

بسم الله الرحمن الرحيم



دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک
پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

حل تحلیلی و عددی کره‌های جدار ضخیم

FGM تحت فشار و بار حرارتی گذرا

نگارنده:

محمد جنتی‌فر

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد

بهمن ۱۳۹۷

تقدیم به

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را و عشق را.

پدر و مادر عزیزم

که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یآوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم
و مطمئن برایم بوده‌اند.

و همسر مهربان و پسر گلم

که با قلبی آکنده از عشق و معرفت، محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش و آسایش
برای من فراهم آورده‌اند.

و برادرهایم

که با هم آغاز کردیم؛ در کنار هم آموختیم و به امید هم به آینده چشم می‌دوزیم.

و تمام کسانی که در این امر مرا یاری نمودند تا آنچه بایسته بود؛ انجام گیرد.

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره‌ی روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

سپاس از پدر و مادر عزیزم که برای رسیدن فرزندشان به این نقطه، از بهترین سرمایه‌ی خود یعنی عمرشان، گذشتند. خدایا نه می‌توانم موهایشان را که در راه عزّت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه بسته‌شان که ثمره‌ی تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم؛ پس توفیقم ده که هر لحظه شکرگزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم.

سپاس از همسر و پسر گلم که در این مسیر همواره یار و یاور من بودند و تمامی کاستی‌ها را به‌خاطر هدفی بزرگ تحمل نمودند تا با انجام این مهم، یک قدم دیگر به هدفمان نزدیک‌تر شویم.

و سپاس از استاد گرانقدرم جناب دکتر مهدی قنّاد کهتویی که در کمال سعه‌ی صدر و با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند.

تعهدنامه

اینجانب **محمد جنتی فر** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی طراحی کاربردی دانشکده مکانیک و مکترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله با عنوان **حلّ تحلیلی و عددی کره‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار و بار حرارتی گذرا** تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهتوئی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و **Shahrood University of Technology** به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

کاربرد فراوان پوسته‌ها در سازه‌های مهندسی موجب گردیده تا محققان و پژوهشگران زیادی به بررسی و تحلیل رفتار این سازه‌ها تحت بارگذاری‌های مختلف گرایش پیدا کنند. در تحقیق حاضر، به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی (PET)، حلّ تحلیلی و عددی کره‌های جدار ضخیم همگن و ناهمگن FGM تحت بارگذاری فشاری و بار حرارتی گذرا ارائه گردیده است. بارگذاری به‌صورت فشار داخلی، فشار خارجی و بار حرارتی گذرا و نیز ترکیب این بارگذاری‌ها با یکدیگر بوده و خواص ماده در کره ناهمگن با تابع توانی برحسب شعاع کره، متغیّر و نسبت پواسون ثابت فرض شده است. با به‌کارگیری قانون فوریه در مسائل انتقال حرارت، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مسأله به‌دست آمده و با استفاده از روش جداسازی متغیّر‌ها، تغییر متغیّر و تغییر تابع در حلّ معادله‌های دیفرانسیل، معادله‌ی حاکم، با توجّه به شرایط مرزی، به یک مسأله‌ی مقدار ویژه تبدیل شده و درنهایت تابع پاسخ برحسب توابع ویژه بسط داده شده است. شرایط مرزی دمایی مسأله، شامل انتقال حرارت در سطح داخلی و خارجی کره بوده و دمایی محیط در زمان اعمال بار، ثابت فرض شده است. با به‌کارگیری معادلات ساختاری، سینماتیک و تعادل و استفاده از روش حلّ کوشی-اولیر در محاسبه‌ی جواب عمومی و هم‌چنین روش تغییر پارامترها در محاسبه‌ی جواب خصوصی، جابه‌جایی شعاعی و به کمک روش حلّ بسته تنش‌های شعاعی و محیطی محاسبه گردیده است. مقادیر در این تحقیق دلخواه انتخاب شده تا تأثیر ناهمگنی را در توزیع جابه‌جایی و تنش‌ها نشان دهند. از روش اجزای محدود و مدل‌سازی در نرم‌افزار Abaqus، برای راستی‌آزمایی نتایج حلّ تحلیلی، در تمام حالات بارگذاری برای پوسته‌ی همگن و ناهمگن استفاده شده و تطابق خوبی بین نتایج حاصل از این دو روش به‌دست آمده است.

کلیدواژگان: پوسته‌ی کروی، کره‌ی FGM، تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ تحلیلی و عددی، بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا، توابع بسل، توابع ویژه، روش اجزای محدود.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
	فصل ۱: مقدمه
۲	۱-۱ پیش‌گفتار
۲	۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها
۳	۱-۲-۱ از دیدگاه هندسی
۴	۲-۲-۱ از دیدگاه مادی
۵	۳-۲-۱ از دیدگاه رفتاری
۵	۳-۱ تئوری پوسته‌های نازک
۷	۱-۳-۱ تئوری غشایی
۷	۲-۳-۱ تئوری خمشی
۸	۴-۱ تئوری پوسته‌های ضخیم
۹	۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطّی
۱۰	۵-۱ مقدمه‌ای بر مواد ناهمگن
۱۰	۱-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد ناهمگن
۱۴	۲-۵-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد ناهمگن
۱۵	۶-۱ پیشینه‌ی تحقیق
۱۵	۱-۶-۱ کره‌ی همگن
۱۹	۲-۶-۱ کره‌ی ناهمگن
۲۳	۷-۱ جمع‌بندی

فصل ۲: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی همگن تحت فشار

- ۱-۲ پیش‌گفتار ۲۶
- ۲-۲ معادله‌ی حرارتی حاکم بر مسأله ۲۷
- ۳-۲ حل معادله‌ی انتقال حرارت ۲۹
- ۱-۳-۲ محاسبه‌ی توزیع دما در حالت پایا ۲۹
- ۲-۳-۲ محاسبه‌ی توزیع دما در حالت گذرا ۳۰
- ۳-۳-۲ محاسبه‌ی تابع وزنی ۳۳
- ۴-۳-۲ محاسبه‌ی ثابت‌های مجهول معادله‌ی انتقال حرارت گذرا ۳۵
- ۴-۲ روابط ترموالاستیک ۳۵
- ۵-۲ تحلیل اجزای محدود ۳۹
- ۱-۵-۲ معرفی نرم‌افزار آباکوس ۴۰
- ۲-۵-۲ مدل‌سازی کره‌ی همگن جدار ضخیم ۴۲
- ۶-۲ مطالعه‌ی موردی ۴۳
- ۷-۲ بررسی نتایج ۴۴
- ۱-۷-۲ مقایسه‌ی نتایج ۴۴
- ۸-۲ جمع‌بندی ۶۴

فصل ۳: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی ناهمگن تحت فشار

- ۱-۳ پیش‌گفتار ۶۶
- ۲-۳ توزیع ناهمگنی خواص مکانیکی و حرارتی ۶۷
- ۳-۳ معادله‌ی حرارتی حاکم بر مسأله ۶۹

۷۰	۴-۳ حل معادله‌ی انتقال حرارت
۷۱	۱-۴-۳ محاسبه‌ی توزیع دما در حالت پایا
۷۲	۲-۴-۳ محاسبه‌ی توزیع دما در حالت گذرا
۸۱	۵-۳ روابط ترموالاستیک
۸۳	۱-۵-۳ محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی
۸۹	۲-۵-۳ محاسبه‌ی تنش‌های شعاعی و محیطی
۹۱	۶-۳ مدل‌سازی کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم
۹۳	۷-۳ مطالعه‌ی موردی
۹۴	۸-۳ بررسی نتایج
۹۴	۱-۸-۳ مقایسه‌ی نتایج
۱۲۲	۹-۳ جمع‌بندی

فصل ۴: جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۱۲۶	۱-۴ پیش‌گفتار
۱۲۶	۲-۴ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری
۱۲۷	۱-۲-۴ تحلیل پوسته‌های کرومی همگن و ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی
۱۲۷	۲-۲-۴ تحلیل پوسته‌های کرومی همگن و ناهمگن تحت بارگذاری فشاری
۱۲۹	۳-۲-۴ تحلیل پوسته‌های کرومی همگن و ناهمگن تحت بارگذاری هم‌زمان فشاری و حرارتی
۱۳۱	۳-۴ پیشنهادها
۱۳۳	مراجع

فهرست جدول‌ها

- جدول ۱-۲** تنش شعاعی (MPa) محاسبه‌شده با روش‌های تحلیلی و عددی برای بارگذاری‌های مختلف در $t = 5\text{ s}$ ۶۱
- جدول ۲-۲** بیشینه مقادیر تنش شعاعی و تنش محیطی محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مختلف و مختصات آن‌ها در $t = 5\text{ s}$ ۶۲
- جدول ۳-۲** بیشینه مقادیر جابه‌جایی شعاعی و دمای محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مختلف و مختصات آن‌ها در $t = 5\text{ s}$ ۶۳
- جدول ۱-۳** تنش شعاعی (MPa) محاسبه‌شده با روش‌های تحلیلی و عددی برای $n = 1$ و بارگذاری‌های مختلف در $t = 5\text{ s}$ ۱۱۶
- جدول ۲-۳** تنش محیطی (MPa) محاسبه‌شده با روش‌های تحلیلی و عددی برای $n = 1$ و بارگذاری‌های مختلف در $t = 5\text{ s}$ ۱۱۷
- جدول ۳-۳** جابه‌جایی شعاعی (μm) محاسبه‌شده با روش‌های تحلیلی و عددی برای $n = 1$ و بارگذاری‌های مختلف در $t = 5\text{ s}$ ۱۱۸
- جدول ۴-۳** دمای ($^{\circ}\text{C}$) محاسبه‌شده با روش‌های تحلیلی و عددی برای $n = 1$ و بارگذاری‌های مختلف در $t = 5\text{ s}$ ۱۱۹
- جدول ۵-۳** بیشینه مقادیر تنش شعاعی و محیطی محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مختلف و مختصات آن‌ها و برای شاخص توانی $n = 1$ در $t = 5\text{ s}$ ۱۲۰
- جدول ۶-۳** بیشینه مقادیر جابه‌جایی شعاعی و دمای محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مختلف و مختصات آن‌ها و برای شاخص توانی $n = 1$ در $t = 5\text{ s}$ ۱۲۱

فهرست شکل‌ها و نمودارها

۱۱	شکل ۱-۱ نمای مقطع استخوان
۱۳	شکل ۲-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف
۲۷	شکل ۱-۲ کره‌ی جدار ضخیم با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b ، تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی و خارجی یکنواخت
۴۳	شکل ۲-۲ هندسه‌ی مقطع عرضی کره‌ی همگن جدار ضخیم مدل‌شده در نرم‌افزار آباکوس
۴۳	شکل ۳-۲ نمایی از مش‌بندی مقطع عرضی کره‌ی همگن در نرم‌افزار آباکوس
۴۵	شکل ۴-۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی در راستای شعاعی در $t = 5\text{ s}$
۴۶	شکل ۵-۲ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی در راستای شعاعی در $t = 5\text{ s}$
۴۶	شکل ۶-۲ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی در راستای شعاعی در $t = 5\text{ s}$
۴۷	شکل ۷-۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی در راستای شعاعی در $t = 5\text{ s}$
۴۷	شکل ۸-۲ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی در راستای شعاعی در $t = 5\text{ s}$

شکل ۹-۲ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی

در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۴۸

شکل ۱۰-۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

داخلی و خارجی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۴۸

شکل ۱۱-۲ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

داخلی و خارجی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۴۹

شکل ۱۲-۲ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان

فشار داخلی و خارجی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۴۹

شکل ۱۳-۲ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در

$r = 0.45 \text{ m}$ ۵۰

شکل ۱۴-۲ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$ ۵۱

شکل ۱۵-۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در

$t = 5 \text{ s}$ ۵۲

شکل ۱۶-۲ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در

$t = 5 \text{ s}$ ۵۲

شکل ۱۷-۲ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا

در $t = 5 \text{ s}$ ۵۳

شکل ۱۸-۲ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار

حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $r = 0.45 \text{ m}$ ۵۴

- شکل ۱۹-۲ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۵۴
- شکل ۲۰-۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۵۵
- شکل ۲۱-۲ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۵۵
- شکل ۲۲-۲ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۵۶
- شکل ۲۳-۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $r = 0.045 \text{ m}$ ۵۷
- شکل ۲۴-۲ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $r = 0.045 \text{ m}$ ۵۷
- شکل ۲۵-۲ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $r = 0.045 \text{ m}$ ۵۸
- شکل ۲۶-۲ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۵۸
- شکل ۲۷-۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۵۹

شکل ۲-۲۸ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۵۹

شکل ۲-۲۹ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان

فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$ ۶۰

شکل ۳-۱ کره‌ی جدار ضخیم ناهمگن با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b تحت بار حرارتی گذرا و

فشار داخلی و خارجی یکنواخت ۶۸

شکل ۳-۲ هندسه‌ی مقطع عرضی کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم مدل‌شده در نرم‌افزار آباکوس ۹۲

شکل ۳-۳ نمایی از مش‌بندی مقطع عرضی کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم در نرم‌افزار آباکوس ۹۲

شکل ۳-۴ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی در

$t = 5 \text{ s}$ ۹۶

شکل ۳-۵ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی در

$t = 5 \text{ s}$ ۹۶

شکل ۳-۶ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی

در $t = 5 \text{ s}$ ۹۷

شکل ۳-۷ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی در

$t = 5 \text{ s}$ ۹۷

شکل ۳-۸ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی در

$t = 5 \text{ s}$ ۹۸

شکل ۹-۳ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی

در $t = 5 \text{ s}$ ۹۸

شکل ۱۰-۳ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

داخلی و خارجی در $t = 5 \text{ s}$ ۹۹

شکل ۱۱-۳ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

داخلی و خارجی در $t = 5 \text{ s}$ ۱۰۰

شکل ۱۲-۳ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان

فشار داخلی و خارجی در $t = 5 \text{ s}$ ۱۰۰

شکل ۱۳-۳ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا

در $t = 5 \text{ s}$ ۱۰۱

شکل ۱۴-۳ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا

در $t = 5 \text{ s}$ ۱۰۲

شکل ۱۵-۳ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی

گذرا در $t = 5 \text{ s}$ ۱۰۲

شکل ۱۶-۳ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

داخلی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$ ۱۰۳

شکل ۱۷-۳ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

داخلی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$ ۱۰۴

شکل ۳-۱۸ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان

فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$ ۱۰۴

شکل ۳-۱۹ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و

بار حرارتی گذرا در $r = 0.045 \text{ m}$ ۱۰۵

شکل ۳-۲۰ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و

بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$ ۱۰۶

شکل ۳-۲۱ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

داخلی و بار حرارتی گذرا در $r = 0.045 \text{ m}$ ۱۰۷

شکل ۳-۲۲ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

داخلی و بار حرارتی گذرا در $r = 0.045 \text{ m}$ ۱۰۷

شکل ۳-۲۳ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان

فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در $r = 0.045 \text{ m}$ ۱۰۸

شکل ۳-۲۴ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$ ۱۰۹

شکل ۳-۲۵ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$ ۱۰۹

شکل ۳-۲۶ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان

فشار خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$ ۱۱۰

شکل ۳-۲۷ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار خارجی و

۱۱۱ بار حرارتی گذرا در $r = 0.045 \text{ m}$

شکل ۳-۲۸ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار خارجی و

۱۱۱ بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

شکل ۳-۲۹ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

۱۱۲ داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

شکل ۳-۳۰ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار

۱۱۳ داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

شکل ۳-۳۱ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان

۱۱۳ فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

شکل ۳-۳۲ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و

۱۱۴ خارجی و بار حرارتی گذرا در $r = 0.045 \text{ m}$

شکل ۳-۳۳ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و

۱۱۵ خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

فهرست علامتها

مدول الاستیسیته در ماده‌ی همگن	E
نسبت پواسون	ν
چگالی در ماده‌ی همگن	ρ
ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت در ماده‌ی همگن	c
ضریب انبساط حرارتی در ماده‌ی همگن	α
ضریب هدایت گرمایی در ماده‌ی همگن	γ
دمای مرجع	T_{∞}
محورهای مختصات در دستگاه کروی	r, θ, φ
زمان	t
شعاع داخلی	a
شعاع خارجی	b
فشار وارد بر سطح داخلی	P_i
فشار وارد بر سطح خارجی	P_o
دمای محیط اطراف سطح داخلی	T_i
دمای محیط اطراف سطح خارجی	T_o
ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی در سطح داخلی	h_i
ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی در سطح خارجی	h_o
نرخ تولید گرما	q
تابع توزیع دما	$T(r,t)$
توزیع دما در جسم در زمان صفر	$f(r)$
تابع توزیع دما در حالت پایا	$T_s(r)$
تابع توزیع دما در حالت گذرا	$\Phi(r,t)$
تابع وزنی	$w(r)$
تابع رونسکین	$W(r)$
تابع بسل نوع اول	J

تابع بسل نوع دوم	Y
تنش شعاعی	σ_r
تنش محیطی	σ_θ
کرنش شعاعی	ε_r
کرنش محیطی	ε_θ
جاب‌جایی شعاعی	u_r
جاب‌جایی محیطی	u_θ
ضرایب ناهمگنی یا شاخص‌های توانی	$m_1, m_r, m_\varphi, m_\varphi, m_\delta$
مدول الاستیسیته در لایه‌ی داخلی ماده‌ی ناهمگن	E_i
ضریب انبساط حرارتی در لایه‌ی داخلی ماده‌ی ناهمگن	α_i
ضریب هدایت گرمایی در لایه‌ی داخلی ماده‌ی ناهمگن	γ_i
چگالی در لایه‌ی داخلی ماده‌ی ناهمگن	ρ_i
ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت در لایه‌ی داخلی ماده‌ی ناهمگن	c_i
شاخص توانی مؤثر	β
مقدار ویژه	λ_n

فصل ۱: مقدمه

۱-۱ پیش‌گفتار

پوسته‌ها^۱ یا سازه‌های پوسته‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها در اشکال طبیعی مانند مجسمه‌ی سر انسان‌ها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند. همچنین در اشکال مصنوعی در صنایع مختلف: ساختمانی، نیروگاهی، خودروسازی، نظامی، هوا و فضا همانند: سقف‌ها، لوله‌ها، بدنه‌ی خودروها و هواپیماها، پرتابه‌ها و پرتاب‌کننده‌ها، موشک‌ها و سفینه‌ها استفاده می‌شوند.

پوسته‌ها به‌طور کلی، سازه‌های خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای واردشده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. متناسب با مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آن‌ها نیز حائز اهمیت می‌باشد. روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های کروی به‌دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این‌گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه‌چندان دور تا به امروز مورد توجه محققان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش‌پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر انواع تنش‌های^۲ مکانیکی و حرارتی افزایش و در صورت امکان، وزن آن‌ها را کاهش دهند.

۱-۲ دسته‌بندی پوسته‌ها

پوسته سازه‌ای است که توسط دو سطح منحنی^۳، احاطه شده و فاصله‌ی بین این دو سطح که می‌تواند ثابت و یا متغیر باشد؛ در مقایسه با سایر ابعاد آن کوچک است. پوسته‌ها دارای دو مشخصه‌ی هندسی می‌باشند که با آن‌ها شناخته می‌شوند [۱]:

¹ Shells

² Stresses

³ Curved surfaces

(۱) سطح میانی^۱: مکان هندسی نقاطی از پوسته که فاصله‌ی آن‌ها از دو سطح منحنی به یک اندازه می‌باشد. فاصله‌ی هر نقطه از این سطح را تا مرکز انحنا^۲، شعاع انحنا^۳ می‌نامند و با R نمایش می‌دهند.

(۲) ضخامت^۴: فاصله‌ی عمودی هر نقطه از سطح میانی با هر یک از دو سطح منحنی می‌باشد و با h مشخص می‌شود.

به‌طور کلی پوسته‌ها بر اساس ضخامت‌شان به دو دسته‌ی زیر دسته‌بندی می‌شوند [۱]:

(۱) پوسته‌ی جدار نازک^۵: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنا^۶ سطح میانی^۷ آن $(\frac{h}{R})$ کوچک‌تر از $\frac{1}{20}$ باشد.

(۲) پوسته‌ی جدار ضخیم^۸: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنا^۶ سطح میانی^۷ آن $(\frac{h}{R})$ بزرگ‌تر از $\frac{1}{20}$ باشد.

پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری به شکل زیر دسته‌بندی می‌شوند.

۱-۲-۱ از دیدگاه هندسی

پوسته‌ها را می‌توان از نظر شکل هندسی^۸ به‌صورت زیر دسته‌بندی نمود [۱]:

¹ Middle surface

² Center of curvature

³ Radius of curvature

⁴ Thickness

⁵ Thin shell

⁶ Midsurface

⁷ Thick shell

⁸ Geometric form

(۱) پوسته‌ی حاصل از انتقال^۱: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از

صفحه‌ی قوس حاصل می‌شود.

(۲) پوسته‌ی حاصل از دوران^۲: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی

قوس، حاصل می‌شود.

البته پوسته‌های جدارضخیم و نازک را می‌توان در این بخش نیز قرار داد.

۱-۲-۲ از دیدگاه مادی

پوسته‌ها از حیث تغییرات خواص در جهت و مکان به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

(۱) پوسته‌ی همگن^۳: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته، در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع

موقعیت نقاط نمی‌باشد.

(۲) پوسته‌ی ناهمگن^۴: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته، در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع

موقعیت نقاط می‌باشد.

(۳) پوسته‌ی همسانگرد^۵: خواص مکانیکی (E و ν) ماده‌ی پوسته، در جهات مربوط به هر نقطه

یکسان است.

(۴) پوسته‌ی ناهمسانگرد^۶: خواص مکانیکی (E و ν) ماده‌ی پوسته، در جهات مربوط به هر نقطه

یکسان نیست.

¹ Shell of translation

² Shell of revolution

³ Homogeneous shell

⁴ Inhomogeneous (Heterogeneous) shell

⁵ Isotropic shell

⁶ Anisotropic shell

۱-۲-۳ از دیدگاه رفتاری

پوسته‌ها در بارگذاری دچار تغییر شکل شده و رفتار آن‌ها به شکل زیر دسته‌بندی می‌شود:

(۱) پوسته با تغییر شکل‌های کوچک^۱: جابه‌جایی^۲ هر نقطه از پوسته تحت بار، کوچک است (رفتار

خطی از نظر هندسی).

(۲) پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ^۳: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته تحت بار، کوچک نیست (رفتار

غیر خطی از نظر هندسی).

(۳) پوسته با رفتار کشسان^۴: تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیرند و روابط تنش-کرنش^۵ از قانون عمومی

هوک پیروی می‌کنند (رفتار خطی از نظر مادی).

(۴) پوسته با رفتار مومسان^۶: تغییر شکل‌ها بازگشت‌ناپذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی

هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیر خطی از نظر مادی).

۱-۳ تئوری پوسته‌های نازک

تئوری این دسته از پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به‌طور کلی به‌دلیل

کوچک‌بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته‌ی سه‌بعدی استفاده نمی‌شود؛ بلکه با

ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک به‌دست می‌آید

[۱]. دقت نتایج تئوری‌های ارائه‌شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد. اولین

¹ Small deflection

² Displacement

³ Large deflection

⁴ Elastic behavior

⁵ Strain

⁶ Plastic behavior

فرضیات را کیرشهف^۱ [۲] در ۱۸۵۰ درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته‌ها به‌کار گرفته شد. لاو^۲ [۳] در ۱۸۸۸ معادله‌های عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به‌عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری لوو-کیرشهف مشهور است. ارون^۳ [۴] در ۱۸۷۴ تئوری پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد. رایسنر^۴ [۵] در ۱۹۱۲ با استفاده از فرضیات لوو تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری^۵ را ارائه نمود. فلوگه^۶ [۶] در ۱۹۳۲ تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ‌کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادله‌های وی به‌عنوان معادله‌های استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشد. با ساده‌سازی آن‌ها تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به‌دست می‌آیند. در ۱۹۴۴ نظریات فلوگه توسط بیرنه^۷ [۷] تکمیل شد. نقدی [۸] در ۱۹۵۷ تئوری غیر خطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد، که به‌کارگیری آن‌ها مشکل می‌باشد. سندرز^۸ [۹] در ۱۹۵۹ فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلوف^۹ [۱۰] در ۱۹۶۴ امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به‌شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادله‌ها به‌صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

تئوری عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان این‌گونه تقسیم‌بندی کرد:

(۱) تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی^{۱۰})

¹ Kirchhoff

² Love

³ Aron

⁴ Reissner

⁵ Axisymmetric shell of revolution

⁶ Flugge

⁷ Byrne

⁸ Sanders

⁹ Novozhilov

¹⁰ Membrane theory

۲) تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)^۱

۳) تئوری با تقریب مرتبه‌ی دو (تئوری فلوگه) [۱۱]

۱-۳-۱ تئوری غشایی

غشا از دیدگاه مکانیکی، یک تار^۲ دوبعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری (نیروهای غشایی) را تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی^۳ آن‌ها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی معین است. در تئوری غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسائل در حالت تنش صفحه‌ای^۴ و کرنش صفحه‌ای^۵ با چشم-پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند [۱۲].

۱-۳-۲ تئوری خمشی

ورق^۶ از دیدگاه مکانیکی، یک تیر^۷ دوبعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آن‌ها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط

¹ Bending theory

² String

³ Bending stiffness

⁴ Plane stress

⁵ Plane strain

⁶ Plate

⁷ Beam

ناویر^۱ ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لوو با همین فرضیات، تئوری خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلی، معادله‌های تعادل به‌تنهایی برای به‌دست‌آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در تئوری خمشی نیز، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لوو-کیرشهف می‌نامند که عبارتند از [۱۲]:

(۱) نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک)؛

(۲) خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

(۳) مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی، نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم‌پوشی است؛

(۴) مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند.

۴-۱ تئوری پوسته‌های ضخیم

اولین بار لامه^۲ [۱۳] در ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دوبعدی (PET)^۳، حل دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از ماده‌ی همگن و همسانگرد را تحت فشار یکنواخت داخلی ارائه کرد، که تاکنون نیز در حل مسائل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین^۴ در ۱۹۳۰ روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادله‌های اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. در ۱۹۴۹

¹ Navier

² Lamé

³ Plane Elasticity Theory

⁴ Galerkin

ولاسف^۱ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطّی، معادله‌های قابل حلّی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. گرینسپن^۲ [۱۴] در ۱۹۶۰ مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود.

۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطّی

به‌طور کلی در تئوری الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول را به‌دست آورد؛ معادله‌ها عبارتند از: سه معادله‌ی تعادل^۳ (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک^۴ (کرنش-جاب‌جایی) و شش معادله‌ی رفتاری^۵ (تنش-کرنش) و مجهول‌ها عبارتند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن^۶ تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جاب‌جایی (بردار جاب‌جایی^۷). تئوری الاستیسیته‌ی سه‌بعدی هرچند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به‌طور کامل توصیف می‌کند و منجر به حلّ دقیق می‌شود؛ ولی حلّ معادله‌های آن بسیار پیچیده می‌باشد و در عمل، به‌کارگیری آن‌ها امکان‌ناپذیر است. با فرضیات ساده‌شونده‌ای می‌توان این معادله‌ها را کاهش داد و تئوری الاستیسیته‌ی دوبعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه‌ها و کره‌ها به‌کار برد. در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، جاب‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جاب‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این تئوری را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از

¹ Vlassov

² Greenspon

³ Equilibrium equation

⁴ Kinematic equation

⁵ Constitutive equation

⁶ Symmetric tensor

⁷ Displacement vector

ماده‌ی همگن و همسانگرد به کار برد و توزیع تنش را در استوانه‌ها به دست آورد. تئوری لایمه به تئوری کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است [۱۵].

۱-۵ مقدمه‌ای بر مواد ناهمگن

در این بخش تاریخچه‌ای از پیدایش مواد ناهمگن و نحوه‌ی فرمول‌بندی ریاضی آن‌ها بیان می‌شود.

۱-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد ناهمگن

مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوافضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند. بنابراین محققان همواره در تلاش بوده‌اند که از موادی جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب^۱ در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهمسانگرد در دیدگاه ماکروسکوپی^۲ به وجود می‌آیند، که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سازگاری در رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری می‌شود. مواد مرکب از دیدگاه متالورژی^۳ (میکروسکوپی^۴)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، اما از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد محسوب می‌شوند.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آن‌هاست، که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود؛ بنابراین ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پیشنهاد شد. مواد با تغییرات تابعی خواص، در ساختار ارگانیسم‌های^۵ زنده مانند استخوان (شکل ۱-۱) وجود

^۱ Composite materials

^۲ Macroscopy

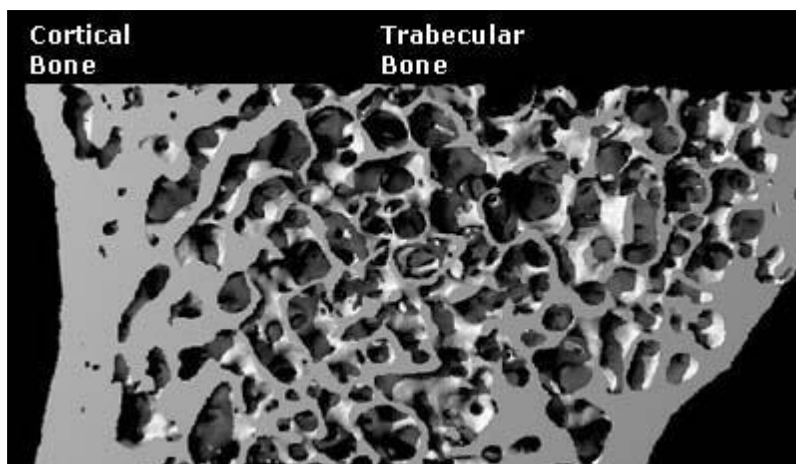
^۳ Metallurgy

^۴ Microscopy

^۵ Organisms

داشته است. به عنوان مثال، استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد؛ از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی آن که کاملاً نرم می‌باشد؛ تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این رو تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. این گونه مواد که خصوصیات آن تحت یک تابع ریاضی به صورت تدریجی تغییر می‌کند، مواد FG^۱ یا مواد ناهمگن، نامیده می‌شوند.

مفهوم اولیه‌ی مواد ناهمگن توسط نینو^۲ و همکارانش در سال ۱۹۸۴ در سازمان هوافضای ژاپن مطرح گردید و از سال ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید آن، در این کشور شروع شد. مرحله‌ی اول پروژه‌ی ملی (فناوری گسترش مواد متغیر تابع^۳) طی سال‌های ۱۹۸۷-۱۹۸۹ در ژاپن انجام شد [۱۶].



شکل ۱-۱ نمایی از چگونگی تغییر مواد تشکیل‌دهنده‌ی مقطع استخوان

در این پروژه، سه گروه: ساخت، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که در آن با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب و با تغییرات تدریجی

^۱ Functionally Graded

^۲ Niino

^۳ Functionally graded materials

ماده از سرامیک به فلز، شرایط دمایی لایه بیرونی دماغه و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه درونی شاتل فضایی^۱ ارضا شود. پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ mm و ضخامت ۱ mm تا ۱۰ mm که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰°K و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰°K بودند؛ محققان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم^۲ جهانی در سال ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند.

مرحله دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در سال ۱۹۹۰-۱۹۹۱ انجام شد، که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ mm برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی^۳ و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ mm برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد. دومین سمپوزیوم جهانی مواد متغیر تابعی در سال ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به‌ویژه تحلیل سازه‌هایی از این جنس، فراگیر شد.

مواد ناهمگن در مقایسه با مواد همگن دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر می‌باشند:

- (۱) مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا.
- (۲) مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا.
- (۳) یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد ناهمگن، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود، که به کمک مواد ناهمگن می‌توان آثار نامطلوب تمرکز تنش را به صورت چشم‌گیری کاهش داد.
- (۴) بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد ناهمگن است.

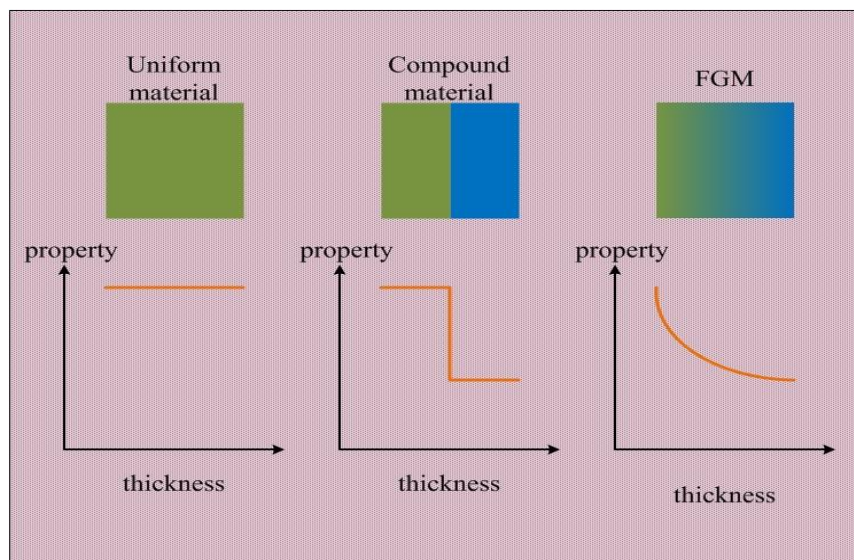
¹ Space shuttle

² Symposium

³ Spaceship

(۵) اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد ناهمگن، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

(۶) تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد ناهمگن، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود؛ در صورتی که در مواد کامپوزیتی^۱، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف^۲، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند؛ ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد ناهمگن، به دلیل پیوستگی در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا کرده و باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل ۱-۲ مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ^۳، کامپوزیت و ناهمگن را نشان می‌دهد [۱۶].



شکل ۱-۲ چگونگی تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و ناهمگن

¹ Composite

² Fibers

³ Isotropic

۱-۵-۲ مدل سازی ریاضی مواد ناهمگن

مطابق توضیحات داده شده، خواص مکانیکی در مواد ناهمگن به صورت تدریجی و پیوسته تغییر می کند.

این توابع به صورت عمده از این قرارند [۱۶]:

(۱) توزیع توانی^۱

$$X(r) = X_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n = X_i \bar{r}^n \quad (1-1)$$

(۲) توزیع نمایی^۲

$$X(r) = X_i e^{n \left(\frac{r}{r_i} - 1 \right)} = X_i e^{n(\bar{r} - 1)} \quad (2-1)$$

(۳) توزیع کسر حجمی^۳

$$X(r) = (X_o - X_i) \left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^n + X_i = (X_o - X_i) \left(\frac{\bar{r} - 1}{k - 1} \right)^n + X_i \quad (3-1)$$

در روابط فوق r_i و r_o به ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و یا کره، X_i و X_o خاصیت ماده

به ترتیب در لایه ی داخلی و خارجی جسم می باشد، که می توانند خاصیت مکانیکی، حرارتی و الکتریکی

از قبیل: نسبت پواسون^۴، مدول الاستیسیته^۵، چگالی^۶، ضریب هدایت حرارتی^۷ و ضریب انبساط خطی

¹ Power distribution

² Exponential distribution

³ Volume fraction distribution

⁴ Poisson's ratio

⁵ Elasticity modulus

⁶ Density

⁷ Heat conduction coefficient

حرارتی^۱ باشند. n در روابط فوق ثابت ناهمگنی^۲ و یا شاخص توانی^۳ خاصیت است. جز رابطه‌ی (۱-۱) که ثابت ناهمگنی فقط می‌تواند مقادیر حقیقی مثبت را اختیار کند؛ در سایر روابط (۲-۱) و (۳-۱) مقادیر منفی حقیقی را نیز می‌تواند اختیار کند. $n = 0$ در کلیه‌ی توابع، نشان‌دهنده‌ی مواد همگن است. هم‌چنین $\bar{\Gamma}$ نسبت شعاع به شعاع داخلی و k نسبت شعاع خارجی به داخلی می‌باشد.

۱-۶ پیشینه‌ی تحقیق

در این بخش ابتدا برخی از مطالعاتی که محققان در مورد کره‌های همگن و در ادامه در مورد کره‌های ناهمگن داشته‌اند؛ آورده شده است.

۱-۶-۱ کره‌ی همگن

یکی از نخستین تحلیل‌های پوسته‌های کروی همگن در بیش از نیم قرن پیش در سال ۱۹۵۱ به‌وسیله‌ی تیموشنکو^۴ و گودیر^۵ [۱۷] صورت گرفته است. آن‌ها با فرض یک جسم نامحدود الاستیک تحت اثر دو بار یکسان، هم‌راستا و مختلف‌الجهت که با فاصله‌ی مشخص از هم به جسم وارد می‌شوند؛ تنش‌های حاصل از این بارها را به‌دست آوردند. سپس با محاسبه‌ی تنش‌های نرمال و برشی در نقطه‌ای به فاصله‌ی مشخص از محلّ اثر یکی از نیروها که آن را مرکز در نظر گرفتند، این تنش‌ها را به‌عنوان فشار داخلی یکنواخت برای یک کره‌ی توخالی فرض کردند و در نهایت تنش‌های کره‌ی مورد نظر را محاسبه نمودند. آن‌ها در ادامه تنش‌های ایجادشده در اطراف یک حفره‌ی کروی درون یک میله‌ی تحت کشش یکنواخت و هم‌چنین تنش‌های حاصل از تماس دو سطح کروی را به‌دست آوردند. آن‌ها هم‌چنین تنش‌های حرارتی

^۱ Thermal linear expansion coefficient

^۲ Inhomogeneity (Heterogeneity) coefficient

^۳ Power law index

^۴ Timoshenko

^۵ Goodier

کره‌ی همگن توپر و توخالی را محاسبه نمودند. وارن^۱ [۱۸] در ۱۹۶۳ تئوری الاستیسیته‌ی خطی و نیمه استاتیکی را برای کره‌ی تحت بار حرارتی گذرا و متقارن در سطح بیرونی و توزیع دمای متقارن در لایه‌ی درونی، به کار برد و دما، تنش و جابه‌جایی را به دست آورد. در این مطالعه تنش‌های ناشی از گرمایش آیرودینامیکی تجهیزات فراصوتی^۲ که دماغه‌ی آن‌ها به شکل کره و یا نیم کره باشد، مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین برای کره‌های جدار ضخیم و نازک با مقادیر مختلف از نسبت شعاع داخلی به خارجی، بیشینه‌ی تنش‌ها، محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. اُلِتکو^۳ [۱۹] در ۱۹۶۸ با تعمیم الاستیسیته‌ی سه‌بعدی به مسائل متقارن محوری و بهره‌گیری از توابع لژاندر^۴، تنش‌های شعاعی و محیطی را برای کره‌ی توپر تحت بار متمرکز در راستای قطرش و نیز کره‌ی توخالی تحت نیروهای برشی و بار یکنواخت داخلی، به دست آورد. گرو^۵ و تورتلتاوب^۶ [۲۰] در ۱۹۷۲ کره‌ی تحت بار سطحی متمرکز در یک راستای دلخواه را با نوشتن روابط تعادل برای تنش‌های سطحی حل کردند. در این تحقیق شرایط مرزی نوع دوم با استفاده از روش انتگرال‌گیری آلمانسی^۷ حل شده است. آن‌ها همچنین کره‌ی تحت اثر دو بار مساوی و غیر هم‌جهت که در دو نقطه‌ی دلخواه از سطح کره اعمال شده‌اند را بررسی نمودند. پیتکو^۸ [۲۱] در ۱۹۷۳ با توجه به اهمیت استفاده از یاتاقان‌های نگهدارنده در رآکتورها و توربین‌های گازی، یاتاقان‌های دارای ساچمه‌های کروی توخالی و توپر را تحلیل کرد. وی با استفاده از توابع لژاندر، تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها را برای کره‌ی همگن توپر و توخالی تحت بارگذاری نیروی محوری

¹ Warren

² Hypersonic

³ Ulitko

⁴ Legendre functions

⁵ Guerrero

⁶ Turteltaub

⁷ Almansi

⁸ Pit'ko

منفرد محاسبه نمود. نامش^۱ و چرنوپیسکی^۲ [۲۲] در ۱۹۷۴ با فرض غیر خطی بودن رابطه‌ی تنش- کرنش و به‌کارگیری روش تقریب‌های متوالی^۳ تنش‌های حرارتی یک کره‌ی توخالی تحت بار حرارتی آیرودینامیکی را به‌دست آوردند. تانیگاوا^۴ و تاکیوتی^۵ [۲۳] در ۱۹۸۲ تنش‌های حرارتی گذرا و توزیع دما را برای کره‌ی همگن توخالی به‌دست آوردند. جینگو^۶ و نزو^۷ [۲۴] در ۱۹۸۵ برای یک کره‌ی همگن الاستیک تحت دو بار متمرکز، متغیر با زمان، هم‌راستا و غیر هم‌جهت و در راستای قطر کره، با بهره‌گیری از روش محاسبه‌ی تابع تنش^۸، تبدیل لاپلاس^۹ و جداسازی متغیرها و نیز با استفاده از توابع لژاندر جهت توضیح تغییرات در راستای نصف‌النهاری^{۱۰} و توابع بسل^{۱۱} در راستای شعاعی، شکل انتشار موج تنش را به‌صورت تحلیلی و عددی به‌دست آوردند. مک‌لان^{۱۲} [۲۵] در ۱۹۸۹ با فرض وجود شرایط مرزی اولیه‌ی جابه‌جایی در لایه‌ی درونی و با به‌کارگیری بردار هارمونیک کروی^{۱۳} که توسط هیل^{۱۴} [۲۶] مطرح شده است، جابه‌جایی‌های کره‌ی همگن تحت اثر نیروهای حجمی را محاسبه کرد. وی با قراردادن بردارهای هارمونیک مربوط به میدان جابه‌جایی و نیروهای حجمی در معادله‌های ناویر^{۱۵}، آن‌ها را به معادله‌های

¹ Nemish

² Chernopiskii

³ Successive approximations

⁴ Tanigawa

⁵ Takeuti

⁶ Jingu

⁷ Nezu

⁸ Stress function approach

⁹ Laplace transform

¹⁰ Meridional

¹¹ Bessel functions

¹² Mcclung

¹³ Vector spherical harmonic

¹⁴ Hill

¹⁵ Navier's equation

کوشی-اوایلر^۱ تبدیل کرده و آن‌ها را حل نموده است. بورسی^۲ [۲۷] در ۲۰۰۰ در کتاب خود توزیع تنش برای کره‌ی همگن را به‌دست آورد. وی با اعمال بار حرارتی که فقط تابعی از شعاع کره بوده و با فرض اینکه تنها جابه‌جایی ممکن برای نقاط مختلف، فقط جابه‌جایی شعاعی است؛ تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها را برای کره‌های جدار ضخیم و توپر محاسبه کرد. ژیانگ^۳ و سوسا^۴ [۲۸] در ۲۰۰۵ با استفاده از نتایج کار توو^۵ [۲۹] که برای توضیح اختلاف زمانی پاسخ، بین شار گرمایی و گرادیان دما که نشان از یک عدم تعادل ترمودینامیکی می‌باشد، یک رابطه‌ی ماکروسکوپی را ارائه کرده بود؛ و با به‌کارگیری بسط سری تیلور^۶ و نیز صرف نظر از مشتق‌های مرتبه‌ی دو و بالاتر، یک معادله‌ی انتقال حرارت غیر فوریه‌ای را به‌دست آوردند. ایشان با استفاده از حل^۷ این معادله برای کره‌ی جدار ضخیم که دمای اولیه‌ی آن ثابت فرض شده و نیز فاقد چشمه‌ی دمایی^۸ می‌باشد و دمای سطح داخلی و خارجی آن به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند، شکل توزیع دما را به‌دست آوردند. موسایی [۳۰] در ۲۰۰۹ یک کره تحت میدان دمایی متقارن و غیر فوریه‌ای در لایه‌ی داخلی را با به‌کارگیری مواد همگن و همسانگرد و اعمال شرایط مرزی عمومی و مستقل از زمان و نیز با به‌کارگیری روش جداسازی متغیرها و استفاده از توابع لژاندر به‌صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار داد. در این مطالعه جهت حذف ناهمگنی در شرایط مرزی، مسأله ابتدا در حالت پایا^۹ و سپس در حالت گذرا^{۱۰} حل شده است. اسلامی و هتارسکی^{۱۰} [۳۱] در کتاب خود (۲۰۰۹) حل^{۱۰} تحلیلی

¹ Cauchy-Euler equations

² Boresi

³ Jiang

⁴ Sousa

⁵ Tzou

⁶ Taylor-series expansion

⁷ Heat source

⁸ Steady state

⁹ Transient state

¹⁰ Hetnarski

کاملی را برای مسائل ترموالاستیسیته^۱ بیان کرده‌اند. آن‌ها معادله‌های تعادل و حرکت را در مختصات استوانه‌ای و کروی بیان نموده و با استفاده از تابع پتانسیل^۲ جابه‌جایی یک حلّ عمومی را برای آن‌ها بیان کرده‌اند. ایشان مسأله‌ی انتقال حرارت پایا را برای مختصات کروی یک‌بعدی و در ادامه با به‌کارگیری روش جداسازی متغیرها و استفاده از توابع لژاندر، به‌صورت دوبعدی و سه‌بعدی حل نمودند. حلّ تحلیلی و گذرای یک کره‌ی توپر با دمای اولیه‌ی صفر و تحت اثر شار گرمایی در بخشی از سطح و بررسی تنش‌های حرارتی مخزن کروی جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان بار حرارتی و فشار داخلی و خارجی، از دیگر مطالعات آن‌ها می‌باشد.

۱-۶-۲ کره‌ی ناهمگن

اوباتا^۳ و نودا^۴ [۳۲] در ۱۹۹۴ تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه و کره‌ی توخالی FGM^۵ به‌دست آوردند. هورگان^۶ و چان^۷ [۳۳] در ۱۹۹۹ در حالت کرنش صفحه‌ای و به کمک معادله‌های لامه، تنش‌ها را در یک دیسک دوار^۸ ساخته‌شده از مواد FG بررسی کردند. سوگانو^۹ و آنودرا^{۱۰} [۳۴] در ۲۰۰۰ حلّ تحلیلی نیم‌کره‌ی توخالی ساخته‌شده از مواد هدفمند تحت اثر بار حرارتی متقارن در لایه‌ی داخلی و خاجی را با چندلایه‌ای فرض کردن نیم‌کره و استفاده از تعامد توابع ویژه^{۱۱}، تابع پتانسیل و توابع تنش

¹ Thermo-elasticity problems

² Potential function

³ Obata

⁴ Noda

⁵ Functionally Graded Material

⁶ Horgan

⁷ Chan

⁸ Rotating disk

⁹ Sugano

¹⁰ Onodera

¹¹ Eigen functions

پاپکویچ-نیوبر^۱، ارائه کردند و توزیع دمای گذرا و تنش‌های حرارتی را به‌دست آوردند. توتونچو^۲ و ازترک^۳ [۳۵] در ۲۰۰۱ به روش حل بسته^۴، جابه‌جایی‌ها و تنش‌های مخازن استوانه‌ای و کروی ساخته‌شده از مواد هدفمند با توزیع توانی مدول الاستیسیته و تحت فشار یکنواخت داخلی را به‌دست آوردند. آن‌ها همچنین مقایسه‌ای بین توزیع تنش در مخازن کروی همگن و ناهمگن انجام دادند. در مقاله‌ی ایشان رابطه و نمودار تنش محیطی و نمودار تنش شعاعی اشتباه است. ول^۵ و باترا^۶ [۳۶] در ۲۰۰۳ تنش‌های حرارتی گذرای سه‌بعدی را در ورق مستطیلی FG که خصوصیات ماده در جهت ضخامت با سری تیلور بیان می‌شود؛ تحلیل کردند. یو^۷ و همکاران [۳۷] در ۲۰۰۵ یک مخزن کروی تحت فشار را که جنس آن در نزدیکی لایه‌ی داخلی و خارجی همگن و در بین این دو لایه ناهمگن است؛ در نظر گرفتند و تأثیر مدول یانگ^۸ لایه‌ی بیرونی و همچنین مدول یانگ و ابعاد لایه‌ی میانی را بر تغییر شکل و توزیع تنش در مخزن، مورد بررسی قرار دادند. اسلامی و همکاران [۳۸] در ۲۰۰۵ تنش‌های مکانیکی و حرارتی یک‌بعدی را در حالت پایا و به روش مستقیم، برای کره‌ی FG به‌دست آوردند. بابایی و چن^۹ [۳۹] در ۲۰۰۸ انتقال حرارت هدایتی غیر فوری‌ای را در کره‌ی ناهمگن تحت اثر بار حرارتی یک‌بعدی و با تغییر خواص مواد به‌صورت توانی و نیز به‌کارگیری تبدیل لاپلاس و معکوس آن بررسی نمودند. چن و لین^{۱۰} [۴۰] در ۲۰۰۸ حل الاستیک استوانه‌ی جدار ضخیم و مخزن کروی ساخته‌شده از مواد هدفمند با

¹ Papkovitch-Neuber

² Tutuncu

³ Ozturk

⁴ Closed form solution method

⁵ Vel

⁶ Batra

⁷ You

⁸ Young's modulus

⁹ Chen

¹⁰ Lin

تغییرات نمایی خواص و تحت فشار داخلی و خارجی را ارائه نمودند. اسلامی و هتارسکی [۳۱] در کتاب خود (۲۰۰۹) با در نظر گرفتن تغییرات توانی خواص در راستای شعاعی، تنش‌های حرارتی کره‌ی جدار ضخیم ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی را در حالت پایا حل نمودند. ایشان توزیع تنش شعاعی و محیطی، توزیع دما و جابه‌جایی شعاعی را برای مقادیر مختلف از شاخص توانی در کره‌ی FGM تحت فشار و دمای ثابت در سطح داخلی، به دست آوردند. توتونچو و تمل^۱ [۴۱] در ۲۰۰۹ توزیع جابه‌جایی و مقادیر تنش را برای دیسک، استوانه و کره‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی و توانی خواص ماده در راستای شعاعی و تحت فشار داخلی، به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی (PET) و روش تابع متمم^۲ تعیین کردند. لی^۳ و همکاران [۴۲] در ۲۰۰۹ رویکرد تحلیلی جدیدی برای محاسبه‌ی تنش‌های الاستیک مخازن کره‌ی ارائه نمودند. در این رویکرد، خواص ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی پوسته‌ی کره‌ی می‌توانند به‌طور دلخواه با توابع پیوسته و یا تکه‌ای تغییر کنند و حل مسئله‌ی الاستیک منجر به تشکیل یک معادله‌ی انتگرالی می‌گردد که می‌توان آن‌ها را با روش‌های عددی حل نمود. قنّاد و زمانی‌نژاد [۴۳] در ۲۰۱۰ با ارائه‌ی دستگاه معادله‌ی سه‌بعدی بر اساس تحلیل تانسوری، رفتار پوسته‌های جدار ضخیم FGM حاصل از دوران با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر در راستای نصف‌النهاری را بررسی کردند. کلس^۴ و کانکر^۵ [۴۴] در ۲۰۱۱ حل گذرای هدایت حرارتی به‌صورت هذلولوی را برای استوانه و کره‌ی توخالی ناهمگن تشکیل‌شده از مواد هدفمند، با تغییرات نمایی خواص ارائه نمودند. قنّاد و زمانی‌نژاد [۴۵] در ۲۰۱۲ حل تحلیلی کاملی برای پوسته‌های کره‌ی جدار ضخیم ساخته‌شده از مواد FG تحت فشار داخلی و خارجی، ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از روش حل بسته، ریشه‌های حقیقی، مزدوج و

¹ Temel

² Complementary function method

³ Li

⁴ Keles

⁵ Conker

مختلط معادله‌ی حاکم بر مسأله را تعیین و توزیع تنش و جابه‌جایی‌های حاصل از دو روش حلّ تحلیلی و عددی را با یکدیگر مقایسه کردند. زمانی‌نژاد و همکاران [۴۶] در ۲۰۱۲ با به‌کارگیری روش حلّ بسته، تنش‌ها و جابه‌جایی‌های پوسته‌ی کروی جدار ضخیم ساخته‌شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص و تحت فشار داخلی و خارجی را محاسبه نمودند و با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه کردند. بیات و همکاران [۴۷] در ۲۰۱۲ تحلیلی ترمومکانیک^۱ برای کره‌ی توخالی ساخته‌شده از مواد FG با تغییر توانی خواص تحت بارهای مکانیکی و حرارتی پایا و یک‌بعدی انجام دادند. ایشان با فرض شرایط مرزی عمومی مکانیکی و حرارتی در لایه‌ی داخلی و خارجی و توزیع دمای یک‌بعدی در راستای شعاعی، نتایج حلّ تحلیلی و عددی توزیع تنش و جابه‌جایی را با یکدیگر مقایسه کردند. زمانی‌نژاد و همکاران [۴۸] در ۲۰۱۴ حلّ الاستیک و عددی یک کره‌ی توپر ساخته‌شده از مواد هدفمند با تغییرات نمایی خواص و تحت فشار خارجی را ارائه نمودند. زمانی‌نژاد و همکاران [۴۹] در ۲۰۱۶ با فرض تغییرات نمایی خواص در راستای شعاعی حلّ تحلیلی، بسته^۲ و دقیقی را با به‌کارگیری تئوری الاستیسیته و در حالت کرنش صفحه‌ای برای مخازن تحت فشار استوانه‌ای ارائه و تنش‌های شعاعی و محیطی و جابه‌جایی شعاعی حاصل را با نتایج حلّ عددی مقایسه کردند. تهامی و همکاران [۵۰] در ۲۰۱۷ رفتار حرارتی-مکانیکی را برای مخزن کروی ساخته‌شده از مواد هدفمند با تغییرات نمایی خواص -سطح داخلی و خارجی کره به‌ترتیب از جنس آلومینا و آلومینیوم می‌باشد- تحت بار حرارتی متناوب و فشار ثابت در سطح داخلی، بررسی کردند. ایشان همچنین اثر تغییرات فرکانس دمای سیال مخزن بر دامنه‌ی تنش‌ها و کرنش‌ها را بررسی کردند.

^۱ Thermo-mechanical analysis

^۲ Closed-form solution

۷-۱ جمع‌بندی

برای تحلیل کره‌های ضخیم همگن و ناهمگن با جدار ثابت، به گونه‌ای که مسأله از حالت الاستیسیته‌ی یک‌بعدی خارج نشود، می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی استفاده کرد. به دلیل اهمیت تحلیل پوسته‌ها و همچنین ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی آن‌ها و با توجه به اینکه حلّ تحلیلی برای کره‌های جدار ضخیم تحت فشار FG و تحت بار حرارتی گذرا به‌طور هم‌زمان ارائه نشده است، در این پژوهش با ارائه‌ی حلّ تحلیلی برای پوسته‌های کروی جدار ضخیم، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حلّ عددی به‌منظور بررسی صحت نتایج صورت پذیرفته است.

ابتدا در فصل اول این پژوهش، ضمن مرور تئوری پوسته‌های نازک و ضخیم، مطالعات انجام‌شده در خصوص پوسته‌های کروی ارائه شده است. همچنین ضمن تعریف تاریخچه‌ی مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM)، ویژگی‌های آن‌ها بیان شده‌اند. فصل دوم شامل استخراج معادله‌های حاکم بر کره‌های جدار ضخیم با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی برای ماده‌ی همگن تحت بارگذاری فشاری و دمایی گذرا می‌باشد. سپس روش حلّ معادله‌های نهایی بیان و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی آورده شده است. به‌منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، مدل‌سازی عددی کره‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل، با یکدیگر مقایسه شدند.

فصل سوم شامل استخراج معادله‌های حاکم بر کره‌های جدار ضخیم با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی برای ماده‌ی FGM با تغییرات توانی خواص، تحت بارگذاری فشاری و دمایی گذرا می‌باشد. سپس روش حلّ معادله‌های نهایی بیان و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی آورده شده است. به‌منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، مدل‌سازی عددی کره‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل، با یکدیگر مقایسه شده است. نتیجه‌گیری، جمع‌بندی نهایی و ارائه‌ی پیشنهادها در فصل چهارم انجام شده است.

فصل ۲: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی

همگن تحت فشار

۱-۲ پیش‌گفتار

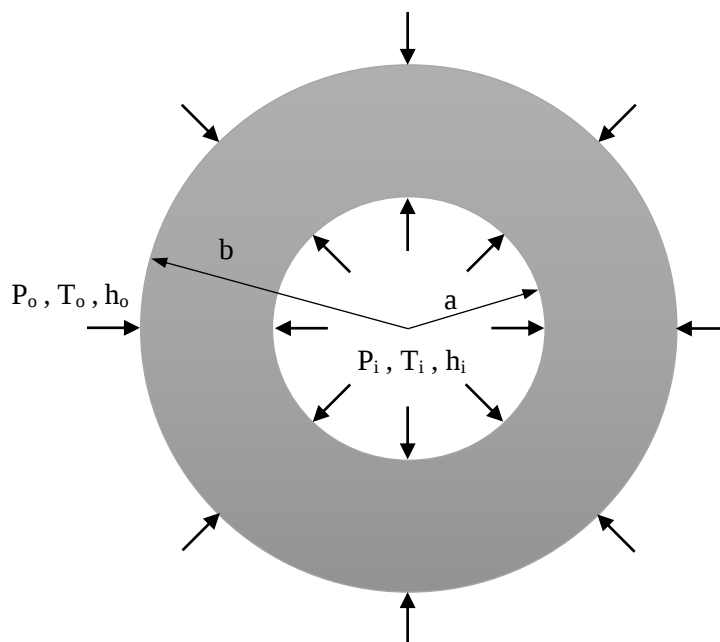
همان‌گونه که در فصل اول نیز بیان شد، نیاز بشر برای یافتن موادی که در حین دارا بودن مقاومت مکانیکی مناسب، دارای مقاومت حرارتی بالا باشند؛ محققان را به سوی استفاده از مواد درجه‌بندی شده‌ی تابعی (FGM) هدایت نمود. در نتیجه حجم عظیمی از پژوهش‌های علمی محققان در سرتاسر جهان به بررسی این مواد از جهت مقاومت مکانیکی و حرارتی، اختصاص یافت. کاربرد گسترده‌ی کره‌های جدار ضخیم ساخته‌شده از مواد FG در صنایع مختلف مانند: سازه‌های مهندسی هسته‌ای، توربین‌ها، مخازن تحت فشار، صنایع هوا فضا، ابزار صنعتی، سیستم‌های تولید انرژی، بال‌ها و بدنه‌ی هواپیما سبب شده است تا تحلیل این پوسته‌ها تحت فشار، حرارت و حتی دوران به‌طور هم‌زمان مورد بررسی قرار بگیرد. از این‌رو در این فصل حلّ عمومی کره‌های جدار ضخیم همگن تحت بارگذاری‌های حرارتی گذرا و فشار یکنواخت داخلی و خارجی صورت پذیرفته است. تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی تحت فشار، با استخراج معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر کره‌های جدار ضخیم تشکیل‌شده از مواد همگن مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت با ارائه‌ی حلّ عددی توسط نرم‌افزار المان محدود Abaqus، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند. ابتدا فرض‌هایی که برای استخراج معادله‌ها در این فصل استفاده شده‌اند؛ بیان می‌شوند:

- (۱) جابه‌جایی‌ها کوچک و در محدوده‌ی الاستیک بررسی شده است.
 - (۲) تغییر شکل‌ها کوچک فرض می‌شود؛ بنابراین از اصل جمع آثار، به‌منظور تحلیل مکانیکی و حرارتی به‌صورت مجزّاء، استفاده شده است.
 - (۳) توزیع دما یک‌بعدی و در جهت شعاعی در نظر گرفته می‌شود.
- در بخش اول این فصل، به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ تحلیلی کره‌های جدار ضخیم تحت فشار و بار حرارتی گذرا ارائه می‌شود و بارگذاری به‌صورت ترکیبی از بار حرارتی و مکانیکی است. توزیع دمای یک‌بعدی با استفاده از روش جداسازی متغیرها، توابع بسل تعمیم‌یافته و بسط تابع ویژه به‌دست می‌آید. برای به‌دست‌آوردن پاسخ عمومی و خصوصی تابع جابه‌جایی شعاعی، به‌ترتیب از معادله‌ی

کوشی-اویلر و روش تغییر پارامترها استفاده شده است. با جایگزینی تابع جابه‌جایی در معادله‌های سینماتیک و سپس ساختاری، به‌ترتیب تنش‌های محیطی و شعاعی به‌دست می‌آیند. توزیع دما، جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های حرارتی در حالت گذرا به‌دست آمده و در راستای شعاعی و برحسب زمان رسم می‌شوند. مقادیر در این تحقیق دلخواه انتخاب می‌شوند تا تأثیر زمان را در توزیع دما، جابه‌جایی و تنش‌ها نشان دهند. در بخش بعد، نحوه‌ی تحلیل عددی با کمک نرم‌افزار اجزای محدود Abaqus بیان و با تعریف یک مسئله، نتایج حاصل از حل تحلیلی و حل عددی، مقایسه و بررسی خواهند شد.

۲-۲ معادله‌ی حرارتی حاکم بر مسئله

یک پوسته‌ی کروی جدار ضخیم همگن تحت بار مکانیکی و حرارتی گذرا در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱-۲) که دستگاه مختصات کروی (r, θ, ϕ) در مرکز آن قرار دارد.



شکل ۱-۲ کروی جدار ضخیم با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b ، تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی و خارجی یکنواخت

مطابق قانون فوریه^۱ در انتقال حرارت و از آنجا که منبع حرارتی^۲ (q) در جسم وجود ندارد و نیز متقارن بودن کره در دو راستای مختصات^۳ θ و φ و نیز همگن بودن ماده، معادله‌ی انتقال حرارت یک‌بعدی و به‌صورت رابطه‌ی (۱-۲) می‌باشد [۵۱].

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 (\gamma T) + q$$

$$q = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\rho c}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-2)$$

در رابطه‌ی (۱-۲)، ثابت‌های ρ ، γ و c به‌ترتیب ضریب هدایت گرمایی، چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه و T و t به‌ترتیب تابع دما و زمان در کره‌ی همگن می‌باشند.

شرایط مرزی و اولیه به‌شکل روابط (۲-۲) و (۳-۲) در نظر گرفته می‌شوند [۴۷].

$$\begin{cases} \gamma \frac{\partial T}{\partial r} = h_i (T - T_i) & \text{on } r = a \\ -\gamma \frac{\partial T}{\partial r} = h_o (T - T_o) & \text{on } r = b \end{cases} \quad (2-2)$$

$$T(r, 0) = f(r) \quad (3-2)$$

در روابط (۲-۲) و (۳-۲) پارامترهای T_o ، T_i ، h_o ، h_i و $f(r)$ به‌ترتیب ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی در سطح داخلی و خارجی، دما در محیط داخلی و خارجی و توزیع دما در زمان صفر برای کره را نشان می‌دهند. در این فصل تمامی این پارامترها ثابت فرض می‌شوند.

¹ Fourier's law

² Heat source

³ Double axisymmetric

۳-۲ حل معادله انتقال حرارت

جهت حل معادله دیفرانسیل (۱-۲) که یک معادله خطی می باشد، از روش جداسازی متغیرها استفاده می شود. با کمک بسط توابع ویژه و استفاده از شرط تعامد آنها نسبت به تابع وزنی^۱، مجهول های مسئله به دست می آیند [۵۲].

از بسط دادن معادله (۱-۲)، معادله (۴-۲) به دست می آید.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\rho c}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4-2)$$

یکی از شرایط استفاده از روش جداسازی متغیرها، وجود شرایط مرزی همگن در یک راستای مختصاتی است. معادله دیفرانسیل (۴-۲)، نسبت به شعاع کره از درجه ی ۲ بوده و بنابراین نیاز به دو شرط مرزی همگن در این راستا می باشد. شرایط مرزی بیان شده در رابطه ی (۲-۲)، در راستای r ، همگن نیستند و نیاز به همگن سازی این شرایط می باشد. جهت انجام این مهم می توان مسئله را ابتدا در حالت پایا و سپس گذرا حل نمود و پاسخ نهایی را از مجموع حالت پایا و گذرا به دست آورد. بنابراین مطابق رابطه ی (۵-۲)، تابع دما به دو بخش: حالت پایا $(T_s(r))$ و حالت گذرا $(\Phi(r, t))$ تقسیم می شود [۳۱].

$$T(r, t) = T_s(r) + \Phi(r, t) \quad (5-2)$$

۱-۳-۲ محاسبه ی توزیع دما در حالت پایا

در حالت پایا مسئله نسبت به زمان تغییرات ندارد، بنابراین $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. با جای گذاری در رابطه ی (۴-۲):

$$\text{Steady state: } T(r, t) = T_s(r) \rightarrow \frac{d^2 T_s}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT_s}{dr} = 0$$

¹ Weight function

$$\rightarrow T_s(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (6-2)$$

شرایط مرزی لازم برای محاسبه‌ی ثابت‌های مجهول رابطه‌ی (۶-۲)، از شرایط مرزی (۲-۲) به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} \gamma \frac{dT_s}{dr} = h_i (T_s - T_i) & \text{on } r = a \\ -\gamma \frac{dT_s}{dr} = h_o (T_s - T_o) & \text{on } r = b \end{cases} \quad (7-2)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۶-۲) در شرایط مرزی (۷-۲):

$$C_1 = \frac{T_i - T_o}{\gamma \left[\frac{1}{b^r h_o} + \frac{1}{a^r h_i} \right] - \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right]} \quad (8-2)$$

$$C_2 = \frac{\left[\frac{\gamma}{b^r h_o} - \frac{1}{b} \right] T_i + \left[\frac{\gamma}{a^r h_i} + \frac{1}{a} \right] T_o}{\gamma \left[\frac{1}{b^r h_o} + \frac{1}{a^r h_i} \right] - \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right]} \quad (9-2)$$

۲-۳-۲ محاسبه‌ی توزیع دما در حالت گذرا

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۵-۲) در رابطه‌ی (۴-۲) توزیع دما در حالت گذرا به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\rho c}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (10-2)$$

شرایط مرزی و اولیه‌ی مربوط به معادله‌ی دیفرانسیل (۱۰-۲) مطابق روابط (۱۱-۲) و (۱۲-۲) می‌باشد.

$$\begin{cases} \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} = h_i \Phi & \text{on } r = a \\ -\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} = h_o \Phi & \text{on } r = b \end{cases} \quad (11-2)$$

$$\Phi(r, \cdot) = f(r) - T_s(r) \quad (12-2)$$

معادله‌ی دیفرانسیل (۱۰-۲) را با توجه به شرایط مرزی (۱۱-۲) می‌توان به روش جداسازی متغیرها حل نمود. بنابراین:

$$\Phi(r, t) = F(r)G(t) \quad (13-2)$$

جای‌گذاری رابطه‌ی (۱۳-۲) در (۱۰-۲):

$$\frac{1}{F} \left(F'' + \frac{\gamma}{r} F' \right) = \frac{\rho c}{\gamma} \frac{\dot{G}}{G} = -\lambda^2$$

$$F'' + \frac{\gamma}{r} F' + \lambda^2 F = 0 \quad (14-2)$$

$$\dot{G} + \frac{\gamma}{\rho c} \lambda^2 G = 0 \quad (15-2)$$

شرایط مرزی مربوط به معادله‌ی دیفرانسیل (۱۴-۲) به صورت رابطه‌ی (۱۶-۲) است.

$$\begin{cases} \gamma \frac{dF}{dr} = h_i F & \text{on } r = a \\ -\gamma \frac{dF}{dr} = h_o F & \text{on } r = b \end{cases} \quad (16-2)$$

با استفاده از تغییر تابع و تغییر متغیرهای مناسب، معادله‌ی دیفرانسیل (۱۴-۲) به کمک توابع بسل قابل حل خواهد بود.

ابتدا با استفاده از تغییر تابع $F(r) = r^{-\frac{1}{2}} g(r)$ و جای‌گذاری در معادله‌ی (۱۴-۲)، رابطه‌ی (۲-۱۷) به دست می‌آید.

$$r^{\frac{1}{2}}g'' + rg' + \left(\lambda^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\right)g = 0. \quad (17-2)$$

در ادامه با استفاده از تغییر متغیر $z = \lambda r$ و جای گذاری در رابطه‌ی (۱۷-۲):

$$z^{\frac{1}{2}} \frac{d^2 g}{dz^2} + z \frac{dg}{dz} + \left(z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\right)g = 0. \quad (18-2)$$

تذکر: در رابطه‌ی (۱۸-۲) متغیر z به صورت محلی تعریف شده و فقط برای حل معادله از آن استفاده می‌شود و در ادامه نیز برخی متغیرها و توابع صرفاً جهت حل معادله‌ها به کار گرفته می‌شوند. رابطه‌ی (۱۸-۲)، یک معادله‌ی بسل است؛ بنابراین پاسخ عمومی این معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$g(z) = C_r'' J_{\frac{1}{2}}(z) + C_r'' Y_{\frac{1}{2}}(z) \quad (19-2)$$

با توجه به ویژگی‌های تابع‌های بسل نوع اول و دوم، روابط (۲۰-۲) و (۲۱-۲) قابل اثبات می‌باشد.

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}} \quad (20-2)$$

$$Y_{\frac{1}{2}}(z) = -J_{-\frac{1}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}} \quad (21-2)$$

با جای گذاری روابط (۲۰-۲) و (۲۱-۲) در رابطه‌ی (۱۹-۲)، تابع $g(r)$ و در نتیجه $F(r)$ محاسبه می‌گردد.

$$F(r) = C_r \frac{\sin(\lambda r)}{r} + C_r \frac{\cos(\lambda r)}{r} \quad (22-2)$$

ثابت‌های مجهول رابطه‌ی (۲۲-۲) از شرایط مرزی (۱۶-۲) به دست می‌آید.

$$\left[\gamma \lambda \cos(a\lambda) - \left(\frac{\gamma}{a} + h_i \right) \sin(a\lambda) \right] C_r - \left[\gamma \lambda \sin(a\lambda) + \left(\frac{\gamma}{a} + h_i \right) \cos(a\lambda) \right] C_r = 0.$$

$$\left[\left(\frac{\gamma}{b} - h_o \right) \sin(b\lambda) - \gamma \lambda \cos(b\lambda) \right] C_r + \left[\left(\frac{\gamma}{b} - h_o \right) \cos(b\lambda) + \gamma \lambda \sin(b\lambda) \right] C_r = 0.$$

برای اینکه جوابی غیر از صفر برای دستگاه معادله‌ی فوق وجود داشته باشد، باید دترمینان ضرایب برابر صفر شود که در نتیجه‌ی آن مقادیر ویژه‌ی λ_n محاسبه شده و تابع $F(r)$ برحسب بی‌نهایت توابع ویژه بسط داده می‌شود.

$$F(r) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \sin(\lambda_n r) + B'_n \cos(\lambda_n r)] \quad (23-2)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۵-۲) بخش زمانی پاسخ مسأله محاسبه می‌گردد.

$$\frac{\dot{G}}{G} = -\frac{\gamma}{\rho c} \lambda_n^r \rightarrow G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{\rho c} \lambda_n^r t} \quad (24-2)$$

اکنون با جای‌گذاری روابط (۲۳-۲) و (۲۴-۲) در رابطه‌ی (۱۳-۲) پاسخ حالت گذرا مشخص می‌شود.

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(\lambda_n r) + B_n \cos(\lambda_n r)] e^{-\frac{\gamma}{\rho c} \lambda_n^r t} \quad (25-2)$$

۳-۳-۲ محاسبه‌ی تابع وزنی

جهت محاسبه‌ی مجهول‌های A_n و B_n در رابطه‌ی (۲۵-۲) از تعامد توابع ویژه نسبت به تابع وزنی استفاده می‌شود. در این بخش چگونگی محاسبه‌ی تابع وزنی به کمک معادله‌ی اشتورم-لیویل^۱ توضیح داده می‌شود.

^۱ Sturm-Liouville

شکل کلی معادله‌ی اشتورم-لیویل مطابق رابطه‌ی (۲۶-۲) است [۵۲].

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0 \quad (26-2)$$

در رابطه‌ی (۲۶-۲)، $w(x)$ را تابع وزنی گویند.

هر معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی ۲ و همگن مانند رابطه‌ی (۲۷-۲) با استفاده از روابط (۲)-۲-

(۲۸) تا (۳۰-۲)، قابل تبدیل به معادله‌ی اشتورم-لیویل می‌باشد.

$$a_r(x) \frac{d^r y}{dx^r} + a_l(x) \frac{dy}{dx} + [a_r(x) + \lambda a_r(x)] y = 0 \quad (27-2)$$

$$p(x) = e^{\int \frac{a_l(x)}{a_r(x)} dx} \quad (28-2)$$

$$q(x) = \frac{a_r(x)}{a_l(x)} p(x) \quad (29-2)$$

$$w(x) = \frac{a_r(x)}{a_l(x)} p(x) \quad (30-2)$$

با مقایسه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل (۲-۱۴) که حالت خاصی از معادله‌ی دیفرانسیل اشتورم-لیویل

می‌باشد؛ و رابطه‌ی (۲۷-۲) و استفاده از رابطه‌های (۲۸-۲) تا (۳۰-۲) تابع وزنی موردنظر به‌دست

می‌آید.

$$w(r) = r^2 \quad (31-2)$$

استفاده از روش جداسازی متغیرها برای پیدا کردن پاسخ معادله‌ی اشتورم-لیویل، به یک مسأله‌ی

مقدار ویژه ختم می‌شود. تابع پاسخ، برحسب توابع ویژه‌ی محاسبه‌شده، بسط داده می‌شود و همچنین

توابع ویژه نسبت به تابع وزنی معادله‌ی اشتورم-لیویل متعامد هستند.

۲-۳-۴ محاسبه‌ی ثابت‌های مجهول معادله‌ی انتقال حرارت گذرا

با اعمال شرط مرزی (۲-۱۲) در رابطه‌ی (۲-۲۵):

$$f(r) - T_s(r) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(\lambda_n r) + B_n \cos(\lambda_n r)] \quad (۲-۳۲)$$

با ضرب دو طرف رابطه‌ی (۲-۳۲) در تابع ویژه‌ی $\frac{\sin(\lambda_m r)}{r}$ و تابع وزنی $w(r) = r^{\gamma}$ و نیز انتگرال -

گیری در بازه‌ی $a < r < b$ و با استفاده از تعامد توابع ویژه نسبت به تابع وزنی، A_n محاسبه می‌گردد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b [f(r) - T_s(r)] \sin(\lambda_n r) r dr \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \int_a^b \sin^{\gamma}(\lambda_n r) dr \right\}$$

$$A_n = \frac{\int_a^b [f(r) - T_s(r)] \sin(\lambda_n r) r dr}{\int_a^b \sin^{\gamma}(\lambda_n r) dr} \quad (۲-۳۳)$$

برای محاسبه‌ی B_n مشابه روند فوق عمل می‌شود. با این تفاوت که دو طرف رابطه‌ی (۲-۳۲)

در تابع ویژه‌ی $\frac{\cos(\lambda_m r)}{r}$ و تابع وزنی $w(r) = r^{\gamma}$ ضرب می‌شود.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b [f(r) - T_s(r)] \cos(\lambda_n r) r dr \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B_n \int_a^b \cos^{\gamma}(\lambda_n r) dr \right\}$$

$$B_n = \frac{\int_a^b [f(r) - T_s(r)] \cos(\lambda_n r) r dr}{\int_a^b \cos^{\gamma}(\lambda_n r) dr} \quad (۲-۳۴)$$

توزیع دما در کره‌ی همگن جدار ضخیم با رابطه‌ی (۲-۳۵) بیان می‌گردد.

$$T(r, t) = \frac{C_1}{r} + C_2 + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(\lambda_n r) + B_n \cos(\lambda_n r)] e^{-\frac{\gamma}{\rho c} \lambda_n^2 t} \quad (۲-۳۵)$$

۲-۴ روابط ترموالاستیک

به‌علت تقارن در دو راستای مختصاتی در کره، جابه‌جایی‌ها و تغییرات در دو راستای θ و φ ، برابر صفر در نظر گرفته می‌شود (به عبارت دیگر: $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$, $\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$, $u_\varphi = 0$, $u_\theta = 0$). هم‌چنین جابه‌جایی شعاعی فقط تابعی از شعاع کره و زمان می‌باشد. از شش عنصر تانسور کرنش در معادله‌های سینماتیک (با توجه به متقارن بودن کره) تنها سه عنصر روی قطر اصلی تانسور کرنش مخالف صفر می‌باشند و رابطه‌ی آن‌ها با جابه‌جایی‌ها مطابق روابط (۳۶-۲) به‌دست می‌آید [۴۷].

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} \quad (36-2)$$

از شش عنصر تانسور تنش در معادله‌های ساختاری نیز تنها عناصر روی قطر اصلی تانسور تنش مخالف صفر می‌باشند و می‌توان رابطه‌ی تنش‌های شعاعی و محیطی با کرنش‌های شعاعی و محیطی را مطابق رابطه‌ی (۳۷-۲) بیان نمود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & 2B \\ B & A+B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi \end{Bmatrix} - E \begin{Bmatrix} C \\ C \end{Bmatrix} \alpha \Delta T \quad (37-2)$$

که در این رابطه α ضریب انبساط حرارتی کره می‌باشد و ثابت‌های A ، B و C مطابق رابطه‌ی (۳۸-۲) بیان می‌شوند.

$$A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C = \frac{1}{1-2\nu} \quad (38-2)$$

هم‌چنین پارامتر ΔT با رابطه‌ی (۳۹-۲) بیان می‌شود.

$$\Delta T = T(r, t) - T_\infty \quad (39-2)$$

که در آن T_∞ ، دمای مرجع^۱ نامیده می‌شود.

¹ Reference temperature

با توجه به رابطه‌ی (۳۷-۲):

$$\sigma_r = E[A\varepsilon_r + \nu B\varepsilon_\theta - C\alpha \Delta T] \quad (۴۰-۲)$$

$$\sigma_\theta = E[B\varepsilon_r + (A+B)\varepsilon_\theta - C\alpha \Delta T] \quad (۴۱-۲)$$

از سه معادله‌ی تعادل، تنها یک معادله‌ی آن باید ارضا شود و سایر معادله‌ها خودبه‌خود ارضا می‌شوند و این معادله، مطابق رابطه‌ی (۴۲-۲) به‌دست می‌آید.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\nu}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (۴۲-۲)$$

با توجه به روابط (۳۶-۲)، (۳۷-۲) و (۴۲-۲)، ۷ معادله و ۷ مجهول وجود دارد؛ بنابراین می‌توان مجهول‌های مسأله را محاسبه نمود.

با جای‌گذاری روابط (۳۶-۲) در رابطه‌های (۴۰-۲) و (۴۱-۲) و نتیجه‌ی آن در رابطه‌ی (۴۲-۲):

$$u_r'' + \frac{\nu}{r}u_r' - \frac{\nu}{r^2}u_r = \frac{C\alpha}{A} \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) \right] = \frac{C\alpha}{A} \frac{dT}{dr} \quad (۴۳-۲)$$

$$I = \int r^2 T(r, t) dr = \frac{C_1}{2} r^2 + \frac{C_2}{3} r^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left[\left(\frac{A_n}{\lambda_n} + B_n r \right) \sin(\lambda_n r) + \left(\frac{B_n}{\lambda_n} - A_n r \right) \cos(\lambda_n r) \right] e^{-\frac{\gamma}{\rho c} \lambda_n^2 t} \quad (۴۴-۲)$$

از حلّ رابطه‌ی (۴۳-۲) و با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۴۴-۲)، جابه‌جایی شعاعی به‌دست می‌آید.

$$u_r(r, t) = C_\delta r + \frac{C_\epsilon}{r^2} + \frac{C\alpha}{A} \frac{I}{r^2} \quad (45-2)$$

با محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی، ابتدا با استفاده از معادله‌های سینماتیک، کرنش‌ها و سپس با به‌کارگیری معادله‌های ساختاری تنش‌ها برحسب شعاع کره و زمان به‌دست می‌آیند. در نهایت ثابت‌های مجهول C_δ و C_ϵ ، با اعمال شرایط مرزی تنشی در لایه‌ی داخلی و خارجی کره محاسبه می‌شوند.

برای ساده‌سازی در روابط پارامتر v^* به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$v^* = \frac{B}{A} \quad (46-2)$$

بنابراین تنش‌های شعاعی و محیطی برحسب شعاع کره و زمان به‌صورت رابطه‌های (47-2) و (48-2) محاسبه می‌گردند.

$$\sigma_r(r, t) = E \left[(A + 2B)C_\delta - \frac{2(A-B)}{r^2} C_\epsilon + C\alpha \left(T_\infty - 2(1-v^*) \frac{I}{r^2} \right) \right] \quad (47-2)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = E \left[(A + 2B)C_\delta + \frac{(A-B)}{r^2} C_\epsilon + C\alpha \left(T_\infty - (1-v^*) \left(T - \frac{I}{r^2} \right) \right) \right] \quad (48-2)$$

در کره‌ی مورد مطالعه شرایط مرزی تنشی به‌شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=a} &= -P_i \\ \sigma_r|_{r=b} &= -P_o \end{aligned} \quad (49-2)$$

با اعمال شرایط مرزی تنشی بر رابطه‌ی (47-2)، ثابت‌های مجهول C_δ و C_ϵ به‌صورت رابطه‌ی

$$(50-2) \text{ به‌دست می‌آیند که در این رابطه: } I_a = I|_{r=a} \text{ و } I_b = I|_{r=b}.$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_{\Delta} &= \frac{1}{(A + rB)(b^r - a^r)} \left[\frac{1}{E} (a^r P_i - b^r P_o) - C\alpha [(b^r - a^r) T_{\infty} - r(1 - \nu^*)(I_b - I_a)] \right] \\ C_{\epsilon} &= \frac{1}{r(A - B)(b^r - a^r)} \left[\frac{a^r b^r}{E} (P_i - P_o) - r(1 - \nu^*) C\alpha (b^r I_a - a^r I_b) \right] \end{aligned} \right. \quad (50-2)$$

با محاسبه‌ی ثابت‌های مجهول در رابطه‌ی فوق و جای‌گذاری آن‌ها در روابط، تنش‌ها، کرنش‌ها و

جابه‌جایی‌ها به‌دست می‌آیند.

۵-۲ تحلیل اجزای محدود

تحلیل‌های مهندسی شامل سه روش عمده‌ی تحلیلی، عددی و تجربی می‌باشند. روش‌های تحلیلی، روش‌هایی هستند که منجر به یافتن حلّ ریاضی به‌صورت پیوسته در دامنه‌ی حل می‌گردند. واقعیت این است که رسیدن به حلّ دقیق بسیار وابسته به شرایط مرزی مسأله از جمله: هندسه، بارگذاری، قیدها و ... می‌باشد؛ بنابراین یافتن چنین روش‌هایی برای تمام مسائل امکان‌پذیر نمی‌باشد. در طول تاریخ مهندسی، گاهی اوقات به‌دست‌آوردن یک جواب دقیق برای مسأله بسیار سخت و مشکل بوده تا حدّی که در برخی موارد باعث توقف انجام تحقیق خاصی می‌شده است. روش‌های تجربی نیز بخش مهمی از تحلیل‌های مهندسی را تشکیل داده‌اند اما به‌علت هزینه‌های بالا و سختی‌های آزمایشگاهی، همواره امکان استفاده از آن‌ها وجود نخواهد داشت. لذا در این میان، روش‌های عددی بخش ناگزیری از تحلیل‌های مهندسی را تشکیل داده‌اند.

تحلیل المان محدود نیز از جمله تحلیل‌های عددی می‌باشد و حلّ عددی تقریبی معادله‌ها با مشتقات جزئی و معادله‌های انتگرالی موضوع اصلی این علم است. ویژگی آن نسبت به دیگر روش‌ها در دسته‌بندی دامنه‌ی جسم به دامنه‌های ساده‌تر با نام **المان‌های محدود** است. این عمل باعث می‌شود که هندسه‌های سخت و پیچیده به یک مجموعه هندسه‌های ساده‌تر که حلّ آن آسان می‌باشد، تبدیل

شود. هر المان از نقاطی که متعلق به کلّ جسم است، تشکیل می‌شود و هر نقطه بین چند المان مشترک است؛ که در معادله‌های تعادل تمام آن المان‌ها شرکت می‌کنند. این امر باعث برقراری شرط پیوستگی بین المان‌های کلّ جسم در هنگام حلّ دستگاه معادله‌های سفتی می‌شود. المان‌های مختلفی برای شرایط هندسی و بارگذاری متفاوت در تحلیل‌ها استفاده می‌شوند، که برای مثال می‌توان به دو دسته زیر اشاره کرد:

(۱) المان تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای: برای حالتی که مسأله‌ی مورد نظر دارای هندسه‌ی دوبعدی بوده و بارگذاری درون صفحه‌ای داشته باشد. این المان جابه‌جایی درون صفحه‌ای جسم را بررسی می‌کند.

(۲) المان خمش صفحه‌ای: این المان برای حالتی که ورق تحت بارگذاری خارج صفحه است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این المان برای پوسته‌ها و رویه‌های فضایی مناسب است، که علاوه بر خیز، شیب در دو جهت محورهای اصلی ورق را محاسبه می‌کند.

روش اجزای محدود برای مسائل پیچیده، که امکان به‌دست‌آوردن حلّ دقیق یا حلّ تحلیلی در آن امکان‌پذیر نیست، گزینه‌ی مناسبی است.

در این تحقیق از روش اجزای محدود برای بررسی صحتّ نتایج حلّ تحلیلی استفاده شده است؛ ولی در شرایطی که حلّ دقیق یا حلّ تحلیلی مورد تأیید در مراجع، برای مسأله وجود دارد؛ مانند کشش ساده‌ی ورق بلند همگن با گشودگی دایروی، مقایسه‌ی حلّ تحلیلی و اجزای محدود می‌تواند معیاری برای درستی تحلیل عددی باشد. این مقایسه، در این تحقیق انجام شده و با دقتّ قابل قبولی روند حلّ اجزای محدود مورد تأیید قرار گرفت.

۲-۵-۱ معرفی نرم‌افزار آباکوس

هنگامی که هندسه‌ی مسأله پیچیده و بزرگ باشد، استفاده از روش اجزای محدود به‌صورت دستی بسیار سخت و طاقت‌فرسا بوده و به‌طور قطع منشأ ایجاد خطا خواهد بود. به همین دلیل در سال‌های اخیر با

پیشرفت روزافزون تکنولوژی، استفاده از رایانه برای انجام محاسبات، مورد استقبال قرار گرفت و نرم-افزارهای مختلفی بر پایه‌ی زبان‌های برنامه‌نویسی وارد بازار شدند.

امروزه المان محدود به‌عنوان روشی ضروری و حیاتی برای تحلیل‌های سازه‌ای، تحلیل‌های انتقال حرارت، تحلیل‌های الکترومغناطیس و غیره پذیرفته شده است. روش اجزای محدود یا روش المان‌های محدود که به اختصار FEM^۱ نامیده می‌شود، روشی عددی برای حل تقریبی معادله‌های دیفرانسیل جزئی و نیز حل انتگرال‌ها است. در عصر کنونی استفاده از روش المان محدود در تحلیل مسائل پیچیده در صنایع گوناگون برای کاهش زمان و هزینه و افزایش بهره‌وری گسترش فراوانی یافته است و در میان نرم‌افزارهایی که از این روش استفاده می‌کنند نرم‌افزار Abaqus از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. نرم‌افزار Abaqus یک نرم‌افزار تجاری برای تحلیل المان محدود و مهندسی به کمک کامپیوتر است که در ابتدا در سال ۱۹۷۸ به‌منظور حل یک مسأله‌ی المان محدود، به زبان فورترن^۲ در ۱۵۰۰۰ خط نوشته شد. در سال ۲۰۰۵ آباکوس توسط شرکت Dassault Systemes خریداری گردید و نشان SIMULIA با هدف دارابودن تمام نرم‌افزارها و محصولات شبیه‌سازی این شرکت مانند آباکوس و کتیا (CATIA) تأسیس شد. اسم و لگوی نرم‌افزار آباکوس بر اساس چرتکه (abacus) است که در گذشته برای محاسبه مورد استفاده قرار می‌گرفته است.

Simulia Abaqus یک مجموعه‌ی قدرتمند از برنامه‌های شبیه‌سازی مهندسی بر پایه‌ی روش المان محدود است که می‌تواند مسأله‌هایی از آنالیز خطی نسبتاً ساده تا مسأله‌های پیچیده و سخت شبیه‌سازی‌های غیر خطی را حل کند. این نرم‌افزار مجموعه‌ای بزرگ از المان‌ها را شامل می‌شود که می‌تواند هر هندسه‌ای را مدل کند. همچنین آباکوس دارای یک مجموعه‌ی کامل از مدل‌های مواد را دارا می‌باشد که می‌تواند رفتار بسیاری از مواد رایج مهندسی از جمله: لاستیک، پلیمرها، کامپوزیت‌ها،

^۱ Finite Element Method

^۲ Fortran

بتن تقویت شده، فوم‌های انعطاف‌پذیر و تراکم‌پذیر، یا مواد تشکیل‌دهنده‌ی پوسته‌ی زمین مثل خاک و صخره را شبیه‌سازی کند. آباکوس به‌عنوان یک ابزار شبیه‌سازی همه‌کاره‌ی طراحی، مطرح شده است. این نرم‌افزار در تحلیل مسائل ساختاری (تنش-کرنش) و در سطوح مختلف مانند: انتقال حرارت، انتقال جرم، کنترل حرارت اجزای الکتریکی، تحلیل اصوات، مکانیک خاک و آنالیز پیزوالکتریک به‌کار گرفته می‌شود. از دیگر کاربردهای آباکوس: تحلیل شکست قطعات و بررسی مکانیزم رشد ترک، تحلیل بارگذاری‌های دینامیکی به‌روی سازه‌ها و تحلیل پیش‌بینی تخریب ناشی از زمین لرزه و کاربردها فراوانی دیگر مکانیک و هوا فضا می‌باشد.

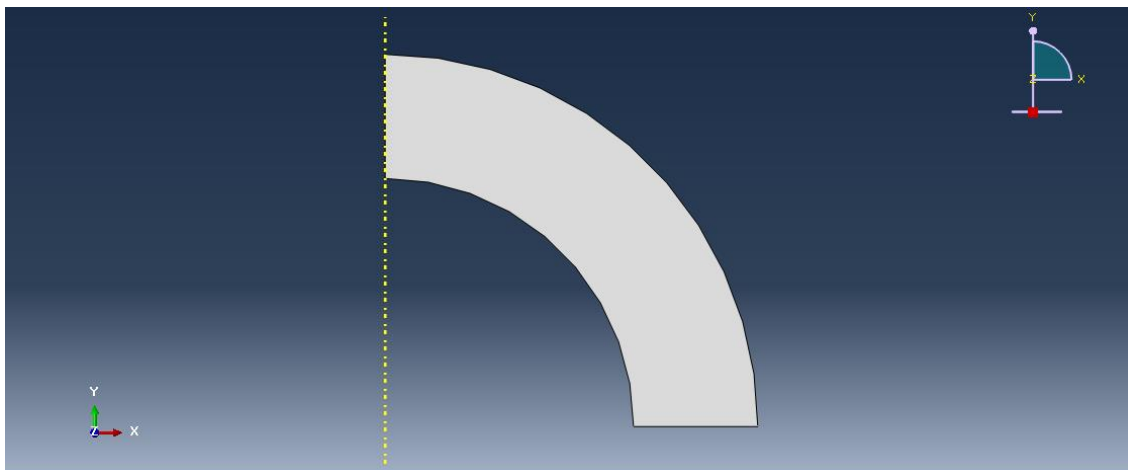
۲-۵-۲ مدل‌سازی کره‌ی همگن جدار ضخیم

در نرم‌افزار آباکوس جهت تحلیل عددی سازه‌ی مورد نظر ابتدا باید هندسه‌ی آن در نرم‌افزار مدل‌سازی شود. همان‌گونه که در شکل ۲-۲ مشخص است؛ به‌علت تقارن موجود در کره، تنها مقطع عرضی یک‌چهارم (ربع) کره مدل‌سازی شده است.

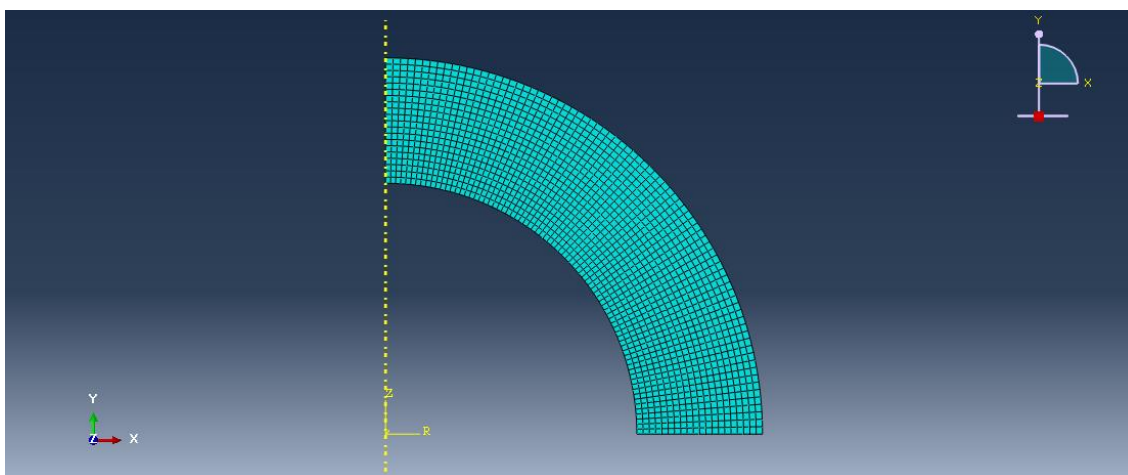
جهت المان‌بندی کره، المان استاندارد با مقطع چهارضلعی دارای ۸ گره^۱ (۴ گره در رؤوس و ۴ گره در وسط اضلاع) انتخاب شده است که درجه‌ی آزادی^۲ هر گره ۲ (یکی در راستای شعاعی و دیگری در راستای محیطی) می‌باشد. این المان از نوع Axisymmetric و Coupled Temperature-Displacement می‌باشد که به اختصار CAX8RT نامیده می‌شود. اندازه‌ی هر المان در راستای شعاعی و محیطی برابر ۰/۰۰۰۵ m و تعداد آن‌ها برابر ۶۲۸۰ می‌باشد. شکل ۲-۳ چگونگی المان‌بندی را در نرم‌افزار آباکوس نمایش می‌دهد.

^۱ Node

^۲ Degrees of freedom



شکل ۲-۲ هندسه‌ی مقطع عرضی کره‌ی همگن جدار ضخیم مدل شده در نرم‌افزار آباکوس



شکل ۲-۳ نمایی از مش‌بندی مقطع عرضی کره‌ی همگن در نرم‌افزار آباکوس

۲-۶ مطالعه‌ی موردی

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست‌آمده از نتایج حل تحلیلی و عددی، یک کره‌ی ضخیم همگن و همسانگرد با ضخامت ثابت و بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا مطابق شکل ۲-۱ به شعاع داخلی $a = 40 \text{ mm}$ و شعاع خارجی $b = 60 \text{ mm}$ در نظر گرفته می‌شود. مدول الاستیسیته، چگالی، هدایت گرمایی، ظرفیت گرمایی ویژه و ضریب انبساط حرارتی در کره به ترتیب برابر مقادیر $E = 200 \text{ GPa}$ ، $\rho = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ، $\gamma = 60/5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$ ، $c = 434 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{C}}$ و $\alpha = 1/2 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{C}}$ هستند و نسبت پواسون ثابت و برابر $\nu = 0/3$ می‌باشد. کره تحت فشار یکنواخت داخلی $P_i = 80 \text{ MPa}$ و خارجی $P_o = 80 \text{ MPa}$ قرار دارد و دمای محیط اطراف سطح داخلی و خارجی آن، ثابت و به ترتیب برابر

$T_i = 125^\circ\text{C}$ و $T_o = 25^\circ\text{C}$ و همچنین دمای مرجع برابر $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی در سطح داخلی و خارجی آن بسیار بزرگ ($h_i, h_o \rightarrow \infty$) می‌باشد. همچنین دمای اولیه‌ی کره ثابت فرض می‌شود و مقدار آن 25°C می‌باشد؛ بنابراین: $f(r) = 25^\circ\text{C}$. حلّ تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 2018 صورت گرفته است.

برای حلّ کره‌ی تحت بارگذاری ترکیبی می‌توان با در نظر گرفتن اثر هر کدام از جملات حاصل از بارگذاری‌های حرارتی و فشاری به‌تنهایی و محاسبه‌ی مقادیر جابه‌جایی و تنش حاصل از هر بارگذاری، در نهایت با استفاده از اصل جمع آثار مقادیر مربوط به جابه‌جایی‌های شعاعی و نیز تنش‌های محیطی و شعاعی حاصل از بارگذاری ترکیبی را به‌دست آورد.

۷-۲ بررسی نتایج

در این بخش نتایج مربوط به حلّ تحلیلی با نتایج عددی حاصل از روش اجزای محدود در کره‌ی همگن تحت بارگذاری‌های حرارتی و فشاری مقایسه شده است.

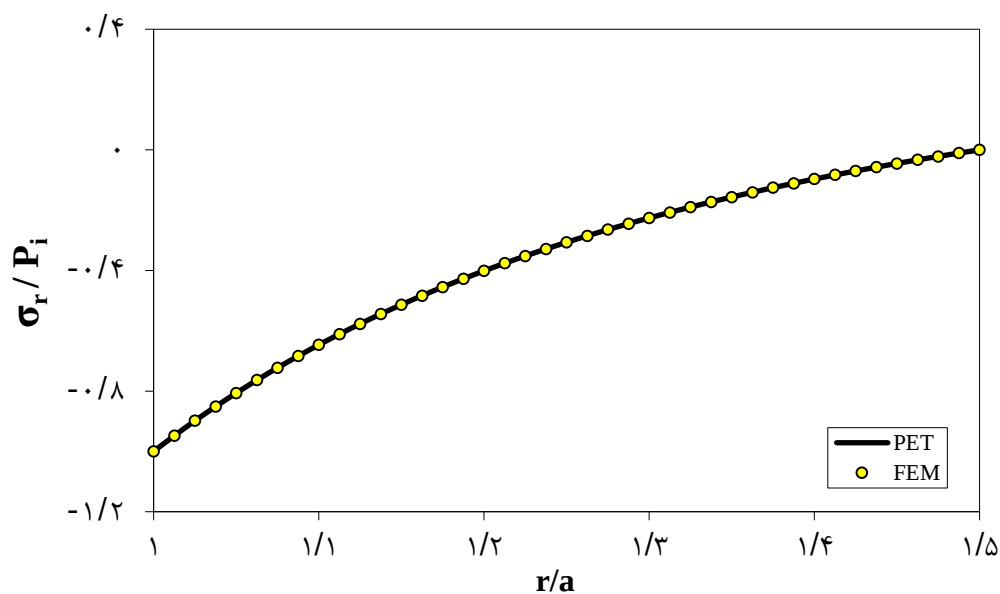
۷-۲-۱ مقایسه‌ی نتایج

شکل ۴-۲ تا شکل ۲۹-۲ توزیع دما، تنش شعاعی، تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد محاسبه‌شده با روش‌های FE^۱ و تحلیلی را برای بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و ترکیبی و در راستای ضخامت کره و همچنین برحسب زمان نشان می‌دهند.

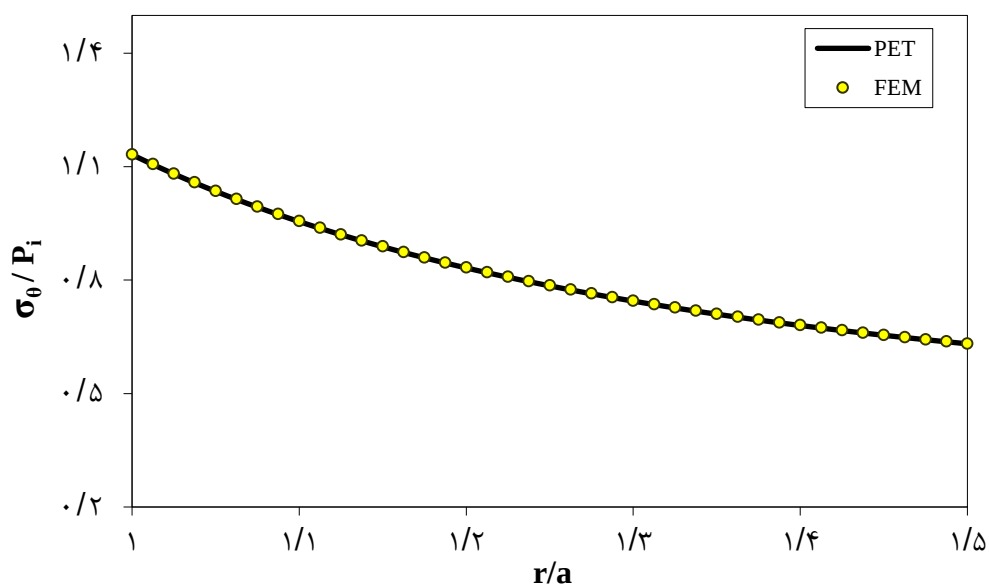
در شکل ۴-۲ تا شکل ۶-۲ کره فقط تحت فشار داخلی قرار گرفته است. در این بارگذاری قدرمطلق مقادیر تنش شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی با شیب نسبتاً زیاد کاهش می‌یابد و همواره مقادیر آن، منفی هستند. مقادیر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی با شیب ملایم کاهش می‌یابند و همواره مثبت‌اند.

^۱ Finite Element

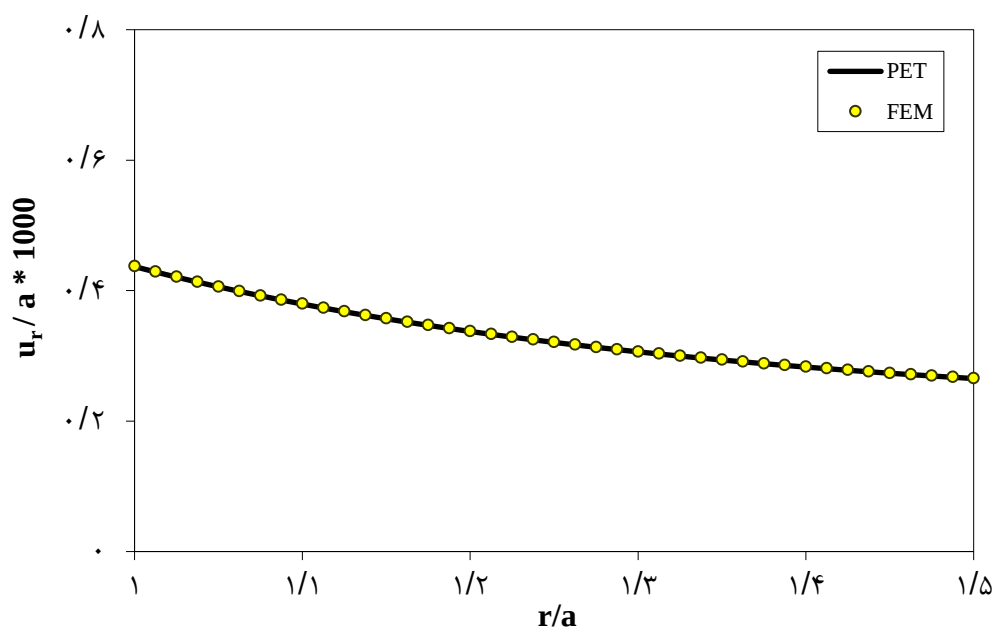
در شکل ۷-۲ تا شکل ۹-۲ کره فقط تحت فشار خارجی قرار گرفته است. در این بارگذاری درست برعکس بارگذاری فشار داخلی، قدرمطلق مقادیر تنش شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی با شیب نسبتاً زیاد افزایش می‌یابد. اما همانند بارگذاری فشار داخلی مقادیر آن، منفی هستند. تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی نیز برخلاف بارگذاری فشار داخلی همواره منفی‌اند و قدرمطلق آن‌ها از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی با شیب ملایم کاهش می‌یابند.



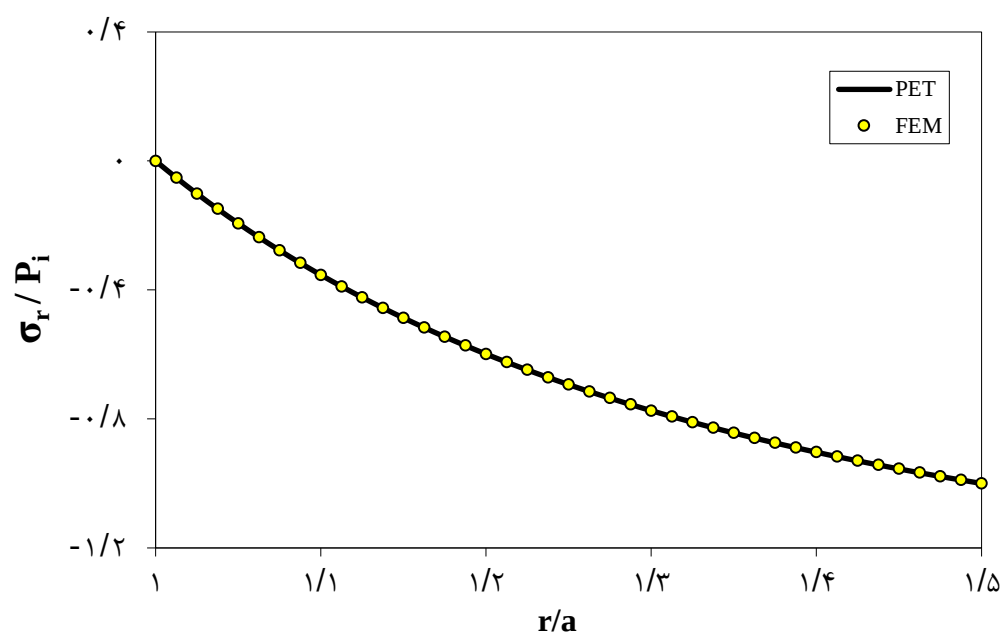
شکل ۴-۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$



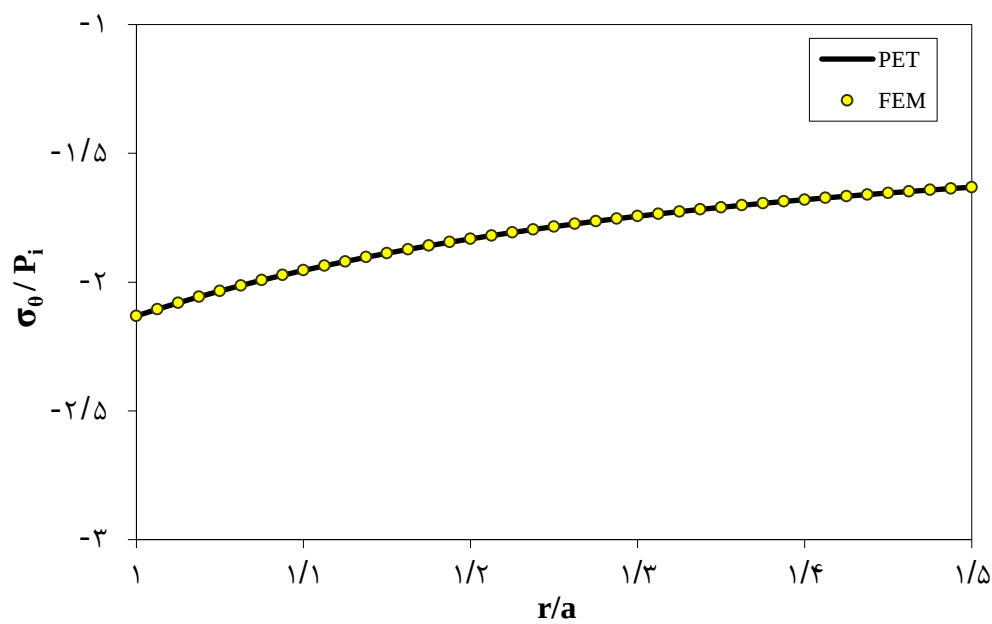
شکل ۲-۵ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$



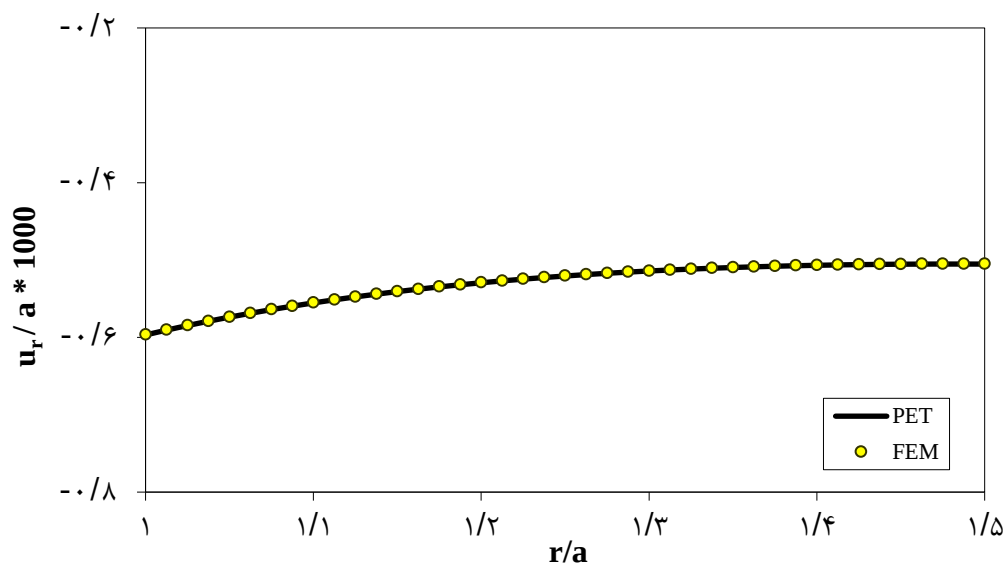
شکل ۲-۶ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$



شکل ۷-۲ توزیع بی بعد تنش شعاعی در کره ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$

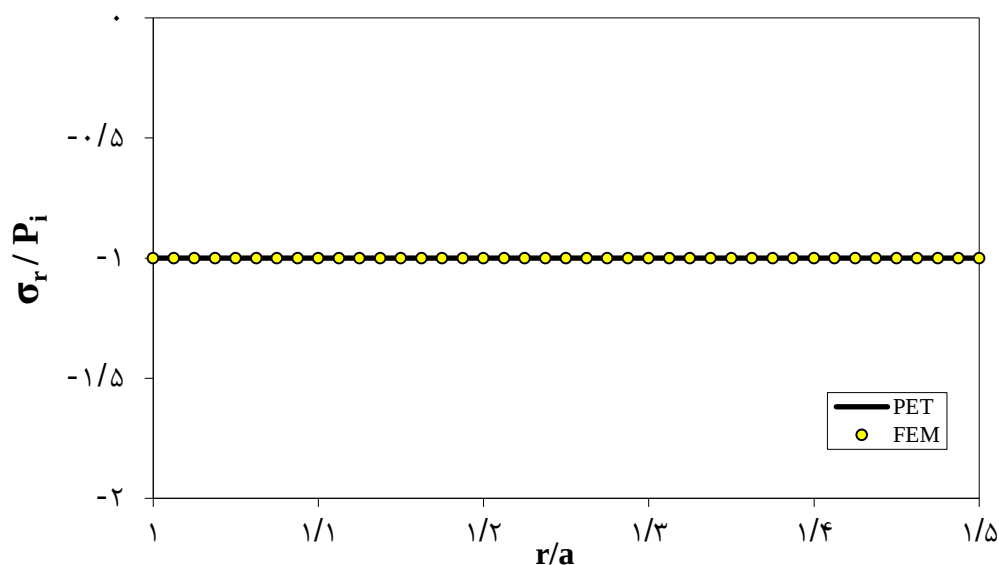


شکل ۸-۲ توزیع بی بعد تنش محیطی در کره ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$

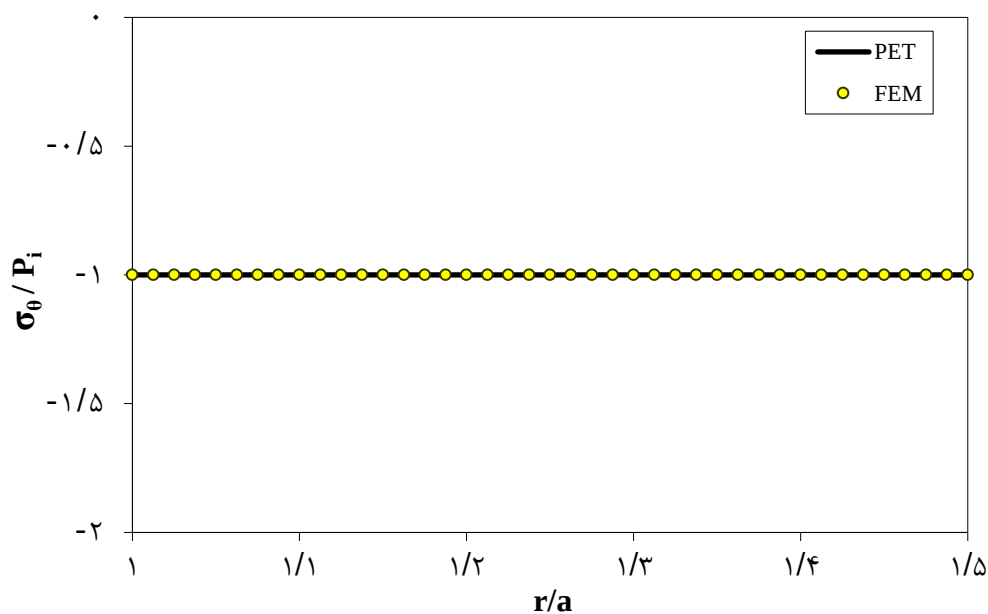


شکل ۲-۹ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$

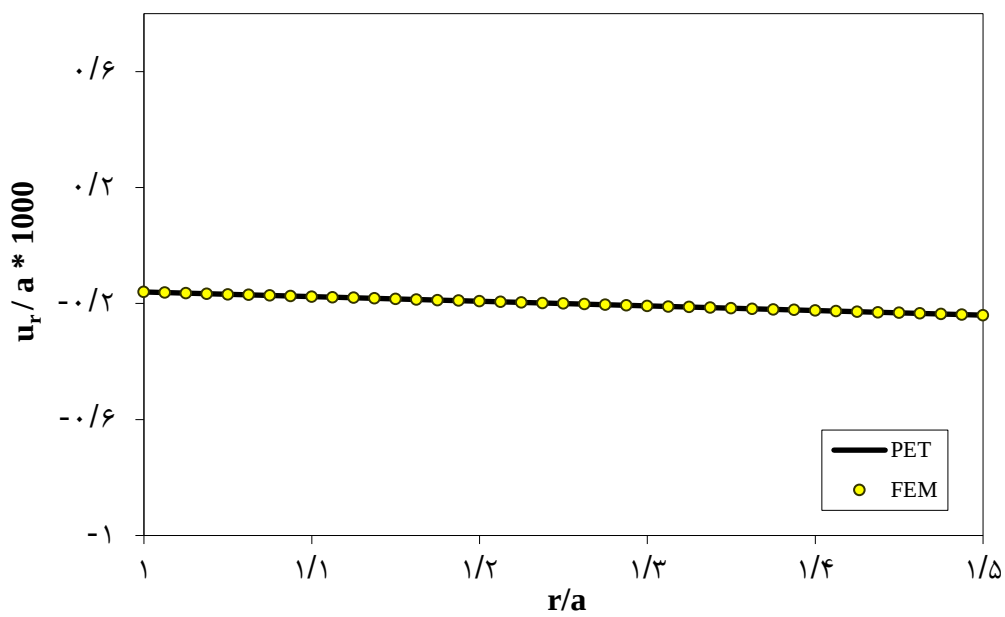
شکل ۲-۱۰ تا شکل ۲-۱۲ کره هم‌زمان تحت بارگذاری فشاری در لایه‌ی داخلی و خارجی قرار گرفته است. در این بارگذاری مقادیر تنش شعاعی و محیطی و همچنین جابه‌جایی شعاعی همواره منفی هستند. تنش شعاعی و محیطی در طول ضخامت کره ثابت باقی می‌مانند و تغییرات جابه‌جایی شعاعی نیز ناچیز می‌باشد.



شکل ۲-۱۰ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$



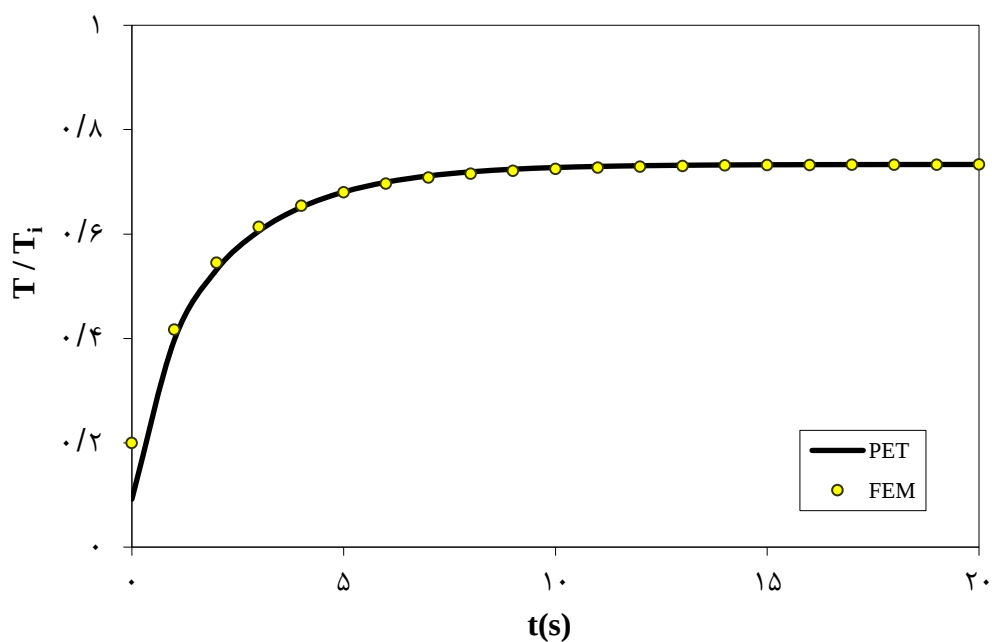
شکل ۱۱-۲ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$



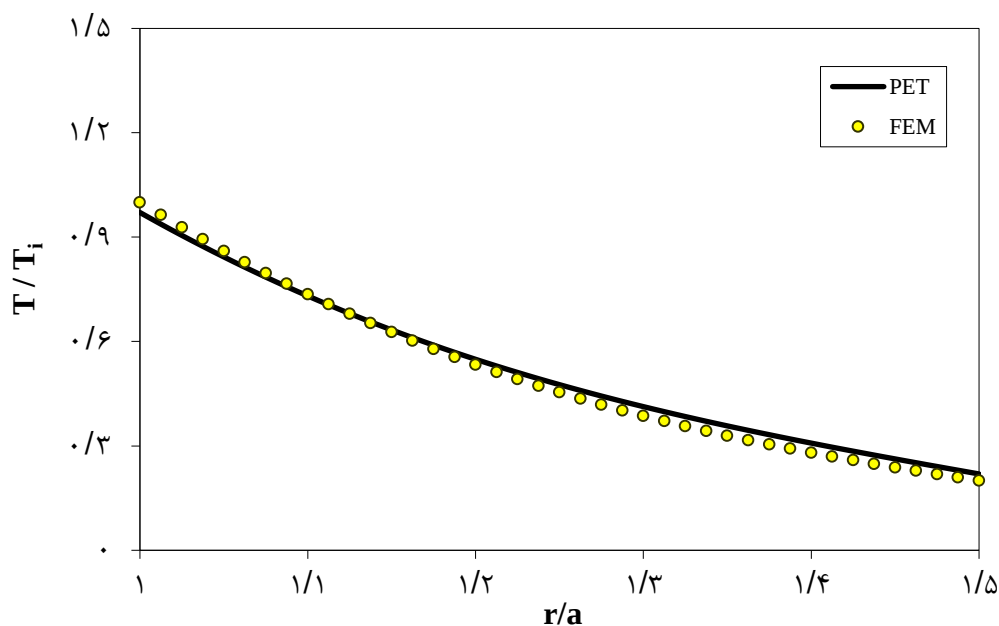
شکل ۱۲-۲ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$

شکل ۲-۱۳ توزیع دمای بی‌بعد محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی را برای بارگذاری حرارتی گذرا در شعاع $r = 0.045 \text{ m}$ از کره‌ی همگن جدار ضخیم و هم‌چنین برحسب زمان نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل مشخص است تغییرات دما برای زمان‌های بیشتر از ۵ ثانیه کم می‌باشد، بنابراین برای مشاهده‌ی اثر بارگذاری حرارتی، نمودارهایی که در این فصل آورده شده است تا زمان ۵ ثانیه رسم شده‌اند.

شکل ۲-۱۴ توزیع دمای بی‌بعد محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی را برای بارگذاری حرارتی گذرا در زمان ۵ ثانیه و در طول ضخامت کره‌ی همگن جدار ضخیم نشان می‌دهد. دما از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد.

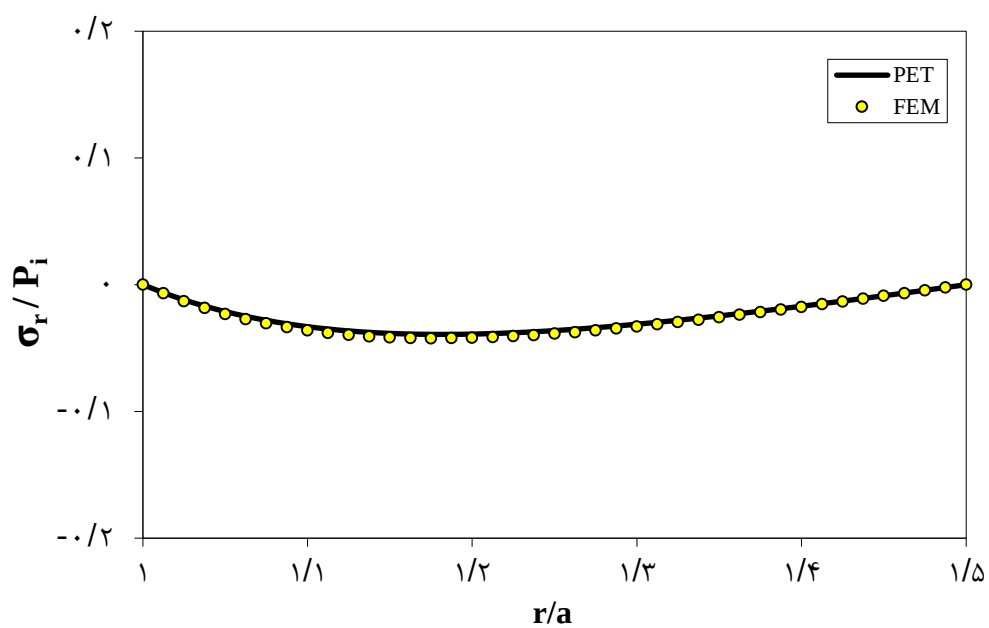


شکل ۲-۱۳ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در $r = 0.045 \text{ m}$

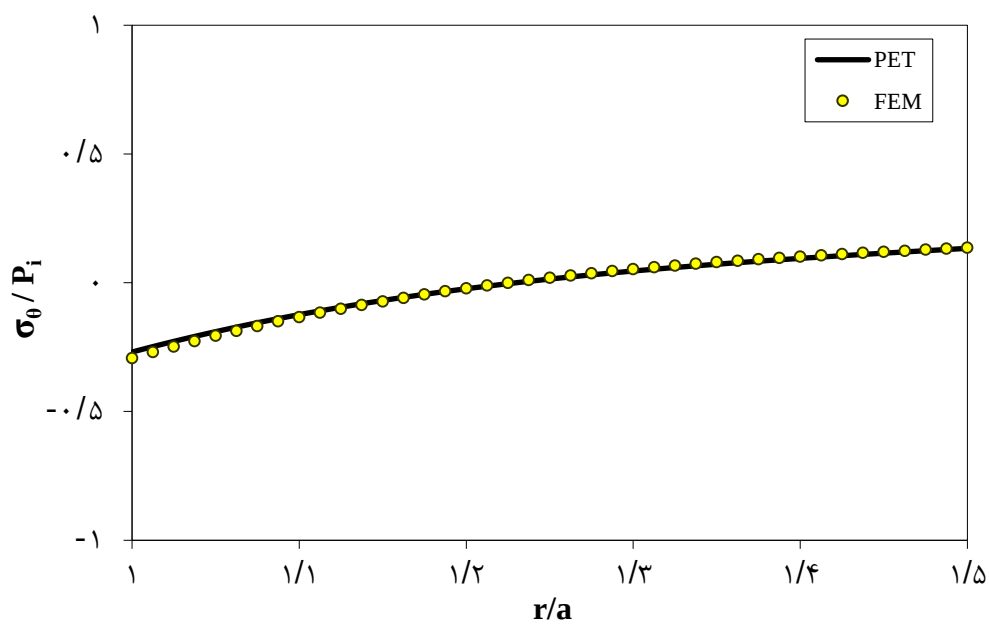


شکل ۲-۱۴ توزیع بی بعد دما در کره ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

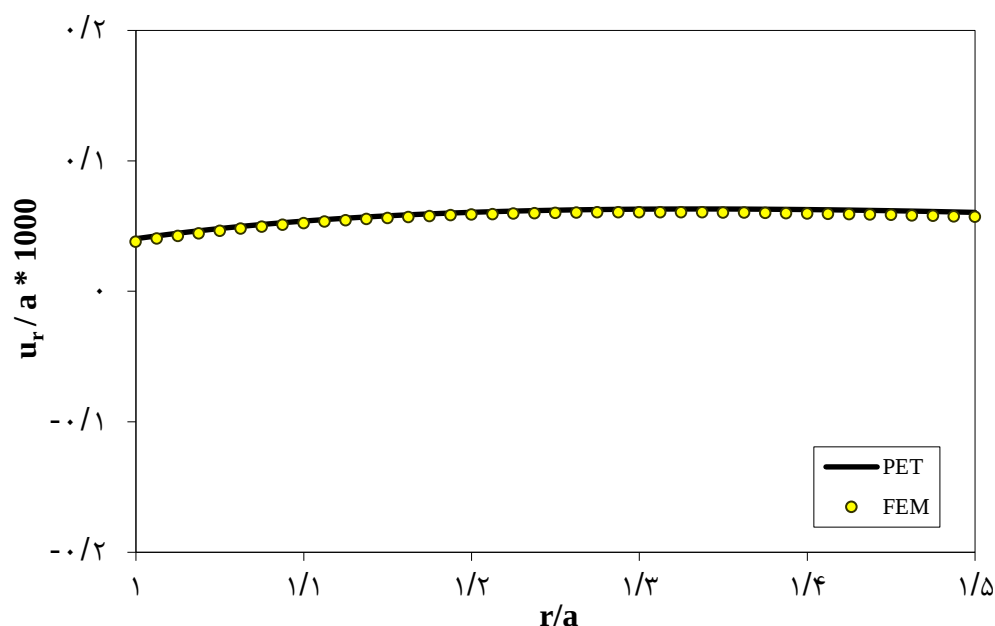
در شکل ۲-۱۵ تا شکل ۲-۱۷ کره تنها تحت بارگذاری حرارتی گذرا قرار دارد. در این بارگذاری قدرمطلق مقادیر تنش شعاعی با تغییرات اندک از لایه ی داخلی به سمت لایه ی خارجی ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد، اما مقادیر تنش همواره منفی هستند. تنش محیطی در طول ضخامت کره با شیب ملایم افزایش می یابد به گونه ای که ابتدا این مقادیر منفی بوده و سپس مثبت می شود. جابه جایی شعاعی در طول ضخامت ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد اما تغییرات آن بسیار کم است و مقادیر آن همواره مثبت هستند.



شکل ۲-۱۵ توزیع بی بعد تنش شعاعی در کره ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در $t = 5s$



شکل ۲-۱۶ توزیع بی بعد تنش محیطی در کره ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در $t = 5s$

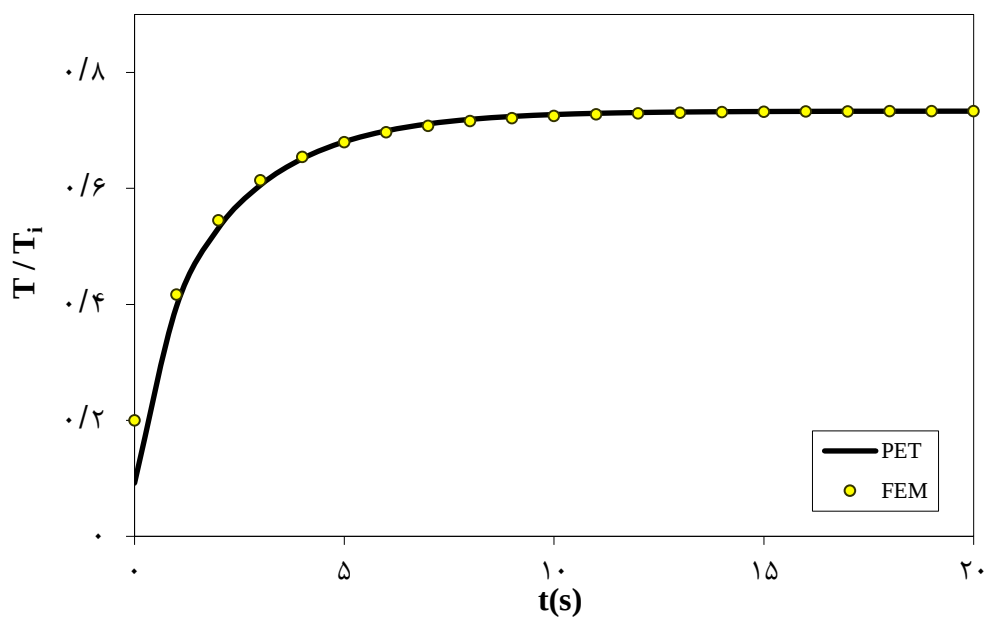


شکل ۲-۱۷ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

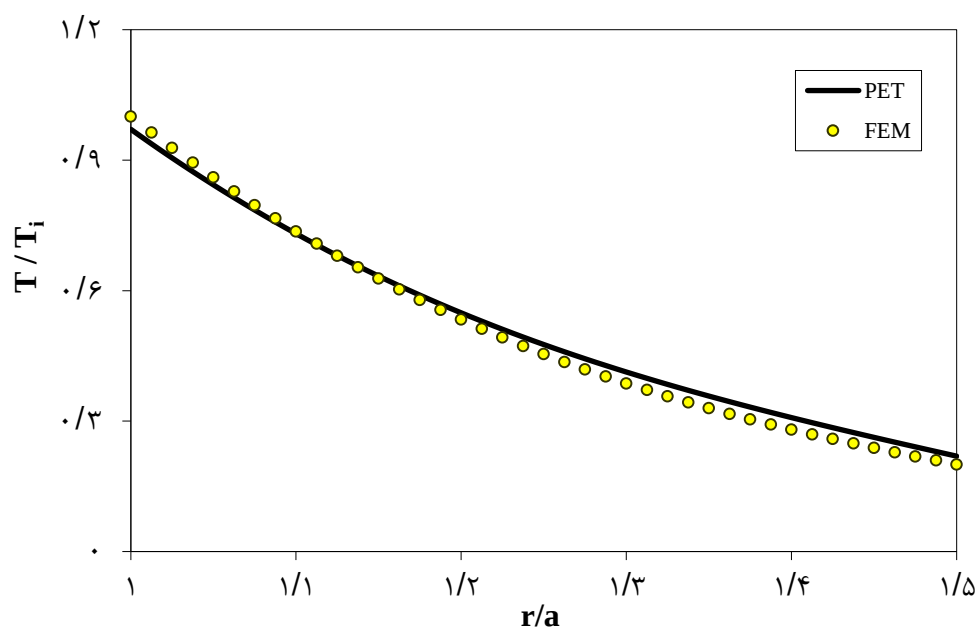
شکل ۲-۱۸ و شکل ۲-۱۹ نشان‌دهنده‌ی توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا می‌باشد. با مقایسه‌ی این نمودارها با نمودارهای شکل ۲-۱۳ و شکل ۲-۱۴ مشاهده می‌شود این نمودارها کاملاً مشابه یکدیگرند. این امر نشان‌دهنده‌ی آن است که تنها عامل اثرگذار بر تغییرات دما، بار حرارتی گذرا می‌باشد و این بدان معناست که تأثیر بارگذاری فشاری و حرارتی بر کره‌ی همگن از یکدیگر مجزاً هستند؛ که این امر مؤید قابلیت استفاده از اصل برهم‌نهی در مسأله‌ی مورد بررسی می‌باشد.

شکل ۲-۲۰ تا شکل ۲-۲۲، تنش شعاعی و محیطی و جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا را نمایش می‌دهند. این نمودارها بسیار مشابه نمودارهای به‌دست‌آمده از نتایج کره‌ی تحت بارگذاری فشار داخلی (شکل ۲-۴ تا شکل ۲-۶) می‌باشد و توضیحات مشابهی دارند. این امر نشان‌دهنده‌ی اثرگذاری اندک بارگذاری حرارتی در دماهای پایین می‌باشد. به عبارتی می‌توان در دماهای پایین از نتایج مربوط به کره‌ی تحت فشار برای بررسی رفتار کره‌ی تحت فشار و حرارت استفاده کرد. به‌عنوان مثال جابه‌جایی شعاعی ایجادشده در لایه‌ی

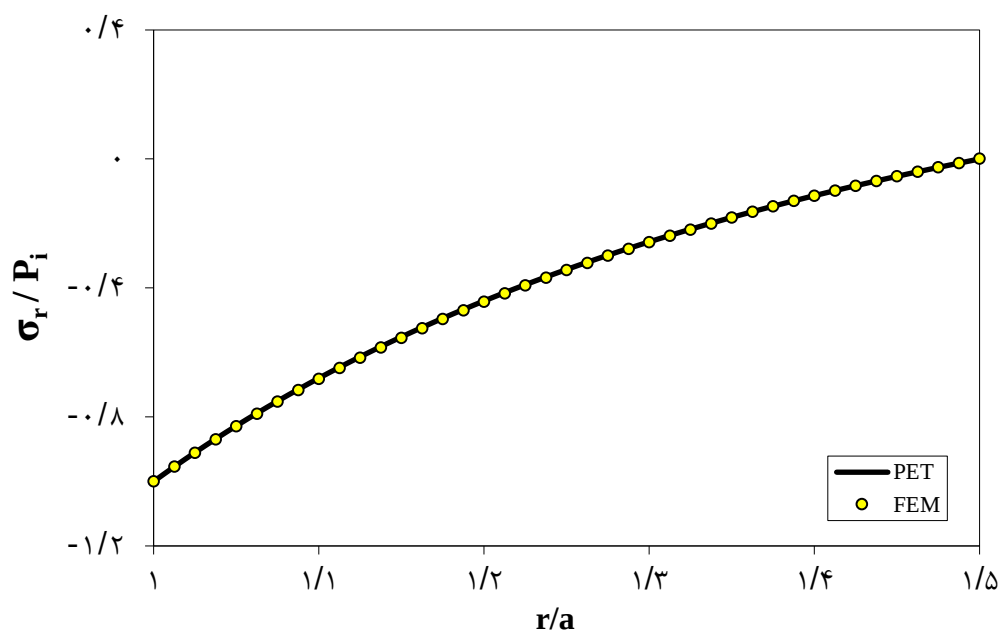
میانی در بارگذاری حرارتی برابر $2/44 \mu\text{m}$ ، در بارگذاری فشاری $13/15 \mu\text{m}$ و در بارگذاری همزمان حرارتی و فشاری برابر $15/58 \mu\text{m}$ می باشد.



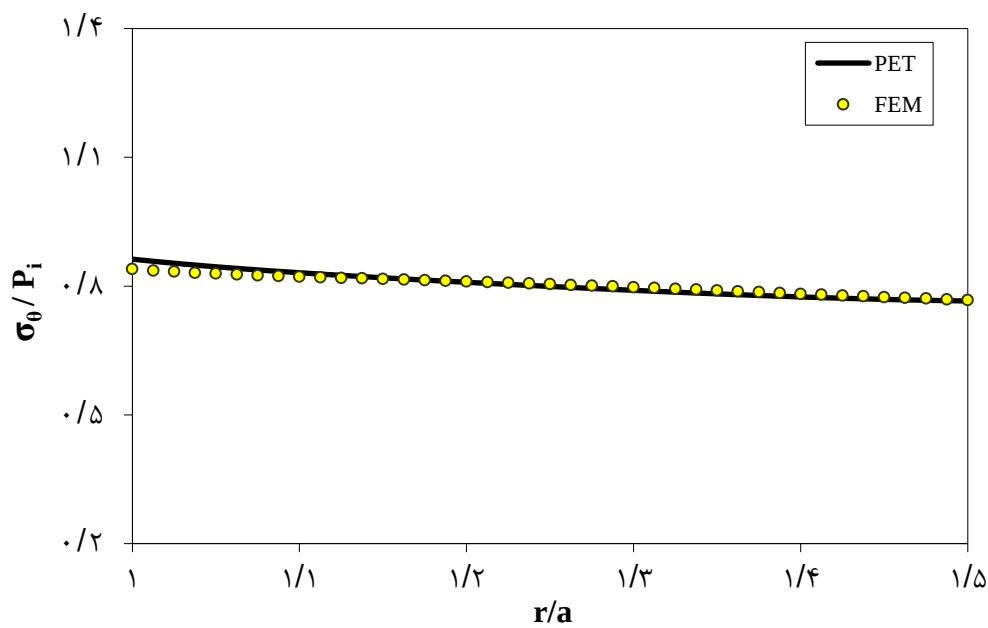
شکل ۲-۱۸ توزیع بی بعد دما در کره ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $r = 0.45 \text{ m}$



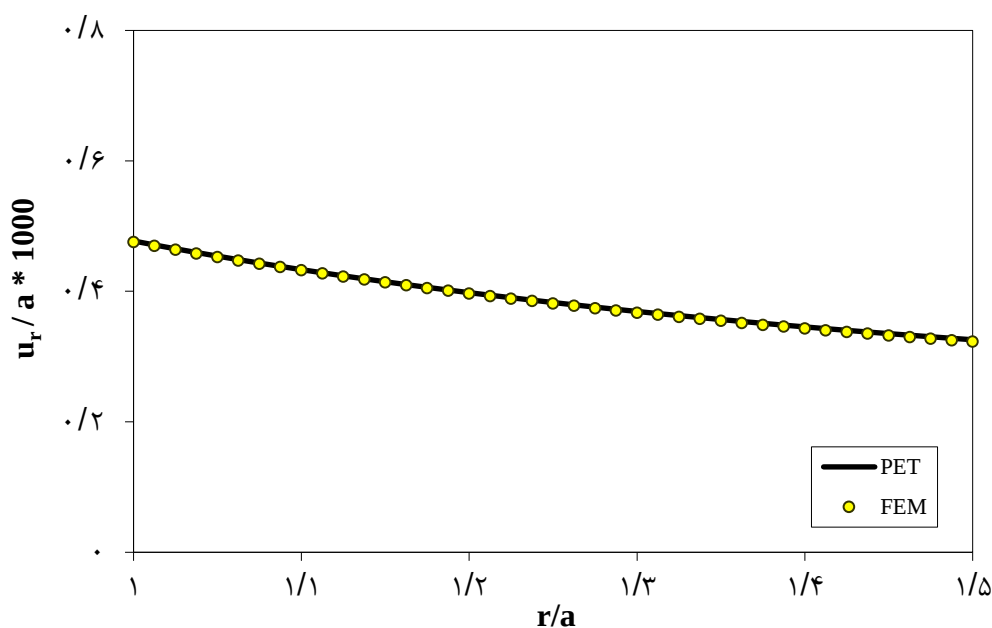
شکل ۲-۱۹ توزیع بی بعد دما در کره ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$



شکل ۲۰-۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$



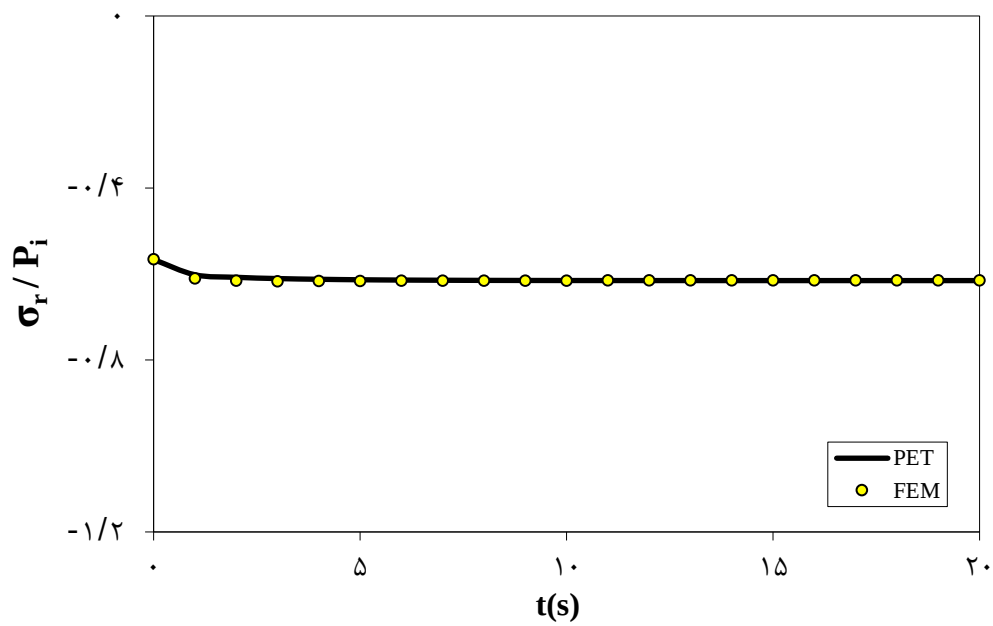
شکل ۲۱-۲ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$



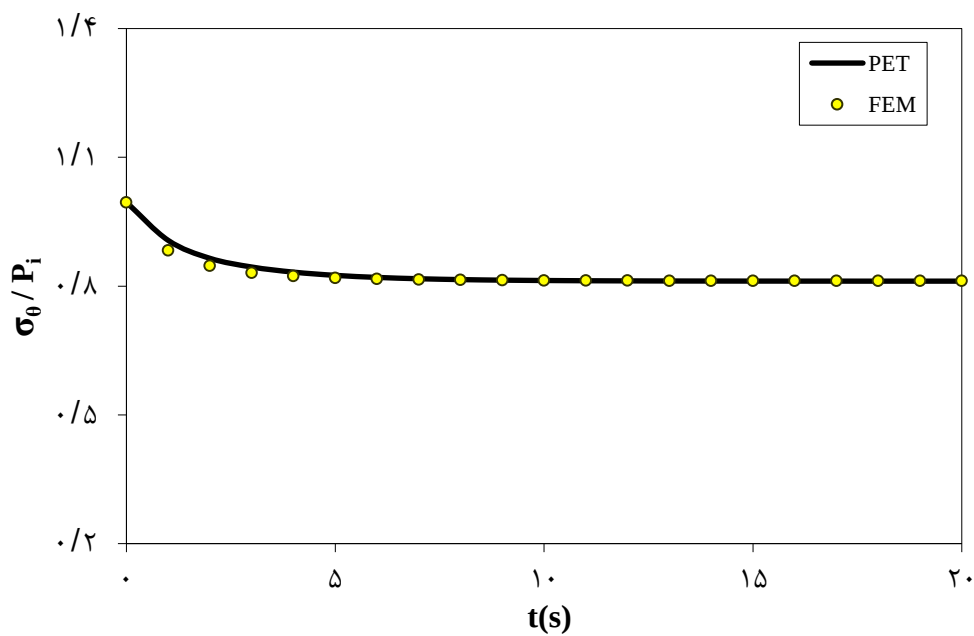
شکل ۲-۲۲ توزیع بی بعد جابه جایی شعاعی در کره ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$

شکل ۲-۲۳ تا شکل ۲-۲۵ تغییرات تنش شعاعی و محیطی و جابه جایی شعاعی کره ی تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا را در شعاع $r = 0.045 \text{ m}$ و برحسب زمان نشان می دهند. با توجه به شکل ۲-۱۳ و یا شکل ۲-۱۸ که تغییرات ناچیز دما را در شعاعی خاص از کره و طول زمان نشان می دهد و همچنین یکنواخت بودن فشار در لایه ی داخلی کره، مقادیر تنش و جابه جایی در طول زمان تغییرات ناچیزی دارند و برای زمان های بیشتر از ۵ ثانیه تقریباً ثابت باقی می ماند.

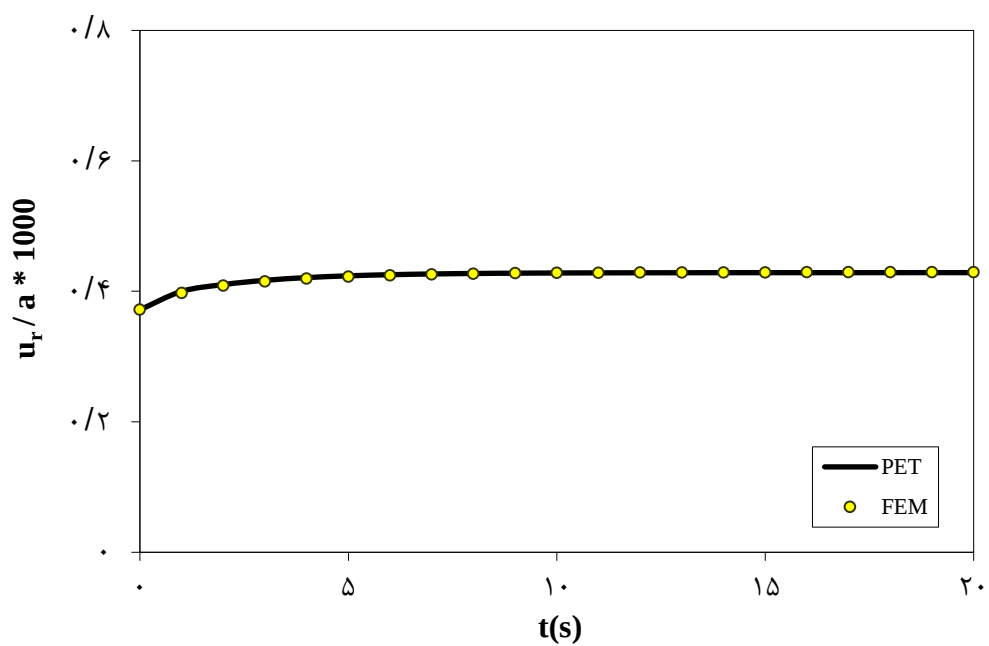
شکل ۲-۲۶ تا شکل ۲-۲۹ توزیع بی بعد دما، تنش شعاعی و محیطی و جابه جایی شعاعی را در کره ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشاری در لایه ی داخلی و خارجی و نیز بار حرارتی گذرا نشان می دهد. توزیع دما مشابه بارگذاری حرارتی می باشد و تنش ها و جابه جایی ها نیز مشابه بارگذاری همزمان فشار داخلی و خارجی هستند اما به علت تأثیرگذاری بار حرارتی، کمی اختلاف بین نتایج این دو بارگذاری وجود دارد.



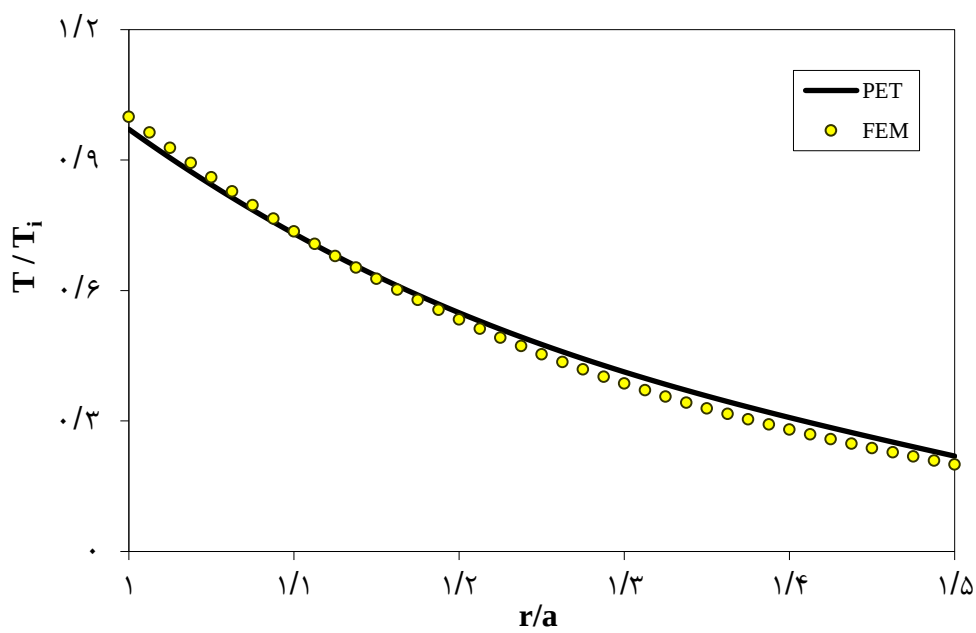
شکل ۲۳-۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $r = 0.45 \text{ m}$



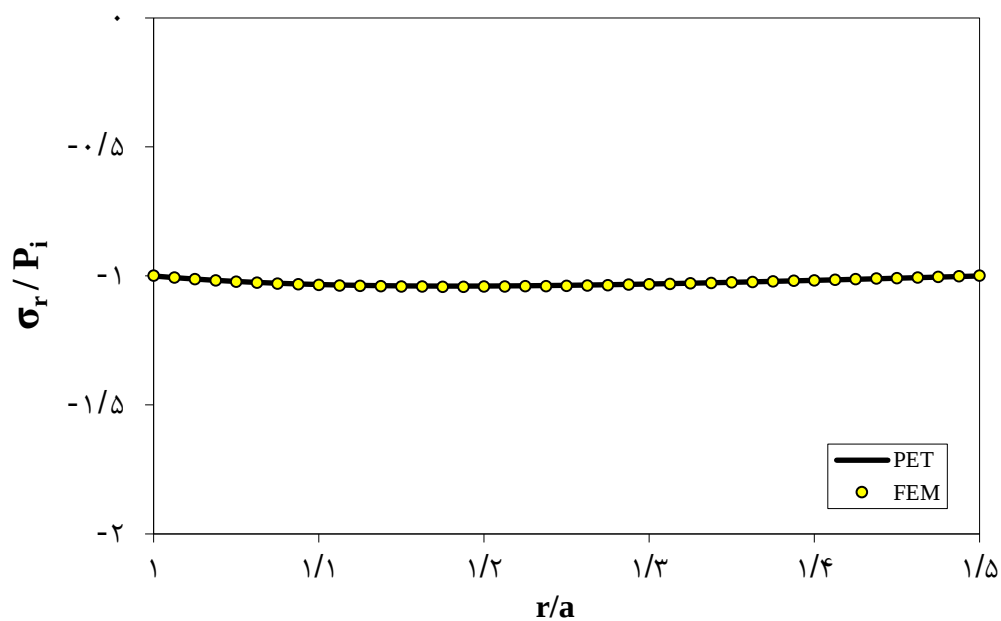
شکل ۲۴-۲ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $r = 0.45 \text{ m}$



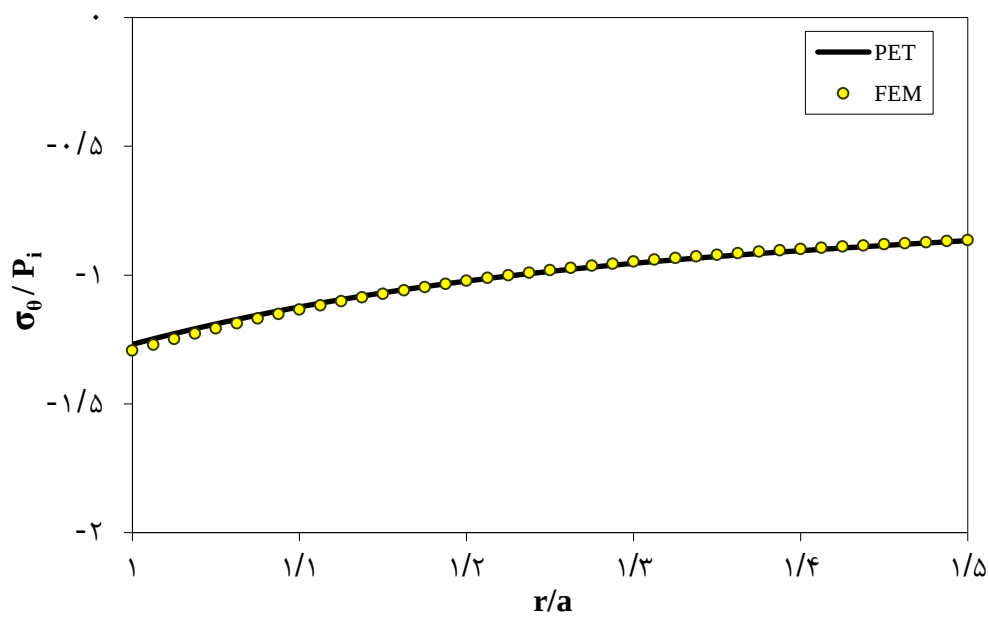
شکل ۲۵-۲ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $r = 0.45 \text{ m}$



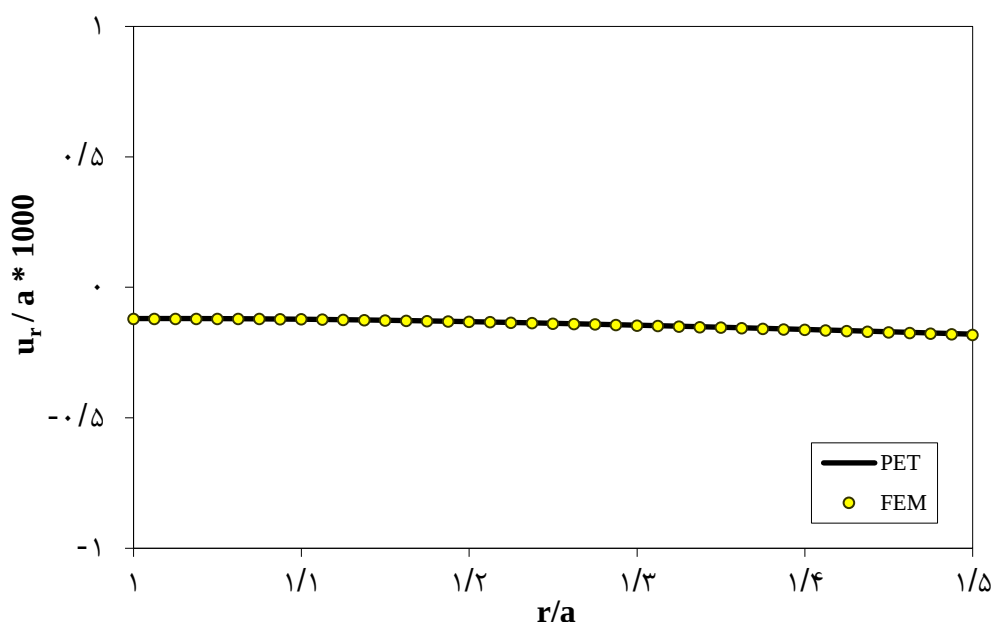
شکل ۲۶-۲ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$



شکل ۲-۲۷ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$



شکل ۲-۲۸ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$



شکل ۲-۲۹ توزیع بی بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی همگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در راستای شعاعی در $t = 5 \text{ s}$

جدول ۱-۲ حاوی مقادیر تنش شعاعی محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و مکانیکی-حرارتی در سه لایه‌ی داخلی، میانی و خارجی کره می‌باشد. همان‌گونه که در این جدول مشخص است تطابق قابل قبولی بین نتایج حاصل از روش تحلیلی و عددی وجود دارد. با دقت در مقادیر این جدول می‌توان دریافت که مقادیر تنش شعاعی در لایه‌ی میانی در کره‌ی همگن تحت بارگذاری فشار داخلی تا ۱۰ برابر، در بارگذاری فشار خارجی تا ۲۵ برابر و در بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی تا ۴۰ برابر بیشتر از بارگذاری حرارتی می‌باشد و مقدار آن در بارگذاری فشار خارجی تقریباً ۲ برابر بارگذاری فشار داخلی است. هم‌چنین این جدول صحت استفاده از اصل برهم‌نهی را در این تحقیق نشان می‌دهد. به‌عنوان نمونه در بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا، تنش شعاعی در لایه‌ی میانی و به کمک حل عددی برابر $83/1022 \text{ MPa}$ می‌باشد که می‌توان آن را از جمع جبری $24/5221 \text{ MPa}$ (بارگذاری فشار داخلی)، $55/4902 \text{ MPa}$ (بارگذاری فشار خارجی) و $3/1021 \text{ MPa}$ (بار حرارتی گذرا) به‌دست آورد.

جدول ۲-۱ تنش شعاعی (MPa) محاسبه شده با روش های تحلیلی و عددی برای بارگذاری های مختلف در $t = 5 \text{ s}$

بارگذاری		شعاع داخلی ($r = a$)		شعاع میانی ($r = \frac{a+b}{2}$)		شعاع خارجی ($r = b$)	
حرارتی	مکانیکی	تحلیلی	عددی	تحلیلی	عددی	تحلیلی	عددی
-	فشار داخلی	-۸۰	-۸۰	-۲۴/۵۲۲۱	-۲۴/۵۳۰۴	۰	۰/۰۰۱۵
	فشار خارجی	۰	-۰/۰۱۴۴	-۵۵/۴۷۷۹	-۵۵/۴۹۰۲	-۸۰	-۸۰/۰۰۱۶
	فشار داخلی و خارجی	-۸۰	-۸۰	-۸۰	-۸۰	-۸۰	-۸۰
گذرا	-	۰	-۰/۰۰۵۱	-۲/۸۹۷۱	-۳/۱۰۲۱	۰	-۰/۰۰۰۲
گذرا	فشار داخلی	-۸۰	-۷۹/۹۹۰۸	-۲۷/۴۱۹۳	-۲۷/۶۲۹۴	۰	۰/۰۰۱۳
	فشار خارجی	۰	-۰/۰۰۰۱	-۵۸/۳۷۵	-۵۸/۵۹۷۳	-۸۰	-۸۰/۰۰۱۸
	فشار داخلی و خارجی	-۸۰	-۸۰/۰۰۵۲	-۸۲/۸۹۷۱	-۸۳/۱۰۲۲	-۸۰	-۸۰/۰۰۰۲

جدول ۲-۲ شامل بیشینه مقادیر تنش شعاعی و تنش محیطی محاسبه شده با روش های FE و تحلیلی تحت بارگذاری های مکانیکی، حرارتی و مکانیکی-حرارتی و نیز مختصات آن ها می باشد. با توجه به مقادیر درج شده در این جدول، در بارگذاری فشار داخلی (خارجی) به علت عدم حضور فشار خارجی (داخلی) مقادیر بیشینه ی تنش شعاعی در لایه ی داخلی (خارجی) رخ می دهد. بیشترین مقدار تنش شعاعی در بارگذاری های مختلف، برای بارگذاری همزمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا و در شعاع $r = 0.47 \text{ m}$ به دست آمده است. از نکات جالب در این جدول این است که بیشینه تنش محیطی

در بارگذاری‌های مختلف، همواره در لایه‌ی داخلی اتفاق افتاده است. هم‌چنین بیشترین تنش محیطی برای بارگذاری هم‌زمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا و در لایه‌ی خارجی حاصل شده است.

جدول ۲-۲ بیشینه مقادیر تنش شعاعی و تنش محیطی محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مختلف و مختصات آن‌ها در $t = 5\text{ s}$

تنش شعاعی (MPa)		تنش محیطی (MPa)		بارگذاری	
مختصات (m)	تحلیلی	عددی	مختصات (m)	تحلیلی	عددی
فشار داخلی	۰/۰۴	-۸۰	-۷۹/۹۸۵۷	۰/۰۴	۹۰/۵۲۶۳
فشار خارجی	۰/۰۶	-۸۰	-۸۰/۰۰۱۶	۰/۰۴	-۱۷۰/۴۴۳
فشار داخلی و خارجی	تمام ضخامت کره	-۸۰	-۸۰	تمام ضخامت کره	-۸۰
گذرا	۰/۰۴۷	-۳/۱۳۵	-۳/۳۹۰۴	۰/۰۴	-۲۱/۵۱۱۵
فشار داخلی	۰/۰۴	-۸۰	-۷۹/۹۹۰۸	۰/۰۴	۶۹/۰۱۴۸
گذرا فشار خارجی	۰/۰۶	-۸۰	-۸۰/۰۰۱۸	۰/۰۴	-۱۹۲/۰۳۷۸
فشار داخلی و خارجی	۰/۰۴۷	-۸۳/۱۳۵	-۸۳/۳۹۰۴	۰/۰۴	-۱۰۱/۵۱۱۵

جدول ۲-۳ شامل بیشینه مقادیر جابه‌جایی شعاعی و دمای محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و مکانیکی-حرارتی و نیز مختصات آن‌ها می‌باشد. همان‌گونه که در این جدول مشخص است بیشترین مقدار جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی داخلی و در

بارگذاری فشار خارجی حاصل شده است. از آنجا که دما در محیط اطراف لایه‌ی داخلی و خارجی ثابت فرض شده و مقدار آن در لایه‌ی داخلی بیشتر از لایه‌ی خارجی است، بنابراین بیشینه‌ی دما همواره در لایه‌ی داخلی رخ می‌دهد و مقدار آن در بارگذاری‌های مختلف یکسان است.

جدول ۲-۳ بیشینه مقادیر جابه‌جایی شعاعی و دمای محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مختلف و مختصات آن‌ها در $t = 5\text{ s}$

بارگذاری		جابه‌جایی شعاعی (μm)			دما ($^{\circ}\text{C}$)	
حرارتی	مکانیکی	مختصات (m)	تحلیلی	عددی	مختصات (m)	تحلیلی
-	فشار داخلی	۰/۰۴	۱۷/۴۷۴	۱۷/۴۸۸	-	-
	فشار خارجی	۰/۰۴	-۲۳/۸۷۴	-۲۳/۸۵۶	-	-
	فشار داخلی و خارجی	۰/۰۶	-۹/۶	-۹/۵۹۹	-	-
گذرا	-	۰/۰۵۳	۲/۵۲۵	۲/۴۲۱	۰/۰۴	۱۲۴/۹۹۹
گذرا	فشار داخلی	۰/۰۴	۱۹/۰۸۸	۱۹/۰۰۸	۰/۰۴	۱۲۴/۹۹۹
	فشار خارجی	۰/۰۴	-۲۲/۲۶	-۲۲/۳۳۸	۰/۰۴	۱۲۴/۹۹۹
	فشار داخلی و خارجی	۰/۰۶	-۷/۱۷۹	-۷/۳۲۱	۰/۰۴	۱۲۴/۹۹۹

۸-۲ جمع‌بندی

در کره‌ی تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا، از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی قدرمطلق مقادیر تنش شعاعی کاهش می‌یابد و از آنجا که بر سطح خارجی کره نیروی خارجی وارد نمی‌شود، این تغییرات نسبتاً بزرگ هستند. تغییرات تنش محیطی هرچند در بارگذاری مکانیکی زیاد است؛ اما به‌علت اثرگذاری تنش محیطی ناشی از اعمال بار حرارتی، در بارگذاری ترکیبی، تغییرات آن بسیار اندک است. جابه‌جایی شعاعی نیز به‌علت بار فشاری اعمالی در لایه‌ی درونی، در بارگذاری ترکیبی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی بیرونی کاهش می‌یابد.

نتایج در بارگذاری هم‌زمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا و بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا به غیر از جابه‌جایی شعاعی که تغییرات آن مشابه می‌باشد، درست برعکس یکدیگرند. در بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا، به‌علت اعمال فشار بر سطح داخل و خارج کره، تغییرات تنش شعاعی و محیطی و نیز تغییرات جابه‌جایی شعاعی در طول ضخامت کره در طول ضخامت کره اندک است.

دما از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی برای تمام بارگذاری‌های انجام‌شده در این فصل، کاهش می‌یابد.

فصل ۳: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی

ناهمگن تحت فشار

۳-۱ پیش‌گفتار

همان‌گونه که در فصل اول نیز عنوان شد، مقاومت منحصر به فرد پوسته‌های جدار ضخیم ساخته‌شده از مواد FG در برابر بارهای حرارتی، محققان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آن‌ها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، بپردازند. کاربرد گسترده‌ی این مواد در سازه‌های مهندسی هسته‌ای، توربین‌ها، مخازن تحت فشار، صنایع هوا فضا، ابزار صنعتی، سیستم‌های تولید انرژی، بال‌ها و بدنه‌ی هواپیما سبب شده است تا تحلیل این پوسته‌ها تحت فشار و حرارت به‌طور هم‌زمان مورد بررسی قرار گیرد. در این فصل حلّ عمومی کره‌های جدار ضخیم FGM تحت بارگذاری‌های حرارتی گذرا و فشار یکنواخت داخلی و خارجی صورت پذیرفته است. تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی، با استخراج معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر کره‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل‌شده از مواد ناهمگن انجام گرفته است. در نهایت با ارائه‌ی حلّ عددی توسط نرم‌افزار المان محدود Abaqus، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند. در ابتدا فرض‌های استفاده‌شده در این فصل برای استخراج معادله‌ها بیان می‌شوند:

- ۱) خواص ماده به‌صورت غیر خطی (توانی) نسبت به شعاع تغییر می‌کند.
- ۲) جابه‌جایی‌ها کوچک و در محدوده‌ی الاستیک بررسی شده است.
- ۳) از اصل جمع آثار، به‌منظور تحلیل مکانیکی و حرارتی به‌صورت مجزّاء، استفاده شده است. لازم به ذکر است که اصل مذکور در مسأله‌ی موردنظر صادق می‌باشد.
- ۴) از آنجایی که تقریباً در بیشتر موادّ مهندسی نسبت پواسون مقداری نزدیک به هم دارد، در اینجا نیز نسبت پواسون برخلاف باقی خواص ماده، ثابت در نظر گرفته شده است.
- ۵) توزیع دما یک‌بعدی و در جهت شعاعی در نظر گرفته می‌شود.

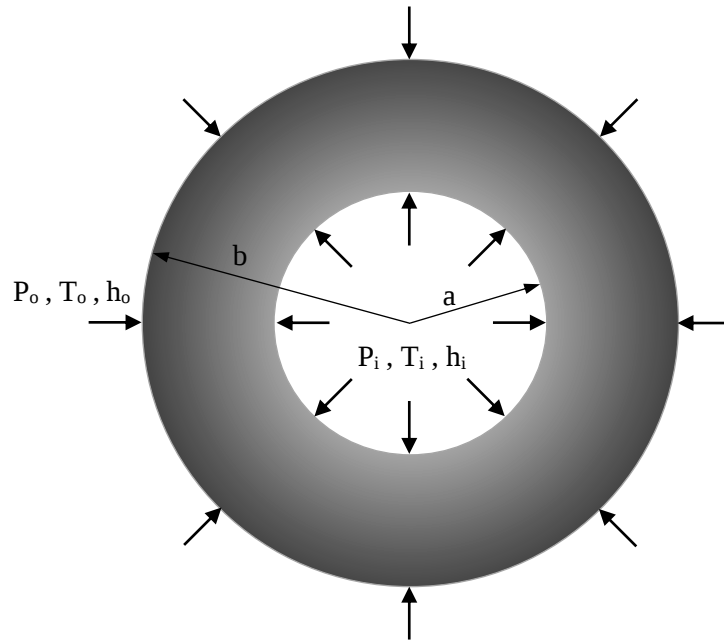
در بخش اول این فصل، به کمک روش الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ تحلیلی کره‌های جدار ضخیم ناهمگن تحت فشار و بار حرارتی گذرا ارائه می‌شود؛ بارگذاری به‌صورت ترکیبی از بار حرارتی و مکانیکی است. توزیع دمای یک‌بعدی با استفاده از روش جداسازی متغیرها، توابع بسل تعمیم‌یافته

و بسط تابع ویژه به دست می‌آید. برای به دست آوردن پاسخ عمومی و خصوصی تابع جابه‌جایی شعاعی، به ترتیب از معادله‌ی کوشی-اولر و روش تغییر پارامترها استفاده شده است. با جایگزینی تابع جابه‌جایی در معادله‌های سینماتیک و سپس ساختاری، به ترتیب تنش‌های محیطی و سپس شعاعی به دست می‌آیند. ضرایب ناهمگنی (یا شاخص‌های توانی) خواص ماده متفاوت از هم هستند؛ ولی در این تحقیق و در بخش مطالعه‌ی موردی تمام ضرایب با هم برابر فرض می‌شوند. توزیع دما، جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های حرارتی در حالت گذرا به دست می‌آیند و در جهت‌های شعاعی و زمان رسم می‌شوند. مقادیر در این تحقیق دلخواه انتخاب می‌شوند تا تأثیر زمان و ناهمگنی را در توزیع دما، جابه‌جایی و تنش‌ها نشان دهند. در بخش بعد، روند تحلیل عددی با کمک نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس بیان و با تعریف یک مسأله، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی انجام‌شده و تحلیل عددی مربوط به مسأله، مقایسه و بررسی خواهند شد.

۳-۲ توزیع ناهمگنی خواص مکانیکی و حرارتی

در کره‌های تشکیل‌شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، مدول الاستیسیته (E)، چگالی (ρ)، هدایت گرمایی (γ)، ظرفیت گرمایی ویژه (c) و ضریب انبساط حرارتی (α) توابعی از مختصات شعاعی کره (r) می‌باشند. همان‌گونه که در فرضیات مسأله نیز بیان شد؛ در اکثر تحلیل‌ها و نیز در این تحقیق، به‌علت تغییرات جزئی، نسبت پواسون (v) ثابت در نظر گرفته می‌شود.

جهت شرح چگونگی توزیع ناهمگنی خواص مکانیکی و حرارتی و ارائه‌ی روابط مربوط به آن‌ها یک پوسته‌ی کروی جدار ضخیم ساخته‌شده از مواد FG به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b، تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی گذرا (شکل ۳-۱) که یک دستگاه مختصات کروی (r, θ, φ) در مرکز آن قرار دارد، در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱-۳ کره‌ی جدار ضخیم ناهمگن با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی و خارجی یکنواخت

با در نظر گرفتن توزیع توانی برای مدول الاستیسیته، چگالی، هدایت گرمایی، ظرفیت گرمایی ویژه و ضریب انبساط حرارتی در طول جداره‌ی کره به صورت تابعی از مختصات شعاعی آن، به صورت روابط (۱-۳) بیان می‌شوند [۴۵].

$$E(r) = E_{m_1} r^{m_1}, \quad \alpha(r) = \alpha_{m_2} r^{m_2}, \quad \gamma(r) = \gamma_{m_3} r^{m_3}, \quad \rho(r) = \rho_{m_4} r^{m_4}, \quad (1-3)$$

$$c(r) = c_{m_5} r^{m_5}$$

در رابطه‌ی فوق m_1, m_2, m_3, m_4 و m_5 شاخص‌های توانی یا ضرایب ناهمگنی مواد نامیده می‌شوند. همچنین $E_{m_1}, \alpha_{m_2}, \gamma_{m_3}, \rho_{m_4}$ و c_{m_5} مطابق رابطه‌ی (۲-۳) می‌باشند که در آن E_i مدول الاستیسیته، α_i ضریب انبساط حرارتی، γ_i ضریب هدایت گرمایی، ρ_i چگالی و c_i ظرفیت گرمایی ویژه ماده‌ی مورد نظر، در لایه‌ی داخلی کره هستند.

$$E_{m_1} = \frac{E_i}{a^{m_1}}, \quad \alpha_{m_2} = \frac{\alpha_i}{a^{m_2}}, \quad \gamma_{m_3} = \frac{\gamma_i}{a^{m_3}}, \quad \rho_{m_4} = \frac{\rho_i}{a^{m_4}} \quad (2-3)$$

$$c_{m_5} = \frac{c_i}{a^{m_5}}$$

۳-۳ معادله‌ی حرارتی حاکم بر مسأله

مطابق قانون انتقال حرارت فوریه و از آنجا که منبع حرارتی در جسم وجود ندارد و نیز متقارن بودن کره در دو راستای مختصاتی، معادله‌ی حرارت در این مسأله یک‌بعدی و به‌صورت رابطه‌ی (۳-۳) می‌باشد [۵۱].

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^r (\gamma T) + q$$

$$q = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \gamma(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho(r) c(r) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3-3)$$

در رابطه‌ی (۳-۳)، تابع‌های $\rho(r)$ ، $\gamma(r)$ و $c(r)$ و T به‌ترتیب ضریب هدایت گرمایی، چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه و تابع دما در کره‌ی ناهمگن می‌باشند.

شرایط مرزی و اولیه به‌شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند [۴۷].

$$\begin{cases} \gamma(r) \frac{\partial T}{\partial r} = h_i (T - T_i) & \text{on } r = a \\ -\gamma(r) \frac{\partial T}{\partial r} = h_o (T - T_o) & \text{on } r = b \end{cases} \quad (4-3)$$

$$T(r, 0) = f(r) \quad (5-3)$$

که پارامترهای T_o ، T_i ، h_o ، h_i و $f(r)$ به‌ترتیب ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی در سطح داخلی و خارجی، دما در محیط داخلی و خارجی و توزیع دما در زمان صفر برای کره را نشان می‌دهند. در این فصل تمامی این پارامترها ثابت فرض می‌شوند.

۳-۴ حل معادله انتقال حرارت

جهت حل معادله دیفرانسیل (۳-۳)، از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود. سپس با کمک بسط توابع ویژه و استفاده از شرط تعامد آن‌ها نسبت به تابع وزنی، مجهول‌های مسأله به دست می‌آیند [۵۲]. با قراردادن توابع (۱-۳) در رابطه‌ی (۳-۳) معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مربوط به تابع دما به دست می‌آید.

$$\frac{1}{r^r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^r \gamma_{m_r} r^{m_r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho_{m_r} r^{m_r} c_{m_\Delta} r^{m_\Delta} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۳-۶)$$

$$\rightarrow r^{m_r - m_r - m_\Delta} \frac{\partial^r T}{\partial r^r} + (m_r + r) r^{m_r - m_r - m_\Delta - 1} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\rho_{m_r} c_{m_\Delta}}{\gamma_{m_r}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۳-۷)$$

برای ساده شدن روابط، پارامتر β با نام شاخص توانی مؤثر^۱ تعریف و مطابق رابطه‌ی (۳-۸) بیان می‌شود. شاخص توانی مؤثر به چگونگی تغییرات ناهمگنی ضریب هدایت گرمایی، چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه‌ی ماده بستگی دارد.

$$\beta = m_r - m_r - m_\Delta \quad (۳-۸)$$

تغییر این پارامتر سبب تغییر در روند حل معادله دیفرانسیل تابع دما و نتایج حاصل از روش حل تحلیلی می‌شود که در ادامه و در دو بخش مجزا، تابع دما برای مقادیر مختلف از شاخص توانی مؤثر محاسبه گردیده است. با جای گذاری β در رابطه‌ی (۳-۷)، رابطه‌ی (۳-۹) به دست می‌آید.

$$r^\beta \frac{\partial^r T}{\partial r^r} + (m_r + r) r^{\beta-1} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\rho_{m_r} c_{m_\Delta}}{\gamma_{m_r}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۳-۹)$$

^۱ Effective power index

معادله‌ی دیفرانسیل (۹-۳)، با به‌کارگیری روش جداسازی متغیرها حل می‌گردد. مانند فصل گذشته، مسأله ابتدا در حالت پایا و سپس در حالت گذرا حل شده و به کمک اصل جمع آثار، پاسخ نهایی از مجموع دو حالت پایا و گذرا به‌دست می‌آید. بنابراین مطابق رابطه‌ی (۱۰-۳)، تابع دما به دو بخش: حالت پایا $(T_s(r))$ و حالت گذرا $(\Phi(r, t))$ تقسیم می‌شود.

$$T(r, t) = T_s(r) + \Phi(r, t) \quad (10-3)$$

۳-۴-۱ محاسبه‌ی توزیع دما در حالت پایا

تابع پاسخ برای توزیع دما در حالت پایا، برای شاخص توانی مربوط به تابع توزیع ضریب هدایت گرمایی در طول ضخامت کره (m_r) در مقدار -1 و غیر از -1 ، متفاوت است؛ بنابراین برای محاسبه‌ی $T_s(r)$ دو حالت مختلف در نظر گرفته می‌شود.

۳-۴-۱-۱ اگر $m_r = -1$ باشد

در حالت پایا، مسأله نسبت به زمان تغییرات ندارد؛ بنابراین $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ و با جای‌گذاری آن در رابطه‌ی (۳-۳) (۹) تابع توزیع دما در این حالت به‌دست می‌آید.

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_s}{dr} \right) = 0 \rightarrow \frac{dT_s}{dr} = \frac{C_1}{r} \rightarrow T_s(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (11-3)$$

ثابت‌های مجهول C_1 و C_2 که از شرایط مرزی (۳-۱۲) محاسبه می‌شوند؛ در روابط (۳-۱۳) و (۳-۱۴) آورده شده‌اند.

$$\begin{cases} \gamma(r) \frac{dT_s}{dr} = h_i (T_s - T_i) & \text{on } r = a \\ -\gamma(r) \frac{dT_s}{dr} = h_o (T_s - T_o) & \text{on } r = b \end{cases} \quad (12-3)$$

$$C_1 = \frac{T_o - T_i}{\gamma_{m_r} \left(\frac{1}{b^r h_o} + \frac{1}{a^r h_i} \right) + \ln \frac{b}{a}} \quad (13-3)$$

$$C_r = \frac{\left(\frac{\gamma_{m_r}}{a^r h_i} - \ln a \right) T_o + \left(\frac{\gamma_{m_r}}{b^r h_o} + \ln b \right) T_i}{\gamma_{m_r} \left(\frac{1}{b^r h_o} + \frac{1}{a^r h_i} \right) + \ln \frac{b}{a}} \quad (14-3)$$

۳-۴-۱-۲ اگر $m_r \neq -1$ باشد

در این بخش نیز با جای گذاری $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ در رابطه‌ی (۹-۳) تابع توزیع دما به دست می‌آید.

$$\frac{1}{r^r} \frac{d}{dr} \left(r^{m_r+r} \frac{dT_s}{dr} \right) = 0 \rightarrow \frac{dT_s}{dr} = \frac{C'_1}{r^{m_r+r}}$$

$$T_s(r) = C_1 r^{-(m_r+1)} + C_r \quad (15-3)$$

ثابت‌های مجهول رابطه‌ی (۱۵-۳) که جهت محاسبه‌ی آن‌ها از شرایط مرزی (۱۲-۳) استفاده

شده است؛ در روابط (۱۶-۳) و (۱۷-۳) آمده‌اند.

$$C_1 = \frac{T_i - T_o}{\gamma_{m_r} (m_r + 1) \left[\frac{1}{b^r h_o} + \frac{1}{a^r h_i} \right] - \left[\frac{1}{b^{m_r+1}} - \frac{1}{a^{m_r+1}} \right]} \quad (16-3)$$

$$C_r = \frac{\gamma_{m_r} (m_r + 1) \left[\frac{T_i}{b^r h_o} + \frac{T_o}{a^r h_i} \right] - \left[\frac{T_i}{b^{m_r+1}} - \frac{T_o}{a^{m_r+1}} \right]}{\gamma_{m_r} (m_r + 1) \left[\frac{1}{b^r h_o} + \frac{1}{a^r h_i} \right] - \left[\frac{1}{b^{m_r+1}} - \frac{1}{a^{m_r+1}} \right]} \quad (17-3)$$

۳-۴-۲ محاسبه‌ی توزیع دما در حالت گذرا

با جای گذاری رابطه‌ی (۱۰-۳) در رابطه‌ی (۹-۳) معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به تابع توزیع دما در حالت

گذرا به دست می‌آید.

$$r^\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + (m_r + \nu) r^{\beta-1} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\rho_{m_r} c_{m_\Delta}}{\gamma_{m_r}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (18-3)$$

شرایط مرزی مربوط به معادله‌ی دیفرانسیل (۱۸-۳)، مطابق رابطه‌ی (۱۹-۳) و (۲۰-۳) می‌باشد.

$$\begin{cases} \gamma(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = h_i \Phi & \text{on } r = a \\ -\gamma(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = h_o \Phi & \text{on } r = b \end{cases} \quad (19-3)$$

$$\Phi(r, \cdot) = f(r) - T_s(r) \quad (20-3)$$

برای ساده‌سازی روابط، ثابت μ به صورت رابطه‌ی (۲۱-۳) تعریف می‌شود.

$$\mu = \frac{m_r + 1}{\nu} \quad (21-3)$$

همان‌گونه که در فصل قبل توضیح داده شد؛ معادله‌ی دیفرانسیل (۱۸-۳) را با توجه به شرایط مرزی همگن (۱۹-۳) می‌توان با به کارگیری روش جداسازی متغیرها حل نمود. بنابراین تابع توزیع دما در حالت گذرا، به دو تابع مجزا که یکی از آن‌ها تغییرات در راستای شعاع کره ($F(r)$) و دیگری برحسب زمان ($G(t)$) را نمایش می‌دهند؛ تقسیم می‌شود.

$$\Phi(r, t) = F(r)G(t) \quad (22-3)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۲۲-۳) در رابطه‌ی (۱۸-۳) معادله‌های دیفرانسیل مربوط به هر یک از توابع جداساز، به دست می‌آیند.

$$\frac{1}{F} \left[r^\beta F'' + (\nu\mu + 1) r^{\beta-1} F' \right] = \frac{\rho_{m_r} c_{m_\Delta}}{\gamma_{m_r}} \frac{\dot{G}}{G} = -\lambda^2$$

$$r^\beta F'' + (\nu\mu + 1) r^{\beta-1} F' + \lambda^2 F = 0 \quad (23-3)$$

$$\dot{G} + \frac{\gamma_{m_r}}{\rho_{m_r} c_{m_s}} \lambda^r G = 0 \quad (24-3)$$

شرایط مرزی مربوط به معادله‌ی دیفرانسیل (۲۳-۳) به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \gamma(r) \frac{dF}{dr} = h_1 F & \text{on } r = a \\ -\gamma(r) \frac{dF}{dr} = h_0 F & \text{on } r = b \end{cases} \quad (25-3)$$

با به کارگیری تغییر متغیرهای مناسب، معادله‌ی دیفرانسیل (۲۳-۳) با استفاده از روش کوشی-

اویلر در حل معادله‌های دیفرانسیل و نیز به کمک توابع بسل قابل حل خواهد بود. همان گونه که در گذشته بیان شد، یکی از عوامل تأثیرگذار در تابع پاسخ، شاخص توانی مؤثر است. در ادامه، تابع پاسخ برای معادله‌ی دیفرانسیل (۲۳-۳) و در سه حالت مجزا، برای مقادیر مختلف از شاخص توانی مؤثر محاسبه شده است.

۳-۴-۲-۱ اگر $\beta = 2$ باشد

با جای گذاری شاخص توانی مؤثر در این حالت در رابطه‌ی (۲۳-۳)، رابطه‌ی (۲۶-۳) به دست می آید.

$$r^r F'' + (\gamma\mu + 1)r F' + \lambda^r F = 0 \quad (26-3)$$

با استفاده از تغییر متغیر $x = \ln r$:

$$x = \ln r \rightarrow \frac{d^2 F}{dx^2} + \gamma\mu \frac{dF}{dx} + \lambda^r F = 0$$

تشکیل معادله‌ی مشخصه:

$$z^2 + \gamma\mu z + \lambda^r = 0 \rightarrow \Delta' = \mu^2 - \lambda^r$$

اکنون سه حالت مختلف برای Δ' در نظر گرفته می شود.

$$\Delta' > 0 \quad (1)$$

$$\Delta' > 0 \rightarrow \mu^r > \lambda^r \rightarrow |\lambda| < |\mu|$$

$$\rightarrow z_{\lambda, r} = -\mu \pm \sqrt{\mu^r - \lambda^r}$$

$z_{\lambda, r}$ ریشه‌های معادله‌ی مشخصه هستند.

$$F(r) = C_r r^{z_\lambda} + C_\varphi r^{z_r} \quad (27-3)$$

ضرایب مجهول رابطه‌ی (۲۷-۳)، از شرایط مرزی (۲۵-۳) به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} (\gamma_{m_r} z_\lambda a^{\gamma_{\mu+z_\lambda-r}} - h_i a^{z_\lambda}) C_r + (\gamma_{m_r} z_r a^{\gamma_{\mu+z_r-r}} - h_i a^{z_r}) C_\varphi = 0 \\ (\gamma_{m_r} z_\lambda b^{\gamma_{\mu+z_\lambda-r}} + h_o b^{z_\lambda}) C_r + (\gamma_{m_r} z_r b^{\gamma_{\mu+z_r-r}} + h_o b^{z_r}) C_\varphi = 0 \end{cases}$$

بدیهی است یکی از جواب‌های دستگاه فوق $C_r = C_\varphi = 0$ می‌باشد. بنابراین برای آنکه دستگاه جوابی غیر از صفر داشته باشد، باید دترمینان ضرایب آن برابر صفر گردد که در نتیجه‌ی آن مقادیر ویژه‌ی λ_n به دست می‌آیند. با استفاده از رابطه‌ی (۲۴-۳)، بخش زمانی تابع پاسخ $(G(t))$ ، محاسبه شده و تابع پاسخ گذرا برحسب توابع ویژه و مطابق رابطه‌ی (۳۰-۳) بسط داده می‌شود.

$$\frac{\dot{G}}{G} = -\frac{\gamma_{m_r}}{\rho_{m_r} c_{m_0}} \lambda_n^r \rightarrow G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{\gamma_{m_r}}{\rho_{m_r} c_{m_0}} \lambda_n^r t} \quad (28-3)$$

$$z_{\lambda, r n} = \mu \pm \sqrt{\mu^r - \lambda_n^r} \quad (29-3)$$

$$\Phi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n r^{z_{\lambda n}} + W_n r^{z_{r n}}) e^{-\frac{\gamma_{m_r}}{\rho_{m_r} c_{m_0}} \lambda_n^r t} \quad (30-3)$$

با توجه به آنچه در فصل قبل توضیح داده شد، تابع وزنی برای معادله‌ی دیفرانسیل (۲۶-۳) به صورت رابطه‌ی (۳۱-۳) می‌باشد.

$$w(r) = r^{\gamma_{\mu-1}} \quad (31-3)$$

با جای گذاری شرط اولیه ی (۳-۲۰) در رابطه ی (۳-۳۰) می توان ثابت های مجهول Q_n و W_n را محاسبه نمود. برای محاسبه ی این مجهول ها، از ویژگی تعامد توابع ویژه نسبت به یکدیگر و تابع وزنی استفاده می شود. با ضرب دو طرف رابطه ی (۳-۳۲) ابتدا در تابع ویژه ی $r^{z_{1n}}$ و تابع وزنی، سپس تابع ویژه ی $r^{z_{rn}}$ و تابع وزنی و نیز انتگرال گیری در بازه ی $a < r < b$ به ترتیب Q_n و W_n محاسبه می شوند.

$$f(r) - T_s(r) = \sum_{n=1}^{\infty} [Q_n r^{z_{1n}} + W_n r^{z_{rn}}] \quad (۳-۳۲)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b [f(r) - T_s(r)] r^{z_{1n} + \gamma \mu - 1} dr \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ Q_n \int_a^b r^{\gamma z_{1n} + \gamma \mu - 1} dr \right\} \\ \rightarrow Q_n &= \frac{\int_a^b [f(r) - T_s(r)] r^{z_{1n} + \gamma \mu - 1} dr}{\int_a^b r^{\gamma z_{1n} + \gamma \mu - 1} dr} \end{aligned} \quad (۳-۳۳)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b [f(r) - T_s(r)] r^{z_{rn} + \gamma \mu - 1} dr \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ W_n \int_a^b r^{\gamma z_{rn} + \gamma \mu - 1} dr \right\} \\ \rightarrow W_n &= \frac{\int_a^b [f(r) - T_s(r)] r^{z_{rn} + \gamma \mu - 1} dr}{\int_a^b r^{\gamma z_{rn} + \gamma \mu - 1} dr} \end{aligned} \quad (۳-۳۴)$$

بنابراین تابع پاسخ انتقال حرارت کره در این حالت مطابق رابطه ی (۳-۳۵) می باشد.

$$T(r, t) = T_s(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [Q_n r^{z_{1n}} + W_n r^{z_{rn}}] e^{-\frac{\gamma_{m\gamma}}{\rho_{m\gamma} c_{m\Delta}} \lambda_n^{\gamma} t} \quad (۳-۳۵)$$

$$\Delta' = 0 \quad (۲)$$

$$\begin{aligned} \Delta' = 0 &\rightarrow \mu^{\gamma} = \lambda^{\gamma} \rightarrow \lambda = \pm \mu \\ &\rightarrow z = -\mu \end{aligned}$$

z ریشه ی مضاعف برای معادله ی مشخصه است.

$$F(r) = r^{-\mu} (C_r + C_\varphi \ln r) \quad (36-3)$$

با جای گذاری رابطه ی (36-3) در شرایط مرزی (35-3):

$$\begin{cases} (\gamma_{m_r} \mu a^{\gamma_{m_r}-\gamma} + h_i) C_r + [\gamma_{m_r} a^{\gamma_{m_r}-\gamma} (\mu \ln a - 1) + h_i \ln a] C_\varphi = 0 \\ (\gamma_{m_r} \mu b^{\gamma_{m_r}-\gamma} - h_o) C_r + [\gamma_{m_r} b^{\gamma_{m_r}-\gamma} (\mu \ln b - 1) - h_o \ln b] C_\varphi = 0 \end{cases}$$

برای آنکه دستگاه فوق جوابی غیر از صفر داشته باشد، باید دترمینان ضرایب آن برابر صفر گردد. این حالت بسیار خاص می باشد و چنانچه در یک مطالعه ی موردی این معادلات برقرار باشند؛ مانند حالت قبل محاسبات انجام می شود.

$$\Delta' < 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta' < 0 &\rightarrow \mu^\gamma < \lambda^\gamma \rightarrow |\lambda| > |\mu| \\ &\rightarrow z_{\lambda,\gamma} = -\mu \pm j\sqrt{\lambda^\gamma - \mu^\gamma}, \quad j = \sqrt{-1} \end{aligned}$$

$z_{\lambda,\gamma}$ ریشه های مختلط معادله ی مشخصه می باشند.

$$F(r) = r^{-\mu} \left[C_r \sin(\sqrt{\lambda^\gamma - \mu^\gamma} \ln r) + C_\varphi \cos(\sqrt{\lambda^\gamma - \mu^\gamma} \ln r) \right] \quad (37-3)$$

با جای گذاری رابطه ی (37-3) در شرایط مرزی (35-3) و سپس برابر صفر قراردادن دترمینان ضرایب حاصل، مقادیر ویژه به دست می آیند. بنابراین تابع پاسخ حالت گذرا مطابق رابطه ی 0 می باشد.

$$z_{\lambda_n,\gamma_n} = \mu \pm j\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma}$$

$$\Phi(r, t) = r^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r) + B_n \cos(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r) \right] e^{-\frac{\gamma_{m_r}}{\rho_{m_r} c_{m_0}} \lambda_n^\gamma t} \quad (38-3)$$

تذکر: تمامی پاسخ های ممکن برای λ با کدنویسی در نرم افزار Maple 2018 و به کمک روش

ترسیمی به دست می آیند.

با جای گذاری شرط اولیه ی (۳-۲۰) در رابطه ی (۳-۳۸) و با ضرب دو طرف رابطه ی (۳-۴۰)،

ابتدا در تابع ویژه ی $\sin\left(\sqrt{\lambda_m^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right)$ و تابع وزنی، سپس تابع ویژه ی $\cos\left(\sqrt{\lambda_m^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right)$ و تابع

وزنی و نیز انتگرال گیری در بازه ی $a < r < b$ و با استفاده از ویژگی تعامد توابع ویژه نسبت به یکدیگر و

تابع وزنی، به ترتیب A_n و B_n محاسبه می شوند.

$$w(r) = r^{\gamma\mu-1} \quad (۳-۳۹)$$

$$f(r) - T_s(r) = r^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) + B_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) \right] \quad (۳-۴۰)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b [f(r) - T_s(r)] \sin\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) r^{\gamma\mu-1} dr \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \int_a^b \sin^\gamma\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) r^{\mu-1} dr \right\}$$

$$\rightarrow A_n = \frac{\int_a^b [f(r) - T_s(r)] \sin\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) r^{\gamma\mu-1} dr}{\int_a^b \sin^\gamma\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) r^{\mu-1} dr} \quad (۳-۴۱)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b [f(r) - T_s(r)] \cos\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) r^{\gamma\mu-1} dr \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B_n \int_a^b \cos^\gamma\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) r^{\mu-1} dr \right\}$$

$$\rightarrow B_n = \frac{\int_a^b [f(r) - T_s(r)] \cos\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) r^{\gamma\mu-1} dr}{\int_a^b \cos^\gamma\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) r^{\mu-1} dr} \quad (۳-۴۲)$$

بنابراین تابع پاسخ انتقال حرارت کره در این حالت مطابق رابطه ی (۳-۴۳) می باشد.

$$T(r, t) = T_s(r) +$$

$$r^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) + B_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n^\gamma - \mu^\gamma} \ln r\right) \right] e^{-\frac{\gamma m_r - \lambda_n^\gamma}{\rho m_r c_{m\Delta}} t} \quad (۳-۴۳)$$

۳-۴-۲-۲ اگر $\beta \neq 2$ باشد

در این حالت سعی می‌شود با بهره‌گیری از تغییر تابع و متغیرهای مناسب، معادله‌ی دیفرانسیل رابطه‌ی (۳-۲۳) به معادله‌ی بسل تبدیل شده و با کمک توابع بسل حل گردد.

با استفاده از تغییر تابع $F(r) = r^{-\beta} g(r)$ و جای‌گذاری در معادله‌ی (۳-۲۳):

$$r^{\gamma} g'' + (\gamma\mu - \gamma\beta + 1) r g' + [\beta^{\gamma} - \gamma\mu\beta + \lambda^{\gamma} r^{-\beta+\gamma}] g = 0. \quad (3-44)$$

در ادامه با به‌کارگیری تابع $g(r) = r^{(\beta-\mu)} v(r)$ ، رابطه‌ی (۳-۴۴) به رابطه‌ی (۳-۴۵) تبدیل می‌شود.

$$r^{\gamma} v'' + r v' + [\lambda^{\gamma} r^{-\beta+\gamma} - \mu^{\gamma}] v = 0. \quad (3-45)$$

در پایان نیز تغییر متغیر $y = \frac{\gamma\lambda}{\gamma-\beta} r^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma}}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$y^{\gamma} \frac{d^{\gamma} v}{dy^{\gamma}} + y \frac{dv}{dy} + \left[y^{\gamma} - \left(\frac{\gamma\mu}{2-\beta} \right)^{\gamma} \right] v = 0. \quad (3-46)$$

$$s = \frac{\gamma\mu}{2-\beta} \quad (3-47)$$

$$\rightarrow y^{\gamma} \frac{d^{\gamma} v}{dy^{\gamma}} + y \frac{dv}{dy} + [y^{\gamma} - s^{\gamma}] v = 0. \quad (3-48)$$

معادله‌ی دیفرانسیل (۳-۴۸) را معادله‌ی دیفرانسیل بسل از مرتبه‌ی s گویند. بنابراین پاسخ آن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$v(y) = C_{\gamma} J_s(y) + C_{\gamma} Y_s(y)$$

$$y = \frac{2\lambda}{r-\beta} r^{\frac{r-\beta}{r}} \rightarrow v(r) = C_r J_s\left(\frac{2\lambda}{r-\beta} r^{\frac{r-\beta}{r}}\right) + C_r Y_s\left(\frac{2\lambda}{r-\beta} r^{\frac{r-\beta}{r}}\right)$$

$$g(r) = r^{(\beta-\mu)} v(r) \rightarrow g(r) = r^{(\beta-\mu)} \left[C_r J_s\left(\frac{2\lambda}{r-\beta} r^{\frac{r-\beta}{r}}\right) + C_r Y_s\left(\frac{2\lambda}{r-\beta} r^{\frac{r-\beta}{r}}\right) \right]$$

$$F(r) = r^{-\beta} g(r)$$

$$F(r) = r^{-\mu} \left[C_r J_s\left(\frac{2\lambda}{r-\beta} r^{\frac{r-\beta}{r}}\right) + C_r Y_s\left(\frac{2\lambda}{r-\beta} r^{\frac{r-\beta}{r}}\right) \right] \quad (49-3)$$

ثابت‌های مجهول رابطه‌ی (۴۹-۳) از شرایط مرزی (۲۵-۳) به‌دست می‌آید. پس از تشکیل ماتریس ضرایب و برابر صفر قراردادن آن و با کدنویسی در نرم‌افزار Maple 2018 و استفاده از روش ترسیمی مقادیر λ_n محاسبه می‌گردد. بنابراین پاسخ حالت گذرا با رابطه‌ی (۵۰-۳) بیان می‌شود.

$$\Phi(r, t) = r^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_n J_s\left(\frac{2\lambda_n}{r-\beta} r^{\frac{r-\beta}{r}}\right) + E_n Y_s\left(\frac{2\lambda_n}{r-\beta} r^{\frac{r-\beta}{r}}\right) \right] e^{-\frac{\gamma_{m_r}}{\rho_{m_r} c_{m_0}} \lambda_n^2 t} \quad (50-3)$$

تابع وزنی مربوط به معادله‌ی (۲۳-۳) در این حالت مطابق رابطه‌ی زیر است.

$$w(r) = r^{2\mu-\beta+1} \quad (51-3)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۵۰-۳) در شرط اولیه‌ی (۲۰-۳) می‌توان ثابت‌های مجهول D_n و E_n را محاسبه نمود. برای محاسبه‌ی این مجهول‌ها، از ویژگی تعامد توابع ویژه نسبت به یکدیگر و تابع وزنی استفاده می‌شود. با ضرب دو طرف رابطه‌ی (۵۲-۳) ابتدا در تابع ویژه‌ی $J_s\left(\frac{2\lambda_m}{r-\beta} r^{\frac{r-\beta}{r}}\right)$ و تابع وزنی، سپس تابع ویژه‌ی $Y_s\left(\frac{2\lambda_m}{r-\beta} r^{\frac{r-\beta}{r}}\right)$ و تابع وزنی و نیز انتگرال‌گیری در بازه‌ی $a < r < b$ به‌ترتیب D_n و E_n محاسبه می‌شوند.

$$f(r) - T_s(r) = r^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_n J_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) + E_n Y_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) \right] \quad (52-3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b [f(r) - T_s(r)] J_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) r^{\gamma \mu - \beta + 1} dr \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D_n \int_a^b \left[J_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) \right]^{\gamma} r^{\mu - \beta + 1} dr \right\} \\ \rightarrow D_n &= \frac{\int_a^b [f(r) - T_s(r)] J_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) r^{\gamma \mu - \beta + 1} dr}{\int_a^b \left[J_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) \right]^{\gamma} r^{\mu - \beta + 1} dr} \quad (53-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b [f(r) - T_s(r)] Y_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) r^{\gamma \mu - \beta + 1} dr \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ E_n \int_a^b \left[Y_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) \right]^{\gamma} r^{\mu - \beta + 1} dr \right\} \\ \rightarrow E_n &= \frac{\int_a^b [f(r) - T_s(r)] Y_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) r^{\gamma \mu - \beta + 1} dr}{\int_a^b \left[Y_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) \right]^{\gamma} r^{\mu - \beta + 1} dr} \quad (54-3) \end{aligned}$$

بنابراین تابع پاسخ انتقال حرارت کره در این حالت ($\beta \neq \gamma$) مطابق رابطه‌ی (۵۵-۳) بیان می‌گردد.

$$T(r, t) = T_s(r) + r^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_n J_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) + E_n Y_s \left(\frac{\gamma \lambda_n}{\gamma - \beta} r^{\frac{\gamma - \beta}{\gamma}} \right) \right] e^{-\frac{\gamma m_r}{\rho m_r c m_d} \lambda_n^{\gamma} t} \quad (55-3)$$

توجه: از آنجا که در بسیاری از پژوهش‌ها ضرایب ناهمگنی تمام خواص با هم برابر در نظر گرفته می‌شوند؛ لازم به ذکر است اگر تمام شاخص‌های توانی با یکدیگر برابر باشند و مقدار آن‌ها برابر صفر باشد ($m_1 = m_r = m_{\gamma} = m_{\phi} = m_d = 0$)، در این حالت از رابطه‌ی (۸-۳)، $\beta = 0$ و از رابطه‌ی (۳-۲۱)، $\mu = \frac{1}{\gamma}$ به دست می‌آیند و با قراردادن این مقادیر در رابطه‌ی (۳-۲۳)، رابطه‌ی (۳-۵۶) به دست می‌آید که مشابه رابطه‌ی (۲-۱۴) در حل کره‌ی جدار ضخیم همگن است؛ بنابراین در این حالت روند حل، دقیقاً مشابه روندی که برای حل معادله‌ی دیفرانسیل (۲-۱۴) در فصل ۲ بیان شده است؛ می‌باشد.

$$F'' + \frac{\gamma}{r} F' + \lambda^2 F = 0 \quad (56-3)$$

۳-۵ روابط ترموالاستیک

به علت تقارن در دو راستای مختصاتی در کره، جابه‌جایی‌ها و تغییرات در دو راستای θ و φ ، برابر صفر در نظر گرفته می‌شود (به عبارت دیگر: $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, $u_\varphi = 0$, $u_\theta = 0$). هم‌چنین جابه‌جایی شعاعی فقط تابعی از شعاع کره و زمان می‌باشد. از شش عنصر تانسور کرنش در معادله‌های سینماتیک (با توجه به متقارن بودن کره) تنها سه عنصر روی قطر اصلی تانسور کرنش مخالف صفر می‌باشند و رابطه‌ی آن‌ها با جابه‌جایی‌ها مطابق روابط (۳-۵۷) به دست می‌آید [۴۷].

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} \quad (57-3)$$

از شش عنصر تانسور تنش در معادله‌های ساختاری نیز تنها عناصر روی قطر اصلی تانسور تنش مخالف صفر می‌باشند و رابطه‌ی تنش‌های شعاعی و محیطی با کرنش‌های شعاعی و محیطی مطابق رابطه‌ی (۳-۵۸) می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & 2B \\ B & A+B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi \end{Bmatrix} - E \begin{Bmatrix} C \\ C \end{Bmatrix} \alpha \Delta T \quad (58-3)$$

که در این رابطه α ضریب انبساط حرارتی کره می‌باشد و ثابت‌های A ، B و C مطابق رابطه‌ی (۳-۵۹) بیان می‌شوند.

$$A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C = \frac{1}{1-2\nu} \quad (59-3)$$

هم‌چنین پارامتر ΔT با رابطه‌ی (۳-۶۰) بیان می‌شود.

$$\Delta T = T(r, t) - T_{\infty} \quad (۶۰-۳)$$

که در آن T_{∞} ، دمای مرجع نامیده می‌شود.

با توجه به رابطه‌ی (۵۸-۳):

$$\sigma_r = E(r) [A\varepsilon_r + \nu B\varepsilon_{\theta} - C\alpha(r) \Delta T] \quad (۶۱-۳)$$

$$\sigma_{\theta} = E(r) [B\varepsilon_r + (A + B)\varepsilon_{\theta} - C\alpha(r) \Delta T] \quad (۶۲-۳)$$

از سه معادله‌ی تعادل، تنها یک معادله‌ی آن دارای جواب است و سایر معادله‌ها برابر صفر هستند و این معادله، مطابق رابطه‌ی (۶۳-۳) به دست می‌آید.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\nu}{r}(\sigma_r - \sigma_{\theta}) = 0 \quad (۶۳-۳)$$

با توجه به روابط (۵۷-۳)، (۵۸-۳) و (۶۳-۳)، ۷ معادله و ۷ مجهول (سه عنصر تنش، سه عنصر کرنش و یک عنصر جابه‌جایی) وجود دارد؛ بنابراین می‌توان مجهول‌های مسأله را محاسبه نمود.

۳-۵-۱ محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی

با جای‌گذاری روابط (۵۷-۳) در رابطه‌های (۶۱-۳) و (۶۲-۳) و نتیجه‌ی آن در رابطه‌ی (۶۳-۳)، معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به جابه‌جایی شعاعی به دست می‌آید.

$$u_r'' + (m_1 + \nu) \frac{u_r'}{r} - \nu(1 - \nu^* m_1) \frac{u_r}{r^2} = \frac{C\alpha_{m_r}}{A} r^{m_r} \left[(m_1 + m_r) \frac{\Delta T}{r} + \frac{dT}{dr} \right] \quad (۶۴-۳)$$

که در این رابطه همانند فصل قبل $\nu^* = \frac{B}{A}$ تعریف می‌شود.

معادله‌ی دیفرانسیل (۶۴-۳) ابتدا با فرض همگن بودن آن، با به‌کارگیری روش کوشی-اوایلر در حل معادله‌های دیفرانسیل همگن مرتبه‌ی دو (جواب عمومی $u_{r,h}$) و سپس با استفاده از روش تغییر پارامتر (روش لاگرانژ^۱) در حل معادله‌های دیفرانسیل ناهمگن (جواب خصوصی $u_{r,p}$)، حل می‌گردد. در نهایت پاسخ کلی جابه‌جایی شعاعی از مجموع پاسخ عمومی و خصوصی به‌دست می‌آید.

$$u_r(r, t) = u_{r,h}(r) + u_{r,p}(r, t) \quad (۶۵-۳)$$

با فرض همگن بودن معادله‌ی دیفرانسیل (۶۴-۳) و با استفاده از تغییر متغیر $x = \ln r$:

$$\frac{d^2 u_{r,h}}{dx^2} + (m_1 + 1) \frac{du_{r,h}}{dx} - 2(1 - v^* m_1) u_{r,h}(x) = 0. \quad (۶۶-۳)$$

تعیین علامت ضریب تابع $u_{r,h}(x)$ سبب می‌شود تا معادله‌ی مشخصه‌ی مربوط به معادله‌ی دیفرانسیل (۶۶-۳)، پاسخ‌های متفاوتی داشته باشد که در ادامه بررسی می‌شوند. برای ساده‌سازی، روابط (۶۷-۳) و (۶۸-۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$\psi^2 = |2(1 - v^* m_1)| \quad (۶۷-۳)$$

$$\xi = \frac{m_1 + 1}{2} \quad (۶۸-۳)$$

۳-۵-۱-۱ اگر $m_1 < \frac{1}{v^*}$ باشد

با جای‌گذاری $m_1 < \frac{1}{v^*}$ در رابطه‌ی (۶۷-۳)، رابطه‌ی (۶۹-۳) به‌دست می‌آید.

$$\psi^2 = 2(1 - v^* m_1) \quad (۶۹-۳)$$

^۱ Lagrange method

با تشکیل معادله‌ی مشخصه‌ی رابطه‌ی (۶۶-۳) و تعیین علامت آن، پاسخ عمومی برای جابه‌جایی شعاعی مطابق رابطه‌ی (۷۱-۳) به‌دست می‌آید.

$$z^r + (m_1 + 1)z - \psi^r = 0 \rightarrow \Delta = (m_1 + 1)^r + 4\psi^r > 0$$

$$\rightarrow z_{r,f} = \frac{-(m_1 + 1) \pm \sqrt{(m_1 + 1)^r + 4\psi^r}}{2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^r + \psi^r} \quad (70-3)$$

$$u_{r,h}(r) = C_\delta r^{z_r} + C_\epsilon r^{z_\epsilon} \quad (71-3)$$

با توجه به رابطه‌ی (۷۱-۳)، پایه‌های جواب معادله‌ی دیفرانسیل (۶۴-۳) به‌صورت رابطه‌ی (۳-۳) می‌باشند.

$$y_1(r) = r^{z_r}, \quad y_r(r) = r^{z_\epsilon} \quad (72-3)$$

که رونسکین پایه‌های جواب، مطابق رابطه‌ی (۷۳-۳) است.

$$W(r) = \begin{vmatrix} y_1(r) & y_r(r) \\ y_1'(r) & y_r'(r) \end{vmatrix} = r \sqrt{\xi^r + \psi^r} r^{-2\xi-1} \quad (73-3)$$

با استفاده از روش لاگرانژ در حل معادله‌های دیفرانسیل مرتبه‌ی ۲، جواب خصوصی معادله‌ی (۶۴-۳) به‌صورت رابطه‌ی (۷۴-۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$u_{r,p}(r, t) = y_1(r) V_1(r, t) + y_r(r) V_r(r, t) \quad (74-3)$$

که در آن توابع $V_1(r, t)$ و $V_r(r, t)$ برابر است با:

$$V_l(r, t) = -\frac{C\alpha_{m_r}}{rA\sqrt{\xi^r + \psi^r}} \left[r^{r\xi + m_r + z_r + 1} \left(T(r, t) - \frac{m_l + m_r}{r\xi + m_r + z_r + 1} T_\infty \right) + (m_l - r\xi - z_r - 1) \int T(r, t) r^{r\xi + m_r + z_r} dr \right] \quad (75-3)$$

$$V_r(r, t) = \frac{C\alpha_{m_r}}{rA\sqrt{\xi^r + \psi^r}} \left[r^{r\xi + m_r + z_r + 1} \left(T(r, t) - \frac{m_l + m_r}{r\xi + m_r + z_r + 1} T_\infty \right) + (m_l - r\xi - z_r - 1) \int T(r, t) r^{r\xi + m_r + z_r} dr \right] \quad (76-3)$$

در نهایت جابه‌جایی شعاعی با رابطه‌ی (۷۷-۳) بیان می‌شود.

$$u_r(r, t) = C_\delta r^{z_r} + C_r r^{z_r} + y_l(r) V_l(r, t) + y_r(r) V_r(r, t) \quad (77-3)$$

۳-۵-۱-۲ اگر $m_l > \frac{1}{v^*}$ باشد

با جای‌گذاری $m_l > \frac{1}{v^*}$ در رابطه‌ی (۶۷-۳) رابطه‌ی (۷۸-۳) به‌دست می‌آید.

$$\psi^r = -r(1 - v^* m_l) \quad (78-3)$$

معادله‌ی مشخصه‌ی رابطه‌ی (۶۶-۳) به‌شکل زیر است.

$$z^r + (m_l + 1)z + \psi^r = 0 \rightarrow \Delta = (m_l + 1)^r - r\psi^r$$

سه حالت مختلف برای Δ وجود دارد:

$$\Delta > 0 \quad (1)$$

در این حالت معادله‌ی مشخصه دو ریشه‌ی مجزاً دارد. بنابراین پاسخ عمومی جابه‌جایی شعاعی

با رابطه‌ی (۸۰-۳) بیان می‌شود.

$$\Delta > 0 \rightarrow (m_l + 1)^r - r\psi^r > 0 \rightarrow |\xi| > |\psi|$$

$$\rightarrow z_{r,f} = \frac{-(m_1 + 1) \pm \sqrt{(m_1 + 1)^2 - 4\psi^2}}{2} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \psi^2} \quad (79-3)$$

$$u_{r,h}(r) = C_\delta r^{z_r} + C_\varphi r^{z_f} \quad (80-3)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی (۸۰-۳) با رابطه‌ی (۷۱-۳) مشاهده می‌شود کاملاً مشابه یکدیگرند؛ بنابراین جابه‌جایی شعاعی در این حالت مشابه رابطه‌ی (۷۷-۳) می‌باشد، با این تفاوت که ریشه‌های معادله‌ی مشخصه در آن‌ها با یکدیگر متفاوت است.

$$\Delta = 0 \quad (2)$$

معادله‌ی مشخصه در این حالت دارای ریشه‌ی مضاعف می‌باشد. بنابراین پاسخ عمومی جابه‌جایی شعاعی با رابطه‌ی (۸۲-۳) بیان می‌شود.

$$\Delta = 0 \rightarrow (m_1 + 1)^2 - 4\psi^2 = 0 \rightarrow \xi = \pm \psi$$

$$\rightarrow z_r = z_f = \frac{-(m_1 + 1)}{2} = -\xi \quad (81-3)$$

$$u_{r,h}(r) = r^{-\xi} (C_\delta + C_\varphi \ln r) \quad (82-3)$$

پایه‌های جواب به‌صورت رابطه‌ی (۸۳-۳) می‌باشند.

$$y_1(r) = r^{-\xi}, \quad y_2(r) = r^{-\xi} \ln r \quad (83-3)$$

که رونسکین پایه‌های جواب مطابق رابطه‌ی (۸۴-۳) است.

$$W(r) = \begin{vmatrix} y_1(r) & y_2(r) \\ y_1'(r) & y_2'(r) \end{vmatrix} = r^{-2\xi-1} \quad (84-3)$$

جواب خصوصی معادله‌ی (۶۴-۳) به‌صورت رابطه‌ی (۸۵-۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$u_{r,p}(r, t) = y_l(r) V_l(r, t) + y_r(r) V_r(r, t) \quad (۸۵-۳)$$

که در آن توابع $V_l(r, t)$ و $V_r(r, t)$ برابر است با:

$$V_l(r, t) = -\frac{C\alpha_{m_r}}{A} \left[r^{\xi+m_r+1} \ln r T(r, t) - \frac{m_l+m_r}{\xi+m_r+1} r^{\xi+m_r+1} \left(\ln r - \frac{1}{\xi+m_r+1} \right) T_\infty \right. \\ \left. + (m_l - \xi - 1) \int r^{\xi+m_r+1} \ln r T(r, t) dr - \int r^{\xi+m_r} T(r, t) dr \right] \quad (۸۶-۳)$$

$$V_r(r, t) = \frac{C\alpha_{m_r}}{A} \left[r^{\xi+m_r+1} \left(T(r, t) - \frac{m_l+m_r}{\xi+m_r+1} T_\infty \right) + (m_l - \xi - 1) \int r^{\xi+m_r} T(r, t) dr \right] \quad (۸۷-۳)$$

در نهایت جابه‌جایی شعاعی به صورت رابطه‌ی (۸۸-۳) مشخص می‌شود.

$$u_r(r, t) = C_\delta r^{-\xi} + C_\varphi r^{-\xi} \ln r + y_l(r) V_l(r, t) + y_r(r) V_r(r, t) \quad (۸۸-۳)$$

$$\Delta < 0 \quad (۳)$$

در این حالت ریشه‌های معادله‌ی مشخصه مختلط هستند. بنابراین پاسخ عمومی جابه‌جایی

شعاعی با رابطه‌ی (۹۰-۳) بیان می‌شود.

$$\Delta < 0 \rightarrow (m_l + 1)^r - \varphi \psi^r < 0 \rightarrow |\xi| < |\psi|$$

$$\rightarrow z_{r,r} = \frac{-(m_l + 1) \pm j \sqrt{\varphi \psi^r - (m_l + 1)^r}}{2} = -\xi \pm j \sqrt{\psi^r - \xi^r}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (۸۹-۳)$$

$$u_{r,h}(r) = r^{-\xi} \left[C_\delta \sin \left(\sqrt{\psi^r - \xi^r} \ln r \right) + C_\varphi \cos \left(\sqrt{\psi^r - \xi^r} \ln r \right) \right] \quad (۹۰-۳)$$

پایه‌های جواب و رونسکین آن‌ها به ترتیب در رابطه‌های (۹۱-۳) و (۹۲-۳) آمده است.

$$y_1(r) = r^{-\xi} \sin\left(\sqrt{\psi^r - \xi^r} \ln r\right), \quad y_r(r) = r^{-\xi} \cos\left(\sqrt{\psi^r - \xi^r} \ln r\right) \quad (91-3)$$

$$W(r) = \begin{vmatrix} y_1(r) & y_r(r) \\ y_1'(r) & y_r'(r) \end{vmatrix} = \sqrt{\psi^r - \xi^r} r^{-r\xi} \quad (92-3)$$

جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل (۶۴-۳) به صورت رابطه‌ی (۹۳-۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$u_{r,p}(r, t) = y_1(r) V_1(r, t) + y_r(r) V_r(r, t) \quad (93-3)$$

که در آن توابع $V_1(r, t)$ و $V_r(r, t)$ به ترتیب از روابط (۹۴-۳) و (۹۵-۳) محاسبه می‌شوند.

$$V_1(r, t) = -\frac{C\alpha_{m_r}}{A} \int \frac{y_r(r)}{W(r)} r^{m_r} \left[(m_1 + m_r) \frac{\Delta T}{r} + \frac{dT}{dr} \right] dr \quad (94-3)$$

$$V_r(r, t) = \frac{C\alpha_{m_r}}{A} \int \frac{y_1(r)}{W(r)} r^{m_r} \left[(m_1 + m_r) \frac{\Delta T}{r} + \frac{dT}{dr} \right] dr \quad (95-3)$$

بنابراین جابه‌جایی شعاعی با رابطه‌ی (۹۶-۳) بیان می‌شود.

$$u_r(r, t) = r^{-\xi} \left[C_\delta \sin\left(\sqrt{\psi^r - \xi^r} \ln r\right) + C_\epsilon \cos\left(\sqrt{\psi^r - \xi^r} \ln r\right) \right] + y_1(r) V_1(r, t) + y_r(r) V_r(r, t) \quad (96-3)$$

۳-۵-۲ محاسبه‌ی تنش‌های شعاعی و محیطی

با محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی، ابتدا با استفاده از معادله‌های سینماتیک، کرنش‌ها و سپس با به کارگیری معادله‌های ساختاری تنش‌ها بر حسب شعاع کره و زمان به دست می‌آیند. در نهایت مجهول‌های C_δ و C_ϵ ، با اعمال شرایط مرزی تنشی در لایه‌ی داخلی و خارجی کره محاسبه می‌شوند.

همان گونه که در بخش قبلی مشاهده شد؛ جابه‌جایی شعاعی با توجه به داده‌های مسأله، پاسخ‌های متفاوتی را دارا می‌باشد. برای هر یک از این پاسخ‌ها، تنش‌های شعاعی و محیطی نیز متفاوت خواهد

بود. در ادامه به عنوان نمونه تنش‌های شعاعی و محیطی تنها برای $m_1 < \frac{1}{v^*}$ محاسبه شده‌اند. برای

حالت‌های دیگر نیز روند مشابهی باید پیموده شود.

با جای گذاری جابه‌جایی شعاعی در روابط (۳-۵۷) و سپس در روابط (۳-۶۱) و (۳-۶۲)، تنش‌های

شعاعی و محیطی به دست می‌آیند.

$$\sigma_r(r, t) = AE(r) \left[\begin{aligned} & (z_r + v^*) r^{z_r-1} C_\delta + (z_\varphi + v^*) r^{z_\varphi-1} C_\varphi + \frac{du_{r,p}}{dr} \\ & + \frac{v^*}{r} u_{r,p} - \frac{C\alpha(r)}{A} \Delta T \end{aligned} \right] \quad (۳-۹۷)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = AE(r) \left\{ \begin{aligned} & [1 + (z_r + 1)v^*] r^{z_r-1} C_\delta + [1 + (z_\varphi + 1)v^*] r^{z_\varphi-1} C_\varphi \\ & + v^* \frac{du_{r,p}}{dr} + \frac{1+v^*}{r} u_{r,p} - \frac{C\alpha(r)}{A} \Delta T \end{aligned} \right\} \quad (۳-۹۸)$$

در کره‌ی مورد مطالعه شرایط مرزی تنشی با رابطه‌ی (۳-۹۹) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=a} &= -P_i \\ \sigma_r|_{r=b} &= -P_o \end{aligned} \quad (۳-۹۹)$$

جهت ساده‌سازی در روند حل، تابع $S(r, t)$ مطابق رابطه‌ی (۳-۱۰۰) در نظر گرفته می‌شود.

$$S(r, t) = \frac{du_{r,p}}{dr} + \frac{v^*}{r} u_{r,p} - \frac{C\alpha(r)}{A} \Delta T \quad (۳-۱۰۰)$$

بنابراین تنش شعاعی برابر است با:

$$\sigma_r(r, t) = AE(r) \left[(z_r + v^*) r^{z_r-1} C_\delta + (z_\varphi + v^*) r^{z_\varphi-1} C_\varphi + S(r, t) \right] \quad (۳-۱۰۱)$$

با به کارگیری شرایط مرزی تنشی که در رابطه‌ی (۳-۹۹) آمده است؛ مجهول‌های C_δ و C_φ

محاسبه می‌گردد.

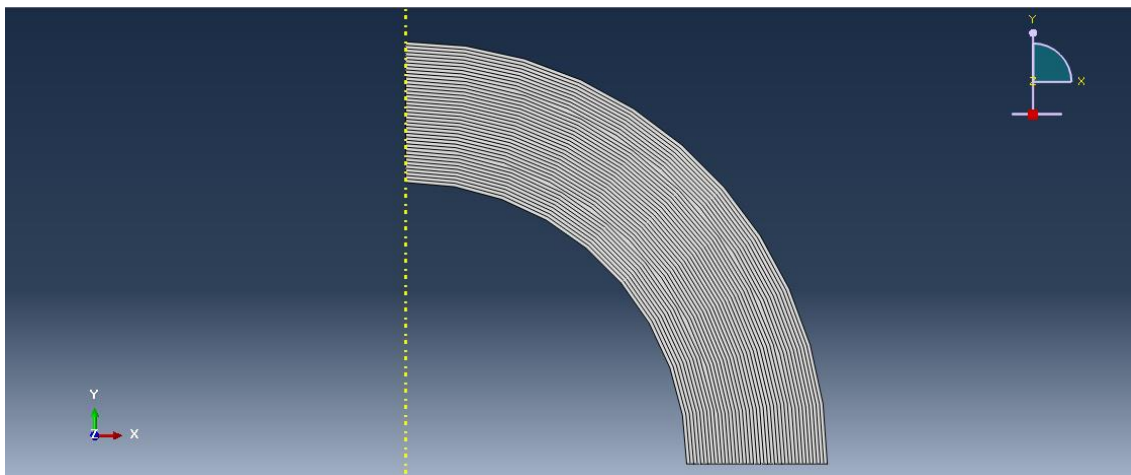
$$C_{\Delta}(t) = \frac{\frac{1}{AE_{m_1}} \left(\frac{b^{z_r-1}}{a^{m_1}} P_i - \frac{a^{z_r-1}}{b^{m_1}} P_o \right) + b^{z_r-1} S(a, t) - a^{z_r-1} S(b, t)}{(z_r + \nu^*) (b^{z_r-1} a^{z_r-1} - b^{z_r-1} a^{z_r-1})} \quad (10-3)$$

$$C_{\epsilon}(t) = \frac{\frac{1}{AE_{m_1}} \left(\frac{b^{z_r-1}}{a^{m_1}} P_i - \frac{a^{z_r-1}}{b^{m_1}} P_o \right) + b^{z_r-1} S(a, t) - a^{z_r-1} S(b, t)}{(z_r + \nu^*) (b^{z_r-1} a^{z_r-1} - b^{z_r-1} a^{z_r-1})} \quad (10-3)$$

با محاسبه‌ی مجهول‌های C_{Δ} و C_{ϵ} و با قراردادن آن‌ها در روابط (۷۷-۳)، (۹۷-۳) و (۹۸-۳) به تربیت جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های شعاعی و محیطی مشخص می‌شوند.

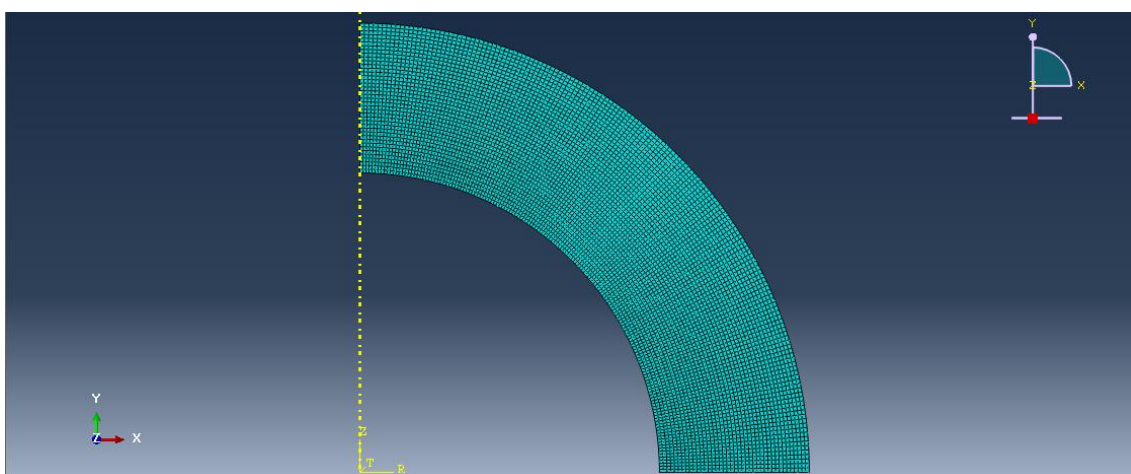
۳-۶ مدل سازی کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم

همانند فصل ۲، جهت حلّ عددی کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم از نرم‌افزار آباکوس استفاده می‌شود. برای انجام تحلیل مورد نظر، کره به شعاع داخلی ۴۰ mm و شعاع خارجی ۶۰ mm و با ضخامت ثابت، مدل سازی شده و مطابق شکل ۳-۲، برای ایجاد خواص ناهمگنی که به صورت شعاعی در پوسته‌ی کروی در نظر گرفته شده است؛ با تقسیم جداره‌ی کره به تعداد ۴۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مکانیکی و حرارتی در هر لایه با توجه به فاصله‌ی مرکز هر لایه از لایه‌ی داخلی، در نهایت پوسته‌ی کروی مورد نظر از ۴۰ کره‌ی همگن و همسانگرد (ایزوتروپ) به هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محلّ اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محلّ اتصال لایه‌ها، حدّ میانگین چپ و راست مرز دو لایه در نظر گرفته می‌شوند [۵۳].



شکل ۲-۳ هندسه‌ی مقطع عرضی کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم مدل‌شده در نرم‌افزار آباکوس

برای المان‌بندی کره، المان استاندارد با مقطع چهارضلعی دارای ۸ گره (۴ گره در رؤوس و ۴ گره در وسط اضلاع) انتخاب شده است که درجه‌ی آزادی هر گره ۲ (یکی در راستای شعاعی و دیگری در راستای محیطی) می‌باشد. این المان از نوع axisymmetric و Coupled Temperature- Displacement می‌باشد که به اختصار CAX8RT نامیده می‌شود. اندازه‌ی هر المان در راستای شعاعی و محیطی برابر ۰/۰۰۰۵ و تعداد آن‌ها برابر ۶۲۸۰ می‌باشد. شکل ۳-۳ چگونگی المان‌بندی را در نرم‌افزار آباکوس نمایش می‌دهد.



شکل ۳-۳ نمایی از مش‌بندی مقطع عرضی کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم در نرم‌افزار آباکوس

۷-۳ مطالعه موردی

برای مطالعه موردی و بررسی نمودارهای به دست آمده از نتایج حلّ تحلیلی و عددی، یک کره‌ی ضخیم ناهمگن و همسانگرد با ضخامت ثابت و بارگذاری فشار داخلی، فشار خارجی و بار حرارتی گذرا مطابق شکل ۱-۳ به شعاع داخلی $a = 40 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $b = 60 \text{ mm}$ و توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی در نظر گرفته شده است. هم‌چنین شاخص‌های توانی خواص مکانیکی و حرارتی با هم برابر بوده و در نتایج با پارامتر n ($m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = n$) نشان داده شده‌اند. نتایج برای مقادیر ۱-، ۰/۵، ۰، ۰/۵ و ۱ از n با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

یادآوری: برای تمام مقادیر شاخص توانی ذکر شده در این پژوهش، همواره $m_1 < \frac{1}{\nu^*}$ برقرار است. مدول الاستیسیته، چگالی، هدایت گرمایی، ظرفیت گرمایی ویژه و ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی کره به ترتیب برابر مقادیر $E_i = 200 \text{ GPa}$ ، $\rho_i = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ، $\gamma_i = 60/5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$ ، $\alpha_i = 1/2 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ ، $c_i = 434 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$ هستند و نسبت پواسون ثابت و برابر $\nu = 0/3$ می‌باشد. کره تحت فشار یکنواخت داخلی $P_i = 80 \text{ MPa}$ و خارجی $P_o = 80 \text{ MPa}$ قرار دارد و دمای محیط اطراف سطح داخلی و خارجی آن، ثابت و به ترتیب برابر $T_i = 125 \text{ }^\circ\text{C}$ و $T_o = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ و هم‌چنین دمای مرجع برابر $T_\infty = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ و ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی در سطح داخلی و خارجی آن بسیار بزرگ ($h_i, h_o \rightarrow \infty$) می‌باشد. دمای اولیه‌ی کره ثابت فرض می‌شود و مقدار آن $25 \text{ }^\circ\text{C}$ می‌باشد؛ بنابراین $f(r) = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. حلّ تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 2018 صورت گرفته است. برای حلّ کره‌ی تحت بارگذاری ترکیبی می‌توان با در نظر گرفتن اثر هر کدام از جملات حاصل از بارگذاری‌های حرارتی و فشاری به تنهایی و محاسبه‌ی مقادیر جابه‌جایی و تنش حاصل از هر بارگذاری، در نهایت با استفاده از اصل جمع آثار مقادیر مربوط به جابه‌جایی‌های شعاعی و نیز تنش‌های محیطی و شعاعی حاصل از بارگذاری ترکیبی را به دست آورد.

۳-۸ بررسی نتایج

در این بخش نتایج مربوط به حلّ تحلیلی با نتایج عددی حاصل از روش اجزای محدود در کره‌ی ناهمگن تحت بارگذاری‌های حرارتی و فشاری مقایسه شده است.

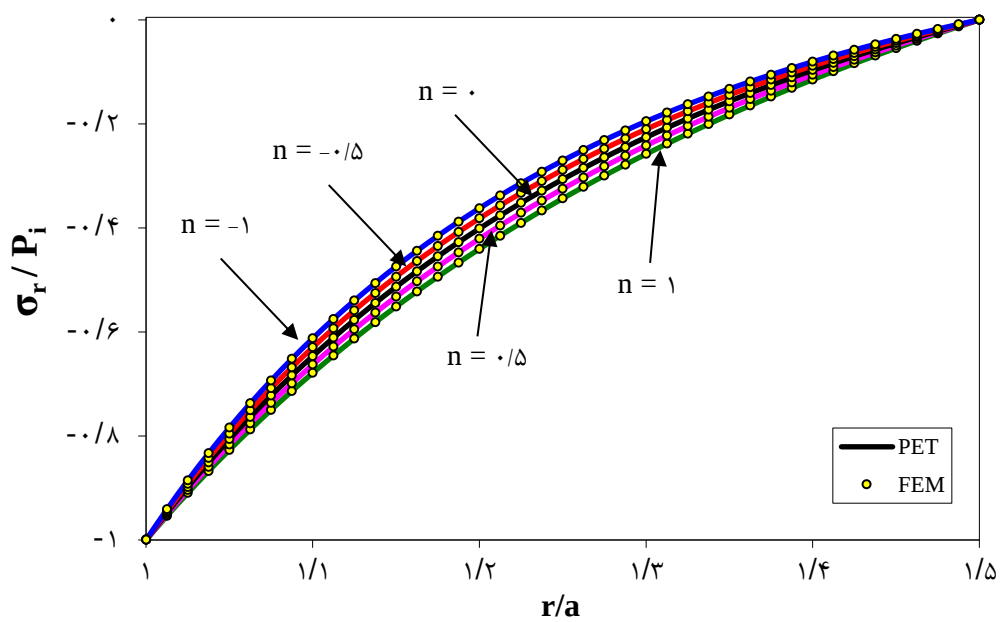
۳-۸-۱ مقایسه‌ی نتایج

ابتدا این نکته قابل ذکر می‌باشد که در این بخش و آنچه به عنوان نتایج بیان شده منظور از شاخص‌های توانی مثبت و منفی به ترتیب $n=1$ ، $n=0/5$ و $n=-0/5$ و $n=-1$ می‌باشد. شکل ۳-۴ تا شکل ۳-۳۳ توزیع دما، تنش شعاعی، تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد محاسبه شده با روش‌های FE و تحلیلی را برای بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و ترکیبی و در طول ضخامت کره‌ی ناهمگن و همچنین برحسب زمان نشان می‌دهد.

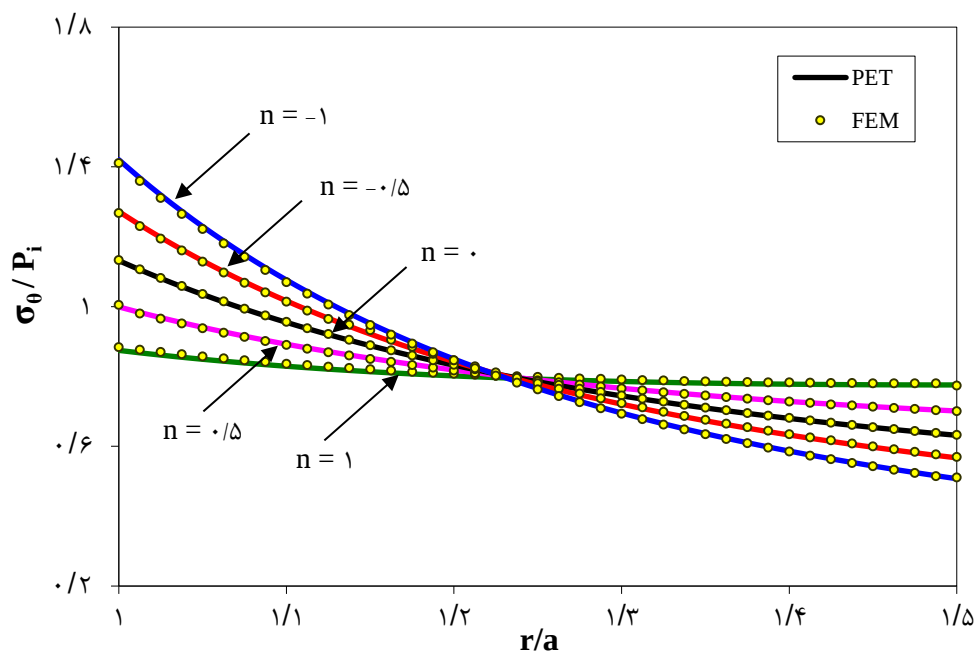
در شکل ۳-۴ تا شکل ۳-۶ کره فقط تحت فشار داخلی قرار گرفته است. در این بارگذاری مقادیر تنش شعاعی (شکل ۳-۴) همواره منفی هستند و به‌علاّت نبود بارگذاری در لایه‌ی خارجی، قدرمطلق تنش شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد و همچنین اختلاف مقادیر تنش شعاعی برای n های مختلف از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی افزایش یافته و از لایه‌ی میانی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد و به‌گونه‌ای است که این اختلاف در لایه‌های داخلی و خارجی برابر صفر می‌باشد و نیز اختلاف مقادیر تنش شعاعی برای n های مختلف، اندک می‌باشد. قدرمطلق تنش شعاعی برای n های منفی کمتر از ماده‌ی همگن و برعکس برای n های مثبت بیشتر از ماده‌ی همگن می‌باشد. مطابق شکل ۳-۵، تنش محیطی به‌گونه‌ای است که مقادیر آن در طول ضخامت کره برای n های کمتر از ۱ با روند نزولی تغییر می‌کند و هرچه شاخص‌های توانی منفی بزرگ‌تر باشند، شیب تغییرات نزولی بیشتر می‌شود و برای شاخص توانی $n=1$ تغییرات تنش محیطی در طول جداره‌ی کره، بسیار اندک است. اختلاف مقادیر تنش محیطی در سطح داخلی نسبت به سطح خارجی بیشتر است. این اختلاف از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی کاهش می‌یابد، به‌طوری که در شعاع $r=0/04925$ m

مقادیر تنش محیطی برای n های مختلف همگرا می‌شوند، و از این شعاع به سمت لایه‌ی خارجی دوباره افزایش می‌یابد. جابه‌جایی شعاعی (شکل ۳-۶) برای شاخص‌های توانی منفی مقادیر بیشتری نسبت به شاخص‌های توانی مثبت دارد. اختلاف مقادیر جابه‌جایی شعاعی برای n های مختلف در طول ضخامت کره تقریباً ثابت است. همچنین برای هر یک از شاخص‌های توانی جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی باشیب ملایم کاهش می‌یابد.

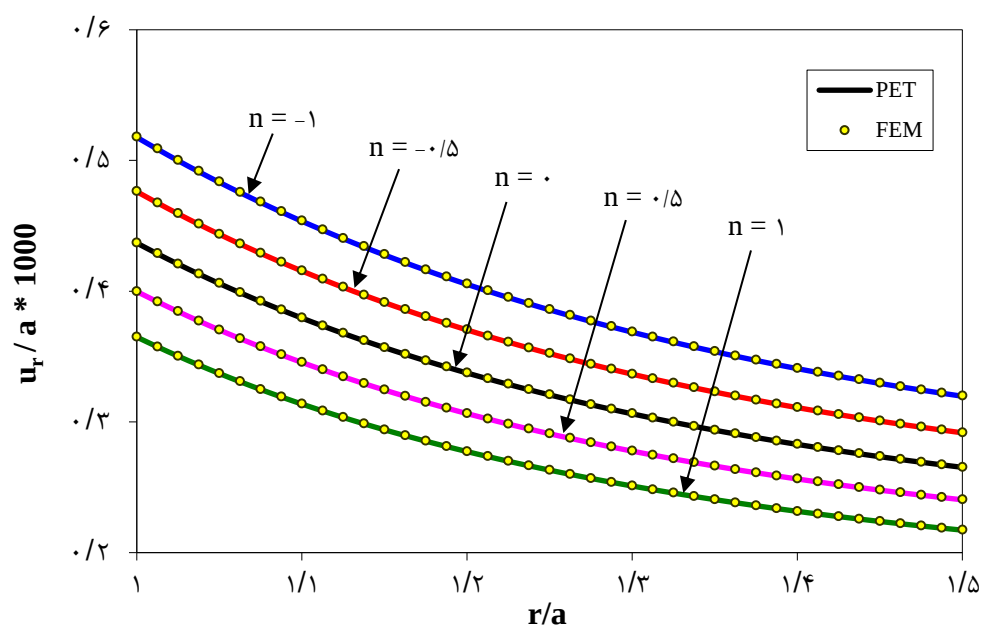
در شکل ۳-۷ تا شکل ۳-۹ کره فقط تحت فشار خارجی قرار گرفته است. مقادیر به دست آمده برای تنش شعاعی، تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی در این بارگذاری همواره منفی هستند. با توجه به شکل ۳-۷، قدرمطلق تنش شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد و برای n های منفی بیشتر از ماده‌ی همگن و برعکس برای n های مثبت کمتر از ماده‌ی همگن می‌باشد. قدرمطلق تنش محیطی (شکل ۳-۸) به گونه‌ای است که مقادیر آن در طول ضخامت کره برای n های کمتر از ۰/۵ با روند نزولی تغییر می‌کند و هرچه شاخص‌های توانی منفی بزرگ‌تر باشند شیب تغییرات نزولی بیشتر می‌شود و برای n های بیشتر از ۰/۵ با روند صعودی تغییر می‌کند و برای شاخص توانی $n = 0/5$ تقریباً تنش محیطی در طول جداره‌ی کره، ثابت باقی مانده است. اختلاف مقادیر تنش محیطی در سطح داخلی نسبت به سطح خارجی بیشتر است. این اختلاف از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی کاهش می‌یابد، به طوری که در شعاع $r = 0/0495 \text{ m}$ مقادیر تنش محیطی برای n های مختلف همگرا می‌شوند، و از لایه‌ی میانی به سمت لایه‌ی خارجی دوباره افزایش می‌یابد. مطابق شکل ۳-۹ قدرمطلق جابه‌جایی شعاعی برای شاخص‌های توانی منفی مقادیر بیشتری نسبت به شاخص‌های توانی مثبت دارد و از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی باشیب ملایم کاهش می‌یابد. اختلاف مقادیر جابه‌جایی شعاعی برای n های مختلف در طول ضخامت کره تقریباً ثابت است.



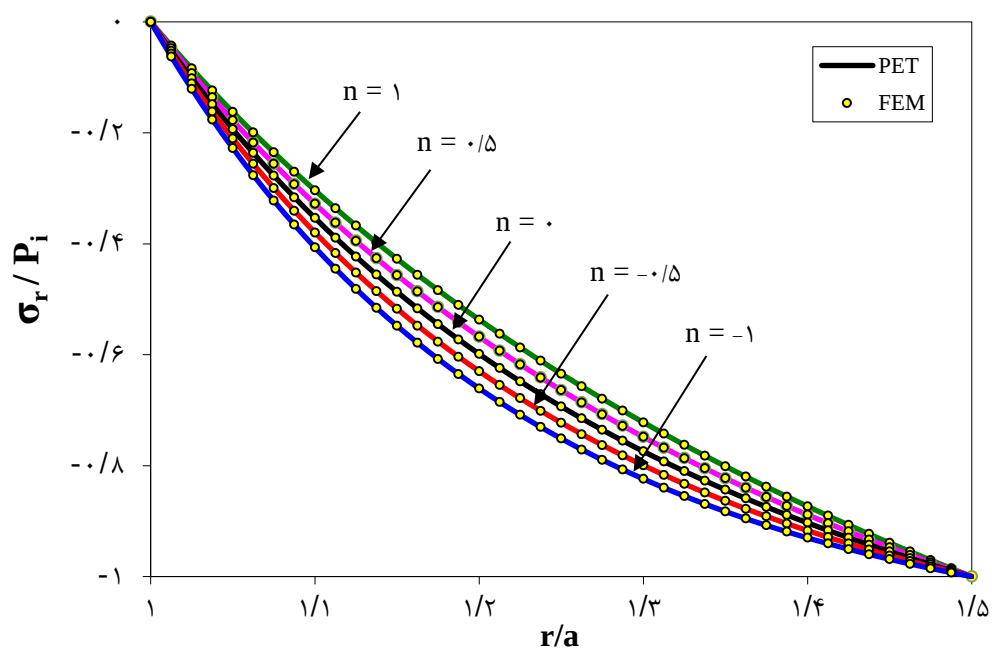
شکل ۳-۴ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی در $t = 5 \text{ s}$



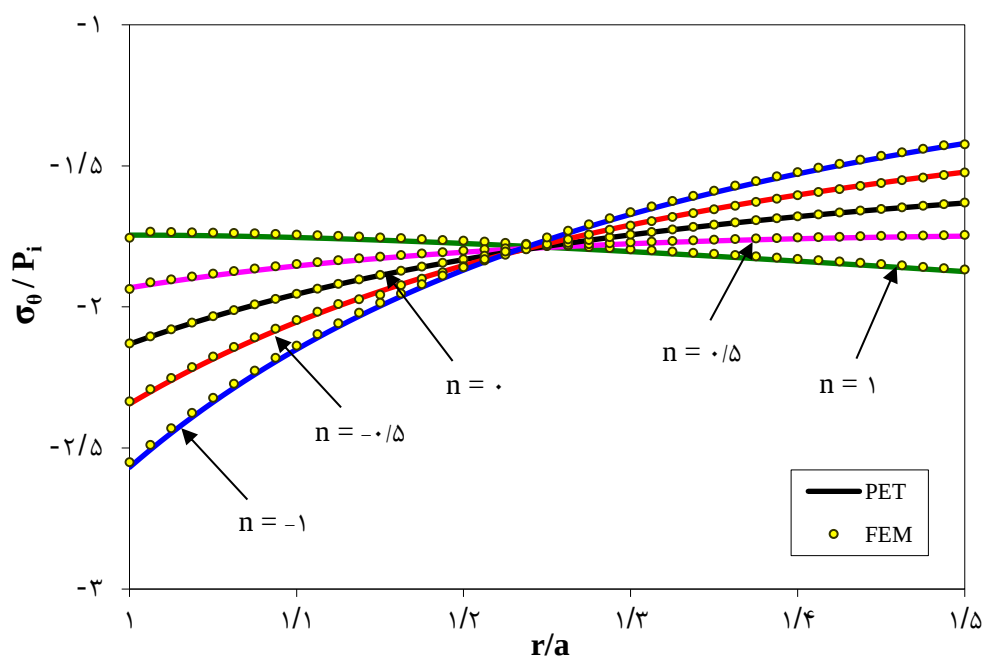
شکل ۳-۵ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی در $t = 5 \text{ s}$



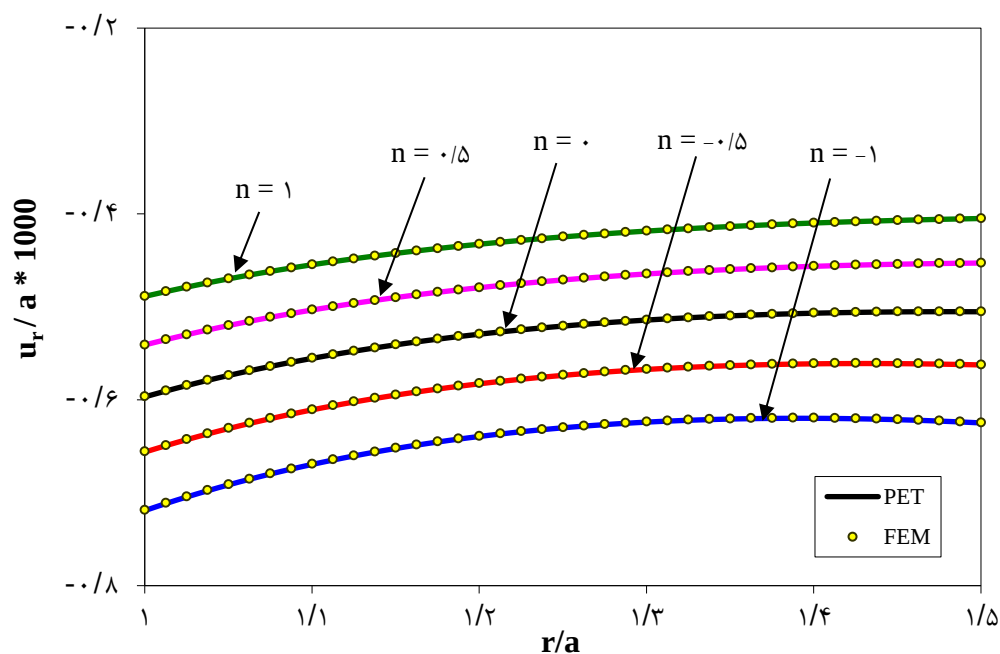
شکل ۳-۶ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی در $t = 5 \text{ s}$



شکل ۳-۷ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی در $t = 5 \text{ s}$



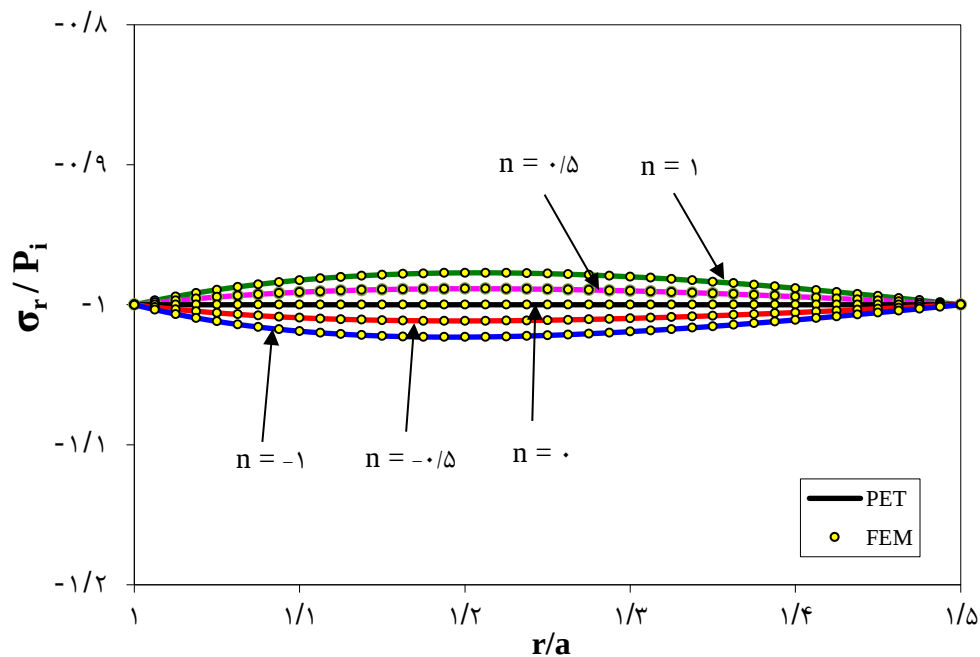
شکل ۳-۸ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی در $t = 5 \text{ s}$



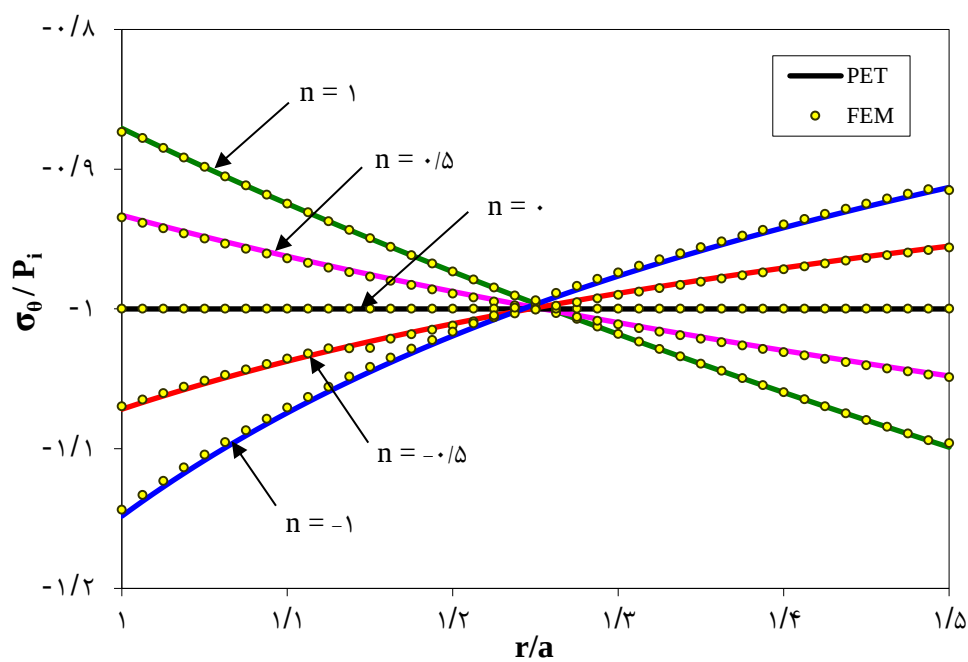
شکل ۳-۹ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار خارجی در $t = 5 \text{ s}$

شکل ۳-۱۰ تا شکل ۳-۱۲، کره هم‌زمان تحت بارگذاری فشاری در لایه‌ی داخلی و خارجی قرار گرفته است. در این بارگذاری مقادیر تنش شعاعی و محیطی و همچنین جابه‌جایی شعاعی همواره منفی هستند. تنش شعاعی (شکل ۳-۱۰) در طول ضخامت کره ثابت باقی مانده است و قدرمطلق مقادیر آن

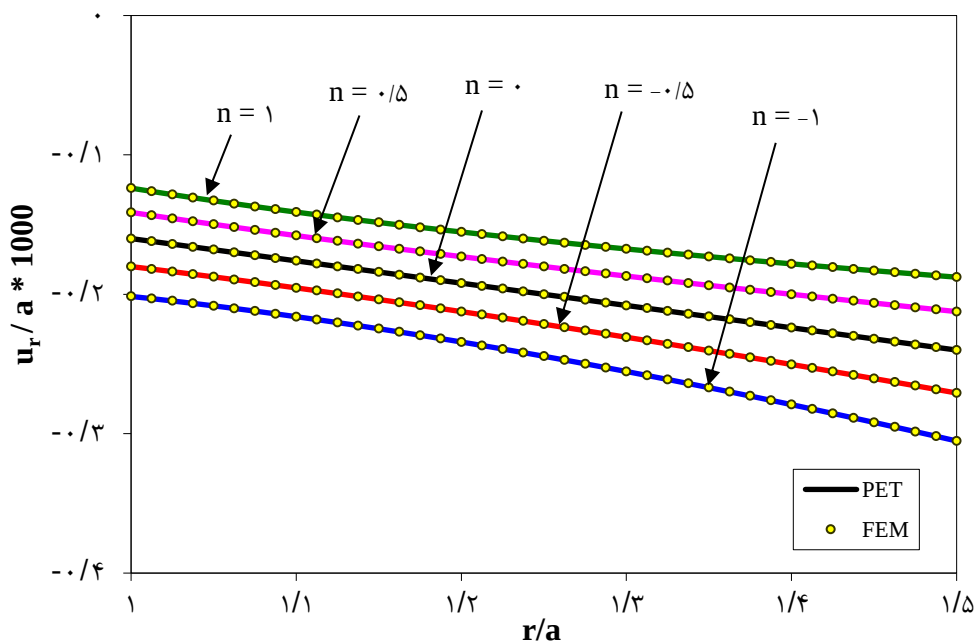
برای n های منفی بزرگ‌تر n های مثبت است و اختلاف مقادیر آن برای شاخص‌های توانی مختلف بسیار اندک است. قدرمطلق تنش محیطی (شکل ۳-۱۱) به گونه‌ای است که مقادیر آن در طول ضخامت کره برای n های منفی با روند نزولی تغییر می‌کند و هرچه شاخص‌های توانی منفی بزرگ‌تر باشند شیب تغییرات نزولی بیشتر می‌شود و برای n های مثبت با روند صعودی تغییر می‌کند و برای شاخص توانی $n = 0$ تنش محیطی در طول جداره‌ی کره، ثابت باقی مانده است. اختلاف مقادیر تنش محیطی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی کاهش می‌یابد، به طوری که در شعاع $r = 0.5 \text{ m}$ مقادیر تنش محیطی برای n های مختلف همگرا می‌شوند و از لایه‌ی میانی به سمت لایه‌ی خارجی دوباره افزایش می‌یابد. مطابق شکل ۳-۱۲ قدرمطلق جابه‌جایی شعاعی برای شاخص‌های توانی منفی مقادیر بیشتری نسبت به شاخص‌های توانی مثبت دارد و از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی با شیب ملایم افزایش می‌یابد.



شکل ۳-۱۰ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی در $t = 5 \text{ s}$



شکل ۱۱-۳ توزیع بی بعد تنش محیطی در کره ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم زمان فشار داخلی و خارجی در $t = 5 \text{ s}$

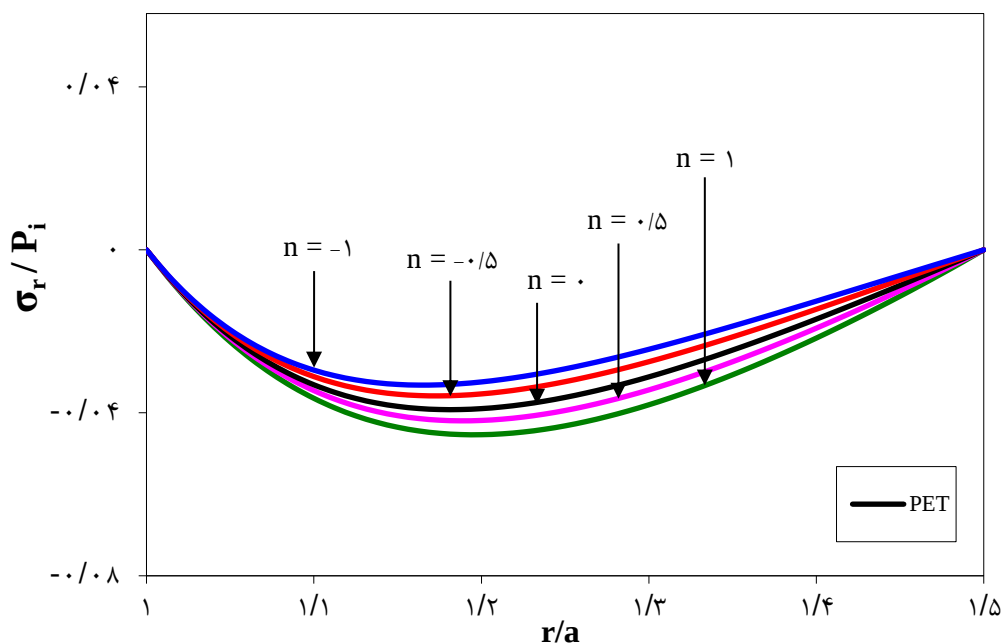


شکل ۱۲-۳ توزیع بی بعد جابه جایی شعاعی در کره ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم زمان فشار داخلی و خارجی در $t = 5 \text{ s}$

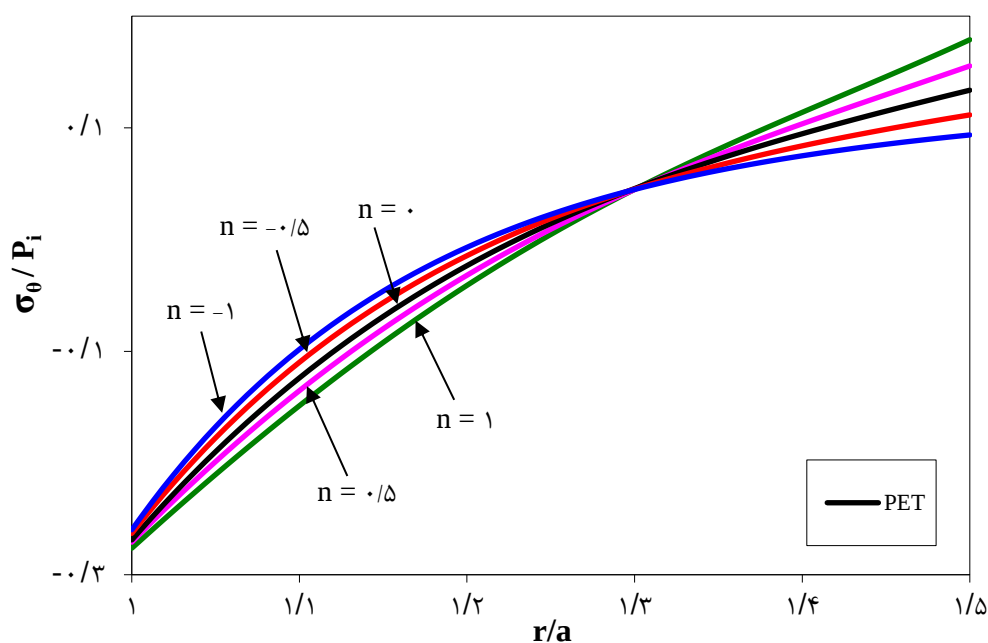
در شکل ۱۳-۳ تا شکل ۱۵-۳، کره تنها تحت بارگذاری حرارتی گذرا قرار دارد. در این بارگذاری

قدرمطلق تنش شعاعی (شکل ۱۳-۳) با تغییرات اندک از لایه ی داخلی به سمت لایه ی خارجی ابتدا

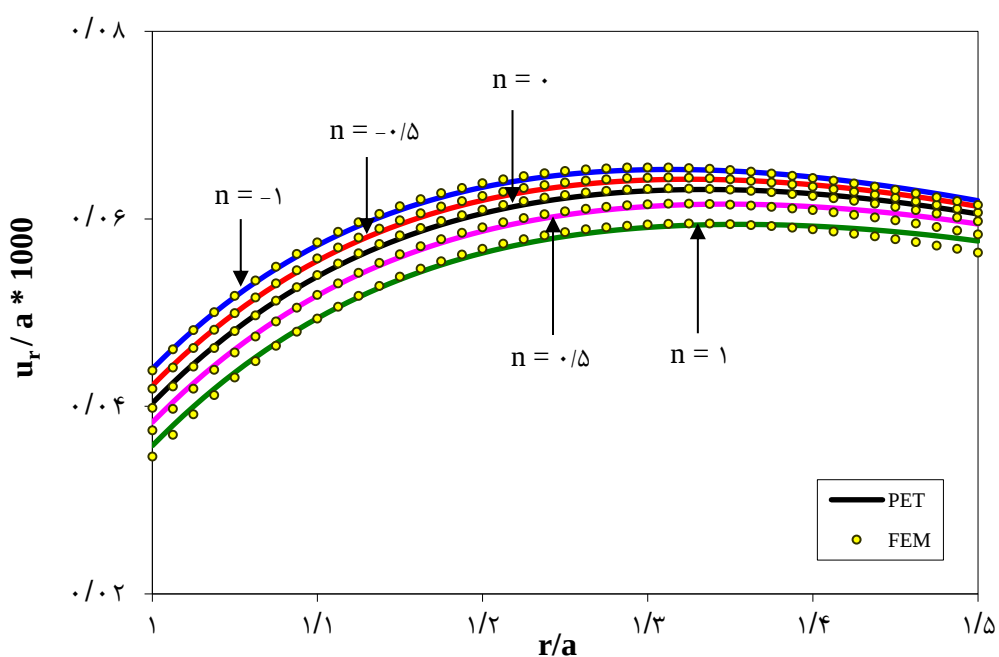
افزایش و سپس کاهش می‌یابد و برای n های مثبت، بزرگ‌تر از n های منفی می‌باشد؛ اما مقادیر تنش همواره منفی هستند. تنش محیطی (شکل ۳-۱۴) در طول ضخامت کره با شیب ملایم افزایش می‌یابد و مقادیر آن به گونه‌ای است که ابتدا این مقادیر منفی بوده و سپس مثبت می‌شود. اختلاف مقادیر تنش محیطی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی کاهش می‌یابد، به طوری که در شعاع $r = 0.052 \text{ m}$ مقادیر تنش محیطی برای n های مختلف همگرا می‌شوند. جابه‌جایی شعاعی (شکل ۳-۱۵) در طول ضخامت ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد؛ اما تغییرات آن بسیار کم است و مقادیر آن همواره مثبت هستند. هم‌چنین مشاهده می‌شود برای مقادیر مثبت از شاخص توانی، هرچه شاخص توانی بزرگ‌تر شود مقادیر جابه‌جایی شعاعی کاهش می‌یابد و در مقابل برای مقادیر منفی از آن، هرچه کوچک‌تر باشد مقادیر جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد. به طور کلی در این بارگذاری، برای n های منفی جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن نسبت به کره‌ی همگن مقادیر بیشتری دارند و برعکس برای n های مثبت مقادیر کمتری را دارا هستند و نیز مقادیر جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی داخلی نسبت به لایه‌ی خارجی اختلاف بیشتری از ماده‌ی همگن دارند.



شکل ۳-۱۳ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$



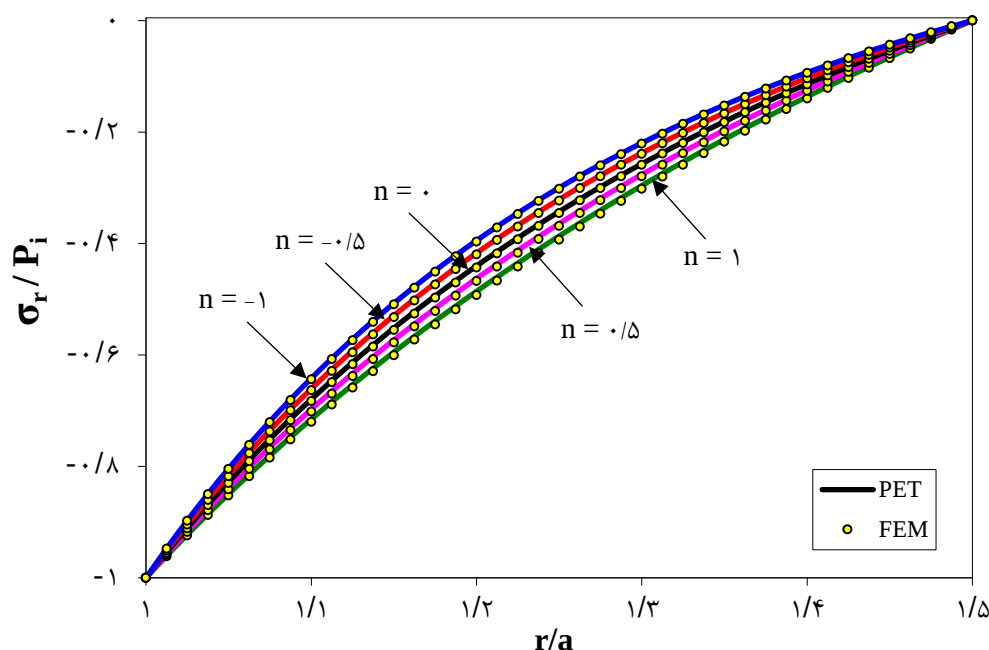
شکل ۳-۱۴ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$



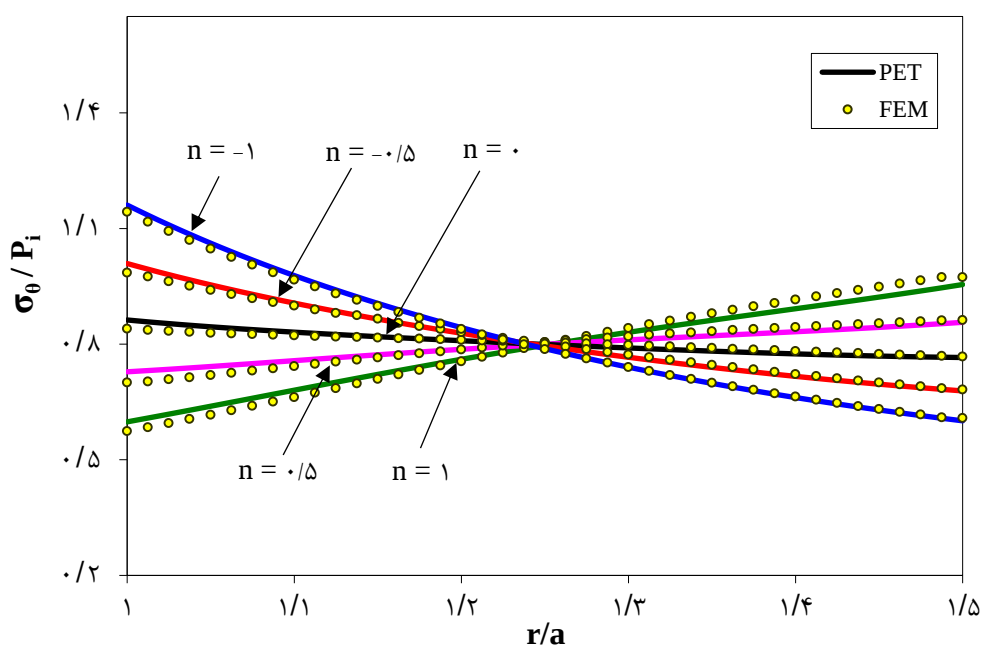
شکل ۳-۱۵ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

شکل ۳-۱۶ تا شکل ۳-۱۸، تنش شعاعی و محیطی و جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا را نمایش می‌دهند. این نمودارها بسیار مشابه نمودارهای به‌دست‌آمده از نتایج کره‌ی تحت بارگذاری فشار داخلی (شکل ۳-۴ تا شکل ۳-۶)

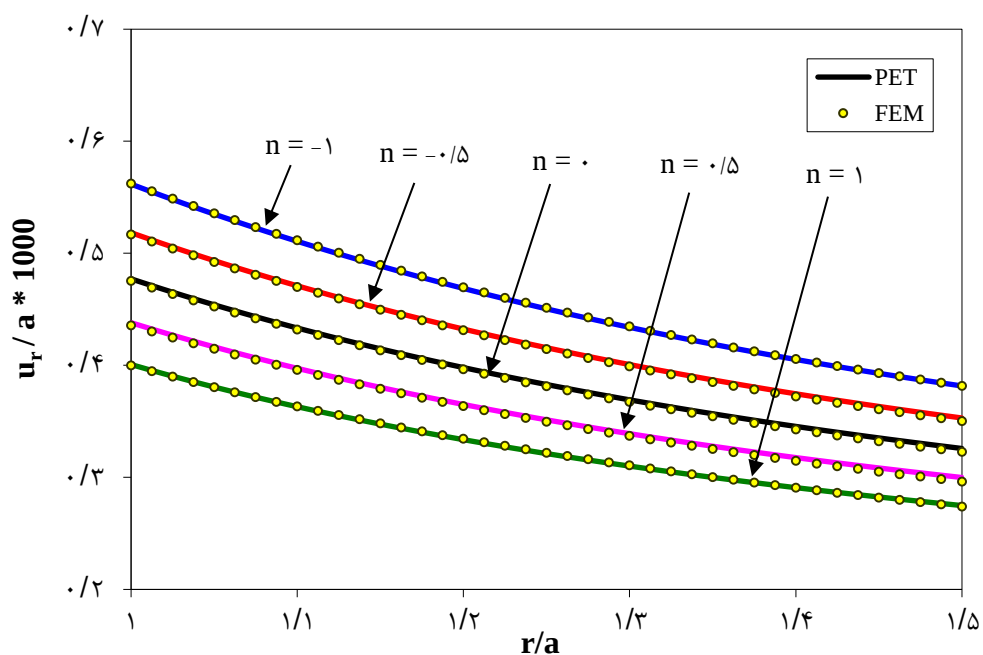
می‌باشد و توضیحات مشابهی دارند. این امر، همانند کره‌ی همگن، نشان‌دهنده‌ی اثرگذاری اندک بارگذاری حرارتی در دماهای پایین می‌باشد. به عبارتی می‌توان در دماهای پایین از نتایج مربوط به کره‌ی تحت فشار برای بررسی رفتار کره‌ی تحت فشار و حرارت استفاده کرد. مطابق شکل ۳-۱۶ مقادیر تنش شعاعی همواره منفی می‌باشد و قدرمطلق آن از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد و برای n های مثبت بیشتر از n های منفی است. تنش محیطی (شکل ۳-۱۷) همواره مثبت است و مقادیر آن در طول ضخامت برای شاخص‌های توانی منفی کاهش و برای شاخص‌های توانی مثبت افزایش می‌یابد. مقدار تنش محیطی دقیقاً در لایه‌ی میانی ($r = 0.5 m$) برای تمامی n ها با یکدیگر برابر است. جابه‌جایی شعاعی (شکل ۳-۱۸) همواره مثبت است و از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی برای تمامی شاخص‌های توانی کاهش می‌یابد و مقادیر آن برای n های منفی بیشتر از کره‌ی همگن و برای n های مثبت کمتر از آن است.



شکل ۳-۱۶ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 s$



شکل ۳-۱۷ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$



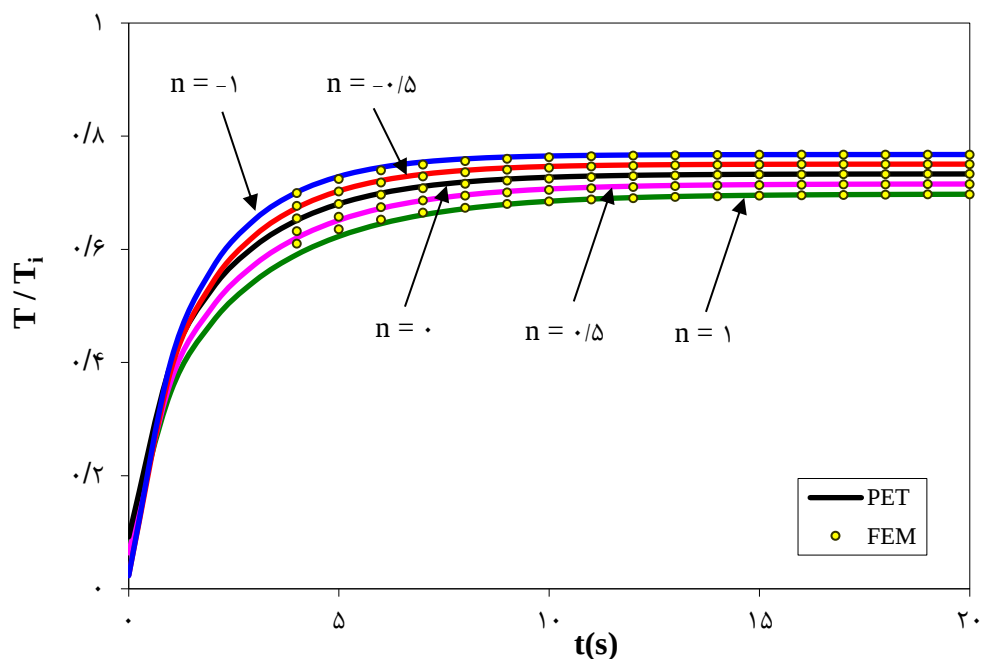
شکل ۳-۱۸ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

شکل ۳-۱۹ توزیع دمای بی‌بعد محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی را برای بارگذاری هم‌زمان

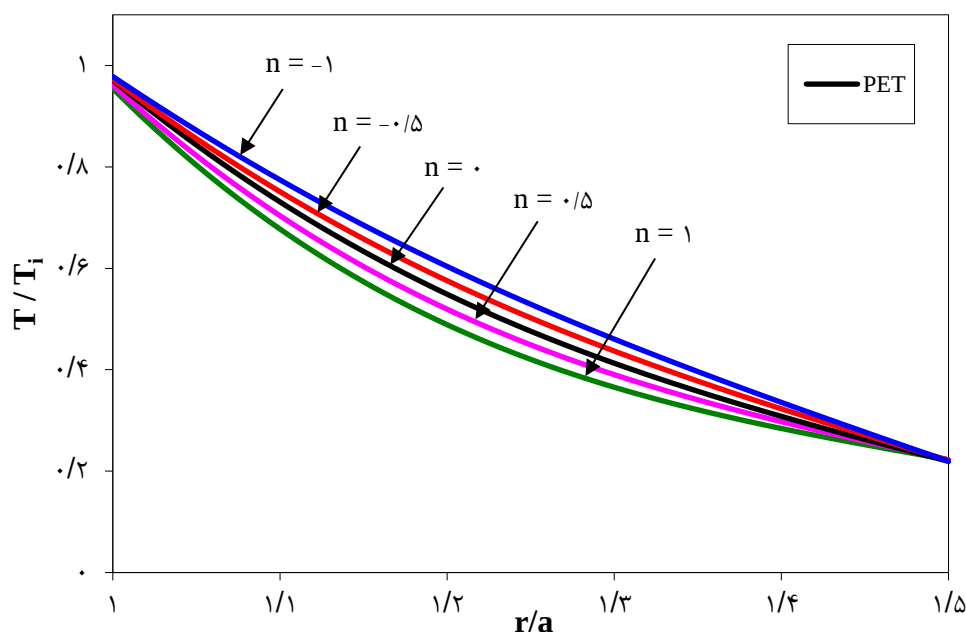
فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در شعاع $r = 0.45 \text{ m}$ از کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم و همچنین

برحسب زمان نشان می‌دهد. همانند کره‌ی همگن و همان‌گونه که در این شکل مشخص است تغییرات دما تا قبل از زمان ۵ ثانیه بسیار سریع می‌باشد و برای زمان‌های بیشتر از آن کم می‌باشد. مقادیر دما برای شاخص‌های توانی منفی بیشتر از شاخص‌های توانی مثبت است.

شکل ۳-۲۰ توزیع دمای بی‌بعد محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی را برای بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در زمان $t = 5 \text{ s}$ و در طول ضخامت کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم نشان می‌دهد. مقادیر دما، به‌علت ثابت بودن دمای محیط در سطوح داخلی و خارجی کره، از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی برای n های مختلف کاهش می‌یابد و نیز در شاخص‌های توانی منفی نسبت به شاخص‌های توانی مثبت بیشتر است.

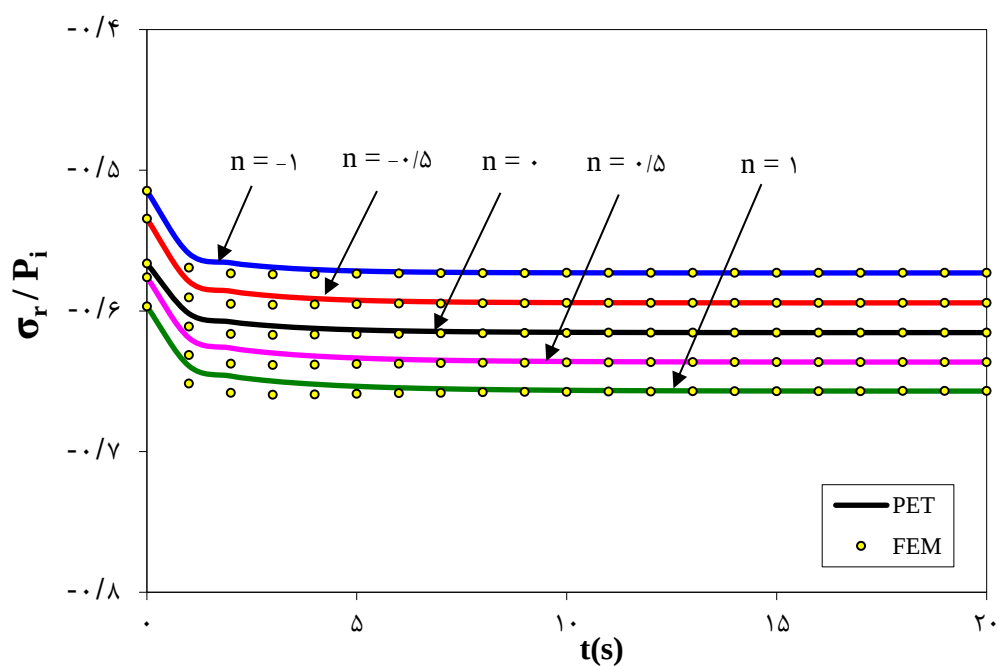


شکل ۳-۱۹ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در $r = 0.045 \text{ m}$

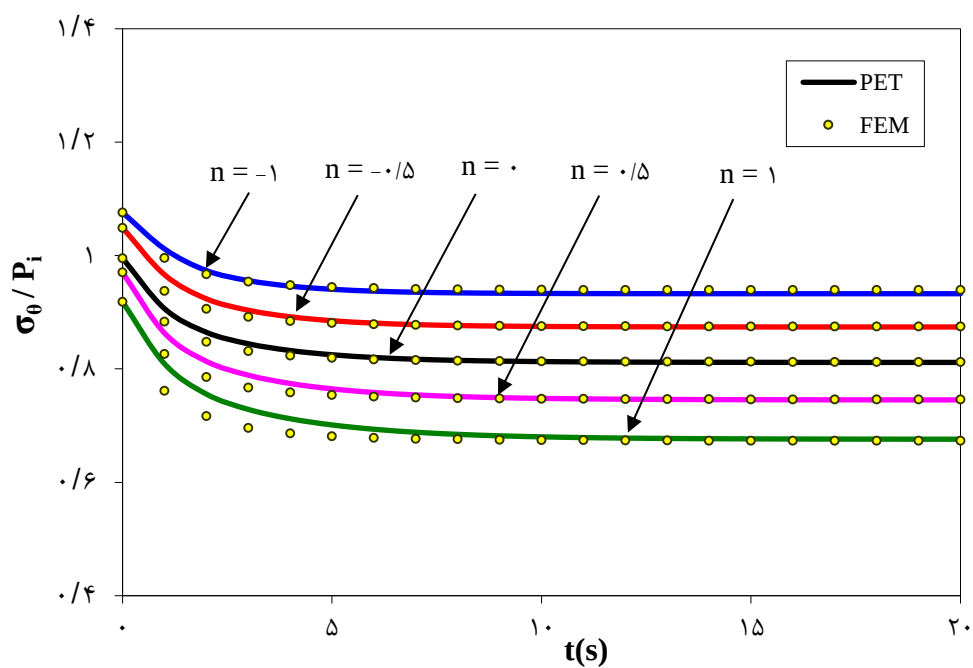


شکل ۳-۲۰ توزیع بی بعد دما در کره ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

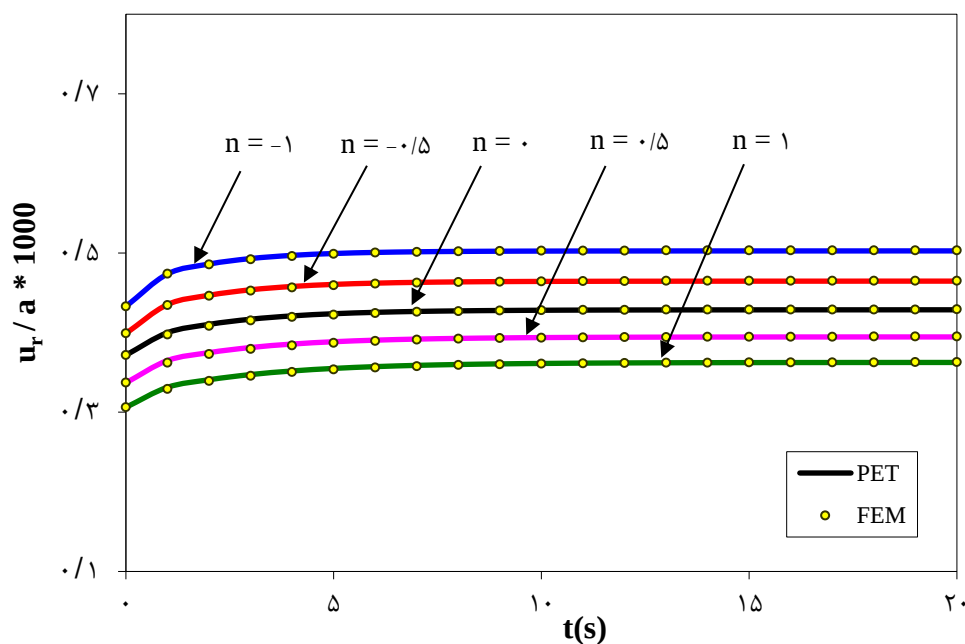
شکل ۳-۲۱ تا شکل ۳-۲۳ تغییرات تنش شعاعی و محیطی و جابه جایی شعاعی کره ی ناهمگن جدار ضخیم را تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در شعاع $r = 0.045 \text{ m}$ و برحسب زمان نشان می دهند. در این شکل ها تغییرات نمودارها بعد از زمان ۵ ثانیه خیلی ناچیز است. تنش شعاعی (شکل ۳-۲۱) در یک شعاع خاص از کره ی ناهمگن، همواره منفی می باشد و قدرمطلق آن برای شاخص های توانی مثبت نسبت به شاخص های توانی منفی مقادیر بیشتری دارد. تنش محیطی (شکل ۳-۲۲) همواره مثبت است و مقادیر آن برای n های منفی بیشتر از n های مثبت می باشد. مطابق شکل ۳-۲۳ مقادیر جابه جایی شعاعی همواره مثبت اند و برای n های منفی نسبت به n های مثبت مقادیر بیشتری را دارا هستند.



شکل ۲۱-۳ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در $r = 0.045 \text{ m}$

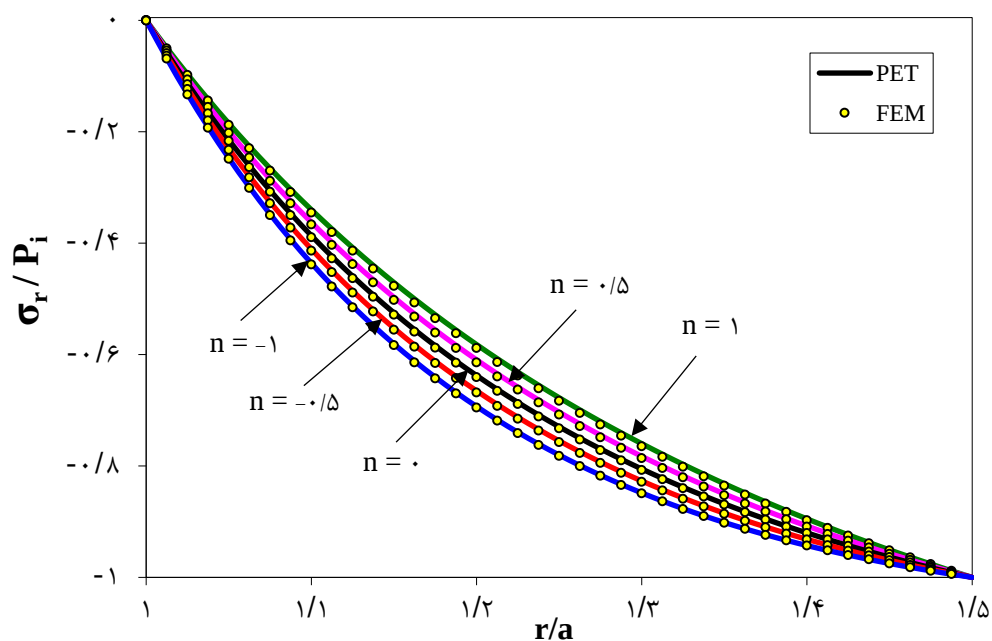


شکل ۲۲-۳ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در $r = 0.045 \text{ m}$

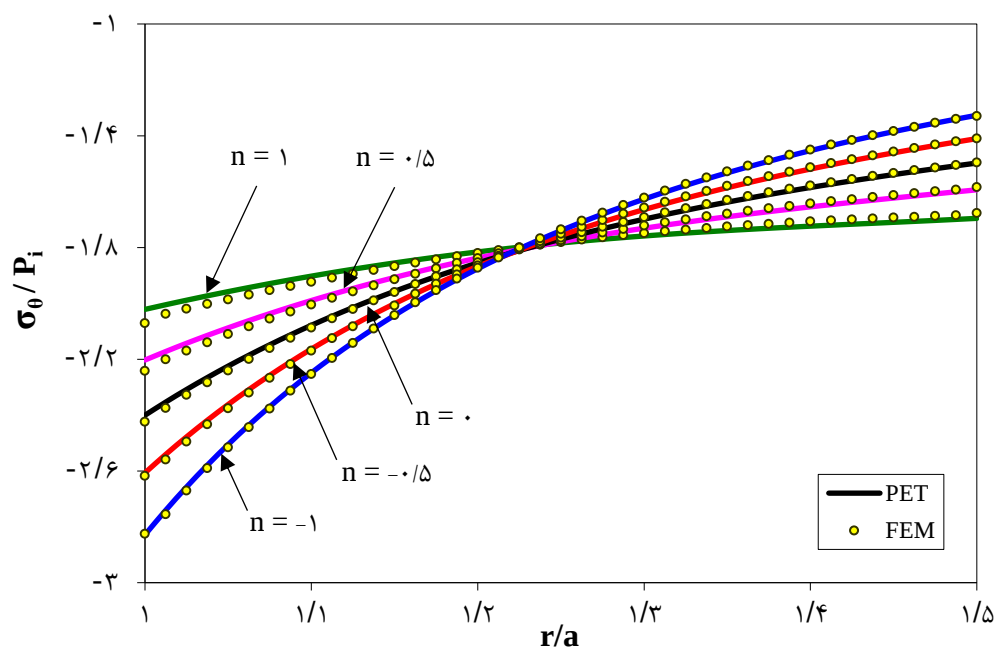


شکل ۳-۲۳ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا در $r = 0.045 \text{ m}$

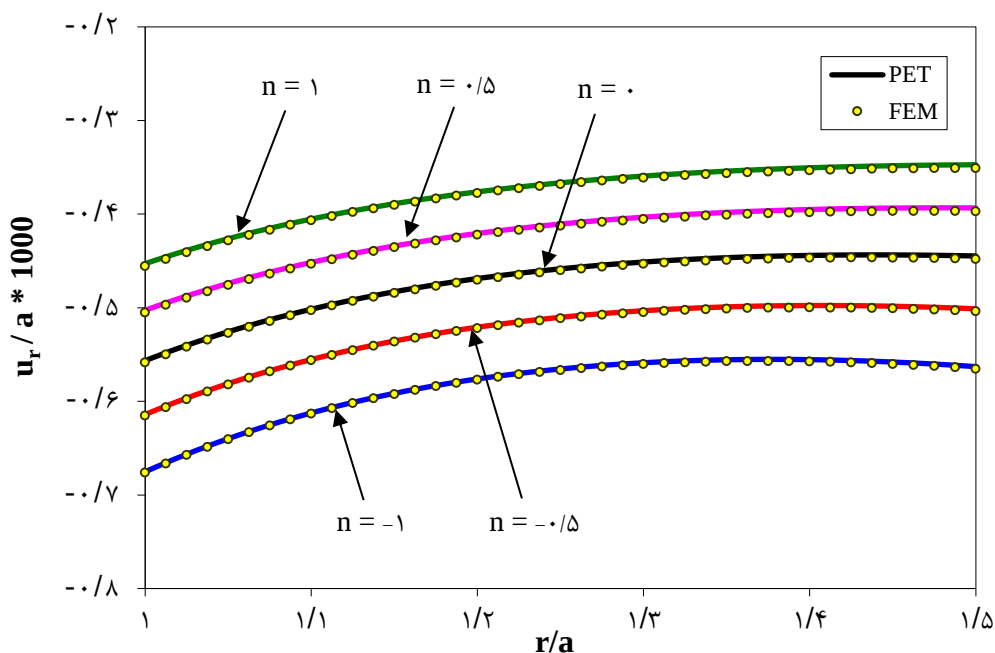
شکل ۳-۲۴ تا شکل ۳-۲۶، تنش شعاعی و محیطی و جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا را نمایش می‌دهند. این نمودارها بسیار مشابه نمودارهای به‌دست‌آمده از نتایج کره‌ی تحت بارگذاری فشار خارجی (شکل ۳-۷ تا شکل ۳-۹) می‌باشد و توضیحات مشابهی دارند. مطابق شکل ۳-۲۴ مقادیر تنش شعاعی همواره منفی می‌باشد و قدرمطلق آن از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد و برای n های مثبت کمتر از n های منفی است. تنش محیطی (شکل ۳-۲۵) همواره منفی است و قدرمطلق مقادیر آن در طول ضخامت برای شاخص‌های توانی مختلف کاهش می‌یابد و برای n های منفی بیشتر از n های مثبت است. مقدار تنش محیطی در شعاع $r = 0.049 \text{ m}$ برای تمامی n ها با یکدیگر برابر است. جابه‌جایی شعاعی (شکل ۳-۲۶) همواره منفی است و قدرمطلق آن از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی برای تمامی شاخص‌های توانی کاهش می‌یابد و برای n های منفی بیشتر از کره‌ی همگن و برای n های مثبت کمتر از کره‌ی همگن است.



شکل ۲۴-۳ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$



شکل ۲۵-۳ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

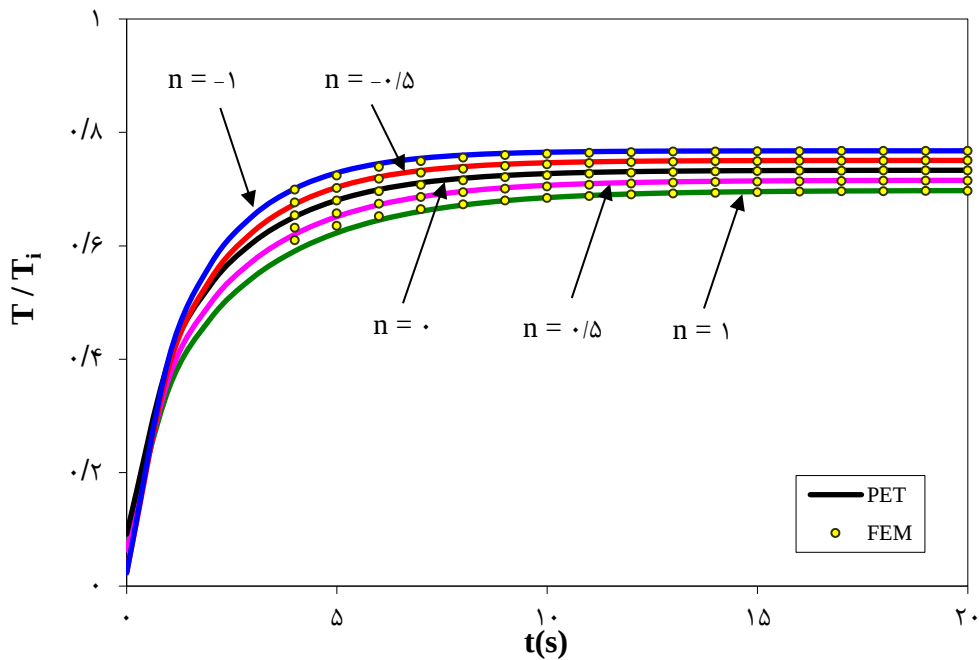


شکل ۲۶-۳ توزیع بی بعد جابه جایی شعاعی در کره ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

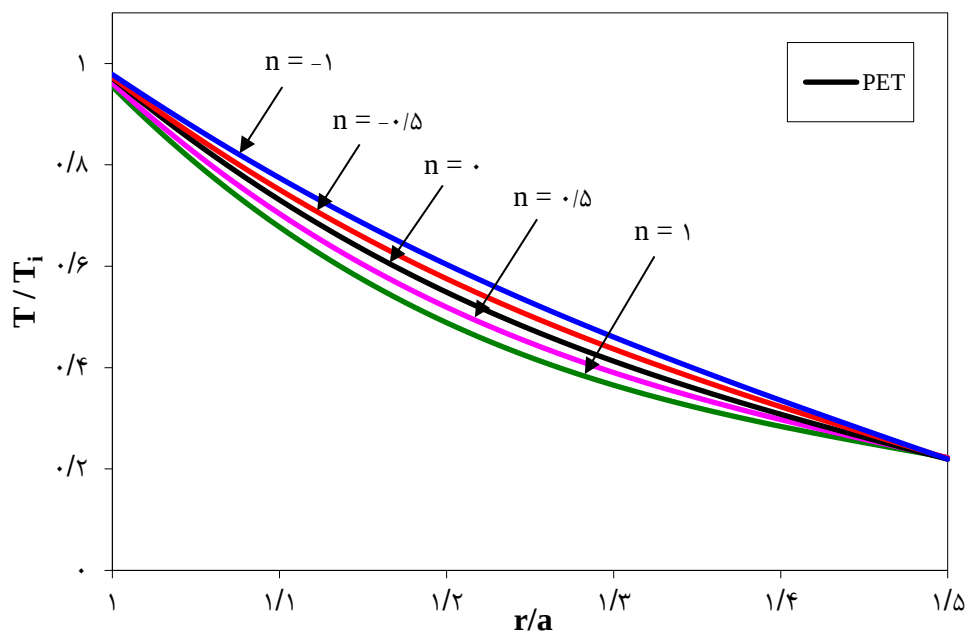
شکل ۲۷-۳ توزیع دمای بی بعد محاسبه شده با روش های FE و تحلیلی را برای بارگذاری همزمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا در شعاع $r = 0.045 \text{ m}$ از کره ی ناهمگن جدار ضخیم و همچنین برحسب زمان نشان می دهد. همان گونه که در این شکل مشخص است تغییرات دما تا قبل از زمان ۵ ثانیه بسیار سریع می باشد و برای زمان های بیشتر از آن کم می باشد و مقادیر دما برای شاخص های توانی منفی بیشتر از شاخص های توانی مثبت است. نمودار این شکل بسیار مشابه شکل ۱۹-۳ می باشد، به طوری که می توان گفت برای بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا و بارگذاری همزمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا، تغییرات دما در یک شعاع خاص و در طول زمان یکسان است.

شکل ۲۸-۳ توزیع دمای بی بعد محاسبه شده با روش های FE و تحلیلی را برای بارگذاری همزمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا در زمان $t = 5 \text{ s}$ و در طول ضخامت کره ی ناهمگن جدار ضخیم نشان می دهد. مقادیر دما، از لایه ی داخلی به سمت لایه ی خارجی برای n های مختلف کاهش می یابد و نیز در شاخص های توانی منفی نسبت به شاخص های توانی مثبت بیشتر است. نمودار این شکل بسیار مشابه

شکل ۳-۲۰ می‌باشد، به‌طوری که می‌توان گفت برای بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا و بارگذاری همزمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا، تغییرات دما در طول ضخامت کره، یکسان است.

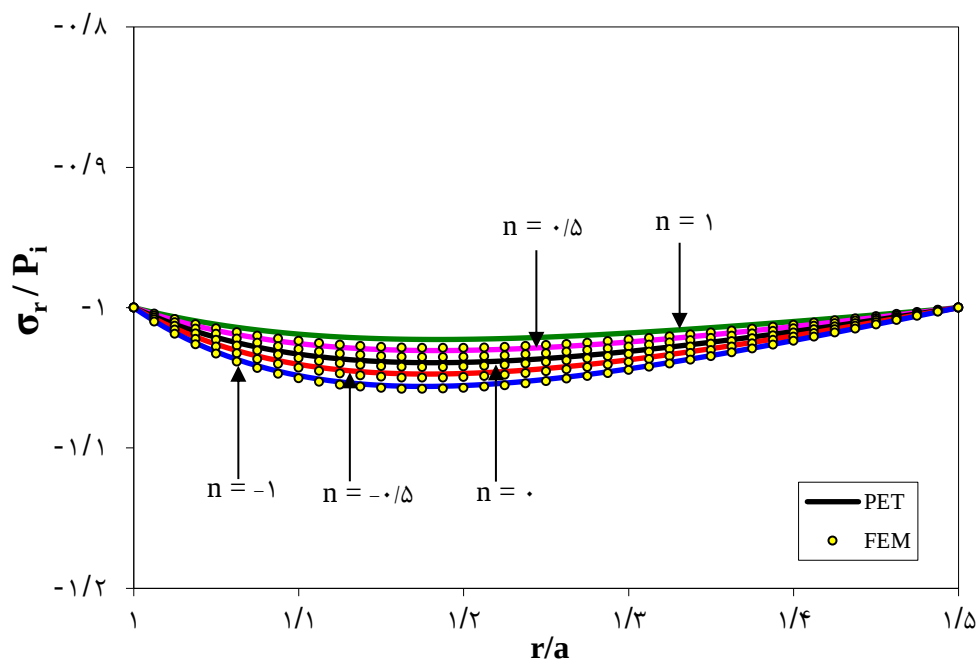


شکل ۳-۲۷ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا در $r = 0.45 \text{ m}$

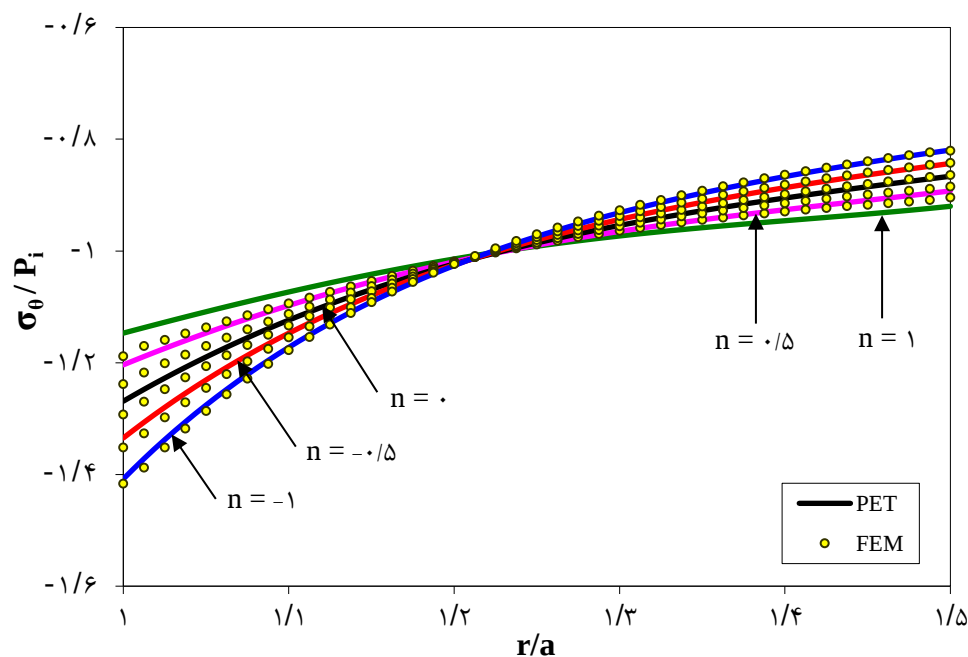


شکل ۳-۲۸ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

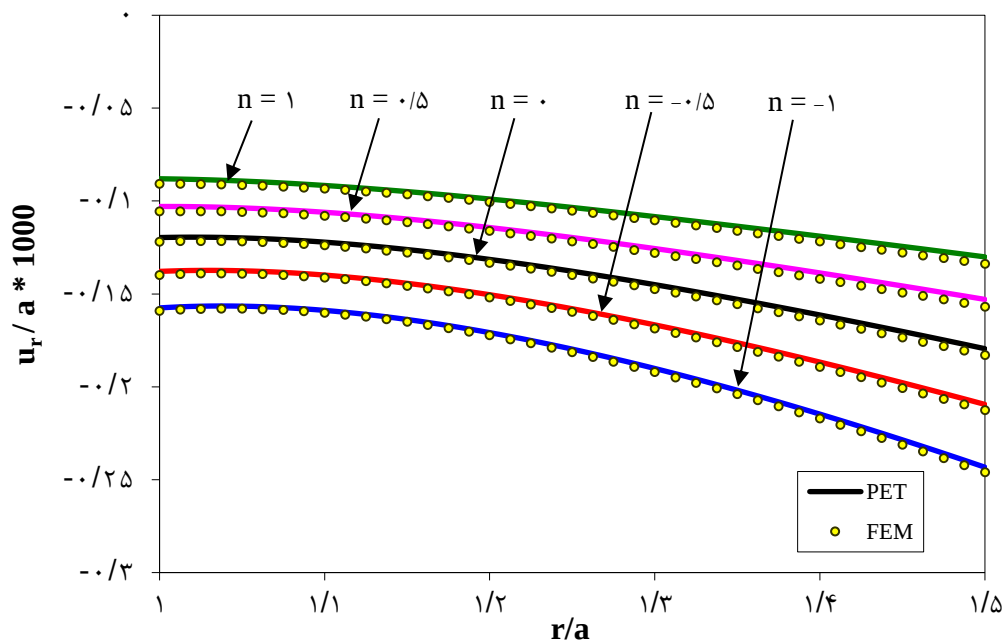
شکل ۳-۲۹ تا شکل ۳-۳۱، تنش شعاعی و محیطی و جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا را نمایش می‌دهند. در این بارگذاری قدرمطلق تنش شعاعی (شکل ۳-۲۹) با تغییرات اندک از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد و برای n های منفی بزرگ‌تر از n های مثبت می‌باشد؛ اما مقادیر تنش همواره منفی هستند. تنش محیطی (شکل ۳-۳۰) همواره منفی است و قدرمطلق آن در طول ضخامت کره با شیب ملایم کاهش می‌یابد. اختلاف مقادیر تنش محیطی برای n های مختلف از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی کاهش می‌یابد؛ به‌طوری که در شعاع $r = 0.485 \text{ m}$ مقدار آن برای همه‌ی شاخص‌های توانی برابر می‌شود. جابه‌جایی شعاعی (شکل ۳-۳۱) همواره منفی است و قدرمطلق آن در طول ضخامت با شیب کم افزایش می‌یابد و برای مقادیر مثبت از شاخص توانی، هرچه شاخص توانی بزرگ‌تر شود، کاهش می‌یابد و در مقابل برای مقادیر منفی از شاخص توانی، هرچه کوچک‌تر باشد، افزایش می‌یابد. برای n های منفی قدرمطلق جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن نسبت به کره‌ی همگن مقادیر بیشتری دارند و برعکس برای n های مثبت مقادیر کمتری را دارا هستند.



شکل ۳-۲۹ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$



شکل ۳-۳۰ توزیع بی بعد تنش محیطی در کره ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$



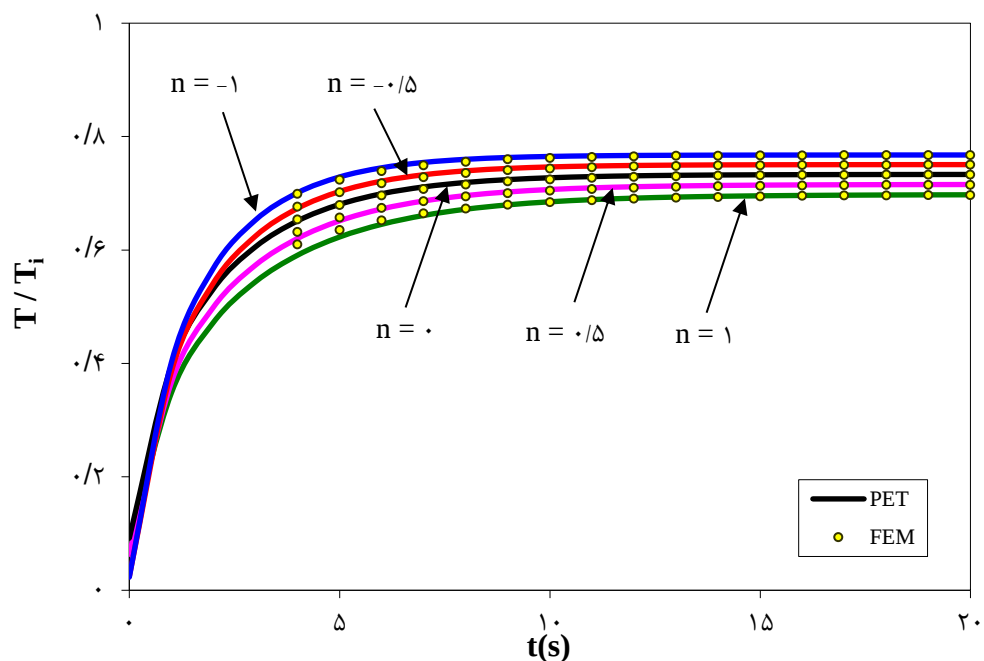
شکل ۳-۳۱ توزیع بی بعد جابه جایی شعاعی در کره ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

شکل ۳-۳۲ توزیع دمای بی بعد محاسبه شده با روش های FE و تحلیلی را برای بارگذاری همزمان

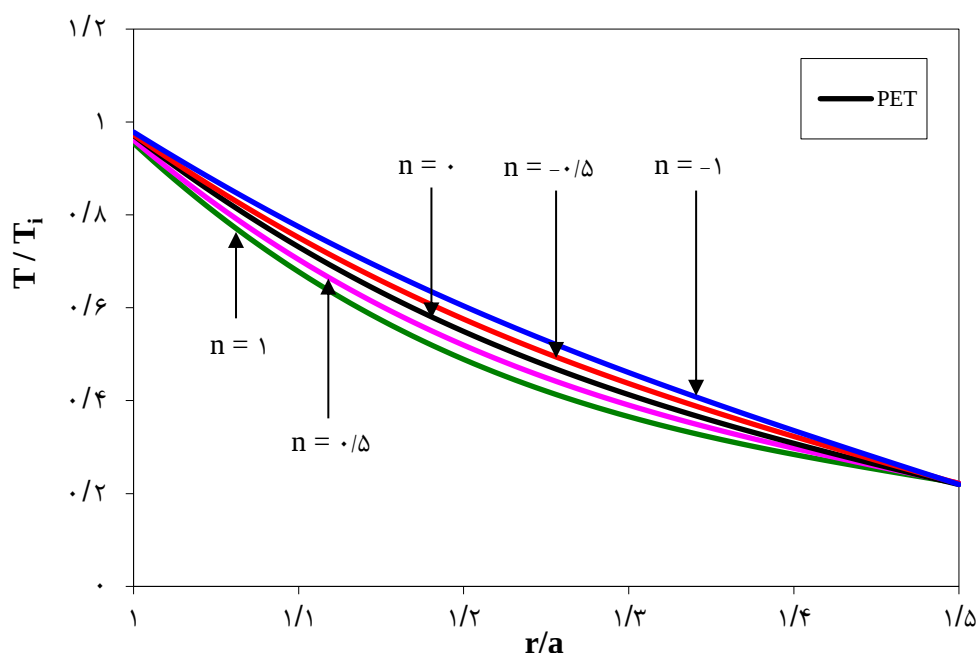
فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در شعاع $r = 0.045 \text{ m}$ از کره ی ناهمگن جدار ضخیم و

همچنین برحسب زمان نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل مشخص است، نمودار این شکل بسیار مشابه شکل ۱۹-۳ و شکل ۲۷-۳ می‌باشد؛ بنابراین با توجه به اینکه شرایط مرزی دمایی برای بارگذاری‌های مختلف در این پژوهش یکسان است؛ تغییرات دما در یک شعاع خاص از کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم و در طول زمان برای بارگذاری‌های بررسی‌شده در این مطالعه یکسان به‌دست آمده است و بارگذاری‌های مکانیکی تأثیر اندکی بر تغییرات دما داشته‌اند.

شکل ۳۳-۳ توزیع دمای بی‌بعد محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی را برای بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در زمان $t = 5 \text{ s}$ و در طول ضخامت کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم نشان می‌دهد. نمودار این شکل بسیار مشابه شکل ۲۰-۳ و شکل ۲۸-۳ می‌باشد، بنابراین با توجه به ثابت‌بودن شرایط مرزی دمایی برای بارگذاری‌های مختلف در این پژوهش، تغییرات دما برای بارگذاری‌های بررسی‌شده در این مطالعه و در طول ضخامت کره، یکسان است و بارگذاری‌های مکانیکی تأثیر اندکی بر تغییرات دما داشته‌اند.



شکل ۳۳-۳ توزیع بی‌بعد دما در کره‌ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در $r = 0.45 \text{ m}$



شکل ۳-۳ توزیع بی بعد دما در کره ی ناهمگن جدار ضخیم تحت بارگذاری همزمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا در $t = 5 \text{ s}$

جدول ۳-۱ تا جدول ۳-۴ به ترتیب حاوی مقادیر تنش شعاعی، تنش محیطی، جابه جایی شعاعی و دمای محاسبه شده با روش های FE و تحلیلی تحت بارگذاری های مکانیکی و حرارتی و مکانیکی-حرارتی در سه لایه ی داخلی، میانی و خارجی کره ی جدار ضخیم ناهمگن و برای شاخص توانی $n=1$ می باشد. مطابق این جدول ها، تطابق قابل قبولی بین نتایج حاصل از روش تحلیلی و عددی وجود دارد. با دقت در مقادیر جدول ۳-۱، بیشترین اختلاف بین نتایج حل تحلیلی و عددی در بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا مشاهده می شود که این مقدار برابر 0.5148 MPa و بنابراین درصد خطا برابر $1/66$ درصد می باشد و بسیار ناچیز است. مقادیر تنش شعاعی در لایه ی میانی کره ی ناهمگن، تحت بارگذاری فشار داخلی تا ۷ برابر، در بارگذاری فشار خارجی تا ۱۳ برابر و در بارگذاری همزمان فشار داخلی و خارجی تا ۲۰ برابر بیشتر از بارگذاری حرارتی می باشد و مقدار آن در بارگذاری فشار خارجی $1/5$ برابر بارگذاری فشار داخلی است؛ بنابراین در بارگذاری های ترکیبی و در دماهای پایین، بارگذاری فشاری نسبت به بار حرارتی از اهمیت بیشتری برخوردار است.

جدول ۱-۳ تنش شعاعی (MPa) محاسبه شده با روش های تحلیلی و عددی برای $n = 1$ و بارگذاری های مختلف در

$$t = 5 \text{ s}$$

بارگذاری		شعاع داخلی ($r = a$)		شعاع میانی ($r = \frac{a+b}{2}$)		شعاع خارجی ($r = b$)	
حرارتی	مکانیکی	تحلیلی	عددی	تحلیلی	عددی	تحلیلی	عددی
-	فشار داخلی	-۸۰	-۷۹/۹۸۷۳	-۲۷/۴۷۹	-۲۷/۴۸۴۸	۰	۰/۰۰۱۸
	فشار خارجی	۰	-۰/۰۱۲	-۵۰/۷۴۸	-۵۰/۷۵۸۳	-۸۰	-۸۰/۰۰۲۱
	فشار داخلی و خارجی	-۸۰	-۷۹/۹۹۹۲	-۷۸/۲۲۳۸	-۷۸/۲۲۳۸	-۸۰	-۸۰/۰۰۰۲
گذرا	-	۰	-۰/۰۰۵۸	-۳/۴۵۵۳	-۳/۹۶۷۶	۰	-۰/۰۰۰۴
گذرا	فشار داخلی	-۸۰	-۷۹/۹۹۳	-۳۰/۹۳۴۳	-۳۱/۴۴۹۱	۰	۰/۰۰۱۴
	فشار خارجی	۰	-۰/۰۱۷۹	-۵۴/۲۰۰۱	-۵۴/۶۷۵۵	-۸۰	-۸۰/۰۰۲۵
	فشار داخلی و خارجی	-۸۰	-۸۰/۰۰۵۲	-۸۱/۶۷۹۱	-۸۲/۱۳۷۷	-۸۰	-۸۰/۰۰۰۶

همچنین این جداول صحت استفاده از اصل برهم نهی را در حل کره ی ناهمگن مورد بررسی در این تحقیق نشان می دهند. به عنوان نمونه مطابق جدول ۲-۳، در بارگذاری همزمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا، تنش محیطی در لایه ی میانی و به کمک حل تحلیلی برابر $79/3268 \text{ MPa}$ می باشد که می توان آن را از جمع جبری $63/401 \text{ MPa}$ (بارگذاری فشار داخلی)، $143/0923 \text{ MPa}$ (بارگذاری فشار خارجی) و $0/3655 \text{ MPa}$ (بار حرارتی گذرا) به دست آورد. تنش محیطی در بارگذاری فشار خارجی تقریباً ۲ برابر بارگذاری فشار داخلی و تقریباً ۸ برابر بارگذاری حرارتی می باشد. بیشترین

اختلاف بین مقادیر حلّ تحلیلی و عددی در بارگذاری همزمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا و در لایه‌ی داخلی مشاهده می‌شود که برابر MPa ۳/۹۵۵۵ است؛ بنابراین درصد خطا برابر ۲/۴۶ می‌باشد که مقدار ناچیزی است.

جدول ۲-۳ تنش محیطی (MPa) محاسبه‌شده با روش‌های تحلیلی و عددی برای $n = 1$ و بارگذاری‌های مختلف در $t = 5 \text{ s}$

بارگذاری		شعاع داخلی ($r = a$)		شعاع میانی ($r = \frac{a+b}{2}$)		شعاع خارجی ($r = b$)	
حرارتی	مکانیکی	تحلیلی	عددی	تحلیلی	عددی	تحلیلی	عددی
-	فشار داخلی	۶۹/۹۷۳۶	۷۰/۶۶۷۱	۶۳/۴۰۰۱	۶۳/۸۲۴	۶۲/۰۵۹۵	۶۱/۸۵۰۱
	فشار خارجی	۱۳۹/۶۳۴	۱۴۰/۴۴۹	۱۴۳/۰۹۲۳	۱۴۲/۴۳۳	۱۴۹/۹۷۳۶	۱۴۹/۴۴۱
	فشار داخلی و خارجی	۶۹/۶۶۰۴	۶۹/۸۸۲۵	۷۹/۶۹۲۲	۷۹/۶۹۲۸	۸۷/۹۱۴۱	۸۷/۶۹۱۲
گذرا	-	۲۲/۱۰۲۵	۲۴/۷۶۳۱	۰/۳۶۵۵	۰/۱۵۶۴	۱۴/۳۱۰۳	۱۶/۰۳۸۷
گذرا	فشار داخلی	۴۷/۸۷۱۱	۴۵/۹۰۷۶	۶۳/۷۶۵۵	۶۳/۹۷۵۸	۷۶/۳۶۹۹	۷۷/۸۹۴
	فشار خارجی	۱۶۱/۷۳۶۵	۱۶۵/۶۹۲	۱۴۲/۷۲۶۸	۱۴۲/۴۴۷	۱۳۵/۶۶۳۳	۱۳۴/۱۲۷
	فشار داخلی و خارجی	۹۱/۷۶۲۹	۹۵/۱۲۴۸	۷۹/۳۲۶۸	۷۹/۱۰۴۳	۷۳/۶۰۳۷	۷۲/۳۷۳۲

مطابق جدول ۳-۳ بیشترین اختلاف بین مقادیر حاصل از حلّ تحلیلی و عددی در بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا و در لایه‌ی خارجی مشاهده می‌شود و برابر $0.151 \mu\text{m}$ است؛ بنابراین درصد خطای آن برابر $2/9$ می‌باشد که مقدار آن خیلی کم است.

جدول ۳-۳ جابه‌جایی شعاعی (μm) محاسبه‌شده با روش‌های تحلیلی و عددی برای $n = 1$ و بارگذاری‌های مختلف در $t = 5 \text{ s}$

بارگذاری		شعاع داخلی ($r = a$)		شعاع میانی ($r = \frac{a+b}{2}$)		شعاع خارجی ($r = b$)	
حرارتی	مکانیکی	تحلیلی	عددی	تحلیلی	عددی	تحلیلی	عددی
-	فشار داخلی	۱۴/۵۹۶	۱۴/۶۰۶	۱۰/۵۲۵	۱۰/۵۳۳	۸/۶۸۸	۸/۶۹۶
	فشار خارجی	-۱۹/۵۴۹	-۱۹/۵۳۷	-۱۶/۹۸۸	-۱۶/۹۷۸	-۱۶/۱۹۶	-۱۶/۱۸۷
	فشار داخلی و خارجی	-۴/۹۵۳	-۴/۹۵۲	-۶/۴۶۴	-۶/۴۶۳	-۷/۵۰۸	-۷/۵۰۸
گذرا	-	۱/۴۳۲	۱/۳۸۴	۲/۳۲۵	۲/۳۴۵	۲/۳۰۶	۲/۲۵۵
گذرا	فشار داخلی	۱۶/۰۲۹	۱۵/۹۹۱	۱۲/۸۵	۱۲/۸۷۷	۱۰/۹۹۴	۱۰/۹۵۲
	فشار خارجی	-۱۸/۱۱۶	-۱۸/۲۲	-۱۴/۶۶۳	-۱۴/۷۲۶	-۱۳/۸۹۱	-۱۴/۰۳۵
	فشار داخلی و خارجی	-۳/۵۲	-۳/۶۳۵	-۴/۱۳۸	-۴/۲۱۱	-۵/۲۰۳	-۵/۳۵۴

مطابق جدول ۴-۳ برای بارگذاری‌های مختلف، مقادیر دما در لایه‌ی داخلی، میانی و خارجی تقریباً یکسان است. همان‌گونه که در توضیح شکل‌ها بیان شد؛ این امر به‌علت ثابت‌بودن شرایط مرزی

دمایی در تمام بارگذاری‌ها می‌باشد. بیشترین اختلاف بین مقادیر حل تحلیلی و عددی در بارگذاری‌های مختلف، در لایه‌ی داخلی مشاهده می‌شود که برابر $5/6929$ درجه‌ی سانتی‌گراد است؛ بنابراین درصد خطا برابر $4/77$ می‌باشد که مقدار اندکی است.

جدول ۳-۴ دمای $^{\circ}\text{C}$ محاسبه‌شده با روش‌های تحلیلی و عددی برای $n=1$ و بارگذاری‌های مختلف در $t=5\text{ s}$

بارگذاری	شعاع داخلی ($r=a$)		شعاع میانی ($r=\frac{a+b}{2}$)		شعاع خارجی ($r=b$)		حرارتی
	تحلیلی	عددی	تحلیلی	عددی	تحلیلی	عددی	
گذرا	-	۱۱۹/۳۰۷۱	۱۲۵	۵۲/۵۵۵۸	۵۰/۸۰۱۳	۲۷/۷۹۶۹	۲۵
گذرا	فشار داخلی	۱۱۹/۳۰۷۱	۱۲۵	۵۲/۵۵۵۸	۵۲/۶۶۶	۲۷/۷۹۶۹	۲۵
	فشار خارجی	۱۱۹/۳۰۷۱	۱۲۵	۵۲/۵۵۵۸	۵۰/۷۹۱۸	۲۷/۷۹۶۹	۲۵
	فشار داخلی و خارجی	۱۱۹/۳۰۷۱	۱۲۵	۵۲/۵۵۵۸	۵۰/۸۰۵	۲۷/۷۹۶۹	۲۵

جدول ۳-۵ شامل بیشینه مقادیر تنش شعاعی و محیطی محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و مکانیکی-حرارتی و نیز مختصات آن‌ها و برای شاخص توانی $n=1$ می‌باشد. با توجه به مقادیر درج‌شده در این جدول، در بارگذاری فشار داخلی (خارجی) به‌علت عدم حضور فشار خارجی (داخلی) مقادیر بیشینه‌ی تنش شعاعی در لایه‌ی داخلی (خارجی) رخ می‌دهند. بیشترین مقدار تنش شعاعی برای بارگذاری‌های مختلف، در شعاع $r=0/475\text{ m}$ و در بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا به‌دست آمده است. تنش محیطی نیز بیشتر در لایه‌ی

داخلی بیشینه شده است. همچنین بیشترین تنش محیطی برای بارگذاری‌های مختلف، در بارگذاری هم‌زمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا و در لایه‌ی داخلی ($r=0.04\text{ m}$) حاصل شده است.

جدول ۳-۵ بیشینه مقادیر تنش شعاعی و محیطی محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مختلف و مختصات آن‌ها و برای شاخص توانی $n=1$ در $t=5\text{ s}$

بارگذاری		تنش شعاعی (MPa)			تنش محیطی (MPa)		
حرارتی	مکانیکی	مختصات (m)	تحلیلی	عددی	مختصات (m)	تحلیلی	عددی
-	فشار داخلی	0.04	-80	-79/9873	0.04	69/9736	70/6671
	فشار خارجی	0.06	-80	-80/0021	0.06	-149/9736	-149/441
	فشار داخلی و خارجی	0.04 و 0.06	-80	-80	0.06	-87/9141	-87/6912
گذرا	-	0.048	-3/6295	-4/63/14	0.04	-22/1025	-24/7631
گذرا	فشار داخلی	0.04	-80	-79/993	0.06	76/3699	77/894
	فشار خارجی	0.06	-80	-80/0025	0.04	-161/7365	-165/692
	فشار داخلی و خارجی	0.04 و 0.06	-81/818	-82/3061	0.04	-91/7629	-95/1248

جدول ۳-۶ شامل بیشینه مقادیر جابه‌جایی شعاعی و دمای محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و مکانیکی-حرارتی و نیز مختصات آن‌ها و برای شاخص توانی $n=1$ می‌باشد. همان‌گونه که در این جدول مشخص است بیشترین مقدار جابه‌جایی شعاعی در

لایه‌ی داخلی و در بارگذاری فشار خارجی حاصل شده است. از آنجا که دما در محیط اطراف لایه‌ی داخلی و خارجی ثابت فرض شده و مقدار آن در لایه‌ی داخلی بیشتر از لایه‌ی خارجی است؛ بنابراین بیشینه‌ی دما همواره در لایه‌ی داخلی رخ می‌دهد و مقدار آن در بارگذاری‌های مختلف یکسان است. همان‌گونه که قبلاً بیان شد، به‌علت ثابت‌بودن شرایط مرزی دمایی، تغییرات دما در بارگذاری‌های مختلف یکسان است.

جدول ۳-۶ بیشینه مقادیر جابه‌جایی شعاعی و دمای محاسبه‌شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مختلف و مختصات آن‌ها و برای شاخص توانی $n=1$ در $t=5\text{ s}$

بارگذاری		جابه‌جایی شعاعی (μm)		دما ($^{\circ}\text{C}$)	
حرارتی	مکانیکی	مختصات (m)	تحلیلی	عددی	مختصات (m)
-	فشار داخلی	۰/۰۴	۱۴/۵۹۶۳	۱۴/۶۰۵۶	-
	فشار خارجی	۰/۰۴	-۱۹/۵۴۸۸	-۱۹/۵۳۶۶	-
	فشار داخلی و خارجی	۰/۰۶	-۷/۵۰۸	-۷/۵۰۷۶	-
گذرا	-	۰/۰۵۳۵	۲/۳۷۵۲	۲/۳۷۸۵	۰/۰۴
گذرا	فشار داخلی	۰/۰۴	۱۶/۰۲۸۷	۱۵/۹۹۰۸	۰/۰۴
	فشار خارجی	۰/۰۴	-۱۸/۱۱۶۴	-۱۸/۲۱۹۹	۰/۰۴
	فشار داخلی و خارجی	۰/۰۶	-۵/۲۰۲۵	-۵/۳۵۴۴	۰/۰۴

۳-۹ جمع بندی

مقادیر دما، برای بارگذاری های حرارتی، فشاری و ترکیبی در طول ضخامت کره ی ناهمگن، با توجه به اینکه در لایه ی داخلی و خارجی انتقال حرارت وجود دارد و دمای سطح داخلی بیشتر از سطح خارجی است، از لایه ی داخلی به سمت لایه ی خارجی کاهش می یابد. همچنین برای تمامی n ها، از زمان ۵ ثانیه به بعد، تغییرات دما خیلی کم است و می توان این زمان را لحظه ی عبور از حالت گذرا به حالت پایا دانست. همچنین به علت ثابت بودن شرایط مرزی دمایی، تغییرات دما برای بارگذاری های مختلف یکسان است.

مقادیر تنش شعاعی در تمام بارگذاری های انجام شده در این پژوهش همواره منفی است و توزیع آن در بارگذاری فشار داخلی و بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا رفتار مشابهی داشته و قدرمطلق آن در طول ضخامت کره کاهش یافته و برای شاخص های توانی مثبت بیشتر از شاخص های توانی منفی است و در بارگذاری فشار خارجی و بارگذاری همزمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا رفتار مشابهی داشته و قدرمطلق آن در طول ضخامت کره افزایش یافته و برای شاخص های توانی منفی بیشتر از شاخص های توانی مثبت است و در بارگذاری همزمان فشار داخلی و خارجی و بارگذاری همزمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا رفتار مشابهی داشته و قدرمطلق آن در طول ضخامت کره ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته و برای شاخص های توانی مثبت بیشتر از شاخص های توانی منفی است و در بارگذاری بار حرارتی گذرا، قدرمطلق آن در طول ضخامت کره ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته و برای شاخص های توانی مثبت بیشتر از شاخص های توانی منفی است.

مقادیر تنش محیطی در تمام بارگذاری های انجام شده دارای یک نقطه ی همگرایی برای شاخص های توانی متفاوت می باشد و رفتار آن قبل و بعد از نقطه ی همگرایی برای شاخص های توانی مختلف، متفاوت است؛ به گونه ای که در تمام بارگذاری ها غیر از بارگذاری بار حرارتی گذرا، قدرمطلق آن قبل از نقطه ی همگرایی برای شاخص های توانی منفی نسبت به شاخص های توانی مثبت بیشتر است و بعد از نقطه ی همگرایی برعکس می باشد و در بارگذاری بار حرارتی گذرا قبل و بعد از نقطه ی همگرایی مقادیر

در شاخص‌های توانی مثبت بیشتر است. توزیع آن در بارگذاری فشار داخلی با مقادیر مثبت در طول ضخامت کره کاهش می‌یابد و در بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا نیز با مقادیر مثبت در طول ضخامت کره برای شاخص‌های توانی مثبت افزایش و برای شاخص‌های توانی منفی کاهش می‌یابد و در بارگذاری فشار خارجی و بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی دارای مقادیر منفی بوده و قدرمطلق آن در طول ضخامت کره برای شاخص‌های توانی مثبت افزایش و برای شاخص‌های توانی منفی کاهش می‌یابد و در بارگذاری هم‌زمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا و بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا دارای مقادیر منفی بوده و قدرمطلق آن در طول ضخامت کره کاهش می‌یابد و در بارگذاری بار حرارتی گذرا قدرمطلق آن در طول ضخامت کره کاهش می‌یابد.

قدرمطلق جابه‌جایی شعاعی در تمام بارگذاری‌های انجام‌شده، برای شاخص‌های توانی منفی بیشتر از شاخص‌های مثبت می‌باشد و توزیع آن در بارگذاری فشار داخلی و بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا رفتار مشابهی داشته و با مقادیر مثبت در طول ضخامت کره کاهش می‌یابد و در بارگذاری فشار خارجی و بارگذاری هم‌زمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا، مقادیر آن منفی بوده و قدرمطلق آن در طول ضخامت کره کاهش می‌یابد و در بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا نیز مقادیر آن منفی می‌باشد و قدرمطلق آن در طول ضخامت کره افزایش می‌یابد و در بارگذاری بار حرارتی گذرا، با مقادیر مثبت در طول ضخامت کره ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

فصل ۴: جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۴-۱ پیش‌گفتار

کره‌های جدار ضخیم متقارن محوری، به دلیل مقاومت بالا در برابر انواع فشارهای داخلی و خارجی، نیروها و لنگرها، گرادیان دمایی و بارگذاری‌های متنوع دیگر کاربرد فراوانی در صنعت پیدا کرده‌اند. دستیابی به روش‌های مختلف تحلیل پوسته‌های کروی با تغییرات هندسه، ماده و بارگذاری مورد علاقه‌ی پژوهشگران و نیاز صنعتگران می‌باشد. در همین راستا در این پایان‌نامه سعی شده است تا با ارائه‌ی حلّ تحلیلی برای کره‌های جدار ضخیم با ضخامت ثابت و در حالت تقارن محوری که تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا به صورت شار حرارتی ناشی از گرادیان دما، در سطح داخلی و خارجی خود قرار دارد؛ اثر هریک از این بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلف بر روی مقادیر تنش و جابه‌جایی پوسته‌ی کروی بررسی شود. در این فصل ضمن جمع‌بندی کارهای صورت‌گرفته در این پایان‌نامه، نتیجه‌گیری جامعی صورت پذیرفته است و در نهایت پیشنهادهایی برای ادامه و تکمیل کار نیز ارائه شده است.

۴-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

حلّ تحلیلی کره‌ی جدار ضخیم با جدار ثابت، در حالت متقارن محوری و تحت بارگذاری مختلف سبب ایجاد معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم برحسب جابه‌جایی شعاعی کره می‌گردد. معادله‌ی دیفرانسیل حاصل، ناهمگن بوده و حلّ آن به دو بخش عمومی و خصوصی تقسیم می‌شود؛ که حلّ عمومی آن از روش کوشی-اوایلر و حلّ خصوصی آن از روش تغییر پارامتر محاسبه گردیده است. حلّ معادله‌ی انتقال حرارت حاکم بر مسأله نیز در حالت پایا و گذرا به طور مجزاً انجام می‌پذیرد که حلّ گذرای آن در کره‌ی همگن و ناهمگن به کمک توابع بسل و روش کوشی-اوایلر انجام پذیرفته است. در حلّ گذرا، پارامتری به نام شاخص توانی مؤثر معرفی شده و برای مقادیر مختلف از آن مسأله حل گردیده و تنها برای یک شاخص توانی مؤثر خاص از روشی کوشی-اوایلر استفاده شده است. هم‌چنین در حالت گذرا، پاسخ منجر

به ایجاد مقادیر ویژه و توابع ویژه شده و بنابراین از بسط فوریه‌ی توابع ویژه استفاده شده است. در ادامه نتایج مربوط به انواع بارگذاری به‌طور مجزاً بیان شده است.

تذکر: از آنجا که در فصل‌های قبلی شرح کامل رفتار انواع بارگذاری‌ها آورده شده است؛ آنچه در ادامه آمده توضیحات مربوط به قدرمطلق مقادیر را برای تغییرات تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها بیان می‌دارد.

۴-۲-۱ تحلیل پوسته‌های کروی همگن و ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی

با توجه به آنچه در شکل‌ها مشاهده شد؛ تغییرات دمایی برای کره‌ی جدار ضخیم همگن و ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی، در طول زمان از لحظه‌ی ۵ ثانیه به بعد تقریباً ثابت است که می‌توان این زمان را لحظه‌ی عبور از حالت گذرا به پایا دانست و به‌علت ثابت‌بودن شرایط مرزی دمایی، تغییرات دما در بارگذاری‌های مختلف یکسان است. تنش شعاعی در لایه‌ی داخلی و خارجی صفر بوده و از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی افزایش و سپس به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابند.

هرچه ناهمگنی در کره افزایش یابد -از مقادیر منفی به سمت مقادیر مثبت- مقادیر جابه‌جایی شعاعی کاهش می‌یابد و برای شاخص‌های توانی مثبت مقادیر آن نسبت به ماده‌ی همگن کمتر هستند. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده، بارگذاری حرارتی بر رفتار کره‌ی همگن و ناهمگن تأثیرگذاری قابل توجهی دارد و بنابراین در مسائل تحلیل تنش در صورت حضور بار حرارتی باید تنش‌های حرارتی نیز بررسی شود.

۴-۲-۲ تحلیل پوسته‌های کروی همگن و ناهمگن تحت بارگذاری فشاری

در پژوهش انجام‌شده، کره تحت بارگذاری فشاری در سه حالت مختلف قرار گرفته است: (۱) فشار داخلی؛ (۲) فشار خارجی؛ (۳) هم‌زمان فشار داخلی و خارجی.

(۱) بارگذاری فشار داخلی

در ماده‌ی همگن تنش شعاعی همواره منفی می‌باشد و از لایه‌ی داخلی - که بیشینه مقدار را داراست - به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد و در این لایه صفر می‌شود. تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی نیز از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابند و مقادیر آن‌ها همواره مثبت است.

در ماده‌ی ناهمگن تنش شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد و برای شاخص‌های توانی مثبت مقادیر بیشتری را دارا می‌باشد. تنش محیطی در طول ضخامت کره، برای شاخص‌های توانی مثبت افزایش و برای شاخص‌های توانی منفی کاهش می‌یابد و دارای نقطه‌ی همگرایی می‌باشد. جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی با روند کاهشی به لایه‌ی خارجی رسیده و برای شاخص‌های توانی مثبت مقادیر کمتری را داراست.

(۲) بارگذاری فشار خارجی

در ماده‌ی همگن تنش شعاعی همواره منفی می‌باشد و از لایه‌ی داخلی - که مقدار آن صفر است - به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد. تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی نیز از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابند و مقادیر آن‌ها همواره منفی است.

در ماده‌ی ناهمگن تنش شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد و برای شاخص‌های توانی مثبت مقادیر کمتری را دارا می‌باشد. تنش محیطی در طول ضخامت کره، برای شاخص‌های توانی مثبت افزایش و برای شاخص‌های توانی منفی کاهش می‌یابد و دارای نقطه‌ی همگرایی می‌باشد. جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی با روند کاهشی به لایه‌ی خارجی رسیده و برای شاخص‌های توانی منفی مقادیر بیشتری را داراست.

(۳) بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی

در ماده‌ی همگن تنش شعاعی، محیطی و جابه‌جایی شعاعی همواره منفی می‌باشند و در طول ضخامت کره تقریباً ثابت بوده و تغییرات بسیار ناچیزی دارند.

در ماده‌ی ناهمگن تنش شعاعی تقریباً در طول ضخامت کره ثابت می‌باشد. تنش محیطی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی برای شاخص‌های توانی مثبت افزایش و برای شاخص‌های توانی منفی کاهش می‌یابد و دارای نقطه‌ی همگرایی می‌باشد. جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی با روند افزایشی به لایه‌ی خارجی رسیده و برای شاخص‌های توانی منفی مقادیر بیشتری را دارا می‌باشد.

۴-۲-۳ تحلیل پوسته‌های کروی همگن و ناهمگن تحت بارگذاری همزمان فشاری و حرارتی

در این حالت از بارگذاری نیز، کره در سه حالت مختلف بارگذاری شده است: (۱) همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا؛ (۲) همزمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا؛ (۳) همزمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا.

همان‌گونه که در شکل‌ها مشخص است تنش‌ها و جابه‌جایی ناشی از بارگذاری فشاری حدود ۱۰ برابر بزرگ‌تر از بارگذاری حرارتی می‌باشد. بنابراین مطابق انتظار در تحلیل بارگذاری ترکیبی، نتایج و نمودارها مشابه بارگذاری فشاری می‌باشد.

(۱) بارگذاری همزمان فشار داخلی و بار حرارتی گذرا

در ماده‌ی همگن توزیع دما از بیشینه مقدار خود که در لایه‌ی داخلی قرار دارد به سمت لایه‌ی خارجی که کمینه است، کاهش می‌یابد. تنش شعاعی همواره منفی می‌باشد و از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد و در این لایه صفر می‌شود. تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی نیز از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابند و مقادیر آن‌ها همواره مثبت است.

در ماده‌ی ناهمگن تنش شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد و برای شاخص‌های توانی مثبت مقادیر بیشتری را دارا می‌باشد. تنش محیطی در طول ضخامت کره،

برای شاخص‌های توانی مثبت افزایش و برای شاخص‌های توانی منفی کاهش می‌یابد و دارای نقطه‌ی همگرایی می‌باشد. جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی با روند کاهشی به لایه‌ی خارجی رسیده و برای شاخص‌های توانی مثبت مقادیر کمتری را داراست.

۲) بارگذاری هم‌زمان فشار خارجی و بار حرارتی گذرا

در ماده‌ی ناهمگن تنش شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد و برای شاخص‌های توانی منفی مقادیر بیشتری را دارا می‌باشد. تنش محیطی در طول ضخامت کره، کاهش می‌یابد و دارای نقطه‌ی همگرایی می‌باشد. جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی با روند کاهشی به لایه‌ی خارجی رسیده و برای شاخص‌های توانی منفی مقادیر بیشتری را دارا می‌باشد.

۳) بارگذاری هم‌زمان فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی گذرا

در ماده‌ی همگن توزیع دما از بیشینه مقدار خود که در لایه‌ی داخلی قرار دارد به سمت لایه‌ی خارجی که کمینه است، کاهش می‌یابد و تنش شعاعی، محیطی و جابه‌جایی شعاعی همواره منفی می‌باشند و در طول ضخامت کره تقریباً ثابت بوده و تغییرات ناچیزی دارند.

در ماده‌ی ناهمگن تنش شعاعی تغییرات ناچیزی دارد و تقریباً ثابت است و برای شاخص‌های توانی منفی مقادیر بیشتری را دارا می‌باشد. تنش محیطی در طول ضخامت کره، کاهش می‌یابد و دارای نقطه‌ی همگرایی می‌باشد. جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی با روند افزایشی به لایه‌ی خارجی رسیده و برای شاخص‌های توانی منفی مقادیر بیشتری را دارا می‌باشد.

همان‌گونه که در نتایج درج‌شده در جداول مشخص است، می‌توان برای کره‌ی تحت فشار داخلی و بارگذاری حرارتی با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌های حرارتی و فشاری به‌طور جداگانه، نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حل تحلیلی و حل عددی در کره‌ی تحت بارگذاری‌های حرارتی و فشاری وجود دارد.

۳-۴ پیشنهادها

با توجه به کارهایی که در گذشته در رابطه با موضوع این پایان نامه انجام شده و آنچه در این پژوهش ارائه شد، جهت تکمیل این بررسی ها با توجه به کاربرد وسیع و متنوع پوسته های کروی پیشنهادهای زیر ارائه می گردد:

(۱) حلّ تحلیلی و عددی کره های جدار ضخیم FGM تحت فشار و بار حرارتی گذرا با تغییرات

نمایی خواص و با استفاده از تئوری الاستیسیته ی مستوی

(۲) حلّ تحلیلی و عددی کره های جدار ضخیم FGM تحت فشار و بار حرارتی گذرا با تغییرات

خواص به صورت کسر حجمی و با استفاده از تئوری الاستیسیته ی مستوی

(۳) تحلیل ترموالاستیک پوسته های کروی ناهمگن تحت فشار متغیر با استفاده از تئوری

الاستیسیته ی مستوی

مراجع

- [1] Ventsel E., Krauthammer T.; *Thin plates and shells: Theory, analysis and applications*, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [2] Kirchhoff G.f.; *Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe*, J. Reine Angew. Math., Vol. 40, pp. 51-88, 1850.
- [3] Love A.E.H.; *The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell*, Philos. Trans. Royal Soc. London A, Vol. 179, pp. 491-546, 1888.
- [4] Aron H.; *Das gleichgewicht und die bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen schale*, J. Reine Angew. Math., Vol. 78, pp. 136-174, 1874.
- [5] Reissner H.; *Spannungen in kugelschalen (kuppeln)*, Müller-Breslau Festschrift, Leipzig, 1912.
- [6] Flügge W.; *Die stabilität der kreiszylinderschale*, Arch. Appl. Mech., Vol. 3, No. 5, pp. 463-506, 1932.
- [7] Byrne R.; *Theory of small deformations of the thin elastic shell*, University of California Press, 1944.
- [8] Naghdi P.M.; *On the theory of thin elastic shells*, Q. Appl. Math., Vol. 14, No. 4, pp. 369-380, 1957.
- [9] Sanders J.L.; *An improved first-approximation theory for thin shells*, NASA Rep., 1959.
- [11] Novozhilov V.V.; *Theory of thin elastic shells*, 2nd ed., P. Noordhoff, Groningen, 1964.
- [12] Flugge W.; *Stresses in shells*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1960.
- [۱۲] یوگورال ای. سی؛ تنش در ورق‌ها و پوسته‌ها، ترجمه‌ی غ. رحیمی، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، دانشگاه تهران، ۱۳۷۵.
- [13] Timoshenko S.P., Goodier J.N.; *Theory of elasticity*, 3rd ed., MacGraw-Hill Book Company, New York, 1982.

- [14] Greenspon J.E.; *Vibration of a thick-walled cylindrical shell comparison of the exact theory with approximate theories*, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 32, No. 5, pp. 571-578, 1960.
- [15] Timoshenko S.P.; *Strength of materials: Part II (Advanced theory and problems)*, 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1976.
- [16] Koizumi M., Niino M.; *Overview of FGM research in Japan*, MRS Bulletin, Vol. 20, No. 1, pp. 19-21, 1995.
- [17] Timoshenko S., Goodier J.N.; *Theory of elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.
- [18] Warren W.E.; *Transient axisymmetric thermoelastic problem for the hollow sphere*, AIAA J., Vol. 1, No. 11, pp. 2569-2576, 1963.
- [19] Ulitko A.F.; *Stress state of a hollow sphere loaded by concentrated forces*, Sov. Appl. Mech., Vol. 4, No. 5, pp. 25-29, 1968.
- [20] Guerrero I., Turteltaub M.J.; *The elastic sphere under arbitrary concentrated surface loads*, J. Elast., Vol. 2, No. 1, pp. 21-33, 1972.
- [21] Pit'ko V.V.; *Deformation of a uniform hollow sphere by concentrated forces acting along a diameter*, Strength Mater., Vol. 5, No. 9, pp. 1108-1114, 1973.
- [22] Nemish Y.N., Chernopiskii D.I.; *The thermal stress state of a nonlinearly elastic hollow sphere under aerodynamic heating*, Sov. Appl. Mech., Vol. 10, No. 6, pp. 579-586, 1974.
- [23] Tanigawa Y., Takeuti Y.; *Coupled thermal stress problem in a hollow sphere under a partial heating*, Int. J. Eng. Sci., Vol. 20, No. 1, pp. 41-48, 1982.
- [24] Jingu T., Nezu K.; *Transient stress in an elastic sphere under diametrical concentrated impact loads*, Bulletin of JSME, Vol. 28, No. 245, pp. 2553-2561, 1985.
- [25] McClung H.B.; *The elastic sphere under nonsymmetric loading*, J. Elast., Vol. 21, No. 1, pp. 1-26, 1989.
- [26] Hill E.L.; *The theory of vector spherical harmonics*, Am. J. Phys., Vol. 22, No. 4, pp. 211-214, 1954.
- [27] Boresi A.P., Chong K.P.; *Elasticity in engineering mechanics*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Canada, 2000.

- [28] Jiang F., Sousa A.; *Analytical solution for hyperbolic heat conduction in a hollow sphere*, J. Thermophys. Heat Transfer, Vol. 1, No. 4, pp. 595-598, 2005.
- [29] Tzou D.Y.; *Thermal shock phenomena under high rate response in solids*, Annu. Rev. Heat Transfer, Vol. 4, No. 4, pp. 1992.
- [30] Moosaie A.; *Axisymmetric non-fourier temperature field in a hollow sphere*, Arch. Appl. Mech., Vol. 79, No. 8, pp. 679-694, 2009.
- [31] Hetnarski R.B., Eslami M.R.; *Thermal stresses: Advanced theory and applications*, Springer, New York, 2009.
- [32] Obata Y., Noda N.; *Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material*, J. Therm. Stresses, Vol. 17, No. 3, pp. 471-487, 1994.
- [33] Horgan C.O., Chan A.M.; *The stress response of functionally graded isotropic linearly elastic rotating disks*, J. Elast., Vol. 55, No. 3, pp. 219-230, 1999.
- [34] Sugano Y., Onodera M.; *Reduction of thermal stress in a functionally graded hollow hemisphere*, Trans. JSME A, Vol. 66, No. 644, pp. 727-734, 2000.
- [35] Tutuncu N., Ozturk M.; *Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels*, Compos. B Eng., Vol. 32, No. 8, pp. 683-686, 2001.
- [36] Vel S.S., Batra R.C.; *Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates*, Int. J. Solids Struct., Vol. 40, No. 25, pp. 7181-7196, 2003.
- [37] You L.H., Zhang J.J., You X.Y.; *Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials*, Int. J. Pressure Vessels and Piping, Vol. 82, No. 5, pp. 347-354, 2005.
- [38] Eslami M.R., Babaei M.H., Poultangari R.; *Thermal and mechanical stresses in a functionally graded thick sphere*, Int. J. Pressure Vessels and Piping, Vol. 82, No. 7, pp. 522-527, 2005.
- [39] Babaei M.H., Chen Z.T.; *Hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow sphere*, Int. J. Thermophys., Vol. 29, No. 4, pp. 1457-1469, 2008.
- [40] Chen Y.Z., Lin X.Y.; *Elastic analysis for thick cylinders and spherical pressure vessels made of functionally graded materials*, Comput. Mater. Sci., Vol. 44, No. 2, pp. 581-587, 2008.

- [41] Tutuncu N., Temel B.; *A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres*, Compos. Struct., Vol. 91, No. 3, pp. 385-390, 2009.
- [42] Li X.F., Peng X.L., Kang Y.A.; *Pressurized hollow spherical vessels with arbitrary radial nonhomogeneity*, AIAA J., Vol. 47, No. 9, pp. 2262-2266, 2009.
- [43] Ghannad M., Zamani Nejad M.; *Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clamped ends*, Mechanika, Vol. 85, No. 5, pp. 11-18, 2010.
- [44] Keles I., Conker C.; *Transient hyperbolic heat conduction in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties*, Eur. J. Mech. A Solids, Vol. 30, No. 3, pp. 449-455, 2011.
- [45] Ghannad M., Zamani Nejad M.; *Complete closed-form solution for pressurized heterogeneous thick spherical shells*, Mechanika, Vol. 18, No. 5, pp. 508-516, 2012.
- [46] Zamani Nejad M., Abedi M., Lotfian M.H., Ghannad M.; *An exact solution for stresses and displacements of pressurized FGM thick-walled spherical shells with exponential-varying properties*, J. Mech. Sci. Technol., Vol. 26, No. 12, pp. 4081-4087, 2012.
- [47] Bayat Y., Ghannad M., Torabi H.; *Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading*, Arch. Appl. Mech., Vol. 82, No. 2, pp. 229-242, 2012.
- [48] Zamani Nejad M., Abedi M., Lotfian M.H., Ghannad M.; *The application of 2-dimensional elasticity for the elastic analysis of solid sphere made of exponential functionally graded material*, Mechanika, Vol. 20, No. 3, pp. 254-258, 2014.
- [49] Zamani Nejad M., Abedi M., Lotfian M.H., Ghannad M.; *Exact and numerical elastic analysis for the FGM thick-walled cylindrical pressure vessels with exponentially-varying properties*, Arch. Metall. Mater., Vol. 61, No. 3, pp. 1649-1654, 2016.

[۵۰] وکیلی تهامی ف.، طلعتی ف.، عباسی ا.، شریفی س.س.؛ بررسی اثر فرکانس بار حرارتی سیکلی در توزیع تنش ترموالاستیک مخزن کروی هدفمند به روش نیمه‌تحلیلی، مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، دوره ۴۷، شماره ۲، صص. ۳۱۳-۳۲۲، ۱۳۹۶.

- [51] Bergman T.L., Incropera F.P., Dewitt D.P., Lavine A.S.; *Fundamentals of heat and mass transfer*, 7th ed., John Wiley & Sons, 2011.
- [52] Kreyszig E.; *Advanced engineering mathematics*, 10th ed., John Wiley & Sons, New York, 2010.

- [53] Zamani Nejad M., Abedi M., Lotfian M.H., Ghannad M.; *Elastic analysis of exponential FGM disks subjected to internal and external pressure*, Cent. Eur. J. Eng., Vol. 3, No. 3, pp. 459-465, 2013.

Abstract

The abundant use of shells in engineering structures has led researchers to focus on analyzing the behavior of these structures under various loading conditions. In this study, using the Plane Elasticity Theory (PET), analytical and numerical solutions of homogeneous and heterogeneous FGM thick wall spheres, are presented under compressive and transient thermal load. The loading involves: internal pressure, external pressure, transient thermal load and also the combination of these loads together. The properties in heterogeneous sphere varying with the power functions in terms of the radius of the sphere, but the Poisson ratio is constant. By applying Fourier's law, in heat transfer problems, the governing equation (heat transfer equation) has been obtained and solved by using separation of variables and variable change method and respect to the boundary conditions, it becomes an eigen quantity problem and finally, the response functions expanded in terms of eigen functions. The temperature boundary conditions include heat transfer at the inner and outer surfaces of the sphere and the ambient temperature is assumed constant. By applying constitutive, kinematic and equilibrium equations and using Cauchy-Euler method and method of variation parameters, radial displacement is calculated and by using the closed-form solution, radial and circumferential stresses are achieved. The values used in this study are arbitrarily chosen to demonstrate the effect of time and inhomogeneity on the distribution of temperature, displacements and stresses. To check the results accuracy of analytical solution, a finite element solution by modeling in software Abaqus has been used in all cases of loadings for homogeneous and inhomogeneous shell and Good agreement is made between the results of these two methods.

Keywords: Spherical shell, FGM sphere, Plane elasticity theory, Analytical and numerical solution, Compressive and thermal loading, Bessel functions, Eigen functions, Finite element method.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

**Analytical and numerical solution of FGM
pressurized thick spherical shells under transient
thermal load**

By:

Mohammad Jannatifar

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

January 2019