

الله الرحمن الرحيم



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک
رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی
پایان نامه کارشناسی ارشد

محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترکی در محیط دوبعدی
مستطیلی در معرض تنش‌های گرمایی و رطوبتی با روش المان
محدود توسعه یافته

نگارنده: حمید رجائی

استاد راهنما:

دکتر محمدباقر نظری

شهریور ۱۳۹۵



مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم شماره ۷: صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای حمید رجائی به شماره ۹۲۰۶۵۷۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترکی در محیط دوبعدی مستطیلی در معرض تنش‌های گرمایی و رطوبتی با روش المان محدود توسعه یافته که در تاریخ ۹۵/۶/۱۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: <u>خوب</u> امتیاز: <u>۱۷/۴</u>)	☐ مردود	☐ دفاع مجدد
نوع تحقیق: نظری ☐ عملی ☐		

۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹)

۱- عالی (۱۹ - ۲۰)

۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

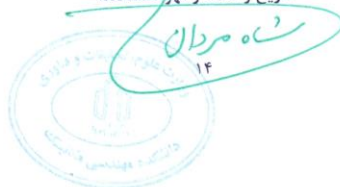
۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر محمدباقر نظری	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر مصطفی نظری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر محمد جعفری	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر مهدی قتاد	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمدمحسن شاه‌مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



سپاسگزاری

با تقدیر و تشکر از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر محمدباقر نظری که در کمال صعه صدر و با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این زمینه از بنده دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند.

تعهدنامه

اینجانب حمید رجائی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک، گرایش طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترکی در محیط دوبعدی ارتوتروپیک مستطیلی در معرض تنش‌های گرمایی و رطوبتی با روش المان محدود توسعه یافته تحت راهنمایی آقای دکتر محمدباقر نظری متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود است و مقالات مستخرج بانام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پژوهش، برای محاسبه ضرایب شدت تنش در محیط مستطیلی که در معرض تنش‌های گرمایی و رطوبتی قرار دارد از روش المان محدود توسعه‌یافته استفاده شده است. در معادلات حاکم هایگروترموالاستیسیته، کوپل دوطرفه میدان‌های دما و رطوبت و ضریب پخش رطوبتی تابع دما در نظر گرفته شده است. برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش، روش انتگرال برهم‌کنش برای بارهای گرمایی/رطوبتی توسعه داده شده است. در روش المان محدود توسعه‌یافته به منظور کاهش خطا، از المان‌های مستطیلی هشت گره‌ای ریزشونده، استفاده شده است. برای صحت‌سنجی نتایج عددی، ضریب شدت تنش برای ترک مود I، برای یک باریکه ایزوتروپیک با روش تابع وزنی نیز به دست آمده است. در حل تحلیلی، ابتدا معادلات هایگروترموالاستیسیته حاکم غیرکوپل شده‌اند و پس از بی‌بعد سازی، از روش جداسازی متغیرها برای حل آن‌ها استفاده شده است. بر اساس نتایج، در ابتدای اعمال بارهای گرمایی ضرایب شدت تنش تا یک مقدار حداکثری مثبت رشد کرده و به شکل ناگهانی تغییر علامت می‌دهند. این تغییر علامت برای بارگذاری‌های رطوبتی به تنهایی، مشاهده نخواهد شد. همچنین مقدار بیشینه ضریب شدت تنش، وابسته به زاویه ترک بوده و در مواد ارتوتروپیک به زاویه ناهمسانگردی نیز وابسته می‌باشد. ضریب شدت تنش مود I با افزایش زاویه ترک کاهش و ضریب شدت تنش مود II، افزایش خواهد یافت. کاهش تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به تغییر زاویه ناهمسانگردی برای مود I، یکنواخت نبوده و این تغییرات برای مود II، برحسب زاویه می‌تواند افزایش و یا کاهش داشته باشد.

واژگان کلیدی: روش المان محدود توسعه‌یافته، انتگرال برهم‌کنش، ضریب شدت تنش، تنش رطوبتی-گرمایی.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱- مطالعه یک محیط ایزوتروپیک شامل ترک در معرض تنش‌های گرمایی/رطوبتی با روش

المان محدود توسعه یافته، مجله علمی- پژوهشی مکانیک مدرس (ارسال شده).

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل ۱- کلیات	۱
۱-۱- مقدمه.....	۲
۲-۱- مروری بر تحقیقات انجام شده.....	۳
۳-۱- روش المان محدود توسعه یافته.....	۹
۴-۱- مدل سازی ترک در ماده ایزوتروپیک.....	۱۰
۵-۱- مدل سازی ترک در ماده ارتوتروپیک.....	۱۲
۶-۱- به دست آوردن ماتریس سفتی المان محدود توسعه یافته.....	۱۴
۷-۱- مجموعه بردارهای مرتبه ای.....	۱۶
۸-۱- ساختار پایان نامه.....	۱۷
فصل ۲- حل تحلیل باریکه ایزوتروپیک تحت بارگذاری رطوبتی- گرمایی	۱۹
۱-۲- مقدمه.....	۲۰
۲-۲- معادلات حاکم.....	۲۱
۳-۲- محاسبه دما و رطوبت.....	۲۴
۴-۲- محاسبه تنش.....	۲۷
۵-۲- محاسبه ضریب شدت تنش.....	۲۸
۶-۲- مثال عددی.....	۲۹
۱-۶-۲- باریکه دارای ترک لبه ای عمود تحت شوک گرمایی.....	۲۹
فصل ۳- حل عددی باریکه ایزوتروپیک تحت بارگذاری رطوبتی- حرارتی	۳۳
۱-۳- مقدمه.....	۳۴
۲-۳- گسسته سازی دستگاه معادلات کوپل.....	۳۵
۳-۳- انتگرال برهم کنش.....	۳۸
۱-۳-۱- نتایج عددی.....	۴۲
۱-۳-۱-۱- باریکه دارای ترک لبه ای عمود تحت شوک گرمایی.....	۴۲
۱-۳-۲- باریکه دارای ترک لبه ای مایل تحت شوک گرمایی.....	۴۸
فصل ۴- حل عددی باریکه ارتوتروپیک تحت بارگذاری رطوبتی- گرمایی	۵۳

۵۴.....	۱-۴ - مقدمه.....
۵۴.....	۲-۴ - معادلات حاکم.....
۵۵.....	۳-۴ - انتگرال برهمکنش.....
۵۶.....	۴-۴ - نتایج عددی.....
۵۶.....	۱-۴-۴ - باریکه دارای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری رطوبتی-گرمایی.....
۶۷.....	فصل ۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها.....
۶۸.....	۱-۵ - نتیجه‌گیری.....
۶۹.....	۲-۵ - پیشنهادها.....
۷۰.....	مراجع.....

فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه
شکل (۱-۱) مختصات عمودی و مماسی نوک ترک به همراه شبکه‌بندی دامنه.....	۱۰
شکل (۲-۱) غنی‌سازی گره‌ها در روش المان محدود توسعه‌یافته، مربع: غنی‌سازی با توابع نوک ترک. دایره: غنی‌سازی با تابع پله‌ای.....	۱۱
شکل (۳-۱) مختصات قطبی حوزه نوک ترک به همراه شبکه‌بندی ناحیه حل.....	۱۲
شکل (۴-۱) مختصات عمودی و مماسی به‌کاربرده شده در نوک ترک به همراه شبکه‌بندی دامنه.....	۱۷
شکل (۱-۲) مدل باریکه، با مرزهای داخلی شامل ترک، تحت بارگذاری گرمایی_ رطوبتی.....	۲۲
شکل (۲-۲) نمودار دمای بی‌بعد، در عرض یک باریکه ایزوتروپیک و تغییر دما در لبه سمت چپ.....	۳۰
شکل (۳-۲) نمودار رطوبت بی‌بعد، در عرض یک باریکه ایزوتروپیک و تغییر دما در لبه سمت چپ.....	۳۱
شکل (۴-۲) نمودار تنش، در عرض یک باریکه ایزوتروپیک و تغییر دما در لبه سمت چپ.....	۳۱
شکل (۵-۲) نمودار ضریب شدت تنش مود I، برحسب زمان بی‌بعد برای صفحه باریکه تحت بارگذاری رطوبتی/گرمایی.....	۳۲
شکل (۱-۳) تبدیل فرم کانتوری انتگرال I به فرم ناحیه‌ای.....	۳۹
شکل (۲-۳) شبکه المانی هشت گره‌ای به همراه ترک لبه‌ای و گره‌های غنی‌شده.....	۴۳
شکل (۳-۳) نمودار ضریب شدت تنش برحسب زمان و طول ترک $0.1 \times b$	۴۴
شکل (۴-۳) نمودار ضریب شدت تنش برحسب زمان و طول ترک $0.2 \times b$	۴۴
شکل (۵-۳) نمودار ضریب شدت تنش برحسب زمان و طول ترک $0.3 \times b$	۴۵
شکل (۶-۳) نمودار دمای بی‌بعد در عرض یک باریکه ایزوتروپیک.....	۴۵
شکل (۷-۳) نمودار رطوبت بی‌بعد در عرض یک باریکه ایزوتروپیک.....	۴۶
شکل (۸-۳) نمودار تنش در عرض یک باریکه ایزوتروپیک.....	۴۶
شکل (۹-۳) باریکه، با مرزهای داخلی شامل ترک زاویه ای، تحت بارگذاری گرمایی_ رطوبتی.....	۴۹
شکل (۱۰-۳) شبکه المانی هشت گره‌ای به همراه ترک لبه‌ای و گره‌های غنی‌شده.....	۵۰
شکل (۱۱-۳) نمودار ضریب شدت تنش مود I، برای زاویه‌های مختلف ترک، در یک باریکه ایزوتروپیک.....	۵۰
شکل (۱۲-۳) نمودار ضریب شدت تنش مود II برای زاویه‌های مختلف ترک، در یک باریکه ایزوتروپیک.....	۵۱
شکل (۱۳-۳) نمودار تغییرات ضریب پخش رطوبت برحسب دما.....	۵۱
شکل (۱-۴) باریکه ارتوتروپیک، با مرزهای داخلی به همراه ترک لبه‌ای و زاویه ناهمسانگردی صفردرجه، تحت بارگذاری گرمایی_ رطوبتی.....	۵۷
شکل (۲-۴) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش برحسب زمان، در یک باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفردرجه، برای حالت‌های افزایش و کاهش دما در لبه سمت چپ.....	۵۸

- شکل (۳-۴) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش برحسب زمان، در یک باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی
 صفر درجه، برای حالت‌های افزایش و کاهش رطوبت در لبه سمت چپ..... ۵۹
- شکل (۴-۴) رطوبت در عرض باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفر درجه، در زمان‌های مختلف و کاهش آن
 در لبه سمت چپ..... ۶۰
- شکل (۵-۴) دما در عرض باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفر درجه، در زمان‌های مختلف و کاهش آن در لبه
 سمت چپ..... ۶۰
- شکل (۶-۴) رطوبت در عرض باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفر درجه، در زمان‌های مختلف و افزایش آن در
 لبه سمت چپ..... ۶۱
- شکل (۷-۴) دما در عرض باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفر درجه، در زمان‌های مختلف و افزایش آن در
 لبه سمت چپ..... ۶۱
- شکل (۸-۴) باریکه ارتوتروپیک با مرزهای داخلی به همراه ترک لبه‌ای و زاویه ناهمسانگردی، تحت بارگذاری گرمایی
 رطوبتی..... ۶۳
- شکل (۹-۴) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش مود I، در یک باریکه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی و
 زاویه ترک صفر درجه..... ۶۳
- شکل (۱۰-۴) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش مود I، در یک باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفر درجه،
 برای زوایای مختلف ترک..... ۶۴
- شکل (۱۱-۴) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش مود II، در یک باریکه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ترک و زاویه
 ناهمسانگردی صفر درجه..... ۶۴
- شکل (۱۲-۴) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش مود II، در یک باریکه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی و
 زاویه ترک صفر درجه..... ۶۵

فهرست جدول‌ها

صفحه	عنوان
۲۳	جدول (۱-۲) شرایط اولیه و مرزی برای دما و رطوبت.....
۵۱	جدول (۱-۳) زمان و مقدار بیشینه ضریب شدت تنش برای زوایای مختلف.....
۵۷	جدول (۱-۴) شرایط اولیه و مرزی برای دما و رطوبت.....

فهرست علامتها

$H(x)$	تابع هویساید	T_i	دمای اولیه
$F_I(x)$	تابع غنی سازی نوک ترک	C_i	رطوبت اولیه
b_I	بردار مجهولات گره‌ای	t^*	زمان بی بعد
C_k^I	بردار مجهولات گره‌ای	$\mathfrak{D}$	ضریب هدایت حرارتی
$\bar{K}$	ماتریس سفتی کل	t	زمان
$\bar{U}$	بردار درجات آزادی حقیقی و مجازی	b	عرض باریکه
b	نیروی حجمی	J^s	انتگرال J
$\bar{t}$	نیروی سطحی	W	چگالی انرژی کرنشی
$\bar{F}^{ext}$	ماتریس نیروهای خارجی	M	انتگرال برهم کنش
F^m	ماتریس نیروهای مکانیکی	D	ضریب پخش رطوبتی
F^{th}	ماتریس نیروهای گرمایی	R	ثابت عمومی گازها
F^{mo}	ماتریس نیروهای رطوبتی	E_0	انرژی لازم برای نفوذ واحد جرم
f	شار رطوبت	u_i^{aux}	میدان جابه جایی کمکی
q	شار گرما	W^{int}	چگالی انرژی کنشی برهم کنش
D_m	ضریب نفوذ رطوبت	J	انتگرال J برای حالت اصلی
D_h	ضریب نفوذ گرما	J^{aux}	انتگرال J برای حالت کمکی
λ	ضریب کوپلینگ	$\hat{\theta}$	زاویه ترک
ν	ضریب کوپلینگ	θ	زاویه ناهمسانگردی
ρ	چگالی	ε	کرنش کل
c	ظرفیت گرمایی ویژه	ε^{th}	کرنش گرمایی
C	رطوبت	ε^{mo}	کرنش رطوبتی
T	دما	α	ضریب انبساط گرمایی
$\tilde{Q}$	تانسور الاستیک	β	ضریب انبساط رطوبتی
G	مدول برشی	E	مدول الاستیک
a	طول ترک	C^*	رطوبت بی بعد
$F(x, a)$	تابع وزنی	T^*	دمای بی بعد
ϑ	ضریب پواسون	σ_i^{aux}	میدان تنش کمکی
σ_{ij}	میدان تنش	K_I	ضریب شدت تنش مود I
μ_k	ریشه معادله مشخصه	K_{II}	ضریب شدت تنش مود II
u_i	میدان جابه جایی	S_{ij}	اعضای ماتریس نرمی

فصل اول

کلیات

از آنجایی که استحکام بر واحد وزن مواد مرکب معمولاً بیشتر از سایر مواد متعارف است، کاربردهای صنعتی و مهندسی این مواد در سال‌های اخیر گسترش یافته است. مواد مرکب معمولاً به صورت لایه‌های نازک ساخته می‌شوند. رایج‌ترین آسیب در این مواد که در شرایط مختلف رخ می‌دهد ایجاد ترک است. ترک‌ها بر اثر عواملی همچون وجود ضعف اولیه در مقاومت مواد تشکیل‌دهنده آن، ایجاد خستگی، رسیدن به تسلیم و یا وجود نقص در هنگام ساخت حاصل می‌شوند. وجود ترک در سازه‌ها باعث گسیختگی سازه‌ها در بارهای کمتر از مقدار مورد انتظار می‌شود. از ویژگی‌ها و مشکلات تحلیل ترک‌خوردگی این مواد ارتوتروپیک بودن آن‌ها است؛ که موجب می‌شود ویژگی‌های مادی آن در زوایای مختلف متفاوت باشد.

در تحلیل و طراحی اجسام دارای ترک، مکانیک شکست یکی از ابزارهای اساسی است، داشتن اطلاعاتی در مورد ترک اهمیت ویژه‌ای در ارزیابی ایمنی و عمر قطعات و سازه‌ها دارد. لذا بررسی و پیشگویی رفتار رشد ترک و شکست مواد ارتوتروپیک لازم و ضروری است. مطالعاتی در زمینه شکست مواد مرکب در طی دو دهه گذشته انجام شده است. در طی این مدت تغییرات فاکتورهای مختلف شامل نوع بارگذاری و مدل‌سازی ترک با روش‌های کلاسیک بررسی شده است.

خشک شدن یکی از مراحل تولید بسیاری از محصولات مانند محصولات غذایی، داروسازی، شیمیایی و سرامیک‌ها و مواد مرکب است. این فرایند معمولاً بر روی کیفیت محصولات تأثیر زیادی می‌گذارد. دمای بالا و زمان خشک شدن طولانی، به شدت باعث کاهش کیفی محصولات و بروز عیوبی همچون تغییر رنگ، تغییر شکل‌های دائمی، تخریب ساختار درونی و سخت شدن سطح، می‌شود. در طول فرایند خشک شدن گرادیان رطوبت و جابه‌جایی غیریکنواخت ماده، باعث ایجاد تنش‌های مکانیکی می‌شود. این تنش‌ها می‌توانند منجر به تغییر شکل‌های نامطلوب و یا ترک شود. زمانی که دما و رطوبت در یک سطح از ماده به صورت ناگهانی تغییر کند، تنش‌ها به علت گسترش نامتقارن دما

و رطوبت رشد می‌کنند. این امر در طی مراحل ساخت مواد مرکب نیز رخ می‌دهد. علاوه بر مراحل ساخت، با گسترش کاربرد مواد مرکب در شرایط مختلف محیطی، این مواد در بسیاری از کاربردها، علاوه بر نیروهای مکانیکی در معرض بارگذاری‌های رطوبتی و گرمایی نیز قرار می‌گیرند. به‌عنوان نمونه می‌توان به مواد مرکب مورد استفاده در ساختار زیر دریایی‌ها، کشتی‌ها و سازه‌های مورد استفاده در استخراج نفت اشاره کرد. این امر اهمیت آگاهی لازم در مورد رفتار این مواد در معرض تغییر رطوبت و دما را مشخص می‌کند.

۱-۲- مروری بر تحقیقات انجام شده

مدل کردن ناپیوستگی‌ها و به‌ویژه ترک همیشه از نظر طراحی با دیدگاه مکانیک شکست از اهمیت خاصی برخوردار است. مدل‌سازی پدیده‌های شکست و خرابی معمولاً با روش عددی المان محدود انجام می‌شود؛ که در دهه هشتاد میلادی در این زمینه به کار گرفته شده است. بهبود درخور توجهی که در مدل‌سازی ترک به وجود آمد، به‌کارگیری نحوه غنی‌سازی موجود در روش پیکربندی واحد درزمینه ناپیوستگی‌ها می‌باشد؛ که تحت عنوان روش المان محدود توسعه یافته بدان اشاره شده است. از پیشگامان این حوزه می‌توان از بلیچکو و همکارانش نام برد [۱].

در حالت کلی روش‌های رشد ترک به دو گروه کلی تقسیم می‌شوند؛ در گروه اول که گروه نمایش هندسی نامیده می‌شود، ترک به‌صورت هندسی در نظر گرفته می‌شود، بدین ترتیب هندسه و شبکه‌بندی مدل در حین رشد ترک تغییر می‌کند. در گروه دوم که گروه نمایش غیر هندسی است؛ هندسه ترک در حین مدل‌سازی و تولید شبکه المانی ناحیه حل به‌صورت مستقیم وارد نمی‌شود؛ این تأثیر می‌تواند در روابط ساختاری تنش_کرنش و یا در روابط سینماتیک کرنش_تغییر مکان لحاظ شود. یکی از روش‌هایی که با تأثیر در روابط سینماتیک حضور ترک را در نظر می‌گیرد، روش المان محدود توسعه یافته است. در روش المان محدود توسعه یافته ترک با افزودن درجه آزادی به گره‌های اطراف آن مدل می‌شود. بلیچکو و بلک برای اولین بار از روش المان محدود توسعه یافته در مسائل

مکانیک شکست استفاده کردند [۱]. با استفاده از این روش مدل سازی رشد ترک می تواند بدون شبکه بندی مجدد صورت بگیرد. در این روش یکسری توابع خاص در قالب پیکربندی واحد، به تقریب المان محدود اضافه می شود. برای مدل سازی سطح ترک از تابع تعمیم یافته هویساید و همچنین توابع دوبعدی برای رصد تکینی تنش در نوک ترک و تغییر مکان های حوزه نوک ترک استفاده می شود. در نتیجه، برای یک مش المان محدود مشخص مکان ترک دلخواه و گسترش آن در حالات شبه استاتیکی و دینامیکی بدون نیاز به تغییر مش قابل اجرا می باشد. دالبو و بلیچکو، روشی بر پایه المان محدود که نیاز به مش بندی مجدد نداشت را بر اساس مفهوم پیوستگی معرفی کردند [۲].

دالبو، جزئیات مربوط به تعیین گره های اطراف ترک و غنی سازی آن ها را بیان کرد و روابط پایه جهت اضافه کردن تابع پله ای واحد و تکین را برای مدل های ساده با المان های چهار گره ای ارائه نمود [۳]. اساس غنی سازی از ادغام مجموعه ای توابع شکل گره ای با مجموعه ای از حاصل ضرب توابع شکل گره ها و توابع غنی سازی شکل گرفته است. ناپیوستگی در توابع غنی سازی با هندسه مشخص شده هماهنگ بوده و یک میدان ناپیوسته به طور مستقل از مش المان محدود نشان داده شده است. سوکومار و بلیچکو، ترک های چند شاخه و سوراخ ها را، با روش المان محدود توسعه یافته بررسی کردند [۴]. از ویژگی های روش المان محدود توسعه یافته این است که چون معادلات پایه آن بر اساس روش المان محدود استاندارد استوار است، لذا تمام خواص آن را به همراه خواهد داشت. همچنین امکان استفاده از المان های نسبتاً درشت تر در اطراف نوک ترک نیز میسر می باشد. در این روش برای مدل کردن ترک درون یک المان پیوسته (به صورت مستقل از مش)، با استفاده از مفهوم تفکیک پیوستگی شرایط مرزی ترک را به گره ها منتقل نمودند. با این کار درجات آزادی گره های اطراف ترک به صورت مجازی افزایش می یابد؛ که این کار غنی سازی گره ای نامیده می شود.

دالبو و همکارانش با استفاده از توابع غنی ساز مناسب از طریق روابط انرژی و انتگرال J پارامترهای نوک ترک را به دست آوردند [۵]. برای اولین بار کاربرد روش المان محدود توسعه یافته در مدل کردن ترک های سه بعدی توسط سوکومار و همکارانش ارائه شد [۶].

در بررسی ترک‌های دوبعدی ارائه معیار تشخیص و انتخاب گره‌هایی که باید غنی‌سازی برایشان انجام شود، کار دشواری بوده است. این مشکل در مدل‌های سه‌بعدی بیشتر نمود پیدا کرده است. از این رو روشی به نام روش بردارهای مرتبه‌ای توسط استلارسکا و همکارانش در حالت دوبعدی به کار برده شد [۷]. آن‌ها یک الگوریتم کارآمد ارائه کردند. روش مجموعه بردارهای مرتبه‌ای برای نشان دادن موقعیت ترک، از جمله نوک ترک استفاده می‌شود. علاوه بر این، الگوریتم مجموعه بردارهای مرتبه‌ای برای مدل‌سازی رشد ترک در سه بعد شرح داده شده است. سوکومار و همکارانش روش مدل‌سازی حفره‌ها و روابط المان محدود بدون مش زدن مرزهای داخلی را ارائه کردند [۸]. آن‌ها روش بردارهای مرتبه‌ای را برای نشان دادن محل سوراخ‌ها و واسط‌های المان‌ها مورد استفاده قرار دادند و از نمونه‌های عددی در الاستوالاستیک خطی دوبعدی برای نشان دادن دقت روش جدید استفاده کردند. توسعه توابع جدید غنی‌سازی برای تجزیه و تحلیل المان محدود توسعه یافته، در مواد ارتوتروپیک، توسط اسد پور و همکاران گزارش شده است [۹-۱۱]. آن‌ها یک مجموعه یکپارچه از توابع غنی‌سازی برای المان‌های اطراف نوک ترک ارائه نمودند و با استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش ضرایب شدت تنش را در مواد ارتوتروپیک به دست آوردند. منویلارد و بلیچکو در سال ۲۰۱۰، شکست دینامیکی را برای مواد ایزوتروپیک با روش غنی‌سازی المان محدود توسعه یافته بررسی نمودند [۱۲]. معتمدی و محمدی با استفاده از همان توابع غنی‌سازی مواد ارتوتروپیک، به بررسی پایداری ترک دینامیک و انتشار آن در مواد مرکب پرداخته‌اند [۱۳]. معتمدی و محمدی در سال ۲۰۱۰ شبیه‌سازی تجزیه و تحلیل دینامیکی ترک ثابت در مواد ارتوتروپیک، با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته را بررسی نمودند [۱۴].

مسئله شکست ترموالاستیک به خوبی توسط روش‌های عددی المان محدود کلاسیک و المان مرزی مورد مطالعه قرار گرفته است. شی و همکاران [۱۵]، ویلسون و یو [۱۶]، با استفاده از انتگرال J در مدل کردن مسائل گرمایی از روش المان محدود کلاسیک استفاده کردند. پراساد و همکاران [۱۷]، راوندرا و بانرجی [۱۸]، با استفاده از روش المان مرزی برای مسائل شکست گرمایی راه‌حل‌هایی ارائه کردند.

پراساد و همکاران [۱۹]، دل اربا و همکاران [۲۰]، شکست ترموالاستیک گذرا و سه‌بعدی را با استفاده از روش المان مرزی بررسی کردند. نودا و همکاران [۲۱-۲۳]، با استفاده از روش المان محدود برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش ترک تحت بارگذاری گرمای تحقیقاتی انجام دادند. آن‌ها مواد تابعی و همگن را بررسی کردند. حسینی تهرانی و همکاران با استفاده از روش المان مرزی تأثیر کوپلینگ و اینرسی در مسائل با بارگذاری دینامیکی گرمایی را مورد مطالعه قرار دادند [۲۴ و ۲۵]، کیم و کی‌سی [۲۶]، یک انتگرال برهم‌کنش برای مطالعه شکست گرمایی در مواد مرکب تابعی ارائه کردند. دافلوت با روش المان محدود توسعه‌یافته شکست ترموالاستیک غیرکوپل و استاتیکی در صفحه را بررسی کرد [۲۷]. زمانی و اسلامی ضرایب شدت تنش در یک باریکه مواد مرکب تابعی ترک‌دار تحت اثر شوک گرمایی را با استفاده از روش المان محدود بررسی کردند [۲۸]. همچنین اسلامی و زمانی پیاده‌سازی روش المان محدود توسعه‌یافته برای شروع شکست ترموالاستیک دینامیکی را در مواد ایزوتروپیک مورد ارزیابی قرار دادند [۲۹]. شریعتی و مهدی زاده رفتار شکست مواد تابعی تحت شوک‌های گرمایی/ مکانیکی را مورد مطالعه قرار دادند [۳۰]. آن‌ها برای این منظور از معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک کوپل استفاده کردند.

در تمام مطالعات ذکر شده تنها مسئله گرما و بارگذاری مکانیکی در نظر گرفته شده است؛ در صورتی که در برخی مواد مثل مواد مرکب زمینه پلیمری، تنش‌های رطوبت‌سکوپیکی ممکن است موجب ترک خوردگی، خستگی، یا لایه‌لایه شدن قطعه شوند. با توسعه روزافزون استفاده از صفحات مواد مرکب در شرایط مختلف رطوبتی-گرمایی، علاقه بسیاری از محققان به سمت این موضوع جلب شده است. پرهی و همکاران روشی بر پایه المان محدود برای آنالیز ارتعاشات آزاد و پاسخ گذرای صفحه‌ای از مواد مرکب در معرض تغییر دما یا رطوبت ارائه دادند [۳۱]. شن تأثیر محیط رطوبتی-گرمایی را بر رفتار پس‌کمانش صفحات چندلایه بررسی کرد [۳۲]. پاتل و همکاران به مطالعه پاسخ استاتیکی و دینامیکی صفحه‌ای چندلایه در محیط رطوبتی-گرمایی بر مبنای تئوری تنش برشی مرتبه سه پرداخته‌اند [۳۳]. راثو و سین‌ها تأثیر رطوبت و دما را بر فرکانس طبیعی و پاسخ گذرای

مواد مرکب بر اساس مدل میکرومکانیک را بررسی کردند [۳۴]. بهرامی و نوزیر تنش‌های رطوبتی- گرمایی بین لایه‌ای را مطالعه کردند [۳۵]. بن‌خدا و همکاران، یک روش تحلیلی برای محاسبه تنش‌های رطوبتی-گرمایی در مواد مرکب چندلایه پیشنهاد کردند [۳۶]. ایشان اثر تغییر خواص مکانیکی به دلیل تغییر دما و رطوبت را در نظر گرفتند. بریشتو به تحلیل هایگروترموالاستیک مواد مرکب چندلایه و پوسته‌های ساندویچی پرداخت [۳۷]. اخیراً توپال و دگ اثرات رطوبت‌سکوپیک بر رفتار ترک در مواد مرکب هدفمند را مطالعه کرده‌اند [۳۸]. در این تحقیق از کوپل میدان‌های دما و رطوبت صرف‌نظر و میدان‌های دما و رطوبت پایا در نظر گرفته شده است.

اگرچه اخیراً تحقیقات نظری و تجربی به اثرات رطوبت و دما بر رفتار ماده توجه کرده‌اند؛ اما اکثر نتایج به‌دست‌آمده بر این فرض استوار است که انتشار رطوبت و دما به‌طور مستقل عمل می‌کنند [۳۹ و ۴۰]. وجود اثر متقابل بین گرما و رطوبت در مواد جامد سال‌هاست که شناخته شده است. این برهم- کنش داخلی تأثیر قابل‌توجهی در توزیع گذاری رطوبت و دما در برخی از مواد مرکب دارد که در آن‌ها اختلاف بین ضریب پخش گرمایی و ضریب پخش رطوبتی زیاد نیست. جذب رطوبت زیاد به همراه بارگذاری شدید گرمایی، تنش‌های رطوبتی-گرمایی را به طرز قابل‌توجهی افزایش می‌دهد. علاوه بر این، باعث تغییر در خصوصیات مکانیکی مواد می‌شود. این دو عامل اهمیت در نظر گرفتن این تأثیرات در طراحی و ساخت تجهیزات از مواد هاگروسکوپیک را نشان می‌دهد [۴۱]. البته تئوری‌های زیادی به‌منظور برهم‌کنش بین دما و رطوبت وجود دارد. اما عملاً از آن‌ها استفاده‌ای در کاربردهای عملی نشده است. مهم‌ترین علت آن پیچیدگی‌های موجود برای به دست آوردن ثابت‌های لازم و بخصوص ضرایب کوپلینگ است [۴۲]. اسپرینگر با تحقیق بر روی اثرات محیطی شامل دما و رطوبت یکسری داده‌های تجربی را به دست آورد [۴۳]. شیرل، برهم‌کنش بین رطوبت و دما را به‌صورت تجربی بر روی مواد مرکب مطالعه کرده و یکسری ثابت‌های مناسب برای لحاظ کردن این اثر به دست آورده است [۴۴]. هارت‌رانف و سی [۴۵] و همچنین، سی و شی و چاو [۴۶]، مسئله توزیع رطوبت و دما در راستای ضخامت یک صفحه ضخیم از مواد مرکب با فرض کوپل بین دما و رطوبت را حل کردند. یانگ

و همکاران به روش لاپلاس-تفاضل محدود، اثر کوپلینگ دما و رطوبت بر تنش‌های گذرای رطوبتی- گرمایی، در یک سیلندر حلقوی بلند را به دست آوردند [۴۷]، ماهاتو و مایتی رفتار ورق‌های کامپوزیت هوشمند را در یک محیط رطوبتی-گرمایی بررسی کردند [۴۸]. خلیلی و حیدری به بررسی تأثیر ضخامت بر امکان وقوع ترک، حین خشک شدن پرداخته‌اند [۴۹]. سی و شی، دما و رطوبت یک‌بعدی و تنش‌های ناشی از آن را در یک صفحه بی‌نهایت در معرض تغییر ناگهانی دما و رطوبت در سطح را به دست آوردند [۵۰]. سی و اوگاو، میدان هایگروالاستیک دوبعدی را در یک نیم فضا که در معرض تغییر دمای ناگهانی قرار گرفته را بررسی کرده‌اند [۵۱]. چانگ و همکاران با استفاده از رهیافت دی کوپلینگ یک روش تحلیلی به‌منظور محاسبه تنش‌های رطوبتی-گرمایی در یک سیلندر حلقوی بلند دولایه در معرض تغییر دما و رطوبت متقارن محوری پرداختند [۵۲]. ساگانو و چان من، دما و رطوبت و تنش‌های در یک سیلندر حلقوی بلند در معرض دما و رطوبت غیرمتقارن محوری را به دست آوردند [۵۳]. دگ و همکاران با استفاده از انتگرال‌های J_K به محاسبه ضرایب شدت تنش با در نظر گرفتن شرایط پایدار برای رطوبت و گرما و معادلات غیر کوپل در یک محیط ارتوتروپیک و مواد مرکب هدفمند، پرداختند [۵۴ و ۵۵].

موضوع پایان‌نامه، بررسی رفتار ترک در مواد ایزوتروپیک و اورتوتروپیک تحت بارگذاری‌های رطوبتی و گرمایی با فرض کوپل بین گرما و رطوبت است. در این پایان‌نامه، با کاربرد روش المان محدود توسعه‌یافته به بررسی رفتار ترک پرداخته‌شده است. انتگرال برهمکنش برای به دست آوردن ضریب شدت تنش برای تئوری هایگروترموالاستیسیته توسعه داده‌شده است. توزیع گذرای رطوبت و گرما با استفاده از روش کرانک نیکلسون حاصل شده است. کلیه مراحل حل مسئله از جمله المان بندی و حل معادلات مربوطه و استخراج نتایج به کمک نرم‌افزار MATLAB انجام شده است. به‌منظور صحت‌سنجی نتایج، ضریب شدت تنش برای ترک عمود بر لبه صفحه (مود I) با نتایج روش تحلیلی تابع وزنی مقایسه شده است. ابتدا یک حل تحلیلی برای دما، رطوبت و تنش، با استفاده از دی کوپل

کردن معادله حاکم و کاربرد روش جداسازی متغیرها به دست آمده است. سپس، ضریب شدت تنش با استفاده از تابع وزنی به دست آمده است.

۱-۳- روش المان محدود توسعه یافته

روش المان محدود توسعه یافته بر پایه المان محدود استاندارد شکل گرفته است. علی رغم مزایای روش المان محدود در حل طیف وسیعی از مسائل مهندسی، استفاده از این روش در حل مسائل شامل ناپیوستگی مثل مسائل مکانیک شکست با موانعی روبرو است. لزوم انطباق المان ها بر سطح ترک (به عنوان یک نوع ناپیوستگی) و در نتیجه ایجاد شبکه بندی مجدد حین رشد ترک، حل عددی این مسائل را مشکل خواهد ساخت. علاوه بر این، توصیف گرادیان شدید تنش در حوزه نوک ترک، به درستی در المان محدود کلاسیک توصیف نمی شود. در روش المان محدود توسعه یافته، ترک از هندسه مسأله حذف شده و ناحیه حل مستقل از وجود ترک شبکه بندی و ناپیوستگی میدان جابه جایی در سطح ترک و گرادیان میدان جابه جایی حوزه نوک ترک، به صورت محلی به تابع تقریب روش المان محدود اضافه می شود.

در المان محدود استاندارد به هر گره از المان تابع شکلی نسبت داده می شود که ترکیب خطی حاصل ضرب جابه جایی های گره ای و تابع شکل المان، جابه جایی هر نقطه داخل المان را مشخص می کند. در المان محدود توسعه یافته از همان تابع شکل المان محدود استاندارد برای توصیف رفتار المان استفاده می شود، غنی سازی گره های دامنه با توجه به مفهوم تفکیک پیوستگی [۵۶]، انجام می شود؛ به این معنا که با نسبت دادن یکسری گره مجازی با تابع شکل خاص، درجات آزادی که به واسطه ناپیوستگی ها درون المان به وجود می آیند، به گره های المان نسبت داده می شوند.

برای تعیین نوع تابع برای غنی سازی، دو نوع رفتار متفاوت برای المان ها در نظر گرفته می شود. المان های نوع اول المان هایی هستند که ترک از آن ها عبور می کند و المان های نوع دوم المان هایی هستند که نوک ترک داخل آن ها قرار گرفته است. در مورد اول غنی سازی به وسیله تابع تعمیم یافته

هویساید و در مورد دوم غنی‌سازی به‌وسیله تابع تکین انجام خواهد شد. در غنی‌سازی به‌وسیله تابع هویساید، یک محور محلی در نوک ترک و در امتداد ترک (t) و محور دیگر عمود بر آن به شکل راست‌گرد (s)، انتخاب می‌شود (شکل (۱-۱)). به هر گره‌ای که مختصات s آن در این دستگاه مثبت باشد مقدار +۱ و هر گره‌ای که مختصات s آن در این دستگاه منفی باشد مقدار -۱ نسبت داده می‌شود.

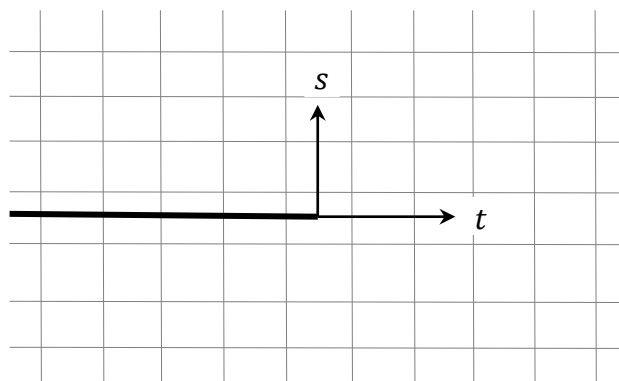
$$H = \begin{cases} +1, & s > 0 \\ -1, & s < 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

به‌منظور غنی‌سازی نوک ترک به دلیل رفتار متفاوت مواد ایزوتروپیک و ارتوتروپیک در حوزه نوک ترک، تابع غنی‌سازی متفاوتی برای هریک از این مواد در نظر گرفته می‌شود.

۴-۱- مدل‌سازی ترک در ماده ایزوتروپیک

یک جسم حاوی ترک دلخواه مطابق شکل (۲-۱) در نظر گرفته شده است. تابع تقریب المان محدود مطابق رابطه (۲-۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$u^h(x) = \sum_n N_n(x) u_n + \sum_I N_I(x) H(x) b_I + \sum_{k \in J} N_k(x) \left(\sum_{l=1}^4 C_k^l F_l(x) \right) \quad (2-1)$$



شکل (۱-۱) مختصات عمودی و مماسی نوک ترک به همراه شبکه‌بندی دامنه

در این رابطه I مربوط به گره‌های سطح ترک (در شکل (۲-۱) با دایره نشان داده شده است) و مجموعه گره‌های مربوط به نوک ترک (در شکل (۲-۱) با مربع نشان داده شده است) می‌باشد. توابع $F_I(x)$ توابع غنی‌سازی حوزه نوک ترک هستند؛ که به منظور رصد مناسب تکنیکی میدان تنش در این ناحیه اضافه شده‌اند. $H(x)$ تابع تعمیم‌یافته پله بوده و b_I و C_k^I بردارهای مجهولات گره‌ای هستند. به منظور افزایش دقت نتایج به دست آمده عبارات دیگری با توجه به میدان‌های جابه‌جایی اطراف نوک ترک و همچنین ضرایب شدت تنش در نوک ترک به این عبارت اضافه می‌شوند.

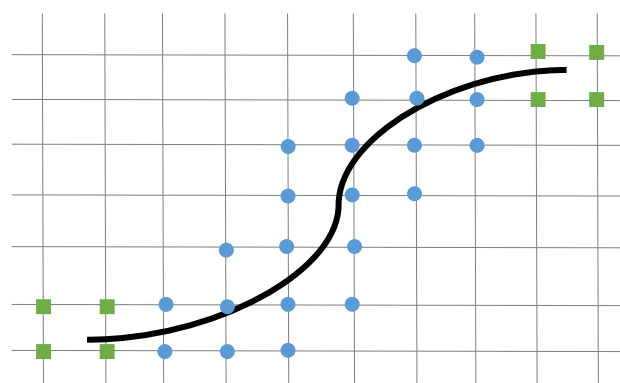
برای مواد ایزوتروپیک میدان‌های جابه‌جایی به شکل رابطه (۳-۱)، به دست می‌آید [۱].

$$u(x, y) = \frac{K_I}{2\vartheta} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{2\vartheta} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (۳-۱-الف)$$

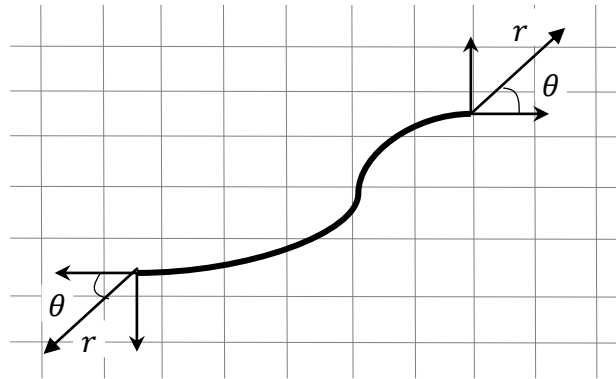
$$v(x, y) = \frac{K_I}{2\varpi} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{2\varpi} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (۳-۱-ب)$$

که (r, θ) دستگاه مختصات قطبی متصل به نوک ترک می‌باشد (شکل (۳-۱)). در این روابط K_I

و K_{II} ، ضرایب شدت تنش و ϖ و k به صورت روابط (۴-۱) تا (۶-۱)، تعریف می‌شوند.



شکل (۲-۱) غنی‌سازی گره‌ها در روش المان محدود توسعه یافته، مربع: غنی‌سازی با توابع نوک ترک. دایره: غنی‌سازی با تابع پله‌ای



شکل ۳-۱ مختصات قطبی حوزه نوک ترک به همراه شبکه‌بندی ناحیه حل

$$\varpi = \frac{E}{2(1 + \vartheta)} \quad (۴-۱)$$

$$k = 3 - 4\vartheta \quad \text{تنش صفحه‌ای} \quad (۵-۱)$$

$$k = \frac{3 - \vartheta}{1 + \vartheta} \quad \text{کرنش صفحه‌ای} \quad (۶-۱)$$

توابع غنی‌سازی نوک ترک به گونه در نظر گرفته می‌شود که میدان جابه‌جایی را پوشش دهند. این

توابع در مرجع [۱]، به صورت زیر پیشنهاد شده است.

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (۷-۱)$$

۵-۱ مدل‌سازی ترک در ماده ارتوتروپیک

میدان‌های جابه‌جایی و تنش در حوزه نوک ترک برای مواد ارتوتروپیک مطابق با رابطه (۸-۱) و

(۹-۱)، در نظر گرفته می‌شوند [۱۱]. در این روابط K_I و K_{II} ، ضرایب شدت تنش مود I و II، خواهند

بود.

$$\sigma_{ij} = K_I (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^I(\theta, \mu_1, \mu_2) + K_{II} (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) \quad (۸-۱)$$

$$u_i = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^I(\theta, \mu_1, \mu_2) + K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) \quad (۹-۱)$$

توابع $f_{ij}(\theta, \mu_1, \mu_2)$ و $g_i(\theta, \mu_1, \mu_2)$ به صورت روابط (۱۰-۱) تا (۱۹-۱)، بیان می‌گردند.

$$f_{11}^I(\theta) = \text{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (۱۰-۱)$$

$$f_{11}^{II}(\theta) = Re \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} \right\} \right] \quad (11-1)$$

$$f_{22}^I(\theta) = Re \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} \right\} \right] \quad (12-1)$$

$$f_{22}^{II}(\theta) = Re \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} \right\} \right] \quad (13-1)$$

$$f_{12}^I(\theta) = Re \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}} \right\} \right] \quad (14-1)$$

$$f_{12}^{II}(\theta) = Re \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}} \right\} \right] \quad (15-1)$$

$$g_1^I(\theta) = Re \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \{ \mu_1 p_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - \mu_2 p_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta} \} \right] \quad (16-1)$$

$$g_2^I(\theta) = Re \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \{ \mu_1 q_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - \mu_2 q_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta} \} \right] \quad (17-1)$$

$$g_1^{II}(\theta) = Re \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \{ p_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - p_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta} \} \right] \quad (18-1)$$

$$g_2^{II}(\theta) = Re \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \{ q_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - q_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta} \} \right] \quad (19-1)$$

در این روابط مقادیر p_k و q_k به صورت زیر تعریف می شوند.

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \quad k = 1,2 \quad (20-1)$$

$$q_k = a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} \quad k = 1,2 \quad (21-1)$$

در روابط فوق μ_k ریشه های معادله مشخصه زیر است.

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} \quad (22-1)$$

در این رابطه a_{ij} اعضای ماتریس نرمی کاهش یافته بوده که بر اساس اعضای ماتریس نرمی S_{ij}

به صورت زیر تعریف می شوند.

$$a_{ij} = S_{ij} \quad i, j = 1,2,6 \quad \text{تنش صفحه‌ای} \quad (23-1)$$

$$a_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}} \quad i, j = 1,2,6 \quad \text{کرنش صفحه‌ای} \quad (24-1)$$

معادله مشخصه، چهار ریشه به شکل رابطه (۲۵-۱)، خواهد داشت.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_{1x} + i\mu_{1y} & \mu_2 &= \mu_{2x} + i\mu_{2y} \\ \mu_3 &= \mu_{1x} - i\mu_{1y} & \mu_4 &= \mu_{2x} - i\mu_{2y} \end{aligned} \quad (25-1)$$

توابع غنی سازی نوک ترک، به گونه ای در نظر گرفته می شود؛ که این میدان ها جابه جایی فوق را پوشش دهد. این توابع در مرجع [۹]، به صورت زیر پیشنهاد شده است.

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_2(\theta)} \right\} \quad (26-1)$$

که در آن $g_i(\theta)$ و θ_i به صورت روابط زیر تعریف شده اند.

$$g_k(\theta) = \sqrt{(\cos \theta + \mu_{kx} \sin \theta)^2 + (\mu_{ky} \sin \theta)^2} \quad k = 1, 2 \quad (27-1)$$

$$\theta_k = \arctg \left(\frac{\mu_{ky} \sin \theta}{\cos \theta + \mu_{kx} \sin \theta} \right) \quad k = 1, 2 \quad (28-1)$$

۱-۶- به دست آوردن ماتریس سفتی المان محدود توسعه یافته

در نظر گرفتن تابع تقریب به شکل رابطه (۲۷-۱)، باعث تغییر در نمایش روابط سینماتیک کرنش- تغییر مکان، نسبت به المان محدود استاندارد خواهد شد. ماتریس سفتی در المان محدود استاندارد به شکل $K = \int_{V(e)} B^T D B dV$ است. و معادله گسسته حاکم بر هر المان به شکل $KU = F$ بیان می- شود. در المان محدود توسعه یافته ماتریس های B ، U و F تحت تأثیر نوع گره های المان قرار خواهند گرفت. سه حالت مختلف برای این ماتریس ها در نظر گرفته می شود. در حالت اول، چنانچه المان شامل هیچ گره مجازی نباشد، این ماتریس ها همانند المان محدود استاندارد به شکل زیر در نظر گرفته می شوند.

$$B = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (29-1)$$

در این حالت اندیس i نشان دهنده گره های حقیقی المان است. در حالت دوم، چنانچه گره ای از المان مربوطه به وسیله تابع هویساید غنی شده باشد، ماتریس های B و U به شکل زیر تحت تأثیر قرار خواهند گرفت.

$$B = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & (N_j H(x_j))_{,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & (N_j H(x_j))_{,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & (N_j H(x_j))_{,y} & (N_j H(x_j))_{,x} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (30-1)$$

در این حالت اندیس j نشان‌دهنده گره‌هایی می‌باشد که با تابع هویساید غنی‌شده‌اند. در حالت سوم، چنانچه گره‌ای از المان مربوطه به‌وسیله تابع تکین، غنی شده باشد، ماتریس‌های B و U به شکل رابطه (۳۱-۱)، تحت تأثیر قرار خواهند گرفت.

$$B = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & (N_k F_k^l(x_k))_{,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & (N_k F_k^l(x_k))_{,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & (N_k F_k^l(x_k))_{,y} & (N_k F_k^l(x_k))_{,x} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (31-1)$$

در این روابط، هنگام جایگذاری عناصر، ابتدا عناصر با اندیس i قرار خواهند گرفت. هر گره مجازی دو درجه آزادی به سیستم اضافه خواهد کرد. این امر باعث اضافه شدن دو سطر به ماتریس U و دو ستون به ماتریس B می‌شود. در غنی‌سازی به‌وسیله تابع هویساید، به ازای هر گره، یک گره مجازی و در غنی‌سازی به‌وسیله توابع تکین به ازای هر گره، به تعداد توابع غنی‌سازی، گره مجازی به سیستم افزوده می‌شود؛ بنابراین برای چهار تابع غنی‌سازی نوک ترک، ابعاد ماتریس B در المان محدود توسعه‌یافته، بین 3×8 تا 3×40 متغیر خواهد بود و تحت تأثیر آن ماتریس سفتی هر المان ابعادی بین 8×8 تا 40×40 خواهد داشت. به همین ترتیب ماتریس درجات آزادی بین هشت تا چهل عضو برای هر المان می‌تواند داشته باشد.

از جمع ماتریس سفتی هریک از المان‌ها داخل صفحه حاوی ترک، می‌توان ماتریس سفتی کل را به شکل رابطه (۳۲-۱) به دست آورد.

$$\bar{K} = \sum K_e \quad (32-1)$$

درنهایت با در نظر گرفتن تقریب المان محدود و گسسته سازی معادله حاکم، رابطه ماتریسی زیر به دست می‌آید.

$$\bar{K} \bar{U} = \bar{F}^{ext} \quad (33-1)$$

در این رابطه $\bar{K}$ ماتریس سفتی کل مدل و $\bar{U}$ بردار درجات آزادی حقیقی و مجازی بوده که به شکل متوالی برای هر گره قرار گرفته است. F^{ext} ماتریس نیروهای خارجی شامل نیروهای مکانیکی، گرمایی و رطوبتی است.

$$\bar{F}^{ext} = F^m + F^{th} + F^{mo} \quad (34-1)$$

این عبارت برای هر گره به شکل رابطه (۳۵-۱)، تعریف می‌شود.

$$F^{ext} = \{f_i, f_j, f_k\}^T \quad (35-1)$$

که در آن

$$f_i = \int_A N_i \bar{t} dA + \int_V N_i b dV \quad (36-1)$$

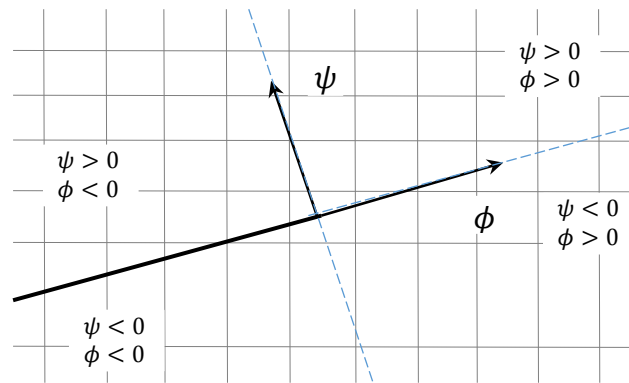
$$f_j = \int_A N_j H(x_j) \bar{t} dA + \int_V N_j H(x_j) b dV \quad (37-1)$$

$$f_k = \int_A N_k F_k^l(x_k) \bar{t} dA + \int_V N_k F_k^l(x_k) b dV \quad (38-1)$$

در این روابط b نماینده نیروهای حجمی و $\bar{t}$ نماینده نیروهای سطحی وارد بر المان خواهد بود.

۷-۱- مجموعه بردارهای مرتبه‌ای

به‌منظور تشخیص صحیح گره‌هایی که باید غنی‌سازی شوند و نوع این غنی‌سازی‌ها، از روش مجموعه بردارهای مرتبه‌ای استفاده می‌شود [۷]. در این روش مطابق با شکل (۴-۱)، دستگاه مختصات (ϕ, ψ) را در نوک ترک قرار داده به‌نحوی که محور $\phi = 0$ در راستای ترک و به سمت خارج از آن و محور $\psi = 0$ عمود بر ϕ به‌صورت راست‌گرد، قرار داشته باشد. بر این اساس برای گره‌های بالای ترک $\psi > 0$ و برای گره‌های پایین ترک $\psi < 0$ خواهد بود. همچنین برای گره‌های سمت راست ترک $\phi > 0$ و برای گره‌های سمت چپ ترک $\phi < 0$ می‌باشد. برای هریک از المان‌ها مختصات تمامی گره‌ها در دستگاه مختصات (ϕ, ψ) در نظر گرفته می‌شود. چنانچه در این مجموعه $\psi_{max} \times \psi_{min} < 0$ باشد به معنای این است که ترک و یا راستای آن از المان عبور کرده و در این حالت اگر $\phi_{max} < 0$ ترک المان را قطع کرده است. و یا چنانچه در این مجموعه $\psi_{max} \times \psi_{min} < 0$



شکل (۴-۱) مختصات عمودی و مماسی به کاربرده شده در نوک ترک به همراه شبکه‌بندی دامنه

باشد و $\phi_{max} \times \phi_{min} < 0$ باشد به معنای این است که المان موردنظر حاوی نوک ترک است. گره‌هایی از مجموعه اول که با مجموعه دوم مشترک نباشند توسط تابع هویساید و گره‌های مجموعه دوم با توابع تکین غنی‌سازی می‌شوند.

۸-۱- ساختار پایان‌نامه

بنا بر جستجوهای انجام‌شده، تاکنون تحقیقی در مورد، بررسی ضرایب شدت تنش با فرض کوپل بین دما و رطوبت در مواد ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته گزارش نشده است. در این پایان‌نامه، ضریب شدت تنش رطوبتی-گرمایی در محیط دوبعدی تحت بارگذاری رطوبتی و گرمایی با استفاده از یک انتگرال مستقل از مسیر برهم‌کنش محاسبه و در یک حالت برای مواد ایزوتروپیک با حل تحلیلی مقایسه شده است.

در بخش‌های بعدی، کاربرد المان محدود توسعه‌یافته در مدل‌سازی ترک شرح داده‌شده است و میدان‌های جابجایی و تنش در حوزه نوک ترک آورده شده‌اند. با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب، اقدام به دی‌کوپل کردن معادله حاکم شده و با کاربرد روش جداسازی متغیرها اقدام به حل این معادله و به دست آوردن میدان‌های حرارت، رطوبت و تنش شده است. به‌منظور به دست آوردن ضریب شدت تنش برای طول‌های مختلف ترک، روش تابع وزنی به‌کاربرده شده است. در بخش بعد با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته به محاسبه ضرایب شدت تنش در یک باریکه ایزوتروپیک پرداخته‌شده و این مقادیر برای زوایای مختلف ترک با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همچنین، با به کار بردن همین

رهیافت ضرایب شدت تنش در یک باریکه اورتوتروپیک به‌دست‌آمده و این مقادیر برای زوایای مختلف ترک و زوایای ناهمسانگردی مختلف با یکدیگر مقایسه شده است. به‌منظور بررسی دقت و صحت نتایج به‌دست‌آمده، این نتایج با حل تحلیلی مقایسه شده است.

فصل دوم

حل تحلیلی

باریکه ایزوتروپیک تحت بارگذاری

رطوبتی-گرمایی

فرایند انتقال رطوبت از لحاظ بنیادی شبیه به انتقال گرما است. توزیع غیریکنواخت رطوبت و دما می‌تواند موجب عیوب ساختاری در یک سازه مکانیکی شود؛ حتی اگر هیچ بارگذاری مکانیکی در کار نباشد. مطابق مشاهدات، دما و رطوبت برهم‌کنش متقابل دارند. عیوب ساختاری ماده بر اثر تغییر دما گرایش به باز شدن دارند؛ این بازشدگی باعث جذب رطوبت بیشتر خواهد شد. این رطوبت به دام افتاده، زمانی که دما به‌طور ناگهانی کاهش یابد، باعث رشد دوباره این عیوب می‌شود. متعاقباً این امر باعث خواهد شد که ماده توانایی جذب رطوبت بالاتری داشته باشد (اثر متقابل گرما و رطوبت). ادامه این روند باعث ایجاد خسارت احتمالی در سازه خواهد شد [۴۲].

از لحاظ ساختاری معادله حاکم بر پخش رطوبت مشابه با معادله هدایت گرمایی است؛ که با دنبال کردن کارهای فوریه، توسط فیک بیان شد. برهم‌کنش بین دما و رطوبت با توجه به دو اثر دوفور و سورت بیان می‌شود. اثر دوفور به شار گرمایی که به‌واسطه رطوبت غیریکنواخت در ماده تولید می‌شود، اشاره دارد و اثر سورت بیان‌کننده شار رطوبتی است؛ که به‌واسطه توزیع غیریکنواخت دما، در ماده تولید می‌شود.

در شرایط گذرا، تنش ممکن است مدام بین دو حالت فشاری و کششی تغییر کند. اگر تنش و یا تغییر شکل تأثیری در روند انتشار رطوبت و گرما نداشته باشد (همانطور که اینجا فرض شده است)، توزیع گرما و رطوبت می‌تواند مستقل از تنش تحلیل و بررسی شود. علاوه بر این، تا زمانی که تغییر شکل جامد در محدوده الاستیک خطی قرار داشته باشد، میدان تنش (و یا جابجایی) ناشی از رطوبت و دما به‌راحتی با استفاده از اصل برهم‌نهی قابل‌ترکیب با بارگذاری خارجی خواهد بود؛ بنابراین، محاسبه مستقل تنش ناشی از بارگذاری رطوبتی-گرمایی، بدون بارگذاری خارجی اهمیت می‌یابد.

در بسیاری از مواد به‌کاربرده شده در صنایع اثر برهم‌کنش بین دما و رطوبت مشاهده می‌شود. این اثر برای موادی مانند فلزات که نسبت ضریب هدایت گرمایی به ضریب پخش رطوبتی در حدود 10^6

است، بسیار ناچیز و قابل صرف نظر است. در مقابل برای بعضی از مواد؛ که این نسبت زیاد نیست می تواند مهم باشد. به عنوان مثال، برای بعضی از کامپوزیت ها این نسبت در حدود 10^{-1} است. در اغلب گزارش ها اثر کوپل بین رطوبت و دما در نظر گرفته نمی شود؛ که دلیل آن نبودن دانش کافی در مورد ضرایب کوپلینگ است [۵۲].

در این بخش، ضریب شدت تنش برای ترکی عمود بر لبه یک باریکه ایزوتروپیک، با روش تحلیلی تابع وزنی به دست می آید. بدین جهت ابتدا میدان های دما، رطوبت و تنش در باریکه بدون ترک به دست می آید. فرض شده است که رطوبت و دمای اولیه در باریکه یکنواخت است. ابتدا با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب، اقدام به غیرکوپل کردن معادله حاکم شده است. پس از آن با استفاده از رهیافت جداسازی متغیرها، این معادله حل شده است. در این مرحله توزیع رطوبت و دمای بی بعد به همراه تنش به دست می آید. در نهایت با استفاده از تابع وزنی ضریب شدت تنش محاسبه شده است.

۲-۲- معادلات حاکم

هنگام مطالعه شبه استاتیکی مسائل هایگروترموالاستیسیته، به منظور محاسبه تنش های میدان های رطوبت و گرما، این میدان ها، باید شناخته شده باشند. چنانچه نتوان از محتوای گرما و رطوبت موجود در هوای محبوس در خلل و فرج جسم جامد صرف نظر کرد، معادله ساختاری برای دما و رطوبت به شکل رابطه (۲-۱)، خواهد بود [۴۲].

$$f = -D_m \nabla C - \lambda D_h \nabla T \quad (2-1 \text{ الف})$$

$$\frac{q}{\rho c} = -D_h \nabla T - v D_m \nabla C \quad (2-1 \text{ ب})$$

که در آن D_m و D_h به ترتیب بیانگر ضریب نفوذ رطوبت و ضریب هدایت گرما برای حالتی است که محتوای رطوبت و گرما موجود در هوای محبوس در خلل و فرج جسم جامد قابل صرف نظر باشد. ρ چگالی و c ظرفیت گرمایی ویژه و λ ، v ضرایب کوپلینگ هستند. قانون بقای جرم و بقای انرژی به صورت رابطه (۲-۲) برقرار خواهند بود.

$$\nabla \cdot f = -\frac{\partial C}{\partial t} \quad (2-2 \text{ الف})$$

$$\nabla \cdot q = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-2 \text{ ب})$$

با جایگذاری رابطه ساختاری (۱-۲) در رابطه بقای جرم و انرژی (۲-۲)، رابطه (۳-۲) به دست می‌آید.

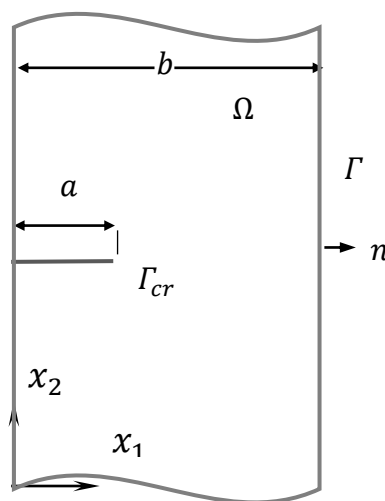
$$D_m \nabla^2 C + \lambda D_h \nabla^2 T = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (3-2 \text{ الف})$$

$$v D_m \nabla^2 C + D_h \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3-2 \text{ ب})$$

معادله بالا را می‌توان به شکل رابطه (۴-۲)، بازنویسی کرد. که در آن $D = (1 - \lambda v) D_m$ و $\mathfrak{D} = (1 - \lambda v) D_h$ خواهند بود.

$$\begin{cases} D \nabla^2 C - \frac{\partial}{\partial t} (C - \lambda T) = 0 \\ \mathfrak{D} \nabla^2 T - \frac{\partial}{\partial t} (T - v C) = 0 \end{cases} \quad (4-2)$$

با توجه به شکل (۱-۲)، باریکه‌ای بلند، با ناحیه Ω و محصور به منحنی Γ ، در نظر گرفته شده‌است؛ که تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی قرار دارد. شرایط مرزی و اولیه دما و رطوبت در جدول (۱-۲) نشان داده شده است. زیرنویس‌های i و f به ترتیب بیانگر حالت اولیه و نهایی هستند. معادلات تعادل، شرایط اولیه و مرزی مطابق رابطه (۵-۲) است.



شکل (۱-۲) مدل باریکه، با مرزهای داخلی شامل ترک، تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی

جدول ۱-۲ شرایط اولیه و مرزی برای دما و رطوبت

شرط اولیه	شرط مرزی
$T(x, 0) = T_i$	$T(0, t) = T_f$
$C(x, 0) = C_i$	$C(0, t) = C_f$
	$T(b, t) = T_i$
	$C(b, t) = C_i$

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{در } \Omega \quad (۲-۵-الف)$$

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{روی } \Gamma \quad (۲-۵-ب)$$

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{روی } \Gamma_{cr} \quad (۲-۵-پ)$$

در این روابط n بردار یکه رو به خارج روی مرز Γ است. رابطه ساختاری برای تنش (قانون هوک) به شکل رابطه (۲-۶) است.

$$\sigma = \tilde{Q} : (\varepsilon - \varepsilon^{th} - \varepsilon^{mo}) \quad (۲-۶)$$

که در آن مقدار ε^{th} و ε^{mo} با استفاده از رابطه (۲-۷) به دست می‌آید. در این روابط، Q تانسور مرتبه چهارم تانسور الاستیک، α ضریب انبساط گرمایی، β ضریب انبساط رطوبتی و ϑ ضریب پواسون است.

$$\varepsilon^{th} = \gamma \Delta T \quad (۲-۷-الف)$$

$$\varepsilon^{mo} = \zeta \Delta C \quad (۲-۷-ب)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۲-۷-پ)$$

حالت تنش صفحه‌ای

$$\zeta = \begin{Bmatrix} \beta \\ \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۲-۷-ت)$$

$$\gamma = (1 + \vartheta) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۲-۷-ث)$$

حالت کرنش صفحه‌ای

$$\zeta = (1 + \vartheta) \begin{Bmatrix} \beta \\ \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۲-۷-ج)$$

در رابطه ساختاری (۶-۲)، ε تانسور کرنش کل، ε^{th} تانسور کرنش گرمایی، ε^{mo} تانسور کرنش رطوبتی است. تانسور سفتی ماده ایزوتروپیک به صورت رابطه (۲-۸) برای حالت تنش صفحه‌ای و رابطه (۲-۹) برای حالت کرنش صفحه‌ای، تعریف می‌شود. در این روابط E مدول الاستیک است.

$$[Q] = \frac{E}{1-\vartheta^2} \begin{bmatrix} 1 & \vartheta & 0 \\ \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\vartheta)}{2} \end{bmatrix} \quad (۸-۲)$$

$$[Q] = \frac{E}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)} \begin{bmatrix} (1-\vartheta) & \vartheta & 0 \\ \vartheta & (1-\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\vartheta)}{2} \end{bmatrix} \quad (۹-۲)$$

۳-۲- محاسبه دما و رطوبت

یک باریکه ایزوتروپیک، مانند شکل (۲-۱)، با فرض عدم وجود ترک، تحت بار گرمایی-رطوبتی در نظر گرفته می‌شود. دستگاه معادلات حاکم دما و رطوبت برای باریکه با فرض خصوصیات مستقل از دما به صورت رابطه (۲-۱۰) است.

$$D \frac{\partial^2 C(x_1, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial t} (C(x_1, t) - \lambda T(x_1, t)) = 0 \quad (۱۰-۲ \text{ الف})$$

$$\varnothing \frac{\partial^2 T(x_1, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial t} (T(x_1, t) - \nu C(x_1, t)) = 0 \quad (۱۰-۲ \text{ ب})$$

با استفاده از تغییر متغیر به شکل رابطه (۲-۱۱) دستگاه معادلات (۱۰-۲) به شکل رابطه بی‌بعد شده (۲-۱۲) خواهد بود.

$$T^*(x_1, t) = \frac{T(x_1, t) - T_i}{T_i - T_f} \quad (۱۱-۲ \text{ الف})$$

$$C^*(x_1, t) = \frac{C(x_1, t) - C_i}{\lambda(T_i - T_f)} \quad (۱۱-۲ \text{ ب})$$

که در آن $T^*(x_1, t)$ و $C^*(x_1, t)$ دما و رطوبت بی‌بعد است.

$$D \frac{\partial^2 C^*(x_1, t)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial t} (C^*(x_1, t) - T^*(x_1, t)) \quad (۱۲-۲ \text{ الف})$$

$$\nabla \frac{\partial^2 T^*(x_1, t)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial t} (T^*(x_1, t) - \lambda v C^*(x_1, t)) \quad (12-2 \text{ ب})$$

در روابط فوق T_i و C_i دما و رطوبت مرجع و T_f دمای نهایی لبه سمت چپ است. با توجه به روابط (11-2) و جدول (1-2)، شرایط مرزی و اولیه حاکم بر مسئله به شکل رابطه (13-2) تعریف شده است.

$$T^*(0, t) = -1 \quad \text{و} \quad T^*(b, t) = 0 \quad (13-2 \text{ الف})$$

$$C^*(b, t) = 0 \quad \text{و} \quad C^*(0, t) = 0 \quad (13-2 \text{ ب})$$

$$T^*(x_1, t) = 0 \quad \text{و} \quad C^*(x_1, t) = 0 \quad (13-2 \text{ پ})$$

دستگاه معادلات کوپل (12-2) را می توان به صورت دو معادله مستقل برحسب یک ترکیب خطی از $DC^*(x_1, t)$ و $\nabla T^*(x_1, t)$ به صورت $s_1 \nabla T^*(x_1, t) + DC^*(x_1, t)$ نوشت. مقدار s_1 در ادامه به دست خواهد آمد. برای این منظور، معادله (12-2 ب)، در s_1 ضرب شده و با معادله (12-2 الف)، به صورت رابطه (14-2)، جمع می شوند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (s_1 \nabla T^*(x_1, t) + DC^*(x_1, t)) \\ = \frac{\partial}{\partial t} [(s_1 - 1)T^*(x_1, t) + (1 - s_1 \lambda v)C^*(x_1, t)] \end{aligned} \quad (14-2)$$

در این معادله برای به دست آوردن یک معادله، با طبیعت پخش ساده برحسب $s_1 \nabla T^* + DC^*$ می بایست رابطه (15-2) برقرار باشد.

$$\frac{s_1 - 1}{\nabla s_1} = \frac{1 - s_1 \lambda v}{D} = d_1^2 \quad (15-2)$$

در این حالت معادله (14-2) به شکل رابطه (16-2) بیان می شود.

$$\frac{\partial^2 F_1(x_1, t)}{\partial x^2} = d_1^2 \frac{\partial F_1(x_1, t)}{\partial t} \quad (16-2)$$

با حل رابطه (15-2)، متغیر s_1 به صورت زیر به دست می آید.

$$s_1 = \frac{(\nabla - D) \pm \sqrt{(\nabla - D)^2 + 4\lambda v \nabla D}}{2\lambda v \nabla} \quad (17-2)$$

شرایط اولیه و مرزی برای رابطه (۱۶-۲) با استفاده از شرایط مرزی و اولیه اصلی مسئله به شکل رابطه

(۱۸-۲) به دست می‌آید

$$F_1(0, t) = -\mathfrak{D}s_1 \quad (\text{الف-۱۸-۲})$$

$$F_1(b, t) = 0 \quad (\text{ب-۱۸-۲})$$

$$F_1(x_1, 0) = 0 \quad (\text{پ-۱۸-۲})$$

به‌طور مشابه، معادله (۱۲-۲ب)، در $-s_2$ ضرب شده و با معادله اول به‌صورت رابطه (۱۹-۲)، جمع می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (-s_2 \mathfrak{D}T^*(x_1, t) + DC^*(x_1, t)) \\ = \frac{\partial}{\partial t} [(1 + s_2)T^*(x_1, t) + (1 + s_2 \lambda v)C^*(x_1, t)] \end{aligned} \quad (۱۹-۲)$$

در این معادله برای به دست آوردن یک معادله پخش ساده برحسب $s_1 \mathfrak{D}T^* + DC^*$ می‌بایست رابطه (۲۰-۲) برقرار باشد.

$$\frac{s_2 + 1}{\mathfrak{D}s_2} = \frac{1 + s_2 \lambda v}{D} = d_2^2 \quad (۲۰-۲)$$

در این حالت معادله (۱۹-۲) به شکل رابطه (۲۱-۲) بیان می‌شود.

$$\frac{\partial^2 F_2(x_1, t)}{\partial x^2} = d_2^2 \frac{\partial F_2(x_1, t)}{\partial t} \quad (۲۱-۲)$$

برای به دست آوردن s_2 از حل رابطه (۲۰-۲) خواهیم داشت.

$$s_2 = \frac{(D - \mathfrak{D}) \pm \sqrt{(\mathfrak{D} - D)^2 + 4\lambda v \mathfrak{D}D}}{2\lambda v \mathfrak{D}} \quad (۲۲-۲)$$

شرایط اولیه و مرزی برای رابطه (۲۱-۲) با استفاده از شرایط مرزی و اولیه اصلی مسئله به شکل رابطه (۲۳-۲) به دست می‌آید.

$$F_2(0, t) = \mathfrak{D}s_2 \quad (\text{الف-۲۳-۲})$$

$$F_2(b, t) = 0 \quad (\text{ب-۲۳-۲})$$

$$F_2(x_1, 0) = 0 \quad (\text{پ-۲۳-۲})$$

اکنون دستگاه معادلات کوپل (۲-۱۲) به صورت دستگاه معادلات غیرکوپل حاصل از روابط (۲-۱۶) و (۲-۲۱) بیان شده است. با حل این دستگاه با روش جداسازی متغیرها، با توجه به شرایط اولیه و مرزی هر کدام، مقدار $F_1(x_1, t)$ و $F_2(x_1, t)$ مطابق با رابطه (۲-۲۴) خواهد بود.

$$F_1(x_1, t) = \frac{\mathfrak{D}s_1}{b} x_1 - \mathfrak{D}s_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mathfrak{D}s_1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{b}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{bd_1}\right)^2 t} \quad (24-2 \text{ الف})$$

$$F_2(x_1, t) = -\frac{\mathfrak{D}s_2}{b} x_1 + \mathfrak{D}s_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\mathfrak{D}s_2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{b}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{bd_2}\right)^2 t} \quad (24-2 \text{ ب})$$

با معلوم بودن توابع $F_1(x_1, t)$ و $F_2(x_1, t)$ می توان مقدار دما و رطوبت بی بعد را با حل دستگاه زیر به دست آورد.

$$\begin{cases} F_1(x_1, t) = s_1 \mathfrak{D}T^*(x_1, t) + DC^*(x_1, t) \\ F_2(x_1, t) = -s_2 \mathfrak{D}T^*(x_1, t) + DC^*(x_1, t) \end{cases} \quad (25-2)$$

فرم نهایی میدان های دما و رطوبت به فرم رابطه (۲-۲۶)، حاصل می شود.

$$\begin{cases} T^*(x_1, t) = \frac{F_1(x_1, t) - F_2(x_1, t)}{\mathfrak{D}(s_1 + s_2)} \\ C^*(x_1, t) = \frac{s_2 F_1(x_1, t) + s_1 F_2(x_1, t)}{D(s_1 + s_2)} \end{cases} \quad (26-2)$$

۲-۴- محاسبه تنش

با توجه به اینکه صفحه بسیار بلند و شرایط تنش صفحه ای در نظر گرفته شده است و بارگذاری مکانیکی در $x_1 = 0, x_1 = b$ وجود ندارد و همچنین شار رطوبت و دما تنها در راستای x_1 وجود دارد، روابط زیر برقرار است.

$$\sigma_{11}(x_1, t) = 0 \quad (27-2 \text{ الف})$$

$$\sigma_{33}(x_1, t) = 0 \quad (27-2 \text{ ب})$$

$$\sigma_{12}(x_1, t) = 0 \quad (27-2 \text{ پ})$$

رابطه سازگاری برای این مسئله به شکل رابطه (۲-۲۸) است.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}(x_1, t)}{\partial x_1^2} = 0 \quad (28-2)$$

با حل این معادله، کرنش به صورت رابطه (29-2) به دست می آید.

$$\varepsilon_{22}(x_1, t) = A(t)x_1 + B(t) \quad (29-2)$$

با به کار بردن قانون هوک، تنش به شکل رابطه (30-2) به دست آمده است.

$$\sigma_{22}(x_1, t) = E[A(t)x_1 + B(t) - \alpha \Delta T(x_1, t) - \beta \Delta C(x_1, t)] \quad (30-2)$$

که در آن، ضرایب $A(t)$ و $B(t)$ با توجه به اینکه جسم تحت بارگذاری مکانیکی قرار ندارد از تعادل نیرو و گشتاور به صورت رابطه (31-2) به دست می آید.

$$\int_0^b \sigma_{22}(x_1, t) dx_1 = 0 \quad (31-2 \text{ الف})$$

$$\int_0^b \sigma_{22}(x_1, t) x_1 dx_1 = 0 \quad (31-2 \text{ ب})$$

در نتیجه

$$A(t) = \frac{-6}{b^2} (T_0 - T_f) \left\{ \alpha \int_0^b T^*(x_1, t) dx_1 + \right. \\ \left. \lambda \beta \int_0^b C^*(x_1, t) dx_1 + \frac{2}{b} \left[\alpha \int_0^b T^*(x_1, t) x_1 dx_1 + \lambda \beta \int_0^b C^*(x_1, t) x_1 dx_1 \right] \right\} \quad (32-2)$$

$$B(t) = \frac{(T_0 - T_f)}{b^2} \left\{ \alpha \int_0^b T^*(x_1, t) x_1 dx_1 + \lambda \beta \int_0^b C^*(x_1, t) x_1 dx_1 \right\} - \frac{b}{3} A(t) \quad (33-2)$$

۵-۲- محاسبه ضریب شدت تنش

روش تابع وزنی یک ابزار مؤثر برای تعیین ضریب شدت تنش با توجه به توزیع تنش، در جسم بدون ترک است. اگر تابع وزنی برای یک جسم دارای ترک معلوم باشد، با انتگرال گیری از حاصل ضرب تابع وزنی و توزیع تنش در جسم بدون ترک روی سطح ترک می توان ضریب شدت تنش را به دست

آورد. ضریب شدت تنش برای صفحه‌ای حاوی ترک عمود لبه‌ای، مطابق شکل (۲-۱)، با استفاده از

تابع وزنی توسط انتگرال عددی رابطه (۲-۳۴) قابل بیان است [۵۷].

$$K_I = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\left(1 - \frac{a}{b}\right)^{-\frac{3}{2}} \int_0^a -\frac{\sigma_{22}(x_1, t)F(x_1, a)}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} dx_1 \quad (2-34)$$

که مقدار تابع وزنی $F(x_1, a)$ به شکل رابطه (۲-۳۵) خواهد بود.

$$F(x_1, a) = f_0 + f_1\left(\frac{x_1}{a}\right) + f_2\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + f_3\left(\frac{x_1}{a}\right)^3$$

$$f_0 = 0.46 + 3.06\tilde{a} + 0.84(1 - \tilde{a})^5 + 0.66\tilde{a}^2(1 - \tilde{a})^2$$

$$f_1 = -3.52\tilde{a}^2$$

$$f_2 = 6.17 - 28.22\tilde{a} + 34.54\tilde{a}^2 - 14.39\tilde{a}^3 - (1 - \tilde{a})^{1.5} - 5.88(1 - \tilde{a})^5 - 2.64\tilde{a}^2(1 - \tilde{a})^2$$

$$f_3 = -6.63 + 25.16\tilde{a} - 31.04\tilde{a}^2 + 14.41\tilde{a}^3 + 2(1 - \tilde{a})^{1.5} + 5.04(1 - \tilde{a})^5 + 1.98\tilde{a}^2(1 - \tilde{a})^2$$

$$\tilde{a} = \frac{a}{b} \quad (2-35)$$

۲-۶- مثال عددی

۲-۶-۱- باریکه دارای ترک لبه‌ای عمود تحت شوک گرمایی

صفحه‌ای دوبعدی با طول $h = 4$ و عرض $b = 1$ واحد در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک

لبه‌ای عمود است (مطابق شکل (۲-۱)). دمای اولیه $T_i = 5^\circ\text{C}$ ، صفحه در سمت چپ تا $T_f = 0^\circ\text{C}$

سرد می‌شود درحالی‌که، دما در لبه سمت راست در مقدار اولیه ثابت نگاه‌داشته می‌شود. رطوبت در لبه

سمت چپ و سمت راست، در مقدار اولیه $C_i = 0.1$ نگاه‌داشته شده است. تمامی لبه‌های دیگر عایق

گرمایی و رطوبتی در نظر گرفته شده است. خصوصیات ماده با توجه به مرجع [۶۳] به صورت زیر است.

$$\beta = 2.68 \times 10^{-3} \text{ cm/cm } \%H_2O \quad \Delta = 7.78 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{hr} \quad D = 7.78 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{hr}$$

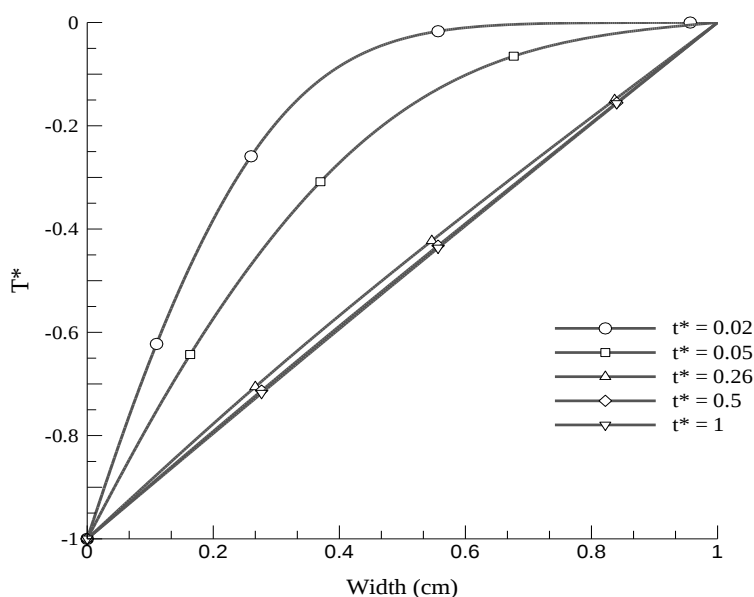
$$v = 0.5 \text{ cm}^3/^\circ\text{C/g} \quad E = 64.3 \text{ GPa} \quad \lambda = 0.5 \text{ g/cm}^3/^\circ\text{C} \quad \alpha = 31.3 \times 10^{-6} \text{ cm/cm } ^\circ\text{C}$$

$\vartheta = 0.3$ در این مثال زمان مطابق با رابطه (۲-۳۶) بی‌بعد شده است.

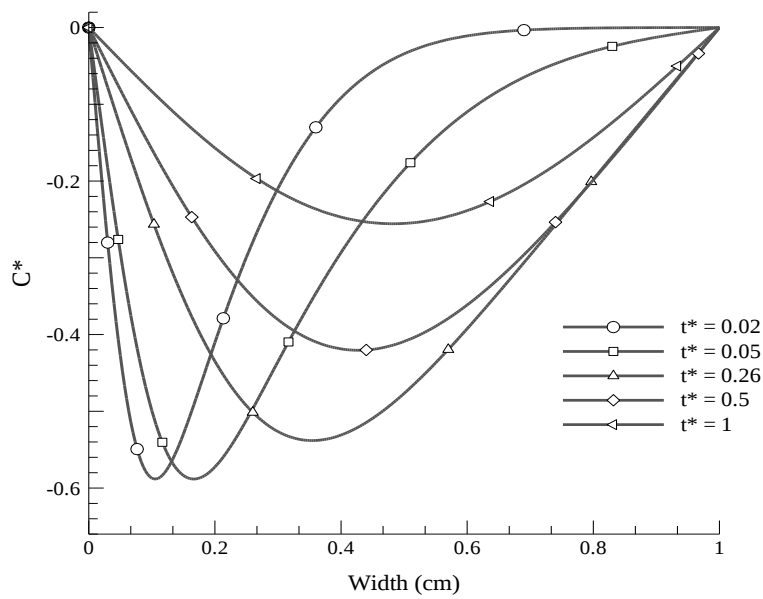
$$t^* = \frac{\Delta t}{b^2} \quad (۳۶-۲)$$

مقادیر دما و رطوبت بی‌بعد، در زمان‌های مختلف، در شکل‌های (۲-۲) و (۳-۲) رسم شده است. مقادیر تنش نیز در شکل (۴-۲) برای زمان‌های مشابه نشان داده شده است. مقادیر ضریب شدت تنش برای سه طول ترک مختلف در مقایسه با یکدیگر در شکل (۵-۲) رسم شده است.

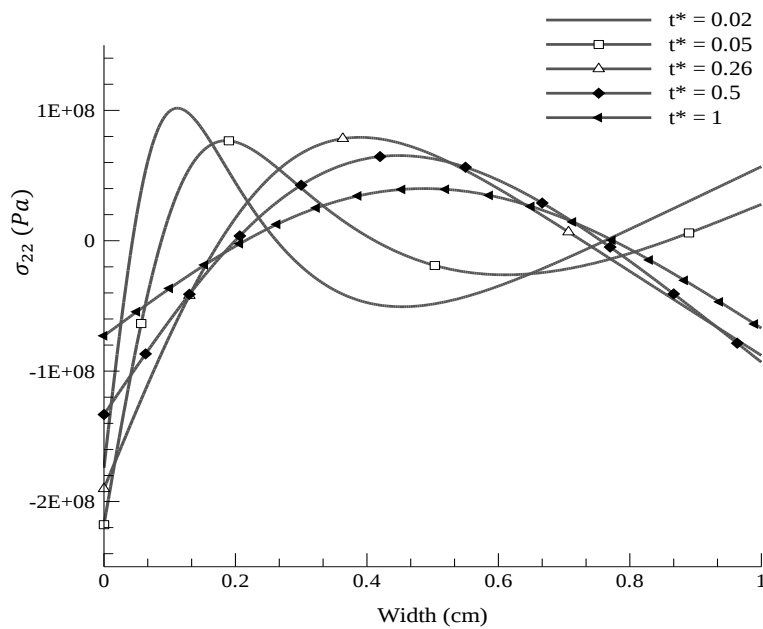
با توجه به شکل (۲-۲)، دما در عرض باریکه پس از گذشت زمان $t^* = 0.26$ به حالت تعادل رسیده است، بنابراین پس‌ازاین زمان معادله حاکم از حالت کوپل خارج خواهد شد. با توجه به توزیع خطی دما، پس‌ازاین زمان، توزیع دما تأثیری در مقدار تنش نخواهد داشت و عامل کنترل‌کننده تنش در این حالت، توزیع رطوبت است. با توجه به شکل (۳-۲)، پس‌ازاینکه دما به حالت تعادل رسیده است، توزیع رطوبت حالت متقارن یافته و به تدریج به سمت حالت تعادل میل می‌کند. در زمان‌های اولیه که توزیع دما به شدت تغییر می‌کند، به دلیل کوپل بین دما و رطوبت توزیع رطوبت نیز تغییر شدیدی خواهد داشت، اما پس از تعادل دمایی و غیرکوپل شدن معادله حاکم، رطوبت، توزیع جدیدی یافته و به آرامی کاهش خواهد یافت.



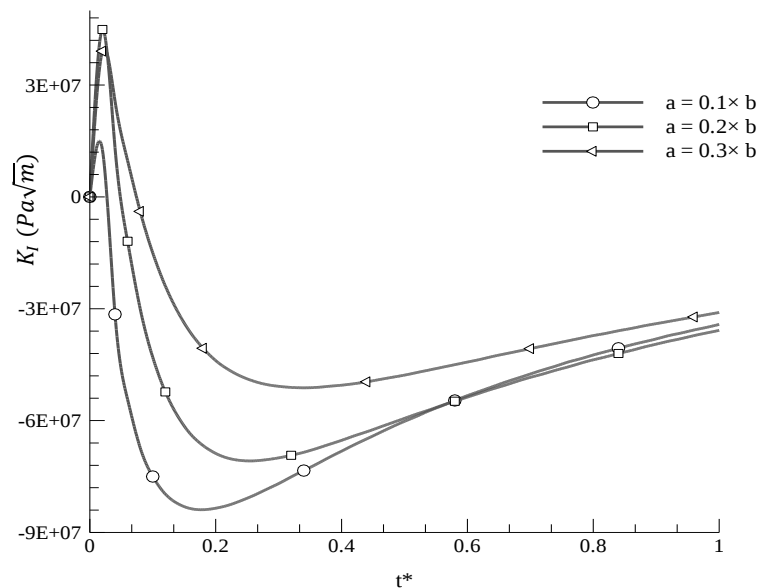
شکل (۲-۲) نمودار دمای بی‌بعد، در عرض یک باریکه ایزوتروپیک و تغییر دما در لبه سمت چپ



شکل (۳-۲) نمودار رطوبت بی‌بعد، در عرض یک باریکه ایزوتروپیک و تغییر دما در لبه سمت چپ



شکل (۴-۲) نمودار تنش، در عرض یک باریکه ایزوتروپیک و تغییر دما در لبه سمت چپ



شکل (۵-۲) نمودار ضریب شدت تنش مود I، برحسب زمان بی‌بعد برای صفحه باریکه تحت بارگذاری رطوبتی/گرمایی

در لحظات اولیه که توزیع دما سریعاً در حال تغییر است، به دلیل کوچک بودن ضریب پخش رطوبتی نسبت به ضریب هدایت گرمایی، تغییر توزیع رطوبت بسیار کندتر خواهد بود، این کند بودن تا حدی است که برای زمان‌های بعد از $t^* = 0.05$ ، تمامی جسم تغییر رطوبت را حس کرده است (با توجه به شکل (۳-۲))، بنابراین در لحظات اولیه توزیع تنش بیشتر تابع توزیع دما خواهد بود (با توجه به شکل (۴-۲)). پس از تعادل دمایی جسم، همان‌گونه که اشاره شد، دما تأثیری در توزیع تنش نداشته و رطوبت نقش کنترل‌کننده خواهد داشت. در این حالت توزیع تنش و توزیع رطوبت هر دو حالت متقارن یافته‌اند. با توجه به شکل (۵-۲)، با افزایش طول ترک ضریب شدت تنش کاهش خواهد یافت. علاوه بر این، قبل از رسیدن دما به حالت پایا، توزیع تنش بسیار متفاوت با حالتی است که رطوبت در نظر گرفته نشود. در این حالت تنش در لبه سمت چپ، فشاری است اما در حالت بدون رطوبت تنش در لبه سمت چپ کششی است.

فصل سوم

حل عددی

باریکه ایزوتروپیک تحت بارگذاری

رطوبتی-گرمایی

حلهای تحلیلی تنها برای مسائل ساده از نظر شرایط مرزی و هندسه، قابل دست‌یابی هستند. بسیاری از حالت‌های شرایط مرزی و هندسه، خارج از محدوده حل‌های تحلیلی می‌باشند؛ بنابراین برای تحلیل آن‌ها ناگزیر به استفاده از حل عددی هستیم. المان محدود به‌طور گسترده در مسائل مهندسی که در آن معادلات وابسته به زمان وجود دارد (مانند معادلات حاکم بر رطوبت و دما) به‌کاربرده می‌شود. اما در تحلیل مسائل مکانیک شکست، لزوم انطباق المان‌ها بر سطوح ترک، دشواری توصیف گرادیان شدید تنش در حوزه نوک ترک و انجام شبکه‌بندی مجدد در صورت رشد ترک از مشکلات استفاده از روش المان محدود کلاسیک است. در روش المان محدود توسعه‌یافته، ترک از هندسه مسئله حذف و ناحیه حل مستقل از ترک شبکه‌بندی می‌شود. به‌طوری‌که ناپیوستگی میدان جابجایی در سطح ترک و گرادیان میدان جابجایی حوزه نوک ترک به‌صورت محلی به تابع تقریب روش المان محدود اضافه می‌شود. محدودیت‌های ذکرشده به‌خوبی اهمیت توسعه و به‌کارگیری روش المان محدود توسعه‌یافته به‌منظور تحلیل رفتار ترک و شکست مواد را مشخص می‌سازند.

در این فصل، برای محاسبه ضرایب شدت تنش در محیط ایزوتروپیک مستطیلی که در معرض تنش‌های گرمایی و رطوبتی قرار دارد، از روش المان محدود توسعه‌یافته استفاده شده است. در معادلات حاکم هایگروترموالاستیسیته، کوپل دوطرفه میدان‌های دما و رطوبت، در نظر گرفته شده است. برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش، روش انتگرال برهم‌کنش برای بارهای رطوبتی-گرمایی توسعه داده شده است. در روش المان محدود توسعه‌یافته به‌منظور کاهش خطا، المان‌های مستطیلی هشت‌گه‌ای ریز شونده، به سمت نوک ترک، به‌کارگرفته شده‌اند. به‌منظور صحت‌سنجی، نتایج عددی حاصل از روش المان محدود توسعه‌یافته، با نتایج حل تحلیلی که در فصل قبل ارائه شد، مقایسه شده است. نتایج نشان‌دهنده دقت قابل قبول نتایج عددی می‌باشد. همچنین، چگونگی تغییر ضرایب شدت تنش مودهای I و II، با زاویه ترک بررسی شده است.

۲-۳- گسسته سازی دستگاه معادلات کوپل

برای فرمول‌بندی المان محدود مسئله، روش گلرکین به کار برده می‌شود. برای این منظور ناحیه حل به تعداد دلخواهی المان تقسیم می‌شود. در هریک از این المان‌ها (e)، میدان‌های رطوبت و گرما، توسط رابطه اندیسی (۳-۵) تقریب زده می‌شوند.

$$C^{(e)}(x_1, x_2, t) = \omega_m(t) N_m(x_1, x_2) \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (۱-۳-الف)$$

$$T^{(e)}(x_1, x_2, t) = \theta_m(t) N_m(x_1, x_2) \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (۱-۳-ب)$$

در این معادله m ، بیانگر تعداد گره‌های هر المان بوده و عمل جمع بروی آن انجام می‌گیرد. تقریب در نظر گرفته شده در معادله (۱-۳)، تقریب کنترویچ^۱ نامیده می‌شود. در این تقریب میدان‌های جابه‌جایی و زمان به صورت جدا از هم در نظر گرفته می‌شوند. مقادیر $\omega_m(t)$ و $\theta_m(t)$ به ترتیب بیانگر دما و رطوبت مربوط به هریک از گره‌های المان بوده و تابع شکل $N_m(x_1, x_2)$ تابع مکان می‌باشد. دستگاه معادلات کوپل حاکم به شکل رابطه (۳-۲) است.

$$\begin{cases} D \nabla^2 C - \frac{\partial}{\partial t} (C - \lambda T) = 0 \\ \nabla^2 T - \frac{\partial}{\partial t} (T - \nu C) = 0 \end{cases} \quad (۲-۳)$$

مطابق با روش گلرکین، با عمود کردن تابع شکل بر باقی‌مانده، برای معادله اول از دستگاه کوپل

حاکم و با در نظر گرفتن $J = -D \nabla C$ رابطه (۳-۳) به دست آمده است.

$$\int_{V(e)} \left(J_{i,i} + \frac{\partial C}{\partial t} - \lambda \frac{\partial T}{\partial t} \right) N_l dV = 0 \quad l = 1, 2, 3, 4 \quad (۳-۳)$$

با به کار بردن قضیه انتگرال گوس، فرم ضعیف معادله (۳-۳) به صورت رابطه (۴-۳)، به دست می‌آید.

$$\int_{V(e)} J_{i,i} N_l dV = \int_{V(e)} \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) N_l dV = \int_{A(e)} (\vec{J} \cdot \vec{n}) N_l dA - \int_{V(e)} J_i \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV \quad (۴-۳)$$

¹ Kantorovich approximation

در رابطه (۴-۳)، $\vec{n}$ بردار یکه رو به خارج بروی مرز جسم و $A(e)$ سطح محدود به مرزهای المان، است. با قرار دادن رابطه (۴-۳) در رابطه (۳-۳) و چینش دوباره رابطه (۵-۳) حاصل می‌شود.

$$\int_{V(e)} \frac{\partial C}{\partial t} N_l dV - \int_{V(e)} \lambda \frac{\partial T}{\partial t} N_l dV - \int_{V(e)} J_i \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV = - \int_{A(e)} (\vec{J} \cdot \vec{n}) N_l dA \quad (۵-۳)$$

با قرار دادن تقریب در نظر گرفته‌شده رابطه (۱-۳) در رابطه (۵-۳) تقریب المان محدود برای معادله موردنظر، به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \left(\int_{V(e)} D \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV \right) \omega_m + \left(\int_{V(e)} N_m N_l dV \right) \dot{\omega}_m \\ - \left(\int_{V(e)} \lambda N_m N_l dV \right) \dot{\theta}_m = - \int_{A(e)} (\vec{J} \cdot \vec{n}) N_l dA \end{aligned} \quad (۶-۳)$$

به‌طور مشابه با عمود کردن تابع شکل بر باقی‌مانده برای معادله دوم از دستگاه کوپل حاکم و با درنظر گرفتن $\phi = -\nabla T$ رابطه (۷-۳) به‌دست‌آمده است.

$$\int_{V(e)} \left(\phi_{i,i} + \frac{\partial T}{\partial t} - v \frac{\partial C}{\partial t} \right) N_l dV = 0 \quad l = 1, 2, 3, 4 \quad (۷-۳)$$

با به کار بردن قضیه انتگرال گوس، فرم ضعیف معادله (۷-۳)، به‌صورت رابطه (۸-۳) است.

$$\begin{aligned} \int_{V(e)} \phi_{i,i} N_l dV &= \int_{V(e)} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) N_l dV \\ &= \int_{A(e)} (\vec{\phi} \cdot \vec{n}) N_l dA - \int_{V(e)} \phi_i \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV \end{aligned} \quad (۸-۳)$$

با قرار دادن رابطه (۸-۳) در رابطه (۷-۳) و چینش دوباره آن رابطه (۹-۳) را به‌دست‌آمده است.

$$\int_{V(e)} \frac{\partial T}{\partial t} N_l dV - \int_{V(e)} v \frac{\partial C}{\partial t} N_l dV - \int_{V(e)} \phi_i \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV = - \int_{A(e)} (\vec{\phi} \cdot \vec{n}) N_l dA \quad (۹-۳)$$

با قرار دادن تقریب در نظر گرفته‌شده رابطه (۱-۳) در رابطه (۹-۳)، تقریب المان محدود برای رابطه موردنظر به شکل رابطه (۱۰-۳) است.

$$\left(\int_{V(e)} \mathfrak{D} \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV \right) \theta_m + \left(\int_{V(e)} N_m N_l dV \right) \dot{\theta}_m - \left(\int_{V(e)} v N_m N_l dV \right) \dot{\omega}_m = - \int_{A(e)} (\vec{\phi} \cdot \vec{n}) N_l dA \quad (۱۰-۳)$$

با در نظر گرفتن روابط (۶-۳) و (۱۰-۳)، تقریب المان محدود برای معادله کوپل حاکم به شکل رابطه (۱۱-۳) می‌باشد.

$$\left\{ \left(\int_{V(e)} D \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV \right) \omega_m + \left(\int_{V(e)} N_m N_l dV \right) \dot{\omega}_m - \left(\int_{V(e)} \lambda N_m N_l dV \right) \dot{\theta}_m = - \int_{A(e)} (\vec{J} \cdot \vec{n}) N_l dA \right. \\ \left. \left(\int_{V(e)} \mathfrak{D} \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV \right) \theta_m + \left(\int_{V(e)} N_m N_l dV \right) \dot{\theta}_m - \left(\int_{V(e)} v N_m N_l dV \right) \dot{\omega}_m = - \int_{A(e)} (\vec{\phi} \cdot \vec{n}) N_l dA \right. \quad (۱۱-۳)$$

رابطه فوق را به فرم ماتریسی، می‌توان به شکل رابطه (۱۲-۳) نشان داد.

$$C^{th_mo} \left\{ \dot{\omega} \right\} + K^{th_mo} \left\{ \omega \right\} = \left\{ f^{mo} \right\} \quad (۱۲-۳)$$

در این رابطه C^{th_mo} ، K^{th_mo} ، f^{mo} و f^{th} به شکل روابط زیر است.

$$C^{th_mo} = \int_{V(e)} \Phi^T \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix} \Phi dV \quad (۱۳-۳)$$

$$K^{th_mo} = \int_{V(e)} B^T \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{D} \end{bmatrix} B dV \quad (۱۴-۳)$$

$$f^{mo} = - \int_{A(e)} (\vec{J} \cdot \vec{n}) N dA, \quad f^{th} = - \int_{A(e)} (\vec{\phi} \cdot \vec{n}) N dA \quad (۱۵-۳)$$

$$B = \begin{bmatrix} N_{1,x_1} & 0 & N_{2,x_1} & 0 & N_{3,x_1} & 0 & N_{4,x_1} & 0 \\ 0 & N_{1,x_1} & 0 & N_{2,x_1} & 0 & N_{3,x_1} & 0 & N_{4,x_1} \\ N_{1,x_2} & 0 & N_{2,x_2} & 0 & N_{3,x_2} & 0 & N_{4,x_2} & 0 \\ 0 & N_{1,x_2} & 0 & N_{2,x_2} & 0 & N_{3,x_2} & 0 & N_{4,x_2} \end{bmatrix} \quad (۱۶-۳)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (۱۷-۳)$$

در اینجا، برای حل معادلات کوپل و گسسته توزیع گرما و رطوبت از روش ضمنی کرانک-نیکلسون^۱ استفاده شده است. در این روش، رطوبت و دمای گره‌ها در هر گام زمانی بر اساس رطوبت و دمای گره‌ای در گام زمانی قبلی به صورت رابطه (۳-۱۸)، به دست می‌آید.

$$[2C^{th_mo} + K^{th_mo} \Delta t] \begin{Bmatrix} C_n \\ T_n \end{Bmatrix} = \Delta t \left(\begin{Bmatrix} f_{n-1}^{mo} \\ f_{n-1}^{th} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_n^{mo} \\ f_n^{th} \end{Bmatrix} \right) + [2C^{th_mo} - K^{th_mo} \Delta t] \begin{Bmatrix} C_{n-1} \\ T_{n-1} \end{Bmatrix} \quad (۳-۱۸)$$

۳-۳- انتگرال برهمکنش

روش‌های انرژی مانند انتگرال J ، یک رهیافت کارآمد و قوام‌دار برای محاسبه عددی ضرایب شدت تنش هستند. انتگرال برهم‌کنش، درواقع نتیجه برهم‌کنش دو حالت بارگذاری مستقل (یک میدان اصلی و یک میدان کمکی) و قابل قبول، برای سازه حاوی ترک است؛ که در انتگرال‌های پایستار الاستیسیته پدید می‌آید. در این بخش انتگرال برهم‌کنش برای مواد ایزوتروپیک تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی بیان می‌شود. فرم معمول انتگرال J برای یک ترک، بدون اعمال نیرو به سطوح آن، به صورت رابطه (۳-۱۹) تعریف می‌شود.

$$J = \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (W \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j d\Gamma_s \quad (۳-۱۹)$$

که در آن مقدار W به صورت رابطه (۳-۲۰) تعریف شده است.

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^m \quad (۳-۲۰)$$

با کاربرد قضیه دیورژانس و در نظر گرفتن تابع پیوسته q ، با مقدار ۱ روی مرز داخلی و صفر روی مرز خارجی، انتگرال ناحیه‌ای معادل برای انتگرال J به صورت رابطه (۳-۲۱) بیان می‌شود [۲۵].

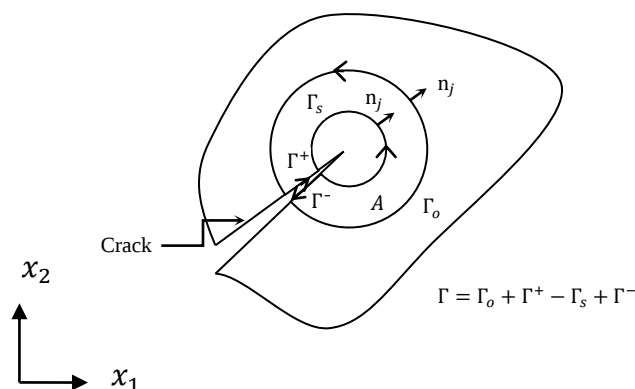
$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j})_{,j} q dA \quad (۳-۲۱)$$

¹ Crank-Nicolson method

در این رابطه، مطابق با شکل (۱-۳)، ناحیه محصور به منحنی Γ است. برای یک سیستم خطی، انتگرال J برای اعمال همزمان بارگذاری‌های اصلی و کمکی به صورت رابطه (۲۲-۳)، است.

$$J^s = J + J^{aux} + M \quad (22-3)$$

که در آن J و J^{aux} به ترتیب مقدار انتگرال J برای حالت اصلی و کمکی است و M انتگرال برهم‌کنش است که به صورت رابطه (۲۳-۳)، به دست می‌آید [۵۸].



شکل (۱-۳) تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به فرم ناحیه‌ای

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j}) q_{,j} dA \quad (23-3)$$

$$+ \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j})_{,j} dA$$

در رابطه (۲۳-۳)، W^{int} تابع چگالی انرژی کرنشی برهم‌کنش است و به صورت رابطه (۲۴-۳)، تعریف می‌شود.

$$W^{int} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux} + \sigma_{ik}^{aux} \varepsilon_{ik}^m) \quad (24-3)$$

با اعمال مشتق در عبارت دوم رابطه (۲۳-۳)، و با توجه به رابطه تعادل ($\sigma_{ij,j} = 0$) و رابطه سازگاری میدان‌های اصلی و کمکی، انتگرال برهم‌کنش به صورت رابطه (۲۵-۳)، به دست می‌آید.

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{ij}) q_{,j} dA$$

$$+ \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1j}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1j} - W_{,1}^{int}) q dA \quad (25-3)$$

مشتق W^{int} نسبت به x_1 به صورت رابطه (26-3)، بیان می شود.

$$\frac{W^{int}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} u_{i,j1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,j1} + \left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} \right)_{expl} \quad (26-3)$$

عبارت آخر رابطه (26-3) به شکل رابطه (27-3) است.

$$\left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} \right)_{expl} = \frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta C)} \frac{\partial(\Delta C)}{\partial x_1} \quad (27-3)$$

چگالی انرژی کرنشی برهم کنش با جایگذاری معادله ساختاری بر حسب کرنش کل (ε)، اختلاف دما (ΔT) و غلظت رطوبت (ΔC)، قابل بیان است (رابطه 28-3).

$$W^{int} = \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux} = \sigma_{11} \varepsilon_{11}^{aux} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^{aux} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12}^{aux}$$

$$= (Q_{11} \varepsilon_{11} + Q_{12} \varepsilon_{22} + 2Q_{13} \varepsilon_{12}) \varepsilon_{11}^{aux}$$

$$+ (Q_{21} \varepsilon_{11} + Q_{22} \varepsilon_{22} + 2Q_{23} \varepsilon_{12}) \varepsilon_{22}^{aux}$$

$$+ 2(Q_{31} \varepsilon_{11} + Q_{32} \varepsilon_{22} + 2Q_{33} \varepsilon_{12}) \varepsilon_{12}^{aux}$$

$$- (Q_{11} \lambda_1 + Q_{12} \lambda_2 + Q_{13} \lambda_3) \Delta T \varepsilon_{11}^{aux}$$

$$- (Q_{21} \lambda_1 + Q_{22} \lambda_2 + Q_{23} \lambda_3) \Delta T \varepsilon_{22}^{aux}$$

$$- 2(Q_{31} \lambda_1 + Q_{32} \lambda_2 + Q_{33} \lambda_3) \Delta T \varepsilon_{12}^{aux}$$

$$- (Q_{11} \gamma_1 + Q_{12} \gamma_2 + Q_{13} \gamma_3) \Delta C \varepsilon_{11}^{aux}$$

$$- (Q_{21} \gamma_1 + Q_{22} \gamma_2 + Q_{23} \gamma_3) \Delta C \varepsilon_{22}^{aux}$$

$$- 2(Q_{31} \gamma_1 + Q_{32} \gamma_2 + Q_{33} \gamma_3) \Delta C \varepsilon_{12}^{aux} \quad (28-3)$$

حال با مشتق گیری از رابطه (28-3) نسبت ΔT و ΔC روابط (29-3) و (30-3) به دست می آیند.

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} = -(Q_{11} \lambda_1 + Q_{12} \lambda_2 + Q_{13} \lambda_3) \varepsilon_{11}^{aux}$$

$$- (Q_{21} \lambda_1 + Q_{22} \lambda_2 + Q_{23} \lambda_3) \varepsilon_{22}^{aux}$$

$$- 2(Q_{31} \lambda_1 + Q_{32} \lambda_2 + Q_{33} \lambda_3) \varepsilon_{12}^{aux} \quad (29-3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta C)} = & -(Q_{11}\gamma_1 + Q_{12}\gamma_2 + Q_{13}\gamma_3)\varepsilon_{11}^{aux} \\ & - (Q_{21}\gamma_1 + Q_{22}\gamma_2 + Q_{23}\gamma_3)\varepsilon_{22}^{aux} \\ & - 2(Q_{31}\gamma_1 + Q_{32}\gamma_2 + Q_{33}\gamma_3)\varepsilon_{12}^{aux} \end{aligned} \quad (30-3)$$

با ساده سازی، روابط بالا به شکل زیر بازنویسی می شود.

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} = -(\tilde{Q}\lambda_i)\tilde{S}\sigma_i^{aux} = \lambda_i\sigma_i^{aux} \quad \text{و} \quad i = 1,2,6 \quad (31-3)$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta C)} = -(\tilde{Q}\gamma_i)\tilde{S}\sigma_i^{aux} = \gamma_i\sigma_i^{aux} \quad \text{و} \quad i = 1,2,6 \quad (32-3)$$

با جایگذاری دو رابطه به دست آمده در رابطه (3-25)، فرم نهایی انتگرال برهم کنش برای بارگذاری گرمایی-رطوبتی به صورت رابطه (3-33)، به دست می آید.

$$\begin{aligned} M = & \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - W^{int}\delta_{ij})q_{,j}dA \\ & + \int_A \left((\lambda_i\sigma_i^{aux}) + \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1} \right) q dA \\ & + \int_A \left((\gamma_i\sigma_i^{aux}) + \frac{\partial(\Delta C)}{\partial x_1} \right) q dA \end{aligned} \quad (33-3)$$

رابطه بین انتگرال برهم کنش و ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} در مواد ایزوتروپیک به صورت زیر است [66].

$$M = \frac{2}{\bar{E}} (K_I K_I^{aux} + K_{II}^{aux} K_{II}) \quad (34-3)$$

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \vartheta^2} \quad \text{کرنش صفحه ای} \quad (35-3)$$

$$\bar{E} = E \quad \text{تنش صفحه ای} \quad (36-3)$$

با انتخاب مناسب میدان های کمکی (مود I و مود II) ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} از رابطه (3-3)

(37)، به دست می آیند. همچنین میدان های جابه جایی کمکی برای ماده ایزوتروپیک به صورت روابط (3-38) و (3-39) تعریف می شوند [27].

$$(K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0) \longrightarrow K_I = \frac{\bar{E}}{2} M^{(1)} \quad (3-37\text{-الف})$$

$$(K_1^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1) \longrightarrow K_{II} = \frac{\bar{E}}{2} M^{(2)} \quad (37-3) \text{ ب}$$

$$u^{aux}(x, y) = \frac{K_I}{2\vartheta} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{2\vartheta} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (38-3)$$

$$v^{aux}(x, y) = \frac{K_I}{2\varpi} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{2\varpi} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (39-3)$$

در این روابط K_I و K_{II} مقدار ضریب شدت تنش و مقدار ϖ و k طبق رابطه (3-40)، تعریف می شوند.

$$\varpi = \frac{E}{2(1 + \vartheta)} \quad (3-40 \text{ الف})$$

$$k = \frac{3 - \vartheta}{1 + \vartheta} \quad \begin{array}{ll} \text{کرنش صفحه‌ای} & (3-40 \text{ ب}) \end{array}$$

$$k = 3 - 4\vartheta \quad \begin{array}{ll} \text{تنش صفحه‌ای} & (3-40 \text{ پ}) \end{array}$$

۳-۱- نتایج عددی

۳-۱-۱- باریکه دارای ترک لبه‌ای عمود تحت شوک گرمایی

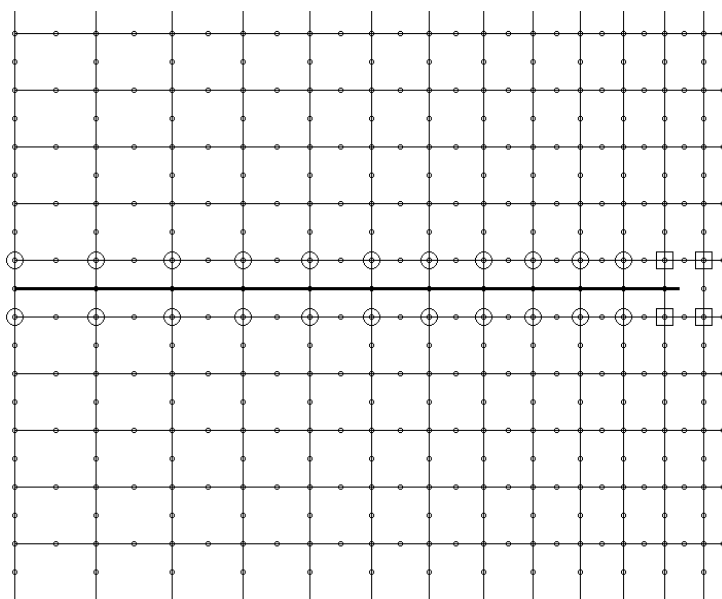
صفحه‌ای دوبعدی با طول $h = 4$ و عرض $b = 1$ واحد در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک لبه‌ای عمود است (مطابق شکل (۲-۱)). دمای اولیه $T_i = 5^\circ \text{C}$ ، صفحه در سمت چپ تا $T_f = 0^\circ \text{C}$ سرد می‌شود درحالی‌که، دما در لبه سمت راست در مقدار اولیه ثابت نگهداشته می‌شود. رطوبت در لبه سمت چپ و سمت راست، در مقدار اولیه $C_i = 0.1$ نگهداشته شده است. تمامی لبه‌های دیگر عایق گرمایی و رطوبتی در نظر گرفته شده است. خصوصیات ماده با توجه به مرجع [۵۲]، به صورت زیر است.

$$\beta = 2.68 \times 10^{-3} \text{ cm/cm } \%H_2O \quad \mathfrak{D} = 7.78 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{hr} \quad D = 7.78 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{hr} \\ v = 0.5 \text{ cm}^3/^\circ\text{C/g} \quad , \quad E = 64.3 \text{ GPa} \quad , \quad \lambda = 0.5 \text{ g/cm}^3/^\circ\text{C} \quad \alpha = 31.3 \times 10^{-6} \text{ cm/cm } ^\circ\text{C}$$

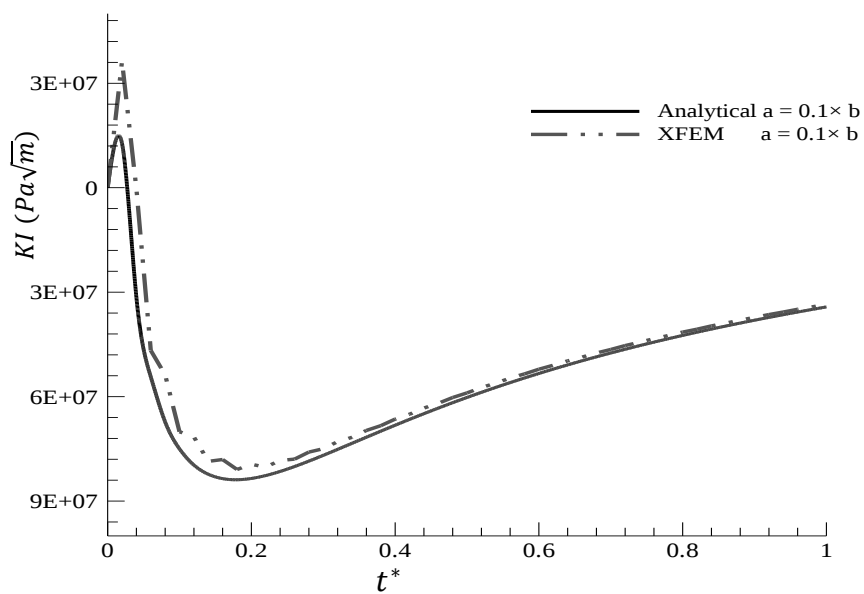
$\vartheta = 0.3$ در این مثال زمان مطابق با رابطه (3-41) بی بعد شده است.

$$t^* = \frac{\Delta t}{b^2} \quad (41-3)$$

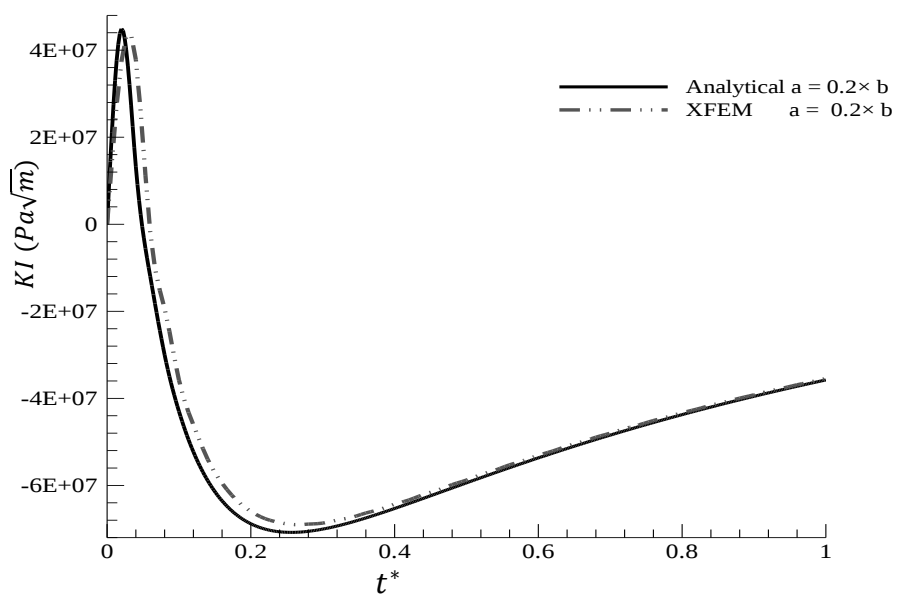
شبکه المانی 60×240 شامل المان‌های هشت‌گره‌ای ریز شونده، مطابق با شکل (۲-۳)، در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، مقدار تحلیلی ضریب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزنی نیز محاسبه شده است. تغییرات زمانی ضریب شدت تنش برای طول ترک‌های $a = 0.1 \times b$ ، $a = 0.2 \times b$ و $a = 0.3 \times b$ با استفاده از المان محدود توسعه‌یافته در مقایسه با روش تحلیلی در شکل‌های (۳-۳)، (۴-۳) و (۵-۳)، رسم شده است، مقادیر دما و رطوبت بی‌بعد و همچنین تنش، در زمان‌های $t^* = 0.02$ و $t^* = 0.26$ برای طول ترک $a = 0.2 \times b$ ، که ماکزیمم و مینیمم ضریب شدت تنش در آن رخ می‌دهد به ترتیب در شکل‌های (۶-۳)، (۷-۳) و (۸-۳) رسم شده است.



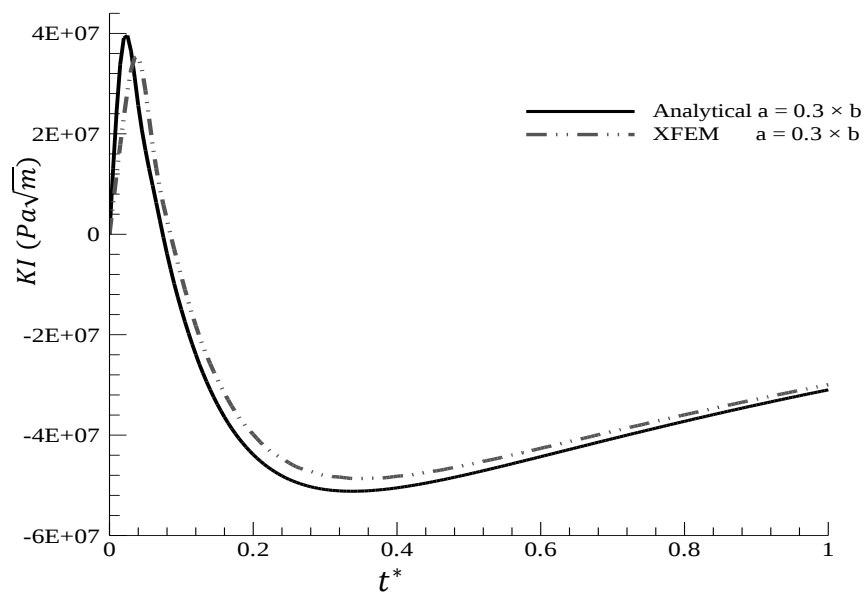
شکل (۲-۳) شبکه المانی هشت‌گره‌ای به همراه ترک لبه‌ای و گره‌های غنی‌شده



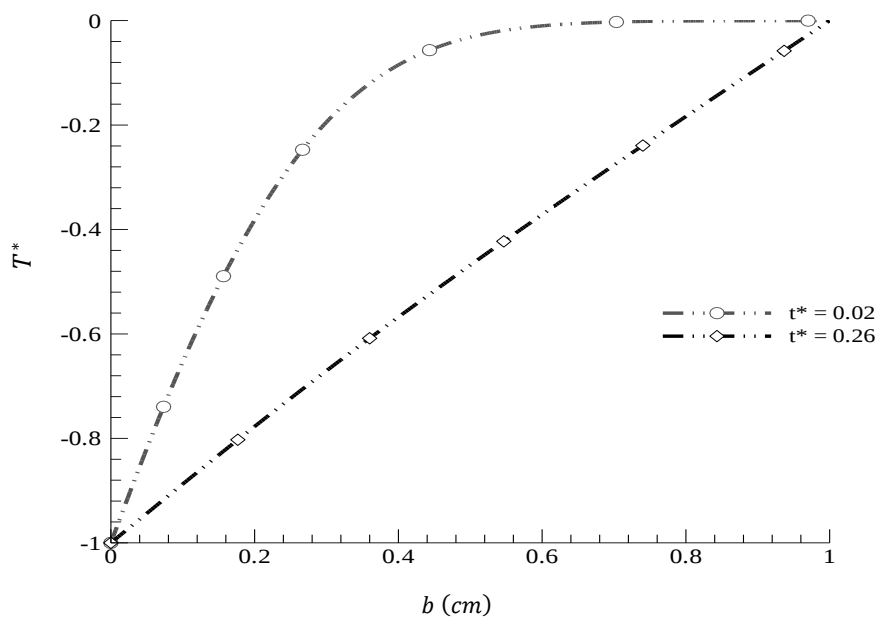
شکل (۳-۳) نمودار ضریب شدت تنش بر حسب زمان و طول ترک $0.1 \times b$



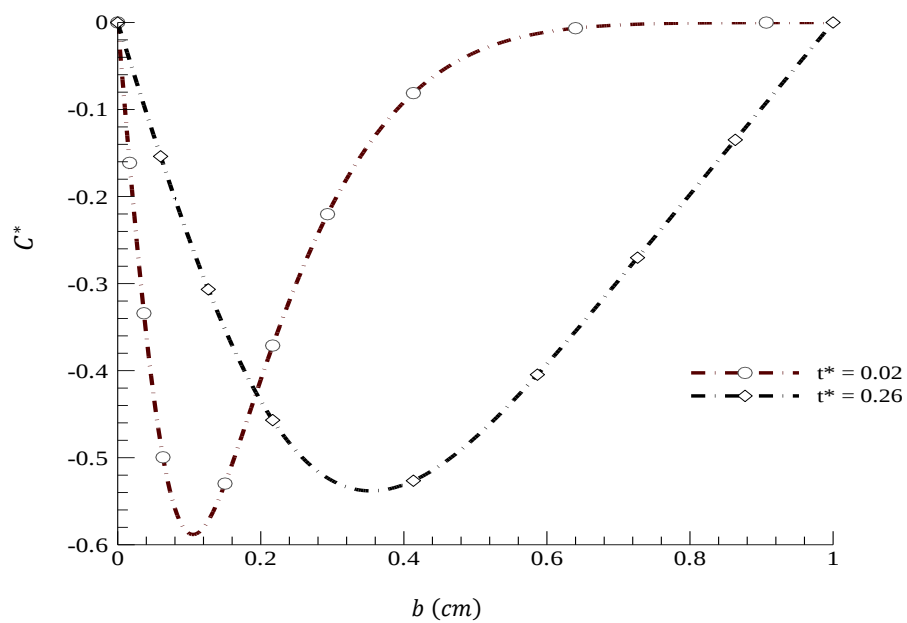
شکل (۴-۳) نمودار ضریب شدت تنش بر حسب زمان و طول ترک $0.2 \times b$



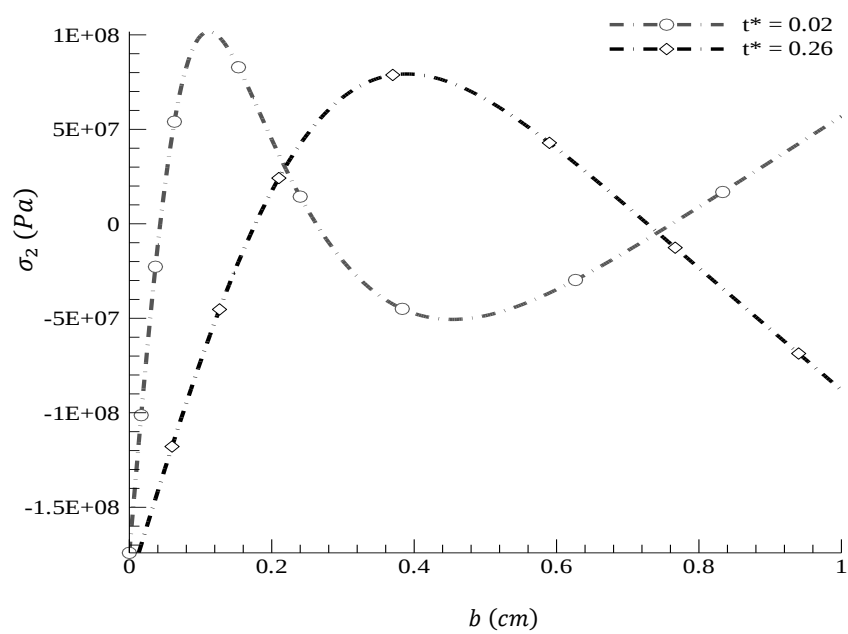
شکل (۳-۵) نمودار ضریب شدت تنش برحسب زمان و طول ترک $0.3 \times b$



شکل (۳-۶) نمودار دمای بی بعد در عرض یک باریکه ایزوتروپیک



شکل (۷-۳) نمودار رطوبت بی بعد در عرض یک باریکه ایزوتروپیک



شکل (۸-۳) نمودار تنش در عرض یک باریکه ایزوتروپیک

در لحظات اولیه بارگذاری گرمایی، رطوبت به دلیل سرعت کمتر انتشار نسبت به گرما، تغییر چندانی نخواهد داشت و ضریب شدت تنش عمدتاً متأثر از تغییر گرما در جسم است. این روند افزایشی ضریب شدت تنش برای ترک $a = 0.2 \times b$ تا زمان $t^* = 0.02$ ادامه دارد. سپس تا زمان $t^* = 0.26$ روند کاهشی پیدا خواهد کرد. پس از این زمان دما تغییری نداشته و به حالت پایا رسیده است. با این حال، انتشار رطوبت در ماده همچنان تا رسیدن به تعادل رطوبتی مطابق با شکل (۳-۴)، ادامه خواهد داشت. با توجه به نمودار دمای بی بعد، با شروع تغییر دما در لبه سمت چپ سایر نقاط جسم کاهش دما را تجربه کرده و برای هر نقطه در صفحه $\frac{\partial T^*}{\partial t} < 0$ خواهد بود. تا لحظه $t^* = 0.26$ ، که دما به حالت پایدار رسیده است این نرخ منفی تغییرات دما با توجه به رابطه (۳-۲)، معادل وجود یک چاه رطوبتی در معادله توزیع رطوبت خواهد بود. برای زمان‌های پس از $t^* = 0.26$ دما به حالت پایا رسیده است و $\frac{\partial T^*}{\partial t} = 0$ خواهد بود. بنابراین، چاه رطوبتی ناشی از نرخ تغییر دما از معادله توزیع رطوبت حذف خواهد شد. این امر باعث تغییر توزیع رطوبت به شکل غیرکوپل شده و رطوبت به آرامی و با توجه به توزیع جدید آن به سمت حالت پایا میل خواهد کرد. اثر این تغییر به شکل تغییر آرام ضریب شدت تنش به سمت صفر تا زمان تعادل رطوبتی بروز می‌کند. از آنجایی که این زمان با توجه به رابطه (۳-۴۱)، طولانی و توزیع دما مدت‌ها قبل به حالت پایدار رسیده است؛ توزیع رطوبت تنها عامل مؤثر بر ضریب شدت تنش خواهد بود. علاوه بر این، به خاطر کوپل بودن متقابل رطوبت و دما اثر نرخ توزیع رطوبت بر روی دما نیز قابل بیان خواهد بود. برخلاف دما که نرخ تغییر آن همواره منفی است، نرخ تغییر رطوبت برای زمان‌های قبل از $t^* = 0.02$ منفی ($\frac{\partial C^*}{\partial t} < 0$) و برای زمان‌های بعد از آن مثبت است ($\frac{\partial C^*}{\partial t} > 0$)، نرخ منفی رطوبت متقابلاً نقش چاه گرمایی برای توزیع دما را خواهد داشت. وجود چاه گرمایی باعث افزایش ضریب شدت تنش در قسمتی که این ضریب مثبت است، می‌شود. در بازه زمانی که $\frac{\partial C^*}{\partial t} > 0$ است، رطوبت نقش چشمه گرمایی را در معادله توزیع دما، با توجه به رابطه (۳-۲)، ایفا خواهد کرد. وجود چشمه گرمایی در معادله توزیع دما باعث

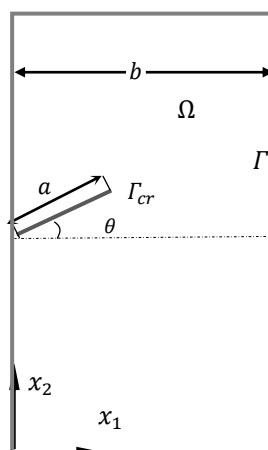
می‌شود دما دیرتر از حالت غیرکوپل - با توجه با رابطه (۳-۴۱) - به حالت پایا برسد. تغییر شدید ضریب شدت تنش با توجه به تفاوت زیاد کرنش‌های رطوبتی در قیاس با کرنش‌های گرمایی قابل بیان است. در بازه‌ای که گرما نقش چاه رطوبتی دارد، مقدار ΔC^* زیاد است و با توجه به اختلاف زیاد کرنش‌های یادشده - طبق رابطه (۲-۷) - و تأثیر این پارامترها بر انتگرال برهمکنش - طبق رابطه (۳-۳۳) - کاهش ضریب شدت تنش و نقش کنترل‌کننده رطوبت قابل توجیه است.

۳-۱-۲ - باریکه دارای ترک لبه‌ای مایل تحت شوک گرمایی

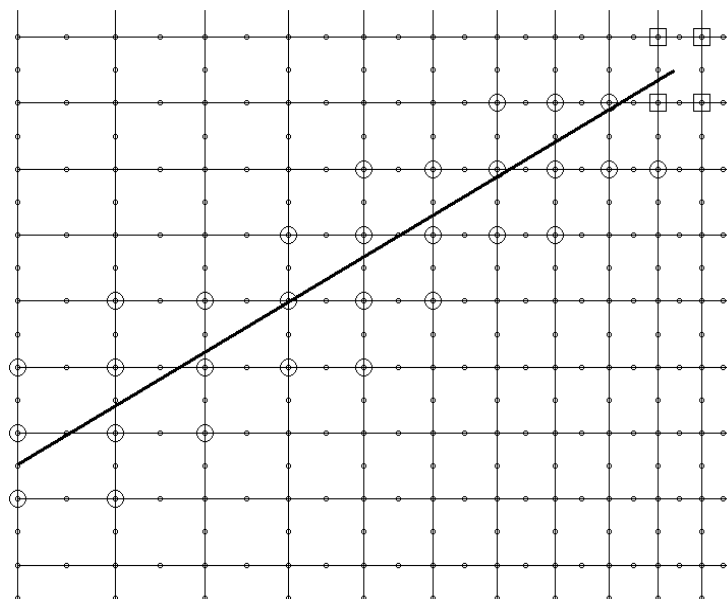
صفحه‌ای دوبعدی با طول $h = 4$ و عرض $b = 1$ واحد که دارای ترک لبه‌ای مایل است، در نظر گرفته می‌شود (مطابق شکل (۳-۹)). دمای لبه چپ صفحه از مقدار اولیه $T_i = 21^\circ\text{C}$ تا دمای $T_f = 0^\circ\text{C}$ سرد می‌شود. دما در لبه سمت راست در مقدار اولیه ثابت نگه‌داشته می‌شود. رطوبت در لبه سمت چپ و سمت راست، در مقدار اولیه $C_i = 0.1$ ثابت فرض شده است. همچنین، لبه‌های دیگر عایق گرمایی-رطوبتی در نظر گرفته شده است. خصوصیات ماده با توجه به مرجع [۴۵]، در نظر گرفته شده است. $E = 64.3 \text{ GPa}$ ، $D_0 = 1.53 \times 10^3 \text{ cm}^2/\text{hr}$ ، $\beta = 2.68 \times 10^{-3} \text{ cm}/^\circ\text{C}$ ، $\lambda = 0.5 \text{ g/cm}^3$ ، $E_0 = 1.25 \times 10^4 \text{ cal/gr mol}$ ، $\alpha = 31.3 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}^\circ\text{C}$ ، $\text{cm \%H}_2\text{O}$ ، $v = 0.5 \text{ cm}^3/\text{g}$ ، $\vartheta = 0.33$ ، $\frac{D}{D_0} = 0.1$ در این مثال، زمان مطابق رابطه (۳-۴۱) بی‌بعد شده است. شبکه المانی 60×240 شامل المان‌های هشت گره‌ای ریز شونده (مطابق با شکل (۳-۱۰))، در نظر گرفته شده است. در این حالت مقدار ضریب شدت تنش برای طول ترک $a = 0.2 \times b$ ، برای زوایای، صفر، 30، 45 و 60 درجه در شکل (۳-۱۱)، رسم شده است. همچنین، مقدار ضریب شدت تنش مود دوم، برای زوایای ذکرشده در شکل (۳-۱۲)، آمده است. در اینجا وابستگی ضریب نفوذ رطوبت به دما نیز به صورت رابطه تجربی (۳-۴۲) بیان می‌شود [۴۶].

$$D = D_0 \exp(-E_0/RT) \quad (۳-۴۲)$$

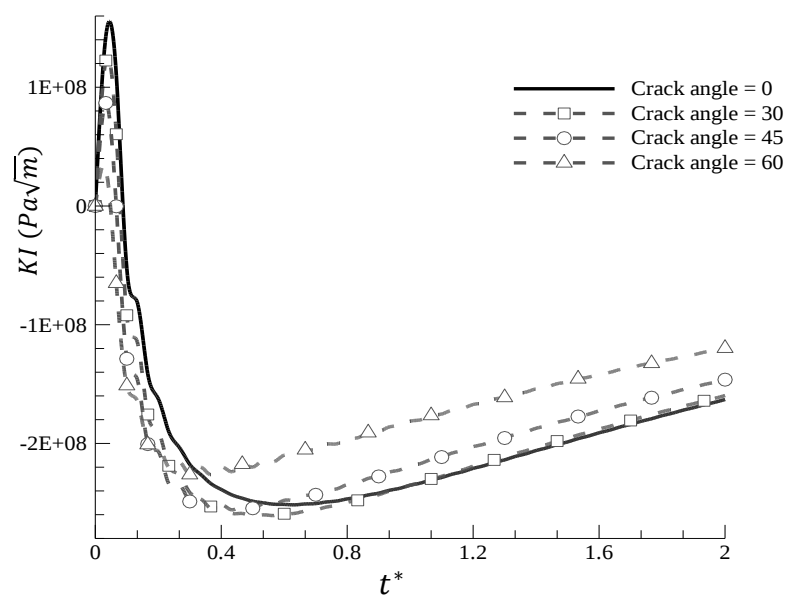
در این رابطه، E_0 انرژی موردنیاز برای نفوذ واحد جرم به نمونه، R ثابت عمومی گازها و T دمای مطلق می‌باشد. در نظر گرفتن ضریب پخش رطوبتی به شکل رابطه (۳-۴۲)، باعث افزایش زمان لازم برای رسیدن به حالت پایای رطوبتی و صفر شدن ضریب شدت تنش می‌شود، چراکه با توجه به این رابطه، در هر گام زمانی دما نسبت به حالت مرجع کاهش یافته و به دنبال آن ضریب پخش رطوبتی نیز کاهش خواهد یافت (نمایش چگونگی این کاهش در شکل (۳-۱۳)، آورده شده است)، بنابراین زمان بیشتری طول می‌کشد که رطوبت به حالت پایا برسد. در این حالت، طول دوره زمانی که در آن نرخ تغییر رطوبت نقش چشمه گرمایی را ایفا می‌کند افزایش یافته و با توجه به مطالب قبلی این امر باعث افزایش ضریب شدت تنش می‌گردد. با توجه به شکل (۳-۱۱)، مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه ترک مقدار بیشینه ضریب شدت تنش و همچنین زمان وقوع آن کاهش یافته است. مقادیر بیشینه ضریب شدت تنش مود اول و زمان وقوع آن، برای ترک با زوایای مختلف در جدول (۳-۱)، نشان داده شده است. همچنین با توجه به شکل (۳-۱۲)، مقدار ضریب شدت تنش مود دوم، با افزایش زاویه ترک افزایش خواهد یافت.



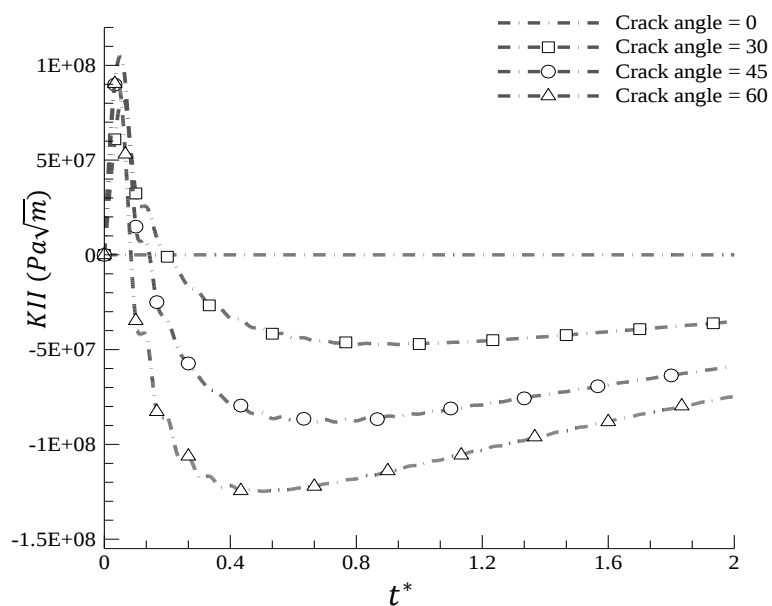
شکل (۳-۹) باریکه، با مرزهای داخلی شامل ترک زاویه ای، تحت بارگذاری گرمایی_ رطوبتی



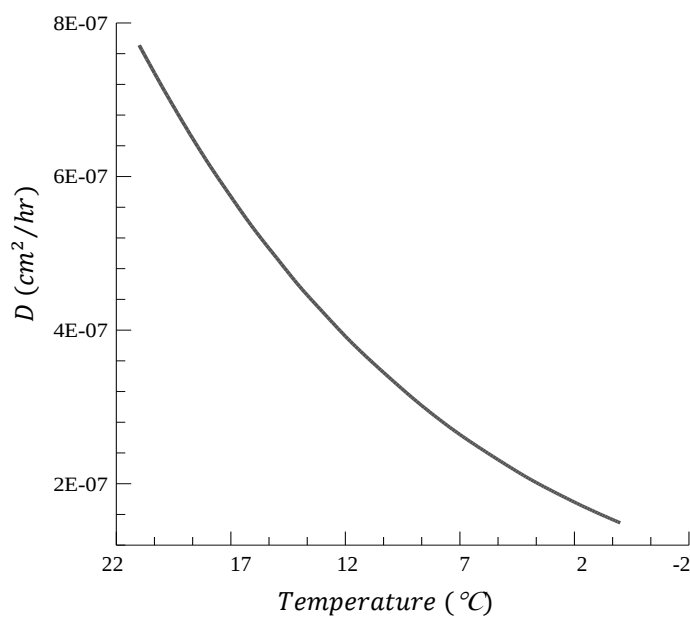
شکل (۳-۱۰) شبکه المانی هشت گره‌ای به همراه ترک لبه‌ای و گره‌های غنی‌شده



شکل (۳-۱۱) نمودار ضریب شدت تنش مود I، برای زاویه‌های مختلف ترک، در یک باریکه ایزوتروپیک



شکل (۱۲-۳) نمودار ضریب شدت تنش مود II برای زاویه‌های مختلف ترک، در یک باریکه ایزوتروپیک



شکل (۱۳-۳) نمودار تغییرات ضریب پخش رطوبت برحسب دما

جدول (۱-۳) زمان و مقدار بیشینه ضریب شدت تنش برای زوایای مختلف

زاویه ترک	زمان	بیشینه ضریب شدت تنش ($Pa\sqrt{m}$)
0°	0.033	1.4277×10^8
30°	0.025	1.2251×10^8
45°	0.02	1.1854×10^8
60°	0.0181	6.5134×10^7

فصل چهارم

حل عددی

باریکه ارتوتروپیک تحت بارگذاری

رطوبتی-گرمایی

۱-۴- مقدمه

در این فصل با استفاده از رهیافت به دست آمده در فصل قبل برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مواد ایزوتروپیک، به محاسبه این ضرایب در یک محیط دوبعدی مستطیلی ارتوتروپیک پرداخته می شود. هدف، بررسی تأثیرات بارگذاری های مرزی، زاویه ترک و همچنین زاویه ناهمسانگردی، بر روی ضرایب شدت تنش در این مواد است. با توسعه انتگرال برهم کنش برای این مواد تحت بارگذاری های رطوبتی- گرمایی به محاسبه ضرایب شدت تنش پرداخته می شود.

۲-۴- معادلات حاکم

معادلات حاکم در این حالت مشابه فصل های قبل بوده و تفاوت در ایزوتروپیک و ارتوتروپیک بودن مواد، رابطه ساختاری تنش- کرنش را تحت تأثیر قرار می دهد.

$$\sigma = \tilde{Q} : (\varepsilon - \varepsilon^{th} - \varepsilon^{mo}) \quad (۱-۴)$$

که در آن، مقادیر ε^{th} و ε^{mo} به شکل زیر به دست می آیند.

$$\begin{aligned} \varepsilon^{th} &= \gamma \Delta T \\ \varepsilon^{mo} &= \zeta \Delta C \end{aligned} \quad (۲-۴)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \zeta = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{تنش صفحه ای} \quad (۳-۴)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \begin{Bmatrix} \vartheta_{31}\alpha_3 + \alpha_1 \\ \vartheta_{32}\alpha_3 + \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \zeta &= \begin{Bmatrix} \vartheta_{31}\beta_3 + \beta_1 \\ \vartheta_{32}\beta_3 + \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{کرنش صفحه ای} \\ (۴-۴) \end{array}$$

در این روابط، Q تانسور مرتبه چهارم الاستیک، α ضریب انبساط گرمایی و β ضریب انبساط رطوبتی است. ε تانسور کرنش کل، ε^{th} تانسور کرنش گرمایی، ε^{mo} تانسور کرنش رطوبتی است. تانسور الاستیک (سفتی) در مواد ارتوتروپیک به صورت رابطه های زیر تعریف می شود.

$$[Q] = \frac{1}{(1 - \vartheta_{21}\vartheta_{12})} \begin{bmatrix} E_1 & \vartheta_{12}E_2 & 0 \\ \vartheta_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \vartheta_{21}\vartheta_{12})G_{12} \end{bmatrix} \quad \text{تنش صفحه‌ای} \quad (۵-۴)$$

۳-۴- انتگرال برهم‌کنش

انتگرال برهم‌کنش در این حالت مشابه حالت ایزوتروپیک است؛ با این تفاوت که رابطه ساختاری بیان‌شده در بخش قبل، با رابطه ساختاری حالت ایزوتروپیک جایگزین خواهد شد. میدان‌های کمکی تنش و جابه‌جایی برای ماده ارتوتروپیک، میدان‌های معرفی‌شده در فصل اول خواهند بود (روابط ۱-۸) و (۱-۹). رابطه بین انتگرال برهم‌کنش و ضرایب شدت تنش در مواد ارتوتروپیک به شکل زیر بیان‌شده است [۵۹].

$$M = 2c_{11}K_I K_I^{aux} + c_{12}(K_I K_{II}^{aux} + K_I^{aux} K_{II}) + 2c_{22}K_{II} K_{II}^{aux} \quad (۷-۴)$$

$$c_{11} = -\frac{a_{22}}{2} \text{Im} \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right) \quad (۸-۴ \text{ الف})$$

$$c_{12} = -\frac{a_{22}}{2} \text{Im} \left(\frac{1}{\mu_1 \mu_2} \right) + \frac{a_{11}}{2} \text{Im}(\mu_1 \mu_2) \quad (۸-۴ \text{ ب})$$

$$c_{22} = \frac{a_{11}}{2} \text{Im}(\mu_1 + \mu_2) \quad (۸-۴ \text{ پ})$$

در رابطه بالا a_{ij} ، اعضای ماتریس نرمی کاهش‌یافته است؛ که بر اساس فرض حالت صفحه‌ای به‌صورت تابعی از ماتریس نرمی S_{ij} بیان می‌شوند. مقادیر μ_k ریشه‌های معادله مشخصه با قسمت موهومی مثبت است که در فصل اول معرفی‌شده است (رابطه ۱-۲۲). انتخاب مناسب میدان‌های کمکی (مود I و مود II) ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$(K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0) \longrightarrow M^{(1)} = 2c_{11}K_I + c_{12}K_{II} \quad (۹-۴ \text{ الف})$$

$$(K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1) \longrightarrow M^{(2)} = c_{12}K_I + 2c_{22}K_{II} \quad (۹-۴ \text{ ب})$$

با حل دستگاه معادلات فوق برحسب $M^{(1)}$ و $M^{(2)}$ ، ضرایب شدت تنش به شکل رابطه (۴-۱۰)، به دست می‌آیند.

$$K_I = \frac{2c_{22}M^{(1)} - c_{12}M^{(2)}}{4c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \quad (۱۰-۴ \text{ الف})$$

$$K_{II} = \frac{2c_{11}M^{(1)} - c_{12}M^{(2)}}{4c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \quad (۴-۱۰-ب)$$

۴-۴- نتایج عددی

۴-۴-۱- باریکه دارای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری رطوبتی-گرمایی

صفحه‌ای دوبعدی با طول $h = 4$ و عرض $b = 1$ واحد در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک لبه‌ای عمود است (مطابق شکل (۴-۱)). به‌منظور مشاهده رفتار ضریب شدت تنش در ارتباط با بارگذاری‌های مختلف و تغییر زاویه ترک و ناهمسانگردی، حالات مختلفی در نظر گرفته می‌شود. دمای اولیه $T_i = 21^\circ\text{C}$ فرض شده است. در حالت اول، باریکه در سمت چپ تا $T_f = 10^\circ\text{C}$ سرد می‌شود درحالی‌که دما در لبه سمت راست در مقدار اولیه ثابت نگه‌داشته شده است. رطوبت در لبه سمت چپ و سمت راست، در مقدار اولیه $C_i = 0.1$ نگه‌داشته می‌شود. تمامی لبه‌های دیگر عایق گرمایی و رطوبتی خواهند بود. در حالت دوم لبه سمت چپ به‌اندازه $T_f = 32^\circ\text{C}$ گرم شده است. حالت سوم اشاره به شرایطی دارد که دما در لبه سمت راست و چپ با دمای اولیه یکسان بوده و رطوبت در لبه سمت چپ به‌اندازه $C_f = 0.0$ ، کاهش‌یافته درحالی‌که رطوبت اولیه و رطوبت در لبه سمت راست در مقدار $C_i = 0.1$ ثابت نگه‌داشته شده است. حالت چهارم مشابه حالت سوم بوده با این تفاوت که رطوبت در لبه سمت چپ به‌اندازه $C_f = 0.2$ افزایش‌یافته است. خصوصیات ماده با توجه به مراجع‌های [۴۱]، [۴۶]، به‌صورت زیر است.

$$E_2 = 79.7 \text{ GPa} \quad E_1 = 64.3 \text{ GPa} \quad \nu_1 = 5 \quad \nu_2 = 10 \times D \quad E_0 = 1.25 \times 10^4 \text{ cal/g.mol}$$

$$D_0 = 1.53 \times 10^3 \text{ cm}^2/\text{hr} \quad \alpha = 0.5 \text{ cm}^3/\text{g}^\circ\text{C} \quad \lambda = 0.5 \text{ g/cm}^3^\circ\text{C} \quad \theta_{12} = 0.33$$

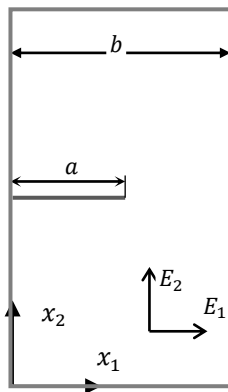
$$\alpha_1 = \alpha_2 = 31.3 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}^\circ\text{C} \quad D_1 = D_2 = D \quad \beta_1 = \beta_2 = 2.68 \times 10^{-3} \text{ cm/cm} \%H_2O$$

در این مثال زمان مطابق با رابطه (۴-۱۱) بی‌بعد شده است.

$$t^* = \frac{\nu_1 t}{b^2} \quad (۴-۱۱)$$

حالات مختلف اشاره شده در جدول (۱-۴) نشان داده شده است. اندیس f بیانگر حالت نهایی رطوبت و یا دما، در لبه سمت چپ است و حالت در لبه سمت راست مشابه حالت اولیه است. شبکه المانی 60×160 ، شامل المانهای هشت گره ای ریز شونده به سمت نوک ترک، در نظر گرفته شده است. در این مثال، ضریب پخش رطوبت، بر اساس رابطه تجربی (۱۲-۴)، با دما تغییر می کند. زاویه الیاف در این حالت صفر در نظر گرفته شده است.

$$D = D_0 \exp(-E_0/RT) \quad (12-4)$$



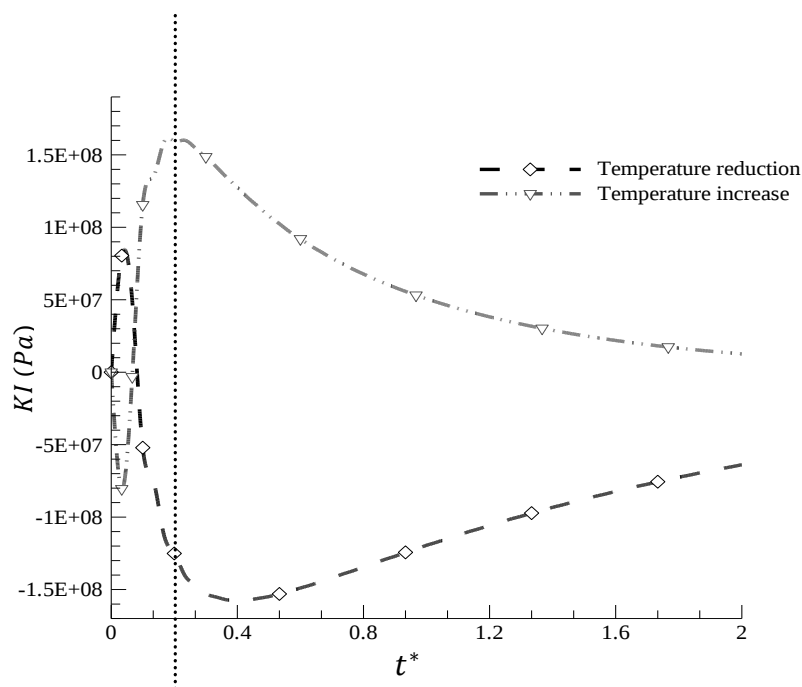
شکل (۱-۴) باریکه ارتوتروپیک، با مرزهای داخلی به همراه ترک لبه ای و زاویه ناهمسانگردی صفردرجه، تحت بارگذاری گرمایی_ رطوبتی

جدول (۱-۴) شرایط اولیه و مرزی برای دما و رطوبت

C_f	C_i	T_f	T_i	
0.1	0.1	10 °C	21 °C	حالت اول
0.1	0.1	32 °C	21 °C	حالت دوم
0.0	0.1	21 °C	21 °C	حالت سوم
0.2	0.1	21 °C	21 °C	حالت چهارم

مقایسه‌ی تغییرات ضریب شدت تنش در حالت اول با حالت دوم، در شکل (۴-۲)، رسم شده است. با توجه به این شکل، چگونگی تغییرات ضریب شدت تنش در حالت کاهش دما، مشابه با حالت ایزوتروپیک به دست آمده در فصل قبل است. این تغییرات در حالت افزایش دمای لبه، عکس حالت کاهش دما خواهد بود. بر اساس این نمودار بیشینه مقادیر مثبت و منفی ضریب شدت تنش، برای حالت دوم که جسم افزایش دما در لبه سمت چپ را تجربه می‌کند، در زمان کوتاه‌تری رخ خواهد داد. این امر می‌تواند بیانگر این موضوع باشد؛ که احتمال رشد ترک در حالت افزایش دما، نسبت به حالتی که دما کاهش یافته، در مدت زمان کمتری وجود دارد.

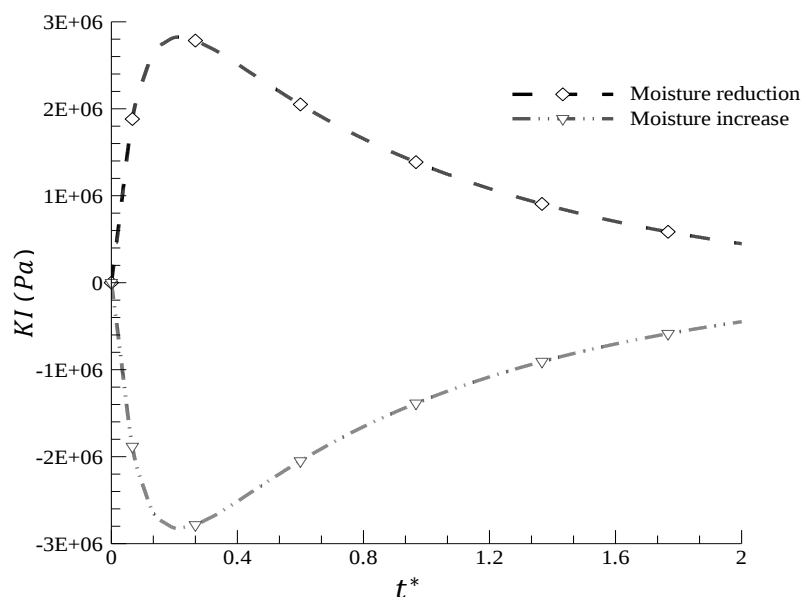
با توجه به رابطه (۴-۱۲)، افزایش دما در یک نقطه از جسم، باعث افزایش ضریب پخش رطوبت در آن



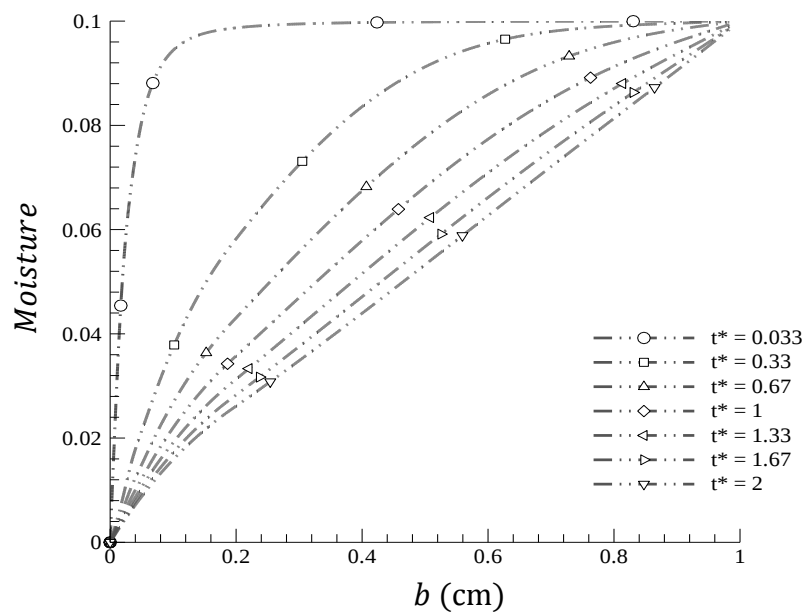
شکل (۴-۲) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش بر حسب زمان، در یک باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفر درجه، برای حالت‌های افزایش و کاهش دما در لبه سمت چپ

نقطه خواهد شد، با توجه به اینکه ضریب پخش رطوبت، معیاری برای سرعت پخش رطوبت در جسم است، این افزایش سرعت انتشار، دلیل کاهش زمان رسیدن به حداکثر میزان ضریب شدت تنش می‌باشد.

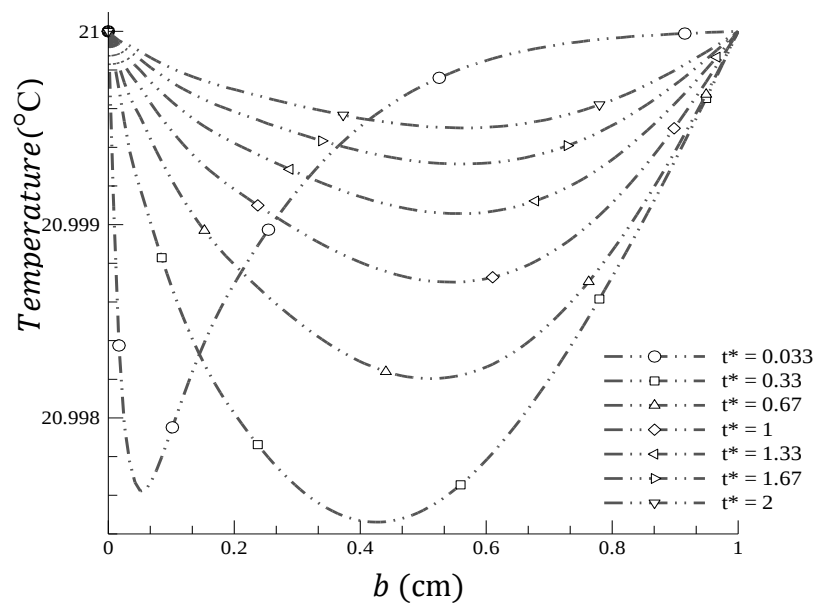
تغییرات ضریب شدت تنش برای حالت سوم در مقایسه باحالت چهارم، در شکل (۴-۳)، رسم شده است. در این حالت برخلاف حالت‌های مطالعه شده قبل، تنها یک قله در نمودار مشاهده می‌شود. به‌منظور درک بهتر چگونگی این تغییرات، نمودار تغییرات رطوبت و دما در زمان‌های مختلف، برای حالت سوم، در شکل‌های (۴-۴) و (۴-۵) و برای حالت چهارم، در شکل‌های (۴-۶) و (۴-۷)، نشان داده شده است.



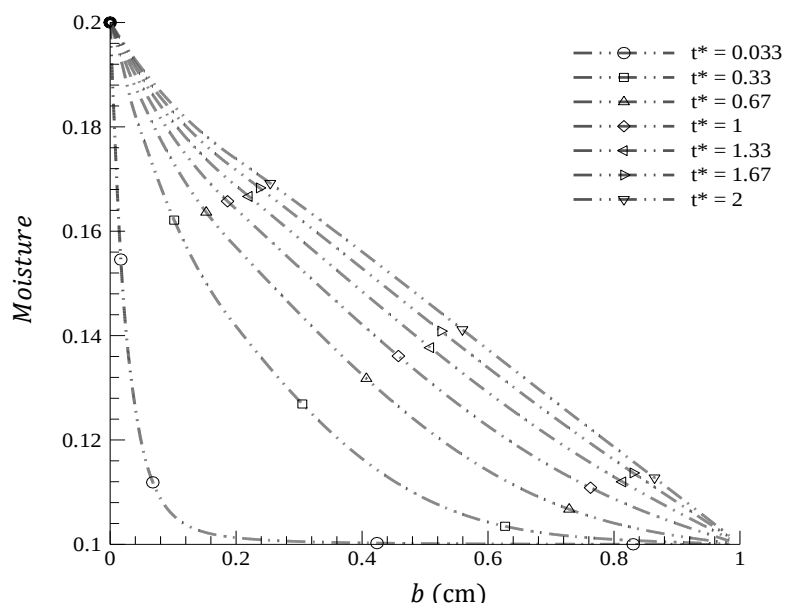
شکل (۴-۳) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش برحسب زمان، در یک باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفردرجه، برای حالت‌های افزایش و کاهش رطوبت در لبه سمت چپ



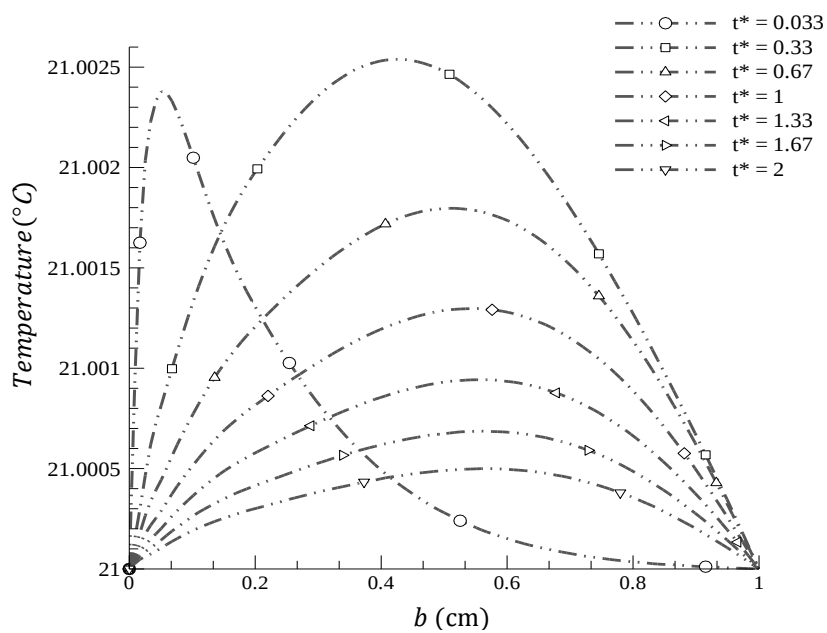
شکل (۴-۴) رطوبت در عرض باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفردرجه ، در زمان‌های مختلف و کاهش آن در لبه سمت چپ



شکل (۵-۴) دما در عرض باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفردرجه، در زمان‌های مختلف و کاهش آن در لبه سمت چپ



شکل (۴-۶) رطوبت در عرض باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفردرجه، در زمان‌های مختلف و افزایش آن در لبه سمت چپ

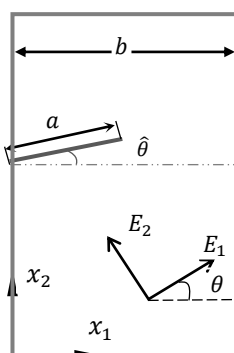


شکل (۴-۷) دما در عرض باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفردرجه، در زمان‌های مختلف و افزایش آن در لبه سمت چپ

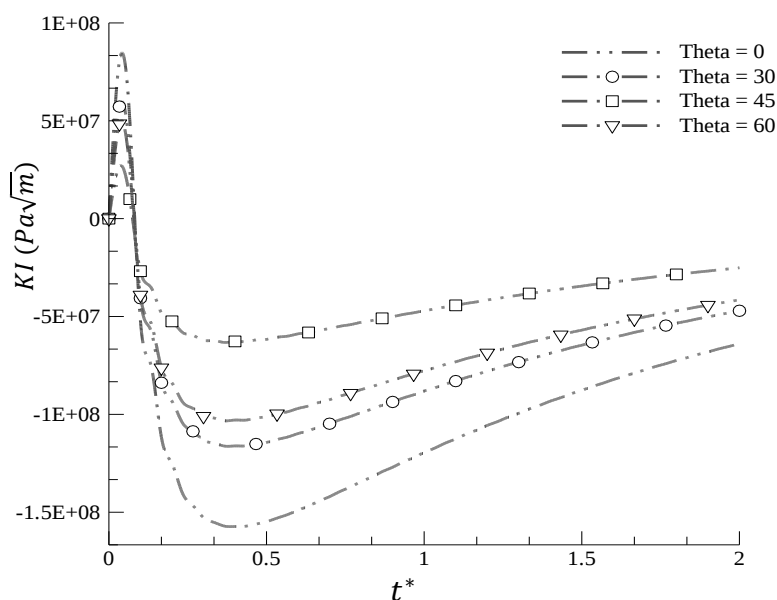
با توجه به نمودار توزیع دما در عرض باریکه در شکل‌های (۴-۵) و (۴-۷)، تغییرات دما در این حالت بسیار اندک بوده و به راحتی قابل صرف نظر کردن هستند؛ بنابراین دما در صفحه در دمای اولیه ثابت مانده است. همان طور که در فصل‌های قبل اشاره شد، قله اول در نمودار ضریب شدت تنش، ناشی از تغییرات دما در جسم می‌باشد؛ با توجه به تغییرات بسیار اندک دما در این حالت، این قله در نمودار به وجود نخواهد آمد. با توجه به شکل (۴-۴)، در لحظات اولیه، رطوبت از حالت پایه، برای نقاط نزدیک به لبه، با شدت زیادی کاهش یافته است؛ در حالی که بقیه نقاط هنوز تغییر رطوبت را حس نکرده‌اند. در این حالت برای تمام نقاط جسم در طول زمان، $\Delta C < 0$ خواهد بود. با در نظر گرفتن هر نقطه دلخواه از صفحه و در یک همسایگی کوچک از آن، تغییرات ΔC ، مثبت خواهد بود؛ بنابراین با توجه به رابطه انتگرال برهم کنش (رابطه (۳-۳۳))، با صرف نظر از انتگرال اول (ناشی از بارگذاری مکانیکی) و انتگرال دوم (ناشی از بارگذاری دمایی)، $\frac{\partial \Delta C}{\partial x_1}$ همواره مثبت بوده و این امر بیانگر مثبت بودن ضریب شدت تنش در این حالت خواهد بود. با توجه به اینکه تغییرات ΔC در لحظات اولیه برای کلیه نقاط جسم، در مقایسه با این تغییرات در لحظات بعدی بیشتر است، صعود مقادیر ضریب شدت تنش در لحظات اولیه قابل توجیه خواهد بود. با گذشت زمان که جسم به تعادل رطوبتی نزدیک می‌شود، مقدار ΔC به صفر نزدیک شده و به تبعیت از آن ضریب شدت تنش نیز به سمت صفر میل می‌کند.

مشابه به همین استدلال را در جهت عکس برای افزایش رطوبت در لبه می‌توان به کاربرد. با توجه به شکل (۴-۶)، رطوبت در هر نقطه از جسم و برای هر زمان، بیشتر از رطوبت اولیه بوده و در هر نقطه دلخواه و همسایگی آن، $\frac{\partial \Delta C}{\partial x_1}$ منفی خواهد بود. این امر با توجه به رابطه به دست آمده برای انتگرال برهم کنش، منفی بودن ضریب شدت تنش را ایجاب می‌کند. همانند قبل، بزرگ بودن ضریب شدت تنش، با توجه به بیشتر بودن تغییرات ΔC ، در زمان‌های اولیه برای کل جسم، نسبت به تغییرات آن در زمان‌های بعدی، قابل توجیه است. همچنین بزرگ بودن ضریب شدت تنش در لحظات

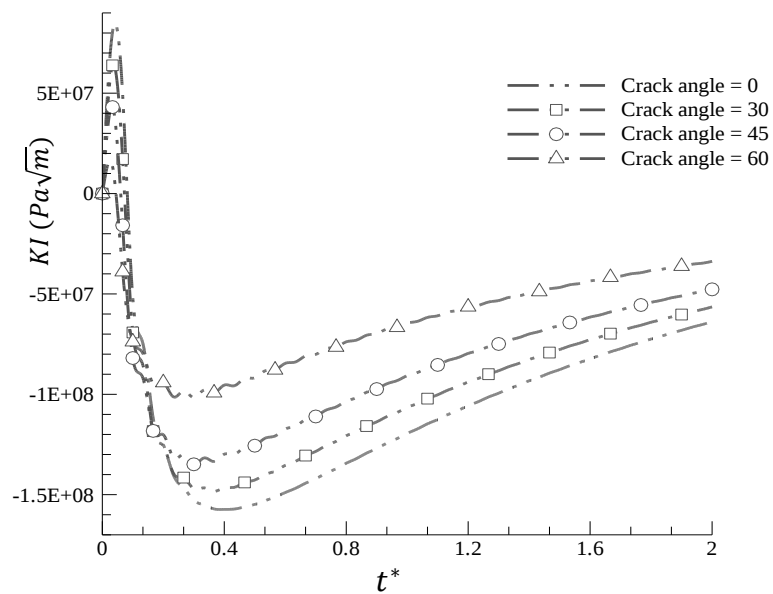
اولیه در هر دو حالت مورد بحث، بیانگر بیشتر بودن احتمال رشد ترک در هریک از این دو حالت، در لحظات اولیه اعمال بار خواهد بود. به منظور مشاهده تأثیرات زاویه ناهمسانگردی (شکل (۴-۸)) و زاویه ترک، بر مقدار ضریب شدت تنش در صفحه ارتوتروپیک این تغییرات در شکل‌های (۴-۹) و (۴-۱۰)، برای مود اول و در شکل‌های (۴-۱۱) و (۴-۱۲)، برای مود دوم، نشان داده شده است.



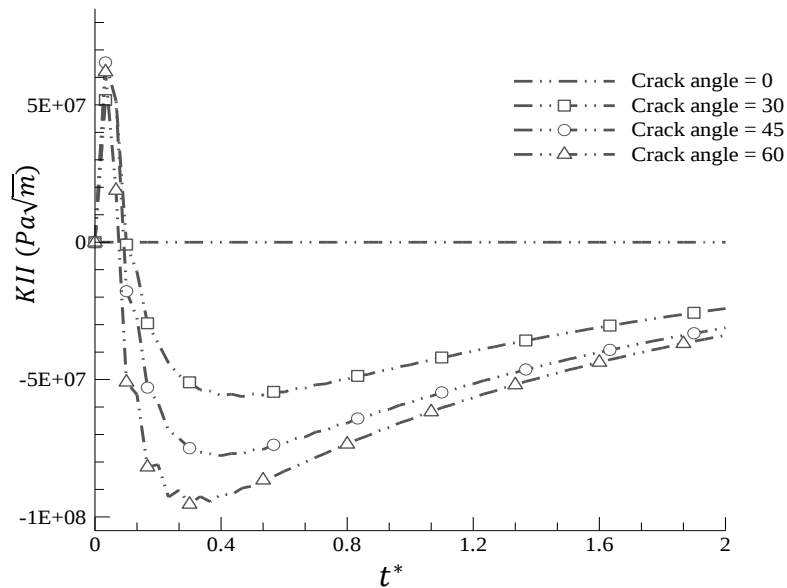
شکل (۴-۸) باریکه ارتوتروپیک با مرزهای داخلی به همراه ترک لبه‌ای و زاویه ناهمسانگردی، تحت بارگذاری گرمایی رطوبتی



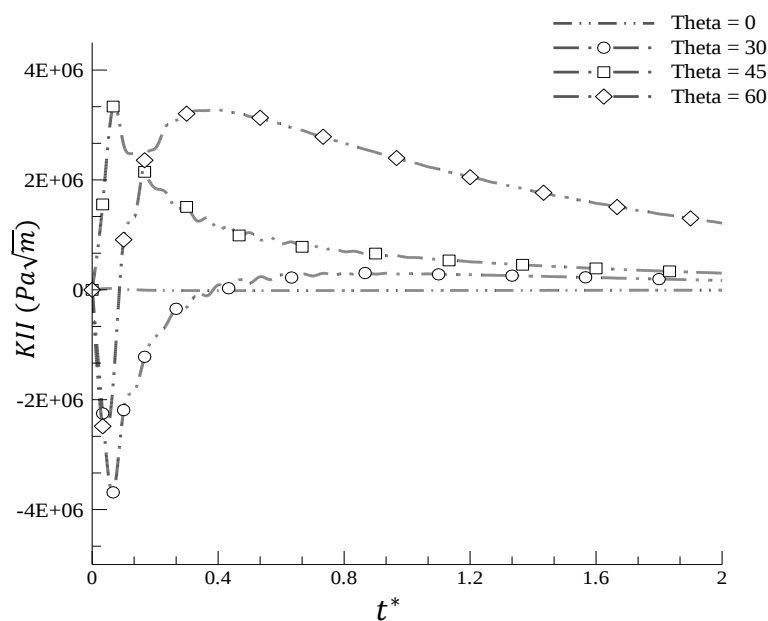
شکل (۴-۹) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش مود I، در یک باریکه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی و زاویه ترک صفر درجه



شکل (۴-۱۰) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش مود I، در یک باریکه ارتوتروپیک با زاویه ناهمسانگردی صفردرجه، برای زوایای مختلف ترک



شکل (۴-۱۱) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش مود II، در یک باریکه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ترک و زاویه ناهمسانگردی صفر درجه



شکل (۴-۱۲) مقایسه نمودار ضریب شدت تنش مود II، در یک باریکه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی و زاویه ترک صفر درجه

با توجه به نمودارهای به دست آمده برای بارگذاری موردنظر، ضریب شدت تنش مود I با افزایش زاویه ترک کاهش و ضریب شدت تنش مود II، افزایش خواهد یافت. کاهش تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به تغییر زاویه ناهمسانگردی برای مود I، یکنواخت نبوده و این تغییرات برای مود II، برحسب زاویه می تواند افزایش و یا کاهش داشته باشد.

فصل پنجم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۵-۱- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، از روش المان محدود توسعه‌یافته برای تحلیل ترک لبه‌ای، در یک محیط دوبعدی مستطیلی که تحت بارگذاری رطوبتی- گرمایی قرار دارد، استفاده شده است. همچنین یک حل تحلیلی برای محیط دوبعدی ایزوتروپیک با استفاده از تابع وزنی ارائه شده است. مثال‌های متعددی برای ترک با طول‌ها و زاویه‌های مختلف در مواد ایزوتروپیک و همچنین زوایای ناهمسانگردی مختلف برای ماده ارتوتروپیک آورده شده است. در حالت اول نتایج با جواب تحلیلی ارائه شده مقایسه شده است. بر اساس نتایج، در ابتدای اعمال بارهای گرمایی، ضرایب شدت تنش تا یک مقدار حداکثری مثبت رشد کرده و به شکل ناگهانی تغییر علامت می‌دهند. این تغییر علامت برای بارگذاری‌های رطوبتی به‌تنهایی، مشاهده نخواهد شد. در هر صورت، این مسئله علاوه بر اینکه نشان‌دهنده اهمیت بارگذاری رطوبتی بوده بیانگر این است که امکان ایجاد رشد ترک در زمان‌های ابتدایی بیشتر خواهد بود. همچنین مقدار بیشینه اشاره شده وابسته به زاویه ترک بوده و در مواد ارتوتروپیک به زاویه ناهمسانگردی نیز وابسته می‌باشد. ضریب شدت تنش مود I با افزایش زاویه ترک کاهش و ضریب شدت تنش مود II، افزایش خواهد یافت. کاهش تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به تغییر زاویه ناهمسانگردی برای مود I، یکنواخت نبوده و این تغییرات برای مود II، برحسب زاویه می‌تواند افزایش و یا کاهش داشته باشد.

۵-۲- پیشنهادها

۱. بررسی ضرایب شدت تنش در مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی با شرایط

مرزی و هندسه پیچیده‌تر

۲. بررسی ضرایب شدت تنش در مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی با فرض کوپل

بین حرارت، رطوبت و جابه‌جایی

۳. درنظر گرفتن توزیع گرما و رطوبت با روابط ساختاری غیر کلاسیک (غیر فوری‌ای و غیر فیک)

- [1] T. Belytschko and T. Black, (1999) "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 45, 5, pp 601–620.
- [2] J. Dolbow and T. Belytschko, (1999) "A finite element method for crack growth without remeshing," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 46, 1, pp 131–150.
- [3] J. E. Dolbow, (1999) *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*. Northwestern university.
- [4] N. Sukumar and T. Belytschko, (2000) "Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 48, pp 1741–1760.
- [5] J. Dolbow, N. Moës, and T. Belytschko, (2000) "Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method," *Finite Elem. Anal. Des.*, 36, 3, pp 235–260.
- [6] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, and T. Belytschko, (2000) "Extended finite element method for three-dimensional crack modelling," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 48, 11, pp 1549–1570.
- [7] M. Stolarska, D. L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko, (2001) "Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 51, 8, pp 943–960.
- [8] N. Sukumar, D. L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko, (2001) "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 190, 46, pp 6183–6200.
- [9] A. Asadpoure, S. Mohammadi, and A. Vafai, (2006) "Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method," *Thin-Walled Struct.*, 44, 9, pp 1031–1038.
- [10] A. Asadpoure, S. Mohammadi, and A. Vafai, (2006) "Modeling crack in orthotropic media using a coupled finite element and partition of unity methods," *Finite Elem. Anal. Des.*, 42, 13, pp 1165–1175.
- [11] A. Asadpoure and S. Mohammadi, (2007) "Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 69, 10, pp 2150–2172.
- [12] T. Menouillard and T. Belytschko, (2010) "Dynamic fracture with meshfree enriched XFEM," *Acta Mech.*, 213, 1–2, pp 53–69.
- [13] D. Motamedi and S. Mohammadi, (2010) "Dynamic crack propagation analysis of orthotropic media by the extended finite element method," *Int. J. Fract.*, 161, 1, pp 21–39.
- [14] D. Motamedi and S. Mohammadi, (2010) "Dynamic analysis of fixed cracks in composites by the extended finite element method," *Eng. Fract. Mech.*, 77, 17, pp 3373–3393.
- [15] C. F. Shih, B. Moran, and T. Nakamura, (1986) "Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body," *Int. J. Fract.*, 30, 2, pp 79–102.

- [16] W. K. Wilson and I.-W. Yu, (1979) "The use of the J-integral in thermal stress crack problems," *Int. J. Fract.*, 15, 4, pp 377–387.
- [17] N. N. V Prasad, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke, (1994) "The dual boundary element method for thermoelastic crack problems," *Int. J. Fract.*, 66, 3, pp 255–272.
- [18] S. T. Raveendra and P. K. Banerjee, (1992) "Boundary element analysis of cracks in thermally stressed planar structures," *Int. J. Solids Struct.*, 29, 18, pp 2301–2317.
- [19] N. N. V Prasad, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke, (1996) "The dual boundary element method for transient thermoelastic crack problems," *Int. J. Solids Struct.*, 33, 19, pp 2695–2718.
- [20] D. N. Dell'Erba, M. H. Aliabadi, and D. P. Rooke, (1998) "Dual boundary element method for three-dimensional thermoelastic crack problems," *Int. J. Fract.*, 94, 1, pp 89–101.
- [21] N. Noda, (1997) "Thermal stresses intensity factor for functionally gradient plate with an edge crack," *J. Therm. Stress.*, 20, 3–4, pp 373–387.
- [22] T. Fujimoto and N. Noda, (2000) "Crack propagation in a functionally graded plate under thermal shock," *Arch. Appl. Mech.*, 70, 6, pp 377–386.
- [23] T. Fujimoto and N. Noda, (2001) "Two crack growths in a functionally graded plate under thermal shock," *J. Therm. Stress.*, 24, 9, pp 847–862.
- [24] P. H. Tehrani and M. R. Eslami, (1998) "Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 22, 3, pp 245–250.
- [25] P. Hosseini-Tehrani, M. R. Eslami, and H. R. Daghyani, (2001) "Dynamic crack analysis under coupled thermoelastic assumption," *J. Appl. Mech.*, 68, 4, pp 584–588.
- [26] K. C. Amit and J.-H. Kim, (2008) "Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials," *Eng. Fract. Mech.*, 75, 8, pp 2542–2565.
- [27] M. Duflot, (2008) "The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 74, 5, pp 827–847.
- [28] A. Zamani and M. R. Eslami, (2009) "Coupled dynamical thermoelasticity of a functionally graded cracked layer," *J. Therm. Stress.*, 32, 10, pp 969–985.
- [29] A. Zamani and M. R. Eslami, (2010) "Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation," *Int. J. Solids Struct.*, 47, 10, pp 1392–1404.

[30] شریعتی م، مهدی‌زاده رخی م، (۱۳۹۰) "مطالعه شکست دینامیکی مواد تابعی تحت شوک‌های حرارتی- مکانیکی"، مجله علمی- پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، شماره سوم، صص ۱-۱۶.

- [31] P. K. Parhi, S. K. Bhattacharyya, and P. K. Sinha, (2001) "Hygrothermal effects on the dynamic behavior of multiple delaminated composite plates and shells," *J. Sound Vib.*, 248, 2, pp 195–214.
- [32] H.-S. Shen, (2001) "Hygrothermal effects on the postbuckling of shear deformable laminated plates," *Int. J. Mech. Sci.*, 43, 5, pp 1259–1281.

- [33] B. P. Patel, M. Ganapathi, and D. P. Makhecha, (2002) "Hygrothermal effects on the structural behaviour of thick composite laminates using higher-order theory," *Compos. Struct.*, 56, 1, pp 25–34.
- [34] V. V. S. Rao and P. K. Sinha, (2004) "Dynamic response of multidirectional composites in hygrothermal environments," *Compos. Struct.*, 64, 3, pp 329–338.
- [35] A. Bahrami and A. Nosier, (2007) "Interlaminar hygrothermal stresses in laminated plates," *Int. J. Solids Struct.*, 44, 25, pp 8119–8142.
- [36] A. Benkhedda and A. Tounsi, (2008) "Effect of temperature and humidity on transient hygrothermal stresses during moisture desorption in laminated composite plates," *Compos. Struct.*, 82, 4, pp 629–635.
- [37] S. Brischetto, (2013) "Hygrothermoelastic analysis of multilayered composite and sandwich shells," *J. Sandw. Struct. Mater.*, p 1099636212471358.
- [38] S. Topal and S. Dag, (2014) "Mixed-Mode Hygrothermal Fracture Analysis of Orthotropic Functionally Graded Materials Using J-Integral," in *ASME 2014 12th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, pp V001T04A001–V001T04A001.
- [39] Y. Weitsman, (1976) "Diffusion with time-varying diffusivity, with application to moisture-sorption in composites," *J. Compos. Mater.*, 10, 3, pp 193–204.
- [40] R. B. Pipes, J. R. Vinson, and T.-W. Chou, (1976) "On the Hygrothermal Response of Laminated Composite Systems†," *J. Compos. Mater.*, 10, 2, pp 129–148.
- [41] R. Chiba and Y. Sugano, (2011) "Transient hygrothermoelastic analysis of layered plates with one-dimensional temperature and moisture variations through the thickness," *Compos. Struct.*, 93, 9, pp 2260–2268.
- [42] G. C. Sih, J. Michopoulos, and S. C. Chou, (1986) *Hygrothermoelasticity*. Springer Netherlands.
- [43] G. S. Springer, (1988) "Environmental effects on composite materials. Volume 3,".
- [44] C. D. Shirrell, (1978) "Diffusion of water vapor in graphite/epoxy composites," in *Advanced Composite Materials—Environmental Effects*, ASTM International.
- [45] R. J. Hartranft and G. C. Sih, (1980) "The influence of coupled diffusion of heat and moisture on the state of stress in a plate," *Mech. Compos. Mater.*, 16, 1, pp 44–56.
- [46] G. C. Sih, M. T. Shih, and S. C. Chou, (1980) "Transient hygrothermal stresses in composites: coupling of moisture and heat with temperature varying diffusivity," *Int. J. Eng. Sci.*, 18, 1, pp 19–42.
- [47] Y.-C. Yang, S.-S. Chu, H.-L. Lee, and S.-L. Lin, (2006) "Hybrid numerical method applied to transient hygrothermal analysis in an annular cylinder," *Int. Commun. heat mass Transf.*, 33, 1, pp 102–111.
- [48] P. K. Mahato and D. K. Maiti, (2010) "Aeroelastic analysis of smart composite structures in hydro-thermal environment," *Compos. Struct.*, 92, 4, pp 1027–1038.
- [49] خلیلی خ، حیدری م، (۱۳۹۱) "بررسی تاثیر ضخامت جسم بر امکان وقوع ترک در فرآیند خشک شدن"

- [50] G. C. Sih and M. T. Shih, (1980) "Hygrothermal stress in a plate subjected to antisymmetric time-dependent moisture and temperature boundary conditions," *J. Therm. Stress.*, 3, 3, pp 321–340.
- [51] G. C. Sih and A. Ogawa, (1982) "Transient thermal change on a solid surface: coupled diffusion of heat and moisture," *J. Therm. Stress.*, 5, 3–4, pp 265–282.
- [52] W.-J. Chang, T.-C. Chen, and C.-I. Weng, (1991) "Transient hygrothermal stresses in an infinitely long annular cylinder: coupling of heat and moisture," *J. Therm. Stress.*, 14, 4, pp 439–454.
- [53] Y. Sugano and Y. Chuuman, (1993) "Analytical solution of transient hygrothermoelastic problem due to coupled heat and moisture diffusion in a hollow circular cylinder," *Trans. Japan Soc. Mech. Eng.*, pp 1956–1963.
- [54] S. Dag, E. E. Arman, and B. Yildirim, (2010) "Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using J k-integral," *Int. J. Solids Struct.*, 47, 25, pp 3480–3488.
- [55] S. Dag, B. Yildirim, O. Arslan, and E. E. Arman, (2012) "Hygrothermal Fracture Analysis of Orthotropic Materials Using J k-Integral," *J. Therm. Stress.*, 35, 7, pp 596–613.
- [56] J. M. Melenk and I. Babuška, (1996) "The partition of unity finite element method: basic theory and applications," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 139, 1, pp 289–314.
- [57] B. L. Wang and J. E. Li, (2013) "Thermal shock resistance of solids associated with hyperbolic heat conduction theory," in *Proc. R. Soc. A*, 469, 2153, p 20120754.
- [58] J. Chen, A. K. Soh, J. Liu, and Z. Liu, (2004) "Thermal fracture analysis of a functionally graded orthotropic strip with a crack," *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 1, 2, pp 131–141.
- [59] J.-H. Kim and G. H. Paulino, (2003) "The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors," *Int. J. Solids Struct.*, 40, 15, pp 3967–4001.

Abstract

In this research the Extended Finite Element Method (EFEM) is implemented to model the effect of the hygrothermal shocks on a cracked 2D rectangular orthotropic media. Furthermore, an analytical method is developed and used. The coupled hygrothermoelasticity equations are considered. Isoparametric rectangular elements are used to discrete governing equations. The dynamical stress intensity factors are computed by the interaction integral method. A MATLAB code is developed to carry out all stages of the calculations from mesh generation to post processing. In one of the numerical examples, the moisture diffusion coefficient is considered, as a function of temperature. In analytical solution, the non-coupled equations are developed, and separation of variables method is used to solve them. Also in this way, stress, moisture and temperature are calculated. Based on the results, the stress intensity factors growth at the beginning of the thermal loads to a maximum positive amount and suddenly change their sign. This change will not be observed for moisture load alone. The maximum of stress intensity factors, dependent on crack angle and in orthotropic materials depend on anisotropy too. In this case first stress intensity factor decreases when crack angle increases, but second stress intensity factor increases. Reducing of first stress intensity factor against anisotropy is not uniform.

Keywords: Extended Finite Element Method, Interaction integral, Stress intensity factor, Hygrothermal shocks.



Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical & Mechatronics Engineering
MSc Theseis in Mechanical Engineering
Applied Mechanics

**Determination of the hygrothermal stress intensity
factor for a cracked 2D rectangular medium using
extended finite element method**

BY: Hamid Rajaei

Supervisor:

Dr. Mohammad Baqquer Nazari

September 2016