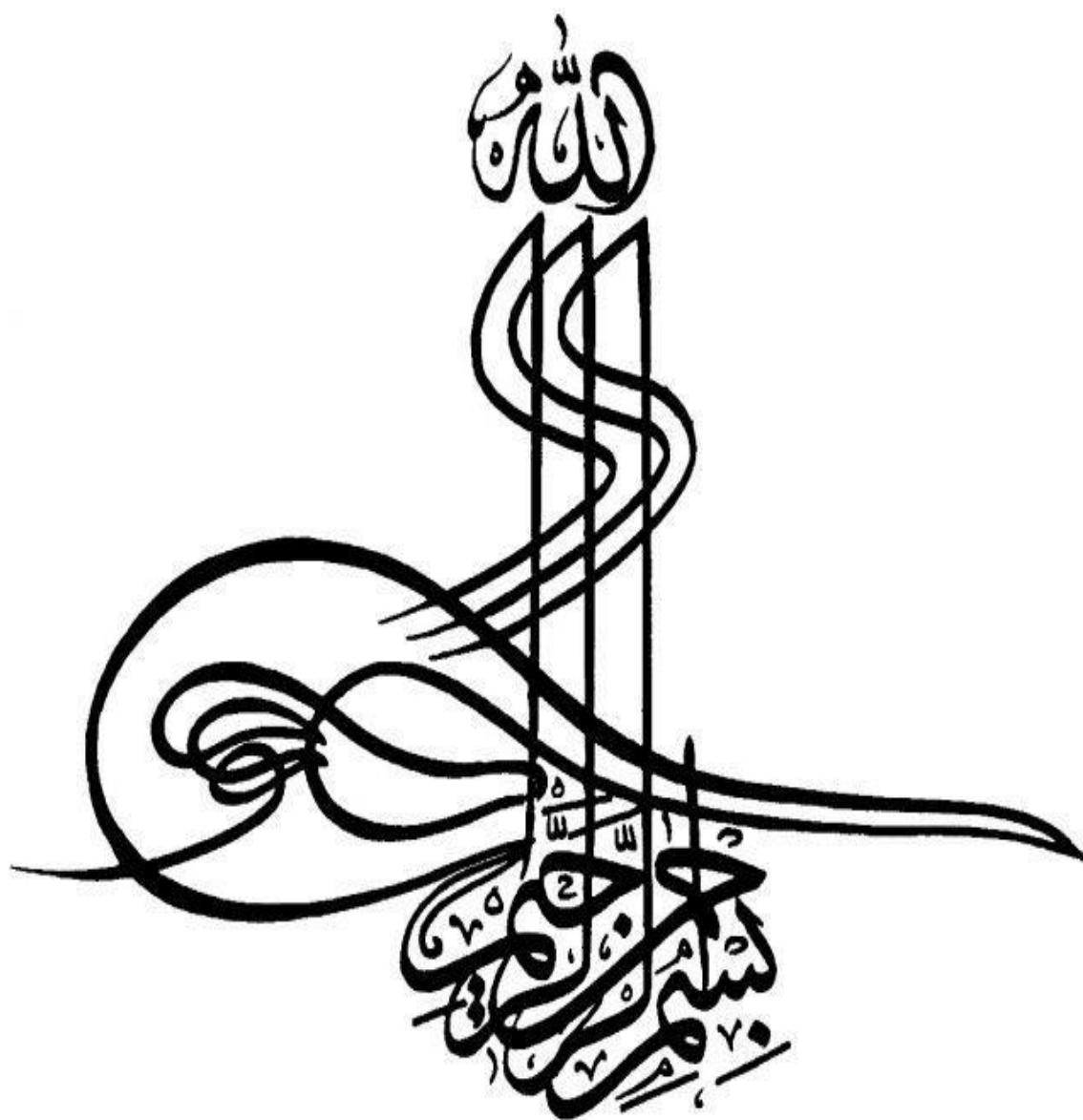




الهی ...

ای آغاز هر آغاز و ای پایان هر پایان، ای دورنظر و ای نیکو حضر و ای نیکو کار نیک منظر، ای دلیل هر برگشته و ای راهنمای هر سرگشته، ای چاره ساز هر بیچاره، ای جامع هر پراکنده و ای رافع هر افتاده، ای خالق بی مدد و ای واحد بی عدد، ای اوّل بی هدایت و ای آخر بی نهایت، ای ظاهر بی صورت و ای باطن بی سیرت، ای کریمی که بندگان را غیر از تو دست آویز نیست، دست ما گیر که دست آویز نداریم، نگاه دار تا پریشان نشویم و در راه آر تا سرگردان نشویم.



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

بررسی دینامیک حالت پایدار یک تیر اوایلر-برنولی متصل شده به یک  
چاه غیرخطی انرژی با فرض تغییرات کند پارامترهای سیستم اصلی با  
زمان

نگارنده : ساجده شعبانپور کساری

استاد راهنما :

دکتر امیر جلالی

شهریورماه ۱۳۹۷

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد خانم ساجده شعبانپور کساری به شماره‌ی دانشجویی ۹۴۱۰۲۹۴

تحت عنوان

بررسی دینامیک حالت پایدار یک تیر اویلر-برنولی متصل شده به یک چاه غیرخطی انرژی  
با فرض تغییرات کند پارامترهای سیستم اصلی با زمان

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه  
..... مورد پذیرش قرار گرفت.

| امضاء | اساتید مشاور         | امضاء | اساتید راهنما        |
|-------|----------------------|-------|----------------------|
|       | نام و نام خانوادگی : |       | نام و نام خانوادگی : |
|       | نام و نام خانوادگی : |       | نام و نام خانوادگی : |

| امضاء | نماینده تحصیلات تکمیلی | امضاء | اساتید داور          |
|-------|------------------------|-------|----------------------|
|       | نام و نام خانوادگی :   |       | نام و نام خانوادگی : |
|       |                        |       | نام و نام خانوادگی : |
|       |                        |       | نام و نام خانوادگی : |
|       |                        |       | نام و نام خانوادگی : |

|                              |                            |
|------------------------------|----------------------------|
| چشم کریانم ز گریه کند بود    | یافت نور از نرگس جادوی تو  |
| بس بگفتم کو وصال؟ و کونج اح؟ | برد این کو کو مراد کوی تو  |
| جست و جویی در دلم انداختی    | تاز جست و جوروم در جوی تو  |
| حاک را لای و هوئی کی بدی؟    | گر نبودی جذب های و هوئی تو |

تقدیم به:

استوارترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم  
 سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم  
 و برادران عزیزم.

سپاس مخصوص خداست، آن وجود مبارکی که اول است، بی آنکه اولی پیش از او باشد و آخر است، بی آنکه آخری پس از او باشد. سپاس از آن خداوندی است که وجودش را به ما شناساند، درهای دانش را به پروردگارش به روی ما گشود و در احتیاج و نیاز ما را از غیر خود بست، سپاس به عدد تمام اشایی که دانشش بر آنها احاطه دارد، سپاس ابدی و همیشگی.

سپاس بی کمران دارم از مهرورزی ها، زحمات و حمایت های بی دریغ خانواده ی عزیزم که بی شک، یگانه وجودشان کوهر نایاب زندگیست. امید آن دارم که در پناه مهرشان، پاشکوی بزرگواری هایشان باشم.

اینجانب در راه زندگی علمی خود، وجود استاد کرامی، جناب آقای دکتر امیر جلالی را مدیون افتخار خود می دانم. راهنمایی های بی منت ایشان در طول این مدت مورد ستایش بوده، از این رو، واژه ی تشکر، کلمه ای ناتوان در سپاس از ایشان است.

در انتها از دکتر مجید کنی، مهندس حسین اصغری و مهندس علی اکبر بیات، که در به ثمر رساندن این پایان نامه، بنده را یاری نمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

## تهدنامه

اینجانب ساجده شعبانپور کساری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک دانشکده-ی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان نامه‌ی بررسی دینامیک حالت پایدار یک تیر اویلر-برنولی متصل شده به یک چاه غیرخطی انرژی با فرض تغییرات کند پارامترهای سیستم اصلی با زمان تحت راهنمایی دکتر امیر جلالی متعهد می‌شوم.

- ✓ تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- ✓ در استفاده از نتایج محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- ✓ مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- ✓ کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام دانشگاه صنعتی شاهرود و یا shahrood University of Technology به چاپ خواهد رسید.
- ✓ حقوق معنوی تمامی افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- ✓ در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان نامه در مواردی که از موجود زنده یا یافت‌های آن‌ها استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- ✓ در کلیه مراحل انجام این پایان نامه در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

## تاریخ

### امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده:

در این پژوهش، به بررسی ارتعاشات غیرخطی یک تیر اویلر-برنولی متصل به یک چاه غیرخطی انرژی، که یکبار به صورت متصل به زمین و بار دیگر در حالت آزاد قرار دارد، پرداخته شده است. در کار حاضر که شامل بخش‌های تحلیلی و عددی است، کاربرد چاه غیرخطی انرژی در کاهش ارتعاشات دو سیستم مکانیکی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. به‌طور کلی چاه غیرخطی انرژی قادر است انرژی را از زیرسیستم اولیه تحت بارگذاری خارجی به‌صورت یک‌طرفه، غیرفعال و در گستره‌ی وسیعی از فرکانس‌های تحریک جذب نماید. معادلات حاکم برسیستم با استفاده از تئوری اویلر-برنولی استخراج و مدل ریاضی سازه با به‌کارگیری روش نیوتون اثبات شده است. سپس از روش گالرکین برای گسسته‌سازی معادلات حرکت بهره‌گرفته‌ایم. در انتها با روش نیمه‌تحلیلی میانگین‌گیری مختلط-شونده و استفاده از مفاهیم مودهای نرمال غیرخطی، به بررسی دینامیک سیستم پرداخته شده است. در این تحقیق فرض بر این است که پارامترهای سیستم اصلی به‌صورت کند با زمان تغییر می‌کنند. بررسی پارامترهای جاذب با به‌کارگیری چاه غیرخطی انرژی با سفتی غیرخطی مرتبه‌ی سوم انجام می‌شود و پارامترهای بهینه‌ی جاذب به‌منظور کاهش ارتعاشات تیر و افزایش محدوده‌ی فرکانسی مؤثر کاهش ارتعاش محاسبه می‌شوند. در تمامی بررسی‌ها تحلیل از نوع دینامیکی در حالت پایا می‌باشد. بررسی همگرایی پاسخ تیر، تحلیل پایداری، مقاوم‌بودن تیر در برابر تغییرات دامنه‌ی نیروی تحریک، بدست‌آوردن بیشترین بازدهی چاه غیرخطی انرژی با تغییرات پارامترها و بررسی دینامیک غیرخطی سیستم از جمله موضوعات مورد بررسی در این پایان‌نامه هستند.

## واژگان کلیدی:

تیر غیرخطی اویلر-برنولی، چاه غیرخطی انرژی، روش گالرکین، روش میانگین‌گیری مختلط‌شونده.

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:

✓ شعبانپور کساری س، جلالی ا، (۱۳۹۷)، "کنترل ارتعاشات یک نوسانگر دافینگ به وسیله‌ی چاه غیرخطی انرژی"، بیست و ششمین همایش سالانه-ی بین المللی مهندسی مکانیک ایران، ISME 2018، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، سمنان.

## فهرست مطالب:

|         |                                           |
|---------|-------------------------------------------|
| ۱.....  | کلیات و تحقیقات پیشین                     |
| ۲.....  | ۱-۱ مفاهیم اولیه ی ارتعاشات               |
| ۴.....  | ۲-۱ روشهای کاهش ارتعاشات                  |
| ۷.....  | ۱-۲-۱ جاذب دینامیکی خطّی و محدودیتها      |
| ۱۱..... | ۲-۲-۱ جاذب دینامیکی غیرخطّی ارتعاشات      |
| ۱۱..... | ۳-۱ انتقال انرژی هدمندو چاه غیرخطّی انرژی |
| ۱۷..... | ۴-۱ مودهای نرمال غیرخطّی                  |
| ۱۹..... | ۵-۱ رزونانس داخلی                         |
| ۲۱..... | ۶-۱ تسخیر یا گیرافتادن رزونانسی           |
| ۲۱..... | ۷-۱ انشقاق                                |
| ۲۳..... | ۸-۱ مروری بر تحقیقات پیشین                |
| ۲۳..... | ۱-۸-۱ جاذب دینامیکی خطّی انرژی            |
| ۲۴..... | ۲-۸-۱ چاه غیرخطّی انرژی نوع اول           |
| ۲۶..... | ۳-۸-۱ چاه غیرخطّی انرژی نوع دوم           |
| ۳۷..... | ۹-۱ اهداف و مسائل مورد بررسی پایان نامه   |
| ۳۹..... | فصل دوم                                   |
| ۴۰..... | استخراج معادلات و حل تحلیلی               |

|    |                                                                  |
|----|------------------------------------------------------------------|
| ۴۰ | ۱-۲ مقدمه                                                        |
| ۴۰ | ۲-۲ معادلات سیستم بر اساس تئوری تیر اوپلر-برنولی                 |
| ۴۱ | ۳-۲ استخراج معادلات با قانون دوم نیوتون                          |
| ۴۵ | ۴-۲ ساده سازی معادلات                                            |
| ۴۸ | ۵-۲ بی بعد سازی معادلات                                          |
| ۴۹ | ۶-۲ انتخاب شکل مود مناسب                                         |
| ۵۰ | ۷-۲ اعمال روش گالرکین و بدست آوردن معادلات حاکم                  |
| ۵۲ | ۸-۲ حل نیمه تحلیلی معادلات غیر خطی کوپل و روش میانگین گیری مختلط |
| ۶۳ | فصل سوم                                                          |
| ۶۳ | حل عددی و نتیجه گیری                                             |
| ۶۴ | ۱-۳ مقدمه                                                        |
| ۶۴ | ۲-۳ مقادیر پارامترهای سیستم                                      |
| ۶۵ | ۳-۳ پاسخ های گذرا                                                |
| ۶۵ | ۴-۳ مکانیزم اول                                                  |
| ۶۹ | ۵-۳ مکانیزم دوم                                                  |
| ۷۰ | ۶-۳ بازده و درصد جذب انرژی چاه غیر خطی انرژی                     |
| ۷۱ | ۷-۳ درصد جذب انرژی ارتعاشی مکانیزم اول                           |
| ۷۴ | ۸-۳ درصد جذب انرژی ارتعاشی مکانیزم دوم                           |
| ۷۸ | ۹-۳ بازدهی مکانیزم اول                                           |

|            |                                  |    |
|------------|----------------------------------|----|
| ۱۰-۳       | بازدهی مکانیزم دوم.....          | ۷۸ |
| ۱۱-۳       | مودهای نرمال غیرخطی.....         | ۷۹ |
| فصل چهارم  | .....                            | ۸۳ |
| نتیجه گیری | .....                            | ۸۳ |
| ۱-۴        | مقدمه.....                       | ۸۴ |
| ۲-۴        | بیان مسئله.....                  | ۸۴ |
| ۳-۴        | مرور نتایج.....                  | ۸۵ |
| ۴-۴        | پیشنهادهای برای ادامه ی کار..... | ۸۶ |

## فهرست شکل‌ها:

- شکل ۱-۱: پاندول در حال حرکت ..... ۳
- شکل ۲-۱: سیستم اولیه به همراه جاذب ارتعاشی خطی نامیرا ..... ۹
- شکل ۳-۱: سیستم اولیه‌ی میرا به همراه جاذب ارتعاشی خطی میرا ..... ۹
- شکل ۴-۱: جاذب پاندولی گریز از مرکز ..... ۱۰
- شکل ۵-۱: جاذب خطی از نوع میله و لغزنده ..... ۱۰
- شکل ۶-۱: جاذب پاندولی ..... ۱۰
- شکل ۷-۱: جاذب از نوع میراگر ذره‌ای ضربه‌ای ..... ۱۱
- شکل ۸-۱: شماتیک انتقال هدفمند انرژی ..... ۱۴
- شکل ۹-۱: پیکربندی متصل به زمین ..... ۱۵
- شکل ۱۰-۱: پیکربندی غیر متصل به زمین ..... ۱۵
- شکل ۱۱-۱: سیستم اولیه به همراه چاه غیرخطی انرژی ..... ۱۵
- شکل ۱۲-۱: چاه غیرخطی انرژی هموار ..... ۱۶
- شکل ۱۳-۱: چاه غیرخطی انرژی غیرهموار ..... ۱۶
- شکل ۱۴-۱: نمونه‌ای از وقوع انشقاق زین-گره در سیستم یک‌بعدی ..... ۲۳
- شکل ۱۵-۱: انشقاق هموکلینیک. الف: یک زین-گره در مبدأ مختصات و یک سیکل حدی در ربع اول،  
ب: برخورد سیکل حدی با زین-گره و تبدیل شدن به یک مدار با پریود بی‌نهایت ج: ناپدید شدن  
کامل سیکل حدی ..... ۲۳
- شکل ۱۶-۱: مدل نمادین استفاده‌شده در مرجع ..... ۳۱
- شکل ۱۷-۱: مدل نمادین پل همراه با چاه غیرخطی انرژی در داخل آن ..... ۳۲
- شکل ۱۸-۱: مدل نمادین در مرجع ..... ۳۲

- شکل ۱-۱۹: مدل آزمایشگاهی به کاررفته در مرجع ..... ۳۳
- شکل ۱-۲۰: مدل نمادین و نمونه‌ی آزمایشگاهی ..... ۳۴
- شکل ۱-۲۱: نمونه‌ای از المان‌های پلی اورتان و مدل نمادین استفاده‌شده در مرجع ..... ۳۴
- شکل ۱-۲۲: مدل چاه غیرخطی دوپایا ارائه‌شده در مرجع ..... ۳۵
- شکل ۱-۲۳: مدل چاه غیرخطی مغناطیسی ..... ۳۶
- شکل ۲-۱: تیر یک‌سرگیردار متصل به چاه غیرخطی انرژی ..... ۴۰
- شکل ۲-۲: المانی از تیر اوپلر-برنولی قبل و بعد از تغییر شکل ..... ۴۱
- شکل ۲-۳: المان تغییرشکل‌یافته‌ی تیر ..... ۴۳
- شکل ۲-۴: رابطه‌ی میان جابجایی و زاویه‌ی چرخش یک المان از تیر ..... ۴۴
- شکل ۳-۱: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.5$  ..... ۶۵
- شکل ۳-۲: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.1$  ..... ۶۶
- شکل ۳-۳: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.01$  ..... ۶۶
- شکل ۳-۴: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 40, \varepsilon_1 = 0.5$  ..... ۶۷
- شکل ۳-۵: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 40, \varepsilon_1 = 0.1$  ..... ۶۸
- شکل ۳-۶: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 40, \varepsilon_1 = 0.01$  ..... ۶۸
- شکل ۳-۷: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.5$  ..... ۶۹
- شکل ۳-۸: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 40, \varepsilon_1 = 0.1$  ..... ۷۰
- شکل ۳-۹: درصد جذب انرژی با  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.5$  ..... ۷۱
- شکل ۳-۱۰: درصد جذب انرژی با  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.1$  ..... ۷۱
- شکل ۳-۱۱: درصد جذب انرژی با  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.01$  ..... ۷۲
- شکل ۳-۱۲: درصد جذب انرژی با  $N = 40, \varepsilon_1 = 0.5$  ..... ۷۳

- شکل ۳-۱۳: درصد جذب انرژی با  $N = 40$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$  ..... ۷۳
- شکل ۳-۱۴: درصد جذب انرژی با  $N = 40$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$  ..... ۷۴
- شکل ۳-۱۵: درصد جذب انرژی با  $N = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$  ..... ۷۵
- شکل ۳-۱۶: درصد جذب انرژی با  $N = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$  ..... ۷۵
- شکل ۳-۱۷: درصد جذب انرژی با  $N = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$  ..... ۷۶
- شکل ۳-۱۸: درصد جذب انرژی با  $N = 40$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$  ..... ۷۶
- شکل ۳-۱۹: درصد جذب انرژی با  $N = 40$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$  ..... ۷۷
- شکل ۳-۲۰: درصد جذب انرژی با  $N = 40$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$  ..... ۷۷
- شکل ۳-۲۱: بازده سیستم اول به ازای سفتی چاه انرژی با  $N = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$  ..... ۷۸
- شکل ۳-۲۲: بازده سیستم دوم به ازای چاه انرژی با  $N = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$  ..... ۷۸
- شکل ۳-۲۳: دامنه‌ی چاه انرژی نواحی آبی، پاسخ پایدار نوسانی، نواحی قرمز و مشکی پاسخ‌های ناپایدار  $N = 10$  ..... ۷۹
- شکل ۳-۲۴: دامنه‌ی چاه انرژی نواحی آبی، پاسخ پایدار نوسانی، نواحی قرمز و مشکی پاسخ‌های ناپایدار  $N = 20$  ..... ۸۰
- شکل ۳-۲۵: پاسخ دامنه‌ی تیر برحسب کمیت شبه انرژی با  $N = 10$  ..... ۸۰
- شکل ۳-۲۶: پاسخ دامنه‌ی تیر برحسب کمیت شبه انرژی با  $N = 20$  ..... ۸۱

## فهرست جداول:

|     |                                       |    |
|-----|---------------------------------------|----|
| ۱-۳ | مقادیر پارامترهای هندسی و فیزیکی..... | ۶۴ |
|-----|---------------------------------------|----|

## فهرست علائم

|                                      |                  |                                  |                        |
|--------------------------------------|------------------|----------------------------------|------------------------|
| دستگاه مختصات ثابت                   | $\varepsilon_b$  | کرنش محوری                       | $(s, z)$               |
| دستگاه مختصات محلی                   | $e$              | کشش لایه میانی                   | $(\bar{s}, \bar{z})$   |
| برایند نیروهای محوری وارد شده بر سطح | $k$              | انحنای خمش تغییر شکل یافته       | $\vec{F}$              |
| مقطع تیر تغییر شکل یافته             |                  |                                  |                        |
| نیروی برشی موازی با سطح مقطع تیر     | $\bar{z}$        | فاصله از محور خنثی               | $\vec{F}_2$            |
| ممان خمشی                            | $\theta$         | زاویه چرخش                       | $\vec{M}_3$            |
| بردارهای یکه در دستگاه مختصات        | $\bar{e}$        | جابجایی ثابت منطبق بر انحنای تیر | $\vec{e}_z, \vec{e}_s$ |
| جابجایی تیر در راستای طولی و عرضی    | $C_1(t)$         | ثابت انتگرال گیری                | $W, U$                 |
| جرم در واحد طول                      | $L$              | طول تیر                          | $m(s)$                 |
| نیروی خارجی وارد شده بر واحد سطح     | $\delta work$    | کار مجازی                        | $q_2$                  |
| پهنای تیر                            | $F_{nes}$        | نیروی ناشی از چاه انرژی غیرخطی   | $W_b$                  |
| ضخامت تیر                            | $\delta W_{nes}$ | جابجایی مجازی تیر در نقطه اتصال  | $t_b$                  |
|                                      |                  | چاه انرژی غیرخطی                 |                        |
| چگالی تیر                            | $B$              | دامنه ضربه یا پالس               | $P_b$                  |
| مدول الاستیسیته تیر                  | $T$              | مدت زمان اعمال پالس              | $E_b$                  |
| ممان اینرسی تیر (گشتاور دوم سطح      | $k_{nes}$        | سفتی چاه غیر خطی انرژی           | $I_b$                  |
| مقطع تیر حول محور خمشی)              |                  |                                  |                        |
| ضریب میرایی ویسکوز بر واحد طول       | $C_{nes}$        | میرایی چاه غیر خطی انرژی         | $\beta$                |

|                            |          |                             |                |
|----------------------------|----------|-----------------------------|----------------|
| جرم تیر و چاه غیرخطی انرژی | $M.m$    | تنش محوری                   | $\sigma_b$     |
| فرکانس طبیعی تیر           | $\omega$ | دامنه تیر                   | $A_n$          |
| جابجایی در راستای عرضی     | $y$      | شکل مود تیر یکسر گیردار     | $\varphi_n(x)$ |
| محل اعمال بار خارجی (ضربه) | $s$      | محل اتصال چاه غیر خطی انرژی | $d$            |
|                            |          | نیروی کششی انتهایی تیر      | N              |



# فصل اول:

## کلیات و تحقیقات پیشین

## ۱-۱ مفاهیم اولیه‌ی ارتعاشات

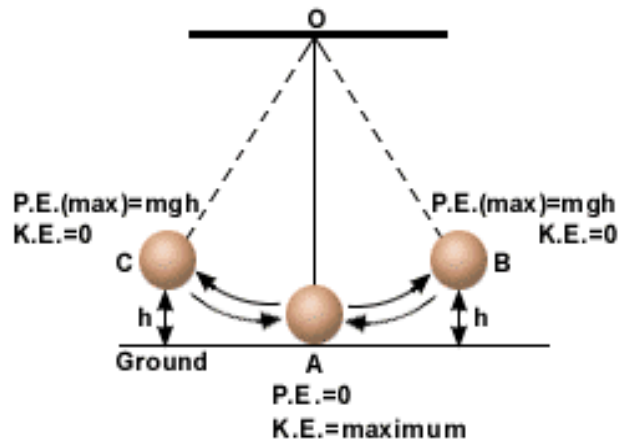
دینامیک بخشی از مکانیک است که به رفتار اجسام در حال حرکت می‌پردازد و تغییرات پدیده‌ها را در مسیر زمان بررسی می‌نماید و این تغییرات در زمان، به نوعی معادل مفهوم زندگی است زیرا جهان پیرامون ما جهان تغییرات است و خصوصیات تمامی موجودات هستی دارای نوعی دینامیک بوده و مجبور به تغییر در بعد زمان می‌باشند، مفهومی که در چرخه‌ی زندگی به تقدیر و سرنوشت تعبیر می‌گردد.

در میان حرکات و تغییرات جهان هستی، نوع تکراری و تناوبی آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند زیرا پهنه‌ی وسیعی از پدیده‌ها از نوع پریودیک می‌باشند، که در شاخه‌ی خاصی از علم دینامیک به نام ارتعاشات قرار دارد. ارتعاشات مهم‌ترین پدیده‌ی مرئی و نامرئی محیط پیرامون ماست. کافی است نگاه ژرفی به اطراف خود بیندازیم تا ده‌ها مکانیزم ارتعاشی که به زندگیمان شکل می‌دهند را مشاهده کنیم، لذا نمی‌توان جهانی را تصوّر کرد که در آن ارتعاشات وجود نداشته باشد.

ارتعاشات یکی از پدیده‌های مهم طبیعت و شاید مهم‌ترین آن می‌باشد. به‌طوری‌که می‌توان گفت زندگی تمامی موجودات کاملاً با این پدیده عجین است زیرا هر دو جزء هستی فقط از طریق یک یا چند مکانیزم ارتعاشی می‌توانند با هم ارتباط برقرار کنند و از وجود یکدیگر آگاهی یابند. پهنه‌ی وسیعی از پدیده‌ها مثل نوسانات آونگ، امواج صوت و نور در گروه ارتعاشات مادی-نیمه‌مادی و غیر-مادی قرار دارند. حتی احساساتی از قبیل نفرت، عشق و حسادت نوعی ارتعاش بوده که در بستر روح انسان رخ می‌دهد.

در میان انواع مختلف ارتعاشات، ارتعاشات مکانیکی نوعی از ارتعاشات است که دارای بیشترین تجسم مادی نسبت به سایر انواع ارتعاشات می‌باشد همچنین شناخت مفاهیم مکانیکی نسبت به مفاهیم دیگر راحت‌تر می‌باشد و توجه به آنها امکان دستیابی به معانی نهان‌تر و پوشیده‌تر را فراهم می‌آورد و لذا شاید بتوان این دیدگاه را به نوعی به عرفان مهندسی تعبیر نمود.

از دیدگاه انرژی نوسانات مکانیکی که در اثر اختلال در تعادل انرژی رخ می‌دهد ارتعاشات مکانیکی نامیده می‌شوند. به عبارت دیگر در یک ارتعاش مکانیکی مثل حرکت یک پاندول، انرژی مدام از حالت پتانسیل به جنبشی و بالعکس تبدیل می‌گردد و شکل ۱-۱ گواه این مدعاست، که این تبدیل حالت انرژی به صورت ارتعاشات مکانیکی تجسم می‌یابد.



شکل ۱-۱: پاندول در حال حرکت

ارتعاشات یک سیستم ممکن است خطی یا غیرخطی باشد. غیرخطی بودن می‌تواند از دید فیزیکی ناشی از هندسه، ماده، نیروهای تحریک غیرخطی و یا پیکربندی فیزیکی سیستم باشد. از دید ریاضی غیرخطی بودن می‌تواند ترم‌های اینرسی، سفتی، میرایی، نیروهای خارجی و شرایط مرزی را شامل شود.

با آنکه ارتعاشات مهم‌ترین پدیده در زندگی روزمره‌ی ماست اما این پدیده معمولاً پدیده‌ی مضرّی بوده و به سیستم تحمیل می‌گردد، زیرا اگر ارتعاشات در مرحله‌ی تشدید<sup>۱</sup> رخ دهد معمولاً باعث تخریب سریع سیستم می‌شود و در حالت غیرتشدید باعث رشد ترک‌هایی مویی گردیده و در درازمدت به شکست قطعات می‌انجامد که آن را پدیده‌ی خستگی<sup>۲</sup> می‌نامند.

از طرفی، ارتعاشات باعث مختل شدن عملکرد ماشین‌آلات حساس می‌گردد، مثلاً در یک ماشین تراش دقیق، لرزش رنده‌ی آن، به سطح کار آسیب می‌رساند و یا یک لوله‌ی طویل که در پروسه‌ای از

<sup>۱</sup> Resonance

<sup>۲</sup> Fatigue

تولید باید با سرعت بالا دوران کند اگر در اثر اندکی تاب، به ارتعاش و شلاق زدن بیافتد پروسه‌ی مورد نظر کلاً متوقف می‌گردد. همچنین ارتعاشات باعث شل شدن پیچ و مهره‌ها و سایر اتصالات سیستم شده و همیشه با ایجاد سروصدای گوش خراش و خسته‌کننده همراه است.

بنابراین هدف یک مهندس مکانیک، از بین بردن و یا به حداقل رساندن ارتعاشات در یک سیستم است. ارتعاشات مکانیکی مضر از دو عامل عدم طراحی صحیح و عدم رعایت اصول تعمیر و نگهداری نشأت می‌گیرد. با توجه به مضرات گفته شده مواردی نیز وجود دارند که ارتعاشات را به عنوان یک پدیده‌ی مفید برای کاربردهای صنعتی به وجود می‌آورد [۱].

## ۱-۲ روش‌های کاهش ارتعاشات

تمام مستهلک‌کننده‌های انرژی بر اساس دو مکانیزم، سازه را کنترل می‌نمایند. مکانیزم اول، تبدیل انرژی جنبشی به گرما و مکانیزم دوم، انتقال انرژی بین موده‌های ارتعاشی سازه بنا شده است. بر این اساس تمام مستهلک‌کننده‌هایی که در آنها لغزش اصطکاکی<sup>۱</sup>، پدیده‌ی تسلیم فلزات<sup>۲</sup>، تغییر فاز در فلزات<sup>۳</sup>، تغییر شکل‌های جامدات و یا سیالات ویسکوالاستیک<sup>۴</sup> و پدیده‌ی ارفیسینگ سیالات<sup>۵</sup> رخ می‌دهد از مکانیزم اول و مستهلک‌کننده‌هایی که در آنها پدیده‌ی دینامیکی-ارتعاشی رخ می‌دهد، از مکانیزم دوم استفاده می‌نمایند.

کنترل فرکانس‌های طبیعی سیستم، کاهش پاسخ سیستم در حالت تشدید به وسیله‌ی ایجاد میرایی، اضافه کردن جرم‌های ثانویه، از روش‌های کنترل ارتعاشات به شمار می‌روند. هر سازه دارای مجموعه‌ای از فرکانس‌های خاص است که فرکانس‌های طبیعی نامیده می‌شود. اگر فرکانس‌های نیروی محرک خارجی، در نزدیکی فرکانس طبیعی سیستم قرار داشته باشد، حالت تشدید اتفاق می‌افتد. در این حالت تغییر مکان حاصل از ارتعاش رو به افزایش است که می‌تواند باعث ایجاد تنش‌ها و کرنش-

---

<sup>1</sup> Frictional Sliding

<sup>2</sup> Yielding of metals

<sup>3</sup> Phase transformation in metals

<sup>4</sup> Deformation of viscoelastic solids or fluids

<sup>5</sup> Fluid orificing

های ناخواسته شده و به سیستم خسارات جبران ناپذیری وارد کند، به این دلیل سعی می‌شود تا حد امکان از حالت تشدید جلوگیری شود. در اغلب موارد کنترل نیروهای محرک ممکن نیست لذا باید فرکانس‌های طبیعی سیستم را کنترل نمود.

فرکانس‌های طبیعی سیستم را می‌توان با تغییر جرم و ضریب صلبیت آن تغییر داد که در بیشتر کاربردهای عملی تغییر جرم به راحتی امکان‌پذیر نیست زیرا مقدار آن توسط محاسبات مربوط به نقش آن جزء در سیستم تعیین می‌شود. لذا صلبیت سیستم نقش مهمی در تغییر فرکانس‌های طبیعی سیستم بر عهده دارد. اگر فرکانس نیروی محرک ثابت نباشد یا شامل دسته‌ای از فرکانس‌های مختلف باشد، نمی‌توان از طریق تغییر فرکانس‌های طبیعی به نتیجه‌ی مطلوب رسید و باید از روش‌های دیگری استفاده شود.

ایجاد میرایی و مکانیزم‌های اتلاف انرژی از جمله روش‌هایی هستند که می‌توانند از افزایش دامنه‌ی پاسخ سیستم در حالت تشدید جلوگیری به عمل آورند. اگر سیستم تحت نیروهای ارتعاشی قرار بگیرد، پاسخ یا دامنه‌ی ارتعاش آن در نزدیکی فرکانس تشدید به شدت افزایش می‌یابد. این حالت در شرایطی که میرایی وجود نداشته باشد با شدت بیشتری ظهور می‌کند، در حالی که وجود میرایی، دامنه‌ی ارتعاش را تا حد زیادی کاهش می‌دهد.

از تجهیزات دیگری که به منظور کاهش ارتعاشات استفاده می‌شود، می‌توان به جاذب ارتعاشات اشاره کرد. در سیستم‌های مکانیکی ارتعاشات ناخواسته می‌توانند توسط روش‌های مختلفی مانند اتصال جاذب‌های ارتعاشی کاهش یابند. جاذب ارتعاشی متداول، یک المان یک درجه آزادی است که متشکل از جرم، فنر و میراگر بوده و بر روی یک سیستم مکانیکی ارتعاشی نصب می‌شود. در تعریفی دیگر جاذب ارتعاشی دستگاهی است که ارتعاش سازه در یکی از فرکانس‌های طبیعی‌اش را با انتقال انرژی حاصل از ارتعاش، به یک جرم دوم، حذف می‌کند. هدف جاذب کاهش ارتعاشات سازه و جلوگیری از شکست آن در برابر عوامل خارجی و یا داخلی سیستم است [۲].

به طور کلی روش کنترل ارتعاشات در سازه‌ها به سه رویکرد کلی<sup>۱</sup> میرا کردن ارتعاشات<sup>۱</sup>، ایزوله کردن ارتعاشات<sup>۲</sup> و استفاده از جاذب‌های دینامیکی ارتعاشات<sup>۳</sup> تقسیم می‌شود. در کنترل نوسانات به روش میرا کردن ارتعاشات، با اضافه کردن میرایی به سیستم اصلی، ارتعاشات کاهش می‌یابند. روش ایزوله کردن ارتعاشات بر مبنای قطع مسیر انتشار نوسانات بین منبع و دریافت‌کننده استوار است. روش سوم که بسیار متداول است بر مبنای انتقال انرژی از سیستم اصلی به یک سیستم ثانویه استوار می‌باشد که می‌تواند شامل جرم و فنر و در صورت لزوم میراکننده باشد. سازه‌های مهندسی در طول عمر کاری خود توسط چندین منبع مختلف ارتعاشی تحریک می‌شوند که کنترل این ارتعاشات در سیستم‌های مکانیکی همچنان یک زمینه‌ی تحقیقاتی رو به پیشرفت است. به طور کلی روش‌های کاهش ارتعاشات توسط جاذب‌های دینامیکی به سه دسته‌ی جداگانه تقسیم می‌شوند:

✓ کاهش غیرفعال ارتعاشات<sup>۴</sup> با اضافه کردن ماده‌ای ویسکوالاستیک یا یک جاذب دینامیکی، اصلاح و بهبود ساختار را نتیجه می‌دهد. در کنترل غیرفعال بدون صرف هیچگونه منبع نیروی خارجی، تنها با استفاده از خصوصیات ذاتی و عملکردی ایزولاتور همچون ایجاد تغییرات در میرایی، سفتی، استحکام و مکانیزم ارتعاشی مجموعه، انرژی وارده به صورت غیرفعال مستهلک می‌شود. این روش جنبه‌ی بسیار قابل توجهی نسبت به روش‌هایی که در ذیل بیان شده، ارائه می‌دهد زیرا بدون نیاز به منبع تغذیه‌ی خارجی قادر به کار می‌باشد.

✓ کنترل نیمه‌فعال<sup>۵</sup> سازه‌های انعطاف‌پذیر که اخیراً مورد توجه قرار گرفته است و در آن از سیالات خاصی که در معرض جریان الکتریکی یا مغناطیسی قرار می‌گیرند، استفاده می‌شود. خاصیت برتر این سیالات، لزجت متغیر آنها می‌باشد که می‌تواند بسته به میزان میدان مغناطیسی یا الکتریکی اعمالی تغییر یابد. با توجه به اینکه در روش ذکر شده، هیچ‌گونه

---

<sup>1</sup> Vibration Damping

<sup>2</sup> Vibration Isolation

<sup>3</sup> Dynamic Vibration Absorber

<sup>4</sup> Passive Vibration Mitigation Methods

<sup>5</sup> Semi active control

انرژی به سیستم کنترل منتقل نمی‌شود، این روش قابل اطمینان است. باید توجه داشت که مدل‌سازی رفتار سیال که به منظور توسعه‌ی این نوع روش کنترلی از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد، چالش اساسی و قابل تأملی است که استفاده از این روش را در سازه‌های واقعی پیچیده می‌سازد.

✓ کنترل فعال<sup>۱</sup> به طور همه جانبه در دهه‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. هدف از این روش، کاهش اختلالات نامطلوبی است که به واسطه‌ی حرکات خارج از فاز تولید می‌شوند. به عبارتی، کنترل فعال، بهترین عملکرد در کاهش ارتعاشات را به دنبال دارد. ولی با توجه به هزینه‌های بالا، نیاز به منبع انرژی خارجی، قابلیت اعتماد پایین و عدم قدرت لازم در محیط‌های صنعتی، به طور گسترده مورد استفاده قرار نمی‌گیرد [۳].

با توجه به اینکه نقطه‌ی عطف تحقیق حاضر بر مستهلک سازی غیرفعال ارتعاشات استوار است در ادامه به تعریفی مختصر از جاذب دینامیکی خطی و غیرخطی می‌پردازیم.

## ۱-۲-۱ جاذب دینامیکی خطی و محدودیت‌ها

متداول‌ترین راه حل در طراحی یک کاهنده‌ی ارتعاشات بکارگیری جاذب خطی است. جاذب دینامیکی خطی، یک عضو اینرسی است که به یک سیستم ارتعاشی شامل عضوهای خطی متناسب، معمولاً یک فنر و یک دمپر ویسکوز متصل می‌شود. به طور کلی جاذب خطی مجموعه‌ای متشکل از جرم و فنری خطی است که برای کاهش ارتعاشات سیستم اولیه به آن افزوده می‌شود. با توجه به اینکه، برای دستیابی به عملکرد مناسب سیستم جاذب، مؤلفه‌های جرم و فنر آن تنظیم می‌گردند، میراگر جرمی تنظیم‌شده نامی مناسب برای آنهاست. این نوع جاذب متداول‌ترین ابزار برای مستهلک‌سازی غیرفعال ارتعاشات سازه‌های مکانیکی است. این جاذب با فراهم آوردن یک نیروی مساوی و مخالف نیروی محرک که سبب ارتعاش می‌شود، از نوسانات سیستم جلوگیری می‌کند. گستره‌ی وسیع

---

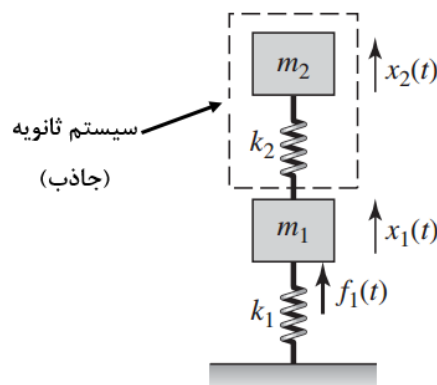
<sup>1</sup> Active control

<sup>2</sup> Tuned Mass Damper (TMD)

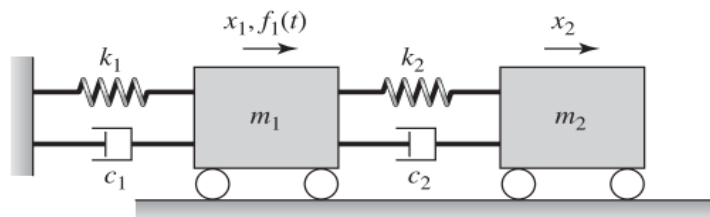
کاربرد این نوع مستهلک کننده‌ها بر پایه‌ی اصول تئوری جامدات و خصوصیت خطّی حاکم بر آنها استوار است. استفاده از جاذب دینامیکی خطّی فاقد دمپر در هیچ موردی مناسب نیست، مخصوصاً در مواردی که فرکانس نیروی محرّک ثابت نباشد و در یک محدوده‌ی معین تغییر کند. در این موارد از جاذب به همراه دمپر خطّی، برای غلبه بر محدودیت های احتمالی استفاده می‌شود ولی استفاده از آن مشکلات ناشی از نصب و نگهداشتن در ضریب میرایی از پیش تعیین شده را به دنبال دارد.

زمانی که فرکانس تحریک از مقدار مورد انتظار به صورت تصادفی یا تعمدی دچار تغییر شود مسئله‌ی بقای عملکرد جاذب ارتعاشی تحت شرایطی خاص از اهمیت بسزایی برخوردار می‌شود. وقتی سیستم اصلی به‌طور دقیق در فرکانس طبیعی خود تحریک نشده باشد، شیب منحنی رزونانس سیستم بعد از افزودن جاذب بسیار تیز می‌شود که حتّی یک تغییر کوچک در فرکانس تحریک، می‌تواند جاذب ارتعاش را به تقویت‌کننده‌ی ارتعاش تبدیل کند که با تغییر فنر خطّی جاذب به فنر غیرخطّی این شرایط قابل اصلاح می‌باشد و به‌طور قابل توجهی شیب منحنی رزونانس در فرکانس کاری مشخص شده را کاهش می‌دهد و اجازه‌ی افزایش فرکانس بدون تقویت ارتعاش را به دنبال دارد. در نتیجه برای حالت فرکانس تحریک متغیّر، جاذب‌های غیرخطّی بسیار مورد توجّه هستند. برای مثال جاذب‌های پیوسته و گسسته تگّه‌ای خطّی، پاندول گریز از مرکز، و جاذب‌های ارتعاشی با پارامترهای خودکار نمونه‌هایی از جاذب غیرخطّی هستند [۹-۴]. با وجود اینکه غیرخطّی بودن، معمولاً یک پدیده‌ی مضر می‌باشد، به دلیل پیچیدگی و غنای دینامیک غیرخطّی، این مزیت را ایجاد می‌نماید که کارایی این نوع جاذب‌ها برای بازه‌ی فرکانسی بزرگتری، نسبت به جاذب‌های خطّی مناسب باشد. با افزایش میرایی بازه‌ی فرکانسی مقداری افزایش یافته ولی کارایی جاذب تحت تأثیر قرار می‌گیرد از این رو در طراحی باید یک مصالحه‌ی کاری بین کارایی کاهش ارتعاشات و پهنای باند فرکانسی صورت پذیرد.

نخستین مطالعات صورت گرفته در زمینه‌ی سیستم جاذب خطّی، توسط فرام‌در سال ۱۹۱۱ به ثمر رسیده و تاکنون به صورت گسترده‌ای مورد تحقیق قرار گرفته است [۱۴-۱۰]. نمونه‌هایی از سیستم جاذب خطّی در شکل‌های زیر به نمایش گذاشته شده است. شکل ۲-۱ سیستم اولیه به همراه جاذب ارتعاشی خطّی نامیرا را نشان می‌دهد و همانطور به ترتیب شکل ۳-۱ سیستم اولیه‌ی میرا به همراه جاذب ارتعاشی خطّی میرا، شکل ۴-۱ جاذب پاندولی گریز از مرکز، شکل ۵-۱ جاذب خطّی از نوع میله و لغزنده، شکل ۶-۱ جاذب پاندولی و شکل ۷-۱ جاذب از نوع میراگر ذره‌ای ضربه‌ای را نشان می‌دهند.



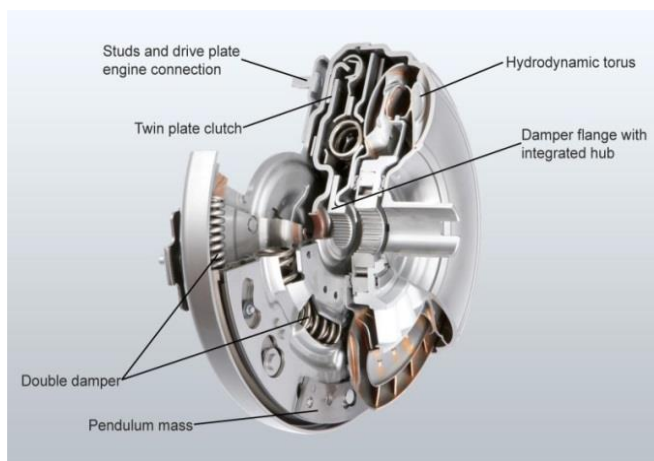
شکل ۲-۱: سیستم اولیه به همراه جاذب ارتعاشی خطّی نامیرا [۱۵]



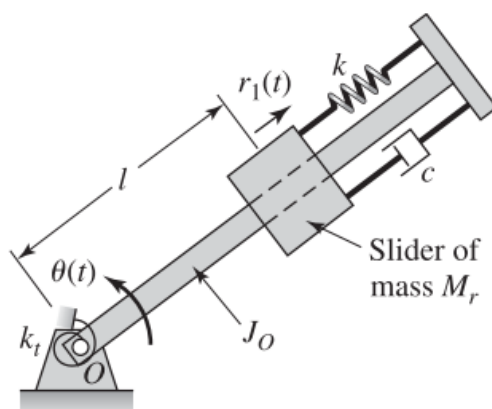
شکل ۳-۱: سیستم اولیه‌ی میرا به همراه جاذب ارتعاشی خطّی میرا [۱۵]

<sup>1</sup> Frahm

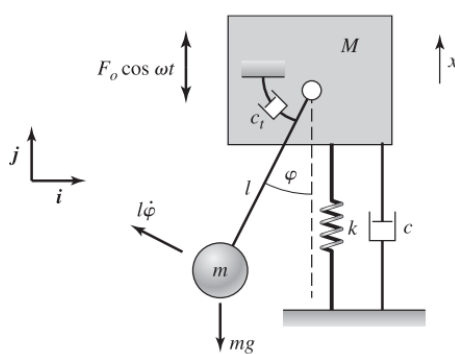
<sup>2</sup> Undamped Vibration Absorber



شکل ۱-۴: جاذب پاندولی گریز از مرکز [۱۶]



شکل ۱-۵: جاذب خطی از نوع میله و لغزنده [۱۵]

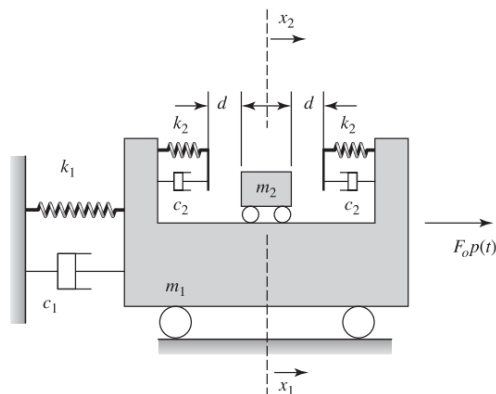


شکل ۱-۶: جاذب پاندولی [۱۵]

<sup>1</sup> Centrifugal pendulum vibration absorber

<sup>2</sup> Bar Slider System

<sup>3</sup> Pendulum Absorber



شکل ۷-۱: جاذب از نوع میراگر ذره‌ای ضربه‌ای [۱۵]

### ۲-۲-۱ جاذب دینامیکی غیرخطی ارتعاشات

محدودیت‌های مهم و قابل توجه جاذب خطی، باعث رشد و گسترش جاذب‌های غیرخطی گردید که به دلیل وابستگی انرژی-فرکانس نوسانات غیرخطی، در محدوده‌ی وسیع‌تری از فرکانس، مؤثر می‌باشند. جاذب غیرخطی شامل جرم، فنر غیرخطی و میرایی خطی یا غیر خطی است. از طرف دیگر مشخصه‌های غیرخطی سیستم، ناپایداری‌هایی در سیستم ایجاد می‌کند که توسعه‌ی روش‌های تحلیلی کامل به منظور طراحی کارآمد جاذب‌های غیرخطی ضروری است و علاوه بر پیش‌بینی پاسخ‌های حالت پایا به تحلیل مشخصه‌های پایداری سیستم نیز کمک می‌کند.

### ۳-۱ انتقال انرژی هدفمند و چاه غیرخطی انرژی<sup>۳</sup>

در دهه‌ی اخیر روشی جدید برای کنترل غیرفعال ارتعاشات در سیستم‌های مکانیکی که در معرض ورودی‌های گذرا با پهنای باند وسیع هستند ارائه شده است [۱۷]. بر این اساس می‌توان با اتصال یک یا چند سیستم ارتعاشی غیرخطی (غیر قابل خطی شونده) به سیستم اصلی<sup>۴</sup>، مجموعه‌ای را تشکیل داد که در صورت تحریک ارتعاشی این مجموعه، انرژی اعمالی به سیستم به صورت یک‌طرفه و برگشت-

<sup>۱</sup> Particle Impact Damper

<sup>۲</sup> TET: Targeted Energy Transfer

<sup>۳</sup> NES: Nonlinear Energy Sink

<sup>۴</sup> Primary System

ناپذیر، از سیستم اصلی منتقل شده و سپس توسط سیستم غیرخطی متصل شده<sup>۱</sup> خنثی شود. این انتقال انرژی توسط پدیده‌ی تسخیر رزونانسی گذرا<sup>۲</sup> بین سیستم اصلی و سیستم متصل شده، به وقوع می‌پیوندد. این پدیده در واقع بر مبنای یک رزونانس داخلی<sup>۳</sup> لحظه‌ای بین سیستم غیرخطی متصل شده و سیستم اصلی بر مبنای حفظ شرایط کافی برای یک‌سویه بودن انتقال انرژی از سیستم اصلی به سیستم غیرخطی متصل شده صورت می‌پذیرد. این سیستم‌ها در واقع مانند یک چاه جاذب انرژی عمل می‌کنند، از این‌رو آنها را چاه غیرخطی انرژی می‌نامند.

در تعریفی دیگر انتقال هدفمند انرژی یا پمپاژ غیرخطی انرژی<sup>۴</sup> دیدگاهی منحصر به فرد برای کنترل غیرفعال ارتعاشات است که یک ضمیمه‌ی شدیداً غیرخطی، کاملاً غیرفعال و موضعی به نام چاه غیرخطی انرژی به سیستم اولیه متصل است و از این طریق دینامیک سیستم اولیه را به مقدار زیادی تحت تأثیر خود قرار می‌دهد. به علت ماهیت تغییرناپذیر منی‌فولد رزونانسی<sup>۵</sup>، پدیده‌ی پمپاژ غیرخطی انرژی همواره به صورت یک‌سویه و برگشت‌ناپذیر بوده است و به‌وسیله‌ی تسخیر رزونانس‌ها و پرش از شاخه‌های حل پریودیک ذاتی محقق می‌گردد [۱۷، ۱۸].

بکارگیری چاه غیرخطی انرژی به‌منظور کاهش ارتعاش در سازه‌های مهندسی، یکی از موضوعاتی است که در دهه‌ی گذشته به‌طور فزاینده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است. مطالعات اخیر درباره‌ی سیستم‌های تحت بار خارجی و شامل چاه غیرخطی انرژی، قابلیت شگفت‌انگیز چاه غیرخطی انرژی را در کاهش ارتعاشات به اثبات رسانیده است. با توجه به موارد گفته‌شده مزایای چاه غیرخطی انرژی نسبت به جاذب دینامیکی خطی به شرح زیر می‌باشد:

✓ در جذب انرژی یکسان، تغییر شکل بسیار کمتر و امکان بکارگیری جرم کوچکتری در

آن نسبت به جاذب دینامیک خطی

<sup>1</sup> Local nonlinear attachment

<sup>2</sup> TRC: Transient Resonance Capture

<sup>3</sup> Internal resonance

<sup>4</sup> Nonlinear energy pumping

<sup>5</sup> Resonance manifold

✓ دارانبودن فرکانس قابل ترجیح و در نتیجه قابلیت جذب ارتعاش در همسایگی فرکانس

طبیعی تحریک شده و عدم نیاز به تنظیم شدن در یک فرکانس خاص

✓ پمپاژ انرژی از سیستم اولیه به چاه غیرخطی انرژی به صورت کاملاً برگشتناپذیر

✓ قابلیت جذب بالای انرژی ارتعاشی و کاهش دامنه‌ی سیستم تحت ارتعاش در محدوده‌ی

فرکانسی وسیع از طریق انتقال هدفمند انرژی چندفرکانسی

چاه غیرخطی انرژی، الزاماً دارای دو المان اصلی است که عبارتند از یک المان غیرخطی همانند

فنر غیرخطی و یا یک المان ایجادکننده‌ی پدیده‌ی غیرخطی همانند مکانیزم ضربه‌ای و عاملی جهت

استهلاک محتوای انرژی موجود. المان اول در حقیقت شرایطی را ایجاد می‌کند تا چاه غیرخطی انرژی

بتواند با تمام مدهای ارتعاشی سیستم رزونانس ایجاد کند یا به بیان دیگر با همه‌ی مدهای سیستم

درگیر شود. از سویی دیگر المان دوم وظیفه دارد تا انرژی ارتعاشی منتقل شده از سیستم اصلی را در

حین درگیری سیستم الحاقی با سیستم اصلی مستهلک نماید.

به‌طور کلی دو نوع چاه غیرخطی انرژی وجود دارد. نوع اول که متشکل از یک فنر شدیداً غیر-

خطی ( $F=KX^3$ )، یک دمپر خطی یا غیرخطی و یک جرم بسیار کوچک نسبت به جرم کل

سیستم (نسبت به جرم کل سیستم) است. نوع دوم شامل یک فنر غیرخطی ضعیف از نوع

دافینگ ( $F=K_1X+K_2X^3$ )، یک دمپر خطی و یک جرم بسیار کوچک نسبت به جرم کل

سیستم (نسبت به جرم کل سیستم) می‌باشد. چاه غیرخطی انرژی می‌تواند به دسته‌های مختلفی مانند

متصل به زمین، غیر متصل به زمین، یک‌درجه آزادی، چنددرجه آزادی، هموار و غیر هموار بسته به

طراحی و زمینه‌ی استفاده تقسیم شود. قابل توجه است که در چاه غیرخطی نوع دوم به دلیل وجود

فنر غیرخطی ضعیف، راندمان اتلاف انرژی نسبت به نوع اول کمتر می‌باشد و در تحقیقات انجام شده

غالباً به نوع اول پرداخته می‌شود. در شکل‌های زیر نمونه‌هایی از انواع چاه غیرخطی انرژی و نمونه‌ای

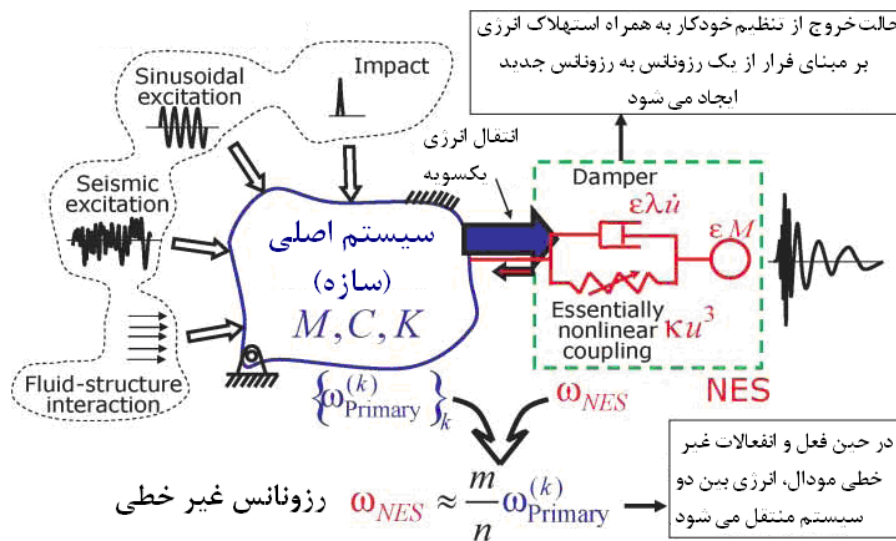
---

<sup>1</sup> Duffing

<sup>2</sup> Smooth NESs

<sup>3</sup> Non-smooth NESs

از کاربرد انتقال انرژی هدفمند توسط سیستم الحاقی به تصویر کشیده شده است.



شکل ۸-۱: شماتیک انتقال هدفمند انرژی [۴]

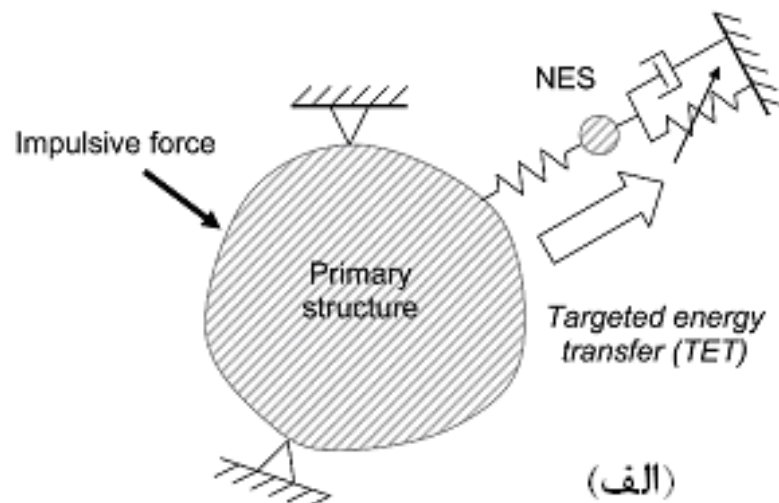
همان طور که در شکل شکل ۸-۱ نمایش داده شده است، سازه معمولاً متحمل بارهای خارجی مختلفی همچون بارهای ضربه‌ای<sup>۱</sup>، تحریکات پریودیک<sup>۲</sup>، تحریکات رندوم<sup>۳</sup> و یا بارهای ناشی از سیالات<sup>۴</sup> می باشد. حال به دنبال حذف اغتشاشات القایی به مجموعه توسط یک سیستم غیرخطی الحاقی مانند چاه غیرخطی انرژی می‌باشیم. از آنجایی که چاه غیرخطی انرژی دارای هیچ فرکانس رزونانسی شاخصی نیست (برخلاف جاذب‌های خطی)، این توانایی را دارد که به تعداد بی‌شمار (قابل شمارش) شرایط رزونانسی غیرخطی، که همان رزونانس‌های داخلی می‌باشد، تولید نماید. در شکل‌های زیر تعدادی جاذب دینامیکی غیرخطی به نمایش گذاشته شده است. شکل ۹-۱ نمونه ای از چاه غیرخطی با پیکربندی متصل به زمین، شکل ۱۰-۱ چاه غیرخطی با پیکربندی غیر متصل به زمین، شکل ۱۱-۱ سیستم اولیه به همراه چاه غیرخطی انرژی را نشان می‌دهند.

<sup>1</sup> Impact loading

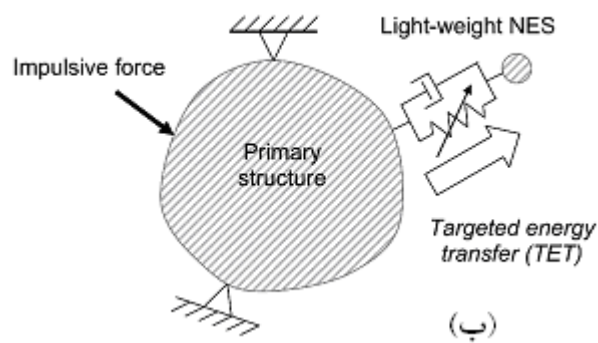
<sup>2</sup> Periodic excitation

<sup>3</sup> Random excitation

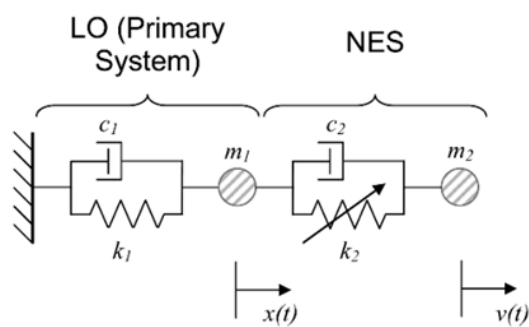
<sup>4</sup> Fluid-structure interaction



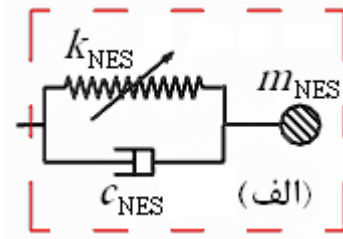
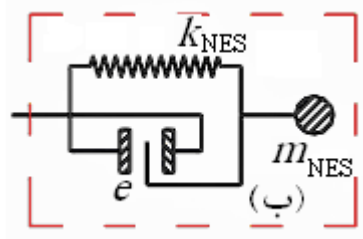
شکل ۹-۱: پیکربندی متصل به زمین [۱۹]



شکل ۱۰-۱: پیکربندی غیر متصل به زمین [۱۹]



شکل ۱۱-۱: سیستم اولیه به همراه چاه غیرخطی انرژی [۱۹]



شکل ۱۲-۱: چاه غیرخطی انرژی هموار [۲۰]      شکل ۱۳-۱: چاه غیرخطی انرژی غیرهموار [۲۰]

چاه غیرخطی انرژی هموار شکل ۱۲-۱ شامل جرم، فنر الزاماً غیرخطی و دمپر ویسکوز خطی یا غیرخطی می‌باشد. در اکثر مقالات فنر استفاده شده در چاه غیرخطی انرژی هموار، دارای سفتی از درجه‌ی سوم اجابجایی و دمپر خطی ویسکوز است. همان‌طور که قبلاً هم اشاره شد فنر غیرخطی باعث تقابل رزونانسی بین چاه غیرخطی انرژی و تمام مودهای ارتعاشی سیستم می‌شود. دمپر نیز وظیفه‌ی مستهلک‌سازی انرژی ارتعاشی وارده از سیستم به چاه غیرخطی انرژی را بر عهده دارد.

چاه غیرخطی انرژی غیرهموار شکل ۱۳-۱، شامل جرم، فنر الزاماً خطی و یک مکانیزم ضربه‌ای است. مکانیزم ضربه‌ای باعث ایجاد عدم یکنواختی<sup>۲</sup> در دینامیک مجموعه می‌شود. از این‌رو این نوع مستهلک‌کننده‌ها را ارتعاشی-ضربه‌ای<sup>۳</sup> یا به عبارتی غیرهموار می‌نامند. در این نوع ایزولاتور، مکانیزم ضربه‌ای باعث عدم یکنواختی در متغیرهای سیستم می‌شود و در نتیجه نوعی دینامیک غیرخطی به مجموعه القاء می‌گردد. از طرفی با هربار ضربه بین سیستم اصلی و مستهلک‌کننده، حجمی از انرژی مجموعه به صورت دفعی، مستهلک می‌گردد.

در کل، طبیعت این دو نوع مستهلک‌کننده با یکدیگر بسیار متفاوت می‌باشد. در مقایسه با نوع هموار، ایزولاتور ارتعاشی-ضربه‌ای، به علت ایجاد تغییر سرعت غیریکنواخت و ناگهانی (به تبع ایجاد شتاب‌های زیاد که اصلاً مطلوب نمی‌باشد) در مجموعه، و همین‌طور هزینه‌های احتمالی بیشتر، هم در ساخت و هم در تعمیر و نگهداری، به نسبت در کاربردهای مختلف این نوع ایزولاسیون، کمتر مورد

<sup>1</sup> Cubic

<sup>2</sup> Non-Smoothness

<sup>3</sup> VI: Vibro Impact NES

استفاده قرار می‌گیرد. اما به دلیل اینکه ارتعاشی-ضربه‌ای دارای زمان پاسخگویی<sup>۱</sup> سریعتری نسبت به هموار می‌باشد و استهلاک انرژی در آن به صورت دفعی صورت می‌پذیرد، در زمینه‌ی کنترل سازه در برابر بارهای لرزه‌ای بیشتر مورد استفاده است.

مطالعه‌ی انتقال انرژی هدفمند در نوسان‌گرهای غیرخطی قوی و ناپایستار مشکلات تکنیکی زیادی به دنبال دارد و نیازمند به‌کارگیری ایده‌ها، فرمول‌ها روش‌های تحلیلی و تکنیک‌های محاسباتی در زمینه‌های مختلف مهندسی است. برای رسیدن به درک بهتر در رابطه با انتقال انرژی هدفمند و نحوه‌ی عملکرد چاه غیرخطی انرژی، به تعاریفی هر چند مختصر می‌پردازیم.

## ۴-۱ مودهای نرمال غیرخطی<sup>۲</sup>

به‌طور کلی، در سیستم‌های پیوسته‌ی خطی، به ازای هر یک از فرکانس‌های طبیعی یک شکل مود وجود دارد که جابجایی نقاط مختلف سیستم نسبت به یکدیگر را نشان می‌دهد. از آنجایی که در سیستم‌های خطی، مقدار فرکانس طبیعی ثابت است، لذا شکل مودهای سیستم همواره ثابت می‌باشند. مودهای نرمال خطی، می‌توانند برای جدا شدن یا به عبارتی دی‌کوپله<sup>۳</sup> شدن معادلات حرکت استفاده شوند، به این معنی که یک سیستم خطی به گونه‌ای نوسان کند که گویی از نوسان‌گرهای مستقل تشکیل شده است. دو خاصیت مهمی که از دی‌کوپله شدن حاصل می‌شود، عبارتند از:

✓ تغییرناپذیری<sup>۴</sup>: اگر حرکت بر روی یک مود نرمال خطی خاص آغاز شود، مودهای نرمال خطی باقی‌مانده، برای همیشه ساکن باقی می‌مانند.

✓ برهم‌نهی مودال<sup>۵</sup>: ارتعاشات آزاد و اجباری به راحتی می‌توانند، به صورت ترکیب خطی از حرکات مودهای نرمال خطی منحصربه‌فرد بیان شوند [۲۱].

برای تجزیه و تحلیل‌های غیرخطی به یک تحلیل بسیار دقیق و روش‌های گسترده و کارآمد نیاز

---

<sup>1</sup> Response Time

<sup>2</sup> Nonlinear Normal Modes (NNMs)

<sup>3</sup> Uncoupled

<sup>4</sup> Invariability

<sup>5</sup> Modal superposition

است. در این حالت موده‌های نرمال غیرخطی یک ابزار جامع نظری و ریاضیاتی برای تفسیر طبقه‌ی وسیعی از پدیده‌های دینامیکی غیرخطی ارائه می‌دهند، اگرچه موده‌های نرمال غیرخطی دارای یک رابطه‌ی مفهومی ساده و واضح با موده‌های نرمال خطی هستند. از دیگر ویژگی‌های جذاب موده‌های نرمال غیرخطی این است که آنها قادر به ادغام ساختارهای غیرخطی قوی هستند و همچنین توانایی پاسخ‌دادن به ماهیت منحصربه‌فرد سیستم‌های غیرخطی را دارند [۱۸].

در ارتباط با سیستم‌های پیوسته‌ی غیرخطی، فرکانس‌های طبیعی، به شرایط اولیه و میزان انرژی ورودی بستگی دارند و لذا می‌توان نتیجه گرفت که شکل موده‌های آنها نیز، تابع شرایط اولیه و میزان انرژی ورودی هستند. بنابراین، نسبت دامنه‌ی دو نقطه‌ی مختلف از یک سیستم پیوسته‌ی غیرخطی، تابع شرایط اولیه و میزان انرژی ورودی به سیستم می‌باشد که در نتیجه به صورت رویه‌ای در فضای سه‌بعدی نشان داده می‌شود و لذا تعریف بردار ویژه در فضای خطی به عبارت منیفولد در فضای غیرخطی تبدیل می‌شود.

تعاریف متفاوتی در طول زمان برای موده‌های نرمال غیرخطی ارائه شده است. لیاپانوف<sup>۱</sup> نشان داد برای سیستم‌های پایستار یک‌درجه‌آزادی بدون رزونانس‌ها داخلی، حداقل  $n$  خانواده از حل‌های پریودیک در نزدیکی نقطه‌ی تعادل سیستم وجود دارد. این  $n$  خانواده،  $n$  تا مود نرمال غیرخطی تعریف می‌کنند. در سال ۱۹۶۰ روزنبرگ<sup>۳</sup> موده‌های نرمال غیرخطی برای سیستم‌های پایستار را به صورت یک ارتعاش هماهنگ یا یک نوسان هم‌زمان سیستم تعریف کرد. در سال ۱۹۹۰ شاو<sup>۴</sup> و پییر<sup>۵</sup> مود نرمال غیرخطی میرا را به صورت یک منیفولد نامتغیر دوبعدی در فضای فاز مطرح کردند. تعریف روزنبرگ بعدها به صورت یک جمله بسط داده شد که یک مود نرمال غیرخطی فقط، یک حرکت پریودیک سیستم غیرخطی ناپایستار است [۲۲].

---

<sup>1</sup> Manifold

<sup>2</sup> Lyapunov

<sup>3</sup> Rosenberg

<sup>4</sup> Shaw

<sup>5</sup> Pierre

اکثر مهندسان سازه مود نرمال غیرخطی را یک مفهوم بیگانه می‌دانند و به عنوان یک مفهومی که در دینامیک ساختاری مفید نیست، در نظر می‌گیرند که دلایل آن در زیر شمرده شده است.

✓ سیستم‌های غیرخطی می‌توانند رفتارهای بسیار پیچیده‌ای ارائه دهند در حالی که سیستم‌های خطی نمی‌توانند، که این پدیده‌ها شامل پرش<sup>۱</sup>، انشقاق<sup>۲</sup>، اشباع<sup>۳</sup>، زیرهارمونیک<sup>۴</sup>، فوق‌هارمونیک<sup>۵</sup>، رزونانس‌های داخلی، چرخه‌ی حدی<sup>۶</sup>، تعامل مودال<sup>۷</sup> و آشفتگی<sup>۸</sup>.

✓ مودهای نرمال غیرخطی دارای دو محدودیت مهم در مقایسه با همتای خطی خود هستند. اول و مهم‌تر از همه اصل برهم‌نهی است که سنگ‌بنای نظریه‌ی خطی است و به سیستم‌های غیرخطی اعمال نمی‌شود. دوم، فقدان روابط تعامدی در مودهای نرمال غیرخطی که باعث کاهش مرتبه در دینامیک غیرخطی است.

✓ اکثریت قریب به اتفاق مودهای نرمال غیرخطی با سیستم‌هایی با درجه‌آزادی پایین سروکار دارند.

✓ بیشتر تکنیک‌های ساخته‌شده‌ی موجود برای محاسبه‌ی مودهای نرمال غیرخطی بر اساس رویکردهای مجانبی محاسبه می‌شوند و بر تحولات ریاضی استوارند [۲۲].

## ۵-۱ رزونانس داخلی

مطالعه‌ی انتقال هدفمند انرژی در نوسان‌گرهای ناپایستار و شدیداً غیرخطی نیازمند آشنایی با مفاهیم و تکنیک‌های خاصی از ریاضیات کاربردی نظیر دینامیک سیستم‌ها و تئوری انشعاب [۲۵-۲۳]، تئوری

---

<sup>1</sup> Jump

<sup>2</sup> Bifurcation

<sup>3</sup> Saturation

<sup>4</sup> Subharmonic

<sup>5</sup> Superharmonic

<sup>6</sup> Limit cycle

<sup>7</sup> Modal interactions

<sup>8</sup> chaos

تقریب‌های مجانبی [۱۹]، پردازش سیگنال عددی [۲۶] می‌باشد. در سیستم‌های غیرخطی همیلتونی معمولاً پاسخ‌های پیچیده به همراه پیک‌های اضافی مشاهده می‌شود و حتی در حالتی که مودهای سیستم کاملاً از یکدیگر جدا هستند، مکانیزمی ایجاد می‌شود که موجب انتقال انرژی بین مودهای سیستم می‌گردد [۱۹].

یکی از مفاهیم دیگر برای درک دینامیک غیرخطی انتقال هدفمند انرژی، پدیده‌ی رزونانس داخلی است. رزونانس داخلی، باعث کوپل غیرخطی بین مودها می‌شود و در نتیجه پدیده‌ی ضربان غیرخطی رخ داده که در طی آن تبادل انرژی زیادی بین مودها رخ می‌دهد. از آنجایی که هیچ مکانیزمی برای تبادل انرژی برای مودهای جدا از هم وجود ندارد، رزونانس داخلی در تئوری خطی امکان‌پذیر نیست. در غیاب رزونانس داخلی، هیچ تعامل مودالی رخ نداده و هر مود انرژی خود را حفظ می‌کند و در نتیجه، هیچ تبادل انرژی قابل توجهی بین مودها رخ نمی‌دهد. رزونانس داخلی وقتی ایجاد می‌شود که، نسبت دو یا چند فرکانس طبیعی نزدیک به یک عدد صحیح باشد [۱۹].

برخی از حالات خاص از رزونانس‌های داخلی عبارتند از رزونانس داخلی یک به یک (۱:۱)، که مشخصه‌ی سیستم‌های متقارن مضاعف، نظیر ورق‌های سیلندری-دایروی و صفحات مربعی می‌باشد که دارای مودهای جفتی با فرکانس‌های طبیعی برابر می‌باشند. رزونانس داخلی یک به دو (۱:۲)، وقتی  $\Omega_i \cong 2\Omega_j$  رزونانس‌های داخلی نه‌تنها می‌توانند پیک‌های اضافی در پاسخ ارتعاشی ایجاد نمایند، بلکه می‌توانند، وقتی فرکانس تحریک نزدیک به فرکانس طبیعی می‌شود، شاخه‌های اضافی در طول حل انشعابی بدهند. حتی اگر نیروی خارجی تنها یکی از دو مود متناسب در سیستم غیرخطی را تحریک نماید، در اثر رزونانس داخلی، انرژی از مود تحریک‌شده به مود دیگر که مستقیماً تحریک نشده و با مود اول متناسب است، انتقال می‌یابد [۲۷].

رزونانس داخلی یک مکانیزم غیرخطی پایه، برای انتقال انرژی بین سیستم‌ها و یا مودهایی است

<sup>1</sup>asymptotic approximations

<sup>2</sup>Numerical signal processing

که با هم در تعامل هستند. این مکانیزم راه را برای درک انتقال انرژی هدفمند از یک سیستم دینامیکی به دیگری هموار می‌کند. از آنجایی که سیستم‌های مورد بررسی، به‌نوعی خاصیت اتلاف انرژی دارند، انتظار می‌رود این پدیده به سیستم‌های دینامیکی با خاصیت اتلاف انرژی تعمیم داده شود که از این‌رو، پدیده‌ی تسخیر رزونانسی مطرح می‌شود [۱۹].

## ۶-۱ تسخیر یا گیرافتادن رزونانسی

تسخیر رزونانسی یا به‌دام افتادن در یک منی‌فولد رزونانسی می‌تواند به‌عنوان شکلی از رزونانس داخلی گذرا در نظر گرفته می‌شود که به‌موجب آن، انتقال انرژی زیادی بین بخش‌های مختلف سیستم صورت می‌گیرد. تسخیر رزونانسی، نقش مهمی را در انتقال هدفمند انرژی در سیستم‌های استهلاکی ایفا می‌کند. همچنین تسخیر رزونانسی، شرط لازم را برای انتقال انرژی غیرفعال، یک‌طرف و بازگشت-ناپذیر، از یک جزء سیستم به جزء دیگر آن ایجاد می‌کند که، جزء دوم همانند یک چاه غیرخطی انرژی عمل می‌نماید.

حالتی که تسخیر رزونانسی در یک منی‌فولد رزونانسی اتفاق می‌افتد و برای یک دوره‌ی زمانی مشخصی ادامه پیدا می‌کند سپس گذار از این حالت و گریختن از تسخیر صورت می‌پذیرد، تسخیر رزونانسی گذرا نام دارد. اگر در یک تسخیر رزونانسی هرگز با افزایش زمان گریز از آن اتفاق نیفتد، آن را تسخیر رزونانسی دائم می‌نامند [۱۹].

## ۷-۱ انشقاق

رفتار یک سیستم دینامیکی با تغییر پارامترهای آن تغییر می‌کند. به‌طور خاص نقاط تعادل می‌توانند ایجاد یا محو شوند و یا پایداری آنها تغییر نماید. این تغییرات کیفی در رفتار یک سیستم دینامیکی را انشقاق می‌نامند و مقدار پارامتری که در آن این انشقاق رخ می‌دهد را نقطه‌ی انشقاق یا مقدار بحرانی انشقاق می‌نامند [۲۸]. انشقاق‌ها به دو دسته‌ی اصلی تقسیم‌بندی می‌شوند:

---

<sup>1</sup> SRC:Sustained resonance capture

✓ انشقاق محلی: تغییر، به ناحیه‌ی کوچکی از فضای فاز که شامل نقطه‌ی تعادل می‌باشد،

منحصر است. این انشقاق معمولاً با تغییر در پایداری نقطه‌ی تعادل همراه است. انشقاق-

های زین-گره<sup>۱</sup> تا<sup>۲</sup> و هاف<sup>۳</sup> از این دست هستند.

✓ انشقاق جامع: تغییر به ناحیه‌ای که شامل نقطه‌ی تعادل می‌باشد، منحصر نشده است.

این انشقاق اغلب با تغییر در تعداد یا پایداری حل‌های پریودیک همراه است. انشقاق

هموکلینیک<sup>۴</sup> در این دسته جای دارد.

در انشقاق زین-گره، دو نقطه‌ی تعادل سیستم دینامیکی با یکدیگر برخورد کرده و ناپدید می-

شوند. اصطلاح زین-گره معمولاً برای سیستم‌های دینامیکی پیوسته و اصطلاح "تا" برای سیستم‌های

گسسته کاربرد دارد. اگر فضای فاز یک‌بعدی باشد، یکی از نقاط تعادل، ناپایدار بوده (زین) و دیگری

پایدار (گره) است. نمونه‌ای از این نوع انشقاق برای سیستم یک‌بعدی  $\dot{x} = r + x^2$ ، که در آن  $r$

پارامتر کنترلی است، در شکل نشان داده شده است [۲۹].

در انشقاق هاف که برای سیستم‌های بالاتر از مرتبه‌ی یک اتفاق می‌افتد، نقاط تعادل، با تغییر

مقادیر ویژه‌ی مختلط، خصوصیات پایداری خود را تغییر می‌دهند. این انشقاق به دو دسته‌ی فرابحرانی

و فروبحرانی دسته‌بندی می‌شود. در نوع فرابحرانی، پایداری نقطه‌ی تعادل تغییر می‌کند درحالی‌که،

یک مدار پریودیک پایدار ایجاد می‌شود اما در نوع فروبحرانی، تغییر پایداری نقطه‌ی تعادل، با ایجاد

یک مدار پریودیک ناپایدار همراه است.

همانطور که در شکل ۱-۱۵ نشان داده شده است، انشقاق هموکلینیک یک انشعاب کلی است و

هنگامی اتفاق می‌افتد که یک مدار پریودیک با یک انشقاق زین-گره شکل ۱-۱۴ برخورد کند. مدار

پریودیک تا هنگام برخورد با انشقاق زین-گره رشد می‌کند، در نقطه‌ی انشقاق، پریود مدار پریودیک به

بی‌نهایت مقدار خود می‌رسد و به یک مدار هموکلینیک تبدیل می‌شود و بعد از انشقاق دیگر هیچ مدار

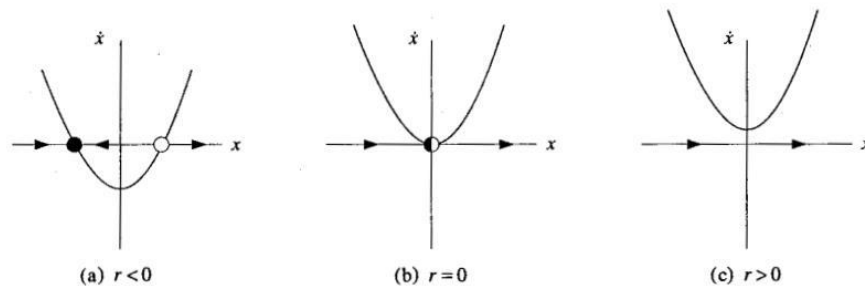
<sup>1</sup> Saddle-Node bifurcation

<sup>2</sup> Fold bifurcation

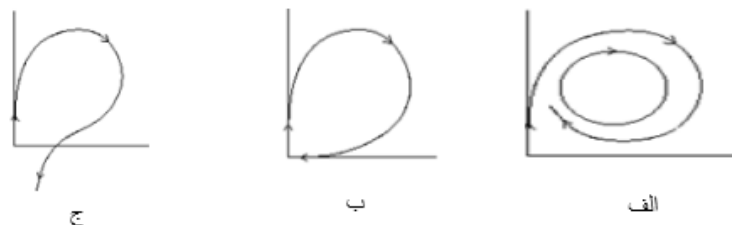
<sup>3</sup> Hopf bifurcation

<sup>4</sup> Homoclinic bifurcation

پریودیکی وجود ندارد. به عبارتی، در انشقاق هموکلینیک، یک سیکل حدی نقطه‌ی تعادل را لمس کرده و سپس ناپدید می‌شود [۳۵-۳۰].



شکل ۱۴-۱: نمونه‌ای از وقوع انشقاق زین-گره در سیستم یک‌بعدی



شکل ۱۵-۱: انشقاق هموکلینیک. الف: یک زین-گره در مبدأ مختصات و یک سیکل حدی در ربع اول، ب: برخورد سیکل حدی با زین-گره و تبدیل شدن به یک مدار با پریود بی‌نهایت ج: ناپدید شدن کامل سیکل حدی

## ۸-۱ مروری بر تحقیقات پیشین

در این بخش به توضیح مختصری در رابطه با کارهای صورت گرفته می‌پردازیم.

### ۱-۸-۱ جاذب دینامیکی خطی انرژی

ایده‌ی کاهش حرکت دینامیکی توسط جاذب ارتعاشی برای اولین بار توسط فرام<sup>۱</sup> در سال ۱۹۰۹ مطرح شد. این سیستم تنها شامل یک فنر و یک جرم بوده که المان میرایی نداشت [۱۰]. ارموندروید<sup>۲</sup> و دن‌هارتوگ<sup>۳</sup> در سال ۱۹۲۸ پهنای باند بهینه (افزایش محدوده‌ی فرکانسی) برای کاهش ارتعاش را با استفاده از جاذب خطی جرم-فنر-دمپر ارائه دادند [۳۶]. سیستم مطرح شده توسط فرام وظیفه‌ی

<sup>۱</sup> Frahm

<sup>۲</sup> Ormondroyd

<sup>۳</sup> Den Hartog

متعادل کردن بار خارجی بدون جذب انرژی را داشت. ارموندروید و دن هارتوگ نشان دادند که معرفی میراگر، نه تنها انرژی را تلف می‌کند، بلکه بازه‌ی فرکانسی که در آن دستگاه فعال است را افزایش می‌دهد. این ایده منجر به پیشرفت روند طراحی شد که همچنان ایده‌ای رو به پیشرفت است. این روند بر اساس تحلیل تشدید دینامیکی حرکت جرم سازه می‌باشد و از دو مرحله‌ی جداگانه تشکیل شده است، تنظیم فرکانس میراگر و انتخاب میزان بهینه برای میرایی [۱۲]. مطالعات گسترده‌ای در زمینه‌ی بهینه‌سازی جاذب ارتعاشی خطی ارائه شد. معیار بهینه‌سازی  $H_{\infty}$  در سال ۱۹۲۸ توسط دن هارتوگ و ارموندروید به منظور کمینه کردن بیشترین دامنه‌ی پاسخ سیستم مطرح شد. در سال ۱۹۶۳ معیار بهینه‌سازی با هدف کمینه کردن انرژی ارتعاشی کل سیستم در تمامی محدوده‌های فرکانسی، توسط کرنرال<sup>۱</sup> و مارک مطرح شد. معیار حداکثر پایداری نیز به منظور کاهش ارتعاشات گذرای سیستم در سال ۱۹۸۸ توسط یاماگوچی<sup>۲</sup> و نیشیهارا<sup>۳</sup> عنوان شد [۳۷]. محدودیت جاذب‌های خطی باعث دستیابی به جاذب‌های ارتعاشی غیرخطی شده که در محدوده‌ی فرکانسی وسیع‌تری به علت وابستگی فرکانس-انرژی نوسان‌گرهای غیرخطی موثر هستند. اولین مطالعات به رابرسون<sup>۴</sup>، پایپس<sup>۵</sup> و آرنولد برمی‌گردد که اثر غیرخطی بودن را روی پهنای باند مطالعه کردند. هانت<sup>۶</sup> و نایسن<sup>۷</sup> اولین کسانی بودند که یک جاذب غیرخطی عملی را با استفاده از یک غیرخطی اتلافی عملی کردند [۳]. بولنت از<sup>۸</sup> و همکارانش در سال ۲۰۰۴ روش دن هارتوگ را برای طراحی جاذب ارتعاش دینامیکی خطی متصل به یک سیستم چنددرجه‌آزادی بدون میرایی گسترش دادند [۳۸].

## ۱-۸-۲ چاه غیرخطی انرژی نوع اول

رابرسون در سال ۱۹۵۲ پارامترهای یک چاه غیرخطی انرژی نوع اول متصل به یک سیستم اولیه یک-

<sup>1</sup> Crandall

<sup>2</sup> Yamaguchi

<sup>3</sup> Nishihara

<sup>4</sup> Roberson

<sup>5</sup> Pipes

<sup>6</sup> Hunt

<sup>7</sup> Nissen

<sup>8</sup> Bulent Ozer

درجه آزادی را به صورتی بهینه کرد که یک باند فرکانسی بزرگ برای فرکانس نیروی محرک بدست آید و در آن باند دامنه‌ی ارتعاش سیستم اولیه همواره زیر مقدار یک نگه‌داشته شود [۳۹]. رایس<sup>۱</sup> و همکارانش در سال ۱۹۸۶، پارامترهای بهینه را برای یک چاه غیرخطی انرژی نوع اول ارائه کردند و همچنین چگونگی انتخاب نوع فنر (خطی، سخت و یا نرم) را بر اساس فرکانس کاری سیستم، مورد بررسی قرار دادند. علاوه بر این آنها دریافتند که سیستم‌های شدیداً غیرخطی دچار ناپایداری‌های هارمونیک تخریب‌کننده‌ای می‌شوند [۴۰]. جردانو<sup>۲</sup> و همکارانش در سال ۱۹۸۷، یک روش عددی بهینه برای بدست آوردن پارامترهای بهینه‌ی یک چاه غیرخطی انرژی و جاذب خطی ارائه کردند و همچنین مقایسه‌ای بین پارامترهای بهینه‌ی بدست آمده از این روش و پارامترهای بهینه‌ی بدست آمده از نتایج کلاسیک دین هارتوگ در حالت خطی انجام دادند [۴۱]. شو<sup>۳</sup> و همکارانش در سال ۱۹۸۸، به بررسی حالت دائم یک چاه غیرخطی انرژی نوع اول متصل به سیستمی که آن هم دارای فنر غیرخطی نوع دافینگ می‌باشد، پرداختند و از روش‌ها مقیاس‌ها چندگانه و شبیه‌سازی‌های دیجیتال استفاده کردند و به این مفهوم پی بردند که اگر فرکانس کاری جاذب، میانگین دو فرکانس طبیعی خطی سیستم باشد، ناپایداری‌هایی در پاسخ‌های سیستم به وجود می‌آید که باعث وجود همزمان پاسخ‌های پریودیک با دامنه‌ی بالا پاسخ‌های پریودیک با دامنه‌ی پایین و پایین آمدن کارایی سیستم می‌شود [۴۲]. ناتسیاواس<sup>۴</sup> و همکارانش در سال ۱۹۹۲، اثر پارامترهای سیستم بر روی پاسخ‌های حالت دائم را مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که استفاده از جاذب‌های با فنر سخت یا نرم باعث کاهش قابل توجهی در دامنه، به ترتیب در محدوده‌ی فرکانس‌های بیش از فرکانس رزونانس اصلی و یا کمتر از فرکانس رزونانس اصلی می‌شوند. همچنین دارا بودن سطح پایین میرایی، درجه‌ی غیرخطی بالا و نیروی محرک با دامنه‌ی بالا، منجر به زوال پایداری پاسخ‌های پریودیک و مشاهده‌ی ارتعاشات شبه

---

<sup>1</sup> Rice

<sup>2</sup> Jordanov

<sup>3</sup> Shaw

<sup>4</sup> Natsiavas

پریودیک<sup>۱</sup> با دامنه‌ی بسیار بالا می‌شود [۴۳].

### ۳-۸-۱ چاه غیرخطی انرژی نوع دوم

در زمینه‌ی چاه غیرخطی انرژی، جندلمن<sup>۲</sup> و واکاکیس<sup>۳</sup> از پیشگامان این تحقیق به‌شمار می‌روند و اکثر کارهای موجود در این زمینه به نحوی به این دو محقق مربوط می‌شود. جندلمن در سال ۲۰۰۱، سیستم کاملاً نامتقارن شامل دو نوسان گر کوپل شده، که یکی از آنها شدیداً غیرخطی با یک فرکانس خطی کوچک و دیگری خطی با فرکانس خطی بزرگ می‌باشد را مورد بررسی قرار داد. در این تحقیق نشان داده شد که به دلیل درجه‌ی بالای غیرخطی سیستم، انتقال انرژی از طریق رزونانس زیر-هارمونیک انجام می‌شود [۴۴]. در سال ۲۰۰۱، جندلمن و همکارانش سیستم دودرجه‌آزادی شامل یک نوسان گر خطی و یک نوسان گر شدیداً غیرخطی با میرایی ضعیف و اتصال ضعیف را بررسی کردند. هدف از این تحقیق، بررسی پدیده‌ی پمپاژ انرژی غیرخطی<sup>۴</sup> بین دو نوسان گر بود. آنها دریافتند که یک مدار زیرهارمونیک پایدار ۱:۴ مربوط به سیستم بدون میرایی عهده‌دار پدیده‌ی پمپاژ انرژی می‌باشد. همچنین این مدار نمی‌تواند در انرژی‌های نسبتاً پایین تحریک شود [۱۷]. در ادامه‌ی کار قبلی آنها نشان دادند که پمپاژ انرژی در سیستم به‌علت پدیده‌ی تسخیر رزونانسی در منی‌فولد رزونانس ۱:۱ سیستم می‌باشد [۴۵]. واکاکیس در سال ۲۰۰۱، سیستم دودرجه‌آزادی شامل یک نوسان گر خطی و یک نوسان گر شدیداً غیرخطی با میرایی ضعیف و اتصال ضعیف را بررسی کردند که هدف، گسترش یک فرمولاسیون تحلیلی برای القاء پمپاژ انرژی غیرفعال در یک دسته از نوسان گرهای مکانیکی بود [۱۸]. واکاکیس و همکارانش در سال ۲۰۰۳، سیستم  $N+1$  درجه‌آزادی با اتصال ضعیف به چاه غیرخطی انرژی را مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که فیزیک پمپاژ انرژی و یا پدیده‌ی تسخیر رزونانس در یک سیستم غیرکنسرواتیو می‌تواند با مطالعه‌ی ساختار و انشعاب موده‌های نرمال خطی

<sup>1</sup> Quasi-periodic oscillations

<sup>2</sup> Gendelman

<sup>3</sup> Vakakis

<sup>4</sup> Nonlinear energy pumping

<sup>5</sup> 1:1 Stable subharmonic orbit

سیستم کنسرواتيو مربوطه، ارائه شود [۴۶]. واکاکیس و همکارانش در سال ۲۰۰۴، مدل  $N+1$  درجه-آزادی با اتصال ضعیف به چاه غیرخطی انرژی را مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که چاه غیرخطی انرژی می‌تواند با هر مود در حال رزونانس سیستم اصلی به‌طور مجازی رزونانس کند و به‌گونه‌ای غیرفعال مقدار معینی از انرژی آن را جذب نماید و سپس به مود بعدی رود و به این ترتیب به‌صورت متوالی انرژی هر مود در حال رزونانس را جذب نماید [۴۷]. جندلمن و همکارانش در سال ۲۰۰۵، بهینه کردن انرژی در سیستم دودرجه آزادی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها نشان دادند که روند پمپ انرژی در این سیستم توسط ساختار مودهای نرمال غیرخطی میراشده‌ی سیستم کنترل می‌شود. همچنین احتمال وجود پاسخ آشفته‌ی گذرا<sup>۲</sup> بررسی گردید [۴۸]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۵، سیستم دودرجه آزادی شامل یک نوسان‌گر خطی دارای اتصال خطی ضعیف به چاه غیرخطی انرژی متصل به زمین را مورد مطالعه قرار دادند. آنها اثبات کردند که پمپ انرژی بهینه برای مقادیر بسیار کوچک جرم چاه غیرخطی انرژی اتفاق می‌افتد. دو مکانیزم مختلف پمپ انرژی در این سیستم مشاهده گردید. مکانیزم اول به حالت تسخیر رزونانس مربوط می‌شد و مکانیزم دوم به تحریک غیر رزونانس ارتعاشات با فرکانس بالا در چاه غیرخطی انرژی مرتبط است [۴۹]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۶، سیستم دودرجه آزادی شامل یک نوسان‌گر خطی و چاه غیرخطی انرژی با بارگذاری هارمونیک خارجی را بررسی کردند. آنها پاسخ سیستم را در همسایگی رزونانس خطرناک ۱:۱ مطالعه کردند و دریافتند که در محدوده‌ای از فرکانس‌های نیروی خارجی، سیستم بیشتر دارای رژیم‌های پاسخ شبه‌پریودیک است و به‌ندرت پاسخ‌های حالت دائمی دیده می‌شود و پاسخ‌های شبه‌پریودیک در حذف ارتعاشات سیستم مؤثر هستند [۵۰]. لی<sup>۳</sup> و همکارانش در سال ۲۰۰۶، سیستم شامل نوسان‌گر وندرپل<sup>۴</sup> و چاه غیرخطی انرژی متصل یا غیرمتصل به زمین را بررسی کردند و موفق به حذف

<sup>1</sup> Cascade resonance capture

<sup>2</sup> Chaotic transient response

<sup>3</sup> Lee

<sup>4</sup> Van der pol oscillator

ارتعاشات خودالقای<sup>۱</sup> یا سیکل حدی مربوط به نوسان گر وندرپل با استفاده از چاه غیرخطی انرژی شدند [۵۱]. در سال ۲۰۰۷، جندلمن و همکاران پاسخ‌های شبه‌پریودیک سیستم دودرجه‌آزادی شامل یک نوسان گر خطی و چاه غیرخطی انرژی را بررسی کردند که نتایج از وجود پاسخ‌های شبه‌پریودیک ضعیف و قوی خبر داد [۵۲]. میموکین<sup>۲</sup> و جندلمن در سال ۲۰۰۷، یک نوسان گر غیرخطی از درجه‌ی بالا تحت نیروی ضربه هارمونیک را مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که نواحی پاسخ به‌شدت به شرایط اولیه بستگی دارد [۵۳]. گوردون<sup>۳</sup> و همکارانش در سال ۲۰۰۶، دریافتند که چاه غیرخطی انرژی مقدار زیادی انرژی را در یک زمان بسیار کوتاه در مقایسه با جاذب دینامیکی خطی جذب می‌کند. علاوه بر این در کاربردهای عملی که فرکانس طبیعی در حال تغییر است، چاه غیرخطی انرژی بسیار مؤثرتر از جاذب دینامیکی عمل می‌کند [۵۴]. جندلمن و همکارانش در سال ۲۰۰۸، نواحی که رژیم‌های مختلف پاسخ همزمان وجود داشتند را در فضای پارامترها، شکل و مشخصات دامنه‌ای محاسبه کردند و مشخص شد که اگرچه استفاده‌ی چاه غیرخطی انرژی در سیستم، پتانسیل خاصی برای جذب ارتعاش ایجاد می‌کند ولی از طرفی وجود همزمان رژیم‌های مختلف پاسخ در برخی نواحی و همچنین احتمال وجود پاسخ‌های آشفته<sup>۴</sup> مشکلاتی را به‌وجود می‌آورد. در واقع چاه غیرخطی انرژی به تنظیمات دقیقی نیاز دارد و شاید استفاده از کنترل نیمه‌فعال مناسب‌تر باشد [۱۹]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۸، روش تک-پارامتری برای تنظیم چاه غیرخطی انرژی پیشنهاد دادند. آنها دریافتند که برای میرایی‌های کوچک و مقادیر مشخصی از پارامترهای سیستم، جاذب غیرخطی عملکرد بهتری در کاهش انرژی جنبشی و انرژی کل نسبت به جاذب خطی ارائه می‌دهد. ولی با افزایش میرایی برای هر دو جاذب، جاذب غیرخطی کارایی خود را از دست می‌دهد درحالی‌که کارایی جاذب خطی افزایش می‌یابد [۵۵]. همچنین آنها یک روش تحلیلی به‌منظور توصیف بستگی فرکانس و انشعاب‌های سیستم به رژیم‌های پاسخ شبه‌پریودیک قوی ارائه کردند و دریافتند که پاسخ شبه-

<sup>1</sup> Self-excited

<sup>2</sup> Meimukhin

<sup>3</sup> Gourdon

<sup>4</sup> Chaotic

پریودیک قوی تفاوت عمده‌ای با پاسخ‌های حالت دائمی یا پاسخ‌های شبه‌پریودیک ضعیف دارند. در واقع مدولاسیون نوسانات آنها بسیار عمیق است و دامنه‌ی آنها به‌تنهایی چیزی در حدود دامنه‌ی پاسخ سیستم است [۵۶]. در تحقیقی دیگر آنها مطالعه‌ی وسیعی در خصوص رژیم‌های پریودیک و شبه‌پریودیک ضعیف انجام دادند و موفق به محاسبه‌ی ناحیه‌ی رژیم‌های پاسخ شبه‌پریودیک قوی با استفاده از روش تحلیلی شدند و ترکیبات مختلف رژیم‌های سیستم که ممکن است همزمان با هم وجود داشته باشند را با مدل‌های تحلیلی پیش‌بینی کردند. مورد جالب‌توجه، ترکیبی از رژیم‌ها بود که شامل سه رژیم، دو رژیم پریودیک و یک رژیم شبه‌پریودیک قوی بود [۵۷]. در پژوهشی دیگر آنها روش‌هایی برای تنظیم چاه غیرخطی انرژی ارائه کردند که هدف آنها تحریک پاسخ مدوله‌ی قوی<sup>۱</sup> در هر مود بدون تغییر پارامترهای چاه غیرخطی انرژی بود [۵۸]. ساپسیس<sup>۲</sup> و همکارانش در سال ۲۰۰۹، شرایطی را برای بهینه‌کردن انتقال انرژی هدفمند در سیستم دودرجه‌آزادی تحت تسخیر رزونانسی گذرا در حالت ۱:۱ بررسی کردند. آنها خصوصیات مقیاس‌های زمانی دینامیکی که بر ظرفیت جذب انرژی جاذب غیرخطی به‌صورت غیرفعال و اتلاف انرژی از نوسان‌گر خطی تأثیرگذار است، را بررسی کردند [۵۹]. ویژو<sup>۳</sup> و کرسچن<sup>۴</sup>، مستهلک‌سازی ارتعاشات یک سیستم غیرخطی توسط سیستم جاذب دینامیکی غیر خطی را بررسی کردند. در این بررسی ایشان به‌منظور تنظیم مؤلفه‌های سیستم جاذب روشی جدید مبتنی بر برابری انرژی سیستم اولیه با انرژی مستهلک‌شده در سیستم همراه با جاذب دینامیکی را معرفی کردند و بدین‌گونه پارامترهای بهینه را بدست آوردند [۶۰]. ثمنی و پلیکانو<sup>۵</sup> کاهش ارتعاشات تیری که تحت بار متحرک قرار دارد را به‌وسیله‌ی جاذب دینامیکی خطی و غیرخطی بررسی کردند. ایشان دریافتند که جاذب دینامیکی غیرخطی برای کاهش دامنه‌ی بیشینه‌ی ارتعاشات مناسب‌تر است حال آنکه جاذب دینامیکی خطی انرژی ارتعاشی بیشتری از سیستم جذب می‌کند و

<sup>1</sup> Strongly quasi periodic response or strongly modulated response(SMR)

<sup>2</sup> Sapsis

<sup>3</sup> Vigie

<sup>4</sup> Kerschen

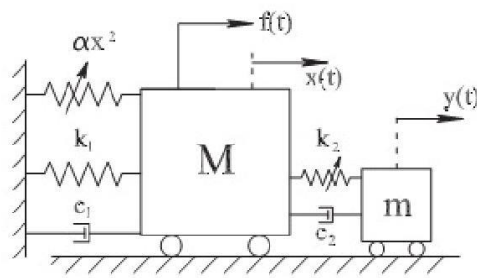
<sup>5</sup> Pellicano

سطح انرژی تیر را به نسبت جاذب دینامیکی غیرخطی پایین تر می آورد [۶۱]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۱۰، روش های تحلیلی را به منظور بررسی تقریب های مجانبی با درجه ی بالاتر گسترش دادند. این کار آنها را قادر به تشخیص تغییرات کیفی در رژیم های شبه پریودیک قوی، با افزایش مقدار جرم چاه غیرخطی انرژی، کرد [۶۲]. در تحقیقی دیگر از آنها مطالعه ای به منظور به کارگیری و گسترش روش های تحلیلی و مجانبی جهت شناخت رژیم های ارتعاشی و انشعابات آنها در سیستم شامل نوسان گر و ندرپل و چاه غیرخطی انرژی انجام شد [۶۳]. همچنین آنها در سال ۲۰۱۰، سیستمی شامل یک نوسان گر خطی و یک نوسان گر غیرخطی با اتصال خطی ضعیف و دارای فرکانس های یکسان و تحت بار ضربه ی اولیه را مورد مطالعه قرار دادند. از آنجایی که مطالعات پیشین با فرض فرکانس های طبیعی دور از هم، انجام شده بود و در این حالت امکان برقراری رزونانس داخلی بین مودها وجود نداشت، در این مطالعه به بررسی فرایند انتقال انرژی هدفمند در سیستم هایی که دارای فرکانس های نزدیک به هم هستند، پرداخته شد [۶۴]. نوع جدیدی از تله ی انرژی به منظور فراهم کردن انتقال انرژی هدفمند در یک سیستم متشکل از پاندول های کوپل در [۶۵] مطرح شده و نشان داده شد وقتی پاندول های کوپل از یک رزونانس داخلی می گذرند، این پدیده منجر به انتقال انرژی برگشتناپذیر از یک پاندول به دیگری می شود. چنین سیستمی نمایان گر نوع جدیدی از تله ی انرژی است که می تواند به سیستم های پیچیده تر و در کاربردهای نانو، میکرو و ماکرومکانیک ها تعمیم داده شود. نوع جدیدی از چاه غیرخطی انرژی به صورت یک جرم گریزاز مرکز دوآر در [۶۶] مطرح شده است. این جاذب می تواند با هر فرکانسی دوران کند، بنابراین با هر مود سیستم اولیه تشدید انجام می دهد. در این نوع جاذب برای طراحی و دستیابی به المان سفتی غیرخطی نگرانی وجود ندارد. البته قابل ذکر است که دینامیک آن بسیار پیچیده تر از طراحی های سنتی است. در سال ۲۰۱۱، فام<sup>۱</sup> و همکارانش سیستمی دودرجه آزادی که شکلی از آن نمایش داده شده است را بررسی کردند. این تحقیق بر اساس مدل ساده شده ای از کابل های مرتعش واقع در پل ها که تشدید ترکیبی در آنها اتفاق می افتد، اتخاذ شده -

---

<sup>1</sup> Pham

است. همانطور که از شکل ۱۶-۱ مشخص است سیستم پایه، سفتی غیرخطی مربعی و سفتی خطی را توأمان دارا است [۶۷]. نیروی خارجی به صورت ترکیب دو نیرو با فرکانس و دامنه‌های متفاوت می‌باشد. ویژگی این سیستم این است که پدیده‌ی تشدید ترکیبی<sup>۱</sup> در آن اتفاق می‌افتد. این پدیده به این صورت است که مجموع فرکانس‌های نیروی تحریک، نزدیک به فرکانس خطی سیستم اولیه می‌باشد.



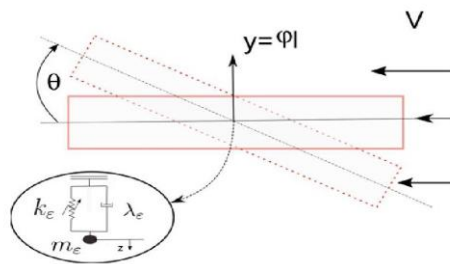
شکل ۱۶-۱: مدل نمادین استفاده شده در مرجع [۶۷]

جندلمن و همکارانش نشان دادند که با اضافه کردن درجات آزادی داخلی چاه غیرخطی انرژی، می‌توان عملکرد انتقال غیرفعال انرژی مورد نظر را به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشید. نکته‌ی قابل توجه این است که مؤلفه‌های غیرخطی باید کاملاً نامتقارن باشند و همچنین، این عملکرد بهبودیافته، بدون تغییر در جرم چاه انرژی در مقایسه با نوع یک‌درجه‌آزادی آن اتفاق می‌افتد. در این تحقیق هیچ‌گونه بهینه‌سازی به منظور انتخاب مؤلفه‌های سفتی، میرایی و جرم صورت نگرفته است و تنها با تغییر نسبت بین سفتی‌های سیستم جاذب، این بهبود عملکرد بررسی شده است [۶۸]. ویوریگارد<sup>۲</sup> و همکارانش ناپایداری آبروالاستیک در مدلی از پل شکل ۱۷-۱ با تکیه‌گاه‌های بافاصله (دهنه‌های بلند<sup>۳</sup>) که در معرض پدیده‌ی فلاتر ناشی از جریان باد با سرعتی یکنواخت قرار گرفته است را با استفاده از انتقال انرژی، به صورت غیرفعال، کنترل کردند [۶۹].

<sup>۱</sup> Combination resonance

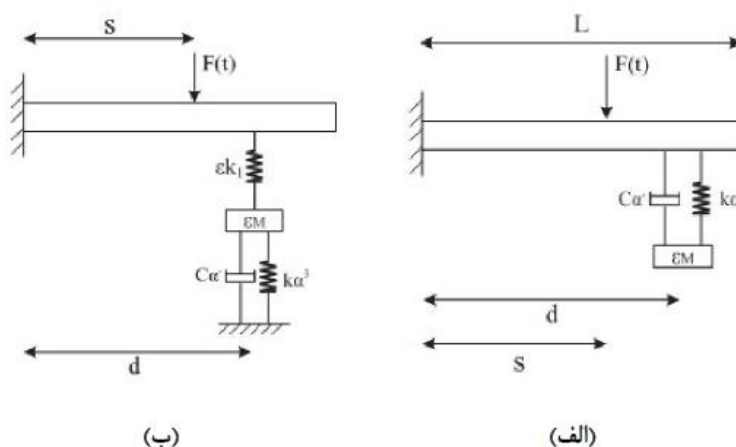
<sup>۲</sup> Vaurigaud

<sup>۳</sup> Long span



شکل ۱۷-۱: مدل نمادین پل همراه با چاه غیرخطی انرژی در داخل آن

سوادکوهی و همکارانش رفتار آشوبناک گذرای سیستمی متشکل از یک نوسان گر خطی همراه با چاه غیرخطی انرژی یک درجه آزادی را تحت تحریک ضربه بررسی کردند. ایشان از انتگرال ملنیکوف<sup>۱</sup> به منظور مطالعه قابلیت وجود آشوب و مدارهای هموکلینیک عرضی آدر سیستم استفاده نمودند [۷۰]. در سال ۲۰۱۲، نیلی و خادم اهمیت مودهای نرمال غیرخطی در پدیده انتقال برگشتناپذیر و یک طرفه انرژی از سیستم های پیوسته به چاه غیرخطی انرژی را نشان دادند. ایشان دو نوع اتصال متفاوت از چاه انرژی شکل ۱-۱۸، به تیری یکسرگیردار و پیوسته که تحت بار ضربه قرار دارد را در نظر گرفتند. ایشان نشان دادند که اتصال نوع الف، از نقطه نظر انتقال و مستهلک سازی انرژی، به مراتب از اتصال نوع ب مناسب تر بوده و می تواند تا ۸۹٪ از انرژی ناشی از ضربه را مستهلک نماید [۷۱].



شکل ۱۸-۱: مدل نمادین در مرجع [۷۱]

سپاسیسی و همکارانش، با ارائه روش جدیدی مبتنی بر سفتی و میرایی مؤثر، عملکرد چاه غیرخطی

<sup>1</sup> Melnikov Integral

<sup>2</sup> Transversal homoclinic orbits

را مورد ارزیابی قرار داده و مؤلفه‌های آن را بهینه کردند [۷۲]. همچنین ویرسچم<sup>۱</sup> و همکارانش با استفاده از این روش، عملکرد چاه غیرخطی دودرجه‌آزادی که به یک سیستم اولیه‌ی دودرجه‌آزادی متصل شده است شکل ۱-۱۹ را مورد ارزیابی قرار دادند. آنها با به‌کارگیری روش میرایی مؤثر، مؤلفه‌های چاه غیرخطی را بهینه کردند و با ساخت سازه‌ای دوطبقه مطابق شکل و نصب چاه غیرخطی بالای این سازه، نتایج تئوری را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه نمودند [۷۳].



شکل ۱-۱۹: مدل آزمایشگاهی به‌کاررفته در مرجع [۷۳]

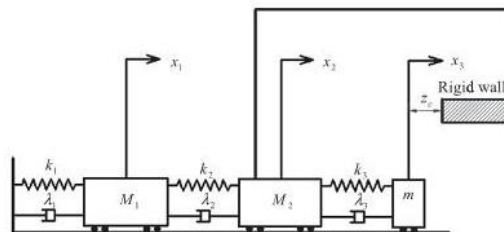
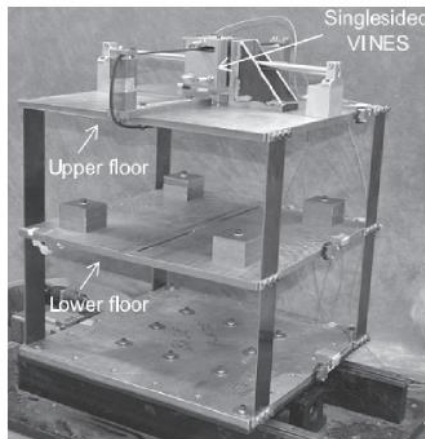
جندلمن با استفاده از چاه غیرخطی ارتعاشی-ضربه‌ای و به‌کارگیری روش مقیاس‌های چندگانه<sup>۲</sup> نشان داد که انرژی ناشی از ضربه‌ی اولیه به سیستم خطی یک‌درجه‌آزادی، با بازدهی قابل توجه مستهلک می‌گردد [۶۶]. در سال ۲۰۱۳، الشودیفات<sup>۳</sup> و همکارانش، با ارائه‌ی مدلی جدید از چاه انرژی ارتعاشی-ضربه‌ای، عملکرد آن را نسبت به چاه ارتعاشی-ضربه‌ای مرسوم، بهبود بخشیدند. ایشان از مدلی استفاده کردند شکل ۱-۲۰، که حرکت فنر غیرخطی را از یک سمت مقید می‌سازد و در سمت دیگر، فنر به‌طور آزادانه حرکت می‌کند [۷۴]. برخی محققین از المان‌های فوم پلی‌اورتان، شکل ۱-۲۱، به عنوان جاذب‌های غیرخطی ارتعاشات در سازه‌های چندطبقه استفاده کرده‌اند [۷۵، ۷۶] و نشان

<sup>1</sup> Wierschem

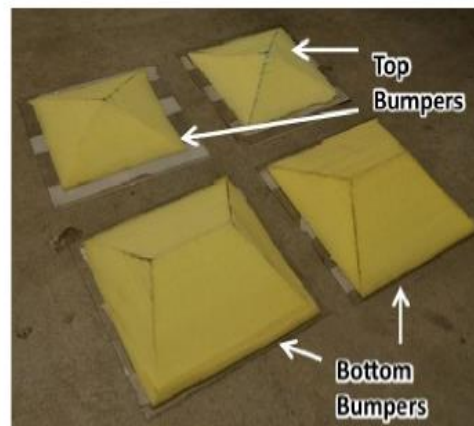
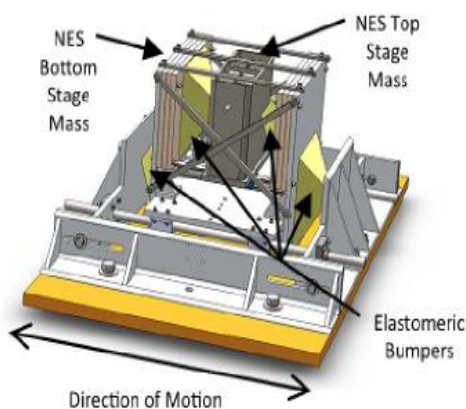
<sup>2</sup> Multiple scales method

<sup>3</sup> AL-Shudeifat

داده‌اند که با استفاده از این المان‌ها، می‌توان چاه انرژی دودرجه‌آزادی ساخت و به‌منظور مستهلک-سازی ارتعاشات سازه‌های عمرانی استفاده کرد.



شکل ۱-۲۰: مدل نمادین و نمونه‌ی آزمایشگاهی در مرجع [۷۴]



شکل ۱-۲۱: نمونه‌ای از المان‌های پلی اورتان و مدل نمادین استفاده‌شده در مرجع [۷۵، ۷۶]

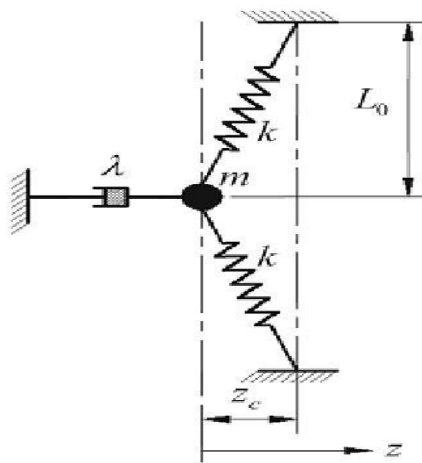
در سال ۲۰۱۴، زولی<sup>۱</sup> و لانگو<sup>۲</sup> با استفاده از روشی مبتنی بر ترکیب دو روش توازن همساز و مقیاس‌های چندگانه، دینامیک سیستمی متشکل از چاه غیرخطی انرژی و ایرفویل صلب دودرجه-آزادی که در معرض جریان باد یکنواخت قرار دارد را مورد ارزیابی قرار دادند [۷۷]. در این تحقیق، جریان باد به‌گونه‌ای اختیار شده است که سیستم نزدیک به انشقاق هاف قرار گرفته‌است. نیلی و خادم با استفاده از یک المان پیزوالکتریک و اتصال چاه غیرخطی انرژی به آن، ضمن مستهلک‌سازی

<sup>1</sup> Zulli

<sup>2</sup> Luongo

<sup>3</sup> Harmonic balance

ارتعاشات تیری دوسر آزاد، شرایط استحصال انرژی الکتریکی از این سیستم را مورد ارزیابی قرار دادند [۷۸]. ایشان ضمن مطالعه و بررسی دو نوع چاه غیرخطی آزاد و متصل به زمین، مؤلفه‌های چاه غیرخطی را در راستای استحصال بیشینه‌ی انرژی الکتریکی مستهلک‌سازی بیشینه‌ی ارتعاشات بهینه کردند. با در نظر گرفتن هر دو هدف، ملاحظه گردید که ساختار چاه غیرخطی متصل به زمین، مناسبتر و بهتر از ساختار آزاد عمل می‌کند. در سال ۲۰۱۵، الشودیفات در تحقیقات جداگانه‌ای، مدل‌های متنوع و جدیدی از چاه غیرخطی انرژی شکل ۱-۲۲ و ۱-۲۳، ارائه کرده است [۷۹، ۸۰]. یکی از این مدل‌ها که برگرفته از رفتار دوپایای<sup>۱</sup> سیستم می‌باشد، مطابق شکل، نحوه‌ی استقرار جرم چاه غیرخطی را طوری در نظر گرفته است که دو فنر متصل به جرم، در لحظه‌ی عبور از راستای تلاقی دو تکیه‌گاه، فشرده شوند و لذا باعث افزایش جابجایی جرم چاه غیرخطی و در نتیجه افزایش بازدهی فرایند انتقال انرژی گردند.

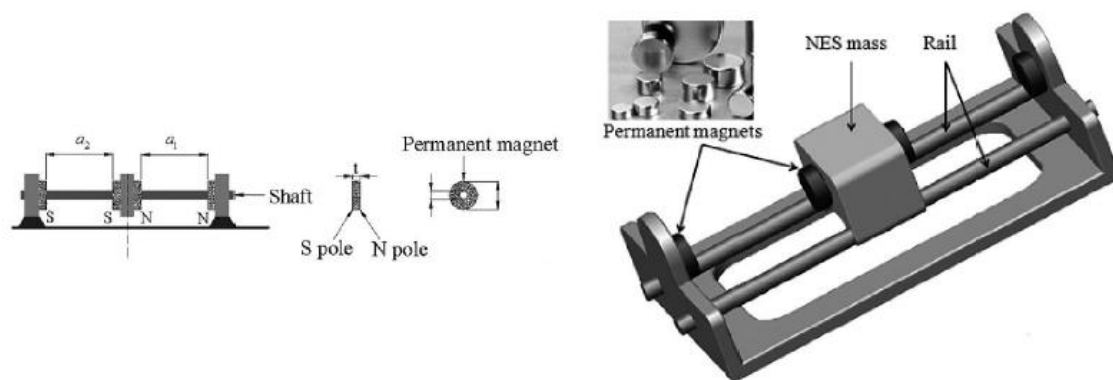


شکل ۱-۲۲: مدل چاه غیرخطی دوپایا ارائه‌شده در مرجع [۷۹]

همچنین استفاده از این مدل باعث افزایش محدوده‌ی پالس خارجی اعمال‌شده به سیستم اولیه، می‌شود. در مدل دیگری که توسط این محقق ارائه شده است، از نیروی مغناطیسی به‌عنوان فنریت غیرخطی استفاده شده که مدل نمادین آن در شکل به نمایش گذاشته شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، نزدیکی دو قطب هم‌نام باعث ایجاد نیروی دافعه و در نتیجه نوسان بیشتر جرم چاه

<sup>1</sup> Bistable

انرژی می‌شود. با توجه به فواصل نامساوی قطب‌های هم‌نام مستقر در طرفین جرم چاه انرژی در هنگام نوسان چاه انرژی، رفتاری نامتقارن از چاه انرژی پدید می‌آید که باعث بهبود عملکرد آن می‌شود. استفاده از این مدل، ضمن سهولت ساخت و فضای اندک مورد نیاز، باعث بهبود عملکرد چاه انرژی نسبت به محدوده‌ی اعمال پالس خارجی می‌گردد. پارسه و همکارانش اثر تغییر دامنه‌ی نیروی هارمونیک بر عملکرد چاه غیرخطی انرژی، متصل به تیر خطی با دو حالت تکیه‌گاهی دوسر ساده و یک‌سرگیردار را بررسی کردند [۸۱].



شکل ۱-۲۳: مدل چاه غیرخطی مغناطیسی [۸۰]

در این راستا، ایشان عملکرد چاه غیرخطی انرژی را با جاذب خطی ارتعاشات مقایسه نمودند و نشان دادند که در شرایطی که چاه غیرخطی برای یک دامنه‌ی مشخص از تحریک هارمونیک خارجی طراحی شده باشد، عملکرد آن در مستهلک سازی ارتعاشات سیستم اولیه نسبت به جاذب خطی ارتعاشات بهتر می‌باشد. بنابراین با افزایش دامنه‌ی تحریک خارجی، چاه غیرخطی عملکرد مفید خود را از دست می‌دهد و لذا، جاذب خطی که بر پایه‌ی فرکانس، طراحی شده است، نسبت به افزایش دامنه‌ی تحریک خارجی، حساسیت کمتری دارد. با توجه به تحقیقات صورت گرفته، به‌منظور بهره‌برداری مطلوب از چاه غیرخطی انرژی، می‌بایست طراحی مؤلفه‌های آن برای بیشترین دامنه‌ی تحریک خارجی صورت پذیرد. تقی‌پور و دردل، اثر افزایش درجات آزادی چاه غیرخطی بر توانایی جذب انرژی آن را بررسی کردند. ایشان با اتصال دو چاه غیرخطی یک و دودرجه آزادی به سیستم اولیه‌ی یک‌درجه آزادی و غیرخطی، ضمن تعیین مؤلفه‌های بهینه‌ی هر یک از ساختارهای چاه

غیرخطی با استفاده از تحلیل رفتاری، اثر تغییر هریک از مؤلفه‌های بهینه‌ی چاه انرژی همچنین اثر تغییر دامنه‌ی تحریک هارمونیک خارجی را بررسی نمودند. طی تحقیقات به‌عمل آمده، نشان داده شده است که افزایش درجات آزادی چاه غیرخطی، حساسیت عملکرد آن را نسبت به تغییر دامنه‌ی تحریک خارجی کاهش می‌دهد و لذا افزایش درجات آزادی چاه غیرخطی، بازه‌ی عملکرد مفید آن را نسبت به دامنه‌ی تحریک خارجی افزایش می‌دهد [۸۲]. باب و همکارانش، اثر چاه غیرخطی بر مستهلک‌سازی ارتعاشات اجباری تیر چرخانی<sup>۱</sup> که همانند یک پره به شفت دوار متصل می‌باشد را بررسی نموده‌اند. ایشان با در نظر گرفتن اثر سفتی جانب مرکز<sup>۲</sup> شرایط پیدایش انشقاق‌های زینی-گره و هاف را بررسی نموده‌اند و نشان داده‌اند که چاه غیرخطی با نصب در انتهای آزاد پره، بیشترین جذب انرژی از سیستم اولیه را نتیجه می‌دهد. همچنین مقایسه‌ای بین جاذب خطی ارتعاشات و چاه غیرخطی صورت گرفته و شرایط پیدایش پاسخ قویاً هم‌فرکانس شده<sup>۳</sup> مورد ارزیابی قرار گرفته است [۸۳].

## ۹-۱ اهداف و مسائل مورد بررسی پایان‌نامه

این پژوهش که شامل بخش‌های تحلیلی و عددی است، کاربرد چاه غیرخطی انرژی در کاهش ارتعاشات دو سیستم مکانیکی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. چاه غیرخطی انرژی قادر است انرژی را از زیرسیستم اولیه تحت بارگذاری خارجی به‌صورت یک‌طرفه، غیرفعال و در گستره‌ی وسیعی از فرکانس‌های تحریک جذب نماید.

بسیاری از سازه‌ها مانند پره‌ی بالگرد، بال هواپیما، پره‌ی ملخ موتور هوایی، پره‌ی موتور توربوفن، پره‌ی توربین بادی، بازوهای مکانیکی روبات، بازوهای پیستونی، عرشه‌ی کشتی و... به صورت تیر قابل مدل‌سازی هستند. همچنین پیشرفت سریع کشفیات فضایی موجب به‌کارگیری سازه‌های بسیار

---

<sup>1</sup> Rotating beam

<sup>2</sup> Centrifugal stiffening

<sup>3</sup> Strongly Modulated Response (SMR)

منعطف شده است که در محدوده‌ی تغییر شکل‌های الاستیک بزرگ عمل می‌کنند و این سازه‌ها عمدتاً به صورت تیرهای خاص می‌باشند. بنابراین بسط تئوری تیرها خصوصاً رفتار غیر خطی آنها بسیار مفید و کارآمد می‌باشد [۸۴].

تیرها المان‌هایی با نسبت طول به ضخامت قابل ملاحظه هستند که به واسطه‌ی تنش‌های محوری در مقطع، قابلیت تحمل نیروهای عرضی را دارند. مدل‌سازی تیر بر اساس دو تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو انجام می‌شود. در تئوری اویلر-برنولی، تیر بسیار نازک در نظر گرفته می‌شود که در آن از اینرسی درون صفحه‌ای و تنش برشی مقطع صرف‌نظر می‌شود اما در تیر تیموشنکو ضخامت قابل توجه است و اثر برش دخالت داده می‌شود.

سیستم مورد بررسی یک تیر غیرخطی اویلر-برنولی است که با شرایط تکیه‌گاهی یک‌سرگیردار در نظر گرفته شده است. در این تحقیق فرض بر این است که پارامترهای سیستم اصلی به صورت کند با زمان تغییر می‌کنند. فرض اولیه بر استفاده از چاه غیر خطی انرژی یک‌درجه‌آزادی می‌باشد که می‌تواند به صورت چند چاه یک‌درجه‌آزادی مورد استفاده قرار گیرد. تفاوت اساسی تحقیق حاضر با کار-های پیشین متغیر با زمان بودن نیروی کشش انتهایی تیر است که می‌تواند در طبیعت مدل‌سازی پدیده‌ی خزش باشد. تیر به صورت غیرخطی در نظر گرفته شده است

بررسی پارامترهای جاذب با به کارگیری چاه غیرخطی انرژی با سفتی غیرخطی مرتبه‌ی سوم انجام می‌شود و پارامترهای بهینه‌ی جاذب به منظور کاهش ارتعاشات تیر و افزایش محدوده‌ی فرکانسی مؤثر کاهش ارتعاش محاسبه می‌شوند. در تمامی بررسی‌ها تحلیل از نوع دینامیکی در حالت پایا می‌باشد. بررسی همگرایی پاسخ تیر، تحلیل پایداری، مقاوم‌بودن تیر در برابر تغییرات دامنه‌ی نیروی تحریک، بدست آوردن بیشترین بازدهی چاه غیرخطی انرژی با تغییرات پارامترها و بررسی دینامیک غیرخطی سیستم از جمله موضوعات مورد بررسی در این پایان‌نامه هستند.

## فصل دوم

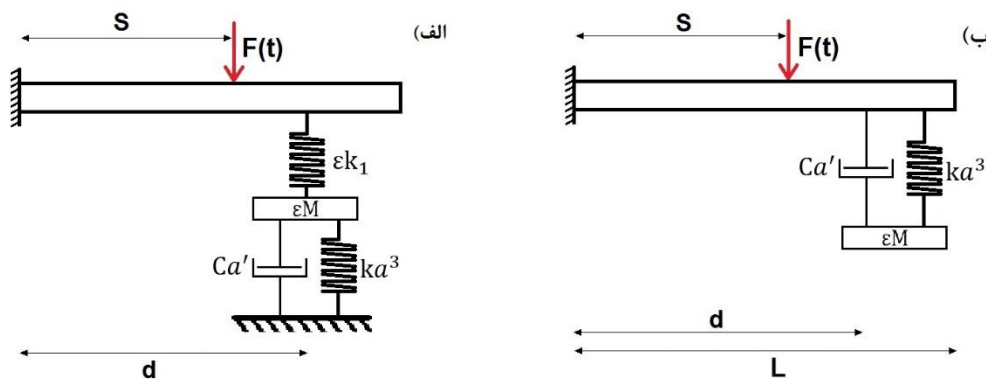
# استخراج معادلات و حل تحلیلی

## ۱-۲ مقدمه

در این فصل به مدل سازی، بدست آوردن معادلات حاکم بر سیستم مورد بررسی، روش حل تحلیلی و نیمه تحلیلی برای دستیابی به پاسخ معادلات پرداخته می شود. سیستم مورد نظر یک تیر غیرخطی یک سرگیردار اویلر-برنولی است که چاه غیرخطی متصل به آن یکبار به صورت متصل به زمین و بار دیگر به صورت آزاد مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات سیستم با استفاده از روش نیوتون اثبات شده اند و برای گسسته سازی از روش گالرکین<sup>۱</sup> بهره گرفته شده است. برای بدست آوردن پاسخ معادلات برای هر تعداد مود دلخواه روش نیمه تحلیلی میانگین گیری مختلط<sup>۲</sup> معرفی شده و روند استفاده از این روش برای حالت تک مود مرور می شود و قابل بسط به مودهای بالاتر می باشد.

## ۲-۲ معادلات سیستم بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی

به منظور پیش برد تحقیق حاضر، در ابتدا لازم است تا معادلات کلی سیستم تعیین شوند. سیستم مورد نظر تیر غیرخطی یک سرگیردار می باشد که چاه غیرخطی در دو حالت به آن متصل است. نمایی از سیستم برای درک روشن تری از مسئله به نمایش گذاشته شده است.



شکل ۱-۲: تیر یک سرگیردار متصل به چاه غیرخطی انرژی

سیستم متشکل از یک تیر میرا با شرایط تکیه گاهی یک سرگیردار تحت تحریک ضربه است که به یک

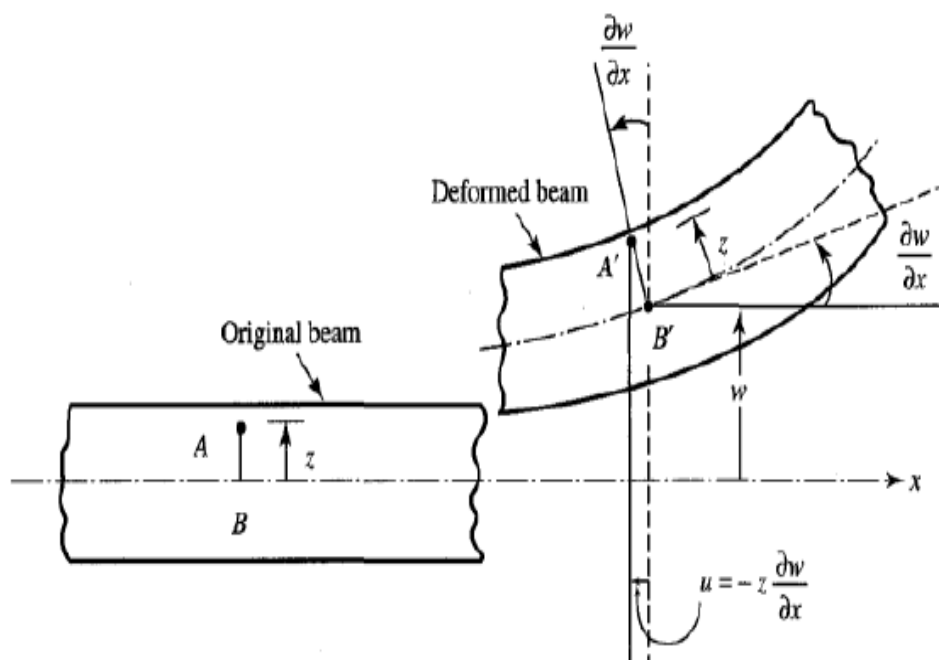
<sup>1</sup> Galerkin method

<sup>2</sup> Complex averaging method

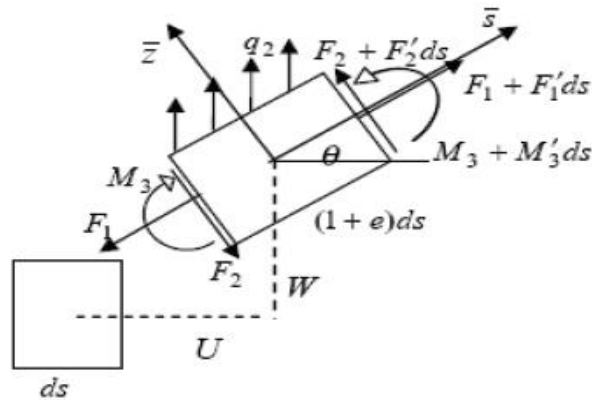
چاه غیرخطی انرژی میرا با سفتی غیرخطی از مرتبه‌ی سوم متصل شده است. در تئوری اویلر-برنولی فرض بر این است که مقطع عرضی مسطحی از تیر که قبل از تغییر شکل بر محور تیر عمود بوده است، بعد از خم شدن تیر نیز بر محور تغییر شکل یافته‌ی تیر عمود باقی می‌ماند. این فرض منجر به صرف نظر کردن از اثرات تغییر شکل برشی و نیز کرنش‌های عرضی می‌گردد.

## ۳-۲ استخراج معادلات با قانون دوم نیوتون

برای استخراج معادلات دو دستگاه، یکی دستگاه مختصات ثابت  $(s, z)$  و دیگری دستگاه مختصات محلی  $(\bar{s}, \bar{z})$  در محل سطح مقطع تیر تغییر شکل یافته در نظر گرفته می‌شود. شکل زیر نمایی از المان تغییر شکل یافته‌ی تیر را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲: المانی از تیر اویلر-برنولی قبل و بعد از تغییر شکل [۸۵]



شکل ۲-۳: المان تغییر شکل یافته ی تیر [۲۳]

با اعمال قانون دوم نیوتون به المان تغییر شکل یافته از میکروتیر معادلات حرکت به صورت زیر خواهد شد:

$$\vec{F}'ds + q_2 d\vec{s}e_z = m(s)ds(\ddot{U}\vec{e}_s + \ddot{W}\vec{e}_z) \quad (۱-۲)$$

$$M'_3 ds + F_2(1 + e)ds = 0 \quad (۲-۲)$$

در معادلات بالا  $\vec{F}$  برآیند نیروهای محوری وارد شده بر سطح مقطع تیر تغییر شکل یافته،  $F_2$  نیروی برشی موازی با سطح مقطع تیر،  $M_3$  مقدار ممان خمشی در سطح مقطع تیر حول محور عمود بر صفحه،  $\vec{e}_s$  و  $\vec{e}_z$  بردارهای یکه در دستگاه مختصات ثابت،  $U$  و  $W$  به ترتیب جابجایی تیر در راستای طولی و عرضی در دستگاه مختصات ثابت،  $m(s)$  جرم بر واحد طول،  $e$  مقدار کرنش محوری خمشی تار خنثی سطح مقطع و  $q_2$  نیروی خارجی وارد شده بر واحد سطح تیر می باشد. از شکل (۲-۳) و رابطه ی (۲-۲) نتیجه می شود:

$$\vec{F} = (F_1 \cos(\theta) - F_2 \sin(\theta))\vec{e}_s + (F_1 \sin(\theta) - F_2 \cos(\theta))\vec{e}_z \quad (۳-۲)$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{M'_3}{(1 + e)} \quad (۴-۲)$$

درحالی که  $\theta$  زاویه ی المان تغییر شکل یافته با موقعیت مستقیم تیر می باشد، با جایگذاری رابطه ی (۳-۲)

(۲) در رابطه‌ی (۱-۲) و جایگذاری  $\vec{F}_2$  از رابطه‌ی (۴-۲) در آن، معادلات حرکت و شرایط مرزی آن در جهات طولی و عرضی به‌صورت زیر خواهد شد:

$$(F_1 \cos(\theta))' + \left( \frac{M'_3 \sin(\theta)}{1+e} \right)' = m(s)\ddot{U}.$$

$$(F_1 \sin(\theta))' - \left( \frac{M'_3 \cos(\theta)}{1+e} \right)' + q_2 = m(s)\ddot{W}.$$

$$U(0, t) = 0 \text{ , } U(L, t) = \bar{\varepsilon} . \quad (۵-۲)$$

$$W(0, t) = 0 \text{ , } \frac{\partial W(0, t)}{\partial s} = 0 \text{ , } EI \frac{\partial^2 W(L, t)}{\partial s^2} = 0 \text{ , } \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 W(L, t)}{\partial s^2} \right) = 0$$

$E$  مدول الاستیسیته‌ی تیر و  $I$  گشتاور دوم سطح مقطع تیر حول محور خنثی می‌باشد. معمولاً یک بار محوری برای افزایش فرکانس طبیعی به تیر اعمال می‌شود. برای مدل‌سازی بار محوری فرض می‌شود که یک انتهای میکروتیر به اندازه‌ی  $\bar{\varepsilon}$  در راستای محوری کشیده شده است.

$$m(s) = w_b \rho_b t_b \quad (۶-۲)$$

در معادله‌ی بالا،  $w_b$  پهنای تیر،  $t_b$  ضخامت سطح مقطع تیر و  $\rho_b$  چگالی جرمی تیر می‌باشد. نیرو-های خارجی اعمالی بر واحد طول تیر، تحریک ضربه و میرایی هوا ( $\beta$  ضریب میرایی ویسکوز بر واحد طول) می‌باشد و به صورت زیر قابل بیان است.

$$q_2 = -\beta \dot{W} - B \text{Heaviside} \left( \frac{T}{2} - t \right) \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (۷-۲)$$

معادله‌ی تنش-کرنش از رابطه‌ی مقابل محاسبه می‌شود:

$$\sigma_b = E \varepsilon_b \text{ , } \varepsilon_b = e - \kappa \bar{z} \text{ , } \kappa = \theta' \text{ , } A_b = w_b t_b \text{ , } I_b = \frac{1}{12} w_b t_b^3 \quad (۸-۲)$$

$\sigma_b$  تنش محوری در تیر ،  $\varepsilon_b$  کرنش محوری در سطح مقطع تیر،  $\bar{z}$  فاصله از محور خنثی،  $\kappa$  انحنای خمشی تیر تغییرشکل‌یافته و  $\theta$  زاویه‌ی چرخش تیر می‌باشد.

حال با استفاده از رابطه‌ی (۸-۲) نیروی محوری و گشتاور خمشی در سطح مقطع تیر تغییر شکل یافته به صورت زیر بدست می‌آید:

$$F_1 = \int \sigma_b dA = \int_{-\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}} (E\varepsilon_b) w_b d\bar{z} = EAe \quad (9-2)$$

$$M_3 = - \int \sigma_b \bar{z} dA = - \int_{-\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}} \bar{z} (E\varepsilon_b) w_b d\bar{z} = EI\kappa \quad (10-2)$$

کشش لایه‌ی میانی، زاویه‌ی چرخش و بسط تیلور آنها از شکل (۲-۳) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$e = \sqrt{(1+U')^2 + W'^2} - 1 = U' + \frac{1}{2}W'^2 - \frac{1}{2}U'W'^2 + \dots$$

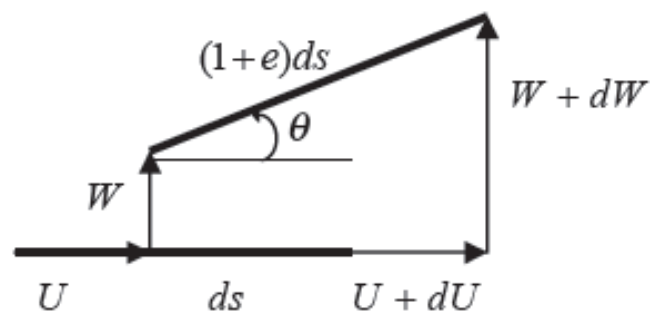
$$\frac{1}{1+e} = 1 - U' - \frac{1}{2}W'^2 + \frac{3}{2}U'W'^2 + U'^2 \dots$$

$$\cos \theta = \frac{1+U'}{1+e} = 1 - \frac{1}{2}W'^2 + U'W'^2 + \dots$$

$$\sin \theta = \frac{W'}{1+e} = W' - U'W' + U'^2W' - \frac{1}{2}W'^3 + \dots$$

$$\kappa = \theta' = (W' - U'W' + U'^2W' - \frac{1}{3}W'^3)' \quad (11-2)$$

شکل زیر رابطه‌ی میان جابجایی‌ها و زاویه‌ی چرخش یک المان از تیر را به نمایش درآورده است.



شکل ۴-۲: رابطه‌ی میان جابجایی و زاویه‌ی چرخش یک المان از تیر

با جایگذاری معادلات (۷-۲)، (۹-۲) و (۱۰-۲) در معادله‌ی (۵-۲) و استفاده از بسط روابط (۱۱-۲)،

معادلات کوپل شده برای راستای طولی و جانبی با حفظ جملات تا مرتبه‌ی سوم به صورت زیر ایجاد می‌شوند:

$$m(s)\ddot{U} - (EAU')' = \left( EA \left( \frac{1}{2} W'^2 - U'W'^2 \right) \right)' + [W'(EI(W' - U'W'))' - 2U'W'(EIW'')]']' \quad (12-2)$$

$$(EIW'')'' + m(s)\ddot{W} + \beta\dot{W} = \left( EA \left( U'W' - U'^2W' + \frac{1}{2}W'^3 \right) \right)' + [(EI(U'W'))'(1 - U') + (EIW'')(U' - U'^2 + W'^2) - \left( EI \left( U'^2W' - \frac{1}{3}W'^3 \right) \right)']' \quad (13-2)$$

صحت این معادلات را می‌توان با مقایسه‌ی آنها با معادلات استخراج شده در رساله‌های [۸۶، ۸۷] به روش هامیلتون بررسی کرد.

## ۲-۴ ساده‌سازی معادلات

برای تیرهای باریک جمله‌ی اینرسی طولی قابل صرف نظر شدن است [۲۳]. همچنین میرایی از مرتبه‌ی ضعیفی نسبت به سفتی در راستای طولی برخوردار است. بنابراین از اثرات آن در جهت طولی صرف نظر می‌شود. بنابراین با این فرضیات معادلات (۱۲-۲) با حفظ جملات با مرتبه‌ی پایین‌تر به صورت زیر خواهد شد:

$$-EAU'' = \frac{1}{2}EA(W'^2)' \quad (14-2)$$

با انتگرال گیری از معادله‌ی (۱۴-۲) داریم:

$$U' = -\frac{1}{2}W'^2 + C_1(t) \quad (15-2)$$

$C_1(t)$  ثابت انتگرال گیری می باشد و مرتبه ی آن برابر  $(10^{-4})$  می باشد. این معادله نشان می دهد که

$O(U) = O(W^2)$ ، با انتگرال گیری از معادله ی (۱۵-۲) از  $s=0$  تا  $s=L$  نتیجه می شود:

$$U(L) - U(0) = \frac{-1}{2} \int_0^L W'^2 ds + C_1(t)L \quad (16-2)$$

با جایگذاری شرایط مرزی از معادله ی (۵-۲) در معادله ی (۱۶-۲) و انتگرال گیری از آن به نتیجه ی

زیر می رسیم:

$$C_1(t) = \frac{\bar{\varepsilon}}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L W'^2 ds \quad (17-2)$$

حال با در نظر گرفتن  $O(U) = O(W^2)$ ، ابتدا جملات با مرتبه ی بالاتر از سه در معادله ی (۱۳-۲)

حذف و فرضیاتی که برای استخراج معادله ی (۱۴-۲) به کار گرفته شد، اعمال می شود. سپس با

جایگذاری  $U'$  از معادله ی (۱۵-۲) در معادله ی (۱۳-۲) داریم:

$$EIW'''' + m(s)\ddot{W} + \beta\dot{W} = EAC_1(t)W'' - B\text{Heaviside}\left(\frac{T}{2} - t\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (18-2)$$

صحت معادله ی (۱۸-۲) را می توان با مقایسه ی آنها با معادلات ساده شده ای که در [۸۸] بدست آورده

شده است، بررسی کرد. از نقطه نظر تعیین نیروهای خارجی و ناپایستار، سه نیروی ناشی از اتصال چاه

غیرخطی انرژی، تحریک ضربه ی خارجی میرایی، در این دسته بندی قرار می گیرند. به منظور استخراج

معادله ی چاه غیرخطی انرژی، با توجه به اینکه این مجموعه به صورت متمرکز به تیر متصل می شود،

نیروی خارجی ناشی از آن با محاسبه ی کار مجازی آن حاصل می گردد.

$$\delta work_{nes} = F_{nes} \delta W_{nes} \quad (19-2)$$

در رابطه ی فوق،  $\delta W_{nes}$ ، جابجایی مجازی تیر در نقطه ی اتصال چاه غیرخطی می باشد و نیروی ناشی

از چاه غیرخطی،  $F_{nes}$ ، از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$F_{nes} = -[(\varepsilon k_1(W_{nes}(t) - y(d, t)) + K_{nes}W_{nes}^3(t) + \varepsilon C_{nes}\dot{W}_{nes}(t)] \quad (20-2)$$

که در این رابطه  $K_{nes}$  و  $C_{nes}$ ، به ترتیب سفتی و میرایی چاه غیرخطی،  $y(d, t)$ ، جابجایی مختصه‌ی عمومی چاه غیرخطی،  $W_{nes}$  و  $\dot{W}_{nes}$ ، به ترتیب جابجایی و سرعت نقطه‌ای از تیر که چاه غیرخطی به آن متصل شده می‌باشند و از آنجایی که چاه غیرخطی انرژی با جابجایی تیر مخالفت می‌کند، لذا این نیرو با علامت منفی نشان داده می‌شود. گفتنی است که، رابطه‌ی (20-2) برای چاه غیرخطی انرژی با سفتی کاملاً غیرخطی و میرایی خطی نوشته شده است و با تغییر این خصوصیات، این رابطه نیز تغییر خواهد کرد. نیروی خارجی اعمال شده به تیر به صورت پالس سینوسی، طبق رابطه‌ی زیر در نظر گرفته شده است که در این رابطه،  $B$ ، دامنه‌ی پالس و  $T$  مدت زمان اعمال پالس می‌باشد.

$$F(t) = B \text{Heaviside}\left(\frac{T}{2} - t\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$$F(t) = \begin{cases} B \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (21-2)$$

بنابراین معادله‌های کلی دو مکانیزم به صورت زیر قابل بازنویسی هستند:

مکانیزم الف)

$$EI y_{xxxx}(x, t) + M y_{tt}(x, t) + \varepsilon \beta y_t(x, t) + \varepsilon k_1 [y(d, t) - W(t)] \delta(x - d) -$$

$$EA \left[ \frac{\bar{\varepsilon}}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^1 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F(t) \delta(x - s)$$

$$\varepsilon M \ddot{W}(t) + \varepsilon k_1 [W(t) - y(d, t)] + K W^3(t) + \varepsilon C \dot{W} = 0 \quad (22-)$$

(2)

مکانیزم ب)

$$EI y_{xxxx}(x, t) + M y_{tt}(x, t) + \varepsilon \beta y_t(x, t) + \{\varepsilon K[y(d, t) - W(t)]^3 + \varepsilon C[y_t(d, t) - \dot{W}(t)]\} \delta(x - d) - EA \left[ \frac{\bar{\varepsilon}}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^1 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F(t) \delta(x - s)$$

$$\varepsilon M \ddot{W}(t) + \varepsilon K[W(t) - y(d, t)]^3 + \varepsilon C[\dot{W}(t) - y_t(d, t)] = 0 \quad (23-2)$$

## ۵-۲ بی‌بعدسازی معادلات

پس از استخراج معادلات سیستم، از آنجایی که مرتبه‌ی اجملات مختلف، اختلاف قابل توجهی باهم دارند، لازم است تا با استفاده از بی‌بعدسازی، این مشکل برطرف و کلیه‌ی جمملات، دارای مرتبه‌ای تقریباً یکسان شوند. به‌منظور شناسایی ضرایب جهت بی‌بعدسازی معادلات، لازم است تا مرتبه‌ی هریک از جمملات، مشخص و پس از آن مؤلفه‌های بی‌بعد کاربردی استخراج می‌شوند. با دقت در معادلات (۲۲-۲) و (۲۳-۲) ملاحظه می‌شود که هریک از جمملات از جنس نیرو بوده و در واقع، جمع برداری نیروها، ساختار معادلات را شکل می‌دهد. بدین ترتیب، لازم است تا به ازای هر مجموعه از ضرایب بی‌بعد، معادلات حل و پس از تعیین جابجایی‌ها و شتاب‌ها، مرتبه‌ی جمملات با یکدیگر مقایسه شوند. در صورتی که ضرایب بدست‌آمده از مرتبه‌ی یکسانی باشند، می‌توان گفت که روابط بی‌بعد در- نظر گرفته‌شده، مناسب هستند. با در نظر گرفتن این نکات، مؤلفه‌های بی‌بعد بدین ترتیب بدست می‌آیند:

$$\bar{X} = \frac{X}{L} \quad , \quad \bar{y} = \frac{y}{L} \quad , \quad \bar{W} = \frac{W}{L}$$

$$\tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{M}} \quad , \quad \bar{K} = \frac{KL^6}{EI} \quad , \quad \bar{\beta} = \beta \frac{L^2}{\sqrt{EIM}}$$

$$\bar{C} = C \frac{L^2}{EIM} \quad , \quad \bar{F}(\tau) = F(t) \frac{L^3}{EI} \quad , \quad \bar{k}_1 = k_1 \frac{L^4}{EI} \quad (24-2)$$

<sup>1</sup> Order

با جایگذاری پارامترهای بی‌بعد (۲-۲۴) در معادلات (۲-۲۳) و (۲-۲۲) معادلات بی‌بعد حرکت حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}, \tau) + \bar{y}_{\tau\tau}(\bar{x}, \tau) + \varepsilon \bar{\beta} \bar{y}_{\tau}(\bar{x}, \tau) + \varepsilon \bar{k}_1 \left[ \bar{y} \left( \frac{d}{L} \cdot \tau \right) - \bar{W}(\tau) \right] \delta \left( \bar{x} - \frac{d}{L} \right) - \\ & \left[ \frac{A\bar{E}L}{I} + \frac{AL^2}{2I} \int_0^1 (\bar{y}_{\bar{x}})^2 d\bar{x} \right] \bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} = \bar{F}(\tau) \delta \left( \bar{x} - \frac{s}{L} \right) \end{aligned} \quad (۲۵-۲)$$

$$\varepsilon \ddot{\bar{W}}(\tau) + \varepsilon \bar{k}_1 \left[ \bar{W}(\tau) - \bar{y} \left( \frac{d}{L} \cdot \tau \right) \right] + \bar{K} \bar{W}^3(\tau) + \varepsilon \bar{C} \dot{\bar{W}}(\tau) = 0$$

مکانیزم ب)

$$\begin{aligned} & \bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}, \tau) + \bar{y}_{\tau\tau}(\bar{x}, \tau) + \varepsilon \bar{\beta} \bar{y}_{\tau}(\bar{x}, \tau) + \{ \varepsilon \bar{K} \left[ \bar{y} \left( \frac{d}{L} \cdot \tau \right) - \bar{W}(t) \right]^3 + \\ & \varepsilon \bar{C} \left[ \bar{y}_{\tau} \left( \frac{d}{L} \cdot \tau \right) - \dot{\bar{W}}(t) \right] \} \delta \left( \bar{x} - \frac{d}{L} \right) - \left[ \frac{A\bar{E}L}{I} + \frac{AL^2}{2I} \int_0^1 (\bar{y}_{\bar{x}})^2 d\bar{x} \right] \bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} = \\ & \bar{F}(\tau) \delta \left( \bar{x} - \frac{s}{L} \right) \end{aligned}$$

$$\varepsilon \ddot{\bar{W}}(\tau) + \varepsilon \bar{K} \left[ \bar{W}(\tau) - \bar{y} \left( \frac{d}{L} \cdot \tau \right) \right]^3 + \varepsilon \bar{C} \left[ \dot{\bar{W}}(\tau) - \bar{y}_{\tau} \left( \frac{d}{L} \cdot \tau \right) \right] = 0 \quad (۲۶-۲)$$

## ۲-۶ انتخاب شکل مود مناسب

یافتن توابعی که بتوانند همه‌ی شرایط مرزی هندسی و طبیعی تیر یک‌سرگیردار با قابلیت تغییر شکل-های بزرگ را مرتفع نمایند، سخت و مشکل خواهد بود. از این‌رو مطابق با روش گالرکین باید به دنبال توابعی بود که فقط شرایط مرزی هندسی را ارضا نمایند. در کار حاضر، شکل مود تیر یک‌سرگیردار اوایلر-برنولی به‌عنوان شکل مود قابل قبول در جهت محور  $x$  در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه شکل مودها باید شرایط مرزی را برآورده نمایند، بنابراین داریم:

$$\phi_n(x) = A_n ((\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)) -$$

$$\left[ \frac{\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L)}{\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)} \right] (\sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x)) \quad (27-2)$$

$$A_n = \left\{ \int_0^L M \left[ \frac{\phi_n(x)}{A_n} \right]^2 dx \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad \omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta L^2) \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \quad (28-2)$$

$$\beta_n L = 1.8751, 4.6941, 7.8547, 10.9956, \dots \quad (29-2)$$

در معادلات بالا، شکل  $\phi_n(x)$  یک سرگیردار،  $A_n$  دامنه‌ی تیر و  $\omega$ ، فرکانس طبیعی می‌باشد.

## ۷-۲ اعمال روش گالرکین و بدست آوردن معادلات حاکم

با توجه به اینکه سیستم اولیه‌ی مورد بحث، یک سیستم پیوسته می‌باشد، گسسته‌سازی معادله‌ی آن به منظور حل معادلات سیستم، ضروری است. در این تحقیق برای جداسازی معادلات زمان از مکان، تبدیل معادله با مشتقات جزئی تیر به یک معادله‌ی معمولی یا معادله‌ی دیفرانسیل مشخصه‌ی تیر و بدست آوردن یک معادله‌ی دیفرانسیل منحصراً تابع زمان از روش گالرکین بهره گرفته‌ایم. براین اساس جابه‌جایی در راستای مماسی به صورت مقابل در نظر گرفته شده‌است:

$$\bar{y}(\bar{x}, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\tau) \phi_n(\bar{x}) \quad (30-2)$$

در این رابطه  $n$ ، تعداد درجات آزادی،  $q_n(\tau)$ ، تابع پاسخ زمانی و  $\phi_n(\bar{x})$  تابع ویژه‌ی نرمال‌شده<sup>۱</sup> یا شکل مد تیر یک سرگیردار می‌باشد که باید شرایط مرزی سیستم را مرتفع نماید. با جایگذاری معادله-ی (۳۰-۲) در معادلات حرکت بی‌بعدشده داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(\tau) \phi_n^{(4)}(\bar{x}) + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{q}_n(\tau) \phi_n(\bar{x}) + \varepsilon \bar{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{q}_n(\tau) \phi_n(\bar{x}) +$$

<sup>1</sup> Normalised eigenfunction

$$\varepsilon \bar{k}_1 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\tau) \phi_n \left( \frac{d}{L} \right) - \bar{W}(\tau) \right] \delta \left( \bar{x} - \frac{d}{L} \right) - \left[ \frac{A \bar{\varepsilon} L}{I} + \right. \\ \left. \frac{AL^2}{2I} \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\tau) \phi'_n(\bar{x}) \right)^2 d\bar{x} \right] \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\tau) \phi''_n(\bar{x}) = \bar{F}(\tau) \delta \left( \bar{x} - \frac{s}{L} \right) \quad (31-2)$$

$$\varepsilon \ddot{\bar{W}}(\tau) + \varepsilon \bar{k}_1 \left[ \bar{W}(\tau) - \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\tau) \phi_n \left( \frac{d}{L} \right) \right] + \bar{K} \bar{W}^3(\tau) + \varepsilon \bar{C} \dot{\bar{W}}(\tau) = 0 \quad (32-2)$$

حال با اعمال خاصیت ارتوگونالیتی، ضرب طرفین معادلات در  $\phi_h(\bar{x})$ ،  $h = (0, \dots, \infty)$  و انتگرال-گیری در بازه‌ی  $\bar{x} = [0, 1]$  داریم:

$$\int_0^1 \sum_{h=0}^{\infty} q_h(\tau) \phi_h^{(4)}(\bar{x}) \phi_h(\bar{x}) d\bar{x} + \int_0^1 \sum_{h=0}^{\infty} \ddot{q}_h(\tau) \phi_h(\bar{x}) \phi_h(\bar{x}) d\bar{x} + \\ \varepsilon \bar{\beta} \int_0^1 \sum_{h=0}^{\infty} \dot{q}_h(\tau) \phi_h(\bar{x}) \phi_h(\bar{x}) d\bar{x} + \varepsilon \bar{k}_1 \int_0^1 \left[ \sum_{h=0}^{\infty} q_h(\tau) \phi_h \left( \frac{d}{L} \right) - \bar{W}(\tau) \right] * \\ \delta \left( \bar{x} - \frac{d}{L} \right) \phi_h(\bar{x}) d\bar{x} - \int_0^1 \left[ \frac{A \bar{\varepsilon} L}{I} + \frac{AL^2}{2I} \int_0^1 \left( \sum_{h=0}^{\infty} q_h(\tau) \phi'_h(\bar{x}) \right)^2 d\bar{x} \right] * \\ \sum_{h=0}^{\infty} q_h(\tau) \phi''_h(\bar{x}) \phi_h(\bar{x}) d\bar{x} = \int_0^1 \bar{F}(\tau) \delta \left( \bar{x} - \frac{s}{L} \right) \phi_h(\bar{x}) d\bar{x} \\ \varepsilon \ddot{\bar{W}}(\tau) + \varepsilon \bar{k}_1 \left[ \bar{W}(\tau) - \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\tau) \phi_n \left( \frac{d}{L} \right) \right] + \bar{K} \bar{W}^3(\tau) + \varepsilon \bar{C} \dot{\bar{W}}(\tau) = 0 \quad (33-2)$$

بنابراین داریم:

$$b_{fh} \ddot{q}_h(\tau) + \varepsilon \bar{\beta} b_{fh} \dot{q}_h(\tau) + b_{sh} q_h(\tau) + \varepsilon \bar{k}_1 \left[ \sum_{r=0}^{\infty} q_r(\tau) \phi_r \left( \frac{d}{L} \right) - \bar{W}(\tau) \right] \phi_h \left( \frac{d}{L} \right) \\ - \left[ \frac{A \bar{\varepsilon} L}{I} + \frac{AL^2}{2I} b_{dh} q_h^2(\tau) \right] q_h(\tau) b_{ch} = \bar{F}(\tau) \phi_h \left( \frac{s}{L} \right) . \quad h = (0, \dots, \infty)$$

$$\varepsilon \ddot{W}(\tau) + \varepsilon \bar{K}_1 \left[ \bar{W}(\tau) - \sum_{r=0}^{\infty} q_r(\tau) \phi_r \left( \frac{d}{L} \right) \right] + \bar{K} \bar{W}^3(\tau) + \varepsilon \bar{C} \dot{W}(\tau) = 0 \quad (34-2)$$

که ضرایب در آن بدین گونه تعریف می‌شوند:

$$b_{fh} = \int_{\bar{x}=0}^1 \phi_h^2(\bar{x}) d\bar{x} \quad . \quad b_{sh} = \int_{\bar{x}=0}^1 \frac{d^4 \phi_h(\bar{x})}{d\bar{x}^4} \phi_h(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$b_{ch} = \int_{\bar{x}=0}^1 \frac{d^2 \phi_h(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \phi_h(\bar{x}) d\bar{x} \quad . \quad b_{dh} = \int_{\bar{x}=0}^1 (\phi_h')^2(\bar{x}) d\bar{x} \quad (35-2)$$

همچنین برای مکانیزم دوم این روش دنبال می‌شود که به اقتضای ایجاز کلام فقط معادلات نهایی نوشته شده‌اند:

$$b_{fh} \ddot{q}_h(\tau) + \varepsilon \bar{\beta} b_{fh} \dot{q}_h(\tau) + b_{sh} q_h(\tau) + \left\{ \varepsilon \bar{K} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} q_r(\tau) \phi_r \left( \frac{d}{L} \right) - \bar{W}(\tau) \right]^3 + \right.$$

$$\left. \varepsilon \bar{C} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} \dot{q}_r(\tau) \phi_r \left( \frac{d}{L} \right) - \dot{\bar{W}}(\tau) \right] \phi_h \left( \frac{d}{L} \right) - \left[ \frac{A \bar{\varepsilon} L}{I} + \frac{A L^2}{2I} b_{dh} q_h^2(\tau) \right] \right\} *$$

$$q_h(\tau) b_{ch} = \bar{F}(\tau) \phi_h \left( \frac{S}{L} \right), \quad h = (0, \dots, \infty)$$

$$\varepsilon \ddot{W}(\tau) + \varepsilon \bar{K} \left[ \bar{W}(\tau) - \sum_{r=0}^{\infty} q_r(\tau) \phi_r \left( \frac{d}{L} \right) \right]^3 + \varepsilon \bar{C} \left[ \dot{\bar{W}}(\tau) - \sum_{r=0}^{\infty} \dot{q}_r(\tau) \phi_r \left( \frac{d}{L} \right) \right] = 0 \quad (36-2)$$

در معادلات بالا عبارت  $(A \bar{\varepsilon} L)/I = N$  در نظر گرفته شده است که  $N$  نیروی کششی انتهای تیر است که، به صورت کند با زمان قابل تغییر است.

## ۸-۲ حل نیمه تحلیلی معادلات غیر خطی کوپل و روش میانگین گیری مختلط

سیستم‌های غیر خطی دارای پیچیدگی‌های زیادی می‌باشند، لذا حل دقیق تئوری ندارند. از جمله اینکه، به دلیل صادق نبودن اصل جمع آثار و تابع انتقال خطی، محاسبات پیچیده‌تر می‌گردد و در برخی فرکانس‌ها چندین جواب برای مسئله وجود دارد که یافتن تمام جواب‌ها نیاز به سعی و خطا و

عملیات محاسباتی پیچیده خواهد داشت. از همین رو یافتن یک راه حل تقریبی برای سیستم‌های دینامیکی غیرخطی همواره مورد توجه محققان بوده است. ایده‌ی به کارگیری دینامیک آرام سیستم‌های غیرخطی یکی از موفق‌ترین روش‌ها برای حل این مشکل بوده است [۸۹].

مدل دینامیک آرام سیستم‌های غیرخطی با تقسیم جواب مسئله به قسمت تغییرات آهسته و سریع شکل می‌گیرد. انگیزه‌ها و دلایل مهمی برای استفاده از دینامیک آرام سیستم وجود دارد. در واقع دینامیک سریع سیستم، نوسانات و نویزهای کوچک حول دینامیک آرام سیستم می‌باشند. لذا، بخش تغییرات آهسته، دینامیک اصلی سیستم را نشان می‌دهد. همچنین تحلیل معادلات دارای تغییرات آهسته از معادلات دیفرانسیل اصلی سیستم ساده‌تر می‌باشد. یکی از روش‌های مناسب برای بدست آوردن دینامیک آرام، روش میانگین‌گیری مختلط می‌باشد [۹۰].

این روش نخستین بار توسط مانویچ [۹۱] برای تحلیل سیستمی از نوسان‌گرهای غیرخطی با خواص غیرخطی نامتقارن، بکار گرفته شد. این روش به عنوان اصلی‌ترین و توانمندترین روش حل پارامتریک برای مسائل با دینامیک غیرخطی و عدم امکان خطی‌سازی (غیرخطی شدید) شناخته شده است [۱۹]. این روش بر مبنای نمایش مختلط معادلات دینامیکی سیستم می‌باشد. درواقع نمایش مختلط معادلات کلاسیک حرکت، برای اولین بار برای یک سیستم شامل نوسان‌گرهای خطی کوپل شده در فیزیک کوانتوم و همچنین برای تحلیل نوسان‌گرهای کوپل‌شده‌ی امواج در مکانیک الکترونیک و فیزیک حالت جامد مورد استفاده قرار گرفت [۹۷-۹۲].

روش میانگین‌گیری مختلط نسبت به روش میانگین‌گیری معمول دارای عملیات محاسباتی ساده‌تری است و عبارت‌های مثلثاتی که حل نهایی مسئله را دشوار می‌سازد، در آن ایجاد نمی‌شود. در روش میانگین‌گیری مختلط نیاز به حل جداگانه برای تشدیدهای اولیه و ثانویه نداریم و فرآیند حل تنها یک‌بار برای همه‌ی فرکانس‌ها انجام می‌پذیرد. در حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی با استفاده از

---

<sup>1</sup> Manevitch

<sup>2</sup> Averaging Techniques

روش‌های معمول تئوری اغتشاشات<sup>۱</sup> نظیر روش میانگین‌گیری و روش مقیاس چندتایی<sup>۲</sup> جملات سکولار و مقسوم‌علیه‌های کوچک (عوامل صفرکننده‌ی مخرج کسر) ایجاد می‌شوند، به همین دلیل این روش‌های حل برای فرکانس‌هایی نزدیک مقسوم‌علیه‌های کوچک معتبر نمی‌باشد. در روش‌هایی مانند میانگین‌گیری یا مقیاس چندتایی، مقسوم‌علیه‌های کوچک به صورت توان عبارت نمایی ظاهر می‌گردند. از آنجا که، در جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیل از تغییرات سریع صرف نظر می‌شود، در نزدیکی مقسوم‌علیه‌های کوچک، عبارت توانی شامل آنها دارای تغییرات آرام می‌باشند و باید در نظر گرفته شوند ولی در فرکانس‌هایی دورتر از مقسوم‌علیه‌های کوچک، می‌توان از آنها صرف نظر کرد. به همین خاطر، در نزدیکی مقسوم‌علیه‌های کوچک، نیاز به حل جداگانه می‌باشد ولی، در روش میانگین‌گیری مختلط، با تغییرمتغیر، معادلات به فضای مختلط دامنه و فاز منتقل می‌شوند و در روند حل، مقسوم‌علیه‌های کوچک ایجاد نمی‌شود لذا، نیاز به حل جداگانه برای این فرکانس‌ها نیست و یک‌بار حل برای تمام فرکانس‌ها کافی است.

این روش برخلاف بسیاری از روش‌های دیگر، دارای یک توانایی مضاعف می‌باشد، به طوری که، از یک سو می‌توان از آن به عنوان یک حل تحلیلی-عددی جهت بررسی صحت محاسبات، مورد استفاده قرارداد و از سویی دیگر توانایی اصلی آن بررسی عمیق فیزیک غیرخطی مسائل می‌باشد. روش میانگین‌گیری مختلط، بر مبنای دو گام مختلط‌سازی و میانگین‌گیری بنا شده است. با انجام مختلط‌سازی، درواقع نوعی بیان مختلط از پاسخ سیستم ارائه می‌شود و با میانگین‌گیری، تنها ترم‌های غالب بر فیزیک مسئله انتخاب می‌گردند. روند انجام این روش به این صورت است که، در گام اول پاسخ‌های سیستم را به صورت توابع زمانی مختلط در نظر می‌گیریم. این توابع زمانی مختلط، متشکل از حاصلضرب ترم دامنه‌ی مختلط با تغییرات کند<sup>۳</sup> و ترم نمایی فرکانس سریع<sup>۴</sup> مختلط می‌باشند که به صورت زیر قابل نمایش است:

<sup>1</sup> Perturbation Techniques

<sup>2</sup> Multiple Scales Techniques

<sup>3</sup> Slowly varying

<sup>4</sup> Fast frequency

$$x_i(t) = \varphi_i(t) e^{j\omega t} \quad (37-2)$$

این در حالی است که توابع زمانی مختلط، بر مبنای گام مختلط سازی به صورت مجموع مشتق پاسخ (سرعت)، به عنوان قسمت حقیقی و حاصلضرب فرکانس سریع و پاسخ، به عنوان قسمت موهومی برای هریک از درجات آزادی همانند رابطه ی زیر در نظر گرفته می شوند:

$$x_i(t) = \dot{u}_i(t) + j\omega u_i(t) \quad (38-2)$$

در نهایت دو دسته روابط بالا را در دستگاه معادلات حاکم بر سیستم جایگذاری می نماییم و تنها ترم های شامل فرکانس سریع  $\omega$ ، را نگه داشته و بقیه ی ترم ها که شامل هارمونیک های سریع تر از سویی، و ترم های با تغییرات کند از سویی دیگر می باشند را حذف می نماییم زیرا فرکانس سریع، تعیین کننده ی فیزیک غالب بر سیستم می باشد. در نتیجه گام میانگین گیری نیز به پایان می رسد. به عبارتی در روش میانگین گیری ابتدا تغییر متغیرهای مختلط در معادلات حرکت جایگزین می شوند، سپس قسمت دینامیک آرام و سریع جداسازی شده و از قسمت سریع میانگین گیری می شود و در نهایت قسمت آرام از معادلات میانگین گیری شده، استخراج می گردد. علت انجام دو گام بالا در واقع این است که ما در این روش به دنبال پاسخ های متناوب نزدیک به غالب ترین المان تعیین کننده ی فیزیک سیستم می باشیم. در ادامه ی کار، با تجزیه ی دستگاه معادلات نهایی به دو بخش حقیقی و موهومی، پاسخ سیستم قابل حصول می باشد. بنابراین در ادامه ی تحلیل سیستم، متغیرهای مختلط به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\chi_q = \dot{q} + i\omega q \quad (39-2)$$

$$\chi_w = \dot{w} + i\omega w$$

جهت بدست آوردن  $\dot{q}$ ،  $\dot{w}$  و  $\omega$ ، به مزدوج  $\chi_q$  و  $\chi_w$  نیاز داریم:

$$\bar{\chi}_q = \dot{q} - i\omega q \quad .i = \sqrt{-1} \quad (40-2)$$

---

<sup>1</sup> Higher harmonics

$$\bar{\chi}_w = \dot{w} - i\omega w$$

در اینجا علامت "بار" نشان دهنده‌ی مزدوج مختلط می‌باشد. بنابراین با جمع کردن  $\chi_q$  و  $\bar{\chi}_q$ ،  $\dot{q}$ ، و با تفریق  $\chi_q$  از  $\bar{\chi}_q$ ،  $q$  بدست می‌آید.

$$q = \frac{\chi_q - \bar{\chi}_q}{2i\omega} \quad , \quad \dot{q} = \frac{\chi_q + \bar{\chi}_q}{2}$$

$$w = \frac{\chi_w - \bar{\chi}_w}{2i\omega} \quad , \quad \dot{w} = \frac{\chi_w + \bar{\chi}_w}{2} \quad (41-2)$$

حال با مشتق‌گیری از روابط (۲-۳۹) به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\dot{\chi}_q = \ddot{q} + i\omega \dot{q}$$

$$\dot{\chi}_w = \ddot{w} + i\omega \dot{w} \quad (42-2)$$

حال با جایگزینی  $\dot{w}$  و  $\dot{q}$  از رابطه‌ی (۲-۴۱) در (۴۲-۲)، رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\ddot{q} = \dot{\chi}_q - \frac{i\omega}{2}(\chi_q + \bar{\chi}_q)$$

$$\ddot{w} = \dot{\chi}_w - \frac{i\omega}{2}(\chi_w + \bar{\chi}_w) \quad (43-2)$$

حال روابط (۲-۴۱) و (۲-۴۳) را در معادلات (۲-۳۴) و (۲-۳۶)، با حذف نیروهای غیرپایستار شامل میرایی و نیروهای تحریک خارجی، جایگزین می‌کنیم. معادلات حرکت برای مکانیزم دوم، بدون نیروهای غیرپایستار از این قرارند:

$$\ddot{q}_0(t) + \varrho_0 q_0(t) + \varepsilon K [q_0(t) \phi_0(d) + \sum_{r=1}^n q_r(t) \phi_r(d) - w(t)]^3 \phi_0(d) -$$

$$\left[ \frac{A\bar{E}L}{I} + \frac{AL^2}{2I} b_{dh} q_0^2(t) \right] q_0(t) \frac{b_{ch}}{b_{fh}} = 0$$

$$\varepsilon \ddot{w}(t) + \varepsilon k \left[ w(t) - q_0(t) \phi_0(d) \sum_{r=1}^n q_r(t) \phi_r(d) \right]^3 = 0 \quad (44-2)$$

جایگذاری متغیرهای مختلط در معادلات بالا:

$$\begin{aligned} & \dot{\chi}_0 - \frac{i\omega}{2} (\chi_0 + \bar{\chi}_0) + \varrho_0 \frac{\chi_0 - \bar{\chi}_0}{2i\omega} + \\ & \left\{ \varepsilon K \left[ \frac{\chi_0 - \bar{\chi}_0}{2i\omega} \phi_0(d) + \sum_{r=1}^n \frac{\chi_r - \bar{\chi}_r}{2i\omega} \phi_r(d) - \frac{\chi_w - \bar{\chi}_w}{2i\omega} \right]^3 \right\} \phi_0(d) - \\ & \left[ \frac{A\bar{E}L}{I} + \frac{AL^2}{2I} b_{dh} \left( \frac{\chi_0 - \bar{\chi}_0}{2i\omega} \right)^2 \right] \left( \frac{\chi_0 - \bar{\chi}_0}{2i\omega} \right) \frac{b_{ch}}{b_{fh}} = 0 \\ & \varepsilon \left[ \dot{\chi}_w - \frac{i\omega}{2} (\chi_w + \bar{\chi}_w) \right] + \\ & \varepsilon k \left[ \frac{\chi_w - \bar{\chi}_w}{2i\omega} - \frac{\chi_0 - \bar{\chi}_0}{2i\omega} \phi_0(d) - \sum_{r=1}^n \frac{\chi_r - \bar{\chi}_r}{2i\omega} \phi_r(d) \right]^3 = 0 \end{aligned} \quad (45-2)$$

حال می‌توان متغیرهای مختلط را به فرم قطبی بیان کرد:

$$\chi_q = \varphi_1 e^{i\omega t} \quad , \quad \chi_w = \varphi_2 e^{i\omega t} \quad (46-2)$$

در روابط بالا  $\varphi_j$ ،  $j = 1, 2$  دامنه‌ی مختلط متغیر با زمان است. در واقع  $\varphi_j$  معرف متغیرهای آهسته

در مقایسه با متغیرهای نمایی سریع  $e^{i\omega t}$  است. با جایگزینی تغییر متغیر (۲-۴۶) در روابط (۲-۴۱) و (۲-۴۳)

۲-۴۳) روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\varphi_1 e^{i\omega t} + \bar{\varphi}_1 e^{-i\omega t}}{2} \quad , \quad q = \frac{\varphi_1 e^{i\omega t} - \bar{\varphi}_1 e^{-i\omega t}}{2i\omega} \\ \ddot{q} &= \dot{\varphi}_1 e^{i\omega t} + i\omega \frac{\varphi_1 e^{i\omega t} - \bar{\varphi}_1 e^{-i\omega t}}{2} \\ w &= \frac{\varphi_2 e^{i\omega t} - \bar{\varphi}_2 e^{-i\omega t}}{2i\omega} \quad , \quad \dot{w} = \frac{\varphi_2 e^{i\omega t} - \bar{\varphi}_2 e^{-i\omega t}}{2} \end{aligned}$$

$$\ddot{w} = \dot{\varphi}_2 e^{i\omega t} + i\omega \frac{\varphi_2 e^{i\omega t} - \bar{\varphi}_2 e^{-i\omega t}}{2} \quad (۴۷-۲)$$

حال با جایگزینی روابط (۴۷-۲) در معادلات (۴۵-۲)، به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 e^{i\omega_1 t} + i\omega_1 \frac{\varphi_1 e^{i\omega_1 t} - \bar{\varphi}_1 e^{-i\omega_1 t}}{2} + \varrho_0 \frac{\varphi_1 e^{i\omega_1 t} - \bar{\varphi}_1 e^{-i\omega_1 t}}{2i\omega_1} + \\ & \left\{ \varepsilon K \left[ \frac{\varphi_1 e^{i\omega_1 t} - \bar{\varphi}_1 e^{-i\omega_1 t}}{2i\omega} \phi_0(d) + \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_1 e^{i\omega_r t} - \bar{\varphi}_1 e^{-i\omega_r t}}{2i\omega} \phi_r(d) - \frac{\varphi_2 e^{i\omega t} - \bar{\varphi}_2 e^{-i\omega t}}{2i\omega} \right]^3 \right\} \\ & * \phi_0(d) - \left[ \frac{A\bar{E}L}{I} + \frac{AL^2}{2I} b_{dh} \left( \frac{\varphi_1 e^{i\omega t} - \bar{\varphi}_1 e^{-i\omega t}}{2i\omega} \right)^2 \right] \left( \frac{\varphi_1 e^{i\omega t} - \bar{\varphi}_1 e^{-i\omega t}}{2i\omega} \right) \frac{b_{ch}}{b_{fh}} = 0 \\ & \varepsilon \left[ \dot{\varphi}_2 e^{i\omega t} + i\omega \frac{\varphi_2 e^{i\omega t} - \bar{\varphi}_2 e^{-i\omega t}}{2} \right] + \varepsilon k * \end{aligned} \quad (۴۸-۲)$$

$$\left[ \frac{\varphi_2 e^{i\omega t} - \bar{\varphi}_2 e^{-i\omega t}}{2i\omega} - \frac{\varphi_1 e^{i\omega t} - \bar{\varphi}_1 e^{-i\omega t}}{2i\omega} \phi_0(d) - \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_1 e^{i\omega_r t} - \bar{\varphi}_1 e^{-i\omega_r t}}{2i\omega} \phi_r(d) \right]^3 = 0$$

با در نظر گرفتن تنها ضرایب  $e^{i\omega t}$ ، سپس، ضرب کردن دو طرف معادلات در  $e^{-i\omega t}$  یا به عبارتی

متوسط‌گیری نسبت به فرکانس اول سیستم، در نظر گرفتن جملات آرام و ساده‌سازی بیشتر به

معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 + i \frac{\omega_1}{2} \varphi_1 - i \frac{\varrho_0}{2\omega_1} \varphi_1 + i \frac{3K\varepsilon}{8\omega_1^3} [\varphi_2 |\varphi_2|^2 \varphi_0(d) - \varphi_1 |\varphi_1|^2 \varphi_0(d)^4 + \\ & \varphi_1^2 \bar{\varphi}_2 \varphi_0(d)^3 + 2|\varphi_1|^2 \varphi_2 \varphi_0(d)^3 - \varphi_2^2 \bar{\varphi}_1 \varphi_0(d)^2 - 2|\varphi_2|^2 \varphi_1 \varphi_0(d)^2 + \\ & 2\omega_1^2 \varphi_2 \varphi_0(d) \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} |\varphi_r|^2 - 2\omega_1^2 \varphi_1 \varphi_0(d)^2 \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} |\varphi_r|^2] + \\ & \frac{A\bar{E}L}{I} \left( \frac{b_{ch}}{b_{fh}} \right) \frac{i\varphi_1}{2\omega_1} + \frac{AL^2}{2I} b_{dh} \left( \frac{b_{ch}}{b_{fh}} \right) \frac{3\varphi_1 |\varphi_1|^2 i}{8\omega_1^3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \dot{\varphi}_2 + \frac{i\varepsilon\omega_1}{2} \varphi_2 + i \frac{3K\varepsilon}{8\omega_1^3} [-\varphi_2 |\varphi_2|^2 + \varphi_1 |\varphi_1|^2 \varphi_0(d)^3 + \varphi_2^2 \bar{\varphi}_1 \varphi_0(d) + \\ & 2|\varphi_2|^2 \varphi_1 \varphi_0(d) - \varphi_2^2 \bar{\varphi}_2 \varphi_0(d)^2 - 2|\varphi_1|^2 \varphi_2 \varphi_0(d)^2 - \\ & 2\omega_1^2 \varphi_2 \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} |\varphi_r|^2 + 2\omega_1^2 \varphi_1 \varphi_0(d) \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} |\varphi_r|^2] = 0 \end{aligned} \quad (49-2)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، از آنجایی که میانگین‌گیری بر مبنای مؤلفه‌های نوسانی سریع صورت می‌گیرد، معادلات حاصل شده بر اساس مؤلفه‌های نوسانی آهسته و فرکانس‌های سیستم می‌باشند. در این مرحله با استفاده از تغییرمتغیرهای (۲-۵۰)، مؤلفه‌های نوسانی آهسته، به دو بخش حقیقی و موهومی تقسیم می‌شوند.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= S e^{i\delta_1} \quad \varphi_2 = A e^{i\delta_2} \quad \delta = \delta_1 - \delta_2 \\ \dot{\varphi}_1 &= \dot{S} e^{i\delta_1} + S i \dot{\delta}_1 e^{i\delta_1} \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{A} e^{i\delta_2} + A i \dot{\delta}_2 e^{i\delta_2} \end{aligned} \quad (50-2)$$

بنابراین با جایگذاری روابط بالا در سیستم (۲-۴۹) معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \dot{S} e^{i\delta_1} + S i \dot{\delta}_1 e^{i\delta_1} &= -i \frac{\omega_1}{2} S e^{i\delta_1} + i \frac{Q_0}{2\omega_1} S e^{i\delta_1} - i \frac{3K\varepsilon}{8\omega_1^3} [A e^{i\delta_2} |A e^{i\delta_2}|^2 \varphi_0(d) - \\ & S e^{i\delta_1} |S e^{i\delta_1}|^2 \varphi_0(d)^4 + S^2 e^{2i\delta_1} \bar{A} e^{-i\delta_2} \varphi_0(d)^3 + 2|S e^{i\delta_1}|^2 A e^{i\delta_2} \varphi_0(d)^3 - \\ & A^2 e^{2i\delta_2} \bar{S} e^{-i\delta_1} \varphi_0(d)^2 - 2|A e^{i\delta_2}|^2 S e^{i\delta_1} \varphi_0(d)^2 + \\ & 2\omega_1^2 A e^{i\delta_2} \varphi_0(d) \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} |A_r e^{i\delta_r}|^2 - \\ & 2\omega_1^2 S e^{i\delta_1} \varphi_0(d)^2 \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} |A_r e^{i\delta_r}|^2] - \frac{A \bar{E} L}{I} \left( \frac{b_{ch}}{b_{fh}} \right) \frac{i S e^{i\delta_1}}{2\omega_1} - \\ & \frac{A L^2}{2I} b_{ah} \left( \frac{b_{ch}}{b_{fh}} \right) \frac{3 S e^{i\delta_1} |S e^{i\delta_1}|^2 i}{8\omega_1^3} \end{aligned} \quad (51-2)$$

$$\varepsilon (\dot{A} e^{i\delta_2} + A i \dot{\delta}_2 e^{i\delta_2}) = -\frac{i\varepsilon\omega_1}{2} A e^{i\delta_2} - i \frac{3K\varepsilon}{8\omega_1^3} [-A e^{i\delta_2} |A e^{i\delta_2}|^2 +$$

$$\begin{aligned}
& S e^{i\delta_1} |S e^{i\delta_1}|^2 \varphi_0(d)^3 + A^2 e^{2i\delta_2} \bar{S} e^{-i\delta_1} \varphi_0(d) + 2 |A e^{i\delta_2}|^2 S e^{i\delta_1} \varphi_0(d) - \\
& S^2 e^{2i\delta_1} \bar{A} e^{-i\delta_2} \varphi_0(d)^2 - 2 |S e^{i\delta_1}|^2 A e^{i\delta_2} \varphi_0(d)^2 - \\
& 2\omega_1^2 A e^{i\delta_2} \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} |A_r e^{i\delta_r}|^2 + 2\omega_1^2 S e^{i\delta_1} \varphi_0(d) \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} |A_r e^{i\delta_r}|^2] \quad (52-2)
\end{aligned}$$

می‌دانیم که  $|e^{i\delta_2}| = 1$  ،  $|e^{i\delta_1}| = 1$  و داریم:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad . \quad e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \quad (53-2)$$

با تقسیم معادله‌ی (51-2) بر  $e^{i\delta_1}$  و معادله‌ی (52-2) بر  $e^{i\delta_2}$  به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
& \dot{S} + S i \dot{\delta}_1 = -i \frac{\omega_1}{2} S + i \frac{Q_0}{2\omega_1} S - i \frac{3K\varepsilon}{8\omega_1^3} [A^3 e^{i(\delta_2 - \delta_1)} \varphi_0(d) - S^3 \varphi_0(d)^4 + \\
& S^2 \bar{A} e^{i(\delta_1 - \delta_2)} \varphi_0(d)^3 + 2S^2 A e^{i(\delta_2 - \delta_1)} \varphi_0(d)^3 - A^2 \bar{S} e^{2i(\delta_2 - \delta_1)} \varphi_0(d)^2 - \\
& 2A^2 S \varphi_0(d)^2 + 2\omega_1^2 A \varphi_0(d) e^{i(\delta_2 - \delta_1)} \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} A_r^2 - \\
& - 2\omega_1^2 S \varphi_0(d)^2 \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} A_r^2 - \frac{A\bar{E}L}{I} \left( \frac{b_{ch}}{b_{fh}} \right) \frac{iS}{2\omega_1} - \frac{AL^2}{2I} b_{dh} \left( \frac{b_{ch}}{b_{fh}} \right) \frac{3S^3 i}{8\omega_1^3} \quad (54-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon (\dot{A} + A i \dot{\delta}_2) = -\frac{i\varepsilon\omega_1}{2} A - i \frac{3K\varepsilon}{8\omega_1^3} [-A^3 + S^3 e^{i(\delta_1 - \delta_2)} \varphi_0(d)^3 + \\
& A^2 \bar{S} e^{i(\delta_2 - \delta_1)} \varphi_0(d) + 2A^2 S e^{i(\delta_1 - \delta_2)} \varphi_0(d) - S^2 \bar{A} e^{2i(\delta_1 - \delta_2)} \varphi_0(d)^2 - \\
& 2S^2 A \varphi_0(d)^2 - 2\omega_1^2 A \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} A_r^2 + \\
& 2\omega_1^2 S \varphi_0(d) e^{i(\delta_1 - \delta_2)} \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} A_r^2 \quad (55-2)
\end{aligned}$$

با جداکردن بخش‌های حقیقی و موهومی به معادلات کاربردی زیر می‌رسیم:

$$\dot{S} + \frac{3K\varepsilon}{8\omega_1^3} \left\{ A^3 \varphi_0(d) S^2 A \varphi_0(d)^3 + 2\omega_1^2 A \varphi_0(d) \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} A_r^2 \right\} * \\ \sin(\delta_1 - \delta_2) - A^2 S \varphi_0(d)^2 \sin(2\delta_1 - 2\delta_2) \} = 0 \quad (56-2)$$

$$\varepsilon \dot{A} + \frac{3K\varepsilon}{8\omega_1^3} \left\{ -S^3 \varphi_0(d)^3 - A^2 S \varphi_0(d) - 2\omega_1^2 S \varphi_0(d) \sum_{r=1}^n \frac{\varphi_r(d)^2}{\omega_r^2} A_r^2 \right\} * \\ \sin(\delta_1 - \delta_2) + S^2 A \varphi_0(d)^2 \sin(2\delta_1 - 2\delta_2) \} = 0 \quad (57-2)$$

$$\dot{\delta}_1 + \frac{\omega_1}{2} - \frac{Q_0}{2\omega_1} - \frac{3K}{8\omega_1^3} \{ -S^2 \varphi_0(d)^4 + 2A^2 \varphi_0(d)^2 + \\ \left[ -\frac{A^3}{S} \varphi_0(d) - 3AS \varphi_0(d)^3 \right] \cos(\delta_1 - \delta_2) + A^2 \varphi_0(d)^2 \cos(2\delta_1 - 2\delta_2) \} + \\ \frac{A\bar{E}L}{I} \left( \frac{b_{ch}}{b_{fh}} \right) \frac{S}{2\omega_1} + \frac{AL^2}{2I} b_{dh} \left( \frac{b_{ch}}{b_{fh}} \right) \frac{3S^3}{8\omega_1^3} = 0 \quad (58-2)$$

$$\dot{\delta}_2 + \frac{\omega_1}{2} - \frac{3K\varepsilon}{8\omega_1^3} \{ A^2 + 2S^2 \varphi_0(d)^2 + \left[ -\frac{S^3}{A} \varphi_0(d)^3 - 3AS \varphi_0(d) \right] * \\ \cos(\delta_1 - \delta_2) + S^2 \varphi_0(d)^2 \cos(2\delta_1 - 2\delta_2) \} = 0 \quad (59-2)$$

با ضرب معادلات (56-2) در  $S$ ، (57-2) در  $A$  و انتگرال گیری از حاصل جمع معادلات منتج شده نسبت به زمان، معادله‌ای مهم و کاربردی به شرح زیر بدست می‌آید.

$$\varepsilon A^2 + S^2 = \eta^2 \quad (60-2)$$

در معادله‌ی فوق،  $\eta$ ، کمیتی ثابت و شبیه به انرژی می‌باشد که، با حل هم‌زمان چهار معادله‌ی (2-56) تا (2-59)، به عنوان مقدار انرژی ورودی به سیستم در نظر گرفته می‌شود. با حل معادلات ذکر شده، فرآیند انتقال انرژی از سیستم اولیه به چاه غیرخطی انرژی نتیجه می‌شود. همچنین با ساده‌سازی بیشتر، استفاده از رابطه‌ی  $\delta = \delta_1 - \delta_2$  و کم نمودن معادله‌ی (2-58) از (2-59) به معادله‌ی زیر

می‌رسیم.

$$\begin{aligned}
\delta = & -\frac{q_0}{2\omega_1} - \frac{3K}{8\omega_1^3} \{-S^2\varphi_0(d)^4 + 2A^2\varphi_0(d)^2 + \\
& \left[ -\frac{A^3}{S}\varphi_0(d) - 3AS\varphi_0(d)^3 \right] \cos(\delta) + A^2\varphi_0(d)^2 \cos(2\delta)\} + \\
& \frac{A\bar{E}L}{I} \left( \frac{b_{ch}}{b_{fh}} \right) \frac{S}{2\omega_1} + \frac{AL^2}{2I} b_{dh} \left( \frac{b_{ch}}{b_{fh}} \right) \frac{3S^3}{8\omega_1^3} + \frac{3K\varepsilon}{8\omega_1^3} \{A^2 + 2S^2\varphi_0(d)^2 \\
& + \left[ -\frac{S^3}{A}\varphi_0(d)^3 - 3AS\varphi_0(d) \right] \cos(\delta) + S^2\varphi_0(d)^2 \cos(2\delta)\}
\end{aligned} \tag{۶۱-۲}$$

به طور خلاصه فصل دوم شامل استخراج معادلات به روش نیوتون، اعمال روش گالرکین برای گسسته‌سازی معادلات حرکت و در انتها حل معادلات به روش گالرکین می‌باشد.

فصل سوم

حل عددی و نتیجه گیری

### ۳-۱ مقدمه

در فصل گذشته سیستم مورد نظر معرفی شده و معادلات حاکم بر حرکت بدست آمده است. سپس به کمک روش میانگین گیری مختلط به حل آنها پرداخته ایم. در این فصل به ارائه نتایج حاصل از مدل سازی مطرح شده در فصل دوم می پردازیم. ابتدا پاسخ های زمانی برای دو مکانیزم به تصویر کشیده شده است. سپس اثر افزایش مودها بر همگرایی جواب بررسی می گردد. لازم به ذکر است که پاسخ ها برای دامنه ی جابجایی انتهای تیر رسم شده اند. در بخش دوم راندمان چاه غیرخطی به ازای تغییر پارامترها بررسی شده است و در انتها با استفاده از مفهوم مودهای نرمال غیرخطی، به تحلیل رفتار سیستم پرداخته ایم.

### ۳-۲ مقادیر پارامترهای سیستم

به منظور بدست آوردن نتایج عددی مطالعات انجام شده، خواص تیر اوایلر-برنولی با سطح مقطع مستطیلی در جدول زیر آورده شده است.

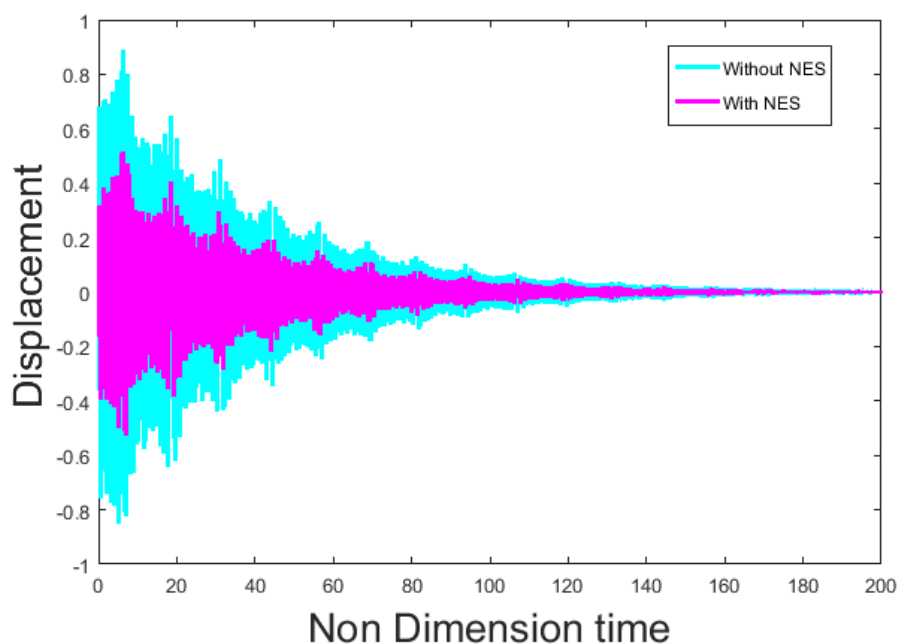
جدول ۳-۱: مقادیر پارامترهای هندسی و فیزیکی

| پارامتر                 | مقدار | نماد            |
|-------------------------|-------|-----------------|
| مدول الاستیسیته ی تیر   | 70    | $E (Gpa)$       |
| چگالی تیر               | 2778  | $\rho (kg/m^3)$ |
| میرایی چاه غیرخطی انرژی | 0.05  | $c_{nes}$       |
| طول تیر                 | 0.5   | $L (m)$         |
| عرض تیر                 | 0.02  | $b (m)$         |
| ضخامت تیر               | 0.002 | $H (m)$         |

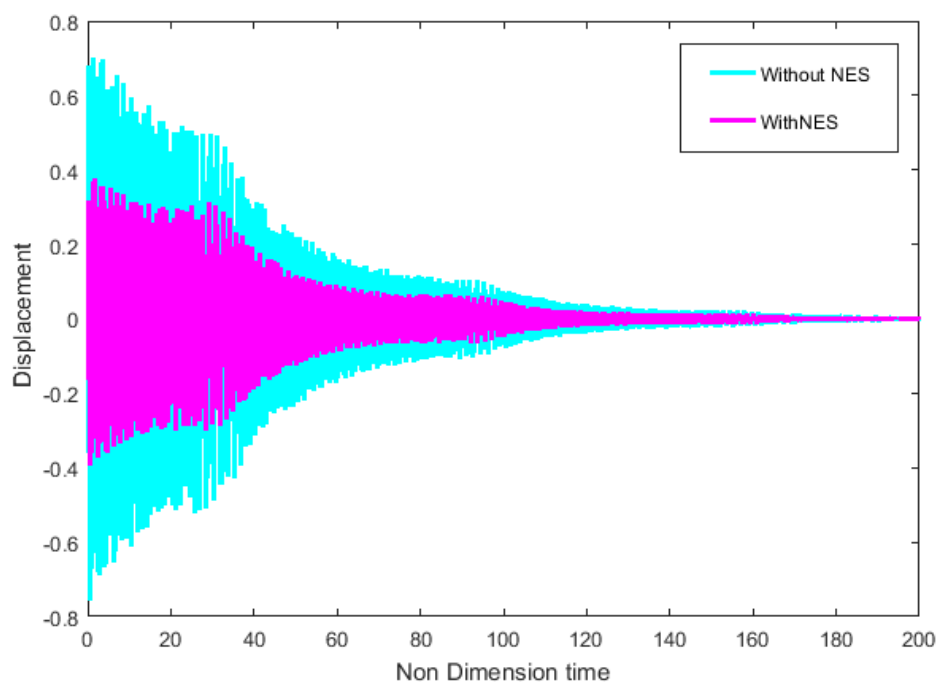
### ۳-۳ پاسخ‌های گذرا

در ادامه و به منظور نشان دادن اثر استفاده از چاه غیرخطی انرژی پاسخ گذرای تیر در دو حالت همراه با چاه غیرخطی انرژی و بدون آن به صورت هم‌زمان به تصویر کشیده شده است. نمودارهای مربوط به مکانیزم (الف) و (ب) در حالت تک‌مود، دومود و سپس با مودهای بالاتر تا پنج مود رسم شده‌اند، تا آنجا که دیگر تغییر محسوسی در جواب‌ها مشاهده نشد. به دلیل همگرایی بهتر جواب‌ها، نمودارها در حالت پنج مود به تصویر کشیده شده‌اند. اثر تغییر پارامترهای مختلف از جمله تغییر کشش انتهایی تیر که به صورت کند با زمان تغییر می‌کند، در نمودارها قابل لمس است. نیروی کشش به صورت  $N * (1 + \cos(\varepsilon_1 t))$ ، در معادلات سیستم جایگذاری شده است.

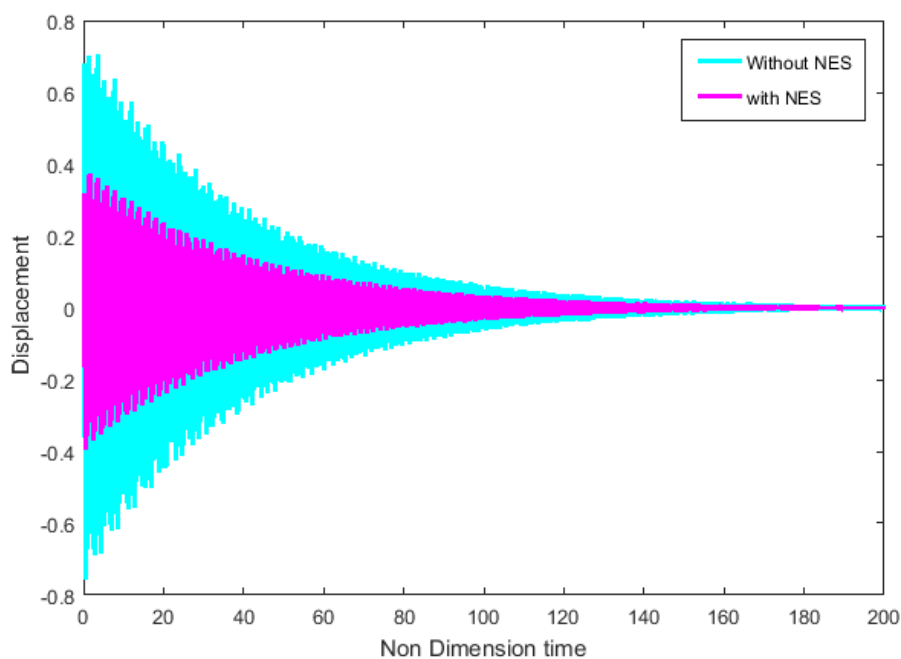
### ۴-۳ مکانیزم اول



شکل ۳-۱: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.5$



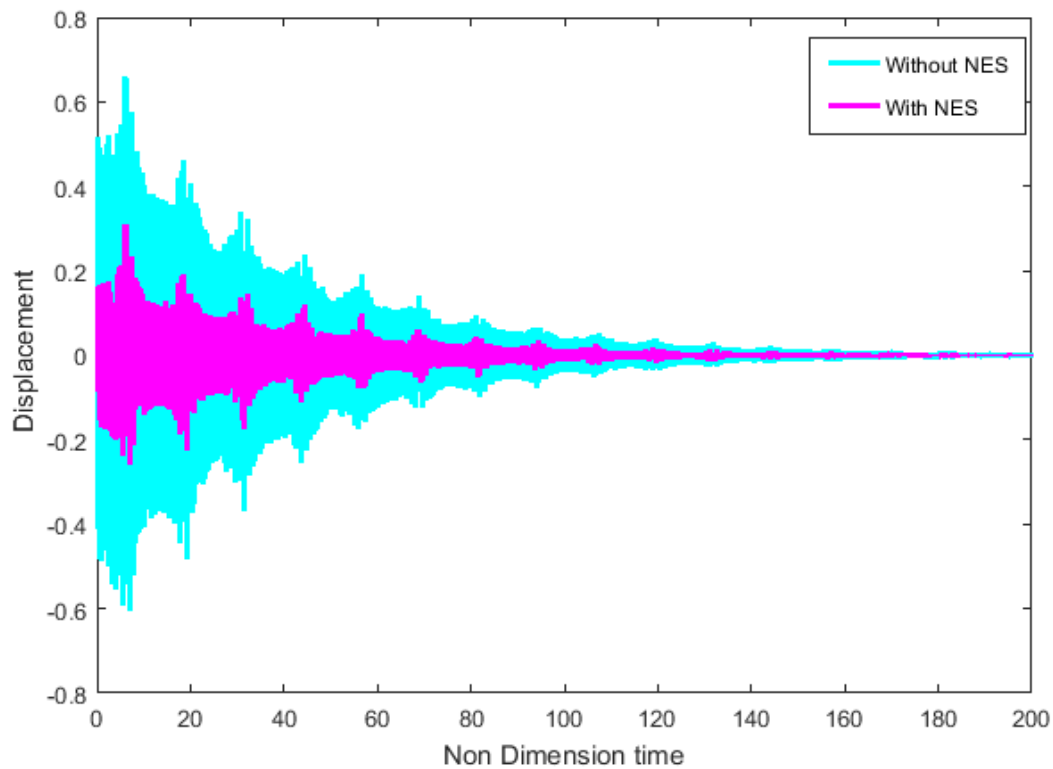
شکل ۳-۲: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.1$



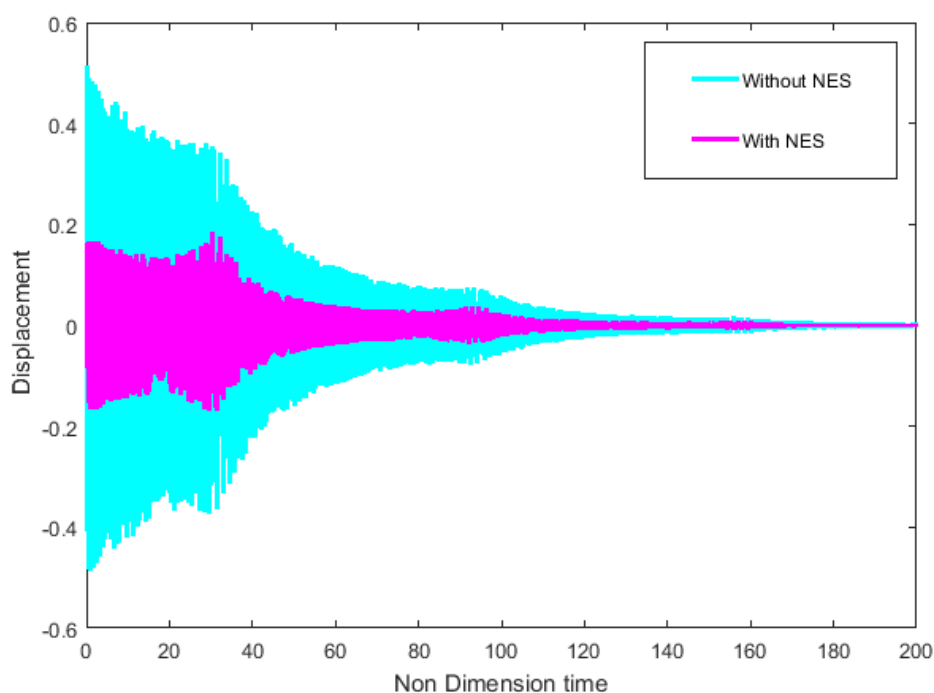
شکل ۳-۳: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.01$

در شکل‌های ۱-۳ تا ۳-۳، پاسخ گذرای تیر به ازای نیروی کشش ۱۰ نیوتون و  $\varepsilon_1$  ها از ۰,۵ تا ۰,۰۱، رسم شده‌اند. با مقایسه‌ی شکل‌های ۱ تا ۳ می‌توان به نقش مؤثر چاه غیرخطی انرژی در جذب

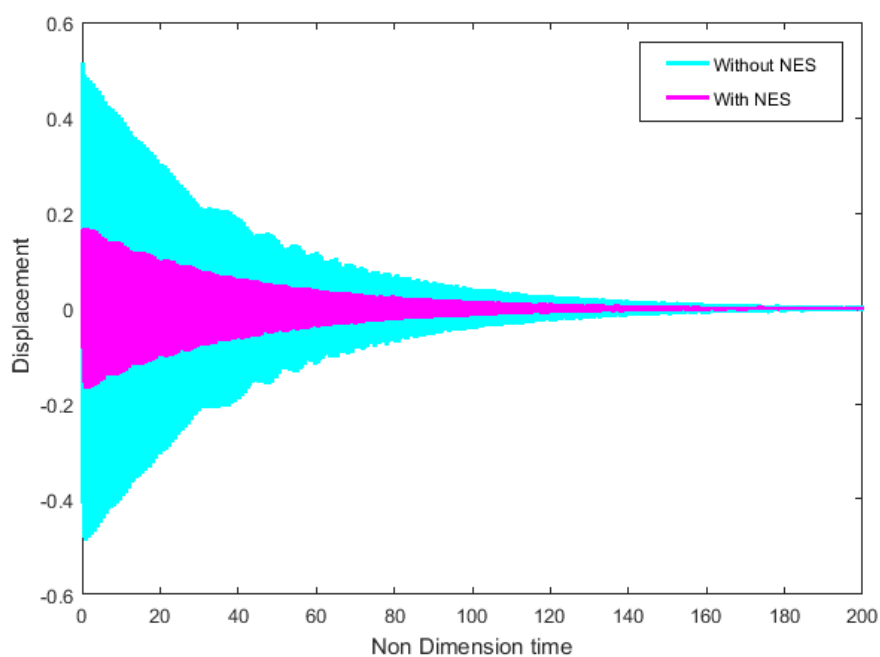
ارتعاشات تیر پی برد. واضح است که با اتصال چاه غیرخطی به تیر دامنهی ارتعاشات به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته است. علاوه بر آن با کاهش  $\varepsilon_1$  ها در نیروی کشش ثابت از تعداد ضربان‌های ایجاد شده کاسته شده است.



شکل ۳-۴: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 40, \varepsilon_1 = 0.5$



شکل ۳-۵: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 40, \varepsilon_1 = 0.1$

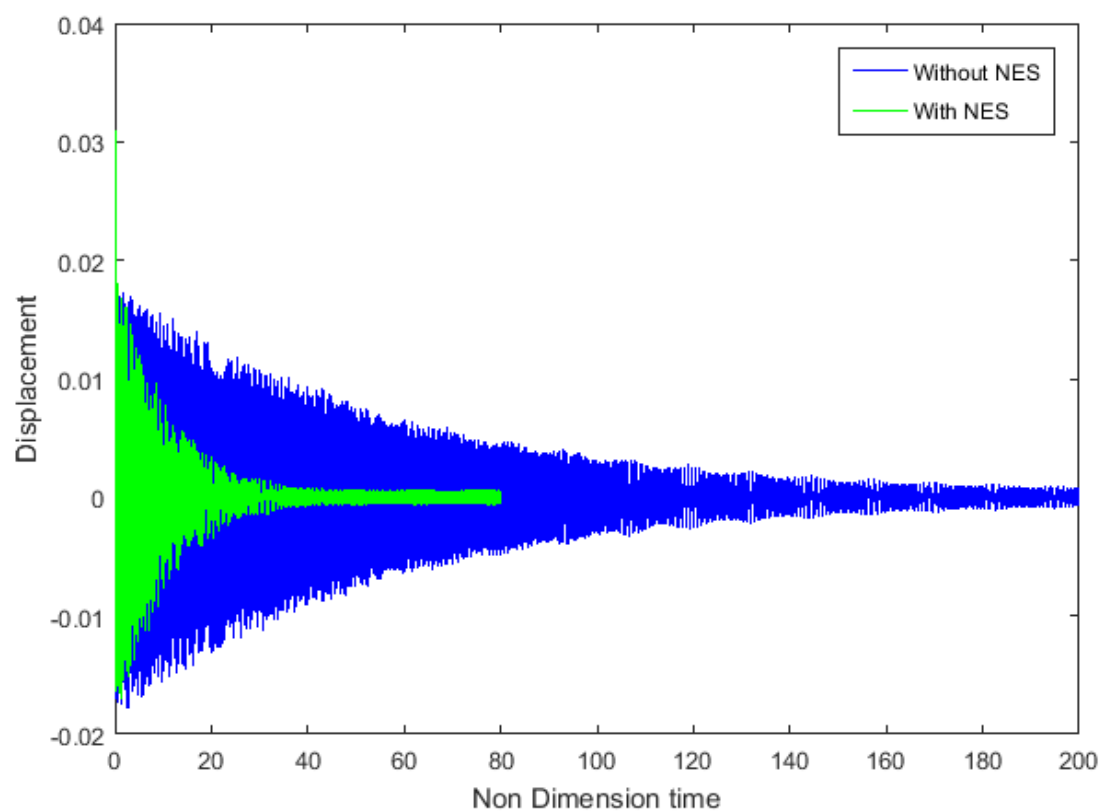


شکل ۳-۶: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 40, \varepsilon_1 = 0.01$

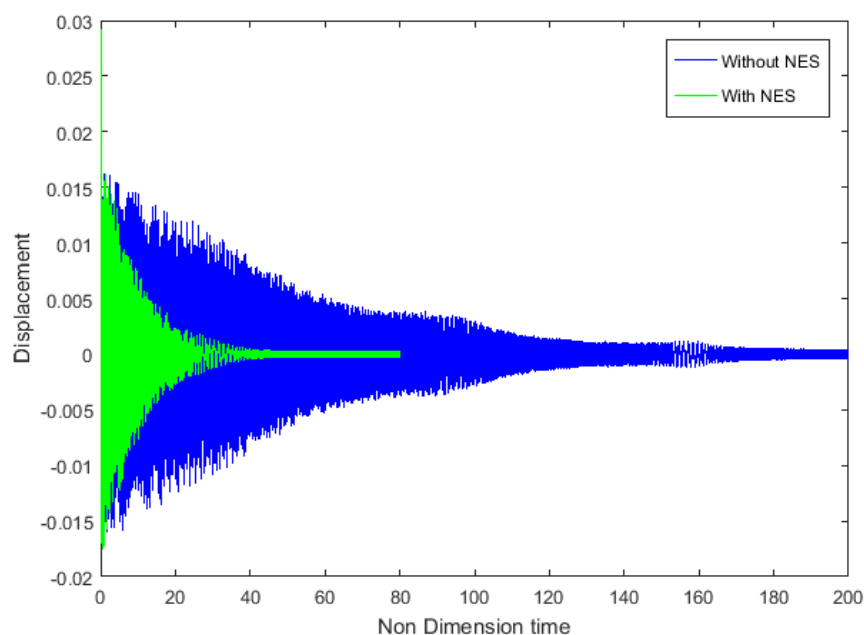
در شکل‌های ۳-۴ تا ۳-۶، واضح است که با افزایش نیروی کششی انتهای تیر، دامنه‌ی ارتعاشات به طور مؤثری کاهش یافته است و همچنین با کاهش  $\varepsilon_1$  ها در نیروی کشش ثابت از تعداد ضربان‌های

ایجاد شده کاسته شده است.

### ۳-۵ مکانیزم دوم



شکل ۳-۷: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.5$



شکل ۳-۸: پاسخ گذرای تیر با پنج مود در حالت با و بدون چاه غیرخطی انرژی  $N = 40, \varepsilon_1 = 0.1$

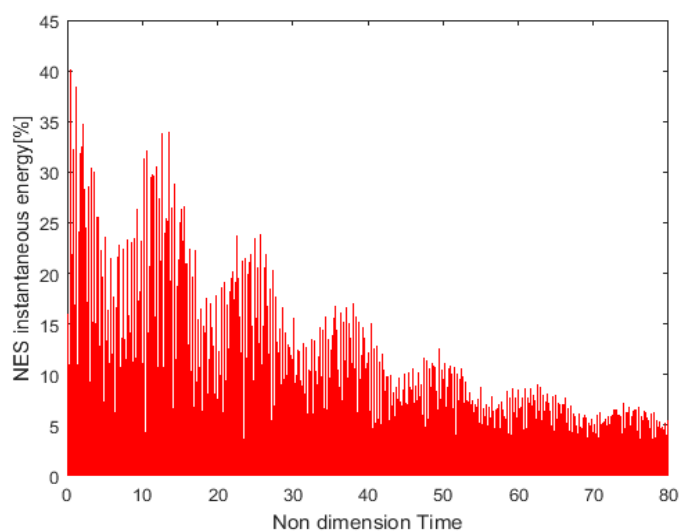
در شکل‌های ۳-۷ تا ۳-۸، همانطور که مشخص است دامنه‌ی ارتعاشات در مکانیزم دوم در مقایسه با مکانیزم اول بسیار کمتر شده است که این امر نشان‌گر کارایی بهتر سیستم دوم که در حالت آزاد قرار دارد، است و این ادعا با رفرنس کاملاً مطابقت دارد. همچنین ارتعاشات با سرعت بیشتری مستهلک می‌شود. می‌دانیم با افزایش نیروی محوری در تیر، سفتی سیستم و فرکانس طبیعی تیر افزایش می‌یابد. در حالی که دامنه‌ی ارتعاشات کاهش می‌یابد.

### ۳-۶ بازده و درصد جذب انرژی چاه غیرخطی انرژی

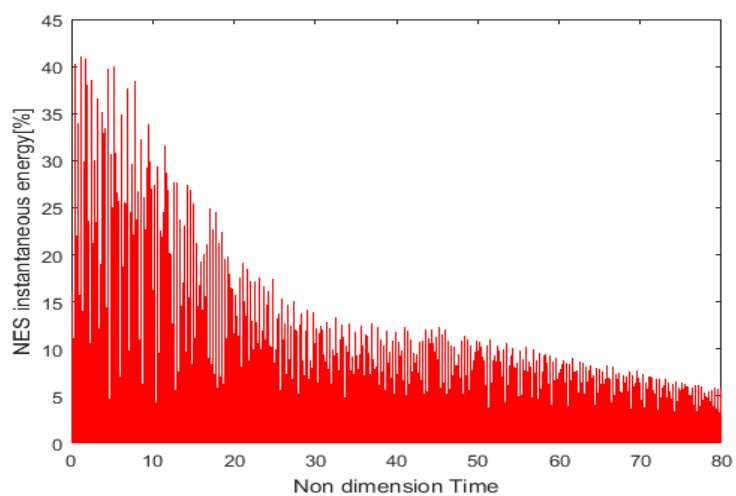
برخی محققین از نسبت انرژی جذب‌شده توسط میرایی چاه غیرخطی به انرژی ضربه‌ی ورودی، مطابق رابطه‌ی زیر به‌منظور تعیین میزان بازدهی چاه غیرخطی انرژی استفاده می‌کنند [۷۱، ۷۸، ۹۸].

$$p_d(t) = \frac{E_{NES}}{E_{input\_load}} = \frac{\int_0^t \varepsilon \beta_N [\dot{u}_t - \sum_{r=0}^{\infty} \dot{q}_r(\tau) \phi_r(x_n)]^2 d\tau}{\int_0^T F(\tau) \sum_{r=0}^{\infty} \dot{q}_r(\tau) \phi_r(x_f)] d\tau} \quad (۲-۶۲)$$

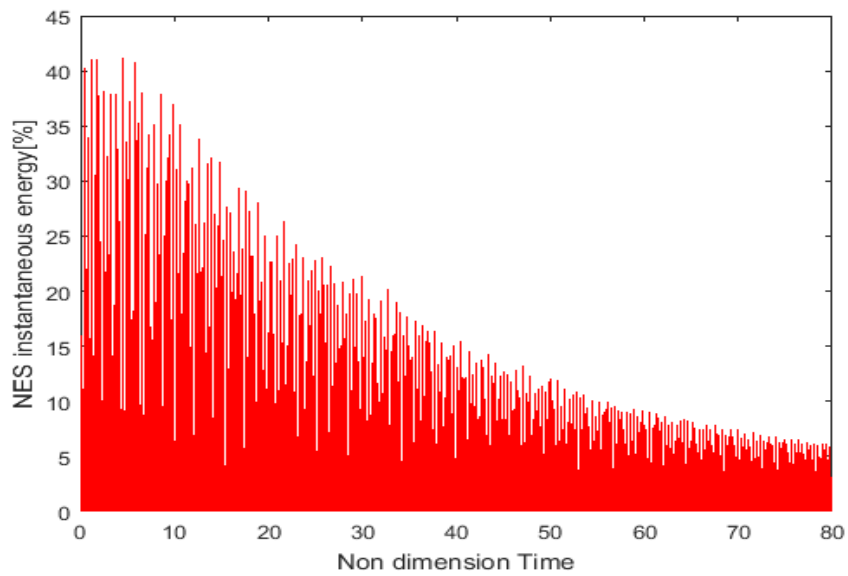
### ۷-۳ درصد جذب انرژی ارتعاشی مکانیزم اول



شکل ۳-۹: درصد جذب انرژی با  $N = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$

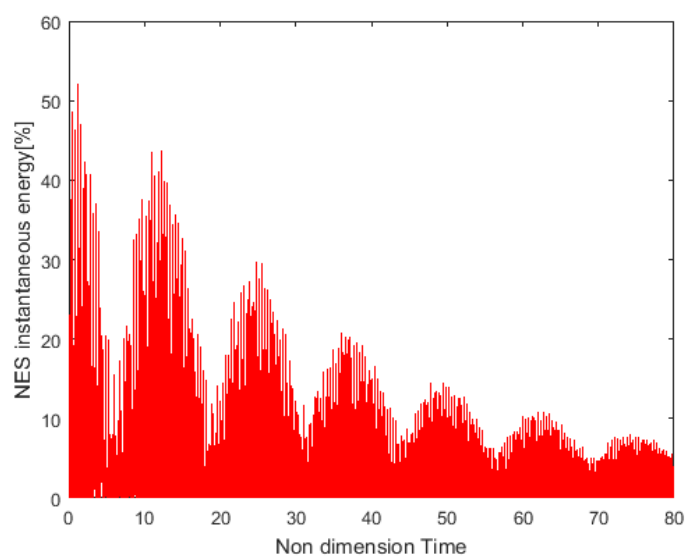


شکل ۳-۱۰: درصد جذب انرژی با  $N = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$

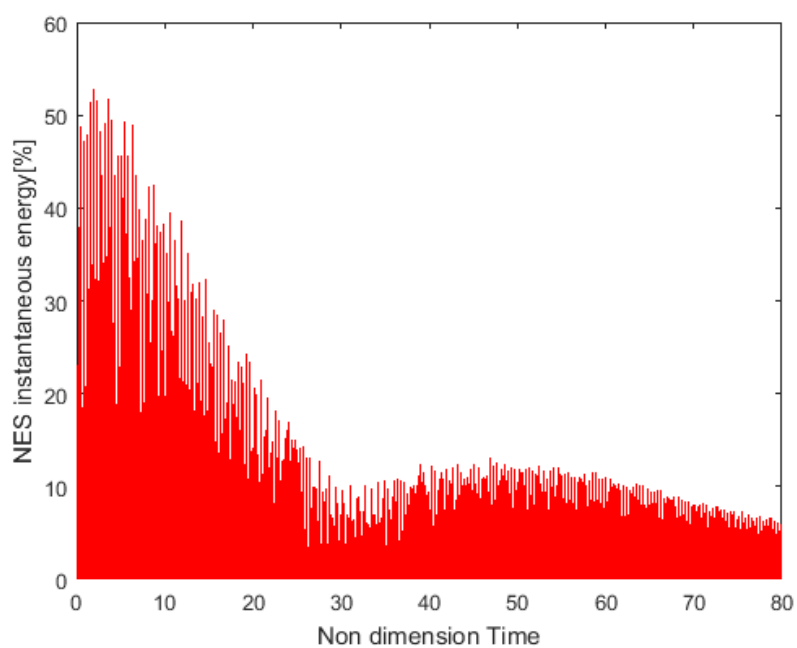


شکل ۳-۱۱: درصد جذب انرژی با  $N = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$

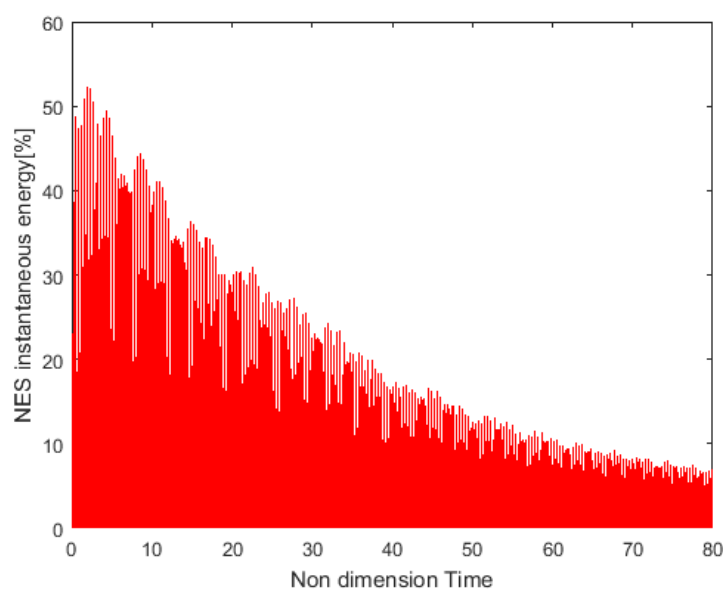
شکل‌های ۳-۹ تا ۳-۱۱ درصد جذب سیستم اول را با نیروی کشش ۱۰ نیوتون و  $\varepsilon_1$  های ۰,۵ تا ۰,۰۱ به نمایش گذاشته‌اند. با محاسبه‌ی مساحت زیر نمودار به این نتیجه می‌رسیم که با کاهش  $\varepsilon_1$  در نیروی کشش ثابت از درصد جذب انرژی بیشتری برخوردار خواهیم شد. بنابراین شکل ۳-۱۱ درصد جذب انرژی بیشتری را به نمایش گذاشته است.



شکل ۱۲-۰: درصد جذب انرژی با  $N = 40$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$



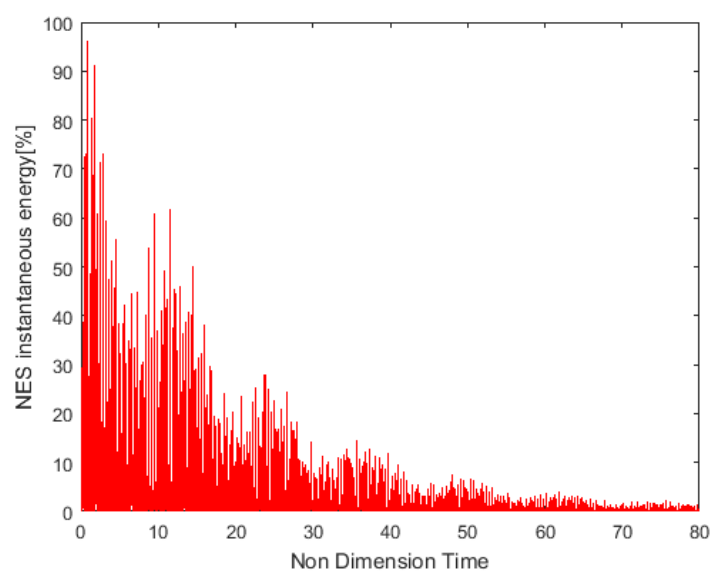
شکل ۱۳-۳: درصد جذب انرژی با  $N = 40$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$



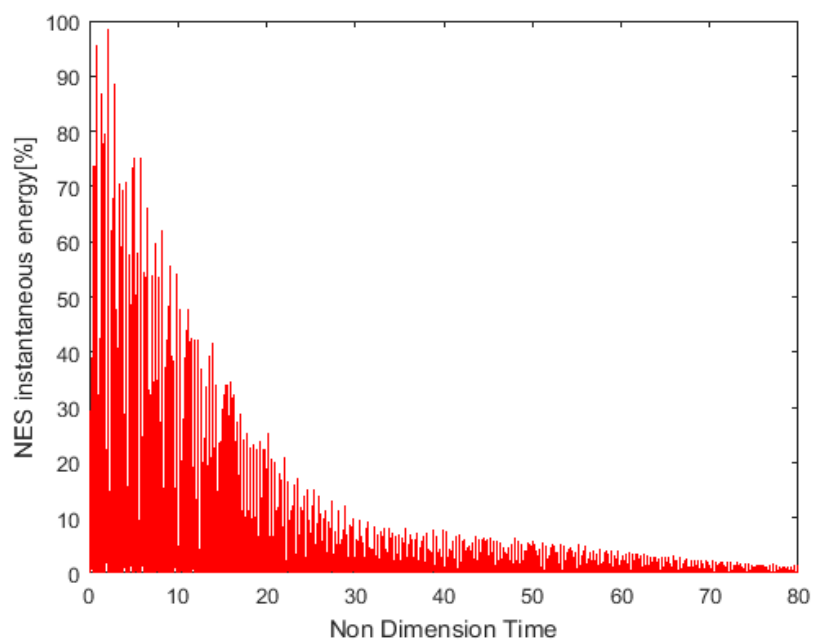
شکل ۳-۱۴: درصد جذب انرژی با  $N = 40$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$

با توجه به شکل‌های ۳-۱۲ تا ۳-۱۴، در نیروی کشش ثابت ۴۰ نیوتون و با کاهش  $\varepsilon_1$ ، با محاسبه‌ی مساحت زیر نمودار به بیشتر بودن درصد جذب پی می‌بریم. همچنین با مقایسه‌ی شکل‌های ۳-۹ تا ۳-۱۱ با ۳-۱۲ تا ۳-۱۴، با افزایش نیروی کشش درصد جذب انرژی بیشتر شده است.

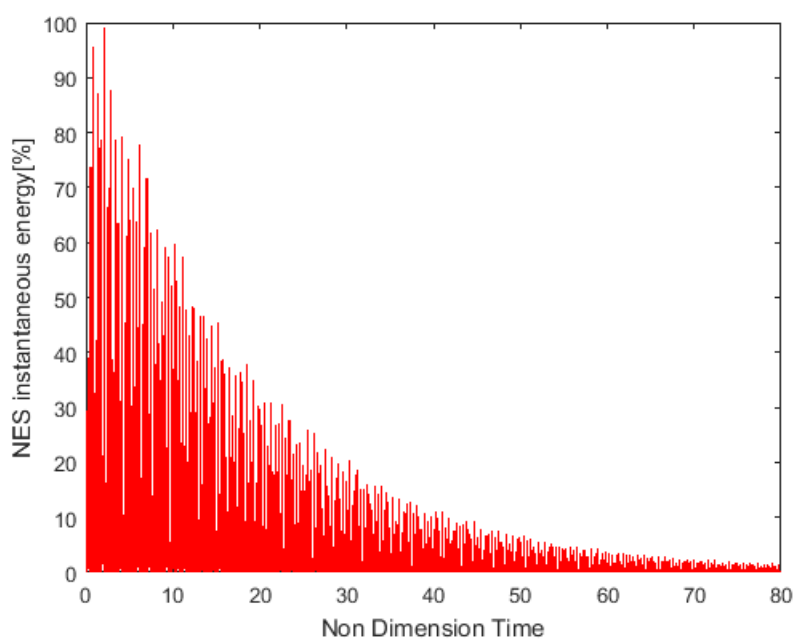
### ۳-۸ درصد جذب انرژی ارتعاشی مکانیزم دوم



شکل ۳-۱۵: درصد جذب انرژی با  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.5$

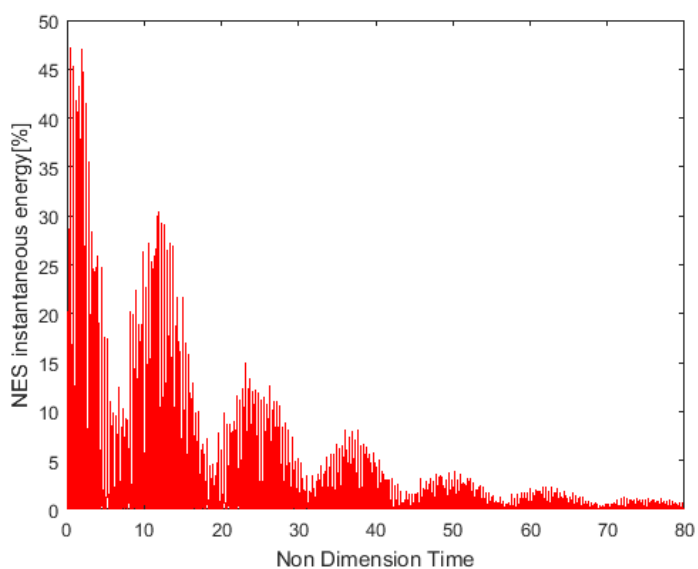


شکل ۳-۱۶: درصد جذب انرژی با  $N = 10, \varepsilon_1 = 0.1$

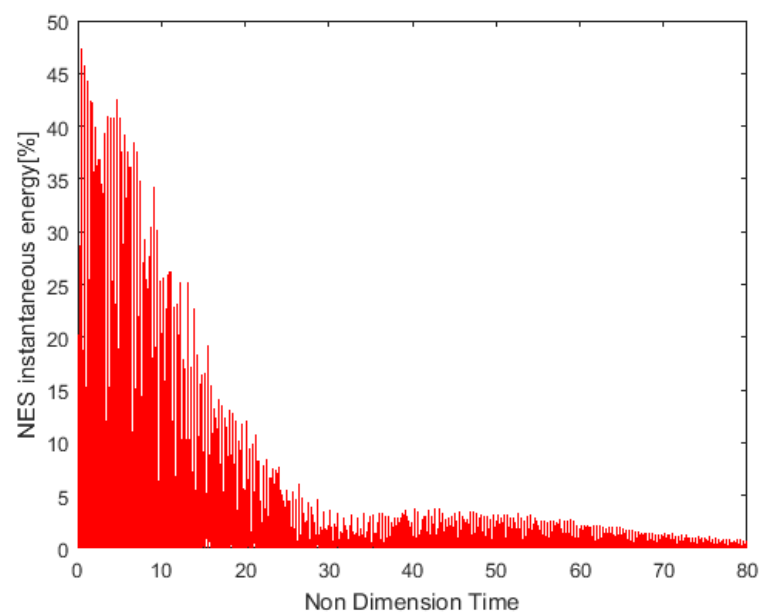


شکل ۳-۱۷: درصد جذب انرژی با  $N = 10$ .  $\varepsilon_1 = 0.01$

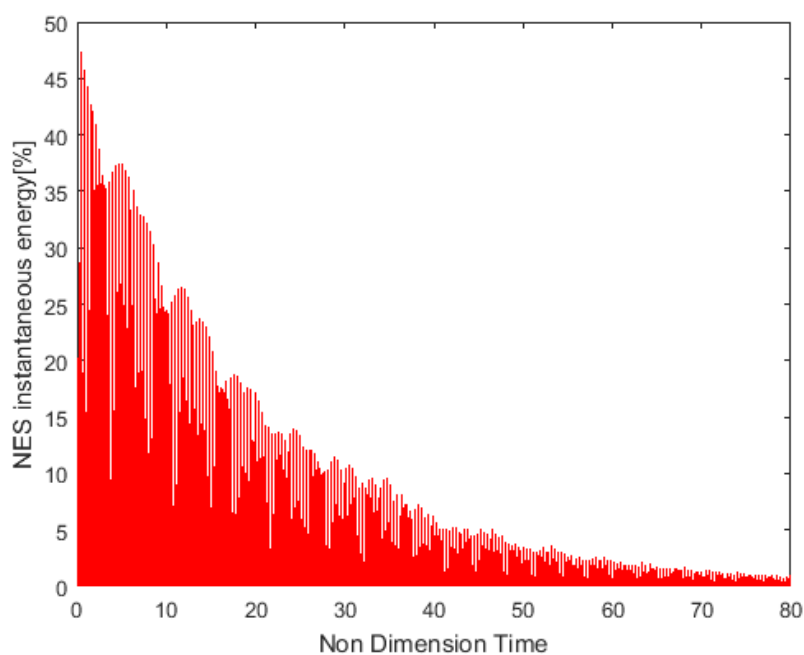
به همین ترتیب در شکل‌های ۳-۱۵ تا ۳-۱۷، با کاهش  $\varepsilon_1$  به درصد جذب انرژی بیشتری می‌رسیم. همانطور که مشخص است در سیستم دوم درصد جذب انرژی به مراتب بیشتر از سیستم اول است.



شکل ۳-۱۸: درصد جذب انرژی با  $N = 40$ .  $\varepsilon_1 = 0.5$



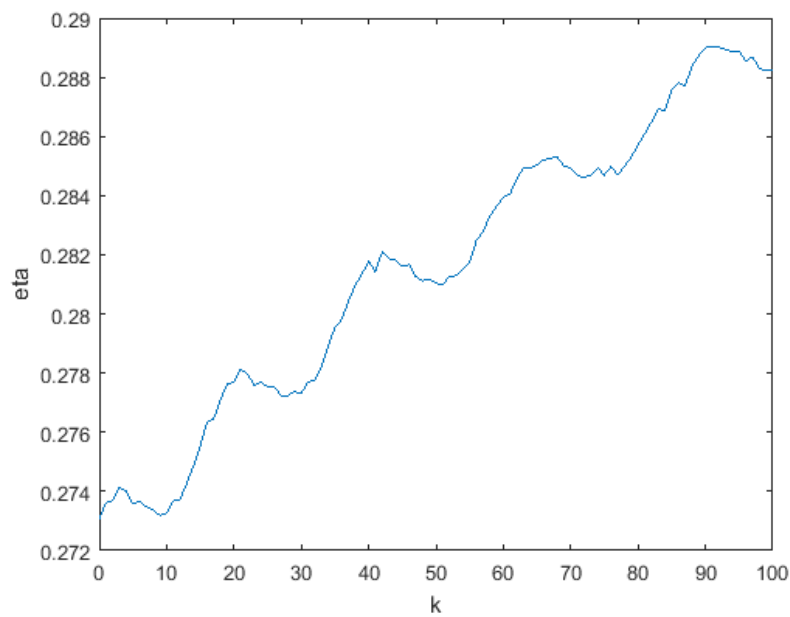
شکل ۳-۱۹: درصد جذب انرژی با  $N = 40$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$



شکل ۳-۲۰: درصد جذب انرژی با  $N = 40$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$

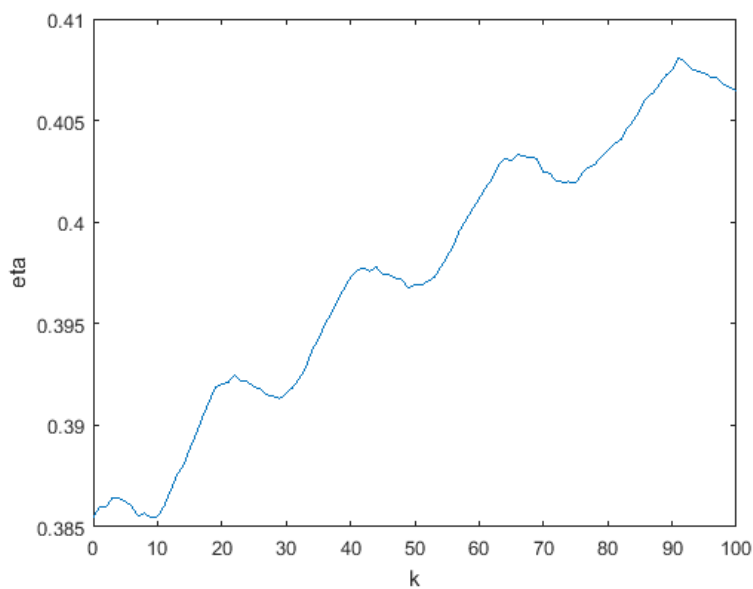
همانطور که در شکل‌های ۳-۱۸ تا ۳-۲۰ مشخص است، با کاهش  $\varepsilon_1$  درصد جذب انرژی بیشتر شده است. اما با افزایش نیروی کشش انتهایی تیر درصد جذب انرژی کاهش یافته است.

### ۹-۳ بازدهی مکانیزم اول



شکل ۳-۲۱: بازده سیستم اول به ازای سفتی چاه انرژی با  $N = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$

### ۱۰-۳ بازدهی مکانیزم دوم

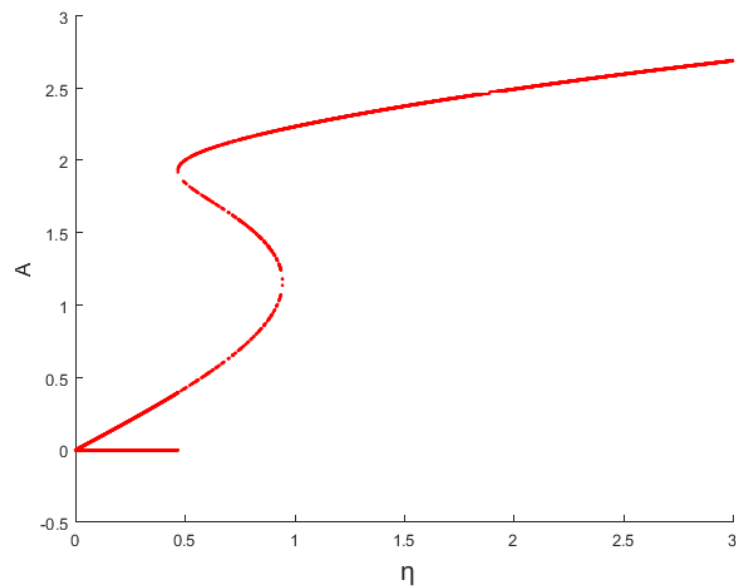


شکل ۳-۲۲: بازده سیستم دوم به ازای چاه انرژی با  $N = 10$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$

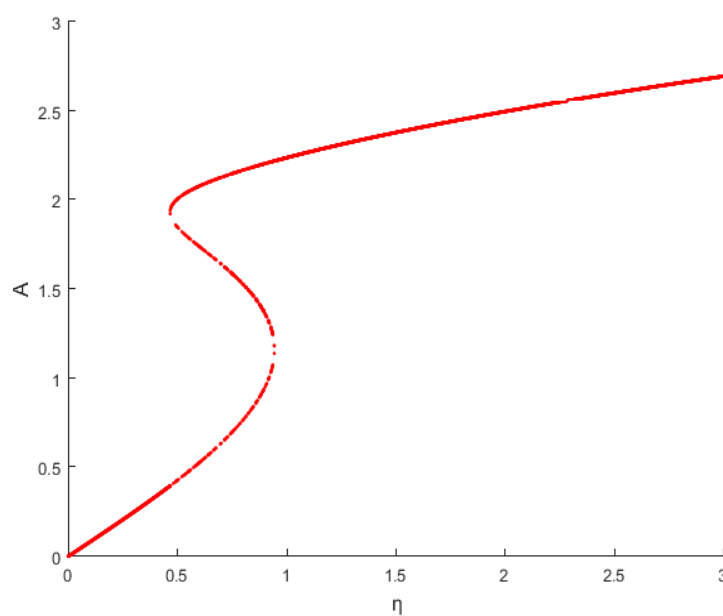
در شکل‌های ۳-۲۱ و ۳-۲۲ تغییرات بازدهی چاه غیرخطی انرژی نسبت به میزان سفتی نشان داده

شده است. همان گونه که در شکل ۳-۲۱ نشان داده شده است با افزایش مقدار سفتی خطی بین تیر و چاه غیرخطی، بازدهی چاه غیرخطی تا بیش از ۲۹ درصد افزایش پیدا کرده است. حال آنکه این مقدار در شکل ۳-۲۲ با افزایش سفتی به ۴۱ درصد رسیده است.

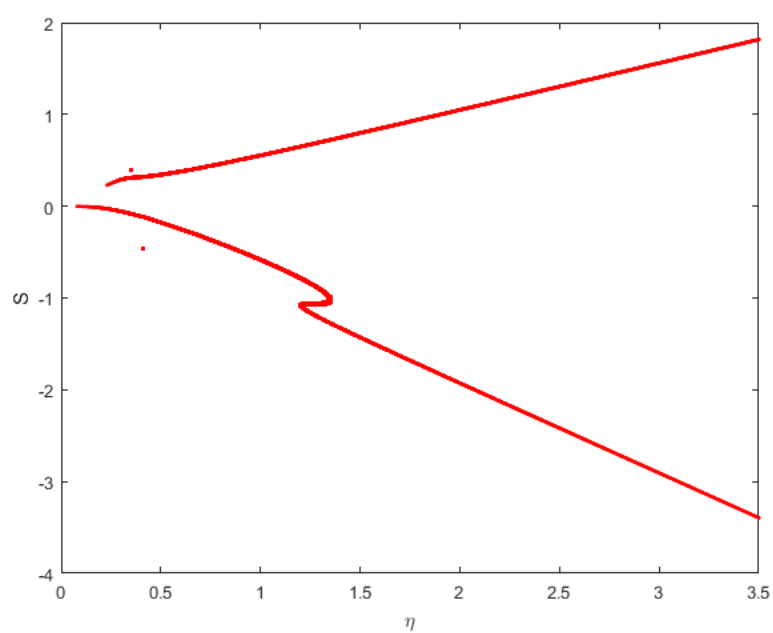
### ۳-۱۱ مودهای نرمال غیرخطی



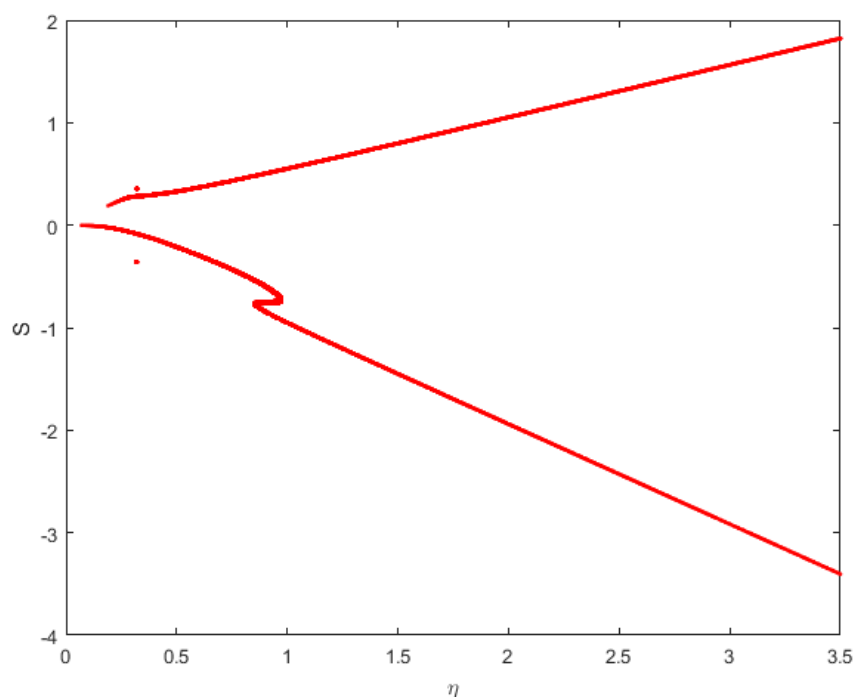
شکل ۳-۲۳: دامنه‌ی پاسخ مود اول چاه غیرخطی انرژی نسبت به تغییرات انرژی ورودی با  $N = 10$



شکل ۳-۲۴: دامنه‌ی پاسخ مود اول چاه غیرخطی انرژی نسبت به تغییرات انرژی ورودی با  $N = 20$



شکل ۳-۲۵: دامنه‌ی پاسخ مود اول تیر نسبت به تغییرات انرژی ورودی با  $N = 10$



شکل ۳-۲۶: دامنه‌ی پاسخ مود اول تیر نسبت به تغییرات انرژی ورودی با  $N = 20$

به منظور تعیین محدوده‌ی پایداری سیستم لازم است معادلات غیرخطی حول نقطه‌ی تعادل خطی سازی شوند و ماتریس ژاکوبین (شامل مشتقات جزئی اول) در این نقطه محاسبه گردد. مقادیر ویژه‌ی این ماتریس معیاری برای سنجش پایداری می‌باشد و اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی مثبت باشند سیستم ناپایدار می‌باشد.

در شکل‌های ۳-۲۳ تا ۳-۲۶، دامنه‌ی پاسخ پایدار سیستم رسم شده است. این نمودارها نشان‌دهنده‌ی مکان هندسی نقاط تعادلی است که دامنه‌ی سیستم در حالت ارتعاشات می‌تواند داشته باشد و نواحی برگشت‌خورده نمایشگر تاثیرات غیرخطی سیستم می‌باشد که در سیستم‌های خطی هم ممکن است وجود داشته باشد. در شکل‌های ۳-۲۳ و ۳-۲۴ زمانی که انرژی ورودی به اندازه‌ی خیلی کمی تغییر کند با پدیده‌ی پرش ناگهانی در سیستم مواجه می‌شویم به عبارتی کاهش یا افزایش ناگهانی در دامنه‌ی ارتعاشات سیستم به وجود می‌آید.

همانطور که از این نمودارها مشخص است، در بعضی نواحی سیستم دارای سه پاسخ است که شامل

دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار است همچنین در بعضی نواحی، سیستم تنها دارای یک پاسخ است.

با توجه به شکل‌های ۳-۲۳ تا ۳-۲۶، ملاحظه می‌شود که انتقال انرژی از سیستم اولیه به چاه غیرخطی برای حالتی که از تحلیل مودهای نرمال غیرخطی به منظور تعیین مؤلفه‌های چاه غیرخطی استفاده شده است، به ازای سطح انرژی ورودی بالاتری اتفاق می‌افتد که این ادعا مجدداً بحث تعیین همزمان مؤلفه‌های بهینه‌ی چاه غیرخطی را نشان می‌دهد.

# فصل چہارم

## نتیجہ گیری

## ۴-۱ مقدمه

در این فصل به مختصری از کار انجام شده می‌پردازیم. از آنجایی که ارتعاشات به دلیل رفتار نوسانی و ظاهر شدن پدیده‌ی خستگی، مرسوم‌ترین علت خرابی دستگاه‌های ثابت و دوار صنعتی می‌باشد، مستهلک‌سازی و حذف اثر آن بسیار حائز اهمیت می‌باشد. در این راستا استفاده از چاه غیرخطی انرژی در دستور کار پژوهش انجام شده قرار گرفته است.

## ۴-۲ بیان مسئله

در این پژوهش، به بررسی ارتعاشات غیرخطی یک تیر اویلر-برنولی متصل به یک چاه غیرخطی انرژی، که یک‌بار به صورت متصل به زمین و بار دیگر در حالت آزاد قرار دارد، پرداخته شده است. در کار حاضر که شامل بخش‌های تحلیلی و عددی است، کاربرد چاه غیرخطی انرژی در کاهش ارتعاشات دو سیستم مکانیکی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. به‌طور کلی چاه غیرخطی انرژی قادر است انرژی را از زیرسیستم اولیه تحت بارگذاری خارجی به‌صورت یک‌طرفه، غیرفعال و در گستره‌ی وسیعی از فرکانس‌های تحریک جذب نماید. معادلات حاکم برسیستم با استفاده از تئوری اویلر-برنولی استخراج و مدل ریاضی سازه با به‌کارگیری روش نیوتون اثبات شده است. سپس از روش گالرکین برای گسسته‌سازی معادلات حرکت بهره‌گرفته‌ایم. در انتها با روش نیمه‌تحلیلی میانگین‌گیری مختلط-شونده و استفاده از مفاهیم مودهای نرمال غیرخطی، به بررسی دینامیک سیستم پرداخته شده است. در این تحقیق فرض بر این است که پارامترهای سیستم اصلی به‌صورت کند با زمان تغییر می‌کنند. بررسی پارامترهای جاذب با به‌کارگیری چاه غیرخطی انرژی با سفتی غیرخطی مرتبه‌ی سوم انجام می‌شود و پارامترهای بهینه‌ی جاذب به‌منظور کاهش ارتعاشات تیر و افزایش محدوده‌ی فرکانسی مؤثر کاهش ارتعاش محاسبه می‌شوند. در تمامی بررسی‌ها تحلیل از نوع دینامیکی در حالت پایا می‌باشد. بررسی همگرایی پاسخ تیر، تحلیل پایداری، مقاوم‌بودن تیر در برابر تغییرات دامنه‌ی نیروی تحریک، بدست‌آوردن بیشترین بازدهی چاه غیرخطی انرژی با تغییرات پارامترها و بررسی دینامیک غیرخطی

سیستم از جمله موضوعات مورد بررسی در این پایان نامه هستند.

## ۴-۳ مرور نتایج

در این قسمت نتایج حاصل شده به صورت فهرست وار به نمایش گذاشته شده است:

✓ با توجه به شکل ها می توان به نقش مؤثر چاه غیرخطی انرژی در جذب ارتعاشات تیر پی برد. واضح است که با اتصال چاه غیرخطی به تیر دامنه ی ارتعاشات به طور قابل ملاحظه ای کاهش یافته است. علاوه بر آن با کاهش  $\varepsilon_1$  ها در نیروی کشش ثابت از تعداد ضربان های ایجاد شده کاسته شده است.

✓ با افزایش نیروی کششی انتهای تیر، دامنه ی ارتعاشات به طور مؤثری کاهش یافته است.

✓ دامنه ی ارتعاشات در مکانیزم دوم در مقایسه با مکانیزم اول بسیار کمتر شده است که این امر نشان گر کارایی بهتر سیستم دوم که در حالت آزاد قرار دارد، است و این ادعا با رفرنس کاملاً مطابقت دارد. همچنین ارتعاشات با سرعت بیشتری مستهلک می شود.

✓ با محاسبه ی مساحت زیر نمودار به این نتیجه می رسیم که با کاهش  $\varepsilon_1$  در نیروی کشش ثابت از درصد جذب انرژی بیشتری برخوردار خواهیم شد. و در مکانیزم اول با افزایش نیروی کشش درصد جذب انرژی بیشتر شده است.

✓ با افزایش مقدار سفتی خطی بین تیر و چاه غیرخطی، بازدهی چاه غیرخطی در مکانیزم اول تا بیش از ۲۹ درصد افزایش پیدا کرده است. حال آنکه این مقدار در مکانیزم دوم با افزایش سفتی به ۴۱ درصد رسیده است.

✓ در رفتار موده های نرمال غیرخطی، زمانی که انرژی ورودی به اندازه ی خیلی کمی تغییر کند با پدیده ی پرش ناگهانی در سیستم مواجه می شویم به عبارتی کاهش یا افزایش ناگهانی در دامنه ی ارتعاشات سیستم به وجود می آید.

✓ ملاحظه می‌شود که انتقال انرژی از سیستم اولیه به چاه غیرخطی برای حالتی که از تحلیل مودهای نرمال غیرخطی به منظور تعیین مؤلفه‌های چاه غیرخطی استفاده شده است، به ازای سطح انرژی ورودی بالاتری اتفاق می‌افتد که این ادعا مجدداً بحث تعیین همزمان مؤلفه‌های بهینه‌ی چاه غیرخطی را نشان می‌دهد.

#### ۴-۴ پیشنهادات برای ادامه‌ی کار

به عنوان چند پیشنهاد برای پیشبرد تحقیق حاضر می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

بررسی تجربی عملکرد چاه غیرخطی متصل به تیر خطی یا غیرخطی تحت تحریک هارمونیک

استفاده از چاه انرژی ضربه‌ای در جهت مستهلک‌سازی ارتعاشات تیر خطی یا غیرخطی

## مراجع

- [۱] جباری م، (۱۳۸۹)، "ارتعاشات مکانیکی"، چاپ سیزدهم، انتشارات پوران پژوهش، تهران، ص ۱-۳.
- [۲] J. Dodd, "Vibration Control: Vibration Absorbers ", *Mathematical Computing and Information Sciences Department, Jacksonville State University*, 2016.
- [۳] R. g. Viguíe and G. t. Kerschen, "Tuning methodology of nonlinear vibration absorbers coupled to nonlinear mechanical systems," in *ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2011, pp. 285-293: American Society of Mechanical Engineers.
- [۴] Y. Lee *et al.*, "Passive non-linear targeted energy transfer and its applications to vibration absorption: a review," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, vol. 222, no. 2, pp. 77-134, 2008.
- [۵] D. J. Wagg, "Multiple non-smooth events in multi-degree-of-freedom vibro-impact systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 43, no. 1-2, pp. 137-148, 2006.
- [۶] D. Pun and Y. Liu, "On the design of the piecewise linear vibration absorber," *Nonlinear dynamics*, vol. 22, no. 4, pp. 393-413, 2000.
- [۷] S. Shaw and S. Wiggins, "Chaotic motions of a torsional vibration absorber," *Journal of applied mechanics*, vol. 55, no. 4, pp. 952-958, 1988.
- [۸] A. Tondl, T. Ruijgrok, R. Nabergoj, and F. Verhulst, *Autoparametric resonance in mechanical systems*. Cambridge University Press, 2000.
- [۹] M. F. Golnaraghi, "Vibration suppression of flexible structures using internal resonance," *Mechanics Research Communications*, vol. 18, no. 2-3, pp. 135-143, 1991.
- [۱۰] H. Frahm, "Device for damping vibrations of bodies," ed: Google Patents, 1911.
- [۱۱] L. Zuo and S. A. Nayfeh, "Minimax optimization of multi-degree-of-freedom tuned-mass dampers," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 272, no. 3-5, pp. 893-908, 2004.
- [۱۲] S. Krenk, "Frequency analysis of the tuned mass damper," *Journal of applied mechanics*, vol. 72, no. 6, pp. 936-942 ,2005.
- [۱۳] H. El-Khatib, B. Mace, and M. Brennan, "Suppression of bending waves in a beam using a tuned vibration absorber," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 288, no. 4-5, pp. 1157-1175, 2005.
- [۱۴] L. Zuo and S. A. Nayfeh, "The two-degree-of-freedom tuned-mass damper for suppression of single-mode vibration under random and harmonic excitation," *Journal of vibration and acoustics*, vol. 128, no. 1, pp. 56-65, 2006.
- [۱۵] B. Balachandran and E. B. Magrab, *Vibrations*. Cengage Learning, 2008.
- [۱۶] C. Roland, "Pendulum counterweight," ed: Google Patents, 1938.
- [۱۷] O. Gendelman, L. Manevitch, A. F. Vakakis, and R. M'closkey, "Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part I—Dynamics of the underlying Hamiltonian systems," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 68, no. 1, pp. 34-41, 2001.
- [۱۸] A. Vakakis, "Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems,"

- Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 123, no. 3, pp. 324-332, 2001.
- [19] A. F. Vakakis, O. V. Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen, and Y. S. Lee, *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems*. Springer Science & Business Media, 2008.
  - [20] F. Nucera, A. F. Vakakis, D. McFarland, L. Bergman, and G. Kerschen, "Targeted energy transfers in vibro-impact oscillators for seismic mitigation," *Nonlinear Dynamics*, vol. 50, no. 3, pp. 651-677, 2007.
  - [21] M. Peeters, R. Vigié, G. Sérandour, G. Kerschen, and J.-C. Golinval, "Nonlinear normal modes, Part II: Practical computation using numerical continuation techniques," in *26th International Modal Analysis Conference, Orlando, 2008*, 2008.
  - [22] G. Kerschen, M. Peeters, J.-C. Golinval, and A. F. Vakakis, "Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, no. 1, pp. 170-194, 2009.
  - [23] A. H. Nayfeh and P. F. Pai, *Linear and nonlinear structural mechanics*. John Wiley & Sons, 2008.
  - [24] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
  - [25] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer Science & Business Media, 2003.
  - [26] P. Argoul and T.-p. Le, "Instantaneous indicators of structural behaviour based on the continuous Cauchy wavelet analysis," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 17, no. 1, pp. 243-250, 2003.
  - [27] M. Amabili, *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge University Press, 2008.
  - [28] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press, 2018.
  - [29] S. H. Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering; 1994," *Reading: Perseus Books Publishing*.
  - [30] S. Smale, "Finding a horseshoe on the beaches of Rio," *The Mathematical Intelligencer*, vol. 20, no. 1, pp. 39-44, 1998.
  - [31] F. Argoul, A. Arneodo, P. Richetti, J. Roux, and H. L. Swinney, "Chemical chaos: from hints to confirmation," *Accounts of Chemical Research*, vol. 20, no. 12, pp. 436-442, 1987.
  - [32] A. Arneodo, P. Couillet, and C. Tresser, "Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations," *Physics Letters A*, vol. 79, no. 4, pp. 259-263, 1980.
  - [33] A. Arneodo, P. Couillet, J. Peyraud, and C. Tresser, "Strange attractors in Volterra equations for species in competition," *Journal of Mathematical Biology*, vol. 14, no. 2, pp. 153-157, 1982.
  - [34] J. W. Evans, N. Fenichel, and J. A. Feroe, "Double impulse solutions in nerve axon equations," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 42, no. 2, pp. 219-234, 1982.
  - [35] P. Glendinning and C. Sparrow, "Local and global behavior near homoclinic orbits," *Journal of Statistical Physics*, vol. 35, no. 5-6, pp. 645-696, 1984.

- [36] J. Ormondroyd, "The theory of the dynamic vibration absorber," *Trans., ASME, Applied Mechanics*, vol. 50, pp. 9-22, 1928.
- [37] T. Asami, O. Nishihara, and A. M. Baz, "Analytical solutions to  $H_\infty$  and  $H_2$  optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems," *Journal of vibration and acoustics*, vol. 124, no. 2, pp. 284-295, 2002.
- [38] M. B. Ozer and T. J. Royston, "Extending Den Hartog's vibration absorber technique to multi-degree-of-freedom systems," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 127, no. 4, pp. 341-350, 2005.
- [39] R. E. Roberson, "Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 254, no. 3, pp. 205-220, 1952.
- [40] H. Rice and J. McCraith, "Practical non-linear vibration absorber design," *Journal of Sound Vibration*, vol. 116, pp. 545-559, 1987.
- [41] I. Jordanov and B. Cheshankov, "Optimal design of linear and non-linear dynamic vibration absorbers," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 123, no. 1, pp. 157-170, 1988.
- [42] J. Shaw, S. W. Shaw, and A. G. Haddow, "On the response of the non-linear vibration absorber," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 24, no. 4, pp. 281-293, 1989.
- [43] S. Natsiavas, "Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorbers," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 156, no. 2, pp. 227-245, 1992.
- [44] O. V. Gendelman, "Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators," *Nonlinear dynamics*, vol. 25, no. 1-3, pp. 237-253, 2001.
- [45] A. F. Vakakis and O. Gendelman, "Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: part II—resonance capture," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 68, no. 1, pp. 42-48, 2001.
- [46] A. F. Vakakis, L. Manevitch, O. Gendelman, and L. Bergman, "Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 264, no. 3, pp. 559-577, 2003.
- [47] A. F. Vakakis, D. M. McFarland, L. Bergman, L. I. Manevitch, and O. Gendelman, "Isolated resonance captures and resonance capture cascades leading to single-or multi-mode passive energy pumping in damped coupled oscillators," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 126, no. 2, pp. 235-244, 2004.
- [48] O. V. Gendelman and C.-H. Lamarque, "Dynamics of linear oscillator coupled to strongly nonlinear attachment with multiple states of equilibrium," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 24, no. 2, pp. 501-509, 2005.
- [49] O. Gendelman, D. Gorlov, L. Manevitch, and A. Musienko, "Dynamics of coupled linear and essentially nonlinear oscillators with substantially different masses," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 286, no. 1-2, pp. 1-19, 2005.
- [50] O. V. Gendelman, E. Gourdon, and C.-H. Lamarque, "Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 294, no. 4-5, pp. 651-662, 2006.
- [51] Y. S. Lee, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, and D. Michael McFarland, "Suppression of limit cycle oscillations in the van der Pol oscillator by means of

- passive non-linear energy sinks," *Structural Control and Health Monitoring: The Official Journal of the International Association for Structural Control and Monitoring and of the European Association for the Control of Structures*, vol. 13, no. 1, pp. 41-75, 2006.
- [52] O. Gendelman and Y. Starosvetsky, "Quasi-periodic response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink under periodic forcing," *Journal of applied mechanics*, vol. 74, no. 2, pp. 325-331, 2007.
  - [53] D. Meimukhin and O. Gendelman, "Response regimes of integrable damped strongly nonlinear oscillator under impact periodic forcing," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 32, no. 2, pp. 405-414, 2007.
  - [54] E. Gourdon, N. A. Alexander, C. A. Taylor, C.-H. Lamarque, and S. Pernot, "Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: Theoretical and experimental results," *Journal of sound and vibration*, vol. 300, no. 3-5, pp. 522-551, 2007.
  - [55] Y. Starosvetsky and O. Gendelman, "Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink. II: Optimization of a nonlinear vibration absorber," *Nonlinear Dynamics*, vol. 51, no. 1-2, p. 47, 2008.
  - [56] Y. Starosvetsky and O. Gendelman, "Strongly modulated response in forced 2DOF oscillatory system with essential mass and potential asymmetry," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 237, no. 13, pp. 1719-1733, 2008.
  - [57] Y. Starosvetsky and O. Gendelman, "Response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink with harmonic forcing and frequency detuning," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 315, no. 3, pp. 746-765, 2008.
  - [58] Y. Starosvetsky and O. Gendelman, "Dynamics of a strongly nonlinear vibration absorber coupled to a harmonically excited two-degree-of-freedom system," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 312, no. 1-2, pp. 234-246, 2008.
  - [59] T. Sapsis, A. F. Vakakis, O. V. Gendelman, L. A. Bergman, G. Kerschen, and D. Quinn, "Efficiency of targeted energy transfers in coupled nonlinear oscillators associated with 1: 1 resonance captures: Part II, analytical study," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 325, no. 1-2, pp. 297-320, 2009.
  - [60] R. Vigié and G. Kerschen, "Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system: a tuning methodology," *Journal of sound and Vibration*, vol. 326, no. 3-4, pp. 780-793, 2009.
  - [61] F. S. Samani and F. Pellicano, "Vibration reduction on beams subjected to moving loads using linear and nonlinear dynamic absorbers," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 325, no. 4-5, pp. 742-754, 2009.
  - [62] Y. Starosvetsky and O. Gendelman, "Bifurcations of attractors in forced system with nonlinear energy sink: the effect of mass asymmetry," *Nonlinear Dynamics*, vol. 59, no. 4, pp. 711-731, 2010.
  - [63] O. Gendelman and T. Bar, "Bifurcations of self-excitation regimes in a Van der Pol oscillator with a nonlinear energy sink," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 239, no. 3-4, pp. 220-229, 2010.
  - [64] Y. Starosvetsky and O. Gendelman, "Interaction of nonlinear energy sink with a two degrees of freedom linear system: Internal resonance," *Journal of sound and vibration*, vol. 329, no. 10, pp. 1836-1852, 2010.
  - [65] L. I. Manevitch, Y. A. Kosevich, M. Mane, G. Sigalov, L. A. Bergman, and A.

- F. Vakakis, "Towards a new type of energy trap: Classical analog of quantum Landau-Zener tunneling," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 46, no. 1, pp. 247-252, 2011.
- [٦٦] O. Gendelman, "Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 21, pp. 4599-4608, 2012.
- [٦٧] T. T. Pham, C. H. Lamarque, and S. Pernot, "Passive control of one degree of freedom nonlinear quadratic oscillator under combination resonance," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no. 5, pp. 2279-2288, 2011.
- [٦٨] O. V. Gendelman, T. Sapsis, A. F. Vakakis, and L. A. Bergman, "Enhanced passive targeted energy transfer in strongly nonlinear mechanical oscillators," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 1, pp. 1-8, 2011.
- [٦٩] B. Vaurigaud, L. I. Manevitch, and C.-H. Lamarque, "Passive control of aeroelastic instability in a long span bridge model prone to coupled flutter using targeted energy transfer," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 11, pp. 2580-2595, 2011.
- [٧٠] A. T. Savadkoobi, L. I. Manevitch, and C.-H. Lamarque, "Analysis of the transient behavior in a two dof nonlinear system," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 44, no. 6, pp. 450-463, 2011.
- [٧١] Z. N. Ahmadabadi and S. Khadem, "Nonlinear vibration control of a cantilever beam by a nonlinear energy sink," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 50, pp. 134-149, 2012.
- [٧٢] T. P. Sapsis, D. D. Quinn, A. F. Vakakis, and L. A. Bergman, "Effective stiffening and damping enhancement of structures with strongly nonlinear local attachments," *Journal of vibration and acoustics*, vol. 134, no. 1, p. 011016, 2012.
- [٧٣] N. E. Wierschem *et al.*, "Passive damping enhancement of a two-degree-of-freedom system through a strongly nonlinear two-degree-of-freedom attachment," *Journal of sound and vibration*, vol. 331, no. 25, pp. 5393-5407, 2012.
- [٧٤] M. A. Al-Shudeifat, N. Wierschem, D. D. Quinn, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, and B. F. Spencer Jr, "Numerical and experimental investigation of a highly effective single-sided vibro-impact non-linear energy sink for shock mitigation," *International journal of non-linear mechanics*, vol. 52, pp. 96-109, 2013.
- [٧٥] J. Luo *et al.*, "Realization of a strongly nonlinear vibration-mitigation device using elastomeric bumpers," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 140, no. 5, p. 04014009, 2013.
- [٧٦] N. E. Wierschem *et al.*, "Experimental testing and numerical simulation of a six-story structure incorporating two-degree-of-freedom nonlinear energy sink," *Journal of Structural Engineering*, vol. 140, no. 6, p. 04014027, 2014.
- [٧٧] A. Luongo and D. Zulli, "Aeroelastic instability analysis of NES-controlled systems via a mixed multiple scale/harmonic balance method," *Journal of Vibration and Control*, vol. 20, no. 13, pp. 1985-1998, 2014.
- [٧٨] Z. N. Ahmadabadi and S. Khadem, "Nonlinear vibration control and energy harvesting of a beam using a nonlinear energy sink and a piezoelectric device," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, no. 19, pp. 4444-4457, 2014.

- [٧٩] M. A. AL-Shudeifat, "Highly efficient nonlinear energy sink," *Nonlinear Dynamics*, vol. 76, no. 4, pp. 1905-1920, 2014.
- [٨٠] M. A. AL-Shudeifat, "Asymmetric magnet-based nonlinear energy sink," *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 10, no. 1, p. 014502, 2015.
- [٨١] M. Parseh, M. Dardel, and M. H. Ghasemi, "Performance comparison of nonlinear energy sink and linear tuned mass damper in steady-state dynamics of a linear beam," *Nonlinear Dynamics*, vol. 81, no. 4, pp. 1981-2002, 2015.
- [٨٢] J. Taghipour and M. Dardel, "Steady state dynamics and robustness of a harmonically excited essentially nonlinear oscillator coupled with a two-DOF nonlinear energy sink," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 62, pp. 164-182, 2015.
- [٨٣] S. Bab, S. Khadem, M. Mahdiabadi, and M. Shahgholi, "Vibration mitigation of a rotating beam under external periodic force using a nonlinear energy sink (NES)," *Journal of Vibration and Control*, vol. 23, no. 6, pp. 1001-1025, 2017.
- [٨٤] H. N. Arafat, "Nonlinear response of cantilever beams," Virginia Tech, 1999.
- [٨٥] S. S. Rao, *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, 2007.
- [٨٦] M. Zamanian, S. Khadem, and S. Mahmoodi, "The effect of a piezoelectric layer on the mechanical behavior of an electrostatic actuated microbeam," *Smart Materials and Structures*, vol. 17, no. 6, p. 065024, 2008.
- [٨٧] M. Zamanian, S. Khadem, and S. Mahmoodi, "Analysis of non-linear vibrations of a microresonator under piezoelectric and electrostatic actuations," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 223, no. 2, pp. 329-344, 2009.
- [٨٨] H. Li, S. Preidikman, B. Balachandran, and C. Mote Jr, "Nonlinear free and forced oscillations of piezoelectric microresonators," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 16, no. 2, p. 356, 2006.
- [٨٩] M. Feldman, "Non-linear system vibration analysis using Hilbert transform--I. Free vibration analysis method'Freevib'," *Mechanical systems and signal processing*, vol. 8, no. 2, pp. 119-127, 1994.
- [٩٠] G. Kerschen, A. F. Vakakis, Y. Lee, D. McFarland, and L. Bergman, "Toward a fundamental understanding of the Hilbert-Huang transform in nonlinear structural dynamics," *Journal of Vibration and Control*, vol. 14, no. 1-2, pp. 77-105, 2008.
- [٩١] L. Manevitch, "The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables," *Nonlinear Dynamics*, vol. 25, no. 1-3, pp. 95-109, 2001.
- [٩٢] M. Rabinovich and D. Trubetskov, "Introduction to the Theory of Vibrations and Waves," ed: Nauka, Moscow, 1984.
- [٩٣] W. H. Louisell, *Coupled mode and parametric electronics*. Wiley, 1960.
- [٩٤] A. Ovchinnikov, "Localized long-lived vibrational states in molecular crystals," *Sov. Phys. JETP*, vol. 30, no. 1, pp. 147-150, 1970.
- [٩٥] A. Skott and P. Lomdahl, "Between local and normal modes'," *Chemical Physics Letters*, vol. 311, pp. 29-42, 1985.
- [٩٦] A. Kosevich and A. Kovalev, "Introduction to Nonlinear Physical Mechanics (Naukova Dumka, Kiev, 1989)," *Google Scholar*, p. 301.

- [<sup>97</sup>] J. R. Pierce, "Coupling of modes of propagation," *Journal of Applied Physics*, vol. 25, no. 2, pp. 179-183, 1954.
- [<sup>98</sup>] F. Georgiades and A. Vakakis, "Dynamics of a linear beam with an attached local nonlinear energy sink," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 12, no. 5, pp. 643-651, 2007.

## **Abstract**

In this research It's been investigated nonlinear vibration of a Euler-Bernoulli beam is connected to a nonlinear energy sink, once bonded to the ground and again in a free mode. in the present work, which consists of analytical and numerical sectors, the nonlinear sink of the energy sink in reducing the vibration of two different mechanical systems has been investigated. in general, the nonlinear energy sink is capable of extracting energy from the initial system under external loads in one way, passive, and in a wide range of excitation frequencies. the governing equations of the system using euler-Bernoulli theory are extracted and the mathematical model of the structure has been demonstrated using Newton method. then, we use the galerkin method for discretization of motion equations. in the end, the dynamic analysis of the system dynamics and the use of the concepts of nonlinear normal modes have been investigated. in this study, the original system parameters are assumed to change with time. investigation is do in the absorbing parameters by employing nonlinear energy well with the nonlinear stiffness of the third order and optimal absorbent parameters are calculated to reduce beam vibrations and increase the effective frequency range of vibration reduction. in all studies, the analysis of dynamic type is in steady flow. to investigate the convergence of beam response, stability analysis, robustness of the beam against variation of the amplitude of the excitation force, obtaining the maximum efficiency of the nonlinear sink of energy with parameter variations and the nonlinear dynamic analysis of the system are discussed in this thesis.

### **Keywords:**

Euler-Bernoulli nonlinear beam, Nonlinear energy sink, Galerkin method, Complex averaging method



**Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering**

**M.Sc. Thesis in Manufacturing and Production Engineering**

**Steady state dynamics of a slowly varying parameters  
Euler-Bernoulli beam attached to a nonlinear energy  
sink**

By:

**Sajede Shabanpour Kesari**

Supervisor:

**Dr. Amir Jalali**

September 2018