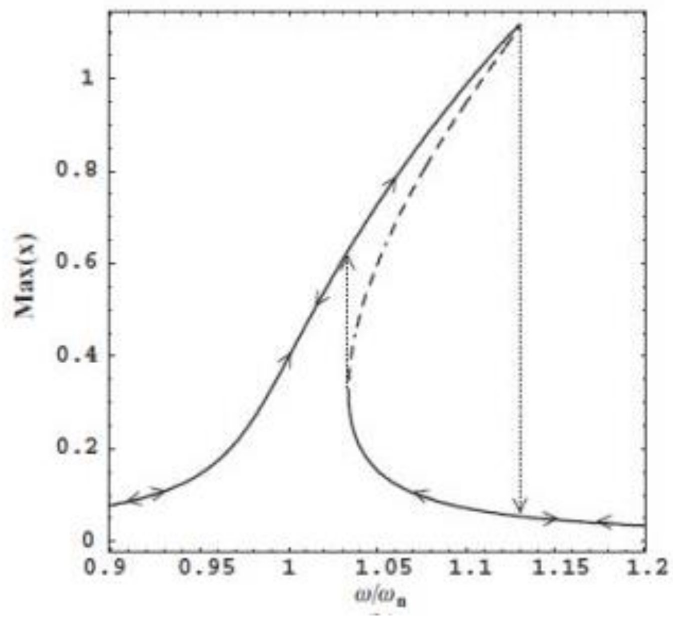
شکل (۱-۱۰) رفتار غیرخطی نرم‌شونده [۱۶]

---

[1] Softening

[2] Hardening

[3] Frequency Response



شکل (۱-۱۱) رفتار غیرخطی سخت‌شونده [۱۶]

۱-۴-۳ روش‌های حفاظت در مقابل ارتعاشات

روش‌هایی که برای محافظت از سازه‌ها، مکانیزم‌ها و ماشین‌ها در مقابل ارتعاشات وجود دارد به دو دسته کلی تقسیم می‌شود. دسته اول عبارت از ملاحظات و قیدهایی است که هنگام ساختن سازه باید لحاظ شود، به گونه‌ای که سیستم ارتعاشی یا محیط ارتعاشی سازگار باشد. دسته دوم روش‌هایی است که بعد از ساخت سازه، به منظور جلوگیری از ارتعاش و نوسان و یا کاهش دامنه نوسانات به‌کار می‌رود که شامل روش‌های جداسازی، جذب و کنترل ارتعاشات می‌باشد. در دسته اول، به‌منظور دست‌یابی به ملاحظات و قیدهایی که هنگام ساختن سازه یا دستگاه باید در نظر گرفته شود، نیاز به تحلیل ارتعاشی سازه یا دستگاه می‌باشد. به این منظور بعد از استخراج معادلات ریاضی حاکم بر رفتار سیستم مورد بررسی (مدل‌سازی ریاضی) معادلات به منظور یافتن پاسخ سیستم در شرایط مختلف شامل ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری حل می‌شوند. تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل خواص مکانیکی و هندسه‌ی سازه یا هر یک از اجزا در پاسخ سیستم بررسی و با توجه به محدودیت‌هایی که باید در پاسخ سیستم اعمال شوند (اکثرا محدود نگه داشتن دامنه نوسان)، ملاحظات و قیدهایی روی جنس، جرم هندسه‌ی اجزا تشکیل دهنده‌ی دستگاه یا سازه مورد مطالعه، در نظر گرفته می‌شود. در دسته دوم، همان‌گونه که ذکر

شد سه روش کلی وجود دارد. در روش جداسازی ارتعاشات، سیستم ارتعاشی به دو قسمت تقسیم می‌شود و این قسمت‌ها به کمک المان‌های ذخیره‌کننده و مستهلک‌کننده انرژی از هم جدا می‌شوند. پارامترهای المان‌های مذکور به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که اندازه نیروی وارد از منبع ارتعاش به جسم اصلی کاهش یابد. همچنین می‌توان ارتعاشات ناخواسته حول فرکانسی خاص را با انتخاب مناسب سختی جداساز از بین برد. راه دیگر برای محافظت سیستم اصلی از ارتعاشات ناخواسته، متصل کردن وسیله‌ای به سیستم اصلی برای جذب ارتعاش است. پارامترهای سیستم متصل شونده به سیستم اصلی به منظور کاهش و در صورت امکان حذف ارتعاشات در سیستم انتخاب می‌شوند. این سیستم متصل شونده را جاذب ارتعاشی[1] می‌گویند. جاذب‌های ارتعاشی، ارتعاشات را از سیستم اصلی به‌وسیله‌ی انتقال انرژی به جاذب، کاهش می‌دهند. در جاذب‌های ارتعاشی کلاسیک، این انرژی منتقل شده به‌صورت تغییر مکان جرم جاذب آشکار می‌شود. روش سوم یعنی کنترل ارتعاشات، برای کاهش و در صورت امکان حذف ارتعاش سیستم‌هایی به‌کار می‌روند که ارتعاشات می‌تواند باعث ایجاد صدمات و خسارات جبران‌ناپذیری شوند. کنترل ارتعاشات محورهای دوار با سرعت بالا، دیسک‌ها و پوسته‌هایی که یا دوران داشته و یا در معرض نیروهای محرک شدید هستند از این نوع است. در این روش به‌کمک ها وضعیت سیستم در هر لحظه زمانی مشخص و پس از پردازش توسط کنترل کننده‌ها و اتخاذ تصمیمات لازم، دستورات کنترلی به تقویت‌کننده‌ها و سپس به عملگرها ارسال می‌شود تا با نیروی اعمال شده به سیستم توسط عملگرها، شرایط مطلوب محقق شود [۱۸].

۱-۵ جمع‌بندی

در این فصل به معرفی پوسته‌های استوانه‌ای، مواد مدرج تابعی، مواد پیزوالکتریک و ارتعاشات غیرخطی پرداخته شد. در فصل بعد مطالعه برخی پژوهش‌های صورت گرفته در موضوع ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای مرور خواهد شد.

[1] Vibration Absorber

فصل دوم:

سابقه موضوع

۲-۱ مقدمه

در این فصل مروری مختصر بر برخی فعالیت‌های مهم انجام شده برروی رفتارهای ارتعاشی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای پرداخته خواهد شد.

۲-۲ سابقه موضوع

در این بخش در دو بخش مختلف به پژوهش‌های پرداخته خواهد شد. در بخش اول پژوهش‌هایی که از روش‌هایی به‌جز روش مقیاس‌های چندگانه استفاده کرده‌اند، و در بخش پژوهش‌هایی که روش مقیاس‌های چندگانه را مبنای کار خود قرار داده‌اند بررسی خواهند شد.

۲-۲-۱ پژوهش‌ها بدون استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه

در سال ۱۹۹۸ پراوین و ردی پاسخ ورق‌های مدرج تابعی سرامیک-فلز را با استفاده المان محدود ورق که شامل کرنش‌های برشی عرضی، اینرسی چرخشی و چرخش‌های نسبتاً بزرگ می‌شدند را به‌دست آوردند و پاسخ استاتیکی و دینامیکی ورق‌های مدرج تابعی با تغییر کسر حجمی قسمت‌های سرامیک و فلز با استفاده از یک قانون توانی ساده بررسی کردند [۱۹]. در سال ۲۰۰۴ کاتلانی و همکاران رفتار دینامیکی و استاتیکی یک پوسته استوانه‌ای دارای نواقص هندسی را تحلیل کردند. تحلیل با استفاده از نظریه پوسته نازک غیرخطی دانل انجام شد. رفتار پوسته در معرض یک تحریک محوری سینوسی در دو انتهای آن به عنوان یک تحریک پارامتریک در نظر گرفته شد. رزونانس مستقیم با رفتار نرم‌شوندگی ناپایداری پارامتریک به عنوان پدیده دینامیکی غیرخطی در نظر گرفته شد [۲۰]. در سال ۲۰۰۶ وو یک راه حل تحلیلی برای رفتار ارتعاش آزاد غیرخطی ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی ارائه نمود. ویژگی‌های مادی ورق‌های مدرج تابعی به طور پیوسته در راستای ضخامت، مطابق قانون توانی متغیر فرض کرد. معادلات اساسی برای ورق‌های مستطیلی نازک ساخته شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از تئوری فون کارمن برای خیز عرضی بزرگ به‌دست آورد. تأثیر خواص مواد، شرایط مرزی و بارهای

حرارتی بر رفتار دینامیکی ورق را به‌دست آورد [۲۱]. در سال ۲۰۰۷ ریبیرو ارتعاشات غیرخطی هندسی ورق‌های الاستیک خطی و ایزوتروپیک تحت اثرات ترکیبی میدان‌های حرارتی و تحریکات مکانیک را تجزیه و تحلیل نمود. با این هدف، یک مدل مبتنی بر المان محدود تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده کرد. معادلات حرکت را به روش انتگرال‌گیری زمانی در حوزه زمان حل کرد. همچنین دما و دامنه تحریک مکانیکی را متغیر در نظر گرفت [۲۲]. در سال ۲۰۰۸ ریبیرو ارتعاشات متناوب آزاد غیرخطی پوسته نازک استوانه‌ای با غیرخطی هندسی را بررسی نمود. یک مدل چند درجه آزادی را در نظر گرفت. اصل کار مجازی را برای تعریف معادلات حرکت در حوزه زمان استفاده نمود. پوسته‌هایی با ضخامت متفاوت و شعاع انحنای متفاوت را تحلیل کرد. تغییر فرکانس‌های طبیعی غیرخطی پوسته‌های مورد مطالعه را با دامنه ارتعاش در برخی از جزئیات مورد بررسی قرار داد. تغییر شکل مودها با دامنه ارتعاشات را ثابت کرد. همچنین ثابت کرد که اثرات سفتی نرم‌شونده و سخت‌شونده رخ داده است [۲۳]. در سال ۲۰۰۹ پاندا و ری بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول یک مدل المان محدود را برای مدل‌سازی دینامیک غیرخطی حلقه‌باز و حلقه‌بسته از ورق‌های لایه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با لایه پیزوالکتریک ارائه نمودند [۲۴]. در سال ۲۰۰۹ ژائو و لیو پاسخ غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی تحت بارهای مکانیکی و حرارتی به روش ریتز کاهش یافته بررسی کردند. فرمول‌بندی غیرخطی را بر اساس تئوری ورق تغییر شکل برشی مرتبه اول و کرنش‌های فون کارمن با کرنش‌های کوچک و چرخش‌های متوسط در نظر گرفتند. خواص مواد مدرج تابعی در جهت ضخامت بر اساس توزیع قانون توانی فرض کردند. سفتی خمش ورق‌ها را با استفاده از روش انتگرال‌گیری گرهی ثابت به‌دست آوردند. رفتار غیرخطی خیز و تنش محوری ورق‌های مدرج تابعی تحت بارهای حرارتی و مکانیکی مورد مطالعه قرار دادند و تأثیرات قانون کسر حجمی، شرایط مرزی و خواص ماده بر پاسخ غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند [۲۵]. در سال ۲۰۱۰ آمابیلی و ردی یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر برای پوسته‌ها با شکل‌های عمومی را با در نظر گرفتن نقص‌های هندسی را توسعه دادند. روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی هندسی به منظور حفظ جمله‌های غیرخطی کامل در جابه‌جایی‌ها در صفحه را به‌دست آوردند.

ارتعاشات اجباری با دامنه بزرگ یک پوسته استوانه‌ای دایروی لایه لایه با دو تکیه‌گاه ساده را با استفاده از تئوری توسعه داده شده و همچنین با وجود جمله‌های غیرخطی فون کارمن به‌دست آوردند. نتایجی به‌دست آوردند که نشان می‌داد نگه‌داشتن ترم‌های غیرخطی فون کارمن برای دامنه‌های ارتعاش حدود دو برابر ضخامت پوسته برای مورد مطالعه، نتایج نادرستی به‌دست می‌داد [۲۶]. در سال ۲۰۱۱ پلیکانو با در نظر گرفتن غیرخطی بودن هندسه، تحلیل تئوری و تجربی پوسته‌های استوانه‌ای تحت تحریک پایه را در حالت عمودی با در نظر گرفتن شرایط مرزی به صورتی که در سمت پایه گیردار و در بالا متصل به جسم صلب باشد، ارائه نمود [۲۷]. در سال ۲۰۱۱ آمابیلی ارتعاشات اجباری غیرخطی هندسی پوسته‌های استوانه‌ای ورقه‌ورقه‌ای دایروی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر آمابیلی-ردی مورد مطالعه قرار داد. بر اساس معادلات لاگرانژ با درنظر گرفتن میرایی، معادلات حرکت را به‌دست آورد. با استفاده از آنالیز دوشاخگی، معادلات حرکت تحت یک تحریک نقطه ای متناوب در جهت شعاعی با در نظر گرفتن شرایط مرزی ساده را مورد مطالعه قرار داد. همیشه یک تشدید داخلی ۱:۱ برای پوسته استوانه‌ای دایروی کامل وجود دارد که باعث ایجاد دوشاخگی در پاسخ‌های غیرخطی می‌شود. نتایج عددی به‌دست آمده با استفاده از تئوری پوسته آمابیلی-ردی با نتایج به‌دست آمده با استفاده از یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر با در نظر گرفتن غیرخطی‌های فون‌کارمن مقایسه نمود. [۲۸]. در سال ۲۰۱۲ آمابیلی تشدید داخلی در ارتعاشات اجباری غیرخطی هندسی پوسته استوانه‌ای دایروی لایه لایه‌ای را به‌وسیله تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر آمابیلی-ردی بررسی نمود. یک نیروی تحریک هارمونیک در جهت شعاعی اعمل نمود و شرایط مرزی را تکیه‌گاه دو سر ساده در نظر گرفت. معادلات حرکت را بر اساس معادلات لاگرانژ به‌دست آورد. نتایج عددی را به‌وسیله آنالیز دوشاخگی به‌دست آورد. تشدید داخلی ۱:۱:۲ را به‌وسیله آنالیز دوشاخگی در نظر گرفت [۲۹]. در سال ۲۰۱۳ استوراتزی و همکاران تأثیر هندسه بر ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی را تجزیه و تحلیل نمودند. از نظریه ساندرز برای مدل‌سازی دینامیکی غیرخطی سیستم استفاده نمودند. شرایط مرزی ساده را در نظر گرفتند. با استفاده از معادلات لاگرانژ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی را به

مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی کاهش دادند. برای به‌دست آوردن پاسخ غیرخطی پوسته از تحلیل‌های عددی استفاده [۳۰]. در سال ۲۰۱۳ شنگ و وانگ یک روش تحلیلی برای یک مدل ساده از پوسته استوانه‌ای لایه لایه مدرج تابعی با لایه‌های نازک پیزوالکتریک بر اساس اصل هامیلتون، تئوری غیرخطی فون کارمن و قانون کنترلی فیدبک سرعت منفی با بهره کنترلی ثابت ارائه دادند. لایه‌های نازک پیزوالکتریک را بر روی سطوح داخلی و بیرونی پوسته استوانه‌ای هوشمند تعبیه کردند، که به عنوان حسگر و عملگر توزیع‌شده عمل کردند که برای کنترل ارتعاش غیرخطی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی به‌کار برده شدند. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کوپل به‌هم را بر اساس یک بسط سری از مودهای خطی و روش گالرکین گسسته کردند. معادلات حرکت غیرخطی کوپل به‌هم را با روش عددی رانگ-کوتا حل کردند [۳۱]. در سال ۲۰۱۴ جعفری و همکاران ارتعاشات غیرخطی یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده را بررسی کردند. معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت پوسته استوانه‌ای با استفاده از معادلات لاگرانژ و با در نظر گرفتن تئوری پوسته نازک غیرخطی دانل را به‌دست آوردند. یک رویکرد نیمه تحلیلی که در آن میدان‌های جابه‌جایی با استفاده از یک سری دوگانه مختلط مبتنی بر توابع شکل مود خطی برای متغیرهای طولی، محیطی و شعاعی بسط داده شده‌اند، پیشنهاد شده است که پاسخ غیرخطی پوسته استوانه‌ای را مشخص کنند. پاسخ با دامنه بزرگ و منحنی دامنه-فرکانس پوسته استوانه‌ای را با استفاده از روش رانگ کوتا به‌دست آوردند. اثرات نیروی تحریک و ولتاژ اعمالی بر رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای را مورد بررسی قرار دادند [۳۲]. در سال ۲۰۱۵ دی و راماچاندرا ارتعاشات پوسته استوانه‌ای دایروی کامپوزیتی با دو تکیه‌گاه ساده را مورد بحث قرار دادند. تئوری پوسته نازک غیرخطی دانل با درنظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول را برای مدل‌سازی پوسته مورد استفاده قرار دادند. معادلات حاکم بر ناپایداری دینامیکی پوسته را با سه جمله جابه‌جایی و دو جمله چرخشی به‌دست آوردند. با استفاده از روش‌های گالرکین و بولوتین، مناطق ناپایداری دینامیکی را محاسبه نمودند. تنش‌های پیش‌کمانش در پوسته استوانه‌ای با بارگذاری جزئی را محاسبه نمودند. نتایج عددی برای نشان دادن تأثیر نسبت شعاع به ضخامت، توزیع بارگذاری در لبه و

تغییر شکل برشی بر مناطق ناپایداری دینامیکی ارائه شده است. تأثیر دامنه بار دینامیکی بر پاسخ غیرخطی را مطالعه نمودند [۳۳]. در سال ۲۰۱۵ دانگ و هوآ کمانش غیرخطی و پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای دایروی نازک تقویت شده مدرج تابعی بر بستر الاستیک در محیط‌های حرارتی و تحت بار پیچشی با روش تحلیلی به‌دست آوردند. پوسته‌ها به‌وسیله حلقه و کابل تقویت شده در نظر گرفتند. بر اساس تئوری پوسته کلاسیک با غیرخطی‌های هندسی فون کارمن معادلات حاکم را به‌دست آوردند. با استفاده از روش گالرکین با پاسخ سه جمله‌ای خیز شکل، منحنی‌های بار پیچشی بحرانی-خیز و بار پس‌کمانش-خیز را به‌دست آوردند. تأثیرات دما، تقویت‌کننده، بستر و ماده را بررسی کردند [۳۴]. در سال ۲۰۱۵ سوفیه و کوروگلو ناپایداری دینامیکی پوسته استوانه‌ای مدرج نمایی با بار استاتیک و بار متناوب وابسته به زمان و با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی بررسی نمودند. معادلات ناپایداری دینامیکی نوع دانل پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی مدرج نمایی بر پایه نظریه تغییر شکل برشی به دست آورده شده‌اند. سپس به معادله متئو-هیل کاهش داده شده‌است. عبارت‌های مشابهی برای پوسته تک لایه مدرج نمایی و پوسته استوانه‌ای ساندویچی سرامیک و فلز براساس تئوری تغییر شکل برشی و تئوری پوسته کلاسیک به‌دست آوردند [۳۵]. در سال ۲۰۱۶ سوفیه و کوروگلو نیز تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته را جایگزین تئوری پوسته کلاسیک نمودند که تعمیمی از مرجع [۳۵] بود [۳۶]. در سال ۲۰۱۶ نین و بیچ کمانش غیرخطی و پس‌کمانش پوسته‌های الاستیک تقویت شده مدرج تابعی بر بستر الاستیک در محیط‌های حرارتی و تحت بار پیچشی را بررسی کردند. پوسته الاستیک مدرج تابعی را به‌وسیله حلقه و کابل، تقویت شده در نظر گرفتند. فرمول بندی تئوری را بر اساس تئوری پوسته کلاسیک با غیرخطی‌های هندسی فون کارمن به‌دست آوردند. حل تقریبی سه جمله‌ای خیز را انتخاب کردند و منحنی‌های بار بحرانی-خیز و بار پیچشی پس‌کمانش-خیز را به‌دست آوردند. اثرات پارامترهای هندسی، دما، تقویت کننده و بستر الاستیک را مورد بررسی قرار دادند [۳۷]. در سال ۲۰۱۶ کومار و همکاران ناپایداری دینامیکی خطی و غیرخطی ورق مدرج تابعی تحت بارگذاری غیریکنواخت را بررسی نمودند. توزیع تنش در صفحه در داخل ورق مدرج تابعی در حالت پیش‌کمانش را با استفاده

از تحلیل غشایی ورق ارزیابی نمودند. ورق مدرج تابعی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر با در نظر گرفتن غیرخطی‌های هندسی فون کارمن مدل‌سازی نمودند. روش گالرکین را برای کاهش معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل معمولی به‌کار بردند که ناپایداری دینامیکی غیرخطی ورق را توصیف می‌کرد. پاسخ خطی و غیرخطی در مناطق پایدار و ناپایدار به منظور شناسایی رفتار ناپایداری دینامیکی از جمله وابستگی به فرکانس نیرویی، وجود ضربان، اثر غیرخطی بودن بر پاسخ و تأثیر شرایط اولیه را مورد مطالعه قرار دادند [۳۸]. در سال ۲۰۱۶ دارابی و گانسان ناپایداری دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی لایه لایه نازک را تحت بار محوری متناوب بررسی کردند. معادلات حرکت را بر اساس تئوری پوسته نازک دانل و با غیرخطی‌های فون کارمن توسعه دادند. معادلات حرکت پوسته نازک با خیز بزرگ غیرخطی را با استفاده از تکنیک گالرکین حل کردند که تبدیل به یک سیستم از معادلات متئو-هیل غیرخطی شد. هر دو دامنه پاسخ پایدار و ناپایدار ارتعاشات حالت ماندگار را با استفاده از روش بولوتین به‌دست آوردند. یک مطالعه پارامتری برای بررسی و مقایسه تأثیر بارهای محوری کششی و فشاری، نسبت ابعادی پوسته شامل نسبت طول به شعاع و نسبت ضخامت به شعاع و همچنین تشدید پارامتریک انجام دادند [۳۹]. در سال ۲۰۱۷ شنگ و وانگ نتایج بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی در محیط‌های حرارتی را بر اساس اصل هامیلتون، تئوری غیرخطی فون کارمن و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول گزارش دادند. فرمول بندی شامل نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس بر اثر چرخش پوسته را ارائه دادند. اثرات اینرسی در صفحه و اینرسی چرخشی را در معادلات حرکت در نظر گرفتند. از روش گالرکین برای تبدیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی استفاده کردند. کاهش در مدل برای بررسی دینامیک غیرخطی، شامل پاسخ‌های رزونانس اولیه، پاسخ‌های شبه تناوبی و پاسخ‌های آشوبناک به نیروهای خارجی هارمونیک را ارائه دادند. ضرایب مودال غیرخطی مرتبه دوم و غیرخطی مرتبه سوم با استفاده از انتگرال‌گیری گالرکین را محاسبه و بر بخش خطی معادله برای تعیین معادله غیرخطی کاهش یافته قرار دادند [۴۰].

۲-۲-۲ پژوهش‌ها با در نظر گرفتن روش مقیاس‌های چندگانه

در سال ۲۰۱۰ هگازی رفتار دینامیکی یک ورق نازک مستطیلی تحت تحریک‌های پارامتریک و خارجی را بررسی نمود. حرکت ورق نازک با معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه دوم کوپل به‌هم مدل نمود. راه حلی تقریبی بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه ارائه نمود. یک سیستم کاهش یافته با چهار معادله دیفرانسیل معمولی برای توصیف تغییرات زمانی دامنه و فاز ارتعاش در جهت‌های افقی و عمودی به‌دست آورد. پاسخ حالت ماندگار و پایداری پاسخ‌ها را با استفاده از به‌صورت عددی مطالعه نمود. حرکت آشوبناک ورق نازک را با شبیه‌سازی عددی به‌دست آورد [۴۱]. در سال ۲۰۱۱ محمودخانی و همکاران با استفاده از روش اغتشاشات پاسخ تشدید اولیه پوسته‌های استوانه‌ای دایروی با دو تکیه‌گاه ساده را مورد بررسی قرار دادند. از تئوری پوسته نازک غیرخطی دانل برای به‌دست آوردن معادلات حرکت دیفرانسیلی با مشتقات جزئی استفاده کردند. از روش گالرکین برای تبدیل معادلات حرکت به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده کردند. با درنظر گرفتن تشدید اولیه، از روش مقیاس‌های چندگانه برای مطالعه پاسخ‌های متناوب و پایداری آن‌ها استفاده کردند. مطالعات پارامتریک برای نشان دادن تأثیر مقادیر مختلف ضخامت، طول و ترکیب مواد مختلف در پاسخ تشدید اولیه را انجام دادند [۴۲]. در سال ۲۰۱۱ لیو و چو ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای دایروی نازک را مورد بررسی قرار دادند. بر اساس تئوری لاو، معادلات حرکت دیفرانسیلی با مشتقات جزئی حاکم را برای پوسته استوانه‌ای دایروی گردان با استفاده از اصل هامیلتون و روش گالرکین به‌دست آوردند. اثرات دما، پارامترهای هندسی، عدد موج پیرامونی، شماره نیم‌موج محوری و سرعت چرخش بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای دایروی گردان را مورد مطالعه قرار دادند. پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای دایروی گردان را در حوزه زمان و حوزه فرکانس بررسی نمودند. اثرات غیرخطی، تحریک و میرایی بر پاسخ فرکانسی پاسخ ماندگار را تجزیه و تحلیل کردند [۴۳]. در سال ۲۰۱۲ علیجانی و همکاران ارتعاشات غیرخطی و آزاد پوسته نازک ایزوتروپیک را با استفاده از گسسته سازی گالرکین و روش مقیاس‌های

چندگانه بررسی کردند. از تئوری پوسته نازک غیرخطی استفاده کردند و شرایط مرزی را ساده با لبه‌های متحرک درنظر گرفتند. با استخراج دو شکل مختلف از تابع تنش، معادلات حرکت به سیستمی با غیرخطی‌های مرتبه دوم و سوم کاهش داده شده‌اند. یک رابطه درجه دو بین تحریک و فرکانس اساسی در نظر گرفته شده است و نشان داده شده است که در مورد غیرخطی سخت‌شونده نتایج مشابه آنچه که از طریق انتگرال‌گیری به‌دست آمده، می‌باشد [۴۴]. در سال ۲۰۱۳ هان و چو ناپایداری پارامتریک پوسته استوانه‌ای چرخان تحت بارهای محوری متناوب بر اساس روش بولوتین را بررسی کردند. ناپایداری پارامتریک همان سیستم را با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه مورد مطالعه قرار دادند و حالت‌های تحلیلی مرزهای ناپایداری برای مودهای مختلف را به‌دست آوردند [۴۵]. در سال ۲۰۱۳ لی و یائو تشدید زیرهارمونیک ۱:۳ یک پوسته استوانه‌ای دایروی لایه لایه کامپوزیتی که در دو انتهای آن جریان هوای آزاد تحت تحریک هارمونیک شعاعی قرار دارد را مورد بررسی قرار دادند. معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی را با استفاده از تئوری پوسته غیرخطی دانل به‌دست آوردند. از روش گالرکین برای تبدیل معادلات حرکت پوسته به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی استفاده کردند. تشدید زیر هارمونیک ۱:۳ پوسته را با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه تجزیه و تحلیل کردند. پایداری حالت‌های ماندگار تشدید زیرهارمونیک ۱:۳ به‌دست آمده را به‌وسیله مسأله مقدار ویژه معادلات خطی حل نمودند [۴۶]. در سال ۲۰۱۳ دو و لی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی را در محیط‌های حرارتی بررسی کردند. خواص مواد مدرج تابعی را با قانون توزیع توانی در جهت ضخامت و وابسته به دما در نظر گرفتند. یک تحریک تشدید اولیه و تشدید داخلی ۱:۲ بین مود را تجزیه و تحلیل کردند. از روش لاگرانژ برای به‌دست آوردن معادلات حرکت دیفرانسیلی معمولی غیرخطی بر اساس تئوری پوسته غیرخطی دانل استفاده کردند. رفتارهای دینامیکی سیستم را با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه بررسی کردند. منحنی‌های دامنه-فرکانس و رفتار دوشاخگی سیستم را با استفاده از روش‌های عددی تجزیه و تحلیل نمودند. اثرات دما و کسر حجمی بین مواد تشکیل دهنده را بر پاسخ دامنه سیستم به‌طور کامل مورد بحث قرار دادند [۴۷]. در سال ۲۰۱۴ شنگ و وانگ به بررسی ارتعاشات

غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی بر اساس اصل هامیلتون، تئوری غیرخطی فون کارمن و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند. خواص ماده را وابسته به دما فرض کردند. یک بستر الاستیک برای پوسته در نظر گرفتند. از روش گالرکین برای تبدیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی با غیرخطی مرتبه دوم و غیرخطی مرتبه سوم استفاده کردند. با در نظر گرفتن تشدید اولیه، روش مقیاس‌های چندگانه را برای مطالعه پاسخ فرکانسی رفتار نرم شوندگی و سخت شوندگی استفاده کردند. اثرات پارامتریک بر ارتعاشات غیرخطی را بررسی نمودند [۴۸]. در سال ۲۰۱۴ دو و همکاران ارتعاشات اجباری غیرخطی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با طول بی‌نهایت را با استفاده از تئوری لاگرانژ روش مقیاس‌های چندگانه مورد بررسی قرار دادند. خواص معادل مواد مدرج تابعی با استفاده از قانون توزیع توانی در جهت ضخامت توصیف کردند. از روش انرژی برای به‌دست آوردن معادلات حرکت دیفرانسیلی معمولی غیرخطی استفاده کردند. با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه تشدید داخلی ۱:۲ بین دو مود را بررسی کردند. منحنی‌های دامنه-فرکانس و رفتارهای دوشاخگی سیستم را با استفاده از روش‌های عددی تحلیل نمودند. تأثیر قانون توزیع توانی بر پاسخ دامنه سیستم را مورد بحث قرار دادند [۴۹]. در سال ۲۰۱۸ شنگ و وانگ رفتارهای دینامیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با دو تکیه‌گاه ساده تحت تحریکات ترکیبی پارامتریک و خارجی با در نظر گرفتن تنش‌های حرارتی مورد مطالعه قرار دادند. بر اساس تئوری غیرخطی فون کارمن، روش گالرکین و روش چگالش استاتیک، معادلات دیفرانسیل غیرخطی کوپل به‌هم با دو مود را به‌دست آوردند. روش مقیاس‌های چندگانه را برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی با غیرخطی‌های مرتبه دوم و سوم استفاده کردند. تشدید اولیه و تشدید داخلی سیستم را به‌وسیله منحنی‌های پاسخ فرکانسی تجزیه و تحلیل کردند. پایداری دینامیکی تحریکات پارامتریک را به‌وسیله پاسخ‌های زمانی به‌دست آوردند. تأثیرات پارامترهای مختلف بر ارتعاشات غیرخطی را با شبیه‌سازی عددی مورد بحث قرار دادند. [۵۰].

۲-۳ جمع‌بندی

باتوجه تحقیقات صورت گرفته، مشخص شده است که بررسی ارتعاشات غیرخطی از جمله تحلیل رزونانس اولیه یک پوسته استوانه‌ای با دو تکیه‌گاه ساده ساخته شده از یک لایه مواد مدرج تابعی و لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک با دو معادله دیفرانسیل معمولی کوپل به‌هم تحت یک تحریک خارجی و یک تحریک پارامتریک به‌صورت بار محوری با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه تاکنون انجام نشده است که در این پژوهش انجام خواهد شد.

فصل سوم:

معادله حرکت

۳-۱ مقدمه

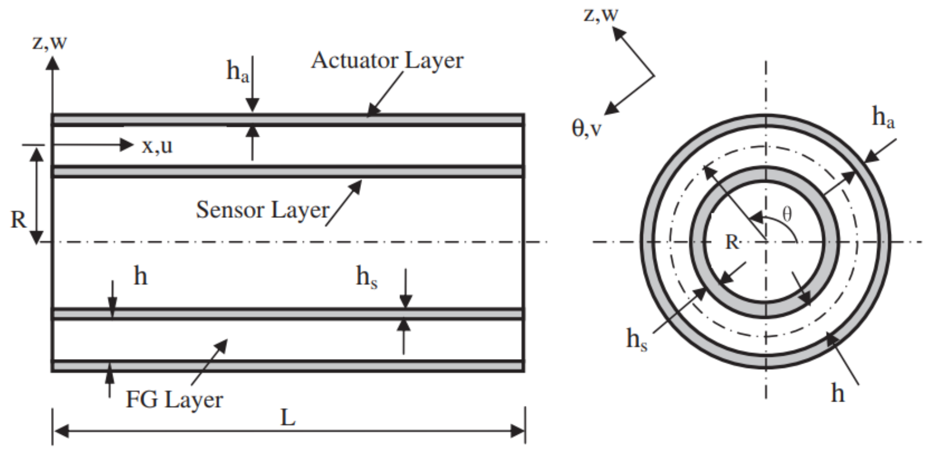
در این فصل از این پژوهش، معادلات حاکم[۱] بر پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی پوشانده شده با دو لایه پیزوالکتریک شامل حسگر و عملگر با ولتاژ اعمالی تحت قانون کنترلی فیدبک سرعت منفی[۲] تحت تحریک‌های ترکیبی پارامتریک و خارجی[۳] به‌دست آورده می‌شود.

به منظور یافتن معادلات حاکم، از اصل هامیلتون و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با در نظر گرفتن نظریه غیرخطی فون کارمن بهره می‌گیریم. سپس از روش گالرکین[۴] برای از بین بردن بخش مکانی مختصه‌های جابه‌جایی استفاده می‌کنیم. روش چگالش استاتیک[۵] برای حذف مختصه‌های جابه‌جایی استفاده می‌شود. درنهایت دو معادله دیفرانسیل غیرخطی کوپل به‌هم که دارای غیرخطی‌های مرتبه دوم و سوم می‌باشند را به‌دست خواهیم آورد.

۳-۲ هندسه و مختصات

در شکل (۳-۱) نمایی از هندسه مدل مورد مطالعه مشاهده می‌شود. یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی به طول L و ضخامت h با شعاع R موجود است. یک لایه حسگر با ضخامت h_s سطح درونی[۶] آن‌را پوشانده است و یک لایه عملگر با ضخامت h_a سطح بیرونی[۷] را احاطه کرده است. سطح میانی[۸] پوسته در شعاع R از محور تقارن پوسته و به فاصله $h/2$ از سطح درونی و بیرونی لایه مدرج تابعی قرار دارد. سیستم مختصات متعامد (x,θ,z) در سطح میانی پوسته قرار دارد.

[۱] Governing Equations
[۲] Negative Velocity Feedback Control Law
[۳] Parametric and External Excitations
[۴] Galerkin Method
[۵] Static Condensation Method
[۶] Inner Surface
[۷] Outer Surface
[۸] Mid-Surface



شکل (۱-۳) هندسه و سیستم مختصات پوسته استوانه‌ای چند لایه

۳-۳ روابط کرنش-جابه‌جایی

مؤلفه‌های جابه‌جایی سه بعدی هر نقطه‌ی دلخواه از پوسته u_1، v_1 و w_1 به‌ترتیب در راستای x، θ و z بر حسب مؤلفه‌های مختصات و جابه‌جایی سطح میانی با استفاده از بسط تیلور[۱] براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به‌صورت رابطه (۳-۱) بیان می‌شوند [۵]:

$$
\begin{aligned}
u_1(x,\theta,z,t) &= u(x,\theta,t) + z\varphi_x(x,\theta,t) \\
v_1(x,\theta,z,t) &= v(x,\theta,t) + z\varphi_\theta(x,\theta,t) \\
w_1(x,\theta,z,t) &= w(x,\theta,t)
\end{aligned} \tag{۳-۱}
$$

در رابطه‌ی (۳-۱)، z فاصله‌ی شعاعی[۲] از سطح میانی ضخامت پوسته و φ_x و φ_θ به‌ترتیب مؤلفه‌های چرخش بردار نرمال صفحه‌ی میانی حول محور x و θ هستند.

بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با در نظر گرفتن جملات غیرخطی فون کارمن، مؤلفه‌های بردار کرنش به صورت رابطه (۳-۲) بیان می‌شود که فرضیات غیرخطی هندسی فون کارمن شامل موارد زیر می‌باشد [۵]:

[۱] Taylor Expansion
[۲] Radial Displacement

۱. در روابط کرنش-جابه‌جایی فقط آن دسته از جملاتی که به جابه‌جایی در جهت عرضی وابسته‌اند، باقی می‌ماند و از دیگر جملات غیرخطی صرف‌نظر می‌شود.

۲.چرخش‌ها نسبت به سطح مرجع پوسته تغییر شکل نیافته، ناچیز بوده و چرخش‌ها حول بردارهای عمود بر سطح مرجع قابل چشم‌پوشی است.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 && \gamma_{\theta z} = \varphi_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} \\
&\varepsilon_\theta = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 && \kappa_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
&\gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta} && \kappa_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \\
&\gamma_{xz} = \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} && \kappa_{x\theta} = \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta}
\end{aligned} \qquad (۲-۳)$$

که بردار کرنش با لحاظ کردن جملات غیرخطی فون کارمن، به صورت یک بردار غیرخطی است.

۳-۴ روابط لایه مدرج تابعی

رابطه تنش-کرنش باتوجه به قانون هوک به صورت رابطه (۳-۳) به شکل ماتریسی بیان می‌شود [۵]:

$$\sigma_e = C_e(z)\varepsilon \qquad (۳-۳)$$

که در رابطه σ_e بردار تنش‌ها، $C_e(z)$ ماتریس سفتی‌ها و ε بردار کرنش‌ها هستند.

$$\sigma_e = \begin{bmatrix} \sigma_x^e & \sigma_\theta^e & \tau_{x\theta}^e & \tau_{\theta z}^e & \tau_{xz}^e \end{bmatrix}^T \qquad (۴-۳)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_\theta & \gamma_{x\theta} & \gamma_{\theta z} & \gamma_{xz} \end{bmatrix}^T \qquad (۵-۳)$$

$$C_e\left(z\right)=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \qquad (۳-۶)$$

ضرایب الاستیسیته[۱]مؤثر برای لایه مدرج تابعی به صورت رابطه (۳-۷) هستند:

$$\begin{aligned} &Q_{11}=C_{11} \qquad Q_{12}=C_{12}/A \quad Q_{66}=C_{66}/A \\ &Q_{21}=C_{21} \qquad Q_{22}=C_{22}/A \quad Q_{55}=\kappa_G C_{55}/A \end{aligned} \qquad Q_{44}=\kappa_G C_{44} \qquad (۳-۷)$$

که $A=1+z/R$ و فاکتور تصحیح برشی[۲] $\kappa_G=5/6$ است. ضرایب سفتی از رابطه (۳-۸) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &C_{11}=\frac{E_e}{1-{\nu_e}^2} \qquad C_{12}=\frac{\nu_e E_e}{1-{\nu_e}^2} \\ &C_{21}=\frac{\nu_e E_e}{1-{\nu_e}^2} \qquad C_{22}=\frac{E_e}{1-{\nu_e}^2} \end{aligned} \qquad C_{44}=C_{55}=C_{66}=\frac{E_e}{2(1+\nu_e)} \qquad (۳-۸)$$

در لایه مدرج تابعی، مدول الاستیسیته (مدول یانگ)، ضریب پوآسون و چگالی با استفاده از قانون نمایی طبق روابط (۳-۹) به‌دست آمده است [۵۱]:

$$\begin{aligned} E_e&=\left(E_m-E_c\right)\left(1-\exp\left(-\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^{\Phi}\right)\right)+E_c \\ \nu_e&=\left(\nu_m-\nu_c\right)\left(1-\exp\left(-\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^{\Phi}\right)\right)+\nu_c \\ \rho_e&=\left(\rho_m-\rho_c\right)\left(1-\exp\left(-\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^{\Phi}\right)\right)+\rho_c \end{aligned} \qquad (۳-۹)$$

---

۱ Elasticity Coefficient

۲ Shear Correction Factor

در رابطه (۳-۹)، E مدول الاستیسیته (مدول یانگ)، ν ضریب پوآسون، ρ چگالی و Φ نسبت کسر حجمی بین فلز و سرامیک می‌باشند. اندیس m مربوط به خواص فلز، اندیس c مربوط به خواص سرامیک و اندیس e خواص مؤثر ماده مدرج تابعی هستند.

رابطه بین بردار تنش با نیروهای درون صفحه و گشتاورهای خارج صفحه طبق رابطه زیر عنوان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x & N_\theta & N_{x\theta} \end{bmatrix}^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_\theta & \tau_{x\theta} \end{bmatrix}^T dz \\ \begin{bmatrix} M_x & M_\theta & M_{x\theta} \end{bmatrix}^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_\theta & \tau_{x\theta} \end{bmatrix}^T zdz \end{aligned} \tag{۱۰-۳}$$

که در رابطه (۳-۱۰) ، N_x، N_θ و $N_{x\theta}$ مؤلفه‌های نیروی منتجه درون صفحه و M_x، M_θ و $M_{x\theta}$ مؤلفه‌های گشتاور خمشی و پیچشی هستند. با جایگذاری رابطه (۳-۳) در رابطه (۳-۱۰)، می‌توان رابطه‌ی بین نیرو و گشتاور را به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} E_{44} & 0 \\ 0 & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{۱۱-۳}$$

A_{ij}، B_{ij}، D_{ij} و E_{kk} برای $i, j = 1, 2, 6$ و $k = 4, 5$ مؤلفه‌های ماتریس سفتی بوده که مقادیری ثابت بر حسب خواص مکانیکی و هندسی می‌باشند که از رابطه (۳-۱۲) به‌دست می‌آیند:

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}\left(1, z, z^2\right) dz$$

$$E_{44} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} dz \qquad E_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} dz \qquad (۱۲-۳)$$

۳-۵ روابط لایه‌های پیزوالکتریک

برای لایه‌های عملگر و حسگر روابط بین متغیرهای میدانی توسط معادلات ساختاری پیزوالکتریک بیان می‌شود [۳۱]:

$$\sigma_i = C_i \varepsilon - e_i E_i \qquad (۱۳-۳)$$

$$D_i = e_i^T \varepsilon + \xi_i E_i \qquad (۱۴-۳)$$

$i = a$ برای لایه عملگر و $i = s$ برای لایه حسگر است.

میدان الکتریکی[۱] و جابه‌جایی‌های الکتریکی[۲] به‌ترتیب در روابط (۳-۱۵) و (۳-۱۶) مشخص شده‌اند :

$$E_i = \left[E_x^i \quad E_\theta^i \quad E_z^i\right]^T \qquad (۱۵-۳)$$

$$D_i = \left[D_x^i \quad D_\theta^i \quad D_z^i\right]^T \qquad (۱۶-۳)$$

که E_i بردار میدان الکتریکی و D_i بردار جابه‌جایی الکتریکی هستند [۳۱].

ماتریس‌های کرنش در صفحه-سفتی‌های کاهش‌یافته، ثابت پیزوالکتریک مؤثر و ثابت دی‌الکتریک مؤثر به ترتیب در روابط (۳-۱۷)، (۳-۱۸) و (۳-۱۹) تعریف شده‌اند [۳۱]:

---

۱ Electric Field

۲ Electric Displacement

$$C_i = \begin{bmatrix} Q_{11e}^i & Q_{12e}^i & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12e}^i & Q_{22e}^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66e}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44e}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55e}^i \end{bmatrix} \qquad (۱۷-۳)$$

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31e}^i \\ 0 & 0 & e_{32e}^i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{24e}^i & 0 \\ e_{15e}^i & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۸-۳)$$

$$\xi_i = \begin{bmatrix} \xi_{11e}^i & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22e}^i & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33e}^i \end{bmatrix} \qquad (۱۹-۳)$$

که $i = a$ برای لایه عملگر و $i = s$ برای لایه حسگر است و مقادیر روابط بالا در ضمیمه بیان شده‌اند.

جهت قطب‌دار کردن لایه پیزوالکتریک منطبق با جهت ضخامت است. بردارهای میدان الکتریکی لایه‌های عملگر و حسگر طبق رابطه (۳-۲۰) از منفی گرادیان پتانسیل‌های الکتریکی[۱] به‌دست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} E_a \\ E_s \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \nabla \varphi_a \\ \nabla \varphi_s \end{Bmatrix} \qquad (۲۰-۳)$$

برای لایه‌ی عملگر با در نظر گرفتن هر دو اثر مستقیم و معکوس پیزوالکتریک یک توزیع مربعی لایه‌ای از پتانسیل الکتریکی φ_a به‌وسیله رابطه (۳-۲۱) مشخص شده‌است [۵۲]:

$$\varphi_a = 2\frac{z_a}{h_a} U\left(x,\theta,t\right) + \left[z_a^2 - \left(\frac{h_a}{2}\right)^2 \right] \psi_a\left(x,\theta,t\right) \qquad (۲۱-۳)$$

$$z_a = z - \left(h + h_a\right)/2 \qquad (۲۲-۳)$$

[۱] Electric Potentials

که در رابطه (۳-۲۱)، $U(x,\theta,t)$ پتانسیل الکتریکی اعمالی و ψ_a میدان الکتریکی صفحه‌ای[1]است که با تغییر شکل لایه عملگر القا می‌شود و در رابطه (۳-۲۲)، z_a مختصات ضخامت نسبت به صفحه میانی لایه عملگر مشخص شده است. همچنین در رابطه (۳-۲۱) پتانسیل الکتریکی اعمالی تحت قانون کنترل فیدبک سرعت منفی به‌صورت رابطه (۳-۲۳) با بهره کنترلی G تعریف می‌شود [۵۳]:

$$U(x,\theta,t) = -G\dot{\psi}_s(x,\theta,t) \tag{۳-۲۳}$$

زمانی‌که U صفر باشد، لایه پیزوالکتریک را می‌توان به عنوان حسگر در نظر گرفت. با توجه به رابطه (۳-۲۱)، پتانسیل الکتریکی φ_s با تغییر شکل الاستیک در لایه سنسور القا می‌شود که توسط رابطه (۳-۲۴) به‌دست می‌آید:

$$\varphi_s = \left[z_s^2 - \left(\frac{h_s}{2} \right)^2 \right] \psi_s(x,\theta,t) \tag{۳-۲۴}$$

$$z_s = z + (h + h_s)/2 \tag{۳-۲۵}$$

در رابطه (۳-۲۴) ψ_s میدان الکتریکی صفحه‌ای است که با تغییر شکل لایه حسگر القا می‌شود و در رابطه (۳-۲۵)، z_s مختصات ضخامت نسبت به صفحه میانی لایه حسگر بیان شده‌است.

منتجه‌های نیرویی و گشتاوری لایه‌های پیزوالکتریک بر اساس خواص ساختاری عملگر و حسگر به صورت رابطه (۳-۲۶) حاصل می‌شوند [۳۱]:

[1] In-plane Electric Field

$$\begin{Bmatrix} N_x^P & M_x^P \\ N_\theta^P & M_\theta^P \\ N_{x\theta}^P & M_{x\theta}^P \end{Bmatrix} = \frac{2}{h_a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} \begin{Bmatrix} e_{31e}^a \\ e_{32e}^a \\ 0 \end{Bmatrix} \left(1 \quad z\right) dz U$$

$$+2\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} \begin{Bmatrix} e_{31e}^a z_a \\ e_{32e}^a z_a \\ 0 \end{Bmatrix} \left(1 \quad z\right) dz\psi_a + 2\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} e_{31e}^s z_s \\ e_{32e}^s z_s \\ 0 \end{Bmatrix} \left(1 \quad z\right) dz\psi_s$$

$$Q_x^P = \frac{2e_{15e}^a}{h_a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} z_a dz \frac{\partial U}{\partial x} + e_{15e}^a \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} P(z_a) dz \frac{\partial \psi_a}{\partial x} \qquad (۲۶-۳)$$

$$+e_{15e}^s \int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} P(z_s) \frac{\partial \psi_s}{\partial x}$$

$$Q_\theta^P = e_{24e}^a \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} \frac{2z_a}{\left(R+z\right)h_a} dz \frac{\partial U}{\partial \theta} + e_{24e}^a \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} \frac{P(z_a)}{R+z} dz \frac{\partial \psi_a}{\partial \theta}$$

$$+e_{24e}^s \int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} \frac{P(z_s)}{R+z} dz \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta}$$

و در رابطه زیر، $P(z_a)$ و $P(z_s)$ موجود در رابطه (۳-۲۶) برای لایه حسگر و عملگر بیان شده‌اند:

$$P(z_a) = z_a^2 - \left(\frac{h_a}{2}\right)^2$$

$$P(z_s) = z_s^2 - \left(\frac{h_s}{2}\right)^2 \qquad (۲۷-۳)$$

۳-۶ معادله حرکت

پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک شامل عملگر و حسگر تحت تحریک شعاعی[۱] متغیر با زمان و مکان $q\left(x,\theta,t\right)$ و بار محوری[۲]متناوب متغیر با زمان N_a طبق رابطه (۳-۲۸) با علامت منفی در جهت فشاری می‌باشد:

---

۱ Radial Excitation

۲ Axial Load

$$N_a = N_0 + N_d \cos Pt \tag{۲۸-۳}$$

در این رابطه N_0 مقدار ثابت تحریک پارامتریک و N_d ضریب ثابت برای قسمت متناوب با فرکانس پارامتریک P می‌باشد.

بر اساس اصل هامیلتون، معادلات حرکت این سیستم از رابطه (۳-۲۹) به‌دست می‌آیند:

$$\int_0^t \left(\delta K - \delta H - \delta V_N\right) dt = 0 \tag{۲۹-۳}$$

که K انرژی جنبشی و H انرژی پتانسیل لایه‌های مدرج تابعی، عملگر و حسگر هستند و V_N انرژی پتانسیل بار محوری است [۵۴-۵۷].

طبق روابط زیر معادلات حرکت حاکم بر سیستم و معادلات تعادل شارژ به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\delta u: &\frac{\partial\left(N_x + N_x^P\right)}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial\left(N_{x\theta} + N_{x\theta}^P\right)}{\partial \theta} = \left(I_0 + I_0^a + I_0^s\right)\ddot{u} \\ &+\left(I_1 + I_1^a + I_1^s\right)\ddot{\varphi}_x\end{aligned} \tag{۳۰-۳}$$

$$\begin{aligned}\delta v: &\frac{1}{R}\frac{\partial\left(N_\theta + N_\theta^P\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(N_{x\theta} + N_{x\theta}^P\right)}{\partial x} + \frac{1}{R}\left(Q_\theta + Q_\theta^P\right) \\ &+(N_0 + N_d \cos Pt)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(I_0 + I_0^a + I_0^s\right)\ddot{v} + \left(I_1 + I_1^a + I_1^s\right)\ddot{\varphi}_\theta\end{aligned} \tag{۳۱-۳}$$

$$\begin{aligned}\delta w: &\frac{1}{R}\frac{\partial\left(Q_\theta + Q_\theta^P\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(Q_x + Q_x^P\right)}{\partial x} - \frac{1}{R}\left(N_\theta + N_\theta^P\right) \\ &+(N_0 + N_d \cos Pt)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta(u, v, w, \varphi_x, \varphi_\theta, \psi_a, \psi_s) + q(x, \theta, t) \\ &= \left(I_0 + I_0^a + I_0^s\right)\ddot{w}\end{aligned} \tag{۳۲-۳}$$

$$\delta\varphi_x : \frac{\partial\left(M_x + M_x^P\right)}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial\left(M_{x\theta} + M_{x\theta}^P\right)}{\partial\theta} - \left(Q_x + Q_x^P\right) = \left(I_1 + I_1^a + I_1^s\right)\ddot{u} + \left(I_2 + I_2^a + I_2^s\right)\ddot{\varphi}_x \tag{۳-۳۳}$$

$$\delta\varphi_\theta : \frac{1}{R}\frac{\partial\left(M_\theta + M_\theta^P\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial\left(M_{x\theta} + M_{x\theta}^P\right)}{\partial x} - \left(Q_\theta + Q_\theta^P\right) = \left(I_1 + I_1^a + I_1^s\right)\ddot{v} + \left(I_2 + I_2^a + I_2^s\right)\ddot{\varphi}_\theta \tag{۳-۳۴}$$

$$\delta\psi_a : \int_V \left(D_x^a \delta E_x^a + D_\theta^a \delta E_\theta^a + D_z^a \delta E_z^a\right) dV = 0 \tag{۳-۳۵}$$

$$\delta\psi_s : \int_V \left(D_x^s \delta E_x^s + D_\theta^s \delta E_\theta^s + D_z^s \delta E_z^s\right) dV = 0 \tag{۳-۳۶}$$

که در این روابط، $\eta(u,v,w,\varphi_x,\varphi_\theta,\psi_a,\psi_s)$ جمله غیرخطی ناشی از کرنش‌های غیرخطی فون کارمن است و در رابطه (۳-۳۷) به آن پرداخته شده‌است که بالانویس P در این رابطه نشان‌گر روابط پیزوالکتریک است. جملات اینرسی مربوط به لایه‌های مدرج تابعی، عملگر و حسگر به‌ترتیب در روابط (۳-۳۸)، (۳-۳۹) و (۳-۴۰) تشریح گردیده است:

$$\eta(u,v,w,\varphi_x,\varphi_\theta,\psi_a,\psi_s) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(N_x + N_x^P\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(N_\theta + N_\theta^P\right)\frac{\partial w}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(N_{x\theta} + N_{x\theta}^P\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(N_{x\theta} + N_{x\theta}^P\right)\frac{\partial w}{\partial\theta}\right] \tag{۳-۳۷}$$

$$\left(I_0, I_1, I_2\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_e(z)\left(1, z, z^2\right) dz \tag{۳-۳۸}$$

$$\left(I_0^a, I_1^a, I_2^a\right) = \int_{h/2}^{h/2+h_a} \rho_a \left(1, z, z^2\right) dz \quad (۳-۳۹)$$

$$\left(I_0^s, I_1^s, I_2^s\right) = \int_{-h/2-h_s}^{-h/2} \rho_s \left(1, z, z^2\right) dz \quad (۳-۴۰)$$

به‌طور کلی، کار انجام شده توسط بار محوری با جابه‌جایی‌های پوسته در جهت‌های x، θ و z مرتبط است [۵۸]. در اینجا اثر اینرسی جابه‌جایی محوری نادیده گرفته می‌شود [۵۹] و بار محوری در روابط (۳-۳۱) و (۳-۳۲) ظاهر می‌شود. اگر نقش جابه‌جایی‌های محوری و محیطی نادیده گرفته شود، بار محوری فقط در رابطه (۳-۳۲) ظاهر می‌شود [۵۵].

با درنظر گرفتن روابط کرنش-جابه‌جایی، منتجه‌ها و روابط ساختاری پیزوالکتریک، معادلات غیرخطی حرکت و معادلات تعادل شارژ شامل جملات جابه‌جایی $\left(u, v, w, \varphi_x, \varphi_\theta\right)$ و پتانسیل الکتریکی $\left(\psi_a, \psi_s\right)$ هستند، به صورت روابط کوپل به‌هم و اپراتوری (۳-۴۱) تا (۳-۴۷) مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned} &L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + L_{14}\varphi_x + L_{15}\varphi_\theta + L_{16}\psi_a + L_{17}\psi_s + L_{1U}U \\ &+w'_x L_{18} w + w'_\theta L_{19} w = \left(I_0 + I_0^a + I_0^s\right)\ddot{u} + \left(I_1 + I_1^a + I_1^s\right)\ddot{\varphi}_x \end{aligned} \quad (۳-۴۱)$$

$$\begin{aligned} &L_{21}u + \left[L_{22} + \left(N_0 + N_d \cos Pt\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]v + L_{23}w + L_{24}\varphi_x \\ &+L_{25}\varphi_\theta + L_{26}\psi_a + L_{27}\psi_s + L_{2U}U + w'_x L_{28} w + w'_\theta L_{29} w \\ &= \left(I_0 + I_0^a + I_0^s\right)\ddot{v} + \left(I_1 + I_1^a + I_1^s\right)\ddot{\varphi}_\theta \end{aligned} \quad (۳-۴۲)$$

$$\begin{aligned} &L_{31}u + L_{32}v + \left[L_{33} + \left(N_0 + N_d \cos Pt\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]w + L_{34}\varphi_x \\ &+L_{35}\varphi_\theta + L_{36}\psi_a + L_{37}\psi_s + L_{3U}U + w'_x L_{38} w + w'_\theta L_{39} w \\ &+\eta(u, v, w, \varphi_x, \varphi_\theta, \psi_a, \psi_s) + q(x, \theta, t) = \left(I_0 + I_0^a + I_0^s\right)\ddot{w} \end{aligned} \quad (۳-۴۳)$$

$$L_{41}u + L_{42}v + L_{43}w + L_{44}\varphi_x + L_{45}\varphi_\theta + L_{46}\psi_a + L_{47}\psi_s + L_{4U}U$$
$$+w'_x L_{48}w + w'_\theta L_{49}w = \left(I_1 + I_1^a + I_1^s\right)\ddot{u} + \left(I_2 + I_2^a + I_2^s\right)\ddot{\varphi}_x \quad (۴۴-۳)$$

$$L_{51}u + L_{52}v + L_{53}w + L_{54}\varphi_x + L_{55}\varphi_\theta + L_{56}\psi_a + L_{57}\psi_s + L_{5U}U$$
$$+w'_x L_{58}w + w'_\theta L_{59}w = \left(I_1 + I_1^a + I_1^s\right)\ddot{v} + \left(I_2 + I_2^a + I_2^s\right)\ddot{\varphi}_\theta \quad (۴۵-۳)$$

$$L_{61}u + L_{62}v + L_{63}w + L_{64}\varphi_x + L_{65}\varphi_\theta + L_{66}\psi_a + L_{6U}U + p^a = 0 \quad (۴۶-۳)$$

$$L_{71}u + L_{72}v + L_{73}w + L_{74}\varphi_x + L_{75}\varphi_\theta + L_{77}\psi_s + L_{7U}U + p^s = 0 \quad (۴۷-۳)$$

به منظور ساده‌تر شده ظاهر روابط، اپراتورهای L_{ij} تعریف شده‌اند، که در ضمیمه آورده شده‌اند. همچنین در روابط (۳-۴۱) تا (۳-۴۵)، $w'_x = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ و $w'_\theta = \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ می‌باشند.

۳-۷ اعمال روش گالرکین

با در نظر گرفتن شرایط مرزی[۱] تکیه‌گاه ساده[۲] در $x = 0$ و $x = L$ [۴۰و۶۰] برای سیستم، روش گالرکین برای از بین بردن بخش مکانی مختصه‌های جابه‌جایی استفاده می‌شود. این روش به گونه‌ای باید مورد استفاده قرار بگیرد که شرایط مرزی در بسط جابه‌جایی‌ها صدق کند. جملات جابه‌جایی $\left(u, v, \varphi_x, \varphi_\theta, \psi_a, \psi_s\right)$ به‌شکل خطی و جمله جابه‌جایی (w) به‌شکل غیرخطی در نظر گرفته خواهند شد [۵۵]. بنابراین از روابط (۳-۴۸) و (۳-۴۹) برای اعمال این روش استفاده خواهد شد:

$$q(x,\theta,t) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} q_{mn}(t)\sin\left(\lambda_m x\right)\cos\left(n\theta\right) \quad (۴۸-۳)$$

---
۱ Boundary Conditions

۲ Simpliy Supported

$$u=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}u_{mn}(t)\cos\left(\lambda_m x\right)\cos\left(n\theta\right)$$
$$v=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}v_{mn}(t)\sin\left(\lambda_m x\right)\sin\left(n\theta\right)$$
$$\varphi_x=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\varphi_{xmn}(t)\cos\left(\lambda_m x\right)\cos\left(n\theta\right)$$
$$\varphi_\theta=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\varphi_{\theta mn}(t)\sin\left(\lambda_m x\right)\sin\left(n\theta\right) \qquad (۴۹-۳)$$
$$w=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}w_{mn}(t)\sin\left(\lambda_m x\right)\cos\left(n\theta\right)-\sum_{m=1}^{M}\frac{w_{mn}^2(t)}{2R}\sin\left(\lambda_m x\right)$$
$$\psi_a=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\psi_{amn}(t)\sin\left(\lambda_m x\right)\cos\left(n\theta\right)$$
$$\psi_s=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\psi_{smn}(t)\sin\left(\lambda_m x\right)\cos\left(n\theta\right)$$

روابط (۳-۴۸) و (۳-۴۹) را در روابط (۳-۴۱) تا (۳-۴۷) جایگذاری و قانون کنترلی (۳-۲۳) نیز اعمال می‌شود تا روابط (۳-۵۰) تا (۳-۵۶) با انجام روش گالرکین به‌دست آیند:

$$\begin{aligned}&H_{11}^{mn}u_{mn}(t)+H_{12}^{mn}v_{mn}(t)+H_{13}^{mn}\varphi_{xmn}(t)+H_{14}^{mn}\varphi_{\theta mn}(t)\\&+H_{15}^{mn}w_{mn}(t)+H_{16}^{mn}\psi_{amn}(t)+H_{17}^{mn}\psi_{smn}(t)+H_{18}^{mn}\dot{\psi}_{smn}(t)\\&+\sum_{ijkl}H_{umn}^{ijkl}w_{ij}(t)w_{kl}(t)+\sum_{ijklpq}H_{umn}^{ijklpq}w_{ij}(t)w_{kl}(t)w_{pq}(t)\\&=-\left(I_0+I_0^a+I_0^s\right)\ddot{u}_{mn}(t)-\left(I_1+I_1^a+I_1^s\right)\ddot{\varphi}_{xmn}(t)\end{aligned} \qquad (۵۰-۳)$$

$$\begin{aligned}&H_{21}^{mn}u_{mn}(t)+\left[H_{221}^{mn}+(N_0+N_d\cos Pt)H_{222}^{mn}\right]v_{mn}(t)\\&+H_{23}^{mn}\varphi_{xmn}(t)+H_{24}^{mn}\varphi_{\theta mn}(t)+H_{25}^{mn}w_{mn}(t)+H_{26}^{mn}\psi_{amn}(t)\\&+H_{27}^{mn}\psi_{smn}(t)+H_{28}^{mn}\dot{\psi}_{smn}(t)+\sum_{ijkl}H_{vmn}^{ijkl}w_{ij}(t)w_{kl}(t)\\&+\sum_{ijklpq}H_{vmn}^{ijklpq}w_{ij}(t)w_{kl}(t)w_{pq}(t)\\&=-\left(I_0+I_0^a+I_0^s\right)\ddot{v}_{mn}(t)-\left(I_1+I_1^a+I_1^s\right)\ddot{\varphi}_{\theta mn}(t)\end{aligned} \qquad (۵۱-۳)$$

$$
\begin{aligned}
&H_{31}^{mn}u_{mn}(t)+H_{32}^{mn}v_{mn}(t)\\
&+\left[H_{331}^{mn}+(N_0+N_d\cos Pt)H_{332}^{mn}\right]w_{mn}(t)+H_{34}^{mn}\varphi_{xmn}(t)\\
&+H_{35}^{mn}\varphi_{\theta mn}(t)+H_{36}^{mn}\psi_{amn}(t)+H_{37}^{mn}\psi_{smn}(t)+H_{38}^{mn}\dot{\psi}_{smn}(t)\\
&+\sum_{ijkl}H_{lmn}^{ijkl}w_{ij}(t)u_{kl}(t)+\sum_{ijkl}H_{2mn}^{ijkl}w_{ij}(t)v_{kl}(t)\\
&+\sum_{ijkl}H_{3mn}^{ijkl}w_{ij}(t)w_{kl}(t)+\sum_{ijkl}H_{4mn}^{ijkl}w_{ij}(t)\varphi_{xkl}(t)\\
&+\sum_{ijkl}H_{5mn}^{ijkl}w_{ij}(t)\varphi_{\theta kl}(t)+\sum_{ijkl}H_{6mn}^{ijkl}w_{ij}(t)\psi_{akl}(t)\\
&+\sum_{ijkl}H_{7mn}^{ijkl}w_{ij}(t)\psi_{skl}(t)+\sum_{ijkl}H_{8mn}^{ijkl}w_{ij}(t)\dot{\psi}_{skl}(t)\\
&+\sum_{ijklpq}H_{9mn}^{ijklpq}w_{ij}(t)w_{kl}(t)w_{pq}(t)\\
&=q_{mn}(t)-\left(I_0+I_0^a+I_0^s\right)\ddot{w}_{mn}(t)
\end{aligned}
\tag{۵۲-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_{41}^{mn}u_{mn}(t)+H_{42}^{mn}v_{mn}(t)+H_{43}^{mn}\varphi_{xmn}(t)+H_{44}^{mn}\varphi_{\theta mn}(t)\\
&+H_{45}^{mn}w_{mn}(t)+H_{46}^{mn}\psi_{amn}(t)+H_{47}^{mn}\psi_{smn}(t)+H_{48}^{mn}\dot{\psi}_{smn}(t)\\
&+\sum_{ijkl}H_{\varphi xmn}^{ijkl}w_{ij}(t)w_{kl}(t)+\sum_{ijklpq}H_{\varphi xmn}^{ijklpq}w_{ij}(t)w_{kl}(t)w_{pq}(t)\\
&=-\left(I_1+I_1^a+I_1^s\right)\ddot{u}_{mn}(t)-\left(I_2+I_2^a+I_2^s\right)\ddot{\varphi}_{xmn}(t)
\end{aligned}
\tag{۵۳-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_{51}^{mn}u_{mn}(t)+H_{52}^{mn}v_{mn}(t)+H_{53}^{mn}\varphi_{xmn}(t)+H_{54}^{mn}\varphi_{\theta mn}(t)\\
&+H_{55}^{mn}w_{mn}(t)+H_{56}^{mn}\psi_{amn}(t)+H_{57}^{mn}\psi_{smn}(t)+H_{58}^{mn}\dot{\psi}_{smn}(t)\\
&+\sum_{ijkl}H_{\varphi\theta mn}^{ijkl}w_{ij}(t)w_{kl}(t)+\sum_{ijklpq}H_{\varphi\theta mn}^{ijklpq}w_{ij}(t)w_{kl}(t)w_{pq}(t)\\
&=-\left(I_1+I_1^a+I_1^s\right)\ddot{u}_{mn}(t)-\left(I_2+I_2^a+I_2^s\right)\ddot{\varphi}_{\theta mn}(t)
\end{aligned}
\tag{۵۴-۳}
$$

$$H_{61}^{mn}u_{mn}(t)+H_{62}^{mn}v_{mn}(t)+H_{63}^{mn}\varphi_{xmn}(t)+H_{64}^{mn}\varphi_{\theta mn}(t)$$
$$+H_{65}^{mn}w_{mn}(t)+H_{66}^{mn}\psi_{amn}(t)+H_{68}^{mn}\dot{\psi}_{smn}(t)=0 \tag{۵۵-۳}$$

$$H_{71}^{mn}u_{mn}(t)+H_{72}^{mn}v_{mn}(t)+H_{73}^{mn}\varphi_{xmn}(t)+H_{74}^{mn}\varphi_{\theta mn}(t)$$
$$+H_{75}^{mn}w_{mn}(t)+H_{77}^{mn}\psi_{smn}(t)=0 \tag{۵۶-۳}$$

که در روابط بالا، ضرایب $u_{mn}(t)$، $v_{mn}(t)$، $w_{mn}(t)$، $\varphi_{xmn}(t)$، $\varphi_{\theta mn}(t)$، $\psi_{amn}(t)$ و $\psi_{smn}(t)$ متغیرهای وابسته به زمانی هستند که ضرایب آن‌ها را می‌توان باتوجه به اپراتورهای L_{ij} و جمله غیرخطی $\eta(u,v,w,\varphi_x,\varphi_\theta,\psi_a,\psi_s)$ به‌دست آورد. از روابط (۳-۵۵) و (۳-۵۶)، روابط زیر موسوم به ضرایب فوریه پتانسیل الکتریکی القایی [۳۱] به‌دست می‌آید:

$$\psi_{smn}(t)=\frac{1}{H_{77}^{mn}}\Big[-H_{71}^{mn}u_{mn}(t)-H_{72}^{mn}v_{mn}(t)-H_{73}^{mn}\varphi_{xmn}(t)$$
$$-H_{74}^{mn}\varphi_{\theta mn}(t)-H_{75}^{mn}w_{mn}(t)\Big] \tag{۵۷-۳}$$

$$\psi_{amn}(t)=\frac{1}{H_{66}^{mn}}\Big[-H_{61}^{mn}u_{mn}(t)-H_{62}^{mn}v_{mn}(t)-H_{63}^{mn}\varphi_{xmn}(t)$$
$$-H_{64}^{mn}\varphi_{\theta mn}(t)\Big]+\frac{H_{68}^{mn}G}{H_{66}^{mn}H_{77}^{mn}}\Big[-H_{71}^{mn}\dot{u}_{mn}(t)-H_{72}^{mn}\dot{v}_{mn}(t) \tag{۵۸-۳}$$
$$-H_{73}^{mn}\dot{\varphi}_{xmn}(t)-H_{74}^{mn}\dot{\varphi}_{\theta mn}(t)-H_{75}^{mn}\dot{w}_{mn}(t)\Big]$$

با جایگذاری روابط (۳-۵۷) و (۳-۵۸) در روابط (۳-۵۰) تا (۳-۵۴)، معادلات حاکم دیفرانسیلی معمولی غیرخطی کوپل به‌هم زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_{11}^{mn}u_{mn}(t)+C_{12}^{mn}v_{mn}(t)+C_{13}^{mn}\varphi_{xmn}(t)+C_{14}^{mn}\varphi_{\theta mn}(t)$$
$$+C_{15}^{mn}w_{mn}(t)+\sum_{ijkl}C_{umn}^{ijkl}w_{ij}(t)w_{kl}(t)+\sum_{ijklpq}C_{umn}^{ijklpq}w_{ij}(t)w_{kl}(t)w_{pq}(t)$$
$$=-\left(I_0+I_0^a+I_0^s\right)\ddot{u}_{mn}(t)-\left(I_1+I_1^a+I_1^s\right)\ddot{\varphi}_{xmn}(t)-C_{11d}^{mn}\dot{u}_{mn}(t) \tag{۵۹-۳}$$
$$-C_{12d}^{mn}\dot{v}_{mn}(t)-C_{13d}^{mn}\dot{\varphi}_{xmn}(t)-C_{14d}^{mn}\dot{\varphi}_{\theta mn}(t)-C_{15d}^{mn}\dot{w}_{mn}(t)$$

$$
\begin{aligned}
& C_{21}^{mn} u_{mn}(t) + \left[C_{221}^{mn} + (N_0 + N_d \cos Pt) C_{222}^{mn} \right] v_{mn}(t) + C_{23}^{mn} \varphi_{xmn}(t) \\
& + C_{24}^{mn} \varphi_{\theta mn}(t) + C_{25}^{mn} w_{mn}(t) + \sum_{ijkl} C_{vmn}^{ijkl} w_{ij}(t) w_{kl}(t) \\
& + \sum_{ijklpq} C_{vmn}^{ijklpq} w_{ij}(t) w_{kl}(t) w_{pq}(t) = -\left(I_0 + I_0^a + I_0^s \right) \ddot{v}_{mn}(t) \\
& - \left(I_1 + I_1^a + I_1^s \right) \ddot{\varphi}_{\theta mn}(t) - C_{21d}^{mn} \dot{u}_{mn}(t) - C_{22d}^{mn} \dot{v}_{mn}(t) - C_{23d}^{mn} \dot{\varphi}_{xmn}(t) \\
& - C_{24d}^{mn} \dot{\varphi}_{\theta mn}(t) - C_{25d}^{mn} \dot{w}_{mn}(t)
\end{aligned}
\tag{۶۰-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
& C_{31}^{mn} u_{mn}(t) + C_{32}^{mn} v_{mn}(t) + \left[C_{331}^{mn} + (N_0 + N_d \cos Pt) C_{332}^{mn} \right] w_{mn}(t) \\
& + C_{34}^{mn} \varphi_{xmn}(t) + C_{35}^{mn} \varphi_{\theta mn}(t) + \sum_{ijkl} C_{lmn}^{ijkl} w_{ij}(t) u_{kl}(t) \\
& + \sum_{ijkl} C_{2mn}^{ijkl} w_{ij}(t) v_{kl}(t) + \sum_{ijkl} C_{3mn}^{ijkl} w_{ij}(t) w_{kl}(t) + \sum_{ijkl} C_{4mn}^{ijkl} w_{ij}(t) \varphi_{xkl}(t) \\
& + \sum_{ijkl} C_{5mn}^{ijkl} w_{ij}(t) \varphi_{\theta kl}(t) + \sum_{ijklpq} C_{9mn}^{ijklpq} w_{ij}(t) w_{kl}(t) w_{pq}(t) = q_{mn}(t) \\
& - \left(I_0 + I_0^a + I_0^s \right) \ddot{w}_{mn}(t) - C_{31d}^{mn} \dot{u}_{mn}(t) - C_{32d}^{mn} \dot{v}_{mn}(t) - C_{33d}^{mn} \dot{\varphi}_{xmn}(t) \\
& - C_{34d}^{mn} \dot{\varphi}_{\theta mn}(t) - C_{35d}^{mn} \dot{w}_{mn}(t) - \sum_{ijkl} C_{ldmn}^{ijkl} w_{ij}(t) \dot{u}_{kl}(t) \\
& - \sum_{ijkl} C_{2dmn}^{ijkl} w_{ij}(t) \dot{v}_{kl}(t) - \sum_{ijkl} C_{3dmn}^{ijkl} w_{ij}(t) \dot{w}_{kl}(t) \\
& - \sum_{ijkl} C_{4dmn}^{ijkl} w_{ij}(t) \dot{\varphi}_{xkl}(t) - \sum_{ijkl} C_{5dmn}^{ijkl} w_{ij}(t) \dot{\varphi}_{\theta kl}(t)
\end{aligned}
\tag{۶۱-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
& C_{41}^{mn} u_{mn}(t) + C_{42}^{mn} v_{mn}(t) + C_{43}^{mn} \varphi_{xmn}(t) + C_{44}^{mn} \varphi_{\theta mn}(t) + C_{45}^{mn} w_{mn}(t) \\
& + \sum_{ijkl} C_{\varphi xmn}^{ijkl} w_{ij}(t) w_{kl}(t) + \sum_{ijklpq} C_{\varphi xmn}^{ijklpq} w_{ij}(t) w_{kl}(t) w_{pq}(t) \\
& = -\left(I_1 + I_1^a + I_1^s \right) \ddot{u}_{mn}(t) - \left(I_2 + I_2^a + I_2^s \right) \ddot{\varphi}_{xmn}(t) - C_{41d}^{mn} \dot{u}_{mn}(t) \\
& - C_{42d}^{mn} \dot{v}_{mn}(t) - C_{43d}^{mn} \dot{\varphi}_{xmn}(t) - C_{44d}^{mn} \dot{\varphi}_{\theta mn}(t) - C_{45d}^{mn} \dot{w}_{mn}(t)
\end{aligned}
\tag{۶۲-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_{51}^{mn}u_{mn}(t)+C_{52}^{mn}v_{mn}(t)+C_{53}^{mn}\varphi_{xmn}(t)+C_{54}^{mn}\varphi_{\theta mn}(t)+C_{55}^{mn}w_{mn}(t)\\
&+\sum_{ijkl}C_{\varphi\theta mn}^{ijkl}w_{ij}(t)w_{kl}(t)+\sum_{ijklpq}C_{\varphi\theta mn}^{ijklpq}w_{ij}(t)w_{kl}(t)w_{pq}(t)\\
&=-\left(I_1+I_1^a+I_1^s\right)\ddot{u}_{mn}(t)-\left(I_2+I_2^a+I_2^s\right)\ddot{\varphi}_{\theta mn}(t)-C_{51d}^{mn}\dot{u}_{mn}(t)\\
&-C_{52d}^{mn}\dot{v}_{mn}(t)-C_{53d}^{mn}\dot{\varphi}_{xmn}(t)-C_{54d}^{mn}\dot{\varphi}_{\theta mn}(t)-C_{55d}^{mn}\dot{w}_{mn}(t)
\end{aligned}
\tag{۶۳-۳}
$$

۸-۳ معادله حرکت حاکم

با توجه به روش چگالش استاتیک برای حذف مختصه‌های جابه‌جایی $u_{mn}(t)$، $v_{mn}(t)$، $\varphi_{xmn}(t)$ و $\varphi_{\theta mn}(t)$، معادلات موجود در روابط (۳-۵۹)، (۳-۶۰)، (۳-۶۲) و (۳-۶۳) را بدون در نظر گرفتن سرعت‌ها و شتاب‌های آن‌ها می‌توان به‌صورت ماتریس‌های رابطه نوشت [۵]:

$$
\begin{bmatrix}
C_{11}^{mn} & C_{12}^{mn} & C_{13}^{mn} & C_{14}^{mn}\\
C_{21}^{mn} & C_{221}^{mn}+C_{222}^{mn}N_0 & C_{23}^{mn} & C_{24}^{mn}\\
C_{41}^{mn} & C_{42}^{mn} & C_{43}^{mn} & C_{44}^{mn}\\
C_{51}^{mn} & C_{52}^{mn} & C_{53}^{mn} & C_{54}^{mn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_{mn}\\ v_{mn}\\ \varphi_{xmn}\\ \varphi_{\theta mn}\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} -C_{15}^{mn}\\ -C_{25}^{mn}\\ -C_{45}^{mn}\\ -C_{55}^{mn}\end{Bmatrix} w_{mn}
\tag{۶۴-۳}
$$

با حل رابطه (۳-۶۴)، با توجه به متغیرهای وابسته به زمان $u_{mn}(t)$، $v_{mn}(t)$، $\varphi_{xmn}(t)$ و $\varphi_{\theta mn}(t)$ برحسب $w_{mn}(t)$ و سپس مشتق‌گیری زمانی از آن‌ها و جایگذاری به جای جملات سرعت و شتاب آن‌ها در روابط (۳-۵۹)، (۳-۶۰)، (۳-۶۲) و (۳-۶۳)، می‌توان این معادلات را به شکل زیر توصیف کرد:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}
C_{11}^{mn} & C_{12}^{mn} & C_{13}^{mn} & C_{14}^{mn}\\
C_{21}^{mn} & C_{221}^{mn}+C_{222}^{mn}N_0 & C_{23}^{mn} & C_{24}^{mn}\\
C_{41}^{mn} & C_{42}^{mn} & C_{43}^{mn} & C_{44}^{mn}\\
C_{51}^{mn} & C_{52}^{mn} & C_{53}^{mn} & C_{54}^{mn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_{mn}\\ v_{mn}\\ \varphi_{xmn}\\ \varphi_{\theta mn}\end{Bmatrix}\\
&=\begin{Bmatrix} -C_{15}^{mn}\\ -C_{25}^{mn}\\ -C_{45}^{mn}\\ -C_{55}^{mn}\end{Bmatrix} w_{mn}
+\begin{Bmatrix} C_{1d}\\ C_{2d}\\ C_{3d}\\ C_{4d}\end{Bmatrix}\dot{w}_{mn}
+\begin{Bmatrix} C_{1dd}\\ C_{2dd}\\ C_{3dd}\\ C_{4dd}\end{Bmatrix}\ddot{w}_{mn}
\end{aligned}
\tag{۶۵-۳}
$$

با تکرار روش چگالش استاتیک برای حذف u_{mn}، v_{mn}، φ_{xmn} و $\varphi_{\theta mn}$، حل رابطه (۳-۶۵) را در رابطه (۳-۶۱) جایگذاری نموده تا روابط (۳-۵۹) تا (۳-۶۳) به معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی کاهش یافته‌ای به صورت رابطه (۳-۶۶) برحسب $w_{mn}(t)$ درآیند.

$$\begin{aligned} &M_{mn}\left(I_0,I_1,I_2\right)\ddot{w}_{mn}(t)+D_{mn}\dot{w}_{mn}(t) \\ &+\left[K_{mno}\left(N_0\right)-\cos Pt\cdot K_{mnd}\left(N_d\right)\right]w_{mn}(t)+\sum_{ijkl}C_{mn2}^{ijkl}w_{ij}(t)w_{kl}(t) \\ &+\sum_{ijklpq}C_{mn3}^{ijklpq}w_{ij}(t)w_{kl}(t)w_{pq}(t)=q_{mn}(t) \end{aligned} \tag{۳-۶۶}$$

که برای $m=1,\cdots,M$ و $n=1,\cdots,N$، M_{mn} جرم تعمیم‌یافته[۱]، D_{mn} میرایی تعمیم‌یافته[۲]، K_{mno} سفتی تعمیم‌یافته[۳]مربوط به بخش استاتیک بار محوری، K_{mnd} سفتی تعمیم‌یافته مربوط به بخش متناوب بار محوری، C_{mn2}^{ijkl} سفتی غیرخطی مرتبه دوم[۴]و C_{mn3}^{ijklpq} سفتی غیرخطی مرتبه سوم[۵] می‌باشد.

تحریک شعاعی خارجی $q_{mn}(t)$ نیز به شکل تناوبی رابطه (۳-۶۷) درنظر گرفته می‌شود.

$$q_{mn}(t)=F_{mn}\cos\Omega t \tag{۳-۶۷}$$

$$F_{mn}=A_{mn}h^2\rho_m\omega_{mn}^2 \tag{۳-۶۸}$$

رابطه (۳-۶۸) برای به‌دست آوردن دامنه تحریک شعاعی خارجی به‌کار رفته است [۵۰].

رابطه (۳-۶۶) با درنظر گرفتن رابطه (۳-۶۷) و (۳-۶۸) برای دو مود طبیعی (m,n) و (i,j) به‌صورت روابط (۳-۶۹) و (۳-۷۰) تعریف می‌شود که وابستگی دو مود در هر دو معادله حرکت دیده می‌شود.

---

۱ Generalized Mass

۲ Generalized Damping

۳ Generilized Stiffness

۴ Quadratic Stiffness Nonlinearity

۵ Cubic Stiffness Nonlinearity

$$
\begin{aligned}
&M_{mn}\ddot{w}_{mn}(t)+D_{mn}\dot{w}_{mn}(t)+\left[K_{mno}-\cos Pt\cdot K_{mnd}\right]w_{mn}(t)\\
&+C_{mn2}^{mnmn}w_{mn}(t)^2+C_{mn2}^{mnij}w_{mn}(t)w_{ij}(t)+C_{mn2}^{ijij}w_{ij}(t)^2\\
&+C_{mn3}^{mnmnmn}w_{mn}(t)^3+C_{mn3}^{mnmnij}w_{mn}(t)^2w_{ij}(t)\\
&+C_{mn3}^{mnijmn}w_{ij}(t)w_{mn}(t)^2+C_{mn3}^{ijijij}w_{ij}(t)^3=F_{mn}\cos\Omega t
\end{aligned}
\tag{۶۹-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&M_{ij}\ddot{w}_{ij}(t)+D_{ij}\dot{w}_{ij}(t)+\left[K_{ijo}-\cos Pt\cdot K_{ijd}\right]w_{ij}(t)\\
&+C_{ij2}^{mnmn}w_{mn}(t)^2+C_{ij2}^{mnij}w_{mn}(t)w_{ij}(t)+C_{ij2}^{ijij}w_{ij}(t)^2\\
&+C_{ij3}^{mnmnmn}w_{mn}(t)^3+C_{ij3}^{mnmnij}w_{mn}(t)^2w_{ij}(t)\\
&+C_{ij3}^{mnijmn}w_{ij}(t)w_{mn}(t)^2+C_{ij3}^{ijijij}w_{ij}(t)^3=F_{ij}\cos\Omega t
\end{aligned}
\tag{۷۰-۳}
$$

۳-۹ جمع‌بندی

در این فصل معادله حرکت پوسته استوانه‌ای برای دو مود به‌صورت یک سیستم دو درجه آزادی شامل دو معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی کوپل به‌هم باتوجه به روابط مطرح شده، به‌دست آورده شد. در فصل بعدی با استفاده روش مقیاس‌های چندگانه از تئوری اغتشاشات به تحلیل رزونانسی این سیستم پرداخته خواهد شد.

محاسبات انجام شده در این فصل توسط نرم‌افزار Maple انجام شده‌است.

فصل چهارم:

ارتعاشات غیرخطی

۴-۱ مقدمه

در این فصل باتوجه به روش مقیاس‌های چندگانه از تئوری اغشاشات به حل روابط (۳-۶۸) و (۳-۶۹) که دو معادله دیفرانسیل کوپل به هم و شامل سفتی‌های غیرخطی مرتبه دوم و سوم و همچنین شامل عبارت میرایی می‌باشند، می‌پردازیم [۱۶].

۴-۲ روش مقیاس‌های چندگانه

در این سیستم، ارتعاش به‌گونه رخ می‌دهد که دو مود طبیعی با مختصات تعمیم یافته X_1 و X_2 که $\left(X_1=w_{mn},m=m_1,n=n_1\right)$ و $\left(X_2=w_{mn},m=m_2,n=n_2\right)$ می‌باشند، برانگیخته می‌شوند و بر سایر مودهای طبیعی تسلط دارند [۵۲]. مود $\left(m_1,n_1\right)$ و با فرکانس اساسی ω_1 و مود $\left(m_2,n_2\right)$ با فرکانس طبیعی ω_2 مرتبط هستند. حال سیستم غیرخطی دو درجه آزادی در معرض تحریک‌های پارامتریک و خارجی را می‌توان طبق روابط (۴-۱) و (۴-۲) به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}&\ddot{X}_1+2\varepsilon^2c_{10}\dot{X}_1+\omega_1^2X_1+\varepsilon\left(c_{11}\cos Pt\right)X_1\\&+\varepsilon\left(c_{12}X_1^2+c_{13}X_1X_2+c_{14}X_2^2\right)\\&+\varepsilon^2\left(c_{15}X_1^3+c_{16}X_1^2X_2+c_{17}X_1X_2^2+c_{18}X_2^3\right)=\varepsilon^2\Gamma_1\cos\Omega t\end{aligned}\tag{۴-۱}$$

$$\begin{aligned}&\ddot{X}_2+2\varepsilon^2c_{20}\dot{X}_2+\omega_2^2X_2+\varepsilon\left(c_{21}\cos Pt\right)X_2\\&+\varepsilon\left(c_{22}X_1^2+c_{23}X_1X_2+c_{24}X_2^2\right)\\&+\varepsilon^2\left(c_{25}X_1^3+c_{26}X_1^2X_2+c_{27}X_1X_2^2+c_{28}X_2^3\right)=\varepsilon^2\Gamma_2\cos\Omega t\end{aligned}\tag{۴-۲}$$

در سمت راست روابط (۴-۱) و (۴-۲) که مربوط به تحریک خارجی شعاعی است، $\Gamma_i=\dfrac{F_{mn}}{\varepsilon^2}$ برای $(i=1,2)$ منظور شده است [۵۰]. P و Ω هم به‌ترتیب فرکانس‌های تحریک‌های پارامتریک و خارجی هستند. c_{ij}ها که $(i=1,2)$ و $(j=0,1,\ldots,8)$، ضرایبی از روابط (۳-۶۹) و (۳-۷۰) به

صورت $C_{10}=D_{mn}/2\varepsilon^2 M_{mn}$، $C_{11}=K_{mnd}/\varepsilon M_{mn}$، $C_{12}=C_{mn2}^{mnmn}/\varepsilon M_{mn}$،
$C_{13}=C_{mn2}^{mnij}/\varepsilon M_{mn}$، $C_{14}=C_{mn2}^{ijij}/\varepsilon M_{mn}$، $C_{15}=C_{mn3}^{mnmnmn}/\varepsilon^2 M_{mn}$،
$C_{16}=C_{mn3}^{mnmnij}/\varepsilon^2 M_{mn}$، $C_{17}=C_{mn3}^{mnijij}/\varepsilon^2 M_{mn}$، $C_{18}=C_{mn3}^{ijijij}/\varepsilon^2 M_{mn}$،
$C_{20}=D_{ij}/2\varepsilon^2 M_{ij}$، $C_{21}=K_{ijd}/\varepsilon M_{ij}$، $C_{22}=C_{ij2}^{mnmn}/\varepsilon M_{ij}$، $C_{23}=C_{ij2}^{mnij}/\varepsilon M_{ij}$
، $C_{24}=C_{ij2}^{ijij}/\varepsilon M_{ij}$، $C_{25}=C_{ij3}^{mnmnmn}/\varepsilon^2 M_{ij}$ $C_{26}=C_{ij3}^{mnmnij}/\varepsilon^2 M_{ij}$،
$C_{27}=C_{ij3}^{mnijij}/\varepsilon^2 M_{ij}$، $C_{28}=C_{ij3}^{ijijij}/\varepsilon^2 M_{ij}$ می‌باشند. ε یک پارامتر اغتشاشی کوچک است.

فرکانس‌های طبیعی ω_i برای $(m=m_i, n=n_i, i=1,2)$ به‌صورت رابطه زیر محاسبه می‌گردند:

$$\omega_i^2 = K_{mno}(N_o)/M_{mn}\left(I_0, I_1, I_2\right) \tag{۳-۴}$$

باتوجه به روش مقیاس‌های چندگانه ، $X_i(t)$ $(i=1,2)$ با درنظر گرفتن سه جمله اول از بسط زیر شامل مرتبه‌های صفر، یک و دو از ε به صورت رابطه (۴-۴) درمی‌آید:

$$X_i(t) = X_{i0}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon X_{i1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 X_{i2}(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3) \tag{۴-۴}$$

که $T_0 = t$، $T_1 = \varepsilon t$ و $T_2 = \varepsilon^2 t$ می‌باشند.

مشتق‌های زمانی باتوجه به مقیاس‌های زمانی به‌صورت عبارت‌های سریع و آهسته به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 \tag{۵-۴}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2\left(D_1^2 + 2D_0 D_2\right) \tag{۶-۴}$$

که $D_0 = \partial/\partial T_0$، $D_1 = \partial/\partial T_1$ و $D_2 = \partial/\partial T_2$ است.

با جایگذاری روابط (۴-۴)، (۵-۴) و (۶-۴) در روابط (۴-۱) و (۴-۲)، و جداسازی هر مرتبه از ε، برای هر دو مود در نظر گرفته شده و روابط (۴-۷) تا (۴-۱۲) به‌دست می‌آید. در این روش حل از روابطی که شامل مرتبه بالاتر از دو ε است، صرف‌نظر شده و نیازی به حل معادلات مربوط به آن‌ها نمی‌باشد.

برای مرتبه صفر از ε داریم:

$$\left(D_0^2+\omega_1^2\right)X_{10}=0 \tag{۴-۷}$$

$$\left(D_0^2+\omega_2^2\right)X_{20}=0 \tag{۴-۸}$$

برای مرتبه یک از ε داریم:

$$\begin{aligned}\left(D_0^2+\omega_1^2\right)X_{11}&=-2D_0D_1X_{10}-c_{12}X_{10}^2-c_{13}X_{10}X_{20}-c_{14}X_{20}^2\\&-\left(c_{11}\cos PT_0\right)X_{10}\end{aligned} \tag{۴-۹}$$

$$\begin{aligned}\left(D_0^2+\omega_2^2\right)X_{21}&=-2D_0D_1X_{20}-c_{22}X_{10}^2-c_{23}X_{10}X_{20}-c_{24}X_{20}^2\\&-\left(c_{21}\cos PT_0\right)X_{20}\end{aligned} \tag{۴-۱۰}$$

و برای مرتبه دو از ε داریم:

$$\begin{aligned}\left(D_0^2+\omega_1^2\right)X_{12}&=-2c_{10}D_0X_{10}-2D_0D_1X_{11}-2D_0D_2X_{10}\\&-D_1^2X_{10}-2c_{12}X_{10}X_{11}-c_{13}X_{10}X_{21}-c_{13}X_{11}X_{20}\\&-2c_{14}X_{20}X_{21}-c_{15}X_{10}^3-c_{16}X_{10}^2X_{20}-c_{17}X_{10}X_{20}^2-c_{18}X_{20}^3\\&-\left(c_{11}\cos PT_0\right)X_{11}+\Gamma_1\cos\Omega T_0\end{aligned} \tag{۴-۱۱}$$

$$\begin{aligned}\left(D_0^2+\omega_2^2\right)X_{22}&=-2c_{20}D_0X_{20}-2D_0D_1X_{21}-2D_0D_2X_{20}\\&-D_1^2X_{20}-2c_{22}X_{10}X_{11}-c_{23}X_{10}X_{21}-c_{23}X_{11}X_{20}\\&-2c_{24}X_{20}X_{21}-c_{25}X_{10}^3-c_{26}X_{10}^2X_{20}-c_{27}X_{10}X_{20}^2-c_{28}X_{20}^3\\&-\left(c_{21}\cos PT_0\right)X_{21}+\Gamma_2\cos\Omega T_0\end{aligned} \tag{۴-۱۲}$$

حل عمومی روابط (۴-۷) و (۴-۸) به شکل رابطه (۴-۱۳) می‌باشد:

$$X_{k0}=A_k\left(T_1,T_2\right)\exp\left(i\omega_iT_0\right)+\bar{A}_k\left(T_1,T_2\right)\exp\left(-i\omega_iT_0\right) \tag{۴-۱۳}$$

برای $(k=1,2)$ که A_k ها توابع مجهولی هستند و $\bar{A}_k$ مختلط مزدوج تابع A_k است.

با جایگذاری رابطه (۴-۱۳) در روابط (۴-۹) و (۴-۱۰) از مرتبه اول ε داریم:

$$\begin{aligned}
&\left(D_0^2+\omega_1^2\right)X_{11}=-2i\omega_1 D_1 A_1 \exp\left(i\omega_1 T_0\right)\\
&-c_{12}\left[A_1^2\exp\left(2i\omega_1 T_0\right)+A_1\bar{A}_1\right]\\
&-c_{13}\left[A_1A_2\exp\left(i\left(\omega_1+\omega_2\right)T_0\right)+A_1\bar{A}_2\exp\left(i\left(\omega_1-\omega_2\right)T_0\right)\right]\\
&-c_{14}\left(A_2^2\exp\left(2i\omega_2 T_0\right)+A_2\bar{A}_2\right)\\
&-\frac{1}{2}c_{11}A_1\left[\exp\left(i\left(\omega_1+P\right)T_0\right)+\exp\left(i\left(\omega_1-P\right)T_0\right)\right]+cc
\end{aligned} \tag{۱۴-۴}$$

$$\begin{aligned}
&\left(D_0^2+\omega_2^2\right)X_{21}=-2i\omega_2 D_1 A_2 \exp\left(i\omega_2 T_0\right)\\
&-c_{22}\left[A_1^2\exp\left(2i\omega_1 T_0\right)+A_1\bar{A}_1\right]\\
&-c_{23}\left[A_1A_2\exp\left(i\left(\omega_1+\omega_2\right)T_0\right)+A_1\bar{A}_2\exp\left(i\left(\omega_1-\omega_2\right)T_0\right)\right]\\
&-c_{24}\left(A_2^2\exp\left(2i\omega_2 T_0\right)+A_2\bar{A}_2\right)\\
&-\frac{1}{2}c_{21}A_2\left[\exp\left(i\left(\omega_2+P\right)T_0\right)+\exp\left(i\left(\omega_2-P\right)T_0\right)\right]+cc
\end{aligned} \tag{۱۵-۴}$$

که cc نشان‌گر توابع مزدوج مختلط است. با حذف عبارت‌های سکولار[1] از روابط (۴-۱۴) و (۴-۱۵) برای به‌دست آوردن حل‌های کراندار،[2] هر یک از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&A_1=A_1(T_2) \qquad\qquad \left(D_1A_1=0\right)\\
&A_2=A_2(T_2) \qquad\qquad \left(D_1A_2=0\right)
\end{aligned} \tag{۱۶-۴}$$

سپس حل روابط (۴-۱۴) و (۴-۱۵) می‌تواند به صورت زیر به‌دست آید:

[1] Secular Terms

[2] Bounded Solutions

$$X_{11}=\frac{c_{12}}{\omega_1^2}\left[-A_1\bar{A}_1+\frac{1}{3}A_1^2\exp\left(2i\omega_1T_0\right)\right]$$
$$-\frac{c_{13}A_1A_2}{\omega_1^2-\left(\omega_1+\omega_2\right)^2}\exp\left(i\left(\omega_1+\omega_2\right)T_0\right)$$
$$-\frac{c_{13}A_1\bar{A}_2}{\omega_1^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}\exp\left(i\left(\omega_1-\omega_2\right)T_0\right)$$
$$+\frac{c_{14}}{\omega_1^2}\left[-A_2\bar{A}_2+\frac{1}{3}A_2^2\exp\left(2i\omega_2T_0\right)\right] \quad (۱۷\text{-}۴)$$
$$-\frac{c_{11}A_1}{2\left[\omega_1^2-\left(\omega_1+P\right)^2\right]}\exp\left(i\left(\omega_1+P\right)T_0\right)$$
$$-\frac{c_{11}A_1}{2\left[\omega_1^2-\left(\omega_1-P\right)^2\right]}\exp\left(i\left(\omega_1-P\right)T_0\right)+cc$$

$$X_{21}=\frac{c_{22}}{\omega_2^2}\left[-A_1\bar{A}_1+\frac{1}{3}A_1^2\exp\left(2i\omega_1T_0\right)\right]$$
$$-\frac{c_{23}A_1A_2}{\omega_2^2-\left(\omega_1+\omega_2\right)^2}\exp\left(i\left(\omega_1+\omega_2\right)T_0\right)$$
$$-\frac{c_{23}A_1\bar{A}_2}{\omega_2^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}\exp\left(i\left(\omega_1-\omega_2\right)T_0\right)$$
$$+\frac{c_{24}}{\omega_2^2}\left[-A_2\bar{A}_2+\frac{1}{3}A_2^2\exp\left(2i\omega_2T_0\right)\right] \quad (۱۸\text{-}۴)$$
$$-\frac{c_{21}A_2}{2\left[\omega_2^2-\left(\omega_2+P\right)^2\right]}\exp\left(i\left(\omega_2+P\right)T_0\right)$$
$$-\frac{c_{21}A_2}{2\left[\omega_2^2-\left(\omega_2-P\right)^2\right]}\exp\left(i\left(\omega_2-P\right)T_0\right)+cc$$

به طور مشابه با جایگذاری روابط (۴-۱۳)، (۴-۱۷) و (۴-۱۸) در روابط (۴-۱۱) و (۴-۱۲)، روابط زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&\left(D_0^2+\omega_1^2\right)X_{12}=G_{11}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2,P\right)\exp\left(i\omega_1T_0\right)\\
&+G_{12}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(i\omega_2T_0\right)\\
&+G_{13}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(3i\omega_1T_0\right)\\
&+G_{14}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(3i\omega_2T_0\right)\\
&+G_{15}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(i\left(\omega_2-2\omega_1\right)T_0\right)\\
&+G_{16}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(i\left(\omega_1-2\omega_2\right)T_0\right)\\
&+G_{17}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(i\left(2\omega_1+\omega_2\right)T_0\right)\\
&+G_{18}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(i\left(2\omega_2+\omega_1\right)T_0\right)\\
&+G_{19}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(i\Omega T_0\right)\\
&+G_{110}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2,P\right)+cc
\end{aligned}
\tag{۱۹-۴}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(D_0^2+\omega_2^2\right)X_{22}=G_{21}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2,P\right)\exp\left(i\omega_1T_0\right)\\
&+G_{22}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2,P\right)\exp\left(i\omega_2T_0\right)\\
&+G_{23}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(3i\omega_1T_0\right)\\
&+G_{24}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(3i\omega_2T_0\right)\\
&+G_{25}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(i\left(\omega_2-2\omega_1\right)T_0\right)\\
&+G_{26}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(i\left(\omega_1-2\omega_2\right)T_0\right)\\
&+G_{27}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(i\left(2\omega_1+\omega_2\right)T_0\right)\\
&+G_{28}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(i\left(2\omega_2+\omega_1\right)T_0\right)\\
&+G_{29}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2\right)\exp\left(i\Omega T_0\right)\\
&+G_{210}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2,P\right)+cc
\end{aligned}
\tag{۲۰-۴}
$$

که G_{ij} ها برای $(i=1,2;\ j=1,2,3,\cdots,10)$ در ضمیمه آورده شده‌اند.

۴-۲-۱ تشدید همزمان $\Omega \cong \omega_1$ و $\omega_2 \cong 3\omega_1$

در این بخش تشدید اولیه[۱] $\Omega \cong \omega_1$ و تشدید داخلی[۲] $\omega_2 \cong 3\omega_1$ که از نوع تشدید ثانویه[۳]می‌باشد تجزیه و تحلیل خواهد شد. بدین منظور نزدیکی تشدیدهای مدنظر با پارامترهای تنظیم[۴] σ_1 و σ_2 طبق روابط زیر تشریح می‌شود:

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1 \tag{۴-۲۱}$$

$$\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 \tag{۴-۲۲}$$

با استفاده از روابط (۴-۲۱) و (۴-۲۲) جملاتی که در روابط (۴-۱۹) و (۴-۲۰) عبارات سکولار هستند، تشخیص داده می‌شوند و به‌صورت روابط (۴-۲۳) و (۴-۲۴) در می‌آیند.

$$\begin{aligned} & G_{11}\left(A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2, P\right)\exp\left(i\omega_1 T_0\right) \\ & + G_{15}\left(A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2\right)\exp\left(i\left(\omega_2 - 2\omega_1\right)T_0\right) \\ & + G_{19}\left(A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2\right)\exp\left(i\Omega T_0\right) = 0 \end{aligned} \tag{۴-۲۳}$$

$$\begin{aligned} & G_{22}\left(A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2, P\right)\exp\left(i\omega_2 T_0\right) \\ & + G_{23}\left(A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2\right)\exp\left(3i\omega_1 T_0\right) = 0 \end{aligned} \tag{۴-۲۴}$$

برای حل روابط (۴-۲۳) و (۴-۲۴)، A_k و $\bar{A}_k$ برای $(k=1,2)$ به شکل قطبی[۵]زیر تعریف می‌شوند:

$$A_k = \frac{1}{2} a_k(T_2)\exp\left[i\beta_k(T_2)\right] \tag{۴-۲۵}$$

$$\bar{A}_k = \frac{1}{2} a_k(T_2)\exp\left[-i\beta_k(T_2)\right] \tag{۴-۲۶}$$

---

[۱] Primary Resonance

[۲] Internal Resonance

[۳] Secondary Resonance

[۴] Detuning Parameters

[۵] Polar Form

که در این روابط a_kها و β_kها به ترتیب دامنه‌های حالت ماندگار[1] و فازها[2] هستند که هر دو توابعی بر حسب T_2 می‌باشند. روابط (۴-۲۱)، (۴-۲۲)، (۴-۲۵) و (۴-۲۶) در روابط (۴-۲۳) و (۴-۲۴) جایگذاری می‌شوند تا روابط زیر به‌دست آیند:

$$\begin{aligned}&-i\omega_1 a_1' + \omega_1 a_1 \beta_1' - ic_{10}\omega_1 a_1 + k_{11}a_1^3 + k_{12}a_1 a_2^2 + k_{13}a_1\\&+k_{14}a_1^2 a_2 \exp i\gamma_2 + k_{15}\exp i\gamma_1 = 0\end{aligned} \tag{۴-۲۷}$$

$$\begin{aligned}&-i\omega_2 a_2' + \omega_2 a_2 \beta_2' - ic_{20}\omega_2 a_2 + k_{21}a_2^3 + k_{22}a_1^2 a_2 + k_{23}a_2\\&+k_{24}a_1^3 \exp(-i\gamma_2) = 0\end{aligned} \tag{۴-۲۸}$$

که در این روابط ضرایب k_{ij} با $(i=1,2; j=1,2,3,4,5)$ در ضمیمه تشریح شده‌اند و تغییر متغیرهای اعمال شده $\gamma_1 = -\beta_1 + \sigma_1 T_2$ و $\gamma_2 = \sigma_2 T_2 + \beta_2 - 3\beta_1$ برای جداسازی جملات حقیقی و موهومی به‌کار می‌روند. رابطه (۴-۲۹) قسمت موهومی رابطه (۴-۲۷) است. رابطه (۴-۳۰) قسمت حقیقی رابطه (۴-۲۷) است. رابطه (۴-۳۱) قسمت موهومی رابطه (۴-۲۸) است. رابطه (۴-۳۱) قسمت حقیقی رابطه (۴-۲۸) است.

$$a_1' = -c_{10}a_1 + \frac{k_{14}}{\omega_1}a_1^2 a_2 \sin\gamma_2 + \frac{k_{15}}{\omega_1}\sin\gamma_1 \tag{۴-۲۹}$$

$$\begin{aligned}&a_1\gamma_1' =\\&\sigma_1 a_1 + \frac{k_{11}}{\omega_1}a_1^3 + \frac{k_{12}}{\omega_1}a_1 a_2^2 + \frac{k_{13}}{\omega_1}a_1 + \frac{k_{14}}{\omega_1}a_1^2 a_2 \cos\gamma_2 + \frac{k_{15}}{\omega_1}\cos\gamma_1\end{aligned} \tag{۴-۳۰}$$

$$a_2' = -c_{20}a_2 - \frac{k_{24}}{\omega_2}a_1^3 \sin\gamma_2 \tag{۴-۳۱}$$

$$\begin{aligned}&a_2(3\gamma_1' - \gamma_2') =\\&(3\sigma_1 - \sigma_2)a_2 + \frac{k_{21}}{\omega_2}a_2^3 + \frac{k_{22}}{\omega_2}a_1^2 a_2 + \frac{k_{23}}{\omega_2}a_2 + \frac{k_{24}}{\omega_2}a_1^3 \cos\gamma_2\end{aligned} \tag{۴-۳۲}$$

---

[1] Stead-State Amplitudes

[2] Phases

برای به‌دست آوردن پاسخ‌های حالت ماندگار $a_k{}'=\gamma_k{}'=0$ برای $k=1,2$ در نظر گرفته می‌شود تا پاسخ‌های متناوب متناظر با روابط (۴-۲۹) تا (۴-۳۲) به شکل روابط (۴-۳۳) تا (۴-۳۶) ظاهر شوند.

$$-c_{10}a_1+\frac{k_{14}}{\omega_1}a_1^2a_2\sin\gamma_2+\frac{k_{15}}{\omega_1}\sin\gamma_1=0 \tag{۴-۳۳}$$

$$\begin{aligned}&\sigma_1a_1+\frac{k_{11}}{\omega_1}a_1^3+\frac{k_{12}}{\omega_1}a_1a_2^2+\frac{k_{13}}{\omega_1}a_1\\&+\frac{k_{14}}{\omega_1}a_1^2a_2\cos\gamma_2+\frac{k_{15}}{\omega_1}\cos\gamma_1=0\end{aligned} \tag{۴-۳۴}$$

$$-c_{20}a_2-\frac{k_{24}}{\omega_2}a_1^3\sin\gamma_2=0 \tag{۴-۳۵}$$

$$\begin{aligned}&(3\sigma_1-\sigma_2)a_2+\frac{k_{21}}{\omega_2}a_2^3+\frac{k_{22}}{\omega_2}a_1^2a_2+\frac{k_{23}}{\omega_2}a_2\\&+\frac{k_{24}}{\omega_2}a_1^3\cos\gamma_2=0\end{aligned} \tag{۴-۳۶}$$

با حذف $\sin\gamma_1$، $\cos\gamma_1$، $\sin\gamma_2$ و $\cos\gamma_2$ از روابط (۴-۳۳) تا (۴-۳۶) دو رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&(k_{24}c_{10}\omega_1a_1^2+k_{14}c_{20}\omega_2a_2^2)^2\\&+[k_{14}a_2^2(3\sigma_1\omega_2-\sigma_2\omega_2+k_{21}a_2^2+k_{22}a_1^2+k_{23})\\&-k_{24}\sigma_1\omega_1a_1^2-k_{11}k_{24}a_1^4-k_{12}k_{24}a_1^2a_2^2-k_{13}k_{24}a_1^2]^2=k_{24}^2k_{15}^2a_1^2\end{aligned} \tag{۴-۳۷}$$

$$(c_{20}\omega_2)^2a_2^2+[(\sigma_2-3\sigma_1)\omega_2-k_{21}a_2^2-k_{22}a_1^2-k_{23}]^2a_2^2=k_{24}^2a_1^6 \tag{۴-۳۸}$$

این دو رابطه جبری پاسخ‌های حالت ماندگار تشدیدهای همزمان $\Omega\cong\omega_1$ و $\omega_2\cong3\omega_1$ هستند.

۴-۲-۲ تشدید همزمان $\Omega \cong \omega_2$ و $\omega_2 \cong 3\omega_1$

در این بخش تشدید اولیه $\Omega \cong \omega_2$ و تشدید داخلی $\omega_2 \cong 3\omega_1$ که از نوع تشدید ثانویه می‌باشد تجزیه و تحلیل خواهد شد. بدین منظور نزدیکی تشدیدهای مدنظر با پارامترهای تنظیم σ_1 و σ_2 طبق روابط زیر تشریح می‌شود:

$$\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1 \tag{۴-۳۹}$$

$$\Omega = \omega_2 + \varepsilon^2 \sigma_2 \tag{۴-۴۰}$$

با استفاده از روابط (۴-۳۹) و (۴-۴۰) جملاتی که در روابط (۴-۱۹) و (۴-۲۰) عبارات سکولار هستند، تشخیص داده می‌شوند و به‌صورت روابط (۴-۴۱) و (۴-۴۲) در می‌آیند.

$$\begin{aligned} &G_{11}\left(A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2, P\right)\exp\left(i\omega_1 T_0\right) \\ &+G_{15}\left(A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2\right)\exp\left(i\left(\omega_2 - 2\omega_1\right)T_0\right) = 0 \end{aligned} \tag{۴-۴۱}$$

$$\begin{aligned} &G_{22}\left(A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2, P\right)\exp\left(i\omega_2 T_0\right) \\ &+G_{23}\left(A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2\right)\exp\left(3i\omega_1 T_0\right) \\ &+G_{29}\left(A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2\right)\exp\left(i\Omega T_0\right) = 0 \end{aligned} \tag{۴-۴۲}$$

برای حل روابط (۴-۴۱) و (۴-۴۲)، A_k و $\bar{A}_k$ برای به صورت روابط (۴-۲۵) و (۴-۲۶) تعریف می‌شوند. روابط (۴-۳۹)، (۴-۴۰)، (۴-۲۵) و (۴-۲۶) در روابط (۴-۴۱) و (۴-۴۲) جایگذاری می‌شوند:

$$\begin{aligned} &-i\omega_1 a_1' + \omega_1 a_1 \beta_1' - ic_{10}\omega_1 a_1 + k_{11}a_1^3 + k_{12}a_1 a_2^2 + k_{13}a_1 \\ &+k_{14}a_1^2 a_2 \exp i\gamma_2 + k_{15}\exp i\gamma_1 = 0 \end{aligned} \tag{۴-۴۳}$$

$$\begin{aligned} &-i\omega_2 a_2' + \omega_2 a_2 \beta_2' - ic_{20}\omega_2 a_2 + k_{21}a_2^3 + k_{22}a_1^2 a_2 + k_{23}a_2 \\ &+k_{24}a_1^3 \exp(-i\gamma_2) = 0 \end{aligned} \tag{۴-۴۴}$$

که در این روابط ضرایب k_{ij} با $(i=1,2; j=1,2,3,4,5)$ در ضمیمه تشریح شده‌اند و تغییر متغیرهای اعمال شده $\gamma_1=\sigma_1 T_2+\beta_2-3\beta_1$ و $\gamma_2=-\beta_2+\sigma_2 T_2$ برای جداسازی جملات حقیقی و موهومی به‌کار می‌روند. رابطه (۴-۴۵) قسمت موهومی رابطه (۴-۴۳) است. رابطه (۴-۴۶) قسمت حقیقی رابطه (۴-۴۳) است. رابطه (۴-۴۷) قسمت موهومی رابطه (۴-۴۴) است. رابطه (۴-۴۸) قسمت حقیقی رابطه (۴-۴۴) است.

$$a_1'=-c_{10}a_1+\frac{k_{14}}{\omega_1}a_1^2 a_2\sin\gamma_1 \quad (۴\text{-}۴۵)$$

$$\begin{aligned} &a_1(\tfrac{1}{3}\gamma_1'+\tfrac{1}{3}\gamma_2')=\\ &(\tfrac{1}{3}\sigma_1+\tfrac{1}{3}\sigma_2)a_1+\frac{k_{11}}{\omega_1}a_1^3+\frac{k_{12}}{\omega_1}a_1a_2^2+\frac{k_{13}}{\omega_1}a_1+\frac{k_{14}}{\omega_1}a_1^2a_2\cos\gamma_1 \end{aligned} \quad (۴\text{-}۴۶)$$

$$a_2'=-c_{20}a_2-\frac{k_{24}}{\omega_2}a_1^3\sin\gamma_1-\frac{k_{25}}{\omega_2}\sin\gamma_2 \quad (۴\text{-}۴۷)$$

$$\begin{aligned} &a_2\gamma_2'=\\ &\sigma_2a_2+\frac{k_{21}}{\omega_2}a_2^3+\frac{k_{22}}{\omega_2}a_1^2a_2+\frac{k_{23}}{\omega_2}a_2+\frac{k_{24}}{\omega_2}a_1^3\cos\gamma_1+\frac{k_{25}}{\omega_2}\cos\gamma_2 \end{aligned} \quad (۴\text{-}۴۸)$$

برای به‌دست آوردن پاسخ‌های حالت ماندگار $a_k'=\gamma_k'=0$ برای $k=1,2$ در نظر گرفته می‌شود تا پاسخ‌های متناوب متناظر با روابط (۴-۴۵) تا (۴-۴۶) به شکل روابط (۴-۴۹) تا (۴-۵۲) ظاهر شوند.

$$-\mu_1a_1+\frac{k_{14}}{\omega_1}a_1^2a_2\sin\gamma_2+\frac{k_{15}}{\omega_1}\sin\gamma_1=0 \quad (۴\text{-}۴۹)$$

$$\begin{aligned} &(\tfrac{1}{3}\sigma_1+\tfrac{1}{3}\sigma_2)a_1+\frac{k_{11}}{\omega_1}a_1^3+\frac{k_{12}}{\omega_1}a_1a_2^2+\frac{k_{13}}{\omega_1}a_1\\ &+\frac{k_{14}}{\omega_1}a_1^2a_2\cos\gamma_1=0 \end{aligned} \quad (۴\text{-}۵۰)$$

$$-c_{20}a_2-\frac{k_{24}}{\omega_2}a_1^3\sin\gamma_1-\frac{k_{25}}{\omega_2}\sin\gamma_2=0 \qquad (۵۱-۴)$$

$$\begin{aligned}&\sigma_2a_2+\frac{k_{21}}{\omega_2}a_2^3+\frac{k_{22}}{\omega_2}a_1^2a_2+\frac{k_{23}}{\omega_2}a_2\\&+\frac{k_{24}}{\omega_2}a_1^3\cos\gamma_1+\frac{k_{25}}{\omega_2}\cos\gamma_2=0\end{aligned} \qquad (۵۲-۴)$$

با حذف $\sin\gamma_1$، $\cos\gamma_1$، $\sin\gamma_2$ و $\cos\gamma_2$ از روابط (۴-۴۹) تا (۴-۵۲) دو رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&(c_{10}\omega_1)^2a_1^2+[-(\frac{1}{3}\sigma_1+\frac{1}{3}\sigma_2)\omega_1-k_{11}a_1^2-k_{12}a_1^2-k_{13}]^2a_1^2\\&=k_{14}^2a_1^4a_2^2\end{aligned} \qquad (۳۷-۴)$$

$$\begin{aligned}&(k_{14}c_{20}\omega_2a_2^2+k_{24}c_{10}\omega_1a_1^2)^2\\&+[-k_{24}a_2a_1((\tfrac{1}{3}\sigma_1+\tfrac{1}{3}\sigma_2)\omega_1-k_{11}a_1^2-k_{12}a_2^2-k_{13})\\&+k_{14}\sigma_2\omega_2a_2^2+k_{21}k_{14}a_2^4+k_{22}k_{14}a_1^2a_2^2+k_{23}k_{14}a_2^2]^2=k_{14}^2k_{25}^2a_2^2\end{aligned} \qquad (۳۸-۴)$$

این دو رابطه جبری پاسخ‌های حالت ماندگار تشدیدهای همزمان $\Omega\cong\omega_2$ و $\omega_2\cong3\omega_1$ هستند.

۴-۳ جمع‌بندی

در این فصل با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه بر روی معادلات حرکت سیستم که دو درجه آزادی بوده و شامل دو معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی کوپل به‌هم می‌باشد، پرداخته شد و در انتها معادلات جبری پاسخ فرکانسی به‌دست آمد که در فصل پنجم به تأثیر پارامترهای مختلف سیستم بر روی آن‌ها و تشخیص رفتار سیستم پرداخته خواهد شد.

محاسبات انجام شده در این فصل توسط نرم‌افزار Maple انجام شده‌است.

فصل پنجم:

نتایج

۵-۱ مشخصات مواد و هندسه به‌کار رفته در سیستم

در پژوهش حاضر استوانه‌ای به طول $L = 2.0m$، شعاع تا صفحه میانی $R = 0.8m$، ضخامت لایه مدرج تابعی $h = 0.02m$، ضخامت لایه عملگر $h_a = 0.001m$ و ضخامت لایه حسگر $h_s = 0.001m$ جهت بررسی این پژوهش در نظر گرفته شده است.

نیروی محوری متناوب در رابطه (۳-۲۷) بر اساس رابطه‌ای بر حسب خواص فلز مورد استفاده در لایه مدرج تابعی طبق روابط زیر تعیین می‌شود [۵]:

$$N_0 = -0.2N_{cr} \tag{۵-۱}$$

$$N_d = 0.2N_{cr} \tag{۵-۲}$$

$$N_{cr} = \frac{E_m h^2}{R\left[3\left(1-\upsilon_m^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{۵-۳}$$

که در رابطه (۵-۳)، N_{cr} نشان‌گر نیروی بحرانی کمانش می‌باشد.

به منظور تحلیل ارتعاشات غیرخطی این سیستم از پارامتر کوچک اغتشاشی $\varepsilon = 0.01$ و دامنه تحریک خارجی به صورت رابطه (۵-۴) استفاده شده است.

$$F_{mn} = A_{mn} h^2 \rho_m \omega_{mn}^2 \tag{۵-۴}$$

سرامیک مورد استفاده در لایه مدرج تابعی ZrO_2 و فلز آن $Ti-6Al-4V$ و برای هر دو لایه عملگر و حسگر پیزوالکتریک $PZT-4$ در نظر گرفته شده است.

در جدول (۵-۱) مدول الاستیک (مدول یانگ) ، چگالی و ضریب پوآسون مواد تشکیل دهنده این پوسته استوانه‌ای شامل فلز و سرامیک تشکیل دهنده لایه مدرج تابعی و لایه‌های پیزوالکتریک نمایش داده شده است. در جدول (۵-۲) مشخصات لایه پیزوالکتریک شامل مؤلفه‌های ماتریس‌های کرنش در صفحه–سفتی، ثابت پیزوالکتریک مؤثر، ثابت دی‌الکتریک مؤثر و ثابت پیروالکتریک آورده شده است [۶۱و۶۲].

جدول (۵-۱) خواص فلز و سرامیک ماده مدرج تابعی و پیزوالکتریک

مقدار خاصیت	نوع ماده	خاصیت
۱۲۲,۷۰	$Ti-6Al-4V$	$E(GPa)$
۱۳۲,۲۰	ZrO_2	
۸۱,۳۰	$PZT-4$	
۴۴۲۰	$Ti-6Al-4V$	$\rho(kg/m^3)$
۳۶۵۷	ZrO_2	
۷۶۰۰	$PZT-4$	
۰,۲۸۸۸	$Ti-6Al-4V$	υ
۰,۳۳۳۰	ZrO_2	
۰,۳۲۹۰	$PZT-4$	

جدول (۵-۲) مشخصات پیزوالکتریک

مقدار	پارامتر	ماتریس	مقدار	پارامتر	ماتریس
-۵,۲۰	e_{11}	$e_{ij}(C/m^2)$	۱۳۸,۴۹۹	Q_{11}	$Q_{ij}(GPa)$
-۵,۲۰	e_{32}		۷۷,۳۷۱	Q_{12}	
۱۲,۷۲	e_{24}		۱۳۸,۴۹۹	Q_{22}	
۱۲,۷۲	e_{15}		۳۰,۶	Q_{66}	
۱,۳۰۶×۱۰$^{-۹}$	ξ_{11}	$\xi_{ij}(C^2/(Nm^2))$	۲۵,۶	Q_{44}	
۱,۳۰۶×۱۰$^{-۹}$	ξ_{22}		۲۵,۶	Q_{55}	
۱,۱۱۵×۱۰$^{-۹}$	ξ_{33}		۰,۲۵×۱۰$^{-۹}$	p	$p(C/m^2\,^{\circ}C)$

۵-۲ نمودارهای تحلیل‌های رزونانسی همزمان

در این بخش نمودارهای حاصل از پاسخ‌های حالت ماندگار به ازای پارامترهای مختلف بررسی شده‌است.

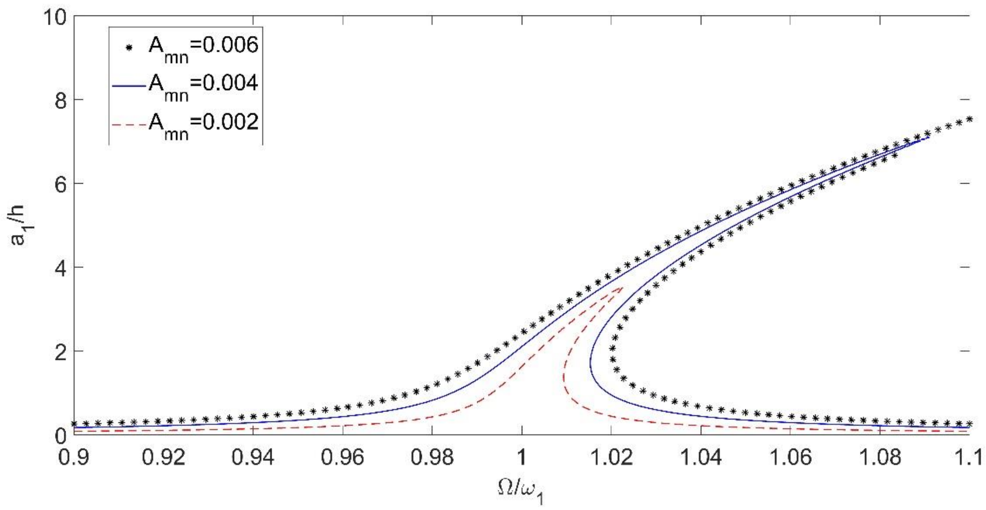
نمودارهای پاسخ رزونانسی به ازای $a_2 = 0$ در رابطه (۴-۳۷) در شکل‌های (۵-۱) تا (۵-۶) با تغییر پارامترهای مختلف برای بررسی تأثیر آن‌ها نشان داده شده‌است.

نمودارهای پاسخ رزونانسی به ازای $a_1 = 0$ در رابطه (۴-۵۴) در شکل‌های (۵-۷) تا (۵-۱۲) با تغییر پارامترهای مختلف برای بررسی تأثیر آن‌ها نشان داده شده است.

در این پژوهش مود اول به ازای $(m_1, n_1) = (1, 4)$ و مود دوم به ازای $(m_2, n_2) = (1, 6)$ در نظر گرفته شده‌است.

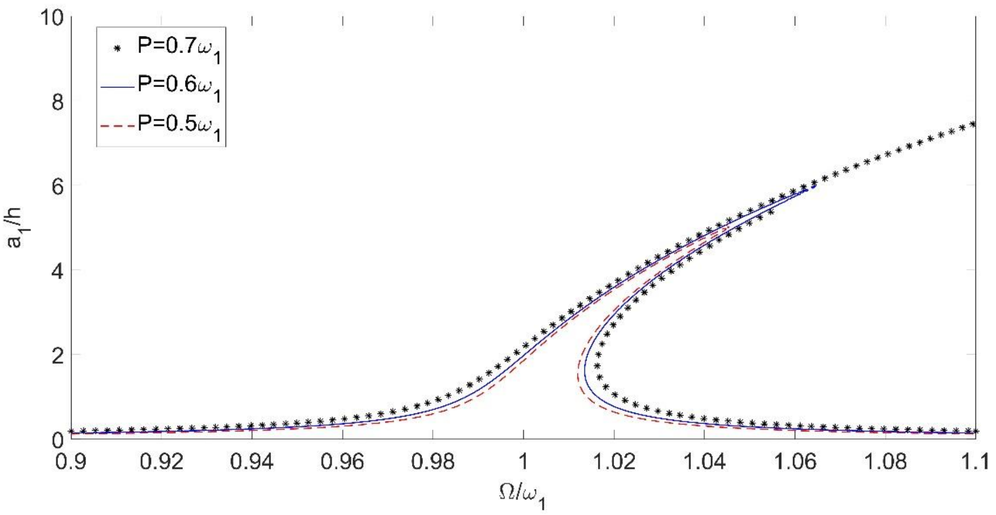
در این فصل نمودارهای حاصل از پاسخ‌های رزونانسی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB ترسیم شده‌اند.

در شکل (۵-۱)، فرکانس تحریک پارامتریک $P = 0.5\omega_1$ در نظر گرفته شده‌است. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0 = -0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده است. ضریب بخش متناوب نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_d = 0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. کسر حجمی بین فلز و سرامیک در لایه مدرج تابعی به ازای $\Phi = 0.4$ می‌باشد. بهره کنترلی در این سیستم $G = 400$ در نظر گرفته شده و برای مقادیر $A_{mn} = 0.002, 0.004, 0.006$ اثر افزایش دامنه تحریک خارجی بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌است. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد که نشان می‌دهد افزایش دامنه تحریک خارجی باعث افزایش پیک قله‌های نمودار رفتار غیرخطی سیستم می‌شود.



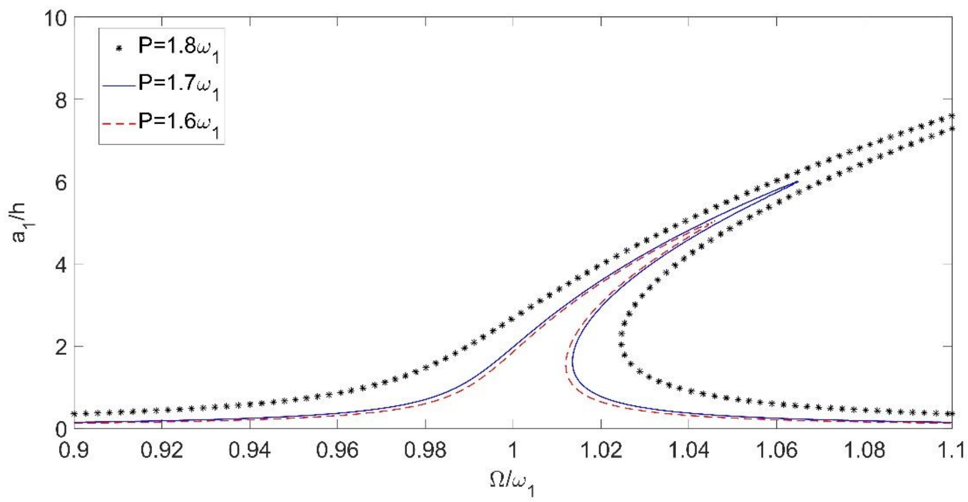
شکل (۵-۱) اثر دامنه تحریک خارجی بر پاسخ رزونانسی

در شکل (۵-۲)، دامنه تحریک شعاعی خارجی $A_{mn}=0.004$ در نظر گرفته شده‌است. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0=-0.2N_{cr}$ می‌باشد. ضریب بخش متناوب نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_d=0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. کسر حجمی بین فلز و سرامیک در لایه مدرج تابعی به ازای $\Phi=0.4$ می‌باشد و بهره کنترلی این سیستم $G=400$ در نظر گرفته شده‌است. به ازای مقادیر $P=0.5\omega_1, 0.6\omega_1, 0.7\omega_1$ اثر فرکانس تحریک پارامتریک به ازای مقادیر مختلف کوچک‌تر از فرکانس اساسی بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌است. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد و تأثیر افزایش فرکانس پارامتریک که برحسب فرکانس اساسی سیستم می‌باشد بر پاسخ رزونانسی سیستم مشخص شده است.



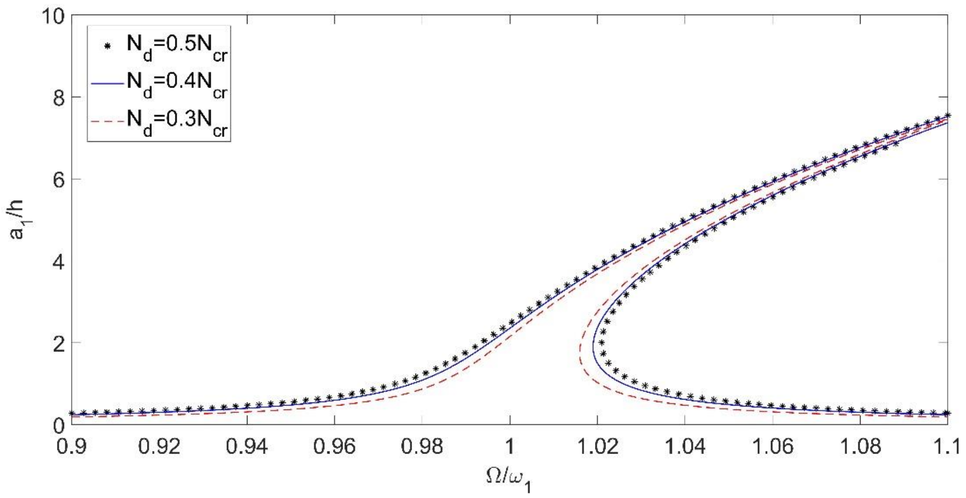
شکل (۵-۲) اثر فرکانس تحریک پارامتریک بر پاسخ رزونانسی

در شکل (۵-۳)، دامنه تحریک شعاعی خارجی $A_{mn}=0.004$ در نظر گرفته شده‌است. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0=-0.2N_{cr}$ می‌باشد. ضریب بخش متناوب نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_d=0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. کسر حجمی بین فلز و سرامیک در لایه مدرج تابعی به ازای $\Phi=0.4$ می‌باشد و بهره کنترلی این سیستم $G=400$ در نظر گرفته شده‌است. به ازای مقادیر $P=1.6\omega_1,1.7\omega_1,1.8\omega_1$ اثر فرکانس تحریک پارامتریک به ازای مقادیر مختلف بزرگ‌تر از فرکانس اساسی بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌است. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد و تأثیر افزایش فرکانس پارامتریک که برحسب فرکانس اساسی سیستم می‌باشد بر پاسخ رزونانسی سیستم مشخص شده است.



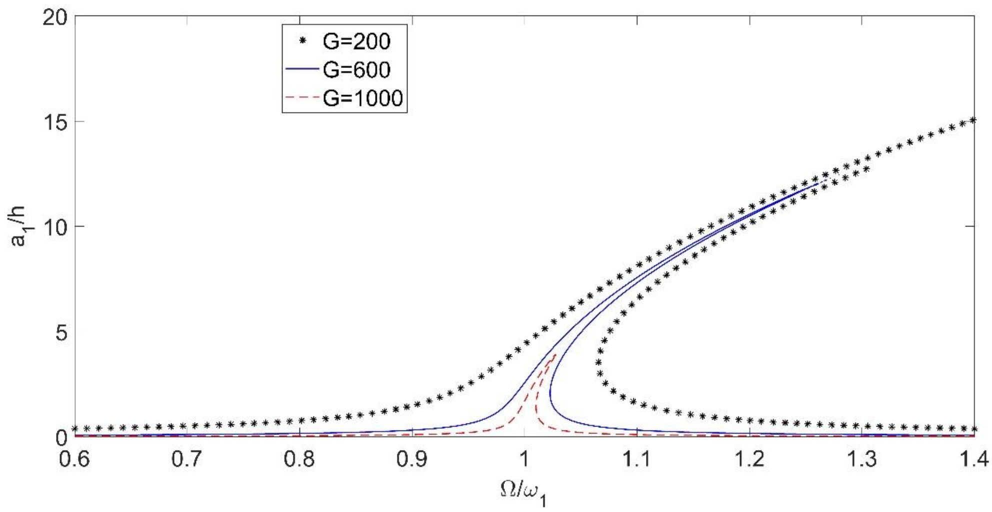
شکل (۵-۳) اثر فرکانس تحریک پارامتریک بر پاسخ رزونانسی

در شکل (۵-۴)، دامنه تحریک شعاعی خارجی $A_{mn}=0.001$ می‌باشد. فرکانس تحریک پارامتریک $P=0.8\omega_1$ در نظر گرفته شده‌است. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0=-0.2N_{cr}$ می‌باشد. کسر حجمی بین فلز و سرامیک در لایه مدرج تابعی به ازای $\Phi=0.4$ در نظر گرفته شده‌است. مقدار بهره کنترلی برای این سیستم $G=400$ در نظر گرفته شده‌است و به ازای مقادیر $N_d=0.2N_{cr},0.3N_{cr},0.4N_{cr}$ اثر ضریب بخش تحریک پارامتریک به‌عنوان دامنه تحریک پارامتریک بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌است. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد و تأثیر افزایش دامنه تحریک پارامتریک که برحسب نیروی بحرانی کمانش می‌باشد بر پاسخ رزونانسی سیستم مشخص شده است.



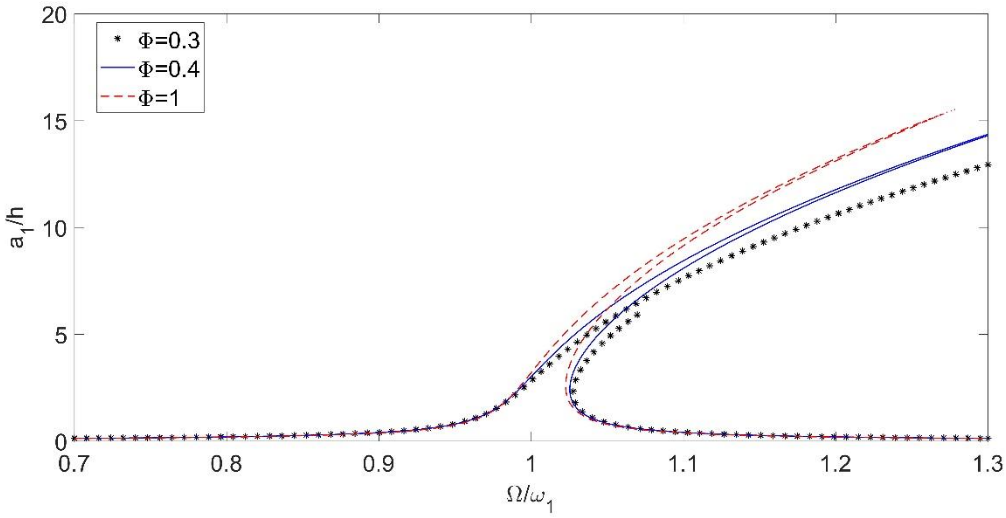
شکل (۵-۴) اثر دامنه تحریک پارامتریک بر پاسخ رزونانسی

در شکل (۵-۵)، دامنه تحریک شعاعی خارجی $A_{mn}=0.001$ در نظر گرفته شده‌است. فرکانس تحریک پارامتریک $P=0.8\omega_1$ می‌باشد. کسر حجمی بین فلز و سرامیک در لایه مدرج تابعی $\Phi=0.4$ می‌باشد. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0=-0.2N_{cr}$ است. دامنه بخش متناوب نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_d=0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. به‌ازای مقادیر $G=200,600,1000$ اثر بهره کنترلی بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌است. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد و تأثیر افزایش بهره کنترلی را بر پاسخ رزونانسی سیستم نشان می‌دهد که نشان می‌دهد افزایش بهره کنترلی باعث کاهش پیک قله‌های نمودار غیرخطی می‌شود.



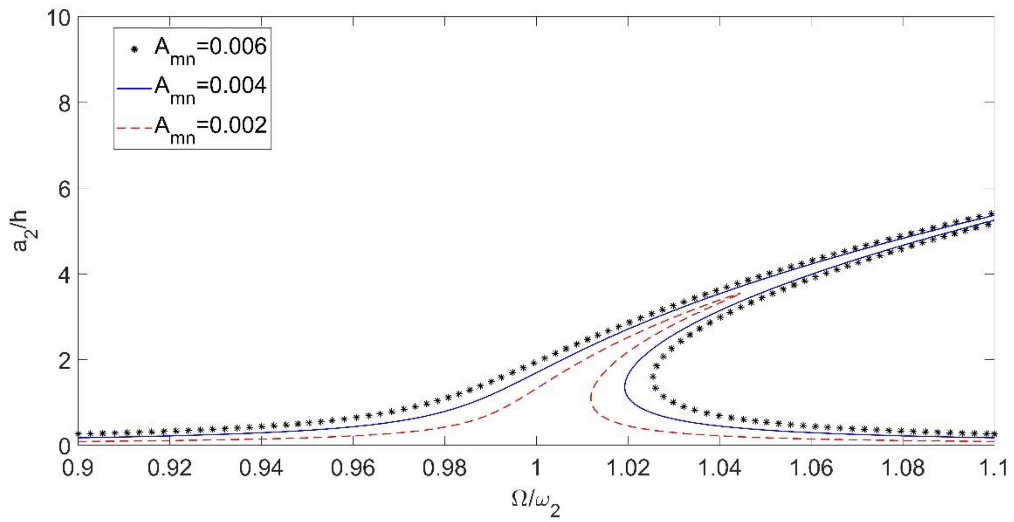
شکل (۵-۵) اثر بهره کنترلی بر پاسخ رزونانسی

در شکل (۵-۶)، دامنه تحریک شعاعی خارجی $A_{mn} = 0.001$ می‌باشد. فرکانس تحریک پارامتریک $P = 0.8\omega_1$ در نظر گرفته شده‌است. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0 = -0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. دامنه بخش متناوب نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_d = 0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. به‌ازای مقادیر $\Phi = 0.3, 0.4, 1$ اثر کسر حجمی بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌اند. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد و تأثیر مقادیر مختلف کسر حجمی را بر پاسخ رزونانسی سیستم نشان می‌دهد که نشان می‌دهد افزایش کسر حجمی باعث کاهش پیک قله‌های نمودار غیرخطی می‌شود.



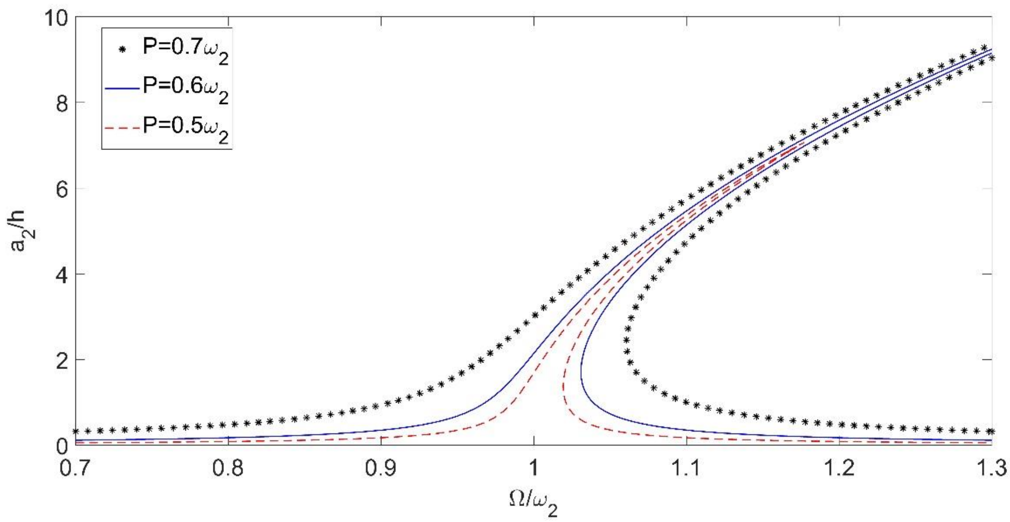
شکل (۵-۶) اثر کسر حجمی بر پاسخ رزونانسی

در شکل (۵-۷)، فرکانس تحریک پارامتریک $P = 0.5\omega_2$ در نظر گرفته شده‌است. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0 = -0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده است. ضریب بخش متناوب نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_d = 0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. کسر حجمی بین فلز و سرامیک در لایه مدرج تابعی به ازای $\Phi = 0.4$ می‌باشد. بهره کنترلی در این سیستم $G = 400$ در نظر گرفته شده و برای مقادیر $A_{mn} = 0.002, 0.004, 0.006$ اثر افزایش دامنه تحریک خارجی بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌است. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد که نشان می‌دهد افزایش دامنه تحریک خارجی باعث افزایش پیک قله‌های نمودار رفتار غیرخطی سیستم می‌شود.



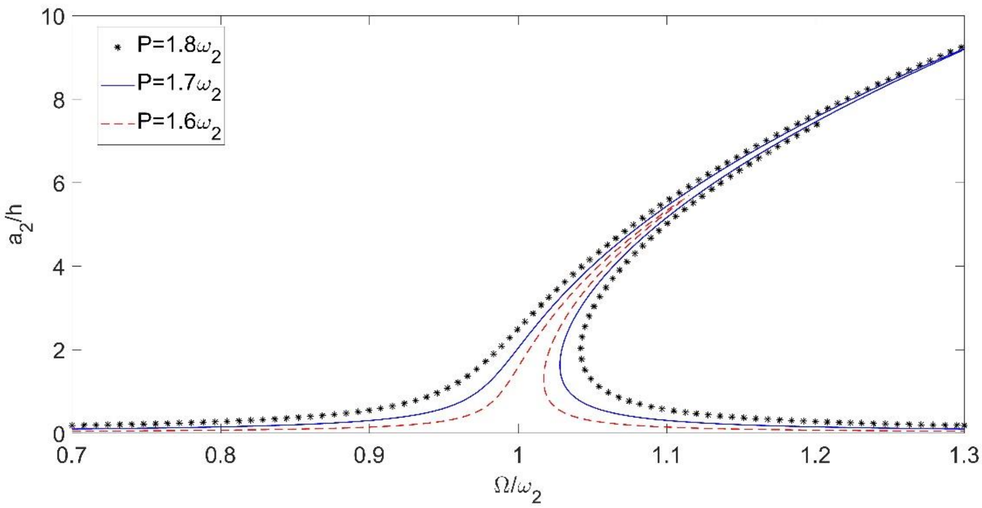
شکل (۵-۷) اثر دامنه تحریک خارجی بر پاسخ رزونانسی

در شکل (۵-۸)، دامنه تحریک شعاعی خارجی $A_{mn}=0.004$ در نظر گرفته شده‌است. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0=-0.2N_{cr}$ می‌باشد. ضریب بخش متناوب نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_d=0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. کسر حجمی بین فلز و سرامیک در لایه مدرج تابعی به ازای $\Phi=0.4$ می‌باشد و بهره کنترلی این سیستم $G=400$ در نظر گرفته شده‌است. به ازای مقادیر $P=0.5\omega_2, 0.6\omega_2, 0.7\omega_2$ اثر فرکانس تحریک پارامتریک به ازای مقادیر مختلف کوچک‌تر از فرکانس اساسی بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌است. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد و تأثیر افزایش فرکانس پارامتریک که برحسب فرکانس اساسی سیستم می‌باشد بر پاسخ رزونانسی سیستم مشخص شده است.



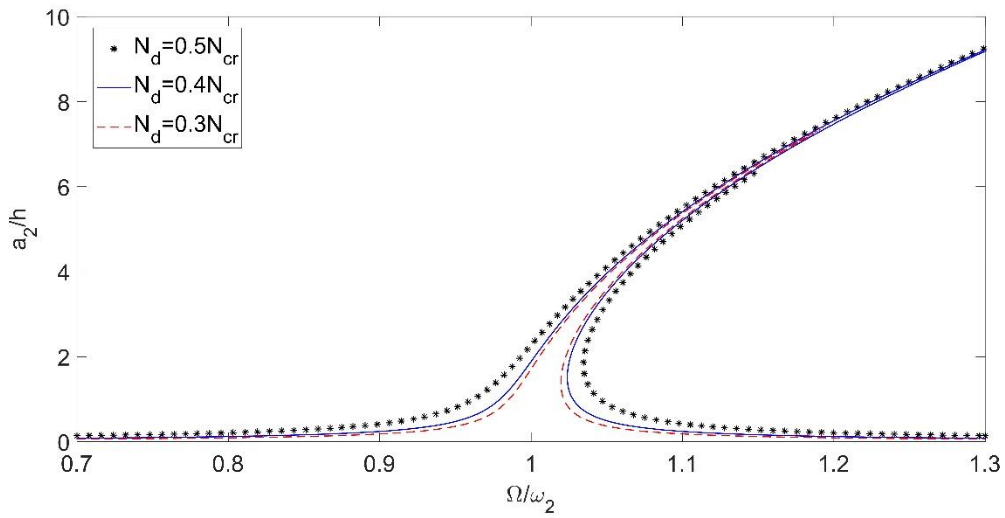
شکل (۵-۸) اثر فرکانس تحریک پارامتریک بر پاسخ رزونانسی

در شکل (۵-۹)، دامنه تحریک شعاعی خارجی $A_{mn}=0.004$ در نظر گرفته شده‌است. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0=-0.2N_{cr}$ می‌باشد. ضریب بخش متناوب نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_d=0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. کسر حجمی بین فلز و سرامیک در لایه مدرج تابعی به ازای $\Phi=0.4$ می‌باشد و بهره کنترلی این سیستم $G=400$ در نظر گرفته شده‌است. به ازای مقادیر $P=1.6\omega_2,1.7\omega_2,1.8\omega_2$ اثر فرکانس تحریک پارامتریک به ازای مقادیر مختلف بزرگ‌تر از فرکانس اساسی بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌است. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد و تأثیر افزایش فرکانس پارامتریک که برحسب فرکانس اساسی سیستم می‌باشد بر پاسخ رزونانسی سیستم مشخص شده است.



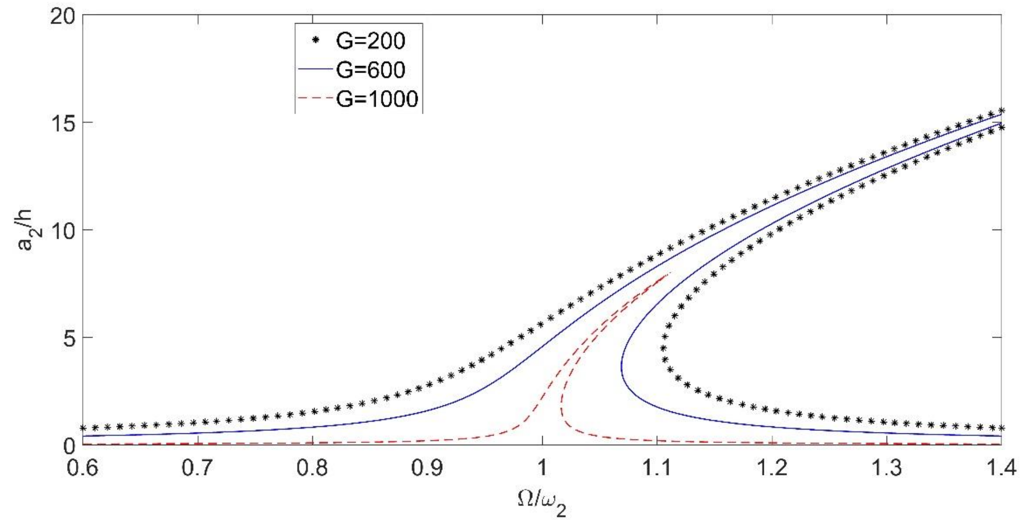
شکل (۵-۹) اثر فرکانس تحریک پارامتریک بر پاسخ رزونانسی

در شکل (۵-۱۰)، دامنه تحریک شعاعی خارجی $A_{mn}=0.001$ می‌باشد. فرکانس تحریک پارامتریک $P=0.8\omega_2$ در نظر گرفته شده‌است. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0=-0.2N_{cr}$ می‌باشد. کسر حجمی بین فلز و سرامیک در لایه مدرج تابعی به ازای $\Phi=0.4$ در نظر گرفته شده‌است. مقدار بهره کنترلی برای این سیستم $G=400$ در نظر گرفته شده‌است و به ازای مقادیر $N_d=0.2N_{cr},0.3N_{cr},0.4N_{cr}$ اثر ضریب بخش تحریک پارامتریک به‌عنوان دامنه تحریک پارامتریک بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌است. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد و تأثیر افزایش دامنه تحریک پارامتریک که برحسب نیروی بحرانی کمانش می‌باشد بر پاسخ رزونانسی سیستم مشخص شده است.



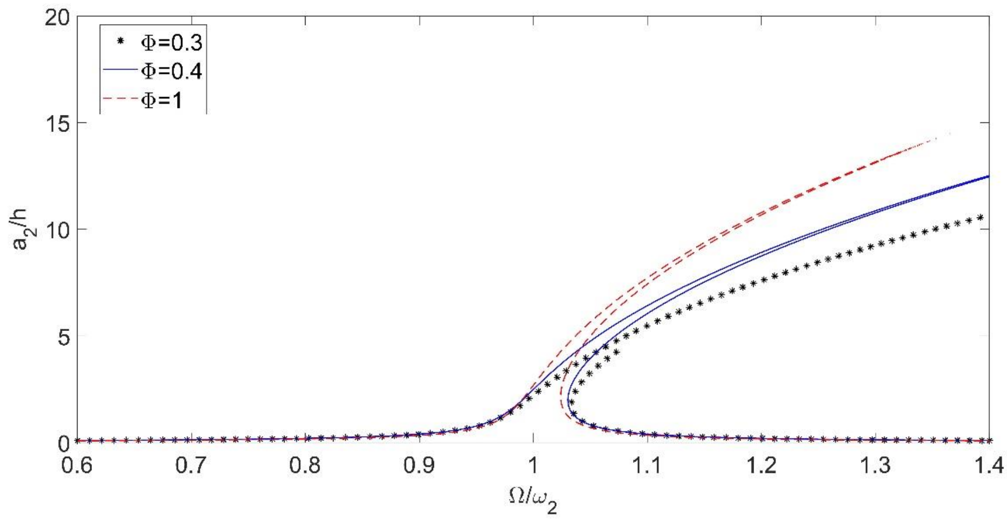
شکل (۵-۱۰) اثر دامنه تحریک پارامتریک بر پاسخ رزونانسی

در شکل (۵-۱۱)، دامنه تحریک شعاعی خارجی $A_{mn} = 0.001$ در نظر گرفته شده‌است. فرکانس تحریک پارامتریک $P = 0.8\omega_2$ می‌باشد. کسر حجمی بین فلز و سرامیک در لایه مدرج تابعی $\Phi = 0.4$ می‌باشد. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0 = -0.2N_{cr}$ است. دامنه بخش متناوب نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_d = 0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. به‌ازای مقادیر $G = 200, 600, 1000$ اثر بهره کنترلی بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌است. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد و تأثیر افزایش بهره کنترلی را بر پاسخ رزونانسی سیستم نشان می‌دهد که نشان می‌دهد افزایش بهره کنترلی باعث کاهش پیک قله‌های نمودار غیرخطی می‌شود.



شکل (۵-۱۱) اثر بهره کنترلی بر پاسخ رزونانسی

در شکل (۵-۱۲)، دامنه تحریک شعاعی خارجی $A_{mn}=0.001$ می‌باشد. فرکانس تحریک پارامتریک $P=0.8\omega_2$ در نظر گرفته شده‌است. بخش استاتیک نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_0=-0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. دامنه بخش متناوب نیروی محوری برحسب نیروی بحرانی کمانش $N_d=0.2N_{cr}$ در نظر گرفته شده‌است. به‌ازای مقادیر $\Phi=0.3,0.4,1$ اثر کسر حجمی بر روی پاسخ رزونانسی نمایش داده شده‌اند. این نمودار نشان دهنده رفتار سخت‌شونده سیستم می‌باشد و تأثیر مقادیر مختلف کسر حجمی را بر پاسخ رزونانسی سیستم نشان می‌دهد که نشان می‌دهد افزایش کسر حجمی باعث کاهش پیک قله‌های نمودار غیرخطی می‌شود.



شکل (۵-۱۲) اثر کسر حجمی بر پاسخ رزونانسی

۳-۵ صحت سنجی

ضخامت لایه مدرج تابعی $h = 0.002m$، ضخامت لایه حسگر $h_s = 0.001m$، ضخامت لایه عملگر $h_a = 0.001m$ در نظر گرفته شده‌است. شعاع تا صفحه میانی $R = 1m$ و طول پوسته استوانه‌ای $L = 20m$ در نظر گرفته می‌شود. کسر حجمی بین فلز و سرامیک لایه مدرج تابعی $\Phi = 1$ می‌باشد. لایه‌های پیزوالکتریک از جنس $PZT-4$ با مشخصات ذکر شده در جدول (۵-۱) و ماده فلز لایه مدرج تابعی از جنس فولاد ضد زنگ با مدول الاستیسیته $E_m = 208GPa$، ضریب پوآسون $\nu_m = 0.318$ و چگالی $\rho_m = 8166kg/m^3$ و ماده سرامیک لایه مدرج تابعی از جنس نیکل با مدول الاستیسیته $E_c = 205GPa$، ضریب پوآسون $\nu_c = 0.310$ و چگالی $\rho_c = 8900kg/m^3$ در نظر گرفته شده است.

جدول (۵-۳) صحت سنجی و مقایسه فرکانس‌های طبیعی با مرجع [۵۰]

تفاوت با [۵۰] (٪)	با پیزو	تفاوت با [۵۰] (٪)	بدون پیزو	مرجع [۵۰]	n	m	
۱,۰۵	۱۳,۳۴۵	۱,۰۳	۱۳,۶۰۳	۱۳,۲۰۷	۱	۱	فرکانس طبیعی $\omega_i/2\pi$
۰,۹۸	۴,۵۲۹	۱,۰۱	۴,۵۳۰	۴,۴۸۵	۲	۱	
۱,۰۸	۴,۲۲۲	۱,۱۱	۴,۶۳۶	۴,۱۷۷	۳	۱	
۱,۰۲	۷,۱۱۸	۰,۹۸	۶,۹۰۶	۷,۰۴۷	۴	۱	
۰,۹۴	۱۱,۳۶۶	۰,۸۹	۱۰,۰۲۲	۱۱,۲۶۱	۵	۱	
۱,۰۳	۱۶,۶۴۷	۱,۰۶	۱۷,۴۶۶	۱۶,۴۷۸	۶	۱	
۱,۰۱	۲۲,۹۱۱	۰,۹۹	۲۲,۴۵۵	۲۲,۶۸۲	۷	۱	
۱,۰۳	۳۰,۱۰۰	۰,۹۷	۲۸,۹۰۰	۲۹,۷۹۴	۸	۱	
۱,۰۲	۳۸,۱۹۶	۱,۰۶	۴۰,۱۵۳	۳۷,۸۸۱	۹	۱	
۰,۹۶	۴۷,۳۸۷	۱,۰۱	۴۷,۴۰۶	۴۶,۹۳۷	۱۰	۱	

نتایج این پژوهش با نتایج مرجع [۵۰] در جدول (۵-۳) با مودهای مختلف در مقایسه شده‌است که نشان دهنده اختلاف بسیار کمی با وجود اختلافاتی در فرضیات سیستم با سیستم مرجع [۵۰] می‌باشد.

فصل ششم:

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۶-۱ نتیجه‌گیری

در تحلیل‌های رزونانسی بررسی شده، رفتار سیستم در تمام حالت‌های بررسی شده رفتاری سخت شونده می‌باشد.

اضافه نمودن لایه‌های پیزوالکتریک در این سیستم به لایه مدرج تابعی با قانون کنترلی مطرح شده باعث ایجاد میرایی در جهت دفع ارتعاشات مخرب سیستم شده است.

افزایش دامنه تحریک شعاعی خارجی در هر دو حالت رزونانسی بررسی شده باعث افزایش پیک رزونانسی شده است.

افزایش دامنه بخش متناوب تحریک پارامتریک تأثیر کمی بر پیک رزونانسی سیستم می‌گذارد.

هرچه بهره کنترلی استفاده شده در قانون کنترلی مطرح شده در این سیستم بیشتر باشد باعث کاهش نوسانات و تسریع در رسیدن به حالت ماندگار سیستم می‌شود.

افزایش کسر حجمی باعث نزدیک‌تر شدن رفتار سیستم به رفتاری شبیه به رفتار سیستم‌های خطی می‌شود.

نزدیک شدن فرکانس تحریک پارامتریک به فرکانس طبیعی سیستم افزایش پیک قله‌های نمودارهای پاسخ رزونانسی را در بردارد.

برای صحت‌سنجی پژوهش حاضر، مقایسه نتایج با نتایج مرجع [۵۰] نشان‌دهنده صحت محاسبات این تحقیق است.

۶-۲ پیشنهادها

در نظر گرفتن تئوری‌های مختلف پوسته‌ها و مقایسه آن‌ها با یکدیگر می‌تواند به بررسی دقیق‌تر رفتار سیستم کمک کند.

باتوجه به خصوصیات لایه مدرج تابعی، در نظر گرفتن تنش‌های حرارتی می‌تواند به مشاهده دقیق‌تر رفتارهای سیستم منجر شود.

استفاده از قوانین کنترلی مختلف برای کنترل ارتعاشات سیستم به بهتر شدن تقابل با اثرات مخرب می‌تواند اثرگذار باشد.

در تحلیل رزونانسی می‌توان حالت‌های رزونانسی مختلف دیگری را نیز در نظر گرفت.

ضمیمه

ضرایب معرفی شده در بخش ۳-۵ به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$Q_{11e}^{i}=Q_{11}^{i}-\frac{Q_{13}^{i}Q_{13}^{i}}{Q_{33}^{i}}\qquad Q_{44e}^{i}=Q_{44}^{i}\qquad \xi_{11e}^{i}=\xi_{11}^{i}\qquad p_{xe}^{i}=p_{x}^{i}$$

$$Q_{12e}^{i}=Q_{12}^{i}-\frac{Q_{13}^{i}Q_{23}^{i}}{Q_{33}^{i}}\qquad Q_{55e}^{i}=Q_{55}^{i}\qquad \xi_{22e}^{i}=\xi_{22}^{i}\qquad p_{\theta e}^{i}=p_{\theta}^{i}$$

$$Q_{22e}^{i}=Q_{22}^{i}-\frac{Q_{23}^{i}Q_{23}^{i}}{Q_{33}^{i}}\qquad Q_{66e}^{i}=Q_{66}^{i}\qquad \xi_{33e}^{i}=\xi_{33}^{i}+\frac{e_{33}^{i}e_{33}^{i}}{e_{33}^{i}}\qquad p_{ze}^{i}=p_{z}^{i}$$

$$e_{31e}^{i}=e_{31}^{i}-\frac{Q_{13}^{i}}{Q_{33}^{i}}e_{33}^{i}\qquad e_{32e}^{i}=e_{32}^{i}-\frac{Q_{23}^{i}}{Q_{33}^{i}}e_{33}^{i}\qquad e_{15e}^{i}=e_{15}^{i}\qquad e_{24e}^{i}=e_{24}^{i}$$

اپراتورهای موجود در بخش ۶-۳ از فصل سوم به شرح زیر می‌باشند:

$$L_{11}=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}A_{66}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\qquad L_{12}=\frac{A_{12}+A_{66}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{13}=\frac{A_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x}\qquad L_{14}=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{B_{66}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{14}=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{B_{66}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\qquad L_{15}=\frac{B_{66}+B_{12}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{16}=2e_{31e}^{a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}z_a dz\frac{\partial}{\partial x}\qquad L_{17}=2e_{31e}^{s}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}z_s dz\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{1U}=\frac{2}{h_a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}e_{31e}^{a}dz\frac{\partial}{\partial x}\qquad L_{18}=L_{11}$$

$$L_{19}=\frac{L_{12}}{R}\qquad L_{21}=\frac{A_{66}+A_{12}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{22}=A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{A_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{E_{55}}{R^2}\qquad L_{23}=\frac{A_{22}+E_{55}}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{24}=\frac{B_{66}+B_{12}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}\qquad L_{25}=B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{B_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{E_{55}}{R}$$

$$L_{26}=\left[\frac{2e_{32e}^{a}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}z_a dz+\frac{e_{24e}^{a}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}\frac{P(z_a)}{R+z}dz\right]\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{27}=\left[\frac{2e_{32e}^{s}}{R}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}z_s dz+\frac{e_{24e}^{s}}{R}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}\frac{P(z_s)}{R+z}dz\right]\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{2U}=\left[\frac{2}{Rh_a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}e_{32e}^{a}dz+\frac{e_{24e}^{a}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}\frac{2z_a}{(R+z)h_a}dz\right]\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{28}=L_{21}\qquad L_{29}=\frac{A_{66}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{A_{22}}{R^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{31}=-\frac{A_{21}}{R}\frac{\partial}{\partial x}\qquad L_{32}=-\frac{E_{55}}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{A_{22}}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{33}=E_{44}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{E_{55}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{A_{22}}{R^2}\qquad L_{34}=E_{44}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{B_{21}}{R}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{35}=\frac{E_{55}}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{B_{22}}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{36}=\frac{e_{24e}^{a}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}\frac{P(z_a)}{R+z}dz\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+e_{15e}^{a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}P(z_a)dz\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{e_{32e}^{a}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}z_a dz$$

$$L_{37}=\frac{e_{24e}^{s}}{R}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}\frac{P(z_s)}{R+z}dz\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+e_{15e}^{s}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}P(z_s)dz\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{e_{32e}^{s}}{R}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}z_s dz$$

$$L_{3U}=\frac{e_{24e}^{a}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}\frac{2z_a}{(R+z)h_a}dz\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{2e_{15e}^{a}}{h_a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}z_a dz\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{2}{Rh_a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}e_{32e}^{a}dz$$

$$L_{38}=-\frac{A_{21}}{2R}\frac{\partial}{\partial x}\qquad L_{39}=-\frac{A_{22}}{2R^3}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{41}=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{B_{66}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\qquad L_{42}=\frac{B_{66}+B_{12}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{43}=-E_{44}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x}\qquad L_{44}=D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{A_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{45}=\frac{D_{12}+D_{66}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{46}=\left[2e_{31e}^{a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}z_a z dz\frac{\partial}{\partial x}-e_{15e}^{a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}P(z_a)dz\right]\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{47}=\left[2e_{31e}^{s}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}z_s z dz-e_{15e}^{s}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}P(z_s)dz\right]\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{4U}=\left[\frac{2}{h_a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}e_{31e}^{a}z dz-\frac{2e_{15e}^{a}}{h_a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}z_a dz\right]\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{48}=L_{41}\qquad L_{49}=\frac{L_{42}}{R}$$

$$L_{51}=\frac{B_{66}+B_{12}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}\qquad L_{52}=B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{B_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{E_{55}}{R}$$

$$L_{53}=\frac{B_{22}-E_{55}R}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\qquad L_{54}=\frac{D_{12}+D_{66}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{55}=\frac{D_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-E_{55}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_{56}=\left[\frac{2e_{32e}^{a}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}z_a dz+\frac{e_{24e}^{a}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}\frac{P(z_a)}{R+z}dz\right]\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{57}=\left[\frac{2e_{32e}^{s}}{R}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}z_s z dz+\frac{e_{24e}^{s}}{R}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}\frac{P(z_s)}{R+z}dz\right]\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{5U}=\left[\frac{2}{Rh_a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} e_{32e}^{a} z dz+\frac{e_{24e}^{s}}{R}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}\frac{2z_a}{(R+z)h_a}dz\right]\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{58}=L_{51} \qquad L_{59}=\frac{B_{66}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{B_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{61}=2e_{31e}^{a}R\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} z_a dz\frac{\partial}{\partial x} \qquad L_{62}=2e_{32e}^{a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} z_a dz\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{63}=2e_{32e}^{a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} z_a dz-e_{15e}^{a}R\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} P(z_a)dz\frac{\partial^2}{\partial x^2}-e_{24e}^{a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}\frac{P(z_a)}{R+z}dz\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{64}=\left[2e_{31e}^{a}R\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} z_a z dz-e_{15e}^{a}R\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} P(z_a)dz\right]\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{65}=\left[2e_{32e}^{a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} z z_a dz-Re_{24e}^{a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}\frac{P(z_a)}{R+z}dz\right]\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{66}=\xi_{11e}^{a}R\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} P(z_a)^2 dz\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\xi_{22e}^{a}R\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}\frac{P(z_a)^2}{(R+z)^2}dz\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-4\xi_{33e}^{a}R\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} z_a^2 dz$$

$$L_{6U}=-R\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}\frac{4\xi_{33e}^{a}}{h_a}z_a dz+\frac{2R\xi_{11e}^{a}}{h_a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} z_a P(z_a)dz\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2R\xi_{22e}^{a}}{h_a}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a}\frac{z_a P(z_a)}{(R+z)^2}dz\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{71}=2e_{31e}^{s}R\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} z_s dz\frac{\partial}{\partial x} \qquad L_{72}=2e_{32e}^{s}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} z_s dz\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{73}=2e_{32e}^{s}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} z_s dz-e_{15e}^{s}R\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} P(z_s)dz\frac{\partial^2}{\partial x^2}-e_{24e}^{s}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}\frac{P(z_s)}{R+z}dz\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{74}=\left[2e_{31e}^{s}R\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} z_s z dz-e_{15e}^{s}R\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} P(z_s)dz\right]\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{75}=\left[2e_{32e}^{s}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} z z_s dz-Re_{24e}^{s}\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}\frac{P(z_s)}{R+z}dz\right]\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{77}=\xi_{11e}^{s}R\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} P(z_s)^2 dz\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\xi_{22e}^{s}R\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}}\frac{P(z_s)^2}{(R+z)^2}dz\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-4\xi_{33e}^{s}R\int_{-\frac{h}{2}-h_s}^{-\frac{h}{2}} z_s^2 dz$$

اپراتورهای موجود در بخش ۴-۲ که در محاسبات مطرح شده در تحلیل‌های رزونانسی به‌کار رفته‌اند شامل موارد زیر می‌شود:

$$G_{23}(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2)=\left[-\frac{2c_{22}c_{12}}{3\omega_1^2}-\frac{2c_{23}c_{22}}{3\omega_2^2}-c_{25}\right]A_1^3 \qquad G_{19}=\frac{1}{2}\Gamma_1 \qquad G_{29}=\frac{1}{2}\Gamma_2$$

$$G_{15}(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2)=\left[\frac{2c_{12}c_{13}}{\omega_1^2-(\omega_1-\omega_2)^2}+\frac{c_{13}c_{23}}{\omega_1^2-(\omega_1-\omega_2)^2}-\frac{c_{13}c_{12}}{3\omega_1^2}-\frac{2c_{14}c_{22}}{3\omega_2^2}-c_{16}\right]\bar{A}_1^2A_2$$

$$G_{11}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2,P\right)=-2i\omega_1\left(\bar{A}_1+c_{10}A_1\right)-\left(3c_{15}-\frac{10c_{12}^2}{3\omega_1^2}\right)A_1{}^2\bar{A}_1+\frac{c_{13}c_{22}}{\omega_2^2}A_1{}^2\bar{A}_1+\frac{c_{13}c_{24}}{\omega_2^2}A_1A_2\bar{A}_2$$
$$+\frac{c_{13}c_{22}}{\omega_2^2}A_1{}^2\bar{A}_1-\frac{c_{13}c_{22}}{3\omega_2^2}A_1{}^2\bar{A}_1+\frac{c_{13}c_{24}}{\omega_2^2}A_1A_2\bar{A}_2+\frac{2c_{12}c_{14}}{\omega_1^2}A_1A_2\bar{A}_2+\frac{2c_{12}c_{14}}{\omega_1^2}A_1A_2\bar{A}_2$$
$$+\frac{c_{13}^2A_1A_2\bar{A}_2}{\omega_1^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}+\frac{c_{13}^2A_1A_2\bar{A}_2}{\omega_1^2-\left(\omega_1+\omega_2\right)^2}+\frac{2c_{14}c_{23}A_1A_2\bar{A}_2}{\omega_1^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}+\frac{2c_{14}c_{23}A_1A_2\bar{A}_2}{\omega_1^2-\left(\omega_1+\omega_2\right)^2}$$
$$+\frac{c_{11}^2A_1A_2\bar{A}_2}{4\omega_1^2-4\left(\omega_1-P\right)^2}+\frac{c_{11}^2A_1A_2\bar{A}_2}{4\omega_1^2-4\left(\omega_1+P\right)^2}-2c_{17}A_1A_2\bar{A}_2$$

$$G_{22}\left(A_1,\bar{A}_1,A_2,\bar{A}_2,P\right)=-2i\omega_2\left(\bar{A}_2+c_{20}A_2\right)+\frac{2c_{22}c_{13}A_1\bar{A}_1A_2}{\omega_1^2-\left(\omega_1+\omega_2\right)^2}+\frac{2c_{22}c_{13}A_1\bar{A}_1A_2}{\omega_1^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}$$
$$+\frac{c_{23}^2A_1\bar{A}_1A_2}{\omega_2^2-\left(\omega_1+\omega_2\right)^2}+\frac{c_{23}^2A_1\bar{A}_1A_2}{\omega_2^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}+\frac{c_{23}c_{12}}{\omega_1^2}A_1\bar{A}_1A_2+\frac{c_{23}c_{14}}{\omega_1^2}A_2{}^2\bar{A}_2+\frac{c_{23}c_{12}}{\omega_1^2}A_1\bar{A}_1A_2$$
$$+\frac{c_{23}c_{14}}{\omega_1^2}A_2{}^2\bar{A}_2-\frac{c_{23}c_{14}}{3\omega_1^2}A_2{}^2\bar{A}_2+\frac{2c_{24}c_{22}}{\omega_2^2}A_1\bar{A}_1A_2+\frac{2c_{24}^2}{\omega_2^2}A_2{}^2\bar{A}_2+\frac{2c_{24}c_{22}}{\omega_2^2}A_1\bar{A}_1A_2+\frac{2c_{24}^2}{\omega_2^2}A_2{}^2\bar{A}_2$$
$$-\frac{2c_{24}^2}{3\omega_2^2}A_2{}^2\bar{A}_2+\frac{c_{21}^2A_2}{4\omega_2^2-4\left(\omega_2-P\right)^2}+\frac{c_{21}^2A_2}{4\omega_2^2-4\left(\omega_2+P\right)^2}-2c_{26}A_1A_2\bar{A}_1-3c_{28}A_2{}^2\bar{A}_2$$

ضرایبی که در بخش ۴-۲ به‌کار رفته‌اند عبارت‌انداز:

$$k_{11}=\frac{1}{8}\left[\frac{10c_{12}^2}{3\omega_1^2}-3c_{15}+\frac{5c_{13}c_{22}}{\omega_2^2}\right]\qquad k_{13}=\frac{1}{8}\left[\frac{c_{11}^2}{\omega_1^2-\left(\omega_1-P\right)^2}+\frac{c_{11}^2}{\omega_1^2-\left(\omega_1+P\right)^2}\right]$$

$$k_{12}=\frac{1}{8}\left[\frac{2c_{13}c_{24}}{\omega_2^2}+\frac{4c_{12}c_{14}}{\omega_1^2}+\frac{c_{13}^2}{\omega_1^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}+\frac{c_{13}^2}{\omega_1^2-\left(\omega_1+\omega_2\right)^2}+\frac{2c_{14}c_{23}}{\omega_1^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2c_{14}c_{23}}{\omega_1^2-\left(\omega_1+\omega_2\right)^2}-2c_{17}\right]$$

$$k_{14}=\frac{1}{8}\left[\frac{2c_{12}c_{13}}{\omega_1^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}+\frac{c_{13}c_{23}}{\omega_1^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}-\frac{c_{13}c_{12}}{3\omega_1^2}-\frac{2c_{14}c_{22}}{3\omega_2^2}-c_{16}\right]$$

$$k_{22}=\frac{1}{8}\left[\frac{2c_{22}c_{13}}{\omega_1^2-\left(\omega_1+\omega_2\right)^2}+\frac{2c_{22}c_{13}}{\omega_1^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}+\frac{c_{23}^2}{\omega_2^2-\left(\omega_1+\omega_2\right)^2}+\frac{c_{23}^2}{\omega_2^2-\left(\omega_1-\omega_2\right)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2c_{23}c_{12}}{\omega_1^2}+\frac{2c_{24}c_{22}}{\omega_2^2}-2c_{26}\right]$$

$$k_{23}=\frac{1}{8}\left[\frac{c_{21}^2}{\omega_2^2-\left(\omega_2-P\right)^2}+\frac{c_{21}^2}{\omega_2^2-\left(\omega_2+P\right)^2}\right]\qquad k_{24}=-\frac{1}{8}\left[\frac{2c_{22}c_{12}}{3\omega_1^2}+\frac{2c_{23}c_{22}}{3\omega_2^2}+c_{25}\right]$$

$$k_{15} = \frac{1}{2}\Gamma_1 \qquad\qquad k_{25} = \frac{1}{2}\Gamma_2$$

مراجع

[1] J. Hoefakker, *Theory review for cylindrical shells and parametric study of chimneys and tanks*. Eburon Uitgeverij BV, 1900.

[2] H. Li, K.-Y. Lam, and T.-Y. Ng, *Rotating shell dynamics*, vol. 50. Elsevier, 2005.

[3] A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge university press, 1892.

[4] J. R. Vinson, *The behavior of shells composed of isotropic and composite materials*, vol. 18. Springer Science & Business Media, 2013.

[5] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, 2003.

[6] C. W. Lim and K. M. Liew, "Vibratory behaviour of shallow conical shells by a global Ritz formulation," *Eng. Struct.*, vol. 17, no. 1, pp. 63–70, 1995.

[7] E. Mueller, Č. Drašar, J. Schilz, and W. A. Kaysser, "Functionally graded materials for sensor and energy applications," *Mater. Sci. Eng. A*, vol. 362, no. 1–2, pp. 17–39, 2003.

[8] W. Y. Lee, D. P. Stinton, C. C. Berndt, F. Erdogan, Y. Lee, and Z. Mutasim, "Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coating applications," *J. Am. Ceram. Soc.*, vol. 79, no. 12, pp. 3003 3012, 1996.

[9] M. Koizumi, "FGM activities in Japan," *Compos. Part B Eng.*, vol. 28, no. 1–2, pp. 1–4, 1997.

[10] Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki, and R. G. Ford, *Functionally graded materials: design, processing and applications*, vol. 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[11] X. Han, D. Xu, and G. R. Liu, "Transient responses in a functionally graded cylindrical shell to a point load," *J. Sound Vib.*, vol. 251, no. 5, pp. 783 805, 2002.

[12] M. D'ottavio, D. Ballhause, B. Kröplin, and E. Carrera, "Closed-form solutions for the free-vibration problem of multilayered piezoelectric shells," *Comput. Struct.*, vol. 84, no. 22–23, pp. 1506–1518, 2006.

[13] J. Chandra, V. Rao, R. Butler, and R. Damle, "Multidisciplinary research in smart structures: A survey," in *Proceedings of 1995 American Control Conference-ACC'95*, 1995, vol. 6, pp. 4167–4172.

[14] Y. Matsuzaki, "Smart structures research in Japan," *Smart Mater. Struct.*, vol. 6, no. 4, p. R1, 1997.

[15] V. Michaud, "Can shape memory alloy composites be smart?," *Scr. Mater.*, vol. 50, no. 2, pp. 249–253, 2004.

[16] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 2008.

[17] J. J. Thomsen, *Vibrations and stability: advanced theory, analysis, and tools*. Springer Science & Business Media, 2013.

[18] N. Jalili, *Piezoelectric-based vibration control: from macro to micro/nano scale systems*. Springer Science & Business Media, 2009.

[19] G. N. Praveen and J. N. Reddy, "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 35, no. 33, pp. 4457–4476, 1998.

[20] G. Catellani, F. Pellicano, D. Dall'Asta, and M. Amabili, "Parametric instability of a circular cylindrical shell with geometric imperfections," *Comput. Struct.*, vol. 82, no. 31–32, pp. 2635–2645, 2004.

[21] J. Woo, S. A. Meguid, and L. S. Ong, "Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates," *J. Sound Vib.*, vol. 289, no. 3, pp. 595–611, 2006.

[22] P. Ribeiro, "Thermally induced transitions to chaos in plate vibrations," *J. Sound Vib.*, vol. 299, no. 1–2, pp. 314–330, 2007.

[23] P. Ribeiro, "Non-linear free periodic vibrations of open cylindrical shallow shells," *J. Sound Vib.*, vol. 313, no. 1–2, pp. 224–245, 2008.

[24] S. Panda and M. C. Ray, "Active control of geometrically nonlinear vibrations of functionally graded laminated composite plates using piezoelectric fiber reinforced composites," *J. Sound Vib.*, vol. 325, no. 1–2, pp. 186–205, 2009.

[25] X. Zhao and K. M. Liew, "Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 198, no. 33–36, pp. 2796–2811, 2009.

[26] M. Amabili and J. N. Reddy, "A New Nonlinear Higher-Order Shear Deformation Theory for Nonlinear Vibrations of Laminated Shells," in *ASME 2010 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2010, pp. 1017–1025.

[27] F. Pellicano, "Dynamic instability of a circular cylindrical shell carrying a top mass under base excitation: Experiments and theory," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 48, no. 3–4, pp. 408–427, 2011.

[28] M. Amabili, "Nonlinear vibrations of laminated circular cylindrical shells: comparison of different shell theories," *Compos. Struct.*, vol. 94, no. 1, pp. 207–220, 2011.

[29] M. Amabili, "Internal resonances in non-linear vibrations of a laminated circular cylindrical shell," *Nonlinear Dyn.*, vol. 69, no. 3, pp. 755–770, 2012.

[30] M. Strozzi, F. Pellicano, and A. Zippo, "Nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells: Effect of the geometry," in *ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences IDETC*, 2012.

[31] G. G. Sheng and X. Wang, "Nonlinear vibration control of functionally graded laminated cylindrical shells," *Compos. Part B Eng.*, vol. 52, pp. 1–10, 2013.

[32] A. A. Jafari, S. M. R. Khalili, and M. Tavakolian, “Nonlinear vibration of functionally graded cylindrical shells embedded with a piezoelectric layer,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 79, pp. 8–15, 2014.

[33] T. Dey and L. S. Ramachandra, “Dynamic stability of simply supported composite cylindrical shells under partial axial loading,” *J. Sound Vib.*, vol. 353, pp. 272–291, 2015.

[34] D. Van Dung, “Nonlinear torsional buckling and postbuckling of eccentrically stiffened FGM cylindrical shells in thermal environment,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 69, pp. 378–388, 2015.

[35] A. H. Sofiyev, “Influences of shear stresses on the dynamic instability of exponentially graded sandwich cylindrical shells,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 77, pp. 349–362, 2015.

[36] A. H. Sofiyev and N. Kuruoglu, “Domains of dynamic instability of FGM conical shells under time dependent periodic loads,” *Compos. Struct.*, vol. 136, pp. 139–148, 2016.

[37] D. G. Ninh and D. H. Bich, “Nonlinear buckling of eccentrically stiffened functionally graded toroidal shell segments under torsional load surrounded by elastic foundation in thermal environment,” *Mech. Res. Commun.*, vol. 72, pp. 1–15, 2016.

[38] R. Kumar, S. C. Dutta, and S. K. Panda, “Linear and non-linear dynamic instability of functionally graded plate subjected to non-uniform loading,” *Compos. Struct.*, vol. 154, pp. 219–230, 2016.

[39] M. Darabi and R. Ganesan, “Non-linear dynamic instability analysis of laminated composite cylindrical shells subjected to periodic axial loads,” *Compos. Struct.*, vol. 147, pp. 168–184, 2016.

[40] G. G. Sheng and X. Wang, “The non-linear vibrations of rotating functionally graded cylindrical shells,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 87, no. 2, pp. 1095–1109, 2017.

[41] U. H. Hegazy, “Nonlinear vibrations of a thin plate under simultaneous internal and external resonances,” *J. Vib. Acoust.*, vol. 132, no. 5, p. 51004, 2010.

[42] S. Mahmoudkhani, H. M. Navazi, and H. Haddadpour, “An analytical study of the non-linear vibrations of cylindrical shells,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 46, no. 10, pp. 1361–1372, 2011.

[43] Y. Liu and F. Chu, “Nonlinear vibrations of rotating thin circular cylindrical shell,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 67, no. 2, pp. 1467–1479, 2012.

[44] F. Alijani, M. Amabili, and F. Bakhtiari-Nejad, “On the accuracy of the multiple scales method for non-linear vibrations of doubly curved shallow shells,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 46, no. 1, pp. 170–179, 2011.

[45] Q. Han and F. Chu, “Effects of rotation upon parametric instability of a cylindrical shell subjected to periodic axial loads,” *J. Sound Vib.*, vol. 332, no. 22, pp. 5653–5661, 2013.

[46] F.-M. Li and G. Yao, “1/3 Subharmonic resonance of a nonlinear composite laminated cylindrical shell in subsonic air flow,” *Compos. Struct.*, vol. 100, pp. 249–256, 2013.

[47] C. Du and Y. Li, “Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments,” *Compos. Struct.*, vol. 102, pp. 164–174, 2013.

[48] G. G. Sheng, X. Wang, G. Fu, and H. Hu, “The nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 78, no. 2, pp. 1421–1434, 2014.

[49] C. Du, Y. Li, and X. Jin, “Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 78, pp. 26–36, 2014.

[50] G. G. Sheng and X. Wang, “Nonlinear vibrations of FG cylindrical shells subjected to parametric and external excitations,” *Compos. Struct.*, vol. 191, pp. 78–88, 2018.

[51] M. Bhandari and K. Purohit, “Comparison of Functionally Graded Material Plate with Metaland Ceramic Plateunder Transverse Loadfor Various Boundary Conditions,” *Int. J. Comput. Appl.*, vol. 975, p. 8887.

[52] A. Fernandes and J. Pouget, “Structural response of composite plates equipped with piezoelectric actuators,” *Comput. Struct.*, vol. 84, no. 22–23, pp. 1459–1470, 2006.

[53] V. Balamurugan and S. Narayanan, “Shell finite element for smart piezoelectric composite plate/shell structures and its application to the study of active vibration control,” *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 37, no. 9, pp. 713–738, 2001.

[54] G. G. Sheng and X. Wang, “Active control of functionally graded laminated cylindrical shells,” *Compos. Struct.*, vol. 90, no. 4, pp. 448–457, 2009.

[55] A. A. Popov, J. M. T. Thompson, and F. A. McRobie, “Low dimensional models of shell vibrations. Parametrically excited vibrations of cylinder shells,” *J. Sound Vib.*, vol. 209, no. 1, pp. 163–186, 1998.

[56] M. C. Ray and J. N. Reddy, “Active control of laminated cylindrical shells using piezoelectric fiber reinforced composites,” *Compos. Sci. Technol.*, vol. 65, no. 7–8, pp. 1226–1236, 2005.

[57] F. Heidary and M. R. Eslami, “Piezo-control of forced vibrations of a thermoelastic composite plate,” *Compos. Struct.*, vol. 74, no. 1, pp. 99–105, 2006.

[58] K. M. Liew, T. Y. Ng, and X. Zhao, “Vibration of axially loaded rotating cross-ply laminated cylindrical shells via Ritz method,” *J. Eng. Mech.*, vol. 128, no. 9, pp. 1001–1007, 2002.

[59] C. W. Lim, Y. F. Ma, S. Kitipornchai, C. M. Wang, and R. K. K. Yuen, “Buckling of vertical cylindrical shells under combined end pressure and body force,” *J. Eng. Mech.*, vol. 129, no. 8, pp. 876–884, 2003.

[60] M. Rougui, F. Moussaoui, and R. Benamar, “Geometrically non-linear free and forced vibrations of simply supported circular cylindrical shells: A semi-analytical approach,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 42, no. 9, pp. 1102–1115, 2007.

[61] N. Ganesan and R. Kadoli, “Semianalytical finite element analysis of piezothermoelastic shells of revolution,” *Comput. Struct.*, vol. 83, no. 15–16, pp. 1305–1319, 2005.

[62] F. Ramirez, P. R. Heyliger, and E. Pan, “Free vibration response of two dimensional magneto-electro-elastic laminated plates,” *J. Sound Vib.*, vol. 292, no. 3–5, pp. 626–644, 2006.

Abstract

The nonlinear vibration control of FG (functionally graded) laminated piezoelectric cylindrical shells under combined parametric and external excitations are presented based on Hamilton’s principle, FSTD (first-order shear deformation theory), Von Karman nonlinear theory. The coupled nonlinear differential equations with two modes are obtained using multiterm Galerkin method and static condensation method. The thin piezoelectric layers are embedded on inner and outer surface of FG laminated cylindrical shell as distributed sensor and actuator, which are used to control nonlinear vibration of the system. Constant-gain negative velocity feedback approach is used for active nonlinear vibration control. The method of multiple scale is applied to solve the coupled nonlinear differential equations having both quadratic and cubic nonlinearities. The effect of different parameters on the nonlinear vibrations are discussed.

Keywords: Resonance Analysis, Cylindrical Shell, Nonlinear Vibrations, The Method of Multiple Scale (MMS), Functionally Graded (FG), Piezoelectric

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

Primary Resonance Analysis of FG Cylindrical Shells Subjected to External Excitations

Supervisors:

Dr. Amir Jalali

Dr. Habib Ahmadi

By:

Aliakbar Bayat

September 2019