بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد طراحی کاربردی

تحلیل دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک FGM تحت فشار متحرک به‌کمک تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک

نگارنده: مهدی آرزم

اساتید راهنما:

دکتر حمید رضا ایپک‌چی

دکتر مهدی قنّاد کهتوئی

شهریور ۱۳۹۵

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک
گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آقای مهدی آرزم
تحت عنوان:
تحلیل دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک FGM تحت فشار متحرک به‌کمک

تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر حمید رضا ایپک‌چی		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی : دکتر مهدی قنّاد کهتوئی		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر امیر جلالی		نام و نام خانوادگی: دکتر محمد باقر نظری	
نام و نام خانوادگی: دکتر اردشیرکرمی محمدی			

تقدیم اثر

تمامی تلاش چندین ماهه‌ی خود را در این تحقیق به همسر عزیزم و **خانواده عزیزم** که با صبر و حوصله و همراهی‌های بی دریغشان، اینجانب را در پیشرفت هر چه بهتر پایان‌نامه یاری و مساعدت نموده‌اند، تقدیم مینمایم .امید است بتوانم ذره‌ای از
محبت‌ها و دلداری های این یاران همیشگی را جبران نمایم .

تشکر و قدردانی

اکنون که در سایه الطاف خداوند متعال این پایان‌نامه به انجام رسیده است، بر خود لازم میدانم از زحمات فراوان اساتید بزرگوارم جناب آقای دکترحمید رضا ایپک چی و جناب آقای دکتر مهدی قنّاد کهتوئی که در منصب استاد راهنما توصیه‌های بی‌شائبه‌ی خود را در جهت گیری صحیح ، تدوین و گردآوری پروژه ارائه نموده-اند، مراتب سپاس را به‌جا آورم.همچنین از کلیه کسانی که با سعه صدر و حمایت‌های بی‌دریغ، اینجانب را در به ثمررساندن این تحقیق یاری رسانده‌اند، خالصانه تشکر و قدردانی مینمایم و از درگاه ایزد منان توفیق روز افزون ایشان را خواستارم.

تعهد نامه

اینجانب **مهدی آرزم** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک** دانشکده **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه **تحلیل دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک FGM تحت فشار متحرک به‌کمک تئوری کلاسیک پوسته‌ها**

تحت راهنمایی **دکتر حمیدرضا ایپک‌چی و دکتر مهدی قنّاد کهتوئی** متعهد می شوم،

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایح اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه‌های رایانه‌ای ، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در پژوهش حاضر، تحلیل دینامیکی و ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک ارائه شده است. فرض تقارن محوری در مسأله برقرار و ضخامت استوانه ثابت است. پوسته‌ی استوانه‌ای از جنس مادّه‌ی همسانگرد و ناهمگن تابعی با توزیع نمایی خواص در راستای طولی با ضریب پواسون ثابت بوده و رفتار مادّه الاستیک خطی در نظر گرفته شده است. در استخراج معادلات، میدان جابه‌جایی به‌کمک تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک تخمین زده شده و سینماتیک مسأله بر اساس روابط کرنش-جابه‌جایی خطی می‌باشد. این معادلات، به‌کمک اصل همیلتون استخراج شده اند. شرط مرزی در تحلیل فرکانسی، گیردار و ساده و در تحلیل دینامیکی، ساده است. بارگذاری مسأله، فشار داخلی متحرک با سرعت ثابت است. معادله‌های حاکم بر حرکت پوسته، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطّی کوپل شده با مشتقات جزئی و ضرایب متغیّر هستند که با روش تحلیلی به‌کمک بسط توابع ویژه و روش مودال حل شده اند. همچنین مدل‌سازی المان محدود مسأله، به‌کمک نرم افزار انسیس انجام گرفته است. با توجه به نتایج حاصل از تحلیل، تأثیر تغییرات پارامترهای هندسی، ناهمگنی و بارگذاری بر پاسخ دینامیکی، سرعت بحرانی، ضریب بار دینامیکی و فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده از تحلیل، با نتایج موجود در مراجع مختلف و همچنین نتایج به‌دست آمده از روش المان محدود، مقایسه و اعتبارسنجی شده است.

واژگان کلیدی:پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک، بار متحرک، تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، تحلیل ارتعاشی، روش بسط توابع ویژه، ماده‌ی ناهمگن FG با تغییرات طولی خواص، روش المان محدود

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست علائم

U_z	جابه‌جایی شعاعی
U_θ	جابه‌جایی محیطی
U_x	جابه‌جایی محوری
w	جابه‌جایی شعاعی صفحه‌ی میانی
u	جابه‌جایی محوری صفحه‌ی میانی
σ_x	تنش محوری
σ_θ	تنش محیطی
ε_x	کرنش محوری
ε_θ	کرنش محیطی
E	مدول الاستیسیته
ρ	چگالی
n	ثابت ناهمگنی ماده
h	ضخامت استوانه
R	شعاع سطح میانی استوانه
L	طول استوانه
x	مختصات در جهت محوری استوانه
z	مختصات در جهت شعاعی استوانه
θ	مختصات در جهت محیطی استوانه
$\frac{L}{R}$	نسبت لاغری
N_x ,M_x ,N_θ	منتجه‌های تنش محوری و محیطی
T	انرژی جنبشی

چگالی انرژی جنبشی	T^*
انرژی کرنشی	U
چگالی انرژی کرنشی	U^*
کار نیروهای خارجی	W_s
مؤلفه نیروی محوری بر واحد سطح	f_x
مؤلفه نیروی شعاعی بر واحد سطح	f_z
مختصه زمانی	t
سرعت عبور بار متحرک	V
مقدار فشار متحرک	q
ضرایب دستگاه معادلات	A_i
مقادیر ویژه	β_i
بردارهای ویژه	$\{V\}$
فرکانس طبیعی	ω
پارامتر فرکانس (فرکانس طبیعی بی‌بعد)	f
سرعت بحرانی	V_{cr}
سرعت بحرانی بی‌بعد	V_{cr}^*
مدول الاستیسیته‌ی در x=0	E_{00}
چگالی در x=0	ρ_{00}
ضریب تقویت دینامیکی	DAF

فصل ۱ مقدمه

۱-۱- پیشگفتار

در دهه‌های اخیر، مطالعه‌ی رفتار سازه‌های جدار نازک، تحت بارگذاری‌های مختلف، مورد علاقه‌ی دانشمندان زیادی قرار گرفته است. سازه‌های جدار نازک در شکل‌های مختلفی مانند پوسته‌ها، ورق‌ها، پنل‌های ساندویچی، تیرها، ریل‌ها، ستون‌ها و … به‌کار گرفته می‌شوند. پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک از رایج‌ترین و کارآمدترین نوع سازه‌های جدارنازک می‌باشند و کاربرد گسترده‌ای در صنعت دارند. ارتعاشات و نوسانات پوسته‌های استوانه‌ای تحت اثر عبور بار متحرک یک ملاحظه‌ی مهم در طراحی این سازه‌ها به‌شمار می‌رود. بررسی‌های ارتعاشی و آکوستیک در پوسته‌های استوانه‌ای از اهمّیت ویژه‌ای در تحلیل، طراحی و ساخت این سازه‌ها برخوردار است. اندرکنش میان سازه و بار متحرک، تحلیل پاسخ دینامیکی را بسیار پیچیده می‌کند و ازآنجائیکه معادلات حاکم بر پوسته‌ها بسیار پیچیده‌تر و طولانی‌تر از معادلات مشابه در ورق‌ها و تیرها است؛ لذا چنین بررسی‌هایی در پوسته‌ها دارای پیچیدگی‌های بیشتری نسبت به ورق‌ها و تیرها می‌باشد. لذا این پدیده موضوع کنکاش و پژوهش‌های بسیاری بوده است، به‌طوری که اکثر تحلیل‌های انجام شده بر روی پوسته‌ها، با استفاده از روش‌های عددی و المان محدود بوده و برای معادلات حاکم بر پوسته‌ها، کمتر، از حل‌های تحلیلی استفاده شده است.

در این فصل، ابتدا در مورد مفاهیم بنیادین پژوهش حاضر، شامل پوسته‌ها و طبقه‌بندی‌های آن، مروری بر تئوری پوسته‌های نازک، بار متحرک و نهایتاً موادّ ناهمگن و شیوه‌ی مدل‌سازی ریاضی آن‌ها مطالبی بیان می‌شود. سپس سایر پژوهش‌های انجام گرفته‌ی مرتبط، مختصرا مرور می‌گردد.

۱-۲- پوسته‌ها [۱]

در مهندسی مکانیک با توجه به هندسه و بارگذاری، اجزای سازه‌ای به سه گروه کلی تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها تقسیم می‌شوند. تیرها سازه‌هایی هستند که یک بعد آن‌ها (بعد محوری) نسبت به دو بعد دیگر به مراتب بزرگ‌تر است و قادرند بارگذاری‌های خمشی، محوری، پیچشی و برش عرضی را تحمل کنند. سازه‌هایی مانند کابل‌ها، رشته‌ها، اجزای خرپا و ستون‌ها حالت‌های خاص تیر به‌شمار می‌روند.

ورق‌ها سازه‌هایی مسطح هستند که یک بعد آن‌ها (بعد ضخامت) نسبت به دو بعد دیگر کوچک می‌باشد. معمولاً انتظار است که ورق‌ها بتوانند انواع بارگذاری خمشی، محوری، پیچشی، برش عرضی و برش درون صفحه‌ای را تحمّل کنند. غشاها حالت خاصی از ورق‌ها هستند که به دلیل ضخامت ناچیز تنها قادرند بارهای درون صفحه‌ای شامل کشش و برش را تحمل نمایند.

پوسته‌ها یا سازه‌های پوسته‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها سازه‌های مهندسی بسیار پرکاربردی هستند که در زمینه‌های مختلف از جمله مهندسی عمران، مکانیک، هوافضا و علوم دریایی (و زیر دریایی) کاربردهای فراوانی دارند. برخی از مهم‌ترین کاربردهای پوسته‌ها در مهندسی عمران را می‌توان در سازه‌های حمل مایع و تانکرهای آب، سازه‌های نگهدارنده در نیروگاه‌ها، گنبدهای بتونی و ساختمان‌های چندصد طبقه نام برد. به همین ترتیب از جمله مثال‌های پوسته‌ها در مهندسی مکانیک را می‌توان استفاده وسیع در خطوط انتقال، دیسک‌های توربین و مخازن تحت فشار دانست. در مهندسی هوافضا مثال‌های متنوعی مانند بال و بدنه هواپیماها، فضاپیماها، موشک‌ها و راکت‌ها قابل بیان است و بالاخره در علوم دریانوردی نیز پوسته‌ها در ساخت بدنه زیردریایی‌ها و کشتی‌های غول‌پیکر کاربرد فراوان دارند. یکی از جدیدترین کاربردهای این المان‌های مهندسی در رشته بیومکانیک است؛ بدین ترتیب که در ساخت جمجمه و حتی چشم از انواع خاصی از پوسته‌ها استفاده می‌گردد. این نوع از سازه‌ها، در شکل‌های طبیعی مانند جمجمه‌ی سر انسان‌ها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند. لذا استفاده‌ی روزافزون از تجهیزات با این نوع شکل هندسی، نیاز به شناخت ویژگی‌های دینامیکی آن‌ها را بیش از پیش نمایان ساخته است.

پوسته‌ها به‌طور کلی سازه‌هایی خمیده هستند که ضخامت آن‌ها نسبت به شعاع انحنا و ابعاد طولی کوچک است و از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. پارامتر انحنا در پوسته‌ها بسیار تعیین کننده است؛ به‌طوری‌که پوسته‌های مختلف با توجه به انحناهای متفاوت به پوسته‌های استوانه‌ای، مخروطی، کروی، سهموی،

بیضوی و هذلولوی دسته‌بندی می‌شوند. از میان انواع پوسته‌های گفته شده، پوسته‌های استوانه‌ای به‌دلیل فراوانی کاربرد، از اهمّیت ویژه‌تری برخوردار هستند. مطالعه‌ی رفتار این‌گونه از پوسته‌ها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه بسیاری از دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش‌پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش و در صورت امکان، وزن آن‌ها را کاهش دهند. در علوم مهندسی بنا به برخی از دلایل مانند حمل بار بسیار خوب، یکنواختی سازه‌ای و استحکام بالا، نسبت استحکام به وزن بالا و وجود فضای درون‌سازه‌ای مناسب از پوسته‌ها استفاده‌ی بسیاری می‌گردد. علاوه بر علل ذکر شده، این سازه‌ها در کاربرد، زیبایی بیشتری نسبت به انواع دیگر سازه‌ها ایجاد می‌کنند. لذا می‌توان یکی از علل غیر مهندسی استفاده از این سازه‌ها را زیبایی در کاربرد دانست. به تناسب مطلوبیت رفتاری این نوع از سازه‌ها، پیچیدگی تحلیل آن‌ها نیز حائز اهمیت می‌باشد. روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند.

۱-۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها [۲]

در این بخش پوسته‌ها، از دیدگاه هندسی، مادّی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

از نظر هندسه می‌توان پوسته‌ها را به چند شکل تقسیم‌بندی کرد. از یک دیدگاه، پوسته‌ها به دو گروه پوسته‌های حاصل از دوران[۱] و پوسته‌های حاصل از انتقال[۲] تقسیم می‌شوند. پوسته‌های حاصل از دوران، پوسته‌هایی هستند که از دوران کامل و یا جزئی یک منحنی یا سطح مولد حول یک محور دوران پدید می‌آیند. در مقابل پوسته‌های حاصل از انتقال، از انتقال مستقیم‌الخط و یا منحنی‌الخط منحنی یا سطح مولد بر روی یک مسیر مشخص حاصل می‌شود. با توجه به این دیدگاه، می‌توان ورق‌ها را زیرمجموعه‌ی پوسته‌ها دانست.

---
۱ Shells of Revolution

۲ Shells of Translation

پوسته‌ها را می‌توان با توجه به ضخامت، به دو گروه پوسته‌های نازک[۱] و پوسته‌های ضخیم[۲] نیز دسته-بندی کرد. مبنای این تقسیم‌بندی نسبت ضخامت به شعاع انحنا است. پوسته‌ای را نازک می‌نامند که حداکثر مقدار ضخامت به شعاع انحنا در آن، در مقایسه با مقدار واحد، قابل صرف‌نظر کردن باشد. برای اینکه از این موضوع یک حس فیزیکی ادراک گردد باید گفت که در پوسته‌های نازک نسبت $\frac{1}{1000} \le \frac{h}{R} \le \frac{1}{20}$ باید برقرار باشد که این نسبت معروف‌ترین مقداری است که در اکثر مراجع بیان شده است. پارامترهای h و R، به‌ترتیب ضخامت پوسته و شعاع انحنای سطح میانی[۳] پوسته هستند. پوسته‌هایی که در آن‌ها این نامساوی برقرار نباشد را پوسته‌های ضخیم می‌نامند. البته در عمل تنها این نسبت تعیین کننده نازک یا ضخیم بودن پوسته نیست و پارامترهای دیگری همچون شرایط مرزی، تغییرات خطی بارهای خارجی بر روی سطح پوسته و ... نیز تعیین کننده خواهند بود. راه دیگر در تعیین نازکی و یا ضخیمی یک پوسته بدین صورت است که پوسته‌هایی به ضخامت کمتر از ۰/۱ کوچک‌ترین طول موج (مود تغییر شکل) را ضخیم و پوسته‌هایی با ضخامت کمتر از ۰/۰۵ کوچک‌ترین طول موج را نازک می‌نامند [۳].

به‌طور خاص برای پوسته‌های استوانه‌ای، یک تقسیم‌بندی هندسی دیگر نیز وجود دارد. اگر نسبت طول استوانه به شعاع آن (L/R) که به آن نسبت لاغری[۴] گویند، بزرگ باشد استوانه بلند نامیده می‌شود؛ و اگر این نسبت کوچک باشد استوانه کوتاه است.

از دیدگاه مادّی، پوسته‌ها، مانند تمام سازه‌ها، همگن[۵] و یا ناهمگن[۶] هستند. پوسته‌های همگن، پوسته-هایی هستند که خواص مکانیکی آن‌ها در تمام نقاط ثابت باشد. در مقابل پوسته‌های ناهمگن دارای خواصی هستند که تابع موقعیت نقاط است. اگر تغییرات خواص مکانیکی نقاط پوسته را بتوان به‌کمک

---

۱ Thin Shells

۲ Thick Shells

۳ Midsurface

۴ Slenderness Ratio

۵ Homogeneous

۶ Heterogeneous

یک تابع ریاضی بیان کرد، به پوسته FGM[1] یا تابعی گفته می‌شود. همچنین پوسته‌ها می‌توانند همسانگرد[2] و یا ناهمسانگرد[3] باشند. خواص در پوسته‌های ناهمسانگرد وابسته به جهت است. مهم‌ترین گروه از مواد ناهمسانگرد که بیش‌ترین حجم مطالعات را به خود اختصاص داده‌اند، مواد ارتوتروپیک[4] هستند. در این مواد، خواص مکانیکی در یک جهت نسبت به دو جهت دیگر متفاوت است. مواد مرکب سنتی و آلیاژهای نورد شده، مثال‌هایی از این دسته به‌شمار می‌رود.

از دیدگاه رفتاری، پوسته‌ها به انواع مختلفی دسته‌بندی می‌شوند. پوسته با تغییر شکل‌های کوچک[5] که جابه‌جایی هرنقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری کوچک است و رفتار خطی از نظر هندسی را دارا می‌باشد. نوع دیگر، پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ[6] که جابه‌جایی هرنقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری کوچک نیست و رفتار غیرخطی از نظر هندسی را دارا می‌باشد. پوسته با رفتار کشسان[7] که تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند و از نظر مادی رفتار خطی دارند. نوع دیگر پوسته با رفتار مومسان[8] که تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند و از نظر مادّی رفتار غیرخطی دارند.

۱-۳- تئوری پوسته‌های نازک

رایج‌ترین تئوری‌های مطرح شده در پوسته‌ها، تئوری‌هایی هستند که بر مبنای الاستیسیتهٔ خطی بنا نهاده شده‌اند. پوسته‌ها، اجسام سه‌بعدی دارای سطوح انحنادار هستند. در واقع در محاسبات، یک پوسته‌ی سه‌بعدی را در نظر گرفته و فرضیات الاستیسیتهٔ خطی، بر آن اعمال می‌شود. معادلات سه‌بعدی

---

[1] Functionally Graded Materials
[2] Isotropic
[3] Anisotropic
[4] Ortotropic Materials
[5] Small Deflection
[6] Large Deflection
[7] Elastic Behavior
[8] Plastic Behavior

الاستیسیته، وقتی در مختصات منحنی شکل نوشته شود، پیچیده خواهد بود و عموماً با استفاده از فرضیات مشخصی، برای کاربردهای خاص، به ساده‌سازی معادلات می‌پردازند. تقریباً همه تئوری‌های پوسته ازجمله نازک، ضخیم، با شعاع انحنای بزرگ و یا شعاع انحنای کوچک، مسائل سه‌بعدی الاستیسیته را به یک مسأله‌ی دوبعدی کاهش می‌دهد و این کار، معمولاً با حذف مختصات عمود بر سطح پوسته، در معادلات صورت می‌گیرد و فقط به تحلیل سطح میانی پوسته پرداخته می‌شود. با اعمال این فرضیات، میدان جابه‌جایی در سطح میانی محاسبه می‌شود. دقت نتایج ارائه شده، در ارتباط با تئوری‌های پوسته‌ها، بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط سه‌بعدی الاستیسیته دارد. اولین فرضیات را کریشهوف[۱] (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته‌ها به‌کار گرفته شد. ارون[۲] (۱۸۷۴) تئوری پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کریشهوف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لاو[۳] (۱۸۸۸) اولین محققی بود که تحلیل قابل قبولی در تئوری خطی و کلاسیک پوسته ارائه نمود. لاو، برای ساده‌سازی روابط کرنش-جابه‌جایی و روابط تنش-کرنش، فرض‌های کریشهوف در ورق را همراه با فرض‌های نازک بودن و کوچک بودن خیز پوسته، در تحلیل پوسته‌ها اعمال نمود. تئوری لاو در پوسته-های الاستیک و نازک، تئوری پوسته با تقریب مرتبه اول نیز نامیده می‌شود که اکنون به‌عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک[۴] یا تئوری لاو-کریشهوف مشهور است. رایسنر[۵] (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لاو، تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری[۶] را ارائه نمود. فلوگه[۷] (۱۹۳۲) اولین کسی است که تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دوم را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی، به‌عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و برای پوسته‌های استوانه‌ای با مقطع دایره‌ای، کاربرد مناسبی دارد و در سایر پوسته‌ها، پیچیدگی‌هایی را اعمال می‌کند. یکی از بزرگ‌ترین

---

۱ Kirchhoff

۲ Aron

۳ Love

۴ Classical Shell Theory

۵ Reissner

۶ Axisymmetric Shell of Revolution

۷ Flugge

مراجع موجود در زمینه‌ی پوسته‌ها، مطالعات انجام شده توسط لیسا[۱] است. وی حدود ۱۲ تئوری مختلف در پوسته‌های نازک را مورد ارزیابی قرار داده است [۴].

به‌طور کلی دو روش جامع برای تحلیل پوسته‌ها وجود دارد. تئوری غشایی[۲] و تئوری خمشی[۳]، دو تئوری مطرح در این زمینه هستند.

تئوری غشایی که برای تحلیل سازه‌های معیّن استاتیکی به‌کار می‌رود، یک تئوری ساده و مناسب می‌باشد و معمولاً زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که نیرو یا ... به بخش عمده‌ای از پوسته وارد می‌شود. یک غشا خواه مسطح و خواه خمیده، جسمی است که همان شکل ورق یا پوسته انعطاف‌پذیر دوبعدی را دارد و فقط می‌تواند نیروهای محوری را تحمّل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی[۴] آن‌ها بسیار کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. در تئوری غشایی، چنین فرض می‌شود که فقط نیروهای واقع در سطح میانی پوسته فعّال می‌باشند؛ جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسائل در حالت تنش صفحه‌ای[۵] و کرنش صفحه‌ای[۶] با چشم‌پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند.

در تئوری خمشی، تأثیرات خمش لحاظ می‌شود. به عبارت دیگر، در این تئوری، هم نیروهای غشایی و هم نیروهای عمود بر سطح میانی پوسته در نظر گرفته می‌شود. نیروها و لنگرهای موجود می‌تواند دو نیروی برشی، دو نیروی محوری، دو نیروی برشی عمود بر پوسته، دو لنگر خمشی و دو لنگر پیچشی باشد. تئوری خمشی، توانایی تحلیل سازه‌های نامعین را دارد و از این رو تحلیل سازه بسیار پیچیده است. همچنین این نظریه، امکان بحث را درباره‌ی انقطاعات در توزیع تنش که در یک ناحیه‌ی محدود از سازه (در مجاورت بار با انقطاع هندسی) اتفاق می‌افتد را فراهم می‌کند. به هر حال، آگاهی از تنش‌های

---

۱ Leissa

۲ Membrane Theory

۳ Bending Theory

۴ Bending Stiffness

۵ Plane Stress

۶ Plane Strain

غشایی پوسته، معمولاً از نظر عملی، مهم‌تر از دانستن تنش‌های خمشی است. تئوری خمشی، عموماً مشتمل بر یک حل غشایی است که در نواحی دارای تأثیرات انقطاعی برجسته، تصحیح شده است. بنابراین این هدف این تئوری، بهبود حل غشایی نیست، بلکه تحلیل تنش‌ها و کرنش‌های ناشی از نیروهای لبه‌ای یا بارگذاری‌های متمرکز است که تئوری غشایی محض نمی‌تواند آن را انجام دهد. شایان ذکر است که نیروهای غشایی، مستقل از خمش می‌باشند و به‌طور کامل با شرایط تعادل استاتیکی تعریف می‌گردند و چون هیچ‌گونه خواص ماده در استخراج این نیروها به‌کار گرفته نمی‌شود، بنابر این تئوری غشایی برای همه‌ی پوسته‌ها، از هر ماده‌ای که ساخته شده باشد، قابل اعمال است (مانند پوستهٔ فلزی، بتن مسلح، پوسته‌ی ساندویچی شکل، فیلم صابون، تخته چند لایه[1]). لازم به ذکر است که برای پوسته‌های نازک که دارای تغییرات ناگهانی در ضخامت، شیب یا انحنا نیستند، تنش‌های نصف‌النهاری در امتداد ضخامت دیواره یکنواخت است. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لاو-کریشهوف می‌نامند که عبارتند از [۴]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلّفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلّفه‌های تنش، قابل چشم‌پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلّفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند.

[1] Plywood

۱-۴- بار متحرک[1]

سازه‌های تحت بارگذاری متحرک مورد توجه بسیاری از طراحان و مهندسین قرار دارند؛ چرا که اکثر بارگذاری‌های اعمالی بر سازه‌ها به‌صورت دینامیکی اعمال می‌گردد. این موضوع حوزه‌ی کاربردی این موارد را گسترش می‌دهد. مثلاً می‌توان به پلی که همواره در اثر عبور خودرو و وسایل نقلیه تحت بار متحرک قرار می‌گیرد، یا لوله تفنگ و لوله توپ جنگی که در اثر انفجار درون آن مرتعش می‌شود، اشاره کرد. در این حوزه پوسته‌های استوانه‌ای جایگاه خاصی دارند. خط لوله‌های گازی در صنعت نفت و گاز، لوله‌های تحت فشار در هواپیما و موتورهای تراک ضربه‌ای، همگی نمونه‌هایی از موارد کاربرد این پوسته‌ها هستند. در اکثر پوسته‌های استوانه‌ای بارگذاری از نوع فشار متحرک داخلی است. حرکت موج فشاری در داخل پوسته باعث تحریک امواج سازه‌ای در داخل آن می‌گردد. بنابر این پاسخ سازه‌ای پوسته به فشار متحرک چندین برابر فشار استاتیک معادل آن خواهد شد. یکی از انواع مهم بارگذاری دینامیکی در پوسته‌ها، بارگذاری فشاری به‌صورت یک فشار متحرک با سرعت ثابت است که در طول پوسته حرکت می‌کند. مشخصه‌های اصلی این بارگذاری، ماکزیمم فشار و سرعت حرکت موج فشاری است. تغییرات فشار نسبت به مکان و زمان، بستگی به مکانیزمی دارد که باعث تغییر ناگهانی فشار می‌گردد. یکی از مکانیزم‌های ایجاد فشار متحرک که به‌طور معمول در پوسته‌ها رخ می‌دهند موج شاک[2] است. موج شاک یک نوع اغتشاش پیشرو است که مانند یک موج معمولی دارای انرژی است و می‌تواند در محیط مادّی پیشروی کند. موج شاک به‌واسطه‌ی یک تغییر ناگهانی که تغییری ناپیوسته در فشار است، تعریف می‌شود. شاک در لوله ایجاد شده و سپس موج شاک در لوله با سرعتی تقریبا ثابت پیشروی می‌کند.

بارگذاری موج شاک به‌صورت یک تابع پله‌ای[3] از فشار متغیّر فرمول‌بندی می‌شود که به‌صورت رابطه‌ی زیر می‌باشد:

---

[1] Moving load

[2] Shock Wave

[3] Heaviside Step Function

$$P = P_0(t)\big(1 - H(x - Vt)\big) \quad (۱-۱)$$

در رابطه‌ی (۱-۱)، $P_0(t)$ مقدار فشار بر حسب زمان، x و t موقعیت مکانی و زمانی بار متحرک می‌باشند. یکی دیگر از انواع بارگذاری فشاری متداول که در سازه‌ها رخ می‌دهد بار نقطه‌ای متحرک است که با تابع دلتا[۱] به‌صورت زیر قابل تعریف است:

$$F = F_0\, \delta(x - Vt) \quad (۲-۱)$$

یکی از پارامترهای مطلوب در طراحی سازه‌های تحت عبور بار متحرک، تعیین سرعت بحرانی[۲] در سازه است. تجربه نشان داده است که در سرعتی خاص، نوسانات زیادی در سازه ایجاد می‌شود (مشابه حالت تشدید) که به آن سرعت بحرانی گویند. محاسبه‌ی سرعت بحرانی، نگرانی اصلی در طراحی سیلندرهای تحت بار فشاری متحرک داخلی است. از آنجا که سرعت حرکت بار می‌تواند قابل قیاس با سرعت امواج خمشی در دیوارهٔ پوسته باشد، لذا مسأله‌ی تشدید در امواج خمشی می‌تواند در طراحی لوله‌ها و مخازن جدار نازک مهم باشد. اگر بار متحرک داخلی در سرعت‌های بحرانی حرکت کند، کرنش‌های دینامیکی ایجاد شده در دیواره‌ی لوله، تشدید می‌شوند و به اصطلاح رزونانس رخ می‌دهد و به بیش از سه برابر آن‌چه روابط لامه[۳] پیش‌بینی می‌کند می‌رسد [۵]. سرعت بحرانی مانند فرکانس طبیعی، به مشخصات سازه بستگی داشته و تابع بارگذاری لوله نیست. تئوری سرعت بحرانی در لوله‌ها با فرض ثابت بودن ضخامت لوله، بی‌نهایت بودن طول لوله و ثابت بودن سرعت جبهه‌ی فشار شکل گرفته است [۵]. در این‌صورت با تغییر متغیر $\zeta = x - Vt$، معادله‌ی حاکم بر حسب ζ به‌دست می‌آید و ممکن است حل آن ساده‌تر شود که به آن روش مشخصه‌ها[۴] گویند. سرعت بحرانی با تعیین منحنی تفرق[۵] قابل حصول

[۱] Dirac Delta
[۲] Critical Speed
[۳] Lame Formula
[۴] Characteristics
[۵] Dispersion Curve

است. در سرعت بحرانی که نوسانات شدیدی در لوله ایجاد می‌شود، سرعت فاز[۱]، سرعت گروه[۲] و سرعت جبهه فشار با هم برابرند [۶و۷]. رابطه‌ای برای سرعت بحرانی پوسته‌های نازک بی‌نهایت و نیمه بی‌نهایت توسط جونز و بوتا [۸] ارائه شد. اولین مطالعه‌ی جامع در تعیین پاسخ پوسته‌های جدار نازک به بار متحرک، توسط تانگ [۹] و ریسمان [۱۰] انجام شد. تانگ مدلی برای پیش‌بینی رفتار پوسته‌های جدار نازک به فشار داخلی متحرک ارائه داد. وی فرض کرد که طول پوسته بی‌نهایت باشد و مسأله را به حالت پایا[۳] تبدیل کرد و با این فرضیات، رابطه‌ای برای سرعت بحرانی استخراج کرد و به‌کمک تبدیل فوریه، پاسخ لوله را به این بارگذاری تعیین کرد. با این حل، وجود سرعت بحرانی که در آن دامنه‌ی حرکتی پوسته بی‌نهایت می‌شود، به‌دست می‌آید. البته مسلّم است که در واقعیت وجود خواص دمپینگ، ویژگی-های غیر خطی و تغییر شکل پلاستیک، باعث جلوگیری از تغییر شکل بیش از حد پوسته می‌شوند. در مدل تانگ اثر برش عرضی[۴] و اینرسی دورانی[۵] لحاظ شده است. مطالعات تانگ، مبنای بسیاری از مطالعاتی است که بعد از وی انجام شده است. ریسمان نیز مدلی برای پاسخ سازه‌ای پوسته‌های جدار نازک تحت پیش-تنش ارائه داد. در مدل وی کوپلینگ بار متحرک با امواج خمشی به‌خوبی توضیح داده شده است. فریبا [۱۱] در کتاب خود، به‌طور مبسوط به بررسی اثر متقابل بین سازه‌های الاستیک و بار متحرک پرداخته است. سیمکینز [۴] نیز لوله‌های جدار ضخیم را بررسی کرد و بررسی‌های خود را در توجیه کرنش بالا در لوله تفنگ بیان کرد. در طراحی مخازن تحت فشار، مقدار تغییر شکل پوسته بر اثر فشار داخلی متحرک، یکی از پارامترهای مهم می‌باشد. همان‌طور که گفته شد، در بارگذاری دینامیکی، این مقدار تغییر شکل، نسبت به حالت بارگذاری استاتیکی معادل، بیشتر می‌شود. بنابر این ضریب تقویت دینامیکی[۶]، یک ضریب مهم در طراحی‌ها برای بارگذاری دینامیکی می‌باشد. ضریب تقویت

---

۱ Phase Velocity
۲ Groupe Velocity
۳ Steady State
۴ Transverse Shear
۵ Rotary Inertia
۶ Dynamic Amplification Factor

دینامیکی که ضریب بار دینامیکی[1] نیز نامیده می‌شود؛ به‌صورت نسبت ماکزیمم جابه‌جایی در بارگذاری دینامیکی به جابه‌جایی استاتیکی با بارگذاری مشابه تعریف می‌شود.

۱-۵- مواد ناهمگن تابعی

مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوا و فضا، نفت و گاز، خودرو سازی و ... ایجاد می‌کنند. از این‌رو دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند که از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها)[2] در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهمساز به‌وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری هم‌زمان مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، ولیکن از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند.

لخنیتسکی (۱۹۵۰) تئوری الاستیسیته‌ی اجسام مرکب را فرمول‌بندی کرد [۱۲]. پس از وی دیگران، تئوری‌های حاکم بر ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی را ارائه نمودند. وینسون (۱۹۷۴) تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی را در تحلیل استاتیکی پوسته‌های کامپوزیتی به‌کار برد و بین نتایج دو روش مقایسه‌ای انجام داد.

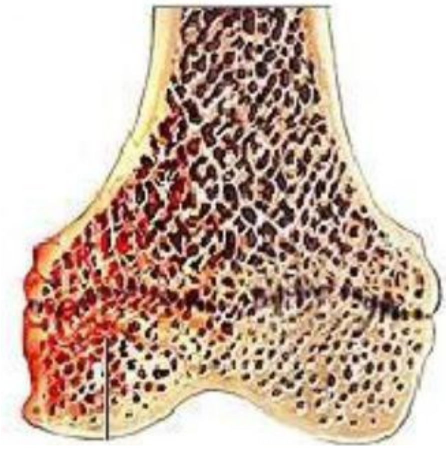
اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آن‌ها است که در نتیجه، موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به‌ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود؛ لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی‌ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص یا مواد هدفمند (FGM) در ساختار ارگانیسم‌های زنده، مانند استخوان وجود

---

[1] Dynamic Loading Factor

[2] Composite Materials (Composites)

داشته است. به‌عنوان مثال استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به‌تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملا نرم می‌باشد بتواند شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این رو تغییرات خواص به‌صورت کاملا پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. مواد FG، ناهمگن هستند ولیکن آن‌ها را همسانگرد در نظر می‌گیرند.



شکل ۱-۱: نمای مقطع یک استخوان [۲]

۱-۵-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد FG

با توجه به اینکه مواد FG اساساً ناهمگن می‌باشند و خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی آن‌ها به‌صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کنند، می‌توان تغییر خواص را با یک تابع پیوسته‌ی ریاضی، مدل کرد و از آن در روش‌های تحلیلی و عددی بهره گرفت. روش مرسوم در مدل‌سازی خواص مکانیکی و حرارتی مواد FG، استفاده از یک تابع توانی یا تابع نمایی برای بیان توزیع پیوسته‌ی خواص در ماده می‌باشد. معمولاً در عبارات مربوط به توزیع خواص، تغییرات مدول کشسانی (E)[۱]، ضریب هدایت حرارتی، ضریب انبساط حرارتی و چگالی را در نظر می‌گیرند و تغییرات نسبت پواسون (ν)[۲]، را لحاظ نمی‌کنند. دلیل آن، مقدار نسبت پواسون است که بسیار نزدیک به هم می‌باشد، به‌گونه‌ای که می‌توان از تغییرات ناچیز آن در جسم چشم‌پوشی کرد؛ یعنی ماده را ناهمگن همسانگرد (FG ایزوتروپ) در نظر

۱ Elasticity Modulus

۲ Poisson’s Ratio

گرفت.

اباتا و نودا (۱۹۹۴) تابع توانی [۱۳]، هورگان و چان (۱۹۹۹) تابع توانی [۱۴]، یانگ (۲۰۰۰) تابع توانی[۱۵]، توتونچو (۲۰۰۱) تابع توانی[۱۶]، تارن (۲۰۰۱) تابع توانی[۱۷]، اراسلان و آکیز (۲۰۰۶) تابع نمایی[۱۸] و هونگ‌جون و ژیفای (۲۰۰۶) تابع نمایی[۱۹] را در روش‌های تحلیلی به‌کار بردند.

تابع توانی در اکثر مراجع به‌صورت رابطه‌ی (۱-۳) در نظر گرفته می‌شود:

$$P(z)=P_a\left(\frac{z}{a}\right)^n \tag{۱-۳}$$

P_a خاصیت ماده (مکانیکی، فیزیکی، حرارتی و ...) در یک لایه‌ی مشخص و n ثابت ناهمگنی است.

رایج‌ترین ماده‌ی FG، تلفیق فلز-سرامیک[۱] است که با افزودن برخی عناصر آلیاژی دیگر، خواص دلخواه تأمین می‌شود. پراوین و ردی (۱۹۹۸)، رابطه‌ی ویژه‌ای برای یک ورق FGM با ضخامت ثابت h ارائه کردند. ایشان تغییر خواص را در ورق به‌صورت زیر بیان نمودند [۲۰]:

$$P(z)=(P_c-P_m)V^n+P_m \tag{۱-۴}$$

P_m خواص فلز، P_c خواص سرامیک و V نسبت حجمی در جسم می‌باشد که به‌صورت رابطه‌ی (۱-۵) بیان می‌شود:

$$V=\left(\frac{z}{h}\right)+\frac{1}{2} \qquad , \qquad -\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2} \tag{۱-۵}$$

اگر $n=0$ باشد، ورق همگن سرامیک به‌دست می‌آید؛ اگر $z=-h/2$ باشد، خاصیت فلزی و اگر $z=h/2$ باشد، خاصیت سرامیک به‌دست می‌آید. این ماده در اجسامی که لبه‌ی بالایی آن در معرض گرادیان دمایی بالا و لبه‌ی پایینی آن تحت بارهای مکانیکی قرار دارند، بسیار مفید است.

رابطه‌ی (۱-۴) را می‌توان به‌صورت کلی‌تر برای دو خاصیت به‌شکل زیر بیان نمود:

$$P(z)=(P_1-P_2)V^n+P_2 \tag{۱-۶}$$

---

[۱] Metal-Ceramic

P_1 و P_2، خواص در دو لایه‌ی مختلف می‌باشند. به‌عنوان مثال، رابطه برای یک استوانه‌ی توخالی جدار ثابت، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} P(r) = (P_o - P_i)V^n + P_i \\ V = \dfrac{r/r_i - 1}{r_o/r_i - 1} \end{cases} \tag{۷-۱}$$

P_i و P_o به ترتیب، خاصیت (مکانیکی، فیزیکی، حرارتی و ...) ماده‌ی FG در شعاع داخلی و خارجی استوانه می‌باشد.

توتونچو (۲۰۰۹) سه مدل تابع توانی ساده، تابع توانی مشابه تابع پراوین و ردی و نیز تابع نمایی به صورت تلفیق فلز-سرامیک ارائه کرد [۲۱]. شاو (۲۰۰۸) برای خواص ماده‌ی ناهمگن، تابع نمایی به-صورت رابطه‌ی (۱-۸) ارائه کرد [۲۲]:

$$\begin{cases} A(R) = A_0 \exp(m_i\,(R - R_1)) \\ R = \dfrac{r}{r_m}, R_1 = \dfrac{r_1}{r_m}, R_2 = \dfrac{r_2}{r_m} \end{cases} \tag{۸-۱}$$

در رابطه‌ی (۱-۸)، m_i ثابت ناهمگنی ماده، r_1 و r_2 به ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و r_m میانگین شعاع داخلی و خارجی و A_0 خواص لایه‌ی خارجی استوانه می‌باشد.

توتونچو (۲۰۰۷) [۲۳] و همچنین کلس و کانکر (۲۰۱۱) [۲۴] تغییر خواص در جداره‌ی استوانه را به صورت تابع نمایی مطابق با رابطه‌ی زیر بیان نمودند:

$$A(r) = A_0\,\mathrm{e}^{nr} \tag{۹-۱}$$

در رابطه‌ی (۱-۹)، r شعاع استوانه، n ثابت ناهمگنی ماده و A_0 نیز خواص لایه‌ی خارجی استوانه می‌باشد.

۱-۶- مروری بر مقالات

از اولین مطالعاتی که بر روی پوسته‌ها صورت گرفت و منجر به استخراج فرض‌ها و روابطی برای پوسته‌ها شد، می‌توان به مطالعات انجام گرفته توسط لاو [۲۵] اشاره کرد. لاو در سال ۱۸۸۸ میلادی

تئوری بنیادی خود برای پوسته را ارائه کرد و توانست برای اولین بار معادلات ارتعاشی پوسته‌ای با ضخامت بسیار اندک را استخراج کند. حاصل کار وی فرضیاتی شد که برای ساده‌سازی معادلات پوسته در نظر گرفته می‌شود و امروزه به فرضیات اساسی لاو[1] معروف است. در میان تئوری‌هایی که در گذشته بسط داده شده‌اند، ثابت شده است که روش لاو، مؤثرترین و مفیدترین روش در تئوری‌های خطی پوسته‌های نازک است و قطعاً می‌توان با استفاده از تئوری‌های پوسته‌های نازک بر مبنای فرضیات لاو-کریشهوف به نتایج مناسب و مطلوب دست یافت. در قرن بیستم به مرور روابط حاکم بر پوسته‌ها کامل‌تر شد و روش‌های مختلفی نیز برای استخراج و حل معادلات، برای انواع مختلف پوسته‌ها ارائه شد. از جمله آن‌ها می‌توان به مطالعه انجام گرفته توسط آرنولد و واربورتون اشاره کرد [۲۶و۲۷]. این محققان، با استفاده از روش انرژی، ارتعاشات یک پوسته‌ی استوانه‌ای همگن و همسانگرد با تکیه‌گاه ساده و با طول محدود را برای اولین بار به‌دست آوردند. آن‌ها از روابط تنش صفحه‌ای و از روابط کرنش-جابه‌جایی خطی مطابق با تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک استفاده کردند. رفتار دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای در تعداد قابل توجهی از مطالعات عددی، تحلیلی و تجربی بررسی شده است. مسائل مختلفی در این مطالعات بررسی شده‌اند؛ برای مثال می‌توان جابه‌جایی‌های کوچک و بزرگ، ضخامت پوسته‌ها، اثر تنش‌های اولیه مکانیکی و حرارتی روی پوسته، پوسته‌های کامپوزیتی و ناهمگن تابعی، پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده و ... را نام برد.

روزنه و باز [۲۸] در سال ۲۰۰۶، پاسخ دینامیکی حالت پایدار پوسته‌های استوانه‌ای متقارن محوری تقویت شده‌ی همگن و همسانگرد، تحت بار متحرک نقطه‌ای را بررسی کردند. آن‌ها برای پوسته‌های نازک از تئوری دانل-موشتاری[2] استفاده کردند و یک تحلیل المان محدود (FE) را برای تعیین جابه‌جایی شعاعی و سرعت بحرانی، به‌کار بردند. آن‌ها پی بردند که اثرات تقویت کننده موجب افزایش سرعت بحرانی می‌گردد.

[1] Love’s First Approximation Shell Theory

[2] Donnel-Mushtari Theory of Thin Shell

کانداسامی و سینگ [۲۹] در سال ۲۰۰۶، ارتعاشات اجباری پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد تحت تحریک فشاری، با وجود خواص دمپینگ را با استفاده از روابط کرنش-جابه‌جایی مطابق با تئوری سه بعدی الاستیسیته بررسی کردند. آن‌ها پاسخ گذرا[۱] را با تبدیل معادلات حرکت به مدل فضای حالت[۲] و استفاده از الگوریتم رانج-کوتا به دست آوردند. اثر تغییر شکل برشی[۳] و اینرسی دورانی در کار آن‌ها مورد لحاظ قرار گرفت. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی و جابه‌جایی شعاعی را تحت اثر پارامترهای مختلف مورد بررسی قرار دادند.

هاشمی‌نژاد و کمیلی [۳۰] در سال ۲۰۰۷، تحلیل پاسخ دینامیکی حالت پایدار را برای پوسته‌های استوانه‌ای متقارن محوری ضخیم با طول بی‌نهایت تحت بار متحرک متمرکز، انجام دادند. تئوری مورد استفاده در پژوهش آن‌ها مطابق با تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و معادلات ناویر بود که با استفاده از روش تبدیلات فوریه و تکنیک تبدیل ماتریسی[۴] به حل آن پرداختند. جنس پوسته از مواد ایزوتروپیک و ناهمگن شعاعی بود. آن‌ها جابه‌جایی شعاعی، تنش محیطی و سرعت بحرانی را مورد مطالعه‌ی پارامتریک قرار دادند.

ژو و همکاران [۳۱] در سال ۲۰۰۹، پاسخ سازه‌ای لوله‌های ساندویچی منشوری فلزی[۵] ارتوتروپیک، تحت بارگذاری فشار داخلی متحرک و با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی، را بررسی کردند. آن‌ها از تئوری پوسته‌های ساندویچی چند لایه بهره برده و شبیه‌سازی عددی با روش اجزای محدود[۶] را برای بررسی سرعت‌های بحرانی و ضریب تقویت دینامیکی، انجام دادند.

در سال ۲۰۰۹، شنگ و وانگ [۳۲]، جابه‌جایی‌ها و پتانسیل الکتریکی را برای پوسته‌های استوانه‌ای FG

---

۱ Transient Response

۲ State-Space Model

۳ Shear deformation

۴ Transfer Matrix Approach

۵ Prismatic Metal Sandwich Tube

۶ Finite Element Simulations

با لایه‌های پیزو الکتریک، تحت بار متحرک، به‌کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش انتگرال-گیری نیومارک تعیین کردند. آن‌ها اثرات سرعت‌های مختلف حرکت بار، نسبت‌های حجمی ماده و اثرات دمایی را بر پاسخ دینامیکی پوسته‌ها مورد ارزیابی قرار دادند و رابطه‌ای برای سرعت‌های بحرانی و فرکانس‌های طبیعی به‌دست آوردند.

هاشمی‌نژاد و رفسنجانی [۳۳] در سال ۲۰۰۹، تحلیل پاسخ دینامیکی حالت پایدار را برای ورق‌های ضخیم ایزوتروپیک ساخته شده از مواد FG تحت بار متحرک خطی، با لبه‌های تکیه‌گاه ساده انجام دادند. تئوری مورد استفاده در پژوهش آن‌ها مطابق با تئوری سه بعدی الاستیسیته و معادلات ناویر بود که با استفاده از روش تبدیلات فوریه به حل آن پرداختند. آن‌ها جابه‌جایی شعاعی، تنش محیطی و سرعت بحرانی را مورد مطالعه قرار دادند.

سیمسک و کوتاتورک [۳۴] در سال ۲۰۰۹، ارتعاشات آزاد و رفتار دینامیکی تیرهای ساخته شده از مواد ناهمگن شعاعی با تکیه‌گاه ساده را تحت بار هارمونیکی متحرک، مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. آن‌ها دستگاه معادلات حاکم را با استفاده از روابط لاگرانژ و به‌کمک تئوری تیرهای اولر-برنولی استخراج کردند و با استفاده از روش انتگرال‌گیری نیومارک به حل معادلات پرداختند و فرکانس‌های طبیعی و ضریب بار دینامیکی را تحت تأثیر پارامترهای مختلف مورد تحلیل قرار دادند.

سوفیه [۳۵] در سال ۲۰۱۰، رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای نازک متقارن محوری همسانگرد و ناهمگن شعاعی با طول بی‌نهایت، تحت بار متحرک نقطه‌ای را مطابق با تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک مورد بررسی قرار داد. رابطه‌ی بنیادین در روابط کار او مطابق با قانون هوک و برای حالت تنش صفحه‌ای بود و از روابط کرنش-جابه‌جایی خطی مطابق با فرضیات اساسی لاو استفاده نمود. او یک مطالعه‌ی تحلیلی و با استفاده از روش تغییر متغیّر انجام داد و توانست سرعت بحرانی و ضریب بار دینامیکی را تحت تأثیر پارامترهای مختلف هندسی و مادّی مورد بررسی قرار دهد.

سیمسک [۳۶] در سال ۲۰۱۰، ارتعاشات اجباری نانولوله‌های کربنی تک جداره[1] با تکیه‌گاه ساده، تحت

[1] Single-Walled Carbon Nano Tube (SWCNT)

بار هارمونیکی متحرک را با استفاده از تئوری غیرمحلی تیر اولر-برنولی[1]، تحلیل کرد. وی با استفاده از روابط بنیادین غیرمحلی و با صرف‌نظر از اثر اینرسی دورانی و با استفاده از روش مودال و انتگرال‌گیری نیومارک؛ به بررسی اثرات پارامتر غیر محلی، سرعت و فرکانس تحریک بار هارمونیکی متحرک بر پاسخ دینامیکی پرداخت.

سوفیه و همکاران [۳۷] در سال ۲۰۱۱، رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای نازک متقارن محوری ارتوتروپیک و ناهمگن شعاعی بر بستر الاستیک وینکلر[2] با طول بی‌نهایت، تحت بار متحرک نقطه‌ای را مطابق با تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک مورد بررسی قرار داد. رابطه‌ی بنیادین در روابط کار آن‌ها مطابق با قانون هوک و برای حالت تنش صفحه‌ای بود و از روابط کرنش-جابه‌جایی خطی مطابق با فرضیات اساسی لاو استفاده نمودند. آن‌ها یک مطالعه‌ی تحلیلی و با استفاده از روش تغییر متغیّر انجام دادند و توانستند سرعت بحرانی و ضریب بار دینامیکی را تحت تأثیر پارامترهای مختلف هندسی و مادّی مورد بررسی قرار دهند.

ملک‌زاده و حیدرپور [۳۸] در سال ۲۰۱۲، رفتار ترموالاستیک گذرای پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک ساخته شده از مواد ناهمگن شعاعی، که در معرض بارگذاری فشاری و حرارتی متقارن محوری متحرک است را بررسی کردند. فرمول‌بندی آن‌ها بر اساس تئوری الاستیسیته در حالت تقارن محوری و با استفاده از روابط انتقال حرارت هذلولوی انجام شد و با کمک روش دیفرانسیل کوادراتور (DQM)[3] و انتگراگیری نیومارک به بررسی توزیع دما و توزیع جابه‌جایی شعاعی تحت اثر پارامترهای هندسی و مادّی پرداختند.

در سال ۲۰۱۲، سیمسک و همکاران [۳۹] رفتار دینامیکی تیرهای ساخته شده از مواد ناهمگن (FG) با تغییرات تدیجی خواص در راستای طولی[4] تیر را تحت بارگذاری هارمونیکی متحرک با تکیه‌گاه ساده، بررسی کردند. آن‌ها معادلات حاکم را به‌کمک تئوری تیر اولر-برنولی و با استفاده از روش لاگرانژ

[1] Nonlocal Euler-Bernoulli Beam Model
[2] Winkler Elastic Foundation
[3] Differential Quadrature Method
[4] Axially Functionally Graded Beam

استخراج کرده و با روش انتگرال‌گیری نیومارک به حل آن‌ها پرداختند. همچنین اثرات سرعت حرکت بار و فرکانس تحریک را بر پاسخ دینامیکی مورد بحث قرار دادند.

فیروزآبادی و همکاران [۴۰] در سال ۲۰۱۳، فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک چرخان همگن و همسانگرد، تحت بستر الاستیک را با استفاده از تئوری پوسته‌های نازک لاو، مورد بررسی قرار دادند. روش حل مورد استفاده در مقاله‌ی آن‌ها روش حل سری‌های فروبنیوس بوده و اثرات سرعت چرخشی[۱]، تکیه‌گاه الاستیک و اثرات پارامترهای هندسی بر فرکانس‌های چرخشی مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

چانگ دو و همکاران [۴۱] در سال ۲۰۱۴، ارتعاشات غیرخطی اجباری پوسته‌های استوانه‌ای نازک بی‌نهایت ساخته شده از مواد ناهمگن شعاعی را بر اساس تئوری غیر خطی دانل[۲] برای پوسته‌ها مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای استخراج معادلات پوسته‌ی در معرض بارگذاری فشاری و نیروهای اصطکاکی[۳]؛ از روش لاگرانژ بهره برده و با روش حل مقیاس‌های چندگانه[۴] به بررسی فرکانس‌های تحریک و منحنی‌های دامنه‌ی فرکانسی تحت اثر پارامترهای مختلف هندسی و مادّی پرداختند.

در سال ۲۰۱۵، زمانی‌نژاد و همکاران [۴۲] تحلیل استاتیکی پوسته‌های مخروطی ناقص چرخان ضخیم که از مواد ناهمگن با تغییرات خواص در راستای طولی[۵] استوانه ساخته شده‌اند را تحت بارگذاری فشاری غیر یکنواخت بررسی کردند. تئوری مورد استفاده‌ی آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده کرده و از روش چند لایه[۶] که یک حل نیمه‌تحلیلی محسوب می‌شود؛ برای تعیین جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها استفاده کردند.

سیمسک [۴۳] در سال ۲۰۱۵، تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری تیرهای ساخته شده از مواد ناهمگن دو

---

۱ Spinning Speed

۲ Donnell's Nonlinear Shell Theory

۳ Friction Forces

۴ Multiple Scale Method

۵ Axially Varying Properties

۶ Multilayer Method

جهته[1]، تحت شرایط مرزی مختلف و در معرض بار متحرک را بررسی نمود. وی در این مقاله از هر دو تئوری تیر اولر-برنولی و تئوری تیر تیموشنکو استفاده کرد و قیاسی بین نتایج انجام داد. وی از روش لاگرانژ برای استخراج معادلات حاکم استفاده کرده و با روش انتگرال‌گیری نیومارک به حل آن پرداخت. بررسی اثرات پارامترهای مختلف بر سرعت بحرانی، فرکانس‌های طبیعی و ضریب بار دینامیکی هم در کنار تعیین جابه‌جایی‌های شعاعی از دیگر کارهای صورت گرفته در این مقاله است.

۱-۷- جمع بندی

در این فصل، ابتدا به معرفی پوسته‌ها و دسته‌بندی آن‌ها پرداخته شد. سپس در مورد تئوری پوسته‌های نازک توضیح داده شد. در قسمت بعد مسأله‌ی بار متحرک بیان گردید و سپس در مورد مواد ناهمگن FG توضیحات مفصلی ارائه شد و در نهایت به مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه پرداخته شد. با توجه به مقالات مرور شده، مشاهده می‌شود که اکثر پژوهش‌ها، مربوط به تحلیل سازه‌های ساخته شده از مواد ناهمگن شعاعی می‌باشد و کمتر مقاله‌ای به تحلیل سازه‌های ساخته شده از مواد ناهمگن طولی پرداخته شده است و حتی در مورد پوسته‌های استوانه‌ای می‌توان گفت که هیچ پژوهشی به تحلیل دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن طولی پرداخته نشده است. همچنین در اکثر پژوهش‌های مرتبط با مواد ناهمگن، از روش‌های عددی برای حل مسأله استفاده شده و روش‌های تحلیلی در حل این مسائل کمتر مورد توجه بوده است. در پژوهش حاضر، پوسته‌های استوانه‌ای جدارنازک FGM طولی تحت فشار داخلی متحرک در حالت تقارن محوری، با روابط کرنش-جابه‌جایی خطی، به‌کمک تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک با روش تحلیلی حل شده است.

[1] Bi-Directional Functionally Graded Materials (BDFGMs)

فصل ۲ استخراج معادلات حاکم

۲-۱- مقدمه

در ارتعاشات خطّی پوسته‌های استوانه‌ای، معادلات حرکت و شرایط مرزی را می‌توان به‌کمک قانون دوم نیوتون و یا اصل همیلتون[۱] تعیین نمود. در این فصل معادلات حرکت پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری تحت فشار داخلی متحرک، به‌کمک اصل همیلتون استخراج شده است. میدان جابه‌جایی، مطابق تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک لاو بوده و برای استخراج معادلات حرکت، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

پوسته‌ی استوانه‌ای همسانگرد و ناهمگن تابعی با تغییرات خواص در راستای طولی است.

جابه‌جایی‌ها کوچک[۲] و روابط کرنش- جابه‌جایی خطی هستند.

رابطه‌ی تنش-کرنش خطی و از رابطه‌ی هوک[۳] استفاده شده است.

ضریب پواسون مقدار ثابت در نظر گرفته شده است.

شرط مرزی در تحلیل فرکانسی، گیردار و ساده و در تحلیل دینامیکی، تکیه‌گاه ساده است.

شرایط تقارن محوری کامل در استوانه برقرار است.

۲-۲- تعریف مسأله

پوسته‌ی استوانه‌ای مطابق شکل ۲-۱، با طول L، شعاع لایه‌ی میانی R و ضخامت h مفروض است. برای فرمول‌بندی از سیستم مختصات استوانه‌ای (x,θ,z) استفاده شده است که در آن x جهت محوری پوسته، θ جهت محیطی پوسته و z عمود بر x بوده و از صفحه‌ی میانی اندازه‌گیری شده و جهت مثبت آن از صفحه‌ی میانی به سمت خارج است. میدان جابه‌جایی هر نقطه‌ی پوسته با (U_x, U_θ, U_z) مشخص می‌شود. از آن‌جا که هندسه، جنس، بارگذاری و شرایط مرزی بر روی استوانه نسبت به محور مرکزی

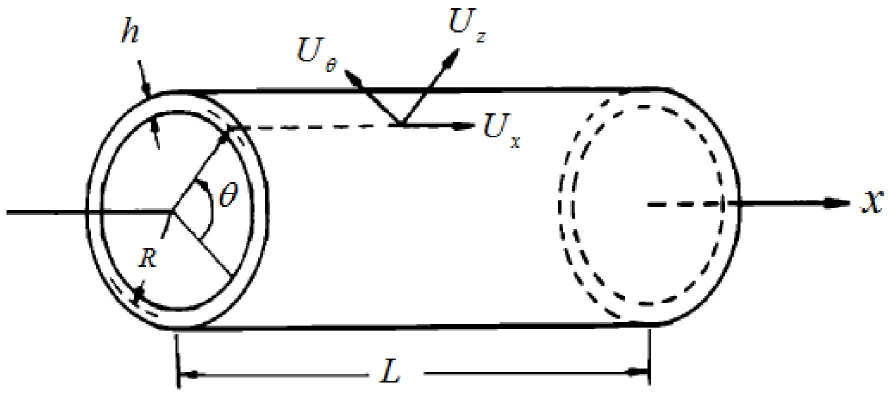
---

۱ Hamilton’s principle

۲ Small strain

۳ Hook’s law

آن متقارن است، مسأله در حالت تقارن محوری کامل بررسی می‌گردد.



شکل ۲-۱: نمای شماتیک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک

بدین ترتیب بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، میدان جابه‌جایی به صورت رابطه‌ی (۲-۱) بیان می‌شود [۴۴]:

$$\begin{aligned} U_x(x,z,t) &= u(x,t) - z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \\ U_\theta(x,z,t) &= 0 \; ; U_z(x,z,t) = w(x,t) \end{aligned} \quad (۲-۱)$$

در میدان جابه‌جایی (۲-۱)، U_x، U_θ و U_z، به‌ترتیب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در راستای محوری، محیطی و شعاعی می‌باشند. u و w، به‌ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی روی سطح میانی پوسته و در جهت‌های x و z هستند. بر اساس این تئوری، جابه‌جایی شعاعی تمامی لایه‌ها یکسان و برابر جابه‌جایی شعاعی صفحه میانی است. بر اساس میدان جابه‌جایی در رابطه‌ی (۲-۱)، مؤلفه‌های میدان کرنش مطابق روابط سینماتیک خطی در حالت تقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{U_z}{R} = \frac{w}{R} & \gamma_{x\theta} &= 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 & \gamma_{\theta z} &= 0 \end{aligned} \quad (۲-۲)$$

بر اساس روابط ساختاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد و با فرض تنش صفحه‌ای (با صرف نظر از کرنش در جهت z بر مبنای فرض کریشهف[۱] در پوسته‌های نازک) رابطه‌ی زیر قابل حصول است:

[۱] Kirchhoff hypothesis

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E(x,z) \begin{bmatrix} d_0 & d_1 \\ d_1 & d_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \tag{۳-۲}$$

در رابطه‌ی بالا، E معرّف مدول الاستیسیته است که با توجه به در نظر گرفتن مادّۀ ناهمگن تابعی با تغییرات خواص در راستای طولی به‌صورت $E(x,z) = E_{00} e^{n\, x/L}$ تعریف می‌گردد.

که d_1, d_0 تابعی از ضریب پواسون هستند و عبارتند از:

$$d_0 = \frac{1}{1-\nu^2} \;,\; d_1 = \frac{\nu}{1-\nu^2} \tag{۴-۲}$$

در نهایت، میدان تنش بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی، با استفاده از روابط (۲-۲) و (۲-۳) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E(x,z)\left[d_0\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - z\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) + d_1\left(\frac{w(x,t)}{R}\right)\right] \\ \sigma_\theta &= E(x,z)\left[d_1\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - z\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) + d_0\left(\frac{w(x,t)}{R}\right)\right] \\ \sigma_z &= \tau_{x\theta} = \tau_{zx} = \tau_{\theta z} = 0 \end{aligned} \tag{۵-۲}$$

با تعیین انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروهای خارجی، بر اساس این میدان جابه‌جایی و با استفاده از اصل همیلتون، روابط حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک استخراج می‌شود.

۲-۳- محاسبه‌ی انرژی پتانسیل

چگالی انرژی کرنشی[۱] به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$U^* = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{x\theta}\gamma_{x\theta} + \tau_{\theta z}\gamma_{\theta z} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) \tag{۶-۲}$$

تغییرات[۲] چگالی انرژی کرنشی U^* با جایگزینی مقادیر صفر برخی از مؤلفه‌های تنش، عبارتست از:

$$\delta U^* = \sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta \tag{۷-۲}$$

با جایگذاری مؤلفه‌های میدان کرنش (۲-۲) در رابطه‌ی (۲-۷) نتیجه می‌شود:

---

۱ Strain energy density

۲ Variations

$$\delta U^* = \sigma_x \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} - z\, \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{R} \sigma_\theta\, \delta w \tag{۸-۲}$$

انرژی کرنشی پوسته، با انتگرال‌گیری چگالی انرژی کرنشی بر روی حجم به دست می‌آید. المان حجم $dV = R dx d\theta dz$ است و در آن، محدوده‌ی تغییرات مؤلفه‌های محورهای مختصات، به صورت $0 \le x \le L$، $0 \le \theta \le 2\pi$ و $-\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}$ می‌باشد.

$$\delta U = \iiint_V \delta U^* dV = 2\pi \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \delta U^* R\, dx dz \Rightarrow$$

$$\frac{\delta U}{2\pi} = -\int_0^L \left(R \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u + (R \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - N_\theta) \delta w \right) dx + \tag{۹-۲}$$

$$\left[R (N_x \delta u - M_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta w) \right] \Bigg|_{x=0}^{x=L}$$

با توجه به اینکه در پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک، اثر $\frac{z}{R}$ قابل صرف‌نظر می‌باشد، بنابراین در انرژی کرنشی، منتجه‌های تنش[۱] به صورت زیر تعریف شده اند:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x\, dz \qquad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\, \sigma_x\, dz \qquad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta\, dz \tag{۱۰-۲}$$

۲-۴- محاسبه‌ی انرژی جنبشی

چگالی انرژی جنبشی پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمگن و همسانگرد برابر است با:

$$T^* = \frac{1}{2} \rho(x,z) \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} \right)^2 \right] \tag{۱۱-۲}$$

با جایگذاری میدان جابه‌جایی (۲-۱) در رابطه‌ی (۲-۱۱) نتیجه می‌شود:

$$T^* = \frac{1}{2} \rho(x,z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right)^2 - 2z \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \right] \tag{۱۲-۲}$$

بنابراین تغییرات چگالی انرژی جنبشی δT^* به صورت زیر است:

[۱] Stress resultants

$$\delta T^{*}=\rho(x,z)\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)+\dfrac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)+z^{2}\dfrac{\partial^{2}w}{\partial t\,\partial x}\delta\left(\dfrac{\partial^{2}w}{\partial t\,\partial x}\right)\\-z\dfrac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\dfrac{\partial^{2}w}{\partial t\,\partial x}\right)-z\dfrac{\partial^{2}w}{\partial t\,\partial x}\delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\end{bmatrix}\qquad (۱۳-۲)$$

انتگرال‌گیری از تغییرات چگالی انرژی جنبشی روی حجم، تغییرات انرژی جنبشی پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمگن و همسانگرد را نتیجه می‌دهد:

$$\delta T=\iiint_{V}\delta T^{*}dV=2\pi\int_{0}^{L}\int_{-h/2}^{h/2}\delta T^{*}R\,dx\,dz\Rightarrow$$
$$\frac{\delta T}{2\pi}=\int_{0}^{L}\begin{bmatrix}RII_{0}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)+\dfrac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)\right)+RII_{2}\dfrac{\partial^{2}w}{\partial t\,\partial x}\delta\left(\dfrac{\partial^{2}w}{\partial t\,\partial x}\right)\\-RII_{1}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\dfrac{\partial^{2}w}{\partial t\,\partial x}\right)+\dfrac{\partial^{2}w}{\partial t\,\partial x}\delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\end{bmatrix}dx\qquad (۱۴-۲)$$

که در آن $II_0(x)$، $II_1(x)$ و $II_2(x)$، ترم‌های مربوط به اینرسی دورانی هستند و به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$II_{n}(x)=\int_{-h/2}^{h/2}z^{n}\rho(x,z)dz\quad ;n=0,1,2\qquad (۱۵-۲)$$

در روابط بالا، ρ معرّف دانسیته‌ی جرمی است که با توجه به در نظر گرفتن مادّۀ ناهمگن تابعی با تغییرات خواص در راستای طولی به‌صورت $\rho(x,z)=\rho_{00}e^{n\,x/L}$ تعریف می‌گردد.

۲-۵- کار نیروهای خارجی

کار نیروهای خارجی وارد بر پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک ناهمگن و همسانگرد عبارتست از:

$$W_{s}=\iint_{S}\left(f_{x}U_{x}+f_{z}U_{z}\right)dS;\ dS=R\,dx\,d\theta\qquad (۱۶-۲)$$

در رابطه‌ی کار نیروهای خارجی (۲-۱۶)، f_x و f_z به ترتیب مؤلفه‌های نیروی خارجی بر واحد سطح در راستای محوری و شعاعی است. S کل سطحی است که نیرو بر آن اثر می‌کند. در پژوهش حاضر، بارگذاری از نوع فشار داخلی متحرک است و مؤلفه‌های نیروی خارجی بر واحد سطح برابر با $f_x=0$ و

$f_z = P(x,t)$ می‌باشد. بنابراین، رابطه‌ی تغییرات کار نیروهای خارجی δW_s، را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta W_s = \int_0^{2\pi}\int_0^L P(x,t)\delta w R dx d\theta \Rightarrow \frac{\delta W_s}{2\pi} = \int_0^L R P(x,t)\delta w dx \qquad (۲-۱۷)$$

۲-۶- تعیین معادله‌های حرکت با استفاده از اصل همیلتون

معادلات حاکم بر حرکت پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک، در بازه‌ی زمانی (t_1,t_2)، باید اصل همیلتون را ارضا کنند. بر اساس اصل همیلتون داریم [۴۴]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = 0 \qquad (۲-۱۸)$$

که این اصل برای به دست آوردن معادلات حرکت و شرایط مرزی و اولیه‌ی مناسب به کار گرفته می-شود ودر آن:

$$\delta L = \delta T - \delta U + \delta W_s \qquad (۲-۱۹)$$

در رابطه‌ی (۲-۱۹)، δT تغییرات انرژی جنبشی سیستم، δU تغییرات انرژی کرنشی و δW_s تغییرات کار ناشی از بارگذاری از نوع فشار داخلی متحرک است. با جایگذاری روابط (۲-۹)، (۲-۱۴) و (۲-۱۷) در رابطه‌ی (۲-۱۸) و با صفر قرار دادن ضرایب δu و δw، معادلات حرکت سیستم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(II_1 \frac{\partial w}{\partial x} - II_0 u\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{N_\theta}{R} + \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2}\left(II_2 \frac{\partial w}{\partial x} - II_1 u\right) - II_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x,t) = 0 \qquad (۲-۲۰)$$

شرایط مرزی:

$$\left[R\left(N_x \delta u - M_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + II_2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} - II_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta w \right)\right]_{x=0}^{x=L} \qquad (۲-۲۱)$$

یعنی عبارت فوق باید در دو انتهای پوسته صفر باشد. شرط اولیه‌ی (زمانی) مسأله، معلوم بودن جابه‌جایی و سرعت در لحظه‌ی اولیه $t=0$ می‌باشد. معادله‌های (۲-۲۰) و (۲-۲۱)، معادلات حرکت و شرایط مرزی پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک ناهمگن و همسانگرد می‌باشد. برای تعیین معادلات حرکت بر حسب جابه‌جایی، منتجه‌های تنش بر حسب جابه‌جایی محاسبه شده و در رابطه‌ی (۲-۲۰) جایگزین می‌گردد. از روابط (۲-۵) و (۲-۱۰)، رابطه‌ی منتجه‌های تنش بر حسب جابه‌جایی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_\theta \\ M_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 E_0(x) & -d_0 E_1(x) & \frac{d_1}{R} E_0(x) \\ d_1 E_0(x) & -d_1 E_1(x) & \frac{d_0}{R} E_0(x) \\ d_0 E_1(x) & -d_0 E_2(x) & \frac{d_1}{R} E_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{,x} \\ w_{,xx} \\ w \end{pmatrix} \tag{۲-۲۲}$$

که:

$$E_n(x) = \int_{-h/2}^{h/2} z^n E(x,z) dz \; ; \quad n = 0,1,2 \tag{۲-۲۳}$$

به این ترتیب معادلات حرکت پوسته بر حسب جابه‌جایی عبارتست از:

$$\begin{aligned} &\left(d_0 \frac{d E_0(x)}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(d_0 E_0(x)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{d_1}{R}\frac{d E_0(x)}{dx}\right) w + \\ &\left(\frac{d_1}{R} E_0(x)\right)\frac{\partial w}{\partial x} + \left(-d_0 \frac{d E_1(x)}{dx}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(-d_0 E_1(x)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \\ &\left(II_1(x)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + \left(-II_0(x)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{۲-۲۴}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(d_0\frac{d^2E_1(x)}{dx^2}-\frac{d_1}{R}E_0(x)\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(2d_0\frac{dE_1(x)}{dx}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\\
&\left(d_0E_1(x)\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\left(\frac{d_1}{R}\frac{d^2E_1(x)}{dx^2}-\frac{d_0}{R^2}E_0(x)\right)w+\\
&\left(2\frac{d_1}{R}\frac{dE_1(x)}{dx}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\left(2\frac{d_1}{R}E_1(x)-d_0\frac{d^2E_2(x)}{dx^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\\
&\left(-2d_0\frac{dE_2(x)}{dx}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(-d_0E_2(x)\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left(\frac{dII_2(x)}{dx}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}+\\
&\left(II_2(x)\right)\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial x^2}+\left(-\frac{dII_1(x)}{dx}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(-II_1(x)\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}+\\
&\left(-II_0(x)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-P(x,t)=0
\end{aligned}
\qquad (۲-۲۵)
$$

معادلات به‌صورت یک دستگاه معادله، شامل دو معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی و با ضرایب متغیّر است که به یکدیگر کوپل می‌باشد. از رابطه‌ی (۲-۲۱)، شرایط مرزی مسأله را می‌توان تعیین نمود. مثلاً برای شرایط مرزی به‌صورت تکیه گاه ساده در دو سر پوسته‌ی استوانه‌ای نتیجه می‌شود:

$$
at\ \begin{cases} x=0 \ \rightarrow\ w=0,\quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \\[2ex] x=L \ \rightarrow\ w=0,\quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases} \qquad (۲-۲۶)
$$

و برای شرایط مرزی به‌صورت تکیه گاه گیردار در دو سر پوسته‌ی استوانه‌ای نتیجه می‌شود:

$$
at\ \begin{cases} x=0 \ \rightarrow\ w=0,\quad u=0,\quad \dfrac{\partial w}{\partial x}=0 \\[2ex] x=L \ \rightarrow\ w=0,\quad u=0,\quad \dfrac{\partial w}{\partial x}=0 \end{cases} \qquad (۲-۲۷)
$$

.

۲-۷- جمع‌بندی

در این فصل، مطابق تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک لاو و بر اساس اصل همیلتون، معادلات حاکم بر ارتعاشات خطی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری ناهمگن و همسانگرد استخراج شد. معادلات به‌صورت یک دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل، شامل دو معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی نسبت به متغیّرهای زمان و مکان و با ضرایب متغیّر هستند که به یکدیگر کوپل بوده و برای تعیین مؤلّفه‌های میدان جابه‌جایی باید به‌طور هم‌زمان حل شوند. در فصل بعد، حل تحلیلی مسأله‌ی ارتعاشات آزاد، شامل تعیین فرکانس‌ها و شکل مودها به کمک روش آنالیز مودال و مسأله‌ی ارتعاشات اجباری شامل تعیین پاسخ دینامیکی سیستم بر حسب زمان و مکان تحت فشار داخلی متحرک، ارائه خواهد شد.

فصل ۳   حل تحلیلی معادله‌های حرکت

۳-۱- مقدمه

در فصـل قبل، معادلات حاکم بر ارتعاشـات خطی پوسـته‌های اسـتوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری ناهمگن و همسانگرد، بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک لاو استخراج شد. معادلات به‌صورت یک دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل، شامل دو معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی نسبت به متغیّرهای زمان و مکان و با ضـرایب متغیّر بوده که به یکدیگر کوپل هسـتند. از آن‌جا که برای تعیین حل این دستگاه معادله، از تئوری بسط مدهای ویژه استفاده می شود، نخست به بررسی مسأله، بدون در نظر گرفتن پارامتر تحریک سـیسـتم پرداخته می‌شـود. پس از تعیین رابطه‌ی فرکانس‌ها و شـکل مودهای سیستم، به منظور تحلیل دینامیکی مسأله و تعیین پاسخ تحت اثر فشار داخلی متحرک، حل تحلیلی به کمک بسط مدهای ویژه تعیین خواهد شد.

۳-۲- تحلیل فرکانسی

در تعیین فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک، تحریک دینامیکی ناشی از فشار داخلی متحرک، تأثیری بر مقدار فرکانس طبیعی نخواهد داشت؛ از این رو در معادلات حرکت، جمله‌ی مربوط به تحریک، برای بررسی این قسمت در نظر گرفته نشده است. هدف اصلی این پژوهش، بررسی پوسته‌های استوانه‌ای تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد، با تغییرات تدریجی خواص مواد در راستای محوری استوانه می‌باشد. مدول الاستیسیته E، دانسیته‌ی جرمی ρ و ضریب پواسون ν توابعی از مختصات طولی بی‌بعد $\bar{x}$ می‌باشند که در این پژوهش همانند اکثر تحلیل‌ها، ضریب پواسون، به علت تغییرات اندک، ثابت در نظر گرفته می‌شود. در نظر گرفتن توزیع نمایی، برای مدول الاستیسیته و دانسیته‌ی جرمی در راستای محوری استوانه، به صورت تابعی از مختصات طولی بی‌بعد $\bar{x}$، رابطه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$E(x,z) = E_{00} e^{n\bar{x}};\ \rho(x,z) = \rho_{00}\, e^{n\bar{x}};\ \bar{x} = \frac{x}{L} \qquad (۳-۱)$$

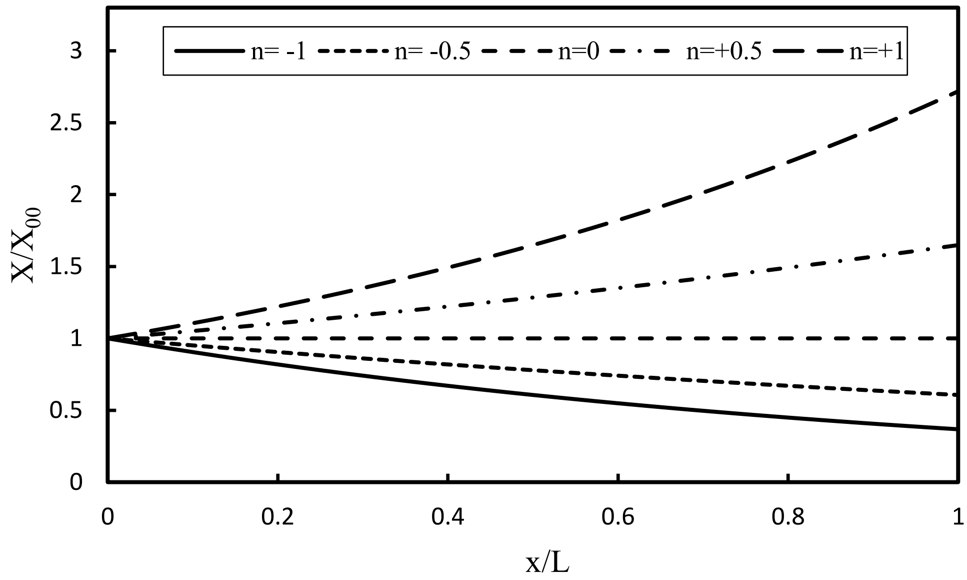
در رابطه‌ی (۳-۱)، $\bar{x}$ مختصات طولی بی‌بعد است و همچنین E_{00} و ρ_{00} به‌ترتیب مدول الاستیسیته و دانسیته‌ی جرمی در $\bar{x}=0$ است و n نیز ثابت بی‌بعد ناهمگنی ماده می‌باشد که n=0 همان ماده‌ی همگن است.

قسمتی از این پژوهش نیز به بررسی پوسته‌های استوانه‌ای تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد، با تغییرات تدریجی خواص مواد در راستای شعاعی، اختصاص داده شده است که در اینجا مدول الاستیسیته E و دانسیته‌ی جرمی ρ توابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد $\bar{z}$ می‌باشند و ضریب پواسون، ثابت در نظر گرفته می شود. در نظر گرفتن توزیع نمایی، برای مدول الا ستی‌سیته و دانسیته‌ی جرمی در راستای شعاعی استوانه، رابطه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد:

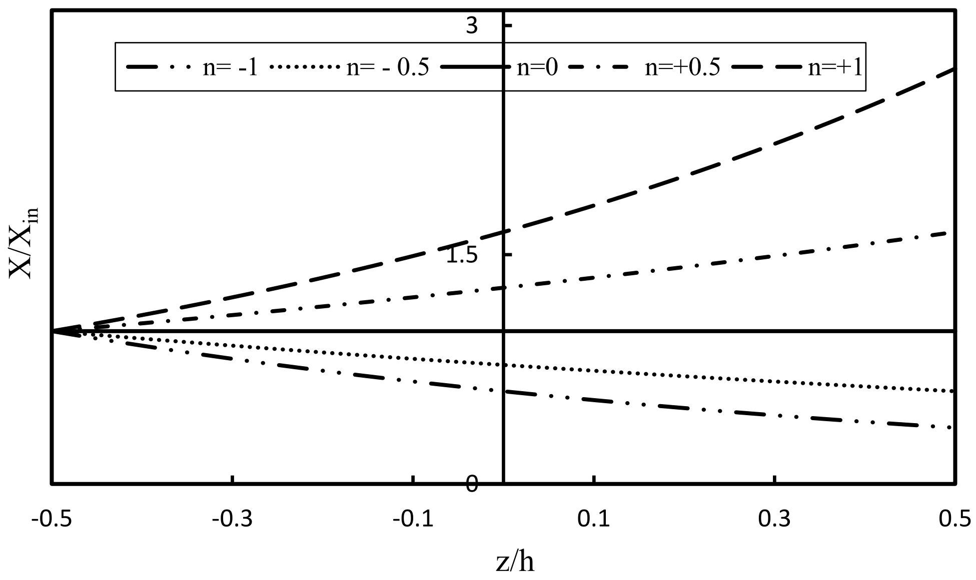
$$E(x,z)=E_{in}\,e^{n\beta(\bar{z})};\ \rho(x,z)=\rho_{in}\ e^{n\beta(\bar{z})};\beta(\bar{z})=\bar{z}+\frac{1}{2}\quad,\quad \bar{z}=\frac{z}{h} \qquad (۳\text{-}۲)$$

که در رابطه‌ی (۳-۲)، E_{in} و ρ_{in} به‌ترتیب مدول الاستیسیته و دانسیته‌ی جرمی در شعاع داخلی استوانه است و n نیز ثابت بی‌بعد ناهمگنی ماده می‌باشد که n=0 همان ماده‌ی همگن است.

شکل ۳-۱ و شکل ۳-۲، توزیع خواص مکانیکی و فیزیکی بی‌بعد شده شامل مدول الاستیسیته و دانسیته‌ی جرمی را، به‌ترتیب، نسبت به مختصات طولی بی‌بعد و مختصات شعاعی بی‌بعد در پوسته‌های استوانه‌ای تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد، به ازای مقادیر مختلف ثابت بی‌بعد ناهمگنی ماده نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱: توزیع بی‌بعد خواص مکانیکی و فیزیکی در راستای محوری استوانه



شکل ۳-۲: توزیع بی‌بعد خواص مکانیکی و فیزیکی در راستای شعاعی استوانه

بنابر این برای تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای نازک تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد، با تغییرات تدریجی خواص مواد در راستای محوری استوانه، با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۱) در رابطه‌های

(۲-۱۵) و (۲-۲۳) و به‌کارگیری نتیجه‌ی آنها در دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲-۲۴) و (۲-۲۵)، می‌توان معادلات ارتعاش آزاد سیستم را به صورت بسط داده شده، به این شکل نوشت:

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})u + (A_3 + A_4 \frac{\partial}{\partial x})w + A_5 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\
&A_6 \frac{\partial u}{\partial x} + (A_7 + A_8 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_9 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + A_{10} \frac{\partial^4}{\partial x^4})w + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(A_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + A_5 w) = 0
\end{aligned}
\tag{۳-۳}
$$

که ضرایب دستگاه معادلات بالا عبارتست از:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = E_{00} d_0 R h \ \frac{n}{L} && A_7 = -E_{00} d_0 \frac{h}{R} \\
&A_2 = E_{00} d_0 R h && A_8 = -E_{00} d_0 \frac{R h^3}{12}\left(\frac{n}{L}\right)^2 \\
&A_3 = E_{00} d_1 h \frac{n}{L} && A_9 = -2E_{00} d_0 \frac{R h^3}{12}\frac{n}{L} \\
&A_4 = E_{00} d_1 h && A_{10} = -E_{00} d_0 \frac{R h^3}{12} \\
&A_5 = -\rho_{00} R h && A_{11} = \rho_{00} \ \frac{R h^3}{12}\frac{n}{L} \\
&A_6 = -E_{00} d_1 h && A_{12} = \rho_{00} \frac{R h^3}{12}
\end{aligned}
\tag{۳-۴}
$$

حل دستگاه معادلات (۳-۳) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$
\begin{Bmatrix} u(x,t) \\ w(x,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(x) \\ W(x) \end{Bmatrix} e^{i\omega t}
\tag{۳-۵}
$$

در رابطه‌ی (۳-۵)، ω فرکانس طبیعی سیستم، $U(x)$ و $W(x)$ ، به ترتیب شکل مودهای محوری و شعاعی پوسته‌ی استوانه‌ای می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۵) در رابطه‌ی (۳-۳) نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&A_2 \frac{d^2U}{dx^2} + A_1 \frac{dU}{dx} - A_5\omega^2 U + A_4 \frac{dW}{dx} + A_3 W = 0 \\
&A_6 \frac{dU}{dx} + A_{10} \frac{d^4W}{dx^4} + A_9 \frac{d^3W}{dx^3} + (A_8 - A_{12}\omega^2)\frac{d^2W}{dx^2} - A_{11}\omega^2 \frac{dW}{dx} + (A_7 - A_5\omega^2)W = 0
\end{aligned}
\tag{۳-۶}
$$

پاسخ معادله‌ی (۳-۶) که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت است، را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$[U(x),W(x)]=\{V\}_{2*1}e^{\beta x}; \qquad \{V\}_{2*1}=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} \tag{۳-۷}$$

$\{V\}$ بردارهای ویژه و β مقادیر ویژه می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۷) در رابطه‌ی (۳-۶)، و حذف $e^{\beta x}$ از طرفین معادلات، دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix}H_{1,1} & H_{1,2}\\ H_{2,1} & H_{2,2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A\\B\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \tag{۳-۸}$$

که درایه‌های ماتریس ضرایب، بدین صورت می‌باشد:

$$\begin{cases}H_{1,1}=A_1\beta+A_2\beta^2-A_5\omega^2;\ H_{1,2}=A_3+A_4\beta;\ H_{2,1}=A_6\beta\\ H_{2,2}=A_{10}\beta^4+A_9\beta^3+(A_8-A_{12}\omega^2)\beta^2+(-A_{11}\omega^2)\beta+A_7-A_5\omega^2\end{cases} \tag{۳-۹}$$

شرط داشتن جواب غیر صفر برای دستگاه معادلات $\left[H(\omega)\right]\{V\}=\{0\}$، این است که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد.

$$\begin{aligned}&\det\left(H(\omega)\right)=0\rightarrow\\ &B_6\beta^6+B_5\beta^5+B_4\beta^4+B_3\beta^3+B_2\beta^2+B_1\beta+B_0=0\end{aligned} \tag{۳-۱۰}$$

رابطه‌ی (۳-۱۰)، معادله‌ی تفرق است که ضرایب این معادله بر حسب ω می‌باشد و عبارتست از:

$$\begin{cases}B_0=-A_5A_7\omega^2+A_5A_5\omega^4\\ B_1=A_1A_7-A_3A_6-A_1A_5\omega^2+A_5A_{11}\omega^4\\ B_2=A_2A_7-A_4A_6-\left(A_2A_5+A_5A_8+A_1A_{11}\right)\omega^2+A_5A_{12}\omega^4\\ B_3=A_1A_8-\left(A_1A_{12}+A_2A_{11}+A_5A_9\right)\omega^2\\ B_4=A_2A_8+A_1A_9-\left(A_5A_{10}+A_2A_{12}\right)\omega^2\\ B_5=A_1A_{10}+A_2A_9\\ B_6=A_2A_{10}\end{cases} \tag{۳-۱۱}$$

از حل معادله‌ی تفرق، شش مقدار ویژه‌ی β_i $(i=1,2,3,4,5,6)$ به‌دست می‌آید. به ازای هر مقدار ویژه، یک بردار ویژه موجود است که به‌کمک رابطه‌ی (۳-۸) تعیین می‌شود. این مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، شامل عباراتی بر حسب ω هستند. پس از یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، پاسخ کلی (۳-۶)، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[U(x), W(x)] = \sum_{i=1}^{6} C_i \{V\}_i \exp(\beta_i x) \qquad (۱۲-۳)$$

C_i ثابت است و از شرایط مرزی تعیین می‌شود. با اعمال شرایط مرزی در دو سر پوسته‌ی استوانه‌ای، با استفاده از روابط (۲-۲۶) و (۲-۲۷)، به ترتیب برای شرایط مرزی به‌صورت تکیه گاه ساده و تکیه گاه گیردار، یک دستگاه معادله‌ی جبری به‌صورت $[AX]\{C\}=\{0\}$ حاصل می‌شود که $\{C\}$ شامل عناصر C_i است. شرط وجود جواب غیر صفر، صفر بودن دترمینان ماتریس AX است. این معادله، یک رابطه‌ی جبری بین ω و β_i می‌باشد که مقادیر β_i نیز تابع ω است و از حل آن، مقادیر ω تعیین می‌شود. تعیین ω، از طریق نوشتن یک زیر برنامه به کمک نرم افزار Maple 15 انجام شده است. پس از تعیین مقادیر فرکانس طبیعی، به کمک رابطه‌ی (۳-۷)، شکل مدها تعیین می‌گردد.

۳-۳- تحلیل دینامیکی و تعیین پاسخ

در این قسمت به بررسی پاسخ گذرای پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری تحت فشار داخلی متحرک با طول محدود بر روی تکیه‌گاه ساده پرداخته می‌شود. معادله‌ی ارتعاش اجباری پوسته‌ی استوانه‌ای، با شرایط مرزی به‌صورت تکیه گاه ساده در دو سر پوسته به صورت زیر می‌باشد:

$$A_1\frac{\partial u}{\partial x}+A_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_3 w+A_4\frac{\partial w}{\partial x}+A_5\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (۱۳-۳)$$

$$\begin{aligned}&A_6\frac{\partial u}{\partial x}+A_7 w+A_8\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A_9\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+A_{10}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\\&A_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}+A_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial t^2\partial x^2}+A_5\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-R\,P(x,t)\exp\left(-n\frac{x}{L}\right)=0\end{aligned} \qquad (۱۴-۳)$$

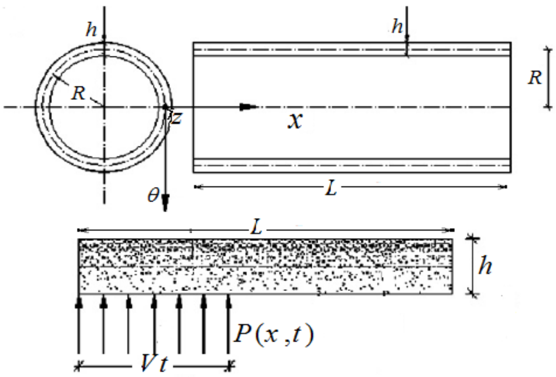
این معادلات، به شکل ماتریسی زیر، قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned}&[K_1]\frac{\partial^4}{\partial x^4}\{y\}+[K_2]\frac{\partial^3}{\partial x^3}\{y\}+[K_3]\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{y\}+[K_4]\frac{\partial}{\partial x}\{y\}+[K_5]\{y\}+\\&[K_6]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{y\}+[K_7]\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial x}\{y\}+[K_8]\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial x^2}\{y\}+\{F\}=0\\&y=\begin{Bmatrix}u(x,t)\\w(x,t)\end{Bmatrix}\end{aligned} \qquad (۱۵-۳)$$

که ماتریس‌های ضرایب و قسمت ناهمگن دستگاه معادلات بالا عبارتست از:

$$
\begin{aligned}
&[K_1]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_{10}\end{bmatrix} \qquad [K_2]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_9\end{bmatrix} \qquad [K_3]=\begin{bmatrix}A_2 & 0\\ 0 & A_8\end{bmatrix}\\
&[K_4]=\begin{bmatrix}A_1 & A_4\\ A_6 & 0\end{bmatrix} \qquad [K_5]=\begin{bmatrix}0 & A_3\\ 0 & A_7\end{bmatrix} \qquad [K_6]=\begin{bmatrix}A_5 & 0\\ 0 & A_5\end{bmatrix}\\
&[K_7]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_{11}\end{bmatrix} \qquad [K_8]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_{12}\end{bmatrix} \qquad \{F\}=\begin{Bmatrix}0\\ -R\,P(x,t)\exp\left(-n\dfrac{x}{L}\right)\end{Bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (۱۶-۳)
$$

درایه‌های ماتریس‌های ضرایب بالا که همان ضرایب روابط (۳-۱۳) و (۳-۱۴) می‌باشند، به‌شکل رابطه‌ی (۳-۴) است. در این پژوهش، تنها نیروی خارجی اعمال شده بر سیستم، فشار متحرک می‌باشد که بر سطح داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای $(z=-\dfrac{h}{2})$ و در راستای شعاعی اعمال شده است و بار متحرک، با سرعت ثابت، در طول پوسته، پیشروی می‌کند که در شکل ۳-۳ به‌صورت شماتیک ترسیم شده است.



شکل ۳-۳: شماتیک فشار داخلی متحرک

این فشار متحرک، به صورت تابع پله هویساید، مطابق با رابطه‌ی (۳-۱۷)، مدل شده است.

$$
P(x,t)=q\left[1-Heaviside(x-Vt)\right]=\begin{cases}q & x\le Vt\\ 0 & x>Vt\end{cases} \qquad (۱۷-۳)
$$

که در رابطه‌ی (۳-۱۷)، V سرعت پیشروی و q مقدار فشار متحرک می‌باشد.

برای استوانه‌ای با تکیه گاه ساده در دو سر پوسته، شرایط مرزی مسأله عبارتست از:

$$
w(0,t)=w(L,t)=\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}=0 \qquad (۱۸-۳)
$$

به منظور حل معادله‌های (۳-۱۳) و (۳-۱۴)، می‌توان از بسط توابع ویژه استفاده کرد. با توجه به شرایط مرزی داده شده در رابطه‌ی (۳-۱۸)، تابع ویژه مودال به شکل زیر انتخاب شده است:

$$\begin{cases} u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(t)\cos(k_m x) \\ \\ w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}w_m(t)\sin(k_m x) \end{cases} \qquad k_m=\frac{m\pi}{L} \tag{۳-۱۹}$$

با جایگذاری روابط (۳-۱۹) در معادله‌های (۳-۱۳) و (۳-۱۴)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} &(-A_1)\sum_{m=1}^{\infty}u_m k_m \sin(k_m x)+(-A_2)\sum_{m=1}^{\infty}u_m k_m^2\cos(k_m x)+A_3\sum_{m=1}^{\infty}w_m\sin(k_m x) \\ &+(A_4)\sum_{m=1}^{\infty}w_m k_m\cos(k_m x)+A_5\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{\imath}\ldots {}_m x)=0 \end{aligned} \tag{۳-۲۰}$$

$$\begin{aligned} &(-A_6)\sum_{m=1}^{\infty}u_m k_m\sin(k_m x)+A_7\sum_{m=1}^{\infty}w_m\sin(k_m x)+ \\ &(-A_8)\sum_{m=1}^{\infty}w_m k_m^2\sin(k_m x)+(-A_9)\sum_{m=1}^{\infty}w_m k_m^3\cos(k_m x) \\ &+(A_{10})\sum_{m=1}^{\infty}w_m k_m^4\sin(k_m x)+(A_{11})\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{v}\ldots \mathrm{os}(k_m x) \\ &+(-A_{12})\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{v}\ldots\sum_{m=1}^{\infty}\ddot{}\ldots \\ &-R\,P(x,t)\exp\left(-n\frac{x}{L}\right)=0\Rightarrow \end{aligned} \tag{۳-۲۱}$$

معادله‌های (۳-۲۰) و (۳-۲۱) را به ترتیب در $\cos(k_m x)$ و $\sin(k_m x)$ ضرب کرده، در نتیجه این امر معادلات (۳-۲۲) و (۳-۲۳)، مطابق با روابط زیر، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(-A_1k_m u_m+A_3w_m\right)\sin(k_m x)\right]\cos(k_m x)+ \\ &\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(-A_2k_m^2u_m+A_4k_m w_m+A_5\ddot{\imath}\ldots k_m x\right)\right]\cos(k_m x)=0 \end{aligned} \tag{۳-۲۲}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(-A_9 k_m^3 w_m + A_{11} k_m \ddot{v}_{m} \quad (k_m x)\right]\sin(k_m x)+\right.$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\begin{pmatrix}-A_6 k_m u_m + (A_7 - A_8 k_m^2 + A_{10} k_m^4) w_m \\ (-A_{12} k_m^2 + A_5)\ddot{v}_{m}\end{pmatrix}\sin(k_m x)\right]\sin(k_m x)=0 \qquad (۲۳\text{-}۳)$$
$$-R\,P(x,t)\exp\left(-n\frac{x}{L}\right)\sin(k_m x)=0 \Rightarrow$$

با استفاده از خاصیت تعامد توابع شکل، از معادلات (۳-۲۲) و (۳-۲۳)، در بازه‌ی x=0 تا x=L، انتگرال-گیری شده و در نتیجه دو معادله‌ی دیفرانسیلی معمولی زمانی کوپل شده مطابق با روابط (۳-۲۴) و (۳-۲۵) حاصل می‌شود.

$$A_5 \ddot{u}_{m} \quad A_2 k_m^2 u_m(t) + A_4 k_m w_m(t) = 0 \qquad m = 1,2,3,\ldots,\infty \qquad (۲۴\text{-}۳)$$

$$(-A_{12} k_m^2 + A_5)\ddot{v}_{m} \quad (A_7 - A_8 k_m^2 + A_{10} k_m^4) w_m(t) - A_6 k_m u_m(t) = f_m(t) \qquad (۲۵\text{-}۳)$$

دستگاه معادله‌های (۳-۲۴) و (۳-۲۵)، را می‌توان به شکل ماتریسی زیر، به صورت ساده شده، بازنویسی کرد:

$$[A_m]\{\ddot{Y}_m\} \quad [B_m]\{Y_m(t)\} = \{F_m(t)\} \qquad \{Y_m(t)\} = \begin{Bmatrix} u_m(t) \\ w_m(t)\end{Bmatrix} \qquad (۲۶\text{-}۳)$$

که ماتریس‌های ضرایب و قسمت ناهمگن عبارتست از:

$$[A_m] = \begin{bmatrix} A_5 & 0 \\ 0 & -A_{12} k_m^2 + A_5 \end{bmatrix} \qquad \{F_m(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_m(t) \end{Bmatrix}$$
$$[B_m] = \begin{bmatrix} -A_2 k_m^2 & A_4 k_m \\ -A_6 k_m & A_7 - A_8 k_m^2 + A_{10} k_m^4 \end{bmatrix} \qquad (۲۷\text{-}۳)$$

درایه‌های ماتریس‌های ضرایب که همان ضرایب روابط (۳-۲۴) و (۳-۲۵) می‌باشند، مطابق با رابطه‌ی (۳-۲۷) تعیین شده است. معادله‌ی اول، یک معادله‌ی زمانی همگن است و معادله‌ی دوم به دلیل وجود پارامتر تحریک به صورت فشار داخلی متحرک، یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی زمانی ناهمگن می‌باشد که جمله‌ی ناهمگن آن مطابق رابطه‌ی زیر است:

$$f_m(t) = \frac{2}{L}\int_{x=0}^{x=L}\left(R\ q\ \exp\left(-n\frac{x}{L}\right)\sin(k_m x)\right)dx \Rightarrow$$

(۲۸-۳)

$$f_m(t) = \psi_m^1 \exp(\eta_1 t) + \psi_m^2 \exp(\eta_2 t) + \psi_m^3$$

که:

$$\psi_m^1 = \frac{-R\,q\,(L\,k_m - n\,I)}{n^2 + k_m^2 L^2} \qquad \psi_m^2 = \frac{-R\,q\,(L\,k_m + n\,I)}{n^2 + k_m^2 L^2} \qquad \psi_m^3 = \frac{2R\,q\,L\,k_m}{n^2 + k_m^2 L^2}$$

$$\eta_1 = \frac{V\ \ (-n + L\,k_m\,I)}{L} \qquad \eta_2 = \frac{V\ \ (-n - L\,k_m\,I)}{L}$$

(۲۹-۳)

در رابطه‌ی (۳-۲۸)، بازه‌ی انتگرال‌گیری $(0\,,L)$، به دلیل وجود مقدار فشار داخلی، پشت جبهه‌ی فشار و عدم وجود در جلوی جبهه‌ی فشار به دو نیم بازه‌ی $(0\,,Vt)$ و $(Vt\,,L)$، تقسیم شده است، که حاصل انتگرال در نیم بازه‌ی دوم صفر است. معادله‌های (۳-۲۴) و (۳-۲۵)، که به شکل ماتریسی (۳-۲۶) بازنویسی شده است، یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی معمولی زمانی کوپل شده ناهمگن خطی با ضرایب ثابت می‌باشند که دارای حل عمومی و حل خصوصی به شکل زیر است:

$$\{Y_m(t)\} = \{Y_m(t)\}_g + \{Y_m(t)\}_p \qquad \{Y_m(t)\} = \begin{Bmatrix} u_m(t) \\ w_m(t) \end{Bmatrix}$$ (۳۰-۳)

برای قسمت مربوط به حل عمومی دستگاه (۳-۲۶)، پاسخ $\{Y_m(t)\} = \{\zeta_0\}e^{st}$ در قسمت همگن معادلات، جایگذاری می‌شوند:

$$e^{st}\left(s^2[A_m] + [B_m]\right)\{\zeta_0\} = \{0\}$$ (۳۱-۳)

با توجه به اینکه $e^{st} \neq 0$، می‌توان نوشت:

$$\det\left(s^2[A_m] + [B_m]\right) = 0$$ (۳۲-۳)

از حل معادله‌ی بالا، مقادیر ویژه‌ی s_i، محاسبه شده، که به صورت دو جفت ریشه‌ی مزدوج مختلط می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه‌ی حاصل، در رابطه‌ی $e^{st}\left(s^2[A_m] + [B_m]\right)\{\zeta_0\} = \{0\}$، بردارهای ویژه ζ_i، متناظر با مقدارهای ویژه‌ی بالا، به دست می‌آیند. در نهایت حل عمومی عبارتست از:

$$\{Y_m(t)\}_g = \sum_{i=1}^{4} C_i\,\{\zeta_0\}_i\,e^{s_i t}$$ (۳۳-۳)

قسمت ناهمگن دستگاه (۳-۲۶)، یعنی بردار نیروی $\{F_m(t)\}$، برای یک استوانه‌ی جدار نازک ناهمگن متقارن محوری تحت فشار داخلی متحرک، همانطور که از رابطه‌ی (۳-۲۸) نیز مشهود است؛ شامل سه قسمت است. قسمت اول و دوم آن دو تابع نمایی بر حسب زمان و قسمت سوم آن مقدار ثابتی می‌باشند. بنابراین جواب خصوصی نیز به سه قسمت تقسیم می‌شود که مجموع این سه قسمت حل خصوصی را تشکیل می‌دهند. برای به دست آوردن حل خصوصی کلی، ابتدا قسمت اول $\psi_m^1 e^{\eta_1 t}$ در کنار بخش همگن دستگاه منظور می‌شود. پاسخ به‌صورت $\{Y_m(t)\}_p^1=\{\zeta_1\}e^{\eta_1 t}$ در نظر گرفته شده و در معادلات دستگاه، جایگذاری می‌شود. بنابر این یک دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود که از حل آن‌ها بردار $\{\zeta_1\}$، به دست می‌آید و با جایگذاری در $\{Y_m(t)\}_p^1=\{\zeta_1\}e^{\eta_1 t}$ حل خصوصی قسمت اول حاصل می‌گردد. برای قسمت دوم $\psi_m^2 e^{\eta_2 t}$ و قسمت سوم ψ_m^3 نیز پاسخ‌هایی به شکل $\{Y_m(t)\}_p^2=\{\zeta_2\}e^{\eta_2 t}$ و $\{Y_m(t)\}_p^3=\{\zeta_3\}$ در نظر گرفته شده و با روندی مشابه روند توضیح داده شده برای قسمت اول، بردار $\{\zeta_2\}$ و $\{\zeta_3\}$ به‌دست آمده و حل خصوصی تکمیل می‌شود. بنابر این جواب خصوصی کل، مجموع جواب‌های خصوصی سه قسمت توضیح داده شده می‌باشد. بنابر این حل کلی طبق روابط داده شده‌ی بالا به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}&\{Y_m(t)\}=\{Y_m(t)\}_g+\left(\{Y_m(t)\}_p^1+\{Y_m(t)\}_p^2+\{Y_m(t)\}_p^3\right)\rightarrow\\&\{Y_m(t)\}=\sum_{i=1}^{4}C_i\,\{\zeta_0\}_i\,e^{s_i t}+\{\zeta_1\}e^{\eta_1 t}+\{\zeta_2\}e^{\eta_2 t}+\{\zeta_3\}\end{aligned} \tag{۳-۳۴}$$

در پاسخ زمانی ارائه شده در رابطه‌ی (۳-۳۴)، چهار ثابت مجهول $C_i\,(i=1,2,3,4)$ وجود دارد که با استفاده از چهار شرط اولیه مطابق رابطه‌ی زیر تعیین خواهند شد.

$$at \quad t=0\Rightarrow w(x,t)=\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}=u(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0 \tag{۳-۳۵}$$

بنابر این حل قسمت زمانی مسأله با توضیحات داده شده کامل می‌شود. $u_m(t)$ و $w_m(t)$، مطابق با رابطه‌ی (۳-۳۴)، به دست می‌آیند و با جایگذاری در روابط (۳-۱۹)، پاسخ نهایی مسأله که شامل تغییر مکان محوری و تغییر مکان شعاعی بر حسب زمان و مکان می‌باشند، تعیین خواهند شد.

۳-۴- سرعت بحرانی

برای تعیین سرعت بحرانی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری تحت فشار داخلی متحرک، با مجموعه معادلات (۳-۱۵)، از روش حل موج استفاده می‌شود. بدین منظور از دستگاه معادلات متحرک با بار، با تغییر متغیّر زیر استفاده می‌شود.

$$X = x - Vt \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial X} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial t} = -V\dfrac{\partial}{\partial X} \\ \dfrac{\partial^n}{\partial x^n} = \dfrac{\partial^n}{\partial X^n} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = V^2\dfrac{\partial^2}{\partial X^2} \end{cases} \qquad (۳-۳۶)$$

با اعمال این تغییر متغیّر در رابطه‌ی (۳-۱۵)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} &\left([K_1]+V^2[K_8]\right)\frac{\partial^4}{\partial X^4}\{y\}+\left([K_2]+V^2[K_7]\right)\frac{\partial^3}{\partial X^3}\{y\}+ \\ &\left([K_3]+V^2[K_6]\right)\frac{\partial^2}{\partial X^2}\{y\}+[K_4]\frac{\partial}{\partial X}\{y\}+[K_5]\{y\}= \\ &-\left\{\begin{matrix} 0 \\ -R\ q\ [1-H(X)]\exp\left(-n\dfrac{(X+Vt)}{L}\right) \end{matrix}\right\} \end{aligned} \qquad (۳-۳۷)$$

که برای $X > 0$، طرف دوم عبارت فوق صفر می‌شود و با استفاده از جواب عمومی به صورت $\{y\}=\{A\}e^{mX}$، و جایگذاری در رابطه‌ی بالا، معادله‌ی مشخصه به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{pmatrix} ([K_1]+V^2[K_8])m^4+([K_2]+V^2[K_7])m^3+ \\ ([K_3]+V^2[K_6])m^2+([K_4])m+([K_5]) \end{pmatrix}\{A\}=0 \qquad (۳-۳۸)$$

که شرط داشتن جواب غیر صفر، این است که دترمینان ماتریس ضرب شده در بردار $\{A\}$ صفر شود:

$$ax = \det\begin{pmatrix} ([K_1]+V^2[K_8])m^4+([K_2]+V^2[K_7])m^3+ \\ ([K_3]+V^2[K_6])m^2+([K_4])m+([K_5]) \end{pmatrix}=0 \qquad (۳-۳۹)$$

بنابر این، شرط پایدار بودن سیستم این است که در $\{y\}=\{A\}e^{mX}$، مقادیر m حقیقی یا مختلط باشند(موهومی خالص نباشند). بر این اساس مقدار سرعت بحرانی تعیین می‌شود. یکی دیگر از روشهای

تعیین سرعت بحرانی پیدا کردن سرعتی است که در آن ضریب تقویت دینامیکی[1] به بیشینه مقدار خود می‌رسد که در قسمت بعد به تعریف این ضریب می‌پردازیم.

۳-۵- ضریب تقویت دینامیکی

در طراحی پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار داخلی متحرک، مقدار تغییر شکل پوسته بر اثر حرکت بار متحرک یکی از پارامترهای مهم می‌باشد. از آنجائیکه در شرایط بارگذاری دینامیکی، این مقدار تغییر شکل، نسبت به حالت بارگذاری استاتیکی بیشتر می‌شود؛ بنابر این ضریب تقویت بار، که ضریب بار دینامیکی[2] نیز نامیده می‌شود، ضریب بسیار با اهمیتی در طراحی‌ها برای بارگذاری دینامیکی می‌باشد. ضریب تقویت به صورت نسبت ماکزیمم کرنش در بارگذاری دینامیکی به کرنش استاتیکی در بارگذاری معادل، تعریف می‌شود. معمولا در طراحی‌ها و بررسی رفتار پوسته، کرنش محیطی مورد بررسی قرار می‌گیرد، اما با توجه به رابطه‌ی کرنش محیطی به صورت $\varepsilon_\theta = \dfrac{w}{R}$، می‌توان از جابه‌جایی شعاعی هم استفاده نمود که رابطه‌ی آن عبارتست از:

$$Dynamic\ Amplification\ Factor = \frac{\varepsilon_{\theta,Max}}{\varepsilon_{\theta,St}} = \frac{w_{Dyn,Max}}{w_{St}} \qquad (۳-۴۰)$$

در رابطه‌ی (۳-۴۰)، $w_{Dyn,Max}$ جابه‌جایی شعاعی ماکزیمم در بارگذاری دینامیکی و w_{St} جابه‌جایی شعاعی در بارگذاری استاتیکی معادل می‌باشد. برای مقدار w_{St} از محاسبات حل غشائی استوانه‌ی جدار نازک تحت فشار داخلی استاتیکی مطابق رابطه‌ی (۱۰-۱۱) از مرجع [۱] استفاده کرده‌ایم که عبارتست از:

$$w_{St} = \frac{PR^2}{2Eh}(2-\nu) \qquad (۳-۴۱)$$

در سیستم‌های ممتد با بار متحرک، محاسبه‌ی ضریب بار دینامیکی بسیار پیچیده است. برای تعیین ضریب تقویت دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای، تا به حال مدل‌های تحلیلی متعددی ارائه شده است.

[1] Dynamic Amplification factor

[2] Dynamic loading factor

مدل سطح مقطع[1]، مدل لوله‌ی جدار نازک با طول بی نهایت بدون در نظر گرفتن اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، مدل لوله‌ی جدار نازک با طول بی نهایت با در نظر گرفتن اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، مدل لوله‌ی جدار نازک با طول محدود بدون در نظر گرفتن اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، مدل لوله‌ی جدار نازک با طول محدود با در نظر گرفتن اثر برش عرضی و اینرسی دورانی از جمله روش های به کار رفته برای تعیین این ضریب بوده است که همگی آن‌ها معطوف به تعیین این ضریب برای پوسته‌های استوانه‌ای همگن بوده است. در این پژوهش نتایج حاصل از تعیین ضریب بار دینامیکی برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری ناهمگن و همسانگرد تحت فشار داخلی متحرک، با استفاده از مدل لوله‌ی جدار نازک با طول محدود و با در نظر گرفتن اثر اینرسی دورانی ارائه شده است.

[1] Cross-sectional model

۳-۶- جمع بندی

در این فصل، ابتدا به ارائه‌ی روش تحلیل فرکانسی که شامل تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم می‌باشد؛ بر مبنای تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل، پرداخته شد. سپس روش تحلیلی بسط توابع ویژه، برای تعیین پاسخ معادله‌های حرکت، در حوزه‌ی زمان و مکان ارائه شد. در ادامه روش تعیین سرعت بحرانی سیستم، به کمک روش حل موج ارائه شد و در آخرین قسمت این فصل نیز، توضیح مختصری، راجع به ضریب تقویت دینامیکی و رابطه‌ی این ضریب با کرنش محیطی بیان شد. در فصل آتی، نتایج حاصل از این فصل ارائه خواهد شد.

فصل ۴ بررسی نتایج

۴-۱- مقدمه

در فصل‌های قبل، روند استخراج و حل تحلیلی معادلات حاکم بر مسأله معرفی شد. در این فصل، نتایج حاصل از حل معادلات حرکت به‌دست آمده در فصل قبل، با نتایج موجود در مراجع مختلف، مقایسه شده است. کمیت‌های مختلف مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند و پس از حصول اطمینان از صحت نتایج به‌دست آمده، تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های طبیعی، سرعت بحرانی، ضریب بار دینامیکی و پاسخ دینامیکی مورد بررسی قرار گرفته است. تأثیر شرط مرزی بر ارتعاشات آزاد لحاظ شده و همچنین مشخصات و هندسه‌ی مسأله در ابتدای هر بخش توصیف شده است. نتایج پژوهش حاضر در دو بخش کلّی ارائه می‌شود. بخش اول، نتایج حاصل از مطالعات انجام شده بر روی ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری را مورد بررسی قرار داده است. در بخش دوم، رفتار دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری تحت فشار داخلی متحرک مورد بررسی قرار گرفته است.

۴-۲- تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری

در مطالعات انجام شده در این بخش، برای پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد ناهمگن FG با تغییرات تدریجی خواص در جهت طولی، مشخصات $E_{00}=2\times10^{11}\,Pa$، $\rho_{00}=7860\,\dfrac{kg}{m^3}$ و $\nu=0.3$، در نظر گرفته شده است. برای پوسته‌های استوانه‌ای همگن نیز از همین مشخصات استفاده شده است. به منظور تعمیم دادن و کلیت بخشیدن به نتایج، در این بخش، فرکانس طبیعی به‌صورت بی‌بعد گزارش شده است. فرکانس طبیعی بی‌بعد که پارامتر فرکانس[1] نامیده شده است، به‌صورت رابطه‌ی زیر تعریف شده است:

$$f=\omega R\sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho}{E}} \tag{۴-۱}$$

[1] Frequency parameter

در رابطه‌ی (۴-۱)، ω معرف فرکانس طبیعی (rad/s) پوسته می‌باشد. به منظور بی‌بعد سازی؛ از مدول الاستیسیته، دانسیته‌ی جرمی، ضریب پواسون و شعاع لایه میانی پوسته‌ی استوانه‌ای همگن و همسانگرد از جنس فولاد با مشخصات $E = E_{00}$، $\rho = \rho_{00}$، $\nu = 0.3$ و $R = 0.1m$ استفاده شده است.

۴-۲-۱ اعتبارسنجی و ارزیابی صحت نتایج برای فرکانس طبیعی

به‌منظور ارزیابی صحت نتایج حاصل از روش ارائه شده در فصل سوم، نتایج پژوهش حاضر با مراجع مختلف مقایسه شده‌اند. جدول ۴-۱، مقدارهای به‌دست آمده برای فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته‌ی همگن و همسانگرد با تکیه‌گاه ساده را، برای نسبت‌های مختلف R/h و همچنین مقادیر مختلف نسبت لاغری (نسبت L/R)، با نتایج به‌دست آمده توسط رائو [۴۴]، مقایسه کرده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج پژوهش حاضر، انطباق بسیار خوبی با نتایج مرجع دارد. جدول ۴-۲، مقایسه‌ای بین نتایج تحلیلی و نتایج عددی را برای پوسته‌های استوانه‌ای با تکیه‌گاه ساده نشان می‌دهد. پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد ناهمگن با تغییرات تدریجی خواص در جهت طولی می‌باشند. این مقایسه‌ها، به ازای چند ثابت ناهمگنی مختلف و همچنین چند مقدار مختلف نسبت لاغری (نسبت L/R)، انجام شده است. نتایج تحلیلی، با استفاده از روش ارائه شده در فصل سوم پژوهش حاضر که از تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک استفاده شده است، به‌دست آمده است. نتایج عددی به‌کمک روش المان محدود و با استفاده از نرم‌افزار اجزای محدود انسیس، تعیین شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقایسه‌ی انجام شده، که برای دو فرکانس طبیعی بی‌بعد اول سازه و به ازای پارامترهای هندسی ومادی مختلفی انجام شده، دقت بسیار خوب و قابل قبولی را دارا می‌باشد و نتایج حل تحلیلی و عددی، جواب‌های بسیار نزدیک به هم را ارائه می‌کنند.

جدول ۴-۱- مقایسه اولین فرکانس طبیعی استوانه‌ی همگن با تکیه‌گاه ساده با مرجع [۴۴]

		L/R			
R/h		**5**	**10**	**15**	**20**
10	present	0.5838560	0.2982385	0.1993830	0.1496744
	Rao [44]	0.5838561	0.2982386	0.1993831	0.1496745
25	present	0.5838489	0.2982382	0.1993831	0.1496744
	Rao [44]	0.5838491	0.2982384	0.1993831	0.1496745
50	present	0.5838480	0.2982382	0.1993831	0.1496744
	Rao [44]	0.5838481	0.2982384	0.1993831	0.1496745
100	present	0.5838474	0.2982381	0.1993831	0.1496743
	Rao [44]	0.5838478	0.2982384	0.1993831	0.1496745

جدول ۴-۲- مقایسه دو فرکانس طبیعی استوانه‌ی ناهمگن با تکیه‌گاه ساده به روش تحلیلی و عددی برای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی و نسبت لاغری به ازای R/h=100

L/R	Method	Mode	**n=0.25**	**n=0.5**	**n=0.75**	**n=1**
5	CST	1	0.584274	0.585552	0.587674	0.590624
		2	0.902372	0.902474	0.902657	0.902891
	FE	1	0.584271	0.585554	0.587669	0.590628
		2	0.902369	0.902476	0.902655	0.902892
10	CST	1	0.298471	0.299172	0.300332	0.301951
		2	0.583952	0.584268	0.584804	0.585551
	FE	1	0.298468	0.299170	0.300334	0.301950
		2	0.583950	0.584271	0.584806	0.585554
15	CST	1	0.199540	0.200010	0.200792	0.201881
		2	0.395972	0.396201	0.396582	0.397111
	FE	1	0.199537	0.200013	0.200797	0.201878
		2	0.395974	0.396200	0.396580	0.397114

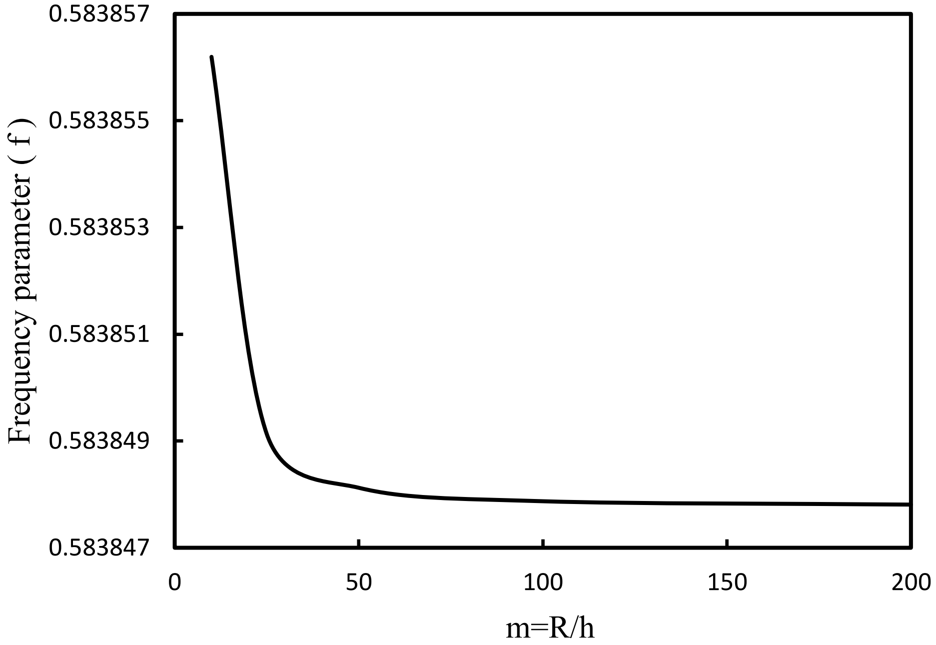
همان‌طور که از نتایج جدول مشهود است، با افزایش نسبت L/R، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش یافته است. برای همه‌ی مقادیر L/R، فرکانس مد دوم بیشتر از مود اول است و با افزایش ثابت ناهمگنی فرکانس افزایش می‌یابد.

۴-۲-۲ اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی

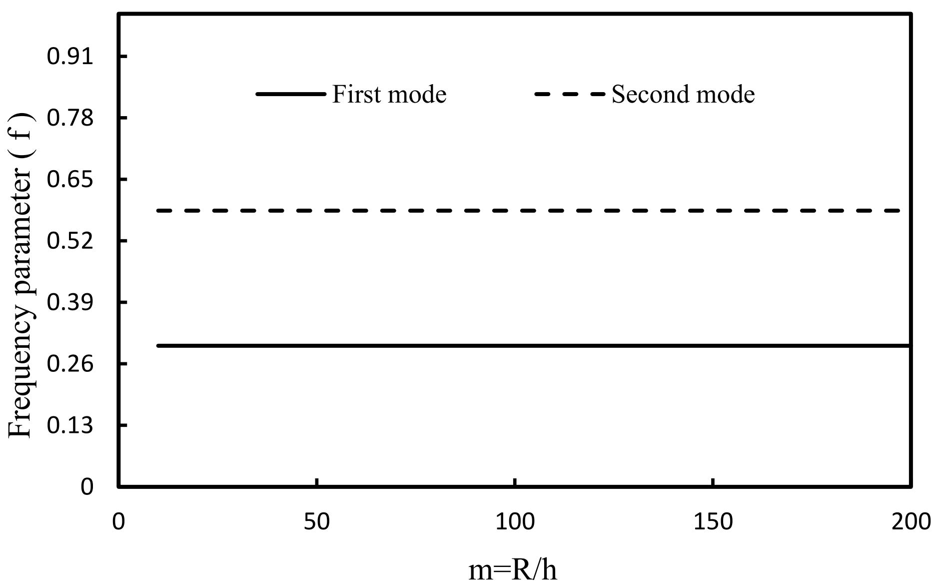
در این قسمت، تأثیر پارامترهای هندسی، مادّی و شرایط مرزی مختلف بر فرکانس‌های طبیعی ارائه خواهد شد. شکل ۴-۱، تغییرات فرکانس دوم را با نسبت R/h، برای استوانه‌ای با تکیه‌گاه ساده به ازای نسبت L/R=10 و ثابت ناهمگنی n=0، نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت *R/h*، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش یافته است. مشاهده می‌شود که در نسبت‌های کوچک‌تر R/h که همان محدوده‌ی پوسته‌های نسبتا ضخیم تا ضخیم می‌باشد، روند کاهش فرکانس طبیعی زیاد است و در محدوده‌ی پوسته‌های نازک، با افزایش نسبت R/h، فرکانس طبیعی تقریبا به یک مقدار ثابت میل می‌کند و از آنجا که تئوری مورد استفاده‌ی ما در این پژوهش مربوط به پوسته‌های نازک است، می‌توان ادعا کرد که فرکانس به تغییرات نسبت R/h، واکنش نشان نمی‌دهد. همچنین قابل توجه است که اگر با دقت به تغییرات فرکانس بنگریم، متوجه خواهیم شد که همین کاهشی که در شکل واضح است، از نظر تغییرات مقداری بسیار ناچیز است و در مجموع می‌توان گفت که تغییرات نسبت R/h، تأثیر چندانی بر فرکانس‌های طبیعی ندارد و این موضوع را در شکل ۴-۲ که مربوط به تغییرات فرکانس با R/h و برای مود اول و دوم است، می‌توان مشاهده کرد. در یک پوسته‌ی استوانه‌ای، نسبت لاغری یکی از پارامترهای مهم در بررسی رفتار ارتعاشی می‌باشد و فرکانس طبیعی تابعی از این پارامتر مهم است. لذا به‌عنوان یک مسأله‌ی مهم، تغییرات فرکانس به نسبت لاغری، مورد مطالعه قرار گرفته است.

شکل ۴-۳ تغییرات فرکانس‌های اول و دوم را با نسبت L/R، برای استوانه‌ای با تکیه‌گاه ساده به ازای R/h=50 و ثابت ناهمگنی n=0، نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت L/R، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش یافته و در نسبت‌های کوچک‌تر L/R (پوسته‌های با طول کوتاه‌تر)، روند کاهش فرکانس بیشتر است و با افزایش L/R، فرکانس طبیعی تقریبا به یک مقدار ثابت میل می‌کند. شکل ۴-۴ تأثیر ثابت ناهمگنی را بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد اول، برای پوسته‌های با تکیه‌گاه ساده که از جنس مواد ناهمگن FG با تغییرات تدریجی خواص در جهت طولی ساخته شده‌اند، به ازای R/h=100 و L/R=10، نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش ثابت ناهمگنی، فرکانس طبیعی

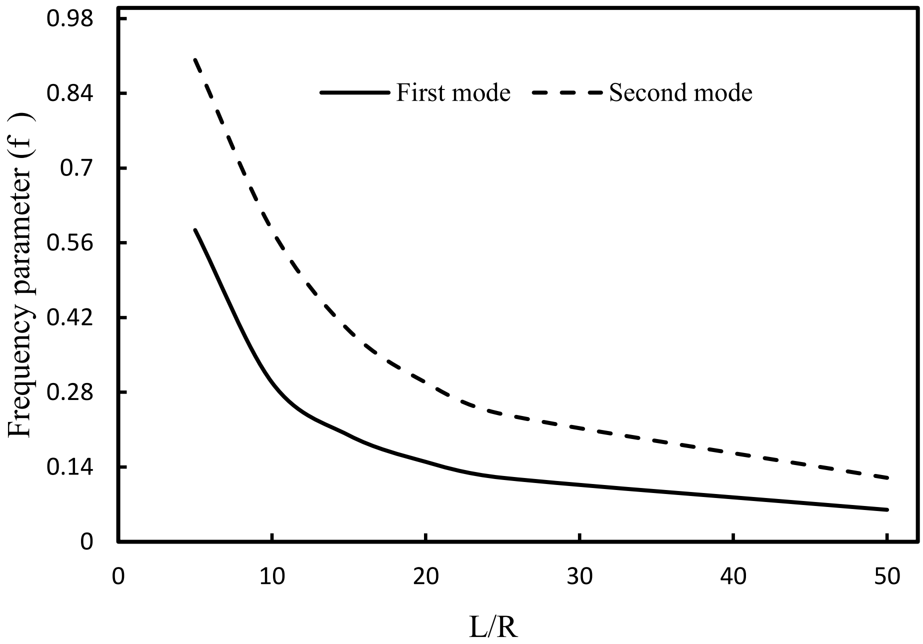
بدون بعد افزایش می‌یابد.



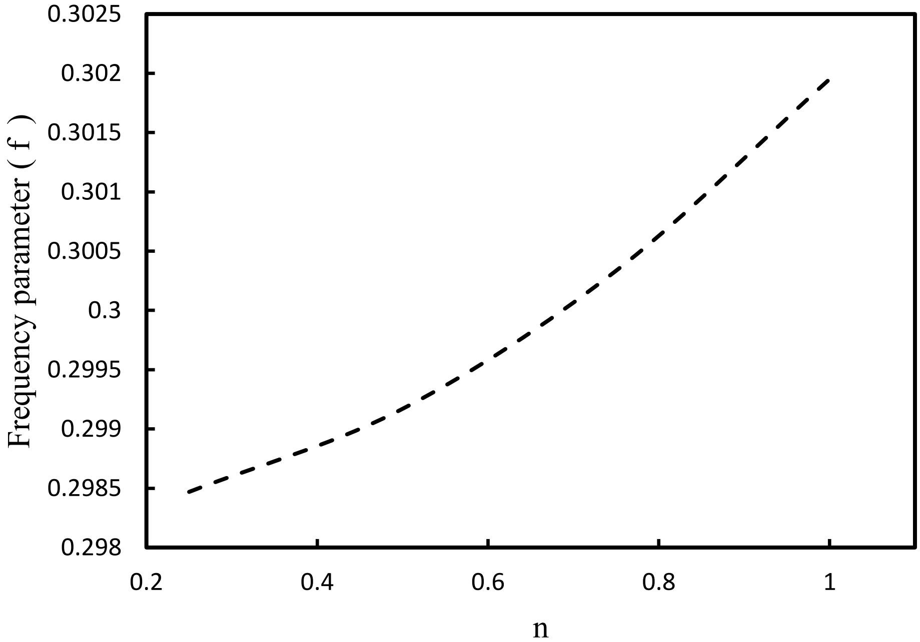
شکل ۴-۱: تغییرات فرکانس طبیعی دوم استوانه بر حسب R/h با تکیه‌گاه ساده (n=0 و L/R=10)



شکل ۴-۲: مقایسه‌ی تغییرات دو فرکانس طبیعی اول استوانه بر حسب R/h با تکیه‌گاه ساده (n=0 و L/R=10)



شکل ۴-۳: مقایسه‌ی تغییرات دو فرکانس طبیعی اول استوانه بر حسب نسبت لاغری (n=0 و R/h=50)



شکل ۴-۴: تغییرات فرکانس طبیعی اول استوانه بر حسب ثابت ناهمگنی (L/R=10 و R/h=100)

به‌منظور بررسی تأثیر شرایط مرزی مختلف بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد، در جدول ۴-۳ اثر دو نوع شرط مرزی تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار، برای پوسته‌های ناهمگن طولی، مورد ارزیابی و بررسی قرار

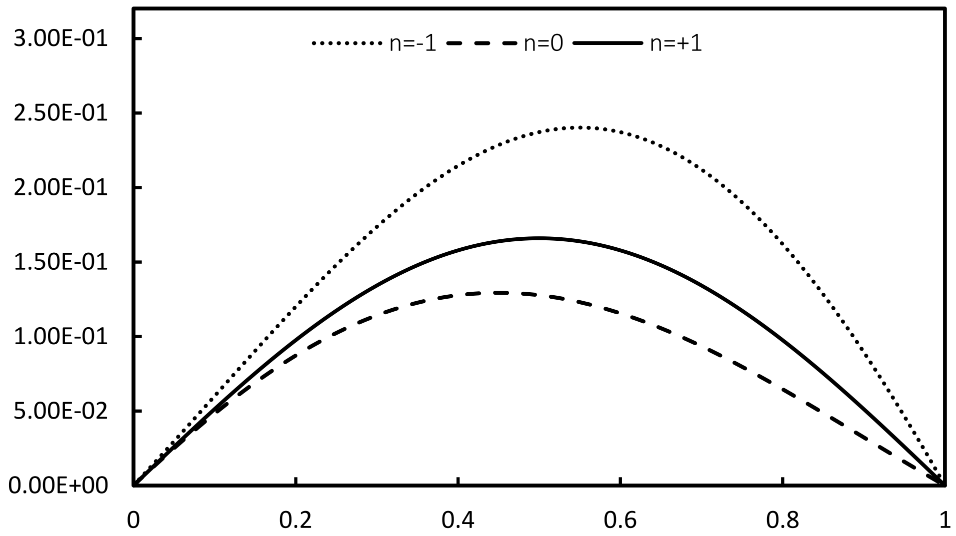
گرفته است. مقدارهای ارائه شده در جدول ۴-۳ به ازای نسبت‌های مختلف L/R و همچنین ثابت‌های ناهمگنی متفاوت و برای دو فرکانس طبیعی بی‌بعد اول ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، فرکانس‌های مربوط به تکیه‌گاه دو سر گیردار در مقایسه با فرکانس‌های مربوط به شرط مرزی تکیه‌گاه دو سر ساده مقدار بیشتری دارد، ولی در کل تفاوت زیادی، بین فرکانس‌های مربوط به این دو نوع شرط مرزی مشاهده نمی‌شود.

جدول ۴-۳- مقایسه‌ی دو فرکانس طبیعی استوانه ناهمگن با تکیه‌گاه ساده و گیردار برای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی و نسبت لاغری به ازای R/h=100

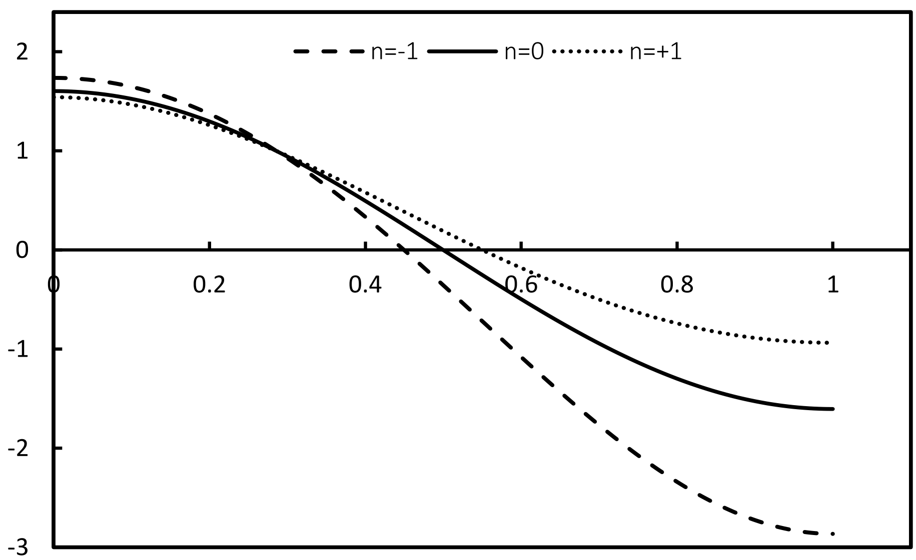
L/R	**Support**	**Mode**	**n=0.5**	**n=1**
5	Clamp	1	0.5881	0.5932
		2	0.9072	0.9075
	Simply	1	0.5855	0.5906
		2	0.9024	0.9028
10	Clamp	1	0.2996	0.3024
		2	0.5855	0.5868
	Simply	1	0.2991	0.3019
		2	0.5842	0.5855

شکل ۴-۵ و شکل ۴-۶، به ترتیب، اولین شکل مود عرضی و اولین شکل مود محوری مربوط به پوسته ناهمگن طولی با تکیه‌گاه ساده، را برای سه ثابت ناهمگنی مختلف و به ازای R/h=100 و L/R=10 نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است با افزایش ثابت ناهمگنی از n=-1 تا n=1، مقدار تغییر شکل‌ها کاهش

می‌یابد.



شکل ۴-۵: اولین شکل مود عرضی استوانه ناهمگن با تکیه‌گاه ساده به ازای ثابت‌های ناهمگنی متفاوت



شکل ۴-۶: اولین شکل مود محوری استوانه ناهمگن با تکیه‌گاه ساده به ازای ثابت‌های ناهمگنی متفاوت

۴-۳- تحلیل ارتعاشات اجباری پوسته‌های نازک تحت فشار داخلی متحرک

در مطالعات انجام شده در این بخش، برای پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد ناهمگن با تغییرات تدریجی خواص در جهت طولی، مشخصات $E_{00}=2\times10^{11}\,Pa$ ،$\rho_{00}=7860\,\frac{kg}{m^3}$ و $\nu=0.3$ ، در نظر گرفته شده است. برای پوسته‌های استوانه‌ای همگن نیز از همین مشخصات استفاده شده است. به منظور تعمیم دادن و کلیت بخشیدن به نتایج، در این پژوهش، سرعت بحرانی به صورت بی‌بعد گزارش شده است. رابطه‌ی سرعت بحرانی بی‌بعد به صورت زیر می‌باشد.

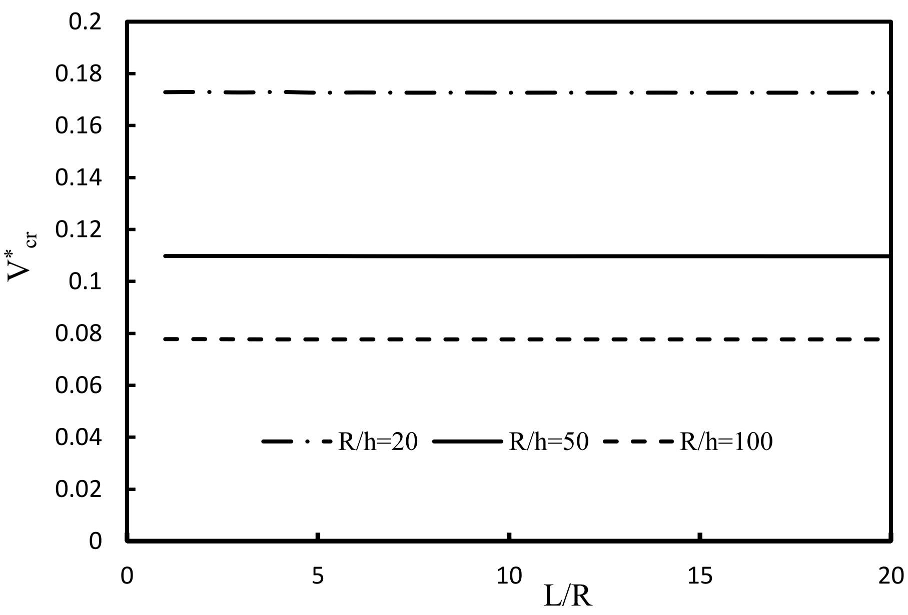
$$V^{*}_{cr}=V_{cr}\sqrt{\frac{\rho}{E}} \tag{۴-۲}$$

در رابطه‌ی (۴-۲)، V_{cr} معرف سرعت بحرانی با بعد پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک می‌باشد. به منظور بی‌بعد سازی، از مدول الاستیسیته و دانسیته‌ی جرمی پوسته‌ی استوانه‌ای همگن و همسانگرد از جنس فولاد با مشخصات $E=E_{00}$ و $\rho=\rho_{00}$، استفاده شده است.

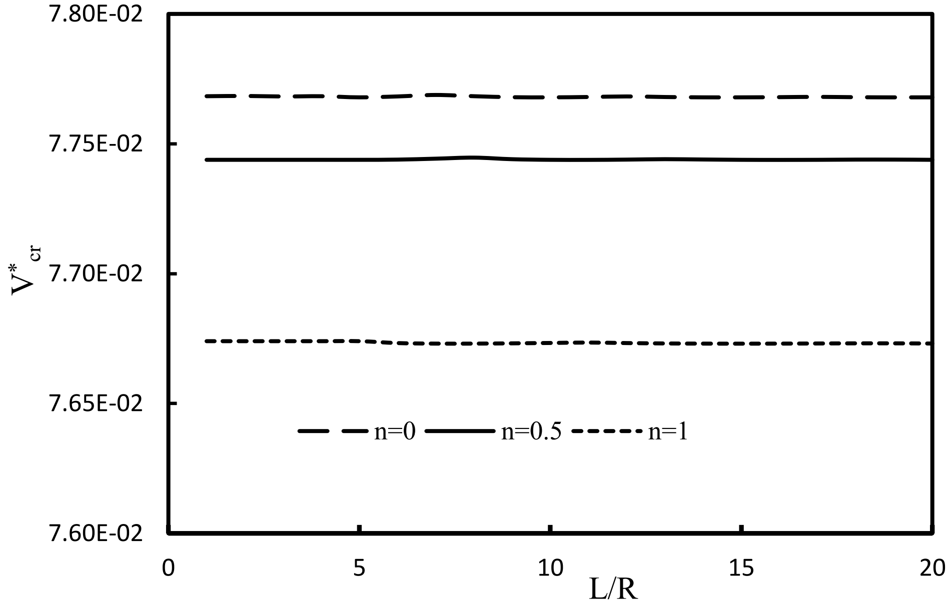
۴-۳-۱ تأثیر تغییرات طول استوانه بر سرعت‌های بحرانی بی‌بعد

در اولین قدم در ارائه‌ی نتایج، اثر تغییرات طول استوانه بر سرعت‌های بحرانی بی‌بعد پوسته با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ارائه و بررسی می‌شود. به منظور ارزیابی اثر تغییرات طول استوانه بر سرعت‌های بحرانی بی‌بعد، در شکل ۴-۷، سرعت‌های بحرانی بی‌بعد برای نسبت‌های مختلف L/R، برای پوسته‌های همگن و همسانگرد با مشخصات $E=E_{00}$ ،$\rho=\rho_{00}$ ،$\nu=0.3$ ،n=0 و برای سه مقدار R/h=20,50,100 بررسی شده است. همان‌طور که در فصل اول اشاره شد، برای شعاع لایه‌ی میانی ثابت، نسبت L/R معیاری از بلندی استوانه است؛ هرچه این نسبت بیش‌تر باشد، استوانه بلندتر است. نسبت R/h نیز معیاری از ضخامت پوسته به شمار می‌رود؛ هرچه این عدد بیش‌تر باشد، استوانه نازک‌تر است. در شکل ۴-۸، تغییرات سرعت‌های بحرانی بی‌بعد برای نسبت‌های L/R، برای پوسته‌های ناهمگن شعاعی و برای سه مقدار ثابت ناهمگنی n=0,0.5,1 ارائه شده است. برای رسم شکل ۴-۸، از رابطه‌ی (۳-۲) ارائه شده در فصل سوم استفاده شده و مشخصات $E_{in}=2\times10^{11}\,Pa$ ،$\rho_{in}=7860\,\frac{kg}{m^3}$ ،$\nu=0.3$ و R/h=100

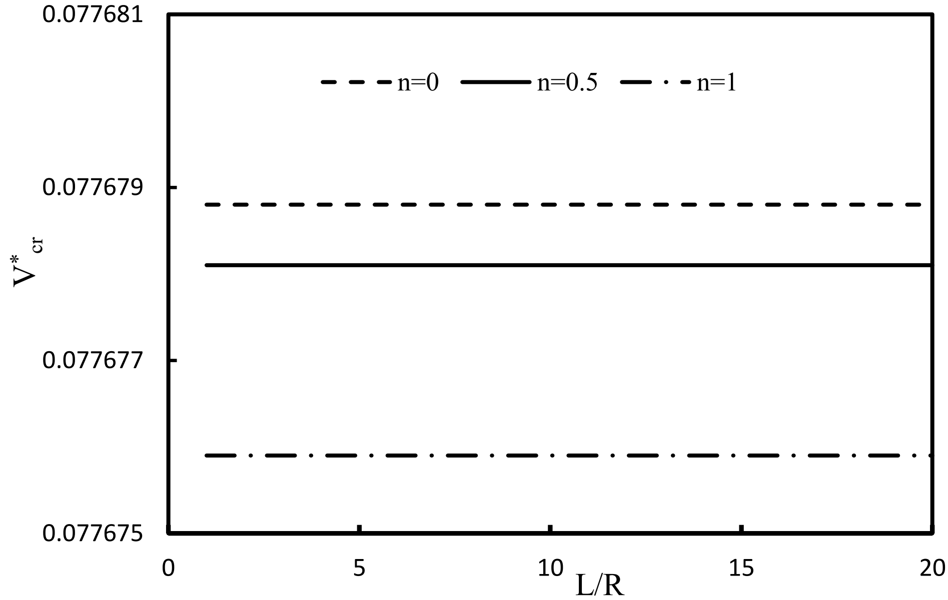
در نظر گرفته شده است. همچنین در شکل ۴-۹، نمودار سرعت‌های بحرانی بی‌بعد به نسبت L/R، برای پوسته‌های ناهمگن طولی و برای سه مقدار ثابت ناهمگنی n=0,0.5,1 ارائه شده است. برای این نمودار، مشخصات $E = E_{00}$ ، $\rho = \rho_{00}$، $\nu = 0.3$ و R/h=100 در نظر گرفته شده است. همان طور که از هر سه نمودار مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت لاغری، تغییری در سرعت‌های بحرانی بی‌بعد حاصل نمی‌شود و این نتیجه به این معنا است که طول استوانه تأثیری بر مقادیر سرعت‌های بحرانی ندارد. همچنین مشاهده می‌شود که در نسبت‌های R/h بیش‌تر (پوسته‌های استوانه‌ای نازک‌تر)، سرعت‌های بحرانی کاهش می‌یابد. در شکل ۴-۸ و شکل ۴-۹ که به ترتیب مربوط به استوانه‌ی ناهمگن شعاعی و طولی است و برای نسبت R/h=100 ترسیم شده است، مشاهده می‌شود که با افزایش ثابت ناهمگنی (سفت‌تر شدن استوانه)، سرعت بحرانی کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۷: تغییرات سرعت بحرانی بی‌بعد بر حسب نسبت لاغری برای استوانه‌ی همگن



شکل ۴-۸: تغییرات سرعت بحرانی بی‌بعد بر حسب نسبت لاغری برای استوانه‌ی ناهمگن شعاعی (R/h=100)



شکل ۴-۹: تغییرات سرعت بحرانی بی‌بعد بر حسب نسبت لاغری برای استوانه‌ی ناهمگن طولی (R/h=100)

۴-۳-۲ مقایسه و ارزیابی صحت نتایج برای سرعت‌های بحرانی پوسته‌ی استوانه‌ای

به منظور حصول اطمینان از دقّت روش مورد استفاده در حل معادلات حرکت، نتایج کار حاضر با کارهای مشابه مقایسه شده است. مقدارهای به‌دست آمده برای سرعت بحرانی بی‌بعد یک پوسته‌ی همگن و همسانگرد با شرایط مرزی ساده، با مراجع مختلف قیاس شده، و مقایسه‌ی این نتایج، با نتایج به‌دست آمده توسط اگیبالو و کولتونو [۴۵]، روزنه و باز [۲۸] و سوفیه [۳۵] که در جدول ۴-۴ نشان داده شده است، نشان می‌دهد که روش مورد استفاده در کار حاضر، جواب‌های بسیار خوب و قابل قبولی را با نتایج مقالات نشان می‌دهد. درصد خطای نتایج پژوهش حاضر با نتایج مرجع [۴۵]، به‌ازای R/h=5,10,50,100، به‌ترتیب برابر با 1.29,0.59,0.35,0.24 می‌باشد. درصد خطای نتایج کار حاضر با مرجع [۲۸]، به ازای R/h=5,10,50,100، به‌ترتیب برابر با 5.58,4.38,3.24, 3.14 می‌باشد. درصد خطای نتایج پژوهش حاضر با مرجع [۳۵]، به ازای R/h=5,10,50,100، به‌ترتیب برابر با 2.77,1.57,0.35,0.24 می‌باشد. بنابراین هرچه پوسته نازک‌تر می‌شود درصد خطا کمتر می‌گردد.

جدول ۴-۴- مقایسه سرعت‌های بحرانی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌ای همگن با مراجع مختلف

R/h	**Ogibalov and Koltonov** [45]	**Ruzzene and Baz** [28]	**Sofiyev** [35]	**present**
5	0.3546	0.3707	0.3600	0.3500
10	0.2520	0.2620	0.2545	0.2505
50	0.1137	0.1171	0.1137	0.1133
100	0.0804	0.0828	0.0804	0.0802

در جدول ۴-۵، مقادیر به‌دست آمده برای سرعت بحرانی بی‌بعد یک پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمگن و همسانگرد با شرط مرزی ساده، با نتایج به‌دست آمده توسط سوفیه [۳۵] که از مدل حالت پایدار و روش تغییر متغّیر استفاده کرده، مقایسه شده است. مطابق با مرجع [۳۵]، تغییرات تدریجی خواص مواد برای پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمگن و همسانگرد در راستای شعاعی است که از توابع ریاضی مطابق با رابطه‌ی (۴-۳)، برای بیان توزیع خواص مواد در راستای شعاعی استفاده شده است.

$$
\begin{aligned}
&Linear: && \begin{cases} E(x,z)=\left(E_c-E_m\right)V^1+E_m \\ \rho(x,z)=\left(\rho_c-\rho_m\right)V^1+\rho_m \end{cases} \\
&Quadratic: && \begin{cases} E(x,z)=\left(E_c-E_m\right)V^2+E_m \\ \rho(x,z)=\left(\rho_c-\rho_m\right)V^2+\rho_m \end{cases} \\
&Exponenial: && \begin{cases} E(x,z)=E_m\exp(V\ \ln(E_c/E_m)) \\ \rho(x,z)=\rho_m\exp(V\ \ln(\rho_c/\rho_m)) \end{cases}
\end{aligned}
\qquad (۳-۴)
$$

در رابطه‌ی (۴-۳)، $E_m=2.0104\times10^{11}\,Pa$ و $\rho_m=8166\,\dfrac{kg}{m^3}$، به ترتیب، معرّف مدول الاستیسیته و دانسیتهٔ جرمی فلز در شعاع داخلی استوانه و $E_c=3.4843\times10^{11}\,Pa$ و $\rho_c=2370\,\dfrac{kg}{m^3}$، نیز به ترتیب، معرّف مدول الاستیسیته و دانسیتهٔ جرمی سرامیک در شعاع خارجی استوانه و $V=\left(\dfrac{z}{h}\right)+\dfrac{1}{2},\quad -\dfrac{h}{2}\le z\le\dfrac{h}{2}$ نیز نسبت حجمی در جسم است. همانطور که نتایج نشان می‌دهد، روش مورد استفاده در پژوهش حاضر از دقت خوب و قابل قبولی برخوردار است.

جدول ۴-۵- مقایسه سرعت‌های بحرانی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمگن شعاعی با مرجع [۳۵]

R/h	**FGM**					
	Linear		**Quadratic**		**Exponential**	
	Sofiyev [35]	present	Sofiyev [35]	present	Sofiyev [35]	present
5	0.4858	0.4749	0.4339	0.4218	0.5118	0.4975
10	0.3435	0.3429	0.3068	0.3037	0.3619	0.3596
15	0.2805	0.2820	0.2505	0.2498	0.2955	0.2957
20	0.2430	0.2448	0.2170	0.2166	0.2559	0.2569
25	0.2172	0.2196	0.1940	0.1944	0.2289	0.2303
50	0.1536	0.1558	0.1371	0.1379	0.1619	0.1635
75	0.1254	0.1274	0.1120	0.1127	0.1322	0.1336
100	0.1086	0.1104	0.0971	0.0977	0.1104	0.1157

۴-۳-۳ پارامترهای مؤثر بر سرعت بحرانی

همان طور که در قسمت‌های پیشین گفته شد، تغییرات طول تأثیری بر مقادیر سرعت بحرانی ندارد. در این قسمت اثر تغییرات ضخامت و تغییرات ثابت ناهمگنی بر سرعت‌های بحرانی، به‌عنوان یک مسألهٔ مهم، مورد مطالعه قرار گرفته است. در جدول ۴-۶، مقادیر سرعت‌های بحرانی بی‌بعد پوسته‌ی ناهمگن طولی برای ثابت‌های ناهمگنی متفاوت و برای نسبت‌های R/h مختلف بررسی شده است. همچنین در جدول ۴-۷، به بررسی مقادیر سرعت‌های بحرانی بی‌بعد پوسته‌های ناهمگن شعاعی پرداخته است. همان‌طور که از نتایج جداول مشخص است؛ مقادیر سرعت بحرانی بدون بعد، به ازای هر کدام از مقادیر ثابت نسبت R/h، با افزایش ثابت ناهمگنی (سفت‌تر شدن پوسته)، کاهش می‌یابد و همچنین به ازای هر ثابت ناهمگنی، با افزایش نسبت‌های R/h (نازک‌تر شدن پوسته)، مقادیر سرعت‌های بحرانی بی‌بعد کاهش می‌یابد.

جدول ۴-۶- سرعت‌های بحرانی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمگن طولی

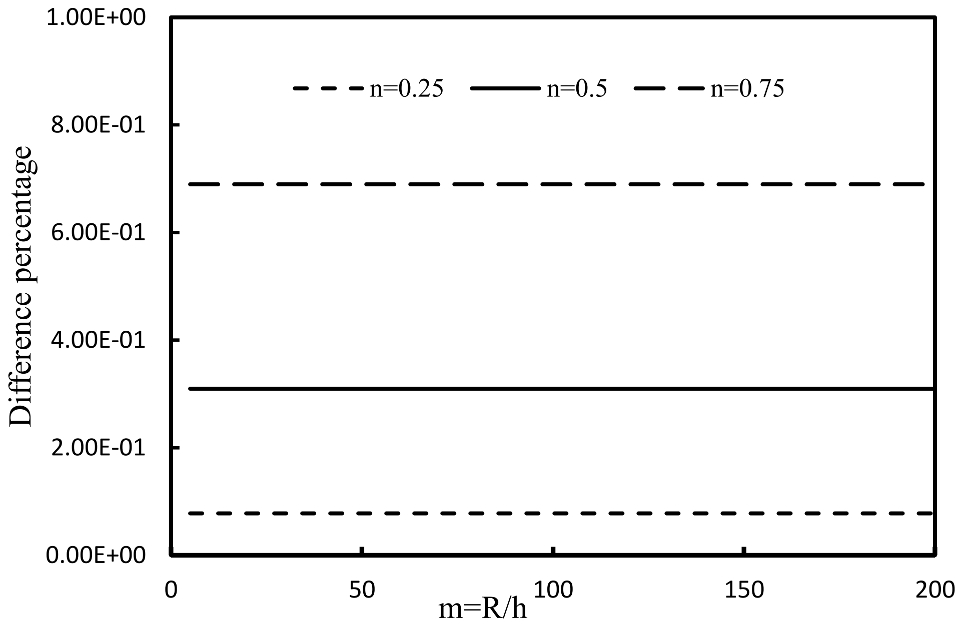
R/h			**n**		
	0	**0.5**	**1**	**1.5**	**2**
5	0.33767	0.33761	0.33742	0.33710	0.33666
10	0.24247	0.24244	0.24238	0.24227	0.24212
15	0.198914	0.198902	0.198866	0.198806	0.198722
20	0.172647	0.172639	0.172614	0.172574	0.172517
25	0.154654	0.154649	0.154631	0.154602	0.154561
50	0.109688	0.109686	0.109679	0.109669	0.109655
75	0.0896518	0.0896506	0.0896472	0.0896416	0.0896336
100	0.0776788	0.0776781	0.0776759	0.0776722	0.0776671
500	0.0362905	0.0362904	0.0362901	0.0362897	0.0362890

جدول ۴-۷- سرعت‌های بحرانی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمگن شعاعی

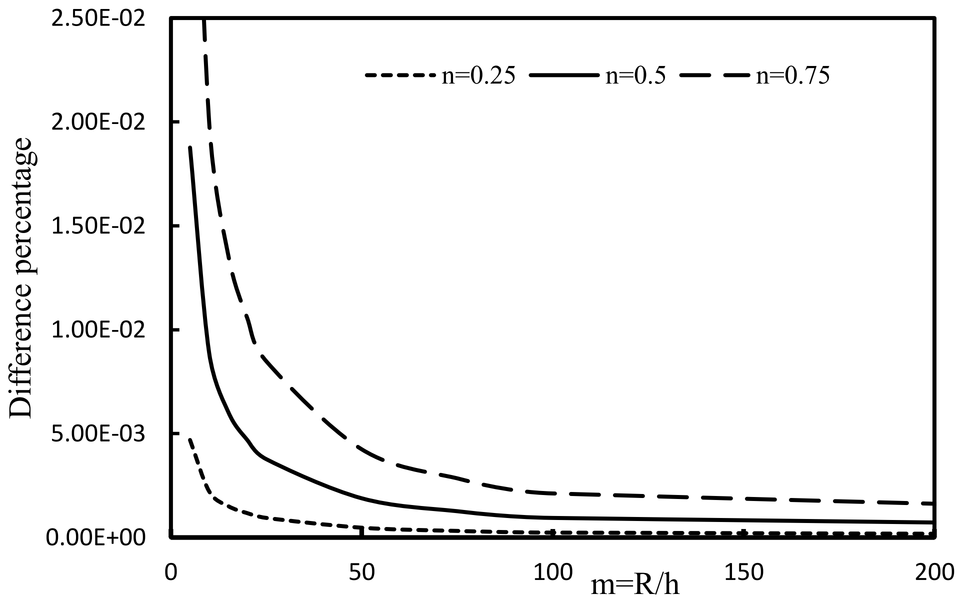
R/h	n				
	0	**0.5**	**1**	**1.5**	**2**
5	0.3376	0.3367	0.3339	0.3292	0.3228
10	0.2424	0.2417	0.2394	0.2360	0.2315
20	0.1726	0.1721	0.1705	0.1680	0.1648
25	0.1546	0.1541	0.1528	0.1505	0.1476
50	0.1096	0.1093	0.1083	0.1067	0.1046
100	0.0776	0.0774	0.0767	0.0756	0.0741

وقتی پوسته‌ی استوانه‌ای ساخته شده از مواد ناهمگن با ثابت‌های ناهمگنی مختلف، با پوسته‌ی استوانه‌ای همگن مشابه قیاس می‌شود، نسبت سرعت در حالت غیرهمگن به همگن برای سرعت‌های بحرانی بدون بعد به‌دست می‌آید که در شکل‌های ۴-۱۰ تا ۴-۱۴ گزارش شده است. در شکل ۴-۱۰ و ۴-۱۱، که نمودار درصد اختلافی بر حسب نسبت R/h برای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی ترسیم شده است؛ مشاهده می‌شود که در استوانه‌های ناهمگن شعاعی، درصد اختلافی با تغییرات R/h، تغییری نمی‌کند اما در استوانه‌های ناهمگن طولی، درصد اختلافی نسبت به تغییرات R/h واکنش نشان می‌دهد و مخصوصاً در نسبت‌های R/h کمتر که مربوط به استوانه‌های ضخیم‌تر می‌باشد تغییرات بسیار بیشتری دارد و در محدوده‌ی پوسته‌های نازک‌تر تغییرات بسیار کمتری دارد. در شکل‌های ۴-۱۲ و ۴-۱۳ که نمودار درصد اختلافی بر حسب ثابت ناهمگنی برای نسبت‌های مختلف R/h رسم شده است، مشاهده می‌شود که با افزایش ثابت ناهمگنی (سفت‌تر شدن استوانه)، درصد اختلافی برای تمام نسبت‌های R/h افزایش می‌یابد، با این تفاوت که در استوانه‌های ناهمگن شعاعی، درصد اختلافی برای تمام نسبت‌های R/h با شیب یکسان افزایش یافته ولی در استوانه‌های ناهمگن طولی، درصد اختلافی برای نسبت‌های R/h بیشتر (یعنی پوسته‌های نازک‌تر)، با شیب کمتری نسبت به استوانه‌های با R/h کمتر، افزایش می‌یابد. همانطور که گفته شد، نسبت سرعت در حالت غیرهمگن به همگن، هم برای استوانه‌های ناهمگن طولی و هم برای استوانه‌های ناهمگن شعاعی، با افزایش ثابت ناهمگنی، زیاد می‌گردد. در شکل ۴-۱۵، قیاسی برای رشد این زیاد شدن، بین دو استوانه‌ی ناهمگن طولی و ناهمگن شعاعی، ارائه گردیده است.

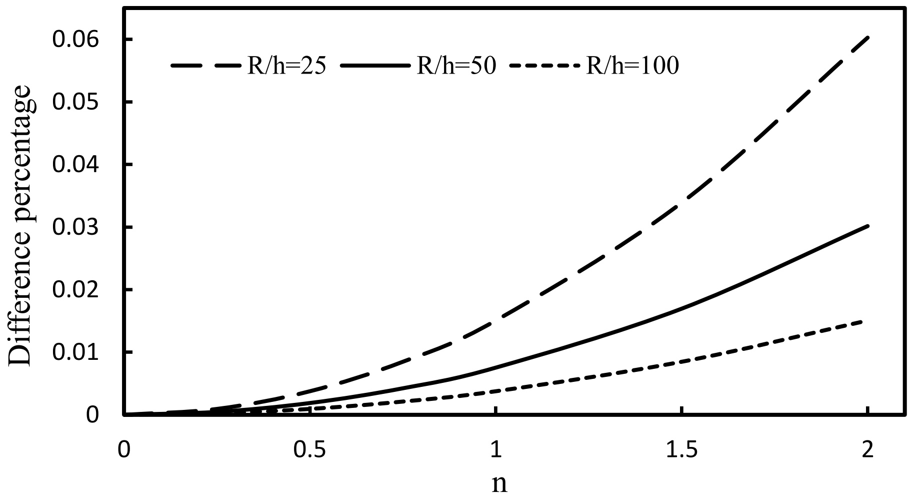
مشاهده می‌شود که برای پوسته‌های نازک ناهمگن طولی، شیب افزایش درصد اختلافی نسبت به استوانه‌ی همگن مشابه، بسیار کمتر از شیب افزایش درصد اختلافی پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن شعاعی است.



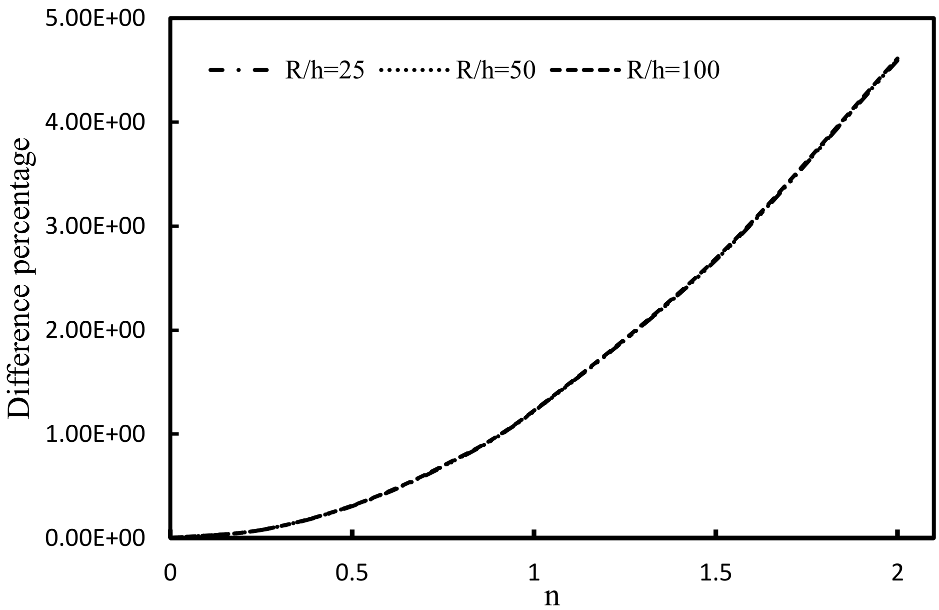
شکل ۴-۱۰: درصد اختلافی سرعت بحرانی بر حسب R/h برای استوانه ناهمگن شعاعی با تکیه‌گاه ساده



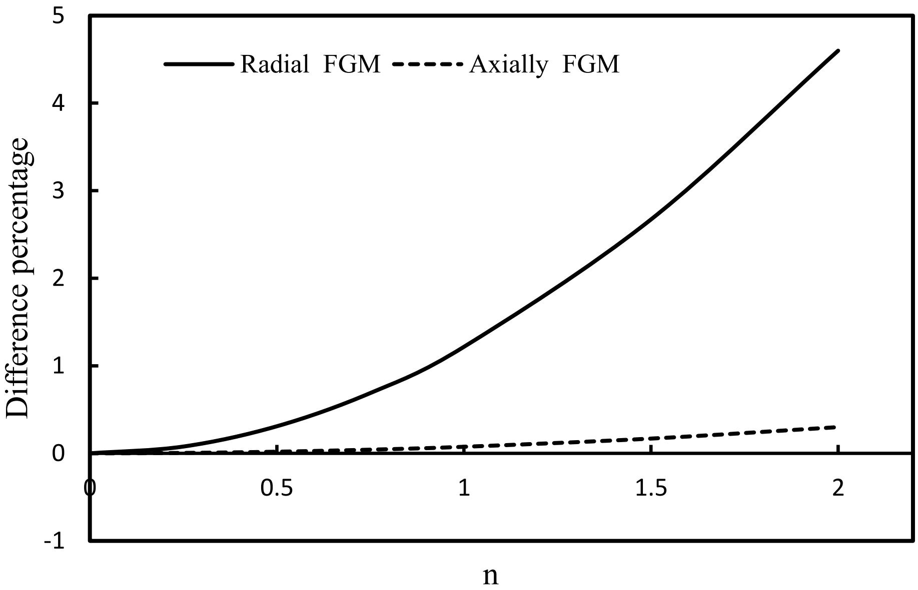
شکل ۴-۱۱: درصد اختلافی سرعت بحرانی بر حسب R/h برای استوانه ناهمگن طولی با تکیه‌گاه ساده



شکل ۴-۱۲: درصد اختلافی سرعت بحرانی بر حسب ثابت ناهمگنی برای استوانه ناهمگن طولی



شکل ۴-۱۳: درصد اختلافی سرعت بحرانی بر حسب ثابت ناهمگنی برای استوانه ناهمگن شعاعی

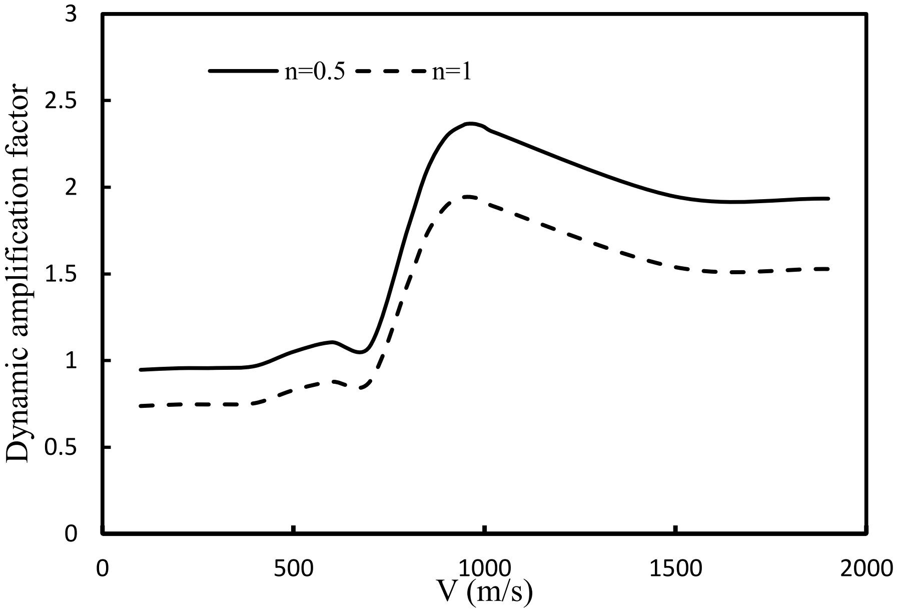


شکل ۴-۱۴: مقایسه‌ی درصد اختلافی سرعت بحرانی بر حسب ثابت ناهمگنی بین استوانه ناهمگن طولی و شعاعی

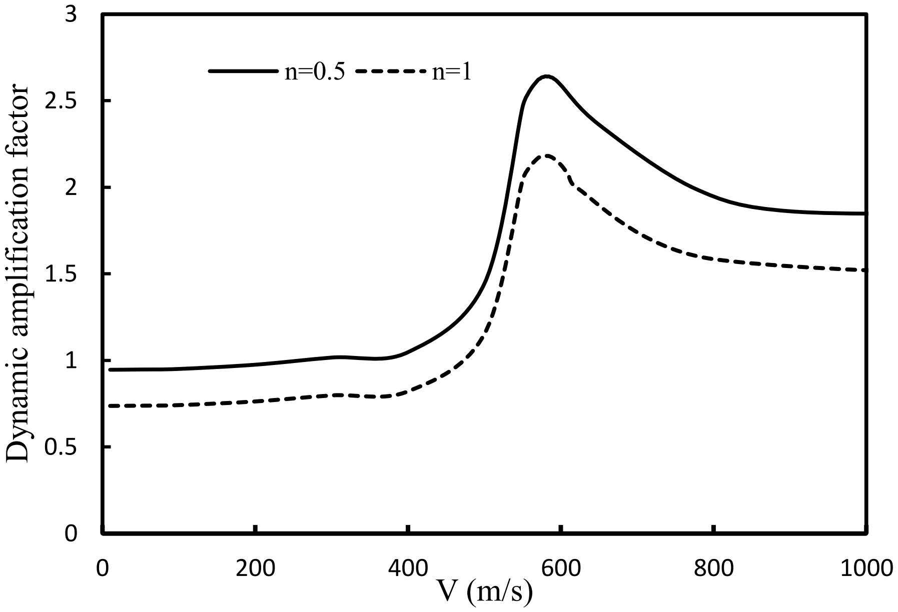
۴-۳-۴ پارامترهای مؤثر بر ضریب بار دینامیکی

ضریب تقویت یا ضریب بار دینامیکی برابر با نسبت بیشینه جابه‌جایی شعاعی در بارگذاری دینامیکی به جابه‌جایی شعاعی در بارگذاری استاتیکی می‌باشد. از آنجائیکه جابه‌جایی شعاعی در بارگذاری دینامیکی، تابعی از مکان و زمان است، در این پژوهش برای محاسبه‌ی ضریب بار، از موقعیت مکانی وسط پوسته استفاده شده است و در نتیجه جابه‌جایی شعاعی تابعی از زمان می‌شود که حداکثر مقدار آن، به‌عنوان بیشینه جابه‌جایی شعاعی در بارگذاری دینامیکی در نظر گرفته شده است. برای جابه‌جایی شعاعی استاتیکی نیز از رابطه‌ی (۳-۴۱) ارائه شده در فصل سوم برای پوسته‌های همگن و همسانگرد، استفاده شده است. ضریب تقویت یکی از راه‌های مناسب برای طراحی پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشار متحرک می‌باشد که مطابق با آن، طراح می‌تواند بار را با اطمینان مناسب در طراحی استاتیکی افزایش دهد. مهم‌ترین عامل تأثیرگذار در ضریب تقویت دینامیکی، سرعت حرکت بار متحرک می‌باشد. با توجه به اینکه در رابطه‌ی ضریب تقویت دینامیکی، عدد مربوط به مقدار فشار داخلی از صورت و مخرج کسر ساده می‌شود؛ بنابراین ضریب بار دینامیکی وابسته به شدت فشار داخلی نمی‌باشد. در این قسمت،

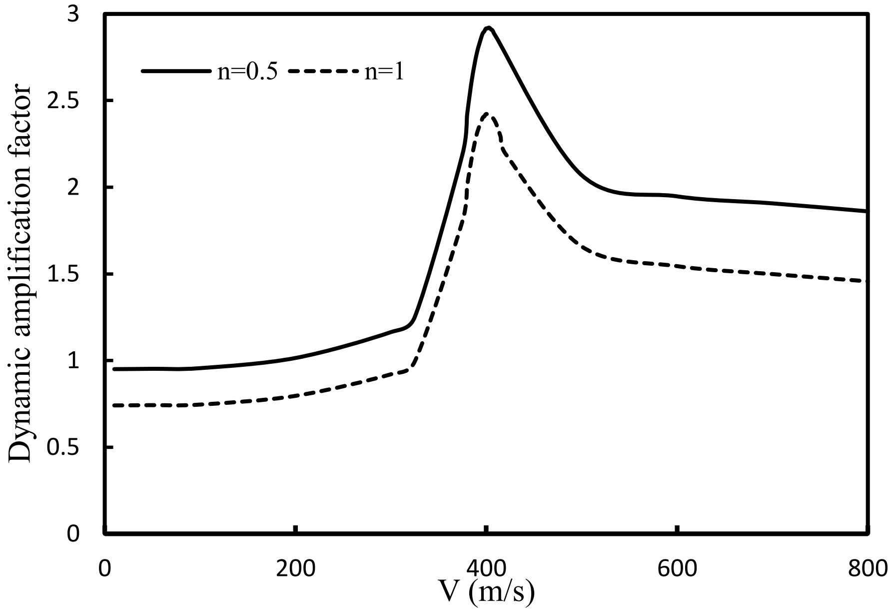
نمودارهای ضریب تقویت دینامیکی بر حسب سرعت حرکت بار متحرک ارائه گردیده و اثر پارامترهای هندسی و ثابت ناهمگنی بر ضریب تقویت دینامیکی که یکی از فاکتورهای مهم در طراحی می‌باشد، بررسی شده است. همانطور که در فصل سوم بیان شد، یکی از راه‌های تعیین سرعت بحرانی، نقطه‌ی بیشینه در نمودارهای ضریب تقویت بر حسب سرعت حرکت بار می‌باشد که در نمودارهای ارائه شده در این بخش، این سرعت بحرانی مشاهده می‌شود. شکل ۴-۱۵، شکل ۴-۱۶ و شکل ۴-۱۷ تغییرات ضریب بار دینامیکی بر حسب سرعت (متر بر ثانیه) را به ترتیب برای R/h=20، R/h=50 و R/h=100، به ازای دو ثابت ناهمگنی n=0.5 و n=1 نشان می‌دهد. همانطور که از هر سه نمودار مشاهده می‌شود، با افزایش سرعت حرکت بار متحرک، مقدارهای ضریب بار، تا نزدیکی محدوده‌ی سرعت بحرانی مقدار ثابتی داشته و ناگهان شیب زیادی گرفته و شروع به افزایش کرده و تا خود سرعت بحرانی به حداکثر مقدار خود می‌رسد و پس از آن کاهش یافته و به مقدار ثابتی میل می‌کند. همچنین مطابق با هر سه نمودار مشاهده می‌گردد که با افزایش ثابت ناهمگنی مقادیر ضریب تقویت کاهش می‌یابد یعنی مقدار ابتدایی و مقدار حداکثر و مقدار نهایی ضریب تقویت در ثابت ناهمگنی n=1، نسبت به موارد مشابه در ثابت ناهمگنی n=0.5، کمتر است و در نتیجه به این معنی است که با سفت‌تر شدن پوسته‌ی استوانه‌ای، تغییر شکل‌های پوسته‌ی استوانه‌ای کمتر می‌گردد. شکل ۴-۱۸ و شکل ۴-۱۹ تغییرات ضریب بار دینامیکی بر حسب سرعت (متر بر ثانیه) را به ترتیب برای ثابت‌های ناهمگنی n=0.5 و n=1 و برای نسبت‌های R/h=20، R/h=50 و R/h=100، نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که مقدار ضریب تقویت در سرعت‌های ابتدایی، برای هر سه نسبت R/h، یکسان است و با افزایش سرعت حرکت بار، پوسته‌های نازک‌تر با شیب بیشتری صعود می‌کنند و بعد از سرعت بحرانی نیز برای هر سه نسبت R/h ضریب تقویت به مقدار یکسانی میل می‌کند و تفاوت در این است که برای پوسته‌های با نسبت R/h بیشتر (پوسته‌های نازک‌تر)، مقدار حداکثر ضریب تقویت در سرعت کمتری رخ می‌دهد. به‌عنوان نتیجه‌ی دیگر، می‌توان مشاهده نمود که با افزایش نسبت R/h، مقدارهای حداکثر ضریب تقویت دینامیکی، افزایش می‌یابد که در شکل ۴-۲۰ نیز این نتیجه واضح است.



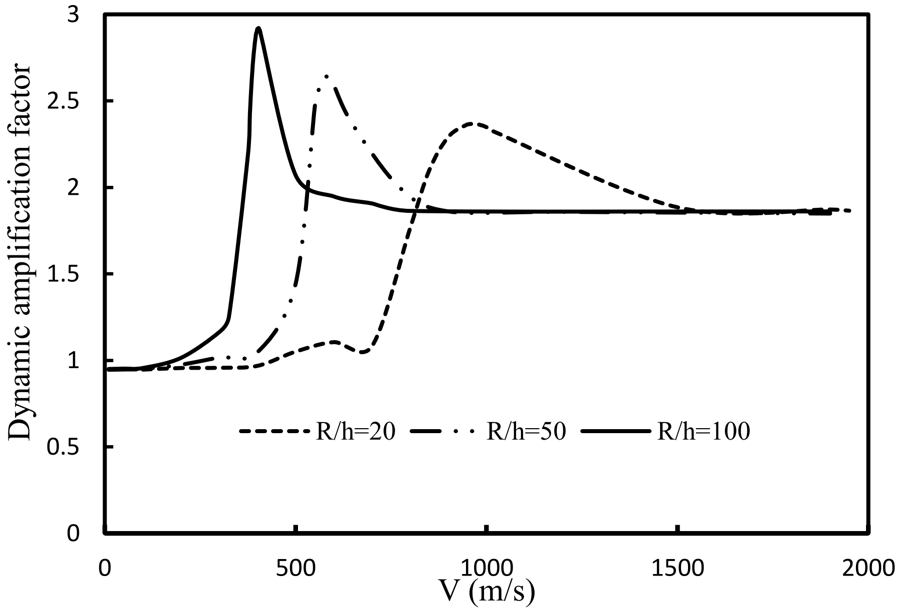
شکل ۴-۱۵: تغییرات ضریب تقویت دینامیکی بر حسب سرعت حرکت بار ازای نسبت R/h=20



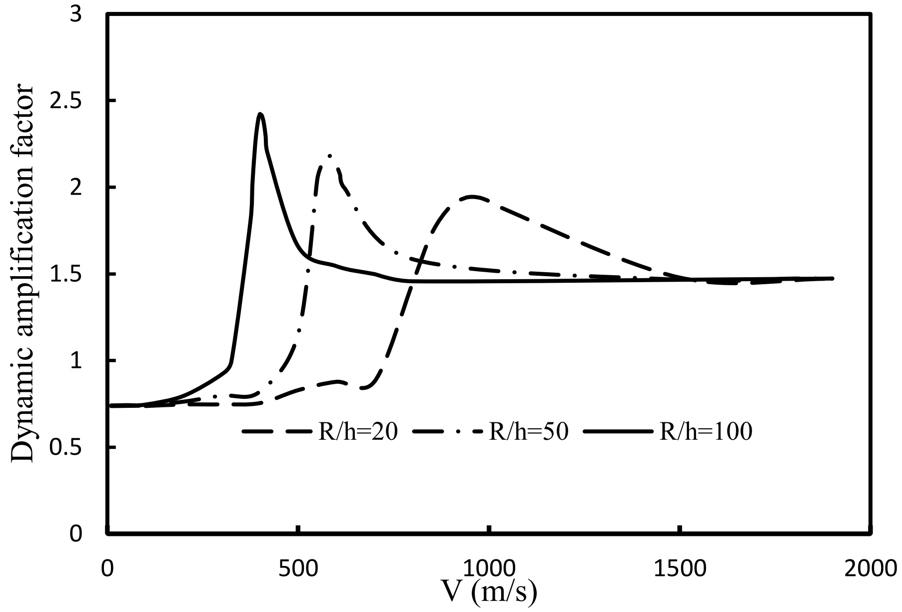
شکل ۴-۱۶: تغییرات ضریب تقویت دینامیکی بر حسب سرعت حرکت بار به ازای نسبت R/h=50



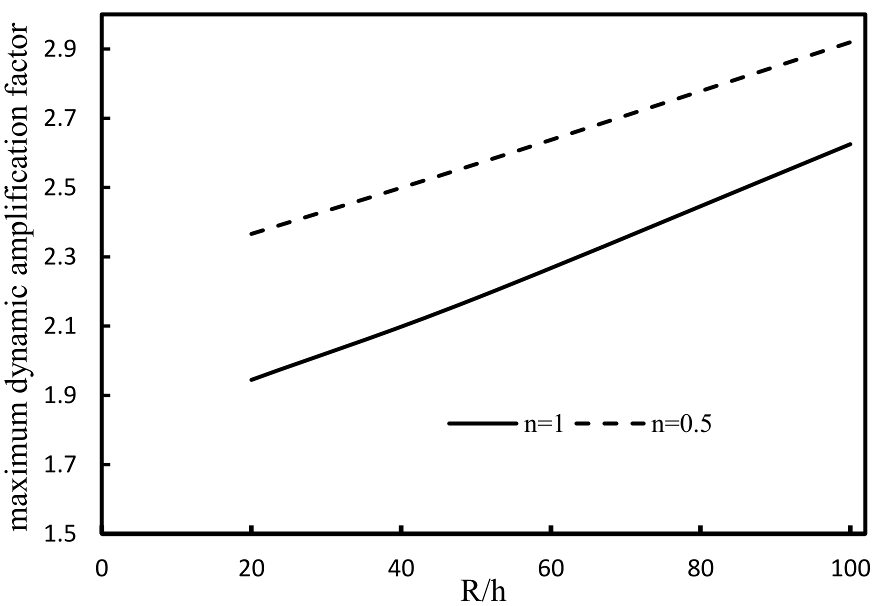
شکل ۴-۱۷: تغییرات ضریب تقویت دینامیکی بر حسب سرعت حرکت بار به ازای نسبت R/h=100



شکل ۴-۱۸: تغییرات ضریب تقویت دینامیکی بر حسب سرعت حرکت بار به ازای ثابت ناهمگنی n=0.5



شکل ۴-۱۹: تغییرات ضریب تقویت دینامیکی بر حسب سرعت حرکت بار به ازای ثابت ناهمگنی $n=1$

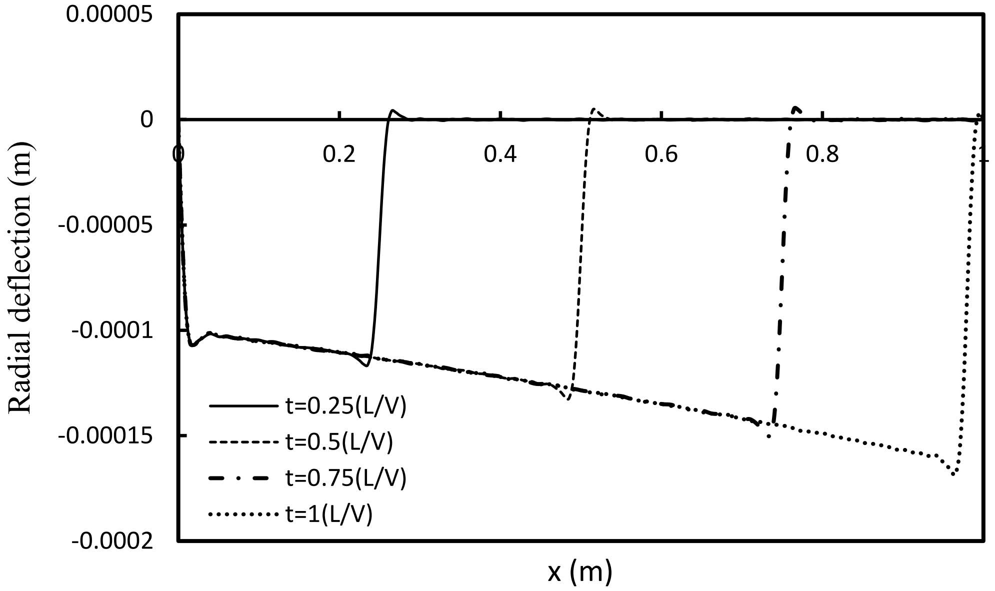


شکل ۴-۲۰: تغییرات حداکثر ضریب تقویت دینامیکی بر حسب نسبت R/h به ازای دو ثابت ناهمگنی مختلف

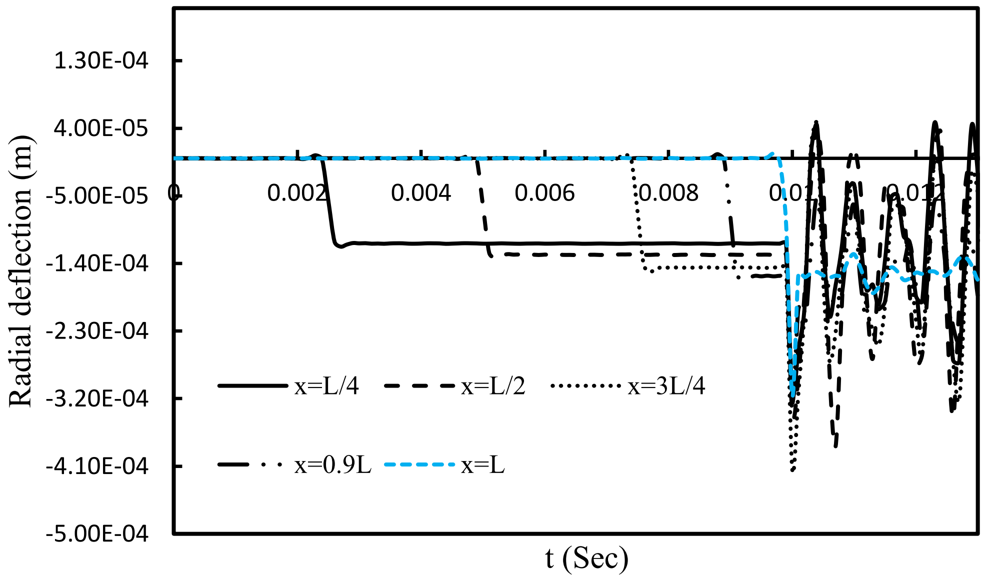
۴-۳-۵ پاسخ دینامیکی برحسب مکان و زمان

در این بخش، نتایج حاصل از حل تحلیلی مربوط به جابه‌جایی شعاعی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری تحت فشار داخلی متحرک با تکیه‌گاه ساده ارائه گردیده است و اثرات سرعت حرکت بار

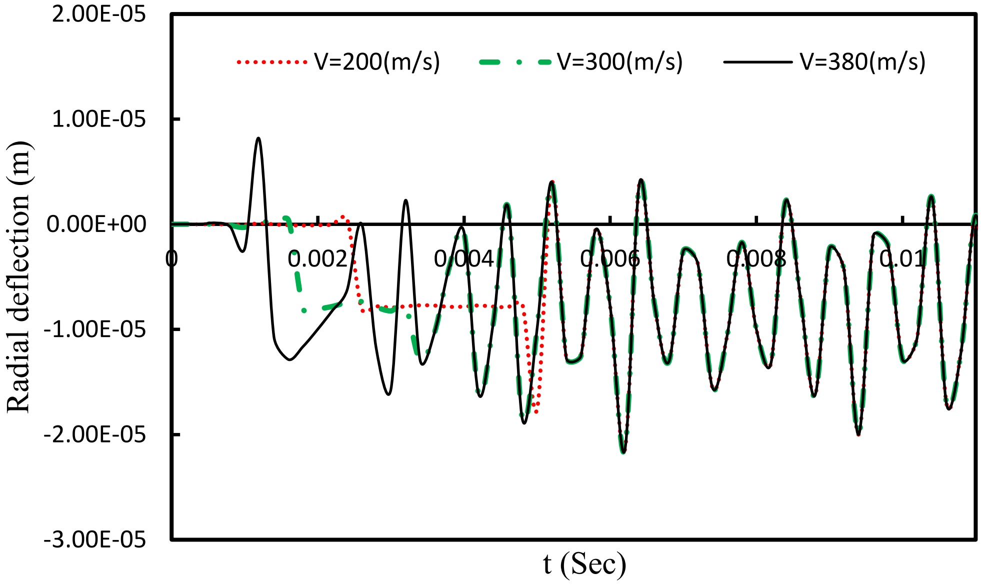
متحرک، شدت فشار و پارامترهای هندسی و مادّی بر پاسخ دینامیکی شعاعی بررسی شده است. شکل ۴-۲۱ و ۴-۲۲، به‌ترتیب توزیع جابه‌جایی شعاعی بر حسب موقعیت مکانی و توزیع جابه‌جایی شعاعی بر حسب زمان را برای پوسته‌های ناهمگن طولی و در حال عبور بار متحرک در طول پوسته، نشان می‌دهد. برای رسم این شکل‌ها، ثابت ناهمگنی n=-1، سرعت عبور بار متحرک V=100(m/s)، مقدار فشار داخلی q=2Mpa، L/R=10 و R/h=100، در نظر گرفته شده است. همان‌طور که از شکل ۴-۲۱ مشاهده می‌شود، وقتی بار در طول پوسته حرکت می‌کند، با توجه به ثابت ناهمگنی منفی که در نظر گرفته شد، به تدریج تغییر شکل پوسته افزایش می‌یابد که این نتیجه در نمودار پاسخ زمانی هم مشاهده می‌شود. همچنین در نمودار زمانی مشاهده می‌شود که تا لحظه‌ای که بار به انتهای پوسته می‌رسد که زمان 0.01 ثانیه است، استوانه تحت ارتعاش اجباری در معرض بار متحرک است و پس از عبور بار از طول پوسته، استوانه حول خیز نهایی که پیدا کرده است، تحت ارتعاش آزاد قرار گرفته و شروع به نوسان می‌کند. شکل ۴-۲۳ اثر سرعت را بر روی خیز شعاعی نشان می‌دهد. با افزایش سرعت نزدیک به سرعت بحرانی افزایش شدیدی در دامنه‌ی نوسانات مشاهده می‌گردد و خیز را به مقدار زیادی افزایش می‌دهد ولی در قسمت ارتعاشات آزاد که مربوط به بعد از عبور بار می‌باشد تغییری ایجاد نمی‌شود. شکل ۴-۲۴ اثر مقدار فشار داخلی متحرک را بر خیز شعاعی نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش مقدار فشار داخلی، جابه‌جایی شعاعی افزایش یافته و دامنه‌ی نوسانات بعد از عبور بار نیز افزایش می‌یابد. شکل ۴-۲۵ و شکل ۴-۲۶، اثر ثابت ناهمگنی را به ترتیب بر پاسخ زمانی و مکانی، نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ثابت ناهمگنی از n=-0.5 تا n=+0.5 که در واقع به معنی سفت‌تر شدن تدریجی استوانه در طول پوسته می‌باشد، جابه‌جایی شعاعی کمتر می‌گردد.



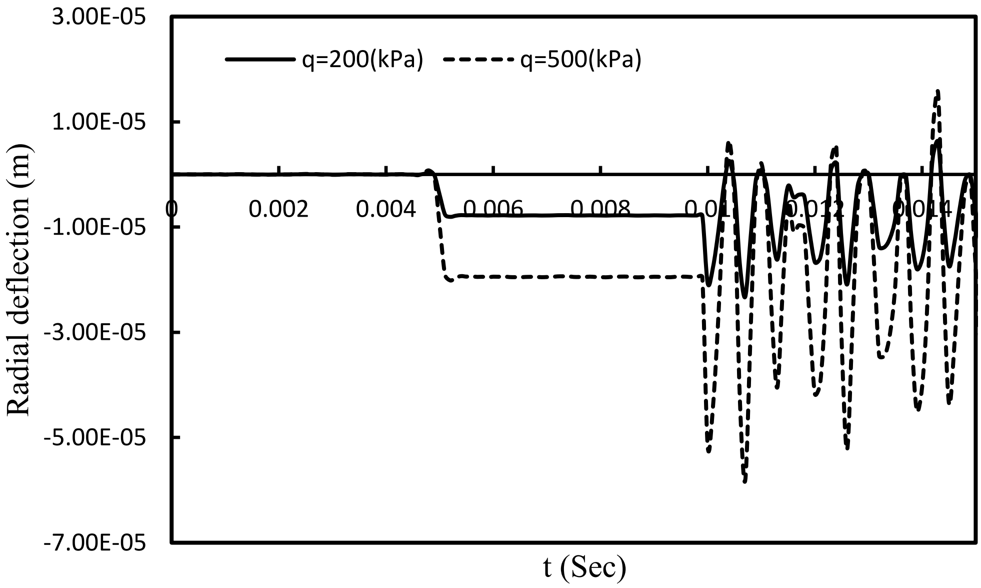
شکل ۴-۲۱: پاسخ مکانی استوانه ناهمگن طولی با تکیه‌گاه ساده به ازای ثابت ناهمگنی $n = -1$



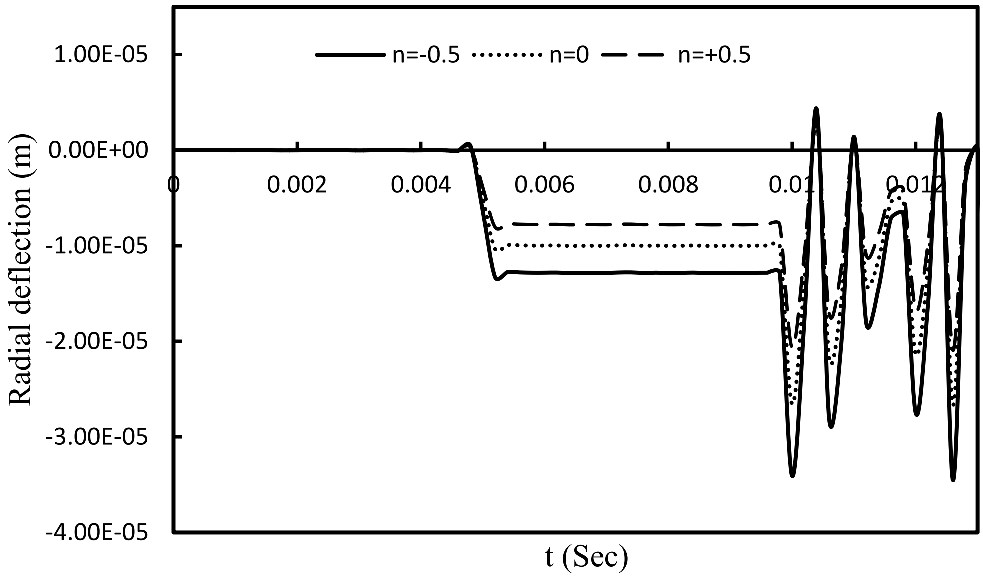
شکل ۴-۲۲: پاسخ زمانی استوانه ناهمگن طولی با تکیه‌گاه ساده به ازای ثابت ناهمگنی $n = -1$



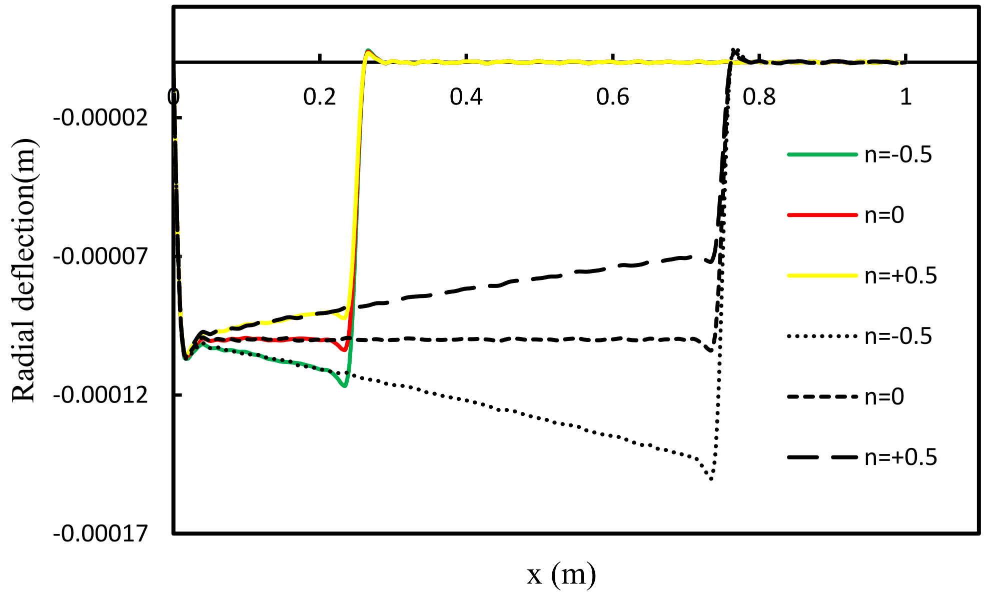
شکل ۴-۲۳: پاسخ زمانی استوانه ناهمگن طولی به ازای مقادیر مختلف سرعت (n=0.5، q=0.2Mpa ، L/R=10 و R/h=100)



شکل ۴-۲۴: پاسخ زمانی استوانه ناهمگن طولی به ازای مقادیر مختلف شدت فشار داخلی (n=0.5، V=100(m/s) ، L/R=10 و R/h=100)

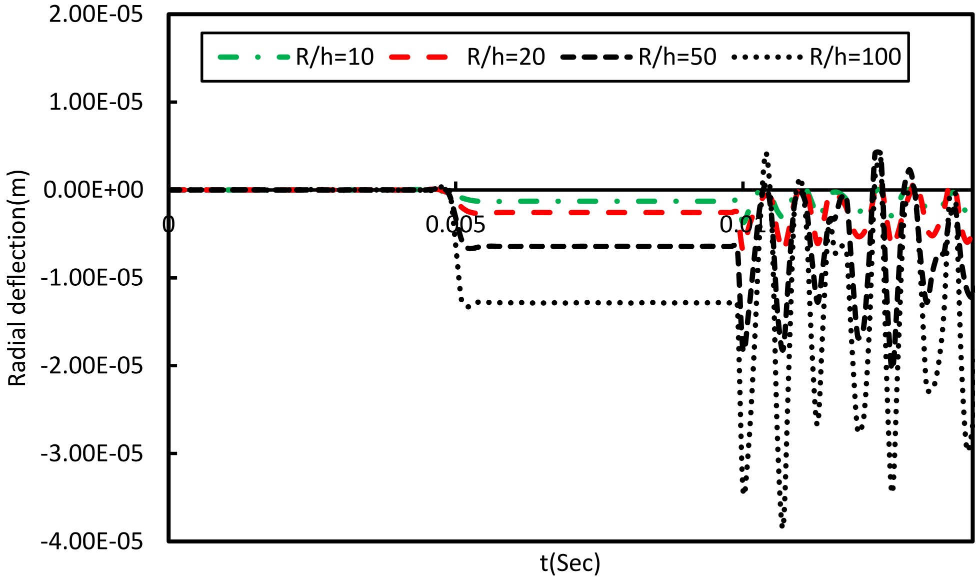


شکل ۴-۲۵: پاسخ زمانی استوانه ناهمگن طولی به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی (q=0.2Mpa ، V=100(m/s) ، L/R=10 و R/h=100)



شکل ۴-۲۶: پاسخ مکانی استوانه ناهمگن طولی به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی در دو لحظه‌ی مختلف (q=0.2Mpa ، V=100(m/s) ، L/R=10 و R/h=100)

شکل ۴-۲۷ اثر تغییرات ضخامت را بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که هرچه پوسته نازک‌تر می‌شود تغییر شکل‌ها افزایش یافته و بعد از عبور بار از پوسته نیز دامنه‌ی نوسانات ارتعاش آزاد افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۲۷: پاسخ زمانی استوانه ناهمگن طولی به ازای مقادیر مختلف R/h (q=0.2Mpa ، V=100(m/s) ، $L/R=10$ و $n=-0.5$)

۴-۴- جمع بندی

در این فصل، به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل سوم پرداخته شد. نتایج مربوط به فرکانس طبیعی و تأثیر پارامترهای مختلف بر روی آن بررسی شد. همچنین تأثیر پارامترهای مختلف بر روی سرعت بحرانی و ضریب بار دینامیکی نشان داده شد و نتایج آن‌ها با نتایج مراجع و روش المان محدود ارزیابی شد که مطابقت بسیار خوبی با هم داشتند و در نهایت، پاسخ دینامیکی پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک بر حسب مکان و زمان تعیین شد.

فصل ۵   نتیجه گیری و پیشنهادها

۵-۱- مقدمه

در این پژوهش، به تحلیل فرکانسی و تحلیل دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد، با تغییرات تدریجی خواص مواد در راستای محوری استوانه، تحت بارگذاری فشار داخلی متحرک، پرداخته شد. در ابتدا بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، معادله‌های حاکم بر ارتعاشات خطی استوانه استخراج شد. این معادله‌ها شامل دو معادله‌ی دیفرانسیلی با مشتقات جزئی نسبت به متغیّرهای زمان و مکان و با ضرایب متغیّر نسبت به موقعیت مکان بوده و به‌کمک اصل همیلتون تعیین شدند. در تعیین حل این دستگاه معادله از تئوری بسط مدهای ویژه استفاده شد. فرکانس‌های طبیعی برای پارامترهای هندسی و مادی و شرایط مرزی مختلف مورد ارزیابی با مراجع موجود و نرم‌افزار انسیس قرار گرفتند و در همه‌ی موارد نتایج بسیار خوبی به‌دست آمدند. در ادامه با اعمال بارگذاری فشار داخلی متحرک، سرعت بحرانی، ضریب بار دینامیکی و پاسخ زمانی و مکانی برای پارامترهای هندسی و مادی مختلف مورد ارزیابی و بررسی قرار گرفت.

۵-۲- نتایج

نتایج پژوهش حاضر به شرح زیر می‌باشد.

۱. افزایش نسبت شعاع لایه میانی به ضخامت پوسته (R/h)، در محدوده‌ی پوسته‌های نازک (20<R/h<1000)، تغییراتی در مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته‌های استوانه‌ای همگن و ناهمگن طولی ندارد ولی افزایش نسبت R/h در محدوده‌ی پوسته‌های نسبتاً ضخیم و پوسته‌های ضخیم (R/h<20)، موجب کاهش در مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته‌های استوانه‌ای همگن و ناهمگن طولی می‌شود.

۲. افزایش نسبت لاغری (L/R)، موجب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد در پوسته‌های استوانه‌ای همگن و ناهمگن طولی می‌شود. برای نسبت‌های لاغری کوچک‌تر، روند کاهش فرکانس بیشتر است و با افزایش نسبت لاغری فرکانس طبیعی تقریبا به یک مقدار ثابت میل می‌کند.

۳. در پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد، با تغییرات تدریجی خواص مواد در راستای محوری استوانه، با افزایش ثابت ناهمگنی (n) در جهت محوری استوانه (سفت‌تر شدن تدریجی پوسته در راستای محوری)، فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد.

۴. فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد مربوط به استوانه با شرط مرزی دو سر گیردار، بیشتر از فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد مربوط به استوانه با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده است.

۵. مقدار سرعت‌های بحرانی بی‌بعد پوسته‌های استوانه‌ای همگن، ناهمگن شعاعی و ناهمگن طولی، با افزایش نسبت لاغری (L/R)، بدون تغییر می‌باشد.

۶. مقدار سرعت‌های بحرانی بی‌بعد پوسته‌های استوانه‌ای همگن، ناهمگن شعاعی و ناهمگن طولی با افزایش نسبت‌های R/h (نازک‌تر شدن پوسته)، کاهش می‌یابد.

۷. در پوسته‌های استوانه‌ای همگن، ناهمگن شعاعی و ناهمگن طولی، افزایش ثابت ناهمگنی در جهت محوری استوانه (سفت‌تر شدن تدریجی پوسته در راستای محوری)، موجب کاهش سرعت‌های بحرانی بی‌بعد می‌شود.

۸. در پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن طولی، افزایش ثابت ناهمگنی، موجب کاهش ضریب تقویت دینامیکی می‌شود.

۹. در پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن طولی، کاهش ثابت ناهمگنی در جهت محوری استوانه، موجب افزایش تدریجی جابه‌جایی شعاعی پوسته می‌شود.

۱۰. در پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن طولی با نسبت R/h بیشتر، تغییر شکل‌ها افزایش یافته و بعد از عبور بار از پوسته نیز دامنه‌ی نوسانات ارتعاش آزاد افزایش می‌یابد.

۱۱. افزایش سرعت عبور بار متحرک نزدیک به سرعت بحرانی، موجب افزایش شدیدی در دامنه‌ی نوسانات پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن طولی شده و خیز را به مقدار زیادی افزایش می‌دهد. در

قسمت ارتعاشات آزاد که مربوط به بعد از عبور بار می‌باشد، با افزایش سرعت عبور بار متحرک تغییری ایجاد نمی‌شود.

۵-۳- پیشنهادها

به منظور توسعه‌ی پژوهش حاضر، موارد زیر قابل بررسی و مطالعه هستند.

۱. استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه‌های بالاتر.
۲. استفاده از روابط کرنش-جابه‌جایی (سینماتیک) غیرخطی.
۳. غیر خطی در نظر گرفتن رفتار ماده (جامد غیر هوکی).
۴. بررسی پاسخ سیستم تحت فشار متغیر با زمان.
۵. بررسی دینامیکی پوسته استوانه‌ای متحرک با سرعت متغیّر با زمان.
۶. بررسی پاسخ سیستم تحت بار محوری.
۷. استفاده از توابع دیگر برای مدل‌سازی مواد ناهمگن مانند تابع توانی و تابع ردی.
۸. در نظر گرفتن ماده به‌صورت ویسکو الاستیک.
۹. در نظر گرفتن ماده FG دو جهته با تغییرات تدریجی خواص در دو راستای طولی و شعاعی.
۱۰. استفاده از روش حل تئوری اغتشاشات با پارامتر بزرگ برای تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مود پوسته‌ی استوانه‌ای.
۱۱. بررسی اثر شرایط مرزی مختلف بر پاسخ دینامیکی، سرعت بحرانی و ضریب تقویت دینامیکی.
۱۲. حل برای سایر پوسته‌های پرکاربرد مانند کره و مخروط.
۱۳. وارد کردن گشودگی و یا ترک در مسأله

پیوست الف- ویژگی‌ها، تاریخچه و فرآیندهای تولید مواد FG

الف-۱ ویژگی‌های مواد FG

مواد ناهمگن FG در مقایسه با مواد همگن (ایزوتروپ‌ها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها) دارای ویژگی-هایی به شرح زیر می‌باشند [۴۶]:

۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا: در حقیقت این گونه مواد با کاهش تنش‌های حرارتی، آثار منفی آن‌ها را به‌نحو قابل توجهی کاهش می‌دهند. به‌کمک مواد FG می‌توان در ناحیه‌هایی که تنش‌های حرارتی به حالت بحرانی می‌رسند، آن‌ها را کنترل کرد.

۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا: به‌کمک مواد FG می‌توان استحکام مواد را افزایش داد تا از ورود اجسام به ناحیه‌ی مومسان و حتی شکست[۱]، تا حدود زیادی جلوگیری شود.

۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد FG، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام، به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود؛ مانند لبه‌های جسم و نزدیکی سوراخ‌ها و گشودگی‌ها. به‌کمک مواد FG می‌توان آثار تمرکز تنش را به‌صورت چشم‌گیری کاهش داد.

۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد هدفمند FG است.

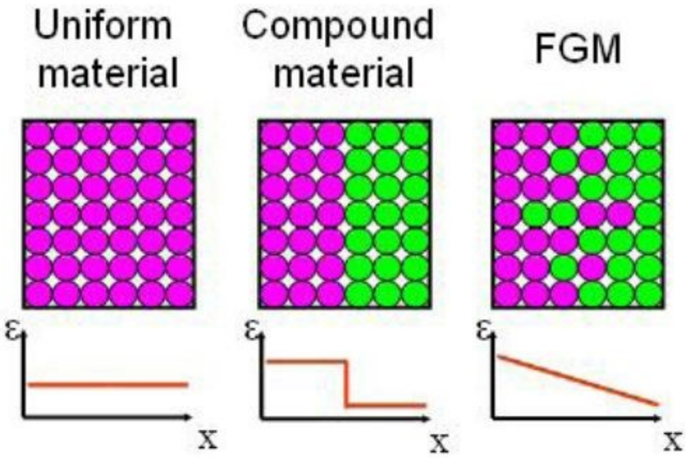
۵- اگر پوشش ترد[۲] بر روی مواد نرم، به‌صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به‌کمک مواد FG، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد FG، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود؛ در صورتی‌که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به‌عنوان مثال، هنگامی که مواد کامپوزیت در

[۱] Fracture

[۲] Brittle Coating

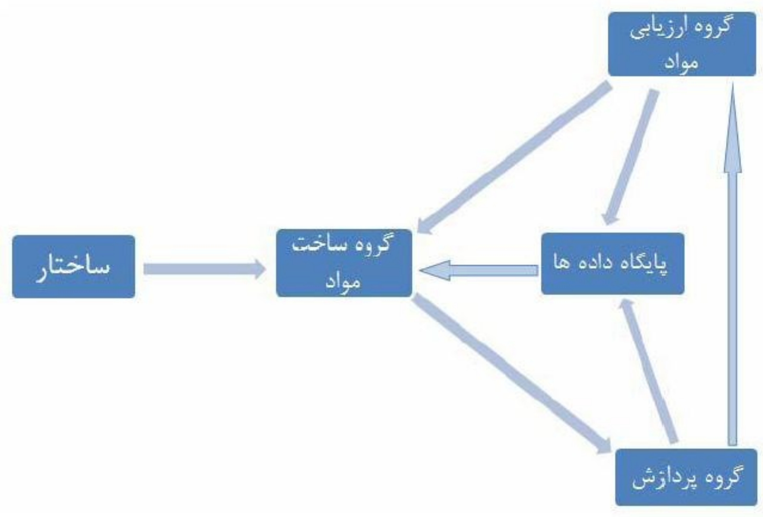
معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند؛ ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد FG، به‌دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل الف-۱، مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و مواد FG را نشان می‌دهد.



شکل الف-۱: مقایسه‌ی تغییرات خواص در مواد مختلف [۴۶]

الف-۲ تاریخچه‌ی مواد FG

مفهوم اولیه‌ی FGM توسط نینو و همکارانش در ۱۹۸۴ در سازمان هوا و فضای ژاپن مطرح و از ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید FGM در این کشور شروع شد [۴۷] و [۴۸]. مرحله‌ی اول پروژه‌ی ملی (فناوری گسترش FGM) طی سال‌های ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد. در این پروژه، سه گروه ساخت مواد، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به‌گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضا شود.

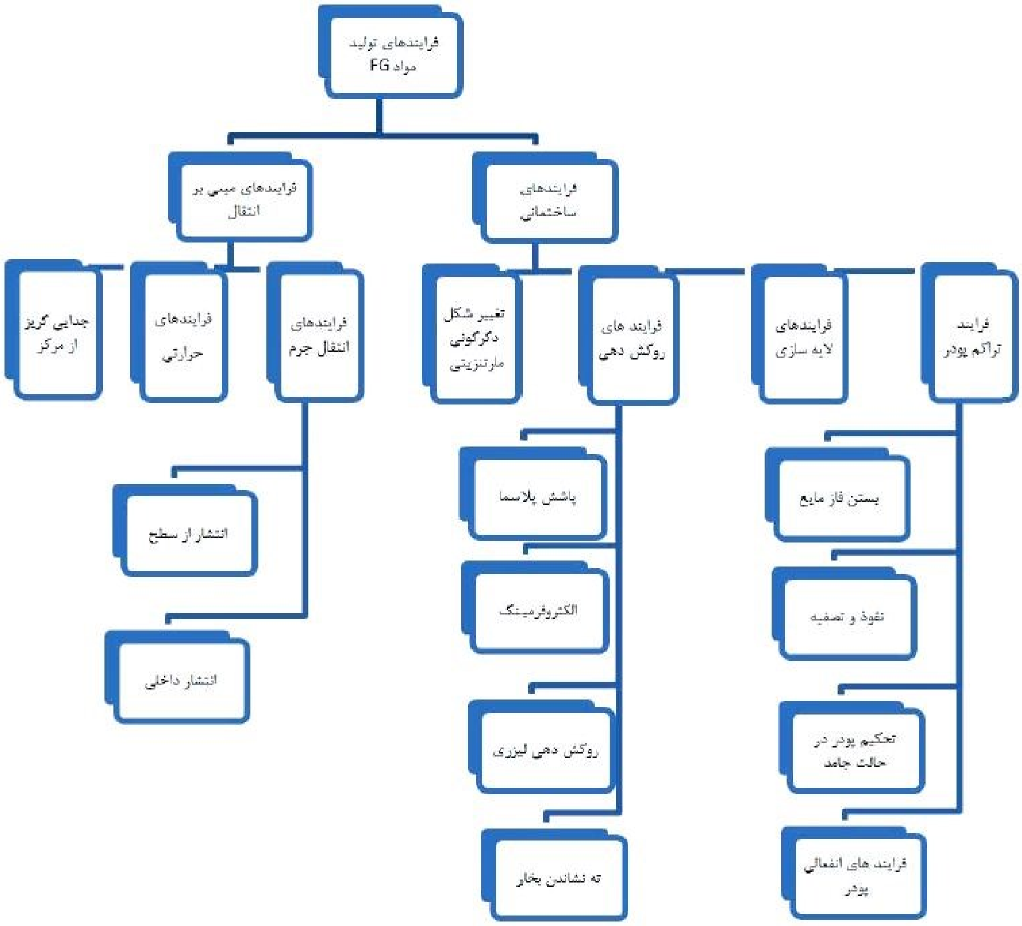


شکل الف-۲: ساختار گروه‌های پروژه‌ی ساخت FGM در ژاپن[۴۸]

پس از دست‌یابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلی‌متر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ درجه‌ی کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ درجه‌ی کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند. مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلی‌متر برای استفاده در قسمت پایینی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلی‌متر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد [۴۸]. دومین سمپوزیوم جهانی FGM، در ۱۹۹۲ برگزار شد و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به ویژه تحلیل سازه‌های FGM فراگیر شد.

الف-۳ فرآیندهای تولید مواد FG

تاکنون فرآیندهای تولید مواد FG در محدوده‌ی آزمایشگاه‌های تخصصی بوده و هنوز روش تولید نیمه-صنعتی با صرفه‌ی اقتصادی ارائه نشده است. به‌طور کلی روش‌های تولید موجود را می‌توان به دو گروه عمده تقسیم کرد [۴۶].



شکل الف-۳: دسته‌بندی روش‌های گوناگون تولید مواد FG [۴۶]

گروه اول: فرآیندهای تولید مواد FG به‌صورت لایه‌لایه، که به آن فرآیندهای ساختمانی می‌گویند. این نوع فرآیندها، نتیجه‌ای از پیشرفت‌های شگرف انجام شده در زمینه‌ی اتوماسیون ساخت مواد پیشرفته می‌باشد. در فرآیندهای ساختمانی، تغییرات تدریجی توسط انباشته‌شدن مواد با یک روش برنامه‌ریزی شده انجام می‌شود. با روش‌های ساخت در این گروه، مدل‌های مواد FG را می‌توان به هر شکل و یا هرگونه تغییرات دلخواهی سازگار کرد. به‌همین دلیل هیچ‌گونه محدودیتی در چگونگی تغییرات تدریجی وجود ندارد. این نکته موجب انعطاف‌پذیری در طراحی می‌شود. با وجود نکات مثبت فراوان این روش‌ها، تولید مواد FG با آن‌ها، بسیار پرهزینه، وقت‌گیر و دشوار است که با افزایش دقت، مشکلات آن چند برابر می‌شوند. در شکل الف-۳، روش‌های این گروه نشان داده شده است.

گروه دوم: فرآیندهای تولید مواد FG مبتنی بر پدیده‌ی انتقال برای ایجاد تغییرات تدریجی در یک جز

از مواد می‌باشند. این نوع فرآیندها از جریان سیال، انتشار اتمی یا انتقال حرارت برای تولید تغییرات تدریجی در ریزساختارهای محلی یا ترکیب‌های موجود بهره می‌گیرند. جریان سیال و انتشار حالت جامد در طول فرآیند جامدسازی، پاسخ‌گوی تفکیک کریستال‌ها در ساخت مواد آلیاژی می‌باشد. به این ترتیب به گونه‌ای دیگر، روش‌هایی برای ایجاد تغییرات تدریجی به‌دست می‌آیند. روش‌های تولید فرآیند انتقال، انعطاف‌پذیری روش‌های تولید فرآیندهای ساختمانی را ندارند، ولی می‌توان گفت که از لحاظ زمان و هزینه، بسیار مناسب‌تر از روش‌های گروه اول می‌باشند.

منابع

[1] A. C. Ugural, “Stresses in plates and shells,” McGraw-Hill Science Engineering, 1999.

[۲] قارونی ح.، (۱۳۹۰)، " تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی مدول الاستیسیته به‌کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، ص‌ص ۲۴-۲۱.

[۳] ترکمان اسدی م.ع.، (۱۳۹۲)، " تحلیل پایداری و ارتعاشات یک نوع نانو موتور خاص بر اساس معادلات پوسته استوانه‌ای و تئوری الاستیسیته غیر موضعی "، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، ص۴۷.

[4] A. W. Leissa, “Vibration of shells,” Acoustical Society of America, New York, 1993.

[5] T. E. Simkins, “Amplification of Flexural Waves in Gun Tubes,” *J. Sound Vib.*, vol. 172, no. 2, pp. 145–154, Apr. 1994.

[6] T. E. Simkins, G. A. Pflegl, and E. G. Stilson, “Dynamic Strains in a 60-mm Gun Tube - An Experimental Study.” 1992.

[7] T. E. Simkins, “The Influence of Transient Flexural Waves on Dynamic Strains in Cylinders,” *J. Appl. Mech.*, vol. 62, no. 1, p. 262, 1995.

[8] J. P. Jones and P. G. Bhuta, “Response of Cylindrical Shells to Moving Loads,” *J. Appl. Mech.*, vol. 31, no. 1, p. 105, 1964.

[9] S. Tang, “Dynamic Response of a Tube Under Moving Pressure,” *J. Eng. Mech.*, vol. 91, no. 5, pp. 97–122, 1965.

[10] H. Reismann, “Response of a pre-stressed cylindrical shell to moving pressure load,” In Eighth Midwest Mechanics Conference, pp. 349–363. Pergamon, New York, 1965.

[11] L. Fryba, “Vibrations of Solids and Structures Under Moving Load,” Th ed., Academia Prague, 1999.

[12] S. G. Lekhnitskii, “Theory of Elasticity of an Anisotropic Body.” Mir Pub., 1981.

[13] Y. Obata and N. Noda, “Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of a Functionally Gradient Material,” *J. Therm. Stress.*, vol. 17, no. 3, pp. 471–487, Jan. 1994.

[14] C. O. Horgan and A. M. Chan, “The Pressurized Hollow Cylinder or Disk Problem for Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Materials,” *J. Elast.*, vol. 55, no. 1, pp. 43–59, 1999.

[15] Y. Y. Yang, “Time-dependent stress analysis in functionally graded materials,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 37, no. 51, pp. 7593–7608, 2000.

[16] N. Tutuncu and M. Ozturk, “Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 32, no. 8, pp. 683–686, 2001.

[17] J. Q. Tarn, “Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 38, no. 46, pp. 8189–8206, 2001.

[18] A. N. Eraslan and T. Akis, “On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems,” *Acta Mech.*, vol. 181, no. 1–2, pp. 43–63, Jan. 2006.

[19] Z. Shi, T. Zhang, and H. Xiang, “Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders,” *Compos. Struct.*, vol. 79, no. 1, pp. 140–147, 2007.

[20] G. N. Praveen and J. N. Reddy, “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 35, no. 33, pp. 4457–4476, Nov. 1998.

[21] N. Tutuncu and B. Temel, “A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres,” *Compos. Struct.*, vol. 91, no. 3, pp. 385–390, 2009.

[22] Z. S. Shao and G. W. Ma, “Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature,” *Compos. Struct.*, vol. 83, no. 3, pp. 259–265, 2008.

[23] N. Tutuncu, “Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties,” 2007.

[24] I. Keles and C. Conker, “Transient hyperbolic heat conduction in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties,” *Eur. J. Mech. - A/Solids*, vol. 30, no. 3, pp. 449–455, 2011.

[25] A. E. H. Love, “The Small Free Vibrations and Deformation of a Thin Elastic Shell,” *Philos. Trans. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 179, no. 0, pp. 491–546, Jan. 1888.

[26] R. N. Arnold and G. B. Warburton, “Flexural Vibrations of the Walls of Thin Cylindrical Shells Having Freely Supported Ends,” *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 197, no. 1049, pp. 238–256, Jun. 1949.

[27] R. N. Arnold and G. B. Warburton, “The flexural vibrations of thin cylinders,” *Arch. Proc. Inst. Mech. Eng. 1847-1982 (vols 1-196)*, vol. 167, no. 1953, pp. 62–80, Jan. 1953.

[28] M. Ruzzene and A. Baz, “Dynamic stability of periodic shells with moving loads,” *J. Sound Vib.*, vol. 296, no. 4–5, pp. 830–844, 2006.

[29] S. Kandasamy and A. V Singh, “Transient vibration analysis of open circular cylindrical shells,” *J. Vib. Acoust. Asme*, vol. 128, no. 3, pp. 366–374, 2006.

[30] S. M. Hasheminejad and M. Komeili, “Dynamic response of a thick functionally graded,” vol. 221, pp. 1545–1556, 2015.

[31] J. Zhou, Z. Deng, T. Liu, and X. Hou, “Elastic structural response of prismatic metal sandwich tubes to internal moving pressure loading,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 46, no. 11–12, pp. 2354–2371, 2009.

[32] G. G. Sheng and X. Wang, “Studies on dynamic behavior of functionally graded cylindrical shells with PZT layers under moving loads,” *J. Sound Vib.*, vol. 323, no. 3–5, pp. 772–789, 2009.

[33] S. M. Hasheminejad and A. Rafsanjani, “Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick FGM plate strips under Moving Line Loads,” *Mech. Adv. Mater. Struct.*, vol. 16, no. 6, pp. 417–428, 2009.

[34] M. Şimşek and T. Kocatürk, “Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load,” *Compos. Struct.*, vol. 90, no. 4, pp. 465–473, 2009.

[35] A. H. Sofiyev, “Dynamic response of an FGM cylindrical shell under moving loads,” *Compos. Struct.*, vol. 93, no. 1, pp. 58–66, 2010.

[36] M. Şimşek, “Vibration analysis of a single-walled carbon nanotube under action of a moving harmonic load based on nonlocal elasticity theory,” *Phys. E Low-Dimensional Syst. Nanostructures*, vol. 43, no. 1, pp. 182–191, 2010.

[37] A. H. Sofiyev, H. M. Halilov, and N. Kuruoglu, “Analytical solution of the dynamic behavior of non-homogenous orthotropic cylindrical shells on elastic foundations under moving loads,” *J. Eng. Math.*, vol. 69, no. 4, pp. 359–371, 2011.

[38] P. Malekzadeh and Y. Heydarpour, “Response of functionally graded cylindrical shells under moving thermo-mechanical loads,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 58, pp. 51–66, 2012.

[39] M. Şimşek, T. Kocatürk, and Ş. D. Akbaş, “Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load,” *Compos. Struct.*, vol. 94, no. 8, pp. 2358–2364, 2012.

[40] R. D. Firouz-Abadi, M. A. Torkaman-Asadi, and M. Rahmanian, “Whirling frequencies of thin spinning cylindrical shells surrounded by an elastic foundation,” *Acta Mech.*, vol. 224, no. 4, pp. 881–892, 2013.

[41] C. Du, Y. Li, and X. Jin, “Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 78, pp. 26–36, 2014.

[42] M. Z. Nejad, M. Jabbari, and M. Ghannad, “Elastic analysis of FGM rotating thick truncated conical shells with axially-varying properties under non-uniform pressure loading,” *Compos. Struct.*, vol. 122, pp. 561–569, 2015.

[43] M. Simsek, “Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions,” *Compos. Struct.*, vol. 133, pp. 968–978, 2015.

[44] S. S. Rao, “Vibration of continuous systems,” John Wiley & Sons, 2007.

[45] P. M. Ogibalov, M. A. Koltunov, “Shells and Plates,” Izd Moscow Univ, Moscow, 1969.

[46] S. Suresh and A. Mortensen, “Fundamentals of Functionally Graded Materialses,” Cambridge Pub., London, 1998.

[47] M. Koizumi and M. Niino, “Overview of FGM Research in Japan,” *MRS Bull.*, vol. 20, no. 01, pp. 19–21, Jan. 1995.

[48] M. Koizumi, “FGM activities in Japan,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 28, no. 1–2, pp. 1–4, Jan. 1997.

Abstract

In present study, dynamic analysis and free vibration of thin cylindrical shells are presented. The problem is considered to be axisymmetric and thickness of cylinder is constant. Cylindrical shell is made up of heterogeneous and isotropic material, with variable properties through the axial directin according to the exponential law, and obeys linear elastic constitutive equations. As a common assumption, Poisson's ratio is supposed to be constant throughout the shell. Equations of motion are derived by using classical thin shell theory. The kinematic of problem is according to the linear strain-displacement relation. The governing equations are derived by using Hamilton's principle. In frequency analysis, boundary conditions are simply-support and clamp and in dynamic analysis, just simply-support boundary condition are investigated. The cylinder is under moving internal pressure with constant velocity. The governing equations form a coupled system of linear partial differential equations with variable coefficient. The expansion theoy of eigenmodes and modal analysis has been applied to obtain analytical solution. Also, the parametric finite element modeling of the problem is done by using ANSYS Parametric Design Language (APDL).the effects of variations of cylinder's geometric, heterogeneity and loading parameters upon dynamic response, critical velocity, dynamic loading factor and natural frequencies of the shell are studied. The results are validated and compared with those in literature and those obtained from the finite elements method (FEM).

Keywords

Thin-walled cylindrical shell, Moving load, Classical thin shell theory, vibration analysis, Expansion theory of eigenmodes, Functionally Graded Material with Axially varying propertis, Finite elements method

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

Dynamic analysis of a FGM thin cylindrical shells under moving pressure using Classical thin shell theory

By: Mehdi Arazm

Supervisors:
Dr. Hamid Reza Eipakchi
Dr. Mehdi Ghannad

September2016