به نام خدا

دانشکده :

مهندسی مکانیک

گروه :

طراحی کاربردی

تحلیل عددی و ریاضی یک استوانه ویسکوالاستیک جدار نازک تحت فشار داخلی متحرک

دانشجو: محمد طهرانی

استاد راهنما :

دکتر حمیدرضا ایپک چی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار:

خرداد 89

تقدیم به

پدر

و

مادر

عزیزم

با تشکر از استاد محترم جناب آقای دکتر ایپک چی که در تهیه این پروژه مرا یاری کردند

چکیده

در این پروژه به بررسی نتایج یک تیر و پوسته ویسکوالاستیک به بار پیوسته متحرک پرداخته شده است. مدل جنس ماده پیرو مدل ویسکو الاستیک استاندارد خطی در برش و در کشش تابع رفتار الاستیک می‌باشد. معادلات حاکم در حالت ویسکو الاستیک با تفکیک عضو های تنش برشی و اتساع، به روش مستقیم و بر اساس اصل تناظر استخراج شده و با استفاده از روش بسط توابع ویژه حل شده اند. در بررسی نتایج از ضرایب بی‌بعدی که از معادله حاکم حاصل شده و نشان دهنده ی تاثیرات هندسی، جنس ماده و تحریک ایجاد شده می‌باشند استفاده شده است. در حل عددی از روش اجزاء محدود کمک گرفته شده و حل ریاضی و عددی یک پوسته جدار نازک با هم مورد مقایسه قرار گرفته اند.

کلید واژه: بار متحرک، پوسته‌ی ویسکوالاستیک، تیر ویسکوالاستیک، مدل استاندارد خطی، مدل اجزاء محدود

فهرست مطالب

فصل سوم

بررسی پاسخ تیر نازک ویسکوالاستیک

فصل چهارم

بررسی پاسخ تیر تیموشنکو ویسکوالاستیک

فصل پنجم

تحلیل ریاضی استوانه ی جدار نازک ویسکوالاستیک تحت بار متحرک

فصل ششم

تحلیل عددی استوانه ی جدار نازک ویسکوالاستیک تحت بار متحرک

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فهرست نمادها

E: مدول الاستیسیته

G: مدول برشی

I: گشتاور اینرسی سطح مقطع

L: طول دهانه

P_0: نیروی متر کز با مقدارثابت

r: شعاع میانی پوسته

t: مختصه زمانی

V: سرعت عبور بار

x: مختصه طولی

y: مختصه عرضی

y_0: خیز استاتیکی

y_d: خیز دینامیکی

r : چگالی

Ω_1: اولین فرکانس طبیعی دایره ای

a : ضریب تاثیر سرعت

s_{ij} : عناصر تانسر تنش

g_{ij}: عناصرتانسر کرنش

n: ضریب پواسون

b: ضریب تاثیر هندسی

k: ضریب تصحیح خیز استاتیکی

t^*: زمان

مقدمه:

حرکت نیروها در طول یک عضو یا سازه یکی از مسائل معمول در مهندسی به شمار می‌آید که از جمله آنها می‌توان به حرکت جرثقیل سقفی بر روی ریل، حرکت ماشین برروی یک پل، انتقال سیال داخل لوله و حرکت هوا بر روی بال هواپیما اشاره نمود. یکی از موارد مهم در تحلیل این گونه مسائل جنس عضو یا سازه مورد نظر در پاسخ به این نوع تحریک می‌باشد. در تحلیل های صورت گرفته در این حوزه، بیشترین توجه به مواد الاستیک بوده است در حالی که طیف بسیار گسترده ای از مواد پیرامون ما در حوزه ویسکوالاستیک قرار دارند و شناخت رفتار مکانیکی این مواد به دلیل رفتار متفاوت نسبت به مواد الاستیک، از اهمیت بالایی برخوردار است. از جمله مسائلی که مدل ویسکو الاستیک مسئله نسبت به تحلیل الاستیک، مدلی واقعی تر است انتقال سیال درون لوله های پلیمری یا حرکت جریان هوا بر روی یک باله کامپوزیتی می‌باشد.

هدف از انجام پروژه استخراج معادلات تیر و پوسته‌ی ویسکوالاستیک تحت بار متحرک پیوسته وحل آنها بصورت تحلیل و عددی و مقایسه ی دوحل می‌باشد.

در فصل اول این پروژه به بیان معادلات دیفرانسیل بنیادین برای تنش چند بعدی و مدلهای رایج در شبیه سازی مواد ویسکو الاستیک، پرداخته شده است. در فصل دوم مقالات مختلف در حوزه الاستیک و ویسکوالاستیک متناسب با موضع بار متحرک و پاسخ دینامیکی مرور شده اند.

مدل یک تیر ساده ویسکوالاستیک دوسر گیر دار تحت بار متحرک می‌تواند شروع مناسبی برای ورود به مسئله ی بار متحرک در ناحیه ویسکو الاستیک باشد از این رو در فصل سوم پاسخ تیر ساده ویسکوالاستیک به بار متحرک استخراج شده است. فصل چهارم و پنجم از نظر موضوعی مشابه فصل سوم بوده با این تفاوت که در فصل چهارم تیر تیموشنکو و در فصل پنجم پوسته‌ی ویسکوالاستیک جدار نازک مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل ششم مدل سازی اجزاء محدود مسئله توسط نرم افزار آنسیس ارائه شده است. در این فصل حل عددی مسئله با حل دقیق بدست آمده در فصل های قبل مورد مقایسه قرار گرفته است.

فصل اول

تشکیل معادلات دیفرانسیلی پایه ای برای تنش چند بعدی

1-1 – مقدمه:

طراحی اعضایی که یک عضو یا سازه را تشکیل می‌دهند نیازمند تحلیل توزیع تنش و کرنش در این عضوهاست. بدون در نظر گرفتن تاثیرات دمایی، تغییر شکلها در هر نقطه از نمونه باید معادلات بنیادین و حرکت را ارضا کند. در این فصل معادلات بنیادین تنش در فرم انتگرالی و دیفرانسیلی بیان شده است و با استفاده از روابط بین فرم دیفرانسیلی و انتگرالی، خواص مکانیکی بصورت تقسیم ضرایب مشخصی که تابعِ مدل استفاده شده در توصیف ماده است، استخراج شده است.

1-2 – معادلات بنیادین تنش در فرم انتگرالی

رابطه بنیادین تنش- کرنش در یک ماده ویسکوالاستیک ایزوتروپیک عبارت است از:

$$s_{ij} = \int_{-\infty}^{t} G(t-q)\,de_{ij}(q) + d_{ij}\int_{-\infty}^{t} (K(t-q) - \frac{2}{3}G(t-q)\,d\Delta(q) \qquad (1\text{-}1)$$

در معادله بالا Δ به معنای تریس[1] g_{ij} و $K-\frac{2}{3}G=l$ اولین ضریب لامه می‌باشد. لازم به توضیح است که $e_{ij}=2g_{ij}$ هنگامیکه $i \neq j$ و $e_{ij}=g_{ij}$ و نیز g_{ij} تانسور کرنش می‌باشد [1]. برای $\boldsymbol{i=j}$ تبدیل لاپلاس معادله فوق عبارت است از:

$$s_{ij}(s) = 2sG(s)g_{ij}(s) + d_{ij}s(K(s) - \frac{2}{3}G(s))\Delta(s) \qquad (1\text{-}2)$$

---

[1] -Trace

به منظور توصیف رفتار ویسکوالاستیک یک سیستم تحت کشش چند محوری، تفکیک قسمت برش[1] و قسمت اتساعی[2] تنش مرسوم می‌باشد. این قاعده به سبب پاسخ متفاوت مواد ویسکوالاستیک به برش و اتساع (بالک) می‌باشد. به عبارت دیگر، انواع مختلف تنش، پاسخهای متفاوتی را تولید می‌کنند. از این رو معادله (1-2) به فرم زیر باز نویسی می‌گردد.

$$s_{ij}(s) = d_{ij} s K(s)\Delta(s) + 2s G(s)\cdot(g_{ij}(s) - \frac{1}{3} d_{ij}\,\Delta(s)) \qquad (1\text{-}3)$$

به عنوان یک نتیجه:

$$s^{d}{}_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} 2G(t-q)\,dg^{d}_{ij}(q) \qquad (1\text{-}4)$$

$$s_{kk} = \int_{-\infty}^{t} 3k(t-q)\,dg_{kk}(q) \qquad (1\text{-}5)$$

بطوریکه:

$$s^{d}_{ij} = s_{ij} - \frac{1}{3} d_{ij} s_{kk} \quad \text{و} \quad s^{d}_{ii} = 0 \qquad (1\text{-}6)$$

$$g^{d}_{ij} = g_{ij} - \frac{1}{3} d_{ij} g_{kk} \quad \text{و} \quad g^{d}_{ii} = 0 \qquad (1\text{-}7)$$

با لانویس d معرف بخش برشی می‌باشد. با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس و انتگرال کانولوشن نتیجه می‌شود که:

$$s^{d}_{ij}(s) = 2s G(s) g^{d}_{ij}(s) = s G(s) e^{d}{}_{ij} \qquad (1\text{-}8)$$

$$s_{kk}(s) = 3sK(s) g_{kk}(s) \qquad (1\text{-}9)$$

معادلات (1-8) و (1-9) به ترتیب بخش برشی و اتساع (بالک) تنش در فضای لاپلاس می‌باشند.

---

[1]- deviatoric

[2] - dilatational

1-3 – معادلات بنیادین تنش در فرم دیفرانسیلی [1]

معادله بنیادین برای یک ماده ایزوتروپیک ویسکوالاستیک که پاسخش به مشتقات تنش و کرنش وابسته است. می‌تواند به شکل دیفرانسیلی زیر نوشته شود:

$$F(\sigma,\dot{\sigma},\ddot{\sigma},\dots\dots\dots\dots,\gamma,\dot{\gamma},\ddot{\gamma}\dots\dots\dots)=0 \tag{1-10}$$

به طوریکه تنش و کرنش وابسته به زمان می‌باشند. این، معادله به شکل زیر نیز قابل بیان است:

$$P(D)\sigma_{ij}(t)=Q(D)\gamma_{ij}(t) \tag{1-11}$$

عملگرهای $P(D)$ و $Q(D)$ بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$Q(D)=\sum_{r=o}^{N}Q_r\frac{\partial^r}{\partial t^r} \tag{1-12a}$$

$$P(D)=\sum_{r=o}^{N}P_r\frac{\partial^r}{\partial t^r} \tag{1-12b}$$

شرایط خطی بودن معادلات لازم می‌دارد که P_r و Q_r مستقل از زمان باشند: ولی در حالت کلی P_r و Q_r می‌توانند تابعی از زمان باشند. ترکیب مناسب ضرایب معادله (1-11) می‌تواند رفتار یک ماده ویسکوالاستیک را تا حد امکان شبیه سازی کند. اگر عضوهای برش و اتساع در معادله (1-11) از هم جدا شوند. نتایجی مشابه با معادله (1-8) و (1-10) حاصل می‌شود.

$$P_1\sigma_{ij}^{d}(t)=Q_1\gamma_{ij}^{d}(t) \tag{1-13}$$

$$P_2\sigma_{kk}^{dil}(t)=Q_2\gamma_{kk}^{dil}(t) \tag{1-14}$$

بالا نویس d برای اعوجاج و بالا نویس dil برای اتساع (بالک) در نظر گرفته شده است. همچنین P_1 ، P_2 ، Q_1 و Q_2 عملگرهایی بصورت زیر می‌باشند.

$$p_0+p_1\frac{\partial}{\partial t}+p_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\dots\dots\dots \tag{1-15}$$

می‌باشند. با مقایسه معادلات (1-13) با (1-9) و (1-14) با (1-8) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$K = \frac{1}{3}\left(\frac{Q_2}{P_2}\right) \qquad (1\text{-}16)$$

$$G = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1}{P_1}\right) \qquad (1\text{-}17)$$

مطابق با تئوری الاستیسیته، مدول الاستیسیته وضریب پواسون دارای روابط زیر با مدول برشی و مدول بالک هستند [1].

$$E = \frac{9KG}{3K+G} \qquad (1\text{-}18)$$

$$v = \frac{3K-2G}{6K+2G} \qquad (1\text{-}19)$$

با جایگذاری معادله (1-16) و (1-17) در معادله (1-18) و (1-19)، روابط زیر برای مدول الاسیتیسته و ضریب پواسون در حوزه ویسکوالاستیک حاصل می‌شود.

$$E(D) = \frac{3Q_1Q_2}{P_2Q_1+2P_1Q_2} = \frac{Q^E}{P^E} \qquad (1\text{-}20)$$

$$n(D) = \frac{P_1Q_2-P_2Q_1}{P_2Q_1+2P_1Q_2} = \frac{Q^n}{P^n} \qquad (1\text{-}21)$$

لازم به ذکر است که چون معادلات (1-18) و (1-19) با شکل مختلط خود یکسان می‌باشند؛ در نتیجه معادلات (1-20) و (1-21) نیز با شکل مختلط خود، یعنی $sE(s)$ و $su(s)$ برابر می‌باشند [1] پاسخ برخی از مواد ویسکوالاستیک در برش متفاوت از پاسخ آنها در زمان اتساع(بالک) می‌باشد. بنابراین پاسخ در برش می‌تواند ویسکوالاستیک بوده و پاسخ اتساع، الاستیک باشد. در بررسی مدل های زیر فرض شده است که رفتار ویسکوالاستیک تنها در حالت برشی است و ماده جامد تراکم ناپذیر باشد.

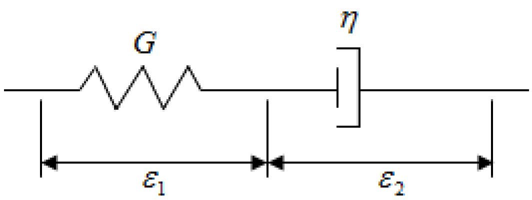
1-4 – مروری بر مدل های ویسکو الاستیک

1-4-1 – مدل ماکسول [1]

پاسخ مواد ویسکو الاستیک به تحریک مکانیکی بصورت سنتی، توسط عضو های الاستیک و ویسکوز (فنر و دمپر) مدل می‌شود. تئوری مورد نظر با تئوری مدارهای الکتریکی تشابه داشته که به صورت گسترده در کتاب های مهندسی آورده شده است.

لازم است تأکید شود که ارائه رفتار ویسکو الاستیک در قالب فنر و دمپر، صحتی بر اینکه این المانها بازتاب رفتار مولکولی این مواد است نمی‌باشد. بهر حال مدل های ویسکو الاستیک مختلفی موجود بوده که رفتار آنها خیلی به هم نزدیک می‌باشد از این رو ارائه کننده ی یک رفتار ویسکوالاستیک مشابه می‌باشند.

بصورت نقل مشهور، فنرها و دمپرها[1] به ترتیب معرف دهنده پاسخ الاستیک و ویسکوزِ ایده آل به تحریک تنش پله ای[2] می‌باشند. بصورت مشابه، ترکیب این دو می‌تواند برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک مواد به کار رود. مدل ماکسول شامل یک فنر سری با یک دشپات است که، یک مدل ایده آل از این رفتار می‌باشد. (شکل1.1)



شکل 1.1: طرح شماتیک مدل ماکسول

در ابتدا پاسخ مدل ماکسول به تنش پله ای $s = s_0 H(t)$ که $H(t)$ تابع پله واحد[3] می‌باشد، بررسی می‌شود. با توجه به شکل 1.1 کرنش e عبارت است از:

$$e = e_1 + e_2 \tag{1-22}$$

که e_1 و e_2 به ترتیب کرنشهای فنر و دشپات می‌باشند. چون تنش ایجاد شده در فنر و دشپات یکسان می‌باشد در نتیجه:

---

[1] -Dashpot

[2] - Step stress perturbation

[3] - Heaviside step function

$$e_1 = \frac{s}{G} \tag{1-23}$$

$$\dot{e}_2 = \frac{s}{h} \tag{1-24}$$

که در آن G مدول برشی و h میرایی است. از معادلات (1-22) ، (1-23)، (1-24) نتیجه می‌شود که:

$$\dot{e} = \frac{\dot{s}}{G} + \frac{s}{h} \tag{1-25}$$

از این عبارت محاسبه پاسخ به تنش پله ای یا کرنش پله ای امکان پذیر می‌شود. با لاپلاس گرفتن از دو طرف معادله (1-25)

$$se(s) - e(0^+) = \frac{1}{G}\left[s\,s\,(s) - s\,(0^+)\right] + \frac{1}{h}\,s\,(s) \tag{1-26}$$

طبق معادله (1-26) پاسخ مدل به یک ورودی پله ای تنش $s = s_0 H(t)$ عبارت است از:

$$e(s) = \frac{e_0}{s} + \frac{s_0}{hs^2} \tag{1-27}$$

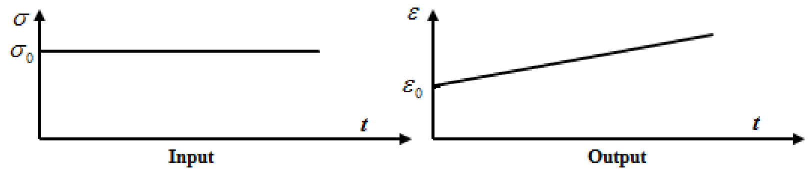
که شرایط اولیه بصورت $e(0^+) = e_0$ و $s\,(0^+) = s_0$ در نظر گرفته شده است. معکوس تبدیل لاپلاس معادله (1-27) عبارت است از:

$$e(t) = s_0\left(\frac{1}{G} + \frac{t}{h}\right) \tag{1-28}$$

بطوریکه $G = s_0 / e_0$ (شکل1.2 [1]). تابع کامپلینس خزش[1] بصورت عبارت زیر بیان می‌شود:

$$J(t) = \frac{e(t)}{s_0} = \frac{1}{G} + \frac{t}{h} \tag{1-29}$$

[1] - Creep compliance function



شکل 1.2: **پاسخ مایع ایده ال به تنش برشی پله ای** [1]

تبدیل لاپلاس معادله 1.29 منجر به تابع مختلط کامپلینس خزش[١] می‌شود.

$$\frac{se(s)}{s\,0} = sJ(s) = J^*(s) = \frac{1}{G}(1+\frac{1}{ts}) \qquad (1\text{-}30)$$

که در آن $t = \frac{h}{G}$ زمان رهایش[2] می‌باشد. تابع مختلط در این معادله و معادلات دیگر با جایگزینی عبارت $s = iw$ به یک شکل مرسوم در حوزه ی فرکانس تبدیل می‌شود. از این رو، معادله (1-30) می‌تواند به شکل زیر نوشته شود.

$$J^*(iw) = \frac{1}{G}(1+\frac{1}{iwt}) \qquad (1\text{-}31)$$

برای یک آزمایش رهایش تنش[٣]، پاسخ به کرنش ورودی $e(t) = e_0 H(t)$ با توجه به شکل 1.1 بصورت زیر قابل استخراج می‌باشد.

$$e_0 = e_1 + e_2 \qquad (1\text{-}32)$$

از این رو:

$$\dot{e}_1 + \dot{e}_2 = 0 \qquad (1\text{-}33)$$

با ترکیب معادلات (1-32)، (1-33) و 1. 22 و (1-23) عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{\dot{s}}{G} + \frac{s}{h} = 0 \qquad (1\text{-}34)$$

1 - complex compliance function

2 - Relaxtion time

3 - Stress relaxation test

که تبدیل لاپلاس آن عبارت است از:

$$\frac{1}{G}(ss\,(s)-s\,(0^{+}))+\frac{s\,(s)}{h}=0 \qquad (1\text{-}35)$$

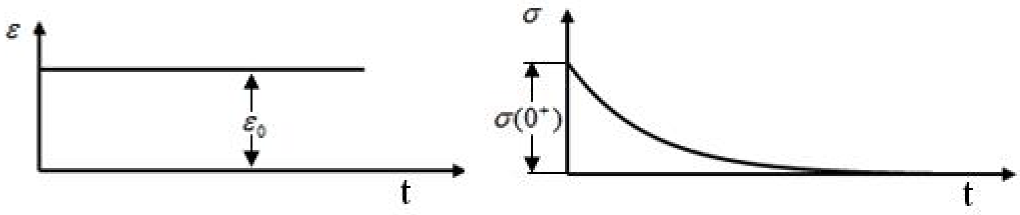
از معادله(1-35) ، $s\,(s)$ نتیجه می‌شود:

$$s\,(s)=\frac{h}{G+hs}s\,(0^{+}) \qquad (1\text{-}36)$$

که معکوس لاپلاس آن عبارت است از:

$$s\,(t)=s_{\,0}\;e^{(-t/t)} \qquad (1\text{-}37)$$

بطوریکه برابر $t=\dfrac{h}{G}$ می‌باشد. ورودی و خروجی سیستم بصورت شماتیک در شکل 1.3 [1] ارائه شده است.



شکل 1.3: پاسخ یک مایع ماکسول به کرنش برشی پله واحد

از معادله (1-37) مدول رهایش عبارت است از:

$$G(t)=\frac{s\,(t)}{e_0}=\frac{s_{\,0}}{e_0}e^{-t/t} \qquad (1\text{-}38)$$

مدول مختلط رهایش که بر اساس تبدیل لاپلاس رابطه ی فوق تعریف می‌شود نیز عبارت است از:

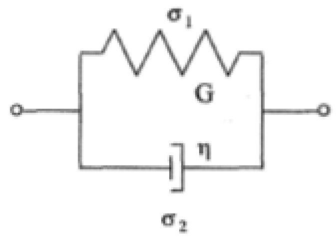
$$\frac{s\,s\,(s)}{e_0}=s\,G(s)=G^{*}(s)=G_0\,\frac{s}{s+t^{\,-1}} \qquad (1\text{-}39)$$

که $G_0=\dfrac{s_{\,0}}{e_0}$.

1-4-2 – مدل کلوین - ویت[1] [1]

این مدل متشکل از فنری موازی با دشپات است. تنش کلی در مدل، مجموع تنش در فنر و دشپات می‌باشد از این رو:

$$s = s_1 + s_2 \qquad \rightarrow \qquad s = Ge + h\dot{e} \tag{1-40}$$



شکل 1.4: طرح شماتیک مدل کلوین - ویت

تبدیل لاپلاس معادله (1-40) با ورودی پله برای تنش، عبارت است از:

$$\frac{s_0}{s} = Ge(s) + h\left[se(s) - e(0^+)\right] \tag{1-41}$$

با فرض اینکه $e(0^+) = 0$، معادله (1-41) به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$e(s) = \frac{s_o}{s(G + hs)} \tag{1-42}$$

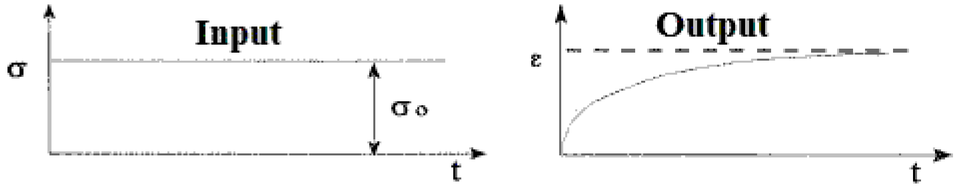
در نتیجه معکوس $e(s)$ می‌شود:

$$e(t) = \frac{s_0}{G}(1 - e^{(-\frac{t}{t})}) \tag{1-43}$$

پاسخ المان کلوین- ویت به ورودی تنش پله ای به صورت شماتیک در شکل 1.5 آورده شده است. همچنین از معادله (1-43) تابع کامپلینس خزش به سادگی قابل استخراج می‌باشد.

---

[1] -Kelvin - Voigt



شکل 1.5: پاسخ یک جامد کلوین – ویت به یک تنش پله ای برشی [1]

$$J(t)=\left(1-e^{(-t/t)}\right) \tag{1-44}$$

که در آن $J=\dfrac{1}{G}$، برای یک فنرالاستیک می‌باشد همچنین تابع کامپلینس مختلط خزش مربوطه عبارت است از:

$$J^*(s)=\frac{se(s)}{s_0}=\frac{1}{G(1+st)}=\frac{J}{1+st} \tag{1-45}$$

مدل های ماکسول و کلوین- ویت قادر به ارائه پاسخ ویسکو الاستیک مواد به درستی نمی باشند از این رو لزوم استفاده از مدل های پیچیده تر بدیهی به نظر می‌رسد.

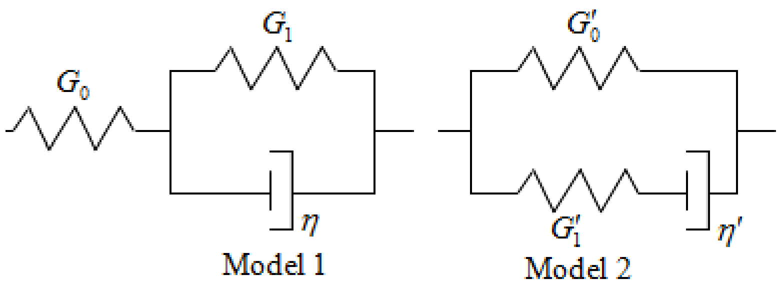
1-4-3 – مدل جامد استاندارد سه عضوی [1] [1]

آنچه به صورت مرسوم جامد استاندارد سه عضوی یا بصورت ساده جامد استاندارد (یا جامد زنر [2]) نامیده می‌شود عبارت است از ترکیب سری یک عضو کلوین – ویت با فنر یا ترکیب موازی یک عضو ماکسول با یک فنر (شکل 1.6).

---

[1]-Three – Element standard solid

[2] - Zener's solid



شکل 1.6: طرح های شماتیک مدل زنر

پاسخ کرنش مدل اول به ورودی تنش پله ای $\sigma = \sigma_o H(t)$ بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad (1\text{-}46)$$

از این معادله و با احتساب معادلات زیر:

$$\sigma = G_0 \varepsilon_1 \quad ، \quad \sigma = G_1 \varepsilon_2 + \eta \dot{\varepsilon}_2 \qquad (1\text{-}47)$$

نتیجه می‌شود که:

$$\frac{G_1}{\eta}\varepsilon + \dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta}\left(1 + \frac{G_1}{G_0}\right)\sigma + \frac{\dot{\sigma}}{G_0} \qquad (1\text{-}48)$$

برای یک تنش پله ای $\sigma = \sigma_o H(t)$، تبدیل لاپلاس معادله (1-48) عبارت است از:

$$\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon(0)}{s + \tau^{-1}} + \frac{\sigma_0}{\eta}\left(1 + \frac{G_1}{G_0}\right)\left(\frac{1}{s(s + \tau^{-1})}\right) \qquad (1\text{-}49)$$

بطوریکه $\tau = \frac{\eta}{G_1}$. لاپلاس معکوس $\varepsilon(s)$ در معادله (1-49) عبارت است از:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G_0} + \frac{\sigma_0}{G_1}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \qquad (1\text{-}50)$$

از این رو، تابع کامپلینس خزش به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$J(t) = \frac{1}{G_0} + \frac{1}{G_1}\left[1 - e^{(-t/\tau)}\right] = J_g + J_1\left[1 - e^{(-t/\tau)}\right] \qquad (1\text{-}51)$$

بطوریکه $J_1 = G_1^{-1}$ و $J_g = G_0^{-1}$. از معادله (1-51) تابع کامپلینس مختلط خزش به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$sJ(s) = J^*(s) = J_g + \frac{J_1}{1 + st} \tag{1-52}$$

برای ورودی پله ای کرنش $e = e_o H(t)$ تبدیل لاپلاس معادله (1-48) می‌شود.

$$\frac{G_1}{t} e(s) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{G_1}{G_0}\right) s(s) + \frac{1}{G_0}\left[s s(s) - s\left(0^+\right)\right] \tag{1-53}$$

معکوس لاپلاس معادله (1-53) پاسخ مدل به ورودی کرنش پله ای می‌باشد.

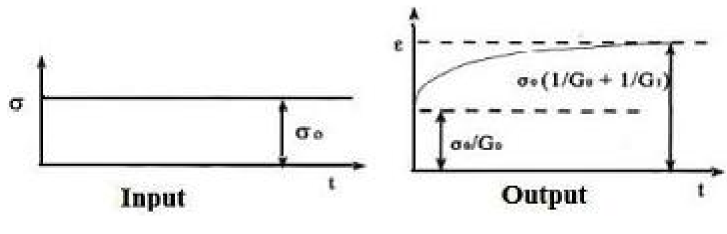
$$s(t) = s_0 \left\{ \left(G_1 \frac{e_0/s_0}{1 + G_1/G_0} \right) + \frac{1}{1 + G_1/G_0} e^{\left[\frac{-G_0}{h}\left(1 + \frac{G_1}{G_0}\right)t\right]} \right\} \tag{1-54}$$

بطوریکه $s_0 = s\left[0^+\right] = e_0 G_0$. از این رو مدول رهایش عبارت است از:

$$G(t) = \frac{s(t)}{e_0} = \frac{G_1}{1 + \frac{G_1}{G_0}} + \frac{G_0}{1 + \frac{G_1}{G_0}} e\left[\frac{-G_0}{h}\left(1 + \frac{G_1}{G_0}\right)t\right] \tag{1-55}$$

در حالی که مدول رهایش مختلط از تبدیل لاپلاس معادله (1-55) حاصل می‌شود؛

$$G^*(s) = \left[J^*(s)\right]^{-1} = \left(\frac{1 + st}{1 + st + G_0/G_1}\right) G_0 \tag{1-56}$$



شکل 1.7: **پاسخ مدل زنر به یک تنش پله ای** [1]

در مدل دوم که از ترکیب موازی یک عضو ماکسول با یک فنر حاصل شده است. معادلات زیر قابل استخراج می‌باشد.

$$s = s_1 + s_2 \qquad (1\text{-}57)$$

بطوریکه $s_1 = G_0' e$. و

$$\dot{e} = \frac{\dot{s}_2}{G_1'} + \frac{s_2}{h'} \qquad (1\text{-}58)$$

با استفاده از معادلات (1-57) و (1-58) معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$t'\dot{s} + s = t'(G_0' + G_1')\dot{e} + G_0' e \qquad (1\text{-}59)$$

بطوریکه $t' = \frac{h'}{G_1'}$ می‌باشد. پاسخ مدل به ورودی کرنشی $e(t) = e_0 H(t)$ بسادگی از معادله (1-59) قابل استخراج می‌باشد. که عبارت است از:

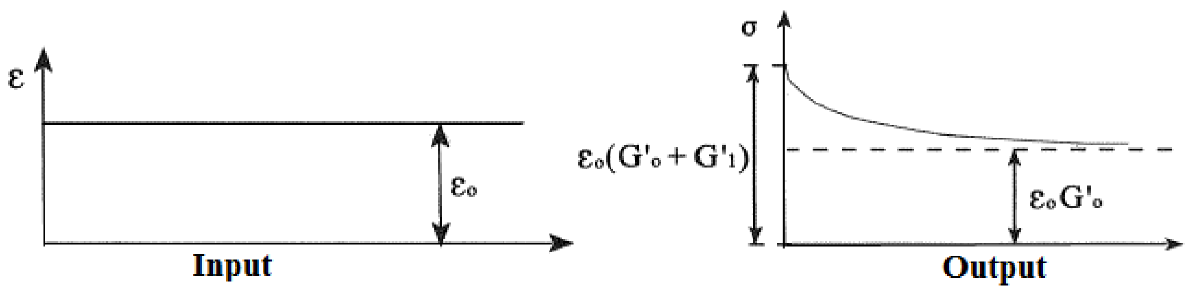
$$s(t) = e_0 (G_0' + G_1' e^{(-t/t')}) \qquad (1\text{-}60)$$

مدول رهایش در حوزه زمان و فرکانس عبارت است:

$$G(t) = G_0' + G_1' e^{(-t/t)} \qquad (1\text{-}61)$$

$$sG(s) = G^*(s) = G_0' + \frac{G_1' s t'}{1 + s t'} \qquad (1\text{-}62)$$

طرح شماتیک پاسخ به کرنش ورودی پله ای برای این مدل در شکل 8-1 [1] آورده شده است.



شکل 1.8: پاسخ مدل زنر به یک کرنش پله ای

در روشی مشابه، پاسخ مدل به ورودی تنش برشی $s = s_0 H(t)$ از معادله (1-59) نتیجه می‌شود.

$$e(t) = s_0 \left[\frac{1}{G_0' + G_1'} + \frac{G_1'}{G_0'(G_0' + G_1')} (1 - e^{(-t/t'')}) \right] \qquad (1\text{-}63)$$

که $t'' = \frac{t'}{G_0}(G_0 + G_1)$ با مقایسه معادلات (1-50) و (1-63) از یک طرف و معادلات (1-54) و (1-60) از طرف دیگر، به سادگی می‌توان روابطی برای معادل کردن دو معادله بدست آورد.

$$G_0 = G_0' + G_1' \qquad (1\text{-}64a)$$

$$G_1 = \frac{G_0'}{G_1'}(G_1' + G_0') \qquad (1\text{-}64b)$$

$$t = t' \frac{(G_1' + G_0')}{G_0'} \qquad (1\text{-}64c)$$

و بصورت عکس:

$$G_0' = \frac{G_0 G_1}{G_0 + G_1} \qquad (1\text{-}64d)$$

$$G_1' = \frac{G_0^2}{G_0 + G_1} \qquad (1\text{-}64e)$$

$$t' = t \frac{G_1}{G_0 + G_1} \qquad (1\text{-}64f)$$

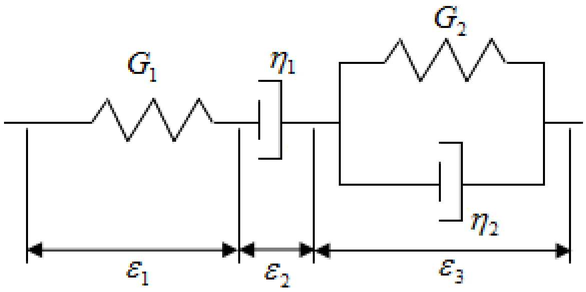
1-4-4 – مدل برگر [۱] [1]

مدل برگر، که مدل مایع خطی چهار عضوی [۲] نیز نامیده می‌شود، یک ترکیب از مدل ماکسول و کلوین می‌باشد. (شکل 1.9)

---

[1] -BURGERS Model

[2] -A linear liquid of four elements



شکل 1.9: طرح شماتیک مدل برگر

برای یک تنش ورودی s، کرنش کلی عبارت است از:

$$e = e_1 + e_2 + e_3 \tag{1-65}$$

$$e_1 = \frac{s}{G_1} \qquad \dot{e}_2 = \frac{s}{h_1} \qquad \dot{e}_3 + \frac{G_2}{h_2} e_3 = \frac{s}{h_2} \tag{1-66}$$

بعد از حذف e_1، e_2 و e_3 بین این معادلات، نتیجه می‌شود که:

$$s + \left[\frac{h_2}{G_2} + h_1\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right)\right]\dot{s} + \frac{h_1 h_2}{G_1 G_2}\ddot{s} = h_1 \dot{e} + \frac{h_1 h_2}{G_2}\ddot{e} \tag{1-67}$$

پاسخ معادله فوق به ورودی کرنش پله ای عبارت است از:

$$e(t) = s_0\left[\frac{1}{G_1} + \frac{t}{h_1} + \frac{1}{G_2}\left[1 - e^{(-t/t_2)}\right]\right] \tag{1-68}$$

بطوریکه $t_2 = \frac{h_2}{G_2}$. تابع کامپلینس مختلط خزش از تبدیل لاپلاس معادله (1-68) حاصل می‌شود.

$$J^*(s) = \frac{1}{G} + \frac{1}{t_1 s} + \frac{1}{G_2(st_2 + 1)} \tag{1-69}$$

برای ورودی کرنش پله ای معادله (1-67) می‌شود.

$$s + r_1 \dot{s} + r_2 \ddot{s} = q_1 e_0 d(t) + q_2 e_0 \frac{d}{dt} d(t) \tag{1-70}$$

بطوریکه $d(t)$ تابع دیراک بوده و پارامترهای q_1, q_2, r_2, r_1 عبارتند از:

$$r_1 = h_1\left(\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\right)+\frac{h_2}{G_2} \quad , \qquad r_2 = \frac{h_1 h_2}{G_1 G_2}$$
$$q_1 = h_1 \qquad , \qquad q_2 = \frac{h_1 h_2}{G_2} \tag{1-71}$$

پاسخ معادله (1-70) عبارت است از:

$$s\,(t) = \frac{e_0}{A}\left[(q_1 - q_2 r_1)e^{-p_1 t} - (q_1 - q_2 r_1)e^{-p_2 t}\right] \tag{1-72}$$

که r_1، r_2 و A عبارتند از:

$$p_1 = \frac{r_1 - A}{2r_2} \quad , \quad p_2 = \frac{r_1 + A}{2r_2} \quad , \quad A = \left[r_1^2 - 4r_2\right]^{1/2} \tag{1-73}$$

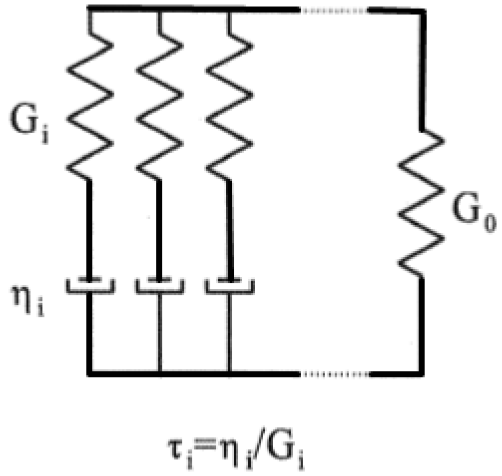
مدل استاندارد خطی مایع چهار عنصری برای مطالعه پاسخ سیستم مایع تحت یک تست خزش، مناسب و کافی می‌باشد.

1-4-5 – مدل تعمیم یافته کلوین - ویت و ماکسول

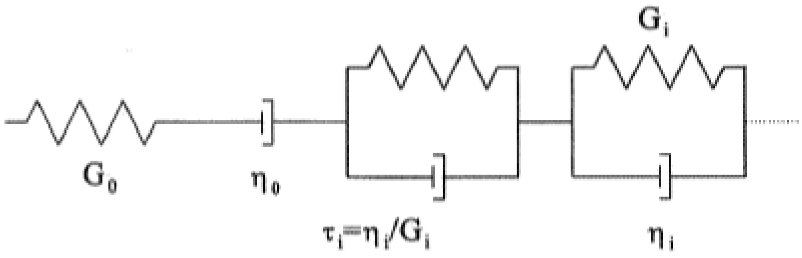
مدل های ابتدایی مطالعه شده در بالا تنها رفتار رئولوژیکی سیستم های ساده را توصیف می‌کند. دراین مدلها تنها یک زمان رهایش برای پاسخ ماده به اغتشاش وارد شده حاکم می‌باشد. در حالیکه، شواهد تجربی یک توزیع از زمان های رهایش یا retardation را نشان می‌دهد. این توزیع ممکن است پیوسته یا گسسته باشد.

بر اساس این اصول تجربی، امکان گسترش مدلها بطوریکه رفتار واقعی مواد را به خوبی نشان دهند وجود دارد. این تعمیم مدل می‌تواند با ترکیب چند مدل ماکسول بصورت موازی یا مدل کلوین-ویت بصورت سری انجام شود. شکل 1.10 .

در شکل 1.10a یک المان الاستیک به منظور احتساب پاسخ لحظه ای به مدل اضافه شده است. در شکل 1.10b یک عنصر ماکسول برای بازتاب رفتار مایع بصورت سری با چند عضو کلوین قرار گرفته است.



شکل 1.10: **طرح شماتیک مدل تعمیم یافته ماکسول بصورت موازی**



شکل 1.10**b**: **طرح شماتیک مدل تعمیم یافته کلوین – ویت بصورت سری**

توابع رهایش و retardation برای این مدلهای عبارتند از:

$$G(t) = G_e + \sum_{i=i}^{A} G_i e^{-t/t_i}$$
$$J(t) = J_g + \sum_{i=1}^{n} J_i (1 - e^{-t/t_i}) + \frac{t}{h_0} \quad (1\text{-}74)$$

بطوریکه $J_g = G_g^{-1}$ و $J_i = G_i^{-1}$ در شکل توزیع پیوسته، توابع $G(t)$ ، $J(t)$ عبارتند از:

$$G(t) = G_e + \int_0^{\infty} G(T) e^{-t/t}\, dt \quad (1\text{-}75a)$$

$$J(t) = J_g + \int_0^{\infty} J(t)\left(1 - e^{-t/t}\right) dt + \frac{t}{h_0} \quad (1\text{-}75b)$$

بطوریکه [1]:

$$\int_0^\infty G(T)\,dT = 1 \qquad\qquad \int_0^\infty J(T)\ dT = 1 \qquad (1\text{-}76)$$

المان های ماکسول بصورت موازی می‌توانند رفتار ویسکوالاستیک مایع در صورتی که عنصر G_0 حذف شود را توصیف کنند. همچنین المان های کلوین قابلیت توصیف رفتار مواد جامد را دارد اگر عنصر ماکسول آن حذف شود.

1-5 – جمع بندی

در این فصل مقدمه ای بر معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک به همراه رایج ترین مدل های موجود ارائه شد. بدیهی است که تمام خواص و نحوی عملکرد این مواد این فصل خلاصه نمی‌شود. از معادلات و مدل استاندارد خطی ارائه شده دراین فصل در تشریح و استخراج معادلات حرکت در فصل دوم و سوم کمک گرفته می‌شود.

فصل دوم

مروری بر مسئله ی بار متحرک در حوزه ی الاستیک و ویسکوالاستیک

یکی از مسائل مهم در تحلیل بارمتحرک در طول یک عضو یا سازه، تاثیر جنس سازه مورد نظر در پاسخ به این نوع تحریک می‌باشد. در تحلیل های صورت گرفته در این حوزه، بیشترین توجه به مواد الاستیک بوده است در حالی که طیف بسیار گسترده ای از مواد، در حوزه ویسکوالاستیک قرار دارند و شناخت پاسخ این سازه ها به دلیل رفتار متفاوت نسبت به مواد الاستیک، از اهمیت بالایی برخوردار است. از جمله مسائلی که تحلیل ویسکوالاستیک مسئله جواب بهتری نسبت به تحلیل الاستیک می‌دهد، انتقال سیال درون لوله های پلیمری یا حرکت جریان هوا بر رویه یک باله کامپوزیتی می‌باشد. در ادامه به بررسی موردی برخی از فعالیت های صورت گرفته در مورد بار متحرک در حوزه ی الاستیک و ویسکوالاستیک پرداخته شده است.

Fyba [2] در کتاب خود به طور مفصل به بررسی بار متحرک برروی انواع مختلف تیر ها، ورقها و پوسته ها، شامل هندسه های متفاوت پرداخته است. از این رو یکی از مراجع مهم و پایه در بررسی بار متحرک حساب می‌شود. عمده مسائل بررسی شده در این کتاب در حوزه الاستیک بوده و بصورت موردی به مسئله ی یک تیر ساده ویسکو الاستیک تحت بار متحرک اشاره شده است.

Bhuta [4] به بررسی پاسخ ارتعاشی یک پوسته استوانه ای جدار نازک الاستیک به بار متحرک پرداخته است. حل وی بر مبنای سری فوریه بوده و نتایج بدست آمده در این تحقیق قابل تعمیم به تیر محدود اویلر - برنولی [1] بر روی فونداسیون الاستیک تحت بار متحرک نیز می باشد؛ زیرا شکل معادلات حاکم برای هر دو سیستم، مشابه است. وی در تحقیق خود بیشتر بر روی ضریب دینامیکی سیستم که بصورت نسبت بیشترین خیز دینامیکی به بیشترین خیزاستاتیکی است بحث کرده است و یکی از نتایج مهم این تحقیق، ارائه بیشینه

[1] -Euler Bernoli

تغییرات این ضریب بر حسب ضریب تاثیر سرعت $a=\frac{V_{cr}}{V}$ و پارامتر پوسته $b=\frac{L^2}{rh}$ می باشد که V_{cr} سرعت بحرانی، V سرعت عبور بار , L طول پوسته، r شعاع و h ضخامت پوسته است.

از نمونه تحقیق های انجام شده که در زمینه جرم متحرک و تاثیرات اینرسی که باعث غیر خطی شدن مسئله می‌شود، می‌توان به مقاله ی Viswewara Rao [5] اشاره کرد. وی به مطالعه پاسخ یک تیر اویلر برنولی تحت جرم متحرک پرداخته است. از پارامترهای مهمی که وی در تحقیق خود قائل شده تأثیر جرم و اینرسی بار متحرک می‌باشد. وی با در نظر گرفتن نسبت جرم بار به جرم تیر، این پارامتر مهم را بررسی کرده و نشان داده است افزایش این نسبت باعث افزایش مقدار خیز تیر و نیز جلو افتادن زمان نقطه‌ی بیشینه می‌شود. او نشان داده است که تأثیرات اینرسی جرم بار می تواند بر ناحیه تشدید تأثیرگذار باشد. از جمله مسائلی که وی در استخراج معادله تیر تحت جرم متحرک قائل شده تأثیرات شتاب کوریولیس است.

رفتار یک تیر تحت بارهایی با سرعت متغیر در مطالعه ای توسط Michaltsos [6] بررسی شده است. این مقاله دررابطه با پاسخ خطی دینامیکی یک تیر ساده، تحت یک بار با مقدار ثابت، اما سرعت متغیر می باشد. وی در مقاله خود بر روی تأثیر شتاب مثبت یا منفی در پاسخ تیر به یک بار تک محوری یا یک بار دو محوری که مشابه سازی از خودرو می باشد، تمرکز کرده است. در مورد اخیر تأثیرات وجود میرایی نیز لحاظ شده است. مدل مطرح شده در این مقاله شامل یک تیر با طول دهنه L با جرم ثابت در واحد طول m، صلبیت خمشی EI و اینرسی پیچشی J_b است که مسئله را خطی، همگن و ایزو تروپیک ساخته است. بار متحرک بر روی این تیر بصورت $P=mg$ است. این بار خود تحت تأثیر نیروی رانشی $F(t)$ بوده و درنتیجه سرعت عبور بار متغیر می باشد.

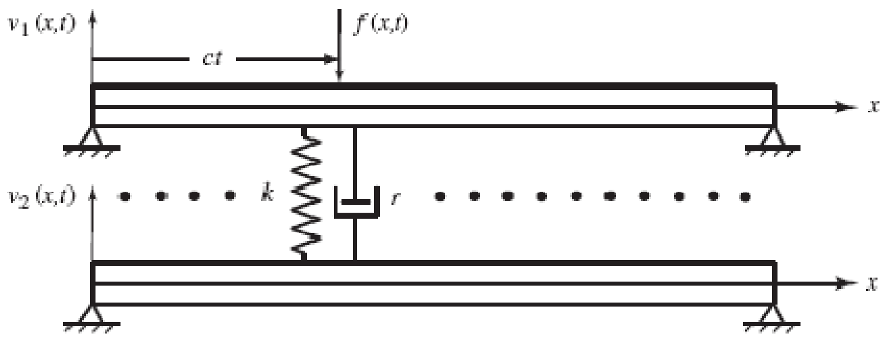
مدل سازی ورود خودرو بر روی یک پل یکی از مسائلی است که در این مقاله به آن توجه ویژه ای شده است. نکته مهم در مدل سازی این مسئله دقت و محاسبه زمان و سرعت لحظه ای ورود چرخهای جلو و عقب می‌باشد که با هم تفاوت دارند؛ اما روند حل مسئله مانند نیروی تک محوره می‌باشد.

پاسخ پایدار یک تیر بی‌نهایت که بر روی فونداسیون الاستیک قرار گرفته و تحت عبور بار متحرک می‌باشد از دیگر مسائلی است که در مدل سازی ریل قطار مورد توجه می‌باشد. Mallik [7] و همکارانش این مسئله را تحت عبور بار متمرکز با سرعت ثابت بر روی تیری که روی فونداسیون الاستیک قرار دارد مدل کرده اند. در تحلیل انجام شده، یک تیراویلر - برنولی که بر روی یک فونداسیون الاستیک قرار گرفته مورد توجه می‌باشد. فونداسیون الاستیک بوسیله دو پارامتر مجزا تعریف شده است که عبارتند از ثابت فنریت

خاک و ثابت برشی خاک. تیر و فونداسیون بصورت همگن و ایزوتروپیک فرض شده اند. مسئله در دو حالت میرایی و بدون میرایی بررسی شده است.

در حل این مسئله با تغییر متغیر $z = X - Vt$، معادله را به شکل همگن تبدیل کرده و نیروی متحرک بر روی تیر را بصورت یک نیروی برشی در شرایط مرزی مسئله وارد نموده اند. از فرضیات مهم حل وی می‌توان به صرفنظر کردن از نوسانات (جابجایی تیر) و مشتقاتش در بی‌نهایت نام برد. همچنین در ضمیمه این مقاله روشی دیگر به کمک تبدیل فوریه ارائه شده است. بعنوان یکی از نتایج این تحقیق مشاهده می‌شود زمانی که بار با سرعت بحرانی بر روی تیر حرکت می‌کند و اثرمیرایی نیز در نظر گرفته نمی‌شود پاسخ به یک حالت پایدار نمی رسد. از نتایج دیگری که در این تحقیق حاصل شده تاثیر پارامتر برشی لحاظ شده در فونداسیون است که باعث افزایش نسبت خیز دینامیکی به استاتیکی می‌شود.

Hilal [8] پاسخ دینامیکی یک تیراویلر برنولی دوتایی تحت یک بار متحرک با مقدار ثابت را بررسی نموده است. در این مقاله رفتار دینامیکی یک سیستم تیر دوتایی (شکل 3.1) که تحت حرکت یک بار ثابت قرار دارد مورد مطالعه قرار گرفته است. سیستم، متشکل از دو تیر اویلر برنولی ایزوتروپیک، همگن و الاستیک می‌باشد. تیرها نسبت به هم موازی بوده و یکی بر روی دیگری بوسیله یک لایه ممتد ویسکوالاستیک قرار گرفته است.



شکل 2.1: **مدل تیر دو تایی [8]**

این لایه به کمک توزیع فنر – دمپر مدل شده است. تیر بالایی تحت حرکت بار با شدت ثابت قرار دارد و بعنوان تیر اولیه با خیز $v_1(x,t)$ و تیر پایینی بعنوان تیر ثانویه با خیز $v_2(x,t)$ شناخته می‌شود. خیز دینامیکی هر دو تیر با حل دقیق معادلات حاکم استخراج شده است و تاثیرات سرعت بار، میرایی و الاستیسیته‌ی لایه

ویسکوالاستیک بین دو تیر در پاسخ تیر مورد ارزیابی قرار گرفته است. بعلاوه نیروی منتقله بین دو تیر، تعیین و تاثیر پارامترهای مختلف در مقدار این نیرو مورد مطالعه وی قرار گرفته است.

در این تحقیق برای بررسی پارامترهای مختلف، عبارات های بی بعدی تعریف شده اند که از مهمترین آنها می‌توان به پارامتر بی‌بعد نسبت میرایی $z_n = \frac{r}{m\Omega_n}$ که در آن r مقدار میرایی لایه ویسکوالاستیک، m جرم واحد طول و Ω_n فرکانس مد n ام تیر دوم می‌باشد و هم چنین سفتی[1] لایه ویسکوالاستیک بوسیله پارامتر بی‌بعد $b = \frac{kl^4}{EI}$ اشاره کرد که L طول تیر، EI سفتی خمشی و k سفتی لایه ویسکوالاستیک می‌باشد.

از جمله نتایج این مقاله می‌توان گفت با افزایش مقدار نسبت میرایی، خیز می‌تواند افزایش یا کاهش یابد.

همچنین افزایش پارامتر سفتی b منجر به افزایش خیز تیر اول شده و اگر b کمتر از 0.1 یا 10^4 بیشتر از باشد تاثیری بر افزایش خیز ندارد.

بعلاوه در غیاب میرایی، مقدار کم b به معنای مستقل شدن[2] دو تیر بوده و افزایش آن باعث کوپل شدن دو تیر می‌شود. در مواردی که b بسیار زیاد باشد یک کوپل صلب بین دو تیر ایجاد شده و در نتیجه خیز تیر ثانویه نیز بیشتر می‌شود. افزایش پارامتر سفتی باعث کاهش اثر میرایی نیز می‌شود.

برای مقادیر بسیار کم b که باعث یک کوپلینگ ضعیف بین دو تیر می‌شود افزایش مقدار z باعث افزیش مقدار خیز تیر دوم می‌شود. این به علت افزایش کوپلینگ بین دو تیر ناشی از انتقال انرژی مکانیکی بیشتر از تیر اول به تیر دوم می‌باشد.

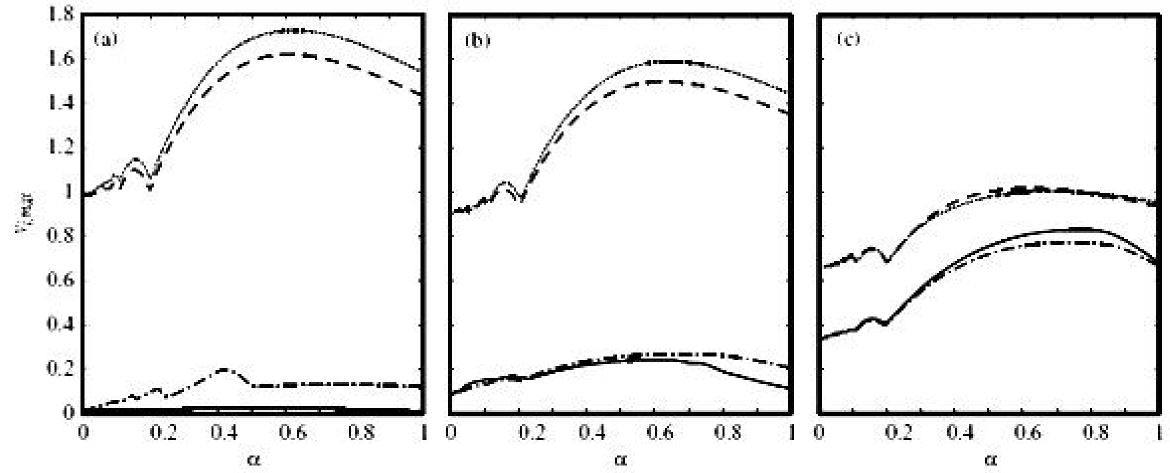
افزایش و کاهش b و z بر روی زمان حصول بیشینه تیرها موثر است بطوریکه برای مقادیر کم b، بیشینه تیر دوم کمی زودتر حادث می‌شود.

از جمله نمودارهای مفیدی که محقق درمقاله خود آورده می‌توان به نمودار بیشینه نسبت خیز دینامیکی به استاتیکی درمقابل سرعت بی‌بعد برای مقادیر مختلف میرایی و سفتی اشاره نمود که نتایج زیر از آن حاصل شده است (شکل 2.2).

---

[1] -Stiffness.

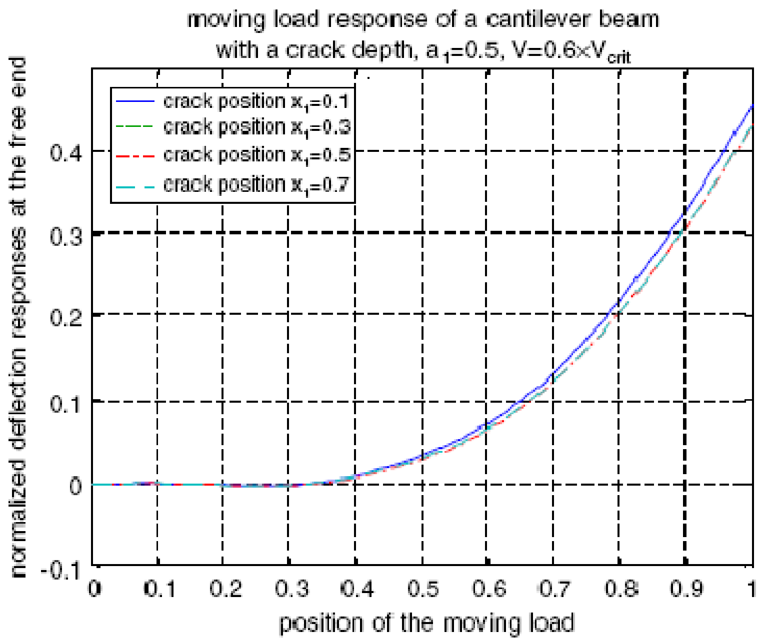
[2] -decoupled



شکل 2.2: نمودار بیشینه نسبت خیز دینا میکی به استاتیکی بر حسب سرعت بی‌بعد برای مقادیر مختلف پارامتر سفتی و میرایی [8]

یکی از مسائلی که در مهندسی و طراحی سازه ها از اهمیت ویژه ای برخوردار است نحوه ی مدل ترک در سازه وتاثیر وجود آن در پاسخ سازه می‌باشد. این مسئله می‌تواند در پاسخ تیر به بار متحرک نیز تاثیر گذار باشد از این رو به بررسی دو مقاله در این رابطه پرداخته می‌شود.

Lin [9] در مقاله ای به بررسی پاسخ تیر یک سر گیردارِ دارای ترک باز به بار متحرکِ متمرکز با سرعت ثابت پرداخته است. سیستم تیر دارای ترک، بصورت تیری با دو دهنه، که هر دهنه تیر اویلری یکنواختی است مدل شده است. با توجه به شرایط سازگاری در دو طرف ترک، رابطه بین دو دهنه قابل استخراج می‌باشد. این شرایط عبارتند از یکنواختی جابجایی، گشتاور خمشی و نیروی برشی و شیب تیر در دو طرف ترک. در این مسئله ابتدا توابع مشخصه برای مسئله بدون تحریک استخراج شده است و سپس به کمک بسط توابع ویژه، مسئله اصلی حل شده است. از جمله نتایج این تحقیق، تطابق فرکانس های طبیعی حاصل شده از حل تحلیلی با روش تجربی است. بعلاوه وی نشان داد است پاسخ تیر چندان به عمق و موقعیت ترک حساس نمی‌باشد. (شکل 2.3)



شکل 2.3: **حساسیت یک تیر یکسر گیردار به موقعیت ترک بر روی تیر [9]**

از دیگر کارهای صورت گرفته در بحث ترک و بار متحرک مقاله ی آقای آرایایی [10] در مورد وجود ترک باز و ترک باز و بسته شونده در پاسخ تیر دو سر گیردار به بار متحرک می‌باشد. در این مقاله یک روش تحلیلی، به همراه یک روش محاسباتی برای تعیین پاسخ دینامیکی تیر نامیرای اویلر برنولی با ترک باز و بسته شونده[1] تحت حرکت جرم متحرک نقطه ای ارائه شده است. روش محاسباتی بر پایه تکنیک المان های گسسته[2] و روش اجزای محدود می‌باشد. ابتدا روش استاندارد المان های گسسته به منظور توجه به تأثیرات نیروهای مرکز گرا و کریولیس تصحیح شده است. سپس این تصحیح برای محاسبه ترک های باز و ترک باز و بسته شونده تحت جرم متحرک گسترش یافته است. معیار درستی روش المان های گسسته، نتایج دیگر مقالات ارائه شده در این حوزه و نیز مقایسه با نتایج روش اجزاء محدود می‌باشد.

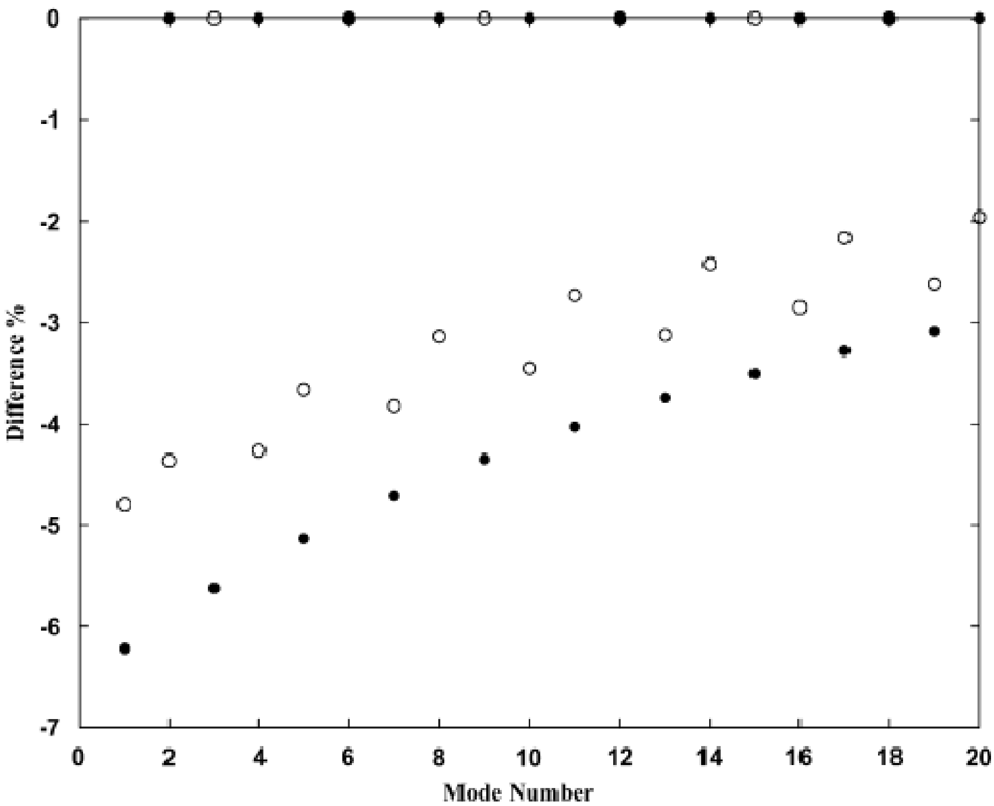
ترک باز و بسته شونده در این مقاله بصورت تابعی از انحنای تیر که متناسب است با انحنای لحظه ای به بیشترین انحناء در المان دارای ترک، بیان شده است. همچنین وی تأثیرات سرعت جرم متحرک، موقعیت و اندازه ترک را بر روی خیز تیر مورد بررسی قرار داده است. فرکانس های طبیعی تیر تحت تأثیر ترک مورد مطالعه قرار گرفته و با فرکانس های طبیعی تیر معمولی مقایسه شده است. از جمله نتایج این مقاله عبارت

---

[1]- Breathing crack

[2] -Discrete Element Technique (DET)

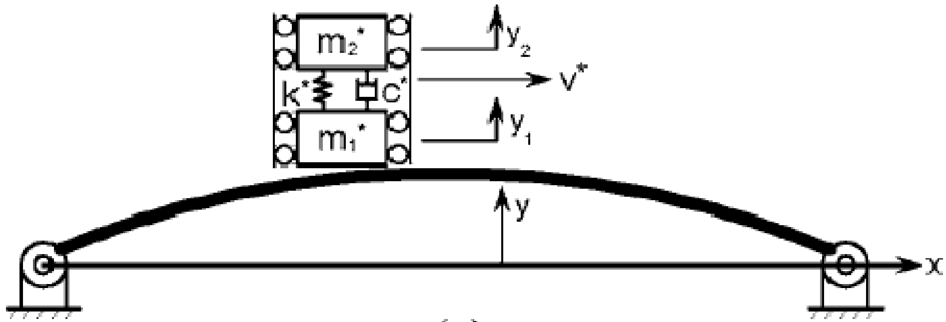
است از اینکه اگر ترک در محل گره واقع شود تاثیری بر فرکانس مد هایی که یک گره در آن نقطه دارند ندارد. (شکل 2.4).



شکل 2.4: **اختلاف بین فرکانس های طبیعی تیری با ترک باز و تیری بدون ترک.** ○ $\frac{L_c}{L} = 0.33$ •. $\frac{L_c}{L} = 0.5$ **[10]**

وی نشان داده است که افزایش اندازه ترک باعث افزایش خیز، بخصوص در مورد ترک باز میشود ولی تاثیر چندانی در مود ترک باز و بسته شونده ندارد. همچنین هر چه ترک به مرکز تیر نزدیکتر باشد تاثیرات آن بر پاسخ تیر بیشتر می‌شود.

در بحث طراحی پل ها، پاسخ آنها نسبت به شکل و طول و انحنا و نوع بار ورودی متفاوت است پروفسور Chen [11] و یکی از شاگردانش رفتار دینامیکی یک کمان تحت بار متحرک متشکل از جرم، فنر و دمپر را بررسی کرده است (شکل2.5) . تأکید این مقاله بر تاثیر نیروهای اینرسی سیستم جرم - فنر بر پاسخ تیر کمانی شکل می‌باشد. وی نشان داده است که مدل نیروی متمرکز یک تقریب خوب برای زمانی که تیرِ کمان، نازک و سرعت عبور بار ناچیز است می‌باشد.

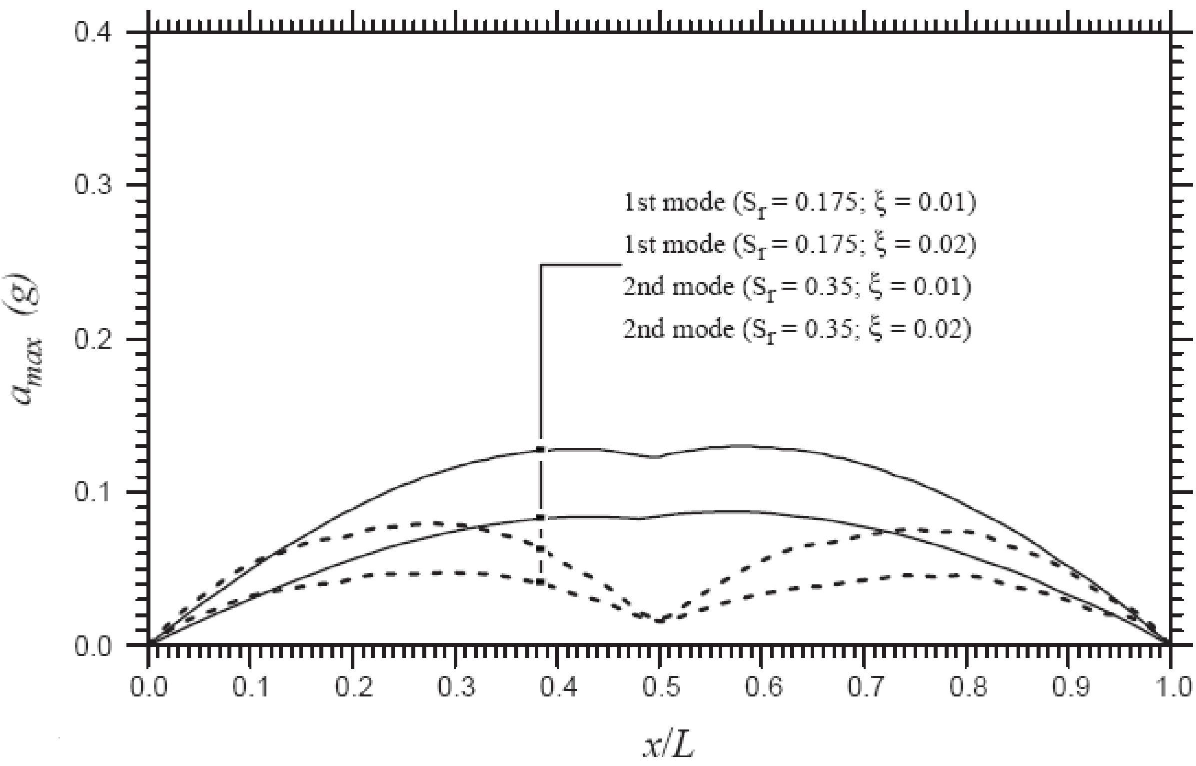


شکل 2.5: تیر کمانی شکل تحت عبور سیستم تعلیق [11]

وی نشان داده است که سیستم تعلیق یک ناحیه متفاوت از سرعت بحرانی را نسبت به بار متمرکز پیش‌بینی می‌کند. بعلاوه زمانی که سرعت عبور بار کم باشد کل انرژی جذب شده توسط کمان همزمان با افزایش سفتیِ فنر سیستم تعلیق افزایش یافته و نیز این انرژی دارای حد بالای انرژ ی جذب شده در عبور بار متمرکز و حد پایینی عبور جرم متمرکز می‌باشد.

در طراحی سازه هایی که در معرض عبور بار متحرک قرار دارند تنها شناخت جابجایی سازه برای طراحی آنها کافی نیست ویکی از اثرات مهم که در ایمن بودن سازه نقش مهمی ایفا می‌کند شتاب ایجاد شده در سازه به علت عبور بار می‌باشد. از اثرات مهم این شتاب ایجاد ضربه، تغییر ناگهانی خیز و جدا شدن بار از روی سطح سازه می‌باشد. مقالات پیش رو از جمله کارهایی است که به بررسی شتاب ایجاد شده در اثر عبور بار متحرک می پردازد.

Yaua [12] و همکارش در تحقیقی پاسخ شتاب یک تیر ساده تحت عبور یک سری بار با فاصله برابر و سرعت ثابت را مورد بررسی قرار داده اند. به کمک حل دقیق، پارامتر های کلیدی حاکم بر پاسخ تشدید تیر مشخص شده و در این راستا تاثیر مدهای بالا در پاسخ تیر بررسی شده است. برای تیرهایی با میرایی کم، مدهای بالا تأثیرات مهمی برروی دامنه شتاب تیر گذاشته بطوریکه نمی‌توان از آن ها صرفنظر کرد. همچنین آنها نشان داده اند شتاب بیشینه یک تیر الزاماً در وسط دهانه آن حادث نمی‌شود (شکل 2.6). وی با توجه به مودهای اول و دوم فرمولی برای اینکه آیا شتاب بیشینه در این نقطه یا جای دیگر حاصل می‌شود ارائه کرده است. برای نمونه هایی که اثرات میرایی سازه ای قابل توجه است از شرکت مودهای با لا در پاسخ شتاب می‌توان صرفنظر کرد. آنها نتیجه گرفته اند که برای تیرهایی با میرایی زیاد پاسخ شتاب بیشینه از مدهای اصلی پیروی می‌کند.



شکل 2.6: شتاب بیشینه یک تیر میرا تحت عبور بار با سرعت تشدید [12]

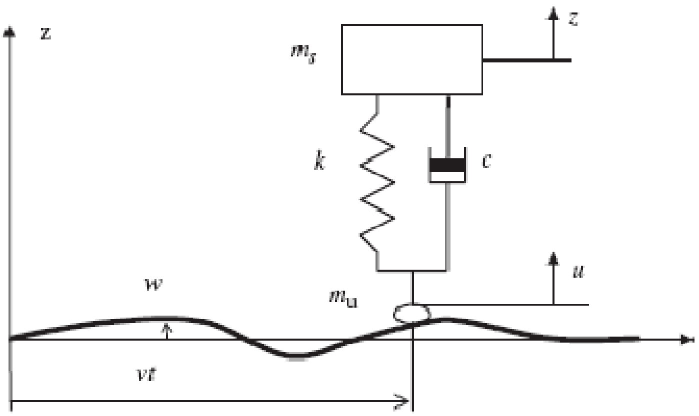
در بسیاری از مقالات ارائه شده در بحث بار متحرک فرض شده است که بار در هیچ لحظه ای از تیر جدا نشود. اما Dan Stăncioiu [13] به بررسی جداشدن یک سیستم تعلیق هنگام حرکت برروی تیر و دوباره قرار گرفتن بر روی آن پرداخته است. در این مقاله وی شرایط دوباره قرار گرفتن بار بر روی تیر را بعد از جدا شدن بررسی کرده است. وی نشان داده است که این جداشدگی بر اساس مقادیر مشخصی از پارامترهای سیستم و سرعت بار، ممکن است چندین بار در طول مسیر حادث شود و بصورت معمول یک پرش[۱] در سرعت تیر، در لحظه یکی شدن[۲] حاصل می‌شود.

از جمله نتایج این تحقیق می‌توان به تأثیر افزایش ms/mu در افزایش ناحیه ی سرعتی که جدایش در آن رخ می‌دهد اشاره کرد(شکل 2.7 و شکل 2.8). بعلاوه او نتیجه گرفته است زمانی که جدایش در فاصله

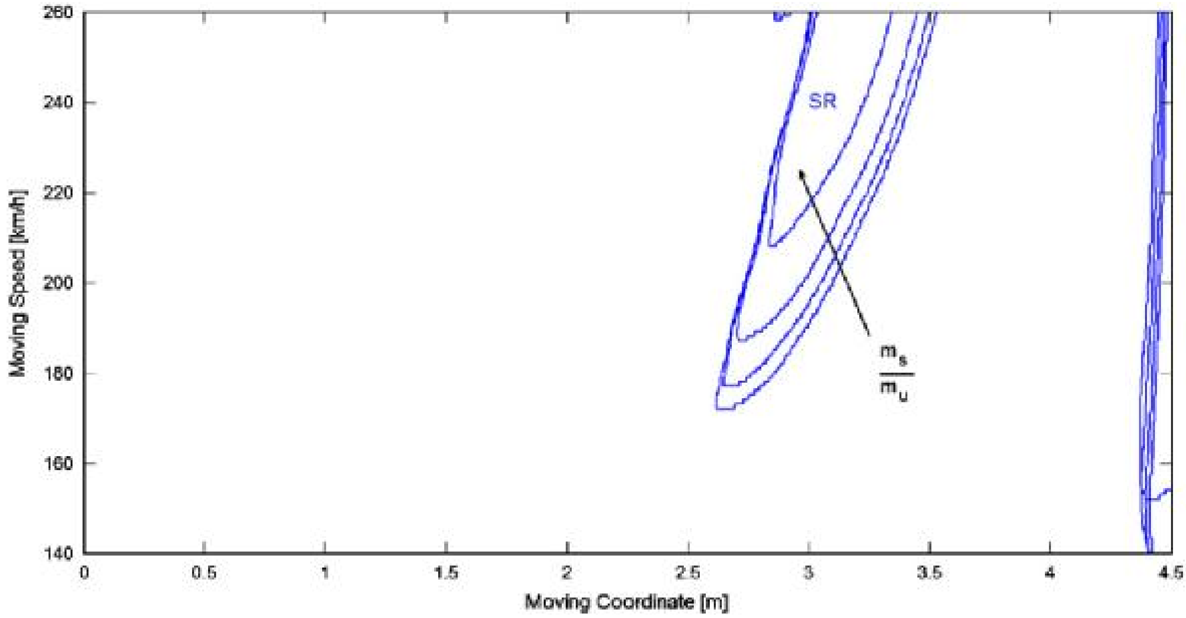
[1] - Jump

[2] - Reattachment

ای نزدیک به انتهای تیری که ثابت است اتفاق می افتد تغییر خیز در اثر ضربه ناچیز بوده اما نیروی ضربه زیاد می‌باشد.



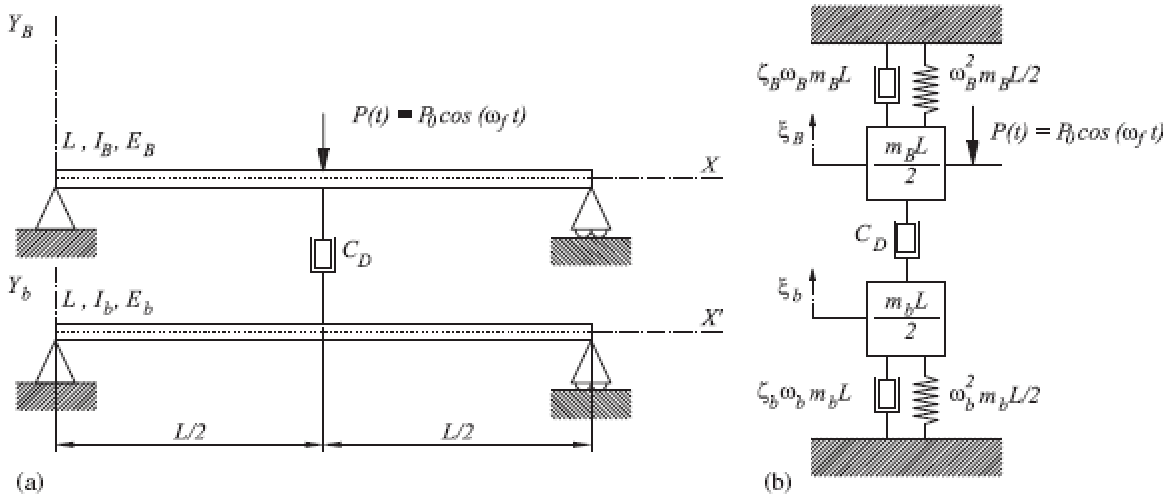
شکل 2.7: مدل سیستم تعلیق بررسی شده [13]



شکل 2.8: تا ثیر افزایش نسبت m_s/m_u در افزایش ناحیه سرعت جدایش [13]

بعداز بررسی پاسخ پل به بار متحرک، نحوه کنترل پاسخ بویژه کاهش ومیرا نمودن شتاب از اهمیت ویژه ای برخوردار است. P.Museros [14] و همکارانش روشی برای کاهش ارتعاشات تشدید تیر ساده تحت

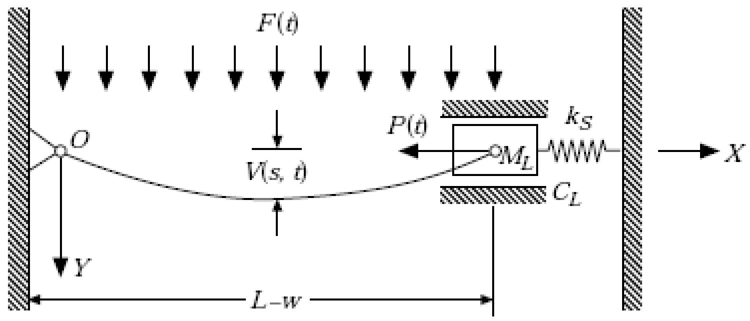
بارمتحرک را ارائه کرده اند. در این روش یک سری دمپرهای ویسکوز زیر تیر اصلی و بر روی یک تیر کمکی قرار داده شده است. تحقیقات آنها نشان داده است که پاسخ تشدید با این روش کاهش چشمگیری می‌یابد. در ابتدا تیر اصلی توسط یک سیستم دمپر تجهیز شده و توسط یک بار گذاری سینوسی برای تشخیص حالت بهینه میرایی، تحریک می‌شود (شکل 2.9).



شکل 2.9: **ارائه اولین مد تحریک در مختصات مدال به منظور کشف حالت بهینه دمپر [14]**

وی در این مقاله مقدار بهینه میرایی را به منظور جلوگیری از شکست تیر کمکی، کاهش مقدار بیشینه شتاب در تیر اصلی و تجاوز نکردن نیروی انتقال یافته بین دو تیر از حد توانایی دمپر تعیین کرده است.

در حوزه ویسکو الاستیک کار های متفاوتی در زمینه پایداری تیر ویسکو الاستیک صورت گرفته است. Fung [14] و همکارانش در مورد پایداری دینامیکی یک تیر ویسکو الاستیک تحت تحریک هارمونیک و پارامتری بصورت همزمان مطالعه کرده است (شکل2.10).



شکل 2.10: **تیری تحت تحریک هارمونیک و پارامتری [14]**

او با توجه به قانون بنیادین دیفرانسیلی ویسکوالاستیک[1](روش مستقیم بدون استفاده از اصل تناظر)، انحنای خیز بزرگ[2] و تأثیرات غیر خطی اینرسی، سفتی و میرایی، معادله دیفرانسیلی تعمیم یافته حاکم بر سیستم یک تیرویسکوالاستیک را استخراج کرده است. او بوسیله انتخاب یک مدل استاندارد خطی سه عضوی بصورت شکل 1.6 و استفاده از تقریب گالرکین، معادله حاکم را به یک معادله دیفرانسیل غیر خطی از درجه سه تبدیل نموده است.

در این مقاله نحوه استخراج معادله‌ی حاکم بر یک تیرویسکوالاستیک بصورت مستقیم و بدون استفاده از اصل تناظر بخوبی توضیح داده شده است. در توضیح شکل 2.10 باید اشاره نمود که دراین تیر ساده نیروی تحریک F(t) بصورت $F_t = F(t)\cos q_2 t$ و $P(t) = P_0 + P_t \cos q_1 t$ می‌باشد. سیستم جرم فنر دارای جرم، M_L و ضریت سفتی K_s و ضریب اصطکاک C_L است. در این مقاله ضرایب بی‌بعد متعددی استخراج شده است که در بررسی نتایج و ساده سازی معادلات تأثیر بسزایی داشته است. از آن جمله می‌توان به پارامترهای بی‌بعد زیر اشاره نمود.

$$e = \frac{P_d}{1 - P_s} \tag{2-1}$$

$$g = \frac{q_1}{\Omega} \tag{2-2}$$

$$K = \frac{E_1 + E_2}{\Omega h_2} \tag{2-3}$$

$$E = \frac{E \ \ - P_s (E_1 + E_2)}{(E_1 + E_2)(1 - P_s)} \tag{2-4}$$

در معادلات بالا Ω اولین فرکانس طبیعی تیر، P_d و P_s به ترتیب ضریب بار دینامیکی و استاتیکی نیروی پارامتریک (بار محوری) و θ_1 فرکانس تحریک نیروی هارمونیک و E_1، E_2 و h_2 ثابت های مادی در مدل تعریف شده مشابه شکل 1.6 می‌باشد.

[1] - Viscoelastic differential constitutive law

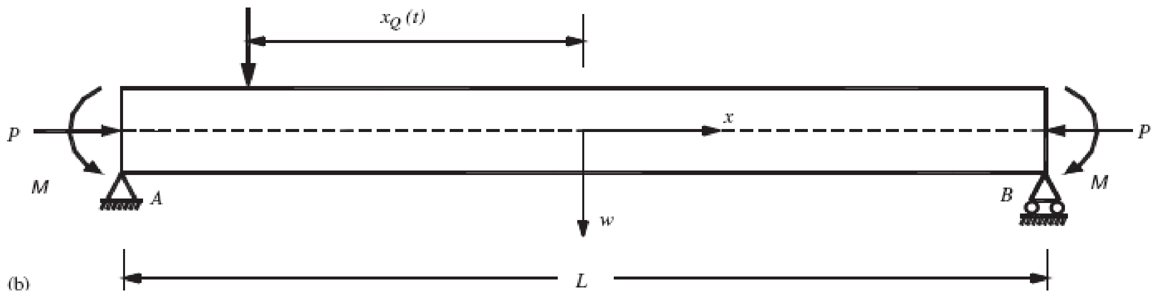
[2] - Large deflection curvature.

وی در مقاله خود هر دو حالت خطی و غیر خطی را مورد توجه قرار داده اشاره میکند که نتایج حاصل از معادله خطی برای بررسی پایداری تیر کافی می‌باشد. او با بردن معادله خطی در فضای حالت و استفاده از روش Stevens [16] به بررسی پایداری و شرایط آن در معادله خود پرداخته است. او ثابت K را بعنوان یک اندازه از درجه رفتار ویسکوالاستیک سیستم و ثابت E را (معادله (4-2)) متناسب با اندازه $\frac{P}{P^*}$ که P^* بار کمانش اویلری تیر است در نظر گرفته است.

از جمله نتایج تحقیق وی عبارت است از اینکه افزایش رفتار ویسکوالاستیسیته‌ی سیستم یعنی ثابت K متناظر با افزایش پایداری سیستم است. اما اگر این پارامتر از یک مقدار بحرانی عبور کند ماده بصورت تدریجی بسمت مایع میل پیدا کرده و تأثیرات ناپایداری در سیستم ایجاد می‌کند.

هنگامی که سیستم به طور همزمان تحت تحریک پارامتریک و هارمونیک قرار دارد اثر تحریک پارامتریک به مراتب بیشتر از تحریک هارمونیک می‌باشد. بنابراین بررسی تأثیر تحریک پارامتریکی در پایداری سیستم خطی، کافی می‌باشد. در سیستمی که بصورت جرم، فنر به تیر متصل شده افزایش سفتی فنر، ضریب اصطکاک و کاهش جرم، سیستم را پایدارتر می‌سازد.

در حوزه ی بار متحرک در تیر ویسکو الاستیک میتوان به مقالات Kocatürk [17] اشاره کرد. او در این حوزه سیستم را بصورت مدل کلوین – ویت در نظر گرفته و به بررسی پاسخ تیر تحت بار خروج از مرکز محوری فشاری و نیروی متحرک متمرکز پرداخته است (شکل 2.11). در مدل مسئله نیروی فشاری بصورت یک نیرو در مرکز سطح مقطع و به همراه یک گشتاور اعمال شده است و نیروی هارمونیک متمرکز با سرعت ثابت بر روی تیر حرکت می‌کند. وی معادلات حاکم بر سیستم را به کمک معادلات لاگرانژ استخراج نموده است و برای حل آن از یک تابع چند جمله ای برای مشخص کردن پاسخ تیر بهره برده است.



شکل 2.11: **مدل مسئله برای اعمال نیروی خروج از مرکز [17]**

شرایط مرزی در دوانتهای تیر به کمک ضریب لاگرانژ به یک سیستم معادلات جبری تبدیل شده و به کمک روش انتگرال مستقیم نیومارک [1] معادلات حاکم حل شده است.

وی خاصیت ویسکوالاستیک را بصورت تعریف تابع انرژی اتلافی وارد معادلات لاگرانژ کرده است. در نهایت با ارائه رابطه ای به شکل

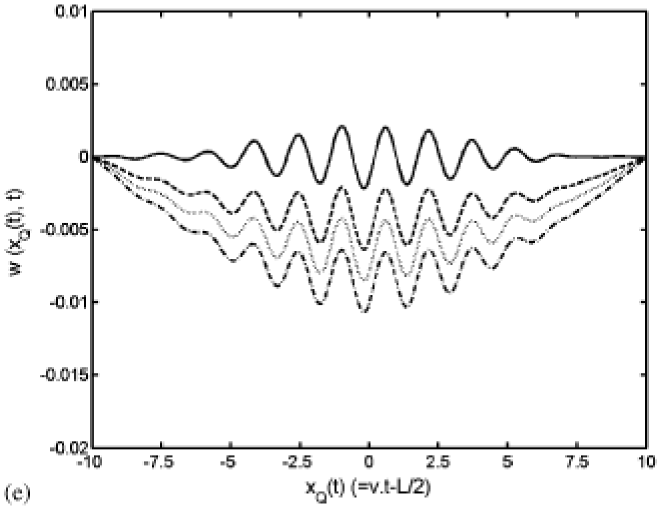
$$z = \frac{g_1 + g_2 w_k^2}{2w_k} \tag{2-5}$$

که در آن g_1 متناسب با میرایی خارجی، g_2 متناسب با میرایی داخلی و w_k فرکانس طبیعی دایره‌ای مد k ام تیر می‌باشد و با صرفنظر کردن از میرایی خارجی، z را در کل مقاله عبارتی برابر $z = 0.05$ نظر گرفته و به کمک آن مقدار g_2 را استخراج نموده است.

او بیشتر تمرکز خود را در این مقاله بر روی بحث درمورد روش عددی انتخابی و همگرایی آن گذاشته است بعلاوه در مورد تأثیر نیروی فشاری بر روی فرکانس طبیعی تیر بحث کرده است. او در مقاله خود نشان داده است افزایش نیروی فشاری باعث می‌شود کل نوسان تیر در قسمت منفی نمودار حادث شود و این حالت را برای طراحی تیرهای سیمانی و پل ها مناسب دانسته است (شکل 2.12). در این مقاله نشان داده شده است که افزایش فرکانس بار هارمونیک، زمانی که از فرکانس طبیعی اول تیر بیشتر باشد باعث کاهش خیز تیر می‌شود. وی مقاله ی دیگری با همین خصوصیات و روش حل در مورد تیر ویسکو الاستیک تیموشنکو ارائه کرده است [18] .

---

[1]- New mark



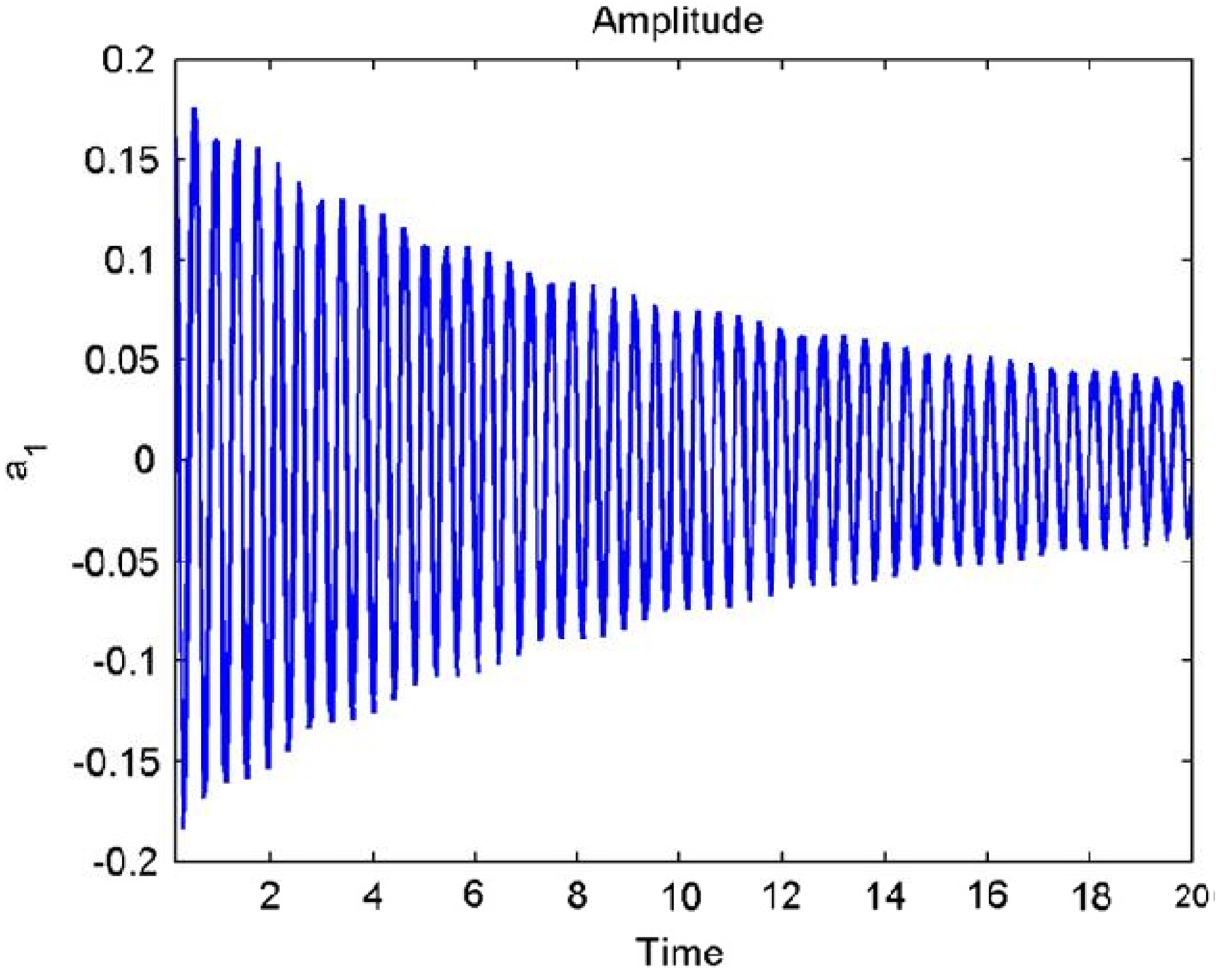
شکل 2.12: **خیز تیر ویسکوالاستیک تحت نیروی هارمونیک و نیروی فشاری با مقادیر مختلف با خروج از مرکز** **[**17**]**

از محققین ایرانی که در این زمینه تحقیقاتی انجام داده اند می‌توان به مقاله آقای محمودی و خادم [19] اشاره کرد که در زمینه ارتعاشات آزاد غیر خطی تیر ویسکو الاستیک کلوین – ویت می‌باشد.

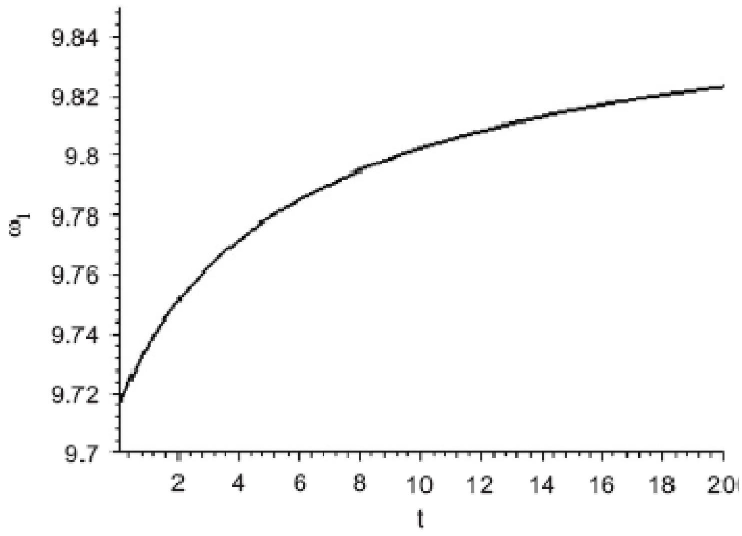
در این مقاله یک تیر غیرخطی ویسکوالاستیک با درجه ی غیرخطی سه مورد توجه قرار گرفته است و معادلات حاکم بر حرکت برای سیستمی با دامنه ی ارتعاشاتی بزرگ استخراج شده است. بوسیله روش چند مقایسه در تئوری اغتشاشات[1] شکل مدهای غیرخطی و فرکانس های طبیعی به صورت تحلیلی فرمول بندی شده است و نتایج استخراج شده برای انواع مختلفی از شرایط مرزی قابل استفاده می‌باشد. سپس به کمک روش گالرکین متغیرهای فضا و زمان از هم جدا شده اند. معادلات حرکت یک میرایی غیرخطی بعلاوه هندسه و اینرسی غیرخطی را نشان می‌دهند.

وجود اینرسی و هندسه غیرخطی، فرکانس های طبیعی غیرخطی را وابسته به دامنه ی ثابتی از ارتعاشات می‌سازد لکن زمانی که میرایی غیرخطی وارد مسئله شده است، دامنه نوسانات بصورت نمایی با زمان تغییر می‌کنند (شکل 2.13) و فرکانس های طبیعی غیر خطی بصورت لگاریتمی با زمان تغییر می‌کنند بصورتی که از یک مقدار دور از فرکانس خطی شروع شده و با گذشت زمان بصورت مجانبی به مقدار فرکانس خطی می‌رسند (شکل 2.14).

[1] -Multiple Scale



شکل 2.13: تغییر نمایی دامنه نوسانات نسبت به زمان برای تیر ویسکو الاستیک کلوین – ویت با در نظر گرفتن خیز بزرگ [19]



شکل 2.14: تغییر لگاریتمی اولین فرکانس یک تیر ویسکوالاستیک دو سر پین نسبت به زمان [19]

همچنین آقای بشارتی [24] در بررسی پاسخ زمانی سازه های میرا شده با مواد ویسکوالاستیک از روش تبدیل فوریه سریع برای یافتن پاسخ زمانی سازه های مختلف استفاده کرده است. در این تحقیق معادلات حاکم بر ورق ساندویچی سه لایه با لایه میانی ویسکوالاستیک در حوزه فرکانس بدست آمده و با کاربرد این روش معادلات بدست آمده به حوزه زمان منتقل شده است. همچنین پاسخ زمانی سازه با تغییر در پارامترهایی نظیر مدول برشی و ضخامت لایه ها مورد بررسی قرار گرفته است.

2-1 – جمع بندی:

در این فصل به بررسی دسته ای از مقالات نوشته شده در مورد بار متحرک و مواد ویسکوالاستیک تحت تحریک دینامیکی پرداخته شد. در مورد مواد ویسکوالاستیک بررسی عمدتاً در شاخه ی پولیمر وشیمی بوده و بررسی های حوزه ی دینامیک و ارتعاشات عمدتاً مربوط به پایداری و تعیین فرکانس غیر خطی این مواد می‌باشد که نمونه هایی از آنها مورد مطالعه قرار گرفت.

فصل سوم

بررسی پاسخ تیر نازک ویسکوالاستیک

3-1 – مقدمه:

تا کنون حل های متعددی در مورد بار متحرک برروی تیر در حوزه الاستیک صورت گرفته است که عموماً، تفاوت آنها در چگونگی موقعیت بار، شرایط مرزی، نوع فونداسیون ،شکل تیر و... می‌باشد و کمتر جنس خود تیر مورد توجه بوده است. از این رو در این فصل معادله حاکم بر پاسخ تیر ویسکو الاستیک تحت بار متحرک استخراج شده وحل می‌گردد.

3-2 – استخراج معادله تیر در فرم ویسکوالاستیک

3-2-1 – روش مستقیم

معادله تیر برنولی با فرض ثابت بودن چگالی، سطح مقطع عبارت است از [15]:

$$rA\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2}= f(x,t) \qquad (3\text{-}1)$$

که در آن ρ چگالی، E مدول الاستیسیته، A سطح مقطع، $f(x,t)$ نیرو بر واحد طول، M گشتاور خمشی، w جابجایی عرضی تیر و x مختصه طولی می‌باشد. برای یک ماده ی تراکم نا پذیر P_2 در معادله (1-20) صفر می‌شود در نتیجه برای یک ماده که در برش رفتار ویسکوالاستیک داشته و در اتساع جامد تراکم ناپذیر می‌باشد معادله (1-20) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$E(D)=\frac{3Q_1}{2P_1}=\frac{Q^E}{P^E} \qquad (3\text{-}2)$$

با فرض اینکه هر لایه از تیر از رابطه ی تنش-کرنش - زمان مدل ویسکوالاستیک پیروی می‌کند و با استفاده از تئوری تیر نازک، رابطه ی زمان - انحناء - کرنش برای انحنای کم به شکل زیر استخراج می‌شود [15].

$$g\,(x,y,t) = g_{0} + k\,(x,t)y \approx g_{0} - \frac{\partial^{2} w(x,t)}{\partial x^{2}}\,y \tag{3-3}$$

بطوریکه γ_0 کرنش در تار خنثی، $k(x,t)$ انحنای تیر و y فاصله از مرکز سطح برای یک لایه مشخص در صفحه ی انحنا می‌باشد. گشتاور خمشی برای یک تیر عبارت است از:

$$M\,(x,t) = \int_{A} s\,(x,y,t)ydA \tag{3-4}$$

همچنین برای یک تیر نازک ویسکوالاستیک رابطه ی تنش کرنش محوری عبارت است از [1]:

$$P^{E} s_{xx}(t) = Q^{E} g_{xx}(t) \tag{3-5}$$

با اعمال عملگر P^E در معادله‌ی (3-5) و به کمک روابط (3-4) و (3-5):

$$P^{E} M\,(x,t) = IQ^{E} k = -IQ^{E}\,\frac{\partial^{2} w(x,t)}{\partial x^{2}} \tag{3-6}$$

در معادله (3-6)، I گشتاور دوم سطح مقطع می‌باشد. اگر از معادله‌ی (3-6) نسبت x دوبار مشتق گرفته شود و با جایگذاری عبارت $\frac{\partial^{2} M\,(x,t)}{\partial x^{2}}$ از معادله (3-1) در آن، شکل ویسکوالاستیک معادله حاصل می‌شود.

$$rA\,\frac{\partial^{2} P^{E} w(x,t)}{\partial t^{2}} + I\,\frac{\partial^{4} Q^{E} w(x,t)}{\partial x^{4}} = P^{E} f\,(x,t) \tag{3-7}$$

برای یک تیر ساده شرایط مرزی مسئله عبارتند از:

$$w(0,t) = w(L,t) = \frac{\partial^{2} w(0,t)}{\partial x^{2}} = \frac{\partial^{2} w(L,t)}{\partial x^{2}} = 0 \tag{3-8}$$

3-2-2 – استفاده از اصل تناظر

معادله تیر برنولی با فرض ثابت بودن چگالی، سطح مقطع و مدول الاستیسیته در حالت الاستیک به شکل زیر قابل بیان است [15]:

$$rA\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\,\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = f(x,t) \qquad (3\text{-}9)$$

اگر شرایط مرزی مسئله تابع زمان نباشد بر اساس اصل تناظر می‌توان به صورت مرسوم از معادله‌ی (3-9) تبدیل لاپلاس گرفت و در نهایت به جای عبارت E مقدار ***sE(s)*** را جایگذاری کرده به حل مسئله پرداخت ولی با توجه به اینکه در مرجع [1] معادله‌ی (1-20) را معادل مدول مختلط یعنی ***sE(s)*** بیان کرده از این رو تنها کافی است در معادله‌ی (3-9) به جای مقدار E عبارت $E(D) = \frac{Q^E}{P^E}$ را جایگذاری کرده و با ضرب کردن طرفین در مقدار P^E معادله‌ی (3-9) به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$rAP^E\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + IQ^E\,\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = P^E f(x,t) \qquad (3\text{-}10)$$

3-3 – حل معادله

با توجه به شرایط مرزی معادله‌ی (3-8) تابع ویژه مودال را می‌توان به فرم زیر انتخاب کرد.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(\frac{npx}{L}) \qquad (3\text{-}11)$$

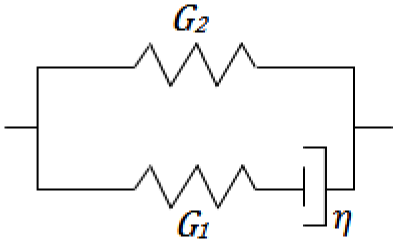
با جایگذاری معادله‌ی (3-11) در معادله‌ی (3-7) نتیجه می‌شود.

$$P^E(\ddot{a}_n) + \frac{I}{rA}\left(\frac{np}{L}\right)^4 Q^E(a_n) = P^E[\frac{2}{rAL}\int_0^L f(x,t)\sin(\frac{npx}{L})dx] \qquad (3\text{-}12)$$

که در آن $\ddot{a}_n = \frac{d^2 a_n}{dt^2}$.

مدل استاندارد خطی ویسکوالاستیک مورد نظر در شکل 3.1 نمایش داده شده است. معادله حاکم بر این مدل عبارت است از:

$$\dot{s} + \frac{G_1}{h}s = 2((G_1 + G_2)\dot{g} + \frac{G_1 G_2}{h}g) \qquad (3\text{-}13)$$



شکل 3.1: مدل استاندارد خطی

از معادله‌ی (3-13) مقادیر عملگر های Q_1 و P_1 به صورت زیر قابل استخراج می‌باشد.

$$Q_1 = 2((G_1+G_2)\frac{d}{dt}+\frac{G_1G_2}{h}) \qquad (3\text{-}14)$$

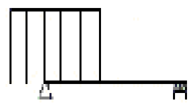
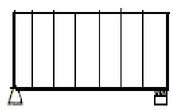
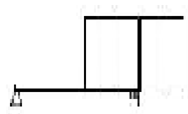
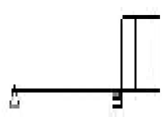
$$P_1 = \frac{d}{dt}+\frac{G_1}{h} \qquad (3\text{-}15)$$

با توجه به معادلات (3-14)، (3-15) و (3-2) معادله‌ی (3-12) بعد از اعمال عملگر ها به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\dddot{a}_n+\frac{G_1}{h}\ddot{a}_n+3(G_1+G_2)\frac{I}{rA}\left(\frac{np}{L}\right)^4\dot{a}_n+\frac{3G_1G_2}{h}\frac{I}{rA}\left(\frac{np}{L}\right)^4 a_n = P^E[\frac{2}{rAL}\int_0^L f(x,t)\sin(\frac{npx}{L})dx] \qquad (3\text{-}16)$$

جدا از بیان مسئله تحت بار متحرک معادله‌ی (3-16) را می‌توان یک شکل کلی برای تیر ویسکوالاستیک برشی در نظر گرفت. سمت راست معادله، تابع نوع ورود بار بوده و می‌تواند شکل های متفاوتی داشته باشد که معادله در جدول 3.1 آورده شده است. در این جدول چهار نوع بار گذاری مورد بررسی قرار گرفته است به صورتی که در ابتدا بار پیوسته وارد تیر شده و بعد از رسیدن به انتهای آن برای مدت زمانی دلخواه بر روی آن قرار گرفته سپس شروع به خروج از آن می‌کند و در پایان بعد از خروج کامل بار ارتعاشات آزاد ناشی از این تحریک بعنوان بخش چهارم بارگذاری مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به اینکه این بار گذاری به صورت پیوسته انجام گرفته است شرایط اولیه هربخش تابع بخش قبلی خود می‌باشد.

جدول 3.1: انواع مختلف بارگذاری

حالت بار گذاری	شکل بار	شرایط اولیه	$f(x,t)$	طرف راست معادله‌ی (3-17)
ورود		$a(t)\|_{t=0}=0$ $\left.\frac{da(t)}{dt}\right\|_{t=0}=0$ $\left.\frac{d^2a(t)}{dt^2}\right\|_{t=0}=0$	$P_0H[Vt-x]$	$\frac{2P_0}{rAnp}[\frac{G_1}{h}-\frac{G_1}{h}\cos(nwt) + nw\sin(nwt)]$
ماند		$a(t)\|_{t=T}=b(t)\|_{t=T}$ $\left.\frac{da(t)}{dt}\right\|_{t=T}=\left.\frac{db(t)}{dt}\right\|_{t=T}$ $\left.\frac{d^2a(t)}{dt^2}\right\|_{t=T}=\left.\frac{d^2b(t)}{dt^2}\right\|_{t=T}$	P_0	$\frac{2P_0}{rAnp}[\frac{G_1}{h}-\frac{G_1}{h}\cos(np)]$
خروج		$b(t)\|_{t=T+L/V}=c(t)\|_{t=T+L/V}$ $\left.\frac{db(t)}{dt}\right\|_{t=T+L/V}=\left.\frac{dc(t)}{dt}\right\|_{t=T+L/V}$ $\left.\frac{d^2b(t)}{dt^2}\right\|_{t=t=T+L/V}=\left.\frac{d^2c(t)}{dt^2}\right\|_{t=t=T+L/V}$	$P_0H[x-Vt]$	$\frac{2P_0}{rAnp}[-(-1)^n\frac{G_1}{h}+\frac{G_1}{h}\cos(nwt) - nw\sin(nwt)]$
ارتعاش آزاد		$c(t)\|_{t=T_1}=d(t)\|_{t=T_1}$ $\left.\frac{dc(t)}{dt}\right\|_{t=T_1}=\left.\frac{dd(t)}{dt}\right\|_{t=T_1}$ $\left.\frac{d^2c(t)}{dt^2}\right\|_{t=T_1}=\left.\frac{d^2d(t)}{dt^2}\right\|_{t=T_1}$	0	0

با توجه به توضیحات داده شده، در جدول 3.1، $a(t)$، $b(t)$، $c(t)$ و $d(t)$ معادل با مختصات عمومی در هر بخش بارگذاری می‌باشد. همچنین T زمان ماندن بار بر روی تیر، T_1 زمان دلخواه بعد از گذشتن کامل بار از روی تیر، V سرعت ثابت عبور بار، L طول دهانه ی تیر، P_0 اندازه ی بار بر واحد طول، $w=pV/L$ فرکانس دایره‌ای تحریک و $H(t)$ تابع پله ای واحد می‌باشد. با معرفی عبارات بی‌بعد زیر به صورت:

$$K = \frac{G_1}{h\Omega_1} = \frac{T'}{2\pi t'} \qquad E_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} < 1 \qquad \alpha = \frac{\omega}{\Omega_1} \qquad \tau = \Omega_1 t \tag{3-17}$$

که $\Omega_1^2 = 3(G_1+G_2)\frac{I}{rA}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4$ اولین فرکانس طبیعی دایروی تیر، $t' = h/G_1$ زمان رهایش، T' مدت اولین فرکانس، α شاخص تاثیر سرعت و τ زمان بی‌بعد می‌باشند. با وارد کردن عبارات بی‌بعد معادله‌ی (3-18) در معادله‌ی (3-17)، این معادله برای بخش اول بارگذاری به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{d^3 a_n}{d\tau^3} + K\frac{d^2 a_n}{d\tau^2} + n^4\frac{da_n}{d\tau} + K\cdot E_1\cdot n^4 a_n = \frac{2P_0}{rA\Omega_1^2 n\pi}\left[K - K\cos(n\alpha\tau) + n\alpha\sin(n\alpha\tau)\right] \tag{3-18}$$

در معاد له ی (3-19) بعد هر دو طرف معادله از جنس طول می‌باشد. همچنین چون معادله خطی است ضریب طرف راست معادله در جواب نیز به صورت یک ضریب کلی وارد می‌شود. در بخش بعد مقدار این ضریب بر حسب خیز استاتیکی وسط تیر در بارگذاری کامل بیان می‌شود.

3-3-1 – حل استاتیکی مسئله

با توجه به معادله‌ی (3-12) هنگامی که تمام دهانه ی تیر تحت بار پیوسته ی $P_0H(t)$ قرار گرفته است (حالت ماند در جدول 3.1) با صرفنظر کردن از عامل شتاب، این معادله به صورت زیر باز نویسی می‌شود.

$$3(G_1+G_2)\frac{I}{rA}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4\dot{a}_n + \frac{3G_1G_2}{h}\frac{I}{rA}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 a_n = \frac{2P_0}{rAn\pi}\left[\frac{G_1}{h} - \frac{G_1}{h}\cos(n\pi)\right] \tag{3-19}$$

با فرض نادقیق اینکه خیز اولیه برابر صفراست، حل معادله‌ی (3-19) عبارت است از:

$$a_n(t) = \frac{2}{3}\frac{P_0L^4(1-(-1)^n)\left(1-e^{\left(-\frac{G_1G_2t}{h(G_1+G_2)}\right)}\right)}{n^5\pi^5 IG_2}H(t) \tag{3-20}$$

با توجه به معادله‌ی (3-11) خیز تیر عبارت است از:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\frac{P_0L^4(1-(-1)^n)\left(1-e^{\left(-\frac{G_1G_2t}{h(G_1+G_2)}\right)}\right)}{n^5\pi^5 IG_2}H(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3-21}$$

با توجه به معادله‌ی (3-21) خیز استاتیکی وسط تیر در زمان بی‌نهایت و برای n=1 عبارت است از:

$$y_0 = \frac{4}{3}\frac{P_0 L^4}{p^5 I G_2} = \frac{4P_0}{prA\Omega_1^2 E_1} \qquad (3\text{-}22)$$

3-3-2 – حل نهایی

با توجه به معادله‌ی (3-22) معادله‌ی (3-18) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d^3 a_n}{dt^3} + K\frac{d^2 a_n}{dt^2} + n^4\frac{da_n}{dt} + K\cdot E_1\cdot n^4 a_n = \frac{E_1 y_0}{2n}\left[K - K\cos(nat) + na\sin(nat)\right] \qquad (3\text{-}23)$$

معادله‌ی (3-23) یک معادله‌ی خطی از مرتبه ی سه می‌باشد که تمام ضرایب آن مثبت و حقیقی بوده و به ازای هر n یک جواب منحصر به فرد دارد. مطابق با قضیه تغییر علامت[1] به دلیل اینکه همه ضرایب معادله مثبت و حقیقی می‌باشند، معادله‌ی مشخصه ی این معادله تنها می‌تواند دارای سه ریشه ی حقیقی منفی و یا دو ریشه ی مزدوج مختلط و یک ریشه ی منفی باشد [2].

در حالتی که معادله‌ی مشخصه دارای دو ریشه ی مزدوج مختلط و یک ریشه ی منفی است. شکل معادله‌ی مشخصه می‌تواند به صورت زیر باشد.

$$(l + c)((l + a)^2 + b^2) = 0 \qquad (3\text{-}24)$$

که در آن a ، b و c و اعداد مثبتی بوده و $l = -c$ و $l = -a \mp ib$ ریشه های معادله مشخصه می‌باشند. در این حالت پاسخ معادله برای n=1 برابر است با:

$$a_1(t) = \frac{E_1 y_0}{2}\Big[\frac{K}{c(a^2+b^2)} + \frac{a^2(c-K)e^{-ct}}{(c^2+a^2)(c^2+b^2+a^2-2ca)c} + A1\sin(at) + B1\cos(at) + e^{-at}(A2\sin(bt) + B2\cos(bt))\Big] \qquad (3\text{-}25)$$

بطوریکه:

$$A1 = \frac{a^2(K-2a-c) - 2Kca + (a^2+b^2)(c-K)}{(a^4 + 2(a^2-b^2)a^2 + (b^2+a^2)^2)(a^2+c^2)}$$

---

1 - Rule Of Signs

$$B1=\frac{a^{2}(K(c+2a)-(a+2c)a-b^{2})-Kc(a^{2}+b^{2})+a^{4}}{((a^{2}+b^{2}+a^{2})^{2}-4a^{2}b^{2})(a^{2}+c^{2})}$$

$$A2=\frac{p_0}{b(a^2+(b+a)^2)(a^2+(b-a)^2)(b^2+c^2-2ca+a^2)(a^2+b^2)}$$

$$p_0=-a^2[a^5-(K+c)a^4+(Kc+a^2-2b^2)a^3+(6b^2K-a^2(K+c))a^2 -(b^2+Kc)(3b^2-a^2)a+b^2(b^2-a^2)(c-K)]$$

$$B2=\frac{q_0}{((b^2+a^2+a^2)^2-4a^2b^2)(b^2+c^2-2ca+a^2)(a^2+b^2)}$$

$$q_0=a^2[-3a^4+(4K+2c)a^3-(3Kc+a^2+2b^2)a^2+((2c-4K)b^2+2a^2K)a +(b^2-a^2)(b^2+Kc)]$$

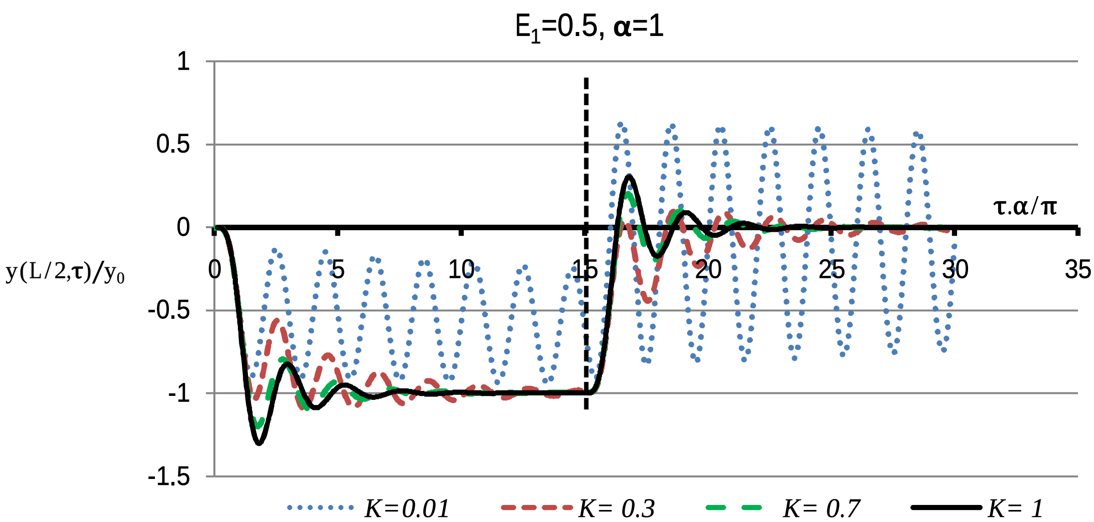
با وارد کردن پاسخ معادله‌ی (3-23) در معادله (3-11) و نرمالیزه کردن عبارت حاصله به قدر مطلق y_0، نسبت خیز دینامیکی تیر در هر لحظه و در هر نقطه‌ی دلخواه به قدر مطلق y_0 حاصل می‌شود.

3-4 – بررسی پاسخ

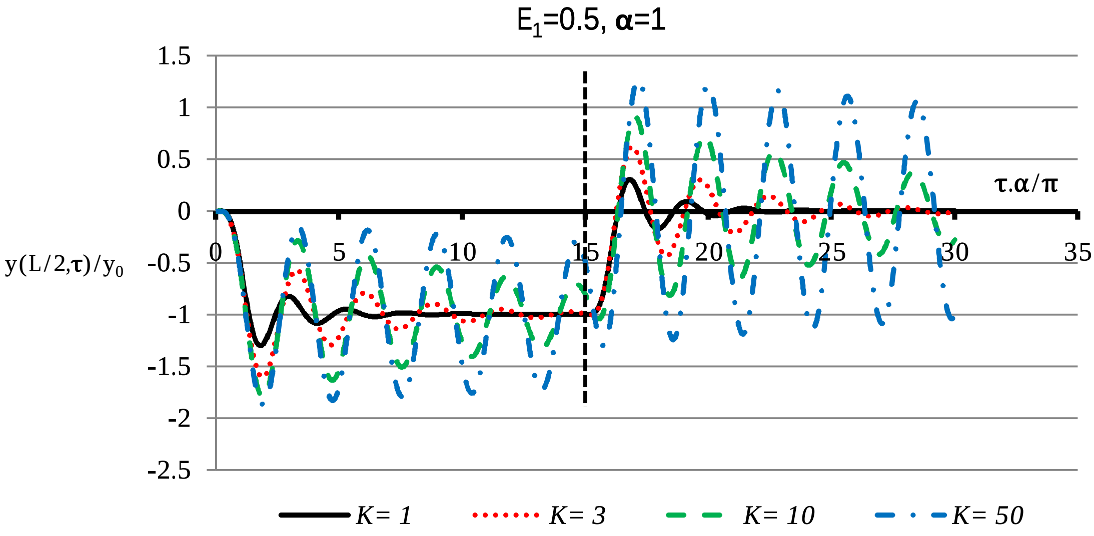
3-4-1 – بررسی پارامتر های E_1 و K

پارامتر K را می‌توان معادل با درجه ی رفتار ویسکوالاستیسیته‌ی سیستم [15] همچنین طبق معادله (3-18) معادل با نسبت زمان اولین فرکانس تیر به $2p$ برابر زمان رهایش درنظر گرفت. پارامتر E_1 معادل است با مدول برشی تیر در زمان بی‌نهایت به مدول برشی تیر در زمان اولیه. در اشکال 3.2 و 3.3 برای مقادیر $a=1$ و $E_1=0.5$ نمودار تغییرات نسبت خیز دینامیکی وسط تیر به خیز استاتیکی وسط تیر نسبت به زمان بی‌بعد $t\cdot a/p$ رسم شده است. زمان $t\cdot a/p=15$، زمان انتخابی بعنوان مدت زمان قرار گرفتن بار بعد از رسیدن به انتهای تیر همچنین معادل با لحظه ی خروج بار از روی تیر می‌باشد که در نمودار ها با خط چین مشخص شده است. این زمان در بررسی نتایج حائز اهمیت می‌باشد. زمان $t\cdot a/p=1$ زمان رسیدن بار به انتهای تیر می‌باشد.

در اشکال 3.2 و 3.3 مقدار K از 0.01 تا 50 تغییر کرده است. همچنین به طور مشخص، عدد K=1 را می‌توان بعنوان یک عدد مهم برای رفتار سیستم در نظر گرفت. در این حالت خاص زمان اولین فرکانس $2p$ برابر زمان رهایش بوده و بیشترین و سریعترین میرایی از نظر نسبت خیز دینامیکی به استاتیکی در این حالت حاصل شده است. قبل از خروج بار از روی تیر، کلیه نوسانات حول مقدار $y_d / y_0 = -1$ بوده و اگر زمان قرار گیری بار بر روی تیر افزایش یابد حول همین مقدار میرا می‌شود. در این حالت خیز دینامیکی و استاتیکی تیر یکسان می‌شود. این مسئله برای مقادیر مختلف E_1 نیز صادق است. از دیگر نکات مهم در مورد K=1 این است که با دور شدن از این نقطه در هر جهتی [به سمت صفر یا به سمت بی‌نهایت] سیستم رفتار الاستیک تری از خود نشان می‌دهد. این موضوع در مورد K=50 و K=0.01 به وضوح قابل مشاهده است. بعد از آغاز خروج بار از روی تیر نوسانات به سمت $y_d / y_0 = 0$ میل پیدا می‌کند. البته مدت زمانی که نوسانات به این نقطه مشخص می‌رسند وابسته به مقدار K بوده و سریعترین مقدار متناظر با K=1 می‌باشد. برای مقادیرK>>1 رفتار سیستم چه قبل از خروج بار و چه بعد از خروج بار را می‌توان الاستیک در نظر گرفت. این حالت را می‌توان به بزرگ بودن G_1 یا کوچکی h نسبت داد. برای $K \approx 0$ رفتار سیستم قبل از شروع خروج بار مشابه رفتار تیر الاستیک می‌باشد. اما بعد از خروج بار دامنه نوسانات بصورت بسیار کندی به سمت صفر میل می‌کند. دلیل این رفتار را می‌توان در بزرگ بودن زمان رهایش نسبت به زمان اولین فرکانس در نظر گرفت.

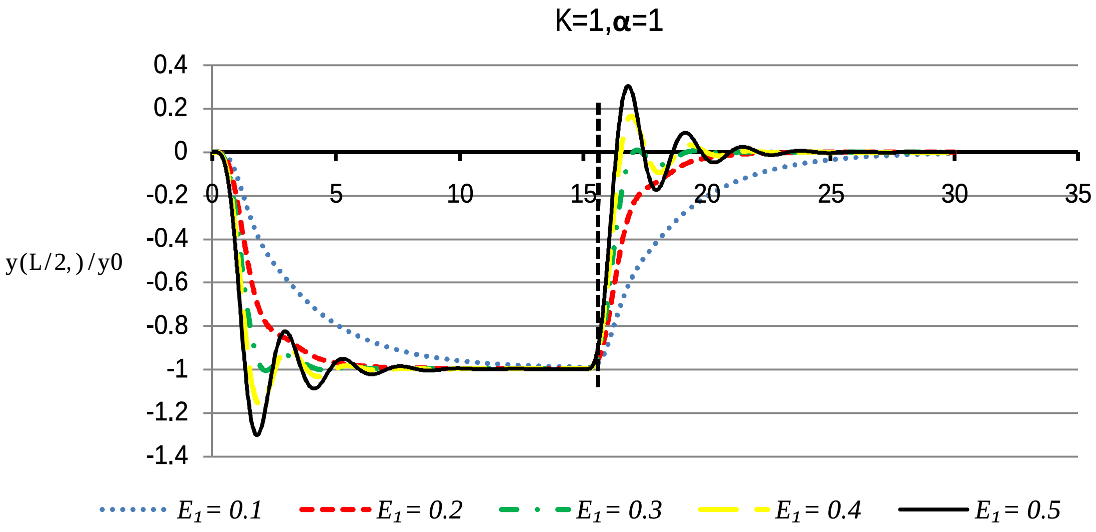


شکل 3.2: بررسی مقادیر $K \le 1$ در $E_1 = 0.5$ و $a = 1$

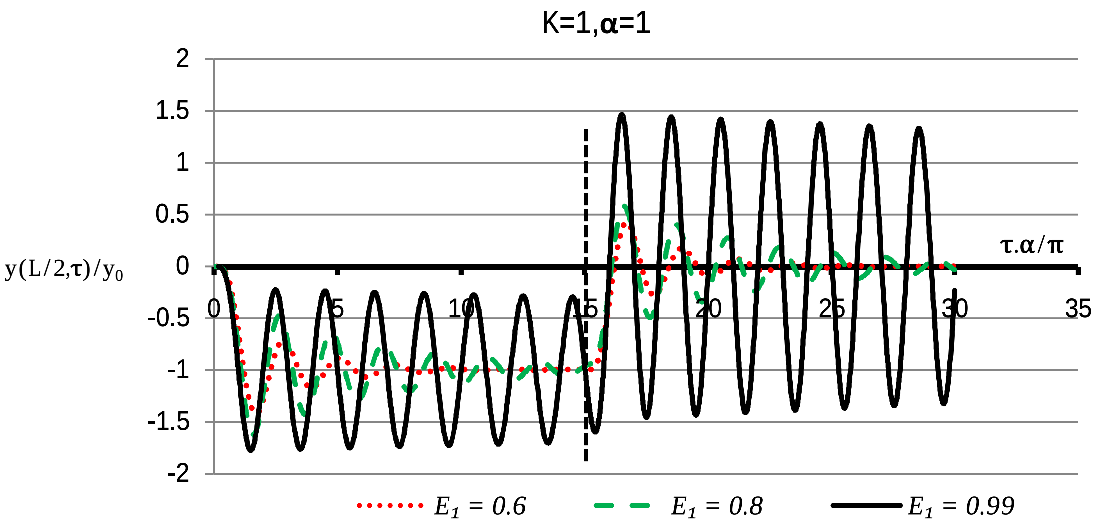


شکل 3.3: **بررسی مقادیر** $K \geq 1$ **در** $E_1 = 0.5$ **و** $a = 1$

بدلیل اینکه بیشترین میرایی برای K=1 می‌باشد از این رو تحلیل مقادیر مختلف E_1، در K=1 انجام شده است. اولین نکته مهم در مورد پارامتر E_1 در اشکال 3.4 و 3.5 ، میرا شدن کلیه نمودارها ها فارغ از مقدار E_1، قبل از خروج بار به مقدار $y_d / y_0 = -1$ می‌باشد. البته مدت زمانی که نمودارها به این مقدار، میرا می‌شوند وابسته به اندازه ی E_1 بوده و هر چه E_1 به مقدار 1 نزدیکتر باشد این زمان طولانی تر می‌شود. زمانی که E_1 به سمت 1 میل می‌کند، الاستیسیته‌ی سیستم افزایش پیدا کرده و باعث کاهش میرایی و افزایش زمان آن می‌شود و این بدلیل تناسب E_1 با مدول برشی ماده در زمان بی‌نهایت به مدول برشی آن در زمان اولیه است که معادل بودن آن با یک، یکی از خواص مواد الاستیک را به نمایش گذاشته است. برای مقدار تقریبی $E_1 \leq 0.2$ خیز تیر بدون نوسان به رشد خود ادامه داده تا به مقدار خیز استاتیکی برسد این رفتار ناشی از افزایش خاصیت ویسکوزیته ی ماده می‌باشد. از این رو در طراحی هایی که نیاز مند ارتعاش بسیار ناچیز است می‌توان از مقادیر مشخصی از پارامتر E_1 بهره جست.



شکل 3.4: بررسی مقادیر $E_1 \leq 0.5$ در $K=1$ و $a=1$

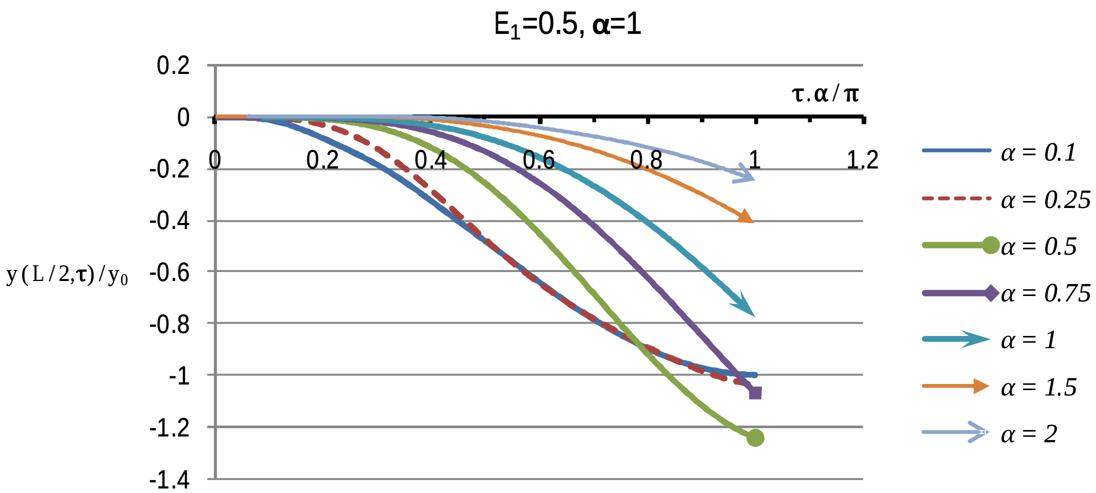


شکل 3.5: بررسی مقادیر $E_1 > 0.5$ در $K=1$ و $a=1$

3-4-2 – بررسی پارامتر بی‌بعد شاخص تاثیر سرعت a

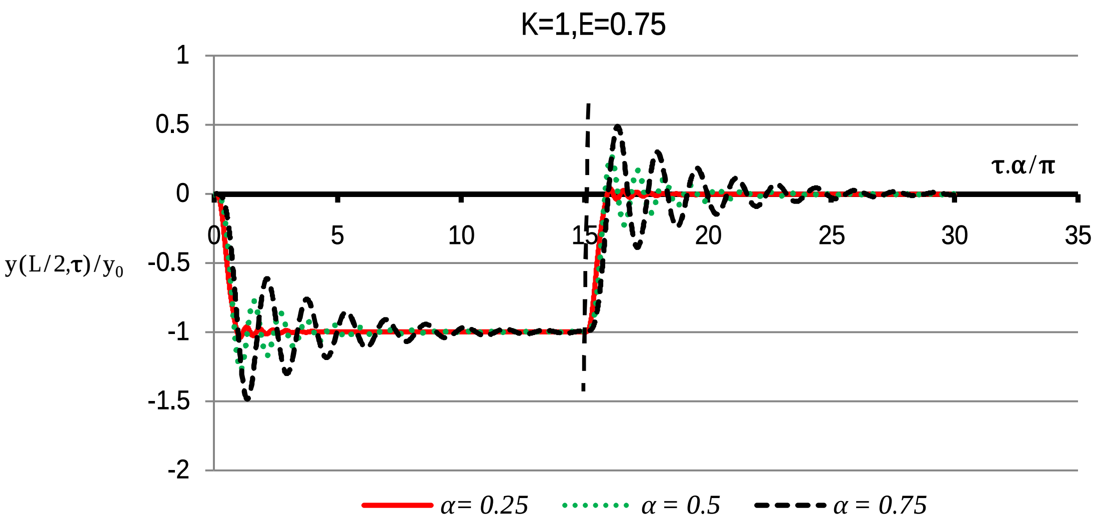
در شکل های 3.6، 3.7 و 3.8 تاثیر پارامتر a در پاسخ تیر مشخص شده است. در شکل 3.6 تنها بخش ابتدایی حرکت شامل ورود بار پیوسته به تیر و رسیدن به انتهای آن مورد بررسی قرار گرفته است. در این بخش از بار گذاری، بیشترین خیز متعلق به $a=0.5$ بوده و از این رو در ورود بار به روی تیر این مقدار را می‌توان حالت بحرانی برای مقدار سرعت در نظر گرفت. البته این مقدار بسته به پارامتر E_1 و K می‌تواند

مقدار متفاوتی داشته باشد. همچنین با توجه به مقدار پارامتر های بیان شده در شکل 3.6 مقدار دقیق آن $a=0.53$ می‌باشد. برای مقدار تقریبی $a\leq 0.25$ [حرکت بسیار آرامِ شبه استاتیکی] می‌توان انتظار داشت که ضریب دینامیکی سیستم در انتهای حرکت به سمت عدد -1 میل کند این پدیده در مورد $a=0.1$ و $a=0.25$ در شکل 3.6 قابل مشاهده است.

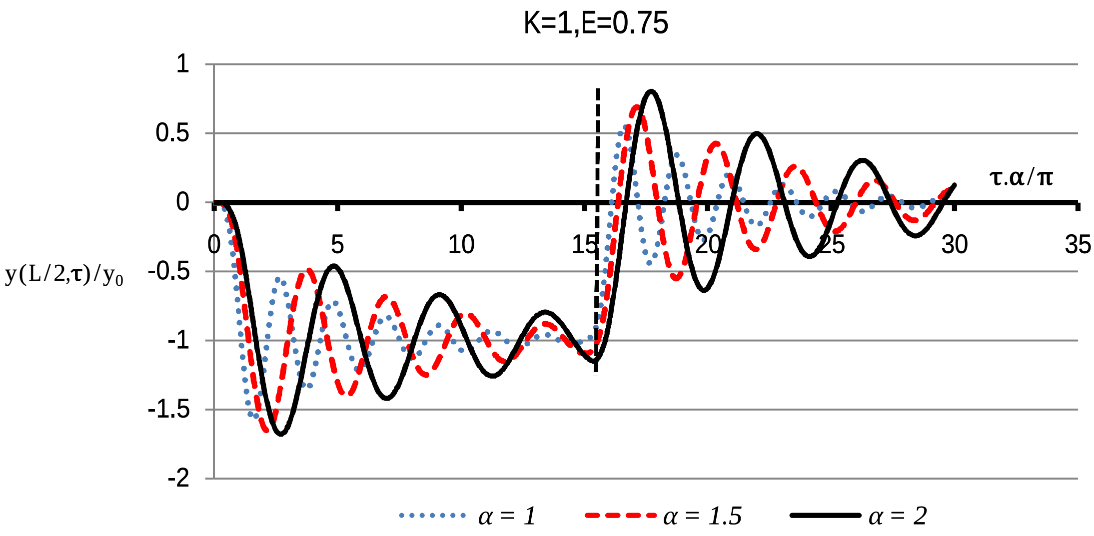


شکل 3.6: تغییرات ضریب تقویت دینامیکی بر حسب زمان بی‌بعد به ازای مقادیر مختلف a

از شکل های 3.7 و 3.8 به طور مشخص برای $a<1$ هنگامی که بار به طور کامل بر روی تیر قرار گرفته است تیر به سرعت میرا شده و ضریب تقویت به مقدار ثابت $y_d / y_0 = -1$ میل می‌کند. دلیل افزایش سرعت میرایی تیر می‌تواند زمان کافی برای پاسخ تیر باشد. البته این مسئله برای تمامی مقادیر a صادق است ولی با افزایش مقدار a مدت زمان میرا شدن نیز افزایش یافته است. برای مقادیر بسیار بزرگ a تیر زمان کافی برای پاسخ ندارد بنابر این می‌توان گفت افزایش سرعت باعث تاخیر پاسخ تیر می‌شود. این تاخیر در اشکال 3.7 و 3.8 با انتقال اولین کمینه نمودار ها به سمت راست، قابل تشخیص می‌باشد.



شکل 3.7: تغییرات ضریب تقویت دینامیکی بر حسب زمان بی‌بعد به ازای مقادیر مختلف $a < 1$

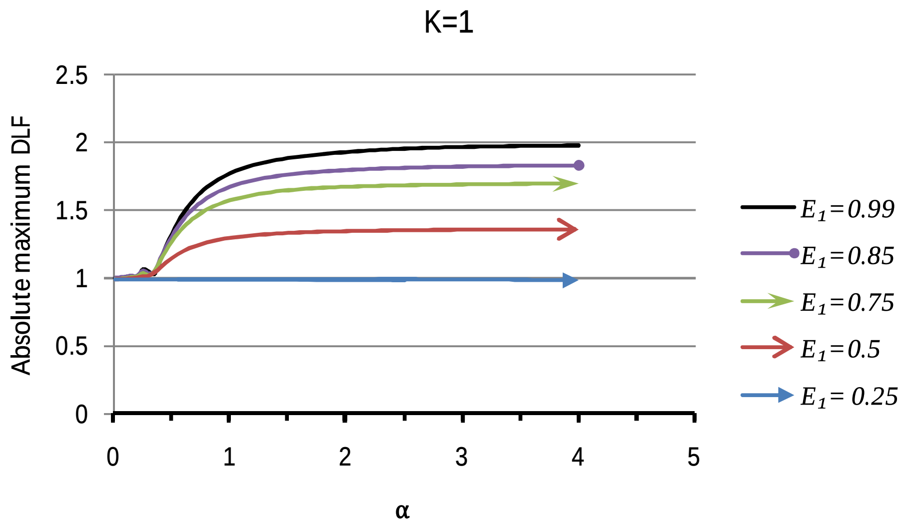


شکل 3.8: تغییرات ضریب تقویت دینامیکی بر حسب زمان بی‌بعد به ازای مقادیر مختلف $a \geq 1$

3-4-3 – بررسی بیشینه پاسخ

یکی از مسائل مهم در تحلیل بار متحرک بیشینه ی خیز است. برای تحلیل این مسئله، بیشینه ی ضریب بار دینامیکی سیستم بر حسب پارامتر سرعت بی‌بعد تیر در شکل 3.9 آورده شده است. بر اساس این نمودار برای $a > 2$، بیشینه خیز تیر تغییر چندانی نکرده و براساس مقدار پارامتر E_1 به یک مقدار ثابت میل می‌کند. همچنین می‌توان گفت برای $E_1 < 0.25$ با افزایش سرعت مقدار بیشینه ی خیز تغییر چندانی

نداشته و نزدیک به مقدار 1 می‌باشد این رفتار به دلیل افزایش خاصیت ویسکوزیته ماده می‌باشد. برای E_1=0.99 این مقدار برابر 2 می‌باشد. از این رو می‌توان انتظار داشت برای K=1 مقدار قدر مطلق بیشترین ضریب دینامیکی بین بازه ی *[1,2]* می‌باشد.



شکل3.9: قدر مطلق بیشترین ضریب دینامیکی در $K=1$

3-5 – بررسی مقادیر حدی K و E_1

مقادیر K و E_1 دارای مقدار حدی به شکل $0<K<\infty$ و $0<E_1<1$ هستند. از این رو معادله‌ی (3-23) در این حالات خاص عبارت است از:

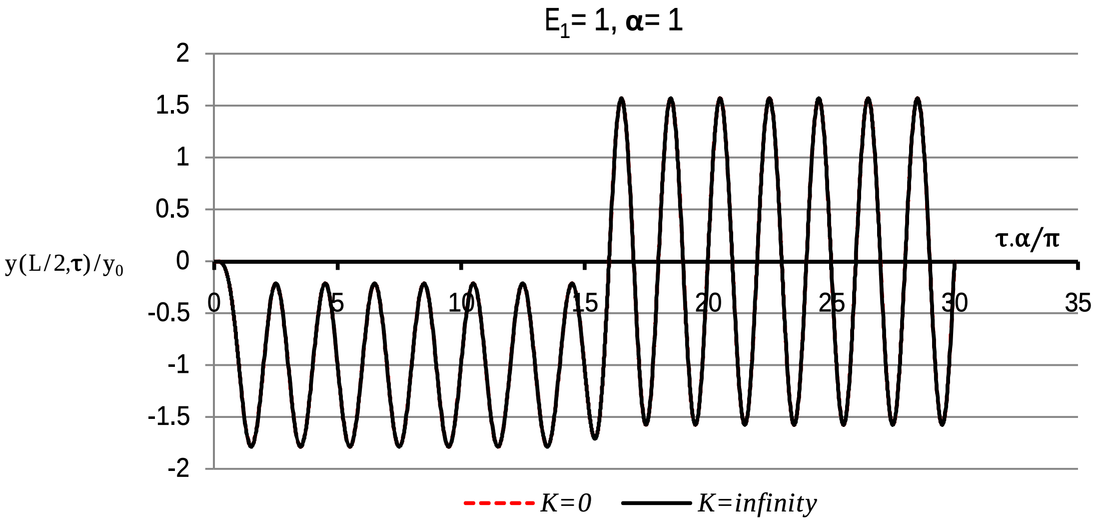
$$if \qquad K\to 0 \qquad \frac{d^3a_n}{dt^3}+n^4\frac{da_n}{dt}+=\frac{E_1y_0}{2n}[na\sin(nat)] \tag{3-26}$$

$$if \qquad K\to\infty \qquad \frac{d^2a_n}{dt^2}+E_1\cdot n^4a_n=\frac{E_1y_0}{2n}[1-\cos(nat)] \tag{3-27}$$

$$if \qquad E_1\to 1 \qquad \frac{d^3a_n}{dt^3}+K\frac{d^2a_n}{dt^2}+n^4\frac{da_n}{dt}+K\cdot n^4a_n= \frac{y_0}{2n}[K-K\cos(nat)+na\sin(nat)] \tag{3-28}$$

$$if \qquad E_1\to 0 \qquad \frac{d^3a_n}{dt^3}+K\frac{d^2a_n}{dt^2}+n^4\frac{da_n}{dt}=0 \tag{3-29}$$

از دسته معادلات بالا معادله‌ی (3-29) نمی‌تواند از نظر فیزیکی مفهوم درستی داشته باشد زیرا طرف راست معادله صفرشده و در واقع تحریکی به سیستم وارد نمی‌شود همچنین زمانی که $E_1 \to 0$ در نتیجه $G_2 \to 0$ و $G_1 \to G_0$ با فرض اینکه $G_1+G_2=G_0=\text{Constant}$ این شرایط باعث می‌شود تاثیر h افزایش یافته به طوریکه تحریک و در نتیجه خیز به سمت صفر میل کند.

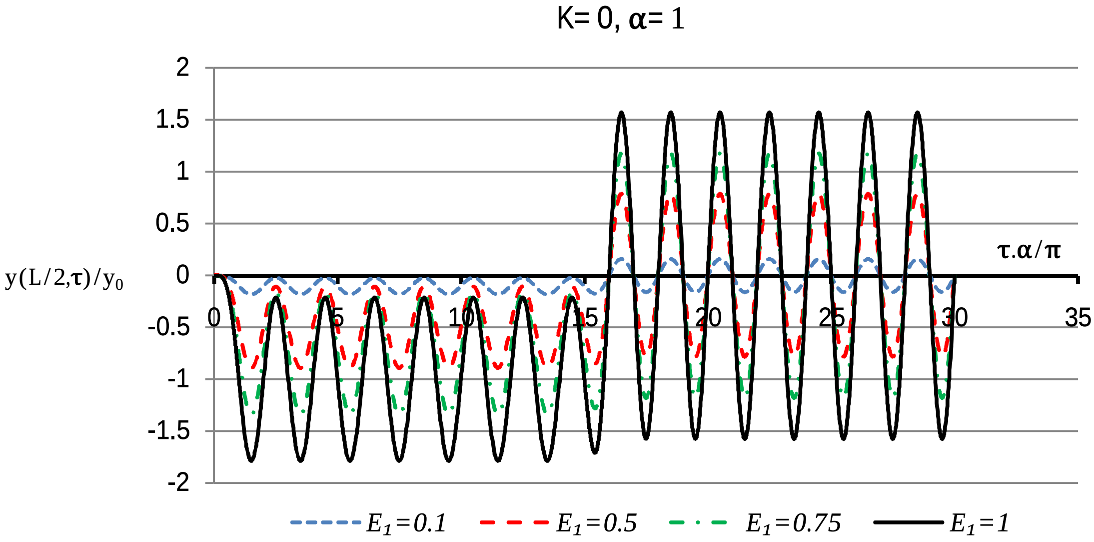


شکل 3.10 : مقایسه پاسخ بین $K=0$ و $K=\infty$ در $E_1=1$

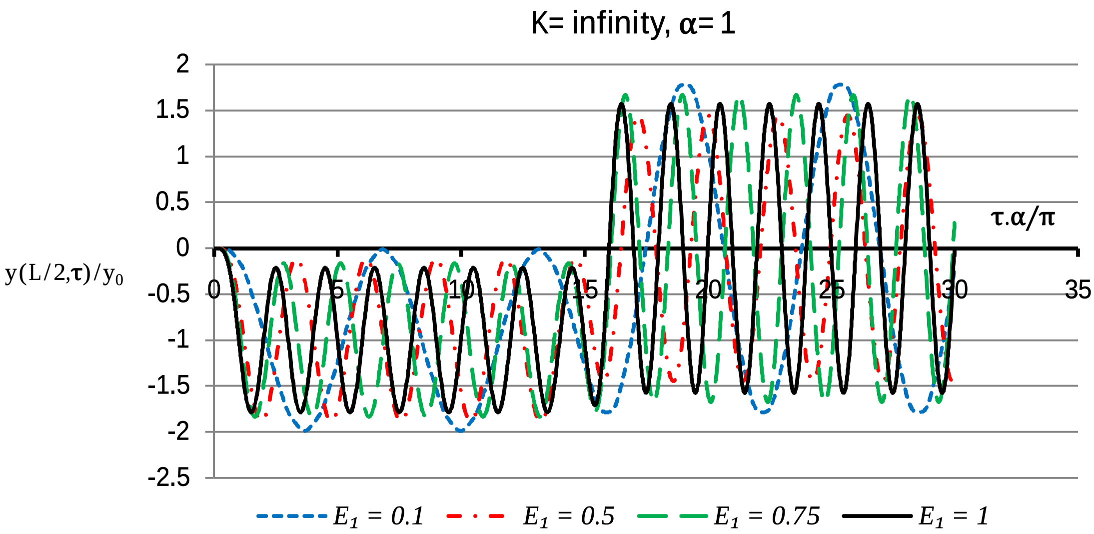
اگر $E_1 \to 1$ معادله‌ی (3-26) مشتق معادله‌ی (3-27) خواهد بود. این دو معادله نتایج مشابه ای را نشان می‌دهند شکل 3.10. دلیل این تشابه به این خاطر است که هنگامی که K مقدار بسیار بزرگی باشد، زمان رهایش نسبت به زمان اولین فرکانس تیر بسیار کوچک است یعنی قبل از اینکه تیر اولین مد خود را نشان دهد، ماده به حالت پایدار خود رسیده و امکان خاصیت میرا کنندگی را از خود می گیرد. در حالت عکس زمانی که K بسیار کوچک باشد زمان رهایش نسبت به زمان اولین بسامد تیر بسیار بزرگ است در این حالت نیز پاسخ تیر در بازه ی کمی از زمان خواهد بود در حالی که ماده در این بازه ی زمانی کم تغییر چندانی نداشته و میرایی قابل توجه ای از خود نشان نمی‌دهد.

در شکل 3.11 رفتار تیر در K=0 و در شکل 3.12 رفتار تیر در $K=\infty$ بررسی شده است. بطور مشخص رفتار تیر در K=0 دارای نظم بیشتری می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود در شکل 3.11 با افزایش E_1 تنها خیز نوسانات افزایش یافته و این مورد هم قبل از خروج بار و هم بعد از خروج بار یکسان می‌باشد. در شکل 3.12 با افزایش E_1 قبل از خروج بار دامنه نوسانات کم شده اما بعد از خروج بار نظم مشخصی دیده نمی‌شود

همچنین با افزایش مقدار E_1 تعداد نوسانات نیز افزایش یافته وسیستم رفتار الاستیک تری از خود نشان می‌دهد.



شکل3.11 : بررسی پاسخ در $K=0$



شکل 3.12: بررسی پاسخ در $K=\infty$

3-6 – جمع بندی

در این فصل معادله حرکت بی‌بعد حاکم بر یک تیر ساده ی اویلری استخراج شد. ضرایب بی‌بعد بدست آمده و تحلیل صورت گرفته برروی آنها یک فرم کلی داشته و می‌تواند در تحقیقات دیگر مورد استفاده و بررسی قرارگیرد. از جمله نتایج این فصل عبارت است از:

- بیشترین و سریعترین میرایی از نظر نسبت خیز دینامیکی به استاتیکی در K=1 حاصل شده است و با دور شدن از این نقطه در هر جهتی [به سمت صفر یا به سمت بی‌نهایت] سیستم رفتار الاستیک تری از خود نشان می‌دهد.
- زمانی که E_1 به سمت 1 میل می‌کند الاستیسیته‌ی سیستم افزایش پیدا کرده و باعث کاهش میرایی و افزایش زمان آن می‌شود.
- برای مقدار تقریبی $E_1 \leq 0.2$ خیز تیر بدون نوسان به رشد خود ادامه داده تا به مقدار خیز استاتیکی برسد.
- در $a < 1$، هنگامی که بار به طور کامل بر روی تیر قرار گرفته است تیر به سرعت میرا شده و ضریب تقویت به مقدار ثابت $y_d / y_0 = -1$ میل می‌کند.
- برای $a > 2$، بیشینه خیز تیر تغییر چندانی نکرده و براساس مقدار پارامتر E_1 به یک مقدار ثابت میل می‌کند.

فصل چهارم

بررسی پاسخ تیر تیموشنکو ویسکوالاستیک

4-1 – مقدمه:

یکی از تئوریهای مهم در زمینه تحلیل ارتعاشی تیر ها، تئوری تیر تیموشنکو می‌باشد که برای تحلیل تیر های ضخیم از اهمیت وافری برخوردار است اما دلیل اصلی پرداختن به این تئوری واستخراج معادلات آن در حالت ویسکو الاستیک، وارد شدن تاثیرات برشی در این تئوری به صورت مستقیم می‌باشد. در این فصل معادلات بی‌بعد استخراج و پس از حل، به مقایسه با تیر اویلر برنولی پرداخته می‌شود.

4-2 – استخراج معادله تیر تیموشنکو در فرم ویسکوالاستیک

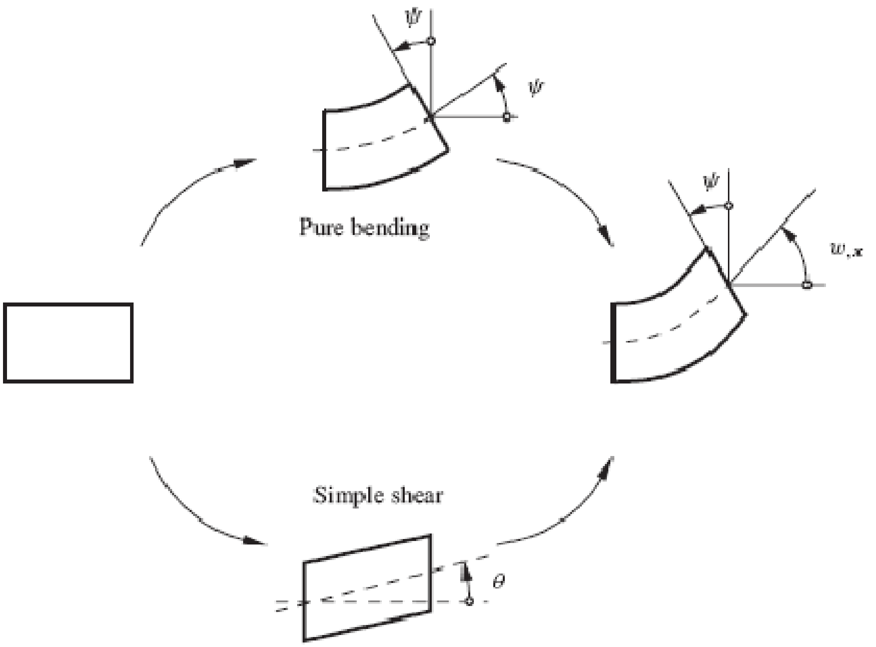
در شکل 4.1 یک المان تیر تحت تغییر شکل برشی و خمشی نشان داده شده که در آن تغییر شکل زاویه ای با تابع $y\,(x,t)$ و تغییر شکل برشی با $q(x,t)$ نمایش داده شده است. با توجه به شکل 4.1 می‌توان نوشت [3]:

$$\frac{dw(x,t)}{dx} = y\ (x,t) + q\,(x,t) \qquad (4\text{-}1)$$

که در معادله (4-1) ,$w(x,t)$ جابجایی تار خنثی تیر است. طبق معادله‌ی (4-1)، دو متغیر $w(x,t)$ و $y\,(x,t)$ را بعنوان دو پارامتر برای توصیف جابجایی در نظر گرفته می‌شود. با توجه به قانون هوک، تنش طولی و تنش برشی به ترتیب برای یک ماده ی الاستیک در تیر تیموشنکو می‌تواند به شکل زیر نوشته شود [3].

$$s_x = -Eyy_x \qquad , \qquad s_{yx} = l\,(w_x - y\,) \qquad (4\text{-}2)$$

که l ضریب تصحیح برشی می‌باشد. همچنین گشتاور خمشی و نیروی برشی در سطح مقطع برابر است با [3]:



شکل 4.1: تغییر شکل در یک المان تیر تیموشنکو

$$M = -\int_A s_x y dA = EI y_x \tag{4-3}$$

$$V = GA_s q = GA_s (w_x - y) \tag{4-4}$$

که $A_s = lA$. با توجه به توضیح داده شده در بخش 2-3 معادلات فوق در فرم ویسکوالاستیک برابر است با:

$$P^E M = Q^E I y_x \tag{4-5}$$

$$P^G V = Q^G A l (w_x - y) \tag{4-6}$$

با توجه به قانون دوم نیوتن در یک تیر تحت بارگذاری عرضی ***f(x,t)***، روابط زیر برای یک المان از تیر قابل استخراج می‌باشد [3].

$$rAw_{tt} = V_x + f(x,t) \tag{4-7}$$

$$rIy_{tt} = V + M_x \tag{4-8}$$

اگر از معادله‌ی (4-8) نسبت به x مشتق گرفته و حاصل از معادله‌ی (4-7) کم شود نتیجه می‌شود:

$$rI\frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} - rA\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - f(x,t) \tag{4-9}$$

با اعمال اپراتور P^G به معادله‌ی (4-7) و اپراتور P^E به معادله‌ی (4-9) و با استفاده از معادلات (4-5) و (4-6) نتیجه می‌شود:

$$P^E(rIy_{ttx} - rAw_{tt} + f) = IQ^E y_{xxx} \tag{4-10}$$

$$P^G(rAw_{tt} - f) = lAQ^G(w_{xx} - y_x) \tag{4-11}$$

با ضرب اوپراتور Q^G در معادله‌ی (4-10) و جایگذاری عبارت $Q^G y_x$ از معادله‌ی (4-11) در این معادله‌ی حرکت حاکم بر سیستم به شکل کلی زیر قابل استخراج می‌باشد.

$$\begin{aligned} P^E[rIQ^G w_{xxtt} - \frac{r^2}{l} IP^G w_{tttt} + \frac{rI}{lA} P^G f_{tt}] - rAQ^G P^E w_{tt} + P^E Q^G f = \\ IQ^E[-\frac{r}{l} P^G w_{ttxx} + \frac{1}{lA} P^G f_{xx} + Q^G w_{xxxx}] \end{aligned} \tag{4-12}$$

کروشه اول معادله (4-12) نشان دهنده ی تاثیرات اینرسی دورانی بوده و با توجه به بررسی تاثیرات برشی از آن صرفنظر می‌شود. از این رو معادله‌ی (4-12) بعد از انجام عملیات جبری و ساده سازی با توجه به روابط (3-14) و (3-15) و (3-2) و (1-17) عبارت است از:

$$\begin{aligned} & - rA[\frac{{G_1}^2 G_2 w_{tt}}{h^2} + (G_0 + G_2)\frac{G_1}{h} w_{ttt} + G_0 w_{tttt}] + \\ & \frac{3rI}{l}[\frac{{G_1}^2 G_2 w_{ttxx}}{h^2} + (G_0 + G_2)\frac{G_1}{h} w_{tttxx} + G_0 w_{ttttxx}] \\ & - 3I[\frac{G_1^2 G_2^2 w_{xxxx}}{h^2} + \frac{2G_1 G_2 G_0 w_{xxxxt}}{h} + G_0^2 w_{xxxxtt}] = \\ & - \frac{{G_1}^2 G_2 f}{h^2} - (G_0 + G_2)\frac{G_1}{h} f_t - G_0 f_{tt} \\ & + \frac{3I}{lA}[\frac{{G_1}^2 G_2 f_{xx}}{h^2} + (G_0 + G_2)\frac{G_1}{h} f_{xxt} + G_0 f_{xxtt}] \end{aligned} \tag{4-13a}$$

که در آن $G_0=G_1+G_2$. در کلیه معادلات بالا اندیس x و t به معنای مشتق پاره ای نسبت به این متغیر ها می‌باشد. مانند فصل قبل به کمک بسط توابع ویژه معادله‌ی (4-13a) قابل تفکیک به بخش زمانی و مکانی بوده وجواب معادله می‌تواند به شکل سری (3-11) نوشته شود. همچنین تابع $f(x,t)$ در معادله‌ی (4-13a) مشابه جدول 3.1 می‌باشد. با توجه به توضیحات داده شده، معادله‌ی (4-13a) می‌تواند به شکل ساده ی زیر در هنگام ورود بار نوشته شود.

$$\frac{d^4 a_n(t)}{dt^4}+(E_1+1)K\frac{d^3 a_n(t)}{dt^3}+(\frac{n^4(b+3p^2)}{b+3n^2p^2}+K^2E_1)\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2}+$$
$$\frac{2E_1Kn^4(b+3p^2)}{b+3n^2p^2}\frac{da_n(t)}{dt}+\frac{E_1^2K^2n^4(b+3p^2)}{b+3n^2p^2}a_n(t)= \qquad (4\text{-}13b)$$
$$\frac{2P_0}{rA\Omega_1^2np}(K^2E_1^2+E_1(n^2a^2-K^2E_1)\cos(nat)+naK(E_1+1)\sin(nat))$$

در معادله بالا مقادیر E_1، K، t و a همان مقادیررابطه های (3-17) می‌باشد با این تفاوت که در اینجا مقدار $\Omega_1^2=\frac{3p^4G_0Ib}{rL^4A(3p^2+b)}$، $G_0=G_1+G_2$ و $b=AL^2l/I$ یک مقدار بی‌بعد بوده که نشان دهنده‌ی تاثیرات هندسی می‌باشد.

4-3 – مقایسه تیر تیموشنکو و اویلر

به دلیل وجود تفات ذاتی ناشی از پارامتر b و تفاوت Ω_1 بین معادله‌ی تیر تیموشنکو و تیر اویلر بهتر است به منظور یک مقایسه مناسب، پارامتر های یکی بر حسب دیگری بیان شود. این فرایند با فرض اینکه نمونه‌ی ماده و شکل هندسی، همچنین سرعت عبور بار از روی یک تیر مشترک می‌باشد اما نحوی تحلیل مسئله یک بار به کمک تئوری اویلر و بار دیگر به کمک تئوری تیموشنکو صورت گرفته است از این رو:

$$K_t=K\sqrt{\frac{(3p^2+b)}{b}} \qquad E_t=E_1 \qquad a_t=a\sqrt{\frac{b}{(3p^2+b)}} \qquad t_t=t\sqrt{\frac{(3p^2+b)}{b}} \qquad (4\text{-}14)$$

در معادله (4-14) اندیس t برای مقادیر تیر تیموشنکو بوده و مقادیر بدون اندیس برای تیر اویلر برنولی می‌باشد.

4-4 – حل استاتیکی مسئله

با توجه به معادله‌ی (4-12) هنگامی که تمام دهانه ی تیر تحت بار پیوسته ی $P_0H(t)$ قرار گرفته است و با صرفنظر کردن از عامل شتاب معادله‌ی 4.13 به صورت زیر باز نویسی می‌شود.

$$\ddot{a}_n(t)+\frac{2G_1G_2}{G_0h}\dot{a}_n(t)+\frac{G_1^2G_2^2}{G_0^2h^2}a_n(t)=\frac{2}{3}\frac{L^2G_1^2G_2P_0(1-\cos(np))(lAL^2+3p^2n^2I)}{In^5p^5G_0^2h^2lA} \qquad (4\text{-}15)$$

جواب معادله‌ی (4-15) با فرض اینکه شیب و خیز تیر در لحظه ی اولیه برابر صفر است برابر است با:

$$a_n(t)=\frac{2P_0L^2((-1)^n-1)(L^2\,lA+3p^2n^2I)((G_0h+G_1G_2t)e^{(\frac{-G_1G_2t}{G_0h})}-G_0h)}{3p^5n^5\,l\,G_0G_2hAI} \qquad (4\text{-}16)$$

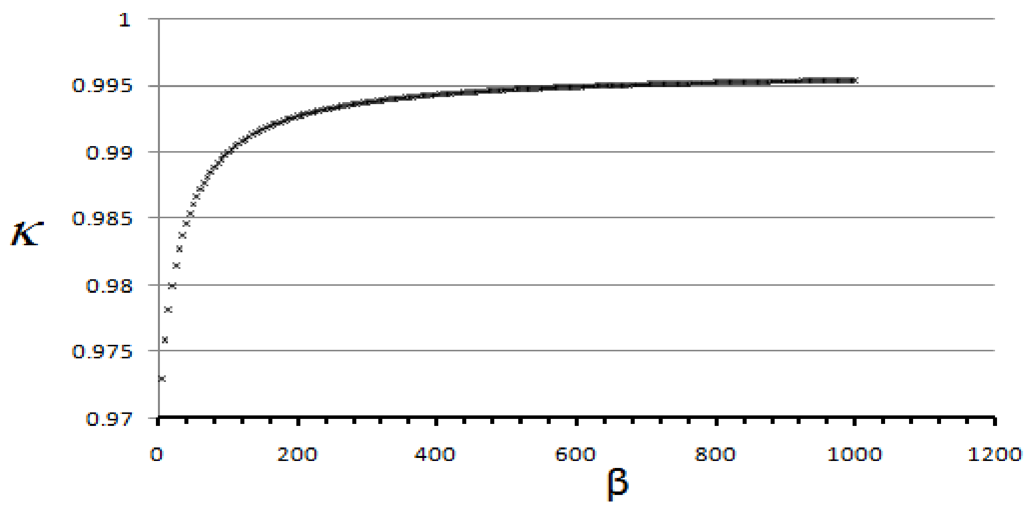
از این رو خیز وسط تیر در زمان بی‌نهایت با توجه به معادله‌ی (4-16) و3.11 برای $n=1$ برابر است با:

$$y0=\frac{4}{3}\frac{P_0L^2(3p^2I+L^2\,lA)}{p^5G_2\,lAI}=\frac{4P_0}{p\,rA\Omega_1^2E} \qquad (4\text{-}17)$$

برای سنجش دقت معادله‌ی (4-17)، حاصل جایگذاری معادله‌ی (4-16) در معادله‌ی (3-11) را به ازای $x=L/2$ بر معادله‌ی (4-17) تقسیم کرده، حاصل یک ضریب تصحیح برای مقدار y_0 بوده که تابع مقدار هندسی b می‌باشد.

$$k=\sum_{n=1}^{N}\frac{(1-\cos(np)(b+3p^2n^2)}{2n^5(b+3p^2)}\sin(\frac{np}{2}) \qquad (4\text{-}18)$$

مقدار k برای 30 جمله ی اول در شکل 4.2 آورده شده است.



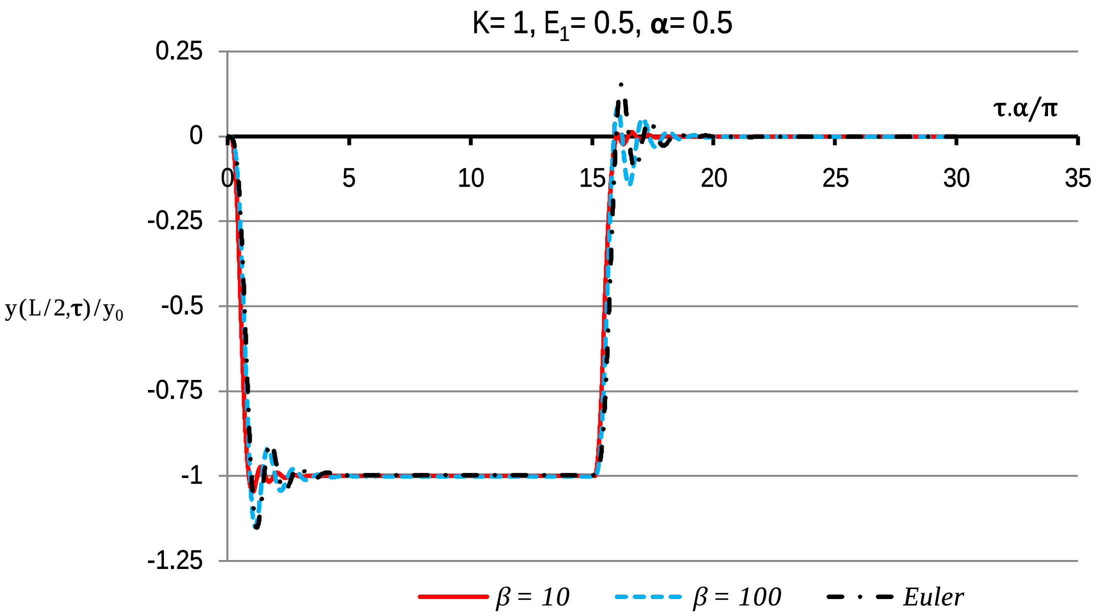
شکل 4.2: **مقدار ضریب تصحیح خیز استاتیکی** k **بر حسب مقدار** b

به منظور مقایسه دقیقتر و بررسی تاثیرات هندسی بر پاسخ تیر ضریب k به صورت یک ضریب تصحیح به شکل زیر وارد معادله‌ی (4.13b) می‌شود.

$$\frac{d^4a_n(t)}{dt^4}+(E_1+1)K\frac{d^3a_n(t)}{dt^3}+\left(\frac{n^4(b+3p^2)}{b+3n^2p^2}+K^2E_1\right)\frac{d^2a_n(t)}{dt^2}+$$
$$\frac{2E_1Kn^4(b+3p^2)}{b+3n^2p^2}\frac{da_n(t)}{dt}+\frac{E_1{}^2K^2n^4(b+3p^2)}{b+3n^2p^2}a_n(t)= \qquad (4\text{-}19)$$
$$\frac{E_1y_0}{2nk}(K^2E_1{}^2+E_1(n^2a^2-K^2E_1)\cos(nat)+naK(E_1+1)\sin(nat))$$

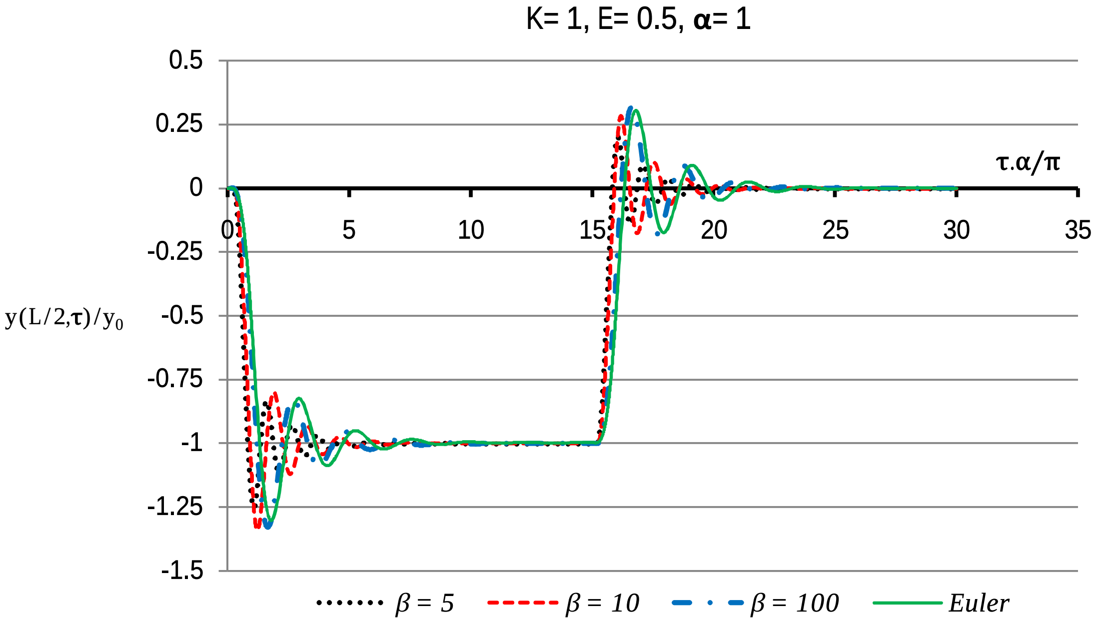
4-5 – بررسی تاثیر پارامتر β

مهمترین پارامتر موثر در تیر تیموشنکو پارامتر b بوده که مقدار آن بر دیگر پارامتر های تیر اثر می گذارد. از این رو در ادامه به بررسی آن پرداخته می‌شود همچنین قابل ذکر است که تاثیر دیگر پارامتر ها بر پاسخ تیر تیموشنکو مشابه تاثیرات آنها در تیر اویلر می‌باشد.

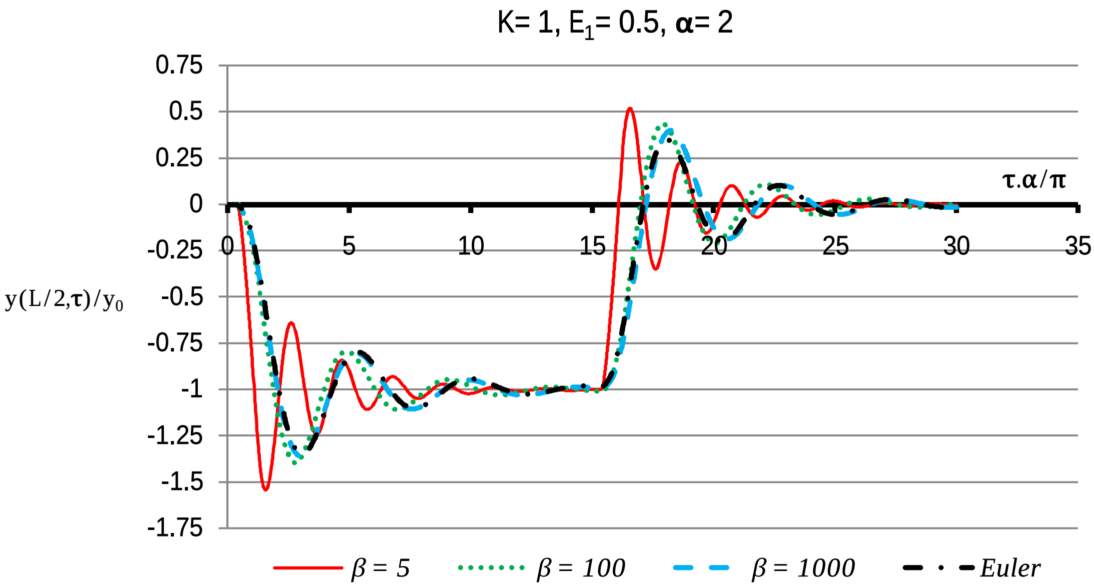


شکل 4.3: تاثیر پارامتر b در تقابل با مقدار پارامتر تاثیر سرعت a

در شکلهای 4.3، 4.4، 4.5 تاثیر پارامتر b در تقابل با مقدار پارامتر تاثیر سرعت a آورده شده است. دید کلی به این سه شکل نشان می‌دهد که با افزایش مقدار b رفتار تیر تیموشنکو به تیر اویلر نزدیک می‌شود. همچنین افزایش سرعت باعث می‌شود که خیز تیر در نمونه ی تیموشنکو بیشتر از تیراویلر شود.



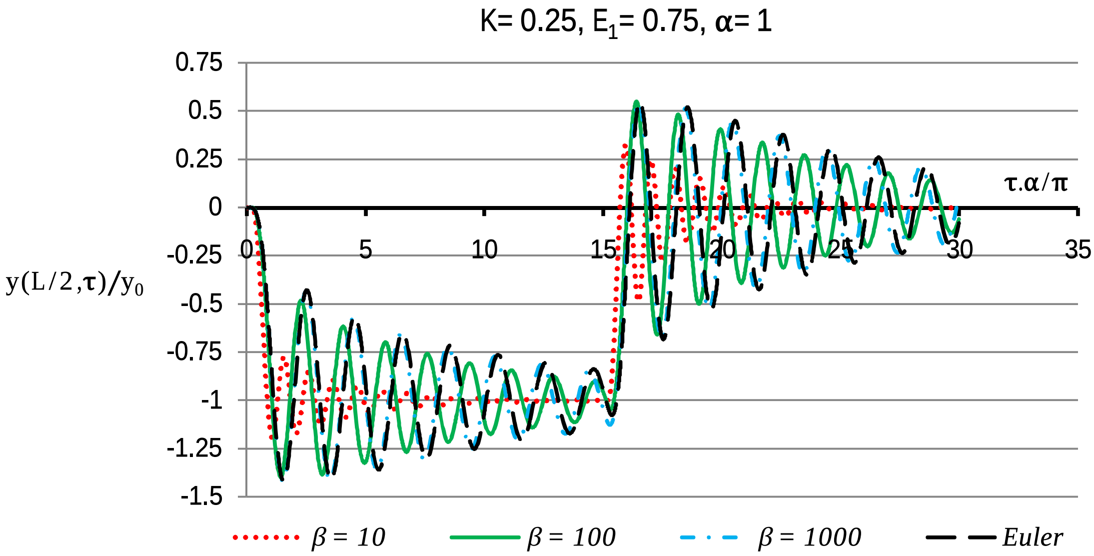
شکل 4.4: تاثیر پارامتر b در تقابل با مقدار پارامتر تاثیر سرعت a



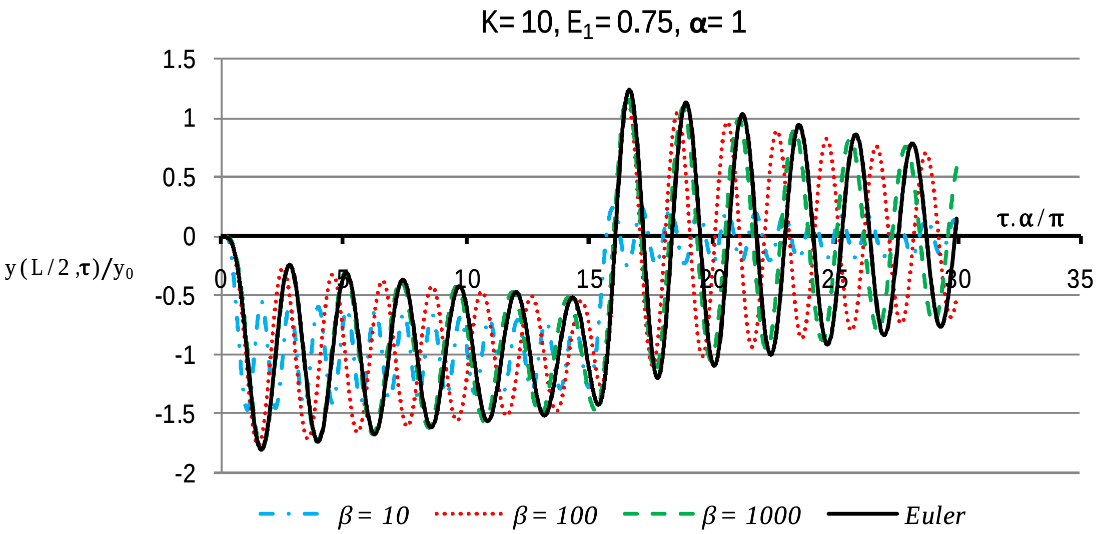
شکل 4.5: تاثیر پارامتر b در تقابل با مقدار پارامتر تاثیر سرعت a

در اشکال 4.6 و 4.7 تاثیر پارامتر b در تقابل با مقدار پارامتر K آورده شده است. به طور مشهود وقتی مقدار پارامتر K از مقدار واحد دور شود نسبت به آنچه که در اشکال 4.2 الی 4.4 دیده شده بود تاثیرات هندسی

نمود بیشتری از خود نشان می‌دهد. به طوری که در اشکال 4.2 الی 4.4 برای b =100 نمودار مربوطه با مقدار اویلری خود یکی شده اما در شکل های 4.5، 4.6 و 4.7 این مورد برای b =1000 صادق می‌شود.



شکل 4.6: تاثیر پارامتر b در تقابل با مقدار پارامتر K



شکل 4.7: تاثیر پارامتر b در تقابل با مقدار پارامتر K

4-6 – جمع بندی:

در این فصل تیر تیموشنکو صرفنظر از تاثیرات اینرسی دورانی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج حاصله با تیر اویلری مقایسه شد. عمده دلیل این بررسی لحاظ شدن مستقیم تاثیرات نیروی بررشی در معادله حرکت تیر تیموشنکو می‌باشد. از جمله نتایج این بررسی عبارت است از:

- وقتی مقدار پارامتر K از مقدار واحد دور شود تاثیرات هندسی نمود بیشتری از خود نشان می‌دهد.
- افزایش سرعت باعث می‌شود که خیز تیر در نمونه ی تیموشنکو بیشتر از تیراویلر شود.
- دید کلی نشان می‌دهد که با افزایش مقدار b رفتار تیر تیموشنکو به تیر اویلر نزدیک می‌شود.

فصل پنجم

تحلیل ریاضی استوانه ی جدار نازک ویسکوالاستیک تحت بار متحرک

5-1 – مقدمه:

حرکت سیال درون لوله ها از جمله مسائلی است که محققین مختلف بر روی آن کار کرده اند. از جمله افرادی که به بررسی پاسخ دینامیکی استوانه ویسکوالاستیک چه در حالت نازک یا ضخیم پرداخته اند Huang [22,21,20] می‌باشد. وی در مقالات خود مدل استاندارد خطی را برای مدل ویسکو الاستیک انتخاب کرده و پاسخ پایدار پوسته‌ی جدار نازک بلند تحت بار متحرک را بدست آورده است. تمرکز وی بیشتر بر روی سرعت بحرانی و تاثیر میرایی بر این سرعت می‌باشد. همچنین او تنها به بررسی یک نمونه ماده ی مشخص پرداخته است.

در این فصل سعی شده است که پاسخ یک استوانه ی جدار نازک ویسکوالاستیک با طول محدود به بار متحرک استخراج شود. همچنین به علت تشکیل معادلات و حصول پارامترهای بی‌بعد شکل نتایج حالت عمومی داشته و قابل استناد به طیف گسترده ای از مواد می‌باشد.

5-2 – معادلات پوسته در حالت ویسکوالاستیک

معادله حرکت پوسته در حالت الاستیک عبارت است از[4]:

$$r h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{Eh^3}{12(1-n^2)}\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\frac{Eh}{r^2}w = f(x,t) \qquad (5\text{-}1)$$

که در آن h ضخامت پوسته، r شعاع سطح میانی پوسته، n ضریب پواسون، r دانسیته، E مدول یانگ، $w(x,t)$ جابجایی شعاعی، x متغیر در راستای محور تقارن پوسته و $f(x,t)$ فشار می‌باشد. با توجه به معادلات

(1-20) و (1-21) و مدل ذکر شده در فصل سوم، هنگامی که ماده جامد تراکم ناپذیر بوده و تنها در برش پیرو رفتار ویسکو الاستیک باشد، این معادلات به شکل زیر تبدیل می‌شوند.

$$E(D)=\frac{3Q_1}{2P_1}=\frac{Q^E}{P^E} \tag{5-2}$$

$$n(D)=\frac{1}{2} \tag{5-3}$$

برای تبدیل معادله‌ی (5-1) به صورت ویسکوالاستیک، با توجه به اینکه شرایط مرزی مسئله تابع زمان نمی‌باشد، با استفاده از اصل تناظر[1] و جایگذاری معادلات فوق در معادله‌ی (5-1) این معادله به شکل زیر بانویسی می‌شود.

$$r h P^E \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{Q^E h^3}{9}\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\frac{Q^E h}{r^2}w=P^E f(x,t) \tag{5-4}$$

شرایط مرزی برای یک پوسته‌ی استوانه ای به طول L با تکیه گاه ساده عبارت است از:

$$w(0,t)=w(L,t)=\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2}=0 \tag{5-5}$$

برای حل معادله (5-4)، با توجه به شرایط مرزی (5-5) و با استفاده از بسط توابع ویژه به شکل:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\sin(\frac{npx}{L}) \tag{5-6}$$

و با جایگذاری معادله (5-6) در معادله (5-4) این معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$P^E(\ddot{a}_n)+\left(\frac{h^2}{9r}\left(\frac{np}{L}\right)^4+\frac{1}{r^2 r}\right)Q^E(a_n)=P^E[\frac{2}{rhL}\int_0^L f(x,t)\sin(\frac{npx}{L})dx] \tag{5-7}$$

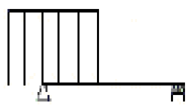
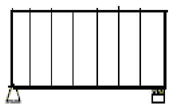
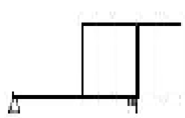
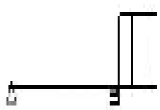
باتوجه به استخراج عملگر های P^E و Q^E به شکل روابط (3-14)، (3-15) و معادله‌ی (5-2) و اعمال آنها در معادله (5-7) این معادله به شکل زیر باز نویسی می‌شود.

[1] - Correspondence principle

$$\ddddot{a}_n + \frac{G_1}{h}\dddot{a}_n + 3\left(\frac{h^2}{9r}\left(\frac{np}{L}\right)^4 + \frac{1}{r^2 r}\right)(G_1+G_2)\ddot{a}_n + 3\left(\frac{h^2}{9r}\left(\frac{np}{L}\right)^4 + \frac{1}{r^2 r}\right)\frac{G_1G_2}{h}a_n$$
$$= P^E[\frac{2}{rhL}\int_0^L f(x,t)\sin(\frac{npx}{L})dx] \quad (5\text{-}8)$$

همچنین شرایط مرزی و شکل های مختلف بار برای فشار داخلی پیوسته ی پله ای در جدول 5.1 آورده شده که مشابه جدول 3.1 است.

جدول 5.1: **انواع مختلف بارگذار ی**

طرف راست معادله‌ی (5-8)	$f(x,t)$	شرایط اولیه	شکل بار	حالت بار گذاری
$\frac{2P_0}{rhnp}[\frac{G_1}{h}-\frac{G_1}{h}\cos(nwt) + nw\sin(nwt)]$	$P_0H[Vt-x]$	$a(t)\vert_{t=0}=0$ $\left.\frac{da(t)}{dt}\right\vert_{t=0}=0$ $\left.\frac{d^2a(t)}{dt^2}\right\vert_{t=0}=0$		ورود
$\frac{2P_0}{rhnp}[\frac{G_1}{h}-\frac{G_1}{h}\cos(np)]$	P_0	$a(t)\vert_{t=T}=b(t)\vert_{t=T}$ $\left.\frac{da(t)}{dt}\right\vert_{t=T}=\left.\frac{db(t)}{dt}\right\vert_{t=T}$ $\left.\frac{d^2a(t)}{dt^2}\right\vert_{t=T}=\left.\frac{d^2b(t)}{dt^2}\right\vert_{t=T}$		ماند
$\frac{2P_0}{rhnp}[-(-1)^n\frac{G_1}{h}+\frac{G_1}{h}\cos(nwt) - nw\sin(nwt)]$	$P_0H[x-Vt]$	$b(t)\vert_{t=T+L/V}=c(t)\vert_{t=T+L/V}$ $\left.\frac{db(t)}{dt}\right\vert_{t=T+L/V}=\left.\frac{dc(t)}{dt}\right\vert_{t=T+L/V}$ $\left.\frac{d^2b(t)}{dt^2}\right\vert_{t=t=T+L/V}=\left.\frac{d^2c(t)}{dt^2}\right\vert_{t=t=T+L/V}$		خروج
0	0	$c(t)\vert_{t=T_1}=d(t)\vert_{t=T_1}$ $\left.\frac{dc(t)}{dt}\right\vert_{t=T_1}=\left.\frac{dd(t)}{dt}\right\vert_{t=T_1}$ $\left.\frac{d^2c(t)}{dt^2}\right\vert_{t=T_1}=\left.\frac{d^2d(t)}{dt^2}\right\vert_{t=T_1}$		ارتعاش آزاد

در جدول 5.1، $a(t)$ ، $b(t)$، $c(t)$ و $d(t)$ مختصات عمومی حاصل شده در هر بار گذاری می‌باشد همچنین P_0 فشار داخلی، و بقیه نماد ها مشابه فصل قبل می‌باشد. با وارد کردن عبارات بی‌بعد ارائه شده در معادله (3-17) و با توجه به اینکه در اینجا $\Omega_1^2 = 3\left(\frac{h^2}{9r}\left(\frac{p}{L}\right)^4 + \frac{1}{r^2 r}\right)\left(G_1+G_2\right)$ به همراه تعریف پارامتر هندسی پوسته‌ی استوانه‌ای به شکل

$$b = \frac{L^2}{rh} \tag{5-9}$$

معادله‌ی (5-8) در هنگام ورود بار (بخش اول بارگذاری) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^3 a_n}{dt^3} + K\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \frac{(n^4 p^4 + 9b^2)}{(p^4 + 9b^2)}\frac{da_n}{dt} + K \cdot E_1 \cdot \frac{(n^4 p^4 + 9b^2)}{(p^4 + 9b^2)} a_n = \frac{2P_0}{rh\Omega_1^2 np}\left[K - K\cos(nat) + na\sin(nat)\right] \tag{5-10}$$

5-3 – حل استاتیکی

اگر یک پوسته‌ی استوانه‌ای ویسکوالاستیک به طور سرتاسری تحت باری با مقدار P_0 قرار داده شود و به صورت نادقیق فرض شود که خیز اولیه پوسته معادل صفر است، همچنین اگر از اثرات اینرسی در حل مسئله صرفنظر شود، معادله‌ی (5-8) به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$3\left(\frac{h^2}{9r}\left(\frac{np}{L}\right)^4 + \frac{1}{r^2 r}\right)(G_1 + G_2)\dot{a}_n + 3\left(\frac{h^2}{9r}\left(\frac{np}{L}\right)^4 + \frac{1}{r^2 r}\right)\frac{G_1 G_2}{h} a_n = \frac{2P_0}{rhnp}\left(\frac{G_1}{h} - \frac{G_1}{h}\cos(np)\right) \tag{5-11}$$

حل معادله‌ی (5-11) عبارت است از:

$$a_n(t) = \frac{6P_0 L^4 r^2\left((-1)^{(n+1)} + 1\right)\left(1 - e^{-\left(\frac{G_1 G_2 t}{G_1 + G_2}\right)}\right)}{nph\left(h^2 r^2 p^4 n^4 + 9L^4\right)G_2} \tag{5-12}$$

با جایگذاری معادله‌ی (5-12) در معادله‌ی (5-6) خیز استاتیکی پوسته در هر لحظه و زمانی به شکل زیر قابل استخراج می‌باشد.

$$y_s(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6P_0L^4r^2((-1)^{(n+1)}+1)(1-e^{-(\frac{G_1G_2t}{G_1+G_2})})}{nph(h^2r^2p^4n^4+9L^4)G_2}\sin(\frac{npx}{L}) \tag{5-13}$$

خیز استاتیکی پوسته هنگامی که $t \longrightarrow \infty$ برابر است با:

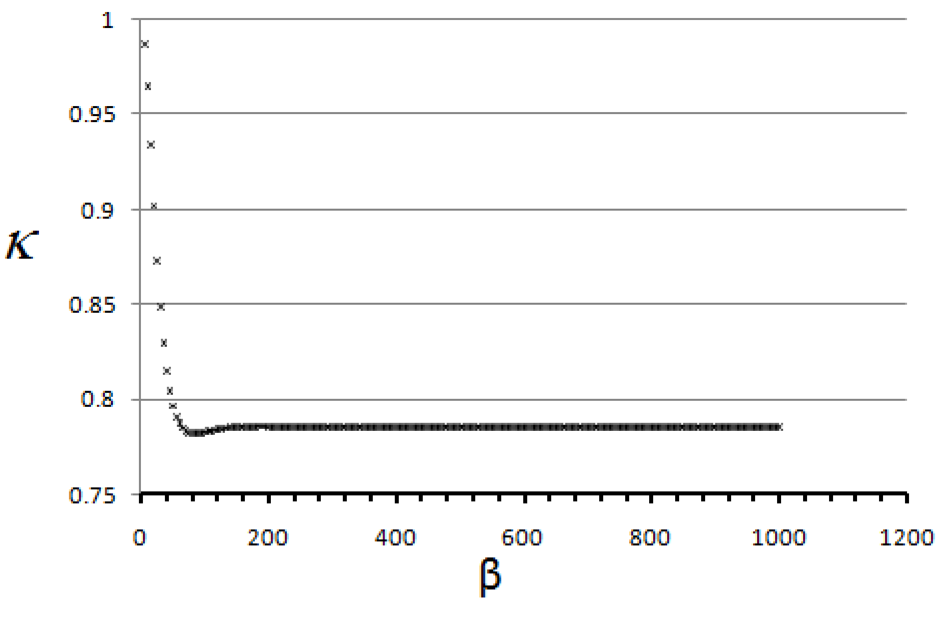
$$y_s(x,\infty)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6P_0L^4r^2((-1)^{(n+1)}+1)}{nph(h^2r^2p^4n^4+9L^4)G_2}\sin(\frac{npx}{L}) \tag{5-14}$$

بر اساس رابطه ی فوق، خیز وسط پوسته در زمان بی‌نهایت برای $n=1$ برابراست با:

$$y_s(L/2,\infty)=y_0=\frac{12P_0L^4r^2}{ph(h^2r^2p^4+9L^4)G_2} \tag{5-15}$$

اگر معادله‌ی (5-14) در $x=L/2$ به معادله‌ی (5-15) تقسیم شود یک عبارت بی‌بعد که می‌تواند دقت معادله‌ی (5-15) را ارزیابی کند، حاصل می‌شود.

$$k=\sum_{n=1}^{N}\frac{((-1)^{n+1}+1)(p^4+9b^2)}{2n(p^4n^4+9b^2)}\sin(\frac{np}{2}) \tag{5-16}$$



شکل 5.1: مقدار ضریب تصحیح خیز استاتیکی k بر حسب مقدار b

شکل 5.1 مقدار k به ازای b های مختلف به ازای صد جمله ی اول سری را نشان می‌دهد. به طور واضح معادله‌ی (5-15) تنها برای مقادیر $b \le 10$ قابل استناد می‌باشد و از این رو وجود یک ضریب تصحیح کننده در این معادله به صورت بالا لازم می‌باشد.

$$y_0 = \frac{12P_0L^4r^2k}{ph(h^2r^2p^4 + 9L^4)G_2} \tag{5-17}$$

همچنین به کمک دسته معادلات (3-18) معادله‌ی (5-17) می‌تواند به فرم زیر باز نویسی شود.

$$y_0 = \frac{4P_0k}{rph\Omega_1^2E_1} \tag{5-18}$$

با توجه به معادله‌ی (5-18) معادله‌ی (5-10) به فرم زیر قابل باز نویسی می‌باشد.

$$\begin{aligned}&\frac{d^3a_n}{dt^3} + K\frac{d^2a_n}{dt^2} + \frac{(n^4p^4+9b^2)}{(p^4+9b^2)}\frac{da_n}{dt} + K\cdot E_1\cdot\frac{(n^4p^4+9b^2)}{(p^4+9b^2)}a = \\ &\frac{E_1y_0}{2nk}\left[K - K\cos(nat) + na\sin(nat)\right]\end{aligned} \tag{5-19}$$

5-4 – بررسی معادله

معادله‌ی (5-19) یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی از مرتبه ی سه می‌باشد که تمام ضرایب آن مثبت و حقیقی بوده و به ازای هر n یک جواب منحصر به فرد دارد. به دلیل اینکه همه ضرایب معادله مثبت و حقیقی می‌باشند معادله‌ی مشخصه ی این معادله تنها می‌تواند دارای سه ریشه ی حقیقی منفی و یا دو ریشه ی مزدوج مختلط و یک ریشه ی حقیقی منفی باشد.

در حالتی که معادله‌ی مشخصه دارای دو ریشه ی مزدوج مختلط و یک ریشه ی منفی است معادله‌ی مشخصه شکل زیر است.

$$(l+c)((l+a)^2+b^2)=0 \tag{5-20}$$

که در آن a ، b و c اعداد مثبتی بوده و $l=-c$ و $l=-a \mp ib$ ریشه های معادله مشخصه می‌باشند. در این حالت پاسخ معادله‌ی (5-19) برای n=1 برابر است با:

$$a_1(t)=\frac{E_1y_0}{2k}[\frac{K}{c(a^2+b^2)}+\frac{a^2(c-K)e^{-ct}}{(c^2+a^2)(c^2+b^2+a^2-2ca)c}$$
$$+A1\sin(at)+B1\cos(at)+e^{-at}(A2\sin(bt)+B2\cos(bt))] \tag{5-21}$$

$$A1=\frac{a^2(K-2a-c)-2Kca+(a^2+b^2)(c-K)}{(a^4+2(a^2-b^2)a^2+(b^2+a^2)^2)(a^2+c^2)}$$

$$B1=\frac{a^2(K(c+2a)-(a+2c)a-b^2)-Kc(a^2+b^2)+a^4}{((a^2+b^2+a^2)^2-4a^2b^2)(a^2+c^2)}$$

$$A2=\frac{p_0}{b(a^2+(b+a)^2)(a^2+(b-a)^2)(b^2+c^2-2ca+a^2)(a^2+b^2)}$$

$$p_0=-a^2[a^5-(K+c)a^4+(Kc+a^2-2b^2)a^3+(6b^2K-a^2(K+c))a^2$$
$$-(b^2+Kc)(3b^2-a^2)a+b^2(b^2-a^2)(c-K)]$$

$$B2=\frac{q_0}{((b^2+a^2+a^2)^2-4a^2b^2)(b^2+c^2-2ca+a^2)(a^2+b^2)}$$

$$q_0=a^2[-3a^4+(4K+2c)a^3-(3Kc+a^2+2b^2)a^2+((2c-4K)b^2+2a^2K)a$$
$$+(b^2-a^2)(b^2+Kc)]$$

با وارد کردن معادله‌ی (5-21) در معادله (5-6) و نرمالیزه کردن عبارت حاصله به y_0، نسبت خیز دینامیکی پوسته در هر لحظه و در هر نقطه‌ی دلخواه به قدر مطلق y_0 حاصل می‌شود.

5-5 – مطالعه پارامتر های بی‌بعد

با تعریف پارامتر های بی‌بعد:

$$\Omega_1^2=3\left(\frac{h^2}{9r}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4+\frac{1}{rr^2}\right)(G_1+G_2)=\frac{3G_0}{rr^2}(\frac{9b^2+p^4}{b^2})=\Omega_1'^2(\frac{9b^2+p^4}{9b^2}) \tag{5-22}$$

کمیت های بی‌بعد (17-3) به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$K=\frac{G_1}{h\Omega'} \qquad a=\frac{w}{\Omega'}=\frac{pV}{L\Omega'} \qquad t=\Omega' t\frac{\sqrt{(p^4+9b^2)}}{3b} \tag{5-23}$$

از این رو معادله‌ی (19-5) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

(5-24)

$$\frac{d^3a}{dt^3}+K\frac{3b}{\sqrt{(p^4+9b^2)}}\frac{d^2a}{dt^2}+\frac{(n^4p^4+9b^2)}{(p^4+9b^2)}\frac{da}{dt}+K\cdot E_1\cdot\frac{(n^4p^4+9b^2)}{(p^4+9b^2)}\frac{3b}{\sqrt{(p^4+9b^2)}}a=$$
$$\frac{E_1y_0}{2nk}\frac{3b}{\sqrt{(p^4+9b^2)}}\left[K-K\cos(nat\frac{3b}{\sqrt{(p^4+9b^2)}})+na\sin(nat\frac{3b}{\sqrt{(p^4+9b^2)}})\right]$$

5-6 – **بر رسی پارامترهای K، E_1، a و b**

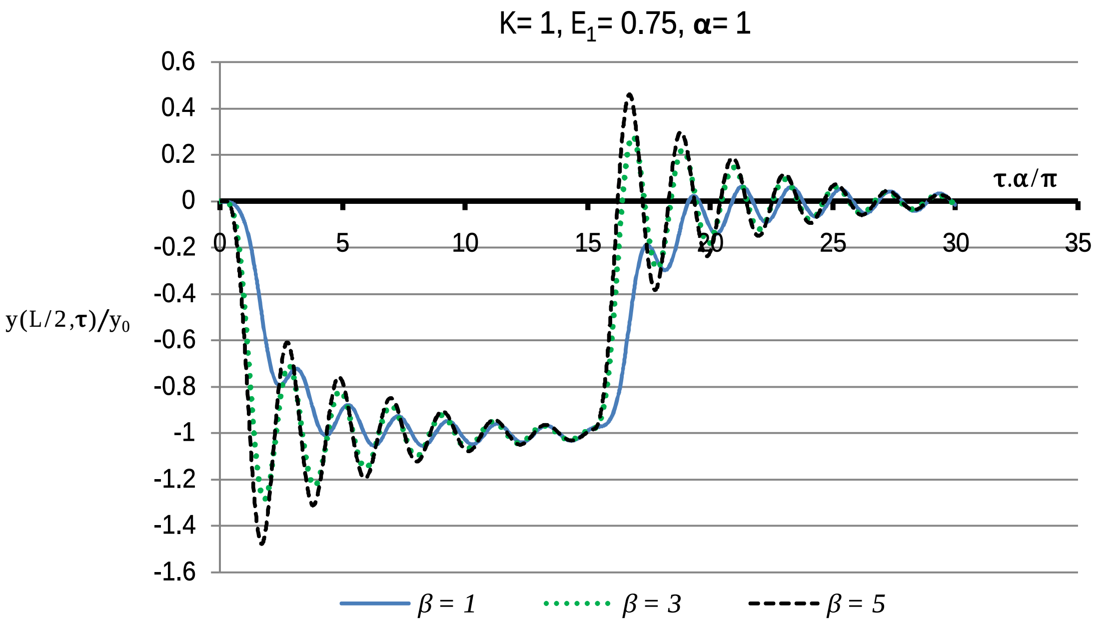
در معادله‌ی (24-5) برای مقدار ثابتی از پارامتر b معادله‌ی (24-5) و (18-3) تقریبا به یکدیگر شبیه بوده و می‌توان پیش بینی کرد که تاثیر مقادیر مختلف K، E_1 و a در پاسخ پوسته معادل است با آنچه در بخش 3-4-1 بیان شد از این رو از ذکر مجدد نتایج خودداری می‌شود.

در مورد پارامتر هندسی b باید این نکته را قبل از بررسی بیان نمود که بر خلاف آنچه در مورد شباهت معادله‌ی پوسته در شکل به کار رفته شده در معادله‌ی (1-5) با معادله‌ی یک تیر اویلری بر روی فونداسیون الاستیک بیان می‌شود، لیکن بعد از بیان این معادله در فرم ویسکوالاستیک این شباهت کاملا از بین رفته است. زیرا عامل فونداسیون الاستیک بعد از تبدیل معادله حاکم به شکل ویسکوالاستیک همچنان دارای اثر الاستیک می‌باشد در حالی که در معادله‌ی پوسته [معادله‌ی (1-5)] هر اثر مشابه، به حالت ویسکو الاستیک تبدیل می‌شود.

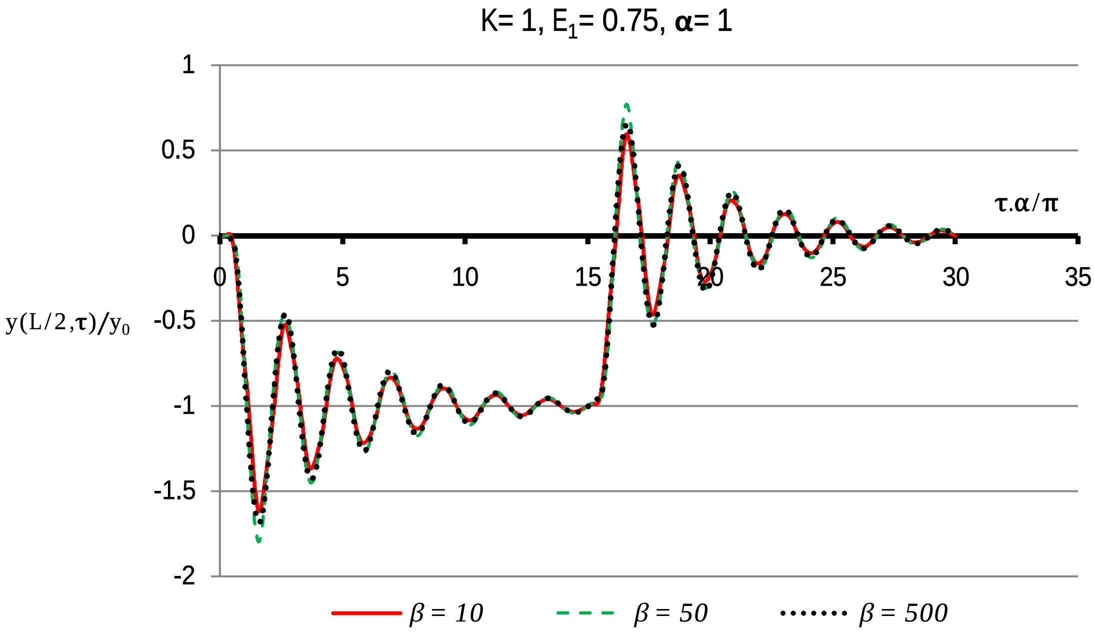
یکی دیگر از نکات مهم در بررسی اثرات هندسی در پاسخ، سرعت عبور بار می‌باشد که به شدت بر تاثیرات هندسی در پاسخ دخالت می‌کند. در شکل های 5.2 تا 5.7 به بررسی اثر پارامتر b در تقابل با پارامتر a پرداخته شده است. در اشکال 5.2 الی 5.4 این اثر در $a=1$ و در شکل های 5.5 تا 5.7 این اثر در $a=0.125$ که بعنوان حرکت شبه استاتیکی یا آرام می‌تواند تلقی شود، بررری شده است.

با توجه به شکل های 5.2، 5.3 و 5.4 تفاوت قابل توجه تقریبا برای مقادیر $b \leq 3$ می‌باشد و برای مقادیر بزرگتر تفاوت خاصی قابل ذکر نمی‌باشد. این عدم تفاوت بدلیل میل کردن سریع ضرایب شامل پارامتر b مانند $\frac{3b}{\sqrt{(p^4+9b^2)}}$ به سمت واحد می‌باشد. از مقایسه این اشکال مشخص می‌شود که در سرعت های بالا با افزا یش پارامتر b پاسخ به تیر اویلری نزدیک می‌شود. در شکل 5.4 این مقایسه صورت گرفته است و بعد از چند نوسان اول، اختلاف موجود کاهش یافته است. همچنین مقایسه این سه شکل به وضوح نشان می‌دهد که برای $b > 10$ اختلاف عمده ای بین نمودار های مختلف وجود ندارد.

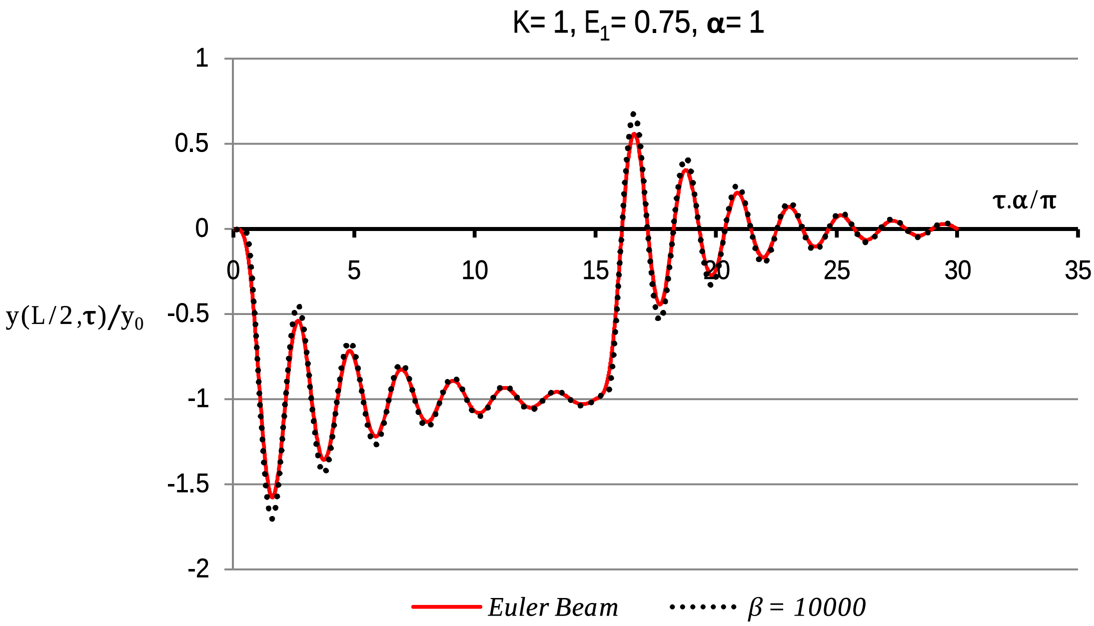
در شکل های 5.5، 5.6 و 5.7 پارامتر b برای سرعت کم عبور بار بررسی شده است. اولین نکته مهم تفاوت رفتار بین این حالت با سرعت های بالا می‌باشد، به طوریکه بر خلاف آنچه بیان شد، با افزایش b اختلاف پاسخ نسبت به تیر اویلری نیز افزایش یافته و این مورد در شکل 5.7 به خوبی قابل مشاهده می‌باشد. با توجه به این شکل ها در b بزرگ با اینکه سرعت عبور بار کم می‌باشد، تعداد نوسانات اولیه زیاد بود از این رو در طراحی باید به این مسئله توجه نمود. با توجه به آنچه بیان شد با توجه به سرعت عبور بار(پارامتر a) مقدار مورد نیاز پارامتر b را می‌توان تعیین نمود، بطوریکه در سرعت های پائین مقادیر ضریب تقویت، بالا نبوده و در هنگام خروج بار یا در ابتدای ایستایی بار، به سیستم ضربه وارد نکند.



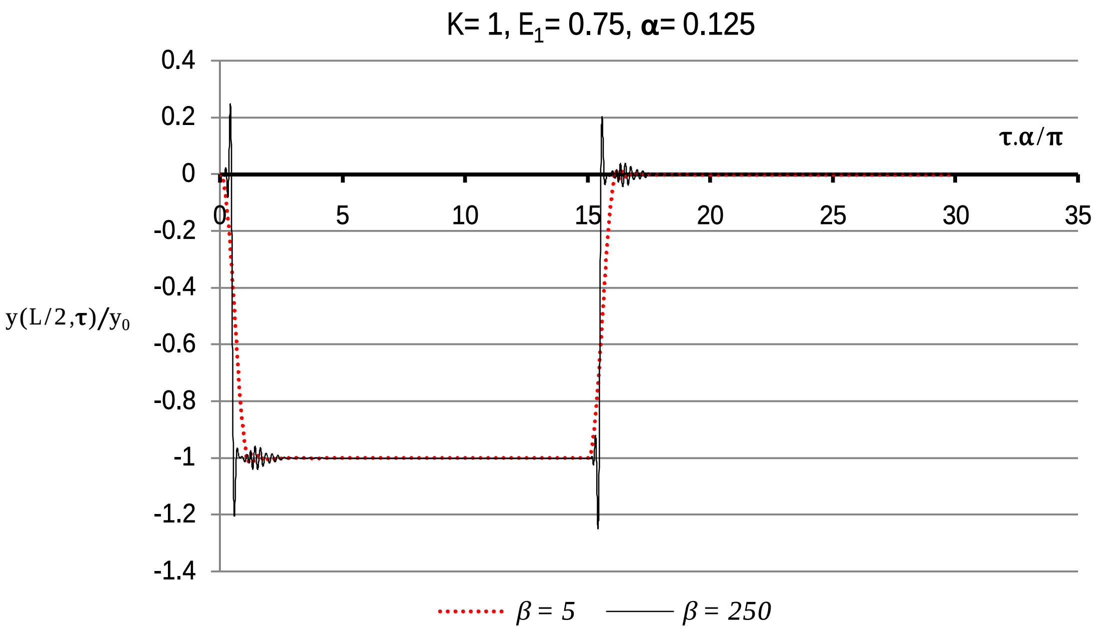
شکل 5.2: بررسی تاثیر پارامتر b در سرعت زیاد



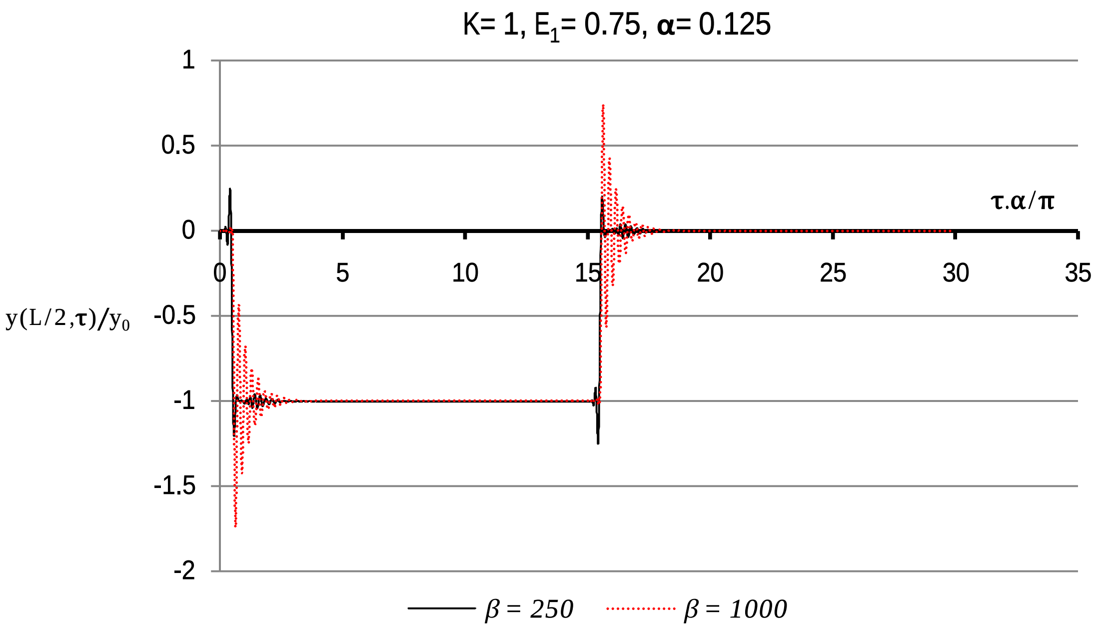
شکل 5.3: بررسی تاثیر پارامتر b در سرعت زیاد



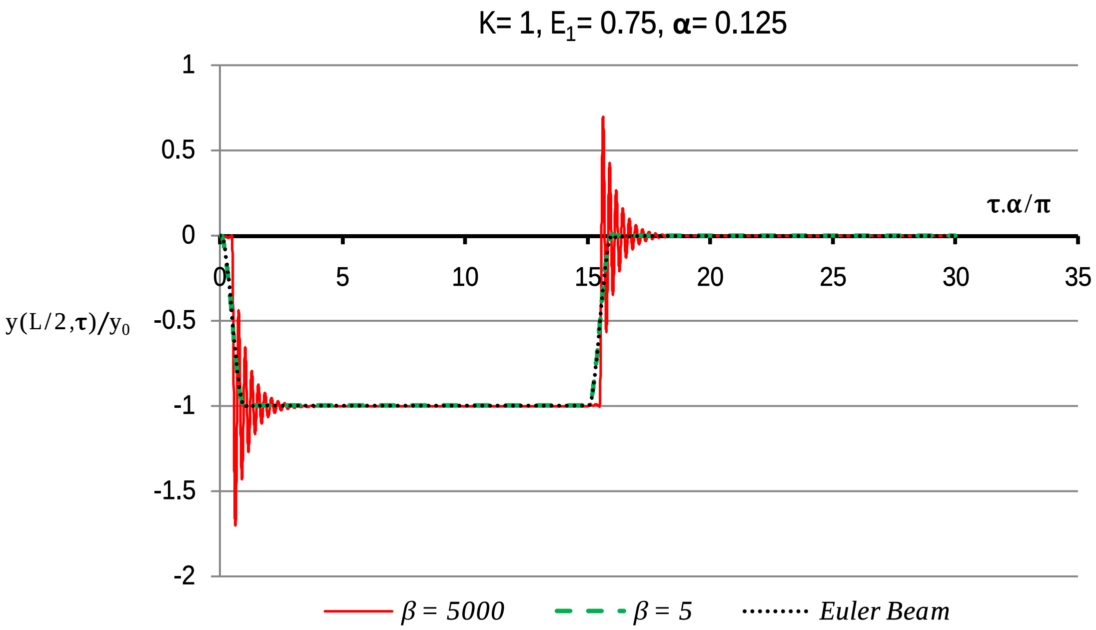
شکل 5.4: مقایسه پاسخ تیر اویلری و پوسته در سرعت زیاد



شکل 5.5: بررسی تاثیر پارامتر b در سرعت کم



شکل 5.6: بررسی تاثیر پارامتر b در سرعت کم



شکل 5.7: مقایسه پاسخ تیر اویلری و پوسته در سرعت کم

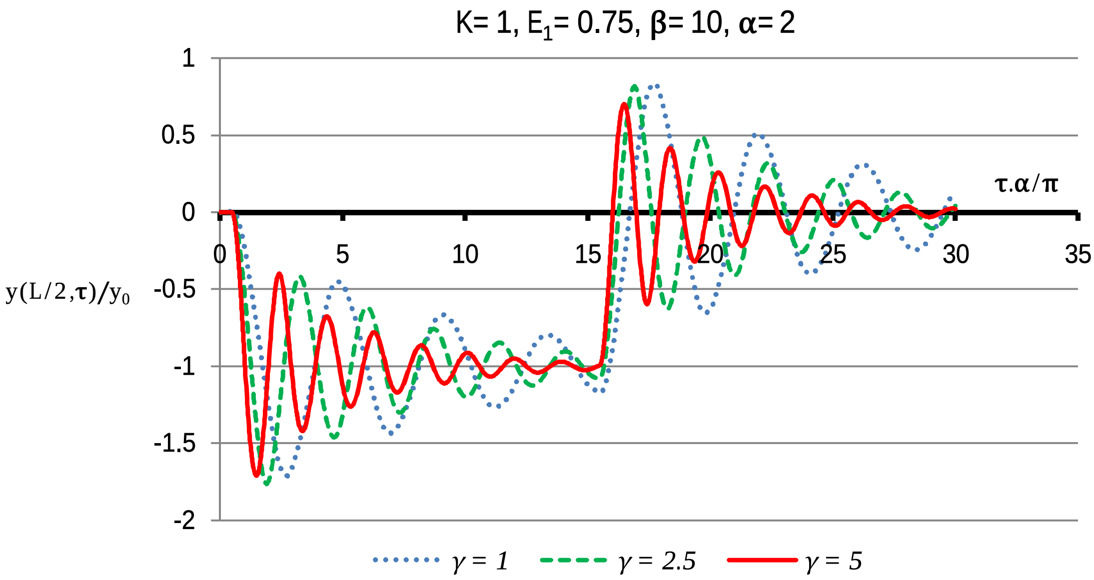
5-7 – بررسی تاثیر موردی طول پوسته در پاسخ

با توجه به معادلات (5-23) و (5-24) تنها دو پارامتر a و b به مقدار L وابسته می‌باشند. برای یک مقدار ثابت از مقادیر r و h می‌توان گفت، زمانی که L، g برابر می‌شود مقدار a، $\frac{1}{g}$ برابر و مقدار b، g^2 برابر می‌شود. در واقع در یک سرعت و سطح مقطع ثابت، بررسی تاثیر تغییر طول بر پاسخ پوسته مد نظر است. باید توجه داشت که در بخش قبل هنگامی که تنها پارامتر b تغیر می‌کرد و مقدار a ثابت بود، اگر فرض شود این تغییر تنها ناشی از تغییر طول باشد ثبات پارامتر a ناشی از تغییر سرعت می‌باشد.

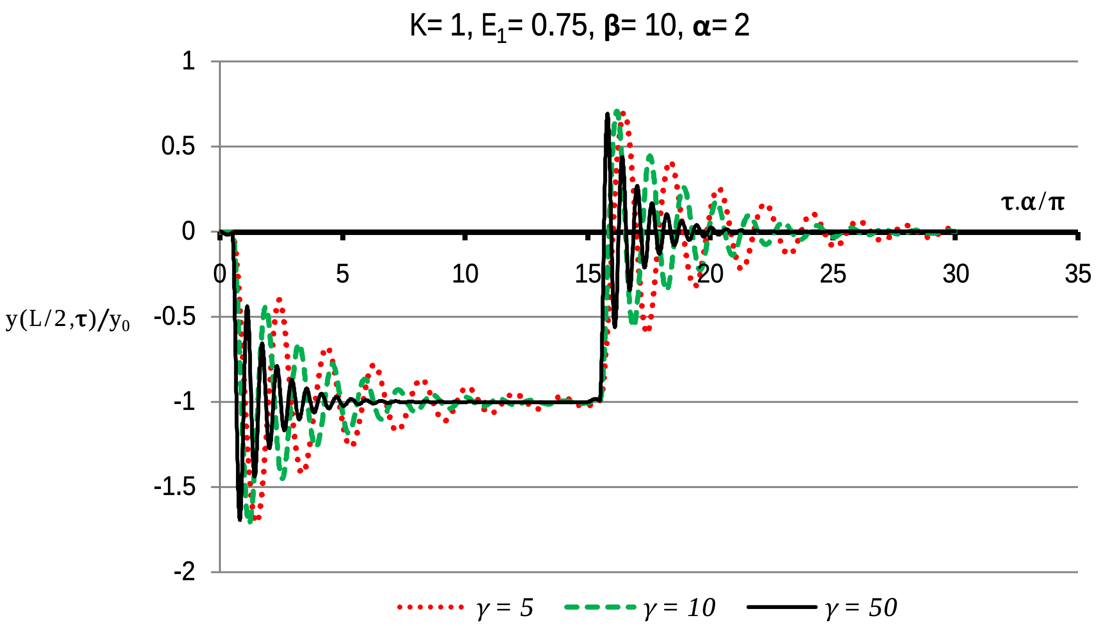
در اینجا چون سرعت ثابت است با افزایش طول مقدار a کاهش یافته در نتیجه می‌توان پیش بینی کرد پاسخ از حالت بحرانی برای یک پوسته با طول کم به مورد شبه استاتیکی تبدیل می‌شود. همچنین با افزایش طول مقدار b نیز افزایش می‌یابد. این افزایش باعث می‌شود برای مقادیر بزرگ b پاسخ به پاسخ تیر اویلری بسیار شبیه شود. این مورد با توجه به بخش قبل در سرعت های کم، عکس می‌باشد.

قبل از بررسی شکل های 5.8 و 5.9 این نکته ضرروی است که مقادیر aو b نوشته شده در شکل ها تنها برای مقدار $g=1$صادق بوده و بر اساس رابطه ی بیان شده در ابتدای بخش، بسته به مقدار g تغییر می‌کند. افزایش طول باعث می‌شود پاسخ به حالت شبه استاتیکی نزدیک شود. همچنین این افزایش طول،

زمان کافی برای پاسخ پوسته را فراهم می‌کند؛ بطوریکه میرایی کامل در $g = 50$ قابل مشاهده است. انتظار این است با افزایش طول خیز سازه نیز افزایش یابد؛ اما در نمودار های مربوطه، به دلیل تقسیم خیز دینامیکی به خیز استاتیکی این افزایش مشخص نمی‌شود.



شکل 5.8: بررسی افزایش طول در پاسخ



شکل 5.9: بررسی افزایش طول در پاسخ

5-8 – جمع بندی

در این فصل معادلات حاکم بر یک استوانه ی جدار نازک ویسکوالاستیک استخراج شد. همچنین به منظور یک مقایسه مناسب بین پوسته و تیر اویلری تغییراتی در پارامترهای بی‌بعد این معادله داده شد. از جمله نتایج حاصله عبارت است از:

- برای مقادیر $b \geq 10$ ضریب دینامیکی به یک مقدار مشخص میل می‌کند.
- در سرعت های بالا با افزا یش پارامتر b پاسخ به تیر اویلری نزدیک می‌شود؛ در حالیکه در سرعت های پایین نتیجه بر عکس است.
- با توجه به سرعت عبور بار(پارامتر a) مقدار مورد نیاز پارامتر bرا می‌توان تعیین نمود؛ بطوریکه در سرعت های پائین مقادیر ضریب تقویت، بالا نبوده و در هنگام خروج بار یا در ابتدای ایستایی بار، به سیستم ضربه وارد نشود.

فصل ششم

تحلیل عددی استوانه ی جدار نازک ویسکوالاستیک تحت بار متحرک

6-1 – مقدمه:

برای حل اجزاء محدود مسئله از نرم افزار Ansys استفاده شده است. اما نکته نامطلوب در این نرم افزار نبود شرایط دلخواه برای ایجاد یک بار متحرک بصورت معمول می‌باشد. با این حال با استفاده از تعریف بار های پله ای و دستورات موجود و نیز ماکرو نویسی که نقش بسیار مهمی در بررسی حالت های مختلف با انواع بارگذاری از لحاظ سرعت حرکت بار، خواص ذاتی و شرایط هندسی مختلف را ممکن می‌سازد به مدل سازی مسئله پرداخته شده است. بی شک می‌توان گفت که بدون استفاده از ماکرو انجام بخش اجزاء محدود به زمان بسیار طولانی نیازمند می‌باشد.

6-2 – سر ی پرونی [1]

به طور کلی تابع تنش یک ماده ویسکوالاستیک در شکل انتگرالی بیان می‌شود. با توجه به تئوری کرنش کوچک، معادله حاکم برای یک ماده ویسکوالاستیک ایزوتروپیک می‌تواند به شکل زیر نوشته شود [23].

$$s\,(t) = \int_0^t 2G(t-q)\frac{de}{dq}dq + I\int_0^t K(t-q)\frac{d\Delta}{dq}dq \qquad (6\text{-}1)$$

بطوریکه، s تنش کوشی، e بخش کاهیده [2] (یا انحرافی) کرنش، Δ بخش حجمی کرنش(بالک)، $G(t)$ تابع رهایش برشی، $K(t)$ تابع رهایش بالک، t زمان ، q متغیر انتگرال گیری و I تانسور واحد است.

---

[1] - Prony Series

[2] -Deviatoric part of atrain

توابع رهایش و بالک بصورت سری توانی پرونی که در واقع شکل تعمیم یافته ی سری ماکسول می‌باشد به صورت زیر بیان می‌شود [23].

$$G(t) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{\frac{-t}{t_i^G}} \quad (6\text{-}2)$$

$$K(t) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{\frac{-t}{t_i^K}} \quad (6\text{-}3)$$

بطوریکه: G_∞ و G_i مدول الاستیک برشی ، K_∞ و K_i مدول الاستیک بالک ، t_i^G و t_i^K زمان رهایش برای هر عضو سری پرونی است. مدول تناسبی به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$E_i^G = \frac{G_i}{G_0} \qquad E_i^K = \frac{K_i}{K_0} \quad (6\text{-}4)$$

بطوریکه:

$$G_0 = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \qquad K_0 = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \quad (6\text{-}5)$$

بنابراین معادله‌ی (6-2) و (6-3) می‌تواند به شکل زیر نوشته شود.

$$G = G_0 (E_\infty^G + \sum_{i=1}^{n_G} E_i^G e^{\frac{-t}{t_i^G}}) \quad (6\text{-}6)$$

$$K = K_0 (E_\infty^K + \sum_{i=1}^{n_K} E_i^K e^{\frac{-t}{t_i^K}}) \quad (6\text{-}7)$$

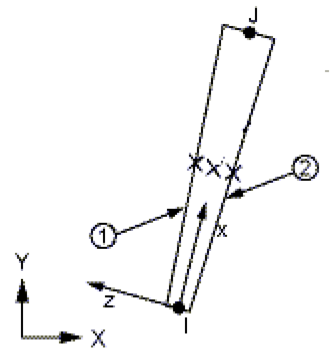
تابع انتگرالی معادله‌ی (6-1) توانایی بازتولید[1] رفتار الاستیک در بارگذاری های بسیار کند و بسیار تند را دارا می‌باشد. در اینجا G_0 و K_0 به ترتیب مدول برشی و مدول بالک در بارگذاری سریع (یعنی مدول آنی) و G_∞ و K_∞ مدول مربوطه در بارگذاری های کند می‌باشند. باید توجه داشت زمان های رهایش برای دو بخش کاهیده و حجمی می‌تواند متفاوت باشد. همچنین تعداد جملات هر سری مستقل از دیگری است و می‌تواند از هم متفاوت باشد. ملاحظه می‌شود که معادله‌ی (6-6) و (6-7) کاملا با مدل ماکسول مطابقت می‌کند.

[1] - Recovery

برا ی تعریف خواص مادی برای اولین عضو سری بصورت پارامتر های E مدول الاستیسیته، t_1 زمان رهایش اولین عضو سری و E_1^G مدول تناسبی اولین عضو سری، با توجه به اینکه هدف تنها بررسی برش ویسکو الاستیک است با معادل کردن ضریب پواسون $n = 0.5$که مقدار حدی آن است و تعریف نکردن ضرایب بالکی، این هدف قابل دستیابی می‌شود. باید توجه داشت بدلیل تعریف نشدن ضرایب بالکی و تعریف حدی از ضریب پواسون نرم افزار با توجه به تعریف ضرایب لامه مقدار G_0 را معادل $E/3$ قرار می‌دهد.

6-3 – المان SHELL208

shell208 (شکل 6.1) یک المان مناسب برای مدل کردن سازه های پوسته‌ای متقارن محوری نازک و تا حدودی ضخیم مانند مخازن سوخت، لوله ها و برج های خنک کن می‌باشد. این المان از دو گره که هر کدام دارای سه درجه آزادی انتقالی شامل انتقالی در جهت x و y، و چرخش حول محور z می‌باشد تشکیل شده است. یک درجه آزادی انتقالی چهارم در جهت z به منظور مدل کردن پیچش یکنواخت نیز می‌تواند به آن اضافه شود. هنگامی که حالت غشایی انتخاب شود، چرخش حول محور z حساب نمی‌شود. shell208 امکان مدل کردن تاثیرات کرنش بزرگ، تغییر شکل برشی انتقالی، هایپرالاستیسیتی و مدل لایه لایه را نیز فراهم می‌کند.

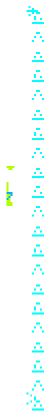


شکل 6.1: شکل هندسی المان shell208 [23]

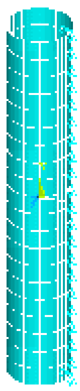
شکل 6.1 هندسه، موقعیت گره ها و سیستم مختصات المان shell208 را نشان می‌دهد. به منظور تعریف خصوصیات ماده جهت مختصات محلی x مطابق با جهت میانی المان و نیز جهت مختصات محلی y، محیطی[1] می‌باشد. جهت مختصات محلی z مطابق با جهت ضخامت المان است. در شکل 6.2 و 6.3 شکل

[1] - Circumferential

مش بندی شده‌ی پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده است. لازم به ذکر است که شکل 6.3 از گسترش شکل 6.2 حول محور z حاصل شده و تنها برای درک بیشتر مسئله ارائه شده و کار برد خاصی ندارد.



شکل 6.2: مدل اجزاء محدود پوسته در شکل متقارن محوری



شکل 6.3: مدل اجزاء محدود پوسته در شکل گسترده

6-4 – مدل سازی بار فشاری بر روی پوسته (بار پیوسته)

اگر مدل تقارن محوری یک پوسته از n المان به صورت پشت سر هم و در یک ردیف ساخته شده باشد، برای ورود بار پیوسته و رسیدن آن به انتهای پوسته به n مرحله بارگذاری پله ای نیاز می‌باشد. از این رو کل زمان بار گذاری بر روی هر المان برابراست با T/n که T معادل است با سرعت بار تقسیم بر طول پوسته می‌باشد.

فرایند مدل سازی به این صورت می‌باشد که بار پیوسته را بر روی المان شماره ی یک وارد کرده و زمان $t=T/n$ به آن اختصاص داده می‌شود که متناظر باحل شماره ی یک می‌باشد. حال بار پیوسته را بر روی دو المان وارد کره و زمان $2t$ به آن انتساب داده می‌شود که متناظر با حل شماره ی دو نیز می‌باشد. این روند تا

حل شماره ی nاُم انجام می‌شود. حل پشت سر هم این n مرحله، حرکت بار پیوسته بر روی تیر یا پوسته را برای نرم افزار شبیه یازی می‌کند.

برای حالت ایستا بر روی پوسته یا تیر مرحله ی $n+1$ به مراحل قبلی اضافه می‌شود. زمان این مر حله کاملا اختیاری بوده همچنین حذف این مرحله معادل با خروج بار بلافاصله بعد از رسیدن به انتهای تیر است.

برای خروج بار که از مرحله ی $n+2$ شروع می‌شود عکس مراحل ورود عمل می‌شود به طوریکه در مرحله ی اول خروج، بار وارده بر روی المان شماره ی 1 حذف می‌شود که معادل حل شماره ی $n+2$ بوده و زمان اختصاص یافته به آن برابر است با $T+T'+t$ که T' زمان ماند یا ایستا می‌باشد. این روند تا مرحله ی $2n+1$ یعنی خروج کامل بار ادامه دارد. بعد از خروج کامل، یک مرحله دیگر برای بررسی ارتعاش آزاد بعد از تحریک به مراحل فو ق اضافه می‌شود.

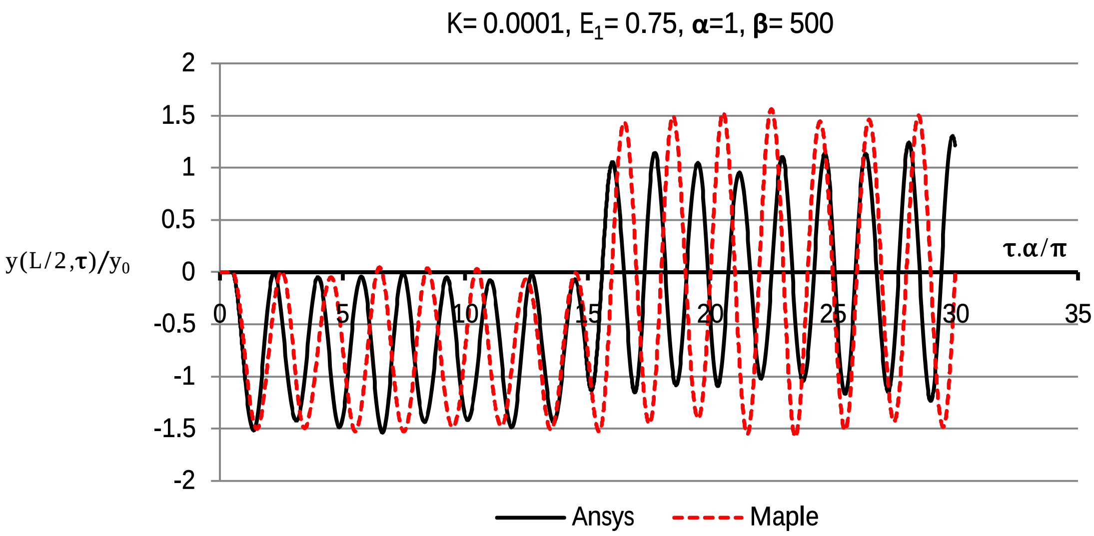
هنگام تحلیل مسائل ارتعاشی در Ansys بر خلاف تحلیل استاتیکی که تنها تعداد المانها مهم می‌باشد، عامل زمان بار گذاری نیز از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در کمک نرم افزار زمان [23] $1/(40fr1)$ را در هنگام اعمال ضربه مناسب می داند که $fr1$ اولین فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد. در بررسی های انجام شده به دلیل سرعت بالای عبور بار در برخی بار گذاری ها این زمان معادل $1/(60fr1)$ در نظر گرفته شد. همچنین در بررسی انجام شده بسته به ابعاد پوسته می‌توان با تعداد المان های بین 30 تا 150 المان پاسخ مناسبی بر اساس معیار همگرایی بدست آورد ولی در بررسی موارد مطرح شده از 100 المان و زمان بار گذاری $1/(60fr1)$ استفاده شده است. باید توجه داشت زمان بار گذاری مناسب در برخی موارد نسبت به تعداد المان های انتخابی، از اهمیت بیشتری برخوردار است به طوری که اگر این زمان به درستی تعیین نشود حتی با افزایش تعداد المان ها پاسخ مناسبی حاصل نمی‌شود. این مورد در هنگامی که سرعت عبور بار بالاست از اهمیت ویژهای برخوردار است.

6-5 – مقایسه حل عددی و تحلیلی

در روند این پروژه ماده ی خاصی مد نظر نبوده از این رو پارامتر های مادی دلخواه برای حل عددی در نظر گرفته شده است و نیز علاوه بر حل بار متحرک یک حل استاتیکی و آنالیز مدال برای هر نمونه صورت گرفته است. با تقسیم جابجایی حاصل از حل بار متحرک به جابجایی استاتیکی و نیز مقیاس زمان به مقدار زمان رسیدن بار به انتهای پوسته، شرایط مقایسه حل بدست آمده با معادله‌ی (5-19) حاصل می‌شود. بر این اساس ابتدا مقادیر بسیار بزرگ و کوچک خصوصیات مادی یعنی K و E مورد بررسی قرار گرفته است. حل عددی و

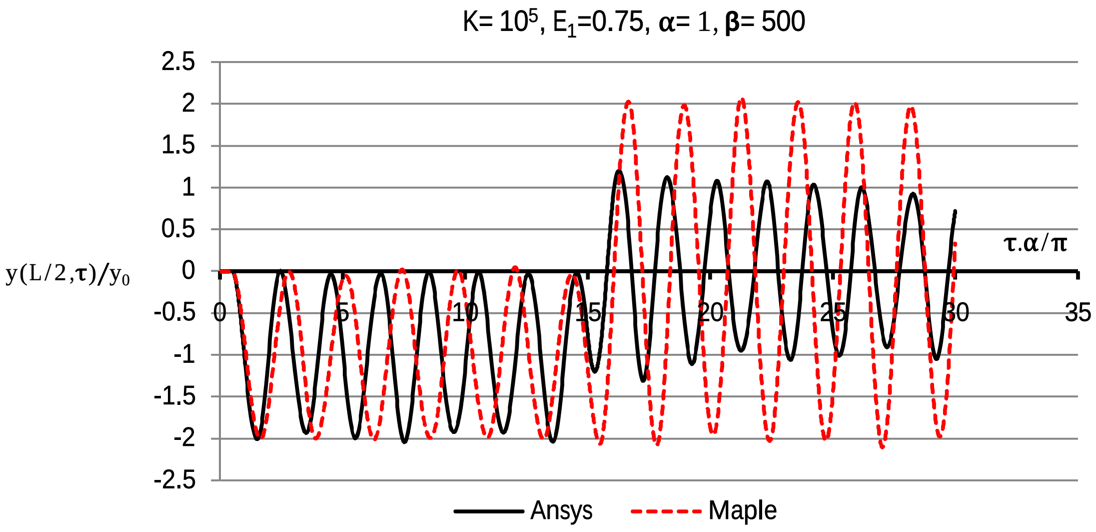
حل تئوری در شکل ها به تر تیب به نام Ansys و Maple نامگذاری شده اند. دلیل این نام گذاری اسم نرم افزار مورد استفاده در استخراج پاسخ می‌باشد.

درشکل های 6.4 و 6.5 پارامتر K در مقدار بزرگ وکوچک مورد توجه واقع شده است. مقدار دامنه نوسانات بین حل عددی و تحلیلی در هر دو حالت بعد از شروع خروج بار یعنی زمان $ta/p=15$ دارای اختلاف مشخصی بوده و این اختلاف در شکل 6.6 بیشتر می‌باشد اما قبل از این، زمان اختلاف دامنه ناچیز است. در مورد تطابق زمانی باید گفت که که در هنگام ورود بار اختلاف پاسخ بین حل عددی و تئوری ناچیز می‌باشد اما با قرار گرفتن بار بر روی پوسته به صورت ایستا این اختلاف با افزایش زمان ماند کاهش یافته و در هنگام خروج بار این اختلاف دوبار افزایش می‌یابد.

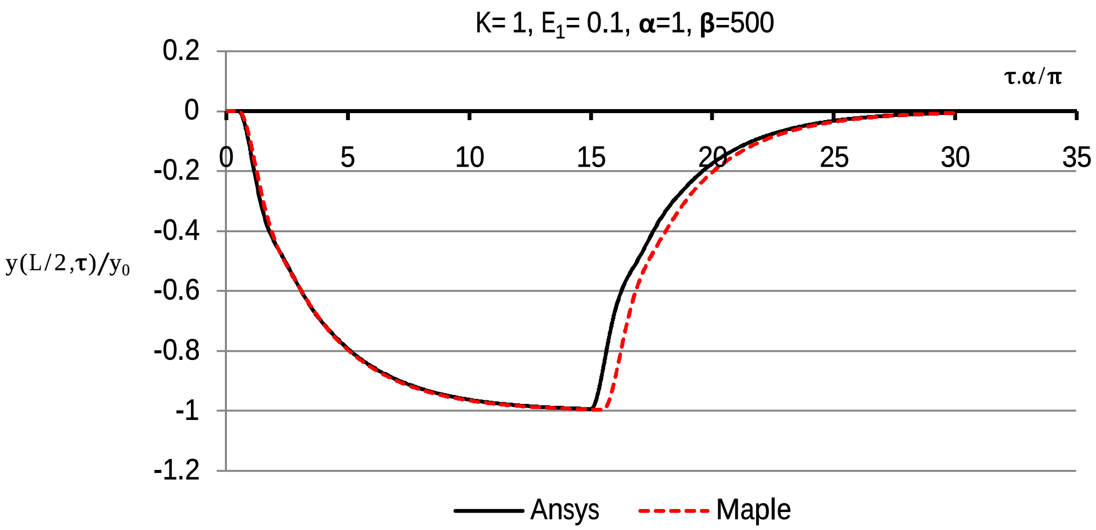


شکل 6.4: مقایسه حل عددی و تحلیلی برای K=0.0001

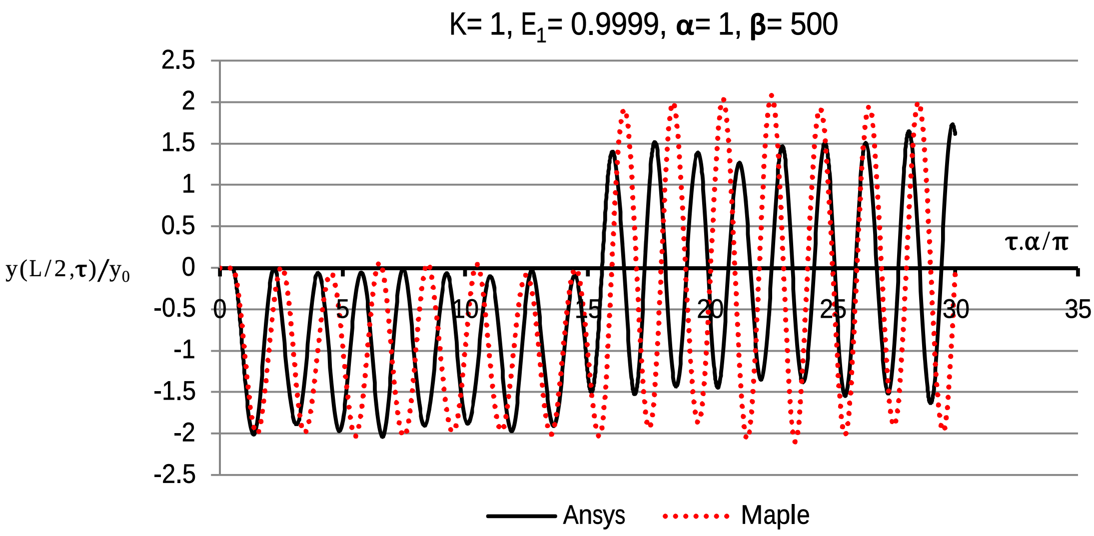
در شکل های 6.6 و 6.7 مقایسه برای مقادیر کوچک و بزرگ E_1 صورت گرفته است. در شکل 6.6 اتلاف عمده در لحظه ی خروج بار حادث شده و با گذشت زمان این اختلاف کاهش یافته است. اما در مورد شکل 6.7 اختلاف هم در مورد دامنه نوسانات و هم در زمان پاسخ و نحوه ی آن می‌باشد. این اختلافات در هنگام ورود بار و هنگامی که زمان ایستایی بار افزایش می‌یابد کاهش یافته است.



شکل 6.5: مقایسه حل عددی و تحلیلی برای K=100000



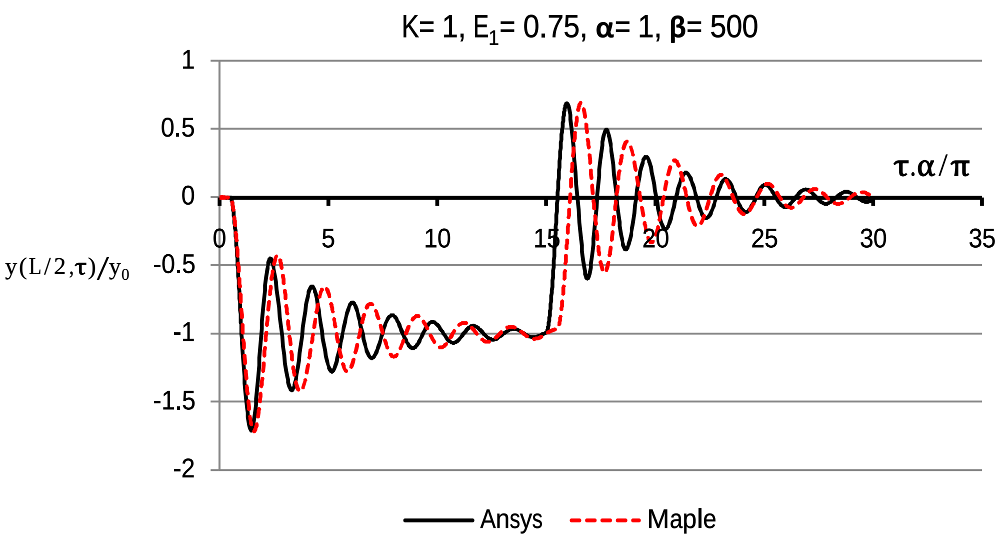
شکل 6.6: مقایسه حل عددی و تحلیلی برای E_1= 0.1



شکل 6.7: مقایسه حل عددی و تحلیلی برای $E_1= 0.9999$

با توجه به آنچه گفته شد و شکل 6.8 دور شدن مقدار K از واحد به سمت صفر یا بی‌نهایت باعث اختلاف قابل توجه مابین حل عددی و تحلیلی می‌شود. در شکل 6.8 اختلاف عمده در زمان بندی پاسخ می‌باشد به طوریکه حل عددی نسبت به حل تئوری دارای تاخیر در پاسخ می‌باشد.

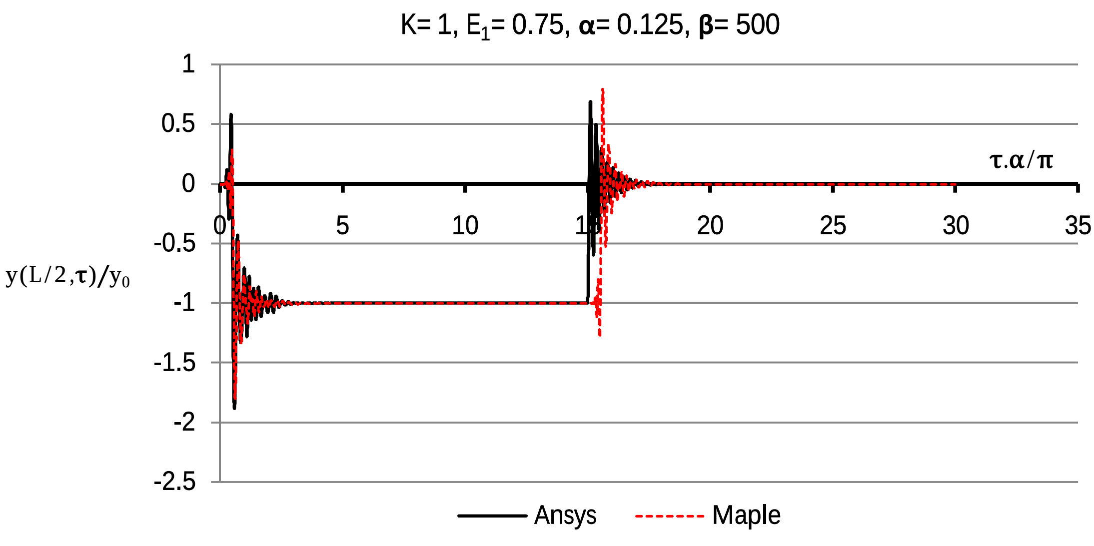
همچنین با توجه به آنچه در مورد شکل های 6.6 و 6.7 بیان شد، افزایش مقدار E_1 از صفر به سمت واحد باعث افزایش اختلاف پاسخ می‌شود.



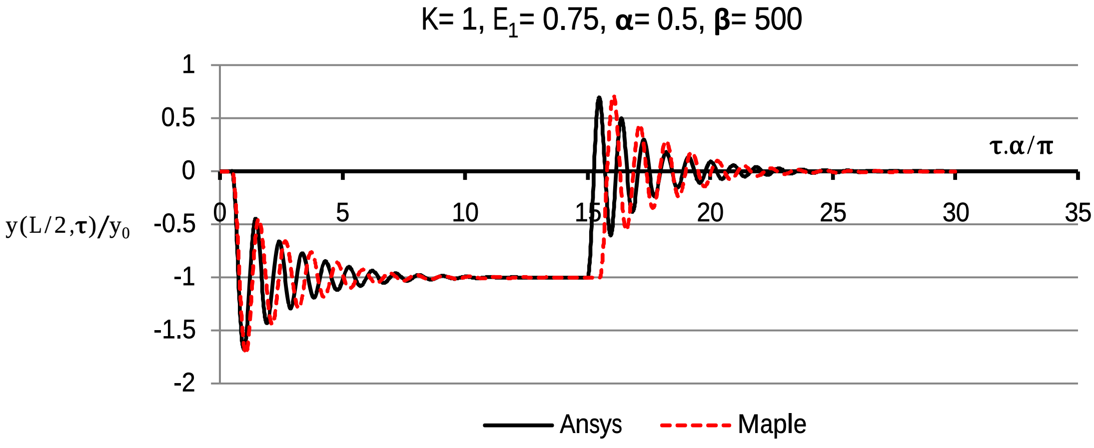
شکل 6.8: مقایسه حل عددی و تحلیلی در شرایط معمول

6-5-1 – بررسی تاثیر پارامتر a

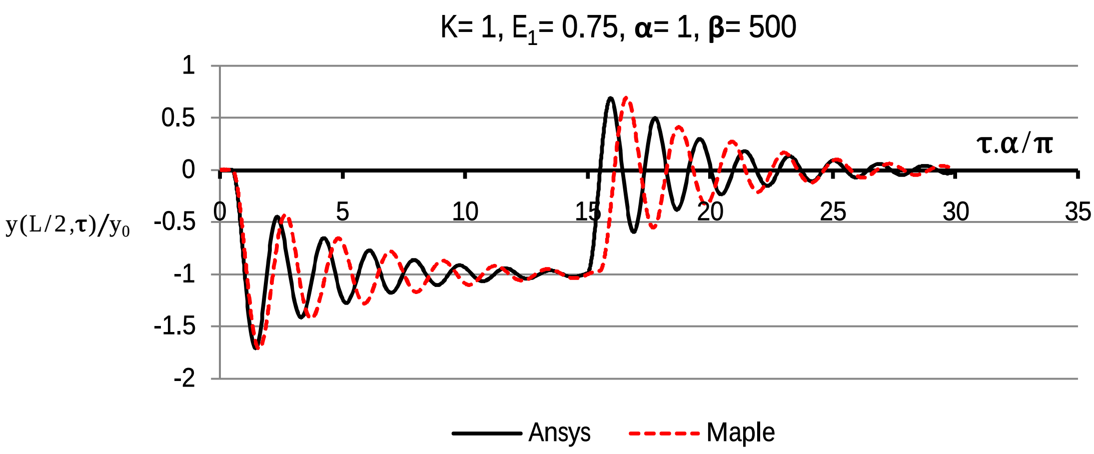
در شکل های 6.9 الی 6.12 تاثیر سرعت بر پاسخ بررسی شده است. بطور مشخص سرعت بسیار بالا یا کم مانند شکل 6.9 و 6.12 باعث ایجاد اختلاف بیشتر بین حل عددی و تئوری شده است این اختلاف در شکل 6.12 در کل زمان بررسی وجود دارد اما در شکل 6.9 در محدوده ی کوچکی از زمان به خصوص در هنگام خروج بار، این اختلاف قابل مشاهده است. دلیل این اختلاف که در هنگام خروج بار در اکثر شکل ها دیده می‌شود را می‌توان در اختلاف فرکانس طبیعی محاسبه شده در حل تحلیلی و حل عددی دانست. همچنین افزایش سرعت باعث می‌شود که تطابق پاسخ ها در زمان طولانی تری حادث شود مثلاً پاسخ ها در شکل 6.7 قبل از زمان $ta/p=5$ یکی می‌شود اما در اشکال 6.10 و 6.11 این زمان قبل از $ta/p=10$ می‌باشد و نیز در شکل 6.12 تطابقی بین دو پاسخ دیده نمی‌شود اگر در همین نمونه زمان ایستایی افزایش یابد تطابق بین دو پاسخ دیده می‌شود. یکی از اختلافات مهم بین دو حل جدا از مقدار پارامتر های مختلف در زمان خروج بار ایجاد می‌شود. هنگام خروج بار حل عددی پیش بینی می‌کند که به محض شروع خروج بار خیز پوسته کاهش می‌یابد اما حل تحلیل این کاهش خیز را هنگامی که بار به نقطه‌ی مورد نظر (که در اینجا وسط تیر می‌باشد) می‌رسد پیش بینی می‌کند. این مورد در شکل های 6.10 و 6.11 مشخص است.



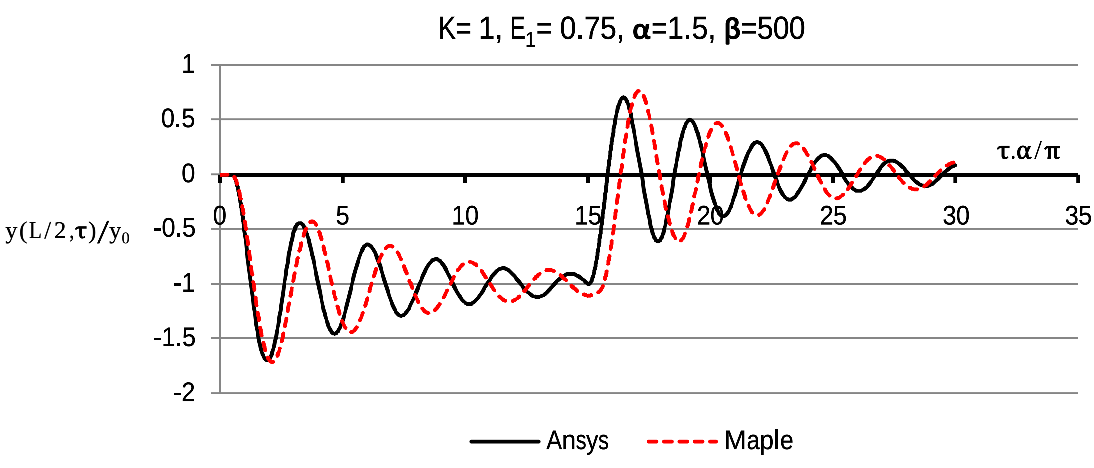
شکل 6.9: مقایسه حل عددی و تحلیلی در $a=0.125$



شکل 6.10: مقایسه حل عددی و تحلیلی در $a = 0.5$



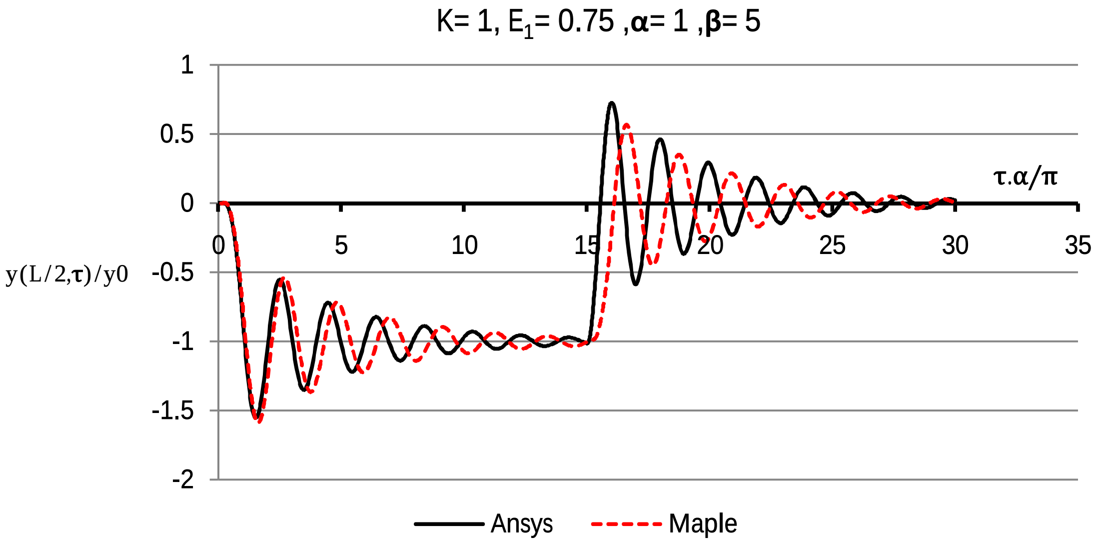
شکل 6.11: مقایسه حل عددی و تحلیلی در $a = 1$



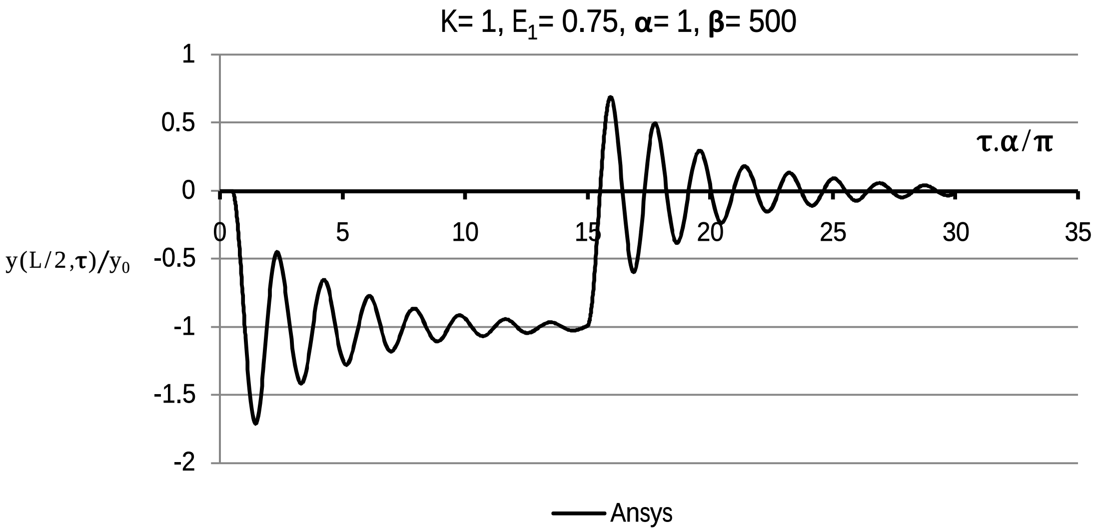
شکل 6.12: مقایسه حل عددی و تحلیلی در $a = 1.5$

6-5-2 – بررسی تاثیر پارامتر b

در شکل های 6.13 و 6.14 مقایسه بین حل عددی و تئوری بر اساس مقدار پارامتر b انجام گرفته است. بر این اساس افزایش پارامتر b تطابق زمانی بیشتری را حاصل می‌کند. همچنین در شکل 6.13 دامنه نوسانات حل تحلیلی کوچکتر از حل عددی می‌باشد؛ اما در شکل 6.14 این مورد برعکس می‌باشد.



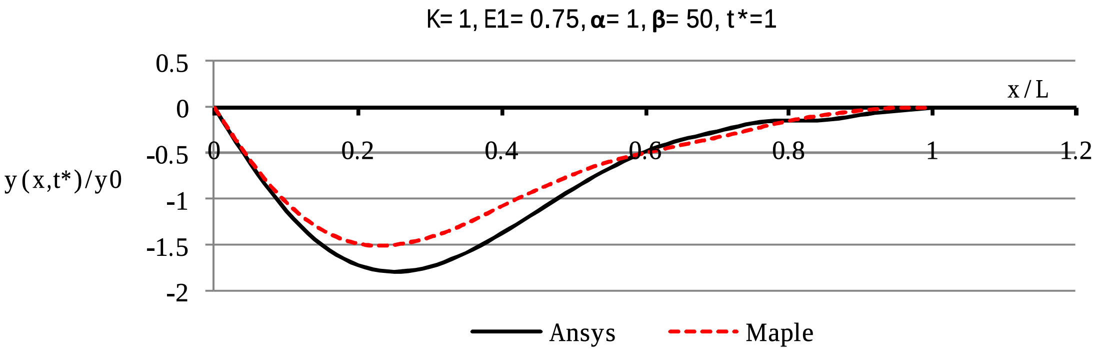
شکل 6.13: مقایسه حل عددی و تحلیلی در $b = 5$



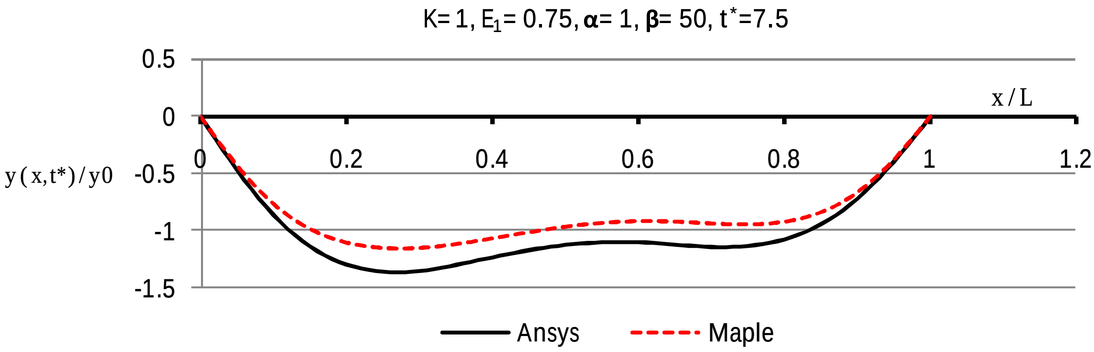
شکل 6.14: مقایسه حل عددی و تحلیلی در $b = 500$

6-5-3 – بررسی پاسخ در زمان های خاص

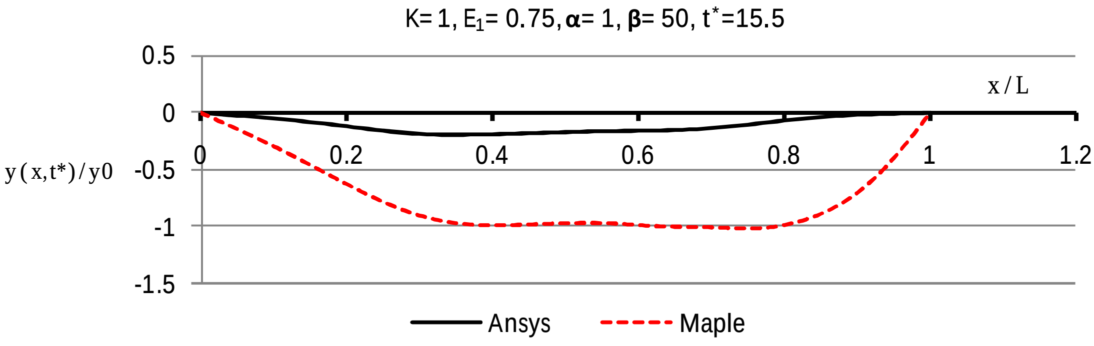
در شکل های 6.15 تا 6.18 جابجایی کلیه نقاط پوسته نسبت به خیز استاتیکی وسط پوسته در بار گذاری کامل رسم شده است. در این شکلها $t^* = ta/p$ زمان مورد نظر در رسم جابجایی نقاط پوسته می‌باشد. به بطور مشخص در سه شکل اول که بار بر روی پوسته وجود دارد پاسخ تحلیلی با پاسخ عددی از نظر فرم ایجاد شده در پوسته تطابق خوبی دارد اما در شکل چهارم که پاسخ ارتعاشی آزاد می‌باشد این تطابق موجود نمی‌باشد. از نظر ابعادی بیشترین اختلاف در زمانی که بار در حال خارج شدن از روی پوسته شکل 6.17 و بعد از آن (خروج کامل) می‌باشد دیده می‌شود. یکی از دلایل این اختلاف می‌تواند این باشد که در دو مرحله ی قبل فرکانس پاسخ با فرکانس تحریک یکی می‌شود و این برای هردو حل یکسان است اما هنگام خروج بار و به ویژه بعد از آن فرکانس طبیعی پوسته مهم می‌باشد که در این مورد حل تحلیلی و عددی دارای اختلاف بیشتری نسبت به هم می‌باشند.



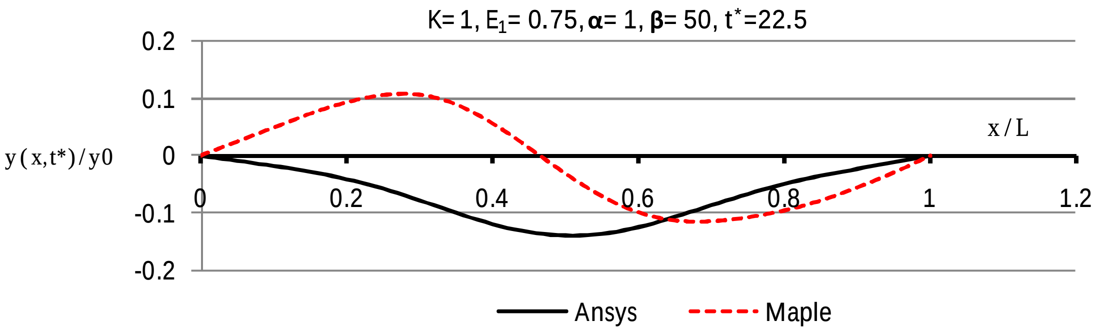
شکل 6.15: خیز پوسته در زمان مشخص $t^* = 1$



شکل 6.16: خیز پوسته در زمان مشخص $t^* = 7.5$



شکل 6.17: خیز پوسته در زمان مشخص $t^* = 15.5$



شکل 6.18: خیز پوسته در زمان مشخص $t^* = 22.5$

6-6 جمع بندی:

در این فصل به بررسی حل عددی و اختلاف پاسخ حاصل از آن با حل عددی پرداخته شد و این اختلاف بسته به پارامترهای مختلف مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفت، همچنین به صورت یک کار موازی، از المان دیگری برای مقایسه با حل عددی استفاده شدکه پاسخ بدست آمده تفاوتی با آنچه در اینجا ذکر شد نداشت. از جمله دلایل این اختلاف پاسخ را می‌توان در فرکانس طبیعی و معادلاتی که نرم افزار از آن در حل مسئله بهره می‌برد دانست. المان هایی که خواص ویسکو الاستیک را می‌توان با آن مدل کرد، غالباً المان هایی هستند که خواص برشی در معادله‌ی آنها لحاظ شده است؛ مانند تئوری تیموشنکو. معادله‌ای که در اینجا برای پاسخ پوسته در نظر گرفته شد، ساده ترین معادله‌ی ممکن بوده از این رو یکی از دلایل بروز اختلاف متفاوت بودن معادلات می‌باشد.

فارغ از اختلاف موجود باید توجه داشت که یکی از اهداف این فصل مدل سازی ویسکوالاستیک مسئله در محیط Ansys یا نرم افزار مشابه به منظور بررسی مدلهای پیچیده مانند شبکه آبرسانی و فاضلاب شهری، همچنین انتقال سیال بوده که این هدف در این فصل انجام شده است.

نتیجه گیری و پیشنهادها

مدل ویسکوالاستیک مسئله ی بار متحرک می‌تواند یکی از کارامد ترین مدل ها برای بررسی واقعی تر مشکلات طراحی سازه ها محسوب شود. در صنایع امروز یکی از اهداف مهم در طراحی، سبک سازی سازه می‌باشد که این مهم با استفاده از طیف گسترده ای از مواد کامپوزیتی و پلیمری در حل رشد و توسعه می‌باشد. هنگام بررسی پاسخ دینامیکی این مواد، مدل ویسکوالاستیک از کارایی و انعطاف بیشتری نسبت به مدل الاستیک برخوردار بوده عوامل مهمتری را در اختیار طراح قرار می‌دهد.

در این پروژه سه نمونه ی مختلف تیر برنولی، تیموشنکو و پوسته‌ی جدار نازک استوانه ای تحت بار متحرک در شکل ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفت. در بررسی انجام شده از یک مدل استاندارد خطی سه عضوی برای بررسی خواص ویسکوالاستیک استفاده شد و بسته به مدل مورد استفاده شده پارامتر های بی‌بعد مختلفی از حل مسئله حاصل شد که عبارتند از K و E_1 نشان دهنده ی خواص مادی، a نشان دهنده تاثیرات سرعت و b نشان دهنده ی تاثیرات هندسی می‌باشد.

از جمله نتایج این پروژه عبارت است از:

- ضرایب بی‌بعد بدست آمده و تحلیل صورت گرفته برروی آنها یک فرم کلی داشته و می‌تواند در تحقیقاتی از این دست مورد استفاده و بررسی قرارگیرد.
- بیشترین و سریعترین میرایی از نظر نسبت خیز دینامیکی به استاتیکی در K=1 حاصل شده است و با دور شدن از این نقطه در هر جهتی [به سمت صفر یا به سمت بی‌نهایت] سیستم رفتار الاستیک تری از خود نشان می‌دهد.
- زمانی که E_1 به سمت 1 میل می‌کند الاستیسیته‌ی سیستم افزایش پیدا کرده و باعث کاهش میرایی و افزایش زمان آن می‌شود.

- وقتی مقدار پارامتر K از مقدار واحد دور شود، تاثیرات هندسی نمود بیشتری از خود نشان می‌دهد.
- افزایش سرعت باعث می‌شود که خیز تیر در نمونه ی تیموشنکو بیشتر از تیراویلر شود.
- دید کلی نشان می‌دهد که با افزایش مقدار b رفتار تیر تیموشنکو به تیر اویلر نزدیک می‌شود.
- با توجه به سرعت عبور بار(پارامتر a) مقدار مورد نیاز پارامتر b را می‌توان تعیین نمود؛ بطوریکه در سرعت های پائین مقادیر ضریب تقویت، بالا نبوده و در هنگام خروج بار یا در ابتدای ایستایی بار، به سیستم ضربه وارد نشود.

به منظور بهبود و نزدیکی بین حل عددی و تئوری پیشنهاد می‌شود که از یک معادله‌ی کامل تر در استخراج معادله‌ی حاکم استفاده شود. همچنین در بررسی خواص ویسکوالاستیک دما پارامتری مهم می‌باشد که در تحقیقات آتی می‌تواند مورد توجه قرار گیرد. بعلاوه استفاده از مدل هایی که دارای زمان های رهایش بیشتر نسبت به مدل استاندارد خطی می‌باشند، می‌تواند در تطابق حل تئوری و نتایج عملی شایان توجه باشد.

مراجع:

[1] E.Riande, R.D-Calleja, M.G.Prolongo, R.M.Masegosa, C.Salom, 2000,“Polymer viscoelasticity stress and strain in practice”: Marcel Dekker INC

[2] Ladisalv Fryba, 1999,”Vibration of solids and structures under moving loads”, The Netherlands: Noordhoff International

[3] Peter Hagedorn, Anirvan DasGupta, 2007,”Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems”, John Wiley & Sobs

[4] Pravin G. Bhuta, 1963,”Transient of a thin elastic cylindrical shell to a moving shock wave “, The Journal of The Acoustical Society of America, 35(1), pp-25-30

[5] G.viswewara Rao, 2000, “Linear dynamics of an elastic beam under moving loads”, Asme, Journal of Vibration And Acoustics, 122, pp-281-289

[6] G. T. Michaltsos, 2002, “Dynamic behavior of a single-span beam subjected to loads moving with variable speeds”, Journal of Sound and Vibration, 258(2), pp- 359-372

[7] A.K. Mallik, Sarvesh Chandra, Avinash B. Singh, 2006, “Steady-state response of an elastically supported infinite beam to a moving load “, Journal of Sound and Vibration, 291, pp- 1148-1169

[8] M. Abu-Hilal, 2006, “Dynamic response of a double Euler–Bernoulli beam due to a moving constant load “Journal of Sound and Vibration”, 297, pp-477-491

[9] Hai-Ping Lin, Shun-Chang Chang, 2006, “Forced responses of cracked cantilever beams subjected to a concentrated moving load “, International Journal of Mechanical Sciences, 48, pp -1456-1463

[10] A.Ariaei, S.Ziaei-Rad, M.Ghayour, 2009, “Vibration analysis of beams with open and breathing cracks subjected to moving masses “, Journal of Sound and Vibration, 326, pp - 709-724

[11] Jen-San Chen, Min-Ray Yang, 2006,”Vibration and stability shallow arch under a moving mass-dashpot-spring system”, Asme, Journal of Vibration And Acoustic, 129, pp-66-72

[12] J.D. Yaua, Y.B. Yang, 2006, “Vertical accelerations of simple beams due to successive loads traveling at resonant speeds “, Journal of Sound and Vibration, 289, pp-210-228

[13] Dan Stăncioiu, Huajiang Ouyang, John E. Mottershead, 2008, "Vibration of a beam excited by a moving oscillator considering separation and reattachment ", Journal of Sound and Vibration, 310, pp-1128-1140

[14] P. Museros, M.D. Martinez-Rodrigo, 2007, "Vibration control of simply supported beams under moving loads using fluid viscous dampers ", Journal of Sound and Vibration, 300, pp-292-315

[15] R.-F.Fung, J.-S.Huang, W.-H.Echen, 1996,"Dynamic stability of a viscoelastic beam subjected to harmonic and parametric excitions simultaneously", Journal of Sound and Vibration, 198(1), pp-1-16

[16] K.K.Stevens, 1966,"On linear ordinary differential equations with periodic coeffients ", SIAM Journal of Applied Mathematics, 14, pp-782-795

[17] T.Kocatürk, M.Şimşek, 2006, "Vibration of viscoelastic beams subjected to an eccentric compressive force and a concentrated moving harmonic force", Journal of Sound and Vibration, 291, pp- 302-322

[18] T.Kocatürk, M.Şimşek, 2006,"Dynamic analysis of eccentrically prestressed viscoelastic Timoshenko beams under a moving harmonic load ",Computers and Structures , 84 , pp-2113–2127

[19] S.N.Mahmoodi, S.E.Khadem, M.Kokabi, 2007,"Non-linear free vibrations of Kelvin-Voigt visco-elastic beams ", International Journal of Mechanical sciences, 49, pp- 722-732

[20] C. C. Huang, 1975,''Forced motions of viscoelastic cylindrical", Journal of Sound and Vibration, 39(3), pp- 273-286

[21] C. C. Huang, 1976,'' Forced motions of viscoelastic thick cylindrical shells", Journal of Sound and Vibration, 45(4), pp- 529-537

[22] C. C. Huang, 1978,"Moving loads on viscoelastic cylindrical shells", Journal of Sound and Vibration, 60(3), pp- 351-358

[23] Ansys 11 user manual

[24] اکبر بشارتی، فیروز بختیاری نژاد، 1384، " بررسی پاسخ زمانی سازه های میرا شده با مواد ویسکوالاستیک"، سیزدهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک

Abstract

In this project the effect of material proprieties at response of a beam and cylindrical shell are studied. The model of material is obey from the three element standard model in shearing and has elastic response in tension. The governing equations in the visoelastic form have been extracted by direct and corresponding method by distinct the shearing and bulking component of stress tensor and finally have been solved with the eigenfunction expansion. Using the obtained dimensionless coefficients from the governing equation, the effects of the material and loading properties have been investigated on the response.

In numerical solution the Ansys FEM package has been used and analytical solution of a thin shell has been compared with numerical results obtained by Ansys.

Keywords: Moving load, Viscoelastic shell, Viscoelastic beam, Linear standard model, Finite element model