





پردیس بین المللی خوارزمی

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل ارتعاشی ورق مدور تحت بار عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با خیز نسبتاً زیاد

نگارنده: فائزه طهرانی

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا ایپک چی

شهریور ۱۳۹۹

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده پردیس خوارزمی

گروه جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم فائزه طهرانی تحت عنوان: تحلیل ارتعاشی ورق مدور

تحت بار عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با خیز نسبتاً زیاد

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و

با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
			دکتر حمیدرضا ایپک چی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :دکتر حمیدرضا ایپک چی
			نام و نام خانوادگی :دکتر حبیب احمدی
			نام و نام خانوادگی :دکتر امیر جلالی

سپاس خداوندی که علم آسمان ها و زمین در پیش اوست بی آنکه علم آموزی داشته باشد

و سپاس بر علمی که از طریق استادان و م علمان به من آموخت

و سپاس شورا که پدر و مادری برایم قرار داد که در علم و ادب مرا بسیار آموختند

و سپاس شورا که همسر و فرزند من شایسته عطا می نمود

تعهد نامه

اینجانب فائزه طهرانی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکانیک- طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه " تحلیل ارتعاشی ورق مدور متقارن محوری با خیز نسبتا زیاد به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول " تحت راهنمایی جناب آقای دکتر ایپک چی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ ۱۳۹۵/۶/۱۶

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

چکیده

در این تحقیق آنالیز ارتعاشی یک ورق مدور متقارن محوری تحت بار عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول ارائه شده است. برای ورق با خیز نسبتاً زیاد، سینماتیک مساله با رابطه فن کارمن، معادله بنیادین خطی و استخراج معادلات حرکت با استفاده از اصل همپلتون انجام شده است. معادلات حاکم یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با ضرایب متغیر و کوپل به هم است که برای حل تحلیلی آنها، از تئوری اغتشاشات استفاده شده است. علاوه بر آن، حساسیت نتایج به پارامترهای هندسی بررسی و با حل عددی، مقایسه شده است. تحلیل پاسخ برای شرط مرزی ساده نیز انجام شده است.

کلمات کلیدی: تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، ورق مدور متقارن محوری، خیز نسبتاً زیاد،

تئوری اغتشاشات، تحلیل ارتعاشی

فهرست

صفحه	عنوان
۱	فصل اول: کلیات و مرور مطالب.....
۲	۱-۱- مقدمه.....
۲	۲-۱- دسته‌بندی ورقها.....
۳	۲-۲-۱- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT).....
۵	۳-۱- مرور مقالات.....
۷	۴-۱- جمع‌بندی.....
۹	۲- فصل دوم: استخراج و حل معادلات حاکم.....
۱۰	۱-۲- مقدمه.....
۱۰	۲-۲- تعریف مساله.....
۱۷	۳-۲- بی بعد سازی.....
۲۱	۴-۲- روش مقیاس‌ها چندگانه.....
۲۴	۵-۲- تحلیل فرکانسی.....
۲۵	۶-۲- روش نصف کردن.....
۲۶	۷-۲- آنالیز مودال برای معادلات مرتبه یک.....
۲۸	۸-۲- تعیین پاسخ.....
۲۹	۹-۲- حل عددی.....
۲۹	۱-۹-۲- مقدمه.....
۲۹	۲-۹-۲- معرفی المان.....
۳۰	۳-۹-۲- تعیین مش بهینه.....
۳۱	۴-۹-۲- مدل سازی ورق درحالتی که بار به آن وارد میشود.....
۳۱	۵-۹-۲- تعیین گام زمانی بهینه.....
۳۲	۱۰-۲- جمع‌بندی.....
۳۳	۳- فصل سوم: بررسی نتایج.....
۳۴	۱-۳- مقدمه.....
۳۴	۱-۳- تحلیل فرکانسی.....
۴۵	۵-۳- جمع‌بندی.....
۴۷	فصل چهارم: نتیجه‌گیری و پیشنهادها و مراجع.....
۴۸	۱-۴- مقدمه.....
۴۹	۲-۴- پیشنهادها.....

مراجع ٥٠

فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه
شکل ۱-۱: المان مورد استفاده برای کیرشهف	۳
شکل ۲-۱: ورق مورد استفاده میندلین	۴
شکل ۱-۲: ورق حلقوی با شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o	۱۱
شکل ۲-۲: المان انتخابی برای حل عددی در انسیس	۳۰
شکل ۱-۳: موده‌های شعاعی اول و دوم و سوم	۳۵
شکل ۲-۳: موده‌های عرضی اول و دوم و سوم	۳۵
شکل ۳-۳: نمایی از بار اعمالی که به مدت یک ثانیه بر ورق اعمال می‌شود	۳۹
شکل ۴-۳: پاسخ (جابجایی شعاعی) بر حسب زمان در $\bar{r} = 0.0936$	۴۰
شکل ۵-۳: پاسخ (جابجایی عرضی) بر حسب زمان در $\bar{r} = 0.0936$	۴۰
شکل ۶-۳: پاسخ (جابجایی شعاعی) بر حسب مکان در $\bar{t} = 3000$	۴۱
شکل ۷-۳: پاسخ (جابجایی عرضی) بر حسب مکان در $\bar{t} = 3000$	۴۱
شکل ۸-۳: تأثیر نسبت شعاع داخلی به خارجی بر پاسخ عرضی در $\bar{t} = 3000$	۴۲
شکل ۹-۳: تأثیر نسبت شعاع خارجی به داخلی بر پاسخ شعاعی در $\bar{t} = 3000$	۴۲
شکل ۱۰-۳: تأثیر ضخامت بر پاسخ عرضی در $\bar{t} = 3000$	۴۳

شکل ۳-۱۱: تأثیر بار اعمالی بر پاسخ عرضی در $\bar{t} = 3000$ ۴۴

شکل ۳-۱۲a: مقایسه بین جابجایی ورق مدل شده در انسیس و میپل زمانی که بار اعمال می‌شود. ۴۸

شکل ۳-۱۲b: مقایسه بین جابجایی ورق مدل شده در انسیس و میپل زمانی که بار اعمال می‌شود. ۴۸

فهرست جدول‌ها

جدول ۱-۲: داده‌های فیزیکی ورق مدور ۳۰

جدول ۲-۲: مش بندی‌های مختلف و انتخاب مش بهینه ۳۱

جدول ۱-۳: مشخصات فیزیکی ورق ۳۴

جدول ۲-۳: مقایسه فرکانس اول در سه روش FSDT, CPT, FE ۳۶

جدول ۳-۳: داده‌های عددی و تحلیل برای $\frac{r_i}{r_o} = 0.3$ ۳۷

جدول ۴-۳: داده‌های عددی و تحلیلی برای $\frac{r_i}{r_o} = 0.01$ ۳۷

جدول ۵-۳: داده‌های عددی و تحلیلی برای $\frac{r_i}{r_o} = 0.05$ ۳۸

جدول ۶-۳: تفاوت فرکانس خطی و غیرخطی ۳۹

فصل اول : کلیات و مرور مطالب

۱-۱- مقدمه

ورق یک المان بنیادی مهم در سازه‌هاست که در واقع از مجموع تیرهای به هم چسبیده تشکیل شده است. ورق‌های مدور به عنوان درپوش مخازن، دریچه‌ی سدها، دریچه قلب، پرده صماخ و... استفاده می‌شوند. تئوری‌های مختلفی برای تحلیل ورق‌ها استفاده می‌شود که بستگی به محدوده کاری آن‌ها دارد. در این فصل ابتدا به بررسی چند تئوری که در تحلیل ورق‌ها استفاده می‌شود پرداخته و برخی مقالاتی که در زمینه تحلیل ارتعاشی ورق مدور است مرور می‌شوند.

۱-۲- دسته‌بندی ورق‌ها

خواص خمشی ورق در مقایسه با ابعاد دیگر عمدتاً وابسته به ضخامت است. بر اساس نسبت a/h که a کوچک‌ترین بعد صفحه‌ی ورق و h ضخامت آن می‌باشد. ورق‌ها را به سه دسته ورق ضخیم، غشاء و ورق نازک تقسیم‌بندی می‌کنند.

۱-۲-۱- تئوری کلاسیک^۱ (CPT)

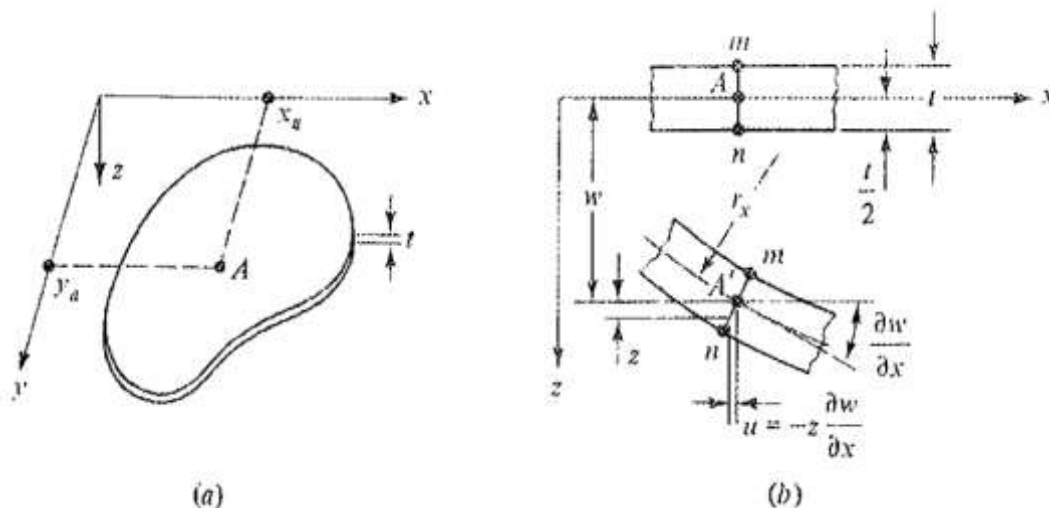
تئوری ورق کلاسیک برای حالت خمش خالص بر مبنای میدان جابجایی زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\w(x, y, z) &= w(x, y)\end{aligned}\tag{۱-۱}$$

^۱Classical plate theory

که w, v, u جابجایی های یک نقطه ورق در راستای z, y, x است. در این تئوری خط عمود بر صفحه xy بعد از تغییر شکل همچنان عمود باقی می ماند و از اثرات برش عرضی و نرمال عرضی یعنی تغییر شکل حاصل از برش و کشیدگی درون صفحه ای صرف نظر شده است.

در تئوری خطی کلاسیک دو روش برای تحلیل ورق استفاده می شود. اولین روش برای کوشی و پواسون [۱] است که مبنای آن استفاده از سری ها برای تنش است. عیوب این روش، دیر همگرا شدن سری و اعمال دشوار شرایط مرزی است. دومین روش کیرشهف است [۲] که تنش برشی را در نظر نمی گیرد و خط عمود بر صفحه ای میانی بعد از تغییر شکل هم چنان عمود باقی می ماند.



شکل ۱-۲: تغییر شکل ورق در تئوری کیرشهف [۲]

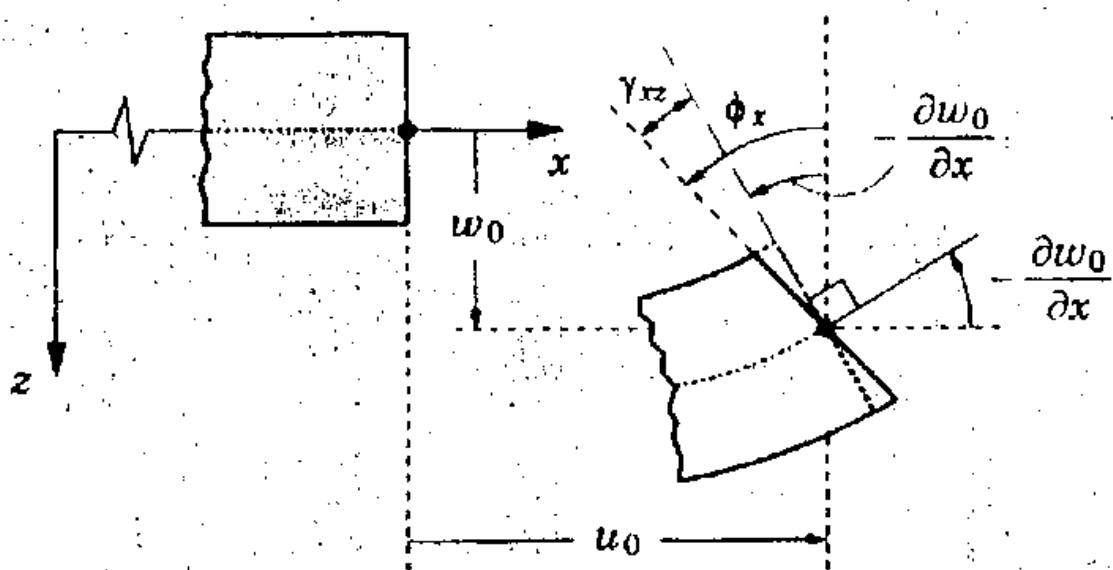
۱-۲-۲- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)^۱

از ساده ترین تئوری های تغییر شکل برشی مرتبه اول است که همچنین به تئوری میندلین (۱۹۵۱) معروف است. این تئوری بر مبنای میدان جابجایی زیر می باشد

^۱ First-order shear deformation theory

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2-1)$$

که در آن ϕ_x, ϕ_y به ترتیب چرخش حول محورهای x, y می‌باشند. FSDT با در نظر گرفتن تغییر شکل عرضی در فرضیات سینماتیکی‌اش (یعنی کرنش برشی ثابت نسبت به ضخامت) CPT را توسعه داده است. در FSDT فاکتور تصحیح برشی معرفی می‌شوند که اختلاف بین نیروی برشی عرضی واقعی و آنچه که با استفاده از روابط سینماتیکی FSDT به دست می‌آیند را تصحیح می‌کنند. این پارامترها علاوه بر هندسه ی سازه به بارگذاری و شرایط مرزی ورق نیز وابسته است.



شکل ۳-۱ تغییر شکل ورق در تئوری میندلین [۳]

۱-۳- مرور مقالات

ابراهیمی و راستگو [۴] تحلیل ارتعاشی ورق دایر وی نازک از جنس مواد تابعی (FGM) ^۱ با لایه‌های پیزوالکتریک بر اساس تئوری کیرشهف را ارائه دادند. درستی روش تحلیلی ارائه شده از طریق مقایسه نتایج با تحقیقات مشابه و نیز با نتایج روش المان محدود سه بعدی تأیید شد. لیزا [۵] ارتعاشات آزاد ورق مدور توپر را بر اساس تئوری کلاسیک و به روش تحلیلی ارائه کرد. وایزنل [۶] با استفاده از معادلات فن کارمن در مختصات قطبی و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه معادلات حرکت و پاسخ مدهای متقارن ورق‌های مدور را به دست آورد. اکوسی و همکاران [۷] تئوری برشی مرتبه اول را برای ورق‌های کامپوزیتی روی فنداسیون الاستیک تعمیم داده است و با روش عددی به حل مناسبی رسیده اند. علی الدین و همکاران [۸] با استفاده از المان محدود و تئوری FSDT تحلیل استاتیکی ورق‌های الاستواستاتیک کامپوزیتی را انجام داده‌اند. پنگ و همکاران [۹] ورق‌های مستطیل شکل آجدار ^۲ را با استفاده از تئوری فن کارمن برای خیز بزرگ و تئوری FSDT مورد باروش عددی بررسی کرده اند. زیانگ ردی [۱۰] با به کارگیری تئوری FSDT و روش حل تحلیلی توانسته‌اند حل دقیقی برای ارتعاشات ورق مستطیلی شکل دارای لولای میانی به دست آورند. هووا و همکاران [۱۱] با تئوری FSDT تحلیل ارتعاشی ورق پیچ خورده ^۳ را به طور عددی مورد بررسی قرار داده‌اند. زیبایی و همکاران [۱۲] در پژوهش خود مساله ارتعاش آزاد ورق میندلین-رینر ^۴ را با استفاده از تحلیل هم هندسه ^۵ مورد بررسی قرار داده‌اند. تحلیل هم هندسه روشی جدید در مکانیک محاسباتی است که در

^۱ Functionally graded materials

^۱ Ribbed

^۲ Twisted

^۳ Mindlin-Reissner

^۴ Isogeometric

راستای ادغام فن آوری طراحی به کمک کامپیوتر و تحلیل اجزای محدود ایجاد شده است. در این روش از توابع پایه نربز^۱ (فرم تعمیم یافته توابع بی-اسپیلاین) به منظور توصیف هندسه و تقریب میدان مجهولات استفاده می شود. در این مقاله، معادلات حاکم بر اساس تئوری میندلین-رینر و با استفاده از روش گالرکین استاندارد گسسته سازی می شود. این تئوری، تغییر شکل برشی عرضی را در استخراج معادلات حاکم بر صفحه مد نظر قرار می دهد.

سعیدی و آتشی پور [۱۳] در مقاله خود، فرمول بندی جدیدی از معادلات حرکت ورق های همسانگرد عرضی بر پایه تئوری برشی مرتبه اول ارائه داده اند. برخلاف دستگاه معادلات اصلی که شامل سه معادله دیفرانسیل جزئی وابسته هستند، معادلات تغییر شکل یافته جدید شامل دو معادله دیفرانسیل جزئی مستقل می باشند که حل آن ها به مراتب ساده تر خواهد بود. سپس، برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق های همسانگرد عرضی، معادلات مذکور در دو حالت حل شده اند. در حالت اول، با بهره گیری از بسط دو گانه فوریه، برای فرکانس های طبیعی ورق با شرایط مرزی تکیه گاه ساده، پاسخ دقیق ارائه شده است.

در حالت دوم، ارتعاشات آزاد ورق با شرایط مرزی دلخواه در دو لبه موازی بررسی شده است. به منظور ارضای شرایط مرزی در دو لبه موازی با تکیه گاه غیر ساده، روابطی برای توابع مجهول دستگاه معادلات اصلی بر حسب مجهولات دستگاه معادلات تغییر شکل یافته ارائه شده است. در پایان، ضمن ارائه نتایج عددی مربوط به شش حالت امکان پذیر از شرایط مرزی کلاسیک، برخی از نتایج مهم حاصل از این تحلیل برای ورق های همسانگرد عرضی بیان شده است. نتایج نشان می دهد که با وجود اندک بودن اختلاف مقادیر فرکانس های طبیعی در ورق های نازک همسانگرد و همسانگرد عرضی، این

^۱ Nurbs

اختلاف برای ورق‌های ضخیم قابل توجه است. همچنین، تأثیر افزایش ضخامت بر مقادیر فرکانس‌های طبیعی، برای یک ورق همسانگرد عرضی^۱ بیشتر از ورق همسانگرد است. طهانی و گلمکانی [۱۴] ارتعاشات آزاد صفحات مرکب متعامد با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول را مورد بررسی قرار داده‌اند. روش تحلیل بر اساس حل عمومی لوی است که در آن دو لبه روبروی صفحه به صورت تکیه‌گاه ساده و لبه‌های باقیمانده دارای شرایط مرزی دلخواه می‌باشند. معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از اصل هامیلتون به دست آمده و پس از تبدیل به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت، با اعمال رهیافت فضای حالت به طور دقیق حل می‌گردد. سپس اعمال شرایط مرزی منجر به پیدایش معادلات دیگری می‌شود که به کمک آن می‌توان فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات را تعیین نمود. خیدر و ردی [۱۵] حل دقیق پاسخ گذرای ورق چند لایه متقارن متعامد را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا ارائه داده‌اند. آن‌ها با استفاده از روش متعامد و تکنیک متغیرهای حالت به بررسی پاسخ دینامیکی چند لایه متعامد پرداخته‌اند. جواب‌های دقیق حل آن‌ها برای ورق‌های مستطیلی با تکیه‌گاه ساده و بارهای مختلف با حل‌های رسیئر-میندلین و کلاسیک مقایسه شده است. لیوا و همکاران [۱۶] مرور کلی ارتعاشات آزاد ورق مدور الاستیک با استفاده از تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول را انجام داده‌اند. رومانی و همکاران [۱۷] ارتعاشات عرضی ورق حلقوی الاستیک با شرایط مرزی میانی و لبه‌های خارجی آزاد را مورد بررسی قرار داده‌اند.

۴-۱- جمع‌بندی

آنچه که در این فصل گردآوری شده است تاریخچه کوتاهی از تئوری‌های کلاسیک و تئوری برشی مرتبه اول است. آنچه که از تحقیقات گذشته برمی‌آید استفاده از روش‌های عددی در حل معادلات

^۱ Transversely

است اما روش‌های تحلیلی به دلیل پیچیدگی کمتر استفاده شده است. در تحقیق پیشرو حل تحلیلی انتخاب گردید که در ادامه این نوشتار ارائه می‌گردد. همچنین برای افزایش محدوده کاربرد، از تئوری مرتبه اول استفاده می‌شود.

فصل دوم: استخراج و حل معادلات

حاکم

۲-۱- مقدمه

در این فصل در ابتدا شمای کلی ورق و میدان جابجایی مساله تعریف شده است و بعد از آن با استفاده از اصل هامیلتون معادلات ورق به دست می‌آید سپس به کمک تئوری اغتشاشات به حل تحلیلی مساله پرداخته می‌شود.

۲-۲- تعریف مساله

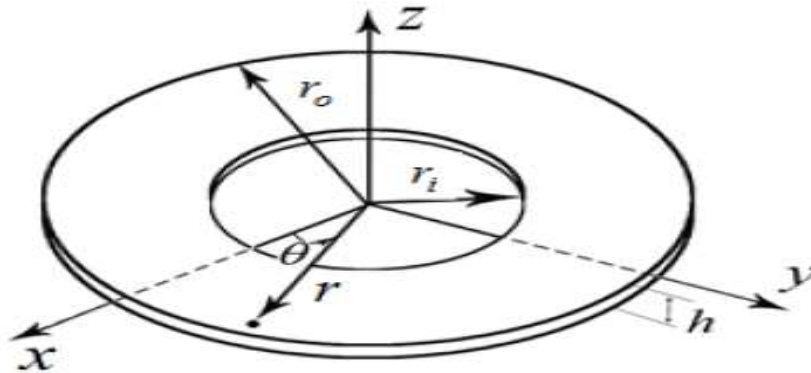
شکل (۱-۲) ورق حلقوی با شعاع داخلی r_i شعاع خارجی r_o را نشان می‌دهد که ضخامت h و چگالی ρ دارد. فرمول‌بندی مساله بر اساس مختصات قطبی (r, z, θ) که در آن r راستای شعاعی و θ چرخش حول محور z و جهت z نیز عمود بر سطح میانی می‌باشد صورت می‌گیرد. فرضیات حل به صورت زیر است:

الف) ورق الاستیک و همگن است

ب) خیز نسبتاً زیاد است و رابطه کرنش جابجایی مطابق رابطه فن کارمن است.

ج) رابطه تنش کرنش خطی است.

د) ضخامت ثابت است.



شکل ۱-۲: ورق حلقوی با شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی در حالت تقارن محوری با رابطه (۱-۲) تعریف می‌شود [۱۸]:

$$\begin{aligned} U_r(r, z, t) &= u_0(r, t) + z.u_1(r, t) \\ U_z(r, z, t) &= w_0(r, t) + z.w_1(r, t) \\ U_\theta(r, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (۱-۲)$$

که در آن U_r, U_z, U_θ به ترتیب سه مؤلفه جابجایی در راستای r, z, θ است u_0, w_0 . بیانگر جابجایی صفحه میانی و u_1, w_1 بی بعد می‌باشند که با حل معادلات تعیین می‌شود. با در نظر گرفتن این که ورق متقارن محوری است جابجایی در راستای θ صفر می‌شود. روابط کرنش-جابجایی بر اساس رابطه فن کارمن عبارت است از [۱۸]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)^2 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} \right)^2 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{U_r}{r} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (۲-۲)$$

روابط تنش - کرنش بر اساس رابطه هوک به صورت زیر تعریف می شود [۱۸]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= A \varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \\ \sigma_\theta &= A \varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_z) \\ \sigma_z &= A \varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r) \\ \tau_{rz} &= \mu \gamma_{rz} \\ \tau_{\theta z} &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= 0\end{aligned}\quad (3-2)$$

که λ , A ثوابت لامه بوده و برحسب مدول الاستیک و ضریب پواسون قابل تعریف هستند:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, A = \lambda + 2\mu \quad (4-2)$$

چگالی انرژی کرنشی و وریشن آن به شکل زیر می شود:

$$\begin{aligned}U^* &= \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_r \varepsilon_r + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{rz} \gamma_{rz} + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \tau_{z\theta} \gamma_{z\theta} \\ \delta U^* &= \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{rz} \delta \gamma_{rz} + \tau_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta} + \tau_{z\theta} \delta \gamma_{z\theta}\end{aligned}\quad (5a-2)$$

انرژی کرنشی (δU) ورق با انتگرال گیری چگالی انرژی کرنشی (δU^*) بر روی حجم ورق [۱۸] به دست

می آید. المان حجم به صورت $dV = r dr d\theta dz$ بوده و در آن محدوده تغییرات مختصات به صورت

$$-h/2 \leq z \leq h/2 \text{ و } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ و } r_i \leq r \leq r_o \text{ است.}$$

$$\delta U = 2\pi \int \left(r N_r \delta \frac{\partial u_0}{\partial r} + r M_r \delta \frac{\partial u_1}{\partial r} + N_\theta \delta u_0 + M_\theta \delta u_1 + r Q_r \delta \frac{\partial w_0}{\partial r} + r M_{rz} \delta \frac{\partial w_1}{\partial r} + r Q_r \delta u_1 + r N_z \delta w_1 \right) dr \quad (5b-2)$$

$N_r, N_\theta, N_z, M_r, M_z, M_\theta, M_{rz}, Q_r, P_r$ منتهی های تنش هستند [۲۶] که به صورت رابطه

(۶-۲) تعریف می شوند:

$$(N_r, N_\theta, N_z) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z) dz \quad (6-2)$$

$$(M_r, M_\theta) = \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_r, \sigma_\theta) dz$$

$$(Q_r, M_{rz}) = K_s \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) \tau_{rz} dz$$

$$P_r = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \sigma_r dz$$

و k_s ضریب تصحیح برشی است که مقدار آن در این پایان نامه ۵/۶ در نظر گرفته شده است.. چگالی انرژی جنبشی [۱۸] ورق به صورت زیر محاسبه می شود:

$$T^* = \frac{1}{2} \rho \left(\left(\frac{\partial U_r}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (7-2)$$

اگر روابط (۱-۲) را در (۷-۲) جایگزین و بر روی حجم ورق انتگرال گرفته شود ، روابط زیر به دست می آید :

$$T = \frac{1}{2} 2\pi \rho \int \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 h + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 h + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 \frac{h^3}{12} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 \frac{h^3}{12} \right) r dr \quad (8-2)$$

کارنیروی خارجی [۱۸] ناشی از نیروی گسترده به وجه بالایی ورق است:

$$W = \iint q \left(w_0 + \frac{h}{2} w_1 \right) r dr d\theta = 2\pi \int_{r_i}^{r_o} q \left(w_0 + \frac{h}{2} w_1 \right) r dr \quad (9-2)$$

که در رابطه بالا $q (N / m^2)$ بار وارد شده به صفحه بالایی است. اگر تغییرات کار خارجی حساب شود رابطه (۱۰-۲) حاصل می گردد:

$$\delta W = 2\pi \int_{r_i}^{r_o} q \left(\delta w_0 + \frac{h}{2} \delta w_1 \right) r dr \quad (10-2)$$

اصل هامیلتون [۱۸] بیان می کند:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 ; \quad L = T - U + W \quad (11-2)$$

با جایگذاری مقادیر انرژی جنبشی و انرژی کرنشی و کار در رابطه هامیلتون معادلات حرکت برحسب
منتجه های تنش به دست می آید:

$$-\rho r h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - N_\theta + N_r = 0 \quad (12-2)$$

$$-\frac{1}{12} \rho r h^3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + r N_{rz} + M_r + M_\theta = 0 \quad (13-2)$$

$$\begin{aligned} & -\rho r h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + M_r \frac{\partial w_1}{\partial r} + r M_r \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + N_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + r N_r \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \\ & + N_{rz} w_1 + r N_{rz} \frac{\partial w_1}{\partial r} + N_{rz} + r q = 0 \end{aligned} \quad (14-2)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{12} \rho r h^3 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + M_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + M_r r \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + M_{rz} w_1 \\ & + M_{rz} r \frac{\partial w_1}{\partial r} + P_r \frac{\partial w_1}{\partial r} + r P_r \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + M_{rz} + N_z w_1 r \\ & + N_{rz} + N_{rz} \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0 \right) r + \frac{q r h}{2} = 0 \end{aligned} \quad (15-2)$$

اگر نتیجه های تنش و همچنین شرایط مرزی مستخرج شده بر حسب جابجایی نشان داده شود رابطه
ای که به خود اختصاص می دهد (۱۶b-۲) است که برای اختصار همه ی آن ها نوشته نشده اند.

شرایط مرزی عبارتند از:

$$(۱۶a-۲) \quad \left(\begin{array}{l} N_r \delta u_0 + M_r \delta u_1 + (N_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + M_r \frac{\partial w_1}{\partial r} + N_{rz} w_1) \delta w_0 + \\ (M_r \frac{\partial}{\partial r} w_0 + P_r \frac{\partial}{\partial r} w_1 + M_{rz} w_1) \delta w_1 \end{array} \right) \bigg|_{ri}^{ro} = 0$$

در شرط مرزی گیردار $u_0 = u_1 = w_0 = w_1 = 0$ و در شرط مرزی ساده

$$u_0 = w_0 = 0, M_r = 0 \text{ و } M_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + P_r \frac{\partial w_1}{\partial r} + M_{rz} w_1 = 0 \text{ است.}$$

منتجه های تنش بر حسب جابجایی قابل محاسبه است. برخی از نتیجه های تنش عبارتند از:

$$(۱۶b-۲) \quad N_r = \frac{1}{24} A \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1 \right)^2 h^3 + A \left(\frac{\partial}{\partial r} u_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0 \right)^2 \right) h + \lambda \left(\frac{u_0}{r} + w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \right) h$$

$$N_z = \frac{1}{24} \lambda \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1 \right)^2 h^3 + A \left(w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \right) h + \lambda \left(\frac{u_0}{r} + \frac{\partial}{\partial r} u_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0 \right)^2 \right) h$$

$$M_R = \frac{1}{12} \left(A \left(\left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + \frac{\lambda u_1}{r} \right) h^3$$

با جایگزینی نتیجه های تنش (۱۶b-۲) در معادلات (۱۲-۲) تا (۱۵-۲) معادلات حرکت بر حسب

جابجایی به دست می آید:

$$(۱۷-۲) \quad -r \rho \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + r A \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \right) + r A \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{12} h^2 r A \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \right) + A \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right) +$$

$$\frac{1}{2} (A - \lambda) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 + r \lambda \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) (w_1 + 1) - \frac{A u_0}{r} = 0$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12}\rho h^2 r \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) + rk_s \mu \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) w_1 + rk_s \mu u_1 + rk_s \mu \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{12} h^2 A \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \quad (18-2) \\
& + \frac{1}{12} h^2 A \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{12} h^2 r A \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{12} \frac{h^2 A u_1}{r} + \frac{1}{12} h^2 r A \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \right) \\
& + \frac{1}{12} h^2 r A \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{6} h^2 \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{12} h^2 \lambda \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -r\rho \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) r \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) A \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{12} h^2 r \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) A \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \right) + (A + \lambda) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \quad (19-2) \\
& + \left(\frac{1}{8} h^2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 A + (2rk_s \mu w_1 + r\lambda w_1 + 2rk_s \mu + r\lambda) \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) + \\
& (rk_s \mu w_1^2 + \frac{1}{8} h^2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 r A + 2rk_s \mu w_1 + r A \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + r\lambda w_1 + rk_s \mu + \frac{3}{2} r \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0 \right)^2 A \\
& + \frac{1}{2} r\lambda w_1^2 + \lambda u_0) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{1}{12} h^2 r A \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{12} h^2 \lambda u_1 + \frac{1}{4} h^2 r \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) A \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \right) \right. \\
& \left. (k_s \mu w_1^2 + 2k_s \mu w_1 + \lambda w_1 + \frac{1}{2} \lambda w_1^2 + k_s \mu) \frac{\partial w_0}{\partial r} + rk_s \mu \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) u_1 + k_s \mu w_1 u_1 + k_s \mu u_1 + \frac{rq}{h} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12} h^2 r \rho \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{12} h^2 r \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) A \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{12} h^2 r \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) A \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \right) + \quad (20-2) \\
& \left(\frac{1}{12} h^2 r A \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{12} h^2 \lambda u_1 + \frac{1}{4} h^2 r \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) A \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) + \\
& \left(\frac{1}{8} h^2 r \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 A + \frac{3}{160} h^4 r \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 A + \frac{1}{12} h^2 r A \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{12} h^2 r \lambda w_1 + \right. \\
& \left. \frac{1}{24} h^2 r \lambda w_1^2 + \frac{1}{12} h^2 k_s \mu r + \frac{1}{12} h^2 \lambda u_0 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} h^2 k_s \mu r w_1^2 + \frac{1}{6} h^2 k_s \mu r w_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1 + r k_s \mu \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) u_1 + \frac{1}{160} h^4 A \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^3 + \right. \\
& \left. \left(\left(\frac{1}{12} h^2 (\lambda + A) \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) + r \lambda w_1 + r \lambda \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{12} h^2 \lambda + \frac{1}{12} h^2 A \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + \right. \\
& \left. \left(k_s \mu r w_1 + k_s \mu r + \frac{1}{2} r \lambda w_1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) h^2 A + \frac{1}{2} r \lambda \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 + \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{6} h^2 k_s \mu r + \frac{1}{8} h^2 r \lambda w_1 + \frac{1}{8} h^2 r \lambda + \frac{1}{6} h^2 k_s \mu r w_1 \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 + \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{12} h^2 k_s \mu w_1^2 + \frac{1}{6} h^2 k_s \mu w_1 + \frac{1}{12} h^2 \lambda w_1 + \frac{1}{24} h^2 \lambda w_1^2 + \frac{1}{12} h^2 k_s \mu \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) + \right. \\
& \left. r A w_1 + w_1 \lambda u_0 + \frac{3}{2} w_1^2 r A + \frac{1}{2} w_1^3 r A + \lambda u_0 + \frac{1}{2} r q = 0 \right.
\end{aligned}$$

معادلات به دست آمده چهار معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نسبت به مکان و زمان، غیرخطی و کوپل به هم با ضرایب متغیر هستند. برای حل تحلیلی از تئوری اغتشاشات استفاده می شود برای این منظور لازم است ابتدا معادلات بی بعد شوند.

۲-۳- بی بعد سازی

پارامترهای بی بعد به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\bar{h} = \frac{h}{h_0}, \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \bar{u}_0(X, \bar{t}) = \frac{u_0(r, t)}{h_0}, \bar{w}(X, \bar{t}) = \frac{w_0(r, t)}{h_0}, \quad (2-21)$$

$$u_1(X, \bar{t}) = u_1(r, t), w_1(X, \bar{t}) = w_1(r, t), \bar{r} = r/a, \varepsilon = \frac{h_0}{a}, a = r_0$$

$$c = \sqrt{\frac{A}{\rho}}, t_0 = \frac{a}{c}$$

پارامترهای $\bar{r}, \bar{t}$ به ترتیب زمان و شعاع بی بعد هستند $\bar{w}_0, \bar{u}_0$ جابجایی بی بعد w_0, u_0 بوده و h_0, t_0

شاخص زمان و ضخامت می باشند، که مقادیر آن ها $h = h_0$ و همچنین $X = \frac{\bar{r}-1}{\varepsilon}$ است. با اعمال

پارامترهای بی بعد در معادلات به دست آمده پارامترهای بی بعد جدید دیگر نیز به دست می آید.

$$\theta_2 = \frac{\mu k_s}{A}, \theta_1 = \frac{\lambda}{A}, e = \frac{\rho h_0^2}{A t_0^2}, e_s = \frac{q}{A \varepsilon} \quad (22-2)$$

که ε پارامتر اغتشاش در نظر گرفته می‌شود. با جایگزین کردن روابط (21-2), (22-2) در روابط (17-2), (20-2) شکل بی بعد معادلات به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & -24\bar{h}(X\varepsilon+1)^2 e \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \bar{t}^2} \right) + \quad (23-2) \\ & -\theta_1 \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right)^2 \varepsilon \bar{h}^3 (X\varepsilon+1) + \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right)^2 \varepsilon \bar{h}^3 (X\varepsilon+1) + 2(X\varepsilon+1)^2 \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right) \bar{h}^3 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial X^2} + \\ & 24\bar{h}(X\varepsilon+1)^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial X^2} \right) - 24\bar{h}(X\varepsilon+1)^2 \theta_1 \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right) \bar{w}_1 - 12\bar{h} \theta_1 \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right)^2 (X\varepsilon+1) + \\ & 24\bar{h}(X\varepsilon+1)^2 \theta_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} + 12\bar{h} \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right)^2 (X\varepsilon+1) + 24\bar{h}(X\varepsilon+1)^2 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial X^2} \right) - \\ & 24\bar{h} \varepsilon^2 \bar{u}_0 + 24\bar{h} \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial X} \right) (X\varepsilon+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\bar{h}^2 (X\varepsilon+1)^2 e \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{t}^2} \right) + 12(X\varepsilon+1)^2 \theta_2 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right) \bar{w}_1 \quad (24-2) \\ & + 12(X\varepsilon+1)^2 \theta_2 \bar{u}_1 + 12(X\varepsilon+1)^2 \theta_2 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right) + \bar{h}^2 (X\varepsilon+1)^2 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial X^2} \right) + \\ & + \bar{h}^2 \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right) (X\varepsilon+1) + \bar{h}^2 \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X} \right) (X\varepsilon+1) + \bar{h}^2 (X\varepsilon+1)^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial X^2} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right) \\ & \bar{h}^2 (X\varepsilon+1)^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial X^2} \right) + 2\bar{h}^2 \varepsilon \theta_1 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X} \right) (X\varepsilon+1) + \bar{h}^2 \varepsilon^2 \bar{u}_1 + \\ & \bar{h}^2 \varepsilon \theta_1 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right) (X\varepsilon+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -24(X\varepsilon+1)e\bar{h}\left(\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial t^2}\right)+24k_s\theta_2\bar{h}\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\varepsilon+24\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\theta_1\bar{h}\left(\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial X}\right)\varepsilon \\
& +2\bar{h}^3\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial X}\right)\varepsilon+2\bar{h}^3\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)\theta_1\left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial X}\right)\varepsilon+24\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\theta_1\bar{h}\bar{w}_1\varepsilon \\
& +12\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\theta_1\bar{h}\bar{w}_1^2\varepsilon+24k_s\theta_2\bar{h}\bar{u}_1\varepsilon+24(X\varepsilon+1)k_s\theta_2\bar{h}\left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial X}\right)+ \\
& +2\bar{h}^3\left(\frac{\partial^2\bar{w}_1}{\partial X^2}\right)\theta_1\bar{u}_1\varepsilon+24(X\varepsilon+1)k_s\theta_2\bar{h}\left(\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial X^2}\right)+24\left(\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial X^2}\right)\theta_1\bar{h}\bar{u}_0\varepsilon+ \\
& 36(X\varepsilon+1)\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)^2\bar{h}\left(\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial X^2}\right)+2(X\varepsilon+1)\bar{h}^3\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial X^2}\right) \\
& +3\bar{h}^3\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)^2\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\varepsilon+24(X\varepsilon+1)\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\theta_1\bar{h}\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)+ \\
& 2(X\varepsilon+1)\bar{h}^3\left(\frac{\partial^2\bar{w}_1}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial X}\right)+12(X\varepsilon+1)\left(\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial X^2}\right)\theta_1\bar{h}\bar{w}_1^2+24\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\bar{h}\left(\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial X}\right)\varepsilon+ \\
& 24\bar{h}(X\varepsilon+1)\left(\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial X}\right)+48k_s\theta_2\bar{h}\bar{w}_1\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\varepsilon+24k_s\theta_2\bar{h}\bar{w}_1\bar{u}_1\varepsilon+ \\
& 24(X\varepsilon+1)e_s\varepsilon+12\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)^3\bar{h}\varepsilon+24k_s\theta_2\bar{h}\bar{w}_1^2\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\varepsilon+ \\
& 48(X\varepsilon+1)k_s\theta_2\bar{h}\bar{w}_1\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)+3(X\varepsilon+1)\bar{h}^3\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)^2\left(\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial X^2}\right)+ \\
& 24(X\varepsilon+1)\theta_1\bar{h}\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)\bar{w}_1+24(X\varepsilon+1)k_s\theta_2\bar{h}\bar{w}_1\left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial X}\right)+ \\
& 24(X\varepsilon+1)k_s\theta_2\bar{h}\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)\bar{u}_1+48(X\varepsilon+1)k_s\theta_2\bar{h}\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)+ \\
& +24(X\varepsilon+1)k_s\theta_2\bar{h}\bar{w}_1^2\left(\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial X^2}\right)+48(X\varepsilon+1)k_s\theta_2\bar{h}\bar{w}_1\left(\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial X^2}\right)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 40\theta_2 \bar{h}^3 (X\varepsilon+1) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial X^2} \right) + 60\bar{h}^3 (X\varepsilon+1) \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial X^2} \right) + \\
& 40\bar{h}^3 (X\varepsilon+1) \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial X^2} \right) + 40(X\varepsilon+1) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial X^2} \right) \bar{h}^3 \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial X} \right) + \\
& 9(X\varepsilon+1) \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right)^2 \bar{h}^5 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial X^2} \right) + 40(X\varepsilon+1) \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right) \bar{h}^3 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial X^2} \right) + \\
& 40hs^3 (X\varepsilon+1) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial X^2} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X} \right) - 40(X\varepsilon+1) e \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial ts^2} \right) \bar{h}^3 + \\
& 40 \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right) \bar{h}^3 \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial X} \right) \varepsilon + 40\theta_2 \bar{h}^3 \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right) \varepsilon + \\
& 60\bar{h}^3 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right) \varepsilon + 40\bar{h}^3 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X} \right) \varepsilon + \\
& 480\bar{h} \theta_1 \bar{u}_0 \varepsilon + 80\theta_2 \bar{h}^3 (X\varepsilon+1) \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right)^2 + \\
& 60(X\varepsilon+1) \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right)^2 \bar{h}^3 \theta_1 + 240\bar{h} (X\varepsilon+1) \theta_1 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right)^2 + \\
& 480\bar{h} \theta_2 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial X} \right)^2 (X\varepsilon+1) + 480\bar{h} (X\varepsilon+1) \theta_1 \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial X} \right) + \\
& 240e_s (X\varepsilon+1) \bar{h} \varepsilon + 3 \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial X} \right)^3 \bar{h}^5 \varepsilon + \\
& 720\bar{h} \bar{w}_1^2 (X\varepsilon+1) + 240\bar{h} \bar{w}_1^3 (X\varepsilon+1) + \\
& 480\bar{h} (X\varepsilon+1) \bar{w}_1 + 40(X\varepsilon+1) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial X^2} \right) \bar{h}^3 \theta_1 \bar{w}_1 + \\
& + 20(X\varepsilon+1) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial X^2} \right) \bar{h}^3 \theta_1 \bar{w}_1^2 + 40\theta_2 \bar{h}^3 (X\varepsilon+1) \bar{w}_1^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial X^2} \right) \\
& + 80\theta_2 \bar{h}^3 (X\varepsilon+1) \bar{w}_1 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial X^2} \right) + 40 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial X^2} \right) \bar{h}^3 \theta_1 \bar{u}_0 \varepsilon + 40\bar{h}^3 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial X^2} \right) \theta_1 \bar{u}_1 \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +120\bar{h}^3 (X\varepsilon+1)\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2\bar{w}_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)+480\bar{h}\theta_2\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)^2 (X\varepsilon+1)\bar{w}_1 \\
& +240\bar{h}\bar{w}_1 (X\varepsilon+1)\theta_1\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)^2 +480\bar{h}\bar{w}_1 (X\varepsilon+1)\theta_1\left(\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial X}\right) \\
& +60(X\varepsilon+1)\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)^2 \bar{h}^3\theta_1\bar{w}_1+80\theta_2\bar{h}^3 (X\varepsilon+1)\bar{w}_1\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)^2 \\
& +480\bar{h}\theta_2\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)(X\varepsilon+1)\bar{u}_1+40\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)\bar{h}^3\theta_1\left(\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial X}\right)\varepsilon \\
& +40\bar{h}^3\left(\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial X}\right)\theta_1\left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial X}\right)\varepsilon+40\theta_2\bar{h}^3\bar{w}_1^2\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)\varepsilon+80\theta_2\bar{h}^3\bar{w}_1\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)\varepsilon \\
& 40\bar{h}^3\theta_1\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)\bar{w}_1\varepsilon+20\left(\frac{\partial\bar{w}_1}{\partial X}\right)\bar{h}^3\theta_1\bar{w}_1^2\varepsilon+480\bar{h}\bar{w}_1\theta_1\bar{u}_0\varepsilon=0
\end{aligned}$$

۲-۴- روش مقیاس‌ها چندگانه

معادلات (۲-۲۶) تا (۲-۲۳) با روش مقیاس‌های چندگانه که مشتقات زمانی به شکل (۲-۲۷) است مدل

دیگری را به خود می‌گیرند:

$$T_0 = \bar{t}, T_1 = \varepsilon T_0 \quad (2-27)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{t}^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + O(\varepsilon^2)$$

بعد از اعمال روش مقیاس‌های چندگانه بسط مستقیم مطابق رابطه (۲-۲۸) بر معادلات اعمال

می‌شود:

$$\bar{u}_0(X, \bar{t}) = \varepsilon \left(\overline{us_0}(X, T_0, T_1) + \varepsilon \overline{us_1}(X, T_0, T_1) \right) \quad (2-28)$$

$$\bar{u}_1(X, \bar{t}) = \varepsilon \left(\overline{up_0}(X, T_0, T_1) + \varepsilon \overline{up_1}(X, T_0, T_1) \right)$$

$$\bar{w}_0(X, \bar{t}) = \varepsilon \left(\overline{ws_0}(X, T_0, T_1) + \varepsilon \overline{ws_1}(X, T_0, T_1) \right)$$

$$\bar{w}_1(X, \bar{t}) = \varepsilon \left(\overline{wp_0}(X, T_0, T_1) + \varepsilon \overline{wp_1}(X, T_0, T_1) \right)$$

با جایگذاری روابط (۲۷-۲) و (۲۸-۲) در معادلات حرکت و جداسازی جملات با توان‌های ε^0 ، ε^1 معادلات مرتبه صفر و یک به دست می‌آیند:

$$-e \left(\frac{\partial^2 \overline{us_0}}{\partial T_0^2} \right) + \theta_1 \left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial^2 \overline{us_0}}{\partial X^2} \right) = 0 \quad (29-2)$$

$$\overline{-e h s^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{up_0}}{\partial T_0^2} \right) - 12 \theta_2 \overline{up_0} + h s^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{up_0}}{\partial X^2} \right) - 12 \theta_2 \left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X} \right) = 0} \quad (30-2)$$

$$-\bar{h} e \left(\frac{\partial^2 \overline{ws_0}}{\partial T_0^2} \right) + \bar{h} k_s \theta_2 \left(\frac{\partial^2 \overline{ws_0}}{\partial X^2} \right) + \bar{h} k_s \theta_2 \left(\frac{\partial \overline{up_0}}{\partial X} \right) + e_s = 0 \quad (31-2)$$

$$\theta_2 \bar{h}^3 \left(\frac{\partial^2 \overline{wp_0}}{\partial X^2} \right) - e \bar{h}^3 \left(\frac{\partial^2 \overline{wp_0}}{\partial T_0^2} \right) - 12 \bar{h} \theta_1 \left(\frac{\partial \overline{us_0}}{\partial X} \right) - 12 \bar{h} \overline{wp_0} + 12 e_s = 0 \quad (32-2)$$

مشاهده می‌شود معادلات دوم و سوم به هم کوپل هستند. این مطلب در مورد معادلات اول و چهارم نیز صادق است. بنابراین می‌توان هر کدام از این دسته معادلات را به صورت مستقل بررسی کرد همچنین معادلات به دست آمده، معادلات خطی با ضرایب ثابت است.

معادله مرتبه یک عبارتند از:

$$\begin{aligned} & -24 X e \left(\frac{\partial^2 \overline{us_0}}{\partial T_0^2} \right) + 24 X \theta_1 \left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X} \right) + 12 \theta_1 \left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X} \right) \overline{wp_0} + \bar{h}^2 \left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial^2 \overline{wp_0}}{\partial X^2} \right) \\ & + 12 \left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial^2 \overline{ws_0}}{\partial X^2} \right) - 12 e \left(\frac{\partial^2 \overline{us_1}}{\partial T_0^2} \right) + 12 \bar{h} \theta_1 \left(\frac{\partial \overline{wp_1}}{\partial X} \right) - 2 e \left(\frac{\partial^2 \overline{us_0}}{\partial T_1 \partial T_0} \right) \\ & + 2 X \left(\frac{\partial^2 \overline{us_0}}{\partial X^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial \overline{us_0}}{\partial X} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \overline{us_1}}{\partial X^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$-24 X \theta_2 \overline{up_0} + 2 X \bar{h}^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{up_0}}{\partial X^2} \right) - 2 e \bar{h}^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{up_0}}{\partial T_1 \partial T_0} \right) - 12 \theta_2 \left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X} \right) \overline{wp_0} \quad (34-2)$$

$$\begin{aligned}
& -24X\theta 2\left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X}\right) + \bar{h}^2\left(\frac{\partial^2 \overline{ws_0}}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X}\right) + \bar{h}^2\left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 \overline{wp_0}}{\partial X^2}\right) - e\bar{h}^2\left(\frac{\partial^2 \overline{up_1}}{\partial T0^2}\right) \\
& -2Xe\bar{h}^2\left(\frac{\partial^2 \overline{up_0}}{\partial T0^2}\right) + \bar{h}^2\left(\frac{\partial \overline{up_0}}{\partial X}\right) - 12\theta_2 \overline{up_1} + \bar{h}^2\left(\frac{\partial^2 \overline{up_1}}{\partial X^2}\right) - 12\theta_2\left(\frac{\partial \overline{ws_1}}{\partial X}\right) = 0
\end{aligned}$$

$$2hs^2\left(\frac{\partial^2 \overline{wp_0}}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial \overline{up_0}}{\partial X}\right) - 48e\left(\frac{\partial^2 \overline{up_0}}{\partial T1\partial T0}\right) + 24e\left(\frac{\partial^2 \overline{ws_1}}{\partial T0^2}\right) + \quad (35-2)$$

$$\begin{aligned}
& 24\left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 \overline{us_0}}{\partial X^2}\right) + 24\left(\frac{\partial^2 \overline{ws_0}}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial \overline{us_0}}{\partial X}\right) + 2hs^2\left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 \overline{up_0}}{\partial X^2}\right) + 24k_s\theta 2\left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X}\right) \\
& + 24k_s\theta_2\left(\frac{\partial \overline{up_1}}{\partial X}\right) + -24Xe\left(\frac{\partial^2 \overline{ws_0}}{\partial T0^2}\right) + 24k_s\theta_2 \overline{up_0} + 24\theta_1\left(\frac{\partial^2 \overline{ws_0}}{\partial X^2}\right)\overline{wp_0} + \\
& 24\theta_1\left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X}\right) + 24k_s\theta_2 \overline{up_0} + 24k_s\theta_2\left(\frac{\partial^2 \overline{ws_1}}{\partial X^2}\right) + 24k_s\theta_2 \overline{wp_0}\left(\frac{\partial \overline{up_0}}{\partial X}\right) + \\
& 48k_s\theta_2\left(\frac{\partial^2 \overline{ws_0}}{\partial X^2}\right)\overline{wp_0} + +48k_s\theta_2\left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X}\right) + 24k_s\theta_2\left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X}\right)\overline{up_0} = 0
\end{aligned}$$

$$4\theta_2 \bar{h}^2\left(\frac{\partial^2 \overline{wp_0}}{\partial X^2}\right)\overline{wp_0} + 2X\bar{h}^2\theta_2\left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X^2}\right) + 2\bar{h}^2\theta_1\left(\frac{\partial^2 \overline{wp_0}}{\partial X^2}\right)\overline{wsp_0} - 24X\theta_1\left(\frac{\partial \overline{us_0}}{\partial X}\right) \quad (36-2)$$

$$\begin{aligned}
& -40e\bar{h}^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{wp_1}}{\partial T_0^2} \right) - 24\theta_2 \left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X} \right) \overline{up_0} - 24\theta_1 \overline{wsp_0} \left(\frac{\partial \overline{us_0}}{\partial X} \right) - 24\theta_1 \left(\frac{\partial \overline{us_1}}{\partial X} \right) \\
& -2Xe\bar{h}^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{wp_0}}{\partial T_0^2} \right) - 24\theta_2 \left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X} \right)^2 - 24\theta_1 \overline{us_0} - 24X \overline{wp_0} + \bar{h}^2 \theta_1 \left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X} \right)^2 + \\
& -12\theta_1 \left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X} \right)^2 + 2\bar{h}^2 \frac{\partial^2 \overline{wp_0}}{\partial X^2} \left(\frac{\partial \overline{us_0}}{\partial X} \right) + 2\theta_2 \bar{h}^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{wp_1}}{\partial X^2} \right) + 2\theta_2 \bar{h}^2 \left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X} \right)^2 \\
& 2\theta_2 \bar{h}^2 \left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X} \right) - 4e\bar{h}^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{wp_0}}{\partial T_1 \partial T_0} \right) + 2\bar{h}^2 \left(\frac{\partial \overline{ws_0}}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial^2 \overline{up_0}}{\partial X^2} \right) + 2\bar{h}^2 \left(\frac{\partial \overline{wp_0}}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial^2 \overline{us_0}}{\partial X^2} \right) \\
& -36\overline{wp_0}^2 - 24\overline{wp_1} + 2\bar{h}^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{ws_0}}{\partial X^2} \right) \left(\frac{\partial \overline{up_0}}{\partial X} \right) = 0
\end{aligned}$$

۲-۵- تحلیل فرکانسی

در ابتدا معادلات اول و چهارم بررسی می‌شود جابجایی‌ها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\begin{aligned}
\overline{us_0}(X, T_0, T_1) &= ap_1 e^{mX} e^{Iw_{14}T_0} \\
\overline{wp_0}(X, T_0, T_1) &= ap_4 e^{mX} e^{Iw_{14}T_0} \\
\overline{up_0}(X, T_0, T_1) &= ap_2 e^{mX} e^{Iw_{23}T_0} \\
\overline{ws_0}(X, T_0, T_1) &= ap_3 e^{mX} e^{Iw_{23}T_0}
\end{aligned} \tag{۳۷-۲}$$

با جایگذاری روابط (۳۷-۲) در (۲۹-۲) و (۳۲-۲) دو معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت و

همگن حاصل می‌شود که حل عمومی آن به شکل زیر است:

$$y_g = \sum_{i=1}^4 C_i V_i e^{m_i X} \tag{۳۸a-۲}$$

m_i مقادیر ویژه سیستم است که مقادیر آن عبارتند از:

$$m_{1,2,3,4} = \quad (38b-2)$$

$$(+, -) \frac{\sqrt{2}}{2} ((-w_{14}^2 e \bar{h}^2 \theta_2 - w_{14}^2 e \bar{h}^2 - 12\theta_1^2 + 12(+, -) \\ \sqrt{w_{14}^4 e^2 \bar{h}^4 \theta_2^2 - 2w_{14}^4 e^2 \bar{h}^4 \theta_2 + w_{14}^4 e^2 \bar{h}^4} \\ + 24w_{14}^2 e \bar{h}^2 \theta_1^2 + 24w_{14}^2 e \bar{h}^2 \theta_1^2 \theta_2}) / \bar{h}^2 \theta)^{0.5} \\ \sqrt{24w_{14}^2 e \bar{h}^2 \theta_2 - 24w_{14}^2 e \bar{h}^2 + 144\theta_1^4 - 288\theta_1^2 + 144}$$

برای هر فرکانس یک بردار ویژه به صورت $V=(ap_1, ap_4)$ به دست می‌آید. با اعمال شرایط مرزی یک دستگاه معادله همگن به صورت $[AX]\{C\}=\{0\}$ برقرار است که بردار $\{C\}$ شامل ضرایب ثابت C_4, C_3, C_2, C_1 است. ماتریس $[AX]$ ضرایب معادلات است که برای برقراری جواب باید دترمینان $[AX]$ صفر باشد. معادله به دست آمده از دترمینان برحسب w_{14} بسیار پیچیده بوده که باروش نصف کردن w_{14} را می‌توان به دست آورد. که w_{14} فرکانس طبیعی معادلات (2-29)، (2-32) بوده و w_{23} فرکانس طبیعی معادلات (2-30)، (2-31) می‌باشد.

۲-۶- روش نصف کردن

این روش، یک روش ریاضی در ریشه‌یابی است که به صورت تکرار هر بازه نصف شده و سپس یک بازه جایگزین انتخاب می‌شود. برای حل لازم است، تابع $f(x)=0$ در بازه (a,b) پیوسته و تعریف شده باشد و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف علامه بوده لذا تابع f باید در این بازه حداقل یک ریشه داشته باشد. در هر گام، در این روش نقطه میانی بازه به صورت $c = \frac{a+b}{2}$ تعریف شده، حال مقدار تابع را در نقطه میانی بازه تعیین کرده، اگر $f(a) < 0$ ، $f(c)$ ، بازه جدید به صورت (a,c) در می‌آید در غیر این صورت بازه جدید (b,c) خواهد شد. در این روش در هر مرحله طول بازه ۵۰٪ کاهش پیدا می‌کند و تا جایی ادامه پیدا می‌کند تا طول بازه به اندازه کافی کوچک شود. در این پروژه نیز از همین روش استفاده شد. به این صورت که بین کوچک‌ترین بازه از اعدادی که در دترمینان ماتریس ضرایب صدق می‌کنند روش

نصف کردن اعمال می‌شود تا جایی که مقدار ریشه به دست آمده از تلورانس در نظر گرفته‌شده، کوچک‌تر باشد. [۱۹]

۲-۷- آنالیز مودال برای معادلات مرتبه یک

در این قسمت ابتدا معادلات را به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}\overline{us_0}(X, T_0, T_1) &= Y_{11}(X) A_1(T_1) e^{IW_{14}T_0} \\ \overline{wp_0}(X, T_0, T_1) &= Y_{12}(X) A_1(T_1) e^{IW_{14}T_0} \\ \overline{up_0}(X, T_0, T_1) &= Y_{21}(X) B_1(T_1) e^{IW_{23}T_0} \\ \overline{ws_0}(X, T_0, T_1) &= Y_{22}(X) B_1(T_1) e^{IW_{23}T_0}\end{aligned}\quad (۳۹-۲)$$

به ترتیب شکل مود در جهت عرضی و در جهت شعاع است و همچنین Y_{21}, Y_{22} به ترتیب شکل مد در راستای شعاعی و عرضی هستند.

در استفاده از روش اغتشاشات در تحلیل مودال معمولاً معادلات مرتبه صفر همگن هستند، درحالی‌که مسائل مرتبه بالاتر غیر همگن هستند. برای مشخص کردن وابستگی مقیاس‌های آهسته، باید معادلات مرتبه بالاتر حل یکنواخت را ارائه دهند. برای ای کار با حذف جمله های سکولار انجام می‌شود. در یک سیستم یک درجه آزاد، حذف جمله های سکولار آسان است، زیرا تمام آنچه باید انجام شود این است که ضرایب عباراتی که ترم های سکولار ایجاد می‌کنند، برابر صفر در نظر گرفته شود. درحالی‌که سیستم های چند درجه آزاد هنگامی که معادلات حاکم کوپل به هم هستند، حذف کردن ترم های سکولار کمی پیچیده است. برای این منظور از شرایط حل پذیری استفاده می‌شود [۲۰].

در این قسمت با استفاده از شرایط حل پذیری تابع $A(T_1)$ تعیین می‌شود به این صورت که دو تابع الحاقی φ_1, φ_2 در معادلات مرتبه صفر ضرب شده و دو معادله باهم جمع شده و انتگرال گرفته می‌شود.

$$\int_{X_{in}}^{X_{out}} (eq_1 * \varphi_1 + eq_4 * \varphi_2) dX = 0 \quad (40-2)$$

در معادله بالا eq_4, eq_1 به ترتیب جملات مرتبه صفر از معادله (2-29), (2-32) هستند. در معادله بالا توابع الحاقی با انتگرال جزء به جزء از رابطه (2-40) تعیین می‌شوند:

$$\int \left(Y_{11}(X) \left(p_2 \left(\frac{d^2}{dX^2} \varphi_1(X) \right) - p_1 \left(\frac{d}{dX} \varphi_2(X) \right) + p_0 \varphi_1(X) \right) + Y_{12}(X) \left(q_2 \left(\frac{d^2}{dX^2} \varphi_2(X) \right) - q_1 \left(\frac{d}{dX} \varphi_1(X) \right) + q_0 \varphi_2(X) \right) \right) dX = 0 \quad (41-2)$$

توابعی معلوم از پارامترهای هندسی و فیزیکی سیستم هستند. معادلات الحاقی به دست آمده از (2-41) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی همگن با ضرایب ثابت است. که حل آنها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\varphi_1(X) = ar_1 e^{mX}; \varphi_2(X) = ar_4 e^{mX} \quad (42-2)$$

با جایگزینی در معادلات، تعیین m و همچنین تعیین رابطه بین ar_1, ar_4 می‌توان حل عمومی معادلات را تعیین کرد. شرایط مرزی در حالت گیردار، صفر بودن توابع در دولبه است.

بعد از به دست آوردن توابع الحاقی، معادلات (2-33), (2-36) در φ_1, φ_2 ضرب شده و انتگرال گرفته می‌شود:

$$\int (eq_{11} * \varphi_1 + eq_{44} * \varphi_2) dX = 0 \quad (43-2)$$

از رابطه فوق می‌توان جملات سکولار را حذف و $A(T_1)$ را به دست آورد.

۲-۸- تعیین پاسخ

حل تحلیلی پاسخ برای شرایط مرزی ساده تعیین می‌شود. حل معادلات (۲-۲۹) تا (۲-۳۲) به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\overline{us_0}(X, T_0, T_1) = \sum_{m=0}^{\infty} A_1(T_0, T_1) \cos\left(\frac{m\pi X}{L}\right) \quad (۲-۴۴)$$

$$\overline{up_0}(X, T_0, T_1) = \sum_{m=0}^{\infty} A_2(T_0, T_1) \cos\left(\frac{m\pi X}{L}\right)$$

$$\overline{ws_0}(X, T_0, T_1) = \sum_{m=0}^{\infty} A_3(T_0, T_1) \sin\left(\frac{m\pi X}{L}\right)$$

$$\overline{wp_0}(X, T_0, T_1) = \sum_{m=0}^{\infty} A_4(T_0, T_1) \sin\left(\frac{m\pi X}{L}\right)$$

که $L = X_{out} - X_{in}$ و $X = \frac{\bar{r}-1}{ep_1}$ و $ep_1 = h/a$ بوده و برای X_{in} باید شعاع داخلی و برای X_{out} باید شعاع

خارجی را جانشین کرد. برای سادگی، در ادامه کار، اندیس m حذف شده است. با جایگزینی در

معادلات (۲-۳۲)، (۲-۲۹) و استفاده از بسط سری فوریه سینوسی و کسینوسی، بخش مکانی

معادلات حذف می‌شود:

معادله مرتبه صفر عبارتند از:

$$-\frac{\pi^2 A_1}{L^2} - e \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial T_0^2} \right) + \frac{\theta_1 A_2 \pi}{L} = 0 \quad (۲-۴۵)$$

$$\left(-12\theta_2 - \frac{\bar{h}^2 \pi^2}{L^2} \right) A_1 - \frac{12\theta_2 A_2 \pi}{L} - \bar{h}^2 e \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial T_0^2} \right) = 0 \quad (۲-۴۶)$$

$$-\frac{2\left(\int_{X_{in}}^{X_{out}} Q_s \sin\left(\frac{\pi X}{L}\right) dX\right)}{L} - \frac{\theta_2 \bar{h} A_2 \pi^2}{L^2} - e\bar{h}\left(\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} A_2\right) - \frac{\theta_2 \bar{h} A_1 \pi}{L} = 0 \quad (47-2)$$

$$\frac{\theta_1 A_1 \pi}{L} + \left(-1 - \frac{1}{12} \frac{\bar{h}^2 \theta_2 \pi^2}{L^2}\right) A_2 - \frac{\int_{X_{in}}^{X_{out}} Q_s \sin\left(\frac{\pi X}{L}\right) dX}{L} - \frac{1}{12} \bar{h}^2 e \left(\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} A_2\right) = 0 \quad (48-2)$$

حال معادلات (48-2), (47-2) با هم و (46-2), (45-2) با هم حل می‌گردد زیرا دارای مجهولات مشترک هستند. سپس در معادلات مرتبه یک (33-2), (36-2) جایگزین می‌شود. بعد از آن قسمت سکولار و غیر سکولار از هم جدا و جداگانه حل می‌گردد. برای اینکه قسمت سکولار در پاسخ جدا شود از شرایط حل پذیری استفاده می‌شود [19].

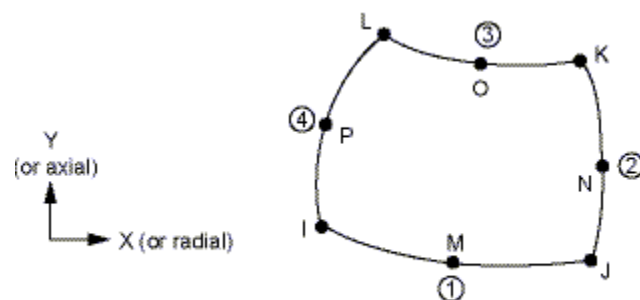
۹-۲- حل عددی

۹-۲-۱- مقدمه

در این بخش حل عددی مساله بررسی شده است. المان مورد استفاده ۸۲ plane در نرم افزار انسیس است در روند حل بعد از انتخاب مش بهینه، فرکانس‌های ورق تعیین می‌شود.

۹-۲-۲- معرفی المان

المان دوبعدی انتخابی ۸۲ plane در حالت متقارن محوری است. این المان دارای هشت گره بوده و هر گره آن دو درجه آزادی انتقالی در جهت Y, X دارد. شکل (2-2)، شماتیک این المان را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۲: المان انتخابی برای حل عددی در انسیس [۲۱]

۲-۹-۳- تعیین مش بهینه

بعد از وارد کردن خواص مکانیکی در نرم افزار می توان مش بندی را اعمال کرد. جدول خواص در زیر آمده است.

جدول ۲-۱: داده های مکانیکی ورق مدور

$\rho = 7800 \left(\frac{kg}{m^3} \right)$	چگالی
$r_0 = 0.2 (m)$	شعاع خارجی
$\frac{r_i}{r_o} = 0.5$	نسبت شعاع داخل به خارجی
$\nu = 0.3$	ضریب پواسون
$h = 0.01 (m)$	ضخامت
$E = 200 G (pa)$	مدول یانگ

مش بندی های مختلف روی مقطع زده می شود در جایی که اولین فرکانس به سمت همگرایی میل می کند ، مش بهینه انتخاب می شود.

جدول ۲-۲: مش بندی های مختلف و انتخاب مش بهینه

تعداد المان	۴۰۰	۹۰۰	۱۶۰۰	۲۵۰۰	۲۶۰۱
فرکانس (Hz)	۱۴۶۰.۴	۱۴۵۹.۸	۱۴۵۹.۵	۱۴۵۹.۴	۱۴۵۹.۴

جدول (۲-۲) نشان می دهد که ۲۵۰۰ قسمت، مش بندی مناسبی برای ورق با مشخصات جدول (۱-)

(۲) است .

۲-۹-۴- مدل سازی ورق در حالتی که بار به آن وارد می شود

برای مدل کردن ورق در حالتی که نیرو به آن وارد می شود باید از دو مرحله زمانی در انسیس استفاده کرد . زمانی که نیرو وارد می شود و زمانی که نیرو برداشته می شود. انتخاب گام زمانی مناسب برای بارگذاری بسیار مهم است. گام زمانی بصورتی باید باشد که بتواند پاسخ ورق را کاملاً نشان دهد. این کار با سعی و خطا انجام می شود. استفاده از رابطه $\Delta t = \frac{1}{20f}$ نیز مفید است که f بزرگترین فرکانس در پاسخ است.

۲-۹-۵- تعیین گام زمانی بهینه

علاوه بر تعیین مش بندی بهینه سازه ، گام زمانی بهینه نیز باید تعیین شود.. معیار همگرایی می تواند جابجایی بر حسب مکان در یک زمان خاص باشد.

۲-۱۰- جمع بندی

در این فصل ابتدا مساله مورد نظر و میدان جابجایی طرح گردید و با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و اصل هامیلتون معادلات سیستم استخراج شد. سپس معادلات بی بعد شده با روش اغتشاشات حل وفرکانس های خطی به دست آمد. در قسمت پاسخ با استفاده از اعمال سری فوریه بخش مکانی مساله برای حالت تکیه گاه ساده حذف و برای از بین بردن سکولاریتی از شرایط حل پذیری استفاده گردید. برای حل عددی مساله ابتدا المان مناسب انتخاب و روند مش بندی بهینه، گام زمانی مناسب، تعیین فرکانس و پاسخ، توضیح داده شد.

فصل سوم: بررسی نتایج

۳-۱- مقدمه

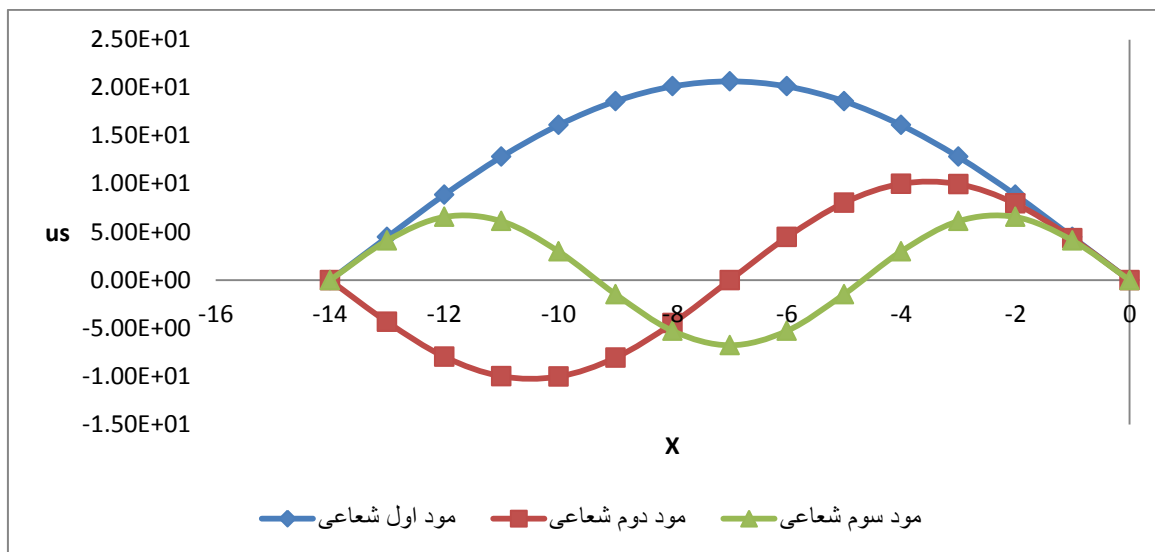
در این بخش اثر پارامترهای هندسی بر پاسخ و فرکانس بررسی می‌شود. محاسبات با استفاده از نرم‌افزار Maple انجام شده است. مشخصات ورق مطابق جدول (۳-۱) است.

جدول ۳-۱: مشخصات مکانیکی ورق

$\rho = 7800 \left(\frac{kg}{m^3} \right)$	چگالی
$r_o = 0.2 (m)$	شعاع خارجی
$= 0.3 \frac{r_i}{r_o}$	نسبت شعاع داخل به خارجی
$\nu = 0.3$	ضریب پواسون
$h = 0.01 (m)$	ضخامت
$E = 200 G Pa$	مدول ینگ

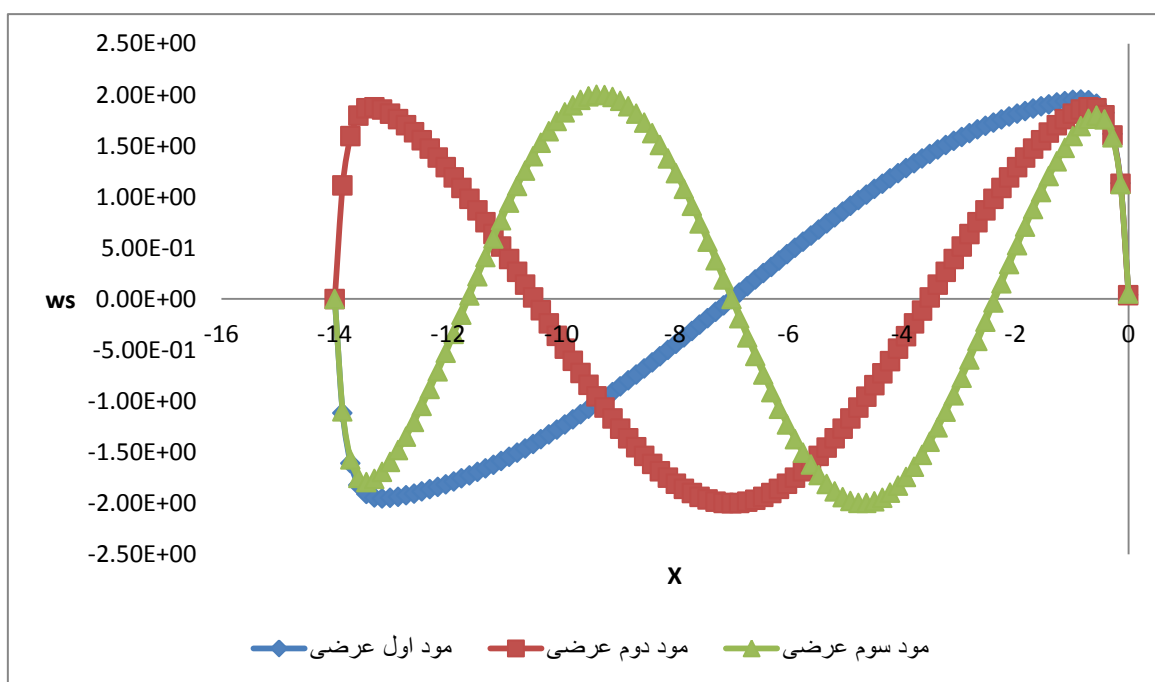
۳-۲- تحلیل فرکانسی

شکل (۳-۱) مودهای اول تا سوم معادلات (۲-۲۹)، (۲-۳۲) را نشان می‌دهد:



شکل ۳-۱: مودهای شعاعی اول و دوم و سوم

شکل (۲-۳) مودهای اول و دوم و سوم عرضی معادلات (۲-۲۹)، (۲-۳۲) را نشان می‌دهد:



شکل ۳-۲: مودهای عرضی اول و دوم و سوم

جدول (۲-۳) مقایسه‌ای بین فرکانس‌های عرضی با حل عددی و تحلیلی ارائه داده است. در این جدول داده‌های فرکانسی با روش تئوری کلاسیک (CPT)، حل عددی (FE) و حل با تئوری برشی مرتبه اول (FSDT) آورده شده است.

جدول ۲-۳: مقایسه فرکانس اول در سه روش FE, CPT, FSDT

$\frac{r_i}{r_o}$	FSDT(Hz)	FE (Hz)	CPT (Hz)	J(m) (%)	J(b) (%)
۰.۱	۱۴۹۶.۳	۱۶۲۶.۲	۱۶۶۳.۳	۸.۷	۲.۲
۰.۵	۱۴۹۶.۵	۱۴۶۳.۶	۱۴۹۶.۶	۲.۲۱	۲.۲
۰.۳	۲۷۱۰.۴	۲۶۹۲.۵	۲۷۱۰.۲	۲.۶	۲.۶
۰.۱	۱۳۷۹.۸	۱۳۶۱.۳	۱۳۳۳.۳	۱.۲	۲

در جدول (۲-۳) به ازای $\frac{r_i}{r_o}$ مختلف، درصد خطاها بین حل FSDT و حل عددی با حل از روش

CPT J(m) و J(b) به صورت زیر محاسبه شده است:

$$J(m) = \left| \frac{FSTD - CPT}{CPT} \right| * 100 \quad (۲-۳)$$

$$J(b) = \left| \frac{FE - CPT}{CPT} \right| * 100 \quad (۳-۳)$$

جدول (۳-۳) مقادیر حاصل از روش عددی و تحلیلی برای $\frac{r_i}{r_o} = 0.3$ در ضخامت‌های مختلف را

نشان می‌دهد که در ضخامت‌های کوچک درصد خطا بالا رفته است.

جدول ۳-۳: مقایسه فرکانس‌های عرضی با روش عددی و تحلیل برای $\frac{r_i}{r_o} = 0.3$

$\frac{r_i}{r_o} = 0.3$					
a/h	۵	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰۰
FSDT(Hz)	۷۴۸۶.۱	۴۸۵۶.۲	۲۶۶۴.۸	۱۱۱۷.۳۸	۵۶۱.۰۳
FE(Hz)	۷۵۴۱.۱	۴۹۱۵.۵۶	۲۶۷۲.۵	۱۱۱۷.۰۰	۶۵۵.۲۱
J(%)	۰.۹۳	۱.۲	۰.۲۸	۰.۰۳	۱۴.۴۶

جدول (۴-۳) داده‌های تحلیلی و عددی را برای ضخامت‌های مختلف در $\frac{r_i}{r_o} = 0.01$ ارائه داده است که

در ضخامت‌های کوچک اختلاف بین حل تحلیلی و عددی بالا رفته است.

جدول ۴-۳: مقایسه فرکانس‌های عرضی با عددی و تحلیلی برای $\frac{r_i}{r_o} = 0.01$

$\frac{r_i}{r_o} = 0.01$			
a/h	۲۰	۵۰	۱۰۰
FSDT	۱۳۵۵.۸	۵۵۶.۳۵	۷۷۱.۴۱
FE	۱۳۶۱.۳	۵۷۱.۶۷	۳۰۵.۸۲

جدول (۵-۳) نیز نمایشی از داده‌های تحلیلی و عددی در ضخامت‌های مختلف برای نسبت شعاع

خارجی به داخلی $\frac{r_i}{r_o} = 0.05$ می‌باشد.

جدول ۵-۳: مقایسه فرکانس‌های عرضی با عددی و تحلیلی برای $\frac{r_i}{r_o} = 0.05$

$\frac{r_i}{r_o} = 0.05$			
a/h	۲۰	۵۰	۱۰۰
FSDT	۱۴۶۳.۶	۶۰۷.۷۷	۸۳۶.۸۷
FE	۱۴۴۹.۳۲	۵۹۹.۱۶	۳۲۸.۷۸

جدول (۶-۳) دو فرکانس خطی و غیرخطی به دست آمده از معادلات مرتبه صفر- (۳۱)، (۲-۳۰)

(۲) و مرتبه یک (۲-۳۵)، (۲-۳۴) را نشان می‌دهد که تفاوت بین آن‌ها بسیار ناچیز است. دلیل آن این

است که وابستگی فرکانس غیرخطی در این مرحله، فقط به ε وابسته است و ε نیز کوچک

است. وابستگی فرکانس به دامنه، از معادلات مرتبه دو به دست می‌آید که در این پایان نامه، بررسی

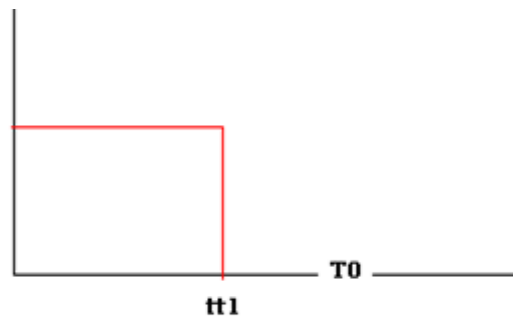
نشده است.

جدول ۳-۶: تفاوت فرکانس‌های خطی و غیرخطی

W_{23} (Hz)	W_{nl23} (Hz)	W_{nl23}/W_{23}
۱۴۹۵.۸۳۰۰۶۵۰۶	۱۴۹۵.۸۳۰۱۸۹۵۰	۱.۰۰۰۰۰۰۰۸۳

۳-۳- پاسخ

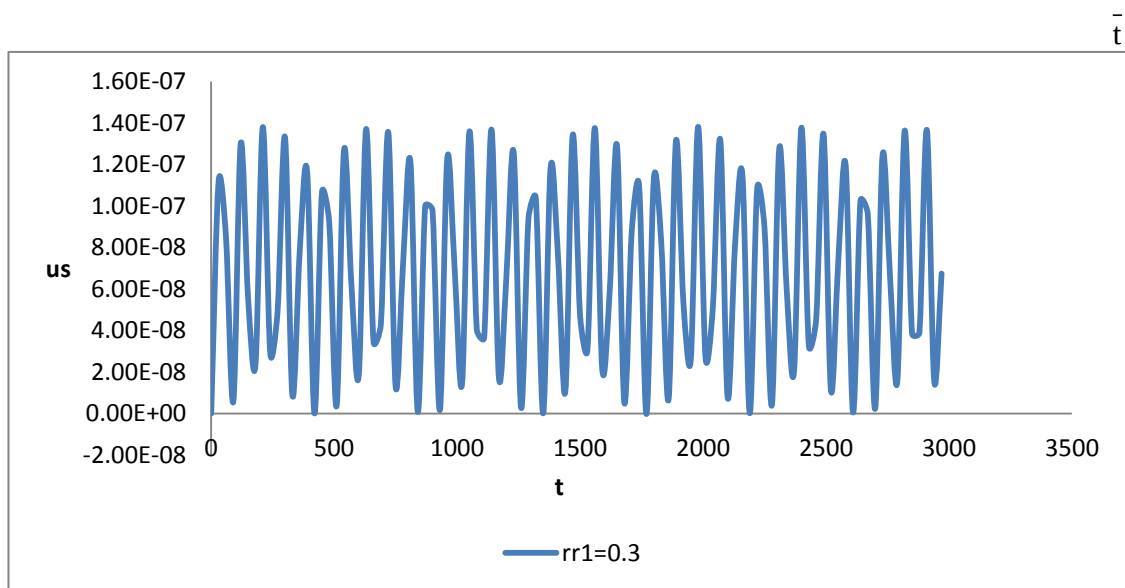
در این بخش پاسخ مساله بر حسب و زمان تعیین شده است. همچنین اثر پارامترهای هندسی بر پاسخ تعیین شده است. مشخصات هندسی در تمام نمودارها مطابق جدول (۳-۱) است مگر خلاف آن ذکر شود. بارگذاری نیز مطابق شکل (۳-۳)



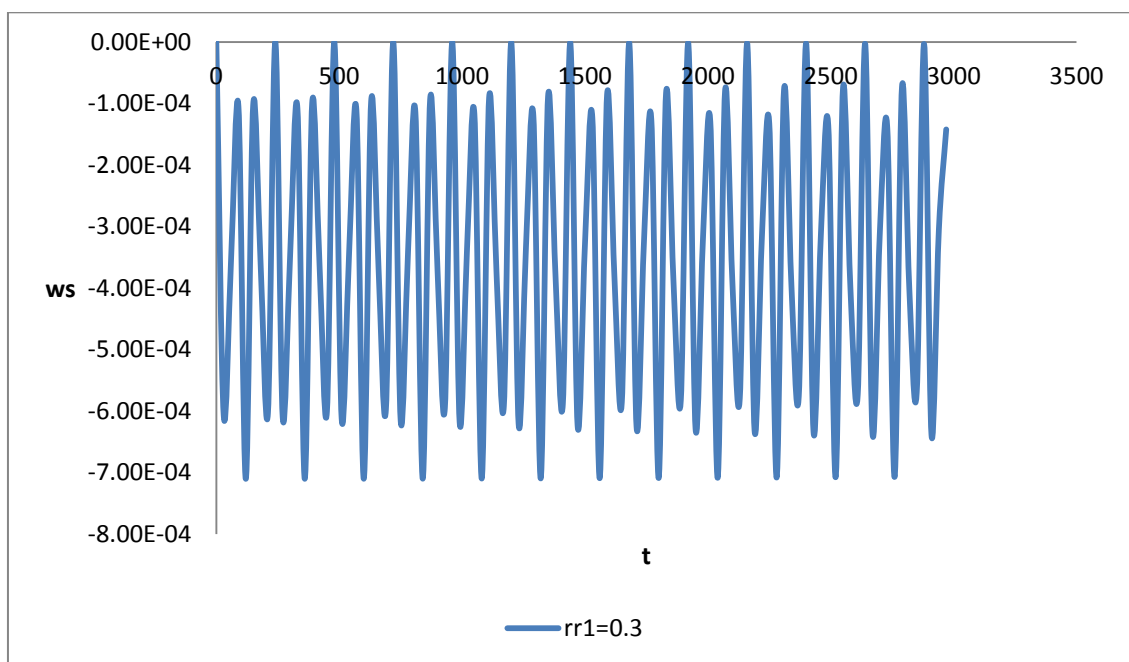
شکل ۳-۳: نمایی از بار اعمالی که به مدت $t_1=1$ ثانیه بر ورق اعمال می‌شود

شکل (۳-۴) پاسخ شعاعی ورق را در $\bar{r} = 0.0936$ تا زمان $\bar{t} = 3000$ نشان می‌دهد و شکل (۳-۵) پاسخ

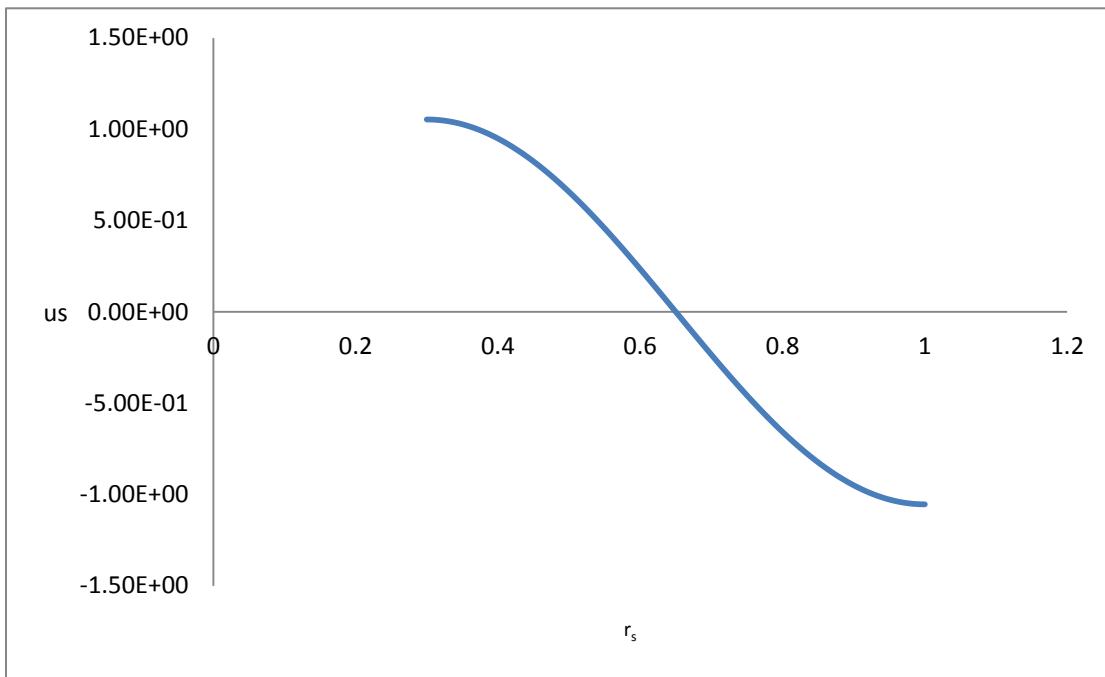
عرضی ورق را در $\bar{r} = 0.0936$ تا زمان $\bar{t} = 3000$ نشان می‌دهد



شکل ۳-۴: پاسخ (جابجایی شعاعی) بر حسب زمان در $\bar{r} = 0.0936$

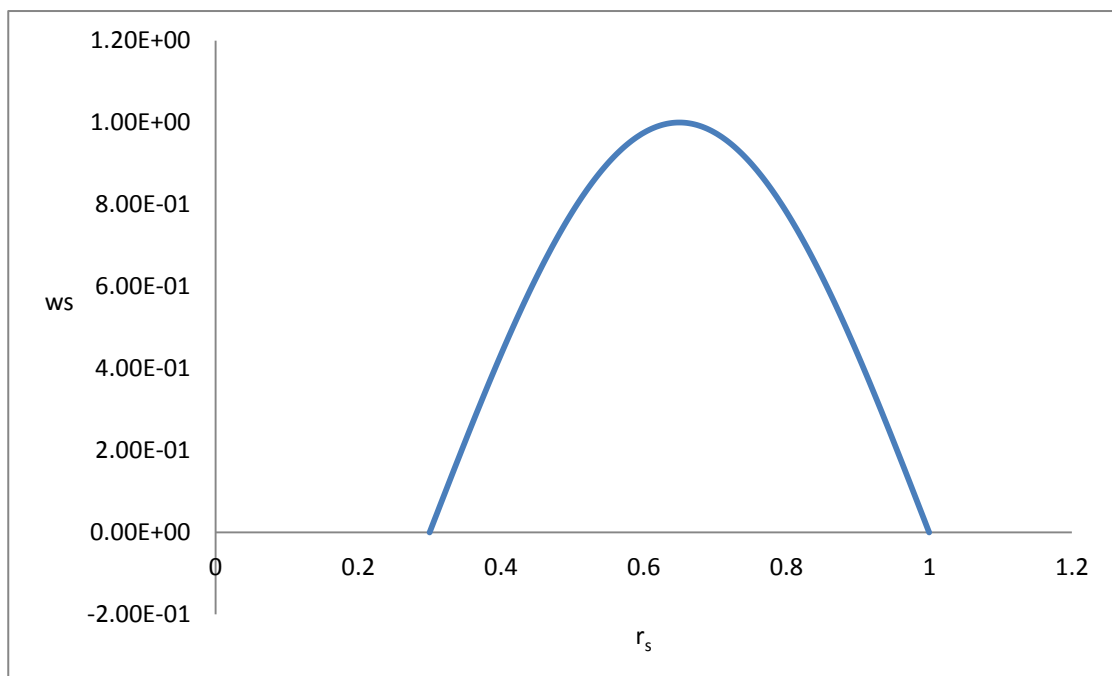


شکل ۳-۵: پاسخ (جابجایی عرضی) بر حسب زمان در $\bar{r} = 0.0936$



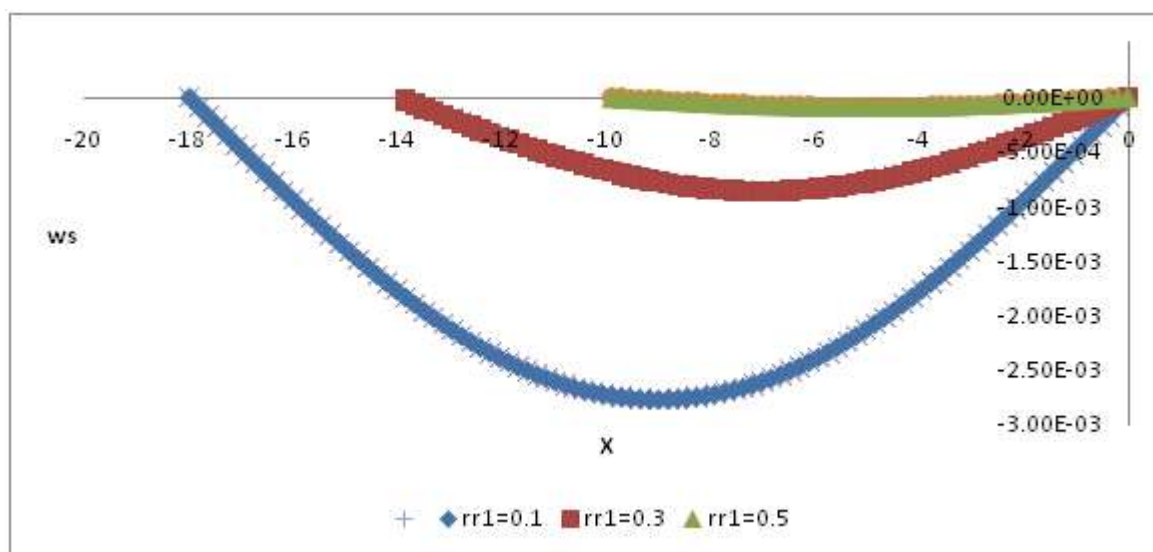
شکل ۳-۶: پاسخ (جابجایی شعاعی) بر حسب مکان در $\bar{t} = 3000$

شکل (۳-۶) پاسخ شعاعی بر حسب مکان را در زمان $\bar{t} = 3000$ نشان می‌دهد:



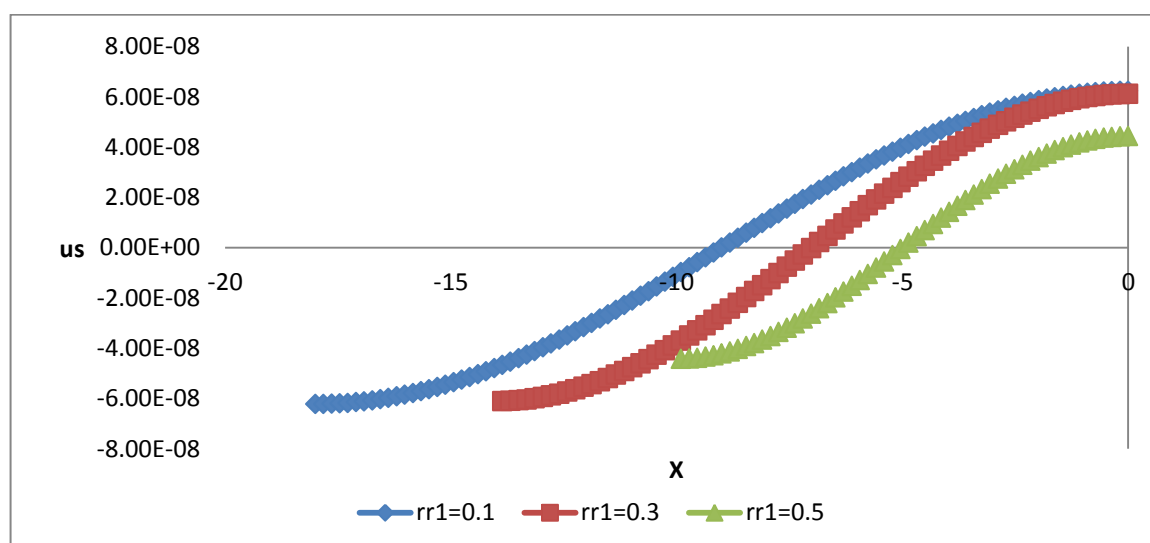
شکل ۳-۷: پاسخ (جابجایی عرضی) بر حسب مکان در $\bar{t} = 3000$

همچنین شکل (۳-۷) پاسخ عرضی بر حسب مکان را در زمان $\bar{t} = 3000$ نشان می‌دهد



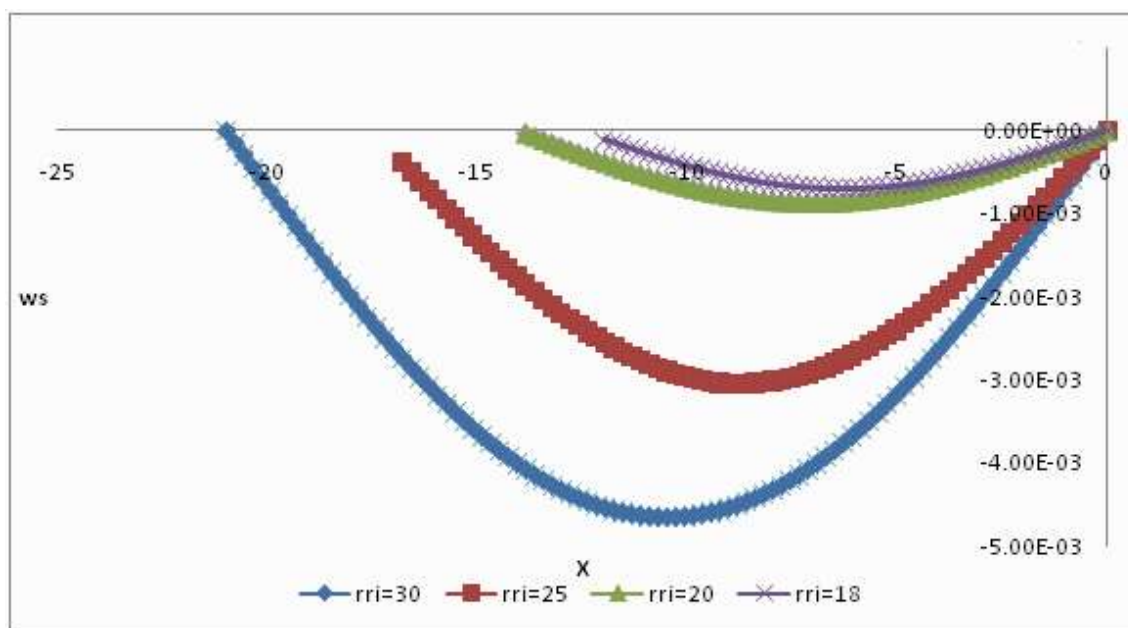
شکل ۳-۸: تأثیر نسبت شعاع داخلی به خارجی بر پاسخ عرضی در زمان $\bar{t} = 3000$

شکل (۳-۸) ، (۳-۹) تأثیر نسبت شعاع را بر پاسخ شعاعی را نشان می‌دهد که هرچه شعاع داخلی کمتر باشد دامنه ارتعاش بیشتر می‌شود.



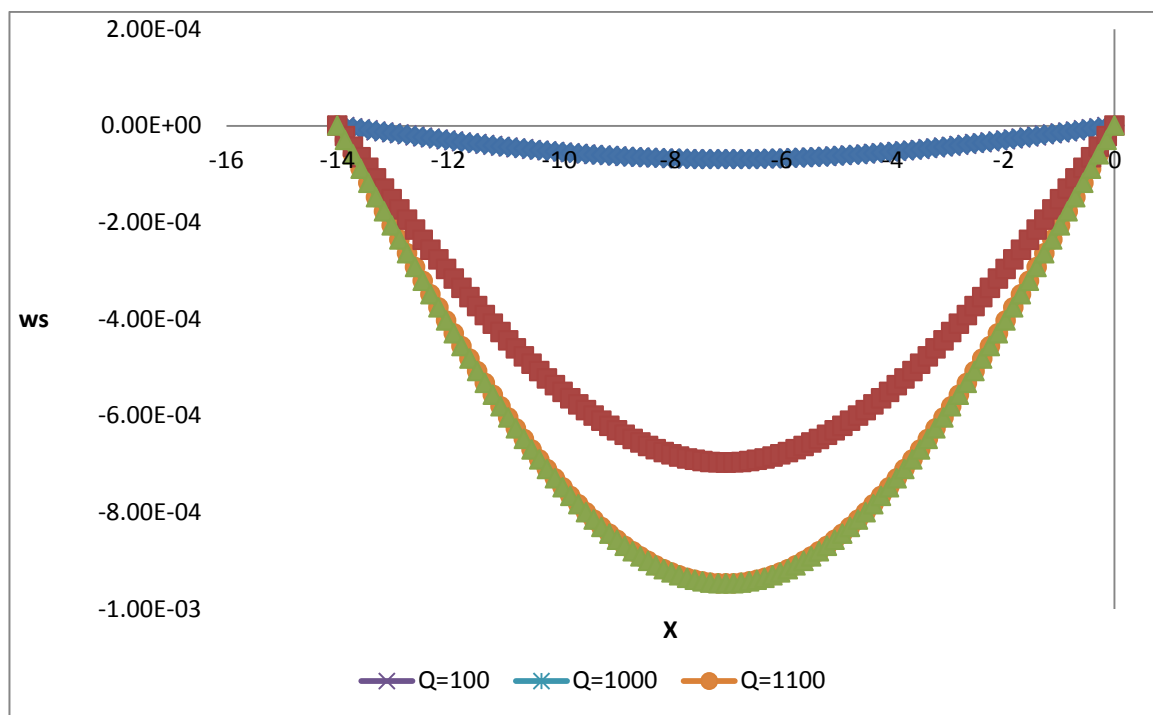
شکل ۳-۹: تأثیر نسبت شعاع خارجی به داخلی بر پاسخ شعاعی در $\bar{t} = 3000$

در شکل (۳-۱۰) تأثیر ضخامت ورق را بر پاسخ عرضی مشاهده می‌کنید که هرچه ورق نازک‌تر باشد دامنه حرکت شعاعی بیشتر است.



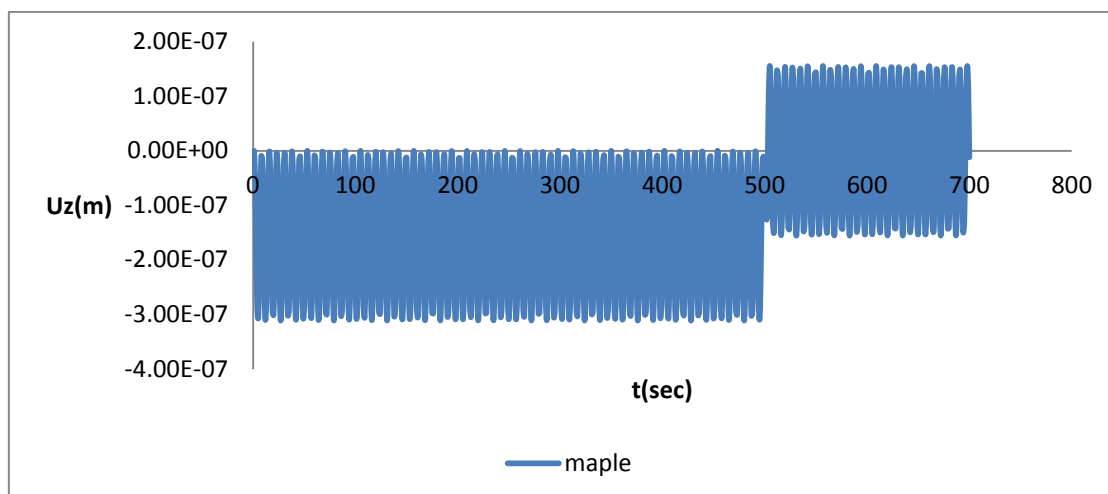
شکل ۳-۱۰ا: تأثیر ضخامت بر پاسخ عرضی در $\bar{t} = 3000$

شکل (۳-۱۱) تأثیر بار اعمالی بر پاسخ عرضی را در زمان $t_s = 3000$ نشان می‌دهد که هر چه بار بیشتر شود دامنه پاسخ عرضی بیشتر شده است.

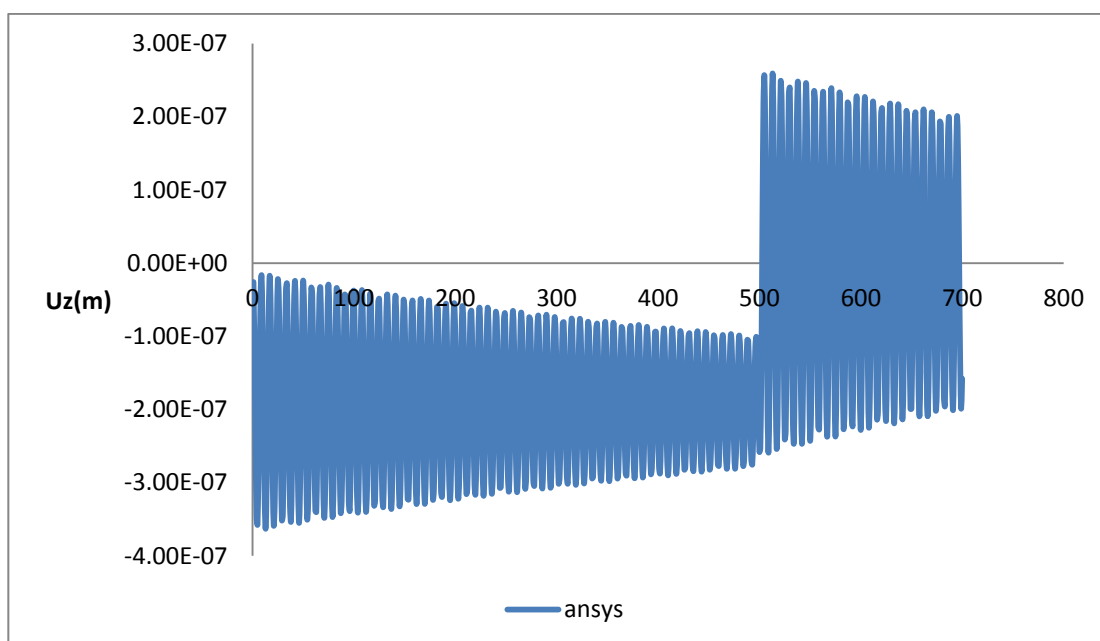


شکل ۱۱-۳: تأثیر بار اعمالی بر پاسخ عرضی در زمان $\bar{t} = 3000$

شکل ۱۲-۳ مقایسه‌ای بین نتایج انسیس و میپل در قسمت پاسخ است که مشخصات فیزیکی ورق طبق جدول ۱-۳ می‌باشد. مطابق شکل پدیده‌ای به نام ضربان در ورق مدل شده در انسیس دیده می‌شود که این پدیده در مدل میپل اتفاق نمی‌افتد.



شکل ۳-۱۲: مقایسه جابجایی بین ورق مدل شده در انسیس و میپل زمانی که بار اعمال می‌شود



شکل ۳-۱۲b: مقایسه جابجایی بین ورق مدل شده در انسیس و میپل زمانی که بار اعمال می‌شود

۳-۵- جمع‌بندی

در این فصل اثر پارامترهای هندسی بر فرکانس و پاسخ بررسی شد. همچنین نتایج با حل عددی و تئوری کلاسیک مقایسه شد.

فصل چهارم: نتیجه‌گیری و پیشنهادها

ومراجع

در این پایان نامه آنالیز ارتعاشی (تعیین فرکانس طبیعی، شکل مد و پاسخ) یک ورق مدور متقارن محوری تحت بار عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و با خیز نسبتاً زیاد ارائه شد. معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون استخراج شد. معادلات حاکم که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با ضرایب متغیر است به کمک تئوری اغتشاشات حل شد و فرکانس‌های طبیعی و پاسخ سیستم به دست آمد. همچنین فرکانس‌ها با فرکانس حل عددی مقایسه گردید. علاوه بر آن، حساسیت نتایج به پارامترهای هندسی بررسی شد. برخی نتایج عبارتند از:

- روش ارائه شده کوپلینگ معادلات را کاهش داده و آن‌ها را به دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت در مرتبه صفر تبدیل می‌کند.
- با استفاده از معادلات استخراج شده امکان تعیین فرکانس‌های شعاعی علاوه بر فرکانس‌های عرضی وجود دارد.
- برای ضخامت‌های کم، تئوری کلاسیک نسبت به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارجحیت دارد.
- با افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.
- با افزایش ضخامت دامنه حرکت کاهش و فرکانس نیز (در محدوده مطالعه شده) کاهش می‌یابد.

۴-۲- پیشنهادها

جهت انجام مطالعه‌ی جامع تر موارد زیر قابل بررسی هستند:

- استفاده از تئوری برشی مرتبه بالاتر
- بررسی پاسخ سیستم تحت بار محوری وابسته به زمان
- بررسی پاسخ سیستم تحت بار عرضی وابسته به مکان
- تحلیل ورق مدور واقع بر بستر الاستیک

- [1]Amabili, M., 2008. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge University Press.
- [2]Ugural, A.C., 1999. Stress in plates and shells. McGraw-Hill Science Engineering.
- [۳] Reddy, J.N., 2006. Theory and analysis of elastic plates and shells. CRC press.
- [۴] ابراهیمی فرزاد و راستگو عباس، ۱۳۸۸، استفاده از تئوری کلاسیک صفحات در تحلیل ارتعاشات صفحه تابعی دایروی کوپل شده با لایه های پیزو الکتریک،امیر کبیر،شماره ۱، صفحه ۸-۱
- [5]Leissa, A.W., 1969. Vibration of plates. Ohio state university columbus
- [6]Weisensel, G.N., 1989. Natural frequency information for circular and annular plates. Journal of Sound and Vibration, 133(1), pp.129-137.
- [7]Akavci, S.S., Yerli, H.R. and Dogan, A., 2007. The first order shear deformation theory for symmetrically laminated composite plates on elastic foundation. Arabian Journal for Science and Engineering, 32(2), pp.341.
- [8] Alieldin, S.S., Alshorbagy, A.E. and Shaat, M., 2011. A first-order shear deformation finite element model for elastostatic analysis of laminated composite plates and the equivalent functionally graded plates. Ain Shams Engineering Journal, 2(1), pp.53-62.
- [9] Peng, L.X., Tao, Y.P., Li, H.Q. and Mo, G.K., 2014. Geometric nonlinear meshless analysis of ribbed rectangular plates based on the FSDT and the moving least-squares approximation. Mathematical Problems in Engineering,no.1,pp.1-13
- [10] Xiang, Y. and Reddy, J.N., 2003. Natural vibration of rectangular plates with an internal line hinge using the first order shear deformation plate theory. Journal of Sound and Vibration, 263(2), pp.285-297.

[1۱]. Hua .X, Sakiyama. T.,Xiong .Y., Matsudab H., Morita. C., 2004, Vibration analysis of twisted plates using first order shear deformation theory,Journal of Sound and Vibration,pp.205-222

[۱۲]زیبائی محمدرضا ، ارغوانی جمال و رضوی سید حامد ، ۱۳۹۲، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق میندلین -ریسنر با روش هم هندسه، سومین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات-تهران،صفحه ۵۲۸ تا ۵۱۶

[۱۴] سعیدی علیرضا و آتشی پور سید رسول ، -۱۳۸۷، حل تحلیلی ارتعاشات آزاد ورق های ضخیم مستطیلی همسانگرد عرضی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، نشریه مکانیک هوا و فضا-جلد ۴-شماره ۳-صفحه ۵۹ تا ۶۹

[۱۵] طهانی مسعود و گلمکانی ایمان ، ۱۳۸۸، بررسی ارتعاشات آزاد صفحات مرکب متعامد به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول،کنفرانس دانشجویی مهندسی مکانیک، مشهد

[15] Khdeir, A.A. and Reddy, J.N., 1989. Exact solutions for the transient response of symmetric cross-ply laminates using a higher-order plate theory. Composites science and technology, 34(3), pp.205-224.

[16] Liew, K.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S., 1995. Research on thick plate vibration: a literature survey. Journal of Sound and Vibration, 180(1), pp.163-176.

[17] Romanelli, E., Rossi, R. E., Laura, P. A. A, and Gutierrez, R. H. (1998),Transverse vibrations of a circular annular plate with an intermediate circular support and a free inner edge, Journal of Sound and Vibration, 212(3), pp. 564-571,

[18]Wang, C.M., Reddy, J.N. and Lee, K.H. eds., 2000. Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions. Elsevier.

[19] Nayfeh, A.H. 1999. Introduction to perturbation methods.2012, Springer Science

[۲۰]. پورپاک علی محمد، ۱۳۸۴، "آنالیز عددی کاربردی" چاپ پنجم، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشکده فنی دانشگاه تهران، تهران.

[21]ansys user manual

Abstract

The Vibrational analysis of an axisymmetric annular plate under transverse loading has been presented based on the first order shear deformation theory. For the plate with moderately large deformation, the von-Karman relations have been used to define the kinematics of the problem. The constitutive equations are linear and the Hamilton's principle has been used to extract the motion equations. The governing equations contain a system of coupled partial differential equations with variable coefficients and the perturbation technique has been used for analytical solution. A sensitivity analysis has been performed and the effects of geometrical parameters have been investigated on the results. The results are compared with a numerical method. The response analysis for the simply supported case has been done too.

Key words: first order shear deformation theory, moderately large deformation , axisymmetric annular plate, perturbation technique

Vibrational analysis



Shahrood University of Technology

Kharazmi International Campus

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Vibrations analysis of an axisymmetric circular
plate with moderately large deformation using
first order shear deformation theory

By: Faeze tehrani

Supervisor:

Dr. Hamid Reza Eipakchi

2016 September