



دانشکده مهندسی مکانیک
گروه مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

حل تحلیلی انتقال حرارت جابجایی اجباری جریان سیال غیرنیوتنی درون لوله‌های مستقیم

سیدضیاءدقیقی

استاد راهنما

دکتر محمود نوروزی

شهریور ۱۳۹۵

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

آنان که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و گریانه از کنار غفلت هایم گذشته اند
و در تمام عرصه های زندگی یار و یاور بی چشم داشت برای من بوده اند.

سپاس گزار می...

سپاس خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درخشان.

سپاسگذار کسانی، هستم که سر آغاز تولد من هستند، از یکی زاده می شوم و از دیگری جاودانه. استادی که سیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت و مادری که تار مویی از او به پای من سیاه نماند....

سید ضیاء دقتی
شهریور ۱۳۹۵

تعمدنامه

اینجانب سید ضیا دقتی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان حل تحلیلی انتقال حرارت جابجایی اجباری جریان سیال غیریوتنی درون لوله‌های مستقیم، تحت راهنمایی دکتر محمود نوروزی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سید ضیا دقتی
شهریور ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در مطالعه حاضر انتقال حرارت سیالات غیریوتنی درون لوله‌های مستقیم به روش تحلیلی و با کمک آنالیز مودال بررسی شده است. سیالات غیریوتنی مورد بررسی عبارتند از: سیال غیریوتنی مستقل از زمان پاورلو، سیالات غیریوتنی ویسکوالاستیک پیرو مدل‌های $LPTT$ و $FENE-P$. در سیال پاورلو با فرض جریان در حال توسعه حرارتی، به‌ازای دو مقدار خاص از شاخص پاورلو، توزیع دما به‌صورت حل‌های بسته به‌دست آمده است. همچنین رابطه‌ای تحلیلی برای عدد ناسلت برحسب مختصات طولی لوله به‌دست آمده است. مقایسه اعداد ناسلت محلی به‌دست آمده با نتایج کارهای پیشین، موید دقت بالای کار حاضر است. توزیع دمای سیالات ویسکوالاستیک مورد بررسی در این تحقیق، به روش سری فروبنیوس به‌دست آمده است. با تاثیر عبارت اتلاف اصطکاکی بر معادله انرژی، اثر عدد بی‌بعد برینکمن بر انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. نشان داده شده است که با افزایش مقدار الاستیسیته سیال، عدد بی‌بعد دیوار، عدد ناسلت و در نتیجه انتقال حرارت درون لوله افزایش می‌یابد. علت این امر نیز افزایش گرادیان سرعت و نرخ برشی نزدیک دیواره، و در نتیجه کاهش ویسکوزیته سیال است. همچنین نشان داده شده است که در سیال ویسکوالاستیک $FENE-P$ با افزایش پارامتر مربوط به خاصیت کشش سیال، L ، عدد ناسلت و در نتیجه انتقال حرارت کاهش می‌یابد. در سیالات ویسکوالاستیک $LPTT$ با افزایش پارامتر متناظر با خاصیت کششی سیال غیریوتنی که با ϵ نشان داده می‌شود، اثر معکوس دیده می‌شود و انتقال حرارت بهتری با اعداد ناسلت بزرگ‌تر مشاهده شده است. همان‌طور که می‌دانیم عدد برینکمن ناشی از تاثیر عبارت اتلاف اصطکاکی درون لوله است. در واقع با در نظر گرفتن عبارت اتلاف اصطکاکی عدد بی‌بعد برینکمن در معادله انتقال حرارت ظاهر می‌شود. عبارت اتلاف اصطکاکی نیز به‌صورت حاصل ضرب تانسوری تنش برشی و گرادیان سرعت تعریف می‌شود. بنابراین عبارت اتلاف اصطکاکی و عدد برینکمن رابطه مستقیمی با گرادیان سرعت دارند. با مثبت در نظر گرفتن عدد برینکمن و با افزایش آن، گرمای بیش‌تری در لوله تولید می‌شود. چون گرادیان سرعت در یک مقطع عرضی از لوله، در مجاورت دیواره بیش‌ترین مقدار را دارد، بنابراین بیش‌ترین تولید حرارت را در مجاورت دیواره لوله خواهیم داشت. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد برینکمن، عدد ناسلت و در نتیجه انتقال حرارت کاهش می‌یابد.

کلیدواژه: جابجایی اجباری، سیال ویسکوالاستیک، لوله دما ثابت، عدد برینکمن، آنالیز مودال.

فهرست مطالب

خ	لیست تصاویر	
ذ	لیست جداول	
۱	مقدمه	۱
۱	مقدمه	۱.۱
۲	پیشینه‌ی پژوهش	۲.۱
۵	معرفی تحقیق حاضر	۳.۱
۵	مروری بر فصل‌های پایان‌نامه	۱.۳.۱
۷	فیزیک مسأله	۲
۷	مقدمه	۱.۲
۷	معادله‌های حاکم	۲.۲
۸	جریان FENE-P	۱.۲.۲
۱۳	جریان خطی PTT	۲.۲.۲
۱۵	جریان پاورلو	۳.۲.۲
۱۶	بی‌بعد سازی	۳.۲
۱۷	جریان FENE-P	۱.۳.۲
۲۱	جریان خطی PTT	۲.۳.۲
۲۳	جریان پاورلو	۳.۳.۲
۲۷	روش حل	۳
۲۷	مقدمه	۱.۳
۲۷	جریان FENE-P	۲.۳
۳۷	جریان خطی PTT	۳.۳
۴۰	جریان پاورلو	۴.۳

۵۱	۴	نتایج و بحث
۵۱	۱.۴	مقدمه
۵۱	۲.۴	جریان FENE-P
۸۰	۳.۴	جریان خطی PTT
۸۶	۴.۴	جریان پاورلو
۱۰۷	۵	نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۱۰۷	۱.۵	خلاصه و نتیجه‌گیری
۱۰۸	۲.۵	پیشنهادها
۱۰۹		مراجع

لیست تصاویر

۴۳	تعیین مقادیر ویژه برای حالت رقیق‌شونده	۱.۳
۴۴	رسم توابع $KummerM$ و $KummerU$ بر حسب شعاع بی‌بعد در مقدار ویژه λ	۲.۳
۴۵	26.6687	
۴۶	تعیین مقادیر ویژه برای حالت نیوتنی	۳.۳
۵۴	پروفیل‌های سرعت جریان $FENE-P$	۱.۴
۵۶	پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ در حالت $Br = 0$	۲.۴
۵۷	پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ در حالت $Br = 0$	۳.۴
۵۸	نمودار تغییرات عدد ناسلت کاهیده و نسبت دمای ماکزیمم جریان سیال $FENE-P$ به مقدار متناظر نیوتنی آن بر حسب عدد دبورا برای مقادیر مختلف پارامتر L^2	۴.۴
۶۰	پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 1$	۵.۴
۶۶	پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 10$	۶.۴
۶۷	پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 100$	۷.۴
۶۸	پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 1$	۸.۴
۷۰	پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 10$	۹.۴
۷۱	10	
۷۲	پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 100$	۱۰.۴
۷۳	100	
۷۴	پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 1$	۱۱.۴
۷۵	پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 10$	۱۲.۴
۷۶	پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 100$	۱۳.۴
۷۷	پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 1$	۱۴.۴
۷۸	پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 10$	۱۵.۴
۷۹	پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 100$	۱۶.۴
۸۰	100	
۸۹	پروفیل‌های سرعت جریان $LPTT$	۱۷.۴
۹۰	پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 1$	۱۸.۴

- ۱۹۰۴ پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 10$ ۹۱
- ۲۰۰۴ پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 100$ ۹۲
- ۲۱۰۴ پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 1$. . . ۹۳
- ۲۲۰۴ پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 10$. . . ۹۴
- ۲۳۰۴ پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 100$. . . ۹۵
- ۲۴۰۴ پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 1$ ۹۶
- ۲۵۰۴ پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 10$ ۹۷
- ۲۶۰۴ پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 100$ ۹۸
- ۲۷۰۴ پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 1$. . . ۹۹
- ۲۸۰۴ پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 10$. . . ۱۰۰
- ۲۹۰۴ پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 100$. . . ۱۰۱
- ۳۰۰۴ توزیع عدد ناسلت محلی برای حالت‌های مختلف شاخص پاورلو ۱۰۲
- ۳۱۰۴ نمودار توزیع دمای بی‌بعد متوسط برحسب فاصله طولی بی‌بعد به‌ازای مقادیر مختلف شاخص پاورلو ۱۰۲
- ۳۲۰۴ توزیع دمای بی‌بعد جریان درحال توسعه حرارتی پاورلو بر حسب شعاع بی‌بعد لوله ۱۰۳
- ۱۰۰۴ در فواصل طولی مختلف نشان داده شده ۱۰۴

لیست جداول

۱۰۳	مقادیر ویژه و ضرایب ثابت مربوط به معادله دمای بی‌بعد برای دو حالت نیوتنی و پاورلو	۴۴
۱۰۴	مقادیر حاصل از حل تحلیلی جریان سیال $FENE - P$ درون لوله دما ثابت برای $Br = 0$	۵۳
۲۰۴	مقادیر عدد ناسلت و دمای ماکزیمم پروفیل دمای جریان $FENE - P$ بر حسب پارامتر $\frac{De}{aL}$	۵۹
۳۰۴	مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان $FENE - P$ درون لوله دما ثابت برای $Br = 0.1$	۶۲
۴۰۴	مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان $FENE - P$ درون لوله دما ثابت برای $Br = 1$	۶۳
۵۰۴	مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان $FENE - P$ درون لوله دما ثابت برای $Br = 10$	۶۴
۶۰۴	مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان خطی PTT درون لوله دما ثابت برای $Br = 0.1$	۸۱
۷۰۴	مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان خطی PTT درون لوله دما ثابت برای $Br = 1$	۸۲
۸۰۴	مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان خطی PTT درون لوله دما ثابت برای $Br = 10$	۸۳
۹۰۴	مقادیر عدد ناسلت محلی و دمای متوسط جریان سیال در حال توسعه حرارتی پاورلو درون لوله	۱۰۳
۱۰۰۴	مقادیر عدد ناسلت و دمای ماکزیمم به‌ازای مقادیر مختلف شاخص پاورلو در جریان کاملاً توسعه یافته	۱۰۵

فهرست علائم و اختصارات

	<i>Br</i>	عدد برینکمن
s^{-1}	<i>D</i>	نرخ تغییر شکل
	<i>De</i>	عدد دبورا
W/m^2K	<i>h</i>	ضریب انتقال حرارت جابجایی
N/m	<i>H</i>	ثابت فنر در مدل $FENE - P$
	k_1	ثابت معرفی شده در معادله (۶۶.۲)
	k_2	ثابت معرفی شده در معادله (۶۷.۲)
W/mK	<i>k</i>	ضریب انتقال حرارت هدایتی
	<i>L</i>	قابلیت کشش مدل $FENE - P$
	<i>Nu</i>	عدد ناسلت
	<i>n</i>	شاخص مدل پاورلو
	P_r	عدد پرانتل
N/m^2	<i>p</i>	فشار جریان
<i>m</i>	<i>Q</i>	بردار اتصال دوانتهای وزنه‌های دمبل شکل
<i>m</i>	Q_0	طول ماکزیمم فنر
<i>m</i>	Q_e	طول تعادل فنر
<i>m</i>	<i>R</i>	شعاع لوله
	<i>Re</i>	عدد رینولدز
<i>m</i>	<i>r</i>	مختصات شعاعی لوله
<i>K</i>	<i>T</i>	دما
ms^{-1}	<i>u</i>	سرعت در راستای طولی
m/s	<i>V</i>	بردار سرعت جریان
	<i>X</i>	پارامتر بی‌بعد در معادله (۷۴.۲) (۶۴.۲)
<i>m</i>	<i>z</i>	مختصات طولی لوله (۶۴.۲)

علائم یونانی

α	نفوذ حرارتی جریان	m^2/s
α_1	پارامتر ثابت در مدل $LPTT$	
α_2	پارامتر ثابت در مدل $LPTT$	
β_1	پارامتر ثابت در مدل $FENE - P$	
β_2	پارامتر ثابت در مدل $FENE - P$	
ϵ	قابلیت کشش در مدل $LPTT$	
η	ویسکوزیته	
λ	زمان رهایی از تنش	s
μ	ویسکوزیته دینامیکی سیال نیوتنی	Pa.s
ϕ	عبارت اتلاف اصطکاکی	Pa/s
ρ	چگالی	kgm^{-3}
τ	تنش	Pa
θ	دمای جریان	

زیروندها

m	میانگین
r	کاهیده
w	دیواره
N	مربوط به حالت نیوتنی
r	در جهت شعاعی
z	در جهت طولی لوله

بالانویس‌ها

t	ترانهاده
∇	مشتق فوق همرفتی
$\sim$	کمیت بعددار

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ مقدمه

انتقال حرارت سیالات درون لوله‌ها و کانال‌ها طیف وسیعی از مسایل را شامل می‌شود و به‌عنوان مساله کلاسیک و اساسی در علم انتقال حرارت شناخته می‌شود که در مورد سیال‌های نیوتنی در کانال‌های بسته به خوبی توسط محققین بسیاری بررسی شده و مطالعه‌های آزمایشگاهی و تئوری بسیاری برای آن انجام شده است. متأسفانه عمده مطالعه‌های پیشین مربوط به سیالات نیوتنی بوده و در مقایسه با آن، مطالعات کم‌تری به انتقال حرارت جابجایی سیالات غیرنیوتنی درون لوله‌ها معطوف شده است. انتقال حرارت جابجایی سیال‌های غیرنیوتنی در بیوتکنولوژی، داروسازی، پزشکی، صنایع پردازش شیمیایی، تولید غذا، صنایع صوتی، مرکب و رنگ‌سازی و همچنین تزریق مذاب‌های پلیمری (روش اصلی تولید اجناس پلاستیکی) کاربرد دارد. برخلاف سیال‌های نیوتنی که در آن‌ها ویسکوزیته کمیتی ثابت است، در سیال‌های غیرنیوتنی ویسکوزیته تابعی از نرخ برشی بوده و به همین دلیل سیال‌های غیرنیوتنی به سه گروه سیال‌های مستقل از زمان، وابسته به زمان و ویسکوالاستیک تقسیم می‌شوند. عبارت ویسکوالاستیک متشکل از دو عبارت ویسکوز و الاستیک بوده که به ترتیب تداعی کننده خصوصیات سیال و جامد می‌باشد. بنابراین مدل‌های ویسکوالاستیک مربوط به موادی است که خصوصیات مایع و جامد را داراست. مدل‌های ویسکوالاستیک $FENE - P$ ^۱ و PTT ^۲ از جمله سیالات غیرنیوتنی مهم به شمار می‌آیند که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته‌اند. مدل $FENE$ برای محلول‌های رقیق به‌دست آمده است اما همچنین می‌تواند به محلول‌های نیمه‌رقیق نسبت داده شود. این مدل حاصل از یک نظریه جنبشی است که از مدل الاستیک غیرخطی دمبل پیروی کرده و بیان‌گر مولکول‌های پلیمری درون محلول رقیق می‌باشد. در این نظریه مولکول‌های پلیمر به‌عنوان وزنه‌های دمبل شکل^۳ مدل شده‌اند که با فنرهایی به هم متصل می‌باشند که تابع قانون هوک نمی‌باشد. مدل $FENE$ از محدود مدل‌های پلیمری می‌باشد که در شبیه‌سازی دینامیک سیالاتی کاربرد دارد. همچنین مدل $FENE - P$ از

^۱Finitely Extensible Nonlinear Elastic

^۳Dumbbell beads

^۲Phan Thien Tanner

پرمکاربردترین مدل‌های غیرنیوتنی در شبیه‌سازی جریان‌های آشفته^۴ به شمار می‌رود. مدل ویسکوالاستیک *PTT* استفاده گسترده‌ای در شبیه‌سازی جریان محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری دارد. هم‌چنین این مدل به عنوان ساده‌ترین مدل دیفرانسیلی جهت ارائه خواص تغییر طول محلول‌های پلیمری در جریان‌های ورودی معرفی شده است که به دو نوع خطی و غیرخطی تقسیم می‌شود. با توجه به نوع رفتار ویسکوزیته، سیال پاورلو به دو نوع شبه‌پلاستیک و دایلاتنت تقسیم‌بندی می‌شود. با افزایش نرخ برشی در سیال‌های شبه‌پلاستیک و دایلاتنت، ویسکوزیته به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. هم‌چنین جریان بسیاری از مذاب‌های پلاستیکی با خصوصیت‌های سیال پاورلو قابل توصیف می‌باشد. کاربرد سیال پاورلو به صورت مفصل توسط رینر [۱] تشریح شده است.

۲.۱. پیشینه‌ی پژوهش

نخستین بار گراتز [۲] و مجددا ناسلت [۳] جریان آرام و توسعه‌یافته هیدرودینامیکی سیال نیوتنی با پروفیل سرعت سهمی شکل درون لوله به شعاع R را مطالعه کردند. آن‌ها با ثابت در نظر گرفتن دمای سیال خارج از لوله و نیز دمای دیواره در دو مقدار غیریکسان، توزیع درجه حرارت سیال نیوتنی را به دست آوردند. هم‌چنین مسأله گراتز سیال نیوتنی در حالت‌های دما ثابت و شار ثابت به ترتیب توسط سلارز و همکاران [۴] و سیگل و همکاران [۵] بررسی شد. حل لوک [۶] مسأله گراتز سیال پاورلو تحت شرایط مرزی شار ثابت و دما ثابت درون لوله توسط شیو و تسو [۷] و در حالت شار ثابت توسط برد [۸] ارائه شده است. کوتا و اوزیسیک [۹] با مطالعه تحلیلی جریان آرام و درحال توسعه حرارتی سیال پاورلو بدون در نظر گرفتن عبارت اتلاف اصطکاکی درون لوله‌های با مقطع مستطیلی و دایره‌ای دما ثابت، روابطی تحلیلی برای عدد ناسلت و دمای میانگین، به‌ازای مقادیر خاصی از شاخص سیال پاورلو به دست آوردند. آن‌ها معادله انرژی را به روش تبدیل انتگرال محدود [۱۰] حل کرده و پاسخ را بصورت ترم‌هایی متشکل از توابع ویژه و مقادیر ویژه ارائه کردند که در آن مقادیر ویژه به روش شمارش l م ت به دست آمد. ژنگ و همکاران [۱۱] جریان کاملاً توسعه یافته سیال پاورلو درون لوله را در حالت شار ثابت، با فرض اینکه دیفیوژن حرارتی تابعی از گرادیان دما است، به‌ازای مقادیر مختلف شاخص سیال پاورلو به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با گزارش این‌که عدد ناسلت در بازه $0 < n < 0.1$ دارای کاهش چشم‌گیر، در بازه $0.5 < n$ دارای کاهش یکنواخت و برای $n > 20$ دارای مقدار دارای مقدار ثابتی است، نشان دادند که عدد ناسلت به شدت به مقدار شاخص سیال پاورلو، n ، بستگی دارد. فورابوچی و فدریکو [۱۲] انتقال حرارت سیال‌های غیرنیوتنی درون لوله‌های غیرمستقیم را بررسی کردند. معادله ساختاری به‌کار رفته در مطالعه آن‌ها منطبق بر مدل پاورلو، و نتایج آن‌ها مربوط به ناحیه ورودی می‌باشد. هم‌چنین مسأله مشابهی توسط ریچاردسون [۱۳] برای اعداد گراتز بزرگ مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها پاسخ لوک تا مرتبه بزرگی دو را در بسط سری توانی توزیع دمای سیال پاورلو به دست آوردند. راجو و راتنا انتقال حرارت جریان پاورلو درون لوله خمیده را بررسی کرده و با آنالیز مقادیر مختلف شاخص سیال پاورلو، به این نتیجه رسیدند که سیال دایلاتنت نسبت به سیال‌های نیوتنی و شبه‌پلاستیک، بهترین گزینه

^۴Turbulence

برای کارکرد کارآمد یک مبدل حرارتی است. خان و همکاران [۱۵] انتقال حرارت عبوری از سیلندر دما ثابت غوطه‌ور در سیال پاورلو را به روش انتگرال حدی بررسی و در نتایج خود انتقال حرارت ناشی از سیالات شبه‌پلاستیک را بیش‌تر از سیالات دایلاتنت گزارش کردند. سوخوف و همکاران [۱۶] پدیده انتقال حرارت جریان شبه‌پلاستیک پاورلو را بین دو صفحه موازی دما ثابت، به‌صورت تحلیلی بررسی کرده و معادلات توزیع درجه حرارت را به‌دست آوردند. شماری از محققین [۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲] با درنظر گرفتن اثر ترم اتلاف اصطکاکی در معادله انرژی، به بررسی تاثیرات آن بر انتقال حرارت سیال پاورلو درون داکت‌ها پرداختند. مسأله گراتز سیال پاورلو درون لوله با درنظر گرفتن ترم اتلاف اصطکاکی توسط گیل [۱۷] مطالعه شد. سیاو‌تی‌سانگ و یین‌پینگ [۱۸] انتقال حرارت مسأله گراتز سیال پاورلو درون لوله و اسلیت را با درنظر گرفتن حرارت ناشی از اتلاف اصطکاکی، که با عدد برینکمن بیان می‌شود، به روش تشابهی مکانی بررسی کردند. آن‌ها هم‌چنین به روش جدید تشابهی آنی- مکانی مسأله گراتز در حالت غیردائم را بررسی کردند. نتایج حل آن‌ها در قسمت دائم به‌خوبی با حل بسط لوک هم‌خوانی داشت. گینگریچ و همکاران [۱۹] با حل عددی معادله ساختاری جریان آرام و درحال توسعه حرارتی سیال پاورلو به روش حجم محدود به بررسی تاثیر ویسکوزیته سیال رقیق شونده و ترم اتلاف اصطکاکی بر انتقال حرارت اجباری درون داکت‌های با مقطع مستطیلی پرداختند. نتایج کار آن‌ها نشان داد که به‌دلیل حضور ترم اتلاف اصطکاکی، انتقال حرارت از دیواره داکت با افزایش شیرتینینگ به‌طور چشم‌گیری زیاد شده اما نرخ افزایش دمایی متوسط سیال با فاصله طولی کاهش می‌یابد. چیا و همکاران [۲۰] انتقال حرارت جابجایی اجباری سیال پاورلو درون لوله تحت شار حرارتی نامتقارن محوری را با درنظر گرفتن ترم اتلاف اصطکاکی، به‌صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها تاثیر عدد برینکمن و خواص رئولوژیکال را بر توزیع عدد ناسلت محلی گزارش کردند. بارا و اکرت [۲۱] تولید حرارت اصطکاکی را برای جریان پاورلو درون اسلیت در هر دو حالت دما ثابت و شار ثابت، با فرض استقلال تمامی خواص از دما، به‌صورت تحلیلی آنالیز کرده و مقادیر ویژه و توابع ویژه را به‌صورت عددی و با روش تفاضل محدود به‌دست آوردند. آن‌ها با معرفی ضخامت اسلیت، به‌عنوان موثرترین پارامتر بر افزایش انتقال حرارت، اسلیت‌های نازک را به‌عنوان بهترین طرح جهت می‌نیم‌سازی اثر برش ویسکوز پیشنهاد دادند. والکو [۲۲] با آنالیز مسأله گراتز- برینکمن جریان سیال پاورلو، اثرات ترم اتلاف اصطکاکی را به‌صورت عددی بررسی کرد. او با استفاده از روش تبدیل لاپلاس گالرکین مطالعه خود را در رژیم سرمایش طبیعی، جایی‌که اتلاف اصطکاکی انرژی با ثابت نگه‌داشتن دمایی دیواره در یک مقدار دلخواه، نامتعادل است بسط داد. هم‌چنین مطالعات آزمایشگاهی مسأله گراتز سیال پاورلو در حالت شار ثابت توسط باست و ولتی و نیز ماهالینگام و همکاران [۲۴] انجام شده است.

گزارش‌های تحلیلی بنیادین انتقال حرارت جابجایی سیال‌های نیوتنی در کانال‌های مستقیم توسط شاه [۲۵] و شاه و لندن [۲۶] ارائه شده است. پس از آن حل‌های تحلیلی بسیاری در مورد این مسأله در کارهای پیشین ارائه شدند که گزارش آن‌ها در کتاب‌های انتقال حرارت جابجایی [۲۷، ۲۸] موجود می‌باشد.

از سال ۲۰۰۰ اولیویرا و پینهو [۲۹] و اولیویرا [۳۰] با ارائه حل‌های دقیق جریان *PTT* و هم‌چنین جریان سیال *FENE-P* درون لوله‌ها و اسلیت‌های مستقیم، راه جدیدی به روی انتقال حرارت جابجایی

درونی سیال‌های ویسکوالاستیک گشوده شد. کوئلهو و همکاران [۳۱] بر مبنای کار [۲۹] مسأله ورودی حرارتی جریان سیال PTT را به صورت تحلیلی و به روش جداسازی متغیرها مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها گزارش کردند که با تشدید اثر رقت که با افزایش عبارت We^2 حاصل می‌شود، مشخصه‌های انتقال حرارت نیز افزایش می‌یابند. پینهو و اولیویرا [۳۲] مسأله جابجایی اجباری جریان کاملاً توسعه یافته سیال $SPTT$ را درون لوله و کانال به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با احتساب ترم اتلاف اصطکاکی و هم‌چنین با ثابت در نظر گرفتن شار دیواره، نشان دادند که ترکیب الاستیسیته و اکستنسیبیلیته منجر به افزایش عدد ناسلت خواهد شد. کوئلهو و همکاران [۳۳] حل تحلیلی برای جریان کاملاً توسعه یافته جریان PTT درون داکت‌های با دیواره دما ثابت ارائه دادند. آن‌ها دو حالت را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در حالت اول تعادل را بین انتقال حرارت‌های جابجایی و هدایتی به ترتیب در جهت‌های محوری و شعاعی و در حالت دوم بین انتقال حرارت هدایتی شعاعی و اتلاف اصطکاکی در نظر گرفتند. آن‌ها در حالت اول نشان دادند که ضریب انتقال حرارت بی‌بعد با افزایش الاستیسیته زیاد می‌شود که علت آن را افزایش سطح رقت سیال بیان کردند. در حالت دوم نیز ترم اتلاف اصطکاکی در نقش عدد بی بعد برینکمن، باعث افزایش عدد ناسلت می‌شود. هم‌چنین افزایش عدد ناسلت در مقادیر الاستیسیته بیشتر، تشدید می‌یابد. چندتن از محققین جریان سیال‌های ویسکوالاستیک در حال توسعه حرارتی را مطالعه کردند. فیلالی و همکاران [۳۴] مسأله گراتز مربوط به سیال‌های غیرخطی ویسوالاستیک با مدل $SPTT$ را درون لوله‌های غیرگرد، به صورت عددی مطالعه کردند. آن‌ها اثر پارامترهای رئولوژیکال را بر انتقال حرارت بررسی کرده و نتایج کار خود را با آن‌چه در گزارش‌های [۳۱] و [۳۵] موجود بود، اعتبارسنجی کردند. اخیراً نوروزی [۳۶] حل تحلیلی برای جریان PTT درون لوله‌های دما ثابت و مستقیم ارائه داده است. نوروزی [۳۶] توزیع دمای بی‌بعد جریان PTT درون لوله‌های دما ثابت را بدون در نظر گرفتن عبارت اتلاف اصطکاکی به روش فروبنیوس به دست آورد. اولیویرا و همکاران [۳۷] جریان در حال توسعه حرارتی سیال $FENE-P$ را درون کانال و لوله تحت دما و شار حرارتی ثابت به صورت عددی آنالیز کردند. آن‌ها ترم اتلاف اصطکاکی را نیز در محاسبه‌های خود وارد کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که اتلاف اصطکاکی و الاستیسیته به ترتیب باعث کاهش و افزایش عدد ناسلت می‌شوند. در ادامه کار اولیویرا و همکاران [۳۷] فیلالی و خزر [۳۸] همان مسأله را در مورد لوله‌های با سطح مقطع مختلف تحت شار ثابت شبیه‌سازی کردند. هدف آن‌ها آنالیز اثر پارامترهای رئولوژیکال بر انتقال حرارت، بدون در نظر گرفتن اتلاف اصطکاکی و انتقال حرارت هدایتی محوری بود. نتایج آن‌ها همانند آن‌چه توسط فیلالی و همکاران [۳۴] برای سیال‌های $SPTT$ ارائه شده بود، استقلال عدد ناسلت را از عدد رینولدز برای جریان سیال $FENE-P$ تایید کرد. خزر و همکاران [۳۹] جریان آرام، دائم و کاملاً توسعه یافته سیال $FENE-P$ را درون داکت‌های گرد و غیرگرد در معرض شار حرارتی ثابت را به صورت عددی آنالیز کردند. آن‌ها توزیع عدد ناسلت را به دست آوردند و مطالعه آن‌ها همچنین تایید کرد که با افزایش غلظت پلیمر، نرخ انتقال حرارت نیز زیاد می‌شود. در پایان لازم به یادآوری می‌باشد که جریان و انتقال حرارت سیال‌های ویسکوالاستیک برای سطح مقطع‌های حلقوی و غیردایره‌ای شکل درون لوله‌های مستقیم [۴۰، ۴۴] و خمیده [۴۵، ۵۲] مطالعه شده است.

۳.۱ معرفی تحقیق حاضر

در مطالعه حاضر انتقال حرارت جابجایی اجباری سیالات غیرنیوتنی به صورت تحلیلی بررسی شده است. سیالات غیرنیوتنی مورد بررسی عبارت اند از: سیال غیرنیوتنی مستقل از زمان پاورلو، سیالات غیرنیوتنی ویسکوالاستیک پیرو مدل‌های $FENE-P$ و $LPTT$. هم‌چنین حل‌های تحلیلی برای جریان‌های درحال توسعه حرارتی و نیز کاملاً توسعه‌یافته سیال پاورلو ارائه شده است. در جریان درحال توسعه حرارتی که عدد پرانتل آن بسیار بزرگ است، توزیع دمایی بی‌بعد به صورت حل بسته برای دو حالت رقیق‌شونده و نیوتنی که مقادیر شاخص پاورلو در آن‌ها به ترتیب برابر $n = 0.2$ و $n = 1$ است به دست آمده است. هم‌چنین روابطی تحلیلی برای توزیع عدد ناسلت محلی، دمایی بی‌بعد و دمایی بی‌بعد متوسط ارائه شده است. برای جریان کاملاً توسعه‌یافته پاورلو نیز توزیع دمایی بی‌بعد، به‌ازای نه مقدار شاخص پاورلو و به روش سری فروبنیوس حاصل شده است.

در مطالعه حاضر توزیع دمایی بی‌بعد جریان‌های غیرنیوتنی $FENE-P$ و $LPTT$ درون لوله‌های دما ثابت با در نظر گرفتن ترم اتلاف اصطکاکی و به کمک روش فروبنیوس، برای نخستین بار ارائه شده‌اند. براساس پاسخ‌های به دست آمده، اثر پارامترهای قابلیت کشش متناظر با مدل‌های $FENE-P$ و $LPTT$ که به ترتیب عبارت‌اند از L ، ϵ و البته عدد دبورا De بر انتقال حرارت جابجایی اجباری جریان‌های غیرنیوتنی $FENE-P$ و $LPTT$ به‌طور کامل مطالعه شده است. جنبه‌های اصلی نوآوری مطالعه حاضر به صورت زیر خلاصه شده‌اند:

برخلاف تحقیقات پیشین که محدود به محاسبات عددی بودند، در مطالعه حاضر حل‌های تحلیلی برای مسأله انتقال حرارت جابجایی اجباری کاملاً توسعه‌یافته سیال‌های غیرنیوتنی $FENE-P$ و $LPTT$ درون لوله‌های دما ثابت برای نخستین بار و به روش فروبنیوس ارائه شده است. توزیع دما به صورت بسته و هم‌چنین رابطه اصلاحی عدد ناسلت بر حسب عدد دبورا و پارامتر قابلیت کشش به دست آمده‌اند.

توزیع دمایی بی‌بعد جریان پاورلو برای جریان‌های درحال توسعه حرارتی و نیز کاملاً توسعه یافته، به ترتیب به صورت حل بسته و به روش فروبنیوس ارائه شده است.

۱.۳.۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه

این پایان‌نامه از یک فصل به عنوان مقدمه و ۴ فصل اصلی و یک بخش جهت معرفی مراجع مورد استفاده، تشکیل شده است. در فصل دوم به بیان معادله‌های حاکم و ساختاری مدل‌های مورد بررسی پرداخته شده است. تا حد امکان اثبات معادله‌های مورد استفاده نیز ارائه شده است. در فصل سوم به حل تحلیلی معادله‌های دیفرانسیل به دست آمده اختصاص دارد. به این منظور جهت سهولت کار، ابتدا با کمک پارامترهای بی‌بعدسازی معادله انرژی را بی‌بعد کرده، سپس توزیع دمایی جریان درون لوله دما ثابت حاصل شده است. در فصل چهارم نتایج حاصل از حل تحلیلی تحقیق حاضر نمایش داده می‌شوند. در فصل پنجم نیز نتایج کار حاضر به‌طور خلاصه بیان می‌شوند. هم‌چنین پیشنهادهایی برای ارتقای سطح کیفی تحقیق حاضر و انجام مطالعه جامع‌تر در راستای موضوع این پایان‌نامه، ارائه شده است.

فصل ۲

فیزیک مسأله

۱.۲ مقدمه

در این فصل به کمک معادلات سه‌گانه حاکم بر مسأله یعنی معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی و نیز معادلات ساختاری مربوط به مدل‌های غیرنیوتنی پاورلو، $FENE - P$ و $LPTT$ ، معادله انتقال حرارت بی‌بعد متناظر با هر یک از مدل‌ها حاصل شده است. سپس به کمک پارامترهای بی‌بعد، تمامی معادلات انتقال حرارت مربوطه بی‌بعد شده‌اند. همچنین روابط مربوط به عبارت اتلاف اصطکاکی برای مدل‌های $FENE - P$ و $LPTT$ استخراج شده‌اند.

۲.۲ معادله‌های حاکم

به علت تنوع در مدل‌های مورد بررسی، فرض‌های حاکم بر مسأله نیز متفاوت می‌باشند. اما فرضیات مشترک حاکم بر تمامی مدل‌ها عبارت‌اند از:

- ۱- جریان تراکم‌ناپذیر بوده و نیز تمامی خصوصیت‌های فیزیکی سیال ثابت و مستقل از دما می‌باشد.
 - ۲- جریان دوبعدی بوده و بردار سرعت تنها در راستای طولی دارای مولفه غیر صفر می‌باشد.
- جریان ویسکوالاستیک مدل‌های $FENE - P$ و $LPTT$ کاملاً توسعه‌یافته فرض شده‌اند. با در نظر گرفتن عبارت اتلاف اصطکاکی در معادله انتقال حرارت جریان‌های $FENE - P$ و $LPTT$ ، در نهایت معادلات دیفرانسیل غیرهمگن و بی‌بعد ارائه شده‌اند.
- برای مدل غیرنیوتنی پاورلو، دو نوع جریان در حال توسعه‌حرارتی و نیز جریان کاملاً توسعه‌یافته به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همان‌طور که مشخص است، پروفیل دمای جریان در آن‌ها به ترتیب در حال توسعه و توسعه‌یافته می‌باشد. اما پروفیل سرعت برای جریان‌های مذکور توسعه‌یافته است. همچنین از تأثیر عبارت اتلاف اصطکاکی برای جریان پاورلو صرف نظر شده است.
- معادله‌های حاکم مورد نیاز برای حل جریان انتقال حرارت سیال درون لوله، معادله‌های سه‌گانه

پیوستگی، مومنتوم و انرژی می‌باشند که در ادامه به ترتیب آمده‌اند:

$$\nabla \cdot \tilde{V} = 0 \quad (۱.۲)$$

$$\rho \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{V} = -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot \tilde{\tau} \quad (۲.۲)$$

$$\rho c_p \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{T} = k \nabla^2 \tilde{T} \quad (۳.۲)$$

که در آن $\tilde{V}$ بردار سرعت، ρ چگالی، $\tilde{p}$ فشار، $\tilde{\tau}$ تانسور تنش، c_p ظرفیت گرمایی مخصوص، $\tilde{T}$ دما و k ضریب انتقال حرارت هدایتی می‌باشند. هم‌چنین با توجه به این‌که هندسه مورد مطالعه لوله می‌باشد، بنابراین تمامی معادله‌های مورد استفاده در مختصات استوانه‌ای تعریف می‌شوند. هم‌چنین عملگر ∇ مربوط به مختصات استوانه‌ای در پیوست آمده است. با توجه به فرض تراکم‌ناپذیری جریان، معادله پیوستگی خود به خود ارضا خواهد شد.

۱.۲.۲ جریان FENE-P

در این قسمت مدل $FENE-P$ به عنوان معادله ساختاری جهت تعیین تانسور تنش به کار رفته است. مدل $FENE$ برای محلول‌های رقیق به دست آمده است اما هم‌چنین می‌تواند به محلول‌های نیمه رقیق نسبت داده شود. این مدل حاصل از یک نظریه جنبشی است که از مدل الاستیک غیرخطی دامبل پیروی کرده و بیانگر مولکول‌های پلیمری درون محلول رقیق می‌باشد. هم‌چنین این مدل جهت توصیف خصوصیات رئولوژیکال محلول‌ها نیز به کار می‌رود. در این نظریه مولکول‌های پلیمر به عنوان وزنه‌های دمبل شکل^۱ مدل شده‌اند که با فنرهایی به هم متصل می‌باشند که تابع قانون هوک نمی‌باشد. نیروی اتصال‌دهنده داخلی یک زنجیره مولکولی (نیروی فنر)، براساس فرمول‌های زیر تخمین زده می‌شود [۵۵، ۵۶]:

$$F^c \approx \frac{H}{1 - \langle Q \cdot Q \rangle / Q_0^2} Q \equiv fHQ \quad (۴.۲)$$

که در آن Q بردار اتصال دوانتهای وزنه‌های دمبل شکل، H ثابت فنر و Q_0 طول ماکزیمم فنر است. هم‌چنین عملگر $\langle \rangle$ مربوط به میانگین یک کمیت در فضا است. هم‌چنین پترلین [۵۵، ۵۶] معادله (۴.۲) را به فرم ساده زیر بیان کرد:

$$F^c \approx fHQ \quad (۵.۲)$$

که در آن f تابع بی‌بعد بوده و با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$f = f(trA) = \frac{L^2}{L^2 - trA} \quad (۶.۲)$$

$$L^2 = 3 \frac{Q_0^2}{Q_e^2} \quad (۷.۲)$$

$$A = 3 \frac{\langle Q \cdot Q \rangle}{Q_e^2} \quad (۸.۲)$$

^۱Dumbbell beads

در رابطه فوق L^2 پارامتر مربوط به قابلیت کشش مدل، Q_e طول تعادل و A نیز تانسور پیکربندی مدل است. برد و همکاران [۵۶] رابطه زیر را نیز برای پارامتر قابلیت کشش مطرح کردند:

$$L^2 = b + 3 \quad (۹.۲)$$

$$b = \frac{H Q_0^2}{k T} \quad (۱۰.۲)$$

که k ثابت بولتزمن است. برد و همکاران [۵۶] رابطه اصلاح شده زیر را برای مدل $FENE - P$ براساس نیروی اتصال‌دهنده در معادله (۵.۲) به‌دست آوردند.

$$\lambda \tilde{\tau} + f \tilde{\tau} = 2 a \eta_p \tilde{D} \quad (۱۱.۲)$$

که در آن λ زمان رهایی از تنش، η_p ویسکوزیته پلیمر و a پارامتری ثابت بوده که می‌تواند برحسب پارامترهای قابلیت کشش و نیز ثابت b بیان شود و برابر است با:

$$a = \frac{1}{1 - \frac{3}{L^2}} = \frac{b + 3}{b} = 1 + \frac{3kT}{H Q_0^2} \quad (۱۲.۲)$$

هم‌چنین $\tilde{D}$ نرخ تغییر شکل و پارامتر $\tilde{\tau}$ مشتق فوق هم‌رفتی تانسور تنش است که در ادامه بیان شده‌اند.

$$\tilde{D} = \frac{1}{2} (\nabla \tilde{V} + \nabla \tilde{V}^t) \quad (۱۳.۲)$$

بالانویس t نیز نشان‌دهنده عمل‌گر ترانهاد است.

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \frac{D \tilde{\tau}}{Dt} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \tilde{V} - \nabla \tilde{V}^t \cdot \tilde{\tau} \\ &= \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \tilde{V} - \nabla \tilde{V}^t \cdot \tilde{\tau} \end{aligned} \quad (۱۴.۲)$$

از طرفی می‌دانیم که $\tilde{V} \cdot \nabla \tilde{\tau} = 0$ برقرار است، بنابراین در نهایت رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$\tilde{\tau} = -\tilde{\tau} \cdot \nabla \tilde{V} - \nabla \tilde{V}^t \cdot \tilde{\tau} \quad (۱۵.۲)$$

برای به‌دست آوردن ترم تنش برشی و در نتیجه یافتن توزیع سرعت جریان $FENE - P$ ، رابطه فوق را به‌صورت تانسور بسط می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= - \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} - \\ &\begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

با اعمال فرض‌های ذکر شده برای جریان درون لوله بر ماتریس فوق داریم:

$$\overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = - \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} & 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

و در نهایت تانسور زیر حاصل می‌شود.

$$\overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = - \begin{bmatrix} 2\frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}}\tilde{\tau}_{rz} & \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}}\tilde{\tau}_{z\theta} & \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}}\tilde{\tau}_{zz} \\ \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}}\tilde{\tau}_{\theta z} & 0 & 0 \\ \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}}\tilde{\tau}_{zz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۶.۲)$$

با جایگذاری معادله (۱۶.۲)، تانسور $\tilde{\tau}$ و تانسور نرخ تغییر شکل در معادله (۱۱.۲) داریم:

$$-\lambda \begin{bmatrix} 2\frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}}\tilde{\tau}_{rz} & \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}}\tilde{\tau}_{z\theta} & \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}}\tilde{\tau}_{zz} \\ \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}}\tilde{\tau}_{\theta z} & 0 & 0 \\ \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}}\tilde{\tau}_{zz} & 0 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{rr} & \tilde{\tau}_{r\theta} & \tilde{\tau}_{rz} \\ \tilde{\tau}_{\theta r} & \tilde{\tau}_{\theta\theta} & \tilde{\tau}_{\theta z} \\ \tilde{\tau}_{zr} & \tilde{\tau}_{z\theta} & \tilde{\tau}_{zz} \end{bmatrix} = a\eta_p \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۷.۲)$$

با توجه به این‌که دو رابطه از نه رابطه حاصل از معادله (۱۷.۲) یکسان می‌باشند، هفت رابطه باقی‌مانده در معادلات (۱۸.۲) تا (۲۱.۲) بیان شده‌اند.

$$\tilde{\tau}_{\theta\theta} = 0, \tilde{\tau}_{\theta z} = 0, \tilde{\tau}_{z\theta} = 0, \tilde{\tau}_{zz} = 0 \quad (۱۸.۲)$$

$$f\tilde{\tau}_{rr} = 2\lambda \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}}\tilde{\tau}_{rz} \quad (۱۹.۲)$$

$$f\tilde{\tau}_{r\theta} = 0 \quad (۲۰.۲)$$

$$f\tilde{\tau}_{rz} = a\eta_p \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} \quad (۲۱.۲)$$

با تقسیم طرفین معادله‌های (۱۹.۲) و (۲۱.۲) بر یک‌دیگر خواهیم داشت:

$$\tilde{\tau}_{rr} = \frac{2\lambda}{a\eta_p} \tilde{\tau}_{rz}^2 \quad (۲۲.۲)$$

رابطه زیر در اختیار است:

$$\tilde{\tau} = \frac{\eta_p}{\lambda} (fA - aI) \quad (۲۳.۲)$$

با اعمال عملگر تریس به طرفین معادله بالا خواهیم داشت:

$$\lambda tr \tilde{\tau} = \eta_p (f tr A - 3a) \quad (24.2)$$

$$f tr A = \frac{\lambda}{\eta_p} tr \tilde{\tau} + 3a$$

$$tr \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_{rr} + \tilde{\tau}_{\theta\theta} + \tilde{\tau}_{zz} \quad (25.2)$$

با توجه به معادله (۱۸.۲) تنها یک ترم از سه مولفه تنش واقع در قطر اصلی تانسور تنش مخالف صفر می‌باشد و داریم:

$$tr \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_{rr} \quad (26.2)$$

$$f tr A = \frac{\lambda}{\eta_p} \tilde{\tau}_{rr} + 3a \quad (27.2)$$

هم‌چنین می‌توان معادله (۶.۲) را به صورت رابطه زیر نیز بیان کرد:

$$f = 1 + \frac{f tr A}{L^2} \quad (28.2)$$

در نتیجه با جایگذاری معادله (۲۷.۲) در معادله (۲۸.۲) خواهیم داشت:

$$f = 1 + \frac{\frac{\lambda}{\eta_p} \tilde{\tau}_{rr} + 3a}{L^2} \quad (29.2)$$

معادله مومنتوم نشان داده شده در رابطه (۲۰.۲) را در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$\rho(\tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}_\theta}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{\tilde{u}_\theta^2}{\tilde{r}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{rz}) \right) \quad (30.2)$$

$$\rho(\tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}_\theta}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\tilde{u}_r \tilde{u}_\theta}{\tilde{r}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}}) = -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{1}{\tilde{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{\theta z}) \right) \quad (31.2)$$

$$\rho(\tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}_\theta}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{\theta}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{\tilde{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{zr}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{zz}) \right) \quad (32.2)$$

با ساده‌سازی‌های مربوط به فرض مسأله که در ابتدای این فصل آمده است و این نکته که توزیع فشار مستقیم‌الخط می‌باشد، $\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{z})$ ، خواهیم داشت:

$$0 = \frac{1}{\tilde{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{rz}) \right) \quad (33.2)$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} \quad (34.2)$$

$$0 = -\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}} + \frac{1}{\tilde{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\tilde{r} \tilde{\tau}_{rz}) \right) \quad (35.2)$$

اکنون می‌توان عبارت $\tilde{\tau}_{rz}$ را از معادله‌های فوق به‌دست آورد. به این منظور فرض می‌کنیم $\tilde{P} = \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{z}}$ و خواهیم داشت:

$$\tilde{P} = \frac{1}{\tilde{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{\tau}_{rz}) \right) \quad (۳۶.۲)$$

$$\tilde{\tau}_{rz} = \tilde{P} \frac{\tilde{r}}{2} \quad (۳۷.۲)$$

در ادامه سرعت طولی لوله را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} = \frac{f \tilde{\tau}_{rz}}{a \eta_p} \quad (۳۸.۲)$$

اکنون با جایگذاری معادله‌های (۲۹.۲) و (۳۷.۲) در معادله فوق داریم:

$$\frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} = \frac{\tilde{P} \tilde{r}}{2a\eta_p} \left(1 + \frac{\frac{\lambda}{\eta_p} \tilde{\tau}_{rr} + 3a}{L^2} \right) \quad (۳۹.۲)$$

و با توجه به معادلات (۲۲.۲) و (۳۷.۲) و با جایگذاری آن‌ها در معادله (۳۹.۲) خواهیم داشت:

$$\frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} = \frac{\tilde{P} \tilde{r}}{2a\eta_p} \left(1 + \frac{\frac{2}{a} \frac{\lambda^2}{\eta_p^2} \tilde{P}^2 \frac{\tilde{r}^2}{4} + 3a}{L^2} \right) \quad (۴۰.۲)$$

و با توجه به اینکه:

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{L^2} = 1 \quad (۴۱.۲)$$

در نهایت معادله (۴۰.۲) به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} = \frac{\tilde{P} \tilde{r}}{2\eta_p} \left(1 + \frac{2\lambda^2 \tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4a^2 \eta_p^2 L^2} \right) \quad (۴۲.۲)$$

اکنون با انتگرال‌گیری از معادله فوق از یک مکان دل‌خواه $\tilde{r}$ تا دیواره لوله جایی که $\tilde{r} = R$ برقرار است و در آن شرط عدم لغزش حاکم می‌باشد داریم:

$$\tilde{u}_z = -\frac{\tilde{P}}{4\eta_p} (R^2 - \tilde{r}^2) \left(1 + \frac{\lambda^2 \tilde{P}^2}{4a^2 \eta_p^2 L^2} (R^2 + \tilde{r}^2) \right) \quad (۴۳.۲)$$

با معلوم بودن توزیع سرعت، به سراغ معادله انرژی می‌رویم که با بسط آن در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$\tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}_\theta}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{\theta}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\alpha}{\tilde{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) \right) + \frac{\tilde{\phi}}{\rho c_p} \quad (۴۴.۲)$$

همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد جریان مورد بررسی تنها دارای مولفه طولی سرعت می‌باشد. هم‌چنین ترم انتقال حرارت هدایتی در راستای جریان، در برابر انتقال حرارت هدایتی شعاعی ناچیز فرض شده است. بنابراین معادله انرژی برای جریان کاملاً توسعه یافته، تراکم ناپذیر، دوبعدی، پایا با در نظر گرفتن ترم اتلاف اصطکاکی درون لوله، به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\alpha}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\tilde{\phi}}{\rho c_p} \quad (۴۵.۲)$$

۲.۲.۲ جریان خطی PTT

دومین مدل ویسکوالاستیک مورد بررسی در این تحقیق، مدل PTT است که استفاده گسترده‌ای در شبیه‌سازی جریان محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری دارد. همچنین این مدل به عنوان ساده‌ترین مدل دیفرانسیلی جهت ارائه خواص تغییر طول محلول‌های پلیمری در جریان‌های ورودی معرفی شده است [۶۳]. معادله ساختاری سیال PTT به فرم کلی زیر نوشته می‌شود:

$$f(tr(\tilde{\tau}))\tilde{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = 2\eta \tilde{D} \quad (۴۶.۲)$$

که در آن $\tilde{\tau}$ و $\tilde{D}$ به ترتیب معرف تانسورهای تنش مازاد و نرخ تغییرشکل می‌باشند. λ زمان رهایی از تنش، η ضریب ثابت ویسکوزیته و $\overset{\nabla}{\tilde{\tau}}$ نیز همان‌طور که در معادله زیر نشان داده شده است بیان‌گر مشتق فوق همرفتی است.

$$\overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = \frac{D\tilde{V}}{Dt} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \tilde{V} - \nabla \tilde{V}^t \cdot \tilde{\tau} \quad (۴۷.۲)$$

دو فرم رایج مدل PTT عبارت‌اند از خطی^۲ و غیرخطی^۳. تابع f برای فرم‌های خطی و غیرخطی مدل PTT به ترتیب در زیر آمده است:

$$f(tr(\tilde{\tau})) = 1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta} tr(\tilde{\tau}) \quad (۴۸.۲)$$

$$f(tr(\tilde{\tau})) = \exp\left(\frac{\epsilon\lambda}{\eta} tr(\tilde{\tau})\right) \quad (۴۹.۲)$$

که در آن ϵ پارامتر مربوط به رفتار تغییر طول مدل است. اگر جمله $tr(\tilde{\tau})$ در معادله (۴۹.۲) کوچک فرض شود، فرم خطی مدل PTT از آن حاصل خواهد شد. در نهایت همان‌طور که در بخش قبل اثبات شد، معادلات (۲۲.۲)، (۳۷.۲) و (۳۸.۲)، برای مدل $LPTT$ نیز خواهیم داشت:

$$\tilde{\tau}_{rz} = \tilde{P} \frac{\tilde{r}}{2} \quad (۵۰.۲)$$

$$tr\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_{rr} = \frac{2\lambda}{\eta_p} \tilde{\tau}_{rz}^2 \quad (۵۱.۲)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}} = \frac{f(\tilde{\tau}_{rr})\tilde{\tau}_{rz}}{\eta} \quad (۵۲.۲)$$

با جایگذاری معادلات (۵۰.۲) و (۵۱.۲) در معادله فوق داریم:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}} = f\left(\frac{\lambda\tilde{P}^2\tilde{r}^2}{2\eta_p}\right) \frac{\tilde{P}\tilde{r}}{2\eta} \quad (۵۳.۲)$$

^۲Linear PTT

^۳Exponential PTT

اکنون با اعمال فرم خطی مدل PTT که در معادله (۴۸.۲) آمده است، بر معادله فوق داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}} &= \left(1 + \frac{\epsilon\lambda}{\eta} \frac{\tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{2\eta_p}\right) \frac{\tilde{P}\tilde{r}}{2\eta} \\ &= \frac{\tilde{P}\tilde{r}}{2\eta} + \frac{\epsilon\lambda^2 p_x^3 \tilde{r}^3}{4\eta^3}\end{aligned}\quad (۵۴.۲)$$

در ادامه با انتگرال‌گیری از معادله فوق از یک مکان دل‌خواه $\tilde{r}$ تا دیواره لوله جایی که $\tilde{r} = R$ برقرار است و در آن شرط عدم لغزش حاکم است، توزیع سرعت به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\tilde{u} = -\frac{\tilde{P}}{4\eta}(R^2 - \tilde{r}^2) \left(1 + \frac{\epsilon\lambda^2 \tilde{P}^2}{4\eta^2}(R^2 + \tilde{r}^2)\right) \quad (۵۵.۲)$$

همانند مدل $FENE - P$ در این حالت نیز معادله انرژی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\alpha}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\tilde{\phi}}{\rho c_p} \quad (۵۶.۲)$$

محاسبه ترم اتلاف اصطکاکی

ترم اتلاف اصطکاکی^۴ برای سیالات غیرنیوتنی در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} &= \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}} \tilde{\tau}_{rr} + \frac{1}{\tilde{r}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{\theta}} - \tilde{u}_\theta \right) \tilde{\tau}_{r\theta} + \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{rz} + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}} \tilde{\tau}_{\theta r} + \frac{1}{\tilde{r}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{\theta}} + \tilde{u}_r \right) \tilde{\tau}_{\theta\theta} + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{\theta z} + \\ &\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}} \tilde{\tau}_{zr} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{\theta}} \tilde{\tau}_{z\theta} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{zz}\end{aligned}\quad (۵۷.۲)$$

که در مساله حاضر، ترم اتلاف اصطکاکی برای جریان درون لوله به صورت ساده زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{\phi} = \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} \tilde{\tau}_{rz} \quad (۵۸.۲)$$

با توجه به این که ترم گرادیان سرعت برای مدل‌های $FENE - P$ و $LPTT$ متفاوت است، بنابراین ترم اتلاف اصطکاکی در دو مدل ذکر شده غیریکسان است. با جایگذاری معادله‌های (۳۷.۲) و (۴۲.۲) در معادله (۵۸.۲) ترم اتلاف اصطکاکی مدل $FENE - P$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\tilde{\phi} = \frac{\tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4\eta_p} \left(1 + \frac{2\lambda^2 \tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4a^2 \eta_p^2 L^2} \right) \quad (۵۹.۲)$$

و به طور مشابه با جایگذاری معادله‌های (۵۰.۲) و (۵۴.۲) در معادله (۵۸.۲) ترم اتلاف اصطکاکی مدل $LPTT$ به دست می‌آید:

$$\tilde{\phi} = \frac{\tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4\eta} + \frac{\epsilon\lambda^2 \tilde{P}^4 \tilde{r}^4}{8\eta^3} \quad (۶۰.۲)$$

^۴Viscous Dissipation

۳.۲.۲ جریان پاورلو

با معرفی معادله ساختاری سیال پاورلو به صورت زیر که رابطه بین تنش برشی و نرخ برشی است خواهیم داشت [۶۲]:

$$\tilde{\tau}_{rz} = m \left(-\frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} \right)^n \quad (۶۱.۲)$$

که در آن $\tilde{u}_z$ سرعت در راستای طولی، $\tilde{r}$ مختصات شعاعی لوله، n شاخص پاورلو و m نیز پارامتر مربوط به جریان پاورلو می‌باشد. جهت سهولت کار، در ادامه سرعت در راستای طولی لوله را با $\tilde{u}$ نشان می‌دهیم. به دلیل عدم وجود سرعت زاویه‌ای در جریان، تعادل نیرو در جهت طولی لوله، $\tilde{z}$ ، بر یک المان سیال در فاصله $\tilde{r}$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(\tilde{p} - (\tilde{p} + \Delta\tilde{p}))\pi\tilde{r}^2 = 2\tilde{\tau}_{rz}\pi\tilde{r}L$$

$$\tilde{\tau}_{rz} = -\frac{\Delta\tilde{p}}{L} \frac{\tilde{r}}{2} \quad (۶۲.۲)$$

با معادل قراردادن روابط (۶۱.۲) و (۶۲.۲) داریم:

$$m \left(-\frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} \right)^n = -\frac{\Delta\tilde{p}}{L} \frac{\tilde{r}}{2}$$

$$d\tilde{u} = - \left(-\frac{\Delta\tilde{p}}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \tilde{r}^{\frac{1}{n}} d\tilde{r}$$

در ادامه با انتگرال‌گیری از معادله فوق و با اعمال شرط عدم لغزش در دیواره لوله، توزیع سرعت جریان پاورلو درون لوله به دست می‌آید:

$$\tilde{u} = -\frac{n}{n+1} \left(-\frac{\Delta\tilde{p}}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \tilde{r}^{\frac{n+1}{n}} + cte$$

$$at \tilde{r} = R; \tilde{u} = 0$$

$$cte = \frac{n}{n+1} \left(-\frac{\Delta\tilde{p}}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\tilde{u} = \frac{n}{n+1} \left(-\frac{\Delta\tilde{p}}{2mL} R \right)^{\frac{1}{n}} R \left[1 - \left(\frac{\tilde{r}}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (۶۳.۲)$$

اکنون به کمک تعریف سرعت میانگین، می‌توانیم رابطه‌ای برای آن به دست آوریم:

$$U = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$= \frac{\int_0^R 2\pi\tilde{r}\tilde{u}d\tilde{r}}{\pi R^2}$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi\tilde{r} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(-\frac{\Delta\tilde{p}}{mL} \frac{R}{2} \right)^{\frac{1}{n}} R \left[1 - \left(\frac{\tilde{r}}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] d\tilde{r}$$

$$= \frac{n}{3n+1} \left(-\frac{\Delta\tilde{p}R}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} R \quad (۶۴.۲)$$

که در آن U سرعت میانگین و Q دبی جریان لوله است. در نتیجه با جایگذاری معادله (۶۴.۲) در معادله (۶۳.۲) توزیع سرعت به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\frac{\tilde{u}}{U} = k_1 \left[1 - \left(\frac{\tilde{r}}{R} \right)^{k_2} \right] \quad (۶۵.۲)$$

که در آن دو پارامتر k_1 و k_2 جهت سهولت کار به صورت های زیر تعریف شده اند:

$$k_1 = \frac{3n+1}{n+1} \quad (۶۶.۲)$$

$$k_2 = \frac{n+1}{n} \quad (۶۷.۲)$$

با به دست آوردن توزیع سرعت جریان درون لوله، به کمک معادله انرژی می توان توزیع دمای جریان درون لوله را به دست آورد. معادله انتقال حرارت را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\alpha}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) \quad (۶۸.۲)$$

در معادله فوق، α نفوذ حرارتی جریان می باشد که با رابطه زیر نشان داده می شود:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

همان طور که قبلاً نیز اشاره شده، در تحقیق حاضر توزیع دمای بی بعد جریان های در حال توسعه حرارتی و هم چنین کاملاً توسعه یافته حرارتی پاورلو درون لوله دما ثابت ارائه خواهد شد. به همین دلیل شرایط مرزی استفاده شده برای دو نوع جریان ذکر شده، متفاوت می باشد. شرایط مرزی معرفی شده در معادلات (۶۹.۲) تا (۷۱.۲) مربوط به جریان در حال توسعه حرارتی پاورلو، اما برای جریان کاملاً توسعه یافته پاورلو تنها از شرایط مرزی معادلات (۶۹.۲) و (۷۰.۲) استفاده شده است.

$$at \tilde{r} = R; \quad \tilde{T} = \tilde{T}_w \quad (۶۹.۲)$$

$$at \tilde{r} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} = 0 \quad (۷۰.۲)$$

$$at \tilde{z} = 0; \quad \tilde{T} = \tilde{T}_{in} \quad (۷۱.۲)$$

که دماهای $\tilde{T}_w$ و $\tilde{T}_{in}$ مقادیری ثابت و به ترتیب مربوط به دیواره لوله و جریان ورودی لوله می باشند.

۳.۲ بی بعد سازی

با معرفی پارامترهای بی بعد سازی که در معادله آمده است، تمامی معادله های لازم را به صورت بی بعد بازنویسی می کنیم. در نهایت معادله انرژی به صورت یک معادله ساده و بی بعد حاصل خواهد شد. در ادامه معادله های مربوط به مدل های $FENE-P$ و $LPTT$ را به کمک معادله (۷۲.۲) بی بعد خواهیم کرد.

$$u = \frac{\tilde{u}}{U}, \quad r = \frac{\tilde{r}}{R}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{R}, \quad De = \frac{\lambda U}{R}, \quad T = \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_w}, \quad Nu = \frac{h D_H}{k} \quad (۷۲.۲)$$

۱.۳.۲ جریان FENE-P

به کمک روابط بی بعد موجود در معادله (۷۲.۲) توزیع سرعت به دست آمده در رابطه (۴۳.۲) را بی بعد می‌نمائیم:

$$u = -\frac{2}{U} \frac{\tilde{P}R^2}{8\eta_p} (1-r^2) \left(1 + 16 \left(\frac{U_N}{U} \right)^2 \left(\frac{\lambda U}{R} \right)^2 \frac{1}{a^2 L^2} (1+r^2) \right)$$

$$u = 2X(1-r^2) \left(1 + 16 \frac{De^2 X^2}{a^2 L^2} (1+r^2) \right) \quad (۷۳.۲)$$

که در آن جهت سهولت کار از تعریف‌های زیر استفاده شده است:

$$X = \frac{U_N}{U}, \quad U_N = -\frac{\tilde{P}R^2}{8\eta_p} \quad (۷۴.۲)$$

پارامتر U_N سرعت میانگین سیال نیوتنی در مقطع عرضی لوله را بیان می‌کند. ذکر این نکته نیز حائز اهمیت است که پارامتر X همان گرادیان فشار بی بعد است. عدد دبورا نیز به عنوان معیاری برای میزان الاستیسیته سیال تعریف می‌شود. در حالتی که $De = 0$ برقرار است، معادله (۷۳.۲) به پروفیل سهمی شکل معروف سیال نیوتنی با بیشینه سرعت واقع در مرکز لوله که برابر با ۲ است تبدیل می‌شود. دقت شود که در این حالت $X = 1$ را خواهیم داشت. بنابراین نتیجه می‌شود که ترم دوم موجود در معادله (۷۳.۲)، نسبت به پروفیل سهمی شکل، بیانگر ترم اصلاحی مربوط به مدل سیال $FENE-P$ است. توزیع سرعت جریان $FENE-P$ درون لوله برابر است با [۳۰]:

$$u = \beta_1(1-r^2) \left(1 + \beta_2(1+r^2) \right) \quad (۷۵.۲)$$

که در آن β_1 و β_2 به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\beta_1 = 2X, \quad \beta_2 = 16 \frac{De^2 X^2}{a^2 L^2} \quad (۷۶.۲)$$

تعریف سرعت متوسط در مقطع عرضی لوله را به صورت زیر داریم:

$$U = \frac{\int_0^R \tilde{u} d\tilde{A}}{A} \quad (۷۷.۲)$$

$$U = 2 \frac{\int_0^R \tilde{u} \pi \tilde{r} d\tilde{r}}{\pi R^2}$$

$$1 = 2 \int_0^1 u(r) r dr \quad (۷۸.۲)$$

حال با انتگرال‌گیری مجدد از معادله توزیع سرعت به کمک معادله فوق همان‌طور که در ادامه آمده است، در نهایت به معادله (۷۹.۲) می‌رسیم.

$$1 = 4 \int_0^1 X(1-r^2) \left(1 + 16 \frac{De^2 X^2}{a^2 L^2} (1+r^2) \right) r dr$$

$$1 = X \left(1 + \frac{64}{3} \frac{De^2}{a^2 L^2} X^2 \right) \quad (۷۹.۲)$$

با حل معادله درجه سوم فوق پارامتر گرادیان فشار بی بعد X حقیقی به دست خواهد آمد [۳۰]:

$$X = \frac{432^{1/6}(D^{2/3} - 2^{2/3})}{6\beta^{1/2}D^{1/3}} \quad (۸۰.۲)$$

که در آن پارامترهای D و β به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$D = (4 + 27\beta)^{1/2} + 3^{3/2}\beta^{1/2} \quad (۸۱.۲)$$

$$\beta = \frac{64}{3} \frac{De^2}{a^2 L^2} \quad (۸۲.۲)$$

همان‌طور که می‌دانیم در شرایطی که جریان کاملاً توسعه یافته حرارتی است، گرادیان طولی دمای بی‌بعد برابر صفر است [۲۸]:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (۸۳.۲)$$

با بسط رابطه فوق داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_w} \right) = 0 \quad (۸۴.۲)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \left(\frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_w} \right) \frac{\partial \tilde{T}_m}{\partial \tilde{z}} \quad (۸۵.۲)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{z}} T \quad (۸۶.۲)$$

در ادامه به کمک موازنه انرژی روی حجم کنترل دیفرانسیلی واقع بر مجرای جریان، رابطه‌ای برای گرادیان طولی دمای میانگین به دست می‌آوریم.

حالت $Br \neq 0$

در این حالت ترم اتلاف اصطکاکی به سمت راست معادله انرژی اضافه خواهد شد.

$$\dot{m} c_p d\tilde{T}_m = h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m) d\tilde{A} + \tilde{\phi} d\tilde{V} \quad (۸۷.۲)$$

$$(\rho \pi R^2 U) c_p d\tilde{T}_m = h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m) 2\pi R d\tilde{z} + \int_0^R \frac{\tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4\eta_p} \left(1 + \frac{2\lambda^2 \tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4a^2 \eta_p^2 L^2} \right) 2\pi \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{z}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{z}} &= \frac{h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m) 2R}{(\rho R^2 U) c_p} + \int_0^R \frac{\tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4\eta_p (\rho R^2 U) c_p} \left(1 + \frac{2\lambda^2 \tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4a^2 \eta_p^2 L^2} \right) 2\tilde{r} d\tilde{r} \\ &= \frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)}{\rho R U c_p} + \int_0^R \frac{\tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{2\eta_p \rho R^2 U c_p} \left(1 + \frac{2\lambda^2 \tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4a^2 \eta_p^2 L^2} \right) \tilde{r} d\tilde{r} \\ &= \frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)}{\rho R U c_p} + \frac{Int}{2\eta_p \rho R^2 U c_p} \end{aligned} \quad (۸۸.۲)$$

اکنون به محاسبه انتگرال موجود در معادله بالا می پردازیم:

$$\begin{aligned}
 Int &= \int_0^R \tilde{P}^2 \tilde{r}^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 \tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{2a^2 \eta_p^2 L^2} \right) \tilde{r} d\tilde{r} \\
 &= \frac{\tilde{P}^2 R^4}{4} + \frac{\lambda^2 \tilde{P}^4 R^6}{12a^2 \eta_p^2 L^2} \\
 &= 16\eta_p^2 U_N^2 + \frac{64}{3} \beta_2 U_N^2 \eta_p^2 \\
 &= 16\eta_p^2 X^2 U^2 (1 + \beta X^2)
 \end{aligned} \tag{۸۹.۲}$$

از طرفی داریم:

$$1 = X(1 + \beta X^2) \tag{۹۰.۲}$$

با اعمال معادله فوق بر معادله (۸۹.۲) در نهایت خواهیم داشت:

$$Int = 16\eta_p^2 XU^2 \tag{۹۱.۲}$$

با جایگذاری پاسخ انتگرال فوق در معادله ۸۸.۲، گرادیان طولی دمای میانگین به دست می آید:

$$\frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{z}} = \frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)}{\rho R U c_p} + \frac{8\eta_p XU}{\rho R^2 c_p} \tag{۹۲.۲}$$

و با جایگذاری رابطه فوق در معادله (۸۶.۲) در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = T \left(\frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)}{\rho R U c_p} + \frac{8\eta_p XU}{\rho R^2 c_p} \right) \tag{۹۳.۲}$$

چون عبارت تنش برشی با پارامتر $4\eta U/R$ و گرادیان سرعت با پارامتر U/R بی بعد می شوند، نتیجه می شود که ترم اتلاف اصطکاکی به صورت زیر بی بعد خواهد شد:

$$\phi = \frac{\tilde{\phi}}{4\eta U^2/R^2} \tag{۹۴.۲}$$

با اعمال معادله فوق بر معادله ۵۹.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
 \phi \frac{4\eta U^2}{R^2} &= \frac{\tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4\eta_p} \left(1 + \frac{2\lambda^2 \tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4a^2 \eta_p^2 L^2} \right) \\
 &= \frac{16\eta_p U_N^2 r^2}{R^2} \left(1 + \frac{32\lambda^2 U_N^2 r^2}{a^2 R^2 L^2} \right) \\
 &= \frac{16\eta_p U_N^2 r^2}{R^2} \left(1 + \frac{32De^2 X^2 r^2}{a^2 L^2} \right) \\
 &= \frac{16\eta_p U_N^2 r^2}{R^2} \left(1 + \frac{32De^2 X^2 r^2}{a^2 L^2} \right) \\
 &= \frac{16\eta_p U_N^2 r^2}{R^2} (1 + 2\beta_2 r^2)
 \end{aligned}$$

در نهایت فرم بی بعد ترم اتلاف اصطکاکی سیال غیرنیوتنی $FENE - P$ به صورت زیر حاصل می شود:

$$\phi = 4X^2 r^2 (1 + 2\beta_2 r^2) \quad (95.2)$$

با توجه به رابطه فوق، مشاهده می شود که با برابر صفر قرار دادن عدد بی بعد دبورا $De = 0$ ، در نتیجه تبدیل سیال غیرنیوتنی به سیال نیوتنی $X = 1$ ، ترم اتلاف اصطکاکی بی بعد سیال نیوتنی به دست می آید:

$$\phi_N = 4r^2 \quad (96.2)$$

جهت بررسی صحت رابطه فوق، باید ترم اتلاف اصطکاکی سیال نیوتنی را به دست آوریم. همان طور که می دانیم ترم اتلاف اصطکاکی برای سیال نیوتنی در مختصات استوانه ای، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\phi}_N}{\mu} = & 2 \left(\left(\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right) + \left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\tilde{u}_\theta}{\tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{\theta}} \right)^2 + \\ & \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}} \right)^2 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{u})^2 \end{aligned} \quad (97.2)$$

در مساله حاضر، معادله ۹۷.۲ به فرم ساده زیر تبدیل می شود:

$$\tilde{\phi}_N = \mu \left(\frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{r}} \right)^2 \quad (98.2)$$

می دانیم که رابطه توزیع سرعت سیال نیوتنی به صورت زیر بیان می شود:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_N = 2U \left(1 - \left(\frac{\tilde{r}}{R} \right)^2 \right) \quad (99.2)$$

اکنون به کمک معادله فوق، گرادیان سرعت را به دست آورده، سپس با جایگذاری آن در معادله ۹۸.۲ داریم:

$$\tilde{\phi}_N = 16\mu U^2 \frac{\tilde{r}^2}{R^4} \quad (100.2)$$

در نهایت فرم بی بعد ترم اتلاف اصطکاکی به کمک معادله ۹۴.۲ به صورت زیر به دست می آید:

$$\phi_N = \frac{16\mu U^2 \tilde{r}^2 / R^4}{4\mu U^2 / R^2} = 4r^2 \quad (101.2)$$

حال به کمک پارامترهای تعریف شده، معادله انرژی را بی بعد می نمایم:

$$u \left(-\frac{2Rh}{k} + \frac{8\eta_p X U^2}{k(\tilde{T}_m - \tilde{T}_w)} \right) T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{4\phi \eta U^2}{k(\tilde{T}_m - \tilde{T}_w)}$$

فرم نهایی معادله انتقال حرارت جریان سیال $FENE - P$ درون لوله با در نظر گرفتن ترم اتلاف اصطکاکی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \beta_1 (1 - r^2) (1 + \beta_2 (1 + r^2)) (Nu + 4\beta_1 Br) T - \\ 4\beta_1^2 Br (1 + 2\beta_2 r^2) r^2 = 0 \end{aligned} \quad (102.2)$$

شرایط مرزی بی بعد نیز در روابط (۱۰۳.۲) و (۱۰۴.۲) بیان شده‌اند. به دلیل محدود بودن مقدار دما در مرکز لوله، معادله (۱۰۳.۲)، و عدم وجود نقطه منفرد، حتما پاسخ نهایی باید عاری از نقطه منفرد باشد.

$$\text{at } r = 0; \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad (103.2)$$

$$\text{at } r = 1; \quad T = 0 \quad (104.2)$$

که در آن عدد بی بعد برینکمن^۵ به صورت زیر تعریف می شود:

$$Br = \frac{\eta U^2}{k(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)} \quad (105.2)$$

حالت $Br = 0$

فرم بی بعد معادله انتقال حرارت جریان $FENE - P$ بدون در نظر گرفتن عبارت اتلاف اصطکاک، با جایگذاری $Br = 0$ در معادله ... حاصل می شود که در رابطه زیر آمده است.

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + Nu\beta_1(1-r^2)(1+\beta_2(1+r^2))T = 0 \quad (106.2)$$

شرایط مرزی این معادله نیز شرط تقارن در مرکز و نیز دمای ثابت دیواره لوله می باشند (معادلات (۱۰۳.۲) و (۱۰۴.۲)).

معادله انتقال حرارت نشان داده شده در رابطه (۱۰۶.۲)، به دلیل آن که هم خود و هم شرایط مرزی آن، همگن می باشند، یک مسأله مقدار ویژه نیز به حساب می آید که در آن مقادیر عدد ناسلت، مقادیر ویژه نامیده می شوند.

۲.۳.۲ جریان خطی PTT

در این بخش نیز با انجام محاسبات ریاضی مشابه با روند انجام شده برای مدل جریان $FENE - P$ ، معادله های مربوط به مدل $LPTT$ را استخراج خواهیم کرد. معادله توزیع سرعت بی بعد جریان $LPTT$ درون لوله به صورت زیر به دست آمده است.

$$u = \alpha_1(1-r^2)(1+\alpha_2(1+r^2)) \quad (107.2)$$

که در آن α_1 و α_2 به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\alpha_1 = 2X, \quad \alpha_2 = 16\epsilon De^2 X^2 \quad (108.2)$$

و همچنین برای مدل $LPTT$ خواهیم داشت:

$$1 = X(1+\alpha X^2) \quad (109.2)$$

^۵Brinkman Number

که در آن:

$$X = \frac{432^{1/6}(d^{2/3} - 2^{2/3})}{6\alpha^{1/2}d^{1/3}} \quad (۱۱۰.۲)$$

و در آن پارامترهای d و α به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$d = (4 + 27\alpha)^{1/2} + 3^{3/2}\alpha^{1/2} \quad (۱۱۱.۲)$$

$$\alpha = \frac{64}{3}\epsilon De^2 \quad (۱۱۲.۲)$$

هم‌چنین ترم گرادیان طولی دمای میانگین را می‌توان به کمک رابطه موازنه انرژی زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \dot{m}c_p d\tilde{T}_m &= h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)d\tilde{A} + \tilde{\phi}d\tilde{V} \\ (\rho\pi R^2 U)c_p d\tilde{T}_m &= h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)2\pi R d\tilde{z} + \int_0^R \frac{\tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{4\eta_p} \left(1 + \frac{\epsilon\lambda^2 \tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{2\eta_p^2}\right) 2\pi \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{z} \\ \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{z}} &= \frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)}{\rho R U c_p} + \int_0^R \frac{\tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{2\eta_p \rho R^2 U c_p} \left(1 + \frac{\epsilon\lambda^2 \tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{2\eta_p^2}\right) \tilde{r} d\tilde{r} \\ &= \frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)}{\rho R U c_p} + \frac{Int}{2\eta_p \rho R^2 U c_p} \end{aligned} \quad (۱۱۳.۲)$$

اکنون به محاسبه انتگرال موجود در معادله بالا می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} Int &= \int_0^R \tilde{P}^2 \tilde{r}^2 \left(1 + \frac{\epsilon\lambda^2 \tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{2\eta_p^2}\right) \tilde{r} d\tilde{r} \\ &= \int_0^R \tilde{P}^2 \tilde{r}^2 \left(1 + \frac{\epsilon\lambda^2 \tilde{P}^2 \tilde{r}^2}{2\eta_p^2}\right) \tilde{r} d\tilde{r} \\ &= \frac{\tilde{P}^2 R^4}{4} + \frac{\epsilon\lambda^2 \tilde{P}^4 R^6}{12\eta_p^2} \\ &= 16\eta_p^2 U^2 X^2 + 16\eta_p^2 U^2 X^4 \alpha \\ &= 16\eta_p^2 U^2 X^2 (1 + \alpha X^2) \end{aligned} \quad (۱۱۴.۲)$$

از طرفی داریم:

$$1 = X(1 + \alpha X^2) \quad (۱۱۵.۲)$$

با اعمال معادله فوق بر معادله ۱۱۴.۲ در نهایت خواهیم داشت:

$$Int = 16\eta_p^2 X U^2$$

با جایگذاری پاسخ انتگرال فوق در معادله ۱۱۳.۲، گرادیان طولی دمای میانگین به دست می‌آید:

$$\frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{z}} = \frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)}{\rho R U c_p} + \frac{8\eta_p X U}{\rho R^2 c_p} \quad (۱۱۶.۲)$$

هم چنین ترم گرادیان طولی دما به کمک معادله ۸۶.۲ حاصل می شود:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = T \left(\frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)}{\rho R U c_p} + \frac{8\eta X U}{\rho R^2 c_p} \right) \quad (117.2)$$

فرم بی بعد عبارت اتلاف اصطکاکی سیال غیرنیوتنی $LPTT$ نیز به صورت زیر حاصل می شود:

$$\phi = 4X^2 r^2 (1 + 2\alpha_2 r^2) \quad (118.2)$$

مشاهده می شود که عبارت اتلاف اصطکاکی در جریان $LPTT$ مشابه اتلاف اصطکاکی جریان $FENE-P$ معادله (۹۵.۲)، حاصل شده است. فرم نهایی معادله انتقال حرارت جریان سیال $LPTT$ درون لوله با در نظر گرفتن ترم اتلاف اصطکاکی به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \alpha_1 (1 - r^2) (1 + \alpha_2 (1 + r^2)) (Nu + 4\alpha_1 Br) T - 4\alpha_1^2 Br (1 + 2\alpha_2 r^2) r^2 = 0 \quad (119.2)$$

$$\text{at } r = 0; \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad (120.2)$$

$$\text{at } r = 1; \quad T = 0 \quad (121.2)$$

۳.۳.۲ جریان پاورلو

پارامترهای بی بعدسازی برای جریان پاورلو در معادلات (۱۲۲.۲) تا (۱۲۴.۲) ارائه شده اند. همان طور که مشاهده می شود، پارامترهای بی بعدسازی مربوط به طول و دما برای دو نوع جریان مورد بررسی جریان پاورلو متفاوت می باشد. معادله (۱۲۳.۲) و (۱۲۴.۲) به ترتیب مربوط به برای جریان های در حال توسعه حرارتی و کاملاً توسعه یافته می باشند.

$$u = \frac{\tilde{u}}{U}, \quad r = \frac{\tilde{r}}{R}, \quad Nu = \frac{hD_H}{k} \quad (122.2)$$

$$z = \frac{\tilde{z}}{RePrD}, \quad \theta = \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_{in} - \tilde{T}_w} \quad (123.2)$$

$$z = \frac{\tilde{z}}{R}, \quad T = \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_b - \tilde{T}_w} \quad (124.2)$$

که در آن u, θ, r و z به ترتیب سرعت، دما، شعاع و طول بی بعد می باشند. Re و Pr به ترتیب معرف اعداد بی بعد رینولدز و پرانتل، D قطر و D_H قطر هیدرولیکی لوله، h ضریب انتقال حرارت جابجایی و Nu نیز عدد ناسلت بی بعد هستند. دقت شود که پارامتر T نیز دمای بی بعد می باشد. که در آن $\frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{z}}$ گرادیان طولی دمای میانگین است که هم چنین می تواند از طریق موازنه انرژی روی یک حجم کنترل

دیفرانسیلی به دست آید.

$$\dot{m}c_p d\tilde{T}_m = h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)d\tilde{A} \quad (۱۲۵.۲)$$

$$\rho\tilde{A}Uc_p d\tilde{T}_m = h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)\tilde{P}d\tilde{z}$$

$$D_H = \frac{4\tilde{A}}{\tilde{P}} \quad (۱۲۶.۲)$$

$$\frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{z}} = \frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)}{\rho R U c_p} \quad (۱۲۷.۲)$$

که در آن $\dot{m}$ دبی جریان لوله، $\tilde{A}$ و $\tilde{P}$ نیز به ترتیب بیانگر مساحت و محیط سطح مقطع لوله می‌باشند. بنابراین با جایگذاری معادله (۱۲۷.۲) در معادله (۱۲۶.۲) داریم:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)}{\rho R U c_p} T \quad (۱۲۸.۲)$$

به کمک پارامترهای بی‌بعدسازی معرفی شده، معادله انتقال حرارت مربوط به جریان در حال توسعه حرارتی پاورلو را بی‌بعد کرده و داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} &= \frac{\alpha}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) \\ U k_1 (1 - r^{k_2}) \frac{(\tilde{T}_{in} - \tilde{T}_w)}{Re P_r D} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} &= \frac{\alpha}{R^2} \frac{(\tilde{T}_{in} - \tilde{T}_w)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \\ k_1 (1 - r^{k_2}) \frac{\nu}{4 P_r} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} &= \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (۱۲۹.۲)$$

و با توجه به تعریف عدد پرانتل که در زیر آمده است و با اعمال آن بر معادله (۱۲۹.۲) در نهایت معادله انتقال حرارت جریان پاورلو درون لوله به صورت معادله (۱۳۰.۲) به دست خواهد آمد.

$$P_r = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$\frac{1}{4} k_1 \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{r(1 - r^{k_2})} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (۱۳۰.۲)$$

$$at \ r = 1; \ \theta = 0 \quad (۱۳۱.۲)$$

$$at \ r = 0; \ \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad (۱۳۲.۲)$$

$$at \ z = 0; \ \theta = 1 \quad (۱۳۳.۲)$$

فرم بی بعد معادله انتقال حرارت جریان كاملا توسعه یافته پاورلو نیز به کمک معادلات (۱۲۲.۲) و (۱۲۴.۲) به صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$\begin{aligned} u \frac{2h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)}{\rho R c_p} T &= \frac{\alpha}{R^2} \frac{(\tilde{T}_m - \tilde{T}_w)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ \frac{\alpha}{R^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + u \frac{2h}{\rho R c_p} T &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + u \frac{2Rh}{k} T &= 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + u Nu T &= 0 \end{aligned} \quad (134.2)$$

با جایگذاری رابطه توزیع سرعت بی بعد (معادله (۶۵.۲)) در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + Nu k_1 (1 - r^{k_2}) T = 0 \quad (135.2)$$

معادله های (۱۳۶.۲) و (۱۳۷.۲) نیز صورت های بی بعد شرایط مرزی معادله های (۶۹.۲) و (۷۰.۲) می باشند.

$$at \ r = 1; \ T = 0 \quad (136.2)$$

$$at \ r = 0; \ \frac{dT}{dr} = 0 \quad (137.2)$$

مسأله مقدار مرزی معرفی شده در معادله (۱۳۵.۲) یک معادله دیفرانسیل مقدار ویژه نیز می باشد چون هم معادله دیفرانسیل و هم شرایط مرزی آن، همگن می باشند. ثابت عدد ناسلت هم به عنوان مجهول وجود دارد. برخلاف دیگر مسائل انتقال حرارت جابجایی، انتقال حرارت جریان كاملا توسعه یافته دما ثابت یک معادله دیفرانسیل مقدار ویژه بوده که ابتدا باید عدد ناسلت را به طوری تعیین کرد که هم در معادله حاکم و هم در شرایط مرزی صادق باشد، و در نهایت توزیع دما را یافت. در مسائل دیگر روش حل معکوس می باشد به طوری که ابتدا توزیع دمای جریان محاسبه می شود سپس عدد ناسلت با توجه به پروفیل دمای جریان تعیین می شود. در این مطالعه عدد ناسلت به کمک روش آنالیز مودال به دست آمده است. به علت همگن بودن معادله حاکم و هم چنین شرایط مرزی آن، نمی توان توزیع دمای جریان را با این شرایط به طور کامل به دست آورد و به یک شرط یا محدودیت غیرهمگن دیگر نیاز است تا پاسخ به طور کامل به دست آید. محدودیت غیرهمگن مورد نظر با انتگرال گیری از حاصل ضرب توزیع سرعت بی بعد و دمای بی بعد جریان در مقطع عرضی لوله حاصل می شود و در معادله (۱۳۸.۲) نشان داده شده است.

$$\int_0^1 u(r) T(r) r dr = \frac{1}{2} \quad (138.2)$$

فصل ۳

روش حل

۱.۳ مقدمه

در این بخش به حل تحلیلی معادله‌های بی‌بعد حاصل از فصل قبل می‌پردازیم. همان‌طور که در روابط (۱۰۶.۲) و (۱۳۵.۲) آمده است، معادلات انتقال حرارت جابجایی اجباری سیالات $FENE - P$ و کاملاً توسعه یافته پاورلو بدون در نظر گرفتن عبارت اتلاف اصطکاکی، و همچنین معادلات مربوط به سیالات ویسکوالاستیک $FENE - P$ و $LPTT$ با در نظر گرفتن اتلاف اصطکاکی، که در روابط (۱۰۲.۲) و (۱۱۹.۲) آمده است، مشابه یک‌دیگر می‌باشند. چهار معادله ذکر شده در فوق، همگی به روش فروبنیوس و به صورت سری حل شده‌اند. همچنین معادله انتقال حرارت جابجایی اجباری سیال در حال توسعه حرارتی پاورلو که در معادله (۱۳۰.۲) نشان داده شده است، به روش جداسازی متغیرها حل شده است که حاصل آن دو پاسخ بسته برای حالت‌های رقیق‌شونده و نیوتنی می‌باشد.

۲.۳ جریان $FENE-P$

همان‌طور که در فصل دوم اثبات شد، روابط (۱۰۲.۲) و (۱۰۶.۲) مربوط به معادلات انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک $FENE - P$ می‌باشند. معادله دیفرانسیل غیرهمگن آمده شده در رابطه (۱۰۲.۲) با در نظر گرفتن عبارت اتلاف اصطکاکی در معادله انتقال حرارت حاصل شده است. که در ادامه پاسخ آن‌ها ارائه شده است.

حالت $Br = 0$

در این حالت پاسخ انتقال حرارت جابجایی اجباری جریان سیال $FENE - P$ درون لوله با حل معادله (۱۰۶.۲) حاصل می‌شود. متأسفانه هیچ حل بسته‌ای بر مبنای توابع شناخته شده ریاضی برای این مسأله وجود ندارد.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y'' + p(r)y' + q(r)y = g(r) \quad (۱.۳)$$

نقطه $r = r_0$ را یک نقطه عادی معادله فوق می‌نامند اگر $p(r)$ ، $q(r)$ و $g(r)$ هر سه در این نقطه تحلیلی (دارای حد) باشند. اگر یکی از این سه تابع در $r = r_0$ تحلیلی نباشد این نقطه را نقطه تکین (غیر عادی یا منفرد) معادله می‌نامند. هرگاه $r = r_0$ یک نقطه تکین معادله دیفرانسیل فوق باشد و توابع $(r - r_0)p(r)$ و $(r - r_0)^2 q(r)$ هر دو در این نقطه تحلیلی باشند، $r = r_0$ را نقطه تکین منظم می‌نامند و در غیر این صورت آن را نقطه تکین نامنظم معادله می‌نامند. حال با توجه به معادله (۱۰۶.۲) داریم:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + Nu\beta_1(1 - r^2)(1 + \beta_2(1 + r^2))T = 0$$

$$p(r) = \frac{1}{r} \quad (۲.۳)$$

$$q(r) = Nu\beta_1(1 - r^2)(1 + \beta_2(1 + r^2)) \quad (۳.۳)$$

با توجه به معادله‌های (۲.۴) و (۳.۴) واضح است که $r_0 = 0$ یک نقطه غیرمنفرد معادله دیفرانسیل (۱۰۶.۲) است. از طرفی داریم:

$$rp(r) = 1 \quad (۴.۳)$$

$$r^2 q(r) = Nu\beta_1 r^2(1 - r^2)(1 + \beta_2(1 + r^2)) \quad (۵.۳)$$

در نتیجه هر دو تابع نشان داده شده در معادله‌های (۴.۴) و (۵.۴) در نقطه $r_0 = 0$ تحلیلی بوده که نتیجه می‌شود نقطه $r_0 = 0$ نقطه منفرد منظم معادله دیفرانسیل (۱۰۶.۲) می‌باشد. در ادامه جواب معادله دیفرانسیل (۱۰۶.۲) را به روش فروبنیوس به دست می‌آوریم.

روش فروبنیوس

هرگاه $r = r_0$ یک نقطه منفرد منظم معادله دیفرانسیل (۱.۴) باشد جواب معادله را به صورت معادله (۶.۳) در نظر گرفته و با جایگذاری y و مشتق‌های آن در معادله (۱.۴)، مقدار r را با استفاده از معادله مشخصه رابطه (۷.۳) که از این جایگذاری حاصل می‌شود به دست می‌آوریم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r - r_0)^{n+r} \quad (۶.۳)$$

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \quad (۷.۳)$$

که p_0 و q_0 به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$p_0 = \lim_{r \rightarrow r_0} (r - r_0)p(r), \quad q_0 = \lim_{r \rightarrow r_0} (r - r_0)^2 q(r) \quad (۸.۳)$$

برای مسأله حاضر و معادله دیفرانسیل (۱۰۶.۲) داریم:

$$r(r-1)+r=0 \Rightarrow r_1=r_2=0 \quad (۹.۳)$$

$$p_0 = \lim_{r \rightarrow 0} 1 = 1, \quad q_0 = \lim_{r \rightarrow 0} Nu\beta_1 r^2(1-r^2)(1+\beta_2(1+r^2)) = 0 \quad (۱۰.۳)$$

هرگاه r_1 و r_2 ریشه‌های معادله مشخصه باشند یک جواب معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y_1(r) = r^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r-r_0)^n \quad (۱۱.۳)$$

که $y_1(r)$ برای معادله دیفرانسیل (۱۰۶.۲) به صورت زیر است:

$$y_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \quad (۱۲.۳)$$

با توجه به مقادیر ریشه‌های r_1 و r_2 جواب مستقل خطی دوم به دست خواهد آمد. در این جا چون $r_1 = r_2 = 0$ جواب دوم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y_2(r) = y_1(r) \ln(r) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n \quad (۱۳.۳)$$

در نهایت با جایگذاری معادله‌های (۱۲.۳) و (۱۳.۳) در معادله دیفرانسیل (۱۰۶.۲) و پس از دسته‌بندی کردن جمله‌های یکسان و برابر صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف r ، مجهول‌های a_n و b_n را به دست می‌آوریم.

توزیع دمای بی‌بعد جریان $FENE-P$ درون لوله بدون در نظر گرفتن عبارت اتلاف اصطکاکی و به روش فروبنیوس به صورت معادله (۱۴.۳) به دست آمده است.

$$\begin{aligned}
 T(r) = & C_1 \left[\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{4}\beta_1 Nu(1+\beta_2)r^2 + \\ & \frac{1}{64} \left(Nu^2\beta_1(1+\beta_2)^2 + 4Nu \right) \beta_1 r^4 - \\ & \frac{1}{2304} Nu\beta_1 \\ & \left(Nu^2\beta_1^2(1+\beta_2)^3 + 20Nu\beta_1(1+\beta_2) - 64\beta_2 \right) r^6 + O(r^7) \end{aligned} \right] + \\
 & \ln(r) \left[\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{4}\beta_1 Nu(1+\beta_2)r^2 \\ & + \frac{1}{64} \left(Nu^2\beta_1(1+\beta_2)^2 + 4Nu \right) \beta_1 r^4 - \\ & \frac{1}{2304} Nu\beta_1 \\ & \left(Nu^2\beta_1^2(1+\beta_2)^3 + 20Nu\beta_1(1+\beta_2) - 64\beta_2 \right) r^6 + O(r^7) \end{aligned} \right] + \\
 & C_2 \left[\begin{aligned} & \frac{1}{4}\beta_1 Nu(1+\beta_2)r^2 + \\ & \frac{1}{64}\beta_1 \left(4Nu - \frac{3}{2} \left(Nu^2\beta_1(1+\beta_2)^2 + 4Nu \right) \right) r^4 + \\ & \frac{1}{2304} Nu\beta_1 \\ & \left(-12 \left(Nu\beta_1(1+\beta_2) - 8\beta_2 \right) + \right. \\ & \left. \frac{11}{6} \left(Nu^2\beta_1^2(1+\beta_2)^3 + 20Nu\beta_1(1+\beta_2) - 64\beta_2 \right) \right) r^6 + O(r^7) \end{aligned} \right] \quad (14.3)
 \end{aligned}$$

پارامترهای β_1 و β_2 در رابطه فوق مربوط به خواص رئولوژیکی سیال بوده و مقادیر آن‌ها معلوم می‌باشد. اما ضرایب C_1 ، C_2 و عدد بی‌بعد ناسلت سه مجهول معادله فوق می‌باشند. نکته حائز اهمیت این است که توزیع دما در تمام سطح مقطع محدود است. بنابراین طبق شرط مرزی معادله (۱۰۳.۲) ترم C_2 در معادله (۱۴.۳) باید برابر صفر باشد، تا پاسخ به‌دست آمده در $r=0$ نقطه تکین نداشته باشد. عدد Nu نیز به کمک شرط مرزی حرارتی روی دیواره به‌دست می‌آید. با اعمال شرط مرزی ارائه شده در معادله (۱۰۴.۲) بر توزیع دمای رابطه (۱۴.۳)، عبارت چندجمله‌ای بر حسب Nu به‌دست می‌آید که در معادله

زیر نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}
 & -\beta_1^7 \left(\frac{\beta_2^7}{416179814400} + \frac{\beta_2^6}{59454259200} + \frac{\beta_2^5}{19818086400} + \frac{\beta_1^7 \beta_2^4}{11890851840} + \right. \\
 & \left. \frac{\beta_2^3}{11890851840} + \frac{\beta_2^2}{19818086400} + \frac{\beta_2}{59454259200} + \frac{1}{416179814400} \right) Nu^7 + \\
 & \beta_1^6 \left(\frac{\beta_2^6}{2123366400} + \frac{29\beta_2^5}{14863564800} + \frac{\beta_2^4}{371589120} + \frac{\beta_2^3}{1486356480} - \frac{\beta_2^2}{594542592} - \right. \\
 & \left. \frac{23\beta_2}{14863564800} - \frac{1}{2477260800} \right) Nu^6 - \\
 & \beta_1^5 \left(\frac{\beta_2^5}{92897280} + \frac{\beta_2^4}{137625600} - \frac{\beta_2^3}{49545216} + \frac{13\beta_2^2}{3715891200} + \frac{53\beta_2}{1238630400} + \right. \\
 & \left. \frac{1}{44236800} \right) Nu^5 + \\
 & \beta_1^4 \left(\frac{79\beta_2^4}{33177600} + \frac{1877\beta_2^3}{203212800} + \frac{28789\beta_2^2}{2167603200} + \frac{51049\beta_2}{6502809600} + \frac{4631}{3251404800} \right) Nu^4 - \\
 & \beta_1^3 \left(\frac{6541\beta_2^3}{25401600} + \frac{13063\beta_2^2}{20321280} + \frac{107003\beta_2}{203212800} + \frac{59}{409600} \right) Nu^3 + \\
 & \beta_1^2 \left(\frac{119\beta_2^2}{10368} + \frac{551\beta_2}{28800} + \frac{73}{9216} \right) Nu^2 - \beta_1 \left(\frac{2}{9}\beta_2 + \frac{3}{16} \right) Nu + 1 = 0
 \end{aligned}
 \tag{۱۵.۳}$$

طبق قاعده مقیاس^۱ در انتقال حرارت جابجایی، عدد Nu در جریان داخلی و آرام از مرتبه اول است. بنابراین ریشه‌های مثبت مرتبه اول معادله (۱۵.۳)، به‌عنوان عدد Nu فیزیکی جریان $FENE-P$ شناخته می‌شوند. با توجه به معادله (۱۴.۳) می‌توان دریافت که $C_1 = T_{max}$ ، چون ماکزیمم دمای بی‌بعد در مرکز لوله، یعنی در $r = 0$ واقع شده است. بعداز محاسبه مقدار عدد Nu ، ثابت مجهول توزیع دمای بی‌بعد که C_1 می‌باشد، با جایگذاری معادلات (۷۵.۲) و (۱۴.۳) در معادله (۱۳۸.۲) به‌دست خواهد آمد.

^۱Scaling law

$$\begin{aligned}
T_{\max}^{-1} = & -\frac{Nu^7\beta_1^8}{29964946636800} - \frac{Nu^6\beta_1^7}{267544166400} - \frac{11Nu^5\beta_1^6}{19110297600} + \frac{1093Nu^4\beta_1^5}{13005619200} - \\
& \frac{6949Nu^3\beta_1^4}{619315200} + \frac{83Nu^2\beta_1^3}{92160} - \frac{7}{192}Nu\beta_1^2 + \frac{\beta_1}{2} - \frac{Nu^7\beta_1^8\beta_2^8}{16647192576000} + \\
& Nu^6\beta_1^7 \left(-\frac{17Nu\beta_1}{37456183296000} + \frac{1}{66886041600} \right) \beta_2^7 + \\
& Nu^5\beta_1^6 \left(-\frac{Nu^2\beta_1^2}{668860416000} + \frac{17Nu\beta_1}{222953472000} - \frac{13}{9289728000} \right) \beta_2^6 + \\
& Nu^4\beta_1^5 \left(-\frac{Nu^3\beta_1^3}{35672555200} + \frac{41Nu^2\beta_1^2}{267544166400} - \frac{83Nu\beta_1}{13934592000} + \frac{37}{149299200} \right) \beta_2^5 + \\
& Nu^3\beta_1^4 \left(-\frac{Nu^4\beta_1^4}{305764761600} + \frac{13Nu^3\beta_1^3}{89181388800} - \frac{493Nu^2\beta_1^2}{44590694400} + \frac{50021Nu\beta_1}{48771072000} - \frac{5777}{203212800} \right) \beta_2^4 + \\
& Nu^2\beta_1^3 \left(-\frac{13Nu^5\beta_1^5}{5350883328000} + \frac{Nu^4\beta_1^4}{19110297600} - \frac{4013Nu^3\beta_1^3}{334430208000} + \frac{247111Nu^2\beta_1^2}{146313216000} - \frac{11899Nu\beta_1}{130636800} + \frac{3007}{1632960} \right) \beta_2^3 + \\
& Nu\beta_1^2 \left(-\frac{Nu^6\beta_1^6}{891813888000} - \frac{Nu^5\beta_1^5}{66886041600} - \frac{17Nu^4\beta_1^4}{2064384000} + \frac{3133Nu^3\beta_1^3}{2286144000} - \frac{3973303Nu^2\beta_1^2}{36578304000} + \frac{1993Nu\beta_1}{453600} - \frac{13}{216} \right) \beta_2^2 + \\
& \left(-\frac{11Nu^7\beta_1^8}{37456183296000} - \frac{23Nu^6\beta_1^7}{1337720832000} - \frac{41Nu^5\beta_1^6}{12386304000} + \frac{318001Nu^4\beta_1^5}{585252864000} - \frac{1453Nu^3\beta_1^4}{25401600} + \frac{8377Nu^2\beta_1^3}{2419200} - \frac{17Nu\beta_1^2}{180} + \frac{2}{3}\beta_1 \right) \beta_2
\end{aligned} \quad (۱۶.۳)$$

در نهایت با محاسبه عدد Nu و تعیین $T_{\max}$ توزیع دمای بی‌بعد جریان سیال $FENE - P$ درون لوله دما ثابت به کمک رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$T(r) = T_{\max} \left[\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{4}(1+\beta_2)Nu\beta_1 r^2 + \\ & \frac{1}{64}(Nu^2\beta_1(1+\beta_2)^2 + 4Nu)\beta_1 r^4 - \\ & \frac{1}{2304}(Nu^3\beta_1^2(1+\beta_2)^3 + 20Nu^2\beta_1(1+\beta_2) - 64\beta_2)\beta_1 r^6 + \\ & \frac{1}{147456} \left(\begin{aligned} & Nu^4\beta_1^2(1+\beta_2)^4 + \\ & 56Nu^3\beta_1(1+\beta_2)^2 + \\ & Nu^2(144 - 640\beta_2(1+\beta_2)) \end{aligned} \right) \beta_1^2 r^8 \end{aligned} \right] + \dots \quad (۱۷.۳)$$

تعیین تعداد ترم‌های موجود در معادله (۱۷.۳) بسیار مهم می‌باشد. به این منظور سری معادله (۱۷.۳) با در نظر گرفتن ترم‌های تا مرتبه هشتم، در شرایط بحرانی وقتی که $De = 10$ و $L^2 = 1$ است در دیواره

لوله، $r = 1$ ، محاسبه شده است که حاصل آن کوچکتر از 10^{-5} به دست آمده است. شرط مرزی معادله (۱۰۴.۲) نشان می‌دهد که سری معادله (۱۷.۳) از دقت بالایی برخوردار می‌باشد.

حالت $Br \neq 0$

ثابت شد که معادله انتقال حرارت جریان سیال $FENE - P$ درون لوله با در نظر گرفتن ترم اتلاف اصطکاکی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \beta_1(1 - r^2)(1 + \beta_2(1 + r^2))(Nu + 8XBr)T - 4\beta_1^2 Br(1 + 2\beta_2 r^2)r^2 = 0$$

پاسخ تحلیلی معادله فوق به روش فروبنیوس در ادامه به دست آمده است.

$$\begin{aligned}
T(r) = C_1 & \left(\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{4}\beta_1 (Nu(1+\beta_2) + 8XBr(1+\beta_2))r^2 \\ & + \frac{1}{64} \left(Nu^2\beta_1(1+\beta_2)^2 + 4Nu + \right. \\ & \left. 16(2X + (1+\beta_2)^2(4BrX^2\beta_1 + NuX\beta_1))Br \right) \beta_1 r^4 - \\ & \frac{1}{2304} (8XBr + Nu)\beta_1 \\ & \left(Nu^2\beta_1^2(1+\beta_2)^3 + 20Nu\beta_1(1+\beta_2) - 64\beta_2 + \right. \\ & \left. 16 \left(10X\beta_1(1+\beta_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. (1+\beta_2)^3(4BrX^2\beta_1^2 + NuX\beta_1^2) \right) Br \right) \end{aligned} \right) r^6 + O(r^7) + \\
& \ln(r) \left(\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{4}\beta_1 (Nu(1+\beta_2) + 8XBr(1+\beta_2))r^2 \\ & + \frac{1}{64} \left(Nu^2\beta_1(1+\beta_2)^2 + 4Nu + \right. \\ & \left. 16(2X + (1+\beta_2)^2(NuX\beta_1 + 4BrX^2\beta_1))Br \right) \beta_1 r^4 - \\ & \frac{1}{2304} (8XBr + Nu)\beta_1 \\ & \left(Nu^2\beta_1^2(1+\beta_2)^3 + 20Nu\beta_1(1+\beta_2) - 64\beta_2 + \right. \\ & \left. 16 \left(10X\beta_1(1+\beta_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. (1+\beta_2)^3(4BrX^2\beta_1^2 + NuX\beta_1^2) \right) Br \right) \end{aligned} \right) r^6 + O(r^7) + \\
& C_2 \left(\begin{aligned} & \frac{1}{4}\beta_1 (Nu(1+\beta_2) + 8XBr(1+\beta_2))r^2 + \\ & \frac{1}{64}\beta_1 \left(\begin{aligned} & (32XBr + 4Nu) - \\ & \frac{3}{2} \left(Nu^2\beta_1(1+\beta_2)^2 + 4Nu + \right. \\ & \left. 16(NuX\beta_1(1+\beta_2)^2 + \right. \\ & \left. 4BrX^2\beta_1(1+\beta_2)^2 + 2X) Br \right) \end{aligned} \right) r^4 + \\ & \frac{1}{2304} (8XBr + Nu)\beta_1 \\ & \left(-12 \left(\begin{aligned} & Nu\beta_1(1+\beta_2) - 8\beta_2 + \\ & 8BrX\beta_1(1+\beta_2) \end{aligned} \right) + \right. \\ & \left(Nu^2\beta_1^2(1+\beta_2)^3 + 20Nu\beta_1(1+\beta_2) - 64\beta_2 + \right. \\ & \left. \frac{11}{6} \left(\begin{aligned} & 4X^2\beta_1^2(1+\beta_2)^3 Br + \\ & 16 \left(X \left(10\beta_1(1+\beta_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. Nu\beta_1^2(1+\beta_2)^3 \right) \right) Br \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) r^6 + O(r^7) + \\
& BrX^2 \left(r^4 + \frac{1}{36} (32\beta_2 - \beta_1 (Nu(1+\beta_2) + 8BrX(1+\beta_2))) \right) r^6 + O(r^7)
\end{aligned} \tag{١٨.٣}$$

با اعمال شرط مرزی معادله (۱۰۳.۲) بر معادله فوق، ضریب ثابت C_2 حذف خواهد شد. در زیر پاسخ معادله (۱۰۲.۲) تا مرتبه بزرگی نه، با دقت بیشتری به دست آمده است.

$$T(r) = C_1 \left[\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{4}(1+\beta_2)(Nu + 8BrX)\beta_1 r^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{64} \left(Nu^2\beta_1(1+\beta_2)^2 + 4Nu + 16(2X + (1+\beta_2)^2\beta_1(4BrX^2 + NuX))Br \right) \beta_1 r^4 - \right. \\ & \left. \frac{1}{2304}(8XBr + Nu) \right. \\ & \left. \left(Nu^2\beta_1^2(1+\beta_2)^3 + 20Nu\beta_1(1+\beta_2) - 64\beta_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. 16 \left(10X\beta_1(1+\beta_2) + (1+\beta_2)^3(4BrX^2 + NuX\beta_1^2) \right) Br \right) \beta_1 r^6 + \right. \\ & \left. \frac{1}{147456}(8XBr + Nu) \right. \\ & \left. \left(\left(Nu^3\beta_1^2(1+\beta_2)^4 + 56Nu^2\beta_1(1+\beta_2)^2 + (144 - 640\beta_2(1+\beta_2))Nu \right) + \right. \right. \\ & \left. \left((1+\beta_2)^4(512Br^2X^3\beta_1^2 + 192NuBrX^2\beta_1^2) + 24Nu^2X\beta_1^2(1+\beta_2)^4 + 896NuX\beta_1(1+\beta_2)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. 3584BrX^2\beta_1(1+\beta_2^2) + 7168BrX^2\beta_1\beta_2 - 5120X\beta_2(1+\beta_2) + 1152X \right) Br \right) \beta_1^2 r^8 + O(r^9) \\ & X^2 \left(\left(r^4 + \frac{1}{36}(32\beta_2 - (1+\beta_2)\beta_1(Nu + 8BrX))r^6 + \right. \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{64}(8BrX + Nu) - \frac{1}{2304}(32\beta_2 - ((1+\beta_2)\beta_1(Nu + 8BrX))) \right) \beta_1 r^8 \right) Br + O(r^9) \end{aligned} \right] + \quad (19.3)$$

ضریب ثابت C_1 نیز با اعمال شرط مرزی (۱۰۴.۲) به دست می آید که در آن ضرایب E و G در معادلات (۲۱.۳) و (۲۲.۳) آمده اند.

$$C_1 = -\frac{E}{G} \quad (20.3)$$

$$E = X^2 \left(\begin{array}{c} 1 + \frac{1}{36} (32\beta_2 - (1 + \beta_2)\beta_1 (Nu + 8BrX)) + \\ \frac{1}{64} (8BrX + Nu) - \\ \frac{1}{2304} (32\beta_2 - ((1 + \beta_2)\beta_1 (Nu + 8BrX))) \\ (1 + \beta_2)(Nu + 8BrX) \end{array} \right) Br \quad (21.3)$$

$$G = \left(\begin{array}{c} 1 - \frac{1}{4} (1 + \beta_2)(Nu + 8BrX)\beta_1 + \\ \frac{1}{64} \left(Nu^2\beta_1(1 + \beta_2)^2 + 4Nu + \right. \\ \left. 16(2X + (1 + \beta_2)^2\beta_1(4BrX^2 + NuX))Br \right) \beta_1 - \\ \frac{1}{2304} (8XBr + Nu) \\ \left(Nu^2\beta_1^2(1 + \beta_2)^3 + 20Nu\beta_1(1 + \beta_2) - 64\beta_2 + \right. \\ \left. 16 \left(10X\beta_1(1 + \beta_2) + \right. \right. \\ \left. \left. (1 + \beta_2)^3(4BrX^2 + NuX\beta_1^2) \right) Br \right) \beta_1 + \\ \frac{1}{147456} (8XBr + Nu) \\ \left(\begin{array}{c} Nu^3\beta_1^2(1 + \beta_2)^4 + \\ 56Nu^2\beta_1(1 + \beta_2)^2 + \\ (144 - 640\beta_2(1 + \beta_2))Nu \\ (1 + \beta_2)^4(512Br^2X^3\beta_1^2 + \\ 192NuBrX^2\beta_1^2) + \\ 24Nu^2X\beta_1^2(1 + \beta_2)^4 + \\ 896NuX\beta_1(1 + \beta_2)^2 + \\ 3584BrX^2\beta_1(1 + \beta_2^2) + \\ 7168BrX^2\beta_1\beta_2 - \\ (5120X\beta_2(1 + \beta_2) + 1152X) \end{array} \right) Br \end{array} \right) \beta_1^2 \quad (22.3)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در معادله مربوط به ضریب ثابت C_1 که در رابطه (۲۰.۳) آمده است، یک مجهول دیگر نیز وجود دارد که عدد ناسلت نامیده می‌شود. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، با اعمال محدودیت فیزیکی معادله (۱۳۸.۲) می‌توان در نهایت با حل یک دستگاه دو معادله-دو مجهول، پارامترهای ثابت C_1 و Nu را به دست آورد.

۳.۳ جریان خطی PTT

به روشی مشابه با آنچه در بخش قبل آمده است معادله انتقال حرارت جریان ویسکوالاستیک $LPTT$ درون لوله دما ثابت را که در معادله (۱۱۹.۲) آمده است، به روش فروبنیوس حل کرده که پاسخ آن در معادله (۲۳.۳) نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}
T(r) = C_1 & \left(\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{4}\alpha_1 (Nu(1+\alpha_2) + 4k_1(1+\alpha_2)Br) r^2 + \\ & \frac{1}{64}\alpha_1 \left(Nu(\alpha_1 Nu(1+\alpha_2)^2 + 4) + \right. \\ & \left. 8(\alpha_1^2 Nu(1+\alpha_2)^2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_1^3(1+\alpha_2)^2 Br) Br \right) r^4 - \\ & \frac{1}{2304}\alpha_1 (4\alpha_1 Br + Nu) \\ & \left(\alpha_1 Nu (\alpha_1 Nu(1+\alpha_2)^3 + 20(1+\alpha_2)) - 64\alpha_2 + \right. \\ & \left. 8 \left(\alpha_1^3 Nu(1+\alpha_2)^3 + 10\alpha_1^2(1+\alpha_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. 2\alpha_1^4(1+\alpha_2)^3 Br \right) Br \right) r^6 + O(r^7) \end{aligned} \right) + \\
\ln(r) & \left(\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{4}\alpha_1 (Nu(1+\alpha_2) + 4\alpha_1(1+\alpha_2)Br) r^2 + \\ & \frac{1}{64}\alpha_1 \left(Nu(\alpha_1 Nu(1+\alpha_2)^2 + 4) + \right. \\ & \left. 8(\alpha_1^2 Nu(1+\alpha_2)^2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_1^3(1+\alpha_2)^2 Br) Br \right) r^4 - \\ & \frac{1}{2304}\alpha_1 (4\alpha_1 Br + Nu) \\ & \left(\alpha_1 Nu (\alpha_1 Nu(1+\alpha_2)^3 + 20(1+\alpha_2)) - 64\alpha_2 + \right. \\ & \left. 8 \left(\alpha_1^3 Nu(1+\alpha_2)^3 + 10\alpha_1^2(1+\alpha_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. 2\alpha_1^4(1+\alpha_2)^3 Br \right) Br \right) r^6 + O(r^7) \end{aligned} \right) + \\
C_2 & \left(\begin{aligned} & \frac{1}{4}\alpha_1 (Nu(1+\alpha_2) + 4\alpha_1(1+\alpha_2)Br) r^2 + \\ & \left(\frac{1}{16}\alpha_1 (Nu + 4\alpha_1 Br) - \right. \\ & \left. \frac{3}{128}\alpha_1 \left(\alpha_1 Nu^2(1+\alpha_2)^2 + 4Nu + \right. \right. \\ & \left. \left. 8(\alpha_1^2 Nu(1+\alpha_2)^2 + 2\alpha_1 + 2Br\alpha_1^3(1+\alpha_2)^2) Br \right) \right) r^4 + \\ & \left(-\frac{3}{576}(4\alpha_1 Br + Nu)\alpha_1 \right. \\ & \left(\alpha_1 Nu(1+\alpha_2) - 8\alpha_2 + 4\alpha_1^2(1+\alpha_2)Br \right) + \\ & \frac{11}{13824}\alpha_1 (Nu + 4\alpha_1 Br) \\ & \left(\alpha_1^2 Nu^2(1+\alpha_2)^3 + 20Nu\alpha_1(1+\alpha_2) - 64\alpha_2 \right) \\ & \left. 8 \left(\alpha_1^3 Nu(1+\alpha_2)^3 + 10\alpha_1^2(1+\alpha_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. 2Br(\alpha_1^4(1+\alpha_2)^3) \right) Br \right) r^6 + O(r^7) \end{aligned} \right) + \\
& Br \left(\frac{1}{4}\alpha_1^2 r^4 + \left(\frac{2}{9}\alpha_1^2 \alpha_2 - \frac{1}{144}\alpha_1^2 (\alpha_1 Nu(1+\alpha_2) + 4\alpha_1^2(1+4\alpha_2)Br) \right) r^6 + O(r^7) \right)
\end{aligned} \tag{۲۳.۳}$$

شرط مرزی معادله (۱۲۰.۲) بیان‌گر این نکته می‌باشد که توزیع دمای جریان در مرکز لوله محدود می‌باشد. بنابراین به‌علت وجود عبارت $\ln(r)$ در معادله (۲۳.۳) نتیجه می‌شود که ضریب ثابت C_2 باید برابر صفر

باشد. توزیع دمای بی‌بعد جریان $LPTT$ با دقت بالاتر، جملات سری با مرتبه بزرگی نه، در معادله (۲۴.۳) آمده است.

$$T(r) = C_1 \left(\begin{aligned} &1 - \frac{1}{4}\alpha_1(Nu(1+\alpha_2) + 4\alpha_1(1+\alpha_2)Br)r^2 + \\ &\frac{1}{64}\alpha_1 \left(\alpha_1 Nu^2(1+\alpha_2)^2 + 4Nu \right. \\ &\quad \left. 8(\alpha_1^2 Nu(1+\alpha_2)^2 + 2\alpha_1^3(1+\alpha_2)^2 Br + 2\alpha_1) Br \right) r^4 - \\ &\frac{1}{2304}\alpha_1(4\alpha_1 Br + Nu) \\ &\left(\alpha_1^2 Nu^2(1+\alpha_2)^3 + 20\alpha_1 Nu(1+\alpha_2) - 64\alpha_2 + \right. \\ &\quad \left. 8 \left(10\alpha_1^2(1+\alpha_2) + \alpha_1^3 Nu(1+\alpha_2)^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2\alpha_1^4(1+\alpha_2)^3 Br \right) Br \right) r^6 + \\ &\frac{1}{147456}(Nu + 4\alpha_1 B)\alpha_1^2 \\ &\left(Nu^3 k_1^2(1+\alpha_2)^4 + 56\alpha_1 Nu^2(1+\alpha_2)^2 - \right. \\ &\quad 640Nu\alpha_2(1+\alpha_2) + 144Nu + \\ &\quad \left(12\alpha_1^3 Nu^2(1+\alpha_2)^4 Br + 48\alpha_1^4 Nu(1+\alpha_2)^4 Br + \right. \\ &\quad 64\alpha_1^5(1+\alpha_2)^4 Br^2 + 448\alpha_1^2 \alpha_2^2 Nu + \\ &\quad 448\alpha_1^2 Nu(1+2\alpha_2) - 2560\alpha_1 \alpha_2(1+\alpha_2) + \\ &\quad \left. \left. 576\alpha_1 + 896\alpha_1^3(1+\alpha_2)^2 Br \right) Br \right) r^8 + O(r^9) \end{aligned} \right) + \quad (24.3)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\alpha_1^2 Br r^4 + \left(\frac{2}{9}\alpha_1^2 \alpha_2 Br - \frac{1}{144}\alpha_1^2 Br(Nu\alpha_1(1+\alpha_2) + 4\alpha_1^2(1+\alpha_2)Br) \right) r^6 + \\ &\left(\frac{1}{256}\alpha_1^2 Br(Nu\alpha_1 + 4\alpha_1^2 Br) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2304} \left(8\alpha_1^2 \alpha_2 Br - \frac{1}{4}\alpha_1^2 Br(Nu\alpha_1(1+\alpha_2) + 4\alpha_1^2(1+\alpha_2)Br) \right) \right) r^8 + O(r^9) \\ &\quad \left(\alpha_1 Nu(1+\alpha_2) + 4\alpha_1^2(1+\alpha_2)Br \right) \end{aligned}$$

و با اعمال شرط مرزی معرفی شده در معادله (۱۲۱.۲) می‌توان ثابت C_1 را به صورت زیر به دست آورد که در آن e و g به ترتیب در معادله‌های (۲۶.۳) و (۲۷.۳) تعریف شده‌اند.

$$C_1 = -\frac{e}{g} \quad (25.3)$$

جریان در حال توسعه حرارتی

معادله (۱۳۰.۲) را به روش جداسازی متغیرها حل می‌نمائیم. به این منظور تابع پاسخ را به صورت معادله (۲۸.۳) در نظر گرفته و با جای‌گذاری آن در معادله (۱۳۰.۲) خواهیم داشت:

$$\theta(r, x) = P(r)X(x) \quad (28.3)$$

$$\frac{1}{4}k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r(1-r^{k_2})} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (29.3)$$

$$\frac{1}{4}k_1 \frac{1}{X(x)} \frac{dX(x)}{dx} = \frac{1}{r(1-r^{k_2})} \left(\frac{1}{P(r)} \frac{dP(r)}{dr} + \frac{r}{P(r)} \frac{d^2 P(r)}{dr^2} \right) = -\lambda^2 \quad (30.3)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود معادله (۲۹.۳) دارای دو متغیر r و x بوده و زمانی تساوی معادله مورد نظر برقرار است که هر دو جمله برابر یک پارامتر ثابت که با $-\lambda^2$ نشان داده شده است، باشند. اکنون با جداسازی معادله بر حسب دو متغیر مذکور، معادله‌های (۳۱.۳) و (۳۲.۳) حاصل می‌شوند.

$$X'(x) + \frac{4}{k_1} \lambda^2 X(x) = 0 \quad (31.3)$$

$$P''(r) + \frac{1}{r} P'(r) + (1-r^{k_2}) \lambda^2 P(r) = 0 \quad (32.3)$$

$$P'(0) = 0 \quad (33.3)$$

$$P(1) = 0 \quad (34.3)$$

با حل معادله‌های فوق و یافتن پاسخ‌های $X(x)$ و $P(r)$ توزیع دمای بی‌بعد جریان پاورلو درون لوله را به دست آورده‌ایم. همان‌طور که می‌دانیم جواب معادله (۳۱.۳) به صورت تابع نمایی بوده که در معادله (۳۵.۳) ظاهر شده است. اما معادله (۳۲.۳) یک معادله اشتورم لیویل است که در فرم یک مسأله مقدار ویژه ظاهر شده است. در ادامه تنها به‌ازای دو مقدار شاخص جریان پاورلو $n = 0.2$ و $n = 1$ حل‌های بسته برای معادله (۳۲.۳) ارائه می‌شود. ذکر این نکته مهم است که به‌ازای مقادیر دیگر شاخص پاورلو، حل بسته وجود ندارد.

$$X(x) = a \exp\left(-\frac{4}{k_1} \lambda^2 x\right) \quad (35.3)$$

حالت رقیق شونده $n = 0.2$

در این حالت با در نظر گرفتن $n = 0.2$ معادله (۳۲.۳) را حل می‌کنیم. همان‌طور که در معادله (۳۶.۳) نشان داده شده است، پاسخ به صورت یک حل بسته به دست آمده است. پارامترهای C_1 و C_2 نیز ضرایب

ثابت معادله می‌باشند که با کمک شرایط مرزی معادله‌های (۳۳.۳) و (۳۴.۳) به دست خواهند آمد.

$$P(r) = C_1 e^{-\frac{1}{4}\lambda r^4} \text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}r^2\right) + C_2 \left[\frac{e^{-\frac{1}{4}\lambda r^4} \text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}r^2\right)}{\int \frac{e^{\frac{1}{2}\lambda r^4}}{r \left(\text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}r^2\right)\right)^2 dr}} dr \right] \quad (36.3)$$

شرط مرزی معادله (۳۳.۳) بیان‌گر این واقعیت است که $P(r)$ در مرکز لوله متناهی بوده و در $r=0$ فاقد جواب منفرد است. حال با توجه به معادله (۳۷.۳) و این که پارامتر r در مخرج کسر واقع است، متوجه خواهیم شد که ضریب ثابت C_2 باید برابر صفر باشد.

$$P'(r) = -C_1 \left[\frac{\lambda r^3 e^{-\frac{1}{4}\lambda r^4} \text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}r^2\right) + e^{-\frac{1}{4}\lambda r^4} \sqrt{2\lambda} \text{HeunBPrime}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}r^2\right)}{\int \frac{e^{\frac{1}{2}\lambda r^4}}{r \left(\text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}r^2\right)\right)^2 dr}} dr \right] - C_2 \left[\frac{\left(\lambda r^3 e^{-\frac{1}{4}\lambda r^4} \text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}r^2\right) + e^{-\frac{1}{4}\lambda r^4} \sqrt{2\lambda} \text{HeunBPrime}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}r^2\right) \right)}{e^{-\frac{1}{4}\lambda r^4} e^{\frac{1}{2}\lambda r^4} \text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}r^2\right) r} \right] \quad (37.3)$$

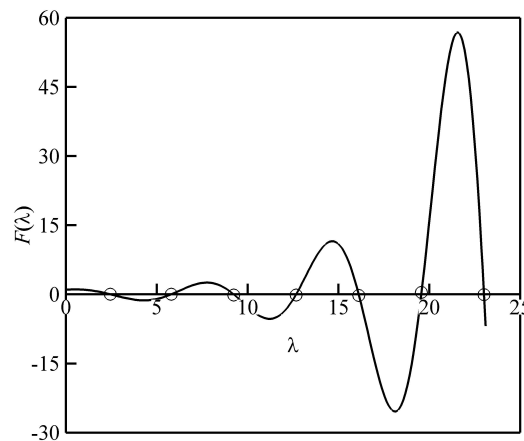
بنابراین پاسخ نهایی به صورت معادله (۳۸.۳) ساده می‌شود.

$$P(r) = C_1 e^{-\frac{1}{4}\lambda r^4} \text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}r^2\right) \quad (38.3)$$

با اعمال شرط مرزی معادله (۳۴.۳) بر معادله فوق داریم:

$$0 = \text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) \quad (39.3)$$

مقادیر ویژه بشماری وجود دارند که در معادله بالا صادق باشند. برای پیدا کردن مقادیر ویژه موجود، ابتدا $F(\lambda)$ را بر حسب بازه محدودی از λ رسم می‌کنیم که $F(\lambda)$ طرف راست معادله (۳۹.۳) است.



شکل ۱۰۳: تعیین مقادیر ویژه برای حالت رقیق‌شونده

در نتیجه مقادیر ویژه دقیقا ریشه‌های معادله (۳۹.۳) هستند که در شکل ۱۰۳ با دایره‌های توخالی نشان داده شده‌اند. با جایگذاری معادله‌های (۳۵.۳) و (۳۸.۳) در معادله (۲۸.۳) توزیع دمای بی‌بعد جریان درون لوله به‌دست خواهد آمد.

$$\theta(r, x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{1}{4}\lambda_m r^4} \text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_m^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda_m}{2}}r^2\right) e^{-\frac{4}{k_1}\lambda_m^2 x} \quad (40.3)$$

همان‌طور که مشاهده شده است، به دلیل خطی بودن اپراتور دیفرانسیلی و طبق اصل سوپروپوزیشن که بیان‌گر این واقعیت است که مجموع پاسخ‌های یک معادله همگن، خود نیز پاسخی قابل قبول برای آن است، توزیع دمای بی‌بعد به صورت سری داده شده است. معادله (۴۱.۳) با اعمال شرط مرزی (۱۳۳.۲) بر توزیع دمای جریان حاصل شده است.

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{1}{4}\lambda_m r^4} \text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_m^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda_m}{2}}r^2\right) \quad (41.3)$$

و در نهایت ثابت A_m به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$A_m = \frac{\int_0^1 e^{-\frac{1}{4}\lambda_m r^4} \text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_m^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda_m}{2}}r^2\right) r(1-r^{k_2}) dr}{\int_0^1 \left(e^{-\frac{1}{4}\lambda_m r^4} \text{HeunB}\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_m^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda_m}{2}}r^2\right)\right)^2 r(1-r^{k_2}) dr} \quad (42.3)$$

حالت نیوتنی، $n = 1$

مطابق حالت قبل، در این قسمت نیز توزیع دمای بی‌بعد جریان را به دست خواهیم آورد. همان‌طور که قبلاً هم گفته شد در این حالت سیال پاورلو تبدیل به سیال نیوتنی می‌شود. در این حالت پاسخ معادله

جدول ۱.۳: مقادیر ویژه و ضرایب ثابت مربوط به معادله دمای بی‌بعد برای دو حالت نیوتنی و پاورلو

$n = 1$		$n = 0.2$		
λ_m	A_m	λ_m	A_m	m
2.7044	1.4764	2.4494	1.5342	1
6.6790	-0.8061	5.8047	-0.9082	2
10.6734	0.5888	9.2329	0.6690	3
14.6711	-0.4758	12.6727	-0.5422	4
18.6699	0.4151	16.1167	0.4620	5
22.6691	-0.3557	19.5627	-0.4061	6
26.6687	0.3192	23.0098	0.3645	7

(۳۲.۳) به صورت رابطه زیر حاصل شده است.

$$P(r) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, 1, \lambda r^2\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} KummerU\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, 1, \lambda r^2\right) \quad (۴۳.۳)$$

رفتار توابع $KummerM$ و $KummerU$ برحسب شعاع بی‌بعد و در تمامی مقادیر ویژه نشان داده شده در جدول ۱.۳ حاکی از آن است که این توابع در $r = 0$ به ترتیب متناهی و نامتناهی می‌باشند. همان‌طور که در شکل ۲.۳ نشان داده شده است، نقطه $r = 0$ برای تابع $KummerU$ یک نقطه منفرد، اما برای تابع $KummerM$ یک نقطه تحلیلی است. بنابراین با اعمال شرط مرزی معادله (۳۳.۳) بر معادله (۴۳.۳) ضریب ثابت C_2 حذف خواهد شد. در نتیجه پاسخ به صورت معادله نشان داده شده در زیر به دست می‌آید.

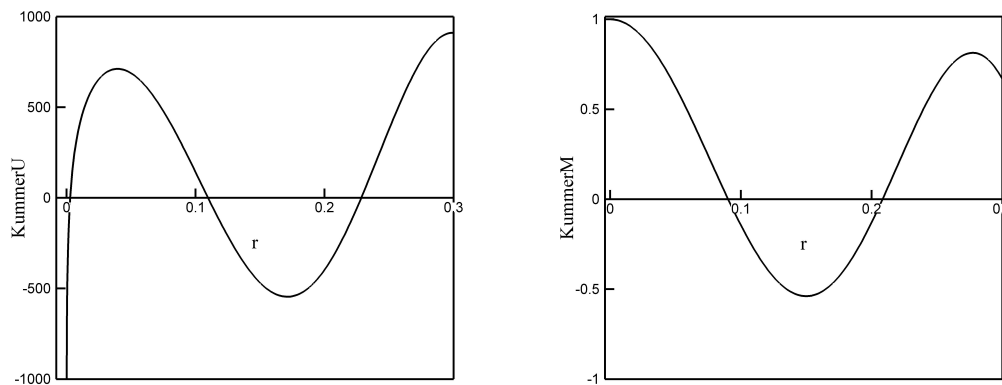
$$P(r) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, 1, \lambda r^2\right) \quad (۴۴.۳)$$

اکنون با اعمال شرط مرزی معادله (۳۴.۳) بر معادله (۴۴.۳) به معادله (۴۵.۳) می‌رسیم. مطابق حالت قبل، با ترسیم $G(\lambda)$ (طرف راست معادله (۴۵.۳)) مقادیر ویژه به دست خواهند آمد (شکل ۳.۳).

$$0 = KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, 1, \lambda\right) \quad (۴۵.۳)$$

در نهایت توزیع دمای بی‌بعد جریان درون لوله برای حالت نیوتنی، با جایگذاری معادله‌های (۳۵.۳) و (۴۴.۳) در معادله (۲۸.۳) به دست می‌آید.

$$\theta(r, x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, 1, \lambda r^2\right) e^{-\frac{4}{k_1}\lambda_m^2 x} \quad (۴۶.۳)$$



(آ) $r = 0$ نقطه‌ای تحلیلی است. (ب) $r = 0$ نقطه‌ای منفرد است.

شکل ۲.۳: رسم توابع $KummerM$ و $KummerU$ بر حسب شعاع بی‌بعد در مقدار ویژه $\lambda = 26.6687$

با اعمال شرط مرزی نشان داده شده در معادله (۱۳۳.۲) بر معادله (۴۶.۳) به معادله (۴۷.۳) می‌رسیم. و در نهایت به کمک معادله (۴۸.۳) مقادیر ثابت A_m متناظر با مقادیر ویژه به‌دست آمده را می‌یابیم.

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, 1, \lambda r^2\right) \quad (۴۷.۳)$$

$$A_m = \frac{\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\lambda_m r^2} KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, 1, \lambda r^2\right) r(1 - r^2) dr}{\int_0^1 \left(e^{-\frac{1}{2}\lambda_m r^2} KummerM\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, 1, \lambda r^2\right)\right)^2 r(1 - r^2) dr} \quad (۴۸.۳)$$

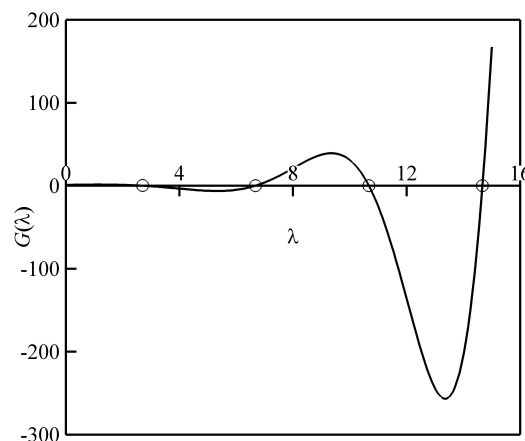
تعدادی از مقادیر ویژه به همراه ثابت‌های متناظر با آن یعنی A_m در جدول ۱.۳ آمده‌اند. در ادامه می‌خواهیم رابطه‌ای تحلیلی برای عدد ناسلت برحسب فاصله طولی به‌دست آوریم. می‌توان اثبات نمود که ضریب انتقال حرارت جابجایی محلی به کمک معادله (۴۹.۳) به‌دست می‌آید [۲۷].

$$h(\tilde{x}) = -\frac{k}{R\theta_m} \frac{\partial \theta(r, x)}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad (۴۹.۳)$$

هم‌چنین دمای متوسط بی‌بعد از طریق معادله (۵۰.۳) قابل محاسبه می‌باشد که در آن $\tilde{T}_m$ به‌عنوان دمای متوسط تعریف شده است. در نتیجه به کمک معادله (۵۱.۳) عدد ناسلت بر حسب دمای بی‌بعد به‌دست می‌آید. قطر هیدرولیکی لوله نیز برابر $2R$ در نظر گرفته می‌شود.

$$\theta_m = \frac{\tilde{T}_m - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_{in} - \tilde{T}_w} \quad (۵۰.۳)$$

$$Nu(x) = -\frac{2}{\theta_m} \frac{\partial \theta(r, x)}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad (۵۱.۳)$$



شکل ۳.۳: تعیین مقادیر ویژه برای حالت نیوتنی

اکنون دمای بی‌بعد را به صورت معادله (۵۲.۳) بازنویسی می‌کنیم که در آن $P_m(r)$ با توجه به حالت‌های $n = 0.2$ و $n = 1$ به ترتیب با معادله‌های (۵۳.۳) و (۵۴.۳) تعریف شده است.

$$\theta(r, x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m P_m(r) e^{-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x} \quad (52.3)$$

$$P_m(r) = e^{-\frac{1}{4} \lambda_m r^4} \text{HeunB} \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_m^{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{\lambda_m}{2}} r^2 \right) \quad (53.3)$$

$$P_m(r) = e^{-\frac{1}{2} \lambda_m r^2} \text{KummerM} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_m}{4}, 1, \lambda_m r^2 \right) \quad (54.3)$$

با مشتق‌گیری از دمای بی‌بعد و با در نظر گرفتن $r = 1$ معادله (۵۵.۳) حاصل می‌شود. با تعریف دمای متوسط به صورت معادله (۵۶.۳) و با انجام عملیات ریاضی همان‌طور که در معادله‌های (۵۷.۳) و (۵۸.۳) نشان داده شده است، می‌توان دمای متوسط بی‌بعد را به صورت یک عبارت سری-انتگرال به دست آورد (معادله (۵۹.۳)).

$$\frac{\partial \theta(r, x)}{\partial r} \Big|_{r=1} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x} \frac{dP_m(r)}{dr} \Big|_{r=1} \quad (55.3)$$

$$\tilde{T}_m = \frac{\int \tilde{u} \tilde{T} d\tilde{A}}{U\tilde{A}} \quad (56.3)$$

$$\tilde{T}_m = 2k_1(\tilde{T}_{in} - \tilde{T}_w) \int_0^1 r(1 - r^{k_2}) \theta(r, x) dr + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \tilde{T}_w \quad (57.3)$$

$$\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 1 \quad (58.3)$$

$$\theta_m = 2k_1 \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x} \int_0^1 r(1 - r^{k_2}) P_m(r) dr \quad (59.3)$$

اکنون می‌خواهیم ترم انتگرالی موجود در رابطه توزیع دمای متوسط بی‌بعد را به صورت ساده‌تری بیان نمائیم. به این منظور ابتدا معادله (۳۲.۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dP(r)}{dr} \right) + r(1 - r^{k_2}) \lambda^2 P(r) = 0 \quad (۶۰.۳)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۶۰.۳) همان‌طور که در ادامه آمده است در نهایت به معادله (۶۱.۳) خواهیم رسید.

$$\begin{aligned} r \frac{dP(r)}{dr} \Big|_0 + \int_0^1 r(1 - r^{k_2}) \lambda^2 P(r) dr &= 0 \\ \frac{dP(r)}{dr} \Big|_{r=1} + \int_0^1 r(1 - r^{k_2}) \lambda^2 P(r) dr &= 0 \\ \int_0^1 r(1 - r^{k_2}) P(r) dr &= - \frac{dP(r)}{\lambda^2 dr} \Big|_{r=1} \end{aligned} \quad (۶۱.۳)$$

اکنون می‌توان دمای متوسط بی‌بعد را علاوه بر معادله (۵۹.۳) به صورت دیگری نیز بیان کرد که در معادله (۶۲.۳)

$$\theta_m = -2k_1 \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x} \frac{1}{\lambda_m^2} \frac{dP_m(r)}{dr} \Big|_{r=1} \quad (۶۲.۳)$$

در نهایت با جایگذاری معادله‌های (۵۵.۳) و (۶۲.۳) در معادله (۵۱.۳)، عدد ناسلت بی‌بعد بر حسب فاصله طولی به دست خواهد آمد.

$$Nu(x) = \frac{1}{k_1} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x} \frac{dP_m(r)}{dr} \Big|_{r=1}}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\lambda_m^2} e^{-\frac{4}{k_1} \lambda_m^2 x} \frac{dP_m(r)}{dr} \Big|_{r=1}} \quad (۶۳.۳)$$

جریان کاملاً توسعه یافته

در ادامه توزیع دمای بی‌بعد جریان کاملاً توسعه یافته پاورلو که پاسخ معادله (۱۳۴.۲) است، به ازای مقادیر مختلف شاخص پاورلو به روش فروبنیوس، به دست آمده است. به ازای $n = 0.02$, $n = 0.01$, $n = 0.05$, $n = 0.1$, $n = 0.2$ و $n = 0.25$ توزیع دمای بی‌بعد جریان کاملاً توسعه یافته پاورلو درون لوله یکسان بوده و به صورت زیر به دست آمده است.

$$\begin{aligned} T(r) &= C_1 \left(1 - \frac{k_1 Nu}{4} r^2 \left(1 - \frac{k_1 Nu}{16} r^2 + \frac{k_1^2 Nu^2}{576} r^4 \right) + O(r^7) \right) + \\ &C_2 \left(\ln(r) \left(1 - \frac{k_1 Nu}{4} r^2 \left(1 - \frac{k_1 Nu}{16} r^2 + \frac{k_1^2 Nu^2}{576} r^4 \right) + O(r^7) \right) + \right. \\ &\left. \frac{k_1 Nu}{4} r^2 \left(1 - \frac{3k_1 Nu}{32} r^2 + \frac{11k_1^2 Nu^2}{3456} r^4 \right) + O(r^7) \right) \end{aligned} \quad (۶۴.۳)$$

اما به ازای مقادیر شاخص پاورلو $n = 0.5$ و $n = 1$ ، توزیع دمای بی بعد یکسان نبوده و به ترتیب به صورت معادلات (۶۵.۳) و (۶۶.۳) حاصل شده است.

$$T(r) = C_1 \left(1 - \frac{k_1 Nu}{4} r^2 \left(1 - \frac{k_1 Nu}{16} r^2 - \frac{4}{25} r^3 + \frac{k_1^2 Nu^2}{576} r^4 \right) + O(r^7) \right) + C_2 \left(\ln(r) \left(1 - \frac{k_1 Nu}{4} r^2 \left(1 - \frac{k_1 Nu}{16} r^2 - \frac{4}{25} r^3 + \frac{k_1^2 Nu^2}{576} r^4 \right) + O(r^7) \right) + \frac{k_1 Nu}{4} r^2 \left(1 - \frac{3k_1 Nu}{32} r^2 + \frac{11k_1^2 Nu^2}{3456} r^4 - \frac{8}{125} r^3 \right) + O(r^7) \right) \quad (65.3)$$

$$T(r) = C_1 \left(1 - \frac{k_1 Nu}{4} r^2 \left(1 - \frac{(k_1 Nu + 4)}{16} r^2 + \frac{k_1 Nu (k_1 Nu + 20)}{576} r^4 \right) + O(r^7) \right) + C_2 \left(\ln(r) \left(1 - \frac{k_1 Nu}{4} r^2 \left(1 - \frac{(k_1 Nu + 4)}{16} r^2 + \frac{k_1 Nu (k_1 Nu + 20)}{576} r^4 \right) + O(r^7) \right) + \frac{k_1 Nu}{4} r^2 + \frac{k_1 Nu}{16} \left(1 - \frac{(3k_1 Nu + 12)}{8} r^2 \right) r^4 + \frac{k_1^2 Nu^2}{192} \left(\frac{11(k_1 Nu + 20)}{72} - 1 \right) r^6 + O(r^7) \right) \quad (66.3)$$

که در آن پارامترهای C_1 و C_2 ضرایب ثابت می باشند. نکته حائز اهمیت این است که توزیع دما در تمام سطح مقطع محدود است. بنابراین طبق شرط مرزی معادله (۱۳۷.۲) ضریب ثابت C_2 در معادلات (۶۴.۳) تا (۶۶.۳) باید برابر صفر باشد، تا پاسخ به دست آمده در $r = 0$ نقطه تکین نداشته باشد. همان طور که در معادلات (۶۴.۳) تا (۶۶.۳) مشاهده شد، توزیع دمای بی بعد جریان کاملاً توسعه یافته پاورلو با مرتبه دقت هفت به دست آمد. با افزایش مرتبه دقت در توزیع دمای بی بعد جریان کاملاً توسعه یافته پاورلو، مشاهده شده است که به ازای نه مقدار شاخص پاورلو ذکر شده در فوق، نه توزیع دمای مختلف به دست می آید. جهت اختصار تنها توزیع دمای بی بعد به ازای $n = 0.01$ در زیر ارائه شده است.

$$\frac{T(r)}{T_{max}} = \left(1 - \frac{k_1 Nu r^2}{4} \left(\frac{1 - \frac{k_1 Nu r^2}{16} + \frac{k_1^2 Nu^2 r^4}{576} - \frac{k_1^3 Nu^3 r^6}{36864} + \frac{k_1^4 Nu^4 r^8}{3686400} \right) + O(r^{15}) \right) \left(\frac{k_1^5 Nu^5 r^{10}}{530841600} + \frac{k_1^6 Nu^6 r^{12}}{104044953600} \right) \quad (67.3)$$

عدد Nu نیز به کمک شرط مرزی حرارتی روی دیواره، معادله (۱۳۶.۲)، به دست می آید. به این صورت که با اعمال شرط مرزی ذکر شده در فوق، بر توزیع دمای داده شده در معادلات (۶۴.۳) تا (۶۶.۳) عبارتی چندجمله ای بر حسب Nu به دست می آید که با حل آن، عدد ناسلت حاصل خواهد شد. معادله (۶۸.۳) به ازای $n = 0.01$ به دست آمده است.

$$-\frac{k_1^7}{416179814400} Nu^7 + \frac{k_1^6}{2123366400} Nu^6 - \frac{k_1^5}{14745600} Nu^5 + \frac{k_1^4}{147456} Nu^4 - \frac{k_1^3}{2304} Nu^3 + \frac{k_1^2}{64} Nu^2 - \frac{1}{4} k_1 Nu + 1 = 0 \quad (68.3)$$

طبق قانون مقیاس^۲ در انتقال حرارت جابجایی، عدد Nu در جریان داخلی و آرام از مرتبه اول است. بنابراین ریشه‌های مثبت مرتبه اول معادله (۶۸.۳) به‌عنوان عدد ناسلت فیزیکی جریان پاورلو شناخته می‌شوند. با حل معادله (۶۸.۳) مقدار $Nu = 5.6709$ حاصل می‌شود. هم‌چنین با توجه به معادلات (۶۴.۳) تا (۶۶.۳) می‌توان دریافت که تساوی $C_1 = T_{max}$ برقرار است. چون ماکزیمم دمای بی‌بعد در مرکز لوله، یعنی در $r = 0$ رخ می‌دهد. بعد از محاسبه مقدار عدد ناسلت، تنها مجهول توزیع دمای بی‌بعد یعنی T_{max} به کمک معادله (۱۳۸.۲) محاسبه خواهد شد.

^۲Scaling law

فصل ۴

نتایج و بحث

۱.۴ مقدمه

در این بخش به تحلیل و بررسی نتایج حاصل از بخش سوم پرداخته می‌شود. همان‌طور که در فصل‌های دوم و سوم آمده است، معادلات انتقال حرارت مربوط به مدل‌های غیرنیوتنی پاورلو و وسیکوالاستیک $FENE-P$ و $LPTT$ به صورت بی بعد ارائه شده‌اند. هم‌چنین عبارت اتلاف اصطکاکی نیز در جریان‌های پیرو مدل‌های $FENE-P$ و $LPTT$ لحاظ شده است. در نهایت توزیع دمای بی بعد به غیر از حالت جریان در حال توسعه حرارتی پاورلو که به صورت حل بسته ارائه شده است، به روش فروبنیوس حاصل شده است. نمودارهای دما و گرادیان دمای بی بعد مدل‌های وسیکوالاستیک به ازای اعداد برینکمن مختلف ترسیم شده است. همان‌طور که در این فصل مشاهده می‌شود، این نمودارها به ازای مقادیر مختلف پارامترهای قابلیت کشش و عدد بی بعد دبورا که معرف میزان الاستیسیته سیال است، تهیه شده‌اند.

۲.۴ جریان $FENE-P$

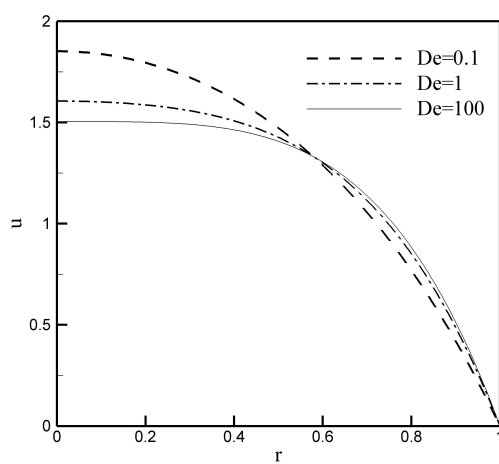
حالت $Br = 0$

در این حالت با صرف نظر از ترم اتلاف اصطکاکی و در نتیجه $Br = 0$ ، به بررسی تأثیر خصوصیت‌های رئولوژیکال سیال غیرنیوتنی بر جریان $FENE-P$ درون لوله می‌پردازیم. مقادیر عدد ناسلت و ثابت‌های موجود در روابط توزیع دما و پروفیل سرعت در جدول ۱.۴ آمده‌اند. این داده‌ها برای محدوده اعداد دبورا $0 < De \leq 100$ و به ازای سه مقدار $L^2 = 1$ ، 10 و 100 محاسبه شده‌اند. همان‌طور که جدول ۱.۴ نشان می‌دهد، با افزایش عدد دبورا ثابت‌های β_1 و β_2 به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابند که این روند تغییرات با افزایش پارامتر قابلیت کشش سیال از $L^2 = 1$ به $L^2 = 100$ ، هم‌چنان پابرجاست. اما بازه اعداد مربوط به پارامترهای β_1 و β_2 به ترتیب بزرگ‌تر و کوچک‌تر می‌شوند. در نتیجه پروفیل سرعت همان‌طور که در شکل ۱.۴ نشان داده شده است، با افزایش عدد دبورا یک‌نواخت‌تر

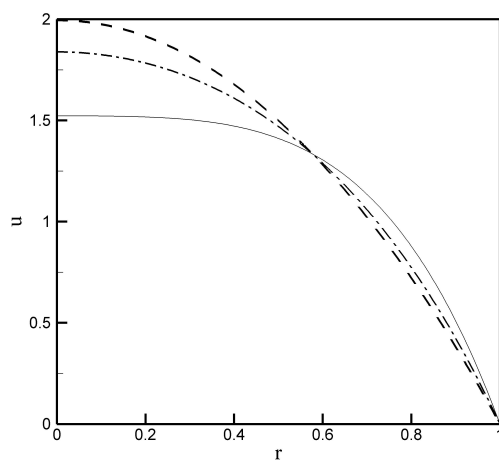
می‌شود. اما با افزایش پارامتر L^2 تأثیر عدد دبورا کم‌رنگ شده و در نتیجه پروفیل‌های سرعت در مجاورت مرکز لوله دارای تیزی بیشتری هستند که منجر به افزایش مقدار ماکزیمم سرعت، (سرعت در مرکز لوله)، می‌شود. همان‌طور که در مراجع [۲۹، ۳۰، ۳۷، ۶۱] نیز به آن اشاره شده است، با افزایش عدد دبورا که افزایش میزان الاستیسیته سیال را در پی دارد، رفتار رقیق‌شوندگی سیال تشدید یافته و در نتیجه ویسکوزیته کاهش می‌یابد، که این امر موجب یکنواختی بیش‌تر پروفیل سرعت در نزدیکی مرکز لوله می‌شود.

جدول ۱۰۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی جریان سیال $FENE - P$ درون لوله دما ثابت برای $Br = 0$

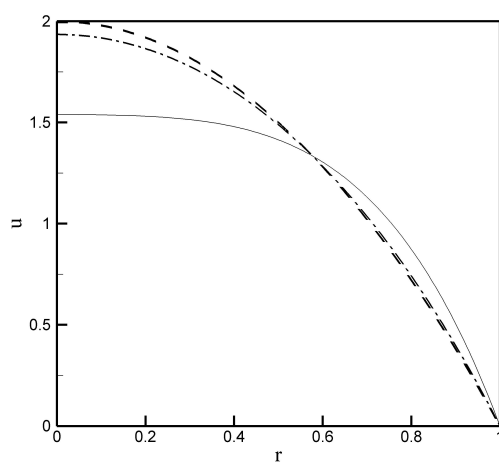
	β_2	β_1	T_{max}	Nu	De
$L^2 = 1$	0.3165	1.4065	1.8267	3.7994	0.1
	2.8218	0.4199	1.8613	4.0526	1
	14.8303	0.0963	1.8709	4.1407	10
	23.8314	0.0610	1.8719	4.1505	20
	31.3817	0.0467	1.8723	4.1545	30
	38.1212	0.0386	1.8726	4.1568	40
	44.3155	0.0333	1.8727	4.1583	50
	50.1072	0.0295	1.8728	4.1593	60
	55.5843	0.0266	1.8729	4.1601	70
	60.8058	0.0244	1.8730	4.1607	80
	65.8135	0.0225	1.8730	4.1613	90
	70.6387	0.0210	1.8731	4.1617	100
$L^2 = 10$	0.0077	1.9797	1.8028	3.6594	0.1
	0.3587	1.3529	1.8288	3.8127	1
	3.0515	0.3946	1.8621	4.0594	10
	5.1198	0.2555	1.8663	4.0969	20
	6.8577	0.1972	1.8680	4.1129	30
	8.4098	0.1638	1.8690	4.1221	40
	9.8368	0.1417	1.8696	4.1281	50
	11.1712	0.1258	1.8701	4.1325	60
	12.4333	0.1138	1.8705	4.1359	70
	13.6366	0.1043	1.8707	4.1385	80
	14.7906	0.0965	1.8709	4.1406	90
	15.9027	0.0901	1.8711	4.1424	100
$L^2 = 100$	0.0015	1.9960	1.8021	3.6555	0.1
	0.1135	1.7370	1.8133	3.7182	1
	1.5714	0.6462	1.8542	3.9928	10
	2.7559	0.4278	1.8611	4.0505	20
	3.7551	0.3330	1.8640	4.0760	30
	4.6487	0.2778	1.8657	4.0909	40
	5.4707	0.2411	1.8668	4.1009	50
	6.2397	0.2146	1.8675	4.1081	60
	6.9672	0.1944	1.8681	4.1137	70
	7.6609	0.1783	1.8686	4.1181	80
	8.3263	0.1653	1.8690	4.1217	90
	8.9675	0.1544	1.8693	4.1247	100



$L^2 = 1$ (ا)



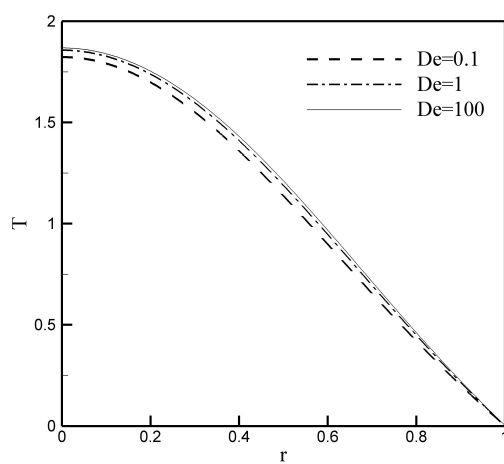
$L^2 = 10$ (ب)



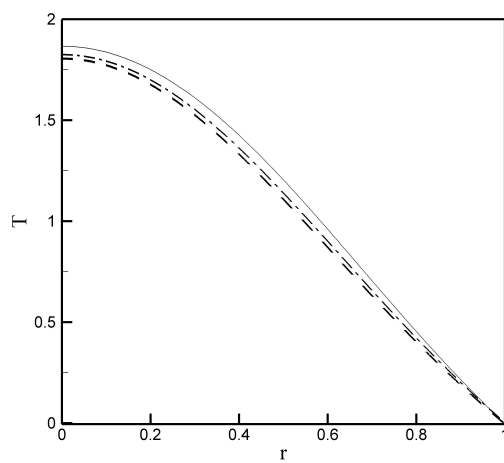
$L^2 = 100$ (ج)

شکل ۱۰۴: پروفیل های سرعت جریان $FENE-P$

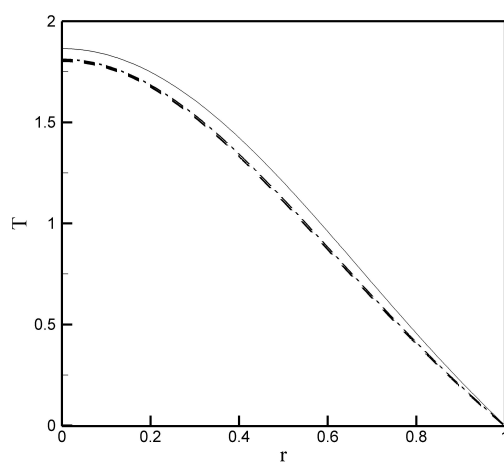
شکل ۲.۴ نمایشی از تغییرات پروفیل دمای بی‌بعد جریان $FENE-P$ بر حسب شعاع بی‌بعد لوله را ارائه می‌دهد. همان‌طور که در جدول ۱.۴ نیز آمده است، با افزایش عدد دبورا عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد که منجر به بهبود انتقال حرارت جریان درون لوله می‌شود. با توجه به شکل ۲.۴ مشاهده می‌شود که با افزایش عدد دبورا، پروفیل دما به سمت بالا جهش می‌کند و در نتیجه دمای ماکزیمم (دما در مرکز لوله) نیز افزایش می‌یابد. با افزایش پارامتر L^2 شدت اثر عدد بی‌بعد دبورا برای افزایش انتقال حرارت و در نتیجه دمای ماکزیمم، کاهش می‌یابد. با توجه به جدول ۱.۴ می‌توان دریافت که در $L^2 = 1$ ، $L^2 = 10$ و $L^2 = 100$ در $De = 0.1$ ، دمای ماکزیمم به ترتیب برابر 1.8267، 1.8028 و 1.8021 است. داده‌های جدول ۱.۴ و نیز انطباق پروفیل‌های دما در شکل ۲.۴ - ج حاکی از آن است که کاهش دما در پروفیل مربوط به $De = 1$ بیش‌تر از دو پروفیل دیگر است. در ادامه به تحلیل پروفیل‌های گرادیان دما (شکل ۳.۴) خواهیم پرداخت.



$L^2 = 1$ (ا)

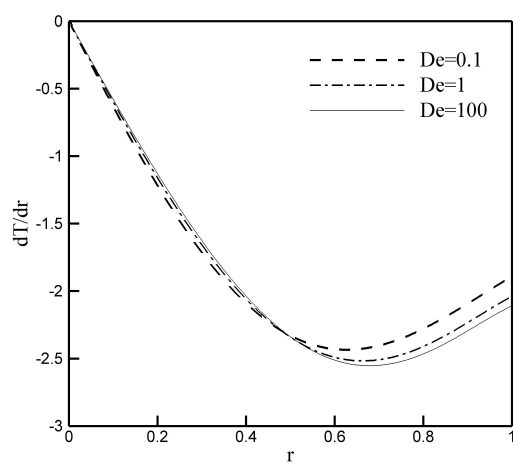
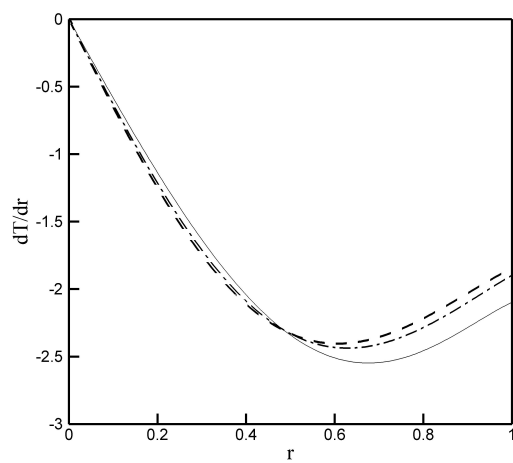
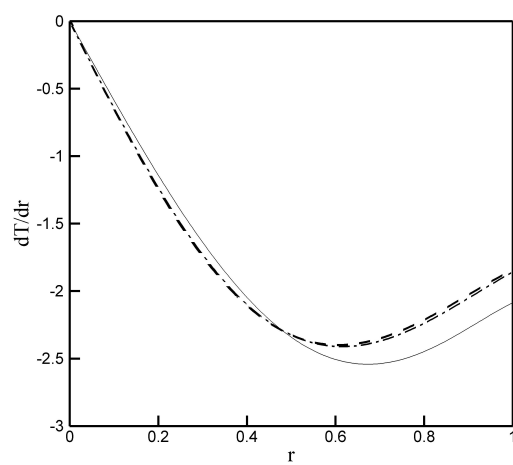


$L^2 = 10$ (ب)



$L^2 = 100$ (ج)

شکل ۲.۴: پروفیل های دمای جریان $FENE-P$ در حالت $Br = 0$

 $L^2 = 1$ (ا) $L^2 = 10$ (ب) $L^2 = 100$ (ج)

شکل ۳.۴: پروفیل های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ در حالت $Br = 0$

پروفیل گرادیان دمای جریان $FENE - P$ درون لوله دما ثابت در شکل ۳.۴ نشان داده شده است. اشاره شد که با افزایش عدد دبورا، انتقال حرارت جریان بهبود می‌یابد. به بیان دقیق‌تر باید ذکر شود که با افزایش عدد دبورا و در نتیجه با افزایش یک‌نواختی پروفیل سرعت، گرادیان سرعت یا همان نرخ برشی جریان در مجاورت دیواره لوله بیش‌تر شده و منجر به بهبود انتقال حرارت در مجاورت دیواره می‌شود و به دنبال آن گرادیان دما در عرض لوله کاهش می‌یابد (افزایش عدد ناسلت). این پدیده با کاهش پارامتر L^2 تشدید می‌یابد. چون دمای جریان با کاهش مداوم از مرکز تا دیواره لوله همراه است، بنابراین طبیعی است که گرادیان دما همواره منفی باشد. کیفیت گرادیان دما به مقادیر عدد دبورا و نیز پارامتر L^2 بستگی دارد. با افزایش عدد دبورا پروفیل گرادیان دمای جریان باید در پائین‌ترین سطح ممکن قرار بگیرد (دارای بیش‌ترین گرادیان دما).

یادآوری می‌شود که توزیع دمای سیال $FENE - P$ درون لوله به روش سری فروبنیوس حاصل شده است که در آن ثابت T_{max} به‌ازای مقادیر مختلف عدد دبورا در جدول ۲.۴ گزارش شده است. مطابق با جدول ۱.۴ با افزایش عدد دبورا در بازه 0 تا 100، عدد ناسلت برای جریان درون لوله به میزان 13.5 درصد افزایش می‌یابد.

عدد ناسلت کاهیده نیز یک گروه بی‌بعد موثر به شمار می‌آید و نشان‌دهنده اختلاف انتقال حرارت جابجایی جریان‌های غیرنیوتنی و نیوتنی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Nu_r = \frac{Nu - Nu_0}{Nu_0} \quad (1.4)$$

که در آن Nu_0 عدد ناسلت مربوط به جریان نیوتنی بوده که برای جریان درون لوله دما ثابت برابر 3.6568 می‌باشد. می‌دانیم که ثابت‌های β_1 و β_2 به‌کاررفته در رابطه توزیع سرعت جریان درون لوله به پارامتر $\frac{De}{aL}$ وابسته‌اند. در نتیجه توزیع دمای سیال و نیز عدد ناسلت باید تابعی از این نسبت باشند. داده‌های مربوط به عدد ناسلت و دمای ماکزیمم جریان درون لوله برحسب نسبت $\frac{De}{aL}$ در جدول ۲.۴ گزارش شده است. با اعمال برازش کسری^۱ بر این داده‌ها، رابطه‌های (۲.۴) و (۳.۴) به‌دست آمده‌اند.

$$Nu_r = \frac{0.1327De/aL}{0.5016 + De/aL} \quad (2.4)$$

$$\frac{T_{max}}{T_{max,0}} = 1 + \frac{0.03621De/aL}{0.4346 + De/aL} \quad (3.4)$$

فرمول‌های اصلاحی فوق برای حالت نیوتنی دقیق بوده و برای $\frac{De}{aL} \leq 10$ با درصد 0.98 معتبر می‌باشند. در شکل‌های ۴.۴-آ و ۴.۴-ب به ترتیب تغییرات عدد ناسلت کاهیده و دمای ماکزیمم جریان بر حسب عدد دبورا ترسیم شده‌اند. مشاهده می‌شود که با افزایش عدد دبورا و نیز با کاهش پارامتر L^2 عدد ناسلت کاهیده و دمای ماکزیمم افزایش می‌یابند.

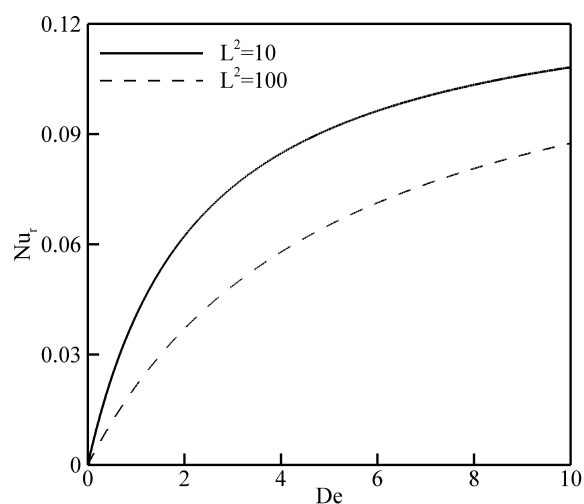
^۱Fractional Curve Fitting

جدول ۲۰۴: مقادیر عدد ناسلت و دمای ماکزیمم پروفیل دمای جریان $FENE - P$ بر حسب پارامتر $\frac{De}{aL}$

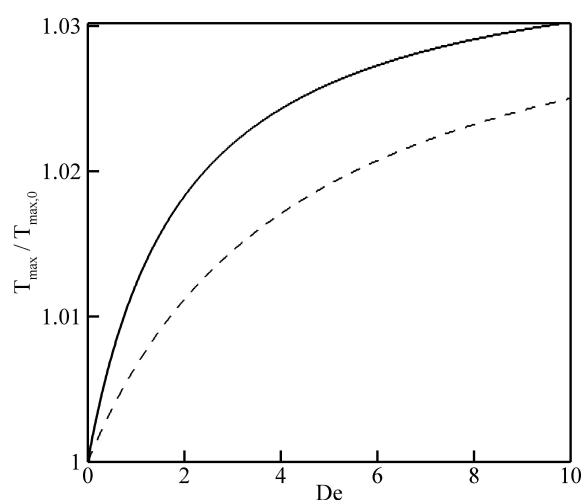
T_{max}	Nu	$\frac{De}{aL}$
1.8137	3.7209	0.1
1.8267	3.7994	0.2
1.8350	3.8533	0.3
1.8406	3.8913	0.4
1.8445	3.9195	0.5
1.8475	3.9413	0.6
1.8498	3.9588	0.7
1.8517	3.9732	0.8
1.8532	3.9854	0.9
1.8545	3.9957	1
1.8613	4.0526	2
1.8642	4.0777	3
1.8658	4.0923	4
1.8669	4.1021	5
1.8677	4.1093	6
1.8682	4.1147	7
1.8687	4.1190	8
1.8690	4.1225	9
1.8694	4.1255	10

حالت $Br \neq 0$

در این قسمت به تحلیل نتایج حاصل از حل معادله (۱۰۲۰۲) می‌پردازیم که در آن ترم اتلاف اصطکاکی نیز در نظر گرفته شده است. در جدول ۳۰۴ مقادیر عدد بی‌بعد ناسلت و ثابت C به‌ازای مقادیر عدد بی‌بعد دیوار در بازه $0.1 \leq De \leq 100$ و به‌ازای سه مقدار پارامتر قابلیت کشش سیال ویسکوالاستیک $FENE - P$ یعنی $L^2 = 1$ ، $L^2 = 10$ و $L^2 = 100$ با در نظر گرفتن عدد بی‌بعد برینکمن $Br = 0.1$ محاسبه شده‌اند. مشاهده می‌شود که در مقدار ثابتی از پارامتر قابلیت کشش، با افزایش عدد دیوار، عدد ناسلت و ثابت C به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابند. با توجه به جدول ۳۰۴ در $L^2 = 1$ و در اعداد دیوار $De = 0.1$ و $De = 100$ ، عدد ناسلت به ترتیب برابر با $Nu = 3.4162$ و $Nu = 4.1555$ است. اما با افزایش مقدار قابلیت کشش سیال از $L^2 = 1$ به $L^2 = 100$ ، از شدت افزایش عدد ناسلت کاسته می‌شود. به‌طوری‌که در $L^2 = 100$ و در اعداد دیوار $De = 0.1$ و $De = 100$ ، عدد ناسلت به ترتیب برابر با $Nu = 3.1272$ و $Nu = 4.0796$ است. بنابراین بیش‌ترین مقدار عدد ناسلت مربوط به حالتی است که



(آ) عدد ناسلت کاهیده



(ب) نسبت دمای ماکزیمم جریان به مقدار متناظر نیوتنی آن

شکل ۴.۴: نمودار تغییرات عدد ناسلت کاهیده و نسبت دمای ماکزیمم جریان سیال $FENE-P$ به مقدار متناظر نیوتنی آن برحسب عدد دهورا برای مقادیر مختلف پارامتر L^2

در آن شرایط $L^2 = 1$ و $De = 100$ برقرار می‌باشد. هم‌چنین می‌توان گفت که کم‌ترین مقدار مربوط به عدد ناسلت در $L^2 = 100$ و $De = 0.1$ رخ می‌دهد که برابر با $Nu = 3.1272$ است. با افزایش عدد بی‌بعد برینکمن از $Br = 0.1$ به $Br = 1$ همان‌طور که جدول ۴.۴ نشان می‌دهد، روند تغییرات عدد ناسلت و ضریب ثابت C همانند رفتار داده‌های جدول ۳.۴ می‌باشد، با این تفاوت که در عدد برینکمن $Br = 1$ اعداد ناسلت کوچک‌تر از حالت $Br = 0.1$ می‌باشند. همان‌طور که جدول ۴.۴ نشان می‌دهد، اعداد ناسلت منفی نیز ظاهر شده‌اند. در $L^2 = 1$ و به‌ازای $De = 0.1$ عدد ناسلت برابر $Nu = -0.1385$ است.

اما با افزایش مقدار قابلیت کشش سیال به $L^2 = 10$ مشاهده می‌شود که در عدد دبورا $De = 0.1$ عدد ناسلت، مقدار -1.8384 را نشان می‌دهد. هم‌چنین در $L^2 = 100$ شدت کاهش بیش‌تر شده تا جایی‌که عدد ناسلت به کم‌ترین مقدار خود در جدول ۴.۴ یعنی به $Nu = -1.8875$ میل می‌کند. داده‌های جدول ۵.۴ مقادیر عدد ناسلت و پارامتر ثابت C_1 را برای حالتی‌که عدد برینکمن برابر $Br = 10$ است نشان می‌دهند. همان‌طور که در تحلیل داده‌های جدول‌های ۳.۴ و ۴.۴ تشریح شد، با افزایش عدد برینکمن به مقدار $Br = 10$ ، رفتار نزولی در اعداد ناسلت تشدید یافته، به‌طوری‌که در $L^2 = 100$ ، تمامی اعداد ناسلت منفی می‌باشند. عدد ناسلت می‌نیم نیز در $L^2 = 100$ و $De = 0.1$ واقع شده است که برابر با $Nu = -66.1794$ می‌باشد. اما با افزایش عدد دبورا، اعداد ناسلت هم‌چنان افزایش می‌یابند. به‌عنوان یک نتیجه‌گیری کلی از جدول‌های ۳.۴، ۴.۴ و ۵.۴ می‌توان این‌طور بیان کرد که با افزایش عدد بی‌بعد برینکمن، Br ، و پارامتر قابلیت کشش سیال، L^2 ، عدد ناسلت کاهش می‌یابد. اما افزایش عدد بی‌بعد دبورا، De ، منجر به افزایش عدد ناسلت خواهد شد.

جدول ۳.۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان $FENE-P$ درون لوله دما ثابت برای $Br = 0.1$

	C_1	Nu	De
$L^2 = 1$	1.8689	3.4162	0.1
	1.8748	3.9317	1
	1.8731	4.1125	10
	1.8721	4.1326	20
	1.8711	4.1408	30
	1.8862	4.1454	40
	1.8560	4.1485	50
	1.8977	4.1506	60
	1.8632	4.1522	70
	1.8593	4.1536	80
	1.8992	4.1546	90
	1.8790	4.1555	100
$L^2 = 10$	1.8638	3.1351	0.1
	1.8689	3.4431	1
	1.8723	3.9457	10
	1.8752	4.0227	20
	1.8768	4.0554	30
	1.8691	4.0743	40
	1.8776	4.0867	50
	1.8757	4.0957	60
	1.8812	4.1025	70
	1.8828	4.1079	80
	1.8659	4.1124	90
	1.8786	4.1160	100
$L^2 = 100$	1.8640	3.1272	0.1
	1.8665	3.2528	1
	1.8719	3.8092	10
	1.8736	3.9274	20
	1.8723	3.9797	30
	1.8726	4.0103	40
	1.8723	4.0308	50
	1.8773	4.0456	60
	1.8745	4.0570	70
	1.8770	4.0660	80
	1.8744	4.0734	90
	1.8698	4.0796	100

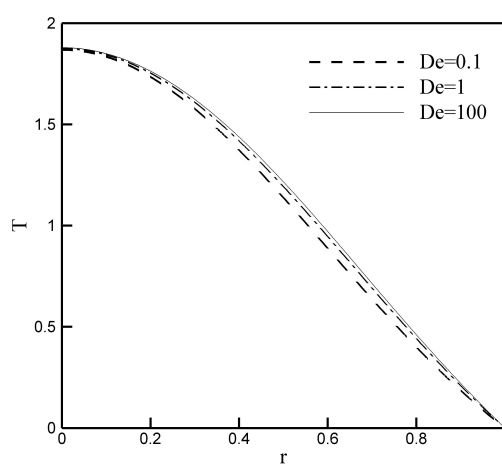
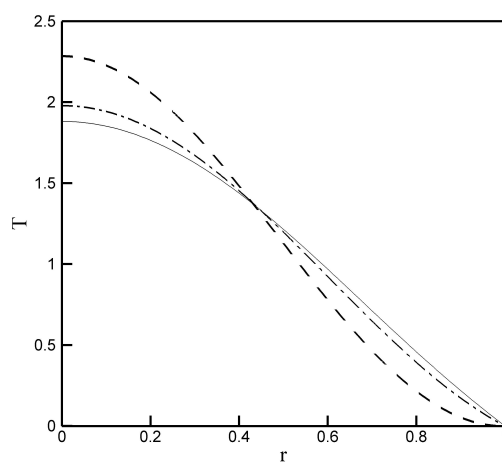
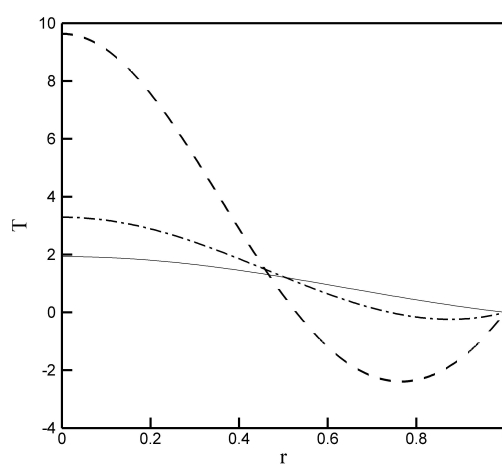
جدول ۴.۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان $FENE-P$ درون لوله دما ثابت برای $Br = 1$

	C_1	Nu	De
$L^2 = 1$	2.2843	-0.1385	0.1
	1.9780	2.8359	1
	1.8971	3.8581	10
	1.8895	3.9711	20
	1.8853	4.0172	30
	1.8847	4.0432	40
	1.8820	4.0603	50
	1.8812	4.0725	60
	1.8828	4.0817	70
	1.8806	4.0890	80
	1.8807	4.0949	90
	1.8810	4.0998	100
$L^2 = 10$	2.4930	-1.8384	0.1
	2.2653	0.0195	1
	1.9712	2.9151	10
	1.9357	3.3517	20
	1.9214	3.5365	30
	1.9132	3.6427	40
	1.9068	3.7131	50
	1.9030	3.7636	60
	1.9013	3.8021	70
	1.8979	3.8326	80
	1.8974	3.8573	90
	1.8947	3.8780	100
$L^2 = 100$	2.4987	-1.8875	0.1
	2.4046	-1.1136	1
	2.0400	2.1372	10
	1.9801	2.8113	20
	1.9552	3.1080	30
	1.9409	3.2814	40
	1.9318	3.3973	50
	1.9250	3.4813	60
	1.9206	3.5454	70
	1.9159	3.5964	80
	1.9136	3.6379	90
	1.9101	3.6727	100

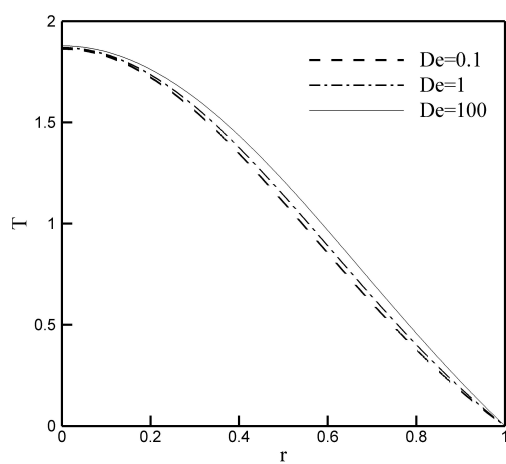
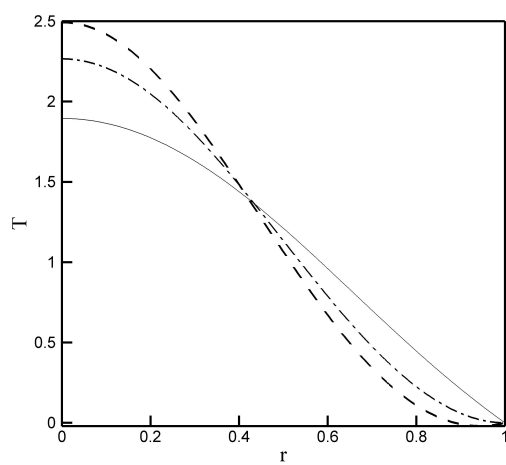
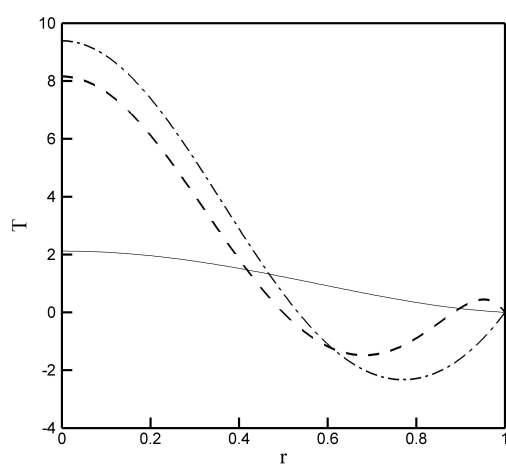
جدول ۵.۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان $FENE-P$ درون لوله دما ثابت برای $Br = 10$

	C_1	Nu	De
$L^2 = 1$	9.6337	-43.8282	0.1
	3.2888	-8.9006	1
	2.1375	1.2736	10
	2.0374	2.3403	20
	1.9976	2.7719	30
	1.9756	3.0149	40
	1.9613	3.1739	50
	1.9513	3.2874	60
	1.9438	3.3732	70
	1.9375	3.4408	80
	1.9327	3.4956	90
	1.9288	3.5411	100
$L^2 = 10$	8.1567	-65.5863	0.1
	9.3902	-41.7962	1
	3.1812	-8.0790	10
	2.6477	-3.6484	20
	2.4492	-1.8249	30
	2.3418	-0.7914	40
	2.2731	-0.1126	50
	2.2249	0.3731	60
	2.1888	0.7409	70
	2.1609	1.0307	80
	2.1383	1.2661	90
	2.1196	1.4618	100
$L^2 = 100$	7.9886	-66.1794	0.1
	9.7438	-56.4511	1
	4.4203	-16.3913	10
	3.3230	-9.1571	20
	2.9335	-6.1004	30
	2.7273	-4.3509	40
	2.5974	-3.1960	50
	2.5071	-2.3671	60
	2.4401	-1.7381	70
	2.3881	-1.2415	80
	2.3465	-0.8378	90
	2.3123	-0.5019	100

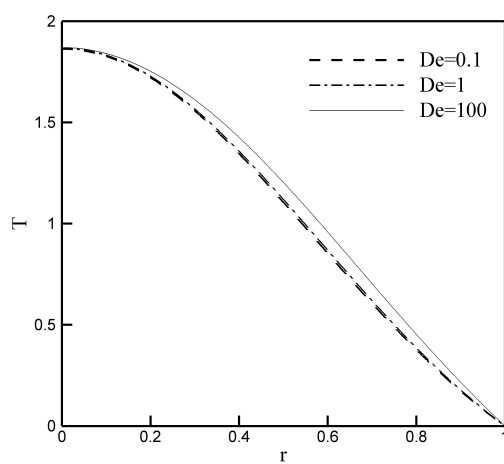
در شکل ۵.۴ پروفیل‌های دمای جریان $FENE - P$ در عرض لوله و به‌ازای سه عدد برینکمن $Br = 0.1$ ، $Br = 1$ و $Br = 10$ در $L^2 = 1$ ترسیم شده است. هم‌چنین نمودارهایی مشابه با آن‌چه در شکل ۵.۴ آمده است، برای $L^2 = 10$ و $L^2 = 100$ در شکل‌های ۶.۴ و ۷.۴ نشان داده شده است. در شکل ۵.۴ - آ با توجه به این‌که عدد ناسلت در هر سه نمودار مربوط به اعداد دبورا $De = 0.1$ ، $De = 1$ و $De = 100$ مقداری مثبت می‌باشد، پروفیل‌های دما دارای حرکت صعودی بوده و به سمت بالا حرکت می‌کنند که در نتیجه دمای ماکزیمم جریان افزایش می‌یابد. اما در شکل‌های ۵.۴ - ب و ۵.۴ - ج با افزایش عدد دبورا، مقدار دمای ماکزیمم کم‌تر شده و پروفیل‌های دمای بی‌بعد به سمت پایین حرکت می‌کنند. رفتار پروفیل‌های دمای بی‌بعد همان‌طور که در شکل ۶.۴ مشاهده می‌شود مشابه شکل ۵.۴ می‌باشد. با افزایش عدد بی‌بعد برینکمن، پروفیل‌های دما در مجاورت دیواره، به سمت بالا حرکت کرده که نشان از افزایش دمای جریان در این ناحیه می‌باشد. در واقع با افزایش عدد بی‌بعد برینکمن، حرارت تولید شده در لوله بیش‌تر می‌شود. همان‌طور که قبلاً نیز ذکر شد، عبارت اتلاف اصطکاکی و نیز عدد بی‌بعد برینکمن، با گرادیان سرعت نزدیک دیواره لوله ارتباط مستقیمی دارد. در واقع با افزایش عدد دبورا و میزان الاستیسیته سیال، رفتار رقیق‌شوندگی سیال تشدید یافته که در نتیجه ویسکوزیته آن کاهش یافته و انتقال حرارت نیز بهبود می‌یابد. این پدیده در رفتار پروفیل‌های دمای جریان مشاهده می‌شود.


 $Br = 0.1 \quad (\text{ا})$

 $Br = 1 \quad (\text{ب})$

 $Br = 10 \quad (\text{ج})$

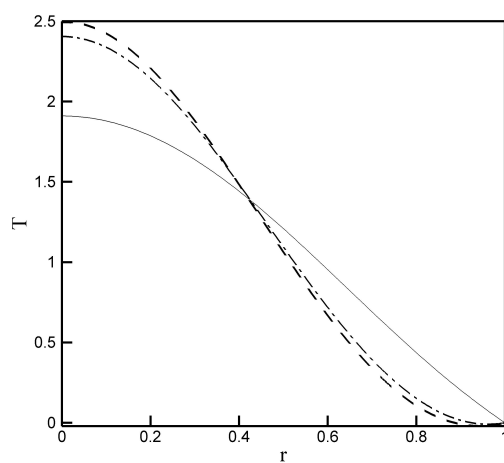
شکل ۴.۵: پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 1$

 $Br = 0.1$ (ا) $Br = 1$ (ب) $Br = 10$ (ج)

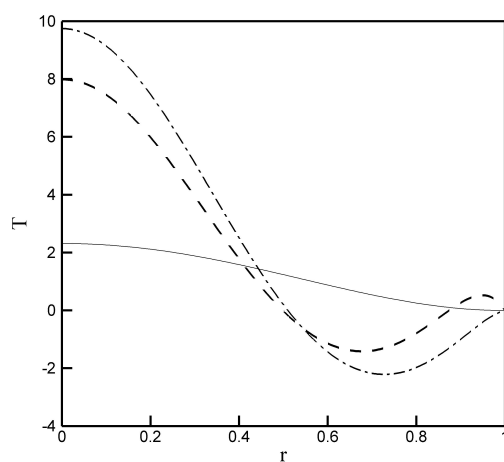
شکل ۲.۴: پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 10$



$Br = 0.1$ (ا)



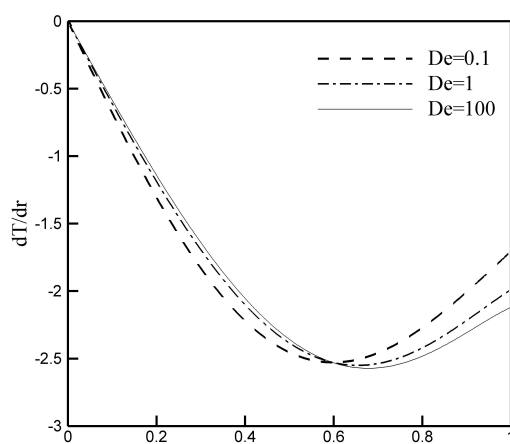
$Br = 1$ (ب)



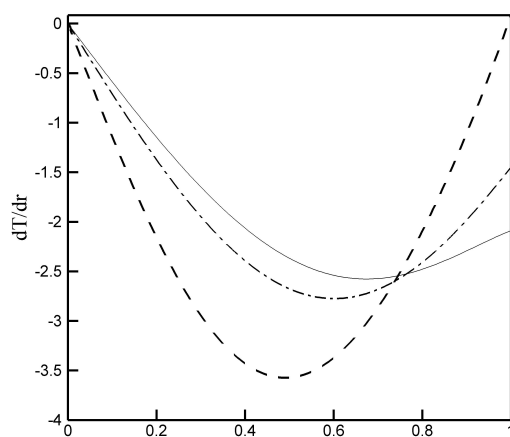
$Br = 10$ (ج)

شکل ۷.۴: پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 100$

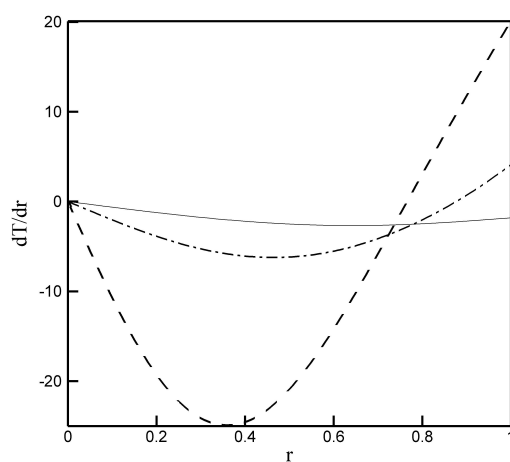
همچنین نمودار گرادیان دمای جریان $FENE - P$ بر حسب شعاع بی‌بعد لوله، به‌ازای سه عدد برینکمن $Br = 0.1$ ، $Br = 1$ و $Br = 10$ در $L^2 = 1$ در شکل ۸.۴ ترسیم شده است. شکل‌های ۹.۴ و ۱۰.۴ گرادیان دمای جریان را به ترتیب در $L^2 = 10$ و $L^2 = 100$ نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود گرادیان دمای جریان در تمامی شکل‌های ۸.۴ تا ۱۰.۴ در $Br = 0.1$ منفی هستند. با افزایش عدد برینکمن، همان‌طور که می‌دانیم در مجاورت دیواره لوله، گرمای بیش‌تری تولید شده و همان‌طور که در شکل‌های ۸.۴ - ج، ۹.۴ - ب، ۹.۴ - ج، ۱۰.۴ - ج، ۱۰.۴ - ب و ۱۰.۴ - ج به‌ازای اعداد برینکمن $Br = 1$ و $Br = 10$ نشان داده شده است، گرادیان دما در مجاورت دیواره لوله افزایش می‌یابد تا این‌که در نهایت مثبت می‌شود. درواقع در این لحظه جهت انتقال حرارت معکوس شده و گرما از جریان به بیرون از لوله منتقل می‌شود.



$Br = 0.1$ (ا)

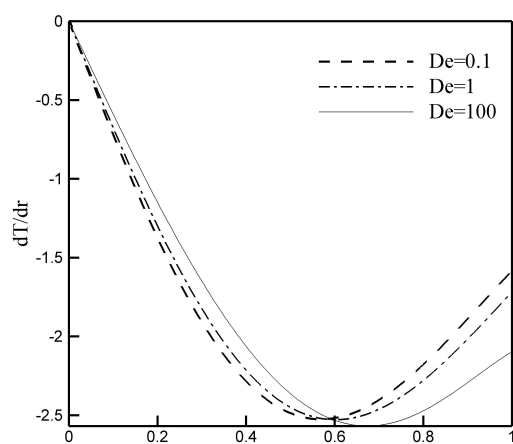


$Br = 1$ (ب)

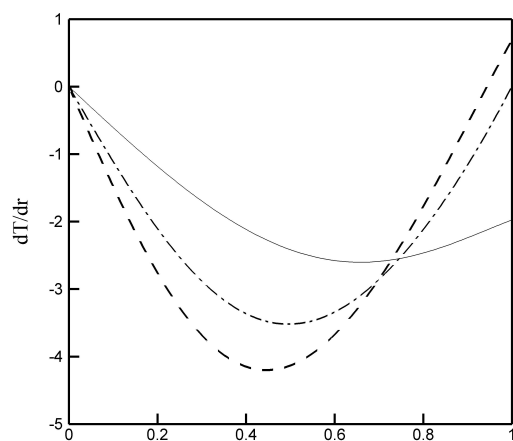


$Br = 10$ (ج)

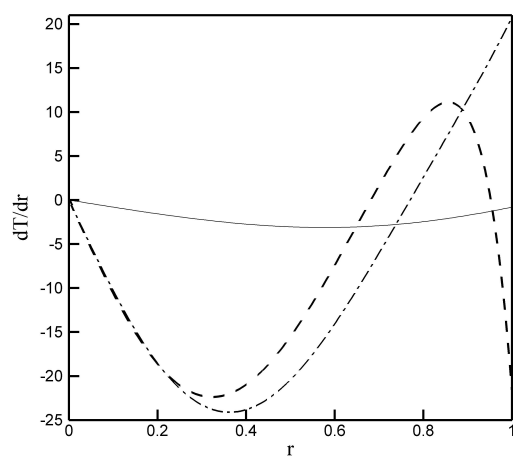
شکل ۸.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 1$



$Br = 0.1$ (ا)

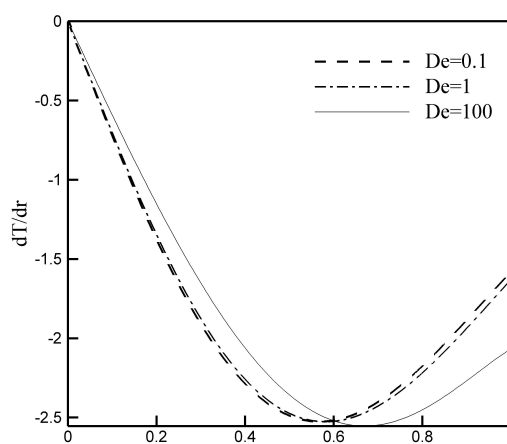


$Br = 1$ (ب)

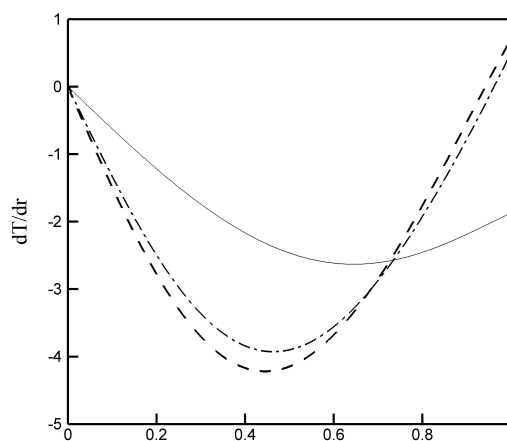


$Br = 10$ (ج)

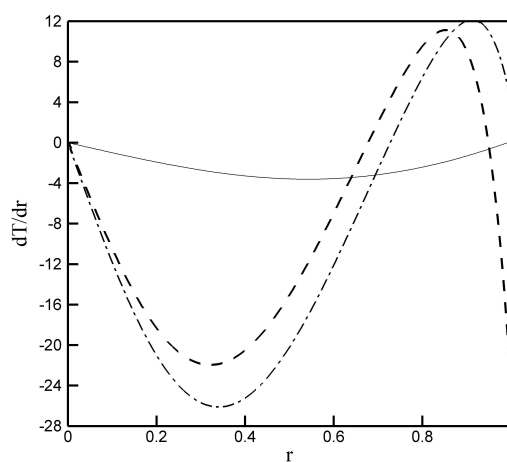
شکل ۹.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 10$



$Br = 0.1$ (ا)



$Br = 1$ (ب)

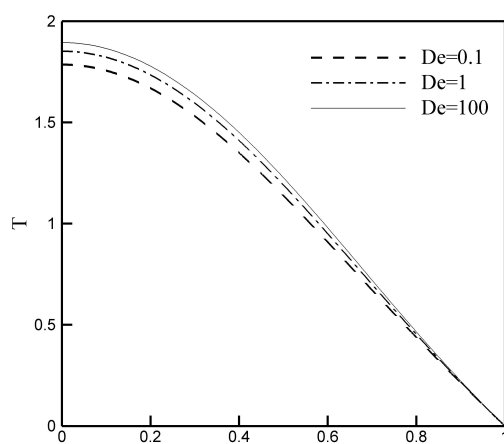


$Br = 10$ (ج)

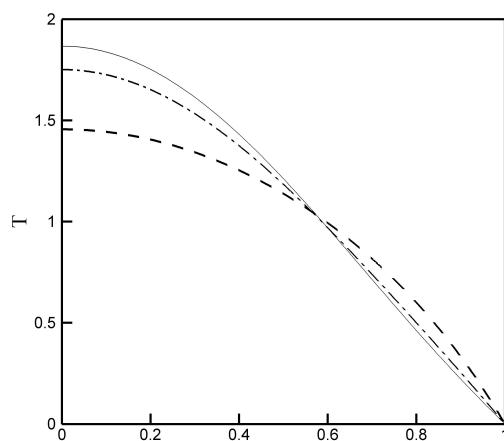
شکل ۱۰.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن مثبت در $L^2 = 100$

مشابه نمودارهای مربوط به قسمت اعداد برینکمن مثبت، نمودار توزیع دمای بی بعد جریان $FENE-P$ به ازای اعداد برینکمن منفی در شکل های ۱۱.۴ تا ۱۳.۴ آمده است. در واقع در اعداد برینکمن منفی، دمای دیواره کم تر از دمای متوسط جریان می باشد. در اعداد برینکمن منفی جهت انتقال حرارت خلاف جهت اعداد برینکمن مثبت بوده و از جریان به سمت لوله است. در واقع جریان درون لوله با سرمایش همراه است. ملاحظه می شود که تغییرات در این نمودارها تقریباً در خلاف جهت رفتار نمودارهای مربوط به اعداد برینکمن مثبت است. به عنوان مثال پروفیل های دمای بی بعد جریان با توجه به شکل ۱۱.۴ دارای جهش به سمت بالا بوده و در نتیجه مقدار دمای ماکزیم با افزایش عدد دبوراً بیش تر می شود. پروفیل گرادیان دمای بی بعد نیز در شکل های ۱۴.۴ تا ۱۶.۴ نشان داده شده است. اعداد ناسلت به دست آمده در عدد برینکمن $Br = -0.1$ و به ازای اعداد دبوراً $De = 0.1$ ، $De = 1$ و $De = 100$ و در $L^2 = 1$ به ترتیب برابر با $Nu = 4.1802$ ، $Nu = 4.1733$ و $Nu = 4.1679$ می باشد. با افزایش پارامتر قابلیت کشش به $L^2 = 100$ اعداد ناسلت به ترتیب برابر با $Nu = 4.1782$ ، $Nu = 4.1796$ و $Nu = 4.1697$ می باشند. مشاهده می شود که با افزایش قابلیت کشش مدل $FENE-P$ و در اعداد دبوراً یکسان، عدد ناسلت هم افزایش می یابد. البته افزایش عدد ناسلت با افزایش مقدار منفی عدد بی بعد برینکمن، تشدید می یابد. به طوری که در عدد برینکمن $Br = -10$ و در اعداد دبوراً $De = 0.1$ ، $De = 1$ و $De = 100$ اعداد ناسلت در پارامتر قابلیت کشش برابر $L^2 = 1$ به ترتیب برابر با $Nu = 15.2609$ ، $Nu = 33.7340$ و $Nu = 4.7779$ می باشند. با افزایش مقدار پارامتر قابلیت کشش به $L^2 = 100$ اعداد ناسلت به ترتیب برابر با $Nu = 41.9885$ ، $Nu = 38.4500$ و $Nu = 8.5147$ می باشند.

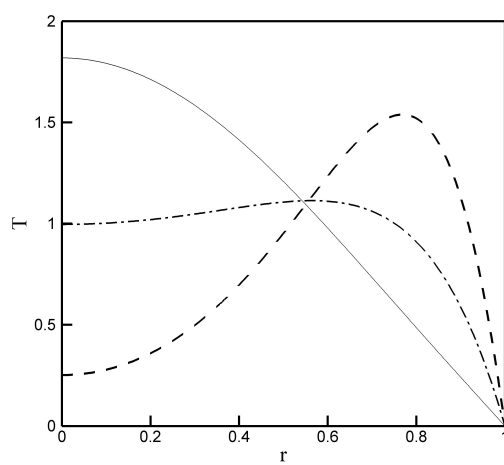
به عنوان یک نتیجه گیری کلی، باید ذکر شود که با افزایش عدد بی بعد برینکمن منفی در یک مقدار خاص از پارامتر قابلیت کشش و عدد دبوراً، عدد ناسلت افزایش می یابد. هم چنین عدد ناسلت در عدد برینکمن ثابت، با افزایش عدد بی بعد دبوراً کم می شود. برخلاف آنچه در اعداد برینکمن مثبت مشاهده شده، در اعداد برینکمن منفی با افزایش پارامتر قابلیت کشش سیال L^2 ، بازه اعداد ناسلت بیش تر شده و اعداد ناسلت بزرگ تری در مقادیر مشابه عدد دبوراً در یک عدد برینکمن خاص مشاهده شده است.



(ا) $Br = -0.1$

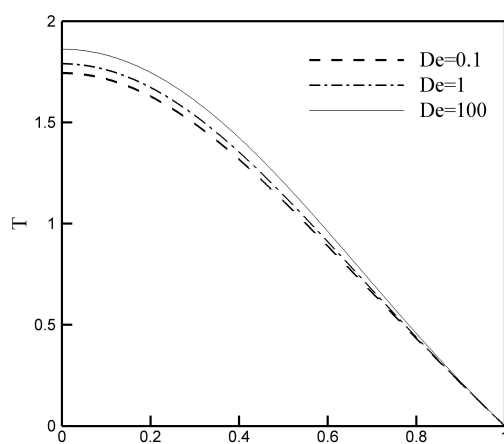


(ب) $Br = -1$

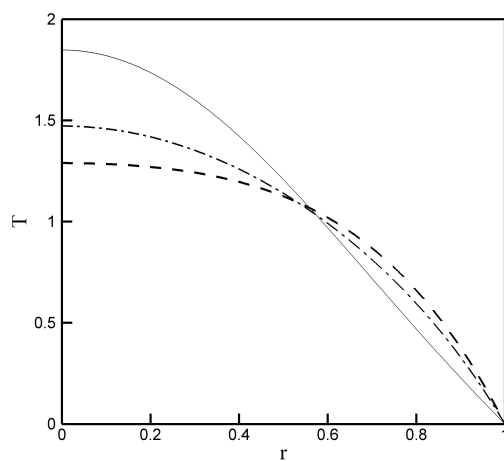


(ج) $Br = -10$

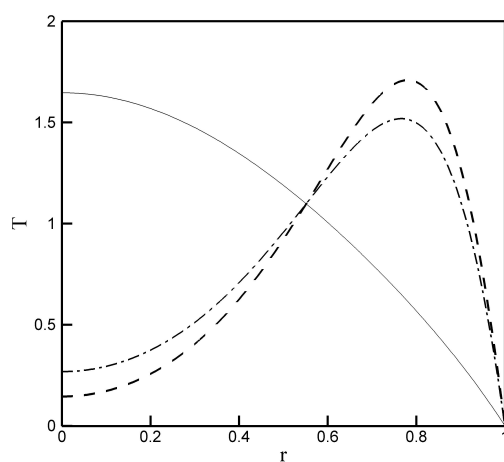
شکل ۱۱.۴: پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 1$



(ا) $Br = -0.1$

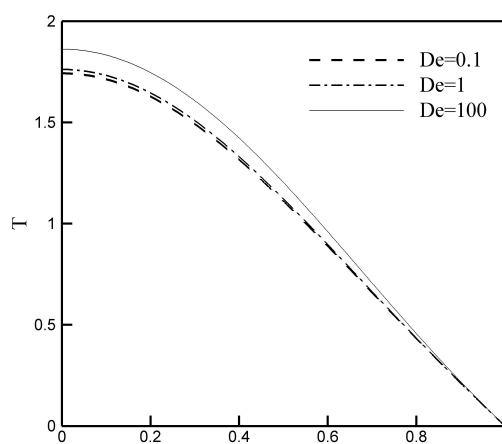


(ب) $Br = -1$

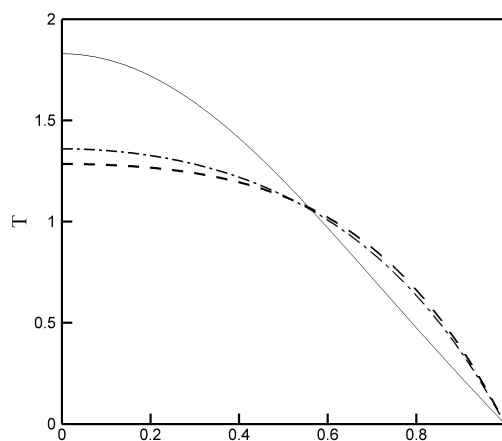


(ج) $Br = -10$

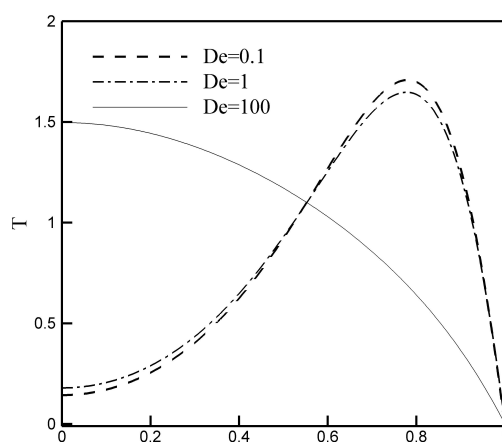
شکل ۱۲.۴: پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 10$



(ا) $Br = -0.1$

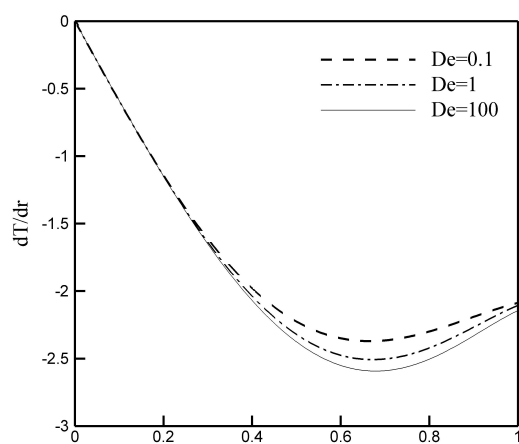


(ب) $Br = -1$

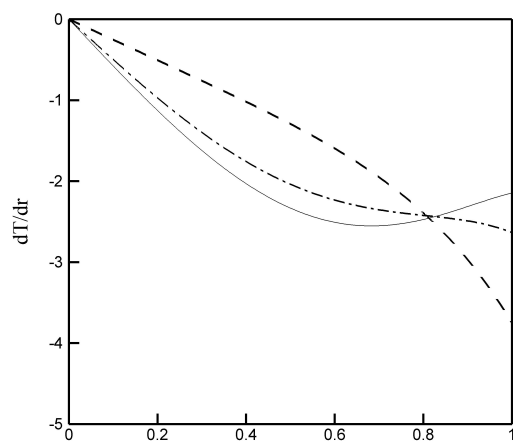


(ج) $Br = -10$

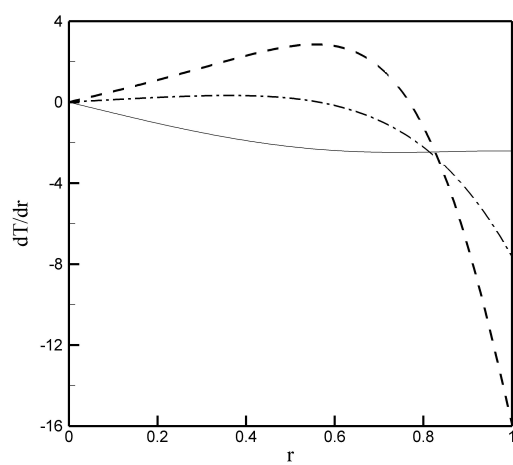
شکل ۱۳.۴: پروفیل‌های دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 100$



(ا) $Br = -0.1$

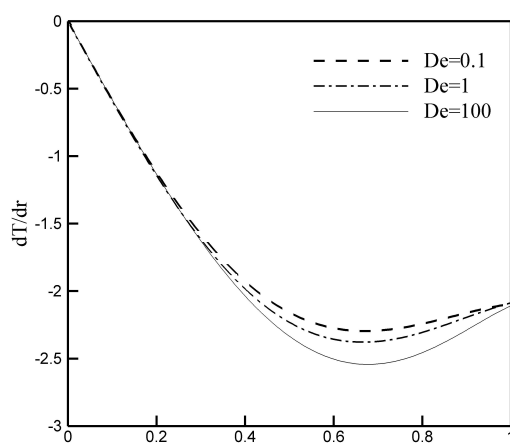


(ب) $Br = -1$

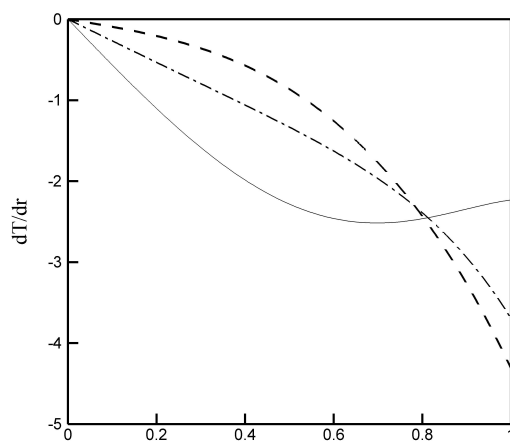


(ج) $Br = -10$

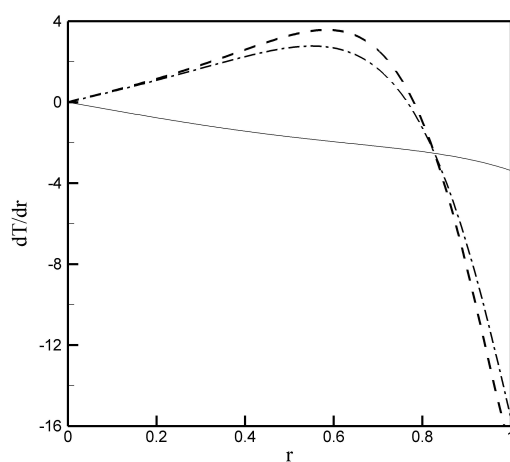
شکل ۱۴.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 1$



(ا) $Br = -0.1$

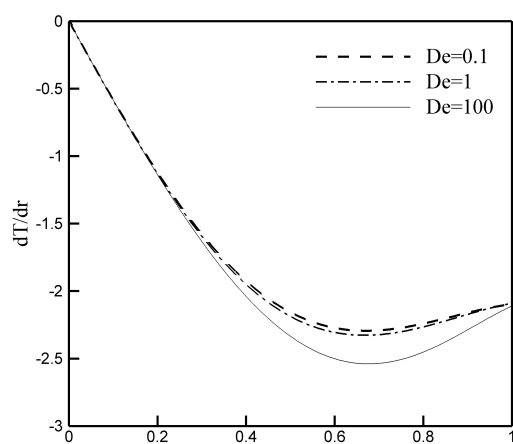


(ب) $Br = -1$

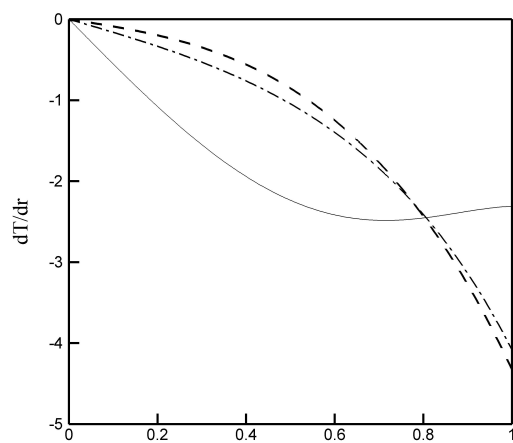


(ج) $Br = -10$

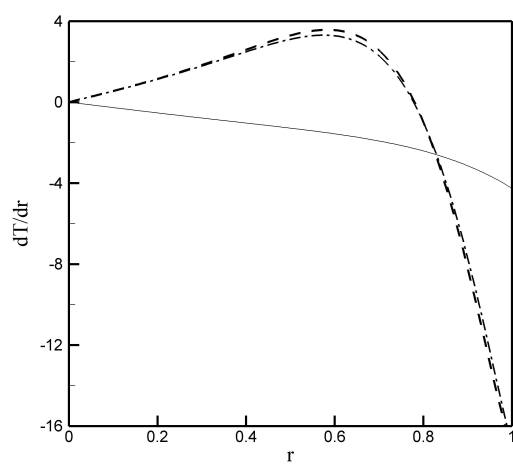
شکل ۱۵.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 10$



(ا) $Br = -0.1$



(ب) $Br = -1$



(ج) $Br = -10$

شکل ۱۶.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $FENE-P$ برای اعداد برینکمن منفی در $L^2 = 100$

۳.۴ جریان خطی PTT

جدول ۶.۴ حاوی داده‌های مربوط به عدد ناسلت و ثابت‌های به‌کار رفته در معادله توزیع دمای جریان $LPTT$ درون لوله دما ثابت با در نظر گرفتن اتلاف اصطکاکی می‌باشد. مشاهده می‌شود که با افزایش عدد دبورا عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد. اما نکته حائز اهمیت در مورد جریان $LPTT$ این است پارامتر قابلیت کشش معادل که با ϵ نشان داده می‌شود برخلاف جریان $FENE-P$ هم‌راستا با عدد دبورا عمل می‌کند. یعنی با افزایش پارامتر ϵ عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد. بنابراین همان‌طور که انتظار می‌رود با توجه به جدول ۶.۴ بیش‌ترین عدد ناسلت مربوط به ردیف آخر آن می‌باشد. عدد ناسلت در $De = 100$ برای مقادیر $\epsilon^2 = 1$ ، $\epsilon^2 = 10$ و $\epsilon^2 = 100$ به ترتیب برابر $Nu = 4.1545$ ، $Nu = 4.1485$ و $Nu = 4.1587$ می‌باشد. جهت پی‌بردن به تأثیر عدد برینکمن بر کیفیت عدد ناسلت، جدول‌های ۷.۴ و ۸.۴ مشابه جدول ۶.۴ تهیه شده است. مشاهده می‌شود که در اعداد دبورا و هم‌چنین ϵ^2 یکسان، با افزایش عدد برینکمن عدد ناسلت کاهش می‌یابد.

جدول ۶.۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان خطی PTT درون لوله دما ثابت برای $Br = 0.1$

	α_2	α_1	C_1	Nu	De
$\epsilon^2 = 1$	0.1191	1.7258	1.8663	3.2583	0.1
	1.6125	0.6349	1.8725	3.8152	1
	9.1615	0.1513	1.8705	4.0812	10
	14.8303	0.0963	1.8731	4.1125	20
	19.5861	0.0738	1.8791	4.1253	30
	23.8314	0.0610	1.8721	4.1325	40
	27.7333	0.0527	1.8645	4.1374	50
	31.3817	0.0467	1.8711	4.1408	60
	34.8320	0.0422	1.8671	4.1434	70
	38.1212	0.0386	1.8862	4.1454	80
	41.2758	0.0357	1.8671	4.1471	90
	44.3154	0.0333	1.8560	4.1485	100
$\epsilon^2 = 10$	0.2723	1.4673	1.8681	3.3859	0.1
	2.5747	0.4512	1.8715	3.9147	1
	13.6759	0.1040	1.8764	4.1081	10
	21.9986	0.0659	1.8702	4.1298	20
	28.9799	0.0505	1.8862	4.1386	30
	35.2116	0.0417	1.8904	4.1436	40
	40.9391	0.0360	1.8843	4.1469	50
	46.2944	0.0319	1.8566	4.1493	60
	51.3589	0.0288	1.9023	4.1510	70
	56.1869	0.0263	1.9050	4.1524	80
	60.8173	0.0244	1.8611	4.1536	90
	65.2790	0.0227	1.8953	4.1545	100
$\epsilon^2 = 100$	0.5405	1.1624	1.8704	3.5395	0.1
	3.9959	0.3161	1.8756	3.9890	1
	20.3039	0.0712	1.8632	4.1268	10
	32.5212	0.0451	1.8769	4.1417	20
	42.7689	0.0345	1.8678	4.1478	30
	51.9160	0.0285	1.8865	4.1512	40
	60.3231	0.0246	1.8519	4.1535	50
	68.1838	0.0218	1.8549	4.1551	60
	75.6174	0.0196	1.8671	4.1563	70
	82.7041	0.0180	1.9247	4.1572	80
	89.5007	0.0166	1.9037	4.1580	90
	96.0496	0.0155	1.8438	4.1587	100

جدول ۷.۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان خطی PTT درون لوله دما ثابت برای $Br = 1$

	C_1	Nu	De
$\epsilon^2 = 1$	2.4006	-1.0806	0.1
	2.0366	2.1717	1
	1.9096	3.6823	10
	1.8971	3.8581	20
	1.8904	3.9303	30
	1.8895	3.9711	40
	1.8860	3.9980	50
	1.8853	4.0172	60
	1.8823	4.0318	70
	1.8847	4.0432	80
	1.8802	4.0526	90
	1.8820	4.0603	100
$\epsilon^2 = 10$	2.3060	-0.3176	0.1
	1.9862	2.7388	1
	1.8980	3.8335	10
	1.8884	3.9554	20
	1.8854	4.0051	30
	1.8835	4.0332	40
	1.8838	4.0516	50
	1.8820	4.0648	60
	1.8799	4.0748	70
	1.8833	4.0826	80
	1.8817	4.0890	90
	1.8817	4.0943	100
$\epsilon^2 = 100$	2.1998	0.5830	0.1
	1.9506	3.1611	1
	1.8914	3.9383	10
	1.8825	4.0224	20
	1.8819	4.0565	30
	1.8786	4.0758	40
	1.8792	4.0884	50
	1.8803	4.0974	60
	1.8821	4.1042	70
	1.8796	4.1096	80
	1.8753	4.1140	90
	1.8777	4.1176	100

جدول ۸.۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی برای جریان خطی PTT درون لوله دما ثابت برای $Br = 10$

	C_1	Nu	De
$\epsilon^2 = 1$	9.7825	-56.0258	0.1
	4.3560	-16.0120	1
	2.3030	-0.4091	10
	2.1375	1.2736	20
	2.0731	1.9558	30
	2.0374	2.3403	40
	2.0141	2.5921	50
	1.9976	2.7719	60
	1.9855	2.9078	70
	1.9756	3.0149	80
	1.9680	3.1017	90
	1.9613	3.1739	100
$\epsilon^2 = 10$	9.8408	-46.1427	0.1
	3.4261	-9.9163	1
	2.1600	1.0394	10
	2.0509	2.1921	20
	2.0081	2.6585	30
	1.9841	2.9212	40
	1.9686	3.0931	50
	1.9578	3.2158	60
	1.9494	3.3086	70
	1.9425	3.3817	80
	1.9377	3.4409	90
	1.9335	3.4901	100
$\epsilon^2 = 100$	8.1649	-34.6608	0.1
	2.8688	-5.5621	1
	2.0659	2.0318	10
	1.9934	2.8199	20
	1.9648	3.1384	30
	1.9487	3.3177	40
	1.9383	3.4350	50
	1.9303	3.5188	60
	1.9245	3.5821	70
	1.9203	3.6319	80
	1.9169	3.6723	90
	1.9146	3.7058	100

تغییرات سرعت جریان $LPTT$ برحسب شعاع بی‌بعد لوله در شکل ۱۷.۴ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش عدد دبور همانند آن‌چه قبلاً نیز گزارش شد، پروفیل سرعت در مجاورت مرکز لوله دارای یک‌نواختی بیش‌تری می‌شود. اما با افزایش ϵ^2 مطابق آن‌چه در شکل ۱۷.۴-ج نشان داده شده است، همواری پروفیل سرعت افزایش می‌یابد. در واقع اثر پارامتر ϵ^2 برخلاف اثر پارامتر L^2 است.

پروفیل تغییرات دمای جریان $LPTT$ برحسب شعاع بی‌بعد لوله در شکل‌های ۱۸.۴ تا ۲۰.۴ به‌ازای $\epsilon^2 = 1$ ، $\epsilon^2 = 10$ و $\epsilon^2 = 100$ ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مشابه تحلیل انجام شده برای جریان $FENE - P$ در این قسمت نیز با افزایش عدد دبور پروفیل دمای جریان $LPTT$ به سطح پائین‌تری حرکت می‌کند. در تمامی پروفیل‌ها، دمای ناحیه نزدیک دیواره لوله در حال افزایش بوده اما در قسمت مرکز لوله، جریان با افت دما مواجه است.

در ادامه و در شکل‌های ۲۱.۴ تا ۲۳.۴ نمودارهای گرادیان شعاعی دمای بی‌بعد بر حسب شعاع بی‌بعد لوله ترسیم شده است. می‌بینیم که با افزایش عدد برینکمن، گرادیان دمای جریان در مجاورت دیواره لوله افزایش یافته و در نهایت تغییر علامت داده و مثبت می‌شود. در این لحظه جهت انتقال حرارت معکوس شده است.

هم‌چنین همانند قسمت بررسی شده برای جریان $FENE - P$ ، پروفیل‌های دمای بی‌بعد جریان $LPTT$ و نیز گرادیان دمای بی‌بعد جریان $LPTT$ ، به‌ازای مقادیر منفی عدد بی‌بعد برینکمن به ترتیب در شکل‌های ۲۴.۴ تا ۲۶.۴ و شکل‌های ۲۷.۴ تا ۲۹.۴ نشان داده شده‌اند. در واقع در اعداد برینکمن منفی، دمای دیواره کم‌تر از دمای متوسط جریان می‌باشد. در اعداد برینکمن منفی جهت انتقال حرارت خلاف جهت اعداد برینکمن مثبت بوده و از جریان به سمت لوله است. در واقع جریان درون لوله با سرمایش همراه است. ملاحظه می‌شود که تغییرات در این نمودارها تقریباً در خلاف جهت رفتار نمودارهای مربوط به اعداد برینکمن مثبت است. به‌عنوان مثال پروفیل‌های دمای بی‌بعد جریان با توجه به شکل ۲۴.۴ دارای جهش به سمت بالا بوده و در نتیجه مقدار دمای ماکزیمم با افزایش عدد دبور بیش‌تر می‌شود. پروفیل گرادیان دمای بی‌بعد نیز در شکل‌های ۲۷.۴ تا ۲۹.۴ نشان داده شده است. اعداد ناسلت به‌دست آمده در عدد برینکمن $Br = -0.1$ و به‌ازای اعداد دبور $De = 0.1$ ، $De = 1$ و $De = 100$ و در $\epsilon^2 = 1$ به ترتیب برابر با $Nu = 4.1797$ ، $Nu = 4.1758$ و $Nu = 4.1680$ می‌باشد. با افزایش پارامتر قابلیت کشش به $\epsilon^2 = 100$ اعداد ناسلت به ترتیب برابر با $Nu = 4.1797$ ، $Nu = 4.1719$ و $Nu = 4.1678$ می‌باشند. مشاهده می‌شود که با افزایش قابلیت کشش مدل $FENE - P$ و در اعداد دبور یکسان، عدد ناسلت هم افزایش می‌یابد. البته افزایش عدد ناسلت با افزایش مقدار منفی عدد بی‌بعد برینکمن، تشدید می‌یابد. به‌طوری‌که در عدد برینکمن $Br = -10$ و در اعداد دبور $De = 0.1$ ، $De = 1$ و $De = 100$ اعداد ناسلت در پارامتر قابلیت کشش برابر $\epsilon^2 = 1$ به ترتیب برابر با $Nu = 38.2958$ ، $Nu = 20.0849$ و $Nu = 5.1317$ می‌باشند. با افزایش مقدار پارامتر قابلیت کشش به $\epsilon^2 = 100$ اعداد ناسلت به ترتیب برابر با $Nu = 29.9231$ ، $Nu = 12.7302$ و $Nu = 4.6183$ است.

به‌عنوان یک نتیجه‌گیری کلی، باید ذکر شود که با افزایش عدد بی‌بعد برینکمن منفی در یک مقدار خاص از پارامتر قابلیت کشش و عدد دبور، عدد ناسلت افزایش می‌یابد. هم‌چنین عدد ناسلت در مقادیر

منفی و ثابت عدد برینکمن، با افزایش عدد بی بعد دبورا کاهش می یابد. برخلاف آن چه در اعداد برینکمن مثبت مشاهده شد، در اعداد برینکمن منفی با افزایش پارامتر قابلیت کشش سیال ϵ^2 ، اعداد ناسلت کوچک تری در مقادیر عدد دبورای یکسان مشاهده می شود.

۴.۴ جریان پاورلو

جریان در حال توسعه حرارتی

مقادیر دمای متوسط بی‌بعد و عدد ناسلت محلی به کمک معادلات (۶۲.۳) و (۶۳.۳) برای هر دو مقدار بررسی شده شاخص پاورلو در جریان در حال توسعه حرارتی، یعنی حالت‌های رقیق شونده و نیوتنی، در فواصل کوتاه محوری نشان داده شده است. جدول ۹.۴ نتایج حاصل شده در کار حاضر به‌ازای $n = 0.2$ و $n = 1$ به ترتیب با مقادیر متناظر به‌دست آمده برای $n = 1/3$ و $n = 1$ که در مرجع [۹] آمده است، اعتبارسنجی شده است. عدد ناسلت به‌ازای مقادیر شاخص پاورلو $n = 0.2$ و $n = 1/3$ ، در فاصله طولی $x = 0.0001$ به ترتیب برابر $Nu = 25.4715$ و $Nu = 25.321$ است که با افزایش فاصله طولی بی‌بعد، عدد ناسلت کاهش یافته و مشاهده می‌شود که در $x = 0.2$ ، به ترتیب برابر $Nu = 4.4996$ و $Nu = 4.1753$ است. برای مقدار $n = 1$ همان‌طور که در جدول ۹.۴ نشان داده شده است، اعداد ناسلت به‌دست آمده در کار حاضر با دقت بالایی با نتایج مرجع [۹] اعتبارسنجی شده است. در $x = 0.2$ مقادیر عدد ناسلت به‌ازای $n = 1$ برابر $Nu = 3.6569$ و $Nu = 3.6568$ است. می‌توان گفت که در فاصله طولی بی‌بعد $x = 0.2$ جریان تقریباً به حالت توسعه‌یافتگی حرارتی و البته حالت کاملاً توسعه یافته رسیده است. در واقع اعداد ناسلت موجود در ردیف آخر جدول ۹.۴، برابر با مقادیر حدی عدد ناسلت می‌باشند که در ادامه به‌دست آمده‌اند. در حالت حدی و در فواصل طولی زیاد، تنها جمله اول از سری‌های معادله (۶۳.۳) به لحاظ مرتبه بزرگی منظور خواهند شد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$x \rightarrow \infty, \quad Nu(\infty) \rightarrow \frac{\lambda_1^2}{k_1} = \frac{n+1}{3n+1} \lambda_1^2 \quad (۴.۴)$$

در نتیجه برای دو حالت بررسی شده، عدد ناسلت حدی برابر است با:

$$Nu(\infty) = \begin{cases} 4.4997, & n = 0.2 \\ 3.6569, & n = 1 \end{cases} \quad (۵.۴)$$

مشاهده می‌شود که ردیف آخر جدول ۹.۴ با دقت خوبی درستی معادله (۵.۴) را نشان می‌دهد. بنابراین نتیجه می‌شود که با افزایش مقدار شاخص پاورلو و نیز فاصله طولی بی‌بعد لوله، عدد ناسلت کاهش می‌یابد. شکل ۳۰.۴ ترسیم معادله (۶۳.۳) بر حسب فاصله طولی بی‌بعد لوله است. در ادامه به بررسی روند تغییرات دمای متوسط بی‌بعد جریان در حال توسعه حرارتی پاورلو درون لوله پرداخته می‌شود.

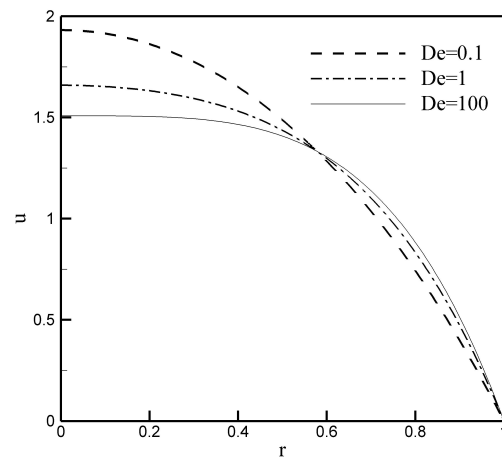
دمای متوسط بی‌بعد نیز همانند عدد ناسلت، با دقت خوبی با نتایج مرجع [۹] اعتبارسنجی شده است. به‌عنوان مثال در فاصله طولی $x = 0.2$ و به‌ازای مقادیر شاخص پاورلو $n = 0.2$ و $n = 1/3$ مشاهده می‌شود که دمای متوسط بی‌بعد به ترتیب برابر با $\theta_m = 0.02165$ و $\theta_m = 0.02852$ و به‌ازای $n = 1$ ، به ترتیب برابر با $\theta_m = 0.04393$ و $\theta_m = 0.04394$ است. با توجه به جدول ۹.۴ مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر x و شاخص پاورلو، دمای متوسط بی‌بعد به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. درواقع با کاهش عدد ناسلت، انتقال حرارت کم‌تر شده و در نتیجه دمای متوسط بی‌بعد کاهش می‌یابد. شکل ۳۱.۴ نمودار دمای بی‌بعد متوسط را بر حسب فاصله طولی بی‌بعد لوله نشان می‌دهد که با توجه

به معادله (۶۲.۳) ترسیم شده است. لازم به یادآوری می‌باشد که کوتا و اوزیسیک [۹] جریان در حال توسعه حرارتی پاورلو را درون لوله‌های با سطح مقطع مستطیلی و دایره‌ای به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در مطالعه خود شاخص سیال پاورلو را برابر با $n = 1/3$ ، $n = 1$ و $n = 3$ در نظر گرفته و معادله حرارتی (۶۸.۲) را به روش تبدیل انتگرال محدود حل کردند که پاسخ آن به صورت یک مساله مقدار ویژه ظاهر شد. مقادیر ویژه نیز در کار آن‌ها به روش شمارش علامت به دست آمد. رابطه توزیع دمای بی‌بعد جریان در حال توسعه حرارتی پاورلو بر حسب پارامترهای بی‌بعد شعاع و فاصله طولی لوله، در معادله (۵۲.۳) به دست آمده است که با ترسیم آن شکل ۳۲.۴ حاصل شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود شکل‌های ۳۲.۴ - الف تا ۳۲.۴ - ج به ترتیب در مقادیر فاصله طولی $x = 0.001$ ، $x = 0.01$ و $x = 0.1$ و برای حالت‌های رقیق‌شونده و نیوتنی تهیه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود پروفیل دما پیوسته در حال کاهش از مقدار بیشینه در مرکز لوله $r = 0$ ، تا مقدار کمینه در دیواره لوله $r = 1$ می‌باشد. در ادامه به تحلیل رفتار پروفیل‌های دمای بی‌بعد در حالت‌های رقیق‌شونده و نیوتنی، در فاصله‌های طولی نشان داده شده در شکل ۳۲.۴ می‌پردازیم. در شکل ۳۲.۴ - الف و در فاصله طولی بی‌بعد $x = 0.001$ و تقریباً تا شعاع بی‌بعد $r = 0.65$ رفتار پروفیل‌های دما در دو حالت مشابه یک‌دیگر بوده ولی با افزایش شعاع بی‌بعد و با نزدیک شدن به دیواره لوله، پروفیل دما در حالت رقیق‌شونده با شیب بیشتری به دمای می‌نیم واقع در دیواره میل می‌کند. در واقع در حالت رقیق‌شونده، انتقال حرارت بهتری در مجاورت دیواره لوله رخ می‌دهد. در نتیجه گرادیان دمای بی‌بعد در مجاورت دیواره لوله برای حالت رقیق‌شونده بیشتر است. در شکل ۳۲.۴ - ب و در فاصله طولی $x = 0.01$ تغییرات پروفیل‌های دمای بی‌بعد همانند شکل ۳۲.۴ - الف است. با این تفاوت که در فاصله طولی $x = 0.01$ ، روند نزولی تغییرات دما از مقدار بیشینه، در شعاع‌های کم‌تری رخ می‌دهد. اما در $x = 0.1$ همان‌طور که در شکل ۳۲.۴ - ج نشان داده شده است، انتقال حرارت در حالت نیوتنی $n = 1$ در تمام مقطع لوله بهتر از حالت رقیق‌شونده است و مقادیر دمای بیشینه به ترتیب برابر $\theta_{max} = 0.3418$ و $\theta_{max} = 0.2536$ می‌باشد. در نتیجه هر چه جریان به حالت توسعه‌یافتگی حرارتی نزدیک‌تر می‌شود، انتقال حرارت جریان در حالت نیوتنی بهتر از حالت رقیق‌شونده خواهد بود. در ادامه به بررسی نتایج جریان کاملاً توسعه‌یافته پاورلو درون لوله می‌پردازیم.

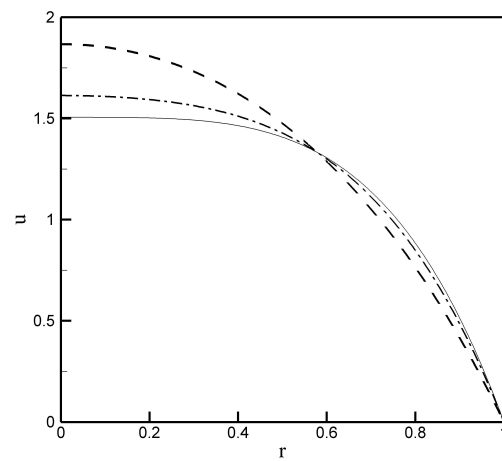
جریان کاملاً توسعه یافته

توزیع دمای بی‌بعد جریان کاملاً توسعه‌یافته پاورلو درون لوله به‌ازای نه مقدار مختلف از شاخص پاورلو به صورت سری در معادلات (۶۴.۳) تا (۶۶.۳) ارائه شد. همان‌طور که در معادله (۶۴.۳) آمده است، چنان‌چه دقت معادلات تا مرتبه بزرگی هفت انتخاب شود، حل‌های تحلیلی به دست آمده برای مقادیر شاخص پاورلو $n = 0.01$ تا $n = 0.25$ یکسان می‌باشد. اما به ازای مقادیر $n = 0.50$ و $n = 1$ دو حل متفاوت حاصل شده است که در معادلات (۶۵.۳) و (۶۶.۳) آمده است. اعداد ناسلت و دماهای بیشینه به‌ازای مقادیر مختلف شاخص پاورلو در جدول ۱۰.۴ گزارش شده‌اند. بدیهی است که داده‌های ارائه شده در جدول ۱۰.۴ مربوط به معادلات (۶۴.۳) تا (۶۶.۳) نمی‌باشد. جهت استخراج نتایج با دقت بالاتر (داده‌های مربوط به جدول ۱۰.۴)، از توزیع دمای بی‌بعد تا مرتبه بزرگی پانزده استفاده شده است.

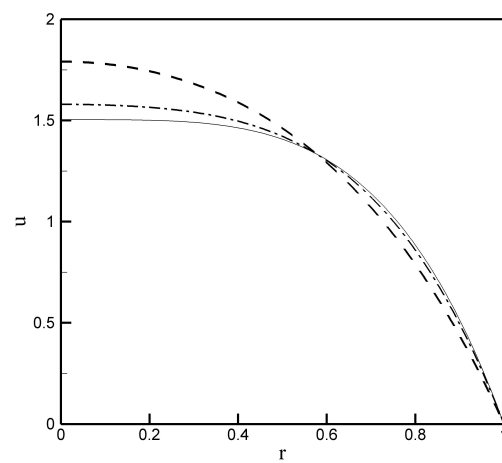
همان‌طور که پیش از این نیز عنوان شد، با افزایش مرتبه بزرگی به‌ازای هر مقدار شاخص پاورلو، یک توزیع دمای بی‌بعد به‌صورت سری حاصل خواهد شد. در نتیجه برای تعیین اعداد ناسلت مربوط به هر مقدار شاخص پاورلو، یک چندجمله‌ای مانند معادله (۶۷.۳) نیاز است. در تحقیق حاضر جهت جلوگیری از حجم انبوه معادلات، تنها به ارائه داده‌های مربوطه که در جدول ۱۰.۴ آمده‌اند اکتفا شده است. با توجه به جدول ۱۰.۴ مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار شاخص پاورلو از $n = 0.01$ تا $n = 1$ عدد ناسلت به ترتیب از $Nu = 5.6709$ تا $Nu = 3.6568$ کاهش می‌یابد. این موضوع همانند حالت جریان در حال توسعه حرارتی است. هم‌چنین مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار شاخص پاورلو در دو مقدار ذکر شده فوق، دمای بیشینه به ترتیب برابر و است. با توجه به مرجع [۲۷]، مقادیر عدد ناسلت و نیز دمای بیشینه در حالت جریان نیوتنی، $n = 1$ ، با دقت بالایی استخراج شده است. می‌توان این‌طور بیان کرد که با کاهش عدد ناسلت، کمی از قدرت انتقال حرارت کاسته شده و در نتیجه پروفیل‌های دما به‌ازای مقادیر بیش‌تر شاخص پاورلو، به سمت پایین‌تر محور حرکت کرده که در نتیجه آن، دمای بیشینه جریان نزول می‌کند.



$\epsilon^2 = 1$ (ا)

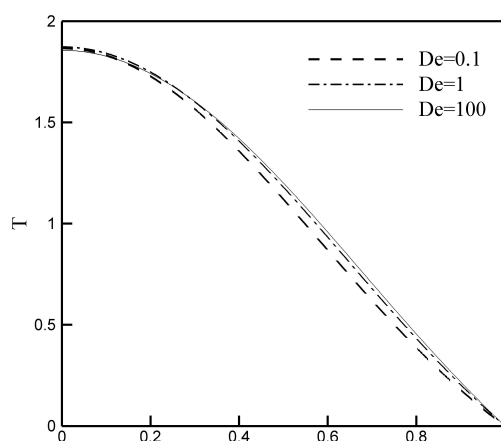


$\epsilon^2 = 10$ (ب)

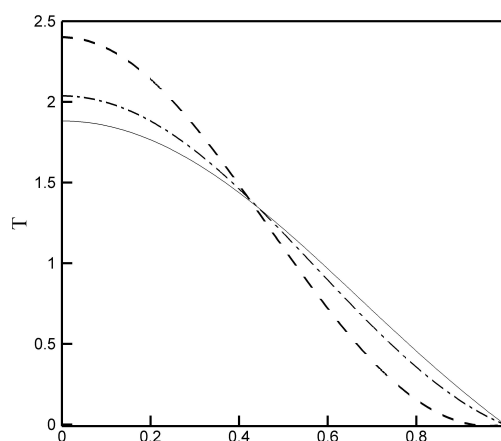


$\epsilon^2 = 100$ (ج)

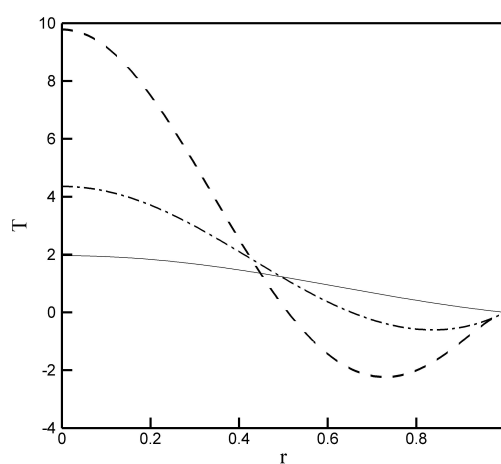
شکل ۱۷.۴: پروفیل‌های سرعت جریان $LPTT$



$Br = 0.1$ (ا)

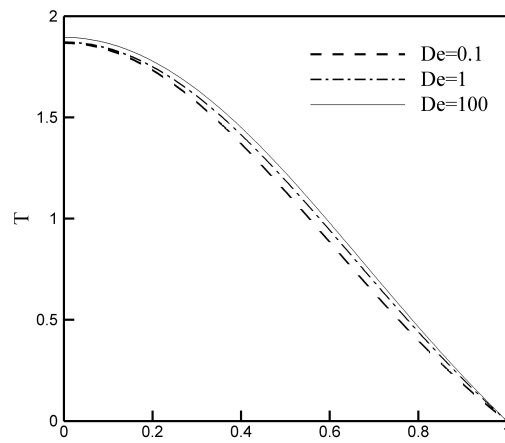


$Br = 1$ (ب)

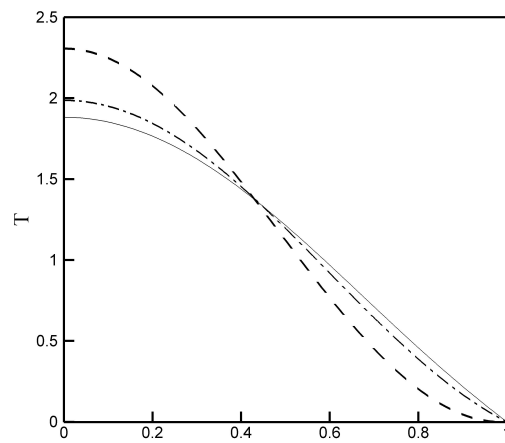


$Br = 10$ (ج)

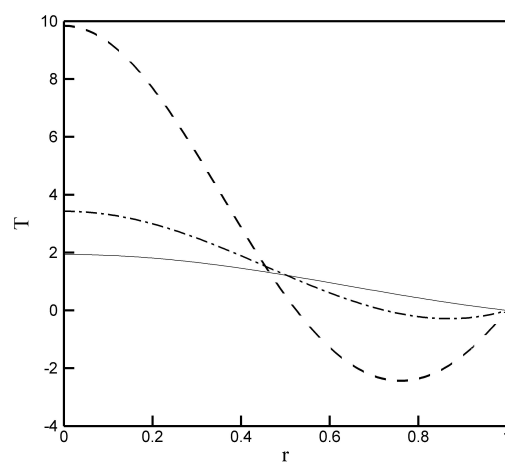
شکل ۱۸.۴: پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 1$



(ا) $Br = 0.1$

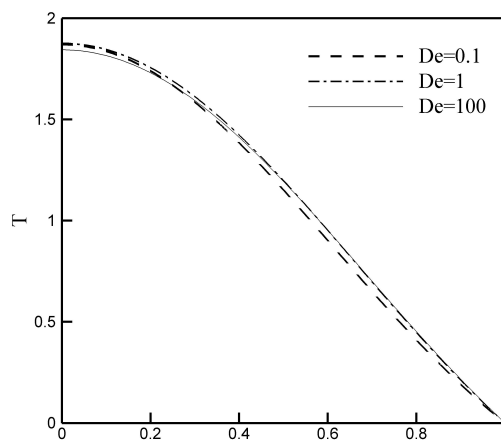


(ب) $Br = 1$

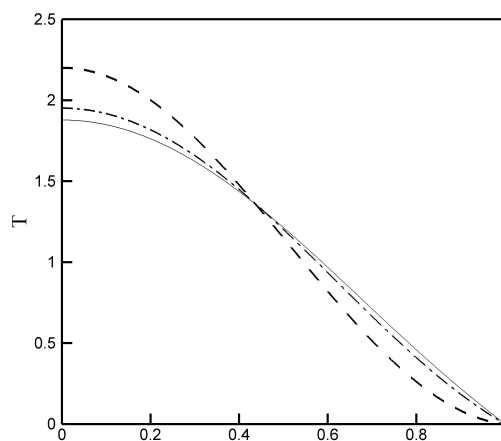


(ج) $Br = 10$

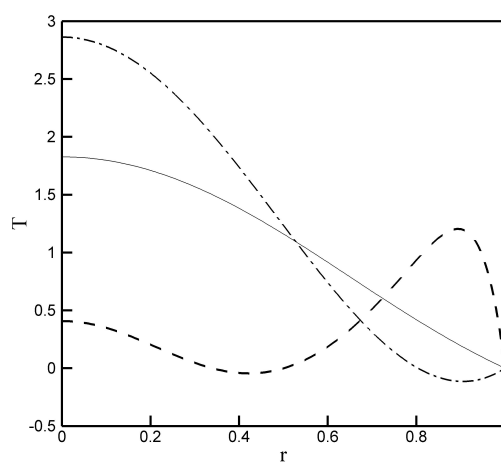
شکل ۴.۱۹: پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 10$



(ا) $Br = 0.1$

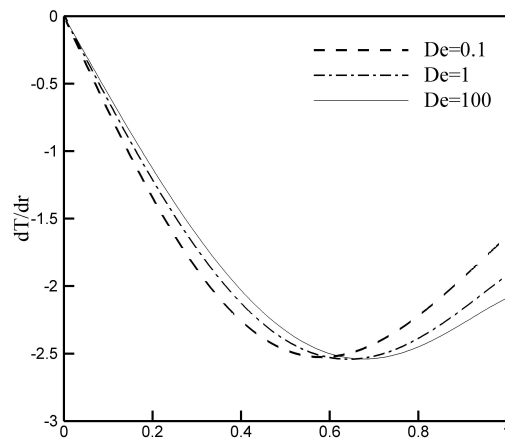


(ب) $Br = 1$

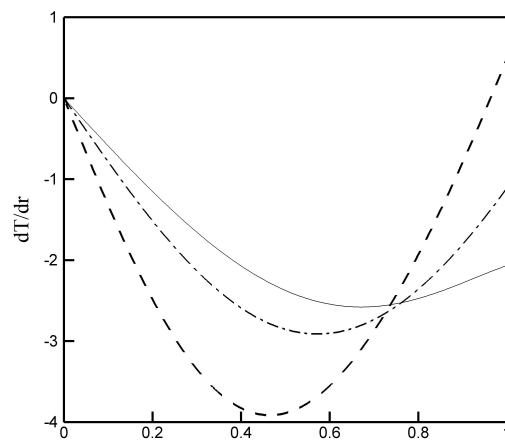


(ج) $Br = 10$

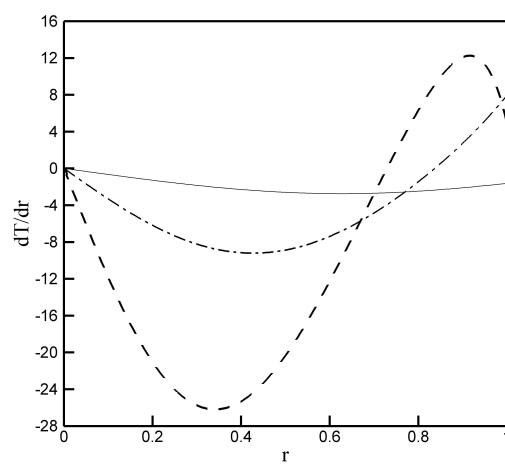
شکل ۴.۲۰: پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 100$



$Br = 0.1$ (ا)

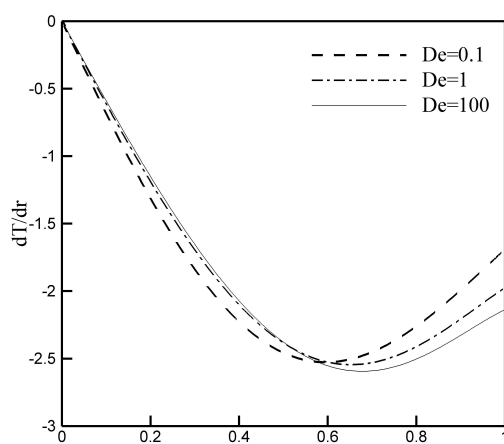


$Br = 1$ (ب)

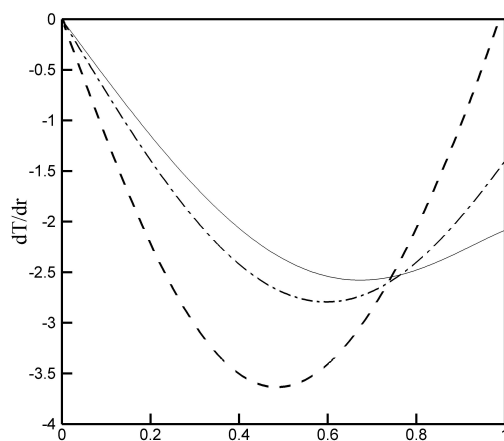


$Br = 10$ (ج)

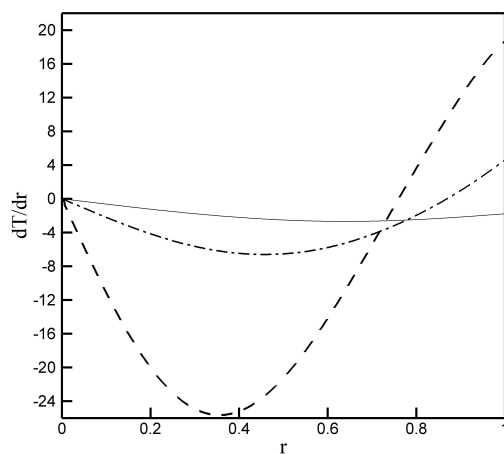
شکل ۲۱.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 1$



$Br = 0.1$ (ا)

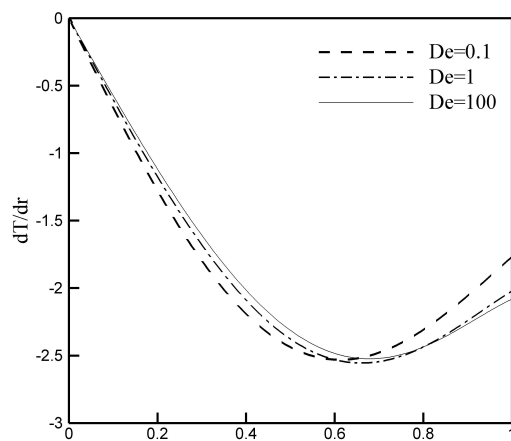


$Br = 1$ (ب)

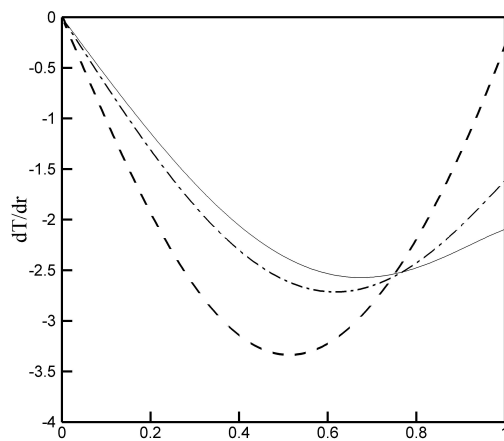


$Br = 10$ (ج)

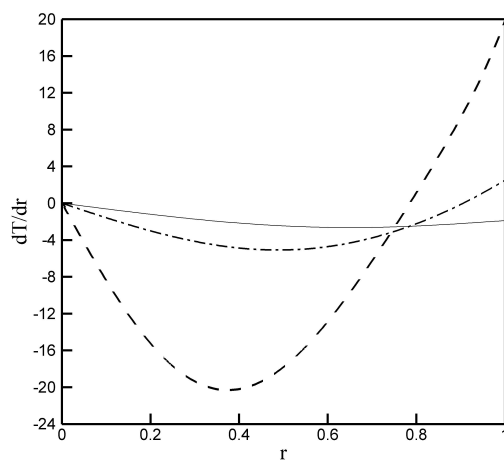
شکل ۲۲.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 10$



$Br = 0.1$ (ا)

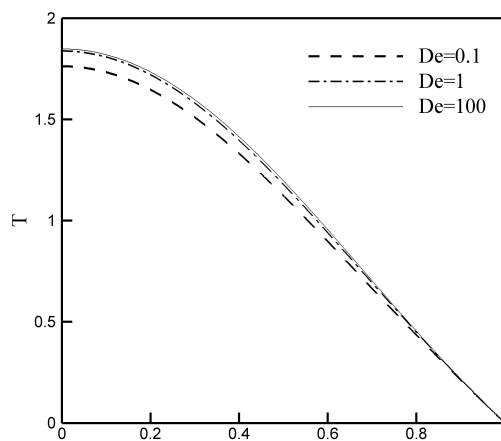


$Br = 1$ (ب)

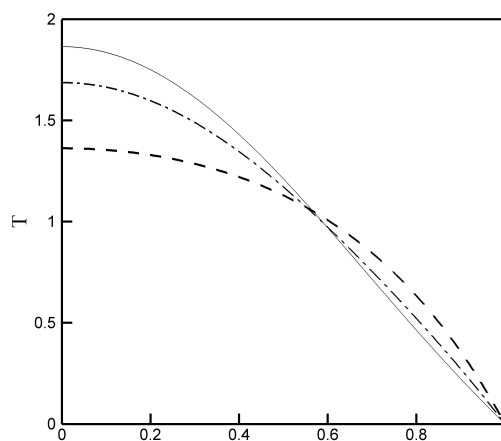


$Br = 10$ (ج)

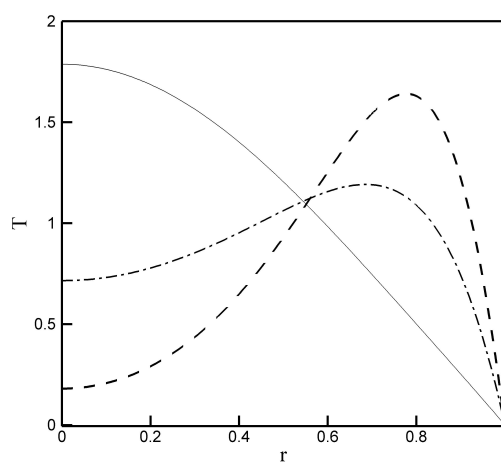
شکل ۲۳.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن مثبت در $\epsilon^2 = 100$



(ا) $Br = -0.1$

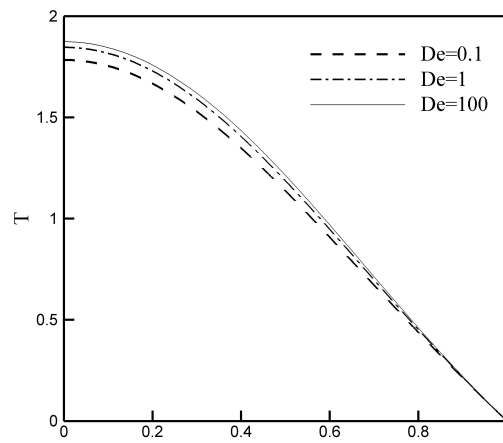


(ب) $Br = -1$

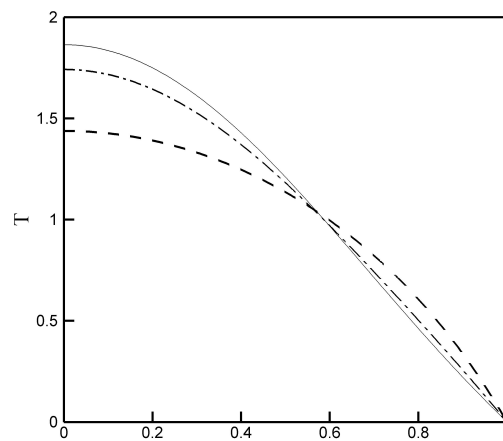


(ج) $Br = -10$

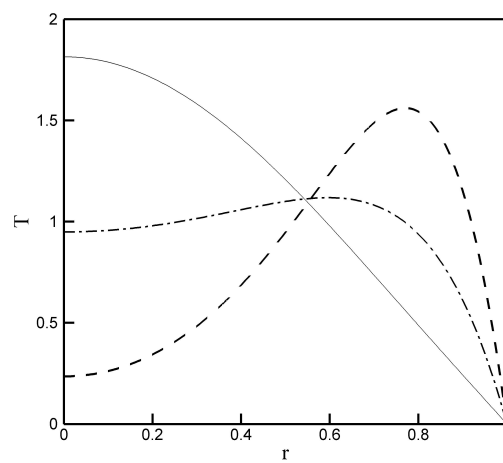
شکل ۲۴.۴: پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 1$



(ا) $Br = -0.1$

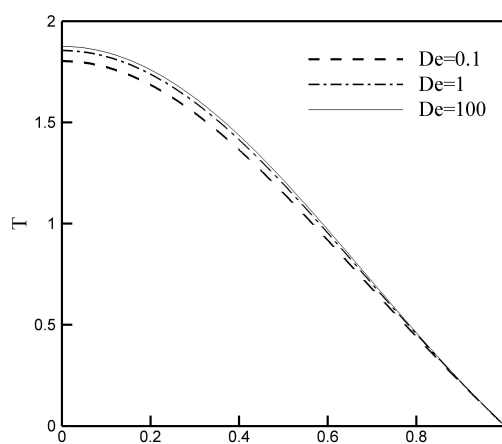


(ب) $Br = -1$

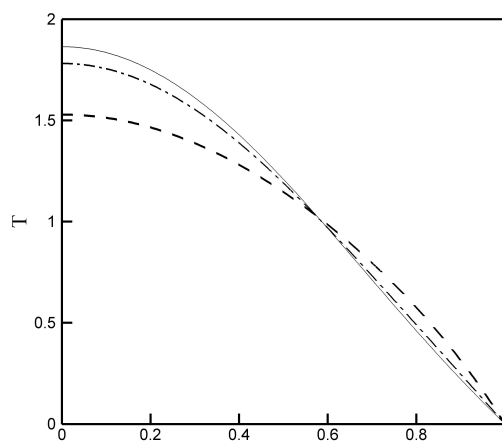


(ج) $Br = -10$

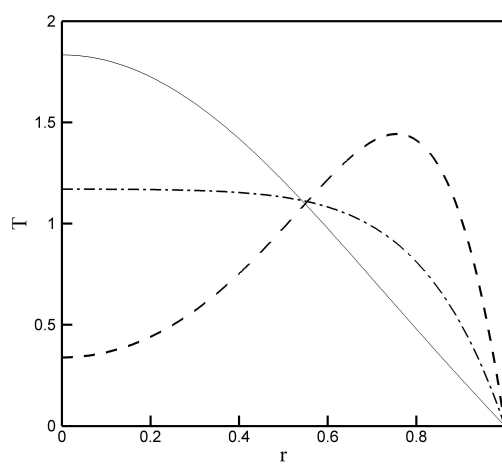
شکل ۲۵.۴: پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 10$



(ا) $Br = -0.1$

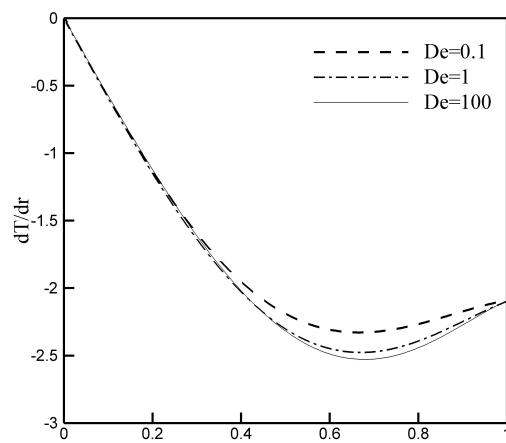


(ب) $Br = -1$

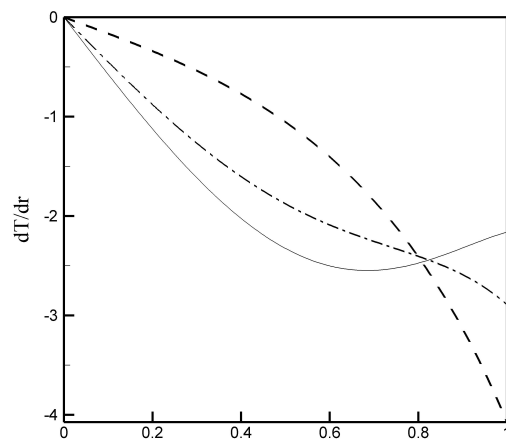


(ج) $Br = -10$

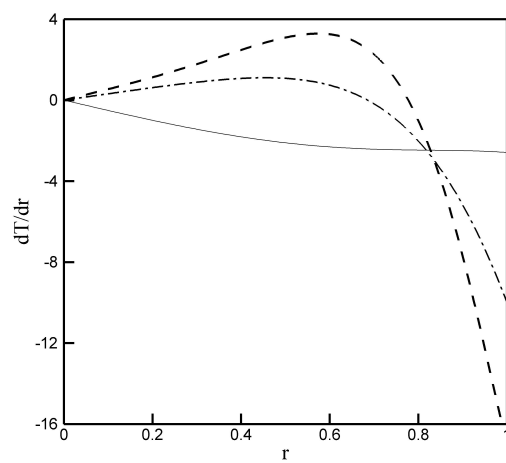
شکل ۲۶.۴: پروفیل‌های دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 100$



(ا) $Br = -0.1$

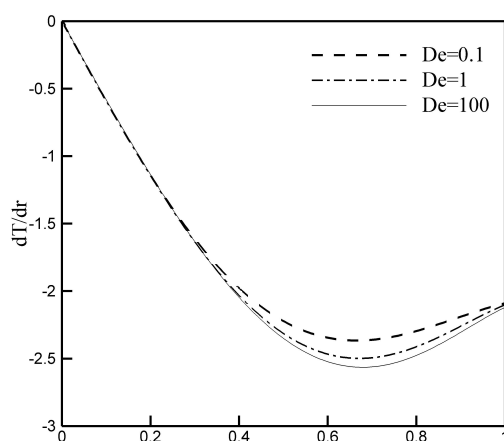


(ب) $Br = -1$

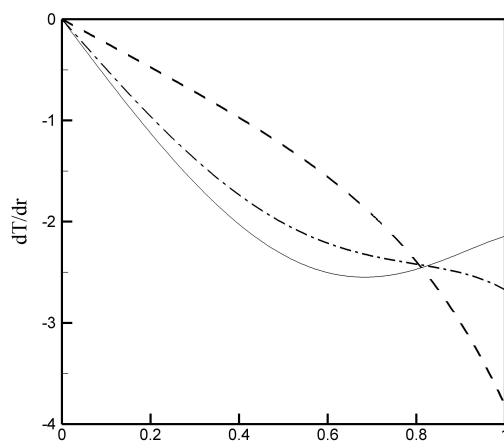


(ج) $Br = -10$

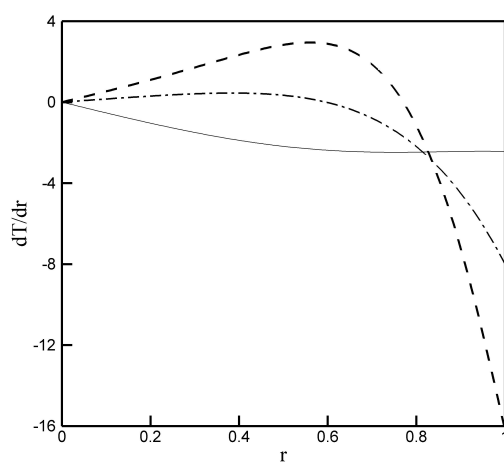
شکل ۲۷.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 1$



(ا) $Br = -0.1$

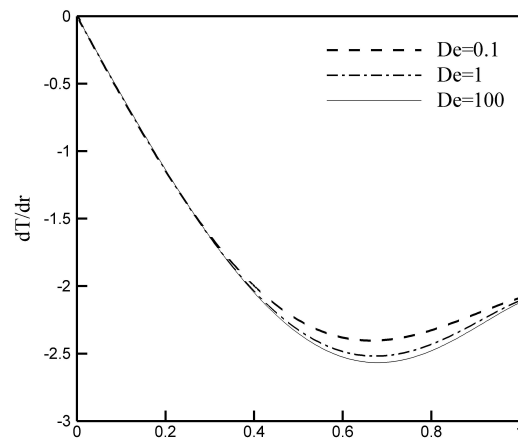


(ب) $Br = -1$

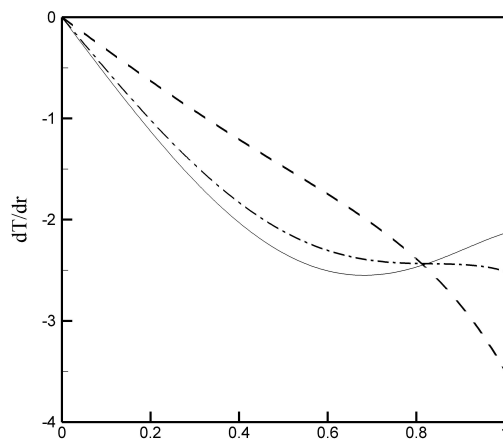


(ج) $Br = -10$

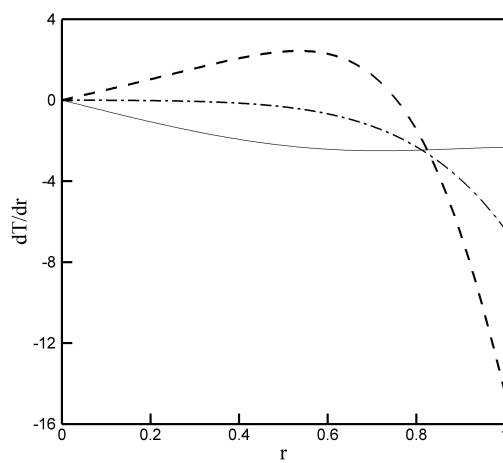
شکل ۲۸.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 10$



(ا) $Br = -0.1$

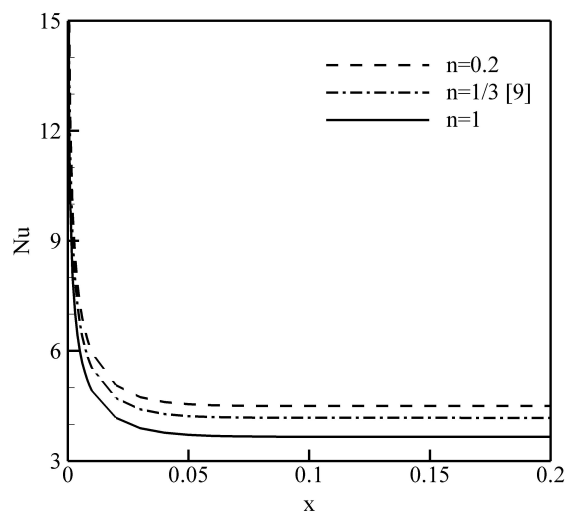


(ب) $Br = -1$

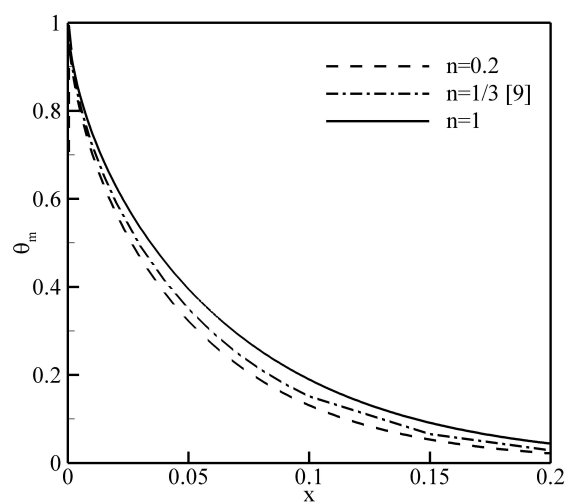


(ج) $Br = -10$

شکل ۲۹.۴: پروفیل‌های گرادیان دمای جریان $LPTT$ برای اعداد برینکمن منفی در $\epsilon^2 = 100$



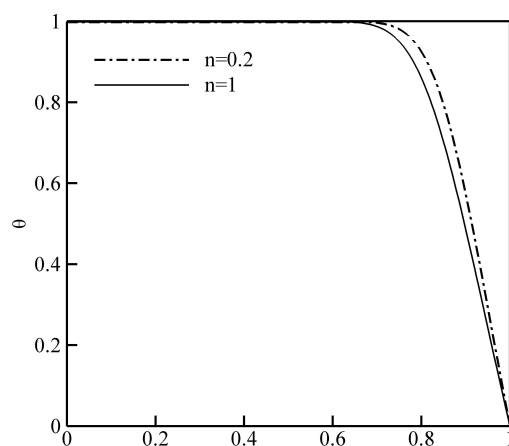
شکل ۳۰.۴: توزیع عدد ناسلت محلی برای حالت‌های مختلف شاخص پاورلو



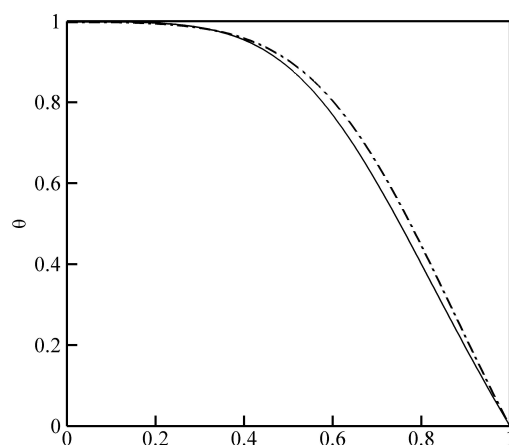
شکل ۳۱.۴: نمودار توزیع دمای بی‌بعد متوسط برحسب فاصله طولی بی‌بعد به‌ازای مقادیر مختلف شاخص پاورلو

جدول ۹.۴: مقادیر عدد ناسلت محلی و دمای متوسط جریان سیال در حال توسعه حرارتی پاورلو درون لوله

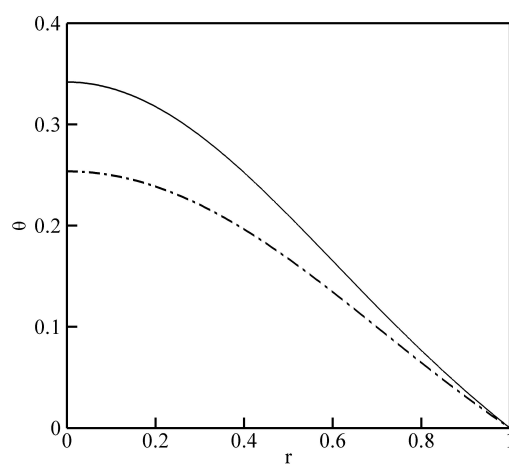
$n = 1$				$n = 1/3$		$n = 0.2$		
$Nu[\eta]$	$\theta_m[\eta]$	Nu	θ_m	$Nu[\eta]$	$\theta_m[\eta]$	Nu	θ_m	x
22.279	0.98657	20.2121	0.98602	25.321	0.98471	25.4715	0.98275	0.0001
17.559	0.97888	17.1461	0.97873	19.929	0.97600	21.3565	0.97366	0.0002
15.277	0.97251	15.1751	0.97244	17.323	0.96880	18.7957	0.96591	0.0003
13.842	0.96688	13.8142	0.96684	15.684	0.96245	17.0605	0.95903	0.0004
12.824	0.96175	12.8160	0.96171	14.523	0.95666	15.8003	0.95276	0.0005
12.050	0.95698	12.0473	0.95695	13.640	0.95130	14.8346	0.94694	0.0006
11.433	0.95250	11.4322	0.95247	12.937	0.94626	14.0638	0.94149	0.0007
10.926	0.94826	10.9252	0.94822	12.358	0.94149	13.4294	0.93633	0.0008
10.498	0.94420	10.4975	0.94417	11.871	0.93694	12.8945	0.93142	0.0009
10.130	0.94032	10.1299	0.94028	11.452	0.93258	12.4351	0.92671	0.001
8.0362	0.90736	8.0360	0.90733	9.0692	0.89575	9.8229	0.88709	0.002
7.0432	0.88057	7.0431	0.88054	7.9415	0.86597	8.5878	0.85522	0.003
6.4296	0.85723	6.4294	0.85720	7.2458	0.84014	7.8264	0.82769	0.004
6.0015	0.83622	6.0014	0.83618	6.7613	0.81698	7.2964	0.80307	0.005
5.6812	0.81693	5.6811	0.81690	6.3992	0.79578	6.9007	0.78062	0.006
5.4301	0.79899	5.4300	0.79896	6.1159	0.77612	6.5912	0.75985	0.007
5.2269	0.78215	5.2268	0.78212	5.8870	0.75773	6.3412	0.74047	0.008
5.0584	0.76623	5.0583	0.76620	5.6974	0.74038	6.1343	0.72223	0.009
4.9161	0.75111	4.9151	0.75107	5.5375	0.72394	5.9510	0.70497	0.01
4.1724	0.62803	4.1724	0.62800	4.7100	0.59166	5.0612	0.56749	0.02
3.8942	0.53487	3.8943	0.53484	4.4096	0.49345	4.7396	0.46692	0.03
3.7689	0.45901	3.7690	0.45898	4.2801	0.41487	4.6041	0.38748	0.04
3.7100	0.39530	3.7101	0.39527	4.2223	0.35005	4.5451	0.32273	0.05
3.6820	0.34100	3.6821	0.34097	4.1964	0.29582	4.5194	0.26924	0.06
3.6688	0.29438	3.6689	0.29436	4.1848	0.25018	4.5082	0.22477	0.07
3.6625	0.25424	3.6626	0.25422	4.1796	0.21164	4.5033	0.18770	0.08
3.6595	0.21961	3.6596	0.21959	4.1772	0.17907	4.5012	0.15677	0.09
3.6581	0.18971	3.6582	0.18969	4.1762	0.15152	4.5003	0.13094	0.1
3.6568	0.04394	3.6569	0.04393	4.1753	0.02852	4.4996	0.02165	0.2



(ا) $z = 0.001$



(ب) $z = 0.01$



(ج) $z = 0.1$

شکل ۳۲.۴: توزیع دمای بی‌بعد جریان در حال توسعه حرارتی پاورلو بر حسب شعاع بی‌بعد لوله در فواصل طولی مختلف نشان داده شده

جدول ۱۰.۴: مقادیر عدد ناسلت و دمای ماکزیمم به ازای مقادیر مختلف شاخص پاورلو در جریان کاملاً توسعه یافته

T_{max}	Nu	n
2.2724	5.6709	0.01
2.2333	5.5649	0.02
2.1891	5.4347	0.04
2.1408	5.2895	0.05
2.0403	4.9396	0.1
1.9371	4.4995	0.2
1.9083	4.3544	0.25
1.8404	3.9494	0.5
1.8026	3.6568	1

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این فصل خلاصه‌ای از نتایج حاصل شده از تحقیق حاضر ارائه می‌شود. هم‌چنین جهت ارتقای کیفیت مطالب و تعریف تکمیل مطالب کار حاضر، پیشنهاداتی نیز مطرح خواهد شد.

۱.۵ خلاصه و نتیجه‌گیری

همان‌طور که در فصل سوم مشاهده شد، حل‌های تحلیلی برای جریان‌های غیرنیوتنی پاورلو، $FENE-P$ و $LPTT$ ارائه شده است. با توجه به حل‌های تحلیلی به‌دست آمده برای جریان‌های غیرنیوتنی $FENE-P$ و $LPTT$ مشاهده شد که با افزایش عدد دبورا که کاهش ویسکوزیته سیال را در پی دارد، پروفیل سرعت هسته جریان (در نزدیکی مرکز لوله) دارای یک‌نواختی بیش‌تری می‌شود. در نتیجه گرادیان سرعت در مجاورت دیواره افزایش یافته که سبب بهبود انتقال حرارت در این ناحیه می‌شود. بنابراین اختلاف دمای جریان کاهش می‌یابد و عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد. نشان داده شد که در جریان $FENE-P$ با افزایش پارامتر قابلیت کشش سیال ویسکوالاستیک، L^2 ، تأثیر عدد دبورا کم‌تر می‌شود. درواقع با کاهش پارامتر L^2 اثر الاستیسیته جریان (عدد دبورا) تشدید می‌یابد. اما برای جریان $LPTT$ همان‌طور که ثابت شد پارامتر قابلیت کشش ϵ^2 برخلاف پارامتر L^2 در راستای عدد دبورا عمل می‌کند. در عدد برینکمن معین، با افزایش پارامتر ϵ^2 عدد ناسلت افزایش می‌یابد. در حالی که در جریان $FENE-P$ عکس حالت فوق رخ داد.

هم‌چنین با لحاظ کردن ترم اتلاف اصطکاکی در معادله انرژی، نتایج تحت‌الشعاع عدد برینکمن، Br ، قرار گرفت. مشاهده شد که با افزایش عدد برینکمن و در نتیجه با افزایش تولید حرارت به‌خصوص در مجاورت دیواره لوله، انتقال حرارت کاهش می‌یابد. در نتیجه عدد ناسلت نیز کاهش می‌یابد. نتایج حاکی از آن است که در اعداد برینکمن مثبت، با افزایش عدد برینکمن، عدد ناسلت کاهش می‌یابد. افزایش عدد دبورا، افزایش میزان الاستیسیته سیال، و نیز کاهش پارامتر قابلیت کشش در جریان $FENE-P$ در راستای افزایش عدد ناسلت عمل می‌کنند. اما در حالتی که عدد برینکمن منفی می‌باشد، با افزایش عدد برینکمن، عدد ناسلت افزایش می‌یابد.

۲.۵ پیشنهادها

به منظور ارتقای سطح کیفی تحقیق حاضر و انجام مطالعه‌ی جامع‌تر در راستای موضوع این پایان‌نامه، پیشنهادهایی به شرح زیر مطرح می‌گردد: a

- ارتقا تحقیق حاضر با تغییر هندسه حاکم به هندسه‌های پیچیده‌تر. به عنوان مثال درون میکروکانال‌ها، لوله‌های خمیده و ...

- حل آزمایشگاهی تحقیق حاضر و بررسی میزان دقت تحقیق حاضر

- حل عددی انتقال حرارت جریان غیرنیوتنی $FENE - P$ با روش‌های مرتبه دقت بالا و مقایسه نتایج حاصل شده با تحقیق حاضر

- حل عددی انتقال حرارت جریان غیرنیوتنی PTT با روش‌های مرتبه دقت بالا و مقایسه نتایج حاصل شده با تحقیق حاضر

مراجع

- [1] M. Reiner, Deformation and flow: HK Lewis and Company, 1949.
- [2] v. L. Graetz, Über die wärmeleitungsfähigkeit von flüssigkeiten, Annalen der Physik, Vol. 261, No. 7, pp. 337-357, 1885.
- [3] W. Nusselt, The dependence of the heat-transfer coefficient on tube length, Zeit. VDI, Vol. 54, pp. 1154-1158, 1910.
- [4] J. Sellars, M. Tribus, J. Klein, Heat transfer to laminar 110W in a round tube or flat conduit—the Graetz problem extended, Transactions of the ASME, Vol. 78, pp. 441-448, 1956.
- [5] R. Siegel, E. Sparrow, T. Hallman, Steady laminar heat transfer in a circular tube with prescribed wall heat flux, Applied Scientific Research, Section A, Vol. 7, No. 5, pp. 386-392, 1958.
- [6] A. Lévêque, Les Lois de la transmission de chaleur par convection, par André Lévêque: Dunod, 1928.
- [7] Y.-P. Shih, J.-D. Tsou, An International Journal of Research and Development Extended Leveque solutions for heat transfer to power law fluids in laminar flow in a pipe, The Chemical Engineering Journal, Vol. 15, No. 1, pp. 55-62, 1978/01/01, 1978.
- [8] R. B. Bird, Viscous heat effects in extrusion of molten plastics, Soc. Plastics Eng. J, Vol. 11, pp. 35, 1955.
- [9] R. Cotta, M. Özi, Laminar forced convection of power-law non-Newtonian fluids inside ducts, Wärme-und Stoffübertragung, Vol. 20, No. 3, pp. 211-218, 1986.
- [10] M. D. Mikhailov, M. N. Ozisik, Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion, 1984.
- [11] Z. Lian-Cun, Z. Xin-Xin, M. Lian-Xi, Fully developed convective heat transfer of power law fluids in a circular tube, Chinese Physics Letters, Vol. 25, No. 1, pp. 195, 2008.

- [12] F. P. Foraboschi, I. Di Federico, Heat transfer in laminar flow of non-Newtonian heat-generating fluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 7, No. 3, pp. 315-318, 1964.
- [13] S. M. Richardson, Extended leveque solutions for flows of power law fluids in pipes and channels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 22, No. 10, pp. 1417-1423, 1979/10/01, 1979.
- [14] K. K. Raju, S. Rathna, Heat transfer for the flow of a power-law fluid in a curved pipe, *Journal of the Indian Institute of Science*, Vol. 52, No. 1, pp. 34, 2013.
- [15] W. A. Khan, J. Culham, M. M. Yovanovich, Fluid flow and heat transfer in power-law fluids across circular cylinders: analytical study, *Journal of heat transfer*, Vol. 128, No. 9, pp. 870-878, 2006.
- [16] W. Suckow, P. Hrycak, R. Griskey, Heat transfer to polymer solutions and melts flowing between parallel plates, *Polymer Engineering and Science*, Vol. 11, No. 5, pp. 401-404, 1971.
- [17] W. N. Gill, Heat transfer in laminar power law flows with energy sources, *AIChE Journal*, Vol. 8, No. 1, pp. 137-138, 1962.
- [18] L. Hsiao-Tsung, S. Yen-Ping, Unsteady thermal entrance heat transfer of power-law fluids in pipes and plate slits, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 24, No. 9, pp. 1531-1539, 1981.
- [19] W. K. Gingrich, Y. I. Cho, W. Shyy, Effects of shear thinning on laminar heat transfer behavior in a rectangular duct, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 35, No. 11, pp. 2823-2836, 1992.
- [20] R. Chiba, M. Izumi, Y. Sugano, An analytical solution to non-axisymmetric heat transfer with viscous dissipation for non-Newtonian fluids in laminar forced flow, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 78, No. 1, pp. 61-74, 2008.
- [21] R. M. Ybarra, R. E. Eckert, Viscous heat generation in slit flow, *AIChE Journal*, Vol. 26, No. 5, pp. 751-762, 1980.
- [22] P. P. Valko, Solution of the Graetz–Brinkman problem with the Laplace transform Galerkin method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, No. 9, pp. 1874-1882, 2005.
- [23] C. E. Bassett, J. R. Welty, Non-Newtonian heat transfer in the thermal entrance region of uniformly heated, horizontal pipes, *Aiche Journal*, Vol. 21, No. 4, pp. 699-706, 1975.

- [24] R. Mahalingam, L. Tilton, J. Coulson, Heat transfer in laminar flow of non-Newtonian fluids, *Chemical Engineering Science*, Vol. 30, No. 8, pp. 921-929, 1975.
- [25] R. Shah, Laminar flow friction and forced convection heat transfer in ducts of arbitrary geometry, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 18, No. 7, pp. 849-862, 1975.
- [26] R. Shah, A. London, *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*, Academic Press, New York, 1978.
- [27] A. Bejan, *Convection heat transfer*, 1995.
- [28] W. Kays, M. Crawford, *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [29] P. J. Oliveira, F. T. Pinho, Analytical solution for fully developed channel and pipe flow of Phan-Thien–Tanner fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 387, pp. 271-280, 1999.
- [30] P. Oliveira, An exact solution for tube and slit flow of a FENE-P fluid, *Acta Mechanica*, Vol. 158, No. 3-4, pp. 157-167, 2002.
- [31] P. M. Coelho, F. T. Pinho, P. J. Oliveira, Thermal entry flow for a viscoelastic fluid: the Graetz problem for the PTT model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 20, pp. 3865-3880, 2003.
- [32] F. Pinho, P. Oliveira, Analysis of forced convection in pipes and channels with the simplified Phan-Thien–Tanner fluid, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 43, No. 13, pp. 2273-2287, 2000.
- [33] P. Coelho, F. Pinho, P. Oliveira, Fully developed forced convection of the Phan-Thien–Tanner fluid in ducts with a constant wall temperature, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 45, No. 7, pp. 1413-1423, 2002.
- [34] A. Filali, L. Khezzar, D. Siginer, Z. Nemouchi, Graetz problem with non-linear viscoelastic fluids in non-circular tubes, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 61, pp. 50-60, 2012.
- [35] R. Shah, A. London, Thermal boundary conditions and some solutions for laminar duct flow forced convection, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 96, No. 2, pp. 159-165, 1974.
- [36] M. Norouzi, Analytical solution for the convection of Phan-Thien-Tanner fluids in isothermal pipes, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 108, pp. 165-173, 10//, 2016.

- [37] P. Oliveira, P. Coelho, F. Pinho, The Graetz problem with viscous dissipation for FENE-P fluids, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, Vol. 121, No. 1, pp. 69-72, 2004.
- [38] A. Filali, L. Khezzar, Numerical simulation of the Graetz problem in ducts with viscoelastic FENE-P fluids, *Computers and Fluids*, Vol. 84, pp. 1-15, 2013.
- [39] L. Khezzar, A. Filali, M. AlShehhi, Flow and heat transfer of FENE-P fluids in ducts of various shapes: Effect of Newtonian solvent contribution, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 207, pp. 7-20, 2014.
- [40] F. Pinho, P. Coelho, Fully-developed heat transfer in annuli for viscoelastic fluids with viscous dissipation, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, Vol. 138, No. 1, pp. 7-21, 2006.
- [41] P. Coelho, F. Pinho, Fully-developed heat transfer in annuli with viscous dissipation, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 49, No. 19, pp. 3349-3359, 2006.
- [42] A. Jalali, M. Hulsen, M. Norouzi, M. Kayhani, Numerical simulation of 3D viscoelastic developing flow and heat transfer in a rectangular duct with a nonlinear constitutive equation, *Korea-Australia Rheology Journal*, Vol. 25, No. 2, pp. 95-105, 2013.
- [43] D. A. Siginer, M. F. Letelier, Laminar flow of non-linear viscoelastic fluids in straight tubes of arbitrary contour, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 55, No. 9, pp. 2731-2745, 2012.
- [44] D. A. Siginer, M. F. Letelier, Heat transfer in laminar flow of viscoelastic fluids in straight tubes of arbitrary shape, *Annu Trans Nord Rheol Soc*, Vol. 13, pp. 137-145, 2005.
- [45] M. Norouzi, M. Davoodi, O. A. Bég, A. Joneidi, Analysis of the effect of normal stress differences on heat transfer in creeping viscoelastic Dean flow, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 69, pp. 61-69, 2013.
- [46] M. Zhang, X. Shen, J. Ma, B. Zhang, Theoretical analysis of convective heat transfer of Oldroyd-B fluids in a curved pipe, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, No. 3, pp. 661-671, 2008.
- [47] X.-r. SHEN, M.-k. ZHANG, B.-z. ZHANG, Flow and heat transfer of Oldroyd-B fluids in a rotating curved pipe, *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, Vol. 20, No. 1, pp. 39-46, 2008.

- [48] M. Norouzi, M. Sedaghat, M. Shahmardan, An analytical solution for viscoelastic dean flow in curved pipes with elliptical cross section, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 204, pp. 62-71, 2014.
- [49] M. Norouzi, N. Biglari, An analytical solution for Dean flow in curved ducts with rectangular cross section, *Physics of Fluids (1994-present)*, Vol. 25, No. 5, pp. 053602, 2013.
- [50] C. F. Hsu, S. Patankar, Analysis of laminar non-Newtonian flow and heat transfer in curved tubes, *AIChE Journal*, Vol. 28, No. 4, pp. 610-616, 1982.
- [51] M. Norouzi, B. Z. Vamerzani, M. Davoodi, N. Biglari, M. M. Shahmardan, An exact analytical solution for creeping Dean flow of Bingham plastics through curved rectangular ducts, *Rheologica Acta*, Vol. 54, No. 5, pp. 391-402, 2015.
- [52] M. Norouzi, M. Davoodi, O. Anwar Bég, An analytical solution for convective heat transfer of viscoelastic flows in rotating curved pipes, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 90, pp. 90-111, 4//, 2015.
- [53] R. Bird, P. Dotson, N. Johnson, Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead—spring chain model, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 7, No. 2, pp. 213-235, 1980.
- [54] P. Townsend, K. Walters, Expansion flows on non-newtonian liquids, *Chemical Engineering Science*, Vol. 49, No. 5, pp. 748-763, 1994.
- [55] R. B. Bird, R. Armstrong, O. Hassager, Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics, 1987.
- [56] R. B. Bird, J. M. Wiest, Constitutive equations for polymeric liquids, *Annual review of fluid mechanics*, Vol. 27, No. 1, pp. 169-193, 1995.
- [57] R. B. Bird, Teaching with FENE dumbbells, *Rheol. Bull*, Vol. 76, No. 1, pp. 10-12, 2007.
- [58] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 2001.
- [59] M. Norouzi, M. Davoodi, Exact Analytical Solution on Convective Heat Transfer of Isothermal Pipes, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 29, No. 3, pp. 632-636, 2015.
- [60] S. C. Chapra, R. P. Canale, Numerical Methods for Engineers, 2011.

-
- [61] D. O. A. Cruz, F. T. Pinho, P. J. Oliveira, Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 132, No. 1-3, pp. 28-35, 2005.
- [62] R. P. Chhabra, J. F. Richardson, *Non-Newtonian flow and applied rheology: engineering applications*: Butterworth-Heinemann, 2011.
- [63] L. Quinzani, R. Armstrong, R. Brown, Use of coupled birefringence and LDV studies of flow through a planar contraction to test constitutive equations for concentrated polymer solutions, *Journal of Rheology* (1978-present), Vol. 39, No. 6, pp. 1201-1228, 1995.

Abstract

In the present study the heat convection of non-Newtonian fluids in the straight pipes is investigated analytically and by the Modal analysis. The non-Newtonian fluids are namely, time independent non-Newtonian Power-law fluid, Viscoelastic non-Newtonian fluids following LPTT and FENE-P models. In Power-law fluid by assumption of thermally developing flow, the temperature distribution is solved in the closed form solutions for two special values of Power-law indices. An analytical relation for Nusselt number versus longitudinal coordinate of pipe is derived. The comparison of the resulted local Nusselt numbers in this work with the previous results, reveals the good precise of this work. the temperature distribution of Viscoelastic fluids considered in this research, is derived by Frobenius series Method. By affecting of Viscous Dissipation term on Energy equation, the effects of dimensionless Brinkman number is discussed. It is revealed that by increasing of the level of elasticity of the fluid, dimensionless Debora number, the Nusselt number and so the heat transfer in the pipe are increased because of the enhancement of velocity gradient and shear rate in the wall region, and then reduction of fluid viscosity. It is shown that in the FENE-P Viscoelastic fluid, by increasing of extensibility parameter, L , the Nusselt number and so the heat transfer are decreased. But in the LPTT Viscoelastic fluids, by increasing of the corresponding extension parameter, the heat transfer and the Nusselt numbers are increased. As we know the Brinkman number is because of considering of viscous dissipation term in the pipe. In deed by considering the viscous dissipation term the dimensionless Brinkman number is resulted. The viscous dissipation term is defined as the tensor production of shear stress and velocity gradient. So the viscous dissipation term and Brinkman number have direct relation with velocity gradient. By increasing the positive Brinkman numbers, more heat is produced in the pipe. Since the velocity gradient at any cross section of the pipe, is maximum in the wall region, so the highest values of heat generation is there. The results reveal that by increasing of the Brinkman number, the Nusselt number and so the heat transfer are decreased.

keywords: Forced Convection, Viscoelastic Fluid, Isothermal Pipe, Brinkman Number, Modal Analysis.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mechanical Engineering

**Analytical Solution to Forced Convection
Heat Transfer of non-Newtonian Fluid Flow
Through Straight Pipes**

Seyed Zia Daghighi

Supervisor

Dr Norouzi

September 2016