

سُبْحَانَكَ اللَّهُمَّ رَبِّ السَّمَاوَاتِ
الْأَعْلَى وَالْأَرْضِ وَالْعَرْشِ
الْمَجِيدِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل منتهی تنش در اطراف گشودگی بیضوی در صفحات نامحدود متغیر تابعی

نگارنده: حمید عبدالعلیان

استاد راهنما

دکتر محمد جعفری

بهمن ۱۳۹۵



مدیریت تحصیلات تکمیلی

بسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم شماره 7: صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای حمید عبدالعلیان به شماره دانشجویی 9311794، رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان مطالعه‌ی توزیع تنش در اطراف گشودگی بیضوی در صفحات متغیر تابعی که در تاریخ 1395/11/19 با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: <u>بسیار خوب</u> امتیاز: <u>۱۸</u>)	☒ امتیاز	☐ دفاع مجدد	☐ مردود
نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی			

1- عالی (20 - 19)

2- بسیار خوب (18/99 - 18)

3- خوب (16/99 - 17/99)

4- قابل قبول (15/99 - 14)

5- نمره کمتر از 14 غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1- استاد راهنمای اول	دکتر محمد جعفری	استادیار	
2- استاد راهنمای دوم			
3- استاد مشاور			
4- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی وحدتی	استادیار	
5- استاد ممتحن اول	دکتر مهدی قنّاد	دانشیار	
6- استاد ممتحن دوم	دکتر علیرضا شاطرزاده	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمدحسین شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقديم

تقديم به خانواده‌ی مهربانم

تشکر و قدردانی

خداوند بزرگ و مهربان را شاکرم که توفیق کسب علم و دانش را به من عطا فرمود، تا بتوانم این مرحله از علم آموزی را با موفقیت به پایان برسانم. از خانواده‌ی عزیزم به خاطر محبت‌های بی‌منت و حمایت‌های بی‌دریغشان در تمامی مراحل زندگی‌ام، کمال تشکر و سپاس را دارم. از استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر محمد جعفری به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان در کلیه‌ی مراحل انجام پایان‌نامه تقدیر و تشکر می‌نمایم.

تعهد نامه

اینجانب حمید عبدالعلیان دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکانیک طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مطالعه توزیع تنش در اطراف گشودگی بیضوی در صفحات متغیر تابعی تحت راهنمایی دکتر محمد جعفری متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

باشد

چکیده

در این پایان نامه با بسط روش متغیر مختلط لختیسیکی، تحلیل منتهی تنش صفحه‌ی متغیر تابعی دارای گشودگی بیضوی مطالعه شده است. لختیسیکی از روش متغیر مختلط، توزیع منتهی تنش اطراف گشودگی دایروی و بیضی شکل را در صفحات ناهمسانگرد به دست آورد. با بسط این روش برای صفحه‌ی نامحدود متغیر تابعی و استفاده از تابع نگاشت همنوا، توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی و بیضوی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور از تابعی نمایی برای مدل سازی صفحه‌ی متغیر تابعی استفاده شده است. صفحه‌ی مورد نظر به صورت یک چندلایه‌ی نامتقارن می‌باشد که با تغییر تدریجی زاویه‌ی الیاف به صورت صفحه‌ی متغیر تابعی مدل سازی می‌گردد. در این تحقیق تأثیر پارامترهای مختلف نظیر زاویه‌ی چرخش و هندسه‌ی گشودگی بر توزیع منتهی‌های نیرویی و لنگری تنش بررسی می‌شود. صفحه تحت بارگذاری کششی تک محوری قرار دارد. برای بررسی درستی نتایج حاصل از حل تحلیلی حاضر، از حل عددی اجزای محدود به کمک نرم افزار آباکوس استفاده شده است. نتایج حاصل از حل عددی تطابق خوبی با حل تحلیلی دارد. با توجه به نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود که برخلاف انتظار همواره گشودگی دایروی بهترین هندسه برای کاهش تمرکز تنش نیست و در مواردی با انتخاب هندسه و زاویه‌ی چرخش مناسب برای گشودگی می‌توان تمرکز تنش کمتری در مقایسه با گشودگی دایروی داشت.

واژگان کلیدی: منتهی نیرویی و لنگری تنش، حل تحلیلی، صفحه‌ی متغیر تابعی، روش متغیر مختلط

مقالات

۱. چهارمین کنفرانس سراسری توسعه محوری مهندسی عمران، معماری، برق و مکانیک ایران
بررسی تأثیر کشیدگی گشودگی بیضوی در صفحه‌ی متغیر تابعی نمایی تحت بارگذاری‌های
مختلف (پذیرفته شده)
۲. چهارمین کنفرانس سراسری توسعه محوری مهندسی عمران، معماری، برق و مکانیک ایران
بررسی تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بیضوی در صفحه‌ی متغیر تابعی توانی در طول ضخامت
(پذیرفته شده)

فهرست مطالب

فصل ۱ : مواد متغیر تابعی و مروری بر مطالعات پیشین	۱
۱-۱ مقدمه	۲
۲-۱ تعریف مسأله	۳
۳-۱ مواد متغیر تابعی	۳
۱-۳-۱ تاریخچه مواد متغیر تابعی	۵
۲-۳-۱ روش‌های تولید مواد متغیر تابعی	۹
۳-۳-۱ مدل‌های ریاضی مواد متغیر تابعی	۱۰
أ. کسر حجمی	۱۰
ب. تابع نمایی	۱۱
ج. تابع توانی	۱۲
د. تابع نمایی غیرخطی	۱۲
۴-۱ مروری بر مطالعات انجام‌شده	۱۳
۱-۴-۱ صفحه‌ی دارای گشودگی	۱۳
۲-۴-۱ چندلایه‌ی متقارن	۱۷
۳-۴-۱ چندلایه‌ی نامتقارن	۱۹
۴-۴-۱ صفحات متغیر تابعی	۲۱

فصل ۲ : فرمول بندی حل تحلیلی ۲۵

۱-۲ مقدمه ۲۶

۲-۲ نگاشت همنا ۲۶

۳-۲ روش حل و به دست آوردن معادلات حاکم ۲۹

۱-۳-۲ محاسبه ی تابع پتانسیل ۴۲

۴-۲ الگوریتم حل تحلیلی ۴۸

۵-۲ بررسی درستی جواب ها ۴۹

۱-۵-۲ مقایسه با حل عددی ۵۱

۶-۲ جمع بندی ۵۶

فصل ۳ : نتایج برای گشودگی بیضوی ۵۷

۱-۳ مقدمه ۵۸

۲-۳ تأثیر هندسه ی گشودگی ۶۶

۳-۳ تأثیر زاویه ی چرخش گشودگی ۷۳

فصل ۴ : نتیجه گیری و پیشنهادها ۸۵

۱-۴ نتیجه گیری ۸۶

۲-۴ پیشنهادها ۸۷

پیوست ها ۸۹

پیوست الف ۹۰

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱: نمای مقطع استخوان [۳] ۵
- شکل ۲-۱: تغییرات خواص در مواد مختلف [۳] ۹
- شکل ۱-۲: تأثیر پارامتر c بر هندسه‌ی گشودگی ۲۷
- شکل ۲-۲: نحوه‌ی چرخش گشودگی ۲۹
- شکل ۳-۲: توزیع منته‌های نیرو و لنگری تنش در یک لایه [۷۴] ۳۱
- شکل ۴-۲: نمایشی از چیدمان لایه‌ها و نحوه‌ی نام‌گذاری آن‌ها ۳۱
- شکل ۵-۲: نمایشی از صفحه‌ی متغیر تابعی ۳۳
- شکل ۶-۲: نمایشی از روش حل ۴۳
- شکل ۷-۲: اثر تعداد لایه‌های صفحه‌ی متغیر تابعی بر ماکزیمم منته‌ی تنش حول گشودگی
- بیضوی تحت بارگذاری $N_x^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$ ۵۰
- شکل ۸-۲: اثر تعداد لایه‌های صفحه‌ی متغیر تابعی بر ماکزیمم منته‌ی تنش حول
- گشودگی بیضوی تحت بارگذاری $N_x^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$ ۵۰
- شکل ۹-۲: اثر تعداد لایه‌های صفحه‌ی متغیر تابعی بر ماکزیمم منته‌ی تنش حول گشودگی
- بیضوی تحت بارگذاری $N_y^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$ ۵۱
- شکل ۱۰-۲: اثر تعداد لایه‌های صفحه‌ی متغیر تابعی بر ماکزیمم منته‌ی تنش حول
- گشودگی بیضوی تحت بارگذاری $N_y^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$ ۵۱
- شکل ۱۱-۲: نحوه‌ی مش‌بندی در نرم‌افزار اجزای محدود ۵۲
- شکل ۱۲-۲: نحوه‌ی بارگذاری در نرم‌افزار اجزای محدود ۵۳
- شکل ۱۳-۲: بررسی همگرایی مش‌بندی ۵۳

شکل ۲-۱۴: مقایسه‌ی توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_x با روش‌های مختلف برای گشودگی

بیضوی با $c=0/75$ ۵۴

شکل ۲-۱۵: مقایسه‌ی توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_{xy} با روش‌های مختلف برای گشودگی

بیضوی با $c=0/5$ ۵۴

شکل ۲-۱۶: مقایسه‌ی توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_x با روش‌های مختلف برای

گشودگی دایروی ($c=1$) ۵۵

شکل ۲-۱۷: مقایسه‌ی توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_{xy} با روش‌های مختلف برای

گشودگی بیضوی با $c=1/5$ ۵۵

شکل ۲-۱۸: مقایسه‌ی پیشنهادی منته‌ی تنش بی‌بعد N_x از روش‌های تحلیلی و اجزای محدود در

زوایای چرخش مختلف گشودگی بیضوی با $c=0/75$ ۵۶

شکل ۳-۱: تغییرات مدول ینگ خارج محوری نسبت به ضخامت بی‌بعد ۵۸

شکل ۳-۲: تغییرات مدول برشی خارج محوری نسبت به ضخامت بی‌بعد ۵۸

شکل ۳-۳: تغییرات زاویه‌ی محور ماده (θ) نسبت به ضخامت بی‌بعد ۵۹

شکل ۳-۴: توزیع منته‌ی تنش N_x اطراف گشودگی بیضوی ۶۰

شکل ۳-۵: توزیع منته‌ی تنش N_y اطراف گشودگی بیضوی ۶۰

شکل ۳-۶: توزیع منته‌ی تنش N_{xy} اطراف گشودگی بیضوی ۶۱

شکل ۳-۷: توزیع منته‌ی لنگری تنش M_x اطراف گشودگی بیضوی ۶۱

شکل ۳-۸: توزیع منته‌ی لنگری تنش M_y اطراف گشودگی بیضوی ۶۱

شکل ۳-۹: توزیع منته‌ی لنگری تنش M_{xy} اطراف گشودگی بیضوی ۶۱

شکل ۳-۱۰: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_x اطراف گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف ۶۲

شکل ۳-۱۱: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_y اطراف گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف ۶۳

شکل ۳-۱۲: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_{xy} اطراف گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف

۶۳.....

شکل ۳-۱۳: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_x اطراف گشودگی بیضوی در دو بارگذاری

مختلف ۶۴

شکل ۳-۱۴: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_y اطراف گشودگی بیضوی در دو بارگذاری

مختلف ۶۵

شکل ۳-۱۵: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_{xy} اطراف گشودگی بیضوی در دو بارگذاری

مختلف ۶۵

شکل ۳-۱۶: تأثیر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی منته‌ی تنش بی‌بعد N_x برای گشودگی

بیضوی در دو بارگذاری مختلف ۶۶

شکل ۳-۱۷: تأثیر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی منته‌ی تنش بی‌بعد N_y برای گشودگی

بیضوی در دو بارگذاری مختلف ۶۷

شکل ۳-۱۸: تأثیر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی منته‌ی تنش N_{xy} برای گشودگی بیضوی

در دو بارگذاری مختلف ۶۸

شکل ۳-۱۹: تأثیر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_x برای

گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف ۶۸

شکل ۳-۲۰: تأثیر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_y برای

گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف ۶۹

شکل ۳-۲۱: تأثیر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی منته‌ی لنگری تنش M_{xy} برای گشودگی

بیضوی در دو بارگذاری مختلف ۷۰

شکل ۳-۲۲: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_x اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه‌ی مختلف

..... ۷۰

شکل ۳-۲۳: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_y اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه‌ی مختلف

۷۱

شکل ۲۴-۳: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_{xy} اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه‌ی مختلف

۷۱

شکل ۲۵-۳: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_x اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه‌ی

مختلف ۷۲

شکل ۲۶-۳: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_y اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه‌ی

مختلف ۷۲

شکل ۲۷-۳: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_{xy} اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه‌ی

مختلف ۷۳

شکل ۲۸-۳: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منته‌ی تنش بی‌بعد N_x برای گشودگی بیضوی ۷۵

شکل ۲۹-۳: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منته‌ی تنش بی‌بعد N_y برای گشودگی بیضوی ۷۵

شکل ۳۰-۳: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منته‌ی تنش بی‌بعد N_{xy} برای گشودگی بیضوی

۷۶

شکل ۳۱-۳: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_x در جهت x برای

گشودگی بیضوی ۷۶

شکل ۳۲-۳: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_y برای گشودگی

بیضوی ۷۷

شکل ۳۳-۳: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_{xy} برای گشودگی

بیضوی ۷۷

شکل ۳۴-۳: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_x در زوایای چرخش ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه ۸۰

شکل ۳۵-۳: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_y در زوایای چرخش ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه ۸۰

شکل ۳۶-۳: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_{xy} در زوایای چرخش ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه ۸۱

- شکل ۳-۳۷: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد در جهت x در زوایای چرخش ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه ۸۲
- شکل ۳-۳۸: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_y در زوایای چرخش ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه ۸۲
- شکل ۳-۳۹: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_{xy} در زوایای چرخش ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه ۸۳

فهرست جداول

- جدول ۱-۱ خواص مکانیکی ماده [۲] ۳
- جدول ۱-۳ مقادیر منته‌های نیرو و لنگری تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی بیضوی با هندسه‌ی $c=0/5$ ۷۸
- جدول ۲-۳ مقادیر منته‌های نیرو و لنگری تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی بیضوی با هندسه‌ی $c=0/75$ ۷۸
- جدول ۳-۳ مقادیر منته‌های نیرو و لنگری تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی بیضوی با هندسه‌ی $c=1/25$ ۷۹
- جدول ۴-۳ مقادیر منته‌های نیرو و لنگری تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی بیضوی با هندسه‌ی $c=1/5$ ۷۹

علائم

a_0	ثابت حقیقی
a_j	ثابت مختلط مربوط به ریشه‌های معادله‌ی مشخصه
A_j	ثابت مختلط برای تابع پتانسیل مرحله‌ی اول
A_{ij}	ماتریس سفتی کشش
A_{ij}^*	ماتریس سفتی کشش وارون
B_{ij}	ماتریس کوپلینگ
B_{ij}^*	ماتریس کوپلینگ وارون
b_j	ثابت مختلط مربوط به ریشه‌های معادله‌ی مشخصه
C	پارامتر تعیین‌کننده‌ی نسبت ابعاد گشودگی
D_{ij}	ماتریس سفتی خمش
D_{ij}^*	ماتریس سفتی خمش وارون
e	عدد نپر (۲/۷۱۸۲۸)
e_{1j}, e_{2j}, e_{3j}	ثابت مختلط در محاسبه‌ی منته‌های نیرو و لنگری تنش
E_1, E_2	مدول الاستیسیته
E_x, E_y	خواص مواد در جهت‌های اصلی
f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}	ثابت مختلط در محاسبه‌ی منته‌های نیرو و لنگری تنش
f_x, f_y	مؤلفه‌های نیروی داخلی
$f(s)$	نیرو در مرز گشودگی
G_{12}	مدول برشی
G_{xy}	مدول برشی در جهت‌های اصلی
H	ضخامت کل چندلایه
i	ثابت موهومی ($\sqrt{-1}$)
k_1 تا k_8	ثوابت مختلط
K	شمارنده‌ی لایه‌ها
m_x و m_y و m_{xy}	منتجه‌های لنگری تنش بی‌بعد
M_x و M_y و M_{xy}	منتجه‌های لنگری تنش
M_x^∞ و M_y^∞ و M_{xy}^∞	منتجه‌های لنگری تنش در مرز خارجی صفحه
$m(s)$	خمشی نرمال در مرز گشودگی

M_n	منتجه‌ی لنگری تنش در جهت عمود بر مرز گشودگی
M_{nt}	منتجه‌ی لنگری تنش در جهت مماس بر مرز گشودگی
N	تعداد لایه‌های چندلایه
n_x و n_y و n_{xy}	منتجه‌های تنش بی‌بعد
N_x و N_y و N_{xy}	منتجه‌های تنش
N_x^∞ و N_y^∞ و N_{xy}^∞	منتجه‌های تنش در مرز خارجی صفحه
$p(s)$	نیروی عرضی در مرز گشودگی
P	انتگرال نیرو در مرز گشودگی
P_a, P_b	خواص مواد در لایه‌های بالا و پایین
Q_x و Q_y	نیروهای برشی عرضی
Q_n	نیروی برشی در جهت عمود بر مرز گشودگی
$\bar{Q}_{ij}$	ماتریس سفتی کاهش‌یافته
Re	بخش حقیقی
s	کمان طی شده از گشودگی
s_j	ریشه‌های معادله‌ی مشخصه
t	متغیر انتگرال‌گیری روی مرز
t_k	ضخامت هر لایه
u	جاب‌جایی درون صفحه‌ای
u_0	جاب‌جایی درون صفحه‌ای در صفحه‌ی میانی
v	جاب‌جایی درون صفحه‌ای
v_0	جاب‌جایی درون صفحه‌ای در صفحه‌ی میانی
w	جاب‌جایی عمودی
w_0	جاب‌جایی عمودی صفحه‌ی میانی
z_j	تابع نگاشت
α	زاویه‌ی بین افق و عمود بر مرز گشودگی
β	زاویه‌ی چرخش
γ_{xy} و γ_{xz} و γ_{yz}	کرنش‌های برشی
ε_x و ε_y	کرنش‌های طولی
θ	زاویه‌ی الیاف

متغیر مختلط	ζ
انحنای درون صفحه‌ای	k_x و k_y و k_{xy}
پارامتر تعیین کننده‌ی اندازه‌ی گشودگی	λ
ضریب پواسون	ν_{12} و ν_{21}
ضریب پواسون در جهت اصلی	ν_{xy}
ثابت تابع نمایی	η
عدد پی (۳/۱۴۱۵۹۳)	π
شعاع دایره	ρ
تنش نرمال	σ_x و σ_y
تنش برشی	τ_{xy}
تابع پتانسیل در دایره‌ی واحد	$\varphi(t)$
تابع پتانسیل کل	$\varphi_j''(z_j)$
تابع پتانسیل مرحله‌ی اول	$\varphi_{j1}'(z_j)$
تابع پتانسیل مرحله‌ی دوم	$\varphi_{j2}'(z_j)$
تابع پتانسیل مرحله‌ی دوم در صفحه‌ی ζ	$\varphi_{j2}'(\zeta)$

فصل ۱ : مواد متغیر تابعی و مروری بر مطالعات پیشین

۱-۱ مقدمه

مواد متغیر تابعی نقش مهمی در پیشرفت فناوری دارند. این مواد دارای تغییر خواص پیوسته در جهت مورد نیاز هستند. ایجاد خواصی مانند مقاومت به دمای بالا در یک سمت و خواص مکانیکی مطلوب در سمت دیگر، خصوصیتی است که توجه طراحان را در چند دهه‌ی اخیر به خود جلب کرده است. مواد متغیر تابعی در صنایع مختلفی از قبیل صنایع دریایی، خودروسازی، صنایع هوافضا، نفت و گاز و ... کاربردهای زیادی دارند.

گاهی در برخی موارد طراحان ناچار به ایجاد گشودگی در این سازه‌ها هستند. از جمله‌ی این موارد می‌توان به کاهش وزن سازه، ایجاد راه برای دسترسی به تجهیزات و تعمیر آن‌ها، ایجاد راه ورود و خروج، محل اتصال دو ورق به همدیگر توسط پیچ‌ها و پرچ‌ها، وجود گشودگی‌هایی در پرده‌های توربین‌ها جهت جریان یافتن سیال خنک‌کننده در پرده‌ها و ... اشاره کرد. این امر باعث افت شدید مقاومت سازه در این نواحی می‌شود. طراحان در این موارد برای استفاده از کامپوزیت‌ها و مواد متغیر تابعی دچار مشکل هستند. گشودگی‌های ایجاد شده در ساختارها باعث کاهش مقاومت سازه و حتی منجر به شکست سازه از این نواحی می‌شوند. لذا به منظور پیش‌بینی رفتار سازه در حضور گشودگی‌ها و ایجاد اطمینان در طراحی، مطالعه‌ی توزیع تنش در اطراف گشودگی‌ها و محل ایجاد این تنش‌ها به منظور کاهش تمرکز تنش امری ضروری به نظر می‌رسد. تمرکز تنش اهمیت ویژه‌ای در ارزیابی قابلیت اطمینان سازه‌های مهندسی دارد. دیده شده است که ۸۰ درصد شکست‌های انجام شده در سازه‌های هوایی از محل بست‌ها و اتصالات روی داده است [۱]. صفحه‌های متغیر تابعی، که به صورت سازه‌های کامپوزیتی چندلایه‌ی نامتقارن هستند؛ در ساخت ساختارهای جدید نقش مهمی ایفا می‌کنند. این نوع سازه‌ها حاوی گشودگی در ساختارهایی از قبیل ستون میانی بال هواپیما و باریکه‌های ستون‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در تحلیل صفحه‌ی متغیر تابعی حاوی گشودگی، هندسه‌ی گشودگی و جهت‌گیری (زاویه‌ی

چرخش) گشودگی از جمله پارامترهای تأثیرگذار بر میزان تمرکز تنش در اطراف گشودگی می‌باشند؛ به گونه‌ای که با انتخاب صحیح آن‌ها می‌توان تمرکز تنش را به میزان قابل توجهی کاهش داد. در این پایان‌نامه، با توجه به ضرورت‌های ذکر شده، سعی شده است تا پارامترهای مختلف، به‌طور کامل بررسی شده و تأثیر آن‌ها بر مقدار و نحوه توزیع منته‌های تنش مورد مطالعه قرار گیرد.

۲-۱ تعریف مسأله

هدف اصلی این پایان‌نامه بررسی و تحلیل تنش یک صفحه‌ی متغیر تابعی است که در مرکز دارای گشودگی بیضوی است. ابعاد صفحه در مقایسه با ابعاد گشودگی طوری در نظر گرفته شده است که بتوان آن را بی‌نهایت فرض کرد. در این تحقیق متغیرهای تأثیرگذار بر توزیع تنش اطراف گشودگی شامل هندسه‌ی گشودگی و جهت‌گیری (زاویه‌ی چرخش) هست. بارگذاری صفحه به‌صورت کششی تک‌محوره در جهت‌های x و یا y ؛ که در لبه‌های صفحه‌ی میانی و در فاصله‌ی دور از گشودگی است و در بارگذاری تک‌محوره لبه‌های دیگر آزاد هستند. صفحه دارای رفتار الاستیک خطی است و جنس لایه‌های مختلف مورد بررسی در این تحقیق گرافیت BMI^۱ است که خواص مکانیکی آن در جدول ۱-۱ ارائه شده است. در این پایان‌نامه تأثیر هر یک از متغیرهای ذکر شده بر توزیع منته‌های تنش مورد بررسی قرار گرفته و برای بررسی درستی نتایج حاصل از حل تحلیلی حاضر، نتایج به‌دست‌آمده با حل عددی مقایسه گردیده است.

جدول ۱-۱ خواص مکانیکی ماده [۲]

نوع ماده	$E_1(\text{GPa})$	$E_2(\text{GPa})$	$G_{12}(\text{GPa})$	ν_{12}
گرافیت BMI	۱۲۴	۸/۴۶	۴/۵۹	۰/۲۸

۳-۱ مواد متغیر تابعی

مواد متغیر تابعی^۲ گروه جدیدی از مواد هستند که برای استفاده در محیط‌هایی با دمای بالا و

^۱ Bismaleimide

^۲ Functionally Graded Materials

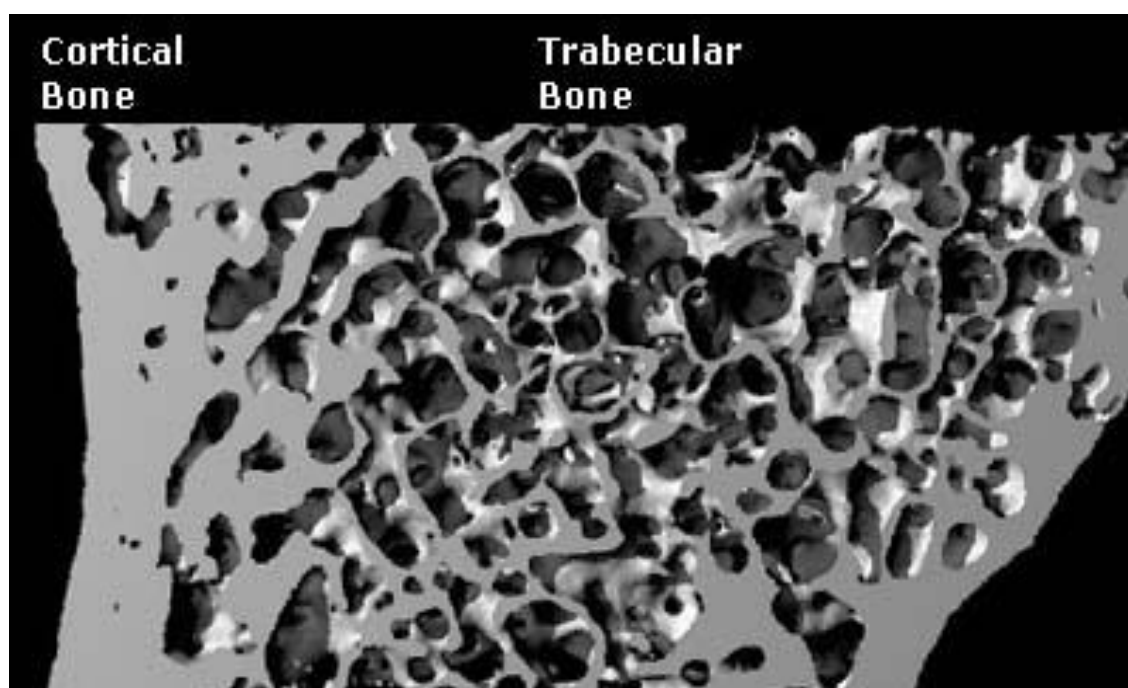
شرایطی که یک قطعه بایستی خواص متفاوتی در قسمت‌های مختلف داشته باشد، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این شرایط استفاده از مواد با خواص ثابت کارایی لازم را نداشته و این باعث ایجاد موادی شده که دارای خواص متغیر به صورت تابعی است. به دلیل تغییرات تدریجی در میکرو ساختارهای این مواد، تغییرات خواص آن نیز به صورت تدریجی است.

مواد متغیر تابعی در طبیعت نیز یافت می‌شوند؛ به عنوان مثال، استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد؛ از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم هست؛ تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این رو تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود [۳].

بسیاری از مواد با خواص تابعی متغیر، ترکیبی از سرامیک و فلز هستند. می‌توان این مواد را به گونه‌ای ساخت که در قسمت‌هایی که نیاز به تحمل دماهای بالا و مقاومت به سایش است، درصد سرامیک بالا بوده و خواص ماده به خواص سرامیک نزدیک باشد و از طرف دیگر در قسمت‌هایی که نیاز به استحکام زیاد است درصد فلز بیشتر و خواص ماده به خواص فلز شباهت داشته باشد. این مواد به خاطر خواص ذکر شده در بالا دارای کاربردهای فراوانی در صنایع مربوط به مهندسی مکانیک، هوافضا و عمران هستند و به خاطر خواص دمایی و مکانیکی مناسب، دارای پتانسیل بالایی برای استفاده در بسیاری از زمینه‌ها هستند. در صنایعی که سازه در مجاورت دماهای بالا قرار دارد استفاده از مواد همگنی که خواص‌های طراح را برآورده کند بسیار مشکل است. در حرارت‌های زیاد، فلز و آلیاژهای فلزی به شدت در معرض اکسیداسیون قرار می‌گیرند و این در حالی است که استفاده تنها از مواد سرامیکی، بسیاری از خواص مورد نظر در طراحی مانند چقرمگی و استحکام بالا را برآورده نمی‌سازد. برای رفع این مشکل از فلزات یا مواد مرکب با پوشش عایق حرارتی استفاده می‌شود ولی تغییر ناگهانی خواص ترمودینامیکی از لایه‌ای به لایه‌ی دیگر در مواد مرکب، موجب افزایش تنش‌های حرارتی و ایجاد ترک در سطوح مشترک و گسیختگی سازه در تغییرات دمایی بالا می‌شود. از این رو در

سال‌های گذشته، دستیابی به موادی که دارای تغییرات یکنواخت خواص مکانیکی و حرارتی در راستای ضخامت باشند، مورد توجه محققان قرار گرفت.

در بسیاری از موارد برای استفاده از مواد مرکب (کامپوزیت) نیاز به چندلایه‌هایی است که خواص لایه‌ها بر اساس تابعی خاص به تدریج تغییر کند؛ به گونه‌ای که زاویه‌ی الیاف در لایه اول و لایه آخر به ترتیب صفر و ۹۰ باشد و لایه‌های بین آن‌ها نیز بر اساس خواص مورد نیاز با استفاده از تابعی خاص، به تدریج تغییر نماید.



شکل ۱-۱: نمای مقطع استخوان [۳]

۱-۳-۱ تاریخچه مواد متغیر تابعی

نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالا و قابلیت تحمل گرادیان شدید حرارتی، به انگیزه‌ای برای تولید مواد متغیر تابعی تبدیل شد. به عنوان مثال سطوح سازه‌های فضایی به هنگام ورود به جو زمین می‌بایست اختلاف دمایی در حدود ۱۶۰۰ کلوین را تحمل کنند. به این علت دانشمندان علم مواد در ژاپن در سال ۱۹۸۴ در مرکز تحقیقات هوافضا در شهر سندایی^۱ تصمیم گرفتند ماده‌ای طراحی کنند تا گرادیان شدید دما را تحمل کند [۴]. در سال ۱۹۸۷، سه سال بعد از اولین ایده‌های ساخت مواد

^۱ Sendai

متغیر تابعی، یک پروژه عظیم برای رسیدن به فن آوری اولیه ساخت این مواد تعریف شد که مؤسسات پژوهشی هفده کشور و چندین دانشگاه و شرکت در آن همکاری کردند [۵].

برای نخستین بار پور^۱ و دووژ^۲ [۴] ایده‌ی ترکیب دو فاز مختلف را با تغییر در نحوه‌ی آرایش و ترتیب هر کدام از فازها در هر لایه به منظور بهبود خواص مکانیکی مطرح کردند. ایده‌ی آن‌ها از نتایج تحقیقات گسترده‌ای که گتزل^۳ [۴] در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ روی مواد مرکب انجام داده بود، نشأت می‌گرفت. در اواسط دهه‌ی ۱۹۸۰ برای نخستین بار در کشور ژاپن نام علمی FGM به مواد متغیر تابعی داده شد و عصر جدیدی برای تحقیقات گسترده روی این مواد گشود. سه تن از دانشمندان به نام‌های نینو^۴، کویزومی^۵ و هیرای^۶ [۵] تحقیقات خود را بر روی پروژه فضاپیما آغاز کردند. تحقیقات این سه تن نشان می‌دهد که با توجه به این که اجزای سازه‌های به کاررفته در بدنه‌ی فضاپیما تحت بارهای بسیار شدید قرار می‌گیرند، در ترکیب تغییر ریزساختارهای سازه‌های بدنه، بایستی به دو مورد توجه گردد. نخست، از اجزای سازه‌ای موجود و در دسترس ساخته شوند و دوم این که از تمرکز تنش در اجزای سازه‌های فضایی به دلیل به وجود آمدن سطوح نوک‌تیز پرهیز گردد. نتیجه‌ی این یافته‌ها باعث شد که در سال ۱۹۸۷ در کشور ژاپن سازمانی متشکل از دانشمندان مختلف تأسیس شده و بودجه‌ی بسیار زیادی به منظور تحقیق گسترده در ارتباط با مواد متغیر تابعی تخصیص یابد. این سازمان تحقیقات خود را بر روی اجزایی که یک وجه آن سرد شده‌اند و وجه دیگرشان در محیط بسیار داغ نگهداری می‌شوند، معطوف نمود. کمیته‌ی علمی این سازمان مأمور طراحی و ارزیابی مواد مرکب معدنی شد که در نهایت به سمت فلزات و سرامیک هدایت شدند. برای سطح داغ، دما حدود ۲۰۰۰ کلوین در محیطی اکسیدکننده در نظر گرفته شد و آزمایش‌ها، سرامیک

^۱ Bever

^۲ Douwez

^۳ Gotzel

^۴ Nino

^۵ Koizumi

^۶ Herai

را ماده‌ی مناسبی برای سطوح داغ نشان داد. سطح سرد در دمای ۱۰۰۰ کلوین قرار داشت و به این شکل خصوصیتی مانند مقاومت، سختی و هدایت حرارتی مواد، مدنظر قرار گرفت. بین دو سطح داغ و سرد را با مخلوطی از سرامیک و فلز با درصدی مشخص پر کردند که این عمل توسط متالوژی پودر صورت گرفت. در سال ۱۹۹۳، کویزومی، میاموتو^۱، نینو^۲ و ساساکی^۳ [۴] توجه خود را بر روی سامانه‌های بقای انرژی معطوف کردند. هدف این برنامه‌ی تحقیقاتی استفاده از مواد متغیر تابعی برای بهینه کردن تبدیل انرژی حرارتی به الکتریسیته بود که در مواد ترموالکتریک استفاده می‌شود. اهمیت ویژه‌ی این پروژه در زمینه‌ی بازدهی بالا در بقای انرژی در محدوده‌ی وسیعی از تغییرات درجه حرارت بود. در خارج از کشور ژاپن در بین ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۰ و در چند کشور از جمله آلمان، ایالات متحده آمریکا، چین و روسیه تحقیقاتی روی مواد متغیر تابعی صورت گرفت. هرچند تلاش‌های بسیاری به-منظور ساخت و کاربرد مواد متغیر تابعی در محیط‌های پژوهشی و آزمایشگاه‌های تحقیقاتی در سال-های گذشته صورت گرفته است، ولی رشد و شکوفایی بیشتر این مواد در صنعت، در دهه‌های آینده بیش‌ازپیش عیان می‌گردد.

مواد ناهمگن در مقایسه با مواد همگن دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر می‌باشند:

- ۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا.
- ۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا.
- ۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد ناهمگن، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود، که به کمک مواد ناهمگن می‌توان آثار نامطلوب تمرکز تنش را به‌صورت چشم‌گیری کاهش داد.
- ۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد ناهمگن است.

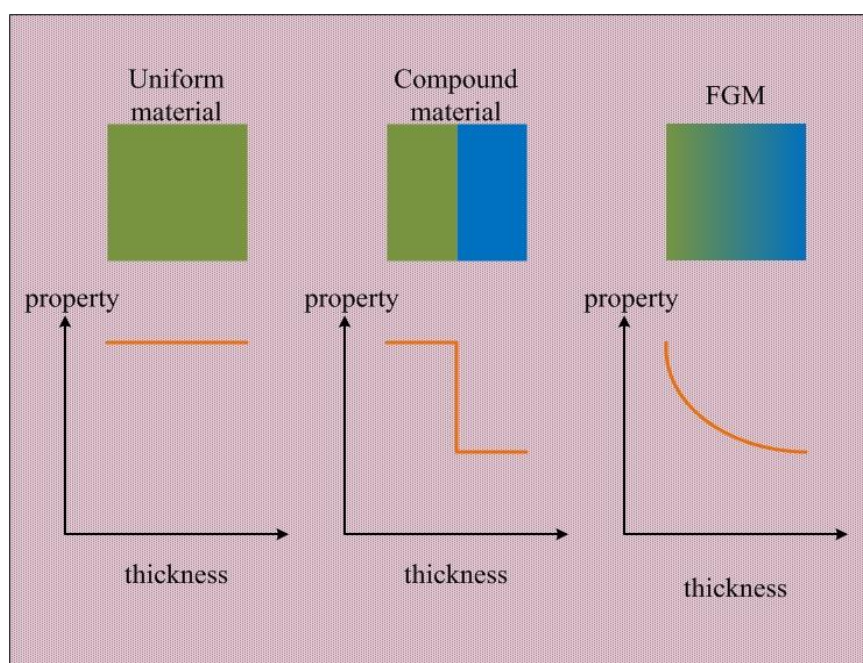
^۱ Miyamoto

^۲ Nino

^۳ Sasaki

۵- اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد ناهمگن، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد ناهمگن، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد ناهمگن، به دلیل پیوستگی مواد در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند؛ که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل ۱-۲ مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد همسانگرد، کامپوزیت و ناهمگن را نشان می‌دهد [۳]. برای این که مشکل مواد کامپوزیتی حل شود در این پایان‌نامه راه‌حلی ارائه می‌شود. از این رو با افزایش تعداد لایه‌ها، خواص هر لایه بر حسب تابعی خاص به دست می‌آید و آن لایه با زاویه‌ی به دست آمده از خواص مواد، در جهت مناسب قرار می‌گیرد. از این جهت تغییر خواص در لایه‌ها به صورت پله‌ای، به قدری کم است که در واقع می‌توان آن را به شکل یک ماده متغیر تابعی که خواص آن به صورت تدریجی تغییر می‌کند، در نظر گرفت.



شکل ۱-۲: تغییرات خواص در مواد مختلف [۳]

۱-۳-۲ روش‌های تولید مواد متغیر تابعی

تا به امروز روش‌های متعددی برای تولید مواد متغیر تابعی توسعه داده شده است که به‌طور کلی در سه گروه روش‌های ترکیب کردنی^۱، روش‌های همگن‌سازی^۲ و روش‌های مجزا سازی^۳ دسته‌بندی می‌شود [۶].

۱- روش ترکیب کردنی: در روش‌های ترکیب کردنی، ماده‌ی متغیر به‌طور لایه به لایه و با در نظر گرفتن توزیعی مناسب برای اجزای سازنده، ساخته می‌شود. در این روش، تغییرات تدریجی ماده، با کامپیوتر قابل کنترل است و امکان ایجاد هرگونه تغییر تدریجی وجود دارد. پیشرفت‌های صورت گرفته در زمینه‌ی فن‌آوری خودکار سازی در دهه‌های گذشته، استفاده از این روش را از لحاظ فنی و اقتصادی ممکن ساخته است.

۲- روش همگن‌سازی: در این روش، تغییرات ناگهانی در سطح مشترک بین دو ماده‌ی مختلف، از طریق انتقال مواد با تغییرات به‌صورت تدریجی ایجاد می‌شود.

۳- روش مجزا سازی: ماده‌ای که به‌طور ماکروسکوپی همگن است از طریق انتقال ماده به‌وسیله‌ی میدان خارجی مانند میدان الکتریکی یا میدان گرانش تبدیل به ماده‌ی متغیر تابعی می‌شود. در این دو روش آخر، برخلاف روش ترکیب کردنی، امکان ایجاد هرگونه تغییر تدریجی در خواص وجود ندارد.

در ادامه تعدادی از روش‌های ترکیب کردنی نام‌برده می‌شوند:

- روش متالورژی پودر
- روش پوشش‌دهی
- روش پاشش پلاسما

^۱ Constitutive

^۲ Homogenizing

^۳ Segregating

- روش الکتروفرمینگ
- روش رسوب گذاری با بخار

۳-۳-۱ مدل های ریاضی مواد متغیر تابعی

خواص مکانیکی مواد متغیر تابعی در یک، دو و یا سه راستا به صورت پیوسته تغییر می کند. مدل - های ریاضی گوناگونی برای بیان خواص مواد متغیر تابعی به صورت ریاضی پیشنهاد شده است. در اغلب موارد، ماده ی متغیر تابعی از دو جزء سرامیک و فلز تشکیل شده است. چنانچه v_m و v_c به ترتیب به - عنوان حجم فلز و حجم سرامیک در نظر گرفته می شود؛ کسر حجمی هریک از دو جزء به صورت زیر خواهد بود.

$$V_m = \frac{v_m}{v_m + v_c}, \quad V_c = \frac{v_c}{v_m + v_c} \quad (۱-۱)$$

در رابطه ی بالا V_m و V_c به ترتیب معرف کسر حجمی جزء فلزی و سرامیکی می باشند و همواره از رابطه ی زیر پیروی می کند.

$$V_m + V_c = 1 \quad (۲-۱)$$

با استفاده از توابع نسبت حجمی، خواص مکانیکی ماده ی متغیر تابعی به صورت زیر بیان می شود.

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (۳-۱)$$

در رابطه ی بالا P ، P_m و P_c به ترتیب بیان گر خاصیت ماده ی متغیر تابعی، خاصیت جزء فلزی و خاصیت جزء سرامیکی است. در ادامه چند مدل مهم برای توزیع خواص مکانیکی ماده ی متغیر تابعی معرفی خواهد شد.

أ. کسر حجمی

در این مدل، به طور کلی خواص مکانیکی ماده ی متغیر تابعی به صورت خطی، تابعی از درجه حرارت و مختصاتی که خواص در آن تغییر می کند، بیان می شود. با این فرض که تغییرات خواص ماده ی متغیر تابعی در جهت z باشد، می توان رابطه را به صورت زیر نوشت:

$$P(z, T) = P_m(T)V_m(z) + P_c(T)V_c(z) \quad (4-1)$$

در رابطه‌ی بالا از زیرنویس c و m برای بیان خواص مربوط به سرامیک و فلز استفاده شده است. T معرف درجه حرارت درون جسم هست.

چنانچه خواص مواد نسبت به دما ثابت فرض شوند، فرمول ردی برای توزیع خواص به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$P(z, T) = P_{0m}V_m(z) + P_{0c}V_c(z) \quad (5-1)$$

ردی کسر حجمی به کاررفته در رابطه‌ی بالا را با تابع توانی به صورت زیر مدل کرده است [۴].

$$V_m(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^g \quad (6-1)$$

در رابطه‌ی بالا، h معرف محدوده‌ای است که خواص در آن تغییر می‌کند. به عنوان مثال برای یک صفحه‌ی متغیر تابعی که خواص آن در راستای ضخامت است، h معرف ضخامت صفحه و ثابت به کاررفته‌ی g ، شاخص توانی^۱ ماده‌ی متغیر تابعی نامیده می‌شود که مقادیر نامنفی را اختیار می‌کند. مقدار این توان بیانگر شدت تغییرات خواص ماده است. همچنین z از میانه‌ی ضخامت اندازه‌گیری می‌شود.

ب. تابع نمایی

اردوگان، تغییرات خواص یک ماده‌ی متغیر تابعی را به صورت زیر مدل کرد [۴].

$$P(z) = P_0 e^{\delta z} \quad (7-1)$$

در این مدل δ و P_0 ثابت هستند که به خواص تشکیل‌دهنده ماده‌ی متغیر تابعی بستگی دارد. در این مدل معمولاً مختصات z از یکی از دو لبه راستایی که خواص در آن تغییر می‌کند، اندازه‌گیری می‌شود. البته در مواردی هم از ضخامت میانی استفاده می‌شود. به عنوان مثال برای یک صفحه‌ی متغیر تابعی که خواص در جهت ضخامت با مدل اردوگان است، مبدأ اندازه‌گیری می‌تواند لبه‌ی پایینی و یا

^۱ Power Low Index

بالایی باشد. یا با تغییر جزئی در رابطه‌ی بالا مبدأ از صفحه‌ی میانی باشد. در تحقیق حاضر برای مدل‌سازی مواد متغیر تابعی از این مدل استفاده شده است.

ج. تابع توانی

بر مبنای مدل تانیگاوا هر یک از خواص مواد متغیر تابعی مطابق با توزیع مخصوص به خود فرمول‌بندی می‌شوند. برای دو خاصیت مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی، تانیگاوا روابط زیر را ارائه کرد [۶].

$$E(z) = \frac{2z+6}{z+2} E_0 \left(1 + \frac{z}{L}\right)^n \quad (۸-۱)$$

$$\alpha(z) = \alpha_0 \left(1 + \frac{z}{L}\right)^p$$

در رابطه‌ی بالا L ثابتی است که برای نرمالیزه کردن به کار می‌رود و دارای بعد طول است. ثابت-های دیگر که به صورت ضریب و توان به کار رفته‌اند، در هر ماده‌ی متغیر تابعی بسته به نوع اجزای سرامیک و فلزی‌اش به طور یکتا تعیین می‌شوند لازم به ذکر است تانیگاوا نسبت پواسون^۱ را در سراسر ماده یکسان در نظر می‌گیرد.

د. تابع نمایی غیرخطی

نودا مدل غیرخطی را که بر پایه‌ی توزیع نمایی استوار است، برای بیان توزیع کلیه‌ی خواص مواد متغیر تابعی ارائه کرده است [۴].

$$P(z) = P_m e^{\left[\frac{z}{h} \ln \frac{P_c}{P_m} + \ln \left(\frac{P_c}{P_m}\right)^{\frac{1}{2}}\right]} \quad (۹-۱)$$

در رابطه‌ی بالا، برای بررسی تغییرات خواص، موقعیت z نسبت به صفحه‌ی میانه محاسبه می‌شود و h محدوده‌ای است که خواص در آن به صورت پیوسته تغییر می‌کند $\left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\right)$.

^۱ Poisson's ratio

۱-۴-۴ مروری بر مطالعات انجام شده

در این بخش به بررسی مطالعات و تحقیقاتی که در زمینه‌ی صفحات حاوی گشودگی انجام شده، پرداخته شده است. مطالعات انجام شده در این زمینه به چند بخش کلی تقسیم می‌شوند. این صفحات در دسته‌بندی همسانگرد و ناهمسانگرد و از لحاظ ساختاری در دسته‌های تک‌لایه‌ها، چندلایه‌های متقارن، چندلایه‌های نامتقارن و صفحات متغیر تابعی قرار می‌گیرند. در هر کدام از این دسته‌بندی‌ها هندسه‌ی گشودگی، نوع بارگذاری، جنس مواد استفاده شده و روش حل، متفاوت است. در این قسمت ابتدا به مرور مطالعات مربوط به صفحات تک‌لایه‌ی حاوی گشودگی و سپس بسط آن‌ها برای چندلایه‌های متقارن، نامتقارن و صفحات متغیر تابعی پرداخته می‌شود.

۱-۴-۱ صفحه‌ی دارای گشودگی

انگلس^۱ [۷] نخستین کسی بود که حل تئوری اندازه‌گیری تمرکز تنش در اطراف گشودگی بیضی‌شکل واقع در صفحه‌ی همسانگرد را بسط داد. او ابعاد بیضی را به گونه‌ای تغییر داد که شکل‌های مختلف اعم از دایره تا بیضی بسیار باریک که بتوان آن را ترک در نظر گرفت را شامل شود. هلر^۲ [۸] با استفاده از مطالعات انگلس به این نتیجه رسید که می‌توان مستطیل را با بیضی مدل کرد. او یک تابع نگاشت به دست آورد که گشودگی مستطیلی با گوشه‌های گرد را ارائه می‌داد. سوبی^۳ [۹] تابع نگاشت خود را به منظور تحلیل گشودگی مستطیلی در یک ورق همسانگرد بیان کرد و تمرکز تنش را در گوشه‌های گشودگی برای چندین شرط مرزی مختلف بررسی کرد. استفاده از روش متغیر مختلط در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیستیه‌ی دوبعدی اولین بار توسط موشخلیشویلی^۴ [۱۰] برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه شد. سپس ساوین^۵ [۱۱] با استفاده از این روش مطالعاتی در زمینه‌ی

^۱ Inglis

^۲ Heller

^۳ Sobey

^۴ Muskhelishvili

^۵ Savin

صفحات همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف و صفحات ناهمسانگرد فقط برای گشودگی بیضی‌شکل و دایره‌ای انجام داد. توسعه‌ی کامل روش موشخلیشویلی به مسائل الاستیسیته دوبعدی مواد ناهمسانگرد توسط اشترو^۱ [۱۲] و لخنیتسکی^۲ [۱۳] انجام شد. لخنیتسکی تئوری خود را برای حل عمومی صفحات ناهمسانگرد نامحدود با گشودگی دایروی در اندازه‌های مختلف ارائه داد. او در ابتدا برای ساده‌سازی، فرمولاسیون خود را برای صفحات ارتوتروپیک که دارای سه صفحه‌ی تقارن عمود بر هم بودند، بیان کرد. سیمها^۳ و موهاپاترا^۴ [۱۴] گشودگی‌ها با اشکال نامنظم واقع در صفحات همسانگرد را مطالعه کردند، رضایی پزند و جعفری [۱۵] گشودگی‌های سه‌گوش، چهارگوش و چند گوش را در صفحات نامحدود با استفاده از حل تحلیلی با مطالعه‌ی پارامترهایی همچون جهت بارگذاری و چرخش گشودگی مورد مطالعه قراردادند، گائو^۵ [۱۶] حفره‌های بیضی‌شکل و شارما [۱۸، ۱۷] گشودگی‌های چند گوشه را در این زمینه مورد مطالعه و بررسی قراردادند.

تحلیل تنش صفحات ارتوتروپیک با گشودگی مستطیلی توسط جونگ^۶ [۱۹] انجام شد. روابط آن‌ها بر اساس روش حل ارائه‌شده توسط لخنیتسکی و فرمول‌بندی اشترو و استفاده از نگاشت هم‌نوا بود. راجیه^۷ [۲۰] با استفاده از روش لخنیتسکی و استفاده از یک نگاشت هم‌نوا، ضریب تمرکز تنش را برای چندین گشودگی مستطیلی در صفحات همسانگرد و ناهمسانگرد ارتوتروپیک بررسی کرد و به این نتیجه رسید که بهینه‌سازی گشودگی‌ها، ضریب تمرکز تنش را به میزان چشم‌گیری کاهش می‌دهد. تئوکارس^۸ و پترو^۹ [۲۱] با استفاده از روش متغیر مختلط لخنیتسکی توزیع تنش اطراف

^۱ Stroh

^۲ Lekhnitskii

^۳ Simha

^۴ Mohapatra

^۵ Gao

^۶ Jong

^۷ Rajaiah

^۸ Theocaris

^۹ Petrou

گشودگی مثلث متساوی الاضلاع را بررسی کردند. آن‌ها برای نگاشت از فرمول انتقال شوارتز^۱ استفاده کردند و تأثیر گوشه‌های گشودگی را در مقدار تمرکز تنش مورد مطالعه قراردادند. زیمرمن^۲ [۲۲] نگاشت نقاط گشودگی‌هایی با شکل‌های مختلف به دایره‌ای به شعاع واحد را با استفاده از تابع نگاشت همنوا، مورد بررسی قرارداد. کمل^۳ و لایو^۴ [۲۳] حل دقیقی برای صفحه‌ی ناهمسانگرد حاوی گشودگی بیضی‌شکل تحت نیرو و گشتاور متمرکز ارائه دادند. آن‌ها با افزایش طول یکی از قطرهای بیضی آن را با ترک شبیه‌سازی کرده و توزیع تنش آن را بررسی کردند. همچنین با روش عددی درستی کار خود را سنجیدند. هافنباخ^۵ [۲۴] با ارائه‌ی یک حل تحلیلی، میدان تنش و جابه‌جایی اطراف گشودگی بیضی‌شکل را در یک صفحه‌ی ناهمسانگرد به‌دست آورد. او در مطالعه‌ی خود به بررسی تأثیر زاویه‌ی الیاف و زاویه‌ی بارگذاری پرداخت و نتایج خود را با استفاده از نتایج تجربی و حل اجزای محدود مقایسه کرد. هوو^۶ [۲۵] میدان تنش در اطراف گشودگی‌هایی با اشکال مختلف در یک صفحه‌ی الاستیک ناهمسانگرد تحت بارگذاری مکانیکی در بی‌نهایت را مطالعه کرد. دائوست^۷ و هوآ^۸ [۲۶] گشودگی مثلثی را در ورق ناهمسانگرد تحلیل کردند. آن‌ها به بررسی پارامتر شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی نیز پرداختند و با تعریف نسبت اضلاع به‌عنوان یک پارامتر توانستند علاوه بر مثلث متساوی‌الاضلاع سایر مثلث‌ها با نسبت اضلاع مختلف را بررسی کنند. بکر^۹ [۲۷] با استفاده از روش متغیر مختلط برای صفحات شامل کوپلینگ بین کشش و خمش، روابط و نتایجی را ارائه کرد. کاربرد این روابط در تحلیل استاتیکی صفحه‌ی میانی چندلایه‌های نامتقارن که در اثر نیروی درون‌صفحه‌ای

^۱ Schwarz

^۲ Zimmerman

^۳ Kamel

^۴ Liaw

^۵ Hufenbach

^۶ Hwu

^۷ Daoust

^۸ Hoa

^۹ Becker

دچار کوپلینگ بین کشش و خمش می‌شوند، دیده می‌شود. یوکادگائونکر^۱ [۲۸] به بررسی تحلیل تنش صفحات اورتوتروپیک با گشودگی‌هایی با شکل‌های نامنتظم پرداخت. او در تحقیق خود چندین بارگذاری درون صفحه‌ای را مورد مطالعه قرارداد. رضایی‌پژند و جعفری [۲۹] با تعریف تابع تنش که معادلات سازگاری را ارضاء می‌کرد، حل تحلیلی صفحات غیر همسانگرد دارای گشودگی‌های مختلف را ارائه کردند. اسمر^۲ و جبور^۳ [۳۰] با تعریف تابع تنش که معادلات سازگاری را ارضاء می‌کرد؛ توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مستطیلی را در یک صفحه‌ی ناهمسانگرد و تحت کشش به‌دست آوردند. آن‌ها تأثیر انحنای گشودگی و زاویه‌ی بار را بر روی تمرکز تنش مورد بررسی قراردادند. بنرجی^۴ و همکارانش [۳۱] با استفاده از روش عددی توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی در صفحات همسانگرد و اورتوتروپیک را تحت بارگذاری عرضی مطالعه کردند. آن‌ها تأثیر ضخامت صفحه و قطر گشودگی و جنس مواد را در صفحات اورتوتروپیک، بر میزان تمرکز تنش مورد بررسی قراردادند. رضایی‌پژند و جعفری [۳۲] با معرفی تابع نگاشت به‌دست‌آمده از تئوری لختیسیکی ضریب تمرکز تنش را برای چندین گشودگی مستطیلی با اندازه و شعاع انحنای مختلف محاسبه کردند. آن‌ها توانستند با به-کارگیری زاویه‌ی چرخش گشودگی، ضریب تمرکز تنش را کاهش دهند. باتیستا^۵ [۳۳] تمرکز تنش اطراف گشودگی‌های چندضلعی با هندسه‌های نسبتاً پیچیده را مورد بررسی قرارداد. او از بسط روش متغیر مختلط موشخلیشویلی و تابع نگاشت شوارتز^۶-کریستفل^۷ استفاده کرد.

در مورد تحلیل تنش صفحات حاوی گشودگی در چندلایه‌ها مطالعات زیادی انجام شده است. که در ادامه به آن اشاره می‌شود.

^۱ Ukadgaonker

^۲ Asmar

^۳ Jabbour

^۴ Banerjee

^۵ Batista

^۶ Schwartz

^۷ Chistoffel

۱-۴-۲ چندلایه‌ی متقارن

دنیل^۱ و همکارانش [۳۴] تأثیر چیدمان و جنس لایه‌ها را در صفحات چندلایه‌ی ضخیم حاوی گشودگی دایروی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در تحقیق خود با استفاده از روش تجربی از ده چیدمان متقارن مختلف و سه جنس برون اپوکسی، گرافیت اپوکسی و شیشه اپوکسی استفاده کردند. آن‌ها نتایج خود را با روش اجزای محدود و روش تحلیلی لختیسیکی مقایسه کردند. کنیش^۲ و ویتنی^۳ [۳۵] حلی تقریبی برای توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی در یک چندلایه‌ی اورتوتروپیک ارائه دادند. آن‌ها حل دقیق چندجمله‌ای‌های همسانگرد را تا درجه‌ی شش بهبود دادند تا برای مواد اورتوتروپیک پاسخ مناسبی بدهد. آن‌ها روش حل خود را با روش دقیق ناهمسانگرد لختیسیکی مقایسه کردند. ریبکی^۴ و همکارانش [۳۶] با استفاده از روش اجزای محدود، توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی را در چندلایه‌ها به دست آوردند. صفحه‌ی مورد تحلیل آن‌ها تحت بار تک‌محوری قرار داشت. آن‌ها از روش تجربی برای تأیید روش اجزای محدود خود استفاده کردند. پراساد^۵ و شوارت^۶ [۳۷] توزیع تنش اطراف گشودگی بیضی‌شکل و دایروی را در چندلایه‌های متقارن تحت خمش خالص برای چندین چیدمان مختلف مورد بررسی قرار دادند. در مقاله‌ای ولایچامی^۷ [۳۸] و همکارانش به طراحی بهینه‌ی صفحات چندلایه‌ی کامپوزیتی حاوی گشودگی بیضی‌شکل پرداختند. متغیرهای طراحی در تحقیق آن‌ها نسبت قطرهای بیضی و زاویه چرخش گشودگی بودند و هدف آن‌ها دسترسی به کمترین تنش ممکن در اطراف گشودگی بود. بونورا^۸ [۳۹] و همکارانش با ارائه‌ی عبارتی تحلیلی برای تابع تنش توانستند توزیع تنش اطراف گشودگی‌هایی با هندسه‌ی ساده نظیر دایره و بیضی را برای چندلایه‌های متقارن به دست آورند. آن‌ها به کمک روش اجزای محدود دقت حل خود را بررسی کردند. تحلیل

^۱ Daniel

^۲ Konish

^۳ Whitney

^۴ Rybicki

^۵ Prasad

^۶ Shuart

^۷ Vellaichamy

^۸ Bonora

صفحات مرکب از لایه‌های نازک از ماده‌ی همسانگرد و الاستیک خطی توسط بئوم^۱ [۴۰] و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت و میدان تنش، گشتاور و جابه‌جایی با استفاده از روش تابع پتانسیل مختلط به‌دست آمد. هدف اصلی این تحقیق بررسی میدان نوک ترک و میزان رهاسازی انرژی در صفحات چندلایه بود. یوکادگائونکر و رائو^۲ [۴۱] حلی عمومی برای به‌دست آوردن گشتاور در چندلایه‌های متقارن حاوی گشودگی با اشکال مختلف ارائه کردند. آن‌ها بر پایه‌ی روش حل لختیسیکی و ساوین، توزیع گشتاور را در چندلایه‌های در معرض بارگذاری خمشی به‌دست آوردند. آن‌ها همچنین تأثیر چیدمان لایه‌ها را مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش تعداد لایه‌ها، مقدار گشتاور در اطراف گشودگی کاهش می‌یابد. آن‌ها در تحقیق دیگری با استفاده از روش متغیر مختلط، صفحات چندلایه‌ی متقارن حاوی گشودگی‌هایی با هندسه‌های مختلف تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای را تحلیل کردند [۴۲]. رمئو^۳ [۴۳] از روش تحلیلی و تجربی کرنش در صفحات چندلایه‌ی حاوی گشودگی مستطیلی را مورد بررسی قرار داد. این صفحات در حالت کلی تحت بارگذاری تنش دومیحوره و برش به‌طور هم‌زمان قرار گرفتند. او نتیجه گرفت که کرنش در صورت حضور همه‌ی بارگذاری‌ها بیشتر از زمانی است که تک‌تک بارها به‌صورت مجزا اعمال می‌شوند. کلتاچی^۴ و ارسلان^۵ [۴۴] بر روی تمرکز تنش چندلایه‌های متقارن با گشودگی دایروی و تحت بار تک‌محوره‌ی کششی مطالعاتی را انجام دادند. آن‌ها تنش را برای هر لایه به‌طور مجزا مورد بررسی قرار دادند و با استفاده از معیار شکست تسای-هیل برای هر لایه کمترین تنش محیطی قابل تحمل را برحسب زاویه‌ی الیاف به‌دست آوردند. هافنباخ [۴۵] و همکارانش با در نظر گرفتن تابع جابه‌جایی برحسب متغیر مختلط و استفاده از نگاشت همنوا مسأله‌ی تمرکز تنش صفحات کامپوزیتی محدود حاوی گشودگی دایروی و بیضی‌شکل را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها برای بررسی درستی روش حل

^۱ Beom

^۲ Rao

^۳ Romeo

^۴ Kaltakci

^۵ Arsalan

تحلیلی، از روش تجربی استفاده کردند. هارماندرا^۱ [۴۶] توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی، بیضی شکل و مثلثی را در چندلایه‌ها مورد بررسی قراردادند. او تحقیق خود را برای چندین چیدمان با جنس‌های مختلف انجام داد و تأثیر نحوه‌ی چیدمان لایه‌ها، جنس ماده و هندسه‌ی گشودگی را بر توزیع گشتاور در چندلایه‌های حاوی گشودگی مورد بررسی قرارداد. رائو و همکارانش [۴۷] توزیع تنش اطراف گشودگی مستطیلی و مربعی را در چندلایه‌های متقارن به‌دست آوردند. آن‌ها شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی، زاویه‌ی بارگذاری و نوع چیدمان لایه‌ها را مورد بررسی قراردادند؛ اما در تابع نگاشت استفاده‌شده توسط آن‌ها بررسی شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی تنها با تغییر این تابع برای هر گشودگی امکان‌پذیر بود. هافنباخ و همکارانش [۴۸] با استفاده از روش تحلیلی بر پایه‌ی تئوری کلاسیک چندلایه‌ها و استفاده از تابع پتانسیل به شکل متغیر مختلط، میدان تنش و کرنش در اطراف گشودگی را برای کامپوزیت‌های تقویت‌شده تعیین کردند. آن‌ها برای نگاشت نقاط روی مرز گشودگی بیضی شکل به دایره‌ای به شعاع واحد از تابع نگاشت هم‌نوا استفاده کردند. همچنین از ترکیب روش حداقل مربعات و روش هم‌مکانی برای مدل‌سازی مرز خارجی صفحه استفاده شد. جعفری و مشیری اول [۴۹] به بررسی تنش در چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن با گشودگی شبه مستطیلی پرداختند. آن‌ها تأثیر پارامترهایی از قبیل شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی، زاویه‌ی اعمال بار و چیدمان لایه‌ها را مورد بررسی قراردادند.

۱-۴-۳ چندلایه‌ی نامتقارن

درزمینه‌ی چندلایه‌های نامتقارن کو^۲ [۵۰] با استفاده از تئوری ورق‌های ناهمسانگرد لخنیتسکی، تمرکز تنش اطراف گشودگی دایروی را برای چیدمان‌ها و زاویه‌ی الیاف مختلف چندلایه‌هایی از جنس گرافیت اپوکسی مورد بررسی قرارداد. بکر [۵۱] با استفاده از روابطی که برای صفحات شامل کوپلینگ

^۱ Dharmendra

^۲ Ko

بین کشش و خمش ارائه کرده بود، چندلایه‌ای با ترک‌های گریفیث^۱ (ترک‌هایی محدود، ساده و مستقیم) را مورد بررسی قرارداد. او از بارگذاری خمشی و درون‌صفحه‌ای در تحلیل خود استفاده کرد. سپس روش پتانسیل مختلط را برای چندلایه‌ی نامتقارن شامل گشودگی مرکزی بیضی‌شکل [۵۲] بسط داد. او همچنین تحقیقی در زمینه‌ی چندلایه‌های نامتقارن تحت تأثیر نیرو و ممان متمرکز [۵۳] با همین روش انجام داد. یوکادگونکر و رائو [۵۴] به تحلیل تنش صفحات چندلایه‌ی نامتقارن حاوی گشودگی‌های مختلف از قبیل دایره، مربع و بعضی شکل‌های غیر منتظم دیگر پرداختند. چن^۲ و شن^۳ [۵۵] با گسترش روش متغیر مختلط برای چندلایه‌های نامتقارن، تنش و جابه‌جایی را با چهار تابع هولومورفیک بیان کردند. روش آن‌ها برای چندلایه‌های نامتقارن شامل گشودگی و ترک تحت بارگذاری‌های درون‌صفحه‌ای قابل‌استفاده است. آن‌ها تحقیق خود را برای چندین چیدمان حاوی گشودگی دایروی و بیضی‌شکل انجام دادند و تأثیر چیدمان لایه‌ها را مورد بررسی قراردادند. همچنین با استفاده از تابع گرین توزیع تنش اطراف گشودگی بیضی‌شکل در چندلایه‌ی نامتقارن را مطالعه کرده و فرمول‌بندی خود را برای بارگذاری شامل نیرو و خمش متمرکز بیان کردند [۲]. مدنسی^۴ و همکارانش [۵۶] با استفاده از روش متغیر مختلط، توزیع تنش اطراف گشودگی بیضی در یک چندلایه‌ی نامتقارن را مورد بررسی قراردادند. آن‌ها با استفاده از بسط سری لورانت انرژی پتانسیل را به‌دست آوردند و با استفاده از آن میدان تنش و جابه‌جایی را محاسبه کردند. آن‌ها تأثیر جهت‌گیری گشودگی را نیز مورد بررسی قراردادند. هسی^۵ و هوو^۶ [۵۷] حل دقیقی با استفاده از روش پتانسیل مختلط اشترو برای کوپلینگ بین کشش و خمش در چندلایه‌های حاوی گشودگی دایروی و

^۱ Griffith

^۲ Chen

^۳ Shen

^۴ Madenci

^۵ Hsieh

^۶ Hwu

بیضی شکل ارائه دادند. کنون^۱ [۵۸] به بررسی تمرکز تنش در اطراف گشودگی مربعی در صفحه‌های همسانگرد، ناهمسانگرد و چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن و نامتقارن پرداخت. او با استفاده از نگاشت همنوای ارائه شده در [۳۲] به بررسی تأثیر انحنای گوشه‌ی گشودگی مربعی بر تمرکز تنش پرداخت. جعفری و آشوری [۵۹] به بررسی تمرکز تنش در اطراف گشودگی‌های غیر دایره‌ای پرداختند. آن‌ها پارامترهای زاویه‌ی چرخش، انحنای گوشه‌ی گشودگی و چیدمان لایه‌ها را مورد بررسی قرار دادند. در مورد تحلیل تنش صفحات متغیر تابعی حاوی گشودگی مطالعات زیادی انجام شده است. که در ادامه به آن اشاره می‌شود.

۱-۴-۴ صفحات متغیر تابعی

در این زمینه و با محوریت گشودگی دایروی و فرض تابعی بودن مواد در راستای شعاعی تحقیقات زیر صورت پذیرفته است. جعفری و همکاران [۶۰] به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای در ورق ناهمگن تحت بارگذاری درون صفحه‌ای پرداختند. آن‌ها روش توابع پتانسیل مختلط، در حل مسأله بهره بردند. چن^۲ و همکاران [۶۱] تحلیل تنش صفحه‌ی متغیر تابعی با گشودگی دایره‌ای را بررسی کردند. تغییرات خواص آن‌ها در راستای شعاعی بوده و نتایج را با روش تک لایه‌های همگن^۳ به دست آوردند. آن‌ها همچنین به بررسی صفحه‌ی محدود متغیر تابعی در راستای شعاعی دارای گشودگی دایره‌ای پرداختند [۶۲]. محمدی و دریدن^۴ [۶۳] تمرکز تنش را در صفحه‌ی متغیر تابعی حاوی گشودگی دایره‌ای برای بارگذاری دایره‌ای به دست آوردند. آن‌ها برای مدل‌سازی صفحه‌ی خود در راستای شعاعی از تابع‌نمایی استفاده کردند. محمدی و دریدن و جیانگ^۵ [۶۴] به بررسی تمرکز تنش حول گشودگی دایره‌ای در صفحه‌ی ناهمگن شعاعی پرداختند. آن‌ها نتایج خود را برای

^۱ Cannon

^۲ Chen

^۳ piece-wise homogeneous
layers

^۴ Dryden

^۵ Jiang

بارگذاری دومحوره‌ی کششی و برش خالص ارائه دادند. در صفحه‌ی موردبررسی، مدول یانگ و نسبت پواسون در راستای شعاعی تغییر می‌کند. کیم^۱ و پائولینو^۲ [۶۵] با استفاده از روش اجزای محدود به تحلیل صفحه‌ی ناهمگن، ایزوتروپیک و ارتوتروپیک دارای گشودگی دایره‌ای پرداختند. کوبایر^۳ و بهانو-چاندر^۴ [۶۶] به بررسی تمرکز تنش ناشی از گشودگی دایره‌ای پانل‌های^۵ متغیر تابعی تحت کشش تک‌محوره را پرداختند. آن‌ها تغییرات خواص مواد را در دو مختصات کارتزین و قطبی بررسی نمودند. اینب^۶ [۶۷] تمرکز تنش حول گشودگی بیضوی در صفحه‌ی متغیر تابعی در راستای شعاعی تحت بارگذاری دومحوره بررسی نمود. او برای به‌دست‌آمده نتایج خود از روش المان محدود استفاده کرد. برای این کار از نرم‌افزار انسیس^۷ بهره برد.

با در نظر گرفتن این مهم که در بسیاری از کاربردهای مواد تابعی، فرض تابعی بودن توزیع مواد در راستای ضخامت بسیار پرکاربرد و موردنیاز است. از این‌رو شاخه‌ی موازی تحقیقات بر روی صفحات با توزیع تابعی مواد در راستای ضخامت که دارای گشودگی می‌باشند نیز زمینه جدید تحقیقات را در بر گرفته است. بیشتر تحقیقات در این زمینه با محوریت گشودگی دایره‌ای صورت گرفته است. بَترا^۸ و جین^۹ [۶۸] به بررسی صفحه‌ی متغیر تابعی که تغییر تدریجی خواص مواد به‌صورت چندلایه‌ای با زوایای الیاف مختلف ممکن می‌شد؛ پرداختند. آن‌ها برای این منظور از تغییرات خطی زاویه‌ی الیاف لایه‌ها در جهت ضخامت استفاده کردند. تغییرات لایه‌های آن‌ها به‌گونه‌ای است که صفحه‌ی پایینی در

^۱ Kim

^۲ Paulino

^۳ Kubair

^۴ Bhanu-Chandar

^۵ Panels

^۶ Enab

^۷ Ansys

^۸ Batra

^۹ Jin

زاویه‌ی صفر درجه و صفحه‌ی بالایی در زاویه‌ی ۹۰ درجه قرار دارد. پن^۱ [۶۹] به حل دقیق صفحه‌ی متغیر تابعی چندلایه‌ی کامپوزیتی غیر ایزوتروپیک دارای گشودگی دایره‌ای پرداخت. رامیرز^۲، هیلیرا^۳ و پن [۷۰] تحلیل استاتیک صفحه‌ی الاستیک غیرایزوتروپیک متغیر تابعی با استفاده از روش لایه مجزا^۴ را انجام دادند. دلاکروک^۵ و ونی^۶ [۷۱] با استفاده از روش المان محدود به بررسی صفحه‌ی متغیر تابعی رزینر-میدلین^۷ پرداختند. ریاد^۸ و پاساکارمورسی^۹ [۷۲] با استفاده از تئوری کلاسیک چندلایه^{۱۰} حلی برای صفحه‌ی متغیر تابعی ارائه کردند. آخرین پژوهش انجام‌شده در زمینه‌ی مواد تابعی را داو^{۱۱} و شارما^{۱۲} [۷۳]، با در نظر گرفتن گشودگی دایروی و بیضوی در یک صفحه با توزیع مواد تابعی، انجام داده‌اند. آن‌ها در این پژوهش با به‌کارگیری روش متغیر مختلط، پارامترهایی همچون توزیع توانی خواص مواد، زاویه بارگذاری را در استخراج نتایج تنش و گشتاور مورد مطالعه قرار دادند.

اگرچه در زمینه‌ی تحلیل تنش صفحات متغیر تابعی حاوی گشودگی تحقیقاتی صورت گرفته است؛ ولی در هیچ‌یک از آن‌ها به‌صورت جامع تأثیر هم‌زمان پارامترهایی از قبیل زاویه‌ی چرخش (جهت‌گیری) گشودگی و هندسه‌ی گشودگی بر توزیع تنش با استفاده از تابع‌نمایی اشاره نشده است. به دلیل اهمیت این پارامترها بر توزیع تنش، بررسی تأثیرات آن‌ها لازم به نظر می‌رسد. بنابراین در این پایان‌نامه سعی بر این است تا تأثیر این پارامترها بر روی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های

^۱ Pan

^۲ Ramirez

^۳ Heyliger

^۴ Discrete layer approach

^۵ Della Croce

^۶ Venini

^۷ Reissner-Mindlin

^۸ Reid

^۹ Paskaramoorthy

^{۱۰} Classical lamination theory

^{۱۱} Dave

^{۱۲} Sharma

بیضوی واقع در صفحه‌ی متغیر تابعی مورد بررسی قرار گیرد. زاویه‌ی چرخش گشودگی و هندسه‌ی گشودگی پارامترهای تأثیرگذار بر توزیع تنش هستند که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این پایان‌نامه گشودگی آزاد از بار خارجی است. ماده رفتار الاستیک خطی دارد بنابراین رفتار تنش کرنش خطی است و ابعاد صفحه‌ی مورد بحث در مقابل ابعاد گشودگی بزرگ است. (صفحه بی‌نهایت فرض می‌شود).

فصل ۲ : فرمول بندی حل تحلیلی

۲-۱ مقدمه

- در این فصل روابط به کار گرفته شده در تحلیل تنش صفحات ناهمگن ارائه می‌شود. فرض‌های اولیه که در استخراج روابط ارائه‌شده در این پایان‌نامه مدنظر قرار گرفته شده است، عبارت‌اند از :
۱. اندازه‌ی گشودگی در مقابل ابعاد صفحه کوچک است (صفحه بی‌نهایت).
 ۲. ماده دارای رفتار الاستیک خطی است.
 ۳. صفحه تحت بار تک‌محوره‌ی کششی در جهت x و یا y قرار گرفته است.
- فرضیات تئوری کلاسیک صفحات چندلایه بر مسأله‌ی موردبررسی، حاکم است.

۲-۲ نگاشت هم‌نوا

همان‌طور که اشاره شد، توزیع تنش در اطراف گشودگی دایروی در صفحات همسانگرد، ناهمسانگرد، چندلایه‌ی متقارن، نامتقارن و متغیر تابعی مورد بررسی قرار گرفته است. در این بخش با تعریف تابع نگاشت هم‌نوا روشی برای مدل کردن گشودگی بیضوی ارائه می‌شود. تابع نگاشت مورد استفاده در این پایان‌نامه برای مواد ناهمسانگرد به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۲]:

$$\varpi_j = X + s_j Y \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (1-2)$$

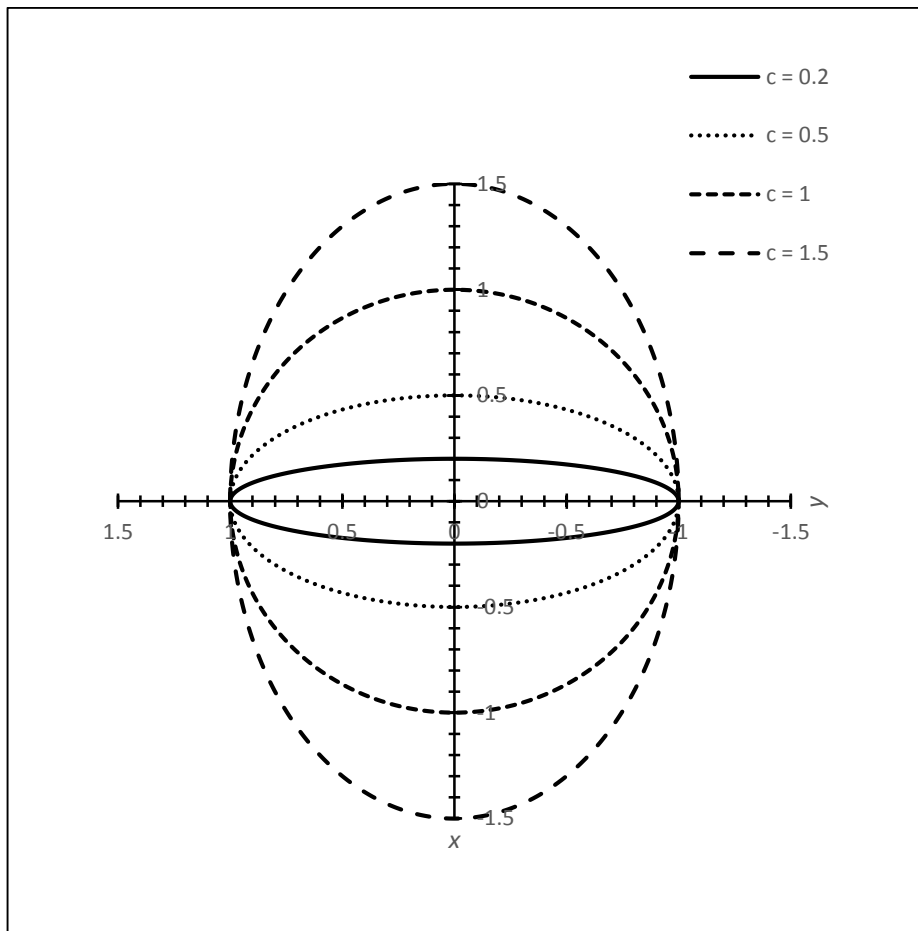
s_j ریشه‌های معادله‌ی مشخصه هستند که به تفصیل در بخش بعد معرفی می‌شوند.

این نگاشت نقاط روی مرز گشودگی را به دایره‌ای به شعاع واحد می‌نگارد. x و y به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} x &= \lambda(\cos\alpha) \\ y &= \lambda(c\sin\alpha) \end{aligned} \quad (2-2)$$

در رابطه‌ی (۲-۲) λ پارامتر تعیین‌کننده‌ی اندازه‌ی گشودگی هست و $\lambda = 1$ در نظر گرفته می‌شود. α زاویه‌ی پیرامون گشودگی است. c پارامتر کنترل‌کننده‌ی نسبت ابعاد گشودگی بوده و تنها در جهت y تأثیرگذار است و باعث کشیدگی یا فشردگی گشودگی در جهت y می‌شود. تأثیر این

پارامتر در شکل ۱-۲ قابل مشاهده است.



شکل ۱-۲: تأثیر پارامتر c بر هندسه‌ی گشودگی

رابطه‌ی (۲-۲) برای نگاشت نقاط گشودگی بر مرز دایره‌ی واحد استفاده می‌شود. برای نقاط خارج

از مرز گشودگی از متغیر مختلط ζ استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta = \rho e^{i\alpha} = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad (۳-۲)$$

برای دایره‌ای به شعاع واحد $\rho = 1$ است. از طرفی با استفاده از روابط اوپلر می‌توان نوشت:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

$$e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) \quad (۴-۲)$$

با استفاده از روابط (۳-۲) و (۴-۲) فرمول‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{-i}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \quad (5-2)$$

بنابراین می توان x و y را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \\ y &= \frac{\lambda i}{2} \left(-c\zeta + \frac{c}{\zeta} \right) \end{aligned} \quad (6-2)$$

برای مدل کردن زاویه ی چرخش گشودگی از انتقال زیر استفاده می شود:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

که در آن β زاویه ی چرخش گشودگی است. با جایگذاری رابطه های (۶-۲) در رابطه ی (۷-۲)

نتیجه می شود:

$$X = \frac{\lambda}{2} \left[(\cos \beta - ic \sin \beta) \zeta + (\cos \beta + ic \sin \beta) \frac{1}{\zeta} \right] \quad (8-2)$$

$$Y = \frac{-\lambda}{2} \left[(\sin \beta + ic \cos \beta) \zeta - (\sin \beta - ic \cos \beta) \frac{1}{\zeta} \right] \quad (9-2)$$

در نهایت با جایگذاری X و Y در رابطه ی (۱-۲) تابع نگاشت به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\varpi_j = \frac{\lambda}{2} \left(a_j \zeta + \frac{b_j}{\zeta} \right) \quad (10-2)$$

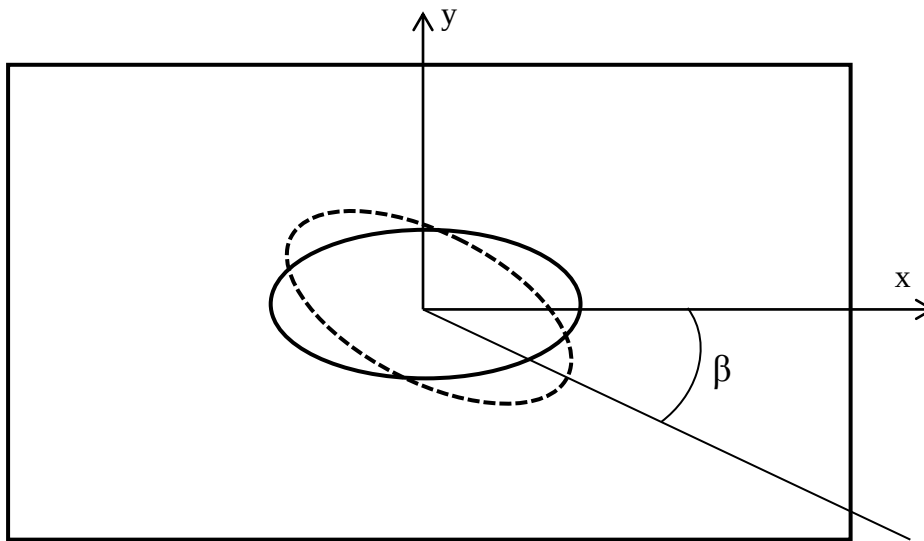
که در آن a_j و b_j برابرند با:

$$a_j = \cos \beta (1 - ics_j) + \sin \beta (-ic - s_j)$$

$$b_j = \cos \beta (1 + ics_j) + \sin \beta (ic - s_j) \quad (11-2)$$

در شکل ۲-۲ نمایی از تأثیر زاویه ی چرخش نشان داده شده است. چرخش گشودگی در جهت

عقربه های ساعت اتفاق می افتد.



شکل ۲-۲: نحوه‌ی چرخش گشودگی

۳-۲ روش حل و به‌دست آوردن معادلات حاکم

رابطه‌ی تنش و کرنش در حالت دوبعدی توسط ماتریس سفتی کاهش‌یافته، برای لایه‌ی k ام به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۷۴].

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^k \quad (۱۲-۲)$$

که $[\bar{Q}_{ij}]$ به ثوابت مهندسی و جهت‌گیری الیاف در هر لایه بستگی دارد و روابط آن در پیوست الف آورده شده است.

در تئوری کلاسیک صفحات چندلایه ($CLPT^1$) فرضیات زیر حاکم است:

- ۱- چندلایه نازک است و در تحلیل آن فرض بر این است که نسبت ضخامت به طول کمتر از یک به ۲۰ باشد.
- ۲- خطوط مستقیم و عمود بر صفحه‌ی میانی بعد از تغییر شکل نیز مستقیم و عمود بر صفحه‌ی میانی باقی می‌مانند و سطح مقطع دچار اعوجاج نمی‌شود.
- ۳- خطوط عمود بر صفحه‌ی میانی دچار هیچ‌گونه تغییر طولی نمی‌شوند.

^۱ Composite laminated plate theory

در این تئوری جابه‌جایی‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (۱۳-۲)$$

در رابطه‌های (۱۳-۲) u_0 ، v_0 و w_0 جابه‌جایی‌های صفحه‌ی میانی هستند. برای جابه‌جایی‌های

کوچک کرنش‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند [۷۴].

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (۱۴-۲)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۳-۲) در (۱۴-۲) کرنش‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (۱۵-۲)$$

یا

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (۱۶-۲)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (۱۷-۲)$$

با قرار دادن روابط (۱۶-۲) و (۱۷-۲) در رابطه‌ی (۱۲-۲) تنش در لایه‌ی k ام به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left[\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \right] \quad (۱۸-۲)$$

منتجه‌های نیرو و لنگری تنش وارد شده بر صفحه با انتگرال‌گیری از تنش در هر لایه در طول

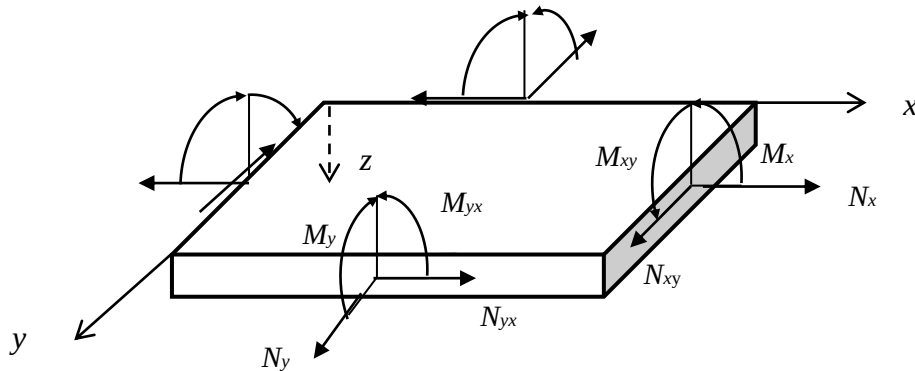
ضخامت چندلایه، قابل محاسبه است [۷۴]:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-H/2}^{H/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^k dz \quad (۱۹-۲)$$

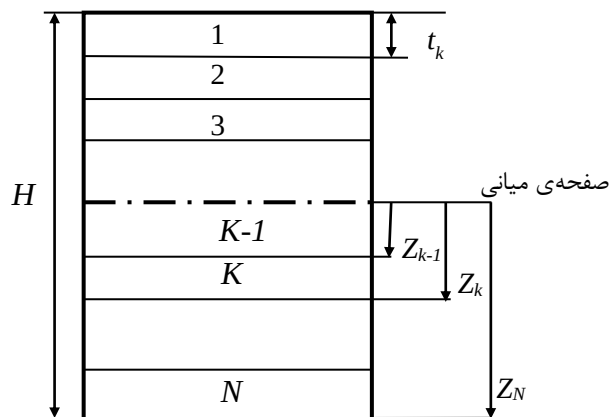
$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-H/2}^{H/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^k z dz \quad (۲۰-۲)$$

شکل ۳-۲ نمایشی از توزیع منتجه‌های نیرو و لنگری تنش در یک لایه را نشان می‌دهد. در روابط (۱۹-۲) و (۲۰-۲) z_k و z_{k-1} به ترتیب فاصله‌ی لایه‌ی k ام و لایه‌ی $k-1$ ام از صفحه‌ی میانی را مشخص می‌کنند (شکل ۴-۲). ضخامت همه‌ی لایه‌ها یکسان و برابر t_k در نظر گرفته شده است. ضخامت کل چندلایه برابر H است و برای یک لایه به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$H = N \times t_k \quad (۲۱-۲)$$



شکل ۳-۲ توزیع منتجه‌های نیرو و لنگری تنش در یک لایه [۷۴]



شکل ۴-۲ نمایشی از چیدمان لایه‌ها و نحوه‌ی نام‌گذاری آن‌ها

با استفاده از رابطه‌های (۱۸-۲)، (۱۹-۲) و (۲۰-۲) ماتریس منته‌های نیرو و لنگری تنش با

ماتریس سفتی کاهش‌یافته، به ماتریس کرنش مرتبط می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} dz + \int_{z_{k+1}}^{z_k} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z dz \right] \quad (22-2)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} z dz + \int_{z_{k+1}}^{z_k} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right] \quad (23-2)$$

مقادیر $[\bar{Q}]$ به جنس ماده بستگی دارند و به‌عنوان ثابت از انتگرال بیرون می‌آیند. علاوه بر این،

از آنجایی که $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, k_x, k_y$ و k_{xy} مستقل از z هستند، می‌توان روابط را به‌صورت زیر

بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (24-2)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

که در آن ماتریس A_{ij} سفتی کششی، ماتریس B_{ij} کوپلینگ بین کشش و خمش و ماتریس

D_{ij} سفتی خمشی بوده و به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]^k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (26-2)$$

مدول یانگ، مدول برش و ضریب پواسون در هر نقطه بسته به موقعیت z آن نقطه در امتداد

ضخامت بر اساس معادله‌ی توانی رابطه‌ی زیر، به‌دست می‌آیند.

$$E(z) = E_0 e^{\eta(\frac{1}{2} + \frac{z}{H})} \quad (27-2)$$

که در آن z فاصله از صفحه $X-Y$ است که در مرکز صفحه و صفحه میانی قرار گرفته است،

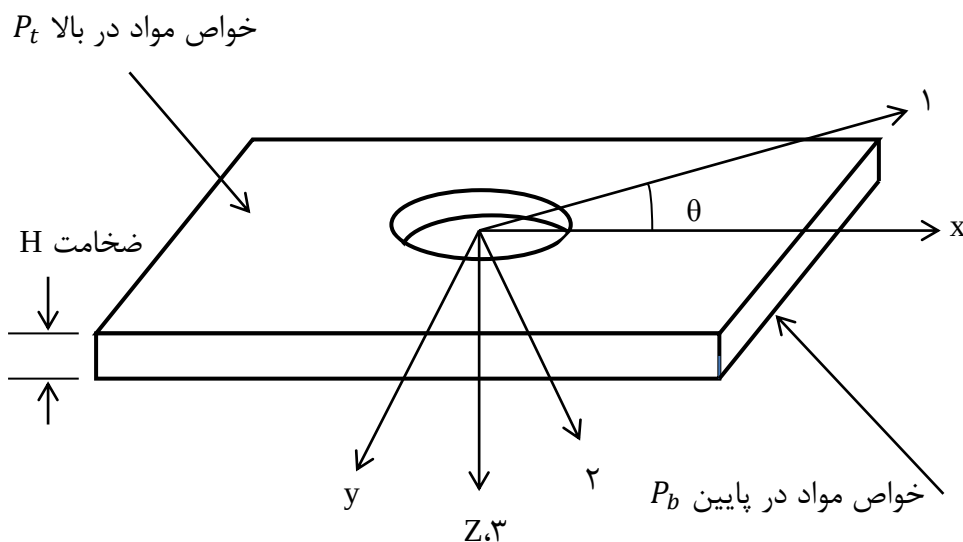
$E(z)$ خواص مواد در فاصله z ، E_0 خواص مواد در $z = -H/2$ که برابر است با P_t ، $\eta = \ln \frac{P_b}{P_t}$

ضخامت کلی، P_t خاصیت ماده در صفحه بالایی صفحه متغیر تابعی، P_b خاصیت ماده در

صفحه پایینی صفحه متغیر تابعی هست. شکل ۵-۲ نمایشی از هندسه مسئله است. به طوری که

جهت‌گیری لایه‌ها به گونه‌ای است که لایه بالایی در زاویه ۹۰ و لایه پایینی در زاویه ۰ درجه

هست.



شکل ۵-۲: نمایشی از صفحه متغیر تابعی

با استفاده از رابطه (۲۷-۲) خواص خارج محوری^۱ مواد بر اساس فاصله‌ی آن‌ها از صفحه‌ی

میانی به دست می‌آید. برای این که خواص مواد در لایه‌های متوالی به تدریج و بر اساس رابطه‌ی

(۲۷-۲) تغییر کند، باید جهت‌گیری لایه‌ها بر اساس روابط مربوط به تک‌لایه ارتوتروپیک در حالت

خارج محوری مشخص شود. از این رو جهت‌گیری لایه‌ها (θ) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۷۵].

^۱ Off Axis

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{E_1}{[m^4 + m^2 n^2 \left(-2v_{12} + \frac{E_1}{G_{12}}\right) + n^4 \frac{E_1}{E_2}]} \\
 E_y &= \frac{E_1}{[n^4 + m^2 n^2 \left(-2v_{12} + \frac{E_1}{G_{12}}\right) + m^4 \frac{E_1}{E_2}]} \\
 v_{xy} &= \frac{-[m^2 n^2 \left(1 + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}}\right) - (n^4 + m^4)v_{12}]}{[m^4 + m^2 n^2 \left(-2v_{12} + \frac{E_1}{G_{12}}\right) + n^4 \frac{E_1}{E_2}]} \\
 G_{xy} &= \frac{E_1}{[4n^2 m^2 \left(1 + 2v_{12} + \frac{E_1}{E_2}\right) + (n^2 - m^2)^2 \frac{E_1}{G_{12}}]} \quad (28-2)
 \end{aligned}$$

که در رابطه‌ی (۲۸-۲)، m و n به ترتیب $\cos \theta$ و $\sin \theta$ هستند. با به‌دست آوردن θ ماتریس سفتی قابل‌محاسبه است.

با در نظر گرفتن $U(x, y)$ به‌عنوان تابع تنش، منته‌جه‌ی تنش از رابطه‌ی (۲۹-۲) به‌دست می‌آیند.

$$N_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, N_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, N_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial x} \quad (29-2)$$

که معادلات تعادل و سازگاری را ارضا می‌کنند.

منتجه‌ی تنش $N = [N_x \quad N_y \quad N_{xy}]^T$ و $M = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T$ در صفحه‌ی متغیر تابعی

می‌توانند با استفاده از قانون کلی هوک به کرنش صفحه‌ی میانی $\varepsilon^0 = [\varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \gamma_{xy}^0]^T$ و انحنای

$k = [k_x \quad k_y \quad k_{xy}]^T$ به‌صورت رابطه‌ی (۳۰-۲) ربط داده شوند. (بازنویسی روابط (۲۴-۲) و

((۲۵-۲))

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (30-2)$$

که در آن $[A_{ij}]_{3 \times 3}$ ، $[B_{ij}]_{3 \times 3}$ و $[D_{ij}]_{3 \times 3}$ به ترتیب ماتریس‌های کشش، کوپلینگ بین کشش و خمش و خمش هستند که از رابطه‌ی (۲۶-۲) به‌دست می‌آیند.

که انحنایها از روابط زیر به‌دست می‌آیند.

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (۳۱-۲)$$

با اعمال وارونگی در قانون کلی هوك کرنش‌های صفحه‌ی میانی و منتجه‌های لنگری تنش مطابق رابطه‌ی (۳۲-۲) خواهند بود.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* & B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* & B_{21}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* & B_{61}^* & B_{62}^* & B_{66}^* \\ -B_{11}^* & -B_{21}^* & -B_{61}^* & D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ -B_{12}^* & -B_{22}^* & -B_{62}^* & D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ -B_{16}^* & -B_{26}^* & -B_{66}^* & D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۳۲-۲)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} [A_{ij}^*]_{3 \times 3} &= [A_{ij}]_{3 \times 3}^{-1} \\ [B_{ij}^*]_{3 \times 3} &= -[A_{ij}]_{3 \times 3}^{-1} [B_{ij}]_{3 \times 3} \\ [D_{ij}^*] &= [D_{ij}]_{3 \times 3} - [B_{ij}]_{3 \times 3} [A_{ij}]_{3 \times 3}^{-1} [B_{ij}]_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (۳۳-۲)$$

با استفاده از تنش‌های رابطه‌ی (۲۹-۲) و انحنای رابطه‌ی (۳۱-۲) و جای‌گذاری در رابطه‌ی

(۳۲-۲)، روابط (۳۴-۲) و (۳۵-۲) برای کرنش‌های صفحه‌ی میانی و لنگر تنش به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= A_{11}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + A_{12}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - A_{16}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - B_{11}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2B_{16}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_{xy}^0 &= A_{12}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + A_{22}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - A_{26}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - B_{21}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{22}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2B_{26}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xy}^0 &= A_{16}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + A_{26}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - A_{66}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - B_{61}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{62}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2B_{66}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (۳۴-۲)$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= -B_{11}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - B_{12}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B_{16}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - D_{11}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{16}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 M_y &= -B_{21}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - B_{22}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B_{26}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - D_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{26}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 M_{xy} &= -B_{61}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - B_{62}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B_{66}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - D_{16}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{26}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{66}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (35-2)
 \end{aligned}$$

معادله‌ی تعادل و معادله‌ی سازگاری موردنیاز برای ادامه‌ی حل تحلیلی به ترتیب، به صورت روابط

(۳۶-۲) و (۳۷-۲) تعریف می‌شوند [۷۵].

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (36-2)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} \quad (37-2)$$

با قرار دادن روابط (۳۴-۲) در معادله‌ی سازگاری (۳۷-۲) معادله‌ی (۳۸-۲) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}
 &A_{11}^* \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + A_{12}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - A_{16}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} - B_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{12}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\
 &\quad - 2B_{16}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + A_{12}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - A_{26}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} \\
 &\quad - B_{21}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 2B_{26}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - A_{16}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} \\
 &\quad - A_{26}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + A_{66}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{61}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + B_{62}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\
 &\quad + 2B_{66}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (38-2)
 \end{aligned}$$

با مرتب کردن رابطه‌ی (۳۸-۲) بر اساس U و w معادله‌ی

(۳۹-۲) به دست می آید.

$$\begin{aligned} & \left[A_{11}^* \frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2A_{16}^* \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + (2A_{12}^* + A_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2A_{26}^* \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + A_{22}^* \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right] U \\ & - \left[B_{12}^* \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (2B_{16}^* - B_{62}^*) \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} \right. \\ & + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + (2B_{26}^* - B_{61}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} \\ & \left. + B_{21}^* \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right] w = 0 \end{aligned} \quad (۳۹-۲)$$

با قرار دادن روابط (۳۵-۲) در معادله ی تعادل (۳۶-۲) معادله ی (۴۰-۲) نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} & -B_{11}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{12}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + B_{16}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} - D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - D_{12}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - 2D_{16}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - B_{21}^* \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - B_{22}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{26}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} \\ & - D_{12}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2D_{26}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} - 2B_{61}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} \\ & - 2B_{62}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + 2B_{66}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D_{16}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - 2D_{26}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\ & - 4D_{66}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (۴۰-۲)$$

با مرتب کردن رابطه ی (۴۰-۲) بر اساس U و w معادله ی (۴۱-۲) به دست می آید.

$$\begin{aligned} & \left[B_{12}^* \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (2B_{16}^* - B_{62}^*) \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\ & \left. + (2B_{26}^* - B_{61}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + B_{21}^* \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right] U \\ & + \left[D_{12}^* \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 4D_{26}^* \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\ & \left. + 4D_{16}^* \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + D_{11}^* \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right] w = 0 \end{aligned} \quad (۴۱-۲)$$

روابط (۳۹-۲) و (۴۱-۲) را می توان به صورت رابطه ی (۴۲-۲) بازنویسی کرد.

$$F_{A^*}U - F_{B^*}w = 0$$

$$F_{B^*}U + F_{D^*}w = 0$$

(۴۲-۲)

که در آن:

$$F_{A^*} = A_{11}^* \frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2A_{16}^* \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + (2A_{12}^* + A_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2A_{26}^* \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + A_{22}^* \frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

$$F_{B^*} = B_{12}^* \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (2B_{16}^* - B_{62}^*) \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + (2B_{26}^* - B_{61}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + B_{21}^* \frac{\partial^4}{\partial x^4}$$

$$F_{D^*} = D_{22}^* \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 4D_{26}^* \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16}^* \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + D_{11}^* \frac{\partial^4}{\partial x^4}$$

(۴۳-۲)

با حل معادلات (۴۲-۲)، معادله‌های (۴۴-۲) یا (۴۵-۲) برحسب U و w حاصل می‌شود.

$$(F_{A^*}F_{D^*} + F_{B^*}F_{B^*})U = 0$$

(۴۴-۲)

یا

$$(F_{A^*}F_{D^*} + F_{B^*}F_{B^*})w = 0$$

(۴۵-۲)

حل معادله‌ی (۴۴-۲) یا (۴۵-۲) جوابی برحسب w به صورت $U(w)$ خواهد داشت که در آن،

$w = x + s_j y$ متغیر مختلط است و s_j ثابت غیر همسانگرد تابعی از خواص مکانیکی صفحه است.

از این رو با در نظر گرفتن معادله‌ی (۴۵-۲)، جواب کلی به صورت رابطه‌ی (۴۶-۲) بازنویسی می‌شود.

$$(f_{A^*}(s)f_{D^*}(s) + f_{B^*}^2(s)) \frac{\partial^8 U}{\partial w^8} = 0$$

(۴۶-۲)

که در آن:

$$\begin{aligned} f_A^*(s) &= A_{11}^* s^4 - 2A_{16}^* s^3 + (2A_{12}^* + A_{66}^*) s^2 - 2A_{26}^* s + A_{22}^*, \\ f_B^*(s) &= B_{12}^* s^4 + (2B_{16}^* - B_{62}^*) s^3 + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) s^2 + (2B_{26}^* \\ &\quad - B_{61}^*) s + B_{21}^* \\ f_D^*(s) &= D_{22}^* s^4 + 4D_{26}^* s^3 + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) s^2 + 2D_{16}^* s + D_{11}^* \end{aligned} \quad (47-2)$$

طبق معادله‌ی (42-2)، رابطه‌ی بین U و w به صورت رابطه‌ی (48-2) خواهد بود:

$$\frac{w}{U} = \frac{f_A^*}{f_B^*} \quad (48-2)$$

با صفر قرار دادن جمله‌ی داخل پرانتز رابطه‌ی (46-2)، رابطه‌ی (49-2) به دست می‌آید.

$$f_A^*(s)f_D^*(s) + f_B^{*2}(s) = 0 \quad (49-2)$$

با حل معادله‌ی (49-2)، هشت ثابت غیر همسانگرد به صورت s_j و $\bar{s}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) به دست می‌آید.

با در نظر گرفتن $\mu_j(s_j) = \frac{f_A^*}{f_B^*}$ ، رابطه‌ی بین U و w به شکل معادله‌ی (50-2) بازنویسی می‌شود.

$$\sum_{j=1}^4 w_j(\varpi_j) = \sum_{j=1}^4 \mu_j(s_j) U_j(\varpi_j) \quad (50-2)$$

با تعریف تابع رابطه‌ی (51-2):

$$\varphi_j = \frac{dU_j(\varpi_j)}{d\varpi_j} \quad (51-2)$$

انحنای صفحه‌ی میانی و منته‌ی تنش را می‌توان به صورت روابط

(52-2) و

(۵۳-۲) نوشت:

$$k_x = -2Re \sum_{j=1}^4 \mu_j(s_j) \phi_j(\varpi_j)$$

$$k_y = -2Re \sum_{j=1}^4 \mu_j(s_j) s_j^2 \phi_j(\varpi_j)$$

$$k_{xy} = -4Re \sum_{j=1}^4 \mu_j(s_j) s_j \phi_j(\varpi_j) \quad (۵۲-۲)$$

و

$$N_x = 2Re \sum_{j=1}^4 s_j^2 \phi_j(\varpi_j)$$

$$N_y = 2Re \sum_{j=1}^4 \phi_j(\varpi_j)$$

$$N_{xy} = -2Re \sum_{j=1}^4 s_j \phi_j(\varpi_j) \quad (۵۳-۲)$$

حال با استفاده از تابع ϕ کرنش صفحه‌ی میانی و لنگر تنش به‌صورت رابطه‌های (۵۴-۲) و

(۵۵-۲) خواهند بود.

$$\varepsilon_x^0 = 2Re \sum_{j=1}^4 e_{1j}(s_j) \phi_j(\varpi_j)$$

$$\varepsilon_y^0 = 2Re \sum_{j=1}^4 e_{2j}(s_j) \phi_j(\varpi_j)$$

$$\gamma_{xy}^0 = 2Re \sum_{j=1}^4 e_{3j}(s_j) \phi_j(\varpi_j) \quad (۵۴-۲)$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= 2Re \sum_{j=1}^4 f_{1j}(s_j) \phi_j(\varpi_j) \\
 M_y &= 2Re \sum_{j=1}^4 f_{2j}(s_j) \phi_j(\varpi_j) \\
 M_{xy} &= 2Re \sum_{j=1}^4 f_{3j}(s_j) \phi_j(\varpi_j)
 \end{aligned} \tag{۵۵-۲}$$

با جای گذاری معادلات (۵۲-۲) تا (۵۵-۲) در معادله (۳۰-۲)، e_{1j} ، e_{2j} ، e_{3j} ، f_{1j} ، f_{2j} و f_{3j} از

طریق رابطه (۵۶-۲) به دست می آیند.

$$\begin{Bmatrix} e_{1j} \\ e_{2j} \\ e_{3j} \\ f_{1j} \\ f_{2j} \\ f_{3j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* & B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* & B_{21}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* & B_{61}^* & B_{62}^* & B_{66}^* \\ -B_{11}^* & -B_{21}^* & -B_{61}^* & D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ -B_{12}^* & -B_{22}^* & -B_{62}^* & D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ -B_{16}^* & -B_{26}^* & -B_{66}^* & D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_j^2 \\ 1 \\ -s_j \\ -\mu_j(s_j) \\ -\mu_j(s_j)s_j^2 \\ -2\mu_j(s_j)s_j \end{Bmatrix} \tag{۵۶-۲}$$

نیروی برشی عرضی به صورت رابطه

(۵۷-۲) است [۴۱].

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\
 Q_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{۵۷-۲}$$

و رابطه بین Q_x و Q_y به صورت زیر تعریف می شود.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \tag{۵۸-۲}$$

با جای گذاری روابط (۵۵-۲) در رابطه (۵۷-۲) روابط

(۵۹-۲) حاصل می شوند:

$$Q_x = 2Re \sum_{j=1}^4 [f_{1j}(s_j) + s_j f_{3j}(s_j)] \varphi_j''(\varpi_j)$$

$$Q_y = 2Re \sum_{j=1}^4 [f_{3j}(s_j) + s_j f_{2j}(s_j)] \varphi_j''(\varpi_j) \quad (59-2)$$

با جای گذاری روابط (59-2) در (58-2)، رابطه (60-2) به دست می آید (یوکادگائونکر و رائو [42]):

$$f_{1j}(s_j) + 2s_j f_{3j}(s_j) + s_j^2 f_{2j}(s_j) = 0 \quad (60-2)$$

با به کارگیری رابطه ی (60-2) و حذف $f_{2j}(s_j)$ روابط (59-2) به صورت روابط

(61-2) بازنویسی می شوند:

$$Q_x = 2Re \sum_{j=1}^4 [f_{1j}(s_j) + s_j f_{3j}(s_j)] \varphi_j''(\varpi_j)$$

$$Q_y = -2Re \sum_{j=1}^4 \left[\frac{f_{1j}(s_j) + s_j f_{3j}(s_j)}{s_j} \right] \varphi_j''(\varpi_j) \quad (61-2)$$

و یا

$$Q_x = -2Re \sum_{j=1}^4 [f_{3j}(s_j) + s_j f_{2j}(s_j)] s_j \varphi_j''(\varpi_j)$$

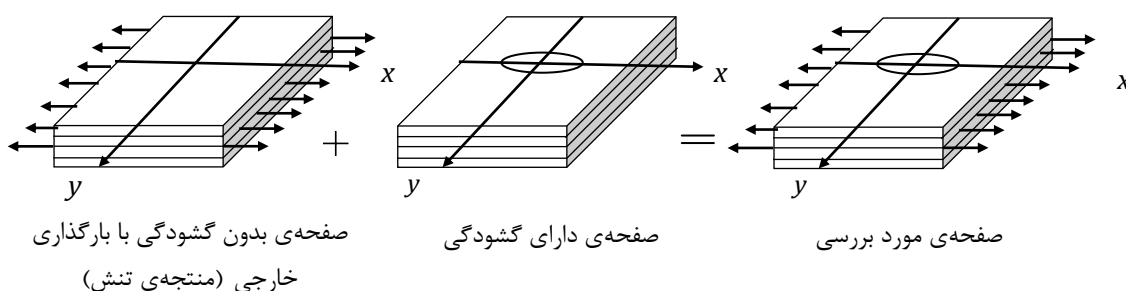
$$Q_y = 2Re \sum_{j=1}^4 [f_{3j}(s_j) + s_j f_{2j}(s_j)] \varphi_j''(\varpi_j) \quad (62-2)$$

۱-۳-۲ محاسبه ی تابع پتانسیل

تابع پتانسیل با استفاده از روش جمع آثار^۱ از جمع توابع پتانسیل در دو مرحله، قابل محاسبه است. در مرحله ی اول، صفحه بدون گشودگی با بارگذاری در لبه های خارجی آن در نظر گرفته شده

^۱ - Superposition principle

است. در اثر این بارگذاری در نقاطی که مرز گشودگی را مشخص می‌کنند؛ بار داخلی ایجاد می‌شود. چون مرز گشودگی در مسأله‌ی اصلی عاری از بار است؛ بنابراین فرض می‌شود که در حالت دوم نیرویی مخالف بار داخلی ایجادشده بر مرز گشودگی اعمال می‌شود تا در نهایت مرز گشودگی بدون بار باشد. با جمع توابع پتانسیل هر یک از حالت‌های اشاره‌شده، تابع پتانسیل کل به‌دست می‌آید. شکل ۶-۲



شکل ۶-۲: نمایشی از روش حل

در غیاب گشودگی، تابع پتانسیل مرحله‌ی اول شکل ساده‌ای به خود می‌گیرد و به‌صورت یک ثابت

مختلط فرض می‌شود [۴۱].

$$\varphi'_{1j} = A_j \quad (۶۳-۲)$$

برای به‌دست آوردن این ثابت، به هشت شرط مرزی برای بخش‌های موهومی و حقیقی نیاز است.

بدین منظور با جای‌گذاری تابع پتانسیل مرتبه‌ی اول در رابطه‌های (۵۳-۲) و (۵۵-۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} N_x^\infty &= 2Re \sum_{j=1}^4 s_j^2 A_j, N_y^\infty = 2Re \sum_{j=1}^4 A_j, N_x^\infty = -2Re \sum_{j=1}^4 s_j A_j \\ M_x^\infty &= 2Re \sum_{j=1}^4 f_{1j}(s_j) A_j, M_y^\infty = 2Re \sum_{j=1}^4 f_{2j}(s_j) A_j, M_x^\infty = 2Re \sum_{j=1}^4 f_{3j}(s_j) A_j \end{aligned} \quad (۶۴-۲)$$

برای به‌دست آوردن شرط مرزی هفتم با توجه به صلب بودن صفحه، در مرز خارجی چرخش حول

محور z صفر است $(\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x})$ ، از این‌رو رابطه‌ی (۶۵-۲) به‌دست می‌آید.

$$2Re \sum_{j=1}^4 \left[\frac{e_{2j}}{s_j} - e_{1j} s_j \right] A_j = 0 \quad (۶۵-۲)$$

شرط هشتم متعاقباً به‌دست می‌آید.

در مرحله‌ی دوم با استفاده از توابع پتانسیل مرتبه‌ی اول، نیروهای داخلی f_x و f_y و نیروی عرضی $p(s)$ و گشتاور خمشی $m(s)$ در مرز گشودگی به وجود می‌آیند. با استفاده از معادلات تعادل در جهت x و y نیروهای داخلی به نتیجه‌های N_x ، N_y و N_{xy} مربوط می‌شوند (ساوین [۱۱]).

$$N_x dy - N_{xy} dx = -X_n ds \quad (۶۶-۲)$$

$$N_{xy} dy - N_y dx = -Y_n ds \quad (۶۷-۲)$$

لازم به ذکر است که s بیانگر طول کمان طی شده از گشودگی است. انتگرال نیروی عرضی در مرز گشودگی به کمک رابطه‌ی (۶۸-۲) محاسبه می‌شود [۴۱].

$$\int_0^s p(s) ds = f(s) \quad (۶۸-۲)$$

که در آن $p(s)$ مطابق با رابطه‌ی (۶۹-۲) است [۴۱]:

$$\int_0^s (Q_n + \frac{\partial}{\partial s} M_{nt}) ds = - \int_0^s p(s) ds \quad (۶۹-۲)$$

که در آن:

$$P = \int_0^s Q_n ds = \int_0^s (Q_x dy - Q_y dx), \quad M_{nt} = \int_0^s \frac{\partial}{\partial s} M_{nt} ds \quad (۷۰-۲)$$

بنابراین می‌توان روابط را به صورت رابطه‌ی (۷۱-۲) بازنویسی کرد:

$$P + M_{nt} = -f(s) \quad (۷۱-۲)$$

گشتاور خمشی نرمال M_{nt} در مرحله‌ی دوم توسط رابطه‌ی (۷۲-۲) در مرز گشودگی بیان می‌شود:

$$M_n = -m(s) \quad (۷۲-۲)$$

مؤلفه‌های قائم و مماسی گشتاور در اطراف گشودگی توسط ماتریس انتقال به نیرو و گشتاور $f(s)$ و $m(s)$ مرتبط می‌شوند:

$$(M_y - M_x) \cos \alpha \sin \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + p = -f(s) \quad (۷۳-۲)$$

$$M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + 2M_{xy} \cos \alpha \sin \alpha = -m(s) \quad (۷۴-۲)$$

α زاویه‌ی بین مرکز گشودگی و محور افق است.

$$\sin \alpha = -\frac{dx}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad (۷۵-۲)$$

با ضرب رابطه‌ی (۷۳-۲) در $\cos \alpha$ و ضرب رابطه‌ی (۷۴-۲) در $\sin \alpha$ و جمع آن‌ها رابطه‌ی زیر

نتیجه می‌شود:

$$(M_{xy} + P)dy - M_y dx = m dx - f dy \quad (۷۶-۲)$$

با ضرب رابطه‌ی (۷۳-۲) در $\sin \alpha$ و ضرب رابطه‌ی (۷۴-۲) در $\cos \alpha$ و تفریق آن‌ها رابطه‌ی زیر

نتیجه می‌شود:

$$M_x dy - (M_{xy} - P)dx = -m dy - f dx \quad (۷۷-۲)$$

با استفاده از معادلات تعادل و تعریف منته‌های نیرو و لنگری تنش برحسب تابع پتانسیل

مرتبه‌ی دوم در (۵۳-۲) و (۵۵-۲) رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود.

$$f_{1j} + f_{3j}s_j + f_{1j}s_j^2 = 0 \quad (۷۸-۲)$$

سپس با قرار دادن منته‌ها برحسب تابع پتانسیل در روابط (۶۶-۲)، (۶۷-۲)، (۷۶-۲) و (۷۷-۲)

شرایط مرزی مرحله‌ی دوم به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \int_0^s X_n ds &= 2Re \sum_{j=1}^4 s_j \varphi_{2j}(\varpi_j) \\ - \int_0^s Y_n ds &= 2Re \sum_{j=1}^4 \varphi_{2j}(\varpi_j) \\ \int (m_n dy + f dx) &= 2Re \sum_{j=1}^4 \frac{f_{1j}(s_j)}{s_j} \varphi_{2j}(\varpi_j) \\ \int (m_n dy - f dx) &= 2Re \sum_{j=1}^4 f_{2j}(s_j) \varphi_{2j}(\varpi_j) \end{aligned} \quad (۷۹-۲)$$

با در نظر گرفتن منته‌ها برحسب توابع پتانسیل مرتبه‌ی دوم مطابق روابط (۵۳-۲) و (۵۵-۲) و

قرار دادن آن‌ها در (۷۹-۲) روابط

(۸۰-۲) نتیجه می شود.

$$2Re[s_j \varphi_{2j}(\varpi_j)] = 2Re[s_j A_j \varpi_j]$$

$$2Re[\varphi_{2j}(\varpi_j)] = 2Re[A_j \varpi_j]$$

$$2Re\left[\frac{f_{1j}}{s_j} \varphi_{2j}(\varpi_j)\right] = 2Re\left[\frac{f_{1j}}{s_j} A_j \varpi_j\right]$$

$$2Re[f_{2j} \varphi_{2j}(\varpi_j)] = 2Re[f_{2j} A_j \varpi_j] \quad (۸۰-۲)$$

با قرار دادن نگاشت (۱۰-۲) در روابط (۸۰-۲) نتیجه می شود:

$$s_j \varphi_{2j}(\varpi_j) = \frac{\lambda}{2} [s_j A_j \left(a_j \zeta + \frac{b_j}{\zeta}\right) + \bar{s}_j \bar{A}_j \left(\bar{a}_j \zeta + \frac{\bar{b}_j}{\zeta}\right)]$$

$$\varphi_{2j}(\varpi_j) = \frac{\lambda}{2} [A_j \left(a_j \zeta + \frac{b_j}{\zeta}\right) + \bar{A}_j \left(\bar{a}_j \zeta + \frac{\bar{b}_j}{\zeta}\right)]$$

$$\frac{f_{1j}}{s_j} \varphi_{2j}(\varpi_j) = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{f_{1j}}{s_j} A_j \left(a_j \zeta + \frac{b_j}{\zeta}\right) + \frac{\bar{f}_{1j}}{\bar{s}_j} \bar{A}_j \left(\bar{a}_j \zeta + \frac{\bar{b}_j}{\zeta}\right) \right]$$

$$f_{2j} \varphi_{2j}(\varpi_j) = \frac{\lambda}{2} [f_{2j} A_j \left(a_j \zeta + \frac{b_j}{\zeta}\right) + \bar{f}_{2j} \bar{A}_j \left(\bar{a}_j \zeta + \frac{\bar{b}_j}{\zeta}\right)] \quad (۸۱-۲)$$

فرمول شوارتز برای تابع هولومورفیک $\varphi(\zeta)$ و $|\zeta| = 1$ در داخل ناحیه دایروی به شعاع واحد

به صورت زیر تعریف می شود [۴۱].

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint Re[\varphi(t)] \frac{t + \zeta}{t - \zeta} \frac{dt}{t} + ia_0 \quad (۸۲-۲)$$

a_0 ثابت حقیقی است. با قرار دادن معادلات (۸۱-۲) در رابطه (۸۲-۲) و محاسبه انتگرال

$\varphi(\zeta)$ به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 s_j \varphi_{2j}(\zeta) &= \frac{\lambda}{2} \left[s_j A_j \left(\frac{b_j}{\zeta} \right) + \bar{s}_j \bar{A}_j \left(\frac{\bar{b}_j}{\zeta} \right) \right] \\
 \varphi_{2j}(\zeta) &= \frac{\lambda}{2} \left[A_j \left(\frac{b_j}{\zeta} \right) + \bar{A}_j \left(\frac{\bar{b}_j}{\zeta} \right) \right] \\
 \frac{f_{1j}}{s_j} \varphi_{2j}(\zeta) &= \frac{\lambda}{2} \left[\frac{f_{1j}}{s_j} A_j \left(\frac{b_j}{\zeta} \right) + \frac{\bar{f}_{1j}}{\bar{s}_j} \bar{A}_j \left(\frac{\bar{b}_j}{\zeta} \right) \right] \\
 f_{2j} \varphi_{2j}(\zeta) &= \frac{\lambda}{2} \left[f_{2j} A_j \left(\frac{b_j}{\zeta} \right) + \bar{f}_{2j} \bar{A}_j \left(\frac{\bar{b}_j}{\zeta} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{۸۳-۲}$$

با مشتق‌گیری از روابط (۸۳-۲) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}
 s_j \varphi'_{2j}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} (k_1 + k_2) \frac{1}{\zeta^2} \\
 \varphi'_{2j}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} (k_3 + k_4) \frac{1}{\zeta^2} \\
 \frac{f_{1j}}{s_j} \varphi'_{2j}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} (k_5 + k_6) \frac{1}{\zeta^2} \\
 f_{2j} \varphi'_{2j}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} (k_7 + k_8) \frac{1}{\zeta^2}
 \end{aligned} \tag{۸۴-۲} \tag{۸۵-۲} \tag{۸۶-۲} \tag{۸۷-۲}$$

که در آن k_1 تا k_8 مطابق **رابطه‌ی (48)** بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \overline{s_j A_j a_j}, k_2 = s_j A_j b_j \\
 k_3 &= \overline{A_j a_j}, k_4 = A_j b_j \\
 k_5 &= \overline{H_j A_j a_j}, k_6 = H_j A_j b_j \\
 k_7 &= \overline{f_{2j} A_j a_j}, k_8 = f_{2j} A_j b_j
 \end{aligned} \tag{۸۸-۲}$$

و $H_j = \frac{f_{1j}}{s_j}$ می‌باشد.

با حل روابط (۸۴-۲) تا (۸۷-۲)، φ'_{2j} به‌دست می‌آید. حل نهایی برای φ'_j به‌صورت رابطه‌ی

(۸۹-۲) است.

$$\varphi'_j(\varpi_j) = A_j - \frac{\varphi'_{2j}(\zeta)}{\varpi'_j} \tag{۸۹-۲}$$

که در آن z' مشتق مرتبه‌ی اول تابع نگاشت نسبت به ζ است.

هفت معادله‌ی (۶۴-۲) تا (۶۵-۲) نمی‌توانند A_j را به ازای هشت ریشه‌ی s_j و $\bar{s}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) به‌دست آورند. از این‌رو هشتمین شرط با حصول اطمینان از یکتایی جواب در جابه‌جایی خارج از صفحه w به‌دست می‌آید. بدین‌صورت که در یک دایره باید جابه‌جایی دو نقطه در زاویه‌های صفر و 2π که بر روی هم می‌افتند در راستای z برابر باشند. یعنی $w(0) = w(2\pi)$.

جابه‌جایی خارج از صفحه w می‌تواند با استفاده از رابطه‌ی (۵۰-۲) نوشته شود.

$$w_j = \mu_j(s_j) \int \varphi_j(\varpi_j) d\varpi_j \quad (90-2)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۸۹-۲)، و قرار دادن آن در رابطه‌ی (۹۰-۲) جابه‌جایی خارج صفحه‌ی w به‌دست می‌آید. با در نظر گرفتن شرط یکتایی جواب که اشاره شد، برای هر یک از معادلات به‌دست‌آمده از رابطه‌ی (۸۹-۲)، باید $\varphi'_{2j}(\zeta) = 0$ باشد [۷۳].

با تحلیل معادلات (۸۴-۲) تا (۸۷-۲) برای یکتایی w نتیجه می‌شود که قسمت دوم معادله‌ی (۸۶-۲) یا (۸۷-۲) باید صفر شود.

از این‌رو شرط یکتایی جواب w به‌صورت روابط (۹۱-۲) یا (۹۲-۲) نوشته می‌شود.

$$k_5 + k_6 = 0 \quad (91-2)$$

یا

$$k_7 + k_8 = 0 \quad (92-2)$$

در نهایت با اعمال رابطه‌ی (۸۹-۲) برای تابع پتانسیل، در روابط (۵۳-۲) و (۵۵-۲)، که مربوط به منته‌های تنش هست، جواب تحقیق حاضر به‌دست می‌آید.

۴-۲ الگوریتم حل تحلیلی

۱- تعیین هندسه‌ی گشودگی و جهت‌گیری آن با تعریف پارامترهای β و c در رابطه‌ی (۱۰-۲) و (۱۱-۲)

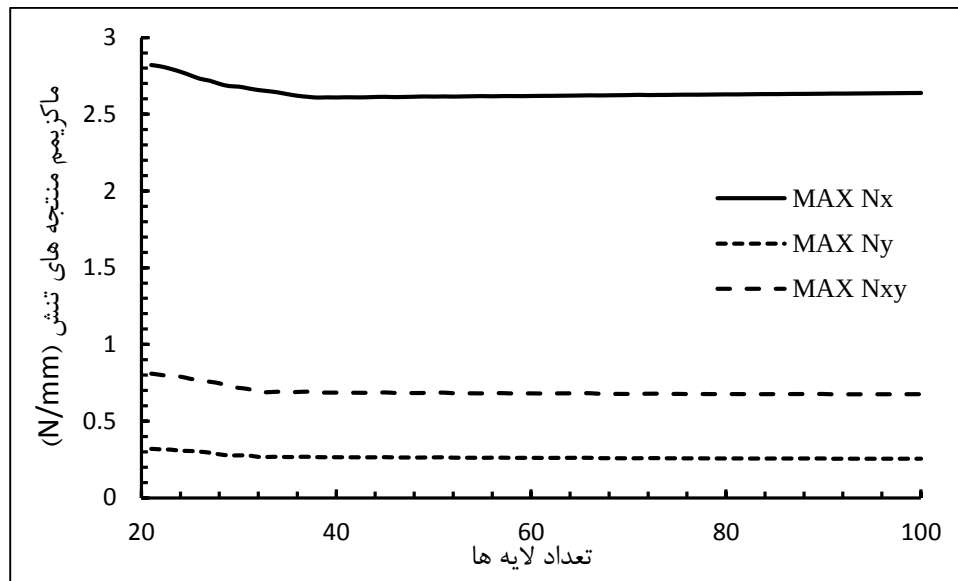
- ۲- تعیین ماتریس سفتی کشش، کوپلینگ و خمش با استفاده از روابط ارائه‌شده در پیوست الف و رابطه‌های (۲۶-۲) با توجه به جنس ماده و نحوه‌ی چیدمان لایه‌ها و زاویه‌ی الیاف
- ۳- تعیین معکوس ماتریس سفتی با استفاده از رابطه‌ی (۳۲-۲)
- ۴- تعیین ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی (۴۹-۲)
- ۵- تعیین ثوابت مختلط e_{1j} , e_{2j} , e_{3j} , f_{1j} , f_{2j} و f_{3j} با استفاده از رابطه‌ی (۵۶-۲)
- ۶- محاسبه‌ی تابع پتانسیل مرحله‌ی اول با استفاده از شرایط مرزی (۶۴-۲)، (۶۵-۲) و یکی از دو رابطه‌ی (۹۱-۲) یا (۹۲-۲)
- ۷- محاسبه‌ی تابع پتانسیل مرحله‌ی دوم با استفاده از روابط (۸۴-۲) تا (۸۷-۲) در صفحه‌ی z
- ۸- محاسبه‌ی تابع پتانسیل کل با استفاده از جمع آثار در صفحه‌ی z با استفاده از فرمول (۸۹-۲)
- ۹- محاسبه‌ی منته‌های نیرو و لنگری تنش با استفاده از تابع پتانسیل کل و رابطه‌های (۵۳-۲) و (۵۵-۲)

۲-۵ بررسی درستی جواب‌ها

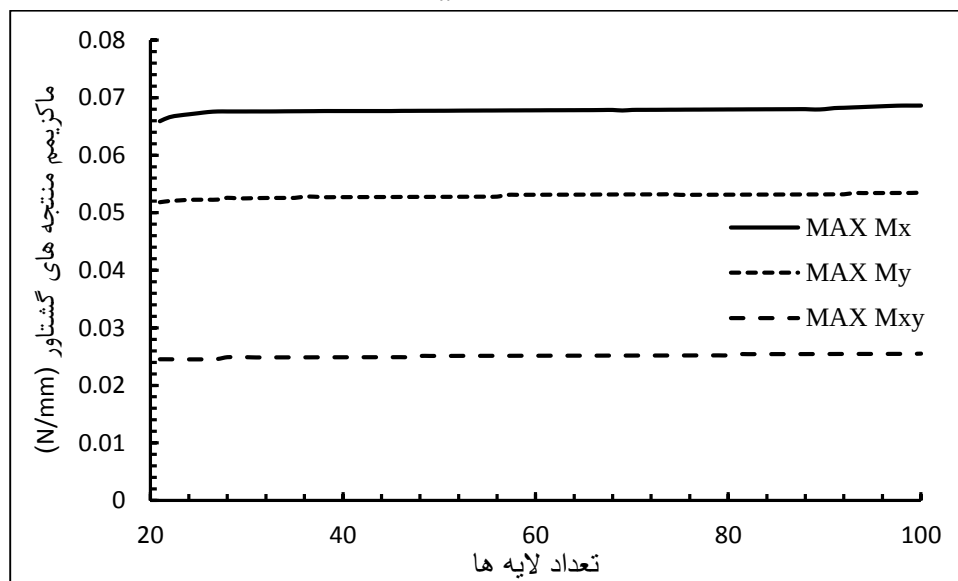
خواص مواد در طول ضخامت با تغییرات ملایمی تغییر می‌کند. تأثیر تعداد لایه‌ها بر صفحه‌ی دارای ضخامت بی‌بعد ($\frac{2z}{H} = 1$) بر روی مقدار ماکزیمم N_x , N_y , N_{xy} , M_x , M_y و M_{xy} برای بارگذاری $N_x^\infty = 1$ (N/mm) در شکل ۷-۲ و شکل ۸-۲ نشان داده‌شده است. همچنین برای بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) نیز تأثیر تعداد لایه‌ها بر مقدار ماکزیمم منته‌های نیرویی و لنگری تنش در شکل ۹-۲ و شکل ۱۰-۲ قابل مشاهده است.

نتایج نشان داده‌شده در شکل ۷-۲ تا شکل ۱۰-۲ برای صفحه‌ی بی‌نهایت دارای گشودگی بیضوی با $c=0.5$ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج به‌سرعت همگرا می‌شوند. در نتیجه برای اطمینان از دقت جواب‌ها، صفحه را به صد لایه با ضخامت بی‌بعد یک‌صدم در نظر می‌-

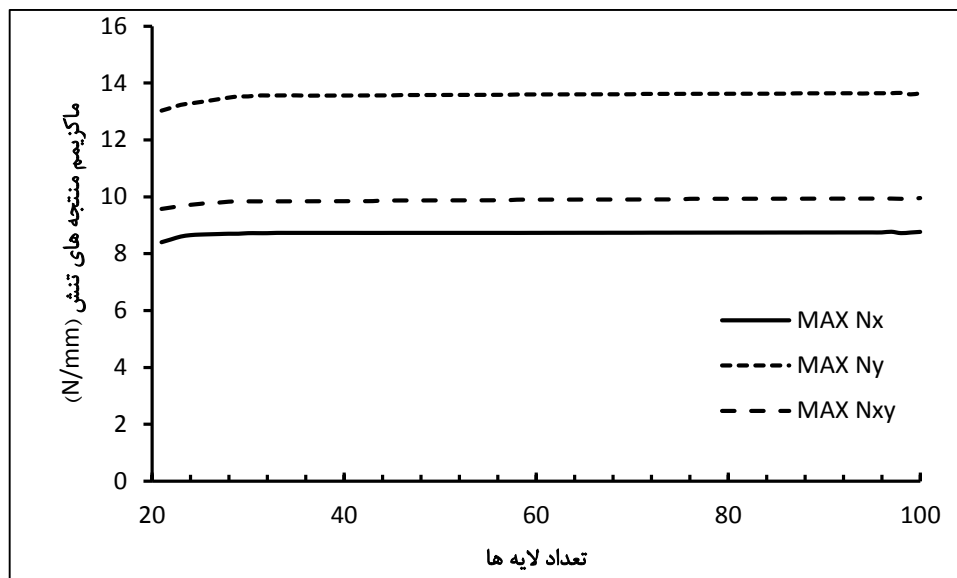
گیریم.



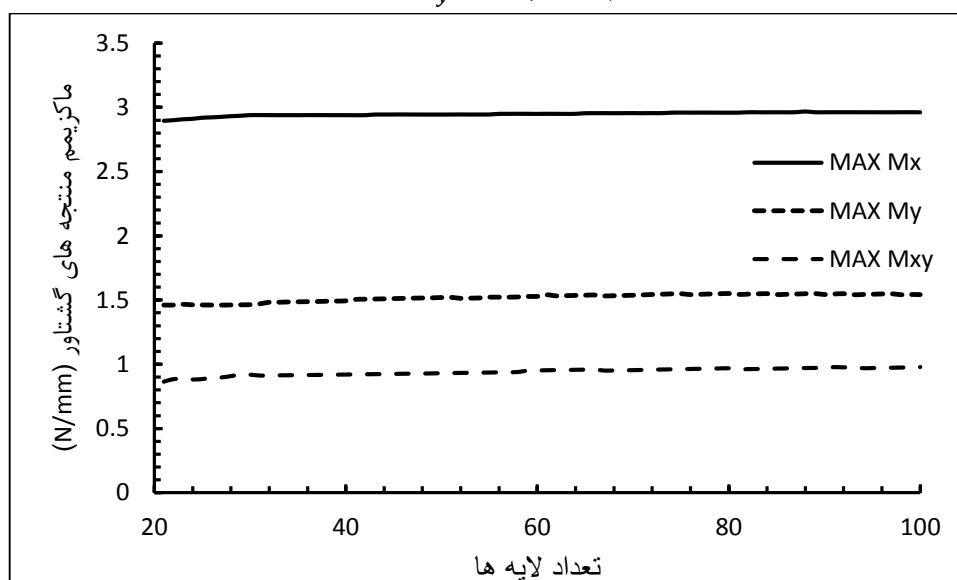
شکل ۲-۷: اثر تعداد لایه‌های صفحه‌ی متغیر تابعی بر ماکزیمم منته‌ی تنش حول گشودگی بیضوی تحت بارگذاری $N_x^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$



شکل ۲-۸: اثر تعداد لایه‌های صفحه‌ی متغیر تابعی بر ماکزیمم منته‌ی لنگری تنش حول گشودگی بیضوی تحت بارگذاری $N_x^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$



شکل ۹-۲: اثر تعداد لایه‌های صفحه‌ی متغیر تابعی بر ماکزیمم منته‌ی تنش حول گشودگی بیضوی تحت بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm)



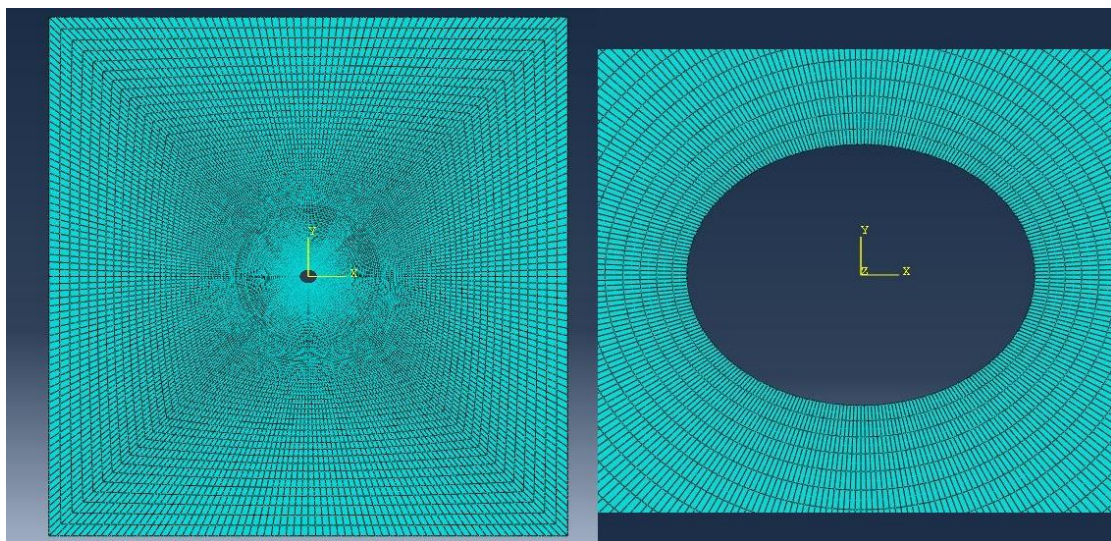
شکل ۱۰-۲: اثر تعداد لایه‌های صفحه‌ی متغیر تابعی بر ماکزیمم منته‌ی لنگری تنش حول گشودگی بیضوی تحت بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm)

۲-۵-۱ مقایسه با حل عددی

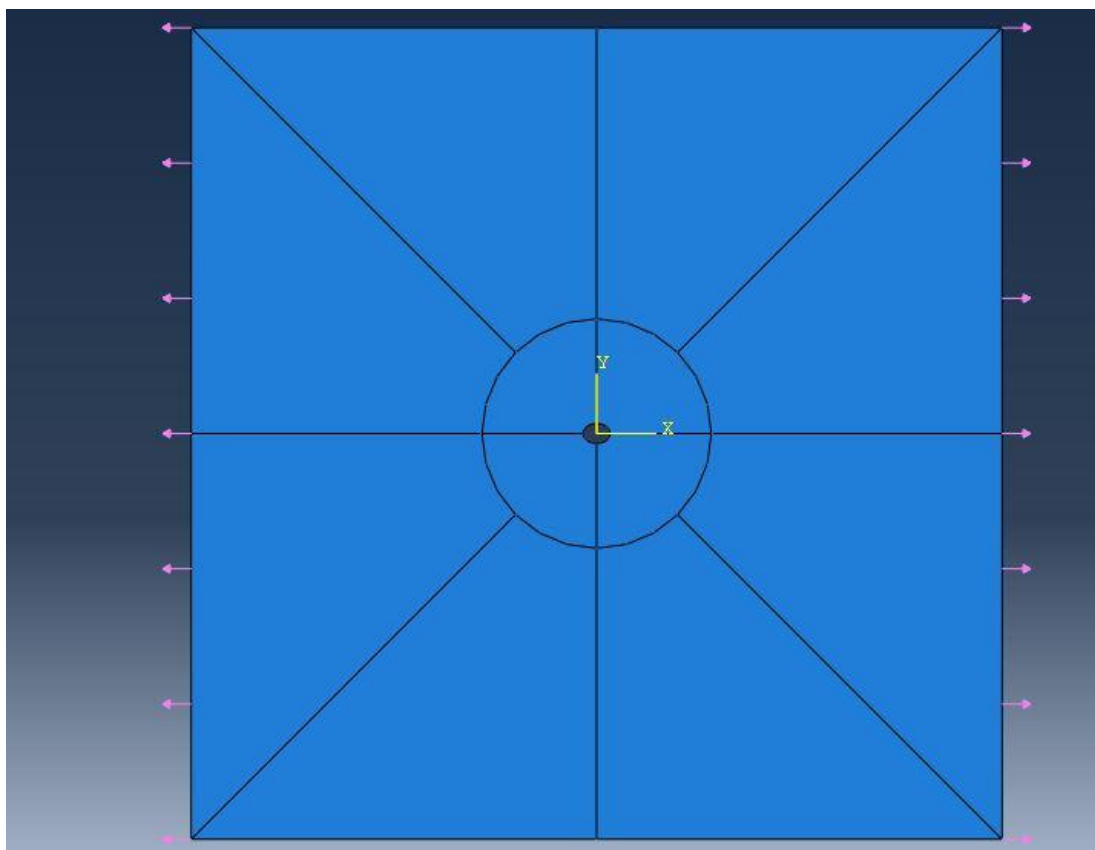
برای بررسی نتایج حاصل از روش تحلیلی حاضر از روش اجزای محدود کمک گرفته شده است. در این قسمت به برخی از نتایج حاصل از روش اجزای محدود و مقایسه‌ی آن با حل تحلیلی حاضر اشاره شده است. ابتدا در مورد نحوه‌ی بارگذاری و المان‌بندی در محیط آباکوس^۱ توضیح داده می‌شود.

^۱ ABAQUS

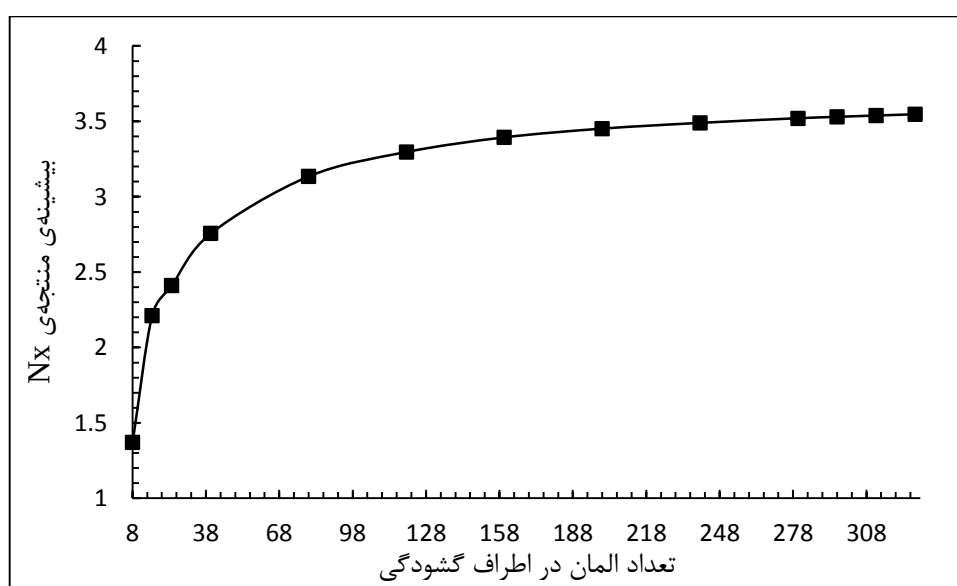
برای مش‌بندی از المان S8R که منطبق با هندسه و فیزیک مسأله است، استفاده شده است. برای اینکه صفحه بی‌نهایت به‌نظر برسد، کافی است نسبت قطر بیضی بر گشودگی به ابعاد صفحه، بیشتر از یک به ۲۰ باشد. نحوه‌ی مش‌بندی و اعمال بارگذاری در شکل ۱۱-۲ و شکل ۱۲-۲ نشان داده شده است. به‌منظور کاهش زمان حل و حجم محاسبات، مش‌بندی در اطراف گشودگی ریزتر از نقاط دور از گشودگی صورت گرفته است. برای یافتن بهینه‌ترین اندازه‌ی مش در ناحیه‌ی اطراف گشودگی بیضوی تحت بارگذاری تک‌محوره با خواص مکانیکی ارائه شده در جدول ۱-۱ بررسی شد.



شکل ۱۱-۲: نحوه‌ی مش‌بندی در نرم‌افزار اجزای محدود

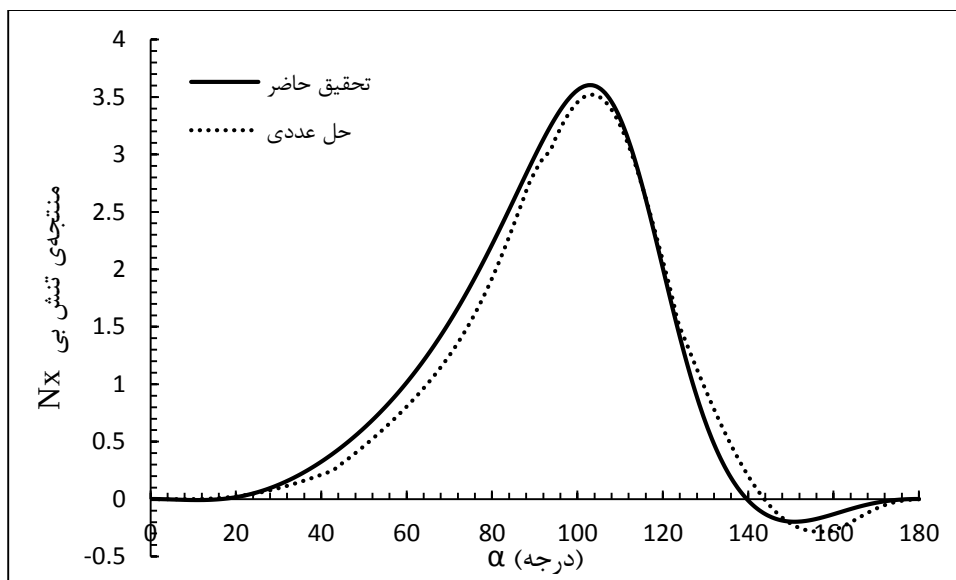


شکل ۲-۱۲: نحوه‌ی بارگذاری در نرم‌افزار اجزای محدود
 ناحیه‌ی اطراف گشودگی با اندازه‌های مختلف مش‌بندی مطالعه شد. در شکل ۲-۱۳ مشاهده می‌شود، برای تعداد ۲۸۰ المان در اطراف گشودگی بیشینه‌ی منته‌جه‌ی تنش به مقدار ثابتی می‌رسد. بنابراین این تعداد المان اطراف گشودگی به‌عنوان مش بهینه در طول تحقیق استفاده می‌شود.

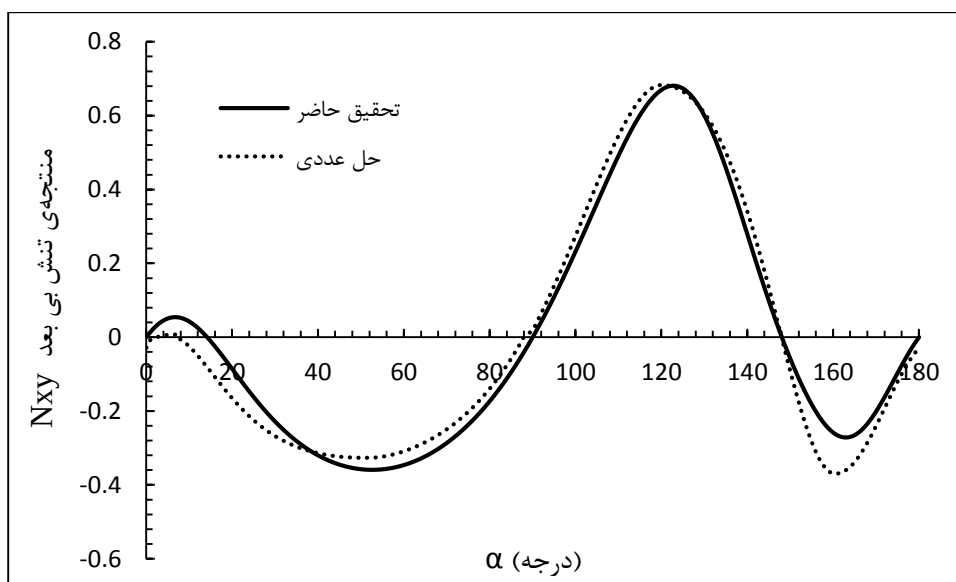


شکل ۲-۱۳: بررسی همگرایی مش‌بندی

در شکل ۱۴-۲ نتایج حل تحلیلی حاضر با حل اجزای محدود برای منته‌ی تنش بی‌بعد در جهت x در گشودگی بیضوی با $c=0.75$ مقایسه شده است. زاویه‌ی α ، زاویه‌ی نقاط روی مرز گشودگی را نسبت به محور افقی مشخص می‌کند.

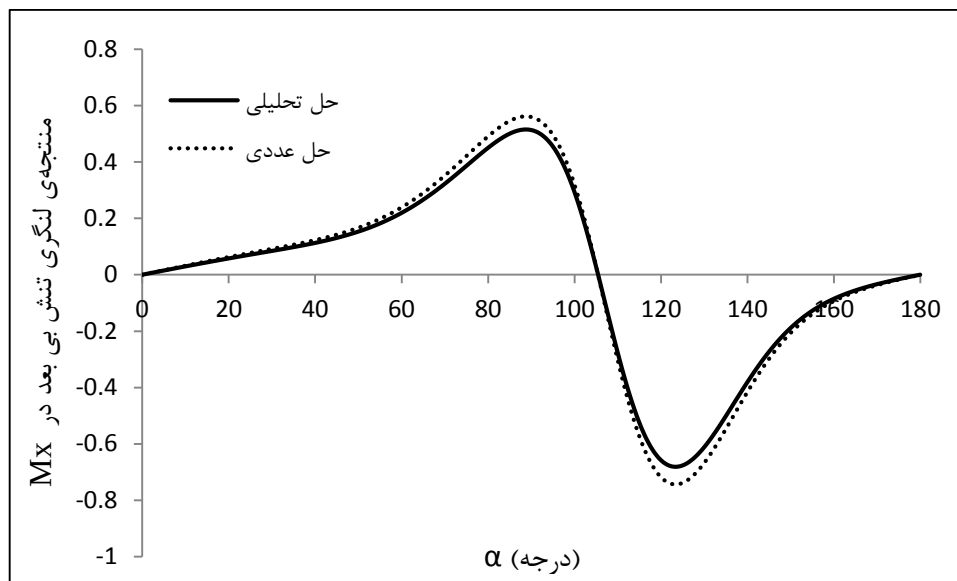


شکل ۱۴-۲: مقایسه‌ی توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_x با روش‌های مختلف برای گشودگی بیضوی با $c=0.75$ در شکل ۱۵-۲ توزیع منته‌ی تنش برشی بی‌بعد در اطراف گشودگی بیضی‌شکل با $c=0.5$ با دو روش تحلیلی حاضر و حل اجزای محدود مقایسه شده است.

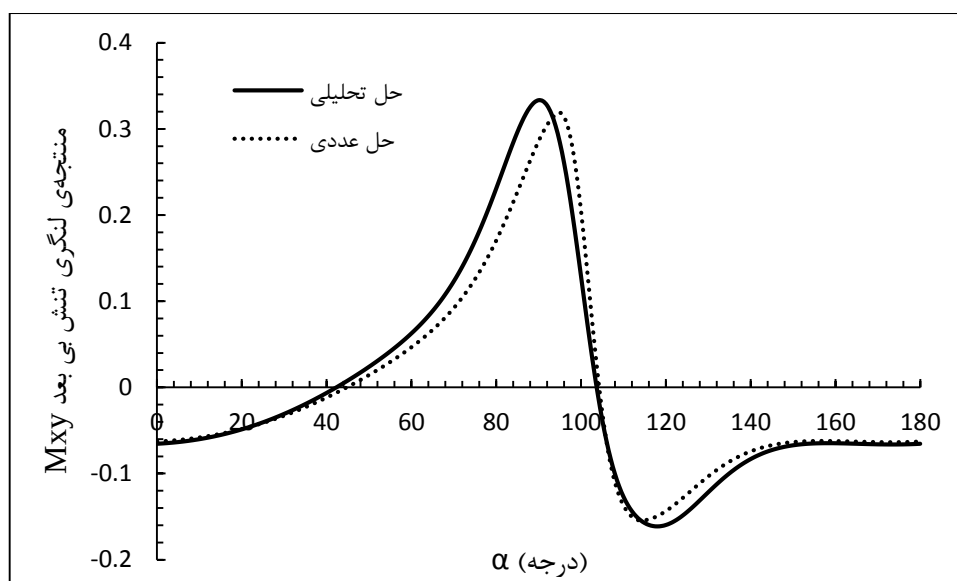


شکل ۱۵-۲: مقایسه‌ی توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_{xy} با روش‌های مختلف برای گشودگی بیضوی با $c=0.5$ مقایسه‌ی نتایج در دو روش ذکرشده برای منته‌ی تنش بی‌بعد لنگری تنش در جهت x برای

گشودگی دایروی ($c=1$)، در شکل ۱۶-۲ قابل مشاهده است.



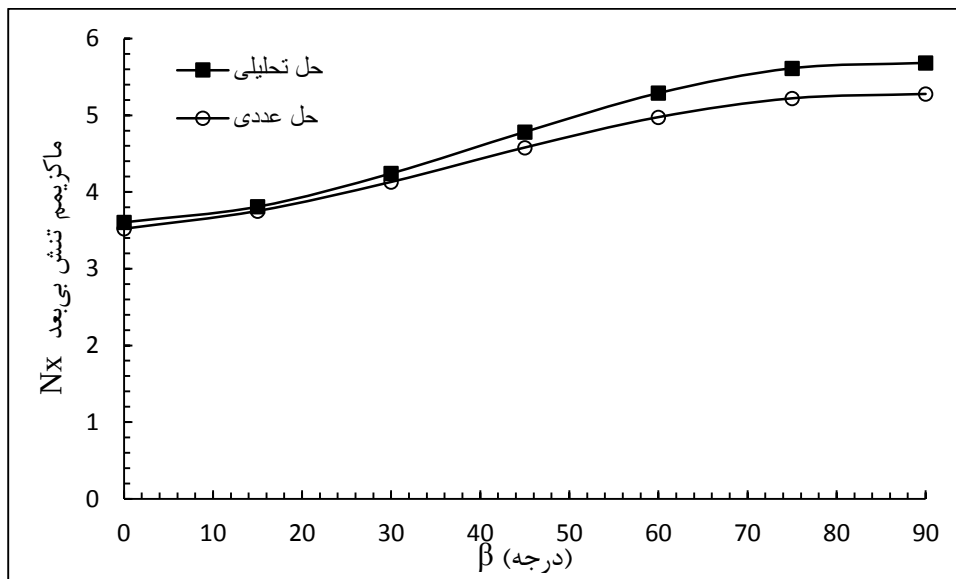
شکل ۱۶-۲: مقایسه‌ی توزیع منتهی لنگری تنش بی‌بعد Mx با روش‌های مختلف برای گشودگی دایروی ($c=1$) در شکل ۱۷-۲ نیز توزیع منتهی لنگری تنش پیچشی برای گشودگی بیضوی با $c=1/5$ ، در دو روش، حل تحلیلی و حل عددی مقایسه شده است.



شکل ۱۷-۲: مقایسه‌ی توزیع منتهی لنگری تنش بی‌بعد Mxy با روش‌های مختلف برای گشودگی بیضوی با $c=1/5$ همان‌طور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین حل تحلیلی و حل اجزای محدود وجود دارد.

در شکل ۱۸-۲ تغییرات بیشینه‌ی منتهی لنگری تنش در جهت x برای گشودگی بیضوی با $c=0.75$ در دو روش حل تحلیلی و حل اجزای محدود و برحسب زاویه‌ی چرخش گشودگی با هم مقایسه شده

است. همان‌طور که در شکل مشخص است نتایج تطابق خوبی دارد و در زاویه چرخش ۹۰ درجه دارای بیشترین خطا برابر با ۷ درصد است.



شکل ۲-۱۸: مقایسه بیشینه‌ی منته‌ی تنش بی‌بعد Nx از روش‌های تحلیلی و اجزای محدود در زوایای چرخش مختلف گشودگی بیضوی با $c=0.75$

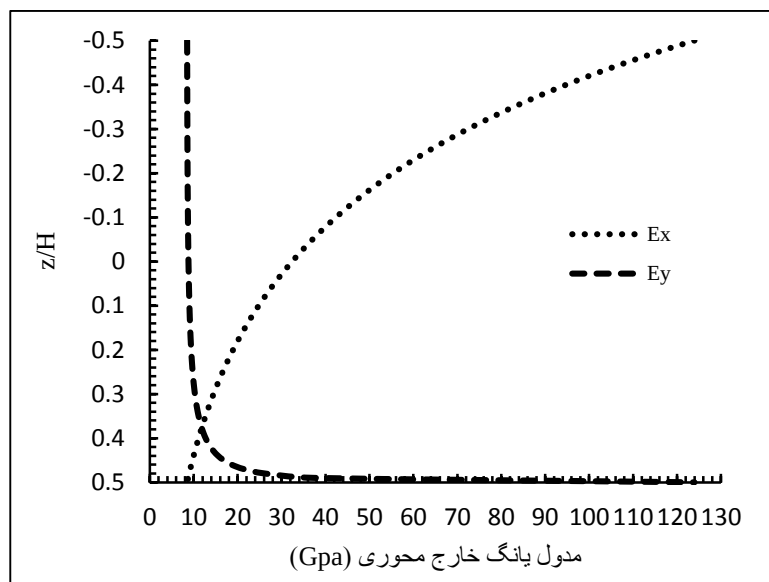
۶-۲ جمع‌بندی

در این فصل معادلات حاکم بر مسأله‌ی موردبررسی، استخراج شد و نتایج حاصل از این حل تحلیلی با نتایج حاصل از روش اجزای محدود بررسی شد. در فصل آینده، با استفاده از روابط ارائه‌شده در این فصل، توزیع منته‌های نیرو و لنگری تنش در اطراف گشودگی‌های بیضوی به‌دست می‌آید و تأثیر پارامترهای چرخش گشودگی هندسه‌ی گشودگی بر توزیع منته‌های نیرو و لنگری تنش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

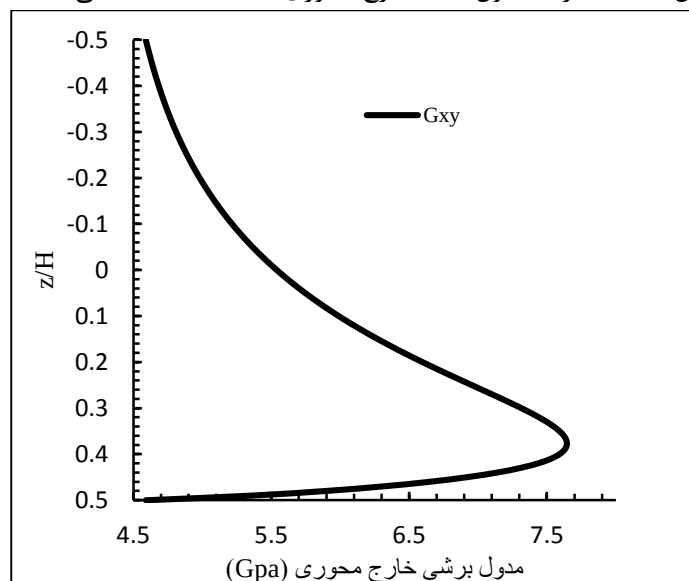
فصل ۳ : نتایج برای گشودگی بیضوی

۱-۳ مقدمه

خواص مواد در روابط (۲۷-۲) و (۲۸-۲) تعریف می‌شوند. که بر اساس نسبت P_b/P_t و نسبت فاصله، z به دست می‌آید و در فواصل مختلف نسبت به صفحه‌ی میانی، مقدار آن‌ها متفاوت است. در شکل ۱-۳ و شکل ۲-۳، به ترتیب تغییرات مدول یانگ (E_x, E_y) و مدول برشی (G_{xy}) نسبت به فاصله‌ی بی‌بعد z/H نمایش داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود خواص مواد در جهت‌های اصلی به نرمی بر اساس فاصله‌ی بی‌بعد تغییر می‌نمایند.



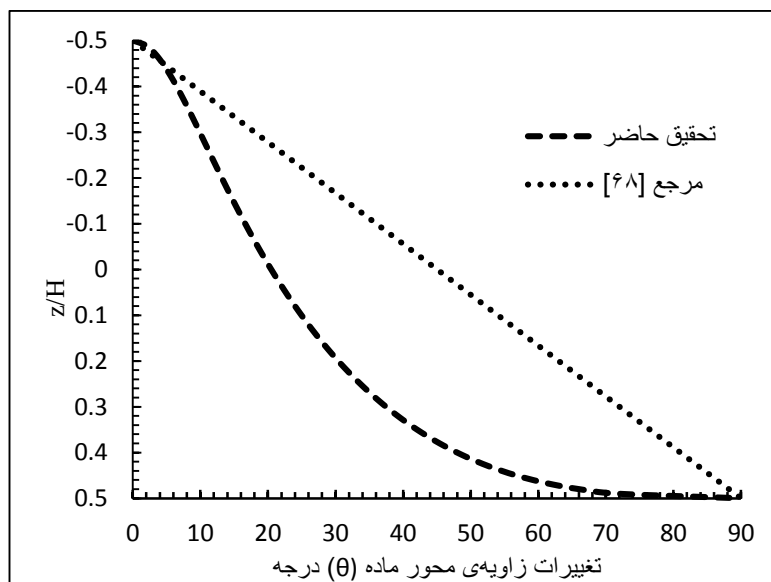
شکل ۱-۳: تغییرات مدول یانگ خارج محوری نسبت به ضخامت بی‌بعد



شکل ۲-۳: تغییرات مدول برشی خارج محوری نسبت به ضخامت بی‌بعد

مورد دیگری که مورد بررسی قرار می‌گیرد، تغییرات زاویه‌ی محور مادی (θ) نسبت به ضخامت بی‌بعد است. جین و بترا [۶۸] یک رابطه‌ی ریاضی برای جهت‌گیری لایه‌ها نسبت به ضخامت ارائه کردند. که زاویه‌ی الیاف در آن نسبت به ضخامت بی‌بعد، به صورت خطی تعریف شد. از این رو در تحقیق آن‌ها خواص مواد نسبت به ضخامت در نظر گرفته شده است و می‌تواند برای تجزیه و تحلیل بیشتر، به جهت محور مادی، ارتباط داده شود.

در شکل ۳-۳ تغییرات زاویه‌ی محور مادی (θ) صفحه‌ی متغیر تابعی، نسبت به ضخامت بی‌بعد نشان داده شده است. که این زوایا با قرار دادن خروجی‌های رابطه‌ی (۲-۲۷) در رابطه‌ی (۲-۲۸) به دست آمده است، که همان طور که مشاهده می‌شود غیر خطی است.



شکل ۳-۳: تغییرات زاویه‌ی محور ماده (θ) نسبت به ضخامت بی‌بعد

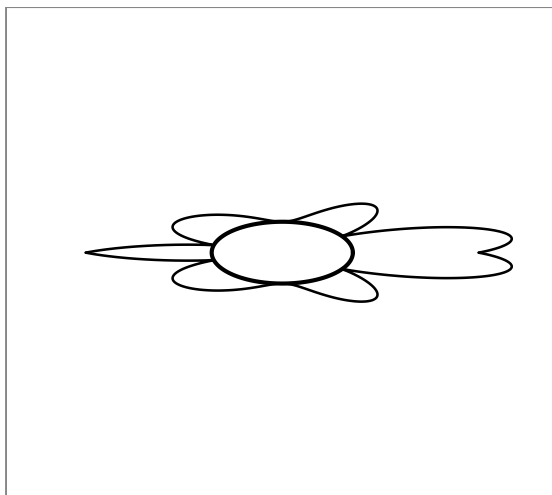
در این بخش، به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف همچون زاویه‌ی چرخش گشودگی (β) و هندسه‌ی گشودگی (c)، بر توزیع شش منته‌ی نیرو و لنگری تنش اطراف گشودگی بیضوی پرداخته می‌شود. برای این منظور از گرافیت BMI که خواص مکانیکی آن در فصل ۱ و در جدول ۱-۱ ارائه شده، استفاده شده است. همچنین بارگذاری در غیر از مواردی که گفته می‌شود، تک‌محوره و در جهت x صورت می‌گیرد.

در رابطه‌ی (۲-۲) که برای ایجاد گشودگی‌هایی با هندسه‌های مختلف در فصل قبل به آن اشاره

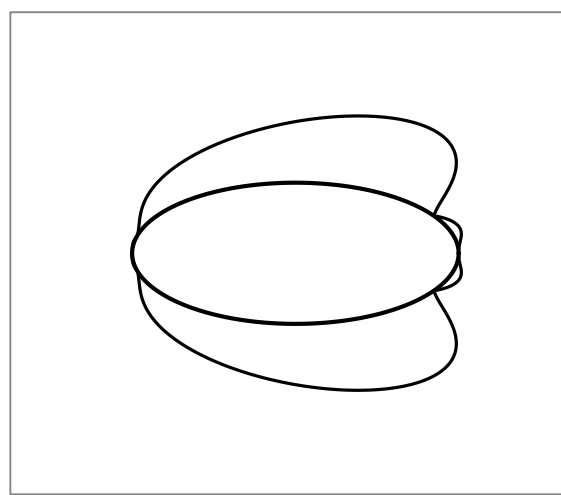
شد، مقدار c تعیین کننده هندسه ی گشودگی است و هندسه را به صورت شکل ۱-۲ تغییر می دهد. لازم به ذکر است که در این بخش و بخش های بعد زاویه ی α نشان دهنده ی زاویه ی پیرامون گشودگی است و منظور از منتهی های تنش بی بعد^۱ نسبت منتهی تنش در اطراف گشودگی به بارگذاری اعمالی است. در صورتی که بارگذاری در لبه های صفحه ی مورد بررسی به صورت $N_x^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$ باشد، مقدار منتهی تنش بی بعد با مقدار منتهی تنش برابر است. همچنین منتهی های لنگری تنش بی بعد^۲ نسبت منتهی لنگری تنش در اطراف گشودگی به حاصل ضرب بارگذاری اعمالی در ضخامت کل صفحه ی متغیر تابعی (H) است. در این پایان نامه منتهی های تنش بی بعد با n_x ، n_y ، n_{xy} و منتهی های لنگری تنش بی بعد با m_x ، m_y ، m_{xy} نشان داده شده اند.

در شکل ۳-۴ تا شکل ۳-۹ نمایشی از توزیع شش منتهی نیرو و لنگری تنش اطراف گشودگی بیضوی نشان داده شده است.

در این بخش و بخش های دیگر به منظور بررسی تأثیر هر پارامتر بر توزیع منتهی های نیرو و لنگری تنش و مقادیر بیشینه ی آنها سایر پارامترها ثابت در نظر گرفته می شوند. در این بخش زاویه ی چرخش بیضی صفر در نظر گرفته شده است.



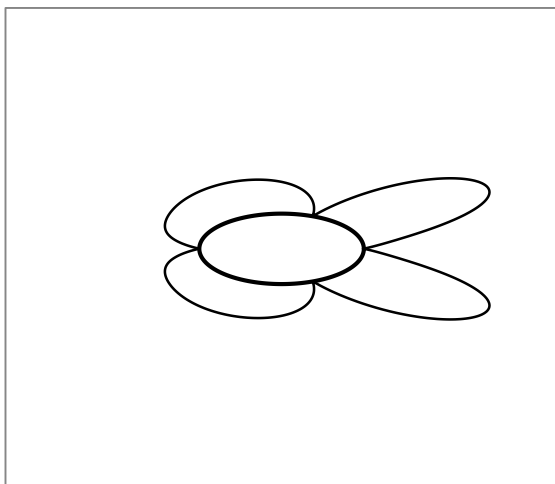
شکل ۳-۵ توزیع منتهی تنش N_y اطراف گشودگی بیضوی



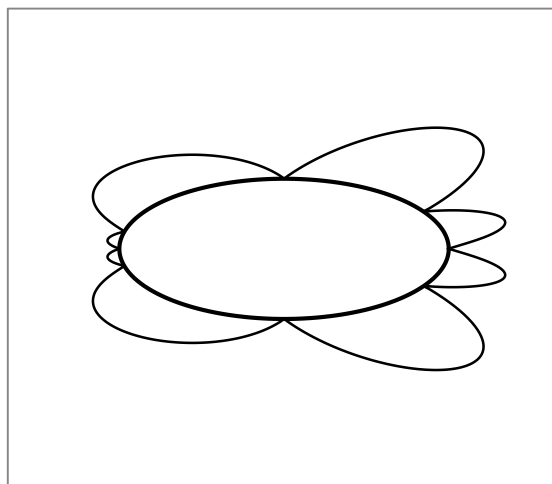
شکل ۳-۴ توزیع منتهی تنش N_x اطراف گشودگی بیضوی

^۱ Normalized Stress Resultant

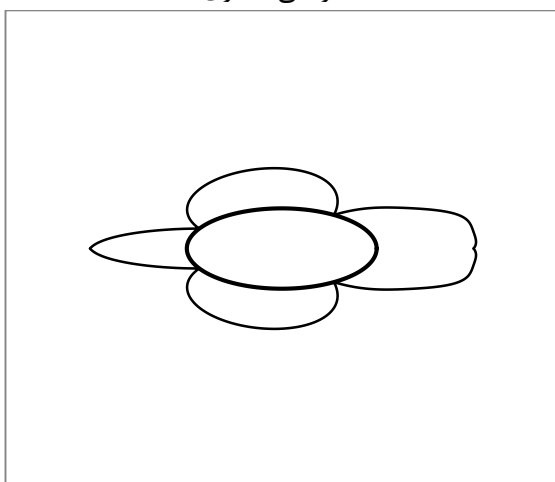
^۲ Normalized Moment Resultant



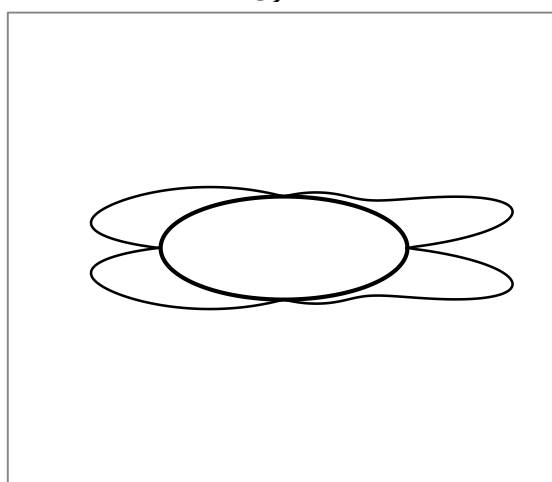
شکل ۷-۳ توزیع منتهی لنگری تنش M_x اطراف گشودگی بیضی



شکل ۶-۳ توزیع منتهی تنش N_{xy} اطراف گشودگی بیضی



شکل ۹-۳ توزیع منتهی لنگری تنش M_{xy} اطراف گشودگی بیضی

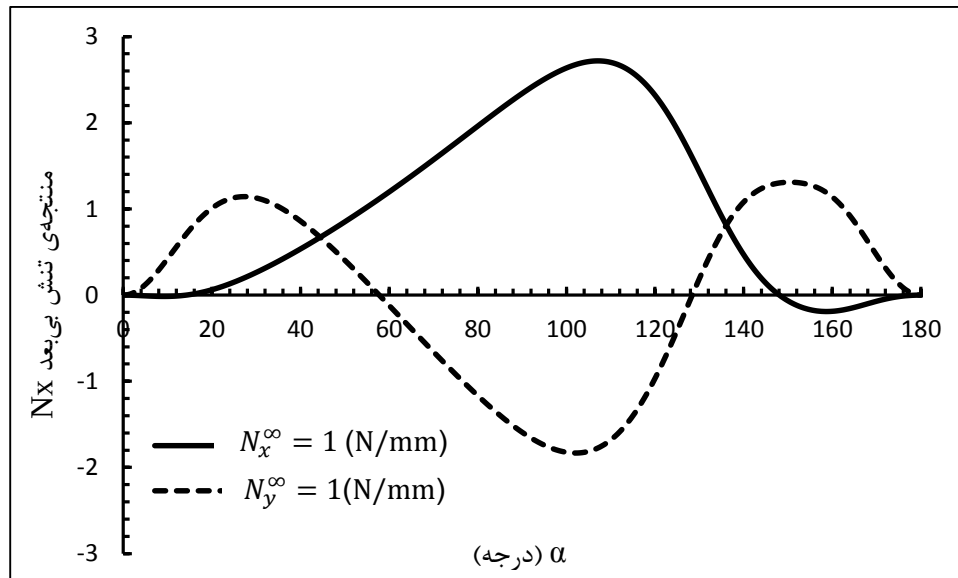


شکل ۸-۳ توزیع منتهی لنگری تنش M_y اطراف گشودگی بیضی

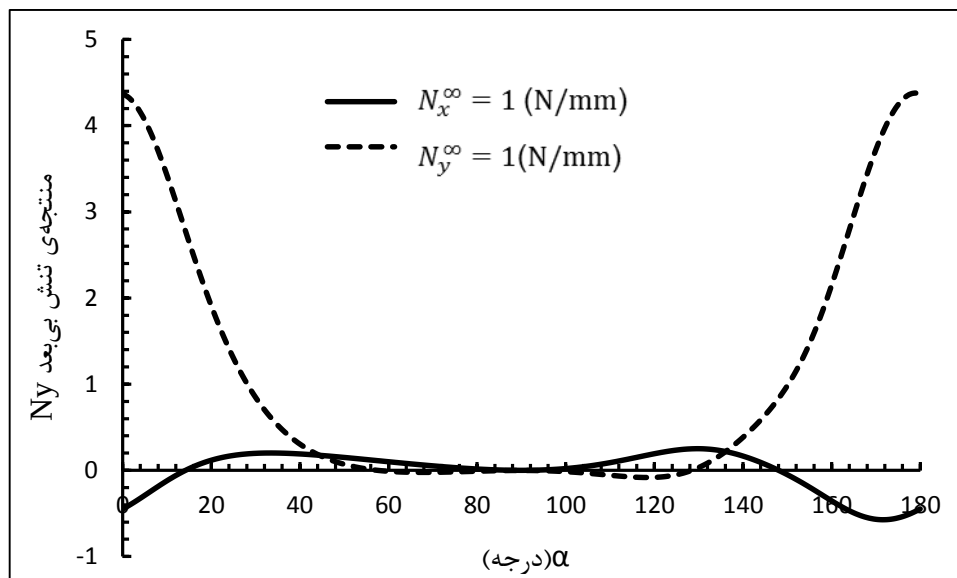
در شکل ۳-۱۰ تا شکل ۳-۱۵ توزیع منتهی‌های نیرو و لنگری تنش بی‌بعد در اطراف گشودگی بیضی برای دو بارگذاری قابل مشاهده است. برای این منظور نیز زاویه‌ی چرخش گشودگی صفر و هندسه‌ی گشودگی، $c=0/5$ در نظر گرفته شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، بارگذاری یکی از پارامترهای تأثیرگذار بر توزیع منتهی‌های نیرو و لنگری تنش اطراف گشودگی است. در شکل ۳-۱۰ تغییرات منتهی‌های n_x برای دو بارگذاری مختلف نشان داده شده است. برای این منتهی و سایر منتهی‌ها، در هر دو بارگذاری رفتار متناوب پس از زاویه‌ی ۱۸۰ درجه مشاهده می‌شود، به همین دلیل نتایج تا زاویه‌ی ۱۸۰ درجه گزارش شده است.

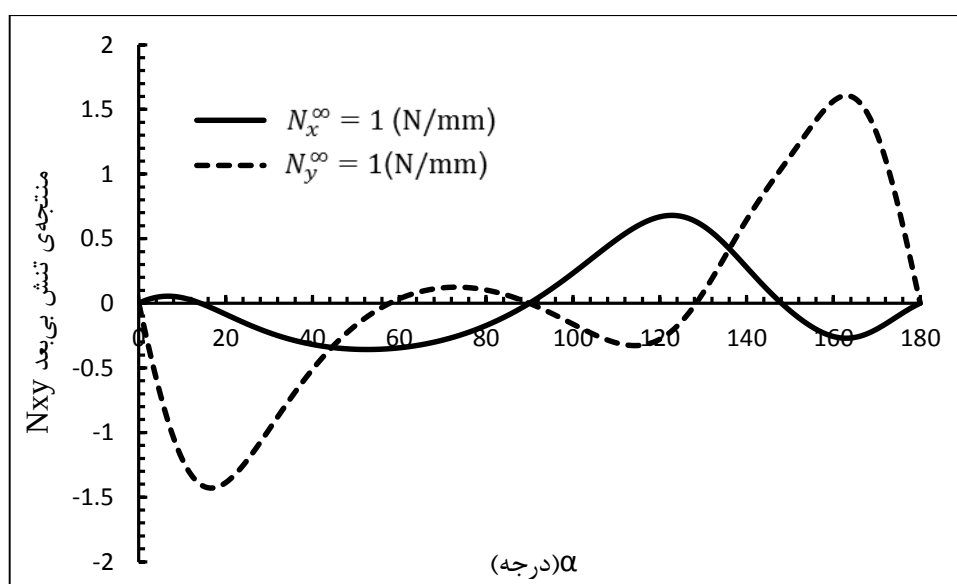
مقادیر بیشینه‌ی منته‌ی تنش بی‌بعد در جهت x برای بارگذاری $N_x^\infty = 1$ (N/mm) بیشتر از بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) است و مقادیر بیشینه در بازه‌ی $100 \leq \alpha \leq 110$ درجه رخ می‌دهند. همچنین همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار این منته‌ی برای هر دو بارگذاری در زوایای صفر و 180 درجه، صفر است.



شکل ۳-۱۰: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_x اطراف گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف
 اما همان‌طور که در شکل ۳-۱۱ دیده می‌شود، در جهت y چیدمان‌ها رفتار متفاوتی نشان می‌دهند و در زوایای صفر و 180 درجه دیگر منته‌ی تنش صفر نیست. بارگذاری $N_x^\infty = 1$ (N/mm) در این جهت مقادیر بیشینه‌ی منته‌ی بی‌بعد بیشتری دارد. بیشینه‌ی بارگذاری $N_x^\infty = 1$ (N/mm) $N_y^\infty = 1$ (N/mm) در زوایای صفر و 180 درجه قرار دارد.

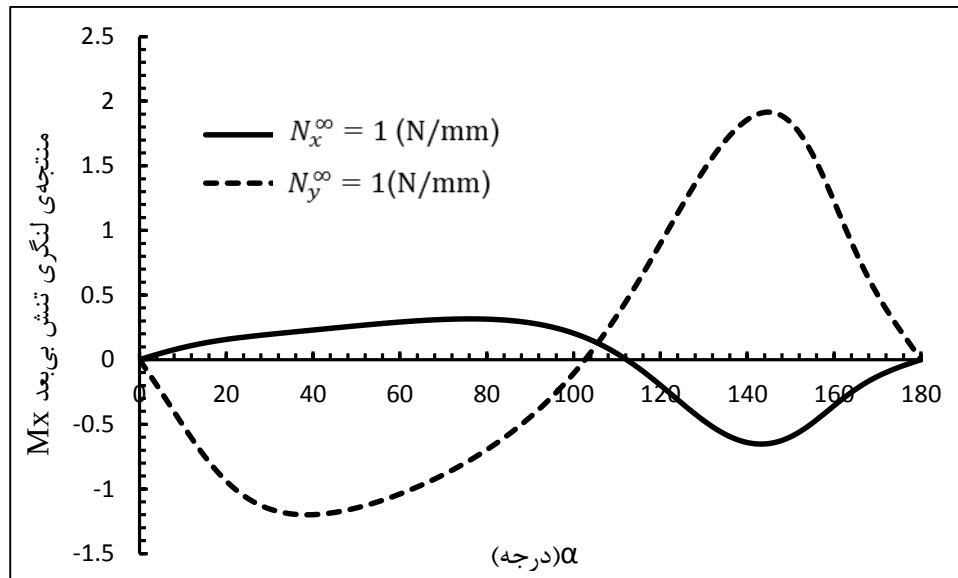


شکل ۳-۱۱: توزیع منجهی تنش بی بعد N_y اطراف گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف در شکل ۳-۱۲ تغییرات منجهی تنش برشی بی بعد مشاهده می شود. در این منجه مشاهده می شود که بارگذاری $N_y^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$ مقادیر بیشینه ی بیشتری نسبت به بارگذاری $N_x^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$ دارد. در این بارگذاری مشاهده می شود که نمودار نسبت به نقطه ی صفر و ۹۰ درجه متقارن است. بیشینه ها برای هر دو بارگذاری $N_x^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$ و $N_y^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$ به ترتیب در زاویه های ۱۲۰ و ۱۶۰ درجه قرار دارد و مقدار این منجه در هر دو بارگذاری در زوایای صفر و ۱۸۰ درجه، صفر است.

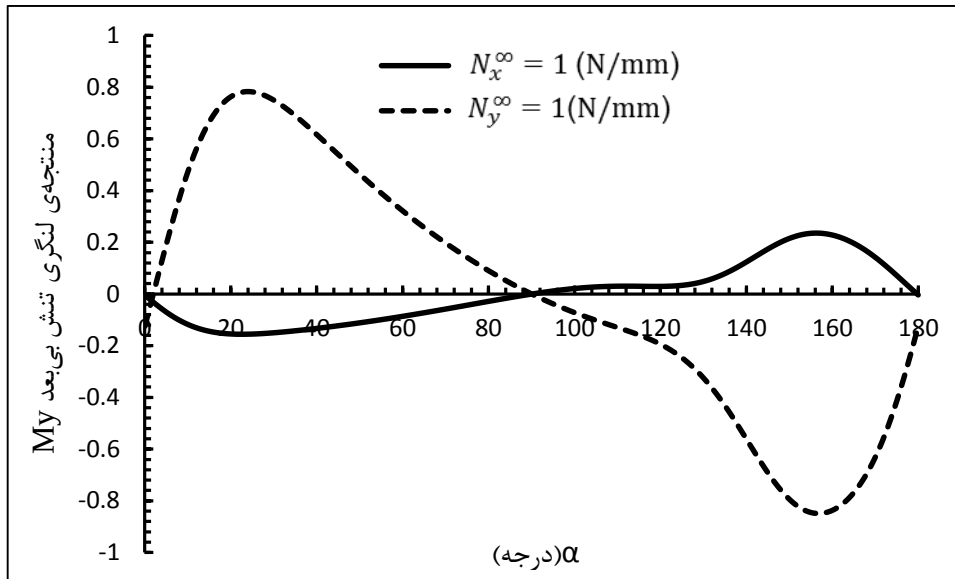


شکل ۳-۱۲: توزیع منجهی تنش بی بعد N_{xy} اطراف گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف

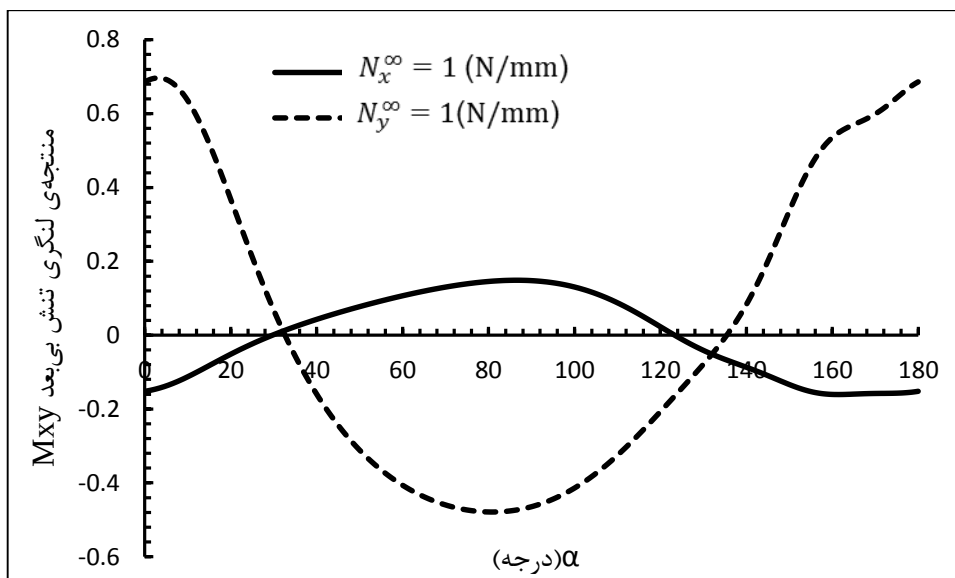
در شکل ۳-۱۳ تغییرات منتهی لنگری تنش بی بعد در جهت x مشاهده می شود. در این منتهی بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) مقدار بیشینه منتهی لنگری تنش بی بعد بیشتری را به خود اختصاص می دهد. در این منتهی نیز هر دو بارگذاری در زوایای صفر و 180° درجه مقدار صفر را اختیار می کنند و بیشینه آن ها در بازه $140^\circ \leq \alpha \leq 145^\circ$ درجه اتفاق می افتد.



شکل ۳-۱۳: توزیع منتهی لنگری تنش بی بعد Mx اطراف گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف
 شکل ۳-۱۴ رفتار منتهی لنگری تنش در جهت y (m_y) را نشان می دهد. در این منتهی مشاهده می شود که بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) بیشترین مقدار بیشینه منتهی لنگری تنش بی بعد را دارد. بیشینه ها در این منتهی برای هر دو بارگذاری در زاویه 155° درجه قرار دارند و مقدار این منتهی برای بارگذاری $N_x^\infty = 1$ (N/mm) در زوایای صفر و 180° درجه، صفر است ولی برای بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) در همان زوایا مقدار 0.13 - است.



شکل ۳-۱۴: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد My اطراف گشودگی بیضی در دو بارگذاری مختلف در نهایت شکل ۳-۱۵ تغییرات منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد را برای دو بارگذاری نشان می‌دهد. مقادیر بیشینه‌ی این منته‌ی برای بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) بیشتر از بارگذاری دیگر است. مقادیر بیشینه در این منته‌ی برای هر دو بارگذاری در زوایای صفر و ۱۸۰ درجه اتفاق می‌افتد. نتایج نشان می‌دهد که برای منته‌ی n_x بارگذاری $N_x^\infty = 1$ (N/mm) و در سایر منته‌یها بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) مقادیر بیشینه‌ی بیشتر را به خود اختصاص می‌دهند.

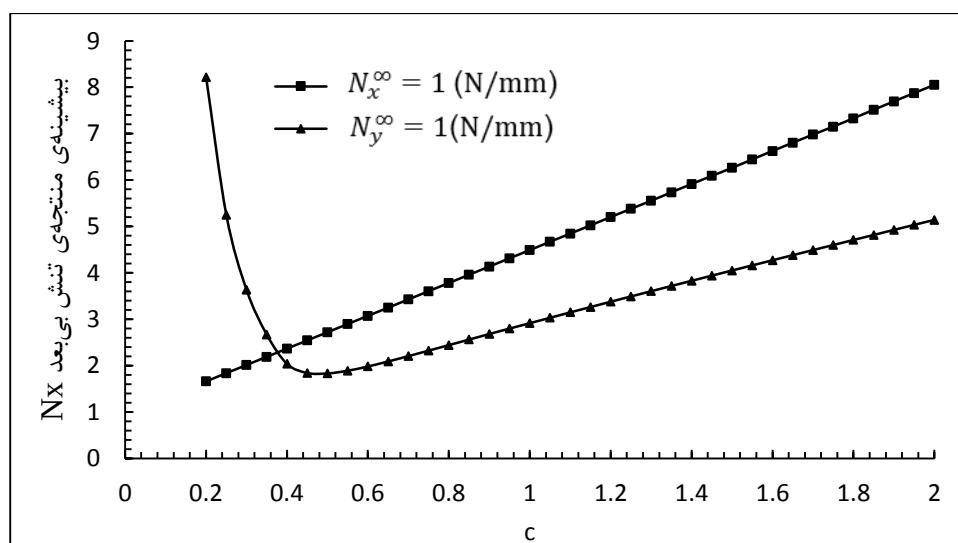


شکل ۳-۱۵: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد Mxy اطراف گشودگی بیضی در دو بارگذاری مختلف

۲-۳ تأثیر هندسه‌ی گشودگی

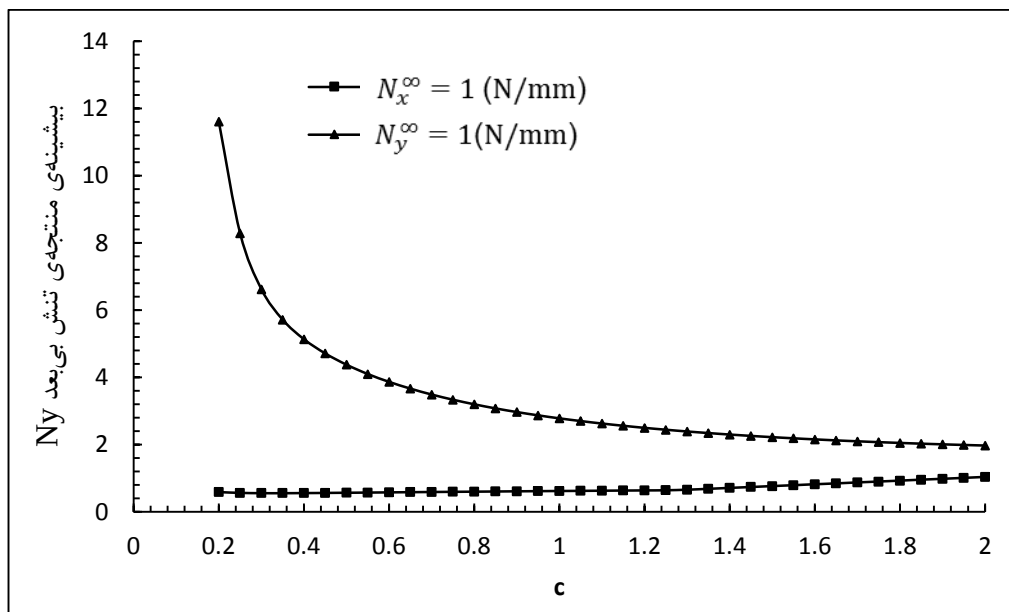
همان‌طور که در بخش تابع نگاشت اشاره شد، پارامتر c بر میزان کشیدگی گشودگی در جهت y تأثیر می‌گذارد و افزایش یا کاهش آن به ترتیب باعث کشیده شدن و فشرده شدن گشودگی می‌شود. با کنترل این پارامتر همان‌طور که در این فصل دیده می‌شود، می‌توان منته‌های نیرو و لنگری تنش را به میزان قابل‌توجهی کاهش داد. در شکل ۲-۱ در فصل ۲ تأثیر این پارامتر بر شکل گشودگی مشاهده می‌شود. لازم به ذکر است که نتایج ارائه‌شده در این بخش برای زاویه‌ی چرخش گشودگی صفر درجه است.

در شکل ۳-۱۶ تا شکل ۳-۲۱ تأثیر پارامتر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی منته‌ها در دو بارگذاری مختلف مشاهده می‌شود. با فرض اینکه رفتار ماده در کشش و فشار یکسان است، مقادیر قدرمطلق بیشینه‌ی منته‌ها گزارش شده است. در شکل ۳-۱۶ تغییرات بیشینه‌ی منته‌ی n_x بر حسب هندسه (c) برای دو بارگذاری دیده می‌شود. همان‌طور که مشهود است برای بارگذاری $N_x^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$ با افزایش مقدار c بیشینه‌ی n_x به صورت خطی افزایش می‌یابد. اما برای بارگذاری $N_y^\infty = 1 \text{ (N/mm)}$ بیشینه‌ی n_x ابتدا از $c=0/2$ تا $c=0/5$ به شدت کاهش می‌یابد بعد به صورت خطی شروع به افزایش می‌کند.



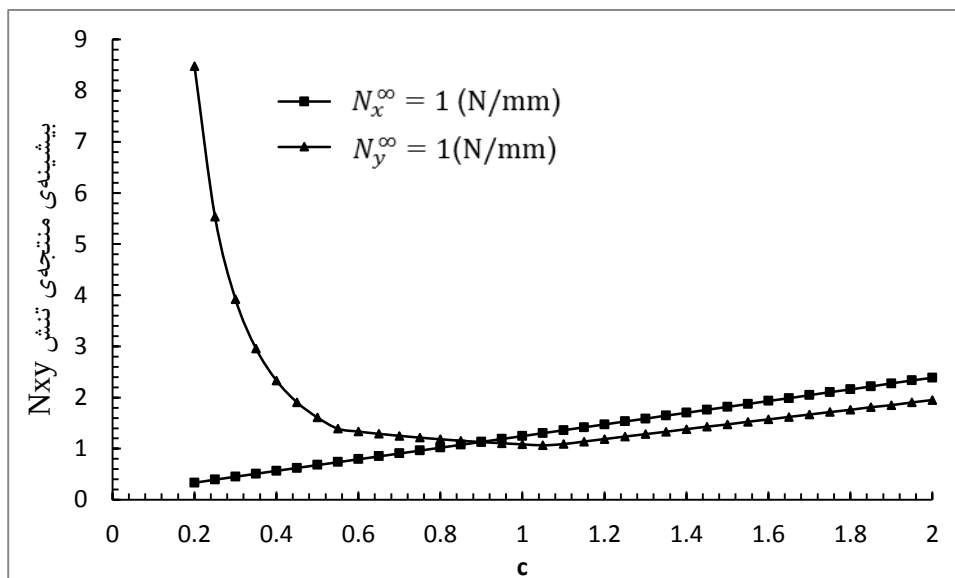
شکل ۳-۱۶: تأثیر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی منته‌ی تنش بی‌بعد N_x برای گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف

منتجه‌ی n_y مطابق شکل ۳-۱۷ برای بارگذاری $N_x^\infty = 1$ (N/mm) به صورت تقریباً خطی افزایش می‌یابد و مقدار این افزایش تا دو برابر است. بیشینه‌ی نتیجه‌ی n_y برای بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) با افزایش پارامتر c کاهش می‌یابد. بیشترین مقدار بیشینه‌ی نتیجه‌ی n_y برای بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) در $c=0.2$ و کمترین مقدار آن، برای بارگذاری دیگر و در همان $c=0.2$ رخ می‌دهد.



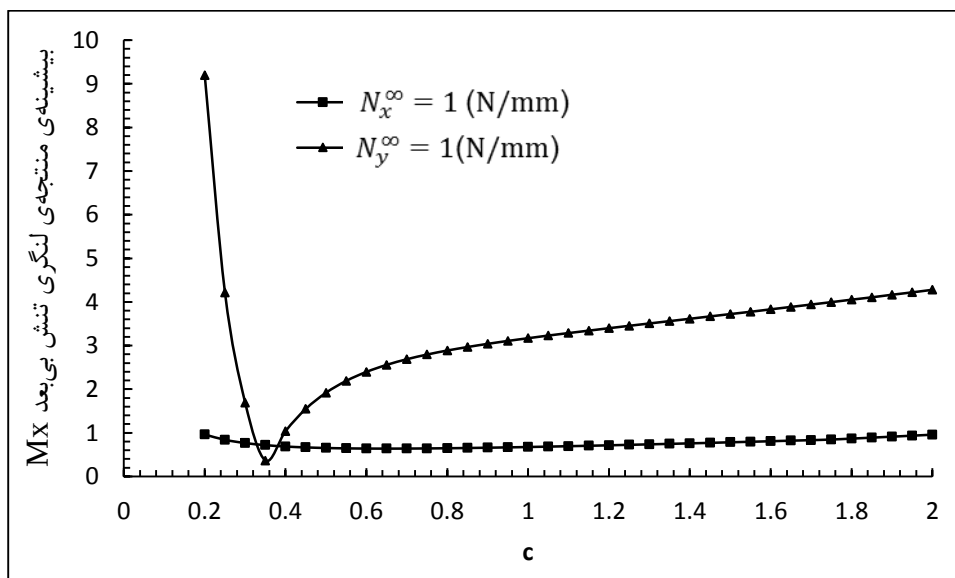
شکل ۳-۱۷: تأثیر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی نتیجه‌ی تنش بی‌بعد N_y برای گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف

در شکل ۳-۱۸ بیشینه‌ی نتیجه‌ی تنش برشی برای دو بارگذاری برحسب هندسه (c) مقایسه شده است. بیشینه‌ی n_{xy} برای بارگذاری $N_x^\infty = 1$ (N/mm) همانند n_x و n_y با افزایش مقدار c به صورت خطی افزایش می‌یابد. ولی برای بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) همانند n_x ابتدا با کاهش روبه‌رو شده و بعد به صورت خطی افزایش می‌یابد با این تفاوت که این کاهش تا $c=1$ که معرف دایره است، ادامه دارد.



شکل ۳-۱۸: تأثیر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی منتهی تنش N_{xy} برای گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف

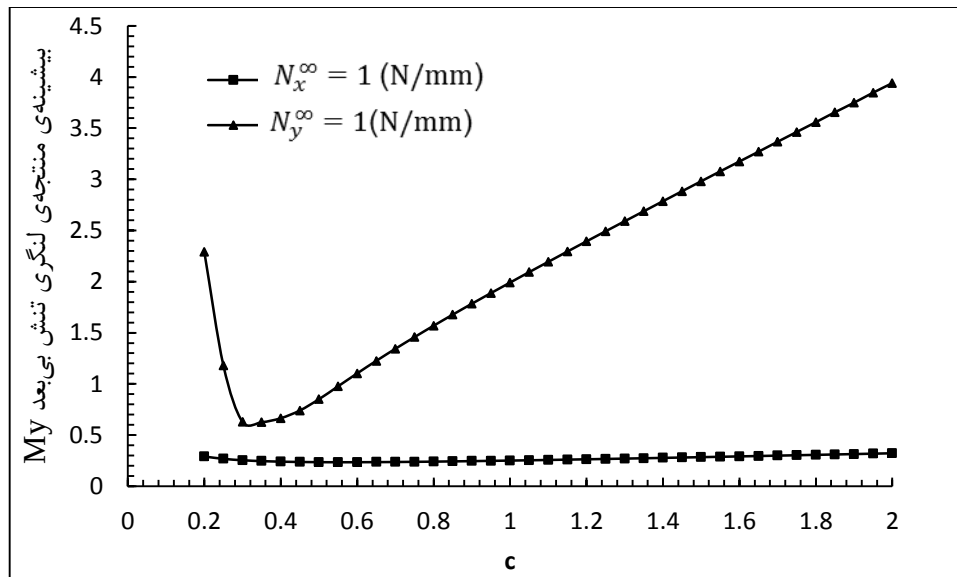
گشتاور m_x مطابق شکل ۳-۱۹ برای دو بارگذاری ارائه شده است. مقدار بیشینه‌ی m_x برای بارگذاری $N_x^{\infty} = 1$ (N/mm) با افزایش مقدار c تقریباً ثابت است. ولی در بارگذاری $N_y^{\infty} = 1$ تا $c = 0.35$ کاهش می‌یابد بعد تا $c = 0.6$ به صورت غیرخطی افزایش می‌یابد و بعد از آن به صورت خطی شروع به رشد می‌کند.



شکل ۳-۱۹: تأثیر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی منتهی لنگری تنش بی‌بعد M_x برای گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف

مانند منتهی m_x ، منتهی لنگری تنش m_y نیز برای بارگذاری $N_x^{\infty} = 1$ (N/mm) با افزایش

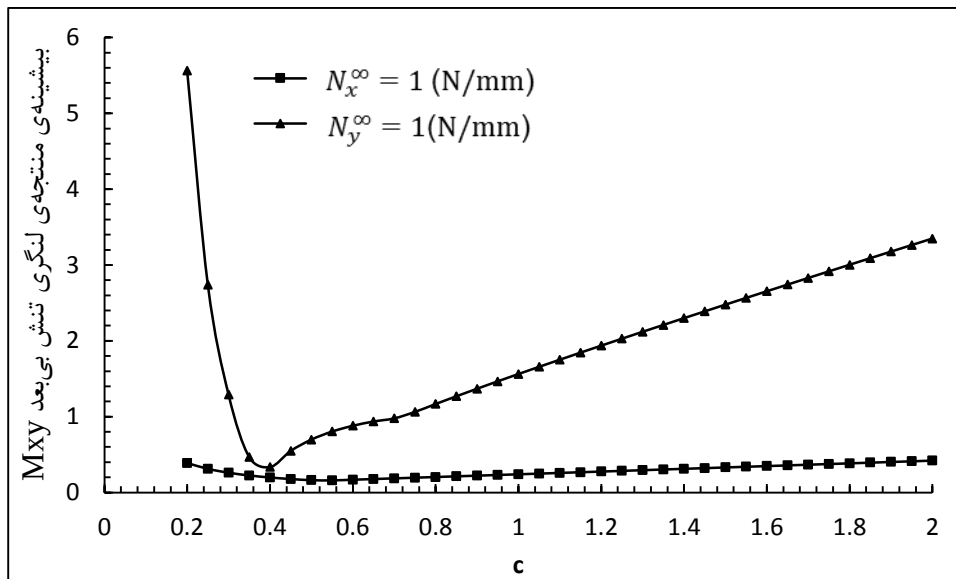
c تغییر قابل توجهی نمی کند (شکل ۳-۲۰). مقادیر m_y برای بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) نیز رفتاری مشابه m_x دارد. بدین صورت که ابتدا کاهش می یابد بعد مقدار افزایش به صورت غیرخطی و بعد افزایش خطی دارد.



شکل ۳-۲۰: تأثیر هندسه ی گشودگی بر بیشینه ی منتهی لنگری تنش بی بعد My برای گشودگی بیضی در دو بارگذاری مختلف

در نهایت تغییرات منتهی لنگری تنش بی بعد بر حسب c در شکل ۳-۲۱ نشان داده شده است.

بارگذاری $N_x^\infty = 1$ (N/mm) بیشترین مقدار بیشینه ی m_{xy} ابتدا شاهد کاهش جزئی بوده بعد افزایش می یابد. و برای بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) نیز رفتاری مشابه m_x و m_y دارد. در یک نتیجه گیری کلی مشخص می شود که در بارگذاری $N_x^\infty = 1$ (N/mm) بیشینه ی منتهی های تنش با افزایش مقدار c به صورت کاملاً خطی افزایش می یابد. بیشینه ی منتهی های لنگری تنش نیز ابتدا با یک کاهش جزئی همراه بوده بعد به مقدار کمی افزایش می یابد که با توجه به تغییرات دیگر منتهی ها و بارگذاری ها تقریباً ثابت است. و اما در بارگذاری $N_y^\infty = 1$ (N/mm) بیشینه ی منتهی های نیرو و لنگری تنش با افزایش مقدار c ابتدا کاهش داشته و بعد رو به افزایش می نهد. به استثنای n_y که با افزایش مقدار c، مقدار آن کاهش می یابد.



شکل ۲۱-۳: تأثیر هندسه‌ی گشودگی بر بیشینه‌ی منتهی‌النگری تنش M_{xy} برای گشودگی بیضوی در دو بارگذاری مختلف

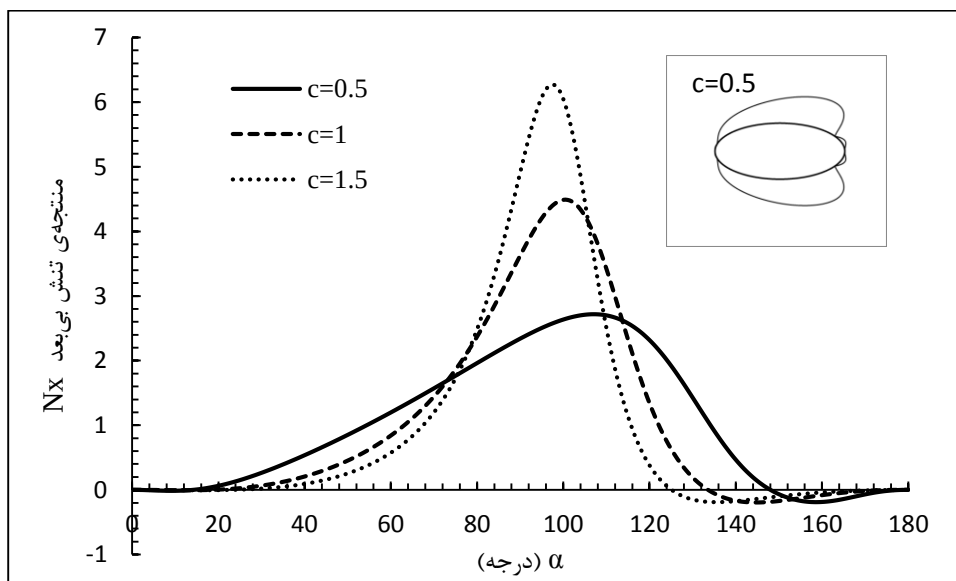
در شکل‌های شکل ۲۲-۳ تا شکل ۲۷-۳ می‌توان مقدار منتهی‌النگری تنش بی‌بعد در اطراف گشودگی

بیضوی برای c های ۰/۵، ۱ و ۱/۵ مشاهده گردد.

در شکل ۲۲-۳ تغییرات منتهی‌النگری n_x برای سه هندسه‌ی مختلف نشان داده شده است. مقادیر

بیشینه برای سه هندسه در بازه‌ی $95 \leq \alpha \leq 110$ درجه رخ می‌دهند. همچنین همان‌طور که مشاهده

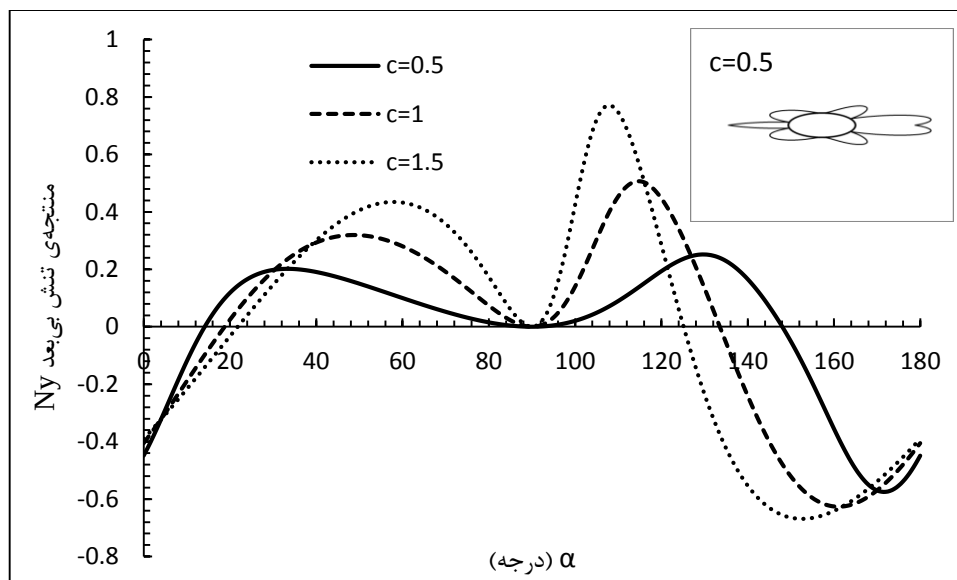
می‌شود مقدار این منتهی‌النگری برای هر سه هندسه در زوایای صفر و 180 درجه، صفر است.



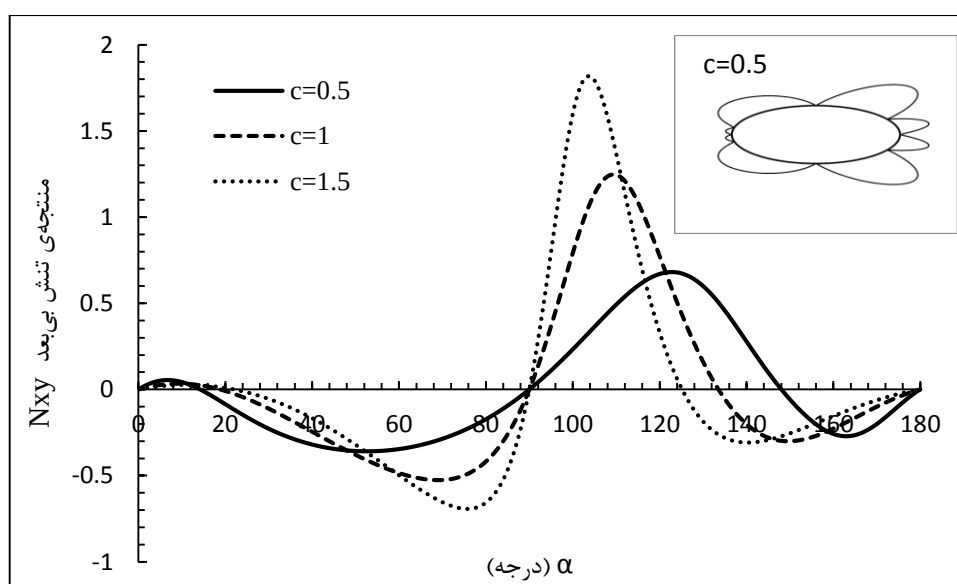
شکل ۲۲-۳: توزیع منتهی‌النگری تنش بی‌بعد N_x اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه‌ی مختلف

اما همان‌طور که در شکل ۲۳-۳ دیده می‌شود، در جهت y هندسه‌ها رفتار متفاوتی نشان

می‌دهند و برای هندسه‌ی $c=1/5$ بیشینه‌ی منته‌ی بی‌بعد در زاویه‌ی 106° درجه و برای دو هندسه-ی دیگر بیشینه‌ی این منته‌ی در بازه‌ی $170^\circ \leq \alpha \leq 158^\circ$ رخ می‌دهد. همچنین همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار این منته‌ی برای هر سه هندسه در زاویه‌ی 90° درجه، صفر است.

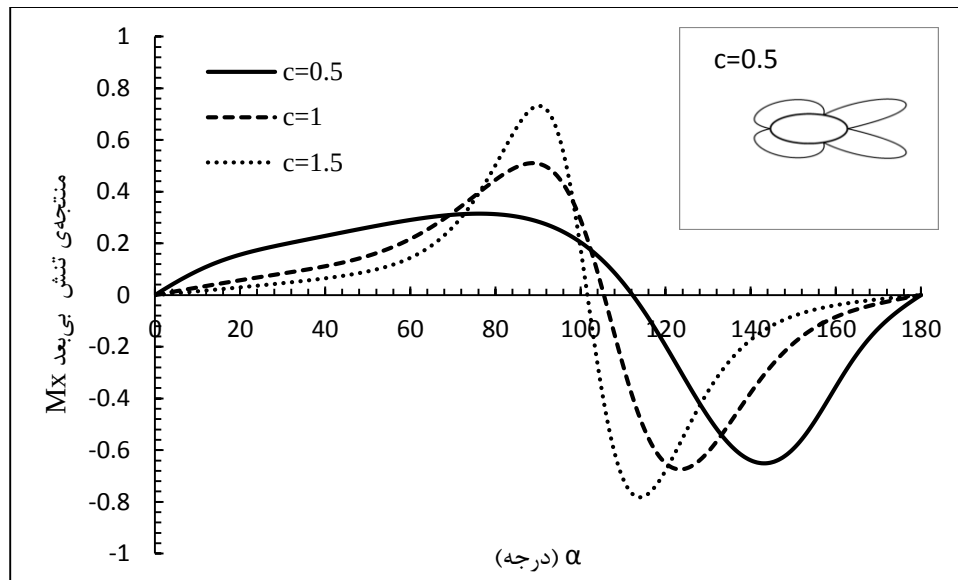


شکل ۳-۲۳: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_y اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه‌ی مختلف در شکل ۳-۲۴ تغییرات منته‌ی تنش برشی بی‌بعد مشاهده می‌شود. بیشینه‌ها برای هر سه هندسه در بازه‌ی $120^\circ \leq \alpha \leq 100^\circ$ درجه قرار دارد و مقدار این منته‌ی در هر سه هندسه در زوایای صفر، 90° و 180° درجه، صفر است.

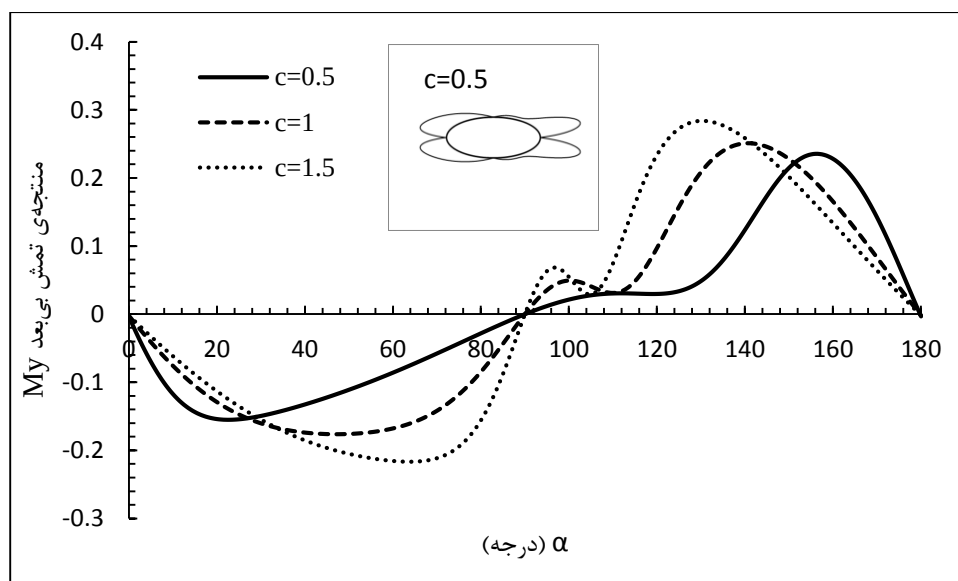


شکل ۳-۲۴: توزیع منته‌ی تنش بی‌بعد N_{xy} اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه‌ی مختلف

در شکل ۳-۲۵ تغییرات منتهی لنگری تنش بی بعد در جهت x مشاهده می شود. در این منتهی نیز هر سه هندسه در زوایای صفر و 180° درجه مقدار صفر را اختیار می کنند و بیشینه ی آنها در بازه ی $110^\circ \leq \theta \leq 140^\circ$ درجه اتفاق می افتد.



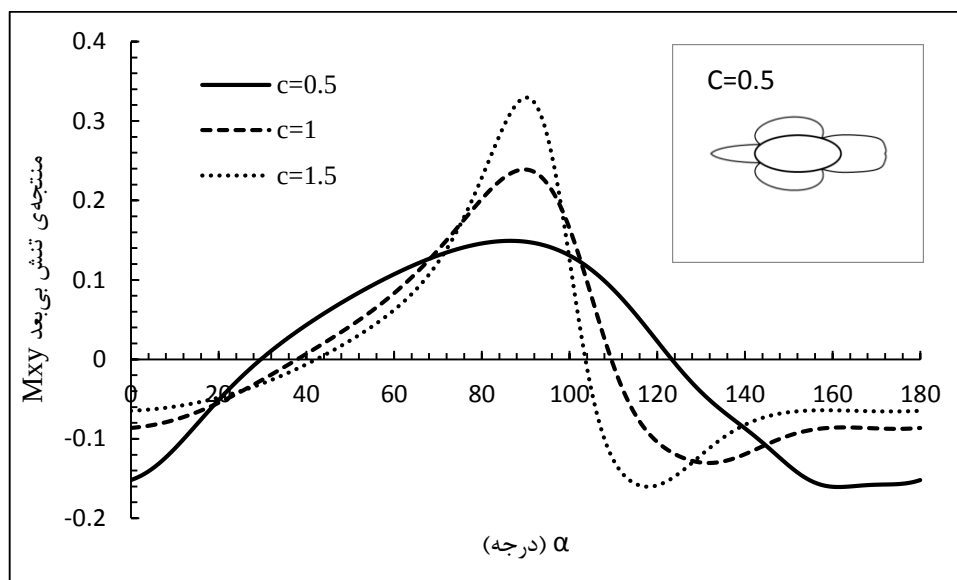
شکل ۳-۲۵: توزیع منتهی لنگری تنش بی بعد M_x اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه ی مختلف
 شکل ۳-۲۶: رفتار منتهی لنگری تنش در جهت y (m_y) را نشان می دهد. بیشینه ها در این منتهی برای هر سه هندسه در بازه ی $125^\circ \leq \alpha \leq 155^\circ$ درجه قرار دارند و مقدار این منتهی برای هر سه هندسه در زوایای صفر، 90° و 180° درجه، صفر است.



شکل ۳-۲۶: توزیع منتهی لنگری تنش بی بعد M_y اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه ی مختلف

در نهایت شکل ۳-۲۷ تغییرات منتهی لنگری تنش بی بعد را برای سه هندسه نشان می دهد.

مقادیر بیشینه در این منتهی برای هر سه هندسه در بازه ی $90 \leq \alpha \leq 180$ درجه اتفاق می افتد.



شکل ۳-۲۷: توزیع منتهی لنگری تنش بی بعد M_{xy} اطراف گشودگی بیضوی در سه هندسه ی مختلف

۳-۳ تأثیر زاویه ی چرخش گشودگی

یکی از پارامترهای تأثیرگذار بر منتهی های تنش و گشتاور، زاویه ی چرخش گشودگی است.

منظور از زاویه چرخش گشودگی مطابق شکل ۳-۲ در فصل دوم، زاویه ای است که محور اصلی

گشودگی نسبت به محور افق (محور x) می سازد. این زاویه در شکل با β نشان داده شده است.

در بررسی تأثیر پارامتر زاویه ی چرخش گشودگی بیضوی، مشاهده می شود که برای هر گشودگی

تغییرات بیشینه ی منتهی های بی بعد بر حسب زاویه ی چرخش پس از یک زاویه ی چرخش خاص

به صورت متناوب تکرار می شود. بنابراین کافی است تا نتایج در زاویه ی چرخش بین صفر تا زاویه ی

تناوب ارائه شود. برای بیضی زاویه ی تناوب برابر 180° درجه است و این رفتار متناوب برای سایر

منتهی ها و در سایر هندسه ها نیز برقرار است لذا از نمایش نمودارهای مشابه چشم پوشی شده است و

نتایج برای همه ی منتهی ها در این گشودگی تا زاویه ی تناوب آن ها گزارش شده است.

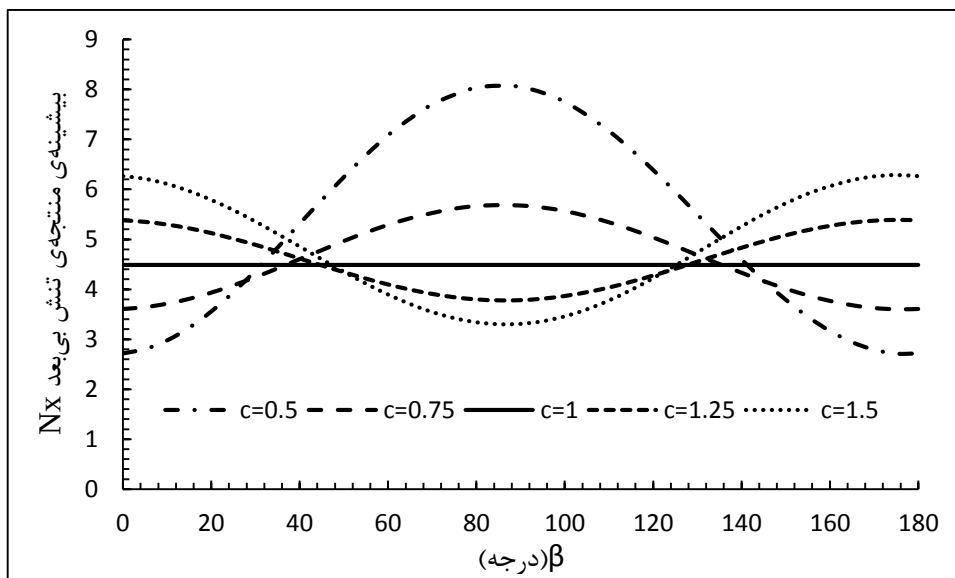
در شکل ۳-۲۸ تا شکل ۳-۳۳ تأثیر زاویه ی چرخش گشودگی بر بیشینه ی منتهی های نیرو و

لنگری تنش برای هندسه های، c برابر با 0.5 ، 0.75 ، 1 ، 1.25 و 1.5 نشان داده شده است. این

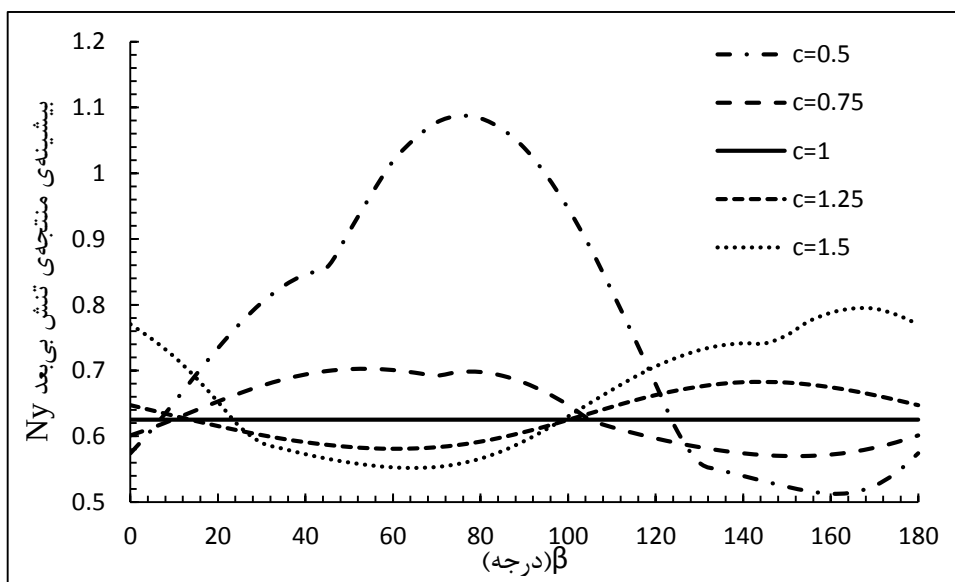
نمودارها گویای چند نکته ی مهم هستند؛ نخست اینکه در تمامی این نمودارها با تغییر زاویه ی چرخش، بیشینه ی منتهی تنش بی بعد تغییر می کند (به غیر از $c=1$) و در زوایای خاصی که برای گشودگی های مختلف و منتهی های مختلف، متفاوت است؛ بیشینه ی منتهی ها کمترین و بیشترین مقدار را دارا است. بنابراین برای گشودگی بیضوی در هندسه ی مشخص شده، می توان در یک زاویه ی چرخش خاص کمترین منتهی بی بعد را داشت. این کمترین منتهی بی بعد، منتهی مطلوب بی بعد و یا به اختصار منتهی مطلوب^۱ نامیده می شود. در طراحی باید با انتخاب زاویه ی چرخش مناسب سعی کرد تا به منتهی مطلوب رسید. از طرفی اگر زاویه ی چرخش به گونه ای انتخاب شود که منتهی بی بعد بیشترین مقدار را داشته باشد، منتهی حاصل، منتهی نامطلوب بی بعد و یا به اختصار منتهی نامطلوب^۲ نام گذاری می شود. نکته ی دومی که در این اشکال دیده می شود این است که برای $c=1$ که در واقع یک دایره است، بیشینه ی منتهی ها با افزایش زاویه ی چرخش (β) ثابت می ماند. نکته ی سومی که در تمام اشکال وجود دارد بیشترین تنش نامطلوب در $c=0.5$ رخ می دهد. در شکل ۲۸-۳ تأثیر زاویه ی چرخش گشودگی بر بیشینه ی منتهی n_x در برای هندسه های مختلف نشان داده شده است. مشاهده می شود که منتهی مطلوب n_x برای هندسه های مختلف c برابر با ۰/۵، ۰/۷۵، ۱/۲۵ و ۱/۵ به ترتیب در زوایای چرخش ۱۷۵، ۱۷۵، ۸۵ و ۸۵ درجه اتفاق می افتد. منتهی های نامطلوب نیز به ترتیب در زوایای چرخش ۸۵، ۸۵، ۱۷۵ و ۱۷۵ درجه رخ می دهد.

¹Desirable Resultant

²Undesirable Resultant

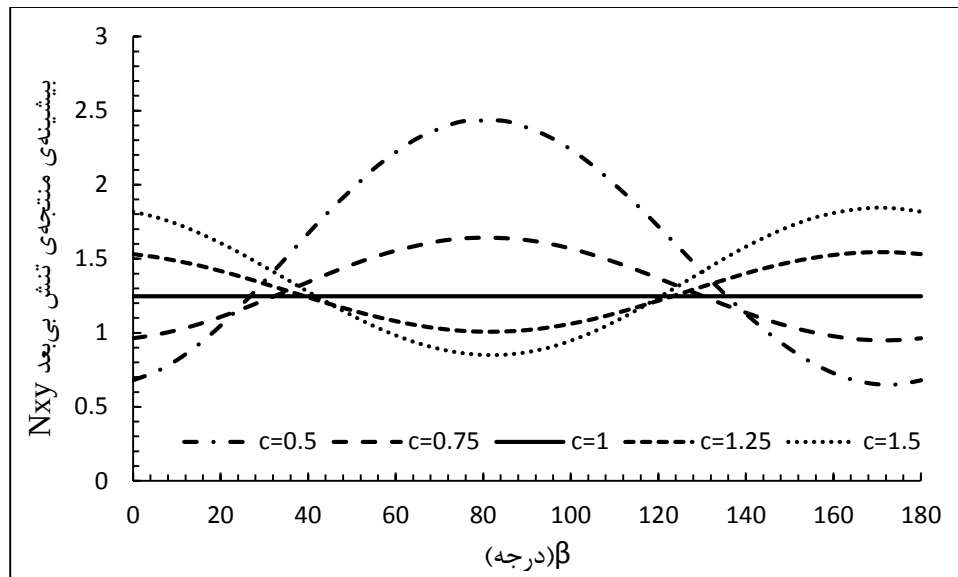


شکل ۲۸-۳: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منته‌ی تنش بی‌بعد N_x برای گشودگی بیضوی
 در شکل ۲۹-۳ تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر بیشینه‌ی منته‌ی تنش بی‌بعد n_y برای هندسه‌های
 مختلف نشان داده شده است. منته‌ی مطلوب n_y برای هندسه‌های مختلف، c برابر با ۰/۷۵، ۰/۵،
 ۱/۲۵ و ۱/۵ به ترتیب در زوایای چرخش ۱۶۵، ۱۵۰، ۶۰ و ۶۵ درجه قرار دارد. منته‌ی نامطلوب
 نیز به ترتیب در زوایای چرخش ۷۵، ۵۵، ۱۴۵ و ۱۶۵ درجه دیده می‌شود.

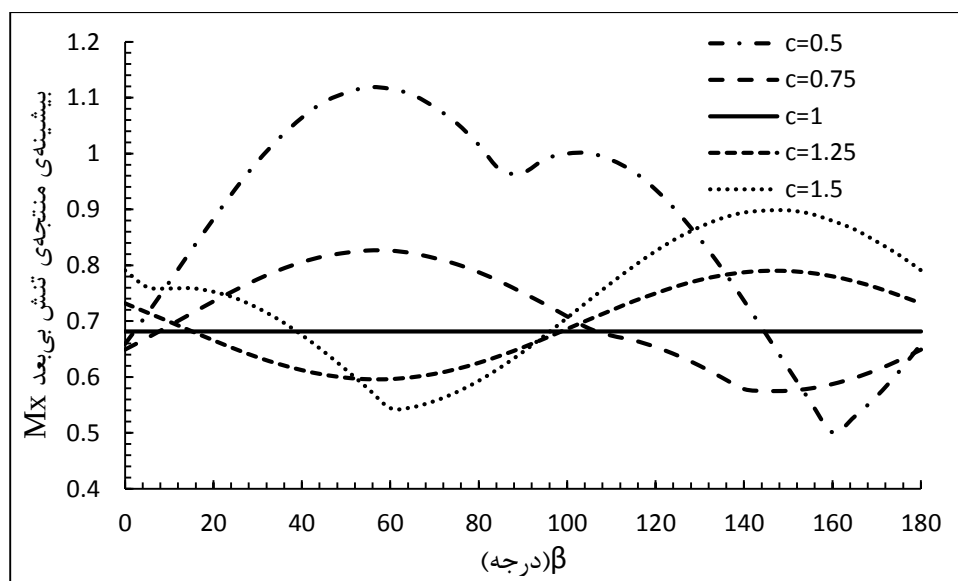


شکل ۲۹-۳: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منته‌ی تنش بی‌بعد N_y برای گشودگی بیضوی
 تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر بیشینه‌ی منته‌ی تنش برشی n_{xy} برای پنج هندسه در شکل
 ۳۰-۳ نشان داده شده است. در این منته‌ی رفتاری مانند منته‌ی n_x در هندسه‌های مختلف

مشاهده می‌شود با این تفاوت که مقدار بیشینه‌ها از بیشینه‌های منتهی n_x کمتر است. بیشترین منتهی نامطلوب و کمترین منتهی مطلوب در هندسه $c=0/5$ رخ می‌دهد. که منتهی مطلوب و نامطلوب برای این هندسه به ترتیب در زوایای چرخش 175 و 85 درجه دیده می‌شود.

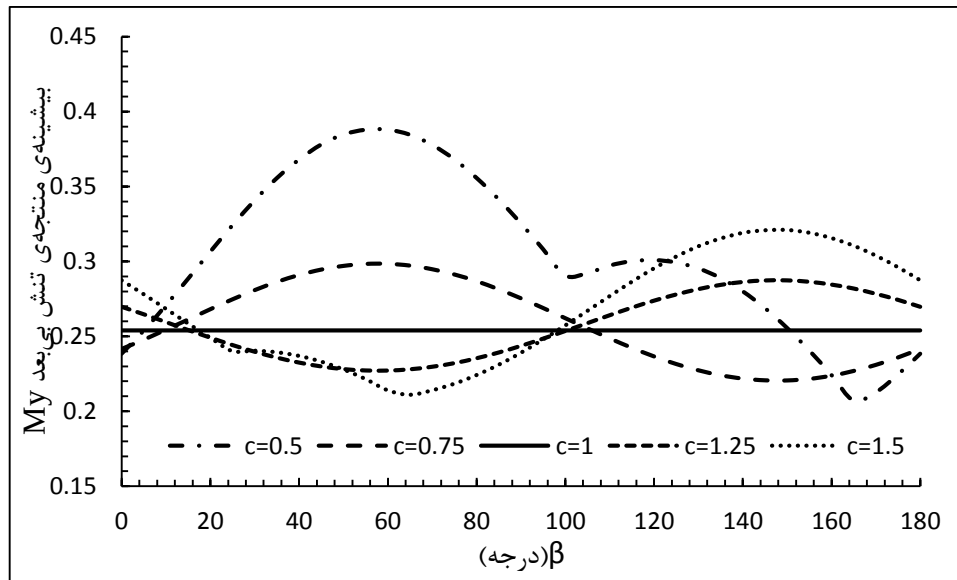


شکل ۳۰-۳: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منتهی تنش بی‌بعد N_{xy} برای گشودگی بیضوی
تغییرات بیشینه‌ی منتهی لنگری تنش m_x در شکل ۳۱-۳ برای پنج هندسه برحسب زاویه‌ی چرخش نشان داده‌شده است. منتهی مطلوب m_x در زوایای چرخش 160 درجه برای $c=0/5$ و 145 ، 55 و 60 درجه برای c های $0/75$ ، $1/25$ و $1/5$ قرار دارد.

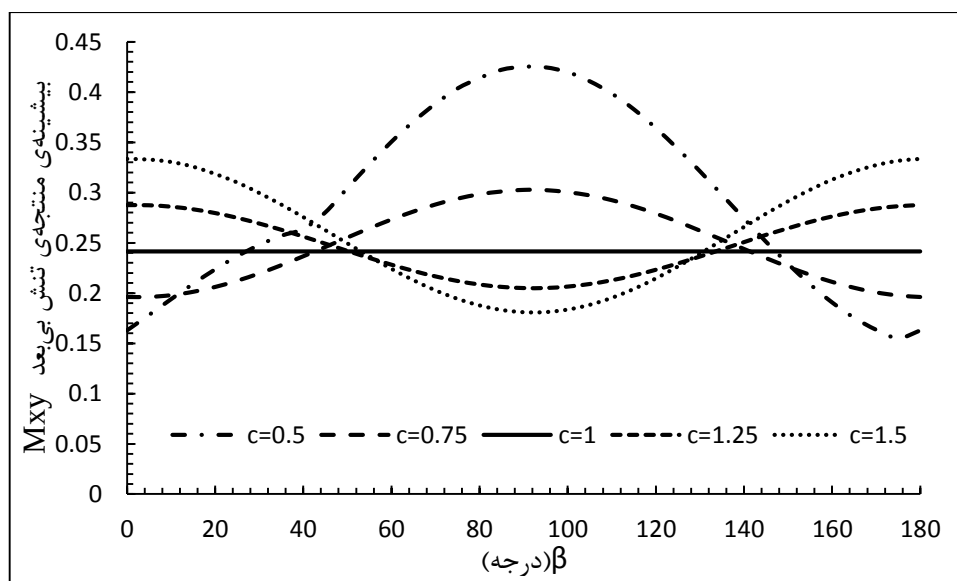


شکل ۳۱-۳: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منتهی لنگری تنش بی‌بعد M_x در جهت x برای گشودگی بیضوی

تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منته‌ی لنگری تنش m_y در شکل ۳-۳۲ به نمایش گذاشته شده است. در این منته مشاهده می‌شود که هندسه با $c=0.5$ دارای بهترین منته‌ی مطلوب و هندسه با $c=1/25$ دارای بدترین تنش مطلوب است. تنش مطلوب برای هندسه‌های مختلف با کشیدگی کم به زیاد به ترتیب در زوایای چرخش 165° ، 145° ، 55° و 65° درجه اتفاق می‌افتد.



شکل ۳-۳۲: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_y برای گشودگی بیضوی
در شکل ۳-۳۳ تأثیر چرخش بر بیشینه‌ی m_{xy} مشهود است. محل منته‌ی مطلوب برای این منته تقریباً مانند منته‌ی n_x و n_{xy} است.



شکل ۳-۳۳: تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه‌ی منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_{xy} برای گشودگی بیضوی

نتایج برای گشودگی بیضوی

جدول ۱-۳ تا جدول ۴-۳ مقادیر منته‌های نیرو و لنگری تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی بیضوی با هندسه‌ی $c=1/5$ مقادیر منته‌های مطلوب و نامطلوب و زاویه‌ی چرخش آن‌ها برای گشودگی بیضوی به ترتیب برای هندسه‌های $c=0/5$ تا $c=1/5$ معرفی شده‌اند. نکته‌ای که می‌توان در نتایج، مشاهده کرد این است که در اکثر نتایج، بین منته‌ی مطلوب و نامطلوب، اختلاف تقریباً ۹۰ درجه‌ای مشاهده می‌شود. علت آن این است که در اطراف گشودگی منته‌ها هر ۱۸۰ درجه تکرار می‌شوند و معمولاً نقاط ماکزیمم و مینیمم از هم ۹۰ درجه اختلاف دارند، به همین جهت در زاویه‌ی چرخش نیز این اختلاف اتفاق می‌افتد.

جدول ۱-۳ مقادیر منته‌های نیرو و لنگری تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی بیضوی با هندسه‌ی $c=0/5$

منتجه	منتجه‌ی مطلوب	زاویه‌ی چرخش (درجه)	منتجه‌ی نامطلوب	زاویه‌ی چرخش (درجه)
n_x	۲/۷۱	۱۷۵	۸/۰۷	۸۵
n_y	۰/۵۱	۱۶۵	۱/۰۹	۷۵
n_{xy}	۰/۶۵	۱۷۵	۲/۴۳	۸۵
m_x	۰/۵	۱۶۰	۱/۱۲	۵۵
m_y	۰/۲۱	۱۶۵	۰/۳۹	۵۵
m_{xy}	۰/۱۵	۱۷۵	۰/۴۲	۹۰

جدول ۲-۳ مقادیر منته‌های نیرو و لنگری تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی بیضوی با هندسه‌ی $c=0/75$

منتجه	منتجه‌ی مطلوب	زاویه‌ی چرخش (درجه)	منتجه‌ی نامطلوب	زاویه‌ی چرخش (درجه)
n_x	۳/۶۰	۱۷۵	۵/۶۸	۸۵
n_y	۰/۵۷	۱۵۰	۰/۷۰	۵۵
n_{xy}	۰/۹۵	۱۷۰	۱/۶۴	۸۰
m_x	۰/۵۳	۱۴۵	۰/۸۳	۵۵
m_y	۰/۲۲	۱۴۵	۰/۳۰	۵۵

نتایج برای گشودگی بیضوی

m_{xy}	۰/۲۰	۰ و ۱۸۰	۰/۳۰	۹۵
----------	------	---------	------	----

جدول ۳-۳ مقادیر منته‌های نیرو و لنگری تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی بیضوی با هندسه‌ی $c=1/25$

منتجه	منتجه‌ی مطلوب	زاویه‌ی چرخش (درجه)	منتجه‌ی نامطلوب	زاویه‌ی چرخش (درجه)
n_x	۳/۷۸	۸۵	۵/۳۹	۱۷۵
n_y	۰/۵۸	۶۰	۰/۶۸	۱۴۵
n_{xy}	۱/۰۰	۸۰	۱/۵۴	۱۷۰
m_x	۰/۵۸	۵۵	۰/۷۹	۱۴۵
m_y	۰/۲۲	۵۵	۰/۲۹	۱۵۰
m_{xy}	۰/۲۱	۹۰	۰/۲۹	۱۸۰ و ۰

جدول ۴-۳ مقادیر منته‌های نیرو و لنگری تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی بیضوی با هندسه‌ی $c=1/5$

منتجه	منتجه‌ی مطلوب	زاویه‌ی چرخش (درجه)	منتجه‌ی نامطلوب	زاویه‌ی چرخش (درجه)
n_x	۳/۳۰	۸۵	۶/۲۸	۱۷۵
n_y	۰/۵۵	۶۴	۰/۷۹	۱۶۵
n_{xy}	۰/۸۵	۸۰	۱/۸۴	۱۷۰
m_x	۰/۵۴	۶۰	۰/۹۰	۱۵۰
m_y	۰/۲۱	۶۵	۰/۳۲	۱۵۰
m_{xy}	۰/۱۸	۹۰	۰/۳۳	۱۸۰ و ۰

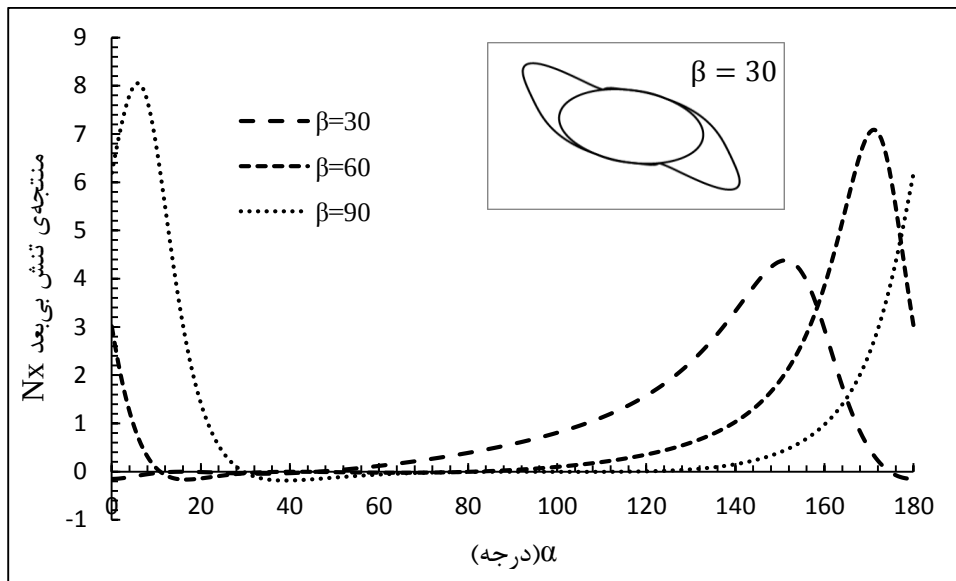
در شکل ۳-۳۴ تا شکل ۳-۳۹ توزیع منته‌های نیرویی و لنگری تنش برای هندسه‌ی $c=0/5$ و سه

زاویه‌ی چرخش ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه نشان داده شده است.

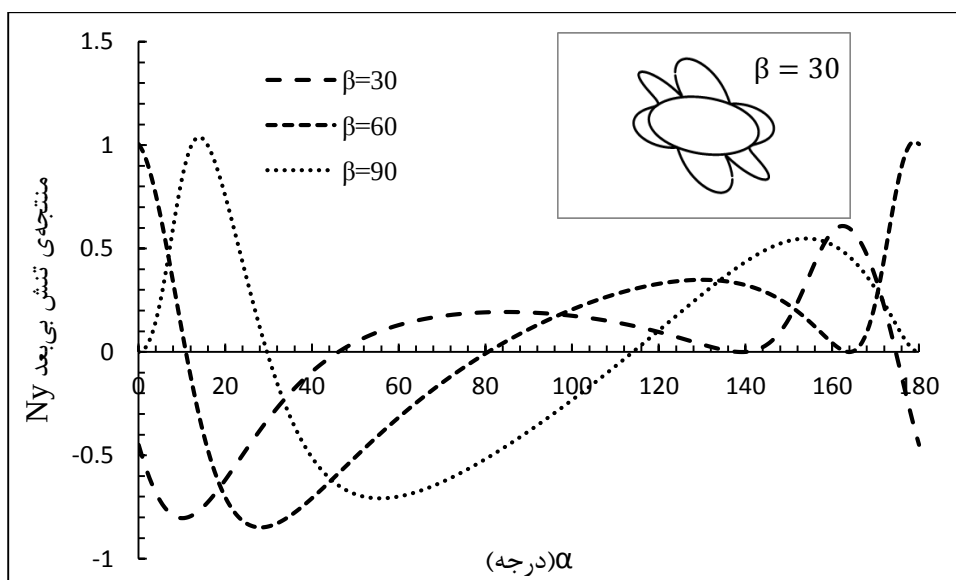
در شکل ۳-۳۴، توزیع منته‌های n_x اطراف گشودگی بیضوی در سه زاویه‌ی چرخش مختلف

نشان داده شده است. محل قرارگیری بیشینه‌ی n_x در دو زاویه‌ی چرخش در محدوده‌ی

$150 < \alpha < 170$ درجه و برای $\beta = 90$ درجه بیشینه منتهی تنش در زاویه 5 درجه قرار دارد.

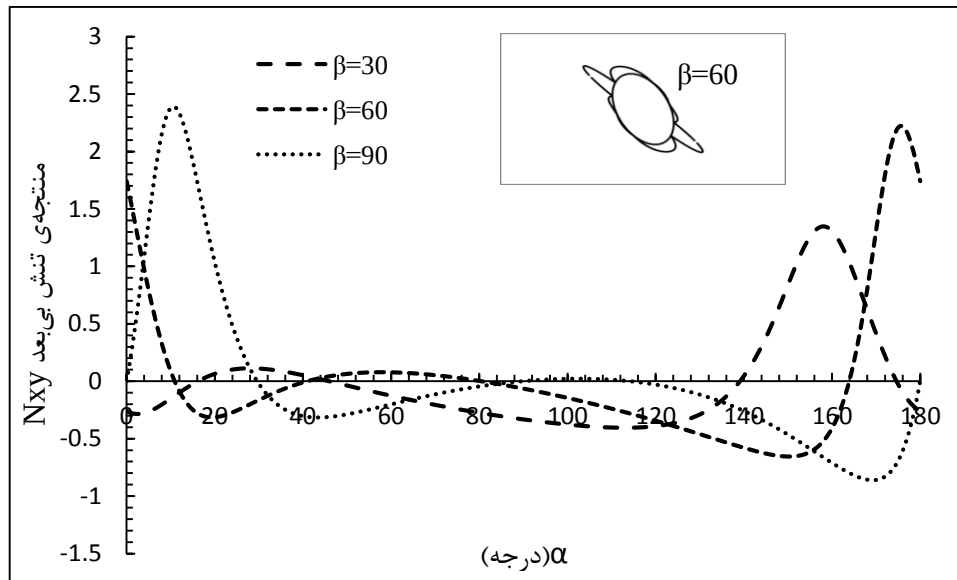


شکل ۳-۳۴: توزیع منتهی تنش بی بعد N_x در زوایای چرخش 30 ، 60 و 90 درجه در شکل ۳-۳۵، توزیع منتهی تنش بی بعد در جهت y در زوایای چرخش 30 ، 60 و 90 درجه نشان داده شده است. همان طور که دیده می شود از زاویه چرخش $\beta = 30$ تا $\beta = 90$ درجه قله های نمودارها به سمت راست حرکت کرده اند. بیشینه منتهی n_y برای زاویه چرخش های ذکر شده محدوده $0 < \alpha < 15$ درجه قرار می گیرد.

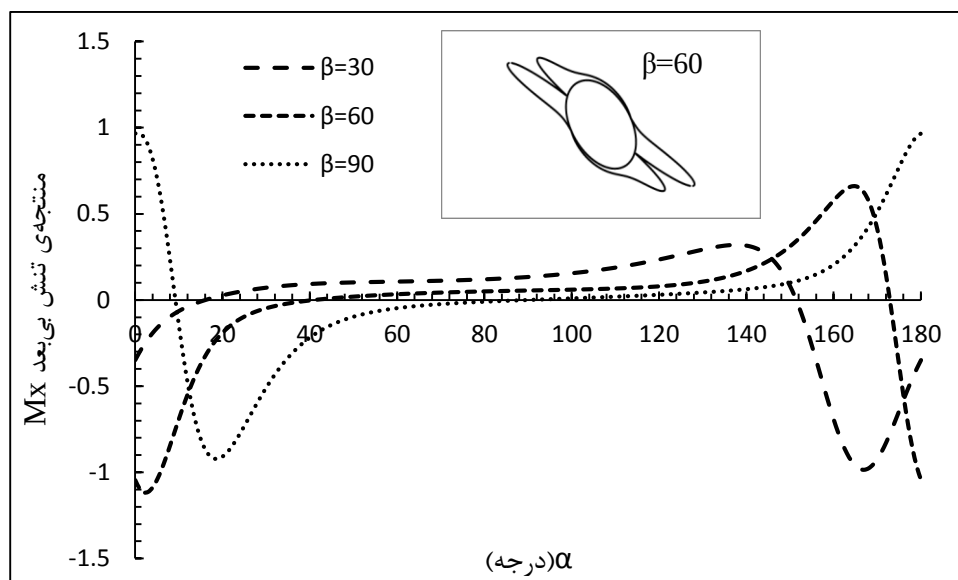


شکل ۳-۳۵: توزیع منتهی تنش بی بعد N_y در زوایای چرخش 30 ، 60 و 90 درجه در شکل ۳-۳۶، توزیع منتهی تنش برشی بی بعد اطراف گشودگی بیضی در سه زاویه

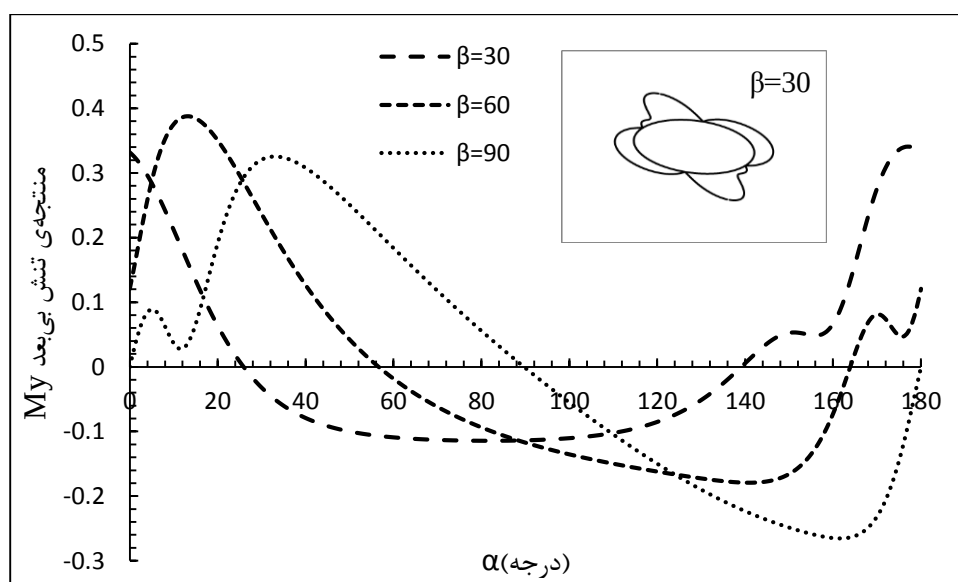
چرخش مختلف نشان داده شده است. در این منته نیز همان گونه که بیان شد مشاهده می شود که مقدار بیشینه ی منته ی کمتر (منته ی مطلوب) با افزایش زاویه ی چرخش به سمت راست نمودار حرکت می کند. محل قرارگیری بیشینه ی n_{xy} در زاویه ی چرخش $\beta = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ درجه در محدوده ی $155 \leq \alpha \leq 175$ درجه و در حالت $\beta = 90^\circ$ درجه $\alpha = 10^\circ$ درجه قرار دارد.



شکل ۳-۳۶: توزیع منته ی تنش بی بعد Nxy در زوایای چرخش 30° ، 60° و 90° درجه
 در شکل ۳-۳۷، توزیع منته ی لنگری تنش بی بعد در جهت x در زوایای چرخش 30° ، 60° و 90° درجه نشان داده شده است. در این شکل نیز مشاهده می شود که مقدار بیشینه ی منته ی m_x در دو زاویه ی چرخش $\beta = 60^\circ$ و $\beta = 90^\circ$ درجه در محدوده ی $0 \leq \alpha \leq 5$ درجه و برای $\beta = 90^\circ$ درجه $\alpha = 158$ درجه قرار دارد.

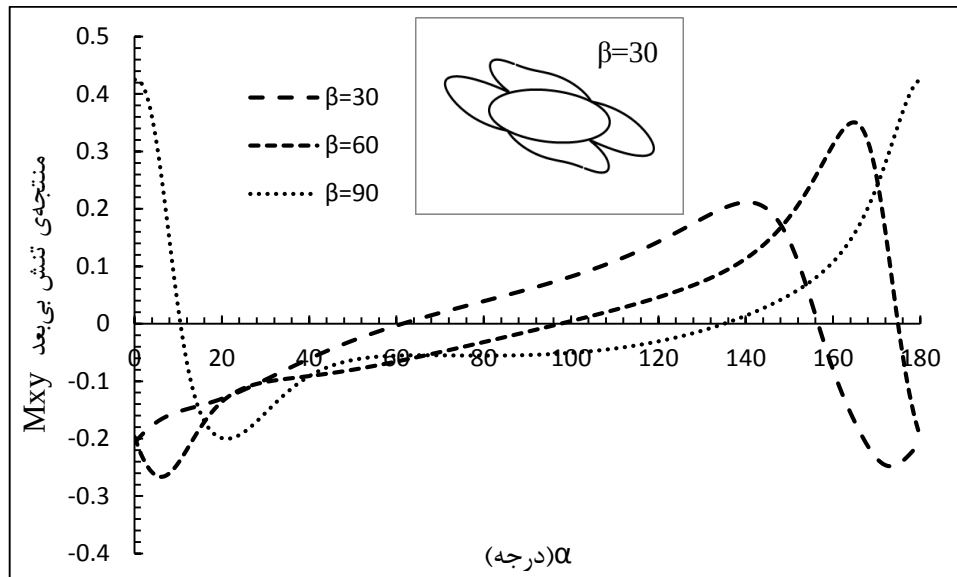


شکل ۳-۳۷: توزیع منتهی لنگری تنش بی بعد M_x در زوایای چرخش ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه در شکل ۳-۳۸، توزیع منتهی لنگری تنش بی بعد در جهت y در اطراف گشودگی بیضوی در زوایای چرخش ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه نشان داده شده است. در این شکل نیز مشاهده می شود که قله های نمودار همانند نمودارهای قبل با افزایش زاویه چرخش به سمت راست حرکت کرده اند. مقدار بیشینه منتهی m_y در دو زاویه چرخش در محدوده $10 < \alpha < 30$ درجه و برای $\beta = 30$ درجه بیشینه منتهی تنش در زاویه ۱۷۶ درجه قرار دارد.



شکل ۳-۳۸: توزیع منتهی لنگری تنش بی بعد M_y در زوایای چرخش ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه در شکل ۳-۳۹، توزیع منتهی لنگری تنش بی بعد در زوایای چرخش ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه

قابل مشاهده است. بیشینه‌ی منته‌ی لنگری تنش برای زاویه چرخش 90° در زوایای 0° و 180° درجه اتفاق می‌افتد. برای دو زاویه‌ی دیگر نیز در محدوده‌ی $175^\circ < \alpha < 165^\circ$ درجه قرار دارد.



شکل ۳-۳۹: توزیع منته‌ی لنگری تنش بی‌بعد M_{xy} در زوایای چرخش 30° ، 60° و 90° درجه همان‌طور که در شکل‌های قبل دیده شد، می‌توان با تغییر زاویه‌ی چرخش گشودگی محل قرارگیری بیشینه‌ی منته‌ها رو تغییر داد. و با زاویه‌ی چرخش مناسب به منته‌ی تنش مطلوب رسید.

در این فصل تأثیر پارامترهای هندسه‌ی گشودگی و زاویه‌ی چرخش گشودگی بر توزیع منته‌های نیرو و لنگری تنش در اطراف گشودگی و مقدار بیشینه‌ی منته‌ها مورد بررسی قرار گرفت. همان‌طور که مشاهده شد، با تغییر این پارامترها و کنترل مناسب آن‌ها می‌توان منته‌های نیرو و لنگری تنش را به میزان قابل‌توجهی کاهش داد.

فصل ۴ : نتیجه گیری و پیشنهادها

۴-۱ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه با ارائه‌ی حلی تحلیلی بر پایه‌ی روش متغیر مختلط لختی‌سکی و با استفاده از تابع نگاشتی هم‌نوا به بررسی توزیع تنش صفحه‌ی متغیر تابعی دارای گشودگی بیضوی پرداخته شد. ابعاد صفحه در برابر ابعاد گشودگی طوری در نظر گرفته شد، که بتوان صفحه را بی‌نهایت فرض کرد و گشودگی در مرکز صفحه واقع شد. برای بررسی درستی نتایج، حل تحلیلی حاضر با حل اجزای محدود مقایسه گردید و نتایج به‌دست‌آمده تطابق خوبی با نتایج فوق داشت. هندسه‌ی گشودگی و زاویه‌ی چرخش گشودگی از پارامترهایی بود که تأثیر آن‌ها بر شش منته‌ی نیرو و لنگری تنش ایجادشده در اطراف گشودگی مورد بررسی قرار گرفت.

در یک بررسی جامع تأثیر پارامتر هندسه‌ی گشودگی برای گشودگی‌های مختلف مشاهده شد در بارگذاری $N_y^0 = 1$ (N/mm) در گشودگی‌های با کشیدگی کمتر از $c=0.5$ مشاهده می‌شود به علت فشردگی بیش‌ازحد، تمرکز تنش ایجادشده و بیشینه‌ی منته‌ها عدد بالایی را نشان می‌دادند. در حالت کلی برای گشودگی‌های با کشیدگی بیش از کشیدگی یادشده با افزایش پارامتر c بیشینه‌ی منته نیز افزایش می‌یابد. همچنین می‌توان با تغییر هندسه‌ی گشودگی محل قرارگیری بیشینه منته را تغییر داد. به‌گونه‌ای که با افزایش کشیدگی گشودگی قله‌های نمودارها در زاویه‌ی کمتر، در اطراف گشودگی رخ می‌دهند. یعنی قله‌های نمودارها به سمت چپ نمودار حرکت می‌کنند.

در بررسی تأثیر پارامتر زاویه‌ی چرخش برای هر گشودگی مشاهده شد که با انتخاب زاویه‌ی چرخش مناسب می‌توان مقدار منته‌ی مطلوب را در هر جهت کاهش داد. به‌عنوان مثال در گشودگی بیضوی با کشیدگی $c=1/5$ با انتخاب زاویه‌ی چرخش مناسب، مقادیر منته‌های مطلوب n_x ، m_y ، m_x ، n_{xy} و m_{xy} به ترتیب به میزان ۴۷، ۲۷، ۵۲، ۲۹، ۲۲ و ۴۵ درصد نسبت به گشودگی با زاویه‌ی چرخش صفر کاهش یافت. اما در همین گشودگی برای همین منته‌ها، در صورت انتخاب زاویه‌ی چرخش نامناسب می‌تواند بیشینه‌ی منته‌ها، به ترتیب به میزان ۱، ۵، ۳، ۱۸، ۱۸ و صفر درصد

افزایش بیابد و به نتیجه‌ی نامطلوب خود برسد.

در یک بررسی کلی مشاهده شد که در بارگذاری تک‌محوره در جهت x که مورد بررسی قرار گرفت، در همه‌ی گشودگی‌ها با کشیدگی‌های مختلف منته‌های نیرو و لنگری تنش در جهت بارگذاری مقادیر بیشینه‌ی بیشتری نسبت به منته‌های جهات دیگر اختیار می‌کنند. اما در بارگذاری تک‌محوره در جهت y بسته به میزان کشیدگی می‌تواند منته‌های نیرو و لنگری تنش در جهت‌های غیر از جهت بارگذاری مقادیر بیشینه را اختیار کند.

۲-۴ پیشنهادها

- ♦ بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های بیضوی در صفحه‌ی متغیر تابعی تحت بارگذاری دوماحوره و برشی
- ♦ بررسی ارتعاشات صفحه‌ی متغیر تابعی حاوی گشودگی‌های بیضوی
- ♦ بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های بیضوی در صفحه‌ی متغیر تابعی تحت بارگذاری حرارتی
- ♦ بهینه‌سازی حل تحلیلی حاضر با استفاده از الگوریتم ژنتیک و غیره
- ♦ بررسی توزیع تنش در صفحه‌ی متغیر تابعی دارای چندگشودگی بیضوی
- ♦ بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های غیردایروی و بیضی در صفحه‌ی متغیر تابعی تحت بارگذاری دوماحوره و برشی
- ♦ بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های غیردایروی و بیضی در صفحه‌ی متغیر تابعی تحت بارگذاری حرارتی
- ♦ بررسی توزیع تنش در صفحه‌ی متغیر تابعی دارای چند گشودگی غیردایروی و بیضی

پیوست‌ها

پیوست الف

ماتریس سفتی کاهش یافته:

مؤلفه‌های ماتریس سفتی کاهش یافته به صورت زیر تعریف می‌شود [۵۷]:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{66} - 2Q_{12})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)\end{aligned}\quad (\text{الف-۱})$$

در روابط (الف-۱) θ زاویه‌ی الیاف در هر لایه است و Q_{11} ، Q_{12} ، Q_{22} و Q_{66} به صورت زیر تعریف

می‌شوند:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (\text{الف-۲})$$

مراجع

- [1] Gao C. Y., Xiao J. Z., Ke Y. L. (2014) "FE analysis of stress concentrations in composite plates with multiple holes for zigzag multi-fastened joints" *Materials Science Forum*, 770, pp.17-20.
- [2] Chen P., Shen Z. (2001) "Green's functions for an unsymmetrical laminated plate with an elliptic hole" *Mechanics Research Communications*, 28, 5, pp. 519-524.
- [۳] پرهیزکار یعقوبی م.، (۱۳۹۲)، "تحلیل ترموالاستیک استوانه چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول با توزیع توانی خاص"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۴] شهابی ا.، (۱۳۹۳)، "تحلیل کمانش ترمودینامیکی ورق نازک FGM تحت بار فشاری شعاعی یکنواخت"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [5] Koizumi M. (1997) "Functionally Graded Material Activities In Japan" *Journal of Composites Part B: Engineering*, 28, 1, pp. 1-4.
- [۶] میرشفیعی ب.، (۱۳۹۰)، "بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌ای استوانه‌ای ساخته شده از مواد با خواص تابعی (FGM) با در نظر گرفتن جابه‌جایی اولیه، اثرات حرارتی و فشاری"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [7] Inglis C. E., (1913) "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners" Fifty-fourth Session Of The Institution Of Naval Architects, 55, pp. 219-241.
- [8] Heller S. R. Jr., Brock J. S., Bart, R. (1959) "The stresses around a rectangular opening with rounded corners in a uniformly loaded plate" Proceedings of the Tthird U.S. National Congress Of Applied Mechanics, ASME, New York, pp. 357-368.
- [9] Sobey A. J., (1963), "*Stress Concentration Factors for Rounded Rectangular Holes in Infinite Sheets*", Ministry of Aviation, Royal Aircraft Establishment, Farnborough.
- [10] Muskhelishvili N. I., (1962), "*Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*", Second edition, Cambridge University Press, UK.
- [11] Savin G. N., (1961), "*Stress Concentration Around Holes*", Pergamon Press, New York.

- [12] Stroh A. N. (1958) "Dislocations and cracks in anisotropic elasticity" *Philosophical Magazine*, 3, 30, pp. 625–646.
- [13] Lekhnitskii S. G., (1968), "*Anisotropic Plates*", Second edition, Gordon and Breach Science, New York.
- [14] Simha K., Mohapatra S. (1998) "Stress concentration around irregular holes using complex variable method" *Sadhana*, 23, 4, pp. 393-412.
- [15] Rezaeepazhand J., Jafari M. (2010) "Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout" *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, 1, pp. 96-102.
- [16] Gao X.-L. (1996) "A general solution of an infinite elastic plate with an elliptic hole under biaxial loading" *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 67, 1, pp. 95-104.
- [17] Sharma D. S. (2012) "Stress distribution around polygonal holes" *International Journal of Mechanical Sciences*, 65, 1, pp. 115-124.
- [18] Sharma D. S. (2014) "Moment distribution around polygonal holes in infinite plate" *International Journal of Mechanical Sciences*, 78, pp. 177-182.
- [19] Jong T. D. (1981) "Stresses around rectangular holes in orthotropic plates" *Journal of Composite Materials*, 15, 3, pp. 311-328.
- [20] Rajaiah K. N., Naik K. (1983) "Optimum quasi-rectangular holes in infinite orthotropic plates under in-plane loadings" *Journal of Applied Mechanics*, 50, 4a, pp. 891-892.
- [21] Theocaris P. S., Petrou L. (1986) "Stress distributions and intensities at corners of equilateral triangular holes" *International Journal of Fracture*, 31, pp. 271–89.
- [22] Zimmerman R. W. (1986) "Compressibility of two-dimensional cavities of various shapes" *Journal of Applied Mechanics*, 53, 3, pp. 500-504.
- [23] Kamel M., and Liaw B. M. (1989) "Green's functions due to concentrated moments applied in an anisotropic plane with an elliptic hole or a crack" *Mechanics Research Communications*, 16, 5, pp. 379-387.
- [24] Hufenbach W., Schaffer M., Herrmann A. S. (1990) "Calculation of the stress and displacement field of anisotropic plates with elliptical hole" *Ingenieur-Archiv*, 60, 8, pp. 507–517.
- [25] Hwu C. (1990) "Anisotropic plates with various openings under uniform loading or pure bending" *Journal of Applied Mechanics*, 57, 3, pp. 700-706.

- [26] Daoust J., Hoa S. V. (1991) "An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes" *Composite Structures*, **19**, 2, pp. 107-130.
- [27] Becker W. (1991) "A complex potential method for plate problems with bending extension coupling" *Journal of Applied Mechanics*, **61**, 5, pp. 318-326.
- [28] Ukadgaonker V. G., Kakhandki V. (2005) "Stress analysis for an orthotropic plate with an irregular shaped hole for different in-plane loading conditions" *Composite Structures*, **70**, 3, pp. 255-274.
- [29] Rezaeepazhand J., Jafari M. (2005) "Stress analysis of perforated composite plates" *Composite Structures*, **71**, 4, pp. 463-468.
- [30] Asmar G. H., Jabbour T. G. (2007) "Stress analysis of anisotropic plates containing rectangular holes" *International Journal of Mechanics and Solids*, **2**, 1, pp. 59-84.
- [31] Banerjee M., Jain N. K., Sanyal S. (2013) "Stress concentration in isotropic and orthotropic composite plates with center circular hole subjected to transverse static loading" *International Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, **3**, 1, pp. 109-113.
- [32] Rezaeepazhand J., Jafari M. (2010) "Stress analysis of composite plates with a quasi-square cutout subjected to uniaxial tension" *Journal of Reinforced Plastics and Composite*, **29**, 13, pp. 2015-2026.
- [33] Batista M. (2011) "On the stress concentration around a hole in an infinite plate subject to uniform load at infinity" *International Journal of Mechanical Sciences*, **53**, 4, pp. 254-261.
- [34] Danial I. M., Rowlands R. E., Whiteside J. B. (1974) "Effects of material and stacking sequence on behavior of composite plates with holes" *Experimental Mechanics*, **14**, 1, pp. 1-9.
- [35] Konish H. J., Whitney J. M. (1975) "Approximate stresses in an orthotropic plate containing a circular hole" *Journal of Composite Materials*, **9**, 2, pp. 157-166.
- [36] Rybicki E. F., Schmueser D. (1978) "Effect of stacking sequence and lay-up angle on free edge stresses around a hole in a laminated plate under tension" *Journal of Composite Materials*, **12**, 3, pp. 300-313.
- [37] Prasad C. B., Stuart M. J. (1989) "Moment distributions around holes in symmetric composite laminates subjected to bending moments" 30th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, **28**, 5, pp. 877-882.

- [38] Vellaichamy S., Prakash B. G., Brun S. (1990) "Optimum design of cutouts in laminated composite structures" *Computers and Structures*, **31**, 3, pp. 241-246.
- [39] Bonora N., Costanzi M., Marchetti M. (1993) "On closed form solution for the elastic stress field around holes in orthotropic composite plates under in-plane stress conditions" *Composite Structures*, **25**, 1-4, pp. 139-156.
- [40] Beom H. G., Earmme Y. Y. (1998) "Complex variable method for problems of a laminate composed of multiple isotropic layers" *International Journal of Fracture*, **92**, 4, pp. 305-324.
- [41] Ukadgaonker V. G., Rao D. K. N. (2000) "A general solution for moments around holes in symmetric laminates" *Composite Structures*, **49**, 3, pp. 41-54.
- [42] Ukadgaonker V. G., Rao D. K. N. (2000) "A general solution for stresses around holes in symmetric laminates under inplane loading" *Composite Structures*, **49**, 3, pp. 339-354.
- [43] Romeo G. (2001) "Analytical behavior of laminates with rectangular opening under biaxial tension, compression and shear loads" *Journal of Composite Materials*, **35**, 8, pp. 639-646.
- [44] Yasar kaltakci M., Arsalan H. M. (2006) "Stress concentrations of symmetrically laminated composite plates containing circular holes" *Iranian Journal of Science & Technology*, **30**, B4, pp. 447-460.
- [45] Hufenbach W., Grüber B., Gottwald R., Lepper M., Zhou B. (2010) "Analytical and experimental analysis of stress concentration in notched multilayered composite with finite outer boundaries" *Mechanics of Composite Materials*, **46**, 5, pp. 531-538.
- [46] Dharmendra S. (2012) "Stress concentration around circular/elliptical/triangular cutouts in infinite composite plate" *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*, **20**, 1, pp. 1-6.
- [47] Rao D. K. N., Babu M. R., Reddy K.R. N., Sunil D. (2010) "Stress around square and rectangular cutouts in symmetric laminates" *Composite Structures*, **92**, 12, pp. 2845-2859.
- [48] Hufenbach W., Grüber B., Gottwald R., Lepper M., Zhou B. (2013) "An analytical method for the determination of stress and strain concentrations in textile-reinforced GF/PP composites with elliptical cutout and a finite outer boundary and its numerical verification" *Archive of Applied Mechanics*, **83**, 1, pp. 125-135.

[۴۹] جعفری م. و مشیری اول ب. ، " تحلیل تنش چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن با گشودگی شبه مستطیلی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای " *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، شماره ۱۵، دوره ۱۴: ص ۴۰۴-۳۹۵.

[50] Ko W. (1985) "Stress concentration around a small circular hole in the HiMat composite plates" *NASA Technical Memorandum*.

[51] Becker W. (1992) "Closed form analytical solutions for a griffith crack in a nonsymmetric laminate plate" *Composite Structures*, 21, 1, pp. 49-55.

[52] Becker W. (1993) "Complex method for the elliptical hole in an unsymmetric laminate" *Archive of Applied Mechanics*, 63, 3, pp. 159-169.

[53] Becker W. (1995) "Concentrated forces and moments on laminates with bending extension coupling" *Composite Structures*. 30, 1, pp. 1-11.

[54] Ukadgaonker V. G., Rao D. K. N. (2000) "A general solution for stress resultants and moments around holes in unsymmetric laminates" *Composite Structures*, 49, 1, pp. 27-39.

[55] Chen P., Shen Z. (2003) "Stress resultants and moments around holes in unsymmetrical composite laminates subjected to remote uniform loading" *Mechanics Research Communications*, 30, 1, pp. 79-86.

[56] Madenci E., Barut A., Nemeth M. P. (2001) "A complex potential-variational method for stress analysis of unsymmetric laminates with an elliptical cutout" *Journal of Applied Mechanics*, 68, 5, pp. 731-739.

[57] Hsieh M.C., Hwu C. (2003) "Explicit solutions for the coupled stretching-bending problems of holes in composite laminates" *International Journal of Solids and Structures*, 40, 15, pp. 3913-3933.

[58] Cannon. C. P., (2012), Master of Science Thesis, "Stress concentrations around square cutout in a plate composite", University of Texas at Arlington.

[۵۹] جعفری م. و آشوری ح. ، " مطالعه‌ی منتجه‌های نیرو و گشتاور پیرامون گشودگی چهارضلعی در چندلایه‌های نامتقارن " *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، شماره ۵، دوره ۱۵: ص ۱۹۳-۲۰۴.

[۶۰] جعفری م. و قنّاد م. و عامری ا. ، " بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی دایره ای در ورق ناهمگن تحت بارگذاری درون صفحه ای " *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، شماره ۶، دوره ۱۵: ص

- [61] Yang Q., Gao C.-F., Chen W. (2010) "Stress analysis of a functional graded material plate with a circular hole" *Archive of Applied Mechanics*, **80**, 8, pp. 895-907.
- [62] Yang Q., Gao C.-F., Chen W. (2012) "Stress concentration in a finite functionally graded material plate" *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, **55**, 7, pp. 1263-1271.
- [63] Mohammadi M., Dryden J. (2010) "Stress concentration around a circular hole in a FG Plate under biaxial loading" *World Journal Engineering*, **7**, 2, pp. 390-391.
- [64] Mohammadi M., Dryden J., Jiang L. (2011) "Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate" *International Journal of Solids and Structures*, **48**, 3, pp. 483-491.
- [65] Kim J.-H., Paulino G. (2002) "Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials" *Journal of Applied Mechanics*, **69**, 4, pp. 502-514.
- [66] Kubair D., Bhanu-Chandar B. (2008) "Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension" *International Journal of Mechanical Sciences*, **50**, 4, pp. 732-742.
- [67] Enab T. A. (2014) "Stress concentration analysis in functionally graded plates with elliptic holes under biaxial loadings" *Ain Shams Engineering Journal*, **5**, 3, pp. 839-850.
- [68] Batra R., Jin J. (2005) "Natural frequencies of a functionally graded anisotropic rectangular plate" *Journal of Sound and Vibration*, **282**, 1, pp. 509-516.
- [69] Pan E. (2003) "Exact solution for functionally graded anisotropic elastic composite laminates" *Journal of Composite Materials*, **37**, 21, pp. 1903-1920.
- [70] Ramirez F., Heyliger P. R., Pan E. (2006) "Static analysis of functionally graded elastic anisotropic plates using a discrete layer approach" *Composites Part B: Engineering*, **37**, 1, pp. 10-20.
- [71] Della Croce L., Venini P. (2004) "Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 9, pp. 705-725.
- [72] Reid R., Paskaramoorthy R. (2011) "An extension to classical lamination theory for use with functionally graded plates" *Composite Structures*, **93**, 2, pp. 639-648.

- [73] Dave J. M., Sharma D. S. (2016) “Stresses and moments in through-thickness functionally graded plate weakened by circular/elliptical cut-out” *International Journal of Mechanical Sciences*, **105**, pp. 146-157.
- [74] Jones. R. M., (1975), “*Mechanics of Composite Materials*” McGraw-Hill, New York.
- [75] Herakovich. C. T., (1998), “ *Mechanics of Fibrous Composites*” University of Virginia, Virginia.

Abstract

In this thesis, with the development of the classical Lekhnitskii's complex variable methods, stress resultants analysis of functionally graded plate with elliptical cutout has been studied. By using the complex variable method, Lekhnitskii obtained the stress resultants distribution around a circular and elliptical hole in anisotropic plates. With the extension of this method to functionally graded Infinite plate and by using the conformal mapping, have tried to investigate the stress distribution around elliptical cutout. For this purpose, the exponential function is used to plate investigated. For modeling the functionally graded plate, the plate is for an asymmetric laminates with gradual change of the fiber directions. In this thesis, the effect of various parameters such as, aspect ratio of cutout shape and hole orientation on force and moment resultants around the hole is considered. FG plate is subjected to uniaxial tension loading.

For numerical evaluation ABAQUS software is used to verify the results of the analytical solution. Analytical results are in good agreement with the finite element solution. Based on the analytical results. Unexpectedly circular hole is not the best geometry to reduce the stress concentration in perforated plates and in some cases by selecting the aspect ratio of cutout shape and orientation for holes, the stress concentration less than circular hole can be achieved.

Keywords : Force and Moment Resultants, Analytical Solution, Functionally Graded Plate, Complex Variable Approach.



Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

**Analysis of the resultant stress around elliptical cutouts in unlimited
functionally graded plates**

By: Hamid Abdolalian

**Supervisor(s):
Dr. Mohammad Jafari**

February 2017