بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

رساله دکتری مهندسی طراحی کاربردی

حل تحلیلی و عددی کمانش ورق‌های مستطیلی همگن و همسانگرد دارای گشودگی دایروی و مربعی

نگارنده: سعید ابوالقاسمی

اساتید راهنما

دکتر محمود شریعتی

دکتر حمیدرضا ایپک‌چی

شهریور ۱۳۹۶

شماره: ۹۶/۲۹۶/۱۳۸/پ‌د
تاریخ: ۹۶/۷/۱
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای **سعید ابوالقاسمی** دانشجوی دکتری رشته **مکانیک** به شماره دانشجویی **۹۰۲۳۲۳۵** ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۰ در تاریخ **۱۳۹۶/۶/۷** از رساله **نظری**☑ / **عملی**☐ خود با عنوان : حل تحلیلی و عددی کمانش ورق های مستطیلی همگن و همسانگرد دارای گشودگی دایروی و مربعی
دفاع و با اخذ نمره ۱۹٫۵۲ به درجه : عالی نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷☐
ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹– ۱۵☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	استاد راهنمای اول	دکتر محمود شریعتی	استاد	
۲	استاد راهنمای دوم	دکتر حمیدرضا ایپک چی	دانشیار	
۳	استاد مدعو خارجی	دکتر مسعود طهانی	استاد	
۴	استاد مدعو داخلی	دکتر مهدی قنّاد کهتوئی	دانشیار	
۵	استاد مدعو داخلی	دکتر علیرضا شاطرزاده	استادیار	شاطرزاده
۶	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر سید هادی قادری	استادیار	قادری

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای سعید ابوالقاسمی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده :

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

دانشکده مهندسی مکانیک

در طول این دوران پرفراز و نشیب و در پیمودن این مسیر دشوار، همواره کسانی همراه و یاور بنده بوده و با راهنمایی ها و دلگرمی هایشان زمینه به سرانجام رسیدن این رساله را فراهم کرده اند:

تشکر از پدر و مادرم؛

که همیشه در کنارم بوده و از حمایت معنوی آنها برخوردار بوده ام

تشکر از برادر و خواهرم؛

که از هیچ کمک و همراهی دریغ نکردند

و تشکر از اساتید راهنمای ارجمند؛

آقایان دکتر شریعتی و دکتر ایپک چی، که این رساله جز با راهنمایی ها و رهنمودهای سودمند این بزرگواران به سرانجام مطلوب نمی رسید.

تعهد نامه

اینجانب **سعید ابوالقاسمی** دانشجوی دوره دکتری رشته **مکانیک** دانشکده **مهندسی مکانیک و مکاترونیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله **حل تحلیلی و عددی کمانش ورق‌های مستطیلی همگن و همسانگرد دارای گشودگی دایروی و مربعی** تحت راهنمائی **دکتر محمود شریعتی-دکتر حمیدرضا ایپک چی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

در این رساله، کمانش ورق‌های همگن و همسانگرد مستطیلی دارای گشودگی در مرکز مطالعه می شود. ورق بدون نقص اولیه و دارای ابعاد محدود بوده و تاثیر وجود دو نوع گشودگی دایروی و مربعی با اندازه‌های مختلف بر بار کمانش بررسی می شود. بار کمانش برای ترکیب‌های مختلف شرایط مرزی آزاد، ساده و گیردار در لبه‌های ورق و نیز برای نسبت‌های ظاهری مختلف ارائه شده است. محاسبه بار کمانش شامل دومرحله می‌باشد: حل معادلات مربوط به حالت تعادل اولیه و استفاده از نتایج آن به منظور حل معادلات پایداری. محاسبه بار کمانش برای سه حالت ورق مستطیلی بدون گشودگی تحت بارگذاری غیریکنواخت، ورق مستطیلی دارای گشودگی دایروی و مربعی در مرکز و ورق حلقوی انجام شده است. در یک ورق مستطیلی تحت بارگذاری داخل صفحه‌ای، وجود گشودگی باعث تغییر در توزیع میدان تنش می‌شود. این میدان تنش باید شرایط مرزی در مرزهای خارجی ورق و نیز در مرز گشودگی را ارضا کند. در این پژوهش دو نوع حل برای این مساله ارائه شده است. در حل اول با استفاده از توابع پتانسیل مختلط و به کمک نگاشت، میدان تنش محاسبه می‌شود. در روش دوم برای حل مساله از مختصات قطبی و بسط تابع تنش به‌صورت یک سری از توابع هارمونیک استفاده شده است. در هر دو روش حل، برای اعمال شرایط مرزی در لبه‌های خارجی ورق، از یک رابطه انتگرالی براساس اصل کار مجازی و میدان تنش به‌دست آمده استفاده شده است. در این صورت، حل حاصل شرایط مرزی در مرز گشودگی را به‌صورت دقیق ارضا کرده و شرایط مرزی در لبه‌های ورق را نیز با تقریب بسیار خوبی ارضا می‌کند. پس از محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش، برای محاسبه بار کمانش باید معادلات پایداری حل شوند. در ورق حلقوی و در حالت متقارن محوری، برای حل معادلات پایداری از تئوری اغتشاشات استفاده شده است و در حالت نا متقارن، معادلات پایداری به کمک روش حلقه زدن حل شده‌اند. در یک ورق مستطیلی دارای گشودگی، به دلیل پیچیده بودن مولفه‌های تنش پیش‌کمانش، از روش انرژی ریتز برای محاسبه بار کمانش استفاده شده است. در این روش میدان جابجایی عرضی ورق با استفاده از مجموعه‌ای از توابع مجاز که بیان کننده مدهای ارتعاشی عرضی یک تیر می‌باشند، تقریب زده شده است. بار کمانش برای حالت‌های مختلف بارگذاری یکنواخت و غیریکنواخت، شرایط مرزی مختلف و نیز برای گشودگی با اندازه‌های مختلف محاسبه شده است. به منظور ارزیابی روش حل مورد استفاده، نتایج به‌دست آمده با نتایج حل عددی به کمک روش اجزای محدود و نیز نتایج مراجع دیگر مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: میدان تنش پیش‌کمانش-بار کمانش- گشودگی مربعی و دایروی-حل تحلیلی و عددی

مقالات استخراج یافته از رساله

۱- ابوالقاسمی س.، ایپک‌چی ح. ر. و شریعتی م.، (۱۳۹۳) **"حل تحلیلی کمانش ورق‌های مستطیلی تحت بار صفحه‌ای غیریکنواخت به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول"**، مجله مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۴، شماره ۱۳، صفحات ۳۷-۴۶.

2. Abolghasemi S., Eipakchi H. R., Shariati M., (2015) "An Analytical Procedure to Study Vibration of Rectangular Plates Under Non-Uniform In-Plane Loads Based on First-Order Shear Deformation Theory", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 86, No. 5, pp. 853-867 (ISI).

3. Abolghasemi S., Eipakchi H. R., Shariati M., (2017) "An Analytical Solution for Axisymmetric Buckling of Annular Plates Based on Perturbation Technique", *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 123, pp. 74-83 (ISI) .

4- Abolghasemi S., Eipakchi H. R., Shariati M., (2016) "Buckling Analysis of Shear Loaded Finite Plates with Circular Cutout Based on Complex Analysis", 24th Annual International Conference on Mechanical Engineering, Yazd University.

5- Abolghasemi S., Eipakchi H. R., Shariati M., (2017) "A New Analytical Method for Stress Analysis of Finite Plates with Circular Cutout", 16th International Conference of Iranian Aerospace Society , K. N. Toosi University of Technology.

6- Abolghasemi S., Eipakchi H. R., Shariati M., " Investigation of Prebuckling Stress Effect on Buckling Load Determination of Finite Rectangular Plates with Circular Cutout", Submitted to the Journal of Solid Mechanics.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل اول:

کلّیات و مرور مقالات

۱-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا پدیده کمانش و پایداری در ورق‌ها و عوامل موثر بر آن توضیح داده می‌شود. سپس تاریخچه مطالعات انجام شده در زمینه کمانش و نیز سیر تکاملی تئوری‌های مورد استفاده برای تحلیل ورق‌ها بیان می‌شود و در نهایت به مرور مقالات موجود در زمینه کمانش ورق‌ها پرداخته می‌شود.

۱-۲ تحلیل ورق‌ها

ورق‌های نازک، دسته ای از اجزای مورد استفاده در سازه‌های مختلف محسوب می‌شوند که در ابتدا کاملا مسطح بوده و هیچ گونه انحنایی ندارند. ورق‌ها توسط دو صفحه بالایی و پایینی محدود می‌شوند و فاصله بین این دوصفحه، ضخامت ورق بوده که معمولا اندازه آن در مقایسه با ابعاد دیگر ورق کوچک است. مکانیزم تحمل بار توسط ورق‌ها تا حد زیادی شبیه به تیرها می‌باشد، بنابراین می‌توان فرض کرد که یک ورق از کنارهم قراردادن تعدادی تیر ساخته شده است. هنگامی که یک ورق که ابتدا کاملا مسطح می‌باشد، در معرض بار عرضی[۱] قرار می‌گیرد، برای تحمل این بار در آن نیروهای برشی و ممان‌های خمشی و پیچشی ایجاد می‌شود. به دلیل این‌که نیروها در هردوجهت توسط ورق تحمل می‌شوند و صلبیت پیچشی، بخصوص در ورق‌های ساخته شده از مواد همسانگرد قابل توجه می‌باشد، یک ورق در مقایسه با یک تیر با ضخامت و دهانه[۲] یکسان، مقاوم تر بوده و تغییر شکل کمتری خواهد داشت. بنابراین ورق‌های نازک به طور گسترده در تمامی زمینه‌های مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند و از آنها در ساخت پل‌ها، مخزن‌ها، بدنه و بال هواپیماها، کشتی‌ها و ... استفاده می‌شود [۱].

هدف از طراحی یک سازه، محاسبه پارامترهایی است که به ازای آن، سازه قادر به تحمل بارهای اعمالی باشد، به‌طوری که نیازهای طراحی را برآورده کرده و دچار ازکار افتادگی[۳] نشود. این پارامترها می‌توانند جنس قطعه و ابعاد مختلف آن باشند. از کارافتادگی هنگامی رخ می‌دهد که سازه رفتاری خلاف آنچه پیش بینی شده، داشته باشد. این رفتار خلاف انتظار برای مثال می‌تواند بیشتر شدن تنش‌ها از حد تنش تسلیم و ورود به ناحیه پلاستیک، بیشتر شدن تغییر شکل قطعه از یک مقدار مشخص، شروع به رشد یک ترک در قطعه و یا ایجاد ناپایداری در سازه بر اثر وقوع کمانش باشد. بنابراین حالت‌های مختلفی برای ازکار افتادگی یک سازه وجود دارد. این‌که کدام حالت، بحرانی بوده و طراحی باید براساس آن انجام شود، به عوامل مختلفی از جمله کاربری سازه، نوع بارگذاری سازه، شکل سازه و ... وابسته است. بحث پایداری به‌خصوص در مورد ستون‌ها، ورق‌ها و پوسته‌های

[1] Transverse Load
[2] Span
[3] Failure

استوانه‌ای و کروی که ضخامت آنها در مقایسه با ابعاد دیگر کوچک بوده و تحت بارگذاری فشاری قرار دارند، از اهمیت زیادی برخوردار بوده و یکی از پارامترهای مهم در طراحی این قطعات می‌باشد. به همین دلیل موضوع کمانش یا ناپایداری الاستیک ورق‌ها از لحاظ کاربردی اهمیت زیادی دارد و در بسیاری از موارد، ازکار افتادگی در یک ورق نازک، ناشی از وقوع ناپایداری الاستیک است و نه رسیدن تنش‌ها به حد تسلیم ماده و از دست دادن استحکام [۱]. ناپایداری در یک سازه هنگامی رخ می‌دهد که با بیشتر شدن بار اعمالی از یک مقدار بحرانی، سازه ناگهان تغییر شکل داده و در یک وضعیت تعادل جدید قرار می‌گیرد، به‌طوری که قابلیت حمل بار در این وضعیت جدید به‌مراتب کمتر از وضعیت اولیه است.

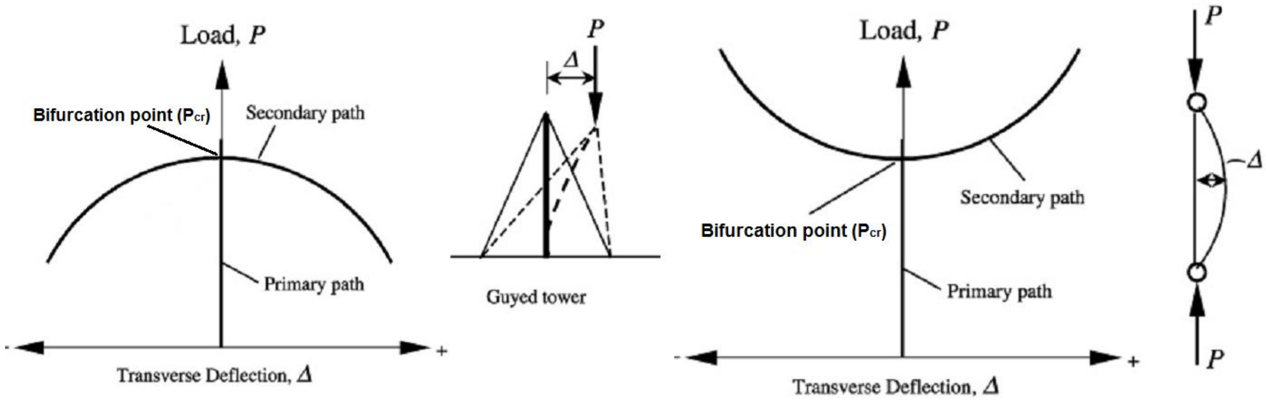
۱-۳ کمانش و پایداری

دو موضوع تحقیقاتی که از لحاظ کاربردی اهمیت زیادی دارند، رفتار کمانشی و پس‌کمانشی ورق‌های دارای گشودگی می‌باشد. موضوع پایداری ورق‌ها به دلیل کاربرد گسترده آنها و نیز تاثیرات مخربی که از دست دادن پایداری ورق بر عملکرد کل سازه می‌تواند داشته باشد، از اهمیت زیادی برخوردار است. ورق‌های دارای گشودگی در بسیاری از سازه‌های مرتبط با هوافضا، ازجمله بدنه و بال هواپیما مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جمله دلایل ایجاد گشودگی می‌توان به امکان دسترسی به قسمت های مختلف سازه، انجام عملیات تعمیر و نگهداری، کاهش وزن، امکان تهویه هوا و انتقال لوله‌های حامل سوخت و روغن هیدرولیک اشاره نمود.

کمانش را می‌توان به‌صورت انتقال وضعیت سیستم از یک حالت تعادل به حالت تعادل دیگر (نقطه دوگانگی[۱]) و یا یک جهش از یک مسیر تعادل پایدار به یک مسیر تعادل ناپایدار(نقطه حدی[۲]) تعریف کرد[۲]. مقدار باری که در آن سیستم پایداری خود را از دست می‌دهد، بار بحرانی نامیده می‌شود. رفتار یک سازه که در معرض بارهایی بزرگ‌تر از بار بحرانی قرار دارد را می‌توان توسط یک مسیر تعادل پایدار و یا یک مسیر تعادل ناپایدار توصیف نمود. در حالت اول افزایش جابجایی ناشی از افزایش بار می‌باشد و در حالت دوم، در حالی که بار کاهش می‌یابد، جابجایی‌ها افزایش می‌یابند. در شکل ۱-۱ نمونه‌ای از مسیرهای تعادلی پایدار و ناپایدار نشان داده شده است. پایدار و یا ناپایدار بودن مسیر پس‌کمانش وابسته به این است که جابجایی‌های ایجاد شده در سیستم پس از کمانش، باعث افزایش سفتی[۳] آن می شود و یا اینکه سفتی سیستم را کاهش می‌دهد. برای مثال یک ورق تحت بار فشاری داخل صفحه‌ای دارای منحنی پس‌کمانش پایدار است، زیرا هنگامی که ورق کمانش می‌کند، تغییر

[1] Bifurcation Point
[2] Limit Point
[3] Stiffness

شکل ناشی از کمانش باعث ایجاد تنش‌های غشایی کششی در جهت عمود بر راستای بارگذاری می‌شود که باعث افزایش سفتی ورق شده و ظرفیت تحمل بار آن را افزایش می‌دهد. اما یک پوسته استوانه‌ای تحت بار فشاری محوری، دارای منحنی پس‌کمانش ناپایدار است.



الف) مسیر تعادلی پایدار — ب) مسیر تعادلی ناپایدار

شکل ۱-۱: نمونه‌ای از مسیر های تعادلی در ناحیه پس‌کمانش [۳]

۱-۳-۱ عوامل موثر در کمانش ورق‌ها

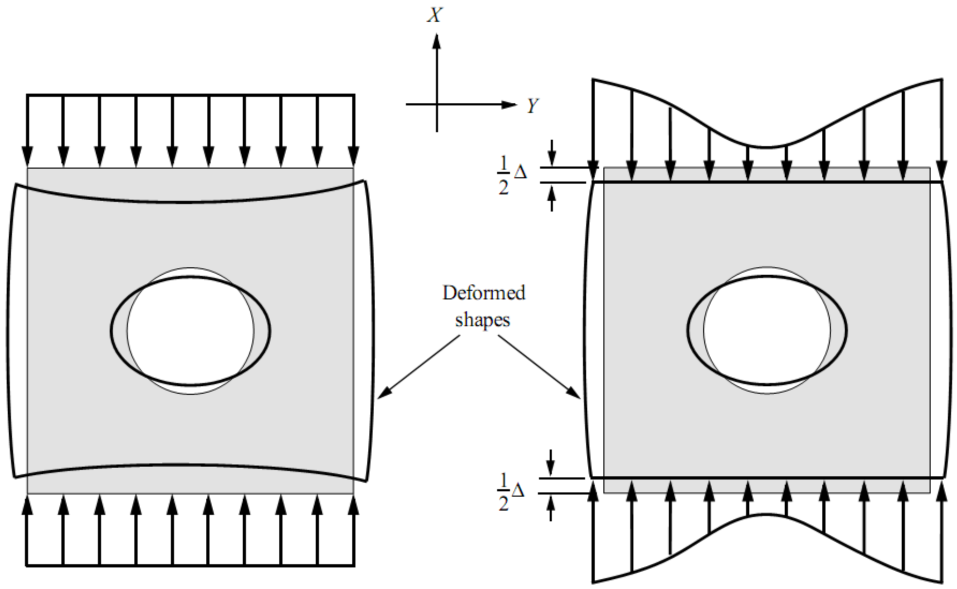
عوامل مهمی که بر بارکمانش، شکل مد و رفتار پس‌کمانشی ورق‌ها تاثیر می‌گذارند و در مقالات تاثیر آنها بررسی می‌شود عبارتند از [۴]:

۱- نسبت ظاهری[1]: برای یک ورق مستطیلی، نسبت ظاهری همان نسبت طول به عرض می‌باشد؛ درحالی که برای یک ورق حلقوی، این نسبت، به‌صورت نسبت شعاع داخلی به خارجی تعریف می‌شود.

۲- شرایط مرزی: شرایط مرزی تاثیر زیادی بر رفتار ورق دارد و به شکل‌های گوناگون تعریف می‌شود، ازجمله شرایط مرزی آزاد، گیردار و ساده. هر نوع شرط مرزی، تعدادی از درجات آزادی سیستم را مقید می‌کند.

۳- شرایط بارگذاری: لبه‌های یک ورق ممکن است درمعرض بارگذاری فشاری، کششی، برشی و یا ترکیبی از آنها قرار داشته باشند. این بارگذاری می‌تواند به‌صورت یکنواخت، خطی و یا غیرخطی باشد. همچنین بارگذاری می‌تواند به‌صورت اعمال یک جابجایی مشخص و یا اعمال تنش معلوم در لبه‌های ورق باشد (شکل‌های ۱-۲ و ۱-۳).

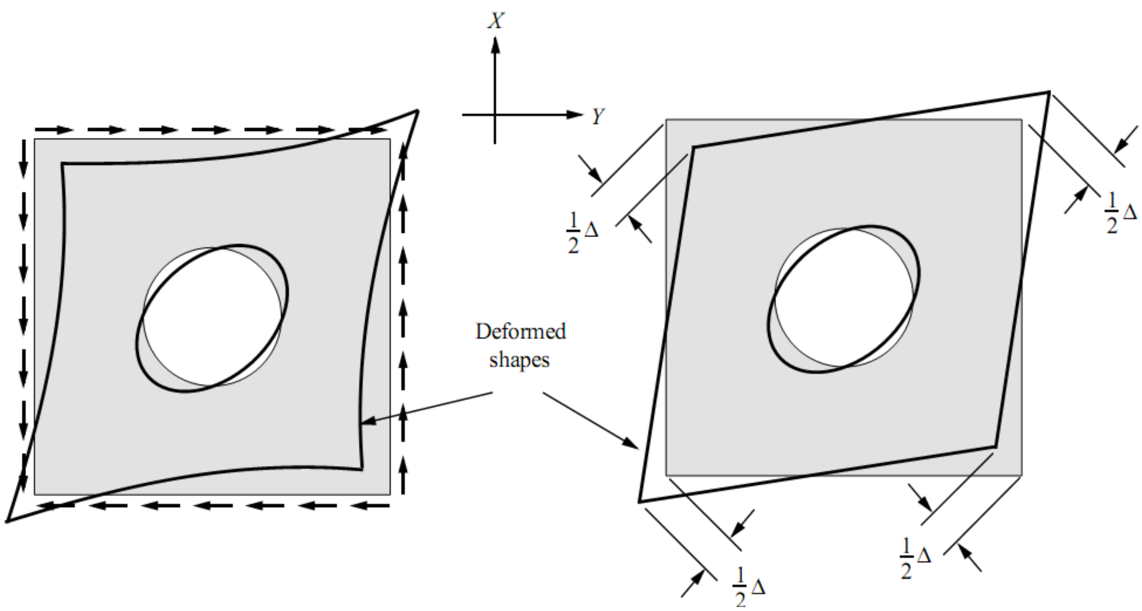
[1] Aspect Ratio



ب) الف)

شکل ۱-۲: تغییر شکل یک ورق دارای گشودگی دایروی در معرض بارگذاری فشاری

الف) بارگذاری از نوع جابجایی ب) بارگذاری از نوع نیرویی [۵]



ب) الف)

شکل ۱-۳: تغییر شکل یک ورق دارای گشودگی دایروی در معرض بارگذاری برشی

الف) بارگذاری از نوع جابجایی ب) بارگذاری از نوع نیرویی [۵]

۴- تقارن ماده[1]: برای ورق‌های نازک که دارای رفتار ساختاری مشخصی می‌باشند، تقارن ماده تاثیر مهمی بر روی رفتار کمانشی خواهد داشت.

۵- رفتار ساختاری[2]: رفتار ماده در واکنش به نیروهای اعمالی که وابسته به عوامل مختلفی از جمله جنس ماده، دمای بکارگیری، مدت زمان اعمال بار و ... می‌باشد، بر روی رفتار کمانشی آن تاثیر گذار است. برای مثال یک ورق می‌تواند دارای رفتار الاستیک خطی، الاستیک غیرخطی، ویسکوالاستیک و یا الاستیک-پلاستیک باشد.

۶- توزیع تنش حرارتی و تنش رطوبتی[3]: ورق‌های نازک معمولا در معرض تغییرات دما و یا رطوبت قرار می‌گیرند. در صورتی که تغییر شکل ورق محدود شده باشد، این تغییرات دما و یا رطوبت باعث ایجاد توزیع تنش فشاری محلی در یک ناحیه شده و بنابراین می‌توانند حتی بدون وجود بارگذاری مکانیکی خارجی، باعث کمانش ورق شوند.

۷-نقص اولیه[4]: بسیاری از ورق‌ها به دلیل قرارگیری در شرایط محیطی مختلف و یا به دلیل عدم دقت در ساخت، دارای تغییر شکل عرضی اولیه کوچکی بوده و یا ممکن است در معرض بارگذاری عرضی کوچکی قرار داشته باشند. وجود هرکدام از این عوامل نوعی نقص اولیه به شمار می رود و می‌تواند تاثیر زیادی بر روی رفتار کمانشی و پس‌کمانشی ورق، در مقایسه با یک ورق بدون نقص داشته باشد.

۱-۴ تئوری‌های مربوط به تحلیل ورق‌ها

تاکنون تئوری‌های مختلفی به منظور تحلیل رفتار ورق‌ها ارائه شده است که تعدادی از این تئوری‌ها مقبولیت بیشتری پیدا کرده‌اند. انتخاب یک تئوری مناسب که قادر به تحلیل رفتار ورق بوده و نتایج حاصل از آن به نتایج واقعی نزدیک باشد، به پارامترهای مختلفی بستگی دارد که از آن جمله می‌توان به ضخامت ورق، میزان تغییر شکل‌های ورق و جنس آن اشاره نمود. همچنین هدف از تحلیل ورق و نتایج مورد نیاز در انتخاب تئوری مناسب تاثیر دارد. برای مثال اگر هدف از تحلیل ورق محاسبه توزیع مولفه‌های تنش با دقت بالا باشد، باید از تئوری استفاده نمود که در آن تنش‌ها به عنوان متغیرهای اصلی درنظر گرفته می‌شوند، درحالی که اگر هدف اصلی به‌دست آوردن تغییر شکل ورق باشد، تئوری که در آن میدان جابجایی به عنوان متغیرهای اصلی درنظر گرفته می‌شود، نتایج بهتری به دنبال خواهد داشت.

[1] Material Symmetry
[2] Constitutive Behavior
[3] Hygroscopic
[4] initial Imperfection

در تئوری کلاسیک ورق‌ها، دو روش اصلی برای حل مساله وجود دارد. روش اول توسط کوشی[1] و پواسون[2] و روش دوم توسط کیرشهف[3] مطرح شد. روش اول براساس بسط میدان جابجایی و میدان تنش صفحه به‌صورت سری توانی برحسب فاصله از صفحه میانی که با z نشان داده می‌شود، می‌باشد، اما مناقشه و مشکلاتی که در رابطه با همگرایی این سری‌ها و نیز شرایط مرزی مساله وجود داشت، باعث عدم مقبولیت این روش شد. در روش کیرشهف، میدان جابجایی ورق با این فرض که خطوط عمود برصفحه میانی ورق، بعد از تغییر شکل نیز به صورت عمود باقی می‌مانند، تعریف می‌شود. در این تئوری، اثر تغییر شکل برشی در راستای ضخامت درنظر گرفته نمی‌شود. روش پیشنهادی توسط کیرشهف دارای این مزیت می‌باشد که مفهوم و دید فیزیکی را وارد تئوری صفحه ها می‌کند. در سال ۱۹۱۰ فن کارمن[4] این روش را برای مطالعه تغییر شکل‌های محدود[5] با درنظر گرفتن جملات غیرخطی بسط و گسترش داد. به منظور مطالعه ورق‌های ضخیم و نیز ورق‌های کامپوزیتی لایه ای، تئوری رایزنر- مندلین[6] مطرح شد. در این تئوری تاثیر تنش‌های برشی عرضی بر روی تغییر شکل ورق درنظر گرفته می‌شود و در آن از پنج متغیر جهت بیان تغییر شکل‌ها استفاده می‌شود که سه متغیر مربوط به جابجایی صفحه میانی و دو متغیر مربوط به چرخش آن می‌باشند. همچنین تاثیر کرنش‌های برشی عرضی نیز در این تئوری در نظر گرفته می‌شود. مشکل این تئوری در آن است که شرایط مرزی مربوط به تنش‌های برشی در صفحات بالایی و پایین را ارضا نمی‌کند. در واقع براساس فرضیات صورت گرفته در این تئوری، یک تنش برشی ثابت در راستای ضخامت ورق وجود دارد و مقاطع صفحه‌ای بعد از تغییرشکل نیز به‌صورت صفحه باقی می‌مانند. در نتیجه این فرضیات، در تئوری مندلین- رایزنر به ضریبی جهت تصحیح عدم تطابق بین توزیع تنش برشی در حالت واقعی و توزیع تنش به‌دست آمده با استفاده از میدان جابجایی مربوط به این تئوری نیاز است که به آن ضریب تصحیح برشی[7] گفته می‌شود [۶].

به دلیل وجود مشکلات بیان شده در تئوری مندلین-رایزنر، در سال ۱۹۹۰، تئوری غیرخطی ورق‌ها توسط ردی[8] [۷] مطرح شد. در این تئوری، روابط سینماتیکی مربوط به جابجایی‌های ورق دارای جملات از مرتبه سه برحسب فاصله از صفحه میانی می‌باشند. میدان جابجایی عرضی مربوط به این تئوری به صورت رابطه (۱-۱) است:

---

[1] Cauchy
[2] Poisson
[3] Kirchhoff
[4] Von Karman
[5] Finite Deformation
[6] Reissner-Mindlin
[7] Shear Correction Factor
[8] Reddy

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z) &= z\phi_x(x,y) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\
v(x,y,z) &= z\phi_y(x,y) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \qquad (۱-۱) \\
w(x,y,z) &= w_0(x,y)
\end{aligned}
$$

که در آن h ضخامت ورق و ϕ_x و ϕ_y بیانگر چرخش خط عمود بر صفحه میانی ورق به ترتیب حول محور y و x می‌باشند. این تئوری، قادر به ارضای شرایط مرزی تنش برشی صفر در صفحات بالایی و پایینی ورق می‌باشد. همچنین به دلیل وجود جملات مرتبه سه، توزیع تنش برشی در راستای ضخامت به‌صورت مرتبه دو (سهمی) خواهد بود که با تقریب خوبی به نتایج به‌دست آمده براساس تئوری الاستیسیته نزدیک است. در این تئوری نیز همانند تئوری مندلین-رایزنر، از پنج متغیر جهت بیان سینماتیک جابجایی‌ها استفاده می‌شود؛ اما دیگر نیازی به استفاده از ضریب تصحیح برشی نمی‌باشد.

۱-۵ مرور مقالات

بررسی و مطالعه پایداری و کمانش سازه‌ها، تاریخچه ای بسیار طولانی دارد. این تاریخچه با مطالعات اویلر[۱] در سال ۱۷۴۴ آغاز شد. وی کار خود را بر روی پایداری ستون های در معرض بار فشاری انجام داد و اولین کسی بود که فرمولی برای محاسبه بار کمانش ستون ها ارائه نمود. در سال ۱۹۱۰، فن کارمن معادلات مربوط به کمانش ورق‌های نازک با رفتار الاستیک خطی را فرمول‌بندی نمود که گام مهمی در بررسی کمانش ورق‌ها به شمار می رود [۴]. در سال ۱۹۴۵ کویتر[۲] [۸] برای اولین بار، این نکته که وجود نقص اولیه می‌تواند منجر به کاهش شدیدی در بارکمانش یک سازه شود را مورد توجه قرار داد. وی همچنین یک تئوری عمومی برای بررسی پایداری الاستیک ارائه نمود.

تئوری‌های عمومی مربوط به دوگانگی و پایداری، از مطالعات ریاضی محققینی همچون پوانکاره[۳]، لیاپانوف[۴] و اشمیت[۵] نشات گرفت و بعدا گسترش یافت. در این مطالعات، تئوری‌های مربوط به معکوس توابع و توابع غیر صریح به عنوان ابزار ریاضی سودمندی مطرح شد که از آن می‌توان به منظور اثبات کارآمدی و دقت

[1] Euler
[2] Koiter
[3] Poincare
[4] Lyapunov
[5] Schmidt

بسط اغتشاشی[1] و نیز بسط مجانبی[2] توابع استفاده نمود. این بسط ها به طور فراگیری درمطالعه کمانش و پس‌کمانش سازه‌ها مورد استفاده قرار گرفت.

کمانش و پس‌کمانش سازه‌های جدار نازک تحت اعمال نیروهای استاتیکی، توسط نویسندگان زیادی در طی بیشتر از ۱۰۰ سال مورد بررسی قرار گرفته است. دانشمندانی همچون برنولی[3] و اویلر، تیموشنکو[4] [۹] و ولمیر[5] را می‌توان پیشگامان عصر تحقیق در زمینه پایداری سازه‌های جدار نازک دانست. اما بیشترین توسعه و پیشرفت تحقیقات در زمینه پایداری سازه‌های جدار نازک همسانگرد، در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ صورت پذیرفت. در این سالها محققینی همچون اسمیت[6] [۱۰] گریما لدی[7] و پیگناتارو[8] [۱۱] وکویتر[9] [۱۲] بر روی رفتار کمانش و پس‌کمانش سازه‌های جدار نازک همسانگرد کار کردند. همچنین موضوع کمانش محلی[10] در سازه‌های جدار نازک توسط داویدز[11] و هنکوک[12][۱۳]، اسمیت[۱۰] و نیز مولیگان[13] و پکوز[14] [۱۴] مورد بررسی قرار گرفت. مباحث تئوری مربوط به کمانش صفحات کامپوزیت و غیر همسانگرد توسط نویسندگانی همچون لخنیتسکی[15] [۱۵]، امبرتسومایان[16] [۱۶]، اشتون و ویتنی[17] [۱۷] به چاپ رسید. نور[18] [۱۸] مقایسه ای بین تئوری کلاسیک ورق‌ها، تئوری تغییر شکل برشی خطی و یک تئوری سه بعدی در زمینه پایداری الاستیک صفحات کامپوزیتی اورتوتروپیک[19] انجام داد.

۱-۵-۱ کمانش ورق‌های دارای قید داخل صفحه‌ای

درصورتی که یک ورق دارای قیود داخل صفحه‌ای باشد و به عبارت دیگر، نتواند به طور آزادانه در راستای محورهای طولی و عرضی خود تغییر شکل دهد، میدان تنش ایجاد شده در آن براثر اعمال بارگذاری داخل

---

[1] Perturbation Expansion
[2] Asymptotic Expansion
[3] Bernoulli
[4] Timoshenko
[5] Volmir
[6] Smith
[7] Grimaldi
[8] Pignataro
[9] Koiter
[10] Local Buckling
[11] Davis
[12] Hancock
[13] Mulligan
[14] Pekoz
[15] Lekhnitskii
[16] Ambartsumyan
[17] Whitney
[18] Noor
[19] Orthotropic

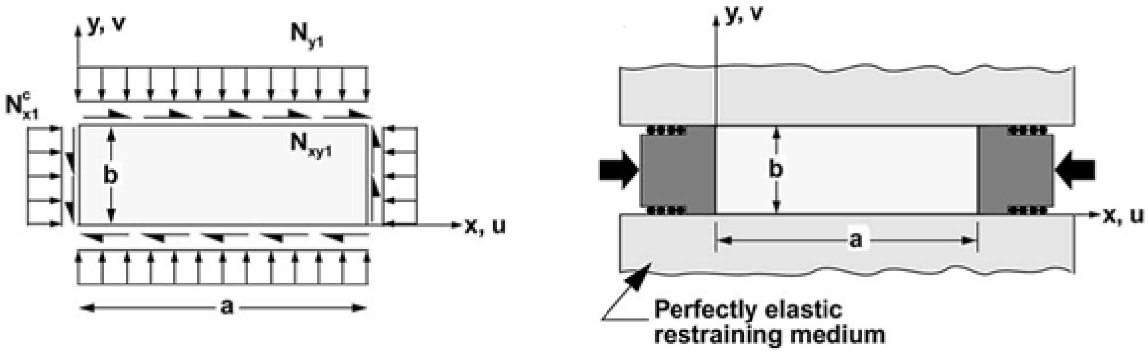
صفحه‌ای، متاثر از وجود این قیود خواهد بود. بنابراین تاثیر این قیود بر روی میدان تنش پیش‌کمانش، باید مورد ارزیابی قرار گیرد. در شکل ۱-۴ نمونه‌ای از یک ورق با قیود داخل صفحه‌ای نشان داده شده است.

کاگداس[1] و آدالی[2] [۱۹] به بررسی اثر چهار نوع قید داخل صفحه‌ای بر میدان تنش پیش‌کمانش ورق‌های کامپوزیتی پرداختند. آنها همچنین مساله بهینه سازی ضخامت ورق به منظور تحمل بیشترین مقدار بارکمانش را حل نمودند. براساس نتایج عددی به‌دست آمده، در نظر نگرفتن تاثیر قیود داخل صفحه‌ای در محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش باعث ایجاد خطا در پیش بینی رفتار کمانشی ورق می‌شود. شربورن[3] و پندی[4] [۲۰] پایداری ورق‌های کامپوزیتی مستطیلی با قید داخل صفحه‌ای را مورد ارزیابی قرار دادند. به منظور مدل-سازی ورق از تئوری ورق کیرشهف و برای حل معادلات حاکم، از روش ریتز به همراه چند جمله‌ای‌های متعامد با استفاده از روش گرام-اشمیت[5] استفاده شد.

کمانش ورق‌های اورتوتروپیک با شرایط مرزی خارج صفحه‌ای ساده و با درنظر گرفتن قیود داخل صفحه‌ای، توسط هریس[6] [۲۱] بررسی شد. وی برای مدل سازی ورق از تئوری کلاسیک استفاده نمود و با استفاده از روش لوی[7] به حل معادلات پرداخت. براساس نتایج این مقاله، در ورق‌ها با طول زیاد که در معرض باریکنواخت تک محوره قرار دارند، کمانش می‌تواند ناشی از نیروهای ایجاد شده در جهت عمود بر راستای بارگذاری باشد که این نیروها بر اثر مقید کردن جابجایی‌های داخل صفحه‌ای ایجاد می‌شوند. زیگلر[8] [۲۲] نشان داد که اثر تغییر شکل‌های داخل صفحه‌ای، هم مرتبه با اثر تغییر شکل‌های برشی در راستای ضخامت ورق می‌باشد.

نمس[9] [۲۳] کمانش ورق‌ها با طول زیاد که در معرض بارگذاری تک محوره بوده و جابجایی داخل صفحه‌ای آن توسط قیود الاستیک محدود شده است را مورد بررسی قرار داد. وی ورق‌هایی با شرایط مرزی ساده و گیردار را با استفاده از روش ریتز مورد تحلیل قرار داد و اثر میزان سفتی قیود داخل صفحه‌ای و نیز شرایط مرزی بر بار کمانش را با ارائه نتایج عددی و نمودارهای مختلف نشان داد.

---
[1] Cagdas
[2] Adali
[3] Sherbourne
[4] Pandey
[5] Gram-Schmidt Method
[6] Harris
[7] Levy
[8] Ziegler
[9] Nemeth



الف) ب)

شکل ۱-۴: ورق با قیود داخل صفحه‌ای الاستیک الف) شرایط مرزی ب) بارهای ایجاد شده بر اثر وجود قیود داخل صفحه‌ای [۲۳]

۱-۵-۲ کمانش ورق‌ها با بارگذاری غیریکنواخت در لبه‌ها

یک ورق ممکن است درمعرض بار غیریکنواخت در لبه‌ها قرار داشته باشد و این بار می‌تواند به‌صورت خطی و یا غیرخطی اعمال شود. تحلیل کمانش این نوع ورق‌ها به خصوص در حالت بار غیرخطی، به مراتب پیچیده تر از تحلیل ورق‌های در معرض بار یکنواخت می‌باشد. زیرا در بار غیریکنواخت، به‌دست آوردن میدان تنش پیش‌کمانش دشوار است. در ادامه به مرور تعدادی از مقالات که کمانش این نوع ورق‌ها را مورد مطالعه قرار داده اند، پرداخته می‌شود.

کمانش ورق‌های مستطیلی که در معرض حالت‌های مختلف بارگذاری غیریکنواخت از جمله بارگذاری متمرکز، بارگذاری موضعی، بارگذاری سینوسی و ... قرار دارند، توسط جانا[1] و باسکار[2] [۲۴، ۲۵] مورد مطالعه قرار گرفت. آنها ابتدا با استفاده از ترکیب چندین تابع تنش ایری براساس اصل جمع آثار، مساله پیش‌کمانش را به منظور تعیین میدان تنش داخل صفحه‌ای ورق، حل نمودند. این روش حل قادر است شرایط مرزی تنش در لبه‌های ورق را ارضا کند. پس از آن با استفاده از روش گالرکین به حل معادله کمانش ورق براساس تئوری کلاسیک پرداختند و بارکمانش ورق را برای حالت‌های مختلف بارگذاری به‌دست آوردند. همچنین در مرجع [۲۴] از روش کانتروویچ توسعه یافته[3] به منظور به‌دست آوردن میدان تنش داخل صفحه‌ای استفاده و نتایج آن با حل مربوط به تابع تنش ایری مقایسه گردید.

[1] Jana
[2] Bhaskar
[3] Extended Kantorovich Method

بداغی و سعیدی [۲۶] یک حل دقیق برای کمانش ورق‌های مدرّج تابعی[1] که در معرض بارغیریکنواخت در لبه‌ها قرار دارند، ارائه نمودند. ورق‌های مورد بررسی توسط آنها بر روی یک بستر الاستیک قرار داشته و دارای شرایط مرزی ساده در لبه‌های بارگذاری شده و ترکیب شرایط مرزی ساده، گیردار و آزاد در لبه‌های دیگر می‌باشد. با استفاده از روش لوی[2]، معادله مربوط به کمانش به یک معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر تبدیل و برای حل دقیق این معادله دیفرانسیل، از روش سری های فروبینیوس استفاده شد و اثر پارامترهای مختلف همچون نسبت ظاهری ورق، سفتی بستر الاستیک و حالت‌های مختلف بارگذاری و نیز شرایط مرزی بر روی بارکمانش بررسی گردید. کومار[3] و راچاماندرا[4] [۲۷] به بررسی کمانش ورق‌های کامپوزیتی که در معرض بارگذاری غیریکنواخت به شکل خطی و سهمی در لبه‌ها قرار دارند، پرداختند. در این مقاله از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر به منظور به‌دست آوردن معادلات حاکم استفاده و چندین ترکیب مختلف برای شرایط مرزی ورق درنظر گرفته شد. با توجه به این‌که باراعمالی بر لبه‌های ورق یکنواخت نیست، محاسبه بارکمانش در طی دو مرحله انجام گرفت: در مرحله اول به منظور تعیین توزیع تنش پیش‌کمانش، یک مساله الاستیسیته دوبعدی حل شد و درمرحله دوم با استفاده از این میدان تنش، معادلات کمانش ورق با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل به‌دست آمد و برای حل این معادلات از روش گالرکین استفاده گردید. در این مقاله به منظور محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش، از تابع تنش ایری با ضرایب ثابت مجهول استفاده شد. این تابع به گونه‌ای تعریف شده که شرایط مرزی نیرویی را ارضا کند و ضرایب ثابت آن با کمینه کردن انرژی کرنشی داخل صفحه‌ای به‌دست می‌آیند. کمانش ورق‌های اورتوتروپیک در معرض بارغیریکنواخت توسط برات[5] و باسکار[6] [۲۸] بررسی شد. براساس نتایج این مقاله، تاثیر شکل توزیع بار در لبه‌ها بر روی بار کمانش نسبت به ورق‌های همسانگرد به مراتب بیشتر است. لیسا و کانگ[7] [۲۹، ۳۰] کمانش و ارتعاشات ورق‌ها درمعرض بارگذاری خطی با توزیع‌های مختلف را مورد بررسی قرار دادند. ورق‌های مورد بررسی دارای شرایط مرزی ساده در لبه‌های بارگذاری می‌باشند. با درنظر گرفتن حل مساله به‌صورت حاصل ضرب دو تابع برحسب x و y، معادله کمانش ورق به یک معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر تبدیل و برای حل این معادله، روش سری‌های فروبینیوس به کار گرفته شد و بارکمانش ورق برای توزیع های مختلف بارگذاری در لبه‌ها، به‌دست آمد. برت[8] و دوراکوندا[9] [۳۱] به

[1] Functionally Graded Plates (FGPs)
[2] Levy
[3] Kumar
[4] Ramachandra
[5] Bharat
[6] Bhaskar
[7] Kang
[8] Bert
[9] Devarakonda

بررسی کمانش ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی ساده در تمامی لبه‌ها، که در معرض بارگذاری سینوسی قرار دارند، پرداختند. در این مقاله برای محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش از جمع چندین تابع تنش ایری استفاده شد. پس از محاسبه میدان تنش داخل صفحه‌ای، معادله کمانش ورق که براساس تئوری کلاسیک به‌دست آمده است، با استفاده از روش گالرکین حل شد. یکی از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل، روش مربعات دیفرانسیلی[۱] می‌باشد. این روش که برای اولین بار در سال ۱۹۷۱ توسط بلمن[۲] و کاستی[۳] [۳۲] معرفی شد، یک روش عددی به منظور حل معادلات با شرایط اولیه و نیز معادلات با شرایط مرزی می‌باشد. ونگ[۴] و همکاران [۳۳-۳۵] از این روش برای محاسبه بارکمانش ورق‌های مستطیلی که درمعرض بارغیریکنواخت در لبه‌ها قرار دارند، استفاده نمودند. آنها تاثیر بارگذاری کسینوسی و بارگذاری خطی [۳۳، ۳۴] و نیز بارگذاری به شکل سهمی [۳۵] را بر روی بارکمانش ورق مورد بررسی قرار دادند. جعفری و افتخاری [۳۶] با استفاده از ترکیب روش ریتز و روش مربعات دیفرانسیلی، به بررسی کمانش و ارتعاشات ورق‌های مستطیلی اورتوتروپیک واقع بر روی یک بستر الاستیک پرداختند. در این روش ترکیبی، ابتدا مشتقات جزئی برحسب مختصات ورق، با استفاده از روش ریتز به‌صورت گسسته در آمدند که نتیجه آن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. سپس از روش مربعات دیفرانسیلی برای حل این دستگاه معادلات استفاده شد. آنها پس از بررسی همگرایی روش پیشنهادی، بار کمانش و فرکانس‌های طبیعی ورق را برای حالت‌های مختلف بارگذاری و نیز انواع مختلف شرایط مرزی محاسبه نمودند.

۱-۵-۳ کمانش ورق‌های دارای گشودگی

مارتین[۵] [۳۷] بر روی کمانش ورق‌های کامپوزیت مربعی دارای گشودگی که درمعرض بار کششی تک محوره قرار دارند، مطالعه نمود. تحلیل انجام شده در این کار، براساس روش ریلی-ریتز می‌باشد که در آن انتگرال‌های دوگانه به روش عددی محاسبه و نتایج عددی و تحلیلی مربوط به چندین ورق کامپوزیتی متقارن و نامتقارن و دارای گشودگی دایروی ارائه شد. مارشال[۶] و همکاران [۳۸] کمانش ورق‌های مستطیلی اورتوتروپیک در معرض بارگذاری فشاری و دارای گشودگی دایروی را به روش تحلیلی و تجربی مورد بررسی قرار دادند. نتایج تقریبی-تحلیلی برای ورق‌های دارای شرایط مرزی ساده با استفاده از روش ریلی-ریتز به‌دست آمد. نمس و همکاران

[1] Differential Quadrature Method (DQM)
[2] Bellman
[3] Casti
[4] Wang
[5] Martin
[6] Marshall

[۳۹] کمانش ورق‌های کامپوزیتی مستطیلی که دارای گشودگی دایروی در مرکز صفحه هستند را مورد مطالعه قرار دادند. آنها برای تحلیل ورق از یک روش تقریبی استفاده نمودند که در آن معادلات مربوط به پیش‌کمانش و کمانش ورق، که به شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل دوبعدی هستند، به‌دستگاه معادلات دیفرانسیل یک بعدی خطی با ضرایب متغیر تبدیل شدند. این معادلات با روش تفاضلات محدود[۱] حل شدند. نتایج به‌دست آمده براساس این حل تقریبی-تحلیلی با حل به‌دست آمده از روش اجزای محدود و نیز نتایج تجربی برای تعدادی از ورق‌ها مقایسه و تطابق خوبی بین آنها مشاهده شد. ورق‌های بررسی شده دارای شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار بودند. اون[۲] و کلانگ[۳] [۴۰] به منظور محاسبه بارکمانش ورق‌های اورتوتروپیک دارای گشودگی دایروی در مرکز، از سری مثلثاتی به منظور تقریب تغییر شکل عرضی ورق استفاده نمودند. همچنین بریت[۴] [۴۱، ۴۲] با استفاده از تئوری توابع پتانسیل مختلط برای محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش و استفاده از سری های مثلثاتی پیشنهاد شده توسط اون و کلانگ، به بررسی کمانش پنل های مستطیلی دارای گشودگی بیضوی درمرکز پرداخت. جونز[۵] و کلانگ [۴۳] نیز از روشی مشابه برای حل مساله کمانش ورق‌های کامپوزیتی دارای گشودگی و در معرض ترکیب بار فشاری دو محوره و بار برشی استفاده نمودند. در این مقاله برای تقریب جابجایی عرضی ورق، از سری های مثلثاتی دوگانه استفاده شد. یکی از روش‌های تحلیل ورق‌ها، روش نوار محدود[۶] می‌باشد و تعدادی از محققین [۴۴-۴۸] از این روش به منظور بررسی کمانش ورق‌های دارای گشودگی و بدون گشودگی استفاده نمودند. این روش که در ابتدا توسط چئونگ[۷] [۴۹، ۵۰] در اواخر دهه هفتاد معرفی شد، ابزاری قدرتمند و فراگیر برای تحلیل سازه‌های ورق مانند می‌باشد. این روش در واقع ترکیبی از روش مُدال و روش اجزای محدود می‌باشد و خود دارای شکل‌های مختلفی است. برای مثال در حالت عمومی و رایج مورد استفاده این روش، از توابع ویژه مربوط به یک تیر برای تقریب زدن تغییر شکل ورق در یک جهت و از توابع میان‌یاب برای هرمیتی[۸] برای تقریب آن در جهت دیگر استفاده می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که این روش برای تحلیل سازه‌هایی با شرایط مرزی متداول (ساده-گیردار)، نسبت به روش اجزای محدود موثرتر و بهتر عمل می‌کند [۵۱]. اویسی و فضیلتی[۴۶] از دو مدل روش نوار محدود (روش نیمه تحلیلی و روش اسپیلاین[۹]) براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ارائه شده توسط ردی، به منظور تحلیل ورق‌های کامپوزیت نسبتا ضخیم

---

[1] Finite Differences
[2] Owen
[3] Klang
[4] Britt
[5] Jones
[6] Finite Strip Method
[7] Cheung
[8] Hermite Interpolation Functions
[9] Spline

دارای گشودگی استفاده نمودند. آنها تاثیر وجود دو نوع گشودگی مربعی و دایروی بر روی بار کمانش و فرکانس طبیعی را مورد ارزیابی قرار دادند. همچنین آن‌ها [۴۸] با استفاده از روش نوار محدود به بررسی ناپایداری دینامیکی و کمانش پنل های کامپوزیت دارای گشودگی مربعی و تقویت شده در جهت طولی پرداختند. چئونگ[1] و کونگ[2] [۴۴] نیز از روش نوار محدود براساس توابع اسپیلاین به منظور تحلیل کمانش ورق‌های دارای گشودگی مربعی که در معرض بار برشی قرار دارند، استفاده نمودند. باروت[3] و مادنسی[4] [۵۲] از یک روش نیمه‌تحلیلی به منظور تحلیل پیش‌کمانش و کمانش ورق‌های کامپوزیتی متقارن که در معرض بارگذاری حرارتی و مکانیکی قرار دارند، استفاده کردند. این ورق‌ها دارای گشودگی بیضوی با موقعیت و جهت اختیاری می‌باشند. آنها تحلیل خود را براساس اصل حداقل انرژی پتانسیل با استفاده از توابع پتانسیل مختلط و چند جمله‌ای‌های کامل انجام دادند. توابع پتانسیل مختلط قادر به توصیف گرادیان‌های شدید تنش و تغییر شکل‌های محلی در اطراف ورق می‌باشند. همچنین شرایط مرزی در لبه‌های ورق به کمک فنرهای پیچشی و خطی (قیود الاستیک) با سفتی مناسب مدل شدند. هرمان[5] [۵۳] کمانش و پس‌کمانش ورق‌های دارای گشودگی دایروی و در معرض بارگذاری برشی را بررسی نمود. وی نتایج خود را با استفاده از روش اجزای محدود برای شش نمونه آزمایشی به‌دست آورد. نمس در مقالات متعدد و نیز در گزارشات مختلفی که در موسسه ناسا تهیه نموده است، به بررسی رفتار کمانش و پس‌کمانش ورق‌های دارای گشودگی پرداخته است [۵، ۳۹، ۵۴-۵۶]. وی در مرجع [۵۶] با استفاده از روش تجربی و انجام آزمایشات متعدد بر روی نمونه های مختلف، به بررسی کمانش و پس‌کمانش ورق‌های مربعی ساخته شده از گرافیت-اپوکسی و دارای گشودگی دایروی درمرکز پرداخت. نمونه‌های آزمایشی وی، دارای شرایط مرزی گیردار در لبه‌های بارگذاری شده و شرایط مرزی ساده در لبه‌های دیگر بودند. براساس نتایج این آزمایشات، نمودارهای نیرو برحسب جابجایی خارج صفحه‌ای به‌دست آمدند که تاثیر وجود سوراخ بر ظرفیت تحمل بار توسط ورق را در حالت پیش‌کمانش و پس از کمانش نشان می‌دهند. وی با انجام مطالعات پارامتری، تاثیر پارامترهای مختلف از جمله شرایط مرزی و اندازه سوراخ را بر روی رفتار کمانشی ارزیابی و نتایج کار خود را با نتایج تجربی مقایسه کرد[۵۵]. او همچنین به مرور کارهای انجام شده در زمینه کمانش و پس‌کمانش ورق‌های دارای گشودگی پرداخت [۵]. یاسوئی[6] و تسوکامورا[7] [۵۷] به مطالعه رفتار کمانش ورق‌های کامپوزیتی با شرایط مرزی ساده و دارای گشودگی دایروی و مربعی واقع در مرکز صفحه پرداختند. آنها برای

[1] Cheung
[2] Kong
[3] Barut
[4] Madenci
[5] Herman
[6] Yasui
[7] Tsukamura

تحلیل ورق از روش اجزای محدود استفاده نمودند. نتایج ارائه شده توسط آنها، دربردارنده تاثیر اندازه و شکل سوراخ و نیز نسبت ظاهری ورق بر بارکمانش می‌باشد. وو[1] و مو[2] [۵۸] با استفاده از روش محاسبات تجربی، روابطی را برای محاسبه ضرایب شدت تنش در ورق‌های همسانگرد و اورتوتروپیک با ابعاد محدود و دارای گشودگی دایروی ارائه نمودند. این ورق‌ها در معرض بارگذاری تک محوره بودند. همچنین مطابقت خوبی بین نتایج کار خود و روش اجزای محدود مشاهده کردند. قنادپور و همکاران [۵۹] کمانش ورق‌های مستطیلی کامپوزیتی را با استفاده از روش اجزای محدود بررسی و تاثیر پارامترهایی همچون اندازه و شکل سوراخ، نسبت ظاهری و شرایط مرزی ورق بر بار کمانش را ارزیابی نمودند. براساس نتایج این مقاله، ورق‌هایی که دارای گشودگی هستند در بعضی حالت‌ها، در بارهای بیشتری نسبت به ورق‌های بدون گشودگی کمانش می‌کنند. اثر بارگذاری دو محوره بر پایداری ورق‌های کامپوزیتی با گشودگی مربعی، توسط آنیل[3] و همکاران [۶۰] بررسی شد. آنها برای تحلیل ورق از روش اجزای محدود براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا استفاده نمودند. نحوه تغییرات بار کمانش در ورق‌های کامپوزیتی متقارن ضخیم و نازک نسبت به زاویه قرارگیری الیاف، مورد بررسی قرار گرفت. در این مقاله تاثیر میدان تنش پیش‌کمانش بر رفتار کمانشی ورق لحاظ شد.

کومار و سینگ[4] [۶۱-۶۳] در مقالات خود به بررسی پایداری و شکست ورق‌های کامپوزیتی دارای گشودگی با شکل‌های مختلف پرداختند. ورق‌های مورد بررسی دارای گشودگی هایی به شکل دایره، مربع، لوزی، بیضی عمودی و بیضی افقی می‌باشند. تحلیل ورق با استفاده از روش اجزای محدود و براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌باشد و به منظور درنظر گرفتن غیرخطی هندسی، از فرضیات فن کارمن استفاده شد. در این مقالات تاثیر شرایط مرزی و نیز تاثیر ترکیب بارگذاری فشاری تک محوره و بارگذاری برشی داخل صفحه‌ای بر رفتار کمانشی و نیز شکست ورق‌های کامپوزیتی مورد ارزیابی قرار گرفت. توپال[5] و اوزمان[6] [۶۴] به بهینه سازی بارکمانش ورق‌های کامپوزیتی دارای گشودگی دایروی و با شرایط مرزی ساده در تمامی لبه‌ها پرداختند. هدف بهینه سازی، بیشینه کردن بارکمانش ورق و متغیر بهینه سازی، جهت قرارگیری الیاف بوده و بهینه سازی با استفاده از روش MFD[7] انجام شد. اوینانس[8] و آچور[9] [۶۵] کمانش ورق‌های کامپوزیتی دارای

1 Wu
2 Mu
3 Anil
4 Singh
5 Topal
6 Uzman
7 Modified Feasible Direction
8 Ouinas
9 Achour

گشودگی بیضوی را با استفاده از روش اجزای محدود به کمک نرم افزار آباکوس بررسی کرده و بارکمانش را برای مقادیر مختلف اندازه سوراخ (نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک بیضی)، جهت‌گیری و موقعیت سوراخ ارائه دادند. نتایج نشان می‌دهد که کمترین بار کمانش مربوط به سوراخ دایروی می‌باشد. ناتاراجان[1] و همکاران [۶۶، ۶۷] با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته به بررسی پارامتریک کمانش ورق‌های FGM دارای ترک و گشودگی پرداختند. در مرجع [۶۶] معادلات ورق براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج و تغییرات ماده تنها در راستای ضخامت درنظر گرفته شد. تاثیر پارامترهای مختلفی همچون طول و موقعیت ترک، شعاع گشودگی و موقعیت آن، نسبت ظاهری و ضخامت ورق و نیز تاثیر شرایط مرزی بر روی بار کمانش بررسی شد. براساس نتایج این مقاله، بار کمانش با افزایش طول ترک، شعاع گشودگی و نیز ضریب گرادیان ماده کاهش می‌یابد. آنها در مقاله [۶۷] به بررسی کمانش و ارتعاشات ورق‌های کامپوزیتی دارای گشودگی که در معرض رطوبت و تغییرات دما قرار دارند، پرداختند و تاثیر دو نوع سوراخ دایروی و بیضوی، هندسه ورق، میزان تمرکز و انباشت رطوبت، گرادیان حرارتی و نیز شرایط مرزی بر فرکانس های طبیعی و بار کمانش را مورد بررسی قرار دادند. کومور و همکاران [۶۸] کمانش ورق‌های کامپوزیتی مربعی دارای گشودگی به شکل دایره و بیضی را با استفاده از روش عددی به کمک نرم افزار انسیس مورد مطالعه قرار دادند. در این مقاله تاثیر موقعیت و اندازه گشودگی و جهت‌گیری سوراخ بیضوی بر روی بار کمانش ورق بررسی و براساس داده‌های عددی به‌دست آمده، مشاهده شد که ورق‌های کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد[2] مقاومت بیشتری در مقایسه با ورق‌های با لایه گذاری زاویه‌دار[3] در مقابل کمانش از خود نشان می‌دهند. کمانش و تحلیل حساسیت ورق‌های کامپوزیت دارای گشودگی دایروی درمرکز که تحت اعمال همزمان بار مکانیکی و حرارتی قرار دارند، توسط نور و همکاران [۶۹، ۷۰] بررسی شد. آنها در مرجع [۷۰] به بررسی کمانش و پس‌کمانش این ورق‌ها که تحت اعمال بارحرارتی ناشی از تغییر دما در راستای ضخامت ورق و بارمکانیکی برشی در لبه‌های ورق قرار دارند، پرداختند و در مرجع [۶۹] ورق‌های درمعرض بار حرارتی و بار مکانیکی فشاری را بررسی کردند. این نویسندگان در مقالات خود از روش عددی که در آن متغیرهای مساله شامل مولفه‌های جابجایی و نیز منتجه‌های تنش و یا کرنش های میانگین در راستای ضخامت ورق می‌باشند، به منظور تحلیل ورق استفاده و نتایج خود را درقالب منحنی‌های مربوط به مرز پایداری، منحنی‌های تغییر شکل عرضی برحسب نیرو برای توصیف رفتار پس‌کمانش و نیز ضرایب حساسیت که نشان‌دهنده حساسیت پاسخ کمانش و پس‌کمانش ورق نسبت به تغییرات سفتی ورق و جنس لایه‌ها می‌باشد، ارائه نمودند. تحلیل تنش و محاسبه ضریب تمرکز تنش در ورق‌های دارای گشودگی توسط رضایی‌پژند و

[1] Natarajan
[2] Cross-Ply
[3] Angle-Ply

جعفری [۷۱-۷۳] انجام شد. آنها از یک روش تحلیلی براساس تئوری الاستیسیته اجسام ناهمسانگرد که توسط لخنیتسکی مطرح شده است، به منظور تعیین توزیع تنش و محاسبه ضریب تمرکز تنش استفاده و نتایج کار خود را با روش اجزای محدود مقایسه نمودند. همچنین تاثیر هندسه گشودگی (دایره، مربع، مثلث و ...) و جهت‌گیری آن و نیز نوع ماده (همسانگرد و ناهمسانگرد) را مورد بررسی قرار دادند.

مروت و رحیمی در مقاله خود [۷۴] به مطالعه پارامتریک توزیع تنش و کرنش، جابجایی و محاسبه بار بحرانی کمانش ورق‌ها و پنل‌های کامپوزیتی با سه نوع گشودگی پرداختند. دراین مقاله از نرم افزار المان محدود انسیس به منظور بررسی ورق‌ها با گشودگی دایروی، مربعی و مربعی پخ دار و مقایسه رفتار ورق‌ها با پنل‌های خمیده متناظر استفاده شد. نائوس[1] و همکاران [۷۵] به بررسی تجربی رفتار کمانشی و شکست ورق‌های مستطیلی کامپوزیت از جنس گرافیت-اپوکسی با شرایط مرزی ساده که دارای گشودگی دایروی با اندازه‌های مختلف بودند، پرداختند. بیلی و وود[2] [۷۶] با استفاده از روش اجزای محدود به کمک نرم افزار انسیس به بررسی رفتار کمانش و پس‌کمانش ورق‌های کامپوزیت دارای گشودگی‌هایی به شکل دایره، مربع و بیضی و با شرایط مرزی گیردار در تمامی لبه‌ها که در معرض بارگذاری فشاری دو محوره قرار دارند، پرداختند. در این مقاله نتایج حل عددی با نتایج تجربی مقایسه و مطابقت خوبی بین آنها گزارش شده است. بابا[3] و بالتاسی[4] [۷۷] از روش عددی به کمک نرم افزار انسیس و روش تجربی، به منظور بررسی رفتار کمانشی ورق‌های کامپوزیتی دارای گشودگی استفاده نمودند. مطالعه آنها بر روی دو نوع سوراخ، یکی سوراخ دایروی در مرکز و دیگری سوراخ نیم‌دایروی در لبه‌ها انجام و تاثیر دو نوع ساختار کامپوزیتی و سه نوع شرط مرزی بر روی بار کمانش ارزیابی شد. براساس مقایسه نتایج عددی و تجربی، مقادیر تجربی به‌دست آمده برای بار کمانش بزرگتر از مقادیر پیش بینی شده از روش عددی می‌باشند و دلایل این امر، نقص اولیه نمونه‌ها، اورتوتروپی ماده و شرایط انجام آزمایشات عنوان شده است.

شاکرلی[5] و برون[6] [۷۸] از روش بار-جابجایی مزدوج[7] به منظور بررسی کمانش ورق‌های همسانگرد دارای گشودگی مستطیلی استفاده نمودند. در این مقاله دو نوع بارگذاری، شامل بارگذاری فشاری تک محوره و بارگذاری برشی و دو نوع شرط مرزی ساده وگیردار در تمامی لبه‌ها، مورد بررسی قرار گرفت و بارکمانش ورق به

[1] Knauss
[2] Wood
[3] Baba
[4] Baltaci
[5] Shakerley
[6] Brown
[7] Conjugate Load/Displacement

ازای ابعاد مختلف گشودگی و موقعیت‌های مختلف قرارگیری آن نسبت به محورهای ورق محاسبه شد. روش سفتی منفی[1] توسط تام[2] و همکاران [۷۹] به منظور بررسی ارتعاشات و پایداری ورق‌ها با تغییرات ناگهانی ضخامت و نیز ورق‌ها دارای گشودگی مورد استفاده قرار گرفت. آنها از تئوری مندلین برای ورق‌های نسبتا ضخیم، به همراه روش اجزای محدود استفاده نمودند و اثر اندازه سوراخ و تغییر ضخامت را بر روی فرکانس طبیعی و بارکمانش ورق مورد ارزیابی قرار دادند. یکی از مزیتهای این روش آن است که استفاده از یک مش درشت با المان‌های مرتبه بالا می‌تواند به خوبی اثر وجود سوراخ را مدل نماید. کمانش ورق‌های دارای گشودگی مستطیلی که در معرض بار متمرکز فشاری در لبه‌های مقابل قراردارند، توسط برون [۸۰] مورد بررسی قرار گرفت. وی از روش نیرو-جابجایی تلفیقی استفاده نمود و تاثیر محل اعمال بار متمرکز، چهار نوع شرط مرزی و نیز ابعاد سوراخ و نسبت ظاهری ورق بر بارکمانش را بررسی کرد. براساس نتایج، با انتخاب مناسب ابعاد و موقعیت قرارگیری سوراخ، می‌توان اثر آن بر بار کمانش را تا حد زیادی کاهش داد.

سینگ و پائول[3] [۸۱] با استفاده از روش ریتز به تحلیل تغییر شکل عرضی ورق‌های مربعی دارای سوراخ دایروی در مرکز و نیز ورق‌های دایروی دارای سوراخ مربعی و دایروی در مرکز پرداختند. برای تحلیل مساله، هندسه صفحه به چندین بخش که هربخش دارای مرزهای منحنی شکل است، تقسیم شد. سپس برای بیان هندسه و میدان جابجایی هر بخش، از دو نوع توابع میان یاب متفاوت استفاده شد که درآن میدان جابجایی با چند جمله‌ای‌های مرتبه بالا، میان‌یابی می‌شود. در نهایت معادلات ماتریسی سیستم با استفاده از اصول حساب تغییرات به‌دست آمد. مزیت این روش نسبت به روش اجزای محدود، کم بودن تعداد بخش‌ها نسبت به تعداد المان‌ها در روش اجزای محدود است. ارتعاشات و کمانش ورق‌های دارای گشودگی به شکل دایره، بیضی و مستطیل که در معرض بار داخل صفحه‌ای کششی و فشاری قرار دارند، توسط پرابهاکارا[4] و داتا[5] [۸۲] مورد مطالعه قرار گرفت. معادلات ماتریسی سیستم با استفاده از روش انرژی به‌دست آمد و حل مساله با استفاده از روش اجزای محدود صورت گرفت. یک ورق دارای گشودگی می‌تواند تحت اعمال نیروی کششی در لبه‌ها نیز دچار کمانش شود. علت این امر، آن است که هنگامی که ورق درمعرض کشش قرار می‌گیرد، ناحیه‌ای در اطراف گشودگی ایجاد می‌شود که دارای تنش‌های فشاری می‌باشد. وجود این ناحیه، باعث ایجاد کمانش محلی در اطراف گشودگی می‌شود. تحلیل رفتار ارتعاشی ورق نشان می‌دهد که با افزایش بار کششی، فرکانس ورق ابتدا

[1] Negative Stiffness Method
[2] Tham
[3] Paul
[4] Prabhakara
[5] Datta

افزایش می‌یابد؛ اما با افزایش بیشتر بار، فرکانس روند کاهشی پیدا کرده که نشان دهنده آغاز وقوع کمانش محلی می‌باشد. شیمیزو[۱] و یوشیدا[۲] [۸۳] با استفاده از روش اجزای محدود به مطالعه کمانش ورق‌ها دارای گشودگی که درمعرض بارداخل صفحه‌ای کششی می‌باشند، پرداختند و بار کمانش را برای نسبت‌های ظاهری و عرض بارگذاری مختلف، به‌دست آوردند. هارادا[۳] و فوجیکوبو[۴] [۸۴] با استفاده از روش اجزای محدود به‌کمک نرم‌افزار MSC/MARC کمانش ورق‌های مستطیلی دارای گشودگی و با شرایط مرزی ساده را مورد بررسی قرار دادند. ال سوی[۵] و نظمی[۶] [۸۵] به بررسی کمانش ورق‌های مستطیلی دارای گشودگی با شرایط مرزی ساده و در معرض بارگذاری فشاری تک محوره با استفاده از روش اجزای محدود به کمک نرم افزار انسیس پرداختند. مرکز سوراخ در نقاط مختلف ورق قرار داشته و گشودگی از نوع دایروی و مستطیلی با گوشته‌های گرد می‌باشد. براساس نتایج این مقاله، ورق‌های دارای گشودگی مستطیلی رفتار بهتری نسبت به گشودگی دایروی دارند. همچنین برای ورق‌های دارای گشودگی دایروی، یک ناحیه بحرانی تعریف شده است که مرکز سوراخ نباید در این ناحیه قرار گیرد. پیشنهاد شده است که فاصله بین لبه سوراخ دایروی و نزدیکترین لبه ورق که بارگذاری روی آن انجام نشده است، کمتر از $0.1b$ نباشد که در آن b عرض ورق (عرض لبه بارگذاری شده) می‌باشد. کمانش ورق‌های دارای چندین گشودگی توسط معن[۷] و اسچافر[۸] [۸۶] مورد بررسی قرار گرفت و روابطی برای تخمین تاثیر وجود یک و یا چند سوراخ بر روی تنش‌های بحرانی ورق ارائه شد. برای تحلیل ورق از نرم افزار آباکوس استفاده شد. همچنین حساسیت تنش‌های بحرانی به اندازه و فاصله بین سوراخ‌ها مورد بررسی قرار گرفت. براساس نتایج، وجود سوراخ می‌تواند با توجه به هندسه و فاصله بین سوراخ‌ها، باعث افزایش و یا کاهش تنش‌های بحرانی نسبت به یک ورق بدون سوراخ شود. کمانش ورق‌های دارای گشودگی که در معرض بارگذاری خطی یا غیرخطی در لبه‌ها می‌باشند، توسط کومور[۹] و سونمز[۱۰] [۸۷] و به کمک نرم افزار انسیس بررسی شد. آنها با تغییر محل قرار گیری سوراخ دایروی در راستای محور طولی ورق، تاثیر موقعیت سوراخ بر رفتار کمانشی ورق را ارزیابی نمودند. مایورانا[۱۱] و همکاران [۸۸] کمانش ورق‌های دارای گشودگی به شکل دایره و مستطیل و با شرایط مرزی ساده در تمامی لبه‌ها را مورد مطالعه قرار دادند. بارگذاری ورق‌های بررسی شده تنها در قسمتی

---

[1] Shimizu
[2] Yoshida
[3] Harada
[4] Fujikubo
[5] El-Sawy
[6] Nazmy
[7] Moen
[8] Schafer
[9] Komur
[10] Sonmez
[11] Maiorana

از لبه ورق و به‌صورت متقارن است. به منظور تحلیل ورق، از روش اجزای محدود استفاده و بار کمانش برای مقادیر مختلف عرض بارگذاری و نیز برای دو نوع گشودگی واقع در نقاط مختلف ورق محاسبه شد. براساس نتایج عددی به‌دست آمده، پیشنهادهایی در مورد موقعیت و نحوه قرارگیری گشودگی ارائه شد. ال سوی و همکاران [۸۹] از روش اجزای محدود به منظور محاسبه بارکمانش ورق‌های دارای گشودگی دایروی که در معرض بارگذاری دو محوره می‌باشند، استفاده نمودند. ورق مورد بررسی دارای شرایط مرزی ساده در تمامی لبه‌ها می‌باشد. آنها تاثیر پارامترهای مختلف همچون نسبت بار اعمالی در راستای محورهای طولی و عرضی ورق، نسبت ظاهری ورق و قطر و موقعیت گشودگی را بر بارکمانش ورق مطالعه کردند. براساس نتایج، در اکثر موارد با افزایش قطر سوراخ، بار کمانش کاهش می‌یابد. همچنین در نسبت بار منفی (بارگذاری دومحوره کششی و فشاری) وجود سوراخ باعث کاهش شدید بارکمانش می‌شود. فاضلی [۹۰] با استفاده از روش اجزای محدود اثر گشودگی بیضوی بر کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تحت بار محوری را مورد بررسی قرار داد. وی با استفاده از نرم افزار آباکوس، منحنی بار-جابجایی را برای حالت‌های مختلف اندازه و مکان گشودگی به‌دست آورد و با استفاده از روش حداقل مربعات، روابطی را برای محاسبه نسبت بار به باربحرانی ارائه نمود. کمانش حرارتی و مکانیکی ورق‌های دارای گشودگی دایروی و مربعی مرکزی، توسط کو[۱] و ادواردز[۲] [۹۱] بررسی شد. آنها از روش اجزای محدود به منظور بررسی اثر شرایط مرزی، نسبت ظاهری ورق، نوع سوراخ و اندازه آن بر مقاومت ورق در مقابل کمانش حرارتی و مکانیکی استفاده نمودند. براساس نتایج این مطالعه، با افزایش اندازه سوراخ می‌توان مقاومت ورق را در برابر کمانش حرارتی افزایش داد. اما در مورد بارگذاری مکانیکی، این افزایش مقاومت در برابر کمانش، تنها برای شرایط مرزی و نسبت‌های ظاهری مشخصی رخ می‌دهد. همچنین در بین ورق‌ها با سوراخ دایروی و مربعی که مساحت گشودگی یکسانی دارند، مقاومت ورق‌ها با سوراخ مربعی در مقابل کمانش، بیشتر از ورق‌ها با سوراخ دایروی می‌باشد. شریعتی و فرجیان [۹۲] به بررسی تاثیر نقص اولیه بر رفتار کمانشی ورق مستطیلی دارای گشودگی با استفاده از روش تجربی و عددی پرداختند و تاثیر وجود سوراخ دایروی در نقاط مختلف ورق و نیز تاثیر نقص اولیه بر رفتار کمانش و پس‌کمانش آن را ارزیابی نمودند. اثر عرض بارگذاری بر روی کمانش صفحات مستطیلی دارای گشودگی به شکل مربع و دایره توسط شریعتی و دادرسی [۹۳، ۹۴] بررسی شد. در این تحقیقات از روش تست تجربی و از روش عددی به کمک نرم افزار آباکوس به منظور به‌دست آوردن منحنی‌های بار-جابجایی استفاده و نتایج حاصل با هم مقایسه شد. نتایج نشان داد که با افزایش عرض بارگذاری از حالت متمرکز به حالت گسترده، مقدار بار قابل تحمل توسط ورق‌های دارای گشودگی افزایش می‌یابد. همچنین

[1] Ko
[2] Edwards

این نویسندگان در مقاله‌ای دیگر [۹۵] به بررسی کمانش مخروط‌های ناقص فولادی دارای گشودگی مستطیلی با نسبت اضلاع مختلف پرداختند و تاثیر ابعاد گشودگی و نیز ارتفاع مخروط بر بارکمانش را ارزیابی نمودند. فرجیان و همکاران [۹۶] به بررسی تجربی و عددی رفتار کمانشی و پس‌کمانشی ورق‌های فولادی دارای گشودگی شیاری شکل با ابعاد و جهت‌گیری‌های مختلف پرداختند. در نمونه‌های آزمایشی، لبه‌های بارگذاری شده دارای شرایط مرزی گیردار و لبه‌های دیگر دارای شرایط مرزی آزاد می‌باشند. براساس نتایج تجربی به‌دست آمده، فرمول‌هایی به منظور پیش بینی بار کمانش این ورق‌ها ارائه شد.

۱-۶ خلاصه مقالات مرور شده در زمینه کمانش ورق‌های دارای گشودگی

authors	Plate shape		Cutout shape				Plate material		Loading type			Boundary condition			Solution type		
	rectangle	**square**	**circular**	**rectangle**	**elliptical**	**other**	**isotropic**	**composite**	**compression**	**shear**	**other**	**Simply support**	**clamped**	**other**	**Semi-analytic**	**numerical**	**experimental**
Martin [۳۷]		*	*					*	*			*			*		*
Marshall [۳۸]	*		*					*	*			*			*		*
Nemeth [۳۹]	*		*					*	*			*	*		*		*
Klang [۴۰]	*		*					*		*					*		
Britt [۴۱, ۴۲]		*			*			*		*	*				*		
Jones [۴۳]			*				*	*	*	*				*	*		
Cheung [۴۴]	*			*			*	*		*				*	*		
Ovesy [۴۶]	*		*	*				*	*			*	*		*		
Fazilat [۴۸]	*			*				*	*			*			*		
Barut [۵۲]	*				*			*	*			elastic			*		
Shakerley [۷۸]		*		*			*		*	*		*	*		*		
Tham [۷۹]		*		*			*		*			*	*		*		
Brown [۸۰]	*			*			*		*					*	*		
Singh [۸۱]		*	*	*			*					*			*		
Herman [۵۳]		*	*					*		*		*				*	
Nemeth [۵۵]	*	*	*					*	*			*		*		*	

authors	Plate shape		Cutout shape				Plate material		Loading type			Boundary condition			Solution type		
	rectangle	**square**	**circular**	**rectangle**	**elliptical**	**other**	**isotropic**	**composite**	**compression**	**shear**	**other**	**Simply support**	**clamped**	**other**	**Semi-analytic**	**numerical**	**experimental**
Nemeth ۵۴][	*	*	*	*	*		*		*					*			*
Nemeth ۵۶][	*	*	*				*	*	*			*	*				*
Yasui ۵۷][	*		*	*				*	*			*				*	
Wu ۵۸][	*		*				*	*	*		*					*	
Ghannad pour ۵۹][	*		*		*			*	*			*		*		*	
Anil ۶۰][		*		*				*	*					*		*	
Kumar ۶۱][	*		*				*		*			*				*	
Topal ۶۴][	*		*					*			*	*				*	
Ouinas ۶۵][		*	*		*			*	*					*		*	
Natarajan ۶۶][	*		*				FGM		*		*	*		*		*	
Natarajan ۶۷][	*		*		*			*	*			*	*			*	
Komur ۶۸][		*	*		*			*	*					*		*	
Noor ۶۹][	*		*					*		*		*				*	
Noor ۷۰][	*		*					*	*			*				*	
Prabhakara ۸۲][		*	*	*	*		*		*			*				*	
Shimizu ۸۳][	*		*	*			*		*			*				*	
Harada ۸۴][	*		*		*		*		*	*		*				*	

authors	Plate shape		Cutout shape				Plate material		Loading type			Boundary condition			Solution type		
	rectangle	**square**	**circular**	**rectangle**	**elliptical**	**other**	**isotropic**	**composite**	**compression**	**shear**	**other**	**Simply support**	**clamped**	**other**	**Semi-analytic**	**numerical**	**experimental**
El-Sawy ۸۵][	*		*	*			*		*			*				*	
Moen ۸۶][	*			*		*	*		*			*		*		*	
Komur ۸۷][	*		*				*		*			*				*	
Maiorana ۸۸][	*	*	*	*			*		*			*				*	
El-Sawy ۸۹][	*		*			*	*		*			*				*	
Ko ۹۱][	*		*	*			*		*					*		*	
Knauss ۷۵][	*		*					*	*					*			*
Bailey ۷۶][		*	*	*	*			*			*		*				
Okutan Baba ۷۷][	*		*					*	*				*	*		*	*
شریعتی [۹۲]	*		*				*		*					*		*	*
شریعتی [۹۵]	*		*	*			*		*					*		*	*
شریعتی]۹۴	*		*	*			*		*					*		*	*
فرجیان]۹۶	*					*	*		*					*		*	*

۱-۷ بیان مساله و نوآوری

در این فصل ابتدا به توضیح پدیده کمانش، چگونگی وقوع این پدیده و نیز انواع مختلف آن پرداخته شد و عوامل موثر در کمانش ورق‌ها شامل نوع بارگذاری، شرایط مرزی، رفتار ماده و غیره مورد بررسی قرار گرفت. سپس در مورد تئوری‌های مختلف مربوط به تحلیل ورق‌ها و سیر تکامل آن‌ها به طور مختصر توضیح داده شد و پس از آن به بررسی تاریخچه و مرور مقالات چاپ شده در زمینه کمانش ورق‌های دارای گشودگی پرداخته شد. با مطالعه تحقیقات انجام گرفته از سال ۱۹۷۲ تا زمان حاضر که در این فصل به آنها اشاره شد، مشخص می‌شود که بسیاری از حل‌های ارائه شده بر اساس روش‌های عددی مانند روش اجزای محدود، روش مربعات دیفرانسیلی و روش تفاضلات محدود است. برای یک ورق بدون گشودگی که درمعرض باریکنواخت داخل صفحه‌ای در لبه‌ها قرار دارد، میدان تنش به راحتی از معادلات تعادل قابل محاسبه می‌باشد. وجود گشودگی، میدان تنش داخل صفحه‌ای (میدان تنش پیش‌کمانش) را به مختصات وابسته می‌کند و معادلات پایداری که از حل آنها شکل مد و بارکمانش قابل محاسبه می‌باشند، به‌صورت معادلات با مشتقات جزئی و با ضرایب متغیر تبدیل خواهند شد. مرور مقالات نشان می‌دهد که تاکنون روش حل تحلیلی و یا نیمه تحلیلی برای این معادلات ارائه نشده است. بنابراین با توجه به اهمیت موضوع کمانش ورق‌های دارای گشودگی، در تحقیق حاضر، هدف ارائه یک حل ریاضی برای رفتار کمانشی این ورق‌ها می‌باشد. نوآوری‌های رساله حاضر را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

۱-ارائه روشی براساس انتگرال شرایط مرزی و استفاده از آن برای اعمال شرایط مرزی در لبه‌های خارجی ورق محدود به منظور محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش با استفاده از روش توابع پتانسیل مختلط.

۲- ارائه یک روش حل برای محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش در یک ورق محدود با گشودگی دایروی براساس بسط تابع تنش در مختصات قطبی و اعمال شرایط مرزی با استفاده از انتگرال شرایط مرزی.

۳-حل تحلیلی معادلات پایداری ورق حلقوی براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به کمک تئوری اغتشاشات.

۴- استفاده از توابع مشخصه مربوط به ارتعاشات آزاد یک تیر برای حل معادلات پایداری در یک ورق مستطیلی دارای گشودگی با شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش ریتز.

فصل دوم:

استخراج معادلات حاکم

۲-۱ مقدمه

در این فصل به استخراج معادلات حاکم بر مساله کمانش پرداخته می‌شود. برای این منظور از روش کار مجازی استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن میدان جابجایی ورق براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات تعادل به‌دست می‌آید. پس از آن از روش تعادل در مجاورت[1] برای به‌دست آوردن معادلات پایداری در مختصات کارتزین و قطبی استفاده می‌شود. فرضیات مساله به صورت زیر است:

- جنس ورق همگن و همسانگرد بوده و در ابتدا کاملا مسطح و بدون نقص اولیه می‌باشد.
- میدان جابجایی ورق بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تعریف می‌شود که بر اساس آن، کرنش ε_z در راستای ضخامت ورق برابر با صفر است.
- فرض می‌شود مولفه تنش σ_z نیز برابر با صفر است.
- از روابط غیرخطی فن کارمن برای تعریف سینماتیک مساله استفاده می‌شود.
- ورق دارای ابعاد محدود بوده و گشودگی در مرکز آن واقع شده است.
- بارگذاری ورق در تمامی حالت‌ها و در تمامی جهت‌ها به صورت فشاری است.
- حالت‌های مختلف بارگذاری یکنواخت و غیریکنواخت به صورت سهمی شکل و کسینوسی و به شکل تک محوره و دومحوره مورد بررسی قرار می‌گیرد.
- بارکمانش با استفاده از حل یک مساله مقدارویژه به‌دست می‌آید و تحلیل رفتار ورق پس از کمانش موردنظر نیست.

۲-۲ اصل کار مجازی

براساس اصل کار مجازی، اگر یک جسم در حالت تعادل قرار داشته باشد، کار مجازی تمام نیروهای داخلی و خارجی در طی یک جابجایی مجازی سازگار با قید های هندسی سیستم برابر با صفر می‌باشد [۹۷]:

$$\delta W_I + \delta W_E = 0 \qquad (۲-۱)$$

تمامی نیروهای اعمالی در حین انجام کار مجازی، ثابت بوده و تغییر نمی‌کنند. در رابطه (۲-۱) δW_I کار مجازی نیروهای داخلی و δW_E کار مجازی نیروهای خارجی بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۹۷]:

[1] Adjacent Equilibrium Method

$$
\begin{aligned}
&\delta W_I = \int_\Omega \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dv = \int_\Omega (\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz})dv \\
&\delta W_E = -\left(\int_\Omega \boldsymbol{f}.\delta\boldsymbol{u}\,dv + \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{T}.\delta\boldsymbol{u}\,ds\right)
\end{aligned}
\qquad (۲-۲)
$$

که در آن dv المان حجم، Ω دامنه تعریف و Γ_σ قسمتی از مرز است که به آن نیرو وارد می‌شود. همچنین $\boldsymbol{f}$ بردار نیروهای حجمی، $\boldsymbol{T}$ بردار اثر[1] سطحی و $\boldsymbol{u}$ بردار مولفه‌های جابجایی می‌باشند.

۲-۳ استخراج معادلات حاکم

۲-۳-۱ معادلات تعادل

به منظور به‌دست آوردن معادلات حاکم بر کمانش یک ورق، از اصل کار مجازی استفاده می‌شود. در این روش علاوه بر معادلات تعادل، شرایط مرزی نیز به‌دست می‌آیند. در ادامه معادلات تعادل ورق، براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به‌دست می‌آیند. در این تئوری، میدان جابجایی به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$
u = u_0(x,y) + zu_1(x,y),\ \ v = v_0(x,y) + zv_1(x,y),\ \ \ w = w_0(x,y) \qquad (۳-۲)
$$

که در آن u_0 و v_0 مولفه‌های جابجایی صفحه میانی ورق بوده، u_1 و v_1 بیانگر چرخش خط عمود بر صفحه میانی به ترتیب نسبت به محور های y و x می‌باشند و w_0 مربوط به تغییر شکل عرضی (خارج صفحه‌ای) صفحه میانی می‌باشد. روابط کرنش-جابجایی بر اساس تانسور کرنش گرین-لاگرانژ[2] به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۹۷]:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right], \\
&\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right],\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right), \\
&\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right),\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\qquad (۴-۲)
$$

بر اساس فرض کرنش‌های کوچک[3]، کلیه جملات مرتبه دو در رابطه (۲-۴) قابل صرفنظر کردن می‌باشند؛ اما هنگامی که یک ورق مسطح در معرض بار داخل صفحه‌ای قرار می‌گیرد، با افزایش بار، نهایتا ورق پایداری خود را از دست داده و دچار تغییر شکل عرضی (خارج صفحه‌ای) می‌شود. این تغییر شکل با بارداخل صفحه‌ای رابطه غیرخطی دارد. این رفتار نشان می‌دهد که در تحلیل مساله پایداری، باید جملاتی که بیانگر رابطه غیرخطی بین تغییرات بار و تغییر شکل عرضی می‌باشند، در فرمول‌بندی وارد شوند. تئوری فن کارمن این

[1] Traction
[2] Green-Lagrange Strain Tensor
[3] Small Strain

تاثیرات را درنظر می‌گیرد [۹۸]. بر اساس این تئوری، چرخش خطوط عمود بر صفحه میانی در حین تغییر شکل عرضی ورق ملایم[1] بوده (در حدود ۱۰ تا ۱۵ درجه) و بنابراین جملات مرتبه دو شامل $(\frac{\partial w}{\partial x})^2, (\frac{\partial w}{\partial y})^2, \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$ در مقایسه با جملات مرتبه یک قابل صرفنظر کردن نیستند [۹۷]. بنابراین رابطه (۲-۴) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\
&\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\ \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{۲-۵}$$

اکنون با جایگذاری میدان جابجایی (۲-۳) در روابط (۲-۵)، مقادیر کرنش‌ها براساس جابجایی‌ها به‌صورت رابطه (۲-۶) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + z\frac{\partial u_1}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 + z\frac{\partial v_1}{\partial y},\ \varepsilon_z = 0 \\
&\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y},\ \gamma_{xz} = u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x},\ \gamma_{yz} = v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y}
\end{aligned} \tag{۲-۶}$$

با جایگذاری مقادیر مربوط به کرنش ها از معادلات (۲-۶) در رابطه کار مجازی نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\delta W_I = &\int_{-h/2}^{h/2}\left(\iint_\Omega\left(\sigma_x\left(\delta\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + \delta\left(z\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right) + \sigma_y\left(\delta\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 + \delta\left(z\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\right)\right)dA\right)dz \\
+ &\int_{-h/2}^{h/2}\left(\int_\Omega\left(\tau_{xy}\left(\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + \delta\left(z\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\right) + \delta\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + \tau_{xz}\left(\delta u_1 + \delta\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + \tau_{yz}\left(\delta v_1 + \delta\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\right)dA\right)dz
\end{aligned} \tag{۲-۷}$$

با انتگرال‌گیری در راستای z و با تعریف منتجه‌های تنش، رابطه (۲-۷) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

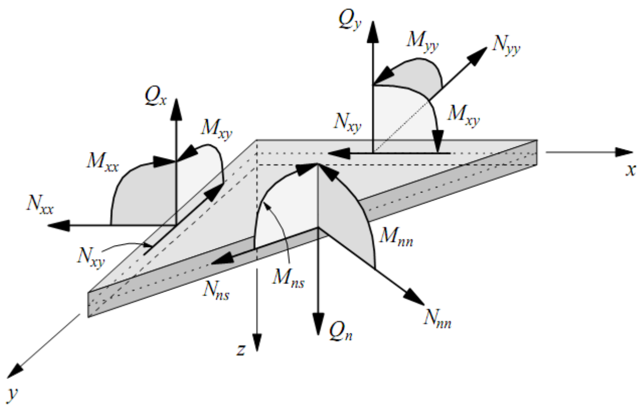
$$\begin{aligned}
\delta W_I = &\iint_\Omega\left(N_x\delta\frac{\partial u_0}{\partial x} + M_x\delta\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}N_x\delta\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + N_y\delta\frac{\partial v_0}{\partial y} + M_y\delta\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{2}N_y\delta\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right)dA \\
+ &\iint_\Omega\left(N_{xy}\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + M_{xy}\delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + N_{xy}\delta\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} + Q_x\left(\delta u_1 + \delta\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + Q_y\left(\delta v_1 + \delta\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\right)dA
\end{aligned} \tag{۲-۸}$$

که در آن منتجه‌های تنش و نیروهای برشی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند. جهت قراردادی مثبت برای این منتجه‌ها در شکل (۲-۱) نشان داده شده است.

[1] Moderate

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} zdz, \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} k_s \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \tag{۹-۲}$$

که در آن k_s ضریب تصحیح برشی بوده و برای درنظر گرفتن تفاوت بین نیروهای برشی در حالت واقعی و نیروهای برشی به‌دست آمده براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تعریف می‌شود. توضیح اینکه تنش‌های برشی به‌دست آمده براساس میدان جابجایی (۲-۳)، در راستای ضخامت ورق ثابت می‌باشند، درحالی که این تنش‌ها در حالت واقعی به‌صورت سهمی شکل هستند [۹۹].



شکل ۲-۱: منتجه‌های تنش وارد سطوح مختلف یک ورق [۳]

جملات موجود در انتگرال δW_I (رابطه (۲-۸)) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}
&N_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} = N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(N_x \delta u_0) - \frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u_0 \\
&M_x \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} = M_x \frac{\partial \delta u_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(M_x \delta u_1) - \frac{\partial M_x}{\partial x}\delta u_1 \\
&\frac{1}{2} N_x \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2} N_x .2 \left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) . \frac{\partial w_0}{\partial x} = N_x \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} . \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x \delta w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) - \frac{\partial N_x}{\partial x}\delta w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} - N_x \delta w_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
&N_y \delta \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(N_y \delta v_0) - \frac{\partial N_y}{\partial y}\delta v_0 \\
&M_y \delta \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(M_y \delta v_1) - \frac{\partial M_y}{\partial y}\delta v_1 \\
&\frac{1}{2} N_y \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(N_y \delta w_0 \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) - \frac{\partial N_y}{\partial y}\delta w_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} - N_y \delta w_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
&N_{xy} \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) = N_{xy}\left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(N_{xy}\delta u_0) - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\delta u_0 + \frac{\partial}{\partial x}(N_{xy}\delta v_0) - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\delta v_0 \\
&M_{xy} \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(M_{xy}\delta u_1) - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta u_1 + \frac{\partial}{\partial x}(M_{xy}\delta v_1) - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta v_1
\end{aligned} \tag{۱۰-۲}$$

$$N_{xy}\delta\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xy}\delta w_0\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)-\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\delta w_0\frac{\partial w_0}{\partial y}-N_{xy}\delta w_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\delta w_0\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$
$$-\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\delta w_0\frac{\partial w_0}{\partial x}-N_{xy}\delta w_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}$$
$$Q_x\left(\delta u_1+\delta\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)=Q_x\delta u_1+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q_x\delta w_0\right)-\frac{\partial Q_x}{\partial x}\delta w_0$$
$$Q_y\left(\delta v_1+\delta\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)=Q_y\delta v_1+\frac{\partial}{\partial y}\left(Q_y\delta w_0\right)-\frac{\partial Q_y}{\partial y}\delta w_0$$

همچنین کار مجازی نیروهای خارجی برای یک ورق که در لبه‌های خود تحت تاثیر نیروهای داخل صفحه‌ای قرار دارد، به‌صورت رابطه (۲-۱۱) محاسبه می‌شود [۱۰۰]:

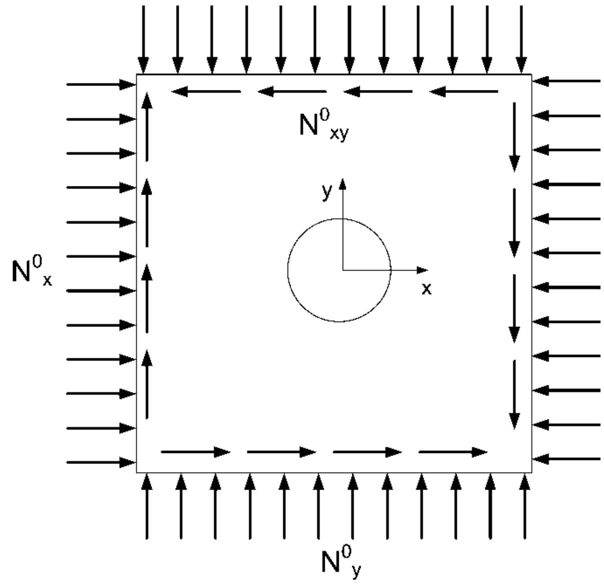
$$\delta W_E=-\oint_C\left(N_x^0\delta u_0dy-N_y^0\delta v_0dx+N_{xy}^0\left(\delta v_0dy-\delta u_0dx\right)\right) \tag{۲-۱۱}$$

که در آن N_x^0,N_y^0,N_{xy}^0 نیروهای عمودی و برشی داخل صفحه‌ای اعمالی بر لبه‌های ورق در واحد طول می‌باشند (شکل۲-۲). اکنون با استفاده از روابط (۲-۸) و (۲-۱۰) و (۲-۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\delta W_I+\delta W_E=0\rightarrow &\iint_\Omega\left(\left(-\frac{\partial N_x}{\partial x}-\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\right)\delta u_0+\left(-\frac{\partial N_y}{\partial y}-\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\right)\delta v_0+\left(-\frac{\partial M_x}{\partial x}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}+Q_x\right)\delta u_1\right)dA\\
&+\iint_\Omega\left(\left(-\frac{\partial M_y}{\partial y}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+Q_y\right)\delta v_1+K_1\delta w_0\right)dA\\
&+\iint_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\delta u_0+M_x\delta u_1+N_x\delta w_0\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{xy}\delta v_0+M_{xy}\delta v_1+N_{xy}\delta w_0\frac{\partial w_0}{\partial y}+Q_x\delta w_0\right)\right)dA\\
&+\iint_\Omega\left(+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_y\delta v_0+M_y\delta v_1+N_y\delta w_0\frac{\partial w_0}{\partial y}+N_{xy}\delta u_0+M_{xy}\delta u_1+N_{xy}\delta w_0\frac{\partial w_0}{\partial x}+Q_y\delta w_0\right)\right)dA\\
&-\oint_C\left(N_x^0\delta u_0+N_{xy}^0\delta v_0\right)dy+\oint_C\left(N_y^0\delta v_0+N_{xy}^0\delta u_0\right)dx=0
\end{aligned} \tag{۲-۱۲}$$

که در آن

$$K_1=-\frac{\partial N_x}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}-N_x\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-\frac{\partial N_y}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}-N_y\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}-N_{xy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}-\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial x}-N_{xy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}-\frac{\partial Q_x}{\partial x}-\frac{\partial Q_y}{\partial y}$$



شکل۲-۲: منتجه‌های نیروی داخل صفحه‌ای وارد بر یک ورق

در رابطه (۲-۱۲)، با استفاده از فرمول گرین، انتگرال دوم بر روی سطح را می‌توان به انتگرال مرزی بر روی مرز سازه تبدیل کرد. فرمول گرین به‌صورت زیر می‌باشد [۱۰۱]:

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{y}}\right)\mathrm{dxdy}=\oint_{C}\left(\mathrm{Pdy}-\mathrm{Qdx}\right) \quad (۲-۱۳)$$

از روابط (۲-۱۲) و (۲-۱۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\delta W_I+\delta W_E=0\rightarrow\iint_{\Omega}\left(\left(-\frac{\partial N_x}{\partial x}-\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\right)\delta u_0+\left(-\frac{\partial N_y}{\partial y}-\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\right)\delta v_0+\left(-\frac{\partial M_x}{\partial x}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}+Q_x\right)\delta u_1\right)dA\\
&+\iint_{\Omega}\left(\left(-\frac{\partial M_y}{\partial y}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+Q_y\right)\delta v_1+K_1\delta w_0\right)dA\\
&+\oint_C\left(\left(N_x dy-N_{xy}dx-N_x^0 dy+N_{xy}^0 dx\right)\delta u_0+\left(N_{xy}dy-N_y dx+N_y^0 dx-N_{xy}^0 dy\right)\delta v_0+\left(M_x dy-M_{xy}dx\right)\delta u_1\right)\\
&+\oint_C\left(\left(M_{xy}dy-M_y dx\right)\delta v_1+\left(N_x\frac{\partial w_0}{\partial x}dy+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}dy+Q_x dy-N_y\frac{\partial w_0}{\partial y}dx-N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}dx-Q_y dx\right)\delta w_0\right)=0
\end{aligned} \quad (۲-۱۴)$$

رابطه انتگرالی بالا تنها در صورتی صادق است که ضرایب $\delta u_0,\delta v_0,\delta u_1,\delta v_1,\delta w_0$ در انتگرال اول بر روی سطح و انتگرال دوم بر روی مرز سازه، صفر باشند. بنابراین معادلات تعادل یک ورق براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با استفاده از روش کار مجازی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\delta u_0:\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0 \quad (۲-۱۵)$$

$$\delta v_0:\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0 \tag{۲-۱۶}$$

$$\delta u_1:\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0 \tag{۲-۱۷}$$

$$\delta v_1:\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=0 \tag{۲-۱۸}$$

$$\begin{aligned}\delta w_0:&N_x\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial N_x}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\\&+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=0\end{aligned} \tag{۲-۱۹}$$

شکل کلی شرایط مرزی مساله به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&\delta u_0=0 \quad or \quad \oint_C\left((N_x-N_x^0)dy+\left(N_{xy}^0-N_{xy}\right)dx\right)\delta u_0=0\\&\delta v_0=0 \quad or \quad \oint_C\left(\left(N_{xy}-N_{xy}^0\right)dy+\left(N_y^0-N_y\right)dx\right)\delta v_0=0\\&\delta u_1=0 \quad or \quad \oint_C\left(M_x dy-M_{xy}dx\right)\delta u_1=0\\&\delta v_1=0 \quad or \quad \oint_C\left(M_{xy}dy-M_y dx\right)\delta v_1=0\\&\delta w_0=0 \quad or \quad \oint_C\left((N_x\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}+Q_x)dy-(N_y\frac{\partial w_0}{\partial y}+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}+Q_y)dx\right)\delta w_0=0\end{aligned} \tag{۲-۲۰}$$

بر اساس روابط (۲-۲۰)، شرایط مرزی در لبه‌های یک ورق مستطیلی با طول a و عرض b را می‌توان به صورت زیر نوشت:

شرایط مرزی آزاد:

$$\begin{aligned}&x=\pm a/2:Q_x-N_x^0\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad M_x=0,\quad M_{xy}=0\\&y=\pm b/2:Q_y-N_y^0\frac{\partial w}{\partial y}=0,\quad M_y=0,\quad M_{xy}=0\end{aligned} \tag{۲-۲۱}$$

شرایط مرزی گیردار:

$$\begin{aligned}&x=\pm a/2:w=0,\quad u_1=0,\quad v_1=0\\&y=\pm b/2:w=0,\quad u_1=0,\quad v_1=0\end{aligned} \tag{۲-۲۲}$$

شرایط مرزی ساده:

$$\begin{aligned}&x=\pm a/2:w=0,\quad M_x=0,\quad v_1=0\\&y=\pm b/2:w=0,\quad M_y=0,\quad u_1=0\end{aligned} \tag{۲-۲۳}$$

۲-۳-۲ معادلات تعادل برحسب جابجایی

معادلات (۲-۱۵) تا (۲-۱۹) را می‌توان برحسب مولفه‌های میدان جابجایی نیز نوشت. بدین منظور باید رابطه تنش-کرنش، وارد معادلات شود. شکل کلی قانون هوک برای یک ماده الاستیک به‌صورت زیر می‌باشد [۱۰۲] :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}, \quad (i, j = 1,2,3) \tag{۲-۲۴}$$

در رابطه بالا، G و λ ثوابت لامه بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{۲-۲۵}$$

که در آن E و ν به ترتیب مدول الاستیک و ضریب پوآسون ماده می‌باشند. بسط معادله (۲-۲۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx} = A\varepsilon_{xx} + \lambda\left(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right), \sigma_{yy} = A\varepsilon_{yy} + \lambda\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}\right), \sigma_{zz} = A\varepsilon_{zz} + \lambda\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right) \\ &\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \; \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \; \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \end{aligned} \tag{۲-۲۶}$$

که در آن $A = \lambda + 2G$. اکنون با جایگذاری تنش‌ها از رابطه (۲-۲۶) در منتجه‌های تنش (رابطه (۲-۹)) و سپس قرار دادن در معادلات تعادل (معادلات (۲-۱۵) تا (۲-۱۹))، می‌توان این معادلات را برحسب ثوابت ماده و میدان جابجایی به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$A\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{۲-۲۷}$$

$$A\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right) + G\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{۲-۲۸}$$

$$\frac{h^3}{12}\left(A\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}\right) + \frac{Gh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}\right) - k_s Gh\left(u_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \tag{۲-۲۹}$$

$$\frac{h^3}{12}\left(A\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}\right) + \frac{Gh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}\right) - k_s Gh\left(v_1 + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \tag{۲-۳۰}$$

$$N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + k_s Gh\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{۲-۳۱}$$

۳-۳-۲ معادلات پایداری [۹۸]

برای به‌دست آوردن معادلات پایداری، می‌توان از روش انرژی و اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده نمود که در آن اکسترمم فانکشنال انرژی پتانسیل نسبت به متغیرهای وابسته باید محاسبه شود. در مورد ورق‌ها، متغیرهای وابسته که دچار تغییرات می‌شوند شامل جابجایی‌های داخل صفحه‌ای (صفحه میانی) و خارج صفحه‌ای هستند.

با تغییر میدان جابجایی در جسم، انرژی پتانسیل نیز دچار تغییر می‌شود. این تغییر انرژی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\Delta V = V(u_0+\delta u_0, v_0+\delta v_0, u_1+\delta u_1, v_1+\delta v_1, w+\delta w) - V(u_0, v_0, u_1, v_1, w) \qquad (۲-۳۲)$$

که در آن V تابع پتانسیل بوده و $\delta v_1, \delta u_1, \delta v_0, \delta u_0$ و δw تغییرات ایجاد شده در میدان جابجایی هستند. تغییر ایجاد شده در انرژی پتانسیل سیستم را می‌توان با استفاده از سری تیلور بسط داد:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!}\delta^2 V + \frac{1}{3!}\delta^3 V + \dots \qquad (۲-۳۳)$$

که در آن δV بیان کننده فانکشنالی است که تابعی خطی از تغییرات میدان جابجایی $(\delta w, \delta v_1, \delta u_1, \delta v_0, \delta u_0)$ می‌باشد. همچنین عبارت $\delta^2 V$ فانکشنالی است که تابعی مرتبه دو از تغییرات میدان جابجایی بوده و تغییرات دوم انرژی پتانسیل نامیده می‌شود. تغییرات مرتبه بالاتر نیز به شکلی مشابه تعریف می‌شوند. به دلیل این‌که تغییرات میدان جابجایی براساس تعریف، خیلی کوچک[1] هستند، رابطه زیر برقرار است:

$$O(\delta V) > O(\delta^2 V) > O(\delta^3 V) > \dots \qquad (۲-۳۴)$$

که در آن $O()$ به معنای مرتبه[2] عبارت داخل پرانتز است. شرط لازم برای این‌که انرژی پتانسیل کمینه باشد، این است که $\delta V = 0$. با استفاده از این شرط، معادلات تعادل به‌دست می‌آیند. شرط کافی برای کمینه بودن انرژی پتانسیل با بررسی تغییرات مرتبه بالاتر انرژی پتانسیل به‌دست می‌آید. این شرط به‌صورت $\delta^2 V > 0$ بیان می‌شود. البته در صورتی که $\delta^2 V = 0$ باشد، تغییرات مرتبه بالاتر باید مورد بررسی قرار گیرد. به منظور اعمال اصل حداقل انرژی پتانسیل برای به‌دست آوردن معادلات پایداری، باید به این نکته توجه کرد که میدان جابجایی و درنتیجه فانکشنال انرژی پتانسیل وابسته به یک پارامتر بارگذاری λ_1 می‌باشند و بنابراین می‌توان انرژی پتانسیل را به‌صورت زیر نوشت:

$$V = V\left(u_0(x,u,\lambda_1), v_0(x,y,\lambda_1), u_1(x,y,\lambda_1), v_1(x,y,\lambda_1), w(x,y,\lambda_1)\right) \qquad (۲-۳۵)$$

فرض می‌شود که حالت تعادل اولیه برای مقادیر کوچک λ_1 پایدار بوده و بنابراین رابطه $\delta^2 V > 0$ برقرار است. پارامتر بارگذاری بحرانی λ_{cr} به‌صورت کوچکترین مقدار λ_1 که به ازای آن $\delta^2 V$ نیمه معین مثبت[3] می‌شود، تعریف می‌گردد. به عبارت دیگر در این حالت، برای حداقل یک مقدار از تغییرات جابجایی غیر صفر در مجاورت تعادل اولیه، $\delta^2 V = 0$ بوده و برای بقیه مقادیر تغییرات جابجایی، $\delta^2 V > 0$ است. این موضوع بدان معنی

---
[1] Infinitesimal
[2] Order
[3] Positive Semi-Definite

است که در حالت بحرانی، عبارت $\delta^2 V$ نسبت به تغییرات میدان جابجایی غیر صفر $\delta u_0,\delta v_0,...$ در مجاروت حالت تعادل اولیه، بدون تغییر[۱] می‌باشد. این نتیجه به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta\left[\delta^2 V\left((u_0,v_0,u_1,v_1,w_0)_p,\delta u_0,\delta v_0,\delta u_1,\delta v_1,\delta w_0\right)\right]=0 \qquad (۲-۳۶)$$

با استفاده از رابطه (۲-۳۶) می‌توان معادلات پایداری را به‌دست آورد. این معادلات همگن بوده و دارای شرایط مرزی همگن نیز می‌باشند (زیرا تغییرات دوم انتگرال های شرایط مرزی همگی صفر می‌باشند) و به دلیل وجود پارامتر بارگذاری λ_1، بیان کننده یک مساله مقدار ویژه می‌باشند. با حل این مساله، مقادیر ویژه λ_1 که همان بار کمانش می‌باشد و نیز بردارهای ویژه و یا شکل مدها به‌دست می‌آیند. این معیار به عنوان معیار ترفتز[۲] در بحث پایداری شناخته می‌شود. به طور خلاصه، این معیار بیان می‌کند هنگامی که $\delta^2 V$ از حالت معین مثبت به حالت نیمه معین مثبت تغییر می‌کند، حالت بحرانی است که در آن کمانش رخ می‌دهد و برای این حالت رابطه $\delta(\delta^2 V)=0$ برقرار می‌باشد.

برای به‌دست آوردن معادلات پایداری، می‌توان از روش تعادل در مجاورت استفاده نمود. اساس این روش آن است که در شرایط کمانش، دو حالت تعادل بسیار نزدیک به هم[۳] وجود دارد که یکی حالت تعادل اولیه و دیگری حالت تعادل پس از کمانش می‌باشد. اگر حالت تعادل اولیه با زیرنویس R و حالت تعادل در مجاورت با زیرنویس A نشان داده شود، می‌توان نوشت [۱۰۰]:

$$\delta V_R=0,\ \delta V_A=0 \qquad (۲-۳۷)$$

در صورتی که دوحالت تعادل بسیار نزدیک به هم باشند، نتیجه می‌شود:

$$V_A=V_R+\Delta V_R \qquad (۲-۳۸)$$

سمت راست عبارت (۲-۳۸) را می‌توان به‌صورت رابطه (۲-۳۹) نوشت:

$$V_R+\Delta V_R=V_R+\delta V_R+\frac{1}{2!}\delta^2 V_R+\frac{1}{3!}\delta^3 V_R+... \qquad (۲-۳۹)$$

باصرفنظر کردن از عبارت $\frac{1}{3!}\delta^3 V_R$ و عبارت های مرتبه بالاتر در رابطه بالا، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$V_A=V_R+\delta V_R+\frac{1}{2!}\delta^2 V_R \qquad (۲-۴۰)$$

براساس رابطه (۲-۳۷)، $\delta V_R=0$ بوده و رابطه (۲-۴۰) به‌صورت (۲-۴۱) نوشته می‌شود:

---

[1] Stationary
[2] Trefftz
[3] Infinitesimally Close to One Another

$$V_A = V_R + \frac{1}{2!}\delta^2 V_R \tag{۴۱-۲}$$

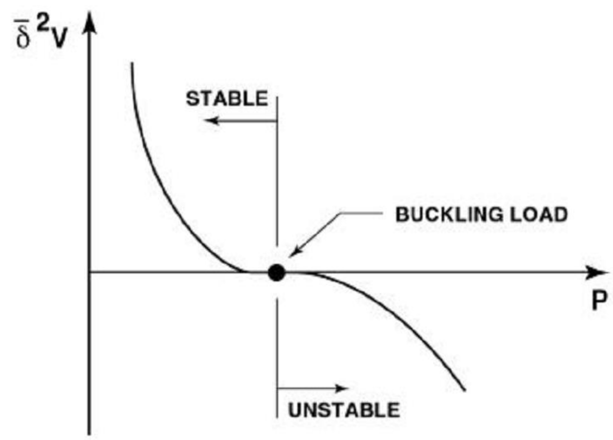
اکنون با محاسبه تغییرات دوطرف رابطه (۲-۴۱) نتیجه می‌شود:

$$\delta V_A = \delta V_R + \frac{1}{2!}\delta\left(\delta^2 V_R\right) \tag{۴۲-۲}$$

نهایتا براساس رابطه (۲-۳۷)، $\delta V_A = 0$ و $\delta V_R = 0$ می‌باشند و بنابراین رابطه (۲-۴۲) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\delta(\delta^2 V_R) = 0 \tag{۴۳-۲}$$

این رابطه دقیقا مشابه معیار پایداری ترفتز می‌باشد که در قسمت قبل توضیح داده شد و بیان می‌کند که مقدار $\delta^2 V_R$ در حالت کمانش بدون تغییر (لزوما نه بیشینه و نه کمینه و بلکه نقطه عطف) می‌باشد (شکل۲-۳).



شکل ۲-۳: نمودار تغییرات دوم انرژی پتانسیل برحسب بار در حالت تعادل [۱۰۰]

برای به‌دست آوردن معادلات پایداری، از روش تعادل در مجاورت استفاده می‌شود. براساس این روش، اگر $u_0^0, u_1^0, v_0^0, v_1^0$ و w_0^0 جابجایی‌های مربوط به حالت تعادل باشند، میدان جابجایی مربوط به حالت تعادل دیگر که در مجاورت تعادل اولیه قرار دارد، به اندازه $u_0^1, u_1^1, v_0^1, v_1^1$ و w_0^1 با آن اختلاف دارد؛ بنابراین میدان جابجایی مربوط به حالت تعادل در مجاورت را می‌توان به شکل رابطه (۲-۴۴) نوشت [۱۰۳]:

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1,\ v_0 = v_0^0 + v_0^1,\ u_1 = u_1^0 + u_1^1,\ v_1 = v_1^0 + v_1^1,\ w = w^0 + w^1 \tag{۴۴-۲}$$

با جایگذاری روابط (۲-۴۴) در رابطه مربوط به منتجه‌های تنش، مقادیر این منتجه‌ها را برای حالت تعادل در مجاورت می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$N_x = N_{x0} + N_{x1},\quad N_y = N_{y0} + N_{y1},\quad N_{xy} = N_{xy0} + N_{xy1} \tag{۴۵-۲}$$

که در آن N_{x1}, N_{y1} و N_{xy1} بخش خطی مربوط به تغییرات منتجه‌های تنش مطابق با جابجایی‌های $u_0^1, u_1^1, v_0^1, v_1^1$ و w_0^1 می‌باشند. اکنون می‌توان معادلات پایداری را با قرار دادن روابط (۲-۴۴) و (۲-۴۵) در معادلات تعادل به‌دست آورد. در این صورت حاصل جمع جملات با اندیس صفر، به دلیل این‌که معادلات تعادل را ارضا می‌کنند، صفر خواهد بود. نهایتا با صرفنظر کردن از جملات غیرخطی، معادلات پایداری به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial N_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy1}}{\partial y} = 0 \tag{۲-۴۶}$$

$$\frac{\partial N_{y1}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy1}}{\partial x} = 0 \tag{۲-۴۷}$$

$$\frac{h^3}{12}\left(A\frac{\partial^2 u_1^1}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 v_1^1}{\partial x \partial y} \right) + \frac{Gh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 u_1^1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1^1}{\partial x \partial y} \right) - k_s Gh\left(u_1^1 + \frac{\partial w^1}{\partial x} \right) = 0 \tag{۲-۴۸}$$

$$\frac{h^3}{12}\left(A\frac{\partial^2 v_1^1}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial x \partial y} \right) + \frac{Gh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 v_1^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial x \partial y} \right) - k_s Gh\left(v_1^1 + \frac{\partial w^1}{\partial y} \right) = 0 \tag{۲-۴۹}$$

$$N_x^0 \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w^1}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w^1}{\partial x \partial y} + k_s Gh\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x} + \frac{\partial v_1^1}{\partial y} + \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^1}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{۲-۵۰}$$

معادلات (۲-۴۶) و (۲-۴۷) به‌صورت همگن بوده و دارای شرایط مرزی همگن نیز می‌باشند (به دلیل این‌که شرایط مرزی مربوط به بارگذاری داخل صفحه‌ای در هنگام حل معادلات تعادل اولیه اعمال شده‌اند) و بنابراین دارای جواب صفر می‌باشند [۹۸]:

$$N_x^1 = 0,\ \ N_y^1 = 0,\ \ N_{xy}^1 = 0 \tag{۲-۵۱}$$

از رابطه (۲-۵۱) نتیجه می‌شود که میدان جابجایی صفحه میانی، در حین تغییر شکل عرضی ورق، تغییر نمی‌کند. معادلات (۲-۴۸) تا (۲-۵۰) تشکیل یک مساله مقدار ویژه را می‌دهند که با حل آن، بارکمانش و شکل مدکمانش به‌دست می‌آید. در معادله (۲-۵۰)، مقادیر N_x^0, N_y^0 و N_{xy}^0 مربوط به شرایط تعادل اولیه بوده و از حل معادلات (۲-۱۵) و (۲-۱۶) و یا معادلات (۲-۲۷) و (۲-۲۸) به‌دست می‌آیند. برای یک ورق که در ابتدا مسطح می‌باشد (بدون نقص اولیه)، $w_0 = 0$ بوده و بنابراین دو معادله اخیر به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$A\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \left(G + \lambda \right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + G\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0 \tag{۲-۵۲}$$

$$A\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \left(G + \lambda \right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + G\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0 \tag{۲-۵۳}$$

بنابراین حل مساله شامل دو مرحله می‌باشد:

۱- حل معادلات مربوط به تعادل اولیه یا معادلات پیش‌کمانش: هدف از حل این معادلات، به‌دست آوردن مقادیر N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 می‌باشد. برای این کار می‌توان از حل معادلات (۲-۱۵) و(۲-۱۶) و یا معادلات (۲-۲۷) و

(۲-۲۸) استفاده کرد.

۲-حل معادلات پایداری: در این مرحله با جایگذاری حل به‌دست آمده از مرحله قبل در معادلات (۲-۴۸) تا (۲-۵۰)، مساله مقدار ویژه حاصل حل شده و مقادیر بار کمانش و شکل مدها به‌دست می‌آیند.

۲-۴ معادلات در مختصات قطبی [۹۷]

برای به‌دست آوردن معادلات درمختصات قطبی، می‌توان از روابط تبدیل تنش و تبدیل میدان جابجایی بین مختصات قطبی و مختصات کارتزین استفاده نمود. این روابط به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&M_x = M_r \cos^2(\theta) + M_\theta \sin^2(\theta) - 2M_{r\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)\\
&M_y = M_r \sin^2(\theta) + M_\theta \cos^2(\theta) + 2M_{r\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)\\
&M_{xy} = (M_r - M_\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) + M_{r\theta}\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)\\
&Q_x = Q_r\cos(\theta) - Q_\theta \sin(\theta)\\
&Q_y = Q_r\sin(\theta) + Q_\theta \cos(\theta)
\end{aligned} \qquad (۲-۵۴)$$

روابط مربوط به محاسبه N_r, N_θ و $N_{r\theta}$ نیز دقیقا مشابه M_r, M_θ و $M_{r\theta}$ می‌باشد. همچنین روابط زیر بین مشتقات در مختصات قطبی و کارتزین برقرار است:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\\
&\frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned} \qquad (۲-۵۵)$$

با جایگذاری روابط (۲-۵۴) و (۲-۵۵) در معادلات تعادل، این معادلات در مختصات قطبی به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + \frac{\partial N_r}{\partial r} = 0 \qquad (۲-۵۶)$$

$$2\frac{N_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} = 0 \qquad (۲-۵۷)$$

$$\frac{M_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{M_r}{r} + \frac{\partial M_r}{\partial r} - Q_{rz} = 0 \qquad (۲-۵۸)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}M_{r\theta} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} - Q_{\theta z} = 0 \qquad (۲-۵۹)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_{rz}}{\partial r} + \frac{Q_{rz}}{r} + \frac{2N_{r\theta}}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{N_\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + N_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{2N_{r\theta}}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{N_\theta}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (۲-۶۰)$$

۲-۴-۱ معادلات برحسب میدان جابجایی

میدان جابجایی در مختصات قطبی براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به‌صورت زیر می‌باشد:

$$u_r = u_0(r,\theta) + zu_1(r,\theta),\ u_\theta = v_0(r,\theta) + zv_1(r,\theta),\ u_z = w_0(r,\theta)$$
(۶۱-۲)

روابط کرنش-جابجایی فن کارمن در مختصات قطبی به شکل زیر نوشته می‌شود [۹۷]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial r} + z\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \\
\varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{u_0}{r} + z\frac{u_1}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + z\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 = 0 \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + z\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial v_0}{\partial r} + z\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{1}{r}(v_0 + zv_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \\
\gamma_{z\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} = v_1 \\
\gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial r} = u_1 + \frac{\partial w}{\partial r}
\end{aligned}$$
(۶۲-۲)

براساس قانون هوک، روابط تنش-کرنش را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r = A\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z),\ \sigma_\theta = A\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_z),\ \sigma_z = A\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \\
&\tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta},\ \tau_{rz} = G\gamma_{rz},\ \ \tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}
\end{aligned}$$
(۶۳-۲)

درنهایت با استفاده از روابط (۲-۶۲) و(۲-۶۳)، معادلات (۲-۵۶) و (۲-۵۷) را می‌توان برحسب میدان جابجایی به‌صورت زیر نوشت:

$$Ah\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{Ah}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{Gh}{r} + \frac{\lambda h}{r}\right) - \frac{Ah}{r^2}u_0 - \left(\frac{Ah}{r^2} + \frac{Gh}{r^2}\right)\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{Gh}{r^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} = 0$$
(۶۴-۲)

$$Gh\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + \frac{Gh}{r}\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{Gh}{r} + \frac{\lambda h}{r}\right) - \frac{Gh}{r^2}v_0 + \left(\frac{Ah}{r^2} + \frac{Gh}{r^2}\right)\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{Ah}{r^2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} = 0$$
(۶۵-۲)

همچنین با استفاده از روش تعادل در مجاورت، معادلات پایداری در مختصات قطبی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{Gh^3}{12}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1^1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_1^1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_1^1}{\partial \theta}\right) + \frac{Ah^3}{12}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_1^1}{\partial r} - \frac{u_1^1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_1^1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial r^2}\right) + \frac{\lambda h^3}{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_1^1}{\partial \theta \partial r} - k_s Gh\left(u_1^1 + \frac{\partial w^1}{\partial r}\right)$$
(۶۶-۲)

$$\frac{Gh^3}{12}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_1^1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 v_1^1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_1^1}{\partial r} - \frac{v_1^1}{r^2}\right) + \frac{Ah^3}{12}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_1^1}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_1^1}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\lambda h^3}{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_1^1}{\partial r \partial \theta} - k_s Ghv_1^1$$
(۶۷-۲)

$$k_s Gh\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_1^1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1^1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w^1}{\partial r^2} + \frac{u_1^1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w^1}{\partial r}\right) + N_r^0\frac{\partial^2 w^1}{\partial r^2} + \frac{N_\theta^0}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w^1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w^1}{\partial r}\right) + \frac{2N_{r\theta}^0}{r}\left(\frac{\partial^2 w^1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial w^1}{\partial \theta}\right)$$
(۶۸-۲)

که در آن N_r^0, N_θ^0 و $N_{r\theta}^0$ منتجه‌های تنش پیش‌کمانش بوده و از حل معادلات (۲-۵۶) و (۲-۵۷) و یا معادلات (۲-۶۴) و (۲-۶۵) به‌دست می‌آیند.

۲-۵ جمع بندی

در این فصل ابتدا در مورد معادلات تعادل و سپس معادلات پایداری ورق‌ها و نحوه استخراج آنها در مختصات کارتزین و قطبی بحث شد. برای به‌دست آوردن معادلات تعادل و شرایط مرزی، از روش کار مجازی براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شد. سپس درمورد پایداری یک سیستم از دیدگاه انرژی توضیح داده شد و روش تعادل در مجاورت برای به‌دست آوردن معادلات پایداری مورد استفاده قرار گرفت.

فصل سوم:

تحلیل عددی

۳-۱ مقدمه

یکی از روشهای عددی برای حل مسائل مربوط به تحلیل تنش و کمانش، استفاده از روش اجزای محدود می‌باشد. در این روش، ابتدا دامنه مساله به تعدادی المان تقسیم بندی می‌شود. سپس مولفه‌های میدان جابجایی در هر المان با استفاده از توابع شکل تقریب زده می‌شوند. این توابع خواص ویژه‌ای دارند، به‌طوری که ثوابت موجود در آنها، برابر با مقدار جابجایی در هر گره از المان می‌باشد و با داشتن مقدار تابع در گره‌ها، می‌توان مقدار آن در هرنقطه داخل المان را محاسبه کرد. همچنین این توابع به گونه‌ای تعریف می‌شوند که درجه‌ای از پیوستگی را در مرز بین المان‌ها تضمین کنند. به منظور فرمول‌بندی روش اجزای محدود و به‌دست آوردن ماتریس سفتی و بردار نیروی مربوط به المان‌ها، عموما از روش انرژی استفاده می‌شود. پس از محاسبه ماتریس سفتی و بردار نیروی مربوط به هر المان، این ماتریس‌ها و بردارها براساس نحوه ارتباط بین المان‌ها و گره‌های مشترک بین آنها مونتاژ شده و ماتریس سفتی و بردار نیروی کل سیستم به‌دست می‌آید. در نهایت پس از اعمال شرایط مرزی، یک دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود. با حل این دستگاه، متغیرهای مساله که مقدار مولفه‌های میدان جابجایی در گره‌ها می‌باشند، محاسبه می‌شوند. در این فصل نحوه فرمول‌بندی روش اجزای محدود به کمک روش انرژی توضیح داده می‌شود. در این رساله، از کد نویسی در محیط نرم افزار متلب براساس این فرمول‌بندی استفاده شده است. در انتهای فصل نیز روش مربعات دیفرانسیلی و نحوه فرمول‌بندی آن برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳-۲ فرمول‌بندی روش اجزای محدود

رابطه (۲-۶) که با جایگذاری میدان جابجایی در مولفه‌های کرنش فن کارمن در فصل قبل به‌دست آمد را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_1} + z \underbrace{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_2}}_{\varepsilon_L} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_{NL}}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} + u_1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} + v_1 \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_s} \qquad (۱-۳)$$

که در رابطه (۳-۱) ε_L و ε_{NL} به ترتیب بیانگر قسمت خطی و غیرخطی مولفه‌های کرنش می‌باشند و همچنین ε_s بیانگر بردار کرنش برشی می‌باشد.

براساس قانون هوک، رابطه تنش-کرنش را می‌توان به‌صورت ماتریسی به شکل زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{22} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{۳-۲}$$

که در آن Q_{ij} مولفه‌های ماتریس سفتی کاهش یافته برای حالت تنش صفحه‌ای بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11}, \quad Q_{22} = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{۳-۳}$$

همچنین منتجه‌های تنش به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} (1,z)dz, \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \tag{۳-۴}$$

اکنون با استفاده از روابط تنش-کرنش ، منتجه‌های تنش را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon_1\} + [B]\{\varepsilon_2\}, \quad \{M\} = [B]\{\varepsilon_1\} + [D]\{\varepsilon_2\}, \quad [Q] = [A_s]\{\varepsilon_s\} \tag{۳-۵}$$

در رابطه (۳-۵) ماتریس‌های A,B,D و نیز ماتریس A_s به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[A],[B],[D] = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{bmatrix} (1,z,z^2) dz, \quad [A_s] = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{22} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} dz \tag{۳-۶}$$

انرژی پتانسیل کل ورق (Π) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\Pi = U + V_1 + V_2 \tag{۳-۷}$$

که در آن U انرژی کرنشی بوده و مربوط به بخش خطی تانسور کرنش می‌باشد، V_1 کار نیروهای اعمالی در لبه‌های ورق در حین تغییر شکل اولیه ورق و V_2 کار نیروهای داخل صفحه‌ای در حین تغییر شکل عرضی ورق بوده و مربوط به بخش غیرخطی تانسور کرنش می‌باشد. انرژی کرنشی U را می‌توان برحسب منتجه‌های تنش به‌صورت زیر نوشت:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(\{N\}^T \{\varepsilon_1\} + \{M\}^T \{\varepsilon_2\} + \{Q\}^T \{\varepsilon_s\} \right) dA \tag{۳-۸}$$

با جایگذاری روابط (۳-۵) و (۳-۶) در معادله (۳-۸) و پس از ساده سازی، انرژی کرنشی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(\left\{\varepsilon_1^T \quad \varepsilon_2^T\right\}\begin{bmatrix} A & B \\ B & D\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2\end{Bmatrix}+\left\{\varepsilon_s\right\}^T\left[A_s\right]^T\left\{\varepsilon_s\right\}\right)dA \tag{۳-۹}$$

کار V_1 را نیز می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$V_1=-\oint_C \{U_e\}^T\{P_e\}ds \tag{۳-۱۰}$$

که در آن $\{P_e\}$ بار گسترده وارد بر لبه‌های ورق بوده و $\{U_e\}=\{u_0 \quad v_0\}^T$ بردار جابجایی نقاط واقع بر روی لبه-های ورق می‌باشد. برای یک ورق که در معرض بارگذاری نرمال و برشی در لبه‌های خود واقع است، بردار $\{P_e\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{P_e\}=\begin{Bmatrix} N_{x0}+N_{xy0} \\ N_{y0}-N_{xy0}\end{Bmatrix} \tag{۳-۱۱}$$

که در آن N_{x0},N_{y0} و N_{xy0} منتجه‌های نیروی خارجی وارد بر لبه‌های ورق می‌باشند (شکل ۳-۲). کار V_2 نیز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

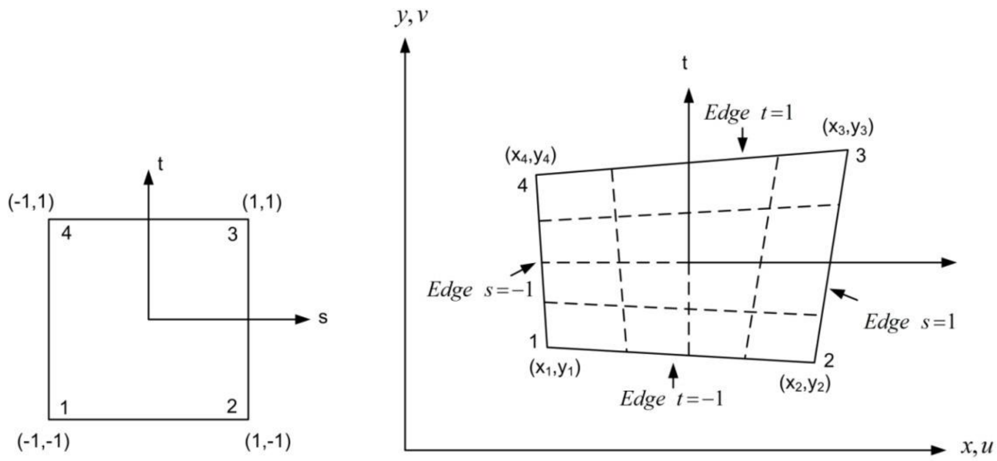
$$V_2=-\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y}\right)dA=-\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\begin{bmatrix}\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}dA \tag{۳-۱۲}$$

۳-۳ المان ایزوپارامتریک

همان طور که گفته شد، اولین مرحله در حل مساله به کمک روش اجزای محدود، المان بندی دامنه مساله می‌باشد. شکل المان‌ها و نیز اندازه آنها تاثیر زیادی بر دقت جواب نهایی دارد. در مورد شکل المان، یک المان مربعی به دلیل این‌که نسبت ظاهری آن برابر با یک است، بهترین المان می‌باشد. اما در مورد هندسه‌های پیچیده، مانند یک ورق دارای گشودگی، استفاده از المان‌های مربعی در تمام دامنه مساله امکان‌پذیر نمی‌باشد. در این حالت از فرمول‌بندی ایزوپارامتریک برای محاسبه ماتریس سفتی و بردار نیروی المان‌ها استفاده می‌شود. در این روش، با استفاده از توابع شکل مناسب، یک المان مرجع مربعی در مختصات طبیعی (s,t) به یک المان چهارضلعی در مختصات عمومی (x,y) نگاشت می‌شود (شکل ۳-۱). همچنین در این روش، مولفه‌های میدان جابجایی (u_0,v_0,u_1,v_1,w) در دامنه المان مرجع، به کمک همان توابع شکلی که برای نگاشت المان استفاده شده بود، تقریب زده می‌شوند (میان‌یابی می‌شوند). بنابراین رابطه (۳-۱۳) را می‌توان نوشت [۱۰۴]:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} N_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \\ u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} N_i \begin{bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_i \\ u_{1i} \\ v_{1i} \end{bmatrix} \tag{۱۳-۳}$$

که در آن $u_{0i}, v_{0i}, w_i, u_{1i}, v_{1i}$ مقدار متغیرهای میانیابی شده در گره‌های المان مرجع می‌باشند.



شکل ۳-۱: نگاشت المان مرجع مربعی به المان چهارضلعی [۱۰۴]

همچنین توابع شکل برحسب مختصات المان مرجع (s,t) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N_1 = \frac{(1-s)(1-t)}{4},\ N_2 = \frac{(1+s)(1-t)}{4},\ N_3 = \frac{(1+s)(1+t)}{4},\ N_4 = \frac{(1-s)(1+t)}{4} \tag{۱۴-۳}$$

با استفاده از ماتریس ژاکوبین، مشتقات نسبت به مختصات عمومی (x,y) برحسب مشتقات نسبت به مختصات طبیعی (s,t) به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial()}{\partial s} &= \frac{\partial()}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial()}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial()}{\partial t} &= \frac{\partial()}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial()}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial s} \\ \frac{\partial()}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial x} \\ \frac{\partial()}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{۱۵-۳}$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial x} \\ \frac{\partial()}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial s} \\ \frac{\partial()}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{۱۶-۳}$$

در رابطه (۳-۱۶)، J ماتریس ژاکوبین مربوط به نگاشت از مختصات طبیعی به مختصات عمومی بوده و در فرم کلی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial R} = J^{-1}\frac{\partial(\ )}{\partial V} \tag{۳-۱۷}$$

که در آن $R=[x\ y]^T$ و $V=[s\ t]^T$ می‌باشند. بنابراین می‌توان مقادیر کرنش را به‌صورت زیر براساس جابجایی‌های گره‌ای در المان مرجع نوشت:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{Bmatrix}=[B_1]\{d\},\ \begin{Bmatrix}\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix}^T=[B_2]\{d\},\ \{\varepsilon_s\}=[B_3]\{d\} \tag{۳-۱۸}$$

که در آن $\{d\}=\{u_1\ \ v_1\ \ w_1\ \ u_{11}\ \ v_{11}\ \ \cdots\ \ v_{14}\}^T$ بردار جابجایی‌های گره‌ای المان مرجع بوده و ماتریس‌های $[B_1],[B_2],[B_3]$ تابعی از مختصات طبیعی (s,t) و نیز مختصات نقاط گره‌ای المان اولیه $(x_i, y_i, i=1,2,3,4)$ می‌باشند.

۳-۴ اعمال اصل حداقل انرژی پتانسیل

اکنون انرژی پتانسیل کل را می‌توان برحسب بردار جابجایی‌های گره‌ای به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}U+V_1+V_2&=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(\{d\}^T[B_1]^T\begin{bmatrix}A & B\\ B & D\end{bmatrix}[B_1]\{d\}+\{d\}^T[B_3]^T[A_s]^T[B_3]\{d\}\right)|J|dA\\ &-\iint_{\Omega}\left(\{d\}^T[B_2]^T\begin{bmatrix}N_x & N_{xy}\\ N_{xy} & N_y\end{bmatrix}[B_2]\{d\}\right)|J|dA-\lambda_0\oint_C\{d\}^T[N_e]^T\{P_e^0\}|J|dc\end{aligned} \tag{۳-۱۹}$$

که در آن $dA=ds.dt$ و dc به ترتیب المان مساحت و المان طول در مختصات طبیعی بوده و $[N_e]$ ماتریس توابع شکل محاسبه شده بر روی لبه‌های ورق است. همچنین $|J|$ دترمینان ماتریس ژاکوبین می‌باشد. براساس اصل حداقل انرژی پتانسیل، در حالت تعادل، مشتق انرژی پتانسیل نسبت به بردار جابجایی‌های گره‌ای برابر با صفر می‌باشد:

$$\frac{\partial(U+V_1+V_2)}{\partial\{d\}}=0 \tag{۳-۲۰}$$

با اعمال این اصل بر رابطه (۳-۱۹)، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(\iint_{\Omega}\left([B_1]^T\begin{bmatrix}A & B\\ B & D\end{bmatrix}[B_1]+[B_3]^T[A_s]^T[B_3]-[B_2]^T\begin{bmatrix}N_x & N_{xy}\\ N_{xy} & N_y\end{bmatrix}[B_2]\right)|J|dA\right)\{d\}=\lambda_0\oint_C[N_e]^T\{P_e^0\}|J|dc \tag{۳-۲۱}$$

معادله (۳-۲۱) را می‌توان به شکل ساده شده زیر برای هر المان نوشت:

$$\left([K_b]_i+[K_s]_i-[K_g]_i\right)\{d\}_i=\lambda_0\{F_0\}_i \qquad (۳-۲۲)$$

در رابطه (۳-۲۲)، $\{F_0\}_i$ بردار نیرو مربوط به المان i ام بوده که به ازای بارگذاری واحد در لبه‌های المان محاسبه شده است و λ_0 ضریب بار نامیده می‌شود. همچنین ماتریس‌های سفتی خمشی، برشی و هندسی و نیز بردارنیرو مربوط به المان i ام به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}&[K_b]_i=\iint[B_1]_i^T\begin{bmatrix}A & B\\ B & D\end{bmatrix}[B_1]_i|J|_i\,dA,\quad [K_s]_i=\iint[B_3]_i^T[A_s]^T[B_3]_i|J|_i\,dA\\&[K_g]_i=\iint[B_2]_i^T\begin{bmatrix}N_x & N_{xy}\\ N_{xy} & N_y\end{bmatrix}_i[B_2]_i|J|_i\,dA,\quad \{F_0\}_i=\int_C[N_e]_i^T\{P_e^0\}_i|J|_i\,dc\end{aligned} \qquad (۳-۲۳)$$

ماتریس‌های سفتی و نیز بردار نیرو برای هر المان با استفاده از روابط (۳-۲۳) محاسبه می‌شوند. برای انتگرال‌گیری، از روش عددی گوس در دامنه المان مرجع استفاده می‌شود. همچنین برای جلوگیری از وقوع پدیده قفل شدگی برشی[1] ، برای محاسبه ماتریس سفتی برشی $[K_s]_i$، از انتگرال کاهش یافته استفاده می‌شود. در نهایت ماتریس‌های سفتی و بردار نیروی المان‌ها با توجه به نحوه اتصال المان‌ها، مونتاژ شده و پس از اعمال شرایط مرزی، ماتریس سفتی کل، بردار نیرو و بردار جابجایی‌های گره‌ای کل به‌دست می‌آید. در این حالت معادله (۳-۲۲) برای کل مساله به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\left([K_b]+[K_s]-[K_g]\right)\{d\}=\lambda_0\{F_0\} \qquad (۳-۲۴)$$

برای یک ورق مسطح و بدون نقص اولیه، در حالت تعادل اولیه یا حالت پیش‌کمانش، تغییر شکل عرضی برابر با صفر بوده و روابط زیر برقرار است:

$$w=0,\ u_1=0,\ v_1=0 \qquad (۳-۲۵)$$

بنابراین در این حالت معادله (۳-۲۲) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$[K_m]\{d_0\}=\lambda_0\{F_0\} \qquad (۳-۲۶)$$

که در آن $\{d_0\}$ بردار جابجایی‌های گره‌ای در حالت پیش‌کمانش و $[K_m]$ بردار سفتی غشایی بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[K_m]=\iint[B_0]^T[A]^T[B_0]|J|dA,\ \{\varepsilon_1\}=[B_0]\{d_0\} \qquad (۳-۲۷)$$

با استفاده از رابطه (۳-۲۶) بردار $\{d_0\}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

---

[1] Shear Locking

$$\{d_0\} = \lambda_0 [K_m]^{-1} \{F_0\} \qquad (۲۸-۳)$$

پس از محاسبه بردار $\{d_0\}$، ماتریس هندسی $[K_g]$ را که تابعی از $\{d_0\}$ می‌باشد، می‌توان محاسبه نمود. برای حالت تعادل ثانویه (کمانش یافته)، معادله (۳-۲۴) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\left([K_b] + [K_s] - \lambda_0 [K_g]\right)\{d\} = 0 \qquad (۲۹-۳)$$

رابطه (۳-۲۹)، یک مساله مقدار ویژه بوده و دستگاه معادلات حاصل، تنها به ازای مقادیر خاصی از λ_0 که مقادیر ویژه نامیده می‌شوند، دارای جواب غیر صفر خواهد بود. مقادیر λ_0 از حل معادله مشخصه زیر به‌دست می‌آیند:

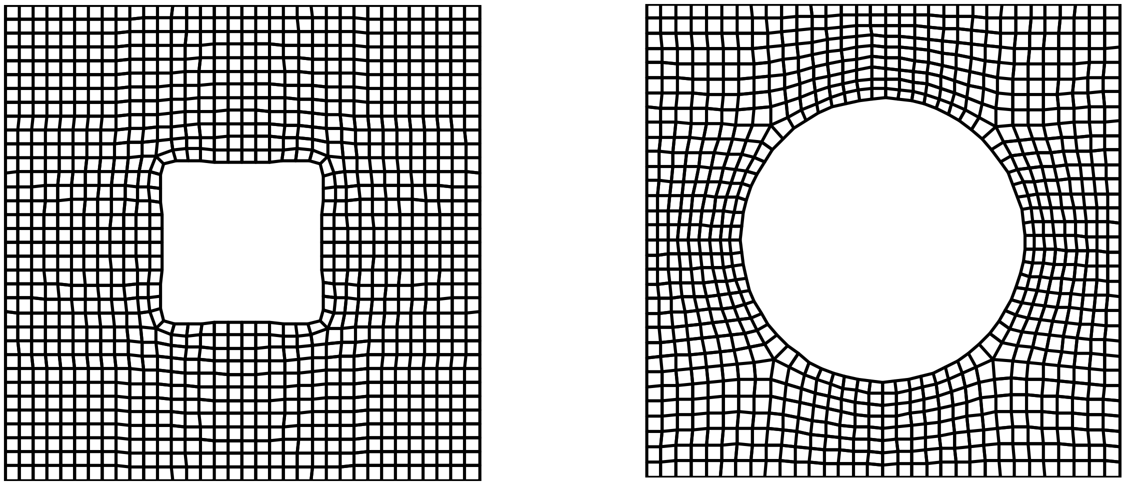
$$\left|[K_b] + [K_s] - \lambda_0 [K_g]\right| = 0 \qquad (۳۰-۳)$$

که در آن |.| دترمینان ماتریس می‌باشد. به ازای هر مقدار λ_0، یک بردار $\{d\}$ محاسبه می‌شود که نشان دهنده شکل مد کمانش مربوط به λ_0 است و بردار ویژه نامیده می‌شود.

۳-۵ نتایج

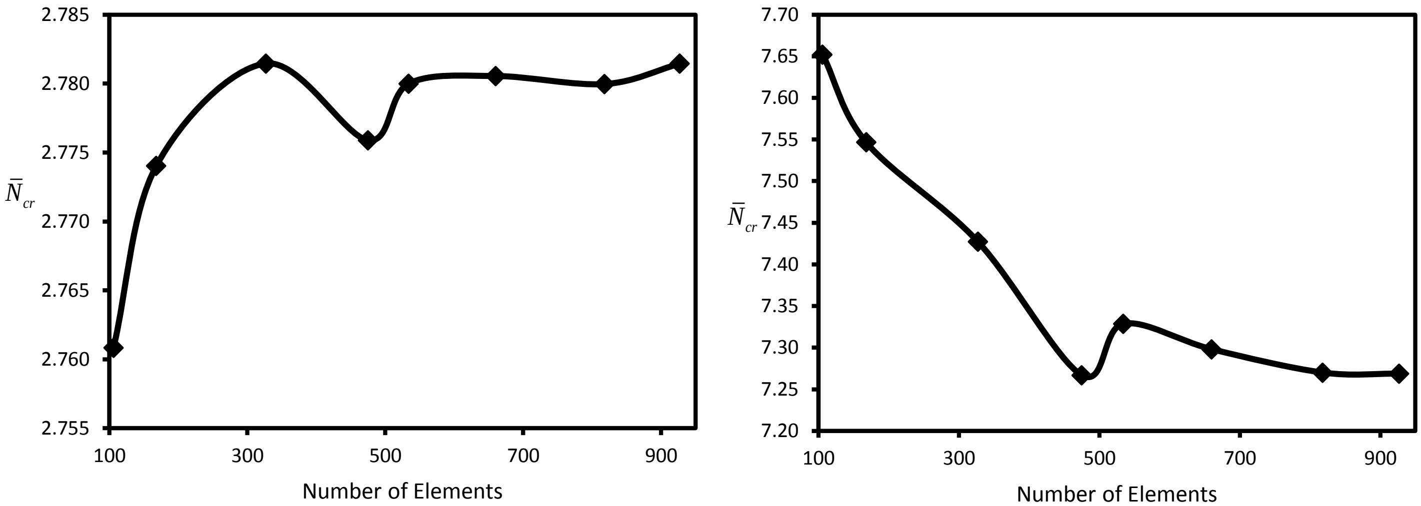
در این قسمت همگرایی بار کمانش به‌دست آمده با استفاده از روش اجزای محدود که در قسمت قبل توضیح داده شد و نیز مقایسه آن با نتایج حل به کمک نرم افزار آباکوس ارائه می‌شود. در شکل ۳-۲ نمونه‌ای از مش مورد استفاده برای ورق دارای گشودگی دایروی و مربعی نشان داده شده است.

نمودار همگرایی بار کمانش به‌دست آمده با استفاده از روش اجزای محدود برای ورق مربعی با گشودگی دایروی $(D/a=0.6)$ در شکل ۳-۳ و برای ورق مربعی با گشودگی مربعی $(L/a=0.4)$ در شکل ۳-۴ و برای دو شرط مرزی نمایش داده شده است. a طول ورق، D قطر کشودگی دایروی و L طول مشخصه گشودگی مربعی است. بار کمانش به‌صورت $\overline{N_{cr}} = N_{cr} b^2 / \pi^2 D_{11}$ بی‌بعد شده است که در آن b عرض ورق و $D_{11} = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$ صلبیت خمشی ورق می‌باشد. همچنین شرایط مرزی در لبه‌های خارجی ورق به‌صورت یک عبارت چهارحرفی نامگذاری شده است که دو حرف اول بیانگر نوع شرط مرزی در لبه چپ و راست و دو حرف دوم بیانگر نوع شرط مرزی در لبه بالا و پایین ورق است.



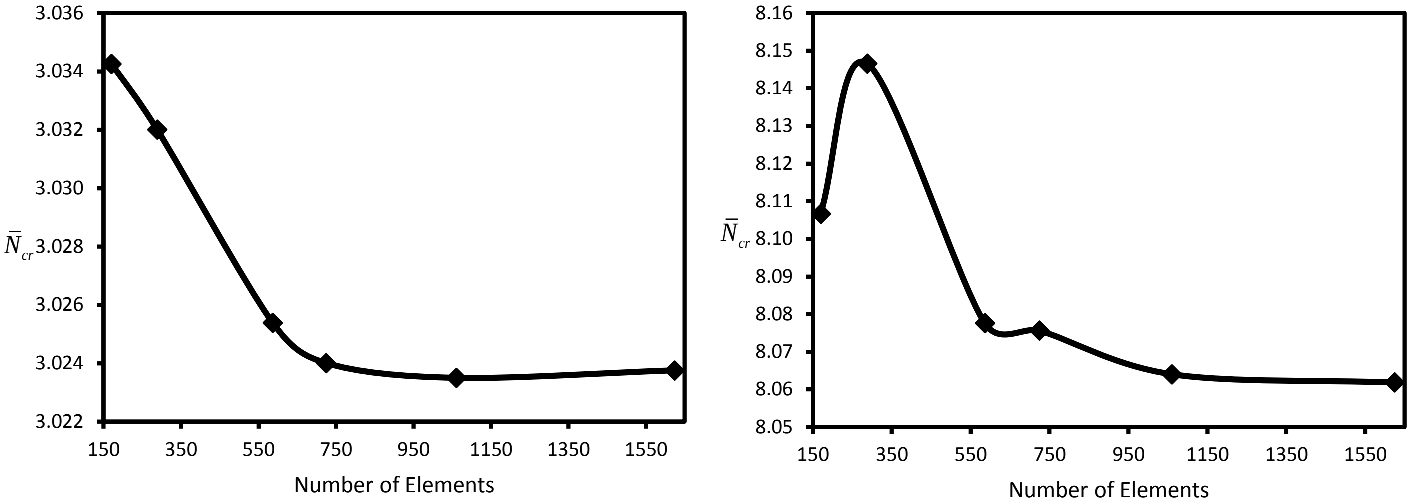
الف)   ب)

شکل ۳-۲: نمونه‌ای از مش مورد استفاده در روش اجزای محدود الف) ورق با گشودگی دایروی و ۸۱۸ المان ب) ورق با گشودگی مربعی و ۱۰۶۰ المان



الف) CCCC   ب) SSSS

شکل ۳-۳: نمودار همگرایی بار کمانش برای یک ورق با گشودگی دایروی برای دو نوع شرط مرزی مختلف



ب) SSSS

الف) CCCC

شکل ۳-۴: نمودار همگرایی بار کمانش برای یک ورق با گشودگی مربعی برای دو نوع شرط مرزی مختلف

در جدول ۳-۱ بار کمانش محاسبه شده با استفاده از روش اجزای محدود با نتایج حل عددی به کمک نرم افزار آباکوس و برای شرایط مرزی مختلف مقایسه شده است. در آباکوس از المان S4R برای تحلیل کمانش استفاده شده است. این المان از نوع المان پوسته[1]، دارای چهار گره، با انتگرال‌گیری کاهش یافته بوده و از فرمول‌بندی کرنش‌های بزرگ[2] استفاده می‌کند و برای تحلیل ورق‌های نازک یا ضخیم و نیز پوسته‌ها مناسب است [۱۰۵]. با توجه به نتایج جدول ۳-۱ مشاهده می‌شود که حل اجزای محدود ارائه شده از دقت بالایی برخوردار است، به‌طوری که بیشترین اختلاف نسبی آن با حل آباکوس حدود 1.1% می‌باشد. در فصل پنجم، نتایج به‌دست آمده از حل اجزای محدود با نتایج حل تحلیلی مقایسه شده است.

جدول ۳-۱: مقایسه بار کمانش بی‌بعد شده $(\overline{N_{cr}})$ محاسبه شده با استفاده از روش اجزای محدود با حل آباکوس

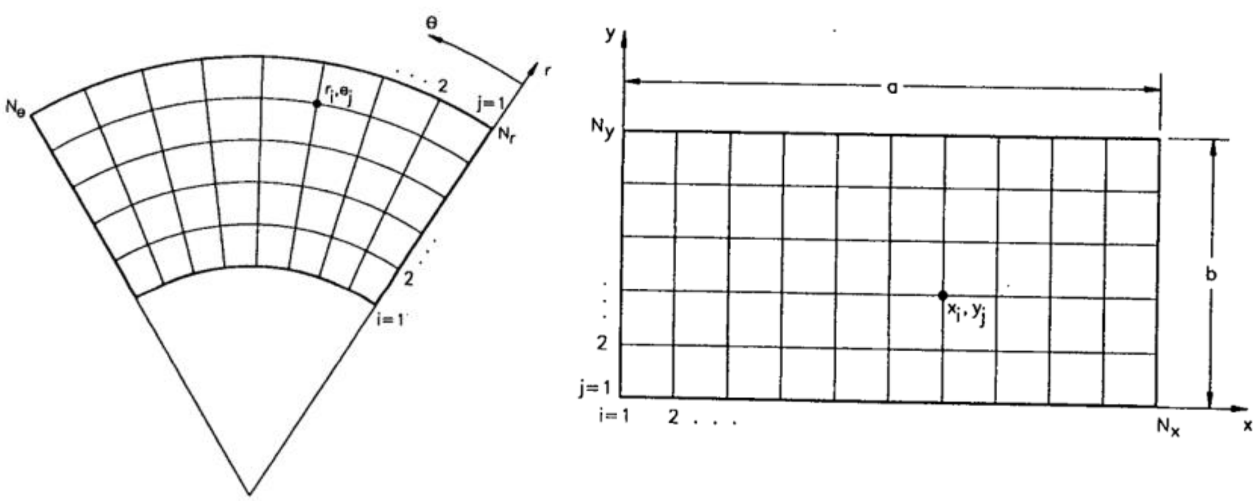
Cutout Shape	Boundary Condition											
	CCCC		SSSS		CCFF		SSFF		CCSF		SSSF	
	آباکوس	FEM	آباکوس	FEM	آباکوس	FEM	آباکوس	FEM	آباکوس	FEM	آباکوس	FEM
Circular	7.340	7.329	2.797	2.780	2.199	2.223	0.428	0.430	2.248	2.275	0.729	0.732
Square	8.013	8.064	3.027	3.023	3.040	3.057	0.646	0.648	3.330	3.350	1.043	1.046

1 Shell Element
2 Large-Strain

۳-۶ روش مربعات دیفرانسیلی

یکی از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل، روش مربعات دیفرانسیلی می‌باشد. اصطلاح مربعات، مربوط به تقریب انتگرال یک تابع به کمک مجموع وزنی مقدار تابع در تعدادی نقطه نمونه‌گیری بین حدود انتگرال می‌باشد. روش مربعات دیفرانسیلی بر همین اساس و به عنوان گسترش مربعات انتگرالی برای محاسبه مشتقات یک تابع توسط بلمن و کاستی فرمول‌بندی شد [۱۰۶].

در روش اجزای محدود برای محاسبه‌دستگاه معادلات حاکم بر سیستم، از اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده می‌شود؛ اما در روش حداقل مربعات، معادلات دیفرانسیل به‌صورت مستقیم گسسته سازی شده و حل می‌شوند. در این روش ابتدا دامنه مساله به یک سری نقاط گره‌ای[1] تقسیم بندی می‌شود. سپس مشتقات جزئی موجود در معادله دیفرانسیل به‌صورت مجموع وزنی مقادیر تابع در تمام نقاط گسسته در آن جهت تقریب زده می‌شود. در شکل ۳-۵ نمونه‌ای از شبکه نقاط گره‌ای برای دو نوع هندسه آورده شده است.



الف) ناحیه مستطیلی

ب) ناحیه قطاعی

شکل ۳-۵: نمونه‌ای از شبکه نقاط در روش مربعات دیفرانسیلی [۱۰۶]

۳-۶-۱ محاسبه ضرایب وزنی و نقاط گره‌ای

در روش مربعات دیفرانسیلی، مشتق مرتبه r تابع $\phi(x,y)$ نسبت به x و نیز مشتق مرتبه s نسبت به y در نقطه $(x,y)=(x_i,y_j)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

---
[1] Grid Points

$$\left.\frac{\partial^r \phi}{\partial x^r}\right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{n_x} A_{ik}^{(r)} \phi_{kj};\ i=1,2,...,n_x \qquad \left.\frac{\partial^s \phi}{\partial y^s}\right|_{y=y_j} = \sum_{l=1}^{n_y} B_{jl}^{(s)} \phi_{il};\ j=1,2,...,n_y \tag{۳-۳۱}$$

که در آن n_x و n_y به ترتیب برابر با تعداد نقاط گره‌ای در راستای محور x و y می‌باشند. همچنین ϕ_{kj} مقدار تابع $\phi(x,y)$ محاسبه شده در نقطه (x_k, y_j) و ϕ_{li} مقدار آن در نقطه (x_l, y_i) بوده و $A_{ik}^{(r)}$ و $B_{jl}^{(s)}$ نیز ضرایب وزنی می‌باشند. همچنین مشتقات جزئی مخلوط براساس قوانین مشتق‌گیری توابع دو متغیره، به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$\left.\frac{\partial^{(r+s)}}{\partial x^r \partial y^s}\right|_{x_i,y_j} = \left.\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left(\frac{\partial^s \phi}{\partial y^s}\right)\right|_{x_i,y_j} = \sum_{k=1}^{n_x} A_{ik}^{(r)} \sum_{l=1}^{n_y} B_{jl}^{(s)} \phi_{kl} \tag{۳-۳۲}$$

به منظور استفاده از این روش، ابتدا باید مقادیر ضرایب وزنی مشخص باشند. برای محاسبه این ضرایب می‌توان از تقریب توابع آزمایشی[1] در دامنه مساله استفاده نمود. در این روش با داشتن مقدار تابع در نقاط مختلف، می‌توان ضرایب وزنی را در این نقاط مشخص نمود. انتخاب‌های زیادی برای توابع آزمایشی وجود دارد، اما یکی از مناسب‌ترین آنها، توابع چند جمله‌ای می‌باشد. دو عامل اصلی در دقت روش مربعات دیفرانسیلی، نحوه انتخاب نقاط گره‌ای و نیز دقت ضرایب وزنی است. برای محاسبه ضرایب وزنی با دقت بالا، شو[2] و ریچارد[3] [۱۰۷, ۱۰۸] فرمول‌هایی را ارائه دادند که در ادامه توضیح داده می‌شود. جملات خارج از قطر اصلی در ماتریس ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه اول به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_k)\Pi(x_k)};\ i,k=1,2,...,n_x,\ \ k \neq i \tag{۳-۳۳}$$

که در آن:

$$\Pi(x_i) = \prod_{v=1, v\neq i}^{n_x} (x_i - x_v),\ \ \Pi(x_k) = \prod_{v=1, v\neq k}^{n_x} (x_k - x_v) \tag{۳-۳۴}$$

همچنین جملات خارج از قطر اصلی برای مشتقات مرتبه بالاتر به کمک رابطه بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند:

$$A_{ik}^{(r)} = r\left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{1} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k}\right];\ i,k=1,2,...,n_x\ \ ,\ \ k \neq i \tag{۳-۳۵}$$

که در آن $2 \le r \le (N_x - 1)$. جملات روی قطر اصلی در ماتریس ضرایب وزنی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$A_{ii}^{(r)} = -\sum_{v=1, v\neq i}^{n_x} A_{iv}^{(r)};\ \ i=1,2,...,n_x \tag{۳-۳۶}$$

[1] Test Functions
[2] Shu
[3] Richards

برای محاسبه مشتقات نسبت به y نیز می‌توان از روابط مشابه استفاده نمود. در مورد نحوه انتخاب نقاط گره‌ای، یکی از انتخاب‌های اولیه و معمولا مناسب، انتخاب نقاط با فاصله یکسان از یکدیگر است. در این حالت مختصات این نقاط به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_i = \frac{i-1}{n_x - 1} a \ , \ i = 1,2,\ldots,n_x \qquad y_i = \frac{i-1}{n_y - 1} b \ , \ i = 1,2,\ldots,n_y \tag{۳۷-۳}$$

در اکثر مواقع، در صورت انتخاب نقاط گره‌ای با فواصل غیر یکسان، روش مربعات دیفرانسیلی نتایج دقیق‌تری خواهد داشت. در این حالت می‌توان نقاط گره‌ای را به‌صورت ریشه‌های توابع چندجمله‌ای متعامد انتخاب نمود. برای مثال نقاط گره‌ای را می‌توان به‌صورت زیر انتخاب نمود:

$$x_i = \frac{1-\cos\left[(i-1)\pi/(n_x-1)\right]}{2} a \ ; \ i = 1,2,\ldots,n_x \qquad y_i = \frac{1-\cos\left[(i-1)\pi/(n_y-1)\right]}{2} b \ ; \ i = 1,2,\ldots,n_y \tag{۳۸-۳}$$

در روش مربعات دیفرانسیلی، نحوه انتخاب و نیز تعداد نقاط گره‌ای در جهات مختلف مختصات می‌تواند متفاوت باشد؛ اما فاصله بین این نقاط در هر جهت باید یکسان باشد (شکل ۳-۵). پس از انتخاب نقاط گره‌ای، با داشتن مختصات این نقاط می‌توان ضرایب وزنی را با استفاده از فرمول‌های (۳-۳۳) تا (۳-۳۶) تقریب زد. سپس با جایگذاری مشتقات موجود در معادله دیفرانسیل براساس روابط (۳-۳۱) و (۳-۳۲)، یک دستگاه معادلات جبری به‌دست می‌آید. با حل این دستگاه، مجهولات مساله که مقدار تابع در نقاط گره‌ای می‌باشند، به‌دست می‌آیند. در صورتی که مقدار تابع در نقاطی غیر از نقاط گره‌ای موردنظر باشد، باید از میانیابی استفاده نمود.

۳-۷ جمع بندی

در این فصل در مورد روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل بحث شد. ابتدا فرمول‌بندی روش اجزای محدود براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای حل مساله کمانش ورق‌ها توضیح داده شد. در فصل پنجم نتایج به‌دست آمده از حل اجزای محدود با استفاده از کد نویسی درمحیط نرم افزار متلب، با نتایج حل تحلیلی مقایسه شده است. در انتهای فصل نیز در مورد روش مربعات دیفرانسیلی و نحوه به‌دست آوردن مختصات نقاط گره‌ای و ضرایب وزنی توضیح داده شد که از این روش در فصل ششم برای ارزیابی نتایج مربوط به کمانش ورق‌های حلقوی استفاده شده است.

فصل چهارم:

حل مساله پیش‌کمانش

۴-۱ مقدمه

همان طور که در فصل دوم بیان شد، به منظور محاسبه بار کمانش یک ورق، ابتدا باید معادلات مربوط به حالت تعادل اولیه یا معادلات پیش‌کمانش حل شوند. در این فصل درمورد نحوه حل این معادلات توضیح داده می‌شود. ابتدا این معادلات برای یک ورق بدون گشودگی که تحت بارگذاری داخل صفحه‌ای غیریکنواخت قرار دارد، حل می‌شوند. پس از آن دو روش حل برای محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش در ورق‌های مستطیلی دارای گشودگی ارائه می‌شود. روش حل اول براساس توابع پتانسیل مختلط بوده و برای گشودگی مربعی از نگاشت استفاده می‌شود. در روش حل دوم، با استفاده از بسط تابع تنش در مختصات قطبی و استفاده از شکل انتگرالی شرایط مرزی، میدان تنش پیش‌کمانش برای ورق با گشودگی دایروی محاسبه می‌شود.

۴-۲ میدان تنش ورق مستطیلی بدون گشودگی در معرض بارگذاری غیریکنواخت

معادلات پیش‌کمانش برای یک ورق بدون نقص اولیه و بدون حضور نیروهای حجمی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند (روابط ۲-۱۵ و ۲-۱۶)):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0 \tag{۴-۱}$$

برای ورق‌ها با هندسه ساده (بدون گشودگی) که مرزهای آن نسبت به جابجایی داخل صفحه‌ای مقید نشده باشد و در معرض بارگذاری یکنواخت و یا بارگذاری خطی در لبه‌ها باشد، معادلات بالا به راحتی قابل حل می‌باشد. در این حالت توزیع تنش در صفحه، همان تابع بارگذاری در لبه‌ها می‌باشد و این تابع درمعادلات (۴-۱) و نیز در معادلات سازگاری و شرایط مرزی صدق کرده و بنابراین جواب مساله می‌باشد.

معادلات (۴-۱) برحسب میدان جابجایی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند (روابط ۲-۴۹ و ۲-۵۰):

$$A\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\left(G+\lambda\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+G\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=0,\quad A\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\left(G+\lambda\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+G\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}=0 \tag{۴-۲}$$

معادلات (۴-۱) و (۴-۲) از نوع مسائل الاستیسیته دوبعدی می‌باشند. هدف از حل این معادلات، به‌دست آوردن میدان تنش پیش‌کمانش ورق می‌باشد که به عنوان ضریب در معادلات پایداری ظاهر می‌شوند. بنابراین برای به‌دست آوردن میدان تنش پیش‌کمانش، باید معادلات (۴-۱) و یا (۴-۲) حل شوند.

۴-۲-۱ حل مسائل الاستیسیته دو بعدی

به طور کلی برای حل مسائل الاستیسیته دو روش وجود دارد:

روش براساس میدان جابجایی: در این روش معادلات براساس میدان جابجایی نوشته و حل می‌شوند. پس از محاسبه جابجایی‌ها، با استفاده از روابط کرنش-جابجایی، مولفه‌های کرنش به‌دست می‌آید و پس از آن با استفاده از روابط ساختاری مولفه‌های تنش قابل محاسبه می‌باشند. در این حالت نیازی به ارضای شرایط سازگاری نیست [۱۰۲].

روش بر پایه میدان تنش: در این روش معادلات براساس مولفه‌های تنش نوشته می‌شوند. در این حالت برای این‌که میدان جابجایی به‌دست آمده از انتگرال‌گیری مولفه‌های کرنش، پیوسته و تک‌مقداری باشد، باید معادلات سازگاری نیز ارضا شود.

انتخاب یکی از دوروش ذکر شده برای حل معادلات تا حد زیادی وابسته به نوع شرایط مرزی می‌باشد. در صورتی که شرایط مرزی مساله به‌صورت جابجایی در مرزها مشخص شده باشد، اعمال آن با استفاده از حل معادلات نوشته شده برحسب میدان جابجایی ساده‌تر خواهد بود و درصورتی که شرایط مرزی به‌صورت نیروهای اعمالی در مرزها تعریف شده باشد، استفاده از حل معادلات برحسب میدان تنش مناسب‌تر است.

۴-۲-۲ حل معادلات براساس میدان جابجایی

معادلات (۴-۲) به شکل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کوپل شده و با ضرایب ثابت می‌باشند. برای حل این معادلات، میدان جابجایی به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$u_0(x,y)=(A_0+A_1x+A_2y)e^{\alpha x+\beta y}\,,\ v_0(x,y)=(B_0+B_1x+B_2y)e^{\alpha x+\beta y} \tag{۴-۳}$$

که در آن ثوابت A_i و $B_i\,, i=0,1,2$ در ادامه روند حل مشخص می‌شوند. با جایگذاری این میدان‌جابجایی در معادلات (۴-۲) ، دو معادله جبری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\Big(A_1\big((2\nu-2)\alpha^2+(2\nu-1)\beta^2\big)-B_1\alpha\beta\Big)x+\Big(A_2\big((2\nu-2)\alpha^2+(2\nu-1)\beta^2\big)-B_2\alpha\beta\Big)y\\&\quad+\Big(A_0\big((2\nu-2)\alpha^2+(2\nu-1)\beta^2\big)-B_0\alpha\beta+A_1(4\nu-4)\alpha-B_1\beta+A_2(4\nu-2)\beta-B_2\alpha\Big)=0\end{aligned} \tag{۴-۴}$$

$$\begin{aligned}&\Big(B_1\big((2\nu-2)\beta^2+(2\nu-1)\alpha^2\big)-A_1\alpha\beta\Big)x+\Big(B_2\big((2\nu-2)\beta^2+(2\nu-1)\alpha^2\big)-A_2\alpha\beta\Big)y\\&\quad+\Big(B_0\big((2\nu-2)\beta^2+(2\nu-1)\alpha^2-A_0\alpha\beta\big)+B_2(4\nu-4)\beta-A_1\beta+B_1(4\nu-2)\alpha-A_2\alpha\Big)=0\end{aligned} \tag{۴-۵}$$

برای آن‌که این معادلات همواره برقرار باشند، باید ضرایب x و y و نیز مجموع جملات بدون ضریب برابر صفر باشند. بدین ترتیب یک دستگاه معادلات با شش معادله به‌دست می‌آید. این دستگاه معادلات را می‌توان به شکل $[H]\{V\}=0$ نوشت که در آن $[H]$ ماتریس ضرایب و $\{V\}$ بردار ثوابت بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V=\{A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad B_0 \quad B_1 \quad B_2\}^T \tag{۶-۴}$$

دستگاه معادلات به‌دست آمده همگن می‌باشد و برای داشتن جواب غیر صفر، باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر با صفر باشد. با صفر قرار دادن مقدار دترمینان ماتریس ضرایب، حل معادله مشخصه حاصل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$|H|=0 \rightarrow \alpha=\pm i\beta. \tag{۷-۴}$$

که در آن $i^2=-1$ پارامتر مختلط می‌باشد. برای محاسبه بردار ضرایب V، مقدار $\alpha=i\beta$ در ماتریس H جایگذاری شده و سپس دستگاه معادلات به‌دست آمده حل می‌شود. با حل این دستگاه سه بردار مستقل خطی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mathbf{V_1}=\{i,0,0,1,0,0\}^T,\ \mathbf{V_2}=\left\{\frac{4\nu-3}{\beta},i,0,0,1,0\right\}^T,\ \mathbf{V_3}=\left\{-\frac{4\nu-3}{\beta}i,0,i,0,0,1\right\}^T. \tag{۸-۴}$$

همچنین بردارهای متناظر با مقدار ویژه $\alpha=-i\beta$ مزدوج مختلط بردارهای به‌دست آمده در رابطه (۴-۸) می‌باشند. اکنون حل معادلات (۴-۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} u_0(x,y) \\ v_0(x,y) \end{Bmatrix}=\sum_{j=1}^{3}\left(C_{1j}\,\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_j\,e^{i\beta x+\beta y}+C_{2j}\,\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{V}}_j\,e^{-i\beta x+\beta y}\right). \tag{۹-۴}$$

که در آن C_{1j} و C_{2j} ثوابت مساله بوده و $\bar{v}_j$ بردار مزدوج مختلط v_j می‌باشد. همچنین ماتریس $\boldsymbol{B}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}. \tag{۱۰-۴}$$

اکنون با جایگذاری $v_j\ (j=1,2,3)$ از معادلات (۴-۸) در (۴-۲)، حل معادلات (۴-۲) را می‌توان به شکل زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} u_0(x,y)=&\left(C_1+C_4x+C_6y\right)\left(\cosh(\beta y)\cos(\beta x)+\sinh(\beta y)\cos(\beta x)\right) \\ &+\left(C_2-C_3x-C_5y\right)\left(\cosh(\beta y)\sin(\beta x)+\sinh(\beta y)\sin(\beta x)\right) \end{aligned} \tag{۱۱-۴}$$

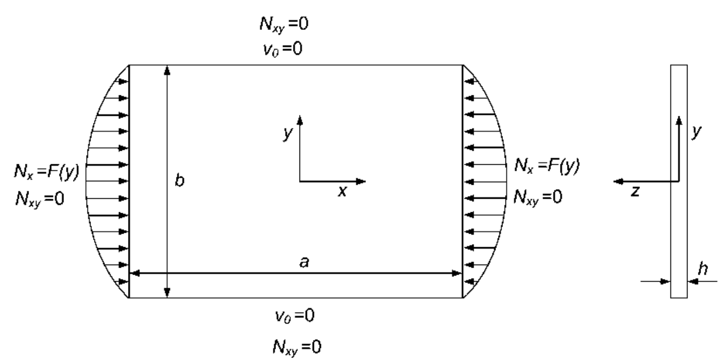
$$v_0(x,y)=\left(-C_2+C_3x+\frac{4\nu-3}{\beta}C_4+C_5\left(\frac{4\nu-3}{\beta}+y\right)\right)\left(\cosh(\beta y)\cos(\beta x)+\sinh(\beta y)\cos(\beta x)\right)$$
$$+\left(C_1+\frac{4\nu-3}{\beta}C_3+C_4x+C_6\left(\frac{4\nu-3}{\beta}+y\right)\right)\left(\cosh(\beta y)\sin(\beta x)+\sinh(\beta y)\sin(\beta x)\right) \qquad (۱۲-۴)$$

ثوابت موجود در معادلات بالا (β,C_j)، پس از اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آیند.

شرایط مرزی:یک ورق مستطیلی که درمعرض بارگذاری متقارن نسبت به محور x قرار داشته و جابجایی داخل صفحه‌ای آن در راستای محور y مقید شده باشد، مفروض است (شکل ۴-۱). به دلیل وجود تقارن در بارگذاری و شرایط مرزی ، تعدادی از جملات موجود در روابط (۴-۱۱) و (۴-۱۲) حذف شده و جواب نهایی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$u_0(x,y)=C_4x\cosh(\beta y)\cos(\beta x)+C_2\cosh(\beta y)\sin(\beta x)-C_5y\sinh(\beta y)\sin(\beta x) \qquad (۱۳-۴)$$

$$v_0(x,y)=C_5y\cosh(\beta y)\cos(\beta x)+\left(-C_2+\frac{4\nu-3}{\beta}C_4+\frac{4\nu-3}{\beta}C_5\right)\sinh(\beta y)\cos(\beta x)+C_4x\sinh(\beta y)\sin(\beta x) \qquad (۱۴-۴)$$



شکل ۴-۱: ورق مستطیلی با بارگذاری غیریکنواخت در لبه‌ها.

براساس شکل ۴-۱، شرایط مرزی به‌صورت زیر است:

$$v_0\left(x,y=\pm\frac{b}{2}\right)=0;\quad N_{xy}\left(x,y=\pm\frac{b}{2}\right)=0;\quad N_{xy}\left(x=\pm\frac{a}{2},y\right)=0;\quad N_x\left(x=\pm\frac{a}{2},y\right)=-F(y). \qquad (۱۵-۴)$$

سه شرط مرزی اول در رابطه (۴-۱۵) در دوحالت زیر ارضا می‌شوند

$$1.\quad C_2=0,\quad C_5=-\frac{4\nu-3}{2(2\nu-1)}C_4,\quad \beta=0. \qquad (۱۶-۴)$$

$$2.\quad C_5=0,\quad C_2=\frac{\sin(\beta a/2)(4\nu-4)-a\beta\cos(\beta a/2)}{2\beta\sin(\beta a/2)}C_4,\quad \beta=\frac{2n\pi i}{b}\ (n=1,2,3,...). \qquad (۱۷-۴)$$

براساس روابط (۴-۱۶) و (۴-۱۷)، دو دسته جواب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$1.\quad u_0(x,y)=C_{40}x\ ;\ \ v_0(x,y)=0 \tag{۴-۱۸}$$

$$2.\ \begin{cases} u_0(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{4n}\left(A_n\cosh(\beta_n y)\sin(\beta_n x)+x\cosh(\beta_n y)\cos(\beta_n x)\right) \\ v_0(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{4n}\left(-A_n\cosh(\beta_n y)\sin(\beta_n x)+\dfrac{4\nu-3}{\beta_n}\sinh(\beta_n y)\cos(\beta_n x)+x\sinh(\beta_n y)\sin(\beta_n x)\right)\end{cases} \tag{۴-۱۹}$$

$$Where:\ A_n=\frac{\sin(\beta_n a/2)(4\nu-4)-a\beta_n\cos(\beta_n a/2)}{2\beta_n\sin(\beta_n a/2)}.$$

با توجه به این‌که معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله خطی است، براساس اصل جمع آثار، جواب حاصل برابر با مجموع جواب های به‌دست آمده در معادلات (۴-۱۶) تا (۴-۱۹) و برای $n=0,1,2,...$ می‌باشد. در حل نهایی، ثوابت $C_{4n}, n=0,1,2,..$ باید به گونه‌ای تعیین شوند که میدان تنش به‌دست آمده شرایط مرزی نیرویی در لبه‌های راست و چپ (چهارمین شرط مرزی در رابطه (۴-۱۵)) را ارضا کند. برای اعمال این شرط مرزی، مقدار N_x با استفاده از میدان جابجایی محاسبه شده و مقدار آن به ازای $x=\pm a/2$ به‌دست می‌آید. این مقدار با بسط فوریه کسینوسی تابع بارگذاری $F(y)$ مساوی قرار داده می‌شود:

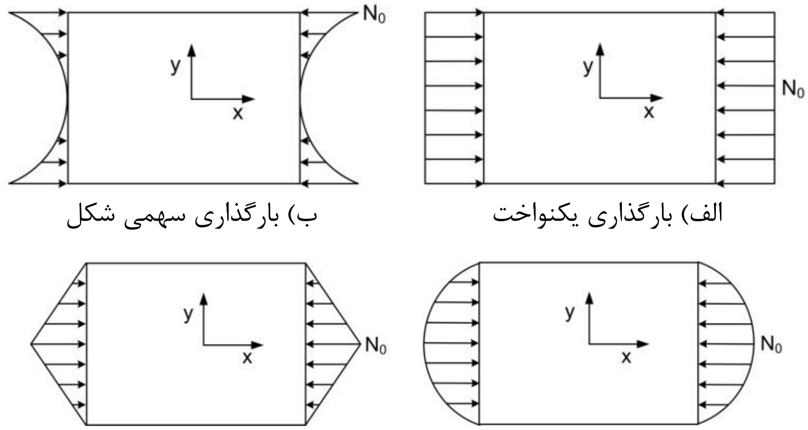
$$\begin{aligned} N_x(x=\pm a/2,y)=F(y)\rightarrow b_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)=C_0\frac{Eh(\nu-1)}{(1+\nu)(2\nu-1)} \\ +\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{Eh\left(2\cos\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)+\beta_n a\right)\cosh(\beta_n y)}{2(1+\nu)\sin\left(\frac{\beta_n a}{2}\right)}.\end{aligned} \tag{۴-۲۰}$$

اکنون برای محاسبه ثوابت $C_n, n=0,1,2,...$ در رابطه (۴-۲۰)، دو طرف این رابطه در $\cos(m\pi y/b)$ ضرب شده و از عبارت حاصل در بازه $-b/2$ تا $b/2$ انتگرال گرفته می‌شود. این کار برای مقادیر مختلف $n=0,1,2,...$ انجام می‌شود. در نتیجه، یک دستگاه معادلات جبری به‌دست می‌آید و با حل این دستگاه، ثوابت C_n محاسبه می‌شوند. در این مرحله حل مساله کامل شده و با استفاده از روابط بین منتجه‌های تنش و میدان جابجایی، می‌توان نحوه تغییرات مولفه‌های تنش در صفحه را به‌دست آورد. برای حالت خاصی که ورق تحت بارگذاری یکنواخت N_0 قرار دارد، حل بیان شده دارای نتایج دقیق می‌باشد. میدان جابجایی برای دو نوع شرط مرزی لبه‌های مقید شده و لبه‌های آزاد در راستای محور y به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &v(y=\pm b/2)=0:\ \ u=-\frac{N_0(1+\nu)(2\nu-1)}{Eh(1-\nu)}x,\ \ v=0 \\ &v(y=\pm b/2)\neq 0:\ \ u=-\frac{N_0(\nu^2-1)}{Eh}x,\ \ v=-\frac{N_0\nu(\nu+1)}{Eh}y \end{aligned} \tag{۴-۲۱}$$

۴-۲-۳ نتایج

برای بررسی دقت حل به‌دست آمده، چهارنوع بارگذاری درنظر گرفته شده است. در شکل ۴-۲ حالت‌های مختلف بارگذاری غیریکنواخت در لبه‌های یک ورق مستطیلی نمایش داده شده است. به منظور مقایسه نتایج، بار معادل استاتیکی برای همه حالت‌های بارگذاری (مقدار انتگرال $\int_{-b/2}^{b/2} F(y)dy$) یکسان درنظر گرفته شده است.



ب) بارگذاری سهمی شکل　　الف) بارگذاری یکنواخت

د) بارگذاری مثلثی　　ج) بار گذاری کسینوسی

شکل ۴-۲: حالت‌های مختلف بارگذاری غیریکنواخت یک ورق مستطیلی

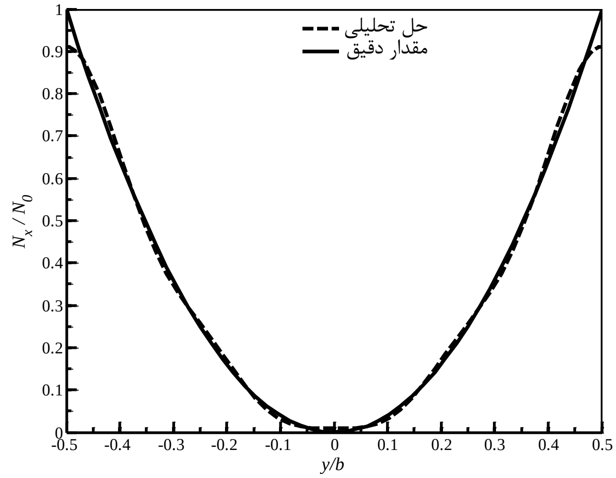
این بارگذاری به یکی از صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

بارگذاری کسینوسی: $F(y) = -\frac{\pi}{2} N_0 \cos(\frac{\pi}{b} y)$

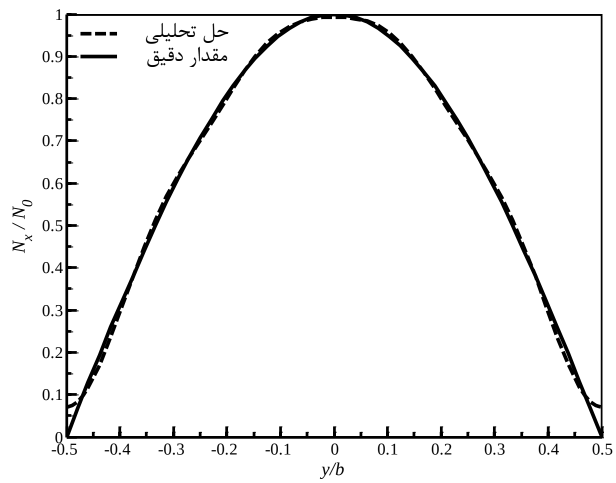
بارگذاری سهمی شکل: $F(y) = -3N_0 (\frac{2y}{b})^2$

بارگذاری مثلثی: $\begin{cases} F(y) = -2N_0(1-2y/b) & y>0 \\ F(y) = -2N_0(1+2y/b) & y<0 \end{cases}$

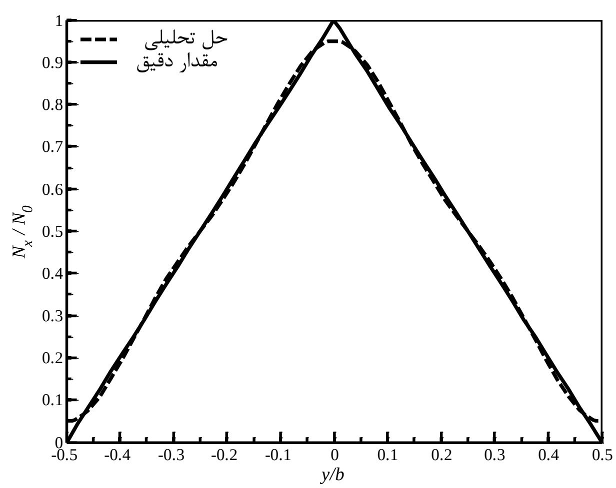
که در آن b عرض ورق است. در حالت بارگذاری غیریکنواخت، با افزایش تعداد جملات درنظر گرفته شده برای میدان جابجایی (مقدار n در رابطه (۴-۱۹))، دقت حل حاصل افزایش می‌یابد. به منظور بررسی دقت حل تحلیلی ارائه شده در ارضای شرایط مرزی نیرویی در لبه‌های بارگذاری شده، در شکل ۴-۳، مقدار N_x در این لبه‌ها $(x = \pm a/2)$ که ازحل تحلیلی و به ازای $n=5$ به‌دست آمده است، با مقدار دقیق آن براساس نوع تابع بارگذاری در لبه ورق، برای سه نوع بارگذاری مقایسه شده است. در این شکل محور y برحسب دامنه بارگذاری N_0 نرمالیزه شده است. توضیح این‌که مقدار $n=5$ با توجه به بررسی همگرایی مقادیر به‌دست آمده برای بار کمانش ورق مورد استفاده قرار گرفته است. برای بارگذاری یکنواخت، شرایط مرزی نیرویی در لبه‌ها به‌صورت دقیق ارضا می‌شود.



الف)



ب)

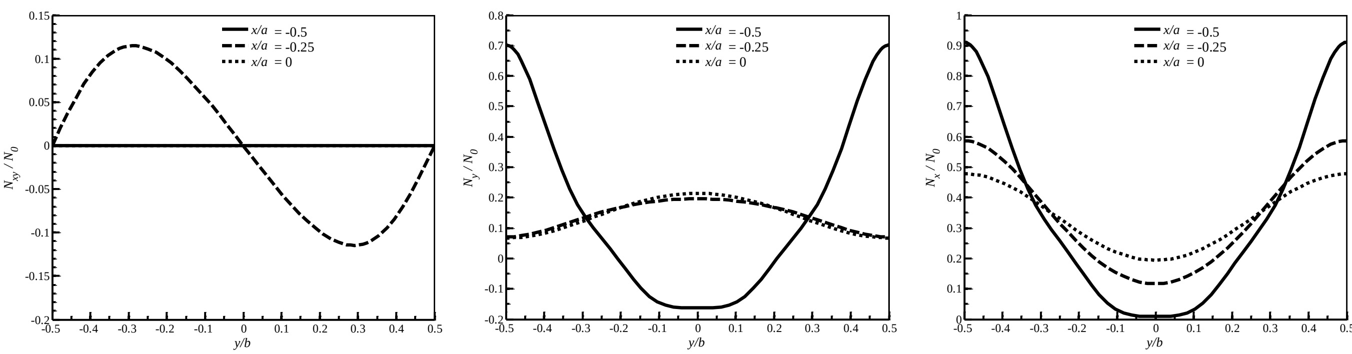


ج)

شکل ۴-۳: مقایسه مقدار به‌دست آمده از حل ارائه شده برای N_x در لبه سمت راست و چپ ورق $(x=\pm a/2)$ با مقدار دقیق آن

الف) بارگذاری سهمی شکل، ب) بارگذاری کسینوسی و ج) بارگذاری مثلثی

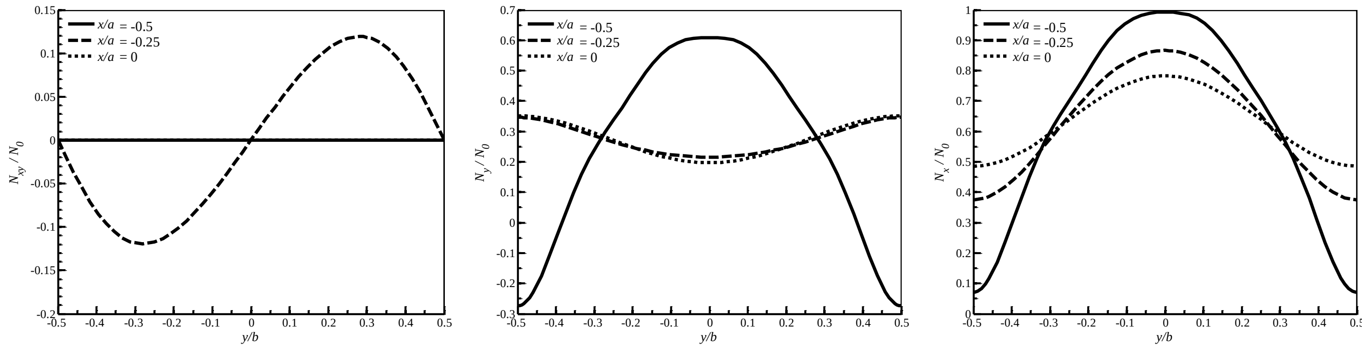
با توجه به شکل ۴-۳ مشاهده می‌شود که حل ارائه شده با وجود استفاده از تعداد جملات محدود، به خوبی قادر به ارضای شرایط مرزی نیرویی در لبه‌ها بوده و تنها در نزدیکی گوشه‌های ورق و نقاط تیز بارگذاری، با مقدار دقیق شرایط مرزی تفاوت دارد. همچنین در شکل‌های ۴-۴ تا ۴-۶، نحوه تغییرات منتجه‌های تنش داخل صفحه‌ای در سه موقعیت و برای سه نوع بارگذاری نشان داده شده است. براساس این شکل‌ها مشاهده می‌شود که مقدار N_{xy} در لبه‌های سمت راست و چپ ورق $(x=\pm a/2)$ برابر با صفر است که نشان می‌دهد حل بدست آمده شرایط مرزی $N_{xy}=0$ را در این لبه‌ها به طور دقیق ارضا می‌کند. همچنین دامنه تغییرات N_{xy} در $x/a=0$ تقریبا برای تمامی حالت‌های بارگذاری یکسان بوده و نسبت به دامنه تغییرات N_x و N_y کوچکتر است. نحوه تغییرات N_x نیز به گونه‌ای است که در لبه‌های ورق $(x/a=-0.5)$ شرایط مرزی نیرویی را ارضا کرده و بنابراین مشابه تابع بارگذاری است، اما با دور شدن از لبه‌ها، دامنه تغییرات آن کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به اینکه در لبه‌های بالا و پایین، حرکت ورق مقید شده است، مقدار N_y در این لبه‌ها برابر با صفر نمی‌باشد و با دور شدن از لبه‌ها، دامنه تغییرات N_y با سرعت بیشتری نسبت به N_x کاهش می‌یابد.



ج)　　　　ب)　　　　الف)

شکل ۴-۴: تغییرات منتجه‌های تنش داخل صفحه‌ای در سه موقعیت مختلف برای بارگذاری سهمی شکل

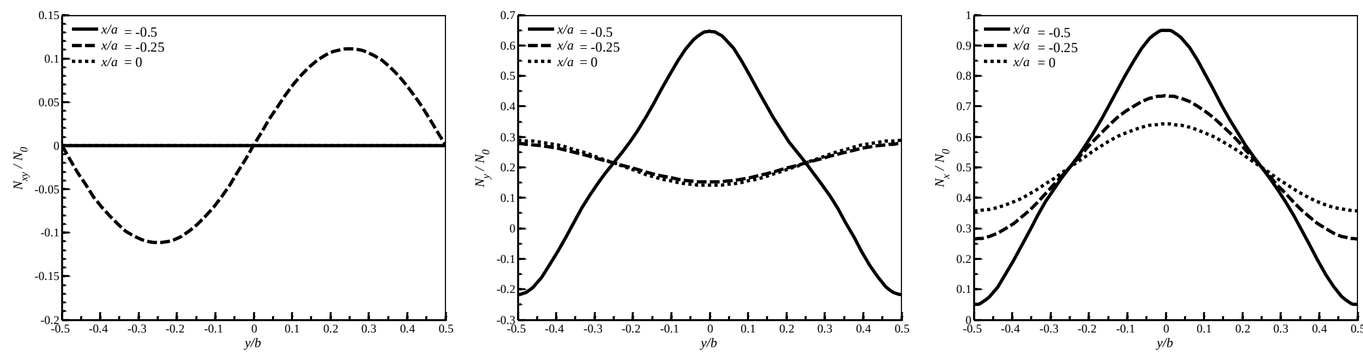
الف) منتجه تنش N_x ، ب) منتجه تنش N_y ، ج) منتجه تنش N_{xy}



ج)　　　　　　　　　　ب)　　　　　　　　　　الف)

شکل ۴-۵: تغییرات منتجه‌های تنش داخل صفحه‌ای در سه موقعیت مختلف برای بارگذاری کسینوسی

الف) منتجه تنش N_x ، ب) منتجه تنش N_y ، ج) منتجه تنش N_{xy}



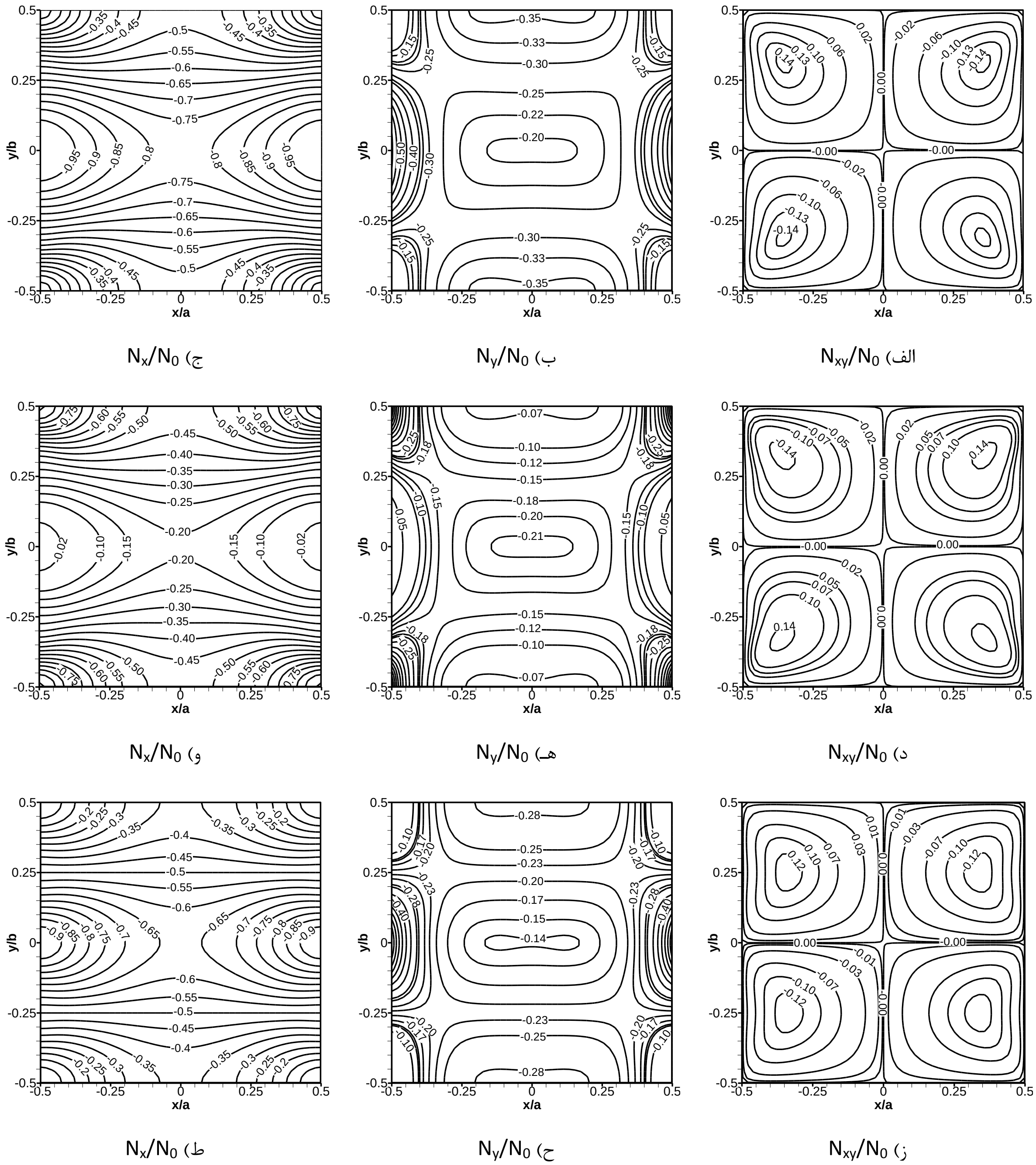
ج)　　　　　　　　　　ب)　　　　　　　　　　الف)

شکل ۴-۶: تغییرات منتجه‌های تنش داخل صفحه‌ای در سه موقعیت مختلف برای بارگذاری مثلثی

الف) منتجه تنش N_x ، ب) منتجه تنش N_y ، ج) منتجه تنش N_{xy}

در شکل ۴-۷ تغییرات منتجه‌های تنش در داخل ورق به‌صورت منحنی تراز[1] و برای حالت‌های مختلف بارگذاری نمایش داده شده است.

[1] Contour Plot



شکل ۴-۷: تغییرات منتجه‌های تنش در یک ورق مستطیلی

الف-ج) بارگذاری کسینوسی، د-و) بارگذاری سهمی شکل، ز-ط) بارگذاری مثلثی

۴-۳ حل معادلات پیش‌کمانش برای ورق دارای گشودگی

استفاده از حل به‌دست آمده در قسمت قبل برای محاسبه میدان تنش در یک ورق دارای گشودگی از دقت پایینی برخوردار است؛ زیرا با استفاده از این حل نمی‌توان شرایط مرزی در مرز گشودگی را ارضا نمود. به منظور رفع این مشکل و به‌دست آوردن توزیع تنش در یک ورق دارای گشودگی، از روش توابع پتانسیل مختلط استفاده شده است. در ادامه فرمول‌بندی و نحوه اعمال شرایط مرزی برای ورق‌ها با ابعاد محدود در این روش توضیح داده می‌شود.

۴-۳-۱ روش توابع پتانسیل مختلط

معادله تعمیم یافته دوهمساز[۱]: همان طور که گفته شد، درصورتی که شرایط مرزی مساله از نوع نیرویی باشد، از معادلات (۴-۱) برای حل مساله و به‌دست آوردن توزیع تنش استفاده می‌شود. این معادلات را برحسب مولفه‌های تنش می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0 \tag{۴-۲۲}$$

یک روش برای حل معادلات (۴-۲۲) و به‌دست آوردن میدان تنش، استفاده از تابع تنش است. در این روش مولفه‌های تنش براساس تابع تنش ϕ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \tag{۴-۲۳}$$

مشاهده می‌شود که با قرار دادن مولفه‌های تنش از رابطه (۴-۲۳) در معادلات تعادل، این معادلات ارضا می‌شوند. در صورتی که تابع تنش ϕ مشخص باشد، می‌توان مولفه‌های تنش را به‌دست آورد. پس از آن با استفاده از روابط تنش-کرنش، مولفه‌های کرنش نیز به‌دست می‌آیند و با توجه به روابط کرنش-جابجایی، می‌توان میدان جابجایی را محاسبه نمود. در این حالت برای این‌که میدان جابجایی به‌دست آمده پیوسته و یکتا باشد[۲]، باید بین مولفه‌های کرنش شرایط سازگاری برقرار باشد [۱۰۲]. در حالت تنش صفحه‌ای، معادله سازگاری به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}=0 \tag{۴-۲۴}$$

---

[1] Biharmonic
[2] Continuous and Single-Valued

اکنون باید معادله سازگاری بالا برحسب مولفه‌های تنش و نهایتا برحسب تابع تنش ϕ نوشته شود. بدین منظور باید از روابط بین تنش و کرنش استفاده نمود. براساس قانون هوک، رابطه بین تنش و کرنش به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma = K\varepsilon,\ \ \varepsilon = C\sigma \tag{۲۵-۴}$$

در رابطه (۴-۲۵)، K ماتریس سفتی و C ماتریس نرمی بوده و σ و ε نیز بردارهایی شامل مولفه‌های تنش و کرنش می‌باشند. برای حالت تنش صفحه‌ای، مولفه‌های τ_{xz} و τ_{yz} برابر با صفر می‌باشند. همچنین با فرض صفر بودن کرنش نرمال در راستای ضخامت $\varepsilon_z = 0$، رابطه بین تنش-کرنش را می‌توان به شکل زیر نوشت [۱۰۹]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= c_{11}\sigma_x + c_{12}\sigma_y + c_{13}\sigma_z + c_{16}\tau_{xy}\\
\varepsilon_y &= c_{12}\sigma_x + c_{22}\sigma_y + c_{23}\sigma_z + c_{26}\tau_{xy}\\
0 &= c_{13}\sigma_x + c_{23}\sigma_y + c_{33}\sigma_z + c_{36}\tau_{xy}\\
\gamma_{xy} &= c_{16}\sigma_x + c_{26}\sigma_y + c_{36}\sigma_z + c_{66}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{۲۶-۴}$$

اکنون با محاسبه σ_z از رابطه سوم و قرار دادن در بقیه روابط، مولفه‌های کرنش را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}\\
\varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}\\
\gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{۲۷-۴}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{c_{11}c_{33} - {c_{13}}^2}{c_{33}}, \quad a_{12} = \frac{c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}}{c_{33}}\\
a_{16} &= \frac{c_{16}c_{33} - c_{13}c_{36}}{c_{33}}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}c_{33} - {c_{23}}^2}{c_{33}}\\
a_{26} &= \frac{c_{26}c_{33} - c_{23}c_{36}}{c_{33}}, \quad a_{66} = \frac{c_{66}c_{33} - {c_{36}}^2}{c_{33}}
\end{aligned} \tag{۲۸-۴}$$

با قرار دادن روابط تنش-کرنش در معادله سازگاری (۴-۲۴) و سپس با استفاده از تعریف تابع تنش، رابطه سازگاری برحسب تابع تنش ϕ به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$a_{22}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^3\partial y} + (2a_{12} + a_{66})\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4\phi}{\partial x\partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0 \tag{۲۹-۴}$$

معادله (۴-۲۹)، حالت تعمیم یافته معادله دوهمساز می‌باشد.

معادله دوهمساز: برای یک ماده همسانگرد، تنها دو ثابت الاستیک مستقل وجود دارد که این ثوابت مدول الاستیک E و ضریب پواسون ν می‌باشند. برای حالت تنش صفحه‌ای، رابطه بین تنش کرنش به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱۰۲]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (۴-۳۰)$$

با معکوس کردن ماتریس سفتی و محاسبه ماتریس نرمی، مولفه‌های کرنش برحسب مولفه‌های تنش به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\nu+1)}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (۴-۳۱)$$

با قرار دادن مولفه‌های کرنش در رابطه سازگاری و استفاده از تعریف تابع تنش، معادله سازگاری به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\nabla^4 \phi = 0 \rightarrow \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0 \qquad (۴-۳۲)$$

معادله (۴-۳۲)، معادله دوهمساز است که با حل آن، تابع تنش به‌دست می‌آید.

حل معادله دوهمساز: برای حل معادله تعمیم یافته دوهمساز، جواب به‌صورت $\phi = F(x+\mu y)$ درنظر گرفته می‌شود. با قرار دادن این جواب در معادله (۴-۲۹) رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\left[a_{22} - 2a_{26}\mu + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{16}\mu^3 + a_{11}\mu^4\right] F(x+\mu y) = 0 \qquad (۴-۳۳)$$

برای آنکه رابطه بالا همواره برقرار باشد، باید عبارت داخل کروشه برابر با صفر باشد. معادله حاصل، معادله مشخصه نامیده می‌شود و جواب آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\phi = F_1(x+\mu_1 y) + F_2(x+\mu_2 y) + F_3(x+\mu_3 y) + F_4(x+\mu_4 y) \qquad (۴-۳۴)$$

که در آن μ_i ریشه‌های معادله مشخصه بوده و F_i توابعی دلخواه می‌باشند. ریشه‌های معادله مشخصه μ_i تابعی از ثوابت الاستیک ماده هستند. لخنیتسکی نشان داد که براساس انرژی سیستم، معادله مشخصه نمی‌تواند

ریشه‌های حقیقی داشته باشد [۱۰۹]. همچنین با توجه به این‌که ضرایب معادله مشخصه حقیقی هستند، ریشه‌های معادله مشخصه به‌صورت اعداد مختلط مزدوج خواهند بود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mu_{1,2}=\alpha_1 \pm i\beta_1,\ \ \mu_{3,4}=\alpha_2 \pm i\beta_2 \tag{۴-۳۵}$$

در نتیجه جواب معادله عبارت است از:

$$\phi = F_1(x+\mu_1 y)+F_2(x+\mu_2 y)+F_3(x+\bar{\mu}_1 y)+F_4(x+\bar{\mu}_2 y) \tag{۴-۳۶}$$

همچنین با توجه به این‌که تابع تنش و مولفه‌های تنش باید حقیقی باشند، $F_3=F_1$ و $F_4=F_2$. بنابراین تابع تنش را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\phi = 2\,\mathrm{Re}(F_1(z_1)+F_2(z_2)) \tag{۴-۳۷}$$

که در آن $z_1=x+\mu_1 y$ و $z_2=x+\mu_2 y$. اکنون برای به‌دست آوردن مولفه‌های تنش، دو تابع ϕ و ψ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi(\mathrm{z}_1)=\frac{\partial F_1}{\partial \mathrm{z}_1},\ \psi(\mathrm{z}_2)=\frac{\partial F_2}{\partial \mathrm{z}_2} \tag{۴-۳۸}$$

مولفه‌های تنش و نیز میدان جابجایی براساس این دوتابع به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۱۰]:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2\,\mathrm{Re}[\mu_1^2\phi'(\mathrm{z}_1)+\mu_2^2\psi'(\mathrm{z}_2)]\\
\sigma_y &= 2\,\mathrm{Re}[\phi'(\mathrm{z}_1)+\psi'(\mathrm{z}_2)]\\
\tau_{xy} &= -2\,\mathrm{Re}[\mu_1\phi'(\mathrm{z}_1)+\mu_2\psi'(\mathrm{z}_2)]\\
\mathrm{u} &= 2\,\mathrm{Re}[p_1\phi(z_1)+p_2\psi(z_2)]-wy+u_0\\
v &= 2\,\mathrm{Re}[\mathrm{q}_1\phi(z_1)+q_2\psi(z_2)]+wx+v_0
\end{aligned} \tag{۴-۳۹}$$

که در آن:

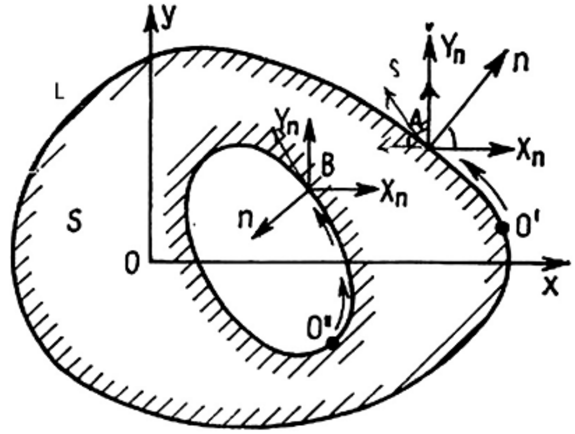
$$p_1=a_{11}\mu_1^2+a_{12}-a_{16}\mu_1,\quad q_1=a_{12}\mu_1+\frac{a_{22}}{\mu_1}-a_{26},\ \ p_2=a_{11}\mu_2^2+a_{12}-a_{16}\mu_2,\quad q_2=a_{12}\mu_2+\frac{a_{22}}{\mu_2}-a_{26} \tag{۴-۴۰}$$

همچنین u_0, v_0 و w ثوابت انتگرال‌گیری بوده و بیانگر حرکت صلب گونه جسم می‌باشند.

اعمال شرایط مرزی: شرایط مرزی مساله می‌تواند از نوع نیرویی و یا جابجایی در مرزهای سیستم باشد. برای شرایط مرزی نیرویی، مولفه‌های نیروی سطحی وارد بر مرز را می‌توان برحسب مولفه‌های تنش به‌شکل زیر نوشت [۱۱۰]:

$$T_x=\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y=\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y),\ \ T_y=\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y=\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y) \tag{۴-۴۱}$$

که در آن n بردار واحد عمود بر مرز سیستم بوده و n_x و n_y کسینوس زاویه بین این بردار و محور x و y می‌باشند (شکل ۴-۸).



شکل ۴-۸: یک ورق دارای گشودگی و بردار عمود بر مرز [۱۱۰]

بردار واحد مماس بر مرز سیستم را می‌توان به شکل $\vec{t}=\frac{dx}{ds}i+\frac{dy}{ds}j$ نوشت، بنابراین بردار عمود بر مرز سیستم به‌صورت زیر می‌باشد:

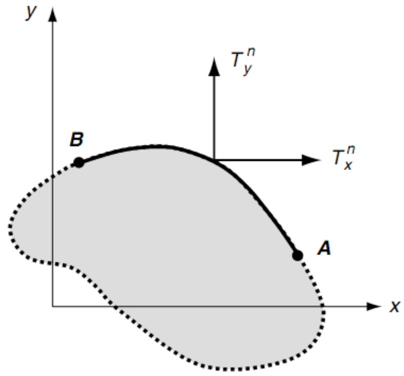
$$\vec{n}=n_x i+n_y j=\frac{dy}{ds}i-\frac{dx}{ds}j,\ \ \vec{n}.\vec{t}=0 \qquad (۴۲-۴)$$

درنتیجه مولفه‌های نیروی سطحی بر واحد طول در مرز را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$T_x=\sigma_x\frac{dy}{ds}-\tau_{xy}\frac{dx}{ds}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}=\frac{d}{ds}(\frac{\partial\phi}{\partial y}),\ \ T_y=\tau_{xy}\frac{dy}{ds}-\sigma_y\frac{dx}{ds}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{dx}{ds}=-\frac{d}{ds}(\frac{\partial\phi}{\partial x}) \qquad (۴۳-۴)$$

در شکل ۴-۹ این نیروها نشان داده شده‌اند. با انتگرال‌گیری از این نیروها بین دو نقطه بر روی مرز سیستم، می‌توان برایند نیروی وارد بر مرز سیستم بین این دو نقطه را محاسبه کرد:

$$\int_s T_x ds+C_1=\frac{\partial\phi}{\partial y}=2\,\mathrm{Re}[\mu_1\phi(z_1)+\mu_2\psi(z_2)]=p_x(s),\ \int_s T_y ds+C_2=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=-2\,\mathrm{Re}[\phi(z_1)+\psi(z_2)]=p_y(s) \qquad (۴۴-۴)$$



شکل ۴-۹: شرایط مرزی یک ورق و نیروهای وارد بر مرز [۱۰۲]

حل مربوط به ورق همسانگرد: معادله سازگاری ورق همسانگرد به‌صورت $\nabla^4\phi = 0$ است. در این حالت، معادله مشخصه به‌صورت $\mu^4 + 2\mu^2 + 1 = 0$ بوده و ریشه‌های این معادله به شکل $\mu_{1,2} = \pm i$ و $\mu_{3,4} = \pm i$ خواهند بود. برای حل معادله دوهمساز در این حالت به شکل زیر عمل می‌شود:

با توجه به تعریف متغیر مختلط $z = x + iy$ روابط زیر برقرار است:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}) \tag{۴۵-۴}$$

بنابراین معادله $\nabla^4\phi = 0$ برحسب متغیر مختلط z به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2} = 0 \tag{۴۶-۴}$$

حل معادله (۴-۴۶) به‌صورت زیر است[۱۰۲]:

$$\phi(z,\overline{z}) = 1/2(z\overline{\gamma(z)} + \overline{z}\gamma(z) + \chi(z) + \overline{\chi(z)}) = \mathrm{Re}(\overline{z}\gamma(z) + \chi(z)) \tag{۴۷-۴}$$

اکنون با تعریف تابع $\psi(z) = \chi'(z)$ ، ترکیب مولفه‌های تنش را می‌توان به شکل زیر نوشت [۱۰۲]:

$$\begin{aligned} &\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta = 2(\gamma'(z) + \overline{\gamma'(z)}) \\ &\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2(\overline{z}\gamma''(z) + \psi''(z)) \end{aligned} \tag{۴۸-۴}$$

با استفاده از روابط (۴-۴۸)، می‌توان مولفه‌های تنش را به شکل زیر به‌دست آورد:

$$\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}[\gamma'(z) - \frac{1}{2}\overline{z}\gamma''(z) - \frac{1}{2}\psi'(z)], \ \sigma_y = 2\,\mathrm{Re}[\gamma'(z) + \frac{1}{2}\overline{z}\gamma''(z) + \frac{1}{2}\psi'(z)], \ \tau_{xy} = \mathrm{Im}[\overline{z}\gamma''(z) + \psi'(z)] \tag{۴۹-۴}$$

همچنین در این حالت، رابطه مربوط به شرایط مرزی به شکل زیر نوشته می‌شود [۱۰۲]:

$$T_x + iT_y = \frac{d}{ds}(\frac{\partial\phi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial x}) = -i\frac{d}{ds}(\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y}) = -i\frac{d}{ds}(\frac{\partial\phi}{\partial \overline{z}}) = -i\frac{d}{ds}(\gamma(z) + z\overline{\gamma'(z)} + \overline{\psi(z)}) \tag{۵۰-۴}$$

که در آن T_x و T_y بردارهای نیرو بر واحد سطح هستند. با انتگرال‌گیری از رابطه (۴-۵۰) بر روی مرز سیستم می‌توان برایند نیروی وارد بر مرز را به شکل زیر به‌دست آورد (شکل ۵-۹):

$$F_x + iF_y = \int_A^B (T_x + iT_y)ds = -i\int_A^B \frac{d}{ds}(\gamma(z) + z\overline{\gamma'(z)} + \overline{\psi(z)})ds = -i[\gamma(z) + z\overline{\gamma'(z)} + \overline{\psi(z)}]_A^B \quad (۴-۵۱)$$

مشاهده می‌شود که در هر دوحالت مربوط به ورق همسانگرد و غیرهمسانگرد، حل مساله نیاز به تعریف دو تابع مختلط دارد که قادر به ارضای شرایط مرزی مساله باشند. با داشتن این دو تابع، می‌توان مولفه‌های تنش، کرنش و میدان جابجایی مساله را یافت. در ورق غیر همسانگرد این دو تابع به‌صورت $\phi(z_1)$ و $\psi(z_2)$ و در ورق همسانگرد به‌صورت $\gamma(z)$ و $\psi(z)$ بیان شدند. لخنیتسکی[1] و ساوین[2]، از جمله محققینی بودند که با استفاده از این روش، میدان تنش یک ورق همسانگرد بی‌نهایت و دارای گشودگی دایروی، بیضوی و مربعی را محاسبه نمودند. ساوین از روش نگاشت شوارتز-کریستوفل[3] و لخنیتسکی از سری فوریه برای محاسبه توابع تنش استفاده نمود؛ اما در عین حال نتایج هر دو روش یکسان می‌باشد [۱۱۰].

روند حل مساله با استفاده از روش اعداد مختلط بدین صورت است که ابتدا یک شکل اولیه برای توابع تنش (مانند یک تابع چند جمله‌ای) که دارای ضرایب ثابتی می‌باشد، درنظر گرفته می‌شود. سپس شرایط مرزی مساله بر روی حل درنظر گرفته شده اعمال شده و ثوابت مساله به‌دست می‌آیند. پس از مشخص شدن توابع تنش، مولفه‌های میدان تنش در ماده قابل محاسبه می‌باشد. در صورتی که هندسه مساله منظم نباشد، می‌توان با استفاده از یک نگاشت مناسب، هندسه مساله را ساده‌تر نموده و پس از حل مساله برای هندسه نگاشت شده، حل مساله را برای هندسه اولیه به‌دست آورد. در ادامه ابتدا در مورد نحوه محاسبه میدان تنش برای یک ورق بی‌نهایت با گشودگی دایروی توضیح داده می‌شود، سپس در مورد چگونگی اعمال شرایط مرزی در حالت ورق محدود بحث می‌شود و در نهایت روش نگاشت به منظور محاسبه میدان تنش برای یک ورق محدود با گشودگی غیر از دایره مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴-۳-۲ ورق بی‌نهایت با گشودگی دایروی

در این حالت توابع تنش به شکل زیر درنظر گرفته می‌شوند [۱۰۲]:

$$\gamma(z) = A_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z^n}, \quad \psi(z) = B_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{z^n} \quad (۴-۵۲)$$

[1] Lekhnitskii
[2] Savin
[3] Schwarz–Christoffel

در رابطه (۴-۵۲)، جمله‌های $A_0 z$ و $B_0 z$ مربوط به حل یک ورق نامتناهی بدون گشودگی می‌باشند که در لبه‌های خود در معرض تنش قرار داشته و در این حالت ضرایب A_0 و B_0 به‌صورت رابطه (۴-۵۳) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&\sigma_x+\sigma_y=2(\gamma'(z)+\overline{\gamma'(z)})=2(A_0+\overline{A_0})=4\,\mathrm{Re}(A_0)\\&\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2(\bar{z}\gamma''(z)+\psi'(z))=2\,B_0\rightarrow\begin{cases}\sigma_y-\sigma_x=2\,\mathrm{Re}(B_0)\\ \tau=\mathrm{Im}(B_0)\end{cases}\end{aligned} \tag{۴-۵۳}$$

اگر ورق در مرزهای خود در معرض تنش‌های نرمال و برشی به‌صورت زیر قرار گیرد:

$$\sigma_x=\sigma_x^0,\;\; \sigma_y=\sigma_y^0,\;\; \tau_{xy}=\tau_{xy}^0 \tag{۴-۵۴}$$

ضرایب A_0 و B_0 به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$A_0=\frac{\sigma_x^0+\sigma_y^0}{4},\;\; B_0=\frac{\sigma_y^0-\sigma_x^0}{2}+i\tau_{xy}^0 \tag{۴-۵۵}$$

در حالت خاصی که ورق مورد بررسی تنها در معرض تنش عمودی در راستای محور x به شکل $\sigma_x^0=s$ قرار داشته باشد، توابع تنش به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\gamma(z)=\frac{s}{4}z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{z^n},\;\; \psi(z)=\frac{-s}{2}z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{z^n} \tag{۴-۵۶}$$

برای محاسبه ثوابت A_n و $B_n\ (n=1,2,3,...)$ باید از شرط مرزی مربوط به مرز گشودگی استفاده نمود. در صورتی که مرز گشودگی در معرض هیچ نوع تنشی نباشد، رابطه مربوط به شرایط مرزی برای آن را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$F_x+iF_y=-i[\gamma(z)+z\overline{\gamma'(z)}+\overline{\psi(z)}]_A^B=0 \tag{۴-۵۷}$$

در صورتی که ورق دارای گشودگی دایروی به شعاع a باشد، بر روی مرز گشودگی $z=ae^{i\theta}$. با قرار دادن این مقدار برای z در رابطه (۴-۵۷) و مساوی صفر قرار دادن ضرایب $e^{in\theta}$ در دو طرف معادله، ثوابت A_n و $B_n\ (n=1,2,3,...)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&A_1=\frac{S}{2}a^2,\;\; A_n=0,\;\; n>1\\&B_1=\frac{-S}{2}a^2,\;\; B_2=0,\;\; B_3=\frac{S}{2}a^4,\;\; B_n=0,\;\; n>3\end{aligned} \tag{۴-۵۸}$$

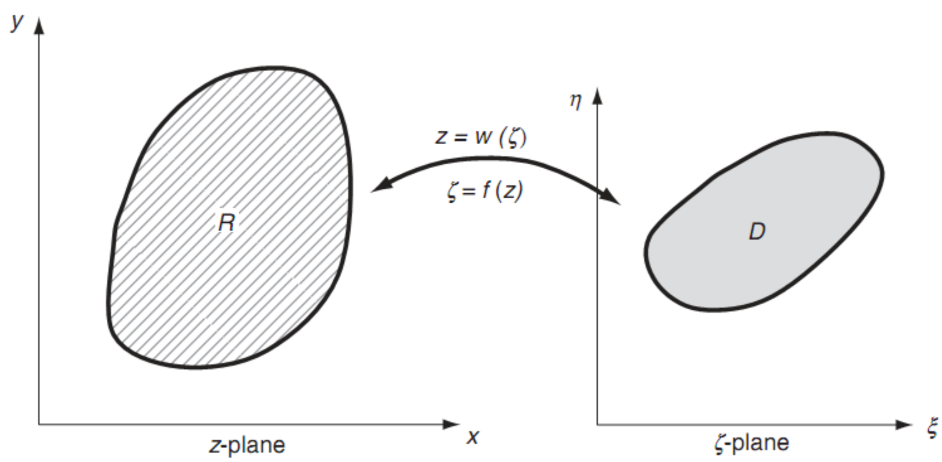
بنابراین جواب نهایی برای توابع تنش به شکل زیر می‌باشد:

$$\gamma(z)=\frac{S}{4}z+\frac{Sa^2}{2z},\quad \psi(z)=\frac{-S}{2}z-\frac{Sa^2}{2z}+\frac{Sa^4}{2z^3} \tag{۵۹-۴}$$

اکنون با داشتن توابع تنش، می‌توان مولفه‌های تنش را با استفاده از رابطه (۴-۴۹) به‌دست آورد.

۴-۳-۳ نگاشت [۱۰۹]

برای به‌دست آوردن توزیع تنش در یک ورق دارای گشودگی غیر دایروی، از نگاشت به‌صورت $z=w(\xi)$ استفاده می‌شود که در آن z متغیر اولیه و ξ متغیر نگاشت یافته می‌باشد (شکل ۴-۱۰). استفاده از نگاشت معمولا باعث پیچیده‌تر شدن معادلات می‌شود؛ ولی مزیتی که نگاشت دارد این است که اعمال شرایط مرزی در مرز گشودگی در ناحیه نگاشت یافته (که به شکل یک دایره است) بسیار راحت‌تر از ناحیه اولیه است.



شکل ۴-۱۰: نگاشت از صفحه z به صفحه ξ و برعکس [۱۰۲]

برای نگاشت ناحیه خارج از یک چند ضلعی به ناحیه خارج از یک دایره، می‌توان از نگاشت شوارتز-کریستوفل استفاده نمود. این نگاشت به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۰۹]:

$$z=w(\xi)=c\int_1^{\xi}(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}....(t-a_n)^{\alpha_n-1}\frac{dt}{t^2}+d \tag{۶۰-۴}$$

که در آن n تعداد اضلاع چند ضلعی و c و d ثوابت مختلطی هستند که مقیاس و موقعیت چندضلعی را مشخص می‌کنند. همچنین $a_1,a_2,...,a_n$ ثوابت انتگرال شوارتز-کریستوفل نامیده می‌شوند و درواقع نقاطی روی دایره در صفحه ξ هستند که به رئوس چند ضلعی در صفحه z نگاشت می‌شوند و $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ نشان دهنده زاویه خارجی

هر راس چند ضلعی برحسب ضریبی از π می‌باشند. (برای مثال برای مربع مقدار α_n برابر با $3/2$ می‌باشد) و t نقطه ای در ناحیه خارج از دایره $|t|=1$ می‌باشد. این نگاشت به جز در نقاط راس چند ضلعی که در آن $w'(\xi)$ صفر می‌شود، در بقیه نقاط پیوسته است. همچنین برای یک چند ضلعی، رابطه $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=n+2$ برقرار است. با توجه به این رابطه، انتگرال (۴-۶۰) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$w(\xi)=C\int_1^{\xi}(1-\frac{a_1}{t})^{\alpha_1-1}(1-\frac{a_2}{t})^{\alpha_2-1}....(1-\frac{a_n}{t})^{\alpha_n-1}dt+d \qquad (۴-۶۱)$$

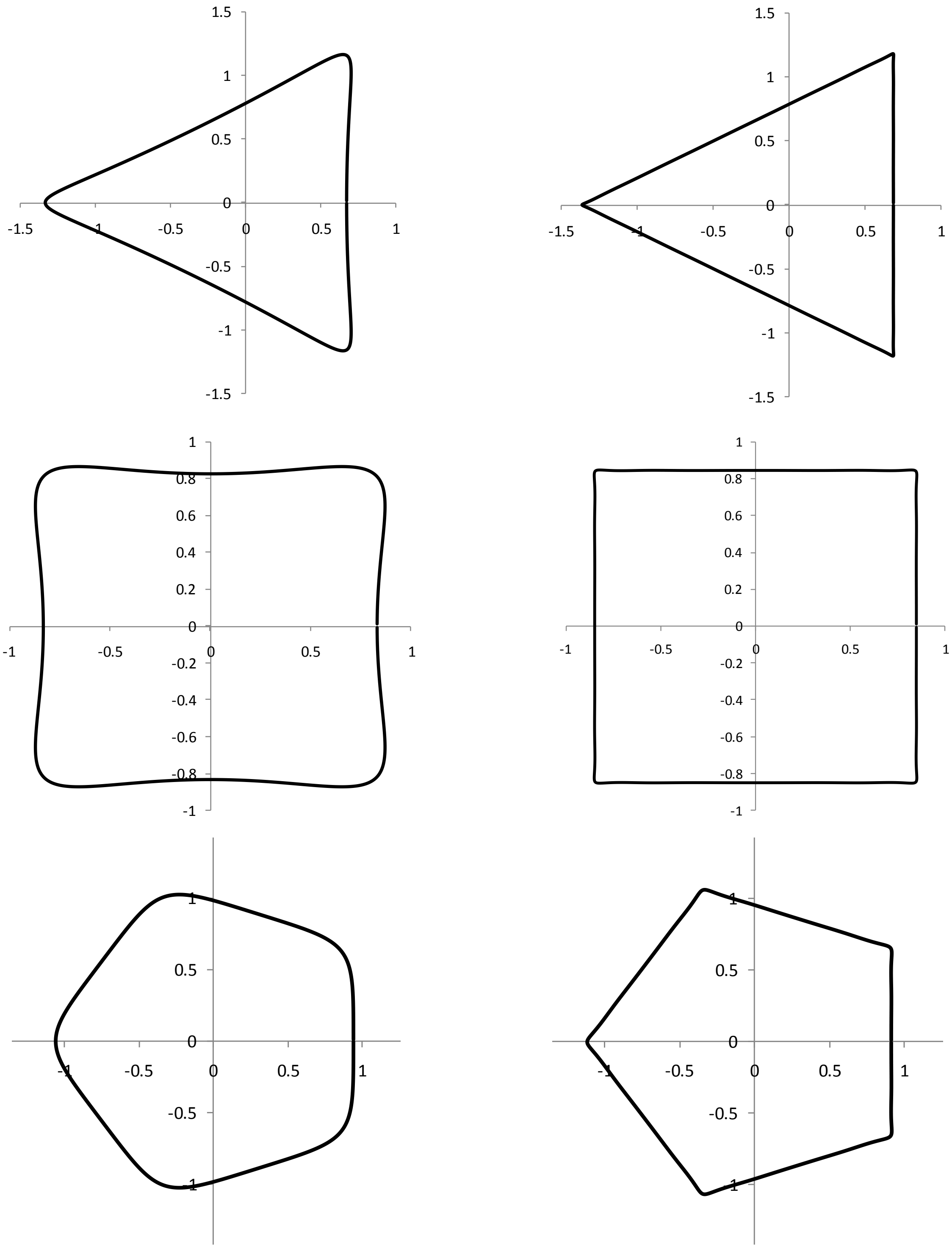
محاسبه دقیق انتگرال (۴-۶۱) معمولا کار دشواری می‌باشد و به همین دلیل از بسط عبارت زیر انتگرال استفاده می‌شود. با توجه به این‌که $|a_n|=1$ و $|t|>1$ می‌باشد، هر یک از پرانتزهای موجود در انتگرال را می‌توان به‌صورت یک سری در ناحیه خارج از دایره با استفاده از بسط دوجمله‌ای به صورت رابطه (۴-۶۲) نوشت:

$$\begin{aligned}&(x+y)^r=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^{r-k}y^k,\quad \binom{r}{k}=\frac{r(r-1)...(r-k+1)}{k!}\\&\to(1-\frac{a_n}{t})^{\alpha_n-1}=1-\frac{(\alpha_n-1)a_n}{t}+\frac{(\alpha_n-1)(\alpha_n-2)a_n^2}{2t^2}-\frac{(\alpha_n-1)(\alpha_n-2)(\alpha_n-3)a_n^3}{6t^3}+...\end{aligned} \qquad (۴-۶۲)$$

هر چه تعداد جملات مورد استفاده در این بسط (N) بیشتر باشد، دقت نگاشت حاصل نیز بیشتر خواهد بود. با قرار دادن بسط هر پرانتز بر اساس (۴-۶۲) در رابطه (۴-۶۱) و انتگرال‌گیری از عبارت حاصل، نتیجه می‌شود [۱۰۹]:

$$w(\xi)=\mathrm{C}\left(\xi-\left((\alpha_1-1)a_1+(\alpha_2-1)a_2+...+(\alpha_n-1)a_n\right)\ln\xi+\frac{e_1}{\xi}+\frac{e_2}{\xi^3}+...\right)+d \qquad (۴-۶۳)$$

که در آن $e_1,e_2,...$ ضرایب به‌دست آمده از بسط دوجمله‌ای عبارت زیر انتگرال می‌باشند. اکنون برای نگاشت یک ناحیه همبند ساده به ناحیه همبند ساده دیگر، باید ضریب $\ln\xi$ در رابطه بالا صفر باشد و با استفاده از رابطه حاصل، می‌توان یکی از مقادیر a_n را برحسب مقادیر دیگر به‌دست آورد. البته در صورتی که نقاط a_n به شکل خاصی بر روی دایره انتخاب شوند، ضریب $\ln\xi$ صفر خواهد شد. در این حالت دایره به یک چندضلعی منتظم نگاشت می‌شود. در شکل ۴-۱۱ نگاشت یک دایره با شعاع واحد به یک چند ضلعی با استفاده از این روش و به ازای تعداد N نقطه مختلف نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش N، دقت نگاشت به‌خصوص در نقاط راس چندضلعی، افزایش می‌یابد.



N=5 N=20

شکل ۴-۱۱: نگاشت یک دایره با شعاع واحد به یک چند ضلعی برای مقادیر مختلف N

پس از محاسبه رابطه نگاشت $z=w(\xi)$، باید شرایط مرزی نیز برحسب متغیر ξ نوشته شوند. برای این منظور از تبدیل مشتقات به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

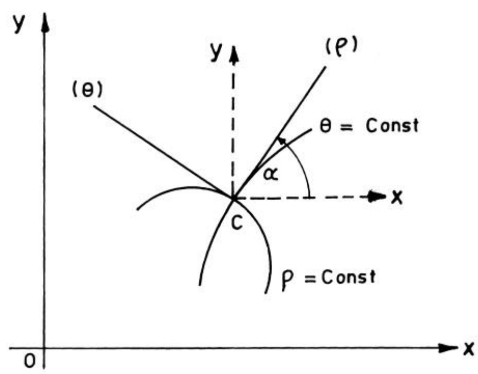
$$\mathrm{f}(z)\to f(\xi);\ \ z=w(\xi)\to dz=\frac{dw}{d\xi}d\xi;\ \ \frac{df}{dz}=\frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dz}=\frac{f'(\xi)}{w'(\xi)} \tag{۶۴-۴}$$

در این حالت رابطه مربوط به مولفه‌های تنش را می‌توان به شکل زیر نوشت [۱۱۱]:

$$\begin{aligned}&\sigma_\rho+\sigma_\phi=\sigma_x+\sigma_y=2\left(\frac{\gamma'(\xi)}{w'(\xi)}+\overline{\frac{\gamma'(\xi)}{w'(\xi)}}\right)\\&\sigma_\phi-\sigma_\rho+2i\tau_{\rho\phi}=(\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy})e^{2i\alpha}=\frac{2\xi^2}{\rho^2\overline{w'(\xi)}}\left(\overline{w(\xi)}\frac{\gamma''(\xi)}{w'(\xi)}-\frac{\gamma'(\xi)w''(\xi)}{w'(\xi)^2}+\psi'(\xi)\right)\end{aligned} \tag{۶۵-۴}$$

که در آن α زاویه بین محورهای مختصات محلی (محورهای مماس و عمود بر گشودگی در صفحه ξ) و محورهای مختصات x و y در صفحه z می‌باشند (شکل ۴-۱۲). همچنین رابطه مربوط به شرایط مرزی در صفحه ξ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$i\int(T_x+iT_y)ds=\gamma(\xi)+\frac{w(\xi)}{\overline{w'(\xi)}}\overline{\gamma'(\xi)}+\overline{\psi(\xi)} \tag{۶۶-۴}$$



شکل ۴-۱۲: تبدیل مختصات از صفحه z به صفحه ξ [۱۱۱]

۴-۳-۴ محاسبه میدان تنش در یک ورق متناهی

انتگرال شوارتز [۱۱۱]: برای محاسبه میدان تنش در یک ورق با ابعاد محدود، نمی‌توان از حل به‌دست آمده در قسمت قبل برای ورق با ابعاد بی‌نهایت استفاده نمود. دو مساله اساسی در زمینه حل معادلات برای ورق متناهی وجود دارد: به‌دست آوردن توابع پتانسیل و چگونگی اعمال شرایط مرزی در اطراف گشودگی و مرزهای

خارجی ورق. در اینجا به منظور به‌دست آوردن توابع پتانسیل مختلط از روش انتگرال شوارتز استفاده می‌شود. براساس این روش، با داشتن مقدار یک تابع مختلط بر روی یک مرز، با استفاده از یک رابطه انتگرالی می‌توان مقدار آن تابع را در دامنه مساله به‌دست آورد که در اینجا مرز موردنظر، همان گشودگی دایروی است. شرایط مرزی در مرز گشودگی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\gamma(\xi)+\frac{w(\xi)}{\overline{w'(\xi)}}\overline{\gamma'(\xi)}+\overline{\psi(\xi)}=f,\quad \overline{\gamma(\xi)}+\frac{\overline{w(\xi)}}{w'(\xi)}\gamma'(\xi)+\psi(\xi)=\overline{f} \tag{۴-۶۷}$$

در رابطه (۴-۶۷)، معادله دوم مزدوج معادله اول بوده و f تابع بیان کننده شرایط مرزی در مرز گشودگی می‌باشد. این تابع مربوط به حل یک ورق بی‌نهایت بدون گشودگی است. اکنون با استفاده از روابط مربوط به محاسبه انتگرال مرزی در صفحه مختلط، می‌توان توابع $\gamma(\xi)$ و $\psi(\xi)$ را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$\gamma(\xi)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f}{t-\xi}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{w(t)\overline{\gamma'(t)}}{\overline{w'(t)}(t-\xi)}dt \tag{۴-۶۸}$$

$$\psi(\xi)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f}}{t-\xi}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{w(t)}\gamma'(t)}{w'(t)(t-\xi)}dt \tag{۴-۶۹}$$

برای یک ورق بی‌نهایت بدون سوراخ که در معرض تنش S در راستای محور x قرار دارد، توابع پتانسیل $\gamma_0(\xi)$ و $\psi_0(\xi)$ به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\gamma_0(\xi)=\frac{SR}{4}\xi,\quad \psi_0(\xi)=-\frac{SR}{2}\xi \tag{۴-۷۰}$$

در این صورت تابع f با جایگذاری روابط بالا در معادله (۴-۶۷) به‌صورت زیر بیان می‌شود (بر روی مرز دایره به شعاع واحد رابطه $\overline{\xi}=\frac{1}{\xi}$ برقرار می‌باشد):

$$f=-\frac{sR}{4}\left(\xi+\frac{w(\xi)}{\overline{w'(\xi)}}-\frac{2}{\xi}\right),\quad \overline{f}=-\frac{sR}{4}\left(\frac{1}{\xi}+\frac{\overline{w(\xi)}}{w'(\xi)}-2\xi\right) \tag{۴-۷۱}$$

که در آن R شعاع دایره می‌باشد. برای محاسبه توزیع تنش در یک ورق متناهی، توابع پتانسیل $\gamma_0(\xi)$ و $\psi_0(\xi)$ و نیز $\gamma(\xi)$ به شکل زیر درنظر گرفته می‌شوند:

$$\gamma_0(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\xi^n=a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots;\ \psi_0(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\xi^n=b_1\xi+b_2\xi^2+\ldots\ ;\ \gamma(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\xi^2}=\frac{c_1}{\xi}+\frac{c_2}{\xi}+\ldots \tag{۴-۷۲}$$

که در آن $\gamma_0(\xi)$ و $\psi_0(\xi)$ توابع تنش مربوط به ورق متناهی بدون گشودگی می‌باشند. در این حالت توابع f و $\overline{f}$ با قرار دادن توابع $\gamma_0(\xi)$ و $\psi_0(\xi)$ در رابطه مربوط به شرایط مرزی (۴-۶۷) به‌دست می‌آیند. پس از آن تابع $\gamma(\xi)$ با استفاده از رابطه (۴-۶۸) محاسبه شده و ضرایب c_n برحسب ضرایب a_n و b_n محاسبه می‌شوند. اکنون با

داشتن مقدار تابع $\gamma(\xi)$ و استفاده از رابطه (۴-۶۹)، مقدار تابع پتانسیل $\psi(\xi)$ محاسبه می‌شود. تا این مرحله، حل به‌دست آمده شرایط مرزی در مرز گشودگی را به طور دقیق ارضا می‌کند، اما شرایط مرزی در مرزهای خارجی ورق هنوز اعمال نشده است. با اعمال شرایط مرزی مربوط به مرزهای خارجی ورق، ثوابت باقیمانده a_n و b_n نیز محاسبه می‌شوند.

شرایط مرزی در مرزهای خارجی ورق: برای اعمال شرایط مرزی مربوط به لبه‌های خارجی ورق، در این رساله از روشی جدید به کمک انتگرال شرایط مرزی استفاده شده است. براساس نتایج به‌دست آمده، این روش در عین سادگی از دقت بالایی برخوردار می‌باشد. نحوه استفاده از این روش در ادامه توضیح داده می‌شود.

براساس اصل کار مجازی که درفصل دوم برای به‌دست آوردن معادلات تعادل از آن استفاده شد، برای مساله الاستیسیته دو بعدی $(w=0)$ رابطه زیر بدست آمد:

$$\begin{aligned}\delta W_I+\delta W_E=&\iint_A\left(\left(-\frac{\partial N_x}{\partial x}-\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\right)\delta u_0+\left(-\frac{\partial N_y}{\partial y}-\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\right)\delta v_0\right)dA\\&+\oint_C\left(\left(N_x dy-N_{xy}dx+N_x^0 dy-N_{xy}^0 dx\right)\delta u_0+\left(N_{xy}dy-N_y dx+N_y^0 dx+N_{xy}^0 dy\right)\delta v_0\right)=0\end{aligned} \tag{۴-۷۳}$$

برای برقراری تعادل، باید ضرایب δu_0 و δv_0 در هر یک از انتگرال‌های معادله (۴-۷۳) برابر با صفر باشد که با مساوی صفر قرار دادن این ضرایب، معادلات تعادل و نیز شرایط مرزی مساله به‌دست می‌آیند. معادلات تعادل در قسمت قبل با استفاده از روش پتانسیل اعداد مختلط حل شدند و همان طور که بیان شد، حل به‌دست آمده شرایط مرزی در لبه گشودگی را به طور دقیق ارضا می‌کند. اکنون برای اعمال شرایط مرزی در لبه‌های خارجی ورق از انتگرال زیر استفاده می‌شود:

$$\oint_C\left(\left(N_x dy-N_{xy}dx+N_x^0 dy-N_{xy}^0 dx\right)\delta u_0+\left(N_{xy}dy-N_y dx+N_y^0 dx+N_{xy}^0 dy\right)\delta v_0\right)=0 \tag{۴-۷۴}$$

ابتدا با استفاده از میدان تنش به‌دست آمده، مولفه‌های جابجایی u_0 و v_0 محاسبه می‌شوند. معادلات تعادل برحسب میدان جابجایی که تحت عنوان معادلات ناویر[1] شناخته می‌شوند، به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۱۰۲]:

$$G\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+G)\nabla(\nabla.\mathbf{u})=0 \tag{۴-۷۵}$$

[1] Navier's Equations

که در آن $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}$ اپراتور گرادیان و $\mathbf{u} = \{u_0, v_0\}^T$ بردار مولفه‌های جابجایی است. با تعریف متغیر جابجایی مختلط به‌صورت $U = u_0 + iv_0$ در معادلات ناویر، این معادلات را می‌توان به شکل (۴-۷۶) باز نویسی نمود:

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}\partial z} = 0 \qquad (۴-۷۶)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۴-۷۶)، متغیر U برحسب تابعی از توابع پتانسیل مختلط به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$2GU = \kappa\gamma(z) - z\overline{\gamma'(z)} + \overline{\psi(z)} \qquad (۴-۷۷)$$

که در آن برای شرایط تنش صفحه‌ای $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ می‌باشد. بعد از محاسبه مولفه‌های جابجایی u_0 و v_0 براساس معادله (۴-۷۷)، تغییرات δu_0 و δv_0 به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشند

$$\delta u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial C_i}\delta C_i, \quad \delta v_0 = \frac{\partial v_0}{\partial C_i}\delta C_i \qquad (۴-۷۸)$$

که در آن C_i ثوابت نامعینی می‌باشند که باید محاسبه شوند. اکنون برای اعمال شرایط مرزی، مقادیر منتجه‌های تنش N_x, N_y و N_{xy} و نیز تغییرات δu_0 و δv_0 در انتگرال شرایط مرزی(رابطه (۴-۷۴)) جایگذاری شده و انتگرال حاصل بر روی مرز خارجی ورق محاسبه می‌شود. در نهایت ضرایب δC_i در عبارت حاصل مساوی با صفر قرار داده می‌شوند که در نتیجه آن یک دستگاه معادلات به‌دست می‌آید. با حل این دستگاه، ثوابت C_i محاسبه می‌شوند و بدین ترتیب شرایط مرزی در لبه‌های خارجی ورق اعمال می‌شود.

بسط توابع پتانسیل مختلط: یک روش دیگر برای محاسبه توابع پتانسیل مختلط برای یک ورق متناهی، استفاده از بسط این توابع به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\gamma(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \xi^{-n}, \quad \psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\xi^{-n}}{w'(\xi)} \qquad (۴-۷۹)$$

این روش نسبت به روش انتگرال شوارتز از پیچیدگی کمتری برخوردار بوده و در عین حال ازدقت کمتری برخوردار است. البته با افزایش جملات سری، دقت نیز افزایش می‌یابد. ثوابت a_n, b_n, c_n و d_n با اعمال شرایط مرزی در طی دو مرحله به‌دست می‌آیند. ابتدا شرایط مرزی در مرز گشودگی اعمال شده و سپس شرایط مرزی در لبه‌های ورق اعمال می‌شود. برای اعمال شرایط مرزی مربوط به گشودگی در شرایطی که در معرض تنش نیست، توابع پتانسیل مختلط (۴-۷۹)در رابطه (۴-۶۶) جایگزین می‌شوند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi^n + b_n \xi^{-n} + \frac{w(\xi)}{w'(\xi)}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \xi^{-n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} -n b_n \xi^{n+1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\xi^n}{w'(\xi)} = 0 \qquad (۴-۸۰)$$

با توجه به این‌که بر روی دایره به شعاع واحد رابطه $\xi = e^{i\theta}$ برقرار می‌باشد، با جایگذاری آن در معادله (۴-۸۰) و مساوی صفر قرار دادن ضرایب $e^{in\theta}$ در رابطه حاصل، یک دستگاه معادلات به‌دست می‌آید که در آن تعداد معادلات از تعداد مجهولات کمتر می‌باشد. با حل این دستگاه، تعدادی از ثوابت مساله برحسب ثوابت دیگر محاسبه می‌شوند. ثوابت باقی مانده از اعمال شرایط مرزی در لبه‌های خارجی ورق به‌دست می‌آیند. برای این کار، از روش انتگرال شرایط مرزی که در قسمت قبل توضیح داده شد استفاده می‌شود. در این صورت، حل حاصل شرایط مرزی گشودگی رابه طور دقیق و شرایط مرزی در لبه‌های ورق رابه طور تقریبی ارضا می‌کند. پس از اعمال شرایط مرزی، ثوابت مساله محاسبه شده و با استفاده از روابط (۴-۶۵) مولفه‌های تنش محاسبه می‌شوند.

۴-۳-۵ محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش با استفاده از حل مساله در مختصات قطبی

در یک ورق دارای گشودگی دایروی، با توجه به این‌که یکی از مرزها به شکل دایره است، می‌توان از مختصات قطبی برای حل مساله و محاسبه توزیع تنش استفاده کرد. معادلات تعادل در مختصات قطبی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0, \quad 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = 0 \qquad (۴\text{-}۸۱)$$

در مختصات قطبی مولفه‌های تنش σ_r, σ_θ و $\tau_{r\theta}$ برحسب تابع تنش به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۹]:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) \qquad (۴\text{-}۸۲)$$

برای یک ورق در غیاب نیروهای حجمی، شرط سازگاری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۰۲]:

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \qquad (۴\text{-}۸۳)$$

با جایگذاری مولفه‌های تنش از رابطه (۴-۸۲) در رابطه (۴-۸۳)، شرط سازگاری برحسب تابع تنش به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right) = 0 \qquad (۴\text{-}۸۴)$$

برای یک ورق دایروی و یا حلقوی که در معرض نیروی داخل صفحه‌ای یکنواخت در مرز داخلی و خارجی قرار دارد، مولفه‌های تنش تنها تابعی از r می‌باشند؛ اما برای مساله حاضر، مولفه‌های تنش تابعی از r و θ خواهند بود. به همین دلیل برای حل مساله تابع تنش به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\phi(\mathrm{r},\theta)=P_0(r)+\sum_{n=1}^{N}P_n(r)\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{N}Q_n(r)\sin(n\theta) \tag{۸۵-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۸۵) در معادله (۴-۸۴) و مساوی صفر قرار دادن ضرایب $\cos(n\theta)$ و $\sin(n\theta)$ در رابطه حاصل، یک سری معادلات دیفرانسیل برحسب r به‌دست می‌آید که با حل آنها، توابع $P_0(r),P_n(r)$ و $Q_n(r)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&P_0(r)=A_0\ln r+B_0r^2\ln r+C_0r^2+D_0\\
&P_1(r)=A_1r^3+\frac{B_1}{r}+C_1r+D_1r\ln r;\ P_n(r)=\mathrm{A}_n\,r^{2-n}+B_nr^{2+n}+C_nr^{-n}+D_nr^n,\ (n=2,3,\ldots)\\
&Q_1(r)=E_1r^3+\frac{F_1}{r}+G_1r+H_1r\ln r;\ Q_n(r)=E_nr^{2-n}+F_nr^{2+n}+G_nr^{-n}+H_nr^n,\ (n=2,3,\ldots)
\end{aligned} \tag{۸۶-۴}$$

در رابطه (۴-۸۶) ثوابت A_n,B_n,C_n و D_n و نیز ثوابت E_n,F_n,G_n و H_n با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آیند. با توجه به این‌که مولفه‌های تنش برحسب r و θ می‌باشند، اعمال شرایط مرزی در مرزگشودگی به آسانی صورت می‌گیرد. برای یک گشودگی که در معرض تنش نیست، شرایط مرزی در $r=D/2$ به‌صورت $\sigma_r=\tau_{r\theta}=0$ می‌باشد که در آن D قطر گشودگی است. با جایگذاری مولفه‌های تنش در این شرایط مرزی و مساوی صفر قرار دادن ضرایب $\cos(n\theta)$ و $\sin(n\theta)$ در رابطه حاصل، یک دستگاه معادلات به‌دست می‌آید که در آن تعداد معادلات از تعداد مجهولات کمتر می‌باشد. با حل این دستگاه، تعدادی از ثوابت مساله برحسب ثوابت دیگر به‌دست می‌آیند. با اعمال شرایط مرزی در لبه‌های ورق، ثوابت باقی مانده نیز محاسبه شده و حل مساله کامل خواهد شد. در این حالت نیز از انتگرال شرایط مرزی برای اعمال شرایط مرزی در لبه‌های ورق استفاده می‌شود. برای این منظور ابتدا باید میدان جابجایی را محاسبه نمود. در مختصات قطبی مولفه‌های کرنش به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta},\quad \gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r} \tag{۸۷-۴}$$

همچنین برای شرایط تنش صفحه‌ای، رابطه بین تنش و کرنش به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}\left(\sigma_r-\nu\sigma_\theta\right),\ \varepsilon_\theta=\frac{1}{E}\left(\sigma_\theta-\nu\sigma_r\right),\ \ \gamma_{r\theta}=\frac{1}{G}\tau_{r\theta}=\frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{r\theta} \tag{۸۸-۴}$$

با جایگذاری مولفه‌های تنش در رابطه (۴-۸۸) و سپس انتگرال‌گیری از مولفه‌های کرنش،مولفه‌های میدان جابجایی (u_r,u_θ) محاسبه می‌شوند. به منظور محاسبه انتگرال شرایط مرزی(رابطه (۴-۷۴))، مولفه‌های جابجایی u_0 و v_0 و نیز منتجه‌های تنش N_x,N_y و N_{xy} به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$u_0=u_r\cos(\theta)-u_\theta\sin(\theta),\ \ v_0=u_r\sin(\theta)+u_\theta\cos(\theta) \tag{۸۹-۴}$$

$$
\begin{aligned}
N_x &= h\left(\sigma_r \cos^2(\theta) + \sigma_\theta \sin^2(\theta) - 2\tau_{r\theta} \sin(\theta)\cos(\theta)\right) \\
N_y &= h\left(\sigma_r \sin^2(\theta) + \sigma_\theta \cos^2(\theta) + 2\tau_{r\theta} \sin(\theta)\cos(\theta)\right) \qquad (۹۰-۴) \\
N_{xy} &= h\left((\sigma_r - \sigma_\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) + \tau_{r\theta}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\right)
\end{aligned}
$$

در نهایت مقادیر r و θ برحسب x و y به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

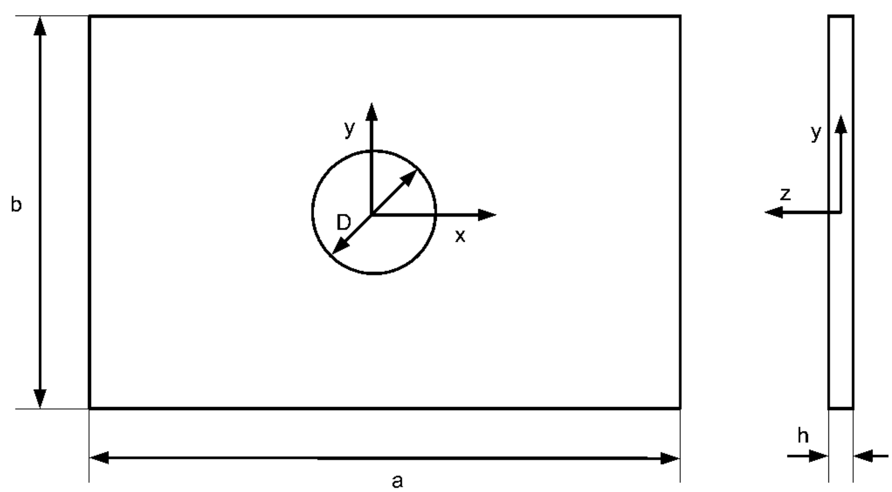
$$
r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (۹۱-۴)
$$

با جایگذاری (۴-۹۱) در (۴-۸۹) و (۴-۹۰) و سپس جایگذاری در انتگرال (۴-۷۴) و محاسبه این انتگرال در لبه‌های ورق، یک دستگاه معادلات به‌دست می‌آید و با حل این دستگاه، ثوابت باقیمانده به‌دست می‌آیند.

۴-۴ نتایج

۴-۴-۱ ورق با گشودگی دایروی

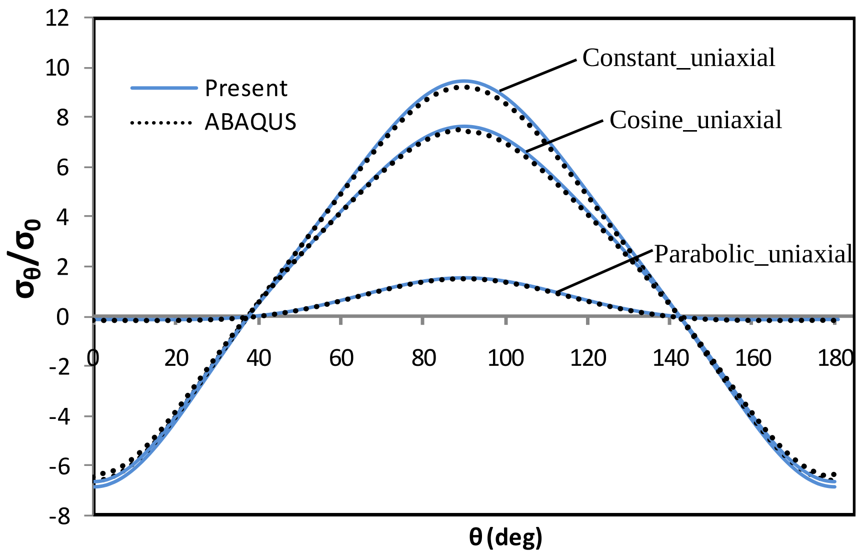
در شکل ۴-۱۳ هندسه یک ورق که دارای گشودگی دایروی در مرکز می‌باشد، به همراه پارامترهای هندسی مربوطه نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۳: هندسه یک ورق دارای گشودگی دایروی در مرکز

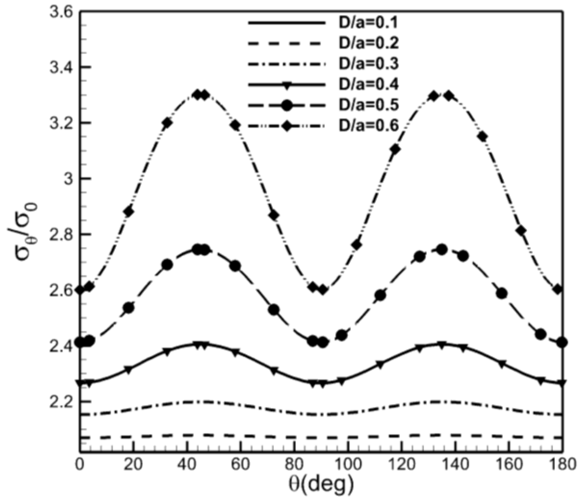
در شکل ۴-۱۴ توزیع تنش مماسی به‌دست آمده در مرز گشودگی برای سه حالت بارگذاری، با مقادیر به‌دست آمده از حل اجزای محدود به کمک نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. در کلیه نمودارهای ارائه شده در این

بخش، مولفه‌های تنش با استفاده از تنش مرجع σ_0 که بیانگر ماکزیمم تنش اعمالی به مرزهای ورق است، بی‌بعد شده‌اند.

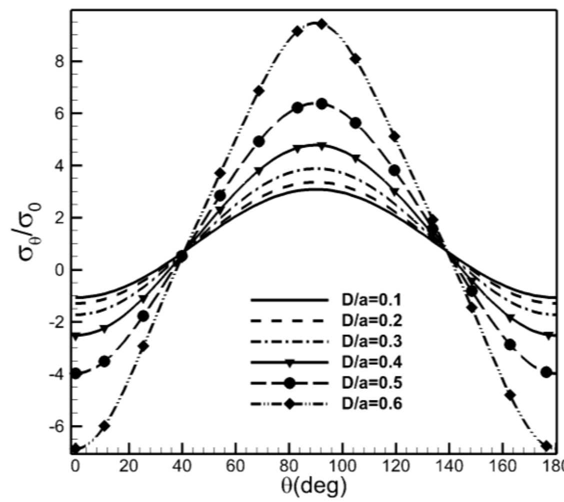


شکل ۴-۱۴: مقایسه توزیع تنش در مرز گشودگی دایروی با حل عددی $(D/a=0.5)$

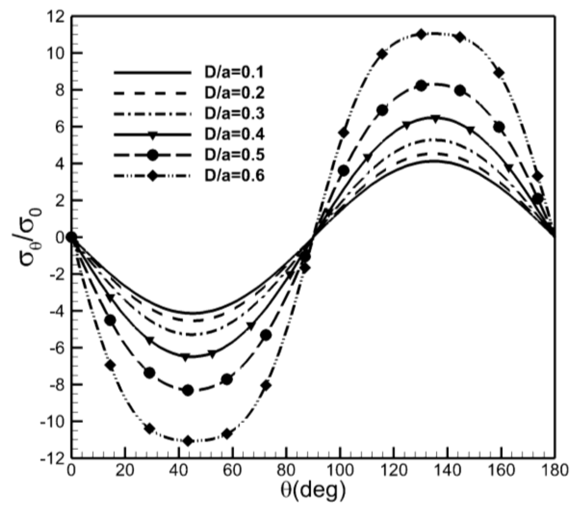
در شکل ۴-۱۵، توزیع تنش مماسی σ_θ در مرز گشودگی برای بارگذاری یکنواخت تک محوره، دومحوره و برشی و برای نسبت‌های مختلف D/a نمایش داده شده است که در آن D قطر گشودگی و a طول ورق است. با توجه به این شکل، با افزایش نسبت D/a، تغیرات تنش در مرز گشودگی بیشتر شده و بنابراین تاثیر گشودگی بر توزیع تنش در ورق افزایش می‌یابد. برای یک ورق بی‌نهایت دارای گشودگی دایروی، بیشترین میزان نسبت تنش σ_θ/σ_0 برای بارگذاری تک محوره، دومحوره و برشی به ترتیب برابر با ۳،۲و۴ می‌باشد. با توجه به شکل ۴-۱۵، با کاهش نسبت D/a، توزیع تنش در مرز گشودگی به حالت ورق بی‌نهایت نزدیک می-شود؛ به طوری که برای مقادیر $D/a\leq 0.1$، ورق را می‌توان به عنوان ورق بی‌نهایت درنظر گرفت. براساس این شکل، برای بارگذاری تک محوره، بیشترین تنش در زاویه °۹۰ رخ می‌دهد و توزیع تنش دارای تناوب °۱۸۰ می‌باشد، در حالی که در حالت دومحوره و برشی، بیشترین تنش در زاویه °۴۵ رخ داده و توزیع تنش دارای تناوب °۹۰ است. در شکل‌های ۴-۱۶ و ۴-۱۷، توزیع تنش در مرز گشودگی برای بارگذاری سهمی شکل و بارگذاری کسینوسی و در دو حالت تک محوره و دومحوره نشان داده شده است.



ب)

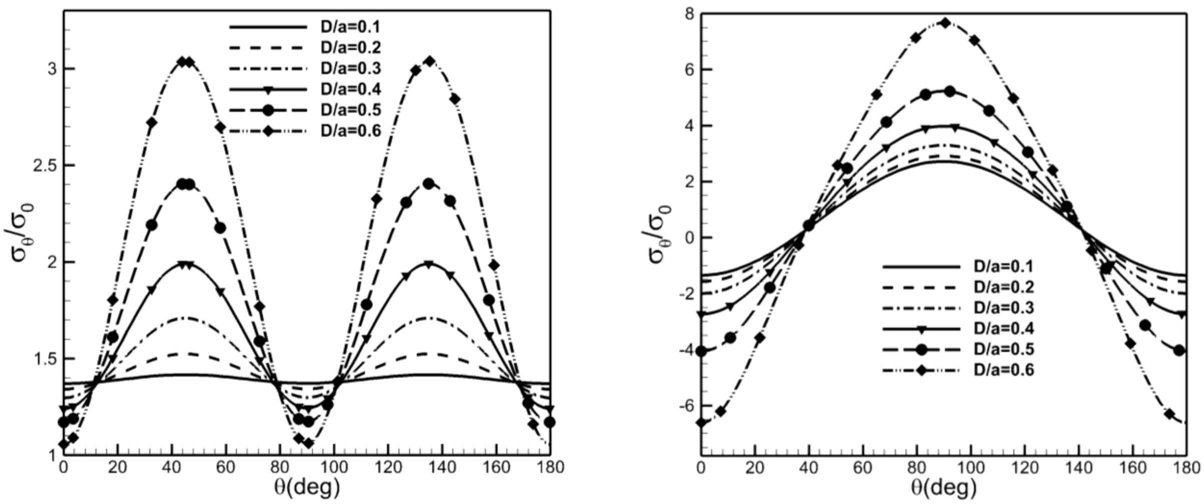


الف)



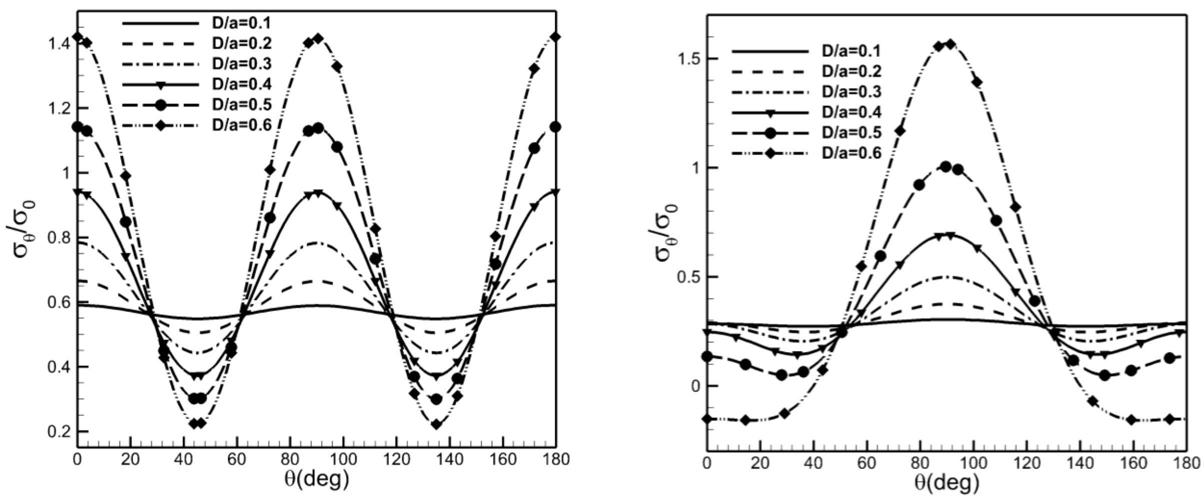
ج)

شکل ۴-۱۵: توزیع تنش در مرز گشودگی دایروی برای بارگذاری یکنواخت الف) تک محوره، ب) دومحوره، ج) برشی



ب) الف)

شکل ۴-۱۶: توزیع تنش در مرز گشودگی دایروی برای بارگذاری کسینوسی الف) تک محوره، ب) دومحوره



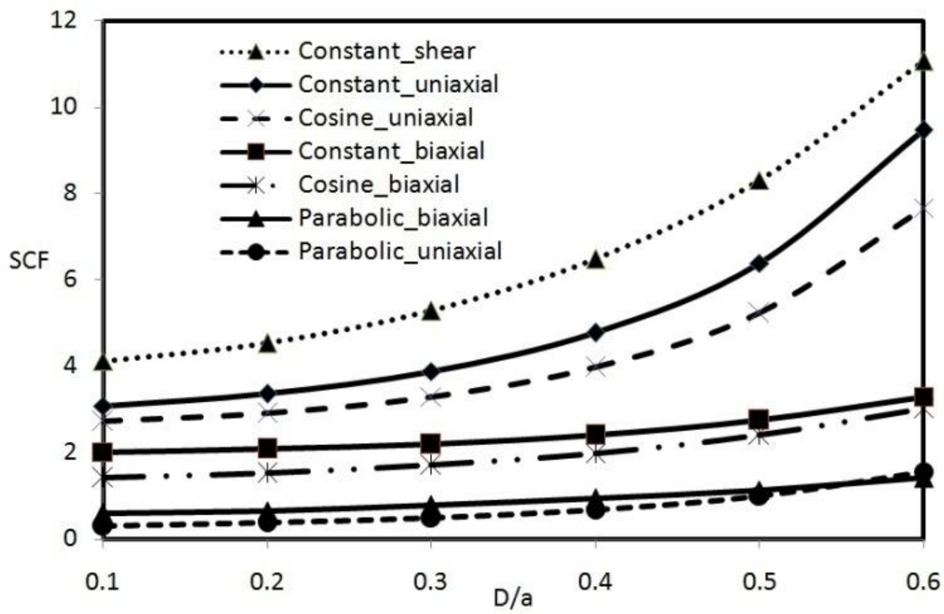
ب) الف)

شکل ۴-۱۷: توزیع تنش در مرز گشودگی دایروی برای بارگذاری سهمی شکل الف) تک محوره، ب) دومحوره

در ورق‌های دارای گشودگی، نسبت بیشترین تنش در مرز گشودگی به تنش مرجع، به عنوان ضریب تمرکز تنش[1] تعریف می‌شود که از پارامترهای مهم در طراحی محسوب می‌شود. در شکل ۴-۱۸ تغییرات ضریب تمرکز تنش برحسب نسبت D/a برای حالت‌های مختلف بارگذاری نشان داده شده است. براساس این شکل، ضریب تمرکز تنش با افزایش نسبت D/a برای تمامی حالت‌های بارگذاری افزایش می‌یابد. بیشترین میزان

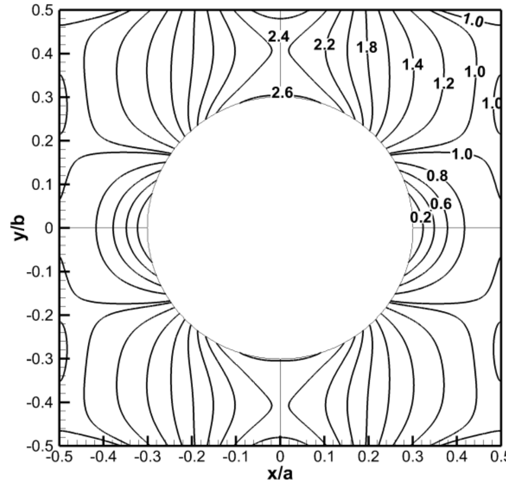
[1] Stress Concentration Factor (SCF)

ضریب تمرکز تنش مربوط به بارگذاری برشی و کمترین آن مربوط به بارگذاری سهمی شکل تک محوره می‌باشد. همچنین ضریب تمرکز تنش در حالت بارگذاری کسینوسی بیشتر از بارگذاری سهمی شکل است. در حالت بارگذاری یکنواخت و کسینوسی، ضریب تمرکز تنش در حالت تک محوره بیشتر از بارگذاری دو محوره است، درحالی که در بارگذاری سهمی شکل، عکس این قضیه صادق می‌باشد.

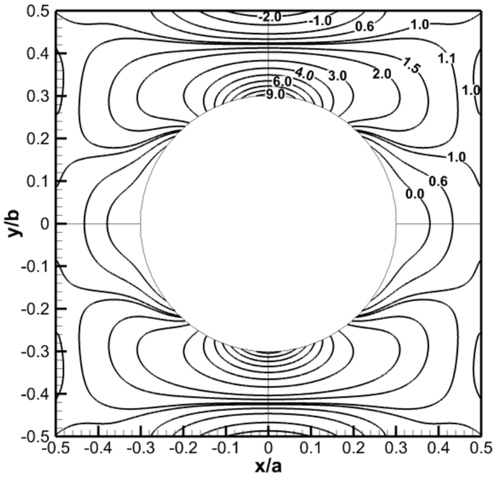


شکل ۴-۱۸: نمودار تغییرات ضریب تمرکز تنش برحسب D/a برای بارگذاری‌های مختلف

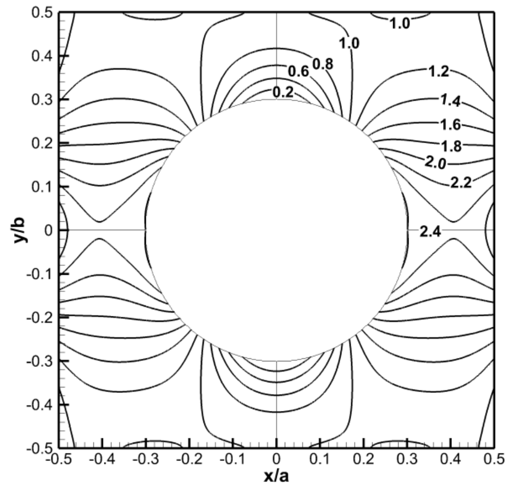
در شکل‌های ۴-۱۹ و ۴-۲۰ منحنی تراز مربوط به مولفه‌های میدان تنش پیش‌کمانش برای بارگذاری یکنواخت تک‌محوره و دومحوره و نیز بارگذاری برشی، برای یک ورق مربعی با گشودگی دایروی و نسبت $D/a=0.6$ نشان داده شده است.



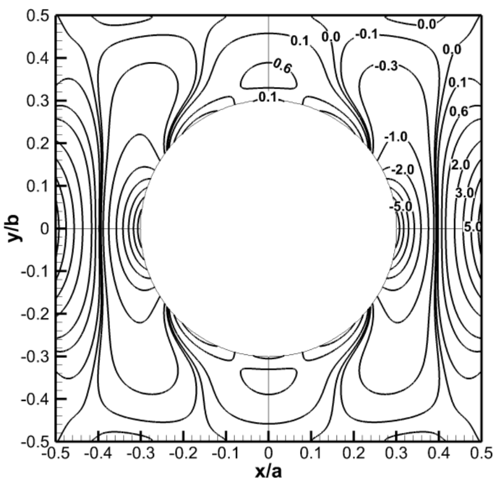
الف) σ_x / σ_0



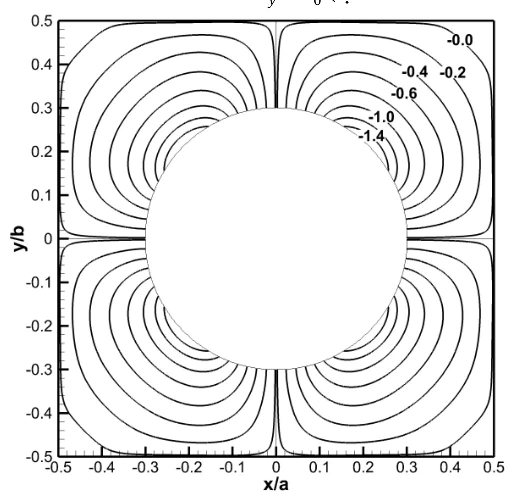
د) σ_x / σ_0



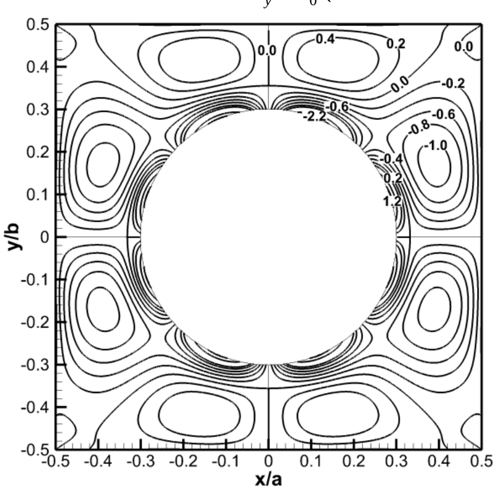
ب) σ_y / σ_0



هـ) σ_y / σ_0



ج) τ_{xy} / σ_0

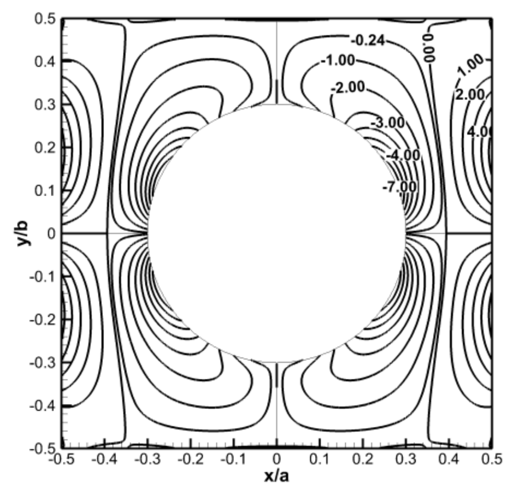


و) τ_{xy} / σ_0

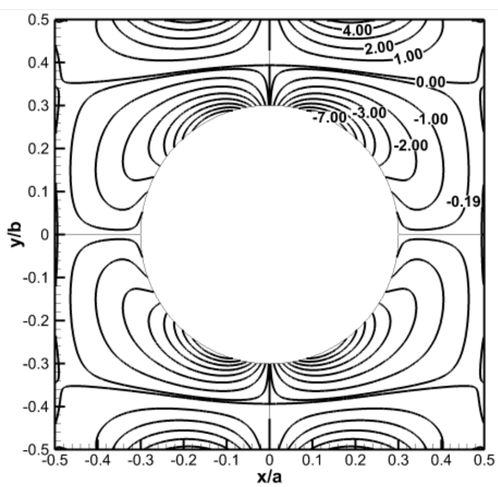
شکل ۴-۱۹: منحنی تراز مولفه‌های تنش پیش‌کمانش برای یک ورق مربعی دارای گشودگی دایروی

الف-ج) بارگذاری دو محوره، د-و) بارگذاری تک محوره

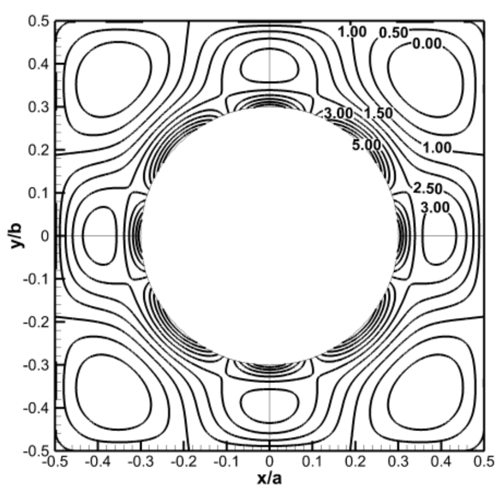
به منظور بررسی دقت حل ارائه شده در ارضای شرایط مرزی در لبه‌های خارجی ورق، در شکل ۴-۲۱ نمودار تغییرات مولفه‌های تنش در لبه‌های ورق برای حالت بارگذاری یکنواخت تک محوره و برای $D/a=0.6$ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که حل ارائه شده به خوبی شرایط مرزی در لبه‌های ورق را ارضا می‌کند، به‌طوری که بیشترین اختلاف با مقدار واقعی شرایط مرزی مربوط به تنش برشی در لبه‌های سمت راست و چپ بوده و کمتر از ۱٪ است.



ب) σ_y / τ_0

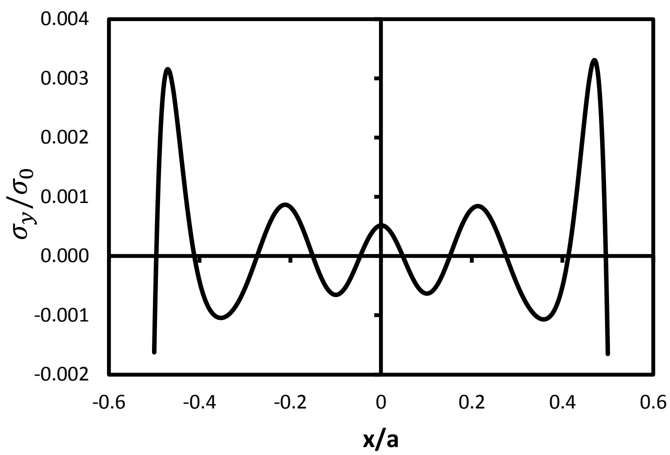


الف) σ_x / τ_0

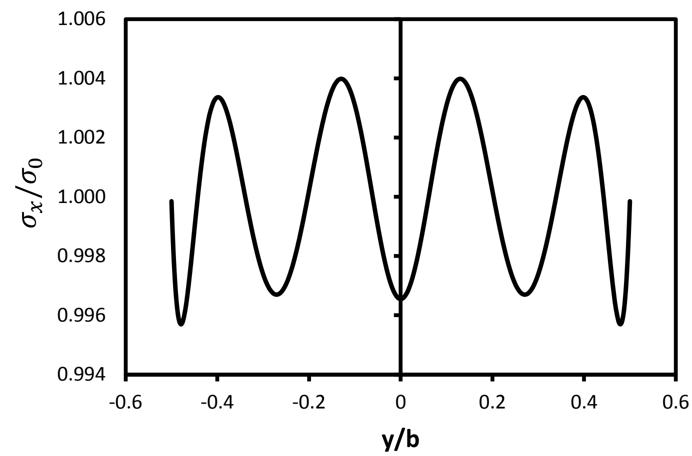


ج) τ_{xy} / τ_0

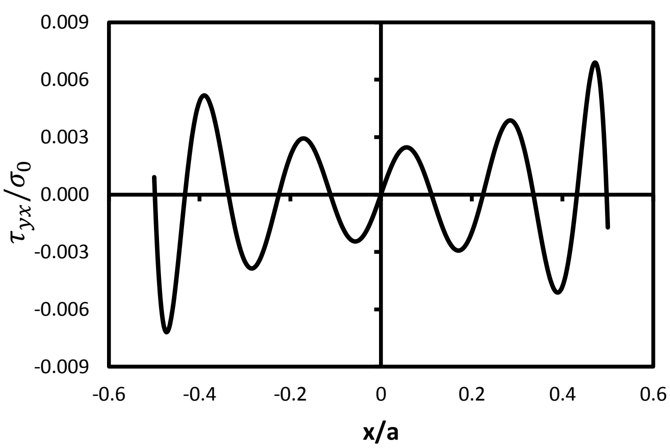
شکل ۴-۲۰: منحنی تراز مولفه‌های تنش پیش‌کمانش برای یک ورق مربعی دارای گشودگی دایروی تحت بارگذاری برشی



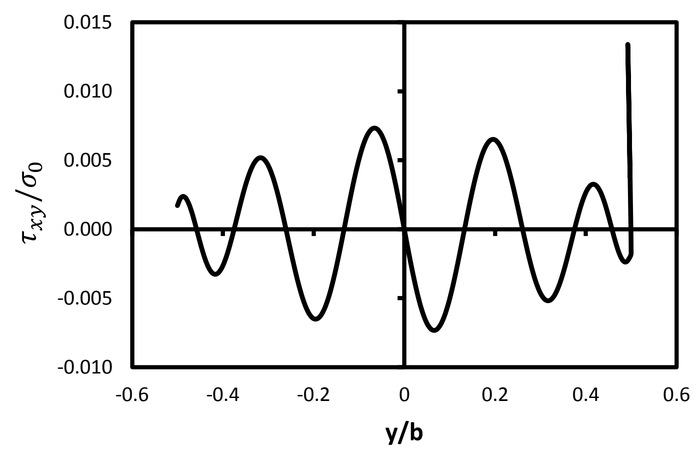
الف) تغییرات σ_y در لبه‌های بالا و پایین



ب) تغییرات σ_x در لبه‌های راست و چپ



ج) تغییرات τ_{xy} در لبه‌های بالا و پایین



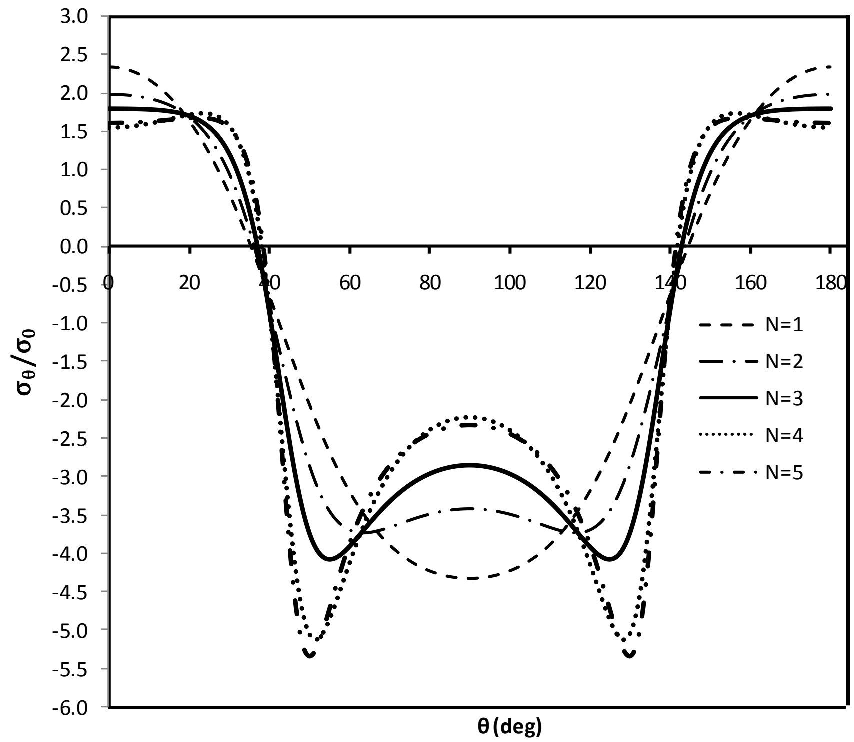
د) تغییرات τ_{xy} در لبه‌های راست و چپ

شکل ۴-۲۱: تغییرات مولفه‌های تنش در لبه‌های یک ورق تحت بارگذاری یکنواخت تک محوره برای $D/a=0.6$

۴-۴-۲ ورق با گشودگی مربعی

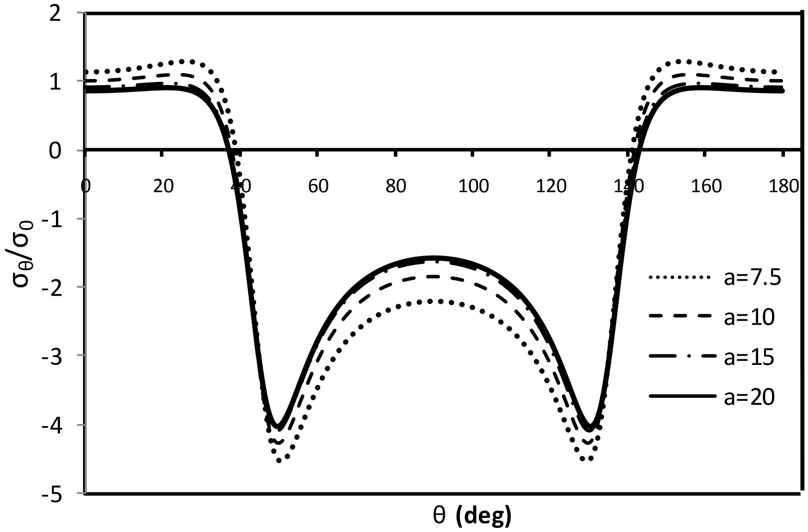
به منظور محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش در یک ورق دارای گشودگی مربعی، از روش اعداد مختلط استفاده شده است. در این حالت ابتدا ناحیه خارجی یک دایره با شعاع واحد به ناحیه خارجی یک مربع نگاشت می‌شود. سپس از انتگرال شوارتز برای به‌دست آوردن توابع پتانسیل و سپس محاسبه مولفه‌های تنش استفاده شده است. فرمول‌بندی مربوط به این محاسبات و نیز نحوه اعمال شرایط مرزی در لبه‌های ورق در قسمت قبل به طور کامل توضیح داده شد.

در شکل ۴-۲۲ تغییرات تنش مماسی σ_θ در مرز گشودگی مربعی واقع در یک ورق مربعی $(a=5)$ تحت تنش یکنواخت σ_0 در لبه‌های راست و چپ، به ازای N های مختلف نشان داده شده که پارامتر N برابر با تعداد جملات در بسط دوجمله‌ای عبارات زیر انتگرال در رابطه (۴-۶۱) است. توضیح این‌که برای محاسبه توزیع تنش در این حالت، از روش نگاشت استفاده شده است که در آن گشودگی مربعی، نگاشت یافته دایره با شعاع واحد می‌باشد.

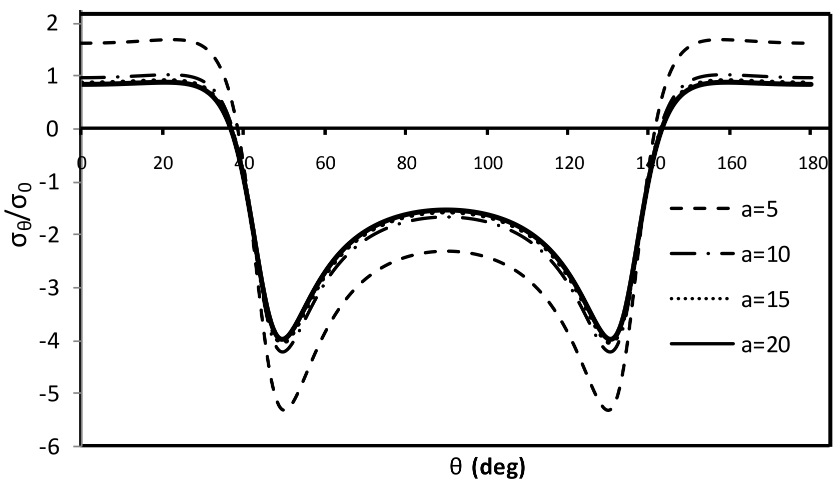


شکل ۴-۲۲: توزیع تنش مماسی در مرز گشودگی مربعی به ازای N های مختلف

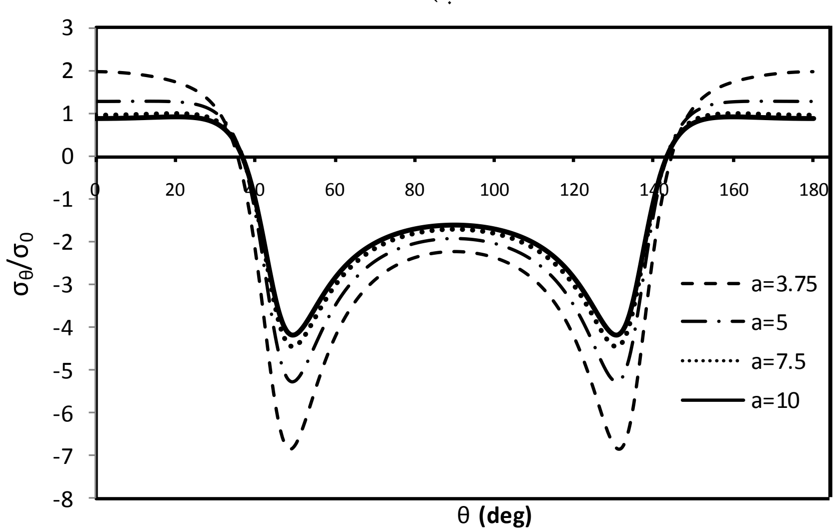
در شکل ۴-۲۳ تغییرات تنش مماسی σ_θ در مرز گشودگی مربعی با ابعاد مختلف واقع در یک ورق مستطیلی با نسبت‌های ظاهری متفاوت و برای $N=5$ نشان داده شده است. نمودار تغییرات تنش مماسی دارای دوره تناوب $^\circ$۱۸۰ می‌باشد. براساس این شکل، با افزایش نسبت ظاهری ورق، دامنه تغییرات تنش مماسی در مرز گشودگی افزایش یافته و بیشترین تنش مماسی در زوایای $^\circ$۵۰ و $^\circ$۱۳۰ اتفاق می‌افتد. همچنین برای هر نسبت ظاهری، با افزایش اندازه گشودگی، دامنه تغییرات تنش مماسی نیز افزایش می‌یابد.



الف) b/a=0.5



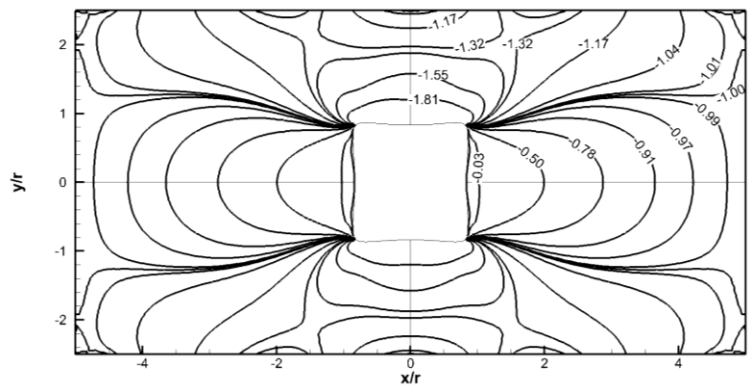
ب) b/a=1



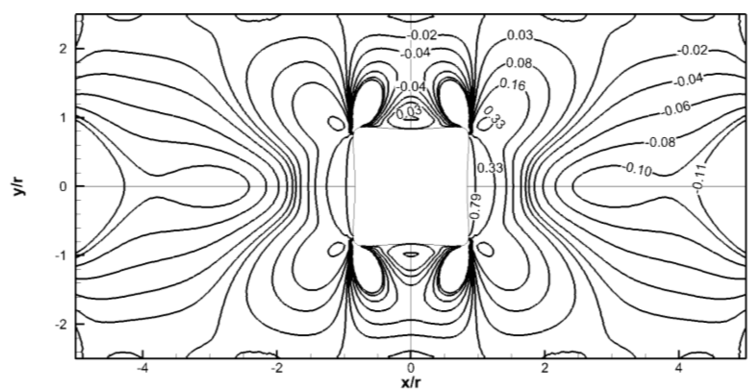
ج) b/a=2

شکل ۴-۲۳: تغییرات تنش مماسی در مرز گشودگی مربعی واقع در یک ورق مستطیلی با نسبت‌های ظاهری مختلف

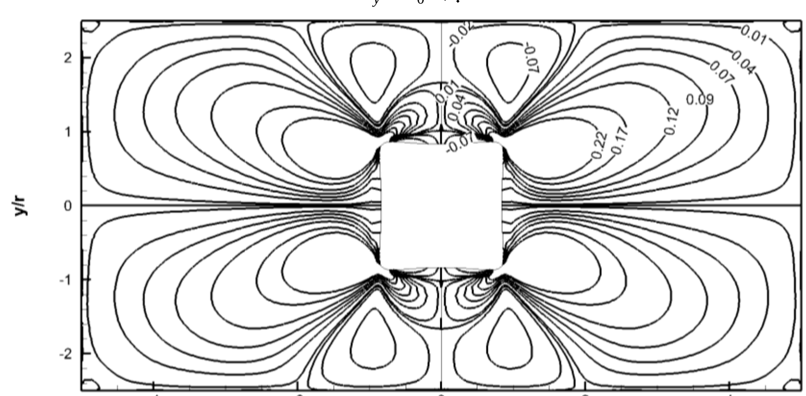
در شکل‌های ۴-۲۴ تا ۴-۲۶ منحنی تراز مربوط به مولفه‌های میدان تنش پیش‌کمانش برای بار گذاری یکنواخت تک محوره برای یک ورق مستطیلی با گشودگی مربعی و برای نسبت‌های ظاهری مختلف نمایش داده شده است. در این شکل‌ها نیز گشودگی مربعی، نگاشت یافته دایره با شعاع واحد (r) و به ازای N=5 می‌باشد.



الف) σ_x / σ_0

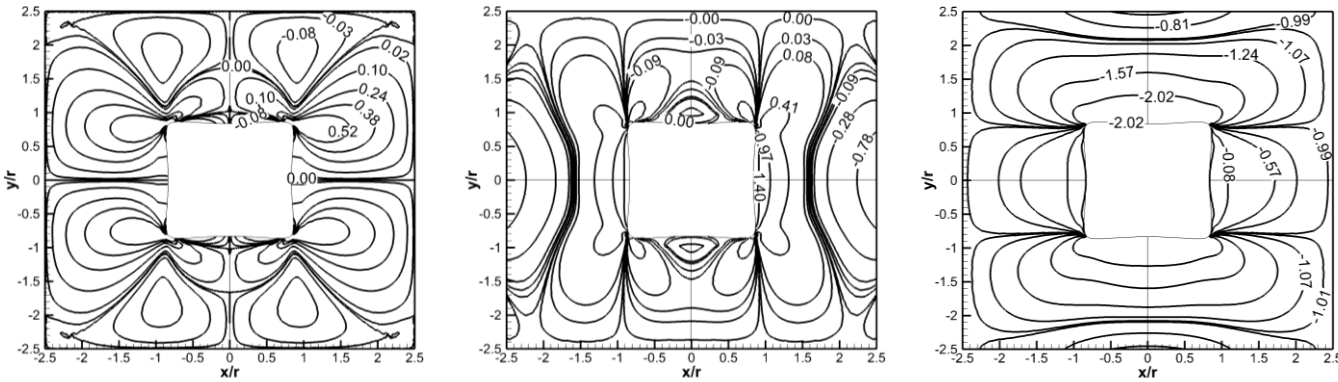


ب) σ_y / σ_0



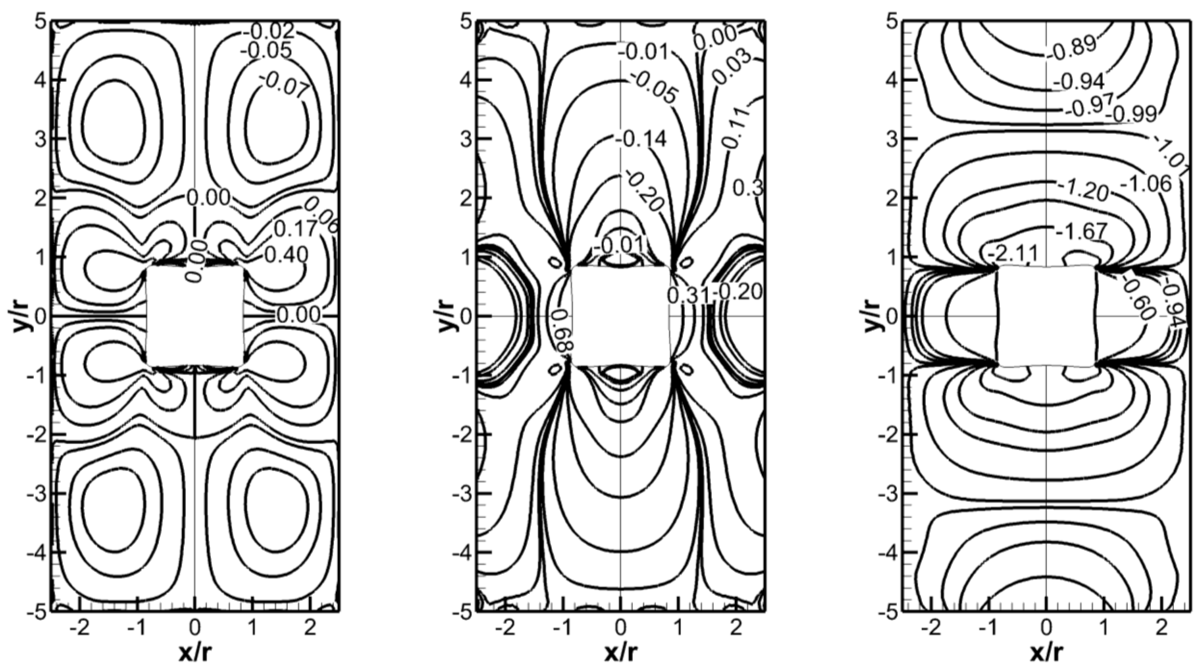
ج) τ_{xy} / σ_0

شکل ۴-۲۴: منحنی تراز مولفه‌های تنش پیش‌کمانش برای یک ورق دارای گشودگی مربعی ($b/a=0.5$)



τ_{xy} / σ_0 ج) σ_y / σ_0 ب) σ_x / σ_0 الف)

شکل ۴-۲۵: منحنی تراز مولفه‌های تنش پیش‌کمانش برای یک ورق دارای گشودگی مربعی $(b / a = 1)$



τ_{xy} / σ_0 ج) σ_y / σ_0 ب) σ_x / σ_0 الف)

شکل ۴-۲۶: منحنی تراز مولفه‌های تنش پیش‌کمانش برای یک ورق دارای گشودگی مربعی $(b / a = 2)$

۴-۵ جمع بندی

دراین فصل به حل معادلات تعادل اولیه به منظور محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش پرداخته شد. ابتدا یک حل تحلیلی برای این معادلات و برای یک ورق مستطیلی بدون گشودگی که در معرض بارگذاری غیریکنواخت قرار دارد، ارائه شد. سپس از روش توابع پتانسیل مختلط برای محاسبه میدان تنش در یک ورق با ابعاد محدود و

دارای گشودگی مربعی و دایروی استفاده شد. در نهایت یک حل تحلیلی براساس بسط تابع تنش در مختصات قطبی برای محاسبه میدان تنش در یک ورق دارای گشودگی دایروی ارائه شد. همچنین در این فصل روش جدیدی برای اعمال شرایط مرزی در لبه‌های خارجی یک ورق دارای گشودگی براساس انتگرال شرایط مرزی، معرفی شد. نتایج مربوط به نحوه توزیع مولفه‌های تنش در حالت تعادل اولیه که در این فصل به‌دست آمد، در فصل بعدی برای محاسبه بار کمانش به‌کمک روش ریتز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فصل پنجم:

کمانش ورق‌های مستطیلی

۵-۱ مقدمه

در این فصل، کمانش ورق‌های مستطیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش اول، بار کمانش ورق‌های بدون گشودگی تحت بارگذاری غیریکنواخت در لبه‌ها محاسبه می‌شود و در بخش دوم، نتایج مربوط به بار کمانش ورق‌های مستطیلی دارای گشودگی دایروی و مربعی ارائه می‌شود. در هر دو حالت، میدان تنش پیش‌کمانش-که در فصل قبل در مورد نحوه محاسبه آن به طور کامل توضیح داده شد- غیریکنواخت بوده و بنابراین معادلات پایداری از نوع معادلات با ضرایب متغیر می‌باشند. به دلیل پیچیده بودن این معادلات، امکان ارائه حل تحلیلی دقیق وجود ندارد. تنها در حالت ورق حلقوی تحت بارگذاری متقارن، حل تحلیلی معادلات پایداری امکان‌پذیر می‌باشد که در فصل بعد به طور کامل مورد بررسی می‌گیرد. در این فصل از روش انرژی ریتز برای محاسبه بار کمانش استفاده می‌شود.

۵-۲ روش ریتز

روش ریتز در سال ۱۹۰۹ توسط ریتز فرمول‌بندی شد [۱۱۲]. هرچند این روش به عنوان روش ریلی-ریتز نیز شناخته می‌شود، اما فرمول‌بندی ریلی با روش ارائه شده توسط ریتز متفاوت است. تفاوت بین این دو روش توسط لیسا [۱۱۳] به طور کامل توضیح داده شده است. در واقع روش ریتز شکل تکامل یافته و عمومی‌تر روش ریلی می‌باشد و به همین دلیل در ادامه از آن به عنوان روش ریتز نام برده می‌شود.

در مسائل مربوط به ارتعاشات، روش ریتز براساس اصل همیلتون پایه‌ریزی می‌شود. این اصل به صورت رابطه (۵-۱) بیان می شود [۱۱۴]:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\Pi-\mathrm{T})\mathrm{dt}=0 \qquad (۱-۵)$$

که در آن Π انرژی پتانسیل و T انرژی جنبشی سیستم بوده و t_1 و t_2 نیز زمان شروع و پایان حرکت هستند. در مسائل مربوط به تعادل و پایداری، روش ریتز براساس اصل حداقل انرژی پتانسیل پایه‌ریزی می‌شود. از روش ریتز، برای کمینه کردن یک فانکشنال که معادلات پایداری از آن به‌دست می‌آیند، استفاده می‌شود. این فانکشنال، همان انرژی پتانسیل کل سیستم است. در واقع هنگامی که حل مستقیم دستگاه معادلات دیفرانسیل امکان پذیر نباشد، از فرمول بندی حساب تغییرات[1] به منظور ساختن فانکشنالی که معادل با دستگاه معادلات

[1] Variational Formulations

دیفرانسیل اولیه است، استفاده می‌شود. برای حل مساله نیاز است که مقدار اکسترمم این فانکشنال نسبت به متغیرهای مساله محاسبه شود [۱۱۵].

از دیدگاه انرژی، کمانش هنگامی اتفاق می‌افتد که انرژی ناشی از کار نیروهای داخل صفحه‌ای در حین تغییر شکل عرضی ورق، برابر با انرژی خمشی ذخیره شده در ورق کمانش یافته باشد. در تحلیل خطی، انرژی کرنشی اولیه ناشی از تغییر شکل داخل صفحه‌ای ورق در حالت پیش‌کمانش، در حالت کمانش تغییر نمی‌کند و به همین دلیل در تحلیل انرژی، در نظر گرفته نمی‌شود. به همین دلیل در حالت کمانش خطی رابطه (۵-۲) برقرار است :

$$\Pi = U + \lambda_{cr} V = 0 \tag{۵-۲}$$

که در آن U انرژی کرنشی خمشی، V انرژی مربوط به کار نیروهای داخل صفحه‌ای در حین تغییر شکل عرضی و λ_{cr} مقدار ویژه می‌باشد. مقادیر U و V و T به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۱،۹۷]:

$$U = \frac{1}{2}\iint_S \left(\left\{ M_x, M_y, M_{xy} \right\} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right\}^T + \left\{ Q_x, Q_y \right\} \left\{ u_1 + \frac{\partial w}{\partial x}, v_1 + \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T \right) dS, \tag{۵-۳}$$

$$V = \frac{1}{2}\iint_S \left(N_x (\frac{\partial w}{\partial x})^2 + N_y (\frac{\partial w}{\partial y})^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \right) dS. \tag{۵-۴}$$

$$T = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(x,y,z) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right) dxdydz \tag{۵-۵}$$

که در آن S مساحت صفحه میانی و $\rho(x,y,z)$ چگالی جسم است. منتجه‌های تنش براساس میدان جابجایی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} A & \lambda & 0 \\ \lambda & A & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k_s G h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ v_1 + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}. \tag{۵-۶}$$

همچنین N_x, N_y و N_{xy} منتجه‌های تنش پیش‌کمانش (تعادل اولیه) بوده که نحوه محاسبه آن‌ها برای حالت‌های مختلف در فصل قبل توضیح داده شد. با جایگذاری میدان جابجایی بر اساس رابطه (۲-۳) در (۵-۵) و با فرض چگالی ثابت، نتیجه می‌شود:

$$T = \frac{\rho h^3}{24}\iint_S \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2 \right) dxdy + \frac{\rho h}{2}\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdy \tag{۵-۷}$$

برای یک ورق در حال ارتعاش، حل مساله را می‌توان به صورت زیر درنظر گرفت:

$$u_1(x,y,t)=u_1(x,y)e^{i\omega t},\quad v_1(x,y,t)=v_1(x,y)e^{i\omega t},\quad w(x,y,t)=w(x,y)e^{i\omega t} \tag{۸-۵}$$

که در آن ω فرکانس طبیعی ورق است. در روش ریتز، مولفه‌های میدان جابجایی v_1,u_1 و w به‌صورت یک سری از توابع با ضرایب مجهول به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\mathrm{u}_1(x,y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}U_{m,n}\phi_{1m}(x)\psi_{1n}(y),\ v_1(x,y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}V_{m,n}\phi_{2m}(x)\psi_{2n}(y),\ w(x,y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}W_{m,n}\phi_{3m}(x)\psi_{3n}(y) \tag{۹-۵}$$

توابع $\phi_{im}(x)$ و $\psi_{in}(y)$ $(i=1,2,3)$ که به نام توابع مجاز[1] شناخته می‌شوند، باید به گونه‌ای انتخاب شوند که شرایط مرزی اساسی یا هندسی مساله را ارضا نموده و نیز متعامد باشند. پس از تعیین این توابع و جایگذاری در رابطه (۵-۱) و سپس استفاده از روش ریتز نتیجه می‌شود:

$$\delta(\Pi-\mathrm{T})=0\rightarrow\frac{\partial(\Pi-T)}{\partial U_{m,n}}=0,\quad \frac{\partial(\Pi-T)}{\partial V_{m,n}}=0,\quad \frac{\partial(\Pi-T)}{\partial W_{m,n}}=0 \tag{۱۰-۵}$$

روابط (۵-۱۰) را می‌توان به شکل دستگاه معادلات زیر نوشت:

$$(\boldsymbol{K_b}-\eta\,\boldsymbol{K_G}-\omega^2\,\boldsymbol{M})\boldsymbol{d}=0 \tag{۱۱-۵}$$

که در آن $\boldsymbol{M}$ ماتریس جرم، $\boldsymbol{K_b}$ و $\boldsymbol{K_G}$ ماتریس‌های سفتی خمشی و هندسی، $\boldsymbol{d}$ بردار ثوابت و η ضریب بارگذاری می‌باشند. رابطه (۵-۱۱) تنها در صورتی جواب غیر صفر دارد که حاصل دترمینان زیر برابر با صفر باشد:

$$\left|\boldsymbol{K_b}-\eta\,\boldsymbol{K_G}-\omega^2\,\boldsymbol{M}\right|=0 \tag{۱۲-۵}$$

بر اساس رابطه (۵-۱۲)، سه نوع مساله را می‌توان درنظر گرفت:

۱-ارتعاشات آزاد در غیاب نیروهای داخل صفحه‌ای: در این حالت $\eta=0$ و رابطه (۵-۱۲) به‌صورت $\left|\boldsymbol{K_b}-\omega^2\,\boldsymbol{M}\right|=0$ ساده می‌شود. با حل این معادله، فرکانس‌های طبیعی ورق به‌دست می‌آیند.

۲-ارتعاش یک ورق که در معرض بارگذاری داخل صفحه‌ای قرار دارد: در این حالت مقدار η مشخص بوده و با حل معادله (۵-۱۲) فرکانس ارتعاشات ورق تحت بارگذاری به‌دست می‌آید.

۳- کمانش ورق: در این حالت $\omega=0$ و رابطه (۵-۱۲) به صورت $(\boldsymbol{K_b}-\eta\boldsymbol{K_G})\boldsymbol{d}=0$ ساده می‌شود. با حل این معادله، بارکمانش ورق به‌دست می‌آید.

[1] Admissible

۵-۲-۱ توابع مجاز مورد استفاده در روش ریتز

مجموعه توابع مجاز[1] مختلفی وجود دارد که از آن می‌توان در روش ریتز استفاده نمود، مانند توابع چند جمله‌ای، توابع ویژه یا توابع مشخصه، توابع مثلثاتی و غیره. این توابع باید به گونه‌ای انتخاب شوند که شرایط مرزی هندسی مساله را ارضا نموده و همچنین دارای همگرایی مناسبی بوده و زمان محاسبات را تا حد امکان کاهش دهند. گارسیا و همکاران [۱۱۶] و نیز کومار[۱۱۷] به مرور مقالات موجود در زمینه استفاده از روش ریتز پرداخته و توابع مختلف مورد استفاده در این روش را بایکدیگر مقایسه نموده اند.

در این رساله از توابع مشخصه مربوط به شکل مد ارتعاشی یک تیر اویلر-برنولی با شرایط مرزی مشابه با شرایط مرزی ورق در دو لبه روبروی هم برای بیان توابع $\phi_m(x), \psi_n(y)$ استفاده شده است. برای محاسبه این توابع، از حل معادله ارتعاشات آزاد تیر اویلر برنولی استفاده می‌شود. این معادله برای یک تیر با جرم بر واحد طول m، مدول الاستیک E و ممان اینرسی I به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱۱۸]:

$$m\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0 \tag{۵-۱۳}$$

که در آن w تغییر شکل عرضی تیر است. حل معادله (۵-۱۳) به‌صورت $w(x,t) = \phi(x)\cos(\omega t)$ درنظر گرفته می‌شود که در آن $\phi(x)$ بیانگر شکل مد ارتعاشی تیر بوده و ω فرکانس طبیعی تیر است. با جایگذاری حل درنظر گرفته شده در معادله (۵-۱۳)، معادله دیفرانسیل مربوط به $\phi(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^4\phi(x)}{dx^4} + \beta^4\phi(x) = 0 \tag{۵-۱۴}$$

که در آن پارامتر β^4 به‌صورت $\beta^4 = \frac{m}{EI}\omega^2$ تعریف می‌شود. حل معادله (۵-۱۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\phi(x) = C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x) + C_3\cosh(\beta x) + C_4\sinh(\beta x) \tag{۵-۱۵}$$

با اعمال شرایط مرزی در دو طرف تیر و حل مساله مقدار ویژه حاصل، ضرایب $C_n, n = 1..4$ و نیز مقدار مشخصه β محاسبه شده و بنابراین شکل مد به‌دست می‌آید. این توابع به عنوان توابع تیر[2] یا توابع مشخصه[3] نیز شناخته می‌شوند.

---

[1] Set of Admissible Functions
[2] Beam Functions
[3] Characteristic Functions

توابع تیر برای ترکیب های مختلف شرایط مرزی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

تیر با شرایط مرزی ساده در دو لبه:

$$\phi_m^{ss}(x)=\sin(\beta_m \mathrm{x}),\quad \beta_m=\frac{m\pi}{a},\quad (m=1,2,...) \tag{۱۶-۵}$$

که در آن a طول تیر می‌باشد.

تیر با شرایط مرزی گیردار در دو لبه:

$$\phi_m^{cc}(x)=\frac{\cos(\beta_m \mathrm{a})-\cosh(\beta_m \mathrm{a})}{\sin(\beta_m \mathrm{a})-\sinh(\beta_m \mathrm{a})}\left(\sin(\beta_m x)-\sinh(\beta_m \mathrm{x})\right)+\cosh(\beta_m \mathrm{x})-\cos(\beta_m \mathrm{x}),\quad (m=1,2,...) \tag{۱۷-۵}$$

که در آن β_m از حل معادله $\cos(\beta_m \mathrm{a})\cosh(\beta_m \mathrm{a})-1=0$ به‌دست می‌آید.

تیر با شرایط مرزی ساده در سمت چپ و آزاد در سمت راست:

$$\phi_1^{sf}(x)=x,\quad \phi_m^{sf}(x)=\frac{\sinh(\beta_m \mathrm{a})}{\sin(\beta_m \mathrm{a})}\sin(\beta_m \mathrm{x})+\sinh(\beta_m \mathrm{x}),\quad (m=2,3,...) \tag{۱۸-۵}$$

که در آن $\beta_1=0$ و $\beta_m, m=2,3,...$ از حل معادله $\tan(\beta_m \mathrm{a})-\tanh(\beta_m \mathrm{a})=0$ به‌دست می‌آید

تیر با شرایط مرزی آزاد در دو لبه:

$$\begin{gathered}\phi_1^{ff}(x)=1,\quad \phi_2^{ff}(x)=x\\ \phi_m^{ff}(x)=\frac{\cos(\beta_m \mathrm{a})-\cosh(\beta_m \mathrm{a})}{\sin(\beta_m \mathrm{a})-\sinh(\beta_m \mathrm{a})}\left(\sin(\beta_m x)+\cosh(\beta_m \mathrm{x})\right)+\cos(\beta_m \mathrm{x})+\sinh(\beta_m \mathrm{x}),\quad (m=3,4,...)\end{gathered} \tag{۱۹-۵}$$

که در آن $\beta_1=\beta_2=0$ و $\beta_m=3,4,...$ از حل معادله $\cos(\beta_m \mathrm{a})\cosh(\beta_m \mathrm{a})-1=0$ به‌دست می‌آید.

توابع $\psi_n(y)$ مربوط به شرایط مرزی مختلف نیز با جایگزینی x و a و m به ترتیب با y و b و n در تابع $\phi_m(x)$ مربوطه به‌دست می‌آیند. به عنوان مثال، برای یک ورق با شرایط مرزی ساده در لبه‌های سمت راست و چپ و شرایط مرزی گیردار در لبه‌های بالا و پایین، میدان جابجایی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathrm{u}_1(x,y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}U_{m,n}\phi_m'^{ss}(x)\psi_n^{cc}(y),\quad v_1(x,y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}V_{m,n}\phi_m^{ss}(x)\psi_n'^{cc}(y),\quad w(x,y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}W_{m,n}\phi_m^{ss}(x)\psi_n^{cc}(y) \tag{۲۰-۵}$$

در تئوری کلاسیک فرض می‌شود خطوط عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر شکل نیز به‌صورت عمود باقی می‌مانند. در این حالت می‌توان نوشت:

$$u_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_1 = -\frac{\partial w}{\partial y} \tag{۲۱-۵}$$

در تئوری کلاسیک نیز براساس روش ریتز، میدان جابجایی w به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} W_{m,n}\phi_m(x)\psi_n(y) \tag{۲۲-۵}$$

۵-۳ نتایج

۵-۳-۱ ورق مستطیلی بدون گشودگی

در این قسمت کمانش و ارتعاشات یک ورق مستطیلی بدون گشودگی که در معرض حالت‌های مختلف بارگذاری غیریکنواخت در لبه‌ها قرار دارد (شکل ۴-۲) مورد بررسی قرار می‌گیرد. همان طور که در فصل سوم اشاره شد، در نتایج ارائه شده، بار کمانش به‌صورت $\overline{N_{cr}} = N_{cr}b^2/\pi^2 D_{11}$ بی‌بعد شده است که در آن b عرض ورق و $D_{11} = Eh^3/12(1-\nu^2)$ صلبیت خمشی ورق می‌باشد. در جدول ۵-۱ مقدار بار کمانش به‌دست آمده برای یک ورق با شرایط مرزی ساده در تمامی لبه‌ها با نتایج موجود مقایسه شده است. جدول ۵-۱ نشان می‌دهد که مطابقت خوبی بین نتایج به‌دست آمده با نتایج مراجع دیگر وجود دارد. همچنین در جدول ۵-۲ مقادیر بار کمانش به‌دست آمده براساس دو تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با درنظر گرفتن $n=5$ (در رابطه (۴-۲۰)) ، با نتایج عددی مقایسه شده‌اند. در این جدول بار کمانش برای نسبت عرض به ضخامت b/h مختلف و همچنین نسبت ظاهری a/b مختلف، ارائه شده است. در این جدول برای نسبت ضخامت $b/h=10$، اختلاف نسبی بین تئوری کلاسیک و تئوری تنش برشی مرتبه اول و نیز بین تئوری تنش برشی مرتبه اول و آباکوس برحسب درصد نشان داده شده است. همان طور که در فصل قبل اشاره شد، به منظور مقایسه نتایج، بار معادل استاتیکی برای همه حالت‌های بارگذاری (مقدار انتگرال $\int_{-b/2}^{b/2} F(y)dy$) یکسان درنظر گرفته شده است.

جدول ۵-۱: مقایسه بار کمانش بی‌بعد شده $(\overline{N_{cr}})$ برای بارگذاری‌های مختلف با نتایج مراجع دیگر

a/b	Cosine					Constant		Parabolic		Triangular	
	Present	DQ [33]	Stress Function [31]	Stress Function [25]	FE [33]	Present	DSC[1] [119]	Present	Stress Function [27]	Present	Stress Function [25]
0.5	7.387	7.450	7.841	------	7.410	6.037	5.990	------	------	------	------
1	5.402	5.420	5.146	5.419	5.420	3.944	3.928	5.241	5.241	3.338	3.339
3	5.857	5.850	5.748	------	5.820	------	------	5.649	5.547	------	------

با توجه به جدول ۵-۲، بار کمانش به‌دست آمده براساس تئوری کلاسیک برای تمامی حالت‌های بارگذاری، بزرگتر از بار براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است. همچنین برای تمامی حالت‌های

[1] Discrete Singular Convolution

بارگذاری، با افزایش ضخامت ورق، دقت تئوری کلاسیک به خصوص برای نسبت‌های ظاهری کوچک کاهش یافته و اختلاف بار کمانش به‌دست آمده براساس آن با مقادیر عددی و تئوری تنش برشی افزایش می‌یابد. تاثیر نسبت ظاهری ورق بر بار کمانش وابسته به نوع بار گذاری می‌باشد؛ به‌طوری که برای بارگذاری سهمی شکل، با افزایش این نسبت بار کمانش همواره کاهش می‌یابد؛ اما برای دیگر حالت‌های بارگذاری، افزایش نسبت ظاهری می‌تواند منجر به کاهش یا افزایش بار کمانش شود. در عین حال یک ورق با نسبت ظاهری $a/b=0.5$، همواره دارای بیشترین بار کمانش می‌باشد.

جدول ۵-۲: مقایسه بار کمانش بی‌بعد شده یک ورق با نسبت ظاهری و ضخامت مختلف براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با تئوری کلاسیک و حل عددی.

Loading	b/h	Method	a/b: 3	2	1.5	1	0.5
Uniform	40	CPT	2.803	2.841	2.796	3.077	5.814
		FSDT	2.796	2.835	2.796	3.066	5.763
		FE	2.797	2.837	2.797	3.068	5.775
	20	FSDT	2.774	2.816	2.774	3.034	5.616
		FE	2.776	2.818	2.776	3.036	5.627
	10	FSDT	2.693	2.744	2.693	2.913	5.096
		FE	2.695	2.746	2.695	2.915	5.104
	10	Diff (%) between CPT and FSDT	4.085	3.535	3.825	5.630	14.089
		Diff (%) between FSDT and FE	0.074	0.073	0.073	0.068	0.156
Parabolic	40	CPT	3.035	3.047	3.145	4.298	10.913
		FSDT	3.029	3.041	3.145	4.283	10.800
		FE	2.965	3.046	3.247	4.277	10.673
	20	FSDT	3.011	3.021	3.121	4.239	10.474
		FE	2.941	3.025	3.220	4.230	10.330
	10	FSDT	2.942	2.943	3.030	4.069	9.011
		FE	2.849	2.940	3.116	4.049	9.128
	10	Diff (%) between CPT and FSDT	3.162	3.533	3.795	5.628	21.107
		Diff (%) between FSDT and FE	3.161	0.102	2.838	0.491	1.298
Cosine	40	CPT	2.743	2.739	2.636	2.662	4.514
		FSDT	2.741	2.740	2.557	2.659	4.485
		FE	2.664	2.688	2.570	2.645	4.474
	20	FSDT	2.715	2.722	2.520	2.631	4.370
		FE	2.643	2.670	2.551	2.617	4.359
	10	FSDT	2.613	2.652	2.383	2.425	3.962
		FE	2.562	2.598	2.474	2.512	3.951
	10	Diff (%) between CPT and FSDT	4.975	3.281	10.617	9.773	13.932
		Diff (%) between FSDT and FE	1.951	2.036	3.819	3.588	0.278
Triangular	40	CPT	2.505	2.756	2.650	2.605	4.023
		FSDT	2.498	2.750	2.643	2.596	4.151
		FE	2.632	2.654	2.525	2.568	4.255
	20	FSDT	2.480	2.732	2.623	2.569	4.044
		FE	2.611	2.635	2.505	2.541	4.144
	10	FSDT	2.407	2.663	2.546	2.466	3.666
		FE	2.530	2.564	2.429	2.439	3.754
	10	Diff (%) between CPT and FSDT	4.071	3.492	4.085	5.637	9.738
		Diff (%) between FSDT and FE	5.110	3.718	4.595	1.095	2.400

بار کمانش ورق تا حد زیادی وابسته به نوع بارگذاری در لبه‌ها است، به‌طوریکه برای بارگذاری های مختلف با معادل استاتیکی یکسان، بیشترین مقادیر بار کمانش مربوط به بارگذاری سهمی شکل بوده و پس از آن بارگذاری یکنواخت دارای بیشترین بار کمانش می‌باشد. در بین بارگذاری کسینوسی و مثلثی شکل نیز در حالت بارگذاری کسینوسی بار کمانش بیشتر می‌باشد. البته برای نسبت‌های ظاهری $a/b=1.5,2$، بار کمانش در بارگذاری مثلثی تا حدی بیشتر از بارگذاری کسینوسی است.

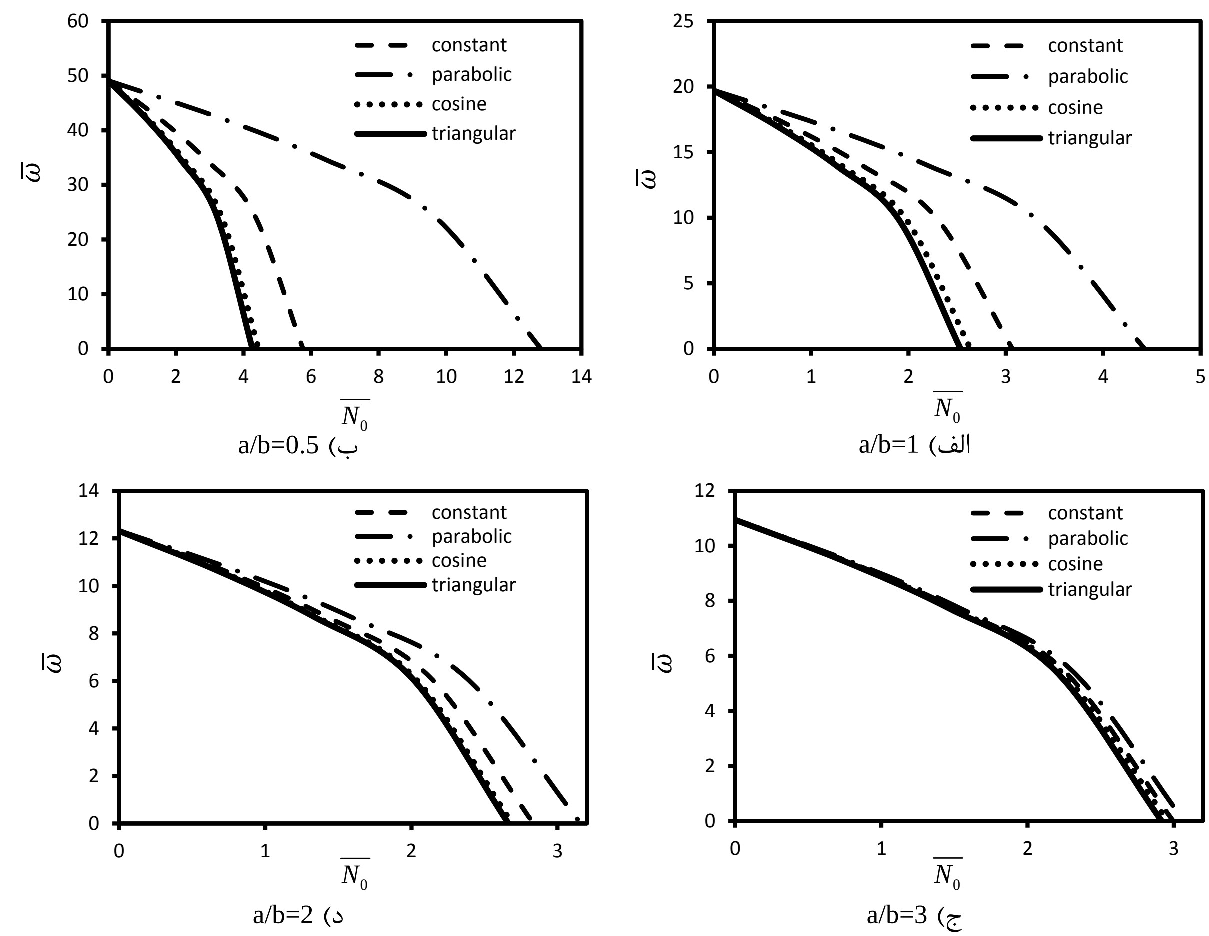
در جدول ۵-۳ فرکانس‌های طبیعی یک ورق مربعی با شرایط مرزی ساده در تمامی لبه‌ها و با نسبت ضخامت $a/h=40$ که در معرض بارگذاری داخل صفحه‌ای غیریکنواخت قرار دارد، ارئه و با نتایج آباکوس مقایسه شده است. در این جدول، اثر N_0/N_{cr} بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق بررسی شده است. مشاهده می-شود که با افزایش نسبت بار N_0/N_{cr}، فرکانس تمام مدها کاهش می‌یابد و درحالت $N_0/N_{cr}=1$، فرکانس مد اول صفر می‌شود که به معنی وقوع کمانش است. همچنین بر اساس نتایج این جدول، فرکانس مد اول برای تمامی حالت‌های بارگذاری با هم برابر بوده و تنها وابسته به نسبت بار است. مقایسه نتایج به‌دست آمده با حل آباکوس، تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

جدول ۵-۳: فرکانس ارتعاشات یک ورق مربعی تحت بارگذاری داخل صفحه‌ای

Load Profile	Mode	Analytical Solution					ABAQUS				
		N_0/Ncr					N_0/Ncr				
		0	0.25	0.5	0.75	1	0	0.25	0.5	0.75	1
Constant	1	1201.67	1040.68	849.71	600.84	0	1201.20	1041.20	851.85	605.66	0
	2	2914.95	2748.42	2571.13	2380.66	2173.57	2996.00	2793.00	2574.20	2334.60	2067.30
	3	2914.95	2821.63	2725.11	2625.04	2521.00	2996.00	2894.20	2788.70	2679.00	2564.70
	4	4425.81	4297.80	4165.85	4029.59	3888.55	4777.20	4627.90	4473.80	4313.90	4147.90
Parabolic	1	1201.67	1040.68	849.71	600.84	0	1201.20	1043.00	855.18	610.79	0
	2	2914.95	2803.77	2687.99	2567.00	2440.01	2996.00	2812.60	2614.50	2398.10	2157.70
	3	2914.95	2854.30	2792.32	2728.94	2664.05	2996.00	2856.40	2709.40	2553.80	2387.90
	4	4425.81	4300.25	4170.90	4037.41	3899.36	4777.20	4575.90	4365.00	4143.10	3908.30
Cosine	1	1201.67	1040.68	849.71	600.84	0	1201.20	1041.40	851.85	605.37	0
	2	2914.95	2729.93	2531.41	2315.95	2078.26	2996.00	2787.10	2560.90	2312.10	2032.60
	3	2914.95	2810.21	2701.41	2588.04	2469.48	2996.00	2907.60	2816.40	2722.10	2624.40
	4	4425.81	4296.33	4162.81	4024.87	3882.04	4777.20	4646.70	4512.40	4373.80	4230.70
Triangular	1	1200.77	1039.90	849.07	600.39	0	1201.20	1041.40	851.90	605.36	0
	2	2990.84	2776.56	2544.31	2288.60	2000.46	2996.00	2786.00	2558.30	2307.60	2025.40
	3	2990.84	2901.61	2809.55	2714.37	2615.72	2996.00	2911.00	2823.50	2733.10	2639.60
	4	4766.15	4635.62	4501.30	4362.85	4219.86	4777.20	4652.60	4524.60	4392.70	4256.60

تاثیر بارگذاری داخل صفحه‌ای بر فرکانس ارتعاشات یک ورق با نسبت ظاهری و نسبت ضخامت مختلف در شکل‌های ۵-۱ تا ۵-۳ نشان داده شده است. در این شکل‌ها نحوه تغییرات فرکانس با افزایش دامنه بار نشان

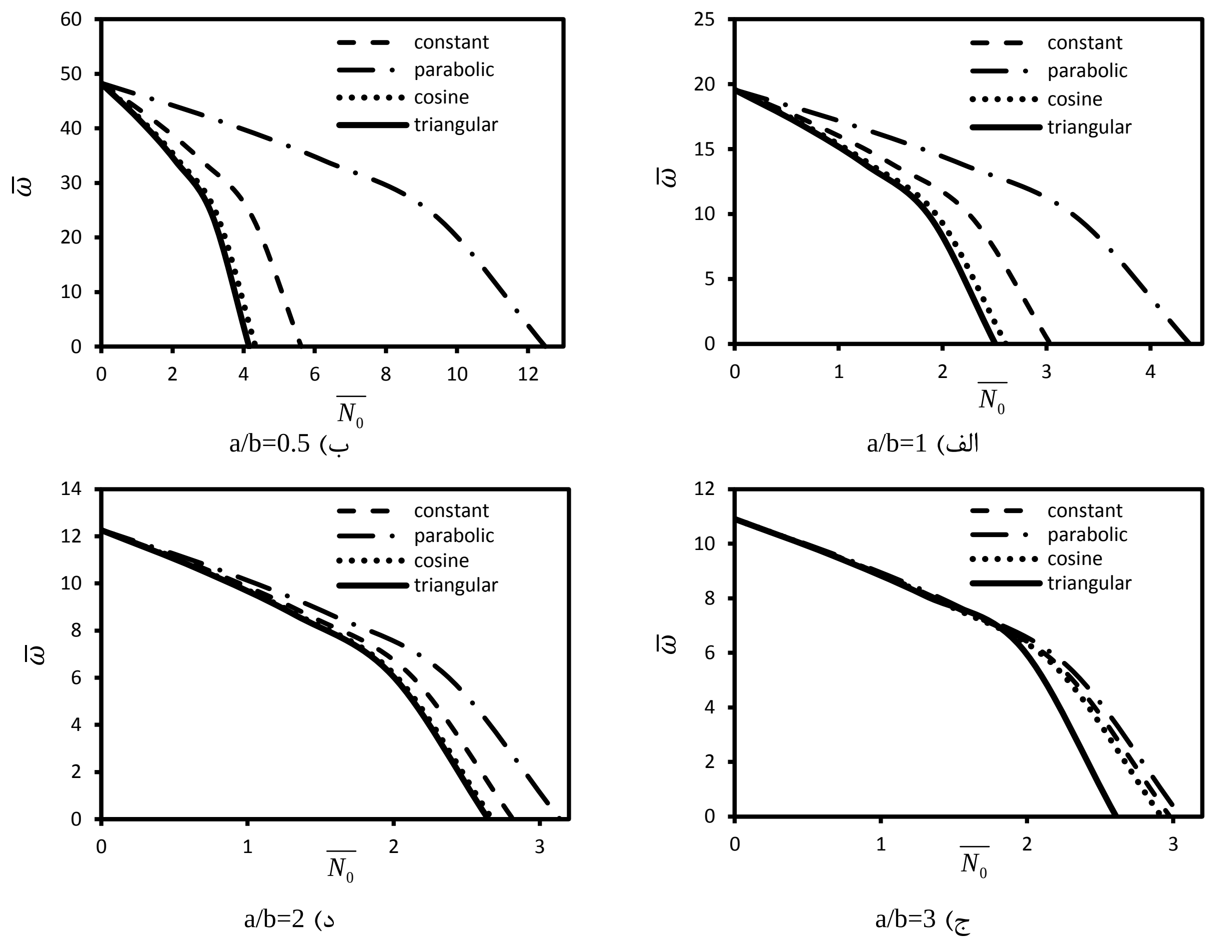
داده شده است. محور افقی دامنه بار بی‌بعد شده $\overline{N_0} = N_0 b^2 / \pi^2 D_{11}$ را نشان می‌دهد و محور عمودی برحسب فرکانس بی‌بعد شده $\bar{\omega} = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D_{11}}$ می‌باشد. هنگامی که یک ورق درمعرض بارداخل صفحه‌ای قرار می‌گیرد، سفتی آن کاهش یافته و درنتیجه فرکانس ارتعاشات عرضی نیز کاهش می‌یابد. با نزدیک شدن بار به بارکمانش، فرکانس به صفر نزدیک شده و در نهایت ورق کمانش می‌کند. این رفتار در شکل های ۵-۱ تا ۵-۳ مشاهده می‌شود. بار کمانش و فرکانس ورق تحت بارگذاری سهمی شکل همواره بیشتر از حالت‌های بارگذاری دیگر است. همچنین ورق‌های با بارگذاری یکنواخت، دارای بار کمانش و فرکانس بالاتری نسبت به ورق‌ها تحت بارگذاری کسینوسی و مثلثی هستند. با افزایش نسبت ظاهری ورق، تاثیر نوع بارگذاری بر فرکانس طبیعی کاهش یافته و برای نسبت‌های ظاهری بزرگ، نمودارها مشابه می‌شوند. همچنین فرکانس طبیعی با افزایش نسبت ظاهری کاهش می‌یابد.



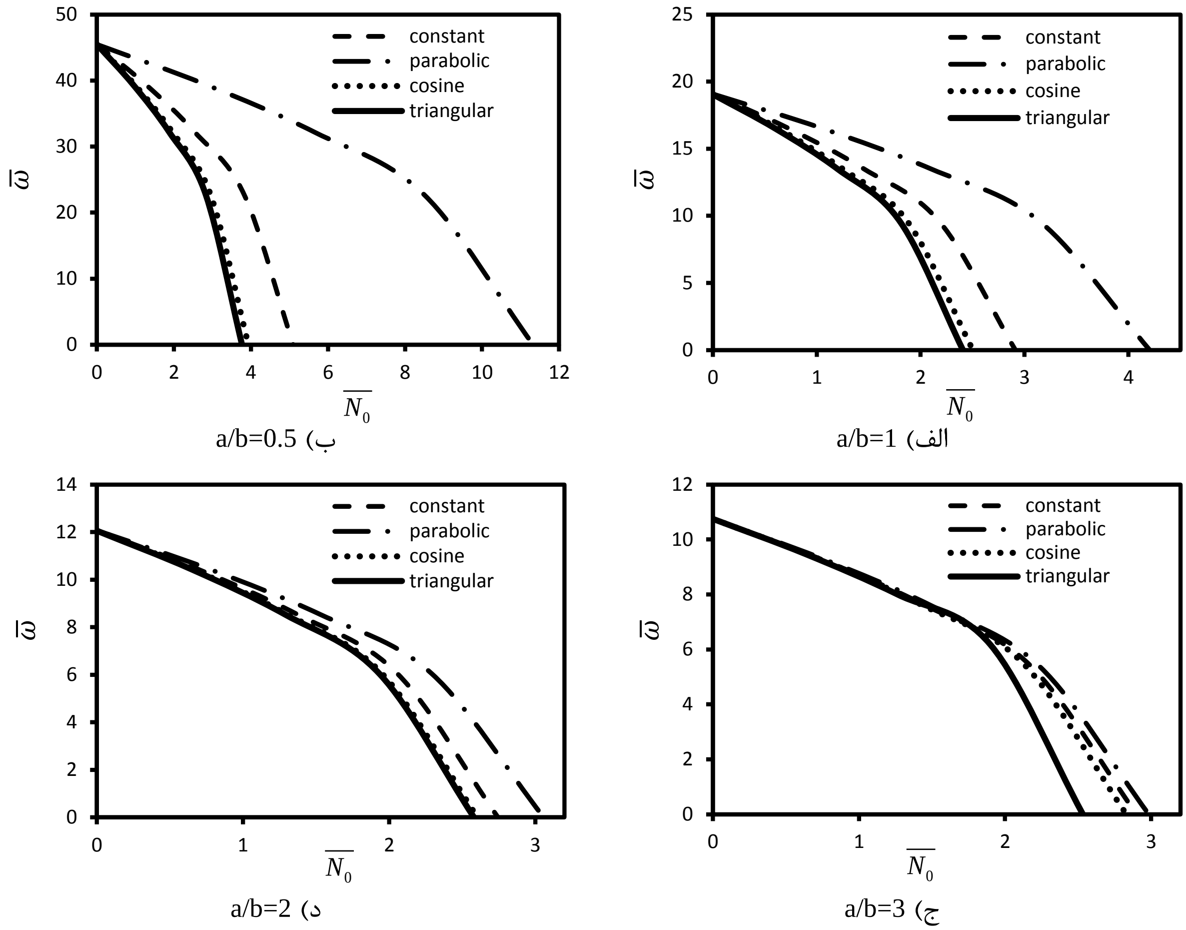
شکل ۵-۱: فرکانس مد اول یک ورق با نسبت ظاهری مختلف تحت بارگذاری داخل صفحه ای $(b/h=40)$

در شکل ۵-۴ تاثیر ضخامت ورق بر فرکانس مد اول یک ورق مربعی تحت بارگذاری سهمی شکل نشان داده شده است. برای حالت‌های دیگر بارگذاری نیز نمودار مشابهی به‌دست می‌آید. بر اساس این شکل، فرکانس

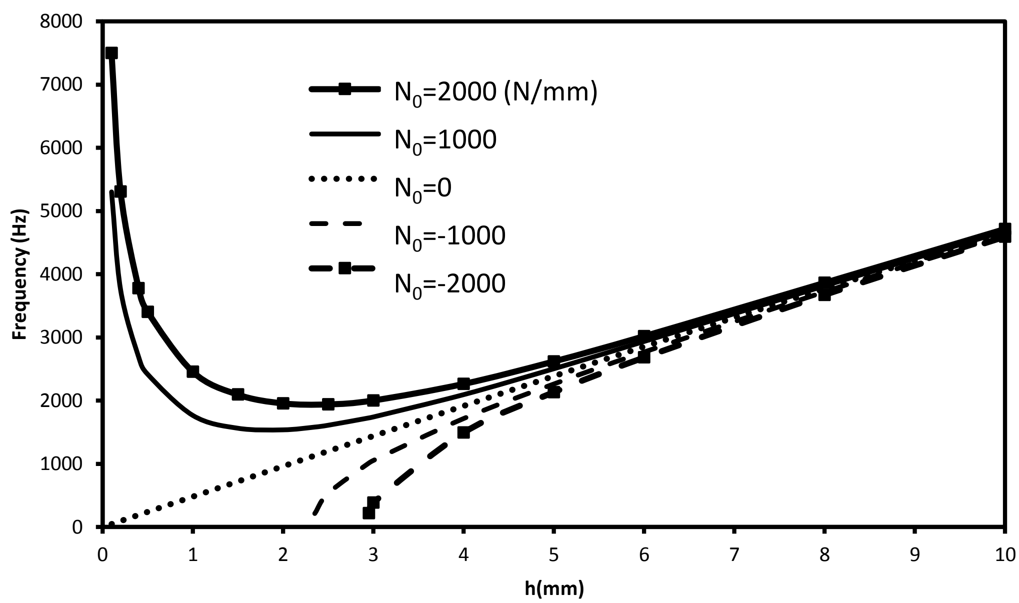
مد اول برای یک ورق بدون بارگذاری $(N_0 = 0)$ در بازه مورد بررسی، دارای تغییرات خطی نسبت به ضخامت است. در یک ورق تحت بارگذاری فشاری، فرکانس همواره نسبت به حالت بدون بار و یا بارگذاری کششی کمتر است. در ورق تحت بارگذاری فشاری، با کاهش ضخامت ورق، فرکانس به سرعت کاهش یافته و نهایتا در هنگام کمانش صفر می‌شود. در یک ورق تحت بارگذاری کششی، نمودار دارای یک نقطه کمینه است. در این حالت با افزایش ضخامت ورق، فرکانس تا رسیدن به نقطه کمینه کاهش یافته و پس از آن افزایش می‌یابد. در حقیقت افزایش ضخامت باعث افزایش جرم می‌شود که کاهش فرکانس را به دنبال دارد. از سوی دیگر بار کششی، سفتی ورق را افزایش داده و باعث افزایش فرکانس می‌شود که تاثیر آن پس از نقطه کمینه نمودار، غالب است. همچنین هنگامی که ضخامت افزایش می‌یابد، رفتار ارتعاشی ورق برای سه حالت مورد بررسی به هم نزدیک شده و تاثیر بارداخل صفحه‌ای بر فرکانس کاهش می‌یابد.



شکل ۵-۲: فرکانس مد اول یک ورق با نسبت ظاهری مختلف تحت بارگذاری داخل صفحه ای $(b/h = 20)$



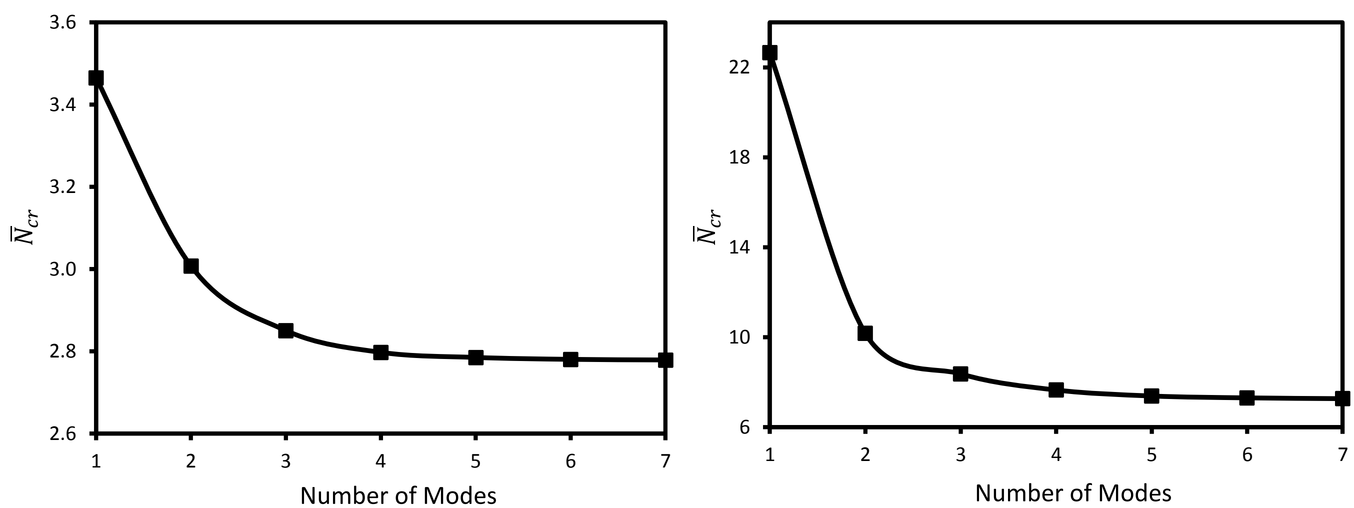
شکل ۵-۳: فرکانس مد اول یک ورق با نسبت ظاهری مختلف تحت بارگذاری داخل صفحه ای $(b/h=10)$



شکل ۵-۴: تاثیر ضخامت ورق بر فرکانس مد اول یک ورق مربعی تحت بارگذاری سهمی شکل

۵-۳-۲ کمانش ورق‌های مربعی دارای گشودگی دایروی

در این قسمت نتایج مربوط به محاسبات بار کمانش برای یک ورق مستطیلی دارای گشودگی دایروی و مربعی در مرکز ارائه و تاثیر پارامترهای مختلف مانند اندازه گشودگی، شرایط مرزی مختلف در لبه‌های ورق و نیز نسبت ظاهری ورق بر بار کمانش بررسی شده است. همچنین برای یک ورق مربعی با گشودگی دایروی، تاثیر حالت‌های مختلف بارگذاری تک محوره، دو محوره و بارگذاری برشی و نیز بارگذاری غیریکنواخت شامل دو نوع بارگذاری کسینوسی و سهمی شکل (شکل ۴-۲) بر بار کمانش بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده در این قسمت با نتایج حل عددی با استفاده از کد اجزای محدود نوشته شده در نرم افزار متلب و نیز مراجع دیگر مقایسه شده است. نحوه فرمول‌بندی روش اجزای محدود در فصل سوم توضیح داده شده است. با توجه به اینکه دقت محاسبات، وابسته به تعداد مدهای مورد استفاده در رابطه (۵-۹) می‌باشد، در ابتدا با استفاده از تحلیل همگرایی، تعداد مدهای مناسب به‌دست آمد. در شکل ۵-۵ دونمونه از نمودار همگرایی بار کمانش بی‌بعد برحسب تعداد مد برای ورق مربعی با گشودگی دایروی با نسبت $D/a=0.6$ که تحت بارگذاری یکنواخت تک محوره قرار دارد، نشان داده شده است. بر اساس این شکل، تعداد مدهای مورد استفاده برای محاسبه بارکمانش با استفاده از روش ریتز برابر با شش مد درنظر گرفته می‌شود.



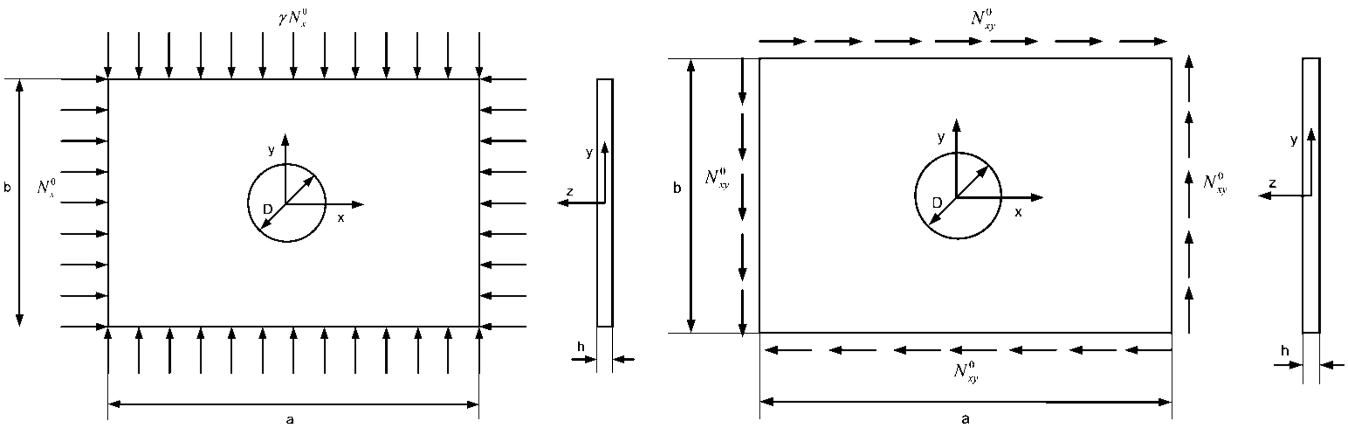
الف) CCCC

ب) SSSS

شکل ۵-۵: نمودار همگرایی بارکمانش ورق مربعی با گشودگی دایروی $(D/a=0.6)$ تحت بار یکنواخت تک محوره برحسب تعداد مد برای دونوع شرط مرزی

بارگذاری یکنواخت: هندسه ورق در شکل ۵-۶ نشان داده شده است که در آن a و b به ترتیب طول و عرض ورق، D قطر گشودگی و h ضخامت ورق می‌باشد. همچنین $\gamma=1$ بیانگر بارگذاری دو محوره فشاری و

$\gamma = 0$ بیانگر بارگذاری تک محوره می‌باشد. شرایط مرزی ورق به‌صورت یک عبارت چهارحرفی نامگذاری می‌شود که دوحرف اول بیانگر نوع شرط مرزی در لبه چپ و راست و دو حرف دوم بیانگر نوع شرط مرزی در لبه بالا و پایین ورق است. برای مثال عبارت SSSF مربوط به یک ورق با شرایط مرزی ساده در لبه‌های راست و چپ و بالا و شرط مرزی آزاد در لبه پایین است.



ب)

الف)

شکل ۵-۶: هندسه ورق دارای گشودگی تحت بار گذاری الف) برشی، ب) دو محوره

در جدول ۵-۴ مقدار بار کمانش بی‌بعد شده برای یک ورق مربعی دارای گشودگی دایروی برای دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار در تمامی لبه‌ها، با نتایج مربوط به مراجع دیگر مقایسه شده است. در مراجع [۸۷] و [۸۵] از روش اجزای محدود با استفاده از نرم افزار انسیس برای محاسبه بار کمانش استفاده شده است. در مرجع [۱۲۰] از روش اجزای محدود بر اساس المان‌های بر پایه میدان کرنش (به جای میدان جابجایی) برای محاسبه میدان پیش‌کمانش و المان‌های خمشی برای محاسبه بار کمانش استفاده شده است. بیشترین اختلاف نسبی برای شرایط مرزی SSSS و درحالت بارگذاری تک محوره و دومحوره حدود 6% است، درحالی که برای شرایط مرزی CCCC این اختلاف برای بارگذاری تک محوره حدود 13% و برای بارگذاری دو محوره حدود 7% است. توضیح اینکه بیشترین اختلاف برای تمامی حالت‌های ذکر شده، با نتایج مرجع [۱۲۰] است که علت آن می‌تواند استفاده از مش درشت در این مرجع باشد.

تاثیر ترکیب‌های مختلف شرایط مرزی در مرزهای ورق و نیز نسبت قطر به طول ورق (D/a) بر بار کمانش ورق مربعی با گشودگی دایروی برای دو نوع بارگذاری تک محوره و دو محوره به ترتیب در جدول‌های ۵-۵ و ۵-۶ ارائه شده است. در این جدول‌ها نتایج به‌دست آمده با استفاده از روش ریتز با حل اجزای محدود مقایسه شده است. همچنین در جدول ۵-۷، بار کمانش ورق مربعی دارای گشودگی تحت بارگذاری برشی برای دو نوع شرایط مرزی ساده و گیردار در تمامی لبه‌ها ارائه و با نتایج روش اجزای محدود مقایسه شده است.

جدول ۵-۴: مقایسه بار کمانش بی‌بعد شده $(\overline{N_{cr}})$ ورق مربعی با گشودگی دایروی با نتایج موجود

D/a	Uniaxial						Biaxial			
	SSSS				CCCC		SSSS		CCCC	
	Present	Sabir and Chow [120]	El-Sawy and Nazmy [85]	Komur and Sonmez [87]	Present	Sabir and Chow [120]	Present	Sabir and Chow [120]	Present	Sabir and Chow [120]
0	3.986	------	4.000	4.002	9.914	------	1.993	------	5.234	------
0.1	3.924	3.691	3.859	3.861	9.723	9.530	1.962	1.849	5.207	4.843
0.2	3.571	3.445	3.531	3.527	8.958	------	1.794	1.766	5.019	4.714
0.3	3.230	3.185	3.240	3.230	8.735	8.534	1.640	1.640	5.307	5.086
0.4	3.023	3.049	3.040	3.037	8.381	8.728	1.568	1.545	6.128	5.986
0.5	2.890	2.840	2.914	2.906	7.801	9.005	1.554	1.473	7.215	7.514
0.6	2.818	------	2.829	2.817	7.099	------	1.586	------	8.529	------

جدول ۵-۵: بار کمانش بی‌بعد شده $(\overline{N_{cr}})$ یک ورق مربعی تحت بارگذاری تک محوره برای شرایط مرزی مختلف

D/a	Boundary Condition											
	SSSS		CCCC		SSFF		CCFF		SSSF		CCSF	
	Present	FE	Present	FE	Present	FE	Present	FE	Present	FE	Present	FE
0	3.986	4.002	9.914	10.116	0.960	0.954	3.911	3.957	1.417	1.399	4.373	4.403
0.1	3.924	3.851	9.723	9.529	0.942	0.928	3.845	3.873	1.403	1.371	4.320	4.316
0.2	3.571	3.521	8.958	8.803	0.865	0.853	3.607	3.627	1.334	1.287	4.108	4.052
0.3	3.230	3.228	8.735	8.532	0.759	0.750	3.347	3.322	1.213	1.170	3.790	3.707
0.4	3.023	3.024	8.381	8.374	0.649	0.643	3.085	3.042	1.065	1.038	3.459	3.337
0.5	2.890	2.886	7.801	7.958	0.543	0.535	2.732	2.682	0.912	0.892	3.031	2.844
0.6	2.818	2.780	7.099	7.329	0.442	0.430	2.287	2.223	0.754	0.732	2.464	2.275

جدول ۵-۶: بار کمانش بی‌بعد شده $(\overline{N_{cr}})$ یک ورق مربعی تحت بارگذاری دو محوره برای شرایط مرزی مختلف

D/a	Boundary Condition											
	SSSS		CCCC		SSFF		CCFF		SSSF		CCSF	
	Present	FE	Present	FE	Present	FE	Present	FE	Present	FE	Present	FE
0	1.993	2.001	5.234	5.323	0.941	0.932	2.755	2.720	1.077	1.050	2.864	2.832
0.1	1.962	1.923	5.207	5.051	0.923	0.909	2.777	2.781	1.067	1.036	2.874	2.810
0.2	1.794	1.770	5.019	4.885	0.853	0.840	2.718	2.688	1.030	0.989	2.797	2.711
0.3	1.640	1.641	5.307	5.222	0.753	0.743	2.603	2.553	0.965	0.916	2.653	2.553
0.4	1.568	1.570	6.128	6.185	0.648	0.640	2.420	2.363	0.874	0.830	2.441	2.363
0.5	1.554	1.555	7.215	7.844	0.544	0.535	2.169	2.102	0.766	0.732	2.172	2.107
0.6	1.586	1.587	8.529	8.186	0.440	0.433	1.867	1.803	0.644	0.619	1.859	1.804

جدول ۵-۷: بار کمانش بی‌بعد شده $(\overline{N_{cr}})$ یک ورق مربعی تحت بارگذاری برشی برای دو نوع شرط مرزی مختلف

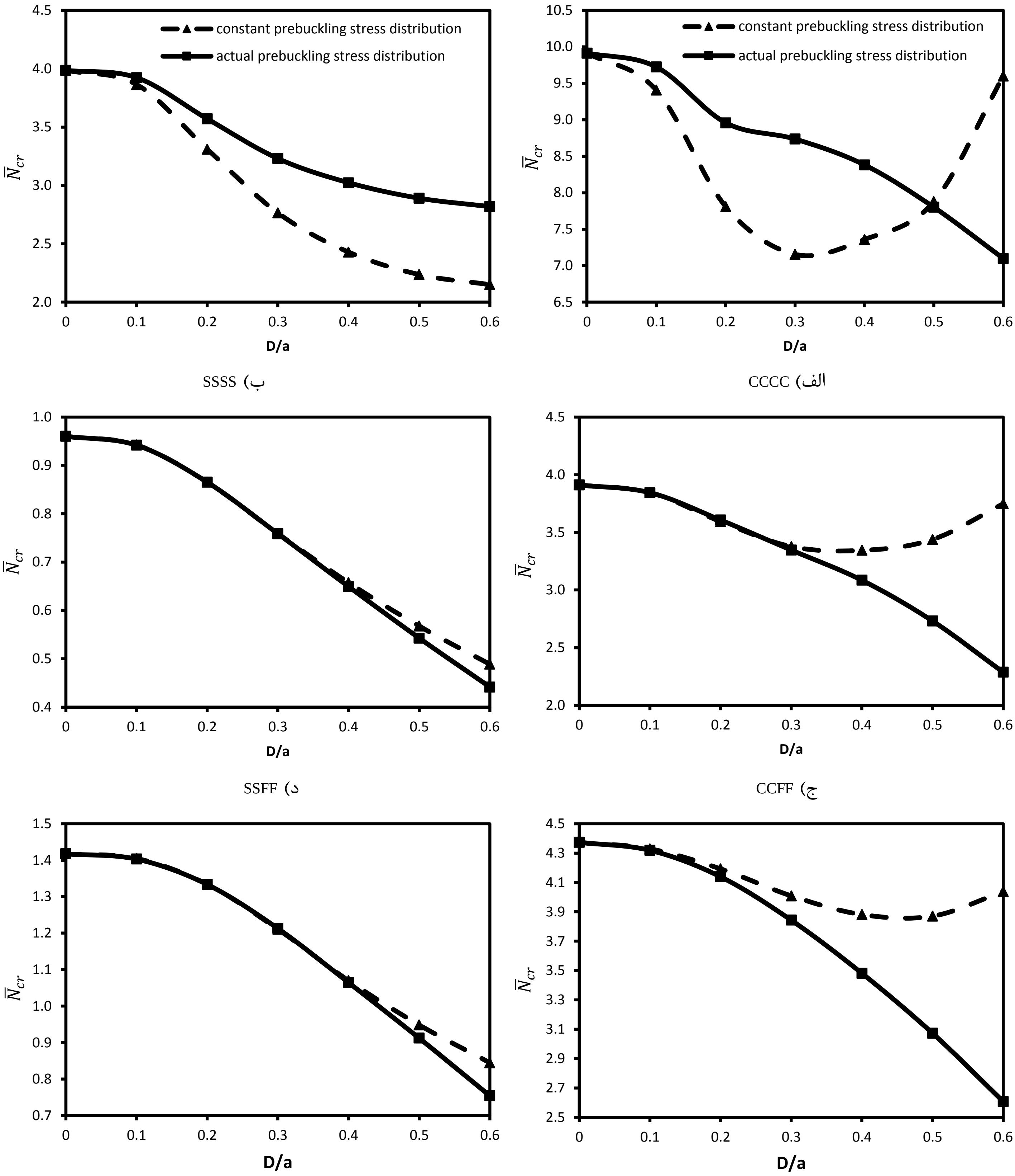
D/a	SSSS			CCCC		
	Present	FE	Error(%)	Present	FE	Diff (%)
0	9.235	9.429	2.057	14.371	14.882	3.434
0.1	8.683	8.685	0.026	13.317	13.499	1.346
0.2	7.054	7.086	0.459	10.785	11.016	2.094
0.3	5.465	5.497	0.587	8.662	8.742	0.918
0.4	4.089	4.114	0.606	6.853	6.856	0.041
0.5	2.998	3.007	0.310	5.158	5.403	4.536
0.6	2.185	2.186	0.033	4.059	4.356	6.811

Boundary Condition

براساس نتایج جدول‌های ۵-۵ و ۵-۶، در حالت بارگذاری تک محوره با افزایش قطر سوراخ بار کمانش برای تمامی شرایط مرزی بررسی شده کاهش می‌یابد؛ در حالی که در حالت بار گذاری دومحوره و برای شرایط مرزی CCCC ، با افزایش نسبت D/a، بار کمانش ابتدا کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد. بنابراین در این حالت با افزایش قطر سوراخ می‌توان مقاومت ورق در برابر کمانش را افزایش داد. نحوه تغییرات بار کمانش ورق با اندازه گشودگی وابسته به نوع شرایط مرزی می‌باشد، به‌طوری که ورق‌های با شرایط مرزی CCCC و SSFF به ترتیب دارای کمترین و بیشترین تغییرات بار کمانش هستند. در ورق با شرایط مرزی CCCC، میزان کاهش بار کمانش برای $D/a=0.6$ نسبت به ورق بدون گشودگی برابر با 28.39% و در ورق با شرایط مرزی SSFF برابر با 54.01% می‌باشد. در حالت بارگذاری دو محوره، بیشترین کاهش بار کمانش مربوط به ورق با شرایط مرزی SSFF و به میزان 53.21% است؛ در حالی که در ورق با شرایط مرزی CCCC، بار کمانش به میزان 62.95% افزایش می‌یابد. همچنین بار کمانش ورق در حالت بارگذاری دومحوره کوچکتر از مقدار آن در حالت بارگذاری تک محوره است.

در شکل‌های ۵-۷ ، ۵-۸ و ۵-۹ حساسیت بار کمانش نسبت به میدان تنش پیش‌کمانش نشان داده شده است. در این شکل‌ها، بار کمانش با فرض ثابت بودن میدان تنش پیش‌کمانش محاسبه و با مقدار واقعی آن مقایسه شده است. این میدان تنش ثابت برای بار گذاری تک محوره به‌صورت $N_x=N_x^0$، $N_y=0$ و $N_{xy}=0$ و برای بار گذاری دو محوره به‌صورت $N_x=N_x^0$، $N_y=N_x^0$ و $N_{xy}=0$ و برای بار گذاری برشی به‌صورت $N_x=0$، $N_y=0$ و $N_{xy}=N_{xy}^0$ می‌باشد. با توجه به شکل‌های ۷-۷ تا ۷-۹، حساسیت بارکمانش نسبت به میدان تنش پیش‌کمانش وابسته به نوع بارگذاری، شرایط مرزی ورق و نیز نسبت D/a است. در حالت بارگذاری تک محوره، بار کمانش ورق SSFF کمترین حساسیت را نسبت به میدان پیش‌کمانش داشته، به‌طوری که حداکثر اختلاف

برابر با 10.67% است، درحالی که بار کمانش ورق با شرایط مرزی CCFF نسبت به توزیع تنش پیش‌کمانش بسیار حساس بوده و بیشترین اختلاف در این ورق برابر با 63.89% است. در حالت بار گذاری دو محوره، ورق‌های SSFF و CCSF کمترین و بیشترین حساسیت را نسبت به توزیع میدان تنش پیش‌کمانش داشته و حداکثر اختلاف برای این دو حالت به ترتیب برابر با 12.81% و 40.24% است. در میان حالت‌های مختلف بارگذاری بررسی شده، بیشترین حساسیت مربوط به بارگذاری برشی است، به‌طوری که براساس شکل ۵-۹، حداکثر اختلاف بارکمانش برای هر دونوع شرط مرزی CCCC و SSSS حدود 375% است. با افزایش D/a، توزیع تنش پیش‌کمانش نسبت به ورق بدون گشودگی غیریکنواخت تر شده و بنابراین حساسیت بار کمانش نسبت به توزیع میدان تنش پیش‌کمانش افزایش می‌یابد. این موضوع در شکل‌های ۵-۷ تا ۵-۹ قابل مشاهده است، به‌طوری که با افزایش D/a، فاصله بین دو نمودار افزایش می‌یابد. تاثیر ضخامت ورق بر روی بار کمانش برای حالت بارگذاری تک محوره در جدول ۵-۸ نشان داده شده است. در این جدول مقدار بار کمانش محاسبه شده با استفاده از تئوری کلاسیک با نتایج به‌دست آمده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و نیز نتایج مربوط به حل اجزای محدود مقایسه شده است. براساس فرضیات تئوری کلاسیک، تنش‌های برشی عرضی برابر با صفر می‌باشند $(\tau_{xz}=\tau_{yz}=0)$؛ در حالی که در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، مقدار این تنش‌ها در راستای ضخامت ثابت است. مقدار بار کمانش بی‌بعد شده $\overline{N_{cr}}$ در تئوری کلاسیک مستقل از نسبت ضخامت (a/h) است. این بدان معنی است که بار کمانش متناسب با h^3 است. دقت تئوری کلاسیک در محاسبه بار کمانش با افزایش ضخامت ورق کاهش می‌یابد؛ زیرا با افزایش ضخامت، تاثیر تنش‌های برشی عرضی در محاسبه بار کمانش افزایش می‌یابد؛ در حالی که در تئوری کلاسیک از تاثیر این تنش‌ها صرفنظر می‌شود. همچنین اختلاف بین نتایج تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی تا حد زیادی وابسته به شرایط مرزی ورق نیز می‌باشد. براساس نتایج جدول ۵-۹، برای ورق با شرایط مرزی CCCC، بیشترین اختلاف بین دو تئوری برابر با 73.55% و برای ورق با شرایط مرزی SSFF بیشترین اختلاف حدود 4% است.



الف) CCCC

ب) SSSS

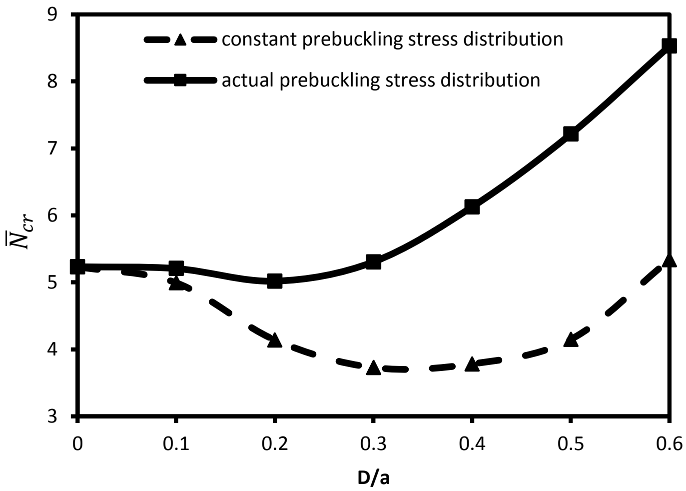
ج) CCFF

د) SSFF

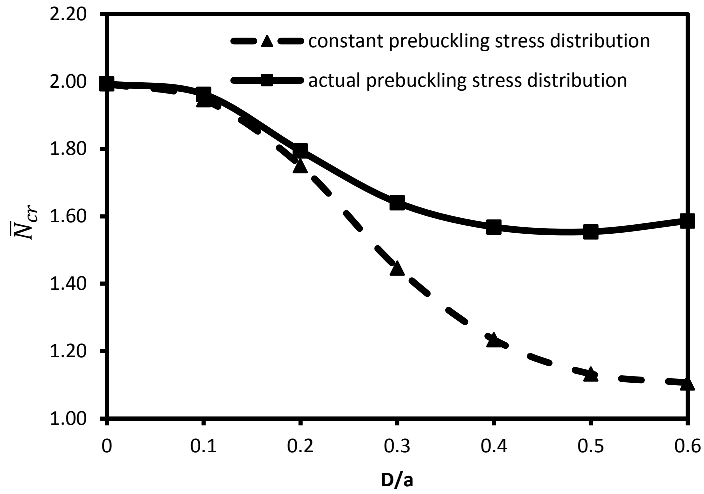
هـ) CCSF

و) SSSF

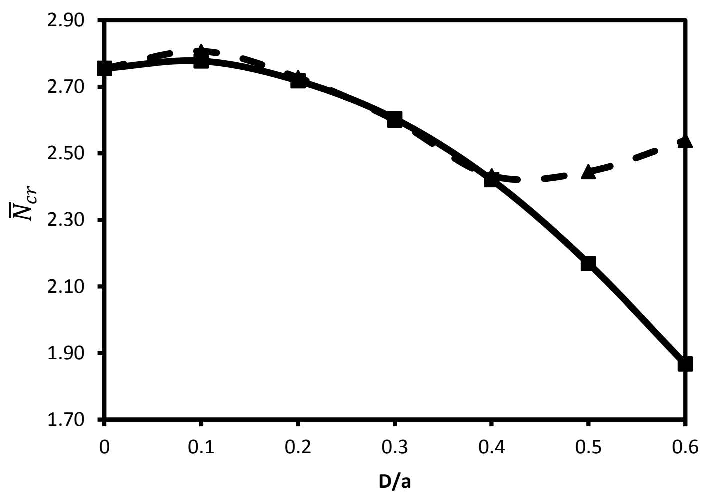
شکل ۵-۷: حساسیت بار کمانش نسبت به میدان تنش پیش‌کمانش برای بارگذاری تک محوره



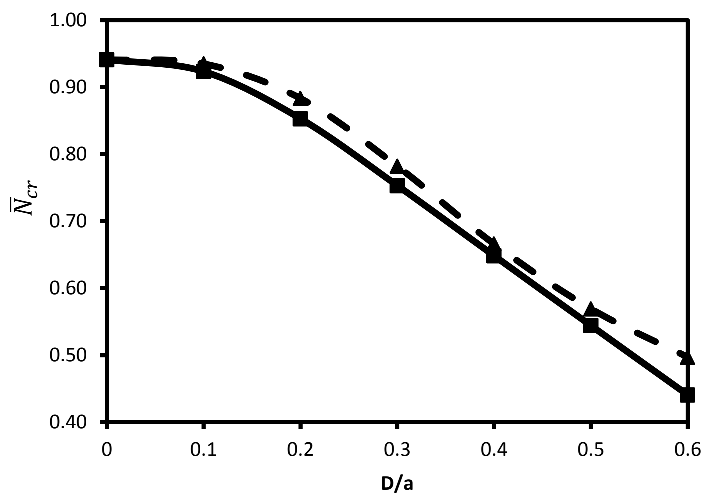
الف) CCCC



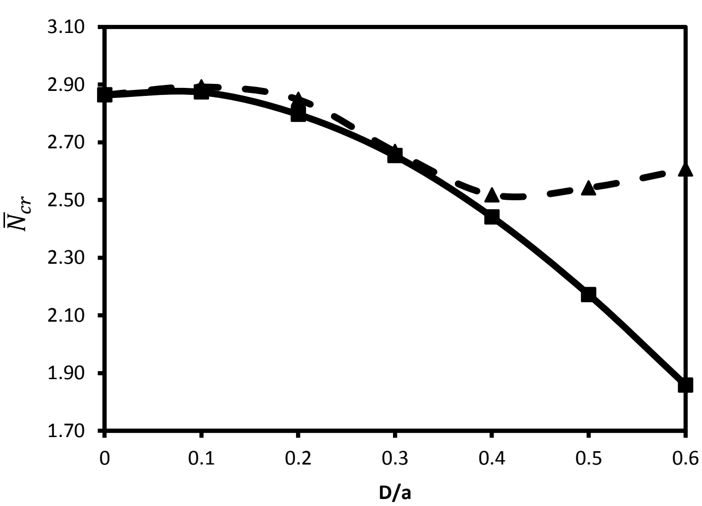
ب) SSSS



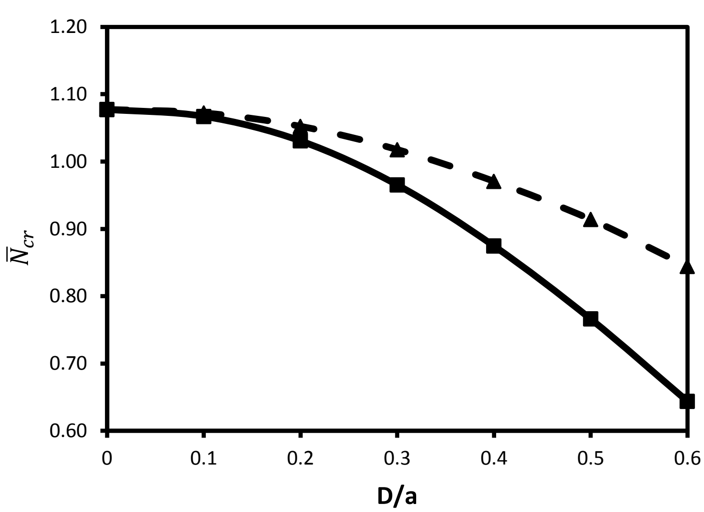
ج) CCFF



د) SSFF

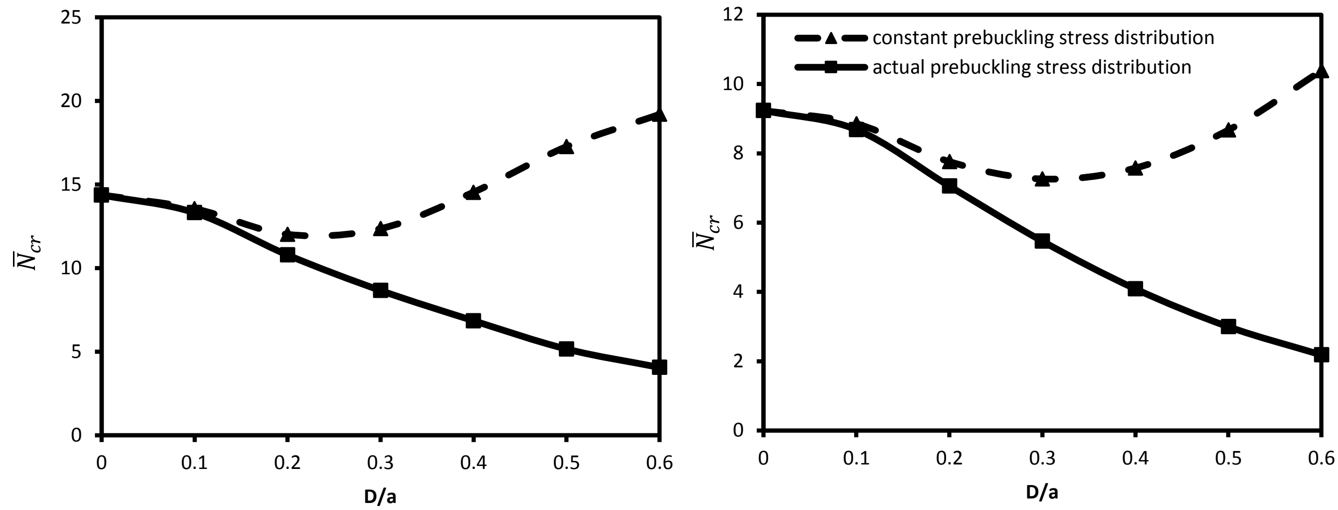


هـ) CCSF



و) SSSF

شکل ۵-۸: حساسیت بار کمانش نسبت به میدان تنش پیش‌کمانش برای بارگذاری دو محوره



ب) CCCC الف) SSSS

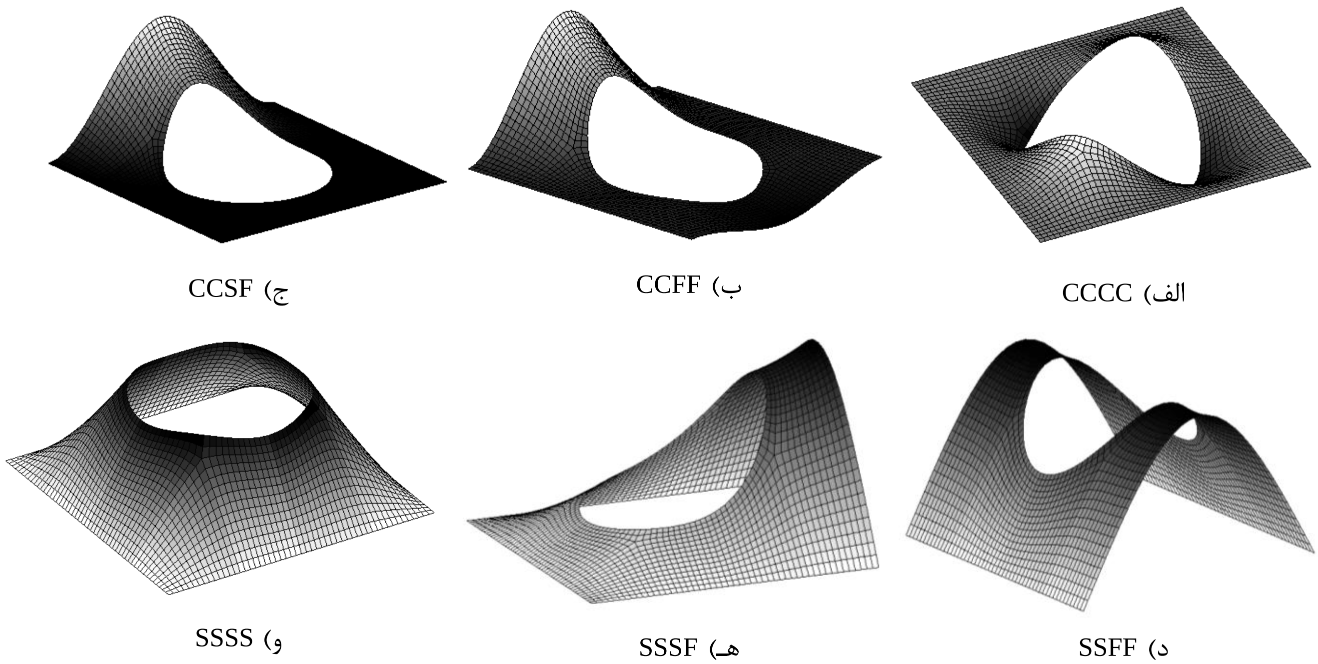
شکل ۵-۹: حساسیت بار کمانش نسبت به میدان تنش پیش‌کمانش برای بارگذاری برشی

جدول ۵-۸: بار کمانش ورق تحت بار گذاری تک محوره براساس تئوری‌های مختلف برای نسبت‌های ضخامت مختلف

Boundary condition	D/a	CPT	a/h=40		a/h=20		a/h=10	
			FSDT	FE	FSDT	FE	FSDT	FE
CCCC	0	10.037	9.914	10.116	9.561	9.582	8.358	8.310
	0.1	9.843	9.723	9.529	9.381	9.027	8.210	7.863
	0.2	9.070	8.958	8.803	8.638	8.349	7.537	7.231
	0.3	8.889	8.735	8.532	8.318	8.044	6.978	6.721
	0.4	8.600	8.381	8.374	7.812	7.694	6.153	6.018
	0.5	8.097	7.801	7.958	7.083	7.080	5.239	5.145
	0.6	7.454	7.099	7.329	6.258	6.231	4.295	4.145
SSFF	0	0.943	0.960	0.954	0.935	0.944	0.912	0.923
	0.1	0.925	0.942	0.928	0.917	0.914	0.895	0.893
	0.2	0.855	0.865	0.853	0.847	0.840	0.825	0.819
	0.3	0.755	0.759	0.750	0.747	0.741	0.728	0.724
	0.4	0.650	0.649	0.643	0.643	0.635	0.627	0.621
	0.5	0.546	0.543	0.535	0.539	0.529	0.526	0.519
	0.6	0.442	0.442	0.430	0.436	0.425	0.425	0.418

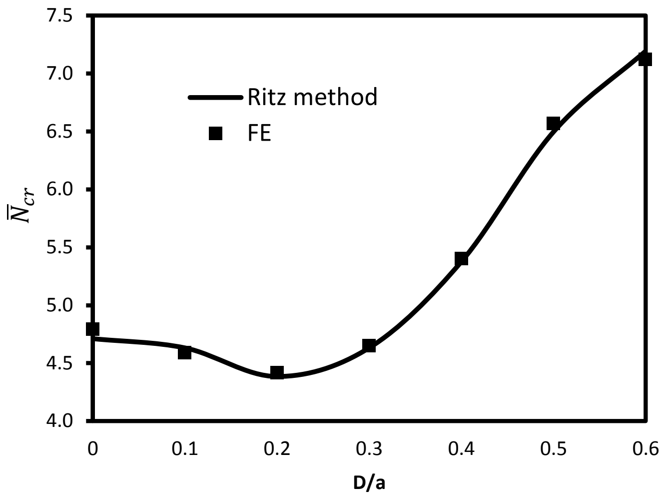
در شکل ۵-۱۰ اولین شکل مد کمانش یک ورق مربعی با گشودگی دایروی تحت بارگذاری فشاری یکنواخت دومحوره و برای $D/a = 0.6$ نمایش داده شده است.

بارگذاری غیریکنواخت: در این قسمت نتایج مربوط به بار کمانش یک ورق مربعی با گشودگی دایروی تحت بارگذاری غیریکنواخت ارائه می‌شود. نتایج به‌دست آمده با حل اجزای محدود مقایسه شده است. در شکل‌های ۵-۱۱ و ۵-۱۲ تغییرات بار کمانش یک ورق که تحت بار گذاری دو محوره و تک محوره کسینوسی قرار دارد، برحسب نسبت قطر به طول ورق (D/a) و برای شرایط مرزی مختلف نشان داده شده است. همچنین در شکل‌های ۵-۱۳ و ۵-۱۴ نمودار تغییرات بار کمانش برای حالت بارگذاری دو محوره و تک محوره سهمی شکل نشان داده شده است.

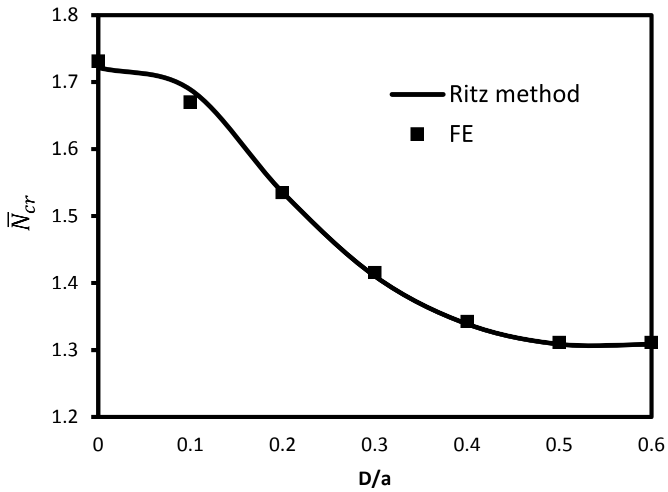


شکل ۵-۱۰: اولین شکل مد مربوط به کمانش ورق مربعی با گشودگی دایروی تحت بار گذاری فشاری یکنواخت دومحوره برای شرایط مرزی مختلف (FE)

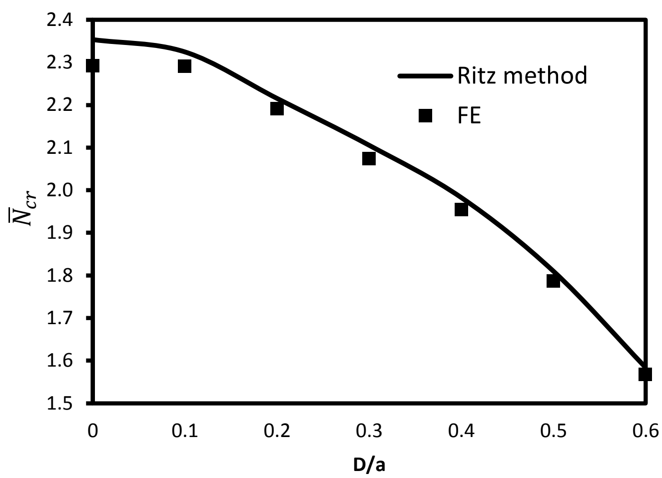
براساس شکل‌های ۵-۱۱ تا ۵-۱۴ مشاهده می‌شود که در بارگذاری کسینوسی، بار کمانش در حالت تک محوره همواره از دومحوره بیشتر است. همچنین در بارگذاری تک محوره، بار کمانش با افزایش اندازه سوراخ همواره کاهش می‌یابد، اما در حالت دو محوره و برای ورق CCCC، بار کمانش ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد، به‌طوری که بار کمانش ورق با $D/a=0.6$ نسبت به ورق بدون سوراخ به میزان 52.65% بیشتر است. در حالت بارگذاری کسینوسی، بیشترین بار کمانش مربوط به ورق CCCC و کمترین آن مربوط به ورق SSFF است.



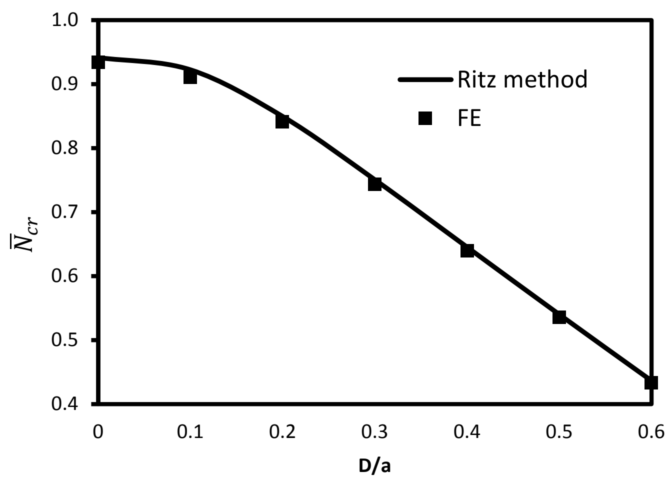
الف) CCCC



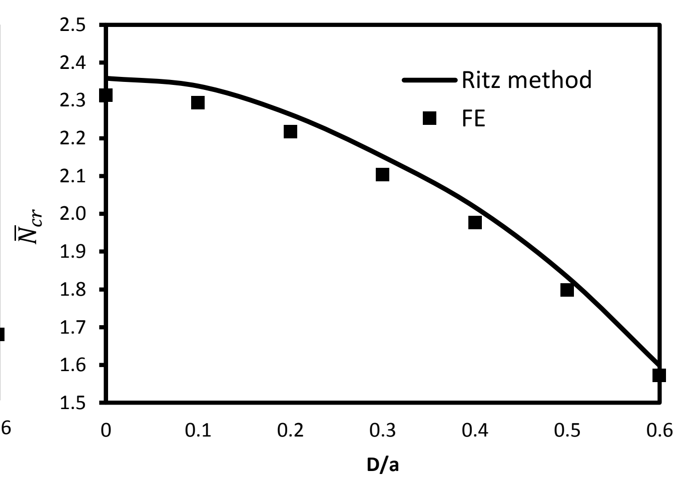
ب) SSSS



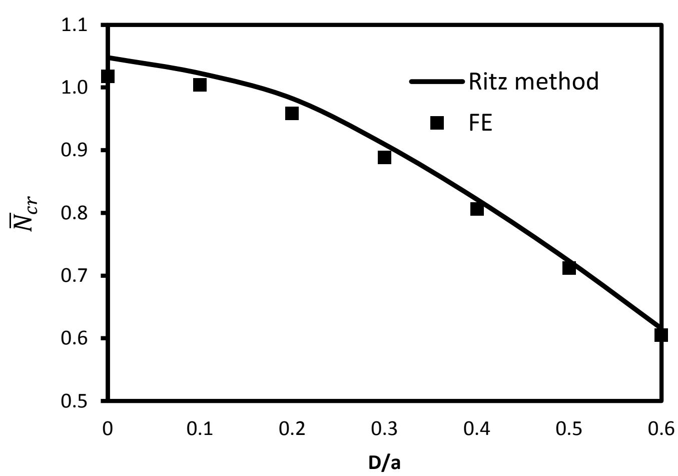
ج) CCFF



د) SSFF

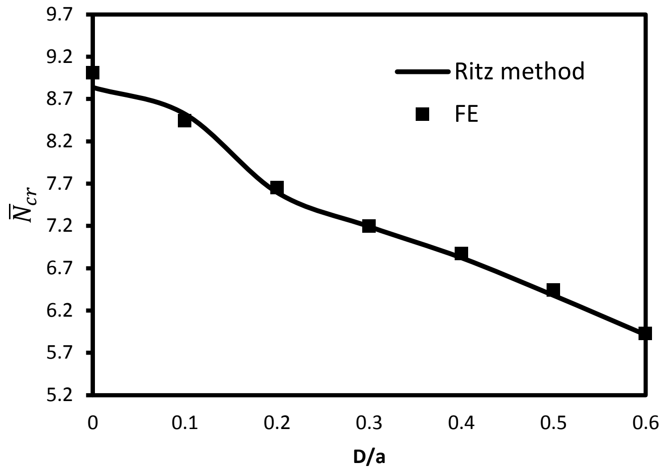


هـ) CCSF

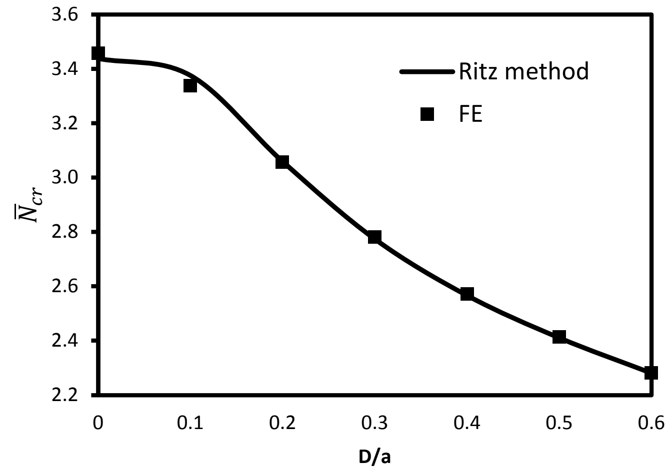


و) SSSF

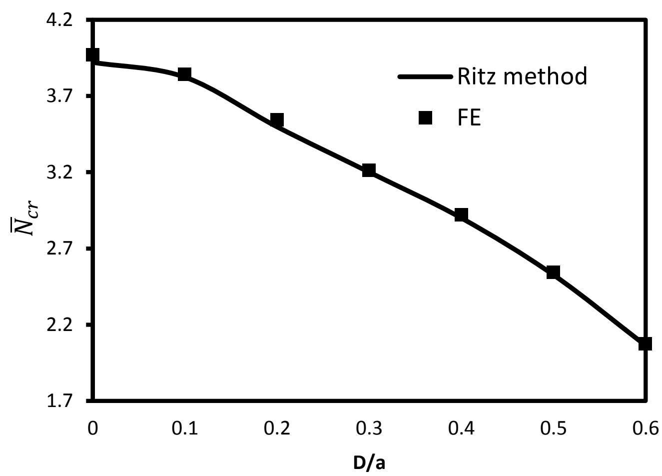
شکل ۵-۱۱: بار کمانش بی‌بعد شده ورق مربعی تحت بارگذاری کسینوسی دومحوره برای شرایط مرزی مختلف



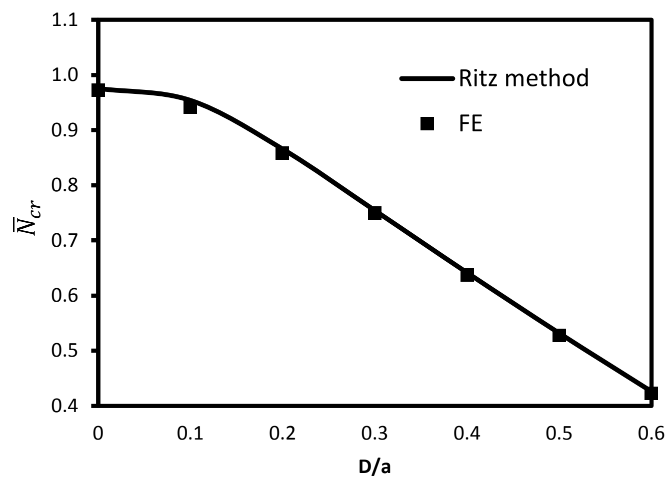
الف) CCCC



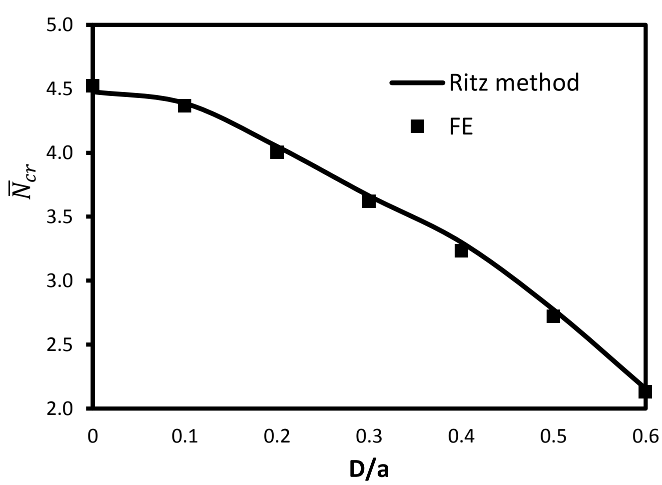
ب) SSSS



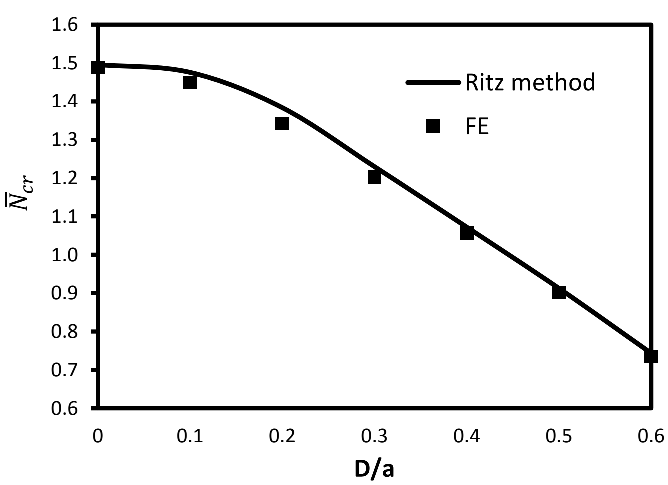
ج) CCFF



د) SSFF

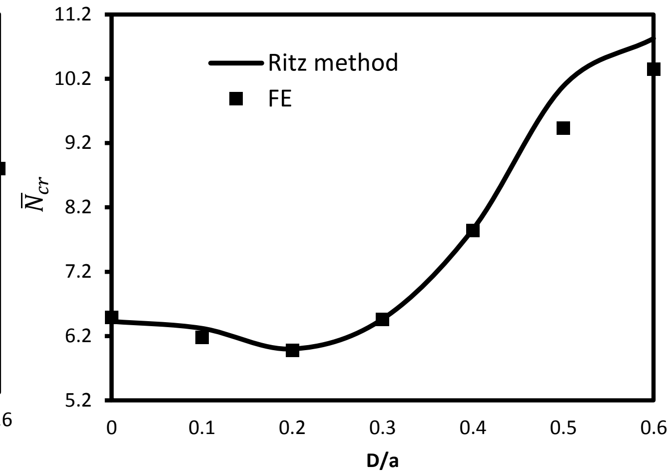


هـ) CCSF

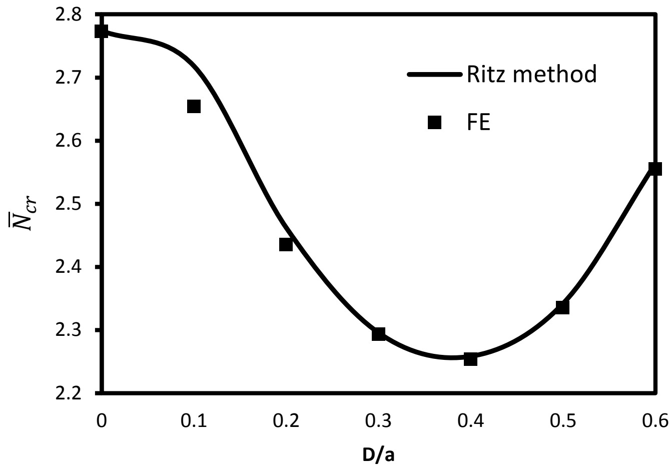


و) SSSF

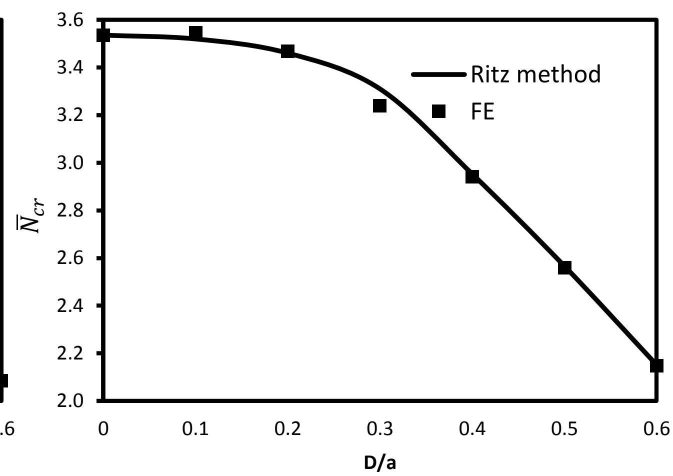
شکل ۵-۱۲: بار کمانش بی‌بعد شده ورق مربعی تحت بارگذاری کسینوسی تک محوره برای شرایط مرزی مختلف



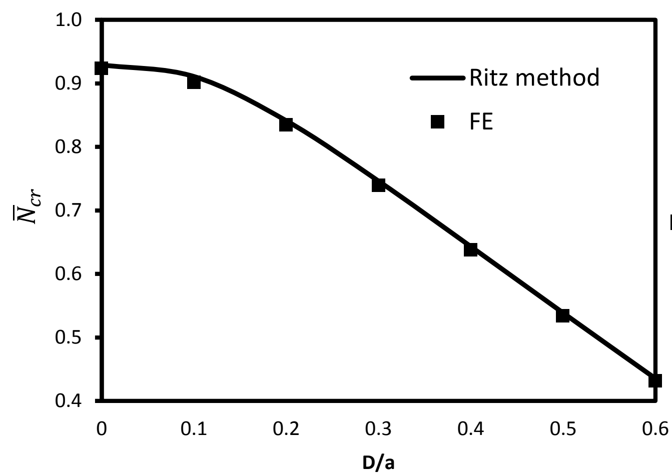
الف) CCCC



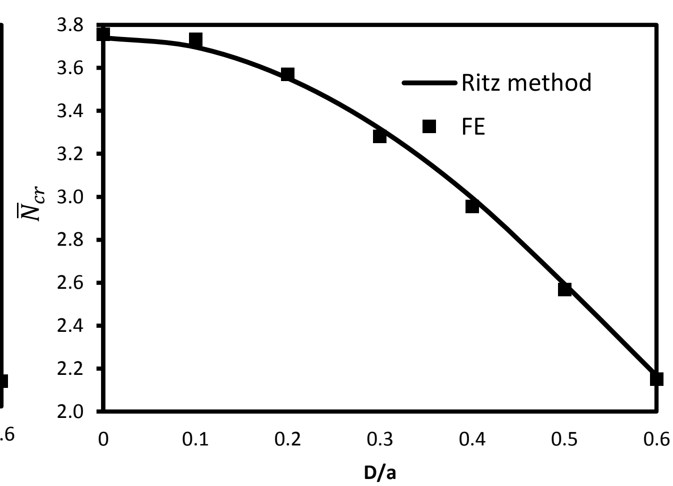
ب) SSSS



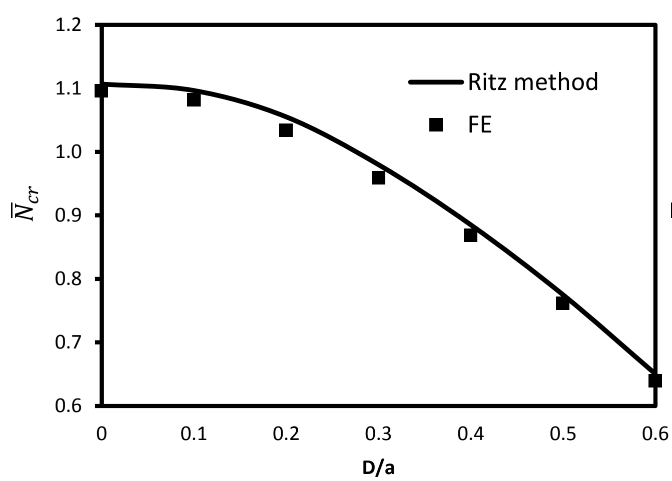
ج) CCFF



د) SSFF

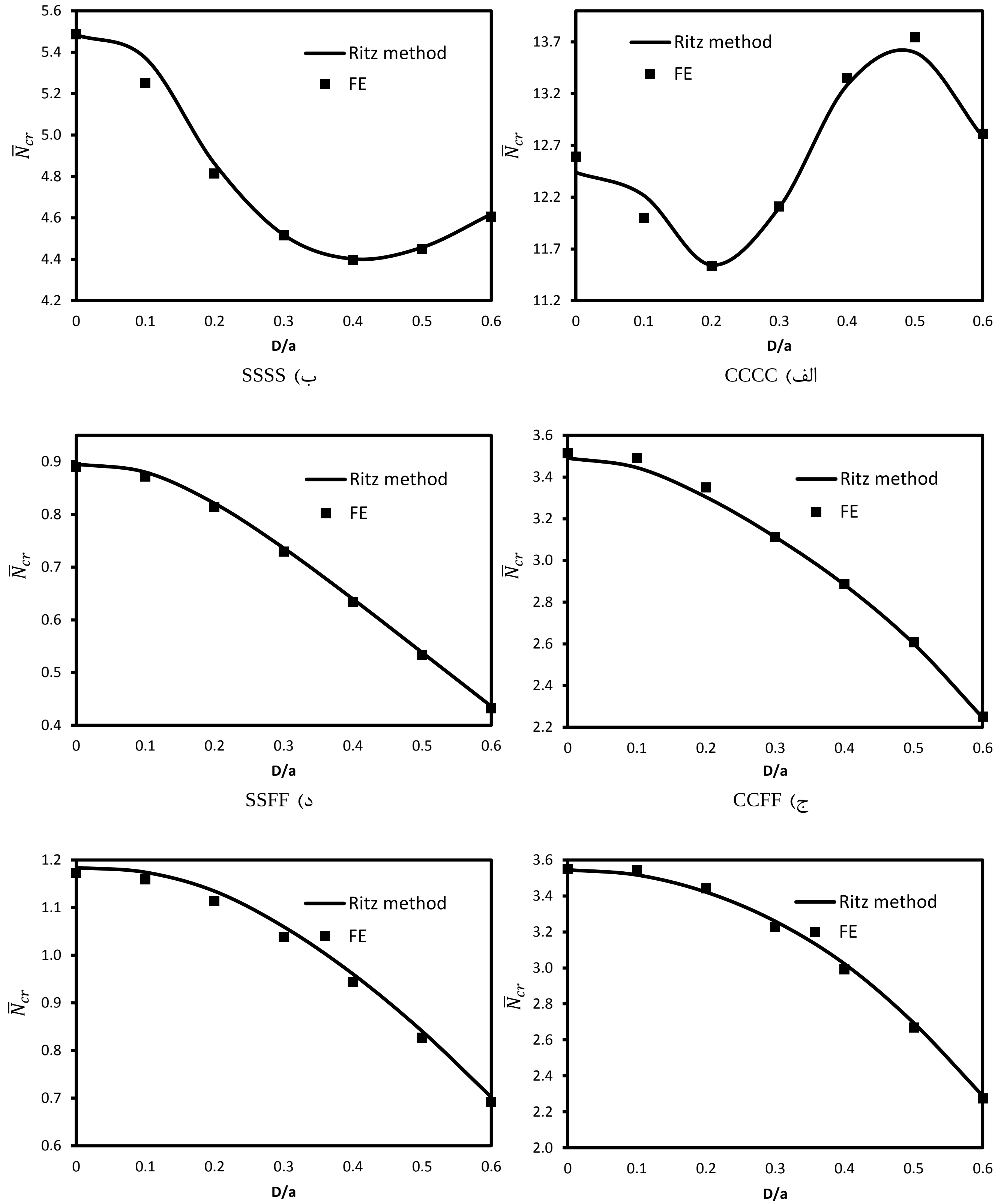


هـ) CCSF



و) SSSF

شکل ۵-۱۳: بار کمانش بی‌بعد شده ورق مربعی تحت بارگذاری سهمی شکل دومحوره برای شرایط مرزی مختلف



الف) CCCC
ب) SSSS
ج) CCFF
د) SSFF
هـ) CCSF
و) SSSF

شکل ۵-۱۴: بار کمانش بی‌بعد شده ورق مربعی تحت بارگذاری سهمی شکل تک محوره برای شرایط مرزی مختلف

در بارگذاری سهمی شکل و در حالت تک محوره به جز ورق با شرایط مرزی CCSF، بار کمانش نسبت به حالت دو محوره بیشتر است. بار کمانش ورق SSSS در این نوع بارگذاری و در هردوحالت تک محوره و دو محوره، با افزایش اندازه سوراخ ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. در مورد ورق CCCC، افزایش بار کمانش برای $D/a=0.6$ نسبت به ورق بدون گشودگی در حالت بارگذاری دومحوره برابربا 98.58% است. ورق CCCC تحت بارگذاری سهمی شکل تک محوره رفتار سینوسی دارد، به‌طوری که با افزایش اندازه سوراخ، بار کمانش ابتدا کاهش، سپس افزایش و مجددا کاهش می‌یابد که این رفتار در هیچ یک از نمودارهای دیگر مشاهده نمی‌شود.

در حالت دومحوره، بار کمانش ورق تحت بارگذاری سهمی شکل همواره بیشتر از بارگذاری کسینوسی است، اما در حالت تک محوره، تفاوت بین بارکمانش در این دونوع بارگذاری وابسته به شرایط مرزی ورق است. همچنین مشاهده می‌شود که نمودار تغییرات بارکمانش با اندازه گشودگی در ورق‌ها با شرایط مرزی SSFF و SSSF مشابه بوده و تقریبا مستقل از شکل بارگذاری (یکنواخت-کسینوسی-سهمی شکل) و نیز نوع بارگذاری (تک محوره-دومحوره) است. در بین کلیه حالت‌های بررسی شده، بیشترین بار کمانش مربوط به ورق CCCC و بارگذاری سهمی شکل تک محوره و کمترین بار کمانش مربوط به ورق SSFF و بارگذاری کسینوسی تک محوره می‌باشد. مقدار بار کمانش بی‌بعد شده برای این دو حالت به ترتیب برابر با 12.438 و 0.426 است.

با توجه به داده های به‌دست آمده در شکل‌های ۵-۷ تا ۵-۱۴، از برازش منحنی برای به‌دست آوردن تابعی که بیانگر تغییرات بار کمانش $\bar{N}_{cr}$ برحسب نسبت قطر گشودگی به طول ورق D/a باشد، استفاده می‌شود. این تابع به‌صورت $\bar{N}_{cr}=\beta(D/a)^{K}+d$ درنظر گرفته می‌شود. در جدول ۵-۹ مقدار ثوابت β,K,d و نیز معیار ضریب تعیین برای شرایط مرزی مختلف و برای حالت‌های بارگذاری مختلف گزارش شده است. همان طور که در فصل ششم اشاره شد، هرچه ضریب تعیین به عدد یک نزدیک تر باشد، منحنی به‌دست آمده از دقت بالاتری برای پیش بینی داده‌ها برخودار است.

با توجه به جدول ۵-۹، منحنی برازش برای شرایط مرزی CCCC و SSSS و به خصوص در حالت بارگذاری کسینوسی و سهمی شکل از دقت پایین تری نسبت به شرایط مرزی دیگر برخوردار است و کمترین مقدار برای معیار ضریب تعیین برابر با 0.4087 بوده و مربوط به بارگذاری سهمی شکل تک محوره و شرایط مرزی CCCC است.

جدول ۵-۹: ثوابت رابطه $\bar{N}_{cr} = \beta(D/a)^K + d$ مربوط به برازش منحنی کمانش ورق دارای گشودگی دایروی

BC	Constants	Loading Type					
		Uniform Uniaxial	Uniform Biaxial	Cosine Uniaxial	Cosine Biaxial	Parabolic Uniaxial	Parabolic Biaxial
CCCC	β	-5.054	17.34	-4.712	12.37	2.862	18.69
	K	1.209	3.13	0.8821	2.887	1.673	2.54
	d	9.915	5.092	8.9	4.504	12.08	6.084
	R-Squared	0.9832	0.9879	0.9861	0.9578	0.4087	0.9441
SSSS	β	-2.083	-0.7261	-2.07	-0.7149	-1.533	-0.5488
	K	0.8809	0.6929	0.9601	0.7524	0.5262	0.303
	d	4.047	2.02	3.487	1.744	5.548	2.824
	R-Squared	0.9601	0.8894	0.9784	0.9340	0.8076	0.5305
CCFF	β	-3.595	-3.059	-3.763	-1.793	-3.018	-4.516
	K	1.573	2.36	1.39	1.69	1.743	2.25
	d	3.915	2.776	3.932	2.351	3.492	3.557
	R-Squared	0.9985	0.9986	0.9980	0.9978	0.9997	0.9958
SSFF	β	-1.093	-1.072	-1.13	-1.074	-1.024	-1.06
	K	1.37	1.412	1.325	1.402	1.507	1.426
	d	0.9733	0.9524	0.9892	0.9526	0.9039	0.9392
	R-Squared	0.9962	0.9972	0.9964	0.9974	0.9983	0.9977
CCSF	β	-4.305	-3.068	-5.152	-2.021	-3.76	-4.111
	K	1.715	2.13	1.568	1.928	2.15	1.854
	d	4.391	2.884	4.488	2.358	3.543	3.751
	R-Squared	0.9995	0.9989	0.9985	0.9996	1.0000	0.9996
SSSF	β	-1.589	-1.161	-1.679	-1.005	-1.302	-1.172
	K	1.642	1.901	1.5	1.638	1.918	1.812
	d	1.431	1.081	1.513	1.049	1.188	1.112
	R-Squared	0.9978	0.9996	0.9971	0.9996	0.9996	0.9994

۵-۳-۳ کمانش ورق‌های مستطیلی دارای گشودگی دایروی

در این قسمت نتایج مربوط به بار کمانش ورق‌های مستطیلی با نسبت‌های ظاهری مختلف و دارای گشودگی دایروی در مرکز، ارائه می‌شود. در جدول ۵-۱۰ مقادیر بار کمانش به‌دست آمده با استفاده از روش ریتز با نتایج تجربی (مرجع [۹۴]) مقایسه شده است .مشخصات ورق به صورت زیر است:

$$a = 100\ mm,\ b = 150\ mm,\ h = 2.07\ mm, E = 218\ Gpa,\ \nu = 0.33,\ D = 33.84\ mm$$

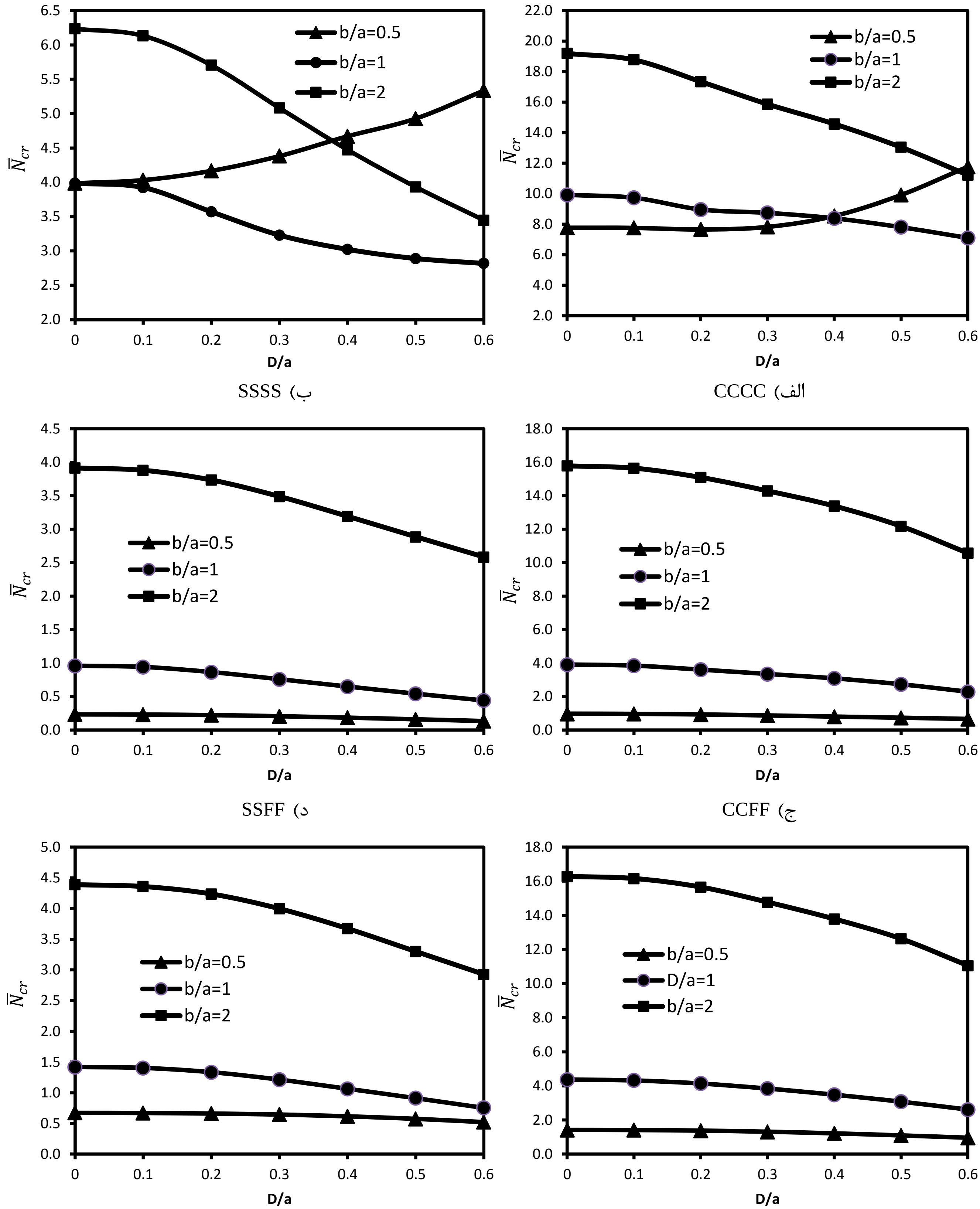
نتایج تجربی با استفاده از دستگاه سرو هیدرولیک INSTRON8802 به‌دست آمده است. در شکل ۵-۱۵ نحوه انجام آزمایش و اعمال شرایط مرزی و بارگذاری نشان داده شده است. نمونه‌های آزمایش در دو لبه بالایی و پایینی دارای تکیه گاه ساده و یا گیردار بوده و در دولبه دیگر دارای تکیه گاه آزاد هستند. مقایسه نتایج به‌دست آمده، نشان دهنده دقت بالای روش ریتز مورد استفاده در محاسبه بار کمانش ورق دارای گشودگی است.

جدول ۵-۱۰: مقایسه بار کمانش (KN) یک ورق مستطیلی دارای گشودگی دایروی با نتایج تجربی

Boundary Condition	Ritz Method	Experimental Method [94]	Error(%)
FFSS	5.983	6.194	3.41
FFSC	13.676	13.372	2.27

شکل ۵-۱۵: محاسبه بار کمانش ورق دارای گشودگی به روش تجربی با استفاده از دستگاه INSTRON8802 [۹۴]

در شکل ۵-۱۶ نحوه تغییرات بار کمانش برای یک ورق مستطیلی دارای گشودگی دایروی برای نسبت‌های ظاهری مختلف نشان داده شده است.

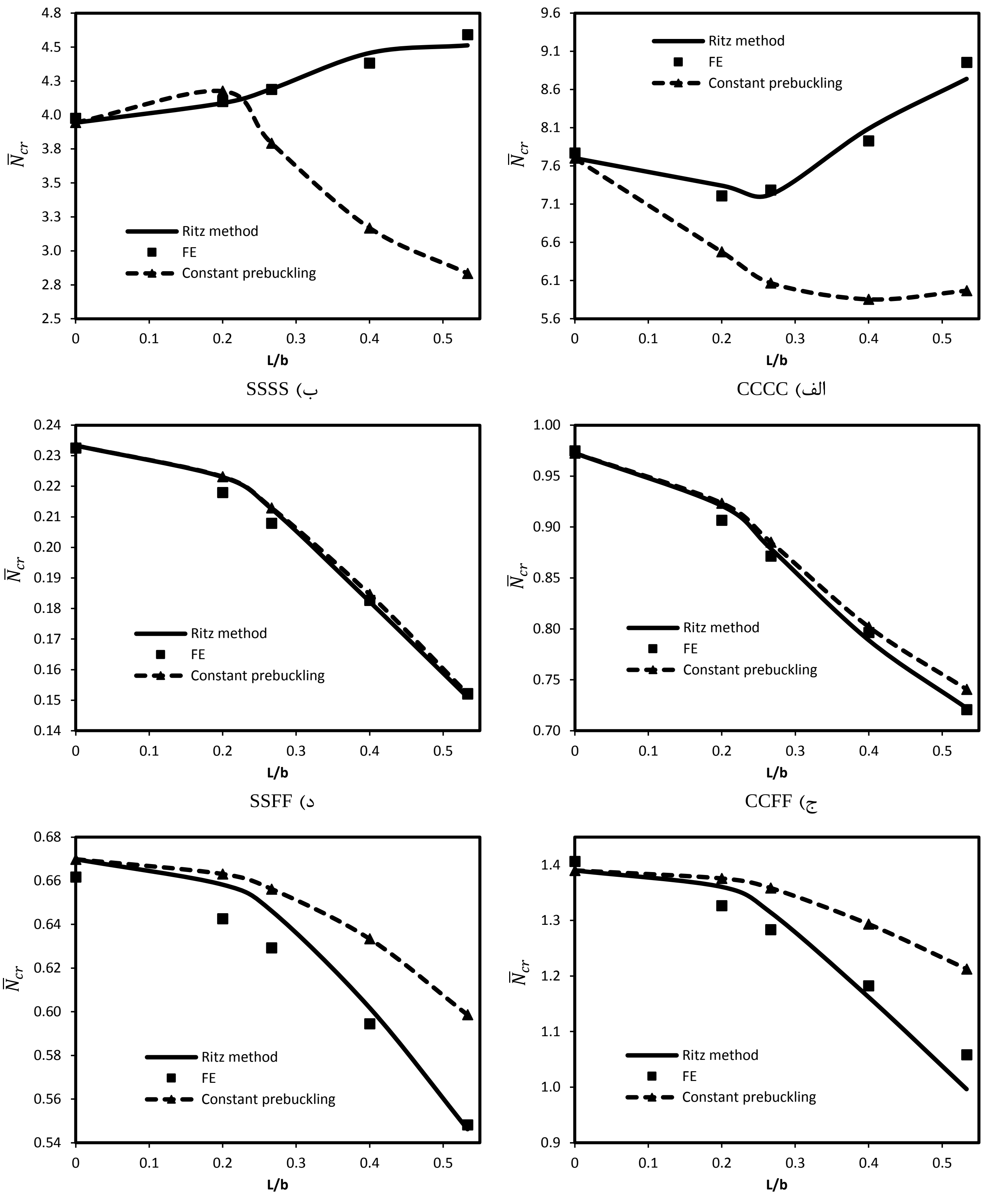


شکل ۵-۱۶: بار کمانش بی‌بعد شده ورق مستطیلی تحت بارگذاری یکنواخت تک محوره برای شرایط مرزی مختلف

با توجه به شکل ۵-۱۶، در ورق‌ها با شرایط مرزی SSFF ، CCFF ، SSSF و CCSF با افزایش نسبت ظاهری ورق، بار کمانش نیز افزایش می‌یابد. در این ورق‌ها بار کمانش مربوط به نسبت ظاهری $b/a=2$ اختلاف قابل توجهی با نسبت‌های ظاهری دیگر دارد. در ورق با شرایط مرزی CCCC، بارکمانش در حالت $b/a=0.5$ با افزایش اندازه سوراخ ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد، به‌طوری که بار کمانش مربوط به $D/a=0.6$ نسبت به ورق بدون گشودگی به میزان 51.32% بیشتر است، اما در مورد نسبت‌های ظاهری دیگر این روند همواره کاهشی است. همچنین با افزایش اندازه سوراخ و به ازای $D/a\geq 0.4$، بار کمانش ورق با نسبت ظاهری $b/a=0.5$ بالاتر از نسبت ظاهری $b/a=1$ قرار می‌گیرد. در ورق SSSS و برای نسبت ظاهری $b/a=0.5$، بار کمانش با افزایش اندازه سوراخ همواره زیاد می‌شود. در این حالت بار کمانش برای $D/a=0.6$ نسبت به ورق بدون گشودگی به میزان 33.86% افزایش نشان می‌دهد. در ورق SSSS بار کمانش ورق مربعی همواره کوچکتر از ورق مستطیلی است. با افزایش اندازه سوراخ و به ازای $D/a\geq 0.4$، بار کمانش ورق با نسبت ظاهری $b/a=0.5$ بالاتر از بار کمانش ورق با نسبت ظاهری $b/a=2$ قرار می‌گیرد.

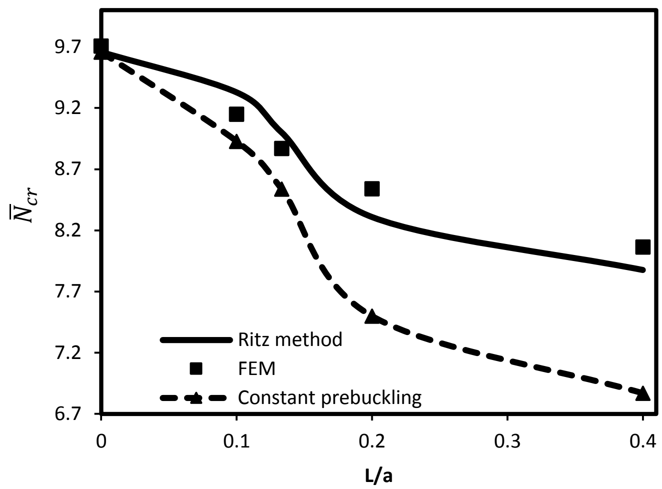
۵-۳-۴ کمانش ورق‌های دارای گشودگی مربعی

در این قسمت نتایج مربوط به بار کمانش یک ورق مستطیلی با نسبت‌های ظاهری مختلف و دارای گشودگی مربعی در مرکز در شکل‌های ۵-۱۷ تا ۵-۱۹ ارائه شده است. در این نمودار ها L طول مشخصه گشودگی بوده و a و b به ترتیب طول و عرض ورق می‌باشند. ورق تحت بارگذاری یکنواخت تک محوره قرار داشته و نسبت کوچکترین طول به ضخامت ورق (b/h یا a/h) برای همه حالت ها برابر با ۲۰ است. نتایج به‌دست آمده از روش ریتز با حل اجزای محدود مقایسه شده است و مطابقت خوبی بین نتایج وجود دارد، به‌طوریکه بیشترین اختلاف نسبی در حدود 6% است. در این نمودارها همچنین حساسیت بار کمانش نسبت به میدان تنش پیش‌کمانش مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور مقدار بار کمانش به‌دست آمده با فرض ثابت بودن میدان تنش پیش‌کمانش $(N_x=N_x^0, N_y=0, N_{xy}=0)$ نیز رسم شده است.

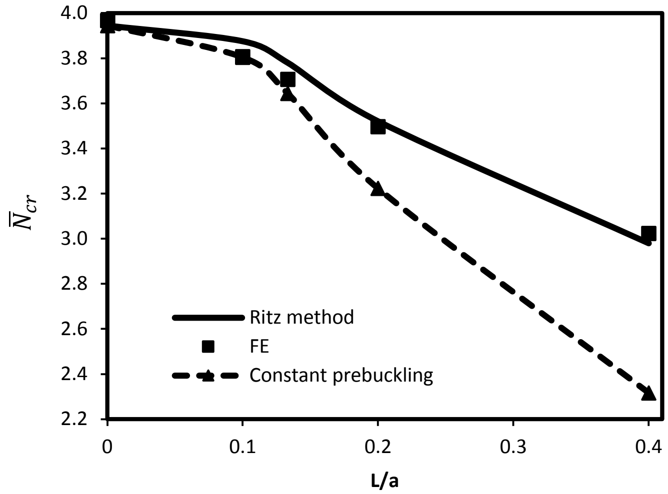


الف) CCCC
ب) SSSS
ج) CCFF
د) SSFF
هـ) CCSF
و) SSSF

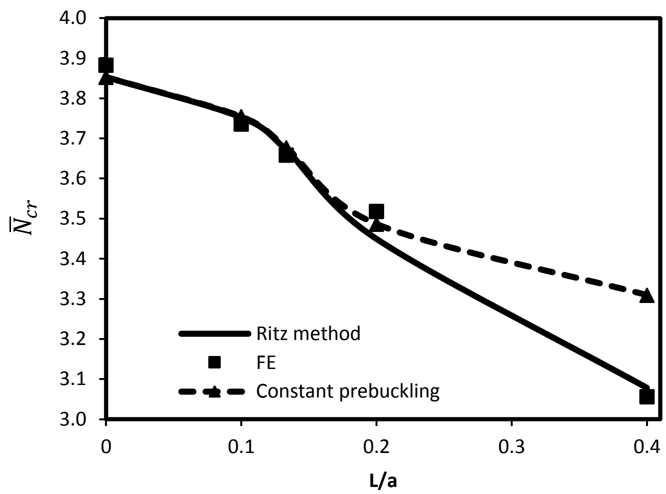
شکل ۵-۱۷: بار کمانش بی‌بعد شده ورق مستطیلی با گشودگی مربعی و برای شرایط مرزی مختلف $(b/a=0.5)$



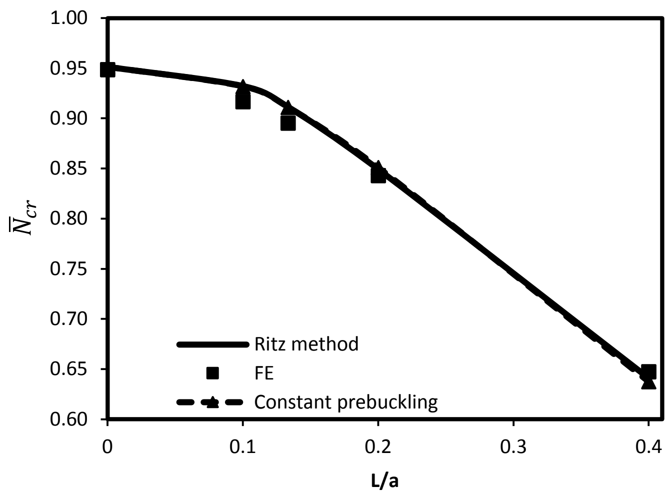
الف) CCCC



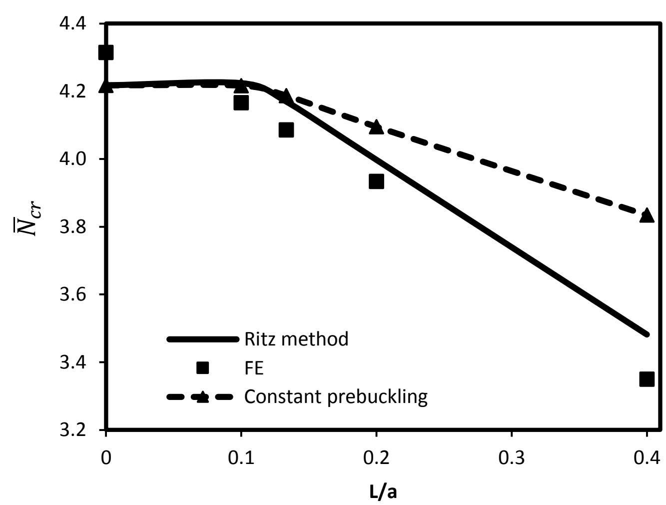
ب) SSSS



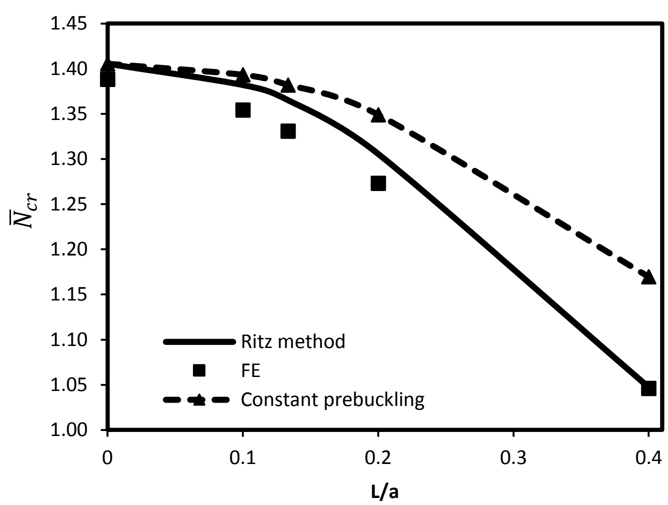
ج) CCFF



د) SSFF

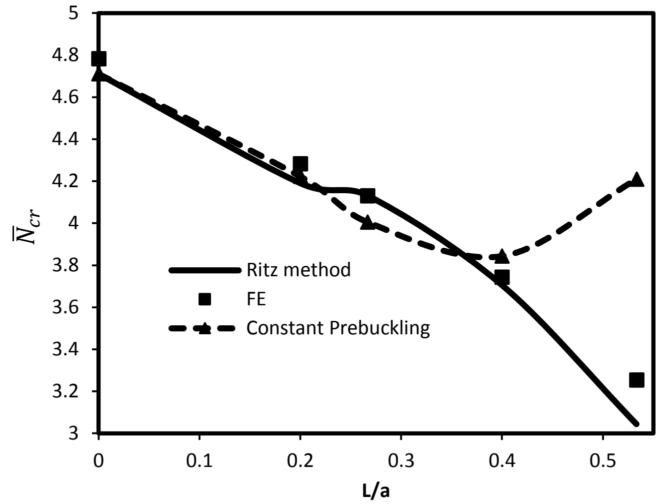


هـ) CCSF

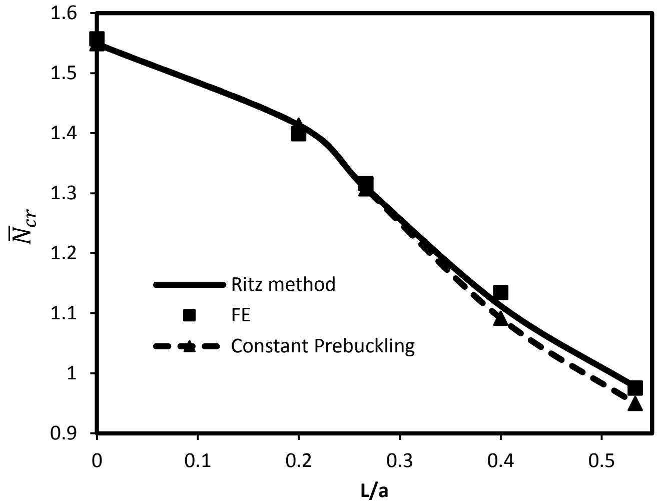


و) SSSF

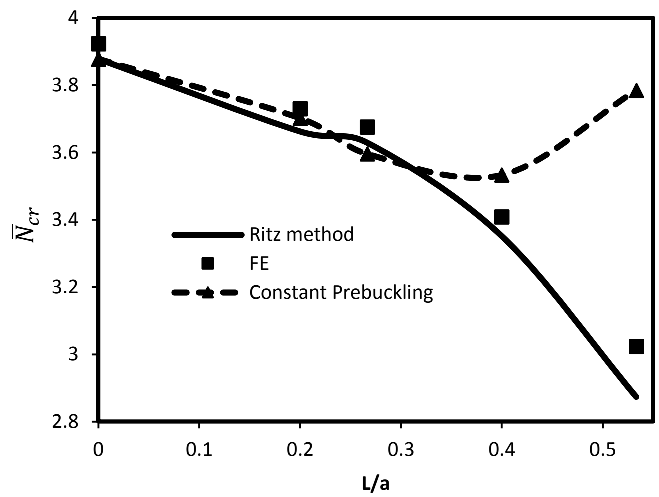
شکل ۵-۱۸: بار کمانش بی‌بعد شده ورق مستطیلی با گشودگی مربعی و برای شرایط مرزی مختلف $(b/a=1)$



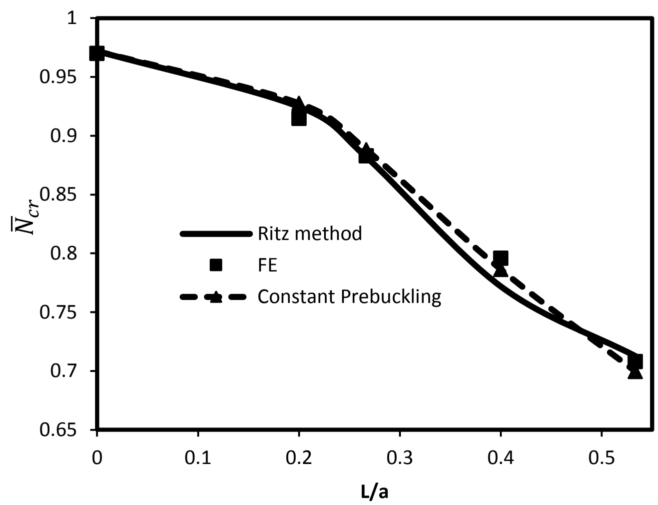
الف) CCCC



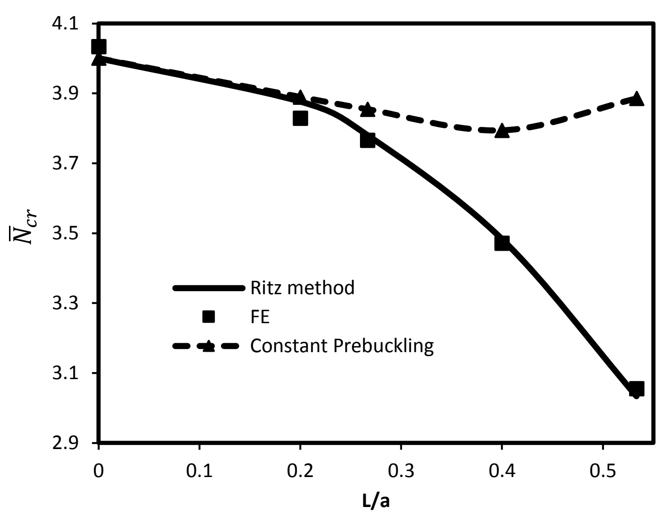
ب) SSSS



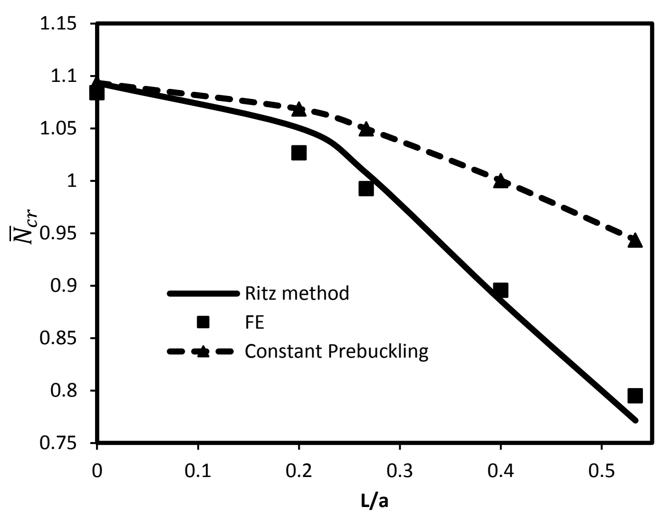
ج) CCFF



د) SSFF



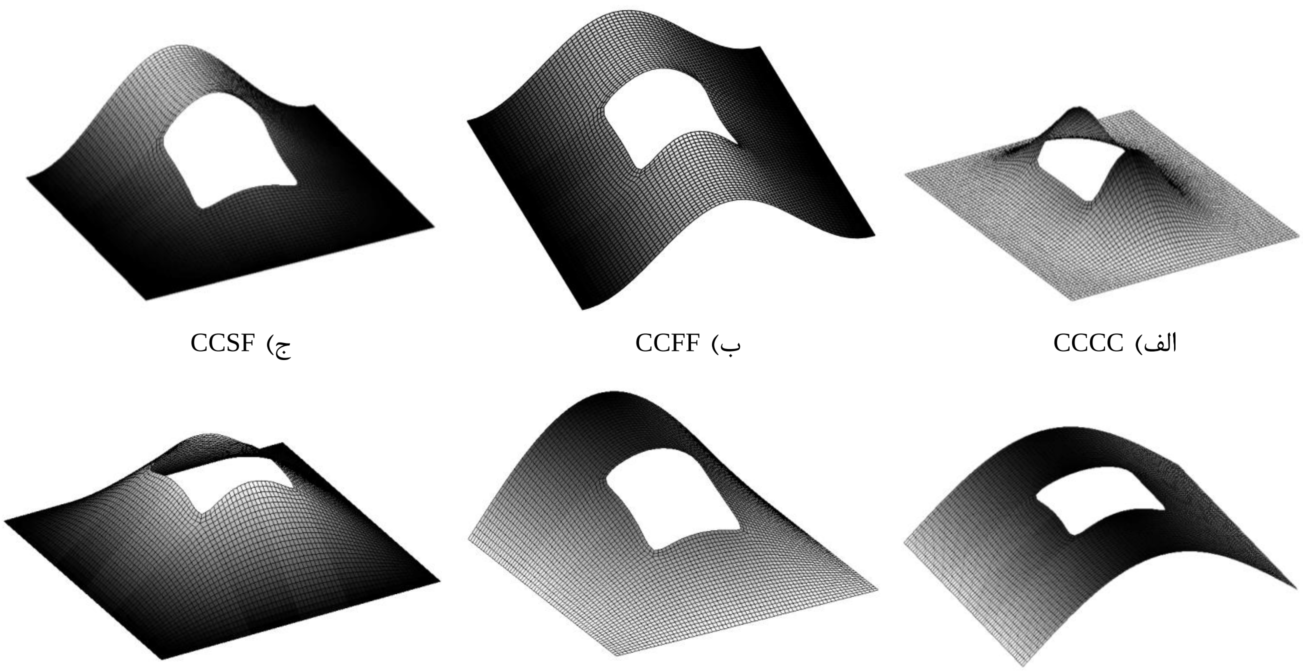
هـ) CCSF



و) SSSF

شکل ۵-۱۹: بار کمانش بی‌بعد شده ورق مستطیلی با گشودگی مربعی و برای شرایط مرزی مختلف $(b/a=2)$

با توجه به شکل‌های ۵-۱۷ تا ۵-۱۹ مشاهده می‌شود که برای ورق با نسبت ظاهری 0.5، در شرایط مرزی SSSS بار کمانش با افزایش اندازه گشودگی زیاد می‌شود و در شرایط مرزی CCCC بار کمانش ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود. در این نسبت ظاهری، افزایش نسبی بار کمانش برای ورق‌های SSSS و CCCC در مقایسه با ورق بدون گشودگی به ترتیب برابر با 14.43% و 13.49% است. در بقیه حالتها، بار کمانش با افزایش اندازه گشودگی همواره کاهش می‌یابد. برای هر نسبت ظاهری، بیشترین بارکمانش مربوط به ورق CCCC و کمترین آن مربوط به ورق SSFF است. در بین نسبت‌های ظاهری مختلف، بیشترین بار کمانش مربوط به ورق بدون گشودگی با نسبت ظاهری یک و شرایط مرزی CCCC و کمترین بار کمانش مربوط به ورق با نسبت ظاهری 0.5، با اندازه گشودگی $L/b=0.53$ و شرایط مرزی SSFF است. مقادیر بار کمانش بی‌بعد شده مربوط به این حالتها به ترتیب برابر با 9.657 و 0.151 است. در ورق با گشودگی مربعی نیز همانند گشودگی دایروی، با افزایش اندازه گشودگی حساسیت بار کمانش نسبت به میدان تنش پیش‌کمانش افزایش می‌یابد. بیشترین حساسیت مربوط به ورق با نسبت ظاهری دو و شرایط مرزی CCCC و کمترین آن مربوط به ورق با نسبت ظاهری یک و شرایط مرزی SSFF می‌باشد. اختلاف نسبی بین بار کمانش در حالت واقعی با حالت میدان تنش پیش‌کمانش ثابت در این دوحالت به ترتیب برابر با 38.31% و 0.55% است. در شکل ۵-۲۰ اولین شکل مد کمانش ورق دارای گشودگی مربعی تحت بارگذاری یکنواخت تک محوره به ازای $a/L=2.5$ نشان داده شده است.



الف) CCCC　　ب) CCFF　　ج) CCSF

د) SSFF　　هـ) SSSF　　و) SSSS

شکل ۵-۲۰: اولین شکل مد مربوط به کمانش ورق دارای گشودگی مربعی تحت بارگذاری یکنواخت تک محوره برای شرایط مرزی مختلف (FE)

۴-۵ جمع بندی

در این فصل کمانش ورق‌های مستطیلی بدون گشودگی در معرض بارگذاری غیریکنواخت و نیز ورق‌های مستطیلی دارای گشودگی دایروی و مربعی در مرکز، مورد بررسی قرار گرفت. برای محاسبه بار کمانش این ورق‌ها، از روش ریتز استفاده شد. مقادیر بارکمانش ورق برای حالت‌های مختلف بارگذاری، شرایط مرزی و اندازه گشودگی محاسبه و با نتایج حل عددی به روش اجزای محدود مقایسه شد. نتایج نشان می‌دهد که در ورق‌ها با شرایط مرزی CCCC و SSSS و در بعضی حالات، با افزایش اندازه سوراخ بار کمانش نیز افزایش می‌یابد.

فصل ششم:

کمانش ورق‌های حلقوی

۶-۱ مقدمه

در این فصل کمانش ورق‌های حلقوی مورد بررسی قرار می‌گیرد. علت پرداختن به این موضوع، امکان‌سنجی استفاده از حل به‌دست آمده برای ورق حلقوی به منظور حل معادلات پایداری یک ورق مستطیلی با گشودگی دایروی است. یک ورق مستطیلی دارای گشودگی دایروی را می‌توان به صورت یک ورق حلقوی درنظر گرفت که مرز خارجی آن تابعی از مختصات r و θ است. با نوشتن معادلات پایداری در مختصات قطبی، شرایط مرزی در لبه گشودگی به راحتی اعمال می‌شوند؛ اما در مرزخارجی، شرایط مرزی برحسب مختصات دکارتی است که باید آن را به شکل قطبی تبدیل کرد. بنابراین حل مساله در این حالت شامل دوبخش اصلی است: حل معادلات پایداری در مختصات قطبی و اعمال شرایط مرزی در لبه گشودگی و اعمال شرایط مرزی در لبه‌های خارجی ورق. در این فصل حل معادلات پایداری در مختصات قطبی و برای مدهای متقارن محوری و نامتقارن ارئه می-شود. برای محاسبه بار کمانش، ابتدا معادلات مربوط به میدان تنش پیش‌کمانش حل می‌شوند. سپس معادلات پایداری بی‌بعد شده و در حالت متقارن محوری با درنظر گرفتن نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق به عنوان پارامتر کوچک، از تئوری اغتشاشات برای حل این معادلات استفاده می‌شود. در نهایت برای محاسبه بار کمانش مربوط به مدهای غیر متقارن، از روش حلقه زدن[1] استفاده شده و مقادیر به‌دست آمده با نتایج روش مربعات دیفرانسیلی مقایسه می‌شوند.

۶-۲ حل معادلات پیش‌کمانش

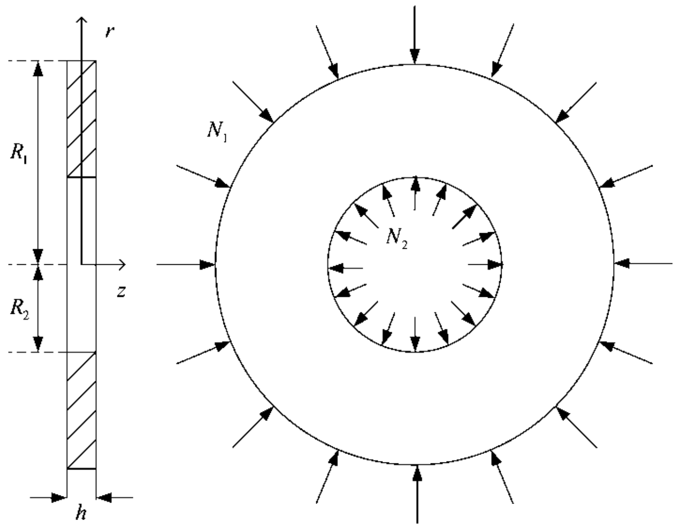
همان طور که در فصل دوم بیان شد، معادلات مربوط به تعادل اولیه (پیش‌کمانش) برای یک ورق حلقوی به‌صورت زیر است (روابط ۲-۵۳ و ۲-۵۴):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{N_r-N_\theta}{r}+\frac{\partial N_r}{\partial r}=0,\quad 2\frac{N_{r\theta}}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r}=0 \tag{۶-۱}$$

برای یک ورق حلقوی که در معرض بارگذاری متقارن در لبه‌ها قرار دارد (شکل ۶-۱)، تغییرات نسبت به θ برابر با صفر خواهد بود و بنابراین معادلات (۶-۱) به‌صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\frac{N_r-N_\theta}{r}+\frac{dN_r}{dr}=0,\quad 2\frac{N_{r\theta}}{r}+\frac{dN_{r\theta}}{dr}=0 \tag{۶-۲}$$

[1] Ringing Method



شکل ۶-۱: ورق حلقوی تحت بارمتقارن بر واحد طول در لبه‌های داخلی و خارجی

از حل معادله دوم رابطه (۶-۲)، مقدار منتجه تنش برشی به‌صورت $N_{r\theta}=\frac{C}{r^2}$ به‌دست می‌آید که در آن C ثابت انتگرال‌گیری است؛ اما با توجه به این‌که مقدار $N_{r\theta}$ در مرزها باید برابر با صفر باشد، $C=0$. بنابراین در حالت متقارن محوری، $N_{r\theta}=0$ و در نتیجه تنها معادله باقی مانده، معادله زیر است:

$$\frac{N_r - N_\theta}{r}+\frac{dN_r}{dr}=0 \tag{۶-۳}$$

همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد، در روش حل براساس مولفه‌های تنش، برای این‌که میدان جابجایی به‌دست آمده تک مقداری و منحصر به فرد باشد، باید رابطه سازگاری بین مولفه‌های تنش برقرار باشد. معادله سازگاری در مختصات قطبی و برای شرایط متقارن محوری به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr})(N_r+N_\theta)=0 \tag{۶-۴}$$

براساس معادله (۶-۳) مقدار N_θ به‌صورت $N_\theta=\frac{d}{dr}(rN_r)$ به‌دست می‌آید. اکنون با جایگذاری N_θ در معادله (۶-۴) نتیجه می‌شود:

$$(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr})(N_r+\frac{d}{dr}(rN_r))=0 \tag{۶-۵}$$

حل معادله دیفرانسیل (۶-۵) به شکل زیر خواهد بود:

$$N_r=C_1+C_2\ln r+\frac{C_3}{r^2} \tag{۶-۶}$$

بنابراین مقدار N_θ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$N_\theta = \frac{d}{dr}(rN_r) = C_1 + C_2(\ln r + 1) - \frac{C_3}{r^2} \tag{۶-۷}$$

برای این‌که میدان جابجایی تک مقداری باشد، باید ضریب C_2 در رابطه (۶-۷) برابر با صفر باشد، زیرا با محاسبه میدان جابجایی مشاهده می‌شود که این ضریب در θ ضرب می‌شود [۱۲۱]. در نهایت ضرایب C_1 و C_3 از شرایط مرزی به‌دست می‌آیند. برای یک ورق دایروی که در مرز خود تحت بار N_1 قرار دارد، $N_r = N_\theta = N_1$ و بنابراین ورق در شرایط کشش یا فشار یکنواخت می‌باشد. همچنین برای یک ورق حلقوی که در مرز خارجی خود تحت بار N_1 و در مرز داخلی تحت بار N_2 قرار دارد، با اعمال شرایط مرزی در روابط (۶-۶) و (۶-۷) مقادیر منتجه‌های نیرو به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$N_r = \frac{R_1^2 R_2^2 (N_1 - N_2)}{(R_1^2 - R_2^2) r^2} - \frac{R_1^2 N_1 - N_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}; \quad N_\theta = \frac{-R_1^2 R_2^2 (N_1 - N_2)}{(R_1^2 - R_2^2) r^2} - \frac{R_1^2 N_1 - N_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \tag{۶-۸}$$

۶-۳ حل معادلات پایداری

در فصل سوم معادلات پایداری برای یک ورق در مختصات قطبی براساس میدان جابجایی به‌صورت زیر به‌دست آمد (معادلات ۳-۶۳ و ۳-۶۴ و ۳-۶۵):

$$\begin{aligned}
&\frac{Gh^3}{12}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right) + \frac{Ah^3}{12}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\right) + \frac{\lambda h^3}{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta \partial r} - k_s G h\left(u_1 + \frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0 \\
&\frac{Gh^3}{12}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r^2}\right) + \frac{Ah^3}{12}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\lambda h^3}{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial r} - k_s G h v_1 = 0 \\
&k_s G h\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{u_1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{N_\theta}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2N_{r\theta}}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{N_\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + N_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{2N_{r\theta}}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0
\end{aligned} \tag{۶-۹}$$

همچنین شرایط مرزی مساله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$u_1 = 0 \quad or \quad M_r = 0; \quad v_1 = 0 \quad or \quad M_{r\theta} = 0, \quad w = 0 \quad or \quad Q_{rz} + N_r\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \tag{۶-۱۰}$$

برای حل معادلات پایداری و محاسبه بار کمانش، میدان جابجایی در حالت تعادل ثانویه به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$u_1(r,\theta) = u_1(r)\cos(n\theta), \quad v_1(r,\theta) = v_1(r)\sin(n\theta), \quad w(r,\theta) = w(r)\cos(n\theta) \tag{۶-۱۱}$$

با قرار دادن حل (۶-۱۱) در معادلات (۶-۹)، معادلات (۶-۱۲) به‌دست می‌آیند:

$$\left(\frac{Gh^3}{12}\left(-\frac{n^2}{r^2}u_1+\frac{n}{r}\frac{dv_1}{dr}-\frac{n}{r^2}v_1\right)+\frac{Ah^3}{12}\left(\frac{1}{r}\frac{du_1}{dr}-\frac{u_1}{r^2}-\frac{n}{r^2}v_1+\frac{d^2u_1}{dr^2}\right)+\frac{\lambda h^3}{12}\frac{n}{r}\frac{dv_1}{dr}-k_sGh\left(u_1+\frac{dw}{dr}\right)\right)\cos(n\theta)=0$$
$$\left(\frac{Gh^3}{12}\left(\frac{n}{r^2}u_1+n\frac{du_1}{dr}+\frac{d^2v_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv_1}{dr}-\frac{v_1}{r^2}\right)+\frac{Ah^3}{12}\left(\frac{n}{r^2}u_1-\frac{n^2}{r^2}v_1\right)+\frac{\lambda h^3}{12}\frac{n}{r}\frac{du_1}{dr}-k_sGhv_1\right)\sin(n\theta)=0 \qquad (۱۲-۶)$$
$$\left(k_sGh\left(\frac{n}{r}v_1+\frac{du_1}{dr}+\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{u_1}{r}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)-\frac{n^2N_\theta}{r^2}w+\frac{2nN_{r\theta}}{r}\frac{dw}{dr}+\frac{N_\theta}{r}\frac{dw}{dr}+N_r\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{2nN_{r\theta}}{r^2}w\right)\cos(n\theta)=0$$

برای بی‌بعد سازی معادلات (۶-۱۲)، پارامترهای بی‌بعد به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho=\frac{r}{R_1},\ w^*=\frac{w}{h},\ u_1^*=u_1,\ h^*=\frac{h}{R_1},\ \varepsilon=\frac{R_2}{R_1},\ p_1=\frac{k_sG}{A},\gamma=\frac{N}{R_1Ah^{*2}},\ N_1=N,\ N_2=\alpha N_1 \qquad (۱۳-۶)$$

که در آن علامت * به معنی پارامتر بی‌بعد بوده و $\alpha=N_2/N_1$ به عنوان نسبت بار تعریف می‌شود. شکل بی‌بعد شده معادلات پایداری به‌صورت روابط (۶-۱۴) به‌دست می‌آید:

$$\frac{h^{*2}}{12}\left(\frac{d^2u_1^*}{d\rho^2}-\frac{p_1n^2}{\rho^2k_s}u_1^*+\frac{p_1n}{\rho k_s}\frac{dv_1^*}{d\rho}+\frac{n\lambda}{A\rho}\frac{dv_1^*}{d\rho}-\frac{n}{\rho^2}v_1^*+\frac{1}{\rho}\frac{du_1^*}{d\rho}-\frac{p_1n}{\rho^2k_s}v_1^*-\frac{1}{\rho^2}u_1^*\right)-p_1u_1^*-h^*p_1\frac{dw^*}{d\rho}=0$$
$$\frac{h^{*2}}{12}\left(\frac{n^2}{\rho^2}v_1^*+\frac{p_1n}{\rho k_s}\frac{du_1^*}{d\rho}-\frac{p_1}{k_s}\frac{d^2v_1^*}{d\rho^2}+\frac{\lambda n}{A\rho}\frac{du_1^*}{d\rho}+\frac{n}{\rho^2}u_1^*+\frac{p_1n}{\rho^2k_s}u_1^*-\frac{p_1}{\rho k_s}\frac{dv_1^*}{d\rho}+\frac{p_1}{\rho^2k_s}v_1^*\right)+p_1v_1^*-\frac{h^*p_1n}{\rho}w^*=0$$
$$\left(\begin{array}{l}\left(-h^{*2}\gamma\alpha-\frac{h^{*2}\gamma}{\rho^2}+\frac{h^{*2}\gamma\alpha}{\rho^2}-h^*p_1\right)\frac{d^2w^*}{d\rho^2}+\left(-\frac{h^*p_1}{\rho}+\frac{h^{*2}\gamma}{\rho^3}-\frac{h^{*2}\gamma\alpha}{\rho^3}-\frac{h^{*2}\gamma\alpha}{\rho}\right)\frac{dw^*}{d\rho}\\ \quad -\frac{p_1n}{\rho}v_1^*+\left(\frac{h^*p_1n^2}{\rho^2}+\frac{h^{*2}\gamma\alpha n^2}{\rho^2}+\frac{h^{*2}\gamma\alpha n^2}{\rho^4}-\frac{h^{*2}\gamma n^2}{\rho^4}\right)w^*-\frac{p_1}{\rho}u_1^*-p_1\frac{du_1^*}{d\rho}\end{array}\right)\varepsilon^2 \qquad (۱۴-۶)$$
$$+p_1\frac{du_1^*}{d\rho}\left(-\frac{h^{*2}\gamma n^2}{\rho^2}-\frac{h^*p_1n^2}{\rho^2}\right)w^*+\left(h^*p_1+h^{*2}\gamma\right)\frac{d^2w^*}{d\rho^2}+\frac{p_1}{\rho}u_1^*+\left(\frac{h^{*2}\gamma}{\rho}+\frac{h^*p_1}{\rho}\right)\frac{dw^{**}}{d\rho}+\frac{p_1n}{\rho}v_1^*=0$$

همچنین شکل بی‌بعد شرایط مرزی به‌صورت زیر است:

$$Q_{rz}+N_r\frac{\partial w}{\partial r}=0\rightarrow\left(\left(\frac{h^{*2}\alpha\gamma}{\rho^2}-\frac{h^{*2}\gamma}{\rho^2}-h^{*2}\alpha\gamma-h^*p_1\right)\frac{dw^*}{d\rho}-p_1u_1^*\right)\varepsilon^2+\left(h^{*2}\gamma+h^*p_1\right)\frac{dw^*}{d\rho}+p_1u_1^*=0$$
$$M_r=0\rightarrow\frac{du_1^*}{d\rho}+\frac{\lambda}{A}\left(\frac{1}{\rho}u_1^*+\frac{n}{\rho}v_1^*\right)=0 \qquad (۱۵-۶)$$
$$M_{r\theta}=0\rightarrow-\frac{dv_1^*}{d\rho}+\frac{1}{\rho}v_1^*+\frac{n}{\rho}u_1^*$$

با حل معادلات (۶-۱۴)، بار کمانش و شکل مد کمانش مربوط به مد nام به‌دست می‌آید.

۶-۳-۱ حالت متقارن محوری

در حالت متقارن محوری $n=0$ و بنابراین معادله دوم پایداری (از معادلات (۶-۱۲)) حذف می‌شود. در این حالت $v_1=0$ بوده و معادلات پایداری به‌صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\frac{h^{*2}}{12}\left(\frac{d^2u_1^*}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{du_1^*}{d\rho}-\frac{u_1^*}{\rho^2}\right)-h^*p_1\frac{dw^*}{d\rho}-p_1u_1^*=0$$
$$\left(h^*\left(\frac{h^*\gamma}{\rho^2}\alpha-h^*\gamma\alpha-\frac{h^*\gamma}{\rho^2}-p_1\right)\frac{d^2w^*}{d\rho^2}+\frac{h^*}{\rho}\left(-\frac{h^*\gamma}{\rho^2}\alpha-h^*\gamma\alpha+\frac{h^*\gamma}{\rho^2}-p_1\right)\frac{dw^*}{d\rho}+p_1\frac{du_1^*}{d\rho}+\frac{p_1u_1^*}{\rho}\right)\varepsilon^2 \qquad (۱۶-۶)$$
$$+h^*\left(h^*\gamma+p_1\right)\frac{d^2w^*}{d\rho^2}+\frac{h^*\left(p_1+h^*\gamma\right)}{\rho}\frac{dw^*}{d\rho}-p_1\frac{du_1^*}{d\rho}-\frac{p_1u_1^*}{\rho}=0$$

همچنین شرایط مرزی بی‌بعد شده در این حالت برحسب میدان جابجایی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$u_1^*=0 \;\; or \;\; \frac{du_1^*}{d\rho}+\frac{\lambda}{A\rho}u_1^*=0$$
$$w^*=0 \;\; or \;\; \left(h^*\left(h^*\gamma\alpha-\frac{h^*\gamma\alpha}{\rho^2}-\frac{h^*\gamma}{\rho^2}-p_1\right)\frac{dw^*}{d\rho}-p_1u_1^*\right)\varepsilon^2+h^*\left(-h^*\gamma+p_1\right)\frac{dw^*}{d\rho}+p_1u_1^*=0 \qquad (۱۷-۶)$$

حل مساله با استفاده از تئوری اغتشاشات: براساس تئوری اغتشاشات، حل مساله به‌صورت بسط یکنواخت برحسب ε به شکل زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$u_1^*=u_{10}^*+\varepsilon^2u_{12}^*+\varepsilon^4u_{14}^*+\ldots;\; w^*=w_0^*+\varepsilon^2w_2^*+\varepsilon^4w_4^*+\ldots;\; \gamma=\gamma_0+\varepsilon^2\gamma_2+\varepsilon^4\gamma_4+\ldots \qquad (۱۸-۶)$$

با جایگذاری بسط (۶-۱۸) در معادلات (۶-۱۶)، معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه‌های مختلف ε به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$O(\varepsilon^0):\begin{cases} L_1(u_{10}^*,w_0^*)=0 \;\; where \;\; L_1(u_{10}^*,w_0^*)=\dfrac{h^{*2}}{12}\left(\dfrac{d^2u_{10}^*}{d\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{du_{10}^*}{d\rho}-\dfrac{u_{10}^*}{\rho^2}\right)-h^*p_1\dfrac{dw_0^*}{d\rho}-p_1u_{10}^* \\ L_2(u_{10}^*,w_0^*)=0 \;\; where \;\; L_2(u_{10}^*,w_0^*)=h^*\left(h^*\gamma_0-p_1\right)\dfrac{d^2w_0^*}{d\rho^2}+\dfrac{h^*\left(-p_1+h^*\gamma\right)}{\rho}\dfrac{dw_0^*}{d\rho}-p_1\dfrac{du_{10}^*}{d\rho}-\dfrac{p_1u_{10}^*}{\rho}\end{cases} \qquad (۱۹-۶)$$

$$O(\varepsilon^2):\begin{cases} L_1(u_{12}^*,w_2^*)=0 \\ L_2(u_{12}^*,w_2^*)=h^*\left(-h^*\gamma_0\alpha+\dfrac{h^*\gamma_0}{\rho^2}\alpha+h^*\gamma_2-\dfrac{h^*\gamma_0}{\rho^2}+p_1\right)\dfrac{d^2w_0^*}{d\rho^2} \\ \qquad +\dfrac{h^*}{\rho}\left(-h^*\gamma_0\alpha-\dfrac{h^*\gamma_0}{\rho^2}\alpha+h^*\gamma_2+\dfrac{h^*\gamma_0}{\rho^2}+p_1\right)\dfrac{dw_0^*}{d\rho}+p_1\dfrac{du_{10}^*}{d\rho}+\dfrac{p_1u_{10}^*}{\rho}\end{cases} \qquad (۲۰-۶)$$

$$O(\varepsilon^4):\begin{cases} L_1(u_{14}^*,w_4^*)=0 \\ L_2(u_{14}^*,w_4^*)=h^*\left(-h^*\gamma_0\alpha+\dfrac{h^*\gamma_0}{\rho^2}\alpha+h^*\gamma_2-\dfrac{h^*\gamma_0}{\rho^2}+p_1\right)\dfrac{d^2w_2^*}{d\rho^2}+\dfrac{h^*}{\rho}\left(-h^*\gamma_0\alpha-\dfrac{h^*\gamma_0}{\rho^2}\alpha+h^*\gamma_2+\dfrac{h^*\gamma_0}{\rho^2}+p_1\right)\dfrac{dw_2^*}{d\rho} \\ \qquad +p_1\dfrac{du_{12}^*}{d\rho}+\dfrac{p_1}{\rho}u_{12}^*+h^{*2}\left(-\gamma_2\alpha+\dfrac{\gamma_2}{\rho^2}\alpha+\gamma_4+\dfrac{\gamma_2}{\rho^2}\right)\dfrac{d^2w_0^*}{d\rho^2}+\dfrac{h^{*2}}{\rho}\left(-\gamma_2\alpha-\dfrac{\gamma_2}{\rho^2}\alpha+\gamma_4+\dfrac{\gamma_2}{\rho^2}\right)\dfrac{dw_0^*}{d\rho}\end{cases} \qquad (۲۱-۶)$$

همچنین با جایگذاری بسط (۶-۱۸) در شرایط مرزی (۶-۱۷)، شرایط مرزی مربوط به مرتبه‌های مختلف ε به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$O(\varepsilon^0):\begin{cases} u_{10}^*=0 \;\; or \;\; A\dfrac{du_{10}^*}{d\rho}+\dfrac{\lambda}{\rho}u_{10}^*=0 \\ w_0^*=0 \;\;\; or \;\; h^*\left(-h^*\gamma_0+p_1\right)\dfrac{dw_0^*}{d\rho}+p_1u_{10}^*=0 \end{cases} \tag{۶-۲۲}$$

$$O(\varepsilon^2):\begin{cases} u_{12}^*=0 \;\; or \;\; A\dfrac{du_{12}^*}{d\rho}+\dfrac{\lambda}{\rho}u_{12}^*=0 \\ w_2^*=0 \;\;\; or \;\; h^*\left(-h^*\gamma_0+p_1\right)\dfrac{dw_2^*}{d\rho}+p_1(u_{12}^*-u_{10}^*)+h^*\left(h^*(-\gamma_2+\dfrac{\gamma_0}{\rho^2}+\alpha\gamma_0-\dfrac{\alpha\gamma_0}{\rho^2})-p_1\right)\dfrac{dw_0^*}{d\rho}=0 \end{cases} \tag{۶-۲۳}$$

$$O(\varepsilon^4):\begin{cases} u_{14}^*=0 \;\; or \;\; A\dfrac{du_{14}^*}{d\rho}+\dfrac{\lambda}{\rho}u_{14}^*=0 \\ w_4^*=0 \;\;\; or \;\; h^*\left(-h^*\gamma_0+p_1\right)\dfrac{dw_4^*}{d\rho}+p_1(u_{14}^*-u_{12}^*)+h^*\left(h^*(-\gamma_2+\dfrac{\gamma_0}{\rho^2}+\alpha\gamma_0-\dfrac{\alpha\gamma_0}{\rho^2})-p_1\right)\dfrac{dw_2^*}{d\rho} \\ \qquad +h^{*2}\left(-\gamma_4+\dfrac{\gamma_2}{\rho^2}+\alpha\gamma_2-\dfrac{\alpha\gamma_2}{\rho^2}\right)\dfrac{dw_0^*}{d\rho}=0 \end{cases} \tag{۶-۲۴}$$

با حل معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه‌های مختلف ε و اعمال شرایط مرزی مربوطه، مقادیر $\gamma_0,\gamma_2,\gamma_4,...$ به‌دست می‌آیند. پس از آن براساس رابطه $\gamma=\gamma_0+\varepsilon^2\gamma_2+\varepsilon^4\gamma_4+...$، مقدار بار کمانش محاسبه می‌شود. با افزایش مرتبه حل، تقریب بهتری برای بارکمانش به‌دست می‌آید.

معادلات دیفرانسیل $O(\varepsilon^0)$ همگن بوده و دارای جواب دقیق به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} &u_{10}^*=\frac{C_2}{\rho}+C_3J_1(2\rho K)+C_4Y_1(2\rho K);\;\; K=\sqrt{\frac{3p_1\gamma_0}{h^*(h^*\gamma_0+p_1)}} \\ &w_0^*=C_1-\frac{C_2}{h^*}\ln\rho+C_3a_6J_0(2\rho K)+C_4a_6Y_0(2\rho K);\;\; a_6=\frac{p_1}{2h^*(-h^*\gamma_0+p_1)\mathrm{K}} \end{aligned} \tag{۶-۲۵}$$

که در آن $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ توابع بسل نوع اول و دوم مرتبه n می‌باشند. با اعمال شرایط مرزی (۶-۲۲) در معادلات (۶-۲۵)، یک دستگاه معادلات جبری همگن به‌دست می‌آید. مقدار γ_0 از حل معادله مشخصه (دترمینان ماتریس ضرایب) این دستگاه معادلات محاسبه می‌شود.

برای محاسبه دومین تقریب بار کمانش (γ_2)، معادلات $O(\varepsilon^2)$ می بایست حل شوند. با توجه به این‌که قسمت همگن معادلات $O(\varepsilon^0)$ و $O(\varepsilon^2)$ مشابه می‌باشند، براساس اصل فردهولم[1] معادلات غیر همگن $O(\varepsilon^2)$ تنها در صورتی دارای جواب غیر صفر هستند که یک شرط حل پذیری[2] برقرار باشد. برای معادلات $O(\varepsilon^2)$ این شرط به‌صورت رابطه (۶-۲۶) بیان می‌شود [۱۲۲]:

[1] Fredholm
[2] Solvability Condition

$$\int_{R_2/R_1}^{1} W_2^* P \; d\rho = d \qquad (۶-۲۶)$$

که در آن W_2^* تابع الحاقی[1] w_2^* بوده و از حل معادله دیفرانسیل الحاقی به‌دست می‌آید، d پارامتر مربوط به شرایط مرزی بوده (مقدار آن برای شرایط مرزی همگن برابر با صفر است) و P قسمت ناهمگن معادله $O(\varepsilon^2)$ می‌باشد:

$$P = \left(-h^{*2}\gamma_0\alpha + \frac{h^{*2}\gamma_0}{\rho^2}\alpha + h^{*2}\gamma_2 - \frac{h^{*2}\gamma_0}{\rho^2} + h^* p_1\right)\frac{d^2 w_0^*}{d\rho^2} + \left(-\frac{h^{*2}\gamma_0}{\rho}\alpha - \frac{h^{*2}\gamma_0}{\rho^3}\alpha + \frac{h^{*2}\gamma_2}{\rho} + \frac{h^{*2}\gamma_0}{\rho^3} + \frac{h^* p_1}{\rho}\right)\frac{dw_0^*}{d\rho} + p_1\frac{du_{10}^*}{d\rho} + \frac{p_1 u_{10}^*}{\rho} \qquad (۶-۲۷)$$

نحوه به‌دست آوردن شرط حل پذیری: در این قسمت به‌صورت مختصر نحوه به‌دست آوردن شرط حل پذیری (رابطه (۶-۲۶)) توضیح داده می‌شود. شکل ماتریسی معادلات $O(\varepsilon^2)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \frac{h^{*2}}{12} & 0 \\ 0 & h^{*2}\gamma_0 - h^* p_1 \end{bmatrix}\frac{d^2}{d\rho^2}\begin{Bmatrix} u_{12}^* \\ w_2^* \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{h^{*2}}{12\rho} & -h^* p_1 \\ -p_1 & \frac{h^{*2}\gamma_0 - h^* p_1}{\rho} \end{bmatrix}\frac{d}{d\rho}\begin{Bmatrix} u_{12}^* \\ w_2^* \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_1 - \frac{h^{*2}}{12\rho^2} & 0 \\ -\frac{p_1}{\rho} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{12}^* \\ w_2^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \qquad (۶-۲۸)$$

معادلات دیفرانسیل الحاقی و شرایط مرزی مربوطه با ضرب کردن سمت چپ رابطه بالا در عبارت $\{U_{12}^* \quad W_2^*\}$ و انتگرال‌گیری از عبارت حاصل به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\int_{R_2/R_1}^{1}\{U_{12}^* \quad W_2^*\}\left(\begin{bmatrix} \frac{h^{*2}}{12} & 0 \\ 0 & h^{*2}\gamma_0 - h^* p_1 \end{bmatrix}\frac{d^2}{d\rho^2}\begin{Bmatrix} u_{12}^* \\ w_2^* \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{h^{*2}}{12\rho} & -h^* p_1 \\ -p_1 & \frac{h^{*2}\gamma_0 - h^* p_1}{\rho} \end{bmatrix}\frac{d}{d\rho}\begin{Bmatrix} u_{12}^* \\ w_2^* \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_1 - \frac{h^{*2}}{12\rho^2} & 0 \\ -\frac{p_1}{\rho} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{12}^* \\ w_2^* \end{Bmatrix}\right)d\rho \qquad (۶-۲۹)$$

که در آن U_{12}^* و W_2^* به ترتیب توابع الحاقی u_{12}^* و w_2^* می‌باشند. اکنون با استفاده از انتگرال جزء به جزء، رابطه (۶-۲۹) به‌صورت رابطه (۶-۳۰) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\frac{h^{*2}}{12}\left[U_{12}^* u_{12}^{*\prime} - U_{12}^{*\prime} u_{12}^*\right]_{R_2/R_1}^{1} + \left(-h^{*2}\gamma_0 + p_1 h^*\right)\left[W_2^* w_2^{*\prime} - W_2^{*\prime} w_2^*\right]_{R_2/R_1}^{1} + \frac{h^{*2}}{12\rho}\left[U_{12}^* u_{12}^*\right]_{R_2/R_1}^{1} \\
&+ p_1\left[W_2^* u_{12}^*\right]_{R_2/R_1}^{1} - h^* p_1\left[U_{12}^* w_2^*\right]_{R_2/R_1}^{1} + \frac{-h^{*2}\gamma_0 + h^* p_1}{\rho}\left[W_2^* w_2^*\right]_{R_2/R_1}^{1} \\
&+ \int_{R_2/R_1}^{1}\left(\frac{h^{*2}}{12}\frac{d^2 U_{12}^*}{d\rho^2} - \frac{h^{*2}}{12\rho}\frac{dU_{12}^*}{d\rho} - p_1 U_{12}^* - p_1\frac{dW_2^*}{d\rho} + \frac{p_1}{\rho}W_2^*\right)u_{12}^* d\rho \\
&+ \int_{R_2/R_1}^{1}\left(\left(-h^{*2}\gamma_0 + h^* p_1\right)\frac{d^2 W_2^*}{d\rho^2} + \left(\frac{h^{*2}\gamma_0}{\rho} - \frac{h^* p_1}{\rho}\right)\frac{dW_2^*}{d\rho} + \left(-\frac{h^{*2}\gamma_0}{\rho^2} + \frac{h^* p_1}{\rho^2}\right)W_2^* + h^* p_1\frac{dU_{12}^*}{d\rho}\right)w_2^* d\rho
\end{aligned} \qquad (۶-۳۰)$$

---

[1] Adjoint

ضرایب u_{12}^* و w_2^* در قسمت انتگرالی رابطه بالا، معادلات دیفرانسیل الحاقی بوده و بنابراین به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\frac{h^{*2}}{12}\frac{d^2U_{12}^*}{d\rho^2}-\frac{h^{*2}}{12\rho}\frac{dU_{12}^*}{d\rho}-p_1U_{12}^*-p_1\frac{dW_2^*}{d\rho}+\frac{p_1}{\rho}W_2^*=0\\&\left(-h^{*2}\gamma_0+h^*p_1\right)\frac{d^2W_2^*}{d\rho^2}+\left(\frac{h^{*2}\gamma_0}{\rho}-\frac{h^*p_1}{\rho}\right)\frac{dW_2^*}{d\rho}+\left(-\frac{h^{*2}\gamma_0}{\rho^2}+\frac{h^*p_1}{\rho^2}\right)W_2^*+h^*p_1\frac{dU_{12}^*}{d\rho}=0\end{aligned} \tag{۶-۳۱}$$

حل معادلات (۶-۳۱) به‌صورت زیر است:

$$U_{12}^*=-C_2+C_3\frac{6\rho\gamma_0}{h^*K}J_1(2\rho K)+C_4\frac{6\rho\gamma_0}{h^*K}Y_1(2\rho K);\quad \mathrm{W}_2^*=C_1\rho+C_2\rho\ln\rho+C_3\rho J_0(2\rho K)+C_4\rho Y_0(2\rho K) \tag{۶-۳۲}$$

ثوابت $C_n, n=1,2,3,4$ در رابطه (۶-۳۲)، با استفاده از شرایط مرزی الحاقی به‌دست می‌آیند. این شرایط مرزی وابسته به شرایط مرزی مساله اولیه بوده و با استفاده از قسمت غیرانتگرالی رابطه (۶-۳۰) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&\frac{h^{*2}}{12}\left[U_{12}^*u_{12}^{*\prime}-U_{12}^{*\prime}u_{12}^*\right]_{R_2/R_1}^1+\left(-h^{*2}\gamma_0+p_1h^*\right)\left[W_2^*w_2^{*\prime}-W_2^{*\prime}w_2^*\right]_{R_2/R_1}^1+\frac{h^{*2}}{12\rho}\left[U_{12}^*u_{12}^*\right]_{R_2/R_1}^1\\&+p_1\left[W_2^*u_{12}^*\right]_{R_2/R_1}^1-h^*p_1\left[U_{12}^*w_2^*\right]_{R_2/R_1}^1+\frac{-h^{*2}\gamma_0+h^*p_1}{\rho}\left[W_2^*w_2^*\right]_{R_2/R_1}^1\end{aligned} \tag{۶-۳۳}$$

در صورتی که شرایط مرزی مساله اولیه همگن باشد، شرایط مرزی مساله الحاقی نیز همگن بوده و بنابراین رابطه (۶-۳۳) صفر خواهد بود؛ اما در صورتی که شرایط مرزی مساله اولیه غیر همگن باشد، رابطه (۶-۳۳) باقیمانده‌ای به نام d خواهد داشت. اکنون با ضرب کردن سمت راست عبارت (۶-۲۸) در $\{U_{12}^*\quad W_2^*\}$ و انتگرال‌گیری، شرط حل پذیری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۱۲۲]:

$$\int_{R_2/R_1}^1\{U_{12}^*\quad W_2^*\}\begin{Bmatrix}0\\P\end{Bmatrix}d\rho=d\rightarrow\int_{R_2/R_1}^1 W_2^*Pd\rho=d \tag{۶-۳۴}$$

براساس شرط حل پذیری، مقدار γ_2 را می‌توان بدون حل معادلات دیفرانسیل $O(\varepsilon^2)$ به‌دست آورد. اما برای حل معادلات مرتبه بالاتر، معادلات $O(\varepsilon^2)$ باید حل شوند. حل این معادلات شامل یک حل عمومی و یک حل خصوصی می‌باشد. حل عمومی دقیقا مشابه رابطه (۶-۲۵) است (تنها با این تفاوت که u_{12}^* و w_2^* جایگزین u_{10}^* و w_0^* می‌شوند). براساس روش تغییر پارامترها[1] شکل انتگرالی حل خصوصی معادلات $O(\varepsilon^2)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

[1] Method of Variation of Parameters

$$u_{12P}^{*}=-\left(\int\frac{P\pi\rho K}{h^{*}\gamma_0}Y_0(2\rho K)d\rho\right)J_1(2\rho K)+\left(\int\frac{P\pi\rho K}{\gamma_0 h^{*}}\mathrm{J}_0(2\rho K)d\rho\right)\mathrm{Y}_1(2\rho K)$$
$$-\frac{1}{\rho}\left(\int\frac{P\pi\rho^2 K}{h^{*}\gamma_0}\left(J_0(2\rho K)Y_1(2\rho K)-Y_0(2\rho K)J_1(2\rho K)\right)d\rho\right)$$
$$w_{2P}^{*}=\int\left(\frac{\pi K}{\rho h^{*2}(h^{*}\gamma_0-p_1)\gamma_0}\left(p_1\rho J_1(2\rho K)\int P\rho Y_0(2\rho K)d\rho-p_1\rho Y_1(2\rho K)\int P\rho J_0(2\rho K)d\rho\right)\right)d\rho$$
$$+\int\left(\frac{\pi K}{\rho h^{*2}(h^{*}\gamma_0-p_1)\gamma_0}\left((p_1-h^{*}\gamma_0)\int P\rho^2\left(J_0(2\rho K)Y_1(2\rho K)-Y_0(2\rho K)J_1(2\rho K)\right)d\rho\right)\right)d\rho \qquad (۳۵\text{-}۶)$$

معادلات انتگرالی (۶-۳۵) را نمی‌توان به‌صورت دقیق محاسبه کرد. بدین منظور عبارتهای زیر این انتگرال ها به‌صورت یک سری با تعداد جملات کافی (k) که منجر به همگرایی جواب نهایی می‌شود، محاسبه می‌شوند. در این روش توابع بسل به‌صورت یک سری در عبارات انتگرالی جایگذاری می‌شوند و سپس با انتگرال-گیری از تک تک جملات حاصل، شکل سری عبارات انتگرالی به‌دست می‌آید. شکل سری توابع بسل به‌صورت زیر می‌باشد:

$$J_n(\rho)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\rho/2)^{(2k+n)}}{(k!)(n+k)!},\ (n=0,1,2,\ldots)$$
$$\mathit{for}\ \ n=0: J_0(\rho)=1-\frac{1}{4}\rho^2+\frac{1}{64}\rho^4-\frac{1}{2304}\rho^6+\frac{1}{147456}\rho^8+\ldots$$
$$J_1(\rho)=-\frac{d}{d\rho}J_0(\rho)=\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{16}\rho^3+\frac{1}{384}\rho^5-\frac{1}{18432}\rho^7+\ldots \qquad (۳۶\text{-}۶)$$

$$Y_n(\rho)=\frac{1}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\rho/2)^{(2k+n)}}{(k!)(k+n)!}\ln(\rho/2)+(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\rho/2)^{(2k-n)}}{(k!)(k-n)!}\ln(\rho/2)\right)$$
$$-\frac{1}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma'(k+n-1)(\rho/2)^{(2k+n)}}{k!(k+n)!^2}+(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma'(k-n+1)(\rho/2)^{(2k-n)}}{k!(k-n)!^2}\right),\ (n=0,1,2,\ldots)$$
$$\mathit{where}\ \Gamma'(m+1)=m!(-\gamma+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k})\ ,\ \gamma\approx 0.5772156649\,(\text{Euler's constant})$$
$$\mathit{for}\ \ n=0: Y_0(\rho)=\frac{2}{\pi}\left(\ln(\rho/2)+\gamma\right)-\frac{1}{2\pi}\left(\ln(\rho/2)+\gamma-1\right)\rho^2+\frac{1}{32\pi}\left(\ln(\rho/2)+\gamma-\frac{3}{2}\right)\rho^4$$
$$-\frac{1}{1152\pi}\left(\ln(\rho/2)+\gamma-\frac{11}{6}\right)\rho^6+\ldots$$
$$Y_1(\rho)=-\frac{d}{d\rho}Y_0(\rho) \qquad (۳۷\text{-}۶)$$

با جایگذاری حل به‌دست آمده برای معادلات $O(\varepsilon^0)$ و $O(\varepsilon^2)$ در قسمت ناهمگن معادلات $O(\varepsilon^4)$ و اعمال شرط حل پذیری، مقدار γ_4 به‌دست می‌آید. این روند را می‌توان برای حل معادلات مرتبه بالاتر نیز انجام داد؛ اما با افزایش مرتبه حل، حجم محاسبات موردنیاز نیز افزایش می‌یابد.

نتایج: در این قسمت نتایج مربوط به بار کمانش ورق‌های حلقوی در حالت متقارن محوری با شرایط مرزی مختلف ارائه می‌شود. در جدول‌ها و نمودار ها، بار کمانش به‌صورت $\bar{N} = N R_1^2 / D_{11}$ بی‌بعد شده است که در آن $D_{11} = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$ صلبیت خمشی ورق است. حالت‌های مختلف شرایط مرزی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند (روابط ۶-۱۵):

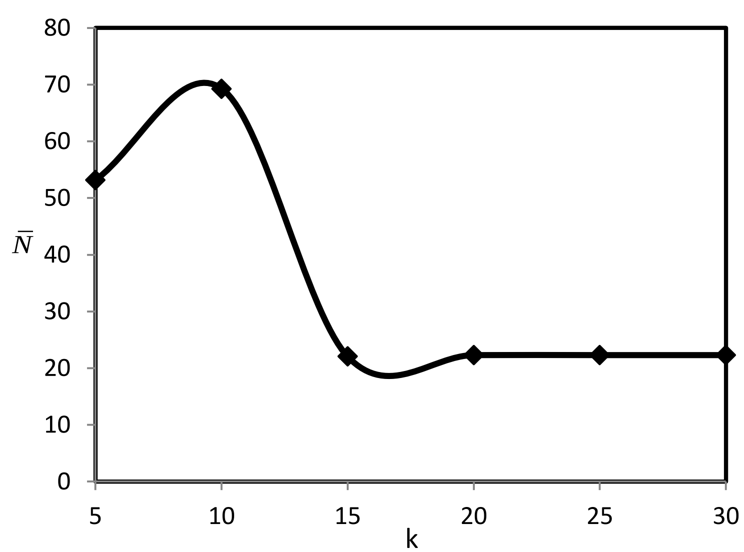
تکیه گاه ساده (S) : $w = 0,\ M_r = 0;$

تکیه گاه آزاد (F) : $Q_r + N_r \dfrac{dw}{dr} = 0,\ M_r = 0$

تکیه گاه گیر دار (C) : $w = 0,\ u_1 = 0;$

در ادامه شرایط مرزی ورق به‌صورت یک عبارت دوحرفی نمایش داده می‌شود که در آن حرف اول بیان کننده شرط مرزی در لبه خارجی و حرف دوم بیان کننده شرط مرزی در لبه داخلی ورق می‌باشد.

در ابتدا به منظور تعیین مقدار مناسب برای k(تعداد جملات مورد استفاده در بسط عبارت های زیر انتگرال در رابطه (۶-۳۵) تغییرات بار کمانش برحسب k برای شرایط مرزی مختلف محاسبه شده است. در شکل ۶-۲ نمودار این تغییرات برای یک ورق با شرایط مرزی گیردار در مرز خارجی و آزاد در مرز داخلی (CF) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که مقدار $k = 25$ برای همگرایی بار کمانش مناسب است. در جدول ۶-۱ مقدار k برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است.



شکل ۶-۲:نمودار تغییرات بار کمانش برحسب k برای ورق با شرایط مرزی CF

جدول ۶-۱: مقدار مناسب k برای همگرایی بارکمانش در شرایط مرزی مختلف

Boundary Condition	SF	FS	CC	CF	FC	SS
k	25	25	50	25	25	40

در جدول‌های ۶-۲ و ۶-۳ مقدار بار کمانش ($\bar{N}$) برای دو نوع شرط مرزی SF و CF ارائه شده و با نتایج عددی به‌دست آمده با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی مقایسه شده است. در این جدول‌ها مقدار بار کمانش برای مرتبه‌های مختلف حل محاسبه شده است. براساس نتایج به‌دست آمده، با افزایش مرتبه حل، بار کمانش به سمت مقدار نهایی از پایین همگرا می‌شود و در اکثر موارد، بار کمانش محاسبه شده با استفاده از روش اغتشاشات، کوچکتر از بار کمانش براساس روش DQ است. البته با افزایش مقدار ε، سرعت همگرایی کاهش می‌یابد. همچنین سرعت همگرایی وابسته به شرایط مرزی مساله می‌باشد، به‌طوریکه برای ورق‌های SF سرعت همگرایی بیشتر از ورق‌های با شرایط مرزی CF است. اختلاف نسبی بین نتایج روش اغتشاشات و روش مربعات دیفرانسیلی با افزایش نسبت شعاع، افزایش می‌یابد و برای ورق با شرایط مرزی SF بیشترین اختلاف مربوط به $h^*=0.01$ بوده و حدود 3% می‌باشد. با افزایش مقدار h^*، این اختلاف نسبی کاهش یافته و برای $h^*=0.3$ به 2.65% می رسد. در ورق با شرایط مرزی CF، بیشترین اختلاف نسبی برای $h^*=0.01$ حدود 9.8% است. در این نوع ورق نیز با افزایش h^*، اختلاف نسبی کاهش یافته و برای $h^*=0.3$ به حدود 4.7% می رسد.

جدول ۶-۲: بار کمانش ورق حلقوی با شرایط مرزی لبه خارجی تکیه گاه ساده و لبه داخلی آزاد SF

ε	$O(\varepsilon^n)$	h^*									
	n	0.01		0.05		0.1		0.2		0.3	
		Perturbation	DQM	Perturbation	DQM	Perturbation	DQM	Perturbation	DQM	Perturbation	DQM
0.1	0	3.906	3.981	3.896	3.971	3.864	3.938	3.740	3.811	3.550	3.617
	2	3.980		3.970		3.937		3.811		3.617	
	4	3.981		3.971		3.938		3.811		3.617	
	6	3.981		3.971		3.938		3.811		3.617	
0.2	0	3.245	3.535	3.238	3.527	3.216	3.502	3.129	3.406	2.995	3.256
	2	3.509		3.501		3.477		3.384		3.239	
	4	3.533		3.525		3.500		3.405		3.256	
	6	3.534		3.527		3.502		3.406		3.256	
0.3	0	2.600	3.105	2.596	3.099	2.581	3.081	2.525	3.010	2.438	2.899
	2	2.997		2.991		2.975		2.910		2.809	
	4	3.084		3.078		3.060		2.992		2.884	
	6	3.101		3.096		3.076		3.008		2.897	
0.4	0	2.109	2.763	2.106	2.758	2.096	2.745	2.059	2.691	2.000	2.607
	2	2.537		2.533		2.522		2.477		2.407	
	4	2.687		2.683		2.670		2.621		2.544	
	6	2.738		2.734		2.721		2.669		2.588	
0.5	0	1.751	2.500	1.749	2.497	1.742	2.486	1.717	2.444	1.676	2.377
	2	2.150		2.147		2.139		2.108		2.057	
	4	2.337		2.335		2.326		2.290		2.234	
	6	2.425		2.422		2.412		2.375		2.314	

در جدول‌های ۶-۴ و ۶-۵ مقدار بار کمانش به‌دست آمده برای شرایط مرزی SF و CF با مراجع دیگر مقایسه شده است. در مرجع [۱۲۳] از تئوری FSDT برای مدلسازی ورق استفاده شده و برای حل معادلات پایداری روش DQ مورد استفاده قرار گرفته است، درحالی که در مرجع [۱۲۴] ، بار کمانش با استفاده از روش اجزای محدود و به کمک المان متقارن محوری براساس تئوری مندلین-رزینر به‌دست آمده است. همچنین نتایج به‌دست آمده با استفاده از تئوری CPT در این جدول‌ها آورده شده است (مرجع [۱۲۵]). بار کمانش به‌دست آمده از تئوری CPT مستقل از ضخامت ورق می‌باشد. مقایسه نتایج نشان دهنده مطابقت خوب بین آنها به ویژه برای مقادیر کوچک ε می‌باشد. همچنین با افزایش ضخامت ورق، دقت تئوری کلاسیک کاهش می‌یابد و این تئوری بارکمانش بزرگتری را در مقایسه با تئوری FSDT پیش بینی می‌کند؛ زیرا در تئوری کلاسیک، اثر تغییر شکل برشی در نظر گرفته نمی‌شود؛ در حالی که با افزایش ضخامت ورق، تاثیر تغییر شکل برشی بر روی بار کمانش افزایش می‌یابد.

جدول ۶-۳: بار کمانش ورق حلقوی با شرایط مرزی لبه خارجی گیردار و لبه داخلی آزاد CF

ε	$O(\varepsilon^n)$	h^*									
	n	0.01		0.05		0.1		0.2		0.3	
		Perturbation	DQM	Perturbation	DQM	Perturbation	DQM	Perturbation	DQM	Perturbation	DQM
0.1	0	13.145	13.942	13.027	13.815	12.673	13.435	11.432	12.102	9.827	10.383
	2	13.925		13.801		13.426		12.110		10.410	
	4	13.943		13.817		13.437		12.103		10.378	
	6	13.942		13.815		13.435		12.102		10.383	
0.2	0	10.904	13.599	10.823	13.491	10.577	13.163	9.698	11.992	8.518	10.434
	2	13.120		13.022		12.727		11.669		10.250	
	4	13.545		13.441		13.123		11.986		10.459	
	6	13.602		13.494		13.168		12.002		10.444	
0.3	0	10.158	14.958	10.087	14.840	9.874	14.482	9.103	13.199	8.056	11.482
	2	13.289		13.197		12.918		11.910		10.540	
	4	14.434		14.330		14.014		12.873		11.321	
	6	14.817		14.706		14.368		13.150		11.498	
0.4	0	10.886	18.549	10.805	18.383	10.561	17.884	9.684	16.113	8.507	13.789
	2	14.834		14.724		14.391		13.197		11.593	
	4	16.815		16.686		16.296		14.896		13.016	
	6	17.776		17.634		17.204		15.663		13.596	
0.5	0	13.286	25.747	13.166	25.454	12.805	24.577	11.538	21.554	9.906	17.782
	2	18.293		18.128		17.631		15.887		13.639	
	4	21.363		21.165		20.570		18.483		15.792	
	6	23.216		22.994		22.324		19.978		16.954	

جدول ۶-۴: مقایسه بار کمانش برای ورق با شرایط مرزی SF با مراجع دیگر

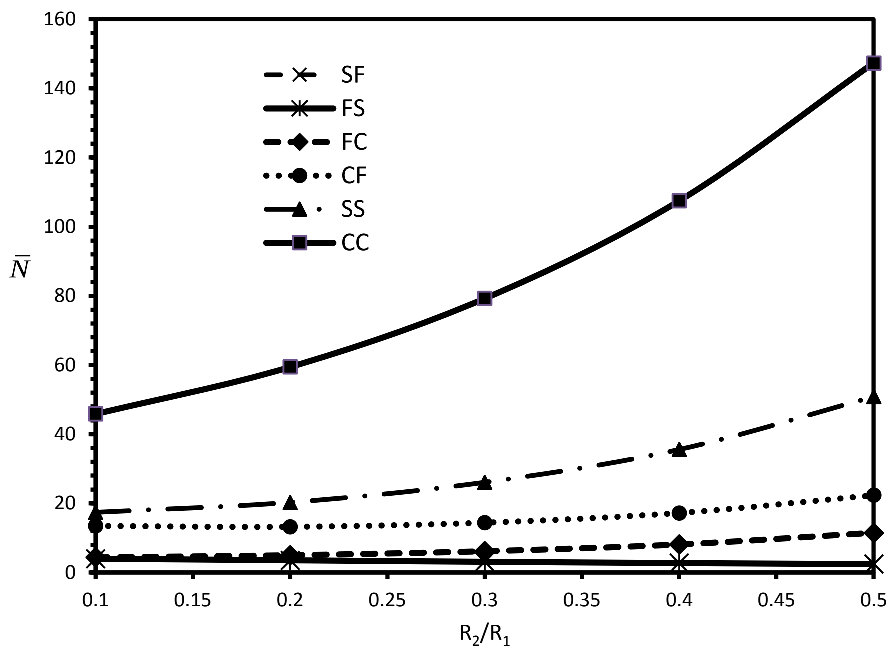
ε	Method	h^*				
		0.01	0.05	0.1	0.2	0.3
0.1	Present	3.981	3.971	3.938	3.811	3.617
	Ref [123]	3.984	3.970	3.930	3.781	3.560
	Ref [126]	3.981	3.970	3.936	3.805	-
	CPT [125]	4.047	4.047	4.047	4.047	4.047
0.2	Present	3.535	3.527	3.502	3.406	3.256
	Ref [126]	3.535	3.527	3.501	3.404	-
	CPT [125]	3.611	3.611	3.611	3.611	3.611
0.3	Present	3.101	3.096	3.078	3.008	2.897
	Ref [123]	3.107	3.098	3.073	2.976	2.830
	Ref [126]	3.105	3.099	3.081	3.010	-
	CPT [125]	3.140	3.140	3.140	3.140	3.140
0.4	Present	2.738	2.734	2.721	2.670	2.588
	Ref [126]	2.763	2.758	2.745	2.691	-
	CPT [125]	2.775	2.775	2.775	2.775	2.775
0.5	Present	2.425	2.422	2.412	2.375	2.314
	Ref [123]	2.500	2.495	2.478	2.410	2.305
	Ref [126]	2.500	2.497	2.486	2.444	-
	CPT [125]	2.504	2.504	2.504	2.504	2.504

جدول ۶-۵: مقایسه بار کمانش برای ورق با شرایط مرزی CF با مراجع دیگر

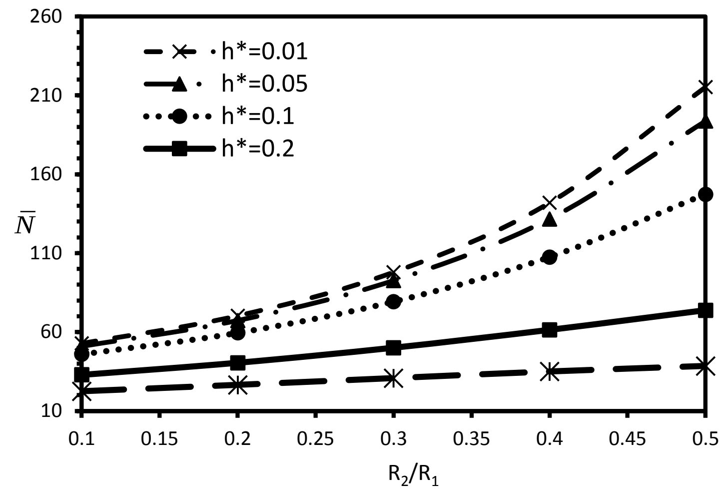
ε	Method	h^*			
		0.01	0.05	0.1	0.2
0.1	Present	13.942	13.815	13.435	12.102
	Ref [123]	13.974	13.805	13.328	11.741
	Ref [126]	13.941	13.793	13.353	11.863
	CPT [125]	14.131	14.131	14.131	14.131
0.2	Present	13.602	13.494	13.168	12.002
	Ref [126]	13.598	13.468	13.076	11.731
	CPT [125]	13.755	13.755	13.755	13.755
0.3	Present	14.817	14.706	14.368	13.150
	Ref [123]	14.986	14.819	14.324	12.662
	Ref [126]	14.957	14.807	14.360	12.837
	CPT [125]	15.037	15.037	15.037	15.037
0.4	Present	17.776	17.634	17.204	15.663
	Ref [126]	18.546	18.328	17.681	15.530
	CPT [125]	18.593	18.593	18.593	18.593
0.5	Present	23.216	22.994	22.324	19.978
	Ref [123]	25.802	25.390	24.174	20.351
	Ref [126]	25.742	25.342	24.178	20.504
	CPT [125]	25.787	25.787	25.787	25.787

در شکل ۶-۳ تغییرات بار کمانش متقارن محوری برحسب نسبت شعاع R_2/R_1 برای شرایط مرزی مختلف نمایش داده شده است. براساس این شکل، به غیر از شرایط مرزی SF و FS ، با افزایش نسبت شعاع، بار کمانش افزایش یافته و بیشترین بار کمانش مربوط به ورق با شرایط مرزی CC بوده و در این حالت بار کمانش

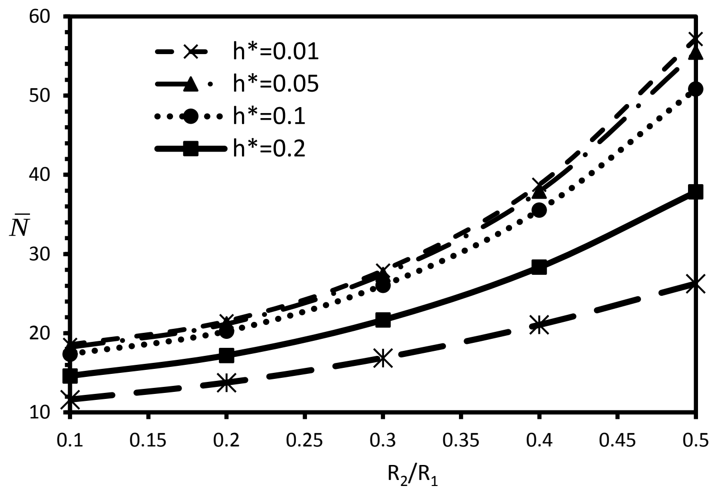
حساسیت بیشتری نسبت به تغییرات شعاع دارد. همچنین بار کمانش ورق‌های SF و FS با هم برابر است و این ورق‌ها به یک شکل کمانش می کنند. تغییرات بار کمانش برحسب نسبت ضخامت h^* در شکل ۶-۴ نشان داده شده است. تاثیر ضخامت بر روی بار کمانش وابسته به شرایط مرزی می‌باشد، به‌طوری که در ورق‌های با شرایط مرزی CC و SS و CF ، بار کمانش با تغییر ضخامت به طور قابل توجهی تغییر می‌کند، درحالی که در ورق‌های با شرایط مرزی SF ، FS و FC تاثیر ضخامت بر روی بار کمانش بی‌بعد شده ناچیز است. این رفتار را می‌توان به میزان تغییر شکل برشی در ورق کمانش یافته نسبت داد که وابسته به شرایط مرزی و ضخامت ورق است. هرچه ورق مقیدتر باشد، میزان تغییر شکل برشی در ورق کمانش یافته بیشتر بوده و بنابراین تاثیر ضخامت بر روی بار کمانش اهمیت بیشتری پیدا می‌کند.



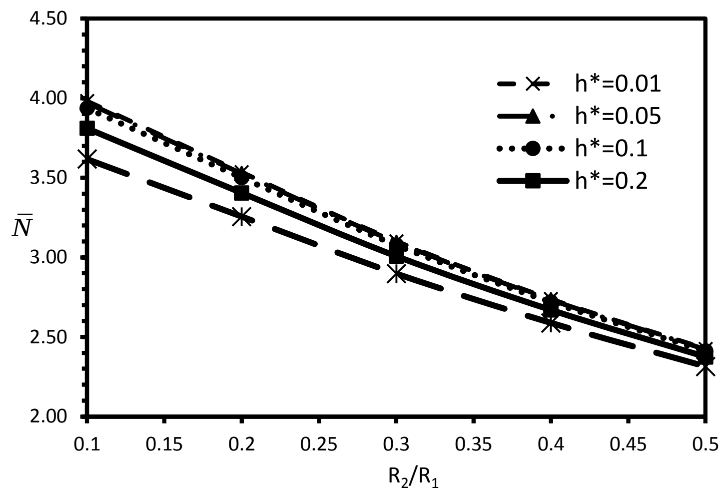
شکل ۶-۳: تغییرات بار کمانش برحسب نسبت شعاع برای شرایط مرزی مختلف $(h^* = 0.1)$



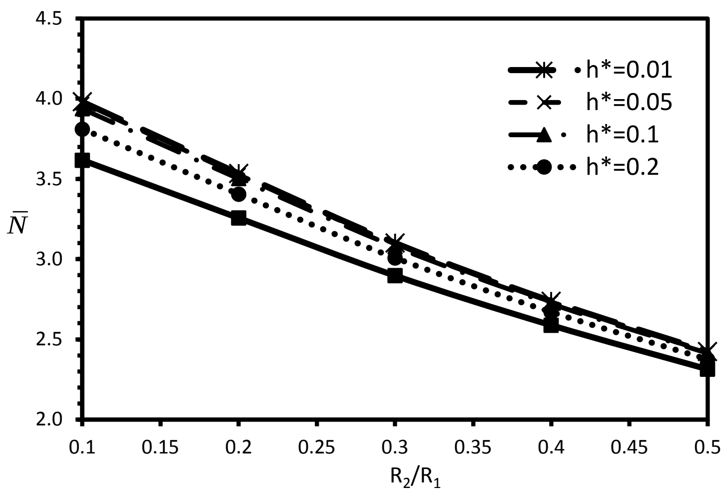
الف) CC



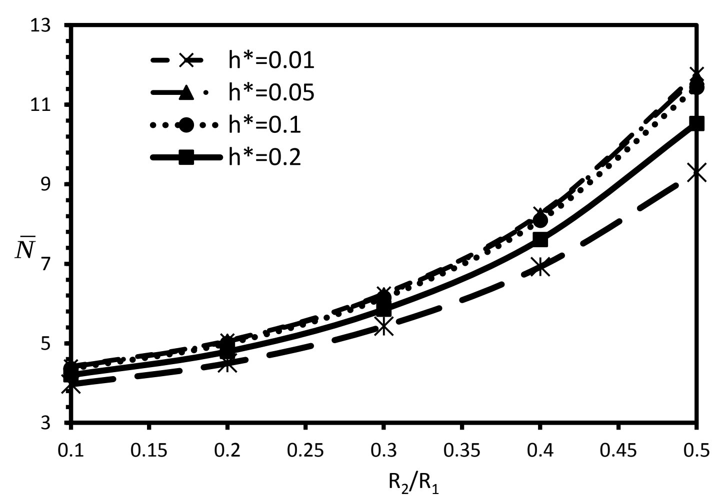
ب) SS



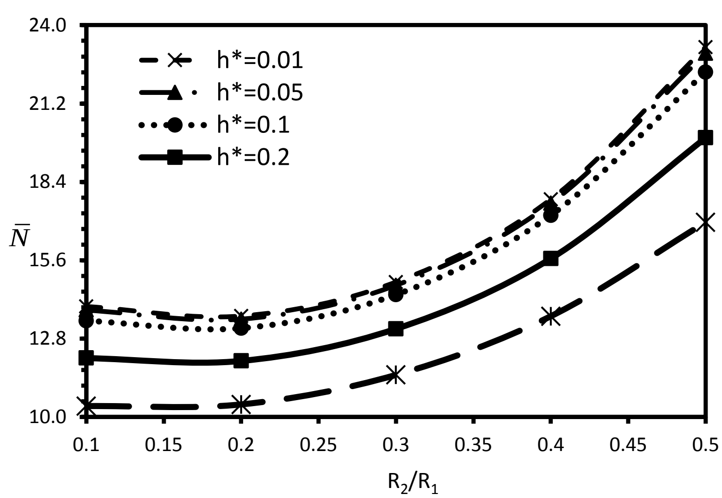
ج) SF



د) FS

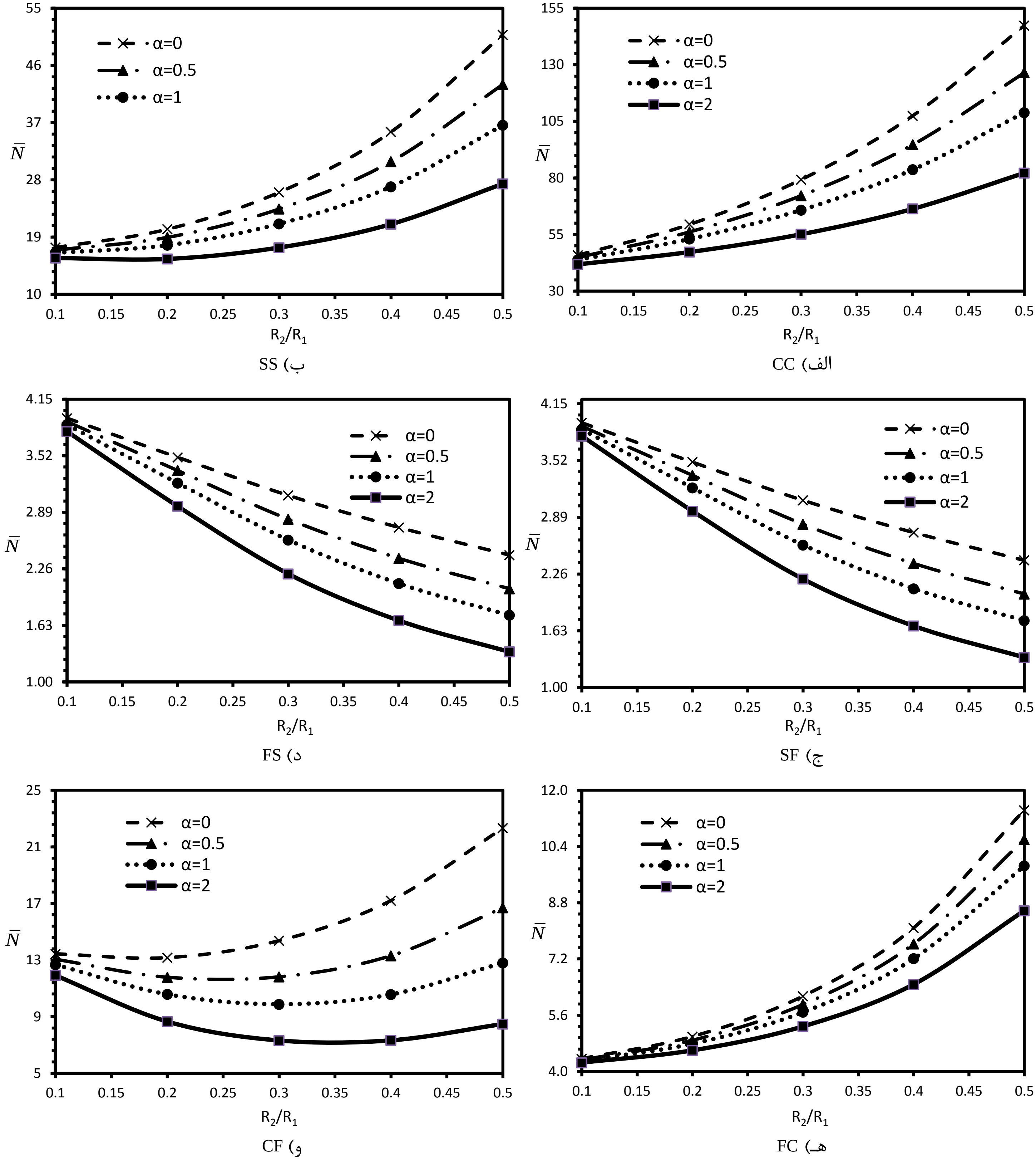


هـ) FC



و) CF

شکل ۶-۴: تاثیر نسبت ضخامت بر بار کمانش ورق حلقوی با شرایط مرزی مختلف



شکل ۶-۵: تاثیر نسبت بار (α) بر روی بار کمانش ورق‌های حلقوی با شرایط مرزی مختلف ($h^*=0.1$)

بار کمانش ورق‌های حلقوی برای نسبت ضخامت $h^*=0.1$ که در معرض بارگذاری داخل صفحه‌ای در مرز داخلی و خارجی قرار دارند، در شکل ۶-۵ نشان داده شده است. در این شکل نمودار بارکمانش برای نسبت‌های مختلف بار $\alpha=N_2/N_1$ نشان داده شده است. براساس این شکل، برای تمامی شرایط مرزی مورد بررسی، با افزایش α، مقدار بار کمانش کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که با کاهش شعاع داخلی ورق، تاثیر بارگذاری در لبه داخلی بر روی بار کمانش کاهش یافته و مقدار بار کمانش برای تمامی مقادیر α همگرا می‌شود. همچنین تغییرات بار کمانش برحسب نسبت شعاع به شرایط مرزی ورق وابسته است؛ به‌طوریکه در ورق‌های CC و SS و FC، بار کمانش با افزایش نسبت شعاع پیوسته افزایش می‌یابد؛ در حالی که در ورق‌های با شرایط مرزی SF و FS ، عکس این موضوع صادق است. در ورق‌های با شرایط مرزی CF ، با افزایش نسبت شعاع، ابتدا بار کمانش کاهش یافته و پس از رسیدن به نقطه مینیمم، شروع به افزایش می‌کند.

با توجه به شکل ۶-۴، می‌توان با استفاده از برازش منحنی[1]، رابطه‌ای را بین بار کمانش $\bar{N}$ برحسب نسبت شعاع R_2/R_1 به‌دست آورد. با بررسی توابع مختلف، مشاهده می‌شود که رابطه توانی به‌صورت $\bar{N}=\beta(R_2/R_1)^K+d$ به خوبی بیانگر تغییرات بارکمانش برحسب نسبت شعاع می‌باشد. در جدول ۶-۶ مقدار ثوابت β و K و d برای شرایط مرزی مختلف و ضخامت های مختلف گزارش شده است. این مقادیر با استفاده از جعبه ابزار برازش منحنی در نرم افزار متلب به‌دست آمده است. برای بررسی نیکویی برازش[2] و اینکه منحنی به‌دست آمده با چه دقتی قادر به پیش‌بینی داده‌ها است، معیارهای مختلفی وجود دارد. در جدول ۶-۴ از معیار ضریب تعیین[3] برای بررسی نیکویی برازش استفاده شده است. این معیار به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$R-Squared=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2/\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 \qquad (۳۸-۶)$$

که در آن n تعداد داده های موجود، $\hat{y}_i$ داده به‌دست آمده از منحنی برازش، y_i داده اولیه و $\bar{y}$ میانگین داده‌ها است. هرچه این معیار به عدد یک نزدیک تر باشد، به معنی دقت بالاتر منحنی در پیش بینی داده‌ها است.

[1] Curve Fitting
[2] Goodness of Fit
[3] R-Squared

جدول ۶-۶: ثوابت رابطه $\bar{N}=\beta(R_2/R_1)^K+d$ مربوط به برازش منحنی کمانش ورق حلقوی برای شرایط مرزی مختلف

BC	Constants	h^*				
		0.01	0.05	0.1	0.2	0.3
CC	β	929.3	747.6	435.6	123.5	39.7
	K	2.517	2.38	2.064	1.446	0.9048
	d	51.83	49.22	42.74	28.43	17.43
	R_squared	0.99896	0.99917	0.99961	0.99999	0.99931
SS	β	267	250.2	206.9	112	54.69
	K	2.785	2.742	2.618	2.236	1.826
	d	18.31	17.98	17.02	14.03	10.82
	R_squared	0.99971	0.99973	0.99978	0.99990	0.99997
SF and FS	β	-3.763	-3.704	-3.704	-3.483	-3.156
	K	0.6935	0.6992	0.6992	0.7216	0.7562
	d	4.739	4.684	4.684	4.478	4.176
	R_squared	0.99947	0.99948	0.99948	0.99952	0.99957
FC	β	50.01	49.26	47.01	39.45	30.43
	K	2.771	2.762	2.736	2.64	2.505
	d	4.404	4.389	4.343	4.17	3.913
	R_squared	0.99926	0.99927	0.99930	0.99943	0.99959
CF	β	147.5	143.3	131.4	96.1	63.13
	K	3.939	3.913	3.836	3.566	3.225
	d	13.63	13.52	13.16	11.89	10.23
	R_squared	0.99683	0.99693	0.99721	0.99803	0.99868

۶-۳-۲ کمانش نامتقارن

در حالت کمانش نامتقارن، $n\neq 0$ بوده و بنابراین سه معادله دیفرانسیل کوپل شده با ضرایب متغیر برحسب ρ باید حل شوند (معادلات ۶-۱۴). برخلاف حالت متقارن محوری، دراین حالت حل دقیقی برای معادلات اولیه و نیز معادلات الحاقی وجود ندارد. در اینجا به منظور حل این معادلات، از روش فضای حالت استفاده می‌شود. در این روش، دستگاه معادلات اولیه به یک دستگاه معادلات مرتبه اول به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\{\dot{X}\}=[A]\{X\} \tag{۶-۳۹}$$

که در آن $\{X\}$ بردار متغیرهای مساله و $[A]$ ماتریس ضرایب است. بردار $\{X\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{X\}=\{u_1^*,v_1^*,w^*,\frac{du_1^*}{d\rho},\frac{dv_1^*}{d\rho},\frac{dw^*}{d\rho}\}^T \tag{۶-۴۰}$$

حل دستگاه معادلات (۶-۳۹) به شکل زیر است:

$$\{X\}=[\mathrm{E}_v][Q]\{K\} \tag{۶-۴۱}$$

که در آن $[E_v]$ ماتریسی است که ستون‌های آن از بردارهای ویژه ماتریس ضرایب $[A]$ تشکیل شده است، $[Q]$ یک ماتریس قطری بوده و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$[Q] = diag(e^{m_1\rho}, e^{m_2\rho}, \ldots, e^{m_n\rho}) \qquad (۴۲\text{-}۶)$$

که در آن $m_i, i = 1,2,\ldots,n$ مقادیر ویژه ماتریس $[A]$ هستند. همچنین $\{k\}$ بردار ثوابت حل می‌باشد که پس از اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آید. بنابراین برای حل مساله، ابتدا باید مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ضرایب $[A]$ محاسبه شوند. با توجه به این‌که درایه‌های این ماتریس، تابعی از متغیر ρ و نیز مقدار ویژه مساله γ هستند، این امر امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل برای حل مساله، از روش حلقه زدن استفاده می‌شود. در این روش دامنه مساله به تعدادی حلقه با ضخامت یکسان تقسیم و در هر حلقه مقدار ρ برابر با شعاع متوسط حلقه قرار داده می‌شود. سپس معادلات فضای حالت برای هرحلقه به طور جداگانه حل می‌شود. بنابراین برای حلقه i ام می‌توان نوشت:

$$\{X\}_i = [E_v]_i [Q]_i \{K\}_i \qquad (۴۳\text{-}۶)$$

در نهایت باید شرایط مرزی در مرزهای داخلی و خارجی ورق و نیز شرایط پیوستگی در مرز بین حلقه ها اعمال شود. شرایط پیوستگی در مرز بین حلقه ها به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&(u_1^*)_i\big|_{\rho=\rho_i+t/2} = (u_1^*)_{i+1}\big|_{\rho=\rho_{i+1}-t/2}; \quad (v_1^*)_i\big|_{\rho=\rho_i+t/2} = (v_1^*)_{i+1}\big|_{\rho=\rho_{i+1}-t/2}; \quad (w^*)_i\big|_{\rho=\rho_i+t/2} = (w^*)_{i+1}\big|_{\rho=\rho_{i+1}-t/2} \\
&(M_r)_i\big|_{\rho=\rho_i+t/2} = (M_r)_{i+1}\big|_{\rho=\rho_{i+1}-t/2}; \quad (M_{r\theta})_i\big|_{\rho=\rho_i+t/2} = (M_{r\theta})_{i+1}\big|_{\rho=\rho_{i+1}-t/2}; \quad (Q_r)_i\big|_{\rho=\rho_i+t/2} = (Q_r)_{i+1}\big|_{\rho=\rho_{i+1}-t/2}
\end{aligned} \qquad (۴۴\text{-}۶)$$

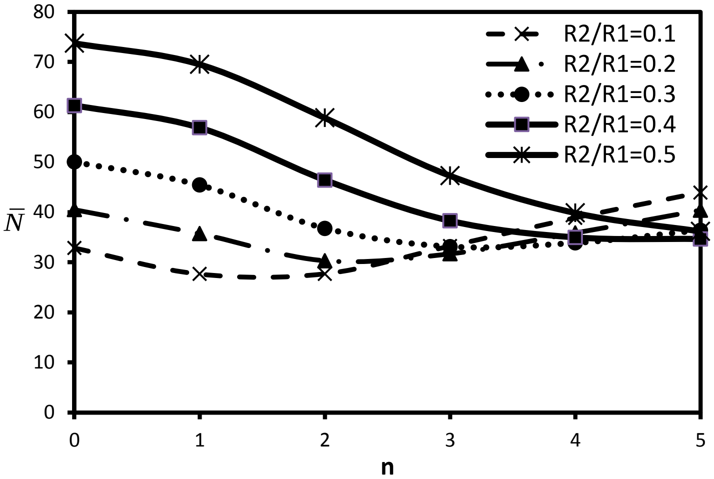
که در آن t ضخامت حلقه است.

مشکلی که در حل مساله کمانش وجود دارد، وابستگی ماتریس ضرایب به مقدار ویژه γ است. در واقع برای محاسبه ماتریس ضرایب $[A]$ در رابطه (۶-۳۹) و سپس محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس، باید مقدار γ مشخص باشد، در حالی که مقدار γ خود یکی از مجهولات اصلی مساله است که باید محاسبه شود. در اینجا برای حل مساله و محاسبه مقدار γ، از روش نصف کردن[1] استفاده می‌شود. در واقع مقدار γ باید به گونه‌ای محاسبه شود که با جایگذاری γ در شرایط مرزی، دترمینان ماتریس حاصل برابر با صفر شود. براساس روش نصف کردن، با توجه به تغییر علامت این دترمینان، مقدار γ با استفاده از یک فرایند تکراری و بررسی نحوه تغییرات علامت دترمینان، محاسبه می‌شود.

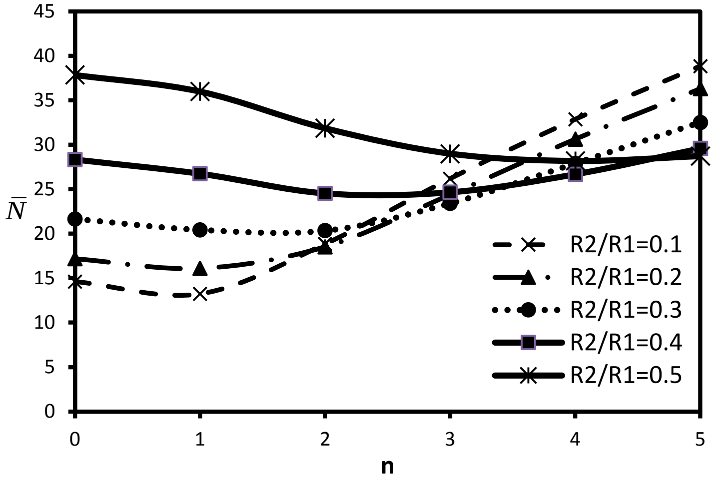
[1] Bisection

نتایج: در جدول ۶-۷ مقدار بار کمانش مربوط به مدهای مختلف (n) در یک ورق حلقوی با استفاده از روش حلقه زدن محاسبه شده است. در این جدول مقادیر به‌دست آمده با نتایج حاصل از حل معادلات به کمک روش مربعات دیفرانسیلی مقایسه شده است.

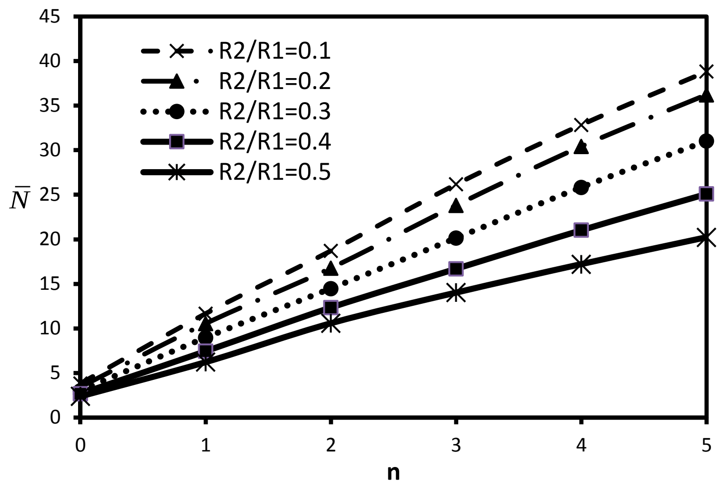
در شکل ۶-۶ نحوه تغییرات بار کمانش بی‌بعد برحسب نسبت R_2 / R_1 برای مد های مختلف (n) و برای شرایط مرزی مختلف نمایش داده شده است. براساس این شکل مشاهده می‌شود که بار کمانش مدهای بالاتر می‌تواند کوچکتر از بار کمانش مدهای پایین‌تر باشد که این موضوع به شرایط مرزی و نیز نسبت R_2 / R_1 وابسته می‌باشد. این بدان معنی است که شماره مد مربوط به کوچکترین بار کمانش یا بار کمانش بحرانی، لزوما مد متقارن محوری $(n=0)$ نیست و وابسته به شرایط مرزی و نیز هندسه ورق می‌باشد. در جدول ۶-۸ بار کمانش بحرانی ورق حلقوی برای شرایط مرزی مختلف و هندسه های مختلف به همراه شماره مد مربوطه نمایش داده شده است.



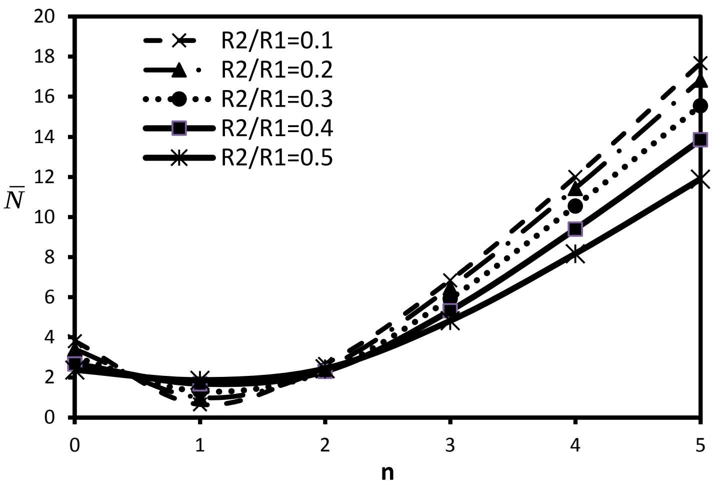
الف) CC



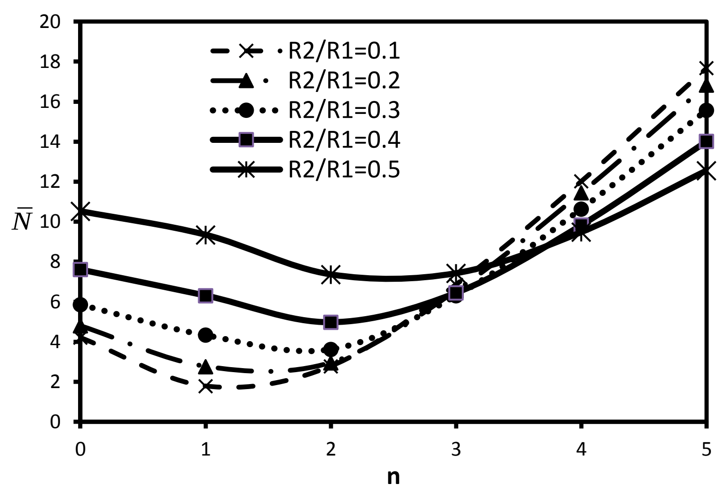
ب) SS



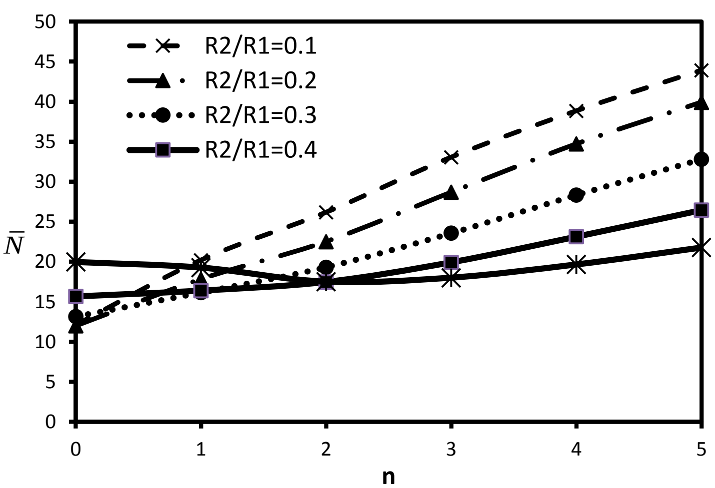
ج) SF



د) FS



هـ) FC



و) CF

شکل ۶-۶ : بار کمانش یک ورق حلقوی با شرایط مرزی متفاوت در مدهای مختلف

جدول ۶-۷: مقایسه بار کمانش ورق حلقوی با استفاده از روش DQ و روش حلقه زدن برای مد های مختلف ($h/R_1=0.2$)

R_2/R_1	n	SS		CC		CF		FC		FS		SF	
		Ringing Method	DQM Method	Ringing Method	DQ Method	Ringing Method	DQ Method	Ringing Method	DQ Method	Ringing Method	DQ Method	Ringing Method	DQ Method
0.1	1	13.225	12.974	27.656	27.347	20.197	19.532	1.781	1.549	0.655	0.441	11.659	11.170
	2	18.830	18.257	27.714	27.169	26.176	25.426	2.775	2.473	2.677	2.352	18.709	18.106
	3	26.183	25.656	33.237	32.632	33.055	32.441	6.855	6.419	6.851	6.415	26.174	25.645
	4	32.854	32.369	38.867	38.338	38.851	38.323	12.018	11.408	12.008	11.408	32.853	32.368
	5	38.833	38.388	43.928	43.478	43.926	43.477	17.673	16.878	17.673	16.878	38.833	38.388
0.2	1	16.113	16.038	35.728	35.589	17.835	17.533	2.765	2.830	1.000	0.912	10.531	10.415
	2	18.536	18.294	30.324	30.231	22.526	22.174	2.956	2.759	2.454	2.215	16.755	16.454
	3	24.402	24.153	31.697	31.539	28.686	28.397	6.550	6.226	6.482	6.153	23.802	23.525
	4	30.635	30.382	35.873	35.686	34.722	34.439	11.445	10.990	11.437	10.983	30.418	30.145
	5	36.304	36.055	40.418	40.239	39.932	39.627	16.833	16.248	16.832	16.248	36.215	35.947
0.3	1	20.435	20.373	45.428	45.331	16.150	15.892	4.332	4.294	1.317	1.271	8.954	8.943
	2	20.339	20.248	36.781	36.783	19.317	19.102	3.626	3.510	2.309	2.153	14.481	14.362
	3	23.406	23.326	33.108	33.131	23.572	23.379	6.298	6.084	5.935	5.708	20.138	20.006
	4	27.900	27.840	33.852	33.868	28.336	28.132	10.639	10.333	10.552	10.245	25.841	25.703
	5	32.507	32.462	36.406	36.425	32.812	32.542	15.575	15.189	15.555	15.169	31.023	30.851
0.4	1	26.751	26.687	56.865	56.819	16.396	16.139	6.308	6.282	1.682	1.573	7.448	7.450
	2	24.539	24.496	46.429	46.434	17.479	17.303	4.971	4.909	2.301	2.207	12.353	12.304
	3	24.660	24.640	38.283	38.335	19.933	19.785	6.440	6.315	5.328	5.186	16.700	16.624
	4	26.685	26.690	34.974	35.038	23.132	22.987	9.828	9.647	9.402	9.218	21.030	20.940
	5	29.580	29.518	34.656	34.724	26.453	26.285	14.017	13.795	13.856	13.635	25.100	24.976
0.5	1	35.985	35.936	69.540	69.611	19.276	19.023	9.347	9.324	1.859	1.841	6.217	6.215
	2	31.855	31.827	58.845	58.870	17.512	17.340	7.364	7.338	2.438	2.381	10.579	10.552
	3	28.994	28.990	47.293	47.330	18.016	17.887	7.425	7.366	4.823	4.740	14.017	13.968
	4	28.175	28.190	39.862	39.916	19.670	19.557	9.478	9.389	8.175	8.075	17.214	17.150
	5	28.716	28.747	36.181	36.241	21.785	21.664	12.556	12.449	11.901	11.792	20.230	20.151

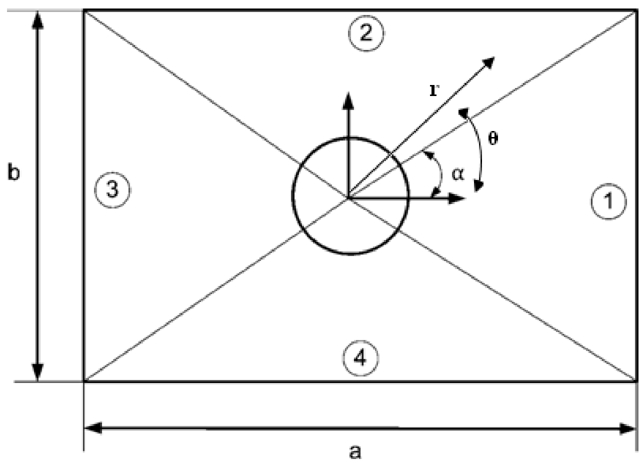
جدول ۶-۸: بار کمانش بحرانی ورق حلقوی با شرایط مرزی مختلف و شماره مد مربوطه

R_2/R_1	SS		CC		CF		FC		FS		SF	
	$\overline{N}_{cr}$	n	$\overline{N}_{cr}$	n	$\overline{N}_{cr}$	n	$\overline{N}_{cr}$	n	$\overline{N}_{cr}$	n	$\overline{N}_{cr}$	n
0.1	13.225	1	27.656	1	12.102	0	1.781	1	0.655	1	3.811	0
0.2	16.113	1	30.324	2	12.002	0	2.765	1	1.000	1	3.406	0
0.3	20.339	2	33.108	3	13.150	0	3.626	2	1.317	1	3.008	0
0.4	24.539	2	34.656	5	15.663	0	4.971	2	1.682	1	2.669	0
0.5	28.175	4	36.181	5	17.512	2	7.364	2	1.859	1	2.375	0

۶-۴ امکان‌سنجی استفاده از حل ورق حلقوی نامتقارن برای محاسبه بار کمانش ورق مستطیلی دارای گشودگی دایروی

همان طور که گفته شد، در مرزهای خارجی یک ورق مستطیلی، رابطه‌ای بین r و θ برقرار است. بر اساس شکل ۶-۷، این رابطه بر روی مرزهای مختلف ورق به صورت (۶-۴۵) نوشته می شود که در آن $\tan(\alpha)=b/a$.

$$boundary\ 1: -\alpha \le \theta < \alpha \to r = \frac{a}{2\cos(\theta)} \qquad boundary\ 3: \pi-\alpha \le \theta < \pi+\alpha \to r = -\frac{a}{2\cos(\theta)}$$
$$boundary\ 2: \alpha \le \theta < \pi-\alpha \to r = \frac{b}{2\sin(\theta)} \qquad boundary\ 4: \pi+\alpha \le \theta < 2\pi-\alpha \to r = -\frac{a}{2\sin(\theta)} \tag{۴۵-۶}$$



شکل ۶-۷: شماره گذاری مرزهای خارجی یک ورق مستطیلی با گشودگی دایروی برای محاسبه رابطه هر مرز در مختصات قطبی

بنابراین مرزخارجی را می‌توان دایره‌ای با شعاع زیر تعریف کرد:

$$R_0 = \begin{cases} \dfrac{a}{2\cos(\theta)} & -\alpha \le \theta < \alpha \\ \dfrac{b}{2\sin(\theta)} & \alpha \le \theta < \pi-\alpha \\ -\dfrac{a}{2\cos(\theta)} & \pi-\alpha \le \theta < \pi+\alpha \\ -\dfrac{a}{2\sin(\theta)} & \pi+\alpha \le \theta < 2\pi-\alpha \end{cases} \tag{۴۶-۶}$$

سری فوریه این تابع عبارت است از:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{2\pi}\left(a\ln\left(\frac{1+\sin(\alpha)}{1-\sin(\alpha)}\right)+b\ln\left(\frac{1+\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}\right)\right) \\ &+\frac{1}{\pi}\left(4\left(a\sin(\alpha)-b\cos(\alpha)\right)+a\ln\left(\frac{1-\sin(\alpha)}{1+\sin(\alpha)}\right)+b\ln\left(\frac{1+\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}\right)\right)\cos(2\theta) \\ &+\frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{3}\left(a\sin(3\alpha)-b\cos(3\alpha)\right)-4\left(a\sin(\alpha)+\mathrm{b}\cos(\alpha)\right)+a\ln\left(\frac{1+\sin(\alpha)}{1-\sin(\alpha)}\right)+b\ln\left(\frac{1+\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}\right)\right)\cos(4\theta) \\ &+\frac{1}{\pi}\left(\begin{aligned}&\frac{4}{5}\left(a\sin(5\alpha)-b\cos(5\alpha)\right)-\frac{4}{3}\left(a\sin(3\alpha)+b\cos(3\alpha)\right)+4\left(a\sin(\alpha)-\mathrm{b}\cos(\alpha)\right)\\ &+a\ln\left(\frac{1-\sin(\alpha)}{1+\sin(\alpha)}\right)+b\ln\left(\frac{1+\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}\right)\end{aligned}\right)\cos(6\theta)+\ldots \end{aligned} \tag{۴۷-۶}$$

همچنین مقادیر جابجایی‌ها و منتجه‌های تنش در مرزهای خارجی ورق به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&w(x,y)=w(r,\theta)\\
&u_1(x,y)=u_1(r,\theta)\cos(\theta)-v_1(r,\theta)\sin(\theta)\\
&v_1(x,y)=u_1(r,\theta)\sin(\theta)+v_1(r,\theta)\cos(\theta)\\
&M_x=\frac{M_r}{2}\left(1+\cos(2\theta)\right)+\frac{M_\theta}{2}\left(1-\cos(2\theta)\right)-M_{r\theta}\sin(2\theta)\\
&M_y=\frac{M_r}{2}\left(1-\cos(2\theta)\right)+\frac{M_\theta}{2}\left(1+\cos(2\theta)\right)+M_{r\theta}\sin(2\theta)\\
&M_{xy}=\frac{1}{2}(M_r-M_\theta)\sin(2\theta)+M_{r\theta}\cos(2\theta)\\
&Q_x=Q_r\cos(\theta)-Q_\theta\sin(\theta)\\
&Q_y=Q_r\sin(\theta)+Q_\theta\cos(\theta)
\end{aligned}
\tag{۴۸-۶}
$$

برای یک ورق مستطیلی دارای گشودگی دایروی، بر اساس حل ارائه شده در فصل چهارم، منتجه‌های تنش پیش‌کمانش برای حالت بارگذاری یکنواخت تک محوره به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&N_r=a_{00}+a_{20}\cos(2\theta)+(a_{31}r+a_{33}r^3)\cos(3\theta)+(a_{42}r^2+a_{44}r^4)\cos(4\theta)+(a_{53}r^3+a_{55}r^5)\cos(5\theta)+\ldots\\
&N_\theta=b_{00}+(b_{20}+b_{22}r^2)\cos(2\theta)+(b_{31}r+b_{33}r^3)\cos(3\theta)+(b_{42}r^2+b_{44}r^4)\cos(4\theta)+(b_{53}r^3+b_{55}r^5)\cos(5\theta)+\ldots\\
&N_{r\theta}=(c_{20}+c_{22}r^2)\sin(2\theta)+(c_{31}r+c_{33}r^3)\sin(3\theta)+(c_{42}r^2+c_{44}r^4)\sin(4\theta)+(c_{53}r^3+c_{55}r^5)\sin(5\theta)+\ldots
\end{aligned}
\tag{۴۹-۶}
$$

برای حل معادلات پایداری، روابط (۶-۴۹) در قسمت سوم رابطه (۶-۹) جایگذاری می‌شوند. در این صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل شده با مشتقات جزئی و با ضرایب متغیر برحسب r و θ به‌دست می‌آید. برای حل این معادلات، جواب به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&u_1(r,\theta)=u_1(r)+\sum_{n=1}^{N}u_{1nc}(r)\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{N}u_{1ns}(r)\sin(n\theta)\\
&v_1(r,\theta)=v_1(r)+\sum_{n=1}^{N}v_{1nc}(r)\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{N}v_{1ns}(r)\sin(n\theta)\\
&w(r,\theta)=w(r)+\sum_{n=1}^{N}w_{nc}(r)\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{N}w_{ns}(r)\sin(n\theta)
\end{aligned}
\tag{۵۰-۶}
$$

با جایگذاری روابط (۶-۵۰) در معادلات پایداری و جداسازی ضرایب $\cos(n\theta)$ و $\sin(n\theta)$ در معادلات حاصل، یک دستگاه معادلات برحسب توابع $u_1(r),v_1(r),w(r),u_{1nc}(r),v_{1nc}(r),w_{nc}(r),u_{1ns}(r),v_{1ns}(r),w_{ns}(r)$ حاصل می‌شود. این دستگاه معادلات به صورت کوپل شده و دارای ضرایب متغیر برحسب r است. برای حل این معادلات می‌توان از روش حلقه زدن که در قسمت قبل توضیح داده شد، استفاده نمود. پس از حل معادلات به روش حلقه زدن، باید شرایط مرزی در لبه گشودگی و لبه‌های خارجی ورق و نیز شرایط پیوستگی در مرز حلقه‌ها اعمال شوند. شرایط

مرزی در لبه گشودگی بر اساس روابط (۶-۱۰) بیان می‌شود. همچنین شرایط مرزی در لبه‌های خارجی ورق به صورت زیر نوشته می شوند (روابط (۲-۲۱) تا (۲-۲۳)):

شرایط مرزی آزاد:

$$x = \pm a/2 : Q_x - N_x^0 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad M_x = 0, \quad M_{xy} = 0$$
$$y = \pm b/2 : Q_y - N_y^0 \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad M_y = 0, \quad M_{xy} = 0$$

شرایط مرزی گیردار:

$$x = \pm a/2 : w = 0, \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0$$
$$y = \pm b/2 : w = 0, \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0$$

شرایط مرزی ساده:

$$x = \pm a/2 : w = 0, \quad M_x = 0, \quad v_1 = 0$$
$$y = \pm b/2 : w = 0, \quad M_y = 0, \quad u_1 = 0$$

براساس این فرمول بندی، اعمال شرایط مرزی در مرز گشودگی به‌راحتی قابل انجام است، اما شرایط مرزی در لبه‌های ورق را نمی‌توان به‌راحتی اعمال کرد. با توجه به نتایج مطلوب به‌دست آمده مربوط به اعمال شرایط مرزی با استفاده از روش انتگرالی برای محاسبه مولفه‌های میدان تنش پیش‌کمانش که درفصل چهارم توضیح داده شد، به نظر می‌رسد در مساله حاضر نیز می‌توان از روشی مشابه برای اعمال شرایط مرزی در لبه-های ورق استفاده نمود . انجام این کار به مطالعه و صرف زمان بیشتری نیاز دارد که در این رساله میسر نشد و به عنوان یکی از موضوعات برای ادامه تحقیق حاضر و توسعه آن پیشنهاد می‌شود.

۶-۵ جمع بندی

در این فصل کمانش ورق‌های حلقوی با بارگذاری متقارن در لبه‌های داخلی و خارجی مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا میدان تنش پیش‌کمانش ورق برای این نوع بارگذاری به‌دست آمد. پس از آن معادلات پایداری به‌صورت بی‌بعد نوشته شدند. برای حل این معادلات، دو حالت متقارن محوری و نامتقارن به‌صورت جداگانه بررسی شدند. در حالت متقارن محوری، از تئوری اغتشاشات به منظور حل معادلات و محاسبه بار کمانش استفاده شد. در حالت نامتقارن، به دلیل پیچیدگی معادلات، استفاده از تئوری اغتشاشات امکان‌پذیر نمی‌باشد و به همین دلیل

از روش حلقه زدن برای حل معادلات پایداری در این حالت استفاده شد. همچنین به منظور ارزیابی نتایج به‌دست آمده، مقادیر بار کمانش با نتایج دیگر مراجع و نیز نتایج روش DQ که در فصل سوم توضیح داده شد، مقایسه شدند. در انتهای فصل نیز در مورد امکان استفاده از حل به‌دست آمده برای ورق حلقوی به منظور حل معادلات پایداری در یک ورق مستطیلی دارای گشودگی دایروی توضیح داده شد.

فصل هفتم:

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۷-۱ نتیجه‌گیری

در این رساله کمانش ورق‌های همسانگرد دارای گشودگی دایروی و مربعی مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور ابتدا معادلات تعادل اولیه برای محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش حل شدند. پس از محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش، در فصل ششم کمانش ورق‌های مستطیلی و در فصل هفتم کمانش ورق‌های حلقوی مطالعه شد و تاثیر عوامل مختلف مانند نوع بارگذاری، اندازه گشودگی و شرایط مرزی بر بار کمانش مورد بررسی قرار گرفت. از دستاوردهای اصلی این رساله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- برای حل معادلات تعادل اولیه و محاسبه میدان تنش پیش‌کمانش، دو روش ارائه شد: روش اول بر اساس محاسبه توابع پتانسیل مختلط با استفاده از انتگرال شوارتز و روش دوم استفاده از بسط تابع تنش در مختصات قطبی و حل معادلات دیفرانسیل حاصل.

- در هر دو روش بیان شده، به منظور اعمال شرایط مرزی در لبه‌های خارجی ورق، از یک رابطه انتگرالی برای به‌دست آوردن یک دستگاه معادلات جبری و محاسبه ثوابت مساله استفاده شد. این انتگرال که از آن به عنوان انتگرال شرایط مرزی نام برده شد، بر اساس اصل کار مجازی به‌دست آمد. نتایج حاصل نشان می‌دهد که این روش در عین سادگی، شرایط مرزی را با دقت بالایی ارضا می‌کند و بنابراین قابل تعمیم به مسائل دیگر که دارای شرایط مرزی پیچیده هستند، می‌باشد.

- برتری این روش نسبت به روش نقطه‌گذاری[1]، عدم نیاز به انتخاب نقاط گسسته برروی مرزها و اعمال شرایط مرزی در این نقاط است. همین امر باعث افزایش دقت می‌شود، چرا که در روش نقطه‌گذاری چگونگی انتخاب تعداد نقاط برروی مرز و نیز فاصله‌ی آنها با یکدیگر بر روی نتایج تاثیر می‌گذارد. بنابراین می‌توان گفت روش ارائه شده دراین رساله از عمومیت بیشتری برخوردار است.

- در این رساله از توابع مربوط به شکل مد ارتعاشی تیر اویلر-برنولی به عنوان توابع مشخصه در روش ریتز استفاده شد. مقایسه بارکمانش به‌دست آمده با استفاده از روش ریتز با نتایج حل عددی و تجربی نشان می‌دهد که این توابع با دقت بالایی قادر به پیش‌بینی رفتار کمانشی ورق می‌باشند.

[1] Collocation

- در این رساله کمانش ورق‌های دارای گشودگی دایروی تحت حالت‌های مختلف بارگذاری برشی و فشاری یکنواخت و غیریکنواخت، شامل بارگذاری کسینوسی و سهمی شکل و به صورت تک محوره و دومحوره مورد بررسی قرار گرفت و نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه شد.

- به منظور بررسی تاثیر میدان تنش پیش‌کمانش بر روی بار کمانش ورق دارای گشودگی، نمودار حساسیت بارکمانش نسبت به این میدان برای حالت‌های مختلف رسم شد. توضیح این‌که با مرور مقالات، مشاهده شد که در تعدادی از تحقیقات صورت گرفته در زمینه کمانش ورق‌های دارای گشودگی، میدان تنش پیش‌کمانش به شکل یکنواخت و برابر با بارگذاری در لبه‌های ورق درنظر گرفته شده است؛ درحالی که وجود گشودگی باعث ایجاد تغییر در توزیع تنش ورق شده و همین امر بررسی کمانش این نوع ورق‌ها را دشوار می‌کند.

- در یک ورق حلقوی با بارگذاری متقارن، میدان تنش پیش‌کمانش تابعی از فاصله شعاعی r بوده و بنابراین حل تحلیلی معادلات پایداری دشوار است. در این رساله به منظور محاسبه بارکمانش ورق حلقوی در حالت متقارن محوری، از تئوری اغتشاشات استفاده شد. نتایج به‌دست آمده نشان‌دهنده دقت بالای این روش برای محاسبه بارکمانش به خصوص برای نسبت شعاع کوچک است.

- نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که بار کمانش ورق تا حد زیادی وابسته به شرایط مرزی است. در ورق‌های حلقوی با افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی، بار کمانش برای اکثر شرایط مرزی افزایش می‌یابد، درحالی که در ورق‌های مستطیلی، بار کمانش عموما با افزایش اندازه گشودگی کاهش می‌یابد و تنها در بعضی حالت‌ها و در ورق‌ها با شرایط مرزی CCCC و SSSS، بار کمانش با افزایش اندازه گشودگی زیاد می‌شود. خلاصه نتایج به‌دست آمده برای حالت‌های مختلف را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

۷-۱-۱ ورق مستطیلی بدون گشودگی

- بار کمانش به‌دست آمده با استفاده از تئوری کلاسیک همواره بیشتر از مقدار آن براساس تئوری تنش برشی مرتبه اول می‌باشد.

- برای بارگذاری سهمی شکل، با افزایش نسبت ظاهری ورق، مقاومت آن در مقابل کمانش کاهش می-یابد، درحالی که برای حالت‌های دیگر بارگذاری، افزایش این نسبت می‌تواند بارکمانش را کاهش و یا افزایش دهد.
- بار کمانش ورق تا حد زیادی وابسته به نوع بارگذاری می‌باشد به‌طوریکه برای بارگذاری با معادل استاتیکی یکسان، یک ورق با بارگذاری سهمی شکل دارای بیشترین بار کمانش بوده و پس از آن بیشترین بار کمانش مربوط به بارگذاری یکنواخت می‌باشد.

۷-۱-۲ ورق مستطیلی دارای گشودگی دایروی

- در بارگذاری یکنواخت، بیشترین و کمترین بار کمانش به ترتیب مربوط به ورق‌ها با شرایط مرزی CCCC و SSFF است.
- در بارگذاری یکنواخت، بار کمانش در حالت دو محوره همواره کمتر از بارگذاری تک محوره است.
- حساسیت بار کمانش به توزیع تنش پیش‌کمانش تا حد زیادی وابسته به شرایط مرزی و نیز اندازه گشودگی است. این حساسیت با افزایش اندازه گشودگی زیاد می‌شود، زیرا در این شرایط تغییرات میدان تنش پیش‌کمانش نسبت به ورق بردن گشودگی بیشتر است.
- در حالت بارگذاری یکنواخت تک محوره، بار کمانش ورق‌های SSFF کمترین حساسیت و بار کمانش ورق‌های CCFF بیشترین حساسیت را نسبت به تنش پیش‌کمانش دارد. در بارگذاری یکنواخت دو محوره ورق‌های SSFF و CCSF به ترتیب کمترین و بیشترین حساسیت را نسبت به میدان تنش پیش‌کمانش دارند.
- تفاوت بین بار کمانش محاسبه شده با استفاده ازتئوری CPT وFSDT، وابسته به شرایط مرزی ورق بوده و دقت تئوری CPT با افزایش ضخامت ورق کاهش می‌یابد، زیرا در این تئوری اثر تغییرات برشی در راستای ضخامت در نظر گرفته نمی‌شود، در حالی که با افزایش ضخامت، تاثیر آن بر روی بار کمانش قابل توجه است.
- در بارگذاری کسینوسی، بار کمانش در حالت تک محوره همواره از دومحوره بیشتر است. همچنین در بارگذاری تک محوره، بار کمانش با افزایش اندازه سوراخ همواره کاهش می‌یابد، اما در حالت دو محوره و برای ورق CCCC، بار کمانش ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. در حالت بارگذاری کسینوسی، بیشترین بار کمانش مربوط به ورق CCCC و کمترین آن مربوط به ورق SSFF است.

- در بارگذاری سهمی شکل و در حالت تک محوره به جز ورق با شرایط مرزی CCSF، بار کمانش نسبت به حالت دو محوره بیشتر است. بار کمانش ورق SSSS در این نوع بارگذاری و در هردو حالت تک محوره و دو محوره، با افزایش اندازه سوراخ ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

- ورق CCCC تحت بارگذاری سهمی شکل تک محوره رفتار سینوسی دارد، به‌طوری که با افزایش اندازه سوراخ، بار کمانش ابتدا کاهش، سپس افزایش و مجددا کاهش می‌یابد که این رفتار در هیچ یک از نمودارهای دیگر مشاهده نمی‌شود.

- در حالت دومحوره، بار کمانش ورق تحت بارگذاری سهمی شکل همواره بیشتر از بارگذاری کسینوسی است، اما در حالت تک محوره، تفاوت بین بارکمانش در این دونوع بارگذاری وابسته به شرایط مرزی ورق است.

- در بین کلیه حالتهای بررسی شده، بیشترین بار کمانش مربوط به ورق CCCC در بارگذاری سهمی شکل تک محوره و کمترین بار کمانش مربوط به ورق SSFF در بارگذاری کسینوسی تک محوره می‌باشد. مقدار بار کمانش بی‌بعد شده برای این دو حالت به ترتیب برابر با 12.438 و 0.426 است.

۷-۱-۳ ورق مستطیلی دارای گشودگی مربعی

- برای ورق با نسبت ظاهری 0.5، در شرایط مرزی SSSS بار کمانش با افزایش اندازه گشودگی زیاد می‌شود و در شرایط مرزی CCCC بار کمانش ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود. در بقیه حالتها، بار کمانش با افزایش اندازه گشودگی همواره کاهش می‌یابد.
- برای هر نسبت ظاهری، بیشترین بارکمانش مربوط به ورق CCCC و کمترین آن مربوط به ورق SSFF است. همچنین در بین نسبت‌های ظاهری مختلف، بیشترین بار کمانش مربوط به ورق بدون گشودگی با نسبت ظاهری یک و شرایط مرزی CCCC و کمترین بار کمانش مربوط به ورق با نسبت ظاهری 0.5، با اندازه گشودگی $L/b=0.53$ و شرایط مرزی SSFF است.
- در ورق با گشودگی مربعی نیز همانند گشودگی دایروی، با افزایش اندازه گشودگی حساسیت بار کمانش نسبت به میدان تنش پیش‌کمانش افزایش می‌یابد. بیشترین حساسیت مربوط به ورق با نسبت ظاهری دو و شرایط مرزی CCCC و کمترین آن مربوط به ورق با نسبت ظاهری یک و شرایط مرزی SSFF می‌باشد.

۷-۱-۴ ورق حلقوی

در این رساله برای محاسبه بار کمانش ورق حلقوی در مدهای متقارن محوری از روش اغتشاشات و در مدهای نا متقارن از روش حلقه زدن استفاده شد و نتایج زیر به‌دست آمد:

- نرخ همگرایی بار کمانش در روش اغتشاشات به نوع شرایط مرزی وابسته است و برای ورق‌های SF بیشتر از ورق‌های CF است.
- بار کمانش ورق‌های SF و FS درحالت متقارن محوری باهم برابر است و این ورق‌ها به یک شکل کمانش می کنند.
- بیشترین و کمترین بارکمانش در مد متقارن محوری به ترتیب مربوط به ورق‌های CC و SF است.
- تاثیر نسبت شعاع داخلی به خارجی بر بار کمانش وابسته به شرایط مرزی است، به‌طوری که در ورق‌های CC ، SS و FC بار کمانش با افزایش نسبت شعاع بیشتر شده و در ورق‌های SF و FS کاهش می‌یابد.
- بار کمانش مدهای بالا تر می‌تواند کوچکتر از بار کمانش مدهای پایین تر باشد که این موضوع به شرایط مرزی و نیز نسبت شعاع وابسته است. این بدان معنی است که شماره مد مربوط به کوچکترین بار کمانش یا بار کمانش بحرانی، لزوما مد متقارن محوری $(n=0)$ نیست و وابسته به شرایط مرزی و نیز هندسه ورق می‌باشد.

۷-۲ پیشنهاد ها

از جمله موضوعات برای مطالعه و تحقیق بیشتر می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- استفاده از روش حل ارائه شده برای حل مساله کمانش ورق‌های کامپوزیت و نیز ورق‌های مدرّج تابعی دارای گشودگی و بررسی تاثیر پارامترهای مختلف در بار کمانش این ورق‌ها.
- بررسی کمانش ورق‌های دارای گشودگی تحت بار حرارتی و نیز تحت بار حرارتی و مکانیکی به‌صورت همزمان.
- بررسی کمانش ورق‌های دارای گشودگی با شرایط مرزی الاستیک و نیز شرایط مرزی غیریکنواخت در لبه‌ها.
- بررسی کمانش ورق‌ها با گشودگی واقع در نقاط مختلف ورق (غیر از مرکز).

- بررسی امکان تعمیم روش انتگرال شرایط مرزی برای حل مساله پیش‌کمانش در پوسته‌های دارای گشودگی.
- استفاده از حل ارائه شده برای تحلیل ارتعاشات ورق‌های دارای گشودگی که تحت بارگذاری داخل صفحه‌ای قرار دارند.
- استفاده از حل به‌دست آمده برای ورق حلقوی به منظور محاسبه بار کمانش یک ورق مستطیلی دارای گشودگی دایروی.

۸-مراجع

[1] Ventsel E. and Krauthammer T., (2001) "Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications": CRC Press, New York.

[2] Kubiak T., (2013) "Static and Dynamic Buckling of Thin-Walled Plate Structures": Springer, London.

[3] Wang C. and Wang C. Y., (2004) "Exact Solutions for Buckling of Structural Members": CRC Press, Boca Raton.

[4] Bloom F. and Coffin D., (2000) "Handbook of Thin Plate Buckling and Postbuckling": CRC Press, New York.

[5] Nemeth M. P., (1996) "Buckling and Postbuckling Behavior of Laminated Composite Plates with a Cutout ", NASA Technical Paper 3587.

[6] Amabili M., (2008) "Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates": Cambridge University Press, New York.

[7] Reddy J. N., (1990) "A General Non-Linear Third-Order Theory of Plates with Moderate Thickness", *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 25, No. 6, pp. 677-686.

[8] Koiter W. T., (1945) "Over de Stabiliteit van het Elastisch Evenwicht", Ph.D. Thesis, Techische Hooge School at Delft, Amsterdam, English translation: Riks E. (1969), "The Stability of Elastic Equilibrium".

[9] Timoshenko S. P. and Gere J. M., (1961) "Theory of Elastic Stability": McGraw-Hill, New York.

[10] Smith T., (1969) "The Local Buckling of Box Girders Under Bending Stresses", *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 11, No. 7, pp. 603-612.

[11] Grimaldi A. and Pignataro M., (1979) "Postbuckling Behavior of Thin-Walled Open Cross-Section Compression Members", *Journal of Structural Mechanics,* Vol. 7, No. 2, pp. 143-159.

[12] Koiter W. T., (1981) "Elastic Stability, Buckling and Post-Buckling Behavior", *Proceedings of the IUTAM Symposium on Finite Elasticity,* Springer Netherlands.

[13] Davids A. J. and Hancock G. J., (1986) "Compression Tests of Long Welded I-Section Columns", *Journal of Structural Engineering,* Vol. 112, No. 10, pp. 2281-2297.

[14] Mulligan G. P. and Pekoz T., (1984) "Locally Buckled Thin-Walled Columns", *Journal of Structural Engineering,* Vol. 110, No. 11, pp. 2635-2654.

[15] Lekhnitskii S. G., (1963) "Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body": Holden-Day.

[16] Ambartsumian S. A., (1970) "Theory of Anisotropic Plates: Strength, Stability, Vibration": Technomic Pub. Co.

[17] Ashton J. E. and Whitney J. M., (1970) "Theory of Laminated Plates": CRC Press, New York.

[18] Noor A. K., (1975) "Stability of Multilayered Composite Plates", *Fibre Science and Technology,* Vol. 8, No. 2, pp. 81-89.

[19] Cagdas I. U. and Adali S., (2013) "Buckling of Cross-Ply Laminates Subject to Linearly Varying Compressive Loads and in-Plane Boundary Restraints", *Journal of Thermoplastic Composite Materials,* Vol. 26, No. 2, pp. 193-215.

[20] Sherbourne A. N. and Pandey M. D., (1992) "Effects of in-Plane Restraints on the Stability of Laminated Composite Plates", *Composite Structures,* Vol. 20, No. 2, pp. 73-81.

[21] Harris G., (1975) "The Buckling of Orthotropic Rectangular Plates, Including The Effect of Lateral Edge Restraint", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 11, No. 7, pp. 877-885.

[22] Ziegler H., (1983) "The influence of inplane Deformation on the Buckling Loads of Isotropic Elastic Plates", *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 53, No. 1, pp. 61-72.

[23] Nemeth M. P., (2004) "Buckling of Long Compression-Loaded Anisotropic Plates Restrained Against inplane Lateral and Shear Deformations", *Thin-Walled Structures,* Vol. 42, No. 5, pp. 639-685.

[24] Jana P. and Bhaskar K., (2006) "Stability Analysis of Simply-Supported Rectangular Plates Under Non-Uniform Uniaxial Compression Using Rigorous and Approximate Plane Stress Solutions", *Thin-Walled Structures,* Vol. 44, No. 5, pp. 507-516.

[25] Jana P. and Bhaskar K., (2007) "Analytical Solutions for Buckling of Rectangular Plates Under Non-Uniform Biaxial Compression Or Uniaxial Compression with in-Plane Lateral Restraint", *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 49, No. 10, pp. 1104-1112.

[26] Bodaghi M. and Saidi A. R., (2010) "Stability Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates Under Nonlinearly Varying in-Plane Loading Resting on Elastic Foundation", *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 81, No. 6, pp. 765-780.

[27] Kumar Panda S. and Ramachandra L. S., (2010) "Buckling of Rectangular Plates with Various Boundary Conditions Loaded By Non-Uniform inplane Loads", *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 52, No. 6, pp. 819-828.

[28] Bharat Kalyan J. and Bhaskar K., (2008) "An Analytical Parametric Study on Buckling of Non-Uniformly Compressed Orthotropic Rectangular Plates", *Composite Structures,* Vol. 82, No. 1, pp. 10-18.

[29] Kang J .H. and Leissa A. W., (2005) "Exact Solutions for the Buckling of Rectangular Plates Having Linearly Varying in-Plane Loading on Two Opposite Simply Supported Edges", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 42, No. 14, pp. 4220-4238.

[30] Leissa A. W. and Kang J. H., (2002) "Exact Solutions for Vibration and Buckling of An SS-C-SS-C Rectangular Plate Loaded By Linearly Varying in-Plane Stresses", *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 44, No. 9, pp. 1925-1945 .

[31] Bert C. W. and Devarakonda K. K., (2003) "Buckling of Rectangular Plates Subjected to Nonlinearly Distributed in-Plane Loading", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 40, No. 16, pp. 4097-4106.

[32] Bellman R. and Casti J., (1971) "Differential Quadrature and Long-Term Integration", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* Vol. 34, No. 2, pp. 235-238.

[33] Wang X., Gan L. and Zhang Y., (2008) "Differential Quadrature Analysis of the Buckling of Thin Rectangular Plates with Cosine-Distributed Compressive Loads on Two Opposite Sides", *Advances in Engineering Software,* Vol. 39, No. 6, pp. 497-504.

[34] Wang X., Wang X. and Shi X., (2006) "Differential Quadrature Buckling Analyses of Rectangular Plates Subjected to Non-Uniform Distributed in-Plane Loadings", *Thin-Walled Structures*, Vol. 44, No. 8, pp. 837-843.

[35] Wang X., Wang X. and Shi X., (2007) "Accurate Buckling Loads of Thin Rectangular Plates Under Parabolic Edge Compressions By the Differential Quadrature Method", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, No. 4, pp. 447-453.

[36] Jafari A. A. and Eftekhari S. A., (2011) "An Efficient Mixed Methodology for Free Vibration and Buckling Analysis of Orthotropic Rectangular Plates", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 218, No. 6, pp. 2670-2692.

[37] Martin J., (1972) "Buckling and Postbuckling of Laminated Composite Square Plates with Reinforced Central Circular Holes", Ph.D. Thesis, Case Western Reserve University.

[38] Marshall I., Little W. and Tayeby M., (1984) "The Stability of Composite Panels with Holes", Reinforced Plastics Congress, Brighton, UK.

[39] Nemeth M. P., stein M. and Johnson E. R., (1986) "An Approximate Buckling Analysis for Rectangular Orthotropic Plates with Centrally Located Cutouts ",NASA Technical paper 2528.

[40] Klang E. C. and Owen V., (1989) "Shear Buckling of Specially Orthotropic Plates with Centrally Located Cutouts", NASA Research Grant NAG-1-917, Semi Annual Report.

[41] Britt V., (1994) "Shear and compression buckling analysis for anisotropic panels with elliptical cutouts", *AIAA Journal,* Vol. 32, No. 11, pp. 2293-2299.

[42] Britt V. O., (1992) "Analysis of Stresses in Finite Anisotropic Panels with Centrally Located Cutouts", *Ninth DOD/NASA/FAA Conference on Fibrous Composites in Structural Design*, pp. 1485-1505.

[43] Jones K. M. and Klang E. C., (1992) "Buckling Analysis of Fully Anisotropic Plates Containing Cutouts and Elastically Restrained Edges", AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Dallas, TX.

[44] Cheung Y. K. and Kong J., (1993) "Linear Elastic Stability Analysis of Shear-Deformable Plates Using A Modified Spline Finite Strip Method", *Computers and Structures,* Vol. 47, No. 2, pp. 189-192.

[45] Ghannadpour S. A. M., Ovesy H. R. and Nassirnia M., (2012) "Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Under Thermal Loadings Using the Finite Strip Method", *Computers and Structures,* Vol. 108-109, pp. 93-99.

[46] Ovesy H. R. and Fazilati J., (2012) "Buckling and Free Vibration Finite Strip Analysis of Composite Plates with Cutout Based on Two Different Modeling Approaches", *Composite Structures*, Vol. 94, No. 3, pp. 1250-1258.

[47] Ovesy H. R., Ghannadpour S. A. M. and Zia-Dehkordi E., (2013) "Buckling Analysis of Moderately Thick Composite Plates and Plate Structures Using An Exact Finite Strip", *Composite Structures*, Vol. 95, pp. 697-704.

[48] Fazilati J. and Ovesy H. R., (2013) "Parametric instability of Laminated Longitudinally Stiffened Curved Panels with Cutout Using Higher Order FSM", *Composite Structures*, Vol. 95, pp. 691-696.

[49] Cheung Y., (1968) "The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates with Two Opposite Simply Supported Ends," *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 40, pp. 1-7.

[50] Cheung Y .K., (1976) "Finite Strip Method in Structural Analysis ": Elsevier.

[51] Cheung M. S., Li W. and Chidiac S., (1996) "Finite Strip Analysis of Bridges": CRC Press.

[52] Barut A. and Madenci E., (2010) "A Complex Potential-Variational formulation for Thermo–Mechanical Buckling Analysis of Flat Laminates with An Elliptic Cutout", *Composite Structures*, Vol. 92, No. 12, pp. 2871-2884.

[53] Herman R. J., (1982) "Postbuckling Behavior of Graphite/Epoxy Cloth Shear Panels with 45 deg-Flanged Lightening Holes," Ph.D. Thesis, Naval Postgraduate School of Monterey, California.

[54] Nemeth M. P., (1991) "Buckling and Postbuckling Behavior of Compression-Loaded Isotropic Plates with Cutouts", *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 2, pp. 313-314.

[55] Nemeth M. P., (1988) "Buckling Behavior of Compression-Loaded Symmetrically Laminated Angle-Ply Plates with Holes", *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 3, pp. 330-336.

[56] Nemeth M. P., (1990) "Buckling and Postbuckling Behavior of Square Compression-Loaded Graphite-Epoxy Plates with Circular Cutouts," NASA TP-3007 Report.

[57] Yasui Y. and Tsukamura K., (1988) "Buckling Strength of Rectangular FRP Plate with A Hole(in the Case of CFRP and GFRP Cross-Ply Laminated Plates)", *Journal of the Society of Materials Science*, Vol. 37, No. 420, pp. 1050-1056.

[58] Wu H. C. and Mu B., (2003) "On Stress Concentrations for Isotropic/Orthotropic Plates and Cylinders with A Circular Hole", *Composites: Part B*, Vol. 34, No. 2, pp. 127-134.

[59] Ghannadpour S. A. M., Najafi A. and Mohammadi B., (2006) "On the Buckling Behavior of Cross-Ply Laminated Composite Plates due to Circular/Elliptical Cutouts", *Composite Structures*, Vol. 75, No. 1, pp. 3-6.

[60] Anil V., Upadhyay C. S. and Iyengar N. G. R., (2007) "Stability Analysis of Composite Laminate with and without Rectangular Cutout Under Biaxial Loading", *Composite Structures*, Vol. 80, No. 1, pp. 92-104.

[61] Kumar D. and Singh S. B., (2013) "Effects of Flexural Boundary Conditions on Failure and Stability of Composite Laminate with Cutouts Under Combined in-Plane Loads", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 45, No. 1, pp. 657-665.

[62] Kumar D. and Singh S. B., (2012) "Stability and Failure of Composite Laminates with Various Shaped Cutouts Under Combined in-Plane Loads", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 2, pp. 142-149.

[63] Kumar D. and Singh S. B., (2010) "Effects of Boundary Conditions on Buckling and Postbuckling Responses of Composite Laminate with Various Shaped Cutouts", *Composite Structures*, Vol. 92, No. 3, pp. 769-779.

[64] Topal U. and Uzman Ü., (2007) "Maximization of Buckling Load of Laminated Composite Plates with Central Circular Holes Using MFD Method", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 35, No. 2, pp. 131-139.

[65] Ouinas D. and Achour B., (2013) "Buckling Analysis of Laminated Composite Plates [(Θ/−Θ)] Containing An Elliptical Notch", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 55, pp. 575-579.

[66] Natarajan S., Chakraborty S., Ganapathi M. and Subramanian M., (2014) "A Parametric Study on the Buckling of Functionally Graded Material Plates with internal Discontinuities Using the Partition of Unity Method", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 44, pp. 136-147.

[67] Natarajan S., Deogekar P. S., Manickam G. and Belouettar S., (2014) "Hygrothermal Effects on the Free Vibration and Buckling of Laminated Composites with Cutouts", *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 848-855.

[68] Aydin Komur M., Sen F., Ataş A. and Arslan N., (2010) "Buckling Analysis of Laminated Composite Plates with An Elliptical/Circular Cutout Using FEM", *Advances in Engineering Software* ,Vol. 41, No. 2, pp. 161-164.

[69] Kim Y. H. and Noor A. K., (1996) "Buckling and Postbuckling of Composite Panels with Cutouts Subjected to Combined Loads", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 22, No. 2, pp. 163-185.

[70] Noor A. K., Starnes J. H .and Peters J. M., (1994) "Thermomechanical Buckling of Multilayered Composite Panels with Cutouts", *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 7, pp. 1507-1519.

[71] Rezaeepazhand J. and Jafari M., (2005) "Stress Analysis of Perforated Composite Plates", *Composite Structures*, Vol. 71, No. 3, pp. 463-468.

[72] Rezaeepazhand J. and Jafari M., (2010) "Stress Concentration in Metallic Plates with Special Shaped Cutout", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, No. 1, pp. 96-102.

[۷۳] جعفری م. و پژند ج. ر.، (۲۰۱۲) "بررسی تاثیر نرمی گشودگی در تحلیل تنش صفحات با گشودگی مرکزی و تحت کشش"، مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه ها و شاره ها، دوره ۱، شماره ۲، صفحات ۲۷-۳۵.

[۷۴] مروت ف. و رحیمی غ.، (۱۳۸۷) "تحلیل ورق و پنل های با گشودگی از جنس کامپوزیت"، اولین کنفرانس پتروشیمی ایران, تهران، شرکت ملی صنایع پتروشیمی.

[75] Knauss J. F. and Henneke E. G., (1981) "The Compressive Failure of Graphite/Epoxy Plates with Circular Holes," *Journal of Composites, Technology and Research*, Vol. 3, No. 2, pp. 64-75.

[76] Bailey R. and Wood J., (1996) "Stability Characteristics of Composite Panels with Various Cutout Geometries", *Composite Structures*, Vol. 35, No. 1, pp. 21-31.

[77] Okutan Baba B. and Baltaci A., (2007) "Buckling Characteristics of Symmetrically and Antisymmetrically Laminated Composite Plates with Central Cutout", *Applied Composite Materials*, Vol. 14, No. 4, pp. 265-276.

[78] Shakerley T. M. and Brown C. J., (1996) "Elastic Buckling of Plates with Eccentrically Positioned Rectangular Perforations", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 38, No. 8, pp. 825-838.

[79] Tham L. G., Chan A. H. C. and Cheung Y. K., (1986) "Free Vibration and Buckling Analysis of Plates By the Negative Stiffness Method", *Computers and Structures*, Vol. 22, No. 4, pp. 687-692.

[80] Brown C. J., (1990) "Elastic Buckling of Perforated Plates Subjected to Concentrated Loads", *Computers and Structures*, Vol. 36, No. 6, pp. 1103-1109.

[81] Singh A. V. and Paul U. K., (2003) "Finite Displacement Static Analysis of Thin Plate with An Opening, A Variational Approach", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 16, pp. 4135–4151.

[82] Prabhakara D. L. and Datta P. K., (1997) "Vibration, Buckling and Parametric instability Behaviour of Plates with Centrally Located Cutouts Subjected to in-Plane Edge Loading (Tension or Compression)", *Thin-Walled Structures*, Vol. 27, No. 4, pp. 287-310.

[83] Shimizu S. and Yoshida S., (1991) "Buckling of Plates with A Hole Under Tension", *Thin-Walled Structures*, Vol. 12, No. 1, pp. 35-49.

[84] Harada M. and Fujikubo M., (2001) "Estimation of Buckling and Ultimate Strength of Rectangular Plates with Cutout," *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, Vol. 190, No. 190, pp. 723-729.

[85] El-Sawy K. M. and Nazmy A. S., (2001) "Effect of Aspect Ratio on the Elastic Buckling of Uniaxially Loaded Plates with Eccentric Holes", *Thin-Walled Structures*, Vol. 39, No. 12, pp. 983–998.

[86] Moen C. D. and Schafer B. W., (2009) "Elastic Buckling of Thin Plates with Holes in Compression Or Bending", *Thin–Walled Structures*, Vol. 47, No. 12, pp. 1597-1607.

[87] Aydin Komur M. and Sonmez M., (2008) "Elastic Buckling of Rectangular Plates Under Linearly Varying in-Plane Normal Load with A Circular Cutout", *Mechanics Research Communications*, Vol. 35, No. 6, pp. 361-371.

[88] Maiorana E., Pellegrino C. and Modena C., (2008) "Linear Buckling Analysis of Perforated Plates Subjected to Localised Symmetrical Load", *Engineering Structures*, Vol. 30, No. 11, pp. 3151-3158.

[89] El-Sawy K. M. and Ikbal Martini M., (2007) "Elastic Stability of Bi-Axially Loaded Rectangular Plates with A Single Circular Hole", *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, No. 1, pp. 122-133.

[۹۰] فاضلی م.، (۱۳۸۷) "بررسی اثر گشودگی بیضی شکل بر کمانش پوسته های استوانه ای تحت بار محوری به روش اجزا محدود"، شانزدهمین کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[91] Ko W. L. and Edwards C., (1998) "Mechanical and Thermal-Buckling Behavior of Rectangular Plates with Different Cutouts", Dryden Flight Research Center, National Aeronautics and Space Administration.

[۹۲] فرجیان ی. و شریعتی م.، (۱۳۸۷) "بررسی تجربی و عددی تاثیر نقص اولیه در رفتار کمانشی و بار بحرانی ورق مستطیلی دارای گشودگی با دو لبه صلب"، شانزدهمین کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[۹۳] شریعتی م. و دادرسی ع.، (۱۳۸۷) "بررسی عددی و تجربی اثر عرض بارگذاری به روی کمانش صفحات مستطیلی دارای گشودگی"، شانزدهمین کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[94] Shariati M. and Dadrasi A., (2012) "Numerical and Experimental Investigation of Loading Band on Buckling of Perforated Rectangular Steel Plates," *Research Journal of Recent Sciences*, Vol. 10, No. 1, pp. 63-71

[۹۵] دادرسی ع. و شریعتی م.، (۱۳۸۷) "بررسی بارکمانش مخروط های ناقص فولادی دارای گشودگی با نسبت اضلاع مختلف"، هشتمین کنفرانس بین المللی انجمن هوا فضای ایران، اصفهان، شاهین شهر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر.

[96] Faradjian Y., Taheri Kahnamouei J., Shariati M. and Behjat B., (2012) "Experimental and Numerical investigation of Buckling in Rectangular Steel Plates with Groove-Shaped Cutouts", *Journal of Zhejiang University-Science A: Applied Physics and Engineering*, Vol. 13, No. 6, pp. 469-480.

[97] Reddy J. N., (2007) "Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells": CRC Press.

[98] Nemeth, (1984) "Buckling Behavior of Orthotropic Composite Plates with Centrally Located Cutouts", Ph.D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.

[99] Wang C., Reddy J. N. and Lee K., (2000) "Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions": Elsevier.

[100] Jones R. M., (2006) "Buckling of Bars, Plates, and Shells": Bull Ridge Corporation.

[101] O'neil P. V., (2011) "Advanced Engineering Mathematics": Cengage learning.

[102] Sadd M. H., (2005) "Elasticity: Theory, Applications and Numerics": Academic Press, India.

[103] Brush D. O. and Almroth B. O., (1975) "Buckling of Bars, Plates, and Shells": McGraw-Hill, New York.

[104] Logan D. L., (2011) "A First Course in the Finite Element Method": Cengage Learnin, US.

[105] Hibbett, Karlsson and Sorensen, (1998) "ABAQUS/standard: User's Manual" Vol. 1: Hibbitt, Karlsson & Sorensen.

[106] Bert C. W. and Malik M., (1996) "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: A Review", *Applied Mechanics Reviews,* Vol. 49, No. 1, pp. 1-28.

[107] Shu C. and Richards B. E., (1992) "Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-Dimensional incompressible Navier-Stokes Equations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* Vol. 15, No. 7, pp. 791-798.

[108] Shu C. and Richard B., (1992) "Parallel Simulation of incompressible Viscous Flows By Generalized Differential Quadrature", *Computing Systems in Engineering,* Vol. 3, No. 1-4 ,pp. 271-281.

[109] Savin G. N., (1961) "Stress Concentration Around Holes": Pergamon, New York.

[110] Sevenois R. D. B. and Koussios S., (2014) "Analytic Methods for Stress Analysis of Two-Dimensional Flat Anisotropic Plates with Notches: An Overview", *Applied Mechanics Reviews,* Vol. 66, No. 6, p. 060802 (10 Pages).

[111] Muskhelishvili N. I., (2013) "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity": Springer Science and Business Media, Translated from the Russian By J. R. M. Radok.

[112] Ritz W., (1909) "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik", *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* Vol. 135, pp. 1-61.

[113] Leissa A. W., (2005) "The Historical Bases of the Rayleigh and Ritz Methods", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 287, No. 4-5, pp. 961-978.

[114] Reddy J. N., (2002) "Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics": John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

[115] Reddy J. N., (2006) "An introduction to the Finite Element Method": McGraw-Hill, New York.

[116] Moreno-García P., dos Santos J. V. A. and Lopes H., (2017) "A Review and Study on Ritz Method Admissible Functions with Emphasis on Buckling and Free Vibration of Isotropic and Anisotropic Beams and Plates", *Archives of Computational Methods in Engineering,* pp. 1-31.

[117] Kumar Y., (2017) "The Rayleigh–Ritz Method for Linear Dynamic, Static and Buckling Behavior of Beams, Shells and Plates: A Literature Review", *Journal of Vibration and Control,* 107754631769472.

[118] Meirovitch L., (2010) "Fundamentals of Vibrations": Waveland Press, Long Grove, IL.

[119] Civalek Ö., (2007) "Three-Dimensional Vibration, Buckling and Bending Analyses of Thick Rectangular Plates Based on Discrete Singular Convolution Method", *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 49, No. 6, pp. 752-765.

[120] Sabir A. and Chow F., (1986) "Elastic Buckling of Plates Containing Eccentrically Located Circular Holes", *Thin-Walled Structures*, Vol. 4, No. 2, pp. 135-149.

[121] Timoshenko S. and Goodier J. N., (1951) "Theory of elasticity": McGraw-Hill, London.

[122] Nayfeh A. H., (2011) "Introduction to Perturbation Techniques": John Wiley & Sons, New York.

[123] Malekzadeh P. and Ouji A., (2008) "Axisymmetric Buckling Analysis of Laterally Restrained Thick Annular Plates Using A Hybrid Numerical Method", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 85, No. 11, pp. 789-797.

[124] Özakça M., Tayşi N. and Kolcu F., (2003) "Buckling Analysis and Shape Optimization of Elastic Variable Thickness Circular and Annular Plates—II. Shape Optimization", *Engineering Structures,* Vol. 25, No. 2, pp. 193-199.

[125] Laura P., Gutierrez R., Sonzogni V. and Idelsohn S., (1997) "Buckling of Circular, Annular Plates of Non-Uniform Thickness", *Ocean Engineering,* Vol. 24, No. 1, pp. 51-61.

[126] Özakça M., Tayşi N. and Kolcu F., (2003) "Buckling Analysis and Shape Optimization of Elastic Variable Thickness Circular and Annular Plates—I. Finite Element formulation", *Engineering Structures*, Vol. 25, No. 2, pp. 181-192.

Abstract

In this thesis the buckling of homogeneous and isotropic rectangular plates with centrally located cutout is studied. The plate is initially perfect and it has finite dimensions and the effect of circular and square cutouts with different sizes on the buckling load is investigated. The buckling load is presented for different combinations of free, clamped and simply supported boundary conditions at the plate outer edges and for different aspect ratios. The buckling load is calculated in two steps: solving the equations of the initial state of equilibrium and using the obtained results to solve the stability equations. The buckling load calculation is performed for three different cases: a rectangular plate without cutout under non-uniform in-plane loading, annular plate and rectangular plate with circular and square cutouts in the center. In a rectangular plate under in-plane loading, the existence of cutout changes the distribution of stress field. This stress field must satisfy the boundary conditions at the cutout edges and also at the plate edges. In this thesis two solutions are presented for this problem. In the first solution the stress field is calculated by using the complex potential functions and domain mapping. The second solution is based on the harmonic expansion of stress function in polar coordinates. In both solutions, the boundary condition at the plate edges is applied by using an integral which is derived from the virtual work method and it is called the boundary integral. As a result, the obtained solution satisfies the boundary condition at the cutout edges exactly and the boundary conditions at the plate edges with good accuracy. After calculating the prebuckling stress field, the stability equations have to solve to obtain the buckling load and mode shape. In the annular plate and for the axisymmetric case, the perturbation technique is used to solve the stability equations and for the non-axisymmetric case, the ringing method is used to solve these equations. In a rectangular plate with cutout, the prebuckling stress components are too complicated and as a result the Ritz energy method is used for buckling load calculation. In this method the out of plate displacement components are approximated by admissible functions representing the lateral vibration mode shapes of a beam. The buckling load is calculated for different uniform and non-uniform loadings, boundary conditions and cutout sizes. The solution method is validated by comparing the results with numerical solution based on the finite element method and also with other references.

Keywords: Prebuckling Stress Field-Buckling Load- Circular and Square Cutout-Numerical and Analytical Solution

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

Ph.D. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Analytical and Numerical Buckling Analysis of Homogeneous and Isotropic Rectangular Plates with Circular and Square Cutouts

By: Saeed Abolghasemi

Supervisors:

Dr. Mahmoud Shariati

Dr. Hamidreza Eipakchi

September 2017