بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک

رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی تاثیر پتانسیل و میرایی محلی بر تبادل انرژی بین دو اسیلاتور متصل به یگدیگر

نگارنده: بهروز بخشی

استاد رهنما

دکتر امیر جلالی

شهریور ۹۶

شماره: ۲۹۶/۱۵۳ /دم
تاریخ: ۹۶/۸/۲۲

باسمه‌تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای بهروز بخشی با شماره دانشجویی ۹۳۰۳۷۰۴ رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان بررسی تاثیر پتانسیل و میرایی محلی بر تبادل انرژی بین دو اسیلاتور متصل به یکدیگر که در تاریخ ۱۳۹۶/۰۶/۲۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با امتیاز ۱۷/۹ درجه خوب) ☑ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ■ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر امیر جلالی	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	ـــــ	ـــــ	ـــــ
۳- استاد مشاور	ـــــ	ـــــ	ـــــ
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محسن واردی کولائی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر حسن احمدی	استادیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر مهدی بامداد	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود)

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان، آرام بخش آلام زمینی ام است.

*

به استوارترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم

*

به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان مادرم

*

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم.

*

امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم در رضای شما

*

گران سنگ تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم غبار خستگیتان را بزداید.

تشکر و قدردانی:

منّت و سپاس، یزدان پاک را که در سایه ی رحمتش توانستم گامی به سوی تکامل برداشته و وجود خویش را به زینت علم بیارایم. باشد که به خود آییم، شاکر باشم و طریقی برگزینم تا ستایش و بندگی او را در صراط مستقیم برآورم و در خدمت خلق او باشم.

اکنون که به یاری خداوند متعال این پایان نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم میدانم از تمامی کسانی که به نوعی اینجانب را در انجام پایان نامه یاری کرده اند، کمال تشکر را داشته باشم و ضمن سپاس فراوان از خانواده عزیزم، لازم میدانم از سرکار خانوم نجاتی که هرگز فراموششان نخواهم کرد و همه ی دوستان همراهم تشکر و قدردانی کرده و از درگاه خداوند متعال برای همه ی این بزرگواران آرزوی سعادت روزافزون دارم. همچنین از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر جلالی که با نظارت خود سرپرستی این پایان نامه را بر عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

تعهد نامه

اینجانب بهروز بخشی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بررسی تاثیر پتانسیل و میرایی محلی بر تبادل انرژی بین دو اسیلاتور متصل به یگدیگر تحت راهنمائی دکتر جلالی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو بهروز بخشی

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این تحقیق کاربرد چاه غیرخطی انرژی شامل قسمت‌های محلی و کلی بر روی یک اسیلاتور خطی در جهت کاهش ارتعاشات بررسی شده است. این جاذب غیرخطی که به‌صورت عددی و تحلیلی بر روی سیستم‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت، قادر است انرژی را از سیستم اولیه تحت تحریک خارجی به‌صورت یک‌طرفه، غیرفعال و در گستره ی وسیعی از فرکانس‌های تحریک جذب و دفع نماید. در بیشتر تحقیقاتی که به چاه غیر خطی انرژی پرداخته شده، چاه غیرخطی انرژی تنها به‌صورت کلی در نظر گرفته شده است، ولی در این تحقیق چاه غیرخطی انرژی از دو قسمت کلی و محلی تشکیل شده است. منظور از قسمت کلی، آن بخشی است که چاه غیرخطی انرژی در مواجهه مستقیم با سیستم اصلی است و قسمت محلی تنها به جرم چاه غیرخطی انرژی متصل شده و در تقابل غیرمستقیم با انتقال انرژی می‌باشد.

مدل‌سازی تحلیلی با روش منیفولد نامتغیر آهسته و محاسبات عددی مدل پیشنهادی در نرم افزار MATLAB انجام گردید. پاسخ‌های منیفولد نامتغیر آهسته حاصل از اسیلاتور خطی در تقابل با مدل چاه غیرخطی انرژی پیشنهادی دارای شاخه‌هایی است که باعث کاهش فرآیند جذب ارتعاشی سیستم می‌شوند. با بدست آوردن نقاط تعادل و نقاط تکین، سیستم به ترتیب پاسخ پریودیک و مدوله قوی می دهد. بر اساس این پاسخ‌ها چندین سناریو رخ می‌دهد که در هر کدام نتایج تحلیلی و عددی(پاسخ مدوله) با هم مقایسه شد و پمپاژ انرژی حول مشخصات هر سناریو بررسی گردید. رفتار سیستم در تحلیل منیفولد نامتغیر آهسته‌ی سیستم پیشنهادی، در مقایسه با سیستمی بدون قسمت محلی به‌جای یک شاخه شامل سه شاخه شده است که این شاخه‌ها در تفسیر رفتار سیستم به ما کمک می‌نمایند.

کلمات کلیدی: مدل کلی و محلی چاه غیرخطی انرژی ، اسیلاتور خطی، منیفولد نامتغیر آهسته، پاسخ مدوله قوی، جذب ارتعاش

فهرست

فهرست اشکال

فهرست علائم

جرم اسیلاتور اصلی	M
جرم چاه غیرخطی انرژی	m
جابجایی اسیلاتور خطی	y
جابجایی چاه غیرخطی انرژی	x
سختی فنریت اسیلاتور خطی	K
ضریب میرایی اسیلاتور خطی	$\hat{a}$
سختی فنریت کلی چاه غیرخطی انرژی	$\tilde{G}$
سختی فنریت محلی چاه غیرخطی انرژی	$\tilde{V}$
ضریب میرایی محلی چاه غیرخطی انرژی	$\hat{c}$
نیروی تحریک خارجی	F(t)
یک ضریب بدون بعد کوچکتر از واحد	ϵ
سختی فنریت خطی فنریت محلی چاه غیرخطی انرژی	w_c^2
سختی فنریت غیرخطی فنریت محلی چاه غیرخطی انرژی	W(x)
جابجایی چاه غیرخطی انرژی متصل به اسیلاتور خطی	v
جابجایی نسبی اسیلاتور خطی و چاه غیرخطی انرژی	w
فرکانس طبیعی اسیلاتور خطی	ω_0
دامنه مختلط مانویتچ	φ

دامنه مختلط مانویتچ	ψ
مقیاس زمانی سریع	τ_0
مقیاس زمانی آهسته	τ_1
سفتی‌های غیرخطی	A,B
دامنه مختلط متغیر با زمان	N_1
دامنه مختلط متغیر با زمان	N_2
دامنه معادله مدولاسیون	ρ
نقطه فولد ماکزیمم	N_{21}
نقطه فولد مینیمم	N_{22}

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مقدمه

ارتعاشات یک پدیده دینامیکی است،که مطالعه آن به حرکت نوسانی اجسام و نیروهای وابسته مربوط می‌گردد. تمامی اجسامی که دارای جرم و خاصیت الاستیک می‌باشند، تحت تأثیر ارتعاش قرار می‌گیرند. در طول تاریخ ارتعاشات به‌طور ناخواسته باعث ایجاد خسارات و ویرانی‌های مختلفی شده است. منابع طبیعی ایجاد ارتعاش را می‌توان به انواع مختلف بادها، امواج و زمین‌لرزه‌ها نام برد، که دراین‌بین یکی از شدیدترین ارتعاشات، ارتعاش ایجادشده توسط زلزله است که خسارات بسیاری در پی دارد. هر ماشینی که دوران می‌کند یا حرکت رفت و برگشتی دارد منبعی از ارتعاش است. در بالگردها تولید نیروی بالابرنده‌ی کل به‌وسیله‌ی چرخنده که تقریباً ثابت است، از طریق تغییر چرخه‌ای برخورد تیغه به هنگام دوران آن، صورت می‌گیرد. نیروی اعمال‌شده از یک تیغه به نوک چرخنده به‌طور اجتناب‌ناپذیری نوسان دارد و از انتهای چرخنده هم به سازه‌ی اتاقک و هم به اجزای مکانیکی کنترل چرخنده منتقل می‌شود. خودروها و هواپیماها (صنعت هوافضا) همیشه در معرض ارتعاش بوده‌اند. گوناگونی اندازه‌ی سیستم‌های مرتعش به معنی گوناگونی در بازه‌ی فرکانس ارتعاشات اصلی است. از بین بردن یا حداقل کاهش و کنترل ارتعاش ناخواسته از مهم‌ترین مسائلی است که مهندس طراح می‌بایست به آن توجه نماید، تا اینکه سازه از معرض بارهای دینامیکی مزاحم که باعث ایجاد اختلال و استهلاک و نهایتاً شکست و خرابی می‌شود جلوگیری نمایند.

۱-۲ روش‌های کاهش ارتعاشی

برای کنترل فرکانس‌های طبیعی سیستم و کاهش پاسخ فرکانسی در حالت تشدید[۱]، از مواردی چون افزودن المان میرایی، اضافه کردن جرم‌های ثانویه و نهادن کنترلر روی سیستم، که مثال‌هایی از روش‌های کاهش ارتعاشی می‌باشند، استفاده می‌شود. تشدید حالتی است که فرکانس نیروی محرک خارجی در نزدیکی فرکانس طبیعی سیستم باشد، که در این حالت تغییر مکان حاصل از ارتعاش افزاینده

[۱] Resonance

می‌باشد که موجب ایجاد تنش و کرنش‌های ناخواسته می‌شود و باعث آسیب به سیستم می‌شود. لذا می‌بایست از به وجود آمدن پدیده تشدید جلوگیری نمود برای این کار نیروهای محرک را می‌بایست کنترل نمود که ممکن نیست، بنابراین باید فرکانس‌های طبیعی سیستم را کنترل نماییم. برای اطمینان از جلوگیری حالت تشدید، می‌توان روی سیستم المان میرایی اعمال کرد تا اینکه پاسخ سیستم را کنترل نماید. رایج‌ترین راه‌حل در طراحی یک کاهنده ارتعاشی استفاده از جاذب ارتعاشی می‌باشد. جاذب‌های ارتعاشی بر اساس اضافه کردن سیستم جرم-فنر-دمپر یا جرم- دمپر ثانویه خطی یا غیرخطی به سیستم اصلی در جهت تقلیل ارتعاشات استوار می‌باشند. جاذب‌ها در صورت مکان‌یابی مناسب می‌توانند تأثیر بسیاری در جذب ارتعاش داشته باشند. سیستم‌های جرم ثانویه بسته به نوع کاربرد به دو دسته جاذب‌های دینامیکی خطی و جاذب‌های میرا تقسیم می‌شوند. هنگامی‌که سیستم ثانویه کمترین میزان میرایی را داشته باشد به آن جاذب دینامیکی خطی و اگر سیستم ثانویه شکلی از یک مستهلک کننده را به خود بگیرد به آن جاذب ارتعاشی میرایی می‌گویند. این سیستم‌ها قله منحنی پاسخ در حالت تشدید را به دو قله کوچک‌تر تقسیم می‌کنند و موجب کاهش دامنه پاسخ سیستم می‌شوند. در ساده‌ترین شکل نقش سیستم‌های ثانویه برای سیستم‌های یک درجه آزادی، همانند سیستم اولیه می‌باشد.

در ادامه به‌طور مفصل‌تری به انواع جاذب‌های دینامیکی خطی و همین‌طور نوع جدیدی از جاذب‌های دینامیکی غیرخطی پرداخته می‌شود.

۱-۳ جاذب‌های خطی

در بسیاری از موارد می‌توان ماشین‌ها و سازه‌های کاربردی را به‌صورت سیستم جرم-فنر و یا جرم-فنر-دمپر با نیروی تحریک پریودیک شبیه‌سازی نمود. درگذشته، طراحی متعارف سازه‌ها به‌گونه‌ای بوده است که با حفظ یک محدوده‌ی مشخص قابل قبول، برای تغییر شکل غیرالاستیک سازه‌ها با تحریکات

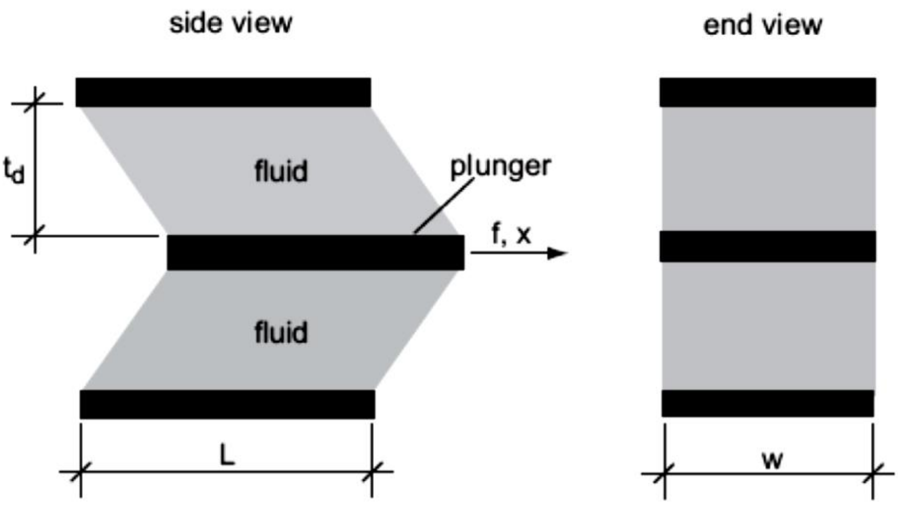
خارجی، از صدمات شدید وارده، تا جایی که امکان دارد جلوگیری نمایند. در این روش جذب و انتقال انرژی از طریق خود سازه می‌بایست صورت پذیرد که در مقابل تحریکات با دامنه بالا مقاوم نبود. ازاین‌رو، مسئله کاهش ارتعاشات توسط جاذب‌ها بررسی شد. انواع مختلف جاذب‌های خطی بدین‌صورت می‌باشد:

۱-۳-۱ جاذب ویسکوز

درواقع برای تولید وسایلی با میرایی ویسکوز، میراگرها بر مبنای مایع در نظر گرفته می‌شوند. مزیّت افزودن این نوع جاذب‌ها به سازه اصلی این است که، موجب افزایش میرایی قطعات سازه می‌شوند. مراحل طراحی جاذب‌های ویسکوز برای افزایش میرایی در سازه به‌صورت زیر می‌باشد:

۱. تعیین و تحلیل ویژگی‌های سازه
۲. تعیین نسبت میرایی مطلوب
۳. مکان‌یابی مناسب جاذب
۴. طراحی جاذب
۵. تحلیل رفتار سازه با نسبت میرایی اضافه‌شده

جاذب‌های ویسکوز برای کنترل سازه‌هایی چون، صنعت خودروسازی، طراحی پل و ساختمان‌های بلند برای کاهش ارتعاش زلزله و باد با موفقیت بکار رفته‌اند. [۱]



شکل (۱-۱): سازوکار جاذب ویسکوز [۱]

۱-۳-۲ جاذب ویسکو-الاستیک

هنگام عملکرد جاذب‌ها، انرژی در آن‌ها به‌صورت گرما تلف می‌شود که این خود باعث افزایش دمای قطعات ویسکو-الاستیک می‌شود. بگلی[۱] و توررویک[۲] ویژگی‌های مدول افت برشی[۳] و مدول ذخیره برشی[۴] وابسته به دما و فرکانس را بیان نمودند [۲]. روندهای متفاوت طراحی جاذب‌های ویسکو-الاستیک توسط سونگ و دارگوش معرفی شدند [۳]. بیشترین کاربرد جاذب ویسکو-الاستیک در موارد زیر است:

۱. کاهش ارتعاش در صنایع حساس همانند هوافضا و فناوری هسته‌ای

۲. جاذب ارتعاشات در ساختمان‌های بلندمرتبه

۳. تکیه‌گاه‌های الاستومری برای عرشه‌ی پل و کابل

---

۱ Bagley

۲ Torvik

۳ Shear loss modulus

۴ Shear storage modulus

۱-۳-۳ جاذب میرایی جرمی تنظیم شونده[1][TMD]

یکی از تلاش‌های موفقی که برای جاذب‌های خطی انجام‌شده است، اختراع جاذب‌های میرایی جرمی تنظیم شونده(TMD) توسط فراهم[2] در سال ۱۹۰۹ بوده است.[۴] جاذب جرمی تنظیم شونده، یک عضو اینرسی می‌باشد که در ساده‌ترین شکلش از یک جرم متصل به سازه اصلی با عضوهای فنر و میراگر تشکیل‌شده است. کاهش ارتعاشات با انتقال انرژی از سازه اصلی به TMD، به‌وسیله تنظیم دقیق نسبت میرایی و فرکانس طبیعی جاذب به دست می‌آید. جرم جاذب TMD در مقایسه با سازه اصلی کمتر است، درنتیجه انتقال انرژی از سازه اصلی موجب نوسانات شدیدی در جرم ثانویه می‌شود. استفاده از جاذب ارتعاش بدون دمپر به‌طورکلی مناسب نیست، به‌خصوص در مواردی که نیروی تحریک ثابت نیست و در محدوده معینی تغییر می‌کند. در این موارد، نیاز است از دمپر در جاذب استفاده نماییم ولی استفاده از آن مشکلاتی ناشی از نصب و نگهداری آن در ضریب میرایی مشخص و از پیش تعیین‌شده را دارد. وقتی جاذب به سیستم اصلی افزوده می‌شود و سیستم در محدوده فرکانس طبیعی خود ارتعاش نمی‌کند، شیب منحنی رزونانس تیز می‌شود. که در این حالت یک تغییر کوچک در فرکانس تحریک، جاذب ارتعاشی را به تقویت‌کننده ارتعاشی تبدیل می‌کند. در این حالت می‌توان با افزودن یک فنر غیرخطی، موجب کاهش شیب منحنی رزونانس در محدوده فرکانس کاری شود و اجازه افزایش فرکانس بدون تقویت ارتعاش را می‌دهد.

۱-۴ جاذب‌های غیرخطی

همان‌طور که گفته شد، جاذب‌های خطی در کاربردهایی که جرم را نمی‌توان به‌راحتی تغییر داد و مواقعی که فرکانس نیروی تحریک ثابت نباشد و یا شامل دسته‌ی مختلفی از فرکانس‌ها باشد، کاربرد چندانی ندارند. بنابراین این محدودیت‌ها منجر به مطالعه در راستای جاذب‌هایی با مشخصه‌های غیرخطی و یا به‌طور تکه‌ای خطی شده است. از طرفی مشخصه‌های غیرخطی موجب ایجاد

[1] Tuned Mass Damper

[2] Frahm

ناپایداری‌هایی در سیستم می‌شود که برای بهبود آن، طراحی مناسب، تحلیل پاسخ‌های حالت‌پایا و مشخصه‌های پایداری سیستم، توسعه روش‌های تحلیلی کامل ضروری می‌باشد. در ادامه به بررسی چند نمونه از جاذب‌های غیرخطی پرداخته می‌شود.

۱-۴-۱جاذب میرایی مایع تنظیم شونده[1][TLD]

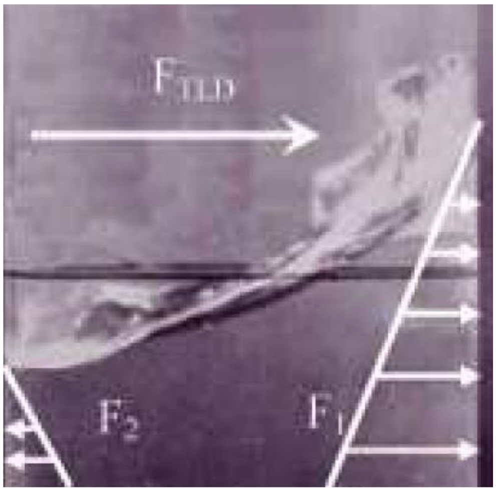
جاذب میرایی مایع تنظیم شونده اساساً یک اتلاف کننده‌ی انرژی می‌باشد، که اصل اساسی آن‌ها به جاذب میرایی جرم تنظیم شونده(TMD) بسیار شبیه است، که به سیستم اصلی متصل می‌شود. در این نوع جاذب، جرم ثانویه با جرم مایع تعریف می‌شود و اتلاف انرژی از طریق عملکرد لزجت در لایه‌های مرزی مایع اتفاق می‌افتد. ایده استفاده از این نوع میراگر در کاهش ارتعاشات سازه ها به اواسط دهه ۱۹۸۰ باز می گردد [۵]. استفاده از ظروف مستطیلی کاملا پرشده با دو مایع حل ناپذیر جهت جدا نمودن پاسخ با حرکت فصل مشترکشان توسط بائور[2](۱۹۸۴) پیشنهاد شد. این مخزن‌های ضد متحرک بر روی چندین کشتی آلمانی نصب گردید.[۶] یک نمونه خاص از جاذب میرایی مایع تنظیم شونده(TLD)، جاذب میرایی ستونی مایع تنظیم شونده(TLCD[3]) است که از محفظه U شکل که تا حد زیادی از مایع پرشده باشد تشکیل‌شده است. تفاوت TLD با TMD در این است که پاسخ TLD کاملاً غیرخطی می‌باشد. حرکت نوسانی سطح آزاد مایع و یا جریان از درون روزنه‌ها[4] پدیده‌هایی به‌شدت غیرخطی می‌باشند. تلاطم مایع موجب ایجاد تفاوت در رقوم سطح آزاد مایع در جداره های انتهایی مخزن می گردد اختلاف فشار ناشی از تفاوت رقوم سطح آزاد مایع در جداره‌های انتهایی به صورت یک نیروی برشی در کف مخزن ظاهر می‌گردد. اساس نیروی کنترل ایجاد شده در جاذب TLD اندازه حرکت سیال داخل مخزن می باشد.

[1] Tuned Liquid Damper

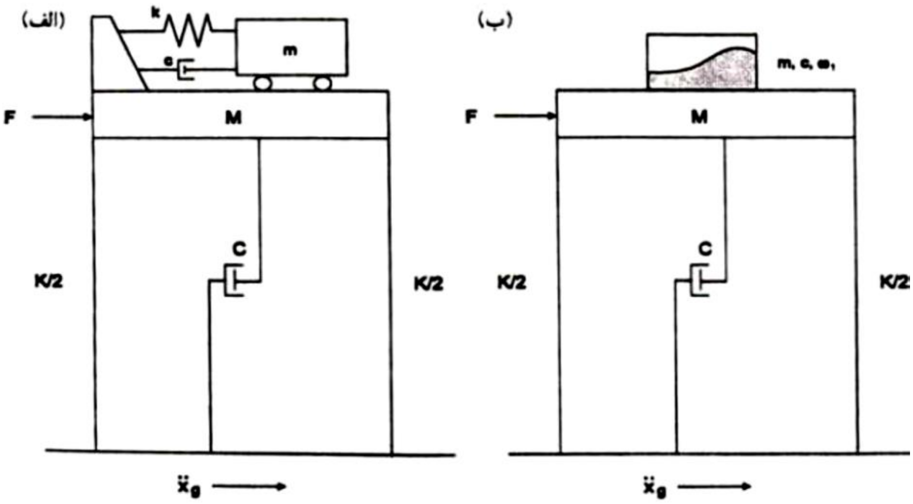
[2] Bauer

[3] Tuned Liquid Column Damper

[4] Orifice



شکل (۱-۲): حرکت سیال در سیستم TLD



شکل (۱-۳): الف) جاذب TMD ب) جاذب TLD[۷]

۱-۴-۲ انتقال هدفمند انرژی[۱] (پمپاژ غیرخطی انرژی)

در سال‌های اخیر روش جدیدی برای کاهش ارتعاشات سیستم‌های مکانیکی که در معرض ورودی‌های گذرا و پهنای باند وسیع هستند ارائه شده است [۸]. این روش انتقال هدفمند انرژی (TET) نام دارد که در آن یک ضمیمه‌ی اساساً غیرخطی و غیرفعال به نام چاه انرژی غیرخطی (NES[۲]) که به سیستم

---

[۱] Targeted Energy Transfer

[۲] Nonlinear Energy Sink

اصلی متصل می‌شود، وجود دارد. درواقع TET انتقال انرژی هدفمند از سیستم اصلی به سیستم ثانویه (NES) می‌باشد که به‌وسیله‌ی تسخیر رزونانس و پرش از شاخه‌های حل پریودیک ظاهر می‌گردد [۹]. مطالعات اخیر بر روی سیستم‌های شامل تحریک خارجی و چاه غیرخطی انرژی(NES) قابلیت چشم‌گیر این سیستم را در کاهش ارتعاش در مقابل جاذب‌های خطی نمایان کرده است [۱۰]. برتری‌های چاه غیرخطی انرژی در مقابل جاذب‌های خطی، در کاربردهای مختلف را می‌توان تحت عناوینی مختلفی بیان نمود:

۱. عدم نیاز به تنظیم شدن در یک فرکانس خاص و قابلیت جذب ارتعاش در نزدیکی فرکانس طبیعی تحریک شده
۲. در جذب انرژی یکسان، تغییر شکل بسیار کمتر و نیاز بکار گیری جرم کمتر نسبت به جاذب‌های خطی
۳. قابلیت جذب بالای انرژی و کاهش دامنه ارتعاش در محدوده‌ی فرکانس وسیع از طریق انتقال هدفمند انرژی چند فرکانسی

به‌طورکلی دو نوع چاه غیرخطی انرژی داریم که اجزا تشکیل‌دهنده هرکدام به شرح زیر است:

❖ **نوع اول:**

- فنر شدیداً غیرخطی($F = kx^3$)
- دمپر خطی یا غیرخطی
- جرم کوچک نسبت به جرم سیستم اصلی

❖ **نوع دوم:**

- فنر غیرخطی ضعیف یا دافینگ[۱] ($F = k_1x + k_2x^3$)
- دمپر خطی

[۱] Duffing

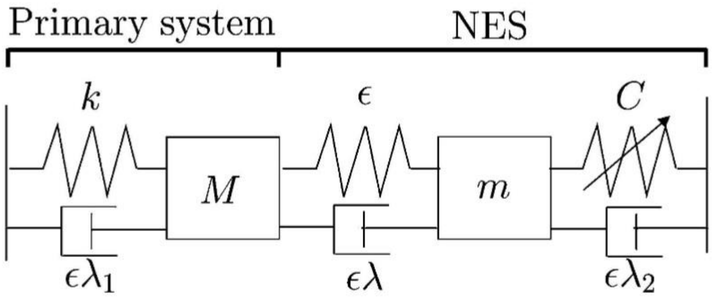
- جرم کوچک نسبت به جرم سیستم اصلی

همان‌طور که مشخص است در چاه غیرخطی نوع اول به دلیل وجود فنریت شدیداً غیرخطی، اتلاف انرژی سیستم نسبت به نوع دوم بیشتر می‌باشد. در تحقیقات انجام‌شده نیز نوع اول بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای تعیین میزان جرم NES می‌بایست جرم سیستم اصلی را در یک ضریبی، ضرب نماییم. اصولاً برای اتلاف انرژی نسبت جرم‌ها را به‌صورت $\epsilon \ll 1$ در نظر می‌گیرند ولی مقدار ϵ به سیستم اصلی بستگی دارد، جهت دستیابی به اتلاف انرژی ماکزیمم، مقدار ϵ برای سیستم‌های مختلف متفاوت می‌باشد. به‌عنوان‌مثال، هنگامی‌که سیستم اصلی یک رشته حفاری باشد ضریب $\epsilon = 0.3$ و برای سیستم اسیلاتور $\epsilon = 0.01$ باید باشد تا اتلاف انرژی ماکزیمم اتفاق افتد [۱۱, ۱۲].

سیستم‌های شامل اسیلاتور خطی تحت بارگذاری نوسانی و اتصال چاه غیرخطی انرژی، رژیم پاسخی به‌نام پاسخ مدوله قوی[1] دارند، که این رژیم پاسخ جالب توجهی در بین پاسخ‌های سیستم دارد. این رژیم هم به‌صورت آزمایشگاهی و هم عددی مورد بررسی قرار گرفته است. در بسیاری از مقالات [۱۳, ۱۴, ۱۵] اثبات شده که پاسخ مدوله قوی(SMR) در کاهش ارتعاشات به‌طور قابل توجهی مؤثر است. اکثر سیستم‌های NES مورد استفاده که در بالا به آن‌ها اشاره شد، به‌صورت کلی بوده و از NES محلی در آن‌ها استفاده نشده است. منظور از NES محلی چنین می‌باشد که علاوه بر فنر و یا دمپری که به سیستم اصلی و جرم ثانویه متصل می‌باشد، فنر و یا دمپری نیز صرفاً به جرم ثانویه متصل می‌باشد.

به‌عنوان مثال در شکل (۱-۴) یک نمونه NES می‌بینیم که دارای قسمت کلی شامل فنر خطی ϵ و میرایی خطی $\lambda\epsilon$ و قسمت محلی شامل فنر غیرخطی C و میرایی خطی $\epsilon\lambda_2$ می‌باشد.

[1] Strongly Modulated Response(SMR)



شکل ۱-۴) چاه انرژی غیرخطی کلی و محلی [16]

فصل دوم

مروری بر ادبیات فنی

۲-۱ مقدمه

ابتدا به بررسی مقالات انجام‌شده در راستای جاذب‌های دینامیکی خطی و غیرخطی پرداخته و سپس برای بررسی رفتار دو اسیلاتور متصل به یکدیگر با توجه به خواسته‌های مسأله اقدام به استخراج معادلات می‌کنیم.

۲-۲ مروری بر کارهای پیشین

در این قسمت به بررسی مقالات انجام‌شده طی سال‌های گذشته می‌پردازیم. این مقالات بر اساس موارد بررسی‌شده به دسته‌های کلی به‌صورت زیر تقسیم می‌شوند:

۲-۲-۱ جاذب‌های دینامیکی خطی انرژی

فراهم در سال ۱۹۰۹ جاذب خطی جرم-فنر بدون دمپر که قادر به صفر رساندن دامنه ارتعاش سیستم اصلی در یک فرکانس سیستم اصلی بود، را اختراع کرد [۴]. ارموندروید[1] و دن‌هارتوگ[2] در سال ۱۹۲۸ پهنای باند بهینه برای کاهش ارتعاش را با استفاده از جاذب خطی جرم-فنر-دمپر ارائه دادند [۱۷]. بولنت ازر[3] و همکاران در سال ۲۰۰۴ روش دن هارتوگ را برای طراحی جاذب ارتعاش دینامیکی خطی متصل به یک سیستم چند درجه آزادی بدون میرایی، گسترش دادند [۱۸]. شوشتری و افضلی در سال ۱۳۸۶ با بررسی رفتار ساختمان‌های بتنی در حالت بهره‌مندی از میراگر جرمی تنظیم شونده نشان دادند به‌طورکلی تفاوت محتوای فرکانسی زمین‌لرزه با فرکانس سازه اصلی باعث کاهش مطلوبیت جرمی متوازن می‌گردد، از سوی دیگر با توسعه تغییر شکل‌های پلاستیک در زلزله‌های شدید سختی تغییر کرده و تناسب آن با پارامترهای میراگر به هم می‌ریزد به تعبیری تنظیم بین سازه و میراگر مختل می‌شود لذا کارایی میراگر جرمی تنظیم شونده نیز از بین خواهد رفت، همچنین میراگر جرمی درصورتی‌که در بام نصب گردد در زلزله‌های متوسط می‌تواند پاسخ سازه را در گستره زمانی آن کاهش

[1] Ormondroyd
[2] Den Hortog
[3] Bulent Ozer

دهد و انرژی هیسترزیس جذبی توسط سازه کاهش خواهد یافت و طبیعتاً شاهد خسارت کمتری خواهیم بود، این خاصیت در میراگرهایی که در طبقات دیگر نصب می‌گردند کمتر مشاهده می‌شود [۱۹]. پرلیکووسکی[۱] و همکاران در سال ۲۰۱۴، سه نوع مختلف جاذب جرمی تنظیم شونده آویزان به اسیلاتور دافینگ را در نظر گرفتند. هدف این تحقیق، به مطالعه برای مقایسه مشخصات جذب انرژی هر سیستم می‌پردازد، که نشان می‌دهد انتخاب درست و با دقت می‌تواند باعث ایجاد کاهش دامنه زیادی از سیستم دافینگ شود [۲۰].

۲-۲-۲ جاذب‌های غیرخطی انرژی

ربرسون[۲] در سال ۱۹۵۲، پارامترهای یک چاه غیرخطی انرژی نوع اول متصل به یک سیستم اولیه یک درجه آزادی را به صورتی بهینه کرد که یک باند فرکانسی بزرگ برای فرکانس نیروی محرک به دست آید و در آن باند دامنه ارتعاش سیستم اولیه زیر یک نگه‌داشته شود [۲۱]. رایس[۳] و همکاران در سال ۱۹۸۶، پارامترهای بهینه را برای یک چاه غیرخطی انرژی نوع اول ارائه کردند و همچنین چگونگی انتخاب نوع فنر (خطی، سخت و یا نرم) را بر اساس فرکانس کاری سیستم موردبررسی قراردادند. علاوه بر این آن‌ها دریافتند که سیستم‌های شدیداً غیرخطی دچار ناپایداری‌های هارمونیک تخریب کننده‌ای می‌شوند [۲۲]. شاو[۴] و همکاران در سال ۱۹۸۸، به بررسی ارتعاشات حالت دائم یک چاه غیرخطی انرژی نوع اول متصل به سیستمی که آن‌هم دارای فنر غیرخطی نوع دافینگ می‌باشد، پرداختند و در این راه از روش مقیاس‌های چندگانه و شبیه‌سازی‌های دیجیتال استفاده کردند. آن‌ها دریافتند که اگر فرکانس کاری جاذب، میانگین دو فرکانس طبیعی خطی سیستم باشد، ناپایداری‌هایی در پاسخ‌های سیستم به وجود می‌آید که باعث وجود هم‌زمان پاسخ‌های پریودیک با دامنه بالا و پاسخ‌های پریودیک با دامنه

[۱] Perlikowski
[۲] Roberson
[۳] Rice
[۴] Shaw

پایین و پایین آمدن کارایی سیستم می‌شود [۲۳]. ناتسیاواس[۱] در سال ۱۹۹۲، یک چاه غیرخطی انرژی متصل به سیستمی که آن‌هم دارای فنر غیرخطی نوع دافینگ می‌باشد را موردبررسی قراردادند. آن‌ها اثر پارامترهای سیستم بر روی پاسخ‌های حالت دائم را موردبررسی قراردادند. آن‌ها دریافتند که استفاده از جاذب‌های با فنر سخت و یا نرم باعث کاهش قابل‌توجهی در دامنه به ترتیب در محدوده فرکانس‌های بیش از فرکانس رزونانس اصلی و یا کمتر از فرکانس رزونانس اصلی می‌شوند. همچنین دارا بودن سطح پایین میرایی و درجه غیرخطی بالا و نیروی محرک با دامنه بالا، منجر به زوال پایداری پاسخ‌های پریودیک و مشاهده ارتعاشات شبه پریودیک[۲] با دامنه بسیار بالا می‌شوند[۲۴] . جندلمن[۳] در سال ۲۰۰۱، سیستم کاملاً نامتقارن شامل دو اسیلاتور کوپل شده، که یکی از آن‌ها شدیداً غیرخطی با یک فرکانس خطی کوچک و دیگری خطی با فرکانس خطی بزرگ می‌باشد را موردبررسی قرارداد. در این بررسی نشان داده شد که به دلیل درجه بالای غیرخطی سیستم، انتقال انرژی از طریق رزونانس مادون هارمونیک انجام می‌شود. همچنین مشخص شد که بازدهی این جاذب در دامنه بحرانی کاهش می‌یابد و برای غلبه بر این مشکل می‌توان از کنترل فعال استفاده نمود[۲۵] . جندلمن و همکارانش در سال ۲۰۰۱، سیستم دو درجه آزادی شامل یک اسیلاتور خطی و اسیلاتور شدیداً غیرخطی با میرایی ضعیف و اتصال ضعیف را بررسی کردند. هدف از این مطالعه، بررسی پدیده پمپ انرژی غیرخطی[۴] مابین دو اسیلاتور بود. آن‌ها دریافتند که یک مدار مادون هارمونیک پایدار ۱:۱[۵] مربوط به سیستم بدون میرایی مسئول پدیده پمپ انرژی می‌باشد. همچنین این مدار نمی‌تواند در انرژی‌های نسبتاً پایین تحریک شود [۱۱]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۱، سیستم دو درجه آزادی شامل یک اسیلاتور خطی و اسیلاتور غیرخطی با میرایی ضعیف و اتصال ضعیف را بررسی کردند. در این کار که ادامه کار ذکرشده قبلی بود،

---

۱ Natsiavas

۲ Quasi-periodic oscillations

۳ Gendelman

۴ Nonlinear energy pumping

۵ 1:1 Stable subharmonic orbit

پدیده رزونانس گیری[1] موردبررسی قرار گرفت. آن‌ها نشان دادند که پمپ انرژی در سیستم به علت پدیده رزونانس گیری در منیفولد رزونانس ۱:۱ سیستم می‌باشد. همچنین نواحی جاذب مسئول این پدیده در همسایگی منیفولد رزونانس ۱:۱ را موردمطالعه قراردادند [۱۲]. واکاکیس[2] در سال ۲۰۰۱، مدل (N+1) درجه آزادی با اتصال ضعیف به چاه غیرخطی انرژی را مورد بررسی قراردادند. آن‌ها نشان دادند که فیزیک پمپ انرژی و یا پدیده رزونانس گیری در یک سیستم غیرکنسرواتیو می‌تواند بامطالعه ساختار و انشعاب مودهای نرمال خطی کنسرواتیو مربوطه، توضیح داده شود[۲۶] . واکاکیس و همکاران در سال ۲۰۰۳، مدل (N+1) درجه آزادی بااتصال ضعیف به چاه غیرخطی انرژی را مورد بررسی قراردادند. آن‌ها دریافتند که چاه غیرخطی انرژی می‌تواند با هر مود در حال رزونانس سیستم اصلی به‌طور مجازی رزونانس کند و به‌طور غیرفعال مقدار معینی از انرژی آن را جذب نماید و سپس به مود بعدی رود و به‌این‌ترتیب به‌صورت متوالی انرژی هر مود در حال رزونانس را جذب نماید [۲۷]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۵، بهینه کردن انرژی در سیستم دو درجه آزادی شامل یک اسیلاتور خطی و اسیلاتور غیرخطی (اتصال غیرخطی شامل تابع پتانسیل متقارن با یک ترم خطی مثبت و یک ترم منفی درجه سه) را موردمطالعه قراردادند. آن‌ها نشان دادند که روند پمپ انرژی در این سیستم توسط ساختار مودهای نرمال غیرخطی میرا شده سیستم، کنترل می‌شود. همچنین رژیم‌های مختلف دینامیکی وابسته به پارامترهای سیستم شناسایی‌شده و شرایط پمپ انرژی بهینه به اتصال شدیداً غیرخطی فرمول‌بندی شدند. به‌علاوه احتمال وجود پاسخ آشفته گذرا[3] نیز بررسی کردند [۲۸]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۶، سیستم دو درجه آزادی شامل یک اسیلاتور خطی و چاه غیرخطی انرژی با بارگذاری خارجی هارمونیک را بررسی کردند. آن‌ها پاسخ سیستم را در همسایگی رزونانس خطرناک ۱:۱ مطالعه کردند. آن‌ها همچنین دریافتند که در محدوده‌ای از فرکانس‌های نیروی خارجی، سیستم بیشتر دارای رژیم‌های پاسخ شبه‌پریودیک است تا پاسخ‌های حالت دائمی و این پاسخ‌های شبه‌پریودیک در حذف ارتعاشات

[1] Resonance capture

[2] Vakakis

[3] Chaotic transient response

سیستم مؤثر هستند [۱۳]. لی[1] و همکاران در سال ۲۰۰۶، سیستم شامل اسیلاتور وندرپول و چاه غیرخطی انرژی متصل یا غیرمتصل به زمین را بررسی کردند و موفق به حذف ارتعاشات خودالقایی یا چرخه محدود مربوط به اسیلاتور وندرپول با استفاده از چاه غیرخطی انرژی شدند [۲۹]. گوردن[2] و همکاران در سال ۲۰۰۶، سیستم دو درجه آزادی شامل یک اسیلاتور خطی و یک چاه غیرخطی انرژی را تحت بار گذرا و هارمونیک را به‌منظور شبیه‌سازی فرآیند زلزله مورد بررسی قراردادند. آن‌ها فهمیدند که چاه غیرخطی انرژی مقدار زیادی انرژی را در یک‌زمان بسیار کوتاه در مقایسه با جاذب دینامیک خطی جذب می‌کند. همچنین جرم چاه غیرخطی انرژی در مقایسه با جرم جاذب دینامیک خطی می‌تواند بسیار کوچک‌تر انتخاب شود [۳۰]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۷، پاسخ‌های شبه‌پریودیک سیستم دو درجه آزادی شامل یک اسیلاتور خطی و چاه غیرخطی انرژی موردمطالعه قرار دادند. در این بررسی‌ها مشخص گردید که پاسخ‌های شبه‌پریودیک در دو نوع ضعیف و قوی وجود دارند [۳۱]. میموکین[3] و جندلمن در سال ۲۰۰۷، یک اسیلاتور غیرخطی از درجه بالا تحت نیروی ضربه هارمونیک مورد بررسی قراردادند. آن‌ها یافتند که نواحی پاسخ به‌شدت به شرایط اولیه بستگی دارند [۳۲]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۸، سیستم دو درجه آزادی شامل یک اسیلاتور خطی و یک چاه غیرخطی انرژی را تحت بار هارمونیک مورد بررسی قراردادند. آن‌ها نواحی که رژیم‌های مختلف پاسخ هم‌زمان باهم وجود داشتند را در فضای پارامترها، شکل و مشخصات دامنه‌ای محاسبه کردند و مشخص شد که اگرچه استفاده چاه غیرخطی انرژی در سیستم، پتانسیل خاصی برای جاذب ارتعاش ایجاد می‌کند ولی از طرف دیگر وجود هم‌زمان رژیم‌های مختلف پاسخ در برخی نواحی و همچنین احتمال وجود پاسخ‌های آشفته[4] مشکلاتی را به وجود می‌آورد. درواقع چاه غیرخطی انرژی به تنظیمات دقیقی نیاز دارد و شاید استفاده از کنترل نیمه فعال در این راه مناسب باشد [۳۳]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۸، سیستم دو

---

۱ Lee

۲ Gourdon

۳ Meimukhin

۴ Chaotic

درجه آزادی شامل یک اسیلاتور خطی و یک چاه غیرخطی انرژی را تحت بار هارمونیک مورد بررسی قراردادند. آن‌ها یک روش تحلیلی به‌منظور توصیف بستگی فرکانس و انشعاب‌های سیستم به رژیم‌های پاسخ شبه پریودیک قوی[۱] ارائه کردند. آن‌ها دریافتند که پاسخ‌های شبه پریودیک قوی تفاوت عمده‌ای با پاسخ‌های حالت دائمی یا پاسخ‌های شبه پریودیک ضعیف دارند. درواقع مدولاسیون نوسانات آن‌ها بسیار عمیق است و دامنه آن‌ها به‌تنهایی چیزی در حدود دامنه پاسخ سیستم است [۱۴]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۸، سیستم دو درجه آزادی شامل یک اسیلاتور خطی و یک چاه غیرخطی انرژی را تحت بار هارمونیک موردبررسی قراردادند .آن‌ها مطالعه وسیعی در خصوص رژیم‌های پریودیک و شبه پریودیک ضعیف انجام دادند .همچنین آن‌ها موفق به محاسبه ناحیه رژیم‌های پاسخ شبه پریودیک قوی با استفاده از روش تحلیلی شدند و ترکیبات مختلف رژیم‌های سیستم را ممکن است هم‌زمان باهم وجود داشته باشند را با مدل‌های تحلیلی پیش‌بینی کردند. مورد جالب‌توجه، ترکیبی از رژیم‌ها بود که شامل سه رژیم، دو رژیم پریودیک و یک رژیم شبه پریودیک قوی بود [۳۴]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۸، سیستم دو درجه آزادی شامل یک اسیلاتور خطی و یک چاه غیرخطی انرژی را تحت بار هارمونیک مورد بررسی قراردادند. آن‌ها روش‌هایی برای تنظیم چاه غیرخطی انرژی ارائه کردند که هدف از آن‌ها تحریک پاسخ مدوله قوی در هر مود بدون تغییر پارامترهای چاه غیرخطی انرژی بود [۳۵]. ساپسیس[۲] و همکاران در سال ۲۰۰۹، سیستم دو درجه آزادی شامل یک اسیاتور خطی و یک چاه غیرخطی انرژی را مورد بررسی قراردادند. هدف از این مطالعه، بررسی شرایط برای بهینه کردن انتقال انرژی هدفمند[۳] در سیستم دو درجه آزادی تحت رزونانس گیری ۱:۱ گذرا بود. آن‌ها خصوصیات مقیاس‌های زمانی دینامیکی که بر ظرفیت جذب انرژی جاذب غیرخطی به‌صورت غیرفعال و اتلاف آن انرژی از اسیلاتور خطی تأثیرگذار است را تعیین کردند [۳۶]. جندلمن و همکاران در سال ۲۰۱۰، سیستم دو درجه آزادی شامل یک اسیلاتور خطی و یک چاه غیرخطی انرژی را تحت بارگذاری

[۱] Strongly quasi periodic response or Strongly modulated response(SMR)
[۲] Sapsis
[۳] Targeted energy transfer

هارمونیک موردبررسی قراردادند. آن‌ها روش‌های تحلیلی را به‌منظور بررسی تقریب‌های مجانبی با درجه بالاتر گسترش دادند. این کار آن‌ها را قادر به تشخیص تغییرات کیفی در رژیم‌های شبه پریودیک قوی (مکانیزم‌های از دست دادن پایداری توسط آن‌ها) با افزایش مقدار جرم چاه غیرخطی انرژی، کرد [۳۷]. کوچلین[۱] و همکاران در سال ۲۰۱۲، به بررسی تجربی و تحلیلی رفتار پمپاژ انرژی بین یک اسیلاتور خطی شامل یک فنر خطی با یک اسیلاتور غیرخطی شامل فنر خطی کلی و میرایی خطی و فنریت غیرخطی محلی پرداخته اند. اندازه‌گیری‌های ارائه شده را توسط سه رژیم تحریک منبع سینوسی، ارتعاشات آزاد و منبع سینوسی پیشرفته مختلف انجام دادند [۳۸]. سوادکوهی[۲] و همکاران در سال ۲۰۱۶، روش کلی برای پاسخ زمانی چندگانه اسیلاتور اصلی با پتانسیل‌های کلی(غیرخطی، ناآرام و...) متصل به چاه انرژی غیرخطی با پتانسیل‌های کلی و محلی پرداختند. روش پیشنهادی بر دو مورد خاص که شامل دو نوع مختلف از اتصال سیستم‌ها با جریان‌های متفاوت می‌باشد، نشان داده شده است. آن‌ها با استفاده از روش گلرکین[۳] و حفظ هارمونیک اول سری فوریه معادلات سیستم را بررسی نمودند [۳۹]. پتانسیل کلی غیرخطی، سینک انرژی اندرکنش مستقیم با اسیلاتور خطی اصلی می‌گذارد، درحالی‌که پتانسیل محلی (در حین تبادل انرژی بین دو اسیلاتور) تنها از رفتار NES غیرخطی تأثیر می‌گیرد و با اسیلاتور اصلی اندرکنشی نخواهد داشت. این پتانسیل محلی می‌تواند به‌واسطه تماس بین المان‌های ساختاری مدل در حین تحریک رخ دهد. همچنین به‌کارگیری آن ممکن است به‌واسطه افزایش کارایی NES در کنترل غیرفعال سیستم و یا افزایش راندمان برداشت انرژی ارتعاشی از سیستم باشد. توسعه ابزارهای تحلیلی به ما اجازه می‌دهد که چاه انرژی غیرخطی معادل با نقاط تعادل و تکین موردنظر طراحی نماییم.

---

[۱] Cochelin

[۲] A.Ture Savadkoohi

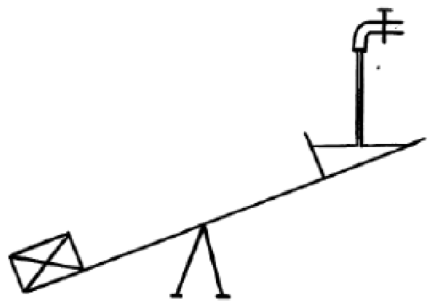
[۳] Galerkin

۲-۳ دسته‌بندی رژیم‌های مختلف پاسخ در سیستم‌های شامل چاه غیرخطی انرژی

به‌منظور توصیف رژیم‌های مختلف پاسخ در سیستم‌های شامل چاه غیرخطی انرژی، در این قسمت به بررسی دو عدد از مقالات [۴۰, ۴۱] و همین‌طور کتب دیگر برای بررسی سایر مفاهیم می‌پردازیم.

۲-۳-۱ رژیم نوسانات تخفیف یافته[۱]

به‌آسانی می‌توان دینامیک نوسانات تخفیف یافته را از طریق یک سیستم مکانیکی ساده درک کرد [۴۲]. این سیستم مکانیکی ساده درشکل (۲-۱) نشان داده‌شده است شامل یک الاکلنگ بوده که یک ذخیره گر آب در یک‌طرف و یک وزنه در طرف دیگر آن می‌باشد. هنگامی‌که مقدار آب از وزن وزنه بیشتر شود، طرفی که شامل ذخیره گر آب است پایین می‌افتد و آب تخلیه‌شده و ذخیره گر به نقطه اولیه خود بازمی‌گردد. این رژیم مکرراً در سیستم‌های بیولوژیکی و بیوشیمیایی دیده می‌شوند. پریود نوسانات تابع نرخ آب ورودی و حجم آب در حالت تعادل می‌باشد[۴۲] .



شکل (۲-۱) یک اسیلاتور تخفیف یافته شامل یک الاکلنگ با ذخیره گر آب در یک سمت و یک وزنه در سمت دیگر [۳۷]

برای اسیلاتورهای تقریباً خطی یک درجه آزادی با معادله (۲-۱) رژیم نوسانات تخفیف یافته رخ می‌دهد.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right),\ 0 < \epsilon \ll 1 \tag{۲-۱}$$

[۱] Relaxation oscillation

اگر ϵ کوچک نباشد، نمی‌توان معادله (۲-۱) را برای سیستم بکار گرفت. زیرا که نمی‌توان هیچ حل مجانبی تقریبی برای سیستم فوق یافت و جواب‌ها باید به‌صورت عددی پیدا شوند. ولی یک مورد استثنا برای سیستم‌هایی از نوع زیر وجود دارد [۴۳]:

$$\epsilon \frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), 0 < \epsilon \ll 1 \tag{۲-۲}$$

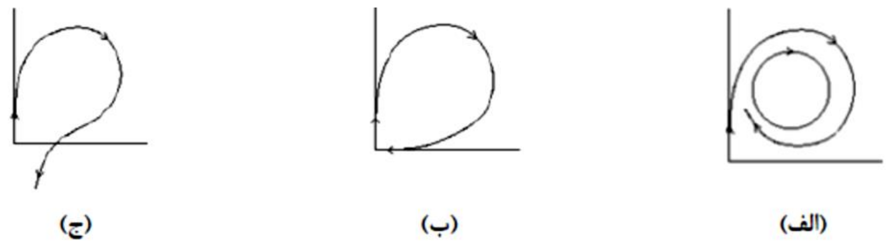
برای این معادله می‌توان با میل دادن ϵ به سمت صفر یک حل تقریبی پیدا کرد، که معادله زیر به دست می‌آید:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{۳-۲}$$

این معادله می‌تواند تقریب خوبی از معادله (۲-۲) در یک بازه زمانی بزرگ از چرخه باشد ولی به‌خودی‌خود نمی‌تواند دارای حل‌های پریودیک باشد. اگر به بازه‌ای برسیم که این تقریب دیگر معتبر نباشد، متغیر x در یک بازه زمانی کوتاه به‌سرعت تغییر می‌کند. در مثال الاکلنگ (شکل (۲-۱))، حالت‌هایی می‌باشند که سیستم به‌سرعت از آن‌ها عبور می‌کند و دوباره به حالتی برمی‌گردد که تقریب (۲-۳) معتبر است. همانند آن‌چه در این مثال دیدیم آب به آستانه‌ای رسید که وزن وزنه بیشتر شد و در بازه‌ی زمانی کوتاهی جهت الاکلنگ عکس شد و آب تخلیه گردید و سیستم مجدداً به حالت اولیه خود بازگشته که در آن تقریب (۲-۳) مجدداً معتبر می‌شود. چنین نتایجی را می‌توان از میدان برداری در فضای حالت برای انواع اسیلاتورهای تخفیف یافته نیز به‌دست آورد. این روش از مکانیک سیالات برای تحلیل پدیده لایه‌مرزی سرچشمه گرفته است. نخستین بار توسط وندرپل[۴۴] هنگامی‌که در حال مطالعه مدار لامپ سه قطبی بود یک سری نوسانات خود پایدار با دامنه‌ای مستقل از شرایط اولیه را مشاهده نمود. برای مقادیر معینی از پارامترهای سیستم این نوسانات تقریباً سینوسی هستند. درحالی‌که در محدوده متفاوتی از پارامترها، نوسانات به‌طور غیرمنتظره‌ای تغییر می‌کنند.

۲-۳-۲ انشعاب هوموکلینیک[1]

این انشعاب یک انشعاب کلی است و هنگامی اتفاق می‌افتد که یک مدار پریودیک با یک نقطه زین اسبی[2] در دیاگرام فازی برخورد کند. شکل (۲-۲)، صفحه فاز را قبل از انشعاب، در هنگام انشعاب و بعد از انشعاب هوموکلینیک نشان می‌دهد. مدار پریودیک تا هنگام برخورد به نقطه زین اسبی رشد می‌کند و در نقطه انشعاب، پریود مدار پریودیک به بی‌نهایت می‌رسد و به یک مدار هوموکلینیک تبدیل می‌شود و بعد از انشعاب دیگر هیچ مدار پریودیکی وجود ندارد.



شکل (۲-۲) انشعاب هوموکلینیک: الف) یک نقطه زین اسبی در مبدأ مختصات و یک چرخه محدود در ربع اول ب) برخورد چرخه محدود با نقطه زین اسبی و تبدیل‌شدن به یک مدار با پریود بی‌نهایت ج) ناپدید شدن کامل چرخه محدود.

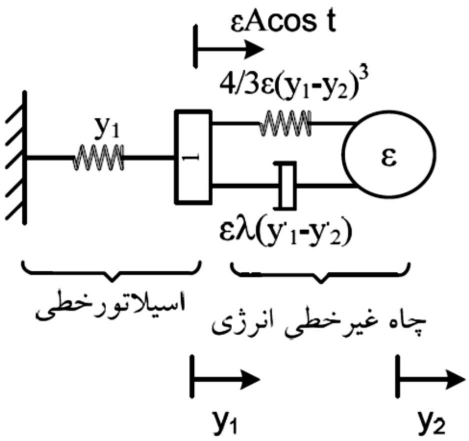
در واقع هنگامی یک انشعاب هوموکلینیک برای یک سری از پارامترها رخ می دهد که یک مدار هوموکلینیک برای این پارامترها وجود داشته باشد. هر منحنی انشعاب هوموکلینیک، یک خانواده از مدارهای هوموکلینیک را در فضای پارامتری توصیف می کند. تحلیل انشعاب محلی تک -پارامتری در همسایگی یک مدار هوموکلینیک شیل نیکو نشان داد که تعدادی نامتناهی از دیگر مدارهای هوموکلینیک فرعی مرتبط با سیستم اولیه وجود دارد و هر یک از این مدارهای هوموکلینیک با تعداد بی نهایت ولی قابل شمارش از نعل اسب ها همراه هستند[۴۵] .

[1] Homoclinic bifurcation
[2] Saddle-node

۲-۳-۳ رژیم‌های پاسخ سیستمی شامل یک اسیلاتور خطی متصل به چاه غیرخطی انرژی

در این بخش به بررسی یک مدل دو درجه آزادی می‌پردازیم. سیستمی شامل یک اسیلاتور خطی متصل به چاه غیرخطی انرژی با میرایی و پتانسیل کلی و تحت بار هارمونیک که درشکل (۲-۳) را بررسی می‌کنیم. معادلات حاکم بر سیستم به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۳۱, ۳۳]:

$$\ddot{y_1} + \epsilon\lambda(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + y_1 + \frac{4}{3}\epsilon(y_1 - y_2)^3 = \epsilon A cos(\omega t)$$
$$\epsilon\ddot{y} + \epsilon\lambda(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \frac{4}{3}\epsilon(y_2 - y_1)^3 = 0 \qquad (۴\text{-}۲)$$



شکل (۲-۳) مدل مکانیکی سیستم [۳۱, ۳۳]

در اینجا y_1 و y_2 به ترتیب جابجایی‌های اسـیلاتور خطی و غیرخطی می‌باشـند، $\epsilon\lambda$ ضـریب میرایی و ϵA دامنه نیروی تحریک خارجی هســتند. ϵ بســیار کوچک‌تر از یک بوده $(0 < \epsilon \ll 1)$ و نســبت جرم‌های سیستم، میرایی را نشان می‌دهد. اعمال ϵ در سیستم بسیار مؤثر می‌باشد چراکه ترم‌های مختلف را با یکدیگر بالانس می‌نماید. ضریب سختی اسیلاتور غیرخطی برابر $\frac{4}{3}\epsilon$ می‌باشد.

جرم چاه غیرخطی انرژی در مقایسه با سیستم اصلی، کوچک در نظر گرفته می‌شود. این کار در مسائل کاربردی اهمیت بســیاری دارد، زیرا با افزایش اندکی در جرم ســیســتم می‌توان از چاه غیرخطی انرژی استفاده نمود.

حال تغییر متغیرهای زیر را برای جابجایی سیستم اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases} v = y_1 + \epsilon y_2 \\ w = y_1 - y_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{v+\epsilon w}{1+\epsilon} \\ y_2 = \frac{v-w}{1+\epsilon} \end{cases} \qquad (۵-۲)$$

در بیان فیزیکی، مختصات جدید v بیانگر حرکت مرکز جرم اسیلاتور خطی و غیرخطی، و همین‌طور w نشانگر جابجایی نسبی اسیلاتور خطی و غیرخطی نسبت به یکدیگر است.

با جمع‌کردن دو رابطه (۲-۴) و سپس جایگذاری در رابطه (۲-۵)، داریم:

$$\ddot{y_1} + \epsilon \ddot{y}_2 + y_1 = \epsilon A\, cos(\omega t) \longrightarrow \ddot{v} + \frac{v+\epsilon w}{1+\epsilon} = \epsilon A\, cos(\omega t) \qquad (۶-۲)$$

همچنین با تقســیم رابطه دوم معادله (۲-۴) بر ϵ و کم کردن معادله اول از دوم و ســپس جایگذاری روابط معادله (۲-۵) در آن، خواهیم داشت:

$$\ddot{y_1} - \ddot{y}_2 + (1+\epsilon)\lambda(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + y_1 + \frac{4}{3}(1+\epsilon)(y_1 - y_2)^3 = \epsilon A\, cos(\omega t) \longrightarrow$$

$$\ddot{w} + (1+\epsilon)\lambda\dot{w} + \frac{v+\epsilon w}{1+\epsilon} + \frac{4}{3}(1+\epsilon)w^3 = \epsilon A\, cos(\omega t) \qquad (۷-۲)$$

بنابراین معادلات سیستم پس از اعمال تغییر متغیر به‌صورت زیر می‌شوند:

$$\ddot{v} + \frac{v+\epsilon w}{1+\epsilon} = \epsilon A\, cos(\omega t)$$

$$\ddot{w} + (1+\epsilon)\lambda\dot{w} + \frac{v+\epsilon w}{1+\epsilon} + \frac{4}{3}(1+\epsilon)w^3 = \epsilon A\, cos(\omega t) \qquad (۸-۲)$$

۲-۳-۳-۱ روش میانگین‌گیری[1]

این روش نخستین بار توسط مانویتچ[2] [۴۶] برای تحلیل سیستم‌هایی با اسیلاتور غیرخطی با خواص غیرخطی نامتقارن، بکار گرفته شد. این روش بر مبنای نمایش مختلط معادلات سیستم می‌باشد. برای اولین بار، نمایش مختلط معادلات حرکت برای یک سیستم شامل اسیلاتورهای خطی کوپل شده در فیزیک کوانتوم و همچنین برای تحلیل اسیلاتورهای کوپل شده و امواج در مکانیک، الکترونیک و فیزیک حالت جامد مورداستفاده قرار گرفت [۴۷, ۴۸, ۴۹]. در این ترکیب خطی مزدوج مختلط $u_j + iv_j$ و $u_j - iv_j$ که شامل ترم‌های جابجایی v_j و سرعت u_j اسیلاتورها است را می‌توان به‌صورت بردارهایی با اندازه مساوی ولی در جهات مختلف، نمایش داد. این کار برای آن است که بتوان سرعت و جابجایی هر اسیلاتور را به‌صورت یک تابع مختلط بیان نمود. چراکه در مواجه با سیستم‌های پیچیده بازدهی نمایش مختلط معادلات حرکت بیشتر نمایان می‌شود [۴۹]. برای تحلیل غیرخطی، با کمک روش میانگین‌گیری برای ساده‌سازی معادله (۲-۸) از متغیرهای مختلط به‌صورت (۲-۹) استفاده می‌شود:

$$\chi_v = \dot{v} + iv$$
$$\chi_w = \dot{w} + iw \tag{۲-۹}$$

برای به دست آوردن $\dot{v}$، v، $\dot{w}$ و w به مزدوج روابط بالا نیاز داریم:

$$\overline{\chi_v} = \dot{v} - iv$$
$$\overline{\chi_w} = \dot{w} - iw \tag{۲-۱۰}$$

بنابراین با جمع‌کردن χ_w و $\overline{\chi_w}$ ، $\dot{w}$ و با تفریق این دو رابطه w به دست می‌آید:

$$v = \frac{\chi_v - \overline{\chi_v}}{2i} \quad , \qquad \dot{v} = \frac{\chi_v + \overline{\chi_v}}{2}$$
$$w = \frac{\chi_w - \overline{\chi_w}}{2i} \quad , \qquad \dot{w} = \frac{\chi_w + \overline{\chi_w}}{2} \tag{۲-۱۱}$$

حال با مشتق‌گیری از روابط (۲-۹)، روابط (۲-۱۲) به دست می‌آید:

---
[1] Averaging Procedure
[2] Manevitch

$$\dot{\chi_v} = \ddot{v} + i\dot{v}$$

$$\dot{\chi_w} = \ddot{w} + i\dot{w} \qquad (۱۲-۲)$$

حال با جایگزینی $\dot{v}$ و $\dot{w}$ از رابطه (۲-۱۱) در روابط (۲-۱۲)، روابط (۲-۱۳) برای $\ddot{v}$ و $\ddot{w}$ به د ست می آید:

$$\ddot{v} = \dot{\chi_v} - \frac{i}{2}(\chi_v + \overline{\chi_v})$$

$$\ddot{w} = \dot{\chi_w} - \frac{i}{2}(\chi_w + \overline{\chi_w}) \qquad (۱۳-۲)$$

حال با جایگذاری روابط (۲-۱۳) و (۲-۱۱) در معادلات (۲-۸) روابط (۲-۱۴) به دست می‌آید:

$$\dot{\chi_v} - \frac{i}{2}(\chi_v + \overline{\chi_v}) + \frac{1}{1+\epsilon}\frac{\chi_v - \overline{\chi_v}}{2i} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\frac{\chi_w - \overline{\chi_w}}{2i} = \epsilon A\, cos(\omega t)$$

$$\dot{\chi_w} - \frac{i}{2}(\chi_w + \overline{\chi_w}) + (1+\epsilon)\lambda\frac{\chi_w + \overline{\chi_w}}{2} + \frac{1}{1+\epsilon}\frac{\chi_v - \overline{\chi_v}}{2i} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\frac{\chi_w - \overline{\chi_w}}{2i} + \frac{4}{3}(1+\epsilon)\left(\frac{\chi_w - \overline{\chi_w}}{2i}\right)^3 = \epsilon A\, cos(\omega t) \qquad (۱۴-۲)$$

حال می‌توان متغیرهای مختلط را به فرم قطبی (۲-۱۵) بیان کرد:

$$\chi_v = \varphi_1 e^{i\omega_0 t}$$

$$\chi_w = \varphi_2 e^{i\omega_0 t} \qquad (۱۵-۲)$$

به‌منظور راحتی، در این تحلیل فرکانس نیروی خارجی (ω) دقیقاً برابر فرکانس اسـیلاتور اصـلی ($\omega = 1$) در نظر گرفته‌شده است. درنتیجه با توجه به اینکه فرکانس طبیعی اسیلاتور اصلی برابر یک است، بنابراین در اینجا $\omega_0 = 1$ می‌باشد:

$$\chi_v = \varphi_1 e^{it}$$

$$\chi_w = \varphi_2 e^{it} \qquad (۱۶-۲)$$

در اینجا $\varphi_j\,, j = 1,2$ معرف متغیرهای آهسته‌ی سیستم در مقایسه با متغیرهای نمایی سریع e^{it} است. با جایگزینی تغییر متغیر (۲-۱۶) در معادله (۲-۱۴) روابط (۲-۱۷) بدست می آیند:

$$\dot{\varphi}_1 e^{it} + i\varphi_1 e^{it} - \frac{i}{2}\left(\varphi_1 e^{it} + \bar{\varphi}_1 e^{-it}\right) + \frac{1}{1+\epsilon}\frac{\varphi_1 e^{it} - \bar{\varphi}_1 e^{-it}}{2i} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\frac{\varphi_2 e^{it} - \bar{\varphi}_2 e^{-it}}{2i} = \epsilon A\, cos(\omega t)$$

$$\dot{\varphi}_2 e^{it} + i\varphi_2 e^{it} - \frac{i}{2}\left(\varphi_2 e^{it} + \bar{\varphi}_2 e^{-it}\right) + (1+\epsilon)\lambda\frac{\varphi_2 e^{it} + \bar{\varphi}_2 e^{-it}}{2} + \frac{1}{1+\epsilon}\frac{\varphi_1 e^{it} - \bar{\varphi}_1 e^{-it}}{2i} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\frac{\varphi_2 e^{it} - \bar{\varphi}_2 e^{-it}}{2i} + \frac{4}{3}(1+\epsilon)\left(\frac{\varphi_2 e^{it} - \bar{\varphi}_2 e^{-it}}{2i}\right)^3 = \epsilon A\, cos(\omega t) \qquad (۲-۱۷)$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} e^{it} &= cos(\omega t) + i sin(\omega t) \\ e^{-it} &= cos(\omega t) - i sin(\omega t) \end{aligned} \xrightarrow{+} cos(\omega t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad (۲-۱۸)$$

با جایگذاری روابط (۲-۱۷) و (۲-۱۸) و تقسیم رابطه بد ست آمده بر e^{it} ، روابط (۲-۱۹) بد ست می آیند:

$$\dot{\varphi}_1 + \frac{i\epsilon}{2(1+\epsilon)}\left(\varphi_1 - \varphi_2 - \bar{\varphi}_1 e^{-2it} + \bar{\varphi}_2 e^{-2it}\right) = \frac{\epsilon A}{2}\left(1 + e^{-2it}\right)$$

$$\dot{\varphi}_2 + \frac{i}{2(1+\epsilon)}\left(\varphi_2 - \varphi_1 - \bar{\varphi}_2 e^{-2it} + \bar{\varphi}_1 e^{-2it}\right) + \frac{(1+\epsilon)\lambda}{2}\left(\varphi_2 + \bar{\varphi}_2 e^{-2it}\right) + \frac{i(1+\epsilon)}{6}\underbrace{e^{-it}(\varphi_2 e^{it} + \bar{\varphi}_2 e^{-it})^3}_{P1} = \frac{\epsilon A}{2}\left(1 + e^{-2it}\right) \qquad (۲-۱۹)$$

$$P1 = e^{-it}(\varphi_2 e^{it} + \bar{\varphi}_2 e^{-it})^3 = e^{-it}\left({\varphi_2}^3 e^{3it} - \overline{\varphi_2}^3 e^{-3it} + 3\varphi_2\overline{\varphi_2}^2 e^{-it} - 3{\varphi_2}^2\overline{\varphi_2} e^{it}\right) = {\varphi_2}^3 e^{2it} - \overline{\varphi_2}^3 e^{-4it} + 3\varphi_2\overline{\varphi_2}^2 e^{-2it} - 3{\varphi_2}^2\overline{\varphi_2} = {\varphi_2}^3 e^{2it} - \overline{\varphi_2}^3 e^{-4it} + 3\varphi_2\overline{\varphi_2}^2 e^{-2it} - 3\varphi_2|\varphi_2|^2 \qquad (۲-۲۰)$$

بنابراین معادلات سیستم بصورت (۲-۲۱) می شوند:

$$\dot{\varphi}_1 + \frac{i\epsilon}{2(1+\epsilon)}\left(\varphi_1 - \varphi_2 - \bar{\varphi}_1 e^{-2it} + \bar{\varphi}_2 e^{-2it}\right) = \frac{\epsilon A}{2}\left(1 + e^{-2it}\right)$$

$$\dot{\varphi}_2 + \frac{i}{2(1+\epsilon)}\left(\varphi_2 - \varphi_1 - \bar{\varphi}_2 e^{-2it} + \bar{\varphi}_1 e^{-2it}\right) + \frac{(1+\epsilon)\lambda}{2}\left(\varphi_2 + \bar{\varphi}_2 e^{-2it}\right) + \frac{i(1+\epsilon)}{6}\left({\varphi_2}^3 e^{2it} - \overline{\varphi_2}^3 e^{-4it} + 3\varphi_2\overline{\varphi_2}^2 e^{-2it} - 3\varphi_2|\varphi_2|^2\right) = \frac{\epsilon A}{2}\left(1 + e^{-2it}\right) \qquad (۲۱\text{-}۲)$$

در اینجا هدف بررسی رژیم های پاسخ سیستم توصیف شده با روابط (۲-۲۱) در نزدیکی فرکانس ۱:۱ است. رزونانس ۱:۱ یا رزونانس اصلی[1] یا رزونانس اولیه هنگامی اتفاق می افتد که مود اول سیستم اولیه خطی تحریک شود، یعنی فرکانس نیروی خارجی برابر فرکانس طبیعی اول سیستم اولیه خطی می باشد. بنابراین می توان گفت پیشروی متغیرهای مدوله φ_1 و φ_2 در مقایسه با نوسانات سریع نیروی خارجی آهسته است. در نتیجه، اولین تقریب متغیرهای مدوله را می توان با میانگین‌گیری رابطه (۲-۲۱) نسبت به مقیاس زمانی سریع، بدست آورد. با مساوی صفر قرار دادن تمام جملات شامل عبارات نمایی در رابطه (۲-۲۱) معادلات به صورت تابعی از مدولاسیون آهسته φ_j بدست می آیند:

$$\dot{\varphi}_1 + \frac{i\epsilon}{2(1+\epsilon)}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\epsilon A}{2}$$
$$\dot{\varphi}_2 + \frac{i}{2(1+\epsilon)}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{(1+\epsilon)\lambda}{2}\varphi_2 - \frac{i(1+\epsilon)}{2}\varphi_2|\varphi_2|^2 = \frac{\epsilon A}{2} \qquad (۲۲\text{-}۲)$$

روش میانگین گیری استفاده شده در اینجا را نمی‌توان از لحاظ ریاضی دقیق برشمرد زیرا فراتر از محدوده اعتبار تئوری میانگین‌گیری انجام شده است. ولی از این روش در مقالات متعددی [۱۱, ۲۷, ۱۳] استفاده شده و نتایج حاصل با حل عددی مطابقت داشته است.

۲-۳-۳-۲ منیفولد نامتغیر آهسته[2]

حال φ_1 با استفاده از رابطه دوم معادله (۲-۲۲) بدست می آید، که خواهیم داشت:

$$\varphi_1 = -2i(1+\epsilon)\dot{\varphi}_2 + \varphi_2 - i(1+\epsilon)^2\lambda\varphi_2 - (1+\epsilon)^2\varphi_2\,|\varphi_2|^2 + i(1+\epsilon)\epsilon A \qquad (۲۳\text{-}۲)$$

حال با جایگذاری φ_1 بدست آمده از رابطه (۲-۲۳) در معادله اول رابطه (۲-۲۲) داریم:

[1] Main Resonance
[2] Slow Invariant Manifold(SIM)

$$\frac{d}{dt}(-2i(1+\epsilon)\dot{\varphi}_2+\varphi_2-i(1+\epsilon)^2\lambda\varphi_2-(1+\epsilon)^2\varphi_2\,|\varphi_2|^2+i(1+\epsilon)\epsilon A)+\frac{i\epsilon}{2(1+\epsilon)}(-2i(1+\epsilon)\dot{\varphi}_2+\varphi_2-i(1+\epsilon)^2\lambda\varphi_2-(1+\epsilon)^2\varphi_2\,|\varphi_2|^2+i(1+\epsilon)\epsilon A\ -\varphi_2)=\frac{\epsilon A}{2} \quad (۲-۲۴)$$

با مرتب سازی معادله بالا داریم:

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi_2+\frac{d}{dt}(\frac{i}{2}\varphi_2+\frac{\lambda(1+\epsilon)}{2}\varphi_2-\frac{i(1+\epsilon)}{2}\varphi_2\,|\varphi_2|^2)+\frac{i\epsilon}{4}(\lambda\varphi_2-i\varphi_2\,|\varphi_2|^2-A)=0 \quad (۲-۲۵)$$

در این تحلیل ها ϵ های کوچک مورد بحث هستند. بنابراین با توجه به کوچک بودن ϵ می توان رابطه (۲-۲۵) را با کمک روش مقیاس های چندگانه[۱]، بررسی کرد. مقیاس‌های چندگانه با استفاده از جایگزینی روابط (۲-۲۶) معرفی می‌شوند:

$$\varphi_2=\varphi_2(\tau_0,\tau_1,\ldots)$$
$$\tau_k=\epsilon^k t,\ k=0,1,\ldots \quad (۲-۲۶)$$
$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\cdots$$

همانطور که مشاهده می‌کنیم $\tau_0=\epsilon^0 t$ مقیاس زمانی سریع و $\tau_1=\epsilon t$ مقیاس زمانی آهسته می‌باشند.

با جایگذاری رابطه (۲-۲۶) در (۲-۲۵) داریم:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial{\tau_0}^2}+2\epsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau_0\partial\tau_1}+\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial{\tau_1}^2}\right)\varphi_2+\left(\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\epsilon\frac{\partial}{\partial\tau_1}\right)\left(\frac{i}{2}\varphi_2+\frac{\lambda(1+\epsilon)}{2}\varphi_2-\frac{i(1+\epsilon)}{2}\varphi_2\,|\varphi_2|^2\right)+\frac{i\epsilon}{4}(\lambda\varphi_2-i\varphi_2\,|\varphi_2|^2-A)=0 \quad (۲-۲۷)$$

با تقریب مرتبه یک رابطه (۲-۲۷) (ϵ^0) با میل دادن ϵ به سمت صفر، مقیاس زمانی سریع سیستم میانگین‌گیری شده(۲-۲۲) به‌صورت (۲-۲۸) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial^2}{\partial{\tau_0}^2}\varphi_2+\frac{\partial}{\partial\tau_0}\left(\frac{i}{2}\varphi_2+\frac{\lambda}{2}\varphi_2-i\varphi_2\,|\varphi_2|^2\right)=0 \quad (۲-۲۸)$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۲-۲۸) داریم:

---

[۱] Multiple Scale Method

$$\int \frac{\partial^2}{\partial {\tau_0}^2}\varphi_2 + \frac{\partial}{\partial \tau_0}\left(\frac{i}{2}\varphi_2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_2 - i\varphi_2\,|\varphi_2|^2\right) d\tau_0 = C(\tau_1)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial \tau_0}\varphi_2 + \left(\frac{i}{2}\varphi_2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_2 - \frac{i}{2}\varphi_2\,|\varphi_2|^2\right) = C(\tau_1) \qquad (۲-۲۹)$$

نقاط تعادل $\phi(\tau_1)$ رابطه (۲-۲۹) با برابر صفر قرار دادن مشتق معادله ($\frac{\partial}{\partial \tau_0}\varphi_2$) بدست می آیند:

$$\left(\frac{i}{2}\phi + \frac{\lambda}{2}\phi - \frac{i}{2}\phi\,|\phi|^2\right) = C(\tau_1) \qquad (۲-۳۰)$$

با توجه به اینکه مشـتق φ_2 نسـبت به τ_0 برابر صـفر می باشـد، می توان فهمید نقاط تعادل تابعی از مقیاس زمانی آهسته می باشند.

حال با در نظر گرفتن $\phi(\tau_1) = N(\tau_1)\exp(i\gamma(\tau_1))$ و جایگذاری در معادله (۲-۳۰) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{i}{2}N(\tau_1)\,exp\big(i\gamma(\tau_1)\big) + \frac{\lambda}{2}N(\tau_1)\,exp\big(i\gamma(\tau_1)\big) - \frac{i}{2}N(\tau_1)^3\,exp\big(i\gamma(\tau_1)\big)\right) = C(\tau_1)$$

$$\longrightarrow \left(\frac{i}{2}N(\tau_1) + \frac{\lambda}{2}N(\tau_1) - \frac{i}{2}N(\tau_1)^3\right) exp\big(i\gamma(\tau_1)\big) = C(\tau_1) \qquad (۲-۳۱)$$

با گرفتن اندازه از معادله (۲-۳۱)، داریم:

$$\left|\frac{i}{2}N(\tau_1) + \frac{\lambda}{2}N(\tau_1) - \frac{i}{2}N(\tau_1)^3\right|\left|exp\big(i\gamma(\tau_1)\big)\right| = |C(\tau_1)|$$

$$(N(\tau_1) - N(\tau_1)^3)^2 + \lambda^2 N(\tau_1)^2 = 4|C(\tau_1)|^2$$

$$Z(\tau_1) = N(\tau_1)^2$$

$$\longrightarrow Z(\tau_1)(1 - Z(\tau_1))^2 + \lambda^2 Z(\tau_1) = 4|C(\tau_1)|^2 \qquad (۲-۳۲)$$

سمت را ست معادله (۲-۳۲) می تواند یکنواخت بوده یا ماکزیمم و مینیمم دا شته با شد. هنگامی که تابع یکنواخت باشـــد، تغییر در $|C(\tau_1)|$ تاثیری در تعداد جواب های معادله ندارد و دارای یک حل مثبت خواهد بود. ولی هنگامی که دارای ماکزیمم یا مینیمم باشـــد، تغییر در $|C(\tau_1)|$ یک جفت انشعاب نقطه زین اسبی خواهد داشت.

برای تشخیص بین موارد گفته شده، باید ریشه های سمت چپ معادله (۲-۳۲) چک شوند:

$$\frac{d}{dz}\left(Z(\tau_1)\left(1-Z(\tau_1)\right)^2+\lambda^2 Z(\tau_1)\right)=\left(1-Z(\tau_1)\right)^2+2Z(\tau_1)\left(1-Z(\tau_1)\right)+\lambda^2=0$$

$$\longrightarrow 1+\lambda^2-4Z+3Z^2=0 \qquad (۲-۳۳)$$

بنابراین ریشه های معادله(۲-۳۳) به صورت (۲-۳۴) می باشند:

$$Z_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{1-3\lambda^2}}{3} \qquad (۲-۳۴)$$

بنابراین برای $\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ دو ریشه و یک جفت از شعاب نقطه زین اسبی وجود دارد و برای $\lambda > \frac{1}{\sqrt{3}}$ هیچ ریشه و از شعابی وجود ندارد. برای مقدار بحرانی $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$ دو نقطه از شعاب نقطه زین اسبی یکی می شوند.

اگر رابطه (۲-۳۲) فقط یک جواب داشته باشد، آن جواب پایدار است. یعنی با حل این معادله بازای $\lambda > \frac{1}{\sqrt{3}}$ و هر مقدار ثابت $4|C|^2$ بدست آمده است، که این همان منیفولد نامتغیر آهسته سیستم می باشد. و بازای هر مقدار $4|C|^2$ و $\lambda < \frac{1}{\sqrt{3}}$ معادله (۲-۳۲) دارای سه جواب می باشد که یکی از آنها شاخه ناپایدار (زین اسبی) و دو جواب دیگر شاخه پایدار (نقطه) می باشند. همینطور برای مقدار بحرانی $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$ معادله فقط یک جواب داشته و آن جواب هم پایدار است.

نرخ مشخصه جذب در نزدیکی نقاط تعادل را می توان با خطی سازی معادله (۲-۲۹) بررسی کرد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\varphi_2=\phi(\tau_1)+\delta(\tau_0)\,,\ \ |\delta|\ll|\phi| \qquad (۲-۳۵)$$

برای خطی کردن رابطه (۲-۲۹) معادله را به صورت (۲-۳۶) در نظر می‌گیریم:

$$f=\frac{\partial}{\partial\tau_0}\varphi_2=C(\tau_1)-\left(\frac{i}{2}\varphi_2+\frac{\lambda}{2}\varphi_2-\frac{i}{2}\varphi_2\,|\varphi_2|^2\right) \qquad (۲-۳۶)$$

سپس باید برای خطی سازی از رابطه (۲-۳۷) استفاده کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0}\delta = \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\delta + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2^*}\delta^* \qquad (۲-۳۷)$$

در اینجا * نشانگر مزدوج مختلط می باشد.

با مشتق گیری از رابطه (۲-۳۶) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = -\frac{i}{2} - \frac{\lambda}{2} + i\,|\varphi_2|^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_2^*} = \frac{i}{2}\varphi_2 \qquad (۲-۳۸)$$

با جایگزینی روابط (۲-۳۸) در رابطه (۲-۳۷) و سپس جایگذاری رابطه (۲-۳۵) در روابط بد ست آمده و صرف نظر از δ در مقابل ϕ، رابطه (۲-۳۹) بدست می آید:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0}\delta = \left(-\frac{i}{2} - \frac{\lambda}{2} + i|\phi|^2\right)\delta + \frac{i}{2}\phi^2\delta^* \qquad (۲-۳۹)$$

حال از δ فاکتور گرفته و رابطه را به شکل دیگری بیان می کنیم:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \frac{i}{2} + \frac{\lambda}{2} - i|\phi|^2\right)\delta = \frac{i}{2}\phi^2\delta^* \qquad (۲-۴۰)$$

سپس با گرفتن اندازه از دو طرف رابطه (۲-۴۰) داریم:

$$\left|\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \frac{i}{2} + \frac{\lambda}{2} - i|\phi|^2\right||\delta| = \left|\frac{i}{2}\phi^2\right||\delta^*|$$
$$\longrightarrow \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + (\frac{i}{2} - i|\phi|^2)^2\right]|\delta|^2 = \frac{1}{4}|\phi|^4|\delta|^2$$
$$\longrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial {\tau_0}^2} + \lambda\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{1}{4} + |\phi|^4 - |\phi|^2 - \frac{1}{4}|\phi|^4\right)|\delta|^2 = 0$$
$$\longrightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial {\tau_0}^2} + \lambda\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \frac{1}{4}(\lambda^2 + 1 + 3|\phi|^4 - |\phi|^2 - 4|\phi|^4\right] = 0 \qquad (۲-۴۱)$$

باید توجه داشـــت که ϕ تابعی از τ_0 نیســـت. پس با جایگذاری $|\phi|^2 = N^2 = Z$ و تقســـیم دو طرف معادله (۲-۴۱) بر δ^* ، خواهیم داشت:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial {\tau_0}^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \frac{1}{4}(\lambda^2 + 1 + 3Z^2 - Z)\right] \delta = 0 \tag{۲-۴۲}$$

معادله (۲-۴۲) یک معادله مرتبه ۲ ساده است و بنابراین حل آن برابر است با:

$$\delta = \delta_0\, exp\left(\frac{-\lambda \pm i\omega}{2}\tau_0\right)\ ,\ \omega = \sqrt{3Z^2 - 4Z + 1} \tag{۲-۴۳}$$

اگر ω را برابر صفر قرار دهیم، پاسخ های معادله برابر $\mathrm{Z}_b = 1$ و $\mathrm{Z}_a = \frac{1}{3}$ می باشد.

بنابراین طبق رابطه (۲-۴۳) داریم که رژیم پاســخ در نزدیکی نقاط تعادل به λ و Z بســتگی دارد. بنابراین با کاهش Z ، انتظار می رود که سیستم برای $\lambda < \frac{1}{\sqrt{3}}$ پایدار بماند و معادله (۲-۳۲) تنها یک جواب داشــته باشــد. ولی با کاهش Z برای $\lambda > \frac{1}{\sqrt{3}}$ انتظار می رود که ســیســتم ناپایدار شــود. چنین رفتاری برای منیفولد نامتغیر آهسته (برای $\lambda > \frac{1}{\sqrt{3}}$) ممکن است از وجود نوسانات تخفیف یافته باشد.

برای دستیابی به این احتمال، باید رفتار $\phi(\tau_1)$ بررسی شود. برای اینکار می بایست مرتبه ϵ از بسط مقیاس های چندگانه رابطه (۲-۲۷) را در نظر بگیریم:

$$\left(2\frac{\partial^2}{\partial\tau_0\partial\tau_1}\varphi_2\right) + \frac{\partial}{\partial\tau_1}\left(\frac{i}{2}\varphi_2 + \frac{\lambda(1+\epsilon)}{2}\varphi_2 - \frac{i(1+\epsilon)}{2}\varphi_2\,|\varphi_2|^2\right) + \frac{\partial}{\partial\tau_0}\left(\frac{\lambda}{2}\varphi_2 - \frac{i}{2}\varphi_2\,|\varphi_2|^2 - A\right) = 0 \tag{۲-۴۴}$$

در اینجا هدف بررسی پاسخ در نزدیکی نقطه تعادل رژیم سریع ($\tau_0 = \epsilon^0 t$) می باشد، یعنی $\phi(\tau_1) = \lim\limits_{\tau_{0\to+\infty}} \varphi_2(\tau_0,\tau_1)$. با گرفتن حد $\tau_{0\to+\infty}$ از رابطه (۲-۴۴) و قرار دادن $\epsilon = 0$ در آن، رابطه (۲-۴۵) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left(\frac{i}{2}\phi + \frac{\lambda}{2}\phi - \frac{i}{2}\phi\,|\phi|^2\right) + \frac{i}{4}(\lambda\phi - i\phi\,|\phi|^2 - A) = 0 \tag{۲-۴۵}$$

با گرفتن مشتق معادله فوق و فاکتورگیری داریم:

$$\frac{i}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1} - i|\phi|^2\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1} - \frac{i}{2}\phi^2\frac{\partial\phi^*}{\partial\tau_1} + \frac{i}{4}(\lambda\phi - i\phi|\phi|^2 - A) = 0$$

$$\longrightarrow \left(\frac{i}{2}+\frac{\lambda}{2}-i|\phi|^2\right)\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1}-\frac{i}{2}\phi^2\frac{\partial\phi^*}{\partial\tau_1}=-\frac{i}{4}(\lambda\phi-i\phi|\phi|^2-A)$$

$$G(\phi,\phi^*)=-\frac{i}{4}(\lambda\phi-i\phi|\phi|^2-A)$$

$$\longrightarrow \left(\frac{i}{2}+\frac{\lambda}{2}-i|\phi|^2\right)\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1}-\frac{i}{2}\phi^2\frac{\partial\phi^*}{\partial\tau_1}=G(\phi,\phi^*) \qquad (۴۶-۲)$$

سپس با گرفتن مزدوج طرفین داریم:

$$\left(-\frac{i}{2}+\frac{\lambda}{2}+i|\phi|^2\right)\frac{\partial\phi^*}{\partial\tau_1}+\frac{i}{2}\phi^{*2}\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1}=G^*(\phi,\phi^*) \qquad (۴۷-۲)$$

از رابطه (۲-۴۷) می توان $\frac{\partial\phi^*}{\partial\tau_1}$ را بدست آورد:

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial\tau_1}=\frac{G^*(\phi,\phi^*)-\frac{i}{2}\phi^{*2}\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1}}{\left(-\frac{i}{2}+\frac{\lambda}{2}+i|\phi|^2\right)} \qquad (۴۸-۲)$$

بنابراین با جایگذاری (۲-۴۸) به جای $\frac{\partial\phi^*}{\partial\tau_1}$ در (۲-۴۶) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{i}{2}+\frac{\lambda}{2}-i|\phi|^2\right)\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1}-\frac{i}{2}\phi^2\left[\frac{G^*(\phi,\phi^*)-\frac{i}{2}\phi^{*2}\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1}}{\left(-\frac{i}{2}+\frac{\lambda}{2}+i|\phi|^2\right)}\right]=G(\phi,\phi^*)\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\frac{1}{4}+|\phi|^4-|\phi|^2+\frac{\lambda^2}{4}-\frac{1}{4}|\phi|^4\right)\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1}-\frac{i}{2}\phi^2G^*(\phi,\phi^*)=\left(\frac{i}{2}+\frac{\lambda}{2}-\right.$$

$$\left.i|\phi|^2\right)G(\phi,\phi^*)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\tau_1}=\frac{\left(-2i+2\lambda+4i|\phi|^2\right)G(\phi,\phi^*)+2i\phi^2G^*(\phi,\phi^*)}{(1+3|\phi|^4-4|\phi|^2+\lambda^2)} \qquad (۴۹-۲)$$

برای بررسی رفتار جواب های سیستم (۲-۴۹)، باید ابتدا تمامی نقاط تعادل سیستم را بیابیم. بنابراین می بایست $\frac{\partial\phi}{\partial\tau_1}$ برابر صفر قرار دهیم. با اینکار معادله زیر جهت یافتن نقطه تعادل ϕ_0 بدست می آید:

$$(-2i+2\lambda-4i|\phi_0|^2)G^*(\phi,\phi^*)-2i\phi_0^{*2}G(\phi,\phi^*)=0 \qquad (۵۰-۲)$$

یکی از جواب های سیستم هنگامی بدست می آید که $G(\phi_0,{\phi_0}^*)$ مساوی صفر باشد، در نتیجه داریم:

$$G(\phi_0,{\phi_0}^*)=-\frac{i}{4}(\lambda\phi_0-i\phi_0|\phi_0|^2-A)=0 \qquad \rightarrow\ \lambda\phi_0-i\phi_0|\phi_0|^2=A \qquad (۵۱-۲)$$

با گرفتن اندازه از دو طرف معادله(۲-۵۱) داریم:

$$\lambda^2|\phi_0|^2 + |\phi_0|^6 = A^2 \quad (۵۲-۲)$$

با بررســی معادله میانگین گیری شــده (۲-۲۵) می بینیم که نقاط تعادل این معادله در واقع با رابطه (۲-۵۲) توصــیف می شــود و این نقاط در واقع رژیم‌های پاســخ حالت پایا[1] را در حالت رزونانس ۱:۱ توصیف می کنند.

معادله (۲-۴۹) پیشــروی جریان روی منیفولد نامتغیر آهســـته را توصـــیف می کند و بنابراین کاملا طبیعی که شامل نقاط تعادل معادله دقیق باشد.

[1] Steady State Response

فصل سوم

مدل سازی و تحلیل مسئله

۳-۱ مقدمه

در این فصل، رفتار دو اسیلاتور جفت شده مطالعه می‌شود که اسیلاتورها به‌صورت سیستم جرم، فنر و دمپر مطابق شکل (۳-۱) در نظر گرفته‌شده است. در این ترکیب اسیلاتور اصلی خطی فرض شده که شامل جرم(M)، فنر خطی(K) و دمپر خطی($\hat{a}$) می‌باشد و اسیلاتور ثانویه (NES) با توابع پتانسیل کلی و محلی که هر دو غیرخطی می‌باشند، در نظر گرفته‌شده است. پتانسیل کلی غیرخطی چاه انرژی اندرکنش مستقیم با اسیلاتور خطی اصلی می‌گذارد، درحالی‌که پتانسیل محلی (در حین تبادل انرژی بین دو اسیلاتور) تنها از رفتار NES غیرخطی تأثیر می‌گیرد و با اسیلاتور اصلی اندرکنشی نخواهد داشت. این پتانسیل محلی می‌تواند به‌واسطه مثلاً تماس بین المان‌های ساختاری مدل در حین تحریک رخ دهد. همچنین به‌کارگیری آن ممکن است به‌واسطه افزایش کارایی NES در کنترل غیرفعال سیستم و یا افزایش راندمان برداشت انرژی ارتعاشی از سیستم باشد. با توصیفات فوق، اسیلاتور ثانویه (NES) شامل یک پتانسیل غیرخطی کلی($\tilde{G}$)، یک پتانسیل خطی و غیرخطی محلی($\tilde{V}$) و یک میرایی خطی محلی($\hat{c}$) خواهد بود. در این تحقیق پس از استخراج معادلات حاکم، معادلات به روش‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی حل‌شده و سناریوهای مختلف تبادل انرژی بین دو اسیلاتور موردبحث و بررسی کامل قرار خواهد گرفت.

۳-۲ معرفی مدل

سیستمی شامل یک اسیلاتور خطی متصل به چاه غیرخطی انرژی با میرایی و پتانسیل محلی و کلی و تحت بار هارمونیک که در شکل (۳-۱) نشان داده شده را بررسی می‌کنیم. معادلات حاکم بر سیستم به‌صورت معادلات (۳-۱) و یا (۳-۲) بیان می‌شوند:

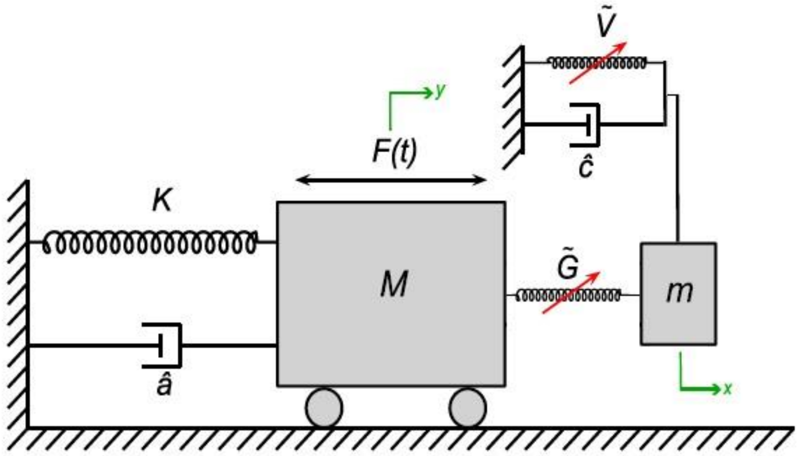
$$M\ddot{y} + Ky + \hat{a}\dot{y} + \tilde{G}(y-x) = F(t)$$

$$m\ddot{x} + \tilde{G}(x-y) + \tilde{V}x + \hat{c}\dot{x} = 0 \qquad (۳-۱)$$

و یا:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + a\dot{y} + \tilde{g}(y - x) = f(t)$$

$$\epsilon\ddot{x} + \tilde{g}(x - y) + \tilde{v}x + c\dot{x} = 0 \qquad (۳-۲)$$



شکل (۳-۱) مدل مکانیکی سیستم

در اینجا اسیلاتور خطی با جرم M، ضریب سختی K و ضریب میرایی $\hat{a}$ در نظر گرفته‌شده و همین‌طور قسمت غیرخطی (چاه غیرخطی انرژی) به‌صورت سیستمی با دو قسمت کلی و محلی تشکیل‌شده است که جرم سیستم m، ضریب سختی کلی $\tilde{G}$، ضریب سختی محلی $\tilde{V}$ که از دو قسمت خطی و غیرخطی تشکیل‌شده و ضریب میرایی محلی $\hat{c}$ می‌باشد. نسبت جرمی دو اسیلاتور $0 < \epsilon = \frac{m}{M} \ll 1$ بسیار کوچک می‌باشد. این شرط ازنظر کاربردی اهمیت بسیاری دارد، چراکه در کاربردهای مختلف با افزایش اندکی در جرم سیستم می‌توان از چاه غیرخطی انرژی، استفاده نمود. همین‌طور در معادله (۳-۲) داریم:

$\frac{\hat{a}}{M} = a$ ، $\frac{\tilde{G}(y-x)}{M} = \tilde{g}(x - y)$ ، $\frac{K}{M} = \omega_0^2$ ، $\frac{F(t)}{M} = f(t)$ ، $\frac{\hat{c}}{M} = c$ و $\frac{\hat{V}(x)}{M} = \hat{v}(x) = w_c^2 + W(x)$.

که در این معادلات $\hat{v}(x)$ متشکل از قسمت خطی w_c^2 و قسمت غیرخطی $W(x)$ می باشد.

حال تغییر متغیرهای (۳-۳) را برای ترم‌های جابجایی سیستم اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases} v = \frac{y+\epsilon x}{1+\epsilon} \\ w = x - y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = v - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} w \\ x = v + \frac{1}{1+\epsilon} w \end{cases} \qquad (۳-۳)$$

در بیان فیزیکی، مختصات جدید v بیانگر حرکت مرکز جرم اسیلاتور خطی و غیرخطی، و همین‌طور w نشانگر جابجایی نسبی اسیلاتور خطی و غیرخطی نسبت به یکدیگر است.

با جایگذاری رابطه (۳-۳) در (۳-۲) خواهیم داشت:

$$\ddot{v}-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ddot{w}+a\left(\dot{v}-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\dot{w}\right)+\omega_0^2\left(v-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}w\right)+\tilde{g}\left(v-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}w-v+\frac{1}{1+\epsilon}w\right)=f(t)$$

$$\epsilon\left(\ddot{v}+\frac{1}{1+\epsilon}\ddot{w}\right)-\tilde{g}\left(v-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}w-v+\frac{1}{1+\epsilon}w\right)+w_c^2\left(v+\frac{1}{1+\epsilon}w\right)+W(v+\frac{1}{1+\epsilon}w)+c(\dot{v}+\frac{1}{1+\epsilon}\dot{w})=0 \quad (۳\text{-}۴)$$

حال با جمع‌کردن دو معادله رابطه (۳-۴) و همین‌طور تقسیم معادله دوم و کم کردن آن از معادله اول، معادلات جدیدی به دست می‌آیند:

$$(1+\epsilon)\ddot{v}+a\left(\dot{v}-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\dot{w}\right)+\omega_0^2\left(v-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}w\right)+c(\dot{v}+\frac{1}{1+\epsilon}\dot{w})+w_c^2\left(v+\frac{1}{1+\epsilon}w\right)+W(v+\frac{1}{1+\epsilon}w)=f(t)$$

$$\ddot{w}+\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\tilde{g}(w)+\frac{1}{\epsilon}\left(w_c^2(v+\frac{1}{1+\epsilon}w)+W(v+\frac{1}{1+\epsilon}w)+c(\dot{v}+\frac{1}{1+\epsilon}\dot{w})\right)=-f(t) \quad (۳\text{-}۵)$$

در این قسمت از روش میانگین‌گیری که برای سیستم‌های شدیداً غیرخطی بکار می‌رود استفاده می شود. برای این کار از متغیرهای مختلط مانویتچ[۱] استفاده می‌شود، که به‌صورت (۳-۶) تعریف می‌شوند [۵۰]:

$$\psi e^{i\omega t}=\dot{v}+i\omega v$$

$$\varphi e^{i\omega t}=\dot{w}+i\omega w \quad (۳\text{-}۶)$$

در این معادلات ω فرکانس نیروی تحریک خارجی می‌باشد که بیشتر در مورد آن توضیح داده می شود.

[۱] Manevitch

جهت به دست آوردن $\ddot{v}$، $\ddot{w}$، v و w به مزدوج رابطه (۳-۶) نیاز داریم:

$$\psi^* e^{-i\omega t} = \dot{v} - i\omega v$$
$$\varphi^* e^{-i\omega t} = \dot{w} - i\omega w \qquad (۳\text{-}۷)$$

بنابراین با جمع‌کردن $\psi^* e^{-i\omega t}$ و $\psi e^{i\omega t}$ ، $\dot{v}$ به دست می‌آید و با تفریق آن‌ها v به دست می‌آید:

$$\dot{v} = \frac{\psi e^{i\omega t} + \psi^* e^{-i\omega t}}{2} \quad , \quad \dot{w} = \frac{\varphi e^{i\omega t} + \varphi^* e^{-i\omega t}}{2}$$
$$v = \frac{\psi e^{i\omega t} - \psi^* e^{-i\omega t}}{2i} \quad , \quad w = \frac{\varphi e^{i\omega t} - \varphi^* e^{-i\omega t}}{2i} \qquad (۳\text{-}۸)$$

حال با مشتق گرفتن از معادلات رابطه (۳-۶) خواهیم داشت:

$$\dot{\psi} e^{i\omega t} + i\omega\, \psi e^{i\omega t} = \ddot{v} + i\omega \dot{v}$$
$$\dot{\varphi} e^{i\omega t} + i\omega\, \varphi e^{i\omega t} = \ddot{w} + i\omega \dot{w} \qquad (۳\text{-}۹)$$

با جایگذاری روابط (۳-۸) در معادلات (۳-۹) خواهیم داشت:

$$\ddot{v} = \dot{\psi} e^{i\omega t} + i\omega\, \psi e^{i\omega t} - i\omega \left(\frac{\psi e^{i\omega t} + \psi^* e^{-i\omega t}}{2}\right)$$
$$\ddot{w} = \dot{\varphi} e^{i\omega t} + i\omega\, \varphi e^{i\omega t} - i\omega \left(\frac{\varphi e^{i\omega t} + \varphi^* e^{-i\omega t}}{2}\right) \qquad (۳\text{-}۱۰)$$

با جایگذاری معادلات روابط (۳-۸) و (۳-۱۰) در رابطه (۳-۵) خواهیم داشت:

$$(1+\epsilon)\left(\dot{\psi} e^{i\omega t} + i\omega\, \psi e^{i\omega t} - i\omega \left(\frac{\psi e^{i\omega t} + \psi^* e^{-i\omega t}}{2}\right)\right) + a\left(\frac{\psi e^{i\omega t} + \psi^* e^{-i\omega t}}{2} -\right.$$
$$\left.\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\left(\frac{\varphi e^{i\omega t} + \varphi^* e^{-i\omega t}}{2}\right)\right) + \omega_0^2 \left(\frac{\psi e^{i\omega t} - \psi^* e^{-i\omega t}}{2i} - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\frac{\varphi e^{i\omega t} - \varphi^* e^{-i\omega t}}{2i}\right) +$$
$$c\left(\frac{\psi e^{i\omega t} + \psi^* e^{-i\omega t}}{2} + \frac{1}{1+\epsilon}\left(\frac{\varphi e^{i\omega t} + \varphi^* e^{-i\omega t}}{2}\right)\right) + w_c^2 \left(\frac{\psi e^{i\omega t} - \psi^* e^{-i\omega t}}{2i} +\right.$$
$$\left.\frac{1}{1+\epsilon}\frac{\varphi e^{i\omega t} - \varphi^* e^{-i\omega t}}{2i}\right) + F_{W^0} = f(t)$$
$$\dot{\varphi} e^{i\omega t} + i\omega\, \varphi e^{i\omega t} - i\omega \left(\frac{\varphi e^{i\omega t} + \varphi^* e^{-i\omega t}}{2}\right) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} F_{\tilde{g}^0} + \frac{1}{\epsilon}\left(w_c^2 \left(\frac{\psi e^{i\omega t} - \psi^* e^{-i\omega t}}{2i} +\right.\right. \qquad (۳\text{-}۱۱)$$
$$\left.\left.\frac{1}{1+\epsilon}\frac{\varphi e^{i\omega t} - \varphi^* e^{-i\omega t}}{2i}\right) + F_{W^0} + c\left(\frac{\psi e^{i\omega t} + \psi^* e^{-i\omega t}}{2} + \frac{1}{1+\epsilon}\frac{\varphi e^{i\omega t} + \varphi^* e^{-i\omega t}}{2}\right)\right) = -f(t)$$

برای متغیرهای مختلف سیستم فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود:

- دامنه نیروی تحریک در مرتبه ϵ^1، با پریود ارتعاش ω: $f(t) = \epsilon f^0 sin(\omega t)$
- بررسی رفتار سیستم حول رزونانس ۱:۱: $\omega = \omega_0(1 + \sigma\epsilon)$
- ضرایب میرایی در مرتبه ϵ^1 : $a = \epsilon a_0$ و $c = \epsilon d$
- قسمت پتانسیل خطی سیستم در مرتبه ϵ^1: $w_c^2 = \epsilon\Omega^2$
- قسمت پتانسیل غیرخطی NES در مرتبه ϵ^1: $W(x) = \epsilon W^0$ و $\tilde{g}(x-y) = \epsilon\tilde{g}^0(x-y)$

با تقسیم روابط به‌دست‌آمده بر $e^{i\omega t}$، تقسیم معادله اول بر$(1+\epsilon)$ و مساوی صفر قرار دادن تمام جملات شامل ترم‌های نمایی، معادلاتی جدیدی خواهیم داشت که تقریب مرتبه اول متغیرهای مدوله در مقیاس زمانی چندگانه است. درنتیجه معادلات به‌صورت (۳-۱۲) به دست می‌آیند:

$$\dot{\psi} + \left[\frac{i\omega(1+\sigma\epsilon)}{2} + \frac{\epsilon a_0}{2(1+\epsilon)} - \frac{i\omega_0}{2(1+\epsilon)(1+\sigma\epsilon)} + \frac{\epsilon d}{2(1+\epsilon)} - \frac{i\epsilon\Omega^2}{2(1+\epsilon)(1+\sigma\epsilon)\omega_0}\right]\psi - \frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)^2}\left[\epsilon a_0 - \frac{i\omega_0}{(1+\sigma\epsilon)} + d - \frac{i\Omega^2}{(1+\sigma\epsilon)\omega_0}\right]\varphi + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}F_{W^0} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}f^0 sin(\omega t)$$

$$\dot{\varphi} + \left[\frac{i\omega_0(1+\sigma\epsilon)}{2} + \frac{1}{2\epsilon(1+\epsilon)}\left(\epsilon d - \frac{i\epsilon\Omega^2}{(1+\sigma\epsilon)\omega_0}\right) + \frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}\left(\epsilon a_0 - \frac{i\omega_0}{(1+\sigma\epsilon)}\right)\right]\varphi + \left[\frac{1}{2\epsilon}\left(\epsilon d - \frac{i\epsilon\Omega^2}{(1+\sigma\epsilon)\omega_0}\right) - \frac{\epsilon a_0}{2} + \frac{i\omega_0}{2(1+\sigma\epsilon)}\right]\psi + (1+\epsilon)F_{\tilde{g}^0} + F_{W^0} = -\epsilon f^0 sin(\omega t) \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

که در این معادلات برای به دست آوردن $F_{\tilde{g}^0}$ و F_{W^0} از انتگرال گلرکین[1]، برای حفظ هارمونیک اول، استفاده می‌شود:

$$F_{\tilde{g}^0} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^0\left(\frac{\varphi e^{i\omega t} - \varphi^* e^{-i\omega t}}{2i\omega}\right)e^{-i\omega t}dt$$
$$F_{W^0} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} W^0\left(\frac{\psi e^{i\omega t} - \psi^* e^{-i\omega t}}{2i\omega} + \frac{1}{1+\epsilon}\frac{\varphi e^{i\omega t} - \varphi^* e^{-i\omega t}}{2i\omega}\right)e^{-i\omega t}dt \qquad (۳\text{-}۱۳)$$

با استفاده از روابط ذکرشده در بالا، می‌توان معادله (۳-۱۲) را بیشتر ساده‌سازی نمود. بنابراین می‌توان مشتق زمانی معادلات را در دو مرتبه $O(\epsilon^0, \epsilon^1, \ldots)$ در نظر گرفت. درنتیجه، معادلات (۳-۱۲) را می‌توان به‌عنوان مثالی برای اغتشاشات تکین با متغیرهای سریع و آهسته در نظر گرفت. ترم آهسته

[1] Galerkin

مربوط به پیشروی جریان میانگین‌گیری شده و ترم سریع مربوط ارتعاش خارج‌شده از سیستم در میانگین‌گیری می‌باشد.

برای تحلیل مسئله، مقیاس‌های زمانی (۳-۱۴) در نظر گرفته می‌شود:

$$\tau_0 = \tau \ , \ \tau_1 = \epsilon\tau \qquad (۳\text{-}۱۴)$$

۳-۳ رفتار سیستم در مرتبه ϵ^0

در مقیاس زمانی سریع، ϵ به سمت صفر میل می‌کند. بررسی معادله (۳-۱۲) در مقیاس زمانی سریع با تحلیل معادلات سیستم در مرتبه‌ی ϵ^0 معادل می‌باشد، با نوشتن بسط تیلور عبارات شامل ϵ و جداسازی ترم‌های مرتبه ϵ^0، خواهیم داشت:

$$\begin{gathered} D_0\psi + \frac{i\omega_0}{2}\psi - \frac{i\omega_0}{2}\psi = 0 \ \rightarrow \ D_0\psi = 0 \Rightarrow \psi = \psi(\tau_1, \tau_2, \dots) \\ D_0\varphi + \left(\frac{i\omega_0}{2} - \frac{i\Omega^2}{2\omega_0} + \frac{d}{2}\right)\varphi + \left(\frac{i\omega_0}{2} - \frac{i\Omega^2}{2\omega_0} + \frac{d}{2}\right)\psi + F_{\tilde{g}^0} + F_{W^0} = 0 \end{gathered} \qquad (۳\text{-}۱۵)$$

توابع پتانسیلی سیستم را درجه سه انتخاب می‌کنیم چراکه، به‌طور گسترده در مقالات این‌گونه استفاده می‌شود و برای مطالعات تجربی پتانسیل مکعبی مناسب می‌باشد. با توجه به مطالعاتی که در [۵۱, ۵۲] انجام‌شده روش‌های تحلیلی که در این تحقیق استفاده‌شده را می‌توان بر روی حالت‌های مختلف غیرخطی اعمال نمود.

پتانسیل کلی و پتانسیل غیرخطی محلی سیستم جاذب را به‌صورت تابعی درجه سه همانند معادله (۳-۱۶) در نظر گرفتیم:

$$\begin{gathered} g^0(y-x) = A^0(y-x)^3 \\ W^0(x) = B^0(x)^3 \end{gathered} \qquad (۳\text{-}۱۶)$$

نقاط ثابت معادله (۳-۱۵) در مرتبه ϵ^0 و درنتیجه‌ی آن منیفولد نامتغیر آهسته[۱] سیستم را می‌توان به‌صورت (۳-۱۷) به‌دست آورد:

$$\lim_{\tau_0\to\infty} D_0\varphi = 0 \to$$
$$\to \left(\frac{i\omega_0}{2}-\frac{i\Omega^2}{2\omega_0}+\frac{d}{2}\right)\phi+\left(\frac{i\omega_0}{2}-\frac{i\Omega^2}{2\omega_0}+\frac{d}{2}\right)\psi - iA|\phi|^2\phi - iB|\psi+\phi|^2(\psi+\phi)=0 \qquad (۳-۱۷)$$

که در معادله (۳-۱۷)، A و B را می‌توان به‌صورت معادله (۳-۱۸) تعریف نمود:

$$A=\frac{3A^0}{8{\omega_0}^3}$$
$$B=\frac{3B^0}{8{\omega_0}^3} \qquad (۳-۱۸)$$

برای ساده‌سازی معادله (۳-۱۷) متغیر χ را معرفی می‌کنیم:

$$\chi=\psi+\Phi \qquad (۳-۱۹)$$

درنتیجه معادله (۳-۱۷) را به فرم (۳-۲۰) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{i\omega_0}{2}-\frac{i\Omega^2}{2\omega_0}+\frac{d}{2}\right)\chi - iA|\phi|^2\phi - iB|\chi|^2(\chi)=0 \qquad (۳-۲۰)$$

به‌منظور ساده کردن بیشتر سیستم (۳-۱۷)، متغیرهای ψ و ϕ را می‌توان به دو بخش حقیقی و مجازی تقسیم‌بندی کرد. بنابراین این متغیرها به فرم (۳-۲۱) خواهند بود:

$$\begin{cases}\chi=\rho e^{i\theta}\\ \psi=N_1e^{i\delta_1}\\ \phi=N_2e^{i\delta_2}\end{cases} \qquad (۳-۲۱)$$

بنابراین با جایگزینی روابط (۳-۲۱) در معادله (۳-۲۰)، روابط به‌صورت (۳-۲۲) خواهند بود:

$$\left(\frac{i\omega_0}{2}-\frac{i\Omega^2}{2\omega_0}+\frac{d}{2}\right)\rho e^{i\theta} - iA\left|N_2e^{i\delta_2}\right|^2N_2e^{i\delta_2} - iB\left|\rho e^{i\theta}\right|^2(\rho e^{i\theta})=0 \qquad (۳-۲۲)$$

[۱] Slow invariant manifold

با توجه به اینکه $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ و $\left|e^{i\delta_2}\right| = 1$ هستند و تقسیم رابطه (۳-۲۲) بر $e^{i\delta_2}$، معادلات (۳-۲۳) به دست می‌آیند:

$$\rho e^{i(\theta-\delta_2)} = \frac{iA{N_2}^2.N_2}{\left(\frac{i\omega_0}{2}-\frac{i\Omega^2}{2\omega_0}+\frac{d}{2}-iB\rho^2\right)} \tag{۳-۲۳}$$

که در این روابط $\Theta = \theta - \delta_2$ می‌باشد و با نوشتن تابع‌نمایی به فرم قطبی، داریم:

$$\rho(\cos\Theta + i\sin\Theta) = \frac{iA{N_2}^2\left(i(\frac{\omega_0}{2}-\frac{\Omega^2}{2\omega_0}-B\rho^2)+\frac{d}{2}\right).N_2}{\frac{d^2}{4}+\left(\frac{\omega_0}{2}-\frac{\Omega^2}{2\omega_0}-B\rho^2\right)^2} \tag{۳-۲۴}$$

با نوشتن معادله (۳-۲۴)، در دو بخش حقیقی و مجازی، نتایج (۳-۲۵) به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \rho\cos\Theta = \dfrac{A{N_2}^2\left(\frac{\omega_0}{2}-\frac{\Omega^2}{2\omega_0}-B\rho^2\right)}{\frac{d^2}{4}+\left(\frac{\omega_0}{2}-\frac{\Omega^2}{2\omega_0}-B\rho^2\right)^2}N_2 \\ i\,\rho\sin\Theta = \dfrac{iA{N_2}^2\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{d^2}{4}+\left(\frac{\omega_0}{2}-\frac{\Omega^2}{2\omega_0}-B\rho^2\right)^2}N_2 \end{cases} \tag{۳-۲۵}$$

با به توان دو رساندن و جمع‌کردن معادلات (۳-۲۵)، معادله (۳-۲۶) که چندجمله‌ای درجه سه می باشد، به دست می‌آید. که در آن ρ دامنه عبارت $\rho e^{i\theta}$ بوده و می‌بایست مثبت حقیقی باشد. به این معادله، معادله مدولاسیون سیستم نیز می‌گویند.

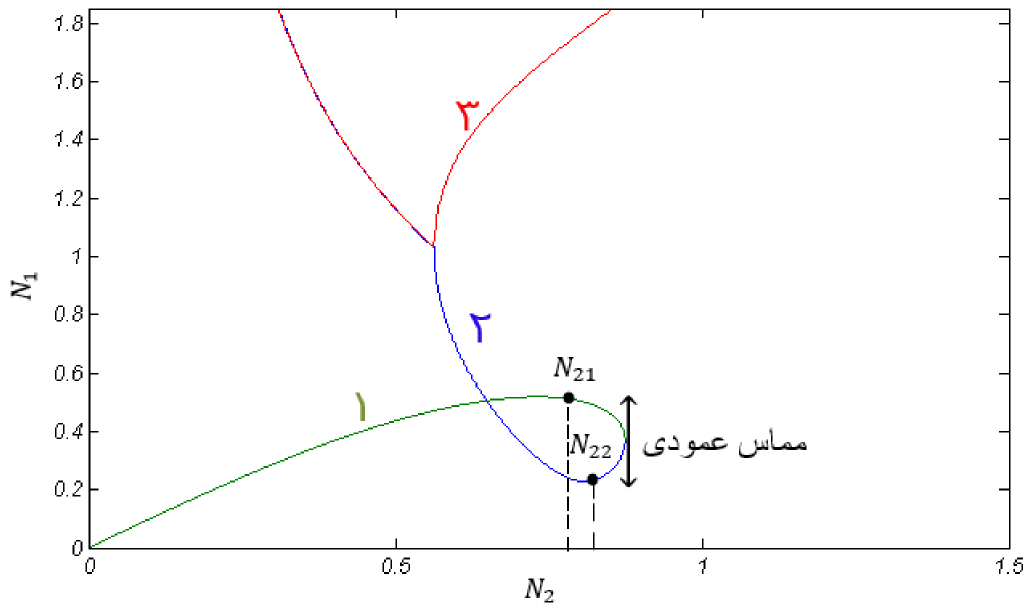
$$\rho^2\left(\frac{d^2}{4}+\left(\frac{\omega_0}{2}-\frac{\Omega^2}{2\omega_0}-B\rho^2\right)^2\right)^2-\left(\left(A{N_2}^2\left(\frac{d}{2}\right)\right)^2+\left(A{N_2}^2\left(\frac{\omega_0}{2}-\frac{\Omega^2}{2\omega_0}-B\rho^2\right)\right)^2\right){N_2}^2=0 \tag{۳-۲۶}$$

با توجه به حل معادله (۳-۲۶) برحسب N_2، سه عبارت مثبت حقیقی برای ρ به دست خواهد آمد. که در این معادلات تنها ترم N_2 مجهول مسئله می‌باشد. برای این‌که بتوان رفتار سیستم را ترسیم نمود، می‌بایست N_1 را هم به فرم تابعی از N_2 نوشت. بنابراین، با استفاده از روابط (۳-۱۹) و (۳-۲۱) چندجمله‌ای از N_1 در مقابل N_2 می‌توان به دست آورد. بدین معنا که، منیفولد نامتغیر آهسته سیستم را می‌توان به فرم N_1 و N_2 ترسیم نمود.

در قالب مثالی می‌توان به بررســی، تحلیل و برای درک بهتر مســئله به ترســیم نمودار منیفولد نامتغیر آهسته سیستم پرداخت:

۳-۳-۱ منیفولد نامتغیر آهسته سیستم (SIM)

اعداد $A = 0.25, B = 0.6, \omega_0 = 1, d = 1, \Omega = 0.2$ را برای منیفولد (SIM) در نظر می‌گیریم، که ترسیم آن به شکل (۳-۲) می‌باشد. نمودار رسم شده دارای سه‌شاخه می‌باشد، به‌طوری‌که به ازای هر N_2 سه مقدار برای N_1، متناظر با سه مقدار حقیقی ρ که از حل معادله (۳-۲۶) به دست می‌آید، وجود دارد. منیفولد نامتغیر برخی سیستم‌های جفت شده بدون جذب انرژی محلی، شامل دو اکسترمم محلی می‌باشند که در مقایسه با SIM ارائه‌شده در این تحقیق، در آن‌ها تنها یک شاخه وجود دارد، ولی منیفولد نامتغیر ارائه‌شده راه‌حل‌های بیشتری می‌دهد. شاخه‌های ۱ و ۲ به ترتیب دارای ماکزیمم و مینیمم محلی می‌باشند. انرژی NES سیستم، N_2، به ترتیب در نقاط ماکزیمم و مینیمم محلی N_{21} و N_{22} نامیده می‌شوند. شاخه‌ی ۲ با محور N_1 تقاطعی را نخواهد داشت و به‌صورت مجانبی با آن رفتار می‌کند، چراکه با استفاده از رابطه (۳-۱۷) هنگامی‌که N_2 را برابر صفر در نظر بگیریم، مقداری که برای $|N_1|$ به‌دست می‌آید به‌صورت مقابل است:($\sqrt{\frac{\frac{\omega_0}{2}-\frac{\Omega^2}{2\omega_0}-\frac{id}{2}}{B}}$). تقاطع شاخه‌های ۱ و ۲ نقطه ایست که مماس SIM عمودی بوده و می‌تواند منجر به پرش عمودی ممکن به سمت شاخه ۳ شود. که بعداً در این مورد توضیح داده می‌شود.



شکل (۳-۲): ترسیم دو بعدی جریان SIM سیستم در مختصات (N_1, N_2)

علاوه بر این، شـــاخه‌های ۱ و ۲ منیفولد طوری به نظر می‌رســـند که یکدیگر را قطع کرده‌اند ولی در نمودار سـه‌بعدی نشـان می‌دهیم که این‌گونه نیسـت. برای ترسـیم نمودار سـه‌بعدی می‌بایسـت روابط (۳-۲۱) را در معادله (۳-۱۷) جایگذاری کنیم و ضرب طرفین رابطه در $e^{-i\delta_2}$ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{c}{2}\right) iN_2 + \left(\frac{d}{2}\right) N_1 e^{i(\delta_1-\delta_2)} + \left(\frac{c}{2}\right) iN_1 e^{i(\delta_1-\delta_2)} + \frac{d}{2} N_2 - iA{N_2}^2(N_2) - iB({N_1}^2 + {N_2}^2 + 2N_1N_2 \cos \varDelta)(N_1 e^{i(\delta_1-\delta_2)} + N_2) = 0 \quad (۳\text{-}۲۷)$$

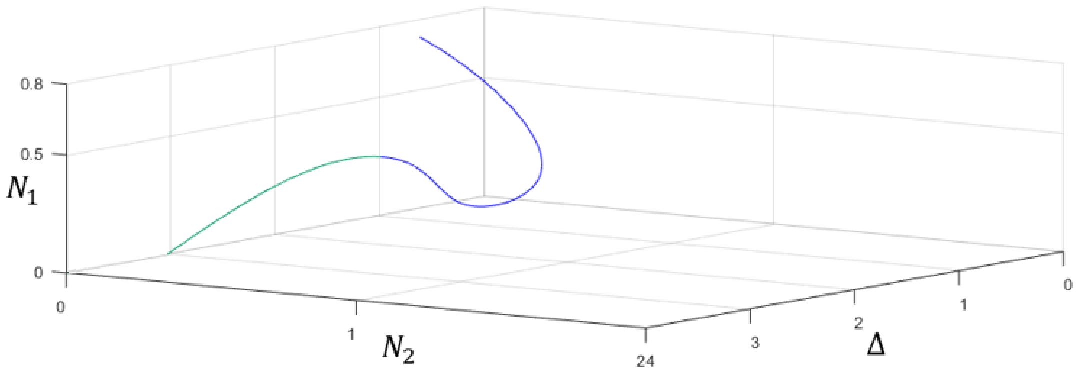
که در این رابطه $c = \omega_0 - \frac{\Omega^2}{\omega_0}$ و $\Delta = \delta_1 - \delta_2$ می‌با شد و با جدا سازی ق سمت حقیقی و موهومی، معادلات (۳-۲۸) به دست می‌آیند:

$$F_1 = \frac{d}{2} N_2 + \left(\frac{d}{2}\right) N_1 \cos \varDelta - \left(\frac{c}{2}\right) N_1 \sin \varDelta + B({N_1}^2 + {N_2}^2 + 2N_1N_2 \cos \varDelta)(N_1 \sin \varDelta) = 0$$

$$F_2 = \left(\frac{c}{2}\right) N_2 + \left(\frac{d}{2}\right) N_1 \sin \varDelta + \left(\frac{c}{2}\right) N_1 \cos \varDelta - A{N_2}^3 - B({N_1}^2 + {N_2}^2 + 2N_1N_2 \cos \varDelta)(N_1 \cos \varDelta + N_2) = 0 \quad (۳\text{-}۲۸)$$

حل این معادلات به ما در ترسـیم جریان سـه بعدی منیفولد نامتغیر آهسـته کمک می‌کند. جریان سه‌بعدی برای منیفولد در شکل ۳-۳) ترسیم شده است. می‌توان دید که شاخه‌های ۱ و ۲ یکدیگر را

قطع نمی‌کنند. بنابراین، می‌بینیم که تصـــویر ســـه بعدی نمودار(N_1, N_2, Δ) به ما برای تفســـیر رفتار سیستم کمک بیشتری می‌نماید.



شکل ۳-۳): ترسیم سه بعدی جریان *SIM* سیستم در مختصات (N_1, N_2)

۳-۴ رفتار سیستم در مرتبه‌ی ϵ^1

برای بررسی رفتار سیستم در مقیاس زمانی آهسته، رابطه اول معادله(۳-۱۲) را در مرتبهϵ^1 در نظر می‌گیریم:

$$D_1\psi + \left[\frac{i\omega_0\sigma}{2} + \frac{a_0}{2} + \frac{i\omega_0\sigma}{2} + \frac{i\omega_0}{2} + \frac{d}{2} - \frac{i\Omega^2}{2\omega_0}\right]\psi + \left[\frac{i\omega_0}{2} - \frac{d}{2} + \frac{i\Omega^2}{2\omega_0}\right]\varphi + F_{W^0} = -\frac{if^0}{2} \quad (۳-۲۹)$$

از این معادله می‌توان برای یافتن نقاط تعادل و تکین سیستم در مقیاس زمانی τ_1، ا ستفاده نمود که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

۳-۵ بررسی رفتاری سیستم

برای بررسی رفتار یک سیستم و تحلیل مناسب حول رفتار آن می‌بایست به بررسی نقاط و نواحی بااهمیت بیشتر بپردازیم. که این نواحی شامل مناطق پایدار و ناپایدار، نقاط تعادل و نقاط تکین سیستم می‌باشد.

۳-۵-۱ مناطق پایدار و ناپایدار منیفولد نامتغیر آهسته

برای نشان دادن نقاط ناپایدار SIM، ارتعاشات بی‌نهایت کوچک φ در دومین رابطه معادله (۳-۱۵) را به‌صورت (۳-۳۰) معرفی می‌کنیم:

$$\varphi \to \varphi + \Delta\varphi \quad , \ |\Delta\varphi| \ll |\varphi| \tag{۳-۳۰}$$

از معادله (۳-۱۵) می‌بینیم که ψ نسبت به τ_0 غیر وابسته بوده، به همین دلیل مرتعش نمی‌شود. با جایگذاری $\varphi + \Delta\varphi$ بجای φ و ضرب‌در مزدوج آن، برای به دست آوردن اندازه عبارات (که یک نمونه از آن‌ها در معادله (۳-۳۱) آمده) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&P1 = \big(\psi + (\varphi + \Delta\varphi)\big).\big(\psi + (\varphi + \Delta\varphi)\big)^*.\big(\psi + (\varphi + \Delta\varphi)\big) = \big(\psi + (\varphi + \\
&\Delta\varphi)\big)^2.\big(\psi + (\varphi + \Delta\varphi)\big)^* = (\psi^2 + 2\psi(\varphi + \Delta\varphi) + \varphi^2 + \Delta\varphi^2 + \\
&2\varphi\Delta\varphi).(\psi^* + \varphi^* + \Delta\varphi^*) \to \\
&P1 = \psi^2\psi^* + \psi^2\varphi^* + \psi^2\Delta\varphi^* + 2\psi(\varphi + \Delta\varphi)\psi^* + 2\psi(\varphi + \Delta\varphi)\varphi^* + \\
&2\psi(\varphi + \Delta\varphi)\Delta\varphi^* + \varphi^2\psi^* + \varphi^2\varphi^* + \varphi^2\Delta\varphi^* + \Delta\varphi^2\psi^* + \Delta\varphi^2\varphi^* + \\
&\Delta\varphi^2\Delta\varphi^* + 2\varphi\Delta\varphi\psi^* + 2\varphi\Delta\varphi\varphi^* + 2\varphi\Delta\varphi\Delta\varphi^*
\end{aligned} \tag{۳-۳۱}$$

فرم خطی معادلات با حفظ مرتبه اول $\Delta\varphi$ و مزدوج آن به دست می‌آید، درنتیجه داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_0} \\ \frac{\partial\Delta\varphi^*}{\partial\tau_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^* & M_1^* \end{pmatrix} = [M] \tag{۳-۳۲}$$

که $^*(.)$ نشانه‌ی مزدوج مختلط می‌باشد.

$$\begin{cases} M_1 = -\left(\frac{d}{2} + i\,\frac{c}{2}\right) + 2iA|\varphi|^2 + 2iB(|\psi|^2 + |\varphi|^2 + \psi\varphi^* + \varphi\psi^*) \\ \qquad M_2 = iA\varphi^2 + iB(\psi^2 + \varphi^2 + 2\psi\varphi) \end{cases} \tag{۳-۳۳}$$

قسمت‌های حقیقی مقادیر ویژه ماتریس M نواحی ناپایدار ممکن را نشان می‌دهند. اگر تنها یکی از مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، $\varphi\Delta$ به‌صورت نمایی در مقابل زمان واگرا خواهد شد، که باعث ایجاد ناپایداری در اطراف SIM می‌شود. و همین‌طور می‌توان گفت سیستم ناپایدار خواهد شد اگر

$|M_1|^2 - |M_2|^2 < 0$. به‌طورمعمول نواحی ناپایدار SIM بین دو اکسترمم قرار می‌گیرند. معادله مشخصه ماتریس M به‌صورت معادله (۳-۳۴) خواهد شد:

$$P_{car}(X) = X^2 - (M_1 - M_1^*)X + |M_1|^2 - |M_2|^2 \quad (۳\text{-}۳۴)$$

۳-۵-۲ نقاط تعادل سیستم

تعیین نقاط تعادل سیستم‌های دینامیکی اهمیت بسیار زیادی دارد، به‌خصوص در تعیین سیستم‌های دینامیکی و ناحیه جذب که در نظریه کنترل نقش به سزایی دارد. از سویی دیگر تعیین این نقاط در سیستم‌های غیرخطی به‌مراتب مشکل‌تر از سیستم‌های خطی می‌باشد. نقاط تعادل به رژیم‌های پریودیک پایدار و یا ناپایدار با شرایط مختلف برای انرژی اسیلاتور اصلی و NES وابسته است. رژیم نوسانات تخفیف یافته به‌طور مستقیم به نقاط تعادل وابسته نیست و نمی‌توان آن را توسط تحلیل نشان داد، تنها در صورتی قابل شناسایی می‌باشد که سیستم توسط جریان آهسته به نقاط فولد گرویده شود. می‌بایست نقاط تعادل سیستم را در مقیاس زمانی آهسته حول منیفولد نامتغیر آهسته(SIM) پیدا کنیم. برای حفظ پایداری سیستم داریم:

$$D_1\psi = 0 \quad (۳\text{-}۳۵)$$

معادله (۳-۲۹) را داریم:

$$\left[\frac{i\omega_0}{2}(\sigma + \frac{1}{2}) + \frac{a_0}{2} + \frac{d}{2} - \frac{i\Omega^2}{2\omega_0}\right]\psi + \left[\frac{i\omega_0}{2} - \frac{d}{2} + \frac{i\Omega^2}{2\omega_0}\right]\varphi - iB|\psi + \phi|^2(\psi + \phi) = -\frac{if^0}{2} \quad (۳\text{-}۳۶)$$

می‌خواهیم رفتار ســـیســـتم را حول SIM بررســـی نماییم. برای این کار معادله (۳-۳۶) را از معادله (۳-۱۷) کم می‌کنیم و معادله (۳-۳۷) به دست می‌آید:

$$\left[i\omega_0\sigma + \frac{a_0}{2}\right]\psi + \left[-d + \frac{i\Omega^2}{\omega_0}\right]\varphi + iA|\phi|^2\phi = -\frac{if^0}{2} \quad (۳\text{-}۳۷)$$

حال معادله بالا را برای به‌کارگیری در معادلات و ادامه روند تحقیق به فرم (۳-۳۸) درمی‌آوریم:

$$N_1 e^{i\Delta} = \frac{\left[d - \frac{i\Omega^2}{\omega_0}\right] N_2 - iA{N_2}^2 . N_2 - \frac{if^0}{2} e^{-i\delta_2}}{i\omega_0 \sigma + \frac{a_0}{2}} \qquad (۳-۳۸)$$

که برای ساده‌سازی معادله α و β به‌صورت (۳-۳۹) تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{a_0}{2} + i\omega_0 \sigma \\ \beta = d + i(C - \omega_0) - iA{N_2}^2 \end{cases} \qquad (۳-۳۹)$$

معادله (۳-۱۷) را می‌توان به شکلی دیگر بازنویسی کرد، برای این کار می‌بایست این معادله را در $e^{-i\delta_2}$ ضرب نمود و خواهیم داشت:

$$\left(\frac{ic+d}{2}\right) N_2 + \left(\frac{ic+d}{2}\right) N_1 e^{i\Delta} - iA{N_2}^3 - iB\rho^2 \left(N_1 e^{i\Delta} + N_2\right) = 0 \qquad (۳-۴۰)$$

معادله (۳-۴۰) هم مانند معادله (۳-۲۶) تابعی از ρ می‌باشد و همان‌طور که در قسمت (۳-۳)گفتیم، سه شاخه رسم شده SIM از جواب‌های ρ به‌دست‌آمده است. درنتیجه، بسته به شاخه‌ی موردبررسی، عبارات مختلفی از معادله (۳-۴۰) وجود خواهد داشت، یعنی هنگامی‌که به بررسی شاخه موردنظر می‌پردازیم می‌بایست ρ مربوط به همان شاخه را اعمال نماییم. با واردکردن معادله (۳-۳۸) به معادله (۳-۴۰) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی آن روابط (۳-۴۱) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left(\left(\frac{d}{2}\right) - \mu_i \left(\frac{C}{2} - B\rho^2\right) + \mu_r \left(\frac{d}{2}\right)\right) N_2 + \frac{f^0}{2}\left(\frac{C}{2} - B\rho^2\right)\left(\eta_r \cos(\delta_2) + \right. \\ &\left. \eta_i \sin(\delta_2)\right) + \frac{f^0}{2}\left(\frac{d}{2}\right)\left(\eta_i \cos(\delta_2) - \eta_r \sin(\delta_2)\right) = 0 \\ H_2 &= \left((1 + \mu_r)\left(\frac{C}{2} - B\rho^2\right) - A{N_2}^2 + \left(\frac{d}{2} * \mu_i\right)\right) N_2 + \frac{f^0}{2}\left(\frac{C}{2} - \right. \\ &\left. B\rho^2\right)\left(\eta_i \cos(\delta_2) - \eta_r \sin(\delta_2)\right) - \frac{f^0}{2}\left(\frac{d}{2}\right)\left(\eta_r \cos(\delta_2) + \eta_i \sin(\delta_2)\right) = 0 \end{aligned} \qquad (۳-۴۱)$$

که در آن μ_r، μ_i، η_r و η_i توابعی از پارامترها و N_2 می‌باشند که در معادله (۳-۴۲) توضیح داده شده‌اند. مقادیر H_1 و H_2 را روی هر شاخه می‌توان به‌دست آورد که به‌صورت H_{1j} و H_{2j} نشان می‌دهیم که j شناسه شاخه ۱، ۲ یا ۳ می‌باشد. درنتیجه، نقاط تعادل را در دستگاه مختصات (N_2, δ_2) با قرار دادن $H_{1j} = H_{2j} = 0$ می‌توان به دست آورد.

$$\begin{cases} \mu_r = \frac{2a_0 d + 4\omega_0 \sigma (C - \omega_0 - AN_2{}^2)}{a_0{}^2 + 4\omega_0{}^2 \sigma^2} \\ \mu_i = \frac{2a_0 (C - \omega_0 - AN_2{}^2) - 4\omega_0 \sigma d}{a_0{}^2 + 4\omega_0{}^2 \sigma^2} \\ \eta_r = \frac{2a_0}{a_0{}^2 + 4\omega_0{}^2 \sigma^2} \\ \eta_i = \frac{-2\omega_0 \sigma}{a_0{}^2 + 4\omega_0{}^2 \sigma^2} \end{cases} \tag{۳-۴۲}$$

۳-۵-۳ نقاط تکین سیستم

نقطه تکین به نقطه‌ای گفته می‌شود که در آن منحنی رفتاری سیستم، رفتاری نامناسب ارائه می‌نماید و یا معادلات ریاضیاتی سیستم در آن تعریف نشده باشد. به‌عنوان مثال می‌توان گفت در این نقاط جهت بردار یکه قابل تعریف نیست و یا منحنی به شکل نوک تیز یا نقطه‌ای خود متقاطع باشد.

حال برای یافتن نقاط تکین سیستم مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

در ابتدا معادله (۳-۲۸) را در مقیاس زمانی τ_1 در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dF_j}{d\tau_1} = 0, \;\; j = 1,2 \tag{۳-۴۳}$$

که در فرم ماتریسی می‌توان به شکل (۳-۴۴) نوشت:

$$[D] \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial N_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial N_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dN_2}{d\tau_1} \\ \frac{d\Delta}{d\tau_1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial N_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial N_1} \end{pmatrix} \frac{dN_1}{d\tau_1} \tag{۳-۴۴}$$

نقاط تکین سیستم را با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس D سیستم می‌توان به‌دست آورد. به‌طور خلاصـــه، روابط (۳-۴۵) و (۳-۴۶) به ما در ارائه نقاط تکین ســیســـتم در مرتبه τ_1 حول SIM کمک می‌کنند:

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ det(D) = 0 \end{cases} \tag{۳-۴۵}$$

و

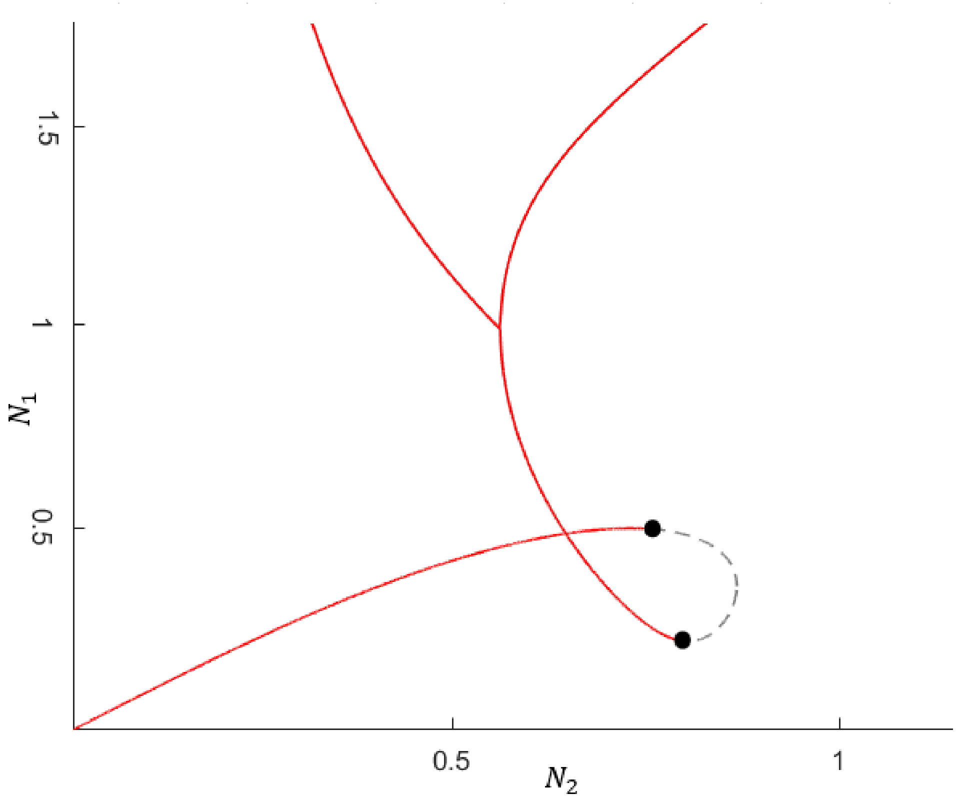
$$\begin{cases} H_1 = 0 \\ H_2 = 0 \end{cases} \tag{۴۶-۳}$$

رابطه (۳-۴۶) به نیروی خارجی و پارامتر قابل تنظیم (σ) وابسته است. نقاط تکین سیستم را با حل معادلات (۳-۴۵) بر اساس پارامترهای مثال منیفولد می‌توان در شکل ۳-۴) نشان داد. در این نمودار نواحی ناپایدار به‌صورت نقطه‌چین نشان داده شدند. اگر هر دو رابطه (۳-۴۵) و (۳-۴۶) برقرار باشند، سیستم دارای نقطه‌ی تکین فولد[1] می‌باشد. نقطه تکین فولد به نقطه‌ای گفته می‌شود که در آن نقاط تعادل و تکین منطبق هستند. می‌توان دید که ماکزیمم ($N_2 = N_{21}$) و مینیمم محلی ($N_2 = N_{22}$) شرایط تکینی را تطبیق می‌دهند. شایان‌ذکر است که نقاط تعادل به رژیم‌های پریودیک در مقیاس زمانی (به میزان کافی طولانی) τ_1 مرتبط است درحالی‌که شرط لازم جهت دارا بودن پاسخ مدوله قوی[2] وجود یک جفت نقطه تکین فولد شده می‌باشد.

---

[1] Fold Singularities

[2] Strongly Modulated Response (SMR)



شکل ۳-۴): مکان نقاط تکین سیستم بر روی منیفولد- نواحی ناپایدار به‌صورت خط‌چین مشخص شدند

فصل چهارم

نتایج

۴-۱ مقدمه

پس از به‌دست آوردن معادلات لازم برای رفتار سیستم به بررسی حل‌های عددی و تحلیلی سیستم می‌پردازیم که با توجه به شکل‌های منیفولد نامتغیر و حل‌های عددی، سناریوهای مختلفی برای پاسخ مدوله قوی (SMR) ارائه می‌گردد. در این فصل چهار سناریو مختلف طی SMR را بیان می‌کنیم. در هرکدام، حل تحلیلی با نتایج عددی به‌دست‌آمده از معادله (۳-۲) مقایسه می‌شود. می‌توان SMR را این‌گونه بیان نمود که، اگر سیستم دارای تکین فولد باشد چندین شاخه بین نواحی پایدار ارائه می‌شود. پارامترهای مکانیکی بدین‌صورت فرض شده‌اند: $\epsilon = 10^{-3}, \Omega = 0.2, a_0 = 0.2, d = 0.1, \sigma = 1$. برای توصیف سناریوهای مختلف سفتی‌های غیرخطی A و B، فرکانس سیستم اصلی ω_0 و دامنه نیروی خارجی f^0 را تغییر می‌دهیم.

۴-۲ ارائه و تفسیر نتایج

در این بخش از رساله به ارائه نتایج استخراج‌شده خواهیم پرداخت. برای هر سناریو هفت شکل ارائه می‌شود. با بررسی منیفولد نامتغیر آهسته سیستم در مقیاس زمانی آهسته، نقاط تعادل، تکین و نواحی پایدار سیستم را به‌دست آورده که به ما اطلاعات مناسبی در جهت تفسیر دینامیک رفتاری سیستم می‌دهند. با بررسی منیفولد نامتغیر به‌گونه‌ای که با به‌دست آوردن نقاط تعادل به پاسخ پریودیک و نقاط تکین فولد به پاسخ مدوله قوی سیستم می‌رسیم. پاسخ مدوله قوی قابلیت رزونانس‌گیری را دارد، به این معنی که چاه غیرخطی انرژی می‌تواند در همسایگی هر مود تحریک سیستم اولیه دچار رزونانس شده و انرژی سیستم را جذب نماید. می‌توان در سناریوها دید که وجود نقاط تکین فولد و تعادل تأثیرات به سزای خود را در جذب انرژی دارند. شاخه‌هایی از منیفولد نامتغیر آهسته که در آن‌ها نقاط فولد وجود دارد می‌توان حرکت از نوع پاسخ مدوله قوی را در نظر گرفت، البته می‌بایست توجه داشت که وجود این نقاط بر روی هرکدام از شاخه‌های پایدار منیفولد نامتغیر آهسته تضمین‌کننده وجود پاسخ مدوله قوی نمی‌باشند، چراکه امکان جذب پاسخ مدوله قوی به دیگر شاخه‌های پایدار(مثلاً پریودیک ساده) بعد از چندین پرش از یک شاخه پایدار به شاخه دیگر وجود دارد. تمامی نمودارهای این بخش با

استفاده از نرم‌افزار Matlab و حل‌های عددی توسط تابع Ode45 و با استفاده از کدهای مقاله[۳۹] و اعمال معادلات کار خودمان بر آن‌ها به‌دست آمده‌اند.

سه شکل اول موقعیت نقاط تعادل و تکین را ترسیم می‌کنند، که از معادلات (۳-۴۵) و (۳-۴۶) به‌دست می‌آید. نمودارهای (ه)،(ز) شماتیک رفتار ایده‌آل سیستم را نمایش می‌دهد، که شامل رفتار موردنظر طی SMR و نمودارهای SIM می‌باشد. مقایسه نتایج عددی و تحلیلی به‌صورت زیر در نمودارها ترسیم گشته‌اند:

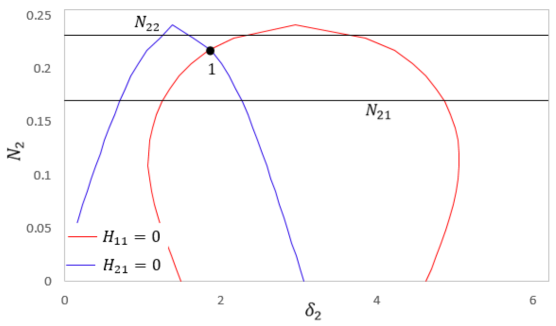
می‌توان مابین نقاط تعادل و تکین ارائه‌شده در نمودارهای (الف)،(ب) و (ج) و رفتار سیستم در نمودارهای (د)،(و)، همین‌طور بین نتایج عددی و تحلیلی سیستم در نمودار (د) مقایسه کیفی انجام داد. مقایسه‌ای بین شماتیک ایده آل و رفتار عددی سیستم، در نمودارهای (د) و (ه) و همین‌طور نمودارهای (و) و (ز)، انجام می‌شود. نمودار (د) منیفولد بدست آمده از معادله (۳-۲۸) و (N_2, N_1) به‌دست‌آمده از معادله (۳-۲) را مقایسه می‌نماید. نمودارهای (و) (N_2, t) همانند (N_2, N_1) با انتگرال‌گیری عددی مستقیم از معادله (۳-۲) به دست می‌آید. همچنین می‌توان گفت نمودارهای (N_2, t) مشتقی از نمودارهای (N_2, N_1) می‌باشند. در نظر داشته باشید ممکن است در مقایسه رفتارهای عددی با نمونه شماتیکی تغییراتی اتفاق بیفتد. با مقایسه نتایج به‌دست آمده از دو روش تحلیلی و شبیه‌سازی عددی، انطباق خوبی را مابین آن‌ها شاهد بودیم. با تغییر اعداد برای هر سناریو با وجود برقراری شرط اولیه هرکدام، تغییری در روند نمودارها ایجاد نمی‌شود بلکه تنها بازه‌ی نمودارها تغییر می‌نماید.

۴-۲-۱ سناریوها

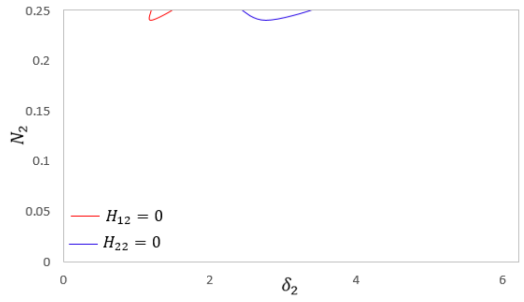
در این قسمت به بررسی حالت‌های مختلفی که برای سیستم رخ می‌دهد تحت عنوان سناریوهای مسئله می‌پردازیم. در ابتدا موقعیت ماکزیمم و مینیمم محلی SIM را با نقطه‌ای که در آن مماس عمودی باشد بررسی می‌نماییم:

- سناریو ۱: با استفاده از مقادیر: $A = 2, B = 0.75, \omega_0 = 0.4, f^0 = 0.105$ و شرایط اولیه $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0,0.5,0,0)$ در شکل (۴-۱)-(د) مکان نقطه ماکزیمم محلی پایین‌تر از نقطه مماس عمودی می‌باشد. به ترتیب به بررسی نمودارها می‌پردازیم. شکل (۴-۱)-(الف، ب، ج) به ترتیب موقعیت نقاط تعادل و تکین‌های فولد سیستم روی شاخه‌های ۲،۱ و ۳ را نشان می‌دهند. می‌بینیم که دارای یک نقطه تکین فولد (شماره ۱) روی شاخه ۱ می‌باشد و روی شاخه‌های دیگر هیچ نقطه تعادل و تکینی وجود ندارد. به‌طورکلی نقاط تکین فولد باعث به‌وجود آمدن پاسخ مدوله قوی در سیستم و کاهش ارتعاشات می‌شوند. شکل (۴-۱)-(د) مقایسه رفتار سیستم با حل عددی و تحلیلی می‌باشد. همان‌طور که می‌بینیم نتایج حاصل مطابقت خوبی با یکدیگر دارند. شکل (۴-۱)-(و) سیر تکاملی انتقال انرژی NES در طول پاسخ مدوله قوی را نشان می‌دهد. شکل (۴-۱)-(ه، ز) نشان می‌دهند انتقال انرژی بعد از تغییر جهت شاخه رفتاری سیستم مستقیماً به N_{2max} می‌رسد، سپس انرژی ابتدا به‌صورت یکنواخت و سپس مستقیم کاهش می‌یابد تا به N_{2min} برسد؛ در این نمودارها رفتارهای سیستم را به‌صورت شماتیکی ترسیم نموده‌اند. که می‌توان دید شکل حلقه‌ها در طول مدل‌سازی به شماتیک رفتاریشان مرتبط هستند. شکل (۴-۱)-(ه) شماتیک رفتاری سیستم در طی پاسخ مدوله قوی حول منیفولد را نشان می‌دهد.

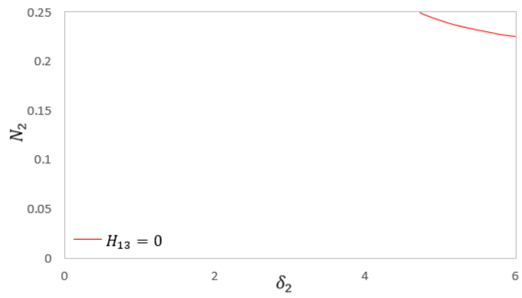
اگر نقاط تکین از مرز پایداری دور نباشند، سیستم تقریباً نزدیک به حالت تعادل باقی می‌ماند. می‌بینیم که نقطه تکین از مرز پایداری سیستم فاصله دارد. پرش از یک شاخه به شاخه‌های دیگر خیلی کم اتفاق می‌افتد که این عوامل باعث کاهش روند جذب ارتعاش سیستم در این حالت می‌شوند. مشاهده می‌کنیم پس از یک پریود، جذب ارتعاش به شکل تقریباً ثابتی درمی‌آید.


N_{22}
N_{21}
1
N_2
δ_2
$H_{11} = 0$
$H_{21} = 0$

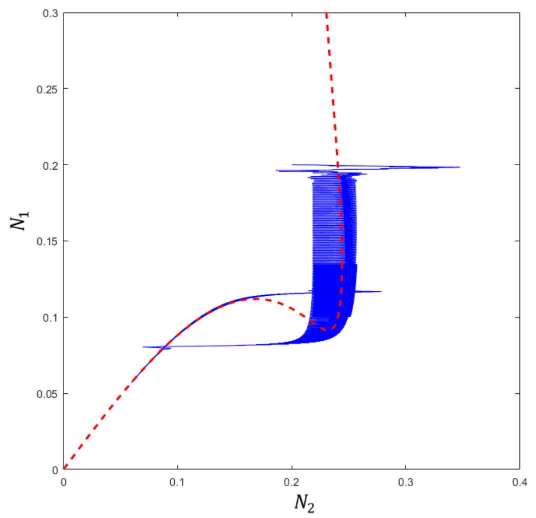
(الف)


N_2
δ_2
$H_{12} = 0$
$H_{22} = 0$

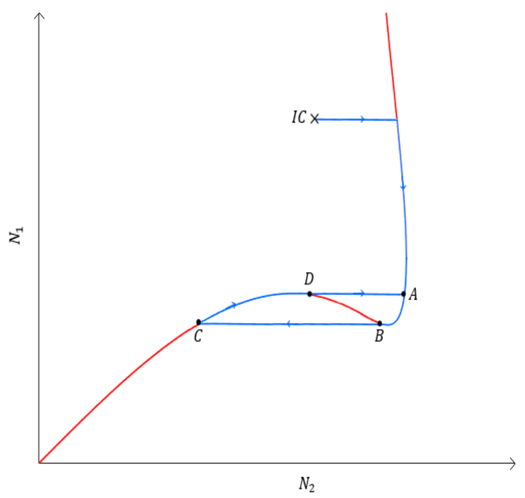
(ب)


N_2
δ_2
$H_{13} = 0$

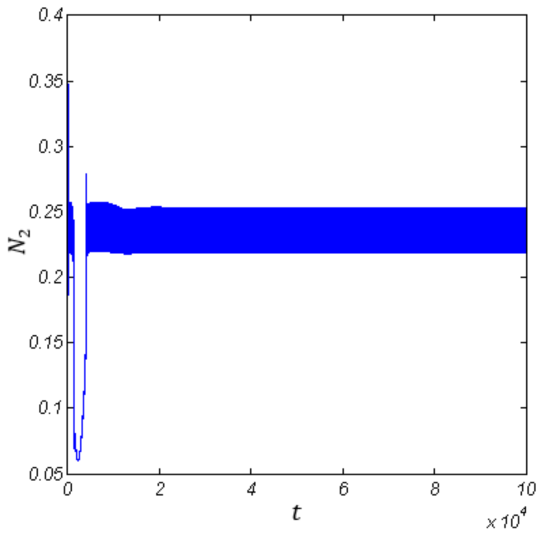
(ج)


N_1
N_2

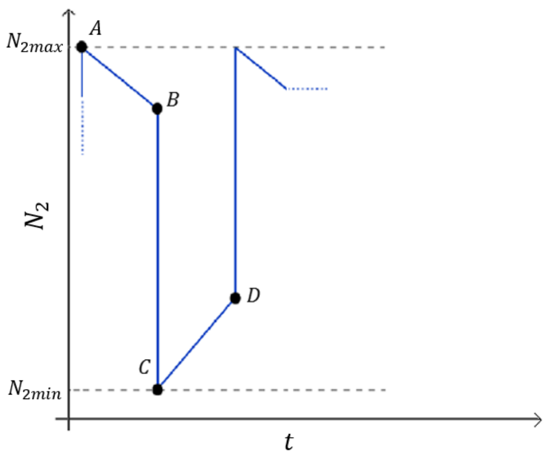
(د)


IC
D
A
C
B
N_1
N_2

(ه)



(و)

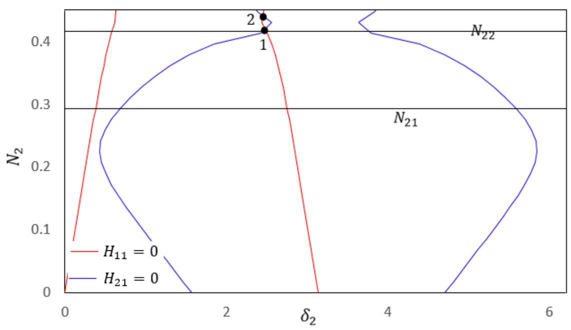


(ز)

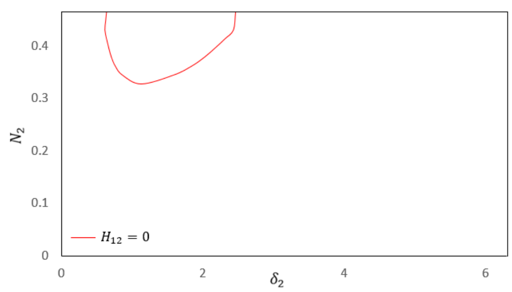
شکل (۴-۱): سناریو ۱- $A = 2, B = 0.75, \omega_0 = 0.4, f^0 = 0.105$ ، (الف، ب، ج): محل قرارگیری نقاط تعادل و تکین سیستم.– (د): مقایسه بین حل تحلیلی(منیفولد نامتغیر آهسته- خط قرمز) و حل عددی(قسمت آبی)- (ه): شماتیک رفتاری سیستم، خط آبی رفتار سیستم در طی *SMR*، نقطه‌ی *IC* نشان‌دهنده‌ی شرایط اولیه سیستم- (و): حل عددی سیرتکامل انرژی *NES*- (ز): شماتیک سیر تکامل انرژی *NES*

- سناریو ۲: مقادیر مورداستفاده $A = 2, B = 0.75, \omega_0 = 1, f^0 = 0.32$ فرض شده و شـــرایط اولیه نیز بەصـــورت $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0,0.5,0,0)$ در نظر گرفته شده است که در شکل (۴-۲)-(د) مکان نقطه مماس عمودی بین ماکزیمم و مینیمم محلی باشد. شکل (۴-۲)-(الف، ب، ج) موقعیت نقاط تعادل و تکین‌های فولد سیستم روی شاخه‌های ۲،۱ و ۳ را به ترتیب نشان می‌دهند. سیستم دارای یک تکین فولد (شماره ۱) و یک نقطه تعادل (شماره ۲) می‌باشد. شکل (۴-۲)-(د، ه) به بررسی منیفولد و نتایج عددی و ســیر تکامل انرژی NES در طول پاســخ مدوله قوی به وجود آمده پرداختند. نتایج عددی به ترتیب در شــکل (۴-۲)-(د، و) با رفتارهای شــماتیکی در شــکل (۴-۲)-(ه، ز) مطابقت دارد. همان‌طور که می‌بینیم بعد از برگشــت شـاخه، انرژی NES به‌طور یکنواخت افزایش می‌یابد تا به N_{2max} برسد و سپس ابتدا یکنواخت و پس‌ازآن مستقیماً کاهش می‌یابد تا به N_{2min} برسد و این روند برقرار می‌باشد.

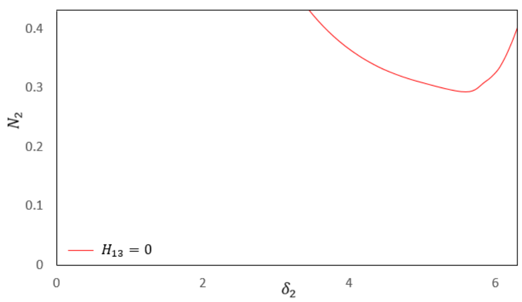
مشاهده می‌کنیم که سیستم دارای یک نقطه تعادل و تکین فولد نزدیک به مرز پایداری می‌باشد و همین‌طور پرش بین شاخه‌ای نیز در آن انجام می‌شود که باعث جذب خوب ارتعاشات می‌باشد.



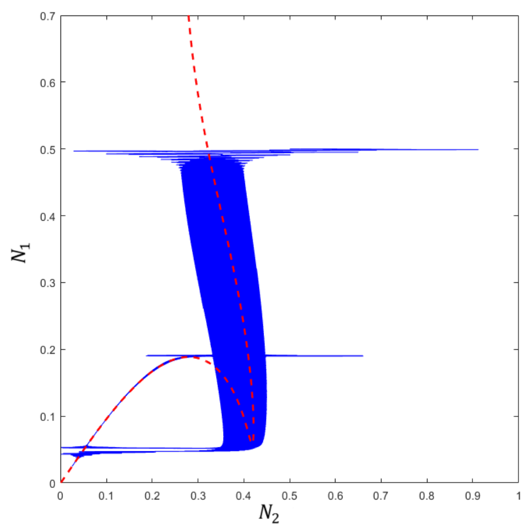
(الف)



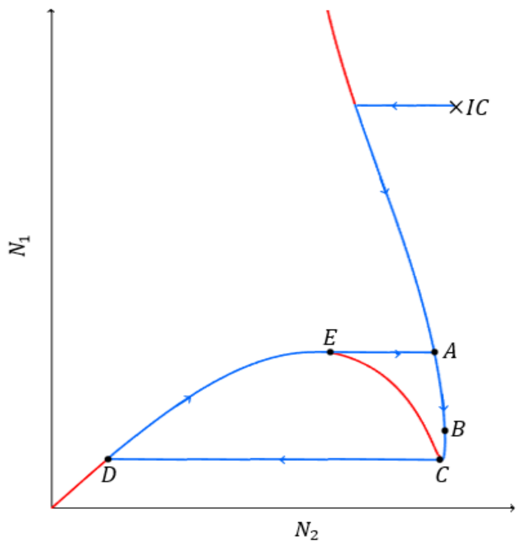
(ب)



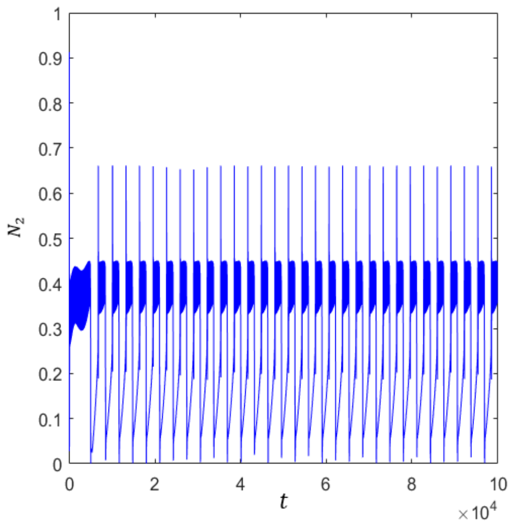
(ج)



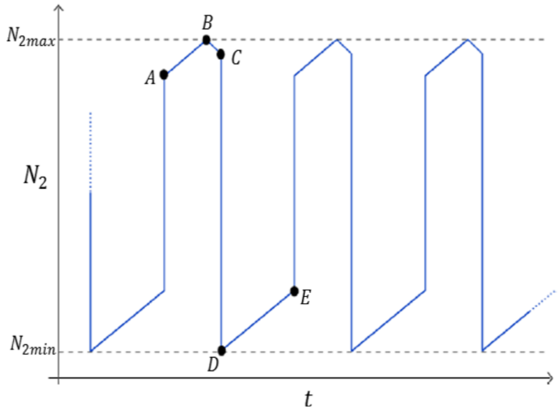
(د)



(ه)



(و)



(ز)

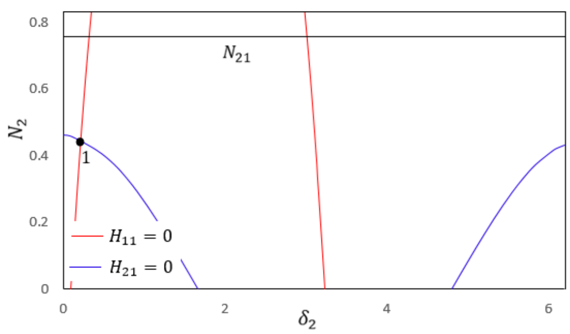
شکل (۴-۲): سناریو ۲-$A = 2, B = 0.75, \omega_0 = 1, f^0 = 0.32$،(الف، ب، ج): محل قرارگیری نقاط تعادل و تکین سیستم.– (د): مقایسه بین حل تحلیلی(منیفولد نامتغیر آهسته- خط قرمز) و حل عددی(قسمت آبی)- (ه): شماتیک رفتاری سیستم، خط آبی رفتار سیستم در طی *SMR*، نقطه‌ی *IC* نشان‌دهنده‌ی شرایط اولیه سیستم- (و): حل عددی سیرتکامل انرژی *NES*- (ز): شماتیک سیر تکامل انرژی *NES*

حال به بررسی رفتار سیستم با استفاده از ماکزیمم محلی و نقطه‌ای که در آن مسیر خط دوم و سوم جدا می‌شوند می‌پردازیم:

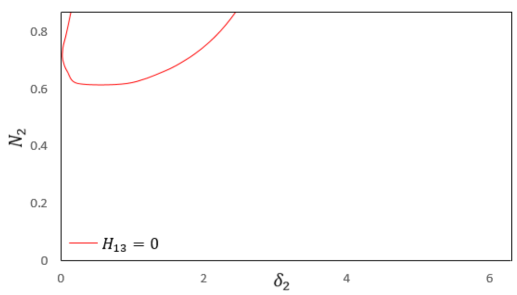
- سناریو ۳: با استفاده از پارامترهای $A = 0.25, B = 0.6, \omega_0 = 1, f^0 = 0.81$ و مقادیر اولیه $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0,1.2,0,0)$ در شکل (۴-۳)-(د) می‌بینیم مکان نقطه ماکزیمم محلی پایین‌تر از نقطه موردنظر(S) می‌باشد. همان‌طور که از شکل (۴-۳)-(الف) پیداست، سیستم تنها دارای یک نقطه تعادل (شماره ۱) بوده و نقطه تکینی ندارد. شکل (۴-۳)-(د) رفتار سیستم در طی منیفولد را نشان می‌دهد که مطابقت خوبی با نتایج عددی داشته، ولی می‌بینیم که نقطه (S)، نقطه جدایش مسیر حرکتی نمودار ۲ و۳ بوده و برای شاخه سمت چپ دو نمودار ۲و۳ بر روی یکدیگر قرار دارند، ولی در نتایج عددی به‌دست‌آمده دو شاخگی ایجاد نمی‌شود. این شاخه اضافی برای فرآیند جذب ارتعاشات سیستم بسیار مضر می‌باشد. شکل (۴-۳)-(و) سیر تکاملی انتقال انرژی NES در طول پاسخ مدوله قوی را نشان

می‌دهد. در شکل (۴-۳)-(ه، ز) می‌بینیم که انرژی به‌طور یکنواخت افزایش می‌یابد تا به N_{2max} برسد، پس از تغییر جهت ابتدا مستقیماً کاهش‌یافته و سپس یکنواخت افزایش می‌یابد و همین روند انجام می‌شود تا زمانی که پریود پمپاژ انرژی کاهش می‌یابد. نمودارهای شماتیک رفتاری سیستم مشابه نمودارهای به‌دست‌آمده از نتایج منیفولد و پاسخ مدوله می‌باشد.

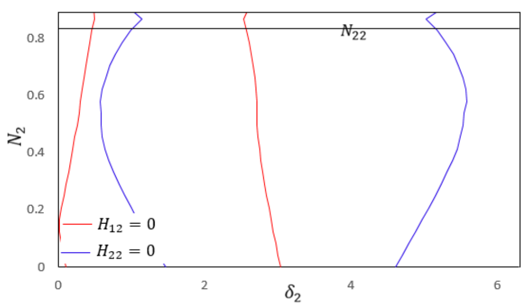
همان‌طور که گفته شد سیستم دارای یک نقطه تعادل بر روی شاخه یک بوده و هیچ نقطه تکینی ندارد. همچنین در نمودار منیفولد دارای یک شاخه اضافی می‌باشد، که باعث کاهش روند جذب ارتعاش سیستم می‌شود.



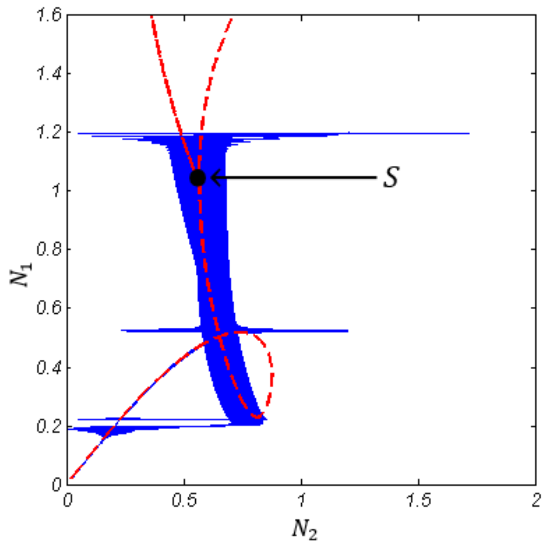
(الف)



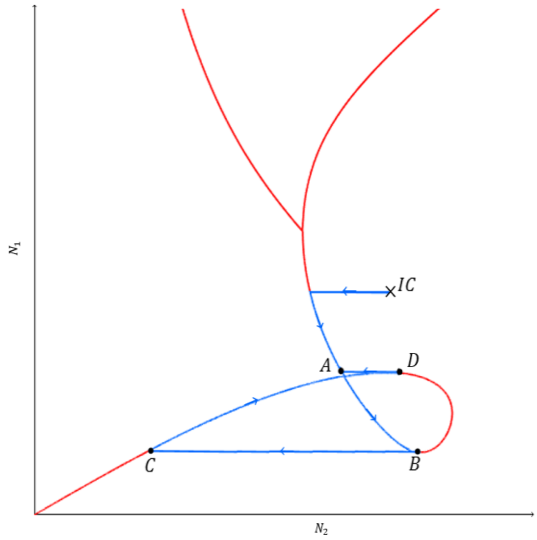
(ج)



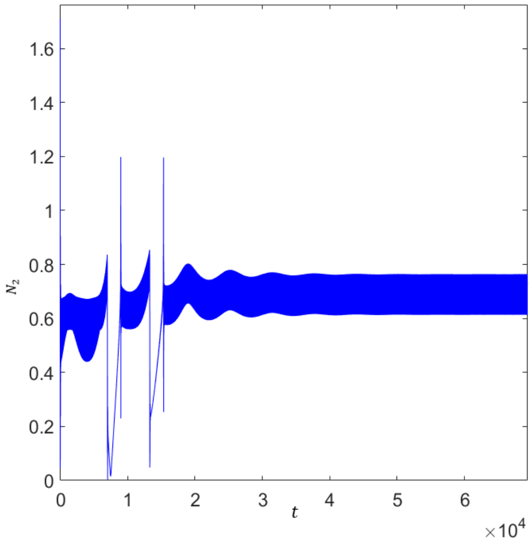
(ب)



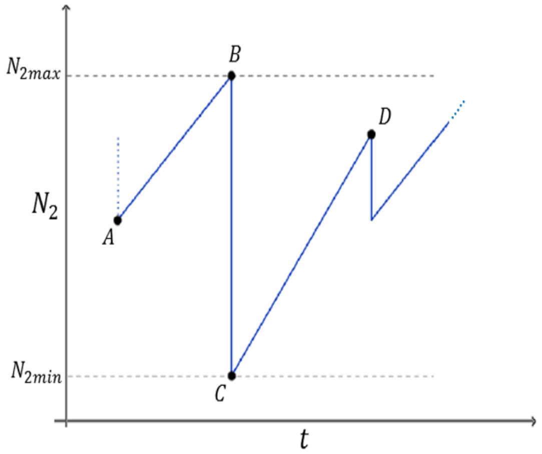
(د)



(ه)



(و)



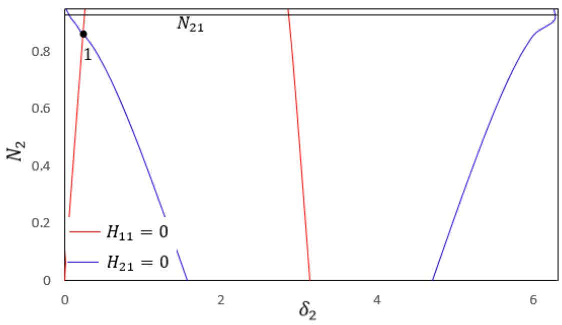
(ز)

شکل (۴-۳): سناریو ۳- $A = 0.25, B = 0.6, \omega_0 = 1, f^0 = 0.81$ ، (الف، ب، ج): محل قرارگیری نقاط تعادل و تکین سیستم.– (د): مقایسه بین حل تحلیلی(منیفولد نامتغیر آهسته- خط قرمز) و حل عددی(قسمت آبی)- (ه): شماتیک رفتاری سیستم، خط آبی رفتار سیستم در طی *SMR*، نقطه‌ی *IC* نشان‌دهنده‌ی شرایط اولیه سیستم- (و): حل عددی سیرتکامل انرژی *NES*- (ز): شماتیک سیر تکامل انرژی *NES*

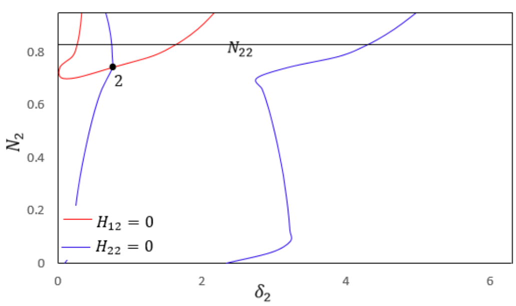
- سناریو۴: مقادیر $A = 0.05, B = 3, \omega_0 = 1, f^0 = 1.499$ و شرایط اولیه $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0.65,1.05,0,0)$ به این صورت فرض شده‌اند که

مکان نقطه ماکزیمم محلی بالاتر از نقطه موردنظر(S) باشد(شکل (۴-۴)). با توجه به شکل (۴-۴)-(الف،ب،ج) سیستم بر روی هر شاخه دارای یک نقطه تعادل می‌باشد ولی نقطه تکینی ندارد. توضیحات مشابه هر آنچه در سناریو ۳ گفته‌شده را در این سناریو نیز می‌بینیم. شکل (۴-۴)-(ه،ز) نشان می‌دهد که انرژی به‌صورت یکنواخت و با دو شیب متفاوت افزایش و سپس به‌طور مستقیم کاهش می‌یابد تا به N_{2min} برسد و از آن به‌طور یکنواخت افزایش‌یافته به N_{2max} می‌رسد.

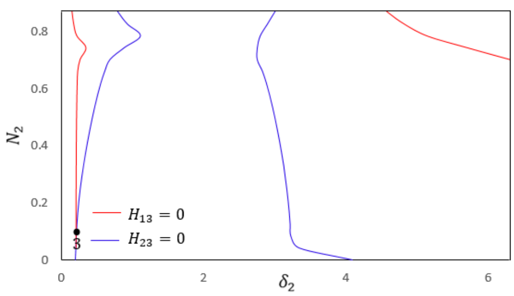
سی ستم دارای سه نقطه تعادل بوده و نقطه تکینی ندارد و همانند سناریو ۳ منیفولد نامتغیر در این سناریو هم دارای یک شاخه ا ضافه می‌با شد. ولی به دلیل وجود نقطه تعادل بر روی هر شاخه و پرش بین شاخه‌ای مناسب‌تر از سناریو ۳، فرآیند جذب انرژی نیز بهتر می‌شود.



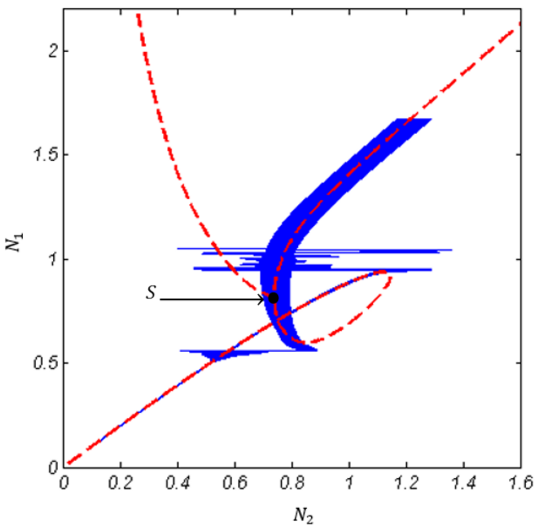
(الف)



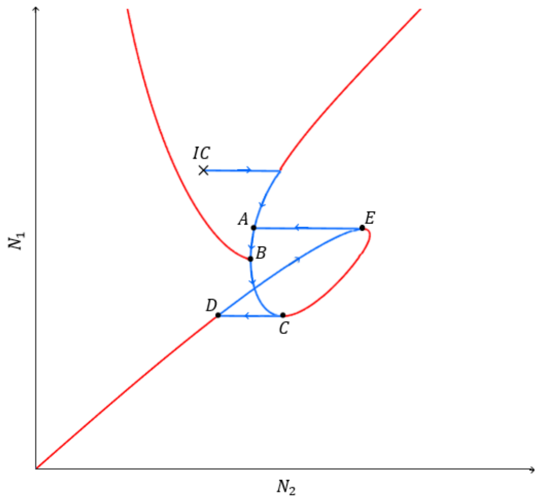
(ب)



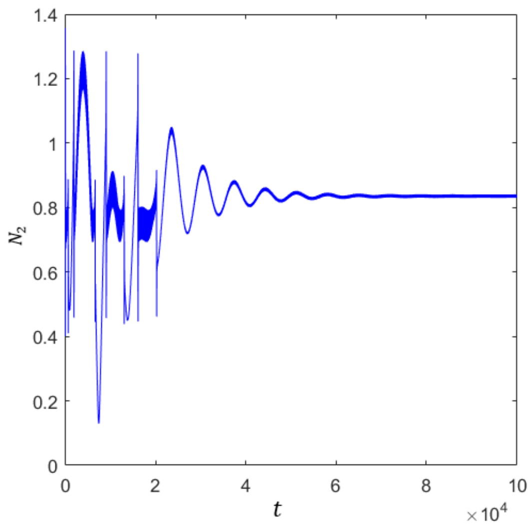
(ج)



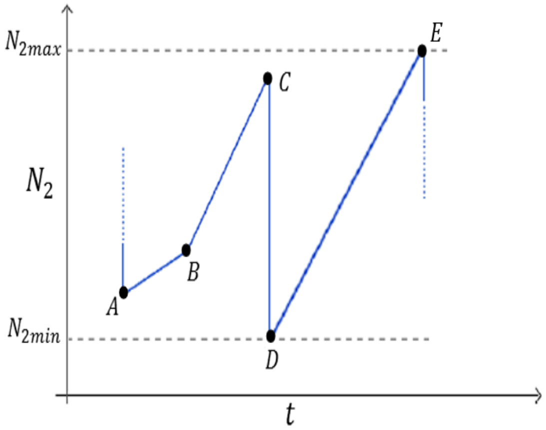
(د)



(ه)



(و)



(ز)

شکل (۴-۴): سناریو ۴- $A = 0.05, B = 3, \omega_0 = 1, f^0 = 1.499$ ، (الف، ب، ج): محل قرارگیری نقاط تعادل و تکین سیستم.— (د): مقایسه بین حل تحلیلی(منیفولد نامتغیر آهسته- خط قرمز) و حل عددی(قسمت آبی)- (ه): شماتیک رفتاری سیستم، خط آبی رفتار سیستم در طی SMR، نقطه‌ی IC نشان‌دهنده‌ی شرایط اولیه سیستم- (و): حل عددی سیرتکامل انرژی NES- (ز): شماتیک سیر تکامل انرژی NES

فصل پنجم

نتیجه گیری و پیشنهادات

۵-۱ نتیجه‌گیری

در این تحقیق، به بررسی دینامیک سیستم دو درجه آزادی متشکل از اسیلاتور خطی اصلی و چاه غیرخطی انرژی، شامل قسمت‌های کلی و محلی پرداختیم. قسمت کلی چاه غیرخطی انرژی رابطه‌ی مستقیمی با اسیلاتور اصلی دارد، درحالی‌که قسمت محلی تنها به جرم چاه غیرخطی انرژی متصل شده و در تقابل غیرمستقیم با انتقال انرژی می‌باشد. با بررسی حالت‌های مختلف سیستم در طی پاسخ مدوله قوی و منیفولد نامتغیر به سناریوهایی رسیدیم که نتایج حاصل به شرح زیر می‌باشد:

سناریو ۱: سیستم دارای یک نقطه تکین بوده که از مرز پایداری سیستم فاصله دارد. پرش از یک شاخه به شاخه‌های دیگر خیلی کم اتفاق می‌افتد که این عوامل باعث کاهش روند جذب ارتعاش سیستم در این حالت می‌شوند. مشاهده می‌کنیم پس از یک جابجایی بین ماکزیمم و مینیمم محلی، جذب ارتعاش به شکل تقریباً ثابتی درمی‌آید.

سناریو۲: سیستم دارای یک نقطه تکین و تعادل می‌باشد. به‌دلیل این‌که نقطه تکین به مرز پایداری نزدیک است، و همین‌طور پرش بین شاخه‌ها در این حالت به‌خوبی رخ داده که به روند جذب ارتعاش کمک می‌نمایند. می‌بینیم که جذب انرژی سیستم در طول بازه‌ی زمانی ارائه‌شده بین ماکزیمم و مینیمم مقدارش جابجا می‌شود.

سناریو۳: در این حالت سیستم پیشنهادی تنها دارای یک نقطه تعادل بوده و هیچ نقطه تکینی ندارد. در نمودارهای منیفولد یک شاخه‌ی اضافی مشاهده می‌شود که باعث کاهش جذب ارتعاش سیستم می‌شود. پرش بین شاخه‌ای هم به شکل کوچکی انجام می‌شود. درنتیجه ابتدا جذب انرژی بین نقاط ماکزیمم و مینیمم در یک بازه زمانی انجام‌شده و پس‌ازآن به‌طور یکنواخت کاهش‌یافته و سپس به شکل ثابتی درمی‌آید.

سناریو۴: سیستم دارای یک نقطه تعادل بر روی هر شاخه بوده و هیچ نقطه تکینی ندارد. همان‌طور که در سناریو۳ گفته‌شده در این حالت هم یک شاخه اضافی مشاهده می‌کنیم. پرش بین شاخه‌ای به شکل

قابل قبولی رخ داده است. درنتیجه ابتدا جذب انرژی بین نقاط ماکزیمم و مینیمم در یک بازه زمانی انجام‌شده (بازه‌ی بیشتری نسبت به سناریو ۳) و پس‌ازآن به‌طور یکنواخت کاهش‌یافته و سپس به شکل ثابتی درمی‌آید.

با توجه به نتایج به‌دست‌آمده می‌توان دریافت که حالت دوم(سناریو ۲) بهترین حالت برای سیستم پیشنهادی می‌باشد.

۲-۵ پیشنهادات

- به‌کارگیری چاه غیرخطی انرژی با دمپر غیرخطی در سیستمی متشکل از اسیلاتورهای ساده به‌منظور بهبود عملکرد در حذف رژیم‌های پریودیک ناخواسته.
- به‌کارگیری و طراحی چاه غیرخطی انرژی با قسمت محلی با کنترل فعال و استفاده از انرژی هاروستینگ.
- طراحی و به‌کارگیری چاه غیرخطی انرژی دارای میرایی غیرخطی با قابلیت تنظیم به‌منظور استفاده در سیستم‌های مختلف بدون نیاز به تغییر در چاه غیرخطی انرژی.
- به‌کارگیری چاه غیرخطی انرژی با قسمت محلی بر روی تیر.

مراجع

[1] M. Priestley and D. Grant, "Viscous damping in seismic design and analysis.," *Journal of Earthquake Engineering 9,* pp. 229-255, 2005.

[2] R. L. Bagley and . P. J. Torvik, "Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures.," *AIAA J 23.6,* pp. 918-925, 1985.

[3] T. T. Soong and G. F. Dargush, "Passive energy dissipation systems in structural engineering," *Wiley,* 1997.

[4] H. FRAHM, "DEVICE FOR DAMPING VIBRATIONS OF BODIES," *U.S. Patent Application No. 0/989,958.,* 1909.

[5] B. Burgkhardt and E. Piesch, "Reproducibility of TLD systems-a comprehensive analysis of experimental results.," *Nuclear Instruments and Methods 175.1,* pp. 159-161, 1980.

[6] H. Bauer, "Oscillations of immiscible liquids in a rectangular container: A new damper for excited," *Journal of sound and vibration,* 1984.

[7] Y. Bigdeli and D. Kim, "Damping effects of the passive control devices on structural vibration control: TMD, TLC and TLCD for varying total masses.," *KSCE Journal of Civil Engineering 20.1,* p. 301, 2016.

[8] P. G. Wu and B. Ludwig , "Resonance energy transfer: methods and applications.," *Analytical biochemistry 218.1,* pp. 1-13, 1994.

[9] A. Vakakis, O. V. Gendelman and L. Bergman, "Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems," *Vol. 156. Springer Science & Business Media,* 2008.

[10] O. Gendelman, T. Sapsis, A. Vakakis and L. Bergman, "Enhanced passive targeted energy transfer in strongly nonlinear mechanical oscillators.," *Journal of Sound and Vibration 330.1,* pp. 1-8, 2011.

[11] O. Gendelman, L. Manevitch, A. Vakakis and R. M'closkey, "Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part I—Dynamics of the underlying Hamiltonian systems," *Journal of Applied Mechanics 68.1,* pp. 34-41, 2001.

[12] O. Gendelman, L. Manevitch, A. Vakakis and R. M'closkey, "Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part II—resonance caoture," *Journal of Applied Mechanics 68.1,* pp. 42-48, 2001.

[13] O. Gendelman, E. Gourdon and C. Lamarque, "Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing," *J. Sound Vib. 294,* p. 651–662, 2006.

[14] O. Gendelman and Y. Starosvetsky, "Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink II: Optimization of a nonlinear vibration absorber," *Nonlinear Dyn. 51,* p. 47–57, 2008.

[15] Y. Starosvetsky and O. Gendelman, "Vibration absorption in systems with a nonlinear energy sink: nonlinear damping," *J. Sound Vib. 324,* pp. 916-939, 2009.

[16] G. Kerschen, A. Vakakis, Y. Lee, D. Mcfarland, J. Kowtko and L. Bergman, "Energy transfers in a system of two coupled oscillators with essential nonlinearity: 1: 1 resonance manifold and transient bridging orbits.," *Nonlinear Dynamics 42.3,* pp. 283-303, 2005.

[17] J. Ormondroyd and Den Hartog, "Theory of Dynamic Vibration Absorber," *ASME50,* no. Trans, pp. 9-22, 1928.

[18] M. Ozer and T. Royston, "Extending Denhartog's vibration absorber technique to multi-degree of freedom systems," *Journal of Vibration and Acoustics 127(4)*, pp. 341-350, 2004.

[19] ح .افضلی و ا .شوشتری" ,تاثیر میراگرهای جرمی بر رفتار لرزه ای ساختمانهای بتنی ",*پنجمین کنفرانس بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله، ۱۳۸۶.*

[20] P. Perlikowski, P. Brzeski and T. Kapitaniak, "Numerical optimization of tuned mass absorbers attached to strongly nonlinear Duffing oscillator.," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 19.1*, pp. 298-310, 2014.

[21] Roberson and E. Robert , "Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber," *Journal of the Franklin Institute 254.3*, pp. 205-220, 1952.

[22] . H. J. Rice and . J. R. McCraith, "Practical non-linear vibration absorber design," *Journal of Sound and Vibration 116.3*, pp. 545-559, 1987.

[23] J. Shaw, S. W. Shaw and A. G. Haddow, "On the response of the non-linear vibration absorber," *International Journal of Non-Linear Mechanics 24.4*, pp. 281-293, 1989.

[24] S. Natsiavas, "Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorbers," *Journal of Sound and Vibration 156.2*, pp. 227-245, 1992.

[25] O. V. Gendelman, "Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators," *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. Springer Netherlands,*, pp. 237-253, 2001.

[26] A. Vakakis, "Inducing passive nonlinear energy sinks in linear vibrating systems," *Journal of Vibration and Acoustics 123 (3)*, p. 324–332, 2001.

[27] A. Vakakis, L. Manevitch, O. Gendelman and L. Bergman, "Dynamics of linear discrete systems connected to local essentially nonlinear attachments," *J.Sound Vib. 264*, p. 559–577, 2003.

[28] O. Gendelman and C. Lamarque, "Dynamics of linear oscillator coupled to strongly nonlinear attachment with multiple states of equilibrium," *Chaos, Solitons and Fractals 24,* pp. 501-509, 2005.

[29] Y. Lee, A. Vakakis, L. Bergman and D. McFarland, "Suppression of limit cycle oscillations in the van der Pol oscillator by means of passive non-linear energy sinks," *Journal of Structural Control and Health Monitoring 13,* pp. 41-75, 2006.

[30] E. Gourdon, N. Alexander, C. Taylor, C. Lamarq and S. Pernot, "Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: Theoretical and experimental results," *Journal of Sound and Vibration 300,* p. 522–551, 2007.

[31] O. Gendelman and Y. Starosvetsky, "Quasiperiodic response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink under periodic forcing," *Journal of Applied Mechanics 74,* p. 325–331, 2007.

[32] D. Meimukhin and O. Gendelman, "Response regimes of integrable damped strongly nonlinear oscillator under impact periodic forcing," *Chaos, Solitons and Fractals 32,* p. 405–414, 2007.

[33] O. Gendeman, Y. Starosvetsky and M. Feldman, "Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink I: description of response regimes," *Nonlinear Dynamics 51,* p. 31–46, 2008.

[34] O. Gendelman and Y. Starosvetsky, "Strongly modulated response in forced 2dof oscillatory system with essential mass and potential asymmetry," *Physica D 237,* pp. 1719-1733, 2008.

[35] O. Gendelman and Y. Starosvetsky, "Response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink with harmonic forcing and frequency detuning," *Journal of Sound and Vibration 315,* pp. 746-765, 2008.

[36] T. Sapsis, A. Vakakis, O. Gendelman, L. Bergman, G. Kerschen and D. Quinn, "Efficiency of targeted energy transfers in coupled nonlinear oscillators associated with 1:1 resonance captures: Part II, analytical study," *Journal of Sound and Vibration 325,* pp. 297-320, 2009.

[37] O. Gendelman and Y. Starosvetsky, "Bifurcations of attractors in forced system with nonlinear energy sink: the effect of mass asymmetry," *Nonlinear Dyn 59,* pp. 711-731, 2010.

[38] B. Cochelin, R. Bellet, R. Côte and P. Mattei, "Enhancing the dynamic range of targeted energy transfer in acoustics using several nonlinear membrane absorbers," *Journal of Sound and Vibration 331,* pp. 5657-5668, 2012.

[39] S. Charlemagne, C. Lamarque and A. TureSavadkoohi, "Dynamics and energy exchanges between a linear oscillator and a nonlinear absorber with local and global potentials," *Journal of Sound and Vibration 376,* pp. 33-47, 2016.

[40] S. Smale, "Finding a horseshoe on the beaches of Rio," *Mathematical Intelligencer 20,* pp. 39-44, 1998.

[41] A. Arneodo, P. Coullet, J. Peyraud and C. Tresser, "Strange attractors in volterra equations for species in competition," *J. Math. Biol. 14,* p. 153, 1982.

[42] J. Grasman, "Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications," *Applied Mathematical Sciences, Vol. 63, Springer, New York,* 1987.

[43] . N. Bogoliubov and L. Mitropolsky, "Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations," *Gordon and Breach, New York,* 1961.

[44] B. Van der Pol, "On relaxation oscillations," *Phil. Mag. 2,,* pp. 978-992, 1926.

[45] P. Gaspard, "Generation of a countable set of homoclinic flows through bifurcation," *Phys. Lett. 97,* pp. 1-4, 1983.

[46] L. Manevitch, "Description of localized normal modes in the chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables," *Nonlinear Dynamics 25,* pp. 95-109, 2001.

[47] . M. I. Rabinovich and D. I. Trubetskov, "Introduction to the Theory of Vibrations and Waves," *Moscow, Nauka,* 1984.

[48] A. A. Ovchinnikov, "Localized long-living oscillatory states in molecular crystals," *Soviet Physics (Journal of Experimental and Theoretical Physics) 30,* pp. 147-154, 1970.

[49] . A. Kosevich and K. ovalyov, "Introduction to Nonlinear Physical Mechanics," *Naukova Dumka, Kiev,* 1989.

[50] L. Manevitch, "The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables," *Nonlinear Dynamics 25,* pp. 95-109, 2001.

[51] O. Gendelman, "Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity," *Journal ofSoundandVibration 315,* pp. 732-745, 2008.

[52] C. Lamarque, O. Gendelman, A. TureSavadkoohi and E. Etcheverria, "Targeted energy transfer in mechanical systems by means of non-smooth," *Acta Mechanica 221(1–2),* pp. 175-200, 2011.

Abstract

In this research, the application of nonlinear energy sink, including local and global sections on a linear oscillator to reduce vibrations has been investigated. This nonlinear absorber, which was numerically and analytically studied on various systems, is able to absorb and release energy from a primary system under external excitation in the form of one-way, passive and in a wide range of excitation frequencies. So far, in most researches devoted to nonlinear energy sink, nonlinear energy sink is considered only in global section, but in this research, the non-linear energy sink consists of two general and local parts. The global part is the section where the non-linear energy sink is in direct contact with the main system and the local section is only connected to mass of the nonlinear energy sink and has indirect interactions to energy transfer.

Analytical modeling with slow invariant manifold method and numerical calculations of the proposed model is conducted by MATLAB software. The slow invariant manifold responses generated by the linear oscillator that is interacting with proposed nonlinear energy sink model have branches that reduce the vibrational absorption process of the system.

By obtaining equilibrium and singular points, the system gives a periodic strongly modulated response, respectively. Based on these responses, several scenarios occur and in each case, the analytical and numerical results (modulated response) were compared and pumping energy in each scenario was investigated. The behavior of the system in the slowly invariant manifold analysis of the proposed system has three branches Instead of one, compared to a system without a local area. These branches are necessary for interpreting the system's behavior.

Keywords: global and local nonlinear energy sink model, linear oscillator, slow invariant manifold, strong modulated response, vibration absorption.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

MSc Thesis in Mechanical Engineering

The effect of Local Potential and Damper on the Energy Ttransfer between Two Coupled Oscillators

By

Behrouz Bakhshi

Supervisors

Dr.Amir Jalali

September 2017