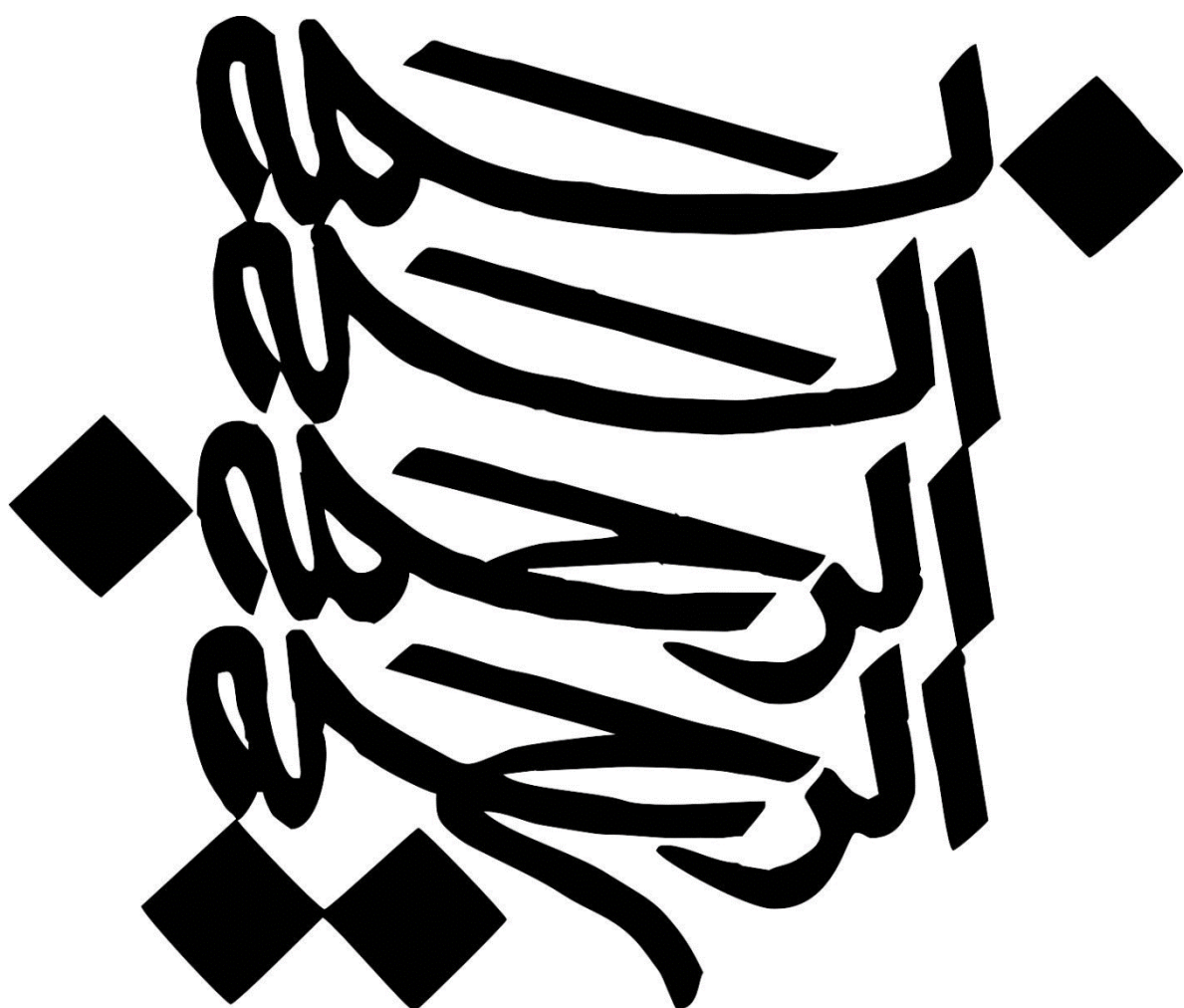






دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک
پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک تحت بار متحرک

نگارنده: فاطمه جوینی

استاد راهنما: دکتر اردشیر کرمی‌محمدی

شهریور ۱۳۹۵

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پاس قدردانی از تمام تلاش‌های محبت‌آمیزی که در دوران مختلف زندگی ام انجام

دادند،

و برادر عزیزم

که تنگه‌گاه من در طول زندگی و وجودش بایه‌ی دلگرمی من می‌باشد.

از پدر و مادر عزیزم، که در سختی ها و دشواری های زندگی، همواره یاری دلسوز و مهربان و پشتیبانی

محکم و مطمئن برایم بودند؛

و استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر اردشیر کرمی محمدی، که بدون راهنمایی ها و هدایت

ایشان تدوین این پایان نامه دشوار بود؛

نهایت تشکر و امتنان را دارم.

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه جوینی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک** دانشکده **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک تحت بار متحرک تحت راهنمایی دکتر اردشیر کرمی محمدی** متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

در این پایان‌نامه ارتعاشات غیرخطی تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک تحت بار متحرک مورد بررسی قرار گرفته است. نخست معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشات خطی تیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی بر اساس تئوری تیر اولر-برنولی و مدل ویسکوالاستیک کلین-ویت و با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. سپس ترم‌های مربوط به فرکانس طبیعی و فاکتور استهلاک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده با استفاده از روش جداسازی متغیرها و روش نیمه تحلیلی گلرکین به دست آمده‌اند که با مقایسه با مراجع پیشین مطابقت بسیار خوبی دارند. سپس جواب عمومی و خصوصی ناشی از ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری ناشی از بار متحرک استخراج شده و همچنین معادله‌ی ارتعاش آزاد پس از گذشتن بار از روی تیر به دست آمده است. تأثیر پارامترهای متغیر تابعی بر روی فرکانس طبیعی اول بدون استهلاک و فاکتور استهلاک اول مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش بعدی معادله‌ی حرکت ارتعاشات غیرخطی تیر با فرض کرنش ون-کارمن و تئوری تیر اولر-برنولی و با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. ارتعاشات آزاد غیرخطی نیز با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه مورد تحلیل قرار گرفته است و فرکانس طبیعی غیرخطی و پاسخ تیر استخراج گردیده است که به عنوان نمونه، تغییرات دامنه‌ی ارتعاشات مود اول و پاسخ تیر بر حسب زمان رسم شده است. در فصل آخر برای ارتعاشات اجباری غیرخطی تیر، رزونانس اولیه و حل حالت دائم با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه مورد تحلیل قرار گرفته و تأثیر دامنه‌ی نیروی تحریک و پارامترهای متغیر تابعی بر روی منحنی پاسخ فرکانسی مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی

مواد متغیر تابعی، مدل ویسکوالاستیک کلین-ویت، تئوری تیر اولر-برنولی، روش مقیاس‌های چندگانه

فهرست مقالات مستخرج از پایان نامه

"بررسی ارتعاشات آزاد تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک، اولین کنفرانس بین المللی دستاوردهای نوین

پژوهشی در مکانیک"، مکاترونیک و بیومکانیک، دانشگاه امیرکبیر، تهران، خرداد ماه ۱۳۹۵

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
۱- مقدمه	۱
۱-۱- مقدمه	۲
۱-۲- مواد ویسکوالاستیک	۴
۱-۲-۱- مدل ماکسول	۵
۱-۲-۲- مدل کلون-ویت	۸
۱-۲-۳- مدل سه جزئی	۱۰
۱-۳- مواد FGM	۱۲
۱-۳-۱- روش‌های تولید	۱۴
۱-۳-۲- تابع توزیع	۱۵
۱-۴- ارتعاشات تیر تحت بار متحرک	۱۵
۱-۵- مروری بر پژوهش‌های پیشین	۱۶
۱-۶- جمع‌بندی	۲۵
۲- ارتعاشات خطی	۲۷
۲-۱- مقدمه	۲۸
۲-۲- مفاهیم اولیه	۲۸
۲-۲-۱- مواد ویسکوالاستیک کلون-ویت	۲۹
۲-۲-۲- مواد متغیر تابعی	۲۹
۲-۳- فرمول‌بندی مسأله	۳۰
۲-۴- به دست آوردن معادلات حرکت	۳۳
۲-۵- حل تحلیلی	۳۶
۲-۶- به دست آوردن پاسخ	۳۹
۲-۶-۱- جواب عمومی ناشی از ارتعاشات آزاد	۴۱
۲-۶-۲- جواب خصوصی ناشی از ارتعاشات اجباری	۴۲
۲-۶-۳- ارتعاش آزاد پس از گذشتن بار از روی تیر	۴۴
۲-۷- روش گلرکین	۴۶
۲-۸- نتایج عددی	۴۷
۳- ارتعاشات آزاد غیرخطی	۵۹
۳-۱- مقدمه	۶۰
۳-۲- به دست آوردن معادله‌ی حرکت غیرخطی	۶۰

۶۶	۳-۳- تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی
۷۳	۳-۴- مسأله‌ی نمونه و نتایج آن
۷۷	۴- ارتعاشات اجباری غیرخطی
۷۸	۴-۱- مقدمه
۷۸	۴-۲- حلّ تحلیلی
۸۱	۴-۲-۱- تحلیل رزونانس اولیه
۸۶	۴-۲-۲- حلّ حالت دائم
۸۴	۴-۳- مسأله‌ی نمونه و نتایج آن
۹۱	۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۹۲	۵-۱- مقدمه
۹۲	۵-۲- نتیجه‌گیری
۹۴	۵-۳- پیشنهادها
۹۵	مراجع

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۱) (الف) نمودار تنش (ب) نمودار کرنش ماده‌ی الاستیک (پ) ماده‌ی ویسکوز (ت) ماده‌ی ویسکوالاستیک ۵
- شکل (۲-۱) مدل ماکسول ۶
- شکل (۳-۱) پاسخ زمانی مدل ماکسول به (الف) خزش (ب) آزادسازی تنش ۶
- شکل (۴-۱) مدل کلوین-ویت ۸
- شکل (۵-۱) نمودار تنش بارگذاری شده و پاسخ زمانی کرنش مدل کلوین-ویت ۹
- شکل (۶-۱) مدل سه جزئی ۱۰
- شکل (۷-۱) پاسخ زمانی مدل سه جزئی به (الف) خزش (ب) آزادسازی تنش ۱۱
- شکل (۱-۲) تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده تحت بار متحرک ۳۰
- شکل (۲-۲) تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاك تیر متغیر تابعی بر حسب نسبت مدول الاستیسیته (E_{ratio}) به ازای مقادیر مختلف توان k ۴۹
- شکل (۳-۲) تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاك تیر متغیر تابعی بر حسب نسبت چگالی (ρ_{ratio}) به ازای مقادیر مختلف توان k ۵۰
- شکل (۴-۲) تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاك تیر متغیر تابعی بر حسب توان k به ازای $\rho_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف مدول الاستیسیته (E_{ratio}) ۵۰
- شکل (۵-۲) تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاك تیر متغیر تابعی بر حسب توان k به ازای $E_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف چگالی (ρ_{ratio}) ۵۱
- شکل (۶-۲) تغییرات فاکتور استهلاك اول تیر متغیر تابعی بر حسب نسبت ضریب میرایی ویسکوالاستیک (η_{ratio}) به ازای $\rho_{ratio} = 1$ ، $E_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف توان k ۵۲
- شکل (۷-۲) تغییرات فاکتور استهلاك اول تیر متغیر تابعی بر حسب نسبت مدول الاستیسیته (E_{ratio}) به ازای $\rho_{ratio} = 1$ ، $\eta_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف توان k ۵۳
- شکل (۸-۲) تغییرات فاکتور استهلاك اول تیر متغیر تابعی بر حسب نسبت چگالی (ρ_{ratio}) به ازای $\eta_{ratio} = 1$ ، $E_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف توان k ۵۴
- شکل (۹-۲) تغییرات فاکتور استهلاك اول تیر متغیر تابعی بر حسب توان k به ازای $\rho_{ratio} = 1$ ، ۵۵

$E_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف ضریب میرایی ترموالاستیک (η_{ratio})

۵۵ شکل (۱۰-۲) تغییرات فاکتور استهلاک اول تیر متغیر تابعی بر حسب توان k به ازای $\rho_{ratio} = 1$ ،
 $\eta_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف مدول الاستیسیته (E_{ratio})

۵۶ شکل (۱۱-۲) تغییرات فاکتور استهلاک اول تیر متغیر تابعی بر حسب توان k به ازای $E_{ratio} = 1$ ،
 $\eta_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف چگالی (ρ_{ratio})

۵۷ شکل (۱۲-۲) نمودار پاسخ تیر در نقطه‌ی $x = \frac{L}{2}$ بر حسب زمان به ازای بار ۵۰ کیلو نیوتن و در
سرعت‌های $v = 50KN$ و $v = 35KN$

۷۴ شکل (۱-۳) نمودار تغییرات دامنهی ارتعاشات مود اول بر حسب زمان برای $\epsilon = 0.05$ و $W_0 = 2$

۷۴ شکل (۲-۳) نمودار تغییرات دامنهی ارتعاشات مود اول بر حسب زمان بر اساس مقادیر مختلف ϵ

۷۵ شکل (۳-۳) نمودار پاسخ تیر در نقطه‌ی $x = \frac{L}{2}$ بر حسب زمان برای $\epsilon = 0.05$ و $W_0 = 2$

۷۶ شکل (۴-۳) نمودار فرکانس تیر بر حسب دامنهی ارتعاشات مود اول

۸۶ شکل (۱-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی مود اول بر حسب تغییرات دامنهی نیروی تحریک

۸۷ شکل (۲-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی مود اول بر حسب تغییرات توان k

۸۸ شکل (۳-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی مود اول بر حسب تغییرات E_{ratio}

۸۹ شکل (۴-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی مود اول بر حسب تغییرات η_{ratio}

۸۹ شکل (۵-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی مود اول بر حسب تغییرات ρ_{ratio}

فهرست جدول‌ها

۴۸	جدول (۱-۲) مشخصات هندسی و مکانیکی تیر
۴۸	جدول (۲-۲) فرکانس طبیعی بدون استهلاک حالت همگن مودهای یکم تا پنجم

علائم و اختصارات

T	انرژی جنبشی
U	انرژی کرنشی
U_0	چگالی انرژی کرنشی
σ_0	تنش اولیه
ε_0	کرنش اولیه
ε_{ij}	مؤلفه‌های تانسور کرنش
ρ	چگالی
C	ضریب میرایی داخلی
η	ثابت تناسبی میرایی داخلی
E	مدول الاستیسیته
h	ضخامت تیر
b	پهنای تیر
A	سطح مقطع
t	مختصه‌ی زمانی (S)
x, y, z	مختصه‌های کارتزین
ω	فرکانس طبیعی
ζ	فاکتور استهلاک
u, v, w	مؤلفه‌های جابه‌جایی
V_U, V_L	کسر حجمی بالایی و پایینی
k	پارامتر نامنفی تابع توزیع توانی
ϵ	پارامتر Book keeping
σ	پارامتر تنظیم
a	دامنه‌ی ارتعاشات غیرخطی
β	فاز ارتعاشات غیرخطی
Q	بار متحرک

فصل اوّل

مقدمہ

مطالعه‌ی ارتعاشات سیستم‌ها، یکی از مهم‌ترین زمینه‌های تحلیل و طراحی در مهندسی است. در کنار کاربردهای مطلوبی که ارتعاشات برای برخی سیستم‌ها ایجاد می‌کند، عمده‌ترین مسأله، بروز ارتعاشات ناخواسته است که عملکرد مجموعه را دچار اختلال می‌کند. به این منظور، جذب و کاهش ارتعاشات به صورت بهینه و با در نظر گرفتن فاکتورهای مختلف، همواره از دغدغه‌های پژوهشی و صنعتی بوده است.

مواد متغیر تابعی^۱، دسته‌ی جدیدی از مواد غیرهمگن هستند که با تغییرات ریزساختاری از یک ماده به ماده‌ی دیگر با یک شیب مشخص تولید می‌شوند. از این‌رو، مشخصات مواد به‌طور پیوسته در یک یا چند جهت تغییر می‌کند. برخلاف مواد کامپوزیتی لایه-لایه‌ای، این ویژگی، این دسته از مواد را قادر می‌سازد تا مزایای هر دو ماده‌ی تشکیل‌دهنده را بدون ایجاد تمرکز تنش ناشی از تغییر ناگهانی ماده داشته باشند. با توجه به قابلیت یاد شده، مواد FG در کاربردهای مختلف مهندسی همچون الکترونیک، صنایع مدارهای الکتریکی کامپیوتر، اپتیک، مهندسی هوافضا، صنایع نظامی، صنایع نیمه رساناها و ... گسترش یافته است. اخیراً نیز ریزساختارهای ساخته شده از مواد FG در کاربردهای گوناگون، گسترش یافته است. بنابراین بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی ریزساختارهای ساخته شده از مواد FG حائز اهمیت بوده و تاکنون مطالعات بسیاری در این زمینه انجام شده است. اکثر تحقیقات انجام شده بر روی ریزساختارهایی چون میکروتیر ساخته شده از مواد FG، با فرض تغییر خصوصیات ماده در راستای ضخامت بوده و مطالعات اندکی نیز به بررسی رفتار میکروتیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری^۲، که خصوصیات فیزیکی و مکانیکی ماده در آن در راستای طول تغییر می‌کند، پرداخته شده است. مقاومت مکانیکی و حرارتی که میکروتیرهای ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری دارند سبب می‌شود تا بتوان از آنها در ساخت

^۱ Functionally Graded Materials (FGM)

^۲ Axially Functionally Graded (AFG)

میکروسکوپ‌های نیرو اتمی^۱، روبش‌کننده محیط‌های داغ و بهبود عملکرد سیستم‌های میکروالکترومکانیکی استفاده کرد.

موادّی همچون پلاستیک‌ها، لاستیک‌ها و مواد مرگّب خواصّ ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهند. فلزات نیز رفتار ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهند که در شرایط ویژه‌ای مثل برخورد یا سرعت‌های بالا این رفتار نمود بیشتری پیدا می‌کند. با توجه به کاربرد فزاینده‌ی مواد مرگّب و لاستیک‌ها، استفاده از موادّ ویسکوالاستیک افزایش پیدا کرده است. مدل‌های ماکسول، کلون ویت و مدل سه جزئی از جمله مدل‌های خطّی پیشنهاد شده برای موادّ ویسکوالاستیک هستند که ضریب ویسکوزیته‌ی دینامیکی در این مدل‌ها نشان‌دهنده‌ی خاصیت ویسکوز و ضریب الاستیسیته نیز نشان‌دهنده‌ی خاصیت الاستیک می‌باشد.

تحلیل رفتار دینامیکی سازه‌ها از قبیل تیرها، قاب‌ها، ورق‌ها و ... تحت اثر یک بار بر روی آنها یکی از مباحث جالب و کاربردی در مهندسی مکانیک می‌باشد که محقّقین و مهندسين زیادی را به خود مشغول ساخته است. تحلیل دینامیکی تیرهای تحت اثر بار متحرّک از زمانی بیشتر مورد توجّه قرار گرفت که سرعت و وزن خودروها و قطارها به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یافت. این امر سبب شده است که سازه‌های حمل‌کننده‌ی این خودروها و قطارها تحت تأثیر ارتعاشات و تنش‌های دینامیکی بیشتری نسبت به قبل قرار گیرند. و در مقابل سازه‌هایی که این خودروها باید بر روی آنها حرکت کنند، بسیار سبک‌تر از قبل ساخته می‌شوند.

فوم‌های پلیمری و فلزّی دسته‌ی جدیدی از موادّ هستند که به علّت وزن کم و مقاومت مکانیکی بالا، اخیراً مورد توجّه طراحان قرار گرفته‌اند. بهترین مدل برای بررسی این دسته از مواد، مدل متغیّر تابعی ویسکوالاستیک^۲ (FGV) می‌باشد. در این مطالعه، آنالیز ارتعاشات غیرخطّی تیر متغیّر تابعی

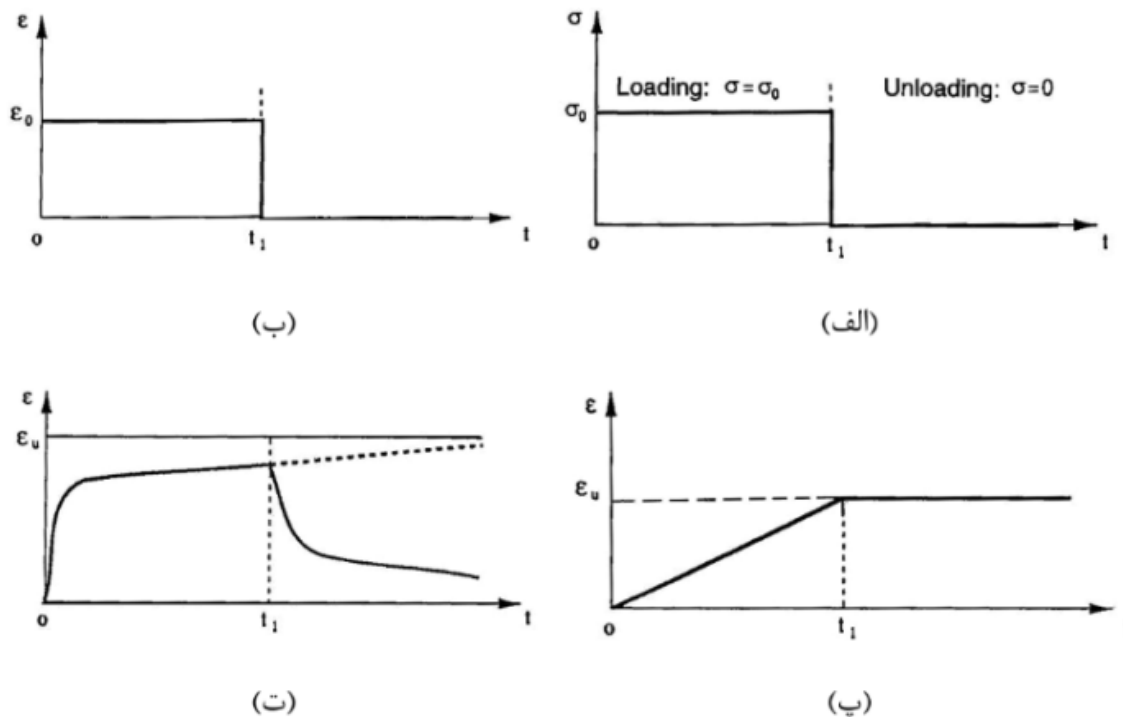
¹ Atomic Force Microscopy (AFM)

² Functionally Graded Viscoelastic

ویسکوالاستیک تحت بار متحرک مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض می‌شود که خصوصیات مکانیکی ماده‌ی تیر ناهمگن در راستای ضخامت تیر تغییر کند. معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر FGV با استفاده از اصل هامیلتون استخراج می‌شود و سپس با بکارگیری آنالیز خطی و غیرخطی، رفتار ارتعاشی آن به ازای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۱-۲- مواد ویسکوالاستیک

اگر بارگذاری مطابق شکل (۱-۱) را به مواد الاستیک، ویسکوز و ویسکوالاستیک اعمال کنیم، کرنش به وجود آمده در این مواد به ترتیب به صورت نمودارهای (ب)، (پ) و (ت) همانند شکل خواهد بود. با شروع اعمال تنش، کرنش ماده‌ی الاستیک بلافاصله به مقدار نهایی رسیده و با حذف تنش، کرنش بلافاصله از بین می‌رود و صفر می‌شود. در ماده‌ی ویسکوز (سیال نیوتنی) با شروع تنش، کرنش با شیب ثابتی به صورت خطی شروع به افزایش کرده و با حذف تنش، مقدار کرنش ثابت می‌شود. در ماده‌ی ویسکوالاستیک با شروع تنش ابتدا یک افزایش کرنش با شیب زیاد داریم و سپس کرنش با شیب کم به یک مقدار حدی میل می‌کند. با حذف تنش یک کاهش کرنش با شیب زیاد داریم و سپس نرخ کاهش کرنش کم شده و کرنش به یک مقدار نهایی میل می‌کند که این مقدار نهایی می‌تواند صفر باشد.



شکل (۱-۱) (الف) نمودار تنش (ب) نمودار کرنش ماده‌ی الاستیک (پ) ماده‌ی ویسکوز (ت) ماده‌ی ویسکوالاستیک [۱]

به طور معمول دو معیار خزش^۱ و آزادسازی تنش^۲ برای مواد ویسکوالاستیک بررسی می‌شود. در خزش ماده را برای مدت طولانی تحت تنش ثابت قرار می‌دهند و تغییرات کرنش را در طول زمان بررسی می‌کنند. در آزادسازی تنش، ماده را در کرنش ثابت قرار می‌دهند و تغییرات تنش در زمان بررسی می‌شود. برای دستیابی به ویژگی مواد ویسکوالاستیک مدل‌هایی پیشنهاد شده است که در این قسمت سه مدل خطی ماکسول، کلوین-ویت و سه جزئی معرفی می‌شوند.

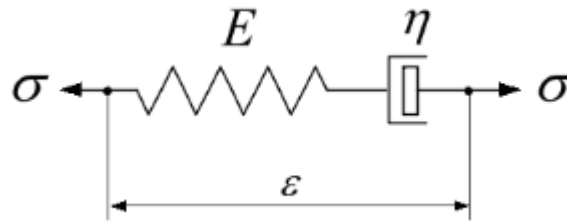
۱-۲-۱- مدل ماکسول^۳

این مدل مطابق شکل (۲-۱) از یک فنر و میراکننده‌ی سری تشکیل شده است.

^۱ Creep

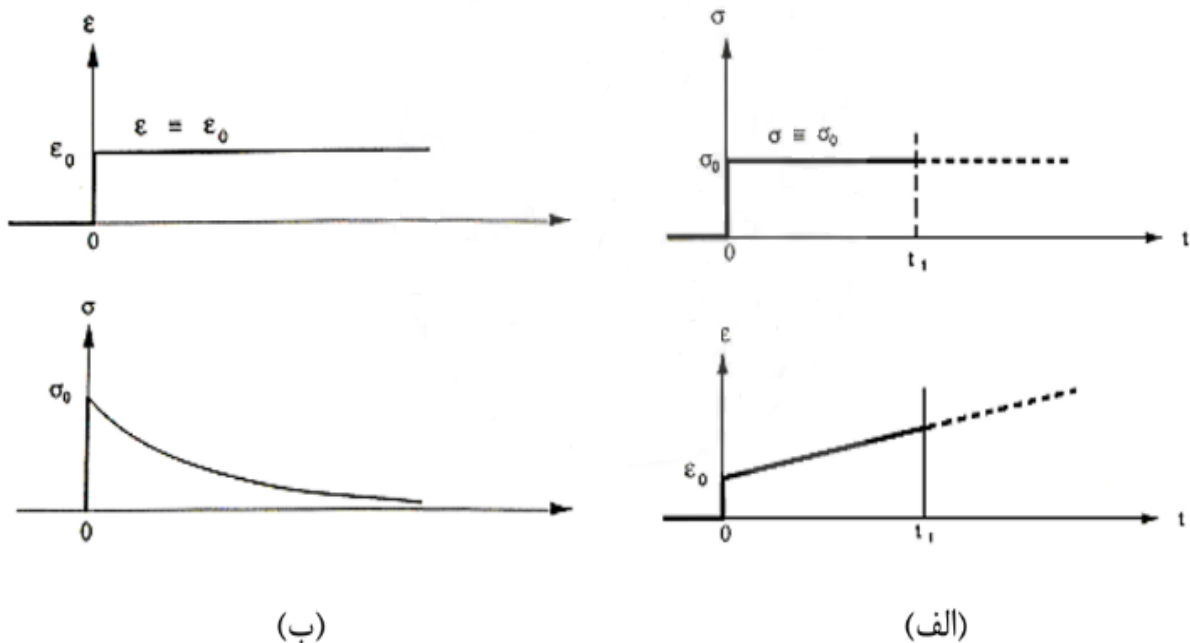
^۲ Stress Relaxation

^۳ Maxwell Model



شکل (۲-۱) مدل ماکسول

در بررسی خزش این مدل که در شکل (۱-۳-الف) نشان داده شده است، در لحظه‌ی صفر فنر دچار انبساط لحظه‌ای می‌شود که این پاسخ الاستیک مدل است. سپس در حالیکه طول فنر ثابت است، کرنش در میراکننده به صورت خطی زیاد می‌شود. با توجه به این که فنر و میراکننده در این مدل سری هستند، کرنش‌های الاستیک و ویسکوز با هم جمع می‌شوند. در نمودار مربوط به آزادسازی تنش که در شکل (۱-۳-ب) نمایش داده شده است، تنش به صورت نمایی از مقدار تنش اولیه به صفر میل می‌کند.



شکل (۱-۳) پاسخ زمانی مدل ماکسول به (الف) خزش (ب) آزادسازی تنش [۱]

رابطه‌ی تنش کرنش برای هر یک از المان‌های فنر و میراکننده در معادله‌ی (۱-۱) بیان شده است. با استفاده از این دو معادله، رابطه‌ی تنش کرنش این مدل در فرم دیفرانسیلی به صورت معادله‌ی (۲-۱) به دست می‌آید. رابطه‌ی بین کرنش‌ها نیز در معادله‌ی (۳-۱) بیان شده است. در این روابط σ ، ε ، ε_d ، E و η به ترتیب تنش، کرنش، کرنش فنر، کرنش میراکننده، ضریب الاستیسیته‌ی فنر و ضریب میراکننده هستند.

$$\sigma = E\varepsilon_s = \eta\dot{\varepsilon}_d \quad (1-1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d \rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_d \quad (2-1)$$

$$\eta\dot{\varepsilon} = \lambda\dot{\sigma} + \sigma \quad \lambda = \frac{\eta}{E} \quad (3-1)$$

با استفاده از رابطه‌ی تنش کرنش به دست آمده، می‌توانیم پاسخ مدل را در خزش و آزادسازی تنش به صورت تابع زمانی محاسبه نماییم. رابطه‌ی (۴-۱) بیان کننده‌ی کرنش در خزش است و رابطه‌ی (۵-۱) تابع تنش در آزادسازی تنش را نشان می‌دهد. در این رابطه σ_0 همانطور که در شکل (۳-۱) بیان شده، تنش اولیه است.

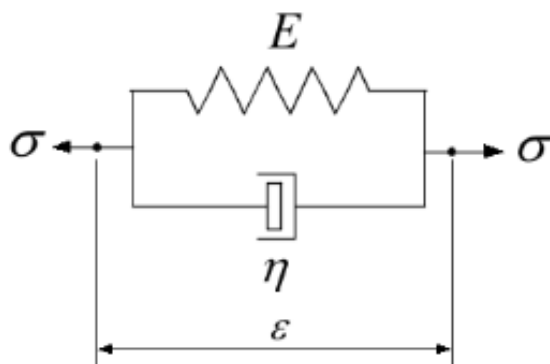
$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \frac{t}{\lambda}\right) \quad (4-1)$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/\lambda} \quad (5-1)$$

۱-۲-۲- مدل کلوین-ویت^۱

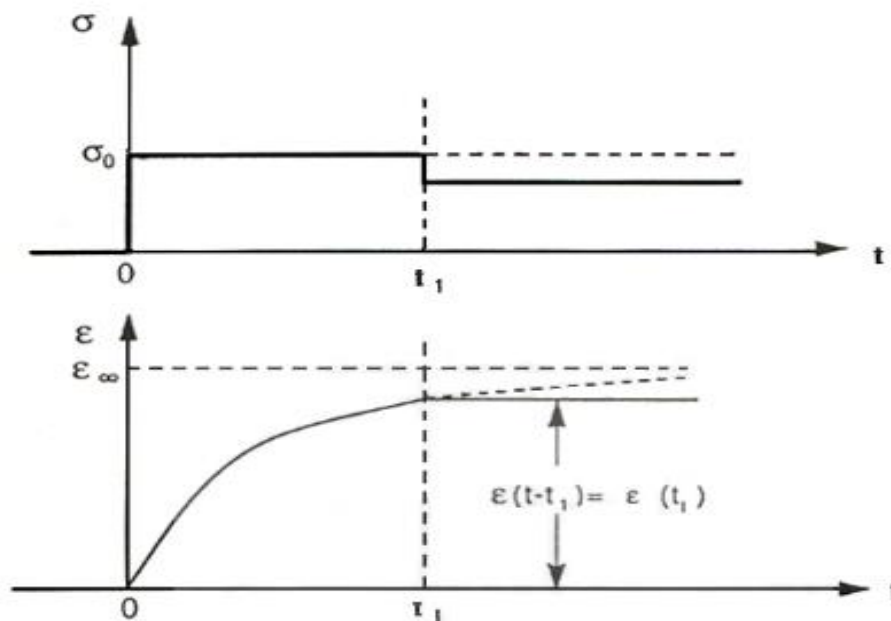
این مدل از یک فنر و میراکننده‌ی ویسکوز موازی مطابق شکل (۴-۱) تشکیل شده است. این مدل می‌تواند رفتار خزشی یک دسته‌ی بزرگ از مواد ویسکوالاستیک را بهتر از مدل ماکسول بیان کند.

در شکل (۵-۱)، نمودار کرنش این مدل تحت بارگذاری تنش نشان داده شده در همان شکل ترسیم شده است. با شروع اعمال تنش مثبت، فنر تمایل دارد که به طور ناگهانی کشیده شود و میراکننده با این حرکت سریع مخالفت کرده و به فنر نیروی فشاری اعمال می‌نماید. بعد از این افزایش طول و نیروی فنر، سرعت حرکت کاهش می‌یابد و مدل به کندی به مقدار نهایی کرنش میل می‌کند. بعد از زمان t_1 و با کاهش تنش محوری، فنر تمایل دارد که به سرعت کاهش طول دهد که میراکننده با این حرکت مخالفت کرده و به فنر نیروی کششی اعمال می‌کند. در نتیجه به مجموع کرنش نهایی در حالت تعادل می‌رسد.



شکل (۴-۱) مدل کلوین-ویت

^۱ Kelvin-Voigt



شکل (۵-۱) نمودار تنش بارگذاری شده و پاسخ زمانی کرنش مدل کلون-ویت [۱]

روابط تنش کرنش فنر و میراکننده در معادله‌ی (۶-۱) بیان شده است. با توجه به اینکه کرنش در هر دو المان برابر است (معادله‌ی ۷-۱)، می‌توانیم رابطه‌ی تنش کرنش را برای این مدل به صورت رابطه‌ی (۸-۱) به دست آوریم.

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_d = E\varepsilon_s + \eta\dot{\varepsilon}_d \quad (۶-۱)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_s = \varepsilon_d \quad (۷-۱)$$

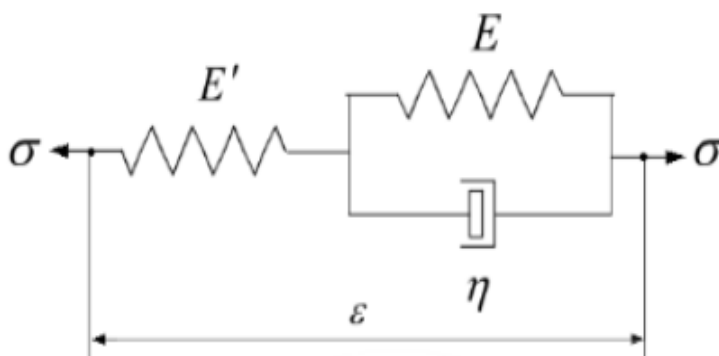
$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (۸-۱)$$

با استفاده از رابطه‌ی تنش کرنش مدل می‌توانیم تابع کرنش را نسبت به زمان در حالت خزش به دست آوریم.

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t/\lambda}) \quad (9-1)$$

۱-۲-۳- مدل سه جزئی^۱

این مدل از یک فنر سری شده با یک المان کلوین-ویت تشکیل شده است و نام دیگر این مدل، مدل استاندارد خطی^۲ می‌باشد.



شکل (۶-۱) مدل سه جزئی

رابطه‌ی تنش کرنش برای هر یک از المان‌های این مدل در رابطه‌ی (۱۰-۱) و (۱۱-۱) نشان داده شده است

$$\sigma = E \varepsilon_s \quad (10-1)$$

$$\sigma = E' \varepsilon_s' + \eta \dot{\varepsilon}_s' \quad (11-1)$$

رابطه‌ی کرنش کلی از معادله‌ی (۱۲-۱) قابل محاسبه است [۱]. با استفاده از این معادله و معادله‌ی (۱-۱)

(۱۱) و با ساده‌سازی به معادله‌ی (۱۳-۱) می‌رسیم

¹ Three-Element Model

² Standard Linear Model

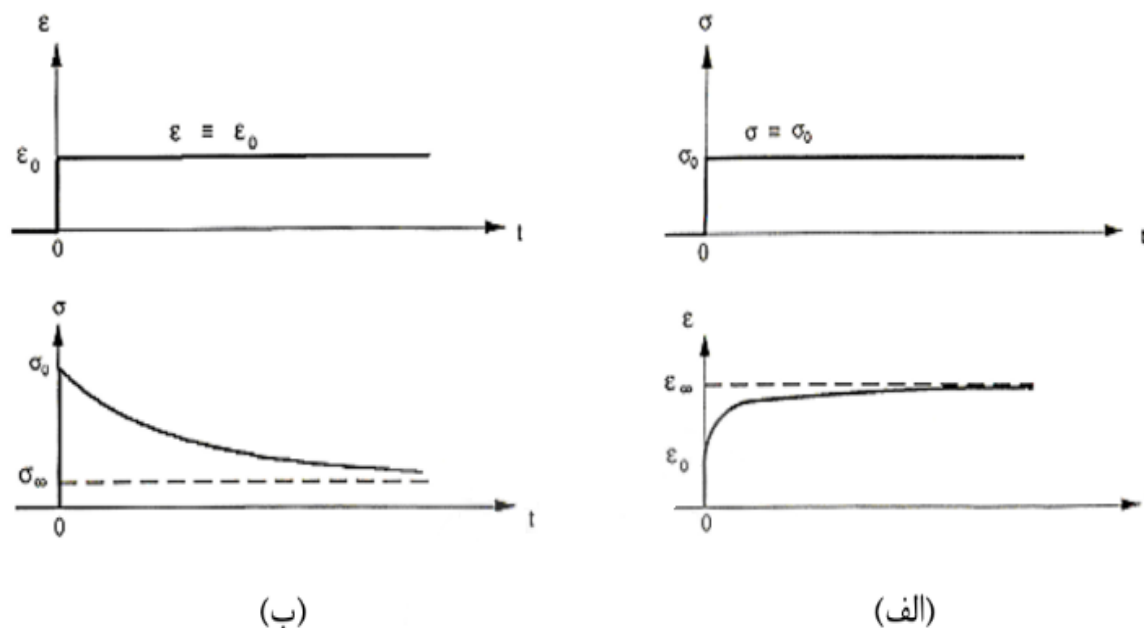
$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_s' \rightarrow \varepsilon_s' = \varepsilon - \varepsilon_s \quad (12-1)$$

$$\sigma = E'(\varepsilon - \varepsilon_s) + \eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_s) \quad (13-1)$$

به کمک رابطه‌ی (۱۰-۱) می‌توانیم رابطه‌ی (۱۳-۱) را بازنویسی کرده و به رابطه‌ی تنش کرنش مدل برسیم. رابطه‌ی تنش کرنش مدل در معادله‌ی (۱۴-۱) بیان شده است.

$$(E + E')\sigma + \eta\dot{\sigma} = EE'\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (14-1)$$

با استفاده از رابطه‌ی تنش کرنش برای این مدل، تابع کرنش در خزش به صورت معادله‌ی (۱۵-۱) و تابع تنش در آزادسازی تنش به صورت معادله‌ی (۱۶-۱) به دست می‌آید. نمودار پاسخ این مدل در خزش و آزادسازی تنش به ترتیب در نمودارهای (۷-۱-الف) و (۷-۱-ب) نمایش داده شده است.



شکل (۷-۱) پاسخ زمانی مدل سه جزئی به (الف) خزش (ب) آزادسازی تنش [۱]

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\xi_1} \left\{ \lambda \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) + \xi_2 e^{-\frac{t}{\lambda}} \right\} \quad \xi_1 = \frac{E\eta}{E+E'}, \quad \xi_2 = \frac{\eta}{E+E'} \quad (15-1)$$

$$\sigma = E_{\infty} \varepsilon_0 \left(1 - e^{-t/\xi_2} \right) + \sigma_0 e^{-t/\xi_2} \quad E_{\infty} = \frac{EE'}{E+E'} \quad (16-1)$$

۳-۱- مواد FGM

طبق تعریف *FGM* موادی هستند که برای به وجود آوردن تغییرات تدریجی در مشخصه‌های اجزای ریزساختارها یا ترکیبات به کار می‌روند که منجر به عملکرد متغیر مواد نسبت به مکان می‌شود. به عنوان مثال در مورد پرّه‌ی یک توربین، بدنه‌ی پرّه باید محکم و مقاوم در برابر خزش باشد، در حالیکه سطوح خارجی آن باید سخت و ضدّ زنگ باشد.

مهم‌ترین کاربرد موادی تابعی بهبود مشخصه‌های مکانیکی و ترمودینامیکی اجزاء به شرح زیر می‌باشد:

۱. از آنجا که در این مواد انتقال از یک ماده به ماده‌ی دیگر تدریجی می‌باشد، تمرکز تنش نسبت به موادی که تغییرات ناپیوسته دارند، بسیار کاهش یافته است.
۲. اندازه‌ی تنش حرارتی می‌تواند مینیمم گردد، همچنین نواحی بحرانی که ماکزیمم تنش حرارتی در آن قسمت به وجود می‌آید، می‌تواند کنترل گردد.
۳. شروع تسلیم پلاستیک و شکست برای بارگذاری مکانیکی و حرارتی می‌تواند با تأخیر اتفاق بیفتد.
۴. مقاومت باندهای واسط بین جامدات غیرهمگون مانند فلز و سرامیک با کاهش پیوسته‌ی ترکیب یا جهت‌دار کردن تغییر خواص مکانیکی می‌تواند افزایش پیدا کند.
۵. قادر به تحمل درجات حرارت بسیار بالا و اختلاف درجه حرارت بسیار بالا بوده و مقاوم در برابر خوردگی، ساییدگی و شکست می‌باشد.

۶. قرارگیری پوشش سخت روی یک ماده با جنس نرم به وسیله درجه‌بندی پیوسته خواص مکانیکی و جهت‌دار کردن تغییر خواص مواد، می‌تواند آسان‌تر شود.

۷. مواد تابعی دارای ساختار متالورژیکی متفاوت هستند. بنابراین موادی مرکب با خواص میکروسکوپی غیرهمگن محسوب می‌شوند، اما تغییرات پیوسته در میکروساختار مواد تابعی آنها را از مواد مرکب متعارف مجزا می‌سازد. در مواد تابعی، تغییرات تدریجی می‌باشد و به تدریج از یک ماده کاهش و به ماده‌ی دیگر اضافه می‌گردد.

برای رفع نیاز صنعت به مواد جدید که دارای ویژگی‌هایی نظیر مقاومت متفاوت در جهات مختلف و همچنین نسبت مقاومت به وزن بالا باشند، مواد مرکب مورد نظر دانشمندان و صنعت‌گران قرار گرفت. این ویژگی مواد مرکب باعث افزایش چشمگیر کاربرد آنها در صنایع مختلف شد. برای مثال امروزه از این مواد به صورت گسترده در صنایع نظامی و هوایی استفاده می‌شود. ولی تغییر گسسته خواص در این مواد، احتمال ایجاد تمرکز تنش در بین لایه‌ها و جدایش لایه‌ها را افزایش می‌دهد.

نخستین بار در سال ۱۹۷۲، بور و دووز [۲] ایده‌ی ترکیب دو فاز مختلف را با تغییر در نحوه‌ی آرایش و ترتیب هر کدام از فازها در هر لایه در جهت بهبود خواص مکانیکی مطرح کردند. ایده‌ی آنها عموماً مربوط به ضعف مواد مرکب در بسیاری از کاربردها بود.

دانشمندان در ادامه‌ی توسعه‌ی مواد مورد استفاده در صنایع به فکر ساخت موادی با تغییر پیوسته‌ی خواص افتادند که به آن، مواد تابعی مدرج و یا هدفمند می‌گویند. مفهوم مواد تابعی مدرج با نام علمی FGM که مخفف Functionally Graded Material می‌باشد، توسط گروهی از دانشمندان در ژاپن مطرح گردید که مشغول کار بر روی پروژه‌ی فضایی بودند. در این پروژه نیاز به مخزنی بود که دارای ضخامت ۱۰ میلیمتر باشد و بتواند دمای ۲۰۰۰ درجه‌ی کلوین

را در سطح خارجی و همچنین ۱۰۰۰ درجه‌ی کلوین را در طول ضخامت خود تحمل نماید[۳]. هیچ یک از مواد موجود در آن زمان چنین قابلیت‌ی نداشتند و دانشمندان با استفاده از ایده‌ی مواد تابعی مدرج، موفق به برطرف کردن این مشکل شدند. اکثر فعالیت‌های مرتبط با این مواد بیشتر جنبه‌ی تئوریک دارند اما کاربرد این مواد در حال افزایش است و امروزه این مواد در شاخه‌های گوناگون علوم از جمله هوافضا، بیومکانیک، ابزارآلات ماشین‌کاری و الکترونیک و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند.

این مواد عموماً از مخلوط سرامیک با فلز و یا ترکیبی از فلزات مختلف ساخته می‌شوند. ماده‌ی سرامیک مقاومت دمایی بالایی را به خاطر رسانایی گرمایی کم دارا می‌باشد و از طرفی ماده‌ی فلزی چکش‌خوار، از شکستگی یا ترک به خاطر تنش حرارتی ممانعت به عمل می‌آورد.

۱-۳-۱- روش‌های تولید

برای تهیه مواد FG چندین روش وجود دارد که از جمله‌ی آنها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

۱. نشت بخار مواد توسط روش‌های شیمیایی یا فیزیکی
 ۲. اسپری پلاسما
 ۳. متالورژی پودر
 ۴. سنتز احتراقی خود انتشار
- قبل از ساخت FGM باید مشخص شود که فلز و سرامیک به چه صورتی توزیع شده است. در بعضی مقالات هدف یافتن یک پروفیل با توجه به کمینه کردن یک کمیت است. در مواقع دیگر پروفیل توزیع فلز و سرامیک انتخاب می‌شود و یک پارامتر برای اهداف بهینه یا کمینه کردن یک کمیت در آن در نظر گرفته می‌شود.

۱-۳-۲- تابع توزیع

برای مواد FGM چند نوع پروفیل برای تغییرات پیوسته‌ی خواص ارائه شده است که از آن جمله می‌توان به قانون توانی و قانون نمایی اشاره نمود که در زیر به روابط آنها پرداخته می‌شود.

قانون نمایی

$$P(z) = P_0 \exp \left[-\delta \left(1 - \frac{2z}{h} \right) \right], \quad \delta = \frac{1}{2} \log \left(\frac{P_U}{P_L} \right) \quad (17-1)$$

قانون توانی

$$P = (P_U - P_L) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_L \quad (18-1)$$

در این روابط z در جهت ضخامت تیر می‌باشد و مبدأ آن روی لایه‌ی میانی تیر واقع است، h ضخامت تیر مورد بررسی و k پارامتری نامنفی می‌باشد که شکل تغییر ماده در راستای ضخامت تیر را مشخص می‌کند. P_U و P_L ویژگی‌های متناظر ماده به ترتیب مربوط به سطح بالایی و پایینی تیر می‌باشد [۴].

در نوع دیگری از این نوع مواد که به مواد متغیر تابعی محوری معروف است، خصوصیات فیزیکی و مکانیکی ماده در آن در راستای طول تغییر می‌کند. بررسی تیرهای ساخته شده از مواد AFG با فرض تابع توزیع خطی انجام می‌شود.

۱-۴- تحلیل ارتعاشات تیر تحت بار متحرک

تیموشنکو برای اولین بار پاسخ تحلیلی یک تیر دوسر مفصل تحت اثر یک بار متحرک را با استفاده از روش جمع مود محاسبه نمود. پس از وی نیز با توجه به کاربردهای متنوع و متعدد، این گونه تحلیل-

های دینامیکی همواره از موضوعات مورد علاقه‌ی مهندسين و محققين بوده است. برخي از کاربردهای تحلیل دینامیکی تیرهای محدود تحت اثر بار متحرک را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

الف) تحلیل ارتعاشات و تنش‌های دینامیکی ایجاد شده در پل‌ها در اثر عبور قطار و یا خودروهای عبوری؛

ب) تحلیل خستگی و تخمین عمر سازه‌ها و اتصالات پل‌ها؛

ج) تحلیل نویز منتشر شده در محیط در اثر عبور قطار و خودروها از روی پل‌ها؛

د) تحلیل راحتی سفر قطارهای تندرو در هنگام عبور از روی پل‌ها؛

ه) تحلیل پایداری و ایمنی سفر قطارهای تندرو در هنگام عبور از روی پل‌ها؛

و) تحلیل ارتعاشات و تنش‌های دینامیکی در قطعات تحت ماشینکاری؛

ز) تحلیل ارتعاشات و تنش‌های دینامیکی در جرثقیل‌های سقفی؛

ح) تحلیل ارتعاشات و تنش‌های دینامیکی در سگوی پرتاب موشک و هواپیماهای بدون سرنشین؛

ط) تحلیل ارتعاشات و تنش‌های دینامیکی در عرشه‌ی هواپیماهای ناوبر.

۱-۵- مروری بر پژوهش‌های پیشین

اخیراً، به لحاظ مشخصه‌ها و دامنه‌ی گسترده‌ی کاربرد مواد FG ، اهمیت دانستن رفتار استاتیکی و دینامیکی آنها افزایش یافته است. همانطور که در قسمت قبل نیز اشاره شد، مفهوم مواد تابعی مدرج

با نام علمی *FGM* که مخفف *Functionally Graded Material* می‌باشد، توسط گروهی از دانشمندان در ژاپن مطرح گردید که مشغول کار بر روی پروژه‌ی فضایی بودند [۲].

ابوهلال و همکاران [۵] در سال ۱۹۹۹ رفتار ارتعاشی تیر همگن الاستیک ایزوتروپیک با شرایط مرزی عمومی تحت اثر بار هارمونیک متحرک را آنالیز کردند. شرایط مرزی حاکم در این مساله عبارتند از: تکیه‌گاه ساده در دو انتهای تیر، دو سر گیردار، یک سر گیردار و یک سر تکیه‌گاه ساده و تیر یک سر گیردار. آنها سه نوع حرکت را برای بار در نظر گرفتند: حرکت تندشونده، کندشونده و حرکت یکنواخت. آنها همچنین تأثیر سرعت حرکت و فرکانس نیروی متحرک را بر روی رفتار دینامیکی تیرها به تفصیل مورد بررسی قرار دادند. وی همچنین در مقاله‌ای دیگر [۶] پاسخ دینامیکی تیر دوتایی اولر-برنولی را تحت بار ثابت متحرک بررسی کرد. سیستم از دو تیر الاستیک همگن ایزوتروپیک اولر-برنولی تشکیل شده است که به وسیله‌ی یک لایه‌ی ویسکوالاستیک به هم متصلند. که این لایه‌ی ویسکوالاستیک با یک فنر و دمپر موازی مدل شده است. دو تیر کاملاً یکسان و موازی می‌باشند و شرایط مرزی هر دو تیر برابر است. وی در این مقاله تأثیر سرعت حرکت بار و میرایی و الاستیسیته‌ی لایه‌ی ویسکوالاستیک را بر روی پاسخ دینامیکی تیر با جزئیات مورد بررسی قرار داد. همچنین نیروی انتقال یافته بین دو تیر و تأثیر پارامترهای سیستم بر این نیرو نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

آیدوگدو و تسکین [۷] تحلیل ارتعاشات آزاد تیر متغیر تابعی با تکیه‌گاه ساده را ارائه کردند. آنها تغییرات خواص ماده را بر اساس توزیع نمایی و نیز توزیع توانی در نظر گرفتند و معادلات حاکم را با استفاده از اصل هامیلتون استخراج نمودند. آنها در پژوهش خود روش حل ناویر را برای به دست آوردن فرکانس طبیعی مورد استفاده قرار دادند. آنها همچنین در تحلیل خود از تئوری تغییر شکل

برشی مرتبه‌ی بالاتر و تئوری‌های کلاسیک نیز در به دست آوردن فرکانس طبیعی و شکل مود استفاده نمودند.

سیمسک و همکارانش [۴] نیز ارتعاشات اجباری و آزاد تیر متغیر تابعی را تحت بار متمرکز هارمونیک متحرک مورد بررسی قرار دادند. معادله‌ی حرکت با استفاده از روش لاگرانژ تحت فرضیات تیر اولر-برنولی استخراج شده است. در پاسخ دینامیکی تیر، توابع مستقل از زمان معرف جابه‌جایی عرضی و محوری به فرم چندجمله‌ای ایجاد شده است. فرض می‌شود که خصوصیات مواد در راستای ضخامت تیر تغییر می‌کند و از توابع توزیع توانی و نمایی استفاده شده است. معادلات حرکت با استفاده از انتگرال زمانی β -Newmark استفاده شده است. همچنین تأثیرات توزیع مختلف مواد، سرعت بار و فرکانس تحریک بر روی پاسخ دینامیکی مورد بررسی قرار گرفته است.

سینا و همکاران [۸]، به روش تحلیلی ارتعاشات آزاد تیر متغیر تابعی را به دست آوردند. آنها از یک تئوری جدید، متفاوت از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، برای تحلیل ارتعاشات استفاده کردند. فرض می‌شود که مشخصات تیر در راستای ضخامت تیر و بر اساس کانون توانی تغییر می‌کند و معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است و با استفاده از روش تحلیلی و آنالیز مودال حل شده است. همچنین تأثیر شرایط مرزی، کسر حجمی و تغییر شکل برشی بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها بررسی شده است.

لی [۹] در مقاله‌اش رفتار استاتیکی و دینامیکی تیرهای متغیر تابعی تیموشنکو و اولر-برنولی را مورد بررسی قرار دارند. به عنوان دو مورد خاص تئوری‌های اولر-برنولی و ریلی که از تقلیل در تئوری تیر تیموشنکو نتیجه می‌شوند مورد بررسی قرار گرفته است. خصوصیات ماده در راستای ضخامت تغییر

می‌کند. نتایج استاتیکی خیز و توزیع تنش برای یک تیر FG یک سرگیردار به دست آمده است. ارتعاشات آزاد و فرکانس طبیعی تیر نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

سناکار [۱۰] پاسخ الاستیسیته‌ی تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک تحت بار متحرک سینوسی را مورد بررسی قرار داد. در این پژوهش مدول الاستیسیته به صورت نمایی در راستای ضخامت تغییر می‌کند و ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته شده است. تغییرات نمایی ضرایب سختی الاستیک باعث می‌شوند پاسخ دقیقی برای معادلات الاستیسیته حاصل شود. همچنین او دریافت که این تئوری برای تیرهای بلند، باریک و تغییر آهسته‌ی بارگذاری معتبر است و تمرکز تنش نیز در تیرهای کوتاه و ضخیم اتفاق می‌افتد. همچنین تمرکز تنش هنگامی که سطح نرمتر تیر FG بارگذاری شده است، نسبت به حالت همگن کمتر است.

سیمسک [۱۱] در مقاله‌ای ارتعاشات غیرخطی تیر متغیر تابعی تیموشنکو تحت بار متحرک هارمونیک با تکیه‌گاه ساده را مورد بررسی قرار داد. او فرض کرد که خواص ماده در راستای ضخامت و براساس تابع توزیع توانی تغییر می‌کند. معادله‌ی حرکت با فرض کرنش وون-کارمن^۱ و تئوری تیر تیموشنکو و با استفاده از معادله‌ی لاگرانژ به دست آمده است. توابع معرف جابه‌جایی عرضی و محوری و چرخش سطح مقطع به فرم چندجمله‌ای اتخاذ شده است. معادلات حرکت غیرخطی با استفاده از روش Newmark- β به همراه روش تکرار حل شده است. تأثیر جابه‌جایی‌های بزرگ، توزیع مواد، سرعت حرکت بار و فرکانس تحریک بر روی تنش، خمش و جابه‌جایی‌های تیر به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان داده است که موارد فوق نقش مهمی در پاسخ دینامیکی تیر دارد.

که و همکارانش [۱۲] ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر متغیر تابعی براساس تئوری تنش کوپل و کرنش غیرخطی وون-کارمن را مورد بررسی قرار دادند. مدل غیرکلاسیک تیر در چارچوب تئوری

^۱ Von-Karman

تیموشنکو شامل پارامتر مقیاس طولی می‌باشد. خصوصیات ماده در راستای ضخامت براساس تابع توزیع توانی تغییر می‌کند. معادلات حرکت غیرخطی مرتبه‌ی بالاتر و شرایط مرزی با استفاده از اصل همپلتون اتخاذ شده است. او از روش عددی تربیع دیفرانسیلی برای به دست آوردن فرکانس غیرخطی میکروتیر استفاده کرده است. همچنین تأثیر پارامتر مقیاس طولی، تغییرات خواص ماده، نرخ باریکی و تکیه‌گاه‌ها بر مشخصه‌های ارتعاشی آزاد غیرخطی به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است.

که و همکاران [۱۳] در مقاله‌ای ارتعاشات غیرخطی تیر متغیر تابعی را به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. آنها در این مقاله از تئوری تیر اولر-برنولی و کرنش غیرخطی وون-کارمن استفاده نمودند. فرض می‌شود که خصوصیات ماده در راستای ضخامت براساس قانون توانی یا نمایی تغییر می‌کند. از روش گلرکین برای به دست آوردن معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی ۲ با ترم‌های غیرخطی مرتبه‌ی ۲ و ۳ استفاده شده است. از روش انتگرال‌گیری عددی مستقیم و روش رانگ-کوتا برای به دست آوردن پاسخ ارتعاش غیرخطی تیر FG با شرایط مرزی متفاوت استفاده شده است. تأثیرات توزیع ماده و شرایط مرزی مختلف بر روی پاسخ مورد بررسی قرار گرفته است.

بنک و همکارانش [۱۴] در مقاله‌ای مکانیزم میرایی در یک تیر یک سر گیردار با یک جرم در سر آزادش را مطالعه کردند. آنها چهار نوع مکانیزم میرایی شامل میرایی هوا، میرایی نرخ کرنش، هیستریزیس مکانی و هیستریزیس زمانی را به همراه نتایج تجربی مورد بررسی قرار دادند.

اینمن [۱۵] نیز ارتعاشات تیر ویسکوالاستیک اولر-برنولی را با روش جداسازی متغیرها مورد تحلیل قرار داد. نتایج، آنالیز مودال را به همراه هیستریزیس نمایش می‌دهد.

چن و چانگ [۱۶] رفتار دینامیکی تیر ویسکوالاستیک غیرخطی را مورد بررسی قرار دادند. آنها معادلات رفتار دینامیکی دیفرانسیلی-جزئی-انتگرالی تیر همگن ویسکوالاستیک را به دست آوردند. مواد تیر از

رابطه‌ی غیرخطی Leaderman تبعیت می‌کند. تیر مورد نظر دارای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده می‌باشد. مدل ریاضی با استفاده از روش گلرکین به معادله‌ی دیفرانسیلی-انتگرالی ساده‌سازی شده است و سپس به معادله‌ی دیفرانسیلی معمولی تبدیل شده است.

کیم و همکارش [۱۷]، به بررسی پایداری دینامیکی تیر کامپوزیت یک سر گیردار با خواص ویسکوالاستیک تحت بار متحرک پرداخته‌اند. تیر مورد نظر از مواد کامپوزیت یک‌جهته با بار متحرک برای بررسی ویسکوالاستیسیته بر روی بار بحرانی جهت مطالعه انتخاب شده است. با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با معادله‌ی حرکت با استفاده از اصل همیلتون استخراج و مسأله‌ی مقدار ویژه با استفاده از روش المان محدود حل شده است.

لی و همکارش [۱۸]، در مقاله‌ی ای به بررسی دینامیک و پایداری تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت کشش محوری پرداختند. ماده‌ی ویسکوالاستیک به صورت خطی و با استفاده از انتگرال ارشی^۱ مدل شده است. دقت این پژوهش با استفاده از روش المان محدود و حل تحلیلی دقیق مقایسه و اعتبارسازی شده است. همچنین آنها در این پژوهش تأثیر ویسکوالاستیسیته و سرعت حرکت را بر روی دینامیک و پایداری تیر به صورت عددی بررسی کرده‌اند.

چن و همکارش [۱۹]، پایداری رزونانس پارامتری را در یک تیر متحرک محوری که با سرعت وابسته به زمان در حال حرکت است را بررسی کردند. مدل ویسکوالاستیک انتخابی از نوع کلونین بوده و معادله‌ی حرکت با استفاده از قانون دوم نیوتن استخراج گردیده است. هنگامی که تیر با یک سرعت متوسط به همراه تغییرات هارمونیک اندک حرکت می‌کند، می‌توان تیر را به صورت یک سیستم ژيروسکوپیک تحت

^۱ Hereditary Integral

تحریکات پریودیک و میرایی داخلی در نظر گرفت و از روش مقیاس‌های چندگانه برای به دست آوردن پاسخ انتخاب شده است.

آنها همچنین در مقاله‌ای دیگر [۲۰] ارتعاشات و پایداری تیر متحرک محوری ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های هیبرید را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی و توابع مودال با استفاده از شرایط مرزی تیر الاستیک متحرک با سرعت ثابت، روشی را ارائه کردند. همچنین برای یک تیر با مدل ویسکوالاستیک کلونین با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه اثر ویسکوالاستیک را بر ارتعاشات آزاد بررسی کردند. مثال‌های عددی تأثیر سختی قیر، سرعت محوری متوسط و ویسکوالاستیسیته را نمایش می‌دهد.

کوکاتورک و همکارش [۲۱] ارتعاشات تیر ویسکوالاستیک تحت بار فشاری خارج از مرکز و بار متمرکز هارمونیک متحرک را مورد بررسی قرار دادند. با فرض تئوری تیر اولر-برنولی و با استفاده از روش لاگرانژ معادله‌ی حرکت استخراج شده و در این تحقیق توابع مصرف جابه‌جایی تیر به صورت چندجمله‌ای در نظر گرفته شده است. با استفاده از معادلات لاگرانژ، مسأله به سیستمی با معادلات جبری تقلیل می‌یابد. توابع مصرفی جابه‌جایی به صورت چندجمله‌ای در نظر گرفته شده است. نتایج شبیه‌سازی عددی برای مقادیر مختلف خروج از مرکز، نیروی فشاری خارج از مرکز، فرکانس تحریک و سرعت بار متحرک ارائه شده است و با پاسخ دقیق تیر اولر-برنولی مقایسه شده است. او همچنین در مقاله‌ی دیگری [۲۲] مسأله‌ی فوق را برای تیر تیموشنکو بررسی کردند.

محمودی و همکاران [۲۳] در مقاله‌ای ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر ویسکوالاستیک با مدل کلونین-ویت را بررسی کردند. آنها در این پژوهش ترم غیرخطی مرتبه‌ی سه را در نظر گرفتند و با استفاده از اصل همیلتون معادله‌ی حرکت غیرخطی را استخراج کردند. با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه فرکانس-

های طبیعی و شکل مودها را به دست آوردند. سپس روش گلرکین را برای جداسازی معادلات زمانی و مکانی اعمال کرده‌اند. معادلات حرکت، وجود جمله‌های دمپینگ غیرخطی، علاوه بر جملات غیرخطی اینرسی و هندسی را نشان می‌دهند. وجود جمله‌های غیرخطی هندسی و اینرسی باعث وابستگی فرکانس‌های طبیعی غیرخطی به دامنه‌ی ثابت ارتعاشات می‌شود. به علاوه وابستگی شکل مودها به توان سوم دامنه‌ی وابسته به زمان نشان داده شده است. نتایج تحلیلی برای شرایط مرزی دو سر مفصل و یک سر مفصل و یک سرگیردار به دست آمده است و با نتایج عددی مقایسه شده است.

قایش و همکاران [۲۴] در مقاله‌ای ارتعاشات پارامتری غیرخطی و پایداری تیر ریلی متحرک محوری ویسکوالاستیک را بررسی کردند. مدل انتخابی ویسکوالاستیک مدل کلون-ویت می‌باشد و با استفاده از قانون دوم نیوتن معادله‌ی حرکت ارتعاشات با دامنه‌ی بزرگ به دست آمده و با استفاده از روش مقیاس-های چندگانه و شرایط حل‌پذیری، شکل مودها و فرکانس‌های خطی و غیرخطی استخراج شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود دامنه به صورت نمایی به زمان وابسته است. در نهایت پارامترهای سیستم بر روی رفتار ارتعاشی، پایداری مورد بررسی قرار گرفته است.

قایش [۲۵] در مقاله‌ای دیگر ارتعاش اجباری تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری با رزونانس داخلی را مورد تحلیل قرار داده است. معادله‌ی حرکت با استفاده از قانون دوم نیوتن به دست آمده است. مدل ویسکوالاستیک انتخابی، مدل کلون-ویت می‌باشد. با استفاده از روش گلرکین برای شرایط مرزی تکیه-گاه ساده در دو سمت معادلات جداسازی شده و با روش ادامه‌دار pseudo-arclength حل شده است. او همچنین در مقاله‌ای دیگر [۲۶] پاسخ دینامیکی غیرخطی را بررسی کردند و معادله‌ی حرکت با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل شده است. اثر پارامترهای سیستم بر روی فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی، پاسخ ارتعاشی و منحنی‌های فرکانس-پاسخ بررسی شده است.

ال وی [۲۷] نیز در پژوهشی ارتعاشات عرضی تیر ساندویچی ویسکوالاستیک متحرک محوری با سرعت متغیر با کشش محوری وابسته به زمان را بررسی کردند. مدل ویسکوالاستیک انتخابی مدل کلونین بوده و معادله‌ی حرکت با استفاده از قانون دوم نیوتن استخراج شده است. روش مقیاس‌های چندگانه برای به دست آوردن توابع ویژه‌ی مختلط و فرکانس‌های طبیعی اعمال شده است. با کمک نتایج عددی، نشان داده شد که با استفاده از کشش اولیه‌ی مناسب، می‌توان دامنه‌ی نوسان محوری، زاویه‌ی فاز و ارتعاشات تیر ساندویچی را به طور قابل توجهی کنترل کرد.

بنگال و همکارانش [۲۸]، کمانش ترموالاستیک و رفتار ارتعاشی تیر ساندویچی ساخته شده از مواد متغیر تابعی با هسته‌ی ویسکوالاستیک مقید را با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند. تیر تحت شرایط مرزی دو سر گیردار می‌باشد. خواص مواد متغیر تابعی در راستای ضخامت با توجه به قانون توانی توزیع شده است. نتایج عددی شامل تأثیر شاخص قانونی توانی k از هسته تا لایه‌ی بیرونی بر روی پیچش حرارتی و رفتار ارتعاشی تیر بررسی شده است. به علاوه تأثیر دما بر روی فرکانس طبیعی و فاکتور استهلاک نیز بررسی شده است.

الله‌وردی‌زاده و همکاران [۲۹]، رفتار دینامیکی تیر متغیر تابعی الکترورنولوژیکال را مورد بررسی قرار دادند. هندسه‌ی مد نظر آنان دو تیر FG می‌باشد که با یک لایه‌ی میانی متشکل از سیال الکترورنولوژیکال ساندویچی شده که این لایه‌ی میانی به عنوان یک لایه‌ی پراکنده‌ی ویسکوالاستیک با مدول برشی قابل کنترل می‌باشد. مدل مورد نظر با استفاده از روش المان محدود بررسی شده و نتایج حاصل با نتایج تجربی تیر کامپوزیت مقایسه شده است. تأثیر شاخص FG، میدان الکتریکی و ضخامت هسته‌ی ویسکوالاستیک بر روی فرکانس‌های طبیعی و فاکتور استهلاک مورد بررسی قرار گرفته است.

لی و همکاران [۳۰]، رفتار وابسته به زمان تیر ورقه‌ای FG با یک لایه‌ی میانی ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. به عنوان یک مدل ساده آنها لایه‌ی میانی ویسکوالاستیک را با مدل خطی استاندارد، مدل کردند و حلّ تحلیلی را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و المان محدود به دست آوردند.

دمیر و همکارش [۳۱]، نیز در مقاله‌ی ارتعاشات آزاد تیر متغیر تابعی با تکیه‌گاه‌های ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. معادله‌ی حرکت با فرض تیر اولر-برنولی و با استفاده از معادله‌ی لاگرانژ استخراج شده و با روش المان محدود حل شده است. در این پژوهش فرض شده که خواصّ مواد در راستای ضخامت بر اساس قانون توانی تغییر می‌کند. تأثیر توزیع موادّ مختلف و شرایط مرزی مختلف بر روی پاسخ به تفصیل بررسی شده است.

در آخرین پژوهش‌ها، حسینی هاشمی و همکاران [۳۲] نیز ارتعاشات پِنل استوانه‌ای متغیر تابعی ویسکوالاستیک را تحت شرایط مرزی متفاوت مورد بررسی قرار دادند. آنها با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه‌ی اول برشی و مدل خطی زَنر با خصوصیات متغیر در راستای ضخامت، ماده‌ی متغیر تابعی ویسکوالاستیک را مدل‌سازی کردند و نتایج حاصل را با روش المان محدود مقایسه کردند.

۱-۶- جمع بندی

در این فصل ابتدا به معرفی مفاهیم اولیه‌ای چون موادّ ویسکوالاستیک و مدل‌های مکانیکی آن، موادّ متغیر تابعی و کاربردهای آن، اهمّیت بررسی ارتعاشات تحت بار متحرک و ارتعاشات غیرخطی پرداخته شد. سپس مروری بر تحقیقات پیشین نشان می‌دهد که تاکنون برای هندسه‌ی تیر خاصیت ویسکوالاستیسیته به صورت متغیر تابعی در نظر گرفته نشده است. در این پایان‌نامه ارتعاشات خطی و غیرخطی تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک تحت بار متحرک مورد بررسی قرار گرفته است و تأثیر پارامترهای FG بر روی رفتار ارتعاشی تیر مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل دوم

ارتعاشات خطی

۲-۱- مقدمه

در این فصل تحلیل ارتعاشات خطی تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. پیش از این پژوهش‌های مختلفی بر روی تیر ویسکوالاستیک همگن و تیر با خاصیت متغیر تابعی انجام شده است. اما در هیچ یک از این پژوهش‌ها ترم مربوط به خاصیت ویسکوالاستیک به صورت متغیر تابعی در نظر گرفته نشده است. در تحقیق حاضر با در نظر گرفتن این ویژگی و مدل ویسکوالاستیک کلوین-ویت، معادلات حاکم بر حرکت، بر اساس تئوری تیر اولر-برنولی و با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. فرض شده است که خواص ماده در راستای ضخامت تیر بر اساس قانون توانی تغییر می‌کند. فرکانس‌های طبیعی تیر با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و با روش جداسازی متغیرها استخراج شده‌اند که با مقایسه با نتایج مراجع پیشین تطابق کاملی میان آنها مشاهده شده است. همچنین تأثیر پارامترهای مختلف نیز بر روی فرکانس طبیعی بدون استهلاک و فاکتور استهلاک مورد بررسی قرار گرفته است.

۲-۲- مفاهیم اولیه

ساده‌ترین تئوری تیرها با این فرضیه آغاز می‌یابد که سطوح مقطع بعد از آنکه تیر دچار تغییر شکل شدند، همچنان مسطح باقی می‌مانند. واضح است که هنگامی که تیر دچار تغییر شکل می‌شود، خطوط یا تارهای مشخصی کشیده می‌شوند، در حالی که بعضی دیگر فشرده می‌شوند. در این بین نیز تارهایی وجود دارند که نه فشرده و نه کشیده می‌شوند بلکه فقط انحراف می‌یابند. این تارها، تار خنثی نامیده می‌شوند. فرض می‌شود که سطوح مقطع عمود بر تار خنثی پس از تغییر شکل نیز همچنان عمود بر تار خنثی باقی می‌مانند. این فرضیات به فرضیه‌های اولر-برنولی اتلاق می‌شوند.

۲-۲-۱- مدل ویسکوالاستیک کلونین-ویت

همانطور که پیش تر توضیح داده شد، رابطه‌ی بین تنش و کرنش در مدل کلونین-ویت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = E\varepsilon + C\dot{\varepsilon} = E\varepsilon + E\eta\dot{\varepsilon} \quad (۱-۲)$$

که در رابطه‌ی فوق، σ_e تنش مربوط به بخش الاستیک، σ_v تنش مربوط به بخش ویسکوالاستیک، C ضریب میرایی داخلی و η ثابت تناسبی میرایی داخلی تیر ویسکوالاستیک می‌باشد [۳۳].

۲-۲-۲- مواد متغیر تابعی

در این پژوهش فرض می‌شود ویژگی‌های ماده در راستای ضخامت، طبق قانون توانی تغییر می‌کند. بر اساس قانون اختلاط، ویژگی مؤثر ماده، P ، می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$P = P_U V_U + P_L V_L \quad (۲-۲)$$

که در آن P_U و P_L ویژگی‌های متناظر ماده به ترتیب مربوط به سطح بالایی و پایینی تیر می‌باشد. همچنین V_U و V_L نیز کسر حجمی مربوط به سطح بالایی و پایینی تیر می‌باشد که طبق رابطه‌ی زیر با یکدیگر مرتبط می‌باشند:

$$V_U + V_L = 1 \quad (۳-۲)$$

کسر حجمی جزء مربوط به سطح بالایی تیر به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V_U = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (۴-۲)$$

که در آن k پارامتری نامنفی می‌باشد که شکل تغییر ماده در راستای ضخامت تیر را مشخص می‌کند و h ضخامت تیر مورد بررسی می‌باشد. بنابراین طبق روابط (۲-۲) تا (۴-۲)، ویژگی مؤثر ماده به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$P = (P_U - P_L) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_L \quad (5-2)$$

در نتیجه برای تیر مورد بررسی در این پژوهش، ویژگی‌های مؤثر تیر عبارت خواهند بود از:

مدول الاستیسیته:

$$E = (E_U - E_L) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_L \quad (6-2)$$

چگالی:

$$\rho = (\rho_U - \rho_L) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_L \quad (7-2)$$

و ثابت تناسبی میرایی داخلی تیر ویسکوالاستیک:

$$\eta = (\eta_U - \eta_L) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \eta_L \quad (8-2)$$

۳-۲ فرمول بندی مسأله

تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک مطابق شکل با طول l ، پهنای b و ضخامت h تحت بار عرضی متحرک Q که با سرعت v بر روی تیر حرکت می‌کند مفروض است. مدل ویسکوالاستیک انتخابی، مدل کلونین-ویت می‌باشد. فرض می‌شود خصوصیات ماده در راستای ضخامت بر اساس قانون سری توانی تغییر کند که به تفصیل در ادامه توضیح داده خواهد شد.



شکل (۱-۲) تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده تحت بار متحرک

در این قسمت، معادله‌ی حاکم بر تیر اولر-برنولی FGM ویسکوالاستیک توسعه می‌یابد، سپس آنالیز ارتعاشی آن ارائه می‌شود. در این پژوهش فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود:

۱. تیر در ابتدا در حالت سکون می‌باشد. در واقع شرایط اولیه‌ی تیر صفر در نظر گرفته می‌شود.

۲. سرعت بار متحرک ثابت می‌باشد و بار نیز در کل مدّت حرکت با تیر در تماس می‌باشد.

مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی u یک تیر اولر-برنولی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$u_1 = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (9-2)$$

$$u_2 = 0 \quad (10-2)$$

$$u_3 = w(x, t) \quad (11-2)$$

که u_1 ، u_2 و u_3 جابه‌جایی در راستاهای x ، y و z را به‌ترتیب نشان می‌دهند و x نشان‌دهنده‌ی محور خنثی در راستای طول تیر است.

بر اساس تئوری تیر اولر-برنولی کرنش طبق رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (12-2)$$

چگالی انرژی کرنشی ذخیره شده‌ی U_0 در مواد الاستیک خطّی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x = \int_0^{\varepsilon_x} E \varepsilon_x d\varepsilon_x \quad (13-2)$$

که پس از انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$U_0 = \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \quad (14-2)$$

برای محاسبه‌ی انرژی کرنشی کلّ ذخیره شده در تیر می‌بایستی از چگالی انرژی کرنشی بر روی حجم انتگرال گرفت. بنابراین،

$$U = \int_0^V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \sigma_x \varepsilon_x dA dx \quad (۱۵-۲)$$

به علت خاصیت ویسکوالاستیسیته‌ی تیر مورد بررسی برای محاسبه‌ی انرژی کرنشی تیر از σ_e استفاده می‌کنیم و σ_v به علت ایجاد دمپینگ داخلی در ترم مربوط به کار غیرکانسرواتیو وارد می‌شود. بنابراین با جایگذاری روابط کرنش و تنش الاستیک در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \sigma_e \varepsilon_x dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A E(z) z^2 \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l (EI)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (۱۶-۲)$$

که در این رابطه

$$(EI)_{eq} = \int_A E(z) z^2 dA \quad (۱۷-۲)$$

با در نظر گرفتن مدل اولر-برنولی و با صرف نظر کردن از اینرسی چرخشی، انرژی جنبشی (T) برای تیر FGV به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(z) \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (۱۸-۲)$$

که در این رابطه

$$(\rho A)_{eq} = \int_A \rho(z) dA \quad (۱۹-۲)$$

کار نیروهای غیرکانسرواتیو نیز از دو بخش، یکی مربوط به تنش ویسکوالاستیک و دیگری مربوط به بار متحرک عرضی می‌باشد که بار متحرک با استفاده از تابع دلتای دیراک معرفی می‌گردد. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\delta W_{nc} &= - \int_0^l Q \delta(x - vt) \delta w dx - \int_0^l \int_A \sigma_v \delta \varepsilon dA dx = \\
&= - \int_0^l Q \delta(x - vt) \delta w dx \\
&\quad - \int_0^l \int_A E(z) \eta(z) \left(-z \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) (-z \delta w_{,xx}) dA dx \quad (20-2) \\
&= - \int_0^l Q \delta(x - vt) \delta w dx \\
&\quad - \int_0^l (CI)_{eq} \left(\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta w_{,xx} dx
\end{aligned}$$

که در این رابطه

$$(CI)_{eq} = \int_A E(z) \eta(z) z^2 dA \quad (21-2)$$

۴-۲- به دست آوردن معادلات حرکت

در این قسمت معادله‌ی حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر FGV با استفاده از اصل همیلتون به دست می‌آید. سپس آنالیز ارتعاشات با روش جداسازی متغیرها انجام می‌شود. بر اساس اصل همیلتون با کمینه کردن لاگرانژین ($\mathcal{L}$) یک سیستم تغییر شکل‌پذیر، معادله‌ی حرکت و عبارتی برای به دست آوردن شرایط مرزی استخراج می‌شود.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta U + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (22-2)$$

با جایگذاری ترم‌های انرژی پتانسیل، انرژی پتانسیل و کار مجازی در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (EI)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - Q \delta(x - vt) \delta w \right. \\
& \quad \left. - (CI)_{eq} \left(\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta w_{,xx} \right\} dx \, dt = 0
\end{aligned} \tag{۲۳-۲}$$

تک تک جمله‌های معادله‌ی فوق به ترتیب به صورت زیر حساب می‌شوند.

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w_{,t} dx \, dt \\
& = \int_0^L (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w \Big|_{t_0}^{t_1} dx \\
& \quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dx \, dt
\end{aligned} \tag{۲۴-۲}$$

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^L (EI)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \, dt \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L (EI)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \delta w_{,xx} dx \, dt \\
& = \int_{t_0}^{t_1} (EI)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \delta w_{,x} \Big|_0^L \\
& \quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \delta w_{,x} dx \, dt \\
& = \int_{t_0}^{t_1} (EI)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \delta w_{,x} \Big|_0^L \\
& \quad - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \delta w \Big|_0^L \\
& \quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \delta w dx \, dt
\end{aligned} \tag{۲۵-۲}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L (CI)_{eq} \left(\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta w_{,xx} dx dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (CI)_{eq} \left(\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta w_{,x} \Big|_0^L \\
&- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left((CI)_{eq} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta w_{,x} dx dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (CI)_{eq} \left(\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta w_{,x} \Big|_0^L \\
&- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} \left((CI)_{eq} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta w \Big|_0^L \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((CI)_{eq} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{۲۶-۲}$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه‌ی (۲-۲۳)، معادله‌ی حرکت تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
& (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((CI)_{eq} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) = Q \delta(x - vt)
\end{aligned} \tag{۲۷-۲}$$

همچنین شرایط مرزی عمومی مرتبط با آن به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned}
& (EI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_0^L + (CI)_{eq} \left(\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \Big|_0^L \quad \text{یا} \quad \delta w_{,x} \Big|_0^L = 0 \tag{۲۸-۲} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$(EI)_{eq} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L \quad \text{یا} \quad \delta W \Big|_0^L = 0 \quad (29-2)$$

$$+ (CI)_{eq} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \Big|_0^L = 0$$

با استفاده از روابط فوق برای تیر با تکیه‌گاه ساده شرایط مرزی به صورت زیر خواهد بود:

$$(EI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{و} \quad W(0, t) = 0 \quad (30-2)$$

$$+ (CI)_{eq} \left(\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \Big|_{x=0} = 0$$

$$(EI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad \text{و} \quad W(L, t) = 0 \quad (31-2)$$

$$+ (CI)_{eq} \left(\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \Big|_{x=L} = 0$$

۲-۵- حل تحلیلی

برای بدست آوردن پاسخ ارتعاش آزاد از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم. یعنی پاسخ را به صورت

حاصل ضرب توابع مکانی و زمانی در نظر می‌گیریم:

$$w(x, t) = W(x)P(t) \quad (32-2)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳۲-۲) در رابطه‌ی (۲۷-۲) خواهیم داشت:

$$(\rho A)_{eq} W \ddot{P} + ((EI)_{eq} W'')'' P + ((CI)_{eq} W'')'' \dot{P} = 0 \quad (33-2)$$

با تقسیم طرفین رابطه بر ترم $(\rho A)_{eq}$,

$$W \ddot{P} + \left(\frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} W'' \right)'' P + \left(\frac{(CI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} W'' \right)'' \dot{P} = 0 \quad (34-2)$$

پس از مرتب‌سازی روابط فوق:

$$W\ddot{P} + W'''' \left(\frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} P + \frac{(CI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \dot{P} \right) = 0 \quad (35-2)$$

با تقسیم رابطه‌ی فوق بر ترم WP خواهیم داشت:

$$\frac{\ddot{P}}{P} + \frac{W''''}{W} \left(\frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} + \frac{(CI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \frac{\dot{P}}{P} \right) = 0 \quad (36-2)$$

با تقسیم رابطه‌ی فوق بر جمله‌ی $\left(\frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} + \frac{(CI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \frac{\dot{P}}{P} \right)$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\frac{\frac{\ddot{P}}{P}}{\left(\frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} + \frac{(CI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \frac{\dot{P}}{P} \right)} + \frac{W''''}{W} = 0 \quad (37-2)$$

در رابطه‌ی فوق جمله‌ی اول تابع t و جمله‌ی دوم تابع x می‌باشد. بنابراین رابطه‌ی (37-2) زمانی برقرار است

که دو جمله برابر با یک عدد صحیح باشند. یعنی:

$$\frac{\ddot{P}}{\left(\frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} P + \frac{(CI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \dot{P} \right)} = -\frac{W''''}{W} = -\alpha^4 = -\omega^2 \quad (38-2)$$

از آنجایی که رابطه‌ی $w(x, t) = W(x)P(t)$ باید شرایط مرزی (30-2) و (31-2) را نیز ارضاء کند، در

نتیجه خواهیم داشت:

$$w(0, t) = 0 \quad (39-2)$$

$$w(L, t) = 0 \quad (40-2)$$

$$w''(0, t) = 0 \quad (41-2)$$

$$w''(L, t) = 0 \quad (42-2)$$

از معادله (38-2) می‌توان معادله‌ی مکانی زیر را استخراج نمود:

$$W'''' - \alpha^4 W = 0 \quad (43-2)$$

برای معادله‌ی دیفرانسیل فوق پاسخی به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$W(x) = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x + C \cos \alpha x + D \sin \alpha x \quad (44-2)$$

که ثوابت A, B, C و D با اعمال شرایط مرزی به دست خواهند آمد.

$$W(0) = 0 \rightarrow A + C = 0 \quad (45-2)$$

$$W''(0) = 0 \rightarrow A - C = 0 \quad (46-2)$$

از دو شرط مرزی فوق نتیجه می‌شود که:

$$A = C = 0 \quad (47-2)$$

با اعمال دو شرط مرزی دیگر نیز خواهیم داشت:

$$W(L) = 0 \rightarrow B \sinh \alpha L + D \sin \alpha L = 0 \quad (48-2)$$

$$W''(L) = 0 \rightarrow B \sinh \alpha L - D \sin \alpha L = 0 \quad (49-2)$$

برای پاسخ غیربدیهی بایستی دترمینان ماتریس ضرایب را برابر صفر قرار دهیم:

$$\sinh \alpha L \sin \alpha L = 0 \quad (50-2)$$

از آنجایی که برای هر $\alpha L \neq 0$, $\sinh \alpha L \neq 0$ می‌باشد، در نتیجه

$$\sin \alpha L = 0 \quad (51-2)$$

که معادله‌ی فوق در واقع معادله‌ی مشخصه‌ی مسئله می‌باشد. حل این معادله نتیجه می‌دهد:

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (52-2)$$

با در نظر گرفتن معادلات (51-2) و (48-2) نتیجه می‌شود که $B = 0$. در نتیجه شکل مود برابر خواهد

بود با:

$$W_n(x) = D \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (53-2)$$

در نتیجه برای شکل مود n -ام، پاسخ به شکل زیر خواهد بود:

$$w_n(x, t) = P_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (54-2)$$

از معادله‌ی (۳۸-۲) و با در نظر گرفتن $\alpha = \frac{n\pi}{L}$ می‌توانیم معادله‌ی زمانی زیر را استخراج کنیم:

$$\ddot{P}_n + \frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \frac{n^4 \pi^4}{L^4} P_n + \frac{(CI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \dot{P}_n = 0 \quad (55-2)$$

به عنوان ساده‌سازی می‌توانیم معادله‌ی فوق را به فرم زیر در نظر بگیریم:

$$\ddot{P}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{P}_n + \omega_n^2 P_n = 0 \quad (56-2)$$

که در این رابطه ω_n فرکانس طبیعی بدون استهلاک و ζ_n فاکتور استهلاک می‌باشند که عبارتند از:

$$\frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \frac{n^4 \pi^4}{L^4} = \omega_n^2 \rightarrow \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}}} \quad (57-2)$$

$$\frac{(CI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \frac{n^4 \pi^4}{L^4} = 2\zeta_n \omega_n \rightarrow \zeta_n = \frac{n^2 \pi^2 (CI)_{eq}}{2L^2 \sqrt{(EI)_{eq} (\rho A)_{eq}}} \quad (58-2)$$

در نتیجه فرکانس تیر دارای دمپینگ داخلی عبارت خواهد بود از:

$$\Omega_n = -\zeta_n \omega_n \pm i(\omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}) \quad (61-2)$$

۶-۲- به دست آوردن پاسخ

در قسمت قبل معادله‌ی حرکت به صورت معادله‌ی زیر استخراج گردید:

$$\begin{aligned} (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_{eq} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((CI)_{eq} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) = Q \delta(x - vt) \end{aligned} \quad (60-2)$$

در معادله‌ی فوق پاسخ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$w(x, t) = w_H(x, t) + w_P(x, t) \quad (۶۱-۲)$$

که در این رابطه، $w_H(x, t)$ پاسخ همگن معادله (برای وقتی که بار عرضی صفر است) و $w_P(x, t)$ پاسخ خصوصی معادله (در حضور بار عرضی) می‌باشند.

فرم کلی پاسخ را با استفاده از روش بسط توابع ویژه به فرم زیر در نظر می‌گیریم. یعنی

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(t) W_j(x) \quad (۶۲-۲)$$

که $W_j(x)$ توابع ویژه و $P_j(t)$ مختصات مودال متناظر با آن می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌ی فوق در معادله‌ی حرکت

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (\rho A)_{eq} W_j \ddot{P}_j + ((EI)_{eq} W''_j)'' P_j + ((CI)_{eq} W''_j)'' \dot{P}_j \\ = Q\delta(x - vt) \end{aligned} \quad (۶۳-۲)$$

همانطور که از قبل داشتیم

$$W'''' - \omega_n^2 W = 0 \quad (۶۴-۲)$$

با در نظر گرفتن این رابطه و جایگذاری در رابطه‌ی (۶۰-۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (\rho A)_{eq} \left[\ddot{P}_j + \omega_j^2 \frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} P_j + \omega_j^2 \frac{(CI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \dot{P}_j \right] W_j \\ = Q\delta(x - vt) \end{aligned} \quad (۶۵-۲)$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در W_k و انتگرال‌گیری در بازه‌ی 0 تا L و با در نظر گرفتن شرایط تعامد خواهیم داشت:

$$(\rho A)_{eq} \left[\ddot{P}_k + \omega_k^2 \frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} P_k + \omega_k^2 \frac{(CI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \dot{P}_k \right] \frac{L}{2} = q(x, t) \quad (۶۶-۲)$$

که در آن:

$$q(x, t) = \int_0^l Q \delta(x - vt) W_k dx = Q \sin \frac{k\pi vt}{L} \quad (۶۷-۲)$$

در نهایت به معادله‌ی دینامیکی مودال زیر می‌رسیم:

$$\ddot{P}_k + \omega_k^2 \frac{(CI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} \dot{P}_k + \omega_k^2 \frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}} P_k = \frac{2Q}{(\rho A)_{eq} L} \sin \frac{k\pi vt}{L} \quad (۶۸-۲)$$

برای ساده‌سازی، معادله را به فرم استاندارد زیر می‌نویسیم:

$$\ddot{P}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{P}_k + \omega_k^2 P_k = \frac{2Q}{(\rho A)_{eq} L} \sin \frac{k\pi vt}{L} \quad (۶۹-۲)$$

۲-۶-۱ جواب عمومی ناشی از ارتعاش آزاد:

برای به دست آوردن پاسخ همگن ناشی از ارتعاش آزاد، معادله‌ی فوق را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\ddot{P}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{P}_k + \omega_k^2 P_k = 0 \quad (۷۰-۲)$$

معادله‌ی فوق در واقع معادله‌ی ارتعاش آزاد تیر با استهلاک می‌باشد که پاسخی به شکل زیر دارد:

$$P_{kH} = A_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + B_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) \quad (۷۱-۲)$$

که ضرایب ثابت A_k و B_k با استفاده از شرایط اولیه به دست خواهند آمد.

۲-۶-۲ جواب خصوصی ناشی از ارتعاش اجباری:

در معادله‌ی به دست آمده برای ارتعاش اجباری زیر

$$\ddot{P}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{P}_k + \omega_k^2 P_k = \frac{2Q}{(\rho A)_{eq} L} \sin \frac{k\pi vt}{L} \quad (۷۲-۲)$$

پاسخ خصوصی معادله‌ی ناهمگن فوق را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P_{kp} = F_k \sin \frac{k\pi vt}{L} + G_k \cos \frac{k\pi vt}{L} \quad (۷۳-۲)$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در معادله‌ی (۷۲-۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & -F_k \frac{k^2 \pi^2 v^2}{L^2} \sin \frac{k\pi vt}{L} - G_k \frac{k^2 \pi^2 v^2}{L^2} \cos \frac{k\pi vt}{L} \\ & + 2\zeta_k \omega_k \left(F_k \frac{k\pi v}{L} \cos \frac{k\pi vt}{L} - G_k \frac{k\pi v}{L} \sin \frac{k\pi vt}{L} \right) \\ & + \omega_k^2 \left(F_k \sin \frac{k\pi vt}{L} + G_k \cos \frac{k\pi vt}{L} \right) \\ & = \frac{2Q}{(\rho A)_{eq} L} \sin \frac{k\pi vt}{L} \end{aligned} \quad (۷۴-۲)$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب $\sin \frac{k\pi vt}{L}$ و $\cos \frac{k\pi vt}{L}$ در معادله‌ی فوق، ضرایب ثابت F_k و G_k به شرح زیر

به دست خواهند آمد:

$$F_k = \frac{\frac{2Q}{(\rho A)_{eq} l} (\omega_k^2 - \frac{k^2 \pi^2 v^2}{l^2})}{(\omega_k^2 - \frac{k^2 \pi^2 v^2}{l^2})^2 + 4\zeta_k^2 \omega_k^2 \frac{k^2 \pi^2 v^2}{l^2}} \quad (۷۵-۲)$$

$$G_k = \frac{-\frac{4Q}{(\rho A)_{eq} l} \zeta_k \omega_k \frac{k\pi v}{l}}{(\omega_k^2 - \frac{k^2 \pi^2 v^2}{l^2})^2 + 4\zeta_k^2 \omega_k^2 \frac{k^2 \pi^2 v^2}{l^2}} \quad (۷۶-۲)$$

پاسخ کامل تیر از مجموع پاسخ همگن و خصوصی به دست می آید. یعنی:

$$\begin{aligned}
 w(x, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \right) \right. \\
 & \left. + B_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \right) \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(F_k \sin \frac{k\pi v t}{l} + G_k \cos \frac{k\pi v t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}
 \end{aligned} \quad (77-2)$$

برای به دست آوردن ضرایب ثابت A_k و B_k بایستی شرایط اولیه را اعمال کنیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$w(x, 0) = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + G_k) \sin \frac{k\pi x}{l} = 0 \quad (78-2)$$

$$w_{,t}(x, 0) = 0$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(-A_k \zeta_k \omega_k + B_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} + F_k \frac{k\pi v}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} = 0 \quad (79-2)$$

با ضرب داخلی طرفین روابط فوق در $\sin \frac{m\pi x}{l}$ و ساده سازی خواهیم داشت:

$$A_k = -G_k \quad \text{و} \quad B_k = \frac{-F_k \frac{k\pi v}{l} - G_k \zeta_k \omega_k}{\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}} \quad (80-2)$$

بدین ترتیب خیز تیر به دست خواهد آمد.

۲-۶-۳- ارتعاش آزاد پس از گذشتن بار از روی تیر

معادله‌ی (۷۷-۲) تا وقتی معتبر است که بار بر روی تیر در حال حرکت است، در واقع تا هنگامی که

$0 \leq t \leq \frac{L}{v}$ به محض اینکه بار از روی تیر رد می‌شود تیر تحت ارتعاشات آزاد قرار می‌گیرد. جابه‌جایی و

سرعت تیر در ابتدای ارتعاشات آزاد از معادله‌ی (۷۷-۲) در لحظه‌ی $t_f = \frac{L}{v}$ به دست می‌آید. لذا:

$$\begin{aligned} w(x, t_f^+) &= w(x, t_f^-) \rightarrow P_k(t_f^+) = P_k(t_f^-) \\ w_{,t}(x, t_f^+) &= w_{,t}(x, t_f^-) \rightarrow \dot{P}_k(t_f^+) = \dot{P}_k(t_f^-) \end{aligned} \quad (۸۱-۲)$$

که برای $t \geq t_f$ پاسخ زمانی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} P_k(t) &= C_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) \\ &+ S_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) \end{aligned} \quad (۸۲-۲)$$

که C_k و S_k ضرایب ثابت می‌باشند که با استفاده از شرایط (۸۱-۲) در لحظه‌ی $t = t_f$ عبارت خواهند بود از:

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{L \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \right)} \left\{ e^{+\zeta_k \omega_k t_f} \left[F_k L \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \right) \cos \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \sin \frac{k\pi v t_f}{L} \right. \right. \\ &- F_k k\pi v \sin \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \cos \frac{k\pi v t_f}{L} \\ &+ G_k L \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \cos \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \cos \frac{k\pi v t_f}{L} \\ &+ G_k k\pi v \sin \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \sin \frac{k\pi v t_f}{L} + A_k L \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \right) e^{-\zeta_k \omega_k t_f} \\ &- F_k L \zeta_k \omega_k \sin \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \sin \frac{k\pi v t_f}{L} \\ &\left. \left. - G_k L \zeta_k \omega_k \sin \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \cos \frac{k\pi v t_f}{L} \right] \right\} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &-۲) \\ &(۸۳) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_k \\
&= \frac{1}{L \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \right)} \left\{ e^{+\zeta_k \omega_k t_f} \left[F_k L \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \right) \sin \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \sin \frac{k\pi}{l} \right. \right. \\
&+ F_k k \pi v \cos \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \cos \frac{k\pi v t_f}{L} \\
&+ G_k L \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \sin \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \cos \frac{k\pi v t_f}{L} \\
&- G_k k \pi v \cos \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \sin \frac{k\pi v t_f}{L} + B_k L \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \right) e^{-\zeta_k \omega_k t_f} \\
&+ F_k L \zeta_k \omega_k \cos \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \sin \frac{k\pi v t_f}{L} \\
&\left. \left. - G_k L \zeta_k \omega_k \cos \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t_f \right) \cos \frac{k\pi v t_f}{L} \right] \right\} \quad (۸۴-۲)
\end{aligned}$$

در نتیجه پاسخ ارتعاشات آزاد پس از بارگذاری عبارت است از

$$\begin{aligned}
w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} & \left(C_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \right) \right. \\
& \left. + S_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \right) \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (۸۵-۲)
\end{aligned}$$

۲-۷- روش گلرکین

در این قسمت، فرکانس طبیعی معادله‌ی دیفرانسیلی برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده از روش گلرکین تخمین زده شده است. بر اساس روش معمول گلرکین یک حل تقریبی به صورت زیر فرض می‌شود:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^N P_j(t) W_j(x) \quad (۸۶-۲)$$

که در آن $W_j(x)$ تابع آزمون روش گلرکین و $P_j(t)$ مختصات مودال تعمیم یافته می‌باشد. این تابع آزمون تمام شرایط مرزی و هندسی را بایستی ارضاء کند. برای انتخاب این تابع روش‌های متفاوتی وجود دارد. اما در

این مورد تابع حدس زده شده $\sin \frac{j\pi x}{L}$ می‌باشد. با جایگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۲-۳۳) و ضرب

طرفین در $W_k(x)$ و انتگرال‌گیری بر حسب x خواهیم داشت:

$$MP + C\dot{P} + KP = 0 \quad (۲-۸۷)$$

که در این رابطه درایه‌های ماتریس معادله فوق به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M_{kj} = \int_0^1 (\rho A)_{eq} w_j(x) w_k(x) dx \quad (۲-۸۸)$$

$$C_{kj} = \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((CI)_{eq} \frac{\partial^2 w_j(x)}{\partial x^2} \right) w_k(x) dx \quad (۲-۸۹)$$

$$K_{kj} = \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_{eq} \frac{\partial^2 w_j(x)}{\partial x^2} \right) w_k(x) dx \quad (۲-۹۰)$$

در ارتعاشات آزاد مختصات مودال تعمیم یافته را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P_j(t) = a_j e^{i\omega t} \quad (۲-۹۱)$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۲-۸۷) به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

$$-\omega^2 Ma + i\omega Ca + Ka = 0 \quad (۲-۹۲)$$

که ω فرکانس طبیعی مختلط می‌باشد که با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس فوق به دست خواهد آمد.

فاکتور استهلاک نیز از طبق رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\zeta = \frac{Re(\omega)}{\omega} \quad (93-2)$$

که در رابطه‌ی فوق $Re(\omega)$ ، بخش حقیقی فرکانس می‌باشد.

۲-۸- نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی مربوط به فرکانس طبیعی و فاکتور استهلاک و تغییرات فرکانس طبیعی بدون استهلاک اول و فاکتور استهلاک بر حسب نسبت‌های مدول الاستیسیته، چگالی و ضریب میرایی داخلی ویسکوالاستیک استخراج می‌شود. مشخصات هندسی و مکانیکی سطح بالایی تیر عبارتند از:

جدول (۱-۲) مشخصات هندسی و مکانیکی تیر

مشخصات	مقدار
طول تیر (m)	20
مدول الاستیسیته (MPa)	34000
چگالی بر واحد سطح (Kg/m)	1000
ضریب میرایی ویسکوالاستیک (s)	0.0023
ضخامت تیر (m)	0.9
پهنای تیر (m)	0.6

همچنین بر طبق تعریف:

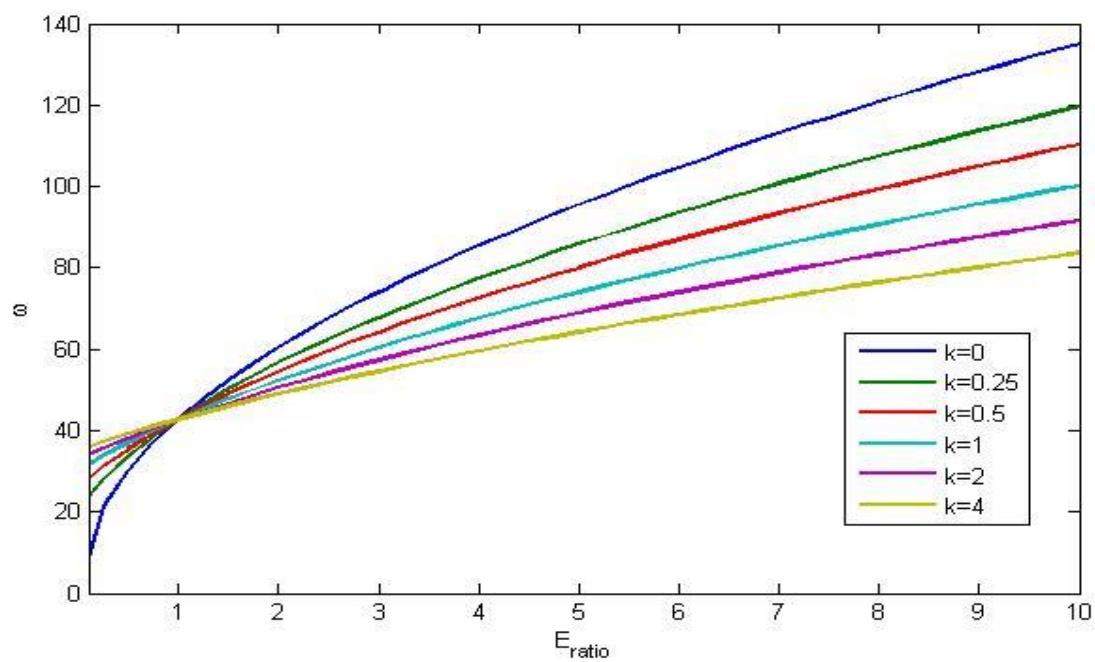
$$E_{ratio} = \frac{E_U}{E_L}, \quad \eta_{ratio} = \frac{\eta_U}{\eta_L}, \quad \rho_{ratio} = \frac{\rho_U}{\rho_L} \quad (94-2)$$

در جدول زیر فرکانس طبیعی بدون استهلاك تیر با صفر قرار دادن ماتریس C در رابطه‌ی (۹۲-۲) برای حالت همگن یعنی $E_{ratio}=1$ ، $\eta_{ratio}=1$ و $\rho_{ratio}=1$ به ازای $k=1$ به دست آمده است که با نتایج به دست آمده از مراجع [۳۴] و [۳۵] کاملاً مطابقت دارد.

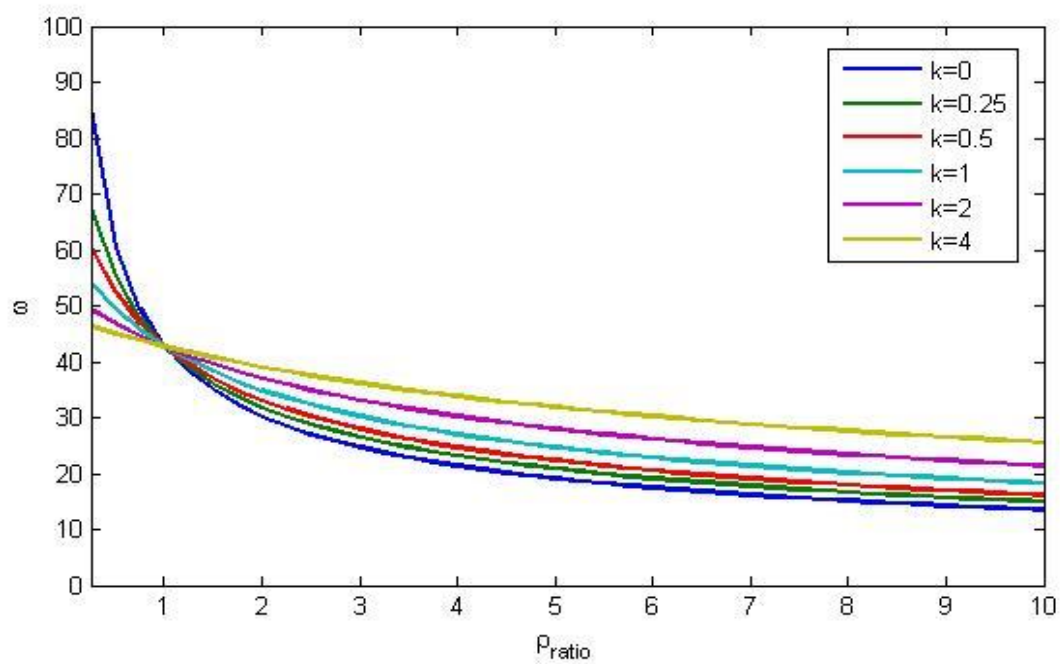
جدول (۲-۲) فرکانس طبیعی بدون استهلاك حالت همگن موده‌های یکم تا پنجم

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
Galerkin method	42.7366	170.9465	384.6297	683.7862	1068.4160
Timoshenko and young [34]	42.7366	170.9465	384.6297	683.7862	1068.4160
Fyrba [35]	42.7366	170.9465	384.6297	683.7862	1068.4160

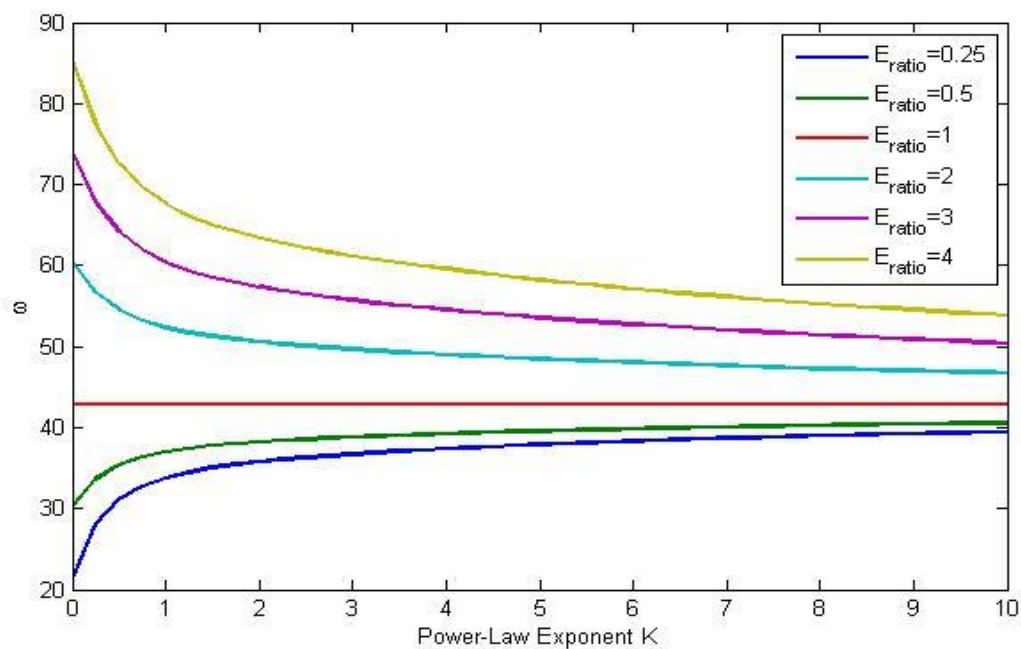
در شکل (۲-۲) تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاك تیر متغیر تابعی را بر حسب نسبت مدول الاستیسیته (E_{ratio}) به ازای $\rho_{ratio}=1$ و مقادیر مختلف توان k نمایش می‌دهد. همانطور که پیداست فرکانس طبیعی اول با افزایش E_{ratio} افزایش می‌یابد. همچنین E_{ratio} به ازای مقادیر کوچکتر k بر روی فرکانس طبیعی مؤثرتر است. یعنی همانطور که k افزایش می‌یابد، تأثیر افزایش E_{ratio} بر فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین کلیه نمودارها در $E_{ratio}=1$ با یکدیگر تقاطع دارند.



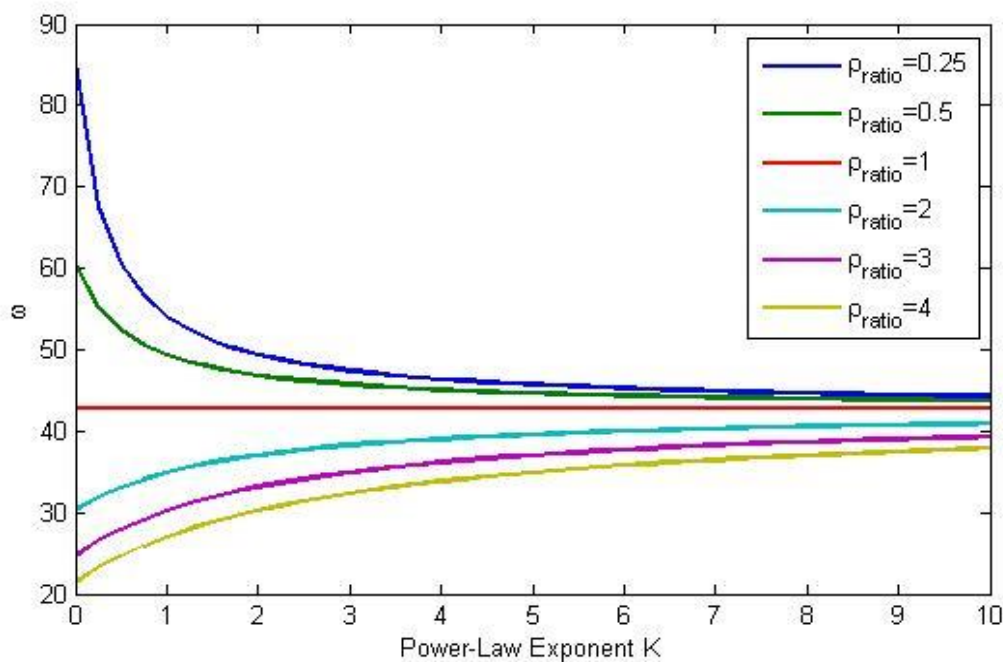
شکل (۲-۲) تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاک تیر متغیر تابعی بر حسب نسبت مدول الاستیسیته (E_{ratio}) به ازای مقادیر مختلف توان k



شکل (۳-۲) تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاك تیر متغیر تابعی بر حسب نسبت چگالی (ρ_{ratio}) به ازای مقادیر مختلف توان k



شکل (۴-۲) تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاك تیر متغیر تابعی بر حسب توان k به ازای $\rho_{ratio}=1$ و مقادیر مختلف مدول الاستیسیته (E_{ratio})



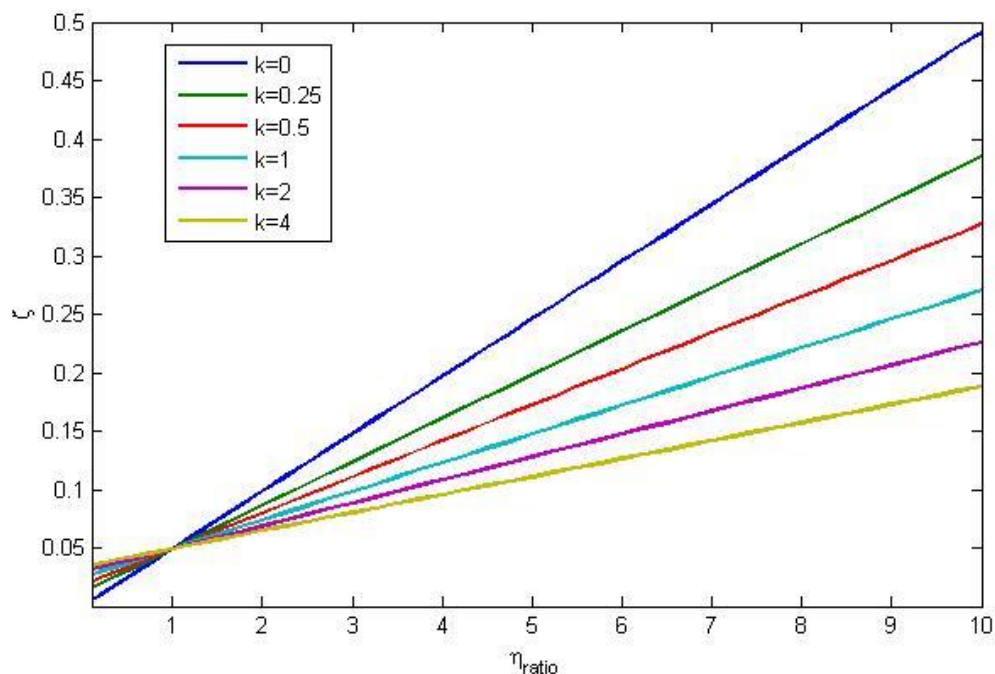
شکل (۵-۲) تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاک تیر متغیر تابعی بر حسب توان k به ازای $E_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف چگالی (ρ_{ratio})

در شکل (۳-۲) تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاک تیر متغیر تابعی را بر حسب نسبت چگالی (ρ_{ratio}) به ازای $E_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف توان k نمایش می‌دهد. همان‌طور که پیداست فرکانس طبیعی اول با افزایش ρ_{ratio} کاهش می‌یابد. همچنین ρ_{ratio} به ازای مقادیر کوچکتر k بر روی فرکانس طبیعی مؤثرتر است. یعنی همان‌طور که k افزایش می‌یابد، تأثیر افزایش ρ_{ratio} بر فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین کلیه نمودارها در $\rho_{ratio} = 1$ با یکدیگر تقاطع دارند.

شکل (۴-۲) نیز تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاک تیر متغیر تابعی را بر حسب توان k به ازای $\rho_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف مدول الاستیسیته (E_{ratio}) نمایش می‌دهد. مطابق شکل، فرکانس طبیعی اول تیر با افزایش k هنگامی که E_{ratio} کمتر از یک است، افزایش می‌یابد و هنگامی که E_{ratio} بیشتر از یک

است، کاهش می‌یابد. در هر دو حالت واضح است که فرکانس طبیعی اول تیر با افزایش k به فرکانس طبیعی اول تیر همگن نزدیک می‌شود.

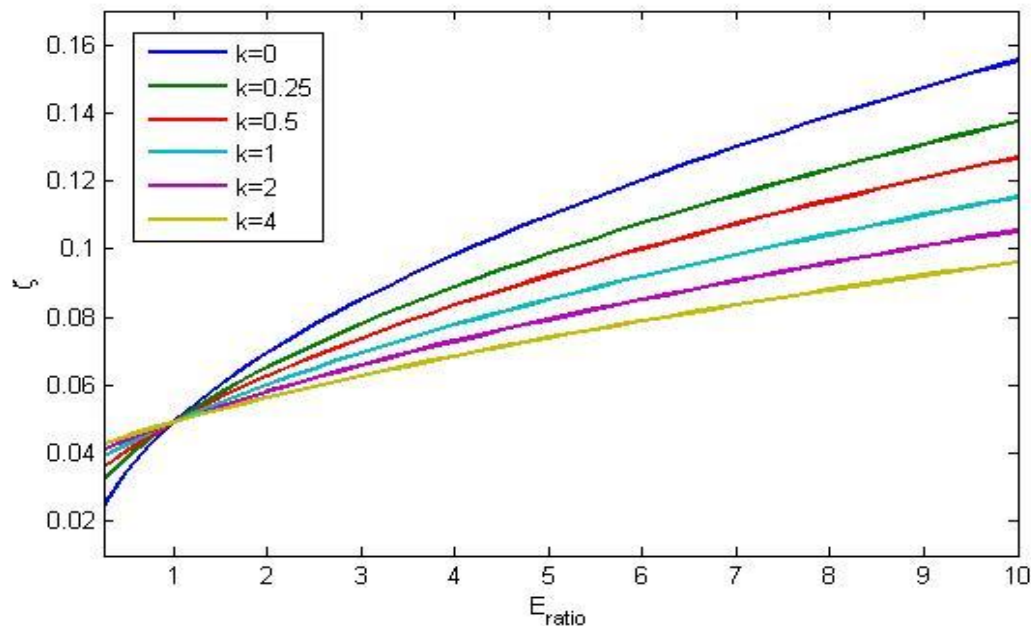
شکل (۵-۲) نیز تغییرات فرکانس طبیعی اول بدون استهلاک تیر متغیر تابعی را بر حسب توان k به ازای $E_{ratio}=1$ و مقادیر مختلف مدول الاستیسیته (ρ_{ratio}) نمایش می‌دهد. مطابق شکل، فرکانس طبیعی اول تیر با افزایش k هنگامی که ρ_{ratio} کمتر از یک است، کاهش می‌یابد و هنگامی که ρ_{ratio} بیشتر از یک است، افزایش می‌یابد. در هر دو حالت واضح است که فرکانس طبیعی اول تیر با افزایش k به فرکانس طبیعی اول تیر همگن نزدیک می‌شود.



شکل (۶-۲) تغییرات فاکتور استهلاک اول تیر متغیر تابعی بر حسب نسبت ضریب میرایی ویسکوالاستیک (η_{ratio}) به ازای $E_{ratio}=1$ ، $\rho_{ratio}=1$ و مقادیر مختلف توان k

در شکل (۶-۲) تغییرات فاکتور استهلاک اول تیر متغیر تابعی را بر حسب نسبت ضریب میرایی ترموالاستیک (η_{ratio}) به ازای $E_{ratio}=1$ ، $\rho_{ratio}=1$ و مقادیر مختلف توان k نمایش می‌دهد. همان‌طور

که پیداست همانند فرکانس طبیعی اول، فاکتور استهلاک نیز با افزایش η_{ratio} افزایش می‌یابد. همان‌طور که k افزایش می‌یابد، تأثیر افزایش η_{ratio} بر فاکتور استهلاک کاهش می‌یابد. همچنین کلیه نمودارها در $\eta_{ratio} = 1$ با یکدیگر تقاطع دارند.

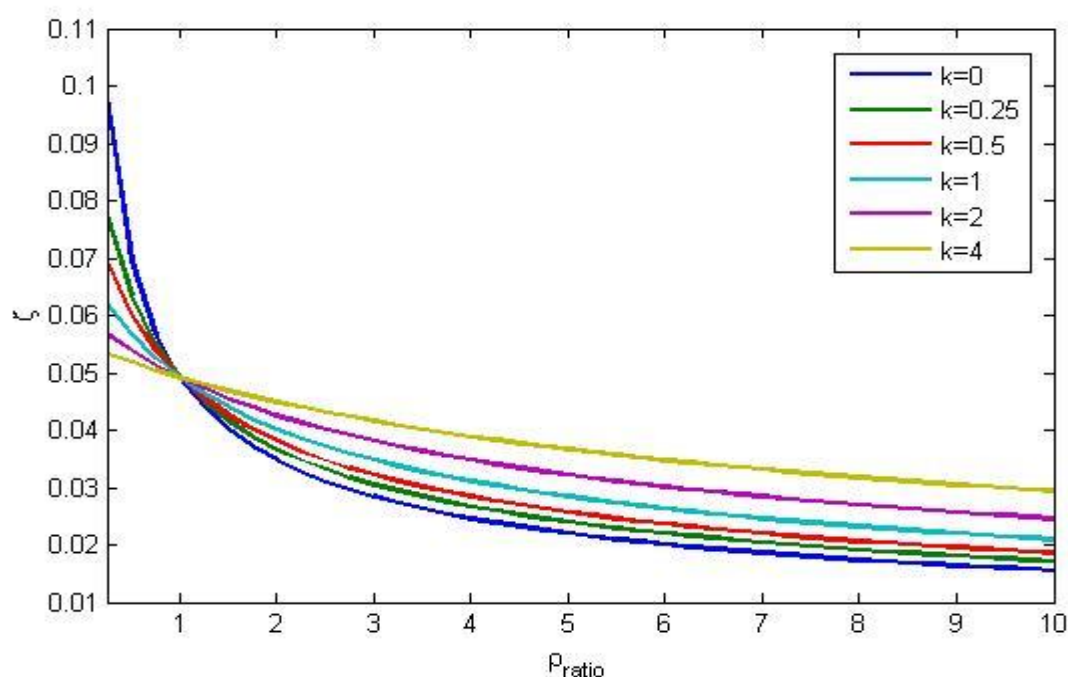


شکل (۷-۲) تغییرات فاکتور استهلاک اول تیر متغیر تابعی بر حسب نسبت مدول الاستیسیته (E_{ratio}) به ازای

$$\rho_{ratio} = 1, \eta_{ratio} = 1 \text{ و مقادیر مختلف توان } k$$

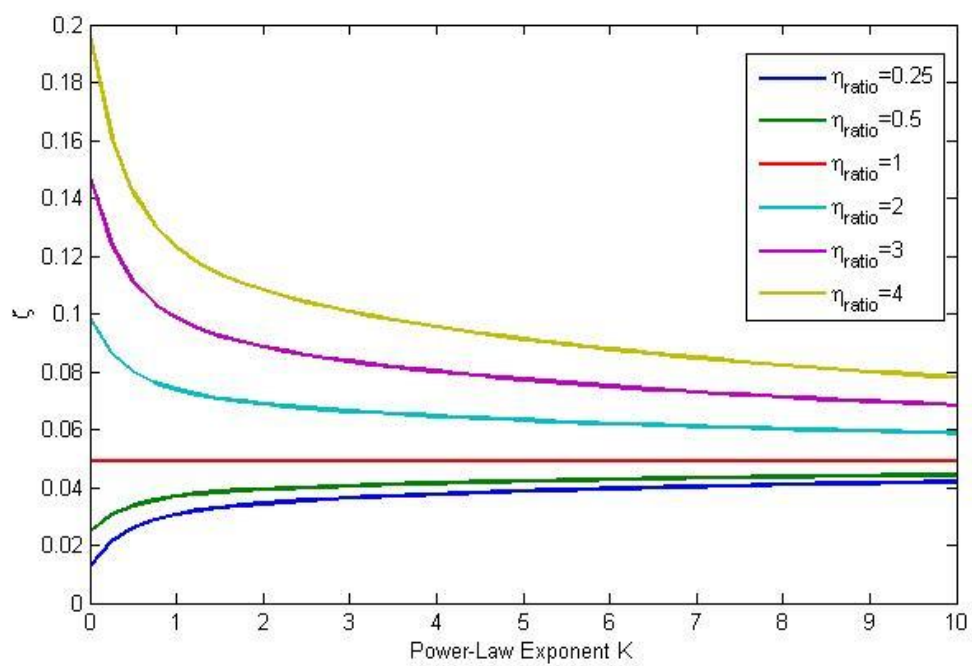
در شکل (۷-۲) تغییرات فاکتور استهلاک اول تیر متغیر تابعی را بر حسب نسبت مدول الاستیسیته (E_{ratio}) به ازای $\rho_{ratio} = 1, \eta_{ratio} = 1$ و مقادیر مختلف توان k نمایش می‌دهد. همان‌طور که پیداست همانند فرکانس طبیعی اول، فاکتور استهلاک نیز با افزایش E_{ratio} افزایش می‌یابد. همان‌طور که k افزایش می‌یابد، تأثیر افزایش E_{ratio} بر فاکتور استهلاک کاهش می‌یابد. همچنین کلیه نمودارها در $E_{ratio} = 1$ با یکدیگر تقاطع دارند.

در شکل (۸-۲) تغییرات فاکتور استهلاک اول تیر متغیر تابعی را بر حسب نسبت چگالی (ρ_{ratio}) به ازای $E_{ratio}=1$ ، $\eta_{ratio}=1$ و مقادیر مختلف توان k نمایش می‌دهد. فاکتور استهلاک نیز با افزایش ρ_{ratio} کاهش می‌یابد. همانطور که k افزایش می‌یابد، تأثیر η_{ratio} بر فاکتور استهلاک کاهش می‌یابد. همچنین کلیه نمودارها در $\rho_{ratio}=1$ با یکدیگر تقاطع دارند.

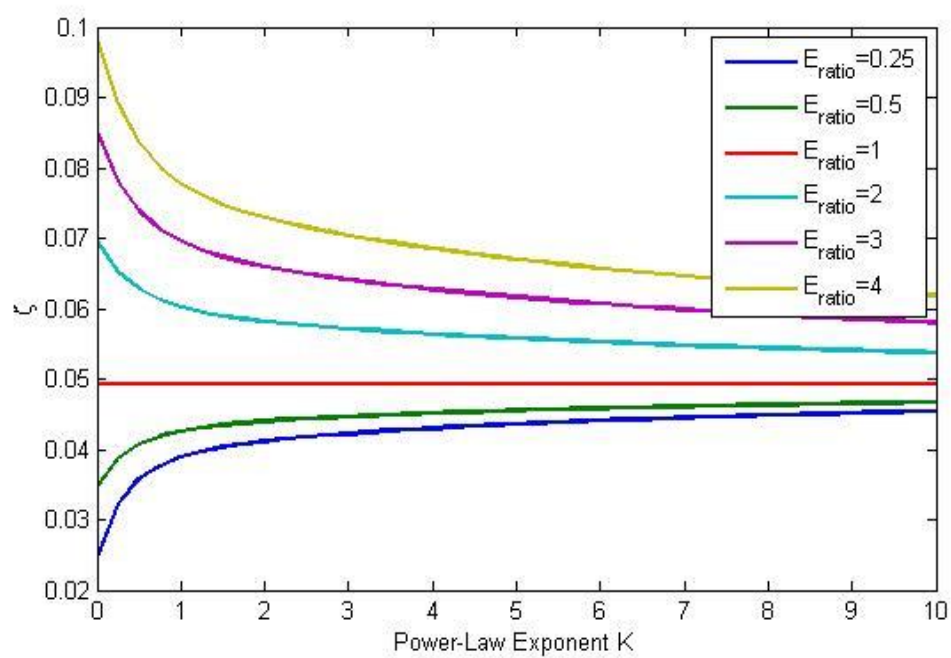


در شکل (۸-۲) تغییرات فاکتور استهلاک اول تیر متغیر تابعی بر حسب نسبت چگالی (ρ_{ratio}) به ازای $\eta_{ratio}=1$ ، $E_{ratio}=1$ و مقادیر مختلف توان k

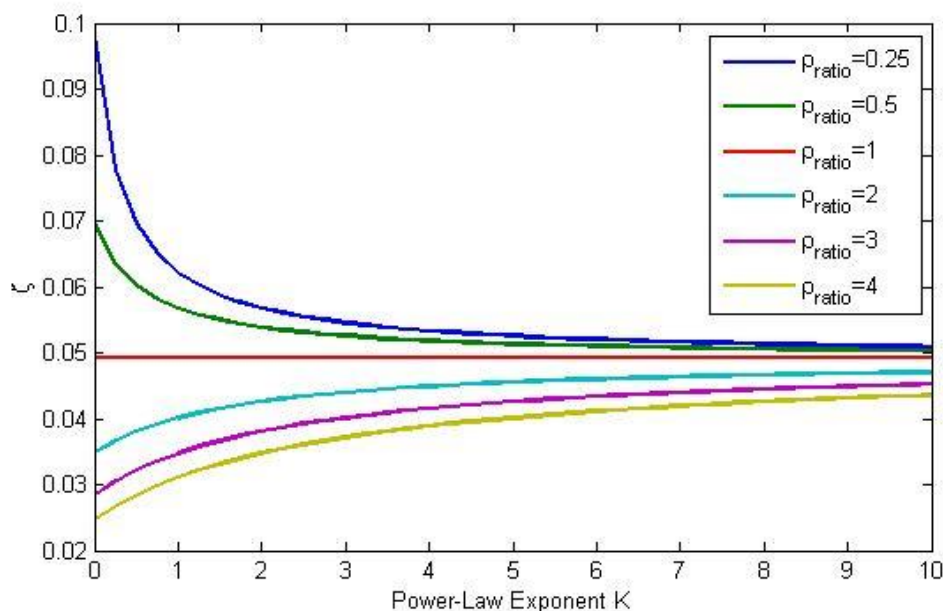
در شکل (۹-۲) نیز، فاکتور استهلاک اول تیر با افزایش k هنگامی که η_{ratio} کمتر از یک است، افزایش می‌یابد و هنگامی که η_{ratio} بیشتر از یک است، کاهش می‌یابد. در هر دو حالت واضح است که فاکتور استهلاک اول تیر با افزایش k به فاکتور استهلاک اول تیر همگن نزدیک می‌شود.



شکل (۹-۲) تغییرات فاکتور استهلاک اول تیر متغیر تابعی بر حسب توان k به ازای $\rho_{ratio}=1$ ، $E_{ratio}=1$ و مقادیر مختلف ضریب میرایی ترموالاستیک (η_{ratio})



شکل (۱۰-۲) تغییرات فاکتور استهلاک اول تیر متغیر تابعی بر حسب توان k به ازای $\rho_{ratio}=1$ ، $\eta_{ratio}=1$ و مقادیر مختلف مدول الاستیسیته (E_{ratio})

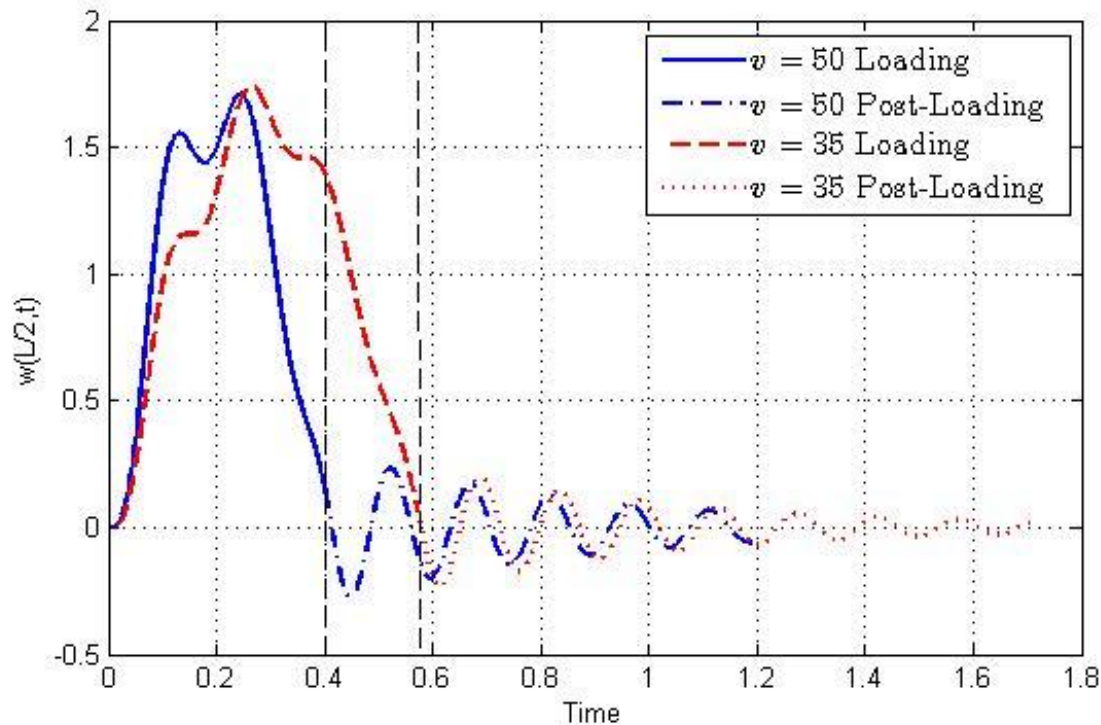


شکل (۱۱-۲) تغییرات فاکتور استهلاک اول تیر متغیر تابعی بر حسب توان k به ازای $E_{ratio}=1$ ، $\eta_{ratio}=1$ و مقادیر مختلف چگالی (ρ_{ratio})

در شکل (۱۰-۲) نیز، فاکتور استهلاک اول تیر با افزایش k هنگامی که E_{ratio} کمتر از یک است، افزایش می‌یابد و هنگامی که E_{ratio} بیشتر از یک است، کاهش می‌یابد.

اما در شکل (۱۱-۲) برخلاف نمودارهای قبلی، فاکتور استهلاک اول تیر با افزایش k هنگامی که ρ_{ratio} کمتر از یک است، کاهش می‌یابد و هنگامی که ρ_{ratio} بیشتر از یک است، افزایش می‌یابد. در این حالت نیز فاکتور استهلاک اول تیر با افزایش k به فاکتور استهلاک اول تیر همگن نزدیک می‌شود.

در آخر نیز در شکل (۱۲-۲) نمودار پاسخ تیر در نقطه‌ی $x = \frac{L}{2}$ بر حسب زمان را به ازای بار ۵۰ کیلو نیوتن و در سرعت‌های $v=35KN$ و $v=50KN$ در حین گذشتن بار از روی تیر و پس از گذشتن بار نمایش داده شده است:



شکل (۱۲-۲) نمودار پاسخ تیر در نقطه‌ی $x = \frac{L}{2}$ بر حسب زمان به ازای بار ۵۰ کیلو نیوتن و در سرعت‌های $v = 50KN$ و $v = 35KN$

شکل (۱۲-۲) به ازای ۳ شکل مود رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در سرعت $v = 35KN$ تیر تا زمان $t = 0.57$ ثانیه تحت ارتعاشات اجباری بوده و از آن زمان به بعد تحت ارتعاشات آزاد قرار گرفته است. در سرعت $v = 50KN$ نیز به همین ترتیب تا زمان $t = 0.4$ ثانیه تیر ارتعاشات اجباری داشته و پس از آن نیز به صورت آزاد ارتعاش می‌کند. همان‌طور که انتظار می‌رود تیر هنگامی که تحت ارتعاشات اجباری است به خوبی حالت چند فرکانسی بودن را به نمایش گذاشته است. پس از گذشتن بار از روی تیر نیز چنین انتظاری می‌رود اما به علت ترم $e^{+\zeta_k \omega_k t_f}$ در ضرایب C_k و S_k با افزایش k مقادیر ω_k و ζ_k افزایش می‌یابد که موجب افزایش ترم $e^{+\zeta_k \omega_k t_f}$ می‌شود که این افزایش در هر مرحله موجب می‌شود که ضرایب سینوس و کسینوس در معادله‌ی (۸۴-۲) در مرتبه‌ای متفاوت از مرحله‌ی قبل ظاهر شود که به همین دلیل چند فرکانسی بودن نمودار محسوس نمی‌باشد.

فصل سوم

ارتعاشات آزاد غیر خطی

۳-۱- مقدمه

در این فصل به بررسی ارتعاشات غیرخطی تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک پرداخته شده است. در ابتدا با در نظر گرفتن کرنش ون-کارمن و با استفاده از اصل همیلتون معادله‌ی حرکت غیرخطی استخراج شده است. سپس ارتعاشات آزاد تیر با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه^۱ مورد بررسی قرار گرفته و شکل مودها و فرکانس طبیعی تیر به دست آمده است. سپس نمودارهای پاسخ ارتعاشات آزاد بر حسب زمان و دامنه‌ی ارتعاش بر حسب زمان و فرکانس بر حسب دامنه استخراج گردیده است.

۳-۲- به دست آوردن معادله‌ی حرکت غیرخطی:

مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی u یک تیر اولر-برنولی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u_1 = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (۱-۳)$$

$$u_2 = 0 \quad (۲-۳)$$

$$u_3 = w(x, t) \quad (۳-۳)$$

که u_1 ، u_2 و u_3 جابه‌جایی در راستاهای x ، y و z را به ترتیب نشان می‌دهند و x نشان‌دهنده‌ی محور خنثی در راستای طول تیر است.

کرنش ون-کارمن نیز طبق رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 \quad (۴-۳)$$

با جایگذاری روابط مربوط به u_1 و u_3 در رابطه‌ی فوق، کرنش به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\varepsilon_x = -zw_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad (۵-۳)$$

^۱ The Multiple Scales Method

برای به دست آوردن معادله‌ی حرکت تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک از اصل همیلتون استفاده خواهیم کرد. پیش از آن به محاسبه‌ی انرژی جنبشی و پتانسیل و کار نیروهای غیرکنسرواتیو می‌پردازیم. طبق اصل همیلتون

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta U + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (۶-۳)$$

با در نظر گرفتن مدل اولر-برنولی و با صرف نظر کردن از اینرسی چرخشی، انرژی جنبشی (T) برای تیر FGV به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(z) w_{,t}^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L I_1 w_{,t}^2 dx \quad (۷-۳)$$

که در این رابطه

$$I_1 = \int_A \rho(z) dA \quad (۸-۳)$$

در نتیجه تغییرات انرژی جنبشی عبارت خواهد بود از:

$$\delta T = \int_0^L I_1 w_{,t} \delta w_{,t} dx \quad (۹-۳)$$

همانطور که در فصل ۲ اشاره شد به علت خاصیت ویسکوالاستیسیته‌ی تیر مورد بررسی برای محاسبه‌ی انرژی کرنشی تیر از σ_e یعنی ترم مربوط به تنش الاستیک استفاده می‌کنیم.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \sigma_e \varepsilon_x dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \int_A E(z) \left(-z w_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right)^2 dA dx \quad (۱۰-۳)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_0^L \int_A E(z) \varepsilon \delta \varepsilon dA dx \\
&= \int_0^L \int_A E(z) \left[-zw_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right] \left[-z \delta w_{,xx} \right. \\
&\quad \left. + w_{,x} \delta w_{,x} \right] dA dx
\end{aligned} \tag{۱۱-۳}$$

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_0^L \int_A E(z) \left(z^2 w_{,xx} \delta w_{,xx} - z w_{,x} w_{,xx} \delta w_{,x} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} z w_{,x}^2 \delta w_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^3 \delta w_{,x} \right) dA dx
\end{aligned} \tag{۱۲-۳}$$

که در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$(A_{11}, B_{11}, C_{11}) = \int_A E(z) (1, z, z^2) dA \tag{۱۳-۳}$$

کار نیروهای غیرکانسرواتو نیز از دو بخش، یکی مربوط به تنش ویسکوالاستیک و دیگری مربوط به بار متحرک عرضی می‌باشد که بار متحرک با استفاده از تابع دلتای دیراک معرفی می‌گردد. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\delta W_{nc} &= - \int_0^L Q \delta(x - vt) \delta w dx - \int_0^L \int_A E(z) \eta(z) \dot{\varepsilon} \delta \varepsilon dA dx \\
&= - \int_0^L Q \delta(x - vt) \delta w dx \\
&\quad - \int_0^L \int_A E(z) \eta(z) \left(-z w_{,xxt} + w_{,x} w_{,xt} \right) \left(-z \delta w_{,xx} \right. \\
&\quad \left. + w_{,x} \delta w_{,x} \right) dA dx
\end{aligned} \tag{۱۴-۳}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_{nc} = & - \int_0^L Q \delta(x - vt) \delta w \, dx \\
& - \int_0^L \int_A \eta(z) [-z^2 w_{,xxt} \delta w_{,xx} + z w_{,x} w_{,xt} \delta w_{,xx} \\
& + z w_{,xxt} w_{,x} \delta w_{,x} - w_{,x}^2 w_{,xt} \delta w_{,x}] dA \, dx
\end{aligned} \tag{۱۵-۳}$$

که در رابطه‌ی فوق:

$$(D_{11}, E_{11}, F_{11}) = \int_A E(z) \eta(z) (1, z, z^2) dA \tag{۱۶-۳}$$

با جایگذاری روابط (۹-۳) تا (۱۵-۳) در رابطه‌ی (۶-۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L I_1 w_{,t} \delta w_{,t} \, dx \, dt \\
& + \int_0^t \int_0^L \left(-C_{11} w_{,xx} \delta w_{,xx} + B_{11} w_{,x} w_{,xx} \delta w_{,x} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} B_{11} w_{,x}^2 \delta w_{,xx} - \frac{1}{2} A_{11} w_{,xx}^3 \delta w_{,x} \right) dx \, dt \\
& - \int_0^t \int_0^L Q \delta(x - vt) \delta w \, dx \\
& + \int_0^t \int_0^L [-F_{11} w_{,xxt} \delta w_{,xx} + E_{11} w_{,x} w_{,xt} \delta w_{,xx} \\
& + E_{11} w_{,xxt} w_{,x} \delta w_{,x} - D_{11} w_{,x}^2 w_{,xt} \delta w_{,x}] dx \, dt = 0
\end{aligned} \tag{۱۷-۳}$$

تک تک ترم‌های انتگرال فوق را به ترتیب محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L I_1 w_{,t} \delta w_{,t} \, dx \, dt \\
& = \int_0^L I_1 w_{,t} \delta w \Big|_0^t dt - \int_0^t \int_0^L I_1 w_{,tt} \delta w \, dx \, dt
\end{aligned} \tag{۱۸-۳}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L -C_{11} w_{,xx} \delta w_{,xx} dx dt \\
&= \int_0^t -C_{11} w_{,xx} \delta w_{,x} \Big|_0^L dt + \int_0^t C_{11} w_{,xxx} \delta w \Big|_0^L dt \\
&\quad - \int_0^t \int_0^L C_{11} w_{,xxxx} \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{19-3}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L B_{11} w_{,x} w_{,xx} \delta w_{,x} dx dt \\
&= \int_0^t B_{11} w_{,x} w_{,xx} \delta w \Big|_0^L dt \\
&\quad - \int_0^t \int_0^L B_{11} (w_{,xx}^2 + w_{,x} w_{,xxx}) \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{20-3}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L \frac{1}{2} B_{11} w_{,x}^2 \delta w_{,xx} dx dt \\
&= \int_0^t \frac{1}{2} B_{11} w_{,x}^2 \delta w_{,x} \Big|_0^L dt \\
&\quad - \int_0^t B_{11} w_{,x} w_{,xx} \delta w \Big|_0^L dt \\
&\quad + \int_0^t \int_0^L B_{11} (w_{,xx}^2 + w_{,x} w_{,xxx}) \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{21-3}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L -\frac{1}{2} A_{11} w_{,xx}^3 \delta w_{,x} dx dt \\
&= \int_0^t -\frac{1}{2} A_{11} w_{,x}^3 \delta w \Big|_0^L dt \\
&\quad + \int_0^t \int_0^L \frac{3}{2} A_{11} w_{,x}^2 w_{,xx} \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{22-3}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L -F_{11} w_{,xxt} \delta w_{,xx} dx dt \\
&= \int_0^t -F_{11} w_{,xxt} \delta w_{,x} \Big|_0^L dt + \int_0^t F_{11} w_{,xxxxt} \delta w \Big|_0^L \\
&\quad - \int_0^t \int_0^L F_{11} w_{,xxxxxt} \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{23-3}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L E_{11} w_{,x} w_{,xt} \delta w_{,xx} dx dt \\
&= \int_0^t E_{11} w_{,x} w_{,xt} \delta w_{,x} \Big|_0^L dt \\
&\quad - \int_0^t E_{11} (w_{,xx} w_{,xt} + w_{,x} w_{,xxt}) \delta w \Big|_0^L \\
&\quad + \int_0^t \int_0^L E_{11} (w_{,xxx} w_{,xt} + w_{,xx} w_{,xxt} + w_{,xx} w_{,xxt} \\
&\quad + w_{,x} w_{,xxxxt}) \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{24-3}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L E_{11} w_{,xxt} w_{,x} \delta w_{,x} dx dt \\
&= \int_0^t E_{11} w_{,xxt} w_{,x} \delta w \Big|_0^L dt \\
&\quad - \int_0^t \int_0^L E_{11} (w_{,xxt} w_{,xx} + w_{,xxxxt} w_{,x}) \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{25-3}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L -D_{11} w_{,x}^2 w_{,xt} \delta w_{,x} dx dt \\
&= \int_0^t -D_{11} w_{,x}^2 w_{,xt} \delta w \Big|_0^L dt \\
&\quad + \int_0^t \int_0^L D_{11} (w_{,xxt} w_{,x}^2 + 2w_{,xx} w_{,x} w_{,xt}) \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{26-3}$$

در نهایت به معادله‌ی حرکت غیرخطی زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned}
 I_1 w_{,tt} + C_{11} w_{,xxxx} + F_{11} w_{,xxxxt} - \frac{3}{2} A_{11} w_{,x}^2 w_{,xx} \\
 - D_{11} (w_{,xxt} w_{,x}^2 + 2 w_{,xx} w_{,x} w_{,xt}) \\
 - E_{11} (w_{,xxt} w_{,xx} + w_{,xxx} w_{,xt}) = Q \delta(x - vt)
 \end{aligned}
 \quad (27-3)$$

که معادله‌ی فوق در حالت همگن با معادله‌ی به دست آمده در مقاله‌ی ال وی و همکاران کاملاً مطابقت دارد [27].

۳-۳- تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی:

برای تحلیل ارتعاشات آزاد از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌کنیم. ایده‌ی اصلی استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه این است که از بسطی استفاده کنیم که به جای اینکه پاسخ، تابعی از یک متغیر باشد، تابعی از چندین متغیر یا مقیاس مستقل باشد. برتری این روش نسبت به روش‌های دیگر این است که برای تحلیل سیستم‌های دارای استهلاک بسیار مناسب می‌باشد. سپس متغیرهای مستقلی به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_n = \epsilon^n t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (28-3)$$

که ϵ در این رابطه پارامتر *Book keeping* می‌باشد.

به پیرو تعریف فوق، مشتق نسبت به زمان به بسطی تبدیل می‌شود که ترم‌های مشتق‌های پاره‌ای نسبت به T_n خواهند بود [36]. بنابراین

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \epsilon D_1 + \dots \quad (29-3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \dots \quad (30-3)$$

سپس پاسخ را به صورت بسط زیر در نظر می‌گیریم:

$$w_n(x, t, \epsilon) = w_{n0}(x, T_0, T_1) + \epsilon w_{n1}(x, T_0, T_1) + O(\epsilon^2) \quad (31-3)$$

لازم به ذکر است که تعداد مقیاس‌های زمانی مستقل مورد نیاز بستگی به مرتبه‌ای دارد که بسط طبق آن انجام شده است. اگر بسط تا $O(\epsilon^2)$ انجام شده باشد، متغیرهای T_0 و T_1 مورد نیاز است.

در این سیستم برای اینکه ترم میرایی و غیرخطی هر دو در شرط حل‌پذیری ظاهر شوند، فرض می‌کنیم:

$$A_{11} = \epsilon \widehat{A}_{11} \quad (32-3)$$

$$E_{11} = \epsilon \widehat{E}_{11} \quad (33-3)$$

$$F_{11} = \epsilon \widehat{F}_{11} \quad (34-3)$$

$$D_{11} = \epsilon \widehat{D}_{11} \quad (35-3)$$

با جایگذاری روابط (3-28) تا (3-35) در معادله‌ی حرکت و صرف‌نظر از علامت $\hat{\cdot}$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I_1(D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1)(w_{n0} + \epsilon w_{n1}) + C_{11}(w_{n0,xxxx} + \epsilon w_{n1,xxxx}) \\ + \epsilon \widehat{F}_{11}(D_0 + \epsilon D_1)(w_{n0,xxx} + \epsilon w_{n1,xxx}) \\ - \frac{3}{2} A_{11} \epsilon (w_{n0,x} + \epsilon w_{n1,x})^2 (w_{n0,xx} + \epsilon w_{n1,xx}) \\ - \epsilon \widehat{E}_{11}(w_{n0,xx} + \epsilon w_{n1,xx})(D_0 + \epsilon D_1)(w_{n0,xx} \\ + \epsilon w_{n1,xx}) \\ - \epsilon \widehat{E}_{11}(w_{n0,xxx} + \epsilon w_{n1,xxx})(D_0 + \epsilon D_1)(w_{n0,x} \\ + \epsilon w_{n1,x}) \\ - \epsilon D_{11}(D_0 + \epsilon D_1)(w_{n0,xx} \\ + \epsilon w_{n1,xx})(w_{n0,x} + \epsilon w_{n1,x})^2 \\ - 2\epsilon D_{11}(w_{n0,x} + \epsilon w_{n1,x})(w_{n0,xx} + \epsilon w_{n1,xx})(D_0 \\ + \epsilon D_1)(w_{n0,x} + \epsilon w_{n1,x}) = 0 \end{aligned} \quad (36-3)$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب مختلف ϵ و پس از مرتب‌سازی خواهیم داشت:

$$O(\epsilon^0): I_1(D_0^2 w_{n0}) + C_{11}w_{n0,xxxx} = 0 \quad (37-3)$$

$$O(\epsilon^1): I_1 D_0^2 w_{n1} + C_{11}w_{n1,xxxx} \quad (38-3)$$

$$\begin{aligned} &= -2I_1 D_0 D_1 w_{n0} - F_{11} D_0 w_{n0,xxxx} \\ &+ \frac{3}{2} A_{11} (w_{n0,x})^2 w_{n0,xx} + E_{11} w_{n0,xx} D_0 w_{n0,xx} \\ &+ E_{11} w_{n0,xxx} D_0 w_{n0,x} + D_{11} D_0 w_{n0,xx} (w_{n0,x})^2 \\ &+ 2D_{11} w_{n0,x} w_{n0,xx} D_0 w_{n0,x} \end{aligned}$$

معادله‌ی (۳۷-۳) یک معادله مشتق جزئی خطی می‌باشد که با استفاده از روش جدایش متغیرها قابل حل می‌باشد.

پاسخ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$w_{n0}(x, T_0, T_1) = [A_n(T_1)e^{i\omega_{n0}T_0} + \overline{A_n}(T_1)e^{-i\omega_{n0}T_0}]Y_n(x) \quad (39-3)$$

که در رابطه‌ی فوق، ω_{n0} و $Y_n(x)$ به ترتیب فرکانس طبیعی خطی بدون استهلاک و شکل مود خطی می‌باشد.

همچنین $A_n(T_1)$ تابع مختلط نامعلوم و $\overline{A_n}(T_1)$ مزدوج مختلط آن می‌باشد.

با جایگذاری رابطه‌ی (۳۹-۳) در رابطه‌ی (۳۷-۳) به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$-\omega_{n0}^2 I_1 Y_n + C_{11} Y_n'''' = 0 \quad (40-3)$$

با در نظر گرفتن پاسخ معادله‌ی (۴۰-۳) به صورت

$$Y_n(x) = B_n e^{\beta_n x} \quad (41-3)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{C_{11}}{I_1} \beta_n^4 - \omega_{n0}^2 = 0 \quad (42-3)$$

$$\beta_n = \pm \sqrt[4]{\frac{I_1}{C_{11}} \omega_{n0}^2}, \quad \pm i \sqrt[4]{\frac{I_1}{C_{11}} \omega_{n0}^2} \quad (43-3)$$

در نتیجه

$$Y_n(x) = B_1 \cosh \beta_1 x + B_2 \sinh \beta_2 x + B_3 \cos \beta_3 x + B_4 \sin \beta_4 x \quad (44-3)$$

بر اساس شرایط مرزی تیر با دو تکیه‌گاه ساده خواهیم داشت:

$$w_{n0}(0, t) = w_{n0}(l, t) = w_{n0,xx}(0, t) = w_{n0,xx}(l, t) = 0 \quad (45-3)$$

که در نتیجه

$$Y_n(0, t) = Y_n(l, t) = Y_n''(0, t) = Y_n''(l, t) = 0 \quad (46-3)$$

با اعمال شرایط مرزی فوق خواهیم داشت:

$$Y_n(0, t) = 0 \rightarrow B_1 + B_3 = 0 \quad (47-3)$$

$$Y_n''(0, t) = 0 \rightarrow B_1 - B_3 = 0 \quad (48-3)$$

$$B_1 = B_3 = 0 \quad (49-3)$$

$$Y_n(l, t) = 0 \rightarrow B_2 \sinh \beta_2 l + B_4 \sin \beta_4 l = 0 \quad (50-3)$$

$$Y_n(l, t) = 0 \rightarrow B_2 \sinh \beta_2 l + B_4 \sin \beta_4 l = 0 \quad (51-3)$$

با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب خواهیم داشت:

$$\sinh \beta_2 l \sin \beta_4 l = 0 \rightarrow \sin \beta_4 l = 0 \rightarrow \beta_4 = \frac{n\pi}{l} , \quad (52-3)$$

$$n = 1, 2, \dots, \infty$$

که در نتیجه فرکانس طبیعی برابر خواهد بود با

$$\omega_{n0} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{C_{11}}{I_1}} , \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (53-3)$$

و شکل مود خطی برابر خواهد بود با

$$Y_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (54-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (3-39) در رابطه‌ی (3-38) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & I_1 D_0^2 w_{n1} + C_{11} w_{n1,xxxx} \\ &= -2I_1 i\omega_{n0} D_1 (A_n(T_1) e^{i\omega_{n0} T_0}) Y_n - F_{11} i\omega_{n0} A_n(T_1) e^{i\omega_{n0} T_0} Y_n'''' \\ &+ \frac{3}{2} A_{11} (A_n(T_1)^2 e^{2i\omega_{n0} T_0} + A_n(T_1) \overline{A_n}(T_1)) Y_n'^2 A_n(T_1) e^{i\omega_{n0} T_0} Y_n'' \\ &+ E_{11} A_n(T_1) e^{i\omega_{n0} T_0} Y_n'' (i\omega_{n0} A_n(T_1) e^{i\omega_{n0} T_0} Y_n'') \\ &+ E_{11} A_n(T_1) e^{i\omega_{n0} T_0} Y_n''' (i\omega_{n0} A_n(T_1) e^{i\omega_{n0} T_0} Y_n') \\ &+ D_{11} (i\omega_{n0} A_n(T_1) e^{i\omega_{n0} T_0} Y_n'') (A_n(T_1)^2 e^{2i\omega_{n0} T_0} \\ &+ A_n(T_1) \overline{A_n}(T_1)) Y_n'^2 \\ &+ 2D_{11} A_n(T_1) e^{i\omega_{n0} T_0} Y_n' A_n(T_1) e^{i\omega_{n0} T_0} Y_n'' (i\omega_{n0} A_n(T_1) e^{i\omega_{n0} T_0} Y_n') \\ &+ c.c. \end{aligned} \quad (55-3)$$

که $C.C.$ به معنای مزدوج مختلط می‌باشد.

با برابر صفر قرار دادن ترم‌های سکولار¹ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & -2I_1 i\omega_{n0} D_1 A_n(T_1) Y_n - F_{11} i\omega_{n0} A_n(T_1) Y_n'''' \\ &+ \frac{3}{2} A_{11} A_n(T_1)^2 \overline{A_n}(T_1) Y_n'^2 Y_n'' \\ &+ D_{11} i\omega_{n0} A_n(T_1)^2 \overline{A_n}(T_1) Y_n'^2 Y_n'' = 0 \end{aligned} \quad (56-3)$$

معادله‌ی فوق را در Y_m ضرب داخلی کرده و با انتگرال‌گیری از $\cdot$ تا L خواهیم داشت

¹ Secular Terms

$$iD_1A_n(T_1) + \mu_n A_n(T_1) + \chi_n A_n(T_1)^2 \overline{A_n}(T_1) = 0 \quad (57-3)$$

که در آن ضرایب χ_n و μ_n عبارتند از:

$$\mu_n = \frac{F_{11} i \omega_{n0} \int_0^l Y_n'''' Y_m dx}{2I_1 \omega_{n0} \int_0^l Y_n Y_m dx} \quad (58-3)$$

$$\chi_n = -\frac{\frac{3}{2} A_{11} \int_0^l Y'^2 Y_n'' Y_m dx}{2I_1 \omega_{n0} \int_0^l Y_n Y_m dx} - \frac{D_{11} i \omega_{n0} \int_0^l Y'^2 Y_n'' Y_m dx}{2I_1 \omega_{n0} \int_0^l Y_n Y_m dx} \quad (59-3)$$

برای حل معادله‌ی (57-3) بهتر است که $A_n(T_1)$ را به فرم قطبی در نظر می‌گیریم:

$$A_n(T_1) = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \quad (60-3)$$

که $a_n(T_1)$ و $\beta_n(T_1)$ توابع حقیقی از T_1 بوده و به ترتیب دامنه و فاز پاسخ می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌ی

(60-3) در رابطه‌ی (57-3) و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & i \left[\frac{1}{2} a_n'(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} + \frac{1}{2} a_n(T_1) i \beta_n'(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \right] \\ & + \mu_n \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \\ & + \chi_n \frac{1}{4} a_n^2(T_1) e^{2i\beta_n(T_1)} \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{-i\beta_n(T_1)} = 0 \end{aligned} \quad (61-3)$$

$$Im = 0 \rightarrow a_n'(T_1) + \frac{1}{4} Im(\chi_n) a^3 = 0 \rightarrow$$

$$a_n(T_1) = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2} Im(\chi_n) T_1 + C}} \quad (62-3)$$

$$Re = 0 \rightarrow -\beta_n'(T_1)a_n(T_1) + a_n(T_1)Re(\mu_n) + \frac{1}{4}a_n^3(T_1)Re(\chi_n) = 0 \quad (۶۳-۳)$$

$$\beta_n'(T_1) = Re(\mu_n) + \frac{1}{4}a_n^2(T_1)Re(\chi_n) \quad (۶۴-۳)$$

$$\beta_n(T_1) = \left[Re(\mu_n) + \frac{1}{4}a_n^2(T_1)Re(\chi_n) \right] T_1 + \beta_0 \quad (۶۵-۳)$$

که C و β_0 با اعمال شرایط اولیه به دست می آیند.

شرایط اولیه به صورت جابجایی اولیه ی کوچک و مخالف صفر و سرعت اولیه ی صفر در نظر گرفته می شود. بنابراین:

$$\begin{cases} w_n\left(\frac{L}{2}, 0\right) = W_0 \\ w_{n,t}\left(\frac{L}{2}, 0\right) = 0 \end{cases} \quad (۶۳-۳)$$

با اعمال شرایط اولیه و با در نظر گرفتن $W_0 = 2$ مقادیر C و β_0 عبارت خواهد بود از:

$$\begin{cases} C = 0.5016 \\ \beta_0 = 0 \end{cases} \quad (۶۴-۳)$$

با به دست آوردن $a_n(T_1)$ و $\beta_n(T_1)$ و قرار دادن در رابطه ی مربوط به $A_n(T_1)$ و جایگذاری آن در رابطه ی (۳۱-۳) در نهایت پاسخ به شکل زیر به دست خواهد آمد:

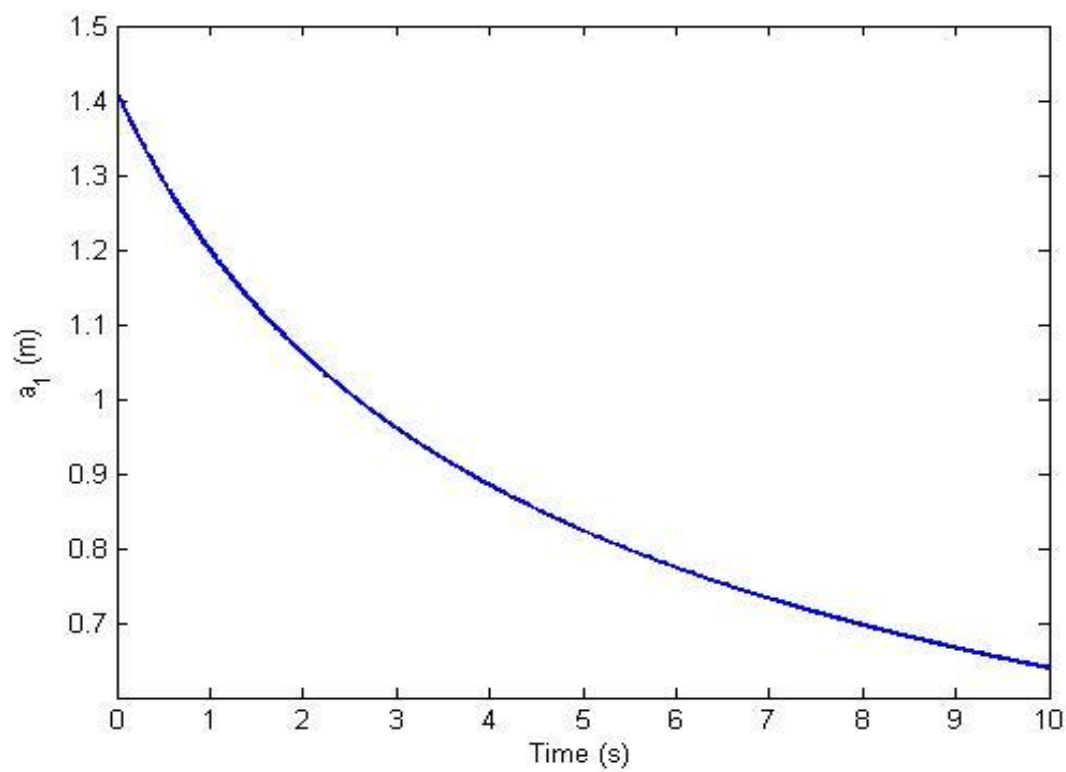
$$\begin{aligned}
w_n(x, t) &= w_{n0}(x, T_0, T_1) + \epsilon w_{n1}(x, T_0, T_1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n(T_1) \cos \left[\omega_{n0} T_0 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[Re(\mu_n) + \frac{1}{4} a_n^2(T_1) Re(\chi_n) \right] T_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta_0 \right] \right\} \sin \frac{n\pi x}{l} + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{۶۵-۳}$$

و همچنین فرکانس طبیعی عبارت خواهد بود از:

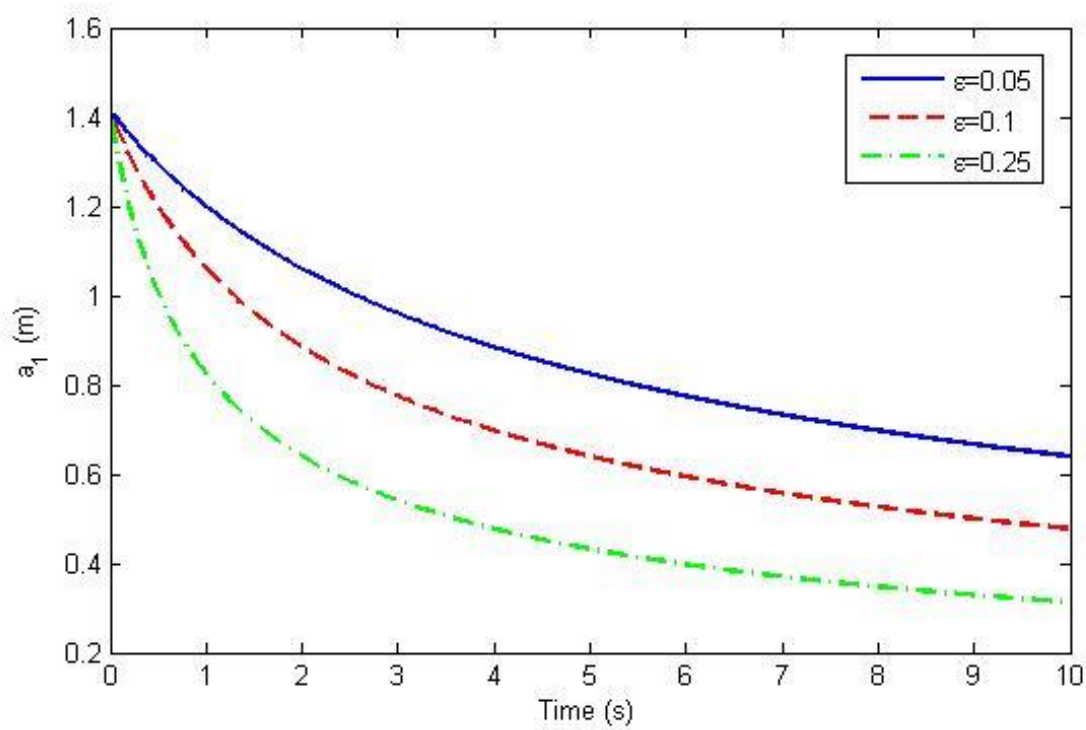
$$\omega_n = \omega_{n0} + \left[Re(\mu_n) + \frac{1}{4} a_n^2(T_1) Re(\chi_n) \right] \epsilon + O(\epsilon^2) \tag{۶۶-۳}$$

۳-۴ مسأله‌ی نمونه و نتایج آن

در این بخش طبق مشخصات هندسی و فیزیکی اشاره شده در جدول (۱-۲) و با فرض $\epsilon = 0.05$ پاسخ ارتعاشات آزاد تیر نسبت به زمان و دامنه ارتعاشات مود اول بر حسب زمان رسم شده است.

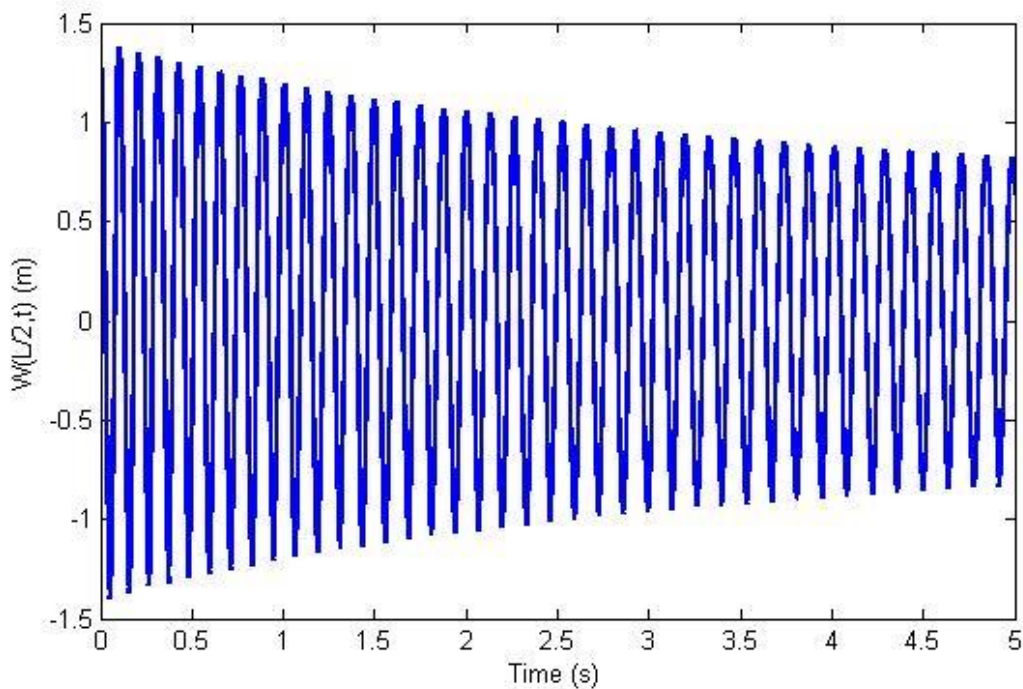


شکل (۱-۳) نمودار تغییرات دامنه‌ی ارتعاشات مود اول بر حسب زمان برای $\epsilon = 0.05$ و $W_0 = 2$



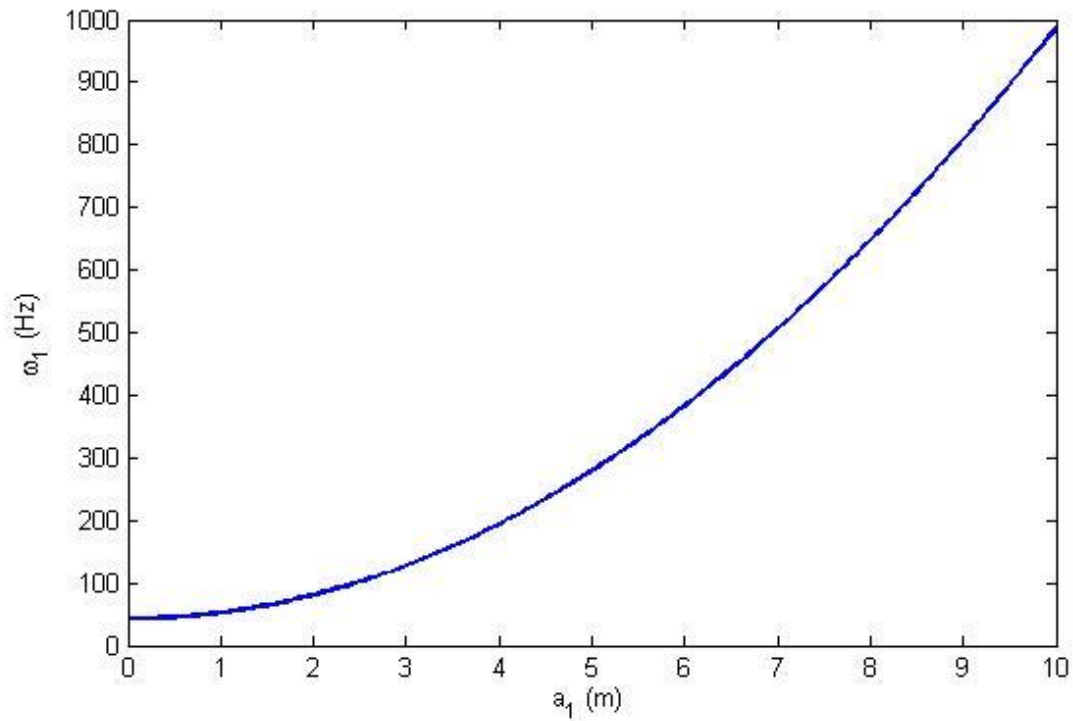
شکل (۲-۳) نمودار تغییرات دامنه‌ی ارتعاشات مود اول بر حسب زمان بر اساس مقادیر مختلف ϵ

در شکل (۱-۳) همان‌طور که مشاهده می‌شود دامنه‌ی ارتعاشات مود اول بر حسب زمان رسم شده است که با توجه به رابطه‌ی (۵۹-۳) کاملاً طبیعی است که با افزایش زمان کاهش می‌یابد؛ شکل (۲-۳) نیز تغییرات دامنه‌ی ارتعاشات مود اول بر حسب زمان را نشان می‌دهد که با افزایش مقادیر ϵ کاهش دامنه سریع‌تر و بیشتر می‌باشد.



شکل (۳-۳) نمودار پاسخ تیر در نقطه‌ی $x = \frac{L}{2}$ بر حسب زمان برای $\epsilon = 0.05$ و $W_0 = 2$

و در شکل (۳-۳) نیز نمودار پاسخ تیر در نقطه‌ی $x = \frac{L}{2}$ بر حسب زمان برای $\epsilon = 0.05$ و $W_0 = 2$ به ازای یک مود رسم شده است که به علت میرایی ایجاد شده بر اثر خاصیت ویسکوالاستیک تیر با افزایش زمان نمودار میرا می‌شود.



شکل (۳-۴) نمودار فرکانس تیر بر حسب دامنهی ارتعاشات مود اول

در شکل (۳-۴) نیز همان‌طور که از رابطه‌ی (۳-۶۶) مشخص است در ارتعاشات غیرخطی فرکانس و دامنه کاملاً به یکدیگر وابسته می‌باشند و با افزایش دامنه، فرکانس نیز افزایش می‌یابد.

فصل چهارم

ارتعاشات غیرخطی اجباری

۴-۱- مقدمه

در این بخش به بررسی ارتعاشات غیرخطی اجباری تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک پرداخته می‌شود. در این تحقیق فرض می‌شود که دامنه‌ی تحریک کوچک باشد. در این فصل با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه معادله‌ی پاسخ فرکانسی به دست آمده است. و در نهایت تأثیر پارامترهای متغیر تابعی بر پاسخ فرکانسی در قالب نمودار نمایش داده شده است.

۴-۲- حل تحلیلی

معادله‌ی حرکت غیرخطی که در فصل پیشین به دست آمد عبارت است از:

$$\begin{aligned} I_1 w_{,tt} + C_{11} w_{,xxxx} + F_{11} w_{,xxxxt} - \frac{3}{2} A_{11} w_{,x}^2 w_{,xx} \\ - D_{11} (w_{,xxt} w_{,x}^2 + 2 w_{,xx} w_{,x} w_{,xt}) \\ - E_{11} (w_{,xxt} w_{,xx} + w_{,xxx} w_{,xt}) = Q \delta(x - vt) \end{aligned} \quad (۴-۱)$$

برای به دست آوردن پاسخ معادله‌ی فوق از روش بسط توابع ویژه استفاده می‌شود. یعنی پاسخ را به صورت بسطی شامل حاصلضرب توابع ویژه در تابع زمان در نظر می‌گیرند.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) u_n(t) \quad (۴-۲)$$

که در رابطه‌ی فوق، $W_n(x)$ شکل مود خطی به دست آمده در تحلیل ارتعاشات آزاد می‌باشد که برای تیر با تکیه‌گاه ساده برابر با $\sin(\frac{n\pi x}{l})$ و $u_n(t)$ مختصات مودال می‌باشد. با جایگذاری بسط فوق در معادله‌ی (۴-۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{u}_n W_n + \frac{C_{11}}{I_1} W_n'''' u_n + \frac{F_{11}}{I_1} W_n'''' \dot{u}_n \right) - \frac{3}{2} \frac{A_{11}}{I_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_n'^2 u_n^2 W_m'' \dot{u}_m \\
& - \frac{E_{11}}{I_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_n'' u_n W_m'' \dot{u}_m - \frac{E_{11}}{I_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_n''' u_n W_m' \dot{u}_m \\
& - \frac{D_{11}}{I_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_n'^2 u_n^2 W_m'' \dot{u}_m \\
& - 2 \frac{D_{11}}{I_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} W_n' u_n W_m'' u_m W_k' \dot{u}_k = \frac{Q}{I_1} \delta(x - vt)
\end{aligned} \tag{۳-۴}$$

برای جداسازی معادله‌ی زمانی و مکانی، رابطه‌ی فوق را در W_n ضرب داخلی کرده و با انتگرال‌گیری از 0 تا L خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
& \ddot{u}_n + M_1 u_n + M_2 \dot{u}_n - \frac{3}{2} M_3 u_n^3 - M_4 \dot{u}_n u_n - M_5 \dot{u}_n u_n \\
& - M_6 u_n^2 \dot{u}_n - 2M_7 u_n^2 \dot{u}_n = F(t)
\end{aligned} \tag{۴-۴}$$

بدین ترتیب معادله‌ی زمانی به دست می‌آید که در معادله‌ی فوق ضرایب M_1 تا M_7 به ترتیب عبارتند از:

$$M_1 = \frac{C_{11} \int_0^l W_n'''' W_n dx}{I_1 \int_0^l W_n W_n dx} \tag{۵-۴}$$

$$M_2 = \frac{F_{11} \int_0^l W_n'''' W_n dx}{I_1 \int_0^l W_n W_n dx} \tag{۶-۴}$$

$$M_3 = \frac{A_{11} \int_0^l W_n'^2 W_n'' W_n dx}{I_1 \int_0^l W_n W_n dx} \tag{۷-۴}$$

$$M_4 = \frac{E_{11} \int_0^l W_n'' W_n'' W_n dx}{I_1 \int_0^l W_n W_n dx} \tag{۸-۴}$$

$$M_5 = \frac{E_{11} \int_0^l W_n''' W_n' W_n dx}{I_1 \int_0^l W_n W_n dx} \quad (۹-۴)$$

$$M_6 = \frac{D_{11} \int_0^l W_n'' W_n'^2 W_n dx}{I_1 \int_0^l W_n W_n dx} \quad (۱۰-۴)$$

$$M_7 = \frac{D_{11} \int_0^l W_n' W_n'' W_n' W_n dx}{I_1 \int_0^l W_n W_n dx} \quad (۱۱-۴)$$

$$F(t) = \frac{\int_0^l Q \delta(x - vt) W_n dx}{I_1 \int_0^l W_n W_n dx} = \frac{2Q}{I_1 l} \sin \frac{n\pi vt}{l} = F_0 \sin \Omega t \quad (۱۲-۴)$$

در رابطه‌ی فوق $M_1 = \omega_n^2$ می‌باشد که ω_n فرکانس طبیعی خطّی بدون استهلاک تیر می‌باشد.

سپس پاسخ را به صورت بسط زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_n(t, \epsilon) = u_{n0}(T_0, T_1) + \epsilon u_{n1}(T_0, T_1) + O(\epsilon^2) \quad (۱۳-۴)$$

در این سیستم برای اینکه ترم میرایی و غیرخطّی هر دو در شرط حل‌پذیری ظاهر شوند، فرض می‌کنیم:

$$M_2 = \epsilon \widehat{M}_2 \quad (۱۴-۴)$$

$$M_3 = \epsilon \widehat{M}_3 \quad (۱۵-۴)$$

$$M_4 = \epsilon \widehat{M}_4 \quad (۱۶-۴)$$

$$M_5 = \epsilon \widehat{M}_5 \quad (۱۷-۴)$$

$$M_6 = \epsilon \widehat{M}_6 \quad (۱۸-۴)$$

$$M_7 = \epsilon \widehat{M}_7 \quad (۱۹-۴)$$

$$F_0 = \epsilon \widehat{F_0} \quad (20-4)$$

با جایگذاری روابط (۱۳-۴) تا (۲۰-۴) در معادله‌ی حرکت و صرف‌نظر از علامت $\hat{}$ و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & (D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1)(u_{n0} + \epsilon u_{n1}) + M_1(u_{n0} + \epsilon u_{n1}) \\ & + \epsilon \widehat{M_2}(D_0 + \epsilon D_1)(u_{n0} + \epsilon u_{n1}) \\ & - \frac{3}{2} M_3 \epsilon (u_{n0} + \epsilon u_{n1})^3 - \epsilon (\widehat{M_4} \\ & + \widehat{M_5})(u_{n0} + \epsilon u_{n1})(D_0 + \epsilon D_1)(u_{n0} + \epsilon u_{n1}) \\ & - \epsilon (M_6 \\ & + 2M_7)(u_{n0} + \epsilon u_{n1})^2 (D_0 + \epsilon D_1)(u_{n0} + \epsilon u_{n1}) \\ & = \epsilon F_0 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (21-4)$$

۱-۲-۴ تحلیل رزونانس اولیه^۱

در این حالت عموماً به جای استفاده از فرکانس تحریک Ω به عنوان پارامتر مورد بررسی، پارامتری به شکل σ^2 را تعریف می‌کنند و از آن به عنوان نشان‌دهنده‌ی نزدیکی ω_n به Ω بهره می‌گیرند. به عبارتی

$$\Omega = \omega_n + \epsilon \sigma \quad (22-4)$$

در نتیجه:

$$\Omega t = \omega_n t + \epsilon \sigma t = \omega_n T_0 + \sigma T_1 \quad (23-4)$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب مختلف ϵ و پس از مرتب‌سازی خواهیم داشت:

$$O(\epsilon^0): \quad D_0^2 u_{n0} + \omega_n^2 u_{n0} = 0 \quad (24-4)$$

¹ Primary Resonance

² Detuning Parameter

$$O(\epsilon^1): \quad D_0^2 u_{n1} + \omega_n^2 u_{n1} \quad (25-4)$$

$$\begin{aligned} &= -2D_0 D_1 u_{n0} + M_2 D_0 u_{n0} + \frac{3}{2} M_3 u_{n0}^3 \\ &+ (M_4 + M_5) u_{n0} D_0 u_{n0} \\ &+ (M_6 + 2M_7) u_{n0}^2 D_0 u_{n0} + F_0 \sin \Omega t \end{aligned}$$

پاسخ معادله‌ی (۲۴-۴) را به فرم زیر در نظر می‌گیرند:

$$u_{n0} = A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} + \overline{A_n}(T_1) e^{-i\omega_n T_0} \quad (26-4)$$

که $A_n(T_1)$ تابع مختلط نامعلوم و $\overline{A_n}(T_1)$ مزدوج مختلط آن می‌باشد. با جایگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۲۵-۴)

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{n1} + \omega_n^2 u_{n1} &= -2i\omega_n D_1 (A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0}) \\ &- M_2 i\omega_n A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} \\ &+ \frac{3}{2} M_3 [A_n(T_1)^3 e^{3i\omega_n T_0} \\ &+ 3A_n(T_1)^2 \overline{A_n}(T_1) e^{i\omega_n T_0}] \\ &+ (M_4 + M_5) i\omega_n A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} \\ &+ (M_6 + 2M_7) [A_n(T_1)^2 e^{2i\omega_n T_0} \\ &+ A_n(T_1) \overline{A_n}(T_1)] i\omega_n A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} \\ &+ F_0 \left(-\frac{i}{2} e^{i(\omega_n T_0 + \sigma T_1)}\right) + c.c. \end{aligned} \quad (27-4)$$

با برابر صفر قرار دادن ترم‌های سکولار خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
& -2i\omega_n D_1(A_n(T_1)) - M_2 i\omega_n A_n(T_1) + \frac{9}{2} M_3 A_n(T_1)^2 \overline{A_n}(T_1) \\
& + (M_6 + 2M_7) i\omega_n A_n(T_1)^2 \overline{A_n}(T_1) - F_0 \frac{i}{2} e^{i\sigma T_1} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{۲۸-۴}$$

برای حل معادله‌ی (۲۸-۴) بهتر است که $A_n(T_1)$ را به فرم قطبی در نظر می‌گیریم:

$$A_n(T_1) = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \tag{۲۹-۴}$$

که $a_n(T_1)$ و $\beta_n(T_1)$ توابع حقیقی از T_1 و به ترتیب دامنه و فاز پاسخ می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌ی (۲۹-۴) در رابطه‌ی (۲۸-۴) و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
& -2i\omega_n \left[\frac{1}{2} a_n'(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} + \frac{1}{2} a_n(T_1) i\beta_n'(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \right] \\
& - M_2 i\omega_n \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\beta_n(T_1)} \\
& + \frac{9}{2} M_3 \frac{1}{4} a_n(T_1)^2 e^{2i\beta_n(T_1)} \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{-i\beta_n(T_1)} \\
& + (M_6 + 2M_7) i\omega_n \frac{1}{4} a_n^2(T_1) e^{2i\beta_n(T_1)} \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{-i\beta_n(T_1)} \\
& - F_0 \frac{i}{2} e^{i(\sigma T_1)} = 0
\end{aligned} \tag{۳۰-۴}$$

$$\begin{aligned}
Im = 0 \rightarrow & -\omega_n a_n'(T_1) - \frac{1}{2} M_2 \omega_n a_n(T_1) \\
& + \frac{(M_6 + 2M_7)}{4} a_n^3(T_1) \omega_n - \frac{F_0}{2} \cos(\sigma T_1 - \beta)
\end{aligned} \tag{۳۱-۴}$$

$$\begin{aligned}
a_n'(T_1) = & -\frac{1}{2} M_2 a_n(T_1) + \frac{(M_6 + 2M_7)}{4} a_n(T_1)^3 \\
& - \frac{F_0}{2\omega_n} \cos(\sigma T_1 - \beta)
\end{aligned} \tag{۳۲-۴}$$

$$Re = 0 \rightarrow a_n(T_1)\beta_n'(T_1) + \frac{9}{16}M_3a_n(T_1)^3 + \frac{F_0}{2}\sin(\sigma T_1 - \beta) = 0 \quad (33-4)$$

$$a_n(T_1)\omega_n\beta_n'(T_1) = -\frac{9}{16}M_3\frac{a_n(T_1)^3}{\omega_n} - \frac{F_0}{2\omega_n}\sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (34-4)$$

از آنجایی که T_1 در عبارات فوق به صورت مستقیم ظاهر شده است در این حالت به اصطلاح سیستم خودگردان^۱ بوده و باید در ابتدا با حذف کردن T_1 از این امر جلوگیری کنیم. لذا با تعریف

$$\sigma T_1 - \beta = \gamma \quad (35-4)$$

با مشتق‌گیری نسبت به T_1 خواهیم داشت:

$$\beta' = \sigma - \gamma' \quad (36-4)$$

روابط (۳۵-۴) و (۳۶-۴) را در رابطه‌ی (۳۲-۴) و (۳۴-۴) جایگذاری می‌کنیم

$$a_n'(T_1) = -\frac{1}{2}M_2a_n(T_1) + \frac{(M_6 + 2M_7)}{4}a_n(T_1)^3 - \frac{F_0}{2\omega_n}\cos\gamma \quad (37-4)$$

$$a_n(T_1)\gamma' = a_n(T_1)\sigma + \frac{9}{16}M_3\frac{a_n(T_1)^3}{\omega_n} + \frac{F_0}{2\omega_n}\sin\gamma \quad (38-4)$$

^۱ Autonomous

۴-۲-۲ حل حالت دائم^۱

پاسخ حالت دائم زمانی رخ می‌دهد که $a' = \gamma' = 0$. این شرایط متناظر با نقاط منفرد^۲ معادله‌ی (۴-).

(۳۷) و (۳۸-۴) می‌باشد. لذا با اعمال شرط فوق و جدا کردن ترم‌های $\sin \gamma$ و $\cos \gamma$ ، به توان ۲ رساندن طرفین و جمع کردن دو معادله خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{F_0^2}{4\omega_n^2} = & \left[\left(-\frac{1}{2}M_2 + \frac{(M_6 + 2M_7)}{4}a_n(T_1)^2 \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(-a_n(T_1)\sigma - \frac{9}{16}M_3 \frac{a_n(T_1)^2}{\omega_n} \right) \right] a_n(T_1)^2 \end{aligned} \quad (۳۹-۴)$$

این معادله، معادله‌ی پاسخ فرکانسی بوده و در واقع رابطه‌ی مستقیمی بین دامنه‌ی پاسخ a_n به عنوان تابعی از پارامتر تنظیم σ و دامنه‌ی تحریک F_0 ایجاد می‌کند. در نتیجه

$$\begin{aligned} \sigma = \pm & \left[\frac{F_0^2}{4\omega_n^2 a_n(T_1)^2} - \left(-\frac{1}{2}M_2 + \frac{(M_6 + 2M_7)}{4}a_n(T_1)^2 \right)^2 \right] \\ & - \frac{9}{16}M_3 \frac{a_n(T_1)^2}{\omega_n} \end{aligned} \quad (۴۰-۴)$$

در واقع شکل کلی پاسخ سیستم به صورت زیر خواهد بود:

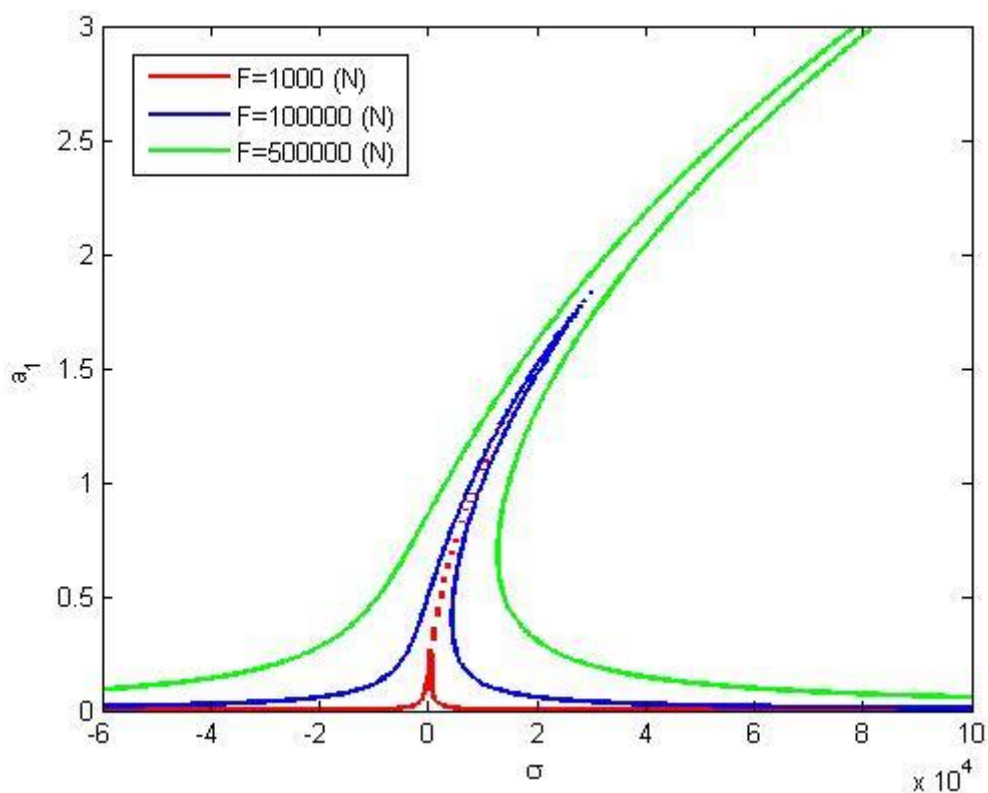
^۱ Steady State

^۲ Singular Points

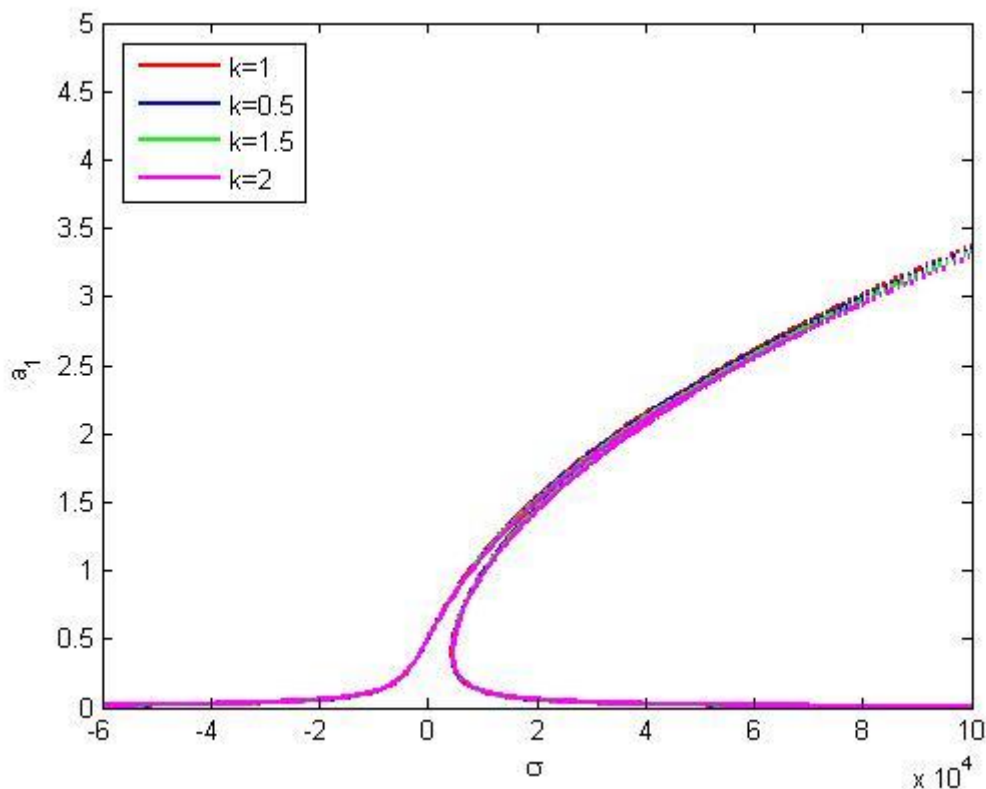
$$\begin{aligned}
 w_n(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \beta_n) W_n(x) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \sigma T_1 - \gamma) W_n(x) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\Omega t - \gamma)(x) W_n(x)
 \end{aligned}
 \tag{۳۹-۴}$$

۳-۴ مسأله‌ی نمونه و نتایج آن

در نمودارهای زیر تغییرات معادله‌ی پاسخ فرکانسی مود اول را بر حسب تغییرات پارامترهای η_{ratio} ، ρ_{ratio} ، E_{ratio} ، توان k و نیروهای مختلف را مشاهده می‌کنیم:



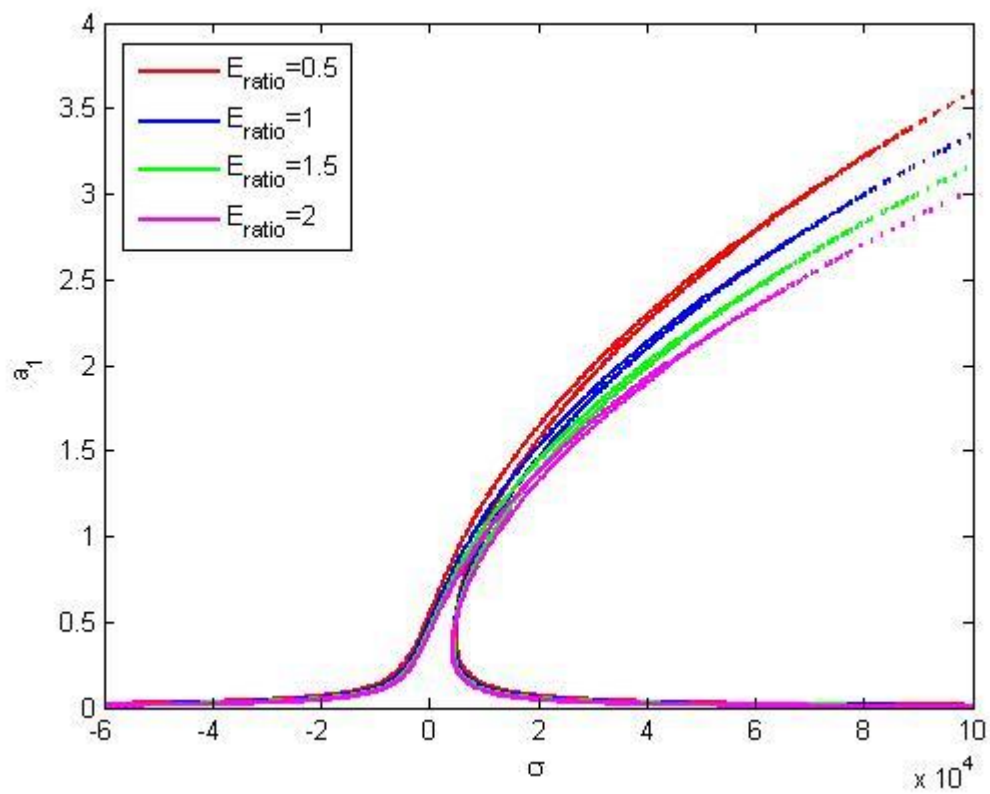
شکل (۴-۱) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی مود اول بر حسب تغییرات دامنه‌ی نیروی تحریک



شکل (۲-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی مود اول بر حسب تغییرات توان k

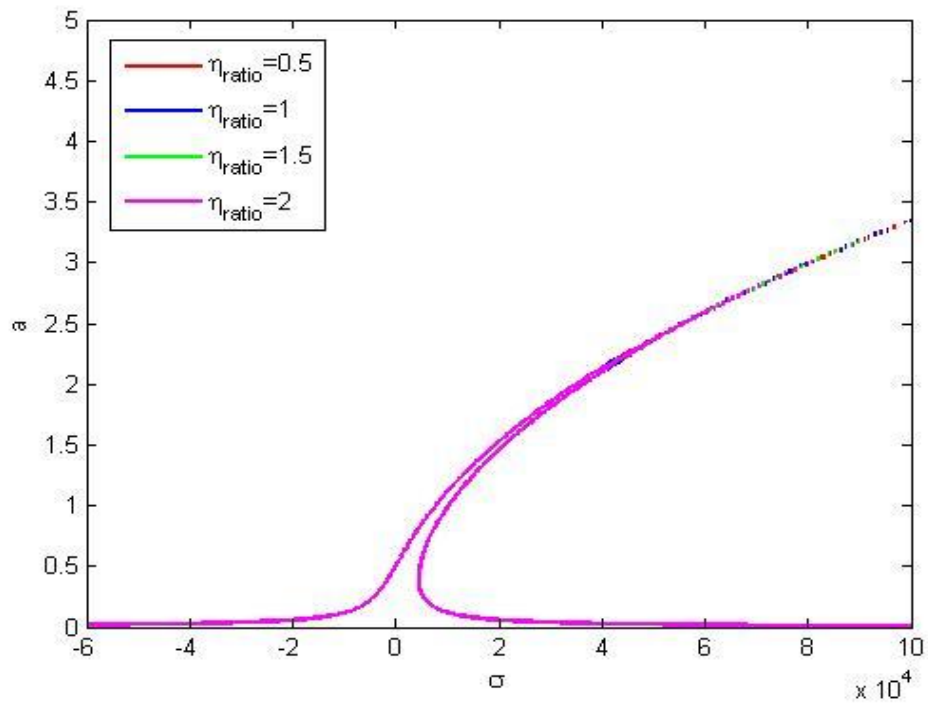
در شکل (۱-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی بر حسب تغییرات دامنه‌ی نیروی تحریک را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش مقدار دامنه‌ی تحریک میزان دامنه‌ی ارتعاشات نیز بیشتر خواهد شد و منحنی‌های پاسخ فرکانسی نسبت به محور $\sigma = 0$ به سمت راست منحرف می‌شوند که نشان دهنده‌ی سخت شونده‌ی سیستم می‌باشد.

شکل (۲-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی بر حسب تغییرات توان k را نشان می‌دهد. طبق نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود که افزایش یا کاهش مقادیر k تأثیر به سزایی در منحنی‌های پاسخ فرکانسی ایجاد نمی‌کند.

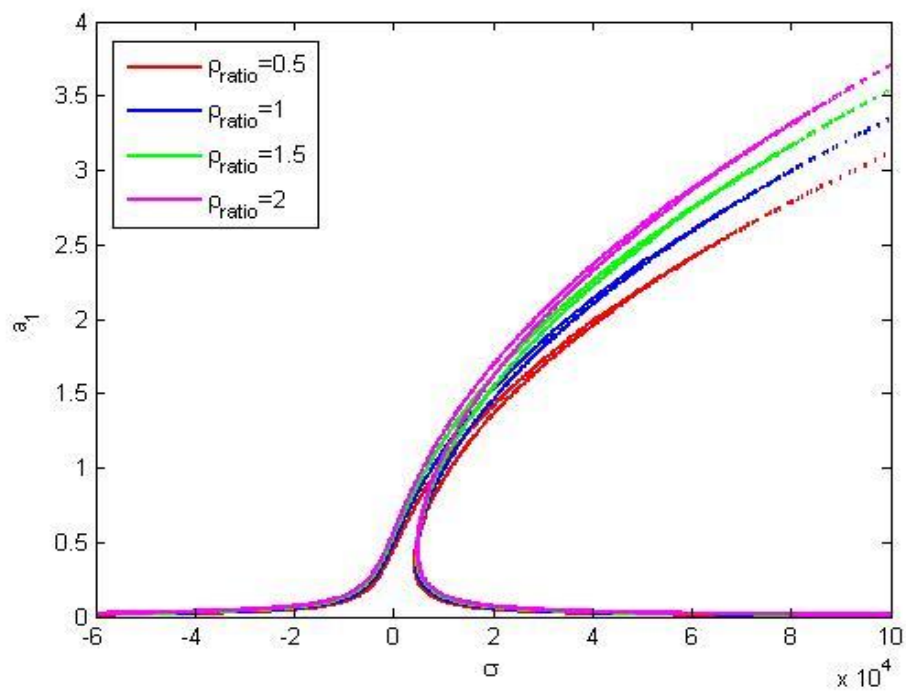


شکل (۳-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی مود اول بر حسب تغییرات E_{ratio}

در شکل (۳-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی بر حسب تغییرات E_{ratio} نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش مقدار E_{ratio} نمودار پاسخ فرکانسی دچار سخت‌شوندگی بیشتری می‌گردد.



شکل (۴-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی مود اول بر حسب تغییرات η_{ratio}



شکل (۵-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی مود اول بر حسب تغییرات ρ_{ratio}

در شکل (۴-۴) نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی بر حسب تغییرات η_{ratio} نشان داده شده است. تأثیر تغییرات η_{ratio} بر نمودار پاسخ فرکانسی همانند تأثیر تغییر مقادیر k کم می‌باشد. دلیل این امر کوچک بودن مقادیر η در مقایسه با مقادیر E می‌باشد.

در شکل (۵-۴) نیز نمودار تغییرات پاسخ فرکانسی بر حسب تغییرات ρ_{ratio} نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش مقادیر ρ_{ratio} دامنه‌ی حرکت افزایش پیدا می‌کند و از میزان سخت‌شوندگی کم می‌شود.

فصل پنجم

نتیجہ گیری و رائے پیشہادہ

۵-۱- مقدمه

در این پژوهش ارتعاشات غیرخطی تیر متغیر تابعی ویسکوالاستیک تحت بار متحرک مورد بررسی قرار گرفته است. نخست به بررسی ارتعاشات خطی آزاد و اجباری پرداخته شده و تأثیر پارامترهای FG بر روی فرکانس طبیعی و فاکتور استهلاک مورد بررسی قرار گرفته است. سپس به ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی پرداخته شده و فرکانس، پاسخ ارتعاشات آزاد و منحنی‌های پاسخ فرکانسی استخراج شده است. در ادامه به نتایجی که در طول این پژوهش به آن دست یافته شده است و پیشنهاداتی جهت ارتقای این پژوهش و مقدمه‌ی پژوهش‌های بعدی ذکر می‌گردد.

۵-۲- نتیجه‌گیری‌ها

- فرکانس طبیعی بدون استهلاک تیر برای حالت همگن یعنی $E_{ratio}=1$ ، $\eta_{ratio}=1$ و $\rho_{ratio}=1$ به ازای $k=1$ به دست آمده است که با نتایج به دست آمده از مراجع [۳۳] و [۳۴] کاملاً مطابقت دارد.
- فرکانس طبیعی اول با افزایش E_{ratio} افزایش می‌یابد.
- همچنین E_{ratio} به ازای مقادیر کوچکتر k بر روی فرکانس طبیعی مؤثرتر است. یعنی همانطور که k افزایش می‌یابد، تأثیر E_{ratio} بر فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.
- فرکانس طبیعی اول تیر با افزایش k هنگامی که E_{ratio} کمتر از یک است، افزایش می‌یابد و هنگامی که E_{ratio} بیشتر از یک است، کاهش می‌یابد.
- فرکانس طبیعی اول با افزایش ρ_{ratio} کاهش می‌یابد.
- همچنین ρ_{ratio} به ازای مقادیر کوچکتر k بر روی فرکانس طبیعی مؤثرتر است. یعنی همانطور که k افزایش می‌یابد، تأثیر ρ_{ratio} بر فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

- فرکانس طبیعی اول تیر با افزایش k هنگامی که ρ_{ratio} کمتر از یک است، کاهش می‌یابد و هنگامی که ρ_{ratio} بیشتر از یک است، افزایش می‌یابد.
- فاکتور استهلاک اول نیز با افزایش η_{ratio} افزایش می‌یابد. همانطور که k افزایش می‌یابد، تأثیر η_{ratio} بر فاکتور استهلاک کاهش می‌یابد.
- فاکتور استهلاک اول تیر با افزایش k هنگامی که η_{ratio} کمتر از یک است، افزایش می‌یابد و هنگامی که η_{ratio} بیشتر از یک است، کاهش می‌یابد.
- فاکتور استهلاک نیز با افزایش ρ_{ratio} کاهش می‌یابد. همانطور که k افزایش می‌یابد، تأثیر ρ_{ratio} بر فاکتور استهلاک کاهش می‌یابد.
- فاکتور استهلاک اول تیر با افزایش k هنگامی که E_{ratio} کمتر از یک است، افزایش می‌یابد و هنگامی که E_{ratio} بیشتر از یک است، کاهش می‌یابد.
- فاکتور استهلاک نیز با افزایش E_{ratio} افزایش می‌یابد. همانطور که k افزایش می‌یابد، تأثیر افزایش E_{ratio} بر فاکتور استهلاک کاهش می‌یابد.
- در بخش ارتعاشات آزاد غیرخطی نیز دامنه‌ی ارتعاشات مود اول با افزایش زمان کاهش می‌یابد؛ همچنین با افزایش مقادیر ϵ کاهش دامنه سریع‌تر و بیشتر می‌باشد.
- در ارتعاشات آزاد غیرخطی، فرکانس و دامنه کاملاً به یکدیگر وابسته می‌باشند و با افزایش دامنه، فرکانس نیز افزایش می‌یابد.

- در ارتعاشات اجباری غیرخطی، با افزایش مقدار دامنه‌ی تحریک میزان دامنه‌ی ارتعاشات نیز بیشتر خواهد شد و منحنی‌های پاسخ فرکانسی نسبت به محور $\sigma = 0$ به سمت راست منحرف می‌شوند که نشان دهنده‌ی سخت شونده‌ی سیستم می‌باشد.
- افزایش یا کاهش مقادیر k تأثیر به سزایی در منحنی‌های پاسخ فرکانسی ایجاد نمی‌کند.
- با افزایش مقدار E_{ratio} نمودار پاسخ فرکانسی دچار سخت‌شوندگی بیشتری می‌گردد.
- تأثیر تغییرات η_{ratio} بر نمودار پاسخ فرکانسی همانند تأثیر تغییر مقادیر k کم می‌باشد. دلیل این امر کوچک بودن مقادیر η در مقایسه با مقادیر E می‌باشد.
- با افزایش مقادیر ρ_{ratio} دامنه‌ی حرکت افزایش پیدا می‌کند و از میزان سخت‌شوندگی کم می‌شود.

۵-۳- پیشنهادها

- تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری؛
- بررسی ارتعاشات تیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته؛
- استفاده از سایر مدل‌های ویسکوالاستیک همچون مدل ماکسول و سه‌جزئی؛
- استفاده از مدل‌های باریک شونده و نامتقارن؛
- تحلیل در هندسه‌هایی چون صفحه، پوسته، استوانه و ...؛
- تحلیل مسأله در سایر شرایط مرزی از جمله شرایط دو سر گیردار، گیردار کشویی، تیر متحرک و ...

مراجع

- [1] Y. M. Haddad, 1995, “Viscoelasticity Of Engineering Materias”, *CHAPMAN & HALL*
- [2] M. B. Bever and P. E. Duwez, “Invited Review Gradients in Composite Materials”, Vol. 10, PP. 1–8, 1972.
- [3] M. Koizumi, “FGM activities in Japan,” *Compos. Part B Eng.*, Vol. 28, No. 1–2, PP. 1–4, 1997.
- [4] M. Şimşek and T. Kocatürk, “Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load”, *Compos. Struct.*, Vol. 90, No. 4, PP. 465–473, 2009.
- [5] M. Abu-hilal and M. Mohsen, “Vibration of beams with general boundary conditions due to a moving hurmonic load”, *J. Sound Vib.*, Vol. 232, No. 4, PP. 703–717, 2000.
- [6] M. Abu-Hilal, “Dynamic response of a double Euler–Bernoulli beam due to a moving constant load”, *J. Sound Vib.*, Vol. 297, No. 3–5, PP. 477–491, 2006.
- [7] M. Aydogdu and V. Taskin, “Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges”, *Mater. Des.*, Vol. 28, No. 5, PP. 1651–1656, 2007.
- [8] S. A. Sina, H. M. Navazi, and H. Haddadpour, “An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams”, *Mater. Des.*, Vol. 30, No. 3, PP. 741–747, 2009.
- [9] X. F. Li, “A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors

- of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams”, *J. Sound Vib.*, Vol. 318, No. 4–5, PP. 1210–1229, 2008.
- [10] B. V. Sankar, “An elasticity solution for functionally graded beams”, *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 61, No. 5, PP. 689–696, 2001.
- [11] M. Şimşek, “Non-linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load”, *Compos. Struct.*, Vol. 92, No. 10, PP. 2532–2546, 2010.
- [12] L.-L. Ke, J. Yang, and S. Kitipornchai, “An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams”, *Meccanica*, Vol. 45, No. 6, PP. 743–752, 2010.
- [13] L. L. Ke, Y. S. Wang, J. Yang, and S. Kitipornchai, “Nonlinear free vibration of size-dependent functionally graded microbeams”, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 50, No. 1, PP. 256–267, 2012.
- [14] H. T. Banks and D. J. Inman, “On Damping Mechanisms in Beams”, *J. Appl. Mech.*, Vol. 58, No. 3, PP. 716–723, 1991.
- [15] D. J. Inman, “Vibration Analysis of Viscoelastic Beams by Separation of Variables and Modal Analysis”, *Mech. Res. Commun.*, Vol. 16, No. 4, PP. 213–218, 1989.
- [16] L. Chen and C. Cheng, “Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic beams”, *Appl. Math. Mech.*, Vol. 21, No. 9, PP. 995–1001, 2000.
- [17] T. W. Kim and J. H. Kim, “Dynamic stability of a composite cantilever beam with viscoelastic properties under a follower force”, *12 th Conf.*

Compos. Mater., 1999.

- [18] U. Lee and H. Oh, “Dynamics of an axially moving viscoelastic beam subject to axial tension”, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 42, No. 8, PP. 2381–2398, 2005.
- [19] L. Q. Chen and X. D. Yang, “Stability in parametric resonance of axially moving viscoelastic beams with time-dependent speed”, *J. Sound Vib.*, Vol. 284, No. 3–5, PP. 879–891, 2005.
- [20] L. Q. Chen and X. D. Yang, “Vibration and stability of an axially moving viscoelastic beam with hybrid supports”, *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 25, No. 6, PP. 996–1008, 2006.
- [21] T. Kocatürk and M. Simsek, “Vibration of viscoelastic beams subjected to an eccentric compressive force and a concentrated moving harmonic force”, *J. Sound Vib.*, Vol. 291, NNo. 1–2, PP. 302–322, 2006.
- [22] T. Kocatürk and M. Simsek, “Dynamic analysis of eccentrically prestressed viscoelastic Timoshenko beams under a moving harmonic load”, *Comput. Struct.*, Vol. 84, No. 31–32, PP. 2113–2127, 2006.
- [23] S. N. Mahmoodi, S. E. Khadem, and M. Kokabi, “Non-linear free vibrations of Kelvin-Voigt visco-elastic beams”, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 49, No. 6, PP. 722–732, 2007.
- [24] M. H. Ghayesh and S. Balar, “Non-linear parametric vibration and stability of axially moving visco-elastic Rayleigh beams”, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 45, No. 25–26, PP. 6451–6467, 2008.

- [25] M. H. Ghayesh, “Nonlinear forced dynamics of an axially moving viscoelastic beam with an internal resonance”, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 53, No. 11, PP. 1022–1037, 2011.
- [26] M. H. Ghayesh, “Nonlinear dynamic response of a simply-supported Kelvin-Voigt viscoelastic beam, additionally supported by a nonlinear spring”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, Vol. 13, No. 3, PP. 1319–1333, 2012.
- [27] H. Lv, Y. Li, L. Li, and Q. Liu, “Transverse vibration of viscoelastic sandwich beam with time-dependent axial tension and axially varying moving velocity”, *Appl. Math. Model.*, Vol. 38, No. 9–10, PP. 2558–2585, 2014.
- [28] R. K. Bhangale and N. Ganesan, “Thermoelastic buckling and vibration behavior of a functionally graded sandwich beam with constrained viscoelastic core”, *J. Sound Vib.*, Vol. 295, No. 1–2, PP. 294–316, 2006.
- [29] A. Allahverdizadeh, M. J. Mahjoob, N. Nasrollahzadeh, and I. Eshraghi, “Investigation of Functionally Graded and Viscoelastic Layers Effects on the Dynamic Behavior of FGER Sandwich Beams”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, No.1, PP. 00–00, 2014.
- [30] J. Li, B. Zheng, Q. Yang, and X. Hu, “Analysis on time-dependent behavior of laminated functionally graded beams with viscoelastic interlayer”, *Compos. Struct.*, Vol. 107, No. 1, PP. 30–35, 2014.
- [31] C. Demir and F. E. Oz, “Free vibration analysis of a functionally graded viscoelastic supported beam”, *J. Vib. Control*, Vol. 20, No. 16, PP.

2464–2486, 2014.

- [32] S. Hosseini-Hashemi, A. R. Abaei, and M. R. Ilkhani, “Free vibrations of functionally graded viscoelastic cylindrical panel under various boundary conditions”, *Compos. Struct.*, Vol. 126, PP. 1–15, 2015.
- [33] P. Hagedorn and A. Dasgupta, *Vibration And Waves In Continuous Mechanical Systems*, Vol. 1, Cambridge University Press, 2007.
- [34] Y. D. Timoshenko S, *Vibration problems in engineering*, Vol. 207, No. 2, 1929.
- [35] L. Frýba and C. R. Steele, “Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads”, *J. Appl. Mech.*, Vol. 43, No. 3 , 1976.
- [36] M. D. T. Nayfeh A.H., *Nonlinear oscillations*. Wiley-Interscience, 1979.

Abstract

In this research, nonlinear vibration of a functionally graded viscoelastic beam under the action of a moving load have been studied. First, the governing equation of linear vibration of a FGV beam, based on Euler-bernoulli beam theory and Kelvin-voigt viscoelastic model, using Hamilton principle is derived. Natural frequencies and damping factors of a simply supported beam have been obtained using the method of variable separation and the approximate method of Galerkin. By comparing them with the previous references, very good overlap between results have been observed. Then the general solution to the free vibration and particular solution to the forced vibration have been obtained. Also the free vibration when the force leaves the beam have been obtained and the effects of functionally graded parameters on the first natural frequency and damping factor have been investigated. In the next section, the nonlinear equation of motion considering Von-Karman strain relation and Euler-bernoulli beam theory using Hamilton principle is derived. Nonlinear free vibration of beam using multiple-scales have been analyzed and nonlinear natural frequency and the solution of nonlinear free vibration is obtained and variation of the amplitude of the first vibration mode and vibration of beam versus time have been investigated. In the last section the forced nonlinear vibration, primary resonance and steady state solution using the method of multiple-scales have been analyzed and the effects of the amplitude of excitation and functionally graded parameters on the frequency response have been studied.

Key words: Functionally graded materials, Kelvin-voigt viscoelastic model, Euler-bernoulli beam theory, The multiple-scales method



Faculty of Mechanical and Mechatronic Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Nonlinear vibration analysis of functionally graded viscoelastic beam under
the action of a moving load

By: Fatemeh Joveini

Supervisor:
Dr. Ardeshir Karami Mohammadi

September 2016