



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل کمانش و ارتعاشات نانوصفحه ساختهشده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی با

استفاده از تئوري الاستيسيته سطحي

نگارنده: علیرضا ضرغامیان

استاد راهنما

دكترعليرضا شاطرزاده

بهمن ۱۳۹۵

شمارہ: تاریخ:	باسمه تعالى	PD No lightle	
ويرايش:		مديريت تحصيلات تكميلي	

فرم شماره ۷: صور تجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای علیرضا ضرغامیان به شماره دانشجویی ۹۳۱۱۲۲۴ . رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل ارتعاشات و کمانش نانوصفحه متشکل از مواد هدفمند تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی براساس تئوری الاستیسیته سطحی که در تاریخ ۱۳۹۵/۱۱/۱۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام میگردد:

مردود 🗌	دفاع مجدد 🗌	امتياز ٧٧٠)	قبول (با درجه : خرب
		عملی 🗌	نوع تحقيق: نظري 🗌

۱_ عالی (۲۰ _ ۱۹) ۲ _ بسیار خوب (۱۸/۹۹ _ ۱۸) ۳_ خوب (۱۷/۹۹ _ ۱۶) ۴_ قابل قبول (۱۵/۹۹ _ ۱۴) ۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

اعضاء	مرتبة علمي	نام ونام خانوادگی	عضو هيأت داوران
Life	استاديار	دكتر عليرضا شاطرزاده	۱ ـ استادراهنمای اول
			۲- استادراهنمای دوم
			۳- استاد مشاور
Storp	استاديار	دکتر سید مجتبی واردی کولایی	۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
and and	دانشيار	دکتر حمیدرضا ایپکچی	۵- استاد ممتحن اول
A	دانشيار	دکتر اردشیر کرمی محمدی	8-۔ استاد ممتحن دوم

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: تاريخ والمضاء ومهر دانشكده Jondo

ت

تقدیم به آنها که راه زندگی را به من آموختند، عزیزانی که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر، مویشان سپیدی گرفت تا رویم سپید بماند، آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایههای جاودانی زندگیام بوده و خواهند بود. آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت. در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین مینهم و بادلی مملو از عشق و محبت بر دستانشان بوسه میزنم.

تقدیم به مادر، پدر، خواهر و برادر عزیزم

تقدیم به همهی کسانی که میاندیشند

تشکر و قدردانی:

منّت و سپاس، یزدان پاک را که در سایهی رحمتش توانستم گامی به سوی تکامل برداشته و وجود خویش را به زینت علم بیارایم. باشد که به خود آیم، شاکر باشم و طریقی برگزینم تا ستایش و بندگی او را در صراط مستقیم برآورم و در خدمت خلق او باشم.

اکنون که به یاری خداوند متعال این پایاننامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم میدانم از تمامی کسانی که بهنوعی اینجانب را در انجام پایاننامه یاری کردهاند، کمال تشکر را داشته باشم و ضمن سپاس فراوان از خانواده عزیزم، لازم میدانم از همهی دوستان همیشه همراهم که هرگز فراموششان نخواهم کرد تشکر و قدردانی کرده و از درگاه خداوند متعال برای همهی این بزرگواران آرزوی سعادت روزافزون دارم، همچنین از استاد فاضل و بزرگوارم جناب آقای دکتر شاطرزاده که فراتر از یک استاد در کنارم بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تعهدنامه

اینجانب علیرضا ضرغامیان دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایاننامه تحلیل کمانش و ارتعاشات نانوصفحه ساختهشده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی با استفاده از تئوری الاستیسیته سطحی تحت راهنمایی دکتر شاطرزاده متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط این جانب انجام شده است و از صحت و اصالت بر خوردار است.
 - در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورداستفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایاننامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به د ست آمدن نتایج ا صلی پایاننامه تأثیر گذار بودهاند در مقالات م ستخرج از پایاننامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایاننامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول
 اخلاقی رعایت شده است.
 - در کلیه مراحل انجام این پایاننامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

تاريخ

امضاى دانشجو عليرضا ضرغاميان

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامههای رایانهای، نرمافزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
 - استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایاننامه بدون ذکر مرجع مجاز نمیباشد.

چكىدە

کمانش و ارتعاشات یک نانوصفحهی مستطیلی شکل هدفمند موردبررسی قرار گرفته است. خواص فیزیکی نانوصفحهی مورد بررسی بر مبنای قانون توزیع توانی در راستای ضخامت تغییر میکند. معادله حرکت و شرایط مرزی متناظر، با استفاده از اصل همیلتون استخراج میشود. با استفاده از اصل همیلتون و بهدست آوردن معادله دیفرانسیل غیرکلاسیک بر حسب جابجایی و فرض پاسخ عمومی جابجایی برای نانوصفحهی مورد نظر، میتوان پاسخ ارتعاشی و کمانشی نانوصفحه را پیش بینی کرد. اثرات تنشهای سطحی در معادلات استفاده شده با بهره گیری از تئوری الاستیسیته سطحی که بر پایهی تئوری الاستیسیته گورتین-مورداک می باشد، اعمال شده است. تحلیل کمانش این نانوصفحات تحت تأثیر بار ترمومکانیکی مورد مطالعه قرار می گیرد. در این رساله از دو نوع بار گذاری حرارتی متفاوت استفاده شده است که بار گذاریهای حرارتی مفروض، ناشی از اختلاف دمای دو سطح بالا و پایین نانوصفحه به صورت خطی و غیرخطی می باشد. در قسمت نتایچ، اثرات پارامترهای مختلف شامل شاخص تابع توانی، مدول یانگ سطحی و همچنین تغییرات نیروهای حرارتی و مکانیکی و اثرات تنشهای پسماند سطحی بر پاسخ ارتعاشی و کمانشی نانوصفحهی موردنظر مورد بررسی قرار می گیرد.

کلمات کلیدی: نانو صفحه، مواد هدفمند، اثرات سطح، کمانش، ارتعا شات، بارگذاری ترمومکانیکی، تئوری الاستیسیته سطحی گورتین- مورداک

مطالب	فهرست
•	

١	١- فصل اول: مقدمه
۲	۱–۱– مقدمه
۲	۲-۱- کلیات
٢	١-٢-١- مواد هدفمند
٣	۲-۲-۱ کمانش
۴	۱–۲–۳ فناوری نانو
۴	۱-۲-۴- تئوري الاستيسيتهي سطحي
۵	۱–۳– تعريف مساله
۶	۱-۶- مروری بر کارهای پیشین
۱۱	۲- فصل دوم: فرمول.بندی
١٢	۲–۱– مقدمه
١٢	۲-۲- معادلات اساسی و بنیادی مکانیک
١٣	۲-۳- معادلات حرکت آزاد نانوصفحهی هدفمند
18	۲-۴- معادلات حرکت غیر کلاسیک
۱۸	۲–۵– انواع بار گذاری دمایی
۱۸ .	۲–۵–۱ اختلاف دمای خطی
۱۹.	۲-۵-۲ اختلاف دمای غیرخطی
۲.	۲-۶- انواع بارگذاری مکانیکی
۲.	۲-۶-۲ - بارگذاری تکمحوره
21	۲-۶-۲- بارگذاری دومحوره
۲۳	٣- فصل سوم: حل معادلات
74	۳-۱- مقدمه
74	٣-٢- مولفه غيركلاسيك تنش
۲۵	۳-۳- انرژی کرنشی نانوصفحه
۲۷	-۴-۳ معادله ديفرانسيل غيركلاسيک
29	۔ ۔ ۔ ۔ ۳–۵– حل مساله

٣٣	۴- فصل چهارم: نتایج
34	۲-۱-۴ مقدمه
۳۵	۴-۲- اعتبار سنجی نتایج
۳۶	۴-۳- ارائه و تفسیر نتایج
۳۷	۴-۳-۱ تحلیل فرکانسی
44	۴-۳-۲ تحلیل کمانش حرارتی
۴۸	۴-۳-۳ تحلیل کمانش مکانیکی
49	۴-۳-۴ تحلیل ترمومکانیکی
۶۳	۵- فصل پنجم: نتیجهگیری
94	۵–۱– مقدمه
54	۵-۱- بررسی عوامل مؤثر بر نانوصفحه
۶۵	۵–۲– پیشنهادات
۶۷	مراجع

فهرست شكلها

صفحه	عنوان
۷	شكل ۱–۱. نمايش سطح تقسيم نانوصفحه
14	شکل ۲-۱. نمای شماتیک نانوصفحه با لایه سطحی
۲.	شکل ۲-۲. نمای شماتیک نانوصفحه با لایه سطحی تحت بارگذاری تکمحوره
21	شکل ۲-۳. نمای شماتیک نانوصفحه با لایه سطحی تحت بارگذاری دومحوره
38	شکل ۴-۱. اعتبار سنجی فرکانس طبیعی برحسب پارامتردمایی برای تنشهایسطحی مختلف
٣۶	شکل ۴-۲. اعتبار سنجی اختلاف دمای کمانش بحرانی برحسب نسبت ضلع به ضخامت برای
۳۷	شاخصهای تابع توانی مختلف شکل ۴–۳. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای توزیع دماهای مختلف
۳۸	شکل ۴-۴. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای شاخصهای تابع توانی مختلف
۳۹	شکل ۴-۵. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای ضخامتهای مختلف (a=b=20h)
٣٩	شکل ۴-۶. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای تنشسطحیهای مختلف
۴.	شکل ۴-۷. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای مدول یانگهای سطحی مختلف
۴.	شکل ۴-۸. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای مود فرکانسیهای مختلف(a=b=20h)
41	شکل ۴-۹. فرکانس طبیعی برحسب بارگذاری مکانیکی بحرانی برای مود فرکانسیهای مختلف
	(a=b=20h)
41	شکل ۴-۱۰. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای نسبت اضلاع مختلف
47	شکل ۴-۱۱. فرکانس طبیعی برحسب بارگذاری مکانیکی بحرانی برای نسبت اضلاع مختلف
۴۳	شکل ۴-۱۲. فرکانس طبیعی برحسب بارگذاری مکانیکی برای توزیع نیروهای مختلف
	(a=b=20h)

فهرست جداول

34	جدول (۴–۱). خواص ماده مورد استفاده در تحلیل حاضر
۳۵	جدول (۴–۲). مقایسه دمای کمانش بحرانی صفحه مطابق تئوری کلاسیک با مرجع [۳۱]
۳۵	جدول (۴–۳). مقایسه فرکانس طبیعی نانوصفحه مطابق تئوری غیرکلاسیک با مرجع [۱۵]

فهرست علائم

Ε	مدول یانگ
Т	دما
Κ	ضریب هدایت دمایی در راستای ضخامت
h	ضخامت نانو صفحه
\vec{u}	جابجاییهای بدنه
\vec{n}	بردار نرمال
E ^s	مدول یانگ سطحی
a	طول ضلع نانوصفحه
b	عرض ضلع نانوصفحه
m	فلز
С	سرامیک
k	شاخص تابع توانى
I ₀	چگالی جرمی بدنه
N_{χ}	نیروی مکانیکی در جهت X
$N_{\mathcal{Y}}$	نیروی مکانیکی در جه <i>ت Y</i>
α_m	ضريب انبساط حرارتي
$\varepsilon_{lphaeta}$	كرنش سطحي
$ au^s$	تنسور كاهشيافته سطح

$ ho^s$	چگالی جرمی سطح
δ	عملگر وریشن
ΔT_{cr}	دمای کمانش بحرانی
ω_{mn}	فرکانس بیبعد
λ_T	پارامتر دمایی
Г	ضریب بار حرارتی در راستای <i>x</i>
ψ	ضریب بار مکانیکی در راستای <i>X</i>
Φ	${\mathcal Y}$ ضریب بار حرارتی در راستای
arphi	y ضریب بار مکانیکی در راستای



مقرمه وتعريف

در پایاننامه ی حاضر به تحلیل کمانش نانوصفحه هدفمند تحت بارگذاری ترمومکانیکی با استفاده از تئوری سطحی میباشد. ساختار پایاننامه ی حاضر به این گونه میباشد که ابتدا کلیاتی در مورد آنچه که استفاده شده است بیان میشود، سپس به معرفی معادلات اساسی و بنیادی مربوط به پایاننامه پرداخته و در فصل سوم به حل روابط و استخراج معادلات لازم برای تحلیل رفتاری نانوصفحه پرداخته میشود، در فصل چهارم به ارائه و تفسیر نتایج پرداخته میشود و در فصل پنجم و ششم به ترتیب به بیان نتیجه بهدست آمده و همچنین مراجع مورد استفاده در پایاننامه میپردازیم.

۲-۱- کلیات

۱-۲-۱ مواد هدفمند

ماده ^۲G۱ مادهای است که از دو یا چند جزء تشکیل شده و خواص آن به طور پیوسته با مکان تغییر می کند. این خاصیت با تغییر تدریجی درصد حجمی اجزای تشکیل دهنده ماده در طی ساخت آن به وجود می آید، لذا این مواد در زمره مواد ناهمگن قرار می گیرند. از مزایای استفاده از این مواد این است که به علت تغییرات تدریجی در ساختار و خصوصیات ماده، مشکلات موجود در فصل مشتر ک دو ماده ی متفاوت حذف شده است و تنش های حرارتی، تنش های پسماند و عامل تمرکز تنش، نسبت به مواد مرکب لایه ای، بسیار کاهش می یابد. مواد هدمفمند تابعی، مواد کامپوزیتی با ریز ساختار ناهمگن می باشند که خواص مکانیکی آن ها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می کند. این خاصیت ویژه به وسیله تغییر یکنواخت در نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده آن ها به دست می آید. نیاز به مواد با مقاومت بالا در برابر بار حرارتی و بارگذاری مکانیکی و قابلیت تحمل گرادیان شدید حرارتی، به انگیزه ای برای تولید مواد هدفمند تبدیل

¹⁻ Functionally graded

گشت؛ از این مواد در سازههای فضایی نیز استفاده میشود. هرچند تلاش های بسیار زیادی بهمنظور ساخت و کاربرد مواد هدفمند در محیطهای پژوهشی و آزمایشگاههای تحقیقاتی در سالهای اخیر صورت گرفته است، ولی رشد و شکوفایی بیشتر این مواد در صنعت، در دهههای آینده بیشازپیش عیان میگردد. در سالهای اخیر با توسعه موتورهای پرقدرت الکتریکی، توربینها، راکتورها، تجهیزات صنایع هوافضا و دیگر ماشین آلات صنعتی، استفاده از موادی با مقاومت حرارتی بالا و مقاوم ازلحاظ مکانیکی، یک نیاز ضروری به شمار میرود. مواد هدفمند تابعی یکی از پرکاربردترین مواد در صنعت، بهویژه جهت استفاده در محیطهایی شمار میرود. مواد هدفمند تابعی یکی از پرکاربردترین مواد در صنعت، بهویژه جهت استفاده در محیطهایی پیداکردهاند که می توان به تولید پرههای توربین، اتصال فلز به سرامیک، اجزای موتورهای انفجاری، تولید ابزار برش، وسایل اطفای حریق در ساختمانها، مواد مرکب پلیمری با مقاومت بالا، پوشش محافظ احتراق پیسران موشک، مواد پیزوالکتریک و کاربردهایی در مهندسی پزشکی اشاره نمود. نوع رایج این مواد، ترکیب پیوستهای از فلزات و سرامیکها میباشد، بهطوریکه تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملاً پیوستهای از فلزات و سرامیکها میباشد، بهطوریکه تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملاً

۱-۲-۲ کمانش

پدیده کمانش از حدود یک قرن پیش، موردتوجه دانشمندان علم مکانیک بوده است. از آن زمان تابه حال پژوهشهای بسیاری در این زمینه انجامشده است که نخستین مطالعات، مربوط به ستونها بوده و سپس پوستهها و صفحات موردتوجه قرار گرفتند. چنانچه سازهای در معرض بار قرار گیرد؛ برای بارهای کوچک، سازه به سختی تغییر شکل می دهد. چنانچه مقدار بار اعمالی افزایش یابد، برای مقدار خاصی از بار که مقدار بحرانی نامیده می شود، سازه نمی تواند نیروی اعمالی را تحمل کند و از این نقطه به بعد سازه وارد تغییر

¹⁻Buckling

شکل بزرگی میشود. در بسیاری از موارد، چنانچه ضخامت سازهی موردنظر زیاد نباشد، مقدار بار کمانش سازه از مقدار تنش تسلیم آن کمتر میشود. در چنین مواردی طراحی بر اساس بار بحرانی کمانش صورت میگیرد و از این جهت پدیده کمانش از اهمیت بالایی برخوردار خواهد بود.

۱–۲–۳– فناوری نانو

علم نانو به بیان ساده، مطالعه اصل اولیهی مولکولها و ساختارهایی با ابعاد بین ۱ تا ۱۰۰ نانومتر است. این ساختارها را نانومواد یا مواد نانوساختار مینامند. نانوتکنولوژی نیز تولید کارآمد مواد، دستگاهها و سیستمها با کنترل ماده در مقیاس طولی نانومتر و همچنین بهرهبرداری از خواص و پدیدههای نوظهوری است که در مقیاس نانو توسعه یافتهاند. یکی از ویژگیهای مهم نانوتکنولوژی، جنبهی چند رشتهای آن است. این فناوری در علم پزشکی، مهندسی، زیستشناسی، شیمی، فیزیک، کنترل فرآیند و بسیاری از علوم دیگر کاربرد وسیعی دارد. اصل چند رشتهای بودن نانوتکنولوژی، بیانگر این حقیقت است که این علم، رشته جدیدی نیست؛ بلکه رویکردی جدید در تمام رشتهها است و تمام عرصههای مختلف علم و فناوری را در برمیگیرد. همانطور که در قسمت مقدمه گفته شد، پژوهش انجامشده در این بخش، دربرگیرندهی تمامی مطالب مرتبط به نانو، کمانش و مواد هدفمند در یک قالب میباشد که برای تحلیل و حل آن از تئوری الاستیسیتهی

۲-۲-۴ تئوري الاستيسيتهي سطحي

بدنهای در نظر گرفته می شود که خواص فیزیکی آن در نزدیکی سطح به طور قابل ملاحظه ای با فضای داخلی آن متفاوت است. این منطقه از بدنه به صورت سطح ماده مدل می شود. که در آن، مرز بدنه به صورت یک جسم دوبعدی پیوسته درنظر گرفته می شود و برای آن یک ساختار که نشان دهنده رفتار آن ناحیه از سطح

1-Nanotechnology

²⁻ Surface elasticity theory

باشد فرض می کنیم. تنشی که در یک ناحیه از سطح متمر کز می شود را با یک تنسور تنش سطحی نمایش می دهیم. این تئوری، محدوده و وسیعی از برهم کنش های بین اتمی را در نظر می گیرد و با توجه به آن، نتیجه هایی وابسته به اندازه نانوصفحه ارائه می کند. این تئوری برای سازه های مختلفی در مقیاس نانو به کاربرده شده است. در مقاله های ارائه شدان داده شده است که نتایج به دست آمده برای سازه های نانو مقیاس، با استفاده از این تئوری نیز قابل اطمینان می با شد. با استفاده از این تئوری، تحقیق های بسیار رای سازه می کنوری، تحقیق های بسیار زیادی پیرامون سازه های نیز می کند. این تؤری برای سازه های مختلفی در مقیاس نانو به کاربرده شده است. در مقاله های ارائه شده نشان داده شده است که نتایج به دست آمده برای سازه های نانو زیادی یو این تئوری نیز قابل اطمینان می با شناده از این تئوری، تحقیق های بسیار زیادی پیرامون سازه های نانو مورت گرفته است.

۱-۳- تعريف مساله

برای انجام طراحی بهینهی وسایل و قطعات نانومقیاس، باید اثرات مقیاس کوچک و نیروهای بین اتمی در تحلیل مؤلفههای نانومقیاس اثر داده شود تا نتایج تحلیلهای موردنظر از دقت قابل قبولی برخوردار شود [۱-۳]، درواقع این خصوصیت، وابسته به اندازه^۱ بودن [۴] رفتار ماده را در مقیاس نانو^۲ نشان می دهد. در مقیاسهای کوچک، اندازه نانوسازهها در تغییرات پارامترهای کمانشی و ارتعاشاتی آنها گاها برجسته است. نتایج شبیهسازیهای اتمی و تجربی نشان داده است که در مقیاسهای کوچک، بین تاثیر اندازه سازه و خاصیتهای مکانیکی آن، رابطهی مفهومی به گونهای برقرار است که چشمپوشی از این اثرها و نیروهای بین اتمی باعث می شود نتایج پاسخها و درنتیجه طراحی انجام گرفته کاملاً اشتباه باشد. اگرچه روشهای است. اتمی مانند شبیهسازی مکانیک مولکولی[۵] نیز میتوانند این اثرها و نیروهای بین اتمی را ثبت کنند، اما استفاده از این روشها، ازنظر حجم محاسبات به دلیل زیاد بودن تعداد اتمها، مقرون به مرفه نیست. بنابراین تحلیلهای موردنظر با استفاده از مکانیک کلاسیک[۶] انجام می گیرد. اگرچه روش مکانیک کلاسیک حل-های منطقی ارائه می کند اما اثرات مقیاسهای کوچک و نیروهای بین اتمی را در نظر نمی گیرد. بابراین، های منطقی ارائه می کند اما اثرات مقیاسهای کوچک و نیروهای بین اتمی را در نظر نمی گیرد. بابراین، ممکن نیست که این روش برای تحلیل سازههای نانومقیاس، قابل اطمینان باشد. در سالهای اخیر، تئوری

¹⁻ Size depended

²⁻ Nano scale

الاستیسیته غیرمحلی^۱[۷] یکی از مهمترین و پرکاربردترین تئوریها درزمینهی تحقیقات نانو میباشد. برای هر تحقیق در زمینه نانو، در نظر گرفتن اثرات مقیاسهای کوچک و بیناتمی ضروری میباشد، این تئوری برای سازههای مختلف در مقیاس نانو استفاده میشود؛ در تئوری الاستیسیته غیرمحلی، با درنظر گرفتن تنش در یک نقطه بهعنوان تابعی از کرنش در تمامی نقاط محدوده موردنظر، اثرات مقیاس-های کوچک در مدلسازی لحاظ میشوند. بر اساس این تئوری، معادلات اساسی برای یک جسم غیرمحلی^۲ الاستیک همگن ایزوتروپیک خطی را، با صرفنظر از نیروهای حجمی، میتوان به دست آورد.

برای نمایش تأثیرات تنشهای سطحی در رفتار الاستیک یک نانوساختار، گورتین-مورداک [۱۳] چهارچوبی مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته با در نظر گرفتن اثرات تنشهای سطحی که دارای قابلیتی بسیار عالی برای اثر دادن تنشهای سطح در پاسخ مکانیکی یک نانوساختار است را در نظر گرفتند، از این تئوری در بسیاری از مطالعات سالهای گذشته استفاده شده است. درواقع تئوری گورتین- مورداک بر پایهی تئوری صفحات کلاسیک بیان میشود. لازم به ذکر است در کار حاضر شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای نانوصفحه هدفمند، ساده^۳ میباشد.

۱-۴- مروری بر کارهای پیشین

کمانش سازههای مکانیکی ازجمله تیرهای مستقیم یا خمیده، ستونها، ورقهای مستطیلی و دایرهای، پوستههای استوانهای، مخروطی و کروی همواره از موضوعات تحقیقات در ادوار مختلف بوده است [۲۱–۸]. شرایط مرزی سازهها، شکل هندسی، نوع بارگذاری، ناقص یا سالم بودن سازه و ابعاد هندسی ازجمله عوامل مهم بر مساله ناپایداری سازه میباشد که میتواند تحقیقات در زمینه کمانش را روزبهروز گستردهتر نماید. در سالهای اخیر، ظهور تکنولوژی نانو، علاقههای زیادی را به بررسی سیستمهایی که قسمت قابل توجهای

¹⁻ Nonlocal elasticity theory

²⁻ Nonlocal

³⁻ Simply supported

اتم سطحی نسبت به اتمهای حاضر در جسم دارند، جلب کرده است. بهویژه نانوصفحهها، نانوسیمها و نانوذرات. در نانوصفحات، بخش عمدهای از نانوصفحه که بخش داخلی و غیر سطحی آن میباشد، معمولاً در برابر تنش سطحی کمانش می کند. این کرنش الاستیک در بدنه، باعث تغییر شکل در شبکهبندی سطح میشود. از آنجایی که بخش داخلی بدنه و بخش خارجی بدنه به هم متصل هستند، باید این مشکل به صورت پیوسته حل شود . برای حل این مشکل، نیازمند یک مدل کمیتی از خواص سطح هستیم که با بدنه متفاوت باشد. در تئوری الاستیسیه سطحی که بر اساس تئوری گورتین – مورداک بیان میشود، مطابق شکل ۱-۱ سطح تقسیم بین لایه ی سطحی و خارجی ترین لایه ی بدنه در نظر گرفته میشود. سطح تقسیم موردنظر، سطح موجود در لایه ی به فاصله نصف ضخامت از وسط بدنه میباشد [۱۴].



شكل ١-١نمايش سطح تقسيم نانوصفحه

در ابتدا گورتین و مورداک تئوری خود را برای محاسبهی تنش سطحی در مواد جامد ارائه کردند که در آن نانوصفحه را به دو قسمت با خواص فیزیکی متفاوت تقسیم می کند، به گونهای که بدنه را قسمتی از نانوصفحه در نظر می گیریم که خواص فیزیکی آن در نزدیک سطح به صورت قابل ملاحظهای با داخل بدنه متفاوت باشد. همیلتون و ولفر [۱۴] در مقالهای جداگانه به توضیح و معرفی چندین تئوری برای الاستیسیتهی سطحی در مواد نانو پرداخته است، در این مقاله نیز به معرفی و تاکید بر اهمیت تئوری الاستیسیته سطحی گورتین- مورداک پرداخته شده است. انصاری و همکارانش [۱۵] کمانش و ارتعاش یک نانوصفحهی متشکل

از مواد هدفمند را بر اساس تئوری الاستیسیتهی سطح تحت بار حرارتی تحلیل و بررسی کردند، در این مقاله با بهدست آوردن مقادیر کار، انرژی جنبشی، انرژی کرنشی و سپس با استفاده از اصل همیلتون اقدام به استخراج معادلات حرکت کردند. انصاری و غلامی [۱۶] بررسی رفتار خمش و کمانش نانوصفحات میندلین را بر اساس تئوری گورتین- مورداک با در نظر گرفتن اثرات سطحی تحلیل و بررسی کردند. کیانی [۱۷] به کمک تئوری گورتین- مورداک آنالیز ترمومکانیکی یک نانوصفحه را با در نظر گرفتن انرژی سطح انجام داد، او در این تحقیق اثرات پارامترهایی از قبیل دمای محیط، سرعت زاویهای، شاخص تابع توانی و اثرات انرژی سطح را بر رفتار این نانوصفحه مورد بررسی قرار داد. براتی و شاهوردی [۱۸] کمانش حرارتی و مکانیکی یک نانوصفحه را که در محیط حرارتی قرار دارد و خواص مواد در راستای ضخامت طبق مدل مورى-تاناكا تغيير ميكند، مورد تحليل قراردادند و اثر نسبت طول به ضخامت را بر بار كمانش بحراني بررسی کردند. انصاری و محمدی در تحقیق خود مشخصههای پسکمانش در یک نانوتیر را که برپایهی تئوري الاستيسيتهي سطحي بر اساس مدل گورتين- مورداک مورد بررسي قراردادند، آنها براي استخراج معادلات غیرخطی موجود در این کار از روش نیوتن و نرمالایز کردن معادلات استفاده کردند. انصاری و همكاران [۱۹] ارتعاش اجباری یک تیر تیموشینکو (را بر پایهی تئوری الاستیسیتهی سطحی انجام دادند، در این تحقیق نیروهای وارد بر تیر تیموشینکو بهصورت غیرخطی در نظر گرفته شده است و برای حل معادلات بهوجود آمده از روابط ون- کارمن استفاده کردهاند. انصاری و همکاران ارتعاشات غیرخطی یک نانوتير تيموشينكو را بر پايهى تئورى الاستيسيتهى سطحى تحليل و بررسى كردند، آنها براى استخراج معادلات مربوط به حرکت و شرایط مرزی حاکم بر مسأله از اصل همیلتون استفاده کردند. تحلیل پایداری و مطالعه رفتار کمانش صفحات، همواره به عنوان یکی از مهمترین موضوعات در تحلیل

سازهها مورد توجه بوده است. تئوری الاستیسیته غیرمحلی نیز تئوری مهمی در زمینهی کاری نانو به شمار

¹⁻ Timoshenko beam

میآید که در برگیرنده اثرات مقیاس کوچک و نیروهای بین اتمی میباشد. سینز و مرمو [۲۰] کمانش غیر محلى سيستم دوصفحهاي نانو تحت بار دومحوري را بر پايهي تئوري الاستيسيتهي غيرمحلي بررسي كردند، در این تحقیق از تئوری الاستیسیتهی غیرمحلی برای تأثیر دادن اثرات خیلی کوچک در تغییر مودهای ارتعاشی و کمانشی استفاده شده است، آنها در این تحقیق تفاوت بین کمانش یک محوره و دومحوره را مورد تحقیق و بررسی قرار دادند. انصاری و پوراشرف [۲۱] ارتعاشات واداشته غیرخطی نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند را در محیط حرارتی با در نظر گرفتن اثرات تنش سطحی و غیر محلی مورد تحلیل و بررسی قرار دادند، در این تحقیق برای در نظر گرفتن اثرات سطحی از تئوری الاستیسیته گورتین- مورداک استفاده شده است و برای در نظر گرفتن اثرات غیرمحلی در معادلات از تئوری الاستیسیته غیر محلی استفاده شده است. انصاری و غلامی [۲۲] ارتعاشات و پس کمانش یک نانوتیر تیموشینکو را تحت بارهای دمایی، مکانیکی و الکتریکی بر اساس تئوری الاستیسیتهی غیر محلی مورد بررسی قرار دادند، آنها در این تحقیق برای استخراج معادلات مربوط به حرکت و شرایط مرزی مساله از اصل همیلتون ً و روابط غیرخطی ون کارمن استفاده کردند. نامی و جانقربان [۲۳] کمانش حرارتی یک نانوصفحهی ساخته شده از مواد هدفمند را با درنظر گرفتن اثرات سطح بر اساس تئوری غیرمحلی تغییرشکل برشی مرتبهی سوم^۳ تحلیل کردند. کرمانجانی و هاشمی [۲۴] اثرات مقیاسهای کوچک بر روی کمانش نانوصفحات مستطیلی را بر اساس تئوری غیرمحلی تغییرشکل برشی مرتبه سوم تحلیل و بررسی کردند. هاشمی و ناظمنژاد [۲۵] کمانش و ارتعاشات نانوصفحات مستطیلی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم با شرایط مرزی گیردار و ساده بررسی کردند . نرندر [۲۶] کمانش صفحات را در مقیاس نانو و میکرو بر اساس تئوری صفحات دومتغیره و با در نظر گرفتن اثرات غیر محلی مورد مطالعه و بررسی قرار داد، نرندر این تحقیق

¹⁻ Surface stress

²⁻ Hamilton principle

³⁻ Nonlocal third-order shear deformation

برای بهدست آوردن معادلات غیرخطی حرکت، از اصل کار مجازی^۱ استفاده کرد. کمانش و پیچش وابسته به اندازه در صفحات نانو با در نظر گرفتن اثرات سطح توسط چان و چن [۲۷] بررسی شد، آنها این بررسی را با نتیجهی حاصله از تحقیق مشابه بدون در نظر گرفتن اثرات سطح تئوری تنش سطحی مرتبه بالا بررسی کردند و تفاوت رفتاری را در این دو حالت نمایش دادند. شکرانی و کریمی [۲۸] ارتعاشات آزاد وابسته به اندازه را در یک نانوصفحه با در نظر گرفتن اثرات سطح را توسط روش تفاضل محدود بررسی کردند.آنها در این تحقیق از روشهای ناویر و روش تفاضل محدود استفاده کردند.

طبق آنچه بیان شد، با توسعه موتورهای پرقدرت الکتریکی، توربینها، راکتورها و دیگر ماشین آلات صنعتی، استفاده از موادی با مقاومت حرارتی بالا و مقاوم ازلحاظ مکانیکی یک نیاز ضروری به شمار می رود. کاربرد مواد هدفمند با توجه به ویژگیهای مطلوب، روز به روز در حال افزایش به ویژه جهت استفاده در محیطهای با درجه حرارت بالا می باشد. تاکنون تحقیقی در خصوص بررسی رفتار ارتعاشی و کمانشی نانوصفحات FGM تحت بارگذاری ترمومکانیکی صورت نگرفته است. در این پایان نامه از دو نوع بارگذاری حرارتی متفاوت استفاده شده است که بارگذاری های حرارتی مفروض، ناشی از اختلاف دمای دو سطح بالا و پایین نانوصفحه به صورت خطی و غیر خطی می باشد. قابل ذکر است بارگذاری حرارتی پیش فرض در این پایان نامه ناشی از اختلاف دما به صورت غیر خطی می باشد. بنابراین با توجه به کاربردهای نانوصفحات FGM و اهمیت این مواد در صنعت، یافتن یک مدل ریاضی مناسب برای بررسی دقیق نانوصفحات FGM از اهمیت بالایی

¹⁻ Virtual work



فرول بدی

۱-۲ مقدمه

برای بررسی رفتار ارتعاشی و کمانشی نانوصفحه مورد نظر بر اساس تئوری مورد نظر، با توجه به خواستههای مساله، اقدام به استخراج معادلات لازم میکنیم.

۲-۲- معادلات اساسی و بنیادی مکانیک

رفتار مکانیکی پیش بینی شده توسط مدل مکانیک محیط پیوسته کلاسیک، مستقل از ویژگیهای اتمی در نانوساختارها است. به دلیل سادگی و کارا بودن معادلات مکانیک محیطهای پیوسته، مدلهای پیوستهی مختلفی توسعه یافتند تا اثرات اندازه را به روش زنجیرهی معمولی ترکیب کنند. در این بخش یک مدل پیوستهی غیرکلاسیک را بر اساس روش گورتین – مورداک معرفی میکنیم تا بتوانیم معادلات صریح را که نشاندهندهی پاسخ ارتعاشی و کمانشی نانوصفحهی ساخته شده از مواد هدفمند است با در نظر گرفتن اثرات مقیاسهای کوچک و تنشهای سطحی بیابیم.

شکل خطی رابطهی بین تنش و کرنش برای سطح یک نانوصفحه را میتوان با استفاده از تئوری جامدات الاستیک که توسط گورتین و مورداک بیان شد استخراج کرد. بر اساس این تئوری برای هر کدام از سطوح نانوصفحه هدفمند، خواص مواد از قبیل ضریب پواسون، مدول یانگ، چگالی و ... را در نظر میگیریم. معادلات اساسی بر اساس معادلات کلاسیک به صورت زیر بیان می شود [۱۳]:

$$div \,\sigma_{\alpha\beta} = \rho \, \vec{\ddot{u}} \tag{1-7}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \mu \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{(7-7)}$$

$$di\nu\sigma_{\alpha\beta}^{s} = \sigma_{\alpha\beta}n + \rho_{0}\ddot{u} \tag{(7-7)}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{s} = \tau^{s}\delta_{\alpha\beta} + (\mu^{s} - \tau^{s})\varepsilon_{\alpha\beta} + (\lambda^{s} + \tau^{s})\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + \tau^{s}\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$$
^(f-T)

$$\sigma_{\alpha z}^{s} = \tau^{s} \frac{\partial u_{z}}{\partial x_{\alpha}} \tag{(\Delta-T)}$$

در روابط بالا، عبارتهای $\sigma_{\alpha\beta}$ (u, $\sigma_{\alpha\beta}$ به ترتیب معرف تنش و جابجایی در بدنهی موردنظر میباشند. ثوابت λ , μ ، ضرایب لامه در بدنهی موردنظر میباشند. $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{s}$ نیز نمایش دهندهی تنش و کرنش سطحی در نانوصفحهی موردنظر میباشد. ثابت τ^{s} نمایش دهندهی کشش سطحی باقی مانده میباشد که در بالا و پایین نانوصفحه به طور یکنواخت توزیع شده است. n بردار نرمال صفحهی مورد نظر است که جهت آن رو به بیرون است.

در روابط بالا برای مقادیر $\mathcal{E}_{\gamma\gamma}$ و $\delta_{lphaeta}$ (دلتای کرونکر) داریم[۱۳]:

$$\varepsilon_{\gamma\gamma} = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}$$
 (9-7)

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha = \beta \\ 0 & \text{if } \alpha \neq \beta \end{cases}$$
(Y-Y)

(۱۵] خرایب لامه مربوط به سطح میباشند λ^s, μ^s

$$\mu^{s} = \frac{E^{s}}{2(1+\nu)} \qquad \qquad \lambda^{s} = \frac{E^{s}\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (\lambda-\gamma)$$

در روابط بالا *E*, v, *E^s* به ترتیب نشاندهندهی مدول یانگ^۲ مربوط به سطح نانوصفحه، نسبت پواسون^۳ و مدول یانگ مربوط به بدنهی نانوصفحهی موردنظر میباشد. -۳-۲- معادلات حرکت آزاد نانوصفحهی هدفمند شکل۲-۲ نمایشدهنده نانوصفحهای ساختهشده از مواد هدفمند با طول *a* ، عرض *d* و ارتفاع *h* میباشد

که از مواد فلز و سرامیک تشکیل شده است. اگر مواد سطح بالا را سرامیک و مواد سطح پایین نانوصفحه را

¹⁻ Lame constants

²⁻ Young's modulus

³⁻ Poisson's ratio

فلز در نظر بگیریم بر اساس تئوری همسانسازی^۱ موری- تاناکا^۲، برای بهدست آوردن خواص مواد در راستای ضخامت بین دو سطح خواهیم داشت[۱۱]:

$$P(z) = P_m + P_{cm}V_f(z)$$

 $P_{cm} = P_c - P_m$ (۱۰-۲)
در روابط بالا زیرنویسهای m, c به ترتیب اشاره به خاصیت سرامیک و فلز دارد و P نشان گر خواص مواد
هدفمند میباشد. کسر حجمی سرامیک و فلز را میتوان به صورت زیر در نظر گرفت[۱۱].
 $V_f(z) = (\frac{1}{2} + \frac{z}{h})^k$
در رابطه بالا k اشاره به شاخص تابع توانی دارد.

محور خنثی برای نانوصفحات متشکل از مواد هدفمند تابعی به صورت زیر تعریف می شود [۱۵].

$$z_0 = \frac{\int_{-(h/2)}^{(h/2)} zE(z)dz}{\int_{-(h/2)}^{(h/2)} E(z)dz}$$
(17-7)



شكل ۲-۱ نماي شماتيك نانوصفحه با لايه سطحي

¹⁻ Homogenization method

²⁻ Mori–Tanaka

مولفههای تنسور مربوط به تنش بدنه مطابق قانون هوک برحسب مولفههای غیرصفر تنسور کرنش، به صورت زیر قابل بیان است[۳۰].

$$\sigma_{xx}^{b} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^{2}} (\varepsilon_{xx} + \nu(z)\varepsilon_{yy})$$
(line)

$$\sigma_{yy}^{b} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^{2}} (\varepsilon_{yy} + \nu(z)\varepsilon_{xx})$$
(...)

$$\sigma_{xy}^{b} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \varepsilon_{xy}$$
⁽⁵⁾
⁽¹⁾

مولفههای تنش غیر صفر که بیان گر تنش مربوط به بدنهی نانوصفحه باشد، به صورت زیر میباشد[۳۰]:

$$\sigma_{xx}^{b} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^{2}} \left(\varepsilon_{xx} + \nu(z)\varepsilon_{yy} \right) + \frac{\nu(z)}{1 - \nu(z)} \sigma_{zz}$$
(lie)

$$\sigma_{yy}^{b} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^{2}} \left(\varepsilon_{yy} + \nu(z)\varepsilon_{xx} \right) + \frac{\nu(z)}{1 - \nu(z)} \sigma_{zz}$$
^(...)

$$\sigma_{xy}^{b} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \varepsilon_{xy}$$
⁽⁵⁾

(14-7)

در روابط بالا کرنش های مربوط به بدنه به صورت زیر فرض شدهاند [۳۰]:

مختصات Z, Y, X بر اساس تئوری کلاسیک به صورت زیر بیان می شود [۳۰]:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial x^2}$$
(ilia)

$$\varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial y^2} \tag{(...)}$$

$$\varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial x \partial y} \tag{2}$$

نشانگر انحراف جانبی صفحهی موردنظر میباشد. جابجایی هر نقطه از صفحه در راستای محورهای W

$$u_x = -z \frac{\partial W(x, y, t)}{\partial x}$$
(lib)

$$u_{y} = -z \frac{\partial W(x, y, t)}{\partial y}$$
(...)

$$u_z = W(x, y, t) \tag{5}$$

زیر در نظر می گیریم[۱۵]

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{s+}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{s+}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{s-}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{s-}}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{Z}{h} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{s+}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{s+}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{s-}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{s-}}{\partial y} \right) \right]$$
(1A-Y)

تنش بیانشده در بالا مؤلفهای از تنش است که در تئوری کلاسیک در مقایسه با دیگر مؤلفهها نادیده شد، اما برای ارضا شدن شرایط تئوری گورتین- مورداک لازم است این مؤلفه از تنش را به صورتی که ذکر شد در محاسبات لحاظ کنیم.

انرژی کرنشی نانوصفحات را با در نظر گرفتن تنش سطحی بر پایهی تئوری الاستیسیته صفحات پیوسته میتوان به صورت زیر در نظر گرفت[۱۵]:

$$S = \frac{1}{2} \int_{A} \int_{-(h/2)}^{h/2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dz dA + \frac{1}{2} \int_{S^+} \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij} dS + \frac{1}{2} \int_{S^-} \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij} dS$$
(19-7)

¹⁻ Non-classical equation of motion

رابطهی بالا بیانگر مجموع انرژی کرنشی بدنهی نانوصفحه و سطوح بالا و پایین نانوصفحه است، انتگرال ابتدایی بیانگر انرژی کرنشی^۱ بدنه نانوصفحه موردنظر، انتگرال دوم نشاندهندهی انرژی کرنشی سطح بالایی نانوصفحه و انتگرال سوم نمایشگر انرژی کرنشی موجود در سطح پایینی نانوصفحه میباشد. انرژی جنبشی^۲ یک نانوصفحه با جرم و مجذور سرعتش متناسب است. در نانوصفحهی هدفمند مورد بررسی،

برای به دست آوردن انرژی کل نانوصفحه که شامل انرژی بدنه و سطوح بالا و پایین میباشد، خواهیم داشت[۱۵]:

$$K = \frac{1}{2} \int_{A} I_1 \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 dA$$
 (Ibe)

$$I_1 = I_0 + [\rho^{s+} + \rho^{s-}] \tag{(4)}$$

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \, dz \tag{(z ``-`)}$$

در رابطهی بالا عبارت ρ^{s+}, ρ^{s-} به ترتیب بیانگر چگالی جرمی سطوح Γ پایین و بالا است و I_0 بیانگر چگالی جرمی بدنه نانوصفحه موردنظر است.

روابط مفید و متعددی برای تعریف کار بهعنوان یک کمیت فیزیکی روشن، وجود دارد. کار درواقع نوعی انرژی است که توسط یک نیروی خارجی به نانوصفحه وارد و یا از آن خارج میشود. در سیستم مورد بررسی که یک نانو صفحهی هدفمند است، کار بهصورت انرژیای تعریف میشود که توسط نیروهای خارجیای در راستای محورهای χ, χ به نانوصفحه وارد میشود و باعث جابجایی و تغییر شکل در نانوصفحه میشود[۱۵]. $W^{\text{ext}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [N_{x}(\frac{\partial W}{\partial x})^{2} + N_{y}(\frac{\partial W}{\partial y})^{2}] dA$

¹⁻ Strain energy

²⁻ Kinetic energy

³⁻ Surface mass density

در رابطهی بالا N_y , N_x نیروهای اعمالی در جهت محورهای مختصات y, x میباشند که ممکن است متشکل از چند مؤلفه باشد و مؤلفههای $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ تغییرات جابجاییهای نانوصفحه در راستای محورهای مختصات y, x هستند.

برای استخراج معادله حرکت از اصل همیلتون استفاده میشود [۱۵].

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta S + \delta W^{ext}) dt = 0$$
(TT-T)

در رابطهی بالا عملگر وریشن ^۱ تغییرات مربوط به انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار را نسبت به جابجایی در بازه زمانی معین نشان میدهد.

۲–۵– انواع بار گذاری دمایی

در این پایاننامه هدف بررسی رفتار نانوصفحه تحت حالتهای متنوع بارگذاری است.بارگذاری بهصورت ترکیبی از بار حرارتی و بارگذاری مکانیکی میباشد. بار حرارتی ناشی از اختلاف دمایی است که در راستای ضخامت میباشد. در ادامه حالاتی از تغییرات دمایی را که در این پایاننامه اثر آنها بر رفتار ارتعاشی و کمانشی نانوصفحه مورد بررسی قرار خواهد گرفت را بیان میکنیم.

۲-۵-۲- اختلاف دمای خطی

در این حالت فرض بر این است که افزایش دما در راستای ضخامت به صورت خطی^۲ تغییر می کند. به منظور استخراج رابطه دما در این حالت با بهره گیری از رابطه انتقال حرارت و فرض این که دمای سطح بالا، دمای سطح سرامیک و دمای سطح پایین، دمای سطح فلز باشد، خواهیم داشت[۲۹]:

$$K\frac{d^2T}{dz^2} = 0, \quad T\left(z = \frac{h}{2}\right) = T_c \qquad T\left(z = -\frac{h}{2}\right) = T_m \tag{(1.16)}$$

¹⁻Variation

²⁻ Linear Temperature Distribution(LTD)

در رابطهی بالا
$$K$$
 ضریب هدایت حرارتی در راستای ضخامت میباشد که ثابت در نظر گرفته شده است. با
حل معادلهی مربوط به تغییرات دما و همچنین در نظر گرفتن شرایط مرزی مساله خواهیم داشت:
 $T(z) = \frac{\Delta T}{h} \left(z + \frac{h}{2}\right) + T_m, \qquad \Delta T = T_c - T_m$
در رابطهی بالا دمای مربوط به سطح فلز T_m برابر با ۳۵ درجه سانتی گراد فرض می شود.
 $T - 0 - 7$

در این حالت افزایش دما را در راستای ضخامت به صورت غیرخطی^۱ فرض کرده ایم، با فرض انجام شده برای تغییرات دما در راستای ضخامت، ضریب هدایت حرارتی را همانند خواص مواد که تحت توزیع توانی فرض شده است و در معادله (۲–۱۰) قابل مشاهده است، در نظر می *گیر*یم[۱۱]:

$$K(z) = K_m + K_{cm} \left[\frac{2z+h}{2h}\right]^k \tag{(YF-Y)}$$

که در آن:
$$K_{cm} = K_c - K_m$$
 (۲۷-۲)

است. با در نظر گرفتن حالت پایا برای معادله انتقال حرارت و شرایط مرزی موجود برای نانوصفحه داریم[۳۱]:

$$\frac{d}{dz}\left[K(z)\frac{dT}{dz}\right] = 0 \quad ; \quad T\left(z = \frac{h}{2}\right) = T_c \quad ; \quad T\left(z = -\frac{h}{2}\right) = T_m \tag{YA-Y}$$

با اعمال شرایط مرزی بالا و حل معادلهی موجود برای تغییرات در راستای ضخامت خواهیم داشت:

$$T(z) = T_m + \frac{\Delta T}{C} \left[\left(\frac{2z+h}{2h} \right) - \frac{K_{cm}}{(K+1)K_m} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{k+1} + \frac{K_{cm}^2}{(2k+1)K_m^2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{2k+1} - \frac{K_{cm}^3}{(3k+1)K_m^3} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{3k+1} + \frac{K_{cm}^4}{(4k+1)K_m^4} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{4k+1} - \frac{K_{cm}^5}{(5k+1)K_m^5} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^{5k+1} \right]$$

$$(\Upsilon^{9-\Upsilon})$$

¹⁻ Nonlinear Temperature Distribution(NTD)

در رابطهی بالا، *C* بهصورت زیر تعریف میشود:

۲۲-۶- انواع بار گذاری مکانیکی

$$C = 1 - \frac{K_{cm}}{(k+1)K_m} + \frac{K_{cm}^2}{(2k+1)K_m^2} - \frac{K_{cm}^3}{(3k+1)K_m^3} + \frac{K_{cm}^4}{(4k+1)K_m^4} - \frac{K_{cm}^5}{(5k+1)K_m^5}$$
(°·-٢)

در این حالت فرض بر این است که بار گذاری مکانیکی وارد بر نانوصفحه مورد نظر بهصورت تک محوره و در یک راستا بر نانوصفحه اثر کند، در این حالت نیرو در سمت محور مختصات y به نانوصفحه وارد می شود:



1- Uni axial

۲-۶-۲- بارگذاری دومحوره ۱

در این حالت از بارگذاری فرض بر این است که نانوصفحه موردنظر تحت بارگذاری مکانیکی از هر دو جهت محورهای مختصات باشد، که در شکل زیر به صورت شماتیک نمایش داده شده است.



شکل۲-۳ بارگذاری دومحوره

در این فصل تمامی معادلات و مفاهیم اصلی که با داشتن آنها میتوانیم رفتار نانوصفحه هدفمند مورد نظر را تحت بارگذاری بررسی و تحلیل کنیم را، به دست آورده و معرفی کردیم.

¹⁻ Bi axial
هل موم

ص معادلات

۳-۱-۳ مقدمه

در این فصل به اثبات و حل روابطی میپردازیم که در فصل دوم این پایاننامه بیان شد. هدف از حل این روابط بهدست آوردن یک راه حل کلی و منطقی برای پیش بینی رفتار نانوصفحه تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی میباشد. با حل معادلات حاصل از فصل قبل یک معادله دیفرانسیل برحسب جابجایی استخراج خواهد شد. به روش ارائه شده در ادامه فصل میتوانیم رفتار ارتعاشی و کمانشی نانوصفحه را مورد بررسی قرار دهیم.

$$\sigma_{xx}^{s^{\pm}} = \tau^{s} + (2\mu^{s} + \lambda^{s})\frac{\partial u_{x}}{\partial x} + (\lambda^{s} + \tau^{s})\frac{\partial u_{y}}{\partial y} = \tau^{s} \mp \frac{h}{2}((2\mu^{s} + \lambda^{s})\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}}\right) + (\lambda^{s} + \tau^{s})\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}}\right)$$
(lie)

$$\begin{split} \sigma_{yy}^{s\pm} &= \tau^{s} + (2\mu^{s} + \lambda^{s})\frac{\partial u_{y}}{\partial y} + (\lambda^{s} + \tau^{s})\frac{\partial u_{x}}{\partial x} = \tau^{s} \mp \frac{h}{2} \bigg((2\mu^{s} + \lambda^{s})\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}}\right) + (\lambda^{s} + \tau^{s})\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}}\right) \bigg) \end{split}$$
(...)

$$\sigma_{xy}^{s^{+}} = \mu^{s} \left(\frac{u_{x}}{y} + \frac{u_{y}}{x} \right) - \tau^{s} \left(\frac{u_{y}}{x} \right) = \mp \frac{h}{2} (2\mu^{s} - \tau^{s}) \left(\frac{\partial^{2} W}{\partial y^{2}} \right)$$
(z)

$$\sigma_{xz}^{s\pm} = \tau^s \frac{\partial W}{\partial x}$$
⁽³⁾

$$\sigma_{yz}^{s^{\pm}} = \tau^{s} \frac{\partial W}{\partial y}$$

با توجه به رابطه (۲–۱۸) که به ارضا شدن شرایط تئوری گورتین- مورداک می انجامید، می توانیم مؤلفهی تنش در راستای ضخامت را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} \left[(\tau^{s+} + \tau^{s-}) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{z}{h} \left[(\tau^{s+} - \tau^{s-}) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right]$$
(7-7)

بنابراین با داشتن تنش در راستای ضخامت میتوانیم مؤلفههای تنش مربوط به بدنهی نانوصفحه را به صورتی که تئوری گورتین- مورداک را ارضا کند با جای گذاری رابطهی (۳–۶) در رابطهی (۲–۱۴) و جای-گذاری رابطهی (۲–۱۵) در رابطهی بهدست آمده خواهیم داشت:

$$\begin{split} \sigma_{xx}^{b} &= -\frac{E(z)z}{1-\nu(z)^{2}} \left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}} \right) + \frac{\nu(z)}{\left(1 - \nu(z) \right)} (\sigma_{zz}) \\ &= -\frac{E(z)z}{1-\nu(z)^{2}} \left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}} \right) + \frac{\nu(z)}{\left(1 - \nu(z) \right)} \left(\frac{1}{2} (\tau^{s+} + \tau^{s-}) \right) \\ &\frac{z}{h} (\tau^{s+} - \tau^{s-}) \left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}} \right) \end{split}$$

$$\begin{split} \sigma_{yy}^{b} &= -\frac{E(z)z}{1-\nu(z)^{2}} \left(\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}} \right) + \frac{\nu(z)}{\left(1-\nu(z)\right)} \left(\sigma_{zz} \right) \\ &= -\frac{E(z)z}{1-\nu(z)^{2}} \left(\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}} \right) + \frac{\nu(z)}{\left(1-\nu(z)\right)} \left(\frac{1}{2} \left(\tau^{s+} + \tau^{s-} \right) \right) \\ &+ \frac{z}{h} \left(\tau^{s+} - \tau^{s-} \right) \right) \left(\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}} \right) \end{split}$$
(\downarrow)

$$\sigma_{xy}^{b} = -\frac{E(z)z}{(1+v(z))} \frac{\partial^{2}W}{\partial x \partial y}$$
⁽⁵⁾
⁽⁷⁻⁷⁾

حال که تمامی مؤلفههای تنش، اعم از تنش سطحی و تنشهای مربوط به بدنه را محاسبه کردیم، با در نظر گرفتن تنشهای خیلی کوچکی که در راستای ضخامت وجود دارند و با استفاده از فرمول (۲-۲۴) انرژی کرنشی مربوط به نانوصفحهی هدفمند را محاسبه میکنیم [۱۵]:

$$S = \frac{1}{2} \int_{A} \left[\overline{M}_{xx} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \overline{M}_{yy} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + 2\overline{M}_{xy} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + Q_x \frac{\partial W}{\partial x} + Q_y \frac{\partial W}{\partial y} \right] dA \tag{(f-T)}$$

در رابطهی بالا $Q^s_y, Q^s_x, \overline{M}_{xy}, \overline{M}_{yy}, \overline{M}_{xx}$ بهصورت زیر تعریف میشوند:

$$\begin{split} \overline{M}_{xx} &= M_{xx} + M_{xx}^{s} \\ &= \frac{h}{2} (\tau^{s-} - \tau^{s+}) + (A_{11} + A_{11}^{s} (\tau^{s+} + \tau^{s-}) + B_{11}^{s} (\tau^{s+} - \tau^{s-}) \\ &- \frac{h^{2}}{4} (2\mu^{s+} + \lambda^{s+} + \lambda^{s-} + 2\mu^{s-})) \frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}} + (B_{11} + A_{11}^{s} (\tau^{s+} + \tau^{s-}) \\ &+ B_{11}^{s} (\tau^{s+} - \tau^{s-}) - \frac{h^{2}}{4} (\lambda^{s+} + \tau^{s+} + \tau^{s-} + \lambda^{s-})) \frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}} \end{split}$$
(JE)

$$\begin{split} \overline{M}_{yy} &= M_{yy} + M_{yy}^{s} \\ &= \frac{h}{2} (\tau^{s+} - \tau^{s-}) + (B_{11} + A_{11}^{s} (\tau^{s+} + \tau^{s-}) + B_{11}^{s} (\tau^{s+} - \tau^{s-}) \\ &- \frac{h^{2}}{4} (\lambda^{s+} + \tau^{s+} + \tau^{s-} + \lambda^{s-})) \frac{\partial^{2} W}{\partial x^{2}} + (A_{11} + A_{11}^{s} (\tau^{s+} + \tau^{s-}) + B_{11}^{s} (\tau^{s+} - \tau^{s-}) \\ &- \frac{h^{2}}{4} (2\mu^{s+} + \lambda^{s+} + \lambda^{s-} + 2\mu^{s-})) \frac{\partial^{2} W}{\partial y^{2}} \end{split}$$

$$\overline{M}_{xy} = M_{xy} + M_{xy}^{s} = (D_{11} - \frac{h^{2}}{4}(2\mu^{s-} - \tau^{s+} + 2\mu^{s-} - \tau^{s-}))\frac{\partial^{2}W}{\partial x \partial y}$$
(5)

$$Q_x^s = \sigma_{xz}^{s^+} + \sigma_{xz}^{s^-} = \tau^{s^+} \frac{\partial W}{\partial x} + \tau^{s^-} \frac{\partial W}{\partial x}$$
(3)

$$Q_{y}^{s} = \sigma_{yz}^{s^{+}} + \sigma_{yz}^{s^{-}} = \tau^{s^{+}} \frac{\partial W}{\partial y} + \tau^{s^{-}} \frac{\partial W}{\partial y}$$
($(\Delta - \Psi)$)

در روابط بالا S^-, S^+ بیان کننده یسطح بالا و پایین نانوصفحه می باشند. عبارات $(A_{11}, B_{11}, D_{11}, A_{11}^s, B_{11}^s)$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ B_{11} \\ D_{11} \\ B_{11}^{S} \end{pmatrix} = \int_{-(h/2)}^{h/2} z^{2} \begin{cases} -\frac{E(z)}{1 - v(z)^{2}} \\ -\frac{E(z)v(z)}{1 - v(z)^{2}} \\ -\frac{E(z)}{1 + v(z)} \\ \frac{v(z)}{(1 - v(z))h} \end{cases} dz$$

$$(6-7)$$

$$A_{11}^{s} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu(z)}{2(1-\nu(z))} z dz$$
(Y-T)

برای استخراج معادله دیفرانسیل غیرکلاسیک مربوط به نانوصفحه با توجه به اصل همیلتون و آنچه در فرمول (۲-۲۲) گفته شد، خواهیم داشت:

$$\begin{split} \int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta S + \delta W^{ext}) \, dt &= 0 \end{split} \tag{A-\vec{v}} \\ \int_{t_1}^{t_2} (\delta \left(\frac{1}{2}I_0 \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right) - \delta (\bar{M}_{xx} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) + \bar{M}_{yy} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + 2\bar{M}_{xy} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right) \\ &+ Q_x \frac{\partial W}{\partial x} + Q_y \frac{\partial W}{\partial y} + \delta (\frac{1}{2} \left(N_x \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + N_y \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right))) \, dt = 0 \end{split} \tag{A-\vec{v}}$$

با توجه به اصل همیلتون، پس از جایگذاری انرژی جنبشی، انرژی کرنشی و کار انجام شده توسط نیروهای خارجی در فرمول (۳–۸)، پس از اعمال عملگر وریشن و استفاده از انتگرال جزءبهجزء^۱ و برابر قرار دادن معادلهی بهدستآمده با صفر، روابط زیر که بیانگر معادله حرکت و شرایط مرزی حاکم بر نانوصفحه هستند، قابل استخراج است.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{M}_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \overline{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \overline{M}_{yy}}{\partial y^2} - N_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) - N_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial Q_x^s}{\partial x} \\ + \frac{\partial Q_y^s}{\partial y} = I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ \delta W &= 0 \text{ or } \left[\frac{\partial \overline{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{M}_{xy}}{\partial y} + Q_x^s - N_x \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right] n_x \\ + \left[\frac{\partial \overline{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{M}_{yy}}{\partial y} + Q_y^s - N_y \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right] n_y = 0 \end{aligned}$$
(10.17)

¹⁻ Integrating by parts

$$\delta\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) = 0 \text{ or } \left[\overline{M}_{xy}n_x + \overline{M}_{yy}n_y\right] = 0 \tag{5}$$

(11-37)

در عبارات بالا پارامترهای n_y, n_x اشاره به شرایط مرزی درون صفحهای دارند. با جای گذاری معادلات (۵–۳) در معادله (۳–۱۰) خواهیم داشت:

$$\overline{M}_{xx} = \frac{h}{h}(\tau^{s+} - \tau^{s-}) + \alpha_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$
(lie)

$$\overline{M}_{yy} = \frac{h}{h}(\tau^{s+} - \tau^{s-}) + \alpha_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$
(...)

$$\overline{M}_{xy} = \alpha_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \tag{5}$$

$$Q_x^s = [\alpha_4] \frac{\partial W}{\partial x} \tag{(3)}$$

$$Q_{y}^{s} = [\alpha_{4}] \frac{\partial W}{\partial y} \tag{(a.)}$$

(17-8)

در معادلات بالا $lpha_5, lpha_4, lpha_3, lpha_2, lpha_1$ بهصورت زیر در نظر گرفتهشدهاند:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_{11} + A_{11}^s (\tau^{s+} + \tau^{s-}) + B_{11}^s (\tau^{s+} - \tau^{s-}) \\ &- \frac{h^2}{4} (2\mu^{s+} + \lambda^{s+} + 2\mu^{s-} + \lambda^{s+}) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\alpha_2 = D_{11} - \frac{h^2}{4} \left(2\mu^{s-} - \tau^{s+} + 2\mu^{s-} - \tau^{s-} \right) \tag{(4)}$$

$$\alpha_{3} = B_{11} + A_{11}^{s}(\tau^{s+} + \tau^{s-}) + B_{11}^{s}(\tau^{s+} - \tau^{s-}) - \frac{h^{2}}{4}(\lambda^{s+} + \tau^{s+} + \lambda^{s-} + \tau^{s-})$$
(z)

$$\alpha_4 = \tau^{s+} + \tau^{s-} \tag{(3)}$$

$$\alpha_5 = \alpha_3 + \alpha_2 \tag{(4)}$$

(17-77)

۳–۵– حل مساله

بهمنظور آنالیز و بررسی پاسخ ارتعاشی و پس کمانشی نانوصفحه مورد نظر، که یک نانوصفحه هدفمند است، باید معادله حرکت صفحه را به صورت تابعی از جابجایی و زمان در نظر گرفت، در نتیجه پاسخ را به صورت تابع زیر که شرایط مرزی ساده را ارضا کند در نظر میگیریم:

$$W(x, y, t) = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\Omega t}$$
(10-7)

نیروهای اعمالی به نانوصفحه را بهصورت زیر در نظر می گیریم:

$$N_x = \Gamma N_T + \psi N_m$$
 (الف)

$$N_{y} = \Phi N_{T} + \varphi N_{m} \tag{(4)}$$

(18-37)

در رابطهی بالا پارامترهای $(\psi, \Phi, \phi, \Gamma)$ به صورت ضرایبی با مقادیر ۱۹۰ تعریف میشوند. مؤلفههای مربوط به بارگذاری مکانیکی و حرارتی بهصورت زیر تعریف میشوند. بارگذاری مکانیکی وارد بر صفحه به صورت ثابت میباشد در صورتی که بارحرارتی از رابطهی زیر استخراج میشود:

$$N_T = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}^T \, dz \tag{1.17-7}$$

$$\sigma_{xx}^{T} = -\frac{E(z)\alpha(z)(T - T_0)}{1 - \nu(z)}$$
(1A- \mathcal{V})

قابل ذکر است که در رابطهی بالا T_0 اشاره به دمای اولیهی نانوصفحه دارد و T بسته به نوع حالت دمایی که برای توزیع بار حرارتی در نظر می گیریم متفاوت خواهد بود. مقدار فرضی برای T_0 در این پایاننامه ۳۰ درجه سانتی گراد در نظر گرفته شده است. به این ترتیب هنگامی که دمای دو سطح فلز و سرامیک برابر با مفر باشد، با توجه به رابطهی (۲–۲۵) مقدار پارامتر T در رابطهی (۳–۱۸) برابر با اختلاف دماهای T_0 و مفر باشد، با توجه به رابطهی (۲–۲۵) مقدار پارامتر T در رابطهی (۳–۱۸) برابر با اختلاف دماهای T_0 و مفر باشد، می توجه به رابطهی (۲–۲۵) مقدار پارامتر T در رابطهی (۳–۱۸) برابر با اختلاف دماهای T_m می شود که با توجه به فرضیات در این پایاننامه ، برابر با ۵ درجه سانتی گراد می شود. در واقع هنگامی که اختلاف دمای سطوح بالا و پایین نانوصفحه صفر می شود، بار گذاری صفر نبوده و بار گذاری ناشی از یک اختلاف دمای مادی است که آنرا می توان به صورت بار گذاری ناشی از اختلاف دمای یکنواخت در اختلاف دمای یک و نظر گرفت.

برای تحلیل و بررسی فرکانسهای نانوصفحه موردنظر، پارامتر دمایی بیبعد بهصورت زیر تعریف میکنیم.
$$\lambda_T = \Delta T rac{a^2}{h^2} lpha_m$$

در رابطهی بالا α_m ، نمایشدهندهی ضریب انبساط حرارتی^۱ فلز میباشد. با جایگذاری رابطهی (۳–۱۵) در رابطهی (۳–۱۴) که بر اساس جابجایی و تغییرات جابجایی نسبت به محورهای مختصات y, x است، می توان فرکانس های طبیعی نانوصفحهی موردنظر را بهدست آورد.

$$\Omega_{mn}^{2} = -\frac{1}{I_{1}a^{4}b^{4}} [(\pi^{4}\alpha_{1}a^{4}n^{4} + N_{T}(\Gamma\pi^{2}m^{2}b^{4}a^{2} + \Phi a^{4}n^{2}b^{2}\pi^{2}) + N_{m}(\psi\pi^{2}m^{2}b^{4}a^{2} + \varphi a^{4}n^{2}b^{2}\pi^{2}) + 2\pi^{4}\alpha_{2}b^{2}a^{2}m^{2}n^{2}) + \pi^{4}\alpha_{1}b^{4}m^{4} - \alpha_{3}(\pi^{2}m^{2}b^{4}a^{2} + b^{2}\pi^{2}a^{4}n^{2})]$$

$$(\gamma - \gamma)$$

¹⁻ Thermal expansion coefficient

رابطهی بالا بیان کنندهی فرکانس ارتعاشی نانوصفحهی موردنظر میباشد که میتوان با استفاده از این رابطه و تغییر پارامترهای (ψ, Φ, φ, Γ) فرکانس ارتعاشی نانوصفحه را تحت بارگذاریهای مختلف پیشبینی کرد.

فركانس طبيعي نانوصفحهي را به شكل زير بيبعد ميكنيم.

$$\omega_{\rm mn} = \Omega_{\rm mn} a^2 \sqrt{\frac{I_0}{-A_{11}}} \tag{(1-7)}$$

برای تجزیه و تحلیل رفتار کمانش نانوصفحه متشکل از مواد هدفمند موردنظر همانند آنچه در مورد رفتار ارتعاشی نانوصفحه انجام دادیم نیز پیش خواهیم رفت با این تفاوت که در مورد بررسی رفتار کمانشی نانوصفحه و به دست آوردن بار بحرانی کمانش نانوصفحهی موردنظر، پارامتر زمان دخیل نخواهد بود و درنتیجه می توان پاسخ عمومی جابجایی را برای پیشبینی رفتار کمانشی به صورت زیر فرض کرد:

$$W(x, y) = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$
(17-7)

برای تحلیل رفتار کمانشی نانوصفحهی مورد نظر با دوحالت مختلف برای پیش بینی بارهای کمانشی بحرانی وارد بر نانو صفحه مواجه خواهیم شد. با مساوی صفر قرار دادن مقدار مربوط به فرکانس طبیعی نانوصفحه که در رابطه (۳–۴۲) آمده است، بار بحرانی پیش کمانش به دست میآید.

حالت اول: اگر فرض کنیم که بار حرارتی وارد بر نانوصفحه معلوم باشد و هدف به دست آوردن بارگذاری مکانیکی بحرانی وارد بر نانوصفحه باشد؛ در اینصورت خواهیم داشت:

$$N_{m} = -\frac{1}{(\psi \pi^{2} m^{2} b^{4} a^{2} + \varphi a^{4} n^{2} b^{2} \pi^{2})} [(\pi^{4} \alpha_{1} a^{4} n^{4} + N_{T} (\Gamma \pi^{2} m^{2} b^{4} a^{2} + \Phi a^{4} n^{2} b^{2} \pi^{2}) + 2\pi^{4} \alpha_{2} b^{2} a^{2} m^{2} n^{2}) + \pi^{4} \alpha_{1} b^{4} m^{4} - \alpha_{3} (\pi^{2} m^{2} b^{4} a^{2} + b^{2} \pi^{2} a^{4} n^{2})]$$

$$(\Upsilon \gamma - \Upsilon)$$

حالت دوم: اگر فرض کنیم که بارگذاری مکانیکی وارد بر نانوصفحه معلوم باشد و هدف به دست آوردن بار حرارتی بحرانی وارد بر نانوصفحه باشد؛ در اینصورت خواهیم داشت:

$$\begin{split} N_T &= -\frac{1}{(\Gamma \pi^2 m^2 b^4 a^2 + \Phi a^4 n^2 b^2 \pi^2)} [(\pi^4 \alpha_1 a^4 n^4 \\ &+ N_m (\psi \pi^2 m^2 b^4 a^2 + \varphi a^4 n^2 b^2 \pi^2) + 2\pi^4 \alpha_2 b^2 a^2 m^2 n^2) \\ &+ \pi^4 \alpha_1 b^4 m^4 - \alpha_3 \left(\pi^2 m^2 b^4 a^2 + b^2 \pi^2 a^4 n^2\right)] \end{split}$$

با داشتن روابط مربوط به توزیع دماهای مختلف و روابط بیانگر رفتار ارتعاش و فرکانس طبیعی نانوصفحه هدفمند و همچنین روابط مربوط به کمانش نیروهای دمایی و مکانیکی، میتوانیم تحلیل دقیقتری روی نانوصفحهی موردنظر را داشته باشیم که در ادامهی این پایاننامه و فصل بعد به صورت مفصل به آن خواهیم پرداخت.

$$N_{m} = -\frac{1}{(\psi \pi^{2} m^{2} b^{4} a^{2} + \varphi a^{4} n^{2} b^{2} \pi^{2})} [\pi^{4} \alpha_{1} a^{4} n^{4} + 2\pi^{4} \alpha_{2} b^{2} a^{2} m^{2} n^{2} + \pi^{4} \alpha_{1} b^{4} m^{4} - \alpha_{3} (\pi^{2} m^{2} b^{4} a^{2} + b^{2} \pi^{2} a^{4} n^{2})]$$

$$(\Upsilon \Delta - \Upsilon)$$

$$N_{T} = -\frac{1}{(\Gamma \pi^{2} m^{2} b^{4} a^{2} + \Phi a^{4} n^{2} b^{2} \pi^{2})} [\pi^{4} \alpha_{1} a^{4} n^{4} + 2\pi^{4} \alpha_{2} b^{2} a^{2} m^{2} n^{2} + \pi^{4} \alpha_{1} b^{4} m^{4} - \alpha_{3} (\pi^{2} m^{2} b^{4} a^{2} + b^{2} \pi^{2} a^{4} n^{2})]$$

$$(\Upsilon P-\Upsilon)$$





۴–۱– مقدمه

پس از به دست آوردن معادلات حرکت، به تحلیل رفتار نانوصفحه تحت بارگذاری ترمومکانیکی میپردازیم که منجر به استخراج نتایج لازم برای بررسی رفتار ارتعاشی و کمانشی نانوصفحه میشود. خواص سازه مورد نظر، مطابق جدول (۴–۱) است.

بعاول (۲۰۰۰) عواط مانان مورد استعاده در فاختیل فاختر [۳۰۰]					
Property	Si	Al			
E(GPa)	210	70			
ν	0.24	0.35			
$\alpha(K^{-1})$	5×10^{-6}	23.6×10^{-6}			
$ ho\left(rac{kg}{m^3} ight)$	2331	2700			
$ ho^{s}\left(rac{kg}{m^{2}} ight)$	3.17×10^{-7}	5.46×10^{-7}			
$E^{s}\left(\frac{N}{m}\right)$	-10.036	+6.09			
$ au^{s}\left(\frac{N}{m}\right)$	+0.6048	+0.9108			
$K(\frac{W}{mk})$	148	250			

جدول (۴-۱) خواص ماده مورد استفاده در تحلیل حاضر [۱۵]

در تمام حالات طول، عرض، ضخامت و شاخص تابع توانی نانوصفحه به ترتیب مقادیر ۲۰۰ نانومتر، ۲۰۰ نانومتر، ۱۰ نانومتر و عدد ثابت ۱۰، می باشد. مگر در حالاتی که خلاف آن ذکر شده باشد. همچنین در هر قسمت که نوع توزیع حرارت و بارگذاری مکانیکی ذکر نشده است، بار حرارتی به صورت غیر خطی در راستای ضخامت و بارگذاری مکانیکی به صورت دومحوره انتخاب شده است. همچنین ضریب پواسون به خاطر فرض ساده سازی، در حالت توزیع دمای غیر خطی ۲/۲۴ در نظر گرفته شده است.

۴-۲- اعتبار سنجی نتایج

برای بررسی صحت کار صورت گرفته در این پایاننامه ، مقایسهای بین نتایج استخراج شده در این پایاننامه با مراجع [۲۹] و [۱۵] صورت گرفته است که نتایج این مقایسه در جداول (۴–۲) و (۴–۳) ارائه شده است. در جدول (۴–۲)، به مقایسه نتایج بهدستآمده از پایاننامه حاضر با مرجع [۲۹] پرداختیم. برای نتایج بهدستآمده در جدول (۴–۲)، به مقایسه نتایج بهدست مده از پایاننامه حاضر با مرجع مدور (۴–۲)، به مقایسه نتایج بهدست مده از پایاننامه حاضر با مرجع مدور (۴–۲)، به مقایسه نتایج بهدست آمده از پایاننامه حاضر با مرجع مدور (۴–۲)، به مقایسه نتایج بهدست مده از پایاننامه حاضر با مرجع (۳–۲)، به مقایسه نتایج بهدست آمده از پایاننامه حاضر با مرجع مدور (۴–۲)، به مقایسه نتایج بهدست آمده از پایاننامه حاضر با مرجع مدور از مربع مدور به است که به بهدست آمده در هر دو حالت توزیع بار به صورت غیر خطی در نظر گرفته شده است. قابل ذکر است که به علت کمبود مراجع برای بررسی نتایج دقیق تر مجبور به استفاده از مرجع مذکور شدیم که در آن اثرات سطح را نادیده گرفته است.

جدول (۴-۲) مقایسه دمای بحرانی صفحه مطابق تئوری کلاسیک با مرجع [۲۹]

	k	a/h	$\Delta T_{cr}(^{\circ}\mathrm{C})$
Ref.[31]	1	20	363.07
Present work	1	20	363.1

در جدول (۴–۳)، به مقایسه نتایج به دست آمده از پایاننامه حاضر با مرجع [۱۵] پرداختیم. برای نتایج بهدستآمده در هر دو حالت توزیع بار بهصورت خطی در نظر گرفتهشده است.

جدول (۴–۳) مقایسه فرکانس طبیعی نانوصفحه مطابق تئوری غیرکلاسیک با مرجع [۱۵]

	h(nm)	k	ω_{11}
Ref.[15]	1	0.5	19.3
Present work	1	0.5	19.28

در شکل ۴-۱ به بررسی صحت نتایج ارائه شده در این پایاننامه می پردازیم، برای انجام این کار به مقایسه نتایج ارائه شده در این پایاننامه با مرجع [۱۵] می پردازیم.



شکل ۴-۲ در این شکل به بررسی صحت نتایج ارائه شده در این پایاننامه می پردازیم، برای انجام این کار به مقایسه نتایج ارائه شده در این پایاننامه با مرجع [۲۹] می پردازیم.



شکل ۴-۲. اعتبار سنجی اختلاف دمای بحرانی برحسب نسبت ضلع به ضخامت برای شاخصهای تابع توانی مختلف

۴-۳- ارائه و تفسیر نتایج

در این بخش از پایاننامه به ارائه نتایج استخراج شده پرداخته می شود، تحلیل رفتاری نانوصفحه از چند جهت می تواند مورد بررسی قرار گیرد که در ادامه به بررسی تحلیل های مختلف رفتاری نانوصفحه هدفمند می پردازیم.

۴-۳-۱ تحلیل فرکانسی

شکل ۴-۳ نمایشگر فرکانسهای طبیعی نانوصفحه برحسب پارامتر دمایی برای توزیع دماهای مختلف در دو حالت کلاسیک و غیرکلاسیک می باشد. می توان نتیجه گرفت تئوری کلاسیک نسبت به تئوری غیر كلاسيك، مقدار فركانس طبيعي را كمتر پيشبيني ميكند. همچنين با توجه به شكل ميتوان دريافت كه هرچقدر توزیع دماها شامل فرضیات ساده شوندهی بیشتری باشند، مقدار فرکانس طبیعی نیز کمتر می شود.



شکل ۴-۳. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای توزیع دماهای مختلف

شکل ۴-۴ فرکانسهای طبیعی نانوصفحه برحسب پارامتر دمایی با شاخص تابع توانی مختلف در دو حالت کلاسیک و غیرکلاسیک نشان میدهد. میتوان نتیجه گرفت تئوری کلاسیک نسبت به تئوری غیر کلاسیک، مقدار فرکانس طبیعی را کمتر پیشبینی میکند. همچنین مشاهده میشود هرچقدر خواص نانوصفحهی مورد نظر به خواص فلز نزدیکتر باشد، فرکانس طبیعی نانوصفحه کمتر میباشد.



شکل ۴-۴. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای شاخصهای تابع توانی مختلف

شکل ۴–۵ نشان دهنده فرکانس های طبیعی نانوصفحه برحسب پارامتر دمایی برای ضخامت های مختلف نانوصفحه می باشد. می توان نتیجه گرفت با افزایش ضخامت نانوصفحه، فرکانس طبیعی مربوط به نانوصفحه کاهش می یابد.



شکل ۴-۵. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای ضخامتهای مختلف (a=b=20h)

شکل ۴-۶ نمایشگر فرکانسهای طبیعی نانوصفحه برحسب پارامتر دمایی برای تنشهای سطحی مختلف نانوصفحه میباشد. میتوان نتیجه گرفت، با کاهش تنشهای سطحی موجود در نانوصفحه، فرکانس طبیعی نانوصفحهی هدفمند کاهش مییابد.



شکل ۴-۷ فرکانسهای طبیعی نانوصفحه برحسب پارامتر دمایی برای مدول یانگ سطحی مختلف نانوصفحه را نشان میدهد. هرچند تاثیر مدول یانگ سطحی در فرکانس طبیعی نانوصفحه ناچیز است، اما با کاهش مقدار مدول یانگ سطحی در نانوصفحه، فرکانس طبیعی نانوصفحه کاهش پیدا میکند.



شکل ۴-۷. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای مدول یانگهای سطحی مختلف

شکل ۴–۸ نشاندهنده فرکانسهای طبیعی نانوصفحه برحسب پارامتر دمایی برای مودهای مختلف فرکانسی نانوصفحه میباشد. به وضوح دیده میشود فرکانس طبیعی نانوصفحه در مودهای بالاتر، بزرگتر از فرکانس طبیعی نانوصفحه نسبت به مودهای پایین تر است.



شکل ۴-۸. فرکانس طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای مود فرکانسیهای مختلف(a=b=20h)

شکل ۴–۹ نمایشگر فرکانس طبیعی برحسب بارمکانیکی محوری برای مودهای مختلف فرکانسی نانوصفحه میباشد. میتوان نتیجه گرفت فرکانس طبیعی نانوصفحه در مودهای بالاتر بزرگتر از فرکانس طبیعی نانوصفحه نسبت به مودهای پایین تر است.



شکل ۴-۹. فرکانس طبیعی برحسب بارگذاری مکانیکی بحرانی برای مود فرکانسیهای مختلف (a=b=20h) شکل ۴-۱۰ فرکانسهای طبیعی برحسب پارامتر دمایی برای نسبت اضلاع مختلف نانوصفحه را نشان میدهد. می توان نتیجه گرفت با زیاد شدن طول نانوصفحه در راستای امتداد اثر نیروی خارجی، فرکانس طبیعی نانوصفحه بیشتر می شود.



شکل ۴–۱۱. فرکانس طبیعی برحسب بار گذاری مکانیکی بحرانی برای نسبت اضلاع مختلف را نشان میدهد. مشاهده می شود که طول ضلع تحت اثر بار گذاری مکانیکی هر چقدر افزایش یابد، فرکانس طبیعی نانوصفحه افزایش می یابد.



شکل ۴–۱۱. فرکانس طبیعی برحسب بارگذاری مکانیکی بحرانی برای نسبت اضلاع مختلف

شکل ۴–۱۲ نشاندهنده ی فرکانس طبیعی برحسب نیروی کمانش بحرانی ، برای توزیع بارگذاری مکانیکی مختلف میباشد. با توجه به شکل میتوان نتیجه گرفت برای نیروی کششی و فشاری اعمال شده، نانوصفحه رفتار ارتعاشی متفاوتی از خود نشان میدهد. نکته یقابل تذکر که به درستی نتایج به دست آمده تأکید دارد، نقطه تلاقی نمودارها $0 = N_m$ است. همچنین میتوان نتیجه گرفت نانوصفحه تحت نیروی فشاری دومحوره کمترین مقدار فرکانس طبیعی را دارد که این رفتار در هنگام اعمال نیروی کششی دومحوره دقیقا برعکس میشود و درواقع نانوصفحه بیشترین فرکانس طبیعی را پیدا میکند.



شکل ۴-۱۲. فرکانس طبیعی برحسب بارگذاری مکانیکی برای توزیع نیروهای مختلف (a=b=20h)

شکل ۴–۱۳. نمایشگر نسبت فرکانس طبیعی غیرکلاسیک به کلاسیک برحسب ضخامت نانوصفحه برای شاخص تابع توانی مختلف است. میتوان نتیجه گرفت هرچقدر ضخامت نانوصفحه کمتر میشود، تأثیر اثرات غیر کلاسیک بر رفتار نانوصفحه بیشتر میشود. همچنین در ضخامتهای بالا میبینیم که رفتار نانوصفحه از دیدگاه کلاسیک و غیرکلاسیک تفاوت زیادی با یکدیگر ندارند. علاوه بر این میتوان نتیجه گرفت هرچقدر خواص نانوصفحه به خواص فلز نزدیکتر باشد، تفاوت نتایج در دو دیدگاه بیشتر میشود.



شكل ۴-١٣. نسبت فركانس طبيعي برحسب ضخامت براي شاخص هاي تابع تواني مختلف

۴-۳-۲ تحلیل کمانش حرارتی

در شکل ۴–۱۴ نمایشدهندهی پارامتر دمای بحرانی کمانش برحسب نسبت طول به ضخامت نانوصفحه برای شاخص تابع توانیهای مختلف است. میتوان نتیجه گرفت هرچقدر ضخامت نانوصفحه کمتر شود خواص تاثیر کمتری بر پارامتر دمای بحرانی میگذارد. همچنین میتوان نتیجه گرفت با نزدیکتر شدن خواص نانوصفحه به خاصیت فلز، دمای بحرانی نانوصفحه کاهش مییابد و این موضوع برای ضخامتهای بالاتر مشهودتر است.



شکل ۴-۱۴. پارامتر دمایی برحسب نسبت ضلع به ضخامت برای شاخصهای تابع توانی مختلف

شکل ۴–۱۵ دمای بحرانی برحسب نسبت ضلع به ضخامت نانوصفحه برای توزیع دماهای مختلف را نشان میدهد. میتوان نتیجه گرفت با افزایش ضخامت، دمای بحرانی افزایش مییابد ، همچنین مشاهده میشود هرچقدر توزیع دما شامل فرضیات ساده شونده بیشتری باشد، دمای بحرانی نانوصفحه نیز کمتر میشود.



شکل ۴-۱۵. دمای بحرانی برحسب نسبت ضلع به ضخامت برای توزیع دماهای مختلف

شکل ۴–۱۶ نمایشدهنده دمای بحرانی برحسب نسبت طول به ضخامت نانوصفحه برای نسبت اضلاع مختلف میباشد. میتوان نتیجه گرفت هرچقدر طول ضلع تحت اثر بارحرارتی بلندتر باشد، دمای بحرانی نیز بیشتر است. در مورد تاثیر ضخامت نانوصفحه بر مقدار بار کمانش بحرانی نانوصفحه میتوان گفت که در حالت کلی با افزایش ضخامت نانوصفحه، مقدار دمای بحرانی نیز افزایش مییابد.



شکل ۴–۱۷. نشانگر نسبت دمای بحرانی غیرکلاسیک به کلاسیک برحسب نسبت طول به ضخامت برای شاخص تابع توانی مختلف است. با کاهش ضخامت نانوصفحه، اثرات غیرکلاسیک تاثیر بیشتری در رفتار نانوصفحه تحت بارگذاری میگذارند. در نتیجه با افزایش ضخامت تاثیر اثرات غیرکلاسیک کاهش مییابد و دیدگاه کلاسیک و غیرکلاسیک به یکدیگر نزدیک میشوند. همچنین میتوان نتیجه گرفت هرچقدر خواص نانوصفحه به خواص فلز نزدیکتر باشد، تفاوت نتایج در دو دیدگاه بیشتر میشود.



شکل ۴–۱۷. نسبت دمای بحرانی برحسب نسبت طول به ضخامت برای شاخص های تابع توانی مختلف (b=100nm; a=100 nm)

شکل ۴–۱۸. نسبت دمای بحرانی در دو حالت کلاسیک و غیرکلاسیک برحسب نسبت طول به ضخامت نانوصفحه برای توزیع دماهای مختلف را بیان میکند. هرچقدر ضخامت کمتر میشود، تأثیر اثرات غیر کلاسیک بر رفتار نانوصفحه بیشتر میشود. همچنین در ضخامتهای بالا بررسی رفتار نانوصفحه از دیدگاه کلاسیک با غیرکلاسیک تفاوت زیادی با یکدیگر ندارند. علاوه بر این میتوان نتیجه گرفت هرچقدر توزیع دما شامل فرضیات ساده شوندهی بیشتری باشد، اختلاف نتایج در دو دیدگاه کمتر میشود.



شکل ۴–۱۸. نسبت اختلاف دمای بحرانی برحسب نسبت طول به ضخامت برای توزیع دماهای مختلف (a=100 nm; b=100 nm)

شکل ۴–۱۹ نمایشدهندهی نسبت دمای بحرانی در دو حالت کلاسیک و غیرکلاسیک برحسب نسبت طول به ضخامت نانوصفحه برای نسبت اضلاع مختلف میباشد. با افزایش ضخامت نانوصفحه، اثرات غیرکلاسیک تاثیر کمتری در رفتار نانوصفحه تحت بارگذاری میگذارند. در نتیجه با کاهش ضخامت تاثیر اثرات غیرکلاسیک افزایش مییابد و دیدگاه کلاسیک و غیرکلاسیک تفاوت بیشتری با یکدیگر پیدا میکنند. علاوه بر این میتوان نتیجه گرفت با افزایش طول ضلع تحت تاثیر بارحرارتی، اختلاف این دو دیدگاه بیشتر میشود.



شکل ۴-۱۹. نسبت اختلاف دمای بحرانی برحسب نسبت طول به ضخامت برای نسبت اضلاع مختلف

۴-۳-۳ تحلیل کمانش مکانیکی

شکل ۴-۲۰ نمایشگر نیروی کمانش بحرانی برحسب نسبت طول ضخامت نانوصفحه را برای شاخص تابع توانی مختلف در دوحالت کلاسیک و غیر کلاسیک و تحت اثر نیروهای دومحوره و تک محوره بیان می کند. هرچقدر خواص نانوصفحه به سمت خواص فلز سوق پیدا می کند، نیروی کمانش بحرانی کاهش می یابد، که برای ضخامتهای بالاتر مشهودتر است . با توجه به شکل می توان دریافت که نیروی کمانش بحرانی در تئوری کلاسیک نانوصفحه نسبت به تئوری غیرکلاسیک کمتر است. همچنین می بینیم که نانوصفحهی تحت اثر بارگذاری تک محوره دارای نیروی کمانش بحرانی بزرگتری درمقایسه با نانوصفحه تحت اثر بارگذاری دومحوره می باشد.



ج) تئوری غیرکلاسیک، بارگذاری تکمحوره در راستای X د) تئوری کلاسیک، بارگذاری تکمحوره در راستای X شکل ۴-۲۰. بارگذاری مکانیکی برحسب نسبت ضلع به ضخامت برای شاخصهای تابع توانی مختلف (a=b=50 nm)

شکل +1 نیروی کمانش بحرانی برحسب نسبت طول به ضخامت نانوصفحه برای نسبتهای مختلف اضلاع با دیدگاه تئوری غیرکلاسیک را نمایش میدهد. در این شکل فرض بر این است که نیرو در جهت محور x به نانوصفحه اعمال میشود. میتوان نتیجه گرفت که هرچقدر طول ضلع تحت اثر نیرو بلندتر باشد، نیرو کمانش بحرانی نیز بیشتر میشود. همچنین مشاهده میشود که هرچقدر ضخامت نانوصفحه کم شود، تاثیر نسبت اضلاع بر نیروی کمانش بحرانی کاهش مییابد.



شکل ۴-۲۱. بارگذاری مکانیکی برحسب نسبت ضلع به ضخامت برای نسبت اضلاع مختلف

۴-۳-۴- تحلیل ترمومکانیکی

در ادامه به بررسی رفتار نانوصفحه تحت بارگذاریهای ترمومکانیکی مختلف میپردازیم. شکلهای ذکر شده در ادامهی کار، چهار نوع بار گذاری ترمومکانیکی را مورد بحث قرار میدهد. حالت الف، نشاندهندهی توزیع بار مکانیکی و حرارتی دومحوره میباشد. حالت ب، نشان دهندهی بار مکانیکی تک-محوره و بار حرارتی دومحوره است. حالت ج، توزیع بار ترمومکانیکی را به صورت بار مکانیکی دومحوره و بار حرارتی تکمحوره بیان میکند و در انتها حالت د، توزیع بار ترمومکانیکی را به صورت بار مکانیکی دومحوره و تکمحوره و بار حرارتی دومحوره بیان میکند و در انتها حالت د، توزیع بار ترمومکانیکی را به صورت بار مکانیکی دومحوره بار نانوصفحه وارد میشوند. شکل ۴-۲۲ نمودار ناحیه پایداری برای نانوصفحه بهازای شاخص تابع توانیهای مختلف در شکل زیر نشان داده شده است. هرچقدر خواص نانوصفحه به سمت فلز بودن سوق پیدا می کند، ناحیه پایداری کوچک می شود. همچنین مشاهده می شود بار بحرانی در حالت دو محوره، دو برابر مقدار بار بحرانی در حالت تک محوره می باشد.



ب) بارگذاری مکانیکی تکمحوره در راستای *x* و حرارتی دومحوره



xد) بارگذاری مکانیکی و حرارتی تک محوره در راستای

شکل ۴-۲۲. ناحیه پایداری نانوصفحه با بارگذاری ترمومکانیکی برای شاخصهای تابع توانی مختلف (h=4nm

شکل ۴–۲۳ نمودار ناحیه پایداری برای نانوصفحه بهازای مدول یانگ سطحی مختلف در شکل زیر نشان داده شده است. با کاهش مقدار مدول یانگ ناحیه پایداری به صورت جزئی کوچک می شود.



ب) بارگذاری مکانیکی تکمحوره در راستای *x* و حرارتی دومحوره





xد) بارگذاری مکانیکی و حرارتی تک محوره در راستای

شکل ۴-۲۳. ناحیه پایداری نانوصفحه با بارگذاری ترمومکانیکی برای مدول یانگهای سطحی مختلف (h=4nm)

شکل ۴–۲۴ نشانگر نمایشدهنده ناحیه پایداری برای نانوصفحه به ازای تنشهای سطحی مختلف است. می توان نتیجه گرفت هرچقدر تنشهای سطحی کمتر باشند، ناحیه پایداری کوچک تر است. مشاهده می شود به طور محسوسی اثر تنش سطحی در ناحیه ی پایداری بیشتر از اثر مدول یانگ سطحی است.



ب) بارگذاری مکانیکی تکمحوره در راستای x و حرارتی دومحوره



د) بارگذاری مکانیکی و حرارتی تک محوره در راستای *X*

N_m(N)

10

15

5

200

0 L 0

شکل ۴-۲۴. ناحیه پایداری نانوصفحه با بارگذاری ترمومکانیکی برای تنش سطحیهای مختلف

شکل ۴–۲۵ نمایش دهنده ناحیه پایداری برای نانوصفحه به ازای ضخامتهای مختلف است. می توان نتیجه با کاهش ضخامت، رفتار نانوصفحه متفاوت خواهد بود. با کاهش ضخامت نانوصفحه، ناحیه پایداری در مقابل بار حرارتی افزایش و در مقابل بار گذاری مکانیکی کاهش می یابد.



ب) بارگذاری مکانیکی تکمحوره در راستای X و حرارتی دومحوره



ج) بارگذاری مکانیکی دومحوره و حرارتی تکمحوره در راستای x



x د) بارگذاری مکانیکی و حرارتی تک محوره در راستای

شکل ۴-۲۵. ناحیه پایداری نانوصفحه با بارگذاری ترمومکانیکی برای ضخامتهای مختلف

شکل ۴-۲۶ نشان دهندهی ناحیه پایداری نانوصفحه به ازای نسبت اضلاع مختلف نانوصفحه است. می توان نتیجه گرفت با کشیده تر شدن نانوصفحه، ناحیه پایداری بزرگ تر می شود.



ب) بار گذاری مکانیکی تکمحوره در راستای X و حرارتی دومحوره


x ج) بارگذاری مکانیکی دومحورہ و حرارتی تکمحورہ در راستای x



د) بارگذاری مکانیکی و حرارتی تک محوره در راستای X

شکل ۴-۲۶. ناحیه پایداری نانوصفحه با بارگذاری ترمومکانیکی برای نسبت اضلاع مختلف

شکل ۴–۲۷ ناحیه پایداری نانوصفحه به ازای توزیع دماهای مختلف نشان می دهد، می توان نتیجه گرفت فرضیات ساده سازی در حل مساله، رفتار متفاوتی در مقابل بار گذاری حرارتی و مکانیکی نشان می دهد. می توان نتیجه گرفت هرچقدر توزیع دما شامل فرضیات ساده شونده ی بیشتری باشد، محدوده ی پایداری برای بار گذاری حرارتی کاهش می یابد. در حالی که مقدار بار مکانیکی به ازای هر دو توزیع حرارتی ثابت است، دلیل این مساله، صفر بودن مقدار اختلاف دما در هنگام مشخص شدن مقدار بار مکانیکی بحرانی است. اختلاف کمی که در اندازه مقدار بار مکانیکی بحرانی برای دو توزیع دما دیده می شود به خاطر فرض ساده سازی در توزیع دمای غیرخطی می باشد که ضریب پواسون را ثابت فرض کرده ایم.



ب) بارگذاری مکانیکی تکمحوره در راستایx و حرارتی دومحوره



ج) بارگذاری مکانیکی دومحوره و حرارتی تکمحوره در راستایx



د) بارگذاری مکانیکی و حرارتی تک محوره در راستای X

شکل ۴-۲۷. ناحیه پایداری نانوصفحه با بارگذاری ترمومکانیکی برای توزیعدماهای مختلف



۵–۱– مقدمه

در این پایاننامه تحلیل کمانش و ارتعاشات نانوصفحه ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بار گذاری حرارتی و مکانیکی با استفاده از تئوری الاستیسیته سطحی انجام شده است.

امروزه بنا به پیشرفت علوم مهندسی استفاده از مواد هدفمند در بخشهای گوناگون دنیای صنعت هر روز گستردهتر میشود. تحلیل و بررسی مواد در مقیاس نانو باعث میشود نتایج ارائه شده از دقت قابل قبولی برخوردار باشند و درنتیجه تحلیل صورت گرفته دقیق باشد. مواد هدفمند بیشتر در محیطهایی با درجه حرارت بسیار بالا و یا در قسمتهایی از صنعت به کاربرده میشود که تحت اثر بارگذاری مکانیکی قرار می گیرد. از مزایا و برتریهای این تحقیق در مقایسه با دیگر پژوهشهای صورت گرفته میتوان به این نکته اشاره نمود که در این پایان امه مواد هدفمند تحت بار ترمومکانیکی از دیدگاه نانو و بارگذاری غیر خطی مورد بررسی قرار گرفته است.

۵-۲- بررسی عوامل موثر بر نانوصفحه

در این بخش از پایاننامه به بررسی عوامل موثر بر رفتار ارتعاشی و کمانشی نانوصفحه میپردازیم. تئوری کلاسیک به دلیل چشمپوشی از اثرات سطحی نانوصفحه، مقدار فرکانس طبیعی نانوصفحه را نسبت به تئوری غیرکلاسیک کمتر نشان میدهد. ازاینرو هرچقدر اثرات سطحی دارای مقدار کمتری باشند نانوصفحه دارای مقدار فرکانس طبیعی بیشتری میباشد.

نمودارهایی که در بخش قبل نمایش داده شد، نشان میدهد که هرچقدر خواص نانوصفحهی مورد بررسی به خواص فلز نزدیک تر باشد یا به عبارتی هرچقدر شاخص تابع توانی بزرگ تر باشد، فرکانس طبیعی نانوصفحه کمتر میشود. رفتار ارتعاشی نانوصفحه در مقابل ضخامت نانوصغحه نیز قابل توجه میباشد، به-طوری که با افزایش ضخامت فرکانس طبیعی نانوصفحه کاهش مییابد در بررسی صورت گرفته بر روی رفتار ارتعاشی و کمانشی نانوصفحه به دلیل اینکه نانوصفحهی مورد نظر تحت بار ترمومکانیکی میباشد، تغییرات دما و همچنین نیروی واردشده بر نانوصفحه از عوامل کمانش نانوصفحه میباشند. در مورد دمای بحرانی مطابق آنچه انتظار داشتیم، با افزایش ضخامت نانوصفحه مقدار دمای بحرانی نیز افزایش مییابد. همچنین هرچقدر خواص نانوصفحهی مورد بررسی به خواص فلز نزدیک تر باشد، مقدار دمای بحرانی کاهش مییابد. تئوری کلاسیک به دلیل چشمپوشی از اثرات سطحی نانوصفحه، مقدار نیروی کمانش بحرانی را در مقایسه با تئوری غیرکلاسیک کمتر نمایش میدهد. در مورد طول ضلعی از نانوصفحه که تحت اثر نیرو میباشد میتوان این گونه نتیجه گرفت که با افزایش طول ضلع نانوصفحه، مقدار نیروی بحرانی کمانش نیز افزایش مییابد. تفاوت دیدگاه کلاسیک و غیر کلاسیک در مورد بررسی مقدار دمای بحرانی کمانش نیز افزایش افزایش ضخامت، تفاوت دیدگاهها کمتر میشود. هرچقدر فرض ساده شونده در توزیع دما در راستای ضخامت بیشتر باشد، تفاوت دو دیدگاه کلاسیک و غیر کلاسیک کمتر میشود و پیشبینیهای رفتار نانوصفحه از این دو دیدگاه نزدیک به هم میشود.

در کنار بررسی عددی صورت گرفته در این پایاننامه تحت عنوان تحلیل کمانش و ارتعاشات نانوصفحه ساختهشده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی با استفاده از تئوری الاستیسیته سطحی بهتر بود که نتایج بهدستآمده را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کنیم، که به دلیل محدودیتهای موجود مقدور نبود.

۵–۳– پیشنهادها

- تحلیل کمانش ترمومکانیکی صفحات نانو با در نظر گرفتن اثرات سطح و اثرات غیرمحلی.
- تحلیل پس کمانش نانوصفحه هدفمند تحت بارگذاری ترمومکانیکی با در نظر گرفتن اثرات سطح.
- تحلیل کمانش و ارتعاشات نانوصفحه هدفمند تحت بارگذاری ترمومکانیکی با در نظر گرفتن اثرات غیرمحلی.

- تحلیل کمانش و ارتعاشات نانوصفحه هدفمند تحت بارگذاری ترمومکانیکی با در نظر گرفتن اثرات سطح و اثرات غیرمحلی در محیط مرطوب
- تحلیل کمانش و ارتعاشات نانوصفحه هدفمند تحت بارگذاری پیچشی مکانیکی با در نظر گرفتن
 اثرات سطح و اثرات غیرمحلی
- تحلیل کمانش و ارتعاشات نانوتیوب ها تحت بارگذاری ترمومکانیکی با در نظر گرفتن اثرات سطح و اثرات غیرمحلی



[1] S. C. Jun, H. Son, "Electrothermal noise analysis in frequency tuning of nanoresonators", Solid-State Electronics, **52(9)**, pp.**1388-1393**, *2008*.

[2] R. Gibson, E. Ayorinde, "Vibrations of carbon nanotubes and their composites: A review", Composites Science and Technology, **67**(1), pp.**1-28**, *2007*.

[3] J. Tsai, T. Lu, "Investigating the load transfer efficiency in carbon nanotubes reinforced nanocomposites", Composite Structures, **90**(2), pp.**172-179**, *2009*.

[4] A. M. Abazari, S. M. Safavi, "Modelling the Size Effects on the Mechanical Properties of Micro/Nano Structures", Int. J. Solids Struct, **15**(11), pp.**43-62**, *2015*.

[5] Chowdhury R, Adhikari S, "A molecular mechanics approach for the vibration of singlewalled carbon nanotubes", Computational Materials Science, **48**(**4**), pp.**730-735**, *2010*.

[6] Timoshenko S. "Vibration Problems in Engineering". New York: Wiley; 1974.

[7] A. C. Eringen, "Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves", International Journal of Engineering Science, **10**(5), pp.**425-435**, *1972*.

[8] R. Ansari, V. mohammadi, "Nonlinear vibration analysis of Timoshenko nanobeams based on surface stress elasticity theory", European Journal of Mechanics A/Solids, **45**(1), pp.**143-152**, *2014*.

[9] M. Safarabadi, M. Mohammadi, "Effect of Surface Energy on the Vibration Analysis of Rotating Nanobeam", Journal of Solid Mechanics, **7**(**3**), pp.**299-311**, *2015*.

[10] R. Ansari, V. mohammadi, "Postbuckling characteristics of nanobeams based on the surface elasticity theory", Composites: Part B, **55**(1), pp.**240-246**, *2013*.

[11] R. Ansari, T. Pourashraf, "An exact solution for the nonlinear forced vibration of functionally Graded nanobeams in thermal environment based on surface elasticity theory", Thin-Walled Structures, **93(1)**, pp.**169-176**, *2015*.

[12] M. Shaat, S. A. Mohamed, "Nonlinear-Electrostatic Analysis of Micro-Actuated Beams Based on Couple Stress and Surface Elasticity Theories", International Journal of Mechanical Sciences, **84(1)**, pp.**208-217**, *2014*.

[13] M.E. Gurtin, A. I. Murdoch, "Surface stress in solids", Int. J. Solids Struct, **14(1)**, pp.**431-440**, *1978*.

[14] J. C. Hamilton, W. G. Wolfer, "Theories of surface elasticity for nanoscale objects", surface science, **603(9)**, pp.**1284-1291**, *2009*.

[15] R. Ansari, M. A. Ashrafi, "Vibration and buckling characteristics of functionally graded nanoplates subjected to thermal loading based on surface elasticity theory", Acta Astronautica, **109(1)**, pp.**42-51**, *2015*.

[16] R. Ansari, R. Gholami, "On the bending and buckling behaviors of Mindlin nanoplates considering surface energies", Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, **57(1)**, pp.**126-137**, *2014*.

[17]K. Kiani, "Thermo-mechanical analysis of functionally graded plate-like nanorotors: A surface elasticity model", International Journal of Mechanical Sciences, **106**(1), pp.**39-49**, **2016**.

[18] M. R. Barati, H. Shahverdi, "Thermo-mechanical buckling analysis of embedded nanosize FG plates in thermal environments via an inverse cotangential theory", Composite Structure, **141(1)**, pp.**203-212**, *2016*.

[19] R. Ansari, V. Mohammadi, "On the forced vibration analysis of Timoshenko nanobeams based on the surface stress elasticity theory", Composites Part B: Engineering, **60(1)**, pp.**158-166**, *2014*.

[20] T. Mumu, J. Sienz," Nonlocal buckling of double-nanoplate-systems under biaxial compression", Composites Part B: Engineering, **44**(1) pp.**84-94**, *2013*.

[21] S. T. Pourashraf, R. Ansari, "Nonlinear forced vibration analysis of functionally graded nanobeams in thermal environments by considering surface stress and nonlocal effects", Modares Mechanical Engineering, **14(16)**, pp. **17-26**, *2015* (In Persian).

[22] R. Ansari, R. Gholsmi, "Thermo-electro-mechanical vibration of postbuckled piezoelectric Timoshenko nanobeams based on the nonlocal elasticity theory", Composites Part B: Engineering, **89**, pp.**316-327**, *2016*.

[23] M. R. Nami, M. Janghorban, "Thermal buckling analysis of functionally graded rectangular nanoplates baed on nonlocal third order shear deformation theory", Aerospace Science and Technology, **41**, PP.**7-15**, *2014*.

[24] M. Kermanjani, Sh. Hosseini-Hashemi, "Exact solutios for buckling of rectangular nanoplate via nonlocal third-order plate theory", Modares Mechanical Engineering, **13(13)**, pp.**33-42**, *2014*(In Persian).

[25] Sh. Hosseini-Hashemi, R. Nazemnezhad, "An analytical study on the buckling and free vibration of rectangular nanoplates using nonlocal third-order shear deformation plate theory", European Journal of Mechanics, **51**(1), pp.**29-43**, *2015*.

[26] S. Nerender, "Buckling analysis of micro-/nano-scale plates based on two-variable refined plate theory incorporating nonlocal scale effects", Composite Structures, **93(12)**, pp.**3093-3103**, *2011*.

[27] Ch. Cheng, T. Chen," Size-dependent resonance and buckling behavior of nanoplates with High-order surface stress effects", Physica E: Low-dimensional systems and nanostructures, **67**, pp.**12-17**, *2015*.

[28] M. Karimi, M. H. Shokrani. "Size-dependent free vibration analysis of rectangular nanoplates with the consideration of surface effects using finite difference method", Journal of Applied and Computational Mechanics, **1**(3), pp.**122-133**, *2015*.

[29] M. R. Eslami, R. javaheri, "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates", AIAA JOURNAL, **40(1)**, pp.**162-169**, **2002**.

[30] Martin H. Sadd, "Elasticity Theory, Application, and Numerics", 3rd ed., Academic Press, Island, 2014.

Abstract

The buckling and vibration responses of nanoplates made of functionally graded materials (FGMs) subjected to Thermomechanical loading under four types of thermal loads are studied in prebuckling domain with considering The effect of surface stress. Types of thermal loads is, Linear Temperature Distribution and Nonlinear Temperature Distribution. Mechanical load is constant. To accomplish this purpose, Gurtin–Murdoch elasticity theory is incorporated in to the classical plate theory to develop a non-classical plate model including the surface effects. The material properties of FGM nanoplate are considered to be graded to the thickness direction on the basis of the power law function. Hamilton's principle is utilized to derive size-dependent governing differential equations of motion and associated boundary conditions. Selected numerical results are presented to indicate the importance of surface stress effect. It is revealed that in the presence of surface stress effect, the influence of material property gradient index on the critical thermal buckling load is more prominent for FGM nanoplate, the role of surface stress effect in the value of critical thermal buckling load is more prominent.

Keywords: Nanoplate, Functionally graded material, Surface stress, Vibration, Buckling, Thermomechanical loading, Gurtin–Murdoch elasticity theory.



Faculty of Mechanical and mechatronics Engineering

M.Sc, Thesis in Applied mechanical engineering

Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Nanoplates Subjected to Thermal and Mechanical Loading Based on Surface Elasticity Theory

by

Alireza Zarghamian

Supervisor

Dr Alireza Shaterzadeh

February 2017