

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی اثر میرایی و سختی متمرکز بر روی ارتعاشات یک رشته با شرط مرزی نوسانی

نگارنده:

صالح جمعه زاده خضربیگی

استاد راهنما

دکتر امیر جلالی

شهریور ۱۳۹۵

شماره: ۲۹۵۱۸۱
تاریخ: ۴۵۶۳۱
ویرایش:

باسمه تعالی



فرم شماره ۷: صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خاتم / آقای صالح جمعه زاده خضریگی به شماره دانشجویی ۹۲۰۴۵۱۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان بررسی اثر میرایی و سختی متمرکز بر روی ارتعاشات یک رشته با شرط مرزی نوسانی که در تاریخ ۱۳۹۵/۰۶/۱۶ با حضور هیأت داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: عالی - امتیاز: ۲۰) ☒ مردود ☐ دفاع مجدد ☐

نوع تحقیق: نظری ☒ صلب ☐

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)
۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۵/۹۹)
۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)
۴- قابل قبول (۱۵ - ۱۴)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد ارجمندی اول	امیر جلالی	استادیار	
۲- استاد ارجمندی دوم	—	—	—
۳- استاد مشاور	—	—	—
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	مهدی گردویی	استادیار	
۵- استاد منتحن اول	حمیدرضا ایهکچی	دانشیار	
۶- استاد منتحن دوم	اردشیر کریمی محمدی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: ۱۳۹۵/۰۶/۱۶

حال که باتوکل بر خداوند متعال توانستم وظیفه‌ی خود را به سرانجام برسانم، شیرینی اتمام آن را تقدیم می‌کنم به:
حمایت‌کننده‌ی دریغ‌زدنی‌ام که آرزویم در زندگی جز رضایت و افتخار آفرینی برای او نیست؛

پدرم

دل‌گرمی و قوت‌قلبم در سختی‌های راه‌زدنی که بعد از خدا هر چه دارم می‌بوی دعاها می‌او، مستم؛

مادرم

مایه‌ی امید و آرامشم در زندگی که جز رضایت و خوشگویی‌اش از دنیای مادی بیچ نخواهم؛

همسرم

تشکر و سپاس

پس از به جای آوردن شکر خداوند متعال که هر چه دارم از اوست:

بر خود لازم می‌دانم از آقای دکتر امیر جلالی به خاطر راهنمایی این پایان نامه شکر و قدردانی نمایم. ایشان نه تنها راهنمایی علمی بلکه راهنمایی زندگی من نیز در این مدت بوده اند و امیدوارم با پایان موفق این کار، موجبات رضایت و خرسندی ایشان را فراهم نموده باشم. اگر راهنمایی و کمک های ایشان نبود، این کار سرانجام این چنین نداشت. همچنین از کمک ها، حمایت ها و راهنمایی های خانم فاطمه سوهانی، آقای احسان کیومرثی، دانیال چراغعلی و دیگر دوستانم که آوردن نام تک تک آن ها مقدور نیست کمال تشکر و سپاس را دارم.

امیدوارم این پایان موجب جبران زحمات این عزیزان شده باشد. برایشان از خداوند متعال سلامتی و موفقیت را آرزو مندم.

صلح جمعه زاده خضریگی

شهریور ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب صالح جمعه زاده خضریگی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بررسی اثر میرایی و سختی متمرکز بر روی ارتعاشات یک رشته با شرط مرزی نوسانی تحت راهنمایی دکتر امیر جلالی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه اثر میرایی و سختی متمرکز روی پاسخ پایدار یک رشته طناب متصل به فنر-دمپر در مکان دلخواه، که طرف دیگر این فنر-دمپر به زمین متصل و به دو انتهای طناب تحریک نوسانی یکسان و همزمان اعمال شده، مورد بررسی قرار گرفته است. این کار برای حالتی که یک فنر غیرخطی-دمپر خطی در وسط طناب قرار گرفته باشند نیز انجام گرفته است. برای حل معادلات در حالت فنر خطی از روش جداسازی متغیرها استفاده شده، اما در ادامه حل، به جای تکیه بر روش مقدارویژه مختلط و بدست آوردن فرکانس‌ها و شکل مودهای مختلط، ثوابت پاسخ فرکانسی برحسب فرکانس بدست آمده‌اند. در حالتی که فنر غیرخطی-دمپر خطی در وسط قرار گرفته باشد، از رویکرد خمینه ناوردای^۱ با ترکیب روند استخراج نتایج حالت خطی، برای محاسبه پاسخ پایدار سیستم استفاده شده است. نتایج در حالت خطی بودن فنر، نشان می‌دهند که میرایی منجر به ایجاد انتقال فرکانسی و ظهور پیچیدگی مود^۲ در سیستم می‌شود. همچنین ترکیب خاصی از میرایی و سفتی، منجر به ماکزیمم پیچیدگی مود شده و امواج در حال حرکت در طناب شکل می‌گیرند. نشان داده شده است که این ترکیب وابسته به موقعیت قرارگیری فنر-دمپر و فرکانس تحریک می‌باشد. همچنین در حالتی که فنر غیرخطی-دمپر خطی در وسط طناب باشند، تغییرات شدیدی در دیاگرام فاز و شکل مودها مشاهده شده و اندازه دامنه پاسخ فرکانسی به دامنه تحریک وابسته شده است.

کلیدواژه: دینامیک حالت پایدار، امواج در حال حرکت، مود نرمال غیرخطی

^۱ Invariant manifold approach

^۲ Mode complexity

فهرست مقاله‌های مستخرج از پایان‌نامه

- پیچیدگی مود در یک طناب با تحریک هارمونیک پایه با در نظر گرفتن فنر-دمپر موضعی نامتقارن؛ مجله مهندسی مکانیک تربیت مدرس (پذیرفته شده).
- دامنه ارتعاشات یک طناب با سیستم میرایی و فنر متصل به آن در حالت نامتقارن و شرایط مرزی نوسانی یکسان در دو انتهای آن؛ سومین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین‌المللی پژوهش‌های کاربردی در مهندسی برق، مکانیک و مکاترونیک (چاپ شده).
- تکامل دیاگرام فاز در یک طناب با سیستم میرایی و فنر متصل به آن در حالت نامتقارن و شرایط مرزی نوسانی یکسان در دو انتهای آن؛ سومین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین‌المللی پژوهش‌های کاربردی در مهندسی برق، مکانیک و مکاترونیک (چاپ شده).

فهرست مطالب

۱- مقدمه و مرور مقالات.....	۱
۱-۱- مقدمه.....	۲
۲-۱- مود نرمال غیرخطی.....	۹
۳-۱- توصیف مسأله.....	۱۰
۲- استخراج وحل تحلیلی معادلات.....	۱۳
۱-۲- مقدمه.....	۱۴
۲-۲- میرایی و فنر خطی.....	۱۴
۱-۲-۲- تعریف مسأله.....	۱۴
۲-۲-۲- محاسبه فرکانس طبیعی.....	۱۷
۳-۲-۲- بدست آوردن تابع پاسخ فرکانسی.....	۱۸
۴-۲-۲- بدست آوردن تابع دیاگرام فاز.....	۲۰
۵-۲-۲- محاسبه نقاط ثابت در دیاگرام فاز.....	۲۰
۶-۲-۲- معادله حرکت امواج در طناب.....	۲۱
۷-۲-۲- معادلات انرژی.....	۲۲
۳-۲- میرایی خطی و فنر غیرخطی.....	۲۳
۱-۳-۲- تعریف مسأله.....	۲۳
۲-۳-۲- رویکرد خمینهی ناوردای.....	۲۵
۳-۳-۲- مود نرمال غیرخطی طناب با دمپر خطی و فنر غیر خطی.....	۲۷
۳- بررسی نتایج.....	۴۱
۱-۳- مقدمه.....	۴۲
۲-۳- حالت اول $a=L/2$	۴۲
۱-۲-۳- اثر سفتی فنر.....	۴۴
۲-۲-۳- اثر میرایی.....	۴۶
۳-۲-۳- تغییرات دیاگرام فاز.....	۴۹
۴-۲-۳- محدوده پیچیدگی مود و انتشار آن.....	۵۲

۵۶	۳-۲-۵- تغییرات انرژی در طناب
۶۳	۳-۳- حالت دوم $a=L/3$
۶۳	۳-۳-۱- انتقال فرکانسی
۶۶	۳-۳-۲- تغییرات دیاگرام فاز
۷۲	۳-۳-۳- شکلگیری امواج در حال حرکت
۷۷	۳-۴- تغییرات انرژی
۸۱	۳-۴- حالت سوم $a=L/4$
۸۱	۳-۴-۱- انتقال فرکانسی
۸۵	۳-۴-۲- تغییرات دیاگرام فاز
۸۸	۳-۴-۳- امواج در حال حرکت
۹۳	۳-۴-۴- تغییرات انرژی
۹۸	۳-۵- حالت کلی دمپر و فنر خطی نامتقارن
۱۰۰	۳-۶- حالت میرایی خطی و فنر غیر خطی $a=L/2$
۱۰۰	۳-۶-۱- اثر سفتی
۱۰۶	۳-۶-۲- اثر میرایی
۱۰۷	۳-۶-۳- تغییرات دیاگرام فاز
۱۰۹	۳-۶-۴- اثر دامنه تحریک A
۱۱۱	۴- نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۱۱۴	۵- مراجع و منابع:

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۲) شماتیک طناب با میرایی و فنر خطی در $z=a$ ۱۵
- شکل (۲-۲) شماتیک طناب با میرایی خطی و فنر غیرخطی در $z=L/2$ ۲۴
- شکل (۱-۳) تکامل $\varphi(x)/A$ برحسب موقعیت x و فرکانس تحریک ۴۳
- شکل (۲-۳) اندازه دامنه شکل مود $\varphi(x)/A$ در نقاط مختلف ۴۵
- شکل (۳-۳) اندازه دامنه شکل مود $\varphi(x)/A$ در نقاط مختلف ۴۷
- شکل (۴-۳) تکامل انتقال فرکانسی در ازای تغییرات σ و مقدار ثابت $k=0.01$ ۴۸
- شکل (۵-۳) تکامل دیاگرام فاز در طول طناب به ازای مقداری ۵۰
- شکل (۶-۳) تکامل دیاگرام فاز (الف-ب-ج) و پاسخ فرکانسی ۵۴
- شکل (۷-۳) امواج در حال حرکت در طناب در ۵ گام زمانی ($\Delta\tau = 0.04$) به ازای $\omega/\omega_0 = 3$ ۵۶
- شکل (۸-۳) تکامل (الف): انرژی جنبشی (ب): انرژی پتانسیل ۵۹
- شکل (۹-۳) انتشار انرژی در هنگام شکل‌گیری موج در حال حرکت ۶۰
- شکل (۱۰-۳) تغییرات انرژی جنبشی برحسب مکان و زمان در ۶۲
- شکل (۱۱-۳) تکامل $\varphi(x)/A$ برحسب موقعیت x و فرکانس ۶۴
- شکل (۱۲-۳) اندازه دامنه شکل مود $\varphi(x)/A$ در نقاط مختلف ۶۵
- شکل (۱۳-۳) تکامل انتقال فرکانسی در ازای تغییرات σ و مقدار ثابت $k=0.01$ ۶۶
- شکل (۱۴-۳) تکامل دیاگرام فاز در طول طناب به ازای ۶۷
- شکل (۱۵-۳) اندازه دامنه $\varphi(x)/A$ در نقاط مختلف طناب ۷۰
- شکل (۱۶-۳) نقاط ثابت در $\omega/\omega_0 = 6$ به ازای $k=3.2$ ۷۱
- شکل (۱۷-۳) سفتی $k1$ متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز ۷۳
- شکل (۱۸-۳) میرایی $\sigma1$ متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز ۷۴
- شکل (۱۹-۳) سفتی $k2$ متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز ۷۴
- شکل (۲۰-۳) میرایی $\sigma2$ متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز ۷۵
- شکل (۲۱-۳) امواج در حال حرکت در سمت چپ ۷۶
- شکل (۲۲-۳) امواج در حال حرکت در سمت راست ۷۷
- شکل (۲۳-۳) تغییرات انرژی جنبشی برحسب مکان ۷۹
- شکل (۲۴-۳) تغییرات انرژی جنبشی برحسب مکان ۸۱
- شکل (۲۵-۳) تکامل $\varphi(x)/A$ برحسب موقعیت x ۸۲
- شکل (۲۶-۳) انتقال فرکانسی به ازای انتقال فرکانسی برای $k=0.5$ و $\sigma=1.4$ ۸۳
- شکل (۲۷-۳) تکامل انتقال فرکانسی $\delta\omega$ بر حسب میرایی σ به ازای $k=0.01$ ۸۴
- شکل (۲۸-۳) اندازه دامنه $\varphi(x)/A$ در نقاط مختلف ۸۴
- شکل (۲۹-۳) تکامل دیاگرام فاز در طول طناب به ۸۶

- شکل (۳-۳۰) نقاط ثابت دیاگرام فاز در $\omega/\omega_0 = 4$ به ازای $k=3.2$ ۸۸
- شکل (۳-۳۱) سفتی $k1$ متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز ۸۹
- شکل (۳-۳۲) میرایی $\sigma1$ متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز ۹۰
- شکل (۳-۳۳) سفتی $k2$ متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز ۹۰
- شکل (۳-۳۴) میرایی $\sigma2$ متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز ۹۱
- شکل (۳-۳۵) امواج در حال حرکت در سمت راست طناب ۹۲
- شکل (۳-۳۶) امواج در حال حرکت در سمت چپ طناب ۹۳
- شکل (۳-۳۷) تغییرات انرژی جنبشی برحسب مکان ۹۵
- شکل (۳-۳۸) تغییرات انرژی جنبشی برحسب مکان ۹۷
- شکل (۳-۳۹) پاسخ فرکانسی به ازای ۱۸ گام زمانی در ۹۹
- شکل (۳-۴۰) اندازه دامنه پاسخ فرکانسی $\phi(x)/A$ در ۱۰۱
- شکل (۳-۴۱) تغییرات شکل مود و دیاگرام فاز ۱۰۵
- شکل (۳-۴۲) شکل مود در $\omega/\omega_0 = 2$ ، $\sigma=0$ و ۱۰۶
- شکل (۳-۴۳) (اندازه دامنه پاسخ فرکانسی ۱۰۷
- شکل (۳-۴۴) تکامل دیاگرام فاز در طول طناب به ازای ۱۰۹
- شکل (۳-۴۵) تأثیر دامنه تحریک A در شکل ۱۱۰

فصل اول

مقدمه و مرور مقالات

۱-۱- مقدمه

طناب‌ها یکی ساده‌ترین اعضای پیوسته مورد تحقیق و مطالعه در دنیای پیرامون هستند. طناب‌ها تنها برای مطالعه و تحقیق ساده نیستند، بلکه برای توسعه مبانی پایه‌ای در تحلیل سیستم‌های پیوسته‌ی یک یا چند درجه آزادی، بسیار مفید هستند. بنابراین مطالعه و بررسی‌های مختلف روی طناب‌ها، به تحلیل سایر سیستم‌های پیوسته پیچیده، کمک شایانی می‌کند. طناب یک عضو پیوسته الاستیک یک بعدی است که گشتاور خمشی را تحمل نمی‌کند. چنین تعریفی می‌تواند برای اعضای کابل ماندنی که نسبت ضخامت به طول آن‌ها در مقایسه با مقدار واحد کوچک است، نیز صادق باشد.

تحلیل ارتعاش یک سیستم همیشه با تحلیل ارتعاشات آزاد یا طبیعی شروع می‌شود. این کار به دو مفهوم مهم یعنی فرکانس طبیعی و مود طبیعی ارتعاش سیستم، منجر می‌شود. این دو مفهوم نقطه شروع هر تحلیل کمی و کیفی و همچنین فهم و درک سیستم ارتعاشی را شکل می‌دهند. معادله موج حرکت عرضی یک طناب، حرکت طولی و پیچشی یک میله را بیان می‌کند. معادله موج یکی از مهم‌ترین معادلات در مطالعه ارتعاشات سیستم‌های پیوسته است. تحلیل و خواص معادله موج در فهم ارتعاش و انتشار آن در سیستم پیوسته یک امر بنیادی است.

همه سیستم‌های ارتعاشی اتلاف انرژی را تجربه می‌کنند. یک پدیده کاملاً عادی که با عنوان "دمپینگ"^۱ شناخته می‌شود. نیروی دمپینگ ممکن است ناشی از برهم‌کنش‌های خارجی سیستم (دمپینگ خارجی)^۲، یا داخل سیستم (دمپینگ داخلی)^۳ باشد. دمپینگ ناشی از درگ آیرودینامیکی به علت لزجت، معمول‌ترین مثال از دمپینگ خارجی است، در صورتی که دمپینگ داخلی به علت تماس داخلی بین لایه‌های مولکولی در نتیجه‌ی فشار جزئی است. در مکانیزم این دمپینگ‌ها، انرژی مکانیکی به صورت برگشت‌ناپذیر به انرژی گرمایی تبدیل شده که به خارج از سیستم جریان می‌یابد.

¹ Damping

² External damping

³ Internal damping

سه مدل دمپینگ، با نام میرایی ویسکوز، میرایی کلمب^۱ (یا تماس خشک) و میرایی سازه‌ای^۲ (یا میرایی هسترتیک^۳)، معمولاً برای اهداف مهندسی استفاده می‌شوند. در مدل میرایی ویسکوز که رایج‌ترین مدل مورد استفاده است، نیروی دمپینگ با تغییر نرخ زمانی متغیر اصلی یا مشتقات خاصی از آن، رابطه دارد. در بسیاری از کاربردهای عملی، یک سیستم پیوسته ممکن است برهم‌کنش‌هایی با المان‌های میرایی گسسته داشته باشد. برای مثال ممکن است نقاط تقویتی خاصی از یک سازه، نوسانات قابل ملاحظه‌ای بالاتری نسبت به میرایی داخلی، به سازه وارد کنند. در این حالت میرایی می‌تواند به شکل میرایی‌های گسسته، در نقاط تقویتی در نظر گرفته شود. المان‌های دمپر گسسته دیگری نیز به طور معمول برای کنترل ارتعاشات به سازه‌ها متصل می‌شوند [۱].

معادله حرکتی که ارتعاشات آزاد یک سیستم خطی نامیرا را بیان می‌کند می‌تواند به شکل (۱-۱) بیان شود. ریلی [۲] نشان داد که سیستم‌های خطی نامیرا با معادله حرکت (۱-۱)، قادر به حرکت به اصطلاح طبیعی^۴ هستند.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = 0 \quad (1-1)$$

$\mathbf{M}$ و $\mathbf{k}$ ماتریس‌های حقیقی متقارن هستند که با ماتریس جرم و سفتی شناخته می‌شوند. $\mathbf{q}(t)$ بردار مختصات تعمیم‌یافته است. این معادله اصولاً بیان می‌کند که تمام مختصات اجزای سیستم در یک فرکانس، به صورت هماهنگ نوسان می‌کنند و به شکل یک جابجایی خاص در می‌آیند. این فرکانس نوسان و الگوی جابجایی به ترتیب فرکانس‌های طبیعی^۵ (ω_j) و مودهای نرمال^۶ $(\mathbf{x}_j)$ شناخته می‌شوند. با استفاده از مودهای نرمال، غیرکوپله کردن معادله حرکت بالا امکان پذیر است، به طوریکه اگر $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ماتریس مودال باشد، بنابراین $\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X}$ و $\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}$ ماتریس‌های قطری هستند. این حقیقت ساده در اصل برای سیستم‌های میرا صادق نیست. ریلی [۲] نشان داد که اگر

¹ Coulomb damping

² Structural damping

³ Hystertic damping

⁴ Natural motions

⁵ Natural frequencies

⁶ Normal modes

ماتریس میرایی ترکیب خطی از ماتریس سفتی و اینرسی باشد، سیستم میرا دارای مدهای نرمال کلاسیک خواهد بود. یعنی برای سیستم‌های با میرایی ویسکوز، اگر ماتریس میرایی C به شکل زیر باشد:

$$C = \alpha_m M + \alpha_k K \quad (2-1)$$

سپس معادله حرکت سیستم میرا می‌تواند با استفاده از ماتریس مودال نامیرا X ، قطری شود. این مدل میرایی به عنوان میرایی تناسبی^۱ یا میرایی کلاسیک^۲ شناخته می‌شود. کوقی^۳ [۳] شرایط عمومی برای اینکه سیستم دینامیکی میرا دارای مدهای نرمال باشد را محاسبه کرد. کوقی و کیلی^۴ [۴] نیز نشان دادند که چنین قطری سازی امکان پذیر است اگر تنها اگر $KM^{-1}C = CM^{-1}K$. همچنین آن‌ها نشان دادند که یکی از شرط‌های لازم و ضروری برای اینکه سیستم دینامیکی میرا دارای مدهای نرمال کلاسیک باشد، این است که ماتریس میرایی توسط انتقال مشابه در سیستم نامیرای غیر کوپله، قطری شود. علاوه بر این رابطه‌ای کلی بین ماتریس سفتی و میرایی بیان کردند که حالت خاص ریلی را در بر می‌گیرد و نشان می‌دهد که بسیاری از سیستم‌های میرا دارای مدهای نرمال کلاسیک نیستند.

در حالت کلی سیستم‌های خطی میرا این شرط را ارضا نمی‌کنند و در نتیجه مدهای نرمال ندارند اما مدهای مختلط^۳ دارند. مدهای مختلط، می‌تواند به دلایل مختلفی دیگری به وجود آیند، برای مثال به علت اثرات ژيروسکوپ، اثرات آیرودینامیکی، غیرخطی بودن و نویز تجربی^۴. نوع بیان مختلفی روی سیستم‌های میرای ویسکوز با میرایی غیرتناسبی وجود دارد. با حضور ماهیت غیرتناسبی میرایی، معادله حرکت با ماتریس مودال میرایی کوپل می‌شود $C' = X^T C X$. یک روش معمول در این مورد این است که به سادگی از درایه‌های غیر قطری ماتریس مودال C' که معادلات حرکت را کوپل می‌کنند، صرف نظر کنیم. این روش به عنوان روش غیر کوپله کردن^۵ شناخته می‌شود. برای

¹ Proportional damping

² Classical damping

³ Complex modes

⁴ Experimental noise

⁵ Decoupling method approximate

سیستم‌های با بعد بزرگ‌تر، تلاش محاسباتی در فراهم کردن روش غیرکوپله کردن، از لحاظ مرتبه، پایین‌تر از روش‌های مود مختلط است. محققان بسیاری تحقیقاتی روی اثرات روش غیرکوپله کردن، داشته‌اند. نتیجه کلی بدست آمده از این مطالعات این است که، حل معادله‌ی غیرکوپله شده، نزدیک به حل دقیق معادله‌ی کوپل شده می‌شود، در صورتی که C' یک ماتریس قطری غالب باشد و فرکانس‌های طبیعی غیر میرا به اندازه‌ی کافی جدا از هم باشند. این نتیجه باعث شد که محققین شاخص‌های عددی را برای تعیین کمیت درجه‌ی غیرتناسبی بودن میرایی، پیشنهاد کنند. در تمامی این مطالعات به طور صریح و ضمنی فرض شده است که میرایی، ویسکوز است. البته این مطالعات به سیستم‌های با میرایی غیر ویسکوز هم توسط ادهیکاری [۵] تعمیم داده شده است. نشان داده شده زمانی که میرایی غیرتناسبی است، در هر دو حالت ویسکوز و غیر ویسکوز، سیستم خطی همراه با میرایی، به جای مودهای نرمال دارای مودهای مختلط است. در این تحقیق بین شده است که وجود مودهای مختلط تحلیل را به طور قابل ملاحظه‌ای پیچیده می‌کند، زیرا شبیه به شکل مودهای نرمال نیستند و تصور آن‌ها دشوار است. برای حل این مشکل روشی ارائه شده که مودهای مختلط شناسایی شده به صورت آزمایشگاهی را به گونه‌ای نرمالایز می‌کند که به نزدیک مودهای نرمال مربوط به خودشان تبدیل شوند و این شکل از مودهای مختلط، مودهای مختلط بهینه^۱ نامیده شده است. نه ماتریس میرایی و نه هیچیک از ماتریس‌های جرم و سفتی برای نرمالایز کردن مودهای مختلط بهینه لازم نیستند. این امر، این روش را برای اهداف عملی و کاربردی بسیار کارا و مفید می‌گرداند. در این تحقیق همچنین شاخصی برای میرایی غیرتناسبی و سیستم‌ها با میرایی غیرویسکوز بر اساس تفاوت بین مودهای مختلط بهینه و مودهای نرمال مربوط به خودشان ارائه شده است، که این شاخص برای هر مود متفاوت است.

توسط کرنک [۶] نشان داده شده است که میرایی ویسکوز گسسته می‌تواند در معادله حرکت به فرم اپراتوری مناسبی گنجانده شود به طوری که منجر به یک فرمولاسیون عمومی از مسأله مقدار

¹ Optimal complex modes

ویژه میرای مختلط شود. در غیاب نیروهای ژيروسکوپي اپراتور خودالحاق میرایی منجر به یک مسأله مقدار ویژه میرای متقارن می‌شود که مودهای ارتعاشی مختلط دو رابطه متعامد را ارضا می‌کنند. این تئوری برای نشان دادن نقش مودهای میرای مختلط در ارتعاشات کابل‌ها و تیرها استفاده شده است. توسط ابراهیم [۷] نشان داده شده است که حتی برای سطوح پایین میرایی برای سازه‌هایی با میرایی غیرتناسبی، مودهای مختلط می‌توانند بسیار متفاوت از مودهای نرمال باشند. در چنین حالتی تقریب مودهای نرمال برحسب مودهای مختلط ممکن است منجر به خطای بزرگی شود. یک روش برای محاسبه مودهای نرمال از مودهای اندازه‌گیری شده مختلط از تست آنالیز مودال تجربی ارائه شده است. مودهای نرمال محاسبه شده از این روش، خطاهای احتمالی که ممکن است در استفاده از تقریب مودهای نرمال برحسب مودهای مختلط که به علت غیرتناسبی بودن میرایی ایجاد شوند، را از بین می‌برند.

در تحلیلی دیگر توسط کرنک [۸] ارتعاشات آزاد یک کابل کشیده شده به همراه یک دمپر ویسکوز متمرکز، با استفاده از مودهای مختلط توسط کرنک تحلیل شده است و یک حل ساده تکراری از معادله فرکانسی برای همه‌ی فرکانس‌های ویژه مختلط پیشنهاد شده است. نسبت میرایی نیز با روش حل مجانبی و روش حل تقریبی تکرارشونده برای مودهای ابتدایی محاسبه شده است.

این امر که اتصال میرایی ویسکوز به یک سازه می‌تواند در کاهش ارتعاشات ناخواسته بسیار موثر باشد توسط سونگ و اسپنسر [۹] تأیید شده است. این امر از نقطه نظر طراحی دو سوال را به وجود می‌آورد: اول اینکه موقعیت مناسب برای جای‌گذاری میرایی در سازه کجاست و دوم اینکه ثابت میرایی بهینه که منجر به مینیمم ارتعاشات می‌شود چه مقدار است. در این راستا تحقیق جامعی برای سازه‌های گسسته با میرایی ویسکوز توسط مین و کرنک [۱۰] انجام شده است. در این تحقیق یک حل تقریبی برای مسأله مقدار ویژه مختلط مربوط به ارتعاشات آزاد یک سیستم گسسته با چندین میرایی ویسکوز، به منظور تسهیل در تشخیص مکان و مقدار بهینه دمپرها در سازه، فراهم شده است. این حل با درون‌یابی از بین دو مسأله مقدارویژه مشخص فراهم می‌شود: مسأله مقدار ویژه بدست آمده

از حذف میرایی از سازه و مسأله مقدار ویژه بدست آمده از سازه مقید شده با میرایی بینهایت یا به عبارتی قرار دادن المان صلب به جای میرایی‌های موجود در سازه. بنابراین برای بدست آوردن مکان و مقدار بهینه میرایی ویسکوز در سازه، به جای حل مسأله مقدار ویژه مختلط، می‌توان از حل دو مسأله مقدار ویژه حقیقی بیان شده استفاده کرد. اثبات درستی اینگونه فرمولبندی تقریبی برای یک مدل ساختمان ده طبقه با داشتن چندین میرایی نشان داده شده است. همین روش برای موقعیت یابی و میزان سازی میرایی ویسکوز برای سازه‌های انعطاف پذیر توسط انگلن و همکاران [۱۱] توسعه داده شده است و صحت و درستی فرمولبندی برای یک مثال عددی تیر یک سر گیردار اثبات شده است. روش مورد استفاده در این تحقیق بسیار مشابه روش ارائه شده توسط مین و کرنک [۱۰] می‌باشد.

کابل‌های نگه دارنده^۱ پل‌ها یکی پرکاربردترین مسائل عملی هستند. این کابل‌ها سطح میرایی مکانیکی داخلی آن‌ها بسیار پایین است و در مقابل انواع تحریکات ترکیبی که برای آن‌ها اتفاق می‌افتد، مستعد تسلیم شدن هستند. برای جداسازی ارتعاشات ناخواسته این کابل‌ها، دمپرهای ویسکوز در نزدیکی تکیه‌گاه نصب می‌شوند. اثبات موثر بودن دمپر ویسکوز در کاهش دامنه ارتعاشات روی کابل نگه دارنده توسط مین و جوینز [۱۲] به صورت تجربی انجام شده است. در این تحقیق که به طور جامع انجام شده است نقش موثر میرایی ویسکوز در حذف ارتعاشات کابل نگه دارنده پلی در آمریکا را با مقایسه دو حالت قبل از اضافه شدن میرایی و بعد از اضافه شدن آن و با توجه به انواع تحریک‌های موثر روی کابل، نشان می‌دهد.

تحقیق گسترده‌ای روی ارتعاشات آزاد یک کابل کشیده با میرایی ویسکوز خطی و غیرخطی [۱۳] توسط مین و جوینز انجام شده است. تحقیق در حالت خطی با فرمولبندی تحلیلی مسأله مقدار ویژه مختلط صورت گرفته است. این فرمولبندی اهمیت انتقال فرکانسی^۲ در پاسخ فرکانسی سیستم را نشان می‌دهد. در زمانی که این انتقال فرکانسی بزرگ است، برای مثال در مودهای بالاتر و در موقعیت‌های دورتر میرایی از انتهای کابل، رژیم‌های جدیدی از رفتار کابل مشاهده

¹ Stay-cable

² Frequency shifts

می‌شود. در حالت غیرخطی وابستگی عملکرد دمپر غیرخطی به دامنه و شماره مود نوسانات نشان داده شده است.

بلنچارد و همکاران [۱۴] یکی از آخرین تحقیقات انجام شده در زمینه تحلیل کابل با میرایی ویسکوز خطی گسسته را انجام داده‌اند. در این تحقیق پاسخ فرکانسی، تغییرات دیاگرام فاز و انرژی یک رشته طناب به همراه سیستم دمپر-فنر خطی متصل شده در وسط آن و با تحریک‌های نوسانی یکسان و همزمان در دو طرف طناب، مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق بر خلاف تحقیقات گذشته که از روش مسأله مقدار ویژه مختلط بهره می‌گرفته‌اند، ابتدا از روش تحلیلی جدایش متغیرها و سپس بدست آوردن ثابت‌های پاسخ فرکانسی برحسب فرکانس، برای تحلیل استفاده شده است. مسأله در نظر گرفته شده در این تحقیق کاملاً نسبت به وسط طناب متقارن است و تبدیل به یک مسأله کنترل مرزی^۱ که در کنترل ارتعاشات سیستم‌های پیوسته بسیار کاربرد دارد تبدیل شده است. میرایی منجر به ایجاد انتقال فرکانسی بین دامنه قله رزونانس نقاط مختلف طناب و پیچیدگی مود^۲ در طناب می‌شود و یک ترکیب منحصر به فرد از ثابت سفتی و میرایی برای ماکزیمم شدن پیچیدگی مود شناسایی شده است، در این حالت میرایی تمامی مودهای نرمال ارتعاشات را از بین می‌برد و در عوض امواج در حال حرکت در طناب شکل می‌گیرند. این ماکزیمم پیچیدگی در حد مرز گذر بین میرایی خیلی ضعیف و خیلی قوی است.

بررسی اثر میرایی روی دینامیک سیستم محدود به طناب‌ها نمی‌شود. اثر میرایی خارجی روی یک میله با شرط مرزی دمپر ویسکوز به صورت مفصل بررسی شده است [۱۵]. ارتعاشات طولی میله با دمپر متصل به یک انتهای آن که به صورت مختلط و وابسته به فرکانس در نظر گرفته شده است، برای بدست آوردن فرکانس‌ها و شکل مودهای مختلط بررسی شده است [۱۶]. تحلیل دینامیکی تیر با دمپر ویسکوز نیز مورد توجه محققان قرار گرفته است [۱۷-۱۹].

¹ Boundary control

² Mode complexity

۱-۲- مود نرمال غیرخطی

در چرخه‌ی تحلیل و طراحی سیستم‌های پیچیده مانند چرخ‌بال^۱، هواپیما^۲ و وسایل نقلیه زمینی، لازم است به طور کامل پاسخ ارتعاشی آن‌ها را به خوبی درک کنیم. اگر ارتعاش مورد نظر محدود به نزدیکی موقعیت تعادل استاتیکی باشد، به طور کلی فرض سیستم خطی می‌تواند استفاده شود. در این حالت فرآیند تحلیل با استفاده از ابزار مدرن مانند تحلیل المان محدود^۳ و تحلیل مودال^۴ تا حد زیادی ساده می‌شود. در مقابل در زمانی که دامنه نوسانات بزرگ باشد، فراتر از مقیاس حالت خطی، یا زمانی که سیستم با توجه به موقعیت تعادل‌اش به طور ذاتی غیرخطی رفتار کند، باید از معادلات غیرخطی حرکت برای مدل‌سازی سیستم استفاده شود. در حوزه‌ی ارتعاشات غیرخطی تحقیقات و کارهای بسیاری برای سیستم‌های با درجه آزادی کم انجام شده است، مانند مدل‌های توده-جرم^۵ و مدل‌های بدست آمده از طریق گسسته‌سازی گلرکین^۶ معادله دیفرانسیل جزئی^۷ (PDE) سیستم‌های پیوسته. این مدل‌های مرتبه پایین برای فهم رفتار کلی بسیار ارزشمند هستند. با این حال بسیاری از این روش‌های توسعه یافته شده، فقط برای سیستم‌های نسبتاً ساده قابل اجرا هستند و زمانی که این روش‌ها برای سیستم‌های مدل‌سازی شده با معادلات پیچیده جزئی یا سیستم‌ها با تعداد درجه‌آزادی بیشتر استفاده می‌شوند، سنگین و دشوار می‌شوند [۲۰].

به منظور بدست آوردن یک مدل کاهش یافته صحیح برای سیستم‌های غیرخطی، آنالیز مودال غیرخطی^۸ به عنوان شباهتی در نقطه مقابل حالت خطی مطرح شده است. مفهوم مودهای نرمال غیرخطی^۹ (NNM) برای اولین بار توسط روزنبرگ [۲۱] برای سیستم‌های پایستار^{۱۰} با غیرخطی

¹ Rotorcraft

² Aircraft

³ Finite Element Analysis

⁴ Modal analysis

⁵ Lumped-mass model

⁶ Galerkin discretization

⁷ Partial Differential Equations

⁸ Nonlinear modal analysis

⁹ Nonlinear normal modes

¹⁰ Conservative

مقارن توسعه داده شد که در اصل تعمیمی از ایده موده‌های نرمال خطی است. بررسی مفصل توسط واکیس [۲۲] که خلاصه‌ای از تحقیقات بسیار در این زمینه تا سال ۲۰۰۵ است، انجام شده است. در این پایان نامه برای بررسی پاسخ سیستم غیرخطی از رویکرد خمینه ناوردای^۱ استفاده شده است. شاو و پیر [۲۳] در سال ۱۹۹۳ از این روش برای محاسبه موده‌های نرمال برای سیستم‌های گسسته غیرخطی بهره گرفتند و به طور مفصل با بررسی یک مثال دو درجه آزادی در دو حالت خطی و غیرخطی، به بحث پیرامون کاربرد این روش پرداختند. سال ۱۹۹۴ نیز همین افراد موده‌های نرمال در ارتعاشات سیستم‌های پیوسته غیرخطی را با همان رویکرد محاسبه کردند [۲۴]. آن‌ها در این تحقیق نیز از سه مثال تیر اولر-برنولی خطی، تیر اولر-برنولی قرارگرفته روی بستر الاستیک غیرخطی و تیر اولر-برنولی متصل به فنرهای پیچشی غیرخطی در دو طرف، بهره گرفته‌اند. بویین، پیر و شاو [۲۵] نحوه‌ی آنالیز مودال غیرخطی برای سیستم‌های با رزونانس داخلی^۲ را بیان کردند. جیانگ، پیر و شاو [۲۶] موده‌های نرمال غیرخطی در ارتعاشات تحت تحریک هارمونیک (خارجی یا تحریک پارامتریک^۳) را با استفاده از رویکرد خمینه ناوردای به صورت عددی و به کمک روش گلرکین، محاسبه کردند. همچنین از رویکرد خمینه ناوردای برای بررسی یک سیستم دوار^۴ با یاتاقان غیرخطی استفاده شده است [۲۷].

۱-۳- توصیف مسأله

در این پژوهش یک سیستم طناب با فنر-دمپر خطی متصل شده به مکانی دلخواه از طناب در نظر گرفته شده است. این سیستم در مرزها دارای تحریک نوسانی یکسان و همزمان از نوع جابجایی است. بررسی اثر فنر-دمپر روی سیستم مورد بررسی قرارگرفته است. همین سیستم با فنر غیرخطی-دمپر خطی متصل شده در وسط طناب نیز در نظر گرفته شده است و اثر فنر غیرخطی-دمپر خطی روی

¹ Invariant manifold

² Internal resonance

³ Parametric excitation

⁴ Rotor

سیستم مجددا مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش اول ابتدا معادله حرکت برای حالت فنر خطی با روش جدایش متغیرها و سپس معادله حرکت برای حالت فنر غیرخطی با رویکرد خمینه ناوردای حل شده است. در بخش بعد ابتدا نتایج حالت خطی برای سه موقعیت فنر-دمپر در $L/2$ ، $L/3$ و $L/4$ از انتهای سمت چپ طناب، استخراج شده و سپس نتایج حالت فنر غیرخطی بررسی شده است. میرایی در هر دو حالت خطی و غیرخطی منجر به ایجاد انتقال فرکانسی در اندازه شکل مود شده است. همچنین ترکیب پارامترهای میرایی و فنر خطی منجر به ماکزیمم پیچیدگی مود و در نتیجه تشکیل امواج در حال حرکت در طناب شده است. نشان داده شده است که این پارامترها وابسته به موقعیت فنر-دمپر و فرکانس تحریک می‌باشند. در این مقادیر از پارامترها انرژی جنبشی بر حسب زمان و مکان ترسیم شده است. فنر غیرخطی منجر به تغییرات شدیدی در دامنه پاسخ و دیاگرام فاز سیستم می‌شود.

فصل دوم

استخراج وحل تحلیلی معادلات

۱-۲- مقدمه

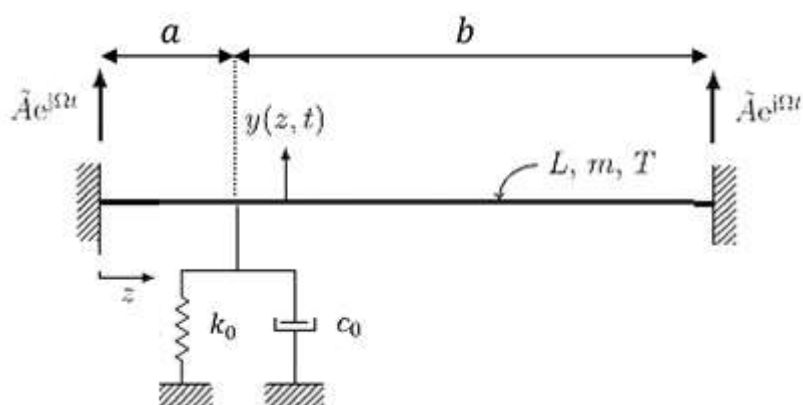
در ارتعاشات آزاد خطی معمولاً برای استخراج فرکانس‌ها و توابع شکل سیستم، از روش مقادیر ویژه و توابع ویژه استفاده می‌کنند. برای حل ارتعاشات اجباری از توابع ویژه مختلط ارتعاشات آزاد بهره می‌برند. در این تحقیق از روش جدایش متغیرها به جای حل وابسته به مسأله مقدار ویژه مختلط ارتعاشات آزاد، استفاده شده است. زیرا هدف نشان دادن میرایی است که ارتعاشات را به امواج مبدل می‌کند. این هدف با روش بسط مختلط مودال به خوبی نشان داده نمی‌شود. در بخش اول این فصل به استخراج معادلات و حل تحلیلی آن‌ها با روش جدایش متغیرها برای حالتی که سیستم میرایی و فنر خطی در فاصله a از سمت چپ طناب قرار گرفته باشد، پرداخته شده و در بخش دوم همین روند برای حالتی که سیستم میرایی خطی و فنر غیر خطی در وسط طناب جای‌دهی شده است، انجام گرفته است. در هر دو حالت فوق فرضیات برای حل مسأله به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

- طناب خطی، همگن، یکنواخت، نامیرا
- ارتعاشات طناب کوچک
- میرایی خطی

۲-۲- میرایی و فنر خطی

۱-۲-۲- تعریف مسأله

سیستم مورد تحلیل شامل یک طناب الاستیک خطی با طول L می‌باشد که یک سیستم میرایی و فنر خطی در فاصله a از انتهای سمت چپ طناب به آن متصل شده است و سمت دیگر این سیستم میرایی و فنر خارجی، به زمین متصل می‌باشد. هر دو انتهای طناب با حرکت نوسانی به صورت یکسان و همزمان تحریک شده است (شکل (۱-۲)).



شکل (۱-۲) شماتیک طناب با میرایی و فنر خطی در $z=a$

m جرم بر واحد طول طناب، T نیروی کشش طناب که ثابت است، می باشد. موقعیت افقی هر نقطه از طناب با z و موقعیت عمودی آن ها با $y(z, t)$ معرفی می شود، که t بیان گر زمان می باشد. هر دو انتهای طناب با یک جابجایی یکسان و همزمان $\tilde{A}e^{i\Omega t}$ تحریک شده است، که دامنه ی ثابت تحریک اجباری است و Ω فرکانس تحریک می باشد. سفتی k_0 و میرایی c_0 برای میرایی و فنر در نظر گرفته شده است، که نیروی خود را فقط در $z = a$ اعمال می کنند. معادله ی حرکت این طناب به شکل زیر بدست آورده شده است:

$$my_{,tt}(z, t) - Ty_{,zz}(z, t) = -[k_0 y(z, t) + c_0 y_{,t}(z, t)]\delta(z - a) \quad (۱-۲)$$

شرایط مرزی در این حالت به شکل زیر خواهد بود:

$$y(0, t) = \tilde{A}e^{i\Omega t} \quad (۲-۲)$$

$$y(L, t) = \tilde{A}e^{i\Omega t} \quad (۳-۲)$$

با توجه به اینکه معادله (۱-۲)، یک معادله ی همگن با شرایط مرزی ناهمگن است، برای راحتی در تحلیل یک مختصات افقی z' و مختصات عمودی y' از انتهای سمت راست طناب در نظر گرفته می شود و معادله حرکت طناب به دو معادله همگن و دو شرط مرزی و دو شرط پیوستگی در $z = a$ تبدیل می شود.

$$Ty_{1,zz}(z_1, t) - my_{1,tt}(z_1, t) = 0 \quad 0 \leq z_1 \leq a \quad (۴-۲)$$

$$Ty_{2,zz}(z_2, t) - my_{2,tt}(z_2, t) = 0 \quad 0 \leq z_2 \leq b \quad (5-2)$$

شرایط مرزی:

$$y_1(0, t) = \tilde{A}e^{i\Omega t} \quad (6-2)$$

$$y_2(0, t) = \tilde{A}e^{i\Omega t} \quad (7-2)$$

شرایط پیوستگی:

$$y_1(a, t) = y_2(b, t) \quad (8-2)$$

$$T(y_{1,z}(a, t) + y_{2,z}(b, t)) = -[k_0y_1(a, t) + c_0y_{1,t}(a, t)] \quad (9-2)$$

معادله (۸-۲) بیانگر جابجایی عمودی یکسان دو طرف طناب در نقطه‌ی $z = a$ می‌باشد. معادله (۹-۲) بیانگر تعادل نیرویی در نقطه‌ی $z = a$ می‌باشد.

در ادامه متغیرهای بی‌بعد جدیدی برای نرمالیزه شدن معادلات حاکم بر حرکت، معرفی شده است [۱۴]:

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} ct, \quad x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z}{L}, \quad u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y}{L}$$

$$c = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (10-2)$$

که c فرکانس مرجع را بیان می‌کند. ثابت‌های فنر و میرایی به ترتیب $k = k_0L/T$ و $\sigma = c_0cL/T$ می‌شوند. همچنین $\omega = \Omega/c$ و $A = \tilde{A}/L$ تعریف می‌شوند. چون طناب توسط میرایی و فنر به دو قسمت تبدیل شده است، برای سمت چپ طناب از اندیس ۱ و برای سمت راست طناب از اندیس ۲ استفاده شده است. مبدأ این مختصات‌ها در دو طرف طناب فرض شده است. بنابراین معادلات حرکت (۴-۲) و (۵-۲) به صورت زیر نرمالیزه می‌شوند:

$$u_{1,xx}(x_1, \tau) - u_{1,\tau\tau}(x_1, \tau) = 0 \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{a}{L} \quad (11-2)$$

$$u_{2,xx}(x_2, \tau) - u_{2,\tau\tau}(x_2, \tau) = 0 \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{b}{L} \quad (12-2)$$

همچنین شرایط مرزی (۶-۲) و (۷-۲) به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$u_1(0, \tau) = Ae^{i\omega\tau} \quad (۱۳-۲)$$

$$u_2(0, \tau) = Ae^{i\omega\tau} \quad (۱۴-۲)$$

شرایط پیوستگی نیز به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$u_1(a/L, \tau) = u_2(b/L, \tau) \quad (۱۵-۲)$$

$$u_{1,x}(a/L, \tau) + u_{2,x}(b/L, \tau) = -[ku_1(a/L, \tau) + \sigma u_{1,\tau}(a/L, \tau)] \quad (۱۶-۲)$$

۲-۲-۲ محاسبه فرکانس طبیعی

برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی، ارتعاشات آزاد سیستم در نظر گرفته شده است. یعنی از میرایی خارجی و تحریک‌های نوسانی در مرزها صرف نظر شده است. معادلات (۱۱-۲) و (۱۲-۲) تغییری نخواهند کرد و تنها شرایط مرزی و شرایط پیوستگی تغییر می‌کند که به صورت زیر خواهند بود:

$$u_1(0, \tau) = 0 \quad (۱۷-۲)$$

$$u_2(0, \tau) = 0 \quad (۱۸-۲)$$

$$u_1(a/L, \tau) = u_2(b/L, \tau) \quad (۱۹-۲)$$

$$u_{1,x}(a/L, \tau) + u_{2,x}(b/L, \tau) = -ku_1(a/L, \tau) \quad (۲۰-۲)$$

معادلات (۱۱-۲) و (۱۲-۲) با روش جداسازی متغیرها برای u_1 و u_2 حل شده‌اند. جواب عمومی این معادلات به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$u_1(x_1, \tau) = \varphi_1(x_1)e^{i\omega\tau} \quad (۲۱-۲)$$

$$u_2(x_2, \tau) = \varphi_2(x_2)e^{i\omega\tau} \quad (۲۲-۲)$$

که $\varphi_1(x_1)$ و $\varphi_2(x_2)$ توابع شکل پاسخ فرکانسی می‌باشند. با جای گذاری معادلات فوق در معادلات (۱۱-۲) و (۱۲-۲) معادلات زیر بدست آمده است:

$$\varphi_1'' + \omega^2 \varphi_1 = 0 \quad 0 \leq x_1 \leq a/L \quad (۲۳-۲)$$

$$\varphi_2'' + \omega^2 \varphi_2 = 0 \quad 0 \leq x_2 \leq b/L \quad (۲۴-۲)$$

پاسخ معادلات فوق به شکل زیر خواهد بود:

$$\varphi_1(x_1) = A \sin(\omega x_1) + B \cos(\omega x_1) \quad (25-2)$$

$$\varphi_2(x_2) = A' \sin(\omega x_2) + B' \cos(\omega x_2) \quad (26-2)$$

با اعمال شرایط مرزی روی معادلات فوق مقادیر ثابت‌های B و B' صفر می‌شود. بنابراین توابع پاسخ فرکانسی $\varphi_1(x_1)$ و $\varphi_2(x_2)$ سینوسی خواهند بود. شرایط پیوستگی (۲-۱۹) و (۲-۲۰) را با استفاده از این توابع سینوسی بازنویسی شده است.

$$A \sin\left(\frac{\omega a}{L}\right) = A' \sin\left(\frac{\omega b}{L}\right) \quad (27-2)$$

$$A \omega \cos\left(\frac{\omega a}{L}\right) + A' \omega \cos\left(\frac{\omega b}{L}\right) = -kA \sin\left(\frac{\omega a}{L}\right) \quad (28-2)$$

از معادله (۲۷-۲) ثابت A' برحسب A بدست آمده و در معادله (۲۸-۲) جای‌گذاری شده است. با توجه به این‌که $b = L - a$ معادله (۲۸-۲) به صورت زیر بدست آمده است:

$$\cot\left(\frac{\omega a}{L}\right) + \cot\left(\omega\left(1 - \frac{a}{L}\right)\right) = -\frac{k}{\omega} \quad (29-2)$$

معادله (۲۹-۲) معادله فرکانسی طناب در حالت کلی می‌باشد.

۲-۳-۲ - بدست آوردن تابع پاسخ فرکانسی

پاسخ معادلات (۲۳-۲) و (۲۴-۲) به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\varphi_1(x_1) = C_1 e^{i\omega x_1} + C_2 e^{-i\omega x_1} \quad (30-2)$$

$$\varphi_2(x_2) = C_3 e^{i\omega x_2} + C_4 e^{-i\omega x_2} \quad (31-2)$$

در این تحقیق از روش جدایش متغیرها به جای حل وابسته به ارتعاشات آزاد مسأله‌ی مقدار ویژه مختلط [۶، ۲۸]، برای بررسی اثر میرایی استفاده شده‌است. چون هدف نشان دادن میرایی که منجر به انتقال ارتعاشات به امواج است. با توجه به پاسخ کلی (۲-۳۰) و (۲-۳۱)، شرایط مرزی (۲-۱۳) و (۲-۱۴) به شکل زیر ساده شده‌اند:

$$\varphi_1(0) = A \quad (32-2)$$

$$\varphi_2(0) = A \quad (۳۳-۲)$$

شرایط پیوستگی (۱۵-۲) و (۱۶-۲) نیز به صورت زیر ساده شده‌اند:

$$\varphi_1(a/L) = \varphi_2(b/L) \quad (۳۴-۲)$$

$$\varphi_{1,x}(a/L) + \varphi_{2,x}(b/L) = -(k + i\omega\sigma)\varphi_1(a/L) \quad (۳۵-۲)$$

با توجه به اینکه $b = 1 - a$ و با دو شرط مرزی (۳۲-۲) و (۳۳-۲) و دو شرط پیوستگی (۳۴-۲) و

(۳۵-۲)، ثابت‌های C_1, C_2, C_3 و C_4 برحسب k, σ و ω و a بدست آمده‌اند:

$$C_1 = A \frac{e^{-i\omega}(k + i\omega(\sigma - 2)) - e^{\frac{a}{L}i\omega}(k + i\omega\sigma) + 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma) \left(\cos \sigma - \cos\left(\frac{a}{L}\omega\right) \right) - 4\omega \sin \omega} \quad (۳۶-۲)$$

$$C_2 = A \frac{e^{i\omega}(k + i\omega(\sigma + 2)) - e^{-\frac{a}{L}i\omega}(k + i\omega\sigma) - 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma) \left(\cos \sigma - \cos\left(\frac{a}{L}\omega\right) \right) - 4\omega \sin \omega} \quad (۳۷-۲)$$

$$C_3 = A \frac{e^{-i\omega}(k + i\omega(\sigma - 2)) - e^{-\frac{a}{L}i\omega}(k + i\omega\sigma) + 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma) \left(\cos \sigma - \cos\left(\frac{a}{L}\omega\right) \right) - 4\omega \sin \omega} \quad (۳۸-۲)$$

$$C_4 = A \frac{e^{i\omega}(k + i\omega(\sigma + 2)) - e^{\frac{a}{L}i\omega}(k + i\omega\sigma) - 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma) \left(\cos \sigma - \cos\left(\frac{a}{L}\omega\right) \right) - 4\omega \sin \omega} \quad (۳۹-۲)$$

تابع پاسخ برای سمت چپ و راست طناب به شکل زیر خواهد بود:

$$u_1(x_1, \tau) = (C_1 e^{i\omega x_1} + C_2 e^{-i\omega x_1}) e^{i\omega \tau} \quad 0 \leq x_1 \leq a/L \quad (۴۰-۲)$$

$$u_2(x_2, \tau) = (C_3 e^{i\omega x_2} + C_4 e^{-i\omega x_2}) e^{i\omega \tau} \quad 0 \leq x_2 \leq b/L \quad (۴۱-۲)$$

دامنه پاسخ فرکانسی برای سمت چپ و راست طناب به صورت زیر بدست می‌آید:

$$|u_1(x_1, \tau)| = |\varphi(x_1)| = A \sqrt{(\epsilon_1 \sin(\omega x_1))^2 + (\cos(\omega x_1) + \rho_1 \sin(\omega x_1))^2} \quad (۴۲-۲)$$

$$|u_2(x_2, \tau)| = |\varphi(x_2)| = A \sqrt{(\epsilon_2 \sin(\omega x_2))^2 + (\cos(\omega x_2) + \rho_2 \sin(\omega x_2))^2} \quad (۴۳-۲)$$

که در معادلات (۴۲-۲) و (۴۳-۲):

$$A\epsilon_1 = \text{Re}(C_1) - \text{Re}(C_2) \quad (۴۴-۲)$$

$$A\rho_1 = -\text{Im}(C_1) + \text{Im}(C_2) \quad (۴۵-۲)$$

$$A\epsilon_2 = \text{Re}(C_3) - \text{Re}(C_4) \quad (46-2)$$

$$A\rho_2 = -\text{Im}(C_3) + \text{Im}(C_4) \quad (47-2)$$

بنابراین تابع پاسخ به طور کامل بدست آمده است. همانطور که مشخص است پاسخ به شکل نوسانی است. همچنین پاسخ مختلط بوده و چهار ثابت که آن‌ها هم مختلط هستند نیز دارد. پدیده پیچیدگی مود در همین ثابت‌ها معرفی می‌شود که قطعا به دلیل حضور میرایی خارجی در سیستم است. در فصل ۳ این پدیده به خوبی نشان داده می‌شود.

۲-۲-۴ - بدست آوردن تابع دیاگرام فاز

با توجه به مشخص شدن توابع جابجایی (۳۰-۲) و (۳۱-۲) شکل توابع دیاگرام فاز برای سمت چپ و راست طناب به شکل زیر بدست آمده است:

$$\begin{aligned} \arg(\varphi_1) \\ = \arctan \left(A \frac{(k + i\omega\sigma)(\cos(\omega(x-1)) - \cos(\omega(x+a/L))) + 2\omega(\sin(\omega(x-1)) - \sin(\omega x))}{(k + i\omega\sigma)(\cos\sigma - \cos(\frac{a}{L}\omega)) - 2\omega \sin\omega} \right) \end{aligned} \quad (48-2)$$

$$\arg(\varphi_2) = \arctan \left(A \frac{(k + i\omega\sigma)(\cos(\omega x) - \cos(\omega(x-a/L))) + 2\omega(\sin(\omega(x-1)) - \sin(\omega x))}{(k + i\omega\sigma)(\cos\sigma - \cos(\frac{a}{L}\omega)) - 2\omega \sin\omega} \right) \quad (49-2)$$

که در روابط (۴۸-۲) و (۴۹-۲)، $\arg(\varphi_1)$ بیان‌گر رابطه دیاگرام فاز در سمت چپ و $\arg(\varphi_2)$ بیان‌گر رابطه دیاگرام فاز در سمت راست طناب می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$\arg(\varphi_1) = \arctan \left(\frac{\epsilon_1 \tan(\omega x_1)}{1 + \rho_1 \tan(\omega x_1)} \right) \quad (50-2)$$

$$\arg(\varphi_2) = \arctan \left(\frac{\epsilon_2 \tan(\omega x_2)}{1 + \rho_2 \tan(\omega x_2)} \right) \quad (51-2)$$

۲-۲-۵ - محاسبه نقاط ثابت در دیاگرام فاز

در فصل آینده نقاطی در تابع دیاگرام فاز سیستم نشان داده شده‌اند که به میرایی خارجی وابستگی ندارند و موقعیت این نقاط روی طناب به تغییرات k و نسبت فرکانسی تحریک وابسته است. این نقاط از دید ریاضیاتی به صورت زیر نشان داده شده‌اند:

$$\frac{\partial \arg(\varphi)}{\partial k} = 0 \quad (52-2)$$

$$\frac{\partial \arg(\varphi)}{\partial \sigma} = 0 \quad (53-2)$$

دو معادله فوق بدون اندیس هستند. یعنی این دو معادله برای تابع دیاگرام فاز هر دو سمت چپ و راست طناب نوشته می‌شوند. دو معادله بالا به دو معادله مشابه ساده خواهند شد:

$$\tan(\omega x) \left[(1 + \rho \tan(\omega x)) \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} - \epsilon \tan(\omega x) \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right] = 0 \quad (54-2)$$

$$\tan(\omega x) \left[(1 + \rho \tan(\omega x)) \frac{\partial \epsilon}{\partial k} - \epsilon \tan(\omega x) \frac{\partial \rho}{\partial k} \right] = 0 \quad (55-2)$$

که در معادلات (54-2) و (55-2) با گذاشتن اندیس ۱ برای x ، ϵ و ρ ، مختصات نقاط ثابت در سمت چپ طناب و با گذاشتن اندیس ۲ مختصات نقاط ثابت در سمت راست را بدست می‌دهند. در حقیقت از نقاط بدست آمده در ازای اندیس ۱ نقاطی صادق هستند که در بازه‌ی $0 < x_1 \leq a/L$ قرار داشته باشند و همچنین در ازای اندیس ۲ نقاطی معتبر هستند که در بازه‌ی $0 < x_2 \leq b/L$ قرار بگیرند. از حل قسمت اول دو معادله (54-2) و (55-2) معادله (56-2) بدست می‌آید.

$$\tan(\omega' x) = 0 \leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\omega_0}{\omega}, 2 \frac{\omega_0}{\omega}, \dots \right) \quad (56-2)$$

در رابطه (56-2)، ω' فرکانس نرمالایز شده ω/ω_0 می‌باشد و x اجتماع نقاط بدست آمده برای دو طرف طناب است. ω_0 اولین فرکانس طبیعی سیستم بدون میرایی می‌باشد، که نشان داده می‌شود به ازای k ناچیز، برابر π است. از حل قسمت دوم معادلات (54-2) و (55-2) عباراتی بر حسب k ، σ ، a و ω برای x بدست خواهد آمد که با توجه به مقادیر مختلف a (محل قرارگیری فنر-دمپر موضعی) نتایج متفاوت خواهد بود.

۲-۲-۶- معادله حرکت امواج در طناب

نشان داده می‌شود در حالتی که میرایی در سیستم وجود ندارد، دیاگرام دیاگرام فاز به صورت خطوط ثابت خواهد بود و مقادیر ثابتی چون صفر و $-\pi$ را خواهد داشت. در نقاط گذر دیاگرام دیاگرام فاز از صفر به $-\pi$ ، دیاگرام فاز شامل یک گسستگی و تغییر ناگهانی مقدار خود، خواهد بود. این نقاط همان

نقاط گره در طناب هستند. با افزایش اندکی میرایی دیاگرام فاز در نزدیکی این نقاط دیگر مقدار ثابت صفر یا $-\pi$ نخواهد داشت و این نقاط گسستگی به یک خط پیوسته تبدیل می‌شوند. خارج از محدوده‌ی نزدیک به این نقاط، بیشتر نقاط دیاگرام فاز همچنان مقدار ثابت صفر یا $-\pi$ دارد. محدوده‌ای از دیاگرام فاز که قبلاً گسسته بوده و حال به خط پیوسته تبدیل شده است، در نمودار پاسخ فرکانسی قبلاً بیان گر گره، و اکنون نشان دهنده‌ی تغییر دامنه به طور ناهمزمان یا پیچیدگی مود^۱ است. با افزایش میرایی این خط پیوسته در دیاگرام فاز تبدیل به یک خط راست و مورب در طول طناب شده و در این حالت در نمودار پاسخ فرکانسی بیشترین پیچیدگی مود رخ خواهد داد. بنابراین در صورتی که بتوان شرایطی در مورد k و σ برای خطی شدن دیاگرام فاز بدست آورد، در حقیقت شرایط بیشترین پیچیدگی مود در طناب بدست آمده است. برای این کار بسط تیلور تابع دیاگرام فاز معادله (۵۷-۲) نوشته شده و عوامل غیرخطی آن برابر صفر قرارداده شده است.

بسط تیلور تابع دیاگرام فاز به صورت معادله (۵۷-۲) خواهد بود:

$$\arg(\varphi) = \epsilon\omega x - \epsilon\rho\omega^2 x^2 + \left(\frac{1}{3}\epsilon\omega^3 + \epsilon\rho^2\omega^3 - \frac{1}{3}\epsilon^3\omega^3\right)x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (57-2)$$

بنابراین باید شرایط (۵۸-۲) و (۵۹-۲) همزمان برقرار باشند:

$$\epsilon = \pm 1 \quad (58-2)$$

$$\rho = 0 \quad (59-2)$$

معادلات (۵۸-۲) و (۵۹-۲) به ازای a های مختلف یا به بیان دیگر، به ازای محل‌های مختلف قرارگیری فنر و دمپر، شرایط متفاوتی را برای k و σ خواهند داد.

۲-۲-۷ - معادلات انرژی

در این قسمت معادلات انرژی جنبشی، پتانسیل و انرژی کل سیستم برحسب پارامترهای مختلف سیستم بدست آمده است. در فصل بعد تغییرات انرژی در سیستم به ازای محل‌های قرارگیری مختلف

¹ Mode complexity

فتر-دمپر موضعی متصل به سیستم، بررسی خواهد شد.

انرژی پتانسیل و جنبشی بر واحد طول طناب به ترتیب به صورت نیز می‌باشند:

$$dP(x, \tau) = \frac{1}{2} \text{Re}[u_x(x, \tau)]^2 \quad (۶۰-۲)$$

$$dK(x, \tau) = \frac{1}{2} \text{Re}[u_\tau(x, \tau)]^2 \quad (۶۱-۲)$$

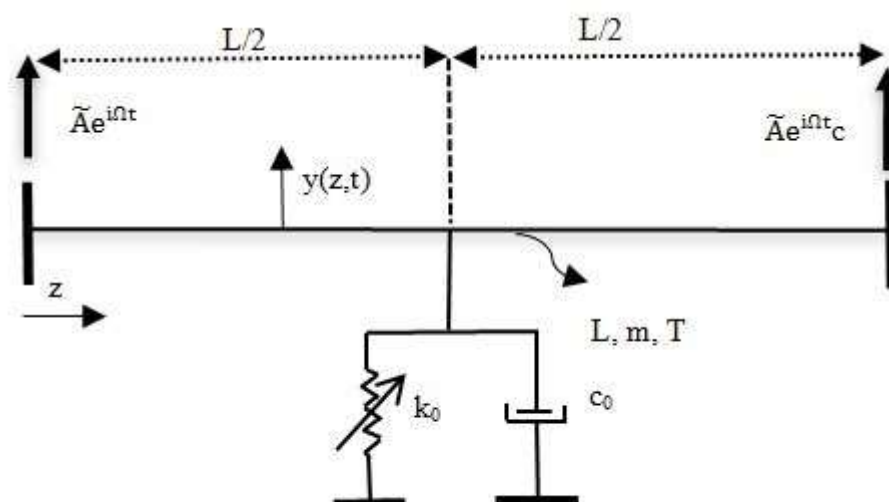
۲-۳- میرایی خطی و فتر غیر خطی

در این بخش معادلات حرکت برای حالتی که دمپر خطی و فتر غیر خطی در وسط طناب قرار گرفته باشند و در دوسر طناب تحریک نوسانی یکسان و همزمان باشد، استخراج و با رویکرد خمینه‌ی ناوردای^۱ که توسط شاو و پیر [۲۴] برای سیستم‌های پیوسته معرفی شده، برای بدست آوردن موده‌ای نرمال غیر خطی (NNM) حل شده است.

۲-۳-۱- تعریف مسأله

سیستم مورد تحلیل یک طناب الاستیک خطی با طول L است. در وسط این طناب یک دمپر خطی و یک فتر غیر خطی از مرتبه ۳، از یک طرف به طناب و از طرف دیگر به زمین متصل هستند. دو سر طناب با جابجایی نوسانی یکسان و همزمان تحریک شده است (شکل (۲-۲)).

¹ Invariant manifold



شکل (۲-۲) شماتیک طناب با میرایی خطی و فنر غیرخطی در $z=L/2$

پارامترها و متغیرهای شکل (۲-۲) در بخش قبل توضیح داده شده است. معادله حرکت مشابه معادله (۱-۲) در بخش قبل است با این تفاوت که جابجایی ضرب شده در سفتی k_0 از درجه ۳ می-باشد. همچنین مقدار $a=L/2$ است (معادله (۲-۲)).

$$my_{,tt}(z,t) - Ty_{,zz}(z,t) = -[k_0 y^3(a,t) + c_0 y_{,t}(a,t)]\delta(z - L/2) \quad (۲-۲)$$

شرایط مرزی کاملاً مشابه روابط (۲-۲) و (۳-۲) است. برای راحت‌تر شدن مسأله از متقارن بودن مسأله استفاده شده است و معادله حرکت به صورت همگن رابطه (۲-۴) ($a=L/2$) و شرایط مرزی به صورت روابط (۲-۴) و (۲-۶) بازنویسی شده‌اند.

$$2Ty_{1,z}(z_1,t) = -[k_0 y_1^3(L/2,t) + c_0 y_{1,t}(L/2,t)] \quad (۲-۶)$$

از این پس از نوشتن اندیس ۱ برای سمت چپ طناب خودداری شده است. با توجه به متقارن بودن مسأله، با بدست آمدن پاسخ سمت چپ، پاسخ سمت راست به راحتی با شرط تقارن بدست می‌آید. با استفاده از متغیرهای بی‌بعد (۲-۱۰) معادله حرکت و شرایط مرزی به فرم مناسب روابط (۲-۶۴)، (۲-۶۵) و (۲-۶۶) تبدیل شده‌اند.

$$u_{,\tau\tau} - u_{,xx} = 0 \quad (۲-۶۴)$$

$$u(0,\tau) = Ae^{i\omega\tau} \quad (۲-۶۵)$$

$$2u_{,x}\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = -\left[ku^3\left(\frac{1}{2}, \tau\right) + \sigma u_{,\tau}\left(\frac{1}{2}, \tau\right)\right] \quad (۶۶-۲)$$

در بخش بعد این معادله حرکت همگن با یک شرط مرزی غیرخطی و یک شرط مرزی نوسانی با رویکرد خمینه‌ی ناوردای حل شده است و مودهای نرمال غیرخطی بدست آمده‌اند.

۲-۳-۲ رویکرد خمینه‌ی ناوردای

خمینه ناوردای با روابط قید معادله حرکت تعیین می‌شود. تعریف خمینه‌ی ناوردای با خاصیت ذاتی "نامتغیر بودن"^۱ در ارتباط است. این خاصیت در یک خمینه‌ی ناوردای، اشاره به این موضوع دارد که حرکت آغاز شده روی خمینه در طول زمان همواره روی همان خمینه باقی می‌ماند. مود غیرخطی روی خمینه‌ی ناوردای به این صورت تعریف می‌شود: "حرکتی که روی یک خمینه‌ی ناوردای دو بعدی در فضای دیاگرام فاز سیستم اتفاق می‌افتد. این خمینه از نقطه تعادل پایدار می‌گذرد و در آن نقطه بر یک فضای ویژه‌ی^۲ (مود خطی) دو بعدی از سیستم خطی در تعادل، مماس است. روی این خمینه سیستم همانند یک سیستم یک درجه آزادی رفتار می‌کند". رویکرد خمینه‌ی ناوردای برای تعریف و تعیین مودهای نرمال غیرخطی حرکت، برای پهنای وسیعی از سیستم‌های ارتعاشی غیرخطی، استفاده می‌شود.

با توجه به تعاریف فوق مود غیرخطی را به صورت نسبت جابجایی و سرعت نقاط سیستم به جابجایی و سرعت یک نقطه خاص یا مرجع در نظر می‌گیرند. این نقطه با x_0 و جابجایی و سرعت متناظر با این نقطه را به صورت u_0 و v_0 نشان داده می‌شود. لازم به ذکر است که مودهای خطی حالت خاصی از مودهای غیرخطی هستند. در آنالیز مودال غیرخطی جمع‌آثار امکان پذیر نبوده و مودهای غیرخطی نسبت به یکدیگر متعامد نیستند.

اگر جابجایی و سرعت سیستم را به ترتیب با $u(x, t)$ و $v(x, t)$ نشان دهیم، می‌توان نوشت:

¹ Invariance

² eigenspace

$$u(x_0, t) = u_0(t) \quad (۶۷-۲)$$

$$v(x_0, t) = v_0(t)$$

$$u(x, t) = U(u_0(t), v_0(t), x, x_0) \quad (۶۸-۲)$$

$$v(x, t) = V(u_0(t), v_0(t), x, x_0)$$

U و V توابعی هستند که u و v را به u_0 و v_0 مرتبط می کنند و شرایط مرزی را ارضا نیز می کنند. این

روابط به صورت قید هستند که اگر حرکتی آن ها را ارضا کند، به طور کامل توسط زوج (u_0, v_0)

مشخص خواهد شد. این زوج متغیرهای حالت هستند و بقیه متغیرهای حالت تابعی از این دو متغیر

می باشند. از ترکیب روابط $(۶۷-۲)$ و $(۶۸-۲)$ معادلات $(۶۹-۲)$ حاصل می شوند.

$$U(u_0(t), v_0(t), x_0, x_0) = u_0(t) \quad (۶۹-۲)$$

$$V(u_0(t), v_0(t), x_0, x_0) = v_0(t)$$

معادله حرکت به فرم کلی به صورت رابطه $(۷۰-۲)$ است.

$$u_{tt} + f(u, u_t) = 0 \quad (۷۰-۲)$$

قدم اول مشتق گیری از معادلات قید $(۶۸-۲)$ نسبت به زمان می باشد.

$$u_{,t}(x, t) = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial u_0} \dot{u}_0 + \frac{\partial U}{\partial v_0} \dot{v}_0 \quad (۷۱-۲)$$

$$v_{,t}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial u_0} \dot{u}_0 + \frac{\partial V}{\partial v_0} \dot{v}_0$$

همچنین با توجه به متغیرهای فضای حالت مرجع و معادله کلی حرکت، روابط $(۷۲-۲)$ حاصل می شوند.

$$u_{,t}(x, t) = v(x, t) \quad (۷۲-۲)$$

$$v_{,t}(x, t) = u_{,tt}(x, t) = f(u, u_t)$$

با توجه به روابط $(۷۲-۲)$ وابستگی زمانی معادلات $(۷۱-۲)$ را از بین برده و به فرم معادلات $(۷۳-۲)$

تبدیل می شوند.

$$V = \frac{\partial U}{\partial u_0} v_0 + \frac{\partial U}{\partial v_0} f(U(u_0(t), v_0(t), x_0, x_0), V(u_0(t), v_0(t), x_0, x_0)) \quad (۷۳-۲)$$

$$f(U(u_0(t), v_0(t), x, x_0), V(u_0(t), v_0(t), x, x_0)) = \frac{\partial V}{\partial u_0} v_0$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial v_0} f(U(u_0(t), v_0(t), x_0, x_0), V(u_0(t), v_0(t), x_0, x_0))$$

به کمک سری توانی می توان معادلات (۷۳-۲) را حل نمود. ابتدا u و v را به صورت معادلات

(۷۴-۲) و (۷۵-۲) بسط داده و سپس در معادلات جای گذاری کرده و پس از بالانس ضرایب هم

درجه، دستگاه معادلات دیفرانسیلی معمولی در حوزه مکان برای درجات متفاوت بدست می آید.

$$u(x, t) = U(u_0(t), v_0(t), x, x_0) \quad (۷۴-۲)$$

$$\begin{aligned} &= a_1(x, x_0)u_0(t) + a_2(x, x_0)v_0(t) + a_3(x, x_0)u_0^2(t) \\ &+ a_4(x, x_0)u_0(t)v_0(t) + a_5(x, x_0)v_0^2(t) \\ &+ a_6(x, x_0)u_0^3(t) + a_7(x, x_0)u_0^2(t)v_0(t) \\ &+ a_8(x, x_0)u_0(t)v_0^2(t) + a_9(x, x_0)v_0^3(t) + \dots \end{aligned}$$

$$v(x, t) = V(u_0(t), v_0(t), x, x_0) \quad (۷۵-۲)$$

$$\begin{aligned} &= b_1(x, x_0)u_0(t) + b_2(x, x_0)v_0(t) + b_3(x, x_0)u_0^2(t) \\ &+ b_4(x, x_0)u_0(t)v_0(t) + b_5(x, x_0)v_0^2(t) \\ &+ b_6(x, x_0)u_0^3(t) + b_7(x, x_0)u_0^2(t)v_0(t) \\ &+ b_8(x, x_0)u_0(t)v_0^2(t) + b_9(x, x_0)v_0^3(t) + \dots \end{aligned}$$

رابطه (۷۶-۲) را شرایط سازگاری می نامند و شرط برقراری روابط (۶۹-۲) در روابط (۷۴-۲) و (۷۵-۲) می باشد.

$$\begin{aligned} a_1(x_0, x_0) &= 1 & a_2(x_0, x_0) &= 0 & a_j(x_0, x_0) &= 0 \\ b_1(x_0, x_0) &= 0 & b_2(x_0, x_0) &= 1 & a_j(x_0, x_0) &= 0 \end{aligned} \quad j = 3, 4, 5, \dots \quad (۷۶-۲)$$

با قراردادن بسط های (۷۴-۲) و (۷۵-۲) در روابط U و V و دسته بندی ضرایب جملات هم

درجه و حل معادلات بدست آمده، ثابت های $a_i(x, x_0)$ و $b_i(x, x_0)$ ، $i = 1, 2, 3, \dots$ محاسبه می شوند.

با قراردادن این ثابت ها در U و V ، پاسخ سیستم غیرخطی و همچنین سرعت نقاط مختلف سیستم

بدست آمده است. بنابراین می توان شکل مودهای غیرخطی را در حالت پایدار بررسی کرد.

۳-۳-۳ مود نرمال غیرخطی طناب با دمپر خطی و فنر غیر خطی

از معادله (۶۴-۲) و رابطه (۶۸-۲) روابط (۷۷-۲) و (۷۸-۲) حاصل می شوند.

$$V = \frac{\partial U}{\partial u_0} v_0 + \frac{\partial U}{\partial v_0} [u,_{xx}]_{x=x_0} \quad (۷۷-۲)$$

$$v,_{t} = u,_{xx} \quad (۷۸-۲)$$

با قرار دادن روابط (۷۷-۲) و (۷۸-۲) در روابط (۷۳-۲) روابط (۷۹-۲) و (۸۰-۲) حاصل می‌شوند.

$$u,_{t} = v \quad (۷۹-۲)$$

$$u,_{xx} = \frac{\partial V}{\partial u_0} v_0 + \frac{\partial V}{\partial v_0} [u,_{xx}]_{x=x_0} \quad (۸۰-۲)$$

با جای‌گذاری بسط‌های (۷۴-۲) و (۷۵-۲) در روابط (۷۹-۲) و (۸۰-۲) و دسته‌بندی ضرایب جملات هم‌درجه، معادلات حاکم بر ضرایب $a_i(x, x_0)$ و $b_i(x, x_0)$ مطابق روابط (۸۱-۲) تا (۹۸-۲) بدست می‌آیند.

ضرایب درجه ۱ از معادله (۸۱-۲):

$$u_0: \quad b_1(x, x_0) = a_2(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۸۱-۲)$$

$$v_0: \quad b_2(x, x_0) = a_1(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) \quad (۸۲-۲)$$

ضرایب درجه ۱ از معادله (۸۰-۲):

$$u_0: \quad a_1''(x, x_0) = b_2(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۸۳-۲)$$

$$v_0: \quad a_2''(x, x_0) = b_1(x, x_0) + b_2(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) \quad (۸۴-۲)$$

ضرایب درجه ۲ از معادله (۷۹-۲):

$$u_0^2: \quad b_3(x, x_0) = a_2(x, x_0)a_3''(x_0, x_0) + a_4(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) + \quad (۸۵-۲)$$

$$u_0 v_0: \quad b_4(x, x_0) = 2a_3(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_4''(x_0, x_0) + a_4(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) + 2a_5(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۸۶-۲)$$

$$v_0^2: \quad b_5(x, x_0) = a_4(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_5''(x_0, x_0) + 2a_5(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) \quad (۸۷-۲)$$

ضرایب درجه ۲ از معادله (۸۰-۲):

$$u_0^2: \quad a_3''(x, x_0) = b_2(x, x_0)a_3''(x_0, x_0) + b_4(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۸۸-۲)$$

$$u_0 v_0: \quad a_4''(x, x_0) = 2b_3(x, x_0) + b_2(x, x_0)a_4''(x_0, x_0) + b_4(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) + 2b_5(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۸۹-۲)$$

$$v_0^2: \quad a_5''(x, x_0) = b_4(x, x_0) + b_2(x, x_0)a_5''(x_0, x_0) + 2b_5(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) + 3b_9(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۹۰-۲)$$

ضرایب درجه ۳ معادله (۷۹-۲):

$$u_0^3: \quad b_6(x, x_0) = a_2(x, x_0)a_6''(x_0, x_0) + a_4(x, x_0)a_3''(x_0, x_0) + a_7(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۹۱-۲)$$

$$u_0^2 v_0: \quad b_7(x, x_0) = 3a_6(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_7''(x_0, x_0) + a_4(x, x_0)a_4''(x_0, x_0) + 2a_5(x, x_0)a_3''(x_0, x_0) + a_7(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) + 2a_8(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۹۲-۲)$$

$$u_0 v_0^2: \quad b_8(x, x_0) = 2a_7(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_8''(x_0, x_0) + a_4(x, x_0)a_5''(x_0, x_0) + 2a_5(x, x_0)a_4''(x_0, x_0) + 2a_8(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) + 3a_9(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۹۳-۲)$$

$$v_0^3: \quad b_9(x, x_0) = a_8(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_9''(x_0, x_0) + 2a_5(x, x_0)a_5''(x_0, x_0) + 3a_9(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) \quad (۹۴-۲)$$

ضرایب درجه ۳ معادله (۸۰-۲):

$$u_0^3: \quad a_6''(x, x_0) = b_2(x, x_0)a_6''(x_0, x_0) + b_4(x, x_0)a_3''(x_0, x_0) + b_7(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۹۵-۲)$$

$$u_0^2 v_0: \quad a_7''(x, x_0) = 3b_6(x, x_0) + b_2(x, x_0)a_7''(x_0, x_0) + b_4(x, x_0)a_4''(x_0, x_0) + 2b_5(x, x_0)a_3''(x_0, x_0) + b_7(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) + 2b_8(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۹۶-۲)$$

$$u_0 v_0^2: \quad a_8''(x, x_0) = 2b_7(x, x_0) + b_2(x, x_0)a_8''(x_0, x_0) + b_4(x, x_0)a_5''(x_0, x_0) + 2b_5(x, x_0)a_4''(x_0, x_0) + 2b_8(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) + 3b_9(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۹۷-۲)$$

$$v_0^3: \quad a_9''(x, x_0) = b_8(x, x_0) + b_2(x, x_0)a_9''(x_0, x_0) + 2b_5(x, x_0)a_5''(x_0, x_0) + 3b_9(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) \quad (۹۸-۲)$$

مشاهده می‌شود که شرایط سازگاری (۷۶-۲) در معادلات (۸۱-۲) تا (۹۸-۲) صدق می‌کنند.

معادلات مربوط به مجهولات $a_i(x, x_0)$ و $b_i(x, x_0)$ در روابط (۸۱-۲) تا (۹۸-۲) بدست

آمده است. برای حل این معادلات نیاز به شرایط مرزی است. شرایط مرزی (۶۵-۲) و (۶۶-۲) فقط

برای جابجایی هستند. با توجه به اینکه در این روش پاسخ برحسب هم جابجایی و هم سرعت نقطه

مرجع محاسبه می‌شود، نیاز به شرایط مرزی مربوط به سرعت نیز هستیم. برای این کار از شرایط مرزی (۶۵-۲) و (۶۶-۲) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم.

$$v(0, t) = Ai\omega e^{i\omega t} \quad (۹۹-۲)$$

$$2v_{,x}\left(\frac{1}{2}, t\right) = -\left[kv^3\left(\frac{1}{2}, t\right) + \sigma v_{,t}\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] \quad (۱۰۰-۲)$$

بسط‌های (۷۴-۲) و (۷۵-۲) را در شرایط مرزی (۶۵-۲) و (۶۶-۲) و (۹۹-۲) و (۱۰۰-۲) قرار داده تا شرایط مرزی لازم برای حل معادلات (۸۱-۲) تا (۹۸-۲) بدست آیند. در این جا نیز همانند حالت قبل باید ضرایب هم درجه جدا شوند تا شرایط مرزی مربوط به هر درجه از معادلات بدست آید. البته با توجه به اینکه می‌توان تمامی معادلات هر درجه را تنها برحسب $a_i(x, x_0)$ نوشت و $b_i(x, x_0)$ را برحسب $a_i(x, x_0)$ جایگزین کرد، بنابراین تنها به شرایط مرزی جابجایی نیاز است و از شرایط مرزی سرعت استفاده نمی‌شود.

از قرار دادن بسط (۷۴-۲) در شرط مرزی (۶۵-۲)، رابطه (۱۰۱-۲) بدست آمده است.

$$U(u_0(t), v_0(t), 0, x_0) = Ae^{i\omega t} \quad (۱۰۱-۲)$$

برای برقراری رابطه (۱۰۱-۲) فرض شده است که $x_0 = 0$ است و بنابراین $u_0(t) = Ae^{i\omega t}$ و $v_0(t) = Ai\omega e^{i\omega t}$ می‌باشند. با توجه به اینکه نقطه مرجع می‌تواند هر نقطه دلخواهی به جز گره باشد و در موقعیت $x = 0$ در سیستم تحریک نوسانی داریم، بنابراین انتخاب نقطه مرجع $x_0 = 0$ انتخاب درستی است.

از قرار دادن بسط‌های (۷۴-۲) و (۷۵-۲) در معادلات شرط مرزی (۶۵-۲) و (۶۶-۲) و جداسازی ضرایب هم درجه، شرایط مرزی مربوط به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مربوط به $a_i(x, x_0)$ در روابط (۱۰۲-۲) تا (۱۰۴-۲) بدست آمده است.

ضرایب درجه ۱ معادله (۶۵-۲) و (۶۶-۲):

$$u_0: \quad a_1(0,0) = 1 \quad 2a'_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\sigma b_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (۱۰۲-۲)$$

$$v_0: \quad a_2(0,0) = 0 \quad 2a'_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\sigma b_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

ضرایب درجه ۲ معادله (۶۵-۲) و (۶۶-۲):

$$u_0^2: \quad a_3(0,0) = 0 \quad 2a'_3\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\sigma b_3\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (۱۰۳-۲)$$

$$u_0 v_0: \quad a_4(0,0) = 0 \quad 2a'_4\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\sigma b_4\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$v_0^2: \quad a_5(0,0) = 0 \quad 2a'_5\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\sigma b_5\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

ضرایب درجه ۳ معادله (۶۵-۲) و (۶۶-۲):

$$u_0^3: \quad a_6(0,0) = 0 \quad 2a'_6\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -ka_1^3\left(\frac{1}{2}, 0\right) - \sigma b_6\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (۱۰۴-۲)$$

$$u_0^2 v_0: \quad a_7(0,0) = 0 \quad 2a'_7\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -3ka_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)a_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) - \sigma b_7\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$u_0 v_0^2: \quad a_8(0,0) = 0 \quad 2a'_8\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -3ka_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)a_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) - \sigma b_8\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$v_0^3: \quad a_9(0,0) = 0 \quad 2a'_9\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -ka_2^3\left(\frac{1}{2}, 0\right) - \sigma b_9\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

-۱-۳-۳-۲ تحلیل درجه ۱:

با جای‌گذاری معادلات (۸۱-۲) و (۸۲-۲) در معادلات (۸۳-۲) و (۸۴-۲)، معادلات درجه ۱ را می‌توان به دو معادله کاهش داد:

$$a_1''(x, x_0) = a_1(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) + a_2(x, x_0)a_2''(x_0, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۱۰۵-۲)$$

$$a_2''(x, x_0) = a_2(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) + a_1(x, x_0)a_2''(x_0, x_0) + a_2(x, x_0)a_2''^2(x_0, x_0) \quad (۱۰۶-۲)$$

پاسخ معادلات (۱۰۵-۲) و (۱۰۶-۲) به صورت معادلات (۱۰۷-۲) و (۱۰۸-۲) در نظر گرفته می‌شود:

$$a_1(x, x_0) = C_1 \cos(\omega_1 x) + C_2 \sin(\omega_1 x) \quad (۱۰۷-۲)$$

$$a_2(x, x_0) = C_3 \cos(\omega_2 x) + C_4 \sin(\omega_2 x) \quad (۱۰۸-۲)$$

با توجه به شرایط سازگاری (۷۶-۲):

$$a_1(x_0, x_0) = 1 \xrightarrow{x_0=0} C_1 = 1 \quad (۱۰۹-۲)$$

$$a_2(x_0, x_0) = 0 \xrightarrow{x_0=0} C_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1(x, x_0) = \cos(\omega_1 x) + C_2 \sin(\omega_1 x) \rightarrow a_1''(x_0, x_0) = -\omega_1^2 \\ a_2(x, x_0) = C_4 \sin(\omega_2 x) \rightarrow a_2''(x_0, x_0) = 0 \end{cases}$$

معادلات (۱۰۷-۲) و (۱۰۷-۲) که در (۱۰۹-۲) ساده شده‌اند، باید معادلات (۱۰۵-۲) و (۱۰۶-۲) را

نیز ارضا کنند. بنابراین:

$$-\omega_1^2 \cos(\omega_1 x) - C_2 \omega_1^2 \sin(\omega_1 x) = (\cos(\omega_1 x) + C_2 \sin(\omega_1 x))(-\omega_1^2) + 0 \quad (۱۱۰-۲)$$

$$-C_4 \omega_2^2 \cos(\omega_2 x) = (C_4 \cos(\omega_2 x))(-\omega_1^2) + 0 + 0 \rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$a_1''(x_0, x_0) = -\omega^2$$

بنابراین فرم اصلی پاسخ معادلات درجه ۱ (۱۰۵-۲) و (۱۰۶-۲) به صورت زیر است:

$$a_1(x, x_0) = \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \quad (۱۱۱-۲)$$

$$a_2(x, x_0) = C_4 \sin(\omega x)$$

این پاسخ باید شرایط مرزی را نیز ارضا کند. شرایط مرزی مربوط به معادلات درجه ۱ در معادلات

(۱۰۲-۲) بین شده‌اند. پاسخ‌های (۱۱۱-۲) دو مورد از این شرایط مرزی را به صورت بدیهی ارضا می-

کنند. دو شرط دیگر دستگاه جبری زیر را تشکیل می‌دهند.

$$\begin{bmatrix} 2\omega \cos(\frac{\omega}{2}) & -\sigma \omega^2 \sin(\frac{\omega}{2}) \\ \sigma \sin(\frac{\omega}{2}) & 2\omega \cos(\frac{\omega}{2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\omega \sin(\frac{\omega}{2}) \\ -\sigma \cos(\frac{\omega}{2}) \end{Bmatrix} \quad (۱۱۲-۲)$$

در تحلیل معادلات درجه ۱ درحقیقت مسأله خطی ($k=0$) درحال حل شدن است. در این

مرحله به جای حل مسأله مقدارویژه مختلط خطی (طناب با یک دمپر در وسط) و بدست آوردن

فرکانس‌های مختلط ω ، سپس محاسبه ثابت‌های C_2 و C_4 در معادله جبری (۱۱۲-۲)، همانند حالتی

که فنر-دمپر خطی بود، ثابت‌ها برحسب ω محاسبه می‌شوند. در نهایت با مقدار دادن به پارامترها در

بازه حقیقی به بررسی سیستم پرداخته شده است.

از معادله (۱۱۲-۲) ثابت‌های C_2 و C_4 برحسب σ و ω در رابطه (۱۱۳-۲) بدست آمده‌اند.

$$C_2 = -\frac{\sin(\omega)(\sigma^2 - 4)}{2h} \quad (۱۱۳-۲)$$

$$C_4 = -\frac{2\sigma}{\omega h}$$

که h دترمینان ضرایب معادله جبری (۱۱۲-۲) می باشد.

از معادلات (۸۱-۲) و (۸۲-۲)، $b_1(x, x_0)$ و $b_2(x, x_0)$ بدست می آیند.

$$b_1(x, x_0) = b_2(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) = \frac{2\sigma\omega}{h}\sin(\omega x) \quad (۱۱۴-۲)$$

$$b_2(x, x_0) = a_1(x, x_0) = \cos(\omega x) - \frac{\sin(\omega)(\sigma^2 - 4)}{2h}\sin(\omega x)$$

۲-۳-۳-۲- تحلیل درجه ۲:

با توجه به اینکه ضریب عامل غیرخطی (k) نه در معادلات درجه ۲ یعنی (۸۵-۲) تا (۹۰-۲) و نه در شرایط مرزی مربوط به درجه ۲ یعنی (۱۰۳-۲) ظاهر نشده اند، پاسخ بدیهی برای $a_3(x, x_0)$ و $a_4(x, x_0)$ و $a_5(x, x_0)$ صفر است. چرا که در صورتی که ضریب عامل غیرخطی در معادله حرکت صفر باشد و پاسخی برای ضرایب درجه ۲ بدست آید، معادله حرکت خطی است، اما پاسخ بدست آمده غیر خطی است. در حالت کلی می توان گفت در صورتی که سیستم از درجه فرد باشد، پاسخ آن از درجه فرد است و در صورتی که سیستم زوج باشد پاسخ آن از درجه زوج خواهد بود.

$$a_3(x, x_0) = a_4(x, x_0) = a_5(x, x_0) = 0 \quad (۱۱۵-۲)$$

$$b_3(x, x_0) = b_4(x, x_0) = b_5(x, x_0) = 0$$

۲-۳-۳-۳- تحلیل درجه ۳:

با توجه به نتایج مراحل قبل یا همان روابط (۱۱۱-۲) و (۱۱۵-۲) معادلات درجه ۳ به صورت زیر ساده می شوند.

$$u_0^3: \quad b_6(x, x_0) = a_2(x, x_0)a_6''(x_0, x_0) + a_7(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \quad (۱۱۶-۲)$$

$$u_0^2 v_0: \quad b_7(x, x_0) = 3a_6(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_7''(x_0, x_0) + 2a_8(x, x_0)a_1''(x_0, x_0)$$

$$u_0 v_0^2: \quad b_8(x, x_0) = 2a_7(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_8''(x_0, x_0) + 3a_9(x, x_0)a_1''(x_0, x_0)$$

$$\begin{aligned} v_0^3: \quad & b_9(x, x_0) = a_8(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_9''(x_0, x_0) \\ u_0^3: \quad & a_6''(x, x_0) = b_2(x, x_0)a_6''(x_0, x_0) + b_7(x, x_0)a_1''(x_0, x_0) \end{aligned} \quad (117-2)$$

$$u_0^2 v_0: \quad a_7''(x, x_0) = 3b_6(x, x_0) + b_2(x, x_0)a_7''(x_0, x_0) + 2b_8(x, x_0)a_1''(x_0, x_0)$$

$$u_0 v_0^2: \quad a_8''(x, x_0) = 2b_7(x, x_0) + b_2(x, x_0)a_8''(x_0, x_0) + 3b_9(x, x_0)a_1''(x_0, x_0)$$

$$v_0^3: \quad a_9''(x, x_0) = b_8(x, x_0) + b_2(x, x_0)a_9''(x_0, x_0)$$

در معادلات (۱۱۷-۲) می‌توان $b_i(x, x_0)$ ها را از معادلات (۱۱۴-۲) و (۱۱۶-۲) جایگزین کرد. در این صورت چهار معادله و چهار مجهول $a_i(x, x_0)$ ، $i = 6, 7, 8, 9$ باقی می‌مانند.

$$\begin{aligned} u_0^3: \quad & a_6''(x, x_0) = a_1(x, x_0)a_6''(x_0, x_0) \\ & + [3a_6(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_7''(x_0, x_0) \\ & + 2a_8(x, x_0)a_1''(x_0, x_0)]a_1''(x_0, x_0) \end{aligned} \quad (118-2)$$

$$\begin{aligned} u_0^2 v_0: \quad & a_7''(x, x_0) = 3[a_2(x, x_0)a_6''(x_0, x_0) + a_7(x, x_0)a_1''(x_0, x_0)] \\ & + a_1(x, x_0)a_7''(x_0, x_0) \\ & + 2a_1''(x_0, x_0)[2a_7(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_8''(x_0, x_0) \\ & + 3a_9(x, x_0)a_1''(x_0, x_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0 v_0^2: \quad & a_8''(x, x_0) = 2[3a_6(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_7''(x_0, x_0) \\ & + 2a_8(x, x_0)a_1''(x_0, x_0)] + a_1(x, x_0)a_8''(x_0, x_0) \\ & + 3a_1''(x_0, x_0)[a_8(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_9''(x_0, x_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0^3: \quad & a_9''(x, x_0) = [2a_7(x, x_0) + a_2(x, x_0)a_8''(x_0, x_0) \\ & + 3a_9(x, x_0)a_1''(x_0, x_0)] + a_1(x, x_0)a_9''(x_0, x_0) \end{aligned}$$

توجه شود که در رابطه (۱۱۸-۲)، $a_i''(x_0, x_0)$ پارامترهای ثابت غیر صفر هستند. با توجه به ظاهر شدن $a_1(x, x_0)$ و $a_2(x, x_0)$ معادلات (۱۱۸-۲) ناهمگن هستند. بنابراین هم پاسخ همگن و هم ناهمگن آن‌ها باید محاسبه گردد و مجموع این دو پاسخ، جواب کلی این معادلات خواهد بود. برای محاسبه پاسخ همگن، در معادلات (۱۱۸-۲)، $a_1(x, x_0) = a_2(x, x_0) = 0$ قرار می‌دهیم. شکل پاسخ همگن با توجه به شرایط مرزی (۱۰۴-۲) به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$a_6^g(x, x_0) = D_1 \sin(\omega x) + D_2 \sin(3\omega x) + D_3 \cos(\omega x) + D_4 \cos(3\omega x) \quad (119-2)$$

$$a_7^g(x, x_0) = D_5 \sin(\omega x) + D_6 \sin(3\omega x) + D_7 \cos(\omega x) + D_8 \cos(3\omega x)$$

$$a_8^g(x, x_0) = D_9 \sin(\omega x) + D_{10} \sin(3\omega x) + D_{11} \cos(\omega x) + D_{12} \cos(3\omega x)$$

$$a_9^g(x, x_0) = D_{13} \sin(\omega x) + D_{14} \sin(3\omega x)$$

با قرار دادن پاسخ‌های همگن (۱۱۹-۲) در معادلات (۱۱۸-۲) که در این معادلات $a_1(x, x_0) = a_2(x, x_0) = 0$ است و برابر قرار دادن ضرایب سینوسی و کسینوسی، روابطی بین ثابت‌های D_1 بدست آمده است. البته معادله اول و سوم و همچنین معادله دوم و چهارم روابط یکسانی را ارائه می‌دهند. از معادلات اول و سوم روابط (۱۲۰-۲) بدست آمده است.

$$\sin(\omega x): \quad D_1 = \omega^2 D_9 \quad (120-2)$$

$$\sin(3\omega x): \quad 3D_2 = -\omega^2 D_{10}$$

$$\cos(\omega x) \quad D_3 = \omega^2 D_{11}$$

$$\cos(3\omega x) \quad 3D_4 = -\omega^2 D_{12}$$

از معادلات دوم و چهارم روابط (۱۲۱-۲) بدست آمده است.

$$\sin(\omega x): \quad D_5 = \omega^2 D_{13} \quad (121-2)$$

$$\sin(3\omega x): \quad D_6 = -3\omega^2 D_{14}$$

$$\cos(\omega x) \quad D_7 = 0$$

$$\cos(3\omega x) \quad D_8 = 0$$

لازم به توضیح است که برای ضرایب D_7 و D_8 روابط ناسازگاری مشاهده شد که فقط به ازای مقدار صفر برقرار بودند. بنابراین پاسخ‌های همگن (۱۱۹-۲) به صورت زیر ساده می‌شوند.

$$a_6^g(x, x_0) = \omega^2 D_9 \sin(\omega x) - \frac{\omega^2 D_{10}}{3} \sin(3\omega x) + \omega^2 D_{11} \cos(\omega x) \quad (122-2)$$

$$- \frac{\omega^2 D_{12}}{3} \cos(3\omega x)$$

$$a_7^g(x, x_0) = \omega^2 D_{13} \sin(\omega x) - 3\omega^2 D_{14} \sin(3\omega x)$$

$$a_8^g(x, x_0) = D_9 \sin(\omega x) + D_{10} \sin(3\omega x) + D_{11} \cos(\omega x) + D_{12} \cos(3\omega x)$$

$$a_9^g(x, x_0) = D_{13} \sin(\omega x) + D_{14} \sin(3\omega x)$$

پاسخ ناهمگن یا همان جواب خصوصی معادلات (۱۱۸-۲) با توجه به $a_1(x, x_0)$ و

$a_2(x, x_0)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$a_6^p(x, x_0) = B_1 \cos(\omega x) + B_2 \sin(\omega x) \quad (123-2)$$

$$a_7^p(x, x_0) = B_3 \cos(\omega x) + B_4 \sin(\omega x)$$

$$a_8^p(x, x_0) = B_5 \cos(\omega x) + B_6 \sin(\omega x)$$

$$a_9^p(x, x_0) = B_7 \cos(\omega x) + B_8 \sin(\omega x)$$

پاسخ‌های خصوصی (۱۲۳-۲) باید در معادلات ناهمگن خود یعنی (۱۱۸-۲) صدق کنند. با قرار دادن این پاسخ‌ها در معادلات مربوط به خود و برابر قرار دادن ضرایب سینوسی و کسینوسی روابطی بین ثابت‌های B_i بدست می‌آید که این روابط در صورتی برقرار هستند که ثابت‌های $B_1 = B_3 = B_5 = B_7 = 0$ باشند. در این صورت مشابه حالت همگن از معادلات اول و سوم و همچنین دوم و چهارم روابط یکسانی بدست می‌آید. با توجه به اینکه پاسخ خصوصی $a_i^p(x, x_0)$ فقط به صورت سینوسی است و در پاسخ همگن این شکل پاسخ در نظر گرفته شده است، بنابراین پاسخ کلی که به صورت مجموع پاسخ همگن و ناهمگن است، همان شکل پاسخ همگن (۱۲۲-۲) را دارد. در حقیقت می‌توان گفت پاسخ ناهمگن وجود ندارد، چراکه ترم غیرخطی در معادلات ظاهر نشده و در شرایط مرزی خود را نشان داده است. پاسخ‌های کلی $a_i(x, x_0)$ که به شکل (۱۲۲-۲) است باید شرایط سازگاری (۷۶-۲) و شرایط مرزی (۱۰۴-۲) را ارضا نمایند. از قرار دادن پاسخ کلی در شرایط سازگاری روابط زیر بدست آمده است.

$$a_6(x_0, x_0) = 0 \xrightarrow{x_0=0} a_6(0,0) = 0 \rightarrow 3D_{11} = D_{12} \quad (124-2)$$

$$a_7(x_0, x_0) = 0 \xrightarrow{x_0=0} a_7(0,0) = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$a_8(x_0, x_0) = 0 \xrightarrow{x_0=0} a_8(0,0) = 0 \rightarrow D_{11} = -D_{12}$$

$$a_9(x_0, x_0) = 0 \xrightarrow{x_0=0} a_9(0,0) = 0 \rightarrow 0 = 0$$

رابطه اول و سوم در (۱۲۴-۲) تنها در صورتی برقرار هستند که $D_{11} = D_{12} = 0$ باشند.

بنابراین شکل کلی پاسخ معادلات (۱۱۸-۲) به صورت زیر می‌باشد.

$$a_6(x, x_0) = \omega^2 D_9 \sin(\omega x) - \frac{\omega^2 D_{10}}{3} \sin(3\omega x) \quad (125-2)$$

$$a_7(x, x_0) = \omega^2 D_{13} \sin(\omega x) - 3\omega^2 D_{14} \sin(3\omega x)$$

$$a_8(x, x_0) = D_9 \sin(\omega x) + D_{10} \sin(3\omega x)$$

$$a_9(x, x_0) = D_{13} \sin(\omega x) + D_{14} \sin(3\omega x)$$

با توجه به پاسخ‌های (۱۲۵-۲)، $a_i''(x, x_0)$ و $i = 6, 7, 8, 9$ همگی صفر هستند. بنابراین با توجه به

این امر و روابط (۱۱۶-۲) شرایط مرزی (۱۰۴-۲) به صورت زیر ساده می‌شوند.

$$u_0^3: \quad a_6(0,0) = 0 \quad 2a'_6\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -ka_1^3\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \omega^2 \sigma a_7\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (۱۲۶-۲)$$

$$u_0^2 v_0: \quad a_7(0,0) = 0 \quad 2a'_7\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -3ka_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) a_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ + 2\omega^2 \sigma a_8\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ - 3\sigma a_6\left(\frac{1}{2}, x_0\right)$$

$$u_0 v_0^2: \quad a_8(0,0) = 0 \quad 2a'_8\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -3ka_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) a_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ - 2\sigma a_7\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ + 3\omega^2 \sigma a_9\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$v_0^3: \quad a_9(0,0) = 0 \quad 2a'_9\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -ka_2^3\left(\frac{1}{2}, 0\right) - \sigma a_8\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

با قرار دادن پاسخ‌های (۱۲۵-۲) در شرایط مرزی (۱۲۶-۲)، چهار شرط مرزی به صورت بدیهی برقرار

هستند و از چهار شرط مرزی دیگر روابطی برای چهار ثابت $D_9, D_{10}, D_{13}, D_{14}$ بر حسب ω و k و σ

بدست می‌آید. این چهار معادله و چهار ثابت حل شده و ثابت‌ها بدست آمده است. بنابراین پاسخ

مجهولات $a_i(x, x_0)$ و $i = 6, 7, 8, 9$ کاملاً بدست آمده است. از روابط (۱۱۶-۲) به راحتی $b_i(x, x_0)$

و $i = 6, 7, 8, 9$ قابل محاسبه هستند.

۲-۳-۳-۴ - پاسخ جابجایی و سرعت سیستم غیر خطی

با مشخص شدن تمامی $a_i(x, x_0)$ ها و $b_i(x, x_0)$ در مراحل قبلی، پاسخ پایدار جابجایی و سرعت

سیستم به صورت بسط‌های روابط (۷۴-۲) و (۷۵-۲) که به صورت زیر ساده شده‌اند قابل محاسبه

هستند.

$$u(x, t) = a_1(x, x_0) A e^{i\omega t} + a_2(x, x_0) A i \omega e^{i\omega t} + a_6(x, x_0) A^3 e^{3i\omega t} \\ + a_7(x, x_0) A^3 i \omega e^{3i\omega t} - a_8(x, x_0) A^3 \omega^2 e^{3i\omega t} \\ - a_9(x, x_0) A^3 i \omega^3 e^{3i\omega t} \quad (۱۲۷-۲)$$

$$v(x, t) = b_1(x, x_0)Ae^{i\omega t} + b_2(x, x_0)Ai\omega e^{i\omega t} + b(x, x_0)A^3e^{3i\omega t} \quad (128-2)$$

$$+ b_7(x, x_0)A^3i\omega e^{3i\omega t} - b_8(x, x_0)A^3\omega^2 e^{3i\omega t}$$

$$- b_9(x, x_0)A^3i\omega^3 e^{3i\omega t}$$

اگر در رابطه (۱۲۷-۲) مقدار $t=0$ قرار داده شود پاسخ پایدار سیستم را در زمان صفر می‌دهد که معادل با همان تابع $\varphi(x)$ در حالت خطی می‌باشد.

$$\varphi(x) = a_1(x, x_0)A + a_2(x, x_0)Ai\omega + a_6(x, x_0)A^3 + a_7(x, x_0)A^3i\omega \quad (129-2)$$

$$- a_8(x, x_0)A^3\omega^2 - a_9(x, x_0)A^3i\omega^3$$

بنابراین اندازه دامنه پاسخ فرکانسی و تابع دیاگرام فاز به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$|u(x, \tau)| = |\varphi(x)| = \sqrt{Re(\varphi(x))^2 + Im(\varphi(x))^2} \quad (130-2)$$

$$\arg(\varphi(x)) = \arctan\left(\frac{Im(\varphi(x))}{Re(\varphi(x))}\right) \quad (131-2)$$

$$Re(\varphi(x)) = A(a_1(x, x_0) + A^2a_6(x, x_0) - a_8(x, x_0)A^2\omega^2)$$

$$Im(\varphi(x)) = A(a_2(x, x_0)\omega + a_7(x, x_0)A^2\omega - a_9(x, x_0)A^2\omega^3)$$

فصل سوم

بررسی نتایج

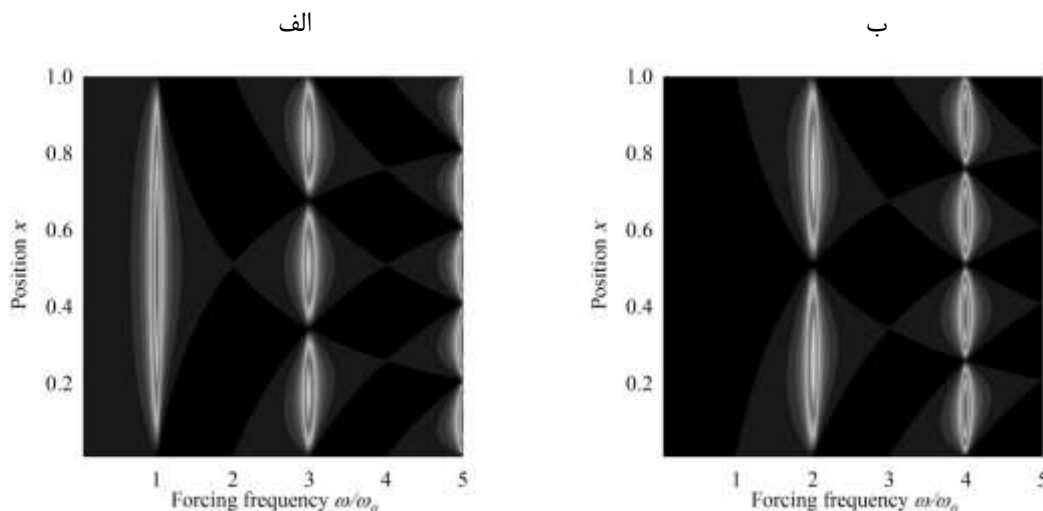
۳-۱- مقدمه

به ازای قرارگیری فنر-دمپر موضعی در موقعیت‌های مختلف روی طناب، رژیم‌های متفاوتی از پاسخ مسأله خواهیم داشت. به گونه‌ای که حالت متقارن که در آن فنر-دمپر در وسط طناب قرار گرفته‌اند، توسط بلنچارد و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۱۵ مورد بررسی قرار گرفته است. در این فصل برای حالت‌های مختلف $a=1/2, 1/3, 1/4$ و حالت دمپر-فنر غیرخطی، پاسخ پایدار سیستم مورد بررسی، تحلیل و مقایسه قرار گرفته است. در هر بخش تمامی نتایج مربوط به حالت مورد نظر، ارایه شده است. در سه حالت اول ابتدا مفهوم انتقال فرکانسی تعریف شده و ایجاد آن به ازای حالت مورد نظر، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. سپس دیاگرام فاز سیستم، تعریف و شکل‌گیری پیچیدگی مود بیان و نشان داده شده است. در انتهای بخش تغییرات انرژی در سیستم برحسب موقعیت x روی طناب و زمان t تصویرسازی شده است. در حالت دمپر-فنر غیرخطی، نتایج با حالت اول ($a=L/2$) مقایسه شده و اثر فنر غیرخطی در دامنه و دیاگرام فاز پاسخ نشان داده شده است. لازم به توضیح است که نتایج این بخش کاملاً بر مرجع [۱۴] است.

۳-۲- حالت اول $a=L/2$

در حالتی که میرایی خارجی به سیستم متصل نباشد، دامنه پاسخ فرکانسی در معادلات (۲-۴۲) و (۲-۴۳) که در فصل قبل بیان شدند، در یک فرکانس تشدید واگرا می‌شوند. در حقیقت با نبود میرایی تمامی نقاط طناب، بیشترین دامنه خود را در یک فرکانس تجربه می‌کنند. این اتفاق فقط به ازای نبود میرایی ایجاد می‌شود و به مکان اتصال فنر به طناب ارتباط پیدا نمی‌کند. اما در حضور میرایی خارجی این گونه نیست. یعنی امکان دارد که تمامی نقاط سیستم ماکزیمم دامنه خود را در یک فرکانس تجربه نکنند و ماکزیمم دامنه دو نقطه از طناب در فرکانس‌های مختلفی صورت پذیرد. اختلاف فرکانس بین ماکزیمم دامنه دو نقطه از طناب، "انتقال فرکانسی" تعریف می‌شود.

دو حالت میرایی خیلی کوچک و میرایی خیلی بزرگ برای نشان دادن اثر میرایی روی دامنه



شکل (۱-۳) تکامل $|\varphi(x)/A|$ بر حسب موقعیت x و فرکانس تحریک بی بعد ω/ω_0 برای مقادیر $k=0.01$ الف: $\sigma=0.05$ و ب: $\sigma=100$

پاسخ فرکانسی در نظر گرفته شده است. در ابتدا فرض می شود سفتی فنر در یک مقدار کوچک $k=0.01$ ثابت باشد. بنابراین از اثر آن روی دینامیک سیستم صرف نظر شده است. شکل موده های بی بعد شده $|\varphi(x)/A|$ که از روابط (۲-۴۲) و (۲-۴۳) فصل قبل حاصل شده اند، در موقعیت های مختلف روی طناب بر حسب فرکانس تحریک بی بعد شده ω/ω_0 ، برای مقادیر میرایی کم و زیاد به ترتیب در شکل (۱-۳) الف و ب رسم شده اند، که در این شکل ها ω_0 اولین فرکانس طبیعی سیستم ($\omega_0 = \pi$) می باشد.

در شکل ناحیه های سفید رنگ بیان گر دامنه تشدید سیستم و ناحیه های سیاه رنگ نشان دهنده ی دامنه ی ناچیز در طول طناب می باشند.

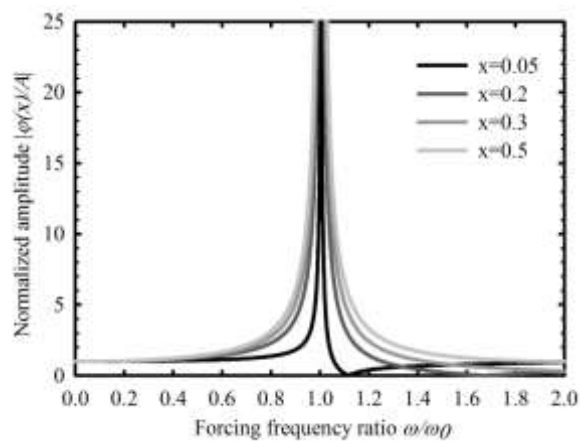
همانطور که در شکل (۱-۳) مشاهده می شود در حالتی که میرایی کم است، شکل مودها در نزدیکی فرکانس تحریک بی بعد $\omega/\omega_0=1$ هم محور شده اند و سیستم به یک طناب ساده که از دو طرف تحریک شده است، کاهش پیدا کرده است. از طرف دیگر زمانی که میرایی مقدار بزرگی دارد یا به عبارتی به بینهایت میل می کند، سیستم به دو طناب با طول $L/2$ کاهش پیدا کرده است. البته می توان حالتی را نیز متصور شد که میرایی ناچیز باشد و میزان سفتی فنر از مقدار کوچک تا مقدار خیلی بزرگ افزایش یابد. در این حالت همان نتایج حالت قبل (سفتی ناچیز) رخ می دهد اما دامنه

پاسخ فرکانسی بیشتر خواهد بود.

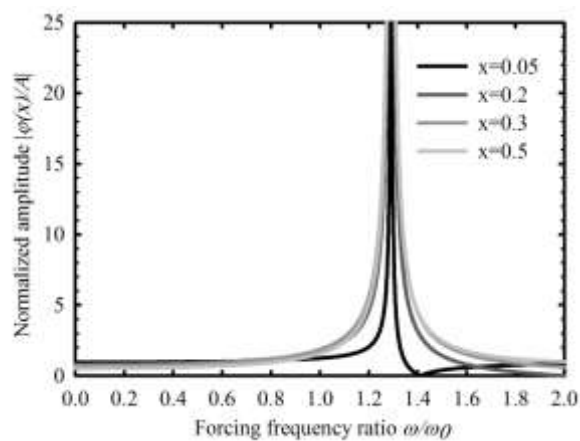
۳-۲-۱- اثر سفتی فنر

برای درک بهتر اثر سفتی روی دامنه فرکانسی و انتقال فرکانسی، میرایی در یک مقدار خیلی کوچک ثابت شده و مقدار سفتی از مقدار خیلی کم تا بزرگ متغیر فرض شده است. زمانی که مقدار سفتی از مقادیر کوچک به بزرگ در حال افزایش است، بیشترین دامنه پاسخ فرکانسی نقاط مختلف طناب به صورت همزمان جابه‌جا می‌شوند و هیچگونه انتقال فرکانسی بین نقاط مختلف طناب مشاهده نمی‌شود. در حقیقت در هر فرکانس تشدید، تمامی نقاط طناب بیشترین دامنه خود را در همان فرکانس تجربه می‌کنند. در شکل (۲-۳) این امر به وضوح نشان داده شده است. با افزایش سفتی بی-بعد k به سمت بی‌نهایت، ماکزیمم قله‌ها به صورت همزمان از $\omega/\omega_0 = 1$ تا $\omega/\omega_0 = 2$ برای اولین مود جابه‌جا می‌شوند. با توجه به شکل (۲-۳) با افزایش سفتی فنر بی‌بعد k ، ماکزیمم دامنه نقاط مختلف طناب در حال افزایش و دامنه نوسانات نقطه $x=0.5$ در حال کاهش است. زیرا با افزایش سفتی فنر، همان‌طور که در شکل (۱-۳) -راست نیز مشخص است، طناب با طول L تبدیل به دو طناب با طول $L/2$ می‌شود. بنابراین با کاهش طول طناب فرکانس طبیعی آن ($\omega_0 = j\pi/L$) افزایش و دامنه نوسانات طناب که سینوسی ($\sin(\omega_0 x)$) تغییر می‌کند، افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش سفتی فنر، نقطه $x=0.5$ به گره ($u(x,t)=0$) تبدیل می‌شود و رفته رفته دامنه نوسانات این نقطه کاهش می‌یابد.

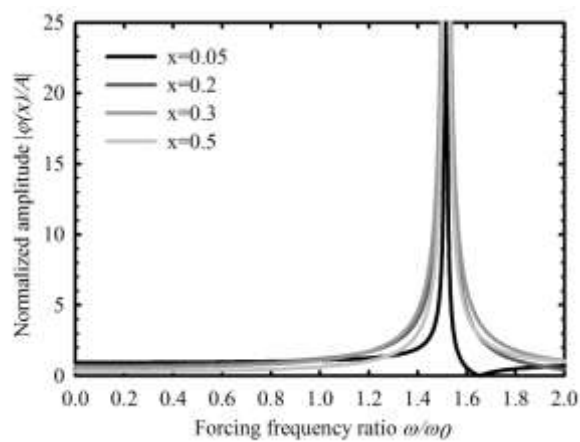
الف



ب.



ج



شکل (۳-۲) اندازه دامنه شکل مود $|\varphi(x)/A|$ در نقاط مختلف برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد ω/ω_0 به ازای $\sigma=0.01$ و

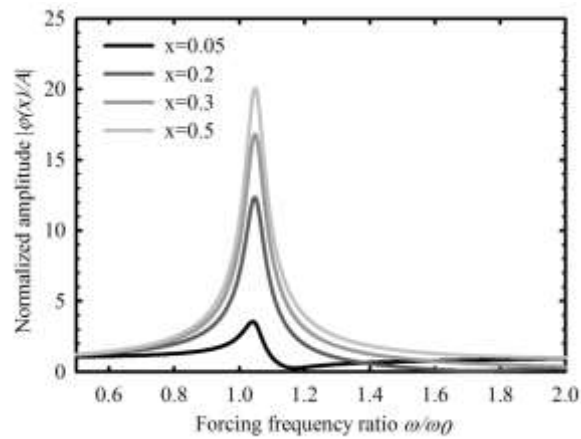
الف): $k=0.05$ ب) $k=4$ ج) $k=10$

۳-۲-۲- اثر میرایی

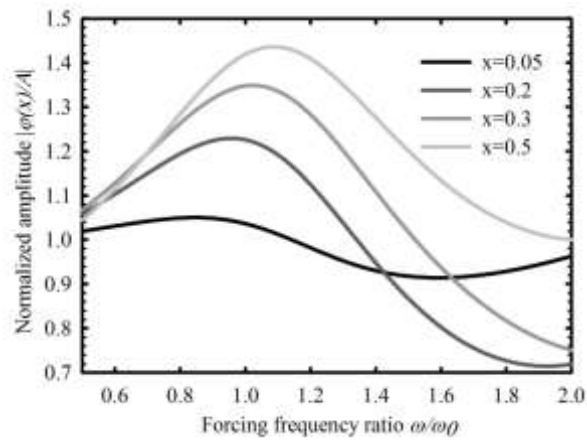
برای مشخص شدن بهتر اثر میرایی روی دامنه پاسخ فرکانسی و ایجاد انتقال فرکانسی، سفتی در یک مقدار دلخواه ناچیز ثابت شده است و میرایی از مقادیر بسیار کم تا مقادیر بسیار بزرگ تغییر می‌کند. افزایش میرایی دو اثر قابل ملاحظه روی پاسخ فرکانسی به وجود می‌آورد. اولین تأثیر آن بر روی دامنه پاسخ فرکانسی می‌باشد، که افزایش میرایی باعث کاهش دامنه پاسخ فرکانسی نقاط مختلف طناب شده و در $\sigma=2$ کمینه خود را تجربه می‌کنند و سپس با افزایش میرایی، مجدد افزایش می‌یابند تا در فرکانس تشدید جدید سیستم هم محور می‌شوند. به عنوان دومین اثر قابل ملاحظه، مشاهده می‌شود که در زمان افزایش میرایی، یک انتقال فرکانسی بین قله‌های نقاط مختلف طناب ظاهر می‌شود.

شکل (۳-۳)-الف به ازای میرایی و سفتی ناچیز برای نقاط مختلف طناب رسم شده است که هم محور بودن ماکزیمم دامنه نقاط مختلف طناب در نبود میرایی را نشان می‌دهد. شکل (۳-۳)-ب به ازای افزایش اندک میرایی رسم شده است و کاهش شدید دامنه را برای نقاط مختلف طناب و همچنین ایجاد انتقال فرکانسی بین ماکزیمم نقاط مختلف طناب را به وضوح نشان می‌دهد. این حالت در قسمت قبل (اثر سفتی فنر) که میرایی ناچیز و سفتی افزایش یافته بود (شکل (۳-۲)-ب)، وجود نداشت. شکل (۳-۳)-ج به ازای افزایش بیشتر میرایی رسم شده که نشان دهنده افزایش مجدد دامنه نقاط مختلف و هم محور شدن ماکزیمم دامنه نقاط در فرکانس تشدید جدید سیستم می‌باشد. از این پس با افزایش میرایی، دامنه نوسانات نقاط مختلف حول فرکانس تشدید $\omega/\omega_0 = 2$ هم محور شده و افزایش می‌یابند.

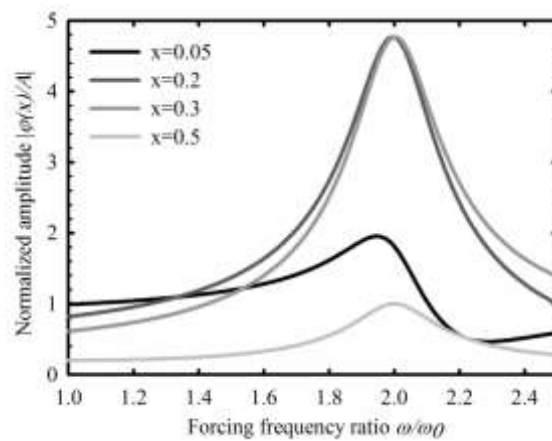
الف



ب



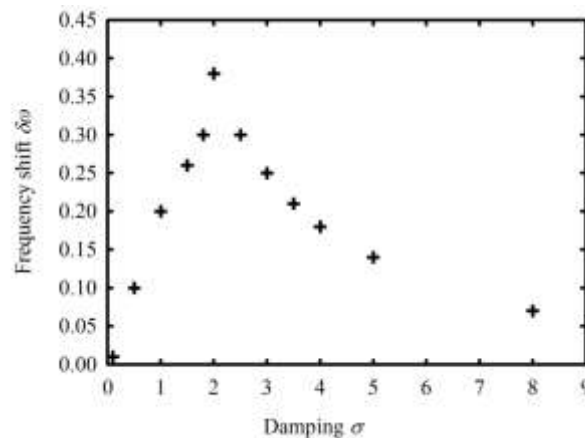
ج



شکل (۳-۳) اندازه دامنه شکل مود $|\varphi(x)/A|$ در نقاط مختلف برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد ω/ω_0 به ازای $k=0.05$ و الف): $\sigma=0.01$ ب) $\sigma=1.4$ ج) $\sigma=10$

در شکل (۳-۳) دامنه نوسانات نقاط مختلف، با افزایش میرایی ابتدا کاهش و سپس افزایش پیدا کرده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که میرایی وجود دارد که به ازای آن دامنه نوسانات نقاط مختلف طناب کمینه مقدار خود را تجربه می‌کند. نتایج نشان داده است که دامنه نوسانات تا میرایی بی‌بعد $\sigma=2$ کاهش می‌یابد و پس از آن افزایش می‌یابد. یا به عبارتی کمترین دامنه نوسانات به ازای میرایی بی‌بعد $\sigma=2$ اتفاق می‌افتد. دلیل افزایش مجدد دامنه نوسانات، همانند حالت اثر سفتی فتر، تبدیل شدن طناب به دو طناب با طول $L/2$ است. نقطه $x=0.5$ نیز با افزایش میرایی به گره تبدیل شده و رفته رفته دامنه نوساناتش کاهش یافته است.

برای آنکه بیشترین انتقال فرکانسی ایجاد شده بین ماکزیمم دامنه نوسانات نقاط مختلف طناب و همچنین میرایی بی‌بعدی که منجر به این امر می‌شود تعیین شود، دامنه نوسانات در رابطه (۲-۴۲) به ازای میرایی‌های مختلف از کوچک به زیاد رسم شده و انتقال فرکانسی بین نقاط $x=0.05$ و $x=0.5$ در هر میرایی اندازه‌گیری شده است. نتایج به صورت نموداری به شکل (۳-۴) استخراج شده است.



شکل (۳-۴) تکامل انتقال فرکانسی در ازای تغییرات σ و مقدار ثابت $k=0.01$

همانطور که مشاهده می‌شود، ماکزیمم انتقال فرکانسی در $\sigma=2$ اتفاق افتاده است که در این میرایی نقاط مختلف طناب کمترین دامنه را نیز دارا می‌باشند. روندی که در شکل (۳-۴) مشاهده می‌شود مشابه با روندی است که میرایی مودال و میرایی خارجی نسبت به هم دارند. به طوری که با

افزایش میرایی خارجی، میرایی مودال ابتدا افزایش و به ماکزیمم خود میرسد و مجدد کاهش پیدا می‌کند [۸].

۳-۲-۳ تغییرات دیاگرام فاز

روابط (۴۸-۲) و (۴۹-۲) مربوط به توابع دیاگرام فاز در فصل قبل استخراج شد. در ادامه نشان داده خواهد شد که در بررسی تحلیلی این روابط، نقاط ثابتی بدست می‌آیند که می‌توانند به درک بهتر انتشار پیچیدگی مود در طناب با تغییر سفتی و میرایی متصل شده به آن، کمک کنند.

برای نشان دادن این نقاط ثابت مقادیر $\omega/\omega_0=2$ ، $k=3.2$ و $k=10.7$ را در نظر می‌گیریم. به ازای هر مقدار k ذکر شده، σ را در یک بازه وسیع تغییر داده و تابع دیاگرام فاز را رسم می‌کنیم. شکل (۵-۳) بیانگر تغییرات دیاگرام فاز بر حسب موقعیت طناب می‌باشد.

برای هر دو مقدار k ، در دو سمت طناب اثر میرایی به دلیل تقارن کاملاً شبیه به هم است.

همچنین:

- به ازای مقدار بی‌بعد $k=3.2$ در تابع دیاگرام فاز طناب پنج نقطه ثابت ایجاد می‌شود که به

ازای میرایی‌های خیلی کوچک تا خیلی بزرگ مکان آن‌ها تغییر نمی‌کند. یعنی نقاط $(0,0)$ ،

$(0.5, -\pi)$ ، $(0.22, -\pi/2)$ ، $(0.78, -\pi/2)$ به جهت تقارن و $(1,0)$.

- به ازای مقدار بی‌بعد $k=10.7$ تابع دیاگرام فاز دقیقاً رفتاری مشابه رفتار حالت قبل دارد. به

طوری که نقاط $(0,0)$ ، $(1,0)$ و $(0.5, -\pi)$ همچنان ثابت خواهند ماند. اما نقطه‌ی $(0.22, -\pi/2)$

به نقطه‌ی $(0.12, -\pi/2)$ منتقل شده است. نقطه $(0.78, -\pi/2)$ به جهت تقارن به نقطه $(0.88, -\pi/2)$

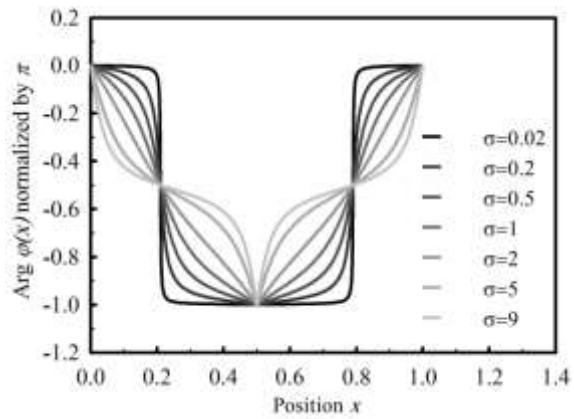
$(\pi/2)$ منتقل شده است.

در شکل (۵-۳) ج نمودار تابع دیاگرام فاز طناب برای مقادیر $\omega/\omega_0=2.421$ و $k=1.4$ ، به ازای

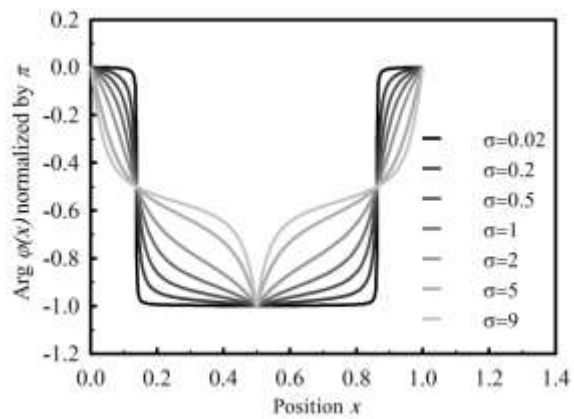
گستره‌ی وسیعی از میرایی خیلی کوچک تا میرایی خیلی بزرگ رسم شده است. همانطور که مشخص

است نقطه ثابت $x=0.5$ که محل قرارگیری فنر و دمپر است از بین رفته است.

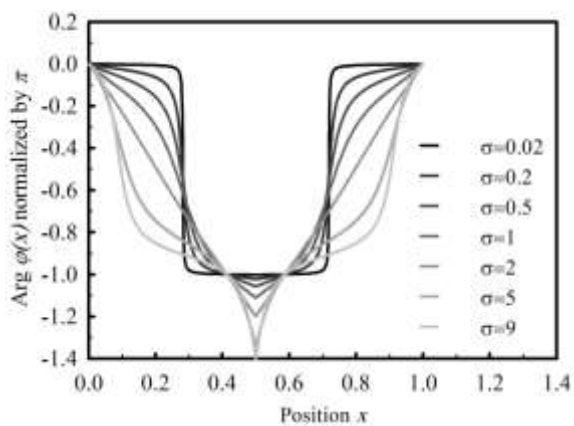
الف



ب



ج



شکل (۵-۳) تکامل دیاگرام فاز در طول طناب به ازای مقادیر مختلف میرایی (الف): $\omega/\omega_0 = 2$ و $k=3.2$ (ب):

$\omega/\omega_0 = 2.421$ و $k=10.7$ (ج): $\omega/\omega_0 = 2$ و $k=1.4$

بررسی‌های فوق نتیجه می‌دهد که در نمودار دیاگرام فاز دو نوع نقطه‌ای ثابت وجود دارد. اول

نقاطی که وابسته به مقدار k و σ هستند (شکل (۵-۳)-الف و ب)، دوم نقاطی که فقط وابسته به

فرکانس تحریک بی بعد هستند، مانند نقطه $(0.5, -\pi)$ (شکل (۵-۳) ج).

برای بدست آوردن تحلیلی نقاط ثابت باید دو رابطه (۵۴-۲) و (۵۵-۲) برای هر دو سمت طناب برقرار باشند. این روابط کلی هستند و برای تمامی حالات قرارگیری فنر-دمپر در موقعیت‌های مختلف کاملاً یکسان است. بنابراین حل قسمت اول آن‌ها که منجر به رابطه (۵۶-۲) می‌شود، برای کلیه حالات یکسان است. در حقیقت این رابطه بیان‌گر نقاطی در بازه $x \in (0;1)$ است که به نسبت فرکانس تحریک بی بعد وابسته هستند.

از حل قسمت دوم معادله (۵۴-۲) برای سمت چپ طناب، معادله (۱-۳) برای x بر حسب ω ، k و σ بدست می‌آید.

$$x = \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{4k\omega \sin(\omega) + (\omega^2 \sigma^2 + 4\omega^2 - k^2) \cos(\omega) - \omega^2 \sigma^2 + 4\omega^2 + k^2}{4\omega k \cos(\omega) - (\omega^2 \sigma^2 + 4\omega^2 - k^2) \sin(\omega)} \right) \quad (۱-۳)$$

در این معادله با قرار دادن $\omega/\omega_0 = 2$ به معادله (۲-۳) ساده می‌شود.

$$x = \frac{1}{2\pi} \arctan \left(\frac{4\pi}{k} \right) \quad (۲-۳)$$

همانطور که از رابطه (۲-۳) مشخص است، نقاط ثابتی در دیاگرام فاز وجود دارند که وابستگی به میرایی ندارند و مکان آن‌ها با تغییر مقدار k تغییر می‌کند. اگر در رابطه (۲-۳) $k=3.2$ قرار داده شود $x=0.22$ و اگر $k=10.7$ ، $x=0.12$ بدست می‌آید. این نقاط در شکل (۵-۳) الف و ب نشان داده شده‌اند. از حل قسمت دوم معادله (۵۵-۲) برای سمت چپ طناب، معادله (۳-۳) برای x بدست می‌-

آید.

$$x = \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{k + 2\omega \sin(\omega) - k \cos(\omega)}{k \sin(\omega) + 2\omega \cos(\omega)} \right) \quad (۳-۳)$$

در رابطه (۳-۳) با قراردادن $\omega/\omega_0 = 2$ ، $x=0$ بدست می‌آید که بیان‌گر نقطه ثابت در ابتدای طناب است.

از حل قسمت دوم روابط (۵۴-۲) و (۵۵-۲) برای سمت راست طناب به ترتیب به معادلات

(۴-۳) و (۵-۳) می‌رسیم.

$$x = 1 - \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{4k\omega \sin(\omega) + (\omega^2 \sigma^2 + 4\omega^2 - k^2) \cos(\omega) - \omega^2 \sigma^2 + 4\omega^2 + k^2}{4\omega k \cos(\omega) - (\omega^2 \sigma^2 + 4\omega^2 - k^2) \sin(\omega)} \right) \quad (۴-۳)$$

$$x = 1 - \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{k + 2\omega \sin(\omega) - k \cos(\omega)}{k \sin(\omega) + 2\omega \cos(\omega)} \right) \quad (۵-۳)$$

در رابطه (۴-۳) با قرار دادن $\omega/\omega_0 = 2$ رابطه (۶-۳) حاصل می‌شود.

$$x = 1 - \frac{1}{2\pi} \arctan \left(\frac{4\pi}{k} \right) \quad (۶-۳)$$

معادله (۶-۳) بیان گر نقاط ثابتی در سمت راست طناب هستند که تنها وابسته به k می‌باشند. با قرار

دادن $k=3.2$, $x=0.78$ و $k=10.7$, $x=0.88$ حاصل می‌شود که در شکل (۵-۳)-الف و ب در سمت

راست طناب ایجاد شده‌اند.

در رابطه (۵-۳) با قرار دادن $\omega/\omega_0 = 2$ نقطه $x=1$ را می‌دهد، که بیان گر نقطه‌ی ثابت

تکیه‌گاهی در سمت راست طناب می‌باشد.

روابط (۲-۳) و (۶-۳) موقعیت محدوده‌ی تشکیل پیچیدگی مود را که در بخش بعد توضیح

داده می‌شود، نشان می‌دهند.

۳-۲-۴ - محدوده پیچیدگی مود و انتشار آن

۳-۲-۴-۱ - محدوده پیچیدگی مود

اگر میرایی در مکان $x=0.5$ وجود نداشته باشد، بدیهی است که دیاگرام فاز در طول طناب به صورت

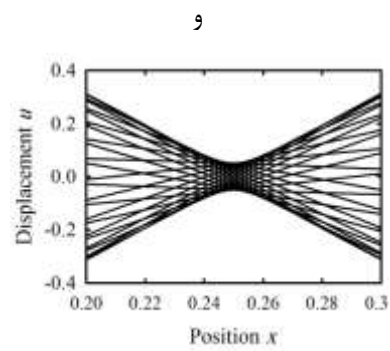
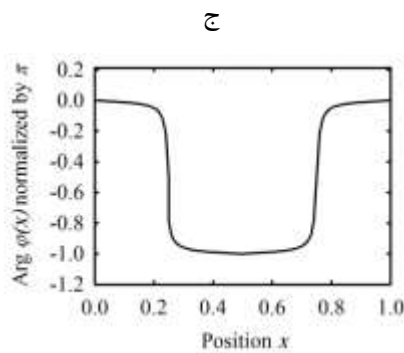
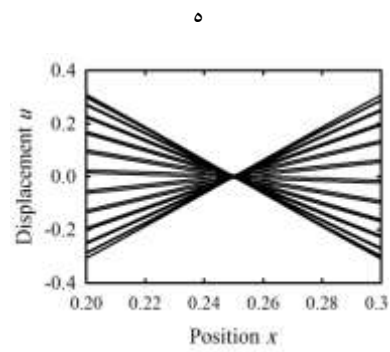
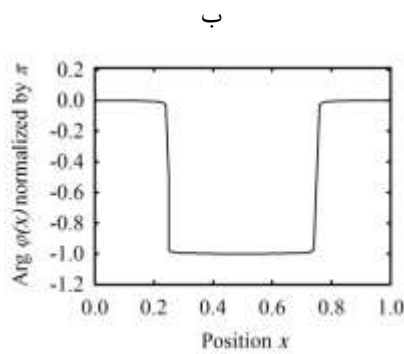
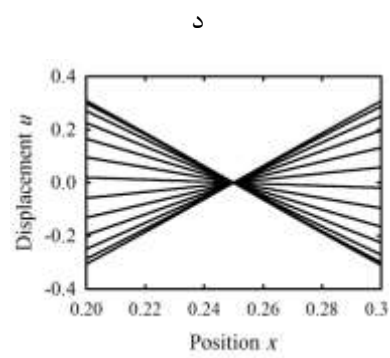
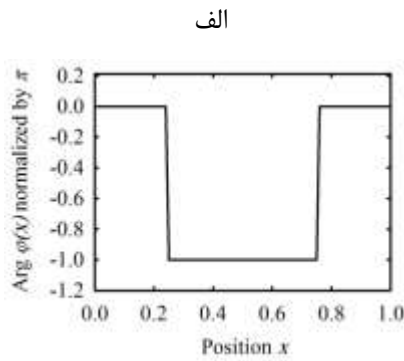
خطوطی ثابت است (0 یا $-\pi$). شکل (۶-۳) تغییرات دیاگرام فاز به ازای افزایش میرایی را نشان

می‌دهد. در زمانی که میرایی وجود ندارد، در نمودار دیاگرام فاز گسستگی‌هایی در نقاط $x=0.25$ و در

اطراف $x=0.75$ مشاهده می‌شود (شکل (۶-۳)-الف). این نقاط که نشان گر تغییر موضعی از 0 به $-\pi$

هستند، در حقیقت بیان گر گره در شکل مود می باشند $(u(x,t)=0)$ (شکل (۶-۳) د). با ثابت نگه داشتن میزان سفتی و اضافه کردن مقدار بسیار کمی میرایی به سیستم، نمودار دیاگرام فاز از حالت گسسته در نزدیکی $x=0.25$ خارج شده و پیوسته می شود (شکل (۶-۳) ب). این نقطه اکنون به یک نقطه عطف تبدیل شده است. در این حالت یک محدوده ایجاد شده است که در داخل این محدوده (محدوده ی نزدیک $x=0.25$) دیاگرام فاز در حال تغییر پیوسته است و در خارج این محدوده دیاگرام فاز همچنان ثابت باقی مانده است (0 یا $-\pi$). در حقیقت نقاط خارج این محدوده در طول زمان ثابت هستند و نقاط داخل این محدوده به طور ناهمزمان نوسان می کنند. در ادامه نشان داده می شود که این محدوده مربوط به شروع پیچیدگی مود خواهد بود. برای مقادیر کوچک میرایی این محدوده بسیار کوچک است و اثر آن روی دامنه پاسخ فرکانسی به سختی قابل مشاهده است (شکل (۶-۳) ه). با افزایش بیشتر میرایی، نه تنها محدوده ی ذکر شده در طول طناب گسترش می یابد، بلکه دامنه جابجایی ها در این محدوده افزایش می یابد (شکل (۶-۳) و).

بنابراین محدوده ی پیچیدگی مود با افزایش میرایی، در طول طناب گسترش می یابد. این محدوده می تواند آن قدر گسترش یابد که تمام طول طناب را در بر بگیرد (از $x=0$ تا $x=1$). در این صورت نمودار دیاگرام فاز نیز به یک خط راست مورب تبدیل خواهد شد. بنابراین می توانیم حدس بزنیم که به ازای هر مقدار k یک مقدار میرایی وجود دارد که در گذر از مقدار کم به زیاد σ ، یک بیشینه محدوده پیچیدگی مود را خواهیم داشت. در این صورت بیشترین پیچیدگی مود را در طناب مشاهده خواهیم کرد و ترکیب مودهای مجاور را شاهد خواهیم بود. در قسمت بعد نشان داده شده است ترکیب های ممکن و مختلف از k و σ وجود خواهد داشت که دیاگرام فاز خطی خواهد بود و این امر با امواج در حال حرکت در طول طناب و حذف مودهای نرمال ارتعاشات، مرتبط خواهد بود.



شکل (۳-۶) تکامل دیاگرام فاز (الف-ب-ج) و پاسخ فرکانسی طناب (د-ه-و) در ۵۰ گام زمانی نخستین ($\Delta t = 0.04$) به ازای فرکانس تحریک برابر با فرکانس مود دوم ($\omega/\omega_0 = 2$) در طول طناب به ازای سفتی فنر $k=0.01$ و میرایی الف و (د): ($\sigma=0$ ب و ه): ($\sigma=0.01$ ج و و): ($\sigma=0.1$)

۳-۲-۴-۲- امواج در حال حرکت

با توجه به نتایج بخش قبل، تنها در صورتی بیشترین پیچیدگی مود را خواهیم داشت که یک خط کاملاً راست نقاط ثابت را در نمودار دیاگرام فاز- موقعیت به یکدیگر وصل کند. برای دست یافتن به این نتیجه راحت‌ترین راه نوشتن بسط تیلور است. بسط تیلور تابع دیاگرام فاز بر حسب x برای معادلات (۲-۴۸) و (۲-۴۹) نوشته شده و ضرایب غیرخطی مساوی صفر قرار داده شده است. بسط تیلور تابع دیاگرام فاز- موقعیت برای هر دو طرف طناب به صورت زیر خواهد بود:

$$\arg(\varphi) = \epsilon\omega x - \epsilon\rho\omega^2 x^2 + \left(\frac{1}{3}\epsilon\omega^3 + \epsilon\rho^2\omega^3 - \frac{1}{3}\epsilon^3\omega^3\right)x^3 \quad (۷-۳)$$

بنابراین برای صفر شدن عوامل غیرخطی باید:

$$\epsilon = \pm 1 \quad (۸-۳)$$

$$\rho = 0 \quad (۹-۳)$$

در صورت برقراری روابط فوق، دیاگرام فاز کاملاً خطی شده و بیشترین پیچیدگی مود اتفاق می‌افتد.

در سمت چپ طناب به ازای مقدار مثبت ϵ ، میرایی منفی خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{cases} \epsilon_2 = -1 \\ \rho_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \sigma = 2 \end{cases} \leftrightarrow \arg(\varphi_2) = -\omega x \quad (۱۰-۳)$$

این مقادیر منحصر به فرد به ازای تمامی مقادیر فرکانس تحریک صادق‌اند. این نتیجه به عنوان

مهم‌ترین نتیجه در مسأله مورد بحث می‌باشد. چرا که این دو مقدار وابسته به فرکانس تحریک بی‌بعد

نیستند. یعنی تحت این شرایط توزیع دیاگرام فاز به ازای تمام مقادیر ω خطی است. به ازای $k=0$ و

$z=2$ پاسخ فرکانسی حالت پایدار به صورت زیر است:

$$u(x, \tau) = Ae^{-i\omega x} e^{i\omega \tau} \quad (۱۱-۳)$$

این معادله، معادله‌ی امواج در حال حرکت است. این شرایط به یک مقدار σ وابسته است و باعث از بین

رفتن تمام موده‌های ارتعاشات طناب می‌شود و امواج از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کنند.

با توجه به نتایج حاصل شده، شرایط زیر معادل یکدیگر هستند:

- بیشترین پیچیدگی مود

- تبدیل نمودار دیاگرام فاز به خط کاملاً راست

- ظهور امواج در حال حرکت به ازای تمامی نسبت فرکانسی‌های تحریک

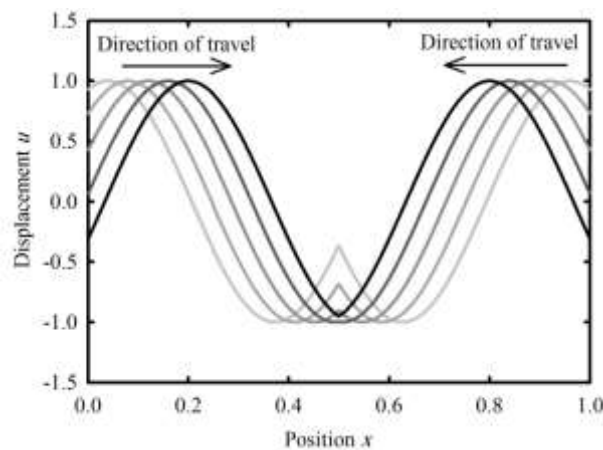
$$\arg(\varphi_2) = -\omega x \quad -$$

$$\sigma=2 \text{ و } k=0 \quad -$$

$$u(x, \tau) = Ae^{-i\omega x} e^{i\omega \tau} \quad -$$

به دلیل تقارن مسأله در حالت $a=L/2$ همین مقادیر برای سمت راست طناب نیز استخراج خواهد

شد. یعنی به ازای مقادیر رابطه (۳-۱۰) در تمام طول طناب دیاگرام فاز خطی می‌شود و حداکثر پیچیدگی مود اتفاق می‌افتد. با این تفاوت که امواج ایجاد شده در طناب از سمت راست به سمت چپ و در خلاف جهت امواج سمت چپ طناب حرکت می‌کنند (شکل (۳-۷)). انتشار امواج در جهات مخالف در دو طرف طناب، منجر به برخورد امواج و خنثی کردن یکدیگر در وسط طناب (محل قرارگیری فنر-دمپر) می‌شود. بنابراین جذب ارتعاشات به صورت بسیار موثر، با تنظیم دقیق دمپر میانی امکان پذیر است، که منطبق بر تحقیقات مبتنی بر کنترل ارتعاشات در انتها با رویکرد امواج در حال حرکت می‌باشد [۲۹].



شکل (۳-۷) امواج در حال حرکت در طناب در ۵ گام زمانی ($\Delta\tau = 0.04$) به ازای $\omega/\omega_0 = 3$

۳-۲-۵- تغییرات انرژی در طناب

در این بخش انتشار انرژی در طناب در حالت پایدار به ازای ترکیبات مختلف از پارامترها برحسب موقعیت x و زمان t بررسی شده است.

انرژی پتانسیل بر واحد طول طناب با رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$dP(x, \tau) = \frac{1}{2} \text{Re}[u_x(x, \tau)]^2 \quad (۳-۱۲)$$

انرژی جنبشی بر واحد طول طناب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$dK(x, \tau) = \frac{1}{2} \text{Re}[u_\tau(x, \tau)]^2 \quad (۳-۱۳)$$

با توجه به رابطه (۲-۴۰) فصل قبل برای $u(x, t)$ ، روابط انرژی جنبشی و پتانسیل به صورت زیر بدست

می آیند.

$$dP(x, \tau) = \frac{1}{2} \omega^2 [-Re(C_1) \sin(\omega\tau + \omega x) - Im(C_1) \cos(\omega\tau + \omega x) \quad (۱۴-۳)$$

$$+ Re(C_2) \sin(\omega\tau - \omega x) + Im(C_2) \cos(\omega\tau - \omega x)]^2$$

$$dK(x, \tau) = \frac{1}{2} \omega^2 [-Re(C_1) \sin(\omega\tau + \omega x) - Im(C_1) \cos(\omega\tau + \omega x) \quad (۱۵-۳)$$

$$- Re(C_2) \sin(\omega\tau - \omega x) - Im(C_2) \cos(\omega\tau - \omega x)]^2$$

روابط انرژی جنبشی و پتانسیل بسیار به یکدیگر شبیه هستند. رابطه انرژی کل را برای طناب به صورت زیر نوشته و ساده می شود.

$$dE(x, \tau) = dP(x, \tau) + dK(x, \tau) \quad (۱۶-۳)$$

$$dE(x, \tau) = \omega^2 [Re(C_1) \sin(\omega\tau + \omega x) + Im(C_1) \cos(\omega\tau + \omega x)]^2 \quad (۱۷-۳)$$

$$+ \omega^2 [Re(C_2) \sin(\omega\tau - \omega x) + Im(C_2) \cos(\omega\tau - \omega x)]^2$$

روابط فوق برای سمت راست طناب نیز مشابه است.

در این بخش مانند بخش اول سه مورد میرایی خیلی ضعیف، میرایی خیلی قوی و میرایی که منجر به ظهور امواج در حال حرکت می شود را بررسی می کنیم. برای هر مورد با توجه به تابع دیاگرام فاز طناب، تغییرات انرژی بر حسب موقعیت x و زمان t نشان داده می شود تا ارتباط مفاهیم انرژی و محدوده پیچیدگی مود درک شود. قبلا ارتباط دیاگرام فاز و محدوده پیچیدگی مود به وضوح نشان داده شد. در این بخش، هدف نشان دادن ارتباط انرژی با محدوده پیچیدگی مود است.

۳-۲-۵-۱- تغییرات انرژی به ازای میرایی خیلی ضعیف و خیلی قوی

سفتی فنر را در یک مقدار کم ثابت نگه داشته شده و مود دوم ارتعاشات در نظر گرفته شده است. شکل (۸-۳) تغییرات انرژی (جنبشی، پتانسیل و انرژی کل) را در طناب نشان می دهد. انرژی جنبشی در مکانی که دیاگرام فاز ناپیوستگی دارد، صفر است. زیرا همان طور که قبلا گفته شد این نقاط گره (گره) در طناب هستند. در این جا به دلیل میرایی خیلی ضعیف، نقطه $x=0.25$ و $x=0.75$ در دیاگرام فاز پیوسته هستند و در نتیجه دامنه جابجایی موضعی اندکی دارند- شروع محدوده پیچیدگی مود- اما قابل چشم پوشی است. بنابراین انرژی جنبشی در این نقاط تقریبا صفر است و تمامی انرژی

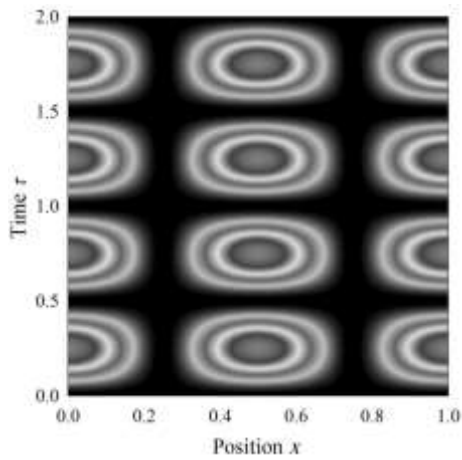
جنبشی طناب در نزدیکی وسط و مرزهای طناب اتفاق افتاده است. در مقابل تقریباً هیچ انرژی پتانسیلی در این مکان‌ها وجود ندارد و بیشتر انرژی پتانسیل در محدوده‌ی گسستگی دیاگرام فاز یا همان محدوده پیچیدگی مود اتفاق می‌افتد.

در میرایی خیلی قوی نقش انرژی جنبشی و پتانسیل برعکس می‌شود. از آنجا که در زمان میرایی قوی وسط طناب ثابت می‌شود، محدوده پیچیدگی مود در نزدیکی $x=0$ و $x=1/2$ و $x=1$ اتفاق خواهد افتاد. چراکه طول طناب نصف شده است و گسستگی دیاگرام فاز به مرزها نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین انرژی جنبشی در اطراف این نقاط تقریباً صفر خواهد شد، درحالی که انرژی پتانسیل به ماکزیمم خود خواهد رسید.

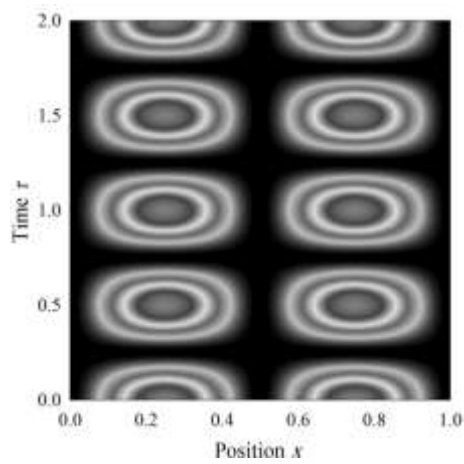
انرژی کل طناب که مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل است، برای هر دو حالت وضعیتی یکسان را خواهد داشت. بنابراین انرژی کل را نمی‌توان به راحتی به تغییرات دیاگرام فاز مرتبط کرد و شاخص مناسبی برای تشخیص محدوده‌ی موضعی که پیچیدگی مود اتفاق می‌افتد نیست. در عوض هر یک از انرژی‌های جنبشی و پتانسیل به مشاهده تغییرات مربوط به دیاگرام فاز و پیچیدگی مود در طناب کمک خواهند کرد.

باید توجه داشت که نتایج ذکر شده در این بخش می‌تواند به موده‌ای ارتعاشی مربوط به نسبت فرکانس‌های تحریک بی‌بعد غیر صحیح و سفتی فنر غیر صفر تعمیم داده شود. در این شرایط محدوده پیچیدگی مود به موقعیت‌های بالاتر یا پایین‌تر در طول طناب، طبق پیش‌بینی تحلیلی رابطه‌های (۲-۳) و (۶-۳)، جابجا خواهد شد.

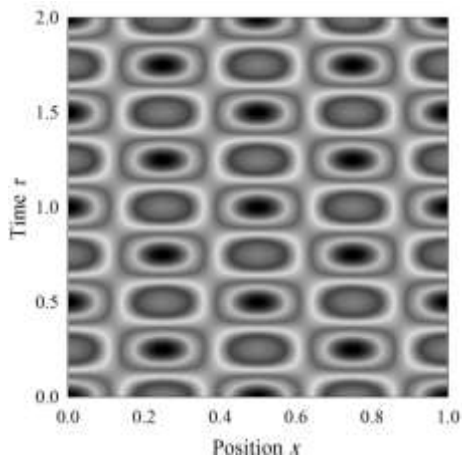
الف



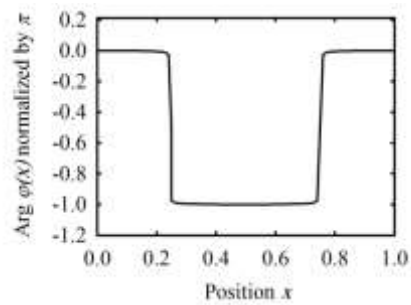
ب



ج



د



شکل (۸-۳) تکامل (الف: انرژی جنبشی ب: انرژی پتانسیل ج: انرژی کل بر حسب مکان و زمان د: دیاگرام فاز در طول طناب به ازای $k=0.01$ و میرایی ضعیف $\sigma=0.01$ در $\omega/\omega_0 = 2$

۲-۵-۲-۳ - انرژی ناشی از امواج در حال حرکت

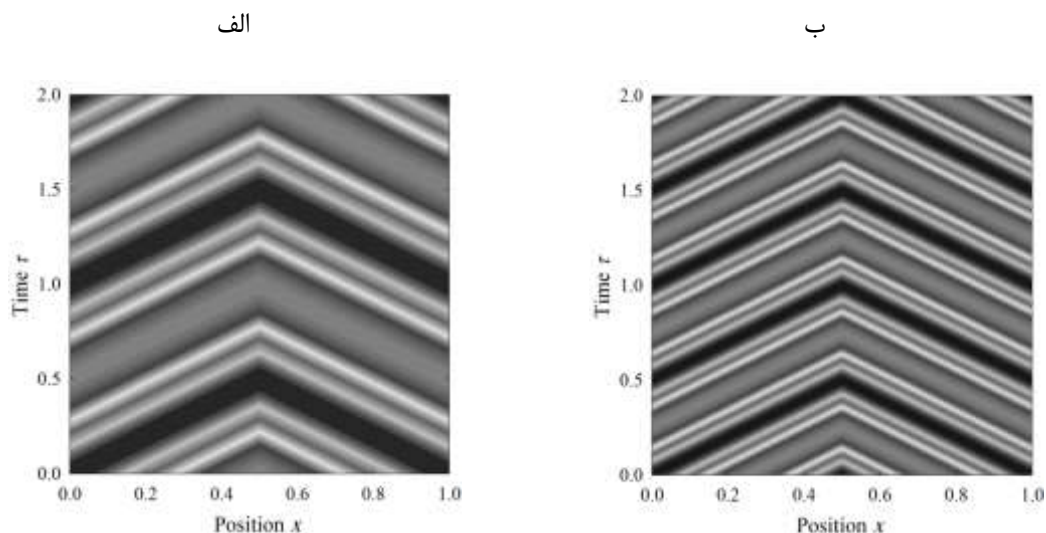
سومین مورد حائز اهمیت، انرژی ناشی از امواج در حال حرکت است. با قراردادن پارامترهایی که منجر به شکل گیری امواج در حال حرکت در طناب می شود (رابطه (۱۰-۳)):

$$\text{Re}\{u(x, \tau)\} = A \cos(\omega\tau - \omega x) \quad (۱۸-۳)$$

بنابراین انرژی جنبشی و پتانسیل در این حالت با یکدیگر کاملاً یکسان هستند و انرژی کل به صورت زیر بدست آمده است.

$$dE(x, \tau) = A^2 \omega^2 \sin^2(\omega\tau - \omega x) \quad (۱۹-۳)$$

باید توجه داشت که تابع انرژی کل دارای دوره تناوب $\frac{\omega}{\pi}$ در دو راستای x و t است. همان‌طور که قبلاً بحث شد، شکل‌گیری امواج درحال حرکت، دلالت بر ماکزیمم پیچیدگی مود و ترکیب کامل یا ترکیب شدن موده‌ای با فرکانس مجاور در طناب، با توجه به میرایی، دارد. شکل ۳-۹) انرژی کل نرمالایز شده برای ترکیب اولین و دومین مود و ترکیب دومین و سومین را نشان می‌دهد.



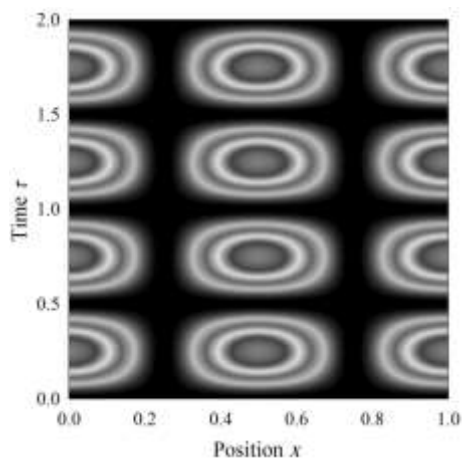
شکل ۳-۹) انتشار انرژی در هنگام شکل‌گیری امواج درحال حرکت الف): ترکیب مود اول و دوم ($\omega/\omega_0 = 1$) ب): ترکیب مود دوم و سوم ($\omega/\omega_0 = 1$)

۳-۲-۵-۳- حالت کلی

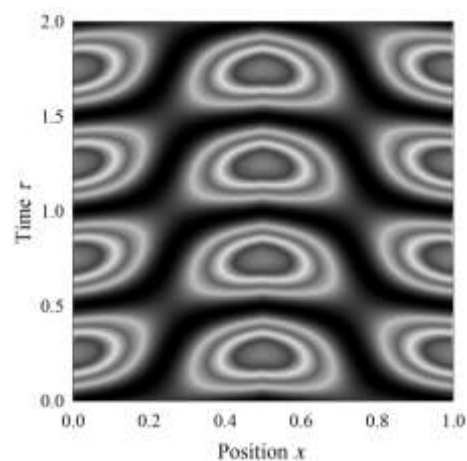
در قسمت قبل انرژی سیستم برای سه حالت میرایی ضعیف، میرایی قوی و میرایی امواج درحال حرکت تجزیه و تحلیل شد. در این قسمت عبور از این سه حالت و تغییرات انرژی، در گذر از این سه حالت به یکدیگر بررسی شده است. برای این کار سفتی فنر را در مقدار صفر ثابت قرار داده و میرایی را از مقدار کم تا مقدار زیاد افزایش داده شده است و تمامی سه حالت قبل و تغییرات انرژی در گذر از بین آن‌ها نشان داده شده است. شکل (۳-۱۰) تکامل مکانی و زمانی انرژی جنبشی طناب را به ازای مقادیر مختلف میرایی نشان می‌دهد. این تصاویر به خوبی گذر از ارتعاشات به امواج درحال حرکت و بازگشت مجدد ارتعاشات در طناب را، با افزایش میرایی از مقدار کم تا زیاد، به تصویر می‌کشند. این تحولات نتیجه‌ی مستقیم ارتعاشات خاص پیچیدگی مود با افزایش میرایی است. برای مقادیر کم و

زیاد میرایی، پیچیدگی مود در یک محدوده کوچک اتفاق می‌افتد، درحالی که در نقطه حداکثر پیچیدگی، امواج درحال حرکت شکل می‌گیرد و دلالت بر ترکیب کامل مودهای ارتعاشی شرکت کننده دارد. در حقیقت برای مقادیر میرایی پایین‌تر از مقدار مربوط به شکل‌گیری امواج درحال حرکت، دینامیک حالت پایدار عمدتاً تحت تأثیر مودهای پایین‌تر طناب است، درحالی که برای مقادیر میرایی بالاتر از آن، دینامیک حالت پایدار عمدتاً تحت تأثیر مودهای بالاتر است. شکل‌گیری امواج درحال حرکت مربوط به اثر برابر (یا ترکیب) هر دو نوع مودهای پایین‌تر و بالاتر است.

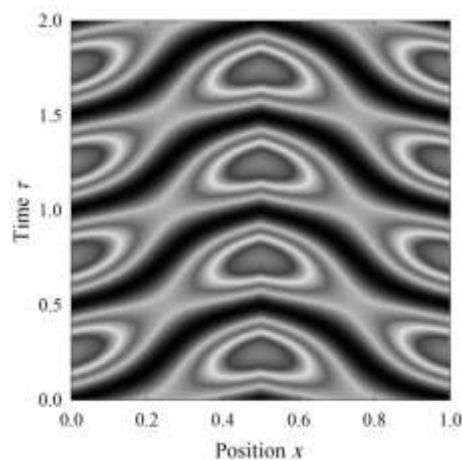
الف



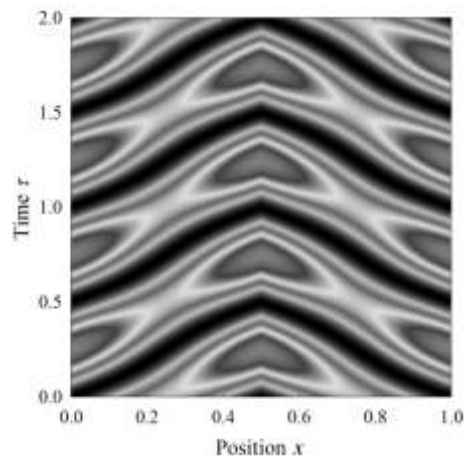
ب

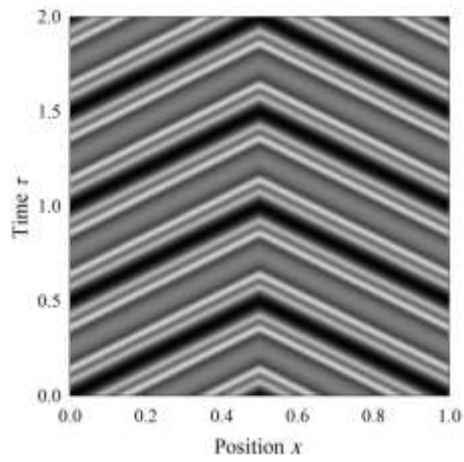


ج

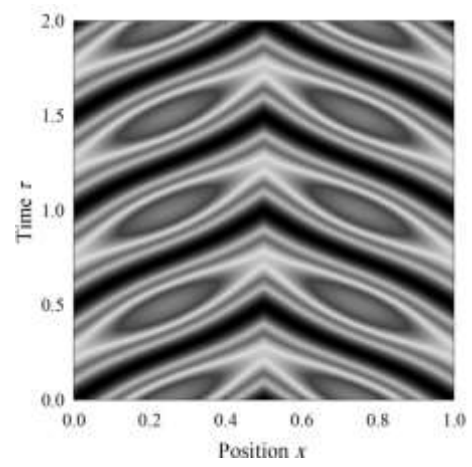


د

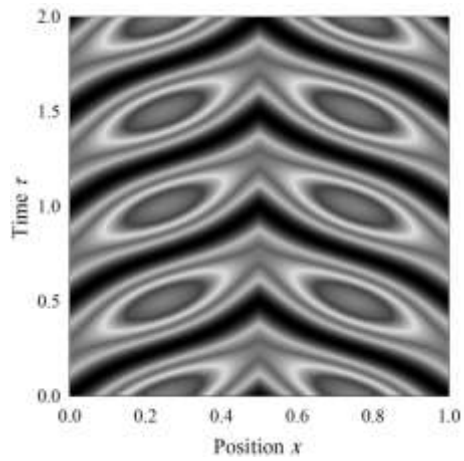




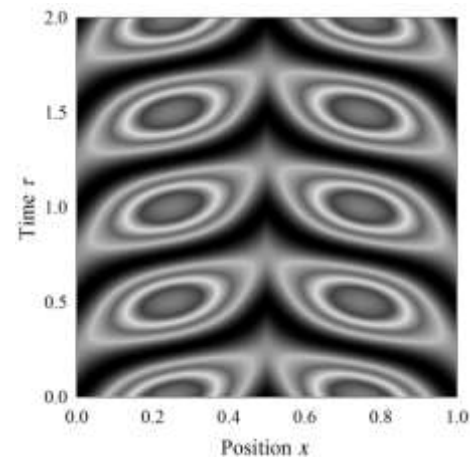
ز



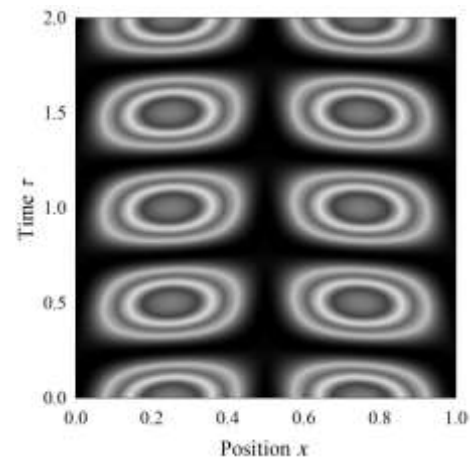
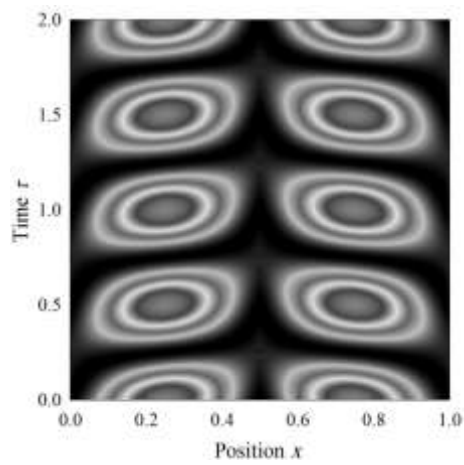
ح



ط



ی



شکل (۳-۱۰) تغییرات انرژی جنبشی بر حسب مکان و زمان در طناب با میرایی خالص ($k=0$) متصل شده در وسط طناب و تحریک نوسانی در دو انتهای طناب، از الف: میرایی خیلی ضعیف تا ی: میرایی خیلی قوی به ازای نسبت فرکانس تحریک بی بعد $\omega/\omega_0 = 2$.

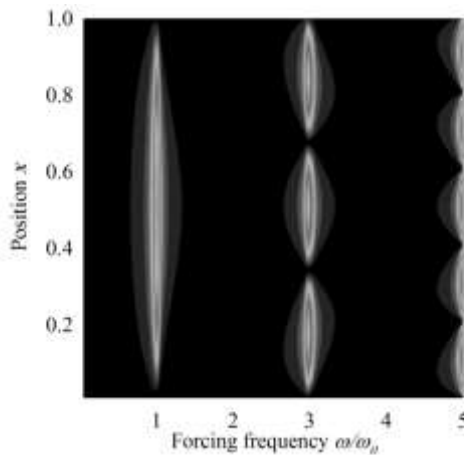
۳-۳- حالت دوم $a=L/3$

در این حالت فنر و دمپر موضعی در فاصله $L/3$ از سمت چپ طناب واقع شده است. تمامی بررسی‌های مربوط به سایر حالات در این بخش انجام خواهد شد.

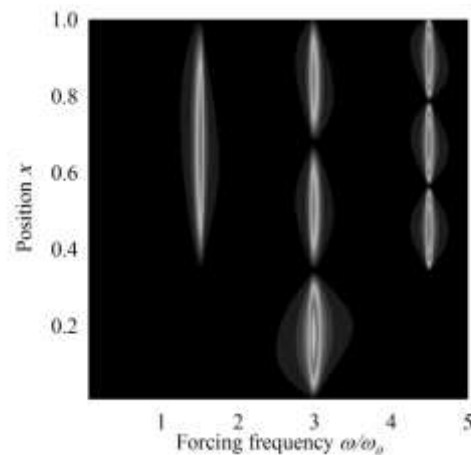
۳-۳-۱ انتقال فرکانسی

با توجه به توضیحاتی که در حالت اول ($a=L/2$) داده شد، سفتی فنر تأثیری در انتقال فرکانسی و پیچیدگی مود ندارد. بنابراین از این پس به بررسی اثر میرایی در حالات مختلف پرداخته شده است. برای این کار سفتی فنر در مقدار $k=0.01$ ثابت شده است و میرایی از مقدار خیلی کم تا مقدار زیاد افزایش یافته است. در حالتی که میرایی ناچیز است منطقی است که نتایج حالت‌های مختلف با یکدیگر مشابه و همانند ارتعاشات یک طناب ساده باشد. شکل (۳-۱۱) شکل مودهای بی بعد شده را به ازای حالت مورد نظر ($a=L/3$) در دو حالت میرایی کم و زیاد نشان می‌دهد. در میرایی زیاد سمتی از طناب که میرایی خارجی به آن نزدیک‌تر است (سمت چپ طناب)، در اولین مود طناب دارای دامنه نوسانات صفر است و طناب در این مود تبدیل به یک طناب با طول $3/2$ اولیه خود شده است. مود سوم در همان نسبت فرکانس تحریک بی بعد قبلی خود یعنی ۳ باقی مانده است، که این امر با توجه به محل دمپر $x=L/3$ اتفاق می‌افتد. این مود مود نامیرا شناخته می‌شود. این امر در مرجع [۱] نیز اثبات شده است.

الف



ب



شکل (۱۱-۳) تکامل $|\varphi(x)/A|$ بر حسب موقعیت x و فرکانس تحریک بی بعد ω/ω_0 برای مقادیر $k=0.01$: الف: $\sigma=0.05$ و ب: $\sigma=100$

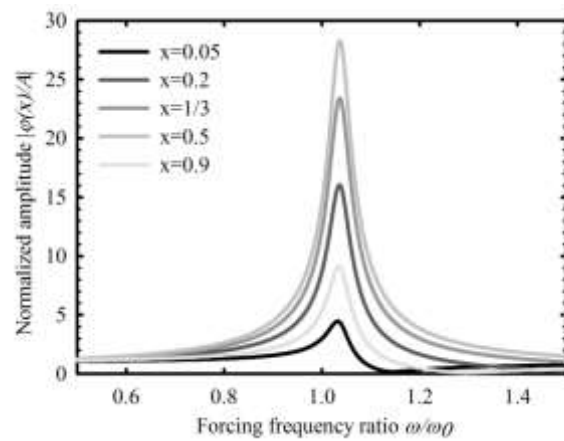
۳-۱-۱-۳- اثر میرایی

در میرایی ضعیف دامنه نوسانات نقاط مختلف طناب در نسبت فرکانس تحریک بی بعد $\omega/\omega_0 = 1$ هم محور هستند. با افزایش تدریجی میرایی، دامنه نوسانات نقاط سمت راست طناب تا یک مقدار کمینه کاهش و مجدداً افزایش می‌یابند تا در $\omega/\omega_0 = 1.5$ هم محور می‌شوند. در سمت چپ با افزایش تدریجی میرایی، همانطور که انتظار می‌رود دامنه نقاط کاهش می‌یابد. این روند تا زمانی که دامنه نقاط مجدداً در $\omega/\omega_0 = 1.5$ هم محور شوند ادامه می‌یابد. در حین گذر از $\omega/\omega_0 = 1$ به $\omega/\omega_0 = 1.5$ انتقال فرکانسی بین نقاط مختلف ایجاد می‌شود. این فاصله در ابتدا افزایش و مجدداً کاهش می‌یابد (شکل (۱۲-۳)).

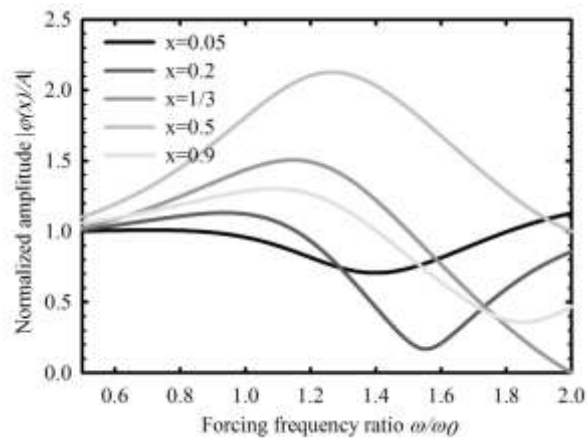
بنابراین برای نقاط سمت راست طناب در مود اول یک مقدار میرایی وجود دارد که دامنه این نقاط کمینه می‌شود و همچنین یک میرایی برای بیشترین انتقال فرکانسی ایجاد شده در طناب موجود می‌باشد.

روند فوق و نتایج شکل (۱۲-۳) برای انتقال مود سوم طناب با افزایش میرایی از $\omega/\omega_0 = 5$ به $\omega/\omega_0 = 4.5$ و همچنین برای مود پنجم از $\omega/\omega_0 = 7$ به $\omega/\omega_0 = 7.5$ نیز صادق است.

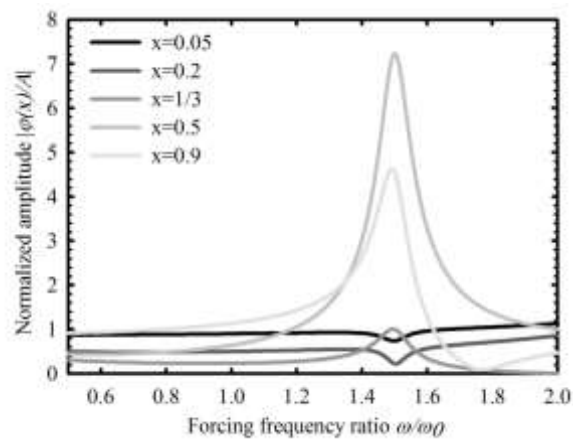
الف



ب

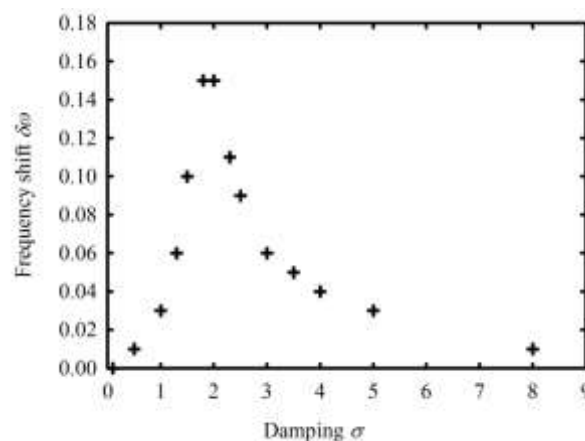


ج



شکل (۳-۱۲) اندازه دامنه شکل مود $|\varphi(x)/A|$ در نقاط مختلف برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد ω/ω_0 به ازای $k=0.5$ و الف): $\sigma=0.01$ (ب) $\sigma=1.6$ (ج) $\sigma=10$

برای آنکه بیشترین انتقال فرکانسی ایجاد شده بین ماکزیمم دامنه نوسانات نقاط مختلف طناب و میرایی بی‌بندی که منجر به این امر می‌شود را بدست آورد، دامنه نوسانات در رابطه (۲-۴۲) و (۲-۴۳) به ازای میرایی‌های مختلف از کوچک به زیاد رسم شده و انتقال فرکانسی بین نقاط $x=0.5$ و $x=0.05$ در هر میرایی اندازه‌گیری شده است. نتایج به صورت نموداری به شکل (۳-۱۳) استخراج شده است:



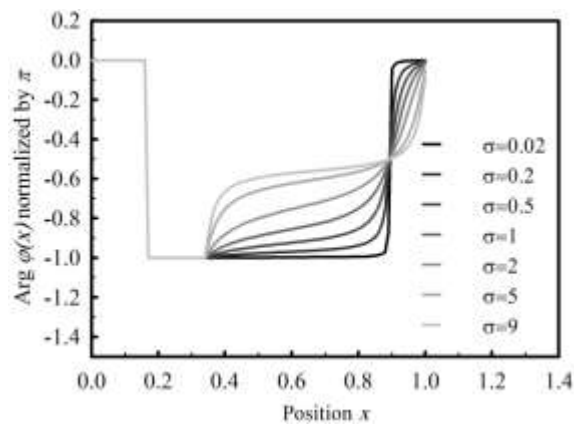
شکل (۳-۱۳) تکامل انتقال فرکانسی در ازای تغییرات σ و مقدار ثابت $k=0.01$

همانطور که مشاهده می‌شود، ماکزیمم انتقال فرکانسی در نزدیکی $\sigma=2$ اتفاق افتاده است که در این نزدیکی، نقاط مختلف طناب کمترین دامنه را نیز دارا می‌باشند. این روند که در شکل (۳-۱۳) مشاهده می‌شود مشابه با روندی است که در حالت قبل مشاهده شد.

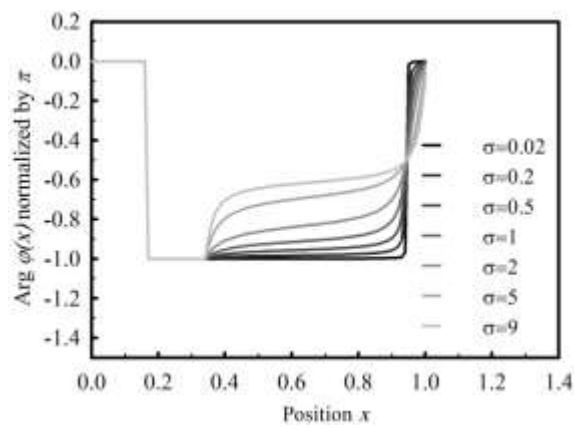
۳-۳-۲ تغییرات دیاگرام فاز

در این بخش برای مقایسه بهتر تغییرات دیاگرام فاز از مقادیر بخش قبل استفاده شده است. در شکل مود اول، یعنی $\omega/\omega_0 = 1.5$ و مقادیر $k=3.2$ و $k=10.7$ تابع دیاگرام فاز به ازای میرایی کم تا زیاد در شکل (۳-۱۴) رسم شده است. برای هر مورد سفتی k ، نقطه و محدوده‌ای ثابت مشاهده می‌شود که میرایی تأثیری در تغییر دیاگرام فاز آن‌ها ندارد. در بخش قبل نشان داده شد که این نقطه محل ظهور پیچیدگی مود خواهد بود.

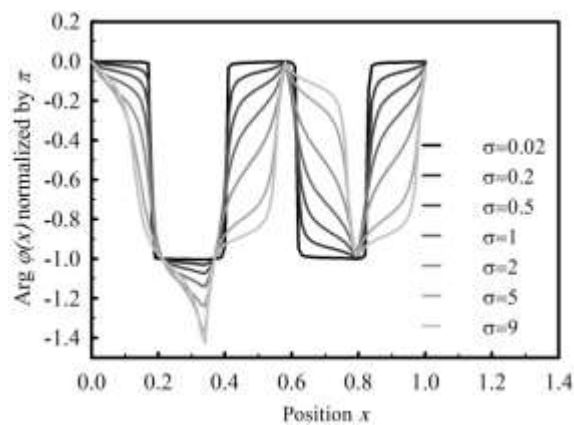
الف



ب.



ج



شکل (۳-۱۴) تکامل دیاگرام فاز در طول طناب به ازای مقادری مختلف میرایی (الف): $\omega/\omega_0 = 1.5$ و $k=3.2$ (ب):

$\omega/\omega_0 = 1.5$ و $k=10.7$ (ج): $\omega/\omega_0 = 4.7$ و $k=1.4$

به ازای $k=3.2$ نقطه $x=0.9$ نقطه‌ی ثابت و محل ظهور پیچیدگی مود خواهد بود. در نزدیکی

$x=0.15$ محدوده‌ای قابل مشاهده است که دیاگرام فاز مقدار مشخصی ندارد و تغییر موضعی از 0 به $-\pi$ اتفاق افتاده است (شکل (۱۴-۳) الف). میرایی و سفتی در این محدوده بی‌اثر است و این محدوده بیان‌گر همان سمت چپ طناب در شکل (۱۲-۳) است.

به ازای $k=10.7$ نقطه $x=0.95$ نقطه‌ی ثابت و محل ظهور پیچیدگی مود است که به دلیل وابستگی به k از 0.9 به 0.95 تغییر موقعیت داده است. نقطه $x=1/3$ با تغییر k تغییر نکرده است و این امر مستقل بودن این نقطه از k و σ را نشان می‌دهد (شکل (۱۴-۳) ب).

در شکل (۱۴-۳) ج به ازای $\omega/\omega_0 = 4.7$ و $k=1.4$ نقطه ثابت $x=1/3$ از بین رفته است و این وابستگی آن را به نسبت فرکانس تحریک نشان می‌دهد.

برای اثبات تحلیلی نتایج فوق و بدست آوردن دقیق نقاط ثابتی که در این حالت ($a=L/3$)، در دیاگرام فاز تشکیل می‌شوند و مبین محل شکل‌گیری پیچیدگی مود هستند، رابطه‌های (۵۴-۲) و (۵۵-۲) در فصل قبل، برای سمت راست طناب که دارای یک نقطه ثابت است، نوشته شده است. از معادله (۵۵-۲) معادله‌ای برحسب k بدست آمده است.

$$x = 1 - \frac{1}{\omega} \arctan \left(\frac{k \left(1 - \cos \left(\frac{4}{3} \omega \right) \right) + 2\omega \left(\sin \left(\frac{4}{3} \omega \right) + \sin \left(\frac{2}{3} \omega \right) \right)}{2\omega \left(\cos \left(\frac{4}{3} \omega \right) + \cos \left(\frac{2}{3} \omega \right) - \cos \left(\frac{1}{3} \omega \right) \right) + k \sin \left(\frac{4}{3} \omega \right)} \right) \quad (۲۰-۳)$$

با قرار دادن $\omega/\omega_0 = 1.5$ ، نقطه $x=1$ بدست می‌آید.

از معادله (۵۴-۲) معادله‌ای برحسب k و σ بدست می‌آید و با قرار دادن $\omega/\omega_0 = 1.5$ رابطه‌ای فقط برحسب k بدست آمده است.

$$x = 1 - \frac{2}{3\pi} \arctan \left(\frac{3\pi}{2k + 3\pi} \right) \quad (۲۱-۳)$$

معادله (۲۱-۳) محل نقطه ثابت را با توجه به مقدار k نشان می‌دهد. با قرار دادن $k=3.2$ در این معادله مقدار $x=0.89$ و به ازای $k=10.7$ مقدار $x=0.94$ بدست می‌آید. این نقاط در شکل (۱۴-۳) الف-ب نشان داده شده‌اند.

در مود اول، دیاگرام فاز سمت چپ طناب به صورت خطوط ثابت (0 یا $-\pi$) است و از میرایی

هیچگونه تأثیری نمی‌پذیرد.

مود سوم در میرایی‌های کم به زیاد از $\omega/\omega_0 = 5$ به $\omega/\omega_0 = 4.5$ منتقل می‌شود و همانند مود اول در سمت چپ دامنه ناچیز و دیاگرام فاز ثابت است. اما در سمت راست سه نقطه ثابت خواهیم داشت.

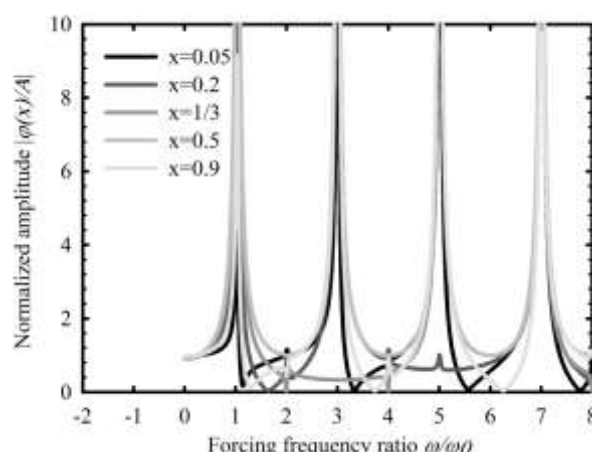
در مورد مود پنجم نیز همانند مودهای اول و سوم با افزایش میرایی از $\omega/\omega_0 = 7$ به $\omega/\omega_0 = 7.5$ منتقل شده است و در سمت چپ دامنه ناچیز است.

در مورد مود چهارم نکته قابل توجه این است که نمی‌توان آن را حاصل انتقال ماکزیمم دامنه از فرکانسی به فرکانس دیگر، به ازای افزایش میرایی از مقدار خیلی کم به خیلی زیاد دانست. این امر در شکل (۳-۱۵) به ازای افزایش میرایی نشان داده شده است. در این شکل انتقال مود اول از ۱ به ۱.۵، ثابت ماندن مود دوم در $\omega/\omega_0 = 3$ ، انتقال مود سوم از ۵ به ۴.۵، تشکیل مود چهارم و انتقال مود پنجم از ۷ به ۷.۵ نشان داده شده است.

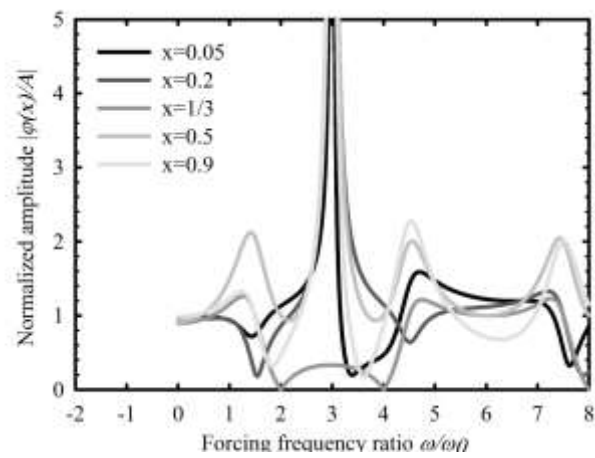
با انتقال مود سوم به سمت عقب (از ۵ به ۴.۵) و انتقال مود پنجم به سمت جلو (۷ به ۷.۵)،

مود چهارم در $\omega/\omega_0 = 6$ ایجاد می‌شود. شکل‌گیری مود چهارم از حوالی $\sigma=2$ شروع می‌شود.

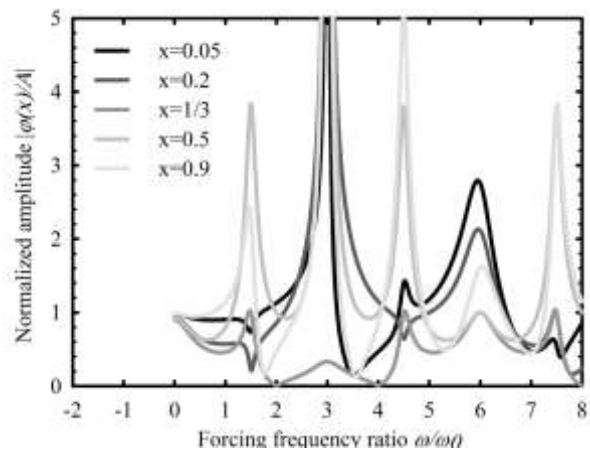
الف



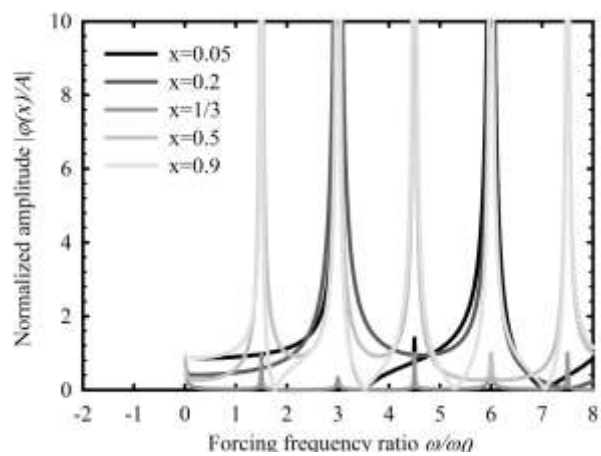
ج



ج



د

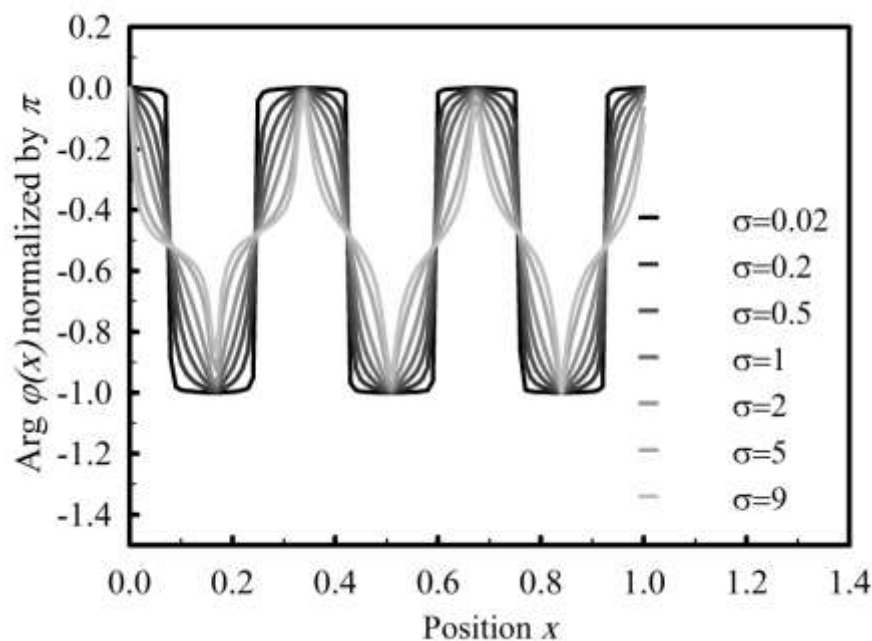


شکل (۳-۱۵) اندازه دامنه $|\varphi(x)/A|$ در نقاط مختلف طناب بر حسب نسبت فرکانس تحریک بی بعد ω/ω_0 به ازای $k=0.5$ (الف) $\sigma=0.1$: (ب) $\sigma=2$: (ج) $\sigma=10$: (د) $\sigma=100$

همانطور که در بخش اول این فصل اثبات شد پیچیدگی مود از نقاط ثابت شروع به گسترش می‌کند و ماکزیمم آن در صورتی اتفاق می‌افتد که بتوان در تابع دیاگرام فاز این نقاط ثابت را با یک خط راست به یکدیگر وصل کرد. بنابراین در مود اول با توجه به اینکه در سمت راست فقط یک نقطه ثابت موجود است، می‌توان پیش‌بینی کرد که در مود اول پیچیدگی مود فقط در سمت راست و به ازای مقداری مشخص از k که نقطه ثابت در مکانی ایجاد شود که بتوان آن را از نقطه $x=1$ به نقطه ثابت $x=1/3$ با یک خط راست وصل نمود، اتفاق خواهد افتاد.

در مورد مود دوم چون در تابع دیاگرام فاز نقطه ثابتی ایجاد نمی‌شود بنابراین پیچیدگی مود در مود دوم به هیچ عنوان اتفاق نمی‌افتد. بنابراین می‌توان پیش‌بینی کرد که در حالت $a=L/3$ ایجاد پیچیدگی مود وابسته به فرکانس تحریک بی‌بعد است. در مورد مود سوم و پنجم حالتی مشابه حالت مود اول اتفاق می‌افتد که فقط در یک سمت پیچیدگی مود اتفاق می‌افتد.

در مورد مود چهارم با توجه به تابع دیاگرام فاز در شکل (۳-۱۶)، پیچیدگی مود در هر دو طرف طناب اتفاق می‌افتد.



شکل (۳-۱۶) نقاط ثابت در $\omega/\omega_0 = 6$ به ازای $k=3.2$

اما احتمال دارد که این پدیده به صورت ناهمزمان صورت پذیرد. یعنی مثلاً مقدار سفتی k که منجر به شکل‌گیری پیچیدگی مود در سمت راست می‌شود، در سمت چپ این اتفاق صورت نپذیرد و یا بالعکس.

برای محاسبه نقاط ثابت در مود چهارم مجدداً از روابط (۲-۵۴) و (۲-۵۵) برای هر دو سمت طناب استفاده می‌شود. در رابطه (۲-۵۵) با قرار دادن $\omega/\omega_0 = 6$ مقدار $x=0$ برای سمت چپ و مقدار $x=1$ برای سمت راست حاصل می‌شود. در رابطه (۲-۵۴) با قرار دادن مقدار $\omega/\omega_0 = 6$ ، برای سمت چپ و راست به ترتیب روابط (۳-۲۲) و (۳-۲۳) حاصل شده است.

$$x = \frac{1}{6\pi} \arctan\left(\frac{9\pi}{k}\right) \quad (۳-۲۲)$$

$$x = 1 - \frac{1}{6\pi} \arctan\left(\frac{18\pi}{k}\right) \quad (۳-۲۳)$$

با قرار دادن $k=3.2$ در روابط (۳-۲۲) و (۳-۲۳) به ترتیب مقادیر $x=0.08$ و $x=0.92$ بدست آمده است. این نقاط به ترتیب اولین نقطه ثابت و آخرین نقطه ثابت در طناب هستند (شکل (۳-۱۶)). با توجه به روابط (۳-۲۲) و (۳-۲۳) که دوره تناوب π دارند، سایر نقاط به ترتیب $x=0.25$ ، $x=0.81$ ، $x=0.65$ و $x=0.48$ بدست آمده است (شکل (۳-۱۶)).

۳-۳-۳ - شکل‌گیری امواج در حال حرکت

در بخش قبل نقاط ثابتی که پیچیدگی مود در آن‌ها گسترش پیدا می‌کند به صورت تحلیلی بدست آورده شده‌اند. زمانی که این گسترش به حداکثر خود می‌رسد، نقاط ثابت در دیاگرام فاز با خطوط ثابت مورب به یکدیگر متصل شده‌اند. در این حالت ماکزیمم پیچیدگی مود و در نتیجه امواج در حال حرکت شکل گرفته‌اند. در این بخش مقادیری از k و σ شناسایی می‌شوند که به ازای آن‌ها دیاگرام فاز خطی می‌شود.

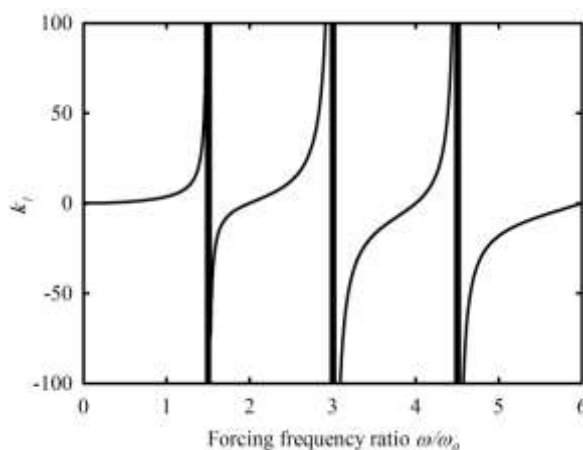
برای این کار بسط تیلور دیاگرام فاز همانند حالت قبل ($a=L/2$) نوشته شده و ضرایب غیرخطی آن مساوی صفر قرارداده شده است. اندیس ۱ برای سمت چپ و اندیس ۲ برای سمت راست استفاده

شده است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \pm 1 \\ \rho_1 = 0 \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_1 = \frac{1}{2} \omega \tan\left(\frac{\omega}{3}\right) \left(1 + \frac{\cos\frac{\omega}{3}}{1 + \cos\frac{\omega}{3}}\right) \\ \sigma_1 = \pm \left(1 + \frac{1}{2 \cos\frac{\omega}{3}}\right) \end{array} \right\} \leftrightarrow \arg(\varphi_2) = \pm \omega x \quad (24-3)$$

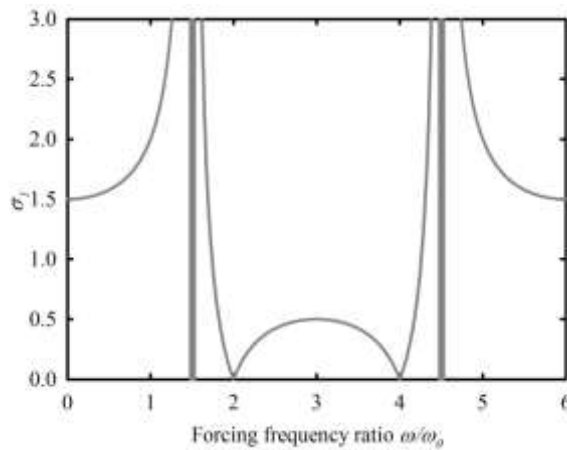
در روابط (۲۴-۳) مقادیر مثبت k و σ قابل قبول هستند. برای این کار مقادیر k و σ بر حسب ω/ω_0 رسم شده‌اند. σ_1 دارای دوره تناوب 6π می‌باشد.

شکل (۱۷-۳) نشان می‌دهد که مقداری برای k_1 در موده‌های اول، دوم و سوم برای سمت چپ طناب وجود ندارد که به ازای آن دیاگرام فاز خطی شود. این امر قبلاً در نمودار دیاگرام فاز شکل (۱۴-۳) برای مود اول نیز نشان داده شد. k_1 در هر دوره 6π مقدار آن افزایش می‌یابد و با افزایش ω/ω_0 نمودار آن رفته رفته به صورت خطوط راست قائم تبدیل می‌شود. در حقیقت در فرکانس‌های بالا به بینهایت میل می‌کند.



شکل (۱۷-۳) سفتی k_1 متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز در سمت چپ طناب بر حسب نسبت فرکانس تحریک بی- بعد ω/ω_0

باتوجه به اینکه هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی σ می‌تواند قابل قبول باشند، بنابراین اجتماع مقادیر مثبت آن‌ها باید در نظر گرفته شود. در شکل (۱۸-۳) این مقادیر به صورت نمودار نشان داده شده‌اند.

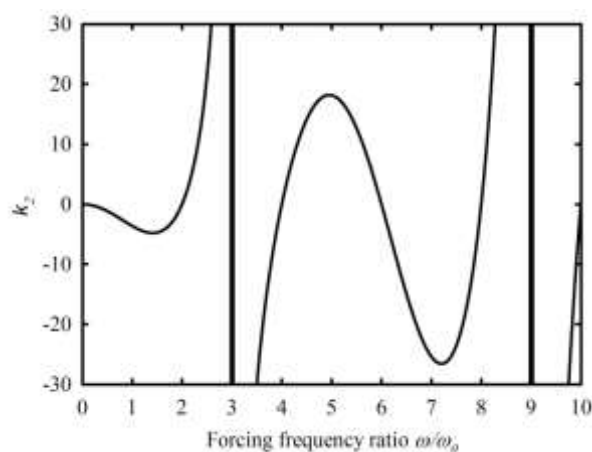


شکل (۳-۱۸) میرایی σ_1 متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز در سمت چپ طناب بر حسب نسبت فرکانس تحریک بی بعد ω/ω_0

همین فرآیند برای سمت راست طناب با توجه به معادله دیاگرام فاز (۲-۵۱) در فصل قبل صورت گرفته است. نتایج حاصله به صورت رابطه (۳-۲۵) حاصل شده است.

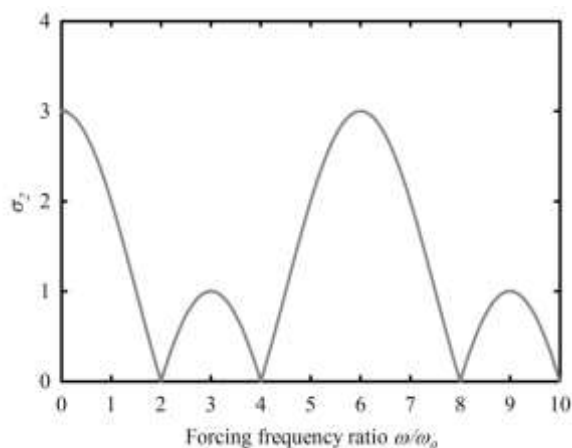
$$\begin{cases} \epsilon_2 = -1 \\ \rho_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k_2 = -\omega \sin\left(\frac{\omega}{3}\right) \left(1 + \frac{\cos\frac{\omega}{3}}{1 + \cos\frac{\omega}{3}}\right) \\ \sigma_2 = \pm \left(2 \cos\left(\frac{\omega}{3}\right) + 1\right) \end{cases} \leftrightarrow \arg(\varphi_2) = \pm \omega x \quad (3-25)$$

تابع σ_2 دارای دوره تناوب 6π است. در حالی که رفتار k_2 در موده‌های بالا مشابه k_1 است. شکل (۳-۱۹) مقدار k_2 را بر حسب ω/ω_0 نشان می‌دهد. مقادیر مثبت آن مورد قبول است.



شکل (۳-۱۹) سفتی k_2 متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز در سمت راست طناب بر حسب نسبت فرکانس تحریک بی بعد ω/ω_0

شکل (۳-۲۰) σ_2 را بر حسب ω/ω_0 نشان می‌دهد. این شکل اجتماع مقادیر قابل قبول σ_2 می‌باشد.



شکل (۳-۲۰) میرایی σ_2 متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز در سمت راست طناب بر حسب نسبت فرکانس تحریک بی بعد ω/ω_0

تا به اینجا مشخص شد که مقدار k و σ در هر دو طرف طناب وابسته به نسبت فرکانس تحریک بی- بعد هستند و همچنین با یکدیگر متفاوت اند. بنابراین برای آنکه دیاگرام فاز در کل طناب به صورت یک خط راست و مورب تبدیل شود، باید نسبت فرکانس تحریکی را پیدا کرد که به ازای آن مقادیر k_1 و k_2 ، همچنین σ_1 و σ_2 با یکدیگر برابر شوند.

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 0, 2\pi \\ \sigma_1 = \sigma_2 \leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = \pi, 2\pi \end{cases} \quad (۳-۲۶)$$

با توجه به روابط (۳-۲۶) تنها نقطه اشتراک این چهار مقدار 2π می باشد که به ازای این نسبت فرکانس تمامی مقادیر k_1 ، k_2 ، σ_1 و σ_2 مساوی صفر می شوند و همان حالت طناب ساده بدون سفتی و میرایی خارجی می باشد و دیاگرام فاز به صورت خطوط راست افقی می باشد. بنابراین به صورت تحلیلی اثبات شد که هیچگونه مقداری برای k و σ متصل به طناب نمی توان یافت که به ازای آن ها دیاگرام فاز در کل طناب خطی شده و ماکزیمم پیچیدگی مود رخ دهد و در نتیجه امواج در حال حرکت در کل طناب شکل نمی گیرند. البته این به این معنا نیست که این پدیده هرگز اتفاق نمی افتد، بلکه امکان دارد که در هر طرف، در نسبت فرکانس تحریک بی بعد متفاوتی رخ دهد. یعنی امواج از یک طرف به سمت دیگر در حال حرکت باشند. برای نشان دادن این حالت کافی است برای هر طرف

از طناب نسبت فرکانس تحریکی را یافت که در آن k و σ دارای مقادیر قابل قبولی می‌باشند. بنابراین اشتراک مقادیر k و σ مورد نظر است.

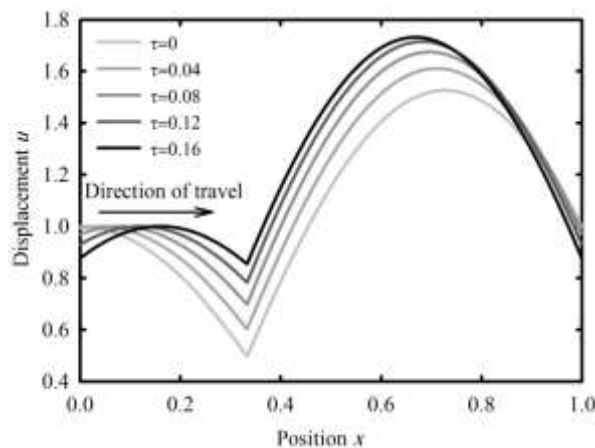
برای مثال در سمت چپ طناب و به کمک شکل (۱۷-۳) و شکل (۱۸-۳) مقدار $\omega/\omega_0 = 1$ در روابط (۲۴-۳) قرار داده شده است. مقدار $k_1=3.6$ و مقدار $\sigma_1=2$ بدست آمده است. با قرار دادن این مقادیر در رابطه پاسخ فرکانسی (۴۰-۲) معادله موج در سمت چپ را به شکل رابطه (۲۷-۳) داریم.

$$u_1(x, \tau) = Ae^{-i\pi x} e^{i\omega \tau} \quad (27-3)$$

در صورتی که برای سمت راست طناب رابطه (۲۸-۳) حاصل شده است.

$$u_1(x, \tau) = \frac{A}{\sqrt{3} + 3i} \left((\sqrt{3} - i)e^{i\pi(1-x)} + 4ie^{-i\pi(1-x)} \right) e^{i\omega \tau} \quad (28-3)$$

شکل (۲۱-۳) حرکت امواج در سمت چپ طناب را نشان می‌دهد. این امواج از چپ به راست حرکت می‌کنند تا در محل قرارگیری فنر-دمپر با نوسانات سمت راست برخورد می‌کنند و از بین می‌روند.



شکل (۲۱-۳) امواج در حال حرکت در سمت چپ طناب در $\Delta\tau = 0.04$ به ازای $\omega/\omega_0 = 1$ و $k=3.6$ و $\sigma=2$

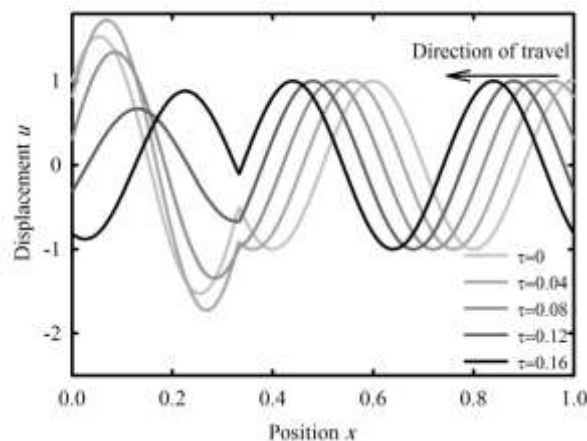
برای آنکه در سمت راست طناب، موج در حال حرکت مشاهده شود، مقدار $\omega/\omega_0 = 5$ را در روابط (۲۵-۳) جایگزین کرده و مقادیر $k_2=18.14$ و $\sigma_2=2$ بدست آمده است. با قراردادن این مقادیر در رابطه پاسخ فرکانسی (۴۱-۲) معادله موج در حال حرکت در سمت راست بدست آمده است.

$$u_2(x, \tau) = Ae^{-5i\pi(1-x)}e^{i\omega\tau} \quad (29-3)$$

با قرار دادن مقادیر در سمت چپ، پاسخ فرکانسی که مبین نوسانات با دامنه متغیر است، بدست آمده است.

$$u_1(x, \tau) = \frac{A}{\sqrt{3} + 3i} \left((\sqrt{3} - i)e^{5i\pi x} + 4ie^{-5i\pi x} \right) e^{i\omega\tau} \quad (30-3)$$

شکل (22-3) حرکت امواج در سمت راست طناب را نشان می دهد.



شکل (22-3) امواج در حال حرکت در سمت راست طناب در 5 گام زمانی ($\Delta\tau = 0.04$) به ازای $\omega/\omega_0 = 5$ و $k=18.14$ و $\sigma=2$

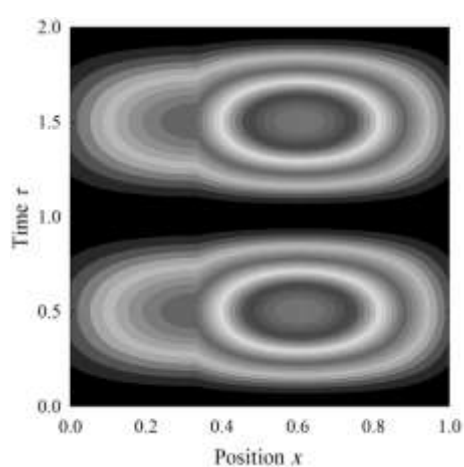
۳-۳-۴ تغییرات انرژی

روابط کلی محاسبه انرژی جنبشی، پتانسیل و انرژی کل در طناب، در فصل قبل استخراج شد. با توجه به نتایج بخش قبل، به دلیل ناهمزمانی در ایجاد ماکزیمم پیچیدگی مود در دو طرف طناب، تغییرات انرژی نیز در دو طرف طناب به صورت ناهماهنگ رخ می دهد. البته در میرایی زیاد و میرایی-های کم انرژی در دو طرف مقدار مشابهی دارد. اما در لحظه شکل گیری امواج در حال حرکت در هر طرف از طناب انرژی شکلی متفاوت از طرف دیگر را به خود می گیرد. در این بخش این امر به صورت نمودارهای انرژی جنبشی بر حسب مکان x و زمان t نشان داده شده است.

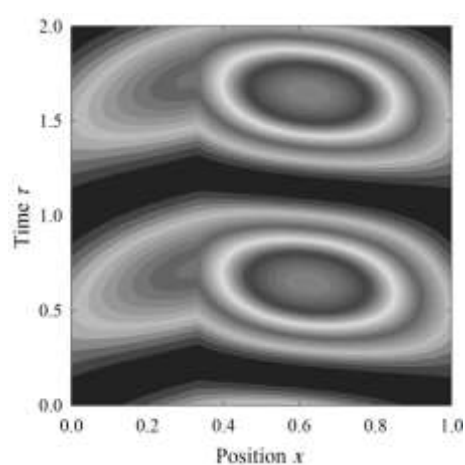
ابتدا در انرژی جنبشی مقادیر $\omega/\omega_0 = 1$ و $k=3.6$ را قرار داده و مقدار میرایی را از کم تا زیاد افزایش داده و به ازای هر میرایی نمودار انرژی جنبشی در فضای مکان x و زمان t رسم شده

است (شکل ۳-۲۳). در ازای میرایی کم انرژی جنبشی در محل اتصال فنر-دمپر ماکزیمم مقدار خود را دارد. با افزایش میرایی انرژی جنبشی در این مکان کاهش پیدا می‌کند و در عوض در مرزها افزایش می‌یابد. در میرایی $\sigma=2$ که امواج در حال حرکت در سمت چپ شکل گرفته‌اند، انرژی جنبشی شکل خاصی را به خود گرفته است. با گذر از این مقدار انرژی جنبشی در محل اتصال فنر-دمپر به مینیمم خود و در نزدیکی مرزها به ماکزیمم خود می‌سد.

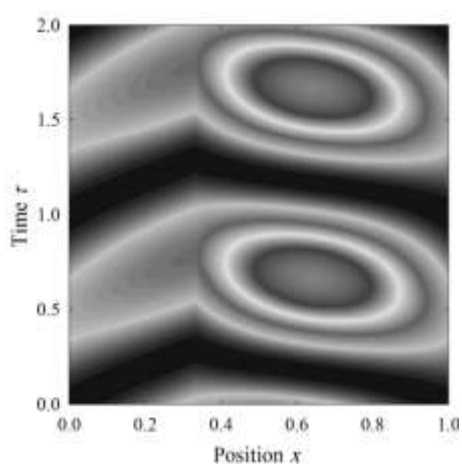
الف



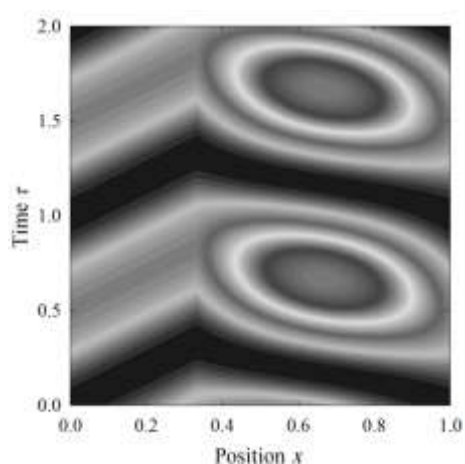
ب

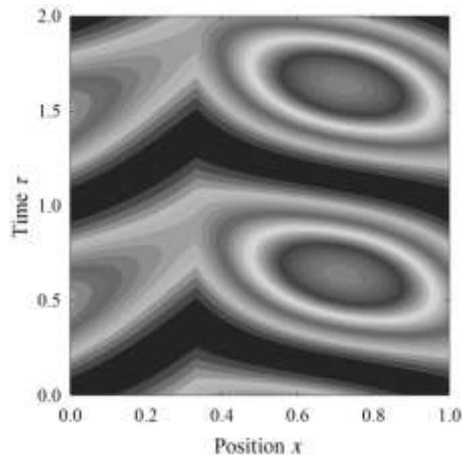


ج

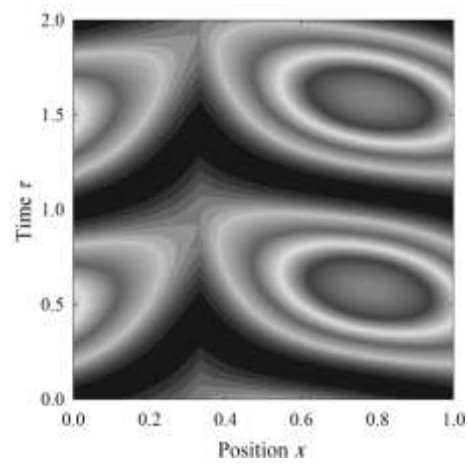


د

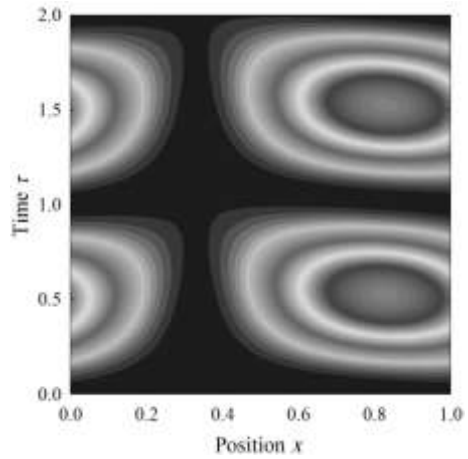
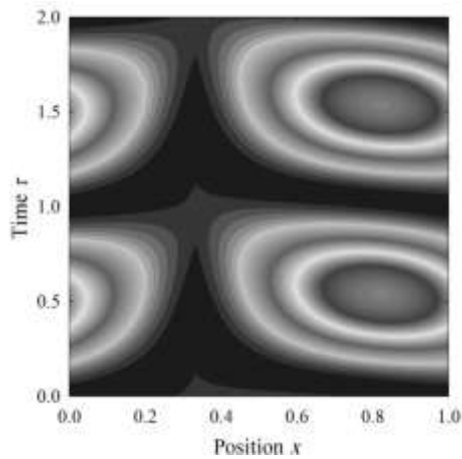




ز



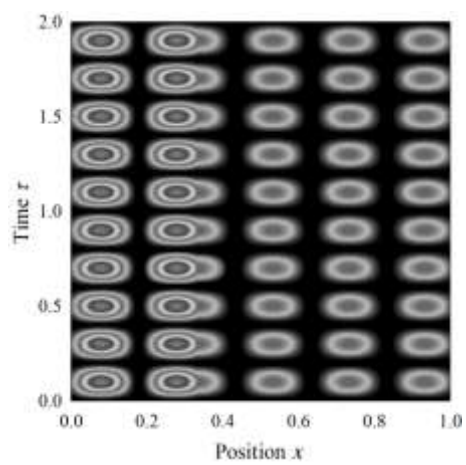
ح



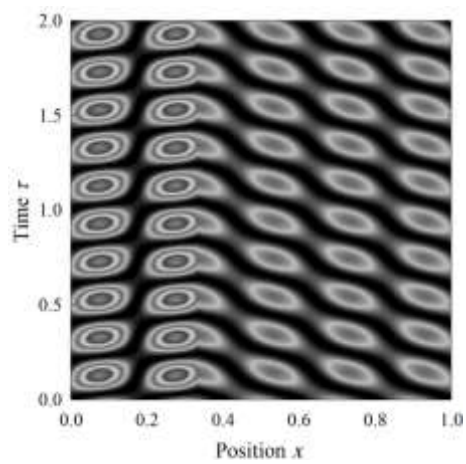
شکل (۲۳-۳) تغییرات انرژی جنبشی برحسب مکان و زمان در طناب به ازای $k=3.6$ متصل شده در $a=L/3$ در طناب و تحریک نوسانی در دو انتهای طناب، از الف: میرایی خیلی ضعیف تا ح: میرایی خیلی قوی به ازای نسبت فرکانس $\omega/\omega_0 = 1$ تحریک بی بعد

شکل (۲۴-۳) تغییرات انرژی جنبشی در طناب را به ازای $\omega/\omega_0 = 5$ و $k=18.14$ از میرایی خیلی کم تا زیاد را نشان می دهد. در ازای میرایی $\sigma=2$ ، شکل گیری امواج در حال حرکت در سمت راست طناب، انرژی جنبشی شکل خاصی را به خود گرفته است (شکل (۲۴-۳) د).

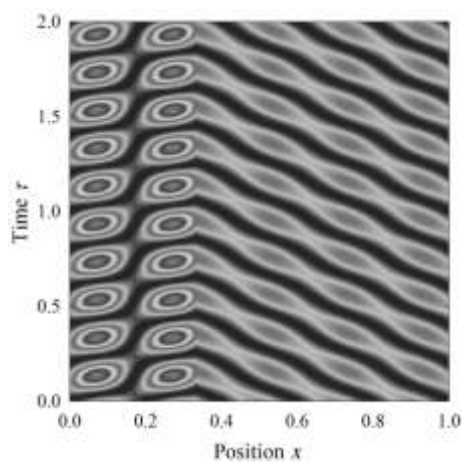
الف



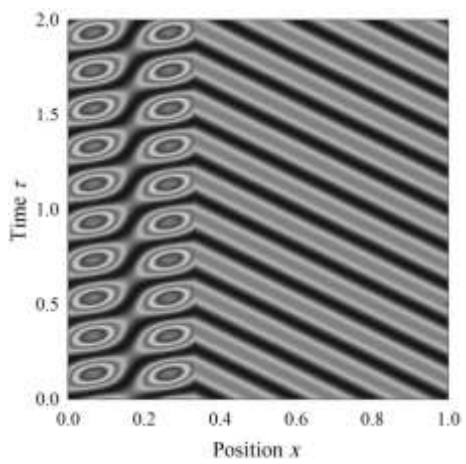
ب.



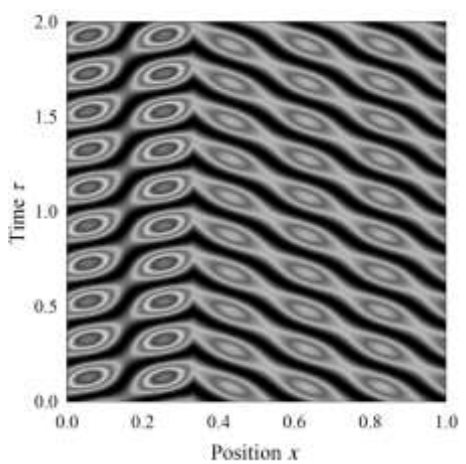
ج



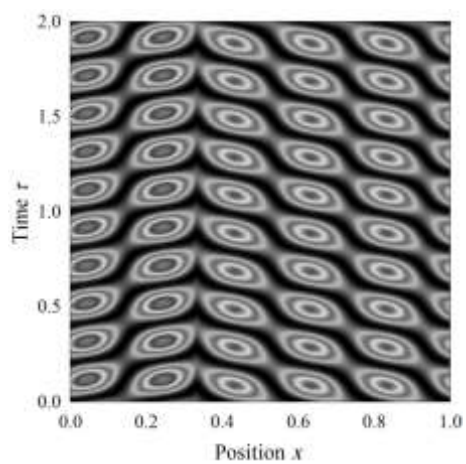
د



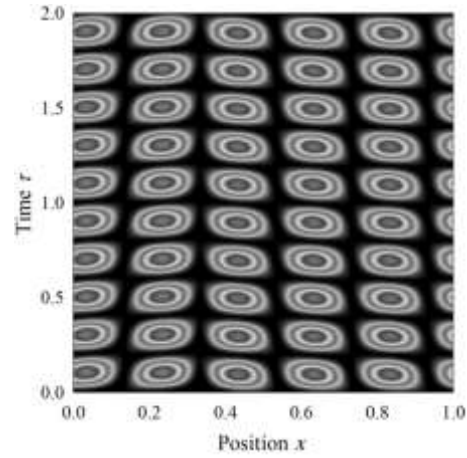
هـ



و



ز

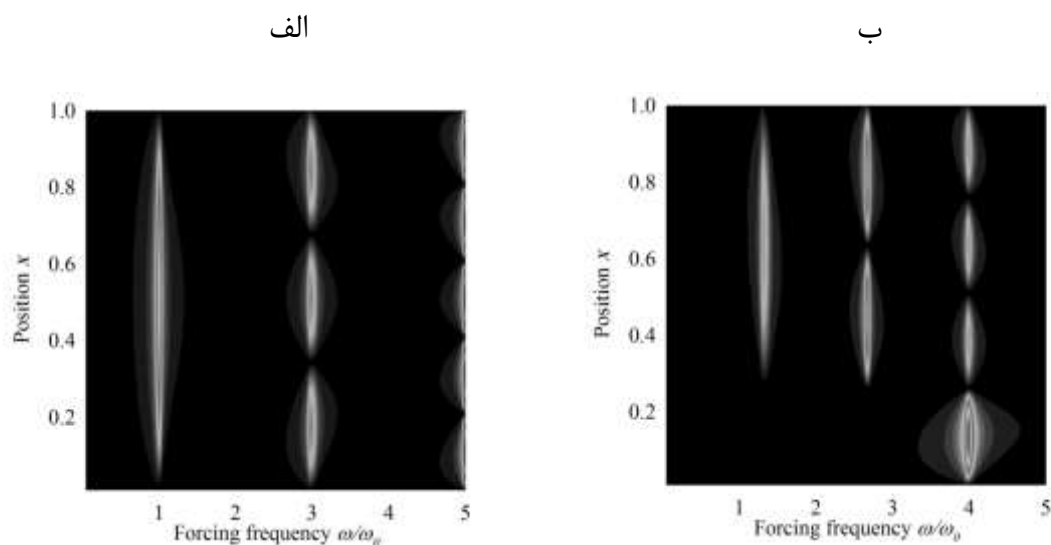


۳-۴- حالت سوم $a=L/4$

۳-۴-۱- انتقال فرکانسی

دهنده‌ی دامنه‌ی ناچیز در طول طناب می‌باشند.

از طرف دیگر زمانی که میرایی مقدار بزرگی دارد یا به عبارتی به بینهایت میل می‌کند، سیستم در دو فرکانس تحریک بی‌بعد اولیه و ثانویه به یک طناب با طول $3/4$ طول اولیه خود کاهش پیدا کرده است. از آنجا که میرایی در $a=L/4$ جای گرفته است، پاسخ فرکانسی در $\omega/\omega_0=4/3$ اتفاق افتاده و همچنین افزایش دامنه فقط در سمتی از طناب که طول بیشتری دارد مشاهده می‌شود. مود سوم ارتعاشات که در $\omega/\omega_0=4$ اتفاق افتاده است، اولین مود از طناب است که در هر دو طرف افزایش دامنه مشاهده می‌شود.

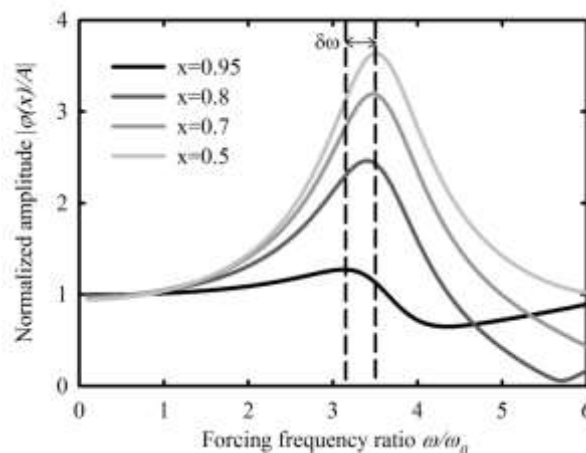


شکل (۳-۲۵) تکامل $|\varphi(x)/A|$ برحسب موقعیت x و فرکانس تحریک بی‌بعد ω/ω_0 برای مقادیر $k=0.01$: الف: $\sigma=0.05$ و $\sigma=100$: ب

۳-۴-۱-۱- اثر میرایی

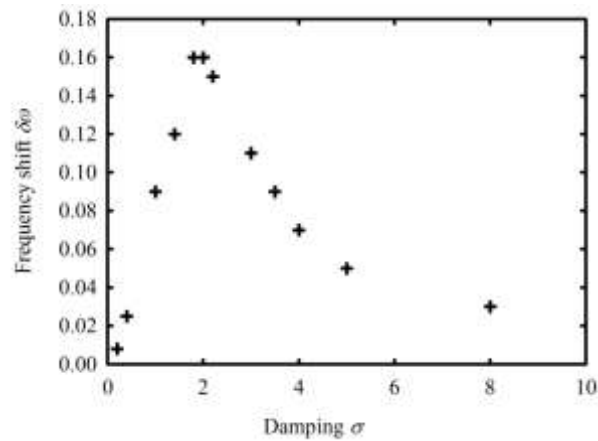
برای مشخص شدن بهتر اثر میرایی روی دامنه پاسخ فرکانسی و انتقال فرکانسی، سفتی در یک مقدار دلخواه ناچیز ثابت شده است و میرایی از مقادیر بسیار کم تا مقادیر بسیار بزرگ تغییر می‌کند. افزایش میرایی دو اثر قابل ملاحظه روی پاسخ فرکانسی به وجود می‌آورد. اولین تأثیر آن بر روی دامنه پاسخ فرکانسی می‌باشد، که با افزایش میرایی دامنه‌ی پاسخ فرکانسی کاهش می‌یابد، به طوری که نقاط سمت چپ فنر و دمپر با افزایش میرایی روند کاهشی خود را تا کمینه دامنه فرکانسی حفظ می‌کنند و همانطور که قبلاً نیز اشاره شد در میرایی‌های خیلی بزرگ دامنه پاسخ فرکانسی سمت چپ در

اولین فرکانس تشدید از بین می‌رود. افزایش میرایی باعث کاهش دامنه فرکانسی نقاط سمت راست شده و در $\sigma=2$ کمینه خود را تجربه می‌کنند و سپس با افزایش میرایی مجدد افزایش می‌یابند تا در فرکانس تشدید سیستم هم محور می‌شوند. به عنوان دومین اثر قابل ملاحظه، مشاهده می‌شود که در زمان افزایش میرایی، یک انتقال فرکانسی بین قله‌های مختلف سمت راست طناب ظاهر می‌شود. بنابراین در هر انتقال ماکزیمم دامنه نقاط مختلف طناب با افزایش میرایی از نسبت فرکانس با میرایی کم به نسبت فرکانس میرایی زیاده، اولاً کاهش ماکزیمم دامنه تا مقداری مینیمم و سپس افزایش آن، دوماً یک انتقال فرکانسی بین قله‌های ماکزیمم ایجاد می‌شود. به طور مثال ماکزیمم دامنه نقاط مختلف طناب در مود اول با افزایش میرایی از کم به زیاد، از $\omega/\omega_0 = 1$ به $\omega/\omega_0 = 4/3$ و مود دوم از $\omega/\omega_0 = 3$ به $\omega/\omega_0 = 8/3$ منتقل می‌شوند، که در هر دو مورد کمترین دامنه و بیشترین انتقال فرکانسی در نزدیکی $\sigma=2$ اتفاق افتاده است (شکل (۳-۲۶)).



شکل (۳-۲۶) انتقال فرکانسی به ازای انتقال فرکانسی برای $k=0.5$ و $\sigma=1.4$

شکل (۳-۲۷) انتقال فرکانسی بر حسب میرایی‌های خیلی کوچک تا خیلی بزرگ را نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که یک مقدار خاص برای میرایی وجود دارد که به ازای آن انتقال فرکانسی بیشترین مقدار خود را دارد. این مقدار مانند سایر حالات بحث شده در نزدیکی $\sigma=2$ می‌باشد.

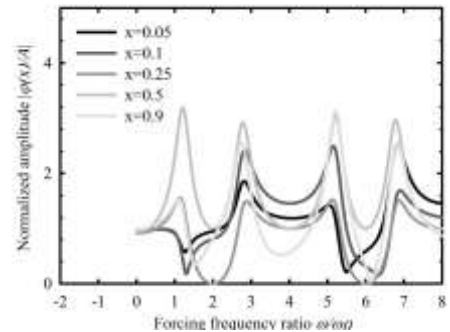
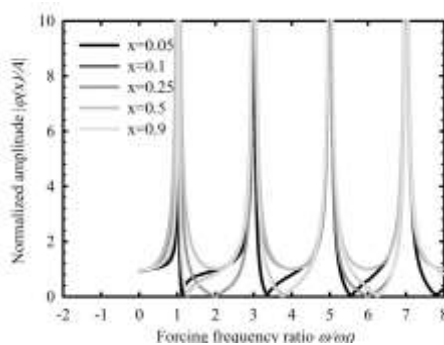


شکل (۳-۲۷) تکامل انتقال فرکانسی $|\delta\omega|$ بر حسب میرایی σ به ازای $k=0.01$

مود سوم حاصل انتقال هیچ مود دیگری نیست، بنابراین انتقال فرکانسی در آن مشاهده نمی-شود و بر اثر افزایش میرایی تشکیل شده است. در شکل (۳-۲۸) این امر به خوبی نشان داده شده است.

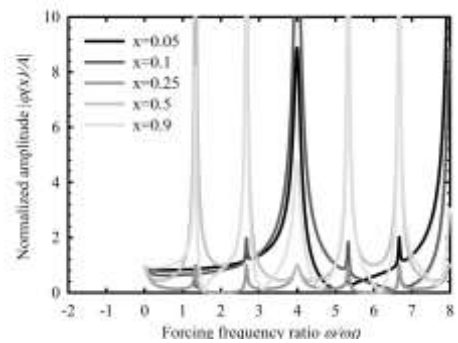
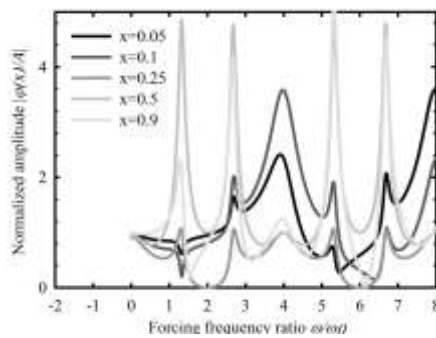
الف

ب



ج

د



شکل (۳-۲۸) اندازه دامنه $|\varphi(x)/A|$ در نقاط مختلف طناب بر حسب نسبت فرکانس تحریک بی بعد ω/ω_0 به ازای $k=0.5$: (الف) $\sigma=0.1$: (ب) $\sigma=2$: (ج) $\sigma=5$: (د) $\sigma=20$

۳-۴-۲- تغییرات دیاگرام فاز

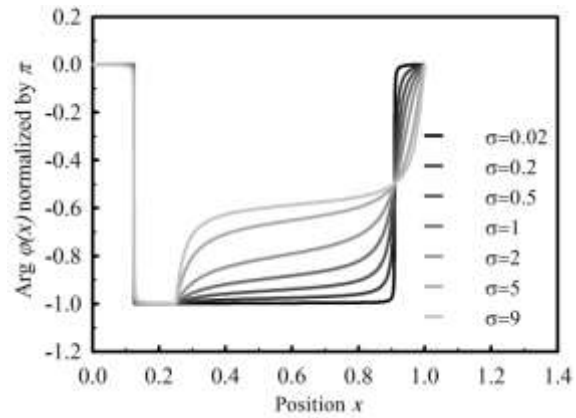
برای نشان دادن نقاط ثابت مقادیر $\omega/\omega_0=4/3$ ، $k=3.2$ و $k=10.7$ را در نظر می‌گیریم. به ازای هر مقدار k ذکر شده، σ را در یک بازه وسیع تغییر داده و تابع دیاگرام فاز را رسم می‌کنیم. شکل (۲۹-۳) الف-ب بیانگر تغییرات دیاگرام فاز بر حسب موقعیت طناب می‌باشد. برای هردو مقدار k ، سمت چپ مانند یک طناب ساده رفتار کرده و میرایی در آن اثری نداشته است. لذا می‌توان نتیجه گرفت که میرایی‌های خیلی بزرگ در سمت راست تأثیر گذار خواهند بود. اما در سمت راست طناب اثر میرایی به وضوح مشخص است. همچنین:

- به ازای مقدار بی‌بعد $k=3.2$ در تابع دیاگرام فاز سمت راست طناب سه نقطه ثابت ایجاد می‌شود که به ازای میرایی‌های خیلی کوچک تا خیلی بزرگ مکان آن‌ها تغییر نمی‌کند. یعنی نقاط $(0.25, -\pi)$ ، $(0.91, -\pi/2)$ و $(1, 0)$. همچنین در سمت چپ طناب، تابع دیاگرام فاز به ازای مقادیر مختلف میرایی تقریباً شکل ثابتی دارد. یعنی سه نقطه $(0, 0)$ و $(0.25, -\pi)$ و نقطه‌ی $x=0.125$ که از 0 به $-\pi$ گذر ناگهانی داشته است. در بخش‌های قبل نشان داده شد که این نقطه در نمودار دامنه پاسخ فرکانسی در طول زمان، بیان‌گر یک گره است.
- به ازای مقدار بی‌بعد $k=10.7$ تابع دیاگرام فاز دقیقاً رفتاری مشابه رفتار حالت قبل دارد. به طوری که نقاط $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(0.25, -\pi)$ و نیز نقطه‌ی $x=0.125$ همچنان ثابت خواهند ماند. اما نقطه‌ی $(0.91, -\pi/2)$ به نقطه‌ی $(0.95, -\pi/2)$ منتقل شده است.

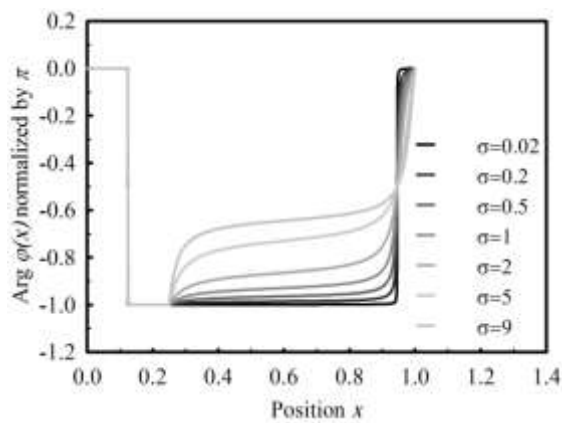
در شکل (۲۹-۳) ج نمودار تابع دیاگرام فاز طناب برای مقادیر $\omega/\omega_0=4.421$ و $k=1.4$ ، به ازای گستره‌ی وسیعی از میرایی خیلی کوچک تا میرایی خیلی بزرگ رسم شده است. همانطور که مشخص است نقطه ثابت $x=0.25$ که محل قرارگیری فنر و دمپر است از بین رفته است. بررسی‌های فوق نتیجه می‌دهد همانطور که قبلاً اثبات شد در نمودار دیاگرام فاز دو نوع نقطه‌ی ثابت وجود دارد. اول نقاطی که وابسته به مقدار k و σ هستند (شکل (۲۹-۳) الف-ب). دوم نقاطی که

فقط وابسته به فرکانس بی‌بعد هستند (شکل (۳-۲۹) ج)، مانند نقاط $x=0.125$ و $(0.25, -\pi)$.

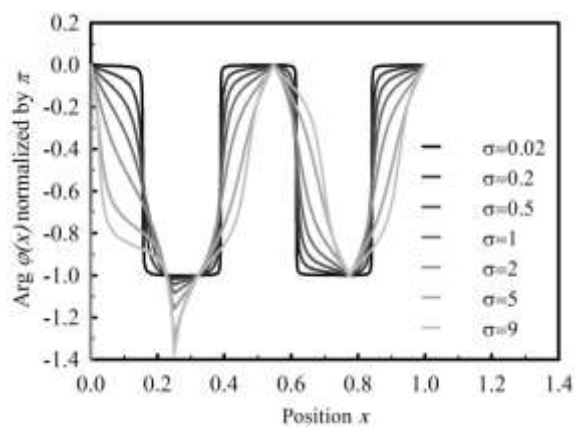
الف



ب



ج



شکل (۳-۲۹) تکامل دیاگرام فاز در طول طناب به ازای مقادیر مختلف میرایی الف): $\omega/\omega_0 = 4/3$ و $k=3.2$ ب):

$\omega/\omega_0 = 4/3$ و $k=10.7$ ج): $\omega/\omega_0 = 4.421$ و $k=1.4$

برای اثبات تحلیلی نتایج فوق و همچنین بدست آوردن مختصات دقیق نقاط ثابت موجود در

دیاگرام فاز، روابط (۵۴-۲) و (۵۵-۲) در حالت $a=L/4$ برای هر دو طرف طناب بدست آمده است.

برای مود اول $\omega/\omega_0 = 4/3$ ، فقط در سمت راست یک نقطه ثابت مشاهده می‌شود. با قرار

دادن $\omega/\omega_0 = 4/3$ در رابطه (۵۴-۲) و (۵۵-۲) برای سمت راست به ترتیب مقدار $x=1$ و رابطه

(۳۱-۳) حاصل شده است.

$$x = 1 - \frac{3}{4\pi} \arctan\left(\frac{4\pi}{4\sqrt{3}\pi + 3k}\right) \quad (۳۱-۳)$$

رابطه (۳۱-۳) وابستگی موقعیت برخی نقاط ثابت در دیاگرام فاز را اثبات می‌کند. با قرار دادن $k=3.2$

و $k=10.7$ به ترتیب نقاط $x=0.91$ و $x=0.95$ که در شکل (۲۹-۳) الف-ب مشخص هستند، بدست

آمده است. از آنجا که قبلاً نیز اثبات شد، شکل‌گیری پیچیدگی مود از نقاط ثابت در دیاگرام فاز، شروع

می‌شود، رابطه (۳۱-۳) بیان‌گر موقعیت شروع پیچیدگی مود در نسبت فرکانس تحریک بی‌بعد

$\omega/\omega_0 = 4/3$ نیز می‌باشد.

مود دوم مشابه مود اول فقط در سمت راست دارای دامنه و نقاط ثابت در دیاگرام فاز است. با

این تفاوت که در سمت راست این مود دو نقطه ثابت مشاهده می‌شود.

در مود سوم $\omega/\omega_0 = 4$ در هر دو طرف طناب دامنه نوسانات وجود دارد. تابع دیاگرام فاز

برای این مود به ازای $k=3.2$ رسم شده است (شکل (۳۰-۳)). در شکل (۳۰-۳) چهار نقطه ثابت

$x=0.1, 0.4, 0.6, 0.9$ مشاهده می‌شود. این نقاط از رابطه (۵۵-۲) با قرار دادن $\omega/\omega_0 = 4$ به ازای هر

مقدار k مشخص محاسبه می‌شوند. برای سمت چپ طناب رابطه (۳۲-۳) بدست آمده است.

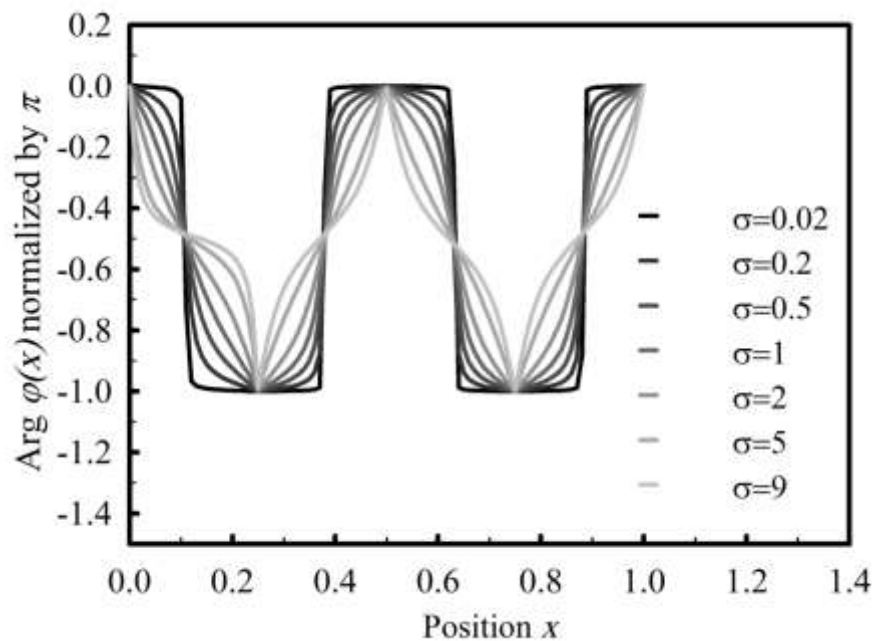
$$x = \frac{1}{4\pi} \arctan\left(\frac{16\pi}{3k}\right) \quad (۳۲-۳)$$

در رابطه (۳۲-۳) با قرار دادن $k=3.2$ مقدار $x=0.12$ بدست آمده است. رابطه (۵۵-۲) برای سمت

راست طناب به شکل رابطه (۳۳-۳) است.

$$x = 1 - \frac{1}{4\pi} \arctan\left(\frac{16\pi}{k}\right) \quad (۳۳-۳)$$

با قرار دادن $k=3.2$ در رابطه (۳-۳۳) مقدار $x=0.88$ بدست آمده است. با توجه به دوره تناوب تابع تانژانت سایر نقاط به ترتیب $x=0.63$ و $x=0.38$ بدست می آیند.



شکل (۳-۳۰) نقاط ثابت دیاگرام فاز در $\omega/\omega_0 = 4$ به ازای $k=3.2$

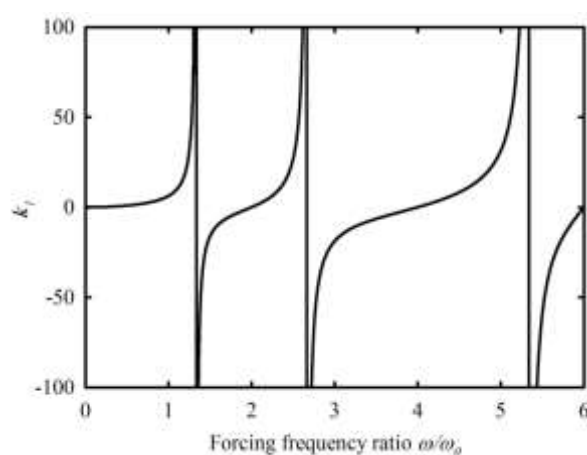
با توجه به اینکه در هر دو طرف طناب در مود سوم شاهد نقاط ثابتی هستیم، می توان پیش بینی کرد که احتمال وقوع پیچیدگی مود در کل طناب وجود دارد. در بخش بعد امکان پذیری این احتمال بررسی می شود.

۳-۴-۳ - امواج در حال حرکت

در این بخش مقادیری از k و σ که منجر به ماکزیمم پیچیدگی مود در طناب می شود، محاسبه شده است. برای این کار همانطور که قبلا اثبات شد باید تابع دیاگرام فاز به صورت یک خط کاملاً راست درآید. به این منظور بسط تیلور تابع دیاگرام فاز برای حالت $(a=L/4)$ نوشته شده است. بنابراین برای خطی شدن تابع دیاگرام فاز در سمت چپ طناب داریم:

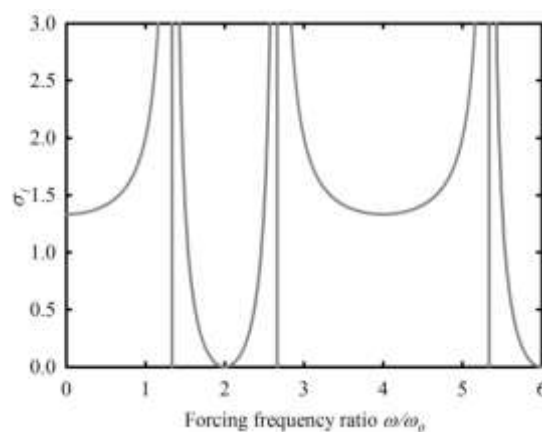
$$\begin{cases} \epsilon_1 = \pm 1 \\ \rho_1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{2\omega \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + 1} \\ \sigma_1 = \pm \left(1 + \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + 1}\right) \end{cases} \leftrightarrow \arg(\varphi_2) = \pm \omega x \quad (34-3)$$

اندیس ۱ در روابط (۳۴-۳) به این معنا است که این مقادیر مربوط به سمت چپ طناب می‌باشند. در رابطه (۳۴-۳) مقادیر مثبت k_1 و σ_1 قابل قبول هستند. شکل (۳۱-۳) تابع k_1 برحسب ω/ω_0 را نشان می‌دهد. این تابع دارای پریود خاصی نیست و رفته رفته به بینهایت بیشتر میل می‌کند. همانطور که مشاهده می‌شود در مود اول، دوم و چهارم مقداری برای k در سمت چپ طناب نمی‌توان یافت که به واسطه آن دیاگرام فاز خطی شود. این امر با توجه به نداشتن دامنه و ثابت بودن دیاگرام فاز در این فرکانس‌ها قابل توجیه است.



شکل (۳۱-۳) سفتی k_1 متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز در سمت چپ طناب بر حسب نسبت فرکانس تحریک بی- بعد ω/ω_0

با توجه به اینکه برای σ_1 هر دو مقدار مثبت و منفی معادله (۳۴-۳) می‌تواند قابل قبول باشد، بنابراین اجتماع این دو مقدار در شکل (۳۲-۳) رسم شده است. میرایی σ_1 دارای پریود 4π است و همانند k_1 در مودهای اول، دوم و چهارم مقدار ندارد.

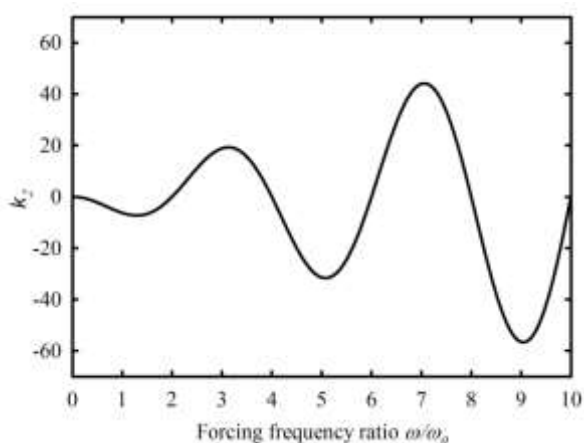


شکل (۳۲-۳) میرایی σ_1 متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز در سمت چپ طناب بر حسب نسبت فرکانس تحریک بی- بعد ω/ω_0

فرآیند فوق برای سمت راست طناب نیز انجام شده است و مقادیر k_2 و σ_2 در رابطه (۳۵-۳) حاصل شده است.

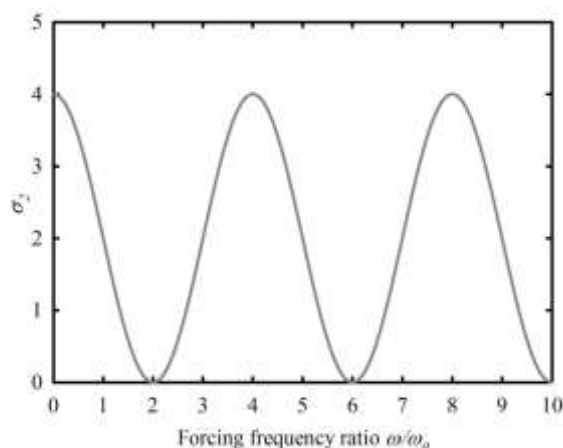
$$\begin{cases} \epsilon_2 = \pm 1 \\ \rho_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k_2 = -2\omega \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \sigma_2 = 2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + 2 \end{cases} \leftrightarrow \arg(\varphi_2) = \pm \omega x \quad (35-3)$$

شکل (۳۳-۳) مقادیر k_2 را بر حسب ω/ω_0 نشان می‌دهد. k_2 با افزایش نسبت فرکانس تحریک بی‌بعد ω/ω_0 حول مقدار 0 رفتاری نوسانی و رفته رفته نوسانات آن افزایش می‌یابد.



شکل (۳۳-۳) سفتی k_2 متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز در سمت راست طناب بر حسب نسبت فرکانس تحریک بی- بعد ω/ω_0

شکل (۳۴-۳) مقادیر σ_1 را بر حسب ω/ω_0 نشان می‌دهد. σ_1 دارای پریود 4π است.



شکل (۳۴-۳) میرایی σ_2 متناظر با خطی شدن دیاگرام فاز در سمت راست طناب بر حسب نسبت فرکانس تحریک ω/ω_0 بی بعد

از دیدگاه ریاضیاتی برای مود اول مقادیری از k و σ وجود دارند که منجر به خطی شدن دیاگرام فاز در سمت راست طناب می‌شوند. اما از لحاظ فیزیکی این مقادیر وجود خارجی ندارند چراکه مقدار k_2 در مود اول منفی می‌باشد. در مود دوم با توجه به شکل (۳۳-۳) مقدار $k_2=14.5$ و از شکل (۳۴-۳) مقدار $\sigma_2=1$ منجر به ماکزیمم پیچیدگی مود در طناب می‌شوند.

اکنون تحقیق شده است که آیا ماکزیمم پیچیدگی مود در سراسر طناب اتفاق می‌افتد یا خیر.

برای این کار باید مقادیر k_1 و k_2 ، همچنین مقادیر σ_1 و σ_2 با یکدیگر برابر باشند.

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 0, 2 \\ \sigma_1 = \sigma_2 \leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 2 \end{cases} \quad (۳۶-۳)$$

اشتراک مقادیر رابطه (۳۶-۳) فقط $\omega/\omega_0 = 2$ است که به ازای این مقدار، k_1 ، k_2 ، σ_1 و σ_2 همگی صفر می‌باشند. در این حالت دیاگرام فاز به صورت خطوط افقی 0 و $-\pi$ است که همان طناب ساده می‌باشد. بنابراین در هیچ فرکانسی در سرتاسر طناب ماکزیمم پیچیدگی مود اتفاق نمی‌افتد.

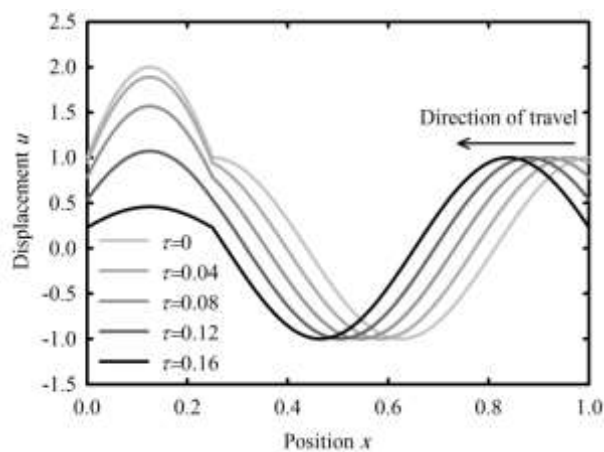
در مود سوم برای آنکه ماکزیمم پیچیدگی مود در سمت چپ رخ دهد در رابطه (۳۴-۳)

مقدار $\omega/\omega_0 = 4$ قرار داده شده و مقدار $k_1=0$ و $\sigma_1=4/3$ و برای آنکه در سمت راست این پدیده رخ دهد در رابطه (۳۵-۳) مقدار $\omega/\omega_0 = 4$ قرار داده و مقادیر $k_2=0$ و $\sigma_2=4$ حاصل شده است. با قرار

دادن مقادیر $k_2=14.5$ و $\sigma_2=1$ در پاسخ فرکانسی مود دوم ($\omega/\omega_0 = 8/3$) معادله‌ی امواج در حال حرکت برای سمت راست حاصل شده است.

$$u_2(x, \tau) = Ae^{-\frac{8}{2}i\pi(1-x)}e^{i\frac{8}{3}\pi\tau} \quad (37-3)$$

در شکل (۳۵-۳) حرکت امواج به خوبی نشان داده شده است. این امواج از سمت راست به سمت چپ در حال حرکت هستند.

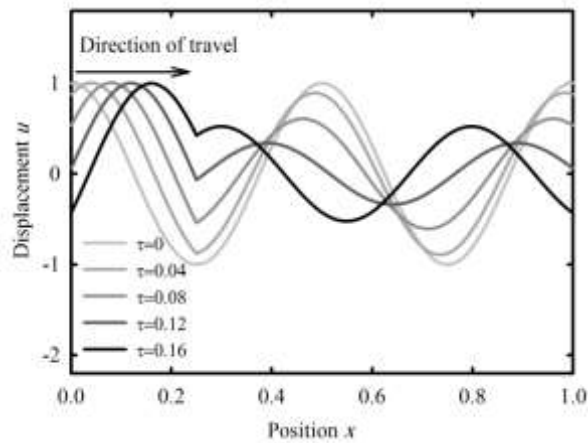


شکل (۳۵-۳) امواج در حال حرکت در سمت راست طناب در ۵ گام زمانی ($\Delta\tau=0.04$) برای $\omega/\omega_0=8/3$ و $k=14.5$ و $\sigma=1$

برای مشاهده امواج در حال حرکت در سمت چپ طناب، برای مثال مود سوم را در نظر می‌گیریم. قبلاً محاسبه شد که برای مشاهده ماکزیمم پیچیدگی مود مقادیر $k_1=0$ و $\sigma_1=4/3$ را برای سفتی فنر و میرایی دمپر باید در نظر گرفت. در این حالت معادله پاسخ فرکانسی در مود سوم در سمت چپ طناب به صورت معادله موج در می‌آید.

$$u_2(x, \tau) = Ae^{-i4\pi x}e^{i4\pi\tau} \quad (38-3)$$

شکل (۳۶-۳) امواج در حال حرکت در سمت چپ طناب را نشان می‌دهد. این امواج از سمت چپ به راست حرکت می‌کنند.

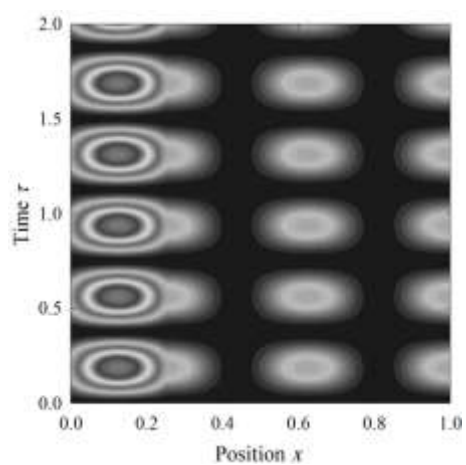


شکل (۳-۳۶) امواج درحال حرکت در سمت چپ طناب در ۵ گام زمانی ($\Delta\tau=0.04$) برای $\omega/\omega_0=4$ و $k=0$ و $\sigma=4/3$

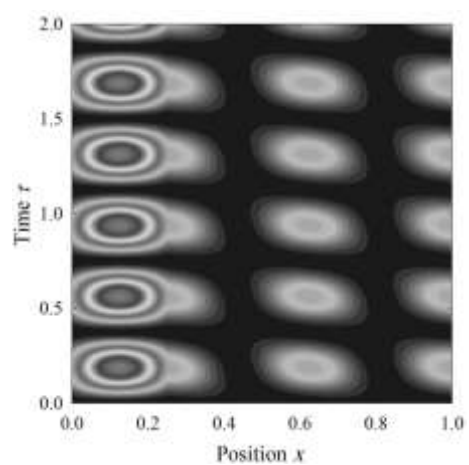
۳-۴-۴ تغییرات انرژی

تغییرات انرژی جنبشی برای حالتی که امواج درحال حرکت در طناب شکل می‌گیرد، نشان داده شده است. برای درک بهتر تفاوت انرژی جنبشی در زمان میرایی کم، در گذر از ارتعاشات به امواج درحال حرکت و میرایی زیاد، انرژی جنبشی در مود دوم و سوم رسم شده است. همان طور که قبلاً اثبات شد برای مود اول، امواج درحال حرکت به ازای هیچ مقداری از k و σ رخ نمی‌دهد. در مود دوم نیز فقط در سمت راست به ازای $k=14.5$ و $\sigma=1$ امواج درحال حرکت مشاهده می‌شود. در شکل (۳-۳۷) انرژی جنبشی در مود دوم به ازای مقدار ثابت $k=14.5$ و مقادیر مختلف σ رسم شده است. مقدار σ از مقدار ناچیز تا مقدار زیاد به تدریج افزایش یافته است و در $\sigma=1$ انرژی جنبشی شکل خاصی به خود می‌گیرد.

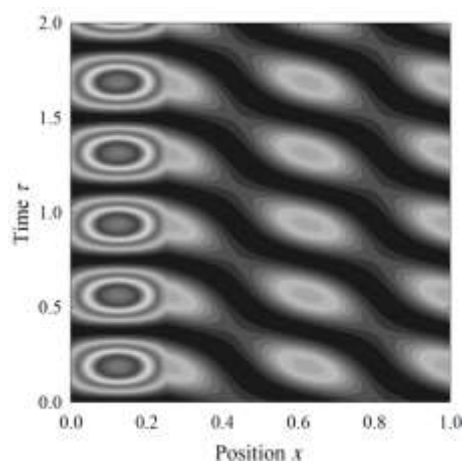
الف



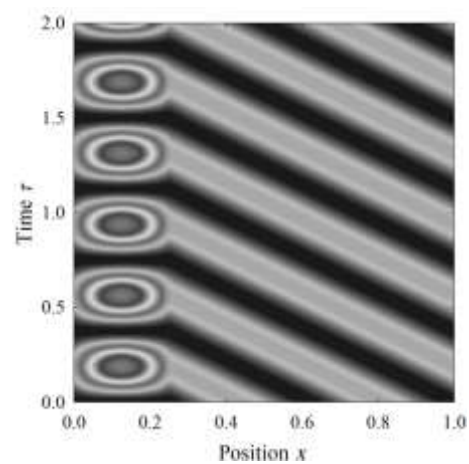
ب



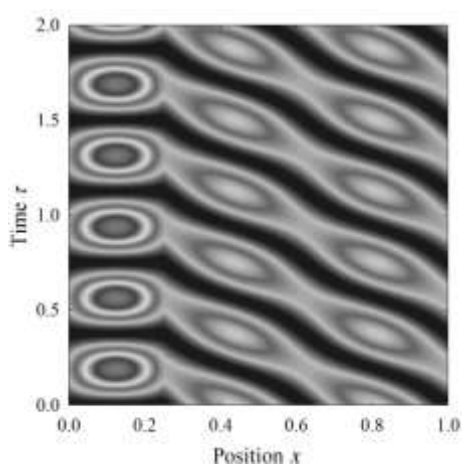
ج



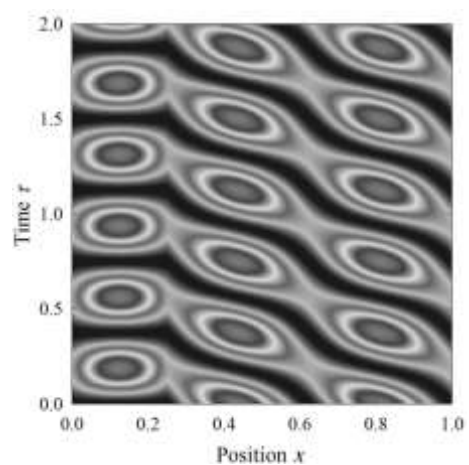
د

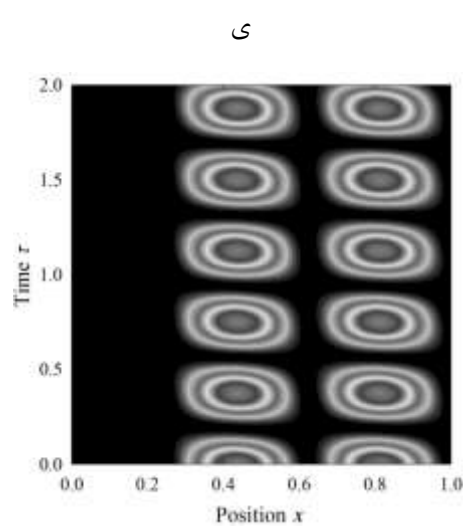
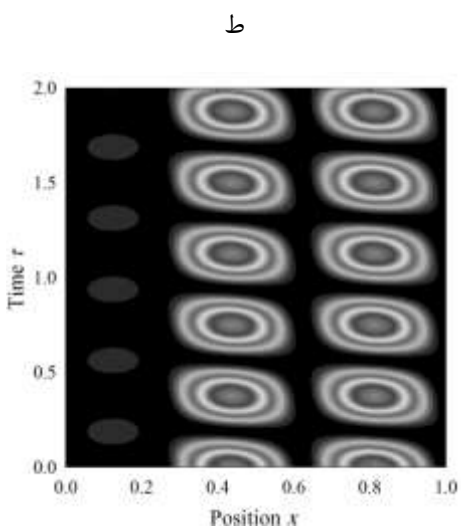
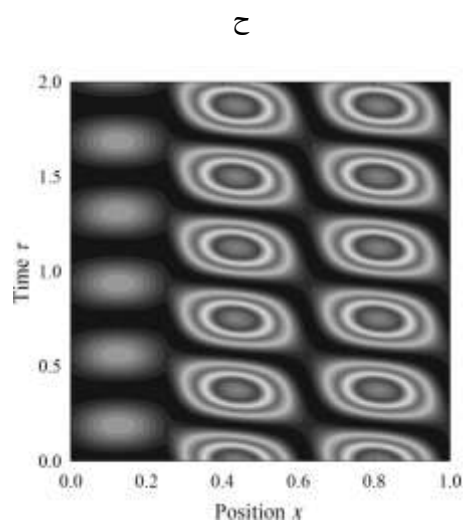
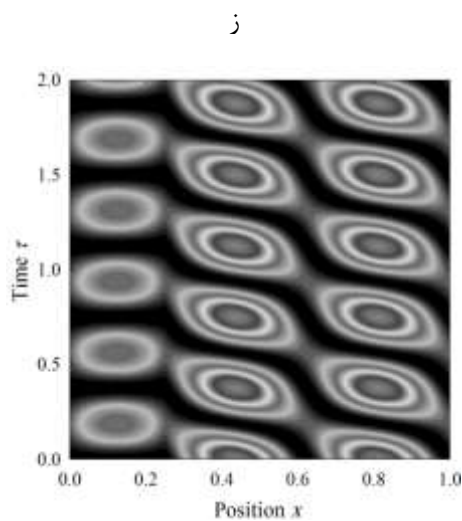


هـ



و

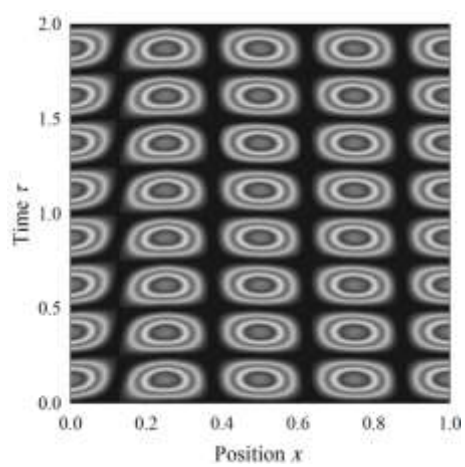




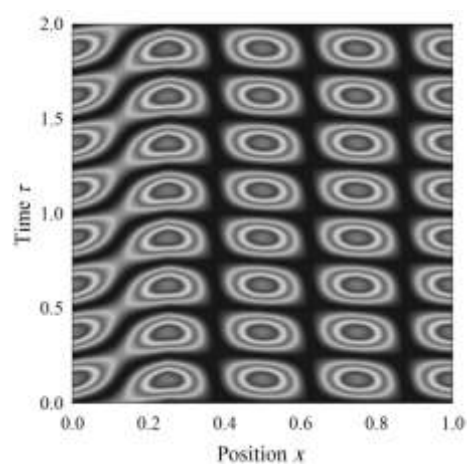
شکل (۳۷-۳) تغییرات انرژی جنبشی بر حسب مکان و زمان در طناب به ازای $k=14.5$ متصل شده در $a=L/4$ در طناب و تحریک نوسانی در دو انتهای طناب، از الف: میرایی خیلی ضعیف تا ی: میرایی خیلی قوی به ازای نسبت فرکانس تحریک به بعد $\omega/\omega_0 = 8/3$.

تغییرات انرژی جنبشی برای مود سوم نیز در شکل (۳۸-۳) نشان داده شده است. مقدار سفتی فنر در $k=0$ ثابت شده و میرایی مانند حالت قبل از مقدار کم افزایش پیدا کرده است. همانطور که قبلاً اثبات شد در مقدار $\sigma=4/3$ امواج در حال حرکت در سمت چپ طناب و در $\sigma=4$ در سمت راست طناب شکل گرفته‌اند.

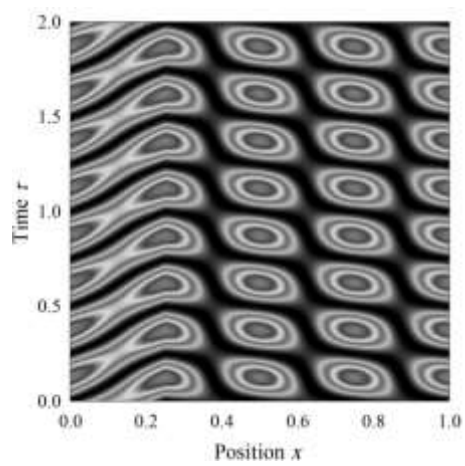
الف



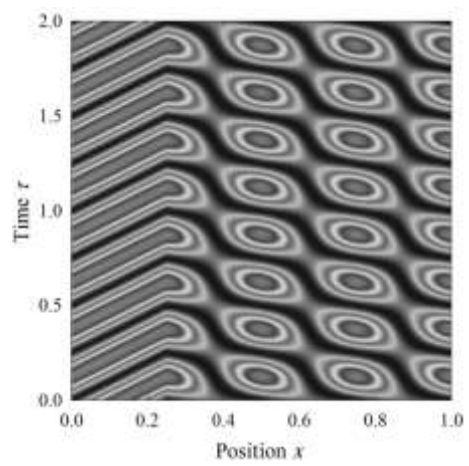
ب



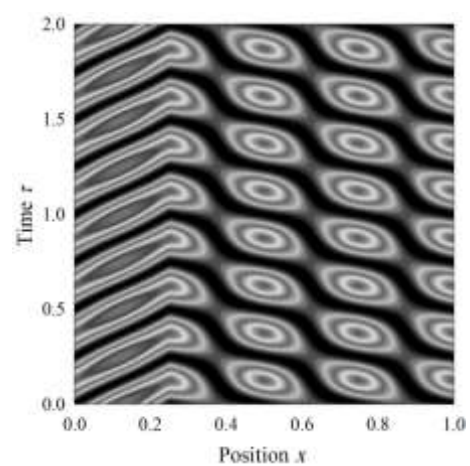
ج



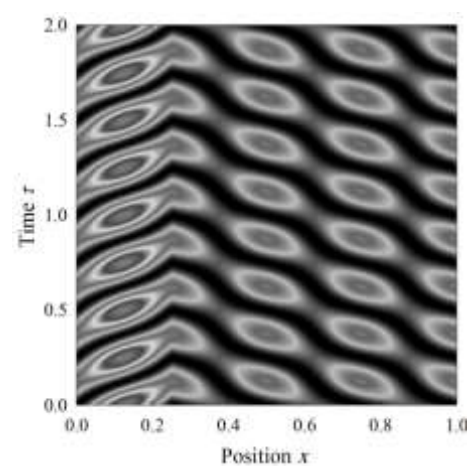
د



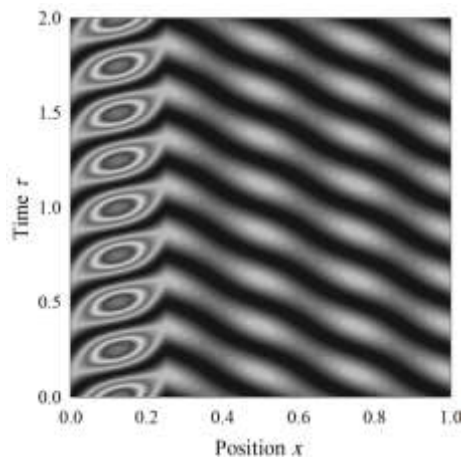
هـ



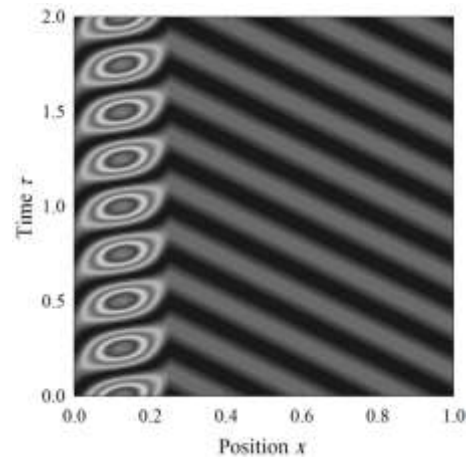
و



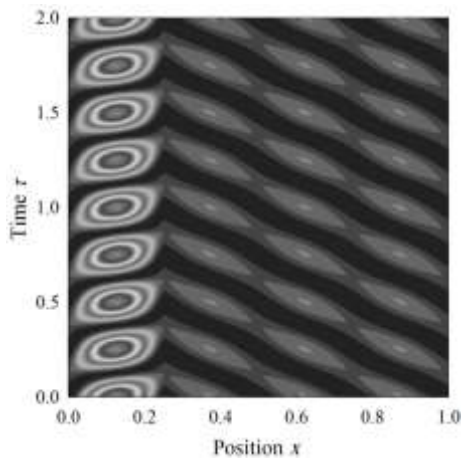
ز



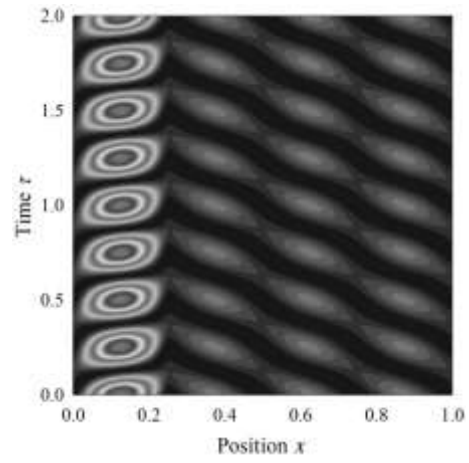
ح



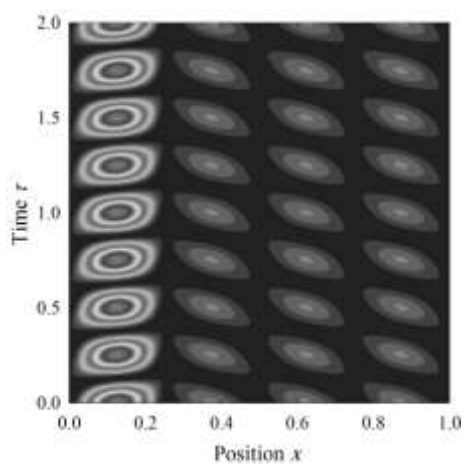
ط



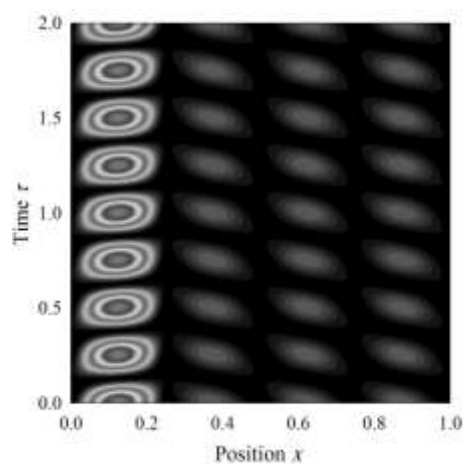
ی



ک



ل



شکل (۳۸-۳) تغییرات انرژی جنبشی بر حسب مکان و زمان در طناب به ازای $k=0$ متصل شده در $a=L/4$ در طناب و تحریک نوسانی در دو انتهای طناب، از الف: میرایی خیلی ضعیف تا ل: میرایی خیلی قوی به ازای نسبت فرکانس $\omega/\omega_0 = 4$ تحریک بی بعد

۳-۵- حالت کلی دمپر و فنر خطی نامتقارن

در این قسمت روابطی بین پارامترهای سیستم در حالت کلی که فنر و دمپر خطی در فاصله $x=a$ از سمت چپ طناب قرار گرفته باشند بدست آمده است. از نتایج بخش‌های قبل می‌توان دریافت که برای آنکه در سمت چپ و راست طناب امواج در حال حرکت شکل گیرد، باید رابطه پاسخ فرکانسی سیستم در معادلات (۲-۴۰) و (۲-۴۱) به صورت روابط زیر باشند.

$$u_1(x_1, \tau) = Ae^{-i\omega x_1} e^{i\omega \tau} \quad 0 \leq x_1 \leq a/L \quad (۳-۳۹)$$

$$u_2(x_2, \tau) = AC_4 e^{-i\omega x_2} e^{i\omega \tau} \quad 0 \leq x_2 \leq b/L \quad (۳-۴۰)$$

بنابراین در این صورت باید شرایط زیر برقرار باشند.

$$C_1 = 0, C_2 = A \quad (۳-۴۱)$$

$$C_3 = 0, C_4 = A \quad (۳-۴۲)$$

با توجه به شرایط مرزی سمت چپ و راست طناب، با صفر بودن ثابت اول، رابطه ثابت دوم خودبه‌خود برقرار است. با توجه به روابط (۲-۳۶) و (۲-۳۸) برای ثابت‌های C_1, C_3 که روابطی مختلط هستند، باید قسمت موهومی و حقیقی هر دو ثابت برابر صفر باشند. بنابراین از شرط صفر بودن هر ثابت دو معادله بدست می‌آید. از حل دو معادله بدست آمده از صفر بودن C_1 مقادیر میرایی و سفتی که منجر به شکل‌گیری امواج در حال حرکت در سمت چپ طناب می‌شوند، برحسب فرکانس تحریک و موقعیت قرارگیری فنر-دمپر، بدست آمده است.

$$k_1 = \frac{\omega[\sin(2\omega a - 2\omega) + \sin(\omega) - \sin(2\omega a - \omega)]}{1 - \cos(2\omega a - 2\omega)} \quad (۳-۴۳)$$

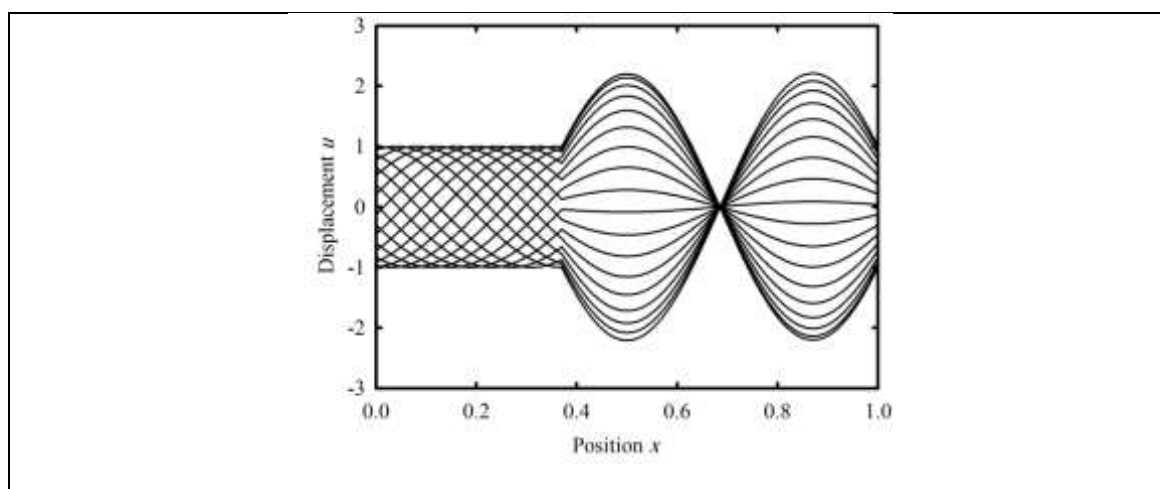
$$\sigma_1 = \frac{1 - \cos(\omega) - \cos(2\omega a - 2\omega) + \cos(2\omega a - \omega)}{1 - \cos(2\omega a - 2\omega)} \quad (۳-۴۴)$$

از حل دو معادله بدست آمده از صفر بودن C_3 مقادیر میرایی و سفتی برای سمت راست طناب بدست آمده است.

$$k_2 = \frac{\omega[-\sin(2\omega a) + \sin(\omega) - \sin(2\omega a - \omega)]}{1 - \cos(2\omega a)} \quad (45-3)$$

$$\sigma_2 = \frac{1 - \cos(\omega) - \cos(2\omega a) + \cos(2\omega a - \omega)}{1 - \cos(2\omega a)} \quad (46-3)$$

به عنوان مثال اگر مقادیر سفتی و میرایی را به ازای $\omega/\omega_0 = 2.7$ و $a = 0.37$ با استفاده از روابط (43-3) و (44-3) بدست آیند و پاسخ فرکانسی سیستم در ازای زمان‌های متفاوت رسم شود، شکل پاسخ به صورت خواهد بود.



شکل (39-3) پاسخ فرکانسی به ازای ۱۸ گام زمانی در $\omega/\omega_0 = 2.7$ و $a = 0.37$ و k و σ محاسبه شده از رابطه (43-3) و (44-3)

۳-۶- حالت میرایی خطی و فنر غیر خطی $a=L/2$

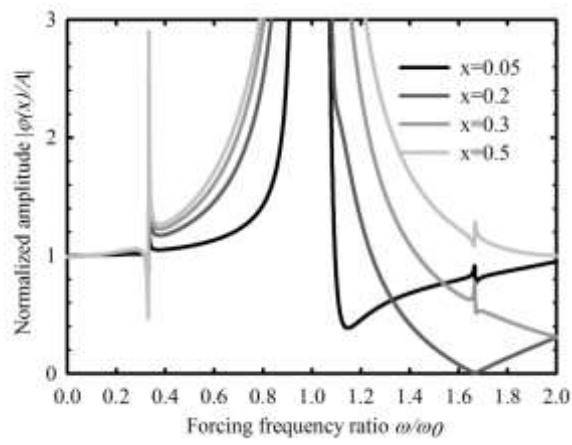
در این قسمت به تحلیل نتایج حاصل از حل حالت پایدار سیستم غیرخطی پرداخته شده است. فنر و میرایی در وسط طناب قرار گرفته‌اند و مشابه حالت $a=L/2$ با این تفاوت که اثر غیرخطی بودن فنر در نظر گرفته شده است. سعی شده است همان نتایج حالت خطی تا حد امکان در این بخش با در نظر گرفتن غیرخطی بودن فنر استخراج شود تا مقایسه‌ای بین سیستم خطی و غیرخطی بتوان انجام داد.

۳-۶-۱- اثر سفتی

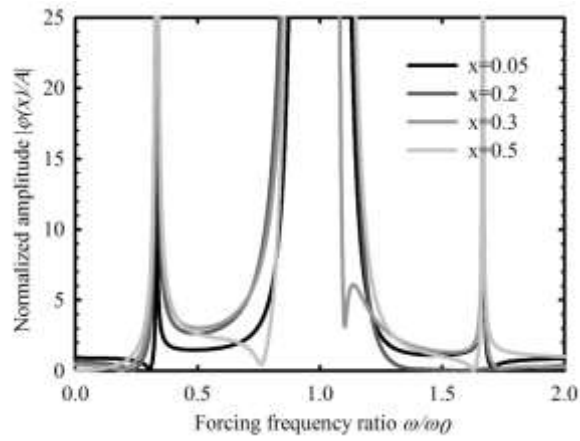
برای بررسی اثر سفتی روی دامنه پاسخ فرکانسی و مقایسه با حالت خطی، میرایی در $\sigma = 0.01$ ثابت قرار داده شده و برای سفتی سه مقدار 0.05، 4 و 10 در نظر گرفته شده است (شکل (۳-۴۰)). این سه مقدار در حالت خطی نیز مورد بررسی قرار گرفتند. همانند حالت‌های قبلی فرکانس تحریک ω با مقدار اولین فرکانس طبیعی سیستم بدون میرایی یعنی π نرمالایز شده است. اندازه دامنه پاسخ فرکانسی که در رابطه (۲-۱۱۰) بیان شد با دامنه تحریک A نرمالایز شده است. مقدار A در المان‌های درجه ۳ اندازه دامنه پاسخ فرکانسی، در بررسی‌ها مقدار ۱ قرار داده شده است.

شکل (۳-۴۰)-الف اندازه دامنه پاسخ فرکانسی را در نقاط مختلف طناب به ازای میرایی و سفتی اندک نشان می‌دهد. اندازه دامنه پاسخ فرکانسی در $\omega/\omega_0 = 1$ که همان فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد، همانند حالت خطی به بینهایت میل می‌کند. با این تفاوت که به واسطه غیر خطی بودن فنر در اطراف $\omega/\omega_0 = 0.3$ جابجایی موضعی به چشم می‌خورد. با افزایش میزان سفتی این جابجایی افزایش پیدا کرده و همچنین در اطراف $\omega/\omega_0 = 1.7$ نیز جابجایی بزرگی ظهور می‌کند (شکل (۳-۴۰)-ب). با افزایش سفتی به مقدار زیاد، این جابجایی‌ها به بینهایت میل می‌کنند (شکل (۳-۴۰)-ج). در حقیقت فرکانس‌های تشدید جدیدی در سیستم نسبت به حالت خطی ظهور پیدا می‌کنند.

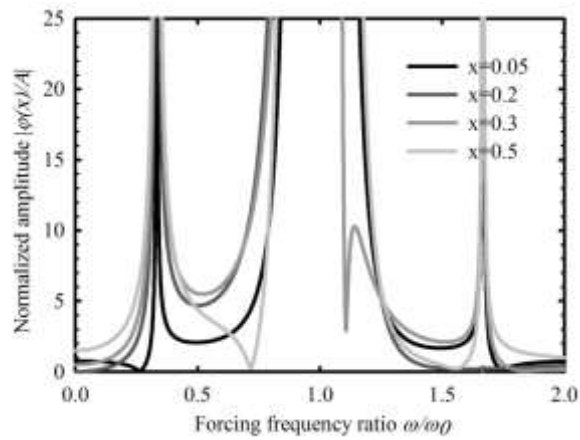
الف



ب.



ج



شکل (۳-۴) اندازه دامنه پاسخ فرکانسی $|\varphi(x)/A|$ در نقاط مختلف برحسب فرکانس تحریک بی بعد ω/ω_0 به ازای

$\sigma=0.01$ و الف): $k=0.05$ ب) $k=4$ ج) $k=10$

دلیل ایجاد ماکزیمم‌های موضعی در شکل (۳-۴۰) را باید در رابطه (۲-۱۳۰) جستجو کرد. برای بررسی اثر سفتی غیرخطی از اثر میرایی صرف نظر شده است ($\sigma=0$). در حقیقت سیستم به یک سیستم طناب با فنر غیرخطی موضعی در وسط آن و تحریک هارمونیک در دو طرف، کاهش یافته است. با این کار ضرایب $a_2(x, x_0) = a_7(x, x_0) = a_9(x, x_0) = 0$ می‌شوند. بنابراین طبق رابطه (۲-۱۳۱) این ثابت‌ها بخش موهومی رابطه (۲-۱۳۰) مربوط به اندازه دامنه پاسخ فرکانسی را تشکیل می‌دهند. با توجه به این که میرایی در سیستم‌ها موجب مختلط شدن فرکانس و پاسخ فرکانسی می‌شود، با صرف نظر از اثر آن، صفر شدن بخش موهومی پاسخ کاملاً مطابق با دانسته‌های قبلی است. همچنین این پاسخ کاملاً حقیقی دارای دو بخش درجه ۱ و درجه ۳ می‌باشد. بخش درجه ۱ که شامل ثابت $a_1(x, x_0)$ است که در حقیقت پاسخ مسأله طناب ساده بدون میرایی و فنریت با تحریک هارمونیک در دو انتها را بیان می‌کند و بخش درجه ۳ شامل $a_6(x, x_0)$ و $a_8(x, x_0)$ که در حقیقت اثر غیرخطی بودن فنر روی پاسخ را نشان می‌دهد. اگر این پاسخ حقیقی نسبت به دامنه تحریک A نرمالایز شود، روابط زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{\varphi(x)}{A} = a_1(x, x_0) + a_6(x, x_0)A^2 - a_8(x, x_0)A^2\omega^2 \quad (۳-۴۷)$$

$$a_1(x, x_0) = \frac{\cos(\omega x - \frac{\omega}{2})}{\cos(\frac{\omega}{2})} \quad (۳-۴۸)$$

$$a_6(x, x_0) = - \frac{k \left[9 \cos(\frac{3\omega}{2}) \sin(\omega x) + \cos(\frac{\omega}{2}) \sin(3\omega x) \right]}{24\omega \cos^5(\frac{\omega}{2}) \left(4 \cos^2(\frac{\omega}{2}) - 3 \right)} \quad (۳-۴۹)$$

$$a_8(x, x_0) = - \frac{k \left[3 \cos(\frac{3\omega}{2}) \sin(\omega x) - \cos(\frac{\omega}{2}) \sin(3\omega x) \right]}{8\omega^3 \cos^5(\frac{\omega}{2}) \left(4 \cos^2(\frac{\omega}{2}) - 3 \right)} \quad (۳-۵۰)$$

رابطه (۳-۴۷) نشان می‌دهد که دامنه تحریک در پاسخ خطی (درجه ۱) تأثیری ندارد که با نتایج بخش‌های قبلی همخوانی دارد، اما بالعکس دامنه تحریک در بخش درجه ۳ حذف نشده است و بنابراین در پاسخ غیرخطی موثر است. همچنین سفتی فنر غیرخطی به عنوان ضریب در ترم‌های

درجه ۳ ظاهر شده است. با قرار دادن روابط (۴۸-۳) تا (۵۰-۳) در معادله (۴۷-۳) و پس از ساده سازی رابطه (۵۱-۳) بدست می آید.

$$\frac{\varphi(x)}{A} = \frac{\cos(\omega x - \frac{\omega}{2})}{\cos(\frac{\omega}{2})} - \frac{kA^2 \sin(3\omega x)}{6\omega \cos^4(\frac{\omega}{2}) (4 \cos^2(\frac{\omega}{2}) - 3)} \quad (51-3)$$

در رابطه (۵۱-۳) سه نتیجه مهم می توان بدست آورد. اول اینکه دامنه تحریک A و سفتی فنر غیرخطی k هر دو در ترم درجه ۳ ظاهر شده اند و با صفر شدن k اثر دامنه تحریک از پاسخ، طبق انتظار حذف خواهد شد. دوم اینکه ضریب سفتی فنر غیرخطی k در صورت کسر دوم ظاهر شده و می تواند منجر به افزایش یا کاهش اندازه پاسخ فرکانسی شود. سوم اینکه به ازای مقادیری از ω پاسخ به بینهایت میل خواهد کرد.

$$\cos(\frac{\omega}{2}) = 0 \rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = n, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (52-3)$$

$$4 \cos^2(\frac{\omega}{2}) - 3 = 0 \rightarrow \cos(\frac{\omega}{2}) = \begin{cases} +\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{n}{3}, & n = 1, 7, 13, \dots \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{n}{3}, & n = 5, 11, 17, \dots \end{cases} \quad (53-3)$$

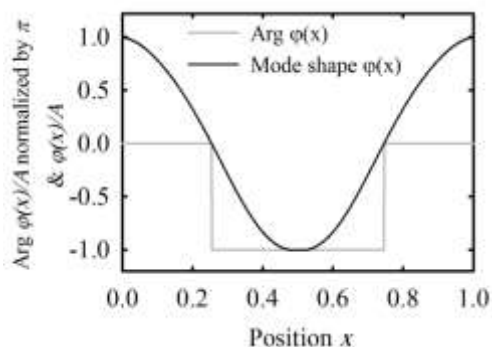
در روابط فوق ω_0 همان فرکان مرجع یا فرکانس طبیعی اول طناب ساده است. رابطه (۵۲-۳) همان فرکانس های طبیعی حالت بدون میرایی و فنریت (طناب ساده) را نشان می دهد و رابطه (۵۳-۳) فرکانس های تشدید جدیدی را ارائه می دهد. بنابراین همان طور که در شکل (۴۰-۳) نشان داده شد، در نسبت فرکانس تحریک بی بعد $\omega/\omega_0 = 1/3$ و $\omega/\omega_0 = 5/3$ افزایش موضعی دامنه پاسخ فرکانسی را شاهد هستیم.

در رابطه (۵۱-۳) نکته دیگری قابل توجه است. همانطور که قبلا اشاره شد در صورتی که مقدار k صفر باشد رابطه (۵۱-۳) بیان گر شکل مودهای حالت طناب ساده بدون میرایی و فنر می باشد. اما با اضافه شدن ترم غیرخطی، بخش سینوسی به رابطه اضافه شده است. در صورتی که در رابطه (۵۱-۳) مقدار $\omega/\omega_0 = 2$ قرار داده شود رابطه (۵۴-۳) بدست می آید.

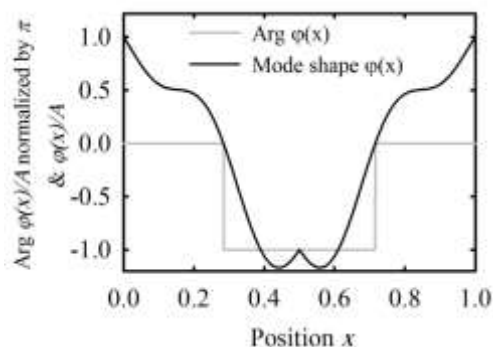
$$\frac{\varphi(x)}{A} = \cos(2\pi x) - \frac{k \sin(6\pi x)}{12\pi} \quad (54-3)$$

در رابطه (۵۴-۳)، k پارامتر اثرگذاری تابع سینوسی روی تابع شکل مود است. به طوری که در ازای مقادیری از k تقریباً اثر آن ناچیز است و خود را در شکل مود و دیاگرام فاز نشان نمی‌دهد. اما با افزایش k بخش سینوسی افزایش یافته و اثر عامل غیرخطی خود را در شکل مود و دیاگرام فاز به طور شفاف نشان می‌دهد.

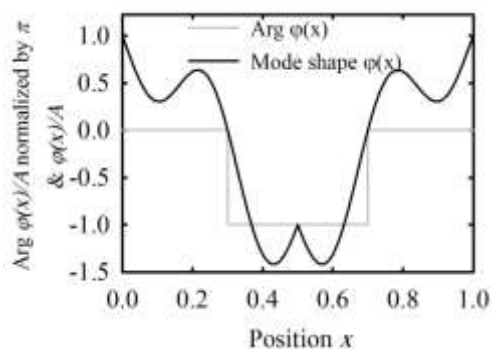
الف



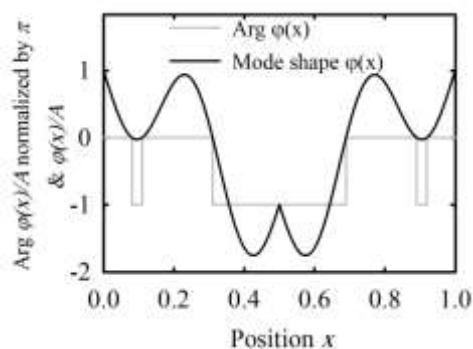
ب



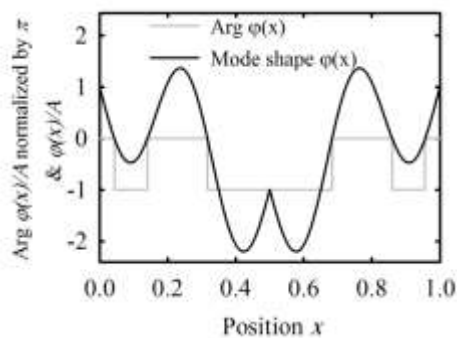
ج



د



ه



شکل (۳-۴۱) تغییرات شکل مود و دیاگرام فاز در طول طناب در $\omega/\omega_0 = 2$ و $\sigma=0$ و $A=1$ به ازای الف: $k=1$ ؛ ب: $k=10$ ؛

ج: $k=20$ ؛ د: $k=33$ ؛ ه: $k=50$

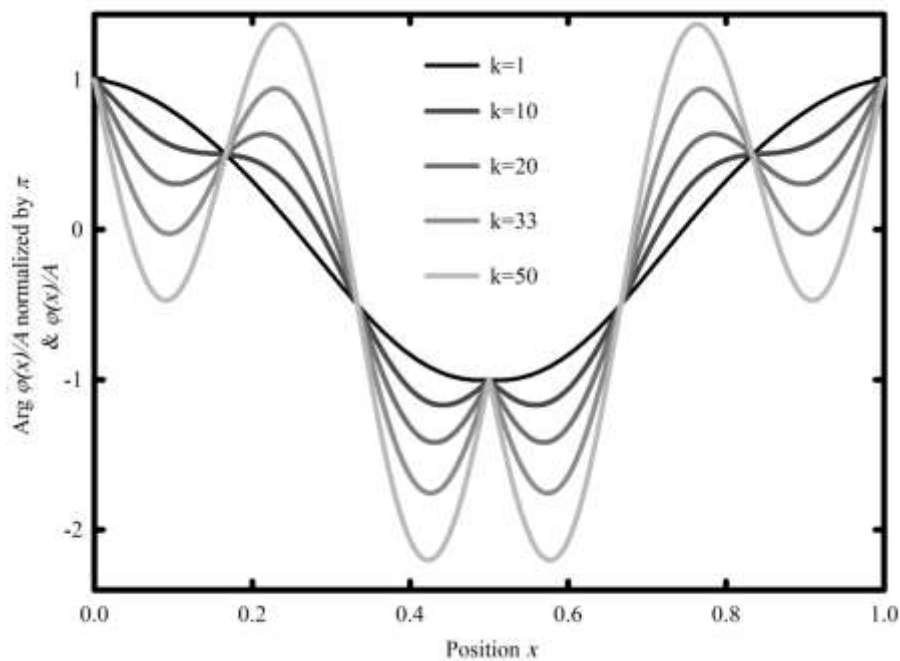
شکل (۳-۴۱) تغییرات شکل مود و دیاگرام فاز را به ازای مقادیر مختلف سفتی غیرخطی

نشان می‌دهد. در سفتی اندک تغییرات شکل مود و دیاگرام فاز بسیار اندک هستند (شکل (۳-۴۱)-

الف). با افزایش بیشتر، شکل مود دچار تغییرات قابل مشاهده شده اما دیاگرام فاز همچنان مشابه

حالت خطی است (شکل (۳-۴۱) ب-ج). به ازای سفتی $k=33$ تغییرات موضعی و چشمگیر در دیاگرام فاز ایجاد شده است (شکل (۳-۴۱) د). با افزایش بیش از حد سفتی این تغییرات در طول طناب گسترش پیدا می‌کنند و در حقیقت همان اتفاق حالت خطی رخ می‌دهد، که افزایش بیش از حد سفتی باعث صلب شدن وسط طناب شده و طناب تبدیل به دو طناب با طول $L/2$ شده است. لازم به توضیح است که در بررسی‌های فوق از اثر میرایی صرف نظر شده است. در وجو میرایی تمامی نتایج فوق برقرار است و تغییراتی مشابه حالت خطی ایجاد می‌کند. به طور مثال دیاگرام فاز در شکل (۳-۴۱) به صورت خطوط ثابت است، با اضافه شدن میرایی به خطوط منحنی و پیوسته تبدیل می‌شود. در بخش بعد اثر میرایی بحث شده است.

برای مقایسه بهتر، شکل مودهای شکل (۳-۴۱) در یک نمودار رسم شده‌اند.



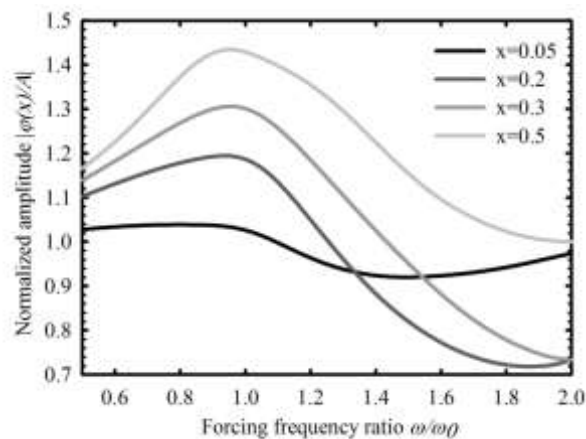
شکل (۳-۴۲) شکل مود در $\omega/\omega_0 = 2$ و $\sigma=0$ و $A=1$ بر حسب مقادیر مختلف سفتی فنر غیرخطی

۳-۶-۲ اثر میرایی

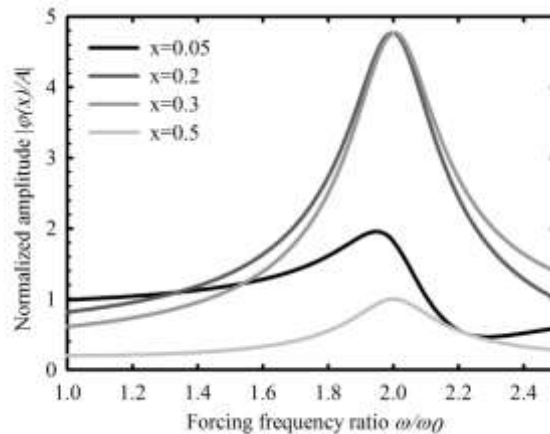
برای بررسی اثر میرایی روی دامنه پاسخ فرکانسی در حالت غیرخطی، سفتی در مقدار اندک $k=0.05$

ثابت شده و برای میرایی سه مقداری که در حالت خطی نیز بررسی شد، در نظر گرفته شده است. در حالتی که میرایی اندک باشد همان نتیجه شکل (۳-۴۰) الف بدست می‌آید و اگر سفتی خیلی کم‌تر از این مقدار باشد همان نتایج حالت خطی بدست می‌آید.

الف



ب



شکل (۳-۴۳) اندازه دامنه پاسخ فرکانسی $|\varphi(x)/A|$ در نقاط مختلف برحسب فرکانس تحریک بی‌بعد ω/ω_0 به ازای $k=0.05$ و الف: $\sigma=1.4$ ب) $\sigma=10$

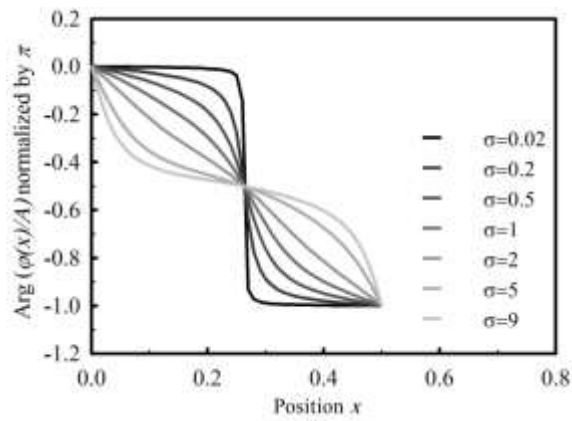
۳-۶-۳ تغییرات دیاگرام فاز

تابع دیاگرام فاز $\varphi(x)/A$ نرمالایز شده برحسب π و قرار دادن مقدار ۱ برای دامنه تحریک A در ترم- های غیرخطی، برای مقایسه با حالت خطی در $\omega/\omega_0 = 2$ و به ازای $k=3.2$ و $k=10.7$ در میرایی-

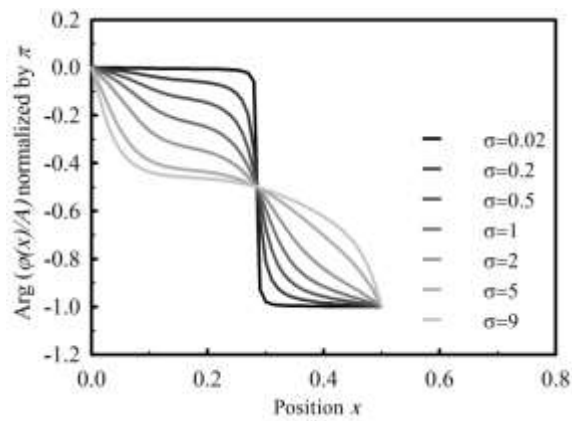
های کم به زیاد رسم شده است (شکل (۳-۴۴) الف-ب). در شکل (۳-۴۴) الف تابع دیاگرام فاز بسیار شبیه به حالت خطی است، با این تفاوت که مختصات نقطه ثابت (بحث شده در حالت خطی)، نسبت به حالت خطی به واسطه غیرخطی بودن تغییر کرده است. به ازای افزایش سفتی مختصات نقطه ثابت برخلاف حالت خطی به سمت راست کرده و همچنین در نمودار دیاگرام فاز دچار اعوجاج شده است (شکل (۳-۴۴)). به ازای نسبت فرکانس تحریک بی بعد ناصحیح $\omega/\omega_0 = 2.421$ همانند حالت خطی نقطه ثابت از بین رفته اما تابع دیاگرام فاز رفتار نامنظمی را از خود نشان می دهد (شکل (۳-۴۴) ج).

همچنین با توجه به شکل در هر سه حالت مورد بررسی، عامل غیر خطی در زمانی که میرایی کم است ($\sigma = 0.02, 0.2, 0.5, 1, 2$) تأثیر بیشتری روی تابع دیاگرام فاز دارد و برعکس در زمان میرایی های بزرگ ($\sigma = 5, 9$) عامل غیرخطی تأثیر کمتری می گذارد. زیرا با افزایش میرایی صلبیت سیستم افزایش می یابد و در نتیجه عامل غیرخطی تأثیری ندارد.

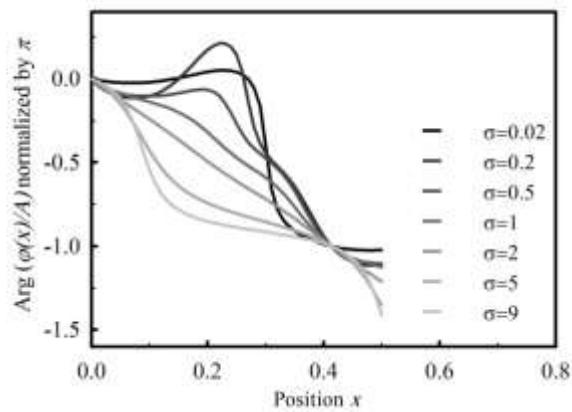
الف



ب.



ج



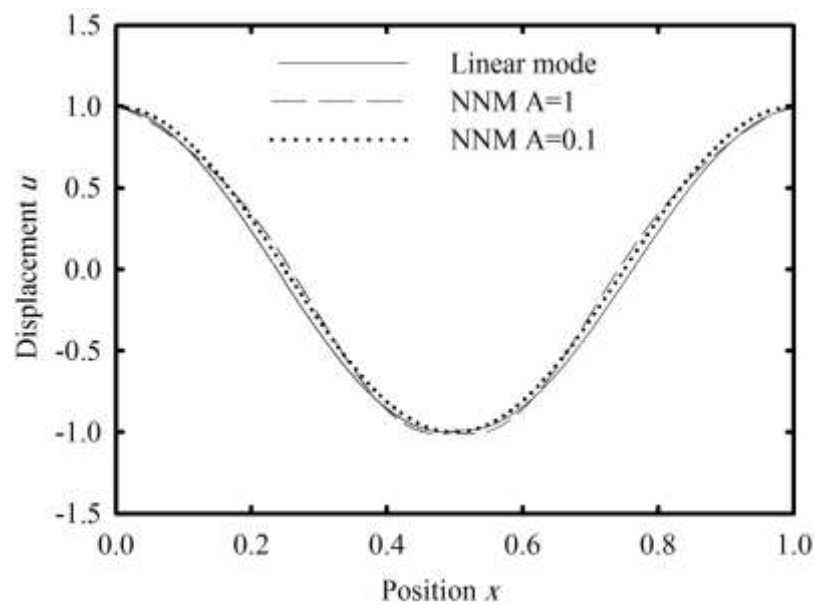
شکل (۳-۴) تکامل دیاگرام فاز در طول طناب به ازای مقادری مختلف میرایی الف): $\omega/\omega_0 = 2$ و $k=3.2$ ب): $\omega/\omega_0 = 2.421$ و $k=10.7$ ج): $\omega/\omega_0 = 2.421$ و $k=1.4$

۳-۶-۴ اثر دامنه تحریک A

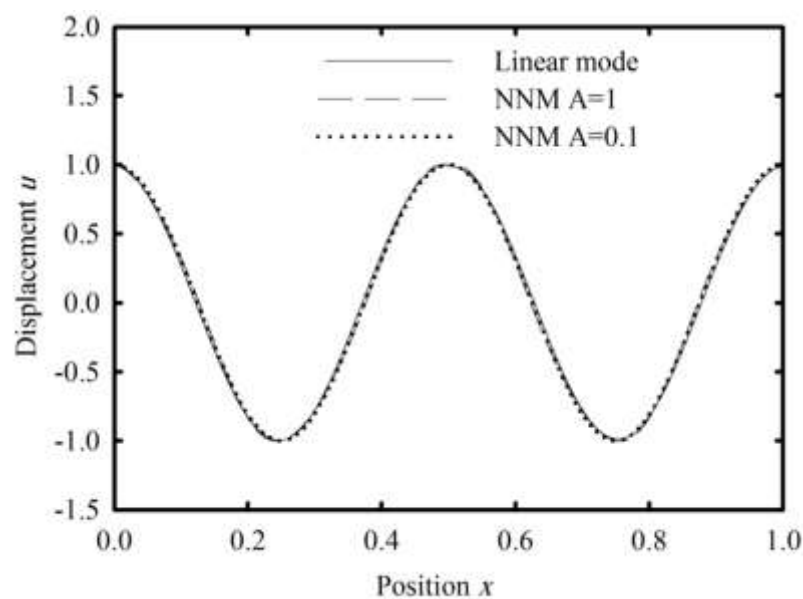
معادلات دامنه پاسخ فرکانسی و تابع دیاگرام فاز در روابط (۲-۱۳۰) و (۲-۱۳۱) اگر نسبت به A

نرمالایز شوند، ترم‌های درجه ۱ آن‌ها فاقد دامنه تحریک A هستند (همانند حالت خطی)، اما ترم‌های درجه ۳ همچنان دارای ضریب A^2 می‌باشند. این امر موثر بودن دامنه تحریک روی پاسخ فرکانسی غیرخطی را نشان می‌دهد. تأثیر دامنه تحریک روی پاسخ فرکانسی غیرخطی در دو نسبت فرکانسی نامیرا در شکل (۳-۴۵) رسم شده و با شکل پاسخ فرکانسی خطی مقایسه شده است.

الف



ب



شکل (۳-۴۵) تأثیر دامنه تحریک A در شکل مود خطی و غیرخطی به ازای $k=2$ (الف): $\omega/\omega_0 = 2$; (ب): $\omega/\omega_0 = 4$

فصل چهارم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

خلاصه نتایج:

- سفتی فنر در انتقال فرکانسی تأثیری ندارد و تنها میرایی منجر به ایجاد انتقال فرکانسی می-شود.
- میرایی منجر به شکل‌گیری پیچیدگی مود در طناب می‌شود.
- سفتی فنر تعیین‌کننده محل شکل‌گیری پیچیدگی مود می‌باشد.
- میرایی منجر به تغییرات شدیدی در دیاگرام فاز می‌شود و این تغییرات خود را در پاسخ فرکانسی خود را به شکل تغییرات ناهمزمان جابجایی نشان می‌دهد.
- به ازای مقدار مشخصی از میرایی و سفتی پیچیدگی مود ماکزیمم می‌گردد.
- ماکزیمم پیچیدگی مود در طناب که بیان‌گر شکل‌گیری امواج درحال حرکت است، در حالت کلی وابسته به مکان قرارگیری فنر-دمپر و فرکانس تحریک است.
- در حالت نامتقارن همواره در یک سمت طناب ماکزیمم پیچیدگی مود اتفاق می‌افتد و وابسته به فرکانس تحریک می‌باشد.
- انرژی جنبشی و پتانسیل و در نتیجه انرژی کل در طناب در زمان شکل‌گیری امواج درحال حرکت شکل خاصی را به خود می‌گیرند و می‌توان از روی آن‌ها شکل‌گیری امواج درحال حرکت را شناسایی کرد.
- در حالت $a=L/3$ و $a=L/4$ در زمان ماکزیمم پیچیدگی، سفتی فنر با افزایش فرکانس رفتاری واگرا و میرایی رفتاری پریودیک دارد.
- میزان انتقال فرکانسی با نزدیک شدن فنر -دمپر به انتهای طناب کاهش پیدا می‌کند.
- فنر غیرخطی در انتقال فرکانسی نقشی ندارد.
- فنر غیرخطی منجر به ایجاد فرکانس‌های تشدید جدیدی در سیستم می‌شود.
- فنر غیرخطی در میرایی‌های کم تأثیر گذار است.

- در حالت $a=L/2$ فنر غیرخطی نقشی در مقدار میرایی و سفتی که منجر به ماکزیمم پیچیدگی مود می شود، ندارد.
- در سیستم غیرخطی پاسخ فرکانسی و دیاگرام فاز، تابع دامنه تحریک می باشند.

پیشنهادهای پژوهش های آینده:

- با توجه به اثر چشمگیر میرایی روی دینامیک سیستم، بررسی سیستم در حالت میرایی غیرخطی می تواند نتایج با اهمیتی را نمایان کند.
- اضافه کردن جرم به انتهای فنر-دمپر به عنوان جاذب در حالت خطی و غیرخطی و بررسی تشکیل امواج در حال حرکت و تغییرات انرژی.
- بررسی پاسخ گذرای سیستم مورد بحث در حالت خطی و غیرخطی
- این نوع بررسی می تواند به سیستم های پیوسته دیگر چون تیرها که کاربرد بیشتری دارند تعمیم داده شود و جذب ارتعاشات با امواج در حال حرکت صورت پذیرد.

مراجع و منابع:

- [١] A. DasGupta, P. Hagedorn, Vibrations and waves in continuous mechanical systems, Wiley, New York, 2007 .
- [٢] J. Rayleigh, The theory of sound. vol. I and II Dover Publications, New York, 1945 .
- [٣] T. Caughey, Classical normal modes in damped linear dynamic systems, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, No. 2, pp. 269-271, 1960 .
- [٤] T. Caughey, M. O'Kelly, Classical normal modes in damped linear dynamic systems, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, No. 3, pp. 583-588, 1965 .
- [٥] S. Adhikari, Optimal complex modes and an index of damping non-proportionality, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 18, No. 1, pp. 1-27, 2004 .
- [٦] S. Krenk, Complex modes and frequencies in damped structural vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 270 ,No. 4, pp. 981-996, 2004 .
- [٧] S. R. Ibrahim, Computation of normal modes from identified complex modes, *Aiaa Journal*, Vol. 21, No. 3, pp. 446-451, 1983 .
- [٨] S. Krenk, Vibrations of a taut cable with an external damper, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. ٦٧ ,No. 4, pp. 772-776, 2000 .
- [٩] T. Soong, B. Spencer, Supplemental energy dissipation: state-of-the-art and state-of-the-practice, *Engineering Structures*, Vol. 24, No. 3, pp. 243-259, 2002 .
- [١٠] J. A. Main, S. Krenk, Efficiency and tuning of viscous dampers on discrete systems, *Journal of Sound and vibration*, Vol. 286, No. 1, pp. 97-122, 2005 .
- [١١] K. Engelen, H. Ramon, W. Saeys, W. Franssens, J. Anthonis, Positioning and tuning of viscous damper on flexible structure, *Journal of sound and vibration*, Vol. 304, No. 3, pp. 845-862, 2007 .
- [١٢] J. Main, N. Jones, Evaluation of viscous dampers for stay-cable vibration mitigation, *Journal of Bridge Engineering*, Vol. 6, No. 6, pp. 385-397, 2001 .
- [١٣] J. Main, N. Jones, Free vibrations of taut cable with attached damper. II: nonlinear damper, *Journal of engineering mechanics*, Vol. 128, No. 10, pp. 1072-1081, 2002 .
- [١٤] A. Blanchard, O. V. Gendelman, D. M. McFarland, L. A. Bergman, A. F. Vakakis, Mode complexity in a harmonically forced string with a local spring-damper and transitions from vibrations to waves, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 334, pp. 282-295, 2015 .
- [١٥] A. Hull, A closed form solution of a longitudinal bar with a viscous boundary condition, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169 ,pp. 19-19, 1994 .
- [١٦] F. Cortés, M. J. Elejabarrieta, Longitudinal vibration of a damped rod. Part I: Complex natural frequencies and mode shapes, *International journal of mechanical sciences*, Vol. 48, No. 9, pp. 969-975, 2006 .
- [١٧] M. Gürgöze, H. Erol, On the frequency response function of a damped cantilever simply supported in-span and carrying a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 255, No. 3, pp. 489-500, 2002 .
- [١٨] M. Gürgöze, H. Erol, Dynamic response of a viscously damped cantilever with a viscous end condition, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 298, No. 1, pp. 132-153, 2006 .
- [١٩] G. Oliveto, A. Santini, E. Tripodi, Complex modal analysis of a flexural vibrating beam with viscous end conditions, *Journal of Sound and Vibration*,

- Vol. 200, No. 3, pp. 327-345, 1997 .
- [٢٠] C. Pierre, D. Jiang, S. Shaw, Nonlinear normal modes and their application in structural dynamics, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2006, 2006 .
 - [٢١] R. M. Rosenberg, The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems, *Journal of applied Mechanics*, Vol. 29, No. 1, pp. 7-14, 1962 .
 - [٢٢] A. F. Vakakis, Non-linear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory: an overview, *Mechanical systems and signal processing*, Vol. 11, No. 1, pp. ١٩٩٧, ٢٢-٣ .
 - [٢٣] S. Shaw, C. Pierre, Normal modes for non-linear vibratory systems, *Journal of sound and vibration*, Vol. 164, No. 1, pp. 85-124, 1993 .
 - [٢٤] S. Shaw, C. Pierre, Normal modes of vibration for non-linear continuous systems, *Journal of sound and vibration*, Vol. 169, No. 3, pp. 319-347, 1994 .
 - [٢٥] N. Boivin, C. Pierre, S. Shaw, Non-linear modal analysis of structural systems featuring internal resonances, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 182, No. 2, pp. 336-341, 1995 .
 - [٢٦] D. Jiang, C. Pierre, S. Shaw, Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation, *Journal of sound and vibration*, Vol. 288, No. 4, pp. 791-812, 2005 .
 - [٢٧] C. V. S. Villa, J.-J. Sinou, F. Thouverez, The invariant manifold approach applied to nonlinear dynamics of a rotor-bearing system, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 24, No. 4, pp. 676-689, 2005 .
 - [٢٨] J. Main, N. Jones, Free vibrations of taut cable with attached damper. I: Linear viscous damper, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. ١٢٨, No. 10, pp. 1062-1071, 2002 .
 - [٢٩] P. Hagedorn, *On a new concept of active vibration damping of elastic structures*, in: *Structural Control*, Eds., pp. 261-277: Springer, 1987 .

Abstract

In this study, the steady state response of a cable which is locally connected to a spring and damper is investigated. The spring and damper are attached to a typical point of the cable, in one side, and to the ground in the other side. Both ends of the cable are simultaneously excited and the steady state response and mode complexity of the system is studied. This study is repeated for a nonlinear spring- linear damper which is located in the middle of the cable. In order to solve the equations of motion for linear case, the method of separation of variables is used. But ,in the following, instead of complex eigenvalue method and extraction of complex modes and frequencies, frequency response constants have been obtained in terms of frequency. For calculating steady state response in the case of nonlinear spring- linear damper, the method of invariant manifold is implemented. For linear case, it is shown that the damping term leads to frequency shift and mode complexity occurrence. Also a specific combination of damping and stiffness construct the maximum mode complexity and the appearance of moving waves in the cable. This combination depends on the location of spring – damper and the excitation frequency. Furthermore, for nonlinear case, extreme variations in phase, mode shapes and dependency of frequency response amplitude to excitation amplitude were observed.

Keywords: Steady-State Dynamic, Traveling Waves, NNM



Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical & Mechatronics Engineering
MSc Theseis in Mechanical Engineering Applied Mechanics

**Vibration analysis of a harmonically forced string considering the
effect of a local spring-damper**

By:
Saleh Jomezade Khazarbeygi

Supervisor:
Dr Amir Jalali

September 2016