بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

رشته مهندسی هوافضا، گرایش طراحی سازه‌های هوایی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

بررسی ارتعاشات غیر خطّی میکروتیر متداول FGM در میکروسکوپ نیرواتمی در مد تماسی و متناوب با استفاده از تئوری‌های الاستیسیته‌ی غیر موضعی

نگارنده:

نیلوفر خسروی

استاد راهنما:

دکتر امیر جلالی

شهریور ۹۶

شماره: ۲۹۷٫۱۴۹/د م
تاریخ: ۹۶/۸/۱۷

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای **نیلوفر خسروی** با شماره دانشجویی ۹۳۰۷۰۷۴ رشته **مهندسی هوا و فضا** گرایش **طراحی سازه‌های هوایی** تحت عنوان **بررسی ارتعاشات غیر خطّی میکروتیر متداول FGM در میکروسکوپ نیرواتمی در مد تماسی و متناوب با استفاده از تئوری‌های الاستیسیته‌ی غیر موضعی** که در تاریخ **۱۳۹۶/۶/۲۱** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با امتیاز ۱۸٫۶۲۵ **درجه** بسیار خوب **)** ☑ **مردود** ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر امیر جلالی	استادیار	
۲ـ استادراهنمای دوم	—	—	—
۳ـ استاد مشاور	—	—	—
۴ـ نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی بامداد	استادیار	
۵ـ استاد ممتحن اول	دکتر اردشیر کرمی محمدی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر حمیدرضا ایپک‌چی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: محمدحسن شاه‌مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

سپاس از:

دکتر امیر جلالی که با صبوری، پاسخی برای تمام سوالات و انگیزه‌ای برای ادامه و معلمی برای آموختن مسیر موفقیت و تلاش بودند.

تقدیم به:

پدرم که از او آموختم که هیچ رویایی غیر ممکن نیست، مادرم که تجلّی محبّت و عشق و همسرم که بهترین دوست و همراه است.

تعهد نامه

اینجانب، **نیلوفر خسروی** دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی **مهندسی هوافضا** دانشکده‌ی **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی **بررسی ارتعاشات غیر خطّی میکروتیر متداول FGM در میکروسکوپ نیرواتمی در مد تماسی و متناوب بااستفاده از تئوری‌های الاستیسیته‌ی غیر موضعی**

تحت راهنمایی **دکتر امیر جلالی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته‌شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

در این پژوهش، ارتعاشات غیر خطّی میکروتیر متداول در میکروسکوپ نیرواتمی و در دو مد عملکرد تماسی و متناوب با استفاده از تئوری غیر محلّی گرادیان کرنش بررسی‌شده است. میکروتیر مذکور FGM بوده و خواص میکروتیر به‌صورت توانی درراستای عرضی تغییر می‌کند. بدین‌صورت‌که میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی، در وسط سیلیکون و در بالا و پایین پیزوالکتریک است. ولتاژ اعمالی به پیزوالکتریک می‌تواند به‌صورت ثابت یا متغیّر باشد و همین نکته، این تحلیل را به دو بخش تقسیم کرده است. ازطرفی در مد متناوب، برهم‌کنشی بین نوک و نمونه شکل می‌گیرد که باعث می‌شود تا براساس فاصله‌ی بین نوک و نمونه، نیروی بین این دو تغییر کند و به دو بازه‌ی متفاوت تقسیم شود. برای تحلیل رفتار غیر خطّی این میکروتیر، از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شده است. درنهایت رفتار سیستم مذکور با استفاده از نمودارهای فرکانس طبیعی و نمودارهای پاسخ فرکانسی براساس تغییرات چند پارامتر مختلف، تحلیل‌شده است.

واژه‌های کلیدی:

میکروسکوپ پراب‌روبشی، میکروسکوپ نیرواتمی، میکروتیر، تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش، مادّه‌ی FG، تئوری اغتشاشات، روش مقیاس‌های چندگانه.

فهرست:

فهرست جدول‌ها:

فهرست شکل‌ها:

فصل اوّل

مقدّمه

۱-۱ مقدّمه

زمانی‌که در سوم مارس ۱۹۸۲، بینینگ و گربر [۱]، با انتشار مقاله‌ای خبر از ساخت میکروسکوپی جدید برای بررسی ریزذره‌ها دادند، کسی پیش‌بینی نمی‌کرد که انتشار این مقاله در یک مجلّه‌ی فیزیک، به دریافت جایزه‌ی نوبل منجر شود.

اما تنها چند سال بعد یعنی در سال ۱۹۸۶، جایزه‌ی نوبل به‌صورت مشترک به سه‌نفر رسید، نیمی از آن به پاس زحمات ارنست روسکای[۱] آلمانی و به‌خاطر اختراع اولین میکروسکوپ الکترونی[۲]، به این دانشمند رسید و نیمی دیگر از این جایزه، به بینینگ و گربر، مخترعان میکروسکوپ جریان‌روبشی[۳](STM) تعلّق گرفت.

البته میکروسکوپ جریان‌روبشی، آخرین تلاش این تیم موفّق نبود، بلکه آن‌ها در سال ۱۹۹۰ نیز با معرّفی مدل کامل‌تری از این میکروسکوپ، یعنی همان میکروسکوپ نیرواتمی[۴](AFM)، برگ جدیدی از تاریخ را رقم زدند؛ برگی که هنوز هم پس از گذشت قریب به سی‌سال، در حال کامل‌شدن است.

به‌طورکلّی به تمام این میکروسکوپ‌ها، میکروسکوپ‌های پراب‌روبشی[۵] می‌گویند که بااستفاده از کاوشگری[۶] تیز، سطح نمونه[۷] را روبش می‌کنند و از این طریق، اطّلاعات زیادی را در تمام جنبه‌های فیزیکی، شیمیایی و مکانیکی نمونه به‌دست می‌آورند. نوع جریان‌روبشی این میکروسکوپ‌ها، با ایجاد جریانی کوچک بین کاوشگر و نمونه، این عمل را انجام می‌دهد و به‌همین‌دلیل در انتخاب نمونه‌های مورد مطالعه، محدودیّت دارد. در میکروسکوپ جریان‌روبشی، نمونه نیز مانند کاوشگر باید رسانا یا نیمه‌رسانا باشد تا جریانی بین آن‌ها برقرار شود.

---

[۱] Ernst Ruska
[۲] Electron Microscope
[۳] Scanning Tunneling Microscope
[۴] Atomic Force Microscope
[۵] Scanning Probe Microscope
[۶] Probe
[۷] Sample

با ظهور میکروسکوپ‌های نیرواتمی، این محدودیّت نیز برداشته شد و از آن به بعد، موادّ نارسانا نیز می‌توانستند از طریق این میکروسکوپ، مورد بررسی و تحلیل قرار بگیرند.

در مدل مورد مطالعه‌ی بینینگ و گربر، یک کاوشگر یا نوک[1] به انتهای یک تیر یک‌سر گیردار[2] متّصل‌شده و این مجموعه، سطح نمونه را روبش می‌کنند. نوک در بالای سطح حرکت می‌کند و اطّلاعات دریافتی را با روش‌های مختلف، به ثبت می‌رساند. در واقع اساس کار میکروسکوپ نیرواتمی به همین سادگی است، اما کار بینینگ و گربر، باز هم در این نقطه متوقّف نشد و آن‌ها در ادامه‌ی تحقیقات خود، دریافتند که درصورت مرتعش‌کردن تیر مذکور، می‌توان عملکرد میکروسکوپ را ارتقا داده و اطّلاعات بهتری را دریافت کرد. درنتیجه اگر در میکروسکوپ نیرواتمی، تیر درحال ارتعاش باشد، آن را میکروسکوپ نیرواتمی دینامیکی[3] می‌نامند که تصاویر دقیق‌تر و بهتری را ثبت می‌کند.

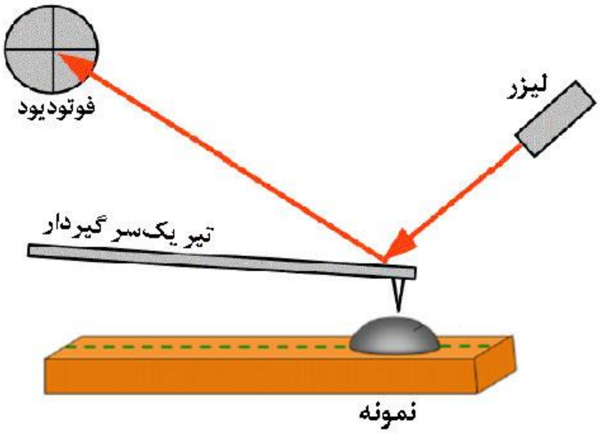
از اوّلین آزمایش‌هایی که برروی میکروسکوپ نیرواتمی دینامیکی انجام گرفت، می‌توان به آزمایش مارتین و همکاران [۲] در سال ۱۹۸۷ اشاره کرد. آن‌ها در آزمایش خود، به تکنیکی برای اندازه‌گیری نیروی بین دو جسم به فاصله‌ی ۳۰ تا ۱۸۰ آنگستروم دست یافتند و باور داشتند که می‌توان فاصله‌ی بین نوک و نمونه را از چند، تا صدها آنگستروم تغییر داد.

۱-۲ میکروسکوپ‌های پراب‌روبشی: انواع و عملکرد

در مقدّمه‌ی ذکرشده، درباره‌ی میکروسکوپ‌های پراب‌روبشی سخن گفته‌شد و مدل‌های جریان‌روبشی و نیرواتمی نام‌برده شدند. در ادامه، کمی دقیق‌تر به این میکروسکوپ‌ها پرداخته می‌شود.

نحوه‌ی کار این میکروسکوپ را می‌توان در شکل زیر دید:

[1] Tip
[2] Cantilever
[3] Dynamic Atomic Force Microscope



شکل (۱-۱): نحوه‌ی کار میکروسکوپ نیرواتمی

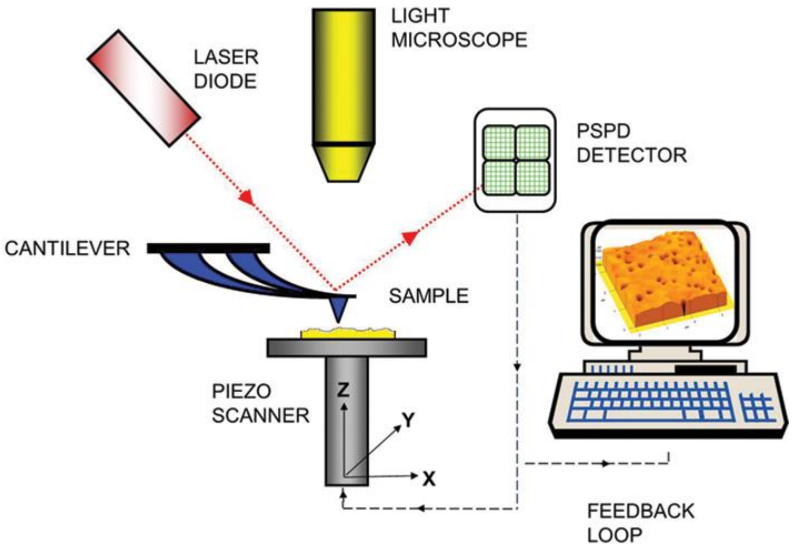
فاصله‌ی بین نوک و نمونه در این میکروسکوپ‌ها اهمیت زیادی دارد، زیرا افزایش یا کاهش این فاصله، می‌تواند باعث تغییر برهم‌کنش بین نوک و نمونه شده و با ایجاد نیروی جاذبه یا دافعه، عملکرد میکروسکوپ را تحت تأثیر قرار دهد.

در میکروسکوپ‌های جریان‌روبشی، فاصله‌ای در حد چند نانومتر، باعث ایجاد نیروهای واندروالسی[۱]بین نوک و نمونه می‌شود. درصورتی‌که اگر همین فاصله به یک نانومتر کاهش یابد، جریانی محلّی بین این دو برقرار خواهد شد؛ البته پیش از این ذکر کردیم که در این میکروسکوپ‌ها، نوک و نمونه هردو، رسانا یا نیمه‌رسانا هستند. همچنین می‌توان با ایجاد یک اختلاف پتانسیل الکتریکی خارجی، برهم‌کنشی الکترواستاتیکی ایجاد کرد یا با انتخاب جنس فرّومغناطیس[۲]برای نوک و نمونه، نیروهایی مگنواستاتیکی به‌وجود آورد.

پس باتوجّه‌به اینکه فاصله‌ی بین نوک و نمونه، بسیار اهمیت دارد، حفظ نوک میکروسکوپ در میدانی نزدیک‌به نمونه، یکی از اصول کاری میکروسکوپ‌های پراب‌روبشی است. معمولاً این فاصله را به‌وسیله‌ی یک مکانیزم فیدبک، کنترل می‌کنند تا نوک، بیش‌ازحد به نمونه نزدیک‌نشده یا برعکس، از میدان اثرگذاری خود، خارج نشود.

---
[۱]Van Der Waals Forces
[۲]Ferromagnetism

حفظ نوک در فاصله‌ی مناسب نسبت‌به نمونه، تصاویر واضح‌تری را تولید می‌کند. برای کنترل این فاصله، معمولاً از یک محرّک پیزوالکتریک[1] بهره می‌برند که اوّلین‌بار، در همان سال اختراع میکروسکوپ جریان‌روبشی، یعنی ۱۹۸۲ و این‌بار توسط بینینگ و روهرر [۱] استفاده شد. آن‌ها برای دسترسی‌به موقعیت سه‌بعدی نوک، از لوله‌هایی پیزوالکتریک استفاده کردند و باتوجّه‌به اینکه در میکروسکوپ‌های جریان‌روبشی، جریانی بین نوک و نمونه ایجاد می‌شود، تغییر در جریان را، نشانه‌ی تغییر در فاصله‌ی بین نوک و نمونه دانستند و درنهایت سعی کردند براساس تغییر جریان، فاصله‌ی مناسب را حفظ کنند. تغییر فاصله‌ی بین نوک و نمونه، حتی اگر به‌کوچکی قطر یک اتم نیز باشد [۳]، تأثیر چشم‌گیری برروی جریان خواهد داشت.



شکل (۱-۲): میکروسکوپ نیرواتمی و سیستم ثبت تصاویر [۴]

حتی در میکروسکوپ‌های پراب‌روبشی، درنهایت می‌توان به یک نقشه‌ی سه‌بعدی از نمونه رسید؛ به‌این‌صورت که نمونه را مانند شکل (۱-۲) در دو راستای طولی و عرضی روبش‌کرده و نقشه‌های به‌دست‌آمده را در مقابل هم قرار می‌دهند.

---
[1] Piezoelectric

۱-۳ انواع میکروسکوپ‌های نیرواتمی

در این مدل از میکروسکوپ‌های پراب‌روبشی، یک نوک تیز، در انتهای تیر یک‌سر درگیر قرار دارد. همچنین سیستم فیدبکی نیز حرکت نوک را تحت نظر داشته و فاصله‌ی بین نوک و نمونه را کنترل می‌کند.

نمونه در این حالت، برروی یک اسکنر پیزوالکتریک قرار دارد و اسکنر نیز با حرکت خود در هر سه راستا، به حفظ فاصله‌ی مناسب بین نوک و نمونه کمک خواهد کرد.

میکروسکوپ‌های نیرواتمی را می‌توان به روش‌های گوناگونی دسته‌بندی کرد، اما متداول‌ترین دسته‌بندی موجود، براساس مد عملکرد است که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

۱-۳-۱ میکروسکوپ نیرواتمی شبه استاتیکی[۱]

یکی از متداول‌ترین مدهای عملکرد میکروسکوپ‌های نیرواتمی، مد شبه استاتیکی یا مد تماسی است که اوّلین مد آزمایش‌شده برروی میکروسکوپ نیرواتمی نیز هست.

همان‌طورکه از نام این مد مشخّص است، نوک در زمان روبش، درتماس‌با نمونه قرار دارد؛ در این هنگام، یک پرتوی لیزری بر میکروتیر تابیده می‌شود که بازتاب آن، توسط یک فوتودیود نوری ثبت خواهد شد. درنتیجه وقتی نوک با فرازونشیب‌های نمونه برخوردکرده و در خیز آن تغییراتی ایجاد می‌شود، تمامی این تغییرات توسط فوتودیود مذکور، ضبط خواهند شد و از این طریق، نقشه‌ای از سطح نمونه به‌دست خواهد آمد.

روش ذکرشده، مناسب‌ترین روش برای پیگیری خیز تیر است. اما دو روش دیگر نیز وجود دارند؛ یکی از آن‌ها استفاده از تداخل‌سنج است که بسیار پیچیده است و از توضیح درباره‌ی آن صرف نظر می‌کنیم،

[۱]Quasi-Static

آخرین روش، از اصول کاری میکروسکوپ‌های جریان‌روبشی الهام‌گرفته و نخستین‌بار، توسط بینینگ، گربر و کوئت [۳] استفاده‌شده است. در این روش، نوک دومی نیز در بالای میکروتیر قرار دارد و این‌بار، جریان عبوری بین این نوک و میکروتیر، سنجیده می‌شود. حسّاسیت این روش بسیار زیاد است و می‌توان به‌وسیله‌ی آن، خیزهای بسیارکوچک و حتی درحدود ۰٫۰۱ آنگستروم را نیز ثبت کرد.

باتوجّه‌به اینکه، این مد عملکرد، اوّلین مد استفاده‌شده برای میکروسکوپ نیرواتمی بود، در همان سال‌های اوّل، آرنولد و همکاران [۵] نشان دادند زمانی‌که خیز تیر در هرلحظه با روش‌های گفته‌شده، مشخّص شود، می‌توان نیروی برهم‌کنش بین نوک و نمونه را نیز به‌دست آورد. این نیرو که در تحقیق حاضر F_{ts} نامیده‌شده، از ضرب ضریب سختی استاتیکی در جابه‌جایی نوک به‌دست می‌آید. این سختی استاتیکی، می‌تواند مقادیر محدودی داشته باشد؛ زیرا انحراف انتهای تیر، باید بسیار بیشتر از تغییر شکل نوک و سطح نمونه باشد.

۱-۳-۲ میکروسکوپ نیرواتمی دینامیکی

در میکروسکوپ نیرواتمی دینامیکی، یک نوک تیز در ابتدای میکروتیری مرتعش سوارشده است. ارتعاش تیر باعث می‌شود تا نوک، به‌صورت متناوب با نمونه برهم‌کنش داشته باشد.

میکروسکوپ نیرواتمی دینامیکی، خود به دو دسته‌ی دیگر تقسیم می‌شود که این تقسیم‌بندی، براساس روش دریافت فیدبک انجام‌شده و البته این دو دسته با یکدیگر اختلاف‌هایی اساسی دارند.

میکروسکوپ نیرواتمی تلفیق فرکانس[۱](FM - AFM):

علّت انتخاب چنین نامی برای این میکروسکوپ‌ها، این است که در آن‌ها از فرکانس تشدید به‌عنوان فیدبک، در حلقه‌ی کنترل استفاده می‌شود.

[۱] Frequency Modulation AFM

در میکروسکوپ‌های تلفیق فرکانسی از یک تیر درحال نوسان استفاده‌شده و به‌صورت هم‌زمان، فرکانس تشدید ثابت نگه‌داشته می‌شود. که به آن مد غیر تماسی[1](NC) گفته می‌شود، زیرا میکروتیر درحال نوسان، با نمونه تماسی ندارد و میکروسکوپ‌هایی را که در این مد روبش می‌کنند، میکروسکوپ‌های نیرواتمی غیر تماسی (NC - AFM) می‌نامند.

یکی از دلایل استفاده از مد غیر تماسی، آسیب‌هایی است که مد تماسی به نمونه وارد می‌کند. اگر مادّه‌ی مورد استفاده نرم باشد، تماس ممتد نوک با نمونه، مضر خواهد بود؛ درنتیجه در مد غیر تماسی، باایجاد فاصله‌ای بین نوک و نمونه، این مشکل برطرف‌شده است.

اما ایجاد چنین فاصله‌ای، علاوه‌بر مزیّت‌های خود، حسّاسیت میکروسکوپ را کاهش‌داده و درنتیجه از کیفیت تصاویر ثبت‌شده، کاسته خواهد شد که نوسان میکروتیر، این قضیه را اندکی پوشش می‌دهد.

میکروسکوپ نیرواتمی تلفیق دامنه[2](AM - AFM):

علّت انتخاب چنین نامی برای این میکروسکوپ‌ها، این است که در آن‌ها از دامنه‌ی نوسان به‌عنوان فیدبک استفاده می‌کنند.

در میکروسکوپ‌های تلفیق دامنه نیز از یک تیر درحال نوسان استفاده‌شده و دامنه‌ی نوسان در مقداری مطلوب، ثابت نگه‌داشته خواهد شد. البته باید توجّه داشت که در این مد عملکرد، نوک میکروتیر به‌آرامی با نمونه برخورد می‌کند و فرکانس تحریک بسیار نزدیک‌به فرکانس تشدید تنظیم می‌شود.

اما تاریخچه‌ی پیدایش این مد نیز به‌نوبه‌ی خود قابل توجّه است. اوّلین کسی که از این مد استفاده کرد، مارتین [۲] بود. او که قصد داشت از دامنه‌ی نوسان به‌عنوان سیگنال فیدبک بهره ببرد، دامنه‌ی نوسانی بسیارکم و درحدود یک‌نانومتر را انتخاب کرد. اما در این حالت، تغییرات در دامنه، کاملا تحت تأثیر نیروهای واندروالسی قرار می‌گرفت و تصویری که درنهایت ثبت می‌شد، چندان باکیفیت نبود.

---
[1] Non-Contact
[2] Amplitude Modulation AFM

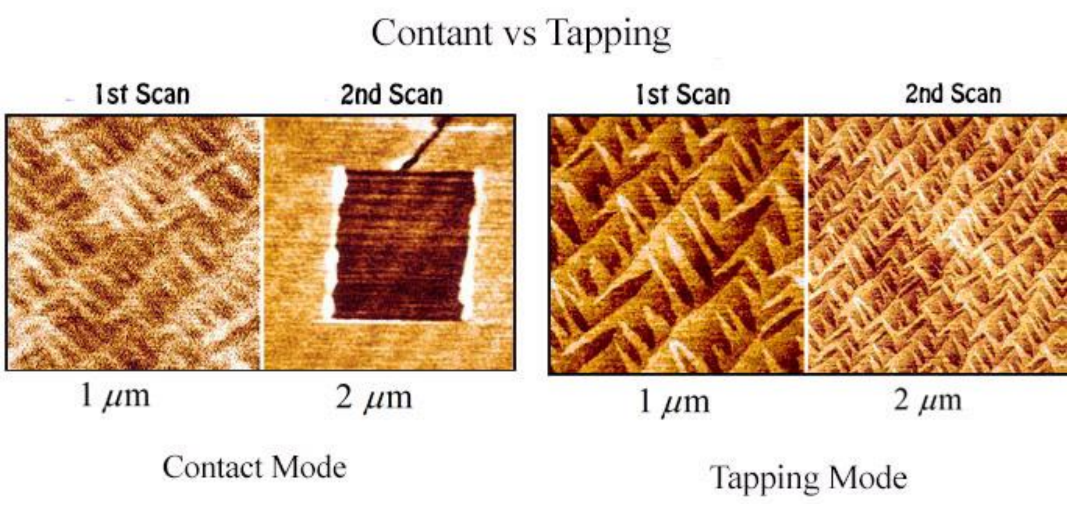
چندی نگذشت که زهانگ و همکاران [۶] با افزایش دامنه در حدود صدنانومتر، مدل ارائه‌شده‌ی مارتین را اصلاح کردند. آن‌ها درواقع با افزایش دامنه‌ی نوسان، مدت زمان تماس نوک با سطح نمونه را کاهش‌داده و علاوه‌بر آن، از ایجاد جریان‌های ناخواسته جلوگیری کردند.

این مد درنهایت به مد متناوب[۱](TM) معروف شد و میکروسکوپ‌هایی را که در این مد کار می‌کنند، اصطلاحاً میکروسکوپ‌های نیرواتمی مد متناوب (TM - AFM) می‌نامند و یکی از خصوصیات اصلی این مد عملکرد، ثبت تصاویر با کیفیت بالاست.

۱-۴ مقایسه‌ی مدهای استاتیکی و دینامیکی

هرکدام از این دو مد عملکرد، ویژگی‌های خاصی دارند و بنابه شرایط روبش، جنس نمونه و بسیاری عوامل دیگر انتخاب می‌شوند. اما اگر در روبش یک نمونه، امکان استفاده از هردو مد وجود داشته باشد، درصورت بهره‌بردن از مد متناوب به‌جای مد تماسی، تصاویر باکیفیت‌تری به‌دست خواهیم آورد.

برای اثبات این موضوع، درادامه تصویری واقعی از نمونه‌ای سیلیکونی که با دو مد مختلف مورد روبش قرارگرفته، آورده‌شده است.



شکل (۱-۳) تصویری واقعی از روبش سطح نمونه توسط میکروسکوپ نیرواتمی در دو مد تماسی و متناوب [۹]

[۱] Tapping-Mode

همان‌طورکه در شکل (۱-۳) مشخّص است؛ مد متناوب، نتیجه‌ی بهتر و واضح‌تری را ثبت‌کرده است. همچنین در تصاویر ثبت‌شده در مد تماسی، می‌توان آسیب جدی به نمونه را مشاهده کرد؛ زیرا سطح نمونه‌ی مورد بررسی، توسط نوک میکروسکوپ، برداشته و خراشیده‌شده است.

۱-۵ میکروتیرهای متداول در میکروسکوپ نیرواتمی

در میکروسکوپ نیرواتمی، معمولاً از یک میکروتیر یک‌سر درگیر که نوکی تیز درانتهای آن سوارشده، برای روبش سطح نمونه استفاده می‌شود. این میکروتیرها، اصطلاحاً میکروتیرهای متداول[۱] نامیده می‌شوند و اغلب مستطیل‌شکل هستند.

البته تیرهای مورد استفاده، بسته‌به حوزه‌ی عملکرد میکروسکوپ، می‌توانند خنجری‌شکل، مثلثی‌شکل یا Vشکل باشند.

نوک تیر میکروسکوپ نیرواتمی نیز می‌تواند براساس عملکرد میکروسکوپ، متفاوت باشد. ساختار نوک، نقش مهمی در کیفیت تصویر ثبت‌شده خواهد داشت، به‌طورمثال از نوک‌های بسیارتیز برای بررسی سطوح زبر و از نوک‌هایی که حسّاسیت کم‌تری دارند، برای بررسی سطوح نرم استفاده می‌شود. مرسوم است که در محاسبات، قسمت انتهایی نوک را به‌عنوان بخشی از یک‌کره درنظر می‌گیرند [۷].

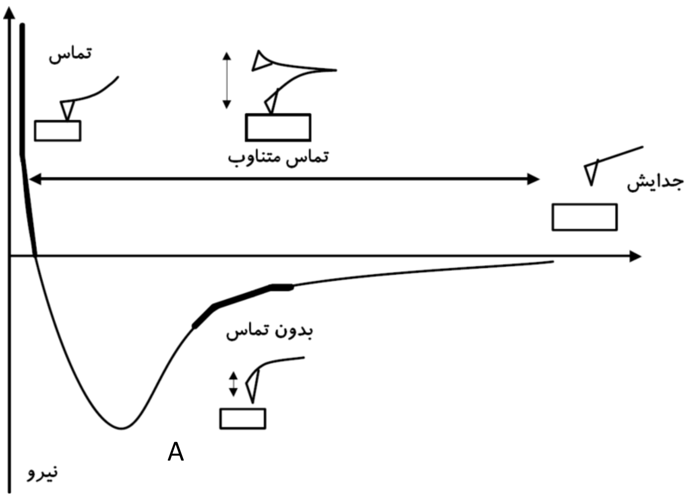
۱-۶ برهم‌کنش بین نوک و نمونه

تحلیل برهمکنش بین نوک و نمونه، کار بسیار پیچیده‌ای است؛ زیرا مابین نوک تیر و نمونه‌ی مورد بررسی، تعداد بسیار زیادی نیرو وجود دارد.

برای ساده‌ترشدن این موضوع، نیروهای بین نوک و نمونه را به دو دسته‌ی نیروهای محدوده‌ی بالا و پایین دسته‌بندی می‌کنیم. منظور از نیروهای محدوده‌ی بالا یا محدوده‌ی پایین، بزرگی نیرو است،

[۱] Conventional Cantilevers

بدین‌معنا که اگر نیرویی بزرگ و قابل توجّه باشد، در دسته‌ی نیروهای محدوده‌ی بالا قرارگرفته و اگر ناچیز و قابل چشم‌پوشی باشد، در دسته‌ی نیروهای محدوده‌ی پایین قرارداده خواهد شد. همان‌طورکه می‌توان پیش‌بینی کرد، این نیروها تابع فاصله‌ی بین نوک و نمونه هستند.



شکل (۱-۴): تغییرات نیرو دربرابر فاصله [۹]

در شکل (۱-۴)، تغییرات نیرو در برابر فاصله، نمایش‌داده‌شده است. براساس این شکل، در ناحیه‌ی تماسی، زمانی‌که فاصله‌ی بین نوک و نمونه به دو یا سه انگستروم می‌رسد، نیروها تبدیل به نیروی دافعه شده و در محدوده‌ی پایین قرار می‌گیرند [۸] و زمانی‌که فاصله‌ی بین نوک و نمونه تقریباً به صفر می‌رسد، این نیروها به‌شدت افزایش خواهند یافت و دیگر نمی‌توان از آن‌ها چشم‌پوشی کرد.

در حالت غیر تماسی، مقدار نیروهای جاذبه به‌سرعت زیادشده و حداکثر مقدار آن‌ها در نقطه‌ی A اتّفاق می‌افتد؛ درنهایت نیز با جداشدن نوک و نمونه، نیروها ضعیف‌شده و به‌سمت صفر میل می‌کنند [۱۰].

۱-۷ دامنه‌ی کاربرد میکروسکوپ‌های نیرواتمی

پس از آن‌که روش‌هایی برای مطالعه‌ی نانو و میکروذره‌ها ارائه‌شد و میکروسکوپ‌هایی نیز درراستای مطالعه‌ی مواد در این مقیاس اختراع شدند، نیاز فراوانی به افزایش کیفیت تصاویر احساس می‌شد. درنتیجه دانشمندان به‌دنبال یافتن راهی برای افزایش وضوح تصاویر تهیه‌شده از ریزذره‌ها برآمدند.

به‌طور عمده، از میکروسکوپ نیرواتمی برای به‌دست‌آوردن تصاویر سه‌بعدی از ریزذره‌ها و همچنین محاسبه‌ی نیروهای بین مولکولی و خصوصیات مواد استفاده می‌شود، این موضوع بیشتر از همه در علوم پزشکی و مهندسی کاربرد دارد [۱۱، ۱۲].

همان‌طورکه در مقدّمه‌ی این پایان‌نامه نیز عنوان‌شد، میکروسکوپ نیرواتمی می‌تواند تصاویری سه‌بعدی با وضوح بسیاربالا را از سطح ریزذره‌ها ثبت کند. فرقی نمی‌کند که جنس مادّه‌ی مورد مطالعه چه باشد، زیرا میکروسکوپ نیرواتمی قادر است سطح هر مادّه‌ای، اعم از رسانا و نارسانا را روبش کند و این موضوع باعث تمایز آن از سایر میکروسکوپ‌های پراب‌روبشی شده است.

ازطرفی باتوجّه‌به ساختار میکروسکوپ نیرواتمی، از آن برای حکّاکی درمقیاس نانو و برروی سیستم‌های میکرو و نانوالکترومکانیکی[۱](MEMS / NEMS) نیز استفاده می‌شود. همچنین از نوک تیزی که برروی میکروسکوپ نیرواتمی سوارشده، می‌توان برای برش مواد درمقیاس نانو نیز بهره برد.

۱-۸ تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش اصلاح‌شده

شاید با نیم‌نگاهی به علوم مهندسی و پیشرفت بشر، بتوان به این نتیجه رسید که چیزی برای کشف و اختراع باقی نمانده است. اما هنوز حوزه‌هایی از علم وجود دارند که نه‌تنها نیازمند پیشرفت هستند، بلکه حتی دست‌نخورده مانده‌اند. یکی از این حوزه‌های کاری و زمینه‌های پرطرفدار، علوم ریزذره‌هاست.

[۱] Micro/Nano Electro Mechanical Systems

در سال‌های اخیر، بسیاری از فعّالان دنیای مکانیک، به‌سمت مقیاس‌هایی درحدود میکرون و حتی کوچک‌تر کشیده‌شده‌اند [۱۳] و تمرکز کاری خود را به‌سوی میکروتیرها و میکروصفحه‌هایی با ضخامت‌هایی درحدود میکرون برده‌اند؛ این میکروساختارها اغلب در سیستم‌های نانوالکترومکانیک (NEMS) و میکروالکترومکانیک (MEMS)، استفاده می‌شوند.

در سال‌های اخیر، با مطالعه‌ی میکروساختارها و همچنین آزمایشات انجام‌شده برروی آن‌ها، مشخص شد که رفتار مکانیکی برخی مواد، وابسته‌به اندازه است و با تغییر مقیاس مورد بحث، رفتار نیز کاملاً تغییر می‌کند. اصطلاحاً به این نوع رفتار، رفتار وابسته‌به اندازه می‌گویند که اوّلین‌بار تأثیر آن برروی فلزها و پلیمرها کشف شد [۱۴، ۱۵].

تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش، در سال ۲۰۰۳ توسط لام و همکاران [۱۶] ارائه‌شد، این تئوری مدل کامل‌تری از تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده است که سه پارامتر مقیاس طولی دارد. این پارامترها، برای پیش‌بینی و بررسی رفتار وابسته‌به اندازه‌ی مادّه، طراحی شده‌اند.

اصول کلّی تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش، به‌شرح زیر است [۱۷]:

$$U = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + P_i\gamma_i + \tau_{ijk}\eta_{ijk} + m_{ij}^{s}\chi_{ij}^{s})dv \qquad (۱-۱)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (۲-۱)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \qquad (۳-۱)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15}\delta_{ij}(\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m})$$
$$-\frac{1}{15}[\delta_{jk}(\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki}(\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})] \qquad (۴-۱)$$

$$\chi_{ij}^{s} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \qquad (۵-۱)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2}(\mathrm{curl}(u))_i \qquad (۶-۱)$$

که در معادله‌های بالا، ε_{ij} درایه‌های تانسور کرنش، γ_i بردار گرادیان اتّساع، $\eta^{(1)}_{ijk}$ تانسور گرادیان کشیدگی انحراف رفتار مادّه، χ^s_{ij} تانسور گرادیان چرخش متقارن و u_i مؤلّفه‌های بردار جابه‌جایی، δ_{ij} دلتای کرونیکر، θ_i مؤلّفه‌های بردار چرخش هستند.

همچنین متناظربا پارامترهای تعریف‌شده در معادله‌های بالا، σ_{ij}، P_i، τ_{ijk} و m^s_{ij} نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_{ij} = \lambda tr(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{۱-۷}$$

$$P_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \tag{۱-۸}$$

$$\tau^{(1)}_{ijk} = 2\mu l_1^2 \eta^{(1)}_{ijk} \tag{۱-۹}$$

$$m^s_{ij} = 2\mu l_2^2 \chi^s_{ij} \tag{۱-۱۰}$$

که در روابط بالا، σ_{ij} معرف تانسور تنش کلاسیک و P_i، $\tau^{(1)}_{ijk}$ و m^s_{ij} معرف تنش‌های مرتبه‌ی بالا هستند. لازم‌به‌ذکر است که پارامترهای l_0، l_1 و l_2، همان پارامترهای مقیاس طول مادّه هستند که در ابتدای این بحث، به آن‌ها پرداختیم.

λ و μ نیز ثوابت لامه هستند که به‌صورت تابعی‌از مدول یانگ و ضریب پواسون تعریف شده‌اند:

$$\lambda = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-\upsilon)} \tag{۱-۱۱}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \tag{۱-۱۲}$$

اگر در معادله‌های بالا، به‌جای سه‌پارامتر مقیاس طول مادّه، تنها یکی را درنظر بگیریم ($l_0 = l_1 = 0$)، تئوری گرادیان کرنش اصلاح‌شده به تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده تقلیل خواهد یافت.

همچنین اگر از هر سه‌پارامتر مقیاس طول صرف نظر کنیم (یعنی $l_0 = l_1 = l_2 = 0$)، معادله‌های ساختاری تنش کوپل و گرادیان کرنش اصلاح‌شده، به روابط حاصل‌از تئوری کلاسیک تبدیل می‌شوند.

۱-۹ مروری‌بر کارهای پیشین

در مد تماسی، در واقعیت همواره یک بار اوّلیه به نوک وارد می‌شود که باعث به‌وجودآمدن انحرافی خواهد شد. مدل تماسی می‌تواند به‌صورت خطّی مدل شود؛ درنتیجه از یک فنر خطّی برای مدل‌کردن نیروی برهم‌کنش بین نوک و سطح نمونه استفاده می‌شود [۱۸]. ارتعاشات خطّی میکروتیر مستطیلی، تابه‌حال در بسیاری مراجع بررسی‌شده و حلّ دقیق آن نیز موجود است. درواقع تحلیل دینامیکی این سیستم خطّی تاحد زیادی پیشرفت‌کرده است. البته موضوعی که هنوز نیازمند تحقیق و آزمون است، تفاوت میان تحلیل‌های تئوری با نتایج آزمایشگاهی است که هنوز هم قابل بررسی است [۱۹، ۲۰، ۲۱].

برای بررسی رفتار دینامیکی AFM، نظریه‌ای به‌نام نظریه‌ی مدل متمرکز یا نظریه‌ی مدل جرم نقطه‌ای وجود دارد که به‌دلیل دینامیک ساده‌ی خود، مورد توجّه بسیاری از دانشمندان قرارگرفته است. این نظریه، تیر الاستیک را با یک جرم و فنر جایگزین می‌کند [۲۲، ۲۳]. معمولاً جرم معادل و سختی فنر به‌صورتی انتخاب می‌شوند که فرکانس تشدید با فرکانس طبیعی مد اوّل خمشی تیر یکی شود. درنتیجه در این نظریه، تنها مد اوّل درنظرگرفته می‌شود و از مدهای بالاتر صرف نظر خواهد شد.

رابه و همکاران [۵] برای اوّلین‌بار، رفتار دینامیکی میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی را مطالعه کردند و در این مسیر از روش‌هایی ساده بهره بردند. آن‌ها علاوه‌بر تحلیل تئوری، دامنه و فرکانس تیر را در آزمایشگاه به‌دست آوردند و نتایج هر دو روش را باهم مقایسه کردند.

تورنر و همکاران ارتعاشات خمشی AFM را به‌صورت خطّی و غیر خطّی و بااستفاده از نظریه‌های متفاوتی ازجمله نظریه‌ی جرم نقطه‌ای مدل کردند و توانستند محدودیت‌های این نظریه را درزمینه‌ی محدوده‌ی فرکانسی، میرایی و رفتار غیر خطّی بررسی کنند.

در رفتار ارتعاشی تیر، دو پارامتر سختی و میرایی تأثیر به‌سزایی دارند. میرایی می‌تواند ناشی از دو عامل باشد؛ میرایی ساختاری که ناشی از اتلاف داخلی در میکروتیر و همچنین اتلاف انرژی حاصل‌از ارتعاش در سیال است و میرایی کنشی که به‌خاطر برهم‌کنش‌های بین نوک و نمونه رخ می‌دهد [۲۴، ۲۵، ۲۶].

یاراليوگلو و همکاران [۲۷] تئوری هرتزین را با روش مقاومت تابشی تلفیق کردند و الگوریتمی برای محاسبه‌ی مکانیک تماس بین نوک AFM و مادّه‌ی تک‌لایه به‌دست آوردند که می‌توانست سختی و شعاع تماس را با چندمرتبه تکرار به‌دست آورد. همین موضوع باعث شد تا این دانشمند بتواند ضخامت مواد را با دقت بالا محاسبه کند.

عبّاسی و کرمی‌محمّدی [۲۸، ۲۹، ۳۰] تأثیر عوامل مختلفی مثل مکان نوک، زاویه‌ی تیر، میرایی و ممان اینرسی نوک را برروی فرکانس تشدید ارتعاشات خمشی و پیچشی در AFM مطالعه کردند. آن‌ها نشان دادند که هر مد از ارتعاشات میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی برای عملکرد خاصّی مناسب است. مثلاً از مد اوّل برای سنجش پاسخ‌های دینامیکی توپوگرافی نانومواد و بررسی ویژگی‌های مکانیکی سطح نمونه استفاده می‌شود [۳۱].

رودریگز و گارسیا [۳۲] دریافتند که در محیط‌هایی با ضریب کیفیت پایین، مدهای بالاتر اهمیت زیادی دارند. پس از او، استارک و همکاران [۳۳] از روش المان محدود برای به‌دست‌آوردن پنج مد اوّل یک تیر سیلیکونی بهره برده و دریافتند که در مد سوم، عواملی مثل آلودگی‌های سطح که عملاً غیر قابل مشاهده است، بسیار تأثیرگذار است. لوجسکا و همکاران [۳۴] مد اوّل را برای ثبت تصاویر سه‌بعدی و مد دوم را برای سنجش خصوصیات نانومواد مناسب دانستند.

گرچه تاکنون، رفتار ارتعاشاتی خطّی به‌خوبی بررسی‌شده، اما رفتار غیر خطّی تیر میکروسکوپ نیرواتمی، نیاز به بررسی‌های بسیاری دارد زیرا تحقیقات آزمایشگاهی نشان‌دهنده‌ی رفتار به‌شدت غیر خطّی این میکروتیر هستند [۳۵، ۳۶] .

از میان این مدها، مد متناوب بیشتر از سایرین، درمعرض رفتارهای غیر خطّی قرار دارد [۳۷]. در میکروسکوپ نیرواتمی مد متناوب، به‌دلیل پیچیدگی‌هایی که در برهم‌کنش بین نوک و سطح نمونه وجود دارد، دو نوع بازه‌ی متفاوت عملکرد ظاهر می‌شود؛ که این نکته در تحلیل‌ها درنظرگرفته‌شده است.

بوکارا و همکاران [۳۸] ا تأثیر رفتار غیر خطّی را بر میکروسکوپ پراب‌روبشی مورد بررسی قرار دادند.

فین و همکاران [۳۹] زمان تماس بین نوک و نمونه و متوسط نیروهای برهم‌کنش را محاسبه کردند. رامان و همکاران [۳۶، ۴۰، ۴۱] پدیده‌های غیر خطّی در میکروسکوپ نیرواتمی مد متناوب را براساس تئوری سیستم دینامیکی غیر خطّی، روش‌های پوسته محاسباتی و همچنین آزمایش، مورد مطالعه قرار دادند.

برای تحلیل رفتار غیر خطّی میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی، روش‌های زیادی به‌کار رفته است. یکی از این روش‌ها، تقریب خطّی‌سازی است که برهم‌کنش‌های بین نوک و نمونه را با روش عددی المان محدود ساده می‌کنند. کرایم و همکاران [۴۲] با این روش، پاسخ‌های فرکانسی میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی را در دو محیط عملکرد مایع و هوا بررسی کردند.

یکی دیگر از روش‌های مورد استفاده، روش نیمه‌تحلیلی تئوری اغتشاشات است. لین و همکاران [۳۱] بااستفاده از این روش، تغییرات فرکانسی میکروتیر AFM را در مد تماسی و در زمان روبش یک سطح شیب‌دار مورد بررسی قرار دادند.

قابلیت سنجش سطح جداره‌ی نمونه‌ها و افزایش امکان مانور میکروتیرها، یکی از عواملی بود که باعث به‌وجودآمدن انواع دیگری از میکروتیرها شد. دای و همکاران [۴۳، ۴۴]، مدل های جدید از میکروتیر را معرّفی کردند که به تیرهای مونتاژشده[۱](ACP) معروف شدند. در این میکروتیرها از یک یا چند تیر یا رابط عمودی برای روبش سطح نمونه استفاده می‌شود. دای و همکاران همچنین تیرهایی را ارائه دادند

[۱]Assembled Cantilever Probe

که شامل دو نوک بود؛ یکی برروی تیر یک‌سر درگیر و یکی برروی رابط عمودی، که کهربائیان و همکاران [۴۵] رفتار ارتعاشی این نوع از تیر مونتاژشده را بررسی کردند.

ازطرفی نظریه‌ی کلاسیک مکانیک محیط پیوسته، نمی‌توانست رفتار وابسته‌به اندازه‌ی تیرهایی باابعاد میکرو و نانو را بررسی کند. درنتیجه در سال‌های اخیر، تئوری‌هایی غیر محلّی مثل تئوری الاستیسیته‌ی تنش‌کوپل [۴۶]، تئوری الاستیسیته غیر محلّی ارینگن [۴۷، ۴۸] و تئوری گرادیان کرنش [۴۹، ۵۰، ۵۱] مطرح شدند. کانگ و همکاران [۵۲] رفتار دینامیکی و استاتیکی وابسته‌به اندازه‌ی میکروتیری را بااستفاده از تئوری تنش‌کوپل اصلاح‌شده، بررسی کردند. کهربائیان و همکاران [۵۳] فرکانس تشدید و حسّاسیت ارتعاشات در تیر متداول AFM را در مد تماسی و بااستفاده از تئوری تنش‌کوپل اصلاح‌شده مطالعه کردند.کانگ و همکاران [۵۴] در این مسیر، از تئوری گرادیان کرنش اصلاح‌شده برای بررسی رفتار وابسته‌به اندازه‌ی یک میکروتیر بهره برند.

۱-۱۰ هدف تحقیق

هدف این طرح، بررسی ارتعاشات غیر خطّی میکروتیر متداول میکروسکوپ نیرواتمی در مدهای مختلف عملکرد، یعنی مد تماسی و متناوب و با تمرکز بر مد متناوب است.

در همین راستا، مطالعات حاصل، به چند بخش تقسیم شده‌اند. در بخش اول، رفتار ارتعاشی میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی در مد تماسی و به‌ازای حالت‌های مختلف فرکانسی بررسی‌شده است. در بخش دوم یعنی مد متناوب، مطالعات گسترده‌تری انجام شده؛ زیرا در این مد، برهم‌کنش بین نوک و نمونه وارد معادلات می‌شود و پایه‌ی میکروتیر نیز متحرک است.

ازطرفی جنس میکروتیر مورد نظر، FGM درنظر گرفته‌شده که درراستای عرضی از بالا و پایین به پیزوالکتریک می‌رسد. درنتیجه هردو بخش ذکرشده، خود به دو قسمت دیگر تقسیم می‌شوند که ولتاژ اعمالی به پیزوالکتریک در آن‌ها متفاوت است.

رویکرد اصلی این پایان‌نامه، بررسی تأثیر استفاده از موادّ FG بر دو مد تماسی و متناوب و بررسی رفتار غیر خطّی میکروتیر دراثر تغییر پارامترهایی مثل ولتاژ، دامنه‌ی نوسان پایه و مواردی از این قبیل است.

۱-۱۱ نوآوری طرح

در سال‌های اخیر تحقیقات بسیار زیادی برروی موادّ FG انجام‌شده، اما بررسی‌های بسیارکمی برروی استفاده از این موادّ هوشمند در میکروتیرهای میکروسکوپ نیرواتمی دیده می‌شود. در این پایان‌نامه، جنس میکروتیر مذکور FGM درنظر گرفته‌شده، به‌صورتی‌که لایه‌ی میانی از جنس سیلیکون و دو سطح خارجی پیزوالکتریک هستند.

همچنین همان‌طورکه پیش از این اشاره شد، پژوهش‌های انجام‌شده عموماً برروی مد تماسی هستند و مد متناوب باوجود فواید و برتری‌هایی که دارد، هنوز نیازمند بررسی‌های بیشتری است که در این طرح به‌صورت مفصّل به این مد پرداخته‌شده است.

فصل دوم

استخراج معادله‌های مد تماسی

۲-۱ مقدّمه

در این فصل و فصل بعد، ارتعاشات خطّی و غیر خطّی میکروتیر متداول میکروسکوپ نیرواتمی با سطح مقطع مستطیلی، براساس تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش اصلاح‌شده، بررسی خواهد شد.

باتوجّه‌به مطالبی که در فصل‌های پیش عنوان‌شد، میکروتیر مورد بحث در میکروسکوپ نیرواتمی، یک‌سر درگیر و دارای یک نوک در انتهای آزاد تیر است.

لازم‌به‌ذکر است که به‌دلیل ابعاد بسیار ریز میکروتیر و نوک، امکان مونتاژ دقیق نوک درانتهای میکروتیر وجود ندارد و فاصله‌ای هرچندکوچک، بین نوک و سر آزاد تیر وجود خواهد داشت. البته در تحقیق حاضر، این فاصله نادیده گرفته‌شده و فرض می‌شود که نوک به‌صورت دقیق در انتهای میکروتیر قرارداده‌شده است.

در میکروسکوپ‌های نیرواتمی جنس میکروتیرها متفاوت است اما اغلب اوقات از سیلیکون استفاده می‌شود. جنس نوک میکروسکوپ نیز می‌تواند سیلیکون یا پلی‌سیلیکون باشد.

۲-۲ ارتعاشات خطّی میکروتیر متداول در میکروسکوپ نیرواتمی در مد تماسی

باتوجّه‌به کاربرد میکروسکوپ نیرواتمی، مد تماسی می‌تواند به دو صورت باشد؛ اگر خروجی مورد نظر اطّلاعات وابسته‌به ارتفاع باشد، نیروی بین نوک و نمونه را ثابت نگه داشته و برعکس، اگر خروجی مطلوب، نیروی بین نوک و نمونه باشد، ارتفاع ثابت نگه‌داشته می‌شود.

در این راستا، رفتار ارتعاشی بین نوک و نمونه در مد تماسی، به‌صورت خطّی تحلیل می‌شود، زیرا دامنه‌ی نوسان نوک، بسیار کوچک و درحدود ۱ تا ۵ نانومتر است [۱۸].

در این فصل، فرض‌برآن است که میکروسکوپ نیرواتمی در مد تماسی فعّال است و برای تحلیل رفتار آن، تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش استفاده‌شده؛ همچنین برای عمومیت‌بخشیدن به این تحلیل، این بررسی بااستفاده از پارامترهای بی‌بعد انجام‌شده است.

۳-۲ جنس و خواصّ مکانیکی میکروتیر مورد بررسی

در تحقیق حاضر، فرض‌شده که جنس میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی، FGM است و خواصّ مکانیکی میکروتیر به‌صورت توانی و درراستای ضخامت تغییر می‌کنند.

میکروتیر FGM مورد بررسی، از سیلیکون و پیزوالکتریک تشکیل‌شده، بدین‌صورت‌که لایه‌ی وسط ($z=0$) صددرصد سیلیکون و لایه‌های بالا و پایین ($z=\pm h/2$) صددرصد پیزوالکتریک هستند، یعنی میکروتیر مورد نظر، کاملاً متقارن است.

ویژگی‌های مکانیکی میکروتیر، از قانون توانی[1] پیروی کرده و از معادله‌های زیر به‌دست می‌آیند [۵۵].

$$E(z)=E_q e^{\gamma|z|} \tag{۱-۲}$$

$$\rho(z)=\rho_q e^{\alpha|z|} \tag{۲-۲}$$

$$e_{31}(z)=e_{31_p} e^{\mu|z|}-\beta \tag{۳-۲}$$

در روابط بالا، E مدول الاستیسیته، ρ چگالی و e_{31_p} نیز ضریب پیزوالکتریک است. ثوابت موجود در معادله‌های بالا، یعنی E_q، ρ_q، γ، α، μ و β نیز بااستفاده از شرایط مرزی و به‌شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$z=0 \;\rightarrow\; E(0)=E_q=E_s \tag{۴-۲}$$

$$z=\frac{h}{2} \;\rightarrow\; E\left(\frac{h}{2}\right)=E_s e^{\gamma\left|\frac{h}{2}\right|}=E_p \;\rightarrow\; \gamma=\frac{2}{h}\ln\left(\frac{E_p}{E_s}\right) \tag{۵-۲}$$

[1] Power Law

که زیروند s مربوطبه سیلیکون و زیروند p مربوطبه پیزوالکتریک است. همچنین درمورد تابع چگالی نیز داریم:

$$z = 0 \;\rightarrow\; \rho(0) = \rho_q = \rho_s \tag{۲-۶}$$

$$z = \frac{h}{2} \;\rightarrow\; \rho\left(\frac{h}{2}\right) = \rho_s e^{\alpha\left|\frac{h}{2}\right|} = \rho_p \;\;\rightarrow\;\; \alpha = \frac{2}{h}\ln\left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right) \tag{۲-۷}$$

همچنین اگر هر خاصیت مکانیکی[۱] را با MP نشان دهیم، رابطه‌ی زیر درراستای ضخامت میکروتیر برقرار خواهد شد [۵۶]:

$$z = 0 \;\rightarrow\; MP = MP_0 = P_{s_0} MP_s + P_{p_0} MP_p \tag{۲-۸}$$

$$z = \frac{h}{2} \;\rightarrow\; MP = MP_u = P_{s_u} MP_s + P_{p_u} MP_p \tag{۲-۹}$$

در این رابطه، P_{p_0} و P_{s_0} نشان‌دهنده‌ی درصد پیزوالکتریک و سیلیکون در $z = 0$ و مشابه با آن، P_{p_u} و P_{s_u} نشان‌دهنده‌ی درصد پیزوالکتریک و سیلیکون در بالا و پایین میکروتیر یعنی در $z = \pm h/2$ هستند.

باتوجّه‌به روابط (۲-۸) و (۲-۹) و رابطه‌ی مربوطبه ثابت پیزوالکتریک یعنی (۲-۳)، ثوابت β و μ نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\beta = e_{31_p} - P_{p_0} e_{31_p} \tag{۲-۱۰}$$

$$\mu = \frac{2}{h}\ln\left(P_{p_u} + 1 - P_{p_0}\right) \tag{۲-۱۱}$$

۲-۴ مدل‌سازی و تحلیل دینامیکی میکروتیر

در این قسمت، شماتیک میکروتیر مورد نظر را به‌طور کامل تبیین می‌کنیم.

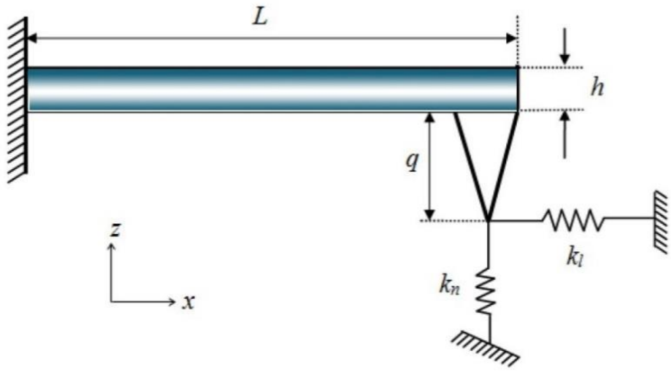
میکروتیر مورد بررسی در شکل (۲-۱) نشان‌داده شده است.

---
[۱] Mechanical Property

آن‌طورکه مرسوم است، عرض این میکروتیر b، ضخامت آن h و طول آن L نام‌گذاری‌شده، محور x درراستای طولی میکروتیر و محور z درراستای عرضی یا عمودی درنظرگرفته‌شده است.

همچنین خیز میکروتیر درراستای x و در زمان t را w(x,t) درنظرگرفته‌ایم. میکروتیر یک‌سر درگیر مدّ نظر ما، در x=0 به تکیه‌گاه گیرداده‌شده و در x=L آزاد است.

موضوع دیگری که باید به آن بپردازیم، نوک میکروتیر است که به‌صورت مخروطی درنظرگرفته‌شده؛ جرم آن m_t و طول آن را q نامیده‌ایم.



شکل (۲-۱) میکروسکوپ نیرواتمی در مد تماسی [۶۳]

همان‌طورکه پیش‌تر نیز گفتیم، دامنه‌ی نوسان در مد تماسی بسیارپایین است و به‌همین‌دلیل، نیروهای برهم‌کنش بین نوک و نمونه را به‌صورت خطّی فرض‌کرده [۶۳] و برای مدل‌کردن این نیروها، از فنرهایی خطّی استفاده می‌کنیم. مطابق شکل، نیروهای عمودی را به‌وسیله‌ی فنری با سختی K_n و نیروهای جانبی را با فنری با سختی K_l مدل خواهیم کرد.

۲-۴-۱ میکروتیر غیر خطّی اولربرنولی

اگر جابه‌جایی در راستای x، y و z را با u_1،u_2 و u_3 نشان دهیم، باتوجّه‌به تئوری تیر اولربرنولی، مؤلفه‌های جابه‌جایی میکروتیر مورد نظر تحت خمش، به‌صورت زیر خواهند بود:

$$u_1 = u(x,t) - z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad (۲-۱۲)$$

$$u_2 = 0 \quad (۲-۱۳)$$

$$u_3 = w(x,t) \quad (۲-۱۴)$$

درفصل یک به‌صورت کامل، تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش و روابط حاکم‌بر آن را توضیح دادیم. از طرفی باتوجّه‌به غیر خطّی‌بودن تیر مورد مطالعه، مؤلّفه‌ی غیر صفر کرنش را مطابق رابطه‌ی زیر درنظر خواهیم گرفت [۶۲]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x}) = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \quad (۲-۱۵)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۲-۱۵) در روابط تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش، مولفه‌های غیر صفر بردار γ_i و تانسورهای $\eta_{ijk}^{(1)}$ و χ_{ij}^{s} به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\gamma_1 = \varepsilon_{11,1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۲-۱۶)$$

$$\gamma_3 = \varepsilon_{11,3} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۲-۱۷)$$

$$\eta_{111}^{(1)} = \frac{2}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (۲-۱۸)$$

$$\eta_{113}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = -\frac{4}{15}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۲-۱۹)$$

$$\eta_{122}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \eta_{133}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = \frac{1}{5}\left(z\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (۲-۲۰)$$

$$\eta_{333}^{(1)} = \frac{1}{5}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۲-۲۱)$$

$$\eta_{223}^{(1)} = \eta_{232}^{(1)} = \eta_{223}^{(1)} = \frac{1}{15}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۲-۲۲)$$

$$\chi_{12}^{s} = \chi_{21}^{s} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۲-۲۳)$$

در روابط (۱-۱۱) و (۱-۱۲) ثوابت لامه را تعریف کردیم و دیدیم که این ثوابت به نسبت پواسون و مدول الاستیسیته وابسته هستند.

نسبت کرنش جانبی (عرضی) به کرنش محوری (طولی) را ضریب پواسون (υ) می‌نامند و آن را به‌صورت $\upsilon=-\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{axial}}$ تعریف می‌کنند و در فرمول‌نویسی تیرها، معمولاً ضریب پواسون را مساوی‌با صفر قرار می‌دهند، یعنی [۵۵]:

$$\lambda=\frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\xrightarrow{\upsilon=0}\lambda=0 \tag{۲-۲۴}$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\upsilon)}\xrightarrow{\upsilon=0}\mu=\frac{E}{2} \tag{۲-۲۵}$$

درنتیجه معادله‌ی (۱-۷) نیز با صفرشدن یکی از قسمت‌هایش به‌صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\sigma_{11}=\lambda tr(\varepsilon)\delta_{11}+2\mu\varepsilon_{11}=E\varepsilon_{11} \tag{۲-۲۶}$$

حال بااستفاده از روابط (۲-۱۵) تا (۲-۲۶) و روابطی که در قسمت تئوری الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش برای مولفه‌های تنشی ارائه‌شد، درایه‌های غیر صفر تنش را نیز در ادامه به‌دست خواهیم آورد. (همان‌طورکه پیش‌تر نیز گفتیم، l_1، l_2 و l_3 پارامترهای مقیاس طولی مادّه هستند.)

$$\sigma_{11}=E\varepsilon_{11}=E\left(\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2\right) \tag{۲-۲۷}$$

$$P_1=2\mu L_0^2\gamma_1=2\mu L_0^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-z\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\delta w}{\delta x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{۲-۲۸}$$

$$P_3=2\mu L_0^2\gamma_3=-2\mu L_0^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{۲-۲۹}$$

$$\tau_{111}^{(1)}=\frac{4}{5}\mu L_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-z\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\delta w}{\delta x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{۲-۳۰}$$

$$\tau_{113}^{(1)}=\tau_{311}^{(1)}=\tau_{131}^{(1)}=-\frac{8}{15}\mu L_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{۲-۳۱}$$

$$\tau_{122}^{(1)}=\tau_{212}^{(1)}=\tau_{221}^{(1)}=\tau_{133}^{(1)}=\tau_{313}^{(1)}=\tau_{331}^{(1)}=\frac{2}{5}\mu L_1^2\left(z\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\delta w}{\delta x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (۲-۳۲)$$

$$\tau_{333}^{(1)}=\frac{2}{5}\mu L_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۲-۳۳)$$

$$\tau_{223}^{(1)}=\tau_{232}^{(1)}=\tau_{223}^{(1)}=\frac{2}{15}\mu L_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۲-۳۴)$$

$$m_{12}^s=m_{21}^s=-\mu L_2^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۲-۳۵)$$

معادله‌های (۲-۱۵) تا (۲-۳۵) را در معادله‌ی ساختاری تئوری گرادیان کرنش جای‌گذاری می‌کنیم. سپس انرژی الاستیک فنرهای نرمال و جانبی و همچنین انرژی مربوطبه پیزوالکتریک را به آن اضافه‌کرده و در آخر، انرژی کرنش کل U را برای میکروتیر مورد نظرمان به‌دست می‌آوریم.

یعنی اگر کلّ انرژی جسم را به‌صورت $U=U_m+U_n+U_{axial,piezo}$ بنویسیم، هرکدام از پارامترهای آن به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۱، ۵۵].

$$U_m=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+P_i\gamma_i+\tau_{ijk}\eta_{ijk}+m_{ij}^s\chi_{ij}^s\right)dv \quad (۲-۳۶)$$

$$U_{axial,piezo}=\int\sigma_{piezo}\varepsilon_x dv=\int_0^L\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{\frac{be_{31}(z)V_p}{h}dz\right\}\varepsilon_{11}dx \quad (۲-۳۷)$$

$$U_n=\frac{1}{2}K_n\left(w(L,t)\right)^2+\frac{1}{2}K_l\left(q\frac{\partial w(L,t)}{\partial u}\right)^2 \quad (۲-۳۸)$$

همچنین انرژی جنبشی نیز برای این میکروتیر به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد.

$$T_1=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\int_0^l\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}b\rho(z)\left(\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)dzdx \quad (۲-۳۹)$$

$$T_2=\frac{1}{2}m_t\left(\frac{\partial w(L,t)}{\partial t}\right)^2 \quad (۲-۴۰)$$

ازطرفی براساس روابطی که از تئوری گرادیان کرنش به‌دست آوردیم، معادله‌ی (۲-۳۶) درنهایت به‌شکل زیر خواهد بود.

$$U_m = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{ \begin{aligned} & S\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)^2 + (EA)_{eq}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2\right)^2 \\ & +R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 \end{aligned} \right\} dx \qquad (۴۱-۲)$$

در این‌جا چند پارامتر جدید را باتوجّه‌به خاصیت FGM بودن میکروتیر معرفی می‌کنیم.

$$(EI)_{eq} = \int_A E(z)z^2 dA \qquad (EA)_{eq} = \int_A E(z)dA \qquad (۴۲-۲)$$

$$(a_0'A)_{eq} = \int_A \mu(z)l_0^2 dA \qquad (a_1'A)_{eq} = \int_A \mu(z)l_1^2 dA \qquad (a_2'A)_{eq} = \int_A \mu(z)l_2^2 dA \qquad (۴۳-۲)$$

$$(a_0'I)_{eq} == \int_A \mu(z)l_0^2 z^2 dA \qquad (a_1'I)_{eq} = \int_A \mu(z)l_1^2 z^2 dA \qquad (۴۴-۲)$$

$$(\rho A)_{eq} == \int_A \rho(z)dA \qquad (۴۵-۲)$$

در نتیجه ضرایب S، K، R نیز در معادله‌ی (۲-۴۱) برابرندبا:

$$S = (EI)_{eq} + 2(a_0'A)_{eq} + \frac{8}{15}(a_1'A)_{eq} + (a_2'A)_{eq} \qquad (۴۶-۲)$$

$$K = 2(a_0'I)_{eq} + \frac{4}{5}(a_1'I)_{eq} \qquad (۴۷-۲)$$

$$R = 2(a_0'A)_{eq} + \frac{4}{5}(a_1'A)_{eq} \qquad (۴۸-۲)$$

براساس اصل همیلتون:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T - \delta U + \delta W\right)dt = 0 \qquad (۴۹-۲)$$

در این رابطه، W کار انجام‌شده به‌وسیله‌ی گشتاورهای مرتبه‌ی بالاتر و کلاسیک خارجی است که در اینجا صفر فرض‌شده است.

باتوجّه‌به معادله‌های (۲-۳۶) تا (۲-۴۰)، تغییرات رابطه‌ی همیلتون به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta U_m + \delta U_n + \delta U_{axial,piezo} - \delta T_1 - \delta T_2\right)dt = 0 \qquad (۵۰-۲)$$

درنهایت و پس از به‌دست‌آوردن تغییرات انرژی‌های جنبشی و پتانسیل، یعنی تغییرات روابط (۲-۳۶) تا (۲-۴۰) و قراردادن آن‌ها در رابطه‌ی (۲-۵۰) داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Bigg\{\left[-S\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+K\frac{\partial^5 w}{\partial x^5}+(EA)_{eq}\left(\frac{\partial w}{\partial x}Q\right)-RQ''\frac{\partial w}{\partial x}\right]\delta w\Big|_0^L+\left[(EA)_{eq}Q-RQ''\right]\delta u\Big|_0^L$$

$$+\left[S\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-K\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+R\frac{\partial w}{\partial x}Q'\right]\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)\Big|_0^L+\left[Q'A\right]\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)\Big|_0^L+\left[K\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right]\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta w)\Big|_0^L$$

$$+n_1\delta u\,\Big|_0^L+n_2\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)\Big|_0^L+n_1\frac{\partial w}{\partial x}(\delta w)\Big|_0^L$$

$$+K_n w(L,t)\delta w(L,t)+K_1 q^2\frac{\partial w(L,t)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\delta w(L,t)+m_t\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2}\delta w(L,t)\Bigg\}dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\Bigg\{S\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-K\frac{\partial^6 w}{\partial x^6}-(EA)_{eq}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}Q+\frac{\partial w}{\partial x}Q'\right]+R\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}Q'+\frac{\partial w}{\partial x}Q''\right]$$

$$+n_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(\rho A)_{eq}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Bigg\}\delta w dt dx$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left\{-(EA)_{eq}Q'+RQ'''+(\rho A)_{eq}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}\delta u dt dx=0 \qquad (۵۱-۲)$$

که در این رابطه، Q،n_1 و n_2 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Q=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \qquad (۵۲-۲)$$

$$n_1=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}e_{31}(z)\left(\frac{bV_p}{h}\right)dz \qquad (۵۳-۲)$$

$$n_2=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}e_{31}(z)\left(\frac{bV_p}{h}\right)zdz \qquad (۵۴-۲)$$

باتوجّه‌به موارد گفته‌شده، معادله‌های اصلی تیر درراستای x و z و شرایط مرزی آن، به‌صورت زیر به‌دست خواهند آمد:

$$S\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-K\frac{\partial^6 w}{\partial x^6}-(EA)_{eq}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}Q+\frac{\partial w}{\partial x}Q'\right]+R\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}Q'+\frac{\partial w}{\partial x}Q''\right]$$

$$+n_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(\rho A)_{eq}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (۵۵-۲)$$

$$-(EA)_{eq}Q'+RQ'''+(\rho A)_{eq}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (۵۶-۲)$$

و شرایط مرزی عبارتنداز:

$$-S\frac{\partial^3 w\left(L,t\right)}{\partial x^3}+K\frac{\partial^5 w\left(L,t\right)}{\partial x^5}+\left(EA\right)_{eq}\left(\frac{\partial w\left(L,t\right)}{\partial x}Q\right)-RQ''\frac{\partial w\left(L,t\right)}{\partial x}$$

$$+n_1\frac{\partial w\left(L,t\right)}{\partial x}+m_t\frac{\partial^2 w\left(L,t\right)}{\partial t^2}+K_n w\left(L,t\right)=0 \tag{۵۷-۲}$$

$$-S\frac{\partial^3 w\left(0,t\right)}{\partial x^3}+K\frac{\partial^5 w\left(0,t\right)}{\partial x^5}+\left(EA\right)_{eq}\left(\frac{\partial w\left(0,t\right)}{\partial x}Q\right)-RQ''\frac{\partial w\left(0,t\right)}{\partial x}$$

$$+n_1\frac{\partial w\left(0,t\right)}{\partial x}=0 \tag{۵۸-۲}$$

$$\left(EA\right)_{eq}Q-RQ''-n_1=0 \tag{۵۹-۲}$$

$$S\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2}-K\frac{\partial^4 w(L,t)}{\partial x^4}+R\frac{\partial w(L,t)}{\partial x}Q'+n_2+K_l q^2\frac{\partial w(L,t)}{\partial x}=0 \tag{۶۰-۲}$$

$$S\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}-K\frac{\partial^4 w(0,t)}{\partial x^4}+R\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}Q'+n_2=0 \tag{۶۱-۲}$$

$$Q'A=0 \tag{۶۲-۲}$$

$$K\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{۶۳-۲}$$

قدم بعدی بی‌بعدسازی معادله‌هاست. دراین‌راستا پارامترهای بی‌بعد را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$W=\frac{w}{L}\qquad U=\frac{u}{L}\qquad X=\frac{x}{L}\qquad \tau=t\sqrt{\frac{E_I I}{\rho_A A L^4}} \tag{۶۴-۲}$$

$$\tilde{q}=\frac{q}{L}\qquad m_f=\frac{m_t}{\rho A L}\qquad \beta_l=\frac{K_l L^3}{E_I I}\qquad \beta_n=\frac{K_n L^3}{E_I I} \tag{۶۵-۲}$$

با جای‌گذاری این پارامترهای بی‌بعد، در معادله‌ی (۲-۵۵)، معادله‌ی حرکت بی‌بعد را به‌صورت زیر به‌دست خواهیم آورد.

$$\tilde{S}\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}-\tilde{K}\frac{\partial^6 W}{\partial X^6}-P\left[\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\tilde{Q}+\frac{\partial W}{\partial X}\tilde{Q}'\right]+\tilde{R}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\tilde{Q}''+\frac{\partial W}{\partial X}\tilde{Q}'''\right]$$

$$+V_p N_1\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}=0 \tag{۶۶-۲}$$

مشخّصات معادل مادّه، برای یک تیر FG را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\left(EA\right)_{eq}=E_A A \qquad \left(EI\right)_{eq}=E_I I \tag{۲-۶۷}$$

$$\left(\mu A\right)_{eq}=\mu_A A \qquad \left(\mu I\right)_{eq}=\mu_I A \tag{۲-۶۸}$$

$$\left(\rho A\right)_{eq}=\rho_A A \tag{۲-۶۹}$$

$$\left(a_i' A\right)_{eq}=\mu_A \hat{l}_i^2 A \qquad i=0,1,2 \tag{۲-۷۰}$$

$$\left(a_i' I\right)_{eq}=\mu_I \hat{l}_{i+3}^2 I \qquad i=0,1 \tag{۲-۷۱}$$

که در معادله‌های (۲-۶۷) تا (۲-۷۱)، ضرایب E_A ،E_I ،μ_A ،μ_I و ρ_A ثوابت الاستیسیته و چگالی معادل مادّه هستند. همچنین $\hat{l}_0,\hat{l}_1,...,\hat{l}_4$ پنج پارامتر مقیاس طول معادل هستند که برای تیر FG استفاده می‌شوند.

باتوجّه‌به معادله‌های (۲-۴۶) تا (۲-۴۸)، ضرایب بی‌بعد معادله‌های (۲-۶۶) به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\tilde{S}=1+12\frac{\mu_A}{E_I}\left[2\left(\frac{l_0}{h}\right)^2+\frac{8}{15}\left(\frac{l_1}{h}\right)^2+\left(\frac{l_2}{h}\right)^2\right] \tag{۲-۷۲}$$

$$\tilde{K}=\frac{\mu_I}{E_I}\left[2\left(\frac{l_3}{L}\right)^2+\frac{4}{5}\left(\frac{l_4}{L}\right)^2\right] \tag{۲-۷۳}$$

$$\tilde{R}=12\frac{\mu_A}{E_I}\left[2\left(\frac{l_0}{h}\right)^2+\frac{4}{5}\left(\frac{l_1}{h}\right)^2\right] \tag{۲-۷۴}$$

$$N_1=\frac{12L^2}{E_I h^4}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{31}(z)\,dz \tag{۲-۷۵}$$

$$P=12\frac{E_A}{E_I}\left(\frac{L}{h}\right)^2 \tag{۲-۷۶}$$

همچنین در معادله‌ی ساختاری (۲-۶۶)، ضریب $\tilde{Q}$ از بی‌بعدسازی Q به‌دست می‌آید و داریم:

$$\tilde{Q}=\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2 \tag{۲-۷۷}$$

برای حلّ معادله‌ی مشتق جزئی (۲-۶۶) و تحلیل فرکانسی سیستم، باید توابع زمان و مکان گسسته شوند. برای این منظور، از روش گلرکین [۶۱] استفاده می‌کنیم. داریم:

$$W(X,\tau)=\chi(X)\varphi(\tau) \qquad (۷۸-۲)$$

که در این رابطه، $\varphi(\tau)$ مختصات تعمیم‌یافته و $\chi(X)$ تابع مقایسه‌ای است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۶۳].

$$\chi(X)=\left(\cos(\beta X)-\cosh(\beta X)\right)-\frac{\cos(\beta L)+\cosh(\beta L)}{\sin(\beta L)+\sinh(\beta L)}\left(\sin(\beta X)-\sinh(\beta X)\right) \qquad (۷۹-۲)$$

که βL در این رابطه برابربا ۱٫۸۷۵۱ درنظرگرفته‌شده است [۶۳].

با جای‌گذاری معادله‌ی (۲-۷۸) در معادله‌ی (۲-۶۶) و ضرب طرفین رابطه در $\chi(X)$ و درنهایت انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی حاصل، معادله‌ی حرکت سیستم غیر خطّی مذکور در مد تماسی، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\alpha_0\frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2}+\left(V_pN_1\alpha_1-\tilde{K}\alpha_2+\tilde{S}\alpha_3\right)\varphi(\tau)-\left[\left(2\alpha_4+2\alpha_5+8\alpha_7\right)\tilde{R}-\alpha_6P\right]\varphi(\tau)^3=0 \qquad (۸۰-۲)$$

که ضرایب α_0 تا α_7 از انتگرال‌های زیر به‌دست می‌آیند.

$$\alpha_0=\int_0^1\left(\chi(X)\right)^2dX \qquad (۸۱-۲)$$

$$\alpha_1=\int_0^1\left(\frac{d^2\chi(X)}{dX^2}\right)\left(\chi(X)\right)dX \qquad (۸۲-۲)$$

$$\alpha_2=\int_0^1\left(\frac{d^6\chi(X)}{dX^6}\right)\left(\chi(X)\right)dX \qquad (۸۳-۲)$$

$$\alpha_3=\int_0^1\left(\frac{d^4\chi(X)}{dX^4}\right)\left(\chi(X)\right)dX \qquad (۸۴-۲)$$

$$\alpha_4=\int_0^1\left(\frac{d^4\chi(X)}{dX^4}\right)\left(\frac{d\chi(X)}{dX}\right)^2\left(\chi(X)\right)dX \qquad (۸۵-۲)$$

$$\alpha_5=\int_0^1\left(\frac{d^2\chi(X)}{dX^2}\right)^3\left(\chi(X)\right)dX \qquad (۸۶-۲)$$

$$\alpha_6=\int_0^1\left(\frac{d^2\chi(X)}{dX^2}\right)\left(\frac{d\chi(X)}{dX}\right)^2\left(\chi(X)\right)dX \qquad (۸۷-۲)$$

$$\alpha_7 = \int_0^1 \left(\frac{d\chi(X)}{dX}\right)\left(\frac{d^2\chi(X)}{dX^2}\right)\left(\frac{d^3\chi(X)}{dX^3}\right)\left(\chi(X)\right)dX \qquad (۸۸-۲)$$

۲-۵ تحلیل ارتعاشات غیر خطّی میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی در مد تماسی:

در زمان اعمال ولتاژ، دو حالت ممکن است:

$$V_p = V_{DC} \qquad (۸۹-۲)$$

$$V_p = V_{DC} + V_{AC}\cos(\Omega_1 t) \qquad (۹۰-۲)$$

که در این رابطه، V_{DC} ولتاژ مستقیم، V_{AC} ولتاژ متناوب و Ω_1 نیز فرکانس ولتاژ اعمالی به پیزوالکتریک است.

۲-۵-۱ روش مقیاس‌های چندگانه:

برای تحلیل رفتار دینامیکی غیر خطّی میکروسکوپ نیرواتمی دینامیکی، از تئوری نیمه‌تحلیلی اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه[۱] استفاده می‌کنیم [۵۷].

در روش مقیاس‌های چندگانه، فرض‌براین است که پاسخ سیستم دینامیکی، تابعی از چند متغیّر مستقل یا به‌عبارتی چندین مقیاس مستقل به‌جای یک متغیّر است.

در این روش، مقیاس‌های جدید و مستقل به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$T_n = \varepsilon^n \tau \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (۹۱-۲)$$

که ε یک پارامتر بسیار کوچک و مثبت است. براین‌اساس، مشتق‌های زمانی بااستفاده از مشتق‌های زنجیره‌ای، به‌صورت زیر قابل محاسبه هستند.

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial T_0}\frac{\partial T_0}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial T_1}\frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \ldots = D_0 + \varepsilon D_1 + \ldots + \varepsilon^n D_n \qquad (۹۲-۲)$$

[۱] Multiple Scales Method

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2\left(D_1^2 + 2D_0 D_2\right) + \ldots \tag{۹۳-۲}$$

که در روابط بالا، $D_n = \dfrac{\partial}{\partial T_n}$ است.

حال فرض می‌کنیم که پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل (۲-۸۲) به‌صورت بسط زیر باشد.

$$\varphi(\tau,\varepsilon) = \varepsilon u_1\left(T_0,T_1,T_2\right) + \varepsilon^2 u_2\left(T_0,T_1,T_2\right) + \varepsilon^3 u_3\left(T_0,T_1,T_2\right) \tag{۹۴-۲}$$

باید به این نکته توجّه داشت که تعداد مقیاس‌های زمانی انتخاب‌شده در بسط، به مرتبه‌ی بسطی که تا آن مرحله، حل را انجام می‌دهیم بستگی دارد. در این قسمت ما بسط را تا $O\left(\varepsilon^3\right)$ ادامه می‌دهیم و لذا مقیاس‌های درنظر گرفته‌شده، T_0، T_1 و T_2 هستند.

حالت اوّل: $V_p = V_{DC}$

در حالت اوَل فرض می‌کنیم که ولتاژ اعمالی‌به میکروتیر به‌شکل رابطه‌ی (۲-۸۹) باشد. سپس با جای‌گذاری روابط (۲-۹۱) تا (۲-۹۴) در معادله‌ی (۲-۸۰) و برابر صفر قراردادن ضرایب توان‌های مختلف ε داریم:

$$[\varepsilon]: \quad \omega_0^2 u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0{}^2} = 0 \tag{۹۵-۲}$$

$$\left[\varepsilon^2\right]: \quad \omega_0^2 u_2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0{}^2} = -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} \tag{۹۶-۲}$$

$$\left[\varepsilon^3\right]: \quad \omega_0^2 u_3 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial T_0{}^2} = -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1{}^2} + r_1 u_1^3 \tag{۹۷-۲}$$

که در این معادلات، ω_0 و r_1 برابرند با:

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{\alpha_0}\left(V_{DC} N_1 \alpha_1 - \tilde{K}\alpha_2 + \tilde{S}\alpha_3\right) \tag{۹۸-۲}$$

$$r_1 = \frac{1}{\alpha_0}\left(\tilde{R}\left(2\alpha_3 + 8\alpha_7 + 2\alpha_5\right) - P\alpha_6\right) \tag{۹۹-۲}$$

در حلّ معادله‌ها به‌روش مقیاس‌های چندگانه، متداول است که از شکل مختلط پاسخ استفاده شود، به‌عبارتی پاسخ معادله‌ی (۲-۹۵) را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$u_1 = A(T_1,T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1,T_2)e^{-i\omega_0 T_0} \quad (۲-۱۰۰)$$

که در این رابطه، A یک تابع مختلط نامعلوم و $\bar{A}$ مزدوج مختلط آن است. برای به‌دست‌آوردن تابع A لازم است که توابع u_2 و u_3 برحسب T_0 پریودیک باشند.

با قراردادن پاسخ معادله‌ی اوّل یعنی (۲-۱۰۰) در معادله‌ی (۲-۹۶) و برابر صفر قراردادن سکولارترم‌ها، داریم:

$$D_1A = 0 \ \rightarrow \ A = A(T_2) \quad \text{و} \quad u_2 = 0 \quad (۲-۱۰۱)$$

یعنی ضریب A باید مستقل از T_1 باشد.

با جای‌گذاری u_1 و u_2 به‌دست‌آمده، یعنی معادله‌های (۲-۱۰۰) و (۲-۱۰۱) و لحاظ‌کردن $A = A(T_2)$ در معادله‌ی (۲-۹۷) داریم:

$$\begin{aligned}\omega_0^2 u_3 + D_0^2 u_3 &= r_1 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + r_1 \bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0} + \left(3r_1 A^2\bar{A} - 2i\omega_0 D_2 A\right)e^{i\omega_0 T_0} \\ &+ \left(3r_1 A\bar{A}^2 + 2i\omega_0 D_2\bar{A}\right)e^{-i\omega_0 T_0}\end{aligned} \quad (۲-۱۰۲)$$

برای داشتن جواب معتبر، باید عبارت Secular را از معادله‌ی فوق حذف کرد؛ لذا:

$$3r_1 A^2\bar{A} - 2i\omega_0 D_2 A = 0 \quad (۲-۱۰۳)$$

برای حلّ این معادله‌ی دیفرانسیل، متداول است که A را به‌شکل قطبی به‌صورت زیر درنظر می‌گیرند؛

$$A = \frac{1}{2}ae^{ib} \quad (۲-۱۰۴)$$

که در این رابطه، فرض‌بر این است که a و b هردو تابعی از T_2 هستند. با جای‌گذاری این رابطه در معادله‌ی (۳-۱۰۲) و جداکردن قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم:

$$\frac{3}{8}r_1a^3+\omega_0ab'=0 \tag{۱۰۵-۲}$$

$$\omega_0a'=0 \tag{۱۰۶-۲}$$

که در این رابطه علامت پریم، نشان‌گر مشتق برحسب T_2 است. براساس روابط بالا خواهیم داشت:

$$a=\text{constant}=a_0 \tag{۱۰۷-۲}$$

$$b=-\frac{3}{8}\frac{r_1}{\omega_0}a^2T_2+b_0 \tag{۱۰۸-۲}$$

که درنهایت، A به‌شکل زیر خواهد بود.

$$A(T_2)=\frac{1}{2}a_0e^{i\left(-\frac{3r_1a^2}{8\omega_0}T_2+b_0\right)} \tag{۱۰۹-۲}$$

و باتوجّه‌به رابطه‌ی (۲-۹۴)، پاسخ معادله‌ی (۲-۸۰) نیز برای حالتی که میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی در مد تماسی فعال باشد و ولتاژ اعمالی به‌شکل V_{DC} باشد، به‌صورت زیر است.

$$\varphi(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\left(Ae^{i\omega_0T_0}+\bar{A}e^{-i\omega_0T_0}\right)+O\left(\varepsilon^3\right) \tag{۱۱۰-۲}$$

که در رابطه‌ی فوق، A از معادله‌ی (۲-۱۰۹) به‌دست می‌آید.

حالت دوم: $V_p=V_{DC}+V_{AC}\cos(\Omega_1t)$

برای به‌دست‌آوردن یک پاسخ تقریبی یکنواخت برای این سوال و موقعیت‌های مشابهی که در آینده خواهیم دید، می‌بایست نیروی تحریک را به‌گونه‌ای هم‌مرتبه با سایر عبارت‌ها قرار دهیم که عبارت میرایی و تحریک، در یک مرتبه از بسط ε ظاهر شوند (شرط حل‌پذیری). بدین‌منظور، V_{AC} را در ε^2 ضرب‌کرده و آن را به‌شکل ε^2V_{AC} وارد معادله‌ها می‌کنیم [۵۷].

پس فرض می‌کنیم که ولتاژ اعمالی به میکروتیر به‌شکل $V_{DC}+\varepsilon^2V_{AC}\cos(\Omega_1t)$ باشد. در این صورت عبارت غیر خطّی و تحریک، هر دو در بسط ε^3 ظاهر می‌شوند و داریم:

$$[\varepsilon]: \quad \omega_0^2 u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial {T_0}^2} = 0 \tag{۱۱۱-۲}$$

$$\left[\varepsilon^2\right]: \quad \omega_0^2 u_2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial {T_0}^2} = -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} \tag{۱۱۲-۲}$$

$$\left[\varepsilon^3\right]: \quad \omega_0^2 u_3 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial {T_0}^2} = -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial {T_1}^2} + r_1 u_1^3 - r_2 \cos\left(\Omega_1 T_0\right) u_1 \tag{۱۱۳-۲}$$

که در این روابط، r_1 و ω_0 همان معادله‌های (۲-۹۸) و (۲-۹۹) هستند و r_2 نیز از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$r_2 = N_1 \alpha_1 V_{AC} \tag{۱۱۴-۲}$$

مانند حالت قبل، پاسخ معادله‌ی (۲-۱۱۱) را نیز به‌صورت رابطه‌ی (۲-۱۰۰) درنظر می‌گیریم. همچنین پاسخ معادله‌ی (۲-۱۱۲) را به‌شکل معادله‌ی (۲-۱۰۱) درنظر گرفته و می‌بینیم که A باید تابعی از T_2 باشد.

اما تفاوت عمده‌ی این حالت با حالت قبل، در معادله‌ی مرتبه‌ی ε^3 یعنی (۲-۱۱۳) است. با قراردادن رابطه‌های (۲-۱۰۰) و (۲-۱۰۱)، در معادله‌ی (۲-۱۱۳) و لحاظ کردن $A = A(T_2)$ و همچنین واردکردن عبارت $\cos\left(\Omega_1 T_0\right)$ به‌صورت $\frac{1}{2}\left(e^{i\Omega_1 T_0} + e^{-i\Omega_1 T_0}\right)$ ، معادله‌ی (۲-۱۱۳) به‌شکل زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\omega_0^2 u_3 + D_0^2 u_3 = \\
&r_1 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + r_1 \bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0} + \left(3A^2\bar{A} - 2i\omega_0 D_2 A\right) e^{i\omega_0 T_0} + \left(3A\bar{A}^2 + 2i\omega_0 D_2 \bar{A}\right) e^{-i\omega_0 T_0} \\
&-\frac{r_2}{2}\left(A e^{i(\omega_0+\Omega_1)T_0} + A e^{i(\omega_0-\Omega_1)T_0} + \bar{A} e^{-i(\omega_0-\Omega_1)T_0} + \bar{A} e^{-i(\omega_0+\Omega_1)T_0}\right)
\end{aligned} \tag{۱۱۵-۲}$$

باتوجّه‌به معادله‌ی بالا، اگر ولتاژ اعمالی به پیزوالکتریک $V_{DC} + V_{AC}\cos(\Omega_1 t)$ باشد، به‌دلیل اینکه فرکانس Ω_1 نیز وارد معادله‌ها می‌شود، چند حالت را می‌توان درنظر گرفت.

الف: Ω_1 دور از $2\omega_0$ باشد.

ب: Ω_1 نزدیک به $2\omega_0$ باشد.

به‌ترتیب به بررسی هرکدام از این حالت‌ها می‌پردازیم و پاسخ را در هر حالت محاسبه می‌کنیم.

الف: Ω_1 دور از $2\omega_0$ باشد.

در این حالت پاسخ خصوصی معادله‌ی اصلی دارای ترم‌های سکولار خواهد بود، مگراینکه $3r_1A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A=0$ باشد. این حالت مشابه‌با زمانی است که در مد تماسی $V_p=V_{DC}$ باشد. درنتیجه پاسخ نیز به شکل معادله‌ی (۲-۱۱۰) خواهد بود.

ب: Ω_1 نزدیک‌به $2\omega_0$ باشد.

دراین‌صورت، حلّ ما به‌طور کامل متفاوت خواهد بود. برای تحلیل رفتار سیستم در حالت رزونانسی، به‌جای استفاده از پارامتر Ω_1، یک پارامتر تنظیم[1] به‌شکل σ تعریف می‌کنیم. که این پارامتر از لحاظ کیفی، میزان نزدیکی فرکانس طبیعی به فرکانس تحریک را نشان می‌دهد.

بدین‌منظور Ω_1 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Omega_1=2\omega_0+\varepsilon^2\sigma \tag{۲-۱۱۶}$$

که در این رابطه، $\sigma=O(1)$ است.

با اعمال رابطه‌ی (۲-۱۱۶) در معادله‌ی مرتبه‌ی سوم (۲-۱۱۵) داریم:

$$\begin{aligned}&\omega_0^2u_3+D_0^2u_3=\\&r_1A^3e^{3i\omega_0T_0}+r_1\bar{A}^3e^{-3i\omega_0T_0}+\left(3r_1A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A\right)e^{i\omega_0T_0}+\left(3r_1A\bar{A}^2+2i\omega_0D_2\bar{A}\right)e^{-i\omega_0T_0}\\&-\frac{r_2}{2}\left(Ae^{i\left(3\omega_0+\varepsilon^2\sigma\right)T_0}+Ae^{-i\left(\omega_0+\varepsilon^2\sigma\right)T_0}+\bar{A}e^{i\left(\omega_0+\varepsilon^2\sigma\right)T_0}+\bar{A}e^{-i\left(3\omega_0+\varepsilon^2\sigma\right)T_0}\right)\end{aligned} \tag{۲-۱۱۷}$$

که در این صورت برای حذف جمله‌های سکولار داریم (در رابطه‌ی بالا، براساس معادله‌ی (۲-۹۱)، $\varepsilon^2T_0=T_2$ است):

[1] Detunning Parameter

$$3r_1A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-\frac{r_2}{2}\left(\bar{A}e^{i\sigma T_2}\right)=0 \qquad (۱۱۸-۲)$$

برای حلّ این معادله، A را مطابق رابطه‌ی (۲-۱۰۴) فرض می‌کنیم و با قراردادن رابطه‌ی (۲-۱۰۴) در (۲-۱۱۸) و برابر صفر قراردادن قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم:

$$\begin{cases}\frac{3}{8}r_1a^3+\omega_0ab'=\frac{r_2a}{4}\cos\left(\sigma T_2-2b\right)\\ -\omega_0a'=\frac{r_2a}{4}\sin\left(\sigma T_2-2b\right)\end{cases} \qquad (۱۱۹-۲)$$

که در این دو رابطه، فرض‌بر این است که a و b هر دو تابعی از T_2 هستند و مشتق نیز برحسب T_2 گرفته می‌شود.

اگر تغییر متغیّر را به‌صورت زیر درنظر بگیریم:

$$\gamma=\sigma T_2-2b \qquad (۱۲۰-۲)$$

معادله‌های (۲-۱۱۹) به‌شکل زیر تبدیل می‌شوند.

$$\begin{cases}\frac{3}{8}r_1a^3+\frac{\omega_0a}{2}\left(\sigma-\gamma'\right)=\frac{r_2a}{4}\cos\left(\gamma\right)\\ -\omega_0a'=\frac{r_2a}{4}\sin\left(\gamma\right)\end{cases} \qquad (۱۲۱-۲)$$

برای مشخّص‌کردن خواصّ پاسخ دستگاه معادلات بالا، ابتدا نقاط منفرد این معادله‌ها را پیداکرده و حرکت را در حوالی این نقاط بررسی می‌کنیم. از آنجا که در نقطه‌ی منفرد، دامنه و فاز هیچ‌گونه تغییری نمی‌کنند، لذا پاسخ سیستم در نزدیکی این نقاط را پاسخ حالت پایدار[۱] می‌نامند [۵۷].

اکنون برای بررسی پاسخ حالت پایدار سیستم داریم:

$$a'=\gamma'=0 \;\rightarrow\; \begin{cases}\frac{3}{8}r_1a^3+\frac{\omega_0a}{2}\sigma=\frac{r_2a}{4}\cos\left(\gamma\right)\\ \frac{r_2a}{4}\sin\left(\gamma\right)=0\end{cases} \qquad (۱۲۲-۲)$$

---

[۱] Steady State Response

با حذف γ از معادله‌های بالا (به توان ۲ رساندن و جمع‌کردن دو معادله باهم)، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{3}{8}r_1a^3+\frac{\omega_0 a}{2}\sigma\right)^2=\left(\frac{r_2a}{4}\right)^2 \tag{۲-۱۲۳}$$

معادله‌ی بالا، در واقع دامنه‌ی a را به تابع تنظیم و دامنه‌ی تحریک مرتبط‌ساخته و به آن معادله‌ی پاسخ فرکانسی[۱] می‌گویند.

[۱] Frequency Response Equation

فصل سوم

استخراج معادله‌های مد متناوب

۳-۱ مقدّمه

در این بخش، رفتار غیر خطّی میکروسکوپ نیرواتمی به‌وسیله‌ی تئوری گرادیان کرنشی تحلیل‌شده است. در ابتدای این فصل، تئوری مکانیک تماسی[1] را توضیح‌داده و نیروهای برهم‌کنش بین نوک و نمونه را در مد متناوب مدّ نظر قرار می‌دهیم. سپس با بهره‌گیری از اصل همیلتون و براساس معادله‌های ساختاری تئوری گرادیان کرنشی، معادله‌ی حرکت و شرایط مرزی میکروتیر به‌دست خواهند آمد.

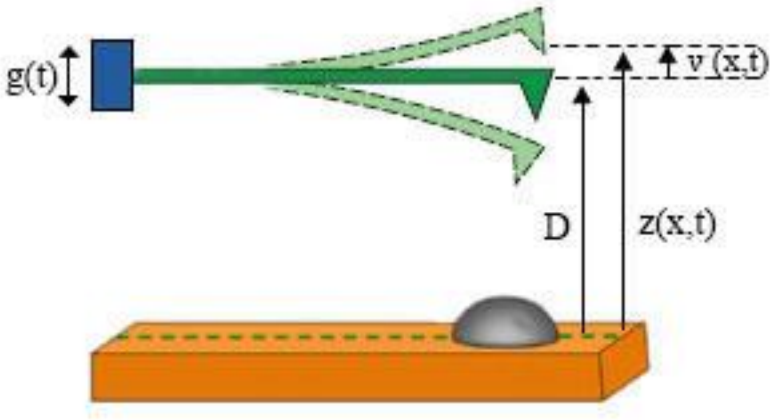
پس از آن، بااستفاده از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه، مانند فصل قبل، معادله‌های غیر خطّی را حل می‌کنیم. باتوجّه‌به اینکه فرکانس تحریک مربوط‌به حرکت پایه نیز در بررسی مد متناوب وارد معادله‌ها می‌شود، حالت‌های مورد بررسی بیشتر هستند و برای تک‌تک این حالت‌ها، معادله‌ی حالت پاسخ فرکانسی را به‌دست خواهیم آورد.

ازطرفی این فصل، خود به دو قسمت مجزا تقسیم می‌شود زیرا در نیروی برهم‌کنش بین نوک و نمونه که در صفحه‌های بعد خواهیم دید، می‌توان دو معادله‌ی متفاوت را براساس فاصله‌ی بین نوک و نمونه، برای این نیرو درنظر گرفت.

۳-۲ مدل‌سازی میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی در مد متناوب

در شکل (۳-۱) میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی درحال روبش سطح نمونه در مد متناوب نمایش داده‌شده است. این میکروتیر نیز مانند میکروتیر فصل ۲، دارای ضخامت h، طول L و عرض b است و شرایط فیزیکی و مکانیکی یکسانی دارد.

[1] Derjaguin-Muller-Toporov



شکل (۳-۱) میکروسکوپ نیرواتمی در حال روبش سطح نمونه در مد متناوب

درصورتی‌که نیروی برهم‌کنشی بین نوک و سطح نمونه وجودنداشته باشد، D فاصله‌ی جدایی تعادلی بین نوک و نمونه است. $z(x,t)$ فاصله‌ی لحظه‌ای بین نوک و سطح نمونه و $v(x,t)$ خیز میکروتیر نسبت‌به یک‌دستگاه مختصات متّصل‌به نگهدارنده‌ی تیر است.

همان‌طورکه در شکل (۳-۱) مشخّص است، میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی، به‌وسیله‌ی یک‌محرّک، تحت حرکت هارمونیکی با معادله‌ی زیر قرارگرفته است.

$$g(t) = h_g \cos(\Omega_2 t) \tag{۳-۱}$$

که در این رابطه، h_g دامنه‌ی تحریک و Ω_2 فرکانس تحریک است.

در این تحلیل نیز مانند فصل قبل، $w(x,t)$ خیز تیر نسبت‌به یک دستگاه اینرسی متّصل‌به پایه است و رابطه‌ی زیر بین پارامترهای گفته‌شده برقرار است.

$$w(x,t) = v(x,t) + g(t) \tag{۳-۲}$$

همچنین می‌توان به‌سادگی فاصله‌ی لحظه‌ای بین سطح نمونه و نوک تیر را به‌صورت زیر تعریف کرد.

$$z(x,t) = D + v(x,t) + g(t) = D + w(x,t) \tag{۳-۳}$$

۳-۲-۱ برهم‌کنش بین نوک و نمونه

مدل‌های متفاوتی برای شبیه‌سازی نیروی برهم‌کنش بین نوک و نمونه وجود دارد. اولین مدل تماسی، در سال ۱۸۸۲ و توسط هرتز معرفی شد که به‌همین‌دلیل به «مدل هرتزین» معروف است. در مدل هرتزین، هر دو سطح تماسی به‌صورت دو کره فرض می‌شوند و از نیروهای چسبندگی بین آن‌ها صرف نظر خواهد شد. پس باید نیروهای چسبندگی بین دو سطح آن‌قدر کوچک باشند که بتوان آن‌ها را نادیده‌گرفته و حذف کرد.

به‌غیراز هرتز، دانشمندان دیگری نیز مدل‌های خود را ارائه دادند [۵۸] که معروف‌ترین آن‌ها، دو مدل JKR[۱] و DMT هستند که درمقایسه با سایر روش‌ها، از دقّت بالایی برخوردارند [۵۹].

هرکدام از این دو مدل، برای شرایط خاصّی مناسب هستند. بدین‌صورت‌که از مدل JKR برای مدل‌کردن تماس بین نوک‌های بلند و سطوح نرم با چسبندگی زیاد استفاده‌شده و از مدل DMT برای مدل‌کردن تماس بین نوک‌های کوتاه و سطوح سخت با چسبندگی کم استفاده می‌شود.

در این تحقیق مدل DMT مناسب است زیرا جنس مادّه‌ی مورد نظر را آن‌طور که در این بررسی‌ها مرسوم است، HOPG[۲] درنظر گرفته‌ایم که مادّه‌ای سخت با چسبندگی پایین است و فرض‌بر آن است که تیر ما، از نوک‌های تیز برای روبش سطح نمونه استفاده می‌کند.

در تئوری DMT، نیروهای برهم‌کنش به‌وسیله‌ی نیروهای وان‌دروالسی و نیروهای تماسی DMT بین رأس کروی نوک با شعاع R و یک سطح هموار، مدل می‌شوند.

می‌توان نیروهای برهم‌کنش بین نوک و سطح نمونه را به‌شکل زیر درنظر گرفت [۳۲، ۶۰].

[۱] Jhonson,Kendall, Roberts
[۲] Highly Oriented Pyrolytic Graphite

$$F_{tsd}(z_0)=\begin{cases}-\dfrac{HR}{6{z_0}^2} & ,z_0>a_0\\ -\dfrac{HR}{6{a_0}^2}+\dfrac{4}{3}E^*\sqrt{R}\left(a_0-z_0\right)^{\frac{3}{2}} & ,z_0\le a_0\end{cases} \qquad (۴-۳)$$

در این رابطه، H ثابت هاماکر، R شعاع نوک، z_0 فاصله آنی بین نوک و سطح و a_0 که پارامتر مهمی در این تئوری است، فاصله‌ی بین مولکولی است که تماس در آن آغاز می‌شود. علاوه‌بر این پارامترها، E^* مدول الاستیک مؤثر بین نوک و نمونه است که از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [۳۲].

$$\frac{1}{E^*}=\frac{1-{\upsilon_t}^2}{E_t}+\frac{1-{\upsilon_s}^2}{E_s} \qquad (۵-۳)$$

υ_t ، υ_s، E_t و E_s به‌ترتیب، ضرایب پواسان و مدول‌های الاستیک نوک و نمونه هستند.

باتوجّه‌به رابطه‌ی (۳-۴) می‌توان دریافت که بسته‌به اینکه نوک در چه فاصله‌ای از نمونه قرارداشته باشد، ماهیّت نیروهای بین این دو می‌تواند به‌صورت دافعه یا جاذبه‌ی وان‌دروالسی باشد. طبق همین رابطه، زمانی‌که تماس برقرار می‌شود، ماهیت نیروهای بین نوک و سطح نمونه، وان‌دروالس بوده و برابر با $\dfrac{HR}{6{a_0}^2}$ است.

علاوه‌بر این نیروها، اگر اتلاف انرژی در سیستم قابل ملاحظه باشد، در حالت $z_0<a_0$ نیروهای ویسکوالاستیک نیز با رابطه‌ی زیر اضافه خواهند شد.

$$F_{tsv}(z,\dot{z})=D_{ts}\left(a_0-z_0\right)\dot{z}_0 \qquad (۶-۳)$$

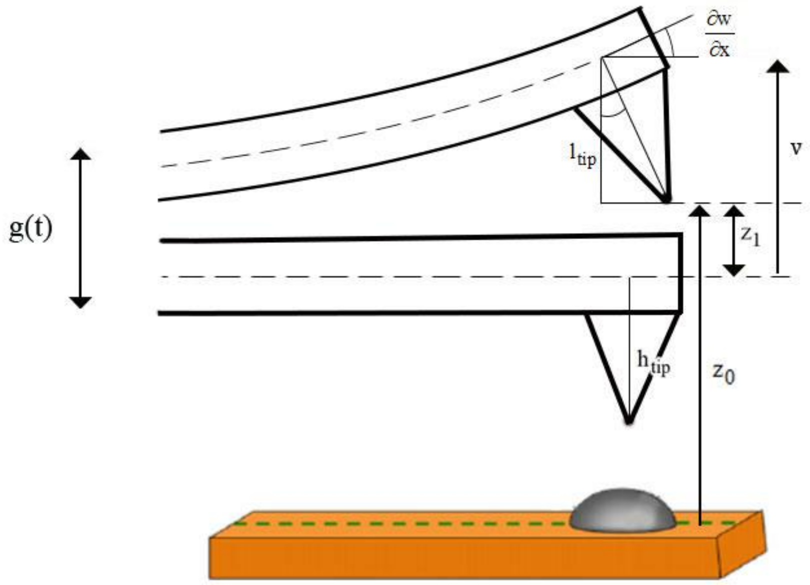
و درنهایت، برهم‌کنش بین نوک و سطح نمونه، بافرض وجود اتلاف انرژی به‌شکل زیر خواهد بود [۵۸].

$$F_{ts}\left(z_0,\dot{z}_0\right)=F_{tsd}+F_{tsv}=\begin{cases}-\dfrac{HR}{6{z_0}^2} & ,z_0>a_0\\ -\dfrac{HR}{6{a_0}^2}+\dfrac{4}{3}E^*\sqrt{R}\left(a_0-z_0\right)^{\frac{3}{2}}+D_{ts}\left(a_0-z_0\right)\dot{z}_0 & ,z_0\le a_0\end{cases} \qquad (۷-۳)$$

که در دو رابطه‌ی اخیر، D_{ts} ضریب میرایی بین نوک و سطح نمونه است.

۳-۲-۲ رابطه‌ی مکان نوک نسبت‌به سطح نمونه

در روابط عنوان‌شده برای نیروی برهم‌کنش بین نوک و نمونه، از پارامتر z_0 نام بردیم. در این بخش می‌خواهیم این پارامتر را به‌صورت هندسی پیدا کرده و رابطه‌ای برای آن تعریف کنیم.



شکل (۳-۲): هندسه‌ی مکان نوک نسبت‌به سطح نمونه

باتوجّه‌به شکل (۳-۲) می‌توان z_0 را که فاصله‌ی آنی بین نوک و سطح نمونه است، به‌صورت زیر نوشت.

$$z_0 = w(L,t) - l_{tip} + h_{tip} + C = w(L,t) + h_{tip}\left(1 - \frac{\partial w(L,t)}{\partial x}\right) + C \qquad (۳-۸)$$

که در این رابطه، همان‌طور که در شکل مشخّص است، h_{tip} ارتفاع نوک و l_{tip} فاصله‌ی عمودی انتهای نوک از میانه‌ی تیر و C یک عدد ثابت است. این پارامترها را می‌توان به‌سادگی باتوجّه‌به تصویر درک کرد.

۳-۲-۳ معادله‌ی دیفرانسیل و شرایط مرزی میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی در مد متناوب

به‌دست‌آوردن روابط و معادله‌های مد متناوب، تشابه زیادی با مد تماسی دارد و به‌همین‌دلیل معادله‌ها را به‌صورت خلاصه و تنها با ذکر تفاوت‌ها عنوان می‌کنیم.

اوّلین و مهم‌ترین نکته، این است که $w(x,t)$ در مد متناوب برابربا $v(x,t)+g(t)$ یا رابطه‌ی (۳-۲) است. درنتیجه در روابط به‌دست‌آمده برای انرژی پتانسیل و جنبشی، باید از رابطه‌ی (۳-۲) به‌جای w استفاده کرد.

دومین نکته نیز این است که در مد متناوب، دیگر کار نیروی غیر پایستار صفر نیست و باید برهم‌کنش بین نوک و سطح نمونه را بااستفاده از رابطه‌ی زیر وارد تحلیل کنیم. اگر $f(x,t)$ معرّف نیروی واردشده بر تیر یک‌سر درگیر باشد، داریم:

$$\delta w_{nc}=\int_0^L f(x,t)\delta w(x,t)dx=\int_0^L f(x,t)\delta v(x,t)dx \qquad (۳-۹)$$

در میکروسکوپ نیرواتمی، دو نوع نیرو به میکروتیر وارد می‌شوند. اولین نیرو، نیروی برهم‌کنش بین نوک و نمونه است که به‌صورت مفصّل درباره‌ی آن توضیح دادیم و با رابطه‌ی (۳-۷) عنوان می‌شود و دومین نیرو، نیروی میرایی است که تابع ضریب میرایی محیط عملکرد میکروسکوپ است. در این تحقیق فرض‌برآن است که از میکروسکوپ در محیط هوا استفاده می‌شود. درنتیجه باتوجّه‌به موارد گفته‌شده، می‌توان نیروی واردشده بر تیر یک‌سر گیردار را به‌صورت زیر درنظر گرفت.

$$f(x,t)=F_{ts}(z_0,\dot{z}_0)\delta(x-L)-D_{air}\dot{w}(x,t) \qquad (۳-۱۰)$$

استفاده از $\delta(x-L)$ به این دلیل است که نیروی برهم‌کنش بین نوک و نمونه، تنها در محلّ نوک که همان انتهای تیر است اعمال می‌شود. لازم‌به یادآوری است که پیش‌از این فرض کرده‌ایم که نوک به‌صورت دقیق در انتهای میکروتیر قرارگرفته است.

درنهایت باافزودن رابطه‌ی (۳-۱۰) به معادله‌های به‌دست‌آمده برای مد تماسی و استفاده‌کردن از رابطه‌ی (۳-۲) به‌جای w، رابطه‌ی زیر برای حرکت میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی در مد متناوب به‌دست خواهد آمد.

$$\left(\rho A\right)_{eq}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)+S\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}-K\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}-\left(EA\right)_{eq}\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(Q)+\frac{\partial v}{\partial x}(Q')\right\}+n_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$+R\left[\frac{\partial v}{\partial x}(Q''')+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(Q'')\right]-\left(F_{ts}+h_{tip}F'_{ts}\right)\delta\left(x-L\right)+D_{air}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+h_{tip}\frac{\partial v}{\partial x\partial t}+\frac{\partial g}{\partial t}\right)=0 \qquad (۳-۱۱)$$

و شرایط مرزی در این حالت عبارتند از:

$$-S\frac{\partial^3 w\left(L,t\right)}{\partial x^3}+K\frac{\partial^5 w\left(L,t\right)}{\partial x^5}+\left(EA\right)_{eq}\left(\frac{\partial w\left(L,t\right)}{\partial x}Q\right)-RQ''\frac{\partial w\left(L,t\right)}{\partial x}$$
$$+n_1\frac{\partial w\left(L,t\right)}{\partial x}+K_n w\left(L,t\right)+m_t\frac{\partial^2 w\left(L,t\right)}{\partial t^2}=0 \qquad (۳-۱۲)$$

$$-S\frac{\partial^3 w\left(0,t\right)}{\partial x^3}+K\frac{\partial^5 w\left(0,t\right)}{\partial x^5}+\left(EA\right)_{eq}\left(\frac{\partial w\left(0,t\right)}{\partial x}Q\right)-RQ''\frac{\partial w\left(0,t\right)}{\partial x}$$
$$+n_1\frac{\partial w\left(0,t\right)}{\partial x}=0 \qquad (۳-۱۳)$$

$$\left(EA\right)_{eq}Q-RQ''-n_1=0 \qquad (۳-۱۴)$$

$$S\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2}-K\frac{\partial^4 w(L,t)}{\partial x^4}+R\frac{\partial w(L,t)}{\partial x}Q'+n_2+K_1 q^2\frac{\partial w(L,t)}{\partial x}-hF_{ts}=0 \qquad (۳-۱۵)$$

$$S\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}-K\frac{\partial^4 w(0,t)}{\partial x^4}+R\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}Q'+n_2+hF_{ts}=0 \qquad (۳-۱۶)$$

$$Q'A=0 \qquad (۳-۱۷)$$

$$K\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \qquad (۳-۱۸)$$

مانند فصل قبل، قدم بعدی بی‌بعدسازی معادله است. در این راستا پارامترهای بی‌بعد را مانند (۲-۷۲) تا (۲-۷۶) تعریف‌کرده و معادله‌ی بی‌بعد نهایی را به‌دست می‌آوریم.

درنتیجه، معادله‌ی حرکت بی‌بعد به‌شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}+\tilde{S}\frac{\partial^4 V}{\partial X^4}-\tilde{K}\frac{\partial^6 V}{\partial X^6}-P\left[\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\left(\tilde{Q}\right)+\frac{\partial V}{\partial X}\left(\tilde{Q}'\right)\right]$$
$$+\tilde{R}\left[\frac{\partial V}{\partial X}\left(\tilde{Q}'''\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\left(\tilde{Q}''\right)\right]+N_1\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}-\tilde{F}+J\frac{\partial V}{\partial \tau}+J\frac{\partial G}{\partial \tau}-\tilde{h}_{tip}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial X}$$
$$+J\tilde{h}_{tip}\frac{\partial V}{\partial X\partial \tau}=0 \qquad (۱۹-۳)$$

همچنین دو ضریب بی‌بعد جدید زیر نیز در این معادله حضور دارند.

$$\tilde{F}=\frac{F_{ts}\delta(x-L)L^3}{E_I I} \qquad (۲۰-۳)$$

$$J=D_{air}\sqrt{\frac{L^4}{\rho_A A E_I I}} \qquad (۲۱-۳)$$

در مرحله‌ی بعد، موضوع مورد بحث ما به دوقسمت تقسیم می‌شود:

قسمت اوّل که در آن فاصله‌ی بین نوک و سطح نمونه به‌صورت $z_0 > a_0$ است و درنتیجه باید از عبارت اوّل معادله‌ی (۳-۷) برای نشان‌دادن نیروی برهم‌کنش بین نوک و نمونه استفاده کرد.

قسمت دوم نیز مربوط به زمانی است که نوک در فاصله‌ی $z_0 \le a_0$ نسبت‌به نمونه قرار دارد و درنتیجه از عبارت دوم معادله‌ی (۳-۷) استفاده خواهیم کرد.

رابطه‌ی برهم‌کنش بین نوک و نمونه یعنی رابطه‌ی (۳-۷) را به‌صورت بسط تیلور نوشته و داریم:

$$F_{ts}\left(z_0,\dot{z}_0\right)=\begin{cases}-\theta_1-2\theta_1\dfrac{dW\left(X,\tau\right)}{dX}+2\theta_2 W\left(X,\tau\right) & ,z_0>a_0\\ -\theta_4+\theta_5+\theta_6 z_0+\theta_7 {z_0}^2+\theta_8 {z_0}^3+\theta_9\dfrac{dz_0}{d\tau}-\theta_{10} z_0\dfrac{dz_0}{d\tau} & ,z_0\le a_0\end{cases} \qquad (۲۲-۳)$$

که در رابطه‌ی بالا، ضرایب θ_1 تا θ_{10}عبارتند از:

$$\theta_1=-\frac{HR}{6{\tilde{h}_{tip}}^2} \qquad \theta_2=\frac{HR}{6{\tilde{h}_{tip}}^3} \qquad (۲۳-۳)$$

$$\theta_3=\frac{L^3}{E_I I}\delta\left(x-L\right) \qquad \theta_4=-\frac{HR}{6{a_0}^2} \qquad (۲۴-۳)$$

$$\theta_5 = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R a_0^{\,3}} \qquad \theta_6 = \frac{4L}{2} E^* \sqrt{R a_0} \tag{۳-۲۵}$$

$$\theta_7 = \frac{4L^2}{3\times 16} E^* \sqrt{\frac{R}{a_0}} \qquad \theta_8 = \frac{4L^3}{3\times 16} E^* \sqrt{\frac{R}{a_0^{\,3}}} \tag{۳-۲۶}$$

$$\theta_9 = D_{ts} a_0 \qquad \theta_{10} = D_{ts} L \tag{۳-۲۷}$$

۳-۳ قسمت اوّل: فاصله‌ی نوک و نمونه به‌صورت $z_0 > a_0$

برای اوّلین قسمت تحلیل، از عبارت اوّل رابطه‌ی (۳-۷) استفاده می‌کنیم.

برای حلّ معادله‌ی مشتق جزئی (۳-۱۹) و تحلیل فرکانسی سیستم، باید توابع زمان و مکان گسسته شوند. برای این‌منظور، بااستفاده از روش گلرکین داریم:

$$V(X,\tau) = \chi(X)\varphi(\tau) \tag{۳-۲۸}$$

که $\varphi(\tau)$ مختصات تعمیم‌یافته و $\chi(X)$ تابع مقایسه‌ای است و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\chi(X) = \cos(\beta X) - \cosh(\beta X) - \frac{\cos(\beta)+\cosh(\beta)}{\sin(\beta)+\sinh(\beta)}\left(\sin(\beta X) - \sinh(\beta X)\right) \tag{۳-۲۹}$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۳-۲۹) در معادله‌ی (۳-۱۹) و ضرب طرفین رابطه در $\chi(X)$ و درنهایت انتگرال‌گیری از طرفین، معادله‌ی حرکت سیستم غیر خطّی، در مد متناوب و در زمانی‌که $z_0 > a_0$ باشد، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + \omega_0^{\,2}\varphi(\tau) + r_1\varphi(\tau)^3 + r_3\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} - m_1 g(\tau) + m_2\frac{dg(\tau)}{d\tau} + m_3\frac{d^2 g(\tau)}{d\tau^2}\\&+\theta_1\theta_3\alpha_9 = 0\end{aligned} \tag{۳-۳۰}$$

همچنین ضرایب r_1، r_3، m_1، m_2 و m_3 عبارتنداز:

$$\omega_0^{\,2} = \frac{1}{\alpha_0}\left(V_P N_1\alpha_1 - \tilde{K}\alpha_2 + \tilde{S}\alpha_3 + 2\tilde{h}_{tip}\left(\theta_1\theta_3\alpha_1 - \theta_2\theta_3\alpha_8\right) + 2\theta_1\theta_3\alpha_8 - 2\theta_2\theta_3\alpha_0\right) \tag{۳-۳۱}$$

$$r_1 = \frac{1}{\alpha_0}\left(\tilde{R}\left(2\alpha_3 + 8\alpha_7 + 2\alpha_5\right) - P\alpha_6\right) \tag{۳-۳۲}$$

$$r_3 = J\left(\frac{\tilde{h}_{tip}\alpha_8}{\alpha_0}+1\right) \quad (۳۳-۳)$$

$$m_1 = 2\theta_2\theta_3\frac{\alpha_9}{\alpha_0} \quad (۳۴-۳)$$

$$m_2 = \frac{\alpha_9}{\alpha_0} \quad (۳۵-۳)$$

$$m_3 = J\frac{\alpha_9}{\alpha_0} \quad (۳۶-۳)$$

همچنین پیش از این در روابط (۲-۸۱) تا (۲-۸۸)، ضرایب α_1 تا α_7 تعریف‌شده‌اند. ضریب‌های α_8 و α_9 نیز به‌شکل زیر هستند.

$$\alpha_8 = \int_0^1\left(\frac{d\chi(X)}{dX}\right)(\chi(X))dX \quad (۳۷-۳)$$

$$\alpha_9 = \int_0^1\chi(X)\,dX \quad (۳۸-۳)$$

۳-۳-۱ تحلیل ارتعاشات غیر خطّی میکروتیر در مد متناوب و زمانی‌که $\mathbf{z_0 > a_0}$ باشد:

اوّل از همه، باید درنظر داشت که در زمان اعمال ولتاژ، می‌توان ولتاژ اعمالی‌به پیزوالکتریک را به دو صورت V_{DC} و $V_{DC}+V_{AC}\cos(\Omega_1 t)$ درنظر گرفت. بااین‌فرض، به‌سراغ حلّ معادله‌ی (۳-۱۹) از روش مقیاس‌های چندگانه حل می‌شود.

روش مقیاس‌های چندگانه:

برای تحلیل رفتار دینامیکی غیر خطّی میکروسکوپ نیرواتمی دینامیکی در مد متناوب نیز، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌شود.

حالت اوّل: $\mathbf{V_p = V_{DC}}$

اگر ولتاژ $V_p = V_{DC}$ باشد، جملات مرتبه‌های مختلف ε عبارتنداز:

$$[\varepsilon]: \qquad \omega_0^2 u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial {T_0}^2} = 0 \quad (۳۹-۳)$$

$$\left[\varepsilon^2\right]: \quad \omega_0^2 u_2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial {T_0}^2} = -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} \tag{۴۰-۳}$$

$$\left[\varepsilon^3\right]: \quad \begin{aligned} &\omega_0^2 u_3 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial {T_0}^2} = -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial {T_1}^2} + r_1 u_1^3 - r_3\frac{\partial u_1}{\partial T_0} \\ &-\tilde{h}_g\left(m_1\cos(\Omega_2 T_0) + m_2{\Omega_2}^2\cos(\Omega_2 T_0) + m_3\Omega_2\sin(\Omega_2 T_0)\right)\end{aligned} \tag{۴۱-۳}$$

که در این معادله‌ها؛ ضرایب موجود از روابط (۳-۳۱) تا (۳-۳۶) به‌دست می‌آیند.

لازم‌به‌ذکر است که $\tilde{h}_g$ دامنه‌ی تحریک بی‌بعد $g(t)$ است که با رابطه‌ی (۳-۱) عنوان‌شده است. علاوه‌براین، برای قراردادن عبارت میرایی و تحریک پایه در مرتبه‌ی سوم، $\tilde{h}_g$ در ε^3 و r_3 در ε^2 ضرب شده‌اند؛ این کار برای هم‌مرتبه‌سازی انجام شده است.

پاسخ معادله‌ی (۳-۲۴) به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود.

$$u_1 = A(T_1,T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1,T_2)e^{-i\omega_0 T_0} \tag{۴۲-۳}$$

با قراردادن پاسخ معادله‌ی اوّل (۳-۴۲) در معادله‌ی (۳-۴۰) و برابر صفر قراردادن جمله‌های سکولار، داریم:

$$D_1 A = 0 \rightarrow A = A(T_2) \quad \text{و} \quad u_2 = 0 \tag{۴۳-۳}$$

یعنی ضریب A باید مستقل از T_1 باشد. با جای‌گذاری u_1 و u_2 و لحاظ‌کردن $A = A(T_2)$ در معادله‌ی (۳-۴۱) داریم:

$$\begin{aligned} &\omega_0^2 u_3 + D_0^2 u_3 = r_1 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + r_1\bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0} \\ &+\left(3r_1 A^2\bar{A} - 2i\omega_0 D_2 A - r_3 A i\omega_0\right)e^{i\omega_0 T_0} + \left(3r_1 A\bar{A}^2 + 2i\omega_0 D_2\bar{A} + r_3 A i\omega_0\right)e^{-i\omega_0 T_0} \\ &-\frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1 + m_2{\Omega_2}^2 + m_3\Omega_2]e^{i\Omega_2 T_0} - \frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1 + m_2{\Omega_2}^2 - m_3\Omega_2]e^{-i\Omega_2 T_0}\end{aligned} \tag{۴۴-۳}$$

برای داشتن جواب معتبر، باید جمله‌های سکولار را از معادله‌ی فوق حذف کرد.

باتوجّه‌به معادله‌ی (۳-۴۴)، دو حالت ممکن است:

الف: Ω_2 دور از ω_0

ب: Ω_2 نزدیک به ω_0

در ادامه به تحلیل هر یک از دو حالت ذکرشده می‌پردازیم.

الف: Ω_2 دور از ω_0

برای حذف سکولارترم‌ها در این حالت داریم:

$$3r_1A^2\bar{A} - 2i\omega_0D_2A - r_3Ai\omega_0 = 0 \tag{۴۵-۳}$$

برای حلّ این معادله‌ی دیفرانسیل، متداول است که A را به‌شکل قطبی به‌صورت زیر درنظر می‌گیرند؛

$$A = \frac{1}{2}ae^{ib} \tag{۴۶-۳}$$

فرض‌بر این است که a و b هردو تابعی از T_2 هستند. با جای‌گذاری این رابطه در معادله‌ی (۳-۴۴) و جداکردن قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{8}r_1a^3 + \omega_0ab' = 0 \\ \omega_0a' + \frac{r_2}{2}a\omega_0 = 0 \end{cases} \tag{۴۷-۲}$$

که در این رابطه علامت پریم، نشان‌گر مشتق بر حسب T_2 است. براساس روابط بالا خواهیم داشت:

$$a = \frac{a_0}{\frac{r_3}{2}T_2 + 1} \tag{۴۸-۳}$$

$$b = -\frac{3}{8}\frac{r_1}{\omega_0}a^2T_2 + b_0 \tag{۴۹-۳}$$

که درنهایت، A به‌شکل زیر خواهد بود.

$$A(T_2) = \frac{a_0}{r_3T_2 + 2}e^{i\left(-\frac{3}{8}\frac{r_1}{\omega_0}a^2T_2 + b_0\right)} \tag{۵۰-۳}$$

پاسخ معادله‌ی (۳-۳۰) برای حالتی که میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی در مد متناوب فعال باشد، فاصله‌ی نوک از نمونه $z_0 > a_0$ باشد، ولتاژ اعمالی V_{DC} باشد و Ω_2 نیز دور از ω_0 باشد، به‌صورت زیر است.

$$\varphi(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\frac{a_0}{r_3T_2+2}\left(e^{i\left(-\frac{3}{8}\frac{r_1}{\omega_0}a^2T_2+b_0\right)}e^{i\omega_0T_0}+e^{-i\left(-\frac{3}{8}\frac{r_1}{\omega_0}a^2T_2+b_0\right)}e^{-i\omega_0T_0}\right)+O\left(\varepsilon^3\right) \qquad (۵۱\text{-}۳)$$

ب: Ω_2 نزدیک به ω_0

امّا حالت دیگری نیز در این حل ممکن است و آن این است که $\Omega_2 \approx \omega_0$ شود، در این حالت برای حذف سکولارترم‌ها داریم:

$$\Omega_2 \approx \omega_0 \quad \rightarrow \quad \Omega_2=\omega_0+\varepsilon^2\sigma \qquad (۵۲\text{-}۳)$$

$$3r_1A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-r_3Ai\omega_0=\frac{\tilde{h}_g}{2}\left[m_1+m_2\omega_0{}^2+m_3\omega_0\right]e^{i\sigma T_2} \qquad (۵۳\text{-}۳)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2\omega_0a'-\dfrac{r_3\omega_0a}{2}=m_4\sin(\sigma T_2-b)\\ 2\omega_0ab'+\dfrac{3}{8}r_1a^3=m_4\cos(\sigma T_2-b)\end{cases} \qquad (۵۴\text{-}۳`)$$

$$\gamma=\sigma T_2-b \quad \rightarrow \quad b'=\sigma-\gamma'$$

$$\left(-2\omega_0a'-\frac{r_3\omega_0a}{2}\right)^2+\left(2\omega_0a\left(\sigma-\gamma'\right)+\frac{3}{8}r_1a^3\right)^2=\left(\frac{\tilde{h}_gm_4}{2}\right)^2 \qquad (۵۵\text{-}۳)$$

در حالت پایدار: $a'=\gamma'=0$

$$\left(-\frac{r_3\omega_0a}{2}\right)^2+\left(2\omega_0a\sigma+\frac{3}{8}r_1a^3\right)^2=\left(\frac{\tilde{h}_gm_4}{2}\right)^2 \qquad (۵۶\text{-}۳)$$

در معادله‌های بالا، $m_4=\left[m_1+m_2\omega_0{}^2+m_3\omega_0\right]$.

معادله‌ی (۳-۳۹) همان معادله‌ی پاسخ حالت فرکانسی میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی در مد متناوب و برای حالتی است که نوک در فاصله‌ی $z_0 > a_0$ قرار داشته، ولتاژ واردشده به پیزوالکتریک $V_p = V_{DC}$ و همچنین Ω_2 نزدیک به ω_0 باشد.

حالت دوم: $\mathbf{V_p = V_{DC} + V_{AC} \cos(\Omega_1 t)}$.

فرض می‌کنیم که ولتاژ اعمالی‌به میکروتیر به‌شکل $V_{DC} + \varepsilon^2 V_{AC} \cos(\Omega_1 t)$ باشد؛ دراین‌صورت عبارت غیر خطّی و تحریک، هر دو در بسط ε^3 ظاهر می‌شوند و داریم:

$$[\varepsilon]: \quad \omega_0^2 u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial {T_0}^2} = 0 \tag{۳-۵۷}$$

$$\left[\varepsilon^2\right]: \quad \omega_0^2 u_2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial {T_0}^2} = -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} \tag{۳-۵۸}$$

$$\left[\varepsilon^3\right]: \quad \begin{aligned} &\omega_0^2 u_3 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial {T_0}^2} = -\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} + r_1 u_1^3 - r_2 \cos\left(\Omega_1 T_0\right) u_1 \\ &-r_3 \frac{\partial u_1}{\partial T_0} - \tilde{h}_g \left(m_1 \cos(\Omega_2 T_0) + m_2 {\Omega_2}^2 \cos(\Omega_2 T_0) + m_3 \Omega_2 \sin(\Omega_2 T_0)\right) \end{aligned} \tag{۳-۵۹}$$

که در معادله‌ی اخیر ω_0، r_1، r_3، m_1، m_2 و m_3 همان ضرایب (۳-۳۱) تا (۳-۳۶) هستند و ضریب r_2 نیز از رابطه‌ی (۲-۱۱۴) به‌دست می‌آید.

برای حلّ این حالت نیز مانند قسمت‌های قبل داریم:

$$u_1 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega_0 T_0} \tag{۳-۶۰}$$

$$D_1 A = 0 \rightarrow A = A(T_2) \quad \text{و} \quad u_2 = 0 \tag{۳-۶۱}$$

در ادامه داریم:

$$
\begin{aligned}
&\omega_0^2 u_3 + D_0^2 u_3 = r_1 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + r_1 \bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0} \\
&+\left(3r_1 A^2 \bar{A} - 2i\omega_0 D_2 A - r_3 A i\omega_0\right) e^{i\omega_0 T_0} + \left(3r_1 A \bar{A}^2 + 2i\omega_0 D_2 \bar{A} + r_3 \bar{A} i\omega_0\right) e^{-i\omega_0 T_0} \\
&-\frac{r_2}{2}\left(A e^{i(\omega_0+\Omega_1)T_0} + A e^{i(\omega_0-\Omega_1)T_0} + \bar{A} e^{-i(\omega_0-\Omega_1)T_0} + \bar{A} e^{-i(\omega_0+\Omega_1)T_0}\right) \\
&-\frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1 + m_2 \Omega_2{}^2 + m_3 \Omega_2] e^{i\Omega_2 T_0} - \frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1 + m_2 \Omega_2{}^2 - m_3 \Omega_2] e^{-i\Omega_2 T_0}
\end{aligned}
\tag{۶۲-۳}
$$

باتوجّه‌به معادله‌ی بالا، اگر ولتاژ اعمالی‌به پیزوالکتریک در مد متناوب به‌صورت $V_{DC} + V_{AC}\cos(\Omega_1 t)$ بوده و فاصله‌ی بین نوک و نمونه $z_0 > a_0$ باشد، برای حذف سکولارترم‌ها، چندحالت را می‌توان درنظر گرفت:

الف: Ω_1 دور از $2\omega_0$ و Ω_2 نیز دور از ω_0 ($\Omega_1 \neq 2\omega_0$ & $\Omega_2 \neq \omega_0$)

ب: Ω_1 دور از $2\omega_0$ و Ω_2 نزدیک‌به ω_0 ($\Omega_1 \neq 2\omega_0$ & $\Omega_2 \approx \omega_0$)

پ: Ω_1 نزدیک‌به $2\omega_0$ و Ω_2 دور از ω_0 ($\Omega_1 \approx 2\omega_0$ & $\Omega_2 \neq \omega_0$)

ت: Ω_1 نزدیک‌به $2\omega_0$ و Ω_2 نیز نزدیک‌به ω_0 ($\Omega_1 \approx 2\omega_0$ & $\Omega_2 \approx \omega_0$)

به‌ترتیب به بررسی هرکدام از این حالت‌ها می‌پردازیم و پاسخ را در هرکدام از حالت‌ها محاسبه می‌کنیم.

الف: Ω_1 دور از $2\omega_0$ و Ω_2 نیز دور از ω_0

برای حذف سکولارترم‌ها در این حالت داریم:

$$
3r_1 A^2 \bar{A} - 2i\omega_0 D_2 A - r_3 A i\omega_0 = 0 \tag{۶۳-۳}
$$

این رابطه کاملا شبیه‌به معادله‌ی (۳-۴۵) است. پس این حالت نیز دقیقا مانند زمانی می‌شود که ولتاژ اعمالی V_{DC} بوده و Ω_2 نیز دور از ω_0 باشد.

درنتیجه a، b و A از روابط (۳-۴۸)، (۳-۴۹) و (۳-۵۰) به‌دست می‌آیند.

ب: Ω_1 دور از $2\omega_0$ و Ω_2 نزدیک به ω_0

در این حالت برای حذف عبارت‌های سکولار داریم:

$$3r_1A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-r_3Ai\omega_0=\frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1+m_2{\Omega_2}^2+m_3\Omega_2] \tag{۶۴-۳}$$

این معادله کاملا شبیه به معادله‌ی (۳-۵۳) است. پس معادله‌ی پاسخ حالت فرکانسی در این حالت نیز مانند معادله‌ی (۳-۵۶) می‌شود.

پ: Ω_1 نزدیک‌به $2\omega_0$ و Ω_2 دور از ω_0

در این حالت برای حذف سکولارترم‌ها داریم:

$$\left(3r_1A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-r_3Ai\omega_0\right)e^{i\omega_0T_0}-\frac{r_2}{2}\left(\bar{A}e^{i(\Omega_1-\omega_0)T_0}\right)=0 \tag{۶۵-۳}$$

$$\Omega_1 \approx 2\omega_0 \;\Rightarrow\; \Omega_1=2\omega_0+\varepsilon^2\sigma \tag{۶۶-۳}$$

$$3r_1A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-r_3Ai\omega_0=\frac{r_2}{2}\bar{A}e^{i\sigma T_2} \tag{۶۷-۳}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\omega_0a'+\dfrac{r_3\omega_0a}{2}=-\dfrac{r_2a}{4}\sin\left(\sigma T_2-2b\right)\\ \omega_0ab'+\dfrac{3}{8}r_1a^3=\dfrac{r_2a}{4}\cos\left(\sigma T_2-2b\right)\end{cases} \tag{۶۸-۳}$$

$$\gamma=\sigma T_2-2b \;\;\rightarrow\;\; 2b'=\sigma-\gamma'$$

$$\left(\omega_0a'+\frac{r_3\omega_0a}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega_0a}{2}\left(\sigma-\gamma'\right)+\frac{3}{8}r_1a^3\right)^2=\left(\frac{r_2a}{4}\right)^2 \tag{۶۹-۳}$$

در حالت پایدار: $a'=\gamma'=0$

$$\left(\frac{r_3\omega_0a}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega_0a\sigma}{2}+\frac{3}{8}r_1a^3\right)^2=\left(\frac{r_2a}{4}\right)^2 \tag{۷۰-۳}$$

و بالاخره معادله‌ی فوق، معادله‌ی پاسخ حالت فرکانسی میکروتیر در مد متناوب و در شرایطی است که ولتاژ پیزوالکتریک $V_p = V_{DC} + V_{AC}\cos(\Omega_1 t)$ باشد و نوک میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی در فاصله‌ی $z_0 > a_0$ نسبت‌به نمونه قرارداشته و همچنین ولتاژ Ω_1 نزدیک‌به ω_0 باشد.

ت: Ω_1 نزدیک به $2\omega_0$ و Ω_2 نیز نزدیک به ω_0

برای یافتن جمله‌های سکولار در این حالت، داریم:

$$\left(3r_1A^2\bar{A} - 2i\omega_0 D_2 A - r_3 A i\omega_0 e^{i\omega_0 T_0}\right)e^{i\omega_0 T_0} - \frac{r_2}{2}\bar{A}e^{i(\Omega_1-\omega_0)T_0} - \frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1 + m_2\Omega_2{}^2 + m_3\Omega_2]e^{i\Omega_2 T_0} = 0 \qquad (۷۱-۳)$$

$$\begin{cases}\Omega_1 \approx 2\omega_0 \;\Rightarrow\; \Omega_1 = 2\omega_0 + \varepsilon^2\sigma_1\\ \Omega_2 \approx \omega_0 \;\Rightarrow\; \Omega_2 = \omega_0 + \varepsilon^2\sigma_2\end{cases} \qquad (۷۲-۳)$$

$$3r_1A^2\bar{A} - 2i\omega_0 D_2 A - r_3 A i\omega_0 = \frac{r_2}{2}\bar{A}e^{i\sigma_1 T_2} + \frac{\tilde{h}_g}{2}\left[m_1 + m_2\omega_0{}^2 + m_3\omega_0\right]e^{i\sigma_2 T_2} \qquad (۷۳-۳)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\omega_0 a' + \dfrac{r_3\omega_0 a}{2} = -\dfrac{r_2 a}{4}\sin\left(\sigma_1 T_2 - 2b\right) - \dfrac{\tilde{h}_g m_4}{2}\sin\left(\sigma_2 T_2 - b\right)\\[2ex] \omega_0 a b' + \dfrac{3}{8}r_1 a^3 = \dfrac{r_2 a}{4}\cos\left(\sigma_1 T_2 - 2b\right) + \dfrac{\tilde{h}_g m_4}{2}\cos\left(\sigma_2 T_2 - b\right)\end{cases} \qquad (۷۴-۳)$$

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_1 T_2 - 2b\right) \;\&\; \left(\sigma_2 T_2 - b\right) = \text{constant}\\ &\Rightarrow\; \sigma_1 = 2b' \;\&\; \sigma_2 = b' \;\Rightarrow\; \sigma_1 = 2\sigma_2 = 2\sigma\end{aligned} \qquad (۷۵-۳)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\omega_0 a' + \dfrac{r_3\omega_0 a}{2} = -\dfrac{r_2 a}{4}\sin\left(2(\sigma T_2 - b)\right) - \dfrac{\tilde{h}_g m_4}{2}\sin\left(\sigma T_2 - b\right)\\[2ex] \omega_0 a b' + \dfrac{3}{8}r_1 a^3 = \dfrac{r_2 a}{4}\cos\left(2(\sigma T_2 - b)\right) + \dfrac{\tilde{h}_g m_4}{2}\cos\left(\sigma T_2 - b\right)\end{cases} \qquad (۷۶-۳)$$

$$\gamma = \sigma T_2 - b \;\rightarrow\; b' = \sigma - \gamma'$$

در حالت پایدار: $a' = \gamma' = 0$:

$$\left[\left(\frac{r_3\omega_0 a}{2}\right)^2+\left(\omega_0 a\sigma+\frac{3}{8}r_1a^3+\frac{r_2a}{4}\right)^2\right]^3=$$

$$\left\{\frac{r_2a}{4}\left(\omega_0 a\sigma+\frac{3}{8}r_1a^3+\frac{r_2a}{4}\right)+\frac{\tilde{h}_g m_4}{2}\left[\left(\frac{r_3\omega_0 a}{2}\right)^2+\left(\omega_0 a\sigma+\frac{3}{8}r_1a^3+\frac{r_2a}{4}\right)^2\right]\right\}^2 \qquad (۷۷-۳)$$

۳-۴ قسمت دوم: فاصله‌ی بین نوک و نمونه به‌صورت $z_0 \le a_0$

در این حالت، از عبارت دوم رابطه‌ی (۳-۷) برای ادامه‌ی کار استفاده می‌کنیم.

مانند قسمت قبلی پیش‌رفته و درنهایت معادله‌ی حرکت سیستم را برای زمانی‌که میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی در مد متناوب باشد و فاصله‌ی بین نوک و سطح نمونه $z_0 \le a_0$ باشد، به‌دست می‌آوریم.

$$
\begin{aligned}
&-\alpha_0 \frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} - \frac{d^2 g(\tau)}{d\tau^2} - \theta_8\theta_3 g(\tau)^3 \\
&+\begin{bmatrix} \theta_8\theta_3\left(-3\tilde{h}_{tip}{}^4\alpha_1 + 3\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_0\right) + \theta_7\theta_3\left(-2\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_1 + 2\tilde{h}_{tip}\alpha_0\right) \\ +3\theta_6\theta_3\left(\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_1 - \alpha_0\right) - V_p N_1\alpha_1 + \tilde{K}\alpha_2 - \tilde{S}\alpha_3 \end{bmatrix}\varphi(\tau) \\
&+\begin{bmatrix} \theta_8\theta_3\left(6\tilde{h}_{tip}{}^4\alpha_{10} - 6\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{11} - 3\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{12} + 3\tilde{h}_{tip}\alpha_{13}\right) \\ +\theta_7\theta_3\left(2\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{10} - 2\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{11} - \tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{12} + \alpha_{13}\right) \end{bmatrix}\varphi(\tau)^2 \\
&+\begin{bmatrix} 3P\alpha_6 - \tilde{R}\left(2\alpha_5 + 8\alpha_7 + 2\alpha_4\right) \\ +\theta_8\theta_3\begin{pmatrix} -3\tilde{h}_{tip}{}^4\alpha_6 + 6\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{14} + 2\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{15} \\ -2\tilde{h}_{tip}\alpha_{16} - 3\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{17} + \alpha_{18} \end{pmatrix} \end{bmatrix}\varphi(\tau)^3 \\
&+\begin{bmatrix} \left(-J + \theta_{10}\theta_3\alpha_1\tilde{h}_{tip}{}^2 - \theta_{10}\theta_3\alpha_0\right) g(\tau) + \theta_{10}\theta_3\left(\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_1 - \tilde{h}_{tip}\alpha_0\right) \\ +\theta_9\theta_3\left(-\tilde{h}_{tip}{}^2 + \alpha_0\right) - J\left(\alpha_0 + \tilde{h}_{tip}\alpha_8\right) \end{bmatrix}\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \\
&+\left[\theta_{10}\theta_3\left(-2\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{10} + 2\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{11} + \tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{12} - \alpha_{13}\right)\right]\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\varphi(\tau) \\
&+\left[\left(-J + \theta_{10}\theta_3\alpha_1\tilde{h}_{tip}{}^2 - \theta_{10}\theta_3\alpha_0\right)\varphi(\tau) - \theta_{10}\theta_3\left(g(\tau) + \tilde{h}_{tip}\right) + \theta_9\theta_3\right]\frac{dg(\tau)}{d\tau} \\
&+\left[3\theta_8\theta_3\tilde{h}_{tip} + \theta_7\theta_3 + \varphi(\tau)\theta_8\theta_3\left(-3\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_1 + 3\alpha_0\right)\right] g(\tau)^2 \\
&+\begin{bmatrix} 2\theta_7\theta_3\tilde{h}_{tip} - \theta_6\theta_3 + 3\theta_8\theta_3\tilde{h}_{tip}{}^2 \\ +\varphi(\tau)^2\theta_8\theta_3\left(6\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{10} - 6\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{11} - 3\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{12} + 3\alpha_{13}\right) \\ +\varphi(\tau)\left(\theta_8\theta_3\left(-6\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_1 - 6\alpha_0\right) + \theta_7\theta_3\left(-2\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_1 + 2\alpha_0\right)\right) \end{bmatrix} g(\tau) \\
&+\theta_7\theta_3\tilde{h}_{tip}{}^2 + \theta_8\theta_3\tilde{h}_{tip}{}^3 - \theta_6\theta_3\tilde{h}_{tip} + \theta_5\theta_3 - \theta_4\theta_3 = 0
\end{aligned}
\tag{۳-۷۸}
$$

که در عبارت بالا، ضرایب α_0 تا α_9 در روابط (۲-۸۱) تا (۲-۸۸) و (۳-۳۷) تا (۳-۳۸) تعریف شده‌اند و ضرایب α_{10} تا α_{18} نیز عبارتنداز:

$$\alpha_{10}=\int_0^1\left(\frac{d\chi(X)}{dX}\right)\left(\frac{d^2\chi(X)}{dX^2}\right)(\chi(X))dX \tag{۳-۷۹}$$

$$\alpha_{11}=\int_0^1\left(\frac{d^2\chi(X)}{dX^2}\right)(\chi(X))^2dX \tag{۳-۸۰}$$

$$\alpha_{12}=\int_0^1\left(\frac{d\chi(X)}{dX}\right)^2(\chi(X))dX \tag{۳-۸۱}$$

$$\alpha_{13}=\int_0^1(\chi(X))^3dX \tag{۳-۸۲}$$

$$\alpha_{14}=\int_0^1\left(\frac{d\chi(X)}{dX}\right)\left(\frac{d^2\chi(X)}{dX^2}\right)(\chi(X))^2dX \tag{۳-۸۳}$$

$$\alpha_{15}=\int_0^1\left(\frac{d\chi(X)}{dX}\right)^3(\chi(X))dX \tag{۳-۸۴}$$

$$\alpha_{16}=\int_0^1\left(\frac{d^2\chi(X)}{dX^2}\right)(\chi(X))^3dX \tag{۳-۸۵}$$

$$\alpha_{17}=\int_0^1(\chi(X))^2\left(\frac{d^2\chi(X)}{dX^2}\right)^2dX \tag{۳-۸۶}$$

$$\alpha_{18}=\int_0^1(\chi(X))^4dX \tag{۳-۸۷}$$

۳-۴-۱ تحلیل ارتعاشات غیر خطّی میکروتیر در مد متناوب و زمانی‌که $\mathbf{z_0 \le a_0}$ باشد:

در معادله‌ی (۳-۷۸)، دو عبارت غیر خطّی درجه‌ی دو و درجه‌ی سه همزمان داریم. همچنین عبارت $g(\tau)$ از رابطه‌ی (۳-۱) به‌دست می‌آید. برای اینکه تابع تحریک $g(\tau)$ و عبارت میرایی در یک‌مرتبه از اپسیلون ظاهر شوند، دامنه‌ی $g(\tau)$ را در ε^3 و عبارت میرایی را در ε^2 ضرب می‌کنیم. همچنین برای

اینکه عبارت $\varphi(\tau)\left(\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)$ به مرتبه‌ی سوم فرستاده شود، ضریب این عبارت را نیز در ε ضرب می‌کنیم [۵۷].

روش مقیاس‌های چندگانه:

دو حالت ممکن برای ولتاژ اعمالی‌به پیزوالکتریک را بررسی می‌کنیم.

حالت اوّل: $V_p = V_{DC}$

اگر ولتاژ اعمالی‌به میکروتیر $V_p = V_{DC}$ باشد، داریم:

$$[\varepsilon]: \quad \omega_0^2 u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^{\,2}} = 0 \tag{۸۸-۳}$$

$$\left[\varepsilon^2\right]: \quad \omega_0^2 u_2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^{\,2}} = -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} - n_4 u_1^{\,2} \tag{۸۹-۳}$$

$$\left[\varepsilon^3\right]: \quad \begin{aligned} &\omega_0^2 u_3 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial T_0^{\,2}} = -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^{\,2}} + r_1 u_1^3 - r_3 \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \\ &-\tilde{h}_g\left(m_1 \cos(\Omega_2 T_0) + m_2 \Omega_2^{\,2} \cos(\Omega_2 T_0) + m_3 \Omega_2 \sin(\Omega_2 T_0)\right) \\ &+n_5 \frac{\partial u_1}{\partial T_0} u_1 - n_6 u_1 u_2 \end{aligned} \tag{۹۰-۳}$$

همچنین در معادله‌های فوق داریم:

$$\omega_0^{\,2} = \frac{1}{\alpha_0}\begin{bmatrix} \theta_8\theta_3\left(-3\tilde{h}_{tip}^{\;4}\alpha_1 + 3\tilde{h}_{tip}^{\;2}\alpha_0\right) + \theta_7\theta_3\left(-2\tilde{h}_{tip}^{\;3}\alpha_1 + 2\tilde{h}_{tip}\alpha_0\right) \\ +3\theta_6\theta_3\left(\tilde{h}_{tip}^{\;2}\alpha_1 - \alpha_0\right) - V_p N_1 \alpha_1 + \tilde{K}\alpha_2 - \tilde{S}\alpha_3 \end{bmatrix} \tag{۹۱-۳}$$

$$r_1 = \frac{1}{\alpha_0}\begin{bmatrix} 3P\alpha_6 - \tilde{R}\left(2\alpha_5 + 8\alpha_7 + 2\alpha_4\right) \\ +\theta_8\theta_3\begin{pmatrix} -3\tilde{h}_{tip}^{\;4}\alpha_6 + 6\tilde{h}_{tip}^{\;3}\alpha_{14} + 2\tilde{h}_{tip}^{\;3}\alpha_{15} \\ -2\tilde{h}_{tip}\alpha_{16} - 3\tilde{h}_{tip}^{\;2}\alpha_{17} + \alpha_{18} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{۹۲-۳}$$

$$r_3 = \frac{1}{\alpha_0}\left[\theta_{10}\theta_3\left(\tilde{h}_{tip}^{\;3}\alpha_1 - \tilde{h}_{tip}\alpha_0\right) + \theta_9\theta_3\left(-\tilde{h}_{tip}^{\;2} + \alpha_0\right) - J\left(\alpha_0 + \tilde{h}_{tip}\alpha_8\right)\right] \tag{۹۳-۳}$$

$$n_4 = \frac{1}{\alpha_0}\begin{bmatrix} \theta_8\theta_3\left(6\tilde{h}_{tip}{}^4\alpha_{10} - 6\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{11} + 3\tilde{h}_{tip}\alpha_{13}\right) \\ +\theta_7\theta_3\left(2\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{10} - 2\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{11} - \tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{12} + \alpha_{13}\right) \end{bmatrix} \quad (۹۴\text{-}۳)$$

$$n_5 = \frac{1}{\alpha_0}\left[\theta_{10}\theta_3\left(-2\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{10} + 2\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{11} + \tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{12} - \alpha_{13}\right)\right] \quad (۹۵\text{-}۳)$$

$$n_6 = \frac{1}{\alpha_0}\begin{bmatrix} \theta_8\theta_3\left(6\tilde{h}_{tip}\alpha_{13} + 12\tilde{h}_{tip}{}^4\alpha_{10} - 6\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{12} - 12\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{11}\right) \\ +\theta_8\theta_3\left(4\tilde{h}_{tip}{}^3\alpha_{10} - 2\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{12} + 2\alpha_{13} - 4\tilde{h}_{tip}{}^2\alpha_{11}\right) \end{bmatrix} \quad (۹۶\text{-}۳)$$

$$m_1 = \frac{\alpha_9}{\alpha_0}\left(3\tilde{h}_{tip}{}^2\theta_3\theta_8 + 2\tilde{h}_{tip}\theta_3\theta_7 - \theta_3\theta_6\right) \quad (۹۷\text{-}۳)$$

$$m_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \quad (۹۸\text{-}۳)$$

$$m_3 = \frac{\alpha_9}{\alpha_0}\left(\tilde{h}_{tip}\theta_1\theta_3 - \theta_3\theta_9 - J\right) \quad (۹۹\text{-}۳)$$

همان‌طورکه در معادله‌های (۳-۸۷) تا (۳-۹۰) می‌بینید، در این حالت به‌دلیل اینکه دو عبارت غیر خطّی درجه‌ی دو و درجه‌ی سه درکنار هم حضور دارند، ترتیب مرتبه‌دهی به پارامترها متفاوت است. عبارت غیر خطّی درجه‌ی دو، به مرتبه‌ی ε^2 و عبارت غیر خطّی درجه‌ی سه، به مرتبه‌ی ε^3 فرستاده‌شده است.

پاسخ معادله‌ی (۳-۸۷) را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$u_1 = A(T_1,T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1,T_2)e^{-i\omega_0 T_0} \quad (۱۰۰\text{-}۳)$$

با قراردادن پاسخ معادله‌ی اوّل (۳-۱۰۰) در معادله‌ی (۳-۸۹) و برابر صفر قراردادن جمله‌های سکولار:

$$u_2 = \frac{n_4}{\omega_0{}^2}\left[-2A\bar{A} + \frac{1}{3}A^2e^{2i\omega_0 T_0} + \frac{1}{3}\bar{A}^2e^{-2i\omega_0 T_0}\right] \quad (۱۰۱\text{-}۳)$$

با قراردادن عبارت‌های (۳-۱۰۰) و (۳-۱۰۱) در معادله‌ی مرتبه‌ی سوم اپسیلون یعنی (۳-۹۰)، داریم:

$$
\begin{aligned}
&\omega_0^2 u_3 + D_0^2 u_3 = r_1 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + r_1 \bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0} \\
&+\left(3r_1 A^2 \bar{A} - 2i\omega_0 D_2 A - r_3 A i\omega_0\right) e^{i\omega_0 T_0} + \left(3r_1 A\bar{A}^2 + 2i\omega_0 D_2 \bar{A} + r_3 A i\omega_0\right) e^{-i\omega_0 T_0} \\
&-\frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1 + m_2 {\Omega_2}^2 + m_3 \Omega_2] e^{i\Omega_2 T_0} - \frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1 + m_2 {\Omega_2}^2 - m_3 \Omega_2] e^{-i\Omega_2 T_0} \\
&+n_5\left(A^2 i\omega_0 e^{2i\omega_0 T_0} - i\omega_0 \bar{A}^2 e^{-2i\omega_0 T_0}\right) \\
&-n_6 \frac{n_4}{{\omega_0}^2}\left\{\begin{matrix} \left(-2A^2\bar{A} + \frac{1}{3}A^2\bar{A}\right) e^{i\omega_0 T_0} + \left(-2A\bar{A}^2 + \frac{1}{3}A\bar{A}^2\right) e^{-i\omega_0 T_0} \\ +\frac{1}{3}A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{1}{3}\bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0} \end{matrix}\right\}
\end{aligned}
$$

(۱۰۲-۳)

حال برحسب اینکه Ω_2 چه باشد، می‌توان موقعیت‌های مختلفی را درنظر گرفت:

الف: Ω_2 دور از ω_0

ب: Ω_2 نزدیک‌به ω_0

به‌ترتیب به بررسی هریک از این حالت‌ها می‌پردازیم.

الف: Ω_2 دور از ω_0

اگر مقدار Ω_2 از ω_0 دور باشد، درنتیجه برای حذف سکولارترم‌ها باید عبارت زیر را برابر صفر قرار داد.

$$3r_1 A^2\bar{A} - 2i\omega_0 D_2 A - r_3 A i\omega_0 - \frac{n_6 n_4}{{\omega_0}^2}\left(-2A^2\bar{A} + \frac{1}{3}A^2\bar{A}\right) = 0 \qquad (۱۰۳-۳)$$

برای حلّ این معادله‌ی دیفرانسیل، A را به‌شکل قطبی $\frac{1}{2}ae^{ib}$ درنظر گرفته و فرض‌بر این است که a و b هردو تابعی از T_2 هستند. با جای‌گذاری این رابطه در معادله‌ی (۱۰۳-۳) و جداکردن قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم:

$$\begin{cases} -\omega_0 a' - \frac{r_2 a}{2}\omega_0 = 0 \\ \omega_0 a b' + \left(\frac{3}{8}r_1 + \frac{5}{24}\frac{n_6 n_4}{{\omega_0}^2}\right) a^3 = 0 \end{cases} \qquad (۱۰۴-۳)$$

که در این رابطه علامت پریم، نشان‌گر مشتق برحسب T_2 است. براساس روابط بالا خواهیم داشت:

$$a=\frac{a_0}{\left(1-\frac{r_2T_2}{2}\right)} \tag{۱۰۵-۳}$$

$$b=-\left(\frac{3}{8}r_1+\frac{5}{24}\frac{n_6n_4}{{\omega_0}^2}\right)\frac{a^2T_2}{\omega_0}+b_0 \tag{۱۰۶-۳}$$

و باتوجّه‌به رابطه‌های فوق، مقدار عبارت A برای حالتی‌که میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی در مد متناوب فعّال باشد و ولتاژ اعمالی به‌شکل V_{DC} بوده و Ω_2 دور از ω_0 باشد، به‌صورت زیر است.

$$A\left(T_2\right)=\frac{a_0}{\left(2-r_2T_2\right)}e^{i\left(-\left(\frac{3}{8}r_1+\frac{5}{24}\frac{n_6n_4}{{\omega_0}^2}\right)\frac{a^2T_2}{\omega_0}+b_0\right)} \tag{۱۰۷-۳}$$

ب: Ω_2 نزدیک به ω_0

حالت دیگری که برای این حل ممکن است، این است که جملات حاوی Ω_2 نیز وارد جمله‌های سکولار شوند. در چنین شرایطی، باید $\Omega_2 \approx \omega_0$ قرار بگیرد. درنتیجه داریم:

$$\Omega_2 \approx \omega_0 \Rightarrow \Omega_2=\omega_0+\varepsilon^2\sigma \tag{۱۰۸-۳}$$

$$\left(3r_1+\frac{5}{3}\frac{n_6n_4}{{\omega_0}^2}\right)A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-r_3Ai\omega_0=\frac{\tilde{h}_g}{2}\left[m_1+m_2{\omega_0}^2+m_3\omega_0\right]e^{i\sigma T_2} \tag{۱۰۹-۳}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\omega_0a'-\frac{r_3\omega_0a}{2}=\frac{\tilde{h}_gm_4}{2}\sin(\sigma T_2-b)\\ \omega_0ab'+\left(3r_1+\frac{5}{3}\frac{n_6n_4}{{\omega_0}^2}\right)\frac{a^3}{8}=\frac{\tilde{h}_gm_4}{2}\cos(\sigma T_2-b)\end{cases} \tag{۱۱۰-۳}$$

$$\gamma=\sigma T_2-b\rightarrow b'=\sigma-\gamma'$$

$$\left(-\omega_0a'-\frac{r_3\omega_0a}{2}\right)^2+\left\{\omega_0a\left(\sigma-\gamma'\right)+\left(3r_1+\frac{5}{3}\frac{n_6n_4}{{\omega_0}^2}\right)\frac{a^3}{8}\right\}^2=\left(\frac{\tilde{h}_gm_4}{2}\right)^2 \tag{۱۱۱-۳}$$

در حالت پایدار:

$$a'=\gamma'=0$$

$$\left(-\frac{r_3\omega_0 a}{2}\right)^2+\left\{\omega_0 a\sigma+\left(3r_1+\frac{5}{3}\frac{n_6 n_4}{\omega_0{}^2}\right)\frac{a^3}{8}\right\}^2=\left(\frac{\tilde{h}_g m_4}{2}\right)^2 \qquad (۱۱۲\text{-}۳)$$

در معادلات بالا، $m_4=\left[m_1+m_2\omega_0{}^2+m_3\omega_0\right]$.

حالت دوم: $\mathbf{V_p=V_{DC}+V_{AC}\cos(\Omega_1 t)}$

فرض می‌کنیم که ولتاژ اعمالی به میکروتیر به‌شکل $V_{DC}+\varepsilon^2 V_{AC}\cos(\Omega_1 t)$ باشد. دراین‌صورت عبارت غیر خطّی مرتبه سه و تحریک، هر دو در بسط ε^3 ظاهر می‌شوند و داریم:

$$[\varepsilon]:\quad \omega_0^2 u_1+\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0{}^2}=0 \qquad (۱۱۳\text{-}۳)$$

$$\left[\varepsilon^2\right]:\quad \omega_0^2 u_2+\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0{}^2}=-2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0\partial T_1}-n_4 u_1{}^2 \qquad (۱۱۴\text{-}۳)$$

$$\begin{aligned}\left[\varepsilon^3\right]:\quad \omega_0^2 u_3+\frac{\partial^2 u_3}{\partial T_0{}^2}&=-2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0\partial T_2}-2\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0\partial T_1}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2}+r_1 u_1^3-r_2\cos\left(\Omega_1 T_0\right)u_1\\&-r_3\frac{\partial u_1}{\partial T_0}-\tilde{h}_g\left(m_1\cos(\Omega_2 T_0)+m_2\Omega_2{}^2\cos(\Omega_2 T_0)+m_3\Omega_2\sin(\Omega_2 T_0)\right)\\&+n_5\frac{\partial u_1}{\partial T_0}u_1-n_6 u_1 u_2\end{aligned} \qquad (۱۱۵\text{-}۳)$$

که در عبارت آخر، r_2 از رابطه‌ی (۲-۱۱۰) به‌دست می‌آید و سایر ضرایب نیز پیش از این در رابطه‌های (۳-۹۸) و (۳-۱۰۳) عنوان شده‌اند.

پاسخ معادله‌ی (۳-۱۱۳) را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$u_1 = A(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2)e^{-i\omega_0 T_0} \tag{۱۱۶-۳}$$

با قراردادن پاسخ معادله‌ی اوّل یعنی (۳-۱۲۰) در معادله‌ی (۳-۱۱۸) و برابر صفر قراردادن سکولارترم‌ها، داریم:

$$u_2 = \frac{n_4}{\omega_0{}^2}\left[-2A\bar{A} + \frac{1}{3}A^2 e^{2i\omega_0 T_0} + \frac{1}{3}\bar{A}^2 e^{-2i\omega_0 T_0}\right] \tag{۱۱۷-۳}$$

در مرحله‌ی بعدی با قراردادن عبارت‌های (۳-۱۱۶) و (۳-۱۱۷) در معادله‌ی مرتبه‌ی سوم اپسیلون یعنی (۳-۱۱۵) و بسط‌دادن عبارت‌های سینوسی و کسینوسی، داریم:

$$\begin{aligned}
&\omega_0^2 u_3 + D_0^2 u_3 = r_1 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + r_1 \bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0} \\
&+\left(3r_1 A^2\bar{A} - 2i\omega_0 D_2 A - r_3 A i\omega_0\right)e^{i\omega_0 T_0} + \left(3r_1 A\bar{A}^2 + 2i\omega_0 D_2\bar{A} + r_3 A i\omega_0\right)e^{-i\omega_0 T_0} \\
&-\frac{r_2}{2}\left(A e^{i(\omega_0+\Omega_1)T_0} + A e^{-i(\Omega_1-\omega_0)T_0} + \bar{A} e^{i(\Omega_1-\omega_0)T_0} + \bar{A} e^{-i(\omega_0+\Omega_1)T_0}\right) \\
&-\frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1 + m_2\Omega_2{}^2 + m_3\Omega_2]e^{i\Omega_2 T_0} - \frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1 + m_2\Omega_2{}^2 - m_3\Omega_2]e^{-i\Omega_2 T_0} \\
&+n_5\left(A^2 i\omega_0 e^{2i\omega_0 T_0} - i\omega_0\bar{A}^2 e^{-2i\omega_0 T_0}\right) \\
&-n_6\frac{n_4}{\omega_0{}^2}\left\{\begin{aligned}&\left(-2A^2\bar{A} + \frac{1}{3}A^2\bar{A}\right)e^{i\omega_0 T_0} + \left(-2A\bar{A}^2 + \frac{1}{3}A\bar{A}^2\right)e^{-i\omega_0 T_0} \\ &+\frac{1}{3}A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{1}{3}\bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0}\end{aligned}\right\}
\end{aligned} \tag{۱۱۸-۳}$$

حال برحسب اینکه Ω_2 و Ω_1 چه باشند، می‌توان موقعیت‌های مختلفی را درنظر گرفت:

الف: Ω_1 دور از $2\omega_0$ و Ω_2 نیز دور از ω_0 ($\Omega_1 \neq 2\omega_0$ & $\Omega_2 \neq \omega_0$)

ب: Ω_1 دور از $2\omega_0$ و Ω_2 نزدیک‌به ω_0 ($\Omega_1 \neq 2\omega_0$ & $\Omega_2 \approx \omega_0$)

پ: Ω_1 نزدیک‌به $2\omega_0$ و Ω_2 دور از ω_0 ($\Omega_1 \approx 2\omega_0$ & $\Omega_2 \neq \omega_0$)

ت: Ω_1 نزدیک‌به $2\omega_0$ و Ω_2 نیز نزدیک‌به ω_0 ($\Omega_1 \approx 2\omega_0$ & $\Omega_2 \approx \omega_0$)

به‌ترتیب به بررسی هرکدام از این حالت‌ها می‌پردازیم.

الف: Ω_1 دور از $2\omega_0$ و Ω_2 نیز دور از ω_0

شرط حل‌پذیری برای این حالت به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\left(3r_1A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-r_3Ai\omega_0\right)-\frac{n_6n_4}{{\omega_0}^2}\left(-2A^2\bar{A}+\frac{1}{3}A^2\bar{A}\right)=0 \qquad (۱۱۹-۳)$$

معادله‌ی بالا همان معادله‌ی (۳-۱۰۳) است. پس در این حالت، مقدار a و b نیز از روابط (۳-۱۰۵) و (۳-۱۰۶) به‌دست خواهند آمد.

ب: Ω_1 دور از $2\omega_0$ و Ω_2 نزدیک‌به ω_0

$$\left(3r_1+\frac{5}{3}\frac{n_6n_4}{{\omega_0}^2}\right)A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-r_3Ai\omega_0=\frac{\tilde{h}_g}{2}\left[m_1+m_2{\omega_0}^2+m_3\omega_0\right]e^{i\sigma T_2} \qquad (۱۲۰-۳)$$

معادله‌ی بالا، همان معادله‌ی (۳-۱۰۹) است. درنتیجه در این حالت معادله‌ی حالت پاسخ فرکانسی از رابطه‌ی (۳-۱۱۲) به‌دست می‌آید.

دلیل اینکه در حالت‌های الف و ب، همان موقعیت‌هایی پیش می‌آید که در $V_p=V_{DC}$ با آن‌ها مواجه بودیم، این است که در این دو حالت هنوز تاثیر Ω_1 واردنشده و فرض‌برآن بوده که Ω_1 دور از $2\omega_0$ باشد. اما در دو حالتی که در ادامه مورد تحلیل قرار می‌دهیم، تأثیر این فرکانس، کاملا مشخّص می‌شود.

پ: Ω_1 نزدیک به $2\omega_0$ و Ω_2 دور از ω_0

شرط حل‌پذیری در این حالت عبارتست از:

$$\left(3r_1A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-r_3Ai\omega_0\right)e^{i\omega_0T_0}-\frac{r_2}{2}\left(\bar{A}e^{i(\Omega_1-\omega_0)T_0}\right)$$
$$-\frac{n_6n_4}{\omega_0^{\;2}}\left\{\left(-2A^2\bar{A}+\frac{1}{3}A^2\bar{A}\right)e^{i\omega_0T_0}\right\}=0 \qquad (۱۲۱-۳)$$

برای حلّ معادله‌ی بالا داریم:

$$\Omega_1 \approx 2\omega_0 \;\Rightarrow\; \Omega_1=2\omega_0+\varepsilon^2\sigma_1 \qquad (۱۲۲-۳)$$

$$3r_1A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-r_3Ai\omega_0-\frac{r_2}{2}\bar{A}e^{i\sigma T_2}+\frac{5n_6n_4}{3\omega_0^{\;2}}A^2\bar{A}=0 \qquad (۱۲۳-۳)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\omega_0a'-\dfrac{r_3\omega_0a}{2}=\dfrac{r_2a}{4}\sin(\sigma T_2-2b)\\[2mm] \omega_0ab'+\left(3r_1+\dfrac{5}{3}\dfrac{n_6n_4}{\omega_0^{\;2}}\right)\dfrac{a^3}{8}=\dfrac{r_2a}{4}\cos(\sigma T_2-2b)\end{cases} \qquad (۱۲۴-۳)$$

$$\left(-\omega_0a'-\frac{r_3\omega_0a}{2}\right)^2+\left\{\omega_0ab'+\left(3r_1+\frac{5}{3}\frac{n_6n_4}{\omega_0^{\;2}}\right)\frac{a^3}{8}\right\}^2=\left(\frac{r_2a}{4}\right)^2 \qquad (۱۲۵-۳)$$

$$\gamma=\sigma T_2-2b \;\;\rightarrow\;\; 2b'=\sigma-\gamma' \;\;\rightarrow\;\; b'=\frac{\sigma-\gamma'}{2} \qquad (۱۲۶-۳)$$

$$\left(-\omega_0a'-\frac{r_3\omega_0a}{2}\right)^2+\left\{\frac{\omega_0a}{2}\left(\sigma-\gamma'\right)+\left(3r_1+\frac{5}{3}\frac{n_6n_4}{\omega_0^{\;2}}\right)\frac{a^3}{8}\right\}^2=\left(\frac{r_2a}{4}\right)^2 \qquad (۱۲۷-۳)$$

در حالت پایدار: $a'=\gamma'=0$

$$\left(\frac{r_3\omega_0a}{2}\right)^2+\left\{\frac{\omega_0a\sigma}{2}+\left(3r_1+\frac{5}{3}\frac{n_6n_4}{\omega_0^{\;2}}\right)\frac{a^3}{8}\right\}^2=\left(\frac{r_2a}{4}\right)^2 \qquad (۱۲۸-۳)$$

که این معادله معادله حالت پاسخ فرکانسی سیستم در حالتی است که Ω_1 نزدیک به $2\omega_0$ و Ω_2 دور از ω_0 باشد.

ت: Ω_1 نزدیک به $2\omega_0$ و Ω_2 نیز نزدیک به ω_0

برای حذف سکولارترم‌ها در این حالت که آخرین حالت ممکن است، باید عبارت زیر را برابر صفر قرار دهیم.

$$\left(3r_1A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-r_3Ai\omega_0\right)e^{i\omega_0T_0}-\frac{r_2}{2}\bar{A}e^{i(\Omega_1-\omega_0)T_0}$$
$$-\frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1+m_2\Omega_2{}^2+m_3\Omega_2]e^{i\Omega_2T_0}+\frac{5n_6n_4}{3\omega_0{}^2}A^2\bar{A}e^{i\omega_0T_0}=0$$ (۱۲۹-۳)

$$\begin{cases}\Omega_1\approx 2\omega_0 \;\Rightarrow\; \Omega_1=2\omega_0+\varepsilon^2\sigma_1\\ \Omega_2\approx\omega_0 \;\Rightarrow\; \Omega_2=\omega_0+\varepsilon^2\sigma_2\end{cases}$$ (۱۳۰-۳)

$$(3r_1+\frac{5n_6n_4}{3\omega_0{}^2})A^2\bar{A}-2i\omega_0D_2A-r_3Ai\omega_0-\frac{r_2}{2}\bar{A}e^{i\sigma_1T_2}$$
$$-\frac{\tilde{h}_g}{2}[m_1+m_2\Omega_2{}^2+m_3\Omega_2]e^{i\sigma_2T_2}=0$$ (۱۳۱-۳)

$$\Rightarrow\begin{cases}\omega_0a'+\dfrac{r_3\omega_0a}{2}=-\dfrac{r_2a}{4}\sin\left(\sigma_1T_2-2b\right)-\dfrac{\tilde{h}_gm_4}{2}\sin\left(\sigma_2T_2-b\right)\\ \omega_0ab'+\dfrac{a^3}{8}\left(3r_1+\dfrac{5n_6n_4}{3\omega_0{}^2}\right)=\dfrac{r_2a}{4}\cos\left(\sigma_1T_2-2b\right)+\dfrac{\tilde{h}_gm_4}{2}\cos\left(\sigma_2T_2-b\right)\end{cases}$$ (۱۳۲-۳)

$$\left(\sigma_1T_2-2b\right)\ \&\ \left(\sigma_2T_2-b\right)=\text{constant}$$
$$\Rightarrow\ \sigma_1=2b'\ \&\ \sigma_2=b'\ \Rightarrow\ \sigma_1=2\sigma_2=2\sigma$$ (۱۳۳-۳)

$$\Rightarrow\begin{cases}\omega_0a'+\dfrac{r_3\omega_0a}{2}=-\dfrac{r_2a}{4}\sin\left(2(\sigma T_2-b)\right)-\dfrac{\tilde{h}_gm_4}{2}\sin\left(\sigma T_2-b\right)\\ \omega_0ab'+\dfrac{a^3}{8}\left(3r_1+\dfrac{5n_6n_4}{3\omega_0{}^2}\right)=\dfrac{r_2a}{4}\cos\left(2(\sigma T_2-b)\right)+\dfrac{\tilde{h}_gm_4}{2}\cos\left(\sigma T_2-b\right)\end{cases}$$ (۱۳۴-۳)

$$\gamma=\sigma T_2-b\ \rightarrow\ b'=\sigma-\gamma'$$

در حالت پایدار:

$$a'=\gamma'=0:$$

$$\left\{\left(\frac{r_3\omega_0a}{2}\right)^2+\left[\omega_0a\sigma+\frac{a^3}{8}\left(3r_1+\frac{5n_6n_4}{3\omega_0{}^2}\right)+\frac{r_2a}{4}\right]^2\right\}^3=$$
$$\left\{\begin{aligned}&\frac{r_2a}{4}\left[\omega_0a\sigma+\frac{a^3}{8}\left(3r_1+\frac{5n_6n_4}{3\omega_0{}^2}\right)+\frac{r_2a}{4}\right]\\&+\frac{\tilde{h}_gm_4}{2}\left\{\left(\frac{r_3\omega_0a}{2}\right)^2+\left[\omega_0a\sigma+\frac{a^3}{8}\left(3r_1+\frac{5n_6n_4}{3\omega_0{}^2}\right)+\frac{r_2a}{4}\right]^2\right\}\end{aligned}\right\}^2$$ (۱۳۵-۳)

فصل چهارم

نتایج و بحث

۴-۱ مقدّمه

در این فصل، تأثیر پارامترهای مختلف سیستم، ازجمله ولتاژ پیزوالکتریک و دامنه‌ی تحریک پایه را بر منحنی پاسخ فرکانسی مدهای تماسی و متناوب در میکروتیر FGM میکروسکوپ نیرواتمی بررسی خواهیم کرد. ابعاد هندسی و ویژگی‌های مواد، در جدول‌های زیر آمده‌اند.

۴-۲ مشخّصات فیزیکی و مکانیکی میکروتیر:

ضرایب و ثوابت زیر برای میکروتیر و نوک درنظر گرفته شده‌اند.

جدول (۴-۱): مشخّصات فیزیکی میکروتیر بررسی‌شده **[۶۳]**

h/l_0	q (μm)	R (μm)	h (μm)	b (μm)	L (μm)
۵	۱۸	۸	۷	۳۷	۲۲۵

باتوجّه‌به اینکه در نمونه‌های ساخته‌شده در بازار، میکروتیر میکروسکوپ نیرواتمی FGM که در وسط سیلیکون و در طرفین پیزوالکتریک باشد، هنوز وجود ندارد؛ مشخّصات فیزیکی میکروتیر، برابربا میکروتیری ساخته‌شده به‌نام MikroMasch NSC16 درنظر گرفته‌شده که در صنعت بسیار کاربرد دارد.

مشخّصات مکانیکی سیلیکون و پیزوالکتریک مورد استفاده در میکروتیر FGM، در جدول (۴-۱) آمده است. E مدول الاستیسیته، ρ چگالی و ν ضریب پواسان است. همچنین در تمام تحلیل‌های انجام‌شده، e_{31_p} برابربا ۹,۲۹- درنظر گرفته‌شده است [۵۵].

جدول (۴-۲): مشخّصات مکانیکی پیزوالکتریک و سیلیکون استفاده‌شده [۶۳]

	ν	ρ (Pa)	E (GPa)
سیلیکون	۰,۲۵	۲۳۳۰	۱۶۹,۶۱
پیزوالکتریک	۰,۳۵	۷۸۰۰	۷۶,۶

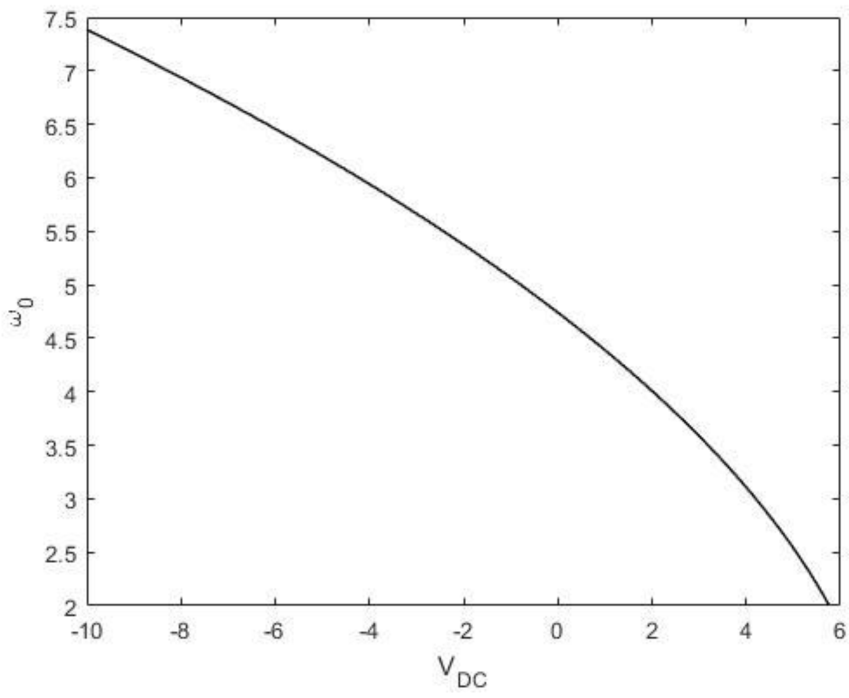
در جدول (۴-۳)، ضرایبی که در برهم‌کنش بین نوک و نمونه دخیل هستند، آورده شده است.

جدول (۴-۳): پارامترهای مربوطبه نیروی برهم‌کنش بین نوک و نمونه، مورد نیاز برای تحلیل رفتار ارتعاشی در مد متناوب [۶۳]

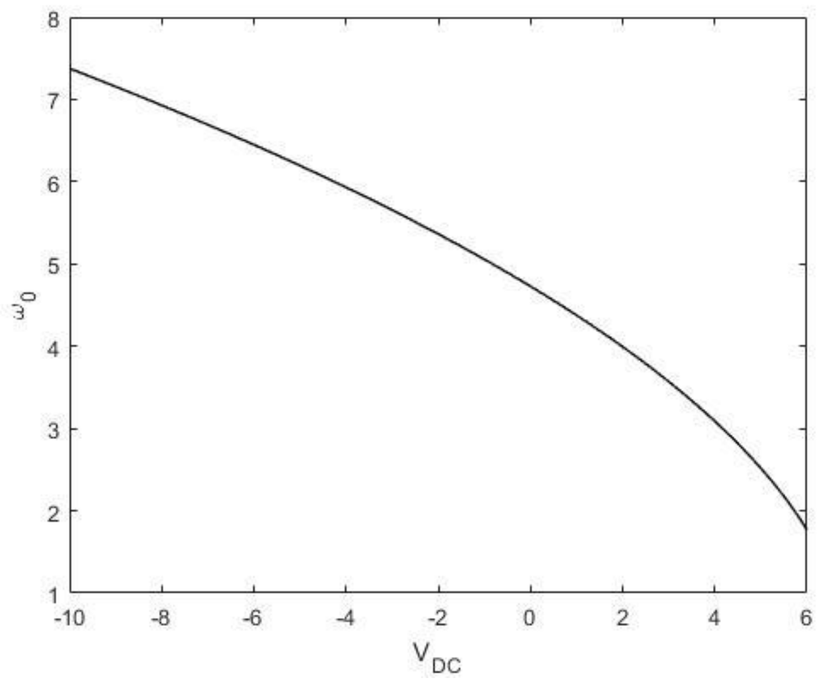
	واحد	مقدار
a_0	nm	۰,۳۸
H	J	$۲,۹۶ \times ۱۰^{-۱۹}$
E^*	GPa	۱۰,۲
D_{air}	N.s / m	$۲,۵۲ \times ۱۰^{-۳}$
D_{ts}	nN.s / m	۱۰۵,۵

۴-۳ تأثیر V_{DC} بر فرکانس طبیعی سیستم:

برای سیستمی با مشخّصات ذکرشده، دو حالت برای فرکانس طبیعی رخ می‌دهد که به‌صورت مستقیم با ولتاژ رابطه دارند. در مد تماسی و همچنین زمانی‌که در مد متناوب فاصله‌ی بین نوک و نمونه $z_0 > a_0$ باشد، فرکانس طبیعی از رابطه‌های (۲-۹۸) و (۳-۳۱) به‌دست می‌آید و زمانی‌که در مد متناوب فاصله‌ی بین نوک میکروتیر و نمونه $z_0 \le a_0$ باشد، فرکانس طبیعی سیستم از رابطه‌ی (۳-۹۵) به‌دست می‌آید.



شکل (۴-۱): تأثیر $\tilde{V}_{DC}$ بر فرکانس طبیعی سیستم در مد تماسی و قسمت اوّل مد متناوب



شکل (۴-۲): تأثیر $\tilde{V}_{DC}$ بر فرکانس طبیعی سیستم در قسمت دوم مد متناوب

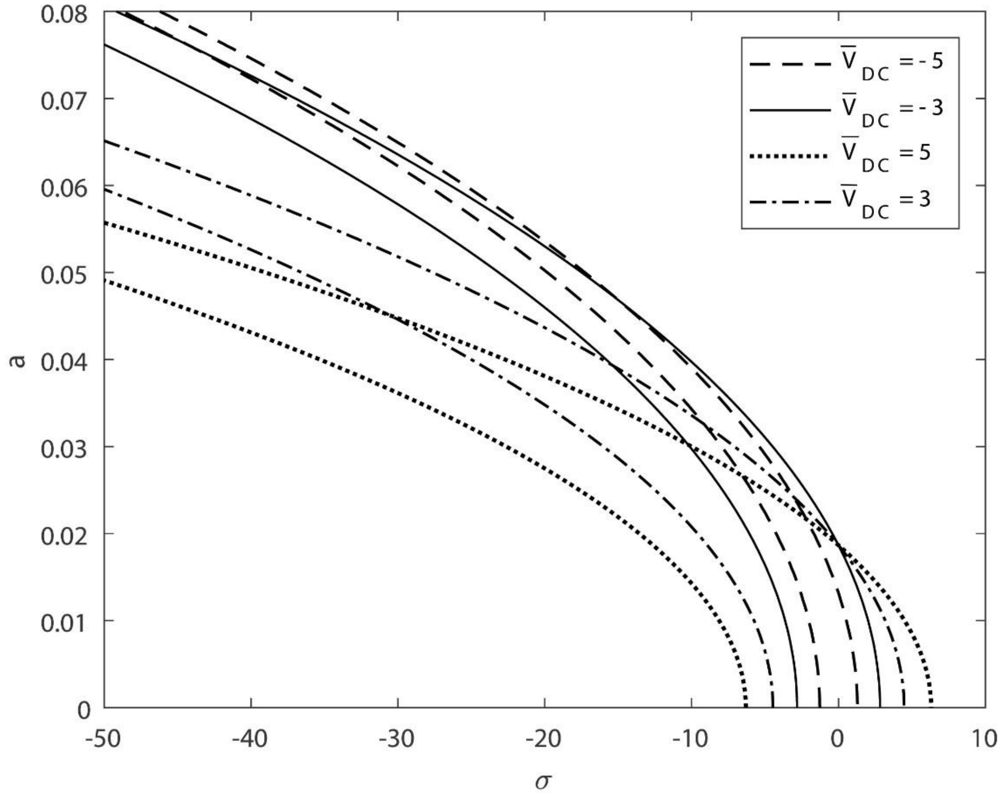
همان‌طورکه در شکل‌های (۴-۱) و (۴-۲) مشخّص است، با بزرگ‌تر و منفی‌ترشدن ولتاژ $\tilde{V}_{DC}$، فرکانس طبیعی در هردو حالت افزایش می‌یابد. این نکته را می‌توان با مقایسه‌ی رابطه‌های به‌دست‌آمده برای فرکانس طبیعی و توجّه‌به ضرایب آن‌ها نیز دریافت.

می‌توان نتیجه گرفت که در قسمت اوّل مد متناوب، یعنی زمانی‌که $z_0 > a_0$ است، رفتار فرکانسی سیستم مانند مد تماسی است و زمانی‌که به نمونه نزدیک می‌شویم و فاصله‌ی نوک تا نمونه به‌صورت $z_0 \leq a_0$ می‌شود، رفتار سیستم اندکی متفاوت است. البته باز هم همان سیر تغییر را شاهد هستیم.

۴-۴ تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی مد تماسی:

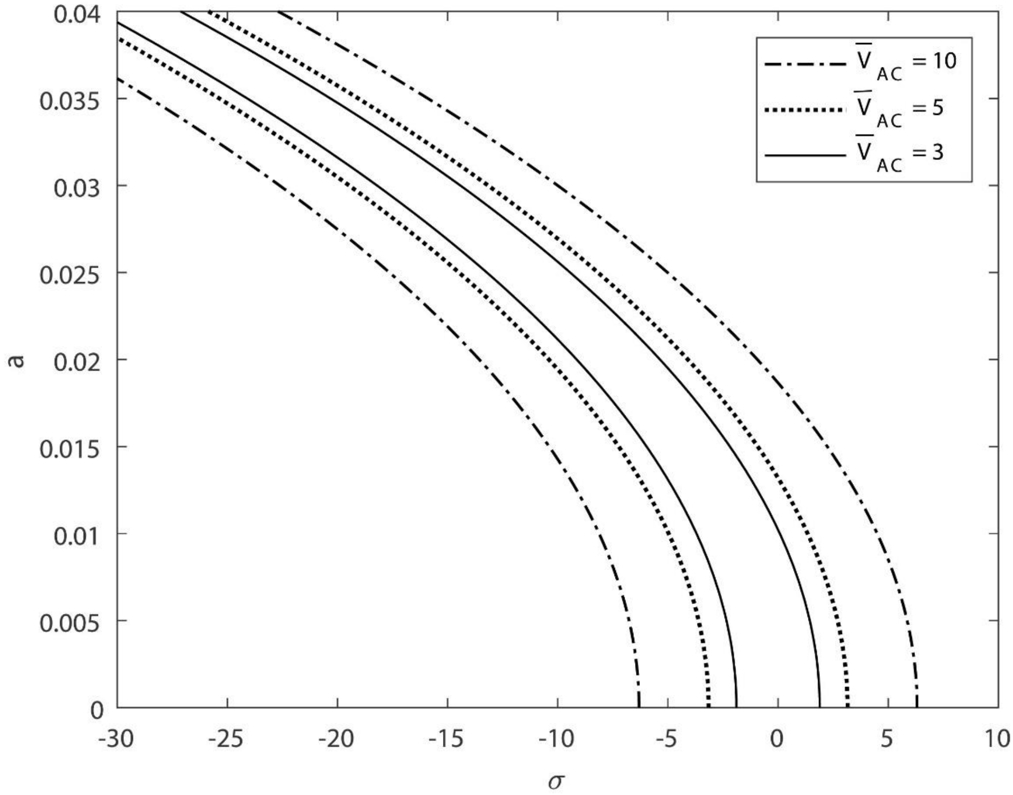
در مد تماسی، معادله‌ی پاسخ فرکانسی (۲-۱۱۷)، زمانی اتفاق می‌افتد که $\Omega_1 \approx 2\omega_0$ و $V_p = V_{DC} + V_{AC}\cos(\Omega_1 t)$ باشد.

در دو نمودار (۴-۳) و (۴-۴)، تأثیر دو متغیّر V_{DC} و V_{AC} بررسی‌شده است. همچنین تأثیر این پارامترها را بر دامنه‌ی نوسان برای چند عدد دلخواه رسم می‌کنیم.



شکل (۴-۳): تأثیر $\tilde{V}_{DC}$ بر نمودار پاسخ فرکانسی، $\tilde{V}_{AC} = 5$

همان‌طور که در شکل (۴-۳) مشخّص است، ولتاژ اعمالی به پیزوالکتریک، رفتار نرم‌شوندگی در سیستم ایجاد می‌کند. با کاهش ولتاژ از یک عدد مثبت به‌سمت عددهای منفی، از نرم‌شوندگی سیستم کاسته می‌شود. همچنین با میل‌کردن ولتاژ V_{DC} به سمت عددهای منفی، شاخه‌های منحنی‌های پاسخ به‌هم نزدیک می‌شوند.



شکل (۴-۴): تأثیر $\tilde{V}_{AC}$ بر نمودار پاسخ فرکانسی، $\tilde{V}_{DC} = 5$

همچنین در شکل (۴-۴) می‌بینیم که با افزایش مقدار V_{AC}، شاخه‌های منحنی‌های پاسخ از هم دور می‌شوند.

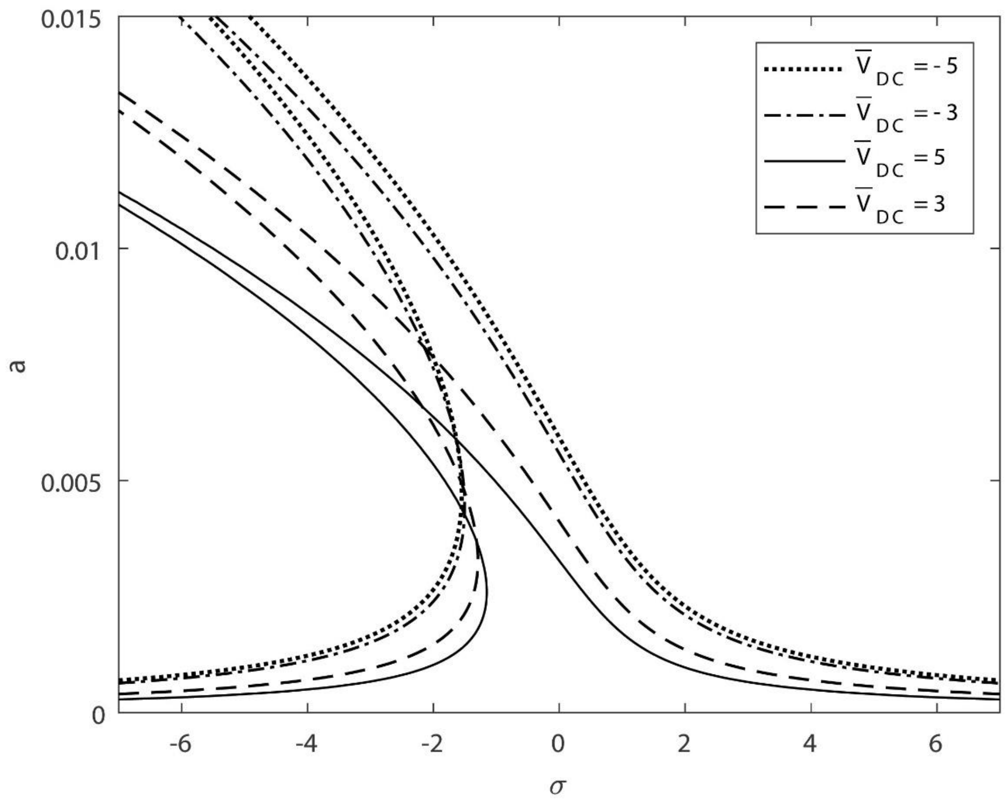
پس می‌توان نتیجه گرفت که در مد تماسی، با کاهش ولتاژ V_{DC} به‌سمت عددهای منفی و همچنین با کاهش مقدار ولتاژ V_{AC}، شاخه‌های منحنی‌های پاسخ به‌هم نزدیک می‌شوند.

۴-۵ تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی مد متناوب زمانی‌که $z_0 > a_0$ باشد:

در مد متناوب، حالت‌های رزونانسی مختلفی رخ می‌دهد که به‌ترتیب به رسم و بررسی نمودارهای پاسخ فرکانسی هرکدام می‌پردازیم.

۴-۵-۱ تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی (۳-۶۰)

- ✓ $V_p = V_{DC}$
- ✓ حالت ب) $\Omega_1 \approx 2\omega_0$



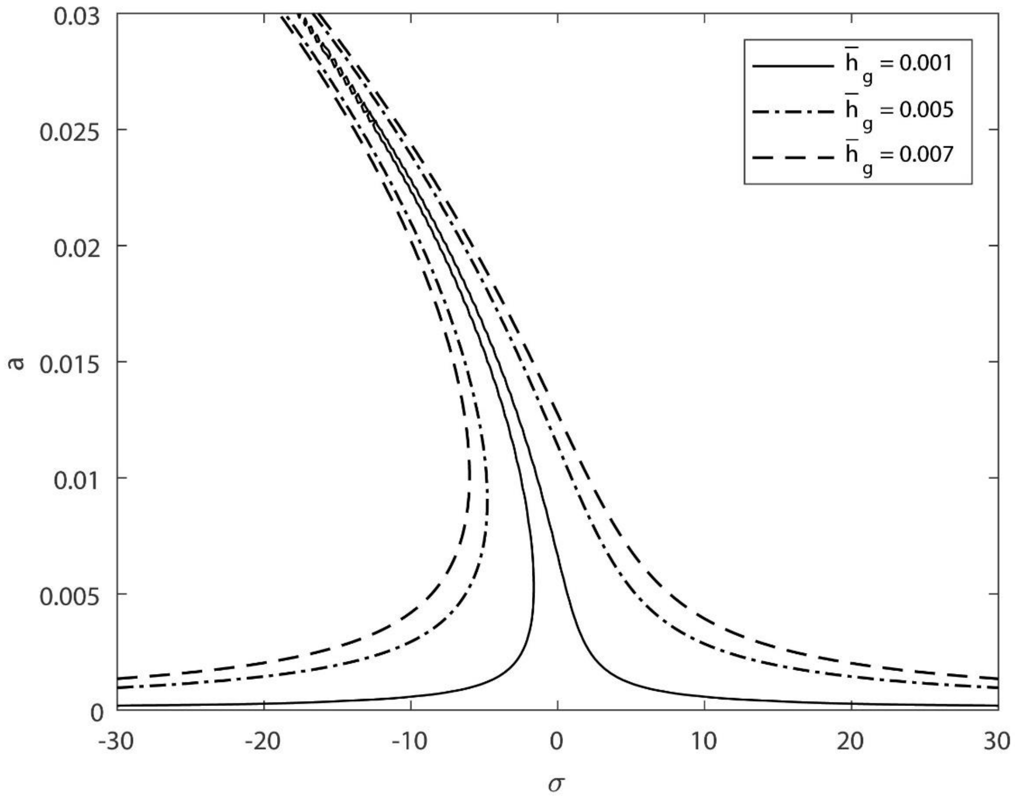
شکل (۴-۵): تأثیر $\tilde{V}_{DC}$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۶۰)، $\tilde{h}_g = 0.001$

تغییر پارامتر V_{AC}، بر این حالت تأثیری نخواهد داشت. زیرا V_{AC} در ضریب r_2 ظاهر می‌شود که این ضریب در معادله‌ی پاسخ فرکانسی نیامده است.

اما درشکل (۴-۵) می‌بینیم که با تغییر در اندازه‌ی ولتاژ، پدیده‌ی نرم‌شوندگی رخ می‌دهد. هرچه ولتاژ V_{DC} به‌سمت عددهای منفی میل کند، از نرم‌شوندگی سیستم کاسته‌شده و دامنه‌ی آن زیاد می‌شود.

می‌توان تغییرات نمودارهای پاسخ فرکانسی برحسب ولتاژ V_{DC} را به نمودارهای (۴-۱) و (۴-۲) نیز ربط داد.

در آن‌جا دیدیم که با میل ولتاژ V_{DC} به‌سمت اعداد منفی، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و در شکل (۴-۵) نیز مشاهده شد که در همین شرایط، از میزان نرم‌شوندگی سیستم کم می‌شود. پس می‌توان نتیجه گرفت که با میل ولتاژ V_{DC} به‌سمت اعداد منفی، فرکانس طبیعی سیستم در این حالت افزایش یافته و میزان نرم‌شوندگی سیستم کم می‌شود.



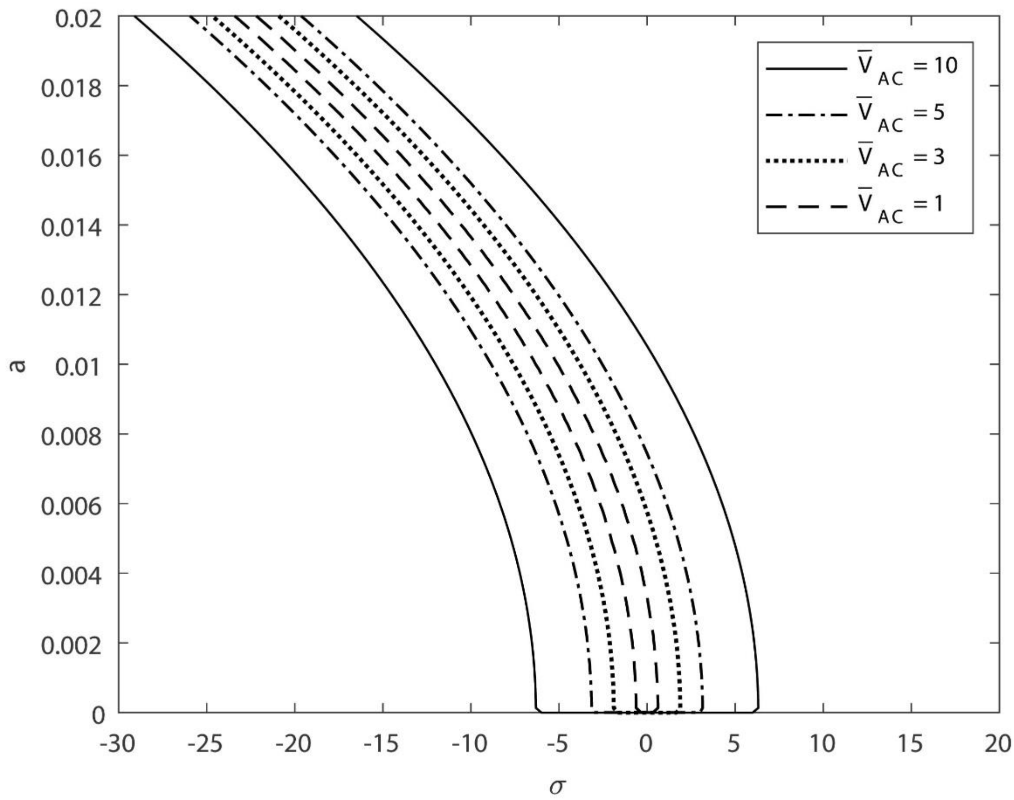
شکل (۴-۶): تأثیر $\tilde{h}_g$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۶۰)، $\tilde{V}_{DC} = -10$

و اما موضوعی که فقط در مد متناوب دخیل است، تأثیر دامنه‌ی تحریک پایه یا h_g است. همان‌طور که در نمودار (۴-۶) مشخّص است، با کاهش h_g، دامنه‌ی نمودار کاهش می‌یابد.

در ادامه برای حالت‌های دیگر مد متناوب نیز تغییر h_g را بررسی می‌کنیم. درنظر داشته باشید که مقدار h_g عددی بسیار کوچک و در حد میکرو یا نانو است.

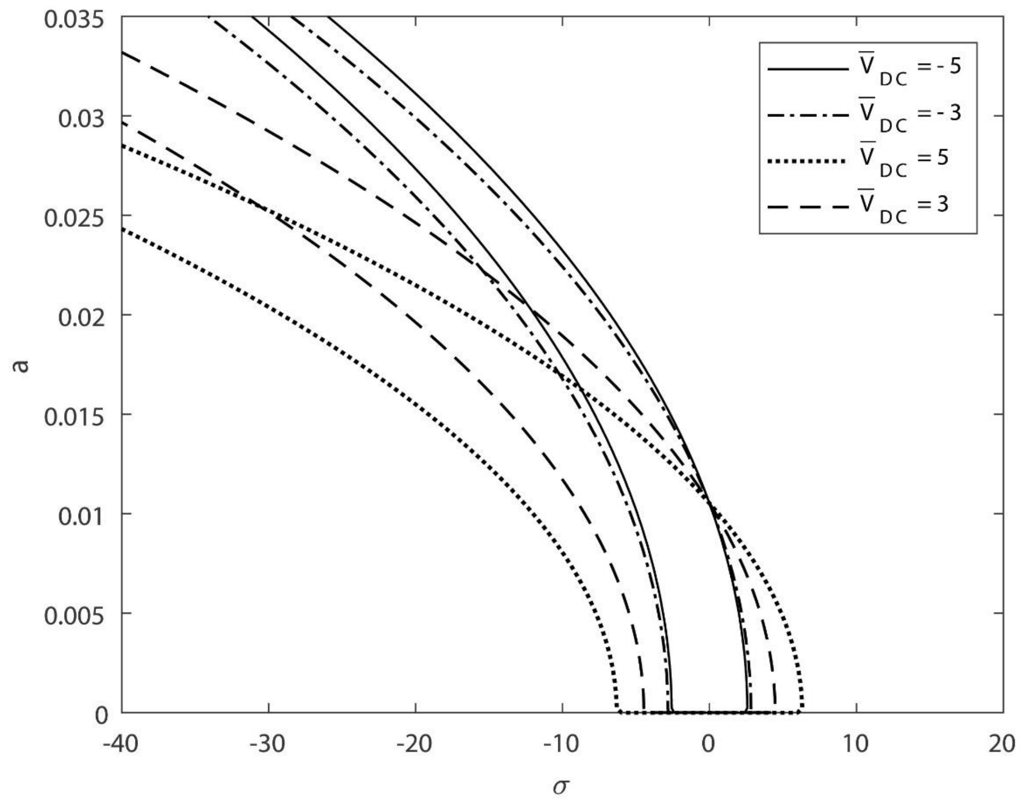
۴-۵-۲ تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی (۳-۷۴)

- ✓ $V_p = V_{DC} + V_{AC}\cos(\Omega_1 t)$
- ✓ حالت پ) $\Omega_1 \approx 2\omega_0$ & $\Omega_2 \neq \omega_0$



شکل (۴-۷): تأثیر $\tilde{V}_{AC}$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۷۴)، $\tilde{V}_{DC} = 5$

در معادله‌ی پاسخ فرکانسی (۳-۷۴)، پارامتر r_2 که تأثیر V_{AC} را وارد معادله‌ها می‌کند، در سمت راست معادله قرار دارد و به توان ۲ می‌رسد. همین موضوع باعث می‌شود که مثبت یا منفی‌شدن V_{AC} بر این حالت، بی‌تأثیر باشد. اما به‌طور کلّی با کاهش مقدار این ولتاژ، شاخه‌های پاسخ به‌هم نزدیک می‌شوند.



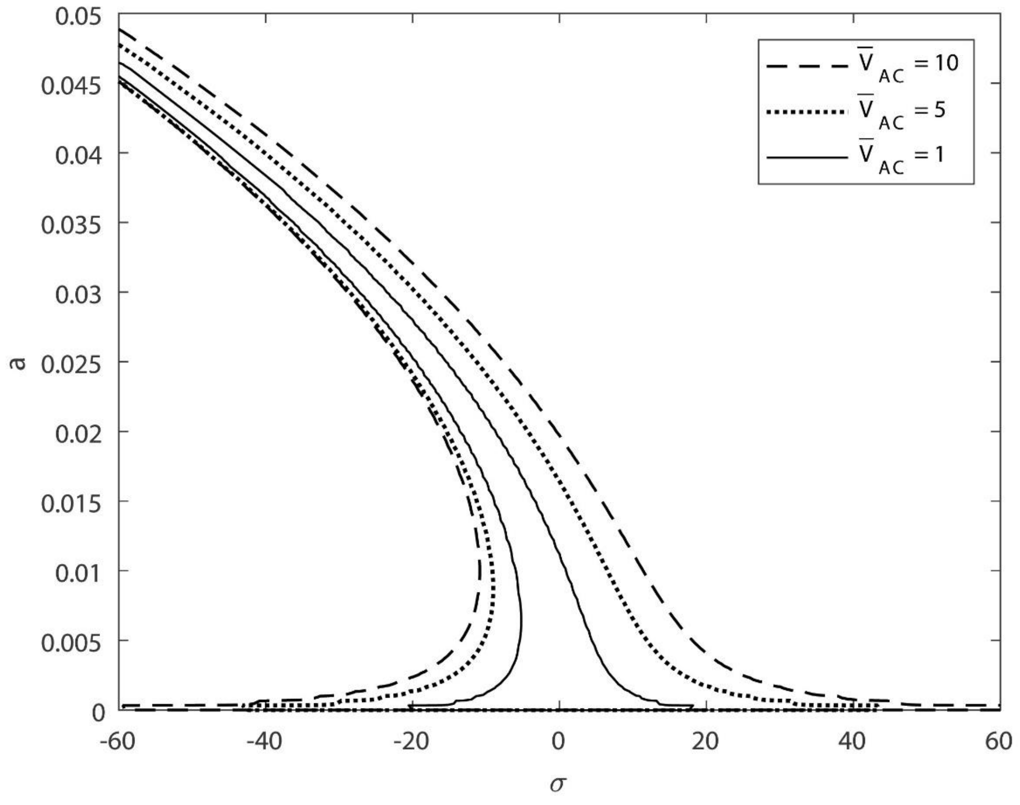
شکل (۴-۸): تأثیر $\tilde{V}_{DC}$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۷۴)، $\tilde{V}_{AC} = 10$

این نمودار شبیه‌به شکل (۴-۳) است. باید درنظر داشت که رابطه‌ی به‌دست‌آمده برای فرکانس طبیعی در این دو حالت یکسان است و رفتار کلّی فرکانس نسبت‌به V_{DC} نیز برای هر دوی این موقعیت‌ها یکی است.

۴-۵-۳ تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی (۳-۸۱)

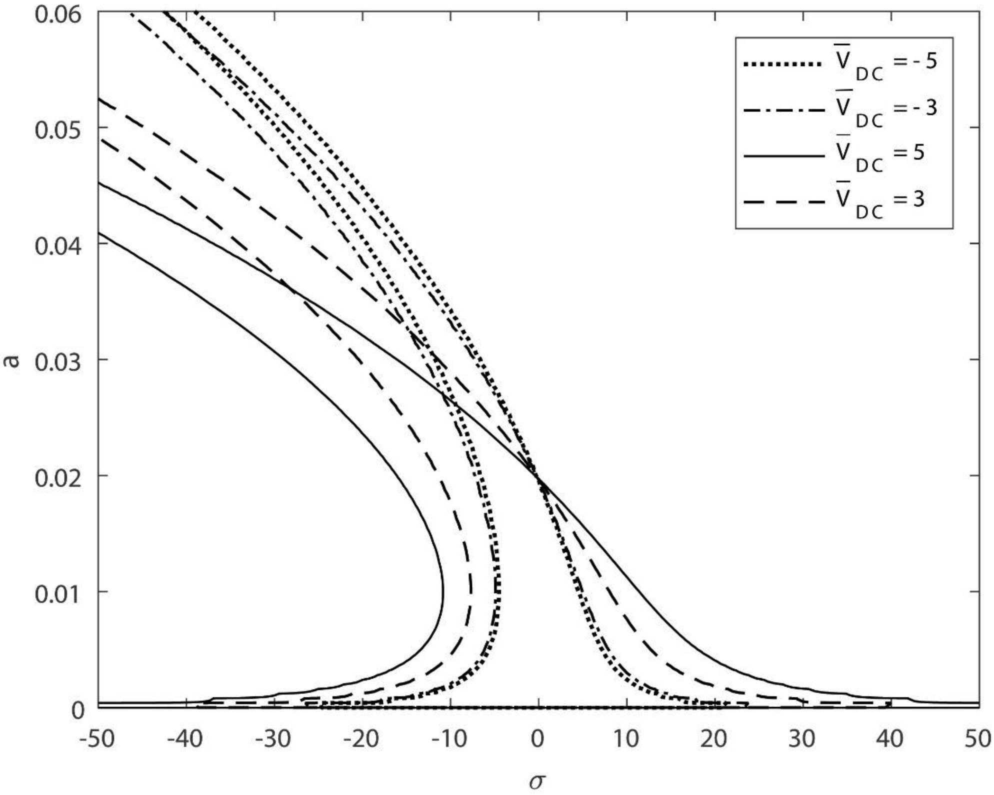
- ✓ $V_p = V_{DC} + V_{AC}\cos(\Omega_1 t)$
- ✓ حالت ت) $\Omega_1 \approx 2\omega_0 \;\&\; \Omega_2 \approx \omega_0$

اکنون معادله‌ی پاسخ فرکانسی (۳-۸۱) را بررسی می‌کنیم که در آن، هم Ω_1 و هم Ω_2 دخیل هستند و حالت رزونانسی به‌صورت $\Omega_2 \approx \omega_0$ و $\Omega_1 \approx 2\omega_0$ رخ می‌دهد. در این حالت رفتار سیستم اندکی متفاوت خواهد بود. درواقع در این حالت، دامنه‌ی تحریک پایه و ولتاژ اعمالی‌به پیزوالکتریک، باهم در معادله‌ی پاسخ فرکانسی تأثیر می‌گذارند.



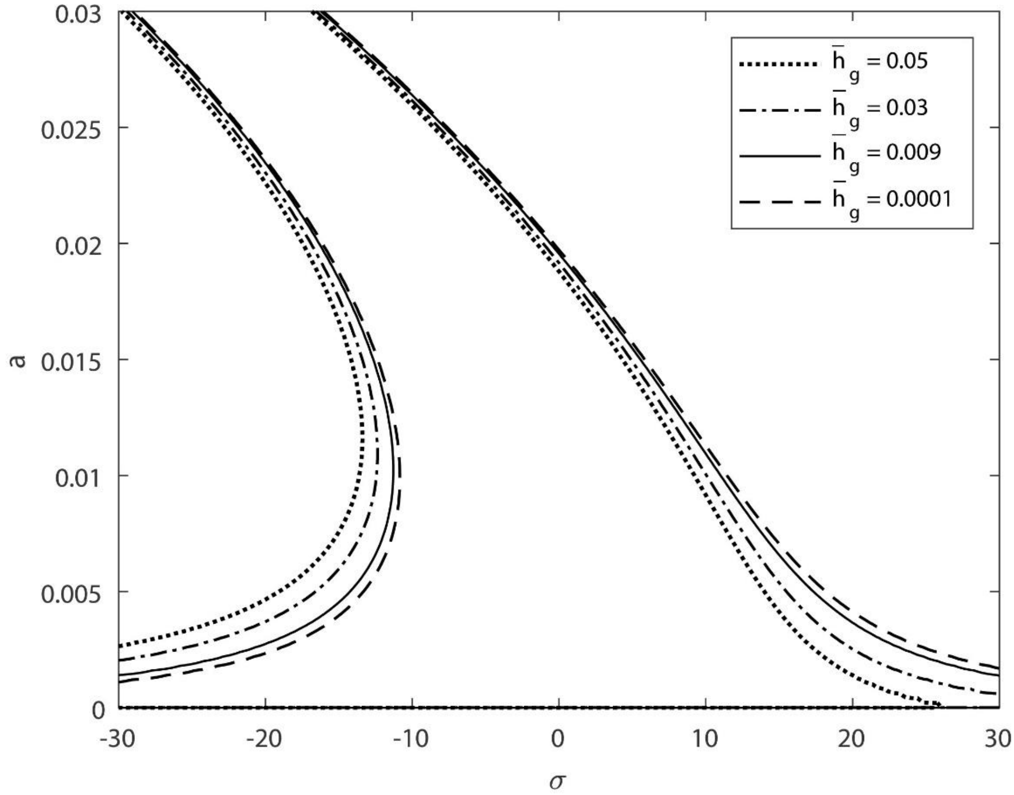
شکل (۴-۹): تأثیر $\tilde{V}_{AC}$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۸۱)، $\tilde{V}_{DC} = 5$ ، $\tilde{h}_g = 0.001$

همان‌طورکه در شکل (۴-۹) می‌بینیم، با افزایش V_{AC} ، دامنه‌ی سیستم افزایش می‌یابد و شاخه‌ها از هم دور می‌شوند.



شکل (۴-۱۰): تأثیر $\tilde{V}_{DC}$ بر نمودار پاسخ حالت فرکانسی (۳-۸۱)، $\tilde{V}_{AC} = 10$ ، $\tilde{h}_g = 0.001$

تأثیر V_{DC} بر پاسخ فرکانسی در این موقعیت، شبیه به گذشته است؛ با میل ولتاژ V_{DC} به‌سمت اعداد منفی، از میزان نرم‌شوندگی سیستم کاسته می‌شود و البته دامنه‌ی آن افزایش می‌یابد. در این حالت، شاخه‌های پاسخ به‌هم نزدیک می‌شوند.



شکل (۴-۱۱): تأثیر $\tilde{h}_g$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۸۱)، $\tilde{V}_{AC} = 10$ ، $\tilde{V}_{DC} = 5$

در شکل (۴-۱۱) می‌بینیم که تأثیر h_g بر پاسخ فرکانسی، دامنه‌ی نرم‌شوندگی را تغییر خاصّی نمی‌دهد، بلکه نمودار به سمت راست یا چپ حرکت می‌کند. در واقع با افزایش h_g نمودار به‌سمت چپ حرکت می‌کند.

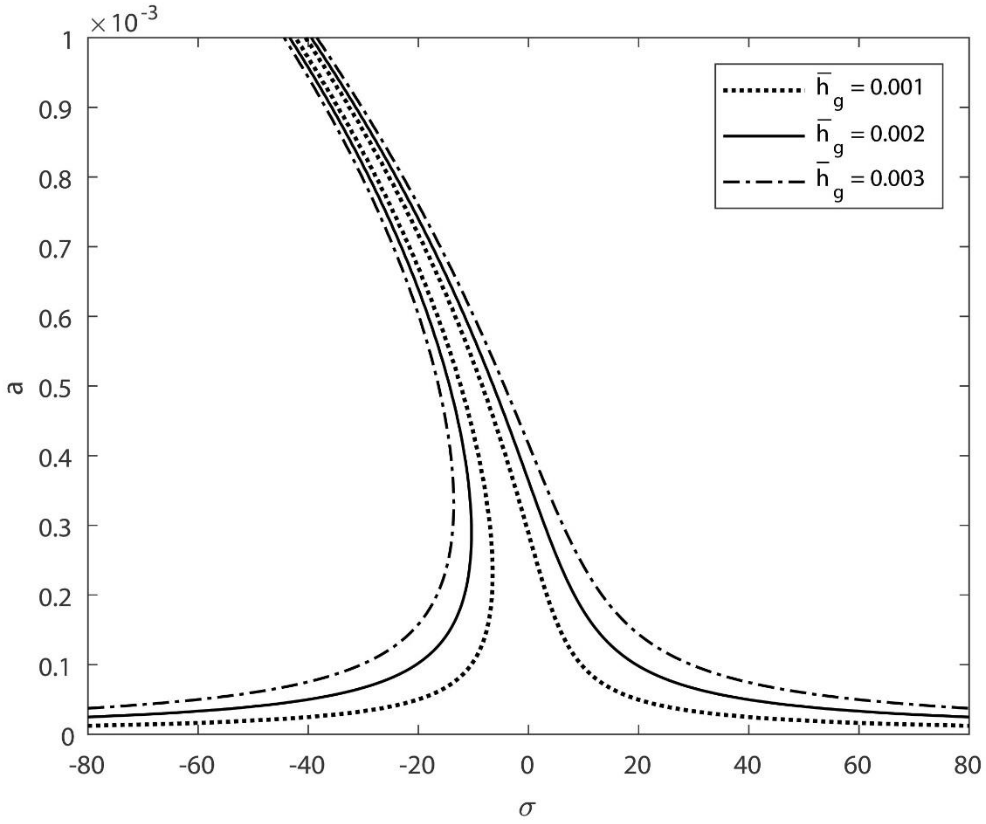
با مقایسه‌ی دو شکل (۴-۶) و (۴-۱۱) متوجّه می‌شویم که در شکل (۴-۶) که فقط Ω_1 مؤثّر است، تغییر در اندازه‌ی $\tilde{h}_g$ باعث تغییرات محسوس‌تری در رفتار سیستم می‌شود و دامنه‌ی نرم‌شوندگی سیستم نیز به‌وضوح تغییر می‌کند، اما زمانی‌که هر دو فرکانس Ω_1 و Ω_2 بر سیستم اثرگذار هستند، تأثیر پارامتر $\tilde{h}_g$، چندان چشم‌گیر نیست.

۴-۶ تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی مد متناوب زمانی‌که $z_0 \le a_0$ باشد:

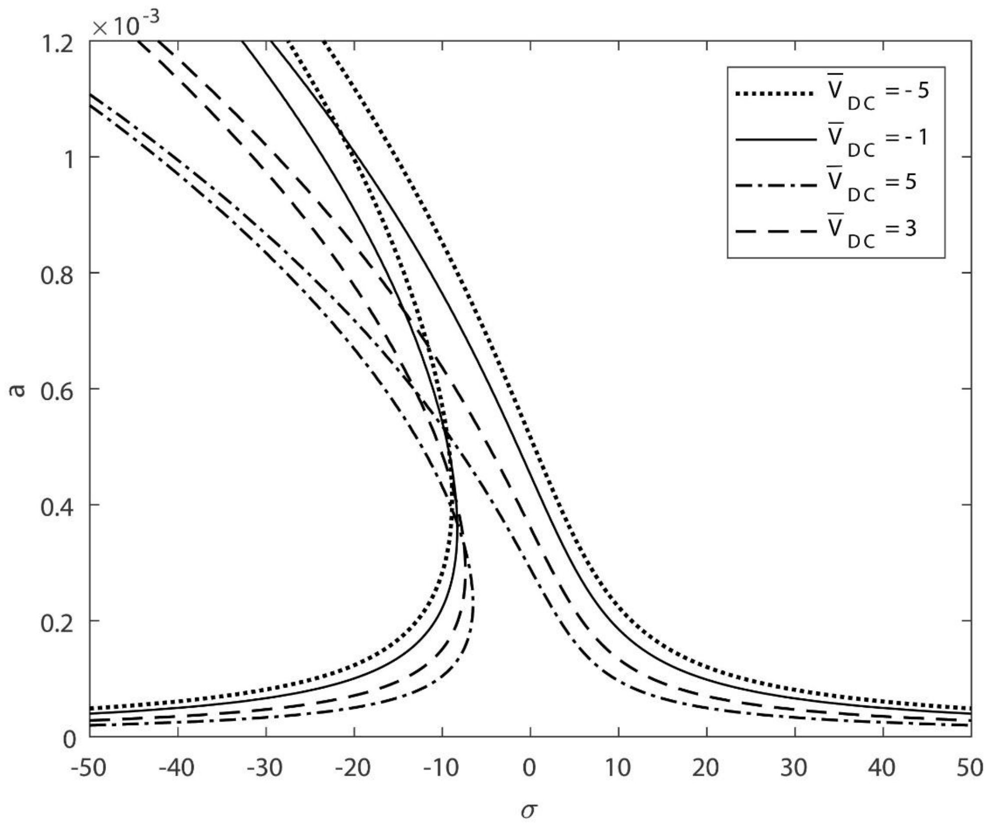
در قسمت دوم مد متناوب، نوک به نمونه نزدیک شده و معادله‌ی برهم‌کنش بین نوک و سطح نمونه، تغییر می‌کند.

۴-۶-۱ تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی (۳-۱۱۶)

- ✓ $V_p = V_{DC}$
- ✓ حالت ب) $\Omega_2 \approx \omega_0$



شکل (۴-۱۲): تأثیر $\tilde{h}_g$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۱۱۶)، $\tilde{V}_{DC} = 5$



شکل (۴-۱۳): تأثیر $\tilde{V}_{DC}$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۱۱۶)، $\tilde{h}_g = 0.001$

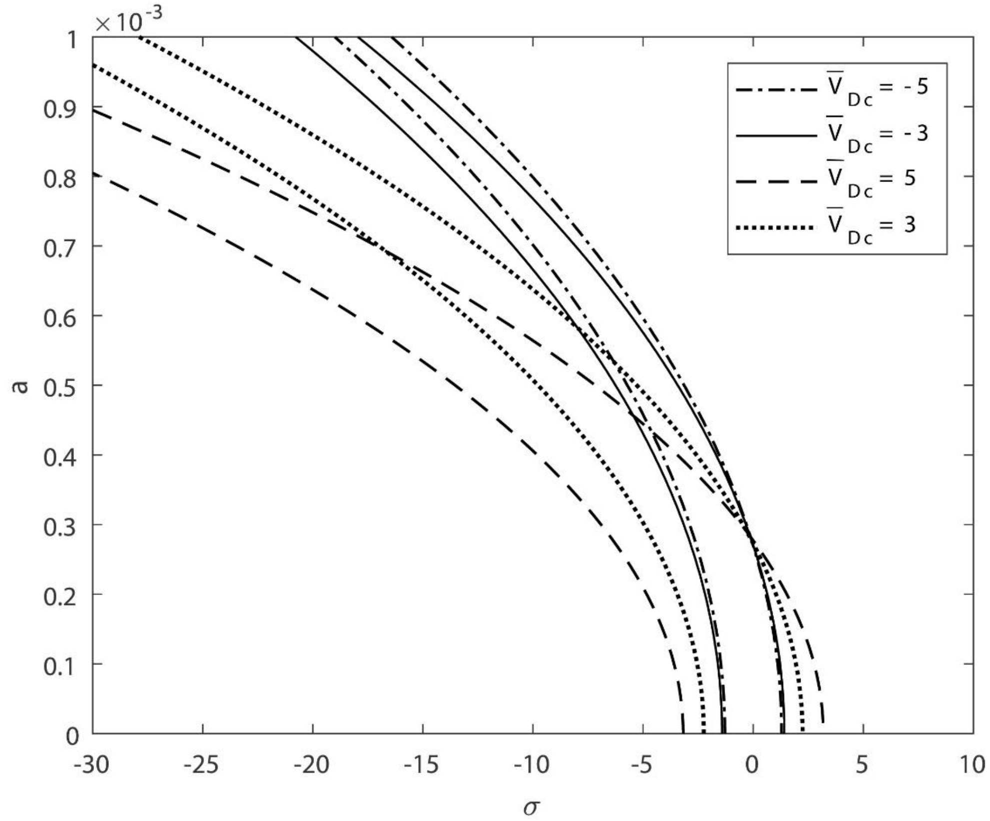
در شکل‌های (۴-۱۲) و (۴-۱۳) می‌بینیم که با کاهش مقدار V_{DC} به‌سمت اعداد منفی، سیستم به‌سمت سخت‌شوندگی میل می‌کند و دامنه‌ی آن زیاد می‌شود و شاخه‌ها از هم فاصله می‌گیرند. همچنین در شکل (۴-۱۲) می‌بینیم که با کاهش h_g، دامنه‌ی ارتعاشات غیر خطّی کاهش می‌یابند.

لازم‌به‌ذکر است که در این حالت، V_{AC} تأثیری ندارد چون پارامتر r_2 در معادله حضور ندارد.

۴-۶-۲ تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی (۳-۱۳۲)

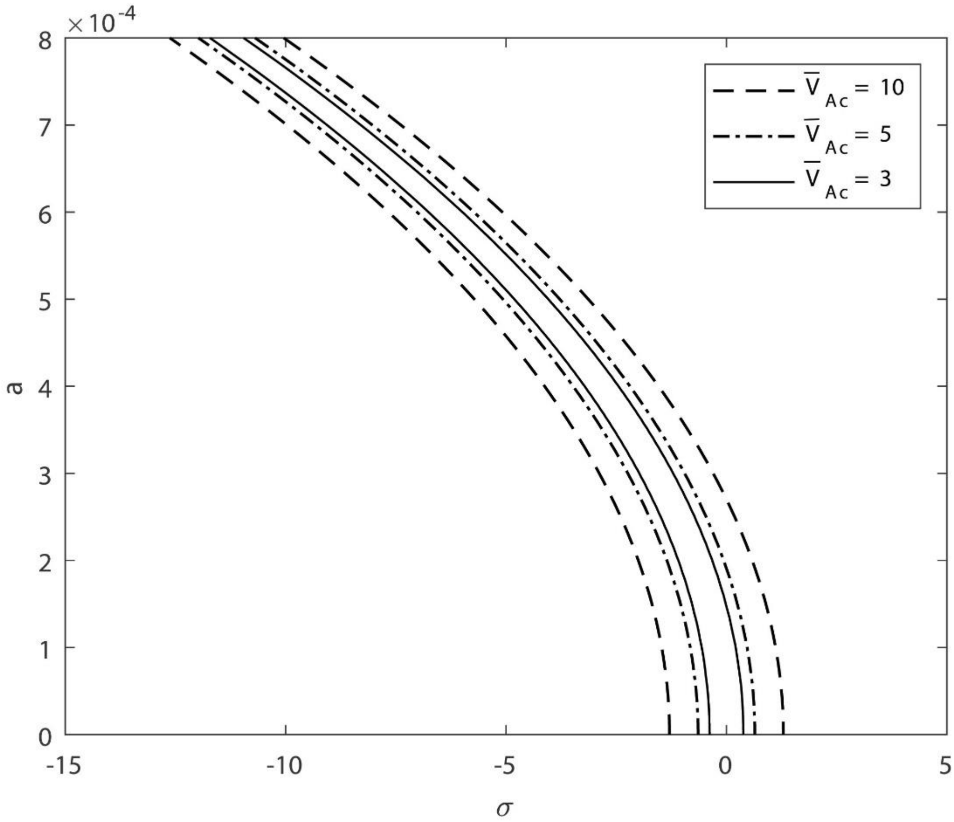
✓ $V_p = V_{DC} + V_{AC}\cos(\Omega_1 t)$

✓ حالت پ) $\Omega_1 \approx 2\omega_0 \;\; \& \;\; \Omega_2 \neq \omega_0$



شکل (۴-۱۴): تأثیر $\tilde{V}_{DC}$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۱۳۲)، $\tilde{V}_{AC} = 10$ ، $\tilde{h}_g = 0.001$

در این حالت، شرایط رزونانس برای پاسخ فرکانسی (۳-۱۳۲) را بررسی می‌کنیم که تنها فرکانس Ω_1 برروی آن مؤثّر است. نمودارهای این حالت نیز رفتاری مشابه سایرین دارند. در این حالت لازم نیست تأثیر پارامتر h_g را بررسی کنیم زیرا $\Omega_2 \neq \omega_0$ به‌معنای این است که h_g در رزونانس این حالت، دخالتی ندارد. در نمودار (۴-۱۴) می‌بینیم که با میل‌کردن V_{DC} به‌سمت اعداد منفی، دامنه‌ی ارتعاشات غیر خطّی افزایش‌یافته و شاخه‌های پاسخ سیستم به‌هم نزدیک می‌شوند. همچنین در نمودار (۴-۱۵) می‌بینیم که با کاهش V_{AC} شاخه‌های پاسخ به‌هم نزدیک می‌شوند.



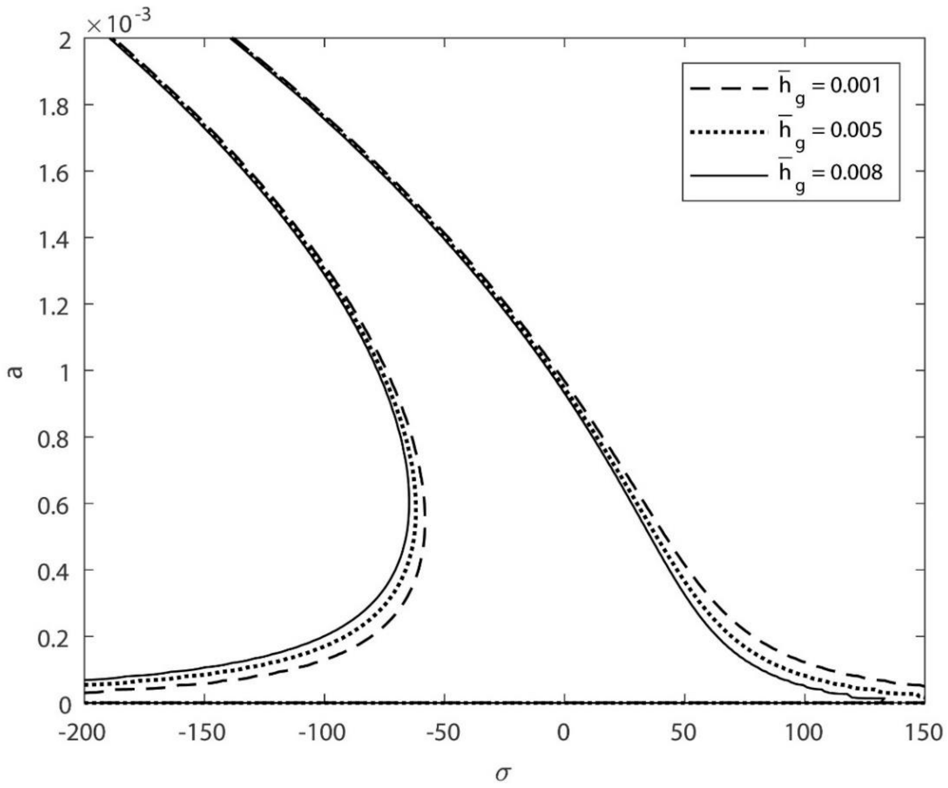
شکل (۴-۱۵): تأثیر $\tilde{V}_{AC}$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۱۳۲)، $\tilde{V}_{DC} = -5$ ، $\tilde{h}_g = 0.001$

۴-۶-۳ تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی (۳-۱۳۹)

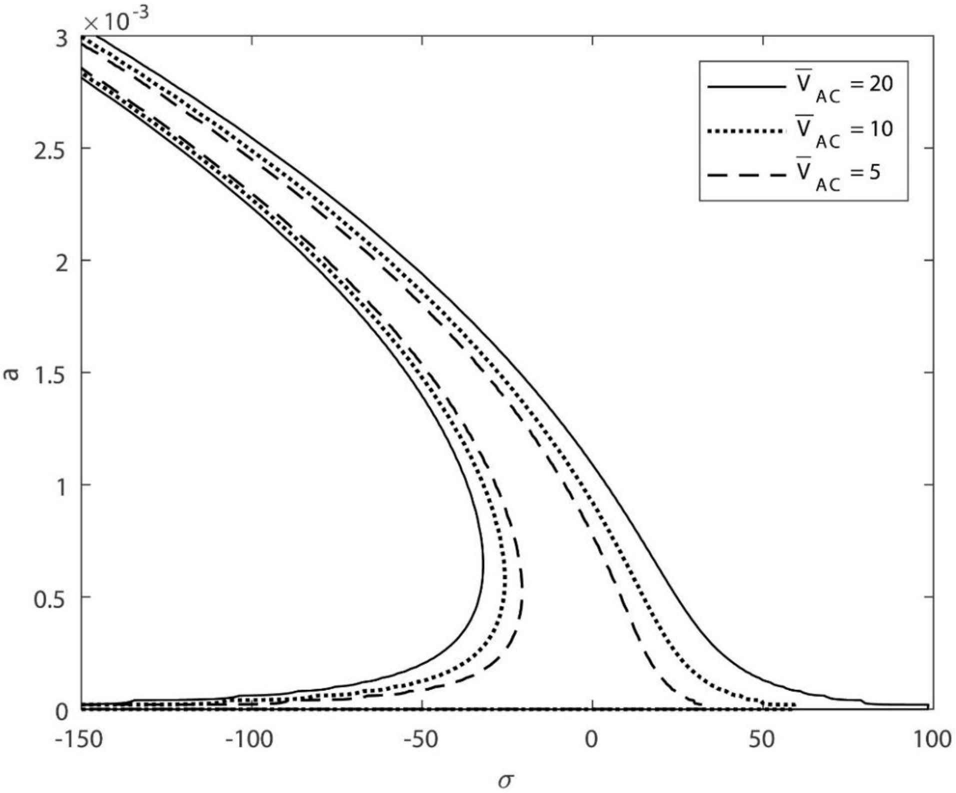
و اما این حالت رزونانسی، همان حالتی است که هر دو فرکانس Ω_1 و Ω_2 بر سیستم تأثیر می‌گذارند و درواقع جامع‌ترین حالت است.

- ✓ $V_p = V_{DC} + V_{AC}\cos(\Omega_1 t)$
- ✓ حالت ت) $\Omega_1 \approx 2\omega_0 \;\&\; \Omega_2 \approx \omega_0$

رفتار سیستم در این حالت، بسیار شبیه‌به همتای خود در قسمت اوّل مد متناوب است. توجّه داشته باشید که سیستم در این حالت به نمونه نزدیک‌شده و دو فرکانس مختلف، بایکدیگر ایجاد حالت رزونانسی خواهند کرد.

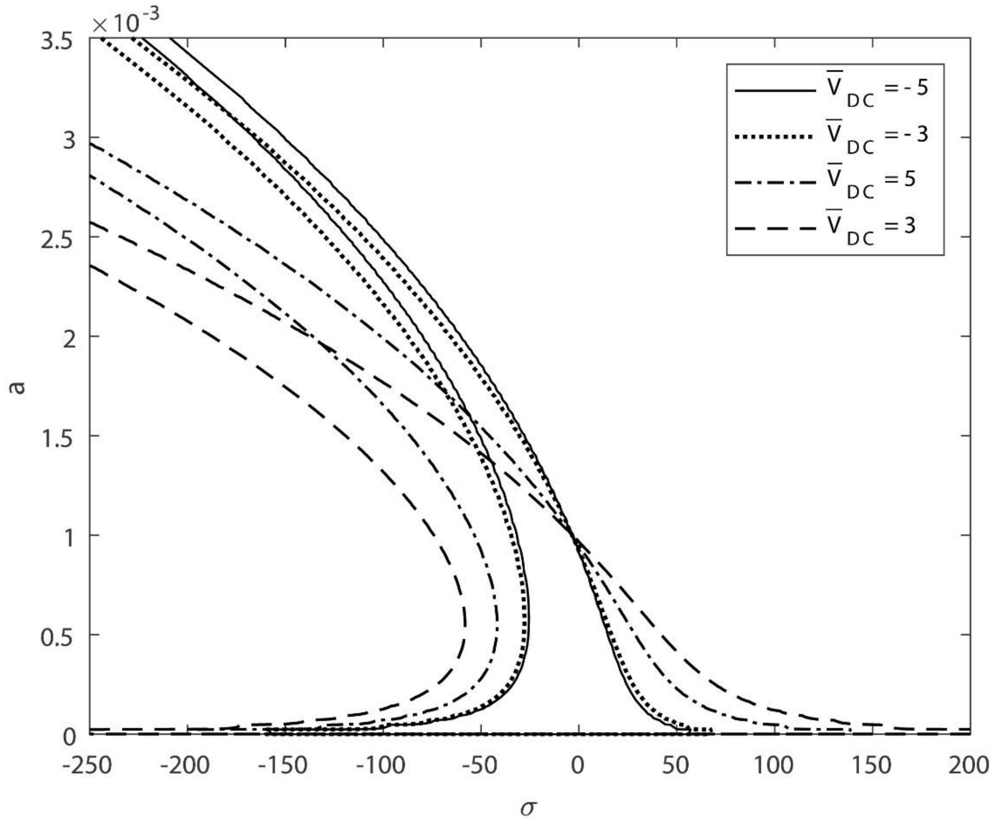


شکل (۴-۱۶): تأثیر $\tilde{h}_g$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۱۳۹)، $\tilde{V}_{DC} = 5$ ، $\tilde{V}_{AC} = 10$



شکل (۴-۱۷): تأثیر $\tilde{V}_{AC}$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۱۳۹)، $\tilde{V}_{DC} = -5$ ، $\tilde{h}_g = 0.001$

درواقع باتوجّه‌به نمودارهای (۴-۹) و (۴-۱۷)، به‌نظر می‌رسد که اگر هر دو فرکانس Ω_1 و Ω_2 به‌صورت همزمان در معادله مؤثّر باشند، با افزایش V_{AC}، نمودار اندکی به‌سمت راست حرکت خواهد کرد.



شکل (۴-۱۸): تأثیر $\tilde{V}_{DC}$ بر پاسخ فرکانسی (۳-۱۳۹)، $\tilde{V}_{AC}=10$ ، $\tilde{h}_g=0.001$

در نمودار (۴-۱۸) می‌بینیم که با کاهش مقدار V_{DC} به‌سمت اعداد منفی، نمودار دو حرکت همزمان انجام می‌دهد، اوّل اینکه شاخه‌های پاسخ به‌هم نزدیک‌شده و دوم اینکه دامنه‌ی آن افزایش می‌یابد.

رفتار سیستم در این حالت، کاملاً شبیه به همتای خود در قسمت اوّل مد متناوب است.

به‌طور کلّی می‌توان نتیجه گرفت که دراثر تغییر پارامترهای V_{DC} ، V_{AC} و h_g، درصورتی‌که دو فرکانس تحریک پایه و پیزوالکتریک بایکدیگر دخیل باشند، سیستم در دو حالت متفاوت مد متناوب، رفتار مشابهی را بروز می‌دهد.

فصل پنجم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۱-۵ نتیجه‌گیری:

- اوّلین نتیجه‌ای که از نمودارهای تغییر فرکانس طبیعی برحسب V_{DC} می‌توان‌گرفت، این است که با افزایش مقدار V_{DC}، فرکانس طبیعی سیستم نیز افزایش می‌یابد.
- با کاهش مقدار V_{DC} به‌سمت اعداد منفی، در تمام حالت‌ها از نرم‌شوندگی سیستم کاسته می‌شود و دامنه‌ی ارتعاشات غیر خطّی سیستم افزایش می‌یابد. نکته‌ای که وجود دارد در نمودار مربوط به معادله‌ی (۳-۱۱۶) است که تنها در این نمودار، با میل‌کردن V_{DC} به‌سمت اعداد منفی، شاخه های پاسخ از هم دور می‌شوند.
- در برخی از حالت‌های رزونانسی، V_{AC} تأثیری ندارد. اما به‌طور کلّی، اگر V_{AC} افزایش یابد، شاخه‌های پاسخ نیز از هم دور می‌شوند. تنها استثنا، زمانی رخ می‌دهد که هردو فرکانس تحریک پایه و ولتاژ اعمالی‌به پیزوالکتریک، باهم دخیل باشند. دراین‌صورت، با افزایش V_{AC}، علاوه‌بر دورشدن شاخه‌ها، دامنه‌ی ارتعاشات غیر خطّی نیز افزایش خواهد یافت.
- تحریک پایه یا h_g تنها در مد متناوب مؤثّر است. به‌طور کلّی، با کاهش h_g دامنه‌ی ارتعاشات غیر خطّی سیستم کاهش می‌یابد. البته در زمانی‌که دو فرکانس تحریک پایه و ولتاژ اعمالی باهم دخیل باشند، عملاً تغییر دامنه وجود ندارد و نمودار فقط اندکی به راست یا چپ متمایل می‌شود.
- با بررسی نمودارهای موجود، مشاهده می‌شود که هر سه پارامتر V_{DC}، V_{AC}و h_g بر رفتار سیستم مؤثّر هستند. در برخی شرایط رزونانسی، V_{DC} و h_g نقشی ندارند اما V_{DC} همواره تأثیرگذار است.

۵-۲ پیشنهادها:

برای مطالعه‌ی جامع‌تر مسأله، بررسی موارد زیر پیشنهاد می‌شود:

- بررسی تأثیر پارامترهای دیگر مسأله بر نمودار پاسخ فرکانسی.
- درنظرگرفتن جنس‌های دیگر برای تیر FG و به‌دست‌آوردن بهینه‌ترین جنس.

منابع

[1] Binnig, G., & Rohrer, H. (1987). Scanning tunneling microscopy—from birth to adolescence. *reviews of modern physics*, 59(3), 615.

[2] Martin, Y., Williams, C. C., & Wickramasinghe, H. K. (1987). Atomic force microscope–force mapping and profiling on a sub 100‐Å scale. *Journal of Applied Physics*, 61(10), 4723-4729.

[3] Binnig, G., Quate, C. F., & Gerber, C. (1986). Atomic force microscope. *Physical review letters*, 56(9), 930.

[4] James, S. A., Powell, L. C., & Wright, C. J. (2016). Atomic Force Microscopy of Biofilms—Imaging, Interactions, and Mechanics. *In Microbial Biofilms-Importance and Applications*. InTech.

[5] Rabe, U., Janser, K., & Arnold, W. (1996). Vibrations of free and surface‐coupled atomic force microscope cantilevers: theory and experiment. *Review of Scientific Instruments*, 67(9), 3281-3293.

[6] Zhong, Q., Inniss, D., Kjoller, K., & Elings, V. B. (1993). Fractured polymer/silica fiber surface studied by tapping mode atomic force microscopy. *Surface science*, 290(1-2), L688-L692.

[7] Weihs, T. P., Nawaz, Z., Jarvis, S. P., & Pethica, J. B. (1991). Limits of imaging resolution for atomic force microscopy of molecules. *Applied Physics Letters*, 59(27), 3536-3538.

[8] Butt, H. J., & Jaschke, M. (1995). Calculation of thermal noise in atomic force microscopy. *Nanotechnology*, 6(1), 1.

[9] Sahu, S. S. (2017). Engineering magnetic hardness of Cobalt thin films via phase transformation, grain modification and defects (Doctoral dissertation, National Institute of Science Education and Research Bhubaneswar).

[10] Burnham, N. A., Colton, R. J., & Pollock, H. M. (1993). Interpretation of force curves in force microscopy. *Nanotechnology*, 4(2), 64.

[11] Garcia, R., & San Paulo, A. (2000). Dynamics of a vibrating tip near or in intermittent contact with a surface. *Physical Review B*, 61(20), R13381.

[12] Jalili, N., & Laxminarayana, K. (2004). A review of atomic force microscopy imaging systems: application to molecular metrology and biological sciences. *Mechatronics*, 14(8), 907-945.

[13] Albrecht, T. R., Akamine, S., Carver, T. E., & Quate, C. F. (1990). Microfabrication of cantilever styli for the atomic force microscope. *Journal of Vacuum Science & Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*, 8(4), 3386-3396.

[14] Stelmashenko, N. A., Walls, M. G., Brown, L. M., & Milman, Y. V. (1993). Microindentations on W and Mo oriented single crystals: an STM study. *Acta Metallurgica et Materialia*, 41(10), 2855-2865.

[15] Xide, G. X. F. D. L. (2005). Measurement of deformation of pure Ni foils by speckle pattern interferometry [J]. *Mechanics and Engineering*, 2.

[16] Lam, D. C., Yang, F., Chong, A. C. M., Wang, J., & Tong, P. (2003). Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(8), 1477-1508.

[17] Yang, F. A. C. M., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., & Tong, P. (2002). Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10), 2731-2743.

[18] Wu, T. S., Chang, W. J., & Hsu, J. C. (2004). Effect of tip length and normal and lateral contact stiffness on the flexural vibration responses of atomic force microscope cantilevers. *Microelectronic engineering*, 71(1), 15-20.

[19] Meirovich, L., Elements of Vibration Analysis,. 1986, New York: McGraw-Hill.

[20] Turner, J. A., & Wiehn, J. S. (2001). Sensitivity of flexural and torsional vibration modes of atomic force microscope cantilevers to surface stiffness variations. *Nanotechnology*, 12(3), 322.

[21] Abbasi, M., & Mohammadi, A. K. (2014). A detailed analysis of resonant frequency and sensitivity of flexural modes of an atomic force microscope cantilevers with sidewall probe based on a nonlocal elasticity theory. *Strojniški vestnik-Journal of Mechanical Engineering*, 60(3), 179-186.

[22] Florin, E. L., Radmacher, M., Fleck, B., & Gaub, H. E. (1994). Atomic force microscope with magnetic force modulation. *Review of scientific instruments*, 65(3), 639-643.

[23] Burnham, N. A., Kulik, A. J., Gremaud, G., Gallo, P. J., & Oulevey, F. (1996). Scanning local-acceleration microscopy. *Journal of Vacuum Science & Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures Processing, Measurement, and Phenomena*, 14(2), 794-799.

[24] Turner, J. A., Hirsekorn, S., Rabe, U., & Arnold, W. (1997). High-frequency response of atomic-force microscope cantilevers. *Journal of Applied Physics*, 82(3), 966-979.

[25] Drobek, T., Stark, R. W., Gräber, M., & Heckl, W. M. (1999). Overtone atomic force microscopy studies of decagonal quasicrystal surfaces. *New Journal of Physics*, 1(1), 15.

[26] Mazeran, P. E., & Loubet, J. L. (1999). Normal and lateral modulation with a scanning force microscope, an analysis: implication in quantitative elastic and friction imaging. *Tribology Letters*, 7(4), 199-212.

[27] Yaralioglu, G. G., Degertekin, F. L., Crozier, K. B., & Quate, C. F. (2000). Contact stiffness of layered materials for ultrasonic atomic force microscopy. *Journal of Applied Physics*, 87(10), 7491-7496.

[28] Abbasi, M., & Mohammadi, A. K. (2010). A new model for investigating the flexural vibration of an atomic force microscope cantilever. *Ultramicroscopy*, 110(11), 1374-1379.

[29] Abbasi, M., & Karami Mohammadi, A. (2009). Effect of contact position and tip properties on the flexural vibration responses of atomic force microscope cantilevers. *Int Rev Mech Eng*, 3, 196-202.

[30] Abbasi, M. (2015). Size dependent vibration behavior of an AFM with sidewall and top-surface probes based on the strain gradient elasticity theory. *International Journal of Applied Mechanics*, 7(03), 1550046.

[31] Lin, S. M., Liauh, C. T., Wang, W. R., & Ho, S. H. (2007). Analytical solutions of the frequency shifts of several modes in AFM scanning an inclined surface, subjected to the Lennard-Jones force. *International Journal of Solids and Structures*, 44(3), 799-810.

[32] Rodrıguez, T. R., & García, R. (2002). Tip motion in amplitude modulation (tapping-mode) atomic-force microscopy: Comparison between continuous and point-mass models. *Applied Physics Letters*, 80(9), 1646-1648.

[33] Stark, R. W., Drobek, T., & Heckl, W. M. (1999). Tapping-mode atomic force microscopy and phase-imaging in higher eigenmodes. *Applied Physics Letters*, 74(22), 3296-3298.

[34] Łojewska, J., Knapik, A., Jodłowski, P., Łojewski, T., & Kołodziej, A. (2013). Topography and morphology of multicomponent catalytic materials based on Co, Ce and Pd oxides deposited on metallic structured carriers studied by AFM/Raman interlaced microscopes. *Catalysis today*, 216, 11-17.

[35] Garcia, R., & San Paulo, A. (1999). Attractive and repulsive tip-sample interaction regimes in tapping-mode atomic force microscopy. *Physical Review B*, 60(7), 4961.

[36] Lee, S. I., Howell, S. W., Raman, A., & Reifenberger, R. (2003). Nonlinear dynamic perspectives on dynamic force microscopy. *Ultramicroscopy*, 97(1), 185-198.

[37] García, R. (2011). Amplitude modulation atomic force microscopy. *John Wiley & Sons.*

[38] Gleyzes, P., Kuo, P. K., & Boccara, A. C. (1991). Bistable behavior of a vibrating tip near a solid surface. *Applied Physics Letters,* 58(25), 2989-2991.

[39] Fain Jr, S. C., Barry, K. A., Bush, M. G., Pittenger, B., & Louie, R. N. (2000). Measuring average tip-sample forces in intermittent-contact (tapping) force microscopy in air. *Applied Physics Letters*, 76(7), 930-932.

[40] Lee, S. I., Howell, S. W., Raman, A., & Reifenberger, R. (2002). Nonlinear dynamics of microcantilevers in tapping mode atomic force microscopy: A comparison between theory and experiment. *Physical Review B*, 66(11), 115409.

[41] Rützel, S., Lee, S. I., & Raman, A. (2003, August). Nonlinear dynamics of atomic–force–microscope probes driven in Lennard–Jones potentials. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (Vol. 459, No. 2036, pp. 1925-1948). The Royal Society.

[42] Korayem, M. H., Sharahi, H. J., & Korayem, A. H. (2012). Comparison of frequency response of atomic force microscopy cantilevers under tip-sample interaction in air and liquids. *Scientia Iranica*, 19(1), 106-112.

[43] Dai, G., Wolff, H., Pohlenz, F., Danzebrink, H. U., & Wilkening, G. (2006). Atomic force probe for sidewall scanning of nano-and microstructures. *Applied physics letters*, 88(17), 171908.

[44] Dai, G., Wolff, H., Weimann, T., Xu, M., Pohlenz, F., & Danzebrink, H. U. (2007). Nanoscale surface measurements at sidewalls of nano-and micro-structures. *Measurement science and Technology*, 18(2), 334.

[45] Kahrobaiyan, M. H., Ahmadian, M. T., Haghighi, P., & Haghighi, A. (2010). Sensitivity and resonant frequency of an AFM with sidewall and top-surface probes for both flexural and torsional modes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(10), 1357-1365.

[46] Mindlin, R. D. (1964). Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1), 51-78.

[47] Eringen, A. C. (1972). Nonlocal polar elastic continua. *International journal of engineering science*, 10(1), 1-16.

[48] Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics*, 54(9), 4703-4710.

[49] Fleck, N. A., & Hutchinson, J. W. (1993). A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(12), 1825-1857.

[50] Fleck, N. A., & Hutchinson, J. W. (1997). Strain gradient plasticity. *Advances in applied mechanics*, 33, 296-361.

[51] Fleck, N. A., & Hutchinson, J. W. (2001). A reformulation of strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(10), 2245-2271.

[52] Kong, S., Zhou, S., Nie, Z., & Wang, K. (2008). The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams. *International Journal of Engineering Science*, 46(5), 427-437.

[53] Kahrobaiyan, M. H., Asghari, M., Rahaeifard, M., & Ahmadian, M. T. (2010). Investigation of the size-dependent dynamic characteristics of atomic force microscope microcantilevers based on the modified couple stress theory. *International Journal of Engineering Science*, 48(12), 1985-1994.

[54] Kong, S., Zhou, S., Nie, Z., & Wang, K. (2009). Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47(4), 487-498.

[55] Azizi, S., Ghazavi, M. R., Khadem, S. E., Yang, J., & Rezazadeh, G. (2012). Stability analysis of a parametrically excited functionally graded piezoelectric, MEM system. *Current Applied Physics*, 12(2), 456-466.

[56] Kahrobaiyan, M. H., Rahaeifard, M., Tajalli, S. A., & Ahmadian, M. T. (2012). A strain gradient functionally graded Euler–Bernoulli beam formulation. *International Journal of Engineering Science*, 52, 65-76.

[57] Nayfeh, A.H., Introduction to Perturbation Techniques, 1993 ,New York: Wiley & Sons, Inc.

[58] Maugis, D. (1992). Adhesion of spheres: the JKR-DMT transition using a Dugdale model. *Journal of colloid and interface science*, 150(1), 243-269.

[59] Johnson, K. L., Kendall, K., & Roberts, A. D. (1971, September). Surface energy and the contact of elastic solids. In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, *Physical and Engineering Sciences* (Vol. 324, No. 1558, pp. 301-313). The Royal Society.

[60] Song, Y., & Bhushan, B. (2006). Simulation of dynamic modes of atomic force microscopy using a 3D finite element model. *Ultramicroscopy*, 106(8), 847-873.

[61] Meirovitch, L., Fundamentals of Vibrations. Second ed. Mechanical Engineering. 2001, New York: McGraw-Hill.

[62] Rahaeifard, M., Kahrobaiyan, M. H., Ahmadian, M. T., & Firoozbakhsh, K. (2013). Strain gradient formulation of functionally graded nonlinear beams. *International Journal of Engineering Science*, 65, 49-63.

[٦٣] کرمی محمدی، اردشیر و عباسی، محمد. (۲۰۱۴). ارتعاشات غیرخطی میکروتیر میکروسکوپ نیرو اتمی در مد متناوب، بر اساس تئوری تنش-کوپل اصلاح شده. *مهندسی مکانیک مدرس*, ۱۴(۱۱), ۱۷-۹.

Abstract:

In this paper, size-dependent behavior of Atomic force microscope microbeam made of functionally graded materials (FGMs) in both contact and tapping mode, is investigated on the basis of the strain gradient theory.

The material properties of the microbeam are varying in the direction of the microbeam thickness, based on a power law. General presented governing equation and the boundary conditions have been specialized for a cantilever beam using in atomic force microscopes (AFMs), with silicon in mid-plane and piezoelectric in both sides through thickness.

The electric excitation loading on the beam is considered to be generated by AC and DC interactions; and this point, separates this analysis into two different segments. The effect of the tip position, on the vibration of the micro cantilever are also analyzed.

The analysis of the nonlinear motion of the microbeam is carried out with the employment of perturbation theory and multiple scales method. As a Conclusion, the nonlinear behavior of the system based on frequency response equation is discussed.

Keywords:

Atomic Force Microscope (AFM), Nonlocal Elasticity Theories, Functionally Graded Materials (FGM), Pertorbation Theory, Multiple Scales Method, Microbeam.

Faculty of Mechanical Engineering

Msc Thesis in Aerospace Engineering

Nonlinear vibrational analysis of an AFM in tapping and contact mode with FGM conventional cantilever, using nonlocal elasticity theories

Student:

Niloofar Khosravi

Supervisor:

Dr. Amir Jalali

September 2017