بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک
گروه مکانیک سیالات

بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده دارای مقطع مستطیلی و در حالت های ایستا و چرخان

دانشجو : محمود نوروزی

اساتید راهنما :
دکتر محمد حسن کیهانی
دکتر محمد رضا حیرانی نوبری

استاد مشاور
دکتر فرهاد طالبی

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

اسفند ۱۳۸۸

شماره : ۹۰/۲۲۸۸/پ
تاریخ : ۸۸/۱۲/۱۳
ویرایش :

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره ۱۱

صورتجلسه دفاع از رساله دکتری (ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود آقای **محمود نوروزی** دانشجوی دکتری رشته **مکانیک – تبدیل انرژی** ورودی **۱۳۸۴** در تاریخ**۱۳۸۸/۱۲/۴** از رساله خود با عنوان: **بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکو الاستیک در مجاری خمیده دارای مقطع مستطیلی و در حالت های ایستاو چرخان** دفاع و با اخذ نمره......۲۰...... به درجه : ...دکترا PhD...... نائل گردید .

الف) درجه عالی : نمره ۲۰-۱۹ ☑	ب) درجه بسیار خوب : نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷ ☐
ج) درجه خوب : نمره۱۶/۹۹– ۱۵ ☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
ذ) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐	

	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکترمحمدحسن کیهانی	استاد راهنمای اول	دانشیار	
۲	دکترمحمدرضاحیرانی‌نوبری	استاد راهنمای دوم	دانشیار	
۳	دکتر فرهاد طالبی	استاد راهنما / مشاور	استادیار	
۴	دکتر مهردادتقی‌زاده‌منظری	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۵	دکتربهار فیروزآبادی	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۶	دکترمحمدجواد مغربی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۷	دکتر محمود شریعتی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۸	دکتر محمود فرزانه گرد	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	دانشیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید .

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران :

تاریخ و امضاء

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل زندگی
یار و پشتیبان من بودند.

تشکر و قدردانی

اکنون که این رساله به پایان رسیده بر خود واجب می‌دانم از راهنمایی‌ها و زحمات بی دریغ اساتید محترم آقایان دکتر محمد حسن کیهانی، دکتر محمدرضا حیرانی نوبری و دکتر فرهاد طالبی سپاسگزاری نمایم.

تعهد نامه

اینجانب **محمود نوروزی** دانشجوی دوره دکتری رشته **مهندسی مکانیک – تبدیل انرژی** دانشکده **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله **بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکو الاستیک در مجاری خمیده دارای مقطع مستطیلی و در حالت های ایستا و چرخان** تحت راهنمایی **دکتر محمدحسن کیهانی و محمدرضا حیرانی نوبری** متعهد می شوم :

- تحقیقات در این پایان نامه / رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصلت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه/رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آمدن نتایج اصلی پایان نامه / رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه/رساله رعایت می‌گردد .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه/رساله ،در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه/رساله ،در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ : ۸۸/۱۲/۱۲

امضاء دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه‌های رایانه‌ای ، نرم افزارها و تجهیزات شاخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و این مطلب باشد به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه / رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد .
- متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه‌های تکثیرشده پایان نامه/رساله وجود داشته باشد .

چکیده

جریان در مجاری خمیده از جمله مسائل کلاسیک و پایه در مکانیک سیالات محسوب می شود که دارای کاربردهای متنوعی در زمینه های مختلف صنعتی و پزشکی است. تاکنون تحقیقات آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی بیشماری در خصوص این جریان صورت گرفته که عمده این تحقیقات در مورد سیالات نیوتنی بوده و سهم اندکی از آنها متوجه سیالات غیرنیوتنی و بویژه سیالات ویسکوالاستیک است. در این تحقیق، جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی در حالات ایستا و چرخان مورد بررسی قرار می گیرد. هدف اصلی از پژوهش حاضر، شناخت بهتر اثرات خواص ویسکوالاستیک بر این جریان است. برای این منظور از مدل کریمینال-اریکسون-فیلبی (CEF) به عنوان معادله متشکله سیال ویسکوالاستیک استفاده شده که قادر به ارائه اثر توابع ویسکومتریک غیرخطی و بویژه هر دو مقدار اختلاف تنش های نرمال اول و دوم است.

در این تحقیق، مطالعه جریان و انتقال حرارت در مجاری خمیده با استفاده از روش های تحلیلی و عددی انجام شده است. در اینجا با استفاده از تکنیک مرتبه بزرگی رابطه تحلیلی برای تعادل نیروها در ناحیه هسته جریان در کانال خمیده ارائه می شود که به شناخت نحوه اثر نیروهای موثر بر میدان جریان کمک شایانی می نماید. همچنین برای نخستین بار با استفاده از این تکنیک روابط تحلیلی برای میدان جریان خزشی سیال مرتبه دو در کانال های خمیده دارای مقطع مستطیلی ارائه می شود. در اینجا برای اثبات اثرات متضاد ثابت های زمانی رهایی از تنش و تاخیر سیال ویسکوالاستیک بر دبی جریان در مجاری خمیده از روش حساب اختلالات استفاده شده است. به دلیل وجود دشوارهای محاسباتی در راه استفاده از این روش برای مطالعه جریان در مجاری خمیده غیر مدور، این اثرات در مجاری خمیده مدور مطالعه شده است. با استفاده از این نتایج تحلیلی نشان داده می شود که در سیالات دارای مقادیر ثابت زمانی نسبتاً بزرگ، میزان مقاومت جریان ویسکوالاستیک از جریان نیوتنی بیشتر است حال آنکه در سیالات دارای

مقادیر ثابت زمانی تاخیر بزرگ این اثر برعکس بوده و جریان از خود رفتار کاهش پسا نشان می دهد. همچنین نتایج عددی مربوط به جریان در کانال خمیده مستطیلی نیز به این پدیده دلالت دارد. بخش اصلی نتایج این پژوهش مربوط به نتایج حاصل از شبیه سازی عددی است. در اینجا از روش تفاضل محدود برای گسسته سازی معادلات حاکم بر روی شبکه جابجا شده استفاده شده و نحوه اختصاص پارامترهای میدان جریان و انتقال حرارت بر روی این شبکه مطابق روش علامتگذاری و سلول است. همچنین روش تراکم پذیری مصنوعی جهت تخمین فشار در طی گامهای زمانی تحلیل به کار گرفته شده و از برخی تکنیک های عددی برای پایدار نمودن حل عددی در خواص الاستیک بزرگ استفاده شده است. بر اساس شبیه سازی عددی، صحت نتایج حاصل از حل عددی ارزیابی شده و استقلال پاسخ های عددی از شبکه تحقیق شده است. همچنین اثر پارامترهایی نظیر عدد رینولدز، عدد دین، عدد روزبی، عدد الاستیک، عدد وایزنبرگ، نسبت انحنا، نسبت ابعادی، اثر ویسکوزیته و ثابت های اختلاف تنش نرمال اول و دوم وابسته به نرخ برش بر میدان جریان و انتقال حرارت در جریان خزشی و اینرسی (در حالات پایدار و ناپایدار) به روش عددی مورد بررسی قرار می گیرد. در اینجا برای نخستین بار نشان داده می شود که برخلاف جریان خزشی سیال نیوتنی در کانال خمیده، جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده می تواند ناپایدار شود. از نوآوری های دیگر تحقیق حاضر آن است که برخلاف تحقیقات پیشین، اثر اختلاف تنش های نرمال بطور مجزا بر میدان جریان بررسی شده و نشان داده می شود که ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول با افزایش شدت جریانهای ثانویه همراه بوده و می تواند سبب بروز ناپایداری در جریان شود حال آنکه ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی دارای اثر کاملاً متضادی بوده و در جهت پایدار نمودن جریان عمل می نماید.

کلمات کلیدی: سیال ویسکوالاستیک، جریان، انتقال حرارت، لوله خمیده، مقطع مستطیلی، مدل CEF

لیست مقالات مستخرج از رساله

مقالات منتشر شده در مجلات

1. Norouzi, M., Kayhani, M.H., Chang, S., Nobari, M.R.H., "Flow of Second Order Fluid in a Curved Duct with Square Cross Section", JNNFM, In Press.
2. Norouzi, M., Kayhani, M.H., Nobari, M.R.H., Joneidi, A.A., "An Analytical Investigation of Second Order Fluid Flow inside a Curved Circular Pipe", Int. J. of Non. Dyn. and Eng. Sci., In Press.
3. Norouzi, M., Kayhani, M.H., Nobari, M.R.H, "Mixed and Forced Convection of Viscoelastic Materials in Straight Duct with Rectangular Cross Section", World App. Sci. J., Vol. 7., No. 3., pp. 285-296, 2009

۴- کیهانی، م، ح، نوبری، م، ر، ح، نوروزی، م، "بررسی عددی جریان و انتقال حرارت در یک کانال U شکل چرخان"، مجله علمی و پژوهشی مکانیک و هوافضا امام حسین (ع)، شماره ۲، جلد ۳، صفحات، ۵۹-۷۲، ۱۳۸۶.

کنگره های بین المللی

1. Norouzi, M., Kayhani, M.H., Nobari, M.R.H, M. Karimi Demneh, "Convective Heat Transfer of Viscoelastic Flow in a Curved Duct", International Conference on Mechanical, Aeronautical and Manufacturing Engineering, Singapore, 2009.

۲- نوروزی، م، کیهانی، م، ح، نوبری، م، ر، ح، "بررسی عددی جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع مربعی"، هفدهمین کنفرانس سالانه (بین المللی) مهندسی مکانیک، تهران، ۱۳۸۸.

فهرست مطالب   صفحه

فصل اول: مقدمه

فصل دوم: روابط فیزیکی

فصل چهارم: روش عددی

فصل پنجم: نتایج عددی

فصل ششم: نتیجه گیری

ضمیمه: مروری اجمالی بر سیالات ویسکوالاستیک

فهرست تصاویر — صفحه

فهرست جداول صفحه

فهرست علائم

$\tilde{a}$	طول ضلع مقطع کانال در جهت r، m
$\tilde{A}$	مساحت مقطع کانال، m^2
$\tilde{b}$	طول ضلع مقطع کانال در جهت z، m
$Br_T = \eta_0 W_0^{\,2} / (k(\tilde{T}_{in} - \tilde{T}_w))$	عدد برینکمن در حالت دما ثابت
$Br_H = \eta_0 W_0^{\,2} / (D_h q'')$	عدد برینکمن در حالت شار ثابت
c	ظرفیت گرمایی ویژه، J/kg.K
$D_h = 2\tilde{a}\tilde{b} / (\tilde{a} + \tilde{b})$	قطر هیدرولیکی، m
$De = \lambda / t$	عدد دبورا
$Dn = \mathrm{Re}\,\delta^{1/2}$	عدد دین بر مبنای سرعت مرجع
$Dn_b = \mathrm{Re}_b\,\delta^{1/2}$	عدد دین بر مبنای متوسط سرعت محوری
$En = We / \mathrm{Re}$	عدد الاستیک
$\tilde{F}$	بردار نیروهای حجمی، N
G	مقدار مطلق افت فشار کانال، pa/m
h	ضریب انتقال حرارت جابجایی، $W/m^2.K$
k	ضریب انتقال حرارت هدایتی، W/m.K
$Nu = hD_h / k$	عدد ناسلت
$Nu_m = (1/p)\int_p Nu\,dp$	عدد ناسلت متوسط محیطی
n	مرتبه وابستگی توابع ویسکومتریک به نرخ برش
$\tilde{P}$	فشار استاتیکی، pa
$P = \tilde{P} D_h / (\eta_0 W_0)$	فشار استاتیکی بی بعد
p	محیط مقطع کانال، m
$\mathrm{Pr} = \eta / (\rho\alpha)$	عدد پرانتل
q''	شار حرارتی، W/m^2
$\mathrm{Re} = \rho W_0 D_h / \eta_0$	عدد رینولدز بر مبنای سرعت مرجع
$\mathrm{Re}_b = \rho U D_h / \eta_0$	عدد رینولدز بر مبنای سرعت متوسط
r	جهت شعاعی دستگاه مختصات استوانه ای

$\tilde{R}$	شعاع گام کانال خمیده، m
$R=\tilde{R}/D_h$	شعاع گام بی بعد کانال خمیده
$Ro=\omega D_h/W_0$	عدد روزبی
s	مختصه محوری دستگاه مختصات ترویدال
$S_{\max}$	ماکزیمم سرعت بی بعد جریان های ثانویه
$\tilde{T}$	دمای سیال، K
$\tilde{T}_{in}$	دمای سیال در ورودی، K
$\tilde{T}_m=1/(UA)\int\tilde{v}_\theta\tilde{T}dA$	دمای متوسط سیال، K
$\tilde{T}_w$	دمای دیواره کانال، K
$T_T=(\tilde{T}-\tilde{T}_w)/(\tilde{T}_{in}-\tilde{T})$	دمای بی بعد برای حالت دما ثابت و در حال توسعه حرارتی
$T_H=(\tilde{T}-\tilde{T}_{in})/(q''D_h/k)$	دمای بی بعد برای حالت شار ثابت و در حال توسعه حرارتی
$T'_H=(\tilde{T}_w-\tilde{T})/(\tilde{T}_w-\tilde{T}_m)$	دمای بی بعد برای حالت دما ثابت و توسعه یافته حرارتی
$T'_T=(\tilde{T}-\tilde{T}_w)/(q''D_h/k)$	دمای بی بعد برای حالت شار ثابت و توسعه یافته حرارتی
U	متوسط سرعت محوری جریان اصلی، m/s
$\tilde{v}_i$	مولفه های سرعت، m/s
$v_i=\tilde{v}_i/W_0$	مولفه های سرعت بی بعد
$\tilde{V}$	بردار سرعت، m/s
v_r	مولفه بی بعد سرعت در جهت شعاعی
v_θ	مولفه بی بعد سرعت در جهت زاویه ای
v_z	مولفه بی بعد سرعت در جهت محوری
$W_0=GD_h^2/(16\eta_0)$	سرعت مرجع، m/s
$We=\lambda_1 W/(2D_h)$	عدد وایزنبرگ
$\tilde{x}_i$	مولفه های دستگاه مختصات، m
$x_i=\tilde{x}_i/D_h$	مولفه های بی بعد دستگاه مختصات
z	جهت محوری دستگاه مختصات استوانه ای
$\delta=\tilde{a}/(2\tilde{R})$	نسبت انحنای کانال خمیده
ϕ	کار میدان تنش
$\tilde{\gamma}_{(1)}$	نرخ برش مرتبه اول، s^{-1}

نرخ برش مرتبه دوم، s^{-2}	$\tilde{\gamma}_{(2)}$
نرخ برش مرتبه اول بی بعد	$\gamma_{(1)} = \tilde{\gamma}_{(1)} D_h / W_0$
نرخ برش مرتبه دوم بی بعد	$\gamma_{(2)} = \tilde{\gamma}_{(2)} D_h{}^2 / W_0{}^2$
ویسکوزیته، pa.s	η
ویسکوزیته در نرخ برش صفر، pa.s	η_0
ویسکوزیته در نرخ برش بی نهایت، pa.s	η_∞
نسبت ابعادی	$\kappa = \tilde{a} / \tilde{b}$
ثابت زمانی رهایی از تنش، s	λ_1
ثابت زمانی تاخیر، s	λ_2
جهت زاویه ای دستگاه مختصات استوانه ای	θ
چگالی، kg/m^3	ρ
تانسور تنش، pa	$\tilde{\tau}$
سرعت دوران، rad/s	ω
تانسور تنش بی بعد	$\tau = \tilde{\tau} D_h / (\eta_0 W_0)$
ثابت اختلاف تنش نرمال اول $pa.s^2$	$\tilde{\Psi}_1$
ثابت اختلاف تنش نرمال دوم $pa.s^2$	$\tilde{\Psi}_2$
ثابت بی بعد اختلاف تنش نرمال اول	$\Psi_1 = \tilde{\Psi}_1 W_0 / (\eta_0 D_h)$
ثابت بی بعد اختلاف تنش نرمال دوم	$\Psi_2 = \tilde{\Psi}_2 W_0 / (\eta_0 D_h)$
تابع جریان	ψ

فصل اول

مقدمه

۱-۱- مقدمه

از اوایل قرن بیستم تاکنون دانش مکانیک سیالات غیـر نیـوتنی، موضـوع بـسیاری از تحقیقـات تئـوری و آزمایشگاهی بوده است. در این میان مطالعه سیالات ویسکوالاستیک به سـبب پیچیـدگی هـای حـاکم بـر رفتار فیزیکی و نیز کاربردهای گسترده صنعتی، نظامی و پزشکی از اهمیت خاصی برخوردار است. هدف از این تحقیق بررسی جریان و انتقال حرارت دائمی سیالات ویسکوالاستیک در مجاری خمیده دارای مقطـع مستطیلی در حالت های ایستا و چرخان است.

در این فصل مروری بر تحقیقات گذشته در خصوص جریان و انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک در مجاری بسته خمیده و مستقیم ایستا و چرخان صورت می گیرد. به این ترتیب ضمن بیان تاریخچه مربوط به تحقیقات پیشین می توان به میزان اهمیت تحقیق در این زمینه و نیز زمینه های فراروی پژوهشگران برای ادامه این تحقیقات پی برد. همچنین با مقایسه نتایج حاصل از این مطالعات با تحقیق اخیر، جنبه های نوآوری و ضرورت مطالعه تحقیق حاضر آشکارتر می شود.

علاوه بر مطالعات مربوط به کانال های خمیده، در این فصل جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در یک کانال بسته مستقیم نیز بررسی می شود. زیرا در نبود اثرات انحنا می توان اثر خواص رئولوژیک شامل اختلاف تنش های نرمال اول و دوم و نیز ویسکوزیته غیر خطی را بر این جریان مطالعه نمود و به طور خاص می توان نشان داد که علاوه بر انحنای مسیر، ترکیب خواص رئولوژیک و گوشه های تیز مربوط به مقطع جریان نیز می تواند به تشکیل جریانهای ثانویه منجر شود. همچنین برای درک بهتر رفتار جریان های دائمی و غیر دائمی در سیالات ویسکوالاستیک، نمونه هایی از جریانات غیر دائم این سیالات در کانالهای بسته بررسی شده است.

در پایان این فصل، تحقیق حاضر معرفی شده و مشخصات کلی، اهداف، کاربردها و موارد نوآوری آن مورد بحث قرار می گیرد. در پایان مروری اجمالی بر ساختار کلی تحقیق حاضر صورت می گیرد.

۱-۲- تاریخچه

دانش مکانیک سیالات از دیرباز مورد توجه دانشمندان بوده است. شاید بتوان فعالیت های اولیـه بـشر نظیر ساخت کشتی و قایق، احداث بند، حفر قنات، چاه و کانال های آبیـاری، لولـه کـشی آب و فاضـلاب (مانند لوله کشی آب اسکندریه)، ساخت تجهیزات اندازه گیری عمق، دبی و تجهیـزات انتقـال آب (نظیـر چرخ های آبیاری، تلمبه ها و پمپ ها) را مقدمه ای بر مهندسی مکانیک سـیالات دانـست. ارشـمیدس را می توان نخستین دانشمند کلاسیک در دانش مکانیک سیالات به شمار آورد. مهمترین دستاورد وی ارائه قانون معروف ارشمیدس درباره شناوری اجسام است. از جمله دستاوردهای دیگر ارشمیدس اختراع پمـپ پیچی (معروف به پمپ ارشمیدس) و ارائه راهکار جهت ساخت کشتی های بزرگ است کـه در زمـان وی به ساخت بزرگترین کشتی تجاری عهد باستان برای حاکم شهر سیراکوس (یک دولت شهر یونان) منجـر شد. از آن زمان تا اوایل قرن هفدهم میلادی توسعه دانش مکانیک سیالات بـه کنـدی پیگیـری شـد و از مهمترین فعالیت های مهندسی این دوره می توان به اصلاح تجهیـزات انتقـال آب، توسـعه آسـیاب هـای بادی و ساخت کشتی های بادبانی جدید (به خصوص با شروع دوره استعمار در اسپانیا و انگلـیس) اشـاره نمود [۱]. شاید بتوان سرآغاز نوین دانش مکانیک سـیالات را بـه اوایـل قـرن هفـدهم نـسبت داد. در آن تاریخ، همزمان با تولد مکانیک نیوتنی و حساب دیفرانسیل و انتگرال، نیوتن مدلی برای قانون پایه حـاکم بر رفتار سینتیکی سیالات پیشنهاد نمود و سیالاتی که از این قانون تبعیت می کردند به سیالات نیـوتنی معروف شدند. سیال نیوتنی، ماده ای است که در آن تنش برشی بدون وجود تـنش تـسلیم (صـفر بـودن تنش برشی در نرخ برش صفر) تنها تابعی خطی از نرخ برش بوده و در این ماده نسبت تنش برشی به نرخ برش، ویسکوزیته نامیده می شود. در اواخر قرن نوزدهم، دانش مکانیک سیالات شـروع بـه توسـعه در دو جهت متفاوت نمود. در یک طرف تئوری هیدرودینامیک قرار داشت که با استفاده از دیدگاه اویلری سـعی بر ارائه روابط جریان برای یک سیال غیر ویسکوز داشت. از این تئوری روابط تحلیلی متنوعی برای جریان

سیالات غیرچسبنده بدون اصطکاک در هندسه های مختلف ارائه گردید. روابط بدست آمده از این تئوری در تعارض آشکار با مشاهدات تجربی قرار داشت و لذا این تئوری در عمل مورد استفاده چندانی قرار نگرفت. از آنجا که به علت رشد سریع تکنولوژی، مهندسین نیازمند حل مسائل مهمی بودند لذا با استفاده از روش تجربی به حل این مسائل اقدام نمودند و دانشی که بر مبنای این مشاهدات تجربی توسعه یافت به هیدرولیک معروف شد. در آغاز قرن بیستم، پرانتل نشان داد که چگونه می توان این دو شاخه از مکانیک سیالات را به یکدیگر پیوند داد. در سال ۱۹۰۴ وی نظریه لایه مرزی را مطرح نمود و طی آزمایشات بسیار ساده ای نشان داد که در جریان حول یک جسم، اثر ویسکوزیته و اصطکاک سیال در یک لایه بسیار نازک نزدیک سطوح قابل ملاحظه است اما در ناحیه دور از جسم می توان از اثر ویسکوزیته صرفنظر نمود. این نظریه پایه اصلی مکانیک سیالات لزج محسوب می شود که از آن زمان تاکنون موضوع بسیاری از مطالعات تجربی، آزمایشگاهی و تحلیلی بوده است [۲].

با رشد صنایع مختلف، مهندسان و دانشمندان با سیالاتی روبرو شدند که رفتار برشی آنها با استفاده از مدل سیال نیوتنی قابل توصیف نبود. به طور خلاصه، انحرافات یک سیال از رفتار نیوتنی به شکل زیر قابل بیان هستند:

- وجود تنش تسلیم در ماده
- وابستگی ویسکوزیته به نرخ برش و یا زمان
- وجود خاصیت الاستیک در سیال

این مشکل به خصوص با پیدایش علم پلیمر نمود آشکارتری پیدا کرد. دانشمندان دریافتند که مدل نیوتنی برای گازها و مایعات دارای وزن مولکولی کمتر از ۱۰۰۰ با دقت بسیار مناسبی قابل به کار گیری است اما این مدل برای مواد درشت مولکول چندان دقیق نیست و جریان برخی محلول ها و مذاب های پلیمری رفتارهای متفاوت و بعضاً متضادی را نسبت به سیالات نیوتنی نشان می دهند [۳].

نیاز به مطالعه جریان این سیالات منجر به پیدایش شاخه جدیدی از علـم بـه نـام رئولـوژی[1] گردیـد. دانش رئولوژی در سالهای بین دو جنگ جهانی توسعه یافت و انگیزه اصلی ایـن مطالعـات مـسائل عمـدتاً عملی و نه نظری بودند. در رابطه با پیدایش کلمه رئولوژی می توان به نقل قول تروسدل[2] استاد دانـشگاه جان هاپکینز در هشتمین کنگره بین المللی رئولوژی در ۱۹۸۰ اشاره نمود: "خواسته شـده از مـن تـا در توضیح کلمه رئولوژی سخن بگویم. برای فرار از ادای این وظیفه مشکل فکر می کنم که هیچ چیز بهتر از نقل گفتگوی دلنشینی که با دوست عزیز قدیمی ام مارکوس رینر[3] پس از صرف شام در چهارمین کنگـره بین المللی رئولوژی داشته ام نیست. او برای شروع نقل قـول داسـتان مربـوط بـه چگـونگی ابـداع کلمـه رئولوژی گفت: "هنگامی که من در سال ۱۹۲۸، بینگهام را در ایستون پنسیلوانیا ملاقات کردم، وی به من گفت: در اینجا شما، یک مهندس ساختمان و من یک شیمیست نشـسته ایـم و بـا یکـدیگر روی مـسائل مشترک کار می کنیم. با توسعه شیمی کلوئیدها این همکاری می تواند بسیار بیـشتر بـشود. بنـابراین مـا باید شاخه ای از فیزیک را تاسیس نماییم که در آن این قبیل از مسائل مورد بررسـی قـرار گیرنـد". مـن گفتم: چنین شاخه ای از فیزیک قبلاً وجود داشته و به نام مکانیک محـیط هـای پیوسـته موسـوم اسـت. بینگهام پاسخ داد: "نه، چنین عنوانی شیمیست ها را جذب نخواهد کرد چون بـرای آنهـا بیگانـه خواهـد بود". پس از این گفتگو، بینگهام به مشورت با یک استاد زبانهای کلاسیک پرداخت و به عنـوان رئولـوژی دست یافت که از سخن هراکلیتوس فیلـسوف معـروف یونـان باسـتان بدسـت آمـده اسـت. هراکلیتـوس می گفت که همه چیز در جریان است و واژه رئولوژی از ریشه رئو از این سخن اقتباس شده است" [۲].

در جنگ جهانی دوم، استفاده از سلاح شعله افکن به مطالعه در خصوص جت مواد ویسکوالاستیک منجر شد. سلاح شعله افکن به منظور پرتات مایعات آتشزا به سمت هدف مورد استفاده قرار می گیرد. مشکل اصلی در این راه واگرایی جت این مواد در فواصل نزدیک بود که سبب عدم استفاده موثر از این

1. Rheology
2. Truesdell
3. Markus Reiner

سلاح می شد. دانشمندان با اضافه نمودن مواد پلیمری، مایع آتشزا را به سیالی ویسکوالاستیک تبدیل می کردند که جت این سیال تا فاصله مناسبی همگرا باقی می ماند. در گیرودار جنگ، مهندسین آلمانی به یکی از مهمترین کاربردهای دانش رئولوژی دست یافتند. آنها توانستند با اضافه نمودن مواد صابونی و ۱۰ تا ۵۰ ppm مواد پلیمری به بنزین، افت فشار انتقال این سیال را تا ۹۰٪ کاهش دهند! به این ترتیب استفاده از این مواد جهت کاهش نیروی پسا مورد توجه قرار گرفت که از آن جمله می توان به تزریق مواد پلیمری در بدنه اژدرها و ایجاد پوشش های پلیمری بر روی این جنگ افزار اشاره نمود. بعدها ثابت شد که با اضافه نمودن مواد پلیمری به سیال نیوتنی و تبدیل آن به یک محلول ویسکوالاستیک، نیروی پسای جریان مغشوش به شدت کاهش می یابد. استفاده از این خاصیت در جنبه های مختلف کاربردی مورد توجه محققین قرار گرفته است [۱].

به مروز زمان دانش رئولوژی در جنبه های مختلف گسترش یافته و علاوه بر صنعت پلیمر به سایر صنایع نظیر صنعت نفت و پتروشیمی، مواد غذایی، نظامی، صنایع شیمیایی سبک و سنگین، تولید انواع لاستیک، رنگ، رزین و مواد پوشش دهنده (نظیر اپوکسی و ...)، تولید مواد آرایشی و بهداشتی، شوینده ها و صابونها، مهندسی بیولوژی، تولید دارو (انواع سوسپانسیونها و امولوسیونها)، صنعت چاپ، تولید کاغذ، تولید سیمان، صنایع هسته ای، فرآیند های تخمیری، تولید سیمان، تولید مواد روانکار حفاری و ... گسترش یافته است. به عنوان نمونه می توان به یکی از کاربردهای این دانش در استخراج نفت اشاره نمود. برای مدت ها جهت استخراج نفت باقیمانده در چاه های نفت از روش حفر چاه های فرعی و تزریق گاز دی اکسید کربن استفاده می شده حال آنکه استفاده از آب در این زمینه به صرفه تر بوده و با صرف انرژی کمتری همراه است. مشکل اصلی در این زمینه بروز ناپایداری انگشتی[1] است که به ورود آب به چاه اصلی منجر می شود و در این حالت عملیات استخراج نفت از آن چاه پایان می یابد. ناپایداری انگشتی

1. Finger instability

عبارت است از نفوذ سیال دارای ویسکوزیته کمتر به سیال دارای ویسکوزیته بیشتر از سطح مشترک دو سیال. اخیراً جهت رفع این مشکل، به آب مواد ویسکوز کننده اضافه می نمایند و با تبدیل آن به یک محلول غیرنیوتنی اثر ناپایداری انگشتی را کاهش می دهند [۱].

با توجه به وسعت صنایعی که با سیالات غیرنیوتنی روبرو هستند، مشخص است که شناخت علم رئولوژی از ضرورتی اجتناب ناپذیر برخوردار است. به دلیل وجود پیچیدگی و تنوع خانواده های سیالات غیر نیوتنی، این شاخه از علم هنوز رشد چندانی نیافته و لذا زمینه های فراوانی جهت مطالعه و تحقیق در علم رئولوژی وجود دارد.

شایان ذکر است که در بخش ضمیمه این تحقیق، منشاء رفتار ویسکوالاستیک در محلول ها و مذابهای پلیمری بررسی شده و مروری اجمالی به مدل سازی سیالات ویسکوالاستیک صورت می گیرد.

۱-۳- جریان و انتقال حرارت در مجاری مستقیم

تاکنون فعالیتهای متعددی برای بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال های مستقیم صورت گرفته که در این بخش به بررسی اجمالی آنها پرداخته شده است. به طور کلی، وجود اختلاف تنش نرمال دوم منجر به بروز جریانهای ثانویه در مجاری بسته می شود. اولین بار تحلیل این جریانهای ثانویه توسط گرین و ریولین[۱] [۴] و با استفاده از مدل راینر-ریولین صورت گرفت. از آنجا که در این مدل تنها اثر اختلاف تنش های نرمال دوم پیش بینی شده و اثر اختلاف تنش های نرمال اول صفر فرض شده است، لذا پاسخهای آن چندان با واقعیت سازگار نیست. همچنین وی مقدار ویسکوزیته را مقداری ثابت در نظر گرفت، درحالیکه در اغلب سیالات ویسکوالاستیک ویسکوزیته تابعی از نرخ برش است. در این تحلیل هندسه مقطع جریان بصورت بیضی بوده و پاسخها به روش تقریب متوالی حاصل شده است.

1. Green and Rivlin

در سال ۱۹۷۴، دادسن[1] و همکاران [۵] جریانهای ثانویه در مقاطع مستطیلی را با استفاده از مدل CEF و با فرض مقدار ثابت اختلاف تنش نرمال دوم (N_2) بدست آوردند. همچنین آنها با عبور دادن محلول آبی پلی آکریل آمید و نیز محلول صابونی با اجزاء ستیل آمونیم برومایـد، تولوئن متا سولوئید و نمک سدیم از کانالهای شیشه ای شفاف به مقایسه پاسخهای عددی و نتایج حاصل از آزمایش پرداختند. در این میان هرچند تشابه قابل قبولی در مورد مقادیر فشار و دبی وجود داشت اما مقدار پیش بینی شده برای شدت جریانهای ثانویه دارای خطای قابل توجهی بود. در سال ۱۹۷۶، تاونسند[2] و همکاران [۶] به بررسی عددی و آزمایشگاهی جریان توسعه یافته ویسکوالاستیک در کانال های مستقیم پرداختند. آنها جهت تحلیل عددی از مدل CEF تعمیم یافته استفاده کردند و با استفاده از حساب اختلالات[3] مدل را خطی نمودند. آنها به دلیل کوچک بودن سرعت عرضی نسبت به جریان اصلی، مرتبه سرعت محوری (w) و سرعت های عرضی (u,v) را به ترتیب برابر ۱ و ε فرض نمودند. لذا از آنجا که در حالت توسعه یافته مولفه های سرعت تابعی از z نیست، بنابراین [۶]:

$$u = \varepsilon u_1(x,y) \tag{۱-۱-۱}$$

$$v = \varepsilon v_1(x,y) \tag{۲-۱-۱}$$

$$w(x,y) = w_0(x,y) + \varepsilon w_1(x,y) \tag{۳-۱-۱}$$

از آنجا که در مدل CEF تعمیم یافته، کلیه توابع رئولوژیکی تابعی از شدت برش (q) هستند، بنابراین با فرض صورت گرفته برای مولفه های سرعت، شدت برش نیز به شکل زیر قابل خطی سازی است:

$$q = \sqrt{2d_{ij}d_{ji}} = q_0(I) + q_1(\varepsilon) \tag{۱-۲-۱}$$

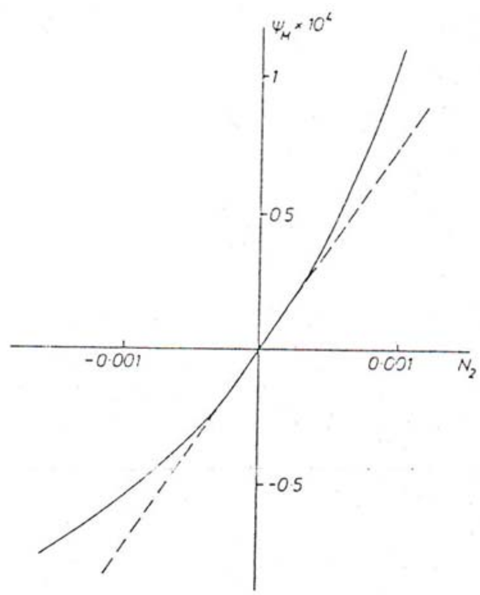
$$q_0 = \left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۲-۲-۱}$$

---

1. Dodson
2. Townsend
3. Perturbation Method

$$q_1 = \frac{1}{q_0}\left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\right] \qquad (۱-۲-۳)$$

همچنین آنها برای ارزیابی کیفی پاسخهای عددی، از نتایج آزمایشگاهی نیز استفاده نمودند. به این منظور جریان شش سیال ویسکوالاستیک را در حالت توسعه یافته بررسی کردند. آنها ۸ جریان ثانویه را در حالت توسعه یافته شناسایی نمودند و مشاهده کردند که شدت جریانهای ثانویه با مقدار N_2 رابطه مستقیم داشته و تغییر علامت آن به تغییر جهت جریانهای ثانویه منجر می شود. از جمله نتایج حائز اهمیت پژوهش آنها، مقایسه نتایج عددی حاصل از آن با نتایج دادسن و همکاران [۵] بود. در شکل (۱-۱) مقدار ماکزیمم تابع جریان (ψ) در برابر N_2 نشان داده شده است. مطابق شکل، نتایج دادسن و همکاران یک رابطه خطی را بین این دو پیش بینی می کند ولی نتایج تاونسند و همکاران [۶] دارای تطابق فیزیکی بهتری است.

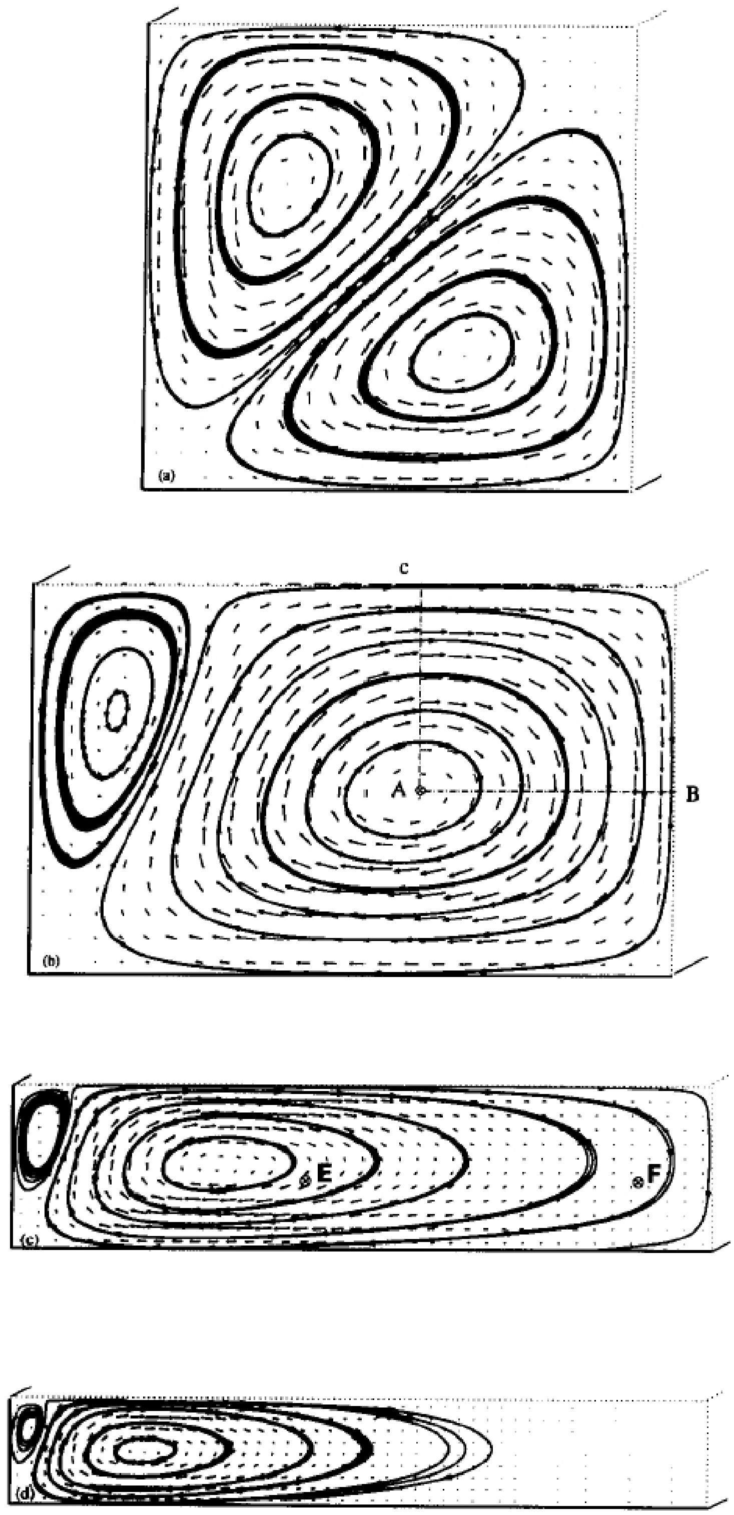


شکل (۱-۱): نتایج تاونسند برای مقدار ماکزیمم تابع جریان (ψ) بر حسب N_2 [۶]

در سال ۱۹۹۱، ژرانگ و لارسون [۷] از همین مدل برای تحلیل جریان در کانالهای با مقطع مستطیلی استفاده کردند. آنها برای شبیه سازی عددی روش حجم محدود را به کار گرفتند و نشان دادند که اثر جریانهای ثانویه بر افت فشار در سرعت های متداول مقداری ناچیز است.

در سال ۱۹۹۵، ژو[1] و همکارانش [۸] از روش سیمپلست حجم محدود[2] برای شبیه سازی جریان سیال MPTT[3] در کانال های مستقیم دارای مقطع مستطیلی استفاده نمودند. آنها به بررسی اثر نسبت ابعاد کانال برای جریان سیالات ویسکوالاستیک پرداختند و شکل جریان های ثانویه را در هر حالت گزارش نمودند. در شکل (۱-۲) نتایج حاصل از حل عددی در نسبت های ابعادی مختلف و برای یک چهارم مقطع کانال نشان داده شده است. در نسبت ابعادی ۱:۱ جریانهای ثانویه بصورت یک جفت جریان ثانویه در یک چهارم مقطع کانال ظاهر شده است. این جریانهای ثانویه دارای جهات دوران مخالف یکدیگر هستند و شدت آنها تابعی از ثابت اختلاف تنش نرمال دوم و عدد رینولدز جریان است. با افزایش نسبت ابعادی، فرم جریانهای ثانویه از دو گردابه به یک گردابه در یک چهارم سطح مقطع کانال تغییر پیدا می کند. شایان ذکر است که این جریانهای ثانویه برای ثابت اختلاف تنش نرمال دوم منفی بدست آمده اند. در اکثر مواد ویسکوالاستیک، این ثابت دارای مقدار منفی است. همچنین برای مقادیر مثبت اختلاف تنش نرمال دوم جهت دوران جریانهای ثانویه نسبت به جریانهای نشان داده شده در شکل (۱-۲) معکوس است. در سال ۱۹۹۸، طالبی [۹] حل عددی را برای جریان توسعه یافته سیالات ویسکوالاستیک در مجاری مستطیلی بسته ارائه نمود. وی مدل تعمیم یافته CEF را جهت شبیه سازی رفتار سیال ویسکوالاستیک به کار برد و معادلات حاکم را از روش تفاضل محدود گسسته کرده و برای حل آنها از روش ADI استفاده نمود. مانند ژو و همکاران [۱۰] وی نشان داد که با افزایش نسبت طول به عرض بتدریج چهار گردابه از هشت گردابه موجود تضعیف می شوند.

1. Xue
2. Simplest Finite Volume
3. Modified Phan-Thien Tanner



شکل (۱-۲): نتایج ژو و همکاران برای اثر نسبت ابعاد سطح مقطع کانال بر جریانهای ثانویه [۸]

همچنین وی اقدام به بررسی تاثیر پارامترهای جریان و سیال ویسکوالاستیک (پارامترهای مدل CEF) نموده و نشان داد که در گرادیان فشار ثابت اثر جریانهای ثانویه بر تغییرات دبی بسیار اندک است. در اینجا درصد تغییرات دبی بصورت زیر تعریف شده است[۹]:

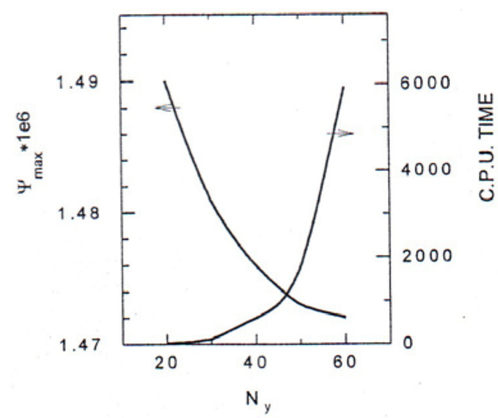
$$\Delta m = \frac{\dot{m}_s - \dot{m}_i}{\dot{m}_i} \times 100 \qquad (۱-۳)$$

که در رابطه فوق $\dot{m}_s$ دبی جریان در حالت فعال بودن جریان های ثانویه (وجود اختلاف تنش های نرمال دوم) و $\dot{m}_i$ دبی جریان در حالت غیر فعال بودن جریان های ثانویه (عدم وجود اختلاف تنش های نرمال دوم) است.

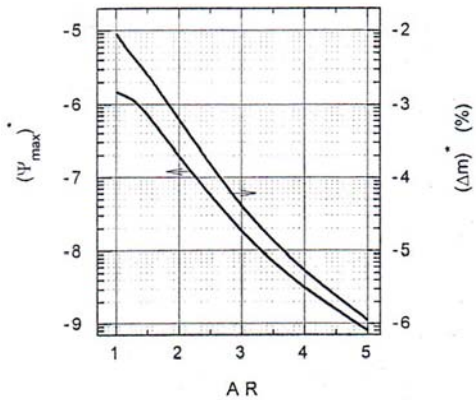
شکل (۱-۳) حساسیت پاسخ ها را به تعداد سلولهای شبکه نمایش می دهد. مطابق شکل، حساسیت پاسخ ها به تعداد سلولها اندک بوده اما ازدیاد سلولها بشدت بر افزایش زمان لازم برای همگرایی موثر است. در شکل (۱-۴) اثر نسبت ابعاد کانال بر شدت جریانهای ثانویه و تغییرات دبی جریان نشان داده شده است. مطابق شکل، با افزایش نسبت ابعادی (AR) از شدت جریانهای ثانویه کاسته و بر میزان تغییرات دبی افزوده می شود. اشکال (۱-۵) و (۱-۶) اثر C_{N21} و C_{N22} (ضرایب توابع ویسکومتریک اولدروید) را بر شدت جریانهای ثانویه و در صد تغییرات دبی نمایش می دهند. مطابق شکل، با افزایش این دو مقدار بر شدت گردابه ها و میزان Δm افزوده می شود اما اثر ضریب C_{N21} بسیار قویتر از ضریب C_{N22} است. در شکل (۱-۷) نیز اثر ضریب C_{N1} نشان داده شده است. مطابق شکل اثر کلی این ضریب نیز مشابه ضریب C_{N22} است. در این تحقیق عدد رینولدز بصورت زیر تعریف شده است:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \overline{P} a^3}{{\eta_0}^2} \qquad (۱-۴)$$

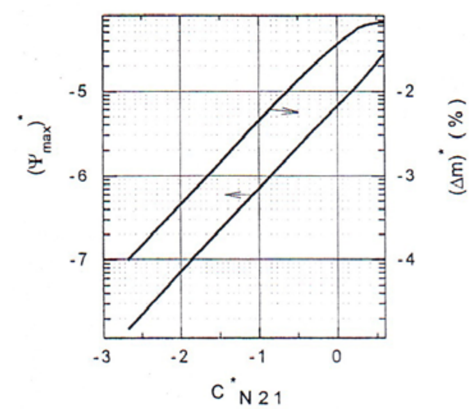
در رابطه فوق، ρ چگالی، $\overline{P}$ گرادیان فشار (در حالت توسعه یافته مقداری ثابتی است)، a طول مشخصه و η_0 ویسکوزیته در نرخ برش صفر است.



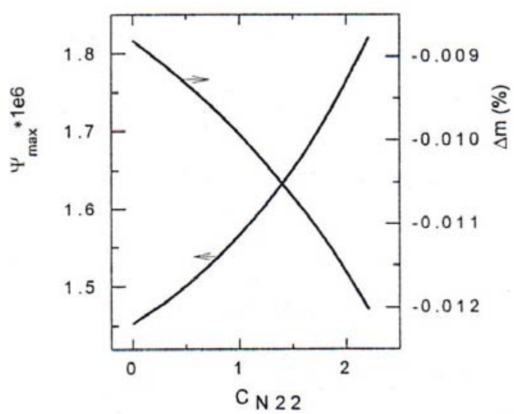
شکل (۱-۳): حساسیت پاسخ ها به شبکه [۹]



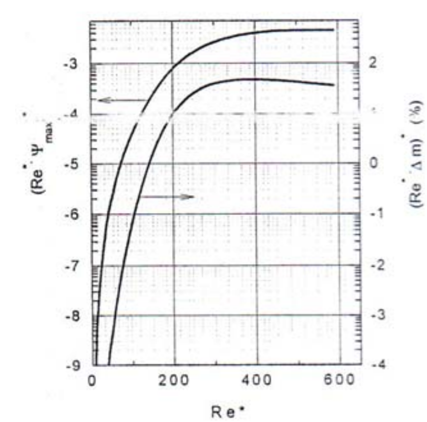
شکل (۱-۴): اثر نسبت ابعاد کانال [۹]



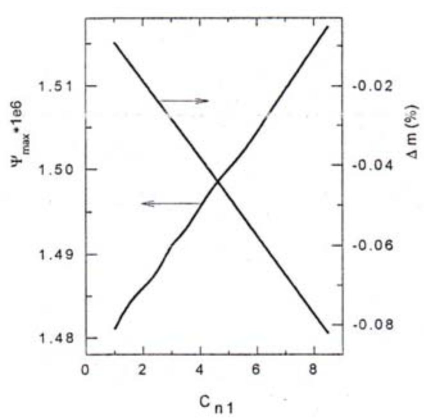
شکل (۱-۵): اثر ضریب C_{N21} [۹]



شکل (۱-۶): اثر ضریب C_{N22} [۹]



شکل (۱-۷): اثر عدد Re [۹]



شکل (۱-۸): اثر ضریب C_{n1} [۹]

در شکل (۱-۸) تاثیر جریان اصلی بر جریان ثانویه بررسی شده است. بنابراین در اعـداد رینولـدز مختلـف (گرادیان فشارهای مختلف) از مقدار $\psi_{\max}\,\mathrm{Re}$ به عنوان معیار مناسب برای قدرت گردابـه هـا نـسبت بـه جریان اصلی استفاده شده است. مطابق شکل، در ابتدا افـزایش Re منجـر بـه افـزایش شـدت جریانهـای ثانویه شده و سپس اثر آن ثابت خواهد بود. طالبی نشان داد که اختلاف تنش هـای نرمـال اول در شـکل پروفیل سرعت محوری و در نتیجه در گرادیان فشار جریان موثر است و اخـتلاف تـنش هـای نرمـال دوم سبب بروز جریانهای ثانویه می شود و کمتر در پروفیل سرعت محوری موثر اسـت. وی همچنـین بررسـی کاملی بر روی میزان انتقال حرارت جریان توسعه یافته سیال ویسکوالاستیک در حالتهای دما ثابت و شـار ثابت انجام داده است. وی نشان داد که فعالیت جریانهای ثانویه در این جریانها سبب کاهش اثر نـامطلوب گوشه ها و افزایش انتقال حرارت نسبت به جریان سیالات نیوتنی می شود.

در زمینه انتقال حرارت اجباری سیالات ویسکوالاستیک فعالیت های دیگری نیز انجام شـده اسـت. بـه عنوان نمونه می توان به پژوهش پینهو و اولیورا[1] [۱۰] که با استفاده از مدل ساده شـده فـان-تـین-تـانر[2] (SPTT) برای بررسی انتقال حرارت در لوله ها انجـام شـده، اشـاره نمـود. معمـولاً جهـت مطالعـه تلفـات ویسکوز بر انتقال حرارت جریان از عدد برینکمن[3] استفاده می شود [۱۰]:

$$Br = \frac{\eta {u_m}^2}{D_h q''_w} \tag{۱-۵}$$

که در رابطه فوق، η ویسکوزیته، u_m متوسط سرعت جریان، D_h قطر هیـدرولیکی مجـرا و q''_w شـار حرارتی دیواره است. در اینجا ضریب جابجایی و عدد ناسلت به شکل زیر تعریف شده است:

$$h = \frac{-k\left(\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)_{wall}}{T_m - T_w} \tag{۱-۶-۱}$$

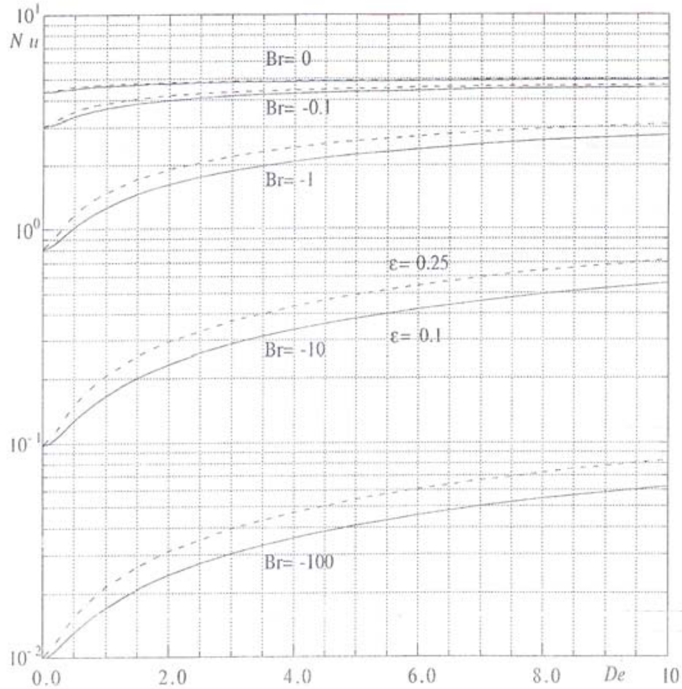
1. Pinho and Oliveria
2. Simplified Phan-Thin-Thanner
3. Brinkman number

$$Nu = \frac{hD_h}{k} \qquad (۲-۶-۱)$$

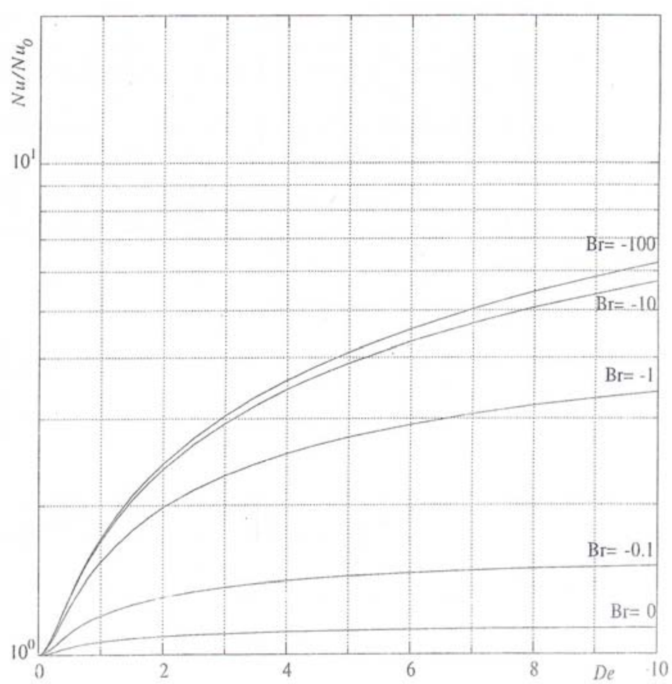
که در روابط فوق، k ضریب هدایت حرارتی ، T دمای سیال، T_w دمای دیـواره و T_m متوسـط دمـای جریان است.

در شکل (۱-۹) توزیع عدد ناسـلت بـر حـسب اعـداد دبـورا (Dr)، وایزنبـرگ (ε) و بـرینکمن (Br) مختلف نشان داده شده است. در اینجا منفی بودن عدد برینکمن مربوط به منفی بودن شار حرارتی دیواره است. به عبارت دیگر شار حرارتی بصورت گرمایش به لوله اعمال می شود. منحنی های پیوسته مربوط بـه $\varepsilon = 0.1$ و منحنی های خط چین مربوط به $\varepsilon = 0.25$ است. مطابق شکل، در صورتیکه از تلفات ویسکوز صرفنظر شود ($Br = 0$)، مقدار ناسلت بسیار بیشتر از حالتهای دیگر است و با ازدیـاد انـدازه قـدر مطلـق عدد برینکمن بر تلفات ویسکوز افزوده و عدد ناسلت کاهش می یابد. همچنین ازدیاد مقدار Dr (افـزایش خواص الاستیک سیال) سبب افزایش و ازدیـاد مقـدار ε نیـز منجـر بـه کـاهش انـدکی در عـدد ناسـلت می شود. در شکل (۱-۱۰) مقدار Nu / Nu_0 بر حسب عدد دبورا و در اعداد برینکمن مختلـف نـشان داده شده است. Nu_0 عدد ناسلت جریان در حالت دبورا برابر صفر است که در این حالت سیال ویـسکوز کامـل است. مطابق شکل، حساسیت عدد ناسلت به عدد دبورا در اعداد برینکمن دارای قدرمطلق بزرگتر، بیـشتر است. به عبارت دیگر در شرایط حرارتی یکسان، در سیالات دارای ویسکوزیته بزرگتـر، ازدیـاد عـدد دبـورا سبب افزایش قابل توجه عدد ناسلت می شود (در سـیالات دارای ویـسکوزیته کمتـر ایـن افـزایش انـدک است). مشابه فعالیت پینهو و اولیورا [۱۰]، پژوهش های دیگری در مورد انتقال حرارت سیالات غیرنیوتنی در مجاری مستقیم انجام شده که از آن جمله می توان به تحقیقات منا[1] و همکـارن [۱۱]، اولیـور و رائـو[2] [۱۲] و ژی و هارتنت[3] [۱۳] اشاره نمود.

1. Mena
2. Oliver and Rao
3. Xie and Hartnett



شکل (۱-۹): توزیع عدد ناسلت بر حسب اعداد دبورا (Dr)، وایزنبرگ (ε) و برینکمن (Br) [۱۰]



شکل (۱-۱۰): مقدار Nu/Nu_0 بر حسب عدد دبورا (Dr) و در اعداد برینکمن (Br) مختلف [۱۰]

در سال ۲۰۰۱ سیلین و لئونو [1] [۱۴]، با استفاده از روش های تحلیلی و عددی به بررسی جریانهای ثانویه در کانال های با مقطع مستطیلی پرداخت. آنها نشان دادند که عدد دبورا تاثیر چندانی در شدت جریان های ثانویه نداشته، اما در اعداد دبورای بزرگ جریان تمایل زیادی به ناپایداری دارد.

در زمینه پدیده انتقال جرم در جریان های داخلی سیالات ویسکوالاستیک نیز فعالیت هایی انجام شده است. اکیلدیز[2] [۱۵] در سال ۲۰۰۱ با استفاده از مدل MPTT به بررسی پراکندگی ماده حل شونده در جریان پویزیوله[3] یک سیال ویسکوالاستیک پرداخت و نشان داد که این پراکندگی به میزان عدد دبورا وابستگی زیادی دارد.

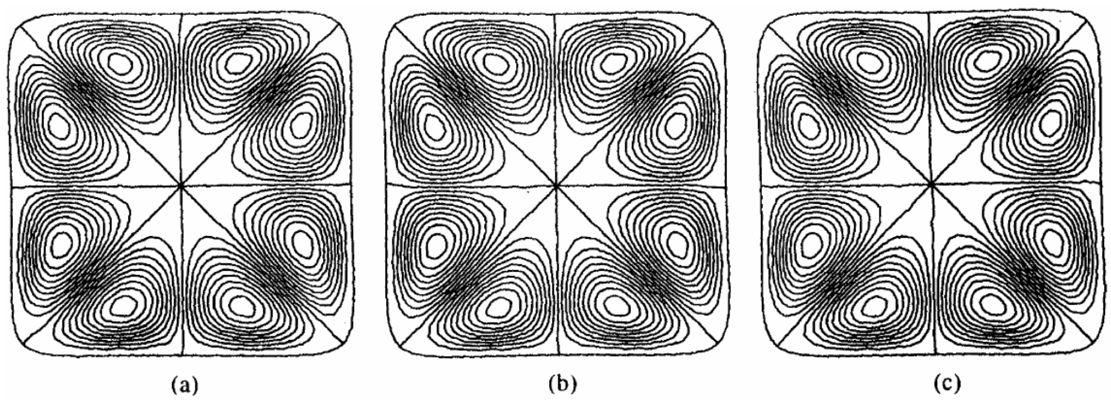
در سال ۲۰۰۳ لتلیر و سیگینر[4] [۱۶] جریان غیر دائمی سیال ویسکوالاستیک را با استفاده از مدل گرین-ریولین[5] در مجاری بسته بررسی نمودند. آنها گرادیان فشار نوسانی را برای میدان جریان نظر گرفتند و بررسی کاملی را بر روی نوسانات سرعت و تغییرات جریان های ثانویه انجام دادند. آنها در این بررسی، مقادیر مربوط به پارامترهای جریان را بصورت جدول (۱-۱) در نظر گرفتند:

جدول (۱-۱): پارامترهای جریان و سیال در بررسی لتلیر و سیگینر [۱۶]

ویسکوزیته $(poise)$	۲۰۰
چگالی (gr/cm^3)	۰/۸۹
ثابت معادله متشکله (gr/cm)	-۵۰
فرکانس جریان (rad/s)	۱۰
طول مشخصه (cm)	۳
متوسط گرادیان فشار (kpa/m)	-۵۰

1. Siline and Leonov
2. Akyildiz
3. Poiseuille
4. Letelier and Siginer
5. Green-Rivlin

لتلیر و سیگینر [۱۶] نشان دادند که شدت جریانهای ثانویـه در محـدوده ویـسکوالاستیک خطـی بـا مقداری بیشتر از مرتبه سوم خواص الاستیک سیال (توان سوم عدد وایزنبرگ) متناسب است. با توجـه بـه دیاگرام پیپیکین، محدوده ویسکوالاستیک خطی نواحی شامل اعداد وایزنبرگ متوسط بـه پـایین را در بـر می گیرد. شکل (۱-۱۱) این پدیده را نمایش می دهد. در اینجا تغییر در عدد وایزنبـرگ از طریـق تغییـر مقدار نرخ برش حاصل شده اسـت ($Wi = \lambda\dot{\gamma}$). مطـابق شـکل، بـا افـزایش نـرخ بـرش از مقـادیر بـسیار کوچک (a) به مقادیر بزرگتر (b)، بر سرعت جریانهای ثانویه افـزوده مـی شـود. امـا در نـرخ هـای بـرش بزرگتر، شدت افزایش سرعت این جریانها رو به افول می گذارد. از جمله نتایج جالب توجـه ایـن تحقیـق، بررسی جریان های ثانویه در مقاطع مختلف است. آنها پارامتر ε_1 را برای مشخص کـردن میـزان انحـراف شکل مقطع کانال از حالت مدور تعریف نمودند. این فاکتور بر اساس نگاشت تبدیل شکل مقطع بـه دایـره تعریف شده و عددی بین صفر و یک است به نحوی که برای دایره کامل برابـر صـفر و بـا افـزایش میـزان انحراف شکل از دایره به سمت یک میل می کند. به عنوان مثال ε_1 برای یک مربع برابـر ۰/۲۲ اسـت. در شکل (۱-۱۲)، جریانهای ثانویه در چهار ضلعی هایی با اعداد ε_1 مختلف نـشان داده شـده اسـت. مطـابق شکل با افزایش مقدار ε_1 بر شدت جریانهای ثانویه افزوده می شود به نحـوی کـه در حالـت مربعـی (c)، شدت جریانهای ثانویه ۳۷۷ برابر بزرگتر از حالت نزدیک به دایره (a) است. به عبارت دیگر در یک کانـال با مقطع چهار ضلعی با اضلاع خمیده، هر چقدر گوشه ها نوک تیزتر باشند، شدت جریانهای ثانویه بیـشتر است. این موضوع نشان می دهد که شرط تشکیل جریانهای ثانویه، وجود گوشه ها در مقطع کانال است و در یک کانال با مقطع دایره چنین جریانهـایی ایجـاد نمـی شـود. در اشـکال (۱-۱۳) و (۱-۱۴)، سـرعت محوری و جریان های ثانویه در مقاطع مثلثی و شش ضلعی نشان داده شـده اسـت. مطـابق ایـن اشـکال، برای سیال ویسکوالاستیک و در هر گوشه از مقطع کانالهای چند ضلعی، یک جفت جریان ثانویه تـشکیل می شود.

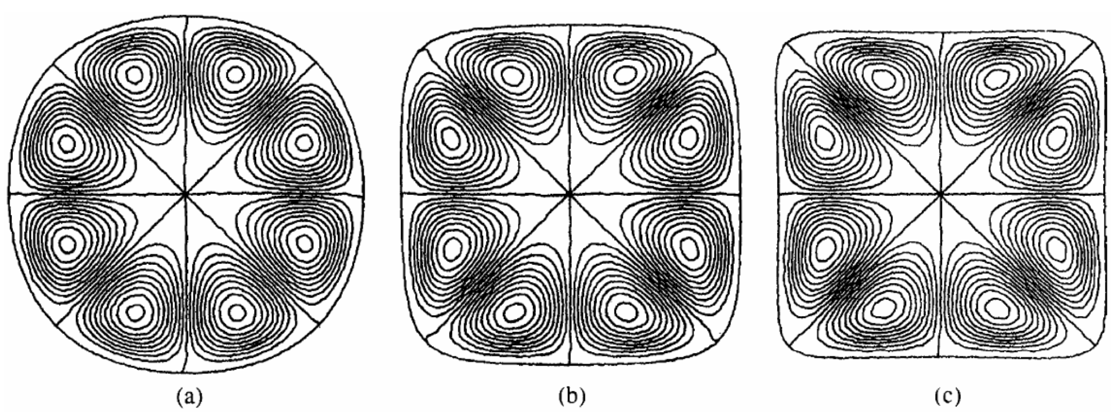


شکل (۱-۱۱): جریانهای ثانویه در اعداد وایزنبرگ مختلف [۱۶]

$|\psi|_{\max} = 1.3\times10^{-8}$ ، $\dot{\gamma} = 0.01$: (a)

$|\psi|_{\max} = 2.3\times10^{-4}$ ، $\dot{\gamma} = 0.50$: (b)

$|\psi|_{\max} = 4.4\times10^{-4}$ ، $\dot{\gamma} = 1.00$: (c)

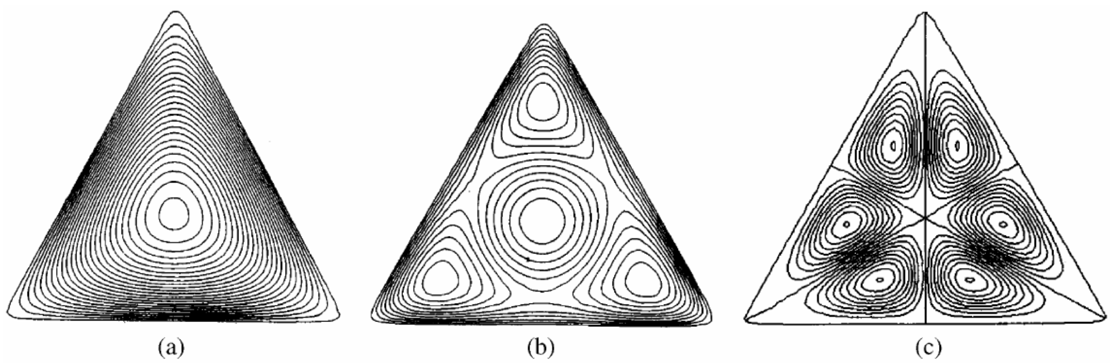


شکل (۱-۱۲): جریانهای ثانویه در مقاطع چهار ضلعی با اعداد ε_1 مختلف ($\dot{\gamma} = 0.5$)[۱۶]

$|\psi|_{\max} = 6.1\times10^{-7}$ ، $\varepsilon_1 = 0.044$: (a)

$|\psi|_{\max} = 1.8\times10^{-5}$ ، $\varepsilon_1 = 0.176$: (b)

$|\psi|_{\max} = 2.3\times10^{-4}$ ، $\varepsilon_1 = 0.220$: (c)

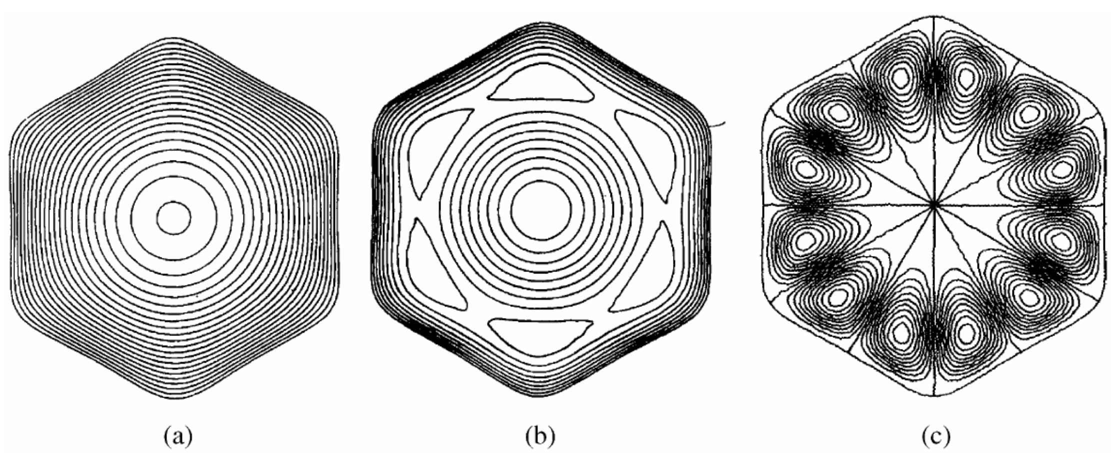


شکل (۱-۱۳): جریان در کانال با مقطع مثلثی [۱۶]

(a) : سرعت محوری سیال نیوتنی در $\omega t = 0.25\pi$ ،

(b) : سرعت محوری سیال ویسکوالاستیک در $\omega t = 1.907\pi$ و $\dot{\gamma} = 0.5$

(c) : جریانهای ثانویه برای سیال ویسکوالاستیک



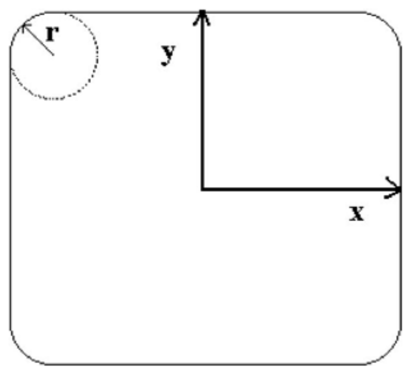
شکل (۱-۱۴): جریان در کانال با مقطع شش ضلعی [۱۶]

(a) : سرعت محوری سیال نیوتنی در $\omega t = 0.48\pi$ ،

(b) : سرعت محوری سیال ویسکوالاستیک در $\omega t = 0.455\pi$ و $\dot{\gamma} = 1.0$

(c) : جریانهای ثانویه برای سیال ویسکوالاستیک

هاشم آبادی و اعتماد [۱۷] با استفاده از مدل ویسکوالاستیک راینر-ریولین به بررسی اثر انحنای گوشه ها در تشکیل جریان های ثانویه در کانال های با مقطع مربعی پرداختند و مطابق شکل (۱-۱۵) در گوشه های مقطع کانال، دوایری به صورت فیلت به شعاع r در نظر گرفتند.



شکل (۱-۱۵): هندسه مقطع جریان در پژوهش هاشم آبادی و اعتماد [۱۷]

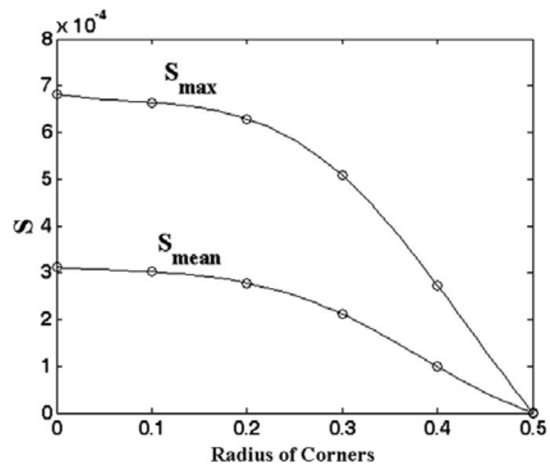
در اشکال (۱-۱۶) و (۱-۱۷) اثر شعاع انحناء گوشه ها بر میزان متوسط و حداکثر شدت جریان های ثانویه ($S_{mean}{}^*$ و $S_{\max}{}^*$) در دو حالت $\Psi_2^* = 0.005$ و $\Psi_2^* = 0.01$ نشان داده شده است. در اینجا Ψ_2^* معرف ثابت بی بعد اختلاف تنش نرمال دوم است ($\Psi_2^* = \bar{w}^{2-n}\Psi_2 / (\eta D_h{}^2)$). مطابق این دو شکل، با افزایش انحنای گوشه ها به سرعت از مقدار $S_{mean}{}^*$ و $S_{\max}{}^*$ کاسته می شود، به نحوی که با تبدیل شکل هندسی مقطع کانال به دایره کامل در $r = 0.5$، فعالیت جریان های ثانویه متوقف می شود. همچنین مطابق این اشکال حساسیت شدت جریان های ثانویه به شعاع انحنا در سیالات ویسکوالاستیک دارای خواص الاستیک بزرگتر، بیشتر است. این اشکال نیز مبین این موضوع هستند که شرط تشکیل این جریانهای ثانویه وجود گوشه ها است. همچنین آنها نشان دادند که با وجود اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر شدت جریانهای ثانویه، تاثیر این خاصیت بر مقاومت کانال در برابر جریان (افت فشار کانال) بسیار اندک است. بایستی توجه داشت که وجود گوشه ها و نیز اثر اختلاف تنش نرمال دوم، شرط لازم برای تشکیل جریانهای ثانویه در کانال های مستقیم غیر مدور است. شرایط کافی برای تشکیل این

جریانها توسط اولدروید ارائه شده است [۱۸]. وی نشان داد که در جریان سیالات ویسکوالاستیک در کانال های غیر مدور مستقیمی که دارای شرایط زیر هستند، جریان ثانویه تشکیل نمی شود [۱۸]:

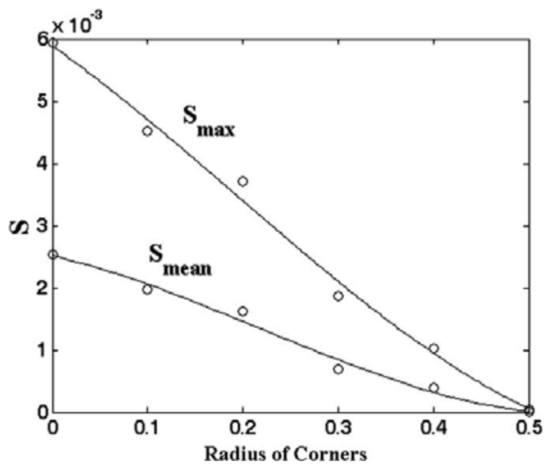
$$\Psi_2(\dot{\gamma}) = \Psi_{2,0}\,,\ \eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 \qquad (۱-۷-۱)$$

$$\Psi_2(\dot{\gamma}) = \theta\eta(\dot{\gamma}),\quad \theta = cte \qquad (۲-۷-۱)$$

در روابط فوق، $\Psi_{2,0}$ و η_0 به ترتیب معرف ثابت اختلاف تنش نرمال دوم و ویسکوزیته در نرخ برش صفر هستند. شایان ذکر است که چنانچه یک سیال ویسکوالاستیک در شرایط اولدروید نباشد، مرتبه این جریانهای ثانویه در حدود 10^{-3} تا 10^{-2} خواهد بود. در صورتیکه سیال در شرایط اولدروید صدق کند، حل عددی گردابه های مشابهی را در مرتبه 10^{-8} تا 10^{-6} پیش بینی می کند که وجود این جریانهای ثانویه مربوط به اثر خطای برش[1] حاصل از حل عددی است. برخی محققین مطالعاتی را در خصوص جهت چرخش این گردابه ها برای سیالاتی که در شرایط اولدروید قرار ندارند، انجام داده اند. سیرجالا[2] [۱۹] نیز با استفاده از مدل CEF معیاری را برای جهت جریانهای ثانویه ارائه نموده است.



شکل (۱-۱۶): اثر شعاع انحناء گوشه ها بر سرعت گردابه ها
[۱۷] ($n = 0.8$، $\Psi_2^* = 0.005$ و $\mathrm{Re} = 500$)



شکل (۱-۱۷): اثر شعاع انحناء گوشه ها بر سرعت گردابه ها
[۱۷] ($n = 0.8$، $\Psi_2^* = 0.01$ و $\mathrm{Re} = 500$)

1. Truncation error
2. Syrjälä

وی از مدل توانی برای توابع رئولوژیک استفاده نمود ($\eta \propto \dot{\gamma}^{n-1},\ \Psi_2 = c\dot{\gamma}^m$) و نشان داد که چنانچه مقدار $[m-(n-1)]c$ بزرگتر از صفر باشد، جریانهای ثانویه در جهت مرکز به سمت گوشه های کانال تشکیل می شوند و برای مقادیر کوچکتر از صفر جهت چرخش گردابه ها بر عکس است. یو[1] و همکاران [۲۰] با استفاده از محاسبات تحلیلی و نیز مدل سازی عددی معیارهایی را برای شکل گیری و جهت چرخش گردابه ها در جریان سیال گزیکس[2] در کانال های دارای مقطع غیر مدور ارائه دادند. آنها بر اساس نسبت ثابت اختلاف تنش نرمال دوم به ویسکوزیته ($\theta(\dot{\gamma}) = \Psi_2(\dot{\gamma})/\eta(\dot{\gamma})$) شرط دیگری را مطرح نمودند و نشان دادند که در جریان سیال گیسکاس جهت گردابه ها به مشتق $\theta(\dot{\gamma})$ وابسته است. این پدیده ها در تحقیقات می-دوی و تنر[3] [۲۱] برای سیال CEF، گائو و هارتنت[4] [۲۲، ۲۳] برای سیال راینر-ریولین و تانو و همکاران[5] [۲۴] برای سیال MPTT مورد توجه قرار گرفته است. شایان ذکر است که مطالعات آزمایشگاهی نیز بر تشکیل این جریانهای ثانویه صحه گذاشته اند که از آن جمله می توان به تحقیقات دیبات[6] و همکاران [۲۵، ۲۶] و دالی[7] و همکاران [۲۷، ۲۸ و ۲۹] در جریان مذاب های پلی استیرن و پلی اتیلن اشاره نمود. شایان ذکر است که تحقیقات دیگری در خصوص جریان و انتقال حرارت سیالات غیر نیوتنی در مجاری مستقیم صورت گرفته که از آن جمله می توان به تحقیقات تانگام و اسپیزال[8] [۳۰]، ولر و ویسلر[9] [۳۱]، ژانگ و همکاران [۳۲]، وو[10] [۳۳]، ماریو[11] و همکاران [۳۴] و دنیس[12] و همکاران [۳۵] اشاره نمود.

1. Yue
2. Giesekus
3. Mai–Duy and Tanner
4. Gao and Hartnett
5. Tanoue
6. Debbaut (1997-1999)
7. Dooley (1998-2002-2003)
8. Thangam and Speziale
9. Wheeler and Wissler
10. Wu
11. Mario
12. Dennis

۱-۴- جریان و انتقال حرارت در مجاری خمیده

در این بخش مروری بر تحقیقات پیشین در خصوص جریان سیالات ویسکوالاستیک در مجاری خمیده ایستا و چرخان صورت می گیرد. جریان سیالات نیوتنی در کانال های بسته خمیده کاملاً شناخته شده بوده و از دهه دوم قرن بیستم تاکنون مقالات بیشماری در قالب مطالعات عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی در مورد جریان این سیالات منتشر شده است. در مقابل، تحقیقات بسیار محدودی در مورد جریان و انتقال حرارت سیالات غیر نیوتنی و به ویژه سیالات ویسکوالاستیک در مجاری خمیده صورت گرفته است. از جمله مشکلات فراروی این تحقیقات، ترکیب اثرات هندسه جریان (به خصوص انحنای مسیر) با رفتار غیر خطی مرتبه بالای ناشی از هر دو خاصیت الاستیک و ویسکوز این دسته از سیالات است که این مطالعات را با دشواری فوق العاده ای روبرو نموده است. در این میان سهم عمده این تحقیقات مربوط به مقاطع مدور بوده و در مقابل تحقیقات اندکی در مورد جریان در مجاری خمیده غیر مدور صورت گرفته (تنها پنج تحقیق) که در ادامه به آنها پرداخته می شود.

۱-۴-۱- مجاری خمیده دارای مقطع مدور

در سالهای ۱۹۲۷ و ۱۹۲۸ میلادی دین[۱] [۳۶] و [۳۷] طی مقالاتی پاسخ های تحلیلی را برای جریان سیالات نیوتنی در کانال های خمیده و در شعاع های انحنا بزرگ ارائه نمود. وی پاسخ های خود را بر اساس حساب اختلالات بدست آورد و طی این پاسخ ها توانست که جریانهای ثانویه ناشی از انحنا را بطور تحلیلی آشکار کند. این جریانهای ثانویه به گردابه های تیلور-گورتلر[۲] موسوم هستند که پیشتر وجود آنها در مشاهدات آزمایشگاهی گزارش شده بود. وی برای بیان اثر انحنا بر روی این جریان، عدد دین را بصورت زیر تعریف نمود:

1. Dean
2. Taylor-Görtler vortices

$$Dn = \mathrm{Re}.\delta^{1/2} \qquad (۸-۱)$$

در رابطه فوق، Re عدد رینولدز و δ نسبت انحنا بوده و به شکل زیر تعریف می شود:

$$\delta = (D_h / 2) / R \qquad (۹-۱)$$

در رابطه (۱-۹)، D_h قطر هیدرولیکی مجرا و R شعاع انحنای کانال (متوسط شعاع های داخلی و خارجی) است. بنابراین طبق این رابطه هر چه شعاع انحنا کمتر (قوس تندتر) باشد، عدد انحنا بزرگتر خواهد بود. به این ترتیب عدد دین بصورت نسبت نیروهای زیر تعریف می شود:

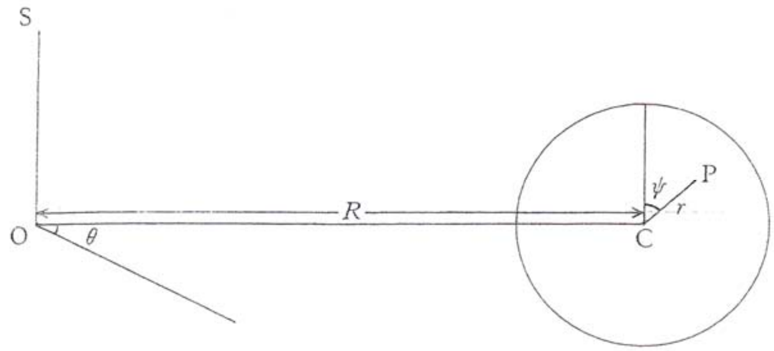
$$Dn \sim \frac{\sqrt{Centrifugal\ force \times Inertial\ force}}{Viscous\ force} \qquad (۱۰-۱)$$

بر این اساس عدد دین پارامتر مناسبی برای مطالعه میزان مقاومت جریان و شدت جریانهای ثانویه ناشی از انحنا است. در واقع عدد دین همان عدد رینولدز است که انحنای مسیر جریان در آن تصحیح شده است. معمولاً معیارهای پایداری جریان سیال نیوتنی در کانال های خمیده بر اساس این عدد تعریف می شوند.

توپک اوقلو[۱] [۳۸] با محاسبه ترم های مرتبه بالای مربوط به سری های حساب اختلالات، رابطه تحلیلی را برای دبی سیال نیوتنی در لوله های خمیده ارئه نمود. وی نشان داد که در نسبت های انحنای کوچک، دبی سیال نیوتنی با توان دوم نسبت انحنا متناسب است.

روشی را که دین برای تحلیل جریان در کانال های خمیده به کار گرفت، توسط افراد دیگری نیز مورد استفاده واقع شد. در سال ۱۹۶۳ اولین پژوهش برای بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک در کانالهای بسته خمیده توسط توماس و والترز[۲] [۳۹] انجام گرفت. همانند دین، آنها با استفاده از روش حساب اختلالات پاسخ هایی را برای جریان سیال اولدروید-بی در یک کانال خمیده به شعاع R و با مقطع مدور به شعاع a دست آوردند (شکل (۱-۱۸) را ببینید).

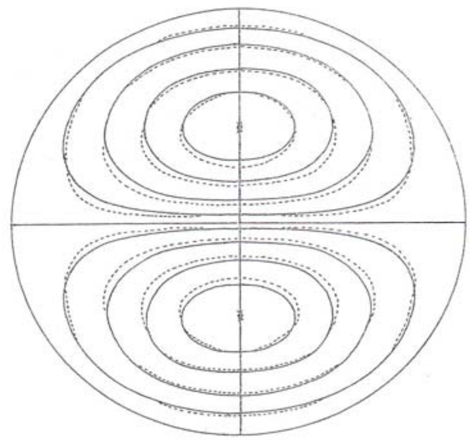
1. Topakoglu
2. Walters and Walters



شکل (۱-۱۸): هندسه جریان در پژوهش توماس و والترز [۳۹]

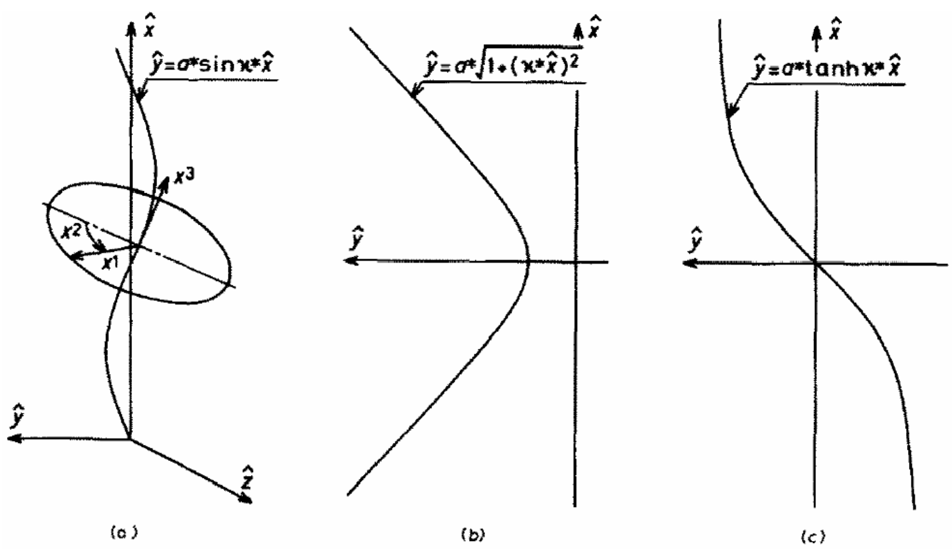
جهت تحلیل جریان، آنها نسبت انحنا (δ) و عدد رینولدز را به اندازه کافی کوچک در نظر گرفتند تا بتوانند جریان آرام توسعه یافته ($\partial P/\partial\theta = cte$ و $\partial u_i/\partial\theta = 0$) را روی قوس بررسی نمایند. به عبارت دیگر پاسخ های آنها فقط در اعداد دین کوچک معتبر بوده و در این حالت جریانهای ثانویه ناشی از انحنا ضعیف می باشند. توماس و والترز [۳۹] نشان دادند که تفاوت عمده ای میان شکل جریانهای ثانویه سیال نیوتنی و سیال اولدروید-بی وجود ندارد. در شکل (۱-۱۹)، جریانهای ثانویه برای سیال اولدروید-بی در عدد دبورا $m = 1$ با خطوط ممتد و برای سیال نیوتنی ($m = 0$) بصورت خط چین نشان داده شده است. مطابق شکل، انحراف اندکی میان این جریانهای ثانویه وجود دارد. آنها نشان دادند که اثر عمده خواص الاستیک سیال در خطوط مسیر جریان مشاهده می شود. به عبارت دیگر با رها کردن ذرات در جریان، مسیر آنها در سیال ویسکوالاستیک بسیار متفاوت از سیال نیوتنی است.

از جمله نتایج جالب توجه این پژوهش، افزایش میزان دبی جریان با ازدیاد خاصیت الاستیک سیال (m) در گرادیان فشار محوری ثابت است (یا به عبارت دیگر در دبی ثابت از افت فشار ناشی از انحنا کاسته می شود). البته نتایج مربوط به این افزایش دبی، تنها در اعداد وایزنبرگ بسیار کوچک (زمانهای آسودگی از تنش بسیار کوچک) معتبر است.



شکل (۱-۱۹): خطوط جریانهای ثانویه (خطوط ممتد: $m=1$ و خطوط خط چین: $m=0$) [۳۹]

در سال ۱۹۸۵ ایموتو[1] [۴۰] و همکارانش با استفاده از روش حساب اختلالات، پاسخهای تحلیلی را برای جریان آرام توسعه یافته سیال توانی در لوله های دارای انحناهای مختلف بدست آوردند. آنها در تحقیق خود سه انحنای خم سینوسی، خم دارای یک تقعر و خم دارای دو تقعر را بررسی نمودند. در شکل (۱-۲۰) نیز این مسیرها نمایش داده شده اند.



شکل (۱-۲۰): مسیرهای خط مرکز لوله در تحقیق ایموتو
(a: خم سینوسی، b: خم دارای یک تقعر و c: خم دارای دو تقعر) [۴۰]

1. Iemoto

بطور خلاصه نتایج حاصل از این پژوهش به شرح زیر است [۴۰]:

- در نیروهای اینرسی کوچک، دبی جریان در نیمه پایینی مقطع دایروی کانال (نیمه دارای شعاع انحنای کمتر) بیشتر است و با افزایش مقدار n و تقویت نیروهای ویسکوز این پدیده تشدید می شود. اما در اعداد دین بزرگ، میزان دبی در قسمت بالایی کانال بیشتر بوده و این حالت با کاهش مقدار n مشهودتر است.
- شدت جریانهای ثانویه با ازدیاد مقدار عدد دین، افزایش و با ازدیاد مقدار n، کاهش می یابد. همچنین موقعیت مرکز این جریانهای ثانویه تابعی از مقدار n و در شعاع های انحنای بزرگ، مستقل از عدد رینولدز است، به نحوی که با ازدیاد n، مرکز این جریانها به سمت مرکز کانال نزدیک می شود. در جدول (۱-۲) موقعیت مرکز این جریانها بر حسب n و برای هندسه سینوسی آمده است. در اینجا $x^1{}_c$ معرف فاصله شعاعی موقعیت مرکز جریانهای ثانویه از خط مسیر مرکز کانال بوده و مشاهده می شود که با افزایش n، مقدار $x^1{}_c/r_0$ کاهش می یابد.

جدول (۱-۲): اثر n بر موقعیت مرکز جریانهای ثانویه در تحقیق ایموتو [۴۰]

n	0.4	0.5202	1
$x^1{}_c/r_0$	0.5202	0.4509	0.4292

- هنگامی که جهت تقعر کانال تغییر می کند (در هندسه سینوسی و هندسه دارای دو تقعر)، جهت چرخش جریانهای ثانویه معکوس می شود. البته معکوس شدن این جریانها آنی نبوده و اندکی پس از تعویض تقعر اتفاق می افتد. میزان تاخیر مربوط به معکوس شدن جهت چرخش این جریانها عمدتاً، با ازدیاد عدد رینولدز افزایش می یابد.

یکسال پس از این تحقیق، ایموتو و همکارانش [۴۱] تحلیـل کـاملاً مـشابهی را بـرای جریـان سـیال ویسکوالاستیک انجام دادند. در پژوهش جدید، هندسه جریان و روش تحلیل کـاملاً مـشابه تحقیـق قبلـی آنها بوده و تنها تفاوت آن استفاده از مدل وایت-متزنر[1] برای معادله متشکله سیال ویـسکوالاستیک اسـت. نتایج حاصل از این تحلیل به شرح زیر است [۴۱]:

- تقویت خاصیت الاستیک سیال سبب می شود تا جریان زودتر با انحنای مسیر تطبیق یابد.
- تقویت خاصیت الاستیک سیال سبب افزایش شدت جریانهای ثانویه و دور شـدن موقعیـت مرکـز این جریانها از مرکز کانال می شود.
- چنانچه مسیر منحنی در انتها به یک مسیر مستقیم تبدیل شود، خاصیت الاستیک سـیال سـبب می شود تا جریان در پایین دست انحنا و در ناحیه مستقیم، زودتر به فرم جریـان در کانـال هـای بسته مستقیم دست یابد (نسبت به سیال ویسکوز). در این تحقیق چنین پدیـده ای در دو مـسیر شکل (۱-۲۰-a) و (۱-۲۰-b) مشاهده شده است.

فان تین[2] و ژانگ[3] [۴۲] حل خود تشابهی را برای جریان محلول اولدروید-بی بین دو صـفحه خمیـده در اعداد انحنای کوچک ارائه کردند. در این تحلیل، انحنای داخلی به عنوان یک دیـواره جامـد و انحنـای خارجی بصورت یک مرز صلب دارای تزریق سیال (شرط مرزی عدم لغزش در جهت مماسی و یک سرعت ثابت U در جهت شعاعی) در نظر گرفته شده است. بر ایـن اسـاس آنهـا دسـتگاه معـادلات خودتـشابهی مربوط به سیال اولدروید-بی را بدست آوردند و بطور عددی اقدام به حل آن نمودند. همچنین آنهـا پاسـخ تحلیلی را برای سیال نیوتنی بدست آوردند و نشان دادند که این پاسخ در نسبت های انحنـای کوچـک و اعداد رینولدز کوچکتر از ۱۰۰۰ دارای دقت مناسبی است. همچنین آنها این پاسـخ تحلیلـی را بـه عنـوان یک حدس اولیه برای حل دستگاه معادلات خودتشابهی پیشنهاد نمودند.

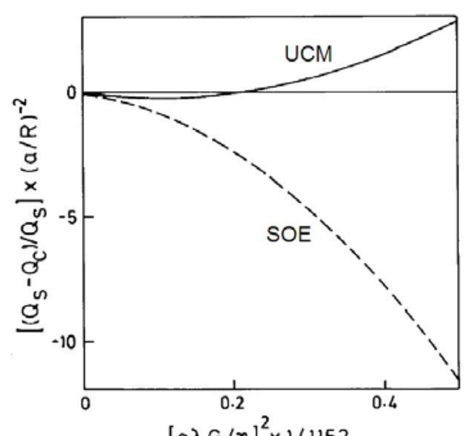
1. White-Metzner
2. Phan-Thien
3. Zheng

در سال ۱۹۹۱، بون[1] [۴۳] و همکارانش جریان خزشی دو سیال UCM و سیال مرتبه دو در لوله خمیده را بررسی نمودند. آنها نیز در تحلیل خود از روش حساب اختلالات استفاده نموده و مطالعه خود را عمدتاً بر روی میزان دبی جریان خزشی متمرکز کردند. در روابط (۱-۱۱-۱) و (۱-۱۱-۲) نسبت دبی جریان به ترتیب برای سیال UCM و سیال مرتبه دو در رینولدزهای بسیار کوچک آمده است:

$$\frac{Q_c}{Q_s}=1+\left(\frac{a}{R}\right)^2\left[-\frac{1}{69120}\left(\frac{a\lambda G}{\eta}\right)^4+\frac{1}{288}\left(\frac{a\lambda G}{\eta}\right)^2+\frac{1}{48}\right] \quad (۱\text{-}۱۱\text{-}۱)$$

$$\frac{Q_c}{Q_s}=1+\left(\frac{a}{R}\right)^2\left[\frac{1}{34560}\left(\frac{a\lambda G}{\eta}\right)^4+\frac{1}{288}\left(\frac{a\lambda G}{\eta}\right)^2+\frac{1}{48}\right] \quad (۱\text{-}۱۱\text{-}۲)$$

در روابط فوق a شعاع مقطع کانال، R شعاع انحنای کانال و λ ثابت زمانی مدل است. همچنین از آنجا که تحلیل جریان بصورت توسعه یافته صورت گرفته، بنابراین گرادیان فشار محوری جریان مقداری ثابت بوده و از اینرو مقدار ثابت G به شکل $G=-(1/R)\partial P/\partial\theta$ قابل تعریف است. همچنین Q_c دبی جریان در کانال خمیده و Q_s دبی جریان در کانال مستقیم در G یکسان می باشد ($Q_s=\pi a^4 G/(8\pi)$). در شکل (۱-۲۱) میزان نسبت اختلاف دبی جریان در کانال مستقیم نسبت به کانال خمیده و برای دو سیال UCM و سیال مرتبه دو (SOE) نشان داده شده است.

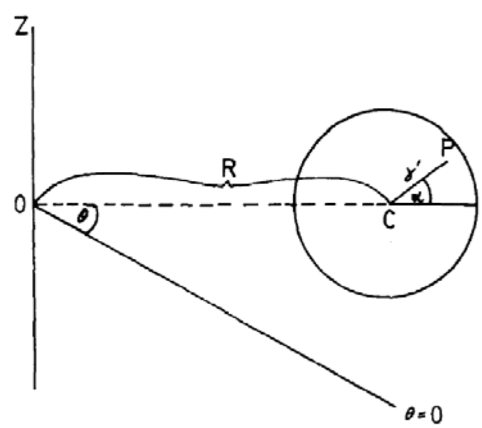


شکل (۱-۲۱): اختلاف دبی جریان در کانال مستقیم نسبت به کانال خمیده [۴۳]

1. Bowen

آنها نشان دادند که وجود خم در مسیر جریان سیال UCM در گرادیـان فـشارهای بـسیار کوچـک و جریان سیال مرتبه دو در محدود بزرگی از مقادیر گرادیان فشار (اما برای سـیال خزشـی)، سـبب کـاهش مقاومت در برابر جریان[1] نسبت به کانال های مستقیم می شود. شایان ذکر است که شکل (۱-۲۱) مبـین آن است که ثابت های زمانی دو مدل سیال مرتبه دو و UCM دارای اثرات معکوسـی بـر میـزان مقاومـت مجرا هستند. به عبارت دیگر، افزایش زمان رهایی از تنش (ثابـت زمـانی مـدل UCM) و زمـان رهـایی از تغییر شکل (ثابت زمانی سیال مرتبه دو) بترتیب منجر به رفتار افزایش[2] و کاهش مقاومت می شود.

در سال ۱۹۹۳، سارین[3] [۴۴] با استفاده از روش حـساب اخـتلالات، تحلیلـی را بـرای جریـان سـیال اولدروید-بی در مجاری خمیده و در اعداد دین کوچک انجام داد. این تحقیق بسیار شبیه پژوهش تومـاس و والترز [۳۹] بوده و تنها تفاوت آن مربوط به مطالعه اثر تغییـرات کوچـک شـعاع انحنـا اسـت. در شـکل (۱-۲۲) هندسه جریان مطالعه شده در این تحقیق، نشان داده شده است.



شکل (۱-۲۲): هندسه جریان در تحقیق سارین برای مجرای مدور [۴۴]

وی برای شعاع های انحنای غیر یکنواخت، نسبت عدد انحنا را به شکل زیر تعریف نمود:

1. Drag reduction
2. Drag enhancement
3. Sarin

$$\Delta(\theta)=\frac{\kappa(\theta)}{\kappa} \qquad (۱۲-۱)$$

در رابطه فوق، $\kappa(\theta)$ عدد انحنای کانال در زوایای مختلف و κ متوسط عدد انحنا است. همچنین سارین گرادیان فشار محوری را برای جریان دارای انحنای متغیر به صورت زیر در نظر گرفت:

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial \theta}=cte-\varepsilon\frac{\partial \overline{P}}{\partial \theta} \qquad (۱۳-۱)$$

سمت راست رابطه (۱-۱۳)، در واقع دو جمله اول بسط تیلور گرادیان فشار محوری است. با فرض کوچک بودن تغییرات انحنا، میزان تغییر گرادیان فشار نیز کوچک و از مرتبه ε است. در انحنای ثابت نیز، مقدار $\partial P/\partial\theta$ ثابت و ε برابر صفر است. سارین نشان داد که شدت جریانهای ثانویه در اعداد دبورا مختلف و در $r=\theta=0$ به شکل زیر محاسبه می شود:

$$\frac{Dn^4}{9\times 8^3}\left[2\Delta(\theta)-\varepsilon Dn\Delta'(\theta)\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\times\frac{1}{240}\right] \qquad for \quad m=0 \qquad (۱-۱۴-۱)$$

$$Dn^4\times 10^{-3}\left[\Delta(\theta)-\varepsilon Dn\Delta'(\theta)\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\times 11\times 10^{-3}\right] \qquad for \quad m=0.2 \qquad (۲-۱۴-۱)$$

$$Dn^4\times 10^{-2}\left[\Delta(\theta)-\varepsilon Dn\Delta'(\theta)\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\times 27\times 10^{-3}\right] \qquad for \quad m=1.0 \qquad (۳-۱۴-۱)$$

در روابط فوق، Dn عدد دین و m عدد دبورا است. با توجه به رابطه (۱-۱۴) می توان دریافت که با افزایش خاصیت الاستیک سیال (m) بر شدت جریانهای ثانویه افزوده می شود، به نحوی که در خم دارای انحنای ثابت، شدت این جریانها برای سیال ویسکوالاستیک دارای عدد دبورا $m=1$، حدود ۴۶ برابر سیال نیوتنی ($m=0$) است. در این حالت و برای انحنای ثابت، ماکزیمم شدت جریانهای ثانویه با توان چهارم عدد دین متناسب است. چنانچه در حالت انحنای متغیر، مقدار Δ' مثبت باشد در اینصورت بر اساس رابطه (۱-۱۴)، یک تاخیر در بروز جریان های ثانویه بوجود می آید که میزان این تاخیر برای جریانهای دارای خواص الاستیک قوی تر، بیشتر است.

همچنین تغییر انحنا سبب جابجا شدن موقعیت مرکز جریانهای ثانویه و ماکزیمم سرعت محوری می شود. این تغییرات برای برخی موقعیتها در جدول (۱-۳) آمده است. در این جدول موقعیت ها بصورت نسبت فاصله شعاعی (r) به شعاع کانال (a) ارائه شده است. موقعیت مرکز گردابه ها در $\alpha = \pm 90^\circ$ و موقعیت ماکزیمم سرعت محوری در $\alpha = 180^\circ$ قرار دارند (شکل (۱-۲۲) را ببینید). مطابق اطلاعات این جدول با افزوده شدن بر خاصیت الاستیک سیال، موقعیت مرکز گردابه ها و ماکزیمم سرعت محوری بیشتر به سمت دیواره کانال متمایل می شود و حساسیت موقعیت مرکز گردابه ها و نیز ماکزیمم سرعت محوری به تغییرات انحنا در سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی بسیار بیشتر است.

جدول (۱-۳): موقعیت مرکز جریانهای ثانویه و ماکزیمم سرعت محوری در مقطع مربعی [۴۴]

m	موقعیت مرکز جریانهای ثانویه برحسب r/a و در مقطع $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$	موقعیت ماکزیمم سرعت محوری برحسب r/a و در مقطع $\theta = 0$
0	$0.430 + \left(\varepsilon Dn \frac{\Delta'(\theta)}{\Delta(\theta)}\right) \times 5.1\times10^{-4}$	$2.6\times10^{-5} Dn^2 \Delta(\theta)\left(1 - 0.019\varepsilon Dn \frac{\Delta'(\theta)}{\Delta(\theta)}\right)$
1	$0.434 + \left(\varepsilon Dn \frac{\Delta'(\theta)}{\Delta(\theta)}\right) \times 2.6\times10^{-2}$	$4.6\times10^{-4} Dn^2 \Delta(\theta)\left(1 - 0.02\varepsilon Dn \frac{\Delta'(\theta)}{\Delta(\theta)}\right)$

شایان ذکر است که برای انحنای ثابت، کافی است که در روابط این بخش، مقدار ε برابر صفر لحاظ شود. همچنین کلیه نتایج این مقاله تنها در اعداد دین کوچک معتبر است.

در سال ۱۹۹۵ سارین [۴۵] نتایج حاصل از تحقیق مشابهی را بر روی جریان پایدار در داخل کانال های خمیده با مقاطع بیضوی گوناگون ارائه نمود. در روابط (۱-۱۵)، ماکزیمم شدت جریان های ثانویه در هندسه های مختلف آمده است:

$$Dn^4 \times 10^{-3}\left[3\Delta(\theta) - \varepsilon Dn\Delta'(\theta)\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \times 21 \times 10^{-3}\right] \qquad for \qquad \alpha = 0,\ \ c = 0.5,\ \ m = 0 \qquad (۱-۱۵-۱)$$

$$Dn^4 \times 10^{-2}\left[25\Delta(\theta) - \varepsilon Dn\Delta'(\theta)\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \times 27 \times 10^{-3}\right] \qquad for \qquad \alpha = \frac{\pi}{4},\ \ c = 0.5,\ \ m = 0 \qquad (۲-۱۵-۱)$$

$$Dn^4 \times 10^{-2}\left[2\Delta(\theta) - \varepsilon Dn\Delta'(\theta)\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \times 25 \times 10^{-3}\right] \qquad for \qquad \alpha = 0,\ \ c = 0.5,\ \ m = 1 \qquad (۳-۱۵-۱)$$

$$Dn^4 \times 10^{-1}\left[\Delta(\theta) - \varepsilon Dn\Delta'(\theta)\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \times 17 \times 10^{-3}\right] \qquad for \qquad \alpha = \frac{\pi}{4},\ \ c = 0.5,\ \ m = 1 \qquad (۴-۱۵-۱)$$

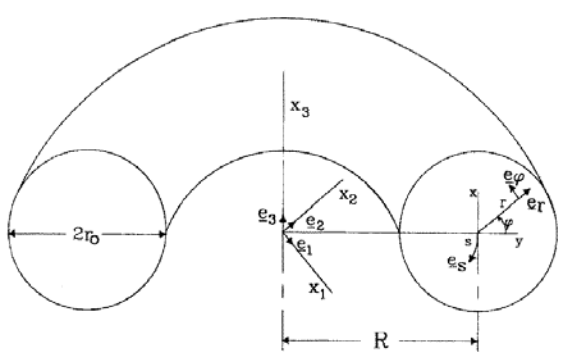
در روابط (۱-۱۵)، Dn عدد دین، m عدد دبورا و c نسبت قطر بزرگ بیضی به قطر کوچک است. در اینجا نیز مشابه مقطع مربعی، مثبت بودن مقدار Δ' موجب بروز تاخیر در ایجاد جریانهای ثانویه می شود. همچنین ایجاد تغییر در هندسه جریان و نیز خاصیت الاستیک سیال (m) سبب تغییر موقعیت مرکز جریانهای ثانویه می شود (جدول (۱-۴) را ببینید).

جدول (۱-۴): موقعیت مرکز جریانهای ثانویه در $\varepsilon = 0$ و $\delta = 0.01$ [۴۵]

$y = \frac{\bar{y}}{a}$	$x = \frac{\bar{x}}{a}$	c	α	m
0.0	0.434	1.0	0.0	0.0
0.0	0.451	0.5	0.0	0.0
-0.125	0.615	0.5	$\pi/4$	0.0
0.0	0.460	1.0	0.0	1.0
0.0	0.472	0.5	0.0	1.0
-0.130	0.645	0.5	$\pi/4$	1.0

رابرتسون و مولر[۱] [۴۶] نتایج تحلیلی را برای محلول اولدروید-بی در کانال های خمیده با مقطع مدور و نیز مقطع حلقوی ارائه نمودند. در شکل (۱-۲۳)، هندسه جریان این تحقیق نشان داده شده است.

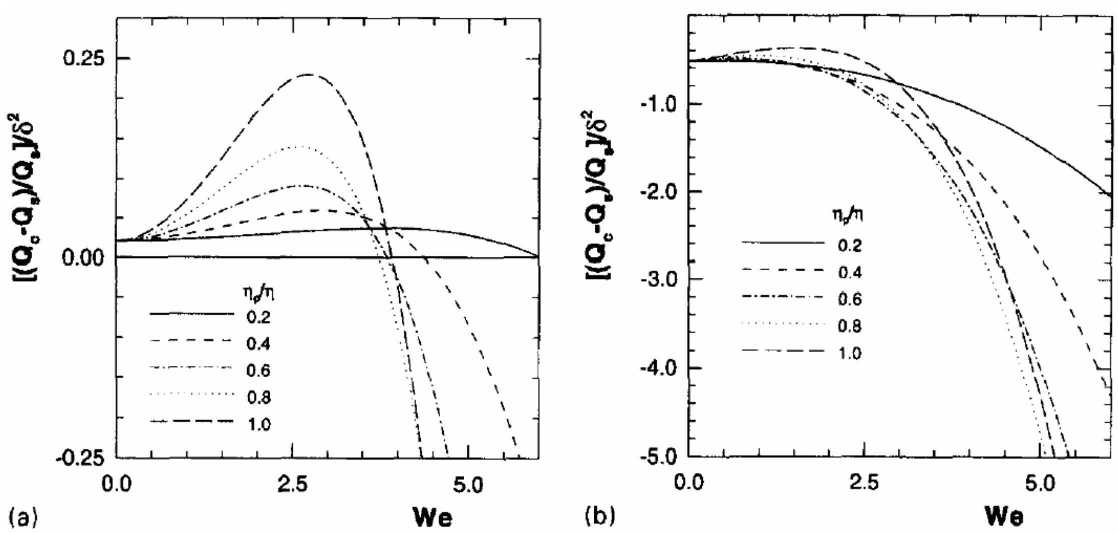
1. Robertson and Muller



شکل (۱-۲۳): هندسه جریان در تحقیق رابرتسون و مولر برای مجرای دارای مقطع مدور [۴۶]

در شکل (۱-۲۴)، دبی نسبی[1] ($[(Q_c - Q_s)/(Q_s\delta^2)]$) بر حسب عدد وایزنبرگ نشان داده شده است. در اینجا نیز مانند تحقیق بون، Q_c دبی جریان در کانال خمیده و Q_s دبی جریان نیوتنی در کانال مستقیم تحت گرادیان فشار یکسان است. در پارامتر دبی نسبی، جمله δ^2 در مخرج آن درج شده تا این پارامتر از عدد انحنا مستقل شود. همانند بون [۴۳] آنها نشان دادند که دبی جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک در اعداد وایزنبرگ کوچک (گرادیان فشارهای بسیار کوچک) در کانال خمیده از کانال مستقیم بیشتر است. این موضوع در شکل (۱-۲۴- a) نشان داده شده است (برای مقایسه دیاگرام های (۱-۲۱) و (۱-۲۴) به قرینه بودن نحوه تعریف دبی نسبی در این دو تحقیق توجه شود). آنها همچنین نشان دادند که افزوده شدن بر مقدار نسبت ویسکوزیته محلول سبب تشدید این پدیده می شود. البته با توجه به شکل (۱-۲۴- b) می توان دریافت که چنین پدیده ای در جریان غیر خزشی وجود ندارد. اما در این جریانها نیز تفاوت جالب توجه ای میان محلول اولدروید-بی و سیال نیوتنی وجود دارد. با توجه به این شکل، با افزایش ویسکوزیته حلال (کاهش نسبت ویسکوزیته) از میزان مقاومت ناشی از اثرات انحنا کاسته می شود. این پدیده بخصوص در اعداد وایزنبرگ بزرگ کاملاً مشهود است. همچنین در جریان اینرسی یک محلول ویسکوالاستیک، با افزایش عدد وایزنبرگ بر میزان مقاومت انحنا افزوده می شود.

1. Relative flow rate

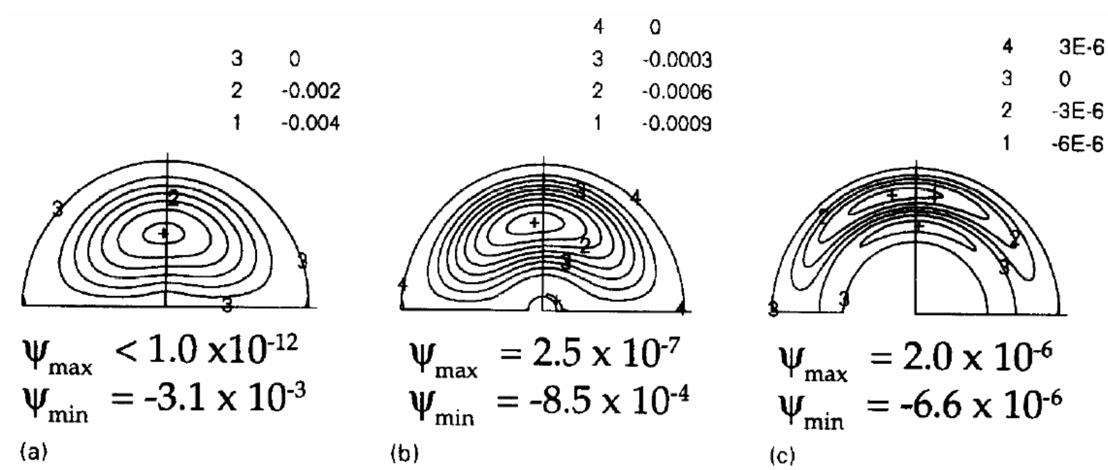


شکل (۱-۲۴): دبی نسبی بر حسب عدد وایزنبرگ ((a) : جریان خزشی و (b) : $Re = 25$) [۴۶]

همچنین آنها نشان دادند که ازدیاد عدد وایزنبرگ سیال اولدروید-بی منجر به منتقل شدن مرکز جریانهای ثانویه به سمت دیواره جانبی مجرا و نیز جابجا شدن موقعیت بیشینه سرعت محوری به سمت انحنای خارجی می شود.

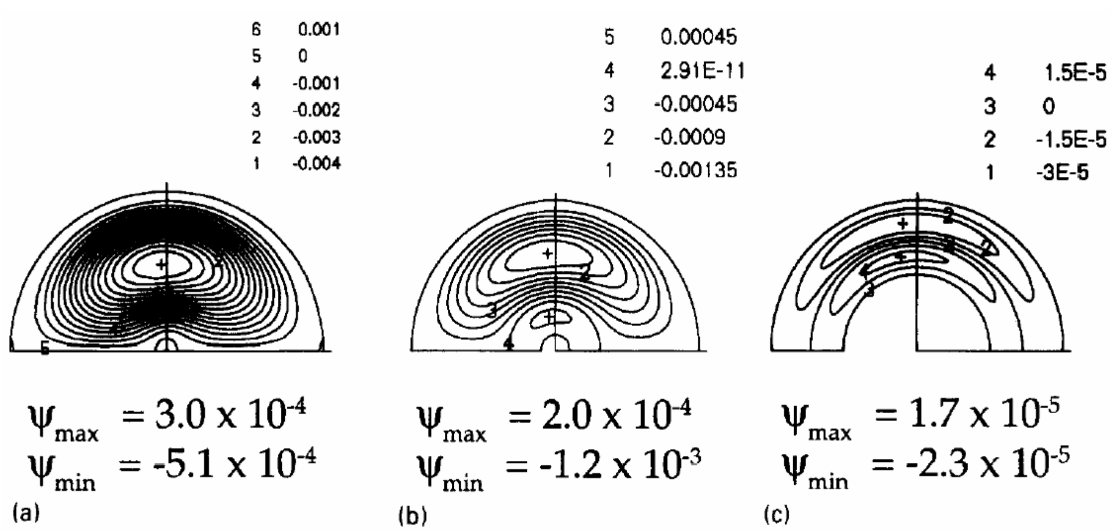
از جمله نوآوریهای این تحقیق، بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک در مجاری حلقوی خمیده است. در مجاری حلقوی اثر انحنای مربوط به حلقه داخلی و نیز عدد دین منجر به بروز ناپایداری و تشکیل یک جفت جریان ثانویه جدید می شود که دارای جهت چرخش معکوس نسبت به گردابه های تیلور-گورتلر بوده و به گردابه دین موسوم هستند. در شکل (۱-۲۵)، جریانهای ثانویه برای سیال نیوتنی و در نسبت های مختلف شعاع حلقه داخلی به شعاع حلقه خارجی نشان داده شده است. با توجه به شکل (a-۲۵-۱) در $r_i / r_o = 0.01$ اختلاف چندانی میان این جریان و جریان در مجرای مدور وجود ندارد و در این حالت جریان ثانویه دیگری در نزدیکی حلقه داخلی ایجاد می شود که شدت آن بسیار کم بوده و لذا در این شکل آشکار نیست. اما در $r_i / r_o = 0.1$ (شکل (b-۲۵-۱))، جریان ثانویه اصلی تحت تاثیر حلقه داخلی قرار گرفته و جریان ثانویه نزدیک حلقه داخلی نیز تا حدودی آشکار می شود که شدت این جریان

۳ مرتبه از جریان ثانویه اصلی ضعیف تر است. در شکل (۱-۲۶) اثر خاصیت الاستیک بـر ایـن جریانهـای ثانویه نشان داده شده است. با مقایسه شـکل (۱-۲۵) و (۱-۲۶) مـی تـوان دریافـت کـه ازدیـاد خاصـیت الاستیک سیال سبب تشدید ناپایداری و تقویت شدت و اندازه گردابـه هـای دیـن (گردابـه هـای کوچـک سمت حلقه داخلی) می شود.



شکل (۱-۲۵): جریانهای ثانویه سیال نیوتنی در کانال خمیده دارای مقطع حلقوی [۴۶]

($\delta = 0.1$، $\mathrm{Re} = 25$)، $r_i / r_o = 0.01 : (a)$، $r_i / r_o = 0.1 : (b)$ و $r_i / r_o = 0.5 : (c)$



شکل (۱-۲۶): جریانهای ثانویه سیال اولدروید-B در کانال خمیده دارای مقطع حلقوی [۴۶]

($\delta = 0.1$، $\mathrm{Re} = 25$، $We = 5.0$ و $\eta_p / \eta = 0.2$)

$r_i / r_o = 0.01 : (a)$، $r_i / r_o = 0.1 : (b)$ و $r_i / r_o = 0.5 : (c)$

برخی محققین تلاش نموده اند تا حل تحلیلی بر اساس روش حساب اختلالات برای جریان سیال مرتبه دو در لوله های خمیده ارائه دهند. شرما و پراکاش[1] [۴۷] با صرفنظر از اختلاف تنش نرمال دوم تنها به اثر اختلاف تنش نرمال اول در جریان سیال مرتبه دو توجه نمودند. آنها محاسبه خود را تنها به ترم مرتبه اول سری حاصل از بسط نسبت انحنا محدود نمودند و نشان دادند که ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول باعث افزایش شدت جریانهای ثانویه در لوله خمیده می شود. بطور کلی اعمال اثر اختلاف تنش نرمال دوم در معادله متشکله سیال مرتبه دو می تواند به بروز شرایط عدم یکتایی در محاسبه میدان سرعت به روش حساب اختلالات منجر شود. جیتچوت و رابرتسون[2] [۴۸] شرایط مربوط به وجود پاسخ در جریان سیال مرتبه دو را مورد مطالعه قرار دادند. آنها پارامترهای زیر را بر اساس عدد رینولدز و ثابت های اختلاف تنش نرمال تعریف نمودند:

$$A = 4\Psi_2\left(\frac{\Psi_1}{2} + \Psi_2\right) \tag{۱-۱۶-۱}$$

$$C = 4\Psi_2 \operatorname{Re} \tag{۱-۱۶-۲}$$

$$E = 4\left(\frac{\Psi_1}{2} + \Psi_2\right) \tag{۱-۱۶-۳}$$

آنها نشان دادند که به جز حالت $C = 0$ و برخی حالت های بسیار خاص، پاسخ های روش حساب اختلالات در سایر حالات غیر موجود و غیر یکتا است. در جدول (۱-۵)، نتایج مربوط به حل پذیری معادلات جریان سیال مرتبه دو برای حالت $C = 0$، ارائه شده است. ملاحظه می شود که در نبود اثر اختلاف تنش نرمال دوم و برای حالت $\Psi_1 \geq -\operatorname{Re}/4$، پاسخ معادلات به سمت یک جفت جریان ثانویه در جهت گردابه های تیلور همگرا می شود. شایان ذکر است که در غالب مواد ویسکوالاستیک ثابت اختلاف تنش نرمال اول مقدار مثبت است و حالات گزارش شده برای مقادیر منفی عملاً دارای کاربرد نیست.

1. Sharma and Prakash
2. Jitchote and Robertson

برای جریان خزشی ($\mathrm{Re} \to 0$) در حالت $A > 0$، چنانچه $\Psi_1 / 2 + \Psi_2 > 0$ باشد، یک جفت جریان ثانویه در جهت گردابه های تیلور-گورتلر تشکیل می شود. از آنجا که تقریباً در تمامی مواد ویسکوالاستیک Ψ_1 مقداری مثبت و Ψ_2 مقداری منفی است، لذا مطابق جدول (۱-۵) جهت جریانهای ثانویه برای مقادیر $\Psi_2 < -\Psi_1 / 2$ در خلاف جهت گردابه های تیلور است. هرچند که در بسیاری از مواد ویسکوالاستیک، اختلاف تنش نرمال دوم حداکثر یک پنجم اختلاف تنش نرمال اول است و ایجاد چنین شرایطی عملاً محال به نظر می رسد اما بر عکس بودن جهت چرخش برای حالت $\Psi_2 < -\Psi_1 / 2$، مبین آن است که به طور کلی اختلاف تنش نرمال اول در جهت تقویت و اختلاف تنش نرمال دوم منفی در جهت تضعیف گردابه های تیلور عمل می کند.

جدول (۱-۵): شرایط پاسخ میدان جریان سیال مرتبه دو به روش حساب اختلالات در حالت $C = 0$ [۴۸]

حالت	گستره مقادیر	وجود پاسخ	زیر گستره مقادیر	وضعیت جریانهای ثانویه
$\Psi_2 = 0$	تمامی مقادیر Re و Ψ_1	✓	$\Psi_1 \geq -\mathrm{Re}/4$	یک جفت در جهت گردابه های تیلور
		✓	$-\mathrm{Re}/4 > \Psi_1 > -\mathrm{Re}/3$	دو جفت گردابه
		✓	$\Psi_1 \leq -\mathrm{Re}/3$	یک جفت در خلاف جهت گردابه های تیلور
$\mathrm{Re} = 0,$ $A > 0$	$0 < A < 1$	✓	$\Psi_1 / 2 + \Psi_2 > 0$	یک جفت در جهت گردابه های تیلور
		✓	$\Psi_1 / 2 + \Psi_2 < 0$	یک جفت در خلاف جهت گردابه های تیلور
	$A \geq 1$	×	***امکان وجود پاسخ یکتا بسیار کم است.*** ***شکل، تعداد و شدت جریانهای ثانویه وابسته به بزرگی مقدار A است.***	
$\mathrm{Re} = 0,$ $A < 0$	تمامی مقادیر A	✓	$\Psi_1 / 2 + \Psi_2 > 0$	یک جفت در جهت گردابه های تیلور
		✓	$\Psi_1 / 2 + \Psi_2 < 0$	یک جفت در خلاف جهت گردابه های تیلور

با وجود اینکه استفاده از روش حساب اختلالات منجر به یافتن پاسخ تحلیلی بـرای میـدان جریـان و دمای سیالات ویسکوالاستیک در لوله های خمیده می شود اما بایستی دانست که به کـارگیری ایـن روش دارای محدودیتهایی است:

۱. عملاً استفاده از روش حساب اختلالات محدود به اعداد دین کوچک است. زیرا در اعـداد دین بزرگ نیاز به محاسبه ترمهای مرتبه بالای سریهای مربـوط بـه بـسط نـسبت انحنـا است ($f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta^n$). بطور کلی جملات دارای مرتبه بزرگتر از δ^2 به طور قابل توجه ای طولانی بوده و تاکنون این جملات در هیچ تحقیقی گزارش نـشده انـد. مطـابق تحقیـق رابرتسون و مولر [۴۶] پاسخ های این روش برای جریـان سـیال نیـوتنی در اعـداد دیـن بزرگتر از ۳۰ (که عدد دین کوچکی محسوب می شود) معتبر نیست.

۲. کلیه تحقیقات پیشین که از این روش استفاده نموده اند به مجاری خمیده دارای مقطـع مدور و حلقوی محدود بوده اند که این موضوع به صورت بـسیار پیچیـده ایـن سـریها در سایر هندسه ها مربوط است.

۳. بسته به نوع مدل ویسکوالاستیک و هندسه جریان، شرایط تکین یکـی از مـسائلی اسـت که در یافتن پاسخ یکتا بر اساس روش حساب اختلالات مشکل آفرین است.

با توجه به مشکلات روش حساب اختلالات برخی از محققین تلاش نمودنـد کـه از سـایر روش هـای تحلیلی برای مطالعه این جریان استفاده نمایند. ژانگ[۱] و همکاران [۴۹] با استفاده از روش گالرکین[۲] حـل نیمه تحلیلی را برای جریان سیال اولدروید-بی ارائه نمودنـد. آنهـا بـا در نظـر گـرفتن بـسط وزنـی بـرای پارامترهای جریان و اعمال انتگرال گیری گالرکین، معادلات ثانویه ای بدست آوردند و بطور عـددی اقـدام به حل آنها نمودند و ادعا کردند که حل ارائه شده در محدوده وسیعی از اعداد وایزنبرگ معتبر است.

1. Zhang
2. Galerkin

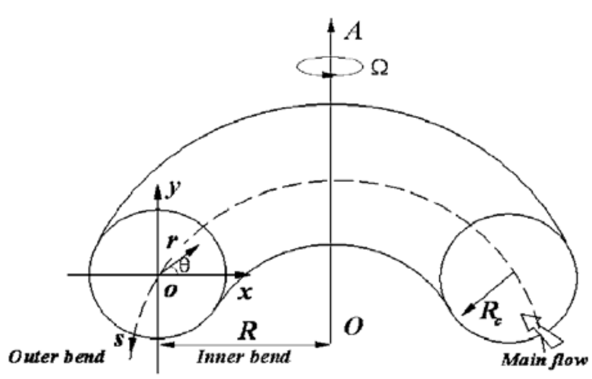
یکی از کامل ترین تحقیقات صورت گرفته در زمینه جریان سیالات ویسکوالاستیک در مجـاری مـدور خمیده، پژوهش فان[1] و همکارانش [۵۰] است. از جمله نوآوری هـای ایـن تحقیـق مـی تـوان از مطالعـه جریان در محدوده وسیعی از اعداد انحنا (از ۰/۰۰۱ تا ۰/۵) و نیز استفاده از مدل ۳ ثابته اولدروید کـه در آن اختلاف تنش نرمال دوم لحاظ شده، اشاره نمود (در عمده مطالعات پـیش از ایـن تحقیـق از معـادلات متشکله ای که فاقد اثر اختلاف تنش نرمال دوم بودند، به عنوان مدل ویـسکوالاستیک شـده بـود). بطـور خلاصه مهمترین نتایج این تحقیق عبارتند از [۵۰]:

- انحنای مسیر سبب ایجاد نیروی گریز از مرکز در جریان می شود. در جریان سـیال نیـوتنی، ایـن نیرو عمدتاً با گرادیان فشار شعاعی (شعاع انحنا خم) بالانس شده و وجود گرادیان فشار در جهـت شعاع انحنا سبب ایجاد جریان ثانویه ای می شود که به گردابه های تیلور-گورتلر معروف هستند.
- در جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک در مجاری بسته خمیده (در غیاب نیروهای اینرسی) نیـز جریان های ثانویه ایجاد می شوند! در این حالت ترکیب اثر اختلاف تـنش نرمـال اول بـا انحنـای مسیر منجر به ایجاد تنش نرمال محوری بزرگ در نزدیکی انحنای خارجی می شـود. بطـور کلـی در ناحیه هسته جریان، گرادیان فشار در جهت شعاع انحنای خم با اثر اختلاف تنش نرمال اول و نیروی گریز از مرکز بالانس می شود اما در نزدیکی جداره کانال در سـمت انحنـای خـارجی خـم مقدار سرعت محوری و در نتیجه نیروی گریز از مرکز به سمت صفر میل می کند حـال آنکـه در این ناحیه مقدار تنش نرمال محوری فوق العاده بالاست. لذا بالانس بین این نیروها به هم خـورده و جهت حفظ بالانس مکانیزم مومنتوم وارد عمل شده و جریانهای ثانویه ای در جهت گردابه های تیلور-گورتلر ایجاد می کنند. لذا بر خلاف جریان خزشی سیال نیـوتنی کـه فاقـد جریـان ثانویـه است در جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده این جریانها فعال می باشند.

1. Fan

- در جریان اینرسی سیال ویسکوالاستیک نیز به دلیل آنکه گردابه های حاصل از اثـر تـنش نرمـال محوری و اثر نیروی گریز از مرکز (گردابه های تیلور-گورتلر) هم جهت هستند، لذا برآیند شـدت جریانهای ثانویه از سیال نیوتنی بیشتر است.
- وجود اختلاف تنش نرمال دوم منفی، برآیند جریانهای ثانویه را تضعیف می کند و سـبب کـاهش شدید مقاومت انحنا در برابر جریان در اعداد انحنای کوچک مـی شـود. مـشاهدات آزمایـشگاهی [۵۱، ۵۲ و ۵۳] نیز این پدیده را تایید می کند.

در زمینه جریان سیالات ویسکوالاستیک در مجاری بسته خمیده چرخان تحقیقـات بـسیار محـدودی انجام شده است. چن[1] و همکارانش [۵۴] چنین جریـانی را بـرای محلـول اولدرویـد-بـی و بـا اسـتفاده از حساب اختلالات و نیز حل عددی بررسی نمودند. در شکل (۱-۲۷)، هندسه جریان این تحقیق نشان داده شده است. در جریان در مجاری چرخان، اثر نیروی حجمی ناشی از شتاب کریولیس منجر به تشکیل یـک جفت گردابه می شود به نحوی که در اعداد دوران مثبت (چرخش در جهت جریان اصلی) ایـن جریانهـای ثانویه در جهت گردابه های تیلور و در اعداد دوران منفی دارای جهت چرخش بـر عکـس هـستند. لـذا در اعداد دوران مثبت، برآیند جریانهای ثانویه تقویت و در اعداد دوران منفی تضعیف می شوند.



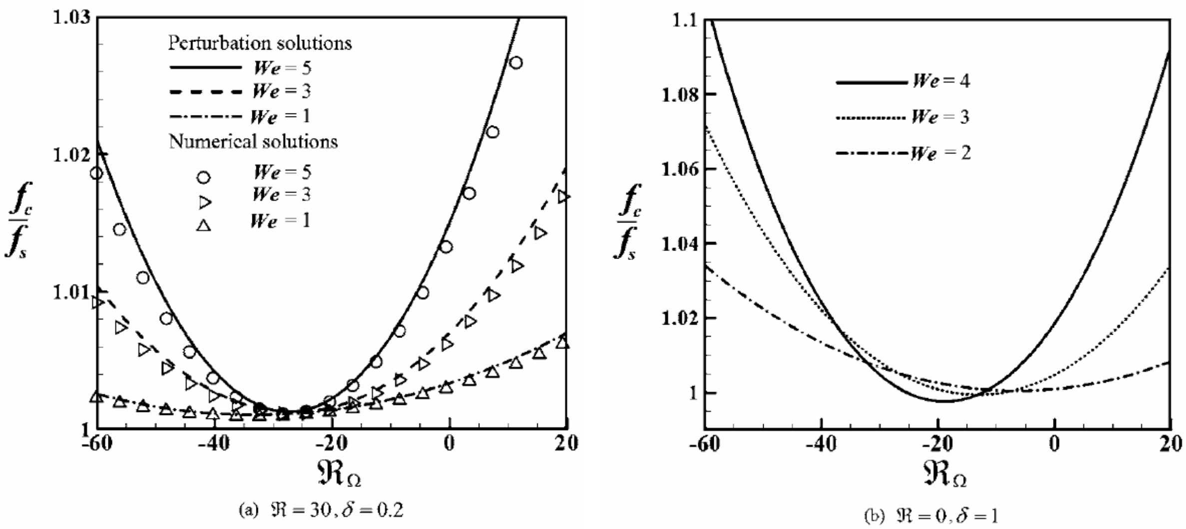
شکل (۱-۲۷): هندسه جریان در تحقیق چن و همکارانش [۵۴]

1. Chen

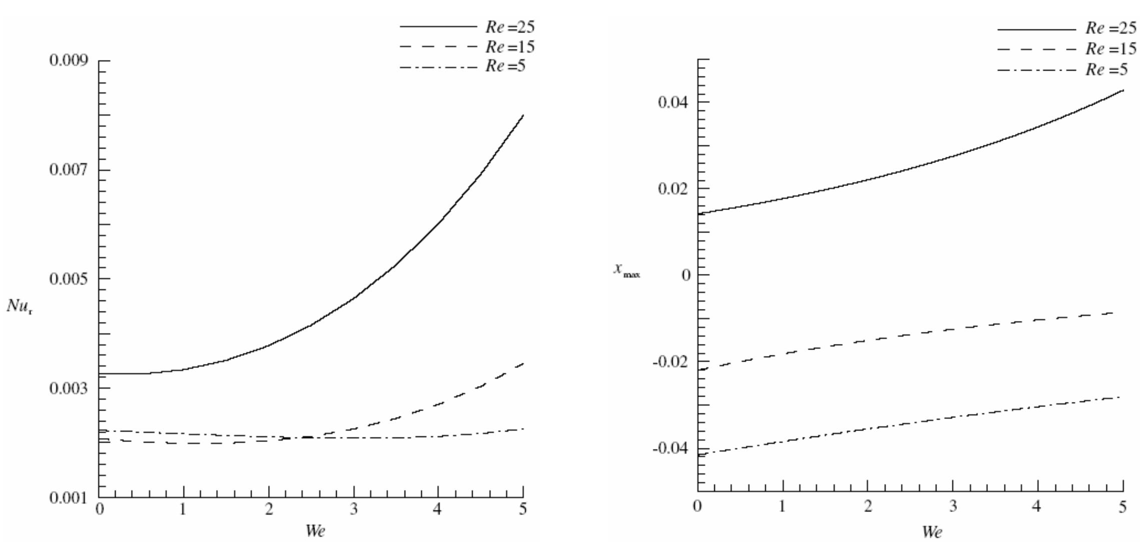
در شکل (۱-۲۸) نسبت ضریب اصطکاک (f_c / f_s) بر حسب عدد دوران و در اعداد وایزنبرگ مختلف نشان داده شده است. شکل (a-۱-۲۸) مربوط به جریان اینرسی با عدد رینولـدز $\Re = 30$ اسـت. مطـابق شکل، برای کلیه اعداد وایزنبرگ و در عدد دوران حدود -22، برآیند جریانهای ثانویـه مینـیمم و مقـدار f_c / f_s نزدیک به یک می شود. در این حالت به علت تضعیف برآیند جریانهای ثانویه، ضریب اصطکاک در خم نزدیک به مسیر مستقیم است. همچنین برای جریان خزشی (شکل (b-۱-۲۸)) نیز روند مشابهی بـه چشم می خورد اما در این حالت مینـیمم f_c / f_s نـسبت بـه عـدد دوران و در اعـداد وایزنبـرگ مختلـف، متفاوت است. به نحوی که عدد دوران در مقدار کمینه f_c / f_s از رابطه $\Re_\Omega' = -4We\delta$ بدست مـی آیـد. در این تحقیق δ نسبت ویسکوزیته (η_p / η) و κ نسبت انحنا است.

در سال ۲۰۰۷ ژانگ و همکارانش [۵۵] حل تحلیلی را بر اساس روش حساب اختلالات بـرای انتقـال حرارت محلول اولدروید-بی ارائه کردند. آنها با استفاده از میدان سرعت بدست آمده در تحقیق رابرتـسون و مولر [۴۶] پاسخ تحلیلی را برای میدان دمای توسعه یافته تحت شار حرارتی ثابت بدست آوردنـد. البتـه آنها دمای جداره را در هر مقطع ثابت فرض نمودند که این فرض سبب بروز خطا در حل مـی شـود. زیـرا این فرض تنها در حالت جریان دارای تقارن محوری برای حالت شار حرارتی ثابت برقرار بوده که به دلیـل عدم تقارن محوری جریان در لوله های خمیده، این پاسخ تنها تقریبی از انتقال حرارت را برای این حالـت بیان می کند. در این تحقیق مقدار Nu_r معرف میزان اختلاف عـدد ناسـلت مجـرای خمیـده نـسبت بـه مجرای مستقیم بوده و به شکل $Nu_r = (\overline{Nu} - \overline{Nu_0}) / \overline{Nu_0}$ تعریف می شود. $\overline{Nu}$ معرف متوسـط ناسـلت مجرای خمیده و $\overline{Nu_0}$ متوسط ناسلت مجرای مستقیم است. در شکل (۱-۲۹) موقعیت تقعـر توزیـع دمـا نسبت به مرکز مقطع لوله مدور و مقدار Nu_r بر حسب عدد وایزنبرگ و رینولدز نـشان داده شـده اسـت. مطابق شکل، با افزایش عدد رینولدز و عدد وایزنبرگ، موقعیت تقعر توزیع دما به سـمت انحنـای خـارجی لوله خمیده متمایل شده و مقدار Nu_r افزایش می یابد. مشابه چنین شـرایطی بـرای موقعیـت مـاکزیمم

سرعت جریان اصلی در لوله های خمیده نیز وجود دارد. این پدیده ناشی از افـزایش شـدت گردابـه هـای تیلور-گورتلر با افزایش عدد رینولدز و تقویت آنها با افزایش عـدد وایزنبـرگ اسـت کـه منجـر بـه ازدیـاد مقدار Nu_r و متمایل شدن ماکزیمم توزیع دما به سمت انحنای خارجی می شود.

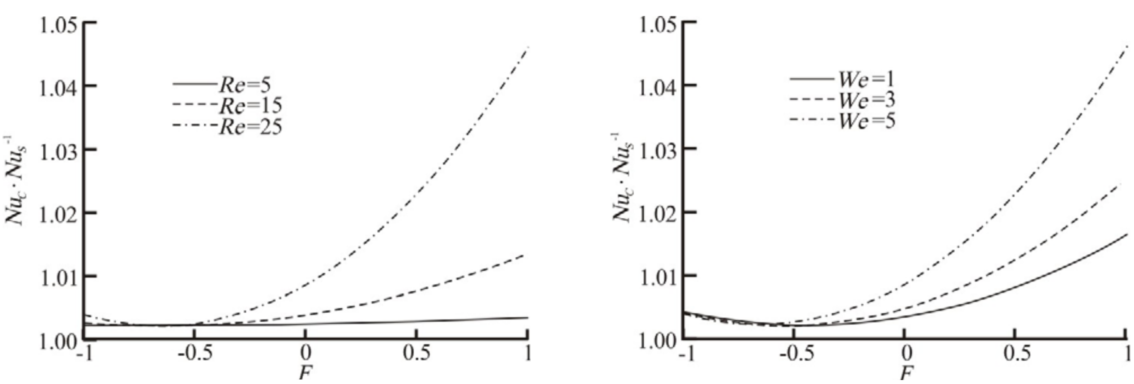


شکل (۱-۲۸): مقدار f_c / f_s بر حسب عدد دوران و در اعداد وایزنبرگ مختلف ($\kappa = 0.05$) [۵۴]



شکل (۱-۲۹): موقعیت ماکزیمم توزیع دما و Nu_r بر حسب عدد رینولدز و عدد وایزنبرگ [۵۵]

در شکل (۱-۳۰) میزان اختلاف عدد ناسلت جریان در لوله خمیده نسبت به جریان سیال نیوتنی در لوله مستقیم بر حسب عدد دوران نشان داده شده است. مطابق شکل، کمینه مقدار انحراف عدد ناسلت مربوط به اعداد دوران منفی است که در آن برآیند جریانهای ثانویه مینیمم است. همچنین مطابق شکل ایجاد دوران مثبت، افزایش عدد دوران، عدد رینولدز و عدد وایزنبرگ به ازدیاد انتقال حرارت جریان منجر می شود. شن[1] و همکاران [۵۶] با استفاده از روش حساب اختلالات، جریان و انتقال حرارت سیال اولدروید-بی در لوله های خمیده چرخان را مورد مطالعه قرار داده اند. آنها نشان دادند که ترکیب اثرات نیروهای کوریولیس، گریز از مرکز، اینرسی جریان اصلی، نیروی ویسکوز و نیروی الاستیک بر میدان سرعت و دما موثرند. همانگونه که پیشتر در مورد تحقیق چن و همکاران [۵۴] بیان گردید، در اعداد دوران مثبت جریانهای ثانویه ناشی از شتاب کوریولیس در جهت گردابه های تیلور-گورتلر هستند و برآیند جریانهای ثانویه در این حالات از لوله خمیده ایستا بیشتر است، حال آنکه عکس این وضعیت در اعداد دوران منفی برقرار است. بطور کلی هر پارامتری که سبب ازدیاد شدت جریانهای ثانویه شود، انتقال حرارت جریان را افزایش می دهد.



شکل (۱-۳۰): میزان انحراف عدد ناسلت بر حسب عدد دوران و
در مقادیر مختلف عدد رینولدز و عدد وایزنبرگ ($\eta_p / \eta = 0.2$)[۵۵]

1. Shen

در زمینه جریان سایر سیالات غیر نیوتنی در مجراهای خمیده نیز تحقیقاتی صورت گرفته است. به عنوان نمونه می توان به تحقیق داس[1] [۵۷] در زمینه جریان سیال بینگهام اشاره نمود. وی با استفاده از تقریب لایه مرزی، تحلیلی را برای جریان در یک لوله خمیده با شعاع انحنای ثابت و در اعداد دین بزرگ انجام داد. همچنین تحلیل مشابهی توسط کلگ و پاور[2] [۵۸] برای جریان سیال بینگهام در لوله های خمیده انجام شده است. همچنین آرادا[3] و همکاران [۵۹] جریان سیال نیوتنی تعمیم یافته را در لوله های خمیده مورد مطالعه قرار دادند. آنها از مدل کاریو-یاسودا[4] برای شبیه سازی ویسکوزیته غیر خطی استفاده نموده و با استفاده از روش المان محدود اقدام به حل عددی میدان جریان نمودند. شایان ذکر است که تحقیقات فراوانی نیز در خصوص جریان و انتقال حرارت سیال توانی در مجاری خمیده صورت گرفته است که برای نمونه می توان از پژوهش های مارن و ترنیک[5] [۶۰]، شوبها و گیریجا[6] [۶۱]، پیرس[7] [۶۲]، جونز [8] [۶۳]، نیگام[9] [۶۴]، گوپتا و میشرا[10] [۶۵] و [۶۶]، سو و پاتانکار[11] [۶۷]، کواس و یانگ[12] [۶۸]، ماشالکار و دواراجان[13] [۶۹ و ۷۰]، موجاوار و راجا رائو[14] [۷۱]، راسنا[15] [۷۲]، راجاسخاران[16] [۷۳]، راجو و راسنا[17] [۷۴]، سینگ و میشرا[18] [۷۵]، تاکامی[19] [۷۶] و نانداپورکار[20] [۷۷] یاد کرد.

1. Das
2. Clegg and Power
3. Arada
4. Carreau–Yasuda
5. Shobha and Girija
6. Marn and Ternik
7. Pires
8. Jones
9. Nigam
10. Gupta and Mishra
11. Hsu and Patankar
12. Kewase and Young
13. Mashekar and Devarajan
14. Mujawar and Raja Rao
15. Rathna
16. Rajasekharan
17. Raju & Rathna
18. Singh & Mishra
19. Takami
20. Nandapurkar

۱-۴-۲- مجاری خمیده دارای مقطع غیرمدور

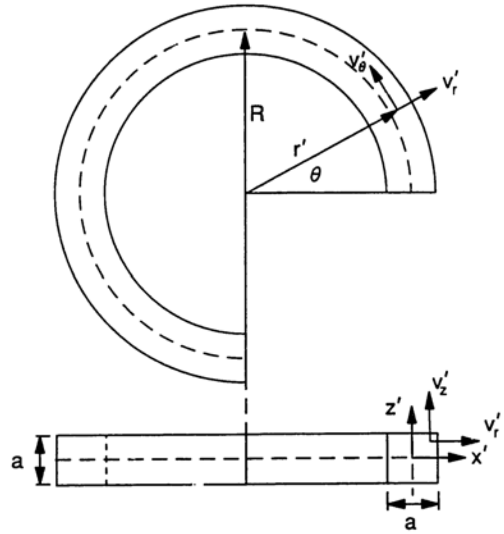
تاکنون تحقیقات بسیار اندکی در خصوص جریـان و انتقـال حـرارت سـیالات غیرنیـوتنی در کانـال هـای خمیده دارای مقطع مربعی صورت گرفته و مطابق اطلاع نگارنده، تاکنون هیج مطالعه ای در مورد جریـان سیال ویسکوالاستیک در کانال های خمیده دارای مقطع مستطیلی انجام نشده است. با این وجـود، تعـداد تحقیقات انجام شده در مورد جریان سیالات نیوتنی در کانال های دارای مقطع غیر مدور قابل توجه بـوده که در ادامه بر اساس شماری از این مطالعات، بررسی اجمالی بر روی این جریان انجام می شود.

۱-۴-۲-۱- *جریان سیال نیوتنی*

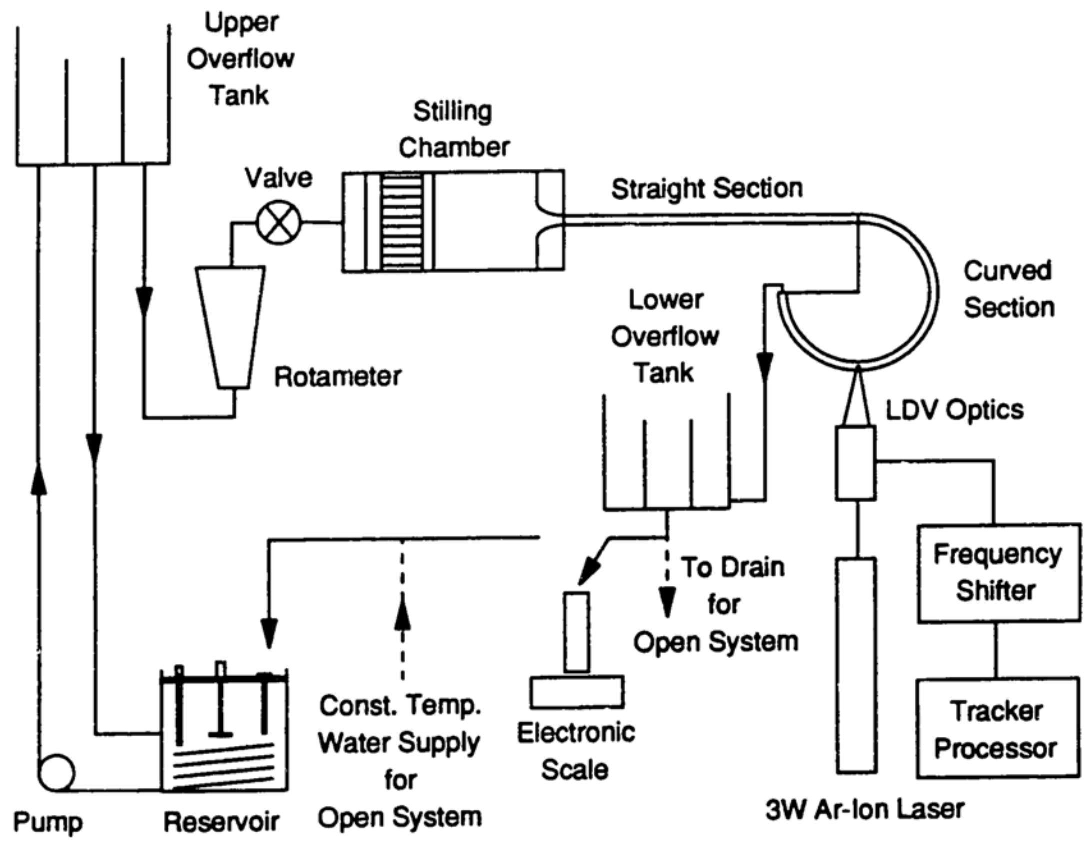
بارا[1] [۷۸، ۷۹] مطالعات عددی و آزمایشگاهی را بر روی جریان سیال نیوتنی در مقاطع خمیده دارای مقطع مربعی انجام داده است. وی با استفاده از دستگاه LDV، آزمایشات خود را در نسبت انحنای ۰/۰۳۵ و در اعداد دین متفاوت روی یک کانال خمیده ۲۷۰ درجـه انجـام داد. در شـکل (۱-۳۱) هندسـه کانـال خمیده و در شکل (۱-۳۲) نمای شماتیک تجهیزات آزمایش[2] نشان داده شده است. وی در تحقیقات خود بیشتر بر روی اثر ناپایداری دین در جریان سیال نیوتنی متمرکز گردید. ناپایداری دین یکی از پدیده های جالب توجه در مجاری خمیده است. وی نشان داد که تا عدد دین ۱۲۵ جریانهـای ثانویـه بـه شـکل یـک جفت جریان ثانویه تیلور-گورتلر ظاهر می شوند. این جریانهای ثانویه ناشی از اثـر نیـروی گریـز از مرکـز ناشی از انحنا هستند. ماشالکار و دواراجان [3] [۶۹، ۷۰] نشان دادند که در هـسته جریـان در کانـال هـای خمیده گرادیان فشار شعاعی با اثر نیروی گریز از مرکز بالانس می شود امـا در نزدیکـی دیـواره داخلـی و خارجی، مقدار سرعت محوری و در نتیجه نیروی گریز از مرکز اندک است. برای حفظ بالانس بین نیروها، مکانیزم مومنتوم وارد عمل شده و جریانهای ثانویه پاد چرخان تیلور-گورتلر ایجاد می شوند.

---

1. Bara
2. Setup
3. Mashalkar and Devarajan



شکل (۱-۳۱): هندسه کانال خمیده در تحقیق بارا [۷۸]



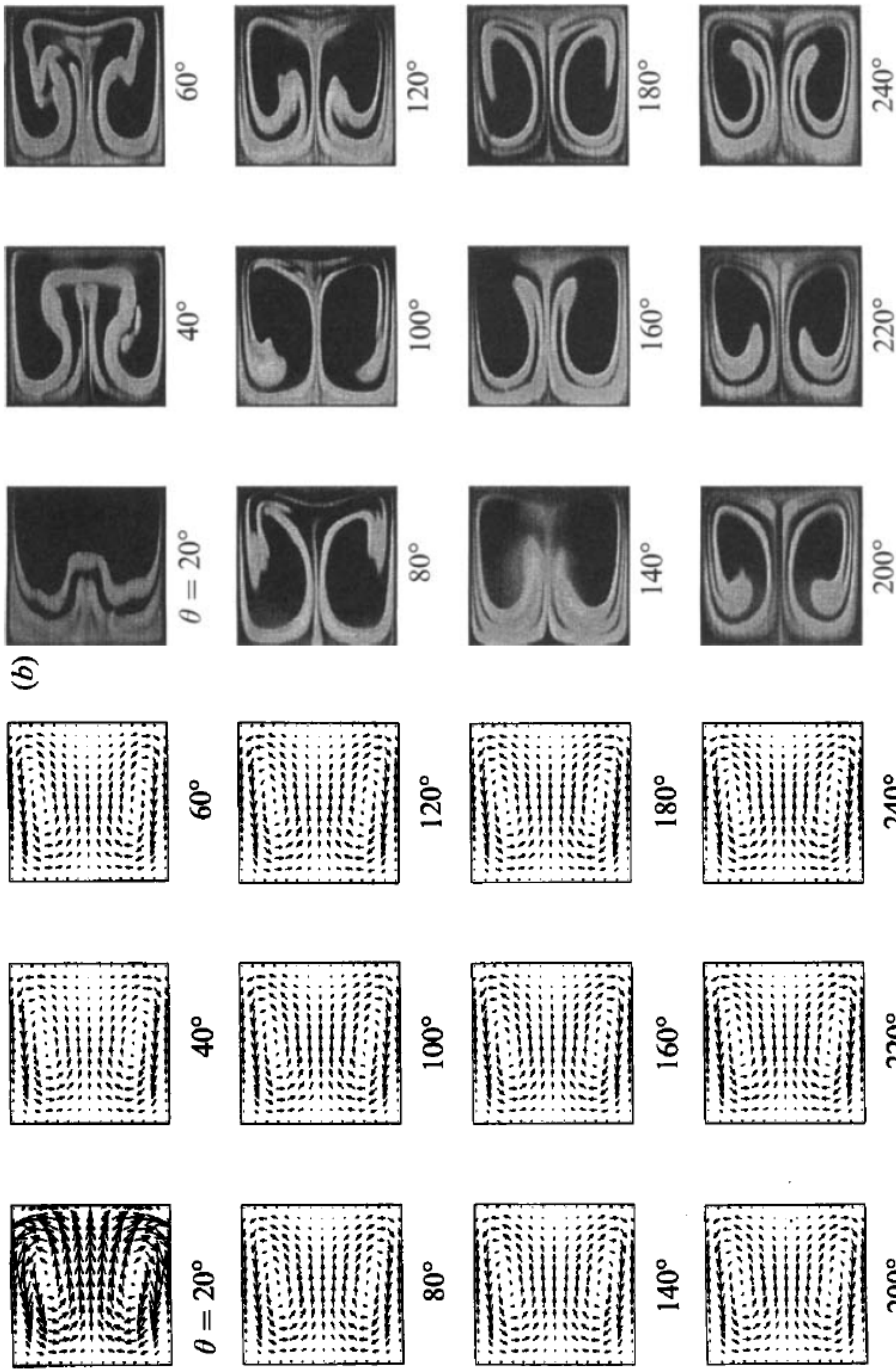
شکل (۱-۳۲): نمای شماتیک تجهیزات آزمایش در تحقیق بارا [۷۸]

در شکل (۱-۳۳) جریانهای ثانویه در زوایای مختلف انحنا نسبت به ورودی کانـال خمیـده و در عـدد دین ۱۲۵ نشان داده شده است. در این عدد دین، چه برای جریـان در حـال توسـعه و چـه بـرای جریـان توسعه یافته، جریانهای ثانویه بصورت یک جفت گردابه تیلور-گورتلر ظاهر مـی شـوند. مطـابق آزمایـشات بارا، با افزایش عدد دین تا ۱۳۷، فرم جریانهای ثانویه به دو جفت جریان ثانویه تغییر می یابد. بـه عبـارت دیگر علاوه بر جریانهای ثانویه تیلور-گورتلر، یک جفـت جریـان ثانویـه جدیـد در ناحیـه نزدیـک دیـواره خارجی بوجود می آید. پدیدار شدن این جریان ناشی از تمایل فوق العاده زیاد توزیع سـرعت محـوری بـه سمت دیواره خارجی و زیاد بودن نیروی گریز از مرکز در این ناحیه است که منجر بـه بـروز ناپایـداری در جریان می شود. در شکل (۱-۳۴) این جریانهای ثانویه نـشان داده شـده انـد. در اینجـا وجـود جریانهـای ثانویه جدید در نزدیکی دیواره خارجی کاملاً مشهود است. این جریانهای ثانویه به گردابه های دین مشهور بوده و نسبت به گردابه های تیلور-گورتلر دارای جهت چرخش معکوس و شدت کمتری هستند. ناپایداری دین و پدیده بوجود آمدن گردابه های جدید اصطلاحاً به پدیده شـاخه ای شـدن[1] نیـز معـروف اسـت. در شکل (۱-۳۵) جریانهای ثانویه در عدد دیـن ۱۵۰ نـشان داده شـده انـد. در ایـن حالـت، انـدازه و شـدت گردابه های دین بزرگتر از حالت عدد دیـن ۱۳۷ اسـت. در شـکل (۱-۳۶) دیـاگرام هـای توزیـع سـرعت محوری در وسط مقطع کانال در جهـات شـعاعی و عرضـی نـشان داده شـده اسـت. مطـابق شـکل، بـروز ناپایداری در جریان سبب بروز تغییرات عمده در توزیع سرعت محوری جریان می شود.

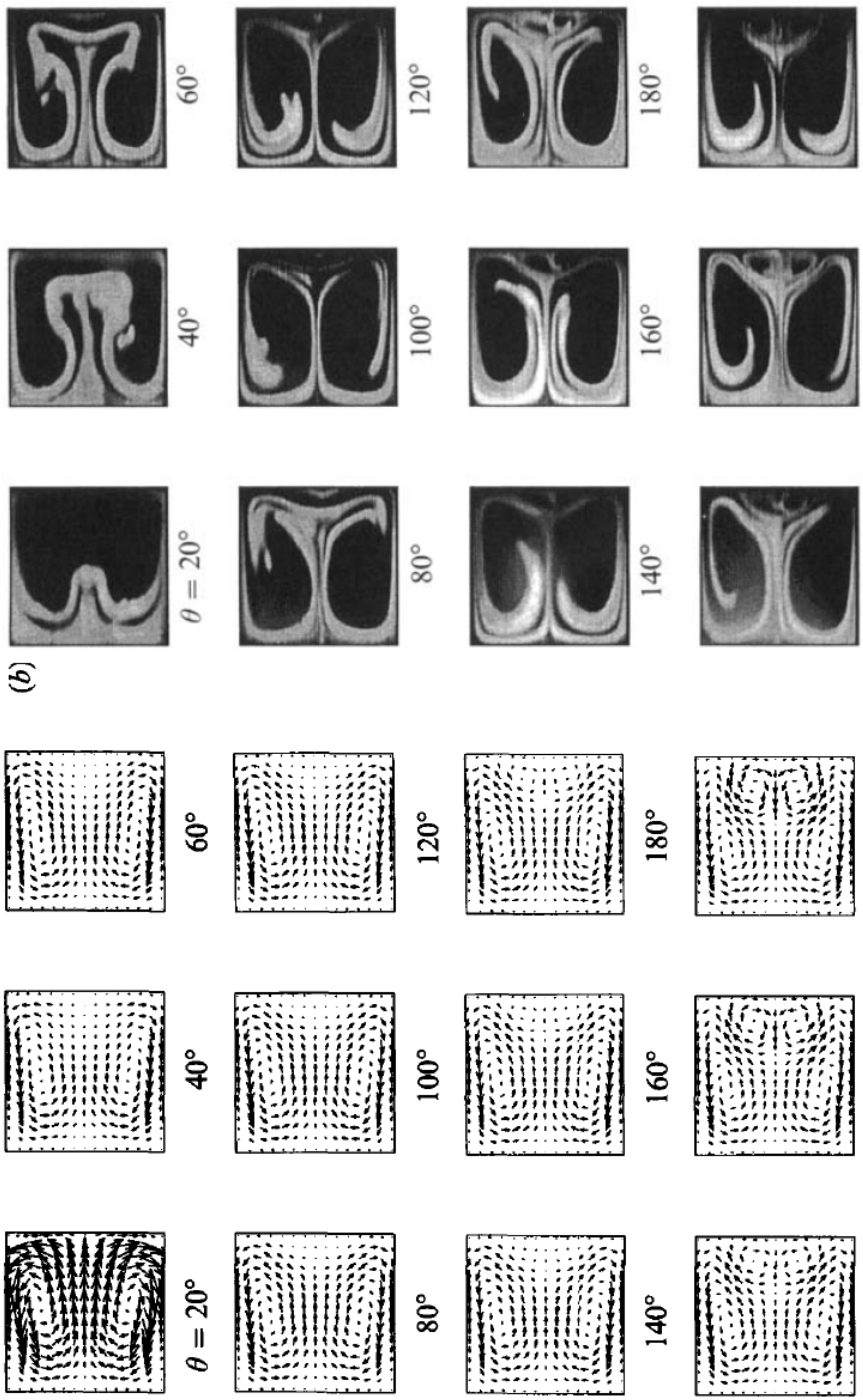
فلونا[2] و همکاران [۸۰] چنین جریانی را برای مقطع مستطیلی ایستا مورد بررسی قرار داده اند. آنها از تکنیک لیزر- فلوئورسانس القا شده[3]، جهت آشکار سازی[4] جریان استفاده نمودند. در شکل (۱-۳۷) نمـای شماتیک تجهیزات آزمایش آنها نمایش داده شده است.

---

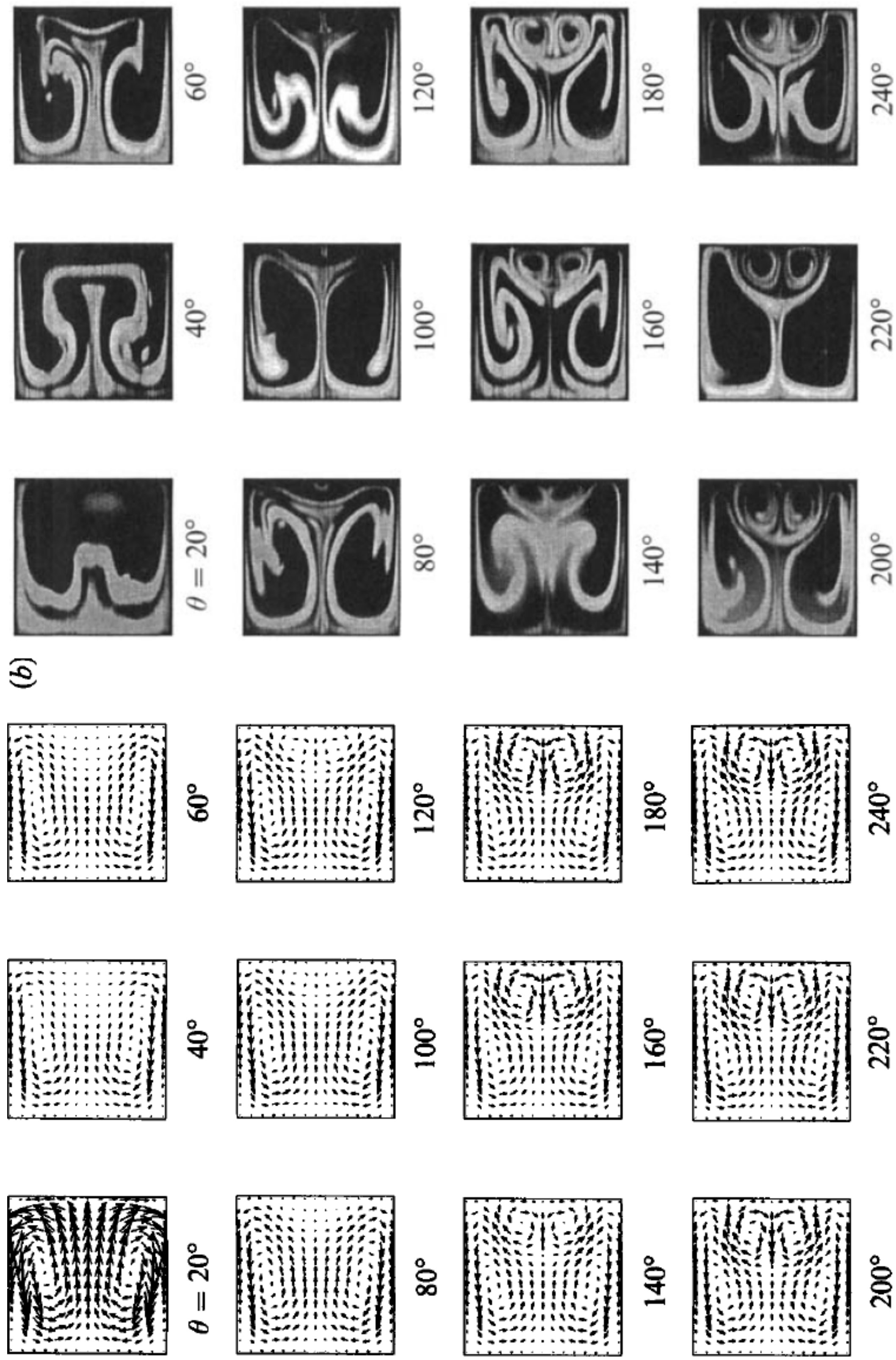
1. Bifurcation
2. Fellounah
3. Laser-induced fluorescence (LIF)
4. Visualization



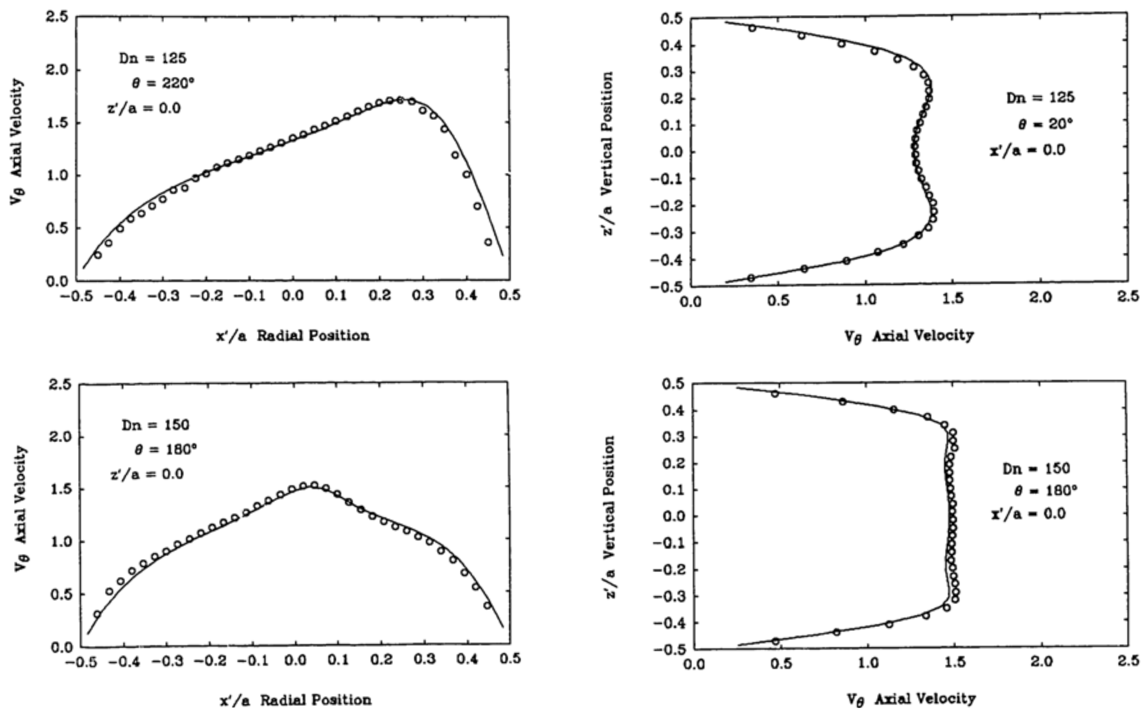
شکل (۱-۳۳): خطوط جریانهای ثانویه سیال نیوتنی در عدد دین ۱۲۵ [۷۸]



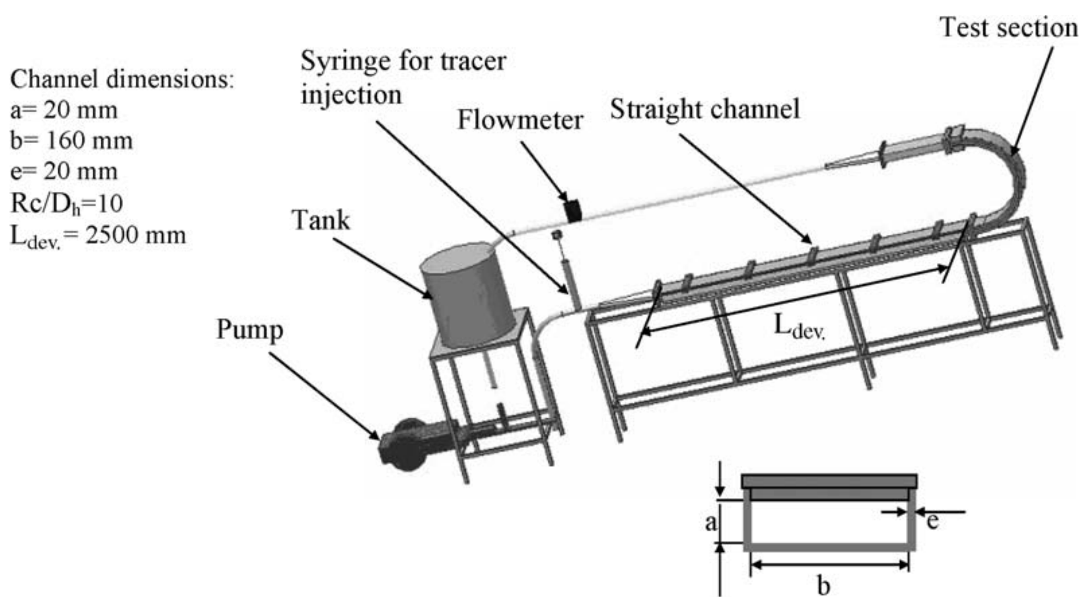
شکل (۱-۳۴): خطوط جریانهای ثانویه سیال نیوتنی در عدد دین ۱۳۷ [۷۸]



شکل (۱-۳۵): خطوط جریانهای ثانویه سیال نیوتنی در عدد دین ۱۵۰ [۷۸]



شکل (۱-۳۶): توزیع سرعت محوری در جهات شعاعی و عرضی وسط مقطع کانال در حالت توسعه یافته و در اعداد دین مختلف (خطوط پیوسته: نتایج حل عددی، علائم دایره ای: نتایج آزمایشگاهی) [۷۹]



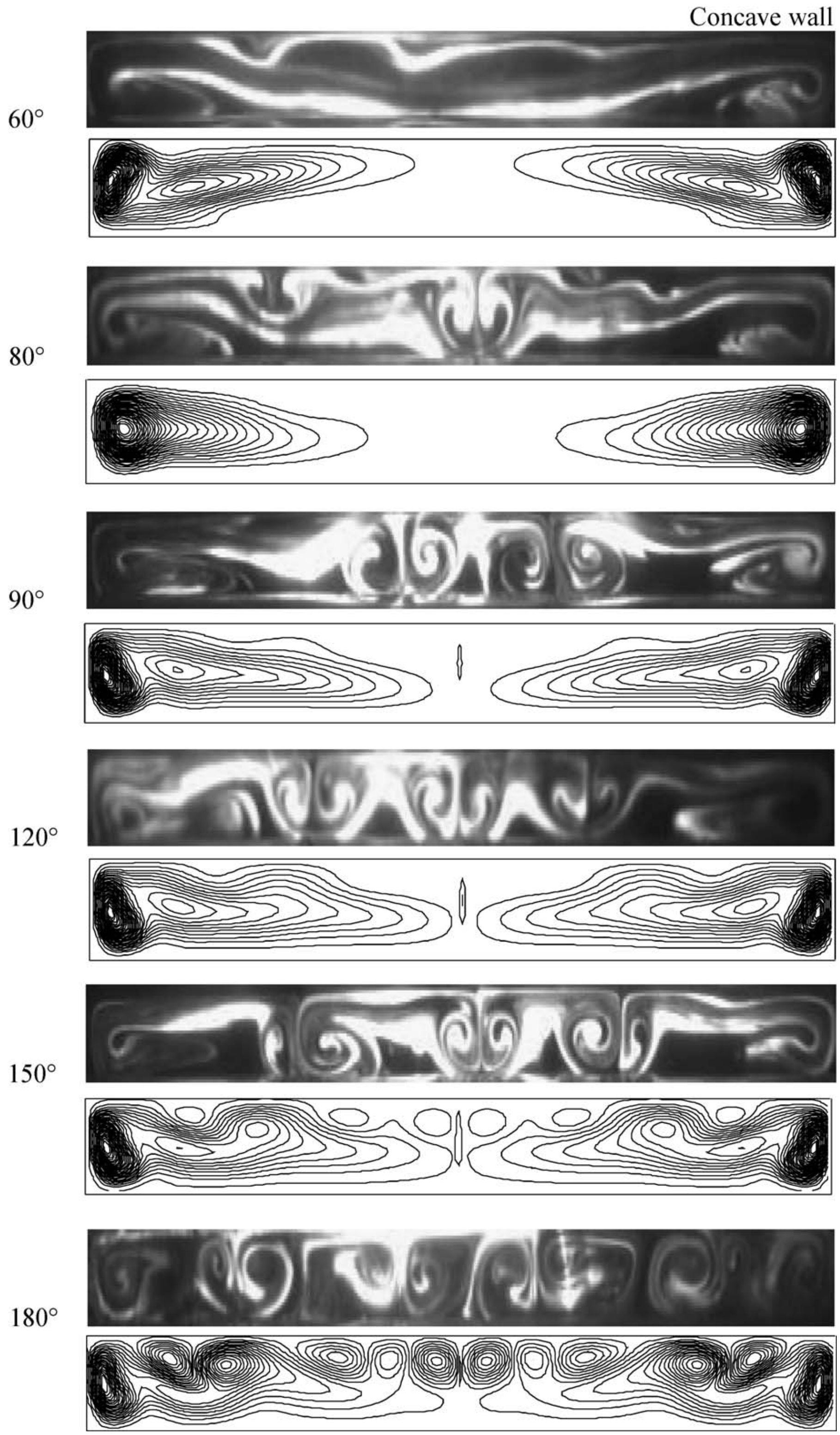
شکل (۱-۳۷): نمای شماتیک تجهیزات آزمایش در تحقیق فلونا و همکاران [۸۰]

در شکل (۱-۳۸) تصاویر جریانهای ثانویه حاصل از آزمایش و خطوط جریانهای ثانویه حاصل از حل عددی نشان داده شده است. در اینجا نسبت ابعادی ۱:۸ و عدد دین برابر ۲۲۰ در نظر گرفته شده است. مطابق شکل، جریانهای ثانویه تا موقعیت ۱۲۰ درجه کانال خمیده نسبت به ورودی، بصورت یک جفت جریان ثانویه تیلور-گورتلر ظاهر می شوند. در زاویه ۱۵۰ درجه ای، تعداد جریانهای ثانویه به چهار جفت افزایش می یابد. به عبارت دیگر در اثر بروز ناپایداری، سه جفت گردابه دین در نزدیکی دیواره خارجی بوجود می آید. در اینجا گردابه های بزرگ سمت دیواره های جانبی کانال همان گردابه های تیلور-گورتلر در حالت پایدار جریان بوده که به گردابه های گوشه[1] نیز معروف هستند. مطابق شکل، در موقعیت ۱۸۰ درجه ای، تعداد گردابه های دین به ۵ جفت افزایش می یابد.

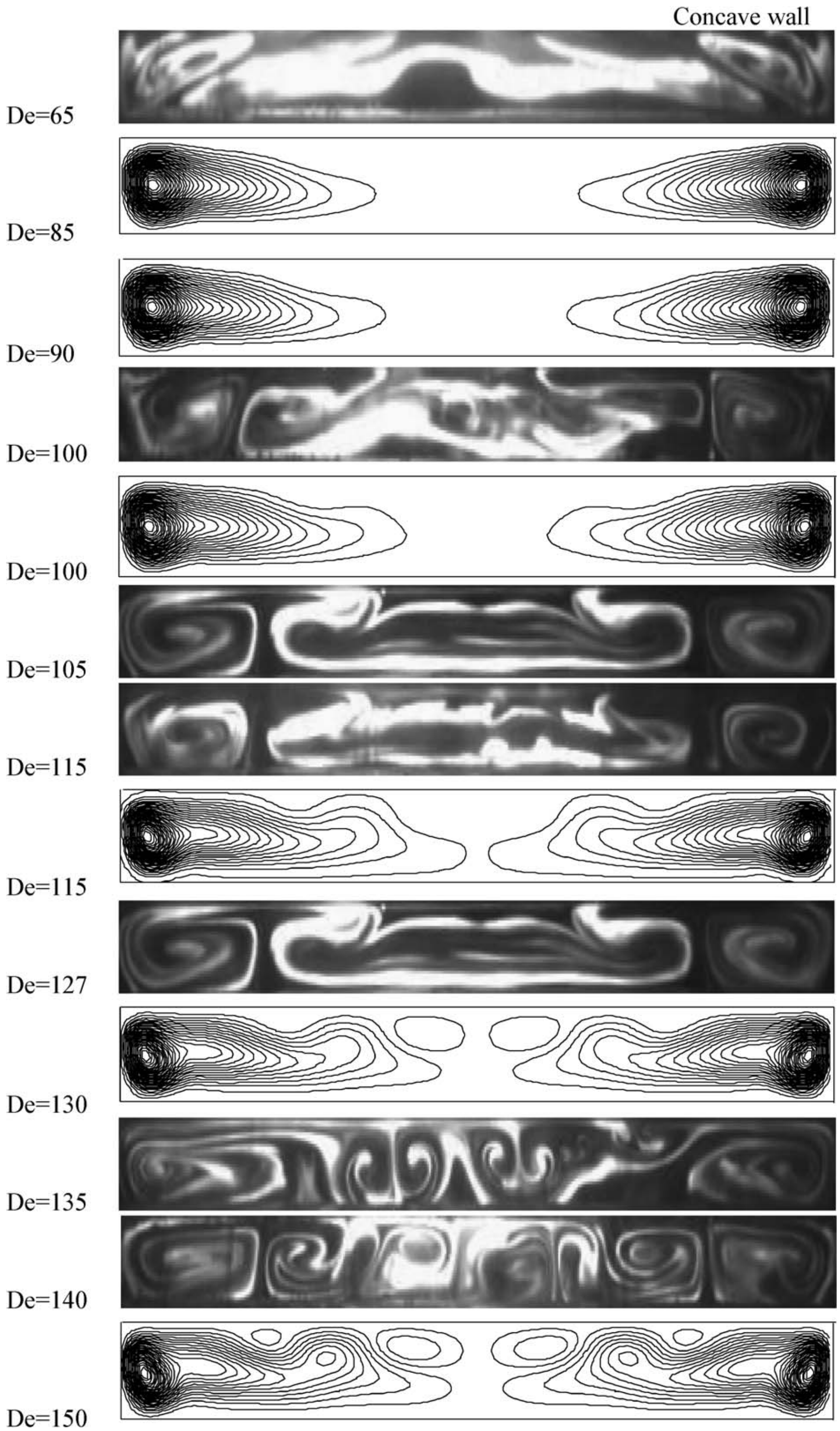
همانگونه که پیشتر گفته شد، در هسته جریان در کانال خمیده، گرادیان فشار شعاعی با نیروی گریز از مرکز بالانس می شود. بایستی توجه داشت که با دور شدن از موقعیت مرکز کانال به سمت دیواره خارجی، اثر سرعت محوری و در نتیجه نیروی گریز از مرکز کاهش می یابد، در حالیکه اثر گرادیان فشار شعاعی همچنان بزرگ است. بنابراین در ناحیه نزدیک دیواره خارجی، دیگر چنین بالانسی بین نیروها برقرار نبوده و برای حفظ تعادل مکانیزم مومنتوم (اثرات ویسکوز) وارد عمل می شود و جریانهای ثانویه را بوجود می آورند. در ناحیه پایدار، این جریانهای ثانویه بصورت یک جفت گردابه تشکیل می شوند. چنانچه سرعت محوری به اندازه کافی بزرگ باشد، اثرات ویسکوز در ناحیه نزدیک دیواره خارجی دیگر قادر به حفظ جریانهای ثانویه بصورت یک جفت گردابه نیستند. در این وضعیت، ناپایداری در جریان بروز نموده و بسته به عدد دین و نسبت انحنای کانال، تعداد و فرم گردابه ها بشدت دستخوش تغییر می شوند.

در شکل (۱-۳۹) خطوط جریانهای ثانویه در حالت توسعه یافته و در اعداد دین مختلف نشان داده شده است. مطابق شکل، ازدیاد عدد دین به بروز ناپایداری در جریان منجر می شود.

1. Corner vortices



شکل (۱-۳۸): تصاویر جریانهای ثانویه حاصل از آزمایش و خطوط جریانهای ثانویه حاصل از حل عددی در موقعیت های مختلف نسبت به ورودی مجرای خمیده [۸۰]



شکل (۱-۳۹): تصاویر جریانهای ثانویه حاصل از آزمایش
و خطوط جریانهای ثانویه حاصل از حل عددی در اعداد دین مختلف [۸۰]

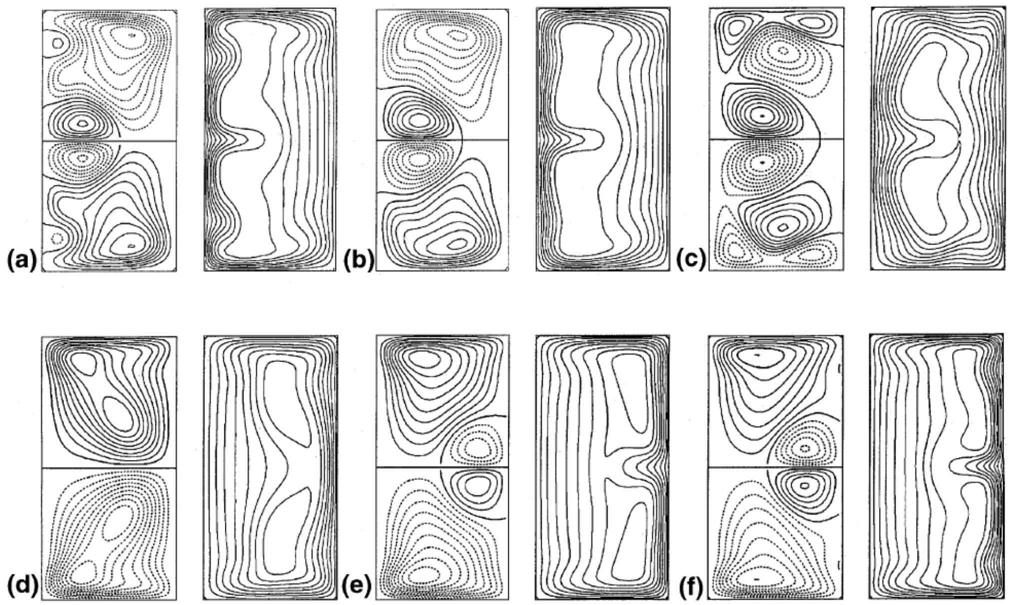
ژانگ و همکاران [۸۱] جریان در کانال های خمیده چرخان را مورد بررسی قرار داده اند. آنها جهت بررسی اثرات چرخش بر پایداری جریان در یک کانال خمیده، پارامتر F را به شکل زیر تعریف نمودند:

$$F = \frac{1}{\delta Ro} \tag{۱-۱۷}$$

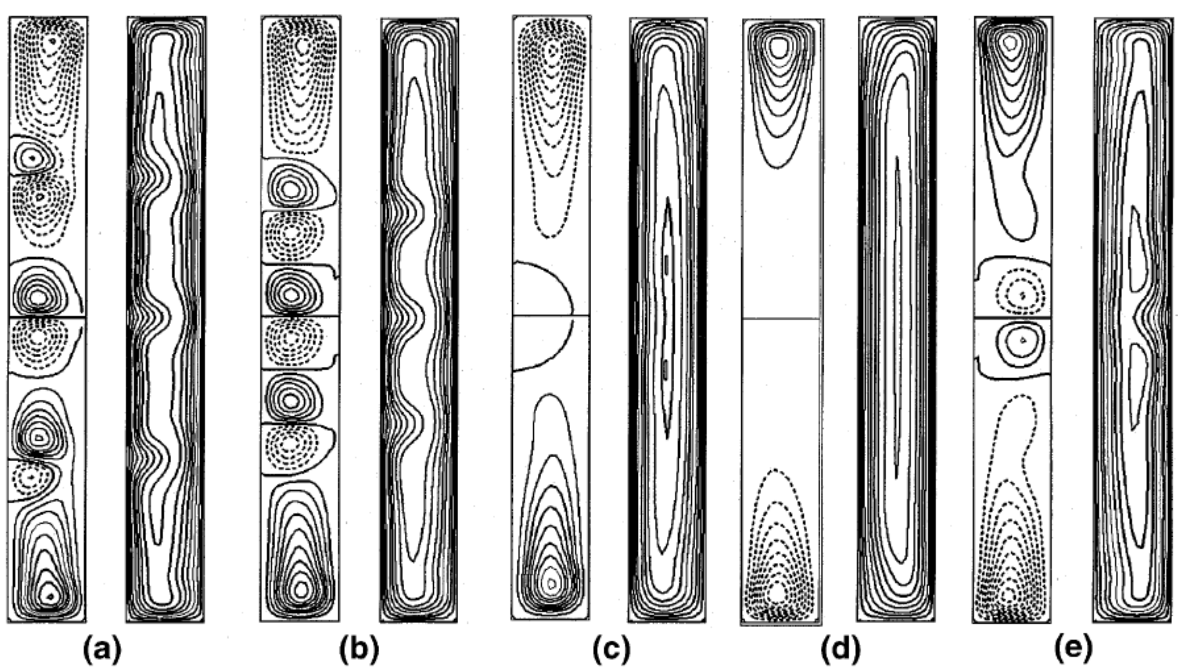
در رابطه فوق، Ro عدد دوران، δ نسبت انحنا و F پارامتری می باشد که معرف نسبت نیروهای کوریولیس به گریز از مرکز است. در شکل های (۱-۴۰) و (۱-۴۱) خطوط جریانهای ثانویه و توزیع سرعت محوری در نسبت های انحنای ۱:۲ و ۱:۸ و در مقادیر مختلف F نشان داده شده است. مطابق شکل، در حالت دوران مثبت به دلیل هم جهت بودن نیروی کریولیس و نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا، فعالیت و تعداد گردابه های دین بیشتر است اما با کاهش مقدار F به مقادیر کوچکتر از صفر، در ابتدا جریان پایدار و سپس با ازدیاد اثر نیروی کریولیس در جهت مرکز گرا، ناپایدار می شود. شایان ذکر است که تاکنون مطالعات بسیار مفصلی در خصوص جریان سیال نیوتنی در کانال های خمیده دارای مقطع مربعی-مستطیلی صورت گرفته که برای نمونه می توان به تحقیقات نانداکومار[1] [۸۲]، کائو[2] [۸۳]، لیگرانی[3] [۸۴، ۸۵]، یاناس[4] [۸۶، ۸۷، ۸۸]، سانگام[5] [۸۹]، فینلای[6] [۹۰]، وینترز[7] [۹۱]، چنگ[8] [۹۲]، موری[9] [۹۳]، یی[10] [۹۴]، کومییاما[11] [۹۵]، رو[12] [۹۶]، چاندراتیلک[13] [۹۷]، لی[14] [۹۸-۱۰۱] و اسپزیال[15] [۱۰۲، ۱۰۳] اشاره نمود.

---

1. Nandakumar
2. Kao
3. Ligrani
4. Yanase
5. Thangam
6. Finlay
7. Winters
8. Cheng
9. Mori
10. Yee
11. Komiyama
12. Ru
13. Chandratilleke
14. Lee
15. Speziale



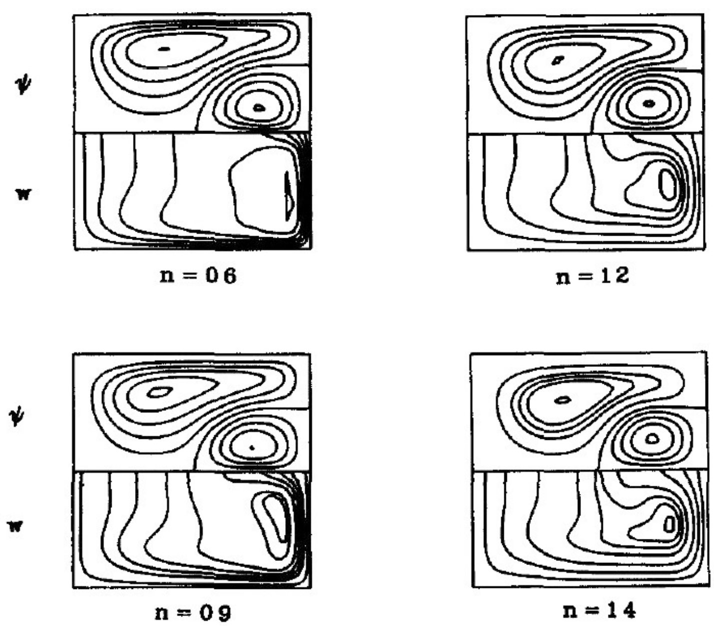
شکل (۱-۴۰): خطوط جریانهای ثانویه و توزیع سرعت محوری در کانال دارای نسبت ابعادی ۱:۲ $(Dn = 400,\ \delta = 0.3)$
[۸۱] $(a): F = 1.0,\ (b): F = 0.0,\ (c): F = -1.0,\ (d): F = -1.3,\ (e): F = -1.5,\ (f): F = -2.0$



شکل (۱-۴۱): خطوط جریانهای ثانویه و توزیع سرعت محوری در کانال دارای نسبت ابعادی ۱:۸ $(Dn = 130,\ \delta = 0.3)$
[۸۱] $(a): F = 1.0,\ (b): F = 0.0,\ (c): F = -0.2,\ (d): F = -1.5,\ (e): F = -2.0$

۱-۴-۲-۲- جریان سیال غیر نیوتنی

در میان تحقیقات انگشت شمار صورت گرفته در مورد جریان سیالات غیرنیوتنی در کانال های غیر مـدور خمیده، سهم عمده مطالعات مربوط به بررسی ناپایداری دیـن اسـت. نخـستین تحقیـق در ایـن خـصوص توسط شانسینی و نانداکومار[1] [۱۰۴] انجام شده اسـت. آنهـا پدیـده ناپایـداری دیـن را در جریـان سـیال نیوتنی تعمیم یافته با استفاده از مدل توانی مورد بررسی قرار دادند. در شکل (۱-۴۲) خطـوط جریانهـای ثانویه و توزیع سرعت محوری در مقادیر مختلف توان مدل توانی (n) نشان داده شده است. مطابق شـکل، جدا از سرعت محوری، شکل گردابه های دین از لحاظ کیفی تا حـد زیـادی مـستقل از میـزان وابـستگی ویسکوزیته به نرخ برش اسـت (تـوان n مـدل تـوانی). آنهـا نـشان دادنـد کـه اثـر تـوان مـدل تـوانی بـر گردابه های دین تنها در مقدار عدد دین بحرانی است. به عبارت دیگر کاهش مقدار n به کاهش عدد دین بحرانی منجر می شود.



شکل (۱-۴۲): تابع جریان (نیمه بالایی) و سرعت محوری سیال توانی در کانال خمیده [۱۰۴]

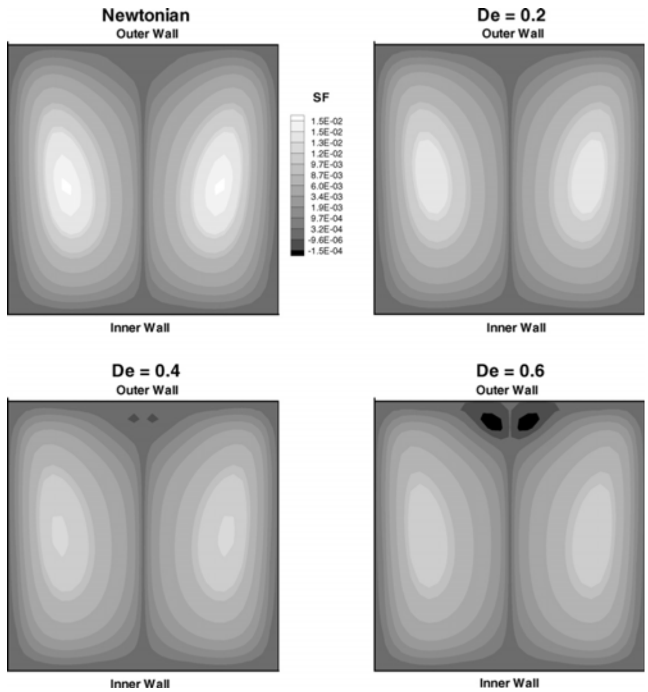
1. Shanthini and Nandakumar

جو و شاگفه[1] [۱۰۵، ۱۰۶] اقدام به آنالیز پایداری جریان سیال اولدروید-بی در کانالهای خمیده (جریان بین دو صفحه خمیده) نمودند. آنها معادله ای پایداری برای سیال اولدروید-بی (مشابه معادله اورسامرفیلد در سیال نیوتنی) بدست آوردند و نشان دادند که افزایش خاصیت الاستیک سیال (عدد دبورا) می تواند به بروز ناپایداری در جریان منجر شود.

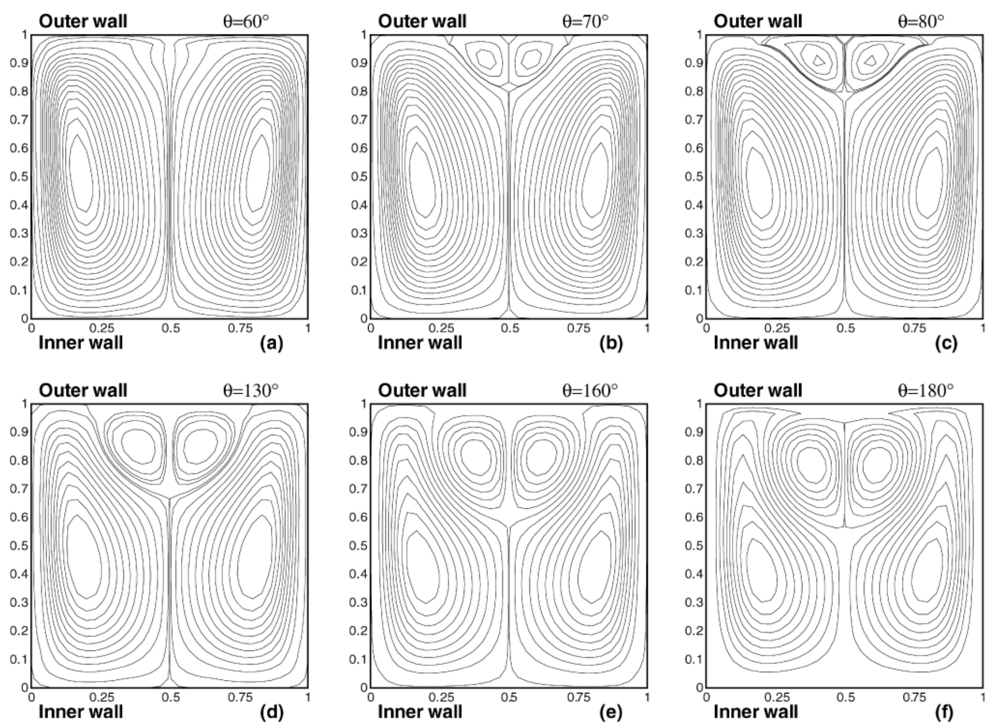
تحقیقات دیگری نیز توسط المبایه[2] و همکاران [۱۰۷] و سورشکومار و آوگوستی[3] [۱۰۸] بر روی اثر دما و خروج از مرکز مقطع کانال بر پایداری جریان ویسکوالاستیک صورت گرفته که این تحقیقات نیز اثر خاصیت الاستیک سیال بر بروز ناپایداری دین را تایید می نمایند.

هلین[4] و همکاران [۱۰۹] اثر خاصیت الاستیک سیال MPTT را بر ناپایداری دین مورد بررسی قرار دادند. مشابه تحقیقات پیشین آنها نیز نشان دادند که ازدیاد خاصیت الاستیک سیال MPTT می تواند به بروز ناپایداری در جریان منجر شود. در شکل (۱-۴۳) کانتورهای تابع جریانهای ثانویه در عدد دین ۱۲۵ نشان داده شده است. همانند بارا [۷۸، ۷۹]، آنها نیز نشان دادند که جریان سیال نیوتنی در عدد دین ۱۲۵ پایدار بوده و یک جفت گردابه تیلور-گورتلر در جریان مشاهده می شود. اما با ازدیاد عدد دبورا سیال MPTT، گردابه های دین در نزدیکی جداره خارجی بوجود می آیند و جریان در وضعیت ناپایدار قرار می گیرد. تحقیق مشابهی نیز توسط بوتابا[5] و همکاران [۱۱۰] درخصوص ناپایداری دین در جریان در حال توسعه سیال MPTT انجام گرفته و رشد گردابه های دین در جهت پیشروی جریان مورد توجه قرار گرفته است. در شکل (۱-۴۴) تابع جریانهای ثانویه در زوایای مختلف انحنای مسیر نشان داده شده است. آنها نشان دادند که خاصیت الاستیک سیال سبب می شود که بروز ناپایداری در راستای پیشروی جریان سریعتر از جریان سیال نیوتنی اتفاق بیفتد.

1. Joo and Shaqfeh
2. Al-Mubaiyedh
3. Sureshkumar and Avgousti
4. Helin
5. Boutabaa



شکل (۱-۴۳): کانتورهای تابع جریان سیال MPTT در عدد دین ۱۲۵ و در اعداد دبورای مختلف [۱۰۹]



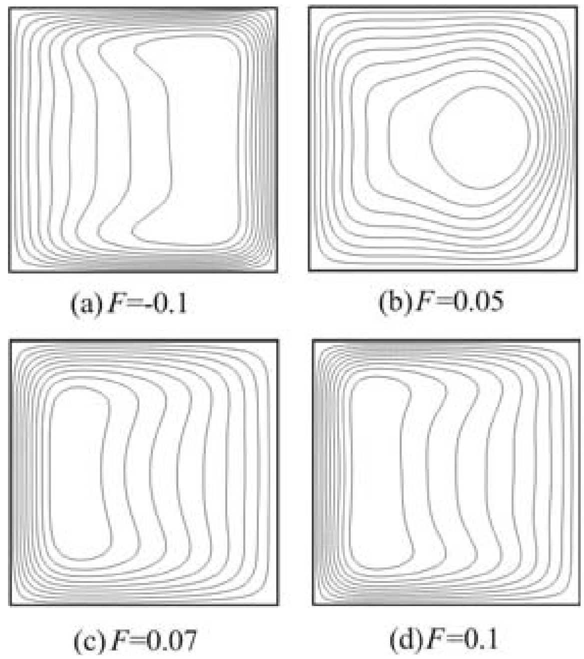
شکل (۱-۴۴): کانتورهای تابع جریان سیال MPTT در $Dn = 150$، $De = 0.3$ و در زوایای مختلف [۱۱۰]

ژانگ و همکاران [۱۱۱] جریان سیال اولدروید-بی را در یک کانال خمیده چرخان بررسی نمودند. آنها اثر دوران را بر سرعت محوری، جریانهای ثانویه و تنش نرمال محوری مورد مطالعه قرار دادند و نـشان دادنـد که دوران مجرا به شدت این پارامترهای جریان را تحت تاثیر قرار می دهـد. مـشابه تحقیقـات مربـوط بـه لوله های خمیده چرخان [۵۴، ۵۶]، آنها نیز نشان دادند که اعمال دوران مثبت بـه کانـال خمیـده دارای مقطع مربعی، به افزایش شدت جریانهای ثانویه منجر می شود و دوران منفی دارای اثر معکوسی است. در شکل (۱-۴۵) توزیع سرعت محوری سـیال اولدرویـد-بـی در مقـادیر مختلـف پـارامتر F (رابطـه (۱-۱۷) ببینید) نشان داده شده است. در اینجا نیز دوران مثبت سبب تمایـل سـرعت محـوری بـه سـمت دیـواره خارجی مجرای خمیده می شود، حال آنکه دوران منفی دارای اثر معکوسی است. این پدیده ناشـی از اثـر نیروی کریولیس بر میدان جریان است. در شکل (۱-۴۶) نیز کانتورهای تنش نرمـال محـوری نـشان داده شده است. مطابق شکل، در حالت کانال ایستا، موقعیت ماکزیمم تنش نرمـال محـوری بـه سـمت دیـواره خارجی متمایل است. اما با ایجاد دوران منفی، تنش نرمال محوری نیز به سـمت دیـواره داخلـی متمایـل می شود.

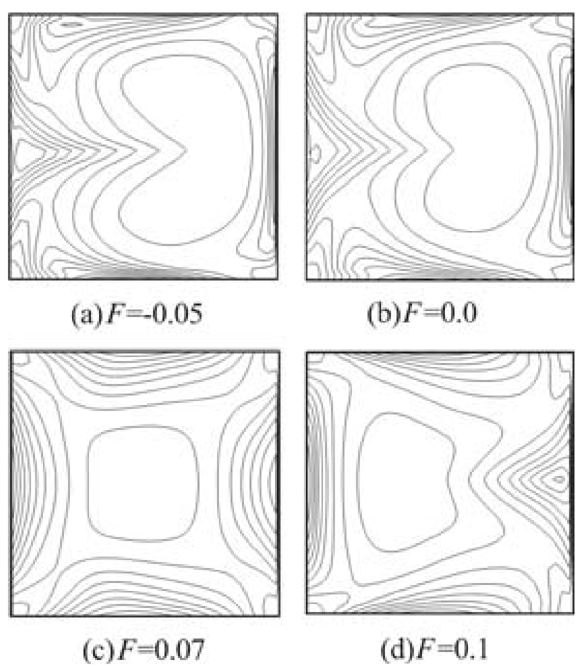
انتقال حرارت جریان سیالات غیرنیوتنی در کانال های خمیده دارای مقطع مربعـی نیـز مـورد توجـه برخی از محققین بوده اسـت. احمـدیان و همکـاران [۱۱۲] جریـان و انتقـال حـرارت سـیال تـوانی را در کانال های خمیده دارای مقطع مربعی بررسی نموده اند.

وو[1] [۱۱۳] جریان خزشی و انتقال حرارت مواد پلیمری را در کانال خمیـده مـورد بررسـی قـرار داده است. وی توجه خود را به پلیمر نایلون-۶ معطوف نموده و از معادله متشکله وایت-متزنر بـه عنـوان مـدل ویسکوالاستیک استفاده کرد. همچنین در این تحقیق، اثر هندسه و دبی جریان بر انتقال حرارت نیز مورد توجه قرار گرفته و نشان داده شد که اثر شعاع گوشه های مقطع بر عدد ناسلت جریان قابل توجه است.

1. Wu



شکل (۱-۴۵): کانتورهای سرعت محوری در مقادیر مختلف پارامتر F
[۱۱۱] ($Dn = 10,\ \eta_p / \eta = 0.2,\ We = 5,\ \delta = 0.1$)



شکل (۱-۴۶): کانتورهای تنش نرمال محوری در مقادیر مختلف پارامتر F
[۱۱۱] ($Dn = 10,\ \eta_p / \eta = 0.2,\ We = 5,\ \delta = 0.1$)

۱-۵- نمونه هایی از رفتار سیالات ویسکوالاستیک در جریانهای غیر دائم

از آنجا که تا این بخش تنها در مورد جریانهای پایدار سیالات ویسکوالاستیک بحث گردید، لذا در اینجا به معرفی رفتار غیر دائم سیال ویسکوالاستیک در قالب چند جریان پرداخته می شود تا تفاوت بنیادی میان رفتار غیر دائم جریان سیال ویسکوالاستیک با سایر سیالات آشکار گردد. در سال ۱۹۹۷، جونکی و سیکیون[1] [۱۱۴] با استفاده از روش تبدیل انتگرالی هنکل[2]، پاسخ تحلیلی را برای جریان کوئت غیر دائم بین دو لوله بدست آورد. وی این جریان را برای دو سیال ماکسول و سیال مرتبه دو تحلیل نمود. در این تحلیل، V_i سرعت چرخش لوله داخلی، V سرعت جریان، η_o ویسکوزیته، ρ چگالی، β ثابت سیال مرتبه دو، t زمان، r فاصله شعاعی، r_i شعاع استوانه داخلی، r_o شعاع استوانه خارجی و λ زمان آسودگی از تنش سیال ماکسول است. بر این اساس کمیتهای بی بعدی به شکل زیر قابل تعریف هستند:

$$x = \frac{r}{r_o}, \qquad a = \frac{r_i}{r_o}, \qquad T = \frac{\eta_0 t}{\rho {r_o}^2}, \qquad U = \frac{V}{V_i}, \qquad R_0 = \frac{\beta}{\rho {r_0}^2}, \quad Ha = \frac{\lambda \eta_0}{\rho {r_o}^2} \qquad (۱۸-۱)$$

در شکل (۱-۴۷)، تغییرات سرعت در $a = 0.5$ و $x = 0.75$ (وسط فاصله بین دو استوانه) برای هر دو سیال نشان داده شده است. برای سیال مرتبه دو مشاهده می شود که تغییرات سرعت مشابه یک سیال نیوتنی است و سرعت بدون هیچ نوسانی به سمت مقدار پایدار خود میل می کند، اما برای سیال ماکسول تغییرات سرعت کاملاً نوسانی بوده و شدت نوسان به مقدار Ha وابسته است. آنها از تحلیل این جریان ناپایدار نتایج زیر را بدست آورد [۱۱۴]:

۱. توزیع سرعت پایدار برای سیال ماکسول و سیال مرتبه دو تا حد زیادی مشابه سیال نیوتنی است ولی رفتار سیال ماکسول در حالت غیر دائم بصورت نوسانی است.

۲. زمان پریود به خواص سیال که شامل R_0 و Ha هستند، وابسته است.

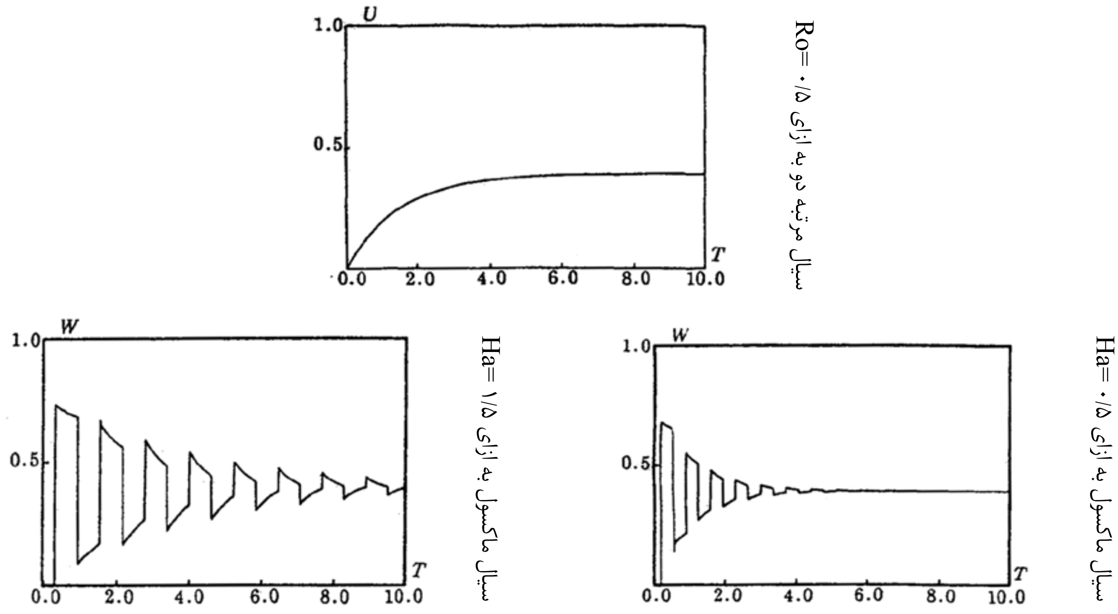
1. Junqi and Ciqun
2. Hankel

۳. برای جریان سیال ماکسول دامنه نوسانات جریان و پریود زمانی با Ha افزایش می یابد.

۴. در کاربردهای مهندسی مربوط به سیستم های لوله کشی سیال ماکسول (همینطور سایر سیالات ویسکوالاستیک)، نوسانات مربوط به جریان غیر دائم سیال می تواند به سیستم لوله کشی منتقل شده و ارتعاشات ناخواسته ای را در بر داشته باشد.

۵. از آنجا که نوسانات جریان سیالات ماکسول تنها وابسته به R_0 و Ha است، در نتیجه می توان جهت تعیین خواص رئولوژیکی از اندازه گیری نوسانات آنها استفاده نمود.

در این زمینه فعالیت مشابهی توسط وود[1][۱۱۵] انجام شده است. وی با استفاده از مدل اولدرئید-بی رفتار کامل تری از جریان کوئت یک سیال ویسکوالاستیک را در حالت ناپایدار شبیه سازی نمود. زیرا در این مدل علاوه بر زمان آسودگی از تنش[2] (λ_1)، زمان رهایی از تغییر شکل[3] (λ_2) نیز در نظر گرفته شده است. برای این منظور وی پارامتر های بی بعد جدیدی را در نظر گرفت:

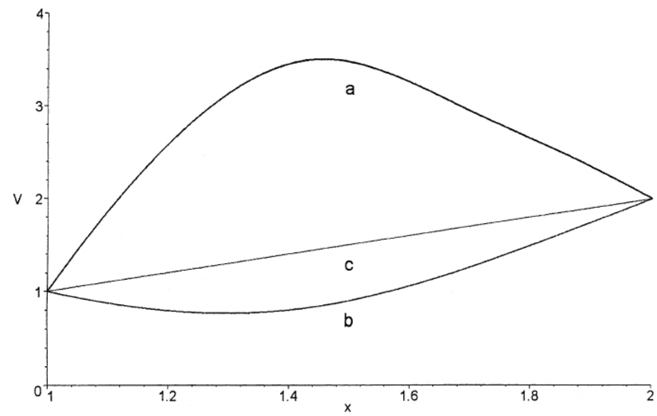


شکل (۱-۴۷): تغییرات سرعت برای جریان غیر دائم سیالات مرتبه دو و ماکسول [۱۱۴]

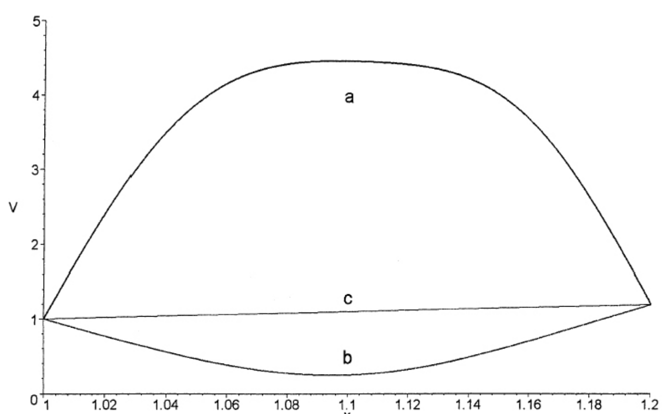
1. Wood
2. Relaxation Time
3. Retardation Time

$$x = \frac{r}{r_i}, \qquad \delta = \frac{r_o}{r_i}, \qquad T_1 = \frac{\lambda_1 \eta_0}{\rho r_i^2}, \qquad T_2 = \frac{\lambda_2 \eta_0}{\rho r_i^2}, \qquad T = \left(\frac{\rho r_i^2}{\eta_0}\right) t \qquad (۱-۱۹)$$

در اشکال (۱-۴۸) و (۱-۴۹) توزیع سرعت بین دو استوانه در حالتیکه، $T_1 = 0.4$ و $T_2 = 0.04$ برای دو حالت $\delta = 2$ و $\delta = 1.2$ و در زمان های بی بعد مختلف (T) نشان داده شده است. در هر دو شکل، نوسانات توزیع سرعت در زمانهای مختلف کاملاً مشهود است و با گذشت زمان از میزان نوسانات میدان سرعت کاسته شده و سرانجام حالت پایدار (حالت (c)) ایجاد می شود.

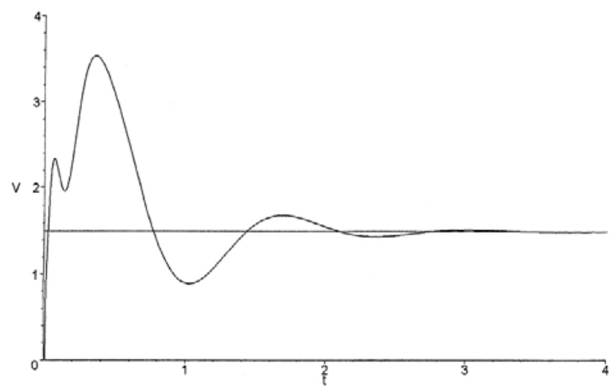


شکل(۱-۴۸): توزیع سرعت در حالت $\delta = 2$ در زمانهای T=0.4(a), 1.0(b), 10(c) [۱۱۵]

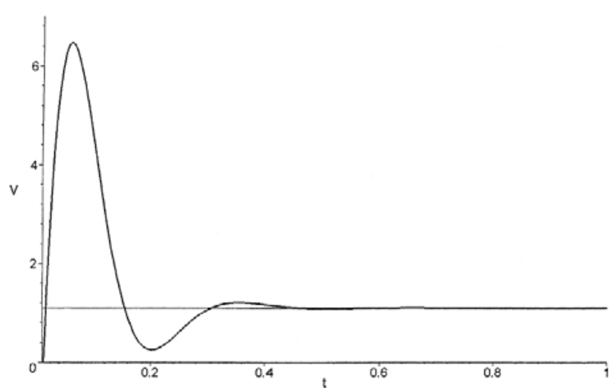


شکل(۱-۴۹): توزیع سرعت در حالت $\delta = 1.2$ در زمانهای T=0.1(a), 0.2(b), 3.0(c) [۱۱۵]

در شکل های (۱-۵۰) و (۱-۵۱) نوسانات میدان سرعت در وسط بین دو استوانه (برای هر دو حالت) نشان داده شده است. مطابق این اشکال با گذشت زمان حالت نوسانی میدان سرعت بتدریج میرا می شود و هر چه فاصله بین دو استوانه بیشتر باشد زمان پایدار شدن جریان طولانی تر خواهد بود. فعالیتهای مشابهی نیز برای مطالعه جریان غیر دائم سیالات ویسکوالاستیک در کانال های مستقیم صورت گرفته است. به عنوان مثال، هایتائو و مینگو[1] [۱۱۶] این جریان را با استفاده از مدل کسری ماکسول تحلیل نموده و پاسخ هایی را برای سرعت محوری در گرادیان فشار ثابت و نوسانی بدست آورده است.



شکل (۱-۵۰): نوسانات سرعت در $x = 1.5$ به ازای $\delta = 2$ [۱۱۶]



شکل (۱-۵۱): نوسانات سرعت در $x = 1.1$ به ازای $\delta = 1.2$ [۱۱۶]

1. Haitao and Mingyu

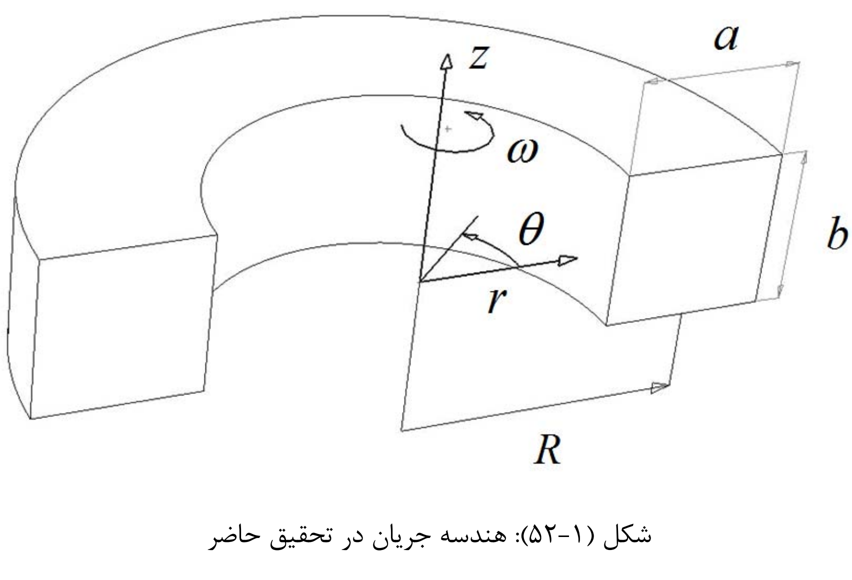
۱-۶- تحقیق حاضر

در این بخش، پژوهش اخیر معرفی شده و مشخصات کلی، اهداف، کاربردها و موارد نوآوری آن مورد بحث قرار می گیرد. در پایان مروری اجمالی بر ساختار کلی تحقیق حاضر صورت می گیرد.

۱-۶-۱- *مشخصات کلی*

در این تحقیق جریان و انتقال حرارت اجباری سیال ویسکوالاستیک در کانال های خمیده دارای مقطع مستطیلی در حالت های ایستا و چرخان مورد بررسی قرار می گیرند. در اینجا میدان جریان بصورت توسعه یافته و انتقال حرارت بصورت در حال توسعه فرض شده است. همچنین میدان جریان به شکل آرام و دائمی و سیال ویسکوالاستیک بصورت تراکم ناپذیر در نظر گرفته شده است. در این مطالعه از مدل تعمیم یافته کریمینال-اریکسون-فیلبی به عنوان معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک استفاده شده و معادلات کسری برای مدل سازی توابع ویسکومتریک به کار گرفته شده اند. در شکل (۱-۵۲)، نمای شماتیک کانال خمیده نشان داده شده است. شایان ذکر است که در اکثر تحقیقات پیشین از دستگاه مختصات منحنی الخط ترویدال جهت تحلیل جریان استفاده شده، حال آنکه در اینجا دستگاه مختصات متعامد استوانه ای برای این منظور به کار رفته است. مزیت اصلی دستگاه مختصات استوانه ای نسبت به دستگاه مختصات ترویدال، فرم ساده تر معادلات حاکم در این دستگاه مختصات است. همچنین با توجه به هندسه این جریان، گسسته سازی معادلات حاکم و اعمال شرایط مرزی در دستگاه مختصات استوانه ای بصورت ساده تری انجام می شود. مطابق شکل، جهت θ معرف جهت پیشروی جریان و جهات r و z معرف جهات عرضی (جهات سطح مقطع کانال) است. طول هر ضلع کانال در جهات r و z نیز به ترتیب برابر a و b و شعاع انحنای گام کانال خمیده نیز برابر R فرض شده است. مطابق شکل، در اینجا مرکز دوران در مرکز انحنا و بردار چرخش نیز عمود بر مسیر انحنای کانال (در جهت z) در نظر گرفته

شده است. به این ترتیب جهات مثبت و منفی دوران به ترتیب معرف دوران همگرد[1] و پادهمگرد[2] است. بطور خلاصه در این تحقیق، اثر پارمترهایی نظیر عدد رینولدز، عدد دین، عدد پرانتل، عدد روزبی، عدد الاستیک، عدد وایزنبرگ، نسبت انحنا، نسبت ابعادی، اثر ویسکوزیته و توابع ویسکومتریک وابسته به نرخ برش (ویسکوزیته و اختلاف تنش های نرمال اول و دوم) بر میدان جریان و انتقال حرارت در جریان خزشی و اینرسی به روش عددی مورد بررسی قرار می گیرد. یکی از موارد جالب توجه تحقیق حاضر مطالعه اثرات متضاد اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر ناپایداری در جریان اینرسی و خزشی در کانال های خمیده است. گزارش کاملی از نتایج عددی در فصل ششم ارائه شده است. در فصل چهارم این پژوهش، بررسی تحلیلی بر روی حالات خاص جریان و انتقال حرارت در کانال و لوله های خمیده انجام شده است. همچنین در این فصل با استفاده از تکنیک مرتبه بزرگی، روابطی برای بالانس نیروها بدست آمده که به تفسیر نتایج عددی ارائه شده در فصل ششم (به ویژه در مورد مکانیزم تشکیل جریانهای ثانویه) کمک شایانی می نماید.



شکل (۱-۵۲): هندسه جریان در تحقیق حاضر

1. co-rotation
2. counter-rotation

۱-۶-۲- ضرورت و کاربردها

جریان در مجاری خمیده یکی از جریانهای پایه و مهم در مبحث مکانیک سیالات محسوب می شود. تاکنون تحقیقات بسیار زیادی بصورت عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی در خصوص این جریان انجام شده است. عمده این تحقیقات محدود به جریان سیالات نیوتنی بوده اند و سهم بسیار اندکی از این تحقیقات متوجه سیالات غیر نیوتنی و به ویژه سیالات ویسکوالاستیک است. بطور کلی دلایل اصلی مربوط به تعداد اندک مطالعات مربوط به سیالات غیرنیوتنی در مقابل سیالات نیوتنی عبارتند از:

- یکی از دلایل استقبال گسترده از مطالعات مربوط به سیالات نیوتنی مربوط به رفتار نیوتنی سیالاتی نظیر آب و هوا است. توسعه دانش مکانیک سیالات نیوتنی عمدتاً مرهون کاربرد این دو سیال در صنعت هوانوردی و کشتی سازی است. همچنین این دو سیال در سایر صنایع و جنبه های زندگی بشر نیز دارای کاربردهای متعددی هستند. به همین دلیل دانش مکانیک سیالات بر اساس سیالات نیوتنی پی ریزی شده و منظور از واژه سیال در علوم مرتبط با مکانیک سیالات (نظیر هیدرولیک، مورفولوژی، توربولانس، احتراق و ...)، سیال نیوتنی است.
- متعدد بودن خانواده های سیالات غیرنیوتنی و پیچیدگی رفتاری (فقدان معادله متشکله مناسب و ساختار پیچیده، تنوع، مرتبه غیرخطی و احیاناً کسری معادلات متشکله موجود)، سبب بروز دشواری در مطالعات مربوط به این سیالات شده است.

جریان سیالات غیرنیوتنی در مجاری خمیده دارای کاربردهای متنوعی نظیر استخراج نفت و انتقال مشتقات و محصولات نفتی، تزریق مواد پلیمری، جریان زیست سیالات و انتقال مواد در صنایعی نظیر صنایع غذایی، شیمیایی (مانند تولید انواع مواد شوینده، آرایشی، بهداشتی، رنگ، رزین و ...)، صنایع نظامی و ... است. شایان ذکر است که اخیراً جریان میکرو-سیالات[1] ویسکوالاستیک در کانال های بسته

1. micro-fluidics

مربعی/مستطیلی که به روش لیتوگرافی تولید شده اند، از اهمیت ویژه ای برخوردار شده است. در بخش ۱-۳ مروری نسبتاً جامع بر تحقیقات پیشین در خصوص جریان سیالات ویسکوالاستیک در مجاری خمیده ارائه شده که بر اساس اطلاعات این بخش می توان دریافت که سهم عمده این تحقیقات مربوط به مجاری خمیده دارای مقطع مدور بوده و تعداد اندکی از آنها به جریان در کانال های خمیده غیر مدور پرداخته اند. مطابق اطلاع نگارنده، تاکنون هیچگونه تحقیقی در مورد جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی ایستا و چرخان انجام نشده است. با توجه به خلا موجود، ضرورت مطالعه در این بخش کاملاً آشکار است.

۱-۶-۳- *جنبه های نوآوری*

به طور خلاصه جنبه های نوآوری حاصل از تحقیق حاضر عبارتند از:

- هرچند تحقیقات انگشت شماری در خصوص جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع مربعی انجام شده اما پژوهش حاضر نخستین تحقیقی محسوب می شود که در آن مقطع جریان بصورت مستطیلی در نظر گرفته شده است.
- در این تحقیق جریان خزشی و جریان اینرسی سیال ویسکوالاستیک در محدوده وسیعی از عدد رینولدز، نسبت های ابعادی، نسبت انحنا، عدد دوران و خواص الاستیک (اختلاف تنش های نرمال اول و دوم) مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی دیگر از جنبه های نوآوری تحقیق حاضر مطالعه اثر اختلاف تنش نرمال دوم بر ناپایداری دین است. در این تحقیق نشان داده می شود که اختلاف تنش نرمال دوم منفی منجر به پایداری جریان می شود. حال آنکه تحقیقات پیشین تنها به اثر اختلاف تنش نرمال اول بر بروز ناپایداری دین توجه داشته اند. همچنین در این تحقیق برای نخستین بار ناپایداری دین در مقاطع مستطیلی مورد مطالعه قرار می گیرد.

- در تحقیق حاضر نشان داده می شود که بر خلاف جریان خزشی سیال نیوتنی در کانال خمیده، جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک در این کانال می تواند ناپایدار شود.
- در این تحقیق انتقال حرارت جریان در دو حالت شار ثابت و دما ثابت بررسی شده و اثر کار میدان ویسکوالاستیک بر انتقال حرارت مورد بررسی قرار می گیرد.
- در فصل چهارم روابط تعادل نیروها در ناحیه هسته جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال های خمیده ارائه شده و بر اساس آنها بر روی مکانیزم تشکیل جریانهای ثانویه بحث می شود.
- ارائه پاسخ تحلیلی برای میدان جریان خزشی در کانال های خمیده دارای مقطع مستطیلی
- ارائه پاسخ به روش حساب اختلالات برای جریان و انتقال حرارت سیال مرتبه دو در لوله خمیده

۱-۶-۴- ساختار کلی

به طور خلاصه ساختار کلی تحقیق حاضر از قرار زیر است:

- در فصل دوم، روابط فیزیکی حاکم بر جریان و انتقال حرارت جریان سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده ارائه می شود. در اینجا معادلات حاکم و معادله متشکله در دو دستگاه مختصات استوانه ای و ترویدال ارائه شده که برای مطالعه جریان در مجاری خمیده دارای مقطع مستطیلی، حلقوی و مدور بسیار مناسب است.
- در فصل سوم به آنالیز تحلیلی پرداخته شده و با استفاده از تکنیک مرتبه بزرگی روابط تعادل نیروها و نیز روابط میدان تنش در هسته جریان ارائه می شود. روابط بدست آمده برای درک نحوه اثر نیروهای گریز از مرکز ناشی از انحنا و دوران، نیروی کریولیس و اثر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر میدان جریان و تشکیل جریانهای ثانویه مناسب است. در ادامه با استفاده از این روش، حل تحلیلی برای میدان جریان خزشی سیال مرتبه دو ارائه می شود. در بخش دیگری از

این فصل با استفاده از روش حساب اختلالات میدان جریان و دمای سیال مرتبه دو در لوله های خمیده حل شده و بر اساس آن بر روی اثر اختلاف تنش نرمال اول (ثابت زمانی تاخیر) سیال مرتبه دو بر توزیع دما و سرعت بحث شده است.

- در فصل چهارم روش عددی به کار گرفته شده در تحقیق حاضر معرفی شده و صورت گسسته معادلات حاکم و نحوه اعمال شرایط مرزی ارائه می گردد. در پایان این فصل، الگوریتم مربوط به برنامه CFD تهیه شده برای مطالعه این جریان ارائه می شود.
- در فصل پنجم نتایج حاصل از حل عددی ارائه شده است. در این فصل در ابتدا صحت نتایج حاصل از حل عددی ارزیابی شده و استقلال پاسخ های عددی از شبکه تحقیق می شود. در ادامه اثر پارمترهایی نظیر عدد رینولدز، عدد دین، عدد روزبی، عدد الاستیک، عدد وایزنبرگ، نسبت انحنا، نسبت ابعادی، اثر ویسکوزیته و توابع ویسکومتریک وابسته به نرخ برش بر میدان جریان و انتقال حرارت در جریان خزشی و اینرسی (در حالات پایدار و ناپایدار) به روش عددی مورد بررسی قرار می گیرد.
- در فصل ششم نتیجه گیری از تحقیق اخیر و پیشنهادات جهت ادامه تحقیق حاضر ارائه می شود.
- در بخش ضمیمه این تحقیق، منشاء رفتار ویسکوالاستیک در محلول ها و مذابهای پلیمری بررسی شده و مروری اجمالی به مدل سازی سیالات ویسکوالاستیک صورت می گیرد.

فصل دوم

روابط فیزیکی

۲-۱- مقدمه

در این فصل معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در دستگاه های مختصات استوانه ای و ترویدال ارائه می گردد. بطور کلی این دو دستگاه مختصات جهت مطالعه جریان و انتقال حرارت در کانال های خمیده دارای مقاطع مستطیلی، مدور و حلقوی مناسب هستند. شایان ذکر است که در تحقیق حاضر کلی پارامترهای جریان و انتقال حرارت بصورت بی بعد بررسی شده اند. معادلات و روابط فیزیکی ارائه شده در این فصل برای مطالعه تحلیلی و عددی جریان در کانال های خمیده به کار گرفته شده اند که نتایج حاصل از آنها در فصول سوم و پنجم آمده است.

۲-۲- روابط جریان در مجاری خمیده

در این بخش پارامترهای بی بعد و معادلات حاکم بر جریان در مجاری خمیده دارای مقطع مدور و مستطیلی ارائه می شوند. یکی از اهداف این تحقیق مطالعه تحلیلی اثر ثابت زمانی تاخیر سیال CEF و مرتبه دو بر میدان جریان در مجاری خمیده و مقایسه آن با اثر ثابت زمانی رهایی از تنش سیال ویسکوالاستیک است. شایان ذکر است که بدست آوردن پاسخ تحلیلی برای جریان سیال مرتبه دو در کانال های خمیده مستطیلی کاری بسیار دشوار است و مطابق اطلاع نگارنده حتی تاکنون پاسخی برای جریان سیال نیوتنی نیز در این هندسه ارائه نشده است. لذا در این پژوهش به مانند تحقیقات پیشین، این اثر در لوله خمیده دارای مقطع مدور به روش حساب اختلالات بررسی شده است تا بوسیله آن ترکیب اثر انحنای کانال و خواص الاستیک بر میدان جریان بررسی شود. در اینجا علاوه بر اینکه پارامترهای جریان و معادلات حاکم در دستگاه مختصات استوانه ای ارائه می شوند، این روابط در دستگاه مختصات ترویدال نیز ارائه می گردند که برای مطالعه جریان در لوله های خمیده مدور مناسب می باشند.

۲-۱-۲- مقطع مستطیلی

۲-۱-۱-۲- پارامترهای بی بعد جریان

با توجه به شکل (۱-۵۲)، در این تحقیق از دستگاه مختصات استوانه ای برای مطالعه جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی استفاده شده است. پارامترهای بی بعد حاکم بر این جریان عبارتند از:

$$r=\frac{\tilde{r}}{D_h}\qquad z=\frac{\tilde{z}}{D_h}\qquad R=\frac{\tilde{R}}{D_h}\qquad \delta=\frac{\tilde{a}}{2\tilde{R}}$$

$$D_h=\frac{2\tilde{a}\tilde{b}}{\tilde{a}+\tilde{b}}\qquad v_r=\frac{\tilde{v}_r}{W_0}\qquad v_\theta=\frac{\tilde{v}_\theta}{W_0}\qquad v_z=\frac{\tilde{v}_z}{W_0}$$

$$P=\frac{\tilde{P}D_h}{\eta_0 W_0}\qquad \tau=\frac{\tilde{\tau}D_h}{\eta_0 W_0}\qquad \gamma_{(1)}=\tilde{\gamma}_{(1)}\frac{D_h}{W_0}\qquad \gamma_{(2)}=\tilde{\gamma}_{(2)}\left(\frac{D_h}{W_0}\right)^2 \tag{۱-۲}$$

$$\Psi_{1,2}=\frac{\tilde{\Psi}_{1,2}W_0}{\eta_0 D_h}\qquad \eta=\frac{\tilde{\eta}}{\eta_0}\qquad \kappa=\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\qquad \mathrm{Re}=\frac{\rho W_0 D_h}{\eta_0}$$

$$Dn=\mathrm{Re}\,\delta^{1/2}\qquad Ro=\frac{\omega D_h}{W_0}\qquad We=\frac{\lambda_1 W_0}{2D_h}\qquad En=\frac{We}{\mathrm{Re}}$$

در رابطه فوق، $\tilde{r}$ و $\tilde{z}$ معرف جهات دستگاه استوانه ای در صفحه مقطع جریان و $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ طول اضلاع مقطع کانال در این جهات، D_h قطر هیدرولیکی، $\tilde{R}$ شعاع انحنای گام مسیر کانال خمیده، δ نسبت انحنا، $\tilde{v}_i$ مولفه های سرعت، W_0 سرعت مرجع، $\tilde{P}$ فشار، η_0 ویسکوزیته در نرخ برش صفر، $\tilde{\tau}$ تانسور تنش، $\tilde{\gamma}_{(1)}$ و $\tilde{\gamma}_{(2)}$ مشتقات زمانی همرفتی همبسته نرخ برش[۱] مرتبه اول و دوم، $\tilde{\Psi}_1$ و $\tilde{\Psi}_2$ ثابت های اختلاف تنش های نرمال اول و دوم، $\tilde{\eta}$ ویسکوزیته سیال، ρ چگالی، Re عدد رینولدز، Dn عدد دین، κ نسبت ابعادی، ω سرعت زاویه ای دوران کانال، We عدد وایزنبرگ، Ro عدد روزبی و En عدد الاستیک است. در اینجا وجود علامت ~ در بالای هر پارامتر نشانگر بعد دار بودن آن پارامتر است.

1. covariant convected derivative of the shear rate

۲-۲-۱-۲- معادلات حاکم بر جریان و شرایط مرزی مربوطه

معادلات حاکم بر جریان دائمی سیال ویسکوالاستیک در کانال های خمیده شامل معادلات پیوستگی و مومنتوم است:

$$\nabla \cdot \tilde{V} = 0 \qquad (۲-۲-۱)$$

$$\rho \tilde{V} . \nabla \tilde{V} = \tilde{F} - \nabla \tilde{P} + \nabla \cdot \tilde{\tau} \qquad (۲-۲-۲)$$

در رابطه فوق، $\tilde{V}$ معرف بردار سرعت و $\tilde{F}$ بردار نیروی حجمی ناشی از دوران کانال است. در این تحقیق، جریان توسعه یافته سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده مورد بررسی قرار گرفته است. در حالت توسعه یافته، مشتقات کلیه پارامترهای جریان به جز فشار استاتیکی، نسبت به زاویه انحنای مسیر (θ) برابر صفر است. در حالت توسعه یافته، رابطه زیر برای فشار استاتیکی برقرار است [۴۶، ۵۰]:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = constant < 0 \qquad (۲-۳)$$

معمولاً گرادیان فشار اسمی جریان توسعه یافته در کانالهای خمیده بر اساس گرادیان فشار روی راستای گام انحنای کانال تعریف می شود:

$$\frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = -G \qquad (۲-۴)$$

در رابطه (۲-۴)، G مقدار ثابتی است که مبین قدر مطلق افت فشار محوری جریان است.

در اینجا مانند بسیاری از تحقیقات گذشته (مانند مراجع [۴۵، ۴۶، ۴۸ و ۵۰]) از ماکزیمم سرعت جریان توسعه یافته سیال نیوتنی در کانال مستقیم مدوری که دارای گرادیان فشار، ویسکوزیته و قطر هیدرولیکی یکسانی نسبت به جریان تحت بررسی است، به عنوان سرعت مرجع استفاده شده است:

$$W_0 = \frac{G D_h^{\ 2}}{16 \eta_0} \qquad (۲-۵)$$

در جریان توسعه یافته نیوتنی در یک لوله مستقیم، گرادیان فشار با تنش برشی بالانس می شود:

$$-\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial\widetilde{s}}+\eta\frac{1}{\widetilde{r}'}\frac{\partial}{\partial}(\widetilde{r}'\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\widetilde{r}'})=0 \qquad (۶-۲)$$

در رابطه (۲-۶)، $\widetilde{s}$ جهت پیشروی جریان اصلی، $\widetilde{u}$ سرعت در این جهت و $\widetilde{r}'$ جهت شعاعی مقطع لوله است. همچنین پروفیل سرعت محوری به صورت زیر است:

$$\frac{\tilde{u}}{W_0}=1-\left(\frac{\tilde{r}'}{\tilde{r}'_0}\right)^2 \qquad (۷-۲)$$

بنابراین از روابط (۲-۱)، (۲-۶) و (۲-۷) رابطه زیر برای گرادیان فشار محوری بی بعد حاصل می شود:

$$\frac{\partial P}{\partial s}=-16 \qquad (۸-۲)$$

در بی بعد سازی معادلات حاکم، سرعت مرجع بر اساس فرض برابر بودن گرادیان فشار جریان در کانال خمیده با جریان سیال نیوتنی در یک لوله مستقیم تعریف شده است. بنابراین از روابط (۲-۴) و (۲-۸)، رابطه زیر برای جریان توسعه یافته در کانال خمیده بدست می آید:

$$\frac{\partial P}{\partial\theta}=-16R=-C \qquad (۹-۲)$$

در رابطه فوق C مبین یک عدد ثابت مثبت است. بنابراین برای جریان دائمی توسعه یافته سیال تراکم ناپذیر در کانال خمیده، صورت بی بعد معادلات پیوستگی و مومنتوم به شکل زیر خواهند بود [۳]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \qquad (۱-۱۰-۲)$$

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_rv_\theta}{r}=-2Ro.v_r+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{C}{r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{r\theta}\right)+\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}\right) \qquad (۲-۱۰-۲)$$

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^{\;2}}{r}=2Ro.v_\theta+r.Ro^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta}}{r}\right) \qquad (۳-۱۰-۲)$$

$$v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rz}\right)+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right) \qquad (۴-۱۰-۲)$$

معادلات (۲-۱۰)، صورت اصلی معادلات حاکم بر جریان هستند که در تحقیق حاضر برای مطالعه جریـان سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی مورد استفاده قرار می گیرند. در رابطه فـوق ترم های $2Ro.v_{\theta}$ و $2Ro.v_{r}$ معرف نیروهای کریولیس و $r.Ro^{2}$ معرف نیروی گریز از مرکز است. در این معادلات می توان با به کار بردن معادله متشکله هر سیالی در جملات تنش، صورت نهایی معادلات حـاکم را برای جریان آن سیال بدست آورد. شایان ذکر است که با بکـار بـردن معادلـه متـشکله بـی بعـد سـیال نیوتنی در معادلات (۲-۱۰-۲) تا (۲-۱۰-۴)، صورت بی بعد معادلات مومنتوم جریان توسعه یافتـه سـیال نیوتنی حاصل می شود [۱۱۷]:

$$v_{r}\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r}+v_{z}\frac{\partial v_{\theta}}{\partial z}+\frac{v_{r}v_{\theta}}{r}=-2Ro.v_{r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{C}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rv_{r}\right)\right)+\frac{\partial^{2}v_{r}}{\partial z^{2}}\right) \qquad (۱-۱۱-۲)$$

$$v_{r}\frac{\partial v_{r}}{\partial r}+v_{z}\frac{\partial v_{r}}{\partial z}-\frac{{v_{\theta}}^{2}}{r}=2Ro.v_{\theta}+r.Ro^{2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rv_{\theta}\right)\right)+\frac{\partial^{2}v_{\theta}}{\partial z^{2}}\right) \qquad (۲-۱۱-۲)$$

$$v_{r}\frac{\partial v_{z}}{\partial r}+v_{z}\frac{\partial v_{z}}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{z}}{\partial r}\right)+\frac{\partial^{2}v_{z}}{\partial z^{2}}\right) \qquad (۳-۱۱-۲)$$

استفاده از صورت تابع جریانی معادلات حاکم در مطالعات عددی و تحلیلی متداول است. در ادامه صورت تابع جریانی معادلات حاکم بر جریان در کانال خمیده ارائه می شود. در دستگاه مختصات استوانه ای و در صفحه مقطع جریان (صفحه r و z)، تابع جریانهای ثانویه به شکل زیر تعریف می شود [۱۱۸]:

$$v_{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (۱-۱۲-۲)$$

$$v_{z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad (۲-۱۲-۲)$$

با استفاده از روابط (۲-۱۲)، معادله پیوستگی (رابطه (۲-۱۰-۱)) ارضا می شود. همچنین با اعمال روابط (۲-۱۲) در معادله مومنتوم در جهت جریان اصلی (معادله (۲-۱۰-۲)) معادله زیر حاصل می شود:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)v_\theta = -2Ro\,\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{C}{r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{r\theta}\right)+\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}\right) \qquad (۱۳-۲)$$

چنانچه از رابطه (۲-۱۰-۳) نسبت به z و از رابطه (۲-۱۰-۴) نسبت به r مشتق گیری و حاصل آنها از یکدیگر کم شوند، ترم فشار از معادله حاصله حذف می شود. با بکار بردن روابط (۲-۱۲) در معادله حاصله، معادله مومنتوم مربوط به ψ حاصل می شود:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(E^2(\psi)\right)-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\left(E^2(\psi)\right)\right)-\frac{2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial z}E^2(\psi)-\frac{2}{r}v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial z}=2Ro\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+ \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(r\tau_{rr}\right)+\frac{\partial^2\tau_{rz}}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial z}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rz}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\tau_{rz}\right)-\frac{\partial^2\tau_{zz}}{\partial r\partial z}\right) \qquad (۱۴-۲)$$

به این ترتیب معادلات حاکم بر جریان توسعه یافته در کانال خمیده به معادلات (۲-۱۳) و (۲-۱۴) تقلیل پیدا می کنند. شایان ذکر است که صورت تابع جریانی معادلات حاکم برای جریان توسعه یافته سیال نیوتنی در کانال خمیده به شکل زیر است:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)v_\theta = -2Ro\,\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{C}{r}+\nabla^2 v_\theta-\frac{v_\theta}{r^2}\right) \qquad (۱-۱۵-۲)$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(E^2(\psi)\right)-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\left(E^2(\psi)\right)\right)-\frac{2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial z}E^2(\psi)-\frac{2}{r}v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial z}= 2Ro\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3}\right) \qquad (۲-۱۵-۲)$$

همچنین در روابط تابع جریانی فوق، عملگرهای E^2 و ∇^2 بصورت زیر تعریف می شوند [۱۱۸]:

$$E^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (۱-۱۶-۲)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (۲-۱۶-۲)$$

در جریان توسعه یافته در کانال های بسته تنها نیاز به اعمال شرایط مرزی بر روی جداره مقطع کانال است. شایان ذکر است که به مانند سیال نیوتنی، در سیالات ویسکوالاستیک نیز اعمال شرط مرزی عدم لغزش بر روی دیواره جامد رایج است. به طور کلی اعمال این شرط برای جامدات ویسکوالاستیک چندان صحیح به نظر نمی رسد اما برای سیالات ویسکوالاستیک در محدوده وسیعی از عدد دبورا این شرط با دقت قابل قبولی صادق است. در این تحقیق از مدل کریمینال-اریکسون-فیلبی به عنوان معادله متشکله استفاده شده است. این مدل در ناحیه ویسکومتریک دیاگرام پیپکین (در اعداد دبورای کوچک) صادق بوده و دارای جواب دقیقی در این ناحیه است لذا در جریان این سیال، اعمال شرط مرزی عدم لغزش برای مولفه های سرعت کاملاً صحیح به نظر می رسد. شایان ذکر است که اعمال شرط مرزی برای فشار استاتیکی روی مرزهای جامد امری دشوار محسوب می شود و معمولاً در تحلیل های عددی از شرط مرزی گرادیان فشار نرمال همگن استفاده می شود. خوشبختانه در این تحقیق از روش عددی ویژه ای استفاده شده که در آن نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار نیست. در این تحقیق به دلیل وجود تقارن، تنها نیاز به تحلیل جریان در نیمی از مقطع کانال است. مطابق شکل (۱-۵۲) می توان دریافت که این جریان نسبت به صفحه $z = b/2$ دارای تقارن است. با توجه به این شکل می توان دریافت که مولفه سرعت v_z عمود به مرز تقارن و مولفه های سرعت v_r و v_θ مماس به این مرز هستند. بنابراین شرایط زیر برای مولفه های سرعت روی مرز تقارن وجود دارند:

$$at\ Symmetry\ Boundary\ (z = b/2):\ \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0,\ \&\ v_z = 0 \qquad (۱۷-۲)$$

همچنین برای مولفه های تنش، شرط مرزی بر روی این مرز تقارن به صورت زیر است:

$$at\ Symmetry\ Boundary\ (z = b/2):\ \begin{cases} \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad \dfrac{\partial \tau_{rr}}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial z} = 0,\ \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} = 0,\ \dfrac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad (۱۸-۲)$$

۲-۲-۱-۳- پارامترهای بی بعد انتقال حرارت و شرایط مرزی مربوطه

در این بخش پارامترهای بی بعد مربوط به انتقال حرارت جریان ارائه می شود. از آنجا که در این تحقیق، انتقال حرارت جریان در سه حالت در حال توسعه و توسعه یافته شار ثابت و دما ثابت بررسی می شود، لذا برای هر یک از این حالات، عملیات بی بعد سازی به شکل متفاوتی انجام شده است. پارامترهای بی بعد حرارتی مربوط به انتقال حرارت در تحقیق حاضر عبارتند از:

$$T_T=\frac{\tilde{T}-\tilde{T}_w}{\tilde{T}_{in}-\tilde{T}_w} \qquad T_H=\frac{\tilde{T}-\tilde{T}_{in}}{q''D_h/k} \qquad Br_T=\frac{\eta_0 W_0^{\,2}}{k\left(\tilde{T}_{in}-\tilde{T}_w\right)}$$

$$T_T'=\frac{\tilde{T}-\tilde{T}_w}{\tilde{T}_m-\tilde{T}_w} \qquad T_H'=\frac{\tilde{T}-\tilde{T}_m}{q''D_h/k} \qquad Br_H=\frac{\eta_0 W_0^{\,2}}{D_h q''} \qquad (۱۹-۲)$$

$$Br_T'=\frac{\eta_0 W_0^{\,2}}{k\left(\tilde{T}_m-\tilde{T}_w\right)} \qquad \Pr=\frac{\eta_0}{\rho\alpha} \qquad Nu=\frac{hD_h}{k}$$

در رابطه فوق T_T و T_H به ترتیب دمای بی بعد مربوط به انتقال حرارت در حال توسعه دما ثابت و شار ثابت، T_T' و T_H' به ترتیب دمای بی بعد مربوط به انتقال حرارت توسعه یافته دما ثابت و شار ثابت، $\tilde{T}_{in}$ دمای سیال در ورودی کانال، $\tilde{T}_w$ دمای دیواره کانال، $\tilde{T}_m$ متوسط دمای سیال در مقطع مورد نظر، q'' شار حرارتی در دیواره کانال، k ضریب هدایت حرارتی، Br_T و Br_T' عدد برینکمن[۱] برای انتقال حرارت در حال توسعه و توسعه یافته در حالت دما ثابت، Br_H عدد برینکمن در حالت انتقال حرارت در حال توسعه و توسعه یافته شار ثابت (عدد برینکمن برای حالت شار ثابت توسعه یافته و در حال توسعه به شکل یکسان تعریف شده است)، α ضریب انتقال حرارت، h ضریب انتقال حرارت جابجایی، $\Pr$ عدد پرانتل[۲]، Pe عدد پکلت[۳] و Nu عدد ناسلت[۴] است.

1. Brinkman number
2. Prandtl number
3. Peclet number
4. Nusselt number

۲-۲-۱-۴- معادله حاکم بر انتقال حرارت

برای بدست آوردن معادله انتقال حرارت در جریان سیالات کافی است که قانون اول ترمودینامیک بر روی یک المان حجم کنترلی از سیال اعمال شود. به این ترتیب رابطه زیر برای صورت عمومی معادله انتقال حرارت جریان سیالات بدست می آید [۱۱۹]:

$$\rho C_v \left(\underbrace{\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}}}_{\substack{rate\ of \\ change}} + \underbrace{\tilde{V}.\nabla \tilde{T}}_{Convection} \right) = \underbrace{\nabla.\left(k \nabla \tilde{T}\right)}_{\substack{Diffusion \\ (conduction)}} + \underbrace{\tilde{\tau}:\nabla \tilde{V} - \tilde{T}\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{T}}\right)_{\rho} \nabla.\tilde{V}}_{Work} \qquad (۲-۲۰)$$

در رابطه فوق، $\tilde{T}$ دمای سیال، ρ چگالی، C_v ظرفیت گرمایی ویژه در حجم ثابت، $\tilde{t}$ زمان، k ضریب هدایت حرارتی، $\tilde{P}$ فشار و $\tilde{\tau}$ میدان تنش جریان سیال است. شایان ذکر است که در رابطه فوق انتقال حرارت هدایتی بر اساس قانون فوریه بدست آمده است. همچنین جمله آخر رابطه (۲-۲۰) بیانگر اثر کار تراکم پذیری سیال بر انتقال حرارت جریان است. از آنجا که مایعات ویسکوالاستیک سیالاتی تراکم ناپذیر محسوب می شوند ($\nabla.\tilde{V} = 0$)، لذا این ترم برای انتقال حرارت این سیالات صفر است. در رابطه فوق، ترم $\tilde{\tau}:\nabla\times\tilde{V}$ بیانگر اثر کار میدان تنش بر جریان سیال بوده و برای سیال نیوتنی همواره دارای مقداری مثبت است. در واقع مثبت بودن این جمله نشانگر بازگشت ناپذیری کار میدان جریان بوده و بنابراین در سیال نیوتنی این ترم به اثر تلفات لزجت معروف شده است. نکته جالب توجه آنکه این ترم برای جریان سیال ویسکوالاستیک ممکن است که به طور موضعی دارای مقداری منفی باشد. در واقع منفی بودن موضعی این جمله بیانگر آن است که بخشی از انرژی در بخش الاستیک سیال ذخیره شده است [۱۱۹]. همچنین با توجه به رابطه (۲-۲۰) می توان دریافت که چنانچه از وابستگی خواص سیال به دما صرفنظر شود، حل میدان جریان مستقل از میدان دما خواهد بود. چنین فرضی در تحقیق حاضر نیز صورت گرفته است. برای انتقال حرارت دائمی جریان سیال ویسکوالاستیک تراکم ناپذیر در دستگاه مختصات استوانه ای، صورت بی بعد معادله (۲-۲۰) با توجه به روابط (۲-۱) و (۲-۱۹) به شکل زیر خواهد بود:

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Br\Phi\right\} \quad (۲۱-۲)$$

در رابطه فوق، Φ کار میدان تنش بوده و از رابطه زیر بدست می آید:

$$\Phi = \frac{\partial v_r}{\partial r}\tau_{rr} + \frac{v_r}{r}\tau_{\theta\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\tau_{zz} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\tau_{r\theta} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\tau_{rz} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\tau_{\theta z} \quad (۲۲-۲)$$

رابطه (۲-۲۱) صورت بی بعد معادله انرژی برای انتقال حرارت در حال توسعه برای هر دو شرط مرزی دما ثابت و شار است. لذا برای حالت شار ثابت می توان در رابطه (۲-۲۱) عبارت T را با T_T و عبارت Br را با Br_T جایگزین نمود و معادله بی بعد مربوط به این حالت حرارتی را بدست آورد. مشابه این عمل را می توان برای حالت دما ثابت با جایگزینی مقادیر بی بعد مربوطه انجام داد.

با توجه به رابطه (۲-۱۹)، شرایط مرزی زیر برای دماهای بی بعد روی دیواره کانال برقرار است:

$$T_T = T'_T = 0 \quad (۱-۲۳-۲)$$

$$\frac{\partial T_H}{\partial n} = \frac{\partial T'_H}{\partial n} = 1 \quad (۲-۲۳-۲)$$

در رابطه (۲-۲۳)، n جهت عمود بر مرز به سمت خارج از دامنه محاسباتی (مقطع جریان) است.

در این تحقیق، دمای سیال در ورودی کانال خمیده برابر مقدار ثابت $\tilde{T}_{in}$ فرض شده است. بنابراین با توجه به روابط (۲-۱۹)، مقدار T_T و T_H در ورودی به ترتیب برابر یک و صفر خواهد بود. در خروجی نیز شرط مرزی توسعه یافتگی حرارتی برقرار است. بر روی مرز تقارن نیز شرط مرزی نیومن همگن برای کلیه مقادیر بعد دار و بی بعد دما در راستای عمود بر مرز بر قرار است ($\partial T / \partial n = 0$).

در ادامه به شرایط توسعه یافتگی حرارتی در حالت شار ثابت و دما ثابت پرداخته شده و معادلات انرژی برای انتقال حرارت توسعه یافته در این دو حالت ارائه می شود. چنانچه یک حجم کنترل در امتداد راستای جریان در نظر گرفته شود، رابطه کلی زیر برای انتقال حرارت اجباری جریان بدست می آید [۱۲۰]:

$$(\int_p q''dp)d\tilde{s} = \dot{m}cd\tilde{T}_m \tag{۲-۲۴}$$

در رابطه (۲-۲۴)، p معرف محیط مقطع کانال و $\tilde{T}_m$ معرف دمای متوسط جریان بوده و به شکل زیر تعریف می شود [۱۲۰]:

$$\tilde{T}_m = \frac{1}{UA}\int_A \tilde{v}_\theta \tilde{T} dA \tag{۲-۲۵}$$

در حالت شار ثابت، رابطه (۲-۲۴) به شکل زیر ساده می شود [۱۲۰]:

$$\frac{d\tilde{T}_m}{d\theta} = \frac{4q''\tilde{R}}{\rho U D_h c} \tag{۲-۲۶}$$

همچنین در حالت توسعه یافته حرارتی رابطه زیر برای توزیع دما در کانال خمیده برقرار است [۱۲۰]:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{T}_w - \tilde{T}}{\tilde{T}_w - \tilde{T}_m}\right) = 0 \tag{۲-۲۷}$$

از رابطه فوق، رابطه زیر برای گرادیان دمای محوری حاصل می شود:

$$\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\theta} = \frac{d\tilde{T}_w}{d\theta} - \frac{\tilde{T}_w - \tilde{T}}{\tilde{T}_w - \tilde{T}_m}\frac{d\tilde{T}_w}{d\theta} + \frac{\tilde{T}_w - \tilde{T}}{\tilde{T}_w - \tilde{T}_m}\frac{d\tilde{T}_m}{d\theta} \tag{۲-۲۸}$$

همچنین با توجه به رابطه $q'' = h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)$، به سادگی می توان رابطه زیر را برای حالت شار ثابت نتیجه گرفت:

$$\frac{d\tilde{T}_w}{d\theta} = \frac{d\tilde{T}_m}{d\theta} \tag{۲-۲۹}$$

بنابراین با جایگذاری رابطه (۲-۲۹) در رابطه (۲-۲۸) و با توجه به رابطه (۲-۲۶)، رابطه زیر برای گرادیان دمای محوری جریان در حالت شار ثابت حاصل می شود:

$$\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\theta} = \frac{d\tilde{T}_w}{d\theta} = \frac{d\tilde{T}_m}{d\theta} = \frac{4q''\tilde{R}}{\rho U D_h c} = cte \tag{۲-۳۰}$$

در این تحقیق جهت بی بعد سازی رابطه انتقال حرارت توسعه یافته در حالت شار ثابت، دمای بی بعد به شکل زیر تعریف شده است:

$$T_H' = \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_m}{q''\tilde{a} / k} \qquad (۳۱-۲)$$

شایان ذکر است که چنانچه طرفین رابطه (۲-۳۱) در سرعت محوری ضرب و حاصل آن در سطح مقطع کانال انتگرال گیری شود، رابطه زیر برای متوسط دمای بی بعد حاصل می شود:

$$\int_A v_\theta T_H' dA = 0 \qquad (۳۲-۲)$$

با اعمال رابطه (۲-۳۰) در معادله (۲-۲۰) و بی بعد سازی آن با توجه به روابط (۲-۱) و (۲-۱۹)، معادله بی بعد انتقال حرارت در حالت شار ثابت بدست می آید:

$$v_r \frac{\partial T_H'}{\partial r} + v_z \frac{\partial T_H'}{\partial z} + \frac{2}{\mathrm{Re}_b \Pr \delta} \frac{v_\theta}{r} = \frac{1}{\mathrm{Re}\Pr}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_H'}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T_H'}{\partial z^2} + Br_H \Phi\right\} \qquad (۳۳-۲)$$

در معادله فوق، Re_b معرف عدد رینولدز بر اساس سرعت متوسط جریان (و نه سرعت مرجع) است. در رابطه (۲-۲۳-۲)، شرط مرزی مربوط به معادله (۲-۳۳) روی دیواره ها ارائه شده و بر روی مرز تقارن نیز شرط مرزی نیومن همگن برقرار است.

از آنجا که کلیه شرایط مرزی معادله (۲-۳۳) از نوع شرط مرزی نیومن هستند لذا حل نهایی این معادله با شرایط مذکور ممکن نبوده و به تعیین عرض از مبدا میدان دما منجر نمی شود. بنابراین چنانچه معادله (۲-۳۳) در شرایط غیر دائمی حل شود، پاسخ دائم آن وابسته به شرایط اولیه است. بنابراین پس از حل معادله فوق در شرایط غیردائمی و یافتن پاسخ حالت دائمی لازم است که عرض از مبدا میدان دما از رابطه (۲-۳۲) تعیین شود. همچنین با توجه به رابطه (۲-۳۱)، می توان نشان داد که رابطه (۲-۳۴-۱) بین دمای بی بعد در سطح کانال ($T_{H,w}$) و عدد ناسلت موضعی برقرار بوده و عدد ناسلت متوسط نیز از رابطه (۲-۳۴-۲) تعیین می شود:

$$Nu_H = \frac{1}{T_{H,w}'} \qquad (۱-۳۴-۲)$$

$$Nu_{H,m} = \frac{1}{p}\int_{p} Nu_{H}\, dp \qquad (۲-۳۴-۲)$$

در ادامه به انتقال حرارت توسعه یافته در حالت دما ثابت پرداخته می شود. در این تحقیق، دمای بی بعد برای حالت دما ثابت توسعه یافته به شکل زیر تعریف شده است:

$$T_T' = \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_w} \qquad (۳۵-۲)$$

همچنین از رابطه (۲-۲۴)، گرادیان دمای متوسط برای حالت دما ثابت به شکل زیر ساده می شود:

$$\frac{d\tilde{T}_m}{d\theta} = \frac{\tilde{R}\int_p q'' dp}{\dot{m} c_p} = \frac{\tilde{R}(\tilde{T}_s - \tilde{T}_m)\frac{1}{p}\int_p h dp}{\rho U c_p \frac{A}{p}} = \frac{2k(\tilde{T}_s - \tilde{T}_m) Nu_{T,m}}{\rho U c_p D_h \delta} \qquad (۳۶-۲)$$

در رابطه فوق، $Nu_{T,m}$ معرف عدد ناسلت متوسط در حالت دما ثابت است. همچنین از رابطه (۲-۲۸)، رابطه زیر برای گرادیان دمای محوری در حالت دما ثابت بدست می آید:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} = T_T \frac{d\tilde{T}_m}{d\theta} \qquad (۳۷-۲)$$

بنابراین با اعمال رابطه (۲-۳۶) در رابطه (۲-۳۷) و اعمال حاصل آن در معادله (۲-۲۰) و همچنین با توجه به روابط (۲-۱) و (۲-۱۹)، معادله زیر برای معادله بی بعد انتقال حرارت توسعه یافته در حالت دما ثابت بدست می آید:

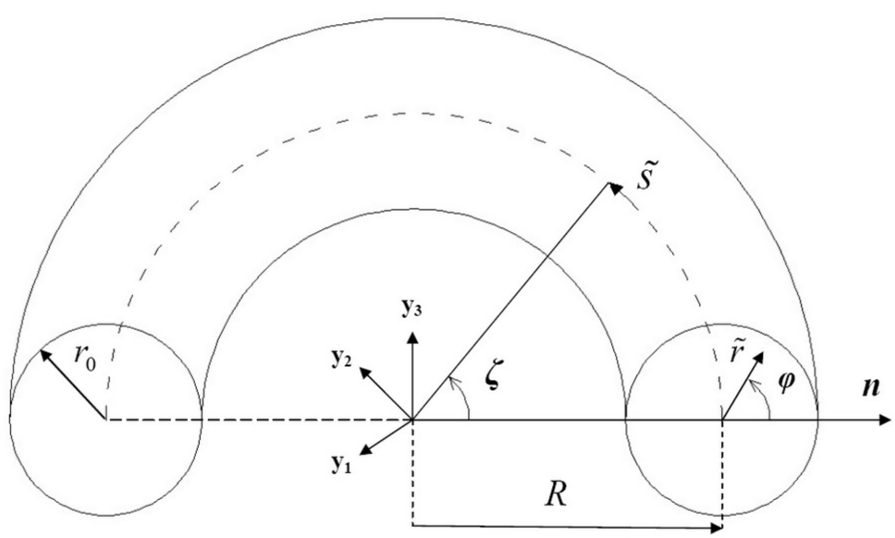
$$v_r \frac{\partial T_T'}{\partial r} + v_z \frac{\partial T_T'}{\partial z} - \left(\frac{2Nu_{T,m}}{\mathrm{Re}_b \Pr \delta}\right)\frac{v_\theta}{r} T_T' = \frac{1}{\mathrm{Re}\Pr}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_T'}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T_T'}{\partial z^2} + Br_T'\Phi\right\} \qquad (۳۸-۲)$$

همچنین با توجه به رابطه (۲-۲۳-۱)، شرط مرزی دیریکله همگن ($T_{T,w} = 0$) برای دمای بی بعد بر روی دیواره های کانال برقرار است.

۲-۲-۲- مقطع مدور

همانگونه که پیشتر گفته شد، جریان سیال ویسکوالاستیک در فصل سوم تحقیق حاضر بصورت تحلیلی مورد بررسی قرار می گیرد. یکی از اهداف این تحقیق بررسی اثر اختلاف تنش نرمال اول (ثابت زمانی تاخیر سیال) بر جریان اینرسی سیالات CEF و مرتبه دو در کانال های خمیده است که تاکنون این اثر در تحقیقات پیشین گزارش نشده است. از آنجا که اعمال روش های تحلیلی بر جریان در مجاری خمیده مستطیلی امری بسیار دشوار محسوب می شود لذا در فصل سوم روابط جریان و انتقال حرارت سیال مرتبه دو در لوله خمیده مدور ارائه شده و بوسیله آن ترکیب اثر انحنای مسیر و اختلاف تنش نرمال اول بر میدان سرعت و دما بطور تحلیلی مورد بررسی قرار می گیرد.

در این بخش معادلات حاکم برای جریان و انتقال حرارت توسعه یافته در حالت شار ثابت ارائه می شود. در شکل (۲-۱) هندسه این جریان نشان داده شده است. مطابق شکل در اینجا از دستگاه مختصات منحنی الخط ترویدال[1] استفاده شده است.



شکل (۲-۱): هندسه جریان در تحقیق اخیر با در نظر گرفتن دستگاه مختصات ترویدال

1. Toroidal coordinate system

۲-۲-۲-۱- پارامترهای بی بعد جریان و انتقال حرارت

در این پژوهش، پارامترهای بی بعد زیر برای جریان و انتقال حرارت در لوله های خمیده مدور در نظر گرفته شده اند:

$$s=\frac{\tilde{s}}{r_0}\qquad r=\frac{\tilde{r}}{r_0}\qquad u=\frac{\tilde{u}.\underline{e}_r}{W_0}\qquad v=\frac{\tilde{v}.\underline{e}_\phi}{W_0}\qquad w=\frac{\tilde{w}.\underline{e}_s}{W_0}$$

$$p=\frac{r_0}{\eta W_0}\tilde{p}\qquad \tau=\frac{r_0}{\eta W_0}\tilde{\tau}\qquad \gamma_{(1)}=\tilde{\gamma}_{(1)}\frac{r_0}{W_0}\qquad \gamma_{(2)}=\tilde{\gamma}_{(2)}\left(\frac{r_0}{W_0}\right)^2\qquad We=\frac{\tilde{\Psi}_1 W_0}{2\eta r_0}\tag{۳۹-۲}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho W_0 r_0}{\eta}\qquad \delta=\frac{r_0}{R}\qquad T=\frac{\tilde{T}-\tilde{T}_m}{q'' r_0/k}\qquad \mathrm{Pr}=\frac{\eta}{\rho\alpha}\qquad \mathrm{P}e=\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}$$

در رابطه فوق وجود علامت ~ در بالانویس هر کمیت نشانگر بعد دار بودن آن کمیت است. همچنین r، φ و s جهات دستگاه مختصات ترویدال، r_0 شعاع مقطع لوله، W_0 سرعت مرجع، $\tilde{u}$ سرعت در جهت r، $\tilde{v}$ سرعت در جهت φ، $\tilde{w}$ سرعت در جهت جریان اصلی (s)، $\tilde{p}$ ترم فشار، $\tilde{\tau}$ تانسور تنش، $\tilde{\Psi}_1$ ثابت اختلاف تنش نرمال اول، η ویسکوزیته سیال، $\tilde{\gamma}_{(1)}$ و $\tilde{\gamma}_{(2)}$ مشتقات مرتبه اول و دوم همرفتی پاد همبسته تانسور نرخ برش[1]، We عدد وایزنبرگ، Re عدد رینولدز، δ نسبت انحنا و R شعاع انحنای گام لوله خمیده، $\tilde{T}$ دمای سیال، $\tilde{T}_m$ متوسط دمای سیال، q'' شار حرارتی روی دیواره، k ضریب هدایت حرارتی، α ضریب انتقال حرارت، Pr عدد پرانتل، Pe عدد پکلت می‌باشد.

۲-۲-۲-۲- معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت

پیش از بیان معادلات حاکم لازم است که مختصر مطالبی در مورد دستگاه مختصات ترویدال ارائه شود. دستگاه مختصات ترویدال یک دستگاه مختصات منحنی الخط محسوب می شود. این دستگاه مختصات تا

1. The first and second contravariant convected derivative of the shear rate tensor

حدی مشابه دستگاه مختصات متعامد استوانه ای است با این تفاوت که در آن راستای عمود بر صفحه قطبی (راستای s) خمیده است.

این دستگاه مختصات جهت مطالعه جریان در لوله های خمیده مدور کاملاً مناسب است. رابطه بین این دستگاه مختصات و دستگاه مختصات کارتزین به شکل زیر است [۴۶]:

$$\tilde{r}=\sqrt{{y_3}^2+\left(\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2}-R\right)^2},\quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{y_3}{\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2}-R}\right),\quad \tilde{s}=R\,\tan^{-1}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \qquad (۴۰\text{-}۲)$$

معکوس روابط فوق نیز به شکل زیر هستند [۴۶]:

$$y_1=\left(R+\tilde{r}\cos(\phi)\right)\cos\left(\frac{\tilde{s}}{R}\right),\quad y_2=\left(R+\tilde{r}\cos(\phi)\right)\sin\left(\frac{\tilde{s}}{R}\right),\quad y_3=\tilde{r}\sin(\phi) \qquad (۴۱\text{-}۲)$$

بر این اساس رابطه بین بردارهای یکه در دستگاه مختصات ترویدال ($\underline{e}_r,\underline{e}_\phi,\underline{e}_s$) نسبت به دستگاه مختصات کارتزین به شرح زیر است [۴۶]:

$$\begin{aligned}
\underline{e}_r&=\cos\phi\left(\cos\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_1+\sin\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_2\right)+\sin\phi\,\underline{e}_3\\
\underline{e}_\phi&=-\sin\phi\left(\cos\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_1+\sin\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_2\right)+\cos\phi\,\underline{e}_3\\
\underline{e}_s&=\sin\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_1-\cos\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_2
\end{aligned} \qquad (۴۲\text{-}۲)$$

برای جریان توسعه یافته هر نوع سیال در یک لوله خمیده، مشتق کلیه پارامترهای جریان به غیر از فشار استاتیکی نسبت به زاویه مسیر پیشروی مسیر (ζ)، صفر است. با توجه به شکل (۲-۱) در جریان توسعه یافته در یک لوله خمیده، رابطه زیر برای گرادیان فشار وجود دارد [۴۶]:

$$\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\zeta}=cte<0 \qquad (۴۳\text{-}۲)$$

در اینجا نیز گرادیان فشار اسمی جریان در یک لوله خمیده بر اساس گرادیان فشار در راستای گام انحنای لوله (جهت s) تعریف می شود. روند تعیین سرعت مرجع و گرادیان فشار در لوله خمیده نیز به مانند

روابط (۲-۳) تا (۲-۷) برای کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی است. بـر ایـن اسـاس سـرعت مرجـع و گرادیان فشار محوری در لوله خمیده به شکل زیر خواهد بود [۴۶]:

$$W_0 = \frac{G\, r_0^{\,2}}{4\eta} \qquad (۲-۴۴-۱)$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -4 \qquad (۲-۴۴-۲)$$

شایان ذکر است که تفاوت ضرایب در روابط فوق نسبت به روابط (۲-۵) و (۲-۸) مربوط به متفاوت بـودن طول مرجع در بی بعدسازی است (در بخش کانال خمیده از قطر هیدرولیکی و در اینجا از شعاع لولـه بـه عنوان طول مرجع استفاده شده است). معادلات حاکم بر جریان دائمی و توسعه یافته در یک لوله خمیـده ایستا در مختصات ترویدال و با استفاده از روابط (۲-۲)، (۲-۳۹) و (۲-۴۲) به صورت زیر می‌باشد [۴۶]:

$$\frac{\partial (u\, r\, B)}{\partial r} + \frac{\partial (v\, B)}{\partial \phi} = 0 \qquad (۲-۴۵-۱)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v^2}{r} - \delta \frac{w^2 \cos\phi}{B} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\left(\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi}\right) \\ &\quad + \frac{\delta}{B}\left(\tau_{rr}\cos\phi - \tau_{r\phi}\sin\phi - \tau_{ss}\cos\phi\right) \end{aligned} \qquad (۲-۴۵-۲)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u\,v}{r} + \delta \frac{w^2 \sin\phi}{B} \right] &= -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{2}{r}\tau_{r\phi} \\ &\quad + \frac{\delta}{B}\left(\tau_{r\phi}\cos\phi - \tau_{\phi\phi}\sin\phi - \tau_{ss}\sin\phi\right) \end{aligned} \qquad (۲-۴۵-۳)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[u\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi} + \delta \frac{w}{B}\left(u\cos\phi - v\sin\phi\right) \right] &= -\frac{1}{B}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\phi s}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\tau_{sr} \\ &\quad + \frac{2\delta}{B}\left(\tau_{rs}\cos\phi - \tau_{\phi s}\sin\phi\right) \end{aligned} \qquad (۲-۴۵-۴)$$

که در روابط فوق B معرف شعاع انحنای هر نقطه از مقطع کانال بوده و از رابطه زیر بدست می آید:

$$B = 1 + \delta\, r \cos(\phi) \qquad (۲-۴۶)$$

تابع جریان برای جریانهای ثانویه در دستگاه مختصات ترویدال از روابط زیر حاصل می شوند:

$$u=-\frac{1}{r\,B}\frac{\partial\psi}{\partial\phi},\qquad v=-\frac{1}{B}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{۴۷-۲}$$

در عبارات بالا، ψ معرف تابع جریان برای جریانهای ثانویه است. شایان ذکر است کـه تـابع جریـان فـوق، معادله پیوستگی را ارضا می نماید. با قرار دادن رابطه (۲-۴۷) در رابطه (۲-۴۵-۴) و بـا توجـه بـه رابطـه (۲-۴۴-۲)، معادله مومنتوم در جهت محوری جریان به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{r\,B}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\phi}-\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\delta\frac{w}{B^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\cos\phi+\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\phi\right)\right]\\ =\frac{4}{B}+\frac{\partial\tau_{rs}}{\partial r}+\frac{1}{r}+\frac{\partial\tau_{\phi s}}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\tau_{rs}+\frac{2\delta}{B}\left(\tau_{rs}\cos\phi-\tau_{\phi s}\sin\phi\right)\end{aligned} \tag{۴۸-۲}$$

همچنین به منظور بدست آوردن معادله تابع جریان و حذف ترم فشار از معادلات حاکم در جهات عرضـی، بایستی از رابطه (۲-۴۵-۲) نسبت به ϕ و از رابطه (۲-۴۴-۳) نسبت به r مشتقگیری نموده و حاصل این دو از یکدیگر کسر شود. به این ترتیب رابطه زیر برای معادله تابع جریانهای ثانویه حاصل می شود:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{r\,B^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\phi}\nabla^2\psi-\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\psi\right)+\frac{\delta}{B}\left[2w\left(\frac{\partial w}{\partial r}\sin\phi+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\phi}\cos\phi\right)\right.\right.\\
&+\frac{1}{B^2}\left(\sin\phi\left(\frac{3}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\phi}+\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2+2\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\right.\\
&\left.\left.+\cos\phi\left(\frac{3}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\phi}+\frac{3}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right)\right)\right]\\
&\left.+\delta^2\frac{3}{B^4}\left[\frac{\sin 2\phi}{2}\left(\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2\right)-\cos 2\phi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)\right]\right\}=\\
&\qquad\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\tau_{rr}}{\partial r\partial\phi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\tau_{\phi\phi}}{\partial r\partial\phi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\tau_{\phi\phi}}{\partial\phi}+\frac{\partial^2\tau_{r\phi}}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tau_{r\phi}}{\partial\phi^2}\right]\\
&\qquad+\frac{\delta}{B}\left[\begin{array}{l}\sin\phi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\left(\tau_{\phi\phi}-\tau_{rr}\right)+\frac{\partial\tau_{ss}}{\partial r}-\frac{\partial\tau_{\phi\phi}}{\partial r}\right)\\ +\cos\phi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{ss}}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial\phi}+\frac{2}{r}\tau_{r\phi}-\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial r}\right)\end{array}\right]\end{aligned} \tag{۴۹-۲}$$

در عبارت بالا، ∇^2 نمایشگر عملگر لاپلاسین بی بعد بوده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{۵۰-۲}$$

همچنین برای حل معادلات حاکم، شرط مرزی عدم لغزش بر روی جداره لوله صادق است:

$$w = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad : r = 1 \text{ در} \tag{۲-۵۱}$$

مشابه روابط مربوط به انتقال حرارت در کانال خمیده (روابط (۲-۲۴) تا (۲-۳۰))، برای حالت انتقال حرارت توسعه یافته شار ثابت در لوله خمیده نیز می توان رابطه زیر را برای توزیع دما بدست آورد:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} = \frac{d\tilde{T}_w}{d\zeta} = \frac{d\tilde{T}_m}{d\zeta} = \frac{2q''}{\rho U \delta c_p} = cte \tag{۲-۵۲}$$

بر اساس معادله (۲-۲۰)، معادله انتقال حرارت توسعه یافته برای حالت شار ثابت در دستگاه مختصات ترویدال به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \phi} + \frac{\tilde{w}}{\tilde{R} + \tilde{r}\cos(\phi)}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} = \\ &\qquad \alpha\left\{\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{r}^2} + \left(\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{\cos(\phi)}{\tilde{R}}\right)\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \phi^2} - \frac{\sin(\phi)}{\tilde{R}}\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \phi}\right\} \end{aligned} \tag{۲-۵۳}$$

در رابطه فوق از اثر کار میدان تنش صرفنظر شده است. با اعمال روابط (۲-۳۹)، (۲-۴۷) و (۲-۵۲) در رابطه (۲-۵۳)، رابطه زیر برای انتقال حرارت بی بعد بدست می آید:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{rB}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{rB}\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{2w}{\Pr \mathrm{Re}_b\, B} = \\ &\qquad \frac{1}{\Pr \mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\delta \cos(\phi)}{B}\right)\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\delta \sin(\phi)}{B}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) \end{aligned} \tag{۲-۵۴}$$

در رابطه فوق، عبارت Re_b معرف عدد رینولدز بر مبنای سرعت متوسط جریان اصلی است. در اینجا نیز شرایط مرزی به مانند رابطه (۲-۵۵-۱) بوده و توزیع دما بایستی در رابطه (۲-۵۵-۲) صدق کند:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 1, \quad at \;\; r = 1 \tag{۲-۵۵-۱}$$

$$\int_A w\, T\, dA = 0 \tag{۲-۵۵-۲}$$

۲-۳- معادله متشکله

۲-۳-۱- معرفی مدل *CEF*

در این تحقیق از معادله متشکله کریمینال-اریکسون-فیلبی[1] تعمیم یافته [۳، ۱۲۱، ۱۲۲] معروف به CEF جهت مدلسازی میدان تنش سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است:

$$\tilde{\tau} = \tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}_{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}_{(2)} + \tilde{\Psi}_2(\dot{\tilde{\gamma}})\left\{\tilde{\gamma}_{(1)}.\tilde{\gamma}_{(1)}\right\} \qquad (۲-۵۶)$$

در رابطه فوق، جملات $\tilde{\gamma}_{(1)}$ و $\tilde{\gamma}_{(2)}$ معرف مشتقات مرتبه اول و دوم همرفتی پاد همبسته تانسور نرخ برش[2] هستند که بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\tilde{\gamma}_{(1)} = \nabla\tilde{V} + \nabla\tilde{V}^{\mathrm{T}} \qquad (۲-۵۷-۱)$$

$$\tilde{\gamma}_{(2)} = \frac{D\tilde{\gamma}_{(1)}}{D\tilde{t}} - \left\{\left(\nabla\tilde{V}\right)^{T}.\tilde{\gamma}_{(1)} + \tilde{\gamma}_{(1)}.\left(\nabla\tilde{V}\right)\right\} \qquad (۲-۵۷-۲)$$

در این معادله متشکله، توابع ویسکومتریک مربوط به ویسکوزیته ($\tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})$) و اختلاف تنش های نرمال ($\tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}})$ و $\tilde{\Psi}_2(\dot{\tilde{\gamma}})$) بصورت توابعی از نرخ برش تعمیم یافته ارائه شده اند. نرخ برش تعمیم یافته بصورت مانای دوم تانسور نرخ برش تعریف می شود [۳]:

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{2}II} = \sqrt{\frac{1}{2}tr\left(\tilde{\gamma}_{(1)}.\tilde{\gamma}_{(1)}\right)} \qquad (۲-۵۸)$$

معادله متشکله CEF برحسب مشتقات زمانی مرتبه اول و دوم همرفتی همبسته تانسور نرخ برش[3] نیز قابل تعریف است. این مشتقات به شکل زیر تعریف می شوند [۳]:

$$\tilde{\gamma}^{(1)} = \nabla\tilde{V} + \left(\nabla\tilde{V}\right)^{\mathrm{T}} \qquad (۲-۵۹-۱)$$

$$\tilde{\gamma}^{(2)} = \frac{D\tilde{\gamma}^{(1)}}{Dt} + \left\{\left(\nabla\tilde{V}\right)\cdot\tilde{\gamma}^{(1)} + \tilde{\gamma}^{(1)}\cdot\left(\nabla\tilde{V}\right)^{\mathrm{T}}\right\} \qquad (۲-۵۹-۲)$$

---

1. Criminale–Eriksen–Filbey
2. The first and second contravariant convected derivative of the shear rate tensor
3. The first and second covariant convected derivative of the shear rate tensor

از رابطه (۲-۵۹-۲) مقدار مشتق مادی نرخ برش به شکل زیر قابل بیان است [۳]:

$$\frac{D\tilde{\gamma}^{(1)}}{D\tilde{t}} = \tilde{\gamma}^{(2)} - \left\{ \left(\nabla \tilde{V} \right) \cdot \tilde{\gamma}^{(1)} + \tilde{\gamma}^{(1)} \cdot \left(\nabla \tilde{V} \right)^{T} \right\} \qquad (۲\text{-}۶۰)$$

طبق تعریف مقدار $\gamma^{(1)}$ با $\tilde{\gamma}_{(1)}$ برابر است، بنابراین رابطـه (۳-۶۰) را مـی تـوان در رابطـه (۲-۵۷-۲) بـه شکل زیر اعمال نمود:

$$\tilde{\gamma}_{(2)} = \tilde{\gamma}^{(2)} - \left\{ \left((\nabla \tilde{V}) + (\nabla \tilde{V})^{T} \right) \cdot \tilde{\gamma}^{(1)} + \tilde{\gamma}^{(1)} \cdot \left((\nabla \tilde{V}) + (\nabla \tilde{V})^{T} \right) \right\} \qquad (۲\text{-}۶۱)$$

پس:

$$\tilde{\gamma}_{(2)} = \gamma^{(2)} - 2\left\{ \gamma^{(1)} . \gamma^{(1)} \right\} \qquad (۲\text{-}۶۲)$$

بنابراین چنانچه مقدار $\tilde{\gamma}_{(2)}$ از رابطه (۲-۶۲) در رابطه (۲-۵۶) جایگزین شود و با توجه بـه برابـری مقـدار $\tilde{\gamma}_{(1)}$ با $\tilde{\gamma}^{(1)}$، داریم:

$$\tilde{\tau} = \tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}^{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}^{(2)} + \left(\tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}}) + \tilde{\Psi}_2(\dot{\tilde{\gamma}}) \right) \left\{ \tilde{\gamma}^{(1)} . \tilde{\gamma}^{(1)} \right\} \qquad (۲\text{-}۶۳)$$

رابطه فوق صورت معادله متشکله سیال CEF برحسب مشتقات زمانی همرفتی همبسته تانسور نرخ بـرش است که در برخی از مراجع مورد استفاده قرار گرفته است.

معادله متشکله CEF اصولاً بر مبنای بسط مشتقات نرخ برش (مشتقات بـر مبنـای ضـرایب زمانهـای تاخیر سیال[1]) توسعه داده شده است. بریس و همکاران[2] [۱۲۳] نشان دادند که پاسخ این معادله متـشکله در اعداد دبورای کوچک با پاسخ سایر مدل های ویسکوالاستیک که قادر به مدلسازی بسط مشتقات تـنش هستند (مانند مدل وایت متزنر) یکسان است. معادلـه CEF در محـدوده ویـسکومتریک دیـاگرام پیپکـین دارای جواب بسیار دقیقی است (اعداد دبورای کوچک و محدوده وسیعی از اعداد وایزنبـرگ) و بـه همـین دلیل استفاده از آن جهت آنالیز مکانیک سیالات دستگاه های رئومتری و نیز محاسبات صنعتی رایج اسـت

1. Retardation times expansion
2 . Beris et al.

[۱۱]. به طور کلی این معادله متشکله، مدل مناسبی جهت شبیه سازی جریانهای دائمی برشی[1] سیالات ویسکوالاستیک محسوب می شود [۳]. معادله متشکله CEF در حالات زیر به مدل های دیگری ساده می شود:

- چنانچه $\tilde{\eta}$، $\tilde{\Psi}_1$ و $\tilde{\Psi}_2$ مستقل از نرخ برش باشند ($\tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}}) = \tilde{\eta}_0, \tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}}) = \tilde{\Psi}_{1,0}, \tilde{\Psi}_2(\dot{\tilde{\gamma}}) = \tilde{\Psi}_{2,0}$)، مدل CEF به مدل سیال مرتبه دو تبدیل می شود.
- در حالت $\tilde{\Psi}_1 = 0$، مدل CEF به مدل سیال راینر-ریولین تبدیل می شود.
- در حالت $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}}),\ \tilde{\Psi}_1 = 0,\ \tilde{\Psi}_2 = 0$، مدل به سیال نیوتنی تعمیم یافته ساده می شود.
- در حالت $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0,\ \tilde{\Psi}_1 = 0,\ \tilde{\Psi}_2 = 0$، مدل به سیال نیوتنی ساده می شود.

۲-۳-۲- ***توابع ویسکومتریک***

در اکثر مواد ویسکوالاستیک (به ویژه در محلول ها و مذاب های پلیمری)، وابستگی ویسکوزیته به نرخ برش بصورت باریک شونده[2] است (حالت ضخیم شونده ویسکوزیته بسیار نادر است). لذا اصولاً بسیاری از توابع ویسکومتریک بصورت باریک شونده (کمتر شدن ویسکوریته با ازدیاد نرخ برش) مدل شده اند. در این تحقیق از مدل رئولوژیکی، کاریو-یاسودا[3] استفاده شده است. در این مدل، توابع ویسکومتریک مربوط به ویسکوزیته و ضرایب اختلاف تنش های نرمال اول و دوم به شکل زیر تعریف می شوند [۳]:

$$\frac{\tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}}) - \tilde{\eta}_\infty}{\tilde{\eta}_0 - \tilde{\eta}_\infty} = \left[1 + (\lambda\dot{\tilde{\gamma}})^a\right]^{(n-1)/a} \qquad (۲-۶۴-۱)$$

$$\Psi_1(\dot{\tilde{\gamma}}) = 2\lambda_1(\tilde{\eta}_0 - \tilde{\eta}_\infty)\left[1 + (\lambda\dot{\tilde{\gamma}})^a\right]^{(n-1)/a} \qquad (۲-۶۴-۲)$$

$$\Psi_2(\dot{\tilde{\gamma}}) = -\chi\,\Psi_1(\dot{\tilde{\gamma}}) \qquad (۲-۶۴-۳)$$

1. Steady shear flow
2. Shear thinning
3. Carreau–Yasuda

در رابطه (۲-۶۴)، $\tilde{\eta}_0$ ویسکوزیته در نرخ برش صفر، $\tilde{\eta}_\infty$ ویسکوزیته در نـرخ بـرش بـی نهایـت، λ ثابـت زمانی مدل، λ_1 ثابت زمانی تاخیر سیال، χ نسبت ویسکوزیته، n توان پاورلو و a ثابت بی بعـدی اسـت که معرف ناحیه انتقال بین نرخ برش صفر و ناحیه پاورلو است. مقـدار a بـرای بـسیاری از محلـول هـای پلیمری برابر ۲ گزارش شده است. همچنین در عمده محلول ها و مذاب هـای پلیمـری مقـدار $\tilde{\eta}_\infty$ حـدود 10^1 تا 10^4 بار از $\tilde{\eta}_0$ کوچکتر است، لذا در برخی از کاربردهای مهندسـی مقـدار $\tilde{\eta}_\infty$ برابـر صـفر در نظـر گرفته می شود. $\tilde{\eta}_\infty$ در واقع معرف بخش نیوتنی رفتار ماده است که معمولاً در محلول های پلیمری مقدار آن غیر صفر و کوچک است. به عنوان مثال برای یک محلول ویسکوالاستیک که بوسیله اختلاط یک مـاده حل شونده پلیمری در حلال نیوتنی ایجاد شـده، مقـدار $\tilde{\eta}_\infty$ بیـشتر معـرف ویـسکوزیته حـلال اسـت. در بسیاری از آزمایشات رئولوژیکی از اندازه گیری مستقیم مقدار اختلاف تنش دوم صرفنظر می شـود و ایـن مقدار تنها بصورت کسری از اختلاف تنش نرمال اول گزارش می شود. در اینجا نیز چنین رونـدی تعقیـب شده و مطابق رابطه (۲-۶۴-۳) ضریب χ به عنوان نسبت اختلاف تنش های نرمال در نظـر گرفتـه شـده است. همچنین در قریب به اتفاق مواد ویسکوالاستیک، اختلاف تنش نرمال دوم دارای مقدار منفـی اسـت، حال آنکه همواره مقادیر مثبتی برای اختلاف تنش نرمال اول گزارش شده است (به علامت منفی در رابطه (۲-۶۴-۳) توجه کنید). در عمده مواد ویسکوالاستیک مقـدار اخـتلاف تـنش نرمـال دوم از ۲۰٪ اخـتلاف تنش نرمال اول کمتر بوده ($\chi < 0.2$) و در بسیاری از محلول ها و مذاب های پلیمری نیز مقدار اخـتلاف تنش دوم حدود ۱۰ ٪ اختلاف تنش نرمال اول گزارش شده است ($\chi \approx 0.1$). مدل کاریو-یاسودا یک مدل پنج ثابته است که از انعطاف پذیری کافی برای برازش مناسب بر روی توابع ویسکومتریک بسیاری از مـواد ویسکوالاستیک برخوردار است. به طور کلـی پـس از جمـع آوری داده هـای کـافی آزمایـشگاهی از رفتـار رئولوژیکی ماده، می توان این مدل را بر روی داده ها برازش داد و ضرایب مربوطه را تعیین نمود. در شکل (۲-۲) دیاگرام ویسکوزیته بر حسب نرخ برش چند محلول پلیمری و یک محلول صابونی نشان داده شـده

است. در جدول (۲-۱) ضرایب مدل کاریو-یاسودا که بر روی دیاگرام های شکل (۲-۲) برازش شده اند، آمده است. در جدول (۲-۲) نیز ضرایب این مدل برای غلظت های مختلف محلول پلی استیرن در یک-کلرون آفسالن[1] آمده است. مدل کاریو-یاسودا در واقع تعمیم یافته مدل معروف کراس[2] است [۱۲۴]:

$$\tilde{\eta}(\dot{\gamma}) = \tilde{\eta}_{\infty} + \left(\tilde{\eta}_0 - \tilde{\eta}_{\infty}\right) / \left[1 + \lambda \dot{\gamma}^{(1-n)}\right] \quad (۲-۶۵-۱)$$

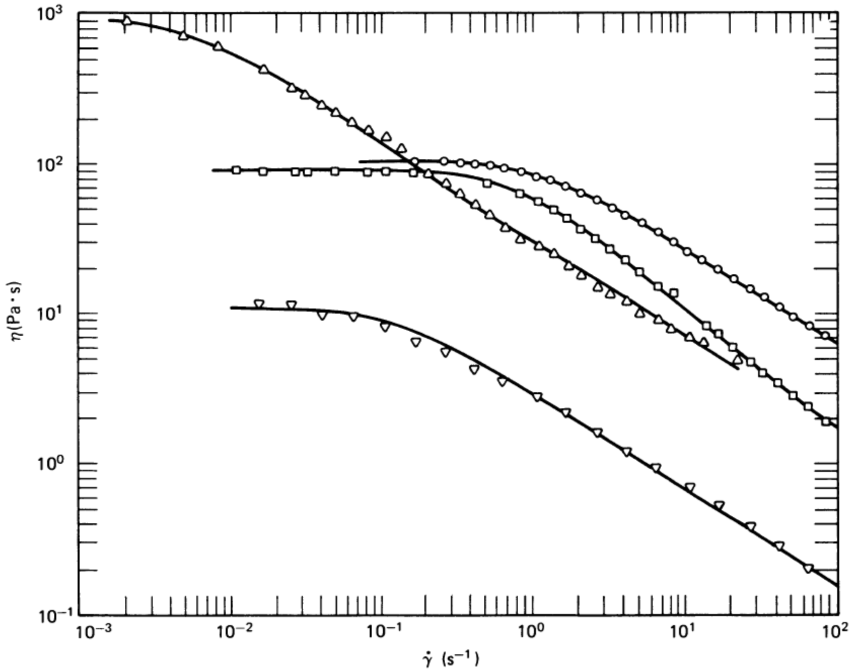
$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = 2\lambda_1(\tilde{\eta}_0 - \tilde{\eta}_{\infty}) / \left[1 + \lambda \dot{\gamma}^{(1-n)}\right] \quad (۲-۶۵-۲)$$

در مدل کراس، ویسکوزیته در نرخ برش صفر برابر $\tilde{\eta}_0$ و در نرخ برش بی نهایت برابر $\tilde{\eta}_{\infty}$ محاسبه می شود و بین این دو مقدار حدی، مدل کراس به مدل توانی نزدیک می شود. از جمله مزایای مدل کاریو-یاسودا نسبت به مدل کراس آن است که در این مدل رفتار رئولوژیکی غیرخطی به شکل دقیق تری محاسبه می شود. مزیت دیگر هر دو مدل نسبت به مدل توانی، امکان محاسبه $\tilde{\eta}_{\infty}$ در این مدل ها است (در مدل توانی مقدار $\tilde{\eta}_{\infty}$ همواره برابر صفر محاسبه می شود).

جدول (۲-۱): ضرایب مدل کاریو-یاسودا برای چند محلول مختلف (در تمامی موارد $a = 2$ در نظر گرفته شده است) [۳]

محلول	$\tilde{\eta}_0\ (pa.s)$	$\tilde{\eta}_{\infty}\ (pa.s)$	$\lambda\ (s)$	n
۲٪ پلی ایزوبوتیلن در پریمول ۳۳۵[3]	9.23×10^{2}	1.50×10^{-1}	191	0.385
۵٪ پلی استیرن در آروکلور ۱۲۴۲[4]	1.01×10^{2}	5.9×10^{-2}	0.84	0.364
۰/۷۵٪ پلی اکریل آمید در مخلوط ۹۵٪ وزنی آب و گلیسرین[5]	10.6	10^{-2}	8.04	0.364
۷٪صابون آلومینیوم در دیکالین و ام-کرسول[6]	89.6	10^{-2}	1.41	0.200

1. Polystyrene in 1-Chloronaphthalene
2. Cross
3. 2% Polyisobutylene in Primol 335
4. 5% Polystyrene in Aroclor 1242
5. 0.75% Polyacrylamide in a 95.5 mixture by weight of water and glycerin
6. 7% Aluminum soap in decalin and m-cresol



شکل (۲-۲): دیاگرام ویسکوزیته در برابر نرخ برش برای محلول های مختلف [۳]

Δ: ۲٪ پلی ایزوبوتیلن در پریمول ۳۳۵، ○: ۵٪ پلی استیرن در آروکلور ۱۲۴۲

∇: ۰/۷۵٪ پلی اکریل آمید در مخلوط ۹۵٪ وزنی آب و گلیسرین و □ ۷٪صابون آلومینیوم در دیکالین و ام-کرسول

جدول (۲-۲): ضرایب مدل کاریو-یاسودا برای غلظت های مختلف محلول پلی استیرن در یک-کلرون آفسالن [۳]

خواص محلول		**ضرایب مدل کاریو یاسودا ($\eta_\infty = 0$)**			
$\bar{M}_w$ (g/mol)	c (g/ml)	η_0 $(pa.s)$	λ (s)	n	a
2×10^6	0.15	1400	1.60	0.200	1.25
2×10^6	0.088	90	3.79×10^{-1}	0.265	0.98
3.9×10^5	0.45	8080	1.109	0.304	2
3.9×10^5	0.30	135	3.61×10^{-2}	0.305	2
1.1×10^5	0.52	1180	9.24×10^{-2}	0.441	2
1.1×10^5	0.45	166	1.73×10^{-2}	0.538	2
3.7×10^4	0.62	3930	1×10^{-1}	0.217	2

۲-۳-۳- چند قضیه معروف

همانگونه که در بخش ۲-۳-۱ اشاره شد، چنانچه در سیال CEF توابع ویسکومتریک مستقل از نرخ برش باشند، معادله متشکله CEF به مدل سیال مرتبه دو ساده می شود (در برخی مراجع در این حالت نیز این مدل بصورت CEF نامیده شده است). در این حالت قضایای معروفی بر جریان سیال حاکم است که برخی از آنها در تحقیق حاضر برای ارزیابی صحت نتایج عددی به کار گرفته شده اند. در اینجا تنها به صورت قضایا اشاره شده و برای مشاهده اثبات آنها به مرجع [۳] رجوع نمایید. این قضایا عبارتند از:

- قضیه گزیکس[1] در مورد جریان خزشی سه بعدی سیال مرتبه دو: *یک میدان سرعت $\tilde{V}$ و میدان فشار $\tilde{P}_N$ که معادلات حاکم بر جریان خزشی سه بعدی سیال نیوتنی را ارضا می کند، در حالت $\tilde{\Psi}_2=-\tilde{\Psi}_1/2$، در معادلات جریان خزشی سه بعدی سیال مرتبه دو نیز صدق می کند.* به عبارت دیگر در حالت $\tilde{\Psi}_2=-\tilde{\Psi}_1/2$، میدان جریان خزشی سه بعدی سیال مرتبه دو نظیر میدان جریان خزشی سه بعدی سیال نیوتنی است.
- قضیه تنر در مورد جریان صفحه ای سیال مرتبه دو: *یک میدان سرعت $\tilde{V}$ و میدان فشار $\tilde{P}_N$ که معادلات حاکم بر جریان خزشی صفحه ای سیال نیوتنی را ارضا می کند، در معادلات جریان خزشی صفحه ای سیال مرتبه دو نیز صدق می کند.*
- قضیه لانگلویس، ریولین و پیپکین[2] در مورد جریان مستقیم الخط[3] سیال مرتبه دو: *چنانچه یک میدان سرعت $\tilde{V}$ و میدان فشار $\tilde{P}_N$ معادلات حاکم بر جریان مستقیم الخط سیال نیوتنی را ارضا کند، در اینصورت این میدان سرعت $\tilde{V}$ در معادلات حاکم بر جریان مستقیم الخط سیال مرتبه دو نیز صدق می کند و توزیع فشار میدان سیال مرتبه دو $(\tilde{P})$ نیز دارای رابطه مشخصی با میدان سرعت و فشار سیال نیوتنی است:*

1. Giesekus
2. Langlois, Rivlin and Pipkin
3. Rectilinear flow

$$\tilde{P} = \tilde{P}_N - \frac{\tilde{\Psi}_1}{2\eta}\frac{\partial \tilde{P}_N}{\partial t} + \frac{\tilde{\Psi}_2}{\eta}(\tilde{V} \cdot \nabla \tilde{P}_N) - \frac{\tilde{\Psi}_1}{8}(\gamma : \gamma) + \left(\frac{\tilde{\Psi}_2}{2} - \frac{\tilde{\Psi}_1}{4}\right)\left(\nabla \tilde{V} : \nabla \tilde{V}^T\right) \qquad (۶۶-۲)$$

به عبارت دیگر قضیه لانگلویس، ریولین و پیپکین نشان می دهد که میدان سرعت جریان مستقیم الخط سیال مرتبه دو و سیال نیوتنی یکسان است و میان توزیع فشار آنها نیز رابطه (۲-۶۶) برقرار است. این قضیه دارای تطابق کامل با شرایط اولدروید (روابط (۲-۷)) مربوط به تشکیل جریانهای ثانویه در جریان مستقیم الخط در کانال های غیر مدور است. از آنجا که معادله متشکله سیال مرتبه دو در شرایط اولدروید صدق می کند، لذا طبق نظر اولدروید، با وجود اینکه معادله متشکله سیال مرتبه دو دارای اثر اختلاف تنش نرمال دوم است، هیچگاه جریان ثانویه ای در جریان مستقیم الخط این سیال ظاهر نمی شود. این موضوع از قضیه لانگلویس، ریولین و پیپکین نیز قابل استنتاج است. زیرا طبق این قضیه، میدان سرعت جریان سیال مرتبه دو شبیه میدان سرعت جریان سیال نیوتنی بوده و لذا این میدان سرعت فاقد جریانهای ثانویه است.

۲-۳-۴- معادله متشکله سیال CEF در دستگاه مختصات استوانه ای

همانگونه که پیشتر در بخش ۲-۲ بیان گردید، در این تحقیق از دستگاه مختصات استوانه ای برای بررسی عددی و تحلیلی جریان سیال CEF در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی استفاده شده است. بنابراین در این بخش مولفه های تانسور تنش این سیال و مشتقات مربوطه در دستگاه مختصات استوانه ای ارائه می شود. با توجه به معادلات (۲-۱) و (۲-۵۶) صورت بی بعد معادله متشکله سیال CEF به شکل زیر است:

$$\tau = \eta\gamma_{(1)} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)} + \Psi_2\left\{\gamma_{(1)}\cdot\gamma_{(1)}\right\} \qquad (۶۷-۲)$$

شایان ذکر است که مقادیر بی بعد $\gamma_{(1)}$ و $\gamma_{(2)}$ از روابطی مشابه روابط (۲-۵۷) و با حذف علامت ~ از بالانویس پارامترها قابل محاسبه هستند.

در دستگاه مختصات استوانه ای، مولفه های تانسور تنش بی بعد سیال CEF از روابط زیر بدست می آیند:

$$\tau_{rr} = \eta\gamma_{(1)rr} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)rr} + \Psi_2(\gamma_{(1)rr}{}^2 + \gamma_{(1)r\theta}{}^2 + \gamma_{(1)rz}{}^2) \tag{۲-۶۸-۱}$$

$$\tau_{r\theta} = \eta\gamma_{(1)r\theta} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)r\theta} + \Psi_2(\gamma_{(1)rr}\gamma_{(1)r\theta} + \gamma_{(1)r\theta}\gamma_{(1)\theta\theta} + \gamma_{(1)rz}\gamma_{(1)z\theta}) \tag{۲-۶۸-۲}$$

$$\tau_{rz} = \eta\gamma_{(1)rz} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)rz} + \Psi_2(\gamma_{(1)rr}\gamma_{(1)rz} + \gamma_{(1)r\theta}\gamma_{(1)\theta z} + \gamma_{(1)rz}\gamma_{(1)zz}) \tag{۲-۶۸-۳}$$

$$\tau_{\theta\theta} = \eta\gamma_{(1)\theta\theta} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)\theta\theta} + \Psi_2(\gamma_{(1)r\theta}{}^2 + \gamma_{(1)\theta\theta}{}^2 + \gamma_{(1)\theta z}{}^2) \tag{۲-۶۸-۴}$$

$$\tau_{\theta z} = \eta\gamma_{(1)\theta z} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)\theta z} + \Psi_2(\gamma_{(1)\theta r}\gamma_{(1)rz} + \gamma_{(1)\theta\theta}\gamma_{(1)\theta z} + \gamma_{(1)\theta z}\gamma_{(1)zz}) \tag{۲-۶۸-۵}$$

$$\tau_{zz} = \eta\gamma_{(1)zz} - \frac{1}{2}\Psi_1\gamma_{(2)zz} + \Psi_2(\gamma_{(1)rz}{}^2 + \gamma_{(1)\theta z}{}^2 + \gamma_{(1)zz}{}^2) \tag{۲-۶۸-۶}$$

در روابط فوق، η، Ψ_1 و Ψ_2 توابعی از نرخ برش تعمیم یافته $(\dot{\tilde{\gamma}})$ هستند. با توجه به رابطه (۲-۵۸)، مقدار نرخ برش تعمیم یافته از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\tilde{\gamma}_{rr(1)}{}^2 + \tilde{\gamma}_{\theta\theta(1)}{}^2 + \tilde{\gamma}_{zz(1)}{}^2 + 2\tilde{\gamma}_{\theta z(1)}{}^2 + 2\tilde{\gamma}_{rz(1)}{}^2 + 2\tilde{\gamma}_{r\theta(1)}{}^2\right)} \tag{۲-۶۹}$$

در روابط (۲-۶۸)، $\gamma_{(1)}$ تانسور نرخ برش بوده و مولفه های آن برای جریان توسعه یافته ($\partial / \partial\theta = 0$) به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{(1)_{rr}} = 2\frac{\partial v_r}{\partial r} && \gamma_{(1)_{r\theta}} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} && \gamma_{(1)_{rz}} = \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \\
&\gamma_{(1)_{\theta\theta}} = 2\frac{v_r}{r} && \gamma_{(1)_{\theta z}} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} && \gamma_{(1)_{zz}} = 2\frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{۲-۷۰}$$

همچنین $\gamma_{(2)}$ مشتق همرفتی پاد همبسته نرخ برش مرتبه دو بوده و در دستگاه مختصات استوانه ای برای جریان دائمی توسعه یافته ($\partial / \partial\theta = 0$) بصورت زیر است:

$$\gamma_{(2)_{rr}} = v_r\frac{\partial\gamma_{(1)_{rr}}}{\partial r} + v_z\frac{\partial\gamma_{(1)_{rr}}}{\partial z} - \gamma_{(1)_{rr}}{}^2 - 2\frac{\partial v_r}{\partial z}\gamma_{(1)_{rz}} \tag{۲-۷۱-۱}$$

$$\gamma_{(2)r\theta} = v_r \frac{\partial \gamma_{(1)r\theta}}{\partial r} + v_z \frac{\partial \gamma_{(1)r\theta}}{\partial z} - \frac{1}{2}\left(3\gamma_{(1)rr} + \gamma_{(1)\theta\theta}\right)\gamma_{(1)r\theta} - \gamma_{(1)\theta z}\gamma_{(1)rz} - \frac{\partial v_r}{\partial z}\gamma_{(1)\theta z} \quad (۲-۷۱-۲)$$

$$\gamma_{(2)rz} = v_r \frac{\partial \gamma_{(1)rz}}{\partial r} + v_z \frac{\partial \gamma_{(1)rz}}{\partial z} - \frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)rr} + \gamma_{(1)zz}\right)\gamma_{(1)rz} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\gamma_{(1)rr} - \frac{\partial v_r}{\partial z}\gamma_{(1)zz} \quad (۳-۷۱-۲)$$

$$\gamma_{(2)\theta\theta} = v_r \frac{\partial \gamma_{(1)\theta\theta}}{\partial r} + v_z \frac{\partial \gamma_{(1)\theta\theta}}{\partial z} - 2\left(\gamma_{(1)\theta\theta}{}^2 + \gamma_{(1)\theta z}{}^2\right) \quad (۴-۷۱-۲)$$

$$\gamma_{(2)\theta z} = v_r \frac{\partial \gamma_{(1)\theta z}}{\partial r} + v_z \frac{\partial \gamma_{(1)\theta z}}{\partial z} - \frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)\theta\theta} + 3\gamma_{(1)zz}\right)\gamma_{(1)\theta z} - \gamma_{(1)r\theta}\gamma_{(1)rz} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\gamma_{(1)r\theta} \quad (۵-۷۱-۲)$$

$$\gamma_{(2)zz} = v_r \frac{\partial \gamma_{(1)zz}}{\partial r} + v_z \frac{\partial \gamma_{(1)zz}}{\partial z} - \gamma_{(1)zz}{}^2 - 2\frac{\partial v_z}{\partial r}\gamma_{(1)rz} \quad (۶-۷۱-۲)$$

۲-۳-۵- معادله متشکله سیال CEF در دستگاه مختصات ترویدال

همانگونه که پیشتر در بخش ۲-۵-۲ اشاره گردید، در فصل سوم این تحقیق، جریان سیال مرتبه دو در حالت $\Psi_2 = 0$، در لوله های خمیده به روش حساب اختلالات مورد بررسی قرار گرفته است. دراین بخش معادله متشکله سیال مرتبه دو در این دستگاه مختصات ارائه می شود. با توجه به روابط (۲-۳۹) و (۲-۵۶) صورت بی بعد معادله متشکله سیال مرتبه دو به شکل زیر است:

$$\tau = \gamma_{(1)} - We\,\gamma_{(2)} \quad (۷۲-۲)$$

مقادیر $\gamma_{(1)}$ معرف تانسور نرخ برش بوده و مولفه های آن برای جریان توسعه یافته ($\partial / \partial s = 0$) به صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\gamma_{(1)rr} = 2\frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \gamma_{(1)r\phi} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi} - v\right),$$

$$\gamma_{(1)rs} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\delta}{B}w\cos\phi, \qquad \gamma_{(1)\phi\phi} = \frac{2}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \phi}\right), \quad (۷۳-۲)$$

$$\gamma_{(1)\phi s} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{\delta}{B}w\sin\phi, \qquad \gamma_{(1)ss} = \frac{2\delta}{B}\left(u\cos\phi - v\sin\phi\right).$$

مقادیر $\gamma_{(2)}$ در جریان توسعه یافته ($\partial / \partial s = 0$) در لوله خمیده نیز از روابط زیر بدست می آیند:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{(2)rr} &= u\,\frac{\partial \gamma_{(1)rr}}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial \gamma_{(1)rr}}{\partial \phi} - 2\frac{\partial u}{\partial r}\gamma_{(1)rr} - \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}\gamma_{(1)r\phi}\,, \\
\gamma_{(2)r\phi} &= u\,\frac{\partial \gamma_{(1)r\phi}}{\partial r} + \frac{v}{r}\left(\frac{\partial \gamma_{(1)r\phi}}{\partial \phi} + \gamma_{(1)rr}\right) - \frac{\partial u}{\partial r}\gamma_{(1)r\phi} \\
&\quad - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}\gamma_{(1)\phi\phi} - \frac{\partial v}{\partial r}\gamma_{(1)rr} - \frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \phi}\right)\gamma_{(1)r\phi}\,, \\
\gamma_{(2)rs} &= u\,\frac{\partial \gamma_{(1)rs}}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial \gamma_{(1)rs}}{\partial \phi} - \frac{\partial u}{\partial r}\gamma_{(1)rs} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}\gamma_{(1)\phi s} - \frac{\partial w}{\partial r}\gamma_{(1)rr} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi}\gamma_{(1)r\phi} \\
&\quad + \frac{\delta}{B}\left(-u\cos\phi + v\sin\phi\right)\gamma_{(1)rs} + w\,\gamma_{(1)rr}\cos\phi - w\,\gamma_{(1)r\phi}\sin\phi, \\
\gamma_{(2)\phi\phi} &= u\,\frac{\partial \gamma_{(1)\phi\phi}}{\partial r} + \frac{v}{r}\left(\frac{\partial \gamma_{(1)\phi\phi}}{\partial \phi} + 2\gamma_{(1)r\phi}\right) - 2\frac{\partial v}{\partial r}\gamma_{(1)r\phi} - \frac{2}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \phi}\right)\gamma_{(1)\phi\phi}\,, \\
\gamma_{(2)\phi s} &= u\,\frac{\partial \gamma_{(1)\phi s}}{\partial r} + \frac{v}{r}\left(\gamma_{rs} + \frac{\partial \gamma_{(1)\phi s}}{\partial \phi}\right) - \frac{\partial v}{\partial r}\gamma_{(1)rs} - \frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \phi}\right)\gamma_{(1)\phi s} - \frac{\partial w}{\partial r}\gamma_{(1)r\phi} \\
&\quad - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi}\gamma_{(1)\phi\phi} + \frac{\delta}{B}\left(-u\cos\phi + v\sin\phi\right)\gamma_{(1)\phi s} + w\,\gamma_{(1)r\phi}\cos\phi - w\,\gamma_{(1)\phi\phi}\sin\phi, \\
\gamma_{(2)ss} &= u\,\frac{\partial \gamma_{(1)ss}}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial \gamma_{(1)ss}}{\partial \phi} - 2\frac{\partial w}{\partial \phi}\gamma_{(1)\phi s} + 2\frac{\delta}{B}\left(-u\cos\phi + v\sin\phi\right)\gamma_{(1)ss} \\
&\quad + w\,\gamma_{(1)rs}\cos\phi - w\,\gamma_{(1)\phi s}\sin\phi,
\end{aligned}
\tag{۷۴-۲}
$$

فصل سوم

آنالیز تحلیلی

۳-۱- مقدمه

دراین فصل، میدان جریان سیال CEF در کانال خمیده تحت خواص ویسکومتریک ثابت به طور تحلیلی مورد بررسی قرار می گیرد. در این شرایط معادله متشکله CEF به سیال مرتبه دو کاهش پیدا می کند. در این فصل در ابتدا با استفاده از تکنیک مرتبه بزرگی، رابطه تعادل نیروها و نیز میدان تنش سیال مرتبه دو در هسته جریان در کانال خمیده ارائه می شود. رابطه تعادلی بدست آمده برای درک اثر نیروهای گریز از مرکز ناشی از انحنا و دوران، نیروی کریولیس و نیروی الاستیک ناشی از اثرات اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر میدان جریان و به ویژه بر نحوه تشکیل جریانهای ثانویه موثر است. در ادامه برای نخستین بار، با استفاده از تکنیک مرتبه بزرگی، پاسخ تحلیلی برای میدان جریان خزشی سیال مرتبه دو در کانال خمیده ارائه می شود و بر اساس آن اثر نسبت انحنا و نسبت ابعادی بر نسبت مقاومت کانال در برابر جریان (دبی جریان) مورد بررسی قرار می گیرد.

یکی از اهداف این تحقیق بررسی تحلیلی اثر اختلاف تنش نرمال اول سیال مرتبه دو (اثر ثابت زمانی تاخیر سیال) بر میدان جریان اینرسی در کانال خمیده است. در اینجا سعی بر آن است تا بطور تحلیلی مقایسه ای بین اثرات ثابت های زمانی سیال صورت گیرد. معمولاً برای تحلیل جریان اینرسی سیالات ویسکوالاستیک در لوله خمیده از روش حساب اختلالات استفاده می شود (مراجع [۴۳] تا [۴۶] و [۴۸] را ببینید). از آنجا که بدست آوردن پاسخ تحلیلی برای میدان جریان در کانال خمیده دارای مقطع غیرمدور امر بسیار دشواری است لذا در این تحقیق این اثر در کانال خمیده مدور بررسی شده است. در اینجا با استفاده از نتایج تحقیق حاضر و تحقیقات پیشین نشان داده می شود که اثر ثابت های زمانی رهایی از تنش و تاخیر سیال در اعداد وایزنبرگ بزرگ عکس یکدیگر است. در ادامه بر اساس میدان سرعت بدست آمده، میدان دمای جریان نیز مورد بررسی قرار می گیرد.

۳-۲- تکنیک مرتبه بزرگی[1] جهت تحلیل جریان در کانال خمیده

همانگونه که در بخش ۳-۱ بیان گردید، دراینجا با استفاده از تکنیک مرتبه بزرگی روابط تعادل در ناحیه هسته جریان[2] ارائه شده و پاسخی برای میدان جریان خزشی در کانال خمیده بدست می آید. مطابق تکنیک مرتبه بزرگی، مرتبه سرعت محوری در ناحیه هسته جریان از مرتبه سرعت های عرضی (سرعت جریانهای ثانویه) بیشتر است. منظور از ناحیه هسته جریان، نواحی شامل مرکز مقطع کانال و به اندازه کافی دور از دیواره ها است. مطابق این تکنیک در ناحیه هسته جریان، سرعت محوری از مرتبه یک و سرعت جریانهای ثانویه از مرتبه ε در نظر گرفته می شود:

$$v_\theta \sim O(I), \qquad v_r, v_z \sim O(\varepsilon) \ll I \tag{۳-۱}$$

تکنیک مرتبه بزرگی پیشتر توسط ماشالکار و دواراجان [۶۹] برای جریان سیال نیوتنی و فان و همکاران [۵۰] برای جریان سیال اولدروید-بی در لوله های خمیده پیشنهاد شده است. استفاده از این تکنیک در محدوده وسیعی از اعداد دین و خواص الاستیک برای جریان آرام صادق است. شایان ذکر است که در این فصل کلیه مسائل در حالت بی بعد بررسی شده اند و خواص ویسکومتریک ثابتی برای معادله متشکله سیال CEF در نظر گرفته شده است. در این حالت مقادیر بی بعد Ψ_1 و Ψ_2 ثابت بوده و مقدار بی بعد ویسکوزیته برابر یک خواهد بود ($\eta = \tilde{\eta} / \tilde{\eta}_0 = 1$).

با اعمال رابطه (۳-۱) در روابط (۲-۷۰) و (۲-۷۱)، مرتبه بزرگی مشتقات همرفتی پاد همبسته نرخ برش اول و دوم بدست می آیند [۱۲۵]:

$$\gamma_{(1)r\theta}, \gamma_{(1)\theta z} \sim O(I), \qquad \gamma_{(1)rr}, \gamma_{(1)rz}, \gamma_{(1)\theta\theta}, \gamma_{(1)zz} \sim O(\varepsilon) \tag{۳-۲-۱}$$

$$\gamma_{(2)\theta\theta} \sim O(I) \qquad \gamma_{(2)r\theta}, \gamma_{(2)\theta z}, \gamma_{(2)rr}, \gamma_{(2)zz}, \gamma_{(2)rz} \sim O(\varepsilon) \tag{۳-۲-۲}$$

---

1. Order of magnitude technique
2. Core region

با توجه به رابطه (۳-۱) و (۳-۲)، مولفه های تنش سیال CEF (مرتبه دو) از رابطه (۲-۶۸) بدست می آیند [۱۲۵]:

$$\tau_{rr} = \Psi_2 \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2 + O(\varepsilon) \qquad (۳\text{-}۳\text{-}۱)$$

$$\tau_{r\theta} = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) + O(\varepsilon) \qquad (۳\text{-}۳\text{-}۲)$$

$$\tau_{rz} = \Psi_2 \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + O(\varepsilon) \qquad (۳\text{-}۳\text{-}۳)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \left(\Psi_1 + \Psi_2\right)\left\{ \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 \right\} + O(\varepsilon) \qquad (۳\text{-}۳\text{-}۴)$$

$$\tau_{\theta z} = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + O(\varepsilon) \qquad (۳\text{-}۳\text{-}۵)$$

$$\tau_{zz} = \Psi_2 \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + O(\varepsilon) \qquad (۳\text{-}۳\text{-}۶)$$

۳-۲-۱- رابطه تعادل نیروها

برای تحقیق رابطه تعادل میان نیروها معمولاً بر روی معادله مومنتوم در جهت شعاع انحنای مسیر جریان تمرکز می شود [۵۰ و ۶۹]. مطابق رابطه (۲-۹)، در جریان توسعه یافته در کانال خمیده، گرادیان فشار نسبت به زاویه انحنای مسیر جریان (θ) مقداری ثابت است:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = C = cte \qquad (۳\text{-}۴)$$

از رابطه فوق نتیجه می شود:

$$P(r,\theta,z) = p(r,z) - C\theta \qquad (۳\text{-}۵)$$

با اعمال روابط (۳-۱) و (۳-۵) در معادله (۲-۱۰-۳)، معادله زیر بدست می آید [۱۲۵]:

$$\mathrm{Re}\frac{v_\theta^{\ 2}}{r}+2Ro.v_\theta+r.Ro^2\approx\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\tau_{\theta\theta}-\tau_{rr}}{r}-\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r}-\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} \qquad (۳-۶)$$

در نهایت با اعمال روابط (۳-۳-۱)، (۳-۳-۳) و (۳-۳-۴) در رابطه فوق، معادله تعادل نیروها در ناحیه هسته جریان حاصل می شود [۱۲۵]:

$$\mathrm{Re}.\underbrace{\frac{v_\theta^{\ 2}}{r}}_{\substack{\text{Centrifugal force}\\ \text{arisen from}\\ \text{curvature}}}+\underbrace{2Ro.v_\theta}_{\text{Coriolis force}}+\underbrace{r.Ro^2}_{\substack{\text{Centrifugal force}\\ \text{arisen from}\\ \text{rotation}}}\approx\underbrace{\frac{\partial p}{\partial r}}_{\substack{\text{radial pressure}\\ \text{gradient}}}+\underbrace{\Psi_1 f_1(v_\theta)+\Psi_2 f_2(v_\theta)}_{\text{Elastic force}} \qquad (۳-۷)$$

در رابطه فوق، f_1 و f_2 توابعی از سرعت محوری (v_θ) هستند که از روابط زیر بدست می آیند[۱۲۵]:

$$f_1(v_\theta)=\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2\right\} \qquad (۳-۸-۱)$$

$$f_2(v_\theta)=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2-2\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \qquad (۳-۸-۲)$$

رابطه (۳-۷)، صورت کلی تعادلی نیروها در جهت شعاع انحنای مسیر جریان است. مطابق این رابطه، گرادیان فشار شعاعی با اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا و دوران، نیروی کریولیس و نیروهای الاستیک ناشی از اثر اختلاف تنش نرمال اول و دوم بالانس شده است. برای کانال ایستا، جملات ناشی از دوران حذف شده و از رابطه (۳-۷)، معادله تعادلی نیروها در این کانال بدست می آید[۱۲۵]:

$$\mathrm{Re}\frac{v_\theta^{\ 2}}{r}\approx\frac{\partial p}{\partial r}+\Psi_1 f_1(v_\theta)+\Psi_2 f_2(v_\theta) \qquad (۳-۹)$$

چنانچه از اثر اختلاف تنش نرمال دوم صرفنظر شود ($\Psi_2=0$)، معادله (۳-۹) بصورت زیر ساده می شود:

$$\mathrm{Re}\frac{v_\theta^{\ 2}}{r}\approx\frac{\partial p}{\partial r}+\Psi_1 f_1(v_\theta) \qquad (۳-۱۰)$$

با توجه به رابطه (۳-۳-۴)، رابطه (۳-۱۰) به شکل زیر ساده می شود:

$$\mathrm{Re}\frac{v_\theta^{\ 2}}{r}\approx\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \qquad (۳-۱۱)$$

مشابه رابطه فوق نخستین بار توسط فان و همکاران [۵۰] برای معادله تعادل نیروها در هسته جریان اولدروید-بی در لوله های خمیده مدور خمیده (در دستگاه مختصات تروید ال) ارائه شده است. از آنجا که در مدل اولدروید-بی مقدار اختلاف تنش نرمال دوم همواره صفر است، لذا پاسخ بدست آمده در رابطه (۳-۱۱) مشابه رابطه بدست آمده از تحقیق آنها شده است. چنانچه در رابطه (۳-۹)، از هر دو اثر اختلاف تنش های نرمال صرفنظر شود، رابطه زیر برای تعادل نیروها حاصل می شود:

$$\mathrm{Re}\frac{{v_\theta}^2}{r} \approx \frac{\partial p}{\partial r} \qquad (۳-۱۲)$$

مشابه رابطه فوق نخستین بار توسط ماشالکار و دواراجان [۶۹] برای تعادل نیروها در هسته جریان سیال نیوتنی در لوله های خمیده ارائه شده است. مطابق این رابطه، در هسته جریان سیال نیوتنی گرادیان فشار شعاعی با اثر نیروی گریز از مرکز بالانس می شود. در جدول (۳-۱) خلاصه ای از روابط تعادل نیروها در ناحیه هسته جریان در شرایط مختلف ارائه شده است. شایان ذکر است که در فصل پنجم، از این معادلات تعادل جهت تحقیق چگونگی تشکیل جریانهای ثانویه استفاده شده است.

جدول (۳-۱): معادلات تعادل نیروها در هسته جریان در مجرای خمیده ایستا [۱۲۵]

ردیف	محقق	مشخصات				معادله تعادلی
		انحنا	اینرسی	Ψ_1	Ψ_2	
۱	ماشالکار و دواراجان [۷۹]	✓	✓	-	-	$\mathrm{Re}\frac{{v_\theta}^2}{r} \approx \frac{\partial p}{\partial r}$
۲	فان و همکاران [۶۰]	✓	✓	✓	-	$\mathrm{Re}\frac{{v_\theta}^2}{r} \approx \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta\theta}}{r}$
۳	فان و همکاران [۶۰]	✓	-	✓	-	$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \approx 0$
۴	تحقیق حاضر	-	✓	✓	✓	$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial r} \approx -\Psi_2 f_2(v_\theta)$
۵	تحقیق حاضر	-	✓	✓	✓	$\frac{\partial p}{\partial r} + \Psi_1 f_1(v_\theta) + \Psi_2 f_2(v_\theta) \approx 0$
۶	تحقیق حاضر	✓	✓	✓	✓	$\mathrm{Re}\frac{{v_\theta}^2}{r} \approx \frac{\partial p}{\partial r} + \Psi_1 f_1(v_\theta) + \Psi_2 f_2(v_\theta)$

۳-۲-۲- جریان خزشی

در این بخش تلاش بر آن است تا با استفاده از تکنیک مرتبه بزرگی، پاسخی برای میدان جریان سیال مرتبه دو در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی در حالت ایستا ارائه شود. بطور کلی برای جریان خزشی، نه تنها در محدوده هسته جریان بلکه در سراسر مقطع کانال می توان سرعت جریانهای ثانویه را از مرتبه ε در نظر گرفت. در اینجا نشان داده می شود که این فرض در محدوده وسیعی از خواص الاستیک صادق است. به عنوان مثال برای جریان خزشی سیال مرتبه دو در کانال خمیده مربعی و در حالت $\delta = 0.3$ ، $\mathrm{Re} = 0.002$، $\Psi_1 = 0.01$ و $\Psi_2 / \Psi_1 = -10\%$، نسبت ماکزیمم شدت جریانهای ثانویه به سرعت جریان اصلی برابر 4.38×10^{-4} است.

لذا با فرض کوچک بودن سرعت جریانهای ثانویه در برابر سرعت جریان اصلی، رابطه مومنتوم جریان خزشی ($\mathrm{Re} \ll 1$) در جهت جریان اصلی (رابطه (۲-۱۰-۲)) به شکل زیر ساده می شود [۱۲۵]:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{r\theta}\right)+\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z}+\frac{C}{r}=0 \tag{۳-۱۳}$$

با اعمال روابط (۳-۳-۲) و (۳-۳-۵) در معادله (۳-۱۳)، معادله دیفرانسیل پاره ای زیر حاصل می شود:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}+\frac{C}{r}=0 \tag{۳-۱۴}$$

با حل معادله فوق، می توان توزیع سرعت محوری جریان خزشی را بدست آورد. شرایط مرزی معادله (۳-۱۴) شامل شرایط مرزی عدم لغزش بر روی دیواره ها است:

$$at \qquad r=\begin{cases}R-a/2=r_i\\ R+a/2=r_o\end{cases}: \qquad v_\theta=0 \tag{۳-۱۵-۱}$$

$$at \qquad z=0,b: \qquad v_\theta=0 \tag{۳-۱۵-۲}$$

در این تحقیق از تبدیل فوریه سینوسی محدود در جهت z، برای حل معادله (۳-۱۴) استفاده شده است. در روابط (۳-۱۶-۱) و (۳-۱۶-۲) این تبدیل و معکوس آن ارائه شده است [۱۲۶]:

$$F_s\{v_\theta(r,z)\}=U(r,n)=\frac{2}{b}\int_0^b v_\theta(r,z)\sin\left(\frac{n\pi z}{b}\right)dz \tag{۳-۱۶-۱}$$

$$v_\theta(r,z)=F_s^{-1}\{U(r,n)\}=\sum_{n=1}^{\infty}U(r,n)\sin\left(\frac{n\pi z}{b}\right) \tag{۳-۱۶-۲}$$

همچنین تبدیل فوریه سینوسی محدود مشتق دوم سرعت محوری در جهت z به صورت زیر است:

$$F_s\left\{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right\}=-\frac{n^2\pi^2}{b^2}U+\frac{2n\pi}{b^2}[v_\theta(r,0)-(-1)^n v_\theta(r,b)] \tag{۳-۱۷}$$

با اعمال شرایط مرزی در جهت z (رابطه (۳-۱۵-۲))، رابطه (۳-۱۷) به شکل زیر ساده می شود:

$$F_s\left\{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right\}=-\frac{n^2\pi^2}{b^2}U \tag{۳-۱۸}$$

با اعمال تبدیل فوریه سینوسی محدود (رابطه (۳-۱۶-۱)) به معادله (۳-۱۴) و با توجه به رابطه (۳-۱۸)، معادله دیفرانسیل زیر بدست می آید [۱۲۵]:

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{dU}{dr}\right)-\left(\frac{n^2\pi^2r^2}{b^2}+1\right)U+\frac{2Cr}{n\pi}[1-(-1)^n]=0 \tag{۳-۱۹}$$

بایستی توجه داشت که در اینجا تبدیل فوریه در جهت z اعمال شده و لذا می توان مشتقات در سایر جهات را از تبدیل خارج نمود. پاسخ معادله دیفرانسیل (۳-۱۹) از قرار زیر است:

$$U(r,n)=a_nI_1\left(\frac{n\pi r}{b}\right)+b_nK_1\left(\frac{n\pi r}{b}\right)+\frac{32Rb^2}{n^3\pi^3r}[1-(-1)^n] \tag{۳-۲۰}$$

با اعمال تبدیل فوریه معکوس (رابطه (۳-۱۶-۲)) به رابطه (۳-۲۰)، رابطه زیر برای توزیع سرعت محوری بدست می آید [۱۲۵]:

$$v_\theta(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_nI_1\left(\frac{n\pi r}{b}\right)+b_nK_1\left(\frac{n\pi r}{b}\right)+\frac{32Rb^2}{n^3\pi^3r}[1-(-1)^n]\right\}\sin\left(\frac{n\pi z}{b}\right)+O(\varepsilon) \tag{۳-۲۱}$$

برای یافتن ضرایب معادله فوق نیاز به اعمال شرایط مرزی در جهت شعاعی است. با استفاده از شرایط مرزی (۳-۱۵-۱)، دستگاه معادله زیر حاصل می شود [۱۲۵]:

$$a_n I_1\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)+b_n K_1\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)+\frac{32Rb^2}{n^3\pi^3 r_i}[1-(-1)^n]=0 \qquad (۳-۲۲-۱)$$

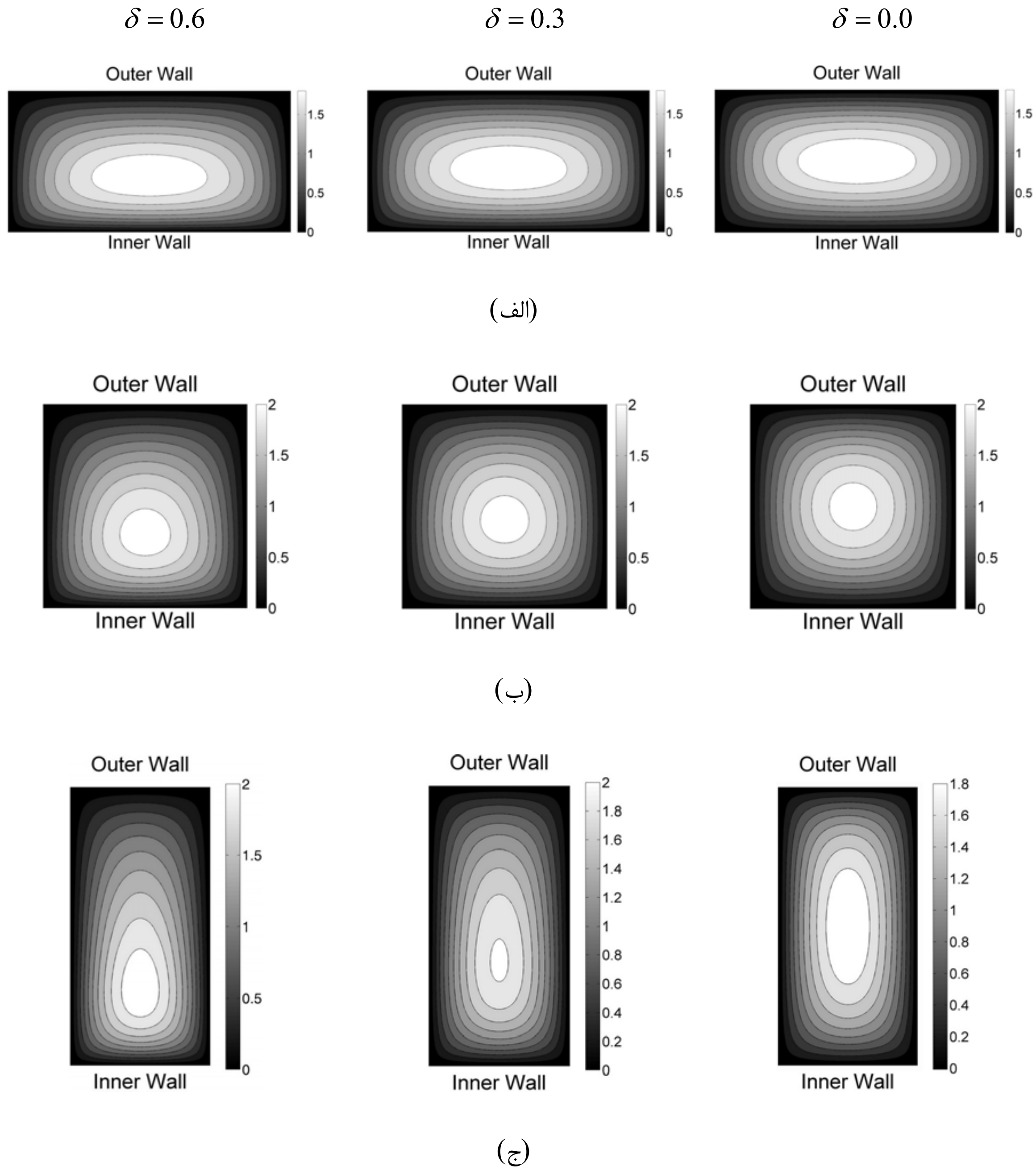
$$a_n I_1\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)+b_n K_1\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)+\frac{32Rb^2}{n^3\pi^3 r_o}[1-(-1)^n]=0 \qquad (۳-۲۲-۲)$$

پاسخ دستگاه معادله فوق از قرار زیر است [۱۲۵]:

$$a_n=\frac{32Rb^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]\left\{\frac{\frac{1}{r_i}K_1\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)-\frac{1}{r_o}K_1\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)}{I_1\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)K_1\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)-I_1\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)K_1\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)}\right\} \qquad (۳-۲۳-۱)$$

$$b_n=\frac{32Rb^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]\left\{\frac{-\frac{1}{r_i}I_1\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)+\frac{1}{r_o}I_1\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)}{I_1\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)K_1\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)-I_1\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)K_1\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)}\right\} \qquad (۳-۲۳-۲)$$

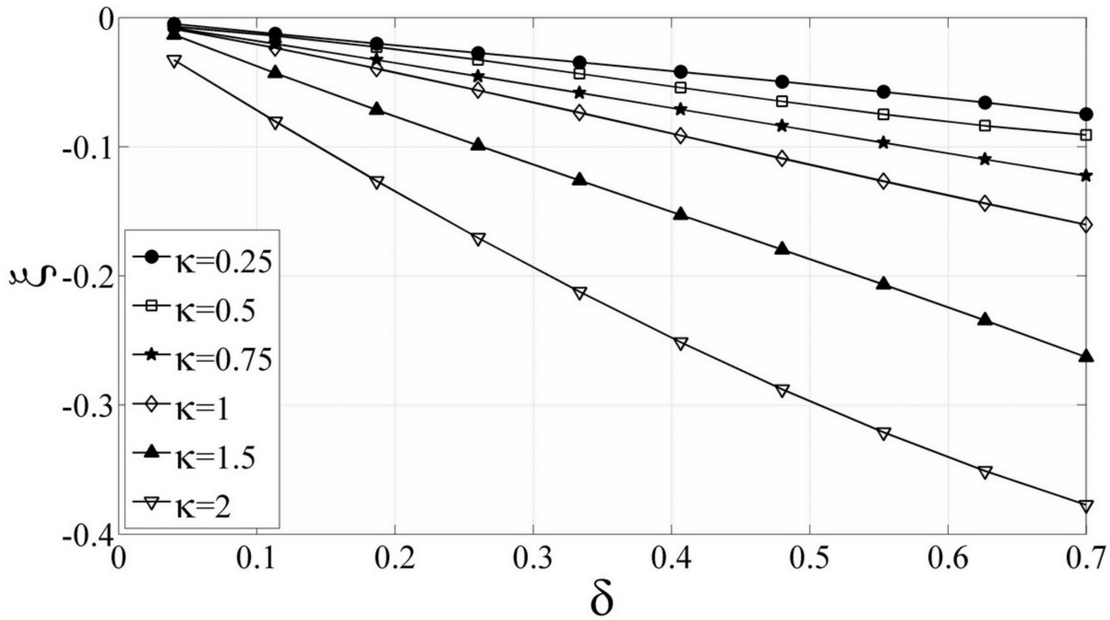
بنابراین با استفاده از روابط (۳-۲۱) و (۳-۲۳) می توان توزیع سرعت محوری جریان خزشی در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی را بدست آورد. مطابق رابطه (۳-۲۱)، توزیع سرعت مستقل از اثر اختلاف تنش های نرمال بدست آمده است. به عبارت دیگر با فرض ضعیف بودن سرعت جریانهای ثانویه، اثر اختلاف تنش های نرمال در سرعت محوری از مرتبه ε بوده و حل بدست آمده مشابه حل میدان جریان خزشی سیال نیوتنی در کانال خمیده است. در شکل (۳-۱) نسبت توزیع سرعت محوری به سرعت بالک جریان (v_θ/U) در نسبت های ابعادی (κ) و نسبت های انحنای (δ) مختلف نشان داده شده است. مطابق شکل، به دلیل فقدان اثر نیروی گریز از مرکز و بزرگتر بودن اثر گرادیان فشار در نزدیکی دیواره داخلی (جمله C/r را در معادله (۳-۱۴) ببینید)، ماکزیمم مقدار سرعت محوری به سمت دیواره داخلی متمایل شده است. مطابق شکل، با افزایش نسبت انحنا (تندتر شدن انحنا)، میزان تمایل توزیع سرعت محوری به سمت دیواره داخلی بیشتر می شود. همچنین در یک نسبت انحنای معین، افزایش نسبت ابعادی منجر به تمایل بیشتر توزیع سرعت محوری به سمت دیواره داخلی می شود.



شکل (۳-۱): توزیع سرعت محوری در نسبت های ابعادی و نسبت های انحنای مختلف (v_θ / U)
(الف): $\kappa = 0.5$, (ب): $\kappa = 1.0$ و (ج): $\kappa = 2.0$

در شکل (۳-۲)، موقعیت ماکزیمم سرعت محوری بر حسب نسبت انحنا و در نسبت های ابعادی مختلف نشان داده شده است. به دلیل متقارن بودن میدان جریان نسبت به صفحه $z = b/2$، این

موقعیت بر روی این خط تقارن قرار دارد. در اینجا موقعیت ماکزیمم سرعت محوری نسبت به مرکز مقطع کانال سنجیده شده است ($\zeta = r - R$). بنابراین منفی بودن مقدار ζ مبین متمایل بودن این موقعیت به سمت دیواره داخلی است. مطابق شکل، ازدیاد نسبت انحنا و نسبت ابعادی منجر به تمایل بیشتر سرعت محوری به سمت دیواره داخلی می شود.



شکل (۳-۲): موقعیت ماکزیمم سرعت محوری نسبت به مرکز مقطع کانال ($\zeta = r - R$)
بر حسب نسبت انحنا و در نسبت های انحنای مختلف

همچنین دبی جریان خزشی در کانال خمیده را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$Q_c = \int_A v_\theta dA = \int_0^b \int_{r_i}^{r_o} v_\theta (r, z) dr dz \qquad (۳-۲۴)$$

با قرار دادن سرعت محوری از رابطه (۳-۲۱) در رابطه (۳-۲۴) و محاسبه انتگرال مربوطه، رابطه زیر برای دبی جریان خزشی در کانال خمیده بدست می آید [۱۲۵]:

$$Q_c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^2\left[1-(-1)^n\right]}{n^2\pi^2}\left\{a_n\left[\frac{I_0\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)-}{I_0\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)}\right]-b_n\left[\frac{K_0\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)-}{K_0\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)}\right]+\frac{32Rb\left[1-(-1)^n\right]}{n^2\pi^2}Ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)\right\} \qquad (۲۵-۳)$$

با استفاده از رابطه فوق می توان نسبت مقاومت انحنا در برابر جریان را نیز تحقیق نمود. نسبت مقاومت انحنا در برابر جریان بصورت نسبت افت فشار جریان سیال مورد نظر در کانال خمیده به جریان سیال نیوتنی در کانال مستقیم در دبی یکسان تعریف می شود. بنابراین در افت فشار یکسان، این نسبت بصورت نسبت عکس دبی این دو جریان نیز قابل بیان است [۱۲۵]:

$$\frac{f_c}{f_s}=\left(\frac{Q_c}{Q_s}\right)^{-1} \qquad (۲۶-۳)$$

در رابطه فوق، Q_c دبی جریان سیال مورد نظر در کانال خمیده و Q_s دبی جریان نیوتنی در کانال مستقیم است. شایان ذکر است که رابطه سرعت محوری جریان سیال نیوتنی در کانال مستقیم از رابطه زیر بدست می آید [۱۱۷]:

$$w_s(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_{n,s}\cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)+b_{n,s}\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)+\frac{32b^2}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right]\right\}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad (۲۷-۳)$$

ضرایب، معادله فوق نیز روابط زیر بدست می آیند [۱۱۷]:

$$a_{n,s}=\frac{32b^2}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n-1\right] \qquad (۱-۲۸-۳)$$

$$b_{n,s}=\frac{32b^2}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n-1\right]\left\{\frac{1-\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\right\} \qquad (۲-۲۸-۳)$$

با اعمال رابطه (۳-۲۷) در رابطه (۳-۲۴) و محاسبه انتگرال مربوطه، رابطه زیر برای دبی جریان سیال نیوتنی در کانال مستقیم دارای مقطع مستطیلی بدست می آید [۱۱۷]:

$$Q_s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^2\left[1-(-1)^n\right]}{n^2\pi^2}\left\{a_{n,s}\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)-b_{n,s}\left[1-\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\right]+\frac{32ab\left[1-(-1)^n\right]}{n^2\pi^2}\right\} \tag{۲۹-۳}$$

شایان ذکر است که مطابق قضیه لانگلویس، ریولین و پیپکین[1] در مورد جریان مستقیم الخط[2] سیال مرتبه دو، میدان سرعت جریان مستقیم الخط سیال نیوتنی و مرتبه دو نظیر یکدیگر است (بخش ۲-۳-۳ را ببینید). بنابراین روابط (۳-۲۷) تا (۳-۲۹) به طور دقیق (بطور هیچگونه تقریبی) برای جریان سیال مرتبه دو نیز قابل استفاده هستند.

با اعمال روابط (۳-۲۵) و (۳-۲۹) در رابطه (۳-۲۶)، نسبت مقاومت جریان خزشی در کانال خمیده به کانال مستقیم بدست می آید [۱۲۵]:

$$\frac{f_c}{f_s}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^2}\left\{a_{n,s}\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)-b_{n,s}\left[1-\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\right]+\frac{32ab\left[1-(-1)^n\right]}{n^2\pi^2}\right\}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^2}\left\{a_n\left[I_0\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)-I_0\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)\right]-b_n\left[K_0\left(\frac{n\pi r_o}{b}\right)-K_0\left(\frac{n\pi r_i}{b}\right)\right]+\frac{32Rb\left[1-(-1)^n\right]}{n^2\pi^2}Ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)\right\}} \tag{۳۰-۳}$$

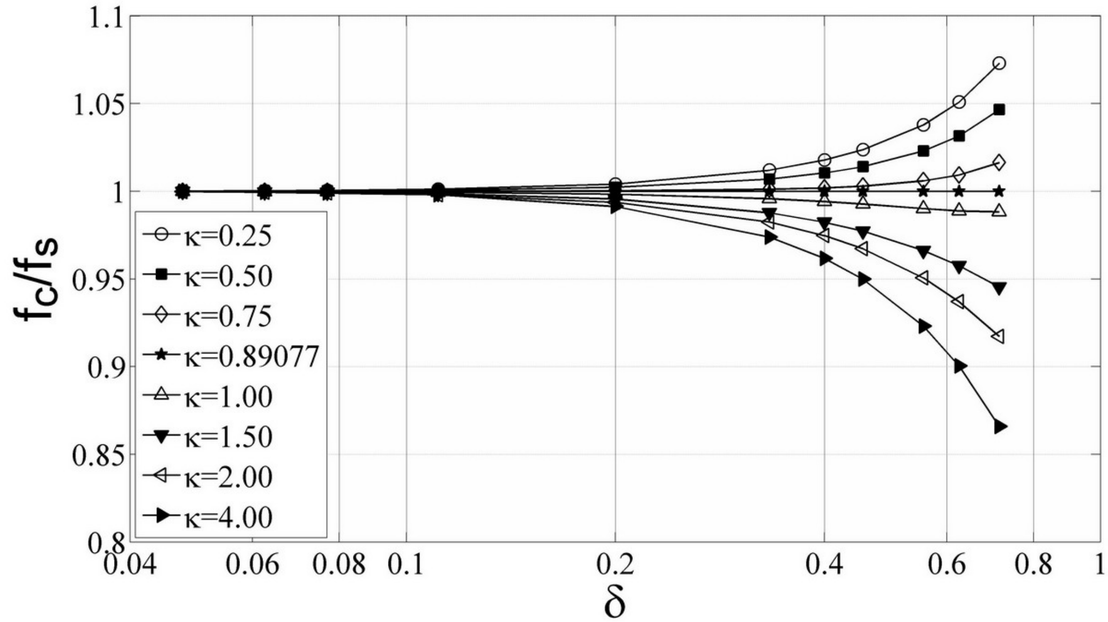
در شکل (۳-۳) نسبت مقاومت جریان بر حسب نسبت انحنا و در نسبت های ابعادی مختلف نشان داده شده است. مطابق شکل، در تمامی نسبت های ابعادی، با کاهش نسبت انحنا به سمت صفر (افزایش شعاع انحنای کانال به سمت بی نهایت)، مقدار نسبت مقاومت به سمت یک میل می کند. به عبارت دیگر در شعاع انحنای بی نهایت، حل بدست آمده از رابطه (۳-۲۵) به سمت حل جریان در کانال مستقیم نزدیک می شود. همچنین در نسبت های ابعادی کوچکتر از ۰/۲۵، مقدار نسبت مقاومت چندان دستخوش تغییر نمی شود و تقریباً مستقل از نسبت ابعادی باقی می ماند. این موضوع بیانگر آن است که در نسبت های ابعادی کوچکتر از ۰/۲۵، جریان در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی به سمت جریان بین دو صفحه خمیده میل می کند. مطابق شکل، در نسبت ابعادی ۰/۸۹۰۷۷، نسبت مقاومت مستقل از نسبت انحنا و همواره برابر یک است. به عبارت دیگر در این نسبت ابعادی، دبی جریان در هر شعاع

1. Langlois, Rivlin and Pipkin
2. Rectilinear flow

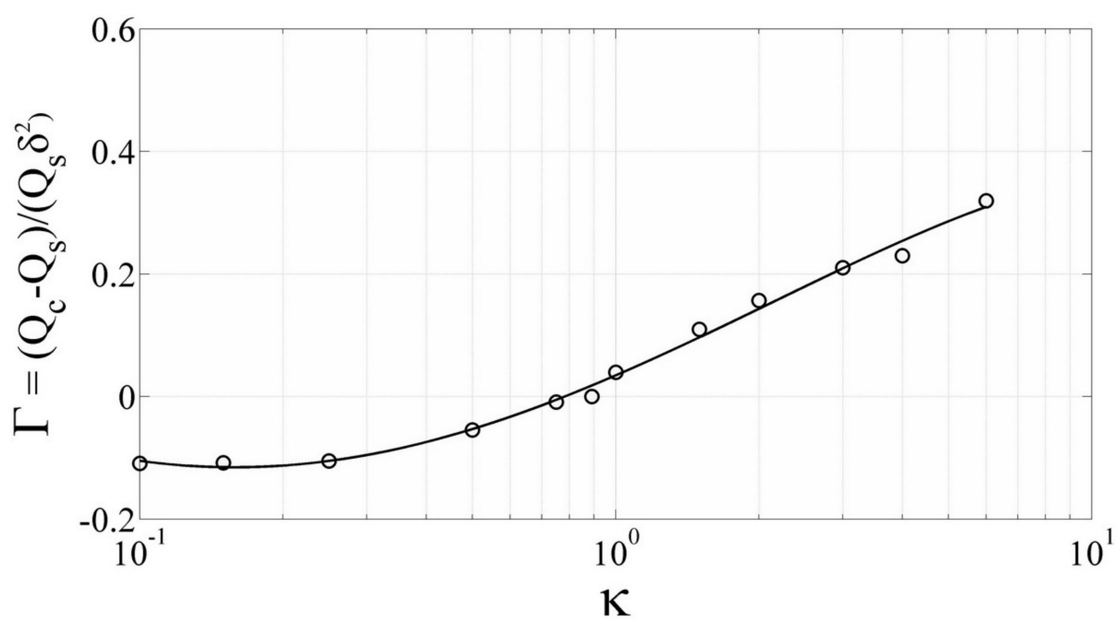
انحنایی مشابه دبی در کانال مستقیم است. در نسبت های ابعادی کمتر از ۰/۸۹۰۷۷ میزان مقاومت در کانال خمیده از کانال مستقیم بیشتر است. عکس این حالت نیز برای نسبت های ابعادی بیشتر از ۰/۸۹۰۷۷ وجود دارد! کمتر بودن میزان مقاومت جریان خزشی در کانال خمیده نسبت به کانال مستقیم در نسبت های ابعادی بیشتر از ۰/۸۹۰۷۷ پدیده جالب توجهی است که پیشتر در جریان خزشی سیالات نیوتنی [۳۸]، سیال مرتبه دو [۴۳]، سیال فوق همرفتی ماکسول [۴۳] و سیال اولدروید-بی [۴۶] در لوله های خمیده مدور نیز گزارش شده بود. شایان ذکر است که این تحقیقات با استفاده از روش حساب اختلالات و فرض بسط نسبت انحنای جریان انجام شده و این پاسخ ها تنها در نسبت های انحنای کوچکتر از ۰/۲ صادق است، حال آنکه در اینجا پاسخ های بدست آمده برای کانال خمیده مستطیلی در هر نسبت انحنایی قابل به کار گیری است. با استفاده از روش حساب اختلالات می توان نشان داد که در نسبت های انحنای کوچک (نسبت های انحنای کوچکتر از ۰/۲) رابطه زیر برای دبی برقرار است:

$$Q_c = Q_s \left(1 + \Gamma \delta^2\right) \qquad (۳۱-۳)$$

مطابق رابطه فوق، در نسبت های انحنای کوچک، دبی جریان با توان دوم نسبت انحنا متناسب است. همچنین Γ مقدار ثابتی است که وابسته به خواص سیال است. توپک اوقلو [۳۸] نشان داد که مقدار Γ برای جریان سیال نیوتنی در لوله خمیده برابر ۰/۰۲۰۸۳۳ است. در اینجا با استفاده از روابط (۳-۲۵) و (۳-۲۹) مقدار پارامتر Γ برای جریان در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی تحقیق شده است. با استفاده از روابط فوق مشاهده می شود که در ناحیه $\delta < 0.2$، رابطه (۳-۳۱) بطور تقریبی برقرار است. به عبارت دیگر برای جریان در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی نیز دبی جریان بطور تقریبی با توان دوم نسبت انحنا متناسب است. در شکل (۳-۴) مقدار پارامتر Γ بر حسب نسبت ابعادی در $\delta < 0.2$ نشان داده شده است. مطابق شکل در نسبت ابعادی ۰/۸۹۰۷۷ مقدار Γ برابر صفر است. همچنین در نسبت ابعادی کمتر از ۰/۲۵ مقدار Γ تقریباً ثابت است.



شکل (۳-۳): نسبت مقاومت جریان بر حسب نسبت انحنا و در نسبت های ابعادی مختلف [۱۲۵]



شکل (۳-۴): پارامتر Γ بر حسب نسبت ابعادی در $\delta < 0.2$

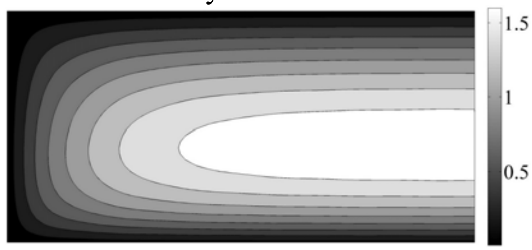
در ادامه محدوده صحت نتایج بدست آمده برای میدان جریان خزشی سیال مرتبه دو در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی تحقیق شده است. از آنجا که اثر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم در انحناهای تندتر (نسبت های انحنای بزرگتر) بیشتر است لذا در اینجا محدوده درستی روابط در یک نسبت انحنای بزرگ $\delta = 0.5$ بررسی می شود. برای این منظور نتایج حل تحلیلی با نتایج حاصل از حل عددی معادلات کامل حاکم بر جریان (معادلات (۲-۱۰)) مورد مقایسه قرار گرفته و انحراف بین این دو پاسخ بررسی شده است. در حل عددی، یک عدد رینولدز بسیار کوچک برای شبیه سازی جریان خزشی به کار گرفته شده است ($\mathrm{Re} = 0.01$). در اینجا برای بررسی شدت جریانهای ثانویه از پارامتر $S_{\max}$ استفاده شده است. این پارامتر بصورت نسبت ماکزیمم سرعت جریانهای ثانویه به سرعت بالک جریان اصلی (U) تعریف می شود:

$$S_{\max} = \frac{Max\left\{\sqrt{{v_r}^2 + {v_z}^2}\right\}}{U} \tag{۳۲-۳}$$

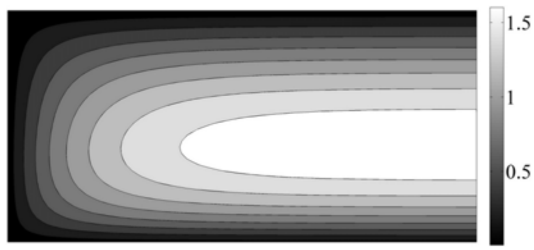
در شکل (۳-۵) توزیع سرعت محوری در $\mathrm{Re} = 0.01,\ \kappa = 0.25,\ \delta = 0.5$ و در مقادیر مختلف اختلاف تنش های نرمال اول و دوم نشان داده شده است. در اینجا به دلیل وجود تقارن، توزیع سرعت تنها در نیمی از مقطع کانال نشان داده شده است. مطابق شکل، در محدوده $\Psi_1 \le 0.5$ و $|\Psi_2| \le 0.2,$، متوسط انحراف حل تحلیلی از حل عددی کمتر از ۱٪ بوده و از لحاظ کیفی اختلاف مشهودی بین این دو حل مشاهده نمی شود. اما در حالت $\Psi_1 = 3,\ \Psi_2 / \Psi_1 = 0.0$، شدت جریانهای ثانویه به ۹/۶۳٪ و مقدار متوسط قدر مطلق خطا به ۳/۵۲٪ افزایش پیدا می کند. در این حالت توزیع سرعت محوری دارای تفاوت مشخصی نسبت به حل تحلیلی است.

در جدول (۳-۲) متوسط قدر مطلق خطا و ماکزیمم شدت جریانهای ثانویه در نسبت های انحنا و مقادیر مختلف اختلاف تنش نرمال اول و دوم ارائه شده است. مطابق داده های جدول (۳-۲)، درصورتیکه مقدار سرعت جریانهای ثانویه به حدود ۱۰٪ سرعت جریان اصلی برسد، متوسط خطای حل تحلیلی ارائه شده کمتر از ۴٪ است.

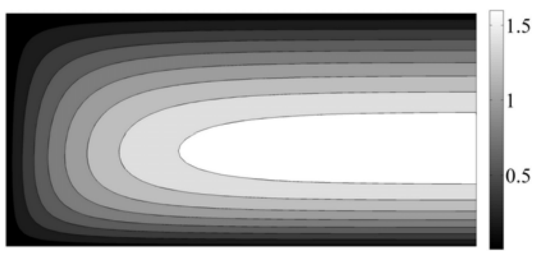
Analytical Solution



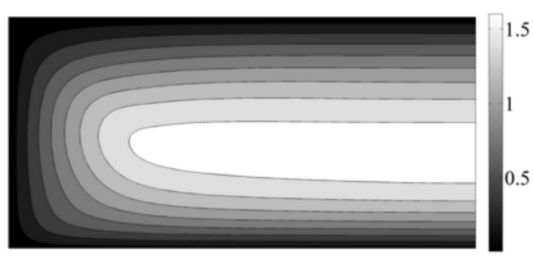
Numerical Solution: $\Psi_1 = 0.1,\ \Psi_2 / \Psi_1 = -10\%,\ \ S_{\max} = 0.29\%,\ \ Mean\ Error = 0.70\%$



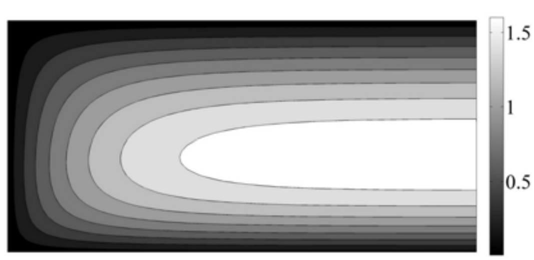
Numerical Solution: $\Psi_1 = 0.5,\ \Psi_2 / \Psi_1 = 0.0,\ \ S_{\max} = 1.83\%,\ \ Mean\ Error = 0.72\%$



Numerical Solution: $\Psi_1 = 3,\ \Psi_2 / \Psi_1 = 0.0,\ \ S_{\max} = 9.63\%,\ \ Mean\ Error = 3.52\%$



Numerical Solution: $\Psi_1 = 0.0,\ \Psi_2 = -0.2,\ \ S_{\max} = 1.51\%,\ \ Mean\ Error = 0.71\%$



شکل (۳-۵): توزیع سرعت در نیمی از مقطع کانال در $\mathrm{Re} = 0.01,\ \kappa = 0.25,\ \ \delta = 0.5$

مطابق داده های این جدول در شرایط زیر، خطای حاصل از حل تحلیلی کمتر از ۱٪ است [۱۲۵]:

$$\Psi_1 \le 0.5 \;\; \& \;\; |\Psi_2| \le 0.2 \qquad (۳-۳۳)$$

شرایط فوق برای نسبت انحنای $\delta = 0.5$ بدست آمده است. لذا به سادگی می توان این شرایط را به نسبت های انحنای کوچکتر که در آنها اثر خواص الاستیک بر جریان ضعیفتر است تعمیم داد. همچنین شبیه سازی های عددی برای اعداد رینولدز کوچکتری مانند 1×10^{-3} و 1×10^{-4} انجام شده و مشاهده گردید که شرایط (۳-۳۳) مستقل از عدد رینولدز است. بنابراین بطور کلی می توان ادعا نمود که شرایط (۳-۳۳) برای $\mathrm{Re} \ll 1,\; 0.25 \le \kappa \le 4$ و $\delta \le 0.5$ صادق است. علاوه بر شرایط ذکر شده، مطابق قضیه گزیکس در مورد جریان خزشی سیال مرتبه دو (به بخش (۳-۳-۲) مراجعه شود)، حل تحلیلی ارائه شده برای جریان خزشی در حالت خاص $\Psi_2 = -\Psi_1 / 2$ (مستقل از مقدار Ψ_1) نیز صادق است.

جدول (۳-۲): میزان متوسط قدرمطلق خطای حل تحلیلی نسبت به
حل عددی در نسبت های انحنا و مقادیر مختلف اختلاف تنش نرمال اول و دوم [۱۲۵]

$\Psi_1 = 0,\; \Psi_2 = -0.2$	$\Psi_1 = 2,\; \Psi_2 = 0.0$	$\Psi_1 = 1,\; \Psi_2 = 0.0$	$\Psi_1 = 0.5,\; \Psi_2 = 0.0$	$\Psi_1 = 0.1,\; \Psi_2 = 0.0$	$\Psi_1 = 0.1,\; \Psi_2 = -0.01$	κ
0.7073 1.5099	2.0670 7.3040	0.9495 3.7116	0.7210 1.8299	0.6953 0.3657	0.6953 0.2922	0.25
0.5361 2.2601	4.2594 10.1574	1.2868 5.5041	0.6009 2.7273	0.4430 0.5461	0.4418 0.4370	0.5
0.6121 4.2252	10.7954 21.4435	2.6628 10.0257	0.8091 5.0794	0.2819 1.0218	0.2768 0.8183	1
0.4589 4.5500	- -	2.0893 11.4834	0.6642 5.6025	0.2425 1.1173	0.2373 0.8946	2
0.3890 3.1549	- -	1.0041 7.9232	0.4488 3.9170	0.2998 0.7829	0.2980 0.6268	4

در هر نسبت ابعادی، سطر اول معرف درصد متوسط قدر مطلق خطا و سطر دوم نیز معرف درصد مقدار شدت جریانهای ثانویه ($S_{\max}$) است.

سلول های خالی جدول مربوط به عدم امکان همگرایی حل عددی است.

۳-۳- حل تحلیلی جریان و انتقال حرارت در لوله های خمیده

همانگونه که در بخش ۳-۱ گفته شد، یکی از اهداف این تحقیق بررسی اثر ثابت های زمانی رهایی از تنش و زمان تاخیر سیال بر جریان و انتقال حرارت در مجاری خمیده است. اثر متضاد این دو ثابت زمانی بر میدان جریان، نخستین بار در طی شبیه سازی های عددی مشاهده گردید و لذا برای اثبات این اثر، تصمیم به استفاده از روش تحلیلی گرفته شد. هرچند تاکنون پاسخ های تحلیلی برای میدان جریان اینرسی و خزشی سیال فوق همرفتی ماکسول و محلول اولدروید-بی و همچنین جریان خزشی سیال مرتبه دو در لوله های خمیده ارائه شده اما تاکنون پاسخ کاملی برای جریان اینرسی سیال مرتبه دو گزارش نشده است. با استفاده از حل تحلیلی حاصل از جریان اینرسی سیال مرتبه دو می توان اثر ثابت زمانی تاخیر سیال بر میدان جریان را تحقیق نمود. از آنجا که بدست آوردن پاسخ تحلیلی برای میدان جریان در کانال خمیده دارای مقطع غیرمدور امر بسیار دشواری است (حتی پاسخی تحلیلی برای جریان سیال نیوتنی نیز در این هندسه گزارش نشده است)، لذا در این تحقیق این اثر در کانال خمیده مدور بررسی شده است. از این رو پایان نامه کارشناسی ارشدی برای آقای امین احمدی جنیدی تعریف شده و مشترکاً نسبت به حل این مساله اقدام گردید. این بخش، نتایج حاصل از مقالاتی است که در این مورد به چاپ رسیده و یا در دست چاپ است.

۳-۳-۱- *حل میدان جریان*

در شکل (۲-۱) هندسه جریان سیال مرتبه دو در لوله خمیده دارای مقطع مدور نشان داده شده است. مطابق شکل، در اینجا از دستگاه مختصات ترویدال برای مطالعه جریان استفاده می شود. در این تحقیق، روش حساب اختلالات برای تحلیل میدان جریان به کار گرفته شده و مولفه های سرعت و تنش بصورت بسطی از نسبت انحنا تعریف شده است [۱۲۷]:

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n w^{(n)}(r,\phi),\qquad \psi=\sum_{n=1}^{\infty}\delta^n\psi^{(n)}(r,\phi),\qquad \tau=\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n\tau^{(n)}(r,\phi) \tag{۳۴-۳}$$

با توجه به رابطه فوق، سرهای سرعت محوری و تنش از جمله مرتبه صفر شروع می شوند اما جمله تابع جریانهای ثانویه از مرتبه یک شروع شده است. زیرا پاسخ جمله مرتبه صفر (δ^0) مربوط به حالت لوله مستقیم مدور بوده و در این حالت جریان ثانویه ای وجود ندارد ($\psi^{(0)}=0$).

شرایط مرزی نیز شامل شرط مرزی عدم لغزش بر روی جداره ها است. این شرط مرزی برای جملات سری فوق بصورت زیر قابل بیان است [۱۲۷]:

$$w^{(n)}=\psi^{(n)}=\frac{\partial\psi^{(n)}}{\partial r}=0 \quad \text{at} \quad r=1 \tag{۳۵-۳}$$

رابطه فوق مبین آن است که در شرایط عدم لغزش، سری های مربوط به سرعت محوری، تابع جریانهای ثانویه و مشتق آن نسبت به r متحد با صفر هستند.

۳-۳-۱-۱- حل مرتبه δ^0

برای یافتن جمله مرتبه صفر سرعت محوری بایستی سریهای مربوط به سرعت محوری و میدان تنش را از رابطه (۳-۳۴) در رابطه (۲-۴۸) قرار داد و نتیجه حاصله را بر حسب δ^0 مرتب نمود. به این ترتیب معادله زیر برای ترمهای مرتبه صفر حاصل می شود:

$$\frac{\partial{\tau_{rs}}^{(0)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial{\tau_{\phi s}}^{(0)}}{\partial\phi}+\frac{{\tau_{rs}}^{(0)}}{r}=-4 \tag{۳۶-۳}$$

مولفه های تنش τ_{rs} و $\tau_{\phi s}$ سیال مرتبه دو از روابط (۲-۷۲) تا (۲-۷۴) بدست می آیند. به این ترتیب با محاسبه جمله مرتبه صفر این دو مولفه تنش بر حسب سرعت محوری و قرار دادن نتیجه آن در رابطه (۳-۳۶)، معادله مربوط به جمله مرتبه صفر سرعت محوری حاصل می شود [۱۲۷]:

$$\nabla^2 w^{(0)}=-4 \tag{۳۷-۳}$$

با اعمال شرط عدم لغزش بر روی جداره لوله، رابطه زیر برای سرعت محوری مرتبه صفر بدست می آید:

$$w^{(0)} = 1 - r^2 \qquad (۳-۳۸)$$

توزیع سرعت بدست آمده در رابطه (۳-۳۸) همان توزیع سرعت سیال نیوتنی در لوله مستقیم است. از آنجا که جملات مرتبه صفر مستقل از انحنا هستند، لذا پاسخ میدان جریان به سمت رابطه جریان در لوله مستقیم همگرا شده است. مطابق قضیه لانگلویس، ریولین و پیپکین در مورد جریان مستقیم الخط (بخش ۲-۳-۳ را ببینید)، حل فوق به توزیع سرعت سیال مرتبه دو در لوله مستقیم نیز قابل تعمیم است.

۳-۳-۱-۲- حل مرتبه δ^1

با قرار دادن رابطه (۳-۳۴) در معادله تابع جریان (معادله (۲-۴۹)) و مرتب نمودن این نتیجه تا مرتبه δ^1، معادله مربوط به $\psi^{(1)}$ بدست می آید. پاسخ این معادله به شکل زیر است [۱۲۷]:

$$\psi^{(1)} = g_1(r)\sin(\phi) \qquad (۳-۳۹)$$

در نهایت پس از اعمال شرط مرزی عدم لغزش (رابطه (۳-۳۵))، رابطه زیر برای $g_1(r)$ حاصل می شود:

$$g_1(r) = \frac{1}{288} r {w^{(0)}}^2 \left(\mathrm{Re}(r^2 - 4) - 24We\right) \qquad (۳-۴۰)$$

به همین ترتیب معادله (۲-۴۸) را نیز بر حسب δ^1 مرتب کرده و با حل معادله حاصل، پاسخ زیر برای $w^{(1)}$ بدست می آید [۱۲۷]:

$$w^{(1)} = f_1(r)\cos(\phi) \qquad (۳-۴۱)$$

پس از اعمال شرایط مرزی، تابع $f_1(r)$ بصورت زیر خواهد بود [۱۲۷]:

$$f_1(r) = -\frac{1}{11520} r w^{(0)} \begin{pmatrix} 8640 + \mathrm{Re}^2(r^6 - 9r^4 + 21r^2 - 19) + 1920(r^2 - 1)We^2 \\ + \mathrm{Re}(-120r^4 + 520r^2 - 440)We \end{pmatrix} \qquad (۳-۴۲)$$

شایان ذکر است که روابط مربوط به جملات مرتبه اول میدان سرعت جریان سیال مرتبـه دو در لولـه خمیده (روابط (۳-۳۹) تا (۳-۴۲)) نخـستین بـار توسـط جیتچـوت و رابرتـسون [۴۸] ارائـه شـده اسـت. محاسبه ترمهای مرتبه اول تنها برای آشکار نمودن جریانهای ثانویه در مجاری خمیده مناسب است و ایـن حل منجر به محاسبه دقیق میدان سرعت نمی شود. واضح است که انتگرال رابطه (۳-۴۱) در سطح مقطع لوله برابر صفر است و بنابراین محاسبه میزان تغییرات دبی جریان در لوله خمیده نسبت به لوله مستقیم از محاسبه جمله مرتبه یک برای سرعت محوری امکانپذیر نبوده و نیازمنـد محاسـبه ترمهـای مرتبـه بـالاتر است. همچنین با محاسبه جملات مرتبه بالا پاسخ های دقیق تری برای جریانهای ثانویه و سرعت محوری و همچنین پدیده متمایل شدن توزیع سرعت محوری به سمت دیواره سمت انحنای خارجی مجرا حاصـل می شود که با فیزیک جریان در مجاری خمیـده سـازگار اسـت. از ایـن رو بـرخلاف تحقیـق جیتچـوت و رابرتسون [۴۸]، تحقیق اخیر در مرتبه اول تحلیل متوقف نشده و ترمهای مرتبـه دوم نیـز محاسـبه شـده است. البته محاسبه این ترمها دشوارتر بوده و به پاسخ های پیچیده تری منجر می شود.

۳-۳-۱-۳- *حل مرتبه* δ^2

روند تعیین معادلات و محاسبه جملات مرتبه دو کاملاً مشابه محاسبه جملات مرتبه اول است با این تفاوت که جهت بدست آوردن معادلات مربوطه لازم است که روابط (۳-۳۴) در معادلات حاکم قرار داده شوند و جملات آنها بر حسب δ^2 مرتب سازی شوند. به این ترتیب با حل معادلات دیفرانسیل حاصله و اعمال شرایط مرزی نتایج زیر برای سرعت محوری و جریانهای ثانویه بدست می آید [۱۳۷]:

$$\psi^{(2)} = g_2(r)\sin(2\phi) \quad (۳-۴۳-۱)$$

$$w^{(2)} = f_{20}(r) + f_{22}(r)\cos(2\phi) \quad (۳-۴۳-۲)$$

شایان ذکر است که در اینجا، روابط (۳-۴۳) برای نخستین بار بدست آمده است. بـا توجـه بـه رابطـه (۳-۴۳-۲) می توان دریافت که انتگرال این رابطه در سطح مقطع صفر نبوده و بر خلاف جمله مرتبـه اول بـه محاسبه تغییرات دبی جریان منجر می شود. همچنین توابع g_2، f_{20} و f_{22} از روابط زیر بدست می آیند:

$$g_2(r) = -\frac{1}{464486400} r^2 w^{(0)^2} \left(\begin{array}{l} \mathrm{Re}(564480r^2 - 1290240) + \\ \mathrm{Re}^3 (5r^8 - 134r^6 + 777r^4 - 2792r^2 + 4979) + \\ \left(5160960 - 1935360r^2\right) We^3 + \\ \mathrm{Re}\left(248640r^4 - 1330560r^2 + 1659840\right) We^2 + \\ \mathrm{Re}^2 \left(-4224r^6 + 39712r^4 - 124672r^2 + 172944\right) We \\ -26611200 We \end{array} \right) \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

$$f_{20}(r) = w^{(0)} \left(\begin{array}{l} -\frac{3}{32} + \frac{11}{32} r^2 + \mathrm{Re}^2 (\frac{7}{230400} r^8 - \frac{17}{57600} r^6 + \frac{11}{19200} r^4 - \frac{43}{230400} r^2 - \frac{37}{57600}) \\ + \mathrm{Re}^4 (\frac{1}{106168320} r^{14} - \frac{121}{743178240} r^{12} + \frac{803}{743178240} r^{10} - \frac{4523}{1238630400} r^8 \\ + \frac{26261}{3715891200} r^6 - \frac{29179}{3715891200} r^4 + \frac{17161}{3715891200} r^2 - \frac{1373}{1238630400}) \\ + \left(\frac{1}{36} r^6 + \frac{1}{108} (-5r^4 + r^2 + 1) \right) We^4 \\ + \left(\mathrm{Re} (-\frac{11}{2880} r^8 + \frac{3}{160} r^6 - \frac{13}{540} r^4 + \frac{109}{17280} r^2 + \frac{49}{17280}) \right) We^3 \\ + \left(\begin{array}{l} \frac{1}{4} r^4 - \frac{19}{48} r^2 + \frac{7}{48} \\ + \mathrm{Re}^2 \left(\begin{array}{l} \frac{71}{414720} r^{10} - \frac{577}{414720} r^8 + \frac{3211}{829440} r^6 - \frac{401}{92160} r^4 \\ + \frac{431}{276480} r^2 + \frac{13}{92160} \end{array} \right) \end{array} \right) We^2 \\ + \left(\begin{array}{l} \mathrm{Re}^3 \left(\begin{array}{l} -\frac{13}{5806080} r^{12} + \frac{979}{34836480} r^{10} - \frac{11129}{87091200} r^8 \\ + \frac{194993}{696729600} r^6 - \frac{218147}{696729600} r^4 + \frac{107563}{696729600} r^2 \\ - \frac{13397}{696729600} \end{array} \right) \\ + \mathrm{Re} \left(-\frac{83}{4608} r^6 + \frac{341}{4608} r^4 - \frac{367}{4608} r^2 + \frac{31}{1536} \right) \end{array} \right) We \end{array} \right) \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

$$f_{22}(r)=\frac{r^2 w^{(0)}}{117050572800}\left(\begin{aligned}&\left(\begin{aligned}&36578304000+\mathrm{Re}^4\,(160r^{12}-2801r^{10}+19123r^8-\\&70547r^6+174649r^4-240206r^2+145690)+\\&\mathrm{Re}^2\,(1693440r^6-125314560r^4+259519680r^2\\&-196015680)\end{aligned}\right)\\&+\left(5202247680r^4-11054776320r^2+5419008000\right)We^4\\&+\mathrm{Re}\left(\begin{aligned}&-392878080r^6+2343720960r^4-3894912000r^2\\&+1835688960\end{aligned}\right)We^3\\&+\left(\begin{aligned}&39016857600r^2-32514048000\\&+\mathrm{Re}^2\left(\begin{aligned}&9918720r^8-92534400r^6+\\&303730560r^4-441806400r^2\\&+218796480\end{aligned}\right)\end{aligned}\right)We^2\\&+\left(\begin{aligned}&\mathrm{Re}^3\left(\begin{aligned}&-71316r^{10}+960876r^8-4772124r^6+\\&12373956r^4-17566164r^2+10024812\end{aligned}\right)\\&+\mathrm{Re}\left(-1280240640r^4+5222568960r^2-3434296320\right)\end{aligned}\right)We\end{aligned}\right) \qquad (۴۶-۳)$$

۳-۳-۱-۴- تعیین دبی جریان

دبی جریان را می توان به سادگی از انتگرال گیری از توزیع سرعت محوری تا مرتبه دو بدست آورد:

$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^1 w\ r\,dr\,d\phi \qquad (۴۷-۳)$$

با استفاده از پاسخ بدست آمده در بخش های ۳-۳-۱-۱ تا ۳-۳-۱-۳ برای ترمهای سرعت محوری، می‌توان مقدار مناسبی از w را از طریق رابطه زیر تا مرتبه δ^2 بدست آورد [۱۲۷]:

$$w=w^{(0)}(r)+\delta f_1(r)\cos\phi+\delta^2\left(f_{20}(r)+f_{22}(r)\cos 2\phi\right) \qquad (۴۸-۳)$$

با قرار دادن توزیع سرعت محوری بدست آمده از رابطه (۳-۴۸) و همچنین روابط (۳-۳۸)، (۳-۴۲)، (۳-۴۵) و (۳-۴۶) در رابطه (۳-۴۷) و محاسبه انتگرال مربوطه، می‌توان رابطه بی بعد دبی جریان را برای سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده بدست آورد [۱۲۷]:

$$Q_c = Q_s \left(1+\delta^2 \left(\begin{array}{l} \frac{1}{48}-\frac{11}{17280}\mathrm{Re}^2-\frac{1541}{4180377600}\mathrm{Re}^4+\left(\frac{1}{1290240}\mathrm{Re}^3+\frac{1}{240}\mathrm{Re}\right)We \\ +\left(\frac{1}{18}+\frac{691}{2903040}\mathrm{Re}^2\right)We^2+\left(\frac{11}{4320}\mathrm{Re}\right)We^3+\left(\frac{1}{135}\right)We^4 \end{array}\right)\right) \qquad (۴۹-۳)$$

شایان ذکر است که در انتگرالگیری از رابطه (۳-۴۸) در سطح مقطع کانال، تنها اثر انتگرال ترمهای $w^{(0)}(r)$ و $f_{20}(r)$ غیر صفر است و میزان تغییرات دبی نسبت به جریان در لوله مستقیم نیز از انتگرال جمله $f_{20}(r)$ حاصل می شود. در رابطه بالا، Q_s دبی بی بعد جریان سیال نیوتنی در لوله مستقیم در گرادیان فشاری مشابه می‌باشد که برابر $\pi/2$ است. همچنین مقدار بعد دار آن به شکل زیر است:

$$\tilde{Q}_s = \frac{\pi r_o^{\,2}}{8\eta} G \qquad (۵۰-۳)$$

باید توجه داشت که رابطه (۳-۴۹) برای مقادیر کوچک نسبت انحنا معتبر می‌باشد و در صورت افزایش عدد دین، این حل از حل واقعی انحراف می‌یابد. با حذف ترم الاستیک جریان و صفر قرار دادن عدد وایزنبرگ در رابطه (۳-۴۹)، رابطه دبی جریان اینرسی سیال نیوتنی در لوله خمیده حاصل می شود که نخستین بار توسط توپک‌اوقلو [۳۸] ارائه شده است:

$$Q_c = Q_s \left(1+\delta^2 \left(\frac{1}{48}-\frac{11}{17280}\mathrm{Re}^2-\frac{1541}{4180377600}\mathrm{Re}^4\right)\right) \qquad (۵۱-۳)$$

همچنین اگر در رابطه (۳-۴۹) مقدار عدد رینولدز به سمت صفر میل کند، میزان تغییرات دبی جریان خزشی سیال مرتبه دو که توسط بون [۴۳] و همکاران ارائه شده بدست خواهد آمد:

$$Q_c = Q_s \left(1+\delta^2 \left(\frac{1}{48}+\frac{1}{18}We^2+\frac{1}{135}We^4\right)\right) \qquad (۵۲-۳)$$

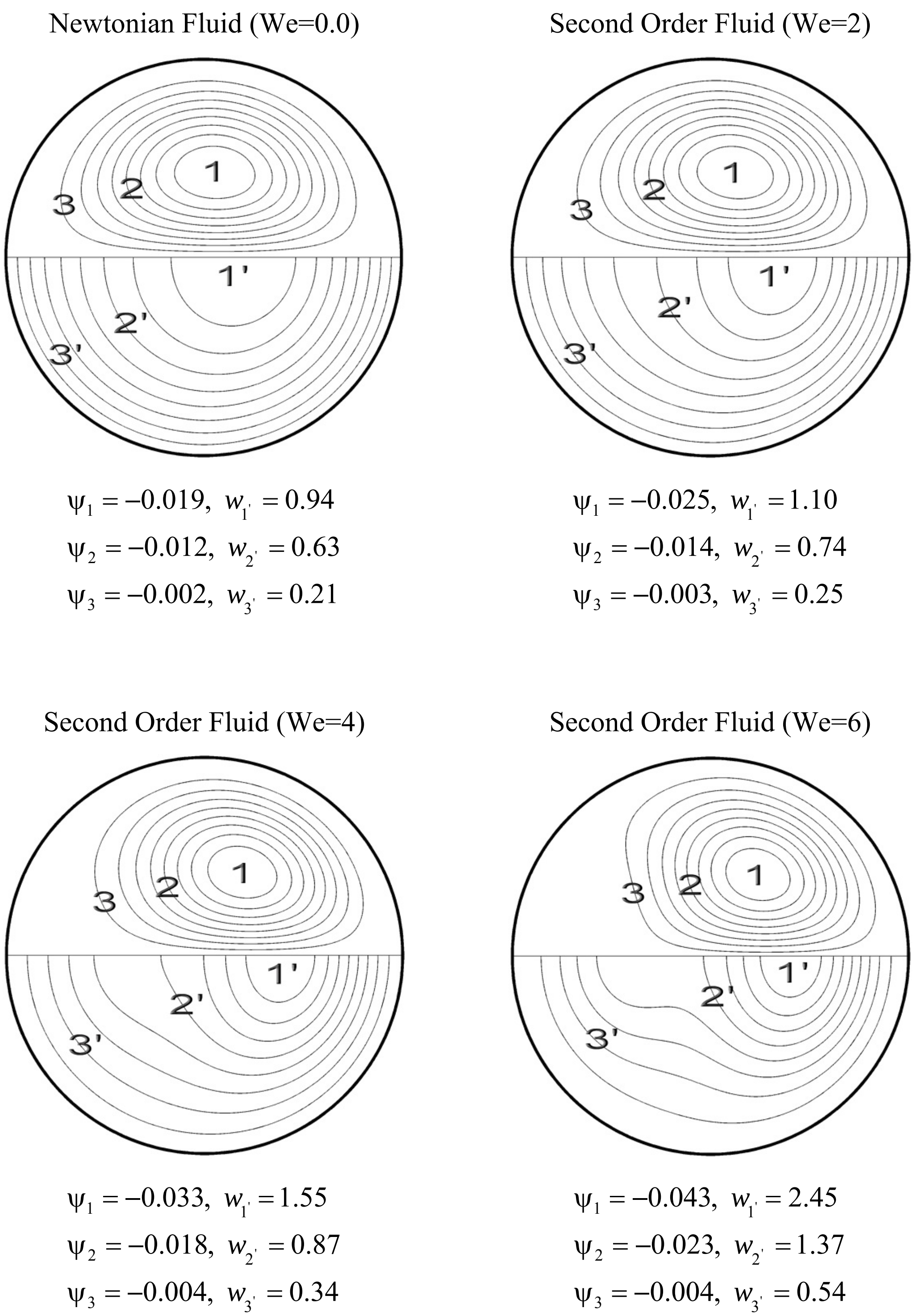
بنابراین مشاهده می شود که پاسخ بدست آمده برای جریان اینرسی سیال مرتبه دو در تحقیق اخیر (رابطه (۳-۴۹))، پاسخ های مربوط به جریان خزشی سیال مرتبه دو و جریان اینرسی نیوتنی را پوشش می دهد.

۳-۳-۱-۵- نتایج میدان سرعت

در این بخش بر اساس نتایج بدست آمده برای سیال مرتبه دو (SOF) از تحقیق اخیر و نیز سیال فوق همرفتی ماکسول (UCM) از تحقیق رابرتسون و مولر [۴۶]، بر روی اثر خواص زمان تاخیر[1] و زمان رهایی از تنش[2] سیال ویسکوالاستیک بر میدان جریان و بخصوص بر تغییرات دبی بحث شده است. از آنجا که ثابت زمانی سیال UCM، زمان رهایی از تنش و ثابت زمانی سیال مرتبه دو زمان تاخیر است، بنابراین می توان در یک هندسه، ویسکوزیته و تحت گرادیان فشار یکسان ادعا نمود که عدد وایزنبرگ در سیال UCM معرف اثر زمان رهایی از تنش و در سیال مرتبه دو معرف زمان تاخیر ماده ویسکوالاستیک است.

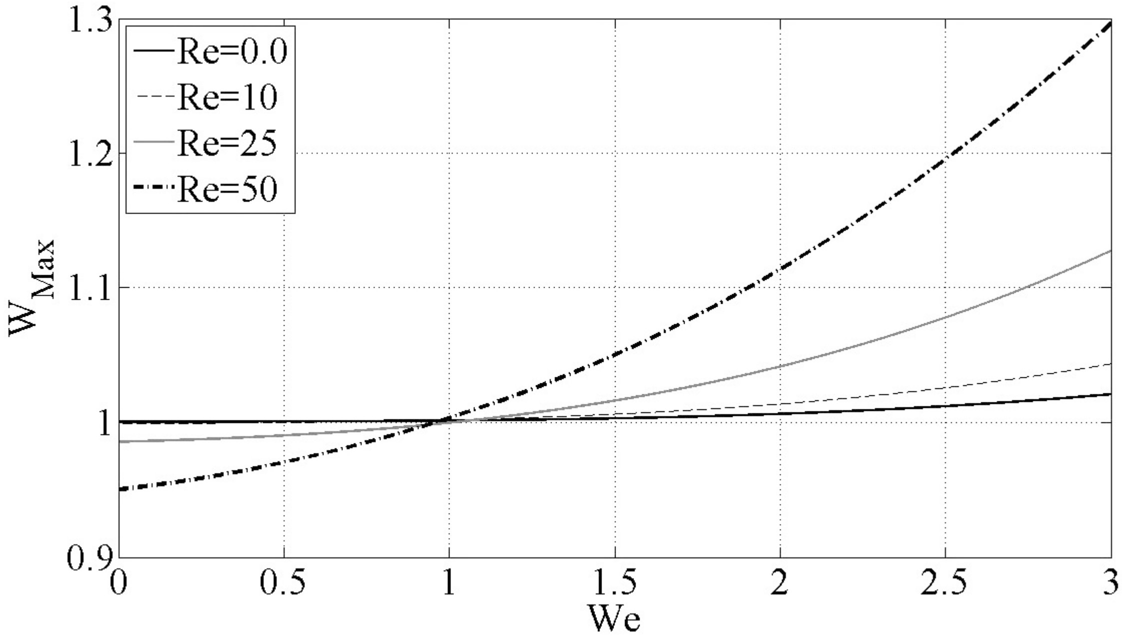
در شکل (۳-۶) خطوط جریانهای ثانویه در نیمه بالایی و توزیع سرعت محوری در نیمه پایینی مقطع کانال سیال مرتبه دو در اعداد وایزنبرگ مختلف نشان داده شده است. همچنین $\mathrm{Re}=50$ و $\delta=0.1$ فرض شده است. در این شکل سمت راست مقطع لوله معرف سمت انحنای خارجی و سمت چپ آن معرف سمت انحنای داخلی آن است. در حالت مربوط به سیال نیوتنی، وجود اثر نیروی گریز از مرکز منجر به ایجاد یک جفت جریان ثانویه شده که به جریانهای ثانویه تیلور-گورتلر معروف هستند. همچنین اثر این نیرو منجر به تمایل توده جریان و موقعیت ماکزیمم سرعت محوری به دیواره سمت انحنای خارجی شده است. مطابق شکل، با افزایش عدد وایزنبرگ سیال مرتبه دو (افزایش تاخیر)، ماکزیمم سرعت محوری و نیز شدت جریانهای ثانویه افزایش می یابد و موقعیت مرکز جریانهای ثانویه و موقعیت ماکزیمم سرعت محوری به دیواره سمت انحنای خارجی مجرا متمایل می شود. مطابق تحقیق رابرتسون و مولر [۴۶]، با افزایش زمان رهایی از تنش مدل UCM نیز شدت جریانهای ثانویه افزایش می یابد. همچنین در سیال UCM با ازدیاد زمان رهایی از تنش، موقعیت ماکزیمم سرعت محوری به دیواره سمت انحنای خارجی کانال و موقعیت مرکز جریانهای ثانویه به سمت دیواره جانبی متمایل می شود.

1. Retardation time
2. Relaxation time

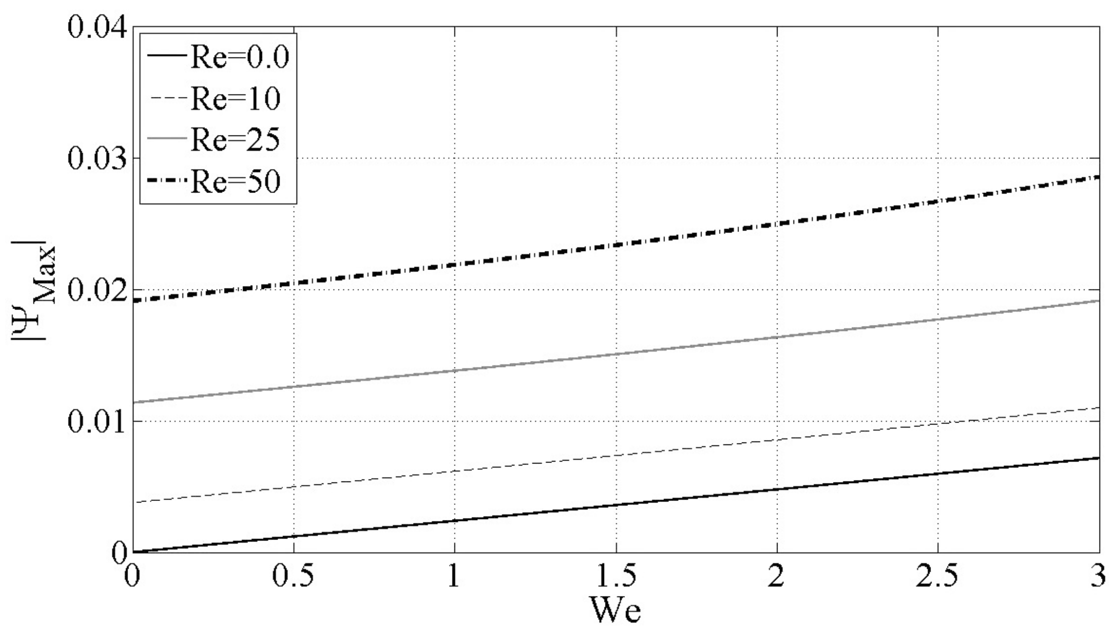


شکل (۳-۶): توزیع تابع جریانهای ثانویه (نیمه بالایی مقطع کانال با جهت چرخش پادساعتگرد) و سرعت محوری (نیمه پایینی مقطع کانال) جریان سیال مرتبه دو در اعداد وایزنبرگ مختلف ($Re = 50$ و $\delta = 0.1$) [۱۲۷]

بنابراین اثر هر دو ثابت زمانی رهایی از تنش و ثابت زمانی تاخیر بر شدت جریانهای ثانویه و تغییر سرعت محوری یکسان بوده اما اثر آنها بر تغییر موقعیت مرکز جریانهای ثانویه متفاوت است. در شکل (۳-۷) اثر عدد وایزنبرگ بر ماکزیمم سرعت جریان اصلی سیال مرتبه دو نشان داده شده است. مطابق شکل، در جریان خزشی ($\mathrm{Re}=0.0$) و در کلیه حالات مربوط به جریان اینرسی، افزایش عدد وایزنبرگ منجر به افزایش ماکزیمم سرعت محوری می شود. همچنین اثر عدد وایزنبرگ بر افزایش ماکزیمم سرعت محوری در اعداد رینولدز بزرگ بیشتر است که این مربوط به وابستگی مرتبه دوم بخش الاستیک سیال مرتبه دو به نرخ برش است. در شکل (۳-۸) اثر عدد وایزنبرگ بر ماکزیمم تابع جریانهای ثانویه سیال مرتبه دو نشان داده شده است. مطابق شکل شدت جریانهای ثانویه در جریان خزشی سیال نیوتنی ($We=0.0$ و $\mathrm{Re}=0.0$) برابر صفر است. در این حالت به دلیل ناچیز بودن اثر نیروی گریز از مرکز و اثر الاستیسیته سیال، جریانهای ثانویه وجود ندارند، اما به تدریج با افزایش عدد وایزنبرگ شدت جریانهای ثانویه زیاد می شود. چنین رفتاری در جریان اینرسی نیز مشاهده می شود. در شکل (۳-۹) اثر عدد وایزنبرگ در اعداد رینولدز مختلف، بر موقعیت ماکزیمم سرعت محوری نشان داده شده است. در اینجا، موقعیت ماکزیمم سرعت محوری روی خط تقارن مقطع جریان قرار داشته و لذا تنها اثر این پارامترها بر این موقعیت در راستای شعاع انحنای مسیر بررسی شده است. مطابق شکل، در اعداد رینولدز کوچکتر از ۱۰ و در اعداد وایزنبرگ کوچک، موقعیت ماکزیمم سرعت جریانهای ثانویه به سمت انحنای داخلی کانال متمایل است (مقدار X_{Max} منفی است). در این حالت اثر نیروی گریز از مرکز و نیروی الاستیک ناشی از اختلاف تنش نرمال اول نسبت به نیروی ویسکوز کوچکتر بوده که به تشکیل جریانهای ثانویه ای ضعیفی منجر می شود (به شکل (۳-۸) توجه کنید). در اینحالت به دلیل بزرگتر بودن مقدار گرادیان فشار محوری در نزدیکی انحنای داخلی، ماکزیمم سرعت محوری به سمت دیواره داخلی متمایل شده است.



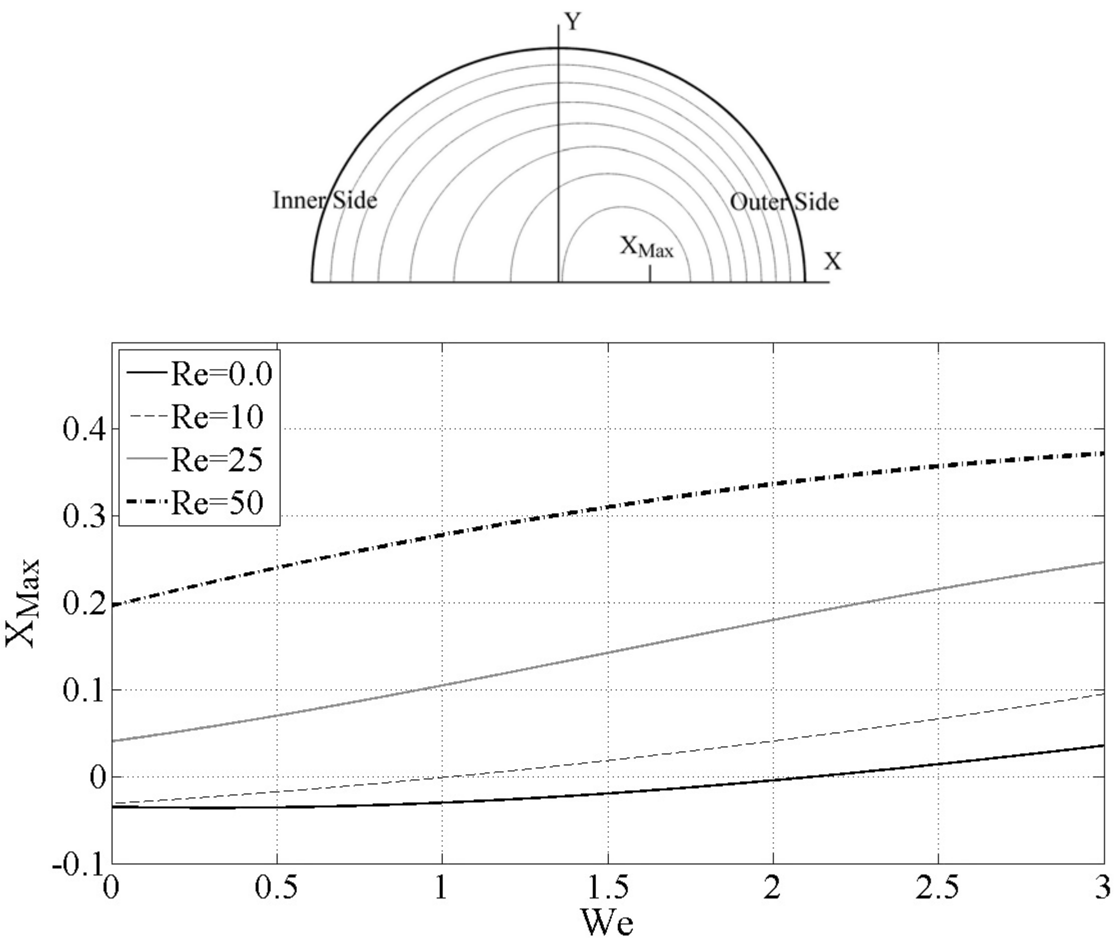
شکل (۳-۷): اثر عدد وایزنبرگ بر ماکزیمم سرعت محوری جریان سیال مرتبه دو
در اعداد رینولدز مختلف و $\delta = 0.1$ [۱۲۷]



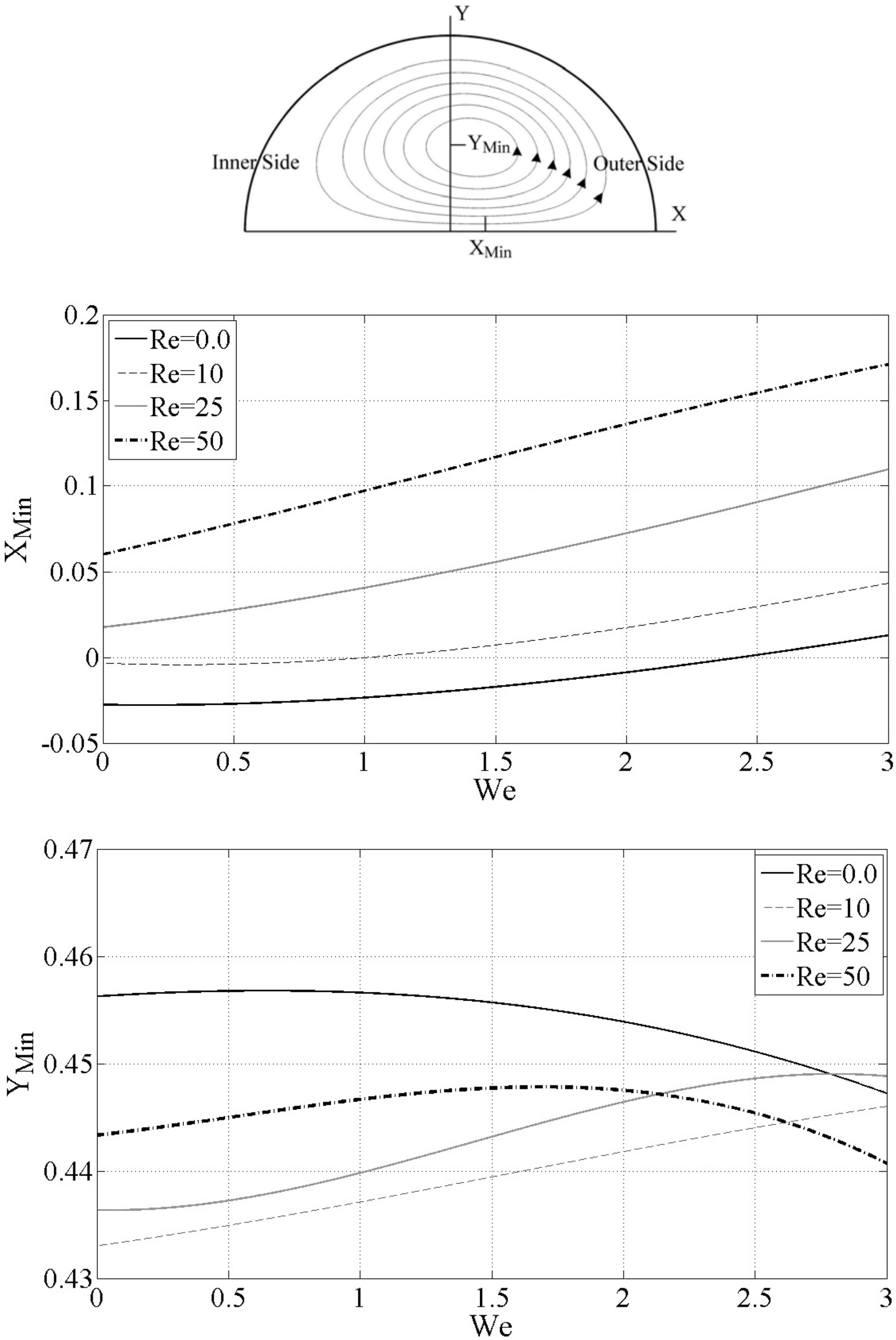
شکل (۳-۸): اثر عدد وایزنبرگ بر ماکزیمم شدت جریانهای ثانویه جریان سیال مرتبه دو
در اعداد رینولدز مختلف و $\delta = 0.1$ [۱۲۷]

اما با افزایش عدد رینولدز و افزایش عدد وایزنبرگ، اثر گرادیان فشار شعاعی و شدت جریانهای ثانویه تقویت شده و موقعیت ماکزیمم سرعت محوری به سمت انحنای خارجی کانال متمایل می شود.

در شکل (۳-۱۰) اثر عدد وایزنبرگ و عدد رینولدز بر موقعیت مرکز جریانهای ثانویه نشان داده شده است. مطابق شکل ازدیاد عدد رینولدز و عدد وایزنبرگ منجر به متمایل شدن موقعیت مرکز گردابه ها به سمت انحنای خارجی کانال می شود. همچنین ازدیاد عدد وایزنبرگ در ابتدا منجر به متمایل شدن موقعیت گردابه ها به سمت دیواره جانبی شده و در اعداد وایزنبرگ بزرگ این اثر بر عکس است.



شکل (۳-۹): اثر عدد وایزنبرگ بر موقعیت ماکزیمم سرعت محوری در $\delta = 0.1$ [۱۲۷]



شکل (۳-۱۰): اثر عدد وایزنبرگ بر موقعیت مرکز گردابه ها در $\delta = 0.1$ [۱۲۷]

در یک هندسه و تحت گرادیان فشار مشخص، عدد وایزنبرگ جریان سیالات مرتبه دو و UCM به ترتیب معیاری از زمان رهایی از تنش و زمان تاخیر است. بنابراین با مقایسه نتایج این تحقیق با تحقیق پیشین برای جریان سیال UCM [۴۶]، می توان اثر این دو ثابت زمانی مواد ویسکوالاستیک را بر جریان در لوله های خمیده بررسی نمود. در جریان مواد ویسکوالاستیک در لوله های خمیده، افزایش زمان تاخیر و زمان رهایی از تنش منجر به افزایش شدت جریانهای ثانویه می شود. افزایش زمان تاخیر سبب متمایل شدن مرکز گردابه های تیلور-گورتلر به سمت دیواره خارجی شده و اثر آن بر تغییر موقعیت مرکز گردابه ها به سمت دیواره های جانبی ناچیز است، در حالیکه افزایش زمان رهایی از تنش عمدتاً سبب انتقال مرکز گردابه ها به سمت دیواره جانبی می شود.

در ادامه به اثر ثابت های زمانی بر تغییرات دبی جریان پرداخته می شود. مطابق تحقیق رابرتسون و مولر [۴۶]، رابطه دبی در جریان سیال فوق همرفتی ماکسول (UCM) بصورت زیر است:

$$Q_c = Q_s \left\{ 1 + \frac{\delta^2}{48} \left[\begin{array}{l} 1 - \mathrm{Re}^2 \left(\frac{11}{360} + \mathrm{Re}^2 \frac{1541}{87091200} \right) + \frac{8}{3} We^2 \left(1 - \frac{1}{15} We^2 \right) + \\ \frac{1}{26880} We\,\mathrm{Re} \left(\mathrm{Re}^2 + 5376 \right) - \frac{101}{60480} We^2\,\mathrm{Re}^2 - \frac{2}{45} We^3\,\mathrm{Re} \end{array} \right] \right\} \qquad (۵۳-۳)$$

در شکل (۳-۱۱) تغییرات دبی برای جریان سیال نیوتنی (رابطه (۳-۵۱))، سیال مرتبه دو (بدست آمده از رابطه (۳-۴۹) تحقیق اخیر) و سیال UCM (بدست آمده از رابطه فوق از تحقیق رابرتسون و مولر [۴۶]) بر حسب عدد رینولدز و در اعداد وایزنبرگ مختلف نشان داده شده است. نتیجه جالب توجه آنکه مطابق حل به روش حساب اختلالات، تغییر دبی برای هر سه نوع سیال، تابع درجه دومی از نسبت انحنا است. مطابق شکل با افزایش عدد رینولدز، دبی در جریان سیال نیوتنی دچار افت می شود. همچنین برای سیال UCM در اعداد وایزنبرگ بزرگ، دبی جریان نسبت به سیال نیوتنی کمتر است اما برای جریان سیال مرتبه دو با افزایش عدد وایزنبرگ دبی سیال افزایش می یابد. جهت مطالعه تغییر دبی جریان سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی می توان پارامتر تغییرات نسبت دبی را تعریف نمود:

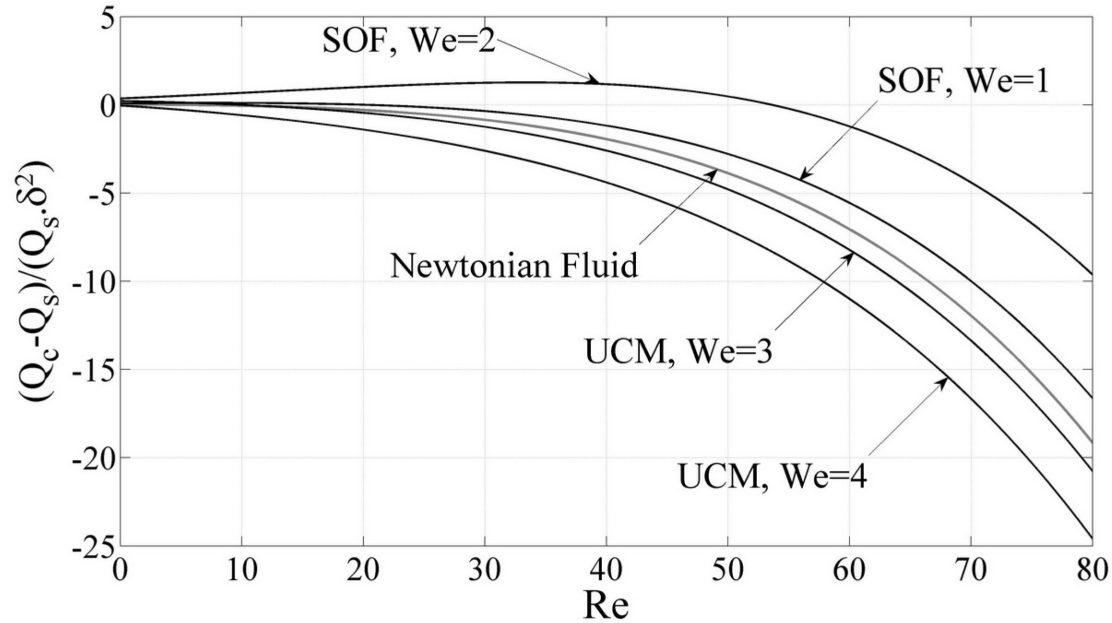
$$\nabla Q_R = \frac{Q_c - Q_s}{Q_s \delta^2}\bigg|_{Vicsoelastic} - \frac{Q_c - Q_s}{Q_s \delta^2}\bigg|_{Newtonian} \tag{۵۴-۳}$$

واضح است که مقادیر مثبت و منفی ∇Q_R به ترتیب نشان دهنده رفتار کاهش و افزایش مقاومت لوله خمیده در برابر جریان است. در شکل (۳-۱۲)، اثر عدد وایزنبرگ بر تغییرات نسبت دبی جریان سیال UCM و مرتبه دو نشان داده شده است. مطابق شکل، برای سیال مرتبه دو با افزایش عدد وایزنبرگ (زمان تاخیر) دبی جریان افزایش یافته و جریان از خود رفتار کاهش مقاومت نشان می دهد، همچنین در سیال UCM در اعداد وایزنبرگ (زمان رهایی از تنش) کوچک رفتار جریان بصورت کاهش مقاومت است اما در اعداد وایزنبرگ بزرگتر از ۲/۱ از خود رفتار افزایش مقاومت نشان می دهد. شایان ذکر است که بون و همکاران [۴۳] نیز اثر مشابهی را برای تغییرات مقاومت لوله های خمیده در برابر جریان خزشی سیالات UCM و مرتبه دو مشاهده نموده اند اما در تحقیق اخیر این اثر برای جریان اینرسی این دو سیال بصورت تحلیلی به اثبات رسیده است. در ادامه مکانیزم اثر خاصیت الاستیک بر شدت جریانهای ثانویه و دبی سیال مرتبه دو مورد بررسی قرار می گیرد. در ناحیه هسته جریان (ناحیه حول مرکز مقطع لوله و دور از دیواره)، مرتبه سرعت محوری از مرتبه سرعت جریانهای ثانویه بزرگتر است. فن و همکاران [۵۰] با استفاده از این خاصیت و با صرفنظر کردن از اثر اختلاف تنش نرمال دوم، رابطه زیر را برای بالانس نیروها در ناحیه هسته جریان سیال ویسکوالاستیک بدست آوردند:

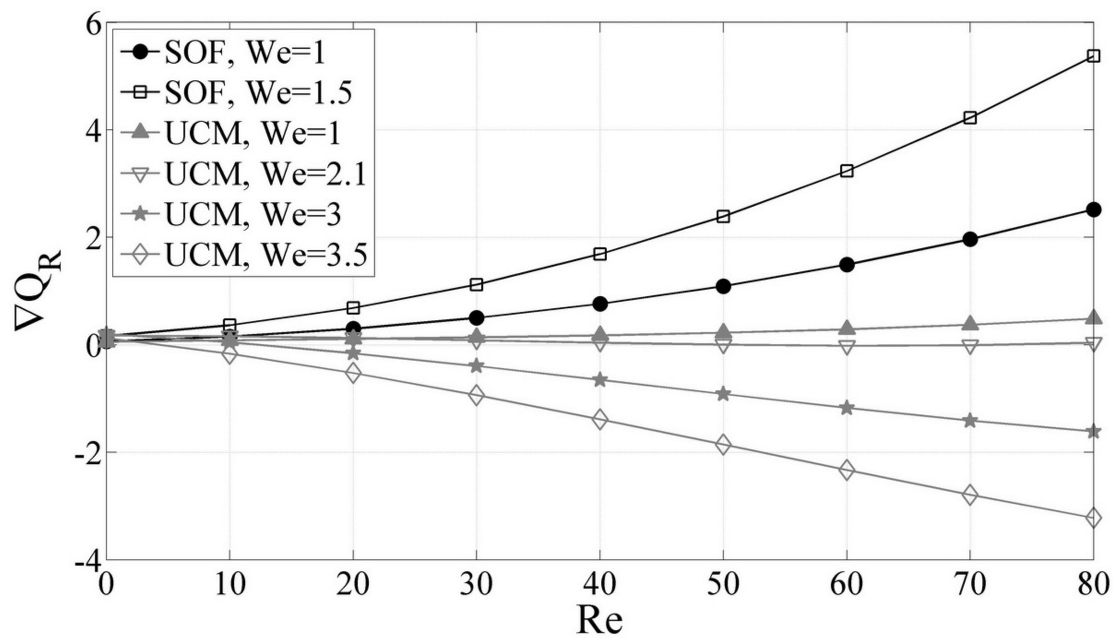
$$\mathrm{Re}\frac{w^2}{B} \approx \frac{\partial P}{\partial n} + \frac{\tau_{ss}}{B} \tag{۵۵-۳}$$

مطابق رابطه فوق، اثر نیروی گریز از مرکز با اثر گرادیان فشار در جهت شعاع انحنا و اثر تنش نرمال محوری (τ_{ss}) در ناحیه هسته جریان بالانس شده است. در شکل (۳-۱۳) تنش نرمال محوری (τ_{ss}) برای جریان سیال نیوتنی و سیال مرتبه دو در دو عدد وایزنبرگ ۱ و ۳ نشان داده شده است. در اینجا نسبت انحنا برابر ۰/۱ و عدد رینولدز جریان برابر ۵۰ در نظر گرفته شده است.

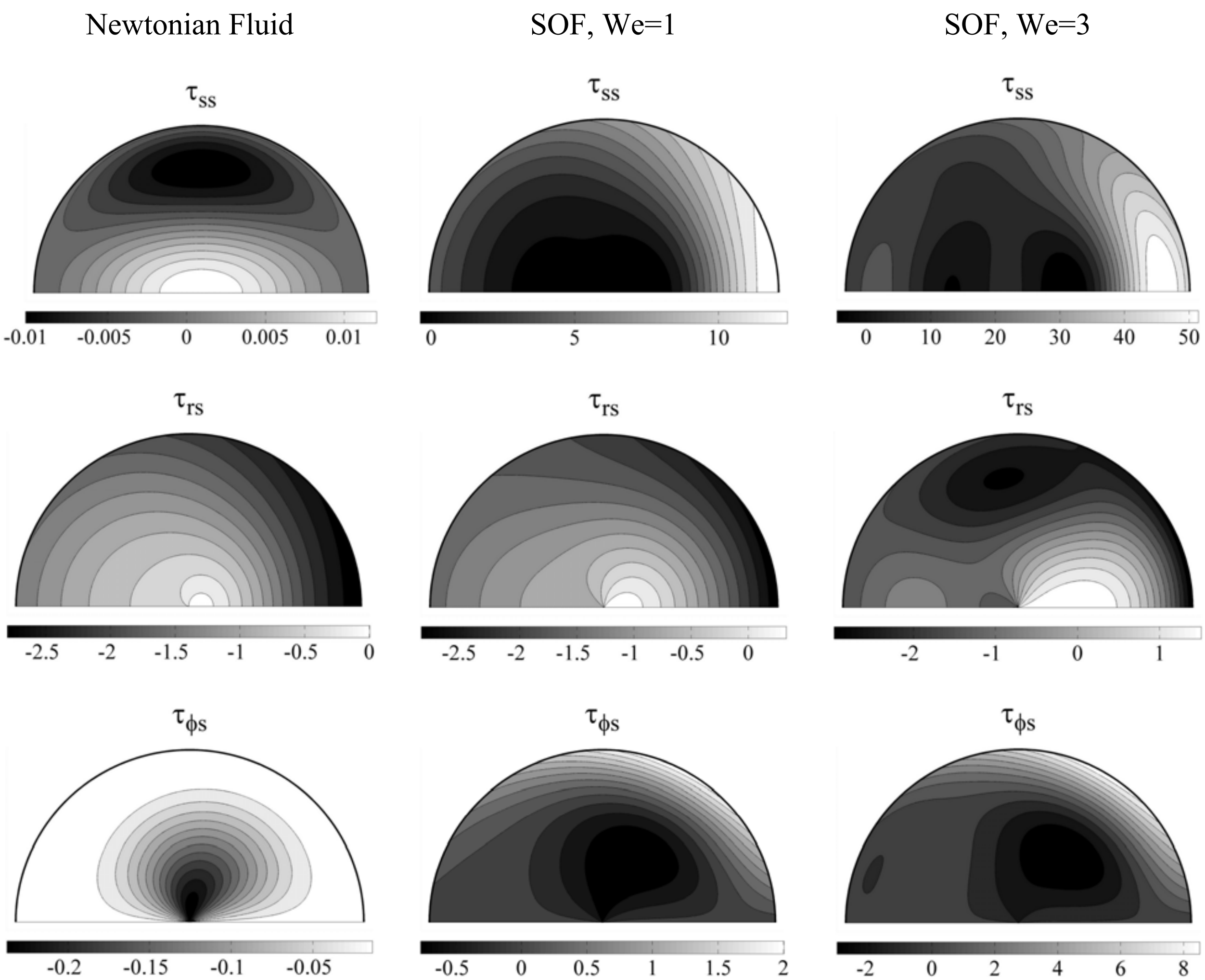
ماشالکار و دواراجان [۶۹] نشان دادند که در ناحیه هسته جریان اینرسی سیال نیوتنی در لوله های خمیده، گرادیان فشار در جهت شعاع انحنا تنها با اثر نیروی گریز از مرکز بالانس می شود. به عبارت دیگر در جریان سیال نیوتنی، تنش نرمال محوری نقشی در تشکیل جریانهای ثانویه ندارد. مطابق شکل (۳-۱۳)، مقدار این تنش در جریان سیال نیوتنی بسیار کوچک است اما در سیال مرتبه دو با ازدیاد عدد وایزنبرگ مقدار تنش نرمال محوری به طور چشمگیری افزایش پیدا می کند به نحوی که ماکزیمم مقدار آن در سیال مرتبه دو حدود ۵۰۰۰ برابر سیال نیوتنی است. این پدیده با آنالیز مرتبه بزرگی فن و همکاران نیز تطابق دارد. مطابق مطالعه آنها، تنش نرمال محوری نسبت به خواص ویسکوز از مرتبه ε و بسیار کوچک است اما مقدار آن نسبت به خواص الاستیک قابل توجه است. در نزدیکی دیواره خارجی، مقدار سرعت محوری و در نتیجه اثر نیروی گریز از مرکز اندک است در حالیکه برای جریان سیال مرتبه دو مقدار تنش نرمال محوری در این ناحیه بسیار بزرگ است. لذا رابطه تعادلی (۳-۵۵) در این ناحیه برقرار نبوده و جهت حفظ تعادل مکانیزم مومنتوم وارد عمل می شود و جریانهای ثانویه ای هم جهت با گردابه های تیلور-گورتلر بوجود می آیند. بنابراین در این جریان با افزایش عدد وایزنبرگ، برآیند شدت جریانهای ثانویه افزایش پیدا می کند. همچنین در شکل (۳-۱۳) مولفه های تنش τ_{rs} و $\tau_{\varphi s}$ جریان سیال مرتبه دو نشان داده شده است. این دو مولفه تنش در معادله مربوط به جریان محوری موثرند و بر اساس توزیع آنها می توان به اثر عدد وایزنبرگ در افزایش دبی جریان سیال مرتبه دو پی برد. مطابق شکل با افزایش عدد وایزنبرگ، توزیع مولفه تنش τ_{rs} تفاوت چندانی پیدا نمی کند اما مولفه تنش $\tau_{\varphi s}$ دچار تغییرات بسیار شدیدی می شود به نحوی که ماکزیمم قدر مطلق این مولفه تنش در حالت $We=3$ حدود ۱۰۰ برابر از جریان سیال نیوتنی بزرگتر است. بنابراین مشاهده می شود که در جریان سیال مرتبه دو، ایجاد تغییرات عمده در مقدار $\tau_{\varphi s}$ به افزایش سرعت محوری و دبی نسبت به جریان سیال نیوتنی منجر می شود.



شکل (۳-۱۱): نسبت دبی جریان سیالات نیوتنی، مرتبه دو (SOF) و فوق همرفتی ماکسول (UCM) نسبت به عدد رینولدز و در اعداد وایزنبرگ مختلف [۱۲۷]



شکل (۳-۱۲): تغییرات نسبت دبی جریان سیالات نیوتنی، مرتبه دو (SOF) و فوق همرفتی ماکسول (UCM) نسبت به عدد رینولدز و در اعداد وایزنبرگ مختلف



شکل (۳-۱۳): توزیع تنش نرمال محوری (τ_{ss}) و مولفه های تنش τ_{rs} و $\tau_{\varphi s}$ در $Re = 50$ و $\delta = 0.1$ [۱۲۷]

به طور خلاصه، افزایش زمان تاخیر سیال مرتبه دو منجر به کاهش مقاومت مجرا در برابر جریان می شود. در حالیکه در سیال UCM در مقادیر کوچک زمان رهایی از تنش سیال، جریان از خود رفتار کاهش مقاومت و در مقادیر بزرگ این زمان ($We > 2.1$) از خود رفتار افزایش مقاومت نشان می دهد. همچنین افزایش زمان تاخیر سیال مرتبه دو منجر به تقویت مولفه تنش $\tau_{\varphi s}$ می شود که این عامل به ازدیاد دبی جریان سیال مرتبه دو در لوله های خمیده منجر می شود.

۳-۳-۲- حل میدان دما

مشابه میدان سرعت، می توان حل تحلیلی برای میدان دمای توسعه یافته در حالت شار ثابت ارائه نمود. در این حالت نیز می توان بسطی بصورت زیر برای توزیع دما در نظر گرفت:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n T^{(n)}(r,\phi) \qquad (۵۶-۳)$$

به طور کلی، شرط مرزی شار ثابت یک شرط مرزی نیومن است. همچنین حل یک معادله دیفرانسیل تنها با استفاده از شرط مرزی نیومن امکان پذیر نبوده و به تعیین عرض از مبدا میدان دما منجر نمی شود. شاه و لندن[1] [۱۲۸] از شرط مرزی متفاوتی برای حل میدان دمای توسعه یافته در لوله مستقیم تحت شار حرارتی ثابت استفاده نمودند. از آنجا که جریان در لوله مستقیم یک جریان متقارن محوری است، لذا میدان دما تحت شار حرارتی ثابت نیز بصورت متقارن محوری بوده و خطوط دما ثابت بصورت دوایر متحدالمکز ظاهر می شوند. لذا در این حالت می توان دما بر روی جداره لوله در هر مقطع کانال را برابر مقداری ثابت در نظر گرفت. آنها از این فرض به عنوان شرط تکمیلی برای تعیین توزیع دما و عدد ناسلت استفاده نمودند. شاه و لندن [۱۲۸] چنین فرضی را برای تعیین توزیع دما در کانال مستقیم دارای مقطع مستطیلی تحت شار حرارتی ثابت نیز به کار گرفتند. از آنجا که این جریان متقارن محوری نیست، آنها خاطر نشان شدند که این فرض منجر به بروز خطا در محاسبه توزیع دما شده و عدد ناسلت بدست آمده تنها تقریبی از حالت واقعی است. در سال ۲۰۰۷، حل تحلیلی بوسیله ژانگ و همکاران [۵۵] برای میدان دمای توسعه یافته سیال اولدروید-بی در لوله خمیده تحت شار حرارتی ثابت ارائه شده است. آنها فرضی مشابه فرض شاه و لندن در مورد ثابت بودن دمای جداره در هر مقطع برای حالت شار ثابت را به کار گرفتند. باید توجه داشت که به دلیل وجود گرادیان فشار در جهت شعاع انحنا، وجود جریانهای ثانویه تیلور-گورتلر و متمایل بودن ماکزیمم موقعیت سرعت محوری به سمت جداره های داخلی و یا خارجی،

1. Shah and London

جریان در لوله های خمیده به هیچ عنوان یک جریان متقارن محوری محسوب نمی شود و لذا استفاده از این فرض منجر به بروز خطای قابل توجه در تعیین توزیع دما و عدد ناسلت می شود. لذا در اینجا تلاش بر آن است تا حل تحلیلی مناسبی برای حالت شار ثابت ارائه شود که در بردارنده تقریب فوق الذکر نباشد. در ادامه حل تحلیلی برای انتقال حرارت سیال مرتبه دو و محلول اولدروید-بی در لوله های خمیده ارائه می شود.

۳-۳-۲-۱- سیال مرتبه دو

با توجه به رابطه (۲-۵۴)، معادله انتقال حرارت توسعه یافته در لوله های خمیده تحت شار حرارتی ثابت به شکل زیر است:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{rB}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{rB}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial\phi}+\frac{2w}{\Pr \mathrm{Re}_b\, B}= \\
&\qquad \frac{1}{\Pr \mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{\delta\cos(\phi)}{B}\right)\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\delta\sin(\phi)}{B}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}
\tag{۵۷-۳}
$$

در رابطه فوق Re_b معرف، عدد رینولدز بر حسب سرعت متوسط جریان سیال مرتبه دو در لوله خمیده است. بر اساس رابطه (۳-۴۹) و با توجه به این موضوع که ماکزیمم سرعت جریان توسعه یافته سیال نیوتنی در لوله مستقیم دو برابر سرعت متوسط این جریان است، می توان رابطه زیر را برای Re_b بدست آورد:

$$
\mathrm{Re}_b=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1+\delta^2\Gamma_{SOF}\right)
\tag{۵۸-۳}
$$

که مقدار Γ_{SOF} مقدار ثابتی است که وابسته به عدد رینولدز و عدد وایزنبرگ جریان است:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{SOF}=&\frac{1}{48}-\frac{11}{17280}\mathrm{Re}^2-\frac{1541}{4180377600}\mathrm{Re}^4+\left(\frac{1}{1290240}\mathrm{Re}^3+\frac{1}{240}\mathrm{Re}\right)We \\
&+\left(\frac{1}{18}+\frac{691}{2903040}\mathrm{Re}^2\right)We^2+\left(\frac{11}{4320}\mathrm{Re}\right)We^3+\left(\frac{1}{135}\right)We^4
\end{aligned}
\tag{۵۹-۳}
$$

بنابراین از روابط (۳-۵۷) و (۳-۵۸)، معادله زیر برای میدان دمای توسعه یافته سیال مرتبه دو بدست می آید:

$$-\frac{1}{rB}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{rB}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial\phi}+\frac{4w}{\Pr\operatorname{Re}\left(1+\delta^2\Gamma_{SOF}\right)B}= \frac{1}{\Pr\operatorname{Re}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{\delta\cos(\phi)}{B}\right)\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\delta\sin(\phi)}{B}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\phi}\right) \qquad (۶۰\text{-}۳)$$

همچنین با توجه به رابطه (۲-۵۵-۱)، شرط مرزی معادله فوق بصورت $\partial T/\partial r=1$ است. این شرط مرزی یک شرط مرزی غیر همگن است که برای استفاده از روش حساب اختلالات مناسب نیست. لذا در اینجا از تغییر متغیر زیر استفاده شده، تا شرایط مرزی بصورت نیومن همگن ساده شود:

$$T^*=T-r \qquad (۶۱\text{-}۳)$$

بنابراین برای جملات مختلف سری (۳-۵۶)، رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}T^{(0)}&=T^{*(0)}+r\\ T^{(1)}&=T^{*(1)}\\ T^{(2)}&=T^{*(2)}\end{aligned} \qquad (۶۲\text{-}۳)$$

برای این متغیر جدید، شرط مرزی به صورت نیومن همگن است:

$$\frac{\partial T^{*(n)}}{\partial r}=0 \qquad (۶۳\text{-}۳)$$

با توجه به روابط (۳-۵۵-۲) و (۳-۶۲)، پارامتر T^* بایستی در روابط زیر صدق کند:

$$\int_A w^{(0)}\left(T^{*(0)}+r\right)dA=0 \qquad (۱\text{-}۶۴\text{-}۳)$$

$$\int_A \left(w^{(0)}T^{*(1)}+w^{(1)}\left(T^{*(0)}+r\right)\right)dA=0 \qquad (۲\text{-}۶۴\text{-}۳)$$

$$\int_A \left(w^{(0)}T^{*(2)}+w^{(1)}T^{*(1)}+w^{(2)}\left(T^{*(0)}+r\right)\right)dA=0 \qquad (۳\text{-}۶۴\text{-}۳)$$

با اعمال توزیع دما از رابطه (۳-۵۶) و توزیع سرعت از روابط بدست آمده از بخش ۳-۳-۱ در معادله (۳-۶۰) و حل معادلات مربوط به جملات سری از مرتبه های مختلف، نتایج زیر برای جملات دما بدست می آید:

$$T^{(0)} = -\frac{1}{4}r^4 + r^2 - \frac{7}{24} \tag{۳-۶۵-۱}$$

$$T^{(1)} = f_1(r)\cos(\phi) \tag{۳-۶۵-۲}$$

$$T^{(2)} = f_{20}(r) + f_{22}(r)\cos(2\phi) \tag{۳-۶۵-۳}$$

رابطه (۳-۶۵-۱) مبین توزیع دما در لوله مستقیم است. با توجه به رابطه بی بعد دما بر روی جداره لوله (رابطه (۲-۳۹)) و نیز با توجه به رابطه $q'' = h\left(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m\right)$، رابطه زیر برای عدد ناسلت بدست می آید:

$$Nu = \frac{2}{T_w} \tag{۳-۶۶}$$

با اعمال $r = 1$ در رابطه (۳-۶۵-۱) و با قرار دادن حاصل آن در رابطه (۳-۶۶)، مقدار عدد ناسلت متوسط در لوله مستقیم تحت شار حرارتی ثابت که پیشتر توسط شاه و لندن [۱۲۸] گزارش شده، بدست می آید:

$$Nu_0 = \frac{48}{11} \simeq 4.3636 \tag{۳-۶۷}$$

همچنین در رابطه (۳-۶۵)، مقادیر f_1، f_{20} و f_{22} عبارتند از:

$$\begin{aligned} f_1(r) = &\left(\frac{1}{345600}\mathrm{Re}^2 + \frac{1}{34560}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}\right)r^{11} \\ &-\left(\frac{1}{960}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We + \frac{1}{23040}\mathrm{Re}^2 + \frac{1}{2880}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} + \frac{1}{1920}\mathrm{Pr}We\right)r^9 \\ &+\left(\frac{1}{72}We^2 + \frac{7}{4608}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} + \frac{1}{216}\mathrm{Re}We + \frac{1}{4608}\mathrm{Re}^2 + \frac{1}{144}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We\right)r^7 \\ &-\left(\frac{1}{1728}\mathrm{Re}^2 + \frac{1}{72}\mathrm{Re}We + \frac{5}{288}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We - \frac{1}{3} + \frac{1}{18}We^2 + \frac{11}{3456}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}\right)r^5 \\ &+\left(\frac{1}{48}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We + \frac{11}{576}\mathrm{Re}We + \frac{1}{288}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} - \frac{9}{8} + \frac{19}{23040}\mathrm{Re}^2 + \frac{1}{12}We^2\right)r^3 \\ &-\left(\frac{43}{2880}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We - \frac{41}{24} + \frac{269}{17280}\mathrm{Re}We + \frac{161}{69120}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} + \frac{1}{1350}\mathrm{Re}^2 + \frac{5}{72}We^2\right)r \end{aligned} \tag{۳-۶۸-۱}$$

$$
\begin{aligned}
f_{20}(r) = &-\left(\frac{1}{3583180800}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{1}{8599633920}\mathrm{Re}^4+\frac{1}{358318080}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2\right)r^{18} \\
&+\left(\begin{array}{l}\frac{13}{185794560}\mathrm{Re}^3 We+\frac{7}{1061683200}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{17}{132710400}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr} We+\frac{1}{2654208}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2 We+\frac{1}{17694720}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2 \\ +\frac{1}{371589120}\mathrm{Re}^4\end{array}\right)r^{16} \\
&-\left(\begin{array}{l}\frac{193}{174182400}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr} We+\frac{19}{5806080}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} We^2+\frac{151}{243855360}\mathrm{Re}^3 We+\frac{89}{185794560}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{29}{464486400}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr} \\ +\frac{71}{20321280}\mathrm{Re}^2 We^2+\frac{1}{322560}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2 We^2+\frac{11}{433520640}\mathrm{Re}^4+\frac{11}{3870720}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2 We\end{array}\right)r^{14} \\
&+\left(\begin{array}{l}\frac{1}{23040}\mathrm{Re}^2 We^2+\frac{431}{99532800}\mathrm{Re}^3 We+\frac{157}{1194393600}\mathrm{Re}^4+\frac{13}{414720}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2 We^2+\frac{263}{796262400}\mathrm{Re}^4-\frac{1}{460800}\mathrm{Re}^2 \\ +\frac{11}{276480}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} We^2-\frac{17}{276480}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}+\frac{11}{103680}\mathrm{Re} We^3+\frac{1547}{199065600}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr} We+\frac{1}{20736}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We^3 \\ +\frac{11}{622080}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2 We+\frac{179}{79626240}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2\end{array}\right)r^{12} \\
&+\left(\begin{array}{l}\frac{161}{230400}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}+\frac{11}{11520}\mathrm{Re} We-\frac{97}{460800}\mathrm{Re}^2 We^2-\frac{569}{1327104000}\mathrm{Re}^4-\frac{31}{230400}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2 We^2-\frac{13}{14400}\mathrm{Re} We^3 \\ -\frac{799}{4147200}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} We^2-\frac{1}{2880}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We^3-\frac{289}{44236800}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2-\frac{541}{33177600}\mathrm{Re}^3 We-\frac{37}{33177600}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr} \\ -\frac{503}{8294400}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2 We-\frac{1}{900}We^4-\frac{247}{8294400}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr} We+\frac{107}{57600}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We+\frac{1}{30720}\mathrm{Re}^2\end{array}\right)r^{10} \\
&+\left(\begin{array}{l}-\frac{697}{221184}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}+\frac{4001}{318504960}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{2951}{79626240}\mathrm{Re}^3 We+\frac{5641}{79626240}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr} We-\frac{25}{1152}\Psi^2+\frac{5}{4608}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We^3 \\ -\frac{19}{1536}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We-\frac{215}{27648}\mathrm{Re} We+\frac{1}{3072}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2 We^2+\frac{11}{11796480}\mathrm{Re}^4+\frac{85}{165888}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} We^2+\frac{859}{6635520}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2 We \\ +\frac{341}{663552}\mathrm{Re}^2 We^2-\frac{11}{73728}\mathrm{Re}^2+\frac{2033}{796262400}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{37}{13824}\mathrm{Re} We^3+\frac{1}{576}We^4\end{array}\right)r^{8} \\
&+\left(\begin{array}{l}\frac{1}{27}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We-\frac{2003}{119439360}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2-\frac{241}{276480}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} We^2+\frac{631}{82944}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}-\frac{17}{96}-\frac{517}{9953280}\mathrm{Re}^3 We \\ -\frac{817}{1244160}\mathrm{Re}^2 We^2+\frac{1}{3072}\mathrm{Re}^2-\frac{35}{10368}\mathrm{Re} We^3-\frac{7}{3456}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We^3-\frac{4901}{1194393600}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}-\frac{1}{162}We^4 \\ -\frac{71}{138240}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2 We^2-\frac{941}{8294400}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr} We-\frac{1859}{9953280}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2 We+\frac{41}{432}We^2-\frac{331}{238878720}\mathrm{Re}^4+\frac{79}{3456}\mathrm{Re} We\end{array}\right)r^{6} \\
&+\left(\begin{array}{l}-\frac{179}{5760}\mathrm{Re} We+\frac{287}{66355200}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{803}{53084160}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2-\frac{61}{6144}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}-\frac{11}{72}We^2+\frac{22399}{16721510400}\mathrm{Re}^4 \\ +\frac{1}{540}We^4-\frac{49}{138240}\mathrm{Re}^2+\frac{5}{114688}\mathrm{Re}^3 We+\frac{1189}{6635520}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2 We-\frac{127}{2304}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We+\frac{779}{829440}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} We^2 \\ +\frac{13}{8640}\mathrm{Re} We^3+\frac{1}{432}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We^3+\frac{73}{138240}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2 We^2+\frac{7829}{66355200}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr} We+\frac{103}{192}+\frac{4807}{11612160}\mathrm{Re}^2 We^2\end{array}\right)r^{4} \\
&+\left(\begin{array}{l}\frac{8}{27648}\mathrm{Re} We^3-\frac{1991}{99532800}\mathrm{Re}^3 We-\frac{13}{24}+\frac{31}{288}We^2-\frac{469}{829440}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} We^2+\frac{31}{172800}\mathrm{Re}^2-\frac{37}{368640}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2 We \\ +\frac{43}{2160}\mathrm{Re} We-\frac{43}{138240}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2 We^2+\frac{1801}{276480}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}-\frac{24743}{33443020800}\mathrm{Re}^4-\frac{1}{388800}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}-\frac{161}{19906560}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2 \\ +\frac{1}{540}We^4+\frac{151}{3840}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We-\frac{1729}{24883200}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr} We-\frac{563}{5806080}\mathrm{Re}^2 We^2-\frac{5}{3456}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We^3\end{array}\right)r^{2} \\
&-\frac{227}{774144}\mathrm{Re}^2-\frac{191}{5760}We^2-\frac{20897}{16588800}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}-\frac{4139}{580608}\mathrm{Re} We+\frac{8458151}{1755758592000}\mathrm{Re}^3 We+\frac{128021}{200658124800}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr} \\
&-\frac{2747}{345600}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We+\frac{77}{207360}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} We^3+\frac{136613}{2438553600}\mathrm{Re}^2 We^2+\frac{12367}{43545600}\mathrm{Re} We^3+\frac{133519}{8360755200}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2 We \\
&+\frac{457}{3225600}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} We^2+\frac{287477}{2106910310400}\mathrm{Re}^4+\frac{33}{453600}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2 We^2+\frac{503}{907200}We^4+\frac{359}{1440} \\
&+\frac{95629}{5573836800}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr} We+\frac{346877}{275904921600}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2
\end{aligned}
$$

(۲-۶۸-۳)

$$
\begin{aligned}
f_{22}(r) = & -\left(\frac{1}{1592524800}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{1}{58525286400}\mathrm{Re}^4+\frac{29}{222953472000}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}\right)r^{18} \\
& +\left(\begin{array}{l}\frac{401}{4877107200}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We+\frac{1}{83607552}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{1}{23224320}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We \\ +\frac{283}{29262643200}\mathrm{Re}^3We+\frac{11}{2786918400}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{47}{117050572800}\mathrm{Re}^4\end{array}\right)r^{16} \\
& -\left(\begin{array}{l}\frac{1}{165888}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2+\frac{5}{7962624}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We+\frac{1993}{1393459200}\mathrm{Re}^3We+\frac{1}{10616832}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{1}{5443200}\mathrm{Re}^3We \\ +\frac{41}{23224320}\mathrm{Re}^2We^2+\frac{1}{1105920}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2+\frac{29}{7431782400}\mathrm{Re}^4+\frac{307}{7431782400}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}\end{array}\right)r^{14} \\
& +\left(\begin{array}{l}\frac{41}{11612160}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We+\frac{121}{4838400}\mathrm{Re}^2We^2+\frac{29}{302400}\mathrm{Re}We^3-\frac{109}{4838400}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}+\frac{223}{2903040}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2 \\ +\frac{481}{46448640}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We+\frac{61}{154828800}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{19}{2419200}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2+\frac{11}{86400}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3+\frac{61}{2786918400}\mathrm{Re}^4 \\ +\frac{233}{928972800}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{13}{9289728}\mathrm{Re}^3We-\frac{53}{9676800}\mathrm{Re}^2\end{array}\right)r^{12} \\
& +\left(\begin{array}{l}-\frac{1}{540}\Psi^4-\frac{101}{103680}\mathrm{Re}We^3-\frac{1}{983040}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{77}{4630}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We-\frac{299}{318504960}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2-\frac{23}{829440}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2 \\ +\frac{13}{184320}\mathrm{Re}^2+\frac{1}{1440}\mathrm{Re}We-\frac{101}{103680}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3-\frac{139}{1592524800}\mathrm{Re}^4-\frac{97}{248832}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2-\frac{67}{6635520}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We \\ -\frac{841}{19906560}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We-\frac{1}{163840}\mathrm{Re}^3We-\frac{13}{92160}\mathrm{Re}^2We^2+\frac{131}{552960}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}\end{array}\right)r^{10} \\
& +\left(\begin{array}{l}\frac{179}{12441600}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We+\frac{8987}{3483648000}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{1}{20736}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2+\frac{11}{10800}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2-\frac{5}{864}\mathrm{Re}We-\frac{73}{230400}\mathrm{Re}^2 \\ -\frac{35}{3456}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We+\frac{307}{86400}\mathrm{Re}We^3+\frac{439}{398131200}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{439}{1857945600}\mathrm{Re}^4-\frac{1027}{1382400}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}+\frac{769}{259200}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3 \\ +\frac{23819}{232243200}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We+\frac{1}{108}We^4+\frac{11881}{696729600}\mathrm{Re}^3We-\frac{41}{1440}We^2+\frac{587}{1382400}\mathrm{Re}^2We^2\end{array}\right)r^{8} \\
& +\left(\begin{array}{l}-\frac{2}{2835}\mathrm{Re}^2We^2-\frac{71}{384}+\frac{409}{552960}\mathrm{Re}^2+\frac{169}{9216}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We+\frac{11}{23040}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}-\frac{1181}{829440}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2+\frac{29}{288}We^2 \\ +\frac{43}{159252480}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2-\frac{47}{7680}\mathrm{Re}We^3-\frac{4673}{33177600}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We-\frac{19}{1080}We^4+\frac{353}{23040}\mathrm{Re}We-\frac{307}{69120}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3 \\ -\frac{7}{552960}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2-\frac{2297}{5573836800}\mathrm{Re}^4-\frac{2281}{154828800}\mathrm{Re}^3We-\frac{81133}{22295347200}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}-\frac{1}{26542080}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We\end{array}\right)r^{6} \\
& +\left(\begin{array}{l}-\frac{187}{207360}\mathrm{Re}^2+\frac{1207}{464486400}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}-\frac{163}{79626240}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2-\frac{613}{34560}\mathrm{Re}We-\frac{55}{432}We^2+\frac{10853}{17418240}\mathrm{Re}^2We^2+\frac{55}{96} \\ +\frac{43}{12960}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3-\frac{229}{9953280}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We+\frac{107}{138240}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}+\frac{23483}{232243200}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We-\frac{41}{3456}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We \\ +\frac{14569}{35115171840}\mathrm{Re}^4+\frac{5683}{199065600}\mathrm{Re}^3We+\frac{1273}{1244160}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2+\frac{5}{324}We^4-\frac{13}{207360}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2+\frac{271}{51840}\mathrm{Re}We^3\end{array}\right)r^{4} \\
& +\left(\begin{array}{l}\frac{14821}{8360755200}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{1}{1152}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We-\frac{3467}{10886400}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2-\frac{90803}{348364800}\mathrm{Re}^2We^2-\frac{293927}{1404606873600}\mathrm{Re}^4 \\ +\frac{7933}{116121600}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2-\frac{397463}{29262643200}\mathrm{Re}^3We-\frac{227}{384}-\frac{169231}{222953472000}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}-\frac{19}{3240}We^4+\frac{287}{4320}We^2 \\ -\frac{306947}{9754214400}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We-\frac{4871}{2419200}\mathrm{Re}We^3-\frac{1111}{1036800}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3+\frac{15451}{29030400}\mathrm{Re}^2+\frac{15359}{696729600}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We \\ -\frac{20477}{19353600}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}+\frac{127}{13824}\mathrm{Re}We\end{array}\right)r^{2}
\end{aligned}
$$

(۳-۶۸-۳)

مقدار عدد ناسلت موضعی در لوله های خمیده از رابطه (۳-۶۶) قابل محاسبه است. در اینجا عدد ناسلت متوسط را می توان از انتگرال گیری از توزیع دما حول محیط کانال بدست آورد:

$$
\overline{Nu} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{T_w}\right)d\phi
$$

(۶۹-۳)

۳-۳-۲-۲- سیال اولدروید-بی

همانگونه که در ابتدای این بخش بیان گردید، یکی از اهداف تحقیق حاضر، اصلاح حل ارائه شده در تحقیق ژانگ و همکاران [۵۵] برای انتقال حرارت توسعه یافته سیال اولدروید-بی در لوله های خمیده است. حل میدان دمای سیال اولدروید-بی کاملاً مشابه حل ارائه شده در بخش ۳-۳-۲-۱ برای سیال مرتبه دو است. در اینجا برای میدان سرعت، از حل ارائه شده توسط رابرتسون و مولر [۴۶] استفاده شده است. مشابه رابطه (۳-۵۸)، در اینجا نیز رابطه ای بین عدد رینولدز بر مبنای سرعت متوسط جریان سیال اولدروید-بی در لوله خمیده و عدد رینولدز بر مبنای سرعت مرجع وجود دارد:

$$\mathrm{Re}_{bc}=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1+\delta^2\Gamma_{Oldroyd}\right) \qquad (۳-۷۰)$$

در رابطه فوق، مقدار $\Gamma_{Oldroyd}$ بصورت زیر است:

$$\Gamma_{Oldroyd}=\frac{1}{48}\left(\begin{array}{l}1-\mathrm{Re}^2\left(\frac{11}{360}+\frac{1541}{87091200}\mathrm{Re}^2\right)+\frac{8}{3}We^2\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^2\left(1-\frac{1}{15}We^2\frac{\eta_p}{\eta}\left(3-2\frac{\eta_p}{\eta}\right)\right)\\+\frac{1}{26880}We\,\mathrm{Re}\frac{\eta_p}{\eta}\left(\mathrm{Re}^2+5376\right)-\frac{1}{60480}We^2\,\mathrm{Re}^2\frac{\eta_p}{\eta}\left(792-691\frac{\eta_p}{\eta}\right)\end{array}\right) \qquad (۳-۷۱)$$

پاسخ میدان دمای سیال اولدروید-بی نیز از رابطه ای مشابه رابطه (۳-۶۵) قابل محاسبه است با این تفاوت که در این حالت مقادیر f_1، f_{20} و f_{22} از روابط زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned}f_1(r)=&We^2\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^2\left(\frac{1}{72}r^7-\frac{1}{18}r^5+\frac{1}{12}r^3-\frac{5}{72}r\right)\\&+We\frac{\eta_p}{\eta}\left(\begin{array}{l}-\left(\frac{1}{1920}\mathrm{Re}\frac{1}{960}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\right)r^9+\left(\frac{1}{144}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}+\frac{1}{216}\mathrm{Re}\right)r^7-\left(\frac{1}{72}\mathrm{Re}+\frac{5}{288}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\right)r^5\\+\left(\frac{11}{576}\mathrm{Re}+\frac{1}{48}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\right)r^3-\left(\frac{269}{17280}\mathrm{Re}+\frac{43}{2880}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\right)r\end{array}\right)\\&+\mathrm{Re}^2\left(\begin{array}{l}\frac{1}{345600}r^{11}-\frac{1}{2880}r^9\,\mathrm{Pr}-\frac{161}{69120}r\,\mathrm{Pr}+\frac{1}{34560}r^{11}\,\mathrm{Pr}+\frac{7}{4608}r^7\,\mathrm{Pr}+\frac{1}{288}r^3\,\mathrm{Pr}\\-\frac{11}{3456}r^5\,\mathrm{Pr}+\frac{1}{4608}r^7-\frac{1}{1728}r^5+\frac{19}{23040}r^3-\frac{1}{23040}r^9-\frac{1}{1350}r\end{array}\right)\\&+\frac{1}{3}r^5-\frac{9}{8}r^3+\frac{41}{24}r\end{aligned} \qquad (۳-۷۲-۱)$$

$$
\begin{aligned}
f_{20}(r) = & We^{4}\Bigg(\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{4}\left(\frac{1}{216}r^{8}-\frac{1}{900}r^{10}+\frac{1}{540}r^{4}-\frac{1}{162}r^{6}+\frac{1}{540}r^{2}+\frac{503}{907200}\right)+\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{3}\left(-\frac{1}{216}r^{6}+\frac{1}{90}r^{4}+\frac{1}{1400}-\frac{7}{720}r^{2}+\frac{1}{3600}r^{10}\right)\Bigg) \\
& +We^{3}\Bigg(\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{3}\Bigg(\frac{1}{432}r^{4}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}+\frac{5}{4608}r^{8}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}+\frac{77}{207360}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}-\frac{13}{14400}r^{10}\,\mathrm{Re}+\frac{37}{13824}r^{8}\,\mathrm{Re}+\frac{13}{8640}r^{4}\,\mathrm{Re}-\frac{35}{10368}r^{6}\,\mathrm{Re}+\frac{1}{3456}r^{2}\,\mathrm{Re} \\
& \qquad +\frac{11}{103680}r^{12}\,\mathrm{Re}-\frac{7}{3456}r^{6}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}+\frac{12367}{43545600}\mathrm{Re}-\frac{5}{3456}r^{2}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}-\frac{1}{2880}r^{10}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}+\frac{1}{20736}r^{12}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\Bigg) \\
& \qquad +\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{2}\left(-\frac{1}{51840}r^{12}\,\mathrm{Re}-\frac{29}{8640}r^{2}\,\mathrm{Re}-\frac{5}{2592}r^{6}\,\mathrm{Re}+\frac{1}{6912}r^{8}\,\mathrm{Re}+\frac{13}{51840}\mathrm{Re}+\frac{1}{8640}r^{10}\,\mathrm{Re}+\frac{7}{1728}r^{4}\,\mathrm{Re}\right)\Bigg) \\
& +We^{2}\Bigg(\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{2}\Bigg(\mathrm{Pr}^{2}\,\mathrm{Re}^{2}\left(\frac{13}{414720}r^{12}+\frac{73}{138240}r^{4}+\frac{23}{453600}-\frac{1}{322560}r^{14}-\frac{31}{230400}r^{10}-\frac{1}{3072}r^{8}-\frac{43}{138240}r^{2}-\frac{71}{138240}r^{6}\right) \\
& \qquad \frac{779}{829440}r^{4}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{2}-\frac{469}{829440}r^{2}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{2}+\frac{31}{288}r^{2}-\frac{11}{72}r^{4}-\frac{799}{4147200}r^{10}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{2}-\frac{97}{460800}r^{10}\,\mathrm{Re}^{2}+\frac{11}{276480}r^{12}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{2} \\
& \qquad -\frac{191}{5760}+\frac{41}{432}r^{6}-\frac{241}{276480}r^{6}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{2}\,\frac{457}{3225600}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{2}-\frac{563}{5806080}r^{2}\,\mathrm{Re}^{2}-\frac{19}{5806080}r^{14}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{2}-\frac{136613}{2438553600}\mathrm{Re}^{2} \\
& \qquad +\frac{85}{165888}r^{8}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{2}+\frac{1}{23040}r^{12}\,\mathrm{Re}^{2}+\frac{341}{663552}r^{8}\,\mathrm{Re}^{2}+\frac{4807}{11612160}r^{4}\,\mathrm{Re}^{2}-\frac{817}{1244160}r^{6}\,\mathrm{Re}^{2}-\frac{25}{1152}r^{8}+\frac{59}{161280}r^{4}\,\mathrm{Re}^{2}\Bigg) \\
& \qquad +\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)\Bigg(\frac{1}{41472}r^{8}\,\mathrm{Re}^{2}-\frac{1}{207360}r^{12}\,\mathrm{Re}^{2}+\frac{10009}{457228800}\mathrm{Re}^{2}+\frac{1}{2032128}r^{14}\,\mathrm{Re}^{2}-\frac{1}{5184}r^{6}\,\mathrm{Re}^{2}+\frac{1}{76800}r^{10}\,\mathrm{Re}^{2}+\frac{59}{161280}r^{4}\,\mathrm{Re}^{2} \\
& \qquad -\frac{839}{2903040}r^{2}\,\mathrm{Re}^{2}\Bigg)\Bigg) \\
& +We\,\frac{\eta_p}{\eta}\Bigg(\left(\frac{17}{265420800}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{3}+\frac{13}{371589120}\mathrm{Re}^{3}+\frac{1}{5308416}\mathrm{Pr}^{2}\,\mathrm{Re}^{3}\right)r^{16}-\left(\frac{151}{243855360}\mathrm{Re}^{3}+\frac{193}{174182400}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{3}+\frac{11}{3870720}\mathrm{Pr}^{2}\,\mathrm{Re}^{3}\right)r^{14} \\
& \qquad +\left(\frac{1547}{199065600}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{3}+\frac{11}{622080}\mathrm{Pr}^{2}\,\mathrm{Re}^{3}+\frac{431}{99532800}\mathrm{Re}^{3}\right)r^{12} \\
& \qquad +\left(\frac{107}{57600}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}-\frac{247}{8294400}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{3}+\frac{11}{11520}\mathrm{Re}-\frac{541}{33177600}\mathrm{Re}^{3}-\frac{503}{8294400}\mathrm{Pr}^{2}\,\mathrm{Re}^{3}\right)r^{10} \\
& \qquad +\left(\frac{2951}{79626240}\mathrm{Re}^{3}-\frac{19}{1536}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}-\frac{215}{27648}\mathrm{Re}+\frac{859}{6635520}\mathrm{Pr}^{2}\,\mathrm{Re}^{3}+\frac{5641}{79626240}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{3}\right)r^{8} \\
& \qquad +\left(-\frac{941}{8294400}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{3}-\frac{517}{9953280}\mathrm{Re}^{3}+\frac{79}{3456}\mathrm{Re}-\frac{1859}{9953280}\mathrm{Pr}^{2}\,\mathrm{Re}^{3}+\frac{1}{27}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\right)r^{6} \\
& \qquad +\left(\frac{7829}{66355200}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{3}+\frac{5}{114688}\mathrm{Re}^{3}-\frac{127}{2304}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}+\frac{1189}{6635520}\mathrm{Pr}^{2}\,\mathrm{Re}^{3}-\frac{179}{5760}\mathrm{Re}\right)r^{4} \\
& \qquad +\left(-\frac{1729}{24883200}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{3}-\frac{37}{368640}\mathrm{Pr}^{2}\,\mathrm{Re}^{3}-\frac{1991}{99532800}\mathrm{Re}^{3}+\frac{151}{3840}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}+\frac{43}{2160}\mathrm{Re}\right)r^{2} \\
& \qquad +\frac{133519}{8360755200}\mathrm{Pr}^{2}\,\mathrm{Re}^{3}-\frac{4139}{580608}\mathrm{Re}-\frac{2747}{345600}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}+\frac{8458151}{1755758592000}\mathrm{Re}^{3}+\frac{95629}{5573836800}\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{3}\Bigg) \\
& +\mathrm{Re}^{4}\Bigg(\frac{287477}{2106910310400}+\frac{1}{371589120}r^{16}-\frac{11}{433520640}r^{14}+\frac{24743}{275904921600}r^{2}-\frac{22399}{16721510400}r^{4}+\frac{11}{11796480}r^{8}+\frac{331}{238878720}r^{6} \\
& \qquad -\frac{157}{1194393600}r^{12}-\frac{1}{8599633920}r^{18}+\frac{287}{66355200}r^{4}\,\mathrm{Pr}-\frac{29}{464486400}r^{14}\,\mathrm{Pr}-\frac{1}{3583180800}r^{18}\,\mathrm{Pr}-\frac{1}{388800}r^{2}\,\mathrm{Pr} \\
& \qquad +\frac{1}{17694720}r^{16}\,\mathrm{Pr}^{2}-\frac{289}{44236800}r^{10}\,\mathrm{Pr}^{2}+\frac{7}{1061683200}r^{16}\,\mathrm{Pr}-\frac{37}{33177600}r^{10}\,\mathrm{Pr}-\frac{161}{19906560}r^{2}\,\mathrm{Pr}^{2}-\frac{2003}{119439360}r^{6}\,\mathrm{Pr}^{2} \\
& \qquad +\frac{263}{796262400}r^{12}\,\mathrm{Pr}-\frac{4901}{1194393600}r^{6}\,\mathrm{Pr}+\frac{4001}{318504960}r^{8}\,\mathrm{Pr}^{2}-\frac{89}{185794560}r^{14}\,\mathrm{Pr}^{2}+\frac{2033}{796262400}r^{8}\,\mathrm{Pr}-\frac{1}{358318080}r^{18}\,\mathrm{Pr}^{2} \\
& \qquad +\frac{179}{79626240}r^{12}\,\mathrm{Pr}^{2}+\frac{803}{53084160}r^{4}\,\mathrm{Pr}^{2}+\frac{128021}{200658124800}\mathrm{Pr}-\frac{569}{1327104000}r^{10}\Bigg) \\
& +\mathrm{Re}^{4}\Bigg(\frac{161}{230400}r^{10}\,\mathrm{Pr}-\frac{17}{276480}r^{12}\,\mathrm{Pr}+\frac{1}{3072}r^{6}+\frac{631}{82944}r^{6}\,\mathrm{Pr}-\frac{20897}{16588800}\mathrm{Pr}-\frac{61}{6144}r^{4}\,\mathrm{Pr}+\frac{31}{172800}r^{2}-\frac{1}{460800}r^{12} \\
& \qquad -\frac{11}{73728}r^{8}-\frac{49}{138240}r^{4}+\frac{1}{30720}r^{10}-\frac{227}{774144}+\frac{1801}{276480}r^{2}\,\mathrm{Pr}-\frac{697}{221184}r^{8}\,\mathrm{Pr}\Bigg) \\
& +\frac{359}{1440}-\frac{17}{96}r^{6}+\frac{103}{192}r^{4}-\frac{13}{24}r^{4}
\end{aligned}
\qquad (۲\text{-}۷۲\text{-}۳)
$$

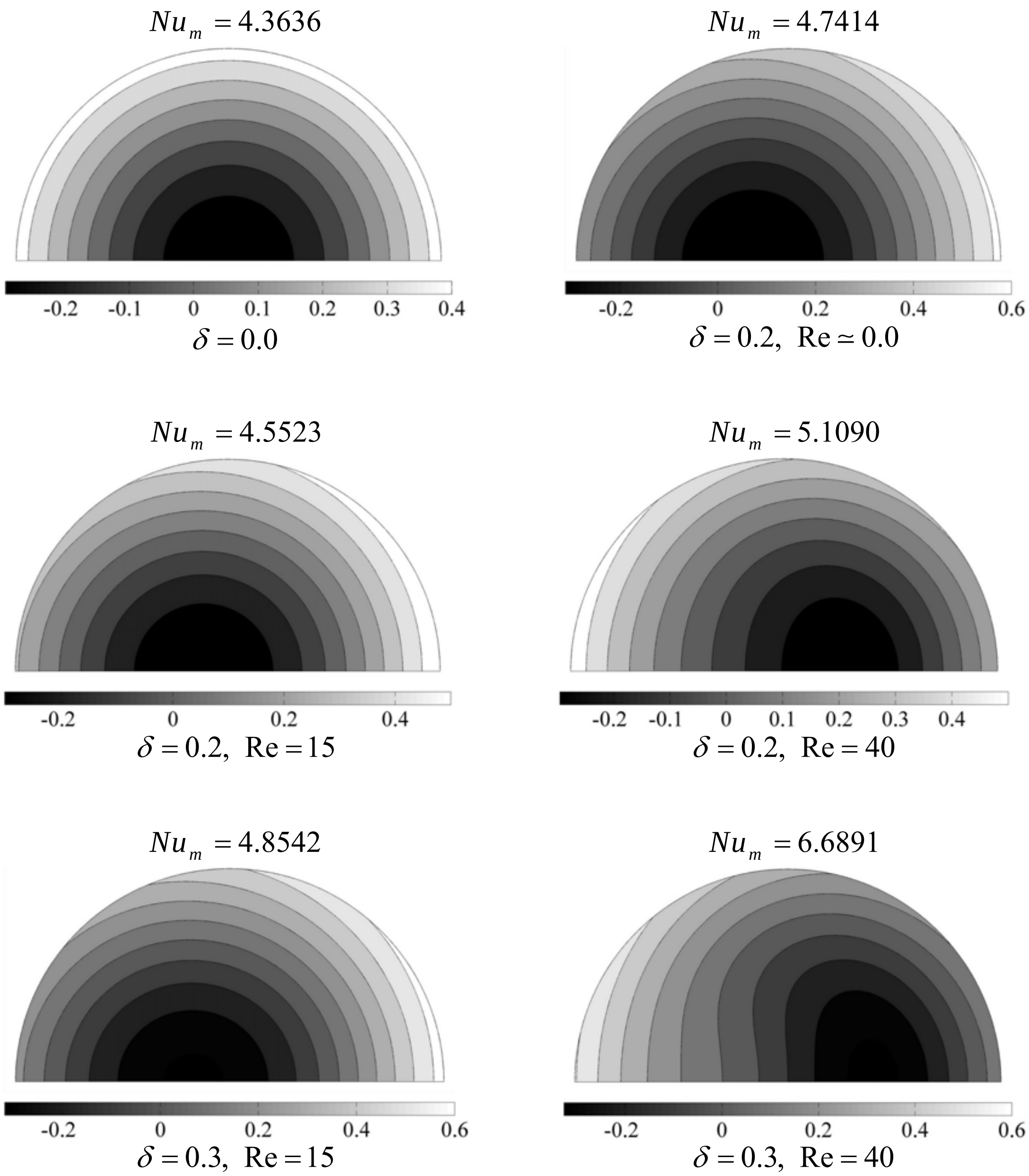
$$
\begin{aligned}
f_{22}(r)=&We^{4}\left(\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{4}\left(-\frac{19}{3240}r^{2}+\frac{5}{324}r^{4}-\frac{19}{108}r^{6}+\frac{1}{108}r^{8}-\frac{1}{540}r^{10}\right)+\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{3}\left(-\frac{1}{270}r^{2}-\frac{1}{180}r^{8}+\frac{1}{576}r^{10}+\frac{13}{2880}r^{6}+\frac{1}{540}r^{4}\right)\right)\\
&+We^{3}\left(\begin{array}{l}
\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{3}\left(\begin{array}{l}\frac{307}{86400}r^{8}\mathrm{Re}+\frac{271}{51840}r^{4}\mathrm{Re}-\frac{47}{7680}r^{6}\mathrm{Re}+\frac{29}{302400}r^{12}\mathrm{Re}-\frac{101}{103680}r^{10}\mathrm{Re}-\frac{769}{259200}r^{8}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\\
+\frac{11}{86400}r^{12}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}-\frac{307}{69120}r^{6}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}-\frac{4871}{2419200}r^{2}\mathrm{Re}+\frac{43}{12960}r^{4}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}-\frac{101}{103680}r^{10}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}-\frac{1111}{1036800}r^{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\end{array}\right)+\\
\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{2}\left(\begin{array}{l}-\frac{23}{403200}r^{12}\mathrm{Re}+\frac{1}{1728}r^{10}\mathrm{Re}-\frac{29}{50400}r^{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}+\frac{1}{1440}r^{4}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}-\frac{11}{14400}r^{8}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}-\frac{2749}{2419200}r^{2}\mathrm{Re}+\frac{19}{23040}r^{6}\mathrm{Re}\\
-\frac{1}{11200}r^{12}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}-\frac{9}{6400}r^{8}\mathrm{Re}+\frac{1}{1152}r^{4}\mathrm{Re}+\frac{1}{7680}r^{6}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}+\frac{11}{23040}r^{10}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\end{array}\right)
\end{array}\right)\\
&+We^{2}\left(\begin{array}{l}
\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{2}\left(\begin{array}{l}\mathrm{Re}^{2}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{20736}r^{8}\mathrm{Pr}^{2}-\frac{13}{207360}r^{4}\mathrm{Pr}^{2}-\frac{23}{829440}r^{10}\mathrm{Pr}^{2}-\frac{1}{1105920}r^{14}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{1273}{1244160}r^{4}\mathrm{Pr}+\frac{7933}{116121600}r^{2}\mathrm{Pr}^{2}\\
-\frac{1}{165888}r^{14}\mathrm{Pr}+\frac{121}{4838400}r^{12}+\frac{19}{2419200}r^{12}\mathrm{Pr}^{2}-\frac{13}{92160}r^{10}+\frac{587}{1382400}r^{2}\mathrm{Pr}-\frac{1181}{829440}r^{6}\mathrm{Pr}\\
+\frac{10853}{17418240}r^{4}-\frac{90803}{348364800}r^{2}-\frac{7}{552960}r^{6}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{11}{10800}r^{8}\mathrm{Pr}+\frac{233}{2903040}r^{12}\mathrm{Pr}-\frac{97}{248832}r^{10}\mathrm{Pr}\\
-\frac{2}{2835}r^{6}-\frac{41}{23224320}r^{14}\end{array}\right)\\
\frac{287}{4320}r^{2}-\frac{41}{1440}r^{8}+\frac{29}{288}r^{6}-\frac{55}{432}r^{4}\end{array}\right)+\\
\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)\mathrm{Re}^{2}\left(\begin{array}{l}-\frac{13}{1612800}r^{12}-\frac{23}{172800}r^{8}\mathrm{Pr}+\frac{7}{184320}r^{10}+\frac{1}{1548288}r^{14}+\frac{1}{5760}r^{4}\mathrm{Pr}+\frac{113}{1935360}r^{4}-\frac{2641}{38707200}r^{2}\\
+\frac{1}{30720}r^{6}-\frac{1}{46080}r^{6}\mathrm{Pr}-\frac{101}{1382400}r^{8}-\frac{9551}{77414400}r^{2}\mathrm{Pr}+\frac{1}{442368}r^{14}+\frac{13}{122880}r^{10}\mathrm{Pr}-\frac{23}{806400}r^{12}\mathrm{Pr}\end{array}\right)
\end{array}\right)\\
&+We\frac{\eta_p}{\eta}\left(\begin{array}{l}
\mathrm{Re}^{3}\left(\begin{array}{l}-\frac{67}{6635520}r^{10}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{11881}{696729600}r^{8}-\frac{229}{9953280}r^{4}\mathrm{Pr}^{2}-\frac{397463}{29262643200}r^{2}+\frac{5683}{199065600}r^{4}+\frac{481}{46448640}r^{12}\mathrm{Pr}\\
+\frac{13}{9289728}r^{12}-\frac{1}{163840}r^{10}+\frac{1}{23224320}r^{16}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{283}{29262643200}r^{16}-\frac{4673}{33177600}r^{6}\mathrm{Pr}-\frac{841}{19906560}r^{10}\mathrm{Pr}\\
-\frac{5}{7962624}r^{14}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{179}{12441600}r^{8}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{15359}{696729600}r^{2}\mathrm{Pr}^{2}-\frac{1}{5443200}r^{14}+\frac{401}{4877107200}r^{16}\mathrm{Pr}-\frac{1993}{1393459200}r^{14}\mathrm{Pr}\\
+\frac{23483}{232243200}r^{4}\mathrm{Pr}-\frac{1}{13271040}r^{6}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{23819}{232243200}r^{8}\mathrm{Pr}-\frac{2281}{77414400}r^{6}-\frac{306947}{9754214400}r^{2}\mathrm{Pr}+\frac{41}{11612160}r^{12}\mathrm{Pr}^{2}\end{array}\right)+\\
\mathrm{Re}\left(-\frac{613}{34560}r^{4}+\frac{169}{9216}r^{6}\mathrm{Pr}-\frac{5}{864}r^{8}+\frac{127}{13824}r^{2}-\frac{35}{3456}r^{8}\mathrm{Pr}-\frac{41}{3456}r^{4}\mathrm{Pr}+\frac{1}{1152}r^{2}\mathrm{Pr}+\frac{353}{23040}r^{6}+\frac{1}{1440}r^{10}+\frac{77}{46080}r^{10}\mathrm{Pr}\right)
\end{array}\right)\\
&+\mathrm{Re}^{4}\left(\begin{array}{l}-\frac{1}{58525286400}r^{18}+\frac{1207}{464486400}r^{4}\mathrm{Pr}-\frac{307}{7431782400}r^{14}\mathrm{Pr}-\frac{169231}{222953472000}r^{2}\mathrm{Pr}-\frac{81133}{22295347200}r^{6}\mathrm{Pr}+\frac{8987}{3483648000}r^{8}\mathrm{Pr}\\
+\frac{233}{928972800}r^{12}\mathrm{Pr}-\frac{1}{983040}r^{10}\mathrm{Pr}+\frac{439}{1857945600}r^{8}-\frac{2297}{5573836800}r^{6}-\frac{293927}{1404606873600}r^{2}-\frac{163}{79626240}r^{4}\mathrm{Pr}^{2}\\
-\frac{29}{222953472000}r^{18}\mathrm{Pr}-\frac{1}{1592524800}r^{18}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{14569}{35115171840}r^{4}-\frac{139}{1592524800}r^{10}+\frac{1}{83607552}r^{16}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{61}{2786918400}r^{12}\\
+\frac{47}{117050572800}r^{16}+\frac{61}{154828800}r^{12}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{439}{398131200}r^{8}\mathrm{Pr}^{2}-\frac{299}{318504960}r^{10}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{11}{2786918400}r^{16}\mathrm{Pr}-\frac{29}{7431782400}r^{14}\\
+\frac{14821}{8360755200}r^{2}\mathrm{Pr}^{2}+\frac{43}{159252480}r^{6}\mathrm{Pr}^{2}-\frac{1}{10616832}r^{14}\mathrm{Pr}^{2}\end{array}\right)\\
&+\mathrm{Re}^{4}\left(\begin{array}{l}\frac{13}{184320}r^{10}-\frac{187}{207360}r^{4}-\frac{20477}{19353600}r^{2}\mathrm{Pr}-\frac{73}{230400}r^{8}-\frac{53}{9676800}r^{12}+\frac{409}{552960}r^{6}+\frac{107}{138240}r^{4}\mathrm{Pr}+\frac{15451}{29030400}r^{2}\\
+\frac{11}{23040}r^{6}\mathrm{Pr}-\frac{109}{4838400}r^{12}\mathrm{Pr}-\frac{1027}{1382400}r^{8}\mathrm{Pr}+\frac{131}{552960}r^{10}\mathrm{Pr}\end{array}\right)\\
&+\frac{55}{96}r^{4}-\frac{71}{384}r^{6}-\frac{227}{384}r^{2}
\end{aligned}
$$

(۳-۷۲-۳)

در ادامه به تفاوت های ساختاری حل اخیر با حل ارائه شده در تحقیق ژانگ و همکاران [۵۵] پرداخته می شود. در شکل (۳-۱۴) توزیع دمای جریان سیال نیوتنی در Re=40 و نسبت های انحنای مختلف نشان داده شده است. در اینجا به دلیل تقارن، توزیع دما تنها در نیمی از مقطع جریان نشان داده شده و سمت راست مقطع مربوط به سمت خارجی و سمت چپ آن مربوط به سمت داخلی انحنای لوله خمیده

است. برای حالت لوله مستقیم ($\delta = 0.0$)، به دلیل عدم وجود نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا، فشار استاتیکی در کل مقطع جریان دارای توزیع یکنواختی (مقدار ثابت) بوده و شدت جریانهای ثانویه صفر است. همچنین توزیع سرعت و توزیع دما بصورت متقارن محوری و مستقل از عدد رینولدز و عدد پرانتل بوده و خطوط دما ثابت به شکل حلقه های متحدالمرکز هستند. بنابراین، فرض ثابت بودن دمای دیواره در هر مقطع، برای لوله مستقیم ($\delta = 0.0$) فرض معقولی است اما این فرض برای لوله خمیده به هیچ عنوان صحیح نمی باشد. به دلیل عدم وجود اثرات نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا، در جریان خزشی سیال نیوتنی در لوله های خمیده، شدت جریانهای ثانویه بسیار ضعیف است. به طور کلی گرادیان فشار محوری در ناحیه نزدیک به انحنای داخلی لوله خمیده بزرگتر از سمت انحنای خارجی است (به ترم 4/B در معادله (۲-۴۸) توجه کنید). لذا به دلیل عدم فعالیت جریانهای ثانویه و بزرگ بودن گرادیان فشار محوری در ناحیه سمت انحنای داخلی خم، سرعت محوری جریان خزشی در این ناحیه بزرگتر از سایر نواحی است. با توجه به شکل (۳-۱۴)، در جریان خزشی توزیع دما نیز تحت اثر سرعت محوری قرار داشته و موقعیت مینیمم دمای جریان به سمت دیوار داخلی متمایل است. در جریان اینرسی سیال نیوتنی در کانال خمیده، با ازدیاد عدد رینولدز، بر شدت جریانهای ثانویه و انتقال حرارت جریان افزوده می شود. در این حالت وجود نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا منجر به ایجاد گرادیان فشار در جهت شعاع انحنای خم، تشکیل جریانهای ثانویه و متمایل شدن موقعیت ماکزیمم سرعت محوری به سمت دیواره خارجی می شود. بروز این تغییرات عمده در جریان سبب خارج شدن توزیع دما از وضعیت متقارن محوری شده و موقعیت مینیمم توزیع دما به سمت دیواره خارجی متمایل می شود. مطابق شکل، در حالت شار ثابت، مقدار دما بر روی دیواره لوله خمیده دیگر مقدار ثابتی نیست. همچنین ماکزیمم دما بر روی دیواره لوله و در سمت داخلی انحنای آن بوده و با افزایش شعاع انحنا خم، مقدار ماکزیمم دما و همچنین عدد ناسلت متوسط به طور چشمگیری افزایش پیدا می کند. بنابراین نتایج ارائه شده در این شکل برای جریان خزشی

و اینرسی مبین آن است که فرض ژانگ و همکاران [۵۵] برای ثابت فرض نمودن دمای دیواره برای حالت شار ثابت به بروز خطای قابل توجه در تعیین میدان دما منجر می شود.



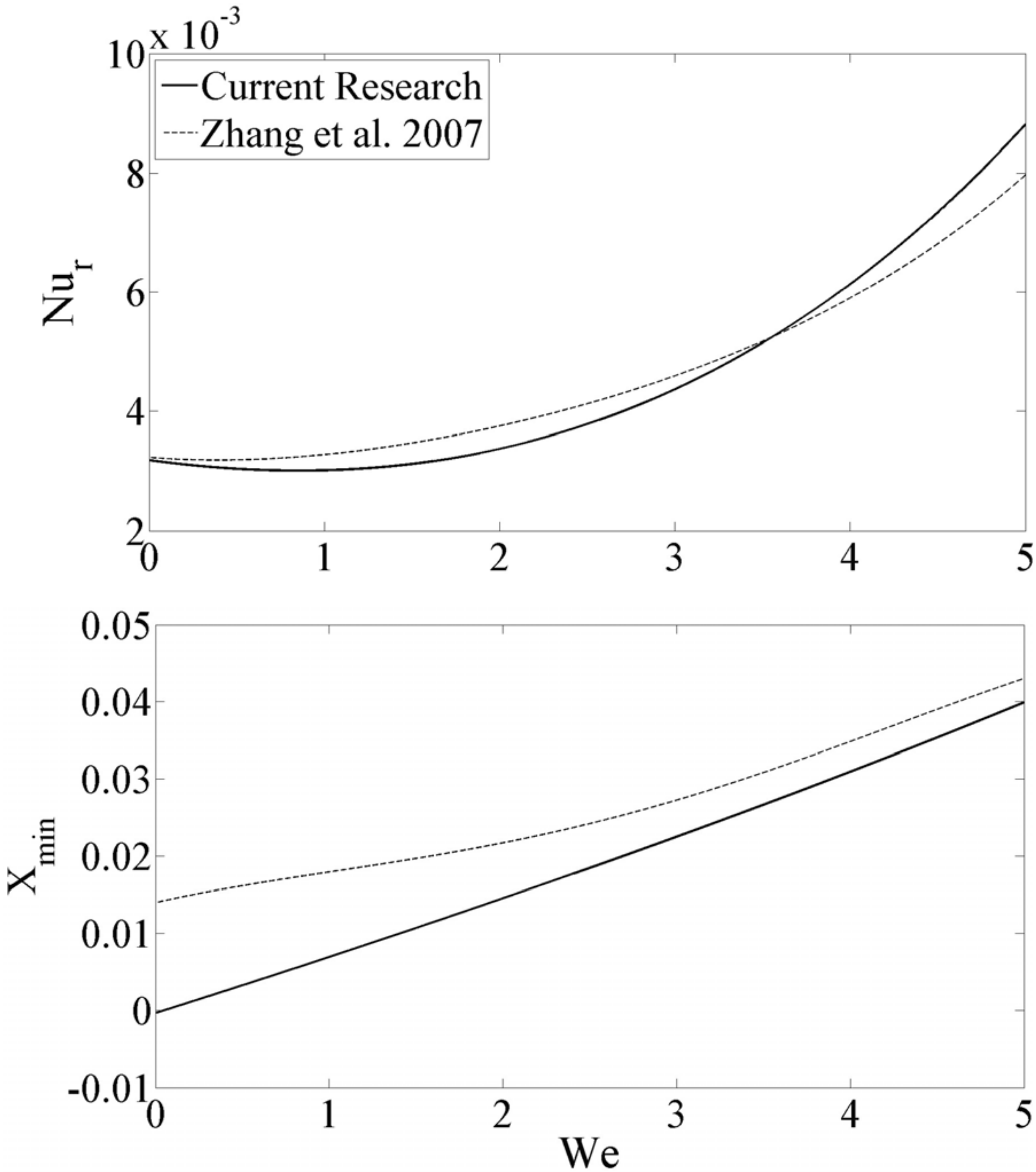
شکل (۳-۱۴): کانتورهای توزیع دمای جریان سیال نیوتنی در $\mathrm{Pr} = 0.85$

در شکل (۳-۱۵)، مقایسه کمی بین نتایج تحقیق اخیر و نتایج ژانگ و همکاران [۵۵] برای انتقال حرارت سیال اولدروید-بی انجام شده است. در اینجا عدد ناسلت نسبی و موقعیت مینیمم توزیع دما بر حسب عدد وایزنبرگ در Re=40، $\delta=0.2$ و $\eta_p/\eta=0.2$ نشان داده شده است. شایان ذکر است که نحوه بی بعد سازی دما در این دو تحقیق متفاوت بوده و موقعیت ماکزیمم توزیع دما در تحقیق ژانگ و همکاران [۵۵] معادل موقعیت مینیمم دما در تحقیق اخیر است که در نمودار با $X_{\min}$ نشان داده شده است. به عبارت دیگر مقدار $X_{\min}$ مبین موقعیت تقعر/تحدب توزیع دما در ناحیه هسته جریان است. همچنین عدد ناسلت نسبی را می توان بصورت میزان اختلاف عدد ناسلت جریان در لوله خمیده به عدد ناسلت جریان سیال نیوتنی در لوله مستقیم تعریف نمود:

$$Nu_r=\frac{Nu_m-Nu_0}{Nu_0} \qquad (۳-۷۳)$$

در رابطه فوق، Nu_r عدد ناسلت نسبی و Nu_0 عدد ناسلت جریان سیال نیوتنی در لوله مستقیم بوده و برابر ۴/۳۶۳۶ است. رابرتسون و مولر [۴۶] نشان دادند که با افزایش عدد وایزنبرگ بر شدت جریانهای ثانویه سیال اولدروید افزوده می شود اما در اعداد وایزنبرگ کوچک جریان از خود رفتار کاهش پسا و در مقادیر بزرگ آن رفتار افزایش پسا نشان می دهد.

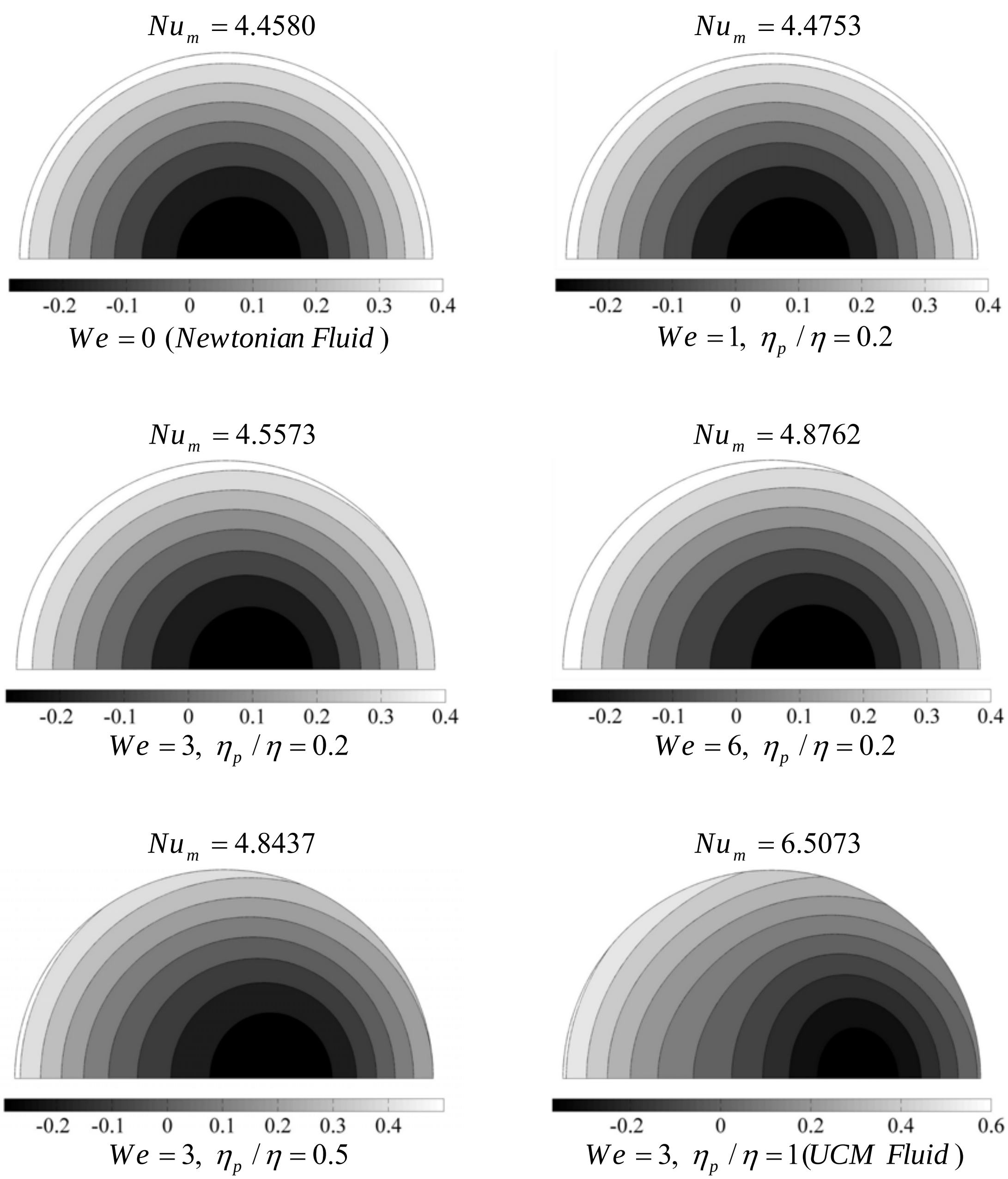
مطابق شکل در عدد رینولدز ۲۵، $X_{\min}$ در تحقیق اخیر مقدار کوچک منفی محاسبه شده است. زیرا همانگونه که در شکل (۳-۱۴) ملاحظه می شود، در جریان خزشی $X_{\min}$ دارای مقدار منفی قابل توجهی است اما با افزایش اینرسی جریان (عدد رینولدز) موقعیت تقعر توزیع دما به سمت انحنای خارجی لوله میل می کند. مطابق شکل، ثابت فرض نمودن دمای دیواره در تحقیق ژانگ و همکاران [۵۵] منجر به بروز خطا در محاسبه عدد ناسلت و $X_{\min}$ می شود به نحوی که عدد ناسلت نسبی در تحقیق ژانگ و همکاران [۵۵] دارای ۹٪ خطا نسبت به تحقیق اخیر در عدد وایزنبرگ ۵ است. همچنین در تحقیق ژانگ و همکاران [۵۵] مقدار $X_{\min}$ همواره مقداری بزرگتر از تحقیق اخیر محاسبه شده است.



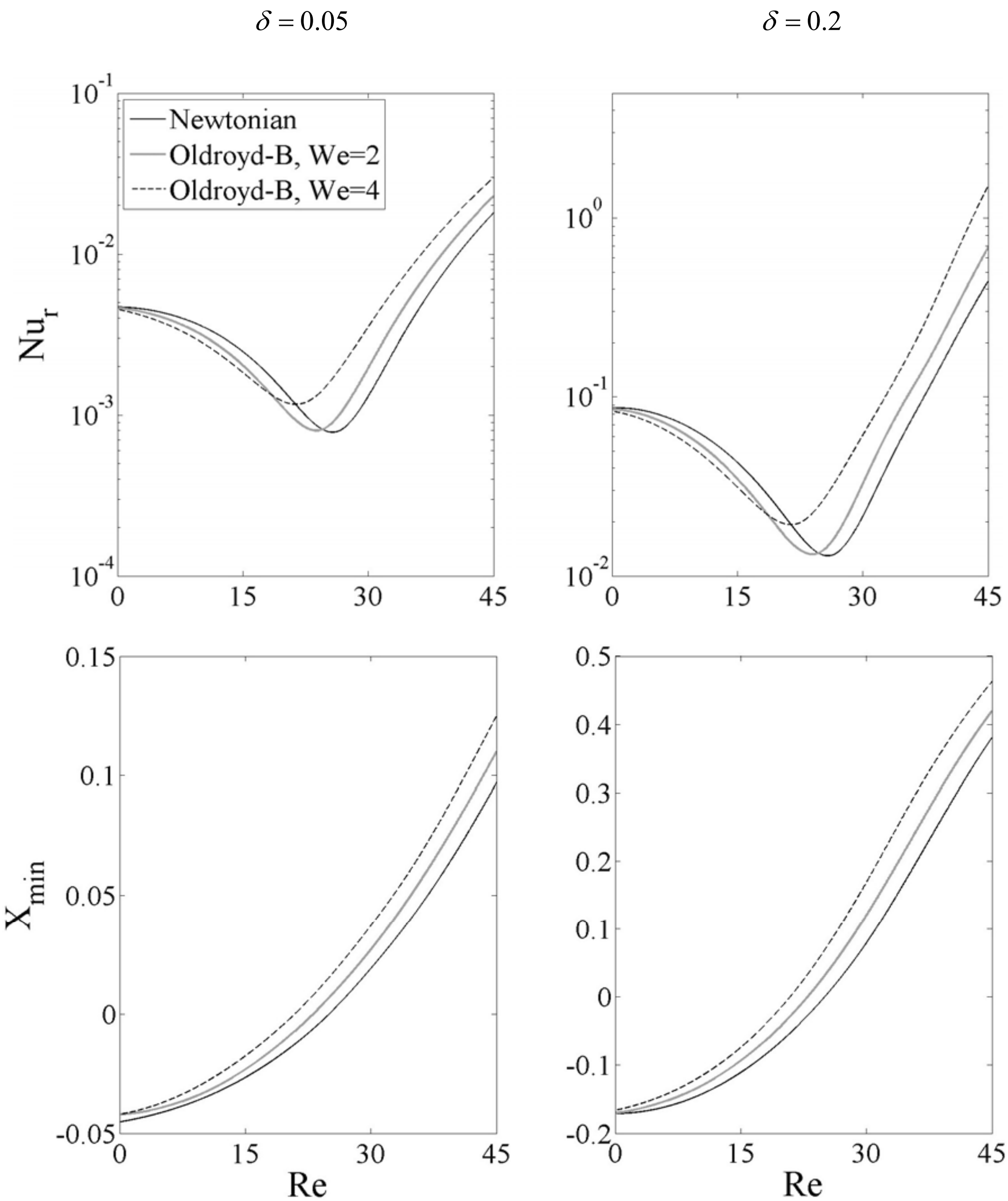
شکل (۳-۱۵): عدد ناسلت نسبی و موقعیت مینیمم دما بر حسب عدد وایزنبرگ در
Re=25, Pr=0.85 $\delta = 0.1$, $\eta_p / \eta = 0.2$

شکل (۳-۱۶)، توزیع دمای جریان سیال اولدروید-بی را در اعداد وایزنبرگ و نسبت های ویسکوزیته مختلف نمایش می دهد. در اینجا عدد رینولدز برابر ۳۰ و نسبت انحنا برابر ۰/۲ فرض شده است. مطابق شکل ازدیاد عدد وایزنبرگ منجر به افزایش عدد ناسلت متوسط و متمایل شدن نقطه تقعر توزیع دما به سمت دیواره خارجی می شود که این امر ناشی از افزایش شدت جریانهای ثانویه در اثر ازدیاد خاصیت الاستیک سیال است. مطابق شکل، در نسبت ویسکوریته یک، مدل اولدروید-بی به مدل UCM تبدیل می شود که در این حالت میزان عدد ناسلت متوسط به میزان ۳۴٪ نسبت به حالت دارای نسبت ویسکوزیته ۰/۵ بیشتر است. رابرتسون و مولر [۴۶] نشان دادند که افزایش نسبت ویسکوزیته محلول اولدروید-بی به افزایش شدید شدت جریانهای ثانویه منجر می شود که در اینجا نیز اثر آن بر افزایش انتقال حرارت جریان قابل مشاهده است. شکل (۳-۱۷) دیاگرامهای عدد ناسلت و موقعیت مینیمم توزیع دمای جریان سیال اولدروید-بی را بر حسب عدد رینولدز و در اعداد وایزنبرگ مختلف نمایش می دهد. مطابق شکل با ازدیاد عدد رینولدز از مقدار صفر، عدد ناسلت نسبی در ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد. در این تحقیق از پارامتر Re_m به عنوان عدد رینولدزی که در آن مقدار عدد ناسلت مینیمم است، استفاده شده است. با مقایسه دیاگرامهای مربوط به Nu_r با دیاگرامهای $X_{\min}$ می توان دریافت که برای هر عدد وایزنبرگ سیال اولدروید-بی، مینیمم مقدار دیاگرامهای ناسلت نسبی در نزدیکی همان عدد رینولدزی قرار دارند که در آن مقدار $X_{\min}$ صفر است. همانگونه که پیشتر گفته شد، با افزایش عدد رینولدز، موقعیت تقعر توزیع دمای جریان از ناحیه نزدیک انحنای داخلی لوله خمیده به سمت انحنای خارجی آن منتقل می شود. در اعداد رینولدزی که موقعیت نقطه تقعر در نزدیکی مرکز لوله قرار دارد ($X_{\min} = 0$)، توزیع دما به صورت تقریباً متقارن محوری و به فرمی نزدیک به توزیع دما در لوله مستقیم است، به همین دلیل در این حالت مقدار عدد ناسلت جریان در لوله خمیده به سمت عدد ناسلت در لوله مستقیم نزدیک می شود و به این ترتیب مقدار عدد ناسلت نسبی به مقدار مینیمم می رسد. اما در اعداد

رینولدز بزرگ، با منتقل شدن موقعیت تقعر توزیع دما به سمت انحنای خارجی و افزایش شدید شدت جریانهای ثانویه، مقدار عدد ناسلت نسبی به طور چشمگیری افزایش می یابد.

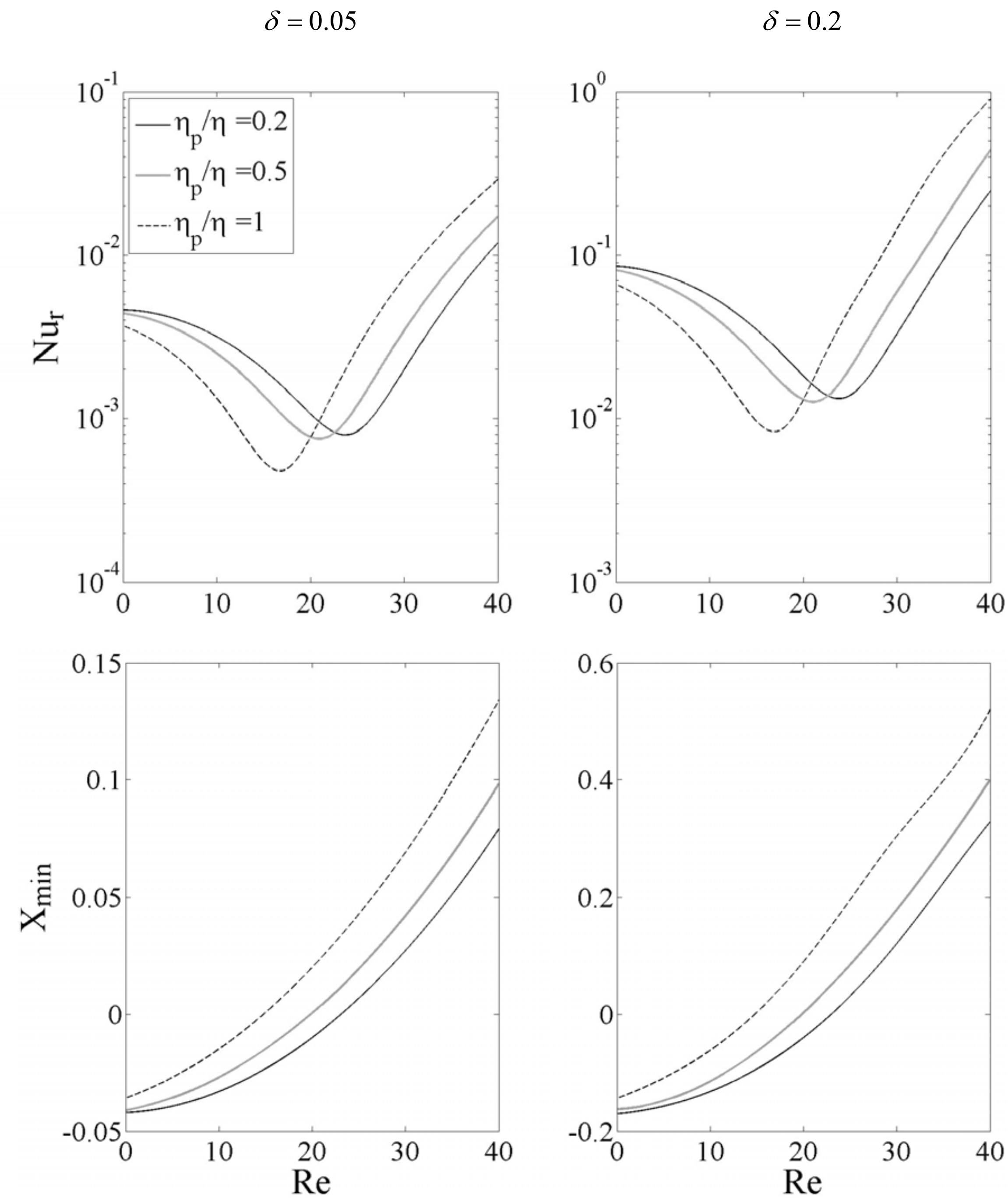


شکل (۳-۱۶): کانتورهای توزیع دمای جریان سیال اولدروید-بی در $\mathrm{Re} = 30$, $\mathrm{Pr} = 0.85$ و $\delta = 0.2$

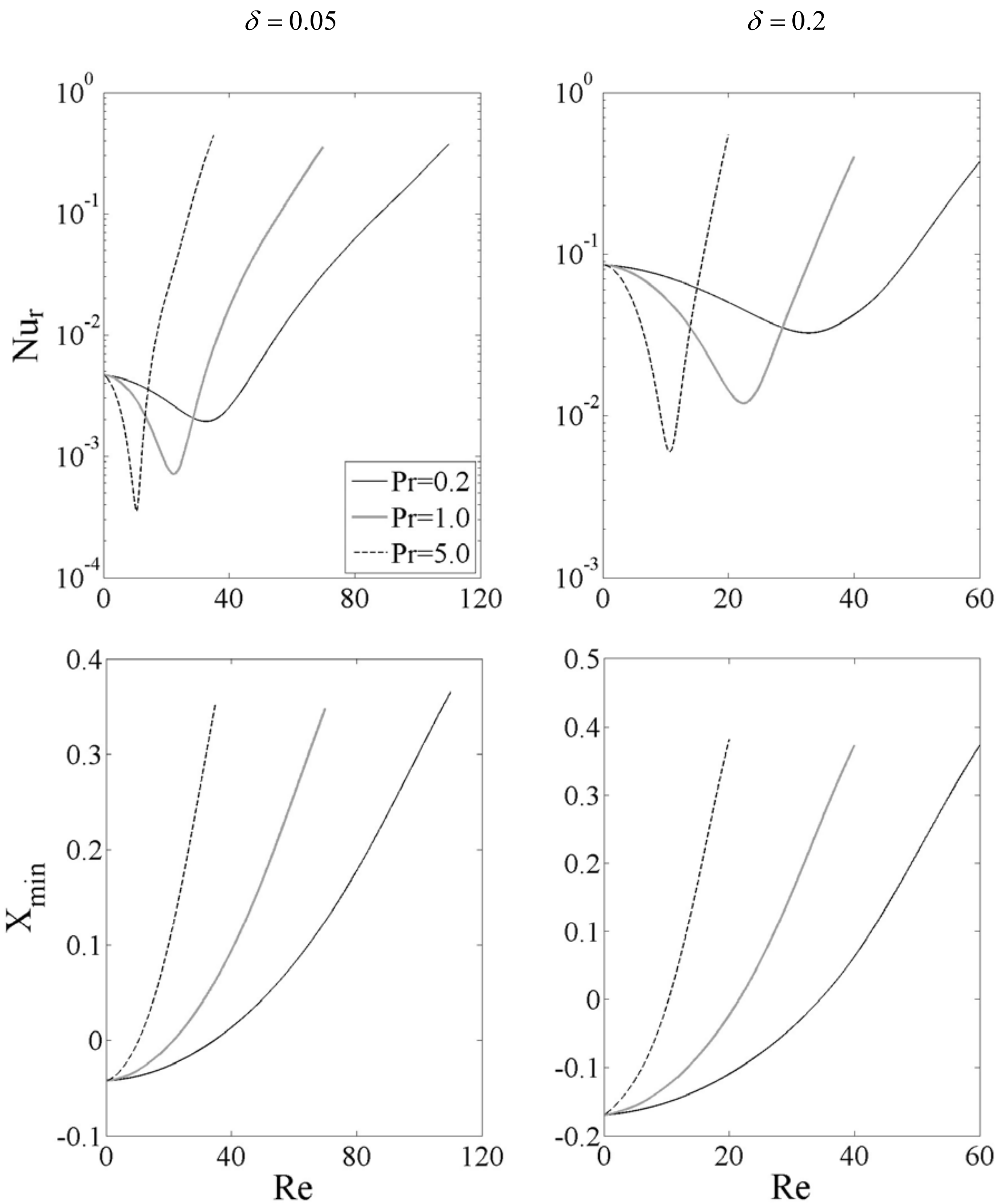


شکل (۳-۱۷): دیاگرام های عدد ناسلت نسبی و موقعیت مینیمم مقدار توزیع دمای جریان سیال اولدروید-بی بر حسب عدد رینولدز در اعداد وایزنبرگ مختلف و در $\mathrm{Pr} = 0.85$ و $\eta_p / \eta = 0.2$

شکل (۳-۱۸) اثر نسبت ویسکوزیته بر عدد ناسلت نسبی و نیز موقعیت تقعر توزیع دما را در دو نسبت انحنای ۰/۰۵ و ۰/۲ نمایش می دهد. در اینجا $We = 2$ و $\Pr = 0.85$ فرض شده است. بطور کلی، افزایش نسبت ویسکوزیته سیال اولدروید-بی، به افزایش شدت جریانهای ثانویه منجر می شود [۴۶] که این پدیده منجر به متمایل شدن مرکز تقعر توزیع دما به سمت دیواره خارجی (افزایش مقدار $X_{\min}$) می شود. به این ترتیب با افزایش نسبت ویسکوزیته، مقدار مینیمم عدد ناسلت نسبی در اعداد رینولدز کوچک تری قرار می گیرد (مقدار Re_m کاهش می یابد). همچنین در اعداد رینولدز بزرگتر از Re_m، افزایش نسبت ویسکوزیته به افزایش مقدار عدد ناسلت نسبی منجر می شود. در شکل (۳-۱۹)، اثر عدد پرانتل بر عدد ناسلت نسبی و نیز مقدار $X_{\min}$ نشان داده شده است. در اینجا، $We = 2$ و $\eta_p / \eta = 0.2$ فرض شده است. مطابق شکل، انتقال حرارت سیال اولدروید-بی در جریان خزشی ($\mathrm{Re} \to 0$) مستقل از عدد پرانتل است. همچنین ازدیاد عدد پرانتل نیز به کاهش مقدار Re_m و افزایش مقدار $X_{\min}$ منجر می شود که این پدیده نوعاً مشابه اثر عدد پرانتل در انتقال حرارت جریان سیال نیوتنی است. شایان ذکر است که حل به روش حساب اختلالات تنها برای گستره عدد رینولدز نشان داده شده در شکل (۳-۱۹) معتبر است. برای مثال در نسبت انحنای ۰/۲ و عدد پرانتل ۵، پاسخ های روش حساب اختلالات برای اعداد رینولدز بزرگتر از ۲۰ با فیزیک انتقال حرارت در کانال خمیده سازگار نیست. با توجه به شکل می توان دریافت که بر خلاف جریان سیال نیوتنی در لوله خمیده که در آن عدد پکلت معیاری مستقلی ($Pe = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}$) برای انتقال حرارت است، در جریان اینرسی سیال اولدروید-بی، عدد پکلت یک معیار مستقل محسوب نمی شود و بایستی اثر عدد رینولدز و پرانتل را بطور جداگانه برای بررسی انتقال حرارت جریان به کار گرفت. بطور خلاصه در این بخش نشان داده شد که افزوده شدن بر عدد وایزنبرگ، نسبت ویسکوزیته و عدد پرانتل منجر به افزایش انتقال حرارت جریان سیال اولدروید-بی و متمایل شدن موقعیت تقعر توزیع دمای جریان به سمت انحنای خارجی کانال می شود.



شکل (۳-۱۸): دیاگرام های عدد ناسلت نسبی و موقعیت مینیمم مقدار توزیع دمای جریان سیال اولدروید-بی بر حسب عدد رینولدز در نسبتهای ویسکوزیته مختلف و در $\Pr = 0.85$ و $We = 2$



شکل (۳-۱۹): دیاگرام های عدد ناسلت نسبی و موقیعت مینیمم مقدار توزیع دمای جریان سیال اولدروید-بی بر حسب عدد رینولدز در اعداد پرانتل مختلف و در $\eta_p / \eta = 0.2$ و $We = 2$

فصل چهارم

روش عددی

۴-۱- مقدمه

در این تحقیق از روش عددی تفاضل محدود برای تحلیل جریان و انتقال حرارت در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی استفاده شده است. در اینجا معادلات حاکم بصورت صریح گسسته سازی شده اند و تقریب مرکزی مرتبه دوم برای مشتقات مکانی و تقریب پیشروی مرتبه اول برای مشتق زمان به کار گرفته شده است. در اینجا از شبکه جابجا شده استفاده شده و پارامترهای جریان مطابق روش علامتگذاری و سلول بر روی گره های محاسباتی اختصاص یافته اند. همچنین برای اصلاح فشار استاتیکی در طی گامهای زمانی تحلیل، از روش تراکم پذیری مصنوعی استفاده شده است.

در این فصل ضمن تشریح روش عددی به کار گرفته شده، صورت گسسته معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت ارائه گردیده و بر روی نحوه اعمال شرایط مرزی و الگوریتم عددی تحلیل بحث می شود.

۴-۲- تحلیل عددی جریانهای دائمی

به طور کلی، تحلیل عددی مسائل جریان دائمی بصورت شبه گذرا صورت می‌گیرد و پس از انتخاب یک شرط اولیه مناسب، معادلات حاکم در حالت غیردائم حل می‌شوند تا جوابها به سمت جوابهای، جریان دائمی همگرا شوند [۱۲۹]. پیش از پرداختن به روشهای عددی، لازم است که به مشکلی که در رابطه با حل معادلات حاکم بر جریان سیالات لزج در حالت غیردائم وجود دارد، اشاره شود. با توجه به معادلات حاکم بر جریان مشاهده می‌شود که معادلات مومنتوم و معادله انتقال حرارت دارای ترم تابع زمان برای مؤلفه‌های سرعت و دما هستند. بنابراین مولفه های سرعت و دما بصورت غیردائم موجود می‌باشند، ولی متأسفانه فشار در این معادلات دارای ترم تابع زمان نیست. برای غلبه بر این مشکل باید تغییراتی در معادله پیوستگی ایجاد کنیم تا فشار نیز قابل محاسبه شود [۱۲۹].

برای انجام این کار، دو روش پیشنهاد شده است. یکی از روشها افزودن جمله فشار تابع زمان به معادله پیوستگی است که به آن روش تراکم‌پذیری مصنوعی[1] می‌گویند [۱۳۰] و روش دیگر ایجاد تغییراتی در معادلات مومنتوم و پیوستگی است که حاصل آن معادله پواسون برای فشار است.

در این تحقیق، از روش تراکم پذیری مصنوعی برای تخمین فشار در طی گامهای زمانی تحلیل استفاده شده است. کاربرد این روش برای جریان دائمی سیالات تراکم‌ناپذیر بوده و از سوی چورین[2] [۱۳۰] معرفی شده است. در این روش، معادله پیوستگی با درج یک عبارت تابع زمان برای فشار به فرم زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{\tau}\nabla .V\ =0 \qquad (۱-۴)$$

در رابطه فوق τ، تراکم‌پذیری مصنوعی سیال است. با توجه به معادلهٔ حالت، تراکم‌پذیری را به صورت شبه سرعت صوت و جرم مخصوص مصنوعی با استفاده از روابط زیر تعریف می‌شود [۱۳۰]:

$$\tau =\frac{1}{a^{2}} \qquad (۱-۲-۴)$$

$$a^{2}=\frac{P}{\rho} \qquad (۲-۲-۴)$$

در روابط فوق همه متغیرها به صورت بی‌بعد تعریف شده‌اند. با توجه به روابط (۴-۱) و (۴-۲) معادله پیوستگی به فرم نهایی زیر نوشته می‌شود [۱۳۰]:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+a^{2}\,\nabla .V\ =0 \qquad (۳-۴)$$

گفتنی است که در حالت حدی، وقتی که حالت دائم حاصل می شود ($t\rightarrow\infty$)، معادله (۴-۳) به صورت معادله پیوستگی تراکم‌ناپذیر ساده در می‌آید. (چون در حالت دائم $\frac{\partial P}{\partial t}$ برابر صفر شده است).

---

1. Artificial Compressibility
2. Chorin

۴-۳- نحوهٔ تولید شبکه محاسباتی

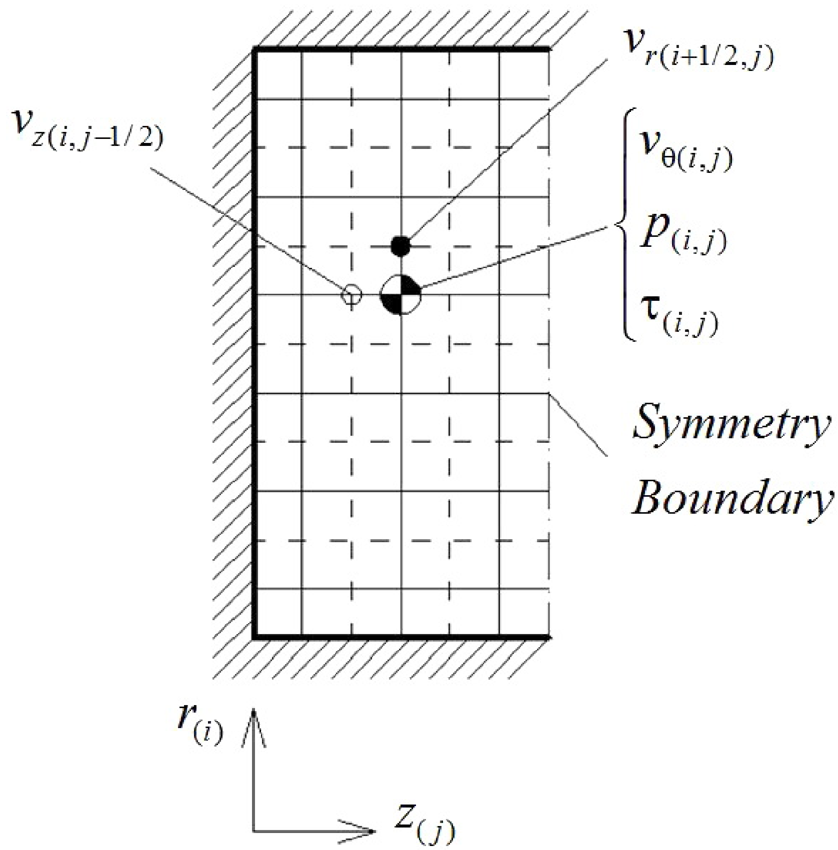
استفاده از شبکه محاسباتی موسوم به شبکه جابجا شده[1] برای حل عددی گام به گام جریان سیالات متداول است. استفاده از این روش، امکان به هم جفت شدن متغیرها را فراهم کرده و پایداری حل عددی را بهبود می‌بخشد.

شبکه جابجا شده را به روشهای مختلفی می‌توان تولید کرد. مثلاً شبکه را می‌توان در امتداد یکی از خطوط مختصات به اندازهٔ نصف فاصله دو نقطه و یا در امتداد قطر و به اندازهٔ نصف قطر جابجا کرد. در شکل (۴-۱) شبکه جابجا شده به کار گرفته شده در تحقیق حاضر نشان داده شده است. در اینجا به دلیل وجود تقارن، شبکه محاسباتی تنها در نیمی از مقطع کانال نمایش داده شده است. همچنین شبکه جابجا شده با جابجایی در امتداد قطر سلول ها و به اندازه نصف قطر آنها تولید شده است. از آنجا که از دو شبکه غیر منطبق بر هم استفاده شده، آنها را شبکه‌های اولیه و ثانویه نامیده اند. همچنین شبکه اولیه با خطوط ممتد و شبکه ثانویه با خطوط خط‌چین نشان داده شده است. در اینجا، گره های محاسباتی شبکه اولیه با i و j که برای شبکه‌های استاندارد به کار می‌رود نشان داده شده حال آنکه شبکه ثانویه، با فواصل نصف مشخص شده است.

به طور کلی، اعمال شرط مرزی فیزیکی مناسب برای فشار استاتیکی یکی از دشواری های مربوط به روش های عددی مختلف محسوب می شود. معمولاً برای این منظور از شرط مرزی نیومن همگن برای فشار بر روی دیواره ها استفاده می شود. خوشبختانه گسسته سازی تفاضل محدود معادلات حاکم بر روی شبکه جابجا شده را می توان به نحوی انجام داد که بی نیاز به استفاده از این شرط مرزی باشد. از آنجا که مرزها بر روی شبکه ثانویه تعریف می‌شوند و فشار بر روی شبکه اولیه اختصاص یافته و در معادلات حاکم فاقد مشتق مرتبه دوم است، لذا در اینجا نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار نیست.

1. Staggered mesh

در شکل (۴-۱) نحوه اختصاص پارامترهای جریان بر روی شبکه محاسباتی نشان داده شده است. در اینجا روش علامتگذاری و سلول[1] برای اختصاص این پارامترها به کار رفته است. استفاده از این روش به پایداری حل عددی کمک شایانی می نماید. مطابق شکل، مولفه سرعت محوری (v_θ)، فشار استاتیکی (P) و مولفه های میدان تنش (τ) بر روی شبکه اولیه محاسبه می شوند. مولفه های سرعت v_r و v_z نیز بر روی موقعیت های خاصی از محل اتصال شبکه اولیه با شبکه ثانویه قرار دارند. مولفه سرعت شعاعی v_r، در امتداد شعاعی (r) بر روی شبکه ثانویه و در امتداد عرضی (z) بر روی شبکه اولیه قرار دارد ($v_{r(i+1/2,j)}$)، حال آنکه این موضوع برای مولفه سرعت عرضی v_z بر عکس است ($v_{z(i,j+1/2)}$).



شکل (۴-۱): شبکه محاسباتی مورد استفاده و نحوه تخصیص پارامترهای جریان در تحقیق حاضر [۱۲۵]

1. Marker and cell method

۴-۴- گسسته سازی معادلات حاکم

۴-۴-۱- *شیوه گسسته سازی*

استفاده از گسسته سازی به روش تفاضل محدود بر روی شبکه جابجا شده به فرمولبندی های بسیار مناسبی منجر می شود. این فرمولبندی توسط هارلو و ولچ[۲] [۱۳۱] ابداع شده که هدف از ابداع آن بررسی جریانهای تراکم ناپذیر دائمی است. در این روش، برای گسسته کردن معادلات حاکم از تقریب تفاضل محدود پیشرو مرتبه اول برای مشتق زمان و تقریب تفاضل محدود مرتبه دوم برای مشتقات مکان استفاده می شود. در این گسسته سازی، نحوه اختصاص پارامترهای جریان به شبکه جابجا شده مطابق روش علامتگذاری و سلول است.

تاکنون از این روش عمدتاً برای مطالعه جریان سیالات نیوتنی استفاده شده است. در اینجا، این روش برای مطالعه جریان و انتقال حرارت توسعه یافته سیال CEF در کانال خمیده به کار رفته است. استفاده از این تکنیک، سبب پیچیدگی قابل توجه صورت گسسته معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت سیالات غیرنیوتنی شده و اعمال شرایط مرزی را با دشواری های فراوانی روبرو می کند اما مهمترین امتیاز این روش آن است که پایداری حل عددی را بطور قابل توجهی افزایش می دهد و نسبت به روش معمول تفاضل محدود ساده دارای پایداری عددی بسیار مناسبتری است [۱۲۹]. البته در اعداد الاستیک و نرخ های برش بزرگ نیاز به شبکه محاسباتی دارای گره های بیشتر بوده و بایستی انتخاب مناسبی برای گام زمانی و ثابت تراکم ناپذیری مصنوعی (ثابت a در رابطه (۴-۳)) صورت گیرد.

شایان ذکر است که استفاده از این روش برای جریان سیال نیوتنی بسیار مناسب است زیرا در معادلات ناویر استوکس، جملات دیورژانس تنش سیال نیوتنی به ترم لاپلاسین میدان سرعت ساده می شود که این ترم به سادگی بر روی شبکه جابجا شده گسسته سازی شده و اعمال شرایط مرزی بر روی آن بسیار

2. Harlow & Welch

ساده تر است. از آنجا که ترم تنش ویسکوز نقش بسزایی در پایداری تحلیل عددی دارد به همین دلیل ترم مربوط به این تنش (ترم لاپلاسین میدان سرعت) به طور جداگانه گسسته سازی شده است. برای این منظور میدان تنش بی بعد سیال CEF به صورت زیر بیان شده است:

$$\tau = \eta\gamma_{(1)} + \tau^{E} \tag{۴-۴}$$

که در رابطه فوق ترم τ^{E} معرف تنش ناشی از اثر اختلاف تنش های نرمال بوده و با توجه رابطه (۲-۶۷) برای سیال CEF به شکل زیر قابل تعریف است:

$$\tau^{E} = -\frac{1}{2}\Psi_{1}\gamma_{(2)} + \Psi_{2}\left\{\gamma_{(1)}\cdot\gamma_{(1)}\right\} \tag{۴-۴}$$

در اینجا از صورت بقایی معادلات حاکم استفاده شده است. بنابراین با توجه به رابطه (۴-۴)، صورت بقایی معادلات مومنتوم حاکم بر جریان سیال CEF (معادله (۲-۱۰)) بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(v_{r}v_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(v_{\theta}v_{z}) + \frac{2}{r}v_{r}v_{\theta} = -2Ro.v_{r} + \\ &\qquad \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{C}{r} + \eta\left(\nabla^{2}v_{\theta} - \dfrac{v_{\theta}}{r^{2}}\right) + \left(\dfrac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \dfrac{v_{\theta}}{r}\right)\dfrac{\partial \eta}{\partial r} + \\ \dfrac{\partial v_{\theta}}{\partial z}\dfrac{\partial \eta}{\partial z} + \dfrac{1}{r^{2}}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\tau_{r\theta}{}^{E}\right) + \dfrac{\partial \tau_{z\theta}{}^{E}}{\partial z}\end{array}\right\}\end{aligned} \tag{۱-۶-۴}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_{r}}{\partial t} + \frac{\partial v_{r}^{2}}{\partial r} + \frac{\partial v_{r}v_{z}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(v_{r}^{2} - v_{\theta}^{2}\right) = 2Ro.v_{\theta} + r.Ro^{2} + \\ &\qquad \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\partial P}{\partial r} + \eta\left(\nabla^{2}v_{r} - \dfrac{v_{r}}{r^{2}}\right) + \left(\dfrac{\partial v_{r}}{\partial z} + \dfrac{\partial v_{z}}{\partial r}\right)\dfrac{\partial \eta}{\partial z} + \\ 2\dfrac{\partial v_{r}}{\partial r}\dfrac{\partial \eta}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{rr}{}^{E}}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{rz}{}^{E}}{\partial z} + \dfrac{\tau_{rr}{}^{E} - \tau_{\theta\theta}{}^{E}}{r}\end{array}\right\}\end{aligned} \tag{۲-۶-۴}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_{z}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(v_{r}v_{z}\right) + \frac{\partial v_{z}^{2}}{\partial z} + \frac{v_{r}v_{z}}{r} = \\ &\qquad \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{-\frac{\partial P}{\partial z} + \eta\nabla^{2}v_{z} + \left(\frac{\partial v_{r}}{\partial z} + \frac{\partial v_{z}}{\partial r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial r} + 2\frac{\partial v_{z}}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rz}{}^{E}\right) + \frac{\partial \tau_{zz}{}^{E}}{\partial z}\right\}\end{aligned} \tag{۳-۶-۴}$$

۴-۴-۲- صورت گسسته معادلات حاکم

در این بخش صورت گسسته معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت ارائه می شود. همانگونه که پیشتر گفته شد در اینجا از فرمولبندی تفاضل محدود پیشرو مرتبه اول برای مشتق زمان و تقریب تفاضل محدود مرتبه دوم برای مشتقات مکان استفاده شده است. بر این اساس صورت گسسته معادله مومنتوم در جهت جریان اصلی (θ) به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\frac{v_{\theta_{j,k}}^{n+1}-v_{\theta_{j,k}}}{\Delta t}+\frac{(v_r v_\theta)_{j+\frac{1}{2},k}-(v_r v_\theta)_{j-\frac{1}{2},k}}{\Delta r}+\frac{(v_\theta v_z)_{j,k+\frac{1}{2}}-(v_\theta v_z)_{j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta z}\\
&\frac{2}{r_j}(v_r v_\theta)_{j,k}=-Ro\left(v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{C}{r_j}+\frac{\eta_{2j,2k}}{\mathrm{Re}}\frac{v_{\theta_{j-1,k}}-2v_{\theta_{j,k}}+v_{\theta_{j+1,k}}}{\Delta r^2}+\\
&\frac{\eta_{2j,2k}}{\mathrm{Re}}\frac{v_{\theta_{j,k-1}}-2v_{\theta_{j,k}}+v_{\theta_{j,k+1}}}{\Delta z^2}+\frac{\eta_{2j,2k}}{\mathrm{Re}\, r_j}\frac{v_{\theta_{j+\frac{1}{2},k}}-v_{\theta_{j-\frac{1}{2},k}}}{\Delta r}-\frac{\eta_{2j,2k}}{\mathrm{Re}\, r_j^2}v_{\theta_{j,k}}+\\
&\frac{1}{\mathrm{Re}}\gamma_{r\theta_{j,k}}\left(\frac{\eta_{j+1,k}-\eta_{j-1,k}}{2\Delta r}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\gamma_{\theta z_{j,k}}\left(\frac{\eta_{j,k+1}-\eta_{j,k-1}}{2\Delta z}\right)\\
&\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{r_{j+1}^2\tau^E_{\theta\theta_{j+1,k}}-r_{j-1}^2\tau^E_{\theta\theta_{j-1,k}}}{2r_j^2\Delta r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\tau^E_{\theta z_{j,k+1}}-\tau^E_{\theta z_{j,k-1}}}{2\Delta z}
\end{aligned} \tag{۴-۷}$$

در رابطه فوق، برخی از جملات بر روی شبکه اختصاص یافته خود قرار ندارند. بنابراین لازم است که این جملات از روابط زیر در معادله (۴-۷) جایگزین شوند:

$$(v_r v_\theta)_{j+\frac{1}{2},k}=\frac{1}{2}v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}(v_{\theta_{j,k}}+v_{\theta_{j+1,k}}) \tag{۴-۸-۱}$$

$$(v_r v_\theta)_{j-\frac{1}{2},k}=\frac{1}{2}v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}(v_{\theta_{j,k}}+v_{\theta_{j-1,k}}) \tag{۴-۸-۲}$$

$$(v_\theta v_z)_{j,k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}v_{z_{j,k+\frac{1}{2}}}(v_{\theta_{j,k}}+v_{\theta_{j,k+1}}) \tag{۴-۸-۳}$$

$$(v_\theta v_z)_{j,k-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}v_{z_{j,k-\frac{1}{2}}}(v_{\theta_{j,k}}+v_{\theta_{j,k-1}}) \tag{۴-۸-۴}$$

$$(v_r v_\theta)_{j,k}=\frac{1}{2}v_{\theta_{j,k}}(v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}) \tag{۴-۸-۴}$$

معادله مومنتوم در جهت شعاعی (r) نیز به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}^{n+1}-v_{j+\frac{1}{2},k}}{\Delta t}+\frac{(v_r^2)_{j+1,k}-(v_r^2)_{j,k}}{\Delta r}+\frac{(v_r v_z)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}-(v_r v_z)_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{\Delta z}+$$
$$\frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}}\left((v_r^2)_{j+\frac{1}{2},k}-(v_\theta^2)_{j+\frac{1}{2},k}\right)=-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{P_{j+1,k}-P_{j,k}}{\Delta r}+$$
$$2Ro.\left(\frac{v_{\theta_{j+1,k}}+v_{\theta_{j,k}}}{2}\right)+r_{j+\frac{1}{2}}.Ro^2+\frac{\eta_{2j,2k}}{\mathrm{Re}}\frac{v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}-2v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j+\frac{3}{2},k}}}{\Delta r^2}+$$
$$\frac{\eta_{2j,2k}}{\mathrm{Re}}\frac{v_{r_{j+\frac{1}{2},k-1}}-2v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j+\frac{1}{2},k+1}}}{\Delta z^2}+\frac{\eta_{2j,2k}}{\mathrm{Re}\,r_{j+\frac{1}{2}}}\frac{v_{r_{j+\frac{3}{2},k}}-v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}}{2\Delta r}- \qquad (۹-۴)$$
$$\frac{\eta_{2j,2k}}{\mathrm{Re}\,r_{j+\frac{1}{2}}^2}v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\gamma_{rr_{j,k}}+\gamma_{rr_{j+1,k}}}{2}\right)\left(\frac{\eta_{j+1,k}-\eta_{j-1,k}}{\Delta r}\right)+$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\gamma_{rz_{j,k}}+\gamma_{rz_{j+1,k}}}{2}\right)\left(\frac{\eta_{j,k+1}+\eta_{j+1,k+1}-\eta_{j,k-1}-\eta_{j+1,k-1}}{4\Delta z}\right)+$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{r_{j+1}\tau^E_{rr_{j+1,k}}-r_j\tau^E_{rr_{j,k}}}{r_{j+\frac{1}{2}}\Delta r}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\tau^E_{\theta\theta_{j,k}}+\tau^E_{\theta\theta_{j+1,k}}}{2r_{j+\frac{1}{2}}}+$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\tau^E_{rz_{j,k+1}}+\tau^E_{rz_{j+1,k+1}}-\tau^E_{rz_{j,k-1}}-\tau^E_{rz_{j+1,k-1}}}{4\Delta z}$$

در رابطه فوق، برای جملاتی که بر روی محل مناسب گره های محاسباتی قرار ندارند، داریم:

$$(v_r^2)_{j+1,k}=\frac{1}{4}(v_{r_{j+\frac{3}{2},k}}+v_{r_{j+\frac{1}{2},k}})^2 \qquad (۱-۱۰-۴)$$

$$(v_r^2)_{j,k}=\frac{1}{4}(v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j-\frac{1}{2},k}})^2 \qquad (۲-۱۰-۴)$$

$$(v_r v_z)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}(v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j+\frac{1}{2},k+1}})(v_{z_{j,k+\frac{1}{2}}}+v_{z_{j+1,k+\frac{1}{2}}}) \qquad (۳-۱۰-۴)$$

$$(v_r v_z)_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}(v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}+v_{r_{j+\frac{1}{2},k-1}})(v_{z_{j,k-\frac{1}{2}}}+v_{z_{j+1,k-\frac{1}{2}}}) \qquad (۴-۱۰-۴)$$

$$(v_\theta^2)_{j+\frac{1}{2},k}=\frac{1}{4}(v_{\theta_{j+1,k}}+v_{\theta_{j,k}})^2 \qquad (۴-۱۰-۴)$$

همچنین معادله مومنتوم در جهت عرضی (z) نیز بصورت زیر است:

$$\frac{v_{z\,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1}-v_{z\,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta t}+\frac{(v_r v_z)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}-(v_r v_z)_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{\Delta r}+$$
$$\frac{(v_z^2)_{j,k+1}-(v_z^2)_{j,k}}{\Delta z}+\frac{1}{r_j}(v_r v_z)_{j,k+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{P_{j,k+1}-P_{j,k}}{\Delta z}+$$
$$\frac{\eta_{2j,2k}}{\mathrm{Re}}\frac{v_{z\,j-1,k+\frac{1}{2}}-2v_{z\,j,k+\frac{1}{2}}+v_{z\,j+1,k+\frac{1}{2}}}{\Delta r^2}+\frac{\eta_{2j,2k}}{\mathrm{Re}}\frac{v_{z\,j,k-\frac{1}{2}}-2v_{z\,j,k+\frac{1}{2}}+v_{z\,j,k+\frac{3}{2}}}{\Delta z^2}+$$
$$\frac{\eta_{2j,2k}}{\mathrm{Re}\,r_j}\frac{v_{z\,j+1,k+\frac{1}{2}}-v_{z\,j-1,k+\frac{1}{2}}}{2\Delta r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\gamma_{zz\,j,k}+\gamma_{zz\,j,k+1}}{2}\right)\left(\frac{\eta_{j,k+1}-\eta_{j,k}}{\Delta z}\right)+$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\gamma_{rz\,j,k+1}+\gamma_{rz\,j,k}}{2}\right)\left(\frac{\eta_{j+1,k+1}+\eta_{j+1,k}-\eta_{j-1,k+1}-\eta_{j-1,k}}{4\Delta r}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\tau^E_{zz\,j,k+1}-\tau^E_{zz\,j,k}}{\Delta z}$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{r_{j+1}(\tau^E_{rz\,j+1,k+1}+\tau^E_{rz\,j+1,k})-r_{j-1}(\tau^E_{rz\,j-1,k+1}+\tau^E_{rz\,j-1,k})}{4\Delta r} \tag{۱۱-۴}$$

در رابطه فوق، برای جملاتی که بر روی محل مناسب گره های محاسباتی قرار ندارند، داریم:

$$(v_r v_z)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}(v_{r\,j+\frac{1}{2},k}+v_{r\,j+\frac{1}{2},k+1})(v_{z\,j,k+\frac{1}{2}}+v_{z\,j+1,k+\frac{1}{2}}) \tag{۱-۱۲-۴}$$

$$(v_r v_z)_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}(v_{r\,j-\frac{1}{2},k}+v_{r\,j-\frac{1}{2},k+1})(v_{z\,j,k+\frac{1}{2}}+v_{z\,j-1,k+\frac{1}{2}}) \tag{۲-۱۲-۴}$$

$$(v_z^2)_{j,k+1}=\frac{1}{4}(v_{z\,j,k+\frac{1}{2}}+v_{z\,j,k+\frac{3}{2}})^2 \tag{۳-۱۲-۴}$$

$$(v_z^2)_{j,k}=\frac{1}{4}(v_{z\,j,k+\frac{1}{2}}+v_{z\,j,k-\frac{1}{2}})^2 \tag{۴-۱۲-۴}$$

در روابط فوق، بالانویس $n+1$ معرف گام زمانی تحلیل در لحظه جدید است. برای سادگی، بالانویس سایر پارامتر هایی که درگام زمانی n محاسبه می شوند، در روابط فوق درج نشده است. شایان ذکر است که در اینجا مولفه های میدان تنش و تانسور نرخ برش مرتبه اول و دوم بر روی شبکه اولیه محاسبه شده اند.

با توجه به روابط (۲-۷۰)، روابط زیر برای تانسور نرخ برش برقرار است:

$$\gamma_{rr_{j,k}} = 2\left(\frac{v_{r_{j+\frac{1}{2},k}} - v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}}{\Delta r}\right) \qquad (۱-۱۳-۴)$$

$$\gamma_{r\theta_{j,k}} = \left(\frac{v_{\theta_{j+1,k}} - v_{\theta_{j-1,k}}}{2\Delta r}\right) - \frac{v_{\theta_{j,k}}}{r_j} \qquad (۲-۱۳-۴)$$

$$\gamma_{rz_{j,k}} = \left(\frac{v_{r_{j-\frac{1}{2},k+1}} + v_{r_{j+\frac{1}{2},k+1}} - v_{r_{j-\frac{1}{2},k-1}} - v_{r_{j+\frac{1}{2},k-1}}}{4\Delta z}\right) + \left(\frac{v_{z_{j+1,k+\frac{1}{2}}} + v_{z_{j+1,k-\frac{1}{2}}} - v_{z_{j-1,k+\frac{1}{2}}} - v_{z_{j-1,k-\frac{1}{2}}}}{4\Delta z}\right) \qquad (۳-۱۳-۴)$$

$$\gamma_{\theta\theta_{j,k}} = \left(\frac{v_{r_{j+\frac{1}{2},k}} + v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}}{r_j}\right) \qquad (۴-۱۳-۴)$$

$$\gamma_{\theta z_{j,k}} = \left(\frac{v_{\theta_{j,k+1}} - v_{\theta_{j,k-1}}}{2\Delta z}\right) \qquad (۴-۱۳-۴)$$

$$\gamma_{zz_{j,k}} = 2\left(\frac{v_{z_{j,k+\frac{1}{2}}} - v_{z_{j,k-\frac{1}{2}}}}{\Delta z}\right) \qquad (۶-۱۳-۴)$$

با استفاده از رابطه فوق و رابطه (۲-۶۹) می توان نرخ برش تعمیم یافته را بدست آورد. با بکار بردن نرخ برش تعمیم یافته در رابطه (۲-۶۴)، می توان توابع ویسکومتریک شامل ویسکوزیته و توابع اختلاف تنش های نرمال اول و دوم را بدست آورد. همچنین با بکاربردن رابطه (۴-۱۳) در رابطه (۲-۷۱)، مولفه های تانسور نرخ برش مرتبه دوم نیز بدست می آیند. در نهایت با استفاده از توابع ویسکومتریک و نرخ های برش مرتبه اول و دوم می توان مقادیر τ^E را از رابطه (۴-۴) بر روی شبکه اولیه تعیین نمود.

همچنین با توجه به رابطه (۴-۳)، صورت گسسته معادله پیوستگی به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{P_{j,k}^{n+1} - P_{j,k}^{n}}{\Delta t} + a^2\left(\frac{v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}^{n+1} + v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}^{n+1}}{2r_j} + \frac{v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}^{n+1} - v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}^{n+1}}{\Delta r} + \frac{v_{z_{j,k+\frac{1}{2}}}^{n+1} - v_{z_{j,k-\frac{1}{2}}}^{n+1}}{\Delta z}\right) = 0 \qquad (۱۴-۴)$$

بایستی توجه داشت که در تحقیق حاضر، انتقال حرارت بصورت در حالت توسعه و میدان جریان بصورت توسعه یافته مورد بررسی قرار گرفته است. همانگونه که در پیشتر گفته شد، انتقال حرارت در دو حالت شار ثابت و دما ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. برای هر دو حالت بی بعد سازی های متفاوتی برای دما ارائه شده (رابطه (۲-۱۹)) اما صورت بی بعد معادله انرژی برای هر دو حالت حرارتی به صورت معادله (۲-۲۱) است. بر این اساس، صورت گسسته معادله انتقال حرارت به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\frac{T_{i,j,k}^{n+1}-T_{i,j,k}^{n}}{\Delta t}+v_{\theta_{j,k}}^{n}\left(\frac{T_{i+1,j,k}^{n}-T_{i-1,j,k}^{n}}{2r_j\,\Delta\theta}\right)+\\
&\left(v_{r_{j+\frac{1}{2},k}}^{n}+v_{r_{j-\frac{1}{2},k}}^{n}\right)\left(\frac{T_{i,j+1,k}^{n}-T_{i,j-1,k}^{n}}{4\Delta r}\right)+\\
&\left(v_{z_{j,k+\frac{1}{2}}}^{n}+v_{z_{j,k-\frac{1}{2}}}^{n}\right)\left(\frac{T_{i,j,k+1}^{n}-T_{i,j,k-1}^{n}}{4\Delta z}\right)=\\
&\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\left(\frac{T_{i+1,j,k}^{n}-2T_{i,j,k}^{n}+T_{i-1,j,k}^{n}}{r_j^{2}\Delta\theta}+\frac{T_{i,j+1,k}^{n}-2T_{i,j,k}^{n}+T_{i,j-1,k}^{n}}{\Delta r^{2}}+\right.\\
&\left.\frac{T_{i,j+1,k}^{n}-T_{i,j-1,k}^{n}}{2r_j\,\Delta r}+\frac{T_{i,j,k+1}^{n}-2T_{i,j,k}^{n}+T_{i,j,k-1}^{n}}{\Delta z^{2}}+Br\Phi_{j,k}\right)
\end{aligned} \tag{۱۴-۴}$$

همچنین جمله کار میدان تنش ($\Phi_{j,k}$) نیز از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}
\Phi_{j,k}=&\frac{1}{2}\left(\gamma_{rr_{j,k}}\tau_{rr_{j,k}}+\gamma_{\theta\theta_{j,k}}\tau_{\theta\theta_{j,k}}+\gamma_{zz_{j,k}}\tau_{zz_{j,k}}\right)+\\
&\gamma_{r\theta_{j,k}}\tau_{r\theta_{j,k}}+\gamma_{rz_{j,k}}\tau_{rz_{j,k}}+\gamma_{\theta z_{j,k}}\tau_{\theta z_{j,k}}
\end{aligned} \tag{۱۶-۴}$$

۴-۵- شرایط مرزی

۴-۵-۱- کلیات

بطورکلی مرزهای فیزیکی که در آن شرایط مرزی کلی مورد نیاز است و یا مقادیر متغیر وابسته به عنوان بخشی از جوابها باید معلوم شوند به پنج دسته تقسیم می‌شوند، این پنج دسته عبارتند از: سطح بدنه

جامد، فواصل بسیار دور، خط تقارن (یا سطح تقارن در حالت سه بعدی)، جریان ورودی و جریان خروجی. تشخیص و تبیین شرایط مرزی، فیزیکی یا عددی در امتداد مرزهای مختلف بطورکلی مشکل است. تعیین شرایط مرزی برای معادلات جریان تراکم‌ناپذیر نیز از این قاعده جدا نیست.

البته شرایط فیزیکی معمولاً نتایجی را در مورد شرایط مرزی می‌دهد که اعمال برخی از آنها نسبتاً ساده است. به عنوان مثال بر روی یک سطح جامد از شرط عدم لغزشی برای تعیین شرط مرزی سرعت استفاده می‌شود. در هر حال تعیین شرط مرزی برای مؤلفه‌های سرعت در ورودی، خروجی و فواصل دور معمولاً سر راست نیست. بدیهی است که روند تعیین شرایط مرزی بطور گسترده‌ای تابع شرایط فیزیکی و قلمرو مسأله موردنظر است. مثلاً اگر مرز دوردست را واقعاً دور از بدنه که تمام فعالیتهای جریان در حوالی آن روی می‌دهد در نظر بگیریم، شرایط جریان آزاد را می‌توان برای آن مرز به کار برد. در حالیکه اگر مرز فواصل دور را نزدیک به سطح بدنه که فعالیتها در آن انجام می‌شوند، در نظر بگیریم، بسته به علامت مؤلفه‌های عمودی سرعت آن را به عنوان مرز ورودی یا خروجی در نظر می‌گیریم.

در صورتیکه شرایط مرزی ورودی و خروجی را اعمال کنیم، دو عامل عمده را باید در نظر بگیریم. اولاً، سرعت و یا فشار در خروجی مجهولند و با پیشروی حل عمومی باید آنها را مشخص کرد. ثانیاً، به علت تأثیر جوابهای داخل شبکه حل در ورودی یا فواصل دور (اگر آنها را هم ورودی تلقی کنیم)، ممکن است که تجدید مقادیر مرزی موردنیاز باشد.

البته این عوامل به علت پدیده فیزیکی انتشار علائم است یعنی در جریان تراکم‌ناپذیر اغتشاشها در تمام جهتها منتشر می‌شوند. بنابراین تعیین شرایط مرزی بستگی زیادی به شرایط مسأله مورد مطالعه دارد. یعنی به چگونگی موقعیت مرزهای ورودی، خروجی و مرزهای دور دست نسبت به محلهایی که در آنها تغییرات خواص سیال روی می‌دهند، بستگی دارد.

۴-۵-۲- شرایط مرزی جریان و انتقال حرارت در تحقیق حاضر

از آنجا که در تحقیق حاضر میدان جریان بصورت توسعه یافته در نظر گرفته شده، لذا تنها نیاز به اعمال شرایط مرزی بر روی مرزهای جانبی مجرا است. همچنین به دلیل وجود تقارن، تحلیل جریان تنها در نیمی از مقطع کانال انجام شده است (شکل (۴-۱) را ببینید). لذا مرزهای دامنه محاسباتی شامل سه دیواره جامد و یک مرز تقارن است. بر روی دیواره های جامد به سادگی می توان شرط مرزی عدم لغزش برای مولفه های سرعت را به کار برد. همانگونه که در بخش ۴-۳ گفته شد، در این تحقیق به دلیل استفاده از روش علامتگذاری و سلول نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار استاتیکی نیست. به طور کلی، استفاده از شبکه جابجا شده، دشواریهایی را برای اعمال شرایط مرزی در پی دارد. در اینجا مرزهای دامنه محاسباتی بر روی شبکه ثانویه در نظر گرفته شده است. مشکل اصلی برای اعمال شرط مرزی، عدم قرار گیری گره های محاسباتی برخی از مولفه های سرعت بر روی مرزهای جریان است. در این حالت یک ردیف گره محاسباتی در پشت دیواره جامد و خارج از دامنه محاسباتی در نظر گرفته می شود. لذا چنانچه آخرین مولفه های سرعت در نزدیکی مرز جامد را با V^{+} و مولفه های سرعت پشت مرز جامد و بر روی گره های مجازی را با V^{-} نشان دهیم، داریم:

$$V^{+} = -V^{-} \tag{۱۷-۴}$$

شایان ذکر است که چنانچه n و t به ترتیب بصورت جهات عمود و مماس بر مرز تعریف شوند، دراینصورت رابطه زیر بایستی بین مشتقات سرعت بر روی اولین گره های داخل شبکه (+) و گره های مجازی (-) برقرار باشد.

$$\frac{\partial V^{+}}{\partial t} = -\frac{\partial V^{-}}{\partial t} \tag{۱-۱۸-۴}$$

$$\frac{\partial V^{+}}{\partial n} = +\frac{\partial V^{-}}{\partial n} \tag{۲-۱۸-۴}$$

علاوه بر مولفه های سرعت، بعضاً نیاز به تخمین تنش بر روی گره های مجازی نیز وجود دارد. در این شرایط، بایستی از مجموعه روابط (۴-۱۷) و (۴-۱۸) استفاده نمود تا مولفه های تنش را بر روی گره های مجازی محاسبه نمود. باید توجه داشت که مقادیر تنش بر روی گره های مجازی فاقد ارزش فیزیکی هستند و کاربرد آنها صرفاً صحه گذاری بر شرایط مرزی عدم لغزش در ترم دیورژانس تنش معادلات جریان است. با توجه به شکل (۴-۱)، بر روی مرز تقارن نیز روابط زیر بین گره های مجازی و اولین گره های داخل شبکه محاسباتی برقرار است:

$$v_\theta^{\,+} = +v_\theta^{\,-} \qquad (۴-۱۹-۱)$$

$$v_r^{\,+} = +v_r^{\,-} \qquad (۴-۱۹-۲)$$

$$v_z^{\,+} = -v_z^{\,-} \qquad (۴-۱۹-۳)$$

$$\tau_{rz}^{\,+} = -\tau_{rz}^{\,-} \qquad (۴-۱۹-۴)$$

$$\tau_{\theta z}^{\,+} = -\tau_{\theta z}^{\,-} \qquad (۴-۱۹-۴)$$

$$\tau_{r\theta}^{\,+} = +\tau_{r\theta}^{\,-} \qquad (۴-۱۹-۶)$$

$$\tau_{rr}^{\,+} = +\tau_{rr}^{\,-} \qquad (۴-۱۹-۷)$$

$$\tau_{\theta\theta}^{\,+} = +\tau_{\theta\theta}^{\,-} \qquad (۴-۱۹-۸)$$

$$\tau_{zz}^{\,+} = +\tau_{zz}^{\,-} \qquad (۴-۱۹-۹)$$

در ادامه شرایط مرزی مربوط به معادله انتقال حرارت مورد بررسی قرار می گیرد. از آنجا که بی بعد سازی دما برای دو حالت حرارتی شار ثابت (T_H) و دما ثابت (T_T) متفاوت است (رابطه (۲-۱۹) را ببینید) لذا در اینجا شرایط مرزی برای این دو حالت حرارتی ارائه می شود. با توجه به رابطه (۲-۱۹)، شرایط مرزی زیر برای دماهای بی بعد روی دیواره کانال برقرار است:

$$T_T = 0 \qquad (۴-۲۰-۱)$$

$$\frac{\partial T_H}{\partial n} = 1 \qquad (۴-۲۰-۲)$$

در رابطه (۴-۲۰)، n جهت عمود بر مرز به سمت خارج از دامنه محاسباتی (مقطع جریان) است. همچنین T_H معرف دمای بی بعد مربوط به حالت شار ثابت و T_T نیز معرف دمای بی بعد مربوط به حالت دما ثابت است.

در این تحقیق، دمای سیال در ورودی کانال خمیده برابر مقدار ثابت $\tilde{T}_{in}$ فرض شده است. بنابراین با توجه به روابط (۲-۱۹)، مقدار T_T و T_H در ورودی به ترتیب برابر یک و صفر خواهد بود. در خروجی نیز شرط مرزی توسعه یافتگی حرارتی برقرار است. بر روی مرز تقارن نیز شرط مرزی نیومن همگن برای کلیه مقادیر بعد دار و بی بعد دما در راستای عمود بر مرز بر قرار است ($\partial T / \partial n = 0$).

۴-۶- شرایط اولیه

از نظر فیزیکی، هر مسأله را می‌توان به حالتهای دائم و یا غیردائم دسته‌بندی کرد. روشن است که در مسائل جریان دائم، جمله‌های تابع زمانی از معادلات حاکم حذف می‌شوند. در هر حال بنا به ملاحظات عددی، معادلات جریان دائم در حالت کلی بصورت روش شبه‌گذرا حل می‌شوند. در این روش با افزودن یک جمله غیرفیزیکی تابع زمان به معادله پیوستگی، دستگاه معادلات غیردائمی تشکیل می‌شود و به دنبال آن شکل غیردائم معادلات را به صورت عددی حل می‌کنیم تا به جواب حالت دائم برسیم. روشن است که در اینجا زمان ارزش فیزیکی ندارد و فقط نقش تکرار را ایفا می‌کند. با توجه به اینکه معادلات حاکم به صورت شبه گذرا حل می‌شوند لذا نیاز به شرایط اولیه دارند. شرایط اولیه بایستی دارای یک خاصیت اساسی باشند. این خاصیت اساسی، این است که شرایط اولیه بایستی با معادلات حاکم سازگار باشند. برای اکثر سیستمهایی سه بعدی که دارای دیواره‌های بدون شتاب هستند و نیروهای حجمی بر آنها اثر ندارند می‌توان شرط اولیه سکون را لحاظ کرد. لذا برای جریان در حال توسعه کانال های ایستا

فرض سکون، شرط اولیه مناسبی محسوب می شود. برای میدان جریان توسعه یافته، فرض اولیه سکون فرض مناسبی به شمار نمی آید زیرا استفاده از فرض سکون برای میدان سرعت قادر به تبیین شتاب گریز از مرکز ناشی از انحنا و شکل گیری جریانهای ثانویه نیست. در اینجا استفاده از توزیع سرعت توسعه یافته سیال نیوتنی در کانال مستقیم و یا حتی توزیع یکنواخت به عنوان فرض اولیه مولفه سرعت محوری و فرض مقدار صفر برای سرعت های عرضی و فشار استاتیکی مناسب است. استفاده از فرض اولیه مقدار صفر برای فشار استاتیکی برای کانال های چرخان چندان مناسب نبوده و با معادلات حاکم بر جریان سازگار نمی باشد. علت این امر وجود ترم شتاب گریز از مرکز در معادلات حاکم است. در این حالت، چنانچه فرض مقدار صفر را برای فشار لحاظ کنیم با دقت به معادله مومنتوم شعاعی متوجه می‌شویم که در لحظه شروع حل معادلات حاکم، تمامی ترمهای معادله بسیار کوچک هستند در حالیکه ترم نیروی گریز از مرکز بدون هیچ‌گونه تأثیری از سایر پارامترها، ترم بزرگی است و سریعاً جواب را واگرا می‌کند (به جمله $r.Ro^2$ در معادله (۴-۹) توجه نمایید). برای کانال های چرخان پیشنهاد می‌شود که برای بدست آوردن شرط اولیه، میدان جریان بصورت یک جریان، یک بعدی، تراکم‌ناپذیر و غیرلزج حل شود و نتایج در شرط اولیه لحاظ شود [۱۳۲]. بدین منظور می‌توان توزیع یکنواخت برای سرعت محوری و مقدار صفر را برای سرعت های عرضی در نظر گرفت ولی شتاب را با نیروی گریز از مرکز بالانس نمود و در تمامی میدان جریان شرط اولیه زیر را برای فشار لحاظ کرد [۱۳۳]:

$$P = \frac{1}{2} r^2 Ro^2 \qquad (۴-۲۱)$$

شرط فوق، منطقاً ارزش فیزیکی ندارد ولی با معادلات حاکم سازگار است زیرا در شروع گامهای زمانی تحلیل، هرچند مؤلفه‌های سرعت و مشتقات آنها کوچک هستند ولی این شرط قادر است که در معادله (۴-۹) ترم نیروی گریز از مرکز را با فشار بالانس نماید و اختلاف آنها هم مرتبه با مؤلفه‌های سرعت خواهد شد.

۴-۷- خطای محاسباتی

در روند تجزیه و در طول حل معادلات جبری حاصله بوسیله کامپیوتر خطاهای عددی بوجود می آید. این خطا ها را می توان به خطاهای رند کردن[1] و ترانکیشن[2] تقسیم کرد. خطا های رند سازی، همانطور کـه از اسمش پیداست، بوسیله گرد کردن اعداد با کامپیوتر در روند حل مسئله، ایجاد می شوند [۱۳۴]. از آنجـا که در تحقیق حاضر از نرم افزار متلب[3] برای تهیه کد کامپیوتری استفاده شده لذا خطای رند سازی بـرای هر عمل محاسباتی از مرتبه 10^{-16} است.

خطای ترانکیشن با جایگزینی مسئله پیوسته یعنی معادلات دیفرانسیل جزئی به یک مسئله گسسته با تقریب تفاضل متناهی شامل تسهیم های معادله تفاضلی و شرایط حدی ایجاد مـی شـود کـه خطاهـای رندسازی در آنها وجود ندارد. به عبارت دیگر، خطای ترانکیشن با ابعاد شبکه محاسباتی در ارتبـاط اسـت. به بیان ساده، با استفاده از تعداد گره محاسباتی اندک، تقریب عددی مساله ضعیف بـوده و در ایـن حالـت اختلاف میان پاسخ واقعی و پاسخ عددی عمدتاً می تواند مربوط به ایـن خطـا اسـت. بطـور کلـی خطـای ترانکیشن با کاهش تعداد گره های محاسباتی افزایش می یابد، درحالیکه خطـای رنـد سـازی بـا افـزایش تراکم شبکه کاهش می یابد. انتظار می رود که خطای کلی با کاهش اندازه شبکه تا حدی کاهش یابد امـا می توان نشان داد که در تعداد گره های محاسباتی فوق العاده زیاد، خطای کل می تواند افزایش یابد.

برای بررسی خطای ترانکیشن، معادله رسانش گرمـایی پایـدار در یـک جامـد همـسانگرد را در نظـر بگیرید [۱۳۴]:

$$L(T) \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (۴-۲۲)$$

با تقریب تفاضل محدود معادله فوق داریم:

---

1. Round-off
2. Truncation
3. MATLAB

$$L_{FD}(T) \equiv \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \quad (۲۳-۴)$$

اگر مسئله هدایت تحت حوزه، دقیقا با استفاده از روش تحلیلی دقیـق و نیـز بـا اسـتفاده از روش عـددی تفاضل محدود و بدون هیچ خطای رند سازی حل شود، باز هم نتـایج یکـسان نخواهـد بـود. ایـن تفاضـل (یا اختلاف) ناشی از خطای ترانکیشن است. در واقع خطای ترانکیشن می تواند در اثر صـرفنظر نمـودن از ترم های مرتبه بالا در طی گسسته سازی معادلات حاکم نیز ایجاد شود [۱۳۴].

در جدول (۴-۱) خطاهای مهم ترانکیشن تفاضـل محـدود مـشتقات اول و دوم را کـه از روش هـای پیشرو، پسرو و مرکزی محاسبه شده اند، آمده است. واضح است که در اینجا، خطای عمـده تفاضـل هـای پیشرو و پسرو $O(\Delta x)$ و خطای عمده تفاضل مرکزی $O\left[(\Delta x)^2\right]$ خواهد بود.

جدول (۴-۱): خطاهای ترانکیشن عمده ناشی از کوتاه سازی برای مشتقات مختلف [۱۳۴]

مشتقات	صورت تفاضل محدود	جملات موثر در خطای ترانکیشن
$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}(\text{Forward})$	$-\frac{\Delta x}{2}f'' - \frac{(\Delta x)^2}{6}f'''$
$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}(\text{Backward})$	$+\frac{\Delta x}{2}f'' - \frac{(\Delta x)^2}{6}f'''$
$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}(\text{Central})$	$-\frac{(\Delta x)^2}{6}f'''$
$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$	$\frac{f(x-\Delta x)-2f(x)+f(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2}(\text{Central})$	$-\frac{(\Delta x)^2}{12}f''''$

۴-۸- پایداری روش عددی

شایان ذکر است که مشکل ناپایداری عددی در تحلیل جریان سیالات ویسکوالاستیک بسیار حادتر از سیالات نیوتنی است. این مساله بخصوص در اعداد رینولدز و وایزنبرگ بزرگ بسیار حادتر است. بایستی توجه داشت که در جریان سیال نیوتنی، جملات میدان تنش همگی خطی هستند و ترم تنش ویسکوز نقش بسزایی در پایدار نمودن حل عددی ایفا می کند. در جریان این سیال، رفتار غیرخطی تنها از جملات ترابری اندازه حرکت ناشی می شود. در جریان سیال CEF این مساله بسیار حادتر است. زیرا علاوه بر جملات ترابری اندازه حرکت، مولفه های میدان تنش نیز به شدت از خود رفتار غیرخطی نشان می دهند و وجود مشتقات مرتبه فرد در دیورژانس میدان تنش این سیالات نیز سهم عمده ای در بروز ناپایداری ایفا می کند. همچنین نوع رفتار غیر خطی میدان تنش سیال CEF بصورت کسری است که این امر تحلیل پایداری این جریان را با مشکل جدی روبرو می سازد. در این تحقیق از برخی تکنیک های عددی استفاده شده که پایداری حل عددی را به نحو قابل ملاحظه ای بهبود بخشیده است. به طور خلاصه عواملی که سبب افزایش پایداری حل عددی در تحقیق اخیر شده اند، عبارتند از:

- استفاده از شبکه جابجا شده و اختصاص پارامترهای جریان به روش علامتگذاری و سلول
- جداسازی ترم تنش ویسکوز (لاپلاسین میدان سرعت) از میدان تنش سیال CEF و گسسته سازی آن بطور جداگانه (این ترم نقش مهمی در پایداری حل عددی دارد)
- محاسبه تنش های ناشی از اثر اختلاف تنش های نرمال (τ^E) بر روی گره های مجازی منجر به اعمال شرط مرزی در جمله $\nabla.\tau^E$ شده که این موضوع پایداری حل عددی را افزایش می دهد.
- با اختصاص میدان تنش، تانسورهای نرخ برش و ویسکوزیته بر روی شبکه اولیه اولاً هزینه محاسباتی نسبت به محاسبه جداگانه آنها بر روی گره های مختص هر معادله مومنتوم به شدت کاهش یافته و ثانیاً تقارن تانسور تنش به شکل بهتری بر روی میدان جریان اعمال می شود.

۴-۹- الگوریتم تحلیل

در این بخش الگوریتم برنامه CFD تهیه شده جهت مطالعه جریان و انتقال حرارت تشریح می شود. بطور خلاصه در اینجا از الگوریتم زیر برای تحلیل جریان استفاده شده است:

۱. مشخص نمودن پارامترهای جریان و سیال نظیر ابعاد هندسی، تعداد گره های محاسباتی، عدد رینولدز، عدد روزبی، پارامترهای غیر نیوتنی (شامل ضرایب و ثابت های توابع ویسکومتریک مربوط به ویسکوزیته و اختلاف تنش های نرمال اول و دوم)، گام زمانی، سرعت صوت مصنوعی مربوط به معادله چورین، تولرانس همگرایی و ... .

۲. اعمال شرایط اولیه به مولفه های میدان سرعت، فشار، نرخ برش مرتبه اول و دوم و مولفه های تانسور تنش (بخش ۴-۶ را ببینید)

۳. محاسبه گرادیان های سرعت و مولفه های تانسور نرخ برش در لحظه فعلی (n)

۴. محاسبه تانسور نرخ برش مرتبه دوم و نرخ برش تعمیم یافته در لحظه فعلی (n) بر اساس تانسور برش محاسبه شده در مرحله ۳

۵. محاسبه توابع ویسکومتریک بر اساس نرخ برش تعمیم یافته محاسبه شده در مرحله ۴

۶. محاسبه مولفه های تنش τ^E بر اساس تانسور نرخ برش (محاسبه شده در مرحله ۳)، نرخ برش مرتبه دو (محاسبه شده در مرحله ۴) و توابع ویسکومتریک (محاسبه شده در مرحله ۴)

۷. تعیین مولفه های تنش τ^E در گره های مجازی بر اساس تنش محاسبه شده در مرحله ۶ و توضیحات داده شده در بخش ۴-۴-۲

۸. محاسبه مولفه های سرعت محوری در گام زمانی جدید ($n+1$) بر اساس صورت های گسسته ارائه شده در بخش ۴-۴-۲ و مقادیر پارامترهای جریان و میدان تنش در لحظه فعلی (n)

۹. تخمین فشار در گام زمانی جدید $(n+1)$ بر اساس معادله (۴-۱۴) و نیز مولفه های سرعت محاسبه شده در مرحله ۸

۱۰. اعمال شرایط مرزی بر روی میدان سرعت در لحظه $(n+1)$ و نیز تخمین سرعت بر روی گره های مجازی (بخش ۴-۴-۲ را ببینید)

۱۱. محاسبه مقادیر باقیمانده معادلات مومنتوم و پیوستگی و مقایسه حداکثر مقادیر باقیمانده معادلات حاکم با مقدار تولرانس همگرایی

۱۲. چنانچه مقدار حداکثر باقیمانده از تولرانس بیشتر بود، مقادیر محاسبه شده در گام زمانی جدید $(n+1)$ به عنوان مقادیر پیش فرض محاسبه بعدی در نظر گرفته می شود و با بازگشت به مرحله ۳ محاسبه تکرار می شود. اگر مقدار باقیمانده از تولرانس کمتر بود، محاسبه پایان می یابد.

از آنجا که در این تحقیق، چگالی و توابع ویسکومتریک مستقل از دما فرض شده، لذا حل معادلات جریان مستقل از معادله انتقال حرارت صورت می گیرد. به عبارت دیگر حل معادلات جریان بایستی پیش از حل معادله انتقال حرارت صورت گیرد و از نتایج میدان سرعت برای حل میدان دما استفاده می شود. به طور خلاصه الگوریتم حل معادله انتقال حرارت به شرح زیر است:

۱. مشخص نمودن پارامترهای انتقال حرارت، شامل عدد پرانتل، عدد برینکمن، نوع شرایط مرزی، گام زمانی مربوط به معادله انتقال حرارت، تولرانس همگرایی و ... .

۲. محاسبه کار میدان تنش (برای میدان جریان مورد نظر) از رابطه (۴-۱۶)

۳. اعمال شرایط اولیه به میدان دما

۴. محاسبه میدان دما در گام زمانی جدید $(n+1)$ بر اساس رابطه (۴-۱۴)

۵. اعمال شرایط مرزی بر روی میدان دما در لحظه $(n+1)$ و نیز تخمین دما بر روی گره های مجازی

۶. محاسبه باقیمانده معادله انتقال حرارت و مقایسه حداکثر مقدار باقیمانده معادلات انرژی با مقدار تولرانس همگرایی

۷. چنانچه مقدار حداکثر باقیمانده از تولرانس بیشتر بود، مقادیر محاسبه شده در گام زمانی جدید $(n+1)$ به عنوان مقادیر پیش فرض محاسبه بعدی در نظر گرفته می شود و با بازگشت به مرحله ۴ محاسبه تکرار می شود. اگر مقدار باقیمانده از تولرانس کمتر بود، محاسبه پایان می یابد.

در پایان خاطر نشان می شود که در این تحقیق از هیچ گونه نرم افزار تحلیل جریان تجاری و یا کدهای آماده استفاده نشده و کلیه کدهای CFD توسط نگارنده تهیه شده است. همچنین برنامه های کامپیوتری مربوط به تحلیل جریان و انتقال حرارت توسط نرم افزار MATLAB نوشته شده و کلیه نتایج گرافیکی به وسیله این نرم افزار بدست آمده است.

فصل پنجم

نتایج عددی

۵-۱- مقدمه

در این فصل، نتایج حاصل از حل عددی برای شبیه سازی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی ایستا و چرخان ارائه می شود. در حقیقت، این فصل مهمترین بخش گزارش پژوهش حاضر محسوب می شود که در آن بر اساس نتایج حاصل از حل عددی، بر روی فیزیک این جریان و منشا و علل اثر پارامترهای مختلف بحث می شود.

در ابتدای این فصل، استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی بررسی شده و صحت نتایج حاصل از حل عددی ارزیابی می شود. جهت ارزیابی صحت نتایج، این نتایج عددی با برخی روابط تحلیلی، قضایا و نتایج آزمایشگاهی موجود مقایسه شده است. در ادامه اثر پارامترهای مختلفی نظیر عدد رینولدز، عدد وایزنبرگ، عدد الاستیک، عدد روزبی، عدد دین، نسبت انحنا، نسبت ابعادی و اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر میدان سرعت و دمای سیال ویسکوالاستیک مورد بررسی می گیرد و در مورد مکانیزم اثر هر یک از این پارامترها بر جریان و انتقال حرارت بحث می شود.

۵-۲- شرایط و الگوی همگرایی

در این بخش، بر اساس چند نمونه شبیه سازی عددی، شرایط و الگوی همگرایی معادلات حاکم بر جریان بررسی می شود. در تحقیق حاضر باقیمانده معادلات مومنتوم و پیوستگی به شکل زیر تعریف شده است:

$$R_{M,i} = \max\left\{\left|\frac{v_i^{\,n+1} - v_i^{\,n}}{\Delta t}\right|\right\} \tag{۵-۱-۱}$$

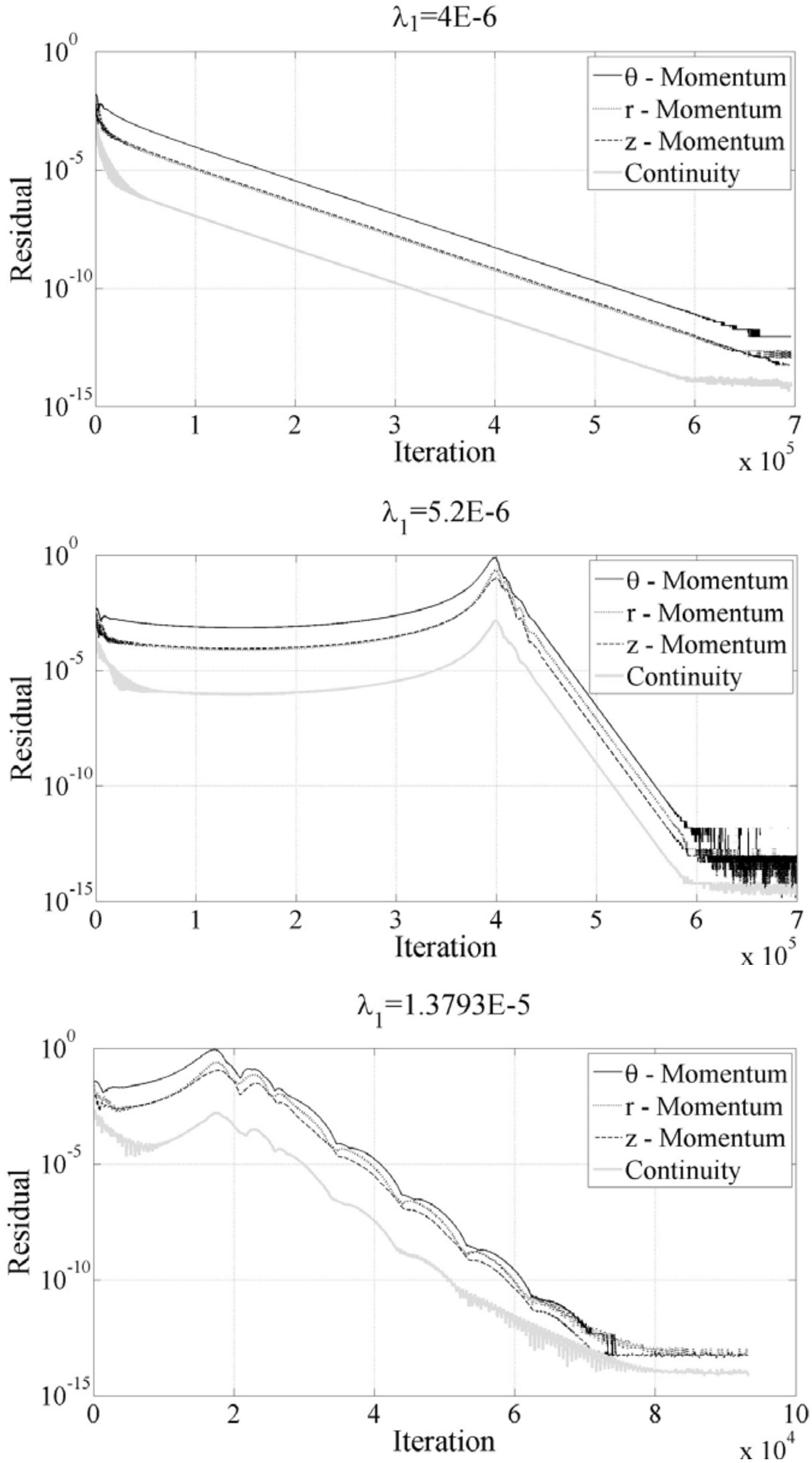
$$R_C = \max\left\{\left|\frac{P^{n+1} - P^{n}}{c^2 \Delta t}\right|\right\} \tag{۵-۱-۲}$$

در رابطه فوق، $R_{M,i}$ باقیمانده معادله مومنتوم در جهت i و R_C باقیمانده معادله پیوستگی است. همچنین بالانویس هر پارامتر (مقادیر n و $n+1$) نیز معرف شماره گام زمانی است.

در اینجا از جریان سیال CEF در یک کانال خمیده مربعی با مشخصات کلی $\mathrm{Re}=29$، $\delta=0.15$، $\lambda=0.015s$، $a=2$، $n=0.65$، $\chi=0$، $\eta_\infty/\eta_0=0.01$، $n_r=80$، $n_z=40$ و $c^2=2000$ استفاده شده است. شایان ذکر است که این جریان در آستانه وقوع ناپایداری دین و وقوع پدیده شاخه دار شدن قرار دارد. در شکل (۵-۱) تاریخچه همگرایی در مقادیر مختلف λ_1 (ثابت زمانی مربوط به اختلاف تنش نرمال اول) نشان داده شده است. مطابق شکل، تغییرات اندک در مقدار λ_1 منجر به بروز تغییرات عمده در تاریخچه حل عددی می شود. با این وجود، مسلم است که پس از گذشت تعداد گام محاسباتی کافی، مقادیر باقیمانده معادلات پیوستگی و مومنتوم به سمت مقدار ثابت بسیار کوچکی میل می کند. مطابق شکل، پس از ثابت شدن باقیمانده ها در مقادیر گام های زمانی بسیار بزرگ، مقدار حداکثر باقیمانده معادلات حاکم از مرتبه 10^{-13} است. شایان ذکر است که در اینجا، خطای عددی در هر عملیات محاسباتی از مرتبه 10^{-16} می باشد. همچنین مشاهده می شود که در گام زمانی که مقدار حداکثر باقیمانده معادلات به 10^{-8} می رسد، میزان حداکثر اختلاف نتایج نسبت به حالتی که باقیمانده ها از مرتبه 10^{-13} است، از مرتبه 10^{-7} تا 10^{-6} خواهد بود. هرچند که مقدار باقیمانده 10^{-8} به عنوان تولرانس همگرایی مقدار مناسبی به نظر می رسد، اما جهت اطمینان بیشتر، میزان تولرانس همگرایی برابر 10^{-10} در نظر گرفته شده است.

۵-۳- مطالعه استقلال حل عددی از شبکه

در ابتدای این بخش استقلال از شبکه کد CFD تهیه شده جهت مطالعه این جریان، مورد بررسی قرار می گیرد. برای این منظور، از جریان سیال مرتبه دو (سیال CEF دارای خواص رئولوژیکی مستقل از نرخ برش) درکانال خمیده دارای مقطع مربعی ایستا استفاده شده است.



شکل (۵-۱): نمونه هایی از تاریخچه همگرایی

در اینجا، از تعداد سلول مربعی شکل $n_r \times n_z = 120 \times 60$ به عنوان یک حالت مرجع استفاده شده است. برای تعداد سلول 120×60 حل عددی در ناحیه جریان آرام بسیار دقیق بوده و پاسخ های مربوط به تعداد سلول های کمتر با پاسخ این حالت مقایسه شده است. در جدول (۵-۱) مقادیر مربوط به متوسط خطای توزیع سرعت محوری شبکه های مختلف نسبت به شبکه 120×60 آمده است. این خطاها برای جریان سیال مرتبه دو در اعداد رینولدز ۱۰۰ و ۱۰۰۰ و نیز خواص رئولوژیکی $\Psi_1 = 1$ و $\Psi_2 / \Psi_1 = -5\%$ محاسبه شده اند.

با توجه به اطلاعات جدول (۵-۱) می توان دریافت که به ازای تعداد سلولهای بیشتر از 60×30 میزان متوسط خطا کمتر از 0.5% بوده و بنابراین می توان ادعا نمود که در این تعداد سلول ها، حل عددی مستقل از شبکه است. بطور کلی با افزایش تعداد سلول ها، خطای برش کاهش و خطای گرد کردن افزایش می یابد. لذا در ابتدا با ازدیاد تعداد سلول ها خطای کل کاهش می یابد و افزایش خطای کل تنها در شبکه های فوق العاده متراکم (به دلیل ازدیاد خطای گرد کردن) متصور است.

جدول (۵-۱): متوسط خطای حل عددی در شبکه های مختلف نسبت به شبکه 120×60

Re	$N_r \times N_z$				
	20×10	40×20	60×30	80×40	100×50
100	1.3%	0.45%	0.23%	0.12%	0.07%
1000	3.67%	1.04%	0.48%	0.23%	0.11%

واضح است که ازدیاد تعداد سلولها پیش از افزایش فوق العاده زیاد اثر خطای گرد کردن، به کاهش خطای کل منجر می شود اما بایستی توجه داشت که این امر به افزایش شدید حجم و زمان محاسبات

منجر می شود. با توجه به اطلاعات جدول (۵-۱) و جهت اجتناب از هرگونه وابستگی تحلیل به شبکه، در این تحقیق جهت کلیه محاسبات عددی مربوط به مقطع مربعی از شبکه 80×40 استفاده شده است. در جدول (۵-۲)، شبکه های مورد استفاده در تحقیق حاضر برای نسبت های ابعادی مختلف ارائه شده است.

جدول (۵-۲): شبکه های مختلف استفاده شده در تحقیق حاضر

نسبت ابعادی (κ)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	1.5	2
ابعاد شبکه ($n_r\times n_z$)	50×200	60×120	60×60	80×40	102×34	120×30

۵-۴- ارزیابی صحت نتایج

در این تحقیق صحت نتایج حاصل از حل عددی مورد بررسی قرار می گیرد. برای این منظور، نتایج حل عددی با برخی نتایج تحلیلی، آزمایشگاهی و قضایا مقایسه شده است. مواردی که حل عددی با آنها مورد ارزیابی قرار می گیرد، عبارتند از:

۱. نتایج حل تحلیلی جریان توسعه یافته در کانال مستقیم مستطیلی
۲. نتایج حل تحلیلی جریان خزشی توسعه یافته در کانال خمیده مستطیلی
۳. نتایج آزمایشگاهی بارا[1] [۷۸، ۷۹] برای توزیع سرعت در عدد دین ۱۲۵
۴. مطالعه ناپایداری دین برای جریان سیال نیوتنی
۵. مطالعه درستی قضیه گزیکس[2] در مورد جریان خزشی سه بعدی سیال مرتبه دو

1. Bara
2. Giesekus

۶. مطالعه درستی قضیه لانگلویس، ریولین و پیپکین[1] در مورد جریان مستقیم الخط[2] سیال مرتبه دو

۷. مقایسه نتایج انتقال حرارت برای کانال مستقیم در حالات شار ثابت و دما ثابت

جهت مدل سازی جریان سیال نیوتنی در کانال مستقیم کافی است که در کد CFD تهیه شده مقادیر Ψ_1، Ψ_2 و δ برابر صفر لحاظ شوند. در این حالت، مقدار شعاع انحنای داخلی کانال خمیده برابر یک مقدار فوق العاده بزرگ ممکن (مانند 1×10^{200}) در نظر گرفته شده تا نتایج حاصل از شبیه سازی عددی به سمت جریان در کانال مستقیم همگرا شود. در اینحالت توزیع سرعت محوری جریان از رابطه (۴-۲۷) و مقدار دبی از رابطه (۴-۲۹) بدست می آیند. همچنین جهت مدل سازی، عدد رینولدز جریان برابر ۲۰۰ و مقطع کانال بصورت مربعی درنظر گرفته شده است. در این حالت ماکزیمم قدر مطلق خطای توزیع سرعت محوری حاصل از حل عددی نسبت به حل دقیق در ۳۲۰۰ گره محاسباتی برابر با ۰/۳۲٪ است. همچنین میزان خطای دبی جریان نسبت به دبی جریان حاصل از حل تحلیلی برابر با ۰/۰۶۴٪ است.

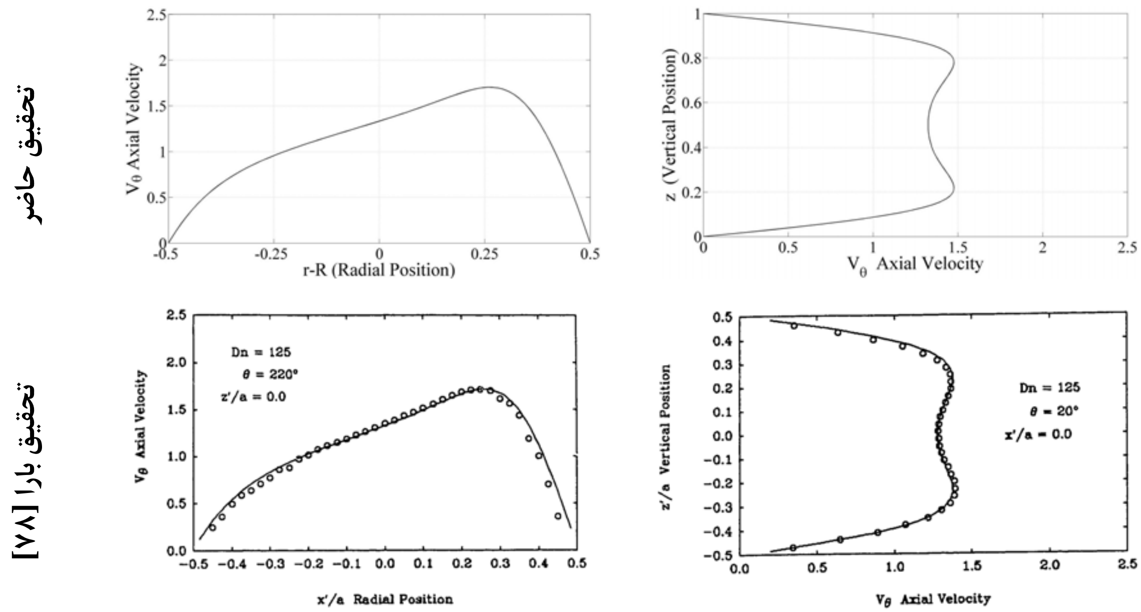
جهت ارزیابی صحت نتایج عددی مربوط به جریان خزشی سیال مرتبه دو در کانال خمیده می توان از روابط تحلیلی (۴-۲۱) و (۴-۲۵) استفاده نمود. برای شبیه سازی این حالت، عدد رینولدز برابر با یک مقدار بسیار کوچک (۰/۰۰۲)، نسبت انحنا برابر با ۰/۳ (یک انحنای نسبتاً تند) و $\kappa=1$، $\Psi_1 = 0.01$، $\Psi_2 / \Psi_1 = -10\%$ فرض شده است. در این حالت متوسط قدر مطلق خطای توزیع سرعت محوری حاصل از حل عددی نسبت به حل دقیق برابر با ۰/۱۷٪ و میزان خطای دبی محاسبه شده از حل عددی نسبت به حل دقیق ۰/۱۴٪ است.

1. Langlois, Rivlin and Pipkin
2. Rectilinear flow

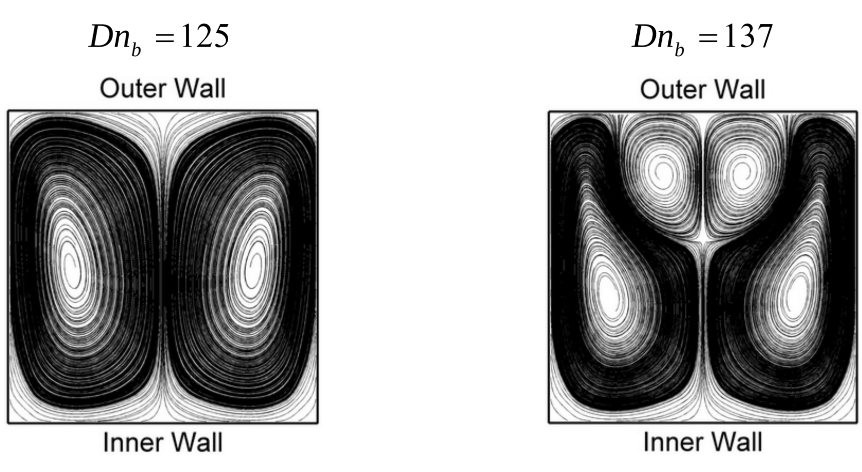
برای ارزیابی نتایج مربوط به جریان اینرسی در کانالهای خمیده از نتایج آزمایشگاهی بارا [۷۸، ۷۹] استفاده شده است. وی در تحقیقات خود جریان در حال توسعه و توسعه یافته سیال نیوتنی در کانالهای خمیده دارای مقطع مربعی را بصورت آزمایشگاهی و عددی مورد بررسی قرار داده است. در اینجا نتایج حاصل از توزیع سرعت محوری جریان که بوسیله حل عددی بدست آمده با نتایج آزمایشگاهی بارا که بوسیله LDV اندازه گیری شده مقایسه شده است. وی آزمایشات خود را در نسبت انحنای ۰/۰۳۵ و در اعداد دین متفاوت روی یک کانال خمیده ۲۷۰ درجه انجام داد. مطابق آزمایشات وی در عدد دین ۱۲۵ که بر اساس سرعت بالک تعریف شده، در موقعیت ۱۰۰ درجه نسبت به ورودی، جریان به حالت توسعه یافته در می آید. در شکل (۵-۲)، توزیع سرعت محوری حاصل از تحقیق اخیر در جهات مختلف نشان داده شده است. انحراف داده های آزمایشگاهی مربوط به ۳۵ نقطه از پروفیل سرعت محوری بر روی خط تقارن مقطع کانال نسبت به نتایج حاصل از حل عددی این تحقیق حدود ۲/۱۷٪ است. یکی دیگر از مواردی که بوسیله آن می توان صحت نتایج را ارزیابی نمود، بررسی اثر ناپایداری دین در جریان سیال نیوتنی در کانال های خمیده است. ناپایداری دین پدیده جالب توجهی است که در بخش ۱-۴-۲-۱ توضیح داده شده است. بارا [۷۸، ۷۹] نشان داد که در عدد دین ۱۲۵ جریان در آستانه تبدیل از یک جفت گردابه به دو جفت گردابه قرار می گیرد. در اینجا نیز شبیه سازی های عددی در دو عدد دین ۱۲۵ و ۱۳۷ انجام شده است. در شکل (۵-۳) جریانهای ثانویه در این دو عدد دین نشان داده شده است. مطابق شکل، نتایج کد CFD تهیه شده نیز نتایج بارا [۷۸، ۷۹] را تایید می نماید. در اینجا نیز جریان در عدد دین ۱۲۵، در وضعیت پایدار قرار دارد ولی در عدد دین ۱۳۷، ناپایداری دین بروز نموده و یک جفت گردابه پادگرد جدید در نزدیکی دیواره خارجی ایجاد شده است.

روش دیگر جهت ارزیابی صحت نتایج عددی، بررسی برقرار بودن قضیه گزیکس برای جریان خزشی سیال مرتبه دو است. مطابق این قضیه، میدان جریان خزشی سیال مرتبه دو در حالت $\tilde{\Psi}_2 = -\tilde{\Psi}_1 / 2$

مشابه سیال نیوتنی است. بنابراین در این حالت، سرعت محوری و دبی جریان خزشی به ترتیب از روابط (۴-۲۱) و (۴-۲۵) بدست خواهد آمد و سرعت جریان های ثانویه برابر صفر خواهد بود. در اینجا درستی این قضیه در نسبت های ابعادی مختلف بررسی شده است. برای این منظور حل عددی در شرایط $\mathrm{Re} = 0.001$، $\delta = 0.5$ و $\kappa = 0.5, 1, 2$ انجام شده است.



شکل (۵-۲): توزیع سرعت محوری در عدد دین ۱۲۵ بر مبنای متوسط سرعت محوری

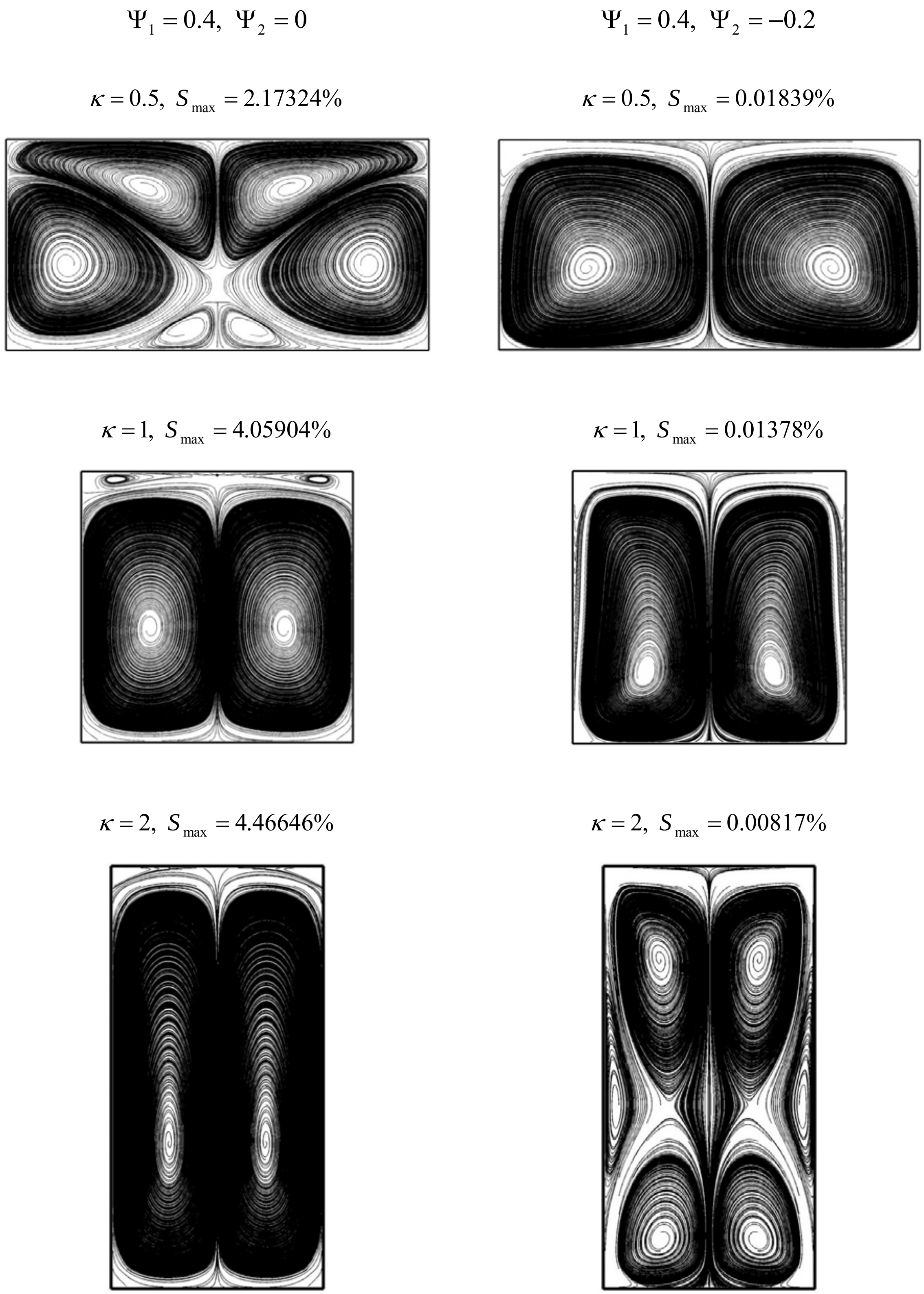


شکل (۵-۳): جریانهای ثانویه سیال نیوتنی در اعداد دین مختلف

همچنین اختلاف تنش های نرمال اول و دوم به ترتیب برابر $\Psi_1 = 0.4$ و $\Psi_2 = -0.2$ فرض شده تا شرایط قضیه گزیکس ارضا گردد و این نتایج با حالت $\Psi_1 = 0.4$ و $\Psi_2 = 0$ که در آن شرایط این قضیه برقرار نمی باشد، مقایسه شده است. در جدول (۵-۳)، انحراف سرعت محوری و دبی حل عددی نسبت به حل تحلیلی و همچنین نسبت ماکزیمم شدت جریانهای ثانویه به متوسط سرعت جریان اصلی ارائه شده است. مطابق داده های این جدول، چنانچه شرایط قضیه گزیکس برقرار باشد ($\Psi_1 = 0.4$ و $\Psi_2 = -0.2$)، شدت جریانهای ثانویه از مرتبه 10^{-6}، 10^{-5} است حال آنکه در حالت $\Psi_1 = 0.4$ و $\Psi_2 = 0$ که این قضیه برقرار نمی باشد، شدت جریانهای ثانویه از مرتبه 10^{-2} است. همچنین در حالت $\Psi_1 = 0.4$ و $\Psi_2 = -0.2$، میزان انحراف سرعت محوری و دبی جریان نسبت به روابط تحلیلی حدود ۱۰ بار کوچکتر از حالت $\Psi_1 = 0.4$ و $\Psi_2 = 0$ است. به عبارت دیگر در شرایط $\tilde{\Psi}_2 = -\tilde{\Psi}_1 / 2$، حل عددی مربوط به جریان خزشی به سمت حل عددی جریان خزشی سیال نیوتنی میل می کند و اندک انحراف موجود نیز مربوط به خطای ترانکیشن و اینرسی اندک جریان است. لذا از دیدگاه عددی، کد CFD تهیه شده از قضیه گزیکس پیروی می کند. در شکل (۵-۴)، خطوط جریانهای ثانویه برای این حالات نشان داده شده است. وجود بیشتر از یک جفت جریان ثانویه در حالت $\Psi_1 = 0.4$ و $\Psi_2 = 0$ مربوط به بروز ناپایداری در جریان است.

جدول (۵-۳): متوسط انحراف سرعت محوری و دبی حل عددی نسبت به حل تحلیلی
و همچنین نسبت ماکزیمم سرعت جریانهای به سرعت متوسط جریان اصلی در $\mathrm{Re} = 0.001$ و $\delta = 0.5$

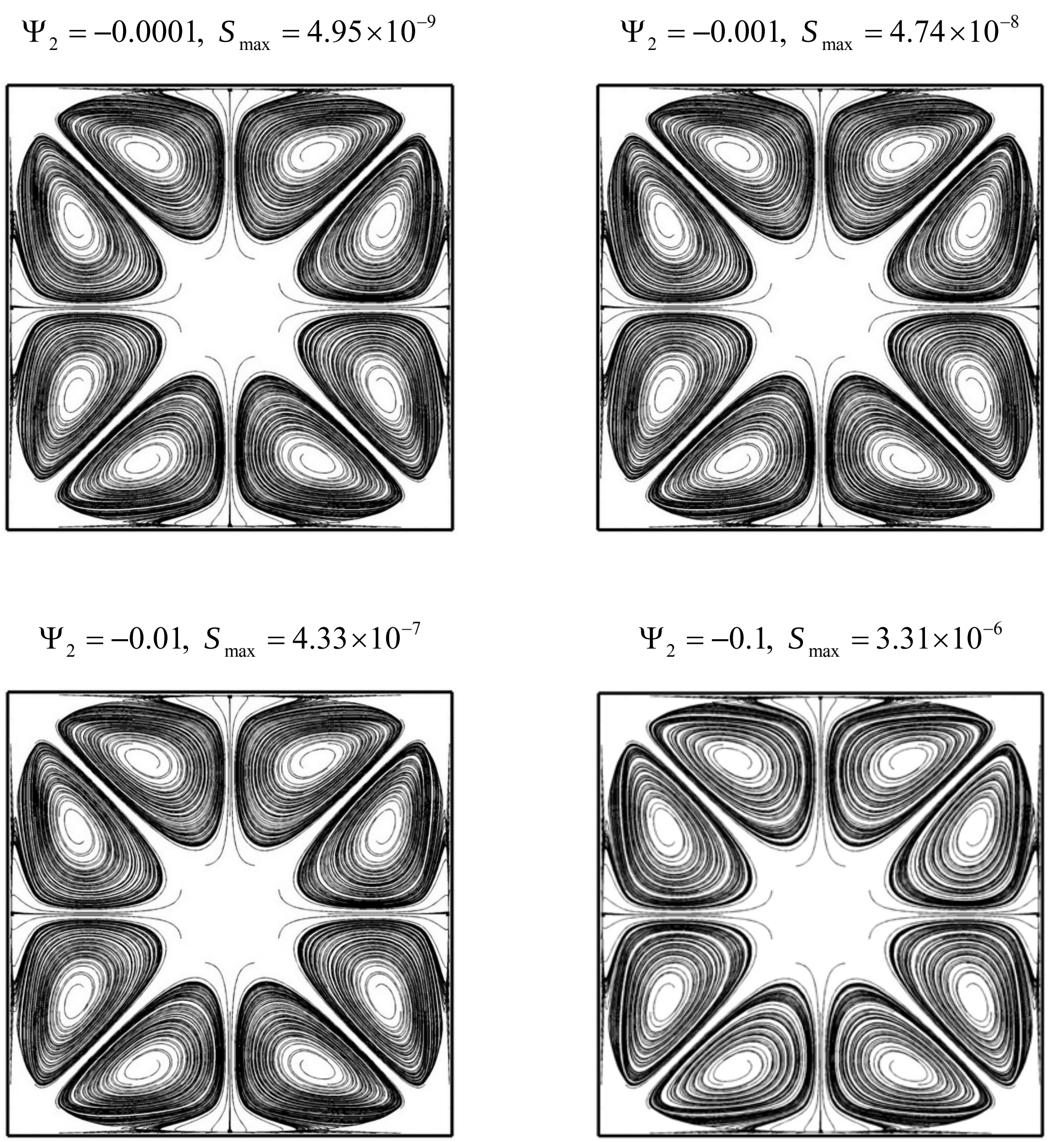
شرایط	κ	متوسط انحراف سرعت محوری (٪)	متوسط انحراف دبی جریان (٪)	$S_{\max}$ (٪)
$\Psi_1 = 0.4,$ $\Psi_2 = -0.2$	0.5	0.03838	0.00544	0.01839
	1	0.02676	0.00420	0.01378
	2	0.02282	0.00469	0.00817
$\Psi_1 = 0.4,$ $\Psi_2 = 0$	0.5	0.47638	0.09528	2.17324
	1	0.59911	0.22006	4.05904
	2	0.49819	0.24580	4.46646



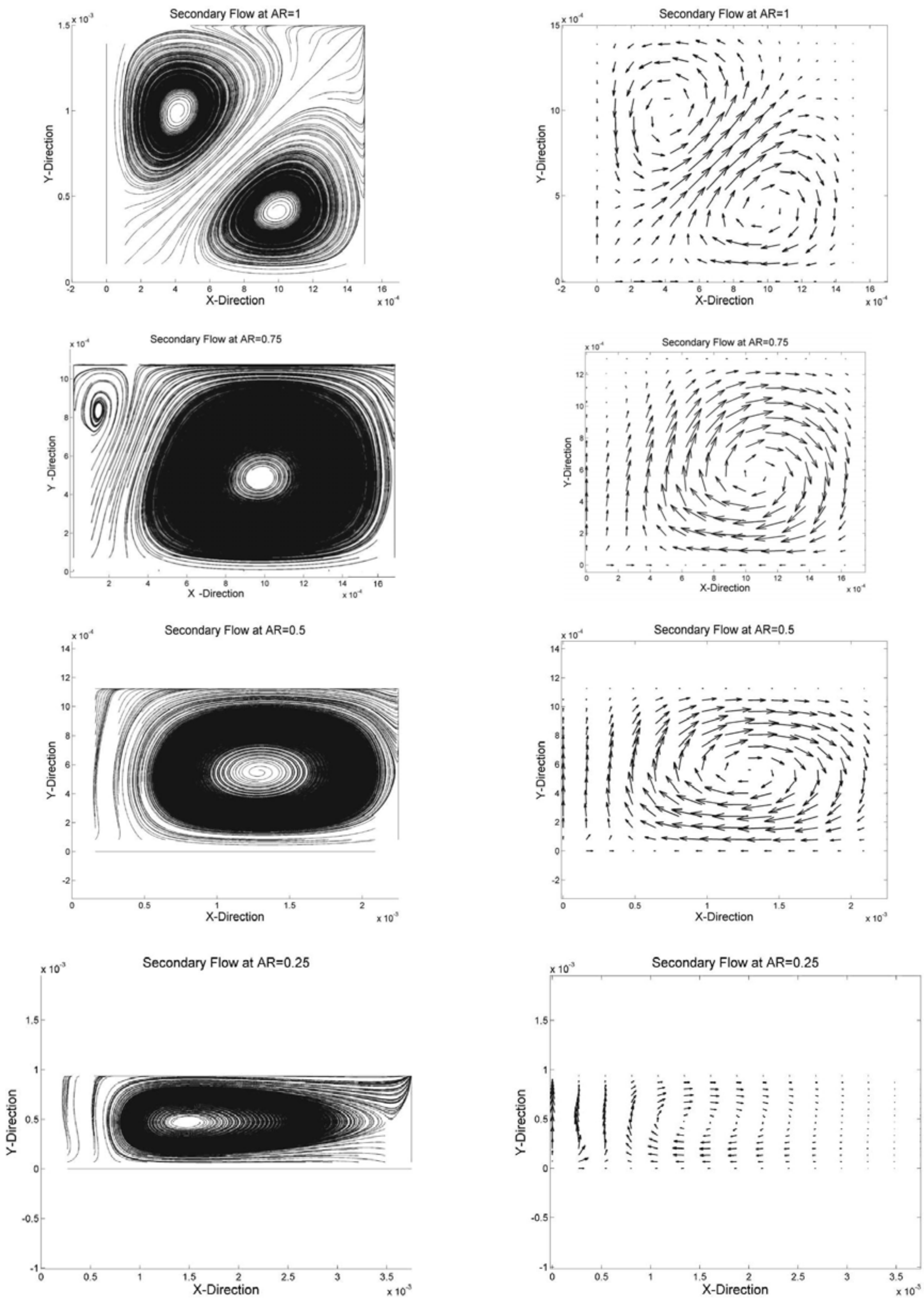
شکل (۵-۴): خطوط جریانهای ثانویه در نسبت های ابعادی و اختلاف تنش های نرمال مختلف

در ادامه صحت نتایج عددی برای مطالعه قضیه لانگلویس، ریولین و پیپکین در مورد جریان مستقیم الخط سیال مرتبه دو مورد بررسی قرار می گیرد. مطابق این قضیه، میدان سرعت جریان مستقیم الخط سیال مرتبه دو مشابه میدان سرعت جریان سیال نیوتنی است. لذا در این حالت، سرعت جریانهای ثانویه صفر بوده و سرعت جریان اصلی و دبی به ترتیب از روابط (۳-۲۷) و (۳-۲۹) بدست می آید. در اینجا برای شبیه سازی عددی جریان مستقیم الخط مقدار شعاع انحنای گام مسیر برابر یک مقدار بسیار بزرگ (مانند 1×10^{200}) در نظر گرفته شده تا نتایج حاصل از شبیه سازی عددی به سمت جریان در کانال مستقیم همگرا شود. همچنین مطالعه جریان تحت شرایط $\mathrm{Re}=10$ و $\Psi_2/\Psi_1=-10\%$ برای نسبت های ابعادی و مقادیر مختلف اختلاف تنش نرمال اول انجام شده است. در این شرایط، میزان انحراف سرعت محوری و دبی جریان بدست آمده از حل عددی نسبت به روابط تحلیلی بسیار ناچیز بوده و شدت جریانهای ثانویه بسیار کوچک و از مرتبه 10^{-7} است. به دلیل ناچیز بودن شدت این گردابه ها، این نتایج از دیدگاه عددی نسبت به قضیه لانگلویس، ریولین و پیپکین در مورد جریان مستقیم الخط سیال مرتبه دو دارای انحراف نیستند. نکته جالب توجه مربوط به شکل جریانهای ثانویه حاصل از حل عددی برای جریان در کانال مستقیم است. در شکل (۵-۵) این جریانهای ثانویه در مقادیر مختلف Ψ_2 نشان داده شده است. مطابق شکل، جریانهای ثانویه در کانال دارای مقطع مربعی به صورت چهار گردابه ظاهر می شوند و در هر جفت، گردابه ها نسبت به یکدیگر دارای جهت چرخش متفاوت هستند. با افزایش مقدار Ψ_2 از -0.0001 تا -0.1 مقدار $S_{\max}$ (سرعت جریانهای ثانویه) از 4.95×10^{-9} به 3.31×10^{-6} افزایش می یابد. به عبارت دیگر، بزرگی این جریانهای ثانویه به مقدار Ψ_2 وابسته است. این جریانهای ثانویه در $\Psi_2=0$ محو می شوند و در مقادیر Ψ_2 مثبت دارای جهت چرخش معکوس نسبت به مقادیر Ψ_2 منفی هستند. نکته جالب توجه آنکه جریان هر سیالی در کانال مستقیم دارای مقطع غیر مدوری که در شرایط اولدروید صدق کند (رابطه (۱-۷))، فاقد جریان ثانویه است. از آنجا که در سیال مرتبه دو، خواص

رئولوژیک مستقل از نرخ برش هستند، لذا سیال مرتبه دو در شرط اول اولدروید (رابطه (۱-۷-۱)) صدق می کند و جریان مستقیم الخط آن فاقد جریان ثانویه خواهد بود. در شکل (۵-۶)، جریانهای ثانویه سیال CEF در حالتی که خواص رئولوژیک آن در شرایط اولدروید صدق نمی کند و در شکل (۵-۷) جریانهای ثانویه سیال مرتبه دو در نسبت های ابعادی مختلف نشان داده شده است.

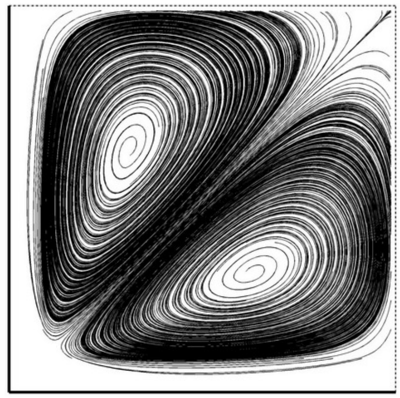


شکل (۵-۵): گردابه های جریان سیال مرتبه دو در کانال مستقیم در حالت $\mathrm{Re}=10$ و $\Psi_2/\Psi_1 = -10\%$

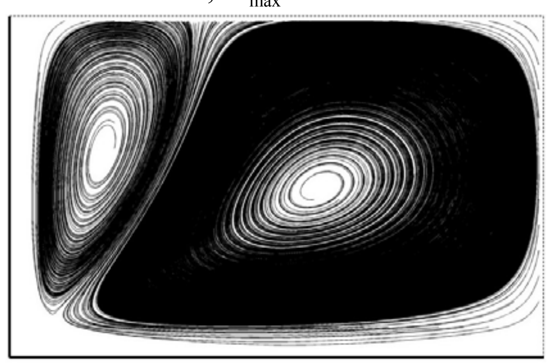


شکل (۵-۶): گردابه های جریان سیال CEF در یک چهارم مقطع کانال مستقیم در نسبت های ابعادی مختلف

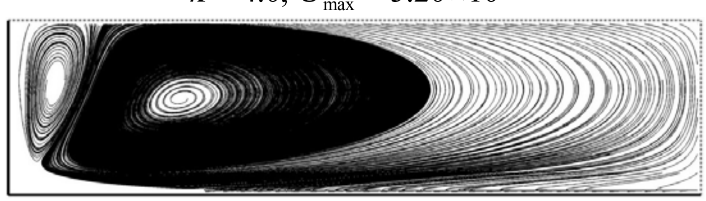
$\kappa = 1.0,\ S_{\max} = 4.33\times10^{-7}$



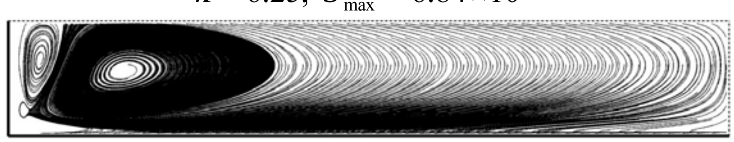
$\kappa = 1.56,\ S_{\max} = 4.54\times10^{-7}$



$\kappa = 4.0,\ S_{\max} = 5.20\times10^{-7}$



$\kappa = 6.25,\ S_{\max} = 6.84\times10^{-7}$



شکل (۵-۷): گردابه های جریان سیال مرتبه دو در یک چهارم مقطع کانال مستقیم

در نسبت های ابعادی مختلف و در $\mathrm{Re}=10,\ \Psi_1=0.1,\ \Psi_2/\Psi_1=-10\%$

به دلیل وجود تقارن، جریانهای ثانویه در شکل های (۵-۶) و (۵-۷) تنها در یک چهارم مقطع نشان داده شده اند. نکته جالب توجه آنکه، فرم جریانهای ثانویه در جریان سیال مرتبه دو (شکل (۵-۷)) بسیار مشابه جریان سیال CEF (شکل (۵-۶)) و جریان سیال PTT (شکل (۱-۲)) در کانال مستقیم است با این تفاوت که در جریان سیال CEF و PTT شدت جریانهای ثانویه از مرتبه 10^{-3} تا 10^{-2} است در حالیکه در جریان سیال مرتبه دو، این جریانهای ثانویه بسیار کوچک و از مرتبه 10^{-7} هستند. ژو و همکاران[1] [۸] نشان دادند که چنانچه در جریان سیال PTT، خواص رئولوژیک در شرایط اولدروید صدق کنند، جریانهای ثانویه ای بسیار ضعیفی از مرتبه 10^{-6} تشکیل می شوند. آنها این جریانهای ثانویه را به وجود خطای ترانکیشن نسبت دادند. لذا به نظر می رسد که مطابق نظر ژو و همکاران [۸]، جریانهای ثانویه بدست آمده از حل عددی برای جریان مستقیم الخط سیال مرتبه دو نیز حاصل خطای ترانکیشن باشند.

همچنین جهت ارزیابی نتایج حاصل از حل عددی مربوط به معادله انتقال حرارت ، مقادیر ناسلت بدست آمده برای حالات شار ثابت و دما ثابت با نتایج شاه و لندن[2] [۱۲۸] برای انتقال حرارت اجباری سیال نیوتنی در کانال مستقیم دارای مقطع مستطیلی مقایسه شده است. آنها در محاسبه عدد ناسلت مربوط به حالت شار ثابت، از انتگرال گیری عددی استفاده نموده و فرض نمودند که در این حالت دمای سطح لوله نیز ثابت است. این فرض آنها منجر به این می شود که عدد ناسلت بدست آمده، تقریبی از عدد ناسلت واقعی باشد. همانگونه که پیشتر در بخش ۳-۳-۲ گفته شد، چنین فرضی تنها برای رهایی از قید شرایط مرزی نیومن در حل معادله انتقال حرارت توسعه یافته در حالت شار ثابت است. این فرض تنها برای مسائل دارای تقارن محوری[3] مانند انتقال حرارت در لوله مستقیم دارای پاسخ صحیح است و در سایر موارد منجر به بروز خطا در محاسبه میدان دما و عدد ناسلت می شود. در تحقیق حاضر، ما نیز تنها برای مقایسه نتایج، دمای سطح لوله را ثابت فرض نموده ایم و تحلیل عددی را در یک عدد انحنای بسیار

1. Xue et al.
2. Shah and London
3. Axisymmetric

کوچک (شعاع انحنای بزرگ) انجام داده ایم تا نتایج حاصل از حل عددی به نتایج مربوط به جریان و انتقال حرارت در کانال مستقیم همگرا شود. در جدول (۵-۴) نتایج مربوط به عدد ناسلت دو تحقیق در نسبت های ابعادی مختلف آمده است. مطابق جدول (۵-۴)، نتایج این تحقیق دارای تطابق مناسبی با نتایج شاه و لندن است. شایان ذکر است که فرض ثابت بودن دمای سطح لوله برای حالت شار ثابت تنها در این بخش و برای اثبات صحت نتایج عددی صورت گرفته و در سایر نتایج این تحقیق این تقریب اعمال نشده است.

جدول (۵-۴): عدد ناسلت متوسط برای انتقال حرارت توسعه یافته در کانال مستقیم
در حالات شار ثابت و دما ثابت بدست آمده از تحقیق حاضر و تحقیق شاه و لندن [۱۲۸]

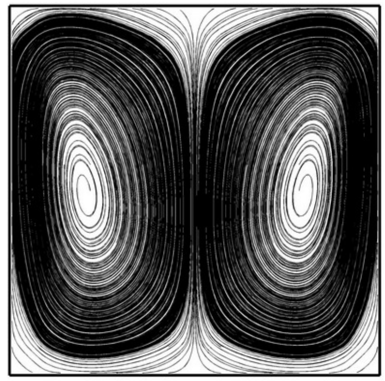
κ	شار ثابت		دما ثابت	
	شاه و لندن [۱۲۸]	تحقیق حاضر [۱۳۵]	شاه و لندن [۱۲۸]	تحقیق حاضر [۱۳۵]
1.0	3.61	3.6154	2.98	2.9833
1.43	3.73	3.7369	3.08	3.0852
2.0	4.12	4.1274	3.39	3.3961
3.0	4.79	4.7983	3.96	3.9673
4.0	5.33	5.3402	4.44	4.4487

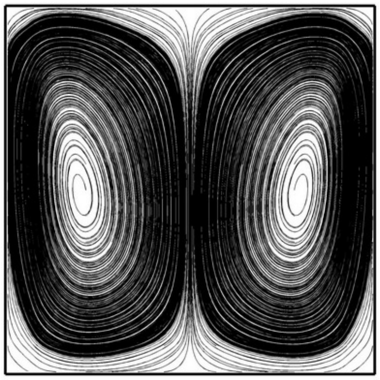
در پایان این بخش، توانایی کد CFD در ایجاد شرایط تقارن برای حالاتی که کل مقطع (و نه نیمی از آن) به عنوان دامنه محاسباتی در نظر گرفته می شود، بررسی شده است. در اینجا شبیه سازی عددی برای چند حالت مختلف از جریان سیال نیوتنی و مرتبه دو (SOF) در $Dn_b = 125$ انجام شده است. ستون سمت چپ شکل (۵-۸) مربوط به حل عددی نیمی از مقطع کانال با تعداد گره 40×80 و ستون سمت راست آن مربوط به حل جریان در کل مقطع با شبکه 80×80 است. مطابق شکل، کد CFD تهیه شده به خوبی قادر به شبیه سازی تقارن جریان در وضعیت مربوط به کل سطح مقطع است و میزان متوسط قدر مطلق خطای نسبی سرعت جریانهای ثانویه دو شبکه، کمتر از ۰/۱٪ است.

حل عددی بر مبنای کل سطح مقطع
و بدون استفاده از شرط تقارن

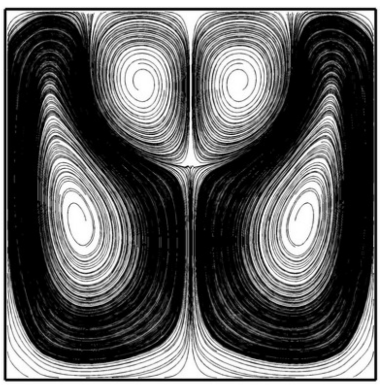
حل عددی بر مبنای نیمی از سطح مقطع
و با استفاده از شرط تقارن

Newtonian, Mean Error= 0.0037%

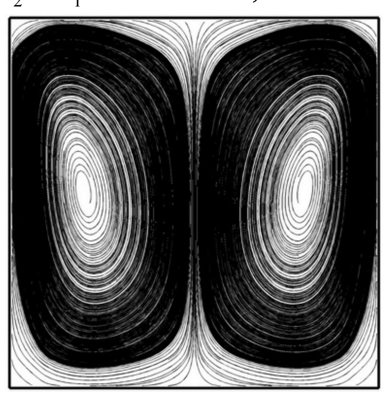


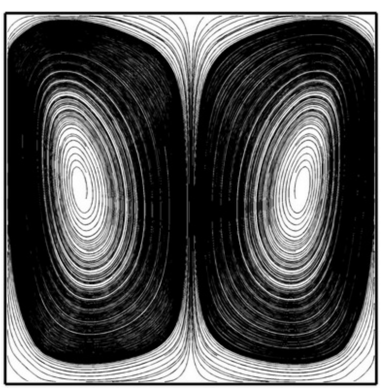


$SOF, \Psi_1 = 0.6,\ \Psi_2 = 0$, *Mean Error* = 0.08091%



$SOF, \Psi_1 = 0.6,\ \Psi_2 / \Psi_1 = -10\%$, *Mean Error* = 0.08135%





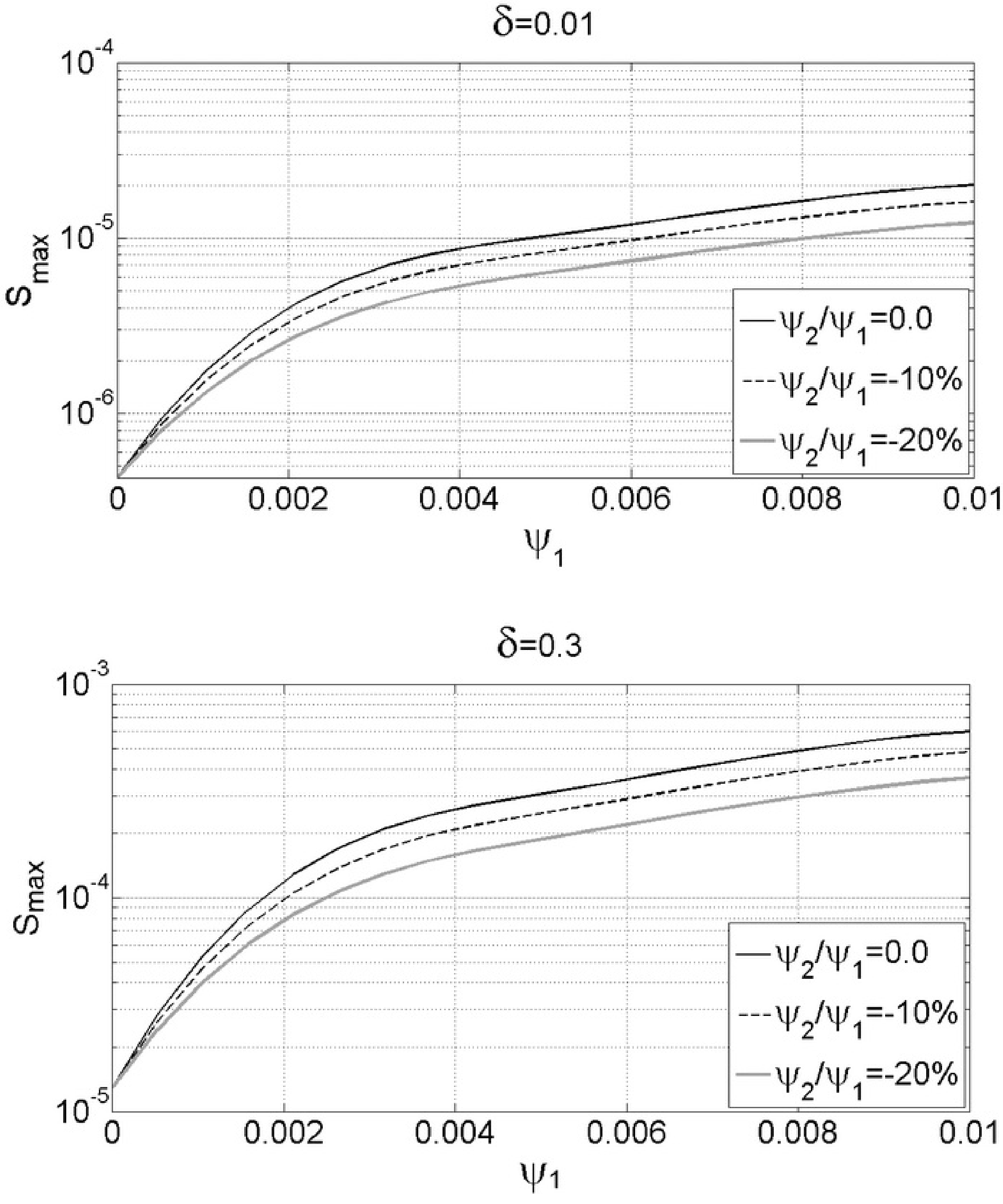
شکل (۵-۸): جریانهای ثانویه در $Dn_b = 125$ برای حل عددی در نیمی از
سطح مقطع با استفاده از شرط مرزی تقارن و حل عددی در کل سطح مقطع

۵-۵- جریان خزشی

در این بخش جریان خزشی ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی مورد بررسی قرار می گیرد. در جریان خزشی به دلیل کوچک بودن مقادیر نرخ برش، مدل CEF به مدل سیال مرتبه دو کاهش پیدا می کند (زیرا مقادیر توابع ویسکومتریک به سمت مقادیر مربوطه در نرخ برش صفر میل می کنند). شایان ذکر است که مدل سیال مرتبه دو برای مدل سازی جریانهای خزشی، مدل بسیار مناسبی محسوب می شود [۳].

۵-۵-۱- مطالعه جریان

در جریان خزشی می توان در غیاب اثرات اینرسی، بر روی اثر اختلاف تنش های نرمال تمرکز نمود. در اینجا برای مدل سازی جریان خزشی، تحلیل CFD در یک عدد رینولدز کوچک (۰/۰۰۲) انجام شده است. در شکل (۵-۹)، مقدار $S_{\max}$ بر حسب اختلاف تنش های نرمال و در دو نسبت انحنای ۰/۰۱ و ۰/۳ نشان داده شده است. مطابق شکل، ایجاد اختلاف تنش نرمال اول به افزایش شدت جریانهای ثانویه منجر می شود. در حالت $\Psi_2 = 0$، با افزایش ثابت بی بعد اختلاف تنش نرمال اول تا ۰/۰۱، شدت جریانهای ثانویه در هر دو نسبت انحنا، حدود ۴۷ برابر افزایش پیدا می کند. همچنین اختلاف تنش نرمال دوم منفی اثری برعکس اختلاف تنش نرمال اول داشته و ازدیاد آن به کاهش شدت جریانهای ثانویه منجر می شود. همچنین مطابق شکل اثر اختلاف تنش های نرمال در سرعت جریانهای ثانویه بسیار وابسته به نسبت انحنای کانال است. به نحوی که برای خواص رئولوژیکی $\Psi_1 = 0.01$ و $\Psi_2 = 0$، در نسبت انحنای ۰/۳ شدت جریانهای ثانویه حدود ۳۰ برابر نسبت انحنای ۰/۰۱ است. اثر اختلاف تنش نرمال اول در تحقیقات بون و همکاران [۴۳] و رابرتسون و مولر [۴۶] و اثرات معکوس اختلاف تنش های نرمال نیز توسط فان و همکاران [۵۰] برای جریان خزشی مواد ویسکوالاستیک در لوله خمیده مشاهده شده است.



شکل (۵-۹): نسبت ماکزیمم سرعت جریانهای ثانویه به
سرعت بالک در نسبتهای انحنای مختلف جریان خزشی [۱۲۵]

مطابق شکل (۵-۹)، ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی سبب افت شدت جریانهای ثانویه می شود. به عبارت دیگر، اثر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر سرعت گردابه ها عکس یکدیگر بوده و ازدیاد آنها به ترتیب به افزایش و کاهش شدت جریانهای ثانویه منجر می شوند.

در ادامه به مکانیزم اثر اختلاف تنش های نرمال در تشکیل جریانهای ثانویه پرداخته می شود. در شکل (۵-۱۰) توزیع سرعت محوری، توزیع فشار استاتیکی، تنش نرمال محوری ($\tau_{\theta\theta}$) و پارامتر Γ در $\Psi_1 = 0.01$ و برای دو حالت $\Psi_2 / \Psi_1 = 0$ و $\Psi_2 / \Psi_1 = -10\%$ نشان داده شده است. در اینجا اثرات دیورژانس ترمهای تنش τ_{rr} و τ_{rz} در جهت r بصورت پارامتر Γ تعریف شده که استفاده از آن جهت درک بهتر مکانیزم اثر اختلاف تنش های نرمال بر جریان بسیار موثر است:

$$\Gamma = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rr}\right)+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \qquad (۵-۲)$$

علت تقویت قابل توجه شدت جریانهای ثانویه ناشی از اثر اختلاف تنش نرمال اول را می توان به ایجاد تنش نرمال محوری بزرگ در جریان مواد ویسکوالاستیک در کانالهای خمیده نسبت داد. در رابطه (۳-۹) فرم کلی تعادل ترمهای معادله r-مومنتوم در ناحیه هسته جریان سیال مرتبه دو در کانالهای خمیده دارای مقطع مستطیلی آمده است. این رابطه با فرض قابل صرفنظر بودن سرعت جریانهای ثانویه نسبت به سرعت جریان محوری در ناحیه هسته مقطع جریان بدست آمده است. این رابطه با فرض صفر بودن اثر اختلاف تنش نرمال دوم به رابطه (۳-۱۱) تبدیل می شود. در نهایت با فرض خزشی بودن جریان سیال مرتبه دو ($\mathrm{Re} \ll 1$)، رابطه (۳-۱۱) به رابطه زیر ساده می شود:

$$\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \approx 0 \qquad (۵-۳)$$

مشابه رابطه (۵-۳) توسط فان و همکارانش [۵۰] برای جریان خزشی سیال اولدروید-بی در یک لوله خمیده در دستگاه مختصات ترویدال بدست آمده است. بایستی توجه داشت که معادله متشکله اولدروید-بی قادر به پیش بینی اثر اختلاف تنش نرمال دوم نبوده و این پارامتر در این مدل صفر محاسبه

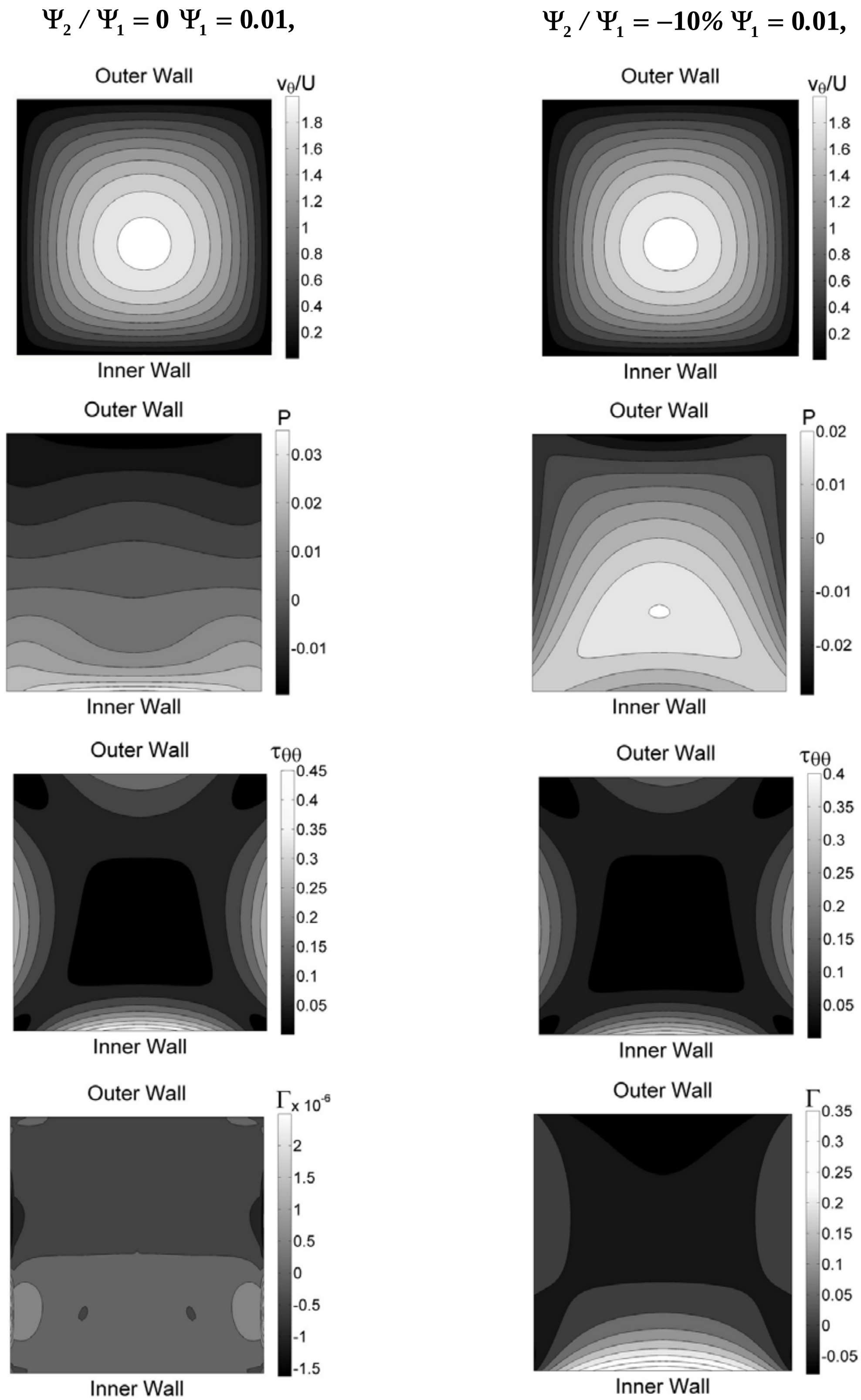
می شود. مطابق رابطه فوق، در ناحیه هسته جریان سیال ویسکوالاستیک و در نبود اثر اختلاف تنش نرمال دوم، تنش نرمال محوری ($\tau_{\theta\theta}$) با گرادیان فشار محوری بالانس می شود. اما این رابطه تنها در ناحیه هسته جریان صادق بوده و در نزدیکی دیواره مقدار تنش نرمال محوری از گرادیان فشار شعاعی پیشی می گیرد و جهت جبران این عدم تعادل، مکانیزم مومنتوم وارد عمل شده و جریانهای ثانویه تشکیل می شوند. جهت این جریان های ثانویه هم جهت با جریانهای تیلور-گورتلر است. همچنین مطابق رابطه (۳-۳-۴)، تنش نرمال محوری در ناحیه هسته جریان سیال مرتبه دو از مرتبه یک و در ناحیه هسته جریان سیال نیوتنی از مرتبه ε است. به همین دلیل این تنش در جریان مواد ویسکوالاستیک در کانالهای خمیده دارای مقدار قابل توجهی است (برخلاف جریان سیال نیوتنی) و می تواند بطور قابل توجهی جریانهای ثانویه را تحت تاثیر قرار دهد.

مطابق شکل (۵-۱۰)، وجود اختلاف تنش نرمال دوم تاثیر چندانی در شکل توزیع سرعت محوری ندارد اما سبب ایجاد تغییرات قابل توجهی در توزیع فشار جریان می شود. با توجه به رابطه (۳-۹)، گرادیان فشار محوری در ناحیه هسته جریان خزشی سیال مرتبه دو از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial p}{\partial r}+\Psi_1 f_1(v_\theta)+\Psi_2 f_2(v_\theta)\approx 0 \qquad (۴-۵)$$

در رابطه فوق f_1 و f_2 توابعی از مولفه سرعت محوری بوده و از رابطه (۳-۸) بدست می آیند. بنابراین در اینجا هر دو ثابت اختلاف تنش نرمال اول و دوم در گرادیان فشار شعاعی جریان موثر هستند. با توجه به روابط (۳-۳-۱) و (۳-۳-۳)، هر دو مولفه تنش τ_{rr} و τ_{rz} (و در نتیجه پارامتر Γ) در ناحیه هسته جریان تنها تابعی از اثر اختلاف تنش نرمال دوم هستند.

با توجه به شکل (۵-۱۰)، مقدار Γ در حالت $\Psi_2/\Psi_1=0$ بسیار اندک است، به همین دلیل می توان به آسانی نتیجه گرفت که در این حالت ترمهای تنش τ_{rr} و τ_{rz} تاثیری در این جریان ندارند، اما در حالت $\Psi_2/\Psi_1=-10\%$، مقدار پارامتر Γ بسیار قابل توجه است.



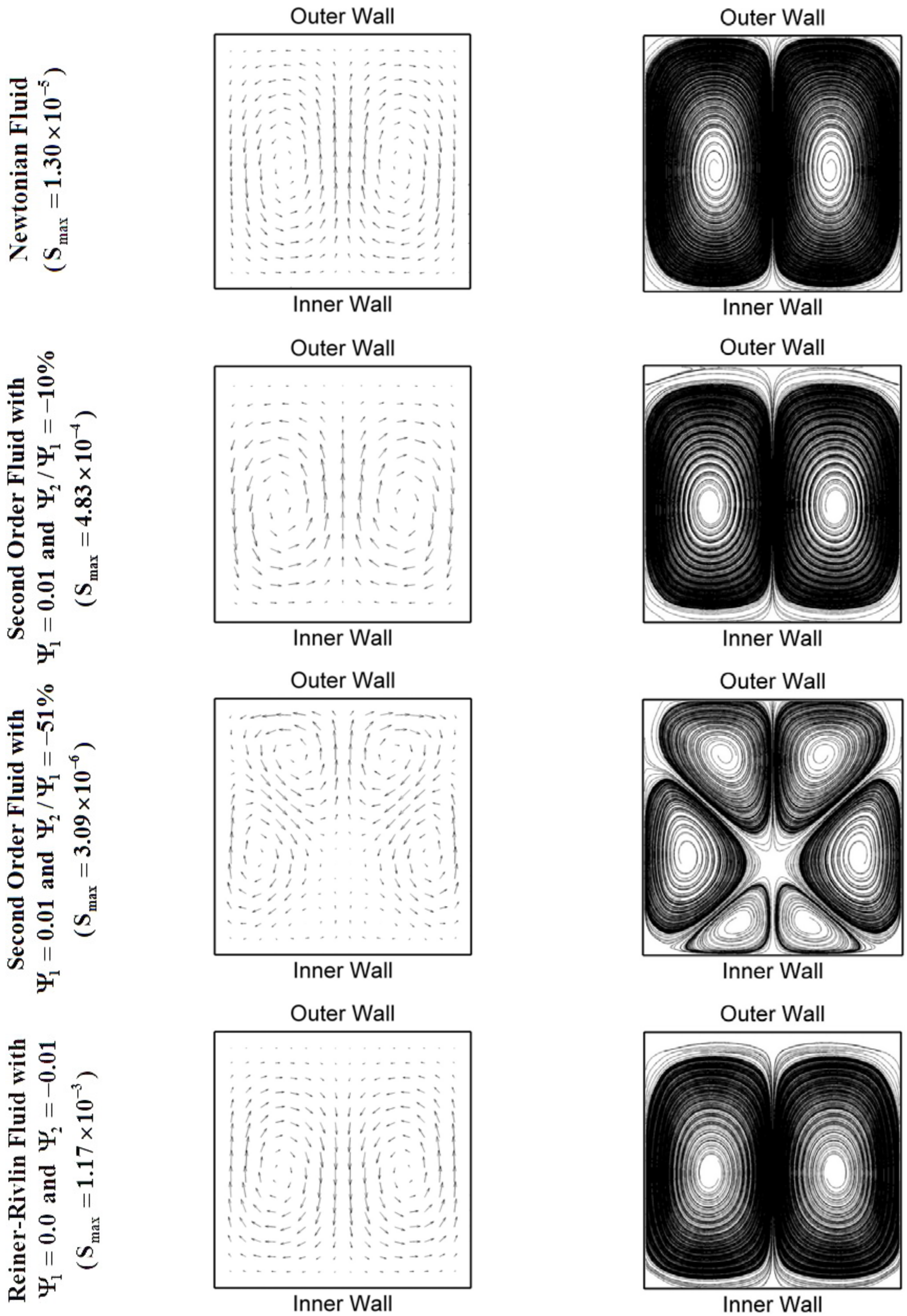
شکل (۵-۱۰): توزیع سرعت محوری، فشار استاتیکی، تنش نرمال محوری و Γ برای جریان خزشی [۱۲۵]

به طور کلی اختلاف تنش نرمال دوم منفی به دو شکل سبب کاهش گرادیان فشار شعاعی و کاهش شدت جریانهای ثانویه می شود:

- کاهش مقدار تنش نرمال محوری (به رابطه (۳-۳-۴) مراجعه کنید)
- افزایش پارامتر Γ (ناشی از تقویت ترمهای تنش τ_{rr} و τ_{rz}) که دارای اثری برعکس تنش نرمال محوری است.

در شکل (۵-۱۱)، بردارهای سرعت و خطوط جریانهای ثانویه برای جریان خزشی سیالات مختلف ($Re = 0.002$) در $\delta = 0.3$ نشان داده شده است. مطابق شکل، برای جریان سیال نیوتنی اثرات بسیار ضعیف نیروی گریز از مرکز سبب ایجاد جریانهای ثانویه تیلور-گورتلر با شدت بسیار کم شده است. در این حالت $S_{\max}$ برای جریان سیال نیوتنی حدود 1.30×10^{-5} است. اما در جریان سیال مرتبه دو با خواص رئولوژیکی $\Psi_1 = 0.01$ و $\Psi_2/\Psi_1 = -10\%$، اثرات اختلاف تنش نرمال اول غالب بوده و سبب افزایش مقدار $S_{\max}$ تا 4.83×10^{-4}می شود. در این حالت برآیند جریانهای ثانویه هم جهت با گردابه های تیلور-گورتلر ناشی از نیروهای گریز از مرکز ناشی از انحنا هستند اما گردابه های ناشی از اثر اختلاف تنش های نرمال با گردابه های تیلور هم مرکز نبوده و از اینرو شکل کیفی گردابه ها دارای تفاوت اندکی با حالت مربوط به جریان سیال نیوتنی است.

با افزایش مقدار نسبت ثابت اختلاف تنش های نرمال تا $\Psi_2/\Psi_1 = -51\%$، اثر اختلاف تنش نرمال دوم اثرات اختلاف تنش نرمال اول و نیروی گریز از مرکز را خنثی کرده و یک سری گردابه های بسیار ضعیف ایجاد می شوند. در این حالت، برآیند جریانهای ثانویه عملاً خنثی بوده و مقدار $S_{\max}$ این گردابه ها حدود 3.09×10^{-6} است. بنابراین به سادگی می توان دریافت که گردابه های ناشی از نیروی گریز از مرکز و اثر هر دو اختلاف تنش نرمال هم مرکز نبوده و در این حالت خنثی، سه جفت گردابه بسیار ضعیف ایجاد شده است.



شکل (۵-۱۱): جریانهای ثانویه در جریان خزشی سیالات مختلف در $\mathrm{Re} = 0.002$ و $\delta = 0.3$ [۱۲۵]

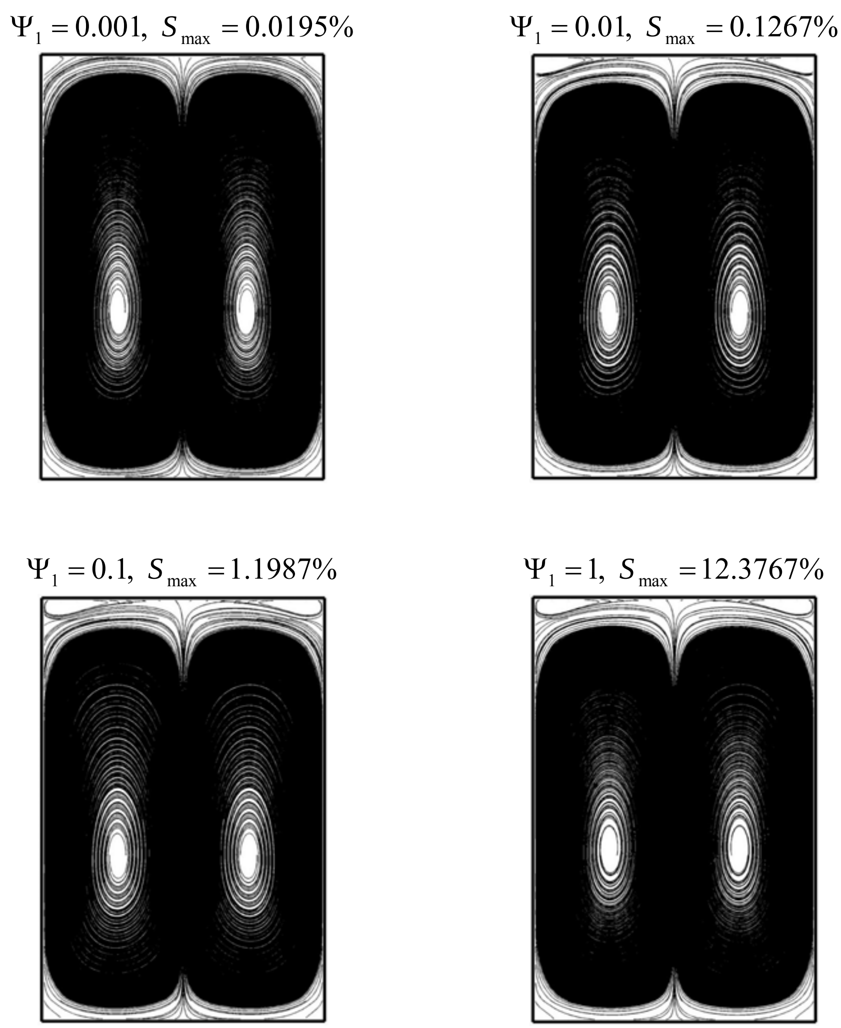
برای جریان سیال راینر-ریولین با خواص رئولوژیکی $\Psi_1 = 0.0$ و $\Psi_2 = -0.01$، به دلیل صفر بودن اختلاف تنش نرمال اول، اثر اختلاف تنش نرمال دوم سبب ایجاد جریانهای ثانویه ای در خلاف جهت جریانهای ثانویه تیلور-گورتلر شده است (شکل (۵-۱۱) را ببینید)! همچنین برای جریان این سیال، شدت جریانهای ثانویه بسیار بزرگتر از سایر حالتها بوده و مقدار $S_{\max}$ برابر با 1.17×10^{-3} است. بایستی توجه داشت که اثر اختلاف تنش نرمال دوم در کاهش شدت جریانهای ثانویه تیلور-گورتلر و ایجاد جریانهای ثانویه ای در خلاف جهت این جریانها از مرتبه دو است. به عبارت دیگر این اثر در مقادیر بزرگ اختلاف تنش نرمال دوم بسیار مشهودتر است.

۵-۵-۲- بررسی ناپایداری

بروز ناپایداری در جریان سیالات نیوتنی در کانال های خمیده مختص جریانهای اینرسی و در اعداد دین بزرگ است. این ناپایداری به ناپایداری دین موسوم بوده و ناشی از اثرات قابل توجه نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا است. لذا در جریان سیال خزشی به دلیل کوچک بودن سرعت جریان و در نتیجه نیروی گریز از مرکز، ناپایداری دین امکان وقوع ندارد. بر خلاف جریان خزشی سیال نیوتنی، جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده می تواند دچار ناپایداری شود. این ناپایداری نه به دلیل اثر نیروی گریز از مرکز بلکه ناشی از اثر نیروهای الاستیک ناشی از اثرات اختلاف تنش های نرمال است.

در این بخش اثر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر پایداری جریان خزشی مورد بررسی قرار می گیرد. در شکل های (۵-۱۲) تا (۵-۱۵) خطوط جریانهای ثانویه در نسبت های ابعادی و مقادیر مختلف اختلاف تنش نرمال اول نشان داده شده است. در اینجا برای مدل سازی جریان خزشی، عدد رینولدز برابر ۰/۰۱ و نسبت انحنا برابر یک مقدار بزرگ ($\delta = 0.5$) در نظر گرفته شده تا بروز ناپایداری در جریان تسهیل گردد. مطابق اشکال (۵-۱۲) تا (۵-۱۵)، ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول منجر به ازدیاد

شدت جریانهای ثانویه و بروز ناپایداری می شود. در شکل (۵-۱۲)، جریانهای ثانویه در نسبت ابعادی ۱/۵ نشان داده شده است. مطابق شکل، در مقادیر $\Psi_1 \geq 0.01$، جریان در وضعیت ناپایدار قرار می گیرد و یک جفت جریان ثانویه جدید در نزدیکی دیواره خارجی ایجاد می گردد. اما با ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول تا $\Psi_1 = 1$، شکل جریانهای ثانویه چندان دستخوش تغییر نمی شود. همچنین مطابق شکل، سرعت گردابه ها با مقدار Ψ_1 نسبت مستقیم دارد.

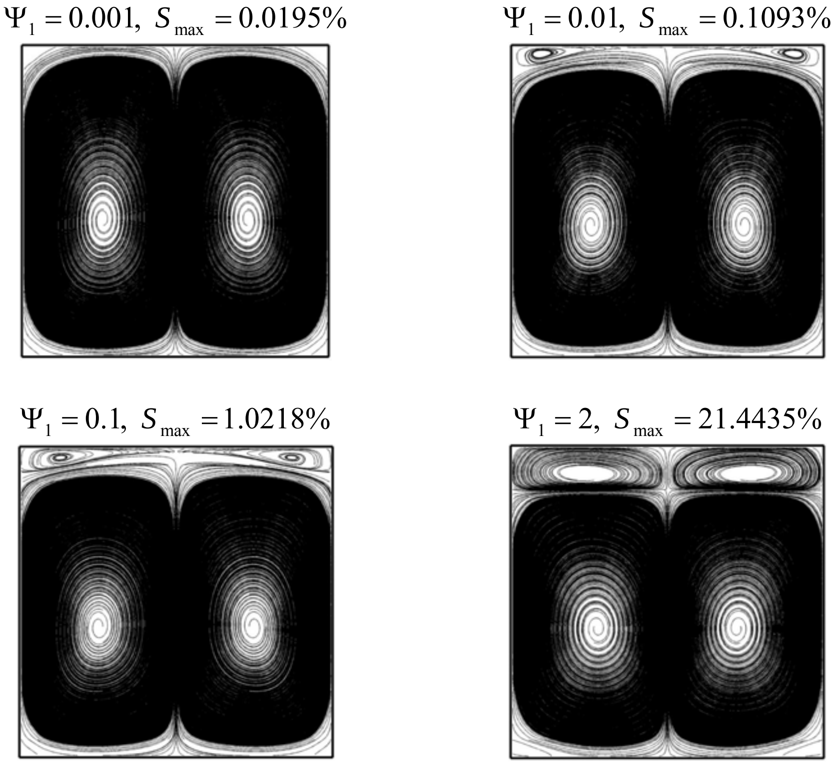


شکل (۵-۱۲): خطوط جریانهای ثانویه برای جریان خزشی در
$\delta = 0.5$، $\Psi_2 = 0$، $\kappa = 1.5$ و در مقادیر مختلف اختلاف تنش نرمال اول

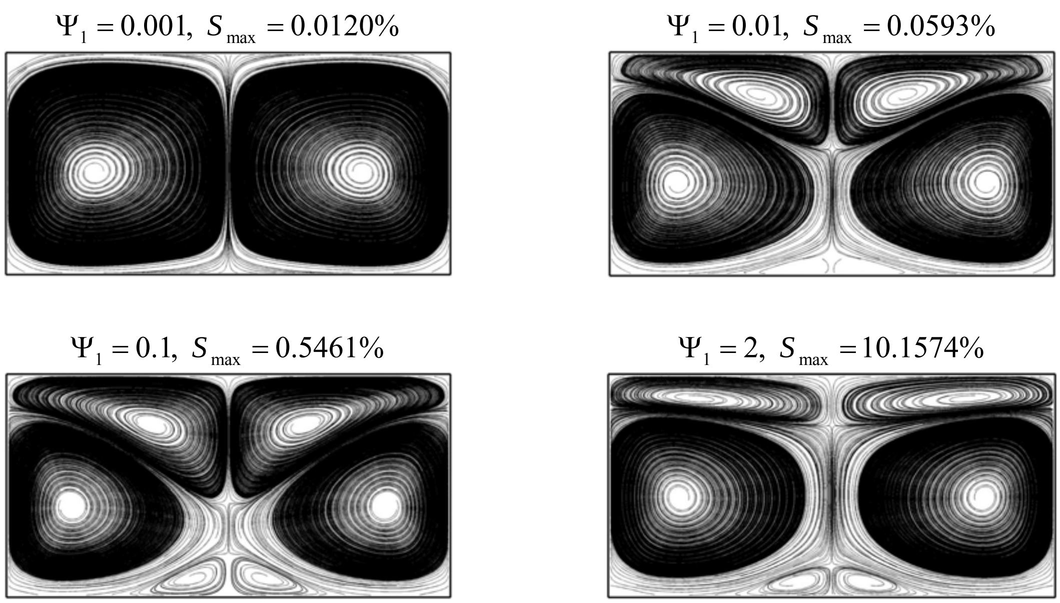
در شکل (۵-۱۳)، جریانهای ثانویه در نسبت ابعادی ۱ نشان داده شده است. در اینجا نیز در حالت $\Psi_1 \geq 0.01$ جریان ناپایدار می شود، با این تفاوت که با افزایش مقدار Ψ_1، اندازه گردابه های نزدیک دیواره خارجی به سرعت افزایش پیدا می کند. در شکل های (۵-۱۴) و (۵-۱۵)، جریانهای ثانویه در نسبت ابعادی ۰/۵ و ۰/۱۲۵ نشان داده شده است. مطابق این اشکال، با کاهش نسبت ابعادی، جریان ناپایدارتر شده و با ازدیاد مقدار اختلاف تنش نرمال اول در هر یک از این نسبت های ابعادی، تعداد، الگو و سرعت جریانهای ثانویه به شدت دستخوش تغییر می شود.

همانگونه که پیشتر گفته شد، در هسته جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده و در نبود اثر اختلاف تنش نرمال اول، گرادیان فشار شعاعی با تنش نرمال محوری بالانس می شود. بایستی توجه داشت که در نزدیکی دیواره داخلی، مقدار تنش نرمال محوری بسیار بزرگ است و لذا بالانس بین گرادیان فشار شعاعی و تنش نرمال محوری در این ناحیه برقرار نبوده و جهت حفظ تعادل مکانیزم مومنتوم وارد عمل می شود و گردابه هایی هم جهت با گردابه های تیلور-گورتلر ایجاد می کند. در ناحیه پایدار، این جریانهای ثانویه بصورت یک جفت گردابه تشکیل می شوند. چنانچه اثر اختلاف تنش نرمال اول و در نتیجه تنش نرمال محوری به اندازه کافی بزرگ باشد، اثرات ویسکوز دیگر قادر به حفظ جریانهای ثانویه بصورت یک جفت گردابه نیستند. در این وضعیت، ناپایداری در جریان بروز نموده و بسته به مقدار اختلاف تنش نرمال اول، نسبت ابعادی و نسبت انحنای کانال، تعداد و فرم گردابه ها می تواند بشدت دستخوش تغییر شود.

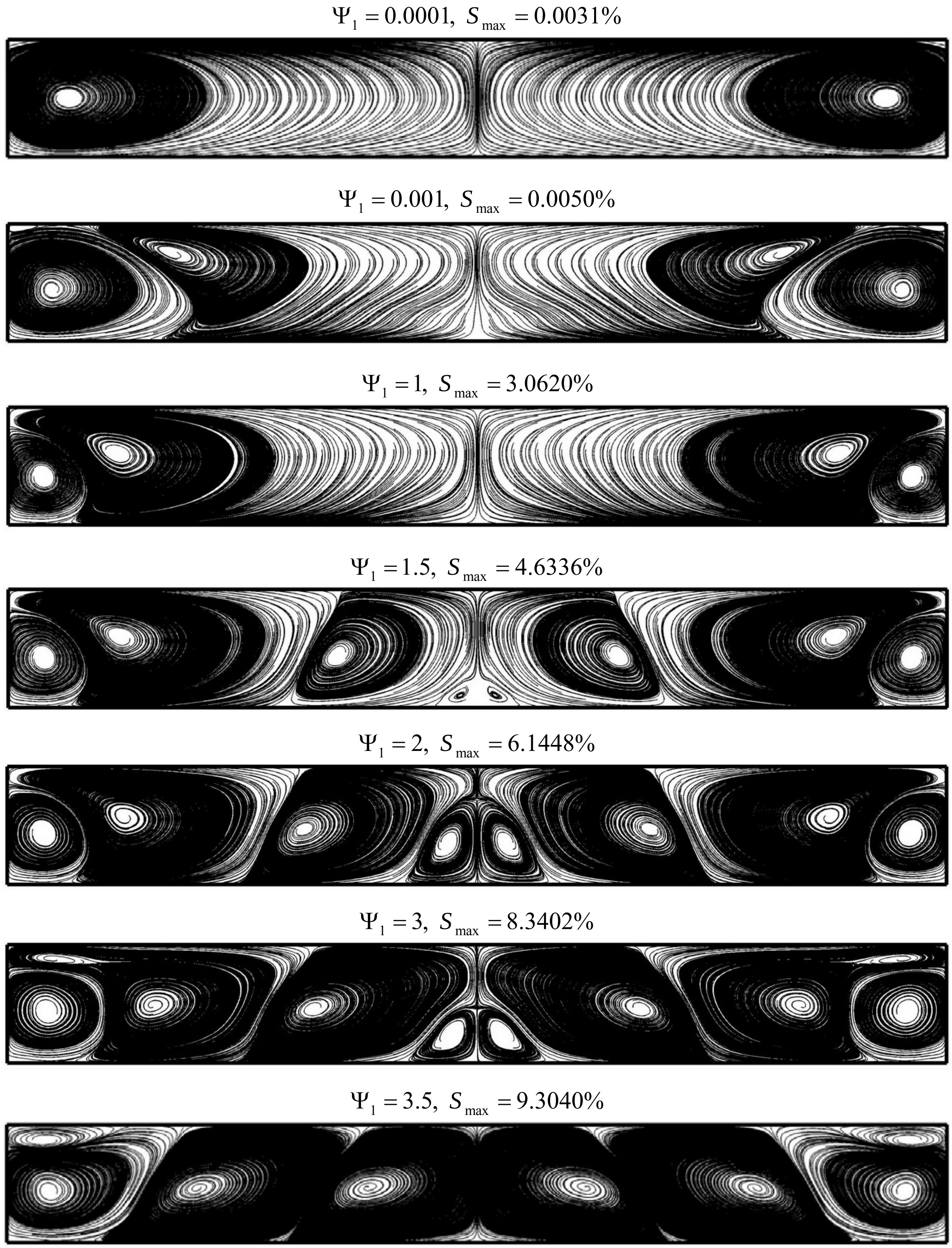
همانگونه که در بخش ۵-۵-۱ بیان گردید، اثر اختلاف تنش نرمال دوم بر شدت جریانهای ثانویه نسبت به اثر اختلاف تنش نرمال اول متضاد است و ازدیاد آن می تواند به کاهش سرعت گردابه ها منجر شود. در شکل (۵-۱۶) خطوط جریانهای ثانویه در مقادیر مختلف Ψ_2 نشان داده شده است. مطابق شکل، ازدیاد مقدار Ψ_2 در جهت خنثی نمودن اثر Ψ_1 و در نتیجه پایدار نمودن جریان خزشی عمل می کند.



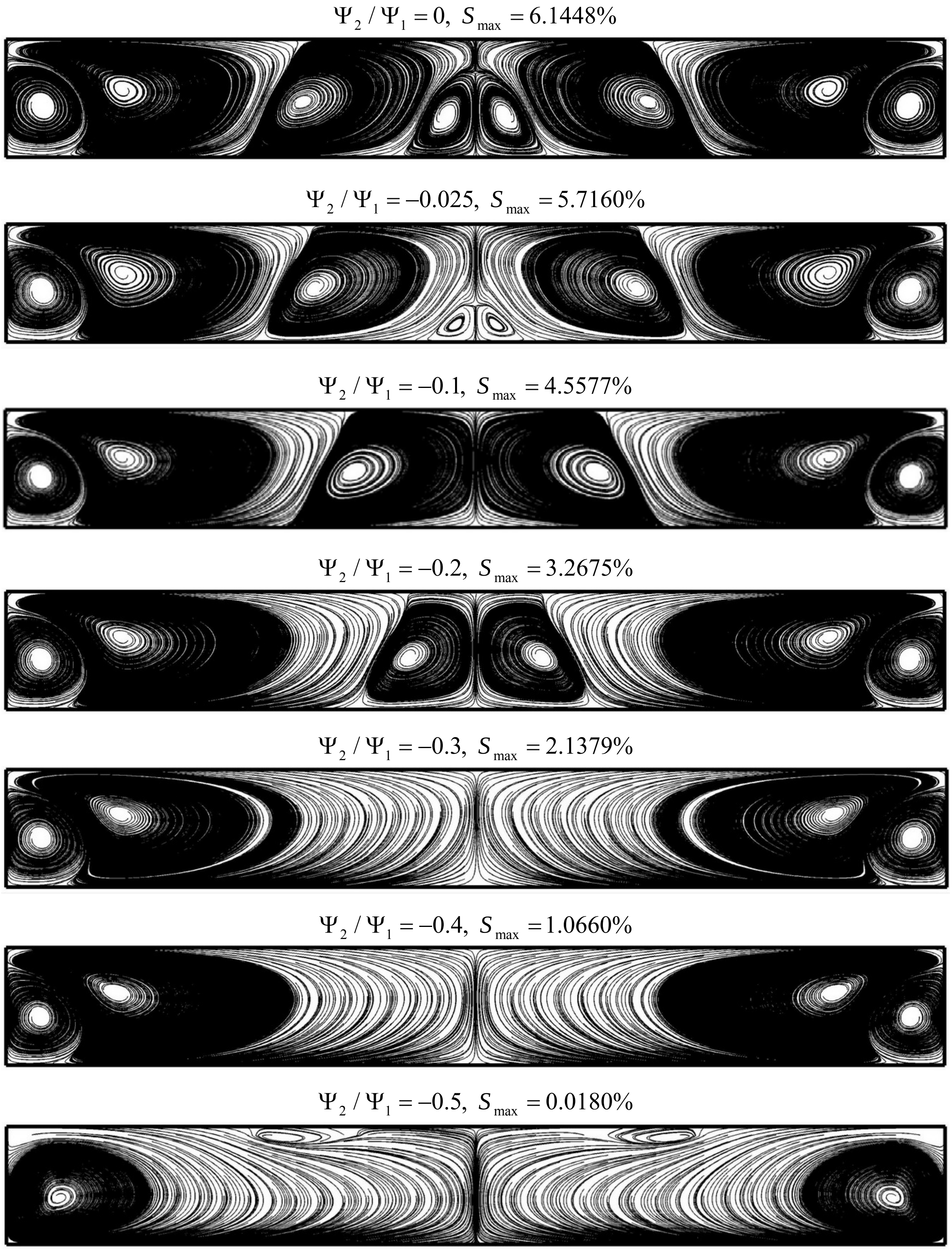
شکل (۵-۱۳): خطوط جریانهای ثانویه برای جریان خزشی در $\delta = 0.5$، $\Psi_2 = 0$، $\kappa = 1$ و در مقادیر مختلف Ψ_1



شکل (۵-۱۴): خطوط جریانهای ثانویه برای جریان خزشی در $\delta = 0.5$، $\Psi_2 = 0$، $\kappa = 0.5$ و در مقادیر مختلف Ψ_1



شکل (۵-۱۵): خطوط جریانهای ثانویه برای جریان خزشی در $\delta = 0.5$، $\Psi_2 = 0$، $\kappa = 0.125$ و در مقادیر مختلف Ψ_1



شکل (۵-۱۶): خطوط جریانهای ثانویه برای جریان خزشی در $\delta = 0.5$، $\Psi_1 = 2$، $\kappa = 0.125$ و در مقادیر مختلف Ψ_2

۵-۶- جریان اینرسی

در این بخش جریان اینرسی و انتقال حرارت اجباری سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده ایستا و چرخان مورد بررسی قرار می گیرد. برای این منظور اثر پارامترهای مختلفی نظیر عدد رینولدز، عدد روزبی، عدد وایزنبرگ، عدد دین، اختلاف تنش های نرمال اول و دوم، نسبت انحنا و نسبت ابعادی بر میدان سرعت و دما مطالعه شده است. همچنین در این بخش به پدیده ناپایداری دین در جریان سیال ویسکوالاستیک نیز پرداخته می شود.

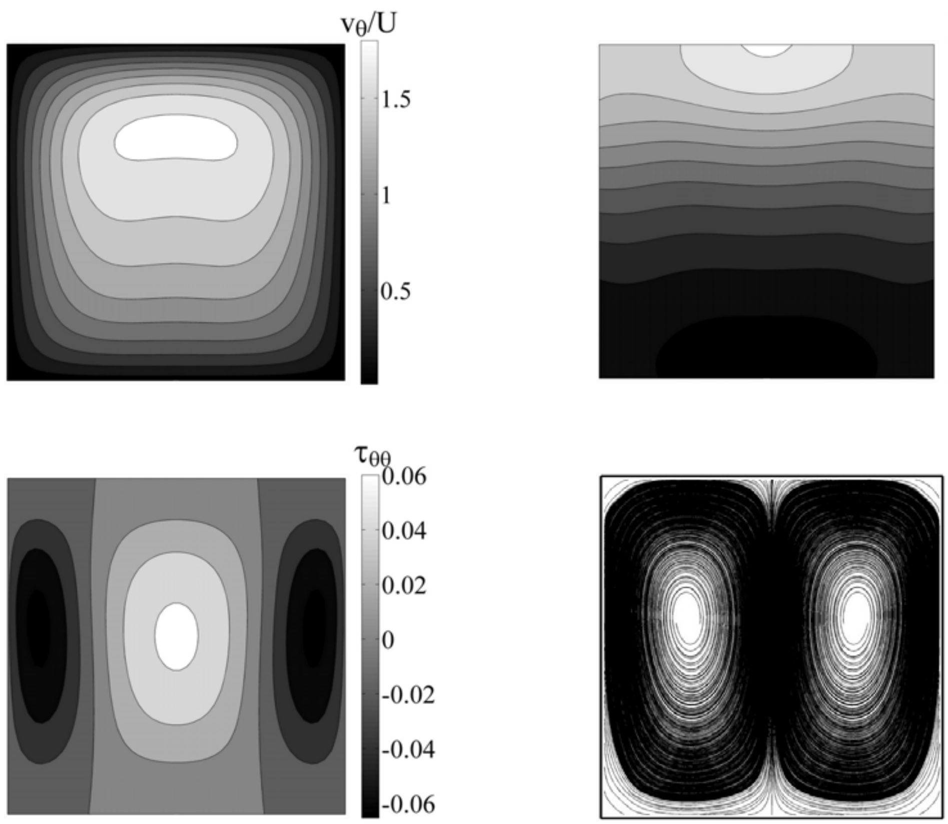
۵-۶-۱- *اثر اینرسی جریان*

در ابتدای این بخش، جریان سیال لزج بدون اثر اختلاف تنش های نرمال در کانال خمیده مورد بررسی قرار می گیرد تا بطور خاص بر روی اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا بر میدان جریان تمرکز شود. با توجه به رابطه (۳-۱۲)، در ناحیه هسته جریان اینرسی سیال نیوتنی در کانال خمیده، گرادیان فشار شعاعی با نیروی گریز از مرکز بالانس می شود:

$$Re\frac{v_\theta^{\ 2}}{r} \approx \frac{\partial p}{\partial r} \qquad (۵-۵)$$

مشابه رابطه فوق نخستین بار توسط ماشالکار و دواراجان [۶۹] برای تعادل نیروها در هسته جریان سیال نیوتنی در لوله های خمیده ارائه شده است. بایستی توجه داشت که این رابطه تنها در ناحیه هسته جریان برقرار است. با دور شدن از ناحیه هسته جریان و نزدیک شدن به سمت دیواره خارجی، اثر گرادیان فشار شعاعی همچنان قابل توجه باقی می ماند، حال آنکه مقدار سرعت محوری و در نتیجه نیروی گریز از مرکز به سرعت رو به کاهش می گزارد. در نتیجه رابطه تعادلی (۵-۵) در ناحیه نزدیک دیواره خارجی برقرار نبوده و جهت حفظ تعادل میدان جریان، اثرات ویسکوز منجر به پیدایش جریانهای ثانویه ای می شود که به گردابه های تیلور-گورتلر موسوم هستند.

در شکل (۵-۱۷)، توزیع سرعت محوری، فشار استاتیکی، تنش نرمـال محـوری و خطـوط جریانهـای ثانویه سیال نیوتنی در $\mathrm{Re}=200$، $\kappa=1$ و $\delta=0.15$ نشان داده شده است. مطـابق شـکل، اثـر نیـروی گریز از مرکز ناشی از انحنا منجر به متمایـل شـدن تـوده سـیال بـه سـمت دیـواره خـارجی و در نتیجـه نزدیک تر بودن موقعیت ماکزیمم سرعت محوری به سمت دیواره خـارجی شـده اسـت. همچنـین در ایـن حالت جریان پایدار بوده و جریانهای ثانویه به صورت یک جفت گردابه تیلور-گورتلر ظاهر شده اند. مطابق شکل، مقدار تنش نرمال محوری ($\tau_{\theta\theta}$) برای جریان سیال نیـوتنی بـسیار انـدک و مـاکزیمم آن از مرتبـه 10^{-2} است.



شکل (۵-۱۷): توزیع سرعت محوری، فشار استاتیکی، تنش نرمال محوری و خطوط جریانهای ثانویه
در جریان سیال نیوتنی در حالت $\mathrm{Re}=200$، $\delta=0.15$

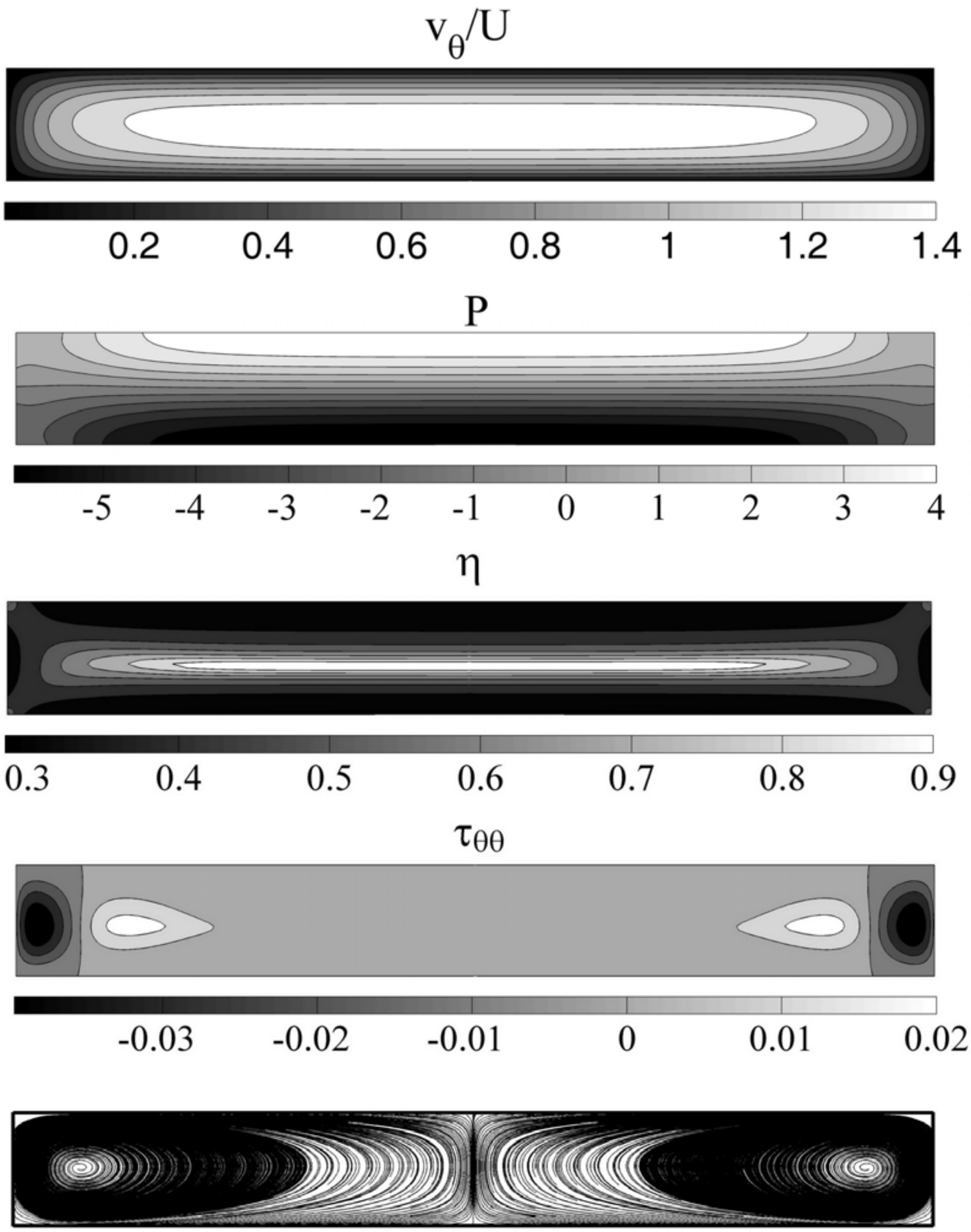
در اینجا نیز مشابه تحقیق ژو و همکاران [۸]، از یک مجموعه خواص به عنوان خواص مرجع توابع ویسکومتریک مدل کرایو-یاسودا استفاده شده است. این مجموعه خواص در جدول (۵-۵) ارائه شده است. در شکل (۵-۱۸)، توزیع سرعت محوری، فشار، ویسکوزیته، تنش نرمال محوری و خطوط جریانهای ثانویه جریان سیال تعمیم یافته نیوتنی در $\mathrm{Re}=20$، $\kappa=0.125$ و $\delta=0.15$ نشان داده شده است.

جدول (۵-۵): مجموعه خواص مرجع در نظر گرفته شده برای مدل کاریو-یاسودا

پارامتر	مقدار
$\rho(kg/m^3)$	1
$\eta_0\,(pa.s)$	1
$\eta_\infty\,(pa.s)$	0.01
n	0.65
a	2
$\lambda(s)$	0.015
χ	0.1

برای آنکه معادله متشکله سیال CEF به مدل سیال تعمیم یافته نیوتنی[1] ساده شود، مقدار λ_1 برابر صفر لحاظ شده است. مطابق شکل (۵-۱۸)، در این حالت نیز جریان پایدار بوده و جریانهای ثانویه به شکل یک جفت گردابه ظاهر شده اند. با توجه به اینکه مقدار n برابر ۰/۶۵ در نظر گرفته شده، لذا ویسکوزیته سیال از خود رفتار باریک شونده نسبت به برش نشان می دهد. بنابراین به دلیل بالا بودن نرخ برش در نزدیکی دیواره ها، مقدار ویسکوزیته در این قسمت ها بزرگتر از سایر نواحی است. مطابق شکل، در این حالت نیز اثر تنش نرمال محوری بسیار کوچک و از مرتبه 10^{-2} است.

1. Generalized Newtonian Fluid



شکل (۵-۱۸): توزیع سرعت محوری، فشار استاتیکی، تنش نرمال محوری و خطوط جریانهای ثانویه
در جریان سیال تعمیم یافته نیوتنی در حالت $\mathrm{Re}=20$، $\kappa=0.125$ و $\delta=0.15$

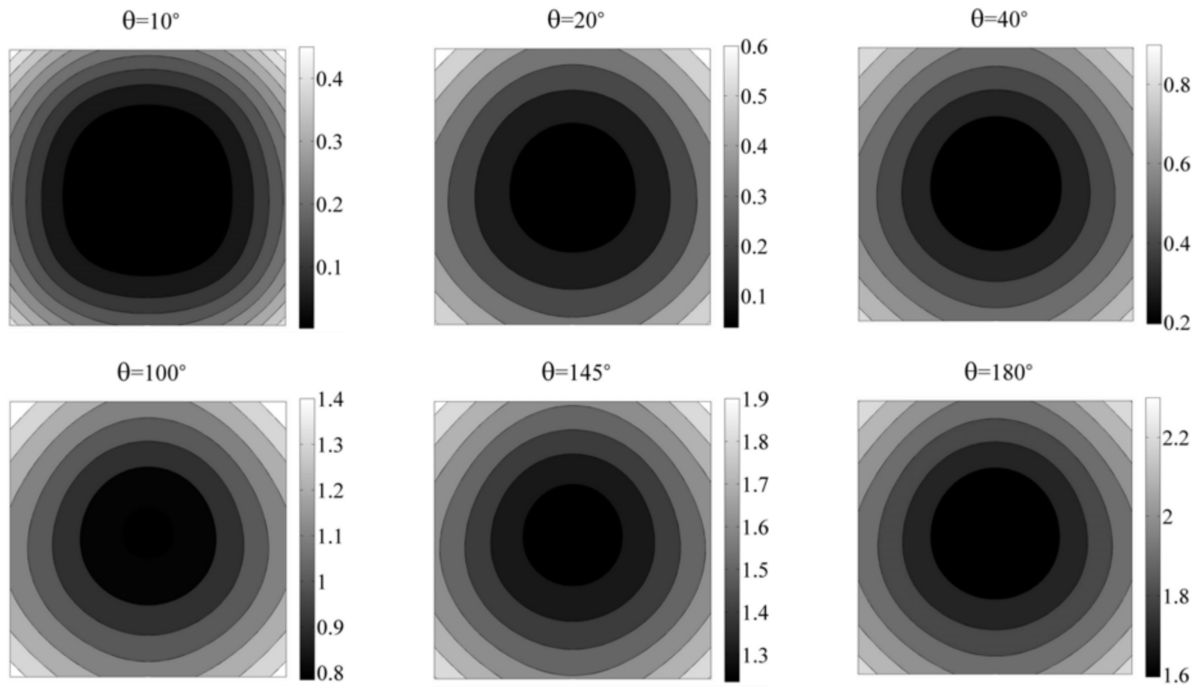
در ادامه مروری اجمالی بر انتقال حرارت جریان اینرسی در کانال خمیده صورت می گیرد. در شکل های (۵-۱۹) و (۵-۲۰) توزیع دمای بی بعد جریان سیال نیوتنی در مقاطع مختلف تحت شرایط مرزی شار ثابت و دما ثابت نشان داده شده است. در اینجا $\mathrm{Re}=50$، $Br=0$، $\kappa=1$ و $\delta=0.15$ فرض شده و شبیه سازی جریان در یک کانال خمیده ۱۸۰ درجه انجام شده است. مطابق شکل (۵-۱۹) با پیشروی جریان در طول کانال خمیده در حالت شار ثابت، دمای سیال به طور مکرر افزایش می یابد اما در حالت دما ثابت (شکل (۵-۲۰))، دمای سیال با پیشروی جریان به سمت دمای جداره ها میل می کند.

در شکل (۵-۲۱) تغییرات دمای متوسط بی بعد جریان برای حالات شار ثابت و دما ثابت در جهت پیشروی جریان اصلی نشان داده شده است. مطابق شکل، با پیشروی جریان، مقدار دمای متوسط مربوط به حالت دما ثابت به سمت صفر (دمای بی بعد دیواره ها) میل می کند. همچنین در حالت شار ثابت، تغییرات دمای متوسط جریان بصورت خطی است که چنین حالتی مشابه تغییرات دمای متوسط در کانال های مستقیم تحت شار حرارتی ثابت است. به سادگی می توان نشان داد که عدد ناسلت متوسط در هر مقطع از کانال (محیطی) برای شرایط مرزی شار ثابت و دما ثابت به شکل زیر است:

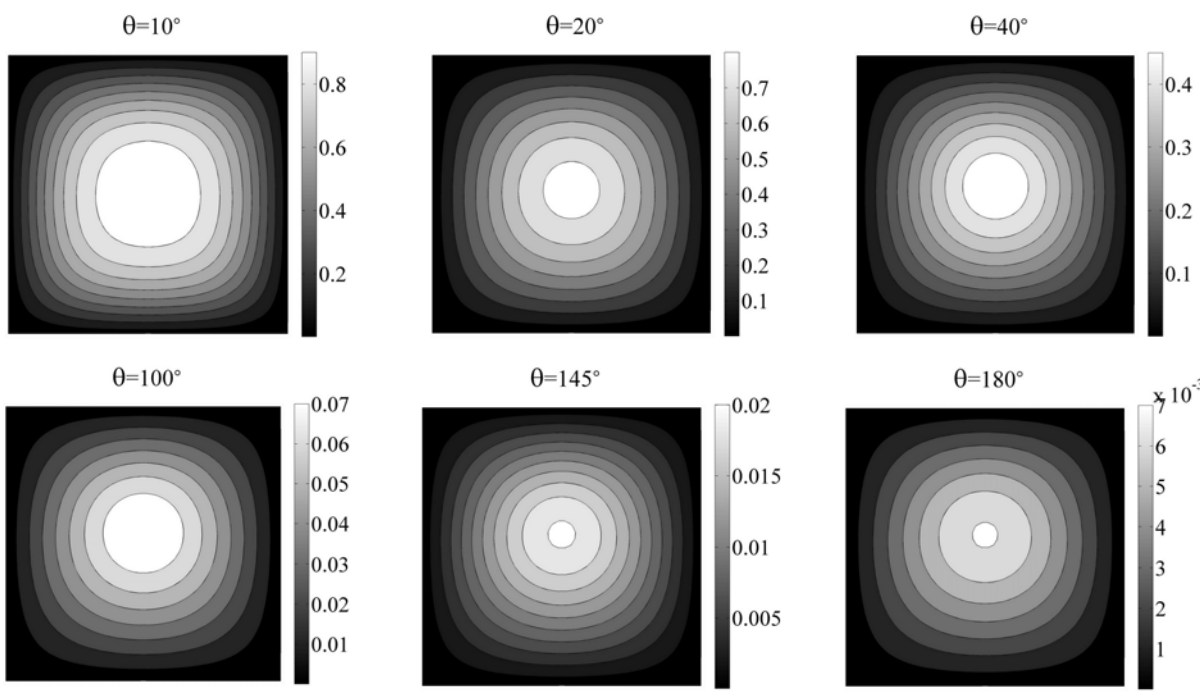
$$Nu_{H,m}=\frac{1}{p}\int_{p}\frac{1}{T_{H,w}-T_{H,m}}dp \tag{۵-۶-۱}$$

$$Nu_{T,m}=\frac{1}{pT_{T,m}}\int_{p}\left.\frac{\partial T_T}{\partial n}\right|_{at\ walls}dp \tag{۵-۶-۲}$$

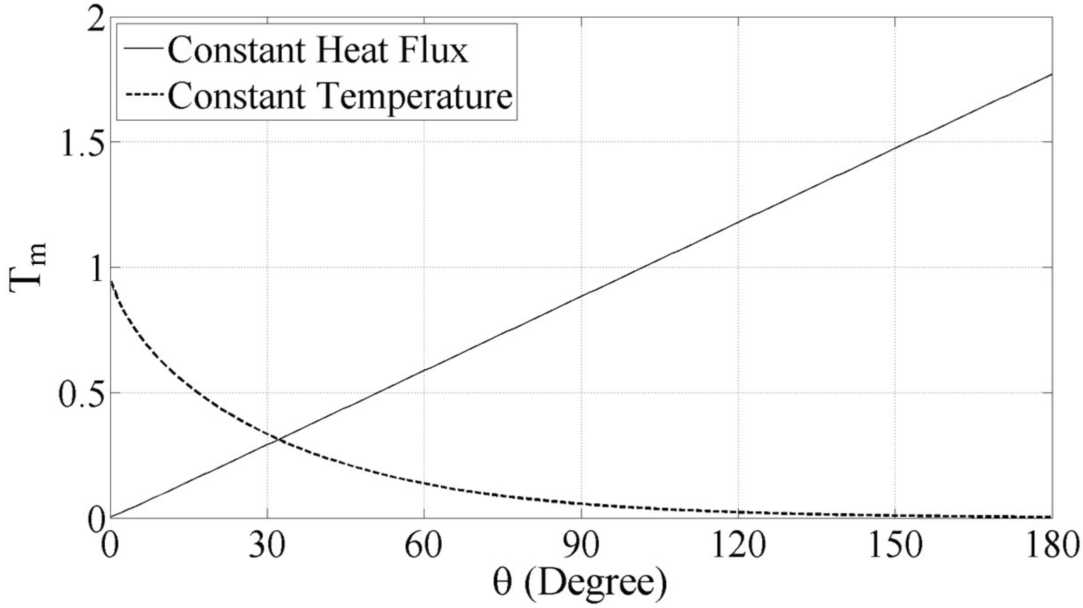
در رابطه فوق، $Nu_{H,m}$، $Nu_{T,m}$ عدد ناسلت متوسط در هر مقطع کانال برای حالات شار ثابت و دما ثابت و p محیط مقطع کانال ($2(a+b)$) است. در شکل (۵-۲۲)، عدد ناسلت محیطی در حالات شار ثابت و دما ثابت در مقاطع مختلف نشان داده شده است. مطابق شکل، عدد ناسلت در هر دو حالت شار ثابت و دما ثابت در شرایط $\theta>90^{\circ}$، به ترتیب به سمت مقادیر ۳/۴۳۹ و ۳/۰۳۵ میل می کند و در این شرایط می توان ادعا نمود که انتقال حرارت جریان توسعه یافته شده است.



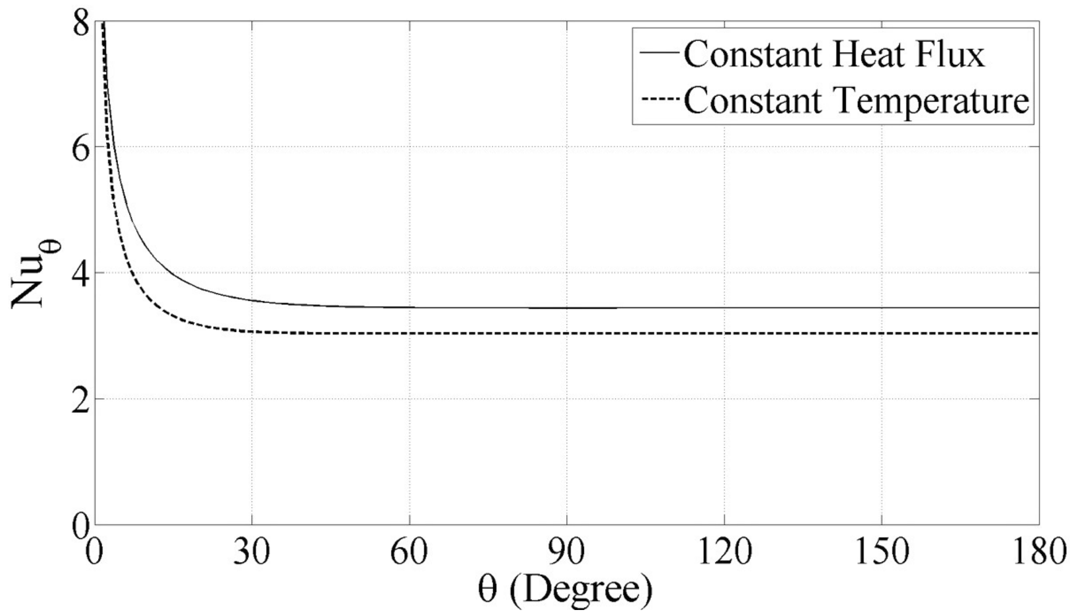
شکل (۵-۱۹): توزیع دمای جریان نیوتنی در مقاطع مختلف برای حالت شار ثابت و در شرایط $\mathrm{Re}=50$، $\kappa=1$ و $\delta=0.15$



شکل (۵-۲۰): توزیع دمای جریان نیوتنی در مقاطع مختلف برای حالت دما ثابت و در شرایط $\mathrm{Re}=50$، $\kappa=1$ و $\delta=0.15$



شکل (۵-۲۱): توزیع دمای متوسط بی بعد برای حالات شار ثابت و دما ثابت در شرایط $Re = 50$، $\kappa = 1$ و $\delta = 0.15$



شکل (۵-۲۲): توزیع عدد ناسلت متوسط برای حالات شار ثابت و دما ثابت در شرایط $Re = 50$، $\kappa = 1$ و $\delta = 0.15$

۵-۶-۲- اثر اختلاف تنش های نرمال در کانال ایستا

همانگونه که پیشتر گفته شد تاکنون مطالعات اندکی بر روی اثر اختلاف تنش نرمال دوم در جریان در کانالهای خمیده صورت گرفته است. از جمله تحقیقاتی که در آنها به این پارامتر توجه شده می توان به پژوهش های رابرتسون و مولر [۴۶] و فان و همکاران [۵۰] در مورد جریان سیال ویسکوالاستیک در لوله های خمیده دارای مقطع مدور اشاره نمود. اما تاکنون در مورد مطالعه این اثر در کانال های خمیده دارای مقطع غیر مدور تحقیقی صورت نگرفته است. در این بخش اثر اختلاف تنش های نرمال بر جریان سیالات مرتبه دو و CEF مورد بررسی قرار می گیرد. پیش از بررسی اثر اختلاف تنش های نرمال لازم است که عدد وایزنبرگ و الاستیک سیال مرتبه دو و سیال CEF را تعریف نمود.

استفاده از حاصل ضرب ثابت زمانی سیال در نرخ برش به عنوان عدد وایزنبرگ بسیار متداول است:

$$We = \lambda_1 \dot{\gamma} \qquad (۵-۷)$$

بر اساس روابط (۵-۷)، (۲-۵۶) و (۲-۶۴-۲)، عدد وایزنبرگ جریان سیال CEF در تحقیق حاضر به شکل زیر تعریف شده است:

$$We = \frac{\lambda_1 W_0}{2D_h} \qquad (۵-۸)$$

از آنجا که λ_1، ثابت زمانی تابع ویسکومتریک اختلاف تنش نرمال اول ماده است لذا در اینجا مقدار عدد وایزنبرگ معرف اثر کلی این تابع ویسکومتریک است. ثابت زمانی تاخیر سیال مرتبه دو بر حسب ثابت اختلاف تنش نرمال اول و ویسکوزیته به شکل زیر قابل بیان است:

$$\lambda_1 = \frac{\tilde{\Psi}_1}{2\tilde{\eta}} \qquad (۵-۹)$$

با توجه به روابط (۲-۱) و (۵-۸)، عدد وایزنبرگ سیال مرتبه دو به شکل زیر تعریف می شود:

$$We = \frac{\Psi_1}{2} \qquad (۵-۱۰)$$

استفاده از عدد الاستیک برای مطالعه اثرات الاستیک بر جریان اینرسی سیالات ویسکوالاستیک متداول است (مرجع [۵۰] را ببینید). این عدد بصورت نسبت عدد وایزنبرگ به عدد رینولدز تعریف می شود:

$$En = \frac{We}{\mathrm{Re}} \qquad (۱۱-۵)$$

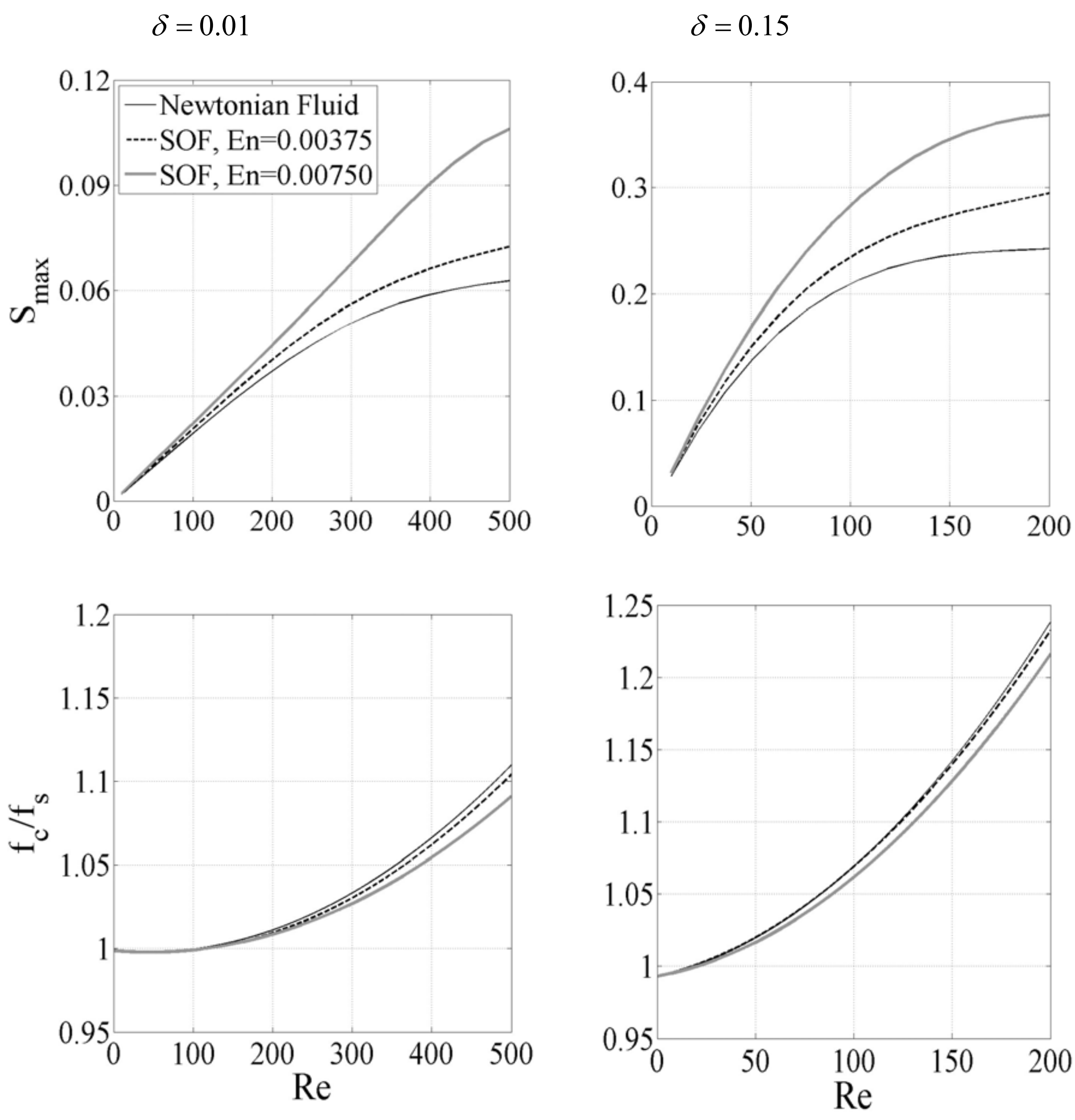
با توجه به رابطه (۵-۸)، (۵-۱۰)، عدد الاستیک برای سیالات CEF و مرتبه دو به شکل زیر خواهد بود:

$$En\big|_{CEF} = \frac{\lambda_1 \eta_0}{2\rho {D_h}^2} \qquad (۱-۱۲-۵)$$

$$En\big|_{SOF} = \frac{\tilde{\Psi}_1}{2\rho {D_h}^2} \qquad (۲-۱۲-۵)$$

عدد الاستیک بصورت نسبت اثرات الاستیک بر اینرسی تعریف می شود و مطابق رابطه (۵-۱۲)، برای یک هندسه مشخص تنها تابعی از خواص سیال است. در شکل (۵-۲۳) مقدار $S_{\max}$ و f_c / f_s جریان سیال مرتبه دو بر حسب عدد رینولدز و مقادیر مختلف عدد الاستیک نشان داده شده است. یادآور می شود که $S_{\max}$ معرف نسبت ماکزیمم سرعت جریانهای ثانویه به متوسط سرعت جریان اصلی و f_c / f_s معرف نسبت مقاومت جریان در کانال خمیده به مقاومت جریان سیال نیوتنی در کانال مستقیم است. در اینجا دیاگرامهای $S_{\max}$ در دو نسبت انحنای ۰/۰۱ و ۰/۱۵ و در $\Psi_2 = 0$ بدست آمده اند. مطابق شکل با افزایش عدد رینولدز شدت جریانهای ثانویه افزایش می یابد. این وضعیت در کلیه اعداد الاستیک و نسبت های انحنا حاکم بوده و ناشی از تقویت نیروهای گریز از مرکز با افزایش عدد رینولدز است. البته ازدیاد شدت جریانهای ثانویه در نسبت های انحنای بزرگ (انحناهای تند) شدیدتر بوده، بطوریکه برای جریان سیال نیوتنی ($En = 0.0$) در $Re = 200$، سرعت ماکزیمم جریانهای ثانویه به ۲۴/۳٪ سرعت متوسط جریان اصلی می رسد. مطابق شکل، ازدیاد عدد الاستیک (افزایش اختلاف تنش نرمال اول) نیز به افزایش شدت جریانهای ثانویه منجر می شود. البته وابستگی شدت جریانهای ثانویه به عدد الاستیک در اعداد رینولدز بزرگ بسیار بیشتر است که این پدیده عمدتاً ناشی از وابستگی مرتبه دوم نیروهای الاستیک

ناشی از اختلاف تنش نرمال اول به نرخ برش است. مطـابق شـکل در حالـت $En = 0.015$ و $Re = 200$، ماکزیمم سرعت جریانهای ثانویه حدود ۳۷/۱٪ متوسط سرعت جریان اصلی بوده که حدود ۱۳٪ بیـشتر از حالت مربوط به سیال نیوتنی ($En = 0.0$) است.



شکل (۵-۲۳): اثر ثابت اختلاف تنش نرمال اول بر ماکزیمم سرعت جریانهای ثانویه و نسبت مقاومت کانال خمیده

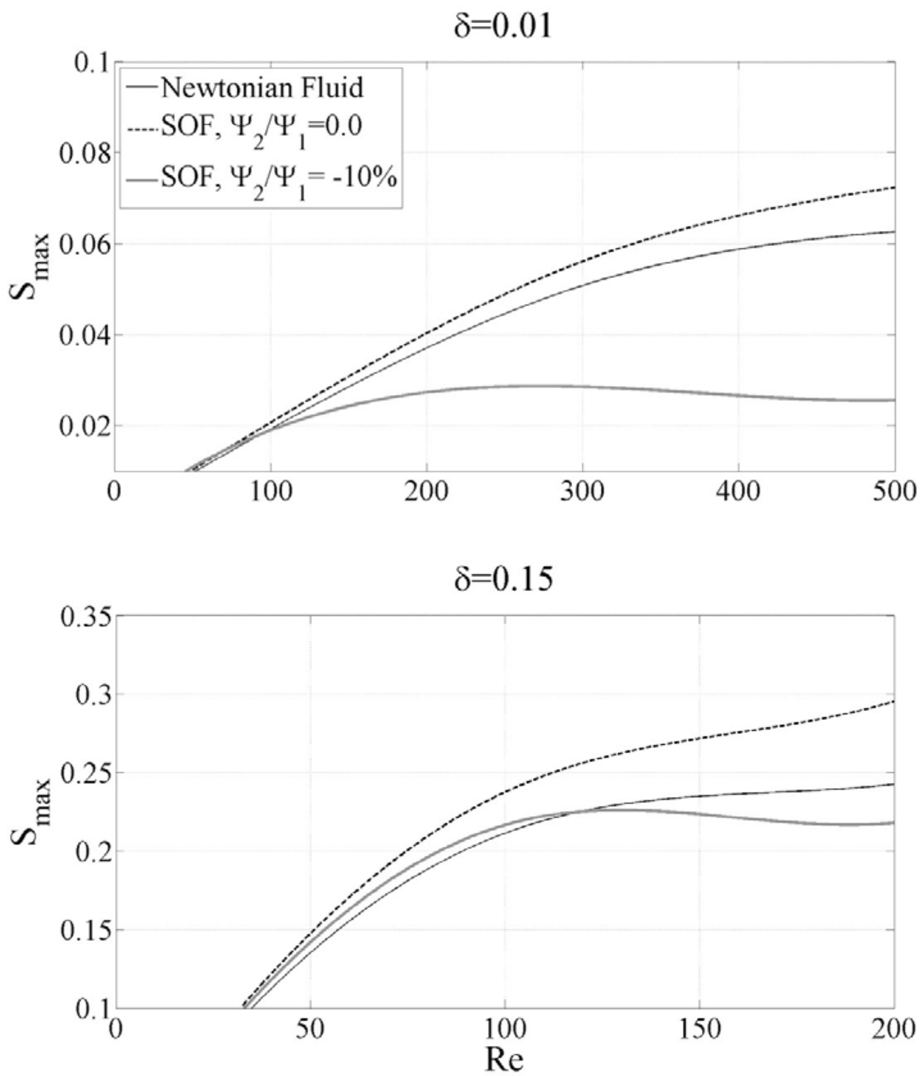
مطابق شکل (۵-۲۳)، ازدیاد عدد الاستیک سیال مرتبه دو (افزایش ثابت زمانی تاخیر سیال) منجر به کاهش مقاومت مجرای خمیده دارای مقطع مربعی در برابر جریان (افزایش دبی) می شود. در فصل پنجم، چنین اثری برای جریان سیال مرتبه دو در لوله خمیده دارای مقطع مدور به طور تحلیلی به اثبات رسید و نشان داده شد که این اثر عمدتاً تحت ناشی از بروز تغییرات عمده در مولفه تنش $\tau_{\varphi s}$ است.

به طور کلی وجود اختلاف تنش نرمال دوم در میدان جریـان در کانالهـای خمیـده و مـستقیم دارای تاثیر قابل توجهی است. در شکل (۵-۲۴) مقدار نسبت ماکزیمم سرعت جریان های ثانویه بر حـسب عـدد رینولدز برای سیال نیوتنی و سیال مرتبـه دو نـشان داده شـده اسـت. در اینجـا دیاگرامهـای $S_{\max}$ در دو نسبت انحنای ۰/۰۱ و ۰/۱۵ بدست آمده و برای سیال مرتبه دو مقدار عـدد الاسـتیک برابـر ۰/۰۰۳۷۵ در نظر گرفته شده است. مطابق شکل، در هر دو نسبت انحنا شدت جریان ثانویه برای حالـت $\Psi_2/\Psi_1 = 0.0$ از سیال نیوتنی بیشتر است. این موضوع ناشی از اثر اختلاف تنش نرمال اول بر افـزایش شـدت جریانهـای ثانویه است. مطابق شکل ایجاد اختلاف تنش نرمال دوم به کاهش شدت جریانهای ثانویه در هر دو نـسبت انحنا منجر می شود. همچنین در نسبت انحنای ۰/۰۱ و اعداد رینولدز بیشتر از ۹۰ و نیز در نسبت انحنای ۰/۱۵ و اعداد رینولدز بزرگتر از ۱۲۰، شدت جریانهای ثانویه حتی از سیال نیوتنی نیز کمتر است. اثر قابل توجه اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر کاهش شدت جریانهای ثانویه پدیده جالبی است که در مـشاهدات آزمایشگاهی نیز به اثبات رسیده است.

در ادامه مکانیزم اثر اختلاف تنش های نرمال بر جریان سیال مرتبه دو مورد بررسی قرار می گیرد. در شکل (۵-۲۵)، توزیع سرعت محوری، فشار، تنش نرمـال محـوری و پـارامتر Γ (رابطـه (۵-۲) را ببینیـد) مورد بررسی قرار می گیرد. مطابق شکل در ناحیه هسته جریان سیال نیوتنی، گرادیـان فـشار شـعاعی بـا نیروی گریز از مرکز بالانس شده و میزان تنش نرمال محـوری و نیـز انـدازه پـارامتر Γ در سـمت دیـواره خارجی کانال اندک است. در حالت $\Psi_1 = 0.75$ و $\Psi_2/\Psi_1 = 0.0$ در غیاب اختلاف تنش نرمـال دوم، اثـر

اختلاف تنش نرمال اول منجر به ایجاد تنش نرمال محوری بزرگ در سـمت دیـواره خـارجی کانـال شـده است. مطابق رابطه (۳-۱۱)، گرادیان فشار شعاعی در این حالت ($\Psi_1 > 0, \Psi_2 = 0$) با برآیند اثرات نیروی گریز از مرکز و تنش نرمال محوری بالانس شده است:

$$\mathrm{Re}\frac{v_\theta^{\,2}}{r} \approx \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \tag{۱۳-۵}$$



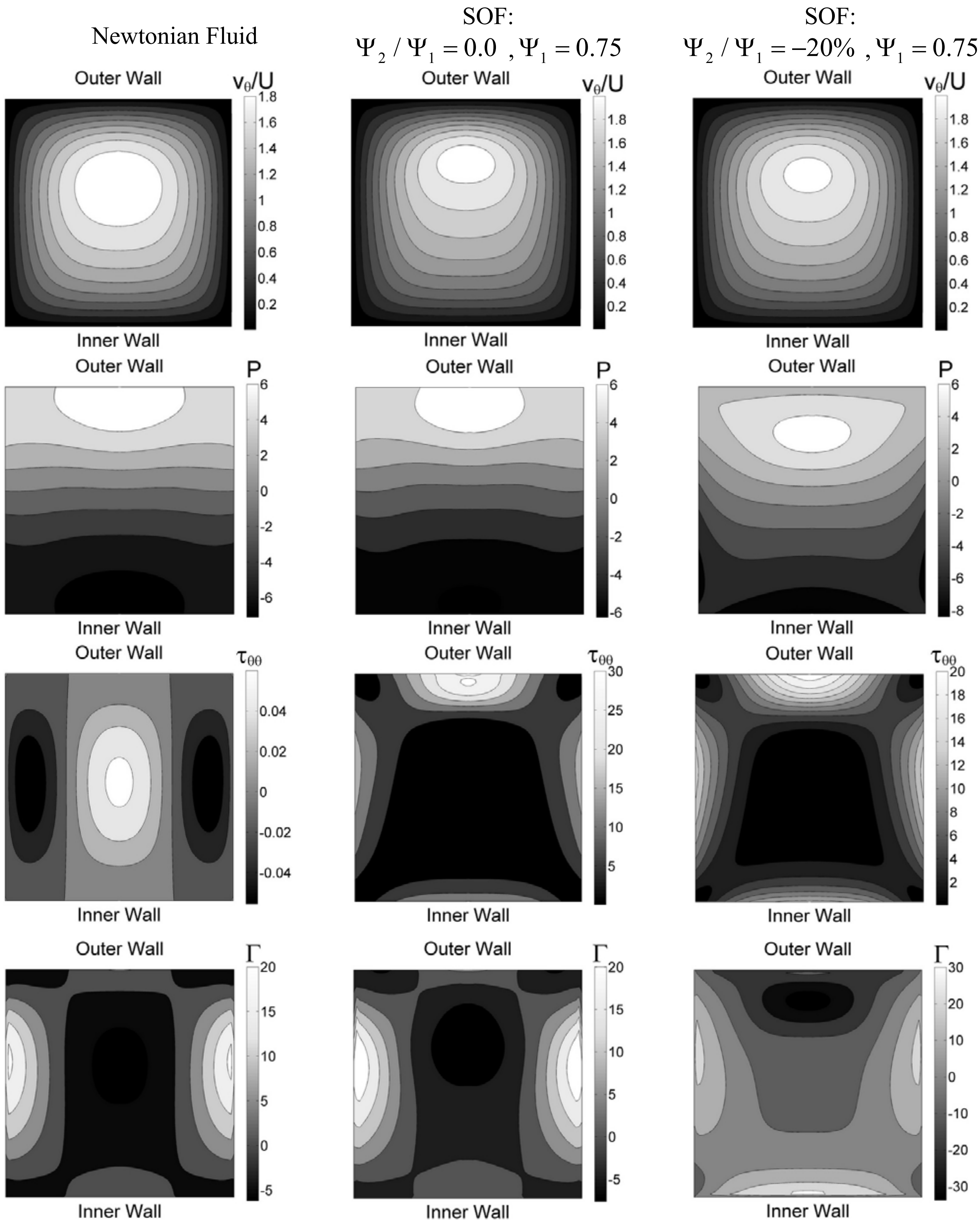
شکل (۵-۲۴): اثر ثابت اختلاف تنش نرمال دوم بر ماکزیمم سرعت جریانهای ثانویه

به دلیل کوچک بودن سرعت محوری و نیز نیروی گریز از مرکز در نزدیکی دیواره خارجی، تعادل ارائه شده در رابطه (۵-۱۳)، به هم خورده و برای حفظ تعادل با مقادیر بزرگ تنش نرمال محوری، مکانیزم مومنتوم وارد عمل شده و شدت جریانهای ثانویه افزایش می یابد

همچنین در اینجا ایجاد اختلاف تنش نرمال اول سبب تمایل موقعیت ماکزیمم سرعت محوری به سمت دیواره خارجی شده است. مطابق شکل، در این حالت توزیع پارامتر Γ تفاوت چندانی با حالت مربوط به سیال نیوتنی ندارد. با توجه به روابط (۳-۳-۱) و (۳-۳-۳) مولفه های تنش τ_{rr} و τ_{rz} در ناحیه هسته جریان عمدتاً تابعی از اثر اختلاف تنش نرمال دوم هستند و لذا ایجاد اختلاف تنش نرمال اول تاثیری بر این مولفه های تنش و نیز پارامتر Γ ندارد. مطابق شکل، در حالت $\Psi_1 = 0.75$ و $\Psi_2 / \Psi_1 = -20\%$، ایجاد اختلاف تنش نرمال دوم سبب دور شدن موقعیت ماکزیمم سرعت محوری از دیواره خارجی شده است. به طور کلی اثر اختلاف تنش نرمال دوم بر گرادیان فشار شعاعی جریان موثر است. مطابق رابطه (۳-۹)، بالانس نیروها در ناحیه هسته جریان سیال مرتبه دو بصورت زیر است:

$$\mathrm{Re}\frac{v_\theta^{\,2}}{r} \approx \frac{\partial p}{\partial r} + \Psi_1 f_1(v_\theta) + \Psi_2 f_2(v_\theta) \qquad (۱۴\text{-}۵)$$

بر اساس رابطه فوق، در ناحیه هسته جریان سیال مرتبه دو، گرادیان فشار شعاعی با نیروی گریز از مرکز و اثرات اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بالانس می شود. مطابق شکل (۵-۲۵)، در اینجا اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی سبب کاهش تنش نرمال محوری در نزدیکی دیواره خارجی و نیز ایجاد تغییرات عمده در پارامتر Γ شده است که این امر با توجه به روابط (۳-۳) نیز کاملاً قابل توجیه است. در اینجا بر خلاف دو حالت دیگر، قدر مطلق Γ در نزدیکی دیواره های داخلی و خارجی مقداری بزرگ است که بر روی گرادیان فشار شعاعی تاثیر می گذارد. در اینجا کاهش مقدار تنش نرمال محوری و نیز ایجاد تغییرات عمده در پارامتر Γ منجر به کاهش فشار در نزدیکی دیواره خارجی و نیز کاهش شدت جریانهای ثانویه شده است.



شکل (۵-۲۵): توزیع سرعت محوری، فشار، تنش نرمال محوری و پارامتر Γ در $\mathrm{Re} = 50$، $\kappa = 1$ و $\delta = 0.15$ [۱۲۵]

در ادامه اثر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر جریان اینرسی سیال CEF بررسی شده است. در اینجا خواص سیال CEF مطابق خواص مرجع معرفی شده در جدول (۵-۵) در نظر گرفته شده است. در جداول (۵-۶) و (۵-۷) مقادیر $S_{\max}$ و f_c/f_s در اعداد رینولدز و الاستیک مختلف ارائه شده است. شایان ذکر است که مقادیر $S_{\max}$ و f_c/f_s در روابط (۳-۲۶) و (۳-۳۲) معرفی شده اند. همچنین در اینجا $\delta = 0.15$، $\kappa = 1$ و $\chi = 0$ فرض شده است. ستون اول هر دو جدول مربوط به سیال تعمیم یافته نیوتنی (GNF) است که در آن مقادیر En و χ همواره برابر صفر است. جریان سیال تعمیم یافته نیوتنی در اعداد رینولدز بزرگتر از ۲۹ در شرایط ناپایدار قرار می گیرد. مطابق داده های جدول (۵-۶)، ازدیاد مقدار عدد رینولدز به افزایش سرعت جریانهای ثانویه منجر می شود و افت موجود در اعداد رینولدز بزرگ (مانند حالت $\mathrm{Re} = 30$ و $En = 0.0$) مربوط به بروز ناپایداری در جریان (تغییر فرم گردابه ها از یک جفت گردابه به دو جفت گردابه) است. مطابق داده های جدول (۵-۶)، ازدیاد عدد الاستیک سبب افزایش شدت جریانهای ثانویه و بروز ناپایداری در اعداد رینولدز کوچکتر می شود. سلول های خالی جدول مربوط به شرایطی است که در آنها جریان کاملاً ناپایدار شده و حل عددی قادر به همگرایی نمی باشد.

مطابق داده های جدول (۵-۷)، در هر عدد الاستیک با افزایش عدد رینولدز، مقدار f_c/f_s کاهش می یابد. علت این موضوع مربوط به رفتار ویسکومتریک باریک شونده برش سیال تحت بررسی است. در این تحقیق سرعت مرجع از رابطه (۲-۵) و بر حسب ویسکوزیته در نرخ برش صفر تعریف شده است حال آنکه با ازدیاد عدد رینولدز، مقدار ویسکوزیته دائماً کاهش می یابد. بطور کلی عدد رینولدز به دو شکل متضاد بر میزان f_c/f_s تاثیر می گذارد. ازدیاد عدد رینولدز، از یک سو سبب افزایش شدت جریانهای ثانویه می شود که این عامل مسبب کاهش دبی نسبت به دبی جریان در کانال مستقیم است، حال آنکه ازدیاد عدد رینولدز با کاهش ویسکوزیته نیز همراه است که این امر افزایش دبی را در پی دارد. در اینجا برآیند این دو عامل سبب کاهش میزان f_c/f_s شده است، البته این روند در اعداد رینولدز بزرگ کند

شده و پس از بروز ناپایداری در جریان مقدار f_c/f_s رو به افزایش می گذارد. مطابق داده های جدول (۵-۷)، در اعداد رینولدز کوچکتر از ۵، ازدیاد عدد الاستیک جریان سبب کاهش مقدار f_c/f_s می شود، حال آنکه این اثر در اعداد رینولدز بزرگتر از ۵ بر عکس است. در اعداد رینولدز کوچکتر از ۵، به دلیل کوچک بودن مقدار نرخ برش، مقدار ویسکوزیته بسیار نزدیک η_0 است. در این شرایط، ویسکوزیته تغییر چندانی نسبت به عدد الاستیک پیدا نمی کند و در اینجا به مانند جریان سیال مرتبه دو، ازدیاد عدد الاستیک سبب افزایش اثر اختلاف تنش نرمال اول شده که این امر کاهش f_c/f_s را در پی دارد. در اعداد رینولدز بزرگتر از ۵، اثرات غیرخطی حاکم بر توابع ویسکومتریک منجر به کاهش مقدار نسبت مقاومت شده است.

جدول (۵-۶): مقادیر $S_{\max}$ در اعداد رینولدز، الاستیک مختلف و در $\delta=0.15$، $\kappa=1$ و $\chi=0$

En=0.003	En=0.002	En=0.001	GNF	Re
0.00422684	0.00408818	0.00394952	0.00381086	1
0.06947589	0.06810002	0.06673237	0.06537237	5
0.19718037	0.19297158	0.18891651	0.18503188	10
0.25978191	0.25447041	0.24888204	0.24325272	15
0.27563370	0.27188575	0.26706312	0.26164396	20
-	0.23948309	0.26945135	0.26493584	25
-	-	0.24276086	0.26373386	28
-	-	0.24419782	0.24284880	30

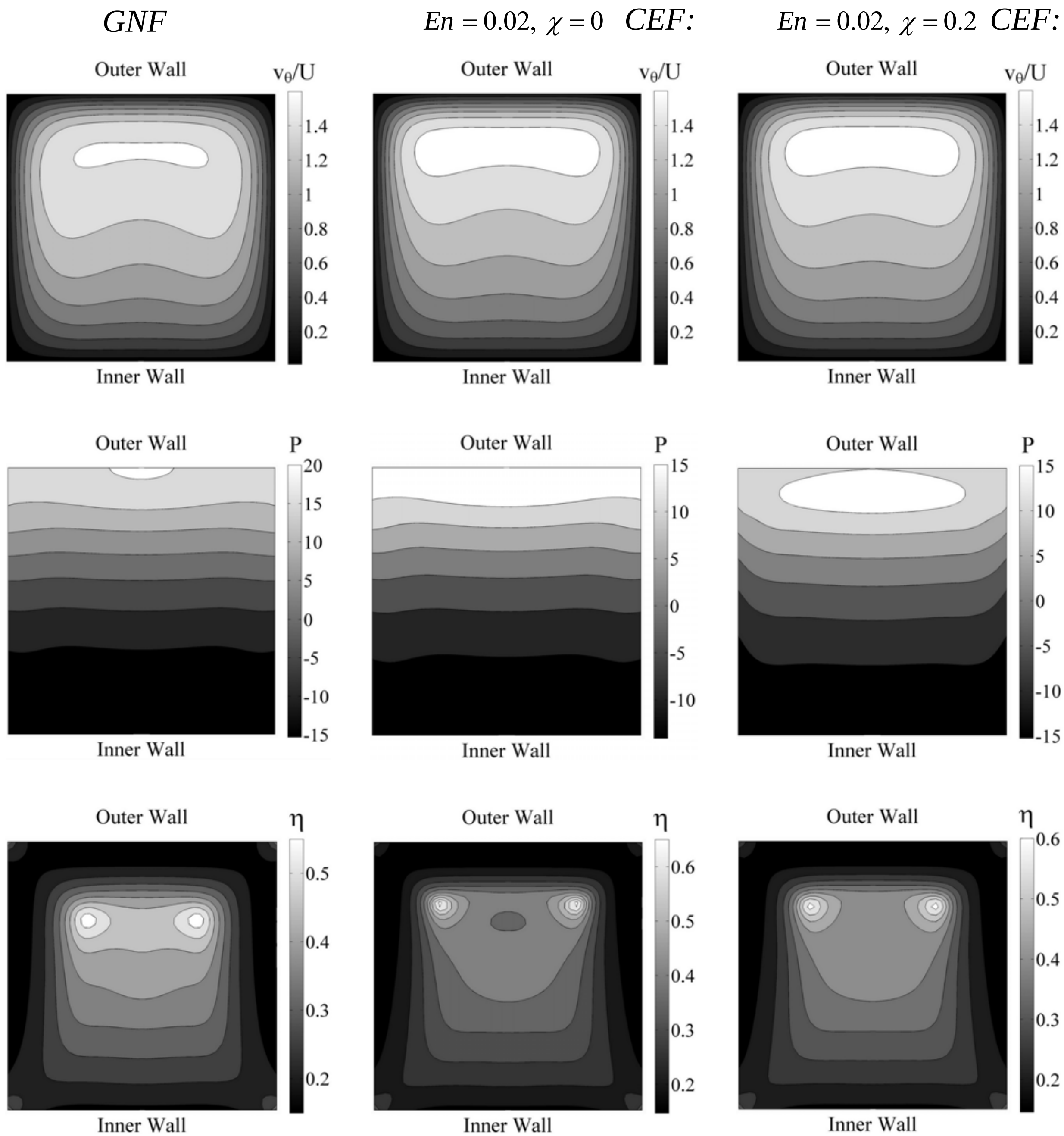
جدول (۵-۷): مقادیر f_c/f_s در اعداد رینولدز، الاستیک مختلف و در $\delta=0.15$، $\kappa=1$ و $\chi=0$

En=0.003	En=0.002	En=0.001	GNF	Re
0.79073121	0.79073203	0.79073275	0.79073337	1
0.37731804	0.37741770	0.37758373	0.37758373	5
0.29788771	0.29785898	0.29751948	0.29751948	10
0.28793205	0.28666240	0.28539295	0.28410667	15
0.28090858	0.28014235	0.27833592	0.27647469	20
-	0.28858399	0.27366361	0.27192246	25
-	-	0.28778829	0.27045941	28
-	-	0.28996185	0.28349149	30

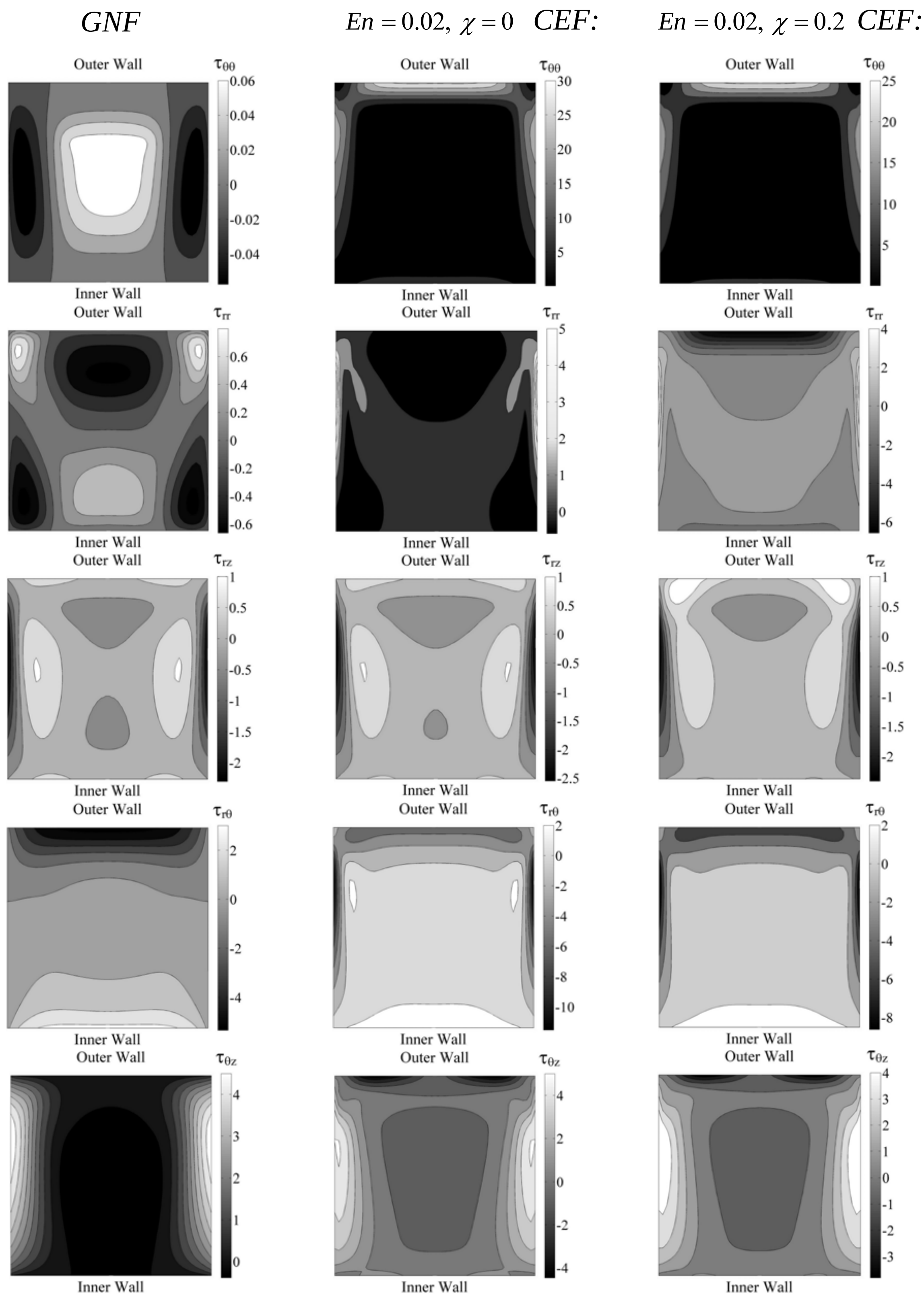
در جدول (۵-۸)، مقادیر f_c / f_s و $S_{\max}$ در اعداد رینولدز و ضرایب اختلاف تنش نرمال دوم مختلف و در $\delta = 0.15$، $\kappa = 1$ و $En = 0.002$ ارائه شده است. مطابق داده های این جدول، ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی سیال CEF به کاهش سرعت جریانهای ثانویه منجر می شود. همانگونه که پیشتر گفته شد، این جریان در عدد رینولدز ۲۵ ناپایدار است اما ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی سبب پایدار شدن این جریان می شود. به عبارت دیگر ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم سبب پایداری جریان شده است. همچنین افزایش مقدار اختلاف تنش نرمال دوم منفی سبب کاهش مقدار مقاومت انحنا در برابر جریان می شود. در شکل (۵-۲۶) توزیع سرعت محوری، فشار استاتیکی و ویسکوزیته و در شکل (۵-۲۷) کانتورهای مولفه های تنش جریان سیال CEF در مقادیر مختلف اختلاف تنش نرمال اول و دوم نشان داده شده است. مطابق شکل (۵-۲۷)، ایجاد اختلاف تنش نرمال اول منجر به ایجاد تنش نرمال محوری ($\tau_{\theta\theta}$) بسیار بزرگی در سمت انحنای خارجی می شود. به مانند جریان سیال مرتبه دو، در اینجا نیز وجود این تنش نرمال محوری سبب افزایش شدت جریانهای ثانویه در این ناحیه شده است (جهت کسب اطلاعات تکمیلی به توضیحات شکل (۵-۲۵) رجوع شود). همچنین در اینجا نیز ایجاد اختلاف تنش نرمال دوم سبب کاهش اختلاف تنش نرمال اول و تغییرات قابل توجه در توزیع مولفه تنش τ_{rr} می شود که این دو عامل در کاهش شدت جریان های ثانویه نقش دارند.

جدول (۵-۸): مقادیر f_c / f_s و $S_{\max}$ در اعداد رینولدز و ضرایب اختلاف تنش نرمال دوم مختلف و در $\delta = 0.15$، $\kappa = 1$ و $En = 0.002$

f_c / f_s			$S_{\max}$			*Re*
X=0.2	*X=0.1*	*X=0.0*	*X=0.2*	*X=0.1*	*X=0.0*	
0.79073262	0.79073233	0.79073203	0.00397632	0.00403225	0.00408818	1
0.37746280	0.37744079	0.37741770	0.06667261	0.06738050	0.06810002	5
0.29688388	0.29735586	0.29785898	0.18628365	0.18955841	0.19297158	10
0.28481258	0.28571603	0.28666240	0.24222361	0.24813064	0.25447041	15
0.27922416	0.27981657	0.28014235	0.26202749	0.26722356	0.27188575	20
0.27627274	0.27626174	0.28858399	0.26769995	0.27053932	0.23948309	25



شکل (۵-۲۶): توزیع سرعت محوری، فشار و ویسکوزیته در $\mathrm{Re} = 20$، $\kappa = 1$ و $\delta = 0.15$



شکل (۵-۲۷): کانتور های مولفه های تنش در $\mathrm{Re} = 20$، $\kappa = 1$ و $\delta = 0.15$

در جدول (۵-۹) مقادیر ناسلت متوسط در حالت انتقال حرارت توسعه یافته تحت شرایط مرزی شار ثابت و دما ثابت ارائه شده است. در اینجا مقادیر $\delta = 0.15$، $\kappa = 1$ و $Br = 0$ فرض شده است. مطابق داده های جدول (۵-۹)، با ازدیاد عدد رینولدز از مقدار یک، عدد ناسلت در ابتدا دچار اندکی کاهش شده و سپس افزایش چشمگیری پیدا می کند (بخصوص در حالت شار ثابت). همچنین ازدیاد عدد الاستیک (اختلاف تنش نرمال اول) به افزایش و ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی به کاهش انتقال حرارت جریان منجر می شود.

از آنجا که ازدیاد عدد الاستیک (اختلاف تنش نرمال اول) سبب افزایش شدت جریانهای ثانویه می شود در نتیجه ازدیاد این پارمتر با افزایش مقدار عدد ناسلت متوسط همراه است. همچنین با توجه به آنکه اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر شدت جریانهای ثانویه برعکس است (سبب کاهش سرعت گردابه های تیلور-گورتلر می شود)، لذا ازدیاد آن منجر به کاهش عدد ناسلت متوسط می گردد به نحوی که در حالت $En = 0.002,\ \chi = -0.2$، عدد ناسلت متوسط حتی از حالت مربوط به جریان سیال GNF (سیال توسعه یافته نیوتنی بدون داشتن اثر اختلاف تنش های نرمال) نیز کمتر است.

جدول (۵-۹): مقادیر Nu_H و Nu_T در اعداد رینولدز و ضرایب اختلاف تنش های نرمال اول و دوم مختلف در شرایط $\delta = 0.15$ و $\kappa = 1$

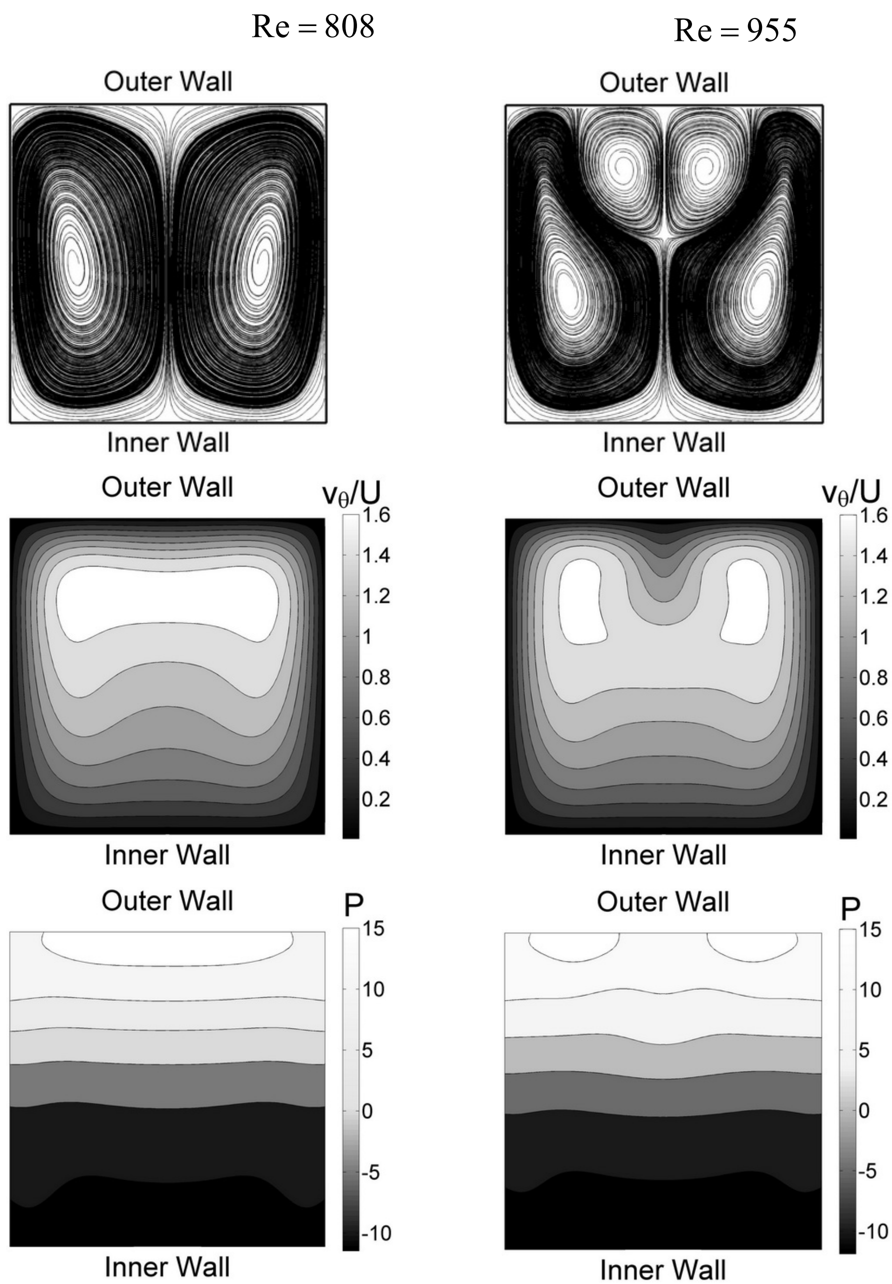
$En = 0.002,\ \chi = -0.2$		$En = 0.002,\ \chi = 0$		GNF		Re
Nu_T	Nu_H	Nu_T	Nu_H	Nu_T	Nu_H	
3.4250	3.8171	3.4250	3.8171	3.4250	3.8171	1
3.1839	3.7667	3.1840	3.7669	3.1839	3.7667	5
3.2948	3.8730	3.2950	3.8735	3.2948	3.8731	10
3.6066	4.0921	3.6071	4.1422	3.6067	4.1125	15
3.7883	4.3855	3.7902	4.5612	3.7892	4.4521	20
4.0621	4.7681	4.0733	4.9906	4.0689	4.8512	25

۵-۶-۳- ناپایداری در جریان اینرسی

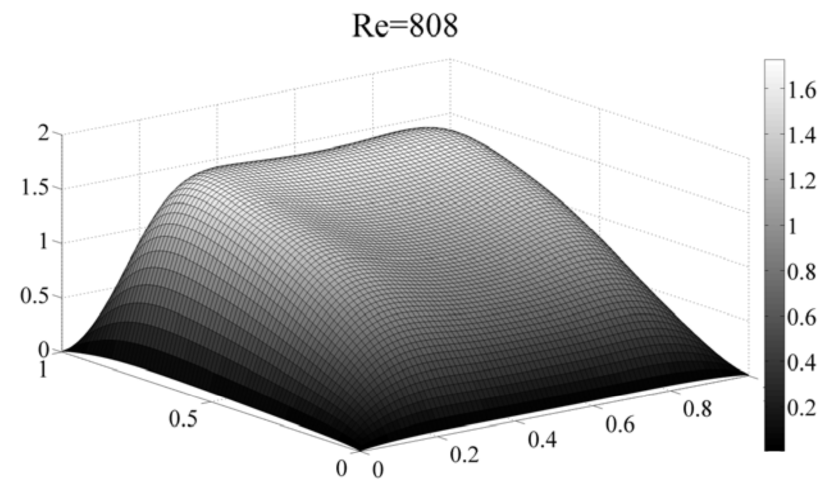
ناپایداری در جریان اینرسی سیال نیوتنی پدیده جالب توجهی است که تحقیقات متعددی در این خصوص انجام شده است. همانگونه که پیشتر گفته شد، اثر نیروی گریز از مرکز مسبب تشکیل جریانهای ثانویه در جریان اینرسی سیال نیوتنی در کانال های خمیده است. در ناحیه هسته جریان، گرادیان فشار شعاعی با نیروی گریز از مرکز ناشی از مولفه محوری سرعت بالانس می شود. در ناحیه نزدیک دیواره خارجی، مقدار سرعت محوری و در نتیجه نیروی گریز از مرکز به سمت صفر میل می کند حال آنکه اثر گرادیان فشار شعاعی در این ناحیه همچنان بالا است. لذا تعادل موجود در ناحیه هسته جریان دیگر در ناحیه نزدیک دیواره خارجی برقرار نبوده و جهت حفظ تعادل مکانیزم مومنتوم وارد عمل می شود و جریانهای ثانویه تشکیل می گردد. چنانچه عدد دین چندان بزرگ نباشد، این جریانهای ثانویه به شکل یک جفت جریان ثانویه دارای جهت گردش مخالف نسبت به یکدیگر بوجود می آیند. با افزایش عدد دین، سرعت محوری هر چه بیشتر به سمت جداره خارجی متمایل می شود و در این حالت اثرات ویسکوز دیگر قادر به حفظ گردابه ها به صورت یک جفت گردابه نبوده و لذا جریان ناپایدار می گردد. در این حالت گردابه های جدیدی بوجود می آیند که به گردابه های دین موسوم هستند.

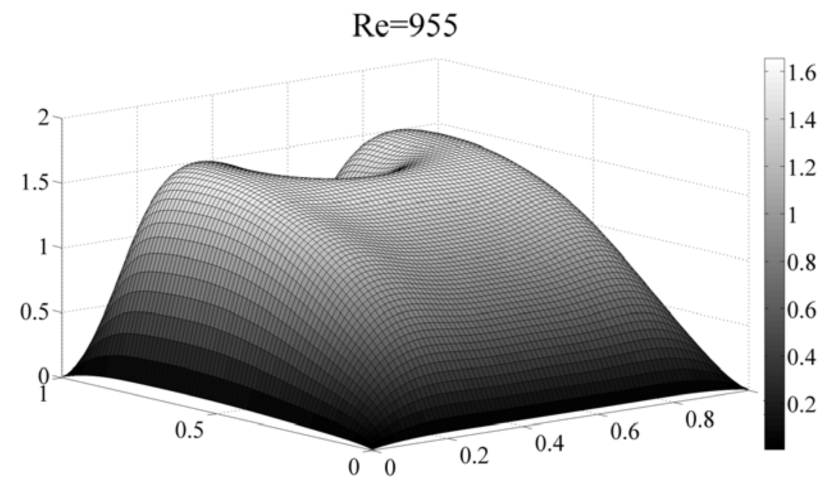
در شکل (۵-۲۸) جریانهای ثانویه سیال نیوتنی در کانال خمیده دارای مقطع مربعی نشان داده شده است. مطابق شکل، در اعداد رینولدز کوچکتر از ۸۰۸، جریانهای ثانویه بصورت یک جفت گردابه تیلور-گورتلر ظاهر می شوند. اما در اعداد رینولدز بزرگتر، جریان دچار ناپایداری شده و یک جفت جریان ثانویه پادگرد جدید موسوم به گردابه های دین در نزدیکی دیواره خارجی ایجاد شده است. همچنین بروز ناپایداری منجر به ایجاد تغییرات عمده در توزیع سرعت محوری و فشار استاتیکی جریان می شود. در شکل (۵-۲۹)، نمای سه بعدی توزیع سرعت محوری در این دو حالت نشان داده شده است. در اینجا بروز ناپایداری منجر به ایجاد دو موقعیت متقارن دارای سرعت بیشینه شده است. در این تحقیق، ناپایداری

دین در اعداد رینولدز بزرگتری نیز برای نسبت ابعادی ۱:۱ مورد تحقیق گرفته (تا عدد رینولدز ۲۰۰۰) و مشاهده گردید که در این حالات، فرم گردابه ها چندان دستخوش تغییر نمی شود و تنها شدت جریانهای ثانویه افزایش پیدا می کند.



شکل (۵-۲۸): خطوط جریانهای ثانویه، توزیع سرعت محوری و فشار جریان اینرسی نیوتنی در $\delta = 0.15$ [۱۲۵]

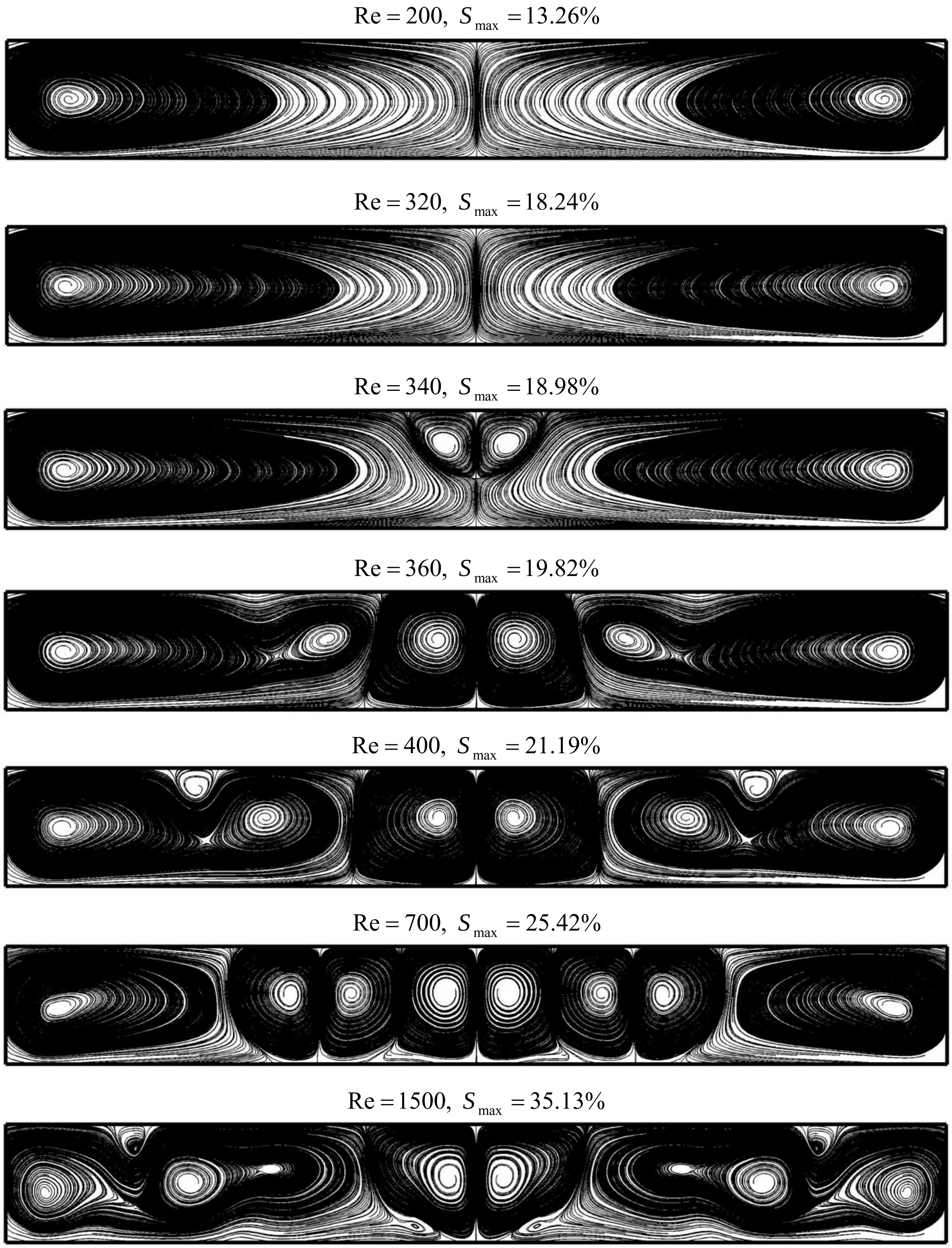




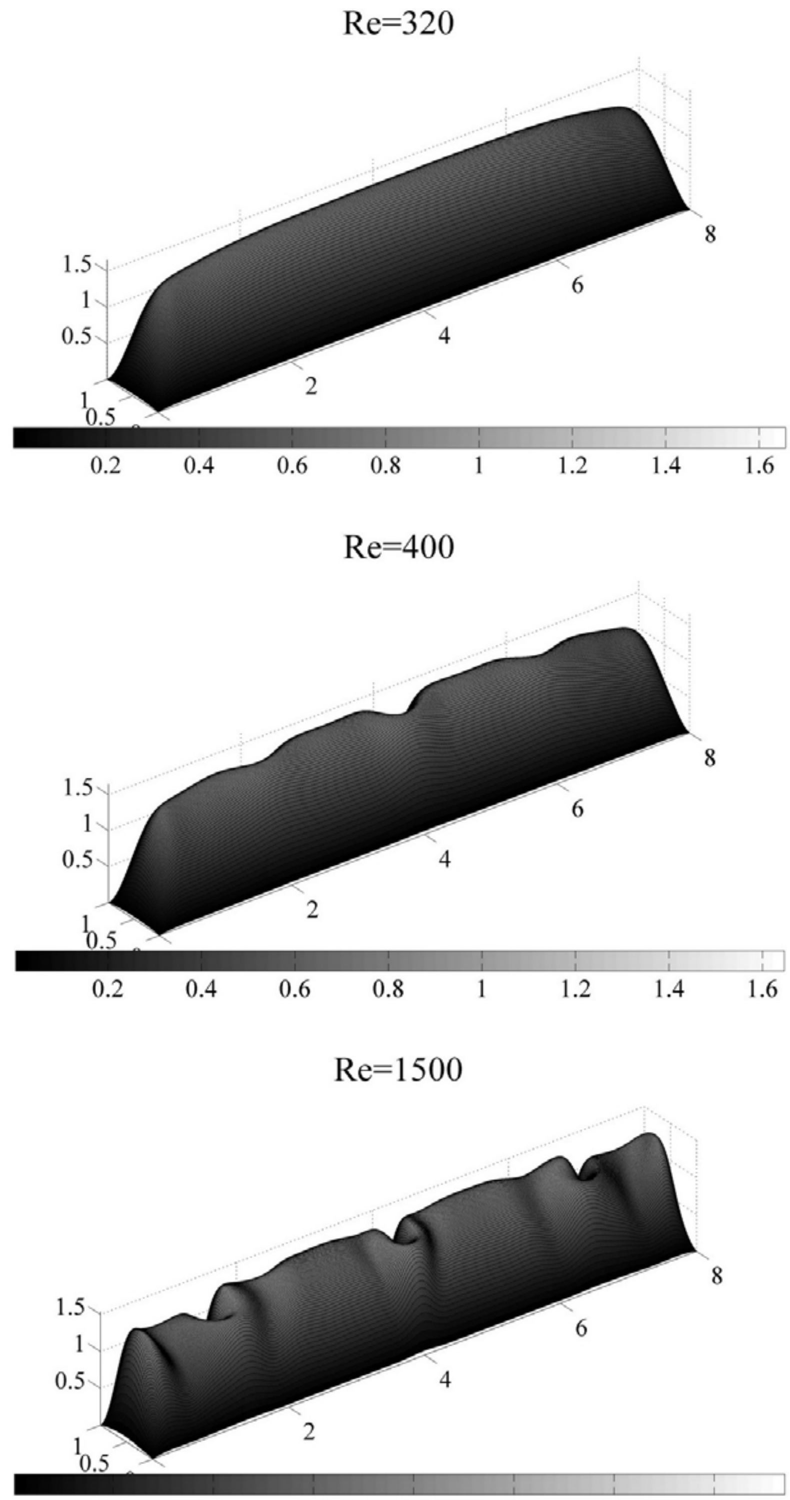
شکل (۵-۲۹): توزیع سرعت محوری سیال نیوتنی (v_θ / U) در اعداد رینولدز مختلف و در $\delta = 0.15$

شایان ذکر است که دو حالت نشان داده شده در شکل های (۵-۲۸) و (۵-۲۹) معادل اعداد دین بر مبنای سرعت متوسط ۱۲۵ و ۱۳۷ در تحقیق بارا [۷۸، ۷۹] هستند.

در شکل (۵-۳۰) خطوط جریانهای ثانویه و در شکل (۵-۳۱) توزیع سرعت محوری جریان سیال نیوتنی در اعداد رینولدز مختلف برای نسبت ابعادی ۱:۸ ($\kappa = 0.125$) نشان داده شده است. مطابق شکل، جریانهای ثانویه تا عدد رینولدز ۳۲۰ بصورت یک جفت گردابه ظاهر می شود اما با ازدیاد عدد رینولدز جریان ناپایدار شده و تعداد و فرم جریانهای ثانویه به شدت دستخوش تغییر می شود.



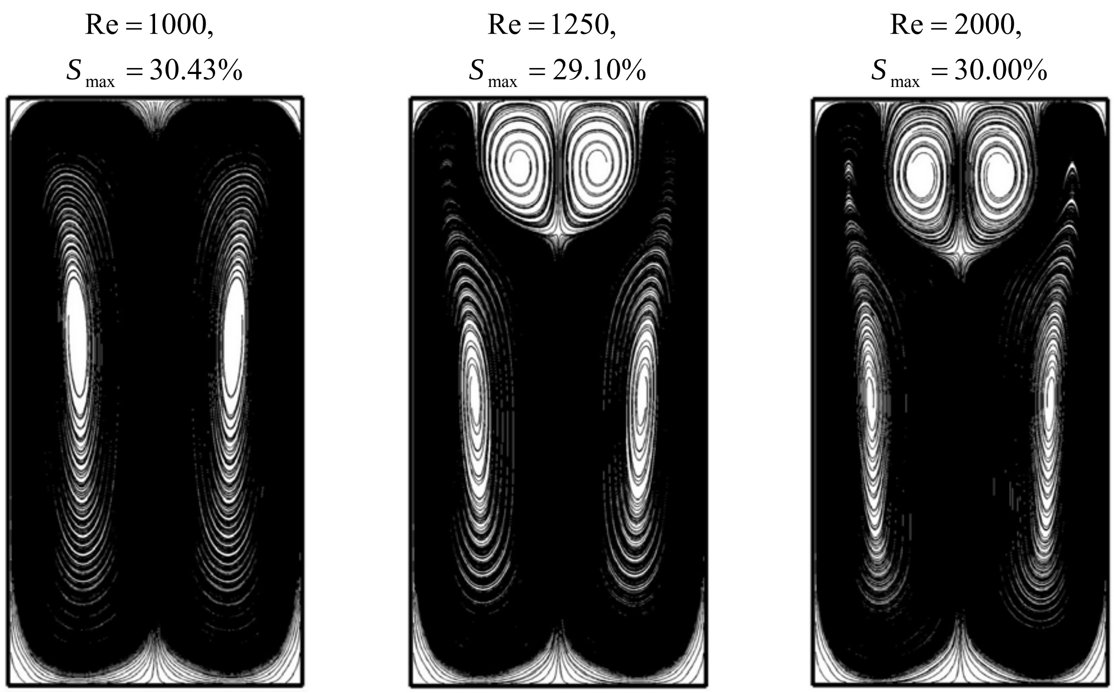
شکل (۵-۳۰): خطوط جریانهای ثانویه برای جریان اینرسی سیال نیوتنی در $\delta = 0.15$ و $\kappa = 0.125$



شکل (۵-۳۱): توزیع سرعت محوری (v_θ / U) برای جریان اینرسی سیال نیوتنی در $\delta = 0.15$ و $\kappa = 0.125$

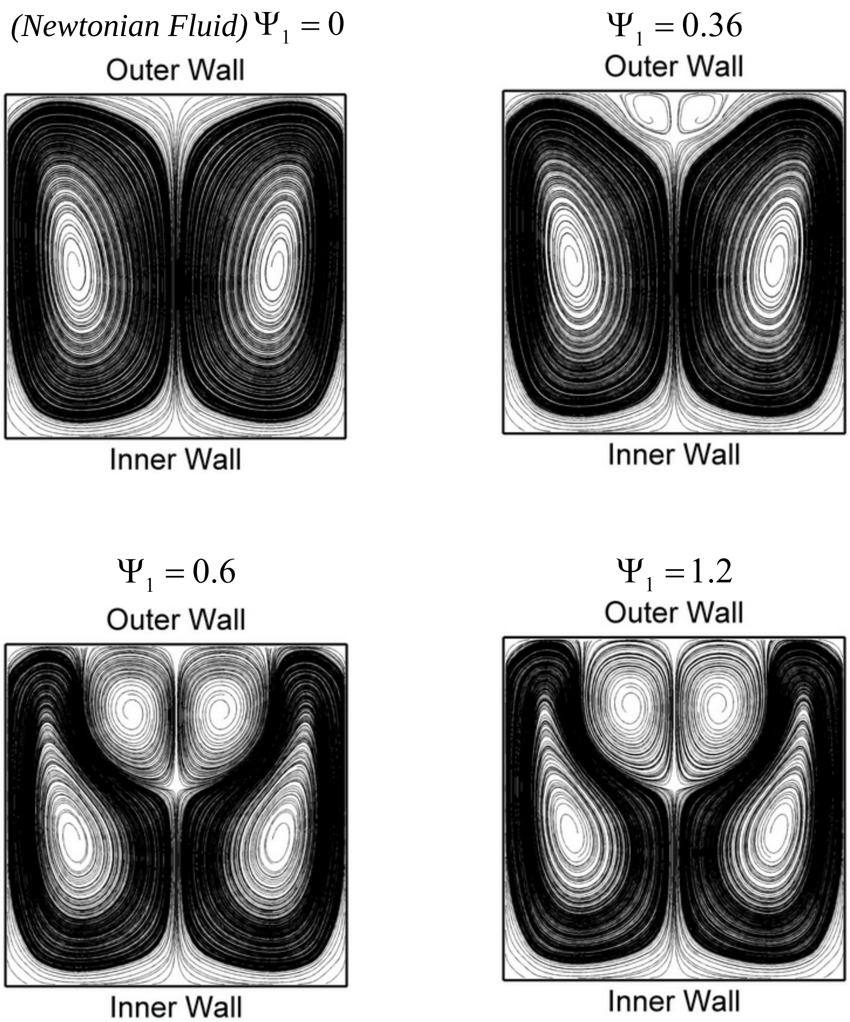
مطابق شکل (۵-۳۰)، افزایش عدد رینولدز منجر به ازدیاد و رشد گردابه های ناشی از ناپایداری (گردابه های دین) در بخش عمده مقطع کانال می شود و گردابه های کناری که پیش از بروز ناپایداری نیز وجود داشتند به سمت دیواره های جانبی مقطع (دیواره های سمت چپ و راست) رانده می شوند و از ابعاد آنها کاسته می شود. مطابق شکل (۵-۳۱)، بروز ناپایداری سبب ایجاد چین خوردگی هایی در توزیع سرعت محوری جریان می شود.

در شکل (۵-۳۲)، خطوط جریانهای ثانویه در $\delta = 0.15$ و $\kappa = 2$ نشان داده شده است. مطابق شکل، جریان در اعداد رینولدز بزرگتر از ۱۲۵۰ ناپایدار می شود. با مقایسه شکل های (۵-۲۸)، (۵-۳۰) و (۵-۳۲) می توان دریافت که افزایش نسبت ابعادی به پایداری جریان کمک می کند. به عبارت دیگر در نسبت های ابعادی کوچکتر، ناپایداری در اعداد رینولدز پایین تری ایجاد می شود.



شکل (۵-۳۲): خطوط جریانهای ثانویه برای جریان اینرسی سیال نیوتنی در $\delta = 0.15$ و $\kappa = 2$

در ادامه اثر ناپایداری دین در جریان اینرسی سیال مرتبه دو مورد بررسی قرار می گیرد. در شکل (۵-۳۳) خطوط جریانهای ثانویه سیال مرتبه دو در مقادیر مختلف Ψ_1 در حالت $\Psi_2 = 0$ نشان داده شده است. در اینجا اثر اختلاف تنش نرمال اول بر پایداری جریان بررسی شده است. همچنین عدد دین بر مبنای سرعت متوسط جریان (مطابق تعریف بارا: $Dn_b = \mathrm{Re}_b \sqrt{a/R}$) برابر مقدار ثابت ۱۲۵ در نظر گرفته شده است.

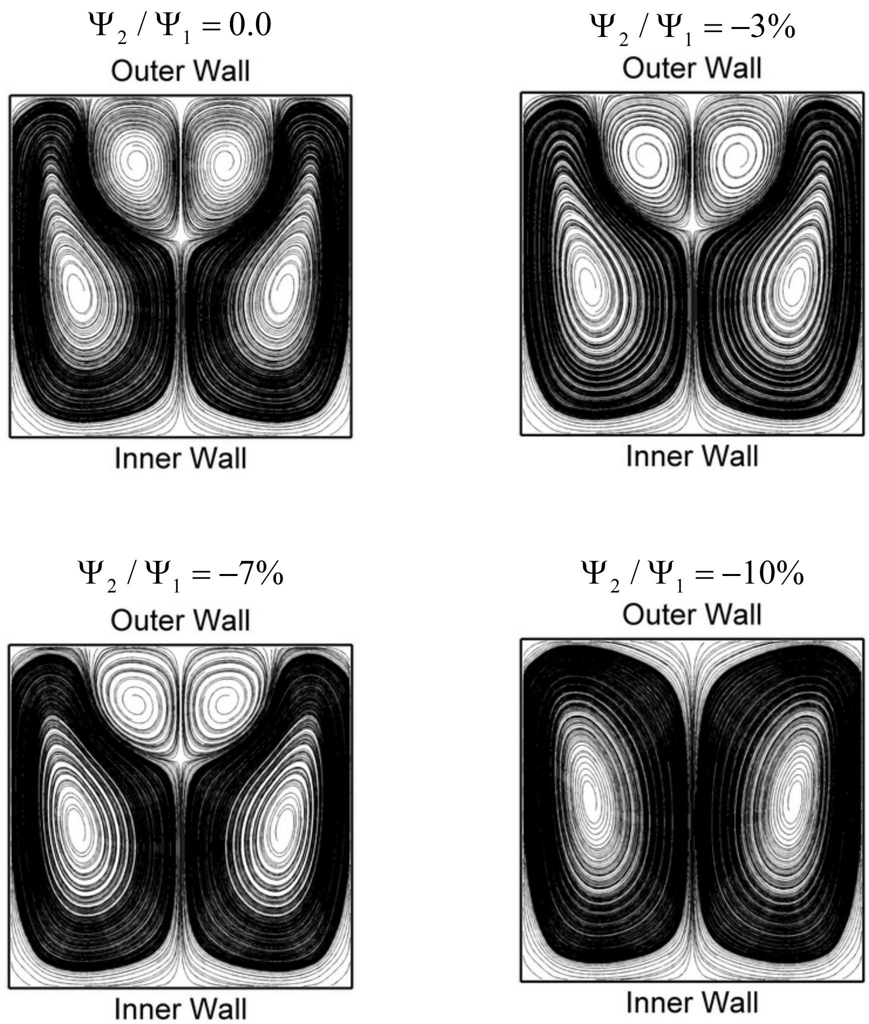


شکل (۵-۳۳): خطوط جریان ثانویه سیال CEF بر حسب مقادیر مختلف Ψ_1 در $Dn_b = 125$ و $\Psi_2 = 0$ [۱۲۵]

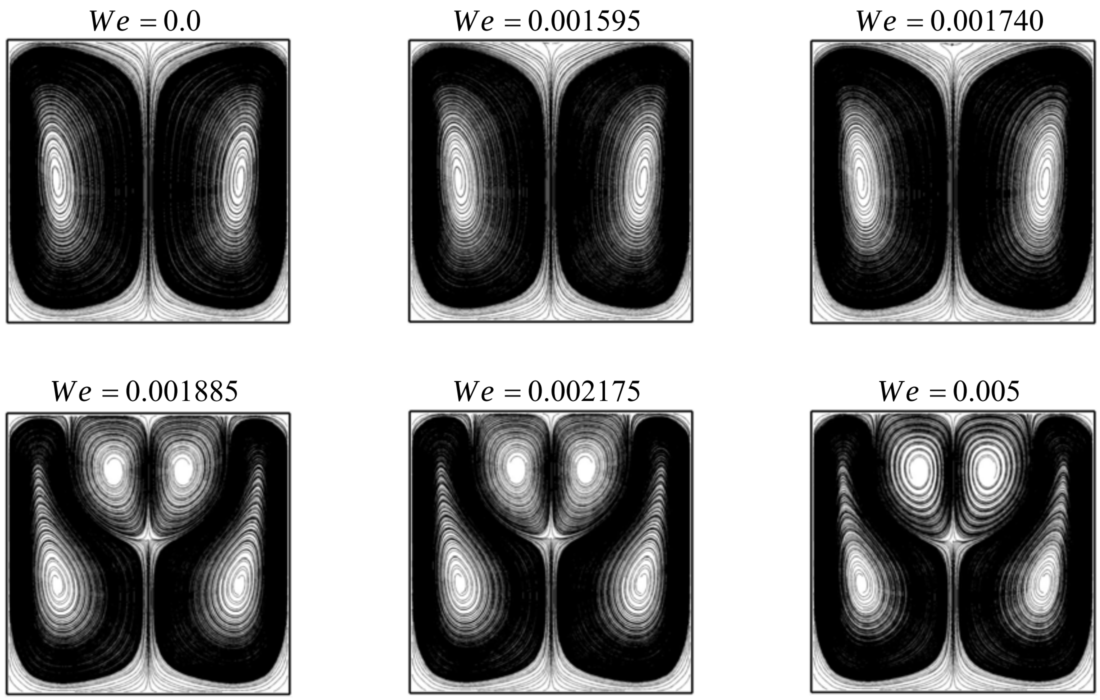
همانگونه که پیشتر در توضیحات شکل (۵-۲۸) گفته شد، جریان سیال نیوتنی در این عدد دین پایدار است (این عدد دین معادل عدد رینولدز ۸۰۸ بر مبنای سرعت مرجع در کانال خمیده دارای نسبت انحنای ۰/۱۵ است). مطابق شکل (۵-۳۳)، مشاهده می شود که با ازدیاد مقدار اختلاف تنش نرمال اول، جریان بتدریج ناپایدار می شود. بروز ناپایداری در اثر ازدیاد خواص الاستیک پدیده جالب توجهی است که پیشتر برای جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده دارای مقطع مربعی نیز گزارش شده بود (برای نمونه به مراجع [۱۰۵] تا [۱۱۰] رجوع شود). هلین و همکاران [۱۰۹] و بوتابا و همکاران [۱۱۰] نشان دادند که ازدیاد عدد دبورای جریان سیال MPTT در کانال خمیده سبب بروز پدیده شاخه ای شدن[۱] و ناپایداری در جریان می شود (شکل (۱-۴۳) را ببینید). همانگونه که در فصل اول گفته شد، فان و همکاران [۵۰] پیشنهاد دادند که برای بررسی جریان در کانال های خمیده بهتر است که بر روی اثر اختلاف تنش های نرمال تمرکز شود زیرا که این خواص دارای اثرات معکوسی بر شدت جریانهای ثانویه هستند. لذا مناسب تر است که اعداد بی بعد مربوط به خواص ویسکوالاستیک به گونه ای به کار گرفته شوند که به طور جداگانه معرف اثر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم باشند. در اینجا نیز چنین روندی برای بررسی پایداری به کار گرفته شده است. از آنجا که ازدیاد اثر اختلاف تنش نرمال اول سبب افزایش شدت جریانهای ثانویه می شود، لذا انتظار می رود که ازدیاد این خاصیت سبب بروز ناپایداری در اعداد دین کوچکتری شود. در شکل (۵-۳۴) اثر اختلاف تنش نرمال دوم بر پایداری جریان نشان داده شده است. در اینجا عدد دین بر مبنای سرعت متوسط برابر ۱۲۵ و مقدار بی بعد اختلاف تنش نرمال دوم برابر $\Psi_1 = 0.6$ در نظر گرفته شده است. مطابق شکل، در حالت $\Psi_2 = 0$ جریان ناپایدار است (به دلیل اثر اختلاف تنش نرمال اول) اما با ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی گردابه های دین ضعیف تر شده و در $\Psi_2 / \Psi_1 = -10\%$ به طور کامل محو می شوند. به عبارت دیگر جریان در حالت $\Psi_2 / \Psi_1 = -10\%$

1. Bifurcation

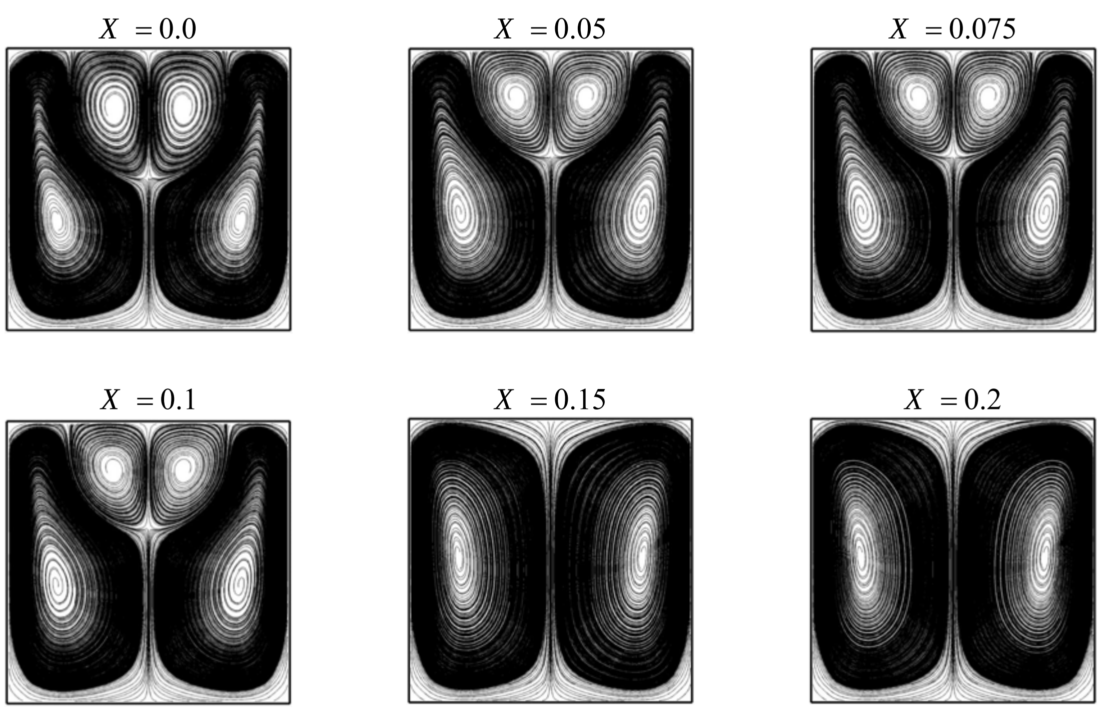
پایدار شده است. شایان ذکر است که مطابق اطلاع دقیق نگارنده، اثر اختلاف تنش نرمال دوم بر پایدار نمودن جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده برای نخستین بار در تحقیق حاضر مشاهده شده است. در شکل (۵-۳۵) اثر اختلاف تنش نرمال اول (در قالب اثر عدد وایزنبرگ) و در شکل (۵-۳۶) اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی جریان سیال CEF (با خواص مرجع ارائه شده در جدول (۵-۵)) نشان داده شده است. در اینجا نیز ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول سبب بروز ناپایداری می شود، حال آنکه اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر ناپایداری معکوس بوده و ازدیاد آن منجر به پایدار نمودن جریان می شود.



شکل (۵-۳۴): خطوط جریان ثانویه سیال مرتبه دو بر حسب مقادیر مختلف Ψ_2 در $Dn_b = 125$ و $\Psi_1 = 0.6$ [۱۲۵]



شکل (۵-۳۵): اثر اختلاف تنش نرمال اول بر جریانهای ثانویه سیال CEF در $\mathrm{Re} = 29$، $\delta = 0.15$، $\kappa = 1$ و $\chi = 0.0$

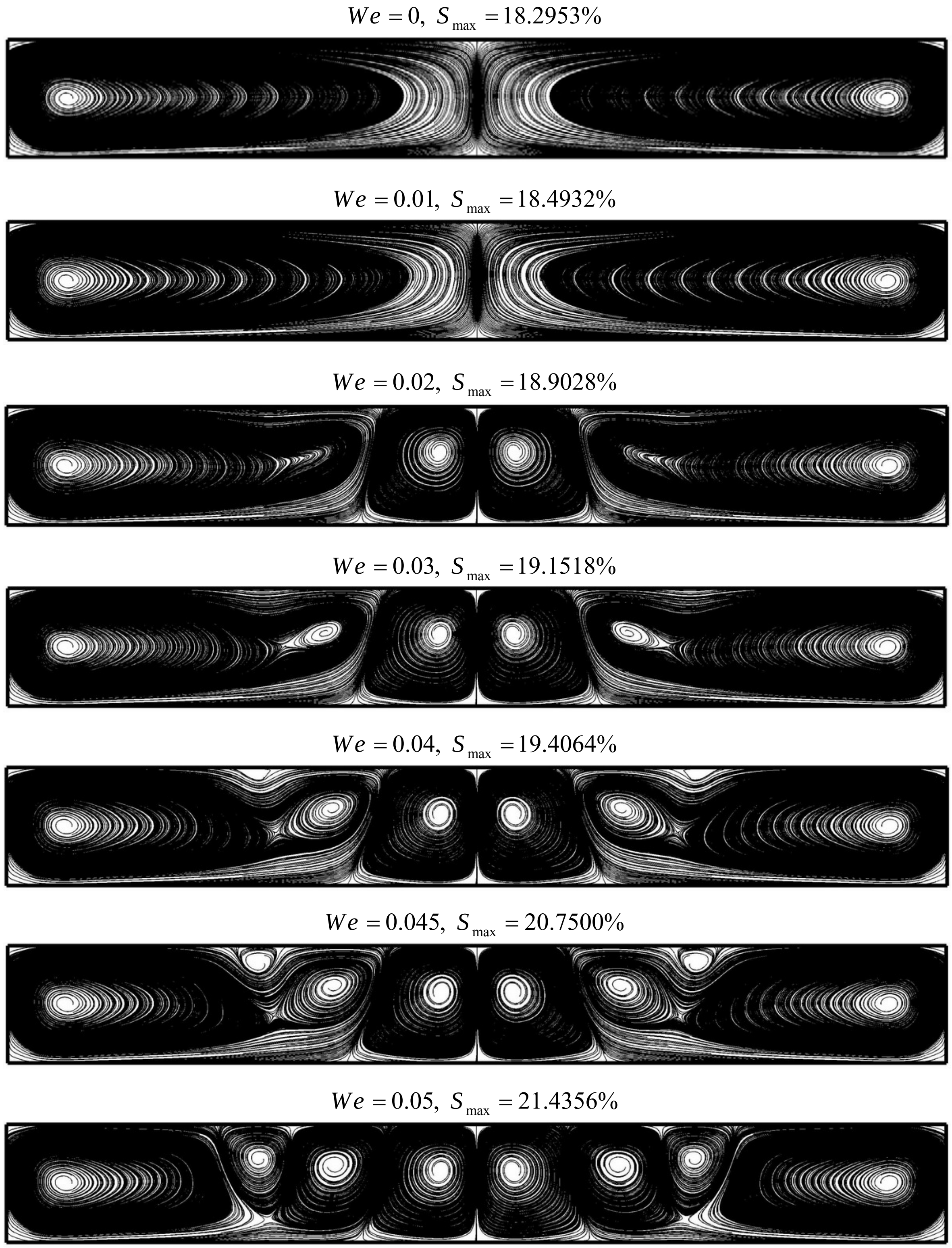


شکل (۵-۳۶): اثر اختلاف تنش نرمال دوم بر جریانهای ثانویه سیال CEF در $\mathrm{Re} = 29$، $\delta = 0.15$، $\kappa = 1$ و $We = 0.005$

در شکل های (۵-۳۷) و (۵-۳۸) اثر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر پایداری جریان اینرسی سیال CEF در نسبت ابعادی ۱:۸ ($\kappa = 0.125$) نشان داده شده است. مطابق شکل (۵-۳۷)، جریان سیال CEF در عدد رینولدز ۳۳ و در نبود اختلاف تنش های نرمال اول و دوم ($We = 0$) پایدار است و جریانهای ثانویه به شکل یک جفت گردابه تیلور-گورتلر ظاهر می شوند. مطابق شکل، با ازدیاد عدد وایزنبرگ (اثر اختلاف تنش نرمال اول) جریان بتدریج ناپایدار شده و گردابه های دین در نزدیکی جداره خارجی بوجود می آیند. با ازدیاد هر چه بیشتر عدد وایزنبرگ بر تعداد گردابه های دین افزوده شده و گردابه های کناری کوچکتر می شوند. برای مثال در حالت $We = 0.05$، سه جفت گردابه دین در جریان سیال CEF در کانال خمیده به چشم می خورد.

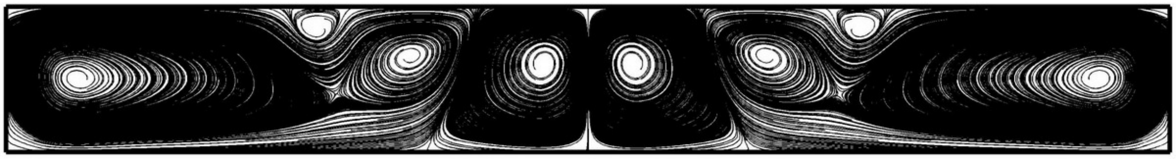
در شکل (۵-۳۸) اثر اختلاف تنش نرمال دوم بر پایداری جریان نشان داده شده است. مطابق شکل، جریان در حالت $We = 0.045$ و $\chi = 0$ ناپایدار و دارای سه جفت گردابه دین است. در اینجا نیز ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی سبب تضعیف و از بین بردن گردابه های دین می شود به نحوی که در حالت $X = 0.2$، گردابه های دین کاملاً خنثی شده و تنها جریانهای ثانویه تیلور-گورتلر در جریان اصلی باقی مانده اند (در این حالت جریان کاملاً پایدار شده است).

در شکل (۵-۳۹) توزیع سرعت محوری در مقادیر متفاوت اختلاف تنش های نرمال اول و دوم نشان داده شده است. دراینجا نیز جریان در آستانه بروز ناپایداری قرار دارد. مطابق شکل، با ازدیاد عدد وایزنبرگ (اختلاف تنش نرمال اول) جریان دچار ناپایداری شده و فعالیت گردابه های دین سبب افت سرعت در ناحیه وسط مقطع کانال می شود. اما ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی دارای اثر معکوسی بوده و سبب پایدار شدن جریان می شود به نحوی که در حالت $We = 0.045$ و $\chi = 0.2$ توزیع سرعت محوری مشابه توزیع سرعت جریان در حالت $We = 0.0$ (جریان تعمیم یافته نیوتنی) است.

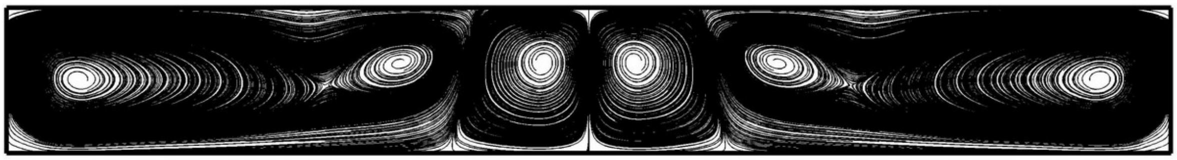


شکل (۵-۳۷): اثر اختلاف تنش نرمال اول بر جریانهای ثانویه سیال CEF در $\mathrm{Re} = 33$، $\delta = 0.15$، $\kappa = 0.125$ و $\chi = 0.0$

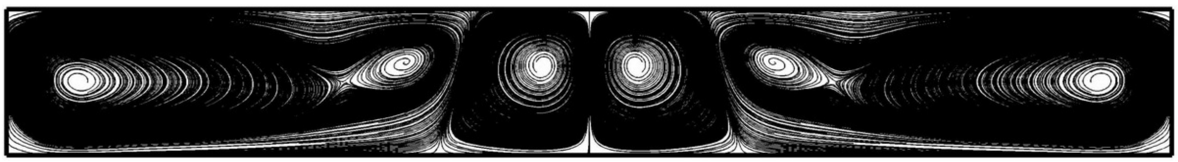
$X = 0.0,\ S_{\max} = 20.7500\%$



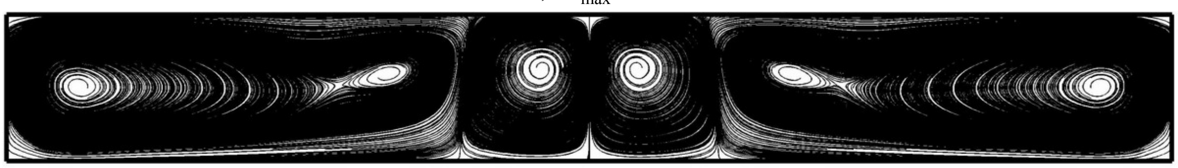
$X = 0.025,\ S_{\max} = 19.3231\%$



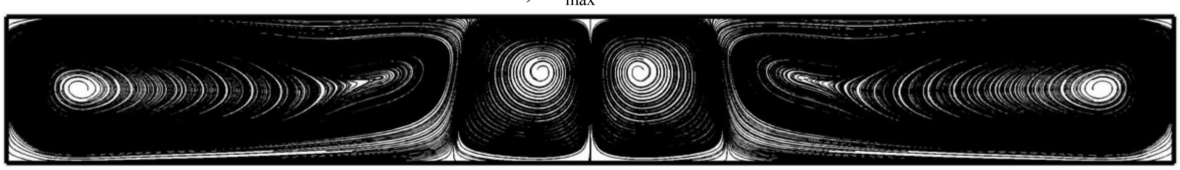
$X = 0.05,\ S_{\max} = 19.2623\%$



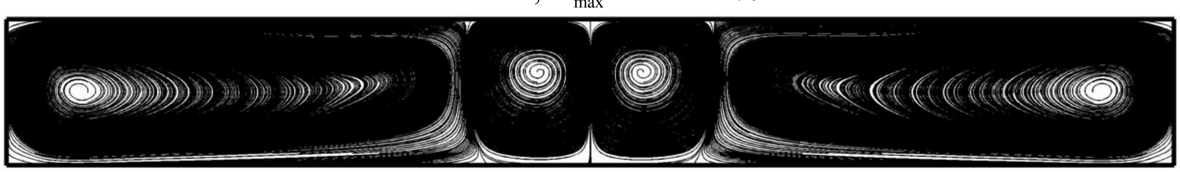
$X = 0.075,\ S_{\max} = 19.0652\%$



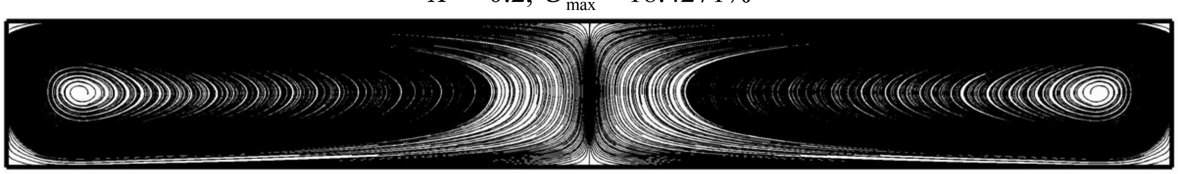
$X = 0.1,\ S_{\max} = 18.9892\%$



$X = 0.15,\ S_{\max} = 18.6977\%$

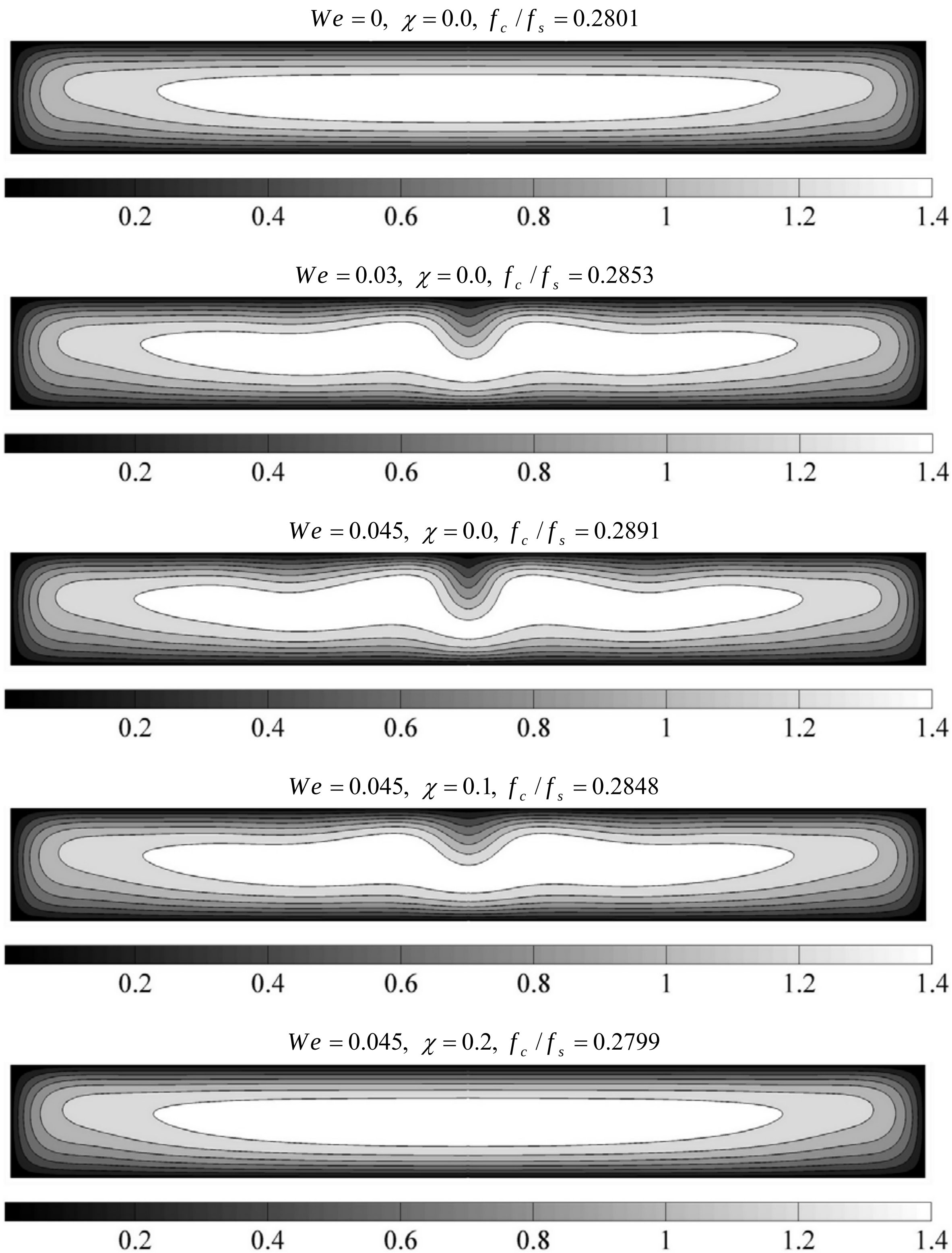


$X = 0.2,\ S_{\max} = 18.4271\%$



شکل (۵-۳۸): اثر اختلاف تنش نرمال دوم بر جریانهای ثانویه سیال CEF

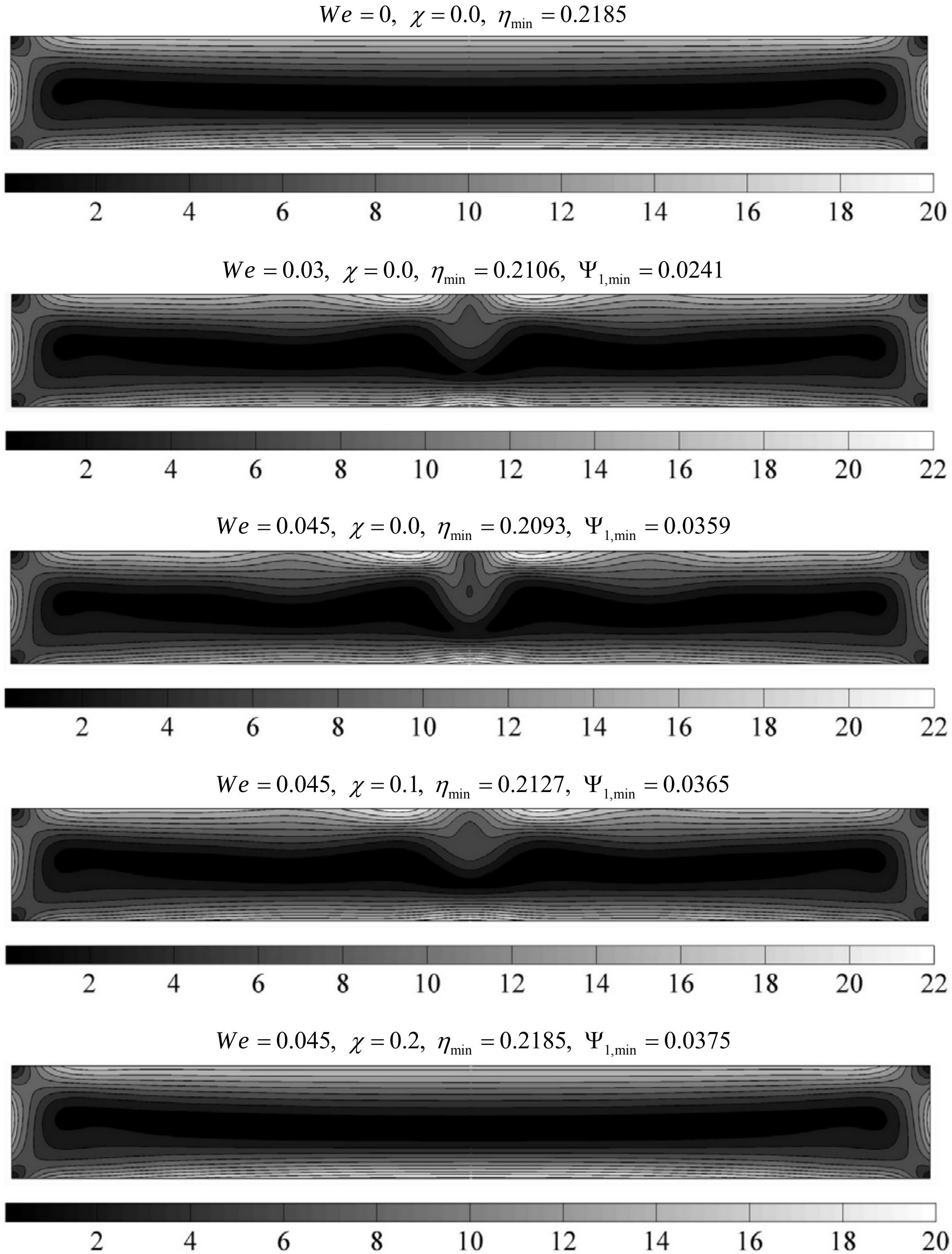
در $\mathrm{Re} = 33$، $\delta = 0.15$، $\kappa = 0.125$ و $We = 0.045$



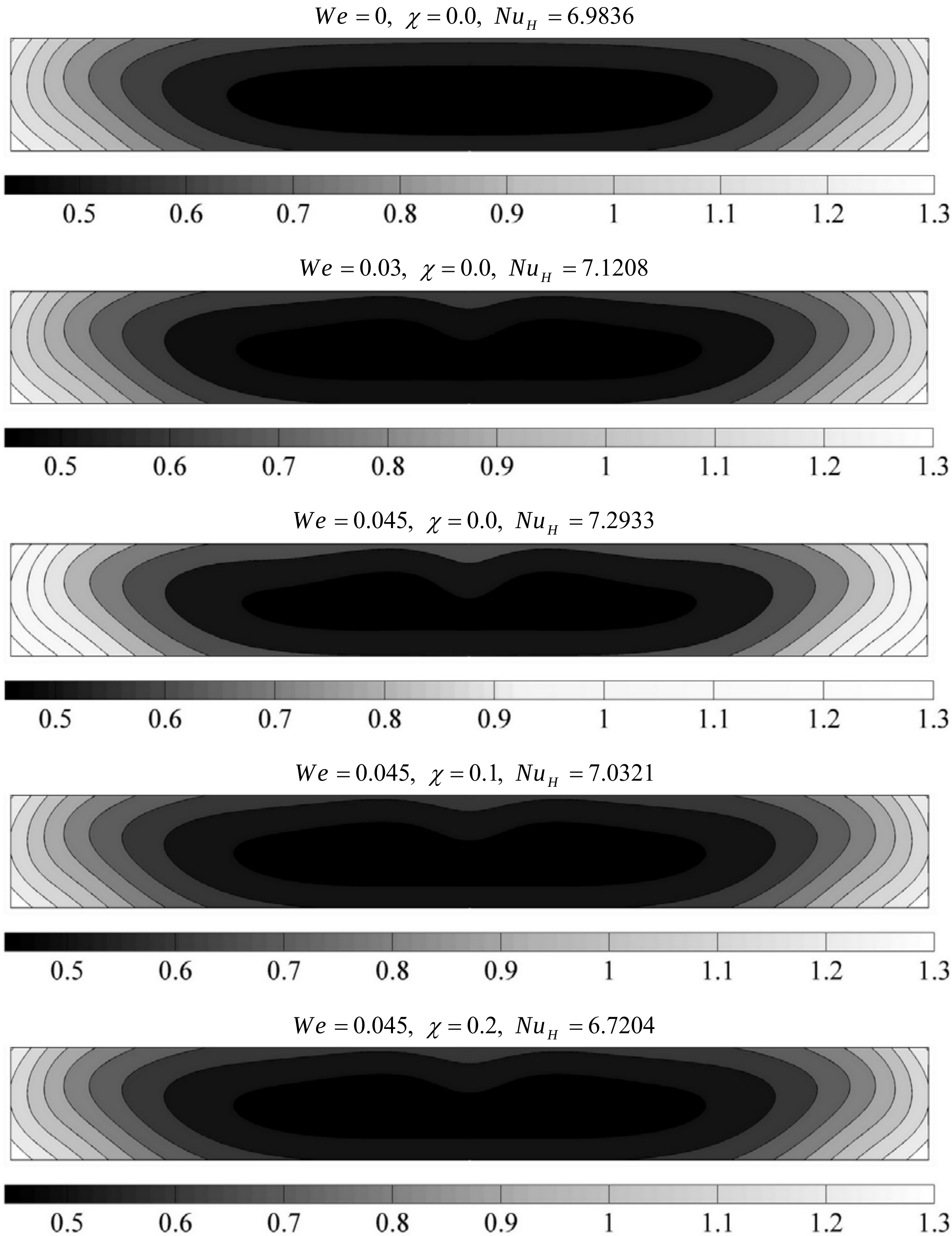
شکل (۵-۳۹): اثر اختلاف تنش های نرمال بر توزیع سرعت محوری (v_θ/U) در $\mathrm{Re}=33$، $\delta=0.15$ و $\kappa=0.125$

در شکل (۵-۴۰) اثر اختلاف تنش های نرمال بر نرخ برش تعمیم یافته نشان داده شده است. شایان ذکر است که از این نرخ برش برای محاسبه توابع ویسکومتریک شامل ویسکوزیته و اختلاف تنش های نرمال اول و دوم استفاده شده است. مطابق شکل، با ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول و بروز ناپایداری، مقدار نرخ برش تعمیم یافته در وسط مقطع کانال افزایش می یابد حال آنکه اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی در جهت خنثی نمودن این پدیده عمل می کند.

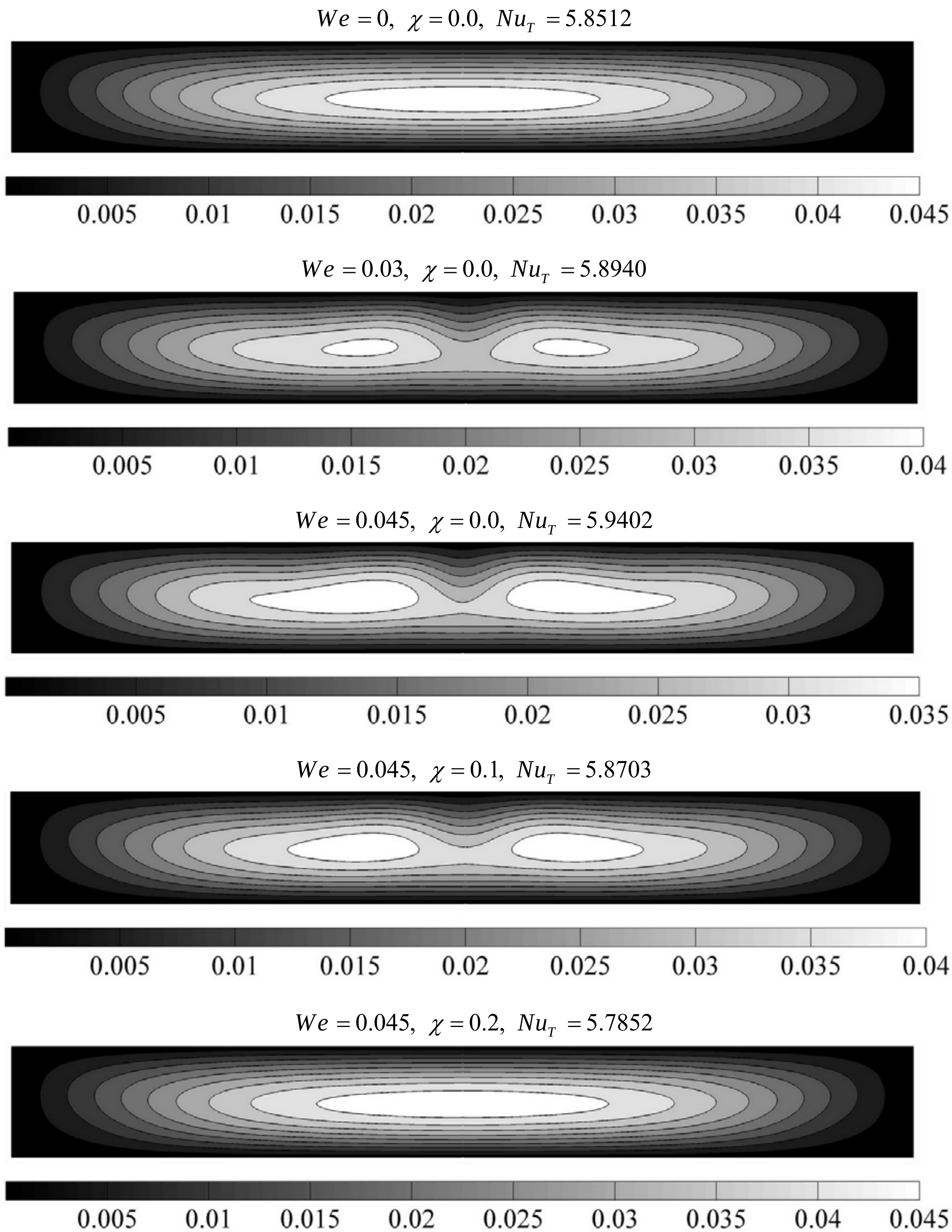
در شکل های (۵-۴۱) و (۵-۴۲) اثر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر توزیع دمای بی بعد جریان اینرسی در حالات شار ثابت و دما ثابت و در موقعیت $\theta = 180^\circ$ نسبت به ورودی نشان داده شده است. در این دو شکل مقادیر $\mathrm{Re} = 33$، $\delta = 0.15$ و $\kappa = 0.125$ در نظر گرفته شده است. مطابق شکل، با ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول و بروز ناپایداری در میدان جریان، میدان دما نیز دچار تحول شده و توزیع دما در حالت دما ثابت دو نقطه تحدب/تقعر متقارن پیدا می کند. در شکل های (۵-۴۳) و (۵-۴۴) اثر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر نسبت مقاومت مجرای خمیده و اعداد ناسلت متوسط شار ثابت و دما ثابت در $\mathrm{Re} = 33$، $\delta = 0.15$ و $\kappa = 0.125$ نشان داده شده است. شایان ذکر است که کوچک تر از یک بودن f_c / f_s تنها مربوط به نحوه تعریف این پارامتر بوده و ناشی از محاسبه f_s در نرخ برش $\tilde{\eta}_0$ است (در اینجا ویسکوزیته سیال بصورت باریک شونده فرض شده و لذا $\tilde{\eta}(\gamma) \le \tilde{\eta}_0$ است). با توجه به شکل (۵-۴۳) مشاهده می شود که ازدیاد عدد وایزنبرگ سبب رشد قابل توجه مقادیر f_c / f_s و عدد ناسلت متوسط می شود که این موضوع مربوط به بروز ناپایداری و تشکیل گردابه های دین در مقادیر $We > 0.01$ است. با توجه به شکل (۵-۴۴) ازدیاد ضریب اختلاف تنش نرمال دوم منفی سبب کاهش میزان مقاومت مجرای خمیده در برابر جریان (f_c / f_s) و نیز کاهش عدد ناسلت متوسط شار و دما ثابت می شود که این موضوع ناشی از اثر اختلاف تنش نرمال دوم بر کاهش شدت جریانهای ثانویه و خنثی شدن گردابه های دین است.



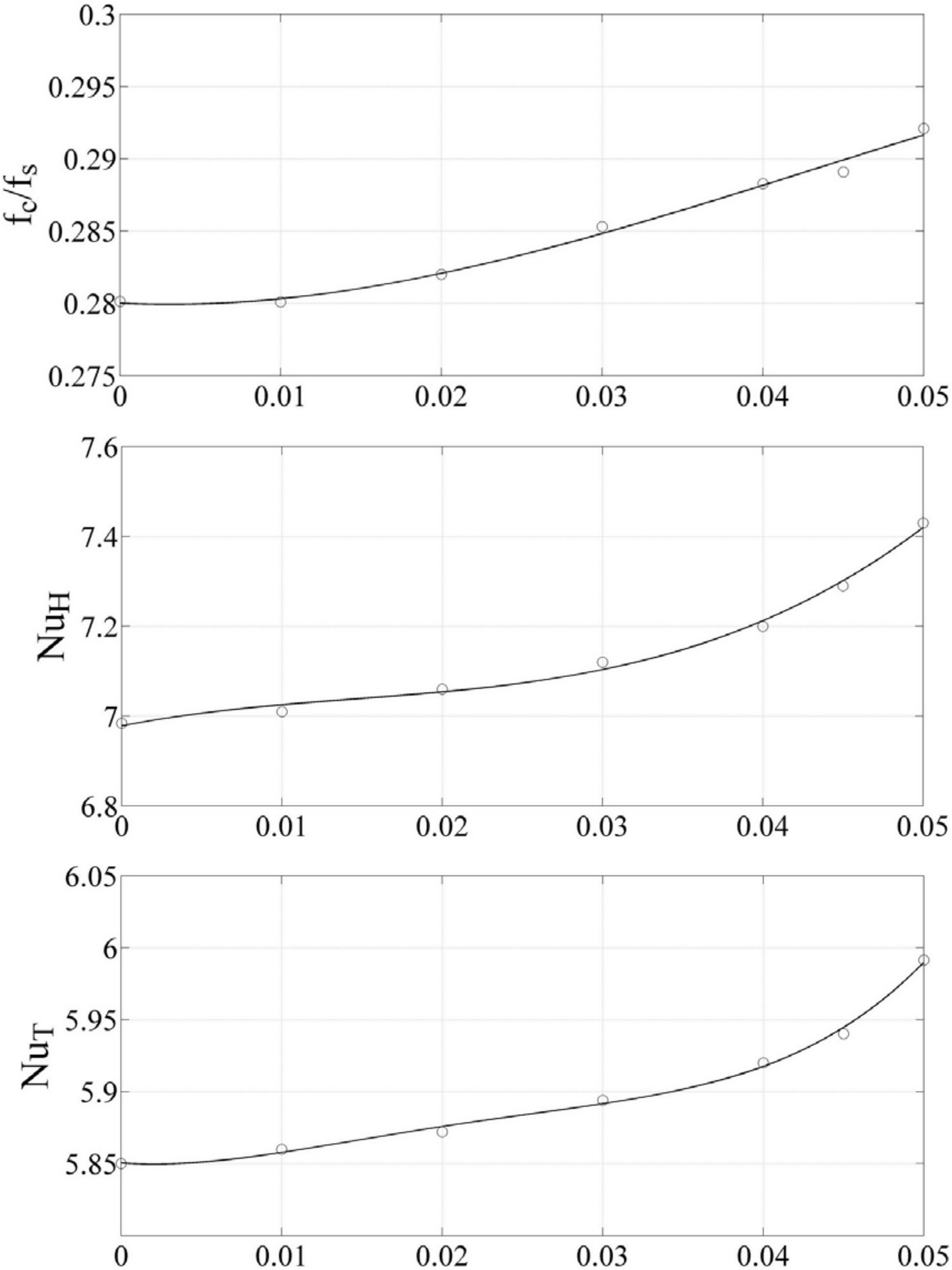
شکل (۵-۴۰): اثر اختلاف تنش های نرمال بر نرخ برش تعمیم یافته (γ) در $\mathrm{Re} = 33$، $\delta = 0.15$ و $\kappa = 0.125$



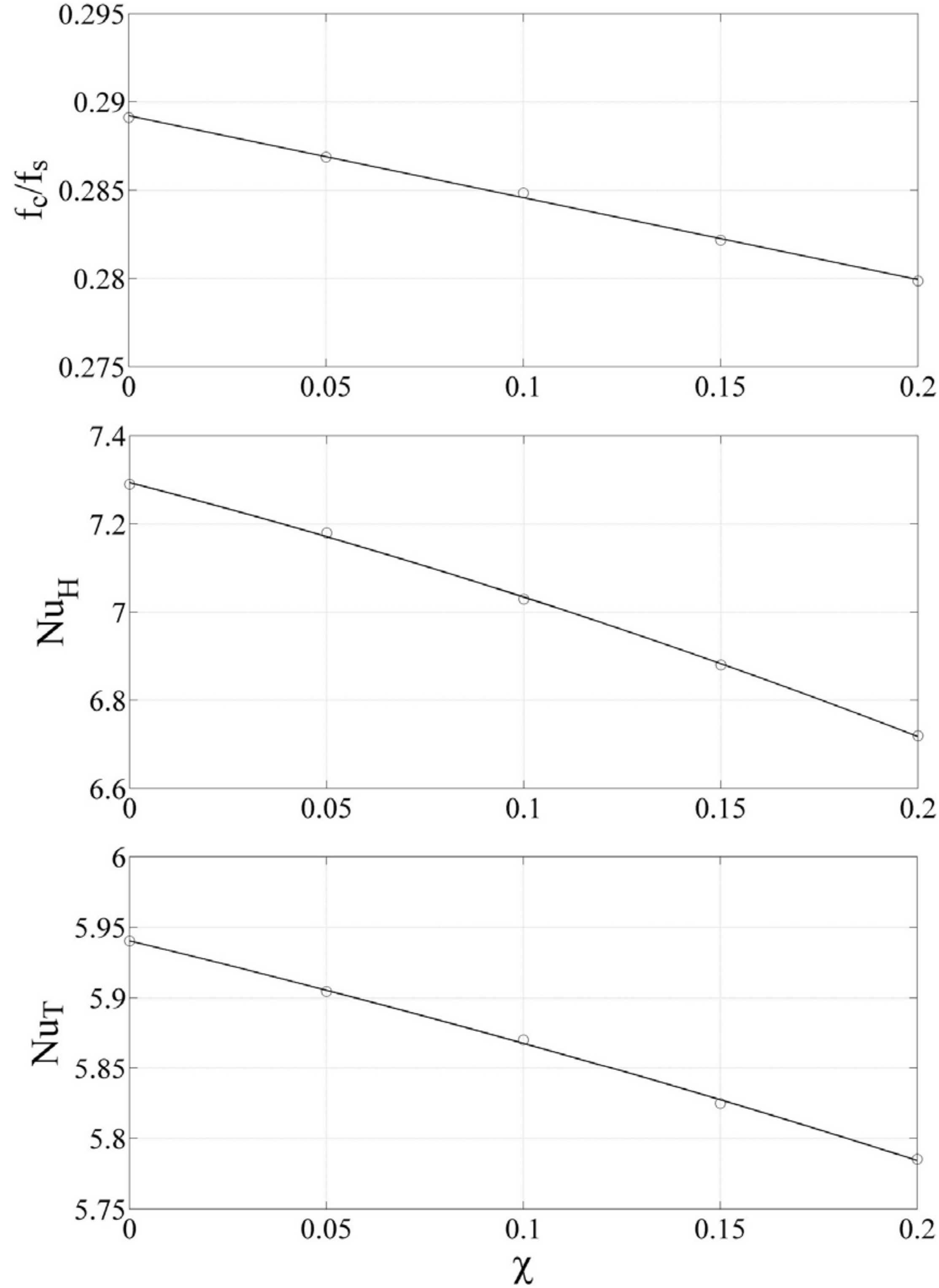
شکل (۵-۴۱): اثر اختلاف تنش های نرمال بر توزیع دما برای حالت شار ثابت
در مقطع $\theta = 180^\circ$ و در شرایط $\mathrm{Re} = 33$، $\delta = 0.15$ و $\kappa = 0.125$



شکل (۵-۴۲): اثر اختلاف تنش های نرمال بر توزیع دما برای حالت دما ثابت
در مقطع $\theta = 180^\circ$ و در شرایط $\mathrm{Re} = 33$، $\delta = 0.15$ و $\kappa = 0.125$



شکل (۵-۴۳): اثر عدد وایزنبرگ (اختلاف تنش نرمال اول) بر نسبت مقاومت مجرای خمیده و اعداد ناسلت متوسط شار ثابت و دما ثابت در $Re = 33$، $\delta = 0.15$، $\kappa = 0.125$ و $\chi = 0.0$

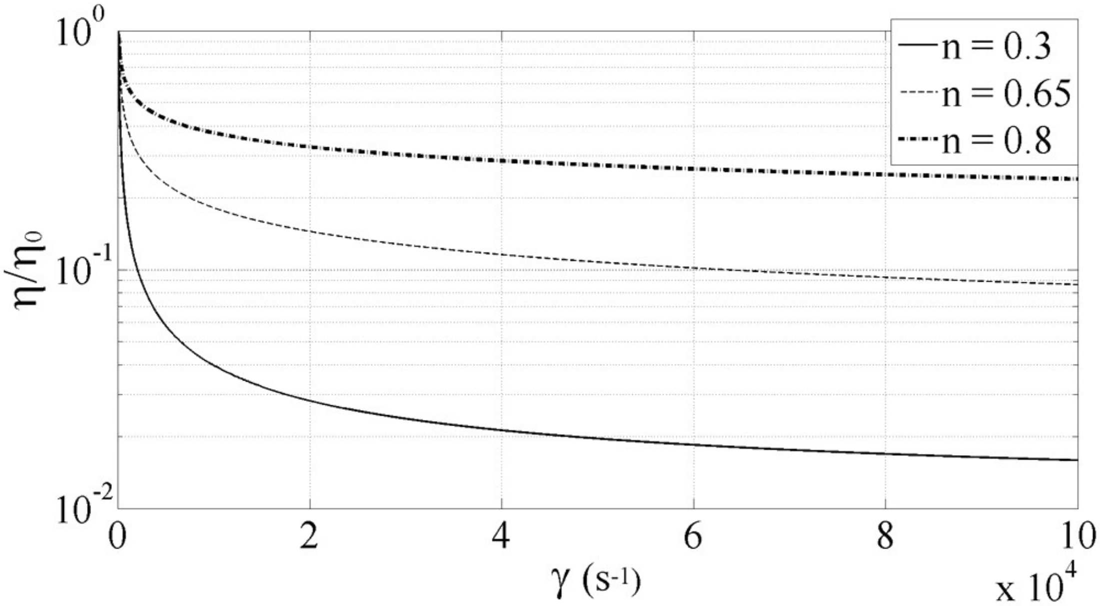


شکل (۵-۴۴): اثر ضریب اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر نسبت مقاومت مجرای خمیده و اعداد ناسلت متوسط شار ثابت و دما ثابت در $\mathrm{Re}=33$، $\delta=0.15$، $\kappa=0.125$ و $We=0.045$

۵-۶-۴- اثر ثابت های مربوط به وابستگی توابع ویسکومتریک به نرخ برش

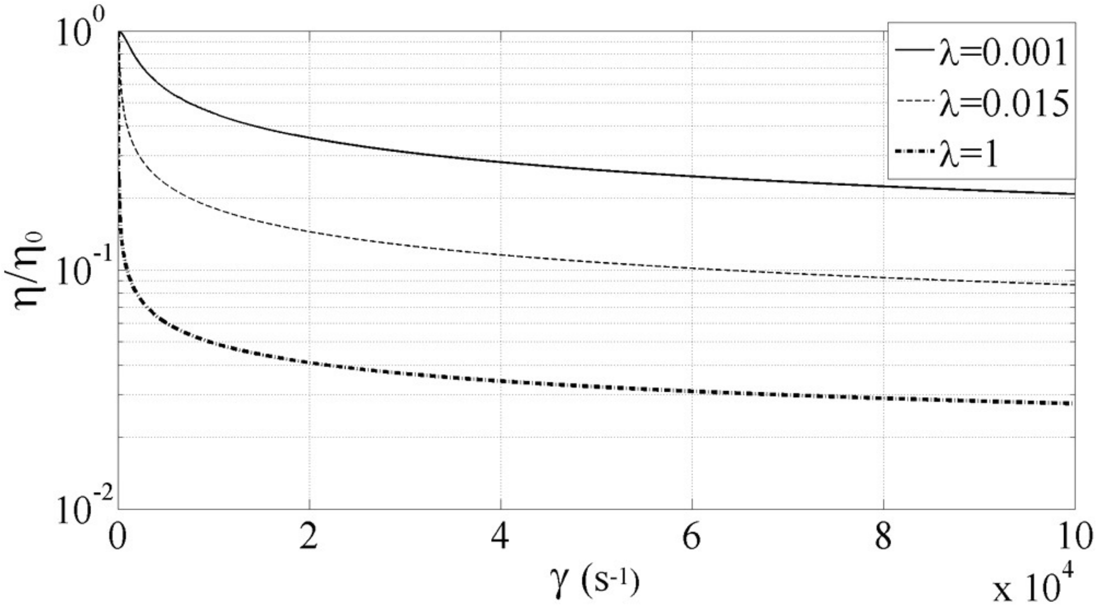
در ادامه اثر ثابت های مربوط به وابستگی توابع ویسکومتریک مدل کاریو-یاسودا به نرخ برش تعمیم یافته مورد بررسی قرار می گیرد. با توجه به رابطه (۲-۶۴)، این ثابت ها شامل ثابت زمانی مدل (λ)، توان پاورلو (n) و ضریب اصلاح ناحیه انتقال بین نرخ برش صفر و ناحیه پاورلو (a) است. در شکل (۵-۴۵) تابع توزیع ویسکوزیته بر حسب نرخ برش تعمیم یافته در مقادیر مختلف توان پاورلو نشان داده شده است. سایر ضرایب مدل شامل مقادیر ارائه شده در جدول (۵-۵) است. از آنجا که مدل کاریو-یاسودا برای مدلسازی توابع باریک شونده نسبت به نرخ برش طراحی شده لذا این مدل تنها برای مقادیر $n \leq 1$ دارای ارزش فیزیکی است. شکل های (۵-۴۵) و (۵-۴۶) به ترتیب وابستگی تابع ویسکوزیته به توان پاورلو و ثابت زمانی مدل را نشان می دهد. همانطور که انتظار می رود، ازدیاد مقادیر n و λ، به ترتیب افزایش و کاهش مقدار ویسکوزیته را در پی دارد.

در شکل (۵-۴۷) خطوط جریانهای ثانویه و در شکل (۵-۴۸) توزیع سرعت محوری (v_θ/U) در مقادیر n مختلف نشان داده شده است. در اینجا $\mathrm{Re}=10$، $\delta=0.15$، $\kappa=1$، $We=0.05$ و $\chi=0.1$ در نظر گرفته شده است. مطابق شکل، جریان در مقادیر $n \geq 0.5$ پایدار بوده و با کاهش مقدار n در این ناحیه، بر شدت جریان های ثانویه افزوده می شود. علت این امر مربوط به کاهش لزجت سیال و در نتیجه تضعیف نیروی حاصل از ویسکوزیته در برابر نیروی اینرسی و نیروی گریز از مرکز جریان است. مطابق شکل، در مقادیر $n<0.5$ جریان ناپایدار بوده و علت این امر مربوط به ضعیف بودن نیروهای ویسکوز است که دیگر قادر به حفظ ساختار جریانهای ثانویه به شکل یک جفت گردابه تیلور-گورتلر نیستند. در این ناحیه، گردابه های دین در نزدیکی دیواره خارجی بوجود می آیند به نحوی که در $n=0.4$ به شکل یک جفت گردابه دین و در $n=0.3$ بصورت دو جفت گردابه دین ظاهر می شوند. شایان ذکر است که حل عددی در مقادیر $n \leq 0.2$ ناپایدار بوده و قادر به همگرایی نیست.



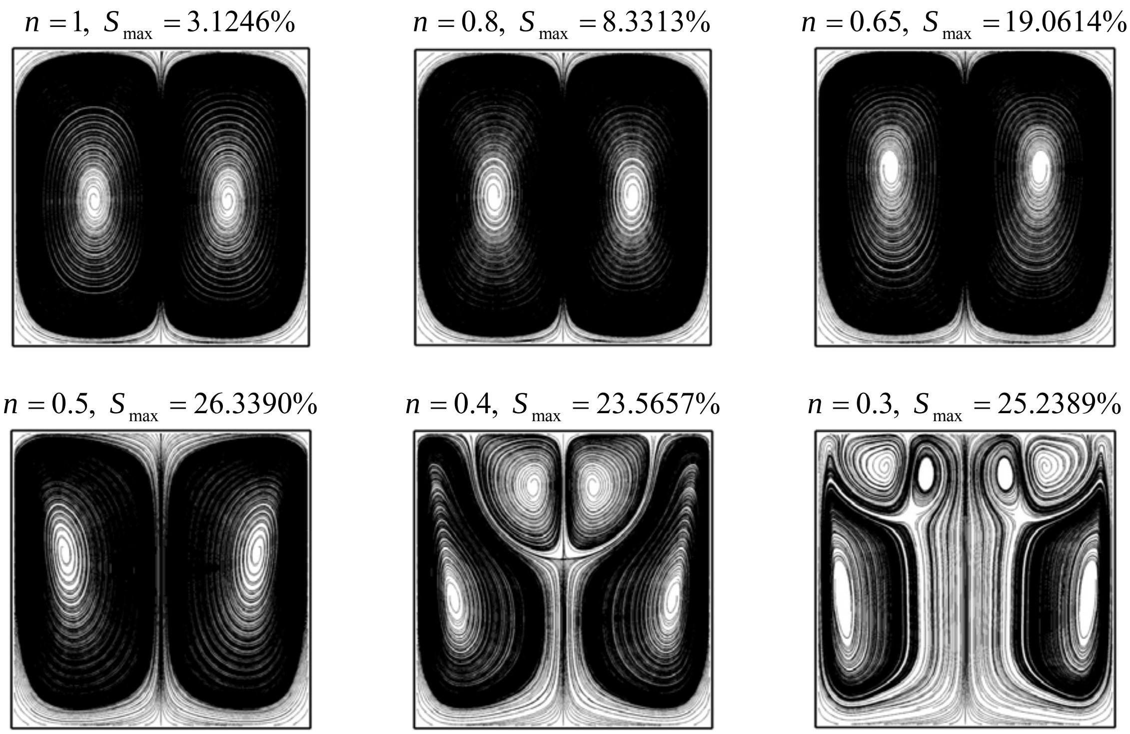
شکل (۵-۴۵): اثر توان پاورلو (n) بر دیاگرامهای ویسکوزیته بر حسب نرخ برش

در شرایط $a = 2$، $\lambda = 0.015$، $\eta_0 = 1$ و $\eta_\infty = 0.01$

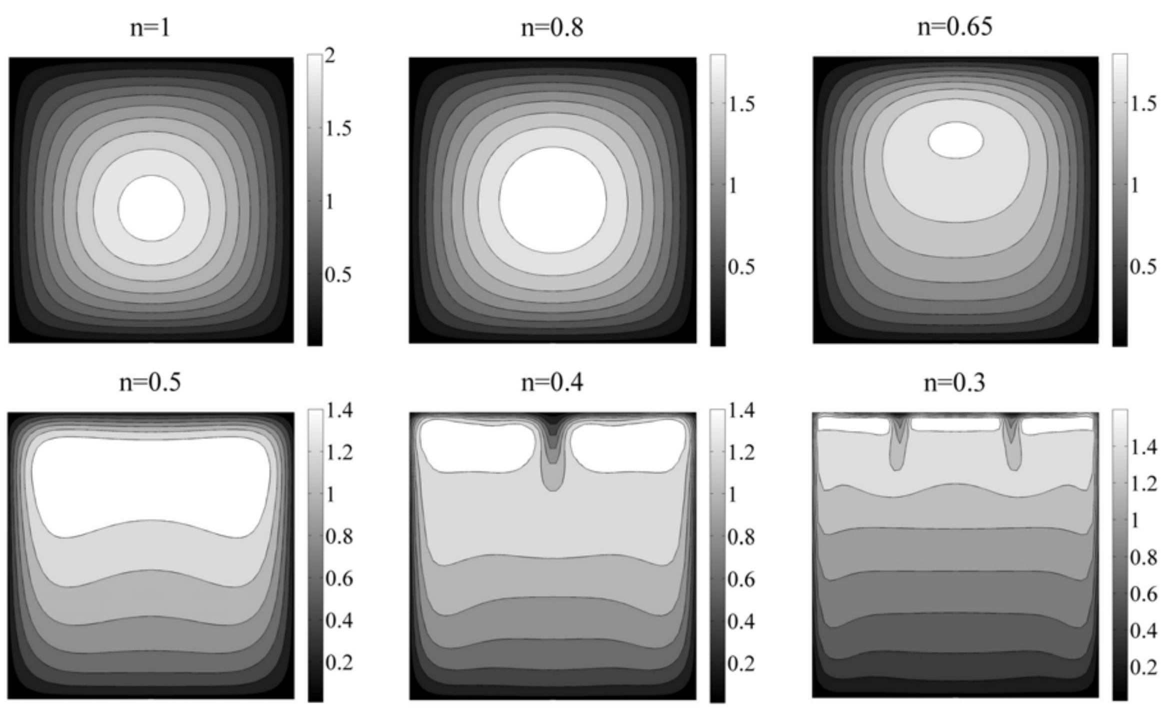


شکل (۵-۴۶): اثر توان پاورلو (n) بر دیاگرامهای ویسکوزیته بر حسب نرخ برش

در شرایط $n = 0.65$، $a = 2$، $\eta_0 = 1$ و $\eta_\infty = 0.01$

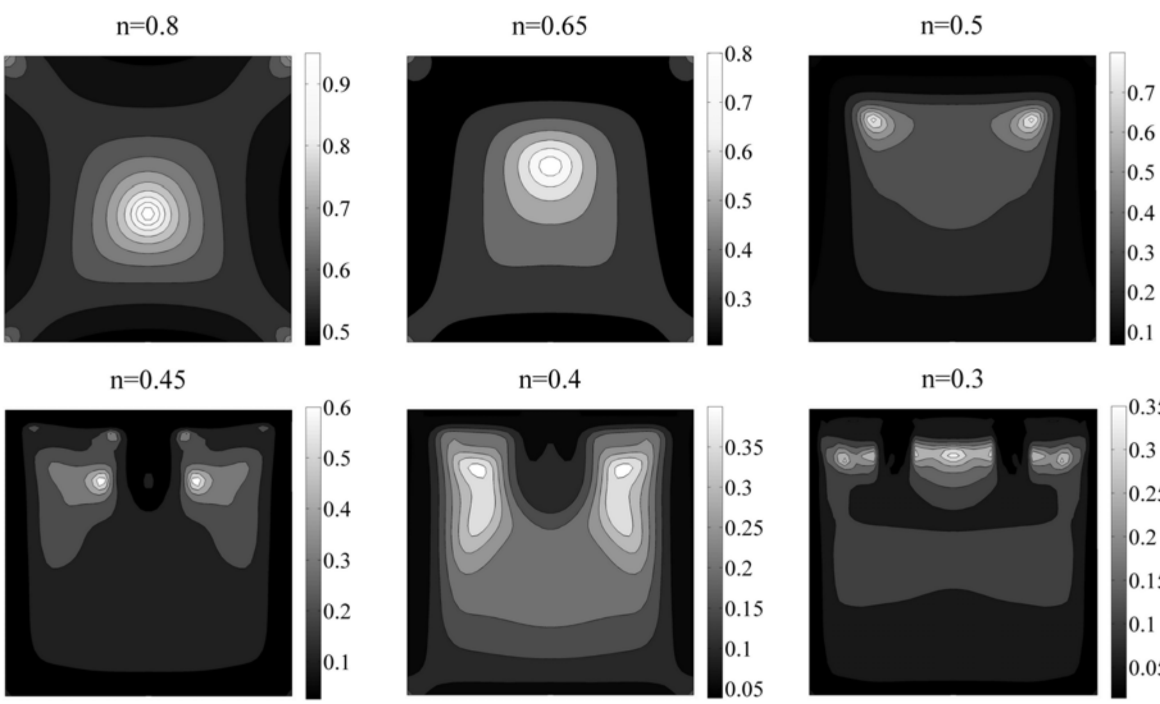


شکل (۵-۴۷): اثر توان توابع ویسکومتریک (n) بر جریانهای ثانویه در $\mathrm{Re} = 10$، $\delta = 0.15$، $We = 0.05$ و $\chi = 0.1$



شکل (۵-۴۸): اثر توان n بر سرعت محوری (v_θ / U) در $\mathrm{Re} = 10$، $\delta = 0.15$، $\kappa = 1$ ، $We = 0.05$ و $\chi = 0.1$

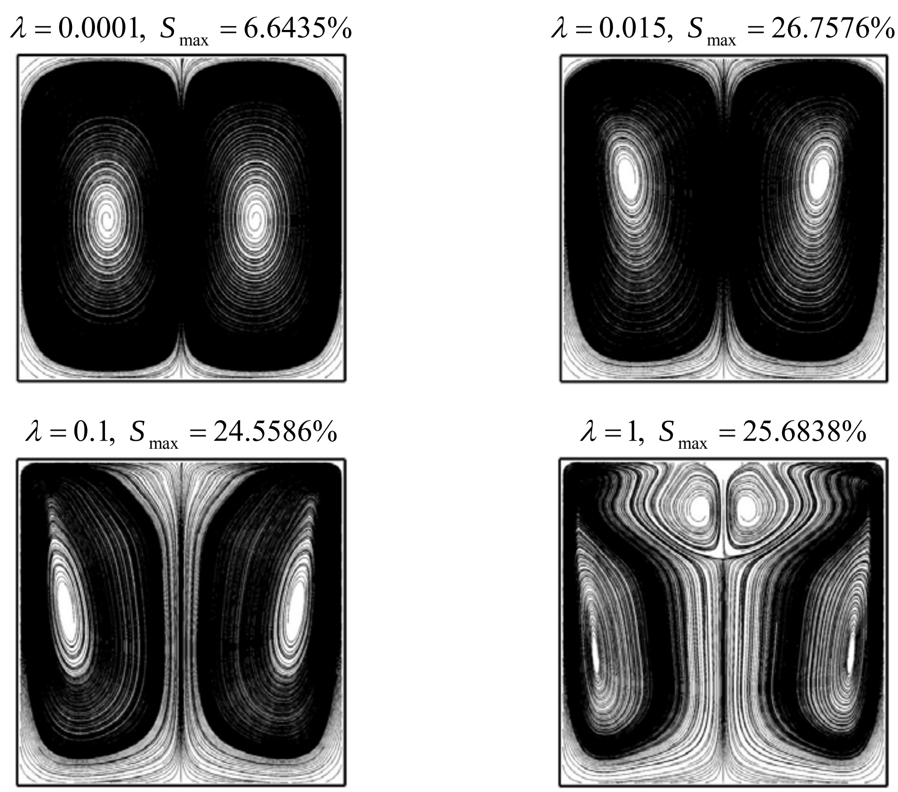
مطابق شکل (۵-۴۸)، در ناحیه پایدار ($n \geq 0.5$)، کاهش مقدار ویسکوزیته سبب متمایل شدن هر چه بیشتر موقعیت سرعت محوری به سمت دیواره خارجی می شود. همچنین در ناحیه ناپایدار ($n < 0.5$)، کاهش مقدار n سبب بروز تغییرات عمده در توزیع سرعت محوری و به خصوص افت سرعت محوری در مرز بین گردابه های دین می شود. در شکل (۵-۴۹) کانتورهای ویسکوزیته بی بعد ($\eta = \tilde{\eta} / \tilde{\eta}_0$) در مقادیر مختلف توان پاورلو (n) نشان داده شده اند. همانگونه که انتظار می رود، کاهش مقدار n با افت مقدار ویسکوزیته سیال همراه است. همچنین در تمامی مقادیر n، کمترین ویسکوزیته مربوط به نواحی نزدیک دیواره ها است که در آنها مقدار نرخ برش بیشینه است. در مقادیر $n = 0.8$ و $n = 0.65$، به دلیل ضعیف بودن جریانهای ثانویه، مقدار ویسکوزیته عمدتاً تحت تاثیر سرعت محوری قرار دارد. از آنجا که در ناحیه مرکز مقطع کانال مقدار نرخ برش کمینه است (سرعت محوری به ماکزیمم مقدار خود می رسد) لذا ویسکوزیته در این ناحیه دارای مقدار ماکزیمم است.



شکل (۵-۴۹): اثر توان n بر ویسکوزیته بی بعد در $\mathrm{Re} = 10$، $\delta = 0.15$، $\kappa = 1$ ، $We = 0.05$ و $\chi = 0.1$

در $n = 0.5$، شدت جریانهای ثانویه در مقابل سرعت جریان اصلی قابل توجه بوده و لذا در این حالت موقعیت بیشینه ویسکوزیته به محل مرکز گردابه ها که در آنها مقدار نرخ برش کمینه است، منتقل شده است. مطابق شکل در $n = 0.4$ و $n = 0.3$ جریان کاملاً ناپایدار بوده و با پیدایش گردابه های دین، افت قابل توجهی در مقدار ویسکوزیته سیال بوجود می آید.

در شکل (۵-۵۰) اثر ثابت زمانی توابع ویسکومتریک (λ) بر جریانهای ثانویه نشان داده شده است. مطابق شکل، ازدیاد ثابت زمانی مدل کاریو-یاسودا، افزایش شدت جریانهای ثانویه را در پی دارد. این امر مربوط به کاهش ویسکوزیته سیال CEF در نرخ برش ثابت در اثر افزایش این ثابت زمانی است (شکل (۵-۴۶) را ببینید). همچنین، ازدیاد این ثابت زمانی می تواند به بروز ناپایداری در جریان منجر شود. مطابق شکل، جریان در $\lambda = 0.1$ در آستانه ناپایداری بوده و در $\lambda = 1$ کاملاً ناپایدار است.



شکل (۵-۵۰): اثر ثابت زمانی λ (ثانیه) بر جریانهای ثانویه در $\mathrm{Re} = 10$، $\delta = 0.15$، $\kappa = 1$ ، $We = 0.05$ و $\chi = 0.1$

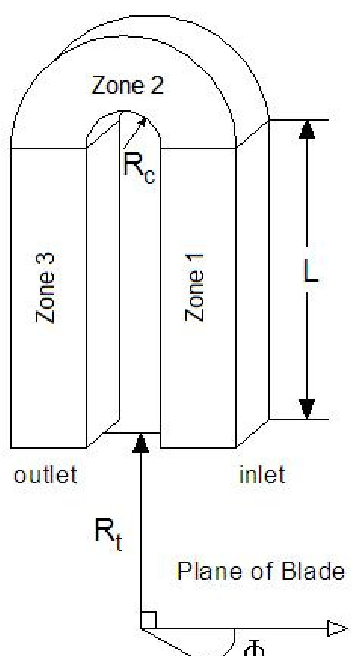
۵-۶-۵- اثر دوران کانال

پیش از بررسی اثر دوران بر جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده لازم است که این اثر بر جریان و انتقال حرارت سیال نیوتنی مورد مطالعه قرار گیرد تا ابتداً بتوان اثر دوران را به طور مستقل و در غیاب اثرات الاستیک مورد بررسی قرار داد. به دلیل صورت ساده معادله ساختاری سیال نیوتنی، بررسی جریان در حال توسعه آن امکانپذیر است. در مطالعه جریان در حال توسعه در کانال خمیده استفاده از دو کانال مستقیم در ورودی و خروجی کانال خمیده متداول است تا بتوان اثرات مربوط به جریان ورودی و خروجی از کانال خمیده را بطور صحیح تری اعمال نمود. به همین دلیل هندسه کلی جریان در حال توسعه بصورت یک کانال U شکل چرخان خواهد بود. در شکل (۵-۵۱)، این کانال U شکل نشان داده شده است. مطابق شکل، نواحی مستقیم سمت ورودی و خروجی به ترتیب بصورت نواحی ۱ و ۳ و ناحیه خمیده بصورت ناحیه ۲ شماره گذاری شده است. در اینجا معادلات حاکم در نواحی (۱) و (۳) در دستگاه مختصات کارتزین و در ناحیه ۲ در دستگاه مختصات استوانه ای بصورت کوپل حل شده است. مطابق شکل، R_t شعاع دوران کانال، R_c شعاع بخش خمیده کانال، L طول نواحی ۱و۳ و ϕ زاویه صفحه جریان کانال خمیده نسبت به محور دوران است. تعداد گره ۳۰×۳۰ در هر مقطع و نسبت دو به یک برای طول به عرض سلولها در نظر گرفته شده است. همچنین شبیه سازی جریان در حال توسعه نیوتنی در شرایط $\mathrm{Re}=400$، $\mathrm{R}o=1$، $\delta=0.25$، $\kappa=1$ و $L/D_h=7$ صورت گرفته است.

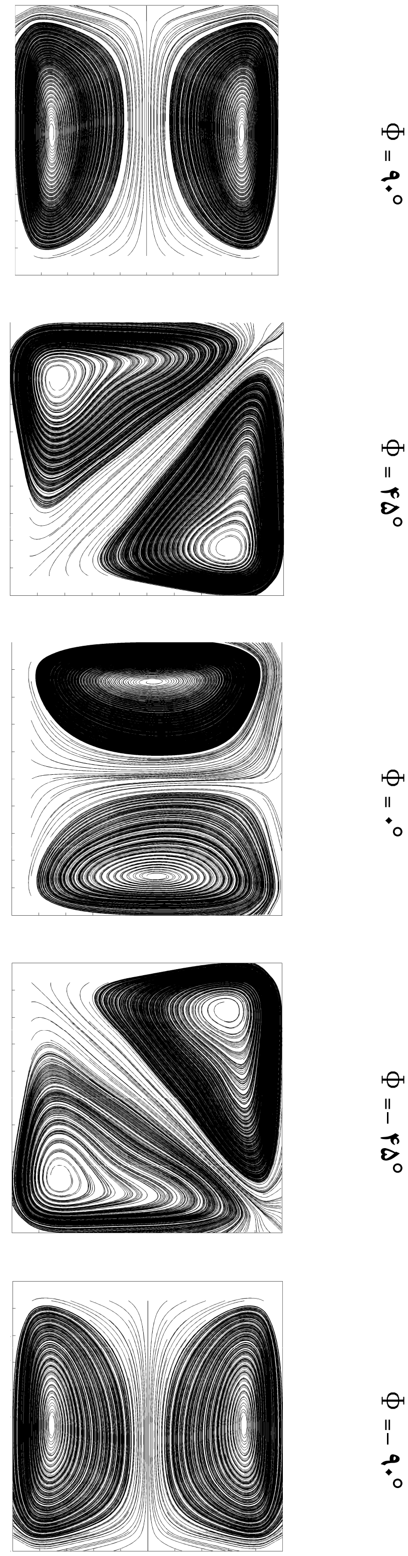
در شکل (۵-۵۲) جریانهای ثانویه در وسط ناحیه اول و به ازای زوایای ϕ مختلف یک مسیر چرخان نشان داده شده‌اند. از آنجا که ناحیه اول در واقع یک کانال مستقیم محسوب می گردد، مشاهده می شود که ایجاد دوران سبب تشکیل گردابه هایی در کانال مستقیم می شود حال آنکه جریان سیال نیوتنی در کانال مستقیم ایستا فاقد هرگونه جریان ثانویه ای است. تشکیل این جریانهای ثانویه ناشی از اثر نیروهای اینرسی ناشی از شتاب کریولیس است. مطابق شکل در $\varphi=-90^{\circ}$، جهت نیروی کریولیس به سمت

دیواره خارجی است، حال آنکه تغییر زاویه φ، تغییر در جهت گردابه ها را در پی دارد که این پدیده ناشی از تغییر جهت نیروی کریولیس است.

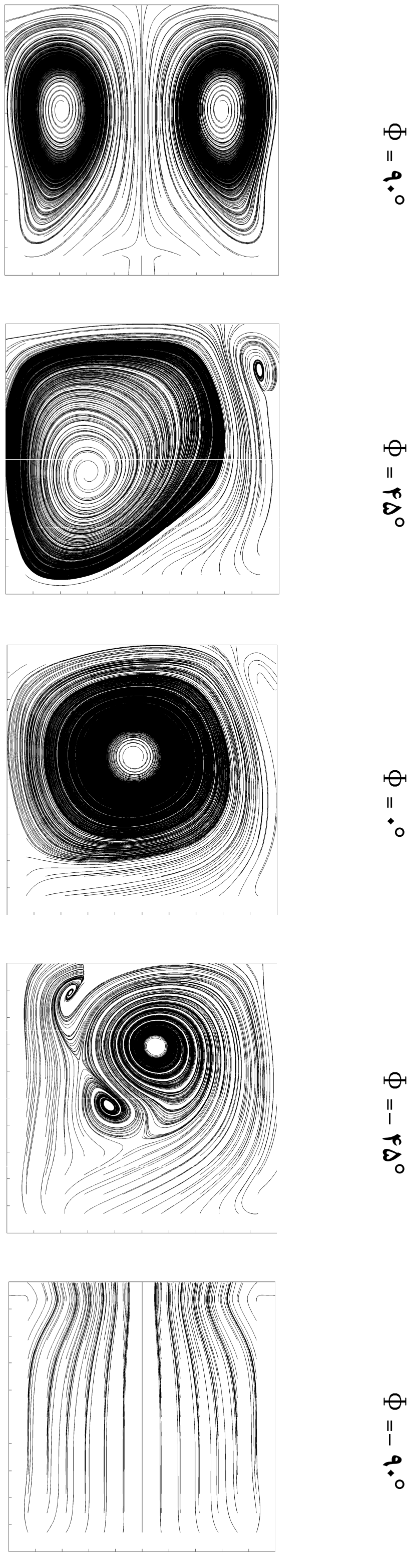
در شکل (۵-۵۳) تداخل اثر گردابه‌های ناشی از دوران و انحنا در وسط ناحیه خمیده ($\theta = 90^{\circ}$) بررسی شده است. در کانال خمیده هر دو اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنای کانال و اثر نیروی کریولیس می تواند که سبب تشکیل جریانهای ثانویه شود. مطابق شکل، این گردابه‌ها در $\varphi = +90^{\circ}$ هم جهت هستند و یکدیگر را تقویت می‌کنند ولی به تدریج با کاهش زاویه φ، جهت دروان این گردابه ها نسبت به هم تغییر پیدا می کند و در نتیجه اقدام به تضعیف یکدیگر می نمایند به نحوی که در $\varphi = -90^{\circ}$ اثر یکدیگر را کاملاً خنثی می‌کنند.



شکل (۵-۵۱): هندسه جریان نیوتنی در حال توسعه در کانال خمیده چرخان [۱۳۳]



شکل (۵-۵۲): جریانهای ثانویه در وسط ناحیه اول به ازای زوایای Φ مختلف در Ro =۱ [۱۳۳]

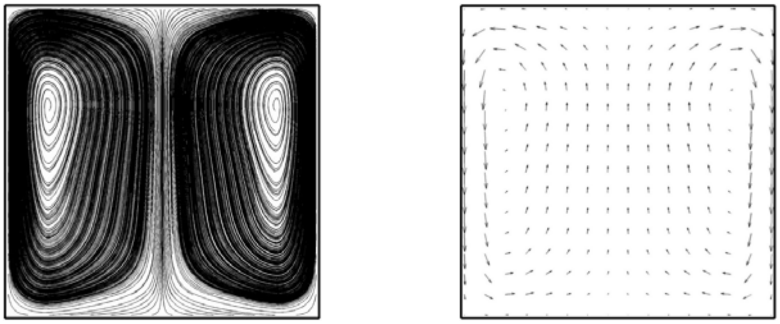


شکل (۵-۵۳): جریانهای ثانویه در وسط ناحیه دوم به ازای زوایای Φ مختلف در Ro =۱ [۱۳۳]

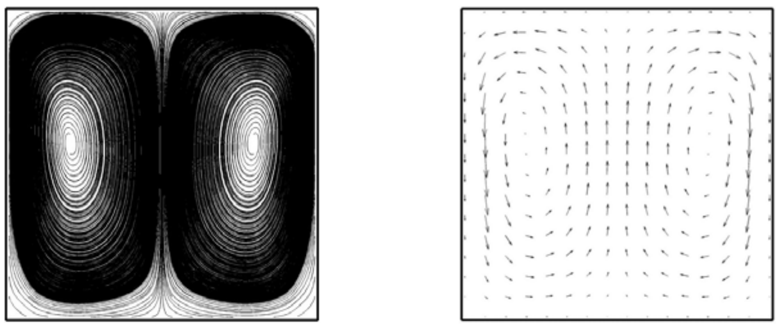
در ادامه اثر دوران بر جریان توسعه یافته سیال CEF در کانال خمیده چرخان مورد بررسی قرار می گیرد. مطابق شکل (۱-۵۲)، محور دوران این جریان در مرکز انحنای کانال قرار داشته و این محور به مسیر انحنای کانال عمود است (در جهت z قرار دارد). در شکل (۵-۵۴) خطوط جریانهای ثانویه سیال CEF در حالت $\mathrm{Re}=20$ ، $\delta=0.15$ ، $\kappa=1$ و $We=0.0$ نشان داده شده است. در این شرایط به دلیل نبود اثرات اختلاف تنش های نرمال ($We=0.0$)، مدل CEF به مدل سیال GNF ساده می شود. در اینجا خواص ویسکومتریک مطابق خواص مرجع ارائه شده در جدول (۵-۵) در نظر گرفته شده است. مطابق شکل، با ایجاد دوران مثبت، سرعت جریانهای ثانویه افزایش یافته و فرم این جریانها نیز دستخوش تغییر می شود که این پدیده ناشی از اثر نیروی کریولیس ناشی از دوران است. با مقایسه جریانهای ثانویه مربوط به حالت $Ro=3$ با حالت $Ro=-3$ می توان دریافت که امکان بر عکس شدن جهت چرخش جریانهای ثانویه در اعداد دوران منفی جریان سیال GNF وجود دارد. با توجه به اینکه در دوران مثبت جهت نیروی کریولیس با جهت نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا هم جهت است بنابراین میزان سرعت جریان های ثانویه در اعداد دوران مثبت نسبت به مقادیر نظیرشان در اعداد دوران منفی بیشتر است. مطابق شکل، جریانهای ثانویه ناشی از انحنا و دوران اثر یکدیگر را در $Ro=-1.02$ خنثی می نمایند. در این حالت، جریانهای ثانویه به شکل سه جفت گردابه نسبتاً ضعیف با ماکزیمم سرعت ۶/۸۶۸۶٪ نسبت به سرعت جریان اصلی ظاهر شده اند.

در شکل (۵-۵۵) توزیع سرعت محوری، فشار استاتیکی و ویسکوزیته سیال GNF در مقادیر مختلف اعداد دوران نشان داده شده است. مطابق شکل، اثر نیروی کریولیس و گریز از مرکز ناشی از دوران سبب بروز تغییرات قابل توجه در توزیع سرعت محوری، فشار و ویسکوزیته می شود. اثر نیروی کریولیس سبب متمایل شدن توزیع سرعت محوری به سمت دیواره خارجی در $Ro=3$ شده است حال آنکه در $Ro=-3$، توزیع سرعت محوری به سمت دیواره داخلی متمایل است.

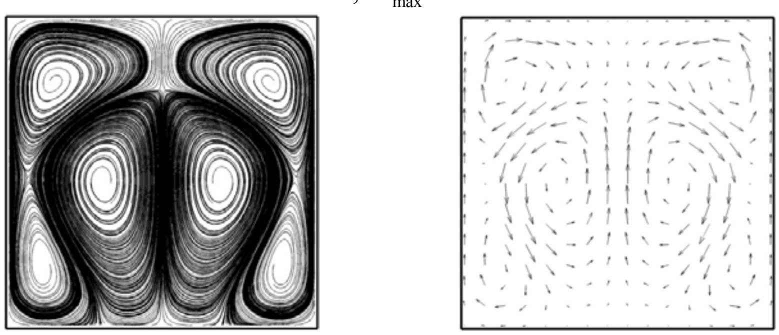
$Ro = 3,\ S_{\max} = 38.7609\%$



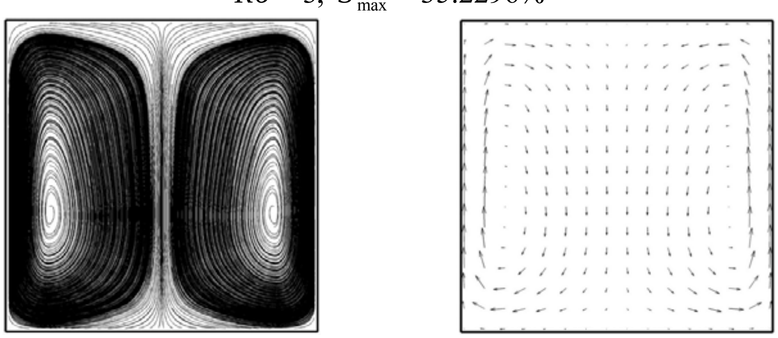
$Ro = 0,\ S_{\max} = 26.1562\%$



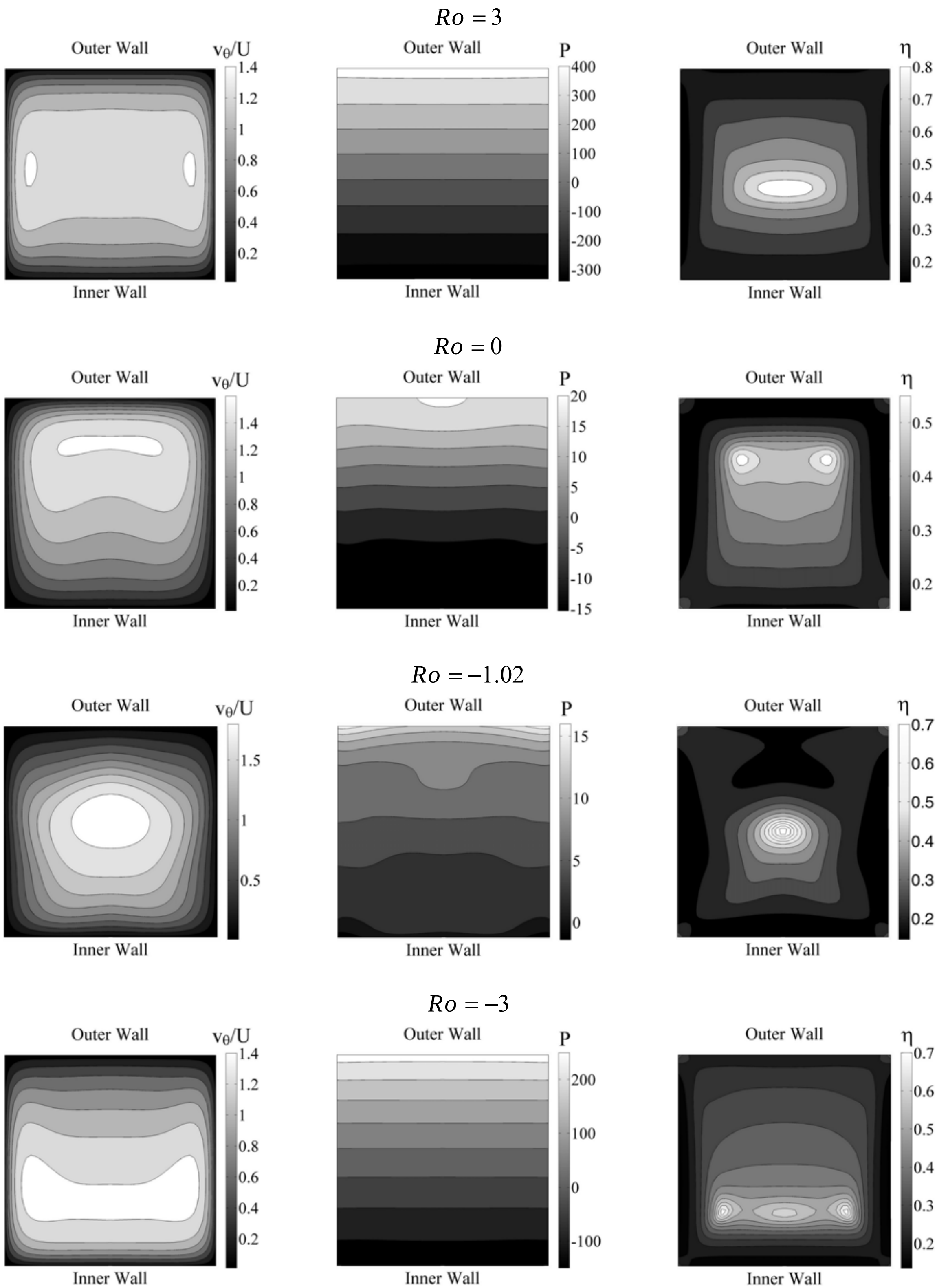
$Ro = -1.02,\ S_{\max} = 6.8686\%$



$Ro = 3,\ S_{\max} = 35.2296\%$



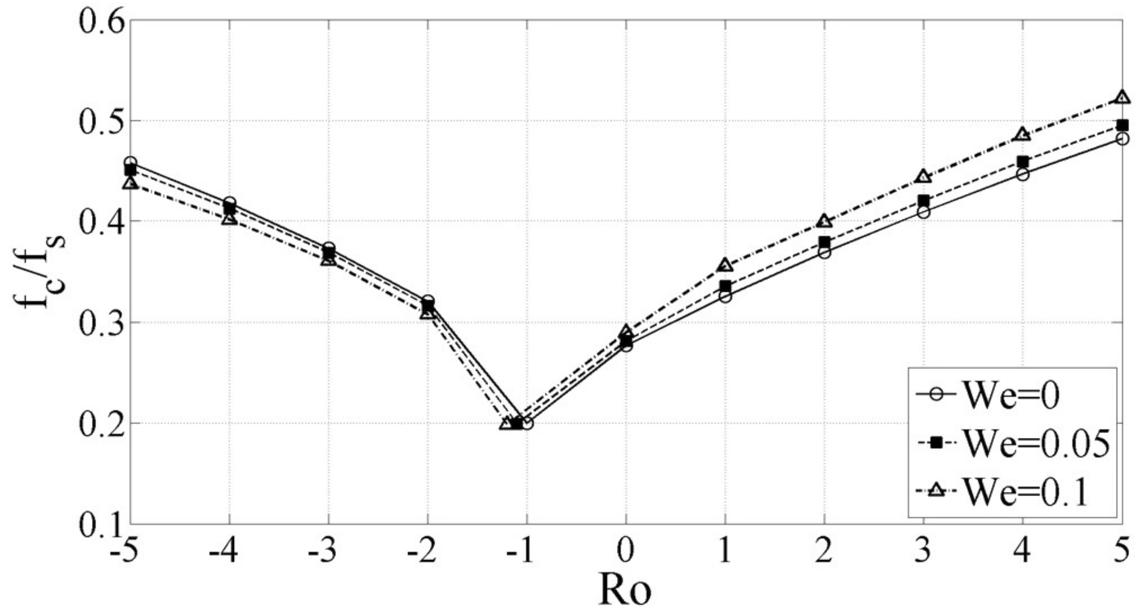
شکل (۵-۵۴): جریانهای ثانویه سیال GNF در $\mathrm{Re} = 20$ ، $\delta = 0.15$ ، $\kappa = 1$ و $We = 0.0$



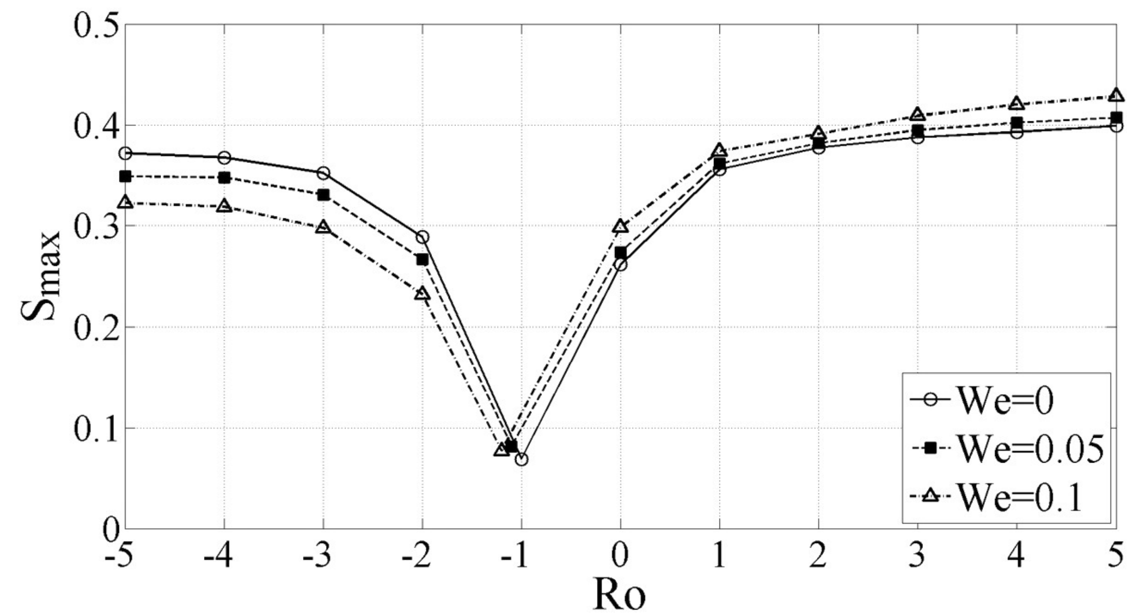
شکل (۵-۵۵): توزیع سرعت محوری، فشار و ویسکوزیته سیال GNF در $\mathrm{Re} = 20$، $\delta = 0.15$، $\kappa = 1$ و $We = 0.0$

مطابق شکل (۵-۵۵)، توزیع فشار نسبت به شعاع دوران مسیر در اعداد دوران $Ro = \pm 3$ خطی است. از آنجا که مقدار نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا با شعاع دوران متناسب است ($r\omega^2$)، لذا با توجه به این شکل می توان دریافت که فشار استاتیکی در حالات $Ro = \pm 3$ عمدتاً با اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از دوران بالانس شده است. همچنین گرایان فشار شعاعی در حالت $Ro = 3$ نسبت به حالت $Ro = -3$ بیشتر است که این موضوع ناشی از وابستگی جهت نیروی کریولیس به علامت عدد دوران است. به عبارت دیگر از آنجا که در اعداد دوران مثبت، نیروی کریولیس ناشی از سرعت محوری در جهت نیروی گریز از مرکز و در اعداد دوران منفی در خلاف این جهت قرار دارد لذا گرادیان فشار شعاعی در اعداد دوران مثبت از اعداد دوران منفی بیشتر خواهد بود.

در شکل های (۵-۵۶) و (۵-۵۷) اثر عدد دوران بر نسبت مقاومت کانال خمیده به کانال مستقیم (f_c / f_s) و ماکزیمم سرعت جریانهای ثانویه ($S_{\max}$) در اعداد وایزنبرگ مختلف نشان داده شده است. در اینجا $\mathrm{Re} = 20$، $\delta = 0.15$ و $\kappa = 1$ فرض شده است. مطابق شکل، برای هر عدد وایزنبرگ، عدد دوران منفی وجود دارد که در آن مقدار f_c / f_s و $S_{\max}$ کمینه است که این پدیده ناشی از خنثی شدن اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا و خواص الاستیک با اثر متضاد نیروی کریولیس است. عدد دوران مربوط به این حالت کمینه به عدد دوران بحرانی موسوم است. در اعداد دوران کوچکتر از عدد دوران بحرانی، اثر نیروی کریولیس بر اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا غلبه کرده و جریانهای ثانویه در خلاف جهت چرخش گردابه های تیلور-گورتلر تشکیل می شوند. مطابق شکل، ازدیاد عدد وایزنبرگ سیال CEF (اختلاف تنش نرمال اول)، سبب افزایش شدت جریانهای ثانویه و نسبت مقاومت در اعداد دوران بزرگتر از عدد دوران بحرانی می شود. در اعداد دوران کوچکتر از عدد دوران بحرانی این اثر بر عکس است و ازدیاد عدد وایزنبرگ سبب کاهش مقدار f_c / f_s و $S_{\max}$ شده است. همچنین ازدیاد عدد وایزنبرگ کاهش اندکی در مقدار عدد دوران بحرانی را در پی دارد.



شکل (۵-۵۶): اثر عدد دوران بر نسبت مقاومت در اعداد وایزنبرگ مختلف
و در $Re = 20$ ، $\delta = 0.15$ ، $\chi = 0$ و $\kappa = 1$



شکل (۵-۵۷): اثر عدد دوران بر ماکزیمم سرعت گردابه ها در اعداد وایزنبرگ مختلف
و در $Re = 20$ ، $\delta = 0.15$ ، $\chi = 0$ و $\kappa = 1$

در شکل های (۵-۵۸) و (۵-۵۹) اثر عدد دوران بر نسبت مقاومت و شدت جریانهای ثانویه سیال CEF در مقادیر مختلف ضریب χ (ثابت اختلاف تنش نرمال دوم منفی) نشان داده شده است. مطابق شکل، در اعداد دوران بزرگتر از عدد دوران بحرانی، ازدیاد مقدار اختلاف تنش نرمال دوم منجر به کاهش مقدار f_c/f_s و $S_{\max}$ شده است حال آنکه این روند در اعداد دوران کمتر از عدد دوران بحرانی کاملاً برعکس است. با مقایسه شکل های (۵-۵۸) و (۵-۵۹) با دیاگرامهای (۵-۵۶) و (۵-۵۷) می توان دریافت که اثر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر جریان در کانال های خمیده چرخان کاملاً متضاد است که چنین روندی مشابه اثر این توابع ویسکومتریک بر جریان در کانال های ایستا است.

در ادامه بر روی مکانیزم اثر دوران و اختلاف تنش های نرمال بر جریان در کانال های چرخان بحث می شود. با صرفنظر از اثر اختلاف تنش نرمال های نرمال، رابطه تعادلی نیروها در ناحیه هسته جریان اینرسی در کانال خمیده چرخان بر اساس رابطه (۳-۷) بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathrm{Re}\frac{{v_\theta}^2}{r}+2Ro.v_\theta+r.Ro^2\approx\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (۱۵-۵)$$

مطابق رابطه فوق، در ناحیه هسته جریان، اثرات نیروهای گریز از مرکز ناشی از انحنا و دوران و نیروی کریولیس با گرادیان فشار شعاعی در حال تعادل است. با توجه به رابطه (۵-۱۵)، در اعداد روزبی مثبت، اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا با اثر نیروی کریولیس هم جهت (هم علامت) می باشد. لذا ایجاد دوران مثبت سبب ازدیاد گرادیان فشار شعاعی در ناحیه هسته جریان می شود. با نزدیک شدن به سمت جداره خارجی، سرعت محوری و در نتیجه اثرات نیروهای گریز از مرکز ناشی از انحنا و نیروی کریولیس به سمت صفر میل می کند حال آنکه اثر گرادیان فشار شعاعی در این ناحیه همچنان بالا است و برای حفظ تعادل، مکانیزم مومنتوم وارد عمل می شود و سبب تشکیل گردابه هایی هم جهت با گردابه های تیلور-گورتلر می گردد. در نتیجه با ایجاد دوران مثبت، برآیند شدت جریانهای ثانویه افزایش می یابد. با توجه به رابطه (۵-۱۵)، ایجاد دوران منفی اثری بر عکس داشته و سبب کاهش اثر نیروی گریز از مرکز

ناشی از انحنا می شود. چنانچه اثر نیروی کریولیس در اعداد دوران منفی به اندازه کافی بزرگ باشد می تواند اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا را خنثی نماید و در اعداد دوران کوچکتر از عدد دوران بحرانی سبب تشکیل جریانهای ثانویه در خلاف جهت گردابه های تیلور-گورتلر شود.

با صرفنظر نمودن از اختلاف تنش نرمال دوم در رابطه (۳-۷) و همچنین با فرض مقدار ثابت برای ضریب اختلاف تنش نرمال اول در این رابطه، معادله زیر برای تعادل نیروها در ناحیه هسته جریان اینرسی بدست می آید:

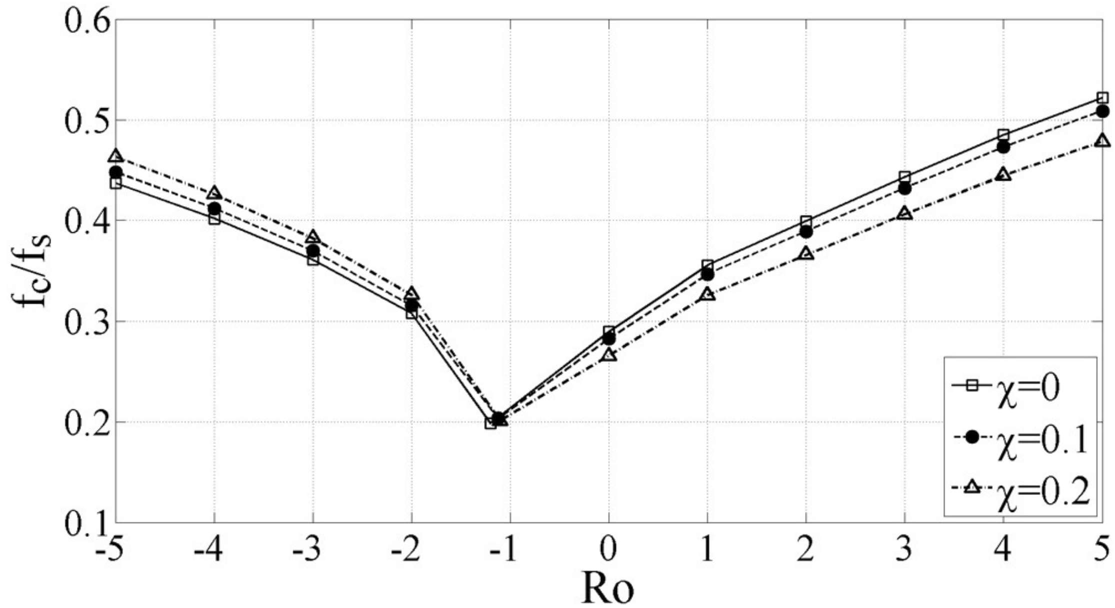
$$\mathrm{Re}\frac{{v_\theta}^2}{r}+2Ro.v_\theta+r.Ro^2\approx\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \qquad (۱۶-۵)$$

مطابق رابطه فوق، در هسته جریان ویسکوالاستیک فاقد اثر اختلاف تنش نرمال دوم، علاوه بر اثر نیروهای گریز از مرکز ناشی از انحنا و دوران و نیروی کریولیس، اثر تنش نرمال محوری نیز در تعادل میان نیروها دخیل است. در شکل (۵-۶۰) کانتورهای تنش نرمال محوری در مقادیر مختلف عدد دوران و به ازای مقادیر مختلف عدد وایزنبرگ نشان داده شده است. مطابق شکل به ازای تمام اعداد دوران و در نبود اثر هر دو اختلاف تنش نرمال ($We=0.0$)، مقدار تنش نرمال محوری بسیار اندک است. اما در حالت $We=0.05$ و $\chi=0.0$ مقدار تنش نرمال محوری به طور قابل توجهی افزایش پیدا می کند به نحوی که ماکزیمم آن نسبت به حالت $We=0.0$ حدود 10^3 مرتبه بزرگتر است. همانند جریان در کانال های خمیده ایستا، در جریان در کانال های خمیده چرخان نیز تنش نرمال محوری بزرگی در نزدیکی دیوارهای سمت انحنای کانال (دیواره داخلی/خارجی) می شود. وجود این تنش نرمال محوری بزرگ در سمت جداره داخلی/خارجی (بسته به دوران مثبت یا منفی) سبب حادتر شدن عدم تعادل میان نیروها در این ناحیه می شود که این موضوع ازدیاد شدت جریانهای ثانویه را در پی دارد.

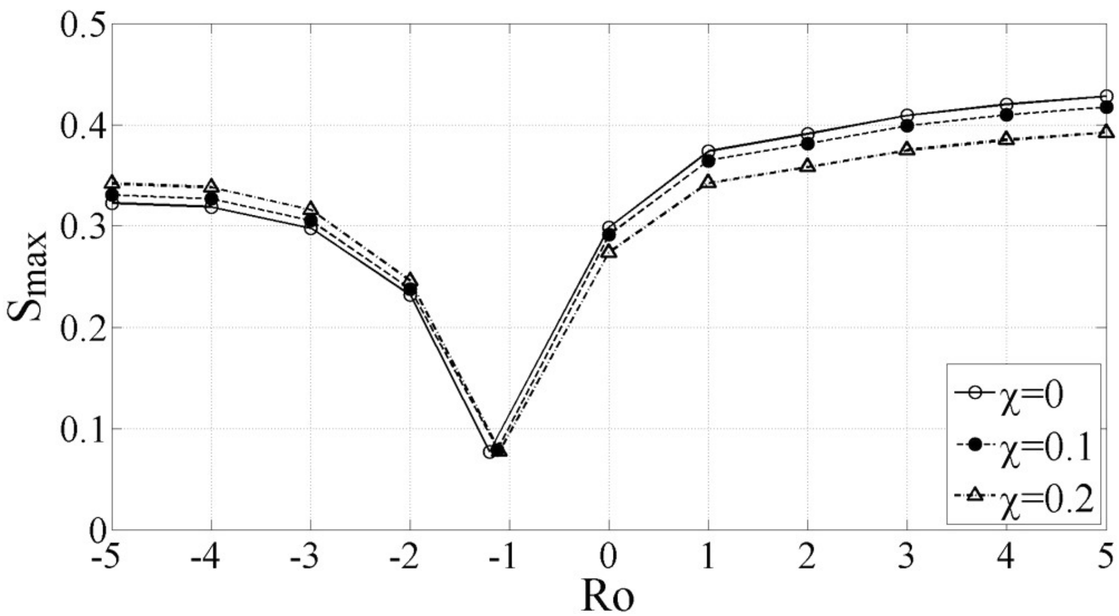
در ادامه اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر این جریان مورد بررسی قرار می گیرد. با توجه به رابطه (۳-۷)، صورت کلی تعادل نیروها در ناحیه هسته جریان اینرسی به شکل زیر است:

$$\mathrm{Re}\frac{{v_\theta}^2}{r}+2Ro.v_\theta+r.Ro^2\approx\frac{\partial p}{\partial r}+\Psi_1 f_1(v_\theta)+\Psi_2 f_2(v_\theta) \qquad (۱۷-۵)$$

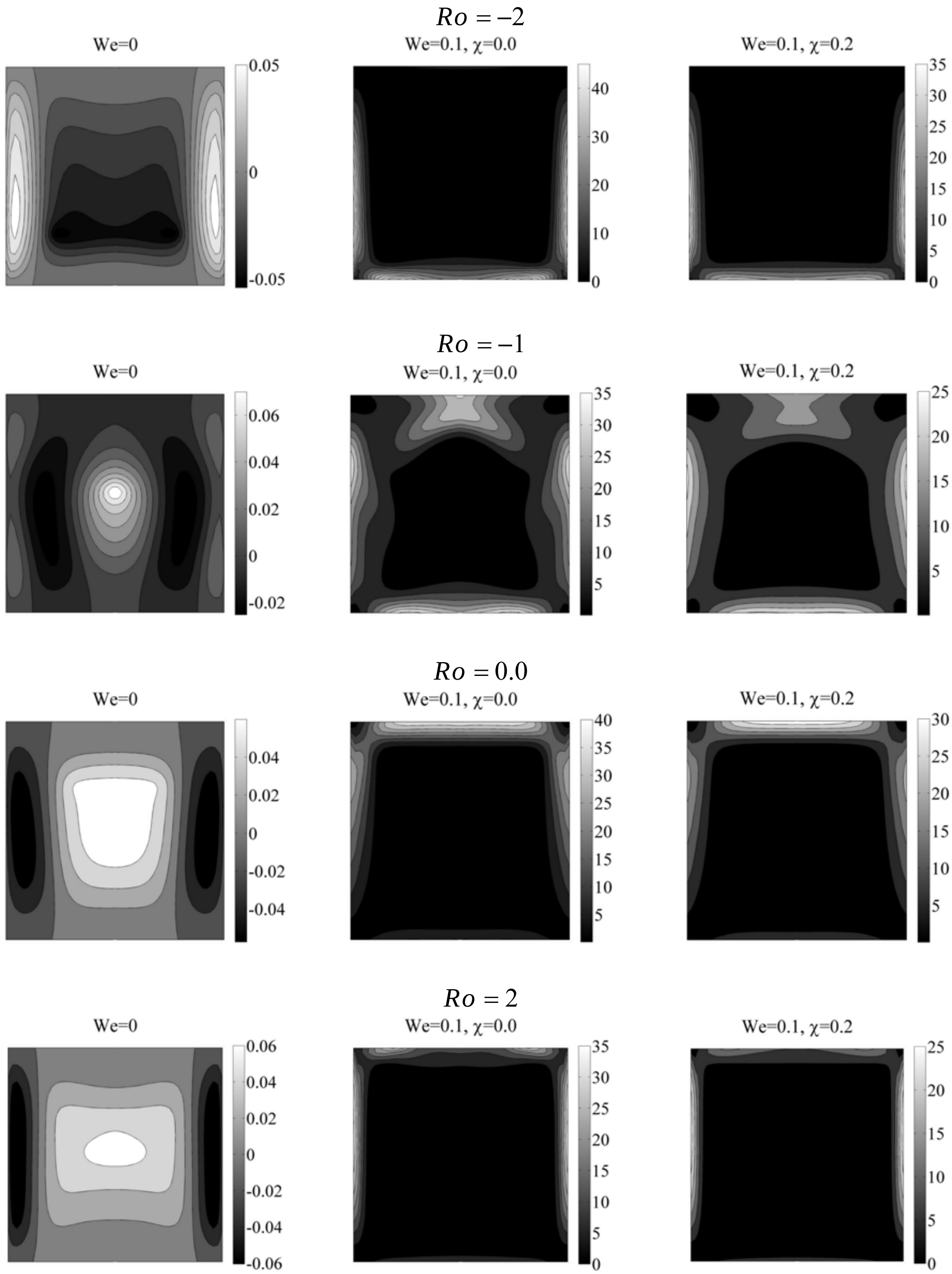
مطابق رابطه فوق، اثر هر دو اختلاف تنش نرمال اول و دوم بر تعادل میان نیروها در ناحیه هسته جریان اینرسی در کانال خمیده چرخان موثر است. در شکل (۵-۶۰) اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر توزیع تنش نرمال محوری و در شکل (۵-۶۱) این اثر بر پارامتر Γ (به رابطه (۵-۲) رجوع شود) نشان داده شده است. همانند جریان در کانال خمیده ایستا، در کانال چرخان نیز اختلاف تنش نرمال دوم به دو صورت کاهش تنش نرمال محوری و نیز ایجاد مولفه های تنش τ_{rr} و τ_{rz} بر میدان جریان تاثیر می گذارد. مطابق رابطه تحلیلی (۳-۳-۴)، ایجاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی، کاهش تنش نرمال محوری را در پی دارد. این پدیده بخوبی در شکل (۵-۶۰) نیز مشهود است. مطابق شکل، در تمامی اعداد دوران، ایجاد تنها ۲۰٪ اختلاف تنش نرمال دوم منفی سبب ایجاد کاهش قابل توجه در مقدار تنش نرمال محوری می شود. مطابق روابط تحلیلی تقریبی (۳-۳-۱) و (۳-۳-۳) ایجاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی سبب تقویت قابل توجه مولفه های تنش τ_{rr} و τ_{rz} می شود. شایان ذکر است که دیورژانس این دو مولفه تنش در رابطه مومنتوم شعاعی موثر است (رابطه (۲-۱۰-۳) را ببینید). در شکل (۵-۶۱) اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر دیورژانس این مولفه های تنش (Γ) نشان داده شده است. مطابق شکل، ایجاد اختلاف تنش نرمال دوم سبب بروز تغییرات قابل توجه در توزیع این دو مولفه تنش می شود. برای مثال این تغییرات در حالت ایستا ($Ro=0$) به گونه ای است که سبب ایجاد مقادیر بزرگ منفی برای Γ در ناحیه سمت دیواره خارجی می شود که این اثر در تضاد با مقدار مثبت بزرگ تنش نرمال محوری در این ناحیه است (شکل (۵-۶۰) را ببینید). به این ترتیب ایجاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی از دو طریق کاهش تنش نرمال محوری و ایجاد تغییرات عمده در توزیع مولفه های تنش τ_{rr} و τ_{rz} سبب کاهش شدت جریانهای ثانویه در کانال های خمیده چرخان می شود.



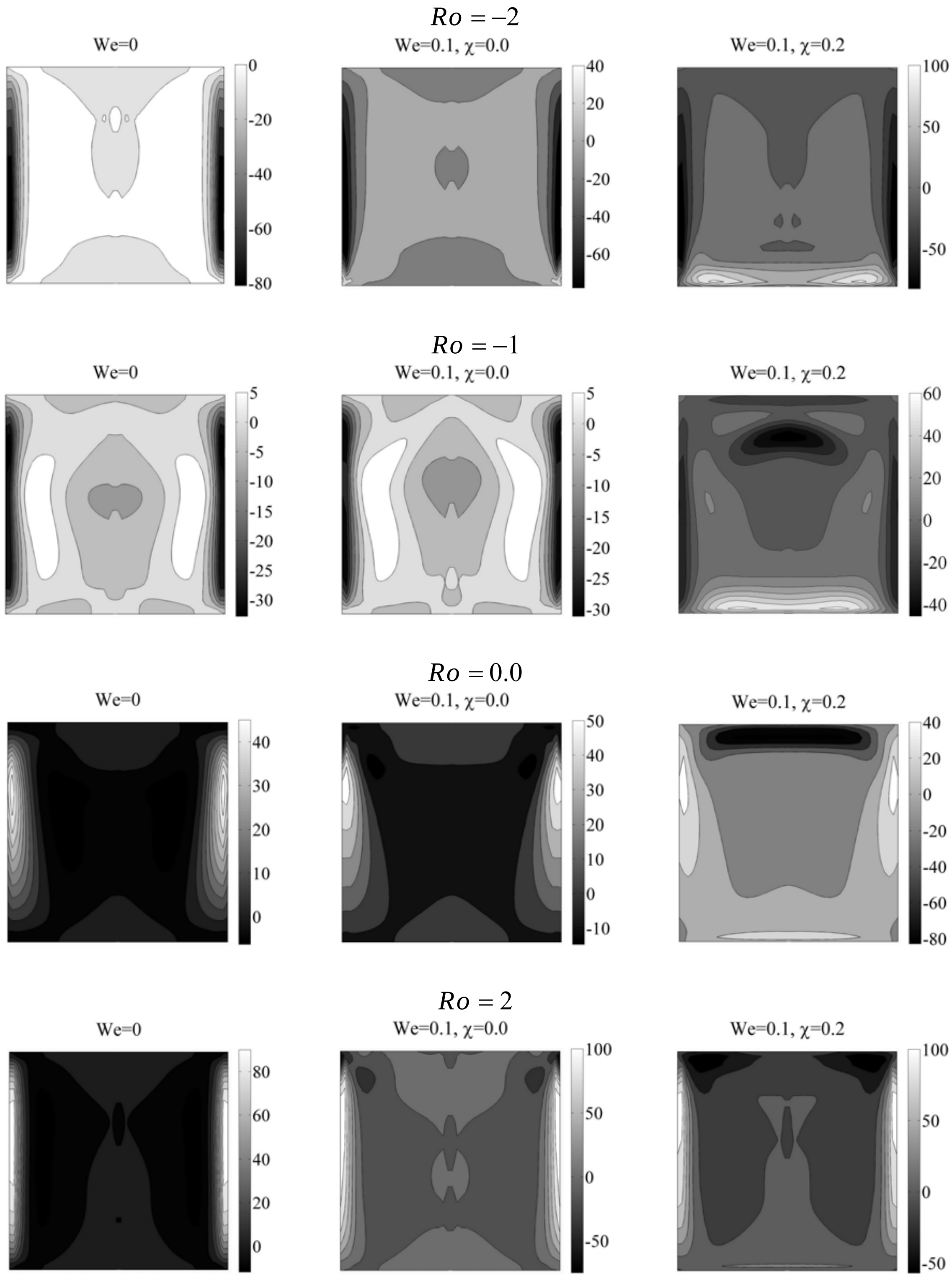
شکل (۵-۵۸): اثر عدد دوران بر نسبت مقاومت در مقادیر مختلف اختلاف تنش نرمال دوم منفی و در $\mathrm{Re}=20$ ، $\delta=0.15$ ، $We=0.1$ و $\kappa=1$



شکل (۵-۵۹): اثر عدد دوران بر نسبت مقاومت در مقادیر مختلف اختلاف تنش نرمال دوم منفی و در $\mathrm{Re}=20$ ، $\delta=0.15$ ، $We=0.1$ و $\kappa=1$

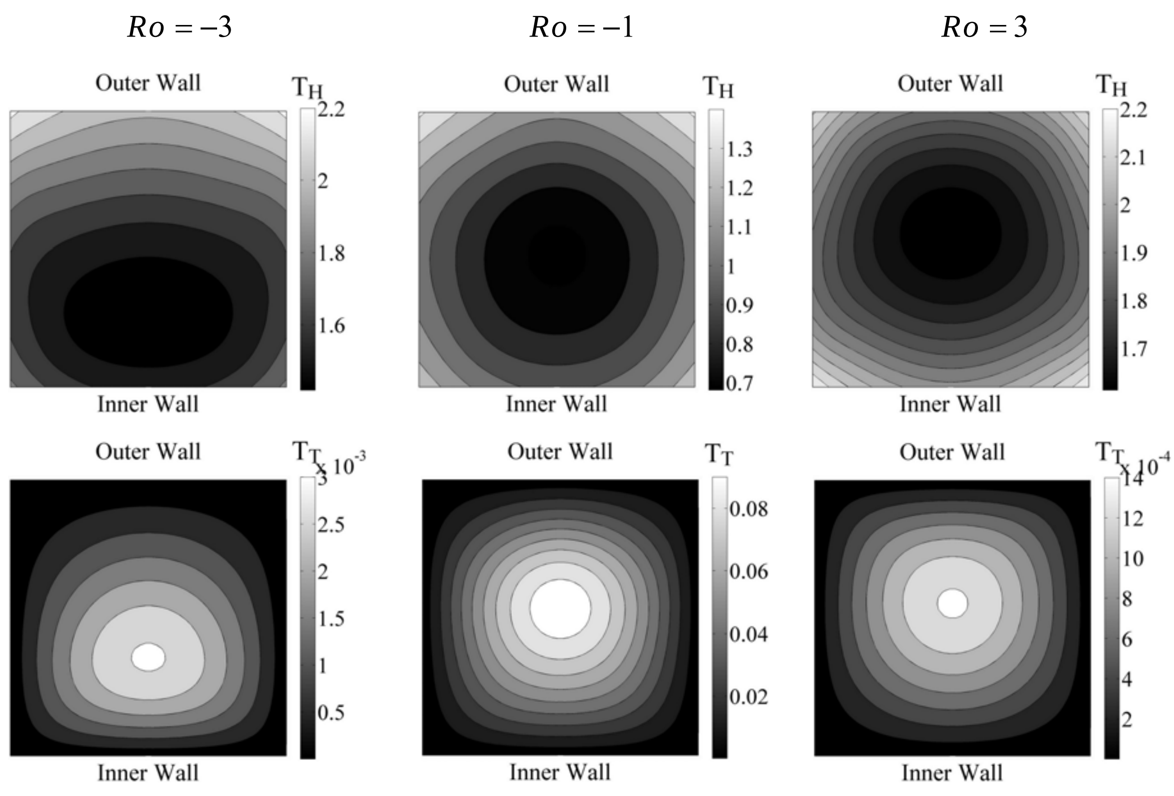


شکل (۵-۶۰): توزیع تنش نرمال محوری در اختلاف تنش های نرمال اول و دوم مختلف
و در $\mathrm{Re} = 20$، $\delta = 0.15$، $We = 0.05$ و $\kappa = 1$



شکل (۵-۶۱): توزیع پارامتر Γ (دیورژانس مولفه های تنش های تنش τ_{rr} و τ_{rz} در جهت شعاعی) در اختلاف تنش های نرمال اول و دوم مختلف و در $\mathrm{Re}=20$، $\delta=0.15$، $We=0.05$ و $\kappa=1$

در ادامه انتقال حرارت جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده مورد بررسی قرار می گیرد. در اینجا $\mathrm{Re}=20$، $\delta=0.15$، $Br=0$، $\kappa=1$ فرض شده و سایر خواص ویسکومتریک مطابق داده های جدول (۵-۵) در نظر گرفته شده است. در شکل (۵-۶۲) توزیع دمای بی بعد شار ثابت و دما ثابت در اعداد دوران مختلف نشان داده شده است. مطابق شکل، توزیع دما از میدان جریان تبعیت می کند. برای مثال در عدد روزبی ۳-، توزیع دما به سمت دیواره داخلی متمایل است. این پدیده ناشی از آن است که در $\mathrm{R}o=-3$، جریانهای ثانویه در راستای خط تقارن از سمت دیواره بیرونی به سمت دیواره داخلی برقرار هستند و توزیع سرعت محوری به سمت جداره داخلی متمایل است.



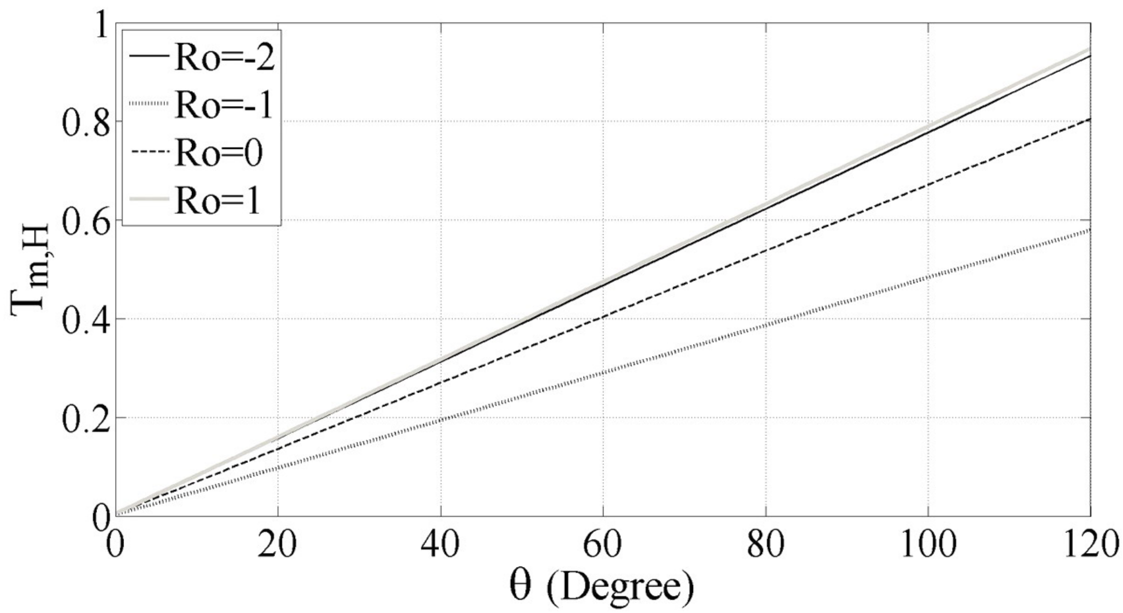
شکل (۵-۶۲): توزیع دمای بی بعد شار ثابت و دما ثابت در مقطع $\theta=180^{\circ}$ و
به ازای مقادیر مختلف عدد دوران در شرایط $\mathrm{Re}=20$، $\delta=0.15$، $We=0$، $Br=0$ و $\kappa=1$

مطابق شکل (۵-۶۲) با افزایش عدد روزبی به سمت مقادیر مثبت، توزیع دما نیز به سمت جداره خارجی متمایل می شود که این پدیده ناشی از تغییر جهت نیروی کریولیس به سمت دیواره خارجی و بر عکس شدن جهت چرخش گردابه ها است. در شکل های (۵-۶۳) و (۵-۶۴) توزیع دمای متوسط در حالات شار ثابت و دما ثابت نشان داده شده است. مطابق شکل (۵-۶۳)، کمترین میزان دمای متوسط جریان مربوط به عدد دوران بحرانی ($Ro=-1$) است. علت این پدیده را می توان به فعالیت اندک جریانهای ثانویه در این شرایط نسبت داد که سبب کمتر شدن اختلاط جریان و در نتیجه دمای متوسط آن شده است. همچنین در $Ro=1$ و $Ro=-2$، اثر نیروی کریولیس سبب تشکیل جریانهای ثانویه ای قویتر نسبت به کانال ایستای خمیده ($Ro=0$) شده که این موضوع سبب بزرگتر شدن مقدار دمای متوسط در این حالات نسبت به کانال ایستا شده است. مطابق شکل (۵-۶۴)، روند مشابهی نیز برای حالت دما ثابت قابل مشاهده است. در این حالت، بی بعد سازی دما به گونه ای انجام شده که مقادیر دمای بی بعد صفر معرف دمای دیواره است (رابطه (۲-۱۹) را برای دمای بی بعد مربوط به شرایط مرزی دما ثابت در حال توسعه ببینید). با توجه به شکل (۵-۶۴)، مقدار انحراف دمای متوسط جریان از دمای دیواره (مقدار صفر) در عدد دوران بحرانی ($Ro=-1$) بیشتر از سایر حالات است، اما در حالات $Ro=1$ و $Ro=-2$ بر سرعت جریانهای ثانویه افزوده شده که این امر نزدیک شدن دمای متوسط جریان به دمای جداره را در پی دارد. در شکل های (۵-۶۵) و (۵-۶۶) توزیع عدد ناسلت متوسط محیطی مربوط به حالات شار ثابت و دما ثابت بر حسب زاویه انحنای کانال در اعداد دوران مختلف نشان داده شده است. مطابق شکل، در کلیه اعداد دوران، مقدار عدد ناسلت متوسط در شرایط $\theta>90^{\circ}$ به سمت مقدار ثابتی میل می کند و لذا در این شرایط انتقال حرارت جریان توسعه یافته شده است. مطابق شکل، کمترین توزیع عدد ناسلت مربوط به شرایط عدد دوران بحرانی است. همچنین با ایجاد دوران همگرد $Ro=1$ و پادهمگرد $Ro=-2$، مقدار عدد ناسلت متوسط محیطی در کانال خمیده چرخان نسبت به کانال ایستا

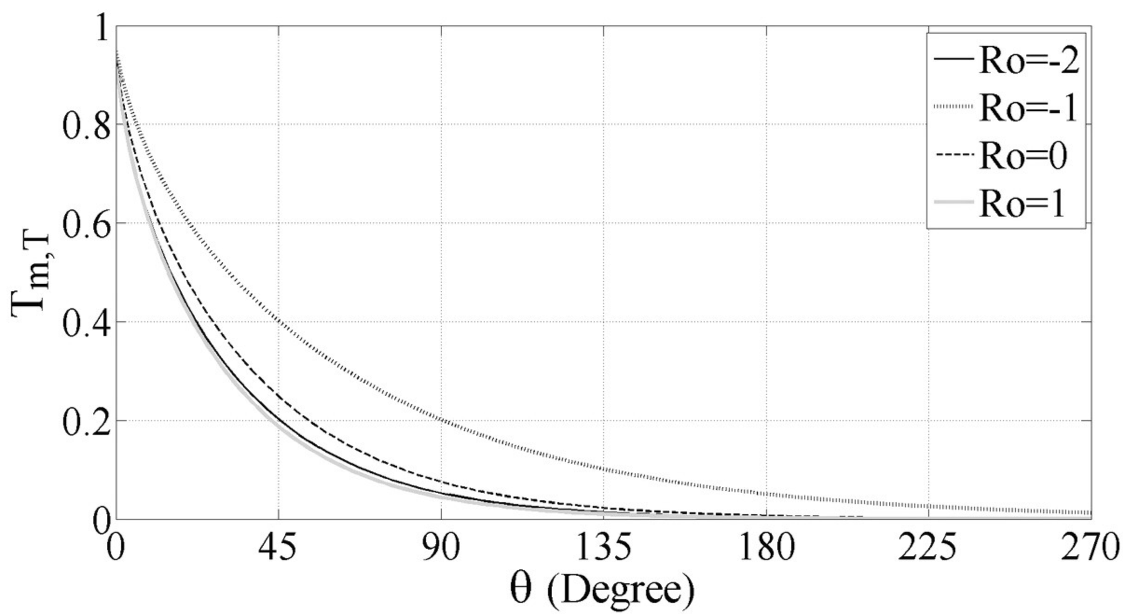
بیشتر می شود. در جدول (۵-۱۰) مقادیر عدد ناسلت متوسط مربوط به شرایط شار ثابت و دما ثابت توسعه یافته در اعداد دوران، وایزنبرگ و نیز مقادیر χ مختلف ارائه شده است. مطابق داده های این جدول، با افزایش و یا کاهش سرعت دوران نسبت به عدد دوران بحرانی ($Ro = -1$)، مقدار عدد ناسلت متوسط افزایش پیدا می کند که این امر ناشی از افزایش سرعت جریانهای ثانویه است. با تغییر عدد دوران در مقادیر بزرگتر از ۲+ و کوچکتر از ۳-، از نرخ افزایش عدد ناسلت کاسته می شود. این پدیده عمدتاً مربوط به افزایش قابل توجه نسبت مقاومت/کاهش دبی در اعداد دوران بزرگ مثبت و یا منفی است که سبب عدم تغییر قابل توجه عدد ناسلت شده است. مطابق داده های این جدول، ایجاد اختلاف تنش نرمال اول خالص ($We = 0.1,\ \chi = 0.0$) سبب ازدیاد عدد ناسلت متوسط در اعداد دوران بزرگتر از عدد دوران بحرانی شده است. این پدیده ناشی از افزایش سرعت جریانهای ثانویه در اثر اختلاف تنش نرمال اول است. همچنین از آنجا که ایجاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی (حالت $We = 0.1,\ \chi = 0.2$) سبب کاهش شدت جریانهای ثانویه می شود لذا ازدیاد این خاصیت سبب کاهش عدد ناسلت در شرایط $Ro > Ro_{cr}$ می شود. همچنین اثر هر دو اختلاف تنش نرمال اول و دوم در $Ro < Ro_{cr}$ بر عکس حالت $Ro > Ro_{cr}$ است.

جدول (۵-۱۰): مقادیر Nu_H و Nu_T جریان سیال CEF در اعداد دوران و
ضرایب اختلاف تنش های نرمال اول و دوم مختلف در شرایط $\mathrm{Re} = 20$، $\delta = 0.15$، $\mathrm{Pr} = 0.85$ و $\kappa = 1$

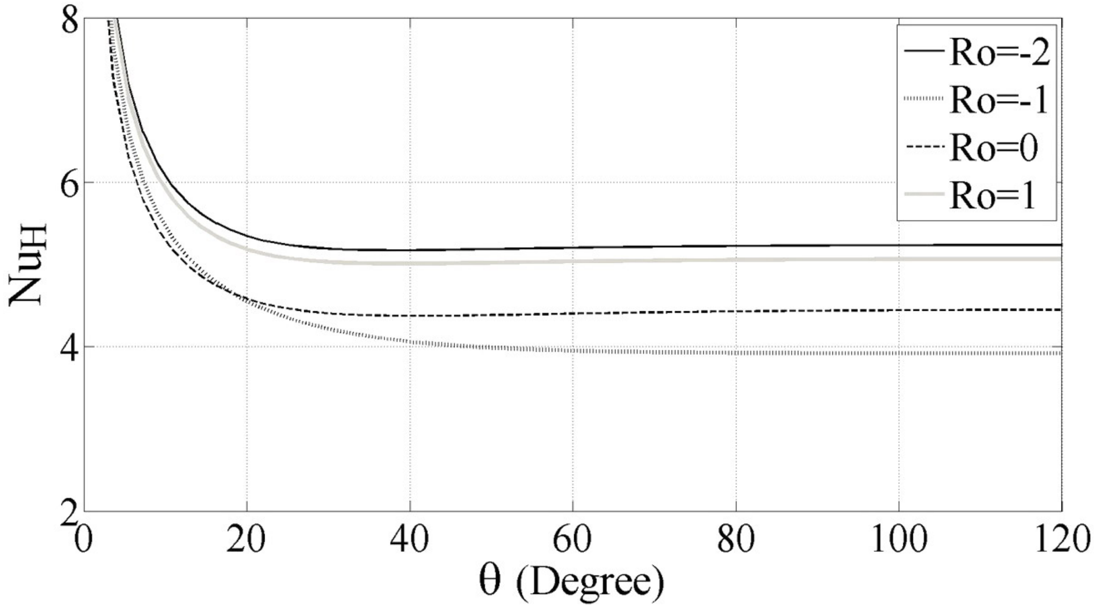
$We = 0.1,\ \chi = 0.2$		$We = 0.1,\ \chi = 0.0$		$GNF\ (We = 0.0)$		Ro
Nu_T	Nu_H	Nu_T	Nu_H	Nu_T	Nu_H	
4.1672	5.2645	4.1635	5.2433	4.1668	5.2640	-5
4.1661	5.2612	4.1622	5.2412	4.1653	5.2601	-4
4.1629	5.2563	4.1609	5.2317	4.1621	5.2547	-3
4.1611	5.2422	4.1563	5.2137	4.1592	5.2382	-2
3.2105	3.9612	3.1828	3.8831	3.1951	3.9172	-1
3.7725	4.3315	3.7911	4.5916	3.7892	4.4521	0
4.0284	5.0617	4.0352	5.1026	4.0299	5.0754	1
4.0345	5.0862	4.0376	5.1335	4.0351	5.0931	2
4.0379	5.0923	4.0398	5.1405	4.0383	5.1002	3
4.0388	5.0951	4.0408	5.1452	4.0397	5.1055	4
4.0393	5.0964	4.0412	5.1463	4.0401	5.1063	5



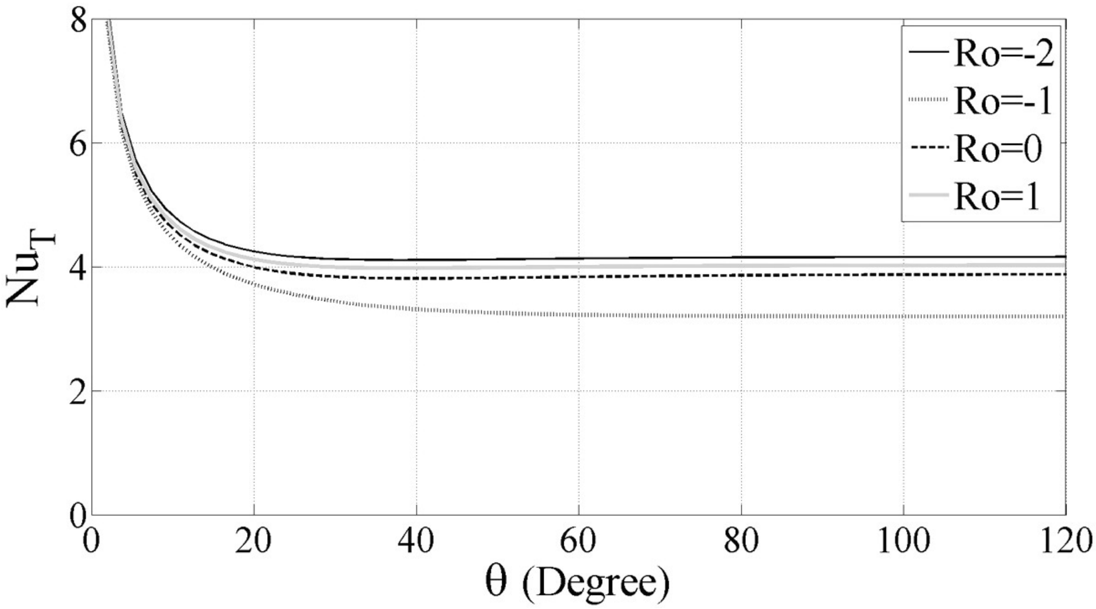
شکل (۵-۶۳): توزیع دمای متوسط بی بعد مربوط به حالت دما ثابت نسبت به
زاویه انحنای کانال تحت شرایط $\mathrm{Re}=20$، $\delta=0.15$، $We=0$، $Br=0$، $\mathrm{Pr}=0.85$ و $\kappa=1$



شکل (۵-۶۴): توزیع دمای متوسط بی بعد مربوط به حالت شار ثابت نسبت به
زاویه انحنای کانال تحت شرایط $\mathrm{Re}=20$، $\delta=0.15$، $We=0$، $Br=0$، $\mathrm{Pr}=0.85$ و $\kappa=1$

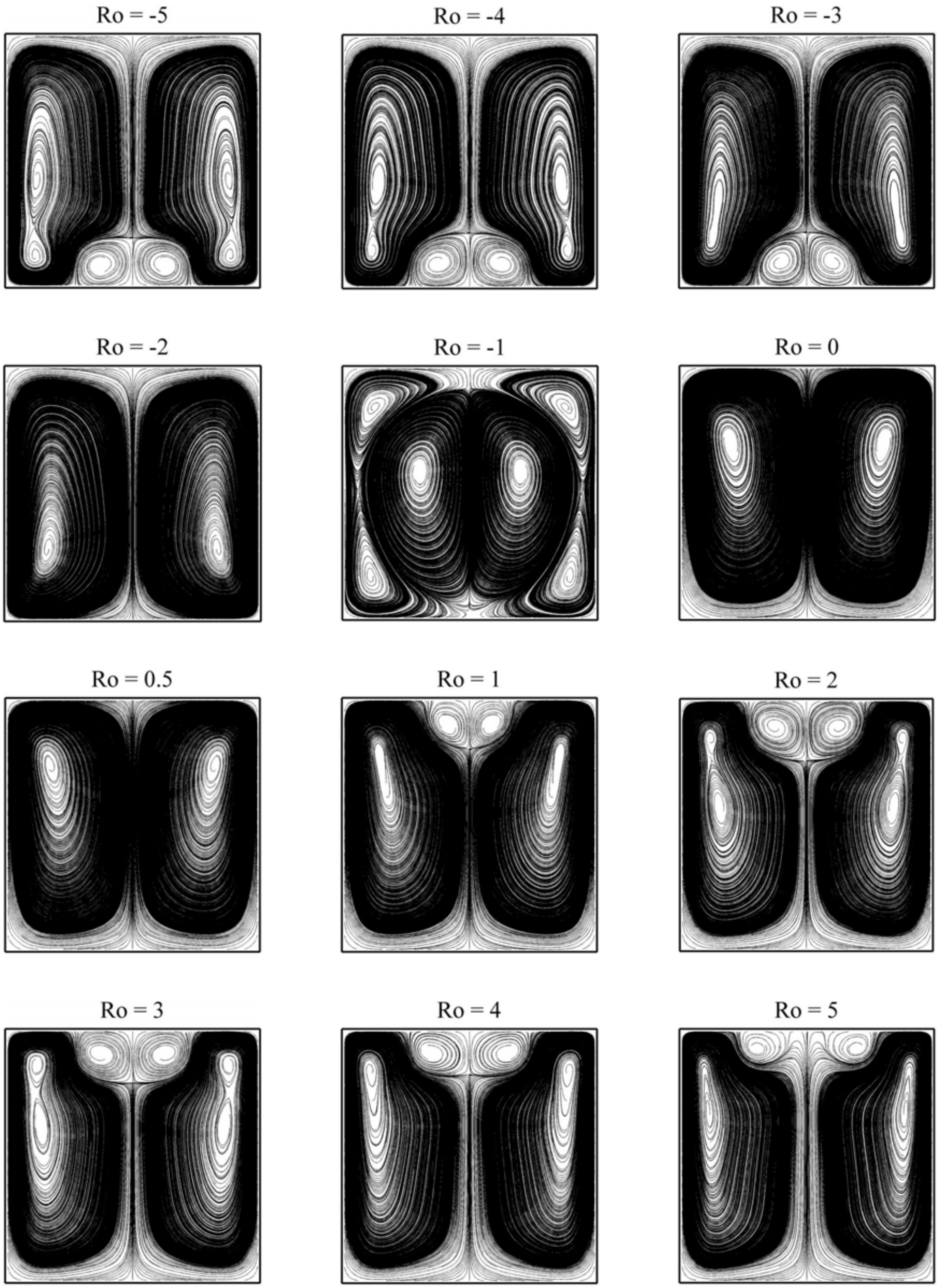


شکل (۵-۶۵): توزیع عدد ناسلت متوسط محیطی مربوط به حالت شار ثابت نسبت به
زاویه انحنای کانال تحت شرایط $\mathrm{Re}=20$، $\delta=0.15$، $We=0$، $Br=0$، $\mathrm{Pr}=0.85$ و $\kappa=1$



شکل (۵-۶۶): توزیع عدد ناسلت متوسط محیطی مربوط به حالت دما ثابت نسبت به
زاویه انحنای کانال تحت شرایط $\mathrm{Re}=20$، $\delta=0.15$، $We=0$، $Br=0$، $\mathrm{Pr}=0.85$ و $\kappa=1$

بطور کلی جریان در کانال خمیده چرخان نیز می تواند دستخوش ناپایداری شود. در شکل (۵-۶۷) خطوط جریانهای ثانویه برای جریان سیال CEF در اعداد روزبی مختلف نشان داده شده است. در اینجا $\mathrm{Re}=20$، $\delta=0.15$، $We=0.1$، $\chi=0.1$ و $\kappa=1$ فرض شده و سایر خواص ویسکومتریک مطابق داده های جدول (۵-۵) در نظر گرفته شده است. مطابق شکل، در $\mathrm{R}o=-1$، اثر شتاب کریولیس ناشی از دوران اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا و نیز اثرات اختلاف تنش های نرمال اول و دوم را خنثی می نماید و شدت برآیند جریانهای ثانویه به حداقل مقدار خود می رسد. همچنین جریان در کانال ایستا ($\mathrm{R}o=0$) پایدار بوده و تا اعداد روزبی $\mathrm{R}o=0.5$ و $\mathrm{R}o=-2$ جریان همچنان پایدار باقی می ماند. مطابق شکل، در $\mathrm{R}o>0.5$ و $\mathrm{R}o<-2$ جریان ناپایدار می شود. نکته جالب توجه آنکه در اعداد روزبی مثبت همانند جریان اینرسی سیال CEF در کانال خمیده ایستا، گردابه های دین در نزدیکی دیواره سمت انحنای خارجی کانال تشکیل می شوند اما در اعداد روزبی منفی، بروز ناپایداری مربوط به ناحیه سمت دیواره داخلی است. این پدیده ناشی از برعکس بودن جهت نیروی کریولیس و در نتیجه جهت چرخش گردابه ها در اعداد روزبی منفی است که سبب تشکیل گردابه های دین در ناحیه نزدیک دیواره داخلی شده است. هرچند در اینجا نیز به مانند جریان در کانال ایستا، بروز ناپایداری سبب تشکیل یک جفت گردابه دین می شود اما اندازه گردابه های دین در کانال خمیده چرخان اندکی کوچکتر است (گردابه های دین مربوط به شکل (۵-۶۷) را با گردابه های شکل های (۵-۳۳) تا (۵-۳۶) مقایسه نمایید). شایان ذکر است که نیروی کریولیس با توان مرتبه اول و نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا با توان مرتبه دوم سرعت محوری متناسب است. تفاوت ساختار گردابه های دین در کانال خمیده چرخان نسبت به کانال ایستا را می توان به تفاوت مرتبه وابستگی نیروی کریولیس نسبت به نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا به سرعت محوری و نیز وجود نیروی ثابت گریز از مرکز ناشی از دوران در میدان جریان نسبت داد. همچنین مطابق شکل، ساختار گردابه ها با ازدیاد عدد روزبی مقداری دستخوش تغییر می شود.



شکل (۵-۶۷): خطوط جریانهای ثانویه در اعداد روزبی مختلف در $\mathrm{Re}=20$، $\delta=0.15$، $We=0.1$، $\chi=0.1$ و $\kappa=1$

فصل ششم

نتیجه گیری

۶-۱- مقدمه

در این بخش نتایج حاصل از تحقیق اخیر برای جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده ایستا و چرخان دارای مقطع مستطیلی ارائه می شود. برای این منظور، نتیجه گیری بر حسب روش تحلیل و اثر پدیده های مختلف دسته بندی و ارائه شده است.

۶-۲- حل تحلیلی

۶-۲-۱- تکنیک مرتبه بزرگی

در فصل سوم این پژوهش، با استفاده از تکنیک مرتبه بزرگی، روابط تعادل نیروها در ناحیه هسته جریان ویسکوالاستیک در کانال خمیده چرخان ارائه گردید. منظور از ناحیه هسته جریان، نواحی شامل مرکز مقطع کانال و به اندازه کافی دور از دیواره ها است. مطابق تکنیک مرتبه بزرگی، مرتبه سرعت محوری در ناحیه هسته جریان از مرتبه سرعت های عرضی (سرعت جریانهای ثانویه) بیشتر است. بنابراین، سرعت محوری در ناحیه هسته جریان از مرتبه یک و سرعت جریانهای ثانویه از مرتبه ε خواهد بود. در تحقیق اخیر با فرض مقادیر ثابت برای توابع ویسکومتریک، رابطه تعادل نیروها در ناحیه هسته جریان سیال CEF در کانال خمیده چرخان ارائه گردید (رابطه (۳-۷) را ببینید). مطابق این رابطه تعادلی، اثر نیروهای گریز از مرکز ناشی از انحنا و دوران، نیروی کریولیس و اثرات اختلاف تنش های نرمال در ناحیه هسته جریان با اثر گرادیان فشار محوری بالانس می شود. روابط تعادلی مربوط به شرایط ساده تر را می توان با صرفنظر از هر یک از مقادیر مربوطه بدست آورد (روابط ارائه شده در جدول (۳-۱) را ببینید). از این روابط می توان برای تشریح مکانیزم اثر خواص ویسکومتریک و نیروهای ناشی از انحنا و دوران بر تشکیل جریانهای ثانویه و آنالیز پایداری جریان استفاده نمود.

همچنین در تحقیق حاضر با استفاده از تکنیک مرتبه بزرگی میدان تنش در ناحیه هسته جریان تقریب زده شد و نتایج زیر برای مولفه های تنش $\tau_{\theta\theta}$، τ_{rr} و τ_{rz} (روابط (۳-۳) را ببینید) حاصل گردید:

- تنش نرمال محوری ($\tau_{\theta\theta}$) در ناحیه هسته جریان تنها تابعی از مجموع مقادیر ثابت های اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بوده و مستقل از خواص ویسکوز است (اثر نیروهای ویسکوز در این مولفه تنش از مرتبه ε است). به عبارت دیگر مقدار این تنش در جریان سیال نیوتنی بسیار اندک است.

- مولفه های تنش τ_{rr} و τ_{rz} که در معادله مومنتوم شعاعی موثرند (معادله (۲-۱۰-۳)) تنها تابعی از ثابت اختلاف تنش نرمال دوم هستند. به عبارت دیگر در هسته جریان سیال نیوتنی و سیالات ویسکوالاستیکی که قادر به مدل سازی اثر اختلاف تنش نرمال دوم نیستند (مانند سیال فوق همرفتی ماکسول و سیال اولدروید-بی)، این مولفه ها از مرتبه ε خواهند بود.

شایان ذکر است که بر اساس نتایج فوق می توان نحوه اثر خواص الاستیک بر میدان جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده را تشریح نمود.

در جریان خزشی ($\mathrm{Re} \ll 1$) سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده و در محدوده وسیعی از مقادیر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم، شدت جریانهای ثانویه نه تنها در ناحیه هسته جریان بلکه در نزدیکی دیواره ها نیز بسیار اندک و از مرتبه ε است. بنابراین می توان با استفاده از تکنیک مرتبه بزرگی روابطی برای توزیع سرعت محوری، دبی و نسبت مقاومت جریان خزشی در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی بدست آورد (به روابط (۳-۲۱)، (۳-۲۳)، (۳-۲۵) و (۳-۳۰) مراجعه نمایید). این روابط تحلیلی در محدوده $\Psi_1 \le 0.5$، $|\Psi_2| \le 0.2$، $0.25 \le \kappa \le 4$، $\mathrm{Re} \ll 1$ و $\delta \le 0.5$ با خطای کمتر از ۱٪ صادق است. شایان ذکر است که در جریان خزشی، محدوده ثابت های بی بعد $\Psi_1 \le 0.5$ و $|\Psi_2| \le 0.2$ مربوط به محدوده وسیعی از اختلاف تنش های نرمال اول و دوم است (با توجه به نحوه بی بعد سازی مقادیر $\tilde{\Psi}_1$ و

$\tilde{\Psi}_2$ از رابطه (۲-۱) و مقدار بسیار کوچک W_0 در جریان خزشی). مهمترین نتایج حاصل از روابط تحلیلی بدست آمده برای جریان خزشی عبارتند از:

- در جریان خزشی در کانال خمیده توزیع سرعت محوری به سمت دیواره داخلی متمایل می شود که این پدیده کاملاً بر عکس جریان اینرسی در کانالهای خمیده دارای اعداد دین نسبتاً بزرگ است. در جریان اینرسی، وجود نیروی گریز از مرکز سبب تشکیل گردابه های تیلور-گورتلر و انتقال توده سیال به سمت جداره خارجی می شود، در نتیجه موقعیت ماکزیمم توزیع سرعت محوری در جریان اینرسی به سمت دیواره سمت انحنای خارجی متمایل خواهد شد. در جریان خزشی، اثر نیروهای اینرسی و گریز از مرکز جریان بسیار ناچیز و از مرتبه ε است. در اینجا توزیع سرعت محوری عمدتاً تحت تاثیر گرادیان فشار محوری قرار دارد. از آنجا که گرادیان فشار محوری با عکس شعاع انحنای کانال متناسب است (جمله C / r را در معادله (۳-۱۴) ببینید) لذا مقدار آن در سمت دیواره داخلی بیشتر بوده که سبب تمایل توزیع سرعت محوری به سمت این ناحیه شده است.
- در نسبت ابعادی $\kappa = 0.89077$، نسبت مقاومت کانال خمیده در جریان خزشی مستقل از نسبت انحنا و همواره برابر یک خواهد بود. به عبارت دیگر تفاوتی میان مقاومت کانال مستقیم و کانال خمیده در این نسبت ابعادی وجود ندارد. همچنین در نسبت های ابعادی $\kappa < 0.89077$، نسبت مقاومت بیشتر از یک و در $\kappa > 0.89077$ مقدار نسبت مقاومت کمتر از یک است. شایان ذکر است که با کاهش مقدار نسبت انحنا به سمت صفر، نسبت مقاومت در تمامی نسبت های ابعادی به سمت یک میل می کند. به عبارت دیگر در نسبت های انحنای بسیار کوچک، حل تحلیلی بدست آمده برای جریان خزشی در کانال خمیده به سمت حل تحلیلی میدان جریان در کانال مستقیم میل می کند.

- دیاگرام نسبت مقاومت بر حسب نسبت انحنا در نسبت ابعادی ۰/۲۵ قابل تعمیم به نسبت های ابعادی کوچکتر است. به عبارت دیگر در نسبت های ابعادی کمتر از ۰/۲۵، جریان خزشی در کانال خمیده به سمت جریان خزشی بین دو صفحه خمیده میل می کند.
- در نسبت های انحنای کمتر از ۰/۲، دبی جریان خزشی در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی تقریباً تابع مرتبه دومی از نسبت انحنا است. این پدیده پیشتر با استفاده از تکنیک حساب اختلالات برای جریان در لوله های خمیده به اثبات رسیده است. دیاگرام ضریب این وابستگی به نسبت ابعادی در شکل (۳-۴) ارائه شده است.

۶-۲-۲- روش حساب اختلالات

یکی از اهداف این تحقیق بررسی اثر ثابت های زمانی رهایی از تنش و زمان تاخیر سیال بر جریان و انتقال حرارت در مجاری خمیده است. اثر متضاد این دو ثابت زمانی بر میدان جریان، نخستین بار در طی شبیه سازی های عددی مشاهده گردید و لذا برای اثبات این اثر، تصمیم به استفاده از روش تحلیلی گرفته شد. با استفاده از حل تحلیلی حاصل از جریان اینرسی سیال مرتبه دو می توان اثر ثابت زمانی تاخیر سیال بر میدان جریان را تحقیق نمود. از آنجا که بدست آوردن پاسخ تحلیلی برای میدان جریان در کانال خمیده دارای مقطع غیرمدور امر بسیار دشواری است (حتی پاسخی تحلیلی برای جریان سیال نیوتنی نیز در این هندسه گزارش نشده است)، لذا در این تحقیق، این اثر در کانال خمیده مدور بررسی شده است.

در یک هندسه و تحت گرادیان فشار مشخص، عدد وایزنبرگ جریان سیالات مرتبه دو و UCM به ترتیب معیاری از زمان تاخیر و زمان رهایی از تنش سیال ویسکوالاستیک است. بنابراین با مقایسه نتایج این تحقیق با تحقیق پیشین برای جریان سیال UCM [۴۶]، می توان اثر این دو ثابت زمانی مواد

ویسکوالاستیک را بر جریان در لوله های خمیده بررسی نمود. شایان ذکر است که روابط و نتایج تحلیلی میدان سرعت سیال مرتبه دو در بخش ۳-۳-۱ تحقیق حاضر ارائه شده است. بر اساس این نتایج و نتایج رابرتسون و مولر [۴۶] برای میدان جریان سیال UCM می توان نتیجه گیری های ذیل را برای اثر ثابت های زمانی سیال ویسکوالاستیک بر جریان آن در لوله های خمیده بدست آورد:

- در جریان مواد ویسکوالاستیک در لوله های خمیده، افزایش زمان تاخیر و زمان رهایی از تـنش منجر به افزایش شدت جریانهای ثانویه می شود. افزایش زمان تاخیر سبب متمایـل شـدن مرکـز گردابه های تیلور-گورتلر به سمت دیواره خارجی شده و اثر آن بر تغییر موقعیت مرکز گردابه هـا به سمت دیواره های جانبی ناچیز است در حالیکه افزایش زمان رهایی از تنش سبب انتقال مرکز گردابه ها به سمت دیواره جانبی می شود.
- در ناحیه هسته جریان سیال مرتبه دو، اثر نیروی گریز از مرکز با گرادیان فـشار در جهـت شـعاع انحنا و تنش نرمال محوری بالانس می شود. افزایش زمان تاخیر سیال مرتبه دو منجـر بـه ایجـاد تنش نرمال محوری قوی در نزدیکی دیواره خارجی می شود. به دلیل کوچـک بـودن اثـر سـرعت محوری و نیروی گریز از مرکز و بزرگ بودن مقدار تنش نرمـال محـوری در ایـن ناحیـه، بـالانس نیروها به هم خورده و مکانیزم مومنتـوم جهـت حفـظ تعـادل وارد عمـل مـی شـود و جریانهـای ثانویه ای در جهت گردابه های تیلور-گورتلر ایجاد می شود. در نتیجـه برآینـد شـدت جریانهـای ثانویه افزایش پیدا می کند.
- افزایش هر دو ثابت زمانی تاخیر و زمان رهایی از تنش سـبب متمایـل شـدن موقعیـت مـاکزیمم سرعت محوری به سمت دیواره خارجی می شود.
- افزایش زمان تاخیر سیال مرتبه دو منجر به کاهش مقاومت مجرا در برابـر جریـان مـی شـود. در حالیکه در سیال UCM در مقادیر کوچک زمان رهایی از تنش سیال، جریان از خود رفتار کاهش

مقاومت و در مقادیر بزرگ این زمان ($We > 2.1$) از خود رفتار افزایش مقاومت نـشان مـی دهـد (شکل های (۳-۱۱) و (۳-۱۲) را ببینید).

- افزایش زمان تاخیر سیال مرتبه دو منجر به تقویت مولفه تنش $\tau_{\varphi s}$ می شود کـه ایـن عامـل بـه ازدیاد دبی جریان سیال مرتبه دو در لوله های خمیده منجر می شود.

همچنین در بخش ۳-۳-۲ با استفاده از روش حساب اختلالات، انتقال حرارت توسعه یافته جریان سیال مرتبه دو و اولدروید-بی در لوله خمیده تحت شار حرارتی ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. در انتقال حرارت مربوط به جریان در لوله های مستقیم، به دلیل شرایط تقارن محوری[1] حاکم بر جریان، فرض ثابت بودن دمای دیواره در هر مقطع فرض صحیحی است. شاه و لندن[2] این فرض را برای انتقال حرارت در کانالهای مستقیم دارای مقطع مستطیلی نیز به کار گرفتند که به دلیل عدم شرایط تقارن محوری، چنین فرضی منجر به محاسبه تقریبی عدد ناسلت می شود. ژانگ و همکاران [۵۵] نیز از این روش برای حل تحلیلی انتقال حرارت جریان در لوله های خمیده استفاده کردند در حالیکه به دلیل وجود گرادیان فشار شعاعی و فعالیت جریانهای ثانویه، این جریان به هیچ عنوان جریانی متقارن محوری محسوب نمی شود. لذا فرض آنها منجر به بروز خطای قابل توجه در محاسبه انتقال حرارت جریان می شود. در تحقیق حاضر با استفاده از بی بعد سازی مناسب، استفاده صحیح از شرایط مرزی و بدون استفاده از تقریب ثابت بودن دمای جداره، حل مناسبی برای انتقال حرارت اجباری سیال اولدروید-بی در لوله های خمیده تحت شار حرارتی ثابت ارائه شده است. بر اساس این تحلیل می توان نتیجه گیری های زیر را برای میدان دما ارائه نمود:

- به دلیل ناچیز بودن شدت جریانهای ثانویه در جریان خزشی، میدان دما تنها تحت اثر سرعت محوری قرار دارد. از آنجا که در این جریان موقعیت ماکزیمم سرعت محوری به سمت انحنای

1. axisymmetric
2. Shah and London

داخلی کانال متمایل است لذا محل تقعر توزیع دمای سیالات نیوتنی، مرتبه دو و اولدروید-بی نیز به سمت این ناحیه متمایل می شود (منظور از محل تقعر توزیع دما، موقعیت دارای دمای بیشینه و یا کمینه بر حسب شار حرارتی ورودی و یا خروجی به کانال خمیده است). با ازدیاد مقدار سرعت جریان و تبدیل جریان خزشی به جریان اینرسی، موقعیت تقعر توزیع دما به سمت انحنای خارجی متمایل می شود.

- به طور کلی ازدیاد عدد رینولدز، عدد پرانتل، عدد وایزنبرگ و همچنین نسبت ویسکوزیته سبب متمایل شدن موقعیت تقعر توزیع دما به سمت جداره خارجی می شود. از آنجا که ازدیاد عدد رینولدز، وایزنبرگ و نسبت ویسکوزیته سبب ایجاد جریانهای ثانویه و انتقال موقعیت ماکزیمم سرعت محوری به سمت انحنای خارجی می شود لذا انتظار می رود که ازدیاد این پارامترها، انتقال هر چه بیشتر موقعیت تقعر توزیع دما به سمت انحنای خارجی را در پی داشته باشد.
- با ازدیاد تدریجی عدد رینولدز جریان از مقدار صفر، افت اندکی در مقدار عدد ناسلت جریان در اعداد رینولدز کوچک مشاهده می شود. این افت ناشی از تبدیل جریان خزشی به جریان اینرسی بوده و عمدتاً ناشی از ضعف جریانهای ثانویه در اعداد رینولدز کوچک و بیشتر بودن دبی جریان خزشی در لوله خمیده نسبت به جریان در لوله مستقیم در گرادیان فشار مربوطه است. این مقدار کمینه عدد ناسلت مربوط به شرایطی است که موقعیت تقعر توزیع دما تقریباً در مرکز مقطع لوله خمیده قرار می گیرد. با ازدیاد عدد رینولدز از این مقدار کمینه (Re_m) و رشد سرعت جریانهای ثانویه مقدار عدد ناسلت متوسط افزایش چشمگیری پیدا می کند. همچنین در شرایط $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_m$، ازدیاد عدد وایزنبرگ، عدد پرانتل و نسبت ویسکوزیته سبب افزایش عدد ناسلت متوسط جریان می شود.

۶-۳- حل عددی

۶-۳-۱- *پایداری حل عددی*

دراین تحقیق از تکنیک های عددی ویژه ای جهت بهبود پایداری حل عددی استفاده شده است. به طور خلاصه با استفاده از تکنیک های زیر پایداری حل عددی برای شبیه سازی جریان سیال ویسکوالاستیک بهبود قابل ملاحظه ای پیدا می کند:

- جداسازی ترم تنش ویسکوز (لاپلاسین میدان سرعت) از میدان تنش سیال CEF و گسسته سازی آن بطور جداگانه (این ترم نقش مهمی در پایداری حل عددی دارد)
- محاسبه تنش های ناشی از اثر اختلاف تنش های نرمال (τ^E) بر روی گره های مجازی منجر به اعمال شرط مرزی در جمله $\nabla.\tau^E$ شده که این موضوع پایداری حل عددی را افزایش می دهد.
- با اختصاص میدان تنش، تانسورهای نرخ برش و ویسکوزیته بر روی شبکه اولیه اولاً هزینه محاسباتی نسبت به محاسبه جداگانه آنها بر روی گره های مختص هر معادله مومنتوم به شدت کاهش یافته و ثانیاً تقارن تانسور تنش به شکل بهتری بر روی میدان جریان اعمال می شود.
- در شرایطی که ناپایداری جریان فوق العاده حاد است (مانند مقادیر بزرگ اختلاف تنش های نرمال، وابستگی مرتبه بالای توابع ویسکومتریک به نرخ برش و ...) بهتر است که از پاسخ میدان جریان دارای شرایط پایدارتر به عنوان فرض اولیه استفاده نمود.

۶-۳-۲- *جریان خزشی در کانال ایستا*

به طور کلی از حل عددی میدان جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده می توان موارد زیر را نتیجه گیری نمود:

- بر خلاف سیالات نیوتنی، جریانهای ثانویه در جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده تشکیل می شوند. تشکیل این جریانهای ثانویه نه به دلیل اثرات نیروی اینرسی و گریز از مرکز ناشی از انحنا بلکه ناشی از اثرات اختلاف تنش های نرمال اول و دوم است. بطور کلی در جریان خزشی سیالات ویسکوالاستیک در کانال خمیده، اثر اختلاف تنش نرمال اول سبب تشکیل جریانهای ثانویه ای می شود که جهت چرخش آنها با گردابه های تیلور-گورتلر ناشی از اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا در جریان اینرسی سیالات نیوتنی در کانال های خمیده یکسان است (در راستای خط تقارن، این جریانهای ثانویه در جهت دیواره داخلی به سمت دیواره خارجی تشکیل می شوند). همچنین اختلاف تنش نرمال دوم منفی دارای اثر معکوسی بوده و ازدیاد آن سبب تضعیف جریانهای ثانویه حاصل از اختلاف تنش نرمال اول می شود. نکته جالب توجه آنکه در جریان سیال راینر-ریولین (در غیاب اثر اختلاف تنش نرمال اول در سیال CEF)، اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی سبب ایجاد جریانهای ثانویه ای می شود که جهت چرخش آنها در خلاف جهت گردش گردابه های تیلور-گورتلر است.
- مطابق رابطه (۵-۳)، در هسته جریان خزشی سیال مرتبه دو در کانال خمیده و در غیاب اثر اختلاف تنش نرمال دوم، تنش نرمال محوری با گرادیان فشار شعاعی بالانس می شود. به طور کلی اثر اختلاف تنش نرمال اول سبب ایجاد تنش نرمال محوری قوی در نزدیکی دیواره داخلی می شود. بنابراین تعادل موجود در ناحیه هسته جریان دیگر در ناحیه نزدیک دیواره داخلی برقرار نبوده و جهت حفظ تعادل مکانیزم مومنتوم وارد عمل می شود و جریانهای ثانویه ای هم جهت با گردابه های تیلور-گورتلر را ایجاد می نماید. ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی به دو شکل بر میدان جریان تاثیر می گذارد. اولاً ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی سبب کاهش تنش نرمال محوری می شود (اثر متضاد Ψ_2 منفی نسبت به Ψ_1 بر $\tau_{\theta\theta}$ در رابطه (۳-۳-۴) مشهود

است)، ثانیاً ازدیاد Ψ_2 منفی سیال مرتبه دو سبب تقویت مولفه های تنش τ_{rr} و τ_{rz} می شود (وابستگی این دو مولفه تنش به Ψ_2 در روابط (۳-۳-۱) و (۳-۳-۳) مشخص است) که این دو عامل کاهش شدت جریانهای ثانویه حاصل از اثر Ψ_1 را در پی دارد.

- بر خلاف جریان خزشی سیال نیوتنی در کانال خمیده، جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده می تواند دچار ناپایداری شود.
- ازدیاد مقدار اختلاف تنش نرمال اول سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده می تواند سبب بروز ناپایداری در جریان شود اما اختلاف تنش نرمال دوم منفی دارای اثر معکوسی بوده و می تواند ناپایداری مربوط به اثر اختلاف تنش نرمال اول را خنثی نماید. این حالت خنثی برای جریان سیال CEF در کانال خمیده مربوط به شرایط $\Psi_2 / \Psi_1 = -0.5$ است که این موضوع در تطابق با قضیه گزیکس در مورد جریان خزشی سیال مرتبه دو است.
- اثر ناپایداری در نسبت های ابعادی کوچکتر از یک ($\kappa < 1$) بسیار شدیدتر است. در نسبت های ابعادی بسیار کوچک (مانند شرایط $\kappa = 0.125$ در تحقیق حاضر) بروز ناپایداری می تواند تعداد، الگوها و سرعت گردابه ها را به شدت تحت تاثیر قرار دهد. همچنین اثر ناپایداری در نسبت های انحنای بزرگ شدید تر است.
- در تحقیق حاضر نشان داده شد که اگر اثر اختلاف تنش نرمال اول به اندازه کافی بزرگ باشد اثرات ویسکوز دیگر قادر به حفظ گردابه ها بصورت یک جفت گردابه نمی باشد. در این حالت جریان ناپایدار شده و گردابه های جدیدی بوجود می آید. از آنجا که ازدیاد اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی کاهش جریانهای ثانویه حاصل از Ψ_1 را در پی دارد، لذا اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر عکس اثر اختلاف تنش نرمال اول بوده و جریان را پایدار می نماید.

۶-۳-۳- جریان اینرسی در کانال ایستا و چرخان

به طور کلی جریان اینرسی و انتقال حرارت سیال CEF در کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی تحت اثر عوامل مختلفی نظیر توابع ویسکومتریک دارای وابستگی غیر خطی به نرخ برش، اختلاف تنش های نرمال اول و دوم، هندسه (شعاع انحنا و نسبت ابعادی)، میزان اینرسی جریان، دوران کانال و ... قرار دارد. شایان ذکر است که از حل عددی مربوط به این جریان موارد زیر را می توان استنتاج نمود:

- ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول جریان اینرسی سیال CEF در کانال خمیده سبب افزایش برآیند شدت جریانهای ثانویه (جریانهای ثانویه ناشی از نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا و خواص الاستیک) می شود حال آنکه ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی دارای اثر معکوسی بوده و برآیند شدت جریانهای ثانویه را کاهش می دهد. چنانچه میزان اختلاف تنش نرمال دوم منفی به اندازه کافی بزرگ باشد، در عدد رینولدز یکسان، شدت جریانهای ثانویه سیال CEF حتی می تواند از شدت گردابه های تیلور-گورتلر سیال تعمیم یافته نیوتنی (GNF) در کانال خمیده نیز کمتر شود.
- بطور کلی در هسته جریان سیال CEF در کانال خمیده و در غیاب اثر اختلاف تنش نرمال دوم، اثر گرادیان فشار شعاعی با نیروی گریز از مرکز و اثر تنش نرمال محوری بالانس می شود. با نزدیک شدن به سمت دیواره خارجی میزان سرعت محوری و در نتیجه نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا به سمت صفر میل می کند اما در این ناحیه، مقدار تنش نرمال محوری بسیار بزرگ است و لذا تعادل موجود در ناحیه هسته جریان دیگر در این ناحیه برقرار نیست. برای حفظ تعادل، مکانیزم مومنتوم وارد عمل می شود و گردابه هایی هم جهت با گردابه های تیلور-گورتلر ایجاد می نماید. در نتیجه ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول، افزایش برآیند جریانهای ثانویه را در پی دارد. حال آنکه همانند جریان خزشی، در جریان اینرسی نیز ازدیاد اختلاف تنش نرمال دوم منفی

کاهش تنش نرمال محوری و تقویت مولفه های تنش τ_{rr} و τ_{rz} را در پی دارد که این دو عامل منجر به کاهش برآیند شدت جریانهای ثانویه می شود.

- به طور کلی ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول سیال مرتبه دو، افزایش دبی/کاهش نسبت مقاومت کانال خمیده دارای مقطع مستطیلی را در پی دارد. مشابه چنین پدیده ای به شکل تحلیلی برای جریان سیال مرتبه دو در لوله های خمیده نیز به شکل تحلیلی مشاهده شده است (شکل های (۳-۱۱) و (۳-۱۲) را ببینید).
- در جریان سیال CEF دارای توابع ویسکومتریک باریک شونده نسبت به نرخ برش، ازدیاد عدد وایزنبرگ جریان سبب کاهش دبی/افزایش نسبت مقاومت (ازدیاد پسای کانال[1]) می شود اما اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر عکس بوده و کاهش پسای کانال[2] را در پر دارد. چنانچه میزان اختلاف تنش نرمال دوم منفی سیال CEF به اندازه کافی بزرگ باشد، میزان پسای کانال خمیده حتی می تواند از پسای جریان سیال CEF در شرایطی که فاقد اثرات اختلاف تنش های نرمال اول و دوم است (سیال توسعه یافته نیوتنی (GNF)) نیز کمتر شود.
- اثر اختلاف تنش های نرمال اول و دوم بر جریانهای ثانویه و دبی جریان سیال CEF در شعاع های انحنای کوچک (نسبت های انحنای بزرگ) بسیار حادتر از شعاع های انحنای بزرگ است.
- از آنجا که ازدیاد عدد الاستیک (اختلاف تنش نرمال اول) سبب افزایش شدت جریانهای ثانویه می شود، در نتیجه ازدیاد این پارمتر با افزایش اختلاط جریان و عدد ناسلت متوسط همراه است. همچنین با توجه به آنکه اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر شدت جریانهای ثانویه برعکس است، لذا ازدیاد آن منجر به کاهش عدد ناسلت متوسط می گردد. چنانچه مقدار اختلاف تنش

1. Drag Enhancement
2. Drag Reduction

نرمال دوم منفی به اندازه کافی بزرگ باشد، عدد ناسلت متوسط حتی از حالت مربوط به جریان سیال GNF نیز کمتر می شود.

- چنانچه در جریان اینرسی پایدار سیال CEF در کانال خمیده، میزان اختلاف تنش نرمال اول به اندازه کافی بزرگ باشد می تواند سبب ایجاد آنچنان تنش نرمال محوری بزرگی در سمت دیواره خارجی شود که برای حفظ تعادل، نیروهای ویسکوز دیگر قادر به ایجاد گردابه های تیلور-گورتلر به شکل یک جفت گردابه نباشند و در این شرایط گردابه های دین که حاصل بروز ناپایداری در جریان هستند، بوجود می آیند. لذا ایجاد اختلاف تنش نرمال اول سبب کاهش عدد رینولدز بحرانی (عدد رینولدز مربوط به مرز ناپایداری) می شود. به عبارت دیگر در جریان اینرسی، ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول سبب تشدید ناپایداری می شود حال آنکه به دلیل اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر کاهش شدت جریانهای ثانویه، ازدیاد این خاصیت، کاهش شدت ناپایداری جریان اینرسی را در پی دارد.
- با بروز ناپایداری در جریان اینرسی سیال CEF و فعالیت گردابه های دین، میزان اختلاط جریان و نرخ انتقال حرارت آن به میزان قابل توجهی افزایش پیدا می کند. همچنین ایجاد ناپایداری در جریان اینرسی با ازدیاد میزان نسبت مقاومت کانال خمیده همراه است (شکل (۵-۴۳) را ببینید).
- در نسبت های ابعادی کوچک، پدیده ناپایداری در جریان اینرسی سیال CEF بسیار حادتر بوده و با کاهش نسبت ابعادی، تعداد، الگو و شدت گردابه های دین بشدت دستخوش تغییر می شود.
- در سیالات CEF دارای توابع ویسکومتریک باریک شونده نسبت به نرخ برش، ازدیاد مقدار توان n مربوط به رفتار پاورلو سبب کاهش شدت جریانهای ثانویه و پایدار نمودن جریان می شود حال آنکه ازدیاد مقدار ثابت زمانی این مدل (λ) دارای اثر معکوسی است. علت این امر مربوط به نحوه وابستگی ویسکوزیته به این پارامترها است (افزایش مقدار n و نیز کاهش مقدار λ سبب ازدیاد

ویسکوزیته این سیال می شود). همچنین در مقادیر کوچک n و بزرگ λ، جریان می تواند دچار ناپایداری شود که در این شرایط الگوی گردابه های دین می تواند متفاوت با گردابه های دین در جریان ناپایدار سیال نیوتنی در کانال خمیده باشد.

- اعمال دوران مثبت به جریان سیال CEF در کانال خمیده، ازدیاد شدت جریانهای ثانویه را در پی دارد، حال آنکه دوران منفی دارای اثر معکوسی است. بطور کلی ایجاد دوران سبب پیدایش نیروهای گریز از مرکز و نیروی کریولیس در میدان جریان می شود و اثر نیروی کریولیس تشکیل جریانهای ثانویه در جریان های داخلی را در پی دارد. از آنجا که در اعداد روزبی مثبت، نیروی کریولیس با نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا هم جهت است، لذا ایجاد دوران مثبت، برآیند شدت جریانهای ثانویه را افزایش می دهد. برای هر جریانی در کانال خمیده، عدد روزبی منفی وجود دارد که در آن نیروی کریولیس اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا و اثرات الاستیک را خنثی می نماید. این عدد روزبی به عدد دوران روزبی بحرانی (Ro_{cr}) موسوم است. در اعداد روزبی کوچکتر از عدد روزبی بحرانی ($Ro < Ro_{cr}$)، اثر نیروی کریولیس بر اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا و نیروهای الاستیک فائق آمده و جریانهای ثانویه در خلاف جهت جریانهای تیلور-گورتلر تشکیل می شوند.
- ازدیاد عدد وایزنبرگ (اختلاف تنش نرمال اول) در جریان سیال CEF در کانال های خمیده چرخان سبب افزایش عدد روزبی بحرانی می شود (عدد روزبی منفی به سمت صفر نزدیک می شود). همچنین در مقادیر $Ro > Ro_{cr}$، ازدیاد عدد وایزنبرگ منجر به افزایش برآیند شدت جریانهای ثانویه، نسبت مقاومت کانال خمیده و عدد ناسلت متوسط می شود حال آنکه این اثر در $Ro < Ro_{cr}$ کاملاً بر عکس است. اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر میدان جریان در کانال خمیده چرخان نیز کاملاً بر عکس اثر اختلاف تنش نرمال اول است. علت این پدیده ها را

می توان در تغییر جهت نیروی کریولیس در اعداد روزبی منفی نسبت به اعداد روزبی مثبت جستجو کرد که سبب معکوس شدن اثر اختلاف تنش های نرمال در اعداد $Ro > Ro_{cr}$ نسبت به $Ro < Ro_{cr}$ شده است.

- ایجاد دوران در جریان سیال CEF در کانال خمیده می تواند سبب بروز ناپایداری در جریان شود. نکته جالب توجه آنکه در شرایط ناپایدار و در اعداد روزبی مثبت، گردابه های دین در نزدیکی دیواره خارجی و در اعداد روزبی منفی، در نزدیکی جداره داخلی ایجاد می شوند که این امر ناشی از تغییر جهت نیروی کریولیس است (شکل (۵-۶۷) را ببینید). چنانچه عدد روزبی به اندازه کافی بزرگ باشد، ساختار گردابه های دین می تواند متفاوت با گردابه های دین در کانال های ایستا باشد. شایان ذکر است که نیروی کریولیس با توان مرتبه اول و نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا با توان مرتبه دوم سرعت محوری متناسب است. تفاوت ساختار گردابه های دین در کانال خمیده چرخان نسبت به کانال ایستا را می توان به تفاوت مرتبه وابستگی نیروی کریولیس نسبت به نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا به سرعت محوری و نیز وجود نیروی ثابت گریز از مرکز ناشی از دوران در میدان جریان نسبت داد. همچنین مطابق شکل، ساختار گردابه ها با ازدیاد عدد روزبی مقداری دستخوش تغییر می شود.

۶-۴- پیشنهادات

بطور کلی موارد زیر را می توان برای ادامه تحقیق در زمینه جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال های خمیده ایستا و چرخان پیشنهاد نمود:

- حل تحلیلی میدان جریان و دما در کانال خمیده دارای مقطع غیر مدور (نظیر روشهای بر پایه حساب اختلالات)
- حل جریان و انتقال حرارت در حال توسعه سیالات ویسکوالاستیک در کانال های خمیده ایستا و چرخان
- بررسی توامان انتقال حرارت و جریان سیالات ویسکوالاستیک در کانال خمیده (اعمال وابستگی دانسیته و توابع ویسکومتریک به دما)
- بررسی جریان و انتقال حرارت غیردائم سیالات ویسکوالاستیک در کانال های خمیده

ضمیمه

مروری اجمالی
بر سیالات ویسکوالاستیک

الف-۱- مقدمه

در این ضمیمه مروری اجمالی بر مکانیک سیالات غیرنیوتنی و بویژه سیالات ویسکوالاستیک صورت می گیرد. از نقطه نظر نگارنده، مطالعه این متن برای علاقه مندان به پژوهش در زمینه رئولوژی مفید خواهد بود. در اینجا ضمن طبقه بندی سیالات غیر نیوتنی، در مورد برخی رفتارهای خاص این سیالات (بعضاً متضاد نسبت به سیالات نیوتنی) بحث می شود. در ادامه منشا رفتار ویسکوالاستیک در مواد پلیمری بررسی شده و آزمایشات مرسوم جهت تعیین خواص این مواد معرفی می گردد. در پایان بحث مفصلی بر روی معادلات ساختاری مواد ویسکوالاستیک انجام می شود.

الف-۲- طبقه بندی سیالات ویسکوالاستیک

همانگونه که پیشتر گفته شد، سیال نیوتنی، ماده ای است که در آن تنش برشی بدون وجود تنش تسلیم (صفر بودن تنش برشی در نرخ برش صفر) تنها تابعی خطی از نرخ برش است. بر این اساس سیال غیرنیوتنی را می توان به سادگی بصورت سیالی که فاقد رفتار نیوتنی است، تعریف نمود. به طور کلی سیالات غیر نیوتنی به خانواده های متعددی دسته بندی می شوند. این خانواده ها عبارتند از [۲]:

۱. سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان
۲. سیالات غیر نیوتنی وابسته به زمان
۳. سیالات ویسکوالاستیک

در ادامه هر یک از این خانواده ها معرفی شده و در مورد خواص این سیالات بحث می شود.

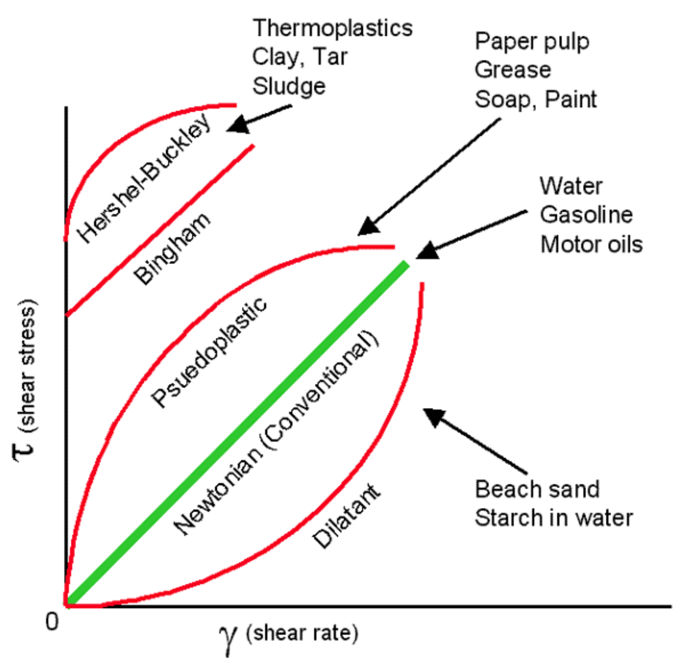
الف-۲-۱- سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان

سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان سیالاتی هستند که در آنها تنش برشی تنها تابعی غیر خطی از نرخ برش است. به عبارت دیگر در این سیالات ویسکوزیته تابعی از نرخ برش می باشد. مطابق شکل (الف-۱) خود این سیالات به دو دسته کلی سیالاتی دارا و فاقد تنش تسلیم تقسیم می شوند. در موادی که دارای تنش تسلیم هستند شرط جریان ماده، رسیدن تنش به حد مشخصی برای شروع سیلان آن است. برای مثال خمیر دندان مثال بسیار مناسبی برای این مواد است به نحوی که تا زمانی که میزان فشردگی پوسته آن به حد مشخصی نرسد، خمیر دندان از آن خارج نمی شود. علت این رفتار فیزیکی معمولاً به ساختمان سه بعدی ماده نسبت داده می شود. ساختمان این مواد قادر است که تنش برشی کمتر از حد تسلیم را بدون ایجاد جریان تحمل نماید ولی پس از آن، ساختمان داخلی شکسته شده و ماده اجازه حرکت برشی را پیدا می کند. تصور می شود که ساختمان داخلی ماده پس از کاهش تنش به مقدار کمتر از تسلیم دوباره ترمیم می شود [۲]. معروف ترین این دسته از مواد، پلاستیک بینگهام است. در واقع پلاستیک بینگهام یک سیال نیوتنی دارای تنش تسلیم است (ویسکوزیته آن ثابت است). نمونه هایی از سیالات دارای تنش تسلیم عبارتند از: برخی پلاستیکهای مذاب، گل حفاری چاه نفت، مخلوط آب و شن، دوغ آبهای گچ و ماسه، شکلات مایع، کرم های طبی، خمیر دندان، بتن تازه، مارگارین و گریسها [۲].

سیالاتی که فاقد تنش تسلیم هستند، به دو دسته سیالات شبه پلاستیک[1] و سیالات دایلاتنت[2] تقسیم می شوند. این سیالات بصورت سیالات نیوتنی تعمیم یافته[3] نیز نامیده می شوند. تاکنون مدلهای متعددی به عنوان قانون پایه برای این مواد ارائه شده است، اما پرکاربردترین و ساده ترین مدل حاکم بر آنها مدل پاورلا[4] است که در آن تنش برشی تابعی از توان n ام نرخ برش است [۲]. یکی از اشکالات این

1. Pseudoplastic
2. Dilatant
3. Generalized Newtonian fluids
4. Power-Law

مدل، پیش بینی ویسکوزیته صفر در نرخ برش بی نهایت بـرای سـیالات شـبه پلاسـتیک اسـت. از جملـه مدل هایی که این مشکل مدل پاورلو را بر طرف می نمایند می توان به مدل کراس[۱]، مدل کاریو-یاسـودا[۲] و راینر-فیلیپوف[۳] اشاره نمود [۳]. شایان ذکر است که با ازدیاد ثابت های ایـن مـدل هـا رفتـار وابـستگی تنش به نرخ برش بهتر مدل می شود. در سیالات شبه پلاستیک، ویسکوزیته در نرخهای بـرش کوچـک و بسیار زیاد تقریباً خطی است. شیب منحنی تنش در برابر نرخ کرنش در شدتهای برش زیاد، به ویسکوزیته در برش بینهایت (η_∞) و در شدتهای برش کم به ویسکوزیته در برش صفر (η_0) موسوم است. در این مواد، نرخ افزایش تنش در برابر شدت برش، مقداری منفی است (ویسکوزیته تابعی نزولی از شدت برش اسـت). به عبارت دیگر چنانچه از مدل پاورلا به عنوان قانون پایه برای مواد شبه پلاستیک استفاده شـود، در ایـن صورت n مقداری کوچکتر از یک خواهد بود [۳].



شکل (الف-۱): منحنی های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات مستقل از زمان [۱]

1. Cross
2. Carreau-Yasuda
3. Reiner-Philippoff

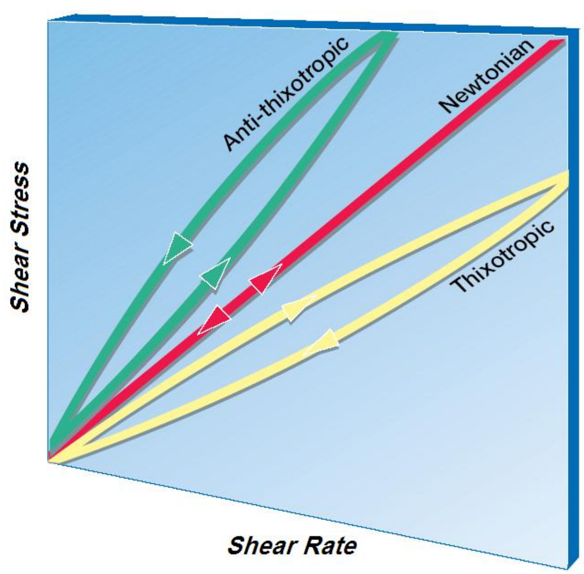
سیالات شبه پلاستیک عموماً در بین مواد زیر یافت می شوند: بسیاری از مواد با وزن مولکولی بالا، بسیاری از سوسپانسیونهای دارای غلظت متوسط، محلولهای لاستیک طبیعی و مصنوعی، چسبها، سوسپانسیونهای آهار، استات سلولز، محلولهای مورد استفاده برای ساخت رایون، مایونز، بعضی مرکبهای چاپ و رنگها [۲]. در سیالات دایلاتنت با افزایش شدت برش، ویسکوزیته سیال افزایش می یابد و چنانچه از مدل پاورلا به عنوان قانون پایه برای آنها استفاده شود، در این صورت n مقداری بزرگتر از یک خواهد بود. در بین مواد زیر رفتار سیال دایلاتنت مشاهده شده است: برخی سوسپانسیونهای آبی اکسید تیتانیوم، برخی محلولهای پودر ذرت – شکر، برخی محلولهای بوراکس – صمغ عربی، نشاسته، سیلیکات پتاسیوم، شن مرطوب ساحل و بعضی رنگها [۲].

الف-۲-۲- سیالات غیر نیوتنی تابع زمان

در بعضی از سیالات غیر نیوتنی، علاوه بر اینکه ویسکوزیته تابعی از شدت برش است، تابعی از زمان نیز می باشد. به عبارت دیگر در این سیالات، در حین یک نرخ برش ثابت، ساختمان مولکولی ماده بطور مداوم در حال تغییر است و لذا مقدار ویسکوزیته و تنش برشی نیز تابعی از زمان خواهد بود. بطور کلی این مواد به دو دسته سیالات تیکسوتروپیک[1] و سیالات رئوپکتیک[2] (آنتی تیکسوتروپیک[3]) تقسیم می شوند [۲]. در سیالات تیکسوتروپیک، چنانچه ماده در معرض یک شدت برش ثابت و دمای معین قرار داده شود، تنش برشی یک کاهش برگشت پذیر نسبت به زمان پیدا می کند. البته در نهایت ویسکوزیته به سمت یک مقدار حدی میل خواهد کرد. از دیدگاه مولکولی چنانچه یک سیال تیکسوتروپیک تحت یک برش ثابت قرار گیرد، بتدریج ساختمان مولکولهای آن شروع به شکستن می کند و لذا با افزایش زمان ویسکوزیته سیال کاهش می یابد. مولکولهای شکسته شده در صورت برخورد در جهت مناسب امکان

1. Thixotropic
2. Rheopectic
3. Antithixotropic

بازگشت به ساختار اولیه خود را دارند و از آنجا که با گذشت زمان بر تعداد مولکولهای شکسته شده افزوده می شود، بنابراین امکان برخورد مولکولها و فعالتر شدن مکانیزم ترمیم افزایش می یابد. به همین دلیل پس از گذشت مدت زمان مشخصی تعادلی بین فرآیندهای شکست و ترمیم بوجود می آید و ویسکوزیته به سمت مقدار ثابتی میل می کند. به عنوان نمونه برخی پلیمرهای درشت مولکول و محلولهای مواد غذایی دارای این رفتار هستند. سیالات رئوپکتیک مواد بسیار نادری هستند که رفتار آنها کاملاً بر عکس مواد تیکسوتروپیک است. از دیدگاه مولکولی، این مواد ساختار مولکولی اولیه ای ندارند ولی با ایجاد برش و برخورد مولکولها به یکدیگر شانس تشکیل یک ساختار را پیدا می کنند. بنابراین تحت برش ثابت و در شرایط ایزوترمال، یک افزایش برگشت پذیر در تنش برشی و ویسکوزیته آنها مشاهده می شود. در بعضی سیالات نظیر سوسپانسیونهای رسی بنتونیت، سوسپانسیونهای وانادیوم پنتا اکسید، خمیر گچ و سوسپانسیونهای رقیق اولئات آمونیوم رفتار رئوپکتیک مشاهده شده است [۲]. در شکل (الف-۲) منحنی تنش در برابر نرخ برش برای مواد رئوپکتیک و تیکسوتروپیک نشان داده شده است.



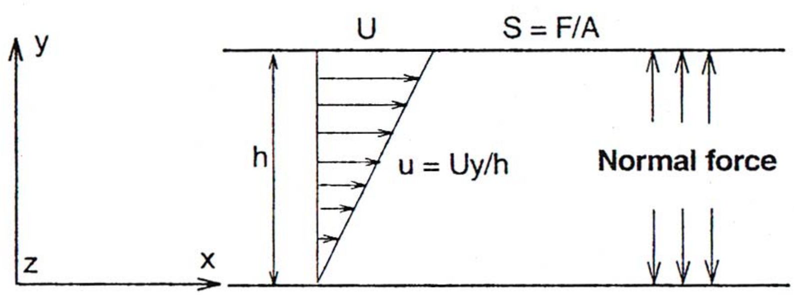
شکل (الف-۲): منحنی های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات غیر نیوتنی تابع از زمان [۱]

الف-۲-۳- سیالات ویسکوالاستیک

الف-۲-۳-۱- معرفی سیالات ویسکوالاستیک

سیالات ویسکوالاستیک موادی هستند که به طور توامان خواص ویسکوز و الاستیک را دارا می باشند. از آنجا که در سیالات تنش تابعی از نرخ برش و در جامدات تابعی از خود برش است، لذا این مواد دارای خواص همزمان جامد و سیال هستند.

آزمایش معروفی که به بررسی رفتار جریان مواد ویسکوالاستیک می پردازد، آزمایش جریان کوئت (جریان برشی ساده) است. مطابق شکل (الف-۳)، چنانچه یک سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه تخت موازی قرار گیرد و صفحه بالایی با سرعت ثابت U حرکت نماید، یک جریان برشی ساده ایجاد می شود. اگر عمل برش دهی قطع و حرکت صفحه بالایی بطور ناگهانی متوقف شود، برخلاف سیالات نیوتنی که در آنها تنش بطور آنی صفر می شود، در مواد ویسکوالاستیک کاهش تنش برشی دارای بازه زمانی یا به عبارت دیگر دارای زمان آسودگی از تنش[1] است [۱۳۶].



شکل (الف-۳): طرح شماتیک جریان برشی ساده (جریان کوئت) [۱۳۶]

همچنین برای سیال ویسکوالاستیک، چنانچه در حین حرکت صفحه بالایی، تنش برشی بطور آنی قطع شود (نیروی روی صفحه قطع و صفحه به حال خود رها گردد)، صفحه بالایی تا حدی به عقب بر

1. Relaxation Time

می گردد، در حالیکه در سایر سیالات توقف صفحه بالایی نیز آنی است. در واقـع بازگـشت صـفحه بـالایی ناشی از خاصیت الاستیک ماده است، اما این بازگشت نسبت به مواد الاستیک (با خواص الاستیک یکسان) کندتر است که این موضوع ناشی از وجود مکانیزم ویسکوز در این مواد است. بر این اساس ادعا مـی شـود که این مواد دارای یـک حافظـه[1] جهـت دار از تغییـر شـکلهای خـود بـوده و از حالـت قبلـی خـود آگـاه هستند[۱۳۶]. یکی از مهمترین تفاوتهای سیالات ویسکوالاستیک با سایر سیالات، وجود اختلاف تنـشهای نرمال اول و دوم در این مواد است. به عنوان نمونه در جریان کوئت یک سیال معمولی تـنش هـای نرمـال همواره ثابت و برابر فشار استاتیکی است اما در جریان کوئـت یـک سـیال ویـسکوالاستیک اختلافـی بـین تنشهای نرمال مشاهده می شود [۱۳۶]. به طور کلی جریان برشی این مواد، آرایش و موقعیت مولکول هـا را تحت تاثیر قرار می دهد و کشیدگی و همراستا شدن مولکول های طویـل پلیمـری در راسـتای خطـوط جریان را در پی دارد که این امر سبب بروز خواص غیرایزوتروپیک در سیال می شود. لذا جهت حفظ ایـن انحراف، میدان تنش نیز تحت تاثیر قرار گرفته و اختلاف تنش های نرمال پدید می آینـد. چنانچـه سـیال تنها در یک جهت جریان داشته باشد و تغییرات سرعت تنها در یک جهت عمود بر جهـت حرکـت بوجـود بیاید (مانند جریان کوئت)، در اینصورت طبق تعریف، جهت 1 معرف جهت جریان اصلی، جهـت 2 معـرف جهت تغییرات سرعت و جهت 3 نیز معرف جهت راستگرد عمـود بـر جهـات 1 و 2 اسـت. در یـک سـیال ویسکوالاستیک اختلاف تنشهای نرمال اول و دوم به شکل زیر تعریف می شود[۳]:

$$N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} \qquad \text{(الف-۱-۱)}$$

$$N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} \qquad \text{(الف-۱-۲)}$$

بر این اساس ثابتهای تنش های نرمال به شکل زیر قابل بیان هستند [۳]:

$$\Psi_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2} \qquad \text{(الف-۲-۱)}$$

1. Memory

$$\Psi_2 = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} \qquad \text{(الف-۲-۲)}$$

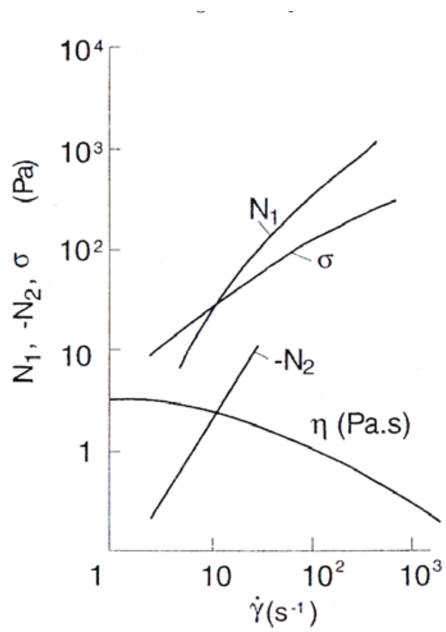
که در روابط (الف-۲)، Ψ_1 و Ψ_2 ثابت های تنش نرمال اول و دوم و $\dot{\gamma}$ نرخ برش است. اختلاف تنشهای نرمال و ثابتهای تنش نرمال همگی توابعی زوج از نرخ برش هستند. در حالت جریان پایدار، ویسکوزیته برای یک سیال ویسکوالاستیک به شکل زیر قابل تعریف است [۳]:

$$\eta = \frac{\sigma_{12}}{\dot{\gamma}} \qquad \text{(الف-۳)}$$

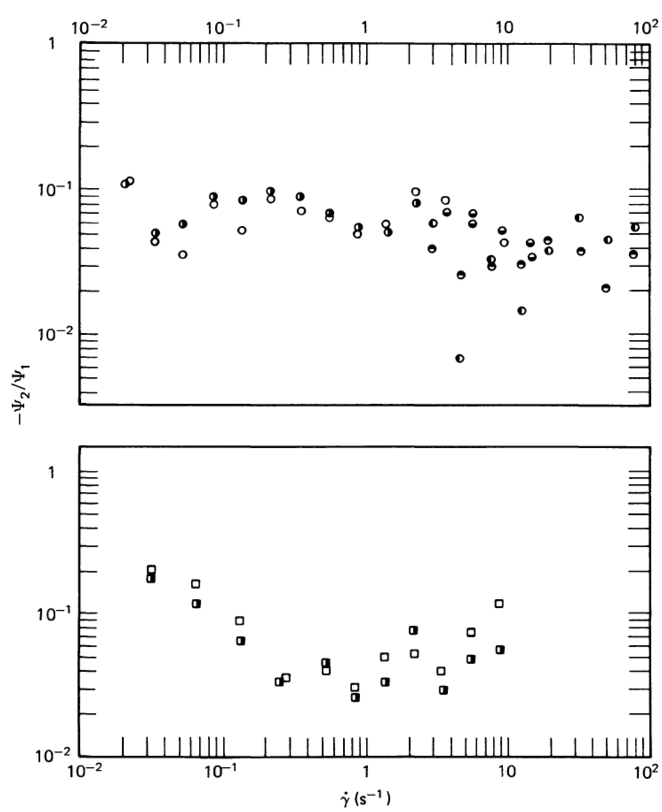
علاوه بر ویسکوزیته، ثابت های اختلاف تنش های نرمال اول و دوم نیز از جمله خواص رئولوژیکی سیال ویسکوالاستیک محسوب می شوند. شایان ذکر است که تقریباً در تمامی مواد پلیمری رفتار ویسکوزیته و ثابت های اختلاف تنش های نرمال بصورت نازک شونده[1] (شبه پلاستیک) است. در شکل (الف-۴) مقادیر N_1 و N_2 بر حسب نرخ برش برای محلول ۶/۸٪ پلی ایزو بوتیلن در ستان و در دمای $۲۴^\circ C$ نشان داده شده است. تقریباً در همه مواد مقدار N_1 از N_2 بزرگتر است. همچنین N_1 مقداری مثبت و N_2 اغلب دارای مقداری منفی است. در بیشتر کاربردهای عملی، معمولاً مقدار N_2 اندازه گیری نمی شود و از نظر بزرگی مقدار آن ۱۰٪ مقدار N_1 در نظر گرفته می شود[۱۳۷]. در شکل (الف-۵) نسبت ثابت اختلاف تنش های نرمال بر حسب نرخ برش برای محلول پلیمری ۲/۵٪ پلی اکریل آمید در مخلوط ۵۰-۵۰ آب و گلیسیرین و همچنین محلول ۳٪ اکسید پلی اتیلن در مخلوط ۵۷-۳۸-۵ آب، گلیسیرین و ایزوپروپیل الکل نشان داده شده است. مطابق شکل ماکزیمم مقدار N_2 این دو محلول از ۲۰٪ و متوسط آن از ۱۰٪ مقدار N_1 کمتر است. به مانند ویسکوزیته، می توان توابعی را بر روی توزیع ثابت های اختلاف تنش های نرمال برازش نمود. برای این منظور می توان از توابعی نظیر مدل پاورلو، کراس، کاریو-یاسودا، اولدروید و ... استفاده کرد[۱۳۷]. وجود اختلاف تنشهای نرمال سبب بروز رفتارهای متفاوت و بعضاً متضاد سیالات ویسکوالاستیک نسبت به سایر سیالات می شود که در ادامه به این موضوع پرداخته می شود.

---

1. Shear thinning



شکل (الف-۴): خواص رئولوژیکی محلول ۶/۸٪ پلی ایزو بوتیلن در ستان و در دمای $24^\circ C$ [۱۳۶]



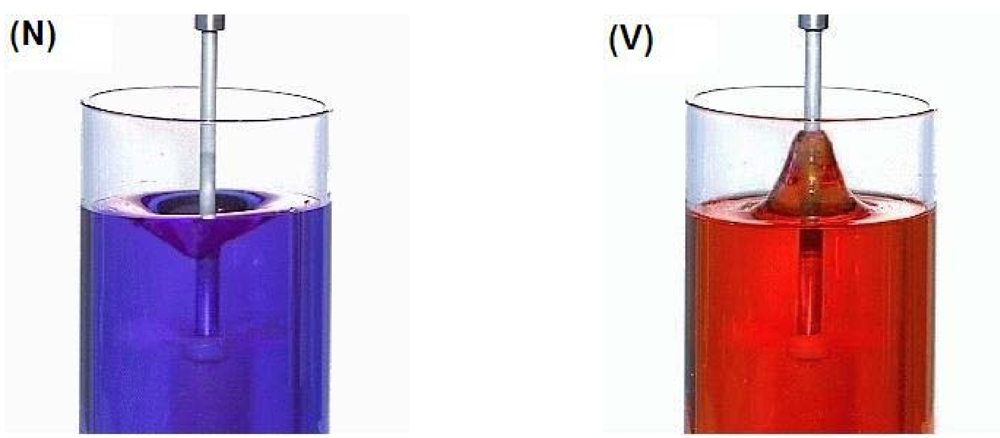
شکل (الف-۵): نسبت ثابت های اختلاف تنش نرمال دو محلول پلیمری بر حسب نرخ برش [۳]

الف-۲-۳-۲- برخی رفتارهای سیال ویسکوالاستیک

در این بخش برخی رفتارهای سیالات ویسکوالاستیک که متفاوت از سایر سیالات بـوده و عمـدتاً ناشـی از اثر اختلاف تنش های نرمال و همچنین وجود حافظه هستند، معرفی می شود.

الف-۲-۳-۲- ۱- تغییر شکل سطح آزاد یک سیال در حال چرخش

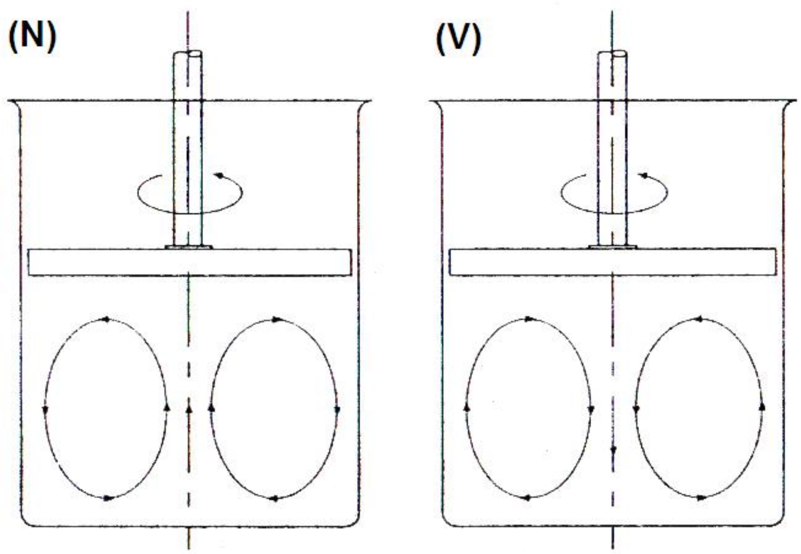
هنگامی که یک سیال نیوتنی در یک ظرف به وسیله یک میله چرخان، هم زده می شود، سـطح سـیال در وسط ظرف پایین و در نزدیکی دیواره بالا می آید. این پدیده ناشی از اثر نیروی گریز از مرکز بوده و سبب تبدیل سطح آزاد سیال به یک سطح مقعر با تقارن محوری می شود. چنانچـه ایـن آزمـایش بوسـیله یـک سیال ویسکوالاستیک تکرار شود، سطح جریان به شکل یک سطح محدب در مـی آیـد و اصـطلاحاً گفتـه می شود که سیال تمایل به بالا رفتن از میله چرخان را دارد. این پدیده ناشی از اختلاف تنش های نرمـال اول در این مواد است. طبق مطالعات انجام شده، در این آزمایش مقدار $(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr})/r$ مقداری غیر صـفر و مثبت است که می تواند به اثر نیروی گریز از مرکز چیره شـود و رفتـار متـضادی را بـه نمـایش بگـذارد [۱۳۸]. این پدیده در شکل (الف-۶) نشان داده شده است.



شکل(الف-۶): اعمال چرخش به سیال نیوتنی (N) – سیال ویسکوالاستیک (V) [۱۳۸]

الف-۲-۳-۲-۲- تغییر جهت جریانهای ثانویه یک جریان در حال چرخش

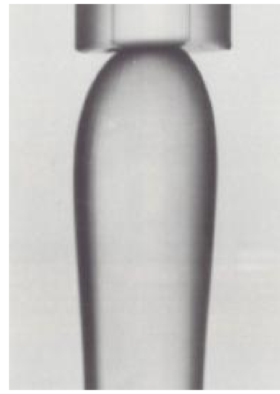
چنانچه درب ظرف حاوی یک سیال شروع بـه دوران نمایـد، یـک جریـان ثانویـه بـین سـطح چرخنـده و دیواره های ثابت بوجود می آید. در اینجا نیز اثر اختلاف تنش های نرمال اول سبب برعکس شـدن جهـت جریان ثانویه در سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی شده است [۱۳۶] (به شکل (الـف-۷) توجـه شود).



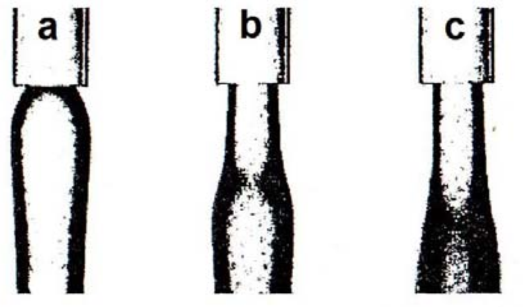
شکل (الف-۷): *تغییر جهت جریانهای ثانویه در عمق یک جریان در حال چرخش*
(سیال نیوتنی (N) - سیال ویسکوالاستیک (V)) [۱۳۶]

الف-۲-۳-۲-۳- آماسیدگی جت

مطابق شکل (الف-۸) جریان جت یک سیال ویسکوالاستیک در نزدیکی نقطه خروج از سـر نـازل، تمایـل بسیار زیادی به گسترش جانبی (تورم) دارد. در مواد ویسکوالاستیک این پدیـده ناشـی از وجـود اخـتلاف تنش نرمال اول است. همچنین افزایش اینرسی جریان سبب ایجاد تاخیر در وقـوع ایـن پدیـده مـی شـود [۱۳۶] (به شکل (الف-۹) توجه شود).



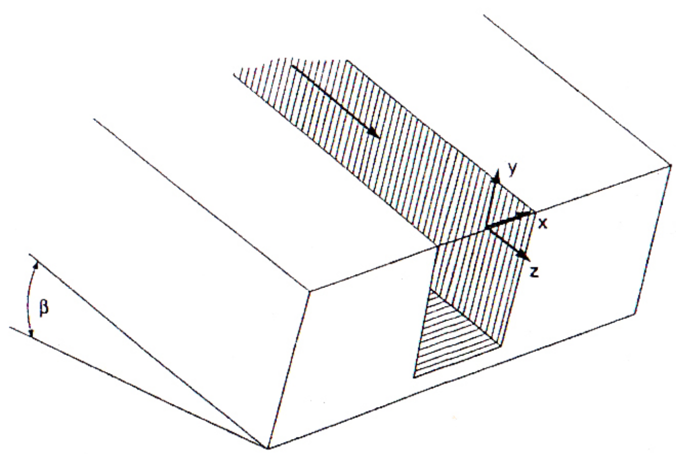
شکل (الف-۸): تورم جت یک سیال
ویسکوالاستیک در نزدیکی سر نازل [۱]



شکل (الف-۹): دور شدن موقعیت تورم با
افزایش عدد رینولدز از a تا c [۱۳۶]

الف-۲-۳-۲-۴- جریان یک سیال ویسکو الاستیک در یک کانال باز شیب دار

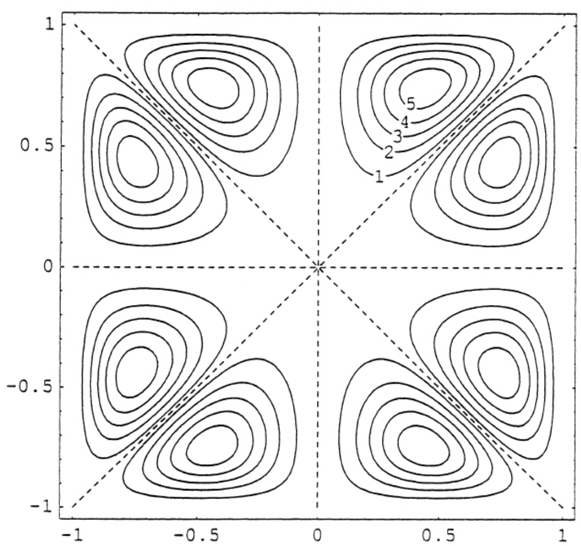
مطابق شکل (الف-۱۰)، چنانچه یک سیال نیوتنی در یک کانال باز شیب دار جریان یابد، سطح آزاد جریان تقریباً به شکل یک صفحه تخت خواهد بود. ولی اگر در همین کانال یک سیال ویسکوالاستیک جریان یابد، سطح آزاد جریان به شکل محدب در می آید. این پدیده ناشی از وجود اختلاف تنش های نرمال دوم در این مواد است [۱۳۶].



شکل (الف-۱۰): طرح شماتیک جریان روی یک کانال باز شیبدار [۱۳۶]

الف-۲-۳-۲-۵- جریانهای ثانویه در مجاری غیر مدور

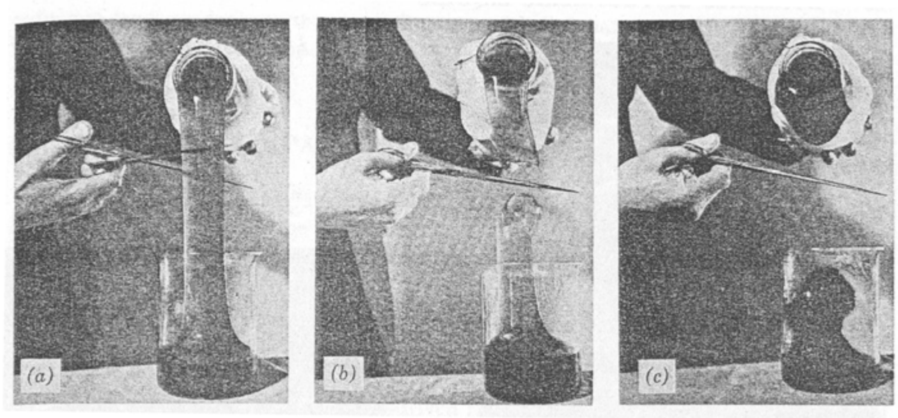
وجود اختلاف تنش های نرمال دوم سبب بروز جریانهای ثانویه در جریان آرام یک سـیال ویـسکوالاستیک در مجاری بسته غیر مدور می شود (مشابه جریانهای ثانویه ایجاد شده در جریان مغشوش سیالات نیوتنی در مجاری غیر مدور). شدت چرخش این جریانها به بزرگی و جهت آن نیز به مثبت یـا منفـی بـودن N_2 وابسته است [۱۳۸]. (شکل (الف-۱۱) را ببینید)



شکل (الف-۱۱): جریانهای ثانویه در جریان پلی ایزو بوتیلن در $De = 70$
(مقادیر ψ با ضرب کردن مقادیر داخل شکل در 10^{-7} بر حسب m^2/s بدست می آیند.)[۱۳۸]

الف-۲-۳-۲-۶- بازگشت فنری

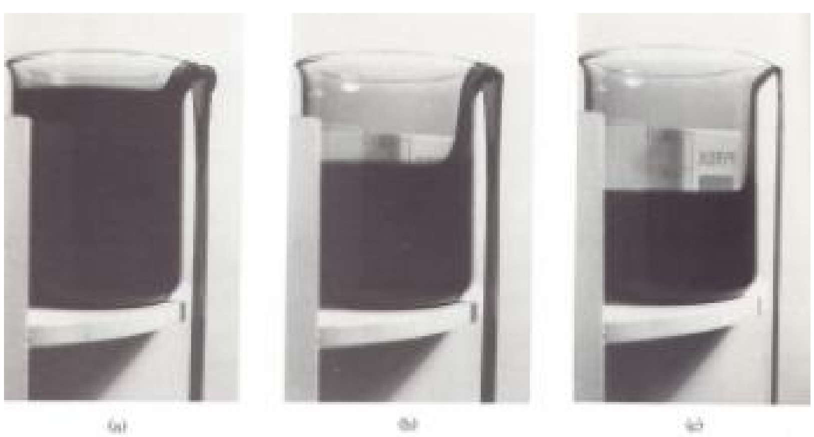
مطابق شکل (الف-۱۲)، اگر یک سیال ویسکوالاستیک در حال خالی شدن از یک ظرف به ظرف دیگری باشد، چنانچه بوسیله یک قیچی جریان قطع شود، قسمتی از سیال که بالای قیچـی قـرار دارد دوبـاره بـه ظرف اول باز می گردد. این پدیده ناشی از خواص الاستیک ماده است و اصطلاحاً گفته می شود که سـیال دارای حافظه است [۱۳۶].



شکل (الف-۱۲): بازگشت فنری یک سیال ویسکوالستیک [۱۳۶]

الف-۲-۳-۲-۷- سیفون بدون لوله

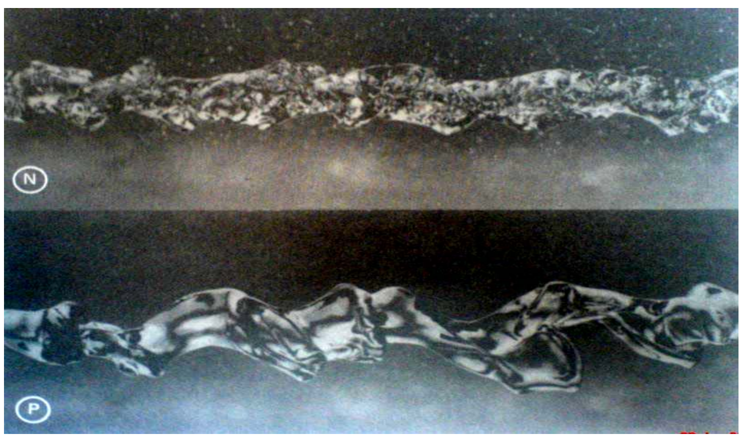
پدیده جالب توجه دیگر در جریان مواد ویسکوالاستیک، جریان سیفون بدون لوله در این مواد است. تخلیه سیفونی یک سیال نیوتنی از یک ظرف تنها بوسیله قرار دادن لوله در آن و ایجاد مکش کافی در سر آزاد لوله امکان پذیر است. اما ایجاد جریان سیفونی در سیالات ویسکوالاستیک حتی بدون وجود لوله نیز امکان پذیر است! این پدیده در پلیمرهای دارای مونومرهای بزرگتر (پلیمرهای درشت مولکول) با جریان بیشتری اتفاق می افتد. باور بر این است که کشیدگی مولکولهای طویل پلیمر در امتداد خط جریان سبب ادامه یافتن جریان سیفون می شود [۱۳۸].



شکل (الف-۱۳): سیفون بدون لوله سیالات ویسکوالاستیک [۱۳۸]

الف-۲-۳-۲-۸- جریان خروجی جت

همانگونه که در بخش الف-۲ بیان گردید، اضافه کردن مواد پلیمری به سیالات نیوتنی می تواند منجر بـه جلوگیری از واگرایی جت آنها شود. این پدیده نخستین بار در ساخت سـلاح شـعله افکـن در طـی جنـگ جهانی دوم به کار گرفته شد. در شکل (الف-۱۴) تصویری از جت سیال نیوتنی و سیال ویسکوالاستیک در فاصله یک متری خروجی نشان داده شده است. در اینجا سیال نیوتنی آب خالص و سیال ویـسکوالاستیک محلول ۲۰۰ ppm اکسید پلی اتیلن در آب است. مطابق شکل، جت محلول ویسکوالاستیک کاملاً پیوسـته است اما در اطراف جت آب پراکندگی قطرات سیال به چشم می خورد [۳].



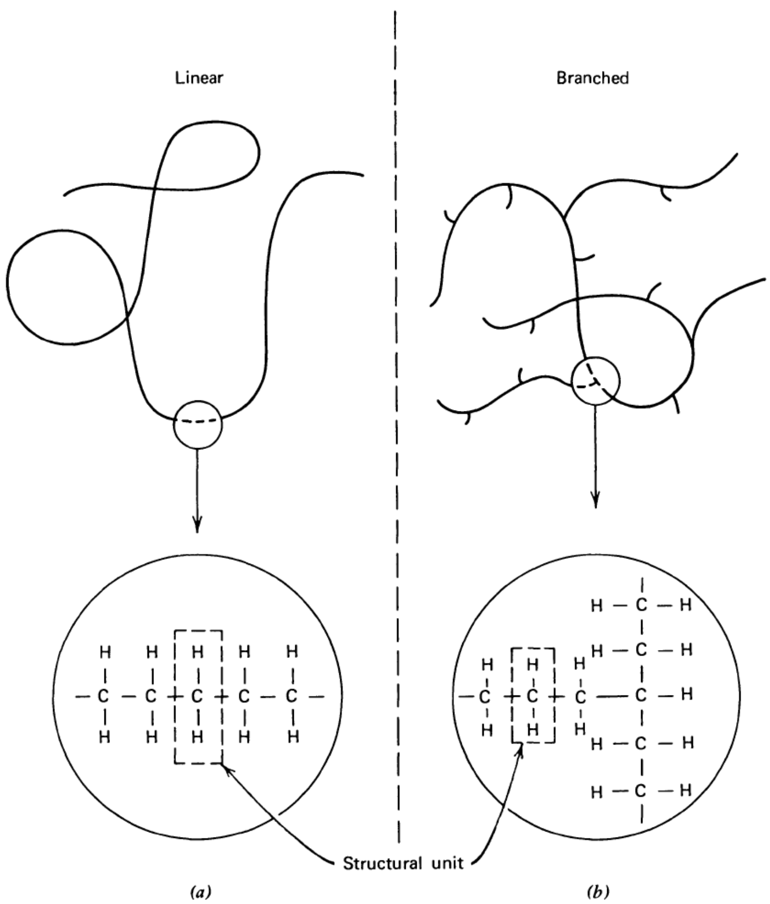
شکل (الف-۱۴) تصویر جت در فاصله یک متری خروجی برای سیال نیوتنی (N) – سیال ویسکوالاستیک (P) [۳]

علاوه بر موارد مطرح شده، اثرات متفاوت دیگری نظیر اثر آبلر[1]، جریانهای انقباضی[2]، پایداری رشته ای[3]، جلوگیری از تشکیل گردابه[4]، رفتار نوسانی در حالت غیردائم، کاهش پسای توربولانس و ... در مورد جریان سیالات ویسکوالاستیک گزارش شده است [۳ و ۱۳۷].

1. Uebler effect
2. Contraction flow
3. Filament stability
4. Vortex inhibition

الف-۲-۳-۳- منشاء رفتار ویسکوالاستیک در پلیمرها

محلولها و مذابهای پلیمری اغلب موادی بشدت غیر نیوتنی هستند. مواد پلیمری از مولکول های طویلی تشکیل شده اند که از تکرار یک واحد مشخص به نام واحد ساختاری[1] تشکیل شده اند. همچنین مولکولهای پلیمری می توانند بصورت یک رشته طویل که به مولکول خطی موسوم است و یا از چند رشته به هم پیوسته که مولکول شاخه دار نامیده می شود، تشکیل شوند. در شکل (الف-۱۵) مولکول خطی و شاخه دار پلی اتیلن با واحد ساختاری $CH_2 = CH_2$ نشان داده شده است [۳].

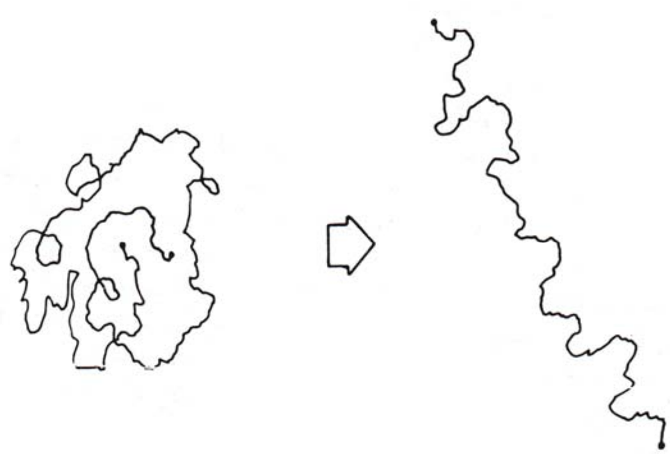


شکل (الف-۱۵): نمای شماتیک مولکول پلی اتیلن: a- خطی (پلی اتیلن سنگین)، b- شاخه دار (پلی اتیلن سبک) [۳]

1. Structure unit

به طور کلی مواد درشت مولکول عمدتاً از خود رفتار غیرنیوتنی نشان می دهند. در سیالات نیوتنی وزن مولکولی معمولاً از ۱۰۰۰ کمتر است حال آنکه در مواد پلیمری وزن مولکولی بین ۱۰،۰۰۰ تا ۱،۰۰۰،۰۰۰ گرم بر مول است. همچنین وزن مولکولی در مواد بیولوژیک درشت مولکول بسیار بیشتر بوده و برای مثال در ویروس موزاییک تنباکو[1] حدود ۴۰،۰۰۰،۰۰۰ گرم بر مول است. به همین دلیل استفاده از دانش رئولوژی در مطالعه جریان مایعات بیولوژیک نیز از اهمیت خاصی برخوردار است [۳].

در ادامه بطور اجمالی به منشا رفتار ویسکوالاستیک در پلیمرها پرداخته می شود. در ابتدا یک محلول پلیمری رقیق را مورد بررسی قرار می دهیم. در این محلولها درصورتیکه ماده برای مدت زمان کافی در حال سکون قرار بگیرد، مولکولها یک آرایش در هم تنیده و تصادفی پایدار را پیدا می کنند. حال اگر این ماده پلیمری تحت انواع تغییر شکل ها قرار بگیرد در آنصورت مولکولهای پلیمر در اثر بارگذاری، آرایش فضایی جدیدی پیدا می کنند. در شکل (الف-۱۶) نمونه ای از این تغییر آرایش مولکولی نشان داده شده است [۱۳۹].



شکل (الف-۱۶): تغییر آرایش مولکول پلیمری از حالت پایدار تصادفی به حالت جدید در اثر بارگذاری [۱۳۹]

1. Tobacco mosaic virus

به علاوه ممکن است که مولکولها خودشان را با برخی جهتهای خاص، تطبیـق دهنـد بـه نحـوی کـه آرایش مولکولیشان دیگر تصادفی نباشد. بنابراین در یک ماده پلیمری تغییر آرایش مولکولها موجب تغییر خواصی نظیر ویسکوزیته می شود و چون این تغییر آرایش بطور آنی انجام نمی شود، لذا سبب وابـستگی تغییر شکل های سیال به زمان می گردد. زیرا در ساختار مولکولی نیروهای بین اتمی مانند فنرهایی عمل می کنند که قادرند به ماده در حین تغییر آرایش، رفتار الاستیک نیز بدهند به عبارت دیگر ماده از خـود رفتار ویسکوالاستیک نشان می دهد [۱۳۹].

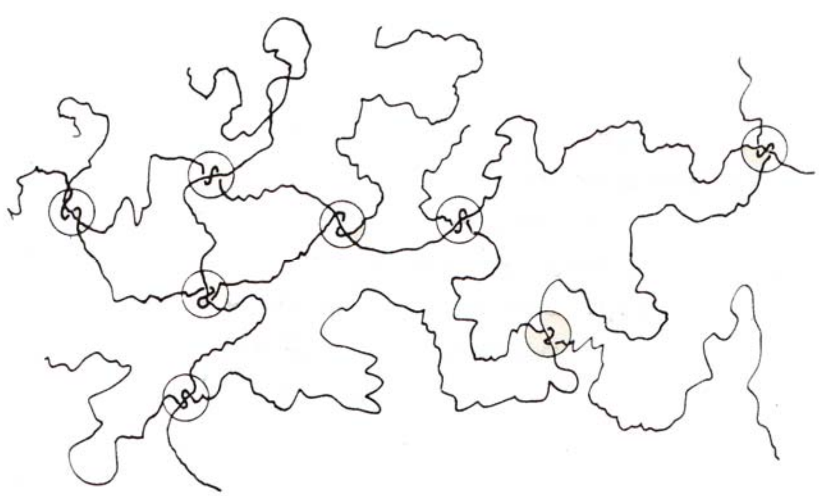
در محلولهای غلیظ و مذابهای پلیمری دارای وزن مولکولی بالا، شواهد قابـل ملاحظـه ای وجـود دارد که نشان می دهد که رفتار رئولوژیکی این مواد تحت تاثیر کنش های متقابل بسیار شدید مولکولها اسـت. این تاثیرات به قدری قوی هستند که گاهی رفتارهای مشابه با لاستیکهای دارای پیوند عرضی[۱] را از خـود نمایش می دهند[۱۳۹] (به شکل (الف-۱۷) توجه کنید). به نظر می رسد که نقاط کنش مولکولها قادرند تا حدی نسبت به هم حرکت نموده و تغییر مکان دهند و کنش مولکولها در نقاط جدیدی صـورت گیـرد. این مشاهدات منجر به بیان فرضیه ای شد که در آن نقاط کنش مولکولها به عنوان محل های به هم گره خوردگی مولکولی در نظر گرفته می شد. لذا می توان رشته های پلیمـری را بـصورت شـبکه ای در نظـر گرفت که در این نقاط دارای اتصالات موقتی است. وجود این شبکه موقتی سبب بروز رفتارهای الاستیک (شبیه لاستیک) در محدوده های زمانی کوتاه می شود. همچنین ایجاد تغییر شکل در این مواد موجب از بین رفتن این نقاط اتصال و کاهش ویسکوزیته می شود، بنـابراین در شـدتهای بـرش بـالا دانـسیته گـره خوردگیها و در نتیجه ویسکوزیته ماده کمتر است. همچنین از آنجا که نقاط گره خوردگی انعطاف پـذیر[۲] هستند و پیوندهای بین اتمهای شبکه نیز نقش المان الاستیک را دارند، لذا در مجموع خاصیت الاستیک شبکه بالا است. بنابراین رفتار الاستیک این پلیمرها نسبت به محلولهای رقیق پلیمری بیشتر است.

1. Cross Linked
2. Flexible

پیچیدگی بسیار بالای رفتار پلیمرها سبب می شود که نتوان کل خواص رئولوژیکی این مواد را با یـک خاصیت بیان نمود و برای این منظور حداقل به یک خاصیت الاستیک و یک خاصیت ویسکوز نیـاز اسـت. تکنیک های مورد استفاده جهت اندازه گیری خواص رئولوژیکی تا حد زیادی تابع مشخـصات کلـی مـاده مورد مطالعه هستند. از این نظر می توان مواد پلیمری را به گروه های زیر تقسیم بندی نمود [۱۳۹]:

۱. مایعات ویسکوالاستیک دارای ویسکوزیته پایین (محلولهای پلیمری رقیق)
۲. مایعات ویسکوالاستیک دارای ویسکوزیته بالا (محلولهای غلیظ و مذابهای پلیمری)
۳. جامدات ویسکوالاستیک نرم، یعنی پلیمرهایی که به میزان کمی شبکه ای (الاستومر) یا تا حدی کریستالی شده اند و در دمایی بالاتر از نقطه شیشه ای شدن خود قرار دارند.
۴. جامدات ویسکوالاستیک سخت، یعنی یک پلیمر شیشه ای با یک شبکه مستحکم

البته گاهی اوقات این گروه ها با هم تداخل پیدا می کننـد و بـه عبـارت دیگـر تکنیـک هـایی یافـت می شوند که می توانند چند گروه از تقسیم بندیهای فوق را با هم تلفیق نمایند [۱۳۹].



شکل (الف-۱۷): شبکه مولکولی دارای گره خوردگی مربوط به محلولهای غلیظ و مذابهای پلیمری [۱۳۹]

الف-۲-۳-۴- اندازه گیری خواص

مجموعه آزمایشات مربوط به اندازه گیری خواص ویسکوالاستیک به آزمایشات رئومتری معـروف هـستند. این آزمایشات منجر به شناسایی خواص اصلی سیال می شوند. به طور خلاصه معروفترین و پرکاربردترین این آزمایشات عبارتند از:

- تست رهایی از تنش: در دستگاه رئومتر، پس از دادن یک تغییر شکل کوچک $\gamma=\gamma_0$، مـاده بـه تنش σ_0 می رسد ($\sigma_0=G\gamma_0$). یکی از اهداف این آزمایش اندازه گیـری زمـان رسـیدن تـنش سیال به مقدار صفر (λ_1) و هدف دیگر اندازه گیری مـدول صـلبیت در زمانهـای مختلـف اسـت ($G(t)$). چنانچه سیال بصورت یک سیال ماکسول مدل شود، می توان نشان داد که $\lambda=\eta/G$ و $G(t)=Ge^{-t/\lambda_1}$ است (η ویسکوزیته است) [۱۴۰].
- تست خزش: این تست عمدتاً برای جامدات ویسکوالاستیک انجام می شود. در این تست پـس از دادن تنش $\sigma=\sigma_0$، مقدار تغییرات γ در زمان های مختلف جهت حفظ این تنش اندازه گیـری می شود. در این آزمایش میزان مطلوبیت خزش[1] $J(t)=\gamma(t)/\sigma_0$ و زمان تاخیر مـاده[2] (زمـان رسیدن تغییر شکل به مقدار ثابت (λ_2)) اندازه گیری می شود [۱۴۰].
- تست ریکویل[3]: تست ریکویل آزمایشی برای تعیین حافظه سیال بوده که معمـولاً پـس از تـست خزش انجام می شود. در این تست در ابتدا ماده تحت بار $\sigma=\sigma_0$ قرار می گیرد و پس از اینکـه ماده به تغییر شکل نهایی خود رسید بار حذف می شـود و پاسـخ زمـانی تغییـر شـکل مـاده تـا رسیدن به حالت توقف اندازه گیری می شود [۱۴۰].
- تست نوسان: در این تست ماده تحت بار نوسانی قرار می گیرد و تغییر شکل های آن بـر حـسب زمان اندازه گیری می شوند. برای آنکه تغییر شکل ها به مقدار کوچک باقی بمانند باید فرکـانس

---
1. Creep compliance
2. Retardation time
3. Recoil

نوسان بالا (بیشتر از ۵۰۰ هرتز) باشد. در این تست مقدار هم فاز و غیر هم فاز مدول صلبیت (G' و G'') بر حسب فرکانس قابل اندازه گیری است. می توان نشان داد که زاویه اختلاف فاز از رابطه $\delta = \tan^{-1}(G''/G')$ تعیین می شود [۱۴۰]. بنابراین از این تست سهم رفتار ویسکوز و الاستیک (δ) قابل اندازه گیری است. چنانچه دو منحنی G' و G'' یکدیگر را در ω_0 قطع نمایند، مقدار زمان رهایی از تنش از مدل ماکسول بصورت $\lambda = 1/(\omega_0 \tan\delta)$ تعیین می شود.

- اندازه گیری ویسکوزیته: تاکنون ویسکومترهای بسیار متنوعی برای اندازه گیری ویسکوزیته بر حسب نرخ برش جهت کاربردهای آزمایشگاهی و صنعتی ساخته شده اند. معروفترین این ویسکومترها، ویسکومتر لوله موییین[1] است که در انواع بسیار متنوعی تولید می شود. در این روش جریان سیال در ویسکومتر برقرار شده و با اندازه گیری مقدار افت فشار و با استفاده از روابط مربوط به این ویسکومتر، دیاگرام تنش برشی در برابر نرخ برش رسم می شود. نوع دیگر این وسیله، ویسکومتر های چرخشی از نوع استوانه هم مرکز، ویسکومتر استوانه ای دوران کننده در سیال بی نهایت و ویسکومتر مخروط- صفحه است [۲].
- تعیین تنش های نرمال: همانگونه که پیشتر در گفته شد، اختلاف تنش های نرمال برای سیال ویسکوالاستیک دارای مقداری غیرصفر است (بر خلاف سیالات نیوتنی). به طور کلی استفاده از وسیله ای به نام رئوگونیومتر[2] جهت اندازه گیری تنش برشی و تنش های نرمال متداول است که در انواع مختلفی مانند مخروط-صفحه و نوع وایزنبرگ ساخته می شود. وسیله دیگر تعیین تنش های نرمال اکستنسیومتر[3] است که در انواع مختلفی مانند تنش ثابت و مونستد[4] ساخته می شود که با ایجاد انواع جریانهای کششی عمل اندازه گیری را انجام می دهد [۲].

1. Capillary tube viscometer
2. Rheogoniometer
3. Exten Siometer
4. Munstedt

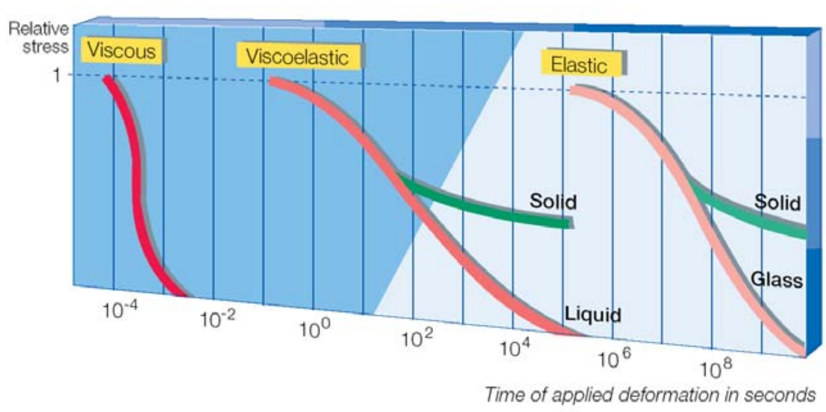
الف-۲-۳-۵- برخی پارامترهای مهم در جریان سیالات ویسکوالاستیک

قبل از بیان معادلات پایه و ارائه مدل های حاکم بر رفتار سیالات ویسکوالاستیک لازم است که دو عدد بی بعد معروف مربوط به این سیالات معرفی شوند. این دو شامل عدد دبورا[1] و عدد وایزنبرگ[2] هستند. چنانچه λ مقیاس زمان مشخصه ماده، T زمان مشخصه جریان، ω فرکانس مشخصه جریان و $\dot{\gamma}$ نرخ برش جریان باشد، در اینصورت [۱۳۶]:

$$De = \lambda\omega \quad \text{or} \quad \lambda / T \qquad \text{(عدد دبورا)} \qquad \text{(الف-۴-۱)}$$

$$Wi = \lambda\dot{\gamma} \qquad \text{(عدد وایزنبرگ)} \qquad \text{(الف-۴-۲)}$$

مقیاس زمان مشخصه برای یک ماده ویسکوالاستیک همان زمان آسودگی از تنش است. این زمان برای گازها و مایعات نیوتنی عددی بسیار کوچک (کوچکتر از 10^{-6} تا 10^{-4} ثانیه) و برای جامدات الاستیک عدد بزرگی (بزرگتر از 100 ثانیه) است [۱]. بنابراین زمان مشخصه برای یک سیال ویسکوالاستیک در حد وسط این محدوده می گنجد. در شکل (الف-۱۸) زمان اعمال تغییر شکل در مواد گوناگون تحت بارگذاریهای مختلف نشان داده شده است.

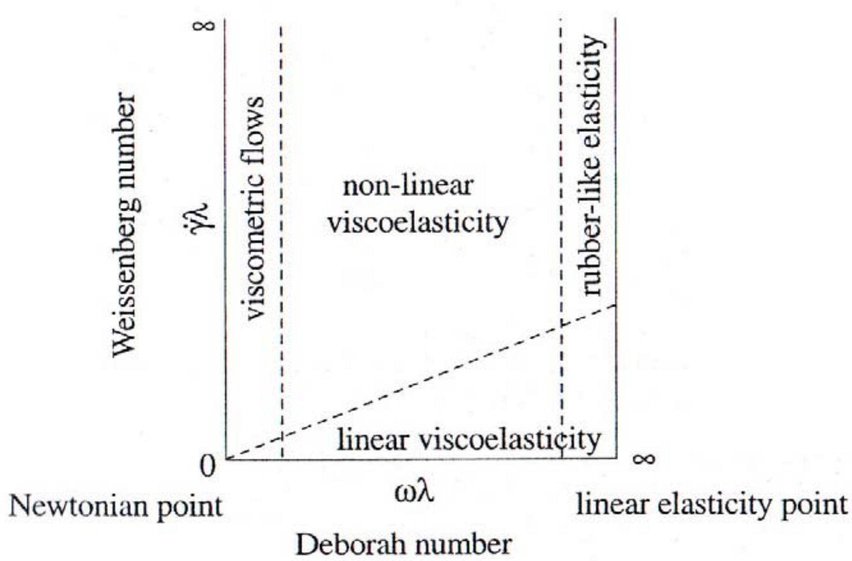


شکل (الف-۱۸): دیاگرامهای زمان اعمال تغییر شکل در مواد گوناگون [۱]

1. Deborah Number
2. Weissenberg Number

عدد دبورا بصورت نسبت زمان آسودگی از تنش به زمان مشخصه تعریف می شود. بنابراین بـرای یـک زمان مشخصه معین (یا نسبت مقیاس طولی به مقیاس سـرعت معـین)، عـدد دبـورا در گازهـا و مایعـات نیوتنی عددی بسیار کوچک و در جامدات الاستیک عدد بسیار بزرگی است [۱۳۶].

عدد وایزنبرگ بر اساس نسبت نیروی ناشـی از خاصـیت الاسـتیک بـه نیـروی حاصـل از ویـسکوزیته تعریف می شود. این عدد بر اساس روابط مختلفی تعریف شده که رابطه (الف-۴-۲) متداول تـرین شـکل بیان آن است. بنابراین در یک سیال بخصوص، بالا بودن عدد وایزنبرگ به معنای غیر نیـوتنی بـودن ایـن سیال است. مسلم است که اگر اعداد وایزنبرگ و دبورا بـرای یـک مـاده مـشخص مقـدار کوچـک داشـته باشند، ماده شانس جریان یافتن را پیدا می کنـد و بـالعکس [۱۳۶]. معمـولاً از دیـاگرام پیپکـین[1] بـرای مشخص نمودن وضعیت ویسکوالاستیک ماده استفاده می شود. در شکل (الـف-۱۹) ایـن دیـاگرام نـشان داده شده است. مطابق شکل محور افقی بر حسب عدد دبروا و محور قائم بر حسب عدد وایزنبـرگ اسـت. این دیاگرام ابزار مناسبی جهت انتخاب یک قانون پایه برای یک ماده مشخص است.



شکل (الف-۱۹): دیاگرام پیپکین [۱۳۶]

1. Pipkin's Diagram

مطابق این دیاگرام هنگامی که $De = Wi = 0$ باشد، ماده یک سیال نیوتنی است و هنگامی که De به سمت بی نهایت میل کند، ماده یک جامد الاستیک خواهد بود. در ناحیه میانی مربوط به عدد De، ماده از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان می دهد. به نحوی که در این ناحیه به ازای اعداد Wi کوچک، مدل های ویسکوالاستیک خطی و در اعداد Wi بزرگ مدل های ویسکوالاستیک غیر خطی برای ماده مناسب هستند. همچنین در اعداد De کوچک ماده رفتار ویسکومتریک و در اعداد De بزرگ رفتاری شبیه لاستیکها از خود نشان می دهد [۱۳۶].

در تمامی بخش ها، عدد وایزنبرگ خطی یا غیر خطی بودن رفتار ماده را مشخص می کند به نحوی که به ازای اعداد Wi کوچک، مدل ها خطی و به ازای اعداد Wi بزرگ، مدل ها غیر خطی خواهند بود. بنابراین با یافتن اعداد De و Wi و با استفاده از دیاگرام پیپکین می توان معادله متشکله مناسب را برای هر ماده ای تعیین نمود [۱۳۶].

الف-۲-۳-۶- معادلات متشکله

الف-۲-۳-۶-۱- کلیات

منظور از معادله متشکله[1]، معادله ای است که قادر به بیان رابطه بین تنش و تغییر شکل یک ماده مشخص باشد. در این بخش مروری اجمالی بر معادلات متشکله سیالات ویسکوالاستیک صورت می گیرد. بر این اساس در ابتدا معادلات متشکله جامد الاستیک و سیال نیوتنی معرفی شده و در ادامه قوانین اولدروید برای بدست آوردن این معادلات ارائه می شوند. همچنین انواع خانواده های مدل های ویسکوالاستیک معرفی شده و روابط چند مدل معروف ویسکوالاستیک خطی و غیر خطی ارائه شده و در مورد محدودیت ها و مزایای آنها بحث می شود.

1. Constitutive equation

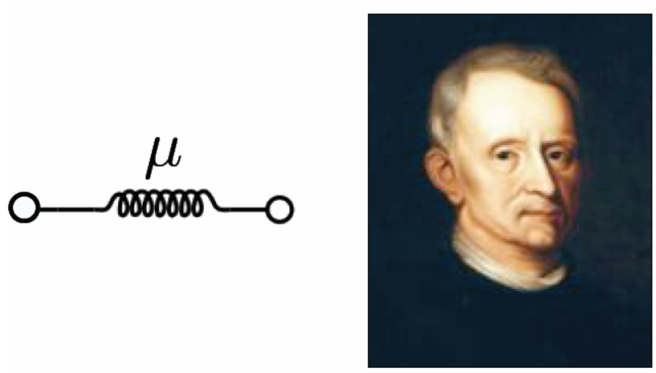
معادله متشکله سیال نیوتنی و جامد الاستیک تقریباً به طـور همزمـان در انگلـستان توسـط اسـحاق نیوتن[1] و رابرت هوک[2] بیان شدند. رابرت هوک نشان داد که در فنرها، نیروی حاصل از کشیدگی با میزان کشیدگی آن متناسب است. وی چنین قاعده ای را به برخی جامدات تعمـیم داد و جامـداتی کـه از ایـن قانون تبعیت می کردند به جامد الاستیک یا جامد هوکی معروف شدند. در حالت کلی قانون هـوک بـرای یک جامد الاستیک ناهمسانگرد به شکل زیر قابل تعریف است [۱۴۱]:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad \text{(الف-۵)}$$

در رابطه فوق τ_{ij} و ε_{kl} مولفه های تانسورهای مرتبـه دوم تـنش و کـرنش بـوده و C_{ijkl} نیـز تانـسور الاستیسیته است. برای جامد الاستیک خطی همسانگرد این رابطه به شکل زیر ساده می شود [۱۴۱]:

$$\tau_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad \text{(الف-۶)}$$

در رابطه فوق λ و μ به ثابتهای لامه[3] معروف هستند. معمولاً در جامدات الاستیک خطی بـه جـای این دو ثابت از مقادیر مدول الاستیسیته (E) و ضریب پواسون (ν) استفاده می شود. در جدول (الف-۱) تبدیلات این دو دسته ثابت برای جامدات الاستیک خطی همسانگرد آمده است.



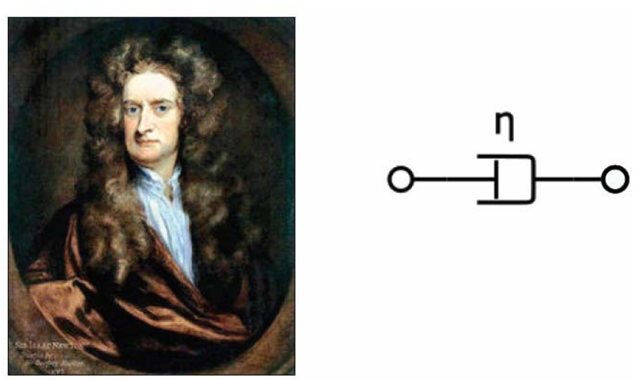
شکل (الف-۲۰): مدل جامد الاستیک (رابرت هوک (۱۶۳۵-۱۷۰۳ میلادی)) [۱۴۰]

1. Isaac Newton
2. Robert Hook
3. Lame's Constants

جدول (الف-۱): تبدیل ثابتها برای جامد الاستیک خطی همسانگرد [۱۴۱]

ثابت الاستیک	μ و λ	ν و E
λ	λ	$\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
μ	μ	$\dfrac{E}{2(1+\nu)}$
E	$\dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E
ν	$\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν

تقریباً همزمان با هوک، قانون پایه ای نیز برای سیالات توسط اسحاق نیوتن ارائه شد. بر اساس مدل وی تنش برشی در سیالات با نرخ برش رابطه خطی دارد. بر این اساس کلیه سیالاتی که از این قانون پایه تبعیت میکردند، به سیالات نیوتنی معروف شدند.



شکل (الف-۲۱): مدل سیال نیوتنی (اسحاق نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۶ میلادی))[۱۴۰]

قانون پایه یک سیال نیوتنی به شکل زیر قابل بیان است [۱۴۱]:

$$\tau_{ij} = (-P + \lambda \dot{\varepsilon}_{kk})\delta_{ij} + 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij} \qquad \text{(الف-۷)}$$

در رابطه (الف-۷)، P فشار استاتیکی، $\dot{\varepsilon}$ نرخ برش و λ و η ثابتهای ویسکوز هستند.

الف-۲-۳-۶-۲- اصول حاکم و دیدگاه های رایج در تعیین معادلات متشکله

بطور کلی برای مواد ویسکوالاستیک می توان بی نهایت معادله متشکله در نظر گرفت! ایـن معـادلات می توانند به اشکال متنوعی رابطه ای بین بسط مشتقات/انتگرالهای تنش و نـرخ بـرش را در بـر بگیرنـد. اولدروید[1] [۱۴۲] نشان داد که معادلات متشکله بایستی با اصول زیر که از مکانیک محیط هـای پیوسـته استخراج شده اند، سازگار باشد [۱۴۲]:

- اصل قطعیت تنش: تنش در یک جزء بر اساس تاریخچه حرکت آن بیان می شود.
- اصل اثر موضعی: در تعیین تنش یک نقطه مادی تنها حرکت در همسایگی کوچک آن مهم است و حرکت اجـزاء خـارج از همـسایگی تـاثیری در آن نـدارد. بـه عبـارت دیگـر رفتـار و تاریخچـه رئولوژیکی المان های مادی مجاور تاثیری در المان مربوطه ندارد.
- اصل ناوردایی مختصات: تانسور تنش و تاریخچه حرکت جسم بایستی که مستقل از نـاظر و نـوع دستگاه مختصات باشد.
- اصل عدم تغییر حرکت صلب الحاقی: مدل بایستی مستقل از حرکت مطلق جسم باشد و انتقال و دوران دستگاه مختصات نباید تاثیری در آن داشته باشد.

بطور کلی جهت بدست آوردن مدل های ویسکوالاستیک چند دیدگاه مختلف وجود دارد [۱۴۳]:

۱. برخی مدل های ویسکوالاستیک کاملاً تجربی هستند. این مدل ها اصولاً بـر اسـاس سـازگاری بـا اصول اولدروید و مطابقت با نتایج آزمایشگاهی بدست آمده اند. تعداد زیادی از این مدل هـا طـی سال های ۱۹۵۰ تا ۱۹۸۰ ارائه شده اند و امروزه نیز مورد استفاده قرار مـی گیرنـد. بـرای کـسب اطلاعات تکمیلی راجع به این مدل ها به مراجع [۳] و [۱۴۴] رجوع شود.

1. Oldroyd

۲. دیدگاه دوم استفاده از بسط های ریاضی است. مطابق این دیدگاه، رفتار غیرنیوتنی را می توان بصورت یک بسط شبیه بسط تیلور ارائه داد و انحراف سیال از رفتار نیوتنی را بدست آورد. این مدل ها به بسط حرکت تاخیری[1] نیز موسوم هستند و به عنوان نمونه می توان به معادله متشکله سیالات مرتبه n (مرتبه ۲، ۳، ۴ و ...) اشاره نمود. مشکل اصلی در استفاده از این مدل ها همگرایی کند آنها است. روش دیگر استفاده از بسط فرچت[2] است که توصیف کننده انحراف از بسط مدل های ویسکوالاستیک خطی می باشد.

۳. دیدگاه سوم مربوط به توسعه مدل هایی است که قادر به ارائه رفتار فیزیکی بهتر برای برخی جریانهای شناخته شده هستند. به عنوان نمونه می توان به مدل های ویسکوالاستیک خطی برای تغییر شکل های کوچک و مدل CEF برای جریانهای دائمی برشی اشاره نمود.

۴. دیدگاه چهارم استفاده از تئوری های مولکولی است. در این روش مولکول ها بصورت زنجیره ای از جرم و فنر در نظر گرفته می شوند. این مدل ها بر اساس کشیدگی و جهت گیری مولکول قادر به ارائه آرایش های فضایی متنوعی از آن هستند. در این دیدگاه بر اساس برخی تقریب های ریاضیاتی، معادله متشکله از مدل مولکولی استخراج می شود. برای کسب اطلاعات راجع به این مدل ها به مرجع [۱۴۵] مراجعه شود.

۵. دیدگاه پنجم دیدگاه جدیدی است که بر پایه فرآیندهای بازگشت ناپذیر ترمودینامیکی استوار است. در این روش از مجموعه ای از آزمایشات شناخته شده، مکانیک محیط های پیوسته و نتایج مکانیک آماری استفاده می شود تا معادله متشکله استخراج گردد.

به طور کلی می توان معادلات متشکله را به دو دسته معادلات خطی و غیر خطی نیز تقسیم نمود و در ادامه در مورد این معادلات بحث شده و تعدادی از معروف ترین این معادلات معرفی می شوند.

1. Retarded expansion motion
2. Frechet

الف-۲-۳-۶-۳- مدل های ویسکوالاستیک خطی

مدل های ویسکوالاستیک خطی بر پایه تلفیق خواص جامدات خطی و سیالات نیوتنی ارائه شده اند. به عبارتی این مدل ها از ترکیب های مختلف مجموعه ای از فنرها و دمپرهای خطی حاصل شده اند. لذا معادله متشکله هر مدل ویسکوالاستیک خطی به شکل زیر قابل بیان است [۱۴۴]:

$$(1+\lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}+\lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}+\ldots+\lambda_n \frac{\partial^n}{\partial t^n})\tau_{ij} = \eta_0(1+\xi_1 \frac{\partial}{\partial t}+\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}+\ldots+\xi_m \frac{\partial^m}{\partial t^m})\gamma_{ij} \qquad \text{(الف-۸)}$$

در رابطه (الف-۸)، مقادیر λ_i و ξ_i بترتیب زمان آسودگی از تنش و زمان تاخیر سیال از مرتبه i بوده و η_0 ویسکوزیته در نرخ برش صفر، τ_{ij} تنش برشی و γ_{ij} نرخ برش است. همچنین مقادیر m و n بصورت $n=m$ یا $n=m+1$ با هم رابطه دارند. بنابراین با انتخاب اختیاری مقادیر n و m می توان مدل ویسکوالاستیک جدیدی را برای یک ماده تشکیل داد. وجود n زمان رهایی از تنش و m زمان تاخیر مبین وجود مولکول ها در اندازه ها و احیاناً انواع مختلف در سیال است که سبب ایجاد ثابت های زمانی متنوعی شده است. در اینجا ثابت های زمانی مرتبه پایین از ثابت های زمانی مرتبه بالا غالب تر هستند. همچنین به ازای $\lambda_i=\xi_i=0$ مدل مشابه سیالات نیوتنی خواهد بود [۱۴۴]. مقدار نرخ برش (γ_{ij}) نیز به شکل زیر تعریف می شود:

$$\gamma_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad \text{(الف-۹)}$$

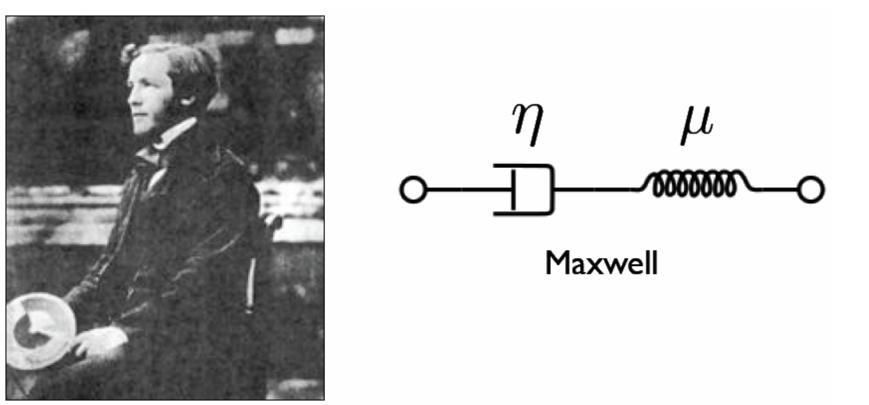
که در رابطه (الف-۹)، u سرعت و x جهت مختصات است. مدل های ویسکوالاستیک خطی برای شبیه سازی جریان محلولهای رقیق پلیمری و سوسپانسیون های رقیق ذرات کروی جامد در سیالات نیوتنی بسیار مناسب هستند. اصولاً پاسخ این مدل ها برای تغییر شکل های کوچک با فیزیک جریان سازگار بوده اما پاسخ آن برای تغییر شکل های بزرگ پرخطا است. استفاده از این مدل ها در محاسبات مربوط به تجهیزات رئومتری و برای تغییر شکل های کوچک متداول است.

همچنین استفاده از این مدل ها برای تحلیل پدیده خزش در مکانیک جامدات بسیار کارساز بوده و به دلیل سادگی به عنوان یک پاسخ تقریبی برای بسیاری از مواد ویسکوالاستیک به کار می روند [۱۴۴].

الف-۲-۳-۶-۳-۱- مدل ماکسول

یکی از اولین و معروفترین مدل های ویسکوالاستیک خطی مدل ماکسول است. در این مدل قانون پایه بر اساس یک فنر و دمپر سری تعریف می شود. مدل ماکسول به شکل زیر قابل بیان است [۱۳۶]:

$$\tau_{ij} + \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \eta \gamma_{ij} \qquad \text{(الف-۱۰)}$$



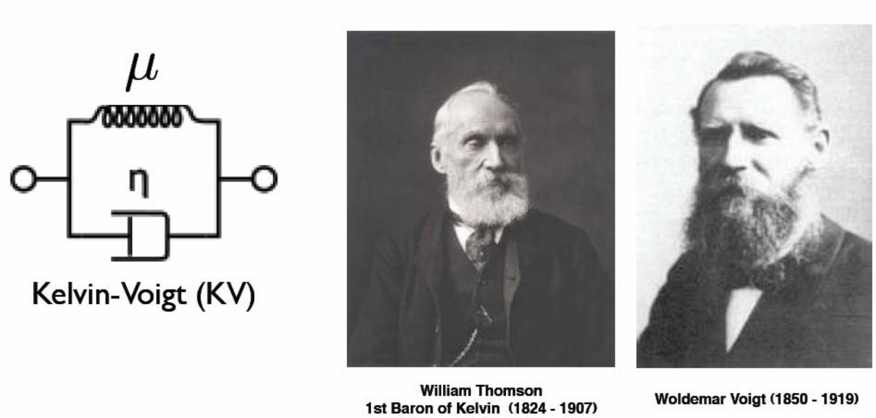
شکل (الف-۲۲): مدل ماکسول (جیمز کلرک ماکسول[1] (۱۸۳۱-۱۸۷۹ میلادی)) [۱۳۶]

در رابطه (الف-۱۰)، η ویسکوزیته و μ مدول صلبیت (مدول برشی) ماده است. مطابق مدل ماکسول ماده دارای زمان آسودگی از تنش و فاقد زمان رهایی از تغییر شکل است. به عبارت دیگر در این مدل با توقف برش دهی، نرخ تغییر شکل در سرتاسر ماده بطور آنی صفر خواهد شد. بنابراین مدل ماکسول برای تغییر شکل های کوچک محلولهای پلیمری رقیق (مواد ویسکوالاستیک دارای خواص ویسکوز و الاستیک تقریباً خطی) که دارای زمان رهایی از تغییر شکل کوچک هستند، مناسب است.

1. James Clerk Maxwell

الف-۲-۳-۶-۳-۲- مدل کلوین-ویت

در مــدل کلــوین-ویــت، رفتــار ســیال ویــسکوالاستیک بــر اســاس یــک فنــر و دمپــر مــوازی خطــی شبیه سازی شده است.



شکل (الف-۲۳): مدل کلوین-ویت
(ویلیام تامسون[1] (۱۸۲۴-۱۹۰۷ میلادی) و ولدمر ویت[2] (۱۸۵۰-۱۹۱۹ میلادی)) [۱۳۶]

رابطه بین تنش و نرخ برش در این مدل به شکل زیر قابل بیان است [۱۳۶]:

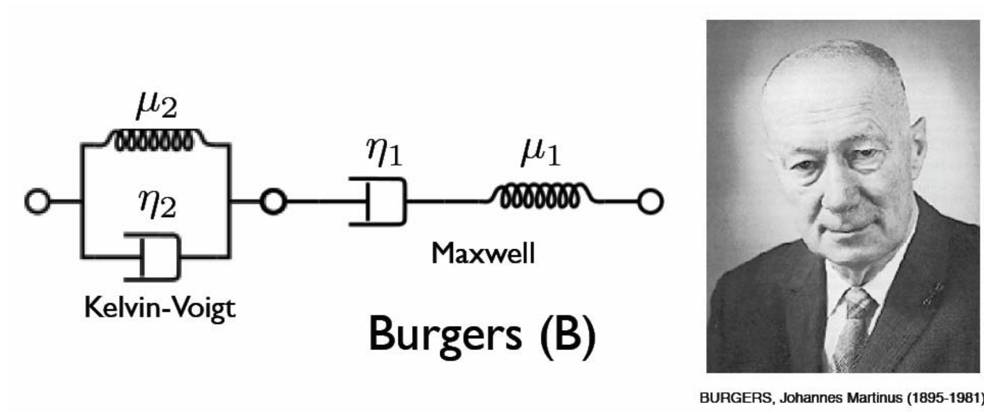
$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \mu(\gamma_{ij} + \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}) \qquad \text{(الف-۱۱)}$$

رفتار این مدل بر عکس مدل ماکسول است و هرچند در این مدل یکی از زمانهای رهایی از تغییر شکل لحاظ شده اما مدل دارای زمان آسودگی از تنش نیست. از مدل کلوین-ویـت عمومـاً بـرای مـدل سـازی پدیده خزش و ریکویل استفاده می شود. البته استفاده مستقیم از این مدل برای شبیه سازی های عددی چندان مرسوم نبوده و معمولاً جهت ارائه رفتار کامل تری از یک ماده ویـسکوالاستیک از المـان کلـوین-ویت در ارتباط با سایر المان های ویسکوالاستیک استفاده می شود.

1. William Thomson
2. Woldemar Voigt

الف-۲-۳-۶-۳-۳- مدل برگرز

در مدل برگرز یک المان ماکسول با یک المان کلوین-ویت سری شده است.



شکل (الف-۲۴): مدل برگرز (جونس مارتینوس[1] (۱۸۹۵-۱۹۸۱)) [۱۳۶]

مدل برگرز به شکل زیر قابل بیان است [۱۳۶]:

$$\tau_{ij} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial t^2} = (\eta_1 + \eta_2)\gamma_{ij} + (\lambda_1\eta_2 + \lambda_2\eta_1)\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \qquad \text{(الف-۱۲)}$$

مسلم است که مدل برگرز رفتار کاملتری را از یک ماده ویسکوالاستیک ارائه می کند. در حالت خاصی از مدل برگرز، چنانچه یکی از فنرها یا دمپرهای المان ماکسول حذف شود، مدل جدیدی به نام مدل جفریز حاصل می شود [۱۳۶]:

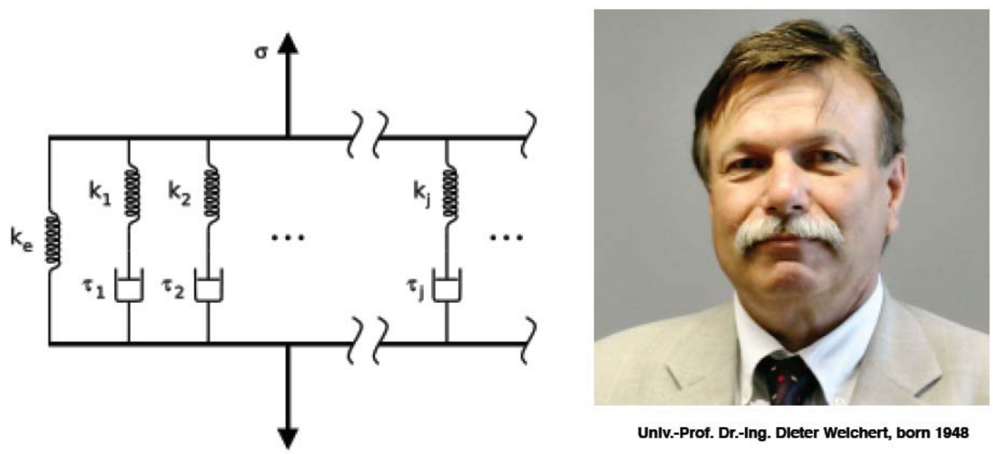
$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \eta(\gamma_{ij} + \lambda_2 \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}) \qquad \text{(الف-۱۳)}$$

مدل جفریز مدل ساده و نسبتاً مناسبی برای بررسی رفتار یک ماده ویسکوالاستیک است زیرا در آن یک زمان آسودگی از تنش و یک زمان رهایی از تغییر شکل لحاظ شده است. همین ویژگی سبب شده تا از آن به عنوان رابطه پایه در توسعه مدل غیر خطی اولدروید-بی استفاده شود.

1. Johannes Martinus

الف-۲-۳-۶-۳-۴- مدل ماکسول توسعه یافته

مدل ماکسول توسعه یافته از طریق موازی کردن تعداد متناهی از المانهای ماکسول بدست می آید. اصولاً یک ماده پلیمری از تعداد زیادی از مولکولهای رشته ای با طولهای مختلف و احیاناً ساختارهای فضایی متنوع تشکیل شده که سبب ایجاد زمانهای مختلف آسودگی از تنش در این مواد می شود. به همین دلیل این مدل برای ایجاد زمانهای متعدد آسودگی از تنش ایجاد شده است.



شکل (الف-۲۵): مدل ماکسول توسعه یافته (دلتر ولچرت[1]) [۱]

می توان نشان داد که در مدل ماکسول توسعه یافته ضریب الاستیک و ویسکوزیته معادل (تابعی از زمان هستند) به شکل زیر قابل تعریف است [۱]:

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \exp(-t/\lambda_i) \qquad \text{(الف-۱۴)}$$

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i (1 - \exp(-t/\lambda_i)) \qquad \text{(الف-۱۵)}$$

به طور مشابه، مدل کلوین-ویت توسعه یافته نیز از طریق سری کردن المان های کلوین-ویت قابل تعریف است (جهت ایجاد زمانهای رهایی از تغییر شکل مختلف).

1. Dleter Welchert

الف-۲-۳-۶-۴- مدل های ویسکوالاستیک غیر خطی

هر چند که مدل های ویسکوالاستیک خطی روابط دیفرانسیلی ساده ای را بین تنش و نرخ برش پیش بینی می کنند، اما این مدل ها دارای مشکلات زیر هستند [۱۴۴]:

۱. رفتار ویسکوالاستیک خطی تنها در محلول ها و سوسپانسیونهای رقیق پلیمری مشاهده شده در حالیکه محلولهای غلیظ، مذابهای پلیمری و سیالات بیولوژیک رفتاری کاملاً غیر خطی دارند، لذا این مدلها قابل تعمیم به تمامی مواد ویسکوالاستیک نیستند.

۲. اصل عدم تغییر حرکت صلب الحاقی که یکی از اصول اساسی مکانیک محیط های پیوسته است، بر آنها حاکم نیست.

۳. مدل های خطی قادر به مدل سازی وابستگی توابع رئولوژیک به نرخ برش نیستند. به عبارت دیگر ترم ویسکوزیته در این مدل ها همواره دارای مقداری ثابت است ($\eta = \eta_0$).

۴. بسیاری از رفتارهای متفاوت سیالات ویسکوالاستیک نسبت به سایر سیالات، وجود اختلاف تنش های نرمال در این مواد است که مدل های خطی قادر به تبیین آنها نیستند.

با این وجود استفاده از مدل های خطی برای تحلیل تغییر شکل های کوچک مواد ویسکوالاستیک رایج است. همچنین به دلیل پیچیدگیها و ناپایداریهای شدید عددی در مدل های غیر خطی، توصیه می شود که در ابتدا تحلیل جریان با استفاده از مدل های خطی انجام شود و پاسخهای حاصل از آن به عنوان فرض اولیه در مدل های غیر خطی به کار رود.

همانگونه که پیشتر در بخش پیشتر گفته شد، از اویل دهه ۵۰ میلادی مدل هایی ایجاد شدند که تا حد امکان از اشکالات مدل های ویسکوالاستیک خطی مبرا باشند و رفتار فیزیکی بهتری را مدل سازی نمایند. در ادامه برخی از معروفترین این مدل ها معرفی می شوند.

الف-۲-۳-۶-۴-۱- خانواده مدل های اولدروید [1]

یکی از معروفترین روش های تبیین رفتار سیالات ویسکوالاستیک، خانواده مدل های اولدروید است. اصولاً این مدل یک بسط خطی از تانسور تنش است که حاوی ترمهای کوادراتیک گرادیان سرعت است. این مدل بر اساس یک فرض خاص از کرنل رفتار ویسکوالاستیک بدست آمده و یک مدل تجربی محسوب می شود. اولدروید با استفاده از دستگاه مختصات ویژه ای دو اصل ناوردایی را ارضا نمود. او نشان داد که در فرموله کردن معادلات متشکله، نیازی به وارد کردن متغیرهایی که نشانگر موقعیت، حرکت دورانی و انتقالی یک جزء مادی است و نیز پارامترهای مشخص کننده اجزاء مجاور یا وضعیت آنها در آینده نیست. بنابراین زمانی که مختصات مرجع جزء مادی مطرح نباشد، ساده ترین روش تعیین ذرات مادی استفاده از دستگاه مختصات منحنی الخطی است که بر ماده سوار بوده و همراه با آن در جریان حرکت کرده و تغییر شکل می یابد [۱۴۶]. در این دستگاه مختصات اگر ζ^i مختصات یک ذره مادی در زمان $t' \leq t$ باشد (t زمان حاضر و t' تاریخچه زمانی است)، در اینصورت این ذره همواره در مختصات ζ^i باقی می ماند. بنابراین هر معادله ای که توصیف کننده رفتار المان واقع شده در ζ^i در لحظه t باشد را می توان بصورت رابطه ای از ζ^1، ζ^2، ζ^3 و t' ($-\infty < t' \leq t$) بیان نمود [۱۴۶]. از این میان متغیرهای سینماتیکی که معرف حرکت مطلق هستند حذف شده و تنها آنچه که بیانگر حرکت نسبی بین ذرات یک جزء و تاریخچه آن است، باقی می ماند. در واقع اولدروید کوشش نمود تا دو اصل دیگر مکانیک محیط های پیوسته (اصل قطعیت تنش و اصل عدم تغییر حرکت صلب الحاقی) را در این دستگاه مختصات ارضا نماید. این دستگاه مختصات (ζ^i)، دستگاه مختصات همرفتی [2] نامیده می شود و کلیه پارامترهای دینامیکی جریان نظیر مولفه های تنش و نرخ برش در آن محاسبه می شوند (بوسیله تبدیلات تانسوری) [۱۴۶].

1. Oldroyd
2. Convected coordinate system

خانواده روش اولدروید مبحث مفصلی از مکانیک محیط های پیوسته است که پرداختن به آن از حوصله این بحث خارج است و در اینجا تنها به نتایج حاصل از آن (معادلات متشکله ای که در زمینه مدل سازی جریان سیالات ویسکوالاستیک کاربرد دارند) پرداخته می شود. مدل های اولدروید نیاز به محاسبه مشتق زمانی همرفتی همبسته[۱] و نیز مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته تانسور تنش[۲] دارند که این مشتقات بترتیب در روابط (الف-۱۶) و (الف-۱۷) آمده اند [۳].

$$\tau^{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot\tau + \tau\cdot(\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \quad \text{(الف-۱۶-۱)}$$

$$\vdots$$

$$\tau^{(n)} = \frac{D\tau_{(n-1)}}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot\tau^{(n-1)} + \tau^{(n-1)}\cdot(\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \quad \text{(الف-۱۶-۲)}$$

$$\tau_{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}}\cdot\tau + \tau\cdot(\nabla V)\right\} \quad \text{(الف-۱۷-۱)}$$

$$\vdots$$

$$\tau_{(n)} = \frac{D\tau_{(n-1)}}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}}\cdot\tau_{(n-1)} + \tau_{(n-1)}\cdot(\nabla V)\right\} \quad \text{(الف-۱۷-۲)}$$

در روابط (الف-۱۶) و (الف-۱۷)، τ تانسور تنش، V بردار سرعت و T نیز نماد ترانهاده تانسور است. همچنین مشتقات زمانی همرفتی همبسته[۳] و مشتقات زمانی همرفتی پاد همبسته نرخ برش[۴] نیز به ترتیب به شکل زیر تعریف می شوند [۳]:

$$\gamma^{(1)} = \nabla V + (\nabla V)^{\mathrm{T}} \quad \text{(الف-۱۸-۱)}$$

$$\gamma^{(2)} = \frac{D\gamma^{(1)}}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot\gamma^{(1)} + \gamma^{(1)}\cdot(\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \quad \text{(الف-۱۸-۲)}$$

$$\vdots$$

$$\gamma^{(n)} = \frac{D\gamma^{(n-1)}}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot\gamma^{(n-1)} + \gamma^{(n-1)}\cdot(\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \quad \text{(الف-۱۸-۳)}$$

---

1. Covariant convected time derivative of the stress tensor
2. Contravariant convected time derivative of the stress tensor
3. Covariant convected derivative of the shear rate tensor
4. Contravariant convected derivative of the shear rate tensor

$$\gamma_{(1)} = \nabla V + (\nabla V)^{\mathrm{T}} \tag{الف-۱۹-۱}$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}} \cdot \gamma_{(1)} + \gamma_{(1)} \cdot (\nabla V)\right\} \tag{الف-۱۹-۲}$$

$$\vdots$$

$$\gamma_{(n)} = \frac{D\gamma_{(n-1)}}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}} \cdot \gamma_{(n-1)} + \gamma_{(n-1)} \cdot (\nabla V)\right\} \tag{الف-۱۹-۳}$$

در میان مدل های اولدروید، دو مدل اولدروید-ای[1] و اولدروید-بی[2] از همه معروفتر هستندکه معادله متشکله این دو مدل به ترتیب در روابط (الف-۲۰) و (الف-۲۱) آمده است [۳]:

$$\tau + \lambda_1 \tau^{(1)} = \eta_0 (\gamma^{(1)} + \lambda_2 \gamma^{(2)}) \tag{الف-۲۰}$$

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} = \eta_0 (\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)}) \tag{الف-۲۱}$$

اولدروید این دو مدل را با الهام از مدل خطی جفریز و با اعمال فرضیات و تقریب هایی در فانکشنال ویسکوالاستیک بدست آورد. زیرا همانگونه که پیشتر گفته شد در میان مدل های ویسکوالاستیک خطی، مدل جفریز مدل ساده و نسبتاً مناسبی برای بررسی رفتار یک ماده ویسکوالاستیک است چون که در آن یک زمان آسودگی از تنش و یک زمان رهایی از تغییر شکل لحاظ شده است. هرچند این دو مدل بخوبی اصول مکانیک محیط های پیوسته را ارضا می کنند اما در زمینه تعیین اختلاف تنش نرمال دوم دارای ضعف هایی هستند. رابطه (الف-۲۰)، معادله متشکله مدل اولدروید-ای بوده که در آن ثابت تنش نرمال دوم قرینه ثابت تنش نرمال اول است ($\Psi_2 = -\Psi_1$)، درحالیکه در مدل اولدروید-بی ثابت اختلاف تنش نرمال اول وجود داشته اما ثابت تنش نرمال دوم برابر صفر است ($\Psi_1 > 0$ و $\Psi_2 = 0$). از آنجا که در اکثر سیالات ویسکوالاستیک اختلاف تنش نرمال دوم دارای مقداری نسبتاً کوچک و حداکثر ۲۰٪ اختلاف تنش نرمال اول است بنابراین به نظر می رسد که پاسخ های مدل اولدروید-بی به واقعیت نزدیک است. به همین دلیل استفاده از مدل اولدروید-ای چندان رایج نبوده، حال آنکه تحقیقات عددی و تحلیلی فراوانی

1. Oldroyd-A
2. Oldroyd-B

بر اساس مدل اولدروید-بی انجام شده است. مدل اولدروید-بی به مدل همرفتی جفریز[1] نیز معروف است. این مدل در حالت های خاصی به مدل های دیگری ساده می شود [۳]:

- اگر $\lambda_2 = 0$ باشد، دراینصورت مدل فوق همرفتی ماکسول[2] (UCM) بدست می آید:

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} = \eta_0 \gamma_{(1)} \tag{الف-۲۲}$$

- اگر $\lambda_1 = 0$ شود، مدل اولدروید-بی به مدل سیال مرتبه دو تبدیل می گردد:

$$\tau = \eta_0 (\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)}) \tag{الف-۲۳}$$

- اگر $\lambda_1 = \lambda_2$ باشد، این مدل به سیال نیوتنی با ویسکوزیته η_0 ساده می شود.

شایان ذکر است که استفاده از مدل اولدروید-بی برای مدل سازی رفتار محلول های پلیمری بسیار رایج است. برای این منظور ماده حل شونده بصورت ماده پلیمری UCM و حلال بصورت سیال نیوتنی در نظر گرفته می شود.

$$\tau_p + \lambda_1 \tau_{p(1)} = \eta_p \gamma \tag{الف-۲۴-۱}$$

$$\tau_s = \eta_s \gamma \tag{الف-۲۴-۲}$$

در رابطه فوق، اندیس p مربوط به ماده حل شونده پلیمری و s مربوط به حلال نیوتنی است. همچنین مقادیر زیر به ویسکوزیته و تنش کل محلول نسبت داده می شود:

$$\tau = \tau_p + \tau_s \tag{الف-۲۵-۱}$$

$$\eta = \eta_p + \eta_s \tag{الف-۲۵-۲}$$

با جمع نمودن روابط (الف-۲۴-۱) و (الف-۲۴-۲) داریم:

$$(\tau_p + \tau_s) + \lambda_1 \tau_{p(1)} = (\eta_p + \eta_s)\gamma \tag{الف-۲۶}$$

بنابراین با توجه به رابطه (الف-۲۵)، معادله (الف-۲۶) به شکل زیر ساده می شود:

1. Convected Jeffreys Model
2. Upper Convected Maxwell Model (UCM Model)

$$\tau+\lambda_1\left(\tau_{(1)}-\tau_{s(1)}\right)=\eta\gamma \qquad \text{(الف-۲۷)}$$

یا،

$$\tau+\lambda_1\tau_{(1)}=\eta\left(\gamma+\frac{\lambda_1\eta_s}{\eta}\gamma_{(2)}\right) \qquad \text{(الف-۲۸)}$$

با مقایسه روابطه (الف-۲۱) و (الف-۲۸) می توان دریافت که رابطه (الف-۲۸) صورتی خاص از معادله اولدروید-بی است که در آن رابطه ای بین ثابت های زمانی به شکل $\lambda_2=\lambda_1\eta_s/\eta$ برقرار است. با توجه به رابطه (الف-۲۸) می توان دریافت که برخلاف صورت عمومی مدل اولدروید-بی(رابطه (الف-۲۱))، چنانچه مقدار λ_1 برابر صفر لحاظ شود، این مدل به مدل سیال مرتبه دو ساده نمی شود بلکه به سیال نیوتنی با ویسکوزیته $\eta_p+\eta_s$ ساده می شود.

به طور کلی صورت عمومی مدل اولدروید، مدل هشت ثابته اولدروید[1] است که در سال ۱۹۵۸ ارائه شده است[۳ و ۱۴۶]:

$$\begin{aligned}\tau+\lambda_1\tau_{(1)}+\frac{\lambda_3}{2}\left(\tau\gamma_1+\gamma_1\tau\right)+\frac{\lambda_5}{2}\left[tr(\tau)\right]\gamma_1+\frac{\lambda_6}{2}\left[tr(\tau\gamma_1)\right]I=\\ -\eta_0\left(\gamma_{(1)}+\lambda_2\gamma_{(2)}+\lambda_4{\gamma_{(1)}}^2+\frac{\lambda_7}{2}\left[tr\left({\gamma_{(1)}}^2\right)\right]I\right)\end{aligned} \qquad \text{(الف-۲۹)}$$

این مدل قادر به ارائه رفتار بسیار کاملی از یک سیال ویسکوالاستیک است ولی بسیار پیچیده و ناپایداری عددی آن بالا می باشد. حالتهای خاص این مدل عبارتند از:

- اگر مقادیر λ_6 و λ_7 صفر باشند، این مدل به مدل شش ثابته اولدروید[2] تبدیل می شود.
- اگر مقادیر λ_3، λ_4، λ_6 و λ_7 صفر شوند، مدل چهار ثابته اولدروید[3] بدست می آید.
- اگر مقادیر λ_3، λ_4، λ_5، λ_6 و λ_7 صفر شوند، مدل اولدروید-بی بدست می آید.

1. Oldroyd 8-Constant Model
2. Oldroyd 6-Constant Model
3. Oldroyd 4-Constant Model

در جدول (الف-۲)، ویسکوزیته و ثابتهای اختلاف تنش های نرمال اول و دوم برای مدل های مختلف اولدروید و مدل های دارای مرتبه های پایین تر آمده است.

جدول (الف-۲): ویسکوزیته و ثابتهای اختلاف تنش های نرمال اول و دوم
برای مدل های مختلف اولدروید و مدل های دارای مرتبه پایین تر [۳]

مدل	η	Ψ_1	Ψ_2
مدل سیال مرتبه دو	η_0	$-2\eta_0\lambda_2$	$\eta_0\lambda_2$
مدل UCM	η_0	$2\eta_0\lambda_2$	0
مدل اولدروید-ای	η_0	$2\eta_0(\lambda_1-\lambda_2)$	$2\eta_0(\lambda_2-\lambda_1)$
مدل اولدروید-بی	η_0	$2\eta_0(\lambda_1-\lambda_2)$	0
مدل n ثابته اولدروید ($n =$ ۴، ۶ و ۸)	$\eta_0\dfrac{1+\sigma_2\dot{\gamma}^2}{1+\sigma_1\dot{\gamma}^2}$	$2(\lambda_1\eta-\lambda_2\eta_0)$	$-\dfrac{\Psi_1}{2}+(\lambda_1-\lambda_3)\eta-(\lambda_2-\lambda_4)\eta_0$

در جدول فوق:

$$\sigma_i=\lambda_i(\lambda_3+\lambda_5)+\lambda_{i+2}(\lambda_1-\lambda_3-\lambda_5)+\lambda_{i+5}\left(\lambda_1-\lambda_3-\frac{3}{2}\lambda_5\right)$$

برای مدل چهار ثابته اولدروید: $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_6=\lambda_7=0$

برای مدل شش ثابته اولدروید: $\lambda_6=\lambda_7=0$

با توجه به جدول (الف-۲) می توان دریافت که مدل های n ثابته اولدروید ($n =$ ۴، ۶ و ۸) قادر به ایجاد اختلاف تنش های نرمال اول و دوم و نیز ویسکوزیته غیر خطی (ویسکوزیته تابع نرخ برش) می باشند و لذا می توانند رفتار ویسکوالاستیک را با دقت بالایی مدل سازی نمایند.

در پایان خاطر نشان می شود که یکی از روش های رایج در طبقه بندی سیالات ویسکوالاستیک، طبقه بندی یک سیال بر اساس مدل ویسکوالاستیکی است که به نحو بهتری نسبت به سایر مدل ها قادر به ارائه رفتار آن سیال باشد. به همین دلیل برخی از سیالات ویسکوالاستیک بصورت سیال اولدروید-بی، سیال ماکسولین، سیال فان-تین-تنر و ... نامگذاری می شوند.

الف-۲-۳-۶-۴-۲- مدل راینر-ریولین [1]

مدل راینر-ریولین یکی از مدل های غیر خطی ساده برای بررسی جریان های برشی سیالات ویسکوالاستیک است. معادله متشکله مدل راینر-ریولین در حالت کلی به شکل زیر است [۳]:

$$\tau = \eta\left(II, III\right)\gamma + \Psi_2\left(II, III\right)\gamma \cdot \gamma \qquad \text{(الف-۳۰)}$$

در رابطه (الف-۳۰)، γ تانسور نرخ برش، η ویسکوزیته و Ψ_2 ثابت اختلاف تنش های نرمال دوم است. همچنین مقادیر II و III ناوردایی های دوم و سوم تانسور نرخ برش هستند. پاسخ این مدل برای جریانهای برشی دائمی، همگن و غیر چرخشی دقیق است. در هنگام ابداع این مدل تصور بر آن بود که این مدل کاربرد فراوانی خواهد داشت اما استفاده از این مدل عملاً به پدیده شناسی اثر اختلاف تنش نرمال دوم محدود شده است.

الف-۲-۳-۶-۴-۳- مدل کریمینال-اریکسون-فیلبی [2]

مدل کریمینال اریکسون فیلبی مدل مناسبی برای شبیه سازی جریانهای برشی دائمی سیالات ویسکوالاستیک است. معادله متشکله این مدل به شکل زیر است [۳]:

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\gamma_{(1)} - \frac{1}{2}\Psi_1(\dot{\gamma})\gamma_{(2)} + \Psi_2(\dot{\gamma})\left\{\gamma_{(1)}.\gamma_{(1)}\right\} \qquad \text{(الف-۳۱)}$$

از جمله مزایای این مدل می توان به امکان اعمال مستقیم توابع رئولوژیک وابسته به نرخ برش تعمیم یافته (شامل ویسکوزیته و ثابت های اختلاف تنش نرمال اول و دوم) در مدل اشاره نمود. پاسخ های این مدل در ناحیه ویسکومتریک دیاگرام پیپکین (اعداد دبورای کوچک و محدوده وسیعی از اعداد وایزنبرگ) دقیق بوده و استفاده از آن جهت محاسبات صنعتی رایج است. در تحقیق حاضر از این مدل به عنوان معادله متشکله استفاده شده و در بخش ۳-۶-۱ تحقیق حاضر، گزارش مشروحی از آن ارائه شده است.

---

1. Reiner-Rivlin
2. Criminale-Eriksen-Filbey model (CEF model)

الف-۲-۳-۶-۴-۴- مدل فان-تین-تنر [1]

مدل چهار ثابته فان-تین-تنر (PTT) در اصل بر اساس تئوری شبکه برای مـذاب هـای پلیمـری طراحـی شده است. صورت عمومی این مدل به شکل زیر است [۱۴۷]:

$$g\,\tau+\lambda\tau_{(1)}+\frac{1}{2}\xi\lambda\left(\gamma.\tau-\tau.\gamma\right)=\eta_0\gamma \qquad \text{(الف-۳۲)}$$

در رابطه فوق g تابعی از ناوردایی اول تانسور نرخ برش است [۱۴۷]:

$$g=\exp\left[-\varepsilon\left(\lambda/\eta_0\right)tr(\tau)\right]\approx 1-\varepsilon\left(\lambda/\eta_0\right)tr(\tau) \qquad \text{(الف-۳۳)}$$

از صورت اصلاح شده مدل فان-تین-تنر [2] (MPTT) می توان برای مدل سازی رفتار محلول هـای پلیمـری استفاده نمود. در مدل MPTT صورت کلی تنش بصورت مجموع تنش ویسکوز ناشی از ماده حلال نیوتنی و تنش ویسکوالاستیک ماده حل شونده تعریف می شود [۱۴۷]:

$$\sigma_{total}=-PI+\eta_N\gamma+\tau \qquad \text{(الف-۳۴)}$$

در رابطـه فـوق، P فـشار اسـتاتیکی، $\eta_N\gamma$ مبـین تـنش ناشـی از مـاده حـلال نیـوتنی و τ تـنش ویسکوالاستیک ماده حل شونده بوده و η_N ویسکوزیته ماده حلال نیـوتنی و γ تانـسور نـرخ بـرش اسـت. معادله متشکله مدل MPTT به شکل زیر است [۱۴۷]:

$$g\,\tau+\lambda\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}+V.\nabla\tau-L\tau-\tau L^{\mathrm{T}}\right)=\eta_m\gamma \qquad \text{(الف-۳۵)}$$

در رابطه (الف-۳۵)، مقادیر g، L و η_m به شکل زیر تعریف می شوند [۱۴۷]:

$$g=1-\frac{\lambda\varepsilon}{\eta_{m0}}tr\left(\tau\right) \qquad \text{(الف-۳۶-۱)}$$

$$L=\nabla V^{\mathrm{T}}-\xi\gamma/2 \qquad \text{(الف-۳۶-۲)}$$

1. Phan-Thien-Tanner model
2. Modified Phan-Thien-Tanner model

$$\eta_m = \eta_{m0} \frac{1+\xi(2-\xi)\lambda^2\dot{\gamma}^2}{\left(1+\Gamma^2\dot{\gamma}^2\right)^{(1-n)/2}}$$ (الف-۳۶-۳)

در روابط فوق، λ زمان آسودگی از تنش، ε عدد وایزنبرگ، ξ از ثابتهای ماده، η_m ویسکوزیته ماده حل شونده، η_{m0} ویسکوزیته ماده حل شونده در نرخ برش صفر، n توان پاورلو برای ماده حل شونده (جهت مدل سازی ویسکوزیته تابع نرخ برش برای ماده حل شونده) و $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته است. همچنین Γ یک پارامتر زمانی است که معمولاً برابر زمان آسودگی از تنش (λ) فرض می شود. به این ترتیب ویسکوزیته برای کل محلول در نرخ برش صفر به شکل $\eta_0 = \eta_N + \eta_{m0}$ بدست می آید. بنابراین با تعریف پارامتر $\beta = \eta_{m0} / \eta_0$، مقدار ویسکوزیته حلال را می توان به شکل $\eta_N = (1-\beta)\eta_0$ نمایش داد. در این حالت مقدار تنش کل و معادله متشکله مدل MPTT بصورت زیر خواهد بود[۱۴۷]:

$$\sigma_{total} = -PI + (1-\beta)\eta_0\gamma + \tau$$ (الف-۳۷-۱)

$$\lambda\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla\cdot(V\,\tau)\right) = \mu\beta\eta_0\gamma + \lambda\left(L\tau + \tau L^{\mathrm{T}}\right) - g\,\tau$$ (الف-۳۷-۲)

که μ در رابطه فوق به شکل زیر خواهد بود [۱۴۷]:

$$\mu = \frac{1+\xi(2-\xi)\lambda^2\dot{\gamma}^2}{\left(1+\Gamma^2\dot{\gamma}^2\right)^{(1-n)/2}}$$ (الف-۳۸)

مدل MPTT در شش حالت خاص به مدل های دیگری ساده می شود [۱۴۷]:

- اگر $\lambda = \varepsilon = \xi = \beta = 0$ و $\eta_0 = \eta_N$ باشد، مدل به مدل سیال نیوتنی تبدیل می شود.
- اگر $\varepsilon = \xi = 0$، $\beta = 1$ و $\eta_0 = \eta_m = \eta_{m0}$ باشد، مدل UCM بدست می آید.
- اگر $\varepsilon = \xi = 0$، $0 < \beta < 1$ و $\eta_0 = \eta_m = \eta_{m0}$ باشد، مدل اولدروید-بی بدست می آید.
- اگر $\xi = 0$، $\beta = 1$ و $\eta_0 = \eta_m = \eta_{m0}$ باشد، مدل MPTT به مدل ساده شده فان تین تنر[۱] (SPTT) تبدیل می شود.

1. Simplified Phan-Thien-Tanner model

- اگر $\beta=1$ و $\eta_0=\eta_m=\eta_{m0}$ باشد، خود مدل PTT بدست می آید. مدل PTT در واقع حـالتی از مدل MPTT است که برای یک ماده ویسکوالاستیک (و نه محلول آن در سیال نیوتنی) ارائه شده است.
- کاربرد مدل MPTT در حالت $\beta=1$ بسیار متداول است.

الف-۲-۳-۶-۴-۵- مدل گزیکس[1]

مدل سه ثابته گزیکس [۱۴۸] بر مبنای دیدگاه مولکولی بدست آمده اسـت. امتیـاز اصـلی ایـن مـدل آن است که قادر به ارائه رفتار پاورلو برای ویسکوزیته و ثابت های اختلاف تـنش هـای نرمـال اسـت. معادلـه متشکله این مدل به شکل زیر است:

$$\tau+\lambda\tau_{(1)}-(\alpha\lambda/\eta_0)(\tau.\tau)=\eta_0\gamma \qquad \text{(الف-۳۹)}$$

مورد گزیکس در جهات مختلفی برای ارائه رفتار الاستیک غیر هوکی و مودهای مختلـف (مـدل گـزیکس دارای چند مود[2]) توسعه یافته است.

الف-۲-۳-۶-۴-۶- مدل دامبل[3]

این معادله متشکله بر اساس تئوری سینتیک مولکولی برای محلول های رقیق پلیمری بدست آمده است. در اینجا نیز تنش بصورت مجموع سهم تنش حلال نیوتنی (τ_s) و تنش پلیمری (τ_p) مدل شده است.

$$\tau=\tau_p+\tau_s \qquad \text{(الف-۴۰)}$$

مطابق این مدل، رابطه زیر برای تنش پلیمری پیشنهاد می شود[۱۴۹]:

1. Giesekus model
2. Multi-mode Giesekus model
3. Dumbbell model

$$Z\,\tau_p + \lambda_H \tau_{p(1)} - \lambda_H \left(\tau_p - \frac{b}{b+2} nkT\,\delta \right) \frac{D \ln Z}{Dt} = -\left(\frac{b}{b+2} \right) nkT\,\lambda_H \gamma \qquad \text{(الف-۴۱)}$$

در رابطه (الف-۴۱)، λ_H ثابت زمانی و Z تابعی از ناوردایی اول تانسور نرخ برش است:

$$Z = 1 + \frac{3}{b} \left(\frac{b}{b+2} - \frac{tr(\tau_p)}{3nkT} \right) \qquad \text{(الف-۴۲)}$$

در روابط فوق، b نسبت انرژی پتانسیلی بین مولکولی به انرژی حرارتی است. مدل دامبل مدل بسیار مناسبی بر اساس توصیف کشیدگی و تغییر شکل مولکول ها در اثر جریان محلول است. این مدل به اشکال بسیار متنوعی توسعه و یا ساده شده است. برای کسب اطلاعات بیشتر به مراجع [۱۵۰-۱۵۴] مراجعه نمایید.

الف-۲-۳-۶-۴-۷- مدل کای- BKZ[1]

این مدل بر اساس انتگرال حافظه جریان سیال ایجاد شده است [۱۴۵]:

$$\tau = +\int_{-\infty}^{t} M\,(t-t') \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \gamma_{[0]} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \gamma^{[0]} \right] dt' \qquad \text{(الف-۴۳)}$$

این مدل بصورت تعمیم رفتار غیرنیوتنی به مدل های خطی بدست آمده است. در اینجا $M\,(t-t')$ تابع حافظه و $W\,(I_1, I_2)$ یک تابع پتانسیل است. در رابطه فوق مشتقات $\gamma_{[0]}$ و $\gamma^{[0]}$ بصورت $\gamma_{[0]} = \delta - B$ و $\gamma^{[0]} = B^{-1} - \delta$ تعریف می شود که B معرف مشتق انگشتی تانسور نرخ برش است. لازم است که تابع پتانسیل در رابطه $\partial W / \partial I_1 + \partial W / \partial I_2 = 1$ در $I_1 = I_2 = 3$ صدق کند تا مدل قابل ساده شدن به مدل ویسکوالاستیک خطی باشد. در سال ۱۹۹۲ کای اقدام به اصلاح مدل خود نمود و تابع پتانسیل را بصورت جملاتی از تغییر شکل های اصلی بیان نمود. همچنین وی ادعا نمود که $W\,(I_1, I_2)$ را می توان بصورت تابعی از توان n ام تنش های اصلی نیز تعریف نمود.

1. Kaye-BKZ model

الف-۲-۳-۶-۴-۸- مدل کارتیس-برد [1]

این مدل نیز یک مدل انتگرالی بر اساس حافظه جریان سیال بوده که از تئوری مولکولی حاصل شده است. این مدل اصولاً برای مذاب های پلیمری طراحی شده و معادله آن بصورت زیر است [۱۵۵، ۱۵۶]:

$$\tau = NnkT\left\{\frac{1}{3}\delta - \int_{-\infty}^{t}\mu(t-t')A^{(2)}dt' - \frac{1}{2}\varepsilon\gamma : \int_{-\infty}^{t}\nu(t-t')A^{(4)}dt'\right\} \qquad \text{(الف-۴۴)}$$

در رابطه فوق، N تعداد ذرات در زنجیره های مولکولی، n عدد دانسیته زنجیره ها، μ و ν توابع حافظه، $A^{(2)}$ مشتق مرتبه دوم و $A^{(4)}$ مشتق مرتبه چهارم تانسور $\gamma^{[0]}$ است. این مدل قادر به ارائه صورت واقعی تری از توابع رئولوژیکی است.

الف-۲-۳-۶-۵- رابطه معادلات متشکله

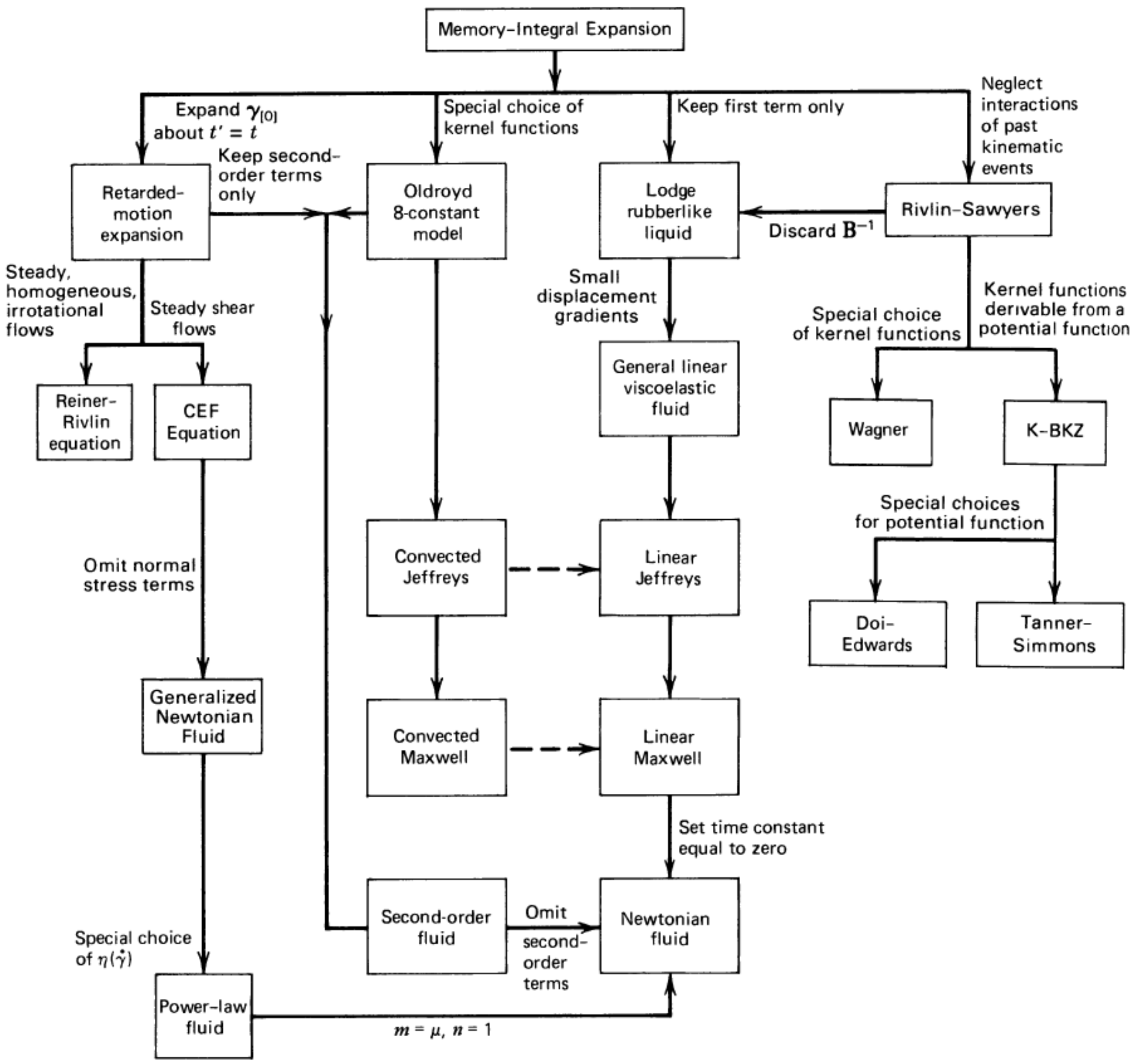
در بخشهای پیشین تا حدی در مورد رابطه معادلات متشکله با یکدیگر بحث گردید. در اینجا این موضوع به شکل کلی تری بررسی می شود. در شکل (الف-۲۶) دیاگرام رابطه معادلات متشکله مختلف نشان داده شده است. مطابق شکل معادلات متشکله به شکل زیر قابل دسته بندی هستند [۳]:

- چنانچه در بسط انتگرال حافظه جریان تنها جملات مرتبه یک لحاظ شود، مدل سیال شبه لاستیکی [2] بدست می آید. این مدل دربرگیرنده تمامی معادلات ویسکوالاستیک خطی است اما قادر به ارائه توابع ویسکومتریک و اختلاف تنش نرمال دوم نیست.
- چنانچه تغییر شکل های سیال مستقل از زمان جریان باشد، مدل سیال ریولین-سایرز [3] بدست می آید. این مدل قادر به ارائه کلیه توابع ویسکومتریک است.

1. Curtiss-Bird
2. Lodge rubber-like liquid
3. Rivlin-Sawyers

- چنانچه انتگرال حافظه جریان در زمان $t = t'$ بر حسب $\gamma_{[0]}$ بسط داده شود، معادلات متشکله بسط زمان تاخیر بدست می آیند. از این بسط می توان مدل های CEF و راینر-ریواین را استخراج نمود که برای حالات نشان داده شده در شکل دارای پاسخ دقیق هستند.
- با انتخاب یک کرنل ویژه برای رفتار ویسکوالاستیک مدل اولدروید ۸ ثابته بدست می آید.

با توجه به شکل (الف-۲۶) می توان رابطه این چهار دسته معادله متشکله با یکدیگر را مشاهده نمود.



شکل (الف-۲۶): رابطه بین معادلات متشکله [۳]

الف-۲-۳-۶-۶- نحوه انتخاب معادله متشکله

بطور کلی برای بررسی تحلیلی یا عددی یک مساله خاص توصیه می شود که معادله متشکله ای انتخاب گردد که دارای شرایط زیر باشد:

۱. حتی المکان ساده و تعداد ثابت های آن کم باشد.

۲. ضرایب و ثابت های معادله موجود بوده و یا اندازه گیری و تعیین آنها حتی المکان ساده باشد.

۳. ترجیحاً با اصول مکانیک محیط های پیوسته سازگار باشد.

۴. قادر به ارائه خواص مورد نظر باشد (مثلاً ارائه اثر اختلاف تنش نرمال دوم).

۵. برای شرایط عمومی مساله طراحی شده باشد (برای مثال از مدل هایی که برای مسائل جریانهای دائمی طراحی شده اند نمی توان در شرایط غیردائم استفاده نمود).

۶. ترجیحاً توسط مراجع معتبری برای حل مساله مورد نظر و یا مسائل مشابه توصیه شده باشد.

مراجع

1. Malkin, A. Y. (**1994**), "**Rheology Fundamentals**", First Edition, Chem. Tech. Publishing, Toronto.

۲- شیخی نارانی م، (۱۳۷۱) **"بررسی خواص، جریان، انتقال حرارت و اختلاط سـیالات غیـر نیـوتنی"**، چـاپ اول، جهاد دانشگاهی صنعتی امیر کبیر، تهران.

3. Bird, B. R., Armstrong, R. C., and Hassager, O. (1987). "**Dynamics of Polymer Liquids**", Vol. 1, Second Edition, John Wiley & Sons.

4. Green, A. E. and Rivlin, R. S. (**1956**), "Steady flow of non-Newtonian fluids through tubes", **Q. Appl. Math.**, **14**, pp. 299-308.

5. Dodson, A. G., Twonsendand, P. and, Walters, K. (**1974**), "Non-Newtonian flow in pipes of non-circular cross section", **Computer and Fluids**, **2**, pp. 317-338.

6. Twonsend, P., Waltersand K. and, Waterhouse W. M. (**1976**), "Secondary flows in pipes of square cross-section and the measurement of the second normal stress difference", **J. Non-Newton. Fluid**, **1**, pp. 107-123.

7. Gervang, B. and Larsen, P. S. (**1991**), "Secondary flow in straight duct of rectangular cross section", **J. Non-Newton. Fluid**, **39**, pp. 217-237.

8. Xue, S. C., Phan-Thien, N. and, Tanner, R. I. (**1995**), "Numerical study of secondary flows of viscoelastic fluid in straight pipes by an implicit finite volume method", **J. Non-Newton. Fluid**, **53**, pp. 191-213.

۹. طالبی ف.، (۱۳۷۵)، پایان نامه دکتری: "بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویـسکوالاستیک در مجـاری مـستطیلی"، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

10. Pinho, F. T. and Oliveria, P. J. (**2000**), "Analysis of forced convection in pipes and channels with the simplified phan-thien-tanner fluid", **International Journal of Heat and Mass Transfe**r, **43**, pp. 2273-2287.

11. Mena, B., Best, G., and Sanchez, T. (**1978**), "Heat transfer in non-Newtonian flow through pipes", **Rheol. Acta.**, **17**, pp. 455-477.

12. Oliver, D. R. and Rao, S. S. (**1978**), "Heat transfer to pseudolastic fluidsin laminar flow in horizontal tubes", **Trans. Inst. Chem. Engrs.**, **56**, pp. 62–66.

13. Xie, C. and Hartnett, J. P. (**1992**), "Laminar heat transfer of Newtonian and non-Newtonian fluids in a 2:1 rectangular duct", **Int. J. Heat Mass Transfer**, **35**, pp. 641-648.

14. Siline, M. and Leonov, A. I. (**2001**), "On flows of viscoelastic liquids in long channels and dies", **Int. J. Eng. Sci.**, **39**, pp. 415-437.

15. Akyildiz, F. T. (**2002**), "Dispersion of a solute in a Poiseuille flow of a viscoelastic fluid", **International Journal of Engineering Science**, **40**, pp. 859-872.

16. Letelier, M. F. and Siginer, D. A. (**2003**), "Secondary flows of viscoelastic liquids in straight tubes", **International Journal of Solids and Structures**, **40**, pp. 5081-5095.

17. Hashemabadi, S. H. and Etemad S. G. (**2006**), "Effect of rounded corners on the secondary flow of viscoelastic fluids through non-circular ducts", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, **49**, pp. 1986-1990.

18. Oldroyd, J. G. (**1965**), "Some steady flows of the general elastico-viscous liquid", **Proc. R. Soc. Ser. A 283**, pp. 115–133, London.

19. Syrjälä, S. (**1998**), "Laminar flow of viscoelastic fluids in rectangular ducts with heat transfer: a finite element analysis", **Int. Commun. Heat Mass Transfer**, **25**, pp. 191-204.

20. Yue, P., Dooleyand, J., Feng, J. J. (**2008**), "A general criterion for viscoelastic secondary flow in pipes of noncircular cross section", **J. Rheol.**, **52 (1)**, pp. 315-339.

21. Mai–Duy, N. and Tanner, R. I. (**2005**), "Computing non-Newtonian fluid flow with radial basis function networks", **Int. J. Numer. Methods Fluids**, **48**, pp. 1309-1336.

22. Gao, S. X. and Hartnett, J. P. (**1993**), "Steady flow of non-Newtonian fluids through rectangular ducts", **Int. Commun., Heat Mass Transfer**, **20**, pp. 197-210.

23. Gao, S. X., and Hartnett J. P. (**1996**), "Heat transfer behavior of Reiner-Rivlin fluids in rectangular ducts", **Int. J. Heat Mass Transfer**, **39**, pp. 1317-1324.

24. Tanoue, S., Naganawa, T. and, Iemoto, Y. (**2006**), "Quasi-three-dimensional simulation of viscoelastic flow through a straight channel with a square cross section", **J. Soc. Rheol., Jpn.**, **34**, pp. 105–113.

25. Debbaut, B., Avalosse, T., Dooley, J. and, Hughes K. (**1997**), "On the development of secondary motions in straight channels induced by the second normal stress difference: experiments and simulations," **J. Non-Newtonian Fluid Mech**., **69**, pp. 255-271.

26. Debbaut, B., and J. Dooley (**1999**), "Secondary motions in straight and tapered channels: Experiments and three dimensional finite element simulation with a multimode differential viscoelastic model," **J. Rheol.**, **43**, pp. 1525-1545.

27. Dooley, J. (**2002**), Ph. D. thesis, "Viscoelastic flow effects in multi-layer polymer coextrusion", Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands.

28. Dooley, J., Hyun, K. S. and, Hughes K. (**1998**), "An experimental study on the effect of polymer viscoelasticity on layer rearrangement in coextruded structures", **Polym. Eng. Sci.**, **38**, pp. 1060-1071.

29. Dooley, J., and Rudolph, L. (**2003**), "Viscous and elastic effects in polymer coextrusion," **J. Plast. Film Sheeting**, **19**, pp. 111-122.

30. Thangam, S. and Speziale C. G. (**1987**), "Non-Newtonian secondary flows in ducts of rectangular cross-section", **Acta Mech.**, **68**, pp. 121-138.

31. Wheeler, J. A. and Wissler, E. H. (**1966**), "Steady flow of non-Newtonian fluids in a square duct", **Trans. Soc. Rheol.**, **10**, pp. 353-367.

32. Zhang, M., Shen, X., Ma, J. and, Zhang B. (**2007**), "Numerical study of oldroyd-3-constant fluid in a straight duct with square cross-section", **Korea Australia Rheology Journal**, **19**, pp. 67-73.

33. Wu, G. H. (**2004**), "Non-isothermal flow of a polymeric liquid through rounded rectangular ducts", **Polymer Composites**, **25**, pp. 375-383.

34. Mario, M., Dennisand A. and, Caceres, C. (**2002**), "Pulsating flow of viscoelastic fluids in straight tubes of arbitrary cross-section", **International Journal of non-Linear Mechanics**, **37**, pp. 369-393.

35. Dennis, A., Siginer, F., Marioand F. and, Letelier F. (**2005**), "Heat transfer in laminar flow of viscoelastic fluids in straight tubes of arbitrary shapes", **Annual Transactions of the Nordic Rheology Society**, **13**, pp. 19-27.

36. Dean, W. R. (**1927**), "Note on the motion of a fluid in a curved pipe", **Phil. Mag.**, **4**, pp. 208-233.

37. Dean, W. R. (**1928**), "The streamline motion of a fluid in a curved pipe", **Phil. Mag. 5**, pp. 673-693.

38. Topakoglu, H. C. (**1967**), "Steady laminar flow of an incompressible viscous fluid in a curved pipe", **J. Math. Mech.**, **16**, pp. 1231-1237.

39. Thomas R. H. and Walters K. (**1963**), "On the flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe under a pressure gradient", **J. Fluid Mechanic**, **16**, pp. 228-242.

40. Iemoto, Y., Nagata, M. and, Yamamoto, F. (**1985**), "Steady laminar flow of a power-law fluid in a curved pipe of circular cross-section with varying curvature", **J. Non-Newton. Fluid**, **19**, pp. 161-183.

41. Iemoto, Y., Nagata, M. and, Yamamoto, F. (**1986**), "Steady laminar flow of viscoelastic fluid in a curved pipe of circular cross-section with varying curvature", **J. Non-Newton. Fluid**, **22**, pp. 101-114.

42. Phan-Thien, N., and Zheng, R. (**1990**), "Viscoelastic flow in a curved channel: a similarity solution for the Oldroyd-B fluid", **Z. angew. Math. Phys.**, **41**, pp. 766-781.

43. Bowen, P. J., Davies, A. R. and, Walters, K. (**1991**), "On viscoelastic effects in swirling flows", **J. Non-Newton. Fluid**, **38**, 113-126.

44. Sarin, V.B. (**1993**), "Flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe of slowly varying curvature", **Int J. Biomed Comput**, **32**, pp. 135-149.

45. Sarin, V.B. (**1997**), "The steady laminar flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe of varying elliptic cross section", **Mathl. Comput. Modelling.**, **26**, pp. 109-121.

46. Robertson, A. M. and Muller, S. J. (**1996**), "Flow of Oldroyd-B fluids in curved pipes of circular and annular cross-section", Int. J. Nonlinear Mech., **31**, pp. 3-20.

47. Sharma, H. G. and Prakash, A. (**1977**), "Flow of a second order fluid in a curved pipe", **Indian J. Pure Ap. Mat. 8**, pp. 546-557.

48. Jitchote, W. and Robertson, A. M. (**2000**), "Flow of second order fluids in curved" pipes, **J. Non-Newton. Fluid**, **90**, pp. 91-116.

49. Zhang, M. K., Shen, X. R., Ma, J.F. and, Zhang, B.Z. (**2007**), "Galerkin method study on flow of Oldroyd-B fluids in curved circular cross-section pipes", **J. Zhejiang Univ. Sci.**, **7**, 263-270.

50. Fan, Y., Tanner, R. I. and, Phan-Thien, N. (**2001**), "Fully developed viscous and viscoelastic flows in curved pipes", **J. Fluid Mech**., **440**, pp. 327-357.

51. Tsang, H. Y. and James, D. F. (**1980**), "Reduction of secondary motion in curved tubes by polymer additives", **J. Rheol.**, **24**, pp. 589-601.

52. Yanase, S., Goto, N., Yamamoto, K. (**1989**), “Dual solutions of the flow through a curved tube”, **Fluid Dyn. Res.**, **5**, pp. 191-201.

53. Jones, W. M., and Davies, O. H. (**1976**), “The flow of dilute aqueous solutions of macromolecules in various geometries: III. Curved pipes and porous materials”, **J. Phys. D: Appl. Phys.**, **9**, pp. 753-770.

54. Chen, Y., Chen, H., Zhang, J. and, Zhang, B. (**2006**), “Viscoelastic flow in rotating curved pipes”, **phys. Fluids, 18**, pp. 1-17.

55. Zhang, M., Shen, X., Ma, J. and, Zhang, B. (**2007**), “Theoretical analysis of convective heat transfer of Oldroyd-B fluids in a curved pipe”, **Int. J. Heat Mass Tran.**, **40**, pp. 661-671.

56. Shen, X. R., Zhang, M. K., Ma, J. F., Zhang, B. Z. (**2008**), “Flow and heat transfer of Oldroyd-B fluids in a rotating curved pipe”, **J. Hydrodyn.**, **20**, pp. 39-46.

57. Das, B. (**1992**), “Flow of a Bingham fluid in a slightly curved tube”, **Int J. Engng Sci.**, **30**, 1193-1207.

58. Clegg, D. B., and Power, G. (**1963**), “Flow of a Bingham fluid in a slightly curved tube,” **Appl. Sci. Res.**, **12**, pp. 199-208.

59. Arada, N., Pires, M. and Sequeira A. (**2007**), “Viscosity effects on flows of generalized Newtonian fluids through curved pipes”, **Comput Math Appl**, **53**, **1**, pp. 625-646.

60. Marn, J. and Ternik, P. (**2006**), “Laminar flow of a shear-thickening fluid in a 90° pipe bend”, **Fluid Dyn Res**, **38**, **1**, pp. 295-312.

61. Shobha, A. and Girija, J. (**1994**), “Numerical simulation of dispersion in the flow of power law fluids in curved tubes”, **Appl. Math. Modelling**, **18**, **1**, pp. 504-512.

62. Pires, M. (**2005**), Ph.D. Thesis, “Mathematical and numerical analysis of non-Newtonian fluids in curved pipes”, IST, Lisbon.

63. Jones, R. (**1960**), “Flow of a non-Newtonian liquid in a curved pipe”, **Quart. J. Mech. Appl. Math.**, **13**, **1**, pp. 428-443.

64. Nigam, K. D. P., Agarwal, S. and, Srivastava, V. K. (**2001**), “Laminar convection of non-Newtonian fluids in the thermal entrance region of coiled circular tubes”, **Chemical Engineering Journal**, **84**, pp. 223-237.

65. Gupta, S. N. and Mishra, P. (**1975**), “Isothermal laminar flow of non-Newtonian fluids through helical coils”, **Indian J. Tech.**, **13**, pp. 245-250.

66. Gupta, S. N. and Mishra, P. (**1975**), “Laminar forced convection heat transfer in non-Newtonian fluids in helical coils”, **Proceedings of the 3rd National Heat and Mass Transfer Conference**, **1**, pp. 13–17, Indian Institute of Technology, Bombay, India.

67. Hsu, C. F. and Patankar, S. V. (**1982**), “Analysis of laminar non-Newtonian flow and heat transfer in curved tubes”, **AIChE J.**, **28**, **4**, pp. 610-616.

68. Kewase, Y. and Young, M. M. (**1987**), “Momentum and Heat Transfer in Non-Newtonian Fluids Flowing through Coiled Tubes”, **Ind. Eng. Chem. Res.**, **26**, **6**, pp. 1248-1254.

69. Mashelkar, R. A. and Devarajan, G. V. (**1976**), “Secondary flow of non-Newtonian fluids. Part 1. Laminar boundary layer flow of a generalized non-Newtonian fluid in a coiled tube”, **Trans. Inst. Chem. Eng.**, **54**, pp. 100-107.

70. Mashelkar, R. A. and Devarajan, G. V. (**1976**), "Secondary flow of non-newtonian fluids. Part 2. Frictional losses in laminar flow of purely viscous and viscoelastic fluids through coiled tubes", **Trans. Inst. Chem. Eng.**, **54**, pp. 108-114.

71. Mujawar, B. A. and Raja R. M. (**1978**), "Flow of non-Newtonian fluids through helical coils", **Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.**, **17**, **1**, pp. 22-27.

72. Rathna, S. L. (**1967**) "Flow of a power law fluid in a curved pipe of circular cross-section", **Proceedings of the Fluid Mechanical Symposium**, pp. 378-388, Indian Institute of Science, Bangalore.

73. Rajasekharan, S., Kubair, V. G., and Kuloor, N. R. (**1970**), "Flow of non-Newtonian fluids through helical coils", **Indian J. Tech.**, **8**, pp. 379-391.

74. Raju, K. K. and Rathna, S. L. (**1970**), "Heat Transfer for the Flow of Power Law Fluids in a Curved Pipe", **J. Indian Inst.**, 52, pp. 34-47.

75. Singh, R. P. and Mishra, P. (**1980**), "Frictional factor for Newtonian and non-Newtonian fluid flow in curved pipes", **J. Chem. Eng. Jpn.**, **13**, pp. 275-280.

76. Takami, K., Sudou, Y. and, Tomito, Y. (**1986**), "Flow of non-Newtonian fluid in curved pipes", **Bull. JSME**, **29**, pp. 3750-3754.

77. Nandapurkar, P. J. and Raja R., M. (**1979**), "Laminar flow heat transfer in power law fluid in helical coils", **Indian J. Technology**, **17**, pp. 308-312.

78. Bara B. M., Nandakumar, K. and, Masliyah, J. H. (**1992**), "An experimental and numerical study of the Dean problem: flow development towards twodimensional multiple solutions", **J. Fluid Mech.**, **244**, pp. 339-376.

79. Bara, B. M. (**1991**), PhD Thesis, "Experimental investigation of developing and fully developed flow in a curved duct of square cross section", **University of Alberta**.

80. Fellouah, H., Castelain, C., Ould El Moctar, A. and, Peerhossaini , H. (**2005**), "A criterion for detection of the onset of Dean instability in Newtonian fluids", **European Journal of Mechanics B/Fluids**, **25**, pp. 505-531.

81. Zhang, J., Zhang, B. and, Ju, J. (**2001**), "Fluid flow in a rotating curved rectangular duct", **International Journal of Heat and Fluid Flow**, **22**, pp. 583-592.

82. Nandakumar, K. and Masliyah, J. H. (**1982**), "Bifurcation in steady laminar flowthrough curved tubes, **J. Fluid Mech.**, **119**, pp. 475-490.

83. Kao, H. C. (**1992**), "Some aspects of bifurcation structure of laminar flow in curved ducts", **J. Fluid Mech.**, **243**, pp. 519-539.

84. Ligrani, P. M. and Niver, R. D. (**1988**), "Flow visualization of Dean vortices in a curved channel with 40 to 1 aspect ratio", **Phys. Fluids**, **31**, pp. 3605-3617.

85. Ligrani, P. M., Choi, S., Scallert, A. R. and, Skogerboe, P., (**1996**), "Effects of Dean vortex pairs on surface heat transfer in curved channel flow", **Internat. J. Heat Mass Transfer**, **39**, pp. 27-37.

86. Yanase, S., and Nishiyama, K. (**1988**), "On the bifurcation of laminar flows through a curved rectangular tube", **J. Phys. Soc. Japan**, **57**, pp. 3790-3795.

87. Yanase, S., Kaga, Y. and, Daikai, R. (**2002**), "Laminar flows through a curved rectangular duct over a wide range of the aspect ratio", **Fluid Dyn. Res.**, **31**, pp. 151–183.

88. Yanase, S., Mondal, R. N., Kaga, Y. and Yamamoto, K., (**2005**), “Transition from steady to chaotic states of isothermal and non-isothermal flows through a curved rectangular duct”, **J. Phys. Soc. Japan**, **74**, **1**, pp. 345-358.

89. Thangam, S., and Hur, N. (**1990**), “Laminar secondary flows in curved rectangular ducts", **J. Fluid Mech.**, **217**, pp. 421-440.

90. Finlay, W. H., and Nandakumar, K. (**1990**), “Onset of two-dimensional cellular flow in finite curved channels of large aspect ratio”, **Phys. Fluids A**, **2**, pp. 1163–1174.

91. Winters, K. H. (**1987**), “A bifurcation study of laminar flow in a curved tube of rectangular cross-section”, **J. Fluid Mech.**, **180**, 343–369.

92. Cheng, K. C. and Akiyama, M. (**1970**), “Laminar forced convection heat transfer in curved rectangular channels, Internat”, **J. Heat Mass Transfer**, **13**, pp. 471-490.

93. Mori, Y., Uchida, Y. and, Ukon, T. (**1971**), “Forced convective heat transfer in curved channel with a square cross section”, Internat. **J. Heat Mass Transfer**, **14**, 1787–1805.

94. Yee, G., Chilukuri, R., and Humphrey, J. A. C. (**1980**), “Developing flow and heat transfer in strongly curved ducts of rectangular cross section”, **ASME J. Heat Transfer**, **102**, pp. 285-291.

95. Komiyama, Y., Mikami, F., and Okui, K. (**1984**), “Laminar forced convection heat transfer in curved channel of rectangular cross section”, **Trans. JSME Ser. B**, **50**, pp. 424-434.

96. Ru, Y., and Chang, S. F. (**1994**), “Combined free and forced convection for developed flow in curved pipes with finite curvature ratio”, **Internat. J. Heat Fluid Flow**, **15**, **6**, pp. 470–476.

97. Chandratilleke, T. T. and Nursubyakto, M. (**2003**), “Numerical prediction of secondary flow and convective heat transfer in externally heated curved rectangular ducts”, **Internat. J. Thermal Sci.**, **42**, pp. 187–198.

98. Lee, G. H. and Baek, J. H. (**2006**), “Effect of aspect ratio on the similarity between developing laminar flows in orthogonally rotating ducts and stationary curved ducts”, **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, **16**, **4**, pp. 494-508.

99. Lee, G. H. and Baek, J. H. (**2001**), “A numerical study on the similarity of the developing laminar flows between in orthogonally rotating square duct and stationary curved square duct”, **Journal of Computational Fluids Engineering**, **6**, pp. 21-30.

100. Lee, G. H. and Baek, J. H. (**2002**), “A numerical study of the similarity of fully developed laminar flows in orthogonally rotating rectangular ducts and stationary curved rectangular ducts of arbitrary aspect ratio**”, Computational Mechanics**, **29**, pp. 183-90.

101. Lee, G. H. and Baek, J. H. (**2002**), “A numerical study on the similarity of fully developed turbulent flows between in orthogonally rotating square ducts and stationary curved square ducts”, **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, **12**, pp. 241-57.

102. Speziale, C. G. (**1982**), “Numerical study of viscous flow in rotating rectangular ducts”, **Journal of Fluid Mechanics**, **122**, pp. 251-271.

103. Speziale, C. G. and Thangam, S. (**1983**), “Numerical study of secondary flows and roll-cell instabilities in rotating channel flow”, **Journal of Fluid Mechanics**, **130**, pp. 377-395.

104. Shanthini, W. and Nandakumar, K. (**1986**), “Bifurcation phenomena of generalized Newtonian fluids in curved rectangular ducts” **J. Non-Newton. Fluid**, **22**, pp. 35-60.

105. Joo, Y. L. and Shaqfeh, E. S. G. (**1991**), "Viscoelastic Poiseuille flow through a curved channel: a new elastic instability", **Phys. Fluids**, **9**, pp. 2043–2046.

106. Joo, Y. L. and Shaqfeh, E. S. G. (**1992**), "The effects of inertia on the viscoelastic Dean and Taylor-Couette flow instabilities with application to coating flows", **Phys. Fluids**, **11**, pp. 2415-2431.

107. Al-Mubaiyedh U. A., Sureshkumar, R. and Khomami, B. (**2000**), "Energetic effects on the stability of viscoelastic Dean flow", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, **95**, pp. 277-293.

108. Sureshkumar, R. and Avgousti, M. (**2000**), "Influence of eccentricity on stability of purely elastic Dean flow", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, **93**, pp. 61-82.

109. Helin, L., Thais, L. and, Mompean, G. (**2009**), "Numerical simulation of viscoelastic Dean vortices in a curved duct", **J. Non-Newton. Fluid**, **156**, pp. 84-94.

110. Boutabaa, M., Helin, L., Mompean, G. and, Thais L. (**2009**), "Numerical study of Dean vortices in developing Newtonian and viscoelastic flows through a curved duct of square cross-section", **CR Mecanique**, **337**, pp 40-47.

111. Zhang, M. K., Shen, X. R., Ma, J. F. and, Zhang B .Z. (**2007**), "Flow of Oldroyd-B fluid in rotating curved square ducts", **J. Hydrodyn.**, **19**, pp. 36-41.

112. Ahmadian, M. T., Burmeister, L. C., and Johnson, R. W. (**1989**) "Three dimensional solidification and flow of polymers in curved square ducts", **Polym. Eng. Sci.**, **29**, **2**, pp. 91-99.

113. Wu, G. H. (**2005**), "The creeping flow of a polymeric fluid through bent square ducts with heat dissipation", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, **48**, pp. 3628–3636.

114. Junqi, H. and Ciqun L. (**1997**), "An analytical solution and analysis of characters for viscoelastic fluid flow in annular pipe", **Applied Mathematics and Mechanics**, **18**, **6**. pp. 535-541.

115. Wood, W. P. (**2001**), "Transient viscoelastic helical flows in pipes of circular and annular cross-section**", J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, **100**, pp. 115-126.

116. Haitao, Q. and Mingyu X. (**2007**), "Unsteady flow of viscoelastic fluid with fractional maxwell model in a channel", **Mechanics Research Communications**, **34**, pp. 210-212.

117. White, F. M., (1991). "**Viscous Fluid Flow**", Second Edition, McGraw-Hill, Inc, Singapore.

118. Papanastasiou, T. C., Georgiou, G. C., and Alexandrou, A. N. (2000). "**Viscous Fluid Flow**", First Edition, CRC Press. New York.

119. Bird, R. B., Steward, W. E., and Lightfoot, E. N. (1960). "**Transport Phenomena**", First Edition, John Wiley.

120. Kays, W. M. and Crawford, M. E. (1993). "**Convective Heat and Mass Transfer**", Third Edition, McGraw-Hill, New York.

121. Criminale, W. O., Ericksen, J. L., and Filbey, G. L. (**1958**), "Steady Shear Flow of non-Newtonian Fluids", **Arch. Rat. Mech. Anal.**, **1**, pp. 410-417.

122. Ericksen, J. L. and Bergen, J. T. (1960). "**Viscoelasticity: Phenomenological Aspects**", First Edition, Academic Press, New York.

123. Beris, A., Armstrong, R. C., and Brown, R. A. (**1983**). "Perturbation theory for viscoelastic fluids between eccentric rotating cylinders", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, **13**, pp. 109-148.

124. Cross, M. M. (**1965**), “Rheology of non-Newtonian Fluids: A New Flow Equation for Pseudoplastic Systems”, **Journal of Colloid Science**, **20**, pp. 417-437.

125. Norouzi, M., Kayhani, M. H, Shu, C., and Nobari, M. R. H., (**2010**), “Flow of second order fluid in a curved duct with square cross-section”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, In Press.

126. Bronshtein, I. N., Semendyayev, K. A., Musiol, G., and Muehlig, H. (2007), “**Handbook of Mathematics**”, Springer, Berlin.

127. Norouzi, M., Kayhani, M. H., Nobari, M. R. H., and Joneidi, A. A. (**2010**), “An analytical investigation of second order fluid flow inside a curved circular pipe”, **Int. J. of Non. Dyn. and Eng. Sci.**, In Press.

128. Shah, R. K. and London, A. L. (1978), “**Advanced in Heat Transfer**”, New York, Academic Press.

129. K. A., Hoffmann, Chiang, S. T. (1989), “**Computational Fluid Dynamics for Engineers**”, First ed., EES, Texas.

130. Chorin, A. J., (**1967**), “A numerical method for solving incompressible viscous flow problems”, **J. Comput. Phys.**, **2**, pp. 12-26.

131. Harlow, F. H. and Welch, J. E. (**1965**), “Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface,” **8**, pp.2182-2189.

132. Sunden, B. and Faghri, M. (2001), “**Heat Transfer in Gas Turbine**,” First Edition, WIT Press, Boston.

۱۳۳- کیهانی، م ح، نوبری، م ر ح، نوروزی، م، (**۱۳۸۶**) "بررسی عددی جریان در یک کانال U شکل گردان"، **نشریه علمی و پژوهشی مکانیک و هوافضا امام حسین (ع)، ۲، ۳**، صفحات، ۵۹-۷۲.

134. Blazek, J., (2001). “**Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications**”, ELSEVIER, New York.

135. Norouzi, M., Kayhani, M. H., Nobari, M. R. H., Demneh, M. K. (**2009**), “Convective heat transfer of viscoelastic flow in a curved duct”, **ICMAME**, Singapore.

136. Phan-Thien, N. (2002), “**Understanding Viscoelasticity**”, First Edition, Springer, Berlin.

137. Tanner, R. I. (2000), “**Engineering Rheology**”, Second Edition, Oxford University Press, London.

138. Huilgol, R. R. and Phan-Thien, N. (1997), “**Fluid Mechanic of Viscoelasticity**”, First Edition, Elsevier.

139. Graessley, W. W. (1974), “**Advance in Polymer Science-The Entanglement Concept in Polymer Rheology**”, Vol. 16, First Edition, Springer, Berlin.

140. Shaw, M. T. and Macknight, W. J. (2005), “**Introduction to Polymer Viscoelasticity**”, Third Edition, John Wiley & Sons.

۱۴۱. لی م، رابین د و کرمپل ا، مترجم، شعرباف غ ر، (۱۳۷۸) "**مقدمه ای بر مکانیک محیط های پیوسته**"، ، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، تهران.

142. Oldroyd J. G. (**1950**), “On the formulation of rheological equations of state”, **Proc. Roy.Soc.**, London Ser. A 200, pp. 523-541.

143. R. B., Bird and Wiest, J. M., (**1995**), "Constitutive equations for polymeric liquids", **Annu. Rev. Fluid Mech., 27**, pp. 169-193.

144. Larson R. G. (1988), "**Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions**", Butterworths, Boston.

145. Bird, B. R., Armstrong, R. C., and Hassager, O. (1987), "**Dynamics of Polymer Liquids**", Vol. 2, Second Edition, John Wiley & Sons.

146. Oldroyd, J. G. (**1958**), "Non-Newtoniaenff effects in steady motion of some idealized elasticoviscous fluids", **Proc. Roy.Soc.**, London Ser A 245, pp. 278-297.

147. Phan-Thien, N and Tanner, R. I. (**1977**), "A new constitutive equation derived from network theory", **J. Non-Newton. Fluid**, **2**, pp. 353-365.

148. Giesekus, H. (**1982**), "A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility", **J. Non-Newton. Fluid**, **11**, pp. 69-109.

149. Wedgewood, L. E, Bird, R. B. (**1988**), "From molecular models to the solution of flow problems", **Ind. Eng. Chem. Res.**, **27**, pp. 1313-1320.

150. Armstrong, R. C. and Ishikawa, S. (**1980**), "A rheological equation of state for dilute solutions of nearly Hookeand umbbells", **J. Rheol.**, **24**, pp. 143-165.

151. Bird, R. B. and DeAguiar, J. R. (**1983**), "An encapsulated dumbbell model for concentrated polymer solutions and melts", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, **13**, pp.149-160.

152. Wiest, J. M. (**1989**), "A differential constitutive equation for polymer melts", **Rheol. Acta**, **28**, pp. 4-12.

153. Ng, R. C. Y. and Leal, L. G. (**1993**), "A study of the interacting FENE dumbbell model for semi-dilute polymer solutions in extensional flows", **Rheol. Acta**, **32**, pp. 25-35.

154. Wiest, J. M. and Tanner, R. I. (**1989**), "Rheology of bead-nonlinear spring chain macro-molecules", **J. Rheol.**, **33**, pp. 281-316.

155. Schieber, J. D, Curtiss, C. F, and Bird, R. B. (**1986**), "Kinetic theory of polymer melts. 7. Poly-dispersity effects", **Ind. Eng. Chem. Fundam.**, **24**, pp, 471-475.

156. Schieber J. D. (**1987**), "Kinetic theory of polymer melts. VIII. Rheological properties of poly-disperse mixtures", **J. ChemP. hys.**, **87**, pp. 4917-4927.

Abstract

Fluid flow in a curved duct is one of the main and most important flows in fluid mechanics, as it has wide applications in industry and medicine. This topic has been widely studied by experimental, numerical, and analytical approaches. It should be indicated that most of research so far is limited to Newtonian fluids, with few considering non-Newtonian fluids.

In this research, the viscoelastic flow and heat transfer in stationary and rotating curved ducts with square and rectangular cross section has been investigated. The main purpose of this research is investigation of the effect of viscoelastic properties on fluid flow. Therefore, Criminale–Eriksen–Filbey (CEF) model has been used as the constitutive equation. This equation is able to model the non-linear viscometric functions especially the first and second normal stress differences. Here, the flow and heat transfer has been studied numerically and analytically. The analytical relation of force equilibrium in the core region of fluid flow in curved duct is presented using the order of Magnitude technique which is useful for understanding the mechanism of centrifugal forces resulted from curvature and rotation, Coriolis force and normal stress differences on the generating of secondary flows.

Also, the perturbation method is used to investigate the reverse effect of the relaxation and retardation times of viscoelastic fluid on the flow rate in curved ducts. This method has been applied for curved circular pipe due to the some major mathematical problems for other shapes of cross section. According to these analytical results, the flow resistance ratio of viscoelastic fluids with large relaxation time is more than Newtonian fluids while the effect of retardation time of viscoelastic fluid on this flow is reverse and by increasing this time constant, the drag of curved duct is decreased. Furthermore, numerical resultants of fluid flow in curved duct with rectangular cross section implicate these phenomena.

In this research, finite difference method has been used to discrete governing equations on the staggered mesh and allocating method of flow and heat transfer parameters on this mesh is according to the Marker and Cell method. Artificial compressibility method has been used to estimate the pressure in time steps of numerical simulation. Here, some numerical techniques have been applied to stabilize the numerical solution for large value of elastic properties. The validity of numerical results is evaluated and independency of these results from mesh is studied. Also, effect of parameters such as Reynolds number, Dean Number, Roseby number, curvature ratio, Elastic Number, Weissenberg Number, aspect ratio and effect of viscosity, first and second normal stress differences on the flow field and heat transfer in creeping and inertial flow (in stable and unstable situations) has been studied numerically. It has been shown that unlike Newtonian creeping flow in curved duct, viscoelastic creeping flow in curved duct can be unstable. One of the main results of this research is study of normal stress differences and its effect on flow field separately. According to this study, by increasing the first normal stress difference, secondary flow intensity will be raised. This issue can be created instability and increasing the second normal stress difference has inverse effect and can stabilize the flow.

Keywords: viscoelastic fluid, flow, heat transfer, curved duct, rectangular cross section, CEF model

Shahrood
University of
Technology

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Investigation of the Viscoelastic Flow and Heat Transfer in Stationary and Rotating Curved Ducts with Square and Rectangular Cross Section

Mahmood Norouzi

Supervisor(s):

Dr. Mohammad Hassan Kayhani,
Dr. Mohammad Reza Heyrani Nobari

Advisor:
Dr. Farhad Talebi

February 2010