بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک
گروه طراحی کاربردی

تعیین ضریب شدت تنش مود I در باریکه و استوانه دارای ترک با استفاده از تابع وزنی و در نظر گرفتن تئوری‌های تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته

ادریس فرهی‌نژاد

استاد راهنما
دکتر محمّدباقر نظری

پایان‌نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

اردیبهشت ماه ۱۳۹۵

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک
گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آقای ادریس فرهی‌نژاد
تحت عنوان:
تعیین ضریب شدت تنش مود I در باریکه و استوانه دارای ترک با استفاده از تابع وزنی و در نظر گرفتن تئوری‌های تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :			

تقدیم اثر

تمامی تلاش چندین ماهه ی خود را در این تحقیق به **خانواده محترم و همسر عزیزم** که با صبر و حوصله و همراهی های بی دریغشان، اینجانب را در پیشرفت هرچه بهتر پایان نامه یاری و مساعدت نموده اند، تقدیم مینمایم . امید است بتوانم ذره ای از محبت ها و دلداری های این یاران همیشگی را جبران نمایم .

تشکر و قدردانی

اکنون که در سایه الطاف خداوند متعال این پایان نامه به انجام رسیده است، بر خود لازم میدانم از زحمات فراوان استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمّدباقر نظری که در منصب استاد راهنما توصیه های بی شائبه ی خود را در جهت گیری صحیح، تدوین و گردآوری پروژه ارائه نموده اند، مراتب سپاس را به جا آورم. همچنین از جناب آقای دکتر مهدی زاده رخی که کد تبدیل لاپلاس معکوس عددی را در اختیار اینجانب قرار داده اند و کلیه کسانی که با سعه صدر و حمایت های بی دریغ، اینجانب را در به ثمر رساندن این تحقیق یاری رسانده اند، خالصانه تشکر و قدردانی مینمایم و از درگاه ایزد منان توفیق روز افزون ایشان را خواستارم.

تعهد نامه

اینجانب ادریس فرهی‌نژاد دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه تعیین ضریب شدت تنش مود I در باریکه و استوانه دارای ترک با استفاده از تابع وزنی و در نظر گرفتن تئوری‌های تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته تحت راهنمایی محمّدباقر نظری متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه‌های رایانه‌ای ، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، ضریب شدت تنش مود I در یک باریکه شامل ترک لبه‌ای و یک استوانه جدار ضخیم شامل ترک نیم‌بیضوی یا محیطی کامل از جنس مواد همگن و همسانگرد، تعیین شده است که تحت شوک گرمایی به‌صورت یک بعدی طبق تئوری‌های مختلف کوپل و غیرکوپل ترموالاستیسیته قرار دارد. در تئوری‌های غیرکوپل، معادله هدایت گرمایی در فضای لاپلاس حل شده است. پس از تعیین میدان‌های دما و تنش در فضای لاپلاس، با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی نتایج به فضای زمان نگاشت شده است. ضریب شدت تنش نیز با استفاده از روش تابع وزنی تعیین شده است. در تئوری‌های کوپل ترموالاستیسیته، شامل تئوری‌های لرد-شولمان و چاندراساخاریا-تزو حل معادلات حاکم در استوانه با استفاده از تابع پتانسیل جابه‌جایی در فضای لاپلاس به‌دست آمده است. پس از تعیین توزیع تنش محیطی و محوری در استوانه، ضرایب شدت تنش برای عمق و گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی و نوک ترک محیطی با استفاده از روش تابع وزنی به‌دست آمده است. نتایج رفتار متفاوت مدل‌های غیرفوریه‌ای با یکدیگر و با مدل فوریه را نشان می‌دهد. در تئوری‌های کوپل ترموالاستیسیته به دلیل کوپلینگ مکانیکی-حرارتی معادلات حاکم، سرعت موج نسبت به‌مدل‌های غیرکوپل ترموالاستیسیته کمتر است که موجب اختلاف در پیش‌بینی دما، تنش و درنتیجه ضریب شدت تنش می‌شود. در نظر گرفتن زمان‌های آسایش شار گرمایی و گرادیان دما در معادلات حاکم تئوری‌های تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته، موجب پیش‌بینی مقادیر بزرگتر دما، تنش و درنتیجه ضریب شدت تنش نسبت به قانون فوریه و تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته می‌شود.

واژگان کلیدی: هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه، هدایت گرمایی هذلولوی، تئوری چاندراساخاریا-تزو، تئوری لرد-شولمان، تئوری گرین-نقدی، تئوری گرین-لیندزی، تبدیل لاپلاس معکوس عددی، استوانه جدارضخیم

فهرست عنوان‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست نشانه‌ها

طول ترک	a
ضریب میرایی گرین-نقدی	C_K
سرعت الاستیک انبساطی	C_P
سرعت موج برشی	C_S
سرعت موج گرمایی	C_T
ظرفیت گرمایی	C_v
مدول یانگ	E
بردار نیروی حجمی	$\mathbf{F}$
ضریب تصحیح هندسه	$F_j \ (j = 0,1)$
ضریب شدت تنش	K, K_I
ضریب رسانایی گرمایی	k
طول	l
تابع وزنی	$m(r, a)$
ضریب شکل ترک	Q
بردار شار گرمایی	$\mathbf{q}$
منبع گرمایی داخلی	R
شعاع داخلی بی‌بعد	R_i
شعاع خارجی بی‌بعد	R_o
انتروپی	S

دما	T
ضخامت	t
بردار جابه‌جایی	$\mathbf{u}$
ضریب تصحیح هندسه	$Y_j \ (j = 0,1)$
ضریب انبساط گرمایی	α
ضریب انبساط حجمی	γ
زمان آسایش بی‌بعد شار گرمایی	δ
زمان آسایش بی‌بعد گرادیان دما	ε
پارامتر ترموالاستیک کوپل	ϵ
شعاع بی‌بعد	η
دمای بی‌بعد	θ
ثابت‌های لامه	λ, μ
چگالی	ρ
تنش شعاعی	σ_r
تنش محوری	σ_z
تنش محیطی	σ_ϕ
زمان آسایش شار گرمایی	τ_q
زمان آسایش گرادیان دما	τ_T
تابع پتانسیل جابه‌جایی	ψ

فصل ۱ مقدمه

۱-۱- مقدمه

بسیاری از قطعات استوانه‌ای از جمله سازه‌هایی مثل لوله‌ها و مخازن تحت فشار در تجهیزات مهندسی مدرن مثل راکتورهای هسته‌ای، دستگاه‌های تولید و انتقال اشعه ایکس و لیزر و در فرآیندهایی چون ذوب سطحی فلزات [۱]، پوشش‌دهی فلزات با نانوسرامیک‌ها [۲] و همچنین مخازن گازهای مایع در صنایع هوافضا، تحت هدایت گرمایی سریع قرار می‌گیرند. با توجه به امکان وجود عیب یا ترک در این سازه‌ها، ارزیابی دقیق ایمنی، تخمین عمر و ظرفیت تحمل بار آن‌ها مستلزم بررسی رفتار ترک است. از میان انواع ترک‌ها در استوانه‌های تحت فشار و گرادیان دما، دو دسته از ترک‌ها شامل ترک‌های طولی[۱] و ترک‌های محیطی[۲] بحرانی‌ترین وضعیت را خواهند داشت [۳].

تئوری مرسوم هدایت گرمایی فوریه منجر به معادله حاکم سهموی در مسئله می‌شود. براساس این تئوری، اثر یک اغتشاش گرمایی در مرز یک جسم بلافاصله در نقاط دور از آن احساس می‌شود که از نظر فیزیکی قابل قبول نیست. از طرف دیگر، آزمایش‌ها در مواردی چون اغتشاش گرمایی در دماهای پایین، شوک‌های گرمایی[۳] در زمان‌های کوتاه و هدایت گرمایی در مقیاس میکرو، سرعت محدود موج گرما را تأیید می‌کند [۴]. در این موارد، نتایج کاربرد قانون فوریه با نتایج تجربی اختلاف فاحش دارد [۵]. مهم‌ترین نقص قانون فوریه، منجر شدن به سرعت بی‌نهایت موج گرمایی است. برای رفع این مشکل، تئوری‌های مختلف تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته[۴] ارائه شده‌اند. در مواردی که هدایت گرمایی سریع رخ می‌دهد، توزیع دمای حاصل از قانون فوریه به‌اندازه کافی دقیق نیست. برای مثال دمای اندازه‌گیری شده در باریکه نازکی که تحت گرمایش سریع از طریق لیزر قرار گرفته است، در زمان‌های بسیار نزدیک به زمان اعمال شوک گرمایی حدود ۳۰۰°C بیشتر از دمایی است که توسط قانون فوریه

---

[۱] Longitudinal crack

[۲] Circumferential crack

[۳] Thermal shock

[۴] Generalized thermoelasticity

محاسبه می‌شود [۶]. هدایت گرمایی کاتانو-ورنات نیز در برخی موارد نمی‌تواند نتایج را به‌درستی پیش‌بینی کند و در مواردی چون فرآیندهای سریع انتقال گرما و انتقال گرما در مقیاس میکرو منجر به نتایج غیرطبیعی می‌شود [۷و۸]. هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با توجه به روابط ساختاری در نظر گرفته شده، نتایج دما و تنش را در سازه به‌گونه‌ای پیش‌بینی می‌کند که با نتایج آزمایشگاهی سازگاری دارد و از طرف دیگر، در هدایت گرمایی سریع و هدایت گرمایی در مقیاس میکرو و نانو نتایج قابل قبولی ارائه می‌کند.

۱-۲- تئوری‌های هدایت گرمایی

۱-۲-۱ مدل‌های هدایت گرمایی صلب

در هدایت گرمایی فوریه‌ای (قانون فوریه و تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته)، شار گرمایی در یک محیط پیوسته و همسانگرد، با گرادیان دما متناسب است. ثابت این تناسب، ضریب هدایت گرمایی نام دارد. رابطه ساختاری شار گرمایی قانون فوریه به‌صورت رابطه (۱-۱) بیان می‌شود.

$$\mathbf{q}(\mathbf{x},t) = -k\nabla T(\mathbf{x},t) \tag{۱-۱}$$

کاتانو [۹] و ورنات [۱۰]، یک مدل هذلولوی برای انرژی گرمایی پیشنهاد کردند که در آن، در نظر گرفتن یک زمان آسایش برای شار گرمایی منجر به سرعت محدود موج گرما می‌شود. رابطه (۱-۲)، رابطه ساختاری شار گرمایی مدل کاتانو-ورنات را نشان می‌دهد.

$$\mathbf{q}(\mathbf{x},t+\tau_q) = -k\nabla T(\mathbf{x},t) \tag{۱-۲}$$

در مدل کاتانو-ورنات، رابطه هذلولوی حاکم بر توزیع دما، با جایگزینی بسط تیلور یک جمله‌ای رابطه ساختاری فوق در قانون اول ترمودینامیک (بقای انرژی) حاصل می‌شود. طبق مدل کاتانو-ورنات، دما و تنش با نوسان‌های متوالی در جسم تغییر می‌کند و پس از گذشت زمان بر توزیع‌های پایای دما و تنش حاصل از قانون فوریه منطبق می‌شود.

تزو [۱۱و۱۲]، یک مدل هذلولوی دو مرحله‌ای را برای لحاظ کردن برهم کنش میکروساختار ماده در فرآیندهای سریع انتقال گرما پیشنهاد کرد. در این مدل-که مدل تأخیر فاز دوگانه نامیده می‌شود- دو زمان آسایش، یکی برای گرادیان دما و دیگری برای شار گرمایی معرفی شده است. مدل تأخیر فاز دوگانه منجر به معادله حاکم هذلولوی بر مسئله می‌شود و تأیید می‌کند که موج گرمایی با سرعت محدود در جسم منتشر می‌شود. زمان آسایش گرادیان دما، تأخیر زمانی ناشی از برهم کنش میکروساختار (برهم کنش فوتون-الکترون و پراکنش فوتون‌ها) و زمان آسایش شار گرمایی، اثر اینرسی گرمایی را لحاظ می‌کند [۱۳]. نتایج آزمایش‌ها نشان می‌دهد مدل تأخیر فاز دوگانه، رفتار واقعی ماده در انتقال گرمای سریع و یا در مقیاس میکرو را بهتر از مدل هذلولوی بیان می‌کند [۱۴]. رابطه ساختاری شار گرمایی در مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه به‌صورت رابطه (۱-۳) است.

$$\mathbf{q}\left(\mathbf{x}, t+\tau_q\right) = -k\nabla T(\mathbf{x}, t+\tau_T) \qquad (۱-۳)$$

در مدل تأخیر فاز دوگانه، رابطه ساختاری شار گرمایی از بسط تیلور دو جمله برای شار گرمایی و یک جمله برای گرادیان دما حاصل می‌شود.

۱-۲-۲ تئوری‌های ترموالاستیسیته

هنگامی که نرخ زمانی اعمال شرایط مرزی دمایی بر یک پیوستار تغییرشکل پذیر یا نرخ تغییرات منبع تولید گرمای داخلی قابل توجه باشد و منجر به تحریک اینرسی گرمایی شود، موج‌های تنش گرمایی تولید می‌شود. در چنین شرایطی میدان‌های دما و تنش باید با حل همزمان معادلات انرژی و تعادل صورت گیرد [۱۵].

$$\nabla.\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \qquad (۱-۴\text{-الف})$$

$$\nabla.\mathbf{q} = \rho(R - \dot{S}T_0) \qquad (۱-۴\text{-ب})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\mathbf{I}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda+2\mu)\alpha\mathbf{I}T \qquad (۱-۴\text{-ج})$$

$$S = \frac{\rho C_v}{T_0} T + (3\lambda + 2\mu)\alpha(\nabla \cdot \mathbf{u}) \qquad (۱-۴-د)$$

رابطه (۱-۴-الف) معادله تعادل، رابطه (۱-۴-ب) معادله انرژی، رابطه (۱-۴-ج) رابطه ساختاری تنش و رابطه (۱-۴-د) رابطه ساختاری انتروپی را نشان می‌دهد.

در روابط فوق، $\boldsymbol{\sigma}$ بردار تنش، $\mathbf{F}$ بردار نیروی حجمی، ρ چگالی، R منبع گرمای داخلی، S انتروپی، λ و μ ثابت‌های لامه، $\boldsymbol{\varepsilon}$ کرنش، α ضریب انبساط گرمایی و $\mathbf{I}$ ماتریس همانی را نشان می‌دهد.

در معادلات تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته[1]، معادله انرژی براساس رابطه ساختاری قانون فوریه و معادله تعادل کوپل می‌باشند. این تئوری زمانی که طول مشخصه محیط، در مقابل میانگین مسیر انتقال انرژی قابل صرف‌نظر نباشد یا در دماهای پایین نزدیک به صفر مطلق نتایج غیرقابل قبولی دارد [۱۵].

در تئوری لرد-شولمان[2] به‌جای استفاده از قانون فوریه، از رابطه ساختاری شار گرمایی مدل کاتانو-ورنات استفاده شده است [۱۶]. معادلات حاکم حاصل از این تئوری از کوپل معادله انرژی و معادله تعادل حاصل می‌شوند (روابط ۱-۴).

تئوری چاندراساخاریا-تزو[3] توسط چاندراساخاریا [۱۷] براساس مدل هدایت گرمایی تزو [۱۸] ارائه شده است. در این تئوری، معادلات حاکم از کوپل معادله انرژی براساس رابطه ساختاری شار گرمایی مدل تأخیر فاز دوگانه و معادله تعادل به‌دست می‌آید (روابط ۱-۴).

در تئوری گرین-لیندزی[4]، رابطه ساختاری جدیدی برای تنش و انتروپی ارائه شده است. به‌طوری‌که نرخ دما به معادلات ساختاری تنش و انتروپی اضافه شده‌است [۱۹].

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}(T - T_0 + t_1\dot{T}) \\ &S = \frac{\rho c}{T_0}\left(T + t_2\dot{T} - T_0\right) + \boldsymbol{\beta}:\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{T_0}\hat{\mathbf{C}} \cdot \nabla T \end{aligned} \qquad (۱-۵)$$

---

[1] Classic thermoelasticity

[2] Lord-Shulman

[3] Chandrasekharaiah-Tzou

[4] Green-Lindsay

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K}\nabla \mathrm{T} - \hat{\mathbf{C}}\dot{\mathrm{T}}$$

که در روابط فوق T_0 دمای مرجع، $\boldsymbol{\varepsilon}$ تنسور کرنش، $\mathbf{C}$ تنسور مرتبه چهار مدول الاستیک، $\boldsymbol{\beta}$ تنسور مرتبه دو مدول تنش-دما و $\hat{\mathbf{C}}$ بردار ثابت‌های ماده است.

تئوری هذلولوی گرین-نقدی[1] توسط گرین و نقدی [۲۰] ارائه شده است. تئوری گرین-نقدی نوع II، ترموالاستیسیته بدون اتلاف انرژی نام دارد که در آن از قانون فوریه به همراه رابطه گرادیان جابه‌جایی شار-دما استفاده شده است. این تئوری منجر به معادله هدایت گرمایی، بدون جمله نرخ دمایی می‌شود که درنتیجه موج ترموالاستیک حاصل از این تئوری نامیرا می‌شود. معادلات حاکم بر تئوری گرین-نقدی نوع II به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{S} = \frac{\rho c}{\mathrm{T}_0}(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0) + \boldsymbol{\beta}:\boldsymbol{\varepsilon}$$

(۱-۶)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}\nabla\dot{\mathrm{T}} - \mathbf{K}^{*}\nabla \mathrm{T}$$

۱-۳- مکانیک شکست

پدیده شکست در اجسام یکی از عمده‌ترین مسائلی است که انسان از زمان ساختن ساده‌ترین ابزارها با آن مواجه بوده‌است و به‌دلیل پیشرفت تکنولوژی در عصر حاضر، این مسئله از اهمیت بیشتری نسبت به گذشته برخوردار می‌باشد. متلاشی شدن بسیاری از هواپیماها و فضاپیماها طی دهه‌های گذشته، لزوم درک دقیق‌تری از مکانیک شکست در اجسام را ایجاب می‌کند. مکانیک شکست در علم مواد نوین ابزار مهمی محسوب می‌شود که عملکرد مکانیکی مواد را بهبود می‌دهد. مکانیک شکست با در نظر گرفتن تئوری‌های الاستیسیته و پلاستیسیته و نقص‌های کریستالی میکروسکوپی مواد، شکست مکانیکی ماکروسکوپی آنها را پیش‌بینی می‌کند.

در مکانیک شکست الاستیک خطی، میدان تنش در حوزه نوک ترک برحسب بارگذاری جسم، اندازه

[1] Green-Naghdi

و هندسه ترک یا ناپیوستگی ترک‌گونه بیان می‌شود. مهمترین اصل مکانیک شکست الاستیک خطی این است که توزیع تنش نزدیک یک ترک نوک تیز برحسب کمیتی به نام ضریب شدت تنش[1] K، (با واحد $MPa\sqrt{m}$) قابل بیان است که -برای پیش‌بینی حالت تنش حول نوک ترک ناشی از بارگذاری یا تنش پسماند استفاده می‌شود- به هر دو عامل، بارگذاری قطعه و هندسه آن (شامل طول ترک) بستگی دارد.

در تحلیل سازه‌های شامل ترک با الگوی مشخص -با توجه به محدودیت‌ها و پیچیدگی‌های روش‌های تحلیلی و لزوم تکرار روش‌های عددی با تغییر ابعاد هندسی و خصوصیات مادی- ترجیح داده می‌شود از روش تابع وزنی استفاده شود. در مکانیک شکست از روش‌های مختلف تحلیلی، تجربی و عددی برای تعیین ضریب شدت تنش استفاده می‌شود که روش تابع وزنی[2] یکی از روش‌های تحلیلی است.

۱-۴- مروری بر کارهای انجام‌شده

در بخشی از تحقیقات، ترک محیطی به‌عنوان مدل مناسبی از عیوب در ناحیه اتصال لوله‌ها به یکدیگر پیشنهاد شده است [۲۱]. ایردل و اردوغان [۲۲]، آیدین و آرتم [۲۳]، نید و اردوغان [۲۴]، با استفاده از روش تبدیل انتگرالی، ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی در یک استوانه تحت بار مکانیکی و گرمایی به‌صورت متقارن محوری را به‌دست آوردند. ونگ [۲۵]، با استفاده از روش المان محدود ضریب شدت تنش دینامیکی برای ترک محیطی در یک استوانه جدار ضخیم تحت فشار داخلی متغیّر با زمان را محاسبه کرد. همچنین، گربنر [۲۶]، ضریب شدت تنش را برای استوانه‌ای شامل یک ترک محیطی و تحت بار محوری، با استفاده از روش المان محدود به‌دست آورد. نبوی و قاجار [۲۷] با استفاده از نتایج المان محدود، ضرایب تابع وزنی گلینکا و شن [۲۸] را به‌صورت توابع چندجمله‌ای برای محدوده وسیعی از نسبت قطرهای خارجی به داخلی و طول نسبی ترک محیطی، تعیین کردند و با استفاده از آن، ضریب

[1] Stress intensity factor
[2] Weight function method

شدت تنش را برای بارگذاری حرارتی پایا به‌دست آوردند. همچنین ایشان ضرایب تابع وزنی گلینکا و شن را برای یک نسبت قطر خاص به‌صورت توابع متعالی از ابعاد هندسی استوانه، ارائه کردند [۲۹].

در تحقیقات فوق از تئوری هدایت گرمایی فوریه استفاده شده است. چانگ و ونگ [۳۰]، رفتار یک ترک لبه‌ای عمود بر لبه یک نیم‌صفحه تحت کاهش دمای لبه را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هذلولوی بررسی کردند. هو و چن [۳۱]، ضریب شدت تنش را برای یک ترک موازی با لبه‌های یک باریکه با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هذلولوی به‌دست آوردند. چن و هو تغییرات ضریب شدت تنش با زمان، برای یک نیم‌صفحه با پوشش [۳۲] و بدون پوشش [۳۳] شامل یک ترک تحت اغتشاش حرارتی در مرز را با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هذلولوی به‌دست آوردند. ونگ [۳۴]، ضریب شدت تنش را برای یک استوانه شامل یک ترک سکه‌ای کوچک، به‌صورت تحلیلی به‌دست آورده است. اخیراً، فو و همکاران ضریب شدت تنش برای استوانه‌ی توپر [۳۵] و توخالی [۳۶] شامل یک ترک محیطی را با استفاده از روش تبدیل انتگرالی و تبدیل لاپلاس معکوس عددی با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هذلولوی ارائه کرده‌اند. هو و چن [۳۷] ضریب شدت تنش برای یک ترک موازی با مرز یک نیم‌صفحه را با در نظر گرفتن مدل تأخیر فاز دوگانه و استفاده از روش‌های تبدیل لاپلاس و فوریه به‌طور تحلیلی ارائه کردند.

لین و اسمیت [۳۸]، با استفاده از روش المان محدود، ضریب شدت تنش و عمر خستگی را برای یک استوانه شامل یک ترک نیم‌بیضوی[۱] محاسبه کردند. ایشان همچنین نشان دادند که ترک‌های سطحی پس از تکرار بارگذاری به‌شکل نیم‌بیضوی نزدیک می‌شوند. پتروسکی و آخنباخ [۳۹]، یک بیان تقریبی از جابه‌جایی سطح ترک را برای محاسبه تابع وزنی از ضرایب شدت تنش برای یک بارگذاری مرجع بیان کرده‌اند و ضریب شدت تنش را برای نیم‌صفحه، حاوی ترک‌های شعاعی روی حفره دایره‌ای و ترک شعاعی در حلقه به‌دست آوردند. شاهانی و نبوی با استفاده از روش تابع وزنی، یک عبارت تحلیلی برای ضرایب شدت تنش در عمق و سطح یک ترک نیم‌بیضوی طولی در یک استوانه تحت فشار داخلی و بار

[۱] Semi-Elliptical

حرارتی پایا [۴۰] ارائه کردند. ژنگ و همکاران [۴۱و۴۲]، به کمک روش تابع وزنی یک رابطه صریح برای ضریب شدت تنش گوشه‌ها و عمق ترک نیم‌بیضوی طولی ارائه داده‌اند. در تحقیقات فوق هدایت گرمایی براساس قانون فوریه در نظر گرفته شده‌است.

لی و همکاران [۴۳]، با استفاده از روش معادله انتگرال مرزی، تابع وزنی را برای ترک‌های طولی و محیطی بیان کرده‌اند. وارفولومیف و هدولاک [۴۴]، تابع وزنی ترک‌های طولی و محیطی در سطح داخلی استوانه را به‌دست آورده و با استفاده از این تابع، ضرایب شدت تنش تحت بارگذاری کششی یکنواخت را محاسبه کرده‌اند. اخیراً، نظری و عاصمی [۴۵] ضریب شدت تنش مود I برای گوشه‌ها و عمق یک ترک نیم‌بیضوی تحت بار گرمایی هذلولوی را با استفاده از تابع وزنی به‌دست آورده‌اند.

زمانی و اسلامی [۴۶]، اثر شوک گرمایی در یک باریکه از جنس مواد مدرج تابعی را با استفاده از روش المان محدود در نظر گرفتند و با استفاده از المان مستطیلی هشت گره‌ای و گسسته‌سازی، سیستم معادلات دینامیکی کوپل را با استفاده از روش نیومارک حل کردند و ضریب شدت تنش را با استفاده از روش انتگرال J تعیین کردند. چن و لین [۴۷]، با استفاده از روش عددی تبدیل لاپلاس و روش حجم کنترل، تحلیل گذرای مسئله کوپل ترموالاستیک را تحت شرط مرزی تابشی بررسی کرده‌اند. شریعتی و مهدی زاده رخی [۴۸]، رفتار شکست مواد تابعی تحت شوک‌های گرمایی-مکانیکی را مورد مطالعه قرار داده و معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک را با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته، گسسته-سازی کرده و سپس با استفاده از روش نیومارک حل کردند و تغییر ضرایب شدت تنش با تغییر پروفیل ماده تابعی و نیز سرعت و مسیر رشد ترک در یک تیر تحت شوک‌های گرمایی-مکانیکی را مورد بحث قرار دادند. در تحقیقات فوق از تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته استفاده شده‌است. حسینی تهرانی و همکاران [۴۹]، میدان‌های دما و تنش سطح مشترک یک باریکه ترموالاستیک و فونداسیون صلب تحت شوک گرمایی لیزر را با استفاده از روش المان مرزی و تئوری لرد-شولمان مورد مطالعه قرار دادند و نتایج حاصل را با تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته مقایسه کردند. ایشان اثر پالس و ضخامت باریکه بر تنش در سطح مشترک، را با استفاده از تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته بررسی کردند. زمانی و

همکاران [۵۰]، یک باریکه حاوی ترک تحت شوک گرمایی غیرفوریه‌ای را با استفاده از تئوری لرد-شولمان و تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته در نظر گرفتند. ایشان با استفاده از روش گلرکین و روش المان محدود، معادلات ناویر و انرژی را گسسته‌سازی کردند و سپس با استفاده از روش نیومارک نتایج دما و تنش را به‌دست آوردند و ضریب شدت تنش را با استفاده از روش انتگرال J تعیین کردند. حسینی تهرانی و اسلامی [۵۱]، میدان‌های دما، تنش و جابه‌جایی یک محیط دوبعدی با استفاده از روش المان مرزی و تبدیل لاپلاس را با در نظر گرفتن تئوری گرین-لیندزی به‌دست آوردند. نتایج برای حالت‌های کوپل و غیرکوپل ارائه شده و اثر زمان آسایش مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج دمای ارائه شده در حالت غیرکوپل دارای دقت مناسب است. اما در حالت غیرکوپل –که به ازای دو مقدار برای پارامتر ترموالاستیک کوپل ارائه شده است- خطای قابل توجهی دارد.

طبق جستجوهای انجام شده، گزارشی در مورد ضریب شدت تنش در باریکه دارای ترک لبه‌ای طبق تئوری‌های لرد-شولمان، گرین-نقدی و گرین-لیندزی و استوانه‌های حاوی ترک نیم‌بیضوی یا محیطی تحت بارگذاری گرمایی با استفاده از مدل تأخیر فاز دوگانه، تئوری‌های لرد-شولمان و چاندراساخاریا-تزو منتشر نشده است.

در این پایان‌نامه، ضریب شدت تنش برای یک ترک لبه‌ای در یک باریکه و همچنین ترک نیم‌بیضوی طولی و ترک محیطی کامل در یک استوانه جدار ضخیم با استفاده از روش تابع وزنی تعیین شده است که تحت شوک گرمایی به‌صورت یک بعدی طبق تئوری‌های مختلف کوپل و غیرکوپل ترموالاستیسیته قرار دارد.

فصل ۲ روش تحلیل

۲-۱- مقدمه

در این فصل، تعیین ضریب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزنی شرح داده می‌شود و توابع وزنی مربوط به ترک لبه‌ای در باریکه و ترک‌های محیطی و نیم‌بیضوی در استوانه بیان می‌شوند. سپس روش عددی تبدیل لاپلاس معکوس و الگوریتم‌های شتاب‌دهی به همگرایی سری‌های فوریه معرفی می‌شود.

۲-۲- روش تابع وزنی

روش تابع وزنی ارائه شده توسط باکنر [۵۲] و رایس [۵۳]، یک روش کارآمد برای تعیین ضریب شدت تنش است؛ تابع وزنی اثر بارگذاری و هندسه جسم روی ضریب شدت تنش را از هم جدا می‌کند؛ به‌طوری‌که، اگر تابع وزنی $m(r,a)$ برای یک جسم حاوی ترک با هندسه معلوم در دسترس باشد، می‌توان ضریب شدت تنش را برای هر بارگذاری دلخواه به‌دست آورد. ضریب شدت تنش با انتگرال‌گیری از حاصل‌ضرب توزیع تنش و تابع وزنی روی سطح فرضی ترک تعیین می‌شود.

$$K = \int_0^a m(r,a)\sigma(r)dr \qquad (۲-۱)$$

تاکنون تابع وزنی برای هندسه‌های مختلف ترک تعیین شده است. از جمله انواع ترک، ترک‌های لبه‌ای[۱] و داخلی[۲] هستند در ابتدا تابع وزنی براساس بازشدگی سطح ترک متناظر با بارگذاری‌های مرجع بیان شد [۵۴] که نیاز به حل تحلیلی مسئله دارد. برای حل مشکل فوق، روش‌های مختلفی از جمله تابع تقریبی بازشدگی سطح ترک [۵۵] و توابع وزنی تقریبی پیشنهاد شده است.

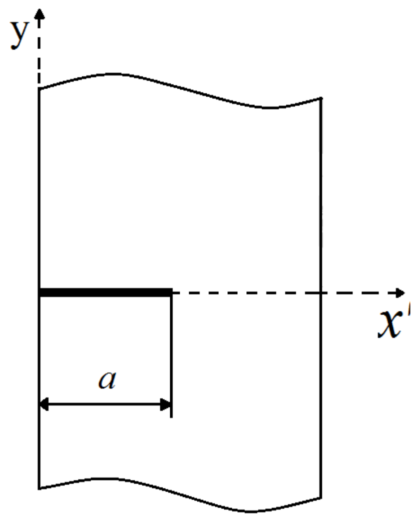
۲-۲-۱ تابع وزنی باریکه

در این بخش، تابع وزنی مربوط به باریکه دارای ترک لبه‌ای بیان می‌شود. برای این منظور، باریکه‌ای به عرض واحد با طول ترک بی‌بعد a مطابق شکل (۲-۱) در نظر گرفته می‌شود.

---

۱ Edge crack

۲ Embeded crack



شکل ۲-۱ شکل کلی باریکه دارای ترک لبه‌ای

طول ترک بدون بعد از تقسیم طول ترک بر ضخامت باریکه به‌دست می‌آید. با استفاده از رابطه (۲-۲)، ضریب شدت تنش مود I در باریکه تعیین می‌شود.

$$K_I = \int_0^a \sigma_y(x')m(x',a)dx' \quad (۲-۲)$$

که در آن، $\sigma_y(x')$ تنش نرمال در جهت طول باریکه است. تابع وزنی پیشنهادی برای باریکه شامل ترک لبه‌ای [۵۶] به‌صورت زیر است.

$$m(x',a) = [2\pi(a-x')]^{-\frac{1}{2}}\left[1 + M_1\left(\frac{a-x'}{a}\right) + M_2\left(\frac{a-x'}{a}\right)^2\right] \qquad 0 \le a \le 0.5 \quad (۲-۳)$$

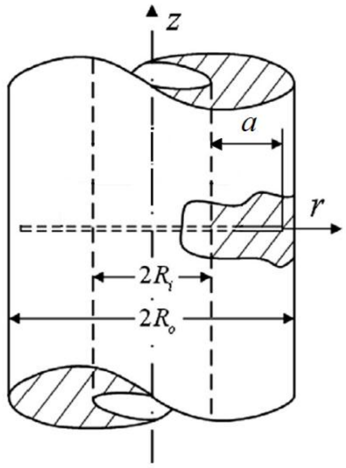
که در آن،

$$M_1 = 0.6147 + 17.1844a^2 + 8.7822a^6 \quad (۲-۴-الف)$$

$$M_2 = 0.2502 + 3.2899a^2 + 70.0444a^6 \quad (۲-۴-ب)$$

۲-۲-۲ تابع وزنی ترک محیطی داخلی

شکل (۲-۲)، هندسه استوانه شامل ترک محیطی داخلی را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۲ شکل کلی استوانه شامل ترک محیطی کامل [۳۶]

تابع وزنی پیشنهادی گلینکا و شن برای ترک تحت بارگذاری مود I در استوانه جدار ضخیم، به‌شکل رابطه (۲-۵) است [۲۸].

$$m(r,a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{R_i + a - r}} + M_1\sqrt{\frac{2}{\pi a}} + M_2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a}\sqrt{R_i + a - r} + M_3\sqrt{\frac{2}{\pi a^3}}\sqrt{R_i + a - r} \qquad (۲\text{-}۵)$$

که در آن، نوک ترک محیطی کامل در $r = R_i + a$ قرار دارد و ثابت‌های M_i از صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در نوک ترک و دو بارگذاری مرجع به‌صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$M_1 = -\sqrt{2}\pi Y_1 + 3\sqrt{2}\pi\frac{t_c}{a}Y_2 - \frac{24}{5}$$
$$M_2 = 3 \qquad (۲\text{-}۶)$$
$$M_1 = 3\sqrt{2}\pi Y_1 - 6\sqrt{2}\pi\frac{t_c}{a}Y_2 + \frac{8}{5}$$

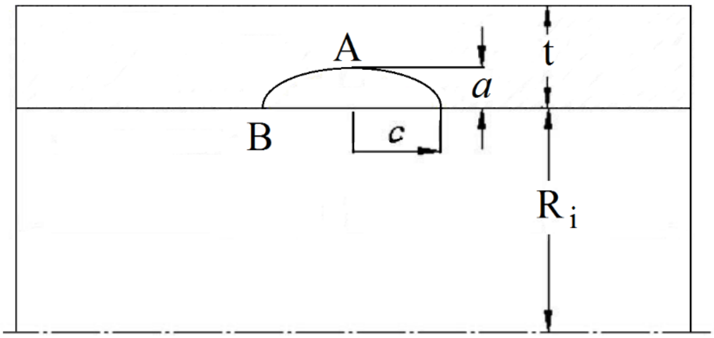
ضرایب Y_j -که ضرایب تصحیح هندسه نامیده می‌شوند- با توجه به نتایج المان محدود، به‌شکل زیر بیان می‌شوند.

$$Y_j = \sum_{m=1}^{5}\sum_{n=0}^{15} A_{jmn}(a/t_c)^{n-1}(R_o/R_i)^{m-1} \quad , \quad j = 1,2 \qquad (۲\text{-}۷)$$

ضرایب A_{jmn} در مرجع [۲۸] برای نسبت شعاع خارجی به داخلی $1.1 \le R_o/R_i \le 2$ ذکر شده‌اند.

۲-۲-۳ تابع وزنی ترک نیم‌بیضوی برای $R_o/R_i = 1.25$

در شکل (۲-۳)، هندسه استوانه شامل ترک نیم‌بیضوی داخلی نشان داده شده است.



شکل ۲-۳ شکل کلی استوانه شامل ترک نیم‌بیضوی [۴۰]

در حالت بارگذاری شعاعی، تابع وزنی عمق ترک در [۴۰] به‌صورت زیر پیشنهاد شده است.

$$m_A(r,a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{R_i + a - r}} + M_{A1}\sqrt{\frac{2}{\pi a}} + M_{A2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a}\sqrt{R_i + a - r} + M_{A3}\sqrt{\frac{2}{\pi a^3}}(R_i + a - r) \qquad (۲\text{-}۸)$$

که در آن، $r = R_i + a$ موقعیت نوک ترک را بیان می‌کند. تابع وزنی گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی و ضریب شکل ترک نیم‌بیضوی در [۴۰] به‌شکل رابطه (۲-۹) و (۲-۱۰) پیشنهاد شده‌است.

$$m_B(r,a) = \sqrt{\frac{4}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{r - R_i}} + M_{B1}\sqrt{\frac{4}{\pi a}} + M_{B2}\sqrt{\frac{4}{\pi}}\frac{1}{a}\sqrt{r - R_i} + M_{B3}\sqrt{\frac{4}{\pi a^3}}(r - R_i) \qquad (۲\text{-}۹)$$

$$Q = 1 + 1.464\left(\frac{a}{c}\right)^{1.65} \qquad (۲\text{-}۱۰)$$

برای عمق ترک نیم‌بیضوی ضرایب $M_{Ai}(i = 1,2,3)$، به‌شکل روابط (۲-۱۱) بیان می‌شوند.

$$M_{A1} = \frac{2\pi}{\sqrt{2Q}}(Y_0 - 3Y_1) + \frac{24}{5}$$

$$M_{A2} = 3 \qquad (۲\text{-}۱۱)$$

$$M_{A3} = \frac{6\pi}{\sqrt{2Q}}(2Y_1 - Y_0) - \frac{8}{5}$$

که در آن،

$$Y_0 = B_0 + B_1\left(\frac{a}{t_c}\right) + B_2\left(\frac{a}{t_c}\right)^2 + B_3\left(\frac{a}{t_c}\right)^4$$
(۱۲-۲)
$$Y_1 = A_0 + A_1\left(\frac{a}{t_c}\right) + A_2\left(\frac{a}{t_c}\right)^2 + A_3\left(\frac{a}{t_c}\right)^4$$

در مرجع [۴۰]، ضرایب A_i و B_i، به‌صورت توابع نمایی از $\left(\frac{a}{c}\right)$ بیان شده‌اند.

برای گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی ثابت‌های $M_{Bi}(i = 1, 2, 3)$ به‌شکل رابطه (۲-۱۳) بیان می‌شوند.

$$M_{B1} = \frac{3\pi}{\sqrt{Q}}(2F_1 - 5F_0) - 8$$
$$M_{B2} = \frac{15\pi}{\sqrt{Q}}(3F_1 - F_0) + 15 \qquad (۱۳-۲)$$
$$M_{B1} = \frac{3\pi}{\sqrt{Q}}(3F_0 - 10F_1) - 8$$

که در آن، ضرایب تصحیح هندسه با استفاده از برازش منحنی به‌شکل رابطه (۲-۱۴) بیان می‌شوند.

$$F_0 = \left[C_0 + C_1\left(\frac{a}{t_c}\right) + C_2\left(\frac{a}{t_c}\right)^2 + C_3\left(\frac{a}{t_c}\right)^4\right]\left(\frac{a}{c}\right)$$
(۱۴-۲)
$$F_1 = \left[D_0 + D_1\left(\frac{a}{t_c}\right) + D_2\left(\frac{a}{t_c}\right)^2 + D_3\left(\frac{a}{t_c}\right)^4\right]\left(\frac{a}{c}\right)$$

ضرایب C_i و D_i در مرجع [۴۰]، به‌صورت توابع چند جمله‌ای معرفی شده‌اند.

۲-۲-۴ تابع وزنی ترک نیم‌بیضوی برای $R_o/R_i = 2$

تابع وزنی برای عمیق‌ترین نقطه یک ترک نیم‌بیضوی داخلی در استوانه به‌صورت زیر است [۵۷].

$$m_A(r, a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(a - r)}}\left[1 + M_{1A}\left(1 - \frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + M_{2A}\left(1 - \frac{r}{a}\right) + M_{3A}\left(1 - \frac{r}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \qquad (۱۵-۲)$$

تابع وزنی برای گوشه‌های یک ترک نیم‌بیضوی داخلی در استوانه نیز به‌صورت زیر ارائه شده است.

$$m_B(r, a) = \frac{2}{\sqrt{\pi r}}\left[1 + M_{B1}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + M_{B2}\left(\frac{r}{a}\right) + M_{B3}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \qquad (۱۶-۲)$$

ثابت‌های مجهول $M_{Ai}(i = 1, 2, 3)$ برای عمق ترک، با در نظر گرفتن دو بارگذاری مرجع و شرط صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه ترک $r = R_i$ به‌شکل رابطه (۲-۱۷) تعیین می‌شوند [۵۷].

$$M_{A1} = \frac{2\pi}{\sqrt{2Q}}(3Y_1 - Y_0) - \frac{24}{5}$$

$$M_{A2} = 3 \qquad (۱۷-۲)$$

$$M_{A3} = \frac{6\pi}{\sqrt{2Q}}(Y_0 - 2Y_1) + \frac{8}{5}$$

که در آن، ضرایب تصحیح هندسه Y_0 و Y_1 به‌صورت رابطه (۲-۱۸) تعریف می‌شوند.

$$Y_0 = B_0 + B_1\left(\frac{a}{t_c}\right) + B_2\left(\frac{a}{t_c}\right)^2 + B_3\left(\frac{a}{t_c}\right)^4 \qquad (۱۸-۲)$$

$$Y_1 = A_0 + A_1\left(\frac{a}{t_c}\right) + A_2\left(\frac{a}{t_c}\right)^2 + A_3\left(\frac{a}{t_c}\right)^4$$

ضرایب ثابت B_i و A_i به‌صورت توابع چندجمله‌ای از a/c در مرجع [۵۷] ذکر شده است.

برای گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی، ضرایب مجهول $M_{Bi}(i = 1, 2, 3)$ با در نظرگرفتن دو بارگذاری مرجع و شرط صفر بودن تابع وزنی در نوک ترک، به‌صورت رابطه (۲-۱۹) به‌دست می‌آیند.

$$M_{B1} = \frac{3\pi}{\sqrt{Q}}(2F_0 - 5F_1) - 8$$

$$M_{B2} = \frac{15\pi}{\sqrt{Q}}(3F_1 - F_0) + 15 \qquad (۱۹-۲)$$

$$M_{B3} = \frac{3\pi}{\sqrt{Q}}(3F_0 - 10F_1) - 8$$

که در آن، ضرایب تصحیح هندسه F_0 و F_1 به‌صورت توابعی از a/t_c و a/c به‌شکل زیر می‌باشند.

$$F_0 = \left[C_0 + C_1\left(\frac{a}{t_c}\right) + C_2\left(\frac{a}{t_c}\right)^2 + C_3\left(\frac{a}{t_c}\right)^4\right]\left(\frac{a}{c}\right) \qquad (۲۰-۲)$$

$$F_1 = \left[D_0 + D_1\left(\frac{a}{t_c}\right) + D_2\left(\frac{a}{t_c}\right)^2 + D_3\left(\frac{a}{t_c}\right)^4\right]\left(\frac{a}{c}\right)$$

ضرایب ثابت D_i و C_i به‌صورت توابع چندجمله‌ای از a/c در مرجع [۵۷] ذکر شده است.

۲-۳- تبدیل لاپلاس معکوس عددی

تبدیل انتگرالی لاپلاس در علوم مهندسی کاربرد گسترده‌ای دارد و استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی در بسیاری از تحقیقات جهت حل معادلات دیفرانسیل و انتگرالی، نشان دهنده اهمیت آن

است[۵۸]. روش‌های متعددی جهت تبدیل لاپلاس معکوس عددی وجود دارد. از میان روش‌های موجود، تقریب سری‌های فوریه به‌علت سادگی و دقت بالاتر نسبت به روش‌های دیگر مورد توجه قرار گرفته است. روش بسط سری‌های فوریه در ابتدا توسط دابنر و ابیت [۵۹] مورد استفاده قرار گرفت. دورباین [۶۰] نیز در مطالعات خود این روش را بهبود بخشید.

محققین بسیاری از روش‌های شتاب‌دهی مختلفی در مطالعات خود استفاده کرده‌اند، که به‌منظور افزایش سرعت همگرایی سری‌های فوریه مورد استفاده قرار می‌گیرند. جهت نگاشت تابع $\tilde{f}(s)$ از فضای لاپلاس به زمان، از سری‌های فوریه با بی‌نهایت جمله استفاده می‌شود و سپس این بی‌نهایت جمله با N جمله تقریب زده می‌شوند که موجب ایجاد خطای انباشتگی در محاسبات می‌شود. برخی از روش‌های شتاب‌دهی منجر به کاهش قابل ملاحظه خطای انباشتگی می‌شوند، اما اثربخشی آنها به انتخاب پارامترهای دلخواه در نتایج بستگی دارد. یکی دیگر از معایب روش‌های ارائه شده، وابستگی خطاهای گسسته‌سازی[۱] و انباشتگی[۲] است. در این حالت انتخاب پارامترهای آزاد به‌صورتی که باعث کاهش یک خطا شود، باعث افزایش خطای دیگر و حتی میل کردن خطا به بی‌نهایت (واگرایی) می‌شود. جهت رفع این مشکل روش پیشگویی-تصحیح پیشنهاد شده است که در آن، خطای گسسته‌سازی می‌تواند بدون اینکه موجب افزایش خطای انباشتگی شود کاهش یابد. البته دقت این روش نیز به انتخاب پارامترهای آزاد بستگی دارد. در روش ارائه شده توسط هانیگ و هیردس [۵۸] تعیین پارامترهای آزاد به‌صورت بهینه، موجب دقت بالاتر نسبت به روش‌های دیگر می‌شود.

۲-۳-۱ روش دورباین

تبدیل لاپلاس تابع حقیقی $f(t)$ و معکوس آن به‌صورت رابطه (۲-۲۱) بیان می‌شوند.

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad \text{(۲-۲۱-الف)}$$

---

[۱] Discretization error

[۲] Truncation error

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{v-i\infty}^{v+i\infty} \tilde{f}(s)e^{st}ds \qquad (۲-۲۱-ب)$$

در روابط بالا، s متغیر استاندارد تبدیل لاپلاس به‌شکل مختلط $s = v + iw$ است. s باید برای تابع $\tilde{f}(s)$ به‌گونه‌ای انتخاب شود که v از قسمت حقیقی تمام تکین‌های تابع $\tilde{f}(s)$ بزرگتر باشد. تبدیل لاپلاس معکوس عددی با رابطه (۲-۲۲-ب) به‌شکل زیر محاسبه می‌شود [۵۸].

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left[\mathrm{Re}\{\tilde{f}(s)\}\cos wt - \mathrm{Im}\{\tilde{f}(s)\}\sin wt\right]dw \qquad (۲-۲۲)$$

با استفاده از رابطه (۲-۲۲) و بسط سری فوریه $h(t) = e^{-vt}f(t)$ در بازه $[0\,,2T]$، یک رابطه تقریبی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{T}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\tilde{f}(s)\} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{\tilde{f}\left(v + i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\cos\frac{n\pi}{T}t - \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\left\{\tilde{f}\left(v + i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\sin\frac{n\pi}{T}t\right] - Er1(v,t,T) \qquad (۲-۲۳)$$

که در آن، $Er1(v,t,T)$ خطای گسسته‌سازی نام دارد که به‌شکل رابطه (۲-۲۴) بیان می‌شود.

$$Er1(v,t,T) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nvT}f(2nT + t) \qquad (۲-۲۴)$$

با توجه به رابطه (۲-۲۴) خطای گسسته‌سازی می‌تواند با انتخاب v به‌اندازه کافی بزرگ، کاهش یابد. خطای انباشتگی به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$Er2(N,v,t,T) = \frac{e^{vt}}{T}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{\tilde{f}(v + i\frac{n\pi}{T}\right\}\cos\frac{n\pi}{T}t - \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathrm{Im}\left\{\tilde{f}(v + i\frac{n\pi}{T})\right\}\sin\frac{n\pi}{T}t\right) \qquad (۲-۲۵)$$

در نهایت، مقادیر تابع $f(t)$ در روش دورباین با استفاده از رابطه زیر تخمین زده می‌شود.

$$f_N(t) = \frac{e^{vt}}{T}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\tilde{f}(v)\} + \sum_{n=0}^{N}\left\{\mathrm{Re}\left\{\tilde{f}\left(v + i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\cos\frac{n\pi}{T}t - \mathrm{Im}\left\{\tilde{f}\left(v + i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\sin\frac{n\pi}{T}t\right\}\right] \qquad (۲-۲۶)$$

۲-۳-۲ کاهش خطای گسسته‌سازی با استفاده از یک روش تصحیح‌کننده

با توجه به رابطه (۲-۲۴) و با انتخاب حاصل ضرب vT بزرگ، می‌توان خطای گسسته‌سازی را کاهش

داد. اما با توجه به رابطه (۲-۲۵)، vT بزرگ موجب واگرایی خطای انباشتگی می‌شود. روش تصحیح-کننده، خطای گسسته‌سازی را بدون افزایش خطای انباشتگی، کاهش می‌دهد.

با توجه به رابطه (۲-۲۳) و (۲-۲۶)، تخمین مقدار تابع در روش دوربابن، به‌صورت زیر است [۵۸].

$$f(t) = f_{\infty}(t) - Er1(v, t, T) \tag{۲-۲۷}$$

روش تصحیح‌کننده از رابطه تقریبی زیر استفاده می‌کند.

$$f(t) = f_{\infty}(t) - e^{-2vT} f_{\infty}(2T + t) - Er2(v, t, T) \tag{۲-۲۸}$$

خطای گسسته‌سازی $Er1(v, t, T)$، از خطای انباشتگی $Er2(v, t, T)$ بسیار کوچکتر است [۵۸]. با فرض خطای انباشتگی (۲-۲۵)، رابطه تقریبی تخمین $f(t)$ در روش تصحیح‌کننده به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$f_{NK}(t) = f_N(t) - e^{-2vT} f_{N_0}(2T + t) \tag{۲-۲۹}$$

۲-۳-۳ شتاب همگرایی

در مطالعه هانیگ و هیردس [۵۸]، سه روش شتاب‌دهی الگوریتم ε، روش مینیمم-ماکزیمم و روش مبتنی بر برازش منحنی قابل استفاده هستند. برای $f_N(t)$ غیریکنوا[۱]، الگوریتم ε و روش مینیمم-ماکزیمم در حالت کلی نرخ همگرایی را به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهند. اما در مواردی چون تبدیلات اویلر توابع یکنوا منجر به نتایج غیر قابل قبول می‌شوند. روش مبتنی بر برازش منحنی در این حالت موجب بهبود قابل توجه نتایج می‌شود [۵۸].

$$c_K = \frac{e^{vt}}{T}\left[\mathrm{Re}\left\{F\left(v + i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\cos\frac{n\pi}{T}t - \mathrm{Im}\left\{F\left(v + i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\sin\frac{n\pi}{T}t\right] \qquad K = 0, 1, 2, \ldots \tag{۲-۳۰}$$

در روش مبتنی بر برازش منحنی، مقدار تابع با استفاده از رابطه زیر تخمین زده می‌شود.

$$f_N(t) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{K=1}^{N} c_K \tag{۲-۳۱}$$

[۱] Non-Monotonous

فصل ۳ ضریب شدت تنش در باریکه

۳-۱- مقدمه

در این فصل، ضریب شدت تنش در یک باریکه دارای ترک لبه‌ای تعیین می‌شود. باریکه تحت شوک گرمایی به‌صورت کاهش دما در مرز شامل ترک قرار دارد و مرز دیگر عایق فرض می‌شود. معادلات ترموالاستیسیته کوپل حاکم پس از بی‌بعدسازی با استفاده از روش تبدیل لاپلاس، به‌طور تحلیلی حل می‌شود.

۳-۲- مطالعه موردی

باریکه آزاد (بدون قید مکانیکی) تحت شوک سرمایشی در دیواره سمت چپ قرار دارد. مرز سمت راست عایق فرض می‌شود. با توجه به رابطه سازگاری، در غیاب نیرو و گشتاورهای مکانیکی با استفاده از قانون هوک تنش نرمال در جهت y در حوزه لاپلاس برحسب میدان دما به‌صورت زیر است.

$$\tilde{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu}[Ax' + B - \alpha\bar{\theta}'] \tag{۳-۱}$$

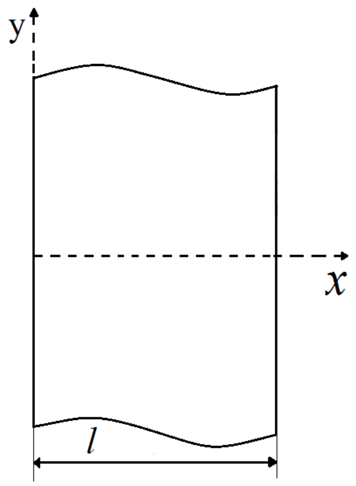
پس از قرار دادن میدان دمای بدون‌بعد باریکه در رابطه فوق و با استفاده از روابط (۳-۲)، که از روابط تعادل نیرو و گشتاورهای خارجی در باریکه نتیجه می‌شوند، ثابت‌های مجهول A و B تعیین می‌شوند.

$$\int_0^1 \tilde{\sigma}_y dx' = 0 \tag{۳-۲-الف}$$

$$\int_0^1 \tilde{\sigma}_y x' dx' = 0 \tag{۳-۲-ب}$$

۳-۳- میدان دما در باریکه بدون ترک

مطابق شکل (۳-۱)، یک باریکه بلند (طول بی‌نهایت در راستای y) همگن و همسانگرد به عرض محدود (در راستای x) در نظر گرفته می‌شود. مرز $x = l$ عایق فرض شده است. در ابتدا باریکه در دمای یکنواخت محیط قرار دارد که از زمان $t = 0$ به بعد تحت شوک گرمایی به‌صورت کاهش دما در مرز $x = 0$ قرار می‌گیرد.



شکل ۳-۱ شکل کلی باریکه بدون ترک [۴۵]

در غیاب نیروهای حجمی و منبع گرمایی داخلی، معادلات میدان حاکم ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته، در حوزه زمان طبق تئوری‌های لرد-شولمان، گرین-لیندزی و گرین-نقدی به‌شکل متحد زیر هستند.

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \gamma\left(\nabla T + t_1\nabla\dot{T}\right) = \rho\ddot{\mathbf{u}} \qquad (۳\text{-}۳)$$

$$\eta\rho c\dot{T} + \rho c(t_0+t_2+t_3)\ddot{T} + \gamma T_0\nabla\cdot[(t_0+t_3)\ddot{\mathbf{u}}] + \eta\dot{\mathbf{u}} = (k\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\kappa}^* t_3)\nabla^2 T + k t_3\nabla^2\dot{T} \qquad (۴\text{-}۳)$$

در این روابط، ∇ عملگر نابلا، $\mathbf{u}$ بردار جابه‌جایی، T دما، ρ چگالی، c ظرفیت گرمایی، λ و μ ثابت‌های لامه، γ ضریب انبساط حجمی، k ضریب رسانایی گرمایی، t_0 زمان آسایش تئوری لرد-شولمان و t_1 و t_2 زمان‌های آسایش گرین و لیندزی هستند. همچنین η و t_3 پارامترهای متحدساز هستند که برای فرم متحد معادلات حاکم در نظر گرفته شده‌اند [۶۱]. معادلات حاکم تئوری لرد-شولمان به ازای $\eta = 1$ و $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ به‌دست می‌آید. معادلات حاکم تئوری گرین-لیندزی به ازای $\eta = 1$ و $t_0 = t_3 = 0$ و معادلات حاکم تئوری گرین-نقدی به ازای $\eta = t_0 = t_1 = t_2 = 0$ حاصل می‌شوند.

تانسور تنش $\boldsymbol{\sigma}$، برحسب بردار جابه‌جایی و دما به‌شکل رابطه زیر بیان می‌شود.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{T}) - \gamma\left(T + t_1\dot{T}\right)\mathbf{I} \qquad (۵\text{-}۳)$$

که $\mathbf{I}$ ماتریس همانی است و $\mathbf{u}^T$ نشان دهنده ترانهاده بردار جابه‌جایی $\mathbf{u}$ است. برای سادگی پارامترهای

بی‌بعد زیر معرفی می‌شوند.

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{l}\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{l}\frac{\lambda + 2\mu}{\gamma T_0}\mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{\gamma T_0}\boldsymbol{\sigma}$$

$$\theta = \frac{T}{T_0}$$

$$t_0{}' = \frac{V}{l}t_0$$

$$t_1{}' = \frac{V}{l}t_1$$

$$t_2{}' = \frac{V}{l}t_2$$

$$t_3{}' = \frac{V}{l}t_3$$

$$\tau = \frac{V}{l}t$$

(۳-۶)

که l طول مشخصه و V سرعت مشخصه است. معادلات (۳-۳) تا (۳-۵) برحسب پارامترهای بی‌بعد به‌شکل زیر بیان می‌شوند.

$$C_S^2\nabla^2\mathbf{u}' + (C_P^2 - C_S^2)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}') - C_P^2\big(\nabla\theta + t_1\nabla\dot{\theta}\big) = \ddot{\mathbf{u}}'$$ (۳-۷-الف)

$$\begin{aligned}(t_0{}' + t_2{}' + t_3{}')\ddot{\theta} + \eta\dot{\theta} + \epsilon\nabla\cdot[(t_0{}' + t_3{}')\ddot{\mathbf{u}}' + \eta\dot{\mathbf{u}}'] \\ = \big(C_K^2\eta + C_T^2 t_3{}'\big)\nabla^2\theta + C_K^2 t_3{}'\nabla^2\dot{\theta}\end{aligned}$$ (۳-۷-ب)

$$\boldsymbol{\sigma}' = \left(1 - 2\frac{C_S^2}{C_P^2}\right)(\nabla\cdot\mathbf{u}')\mathbf{I} + \frac{C_S^2}{C_P^2}\big(\nabla\mathbf{u}' + \nabla\mathbf{u}'^{T}\big) - \big(\theta + t_1'\dot{\theta}\big)\mathbf{I}$$ (۳-۷-ج)

که در آن،

$$C_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho V^2}$$ (۳-۸-الف)

$$C_S^2 = \frac{\mu}{\rho V^2}$$ (۳-۸-ب)

$$C_T^2 = \frac{\kappa}{\rho c V^2}$$ (۳-۸-ج)

$$C_K^2 = \frac{k}{\rho c l V}$$ (۳-۸-د)

$$\epsilon = \frac{\gamma^2 \theta_0}{\rho c(\lambda + 2\mu)}$$ (۳-۸-ه)

در روابط (۳-۷)، C_P سرعت الاستیک انبساطی[۱] بی‌بعد، C_S سرعت موج برشی[۲] بدون‌بعد، C_T سرعت موج گرمایی[۳] بی‌بعد و C_K ثابت میرایی[۴] در تئوری گرین-نقدی است. $C_K/\sqrt{t_0' + t_2'}$ سرعت موج گرمایی در تئوری‌های لرد-شولمان و گرین-لیندزی و ϵ پارامتر ترموالاستیک کوپل است. در تئوری گرین-نقدی نوع II، ثابت میرایی $C_K = 0$ است.

شرایط اولیه برای مسئله به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathbf{u}'(x', 0) = \dot{\mathbf{u}}'(x', 0) = \theta(x', 0) = \dot{\theta}(x', 0) = 0$$ (۳-۹)

با اعمال تبدیل لاپلاس بر روابط (۳-۷) با توجه به شرایط اولیه، متغیر زمان از معادلات حذف می‌شود.

$$C_S^2 \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}' + (C_P^2 - C_S^2)\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}') - C_P^2(1 + s t_1')\nabla\tilde{\theta} = s^2 \tilde{\mathbf{u}}'$$ (۳-۱۰-الف)

$$\begin{aligned} s^2\left[(t_0' + t_2' + t_3')\tilde{\theta} + \epsilon(t_0' + t_3')(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}')\right] + s\eta\left(\tilde{\theta} + \epsilon(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}')\right) \\ = (\eta C_K^2 + t_3' C_T^2 + s t_3' C_K^2)\nabla^2\tilde{\theta} \end{aligned}$$ (۳-۱۰-ب)

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' = \left(1 - 2\frac{C_S^2}{C_P^2}\right)(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}')\mathrm{I} + \frac{C_S^2}{C_P^2}\left(\nabla\tilde{\mathbf{u}}' + \nabla\tilde{\mathbf{u}}'^{\mathrm{T}}\right) - (1 + s t_1')\tilde{\theta}\mathbf{I}$$ (۳-۱۰-ج)

که در آن، $\tilde{\mathbf{u}}'$ تبدیل لاپلاس $\mathbf{u}'$، $\tilde{\theta}$ تبدیل لاپلاس θ و $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'$ تبدیل لاپلاس $\boldsymbol{\sigma}'$ و s متغیر استاندارد تبدیل لاپلاس است. معادلات (۳-۱۰) در مختصات دکارتی برای باریکه ($0 \le x' \le 1$)، به‌صورت زیر ساده

---

[۱] Speed of elastic dilatational

[۲] Speed of shear wave

[۳] Speed of thermal wave

[۴] Damping coefficient

می‌شوند.

$$C_P^2\left[\frac{d^2\tilde{\mathbf{u}}'}{dx'^2}-(1+st_1')\frac{d\tilde{\theta}}{dx'}\right]=s^2\tilde{\mathbf{u}}' \tag{۳-۱۱-الف}$$

$$s^2\left[(t_0'+t_2'+t_3')\tilde{\theta}+\epsilon(t_0'+t_3')\frac{d\tilde{\mathbf{u}}'}{dx'}\right]+s\eta\left[\tilde{\theta}+\epsilon\frac{d\tilde{\mathbf{u}}'}{dx'}\right]=[(\eta+st_3')C_K^2+t_3'C_T^2]\frac{d\tilde{\theta}}{dx'} \tag{۳-۱۱-ب}$$

با حذف $\tilde{\theta}$ از روابط (۳-۱۱)، معادله حاکم بر جابه‌جایی به‌صورت زیر نتیجه می‌شود.

$$C_1\frac{d^4\tilde{u}'}{dx'^4}-C_2\frac{d^2\tilde{u}'}{dx'^2}+C_3\tilde{u}'=0 \tag{۳-۱۲}$$

که ثابت‌های C_1، C_2 و C_3 به‌صورت روابط (۳-۱۳) هستند.

$$C_1=C_P^2[(\eta+st_3')C_K^2+t_3'C_T^2] \tag{۳-۱۳-الف}$$

$$\begin{aligned}C_2=&s^2[(\eta+st_3')C_K^2+t_3'C_T^2]+C_P^2s[s(t_0'+t_2'+t_3')+\eta]\\&+C_P^2(1+st_1')[s^2\epsilon(t_0'+t_3')+s\eta\epsilon]\end{aligned} \tag{۳-۱۳-ب}$$

$$C_3=s^4(t_0'+t_2'+t_3')+s^3\eta \tag{۳-۱۳-ج}$$

معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت (۳-۱۲) دارای پاسخی به‌صورت زیر است.

$$\tilde{u}'=A_1e^{-k_1x'}+A_2e^{k_1x'}+A_3e^{-k_2x'}+A_4e^{k_2x'} \tag{۳-۱۴}$$

که ثابت‌های k_1 و k_2 عبارتند از

$$k_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2C_1}}\left[C_2\pm\sqrt{C_2^2-4C_1C_3}\right]^{0.5} \tag{۳-۱۵}$$

توزیع دمای بدون بعد در حوزه لاپلاس با قرار دادن جابه‌جایی (۳-۱۴)، در رابطه (۳-۱۱-الف) به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\tilde{\theta}=A_5e^{-k_1x'}+A_6e^{k_1x'}+A_7e^{-k_2x'}+A_8e^{k_2x'} \tag{۳-۱۶}$$

ثابت های A_5 تا A_8، برحسب ثابت‌های A_1 تا A_4 به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$A_5 = \frac{s^2 - C_P^2 k_1^2}{C_P^2 k_1 (1 + s t_1')} A_1$$ (۳-۱۷-الف)

$$A_6 = \frac{C_P^2 k_1^2 - s^2}{C_P^2 k_1 (1 + s t_1')} A_2$$ (۳-۱۷-ب)

$$A_7 = \frac{s^2 - C_P^2 k_2^2}{C_P^2 k_2 (1 + s t_1')} A_3$$ (۳-۱۷-ج)

$$A_8 = \frac{C_P^2 k_2^2 - s^2}{C_P^2 k_2 (1 + s t_1')} A_4$$ (۳-۱۷-د)

شرایط مرزی باریکه در حوزه لاپلاس به‌شکل زیر بیان می‌شوند.

$$\tilde{\theta}(0, s) = -\frac{1}{s}$$ (۳-۱۸-الف)

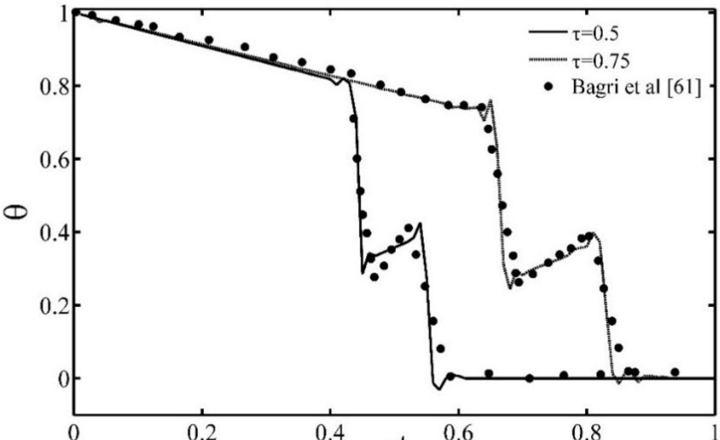
$$\tilde{\sigma}'_x(0, s) = 0$$ (۳-۱۸-ب)

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx'}(1, s) = 0$$ (۳-۱۸-ج)

$$\tilde{\sigma}'_x(1, s) = 0$$ (۳-۱۸-د)

ضرایب مجهول روابط (۳-۱۴) و (۳-۱۶) با اعمال شرایط مرزی (۳-۱۸) تعیین می‌شوند.

میدان دما در باریکه به طول بی‌نهایت با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی رابطه (۳-۱۶-ب) تعیین می‌شود. در شکل (۳-۲) توزیع دما در دو زمان با مرجع [۶۱] مقایسه شده است.

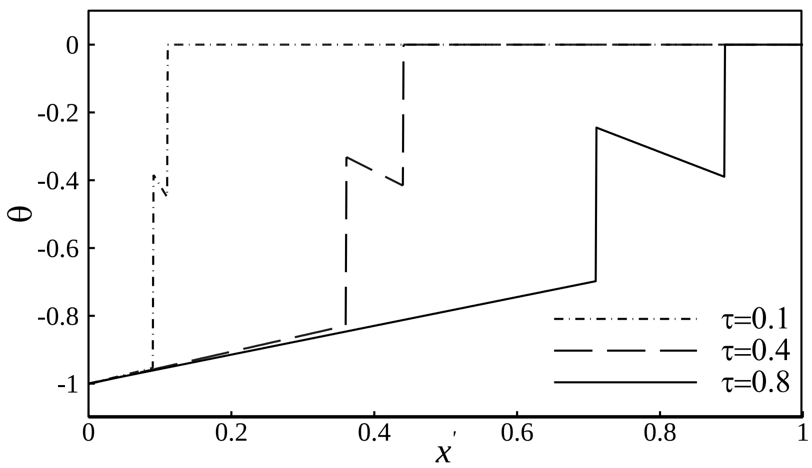


شکل ۳-۲ مقایسه توزیع دمای تئوری لرد-شولمان با مرجع [۶۱]

مطابق شکل، نتایج از دقت کافی برخوردارند.

شکل (۳-۳)، توزیع دمای تئوری لرد-شولمان را در باریکه نشان می‌دهد. در این شکل، توزیع دما برحسب عرض باریکه در سه زمان به ازای $C_P = C_K = 1$، $\epsilon = 0.05$ و $t'_0 = 1$ رسم شده است.

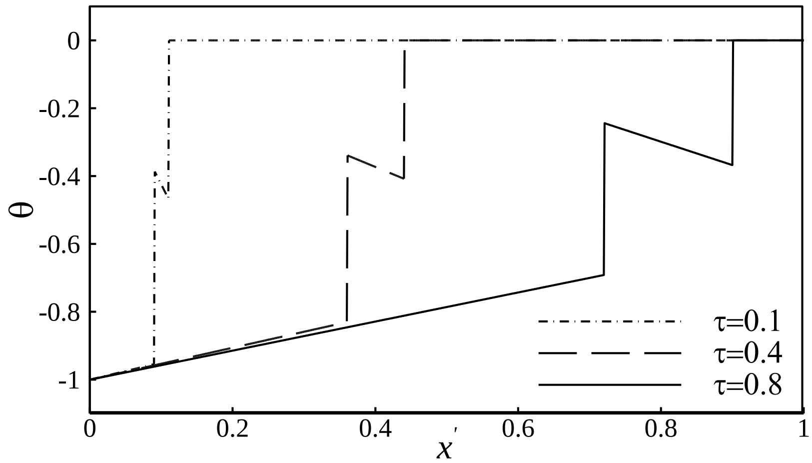
به ازای مقادیر در نظر گرفته شده، سرعت موج گرمایی برابر واحد است. استهلاک موج گرما در شکل مشهود است. برخلاف قانون فوریه، موج گرما در باریکه با سرعت محدود منتشر می‌شود. در زمان‌های بی‌بعد فوق، تنها دمای نقاطی که بین دیواره سمت چپ و پیشانی موج گرمایی قرار دارند تغییر کرده و نقاط دیگر در دمای اولیه قرار دارند.



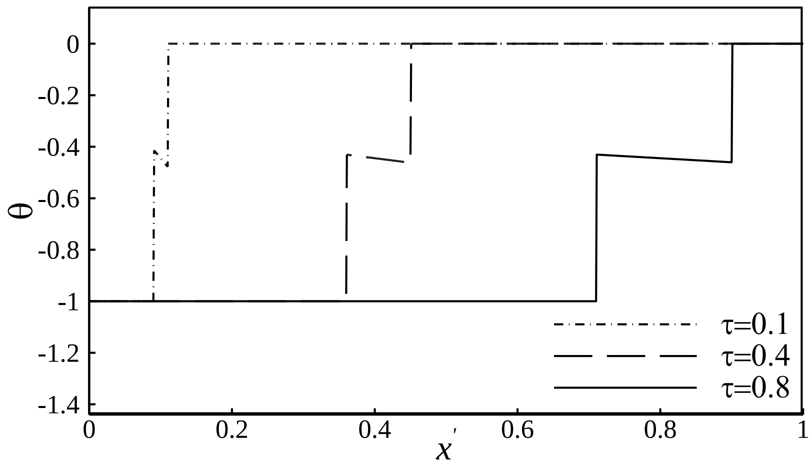
شکل ۳-۳ توزیع دمای تئوری لرد-شولمان برحسب عرض باریکه

در شکل (۳-۴)، توزیع دما براساس تئوری گرین-لیندزی برحسب عرض باریکه، در زمان‌های مختلف نشان داده شده است. این شکل، به ازای $t'_1 = t'_2 = 1$ رسم شده است. برای این شرایط مرزی مشهود است که تئوری گرین-لیندزی نیز سرعت محدود موج گرما را در باریکه تأیید می‌کند و دمای نقاط بین پیشانی موج و دیواره سمت راست، بدون تغییر باقی مانده است.

با توجه به این‌که در تئوری گرین-نقدی نوع II، $C_K = 0$ است، با فرض $t'_3 = 1$ و $C_T = 1$ توزیع دمای حاصل از تئوری گرین-نقدی برحسب عرض باریکه در شکل (۳-۵) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که موج گرمایی منتشر شده در جسم بدون استهلاک است که از $C_K = 0$ ناشی می‌شود.

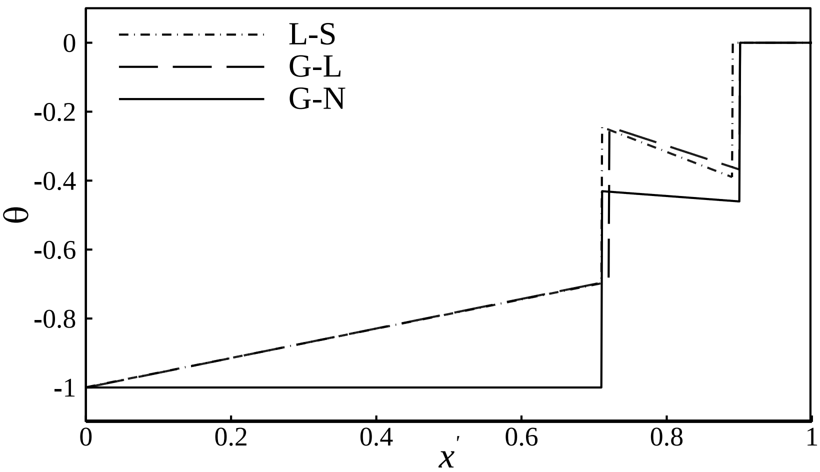


شکل ۳-۴ توزیع دمای تئوری گرین-لیندزی برحسب عرض باریکه



شکل ۳-۵ توزیع دمای تئوری گرین-نقدی برحسب عرض باریکه

در شکل (۳-۶)، توزیع دمای تئوری‌های مذکور در زمان بی‌بعد $\tau = 0.8$ در باریکه رسم شده است.



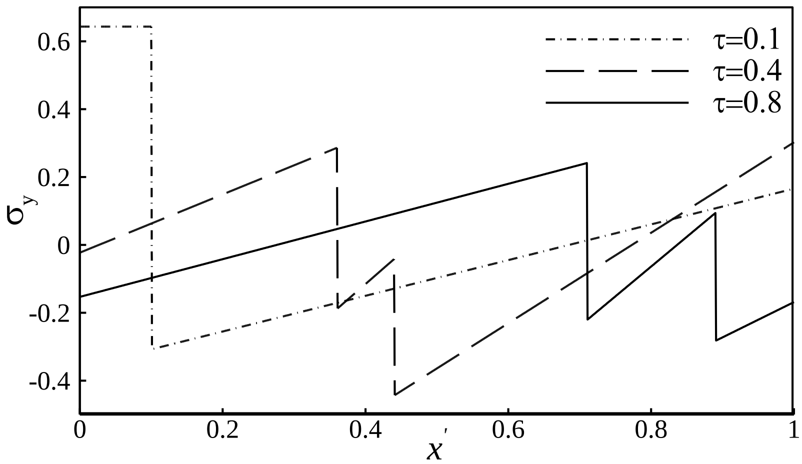
شکل ۳-۶ توزیع دمای تئوری‌های لرد-شولمان، گرین-لیندزی و گرین-نقدی برحسب عرض باریکه

مطابق شکل، در تئوری گرین-نقدی، موج بدون استهلاک در باریکه منتشر می‌شود و موج گرمایی حاصل از تئوری‌های لرد-شولمان و گرین-لیندزی رفتار مشابهی دارند و پیش‌بینی این دو تئوری برای توزیع دما در باریکه تقریباً یکسان است.

۳-۴- میدان تنش در باریکه

پس از تعیین میدان تنش در باریکه در حوزه لاپلاس در بخش ۳-۲، با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معکوس عددی توزیع تنش نرمال در جهت y در حوزه زمان به‌دست می‌آید.

در شکل (۳-۷)، توزیع تنش σ_y براساس تئوری لرد-شولمان در باریکه در سه زمان مختلف رسم شده است. با توجه به شکل (۳-۷)، توزیع تنش در باریکه ناپیوسته است و در زمان‌های ابتدایی تنش از دیواره $x' = 0$ تا پیشانی موج گرمایی کششی است و با گذشت زمان تنش کششی کاهش می‌یابد و به تنش فشاری تبدیل می‌شود. همچنین با گذشت زمان بیشینه مقدار تنش در باریکه کاهش می‌یابد.

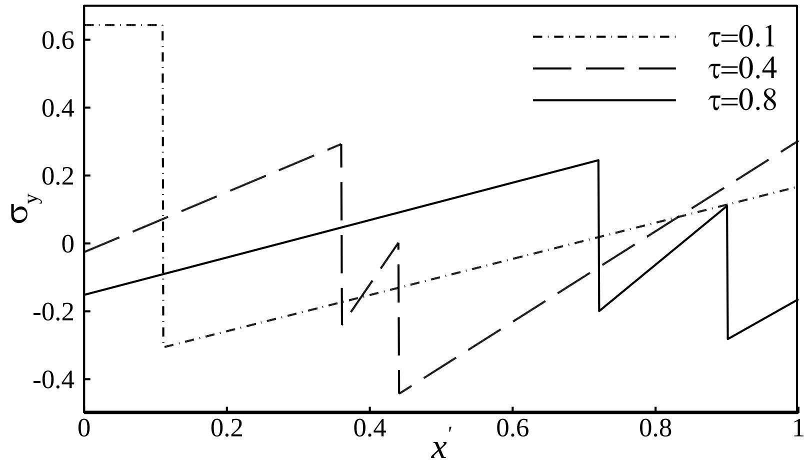


شکل ۳-۷ توزیع تنش تئوری لرد-شولمان برحسب عرض باریکه

همچنین، با توجه به شکل مشاهده می‌شود که با توجه به سرعت واحد موج گرمایی، شکستگی در نمودارهای تنش با سرعت در نظر گرفته شده سازگاری دارد.

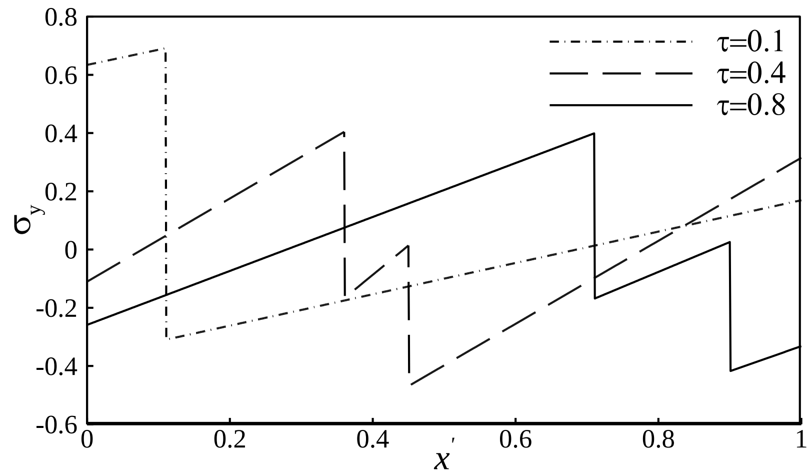
توزیع تنش براساس تئوری گرین-لیندزی در شکل (۳-۸) در باریکه نشان داده شده است. مطابق شکل، تنش در باریکه به‌صورت موج منتشر شده و در یک زمان خاص، شکستگی‌ها در نمودارهای دما

و تنش با توجه به زمان آسایش شار گرمایی و سرعت موج یکسان، در نقاط یکسانی رخ می‌دهد.



شکل ۳-۸ توزیع تنش براساس تئوری گرین-لیندزی در باریکه در زمان‌های مختلف

در شکل (۳-۹)، توزیع تنش تئوری گرین-نقدی در باریکه نشان داده شده است.

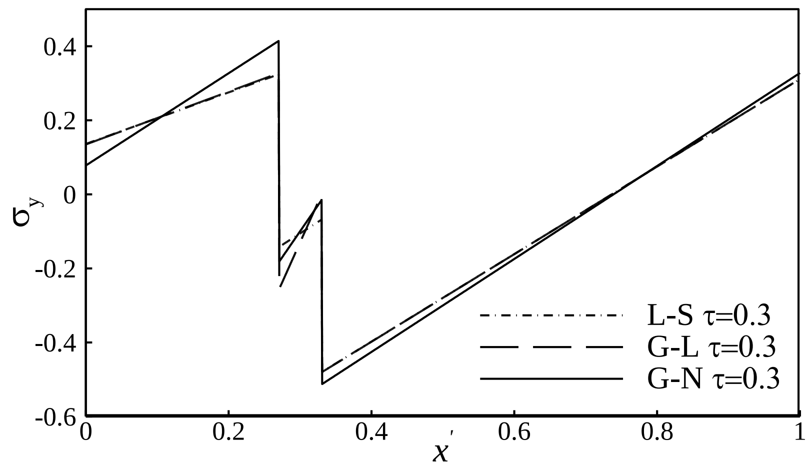


شکل ۳-۹ توزیع تنش براساس تئوری گرین-نقدی در باریکه در زمان‌های مختلف

موج تنش در باریکه با سرعت واحد منتشر می‌شود و با گذشت زمان، بیشینه تنش در باریکه کاهش می‌یابد و به توزیع تنش پایا نزدیک می‌شود.

در شکل (۳-۱۰)، توزیع تنش تئوری‌های فوق در زمان بی‌بعد $\tau = 0.3$ مقایسه شده‌اند. با توجه به شکل، بیشینه تنش در تئوری گرین-نقدی از دو تئوری دیگر بزرگ‌تر است و مشاهده می‌شود که شیب خطوط مربوط به این تئوری، از دو تئوری دیگر بیشتر است که از صفر بودن استهلاک در این تئوری

ناشی می‌شود. همچنین مشابه توزیع دما، پیش‌بینی تئوری‌های لرد-شولمان و گرین-لیندزی برای توزیع تنش نیز در باریکه بسیار نزدیک است.

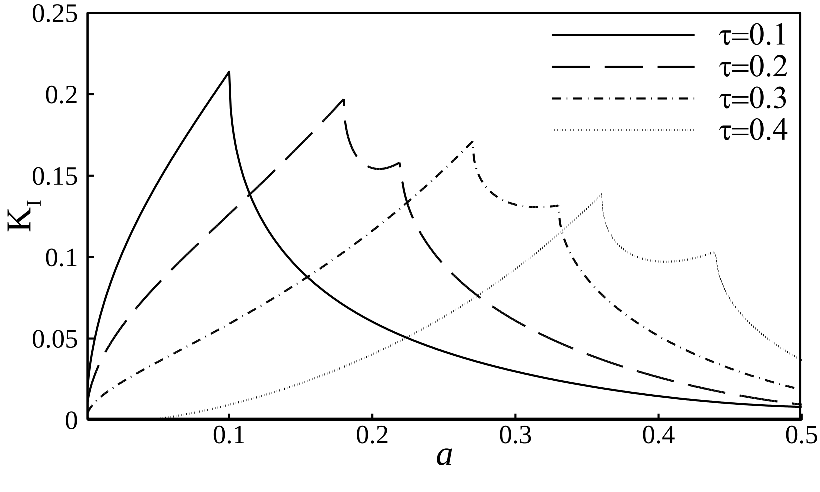


شکل ۳-۱۰ توزیع تنش تئوری‌های لرد-شولمان، گرین-لیندزی و گرین-نقدی برحسب عرض باریکه

۳-۵- ضریب شدت تنش

در این بخش ضریب شدت تنش در باریکه دارای ترک لبه‌ای با استفاده از تابع وزنی بیان شده در بخش (۲-۲-۱)، با استفاده از رابطه (۲-۲) تعیین می‌شود.

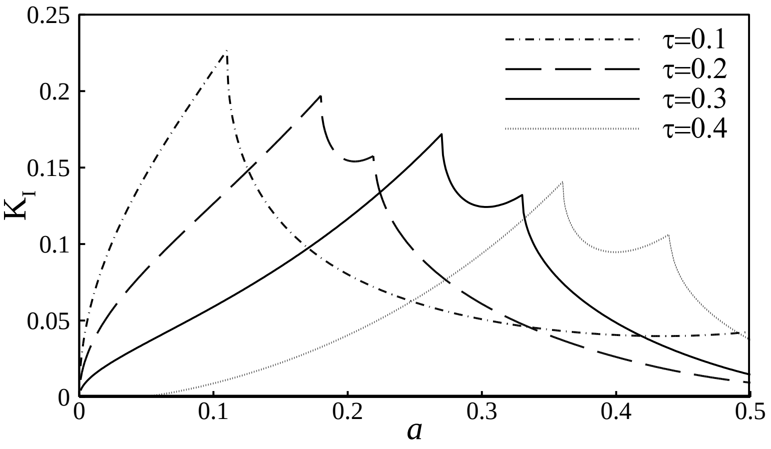
در شکل (۳-۱۱)، ضریب شدت تنش تئوری لرد-شولمان برحسب طول ترک در زمان‌های مختلف نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۱ ضریب شدت تنش تئوری لرد-شولمان برحسب طول نسبی ترک

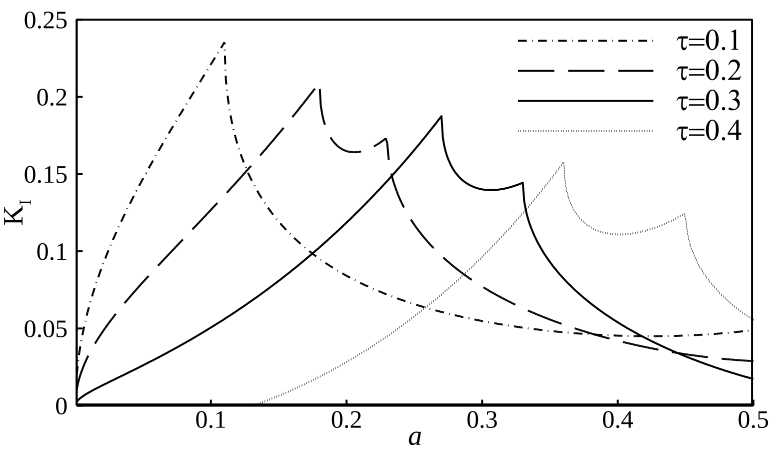
مشاهده می‌شود که در زمان‌های ابتدایی، بیشینه ضریب شدت تنش بزرگ‌تر است و با گذشت زمان به علت استهلاک موج تنش منتشرشده در باریکه، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد و بر ضریب شدت تنش پایای حاصل از تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته منطبق می‌شود.

در شکل (۳-۱۲)، ضریب شدت تنش تئوری گرین-لیندزی برحسب طول ترک رسم شده است. ضریب شدت تنش با افزایش طول ترک به مقدار بیشینه می‌رسد و سپس با افزایش طول ترک، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد. در هر زمان ضریب شدت تنش بیشینه برای ترکی اتفاق می‌افتد که در موقعیت پیشانی موج تنش واقع می‌شود.



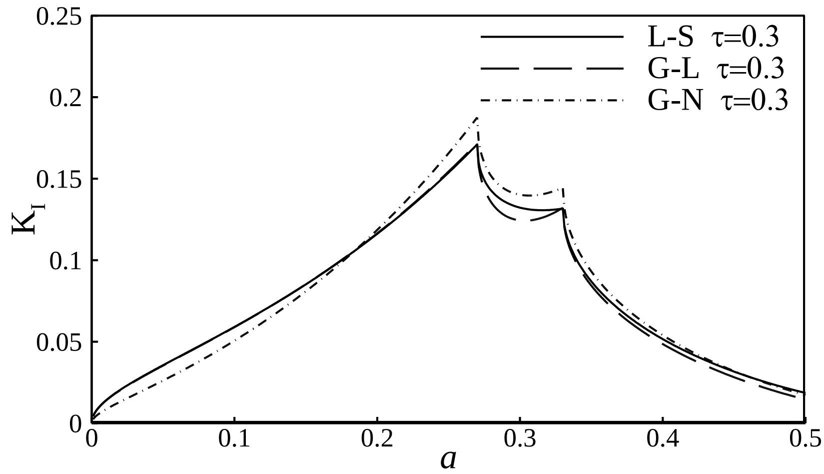
شکل ۳-۱۲ ضریب شدت تنش تئوری گرین-لیندزی برحسب طول نسبی ترک

شکل (۳-۱۳)، ضریب شدت تنش تئوری گرین-نقدی را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱۳ ضریب شدت تنش تئوری گرین-نقدی برحسب طول نسبی ترک

در شکل (۳-۱۴)، ضریب شدت تنش تئوری‌های فوق در زمان بی‌بعد $\tau = 0.3$ برحسب طول ترک رسم شده است. با توجه به شکل، بیشینه ضریب شدت تنش حاصل از تئوری گرین-نقدی از دو تئوری دیگر بزرگ‌تر است و تئوری‌های گرین-لیندزی و لرد-شولمان ضریب شدت تنش مشابهی را پیش‌بینی می‌کنند. همچنین، برای ترک‌هایی که نوک آنها از پیشانی موج تنش فاصله دارد، ضریب شدت تنش حاصل از هر سه تئوری اختلاف کمی دارد.



شکل ۳-۱۴ ضریب شدت تنش ترک لبه‌ای تئوری‌های لرد-شولمان، گرین-لیندزی و گرین-نقدی

نتایج این فصل اثر سرعت محدود موج گرما در تئوری‌های لرد-شولمان، گرین-لیندزی و گرین-نقدی را نشان می‌دهد. در تئوری گرین-نقدی با توجه به صفر بودن استهلاک موج گرما و تنش، مقادیر بیشینه پیش‌بینی شده تنش و ضریب شدت تنش از تئوری‌های لرد-شولمان و گرین-لیندزی بیشتر است. تئوری‌های لرد-شولمان و گرین-لیندزی نتایج دما، تنش و ضریب شدت تنش مشابهی در باریکه را پیش‌بینی می‌کنند. در طول ترک‌هایی که نوک آنها از پیشانی موج تنش فاصله دارد، ضریب شدت تنش در هر سه تئوری نزدیک است. همچنین، مطابق نمودارهای مربوط به ضریب شدت تنش، مشاهده می‌شود که با گذشت زمان، ضریب شدت تنش بیشینه در باریکه کاهش می‌یابد.

با توجه به کوپلینگ بین میدان‌های الاستیک و حرارتی، شکستگی در نمودارهای دما، تنش و ضریب شدت تنش در دو مرحله رخ می‌دهد و موجب ایجاد دو جبهه برای موج گرمایی می‌شود.

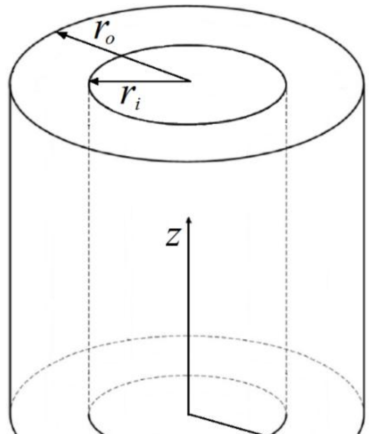
فصل ۴ هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه

۴-۱- مقدمه

در این فصل، ضریب شدت تنش در استوانه جدارضخیم دارای ترک محیطی و نیم‌بیضوی، تحت بارگذاری گرمایی طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه تعیین می‌شود. معادلات حاکم غیرکوپل فرض و از وجود نیروهای حجمی و منبع گرمایی داخلی صرف‌نظر می‌شود. معادلات حاکم به‌صورت تحلیلی در حوزه لاپلاس حل و با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی به حوزه زمان منتقل می‌شوند. پس از مقایسه نتایج دما، تنش محوری و تنش محیطی با مدل کاتانو-ورنات، اثر زمان‌های آسایش شار گرمایی و گرادیان دما بر نتایج دما و تنش مدل تأخیر فاز دوگانه نشان داده می‌شود.

۴-۲- میدان دما

استوانه توخالی به‌اندازه کافی بلند مطابق شکل (۴-۱)، به شعاع داخلی r_i و خارجی r_o در دمای اولیه T_0 و شرایط مرزی گرمایی متقارن محوری قرار دارد. مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه برای ماده همسانگرد به‌صورت رابطه (۴-۱) است [۱۳].



شکل ۴-۱ شکل کلی استوانه بلند و توخالی

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t+\tau_q) = -k\nabla T(\mathbf{x}, t+\tau_T) \tag{۴-۱}$$

در این رابطه، τ_T زمان آسایش گرادیان دما، τ_q زمان آسایش شار گرمایی، T دما، k ضریب هدایت گرمایی و **q** بردار شار گرمایی را نشان می‌دهد. رابطه بالا، با در نظر گرفتن بسط تیلور یک جمله برای τ_q و با فرض $\tau_T=0$ به معادله هدایت گرمایی هذلولوی (مدل کاتانو-ورنات) و با فرض $\tau_q=\tau_T$ به قانون فوریه تبدیل می‌شود. معادله هدایت گرمایی با در نظر گرفتن دو جمله برای بسط تیلور **q** و یک جمله برای T طبق مدل تأخیر فاز دوگانه حول زمان t به‌صورت زیر است:

$$\vec{q} + \tau_q \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2}\frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial t^2} = -K\left[\vec{\nabla}T + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}T\right] \tag{۴-۲}$$

برای یک جامد صلب، قانون اول ترمودینامیک به‌صورت زیر است:

$$-\nabla.\vec{q} + R = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{۴-۳}$$

که در آن، R منبع گرمای داخلی، ρ چگالی و C_p گرمای ویژه است. معادله حاکم بر هدایت گرمایی یک جامد صلب با حذف شار گرمایی در روابط (۴-۲) و (۴-۳) به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - R\right) = \nabla\left(K\left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla T\right) \tag{۴-۴}$$

با فرض عدم وجود منبع گرمایی داخلی، معادله حاکم بر هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه برای یک استوانه جدار ضخیم و بلند در حالت متقارن محوری به‌صورت رابطه (۴-۵) بیان می‌شود.

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rK\left\{\frac{\partial T}{\partial r} + \tau_T \frac{\partial^2 T}{\partial t\,\partial r}\right\}\right] \tag{۴-۵}$$

شرایط مرزی و اولیه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$T(r_i, t) = T_{wi} \tag{۴-۶-الف}$$

$$T(r_o, t) = T_{wo} \tag{۴-۶-ب}$$

$$T(r, 0) = T_0 \tag{۴-۷-الف}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(r, 0) = 0 \tag{۴-۷-ب}$$

برای سادگی، پارامترهای بی‌بعد زیر تعریف می‌شوند.

$$\tau = \frac{K_0' t}{r_o^2} \qquad R_i = \frac{r_i}{r_o} \tag{۴-۸}$$

$$\varepsilon = \frac{K'_0\tau_q}{r_o^2}$$
$$\delta = \frac{K'_0\tau_T}{r_o^2}$$
$$K'_0 = \frac{K_0}{\rho_0 C_0}$$
$$\eta = \frac{r}{r_o}$$
$$\theta = \frac{T - T_0}{T_{wo} - T_0}$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد فوق، معادله هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه –معادله (۴-۵)- به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\left(1 + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \left[\delta\frac{\partial}{\partial\tau} + 1\right]\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right] \qquad (۴-۹)$$

این رابطه ماهیت موج‌گونه معادله هدایت گرمایی در مدل تأخیر فاز دوگانه را نشان می‌دهد که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با مرتبه بیشتر از یک نسبت به زمان است. طبق رابطه (۴-۱۰) سرعت موج گرما در مدل تأخیر فاز دوگانه به‌صورت زیر است.

$$C_{DPL} = \frac{\sqrt{2\delta}}{\varepsilon} \qquad (۴-۱۰)$$

بیان رابطه (۴-۹) در فضای لاپلاس با توجه به شرایط اولیه، منجر به معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر مسئله برحسب متغیر مکان می‌شود.

$$s\left(1 + \varepsilon s + \frac{\varepsilon^2}{2}s^2\right)\tilde{\theta} = [\delta s + 1]\left[\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\eta}\right] \qquad (۴-۱۱)$$

رابطه (۴-۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\eta^2\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial\eta^2} + \eta\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\eta} - E\eta^2\tilde{\theta} = 0 \qquad (۴-۱۲)$$

که در آن،

$$E = \frac{\left(1 + \varepsilon s + \frac{\varepsilon^2}{2}s^2\right)s}{\delta s + 1} \qquad (۴-۱۳)$$

معادله دیفرانسیل بسل اصلاح‌شده (۴-۱۲) دارای پاسخی به‌صورت زیر است:

$$\tilde{\theta}(\eta, s) = A_1 I_0(\sqrt{E}\eta) + A_2 K_0(\sqrt{E}\eta) \qquad (۴-۱۴)$$

توابع بسل اصلاح‌شده مرتبه صفر نوع اول I_0 و دوم K_0 پاسخ‌های مستقل معادله دیفرانسیل (۴-۱۲)

هستند. شرایط مرزی (۴-۶)، در حوزه لاپلاس به‌شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\tilde{\theta}(1,s)=\frac{1}{s} \qquad \text{(۴-۱۵-الف)}$$

$$\tilde{\theta}(R_i,s)=\frac{\theta_{wi}}{s} \qquad \text{(۴-۱۵-ب)}$$

ضرایب مجهول حل (۴-۱۴) با اعمال شرایط مرزی (۴-۱۵) تعیین می‌شوند.

$$A_1=\frac{-K_0\left(\sqrt{E}R_i\right)+\theta_{wi}K_0\left(\sqrt{E}\right)}{s\left(I_0\left(\sqrt{E}R_i\right)K_0\left(\sqrt{E}\right)-K_0\left(\sqrt{E}R_i\right)I_0\left(\sqrt{E}\right)\right)} \qquad \text{(۴-۱۶-الف)}$$

$$A_2=\frac{I_0\left(\sqrt{E}R_i\right)-\theta_{wi}I_0\left(\sqrt{E}\right)}{s\left(I_0\left(\sqrt{E}R_i\right)K_0\left(\sqrt{E}\right)-K_0\left(\sqrt{E}R_i\right)I_0\left(\sqrt{E}\right)\right)} \qquad \text{(۴-۱۶-ب)}$$

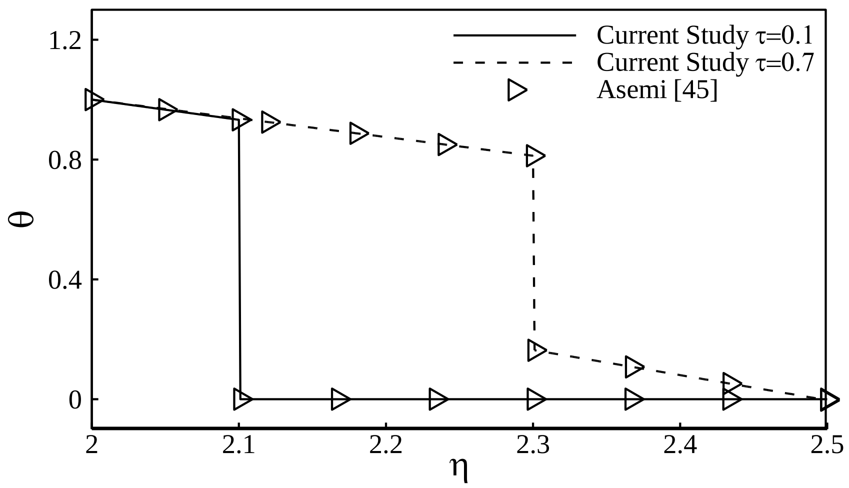
میدان دما در حوزه زمان، با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معکوس عددی مرجع [۵۸] تعیین می‌شود.

جهت بررسی درستی نتایج، توزیع دما، تنش محوری، تنش محیطی و ضریب شدت تنش با مدل هذلولوی مقایسه می‌شود. در شکل (۴-۲)، توزیع دمای مدل هدایت گرمایی هذلولوی که با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی به‌دست آمده است؛ با نتیجه حل تحلیلی مرجع [۴۵] مقایسه شده است. در این شکل، توزیع دما برحسب شعاع برای مدل کاتانو-ورنات در زمان‌های $\tau=0.1$ و $\tau=0.3$ به ازای $\varepsilon=1$ برای استوانه جدار ضخیم به شعاع‌های بدون بعد داخلی $R_i=2$ و خارجی $R_o=2.5$ با در نظر گرفتن شرایط مرزی زیر رسم شده است.

$$\theta(R_i,t)=1 \qquad \text{(۴-۱۷-الف)}$$

$$\theta(R_o,t)=0 \qquad \text{(۴-۱۷-ب)}$$

توزیع دما در دیواره استوانه طبق مدل هذلولوی در زمان‌های مختلف در شکل (۴-۲) آمده است. سرعت محدود موج گرما در زمان بی‌بعد $\tau=0.1$ کاملاً مشخص است، دمای سطح داخلی تا پیشانی موج افزایش یافته و نقاط جلوتر از پیشانی موج در دمای اولیه قرار دارند. در زمان $\tau=0.7$ نیز موج از دیواره داخلی به خارجی رسیده و به سمت دیواره داخلی منعکس می‌شود. با توجه به شکل (۴-۲)، نتایج انطباق قابل قبولی دارند.



شکل ۴-۲ مقایسه توزیع دمای مدل کاتانو-ورنات با مرجع [۴۵]

در شکل (۴-۳)، توزیع دمای حاصل از مدل‌های تأخیر فاز دوگانه و کاتانو-ورنات مقایسه شده است. توزیع دما با در نظر گرفتن شرایط مرزی و زمان‌های آسایش زیر به‌دست آمده است.

$$\theta(R_o, t) = 1 \quad (۴\text{-}۱۸\text{-الف})$$

$$\theta(R_i, t) = 0 \quad (۴\text{-}۱۸\text{-ب})$$

$$\delta = 0.25 \quad (۴\text{-}۱۹\text{-الف})$$

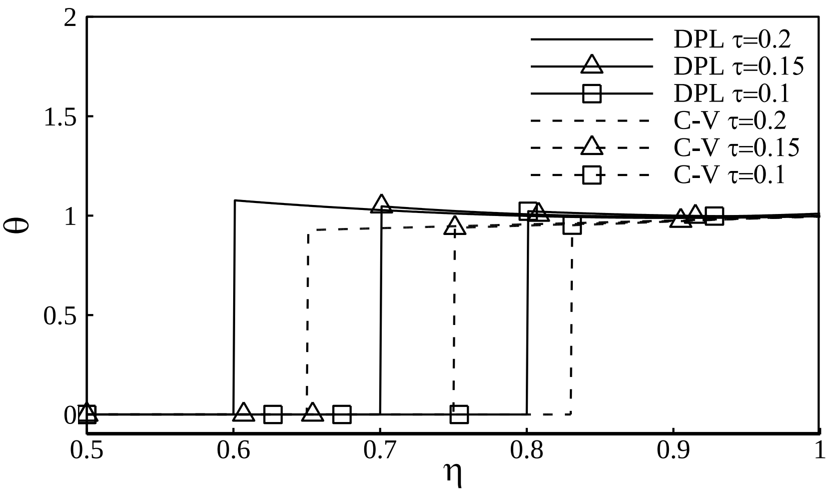
$$\varepsilon = 0.35 \quad (۴\text{-}۱۹\text{-ب})$$

طبق رابطه (۴-۱۰)، سرعت موج گرمایی در مدل تأخیر فاز دوگانه و مدل کاتانو-ورنات به‌ترتیب برابر است با:

$$C_{DPL} = \frac{\sqrt{2\delta}}{\varepsilon} = 2.02 \quad (۴\text{-}۲۰\text{-الف})$$

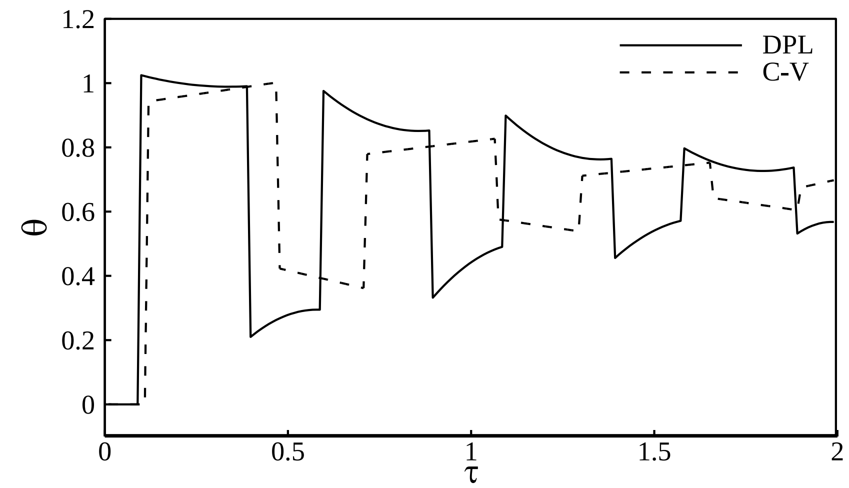
$$C_{C-V} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = 1.69 \quad (۴\text{-}۲۰\text{- ب})$$

در نمودارها، موج گرما برای هر دو مدل از دیواره خارجی به‌سمت دیواره داخلی استوانه با سرعت محدود حرکت می‌کند. موقعیت پیشانی موج با سرعت به‌دست آمده در روابط فوق انطباق دارد.



شکل ۴-۳ توزیع دمای مدل‌های کاتانو-ورنات (C-V) و تأخیر فاز دوگانه (DPL) برحسب شعاع

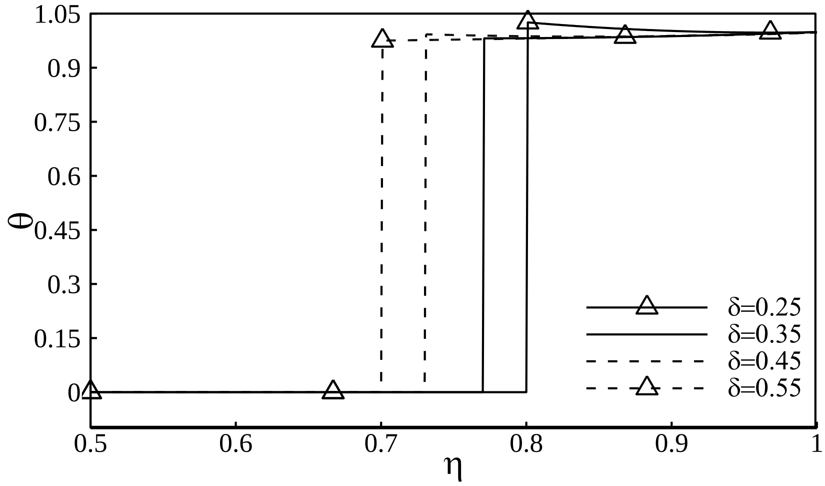
در شکل (۴-۴)، توزیع دما در موقعیت $\eta=0.8$ برحسب زمان نشان داده شده است. با توجه به تعداد و ضخامت قله‌های نمودارها، بیشتر بودن سرعت موج گرما طبق مدل تأخیر فاز دوگانه در اینجا نیز مشهود است. رفتار دما در مدل کاتانو-ورنات عکس رفتار دما در مدل تأخیر فاز دوگانه است. در حالی‌که توزیع دما با گذشت زمان از دمای پایا دور می‌شود –که غیرطبیعی است- کاهش ارتفاع پیشانی موج گرما سبب رسیدن آن به حالت پایا می‌شود.



شکل ۴-۴ توزیع دمای مدل‌های کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه برحسب زمان در $\eta = 0.8$

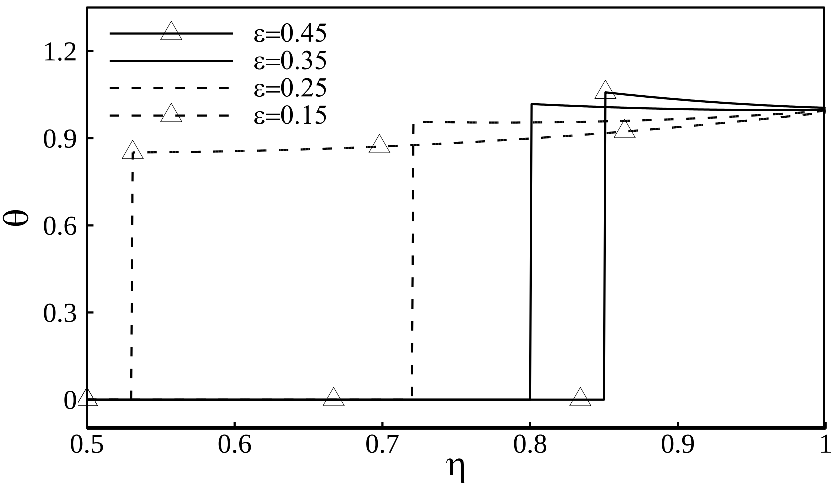
در شکل (۴-۵)، توزیع دما برحسب شعاع بی‌بعد استوانه برای مقادیر مختلف زمان آسایش بی‌بعد گرادیان دما در زمان‌های مختلف رسم شده است. نمودارها با فرض $\varepsilon=0.35$ رسم شده‌اند. مطابق انتظار،

سرعت موج گرما به ازای مقادیر بزرگ‌تر δ افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۴-۵ اثر زمان آسایش گرادیان دما بر توزیع دمای مدل تأخیر فاز دوگانه در زمان $\tau = 0.1$

در شکل (۴-۶)، نیز اثر زمان آسایش شار گرمایی بر روی توزیع دما به‌طور جداگانه نشان داده شده است. در اینجا نیز طبق رابطه (۴-۱۰) مقادیر بزرگتر ε، منجر به سرعت کمتر موج گرما می‌شود.



شکل ۴-۶ اثر زمان آسایش شار گرمایی بر توزیع دمای مدل تأخیر فاز دوگانه در زمان $\tau = 0.1$

۴-۳- میدان‌های تنش در استوانه بدون ترک

۴-۳-۱ میدان تنش محوری

دو سر استوانه برای حرکت در راستای محور استوانه آزاد در نظر گرفته می‌شود (شرایط تنش

صفحه‌ای در راستای محوری). این شرط مرزی به‌صورت زیر اعمال می‌شود.

$$\int_{R_i}^{R_o} r\sigma_z dr = 0 \tag{۲۱-۴}$$

تنش محوری در استوانه برحسب توزیع دما به‌صورت رابطه (۴-۲۲) به‌دست می‌آید [۳۶].

$$\sigma_z = \frac{2E\alpha}{(1-\nu)(r_o^2 - r_i^2)} \int_{r_i}^{r_o} rTdr - \frac{E\alpha}{1-\nu} T \tag{۲۲-۴}$$

تنش محوری ارائه شده در رابطه فوق با استفاده از رابطه (۴-۲۳) بی‌بعد می‌شود.

$$\sigma'_z = \frac{\sigma_z(1-\nu)}{E\alpha T_o} \tag{۲۳-۴}$$

با قرار دادن توزیع تنش (۴-۲۲) در رابطه فوق، تنش محوری بدون‌بعد استخراج می‌شود.

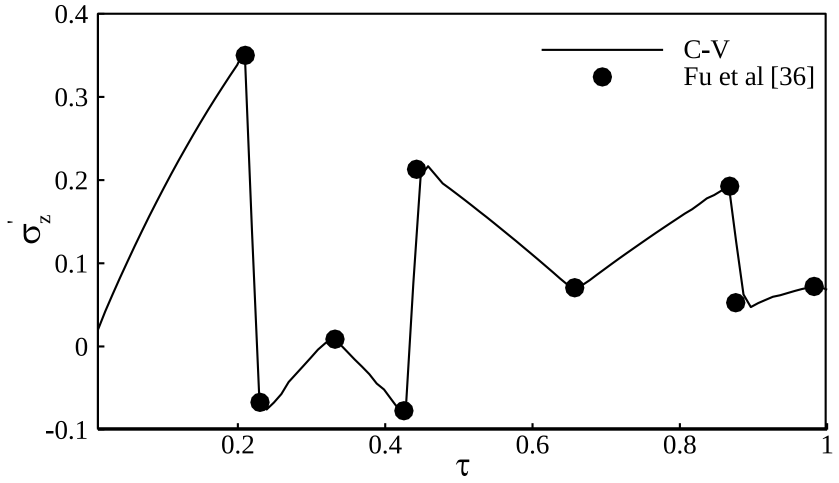
$$\sigma'_z(\eta, s) = \frac{2}{1-R_i^2} \int_{R_i}^{1} \eta\tilde{\theta}(\eta, s) d\eta - \tilde{\theta}(\eta, s) \tag{۲۴-۴}$$

پس از جایگذاری رابطه (۴-۱۵) در رابطه (۴-۲۴) تنش محوری در استوانه در حوزه لاپلاس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sigma'_z(\eta, s) = \frac{2}{\sqrt{E}(1-R_i^2)} \{ & A_1 [I_1(\sqrt{E}) - R_i I_1(\sqrt{E} R_i)] \\ & + A_2 [R_i K_1(\sqrt{E} R_i) - K_1(\sqrt{E})] \} \\ & - A_1 I_0(\sqrt{E}\eta) - A_2 K_0(\sqrt{E}\eta) \end{aligned} \tag{۲۵-۴}$$

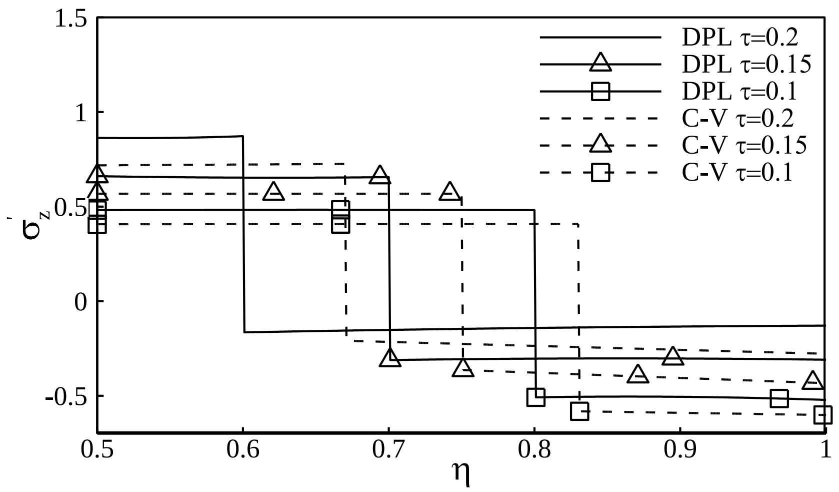
پس از حل تحلیلی رابطه تنش محوری در فضای لاپلاس، میدان تنش در حوزه زمان، با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی تعیین می‌شود.

در شکل (۴-۷)، توزیع تنش محوری در η=0.6 یک استوانه دو سر آزاد (در راستای شعاعی) حاصل از مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات برحسب زمان برای استوانه توخالی به شعاع داخلی $R_i = 0.4$ و شعاع خارجی $R_o = 1$، با مرجع [۳۶] مقایسه شده است. دما در سطح داخلی $\theta_{wi} = 0$ و در سطح خارجی $\theta_{wo} = 0.5$ و $\varepsilon = 0.3$ در نظر گرفته شده‌است. در مرجع [۳۶] معادله حاکم بر هدایت گرمایی کاتانو-ورنات پس از بی‌بعدسازی در فضای لاپلاس حل شده و سپس توزیع دما و تنش با تبدیل لاپلاس معکوس عددی در حوزه زمان به‌دست آمده است. برخلاف توزیع دما، تنش محوری تمام نقاط به محض اعمال شوک گرمایی تغییر می‌کند. این مسئله به‌خاطر اعمال شرایط نیرویی (۴-۲۱) اتفاق می‌افتد.



شکل ۴-۷ مقایسه توزیع تنش محوری مدل کاتانو-ورنات با مرجع [۳۶]

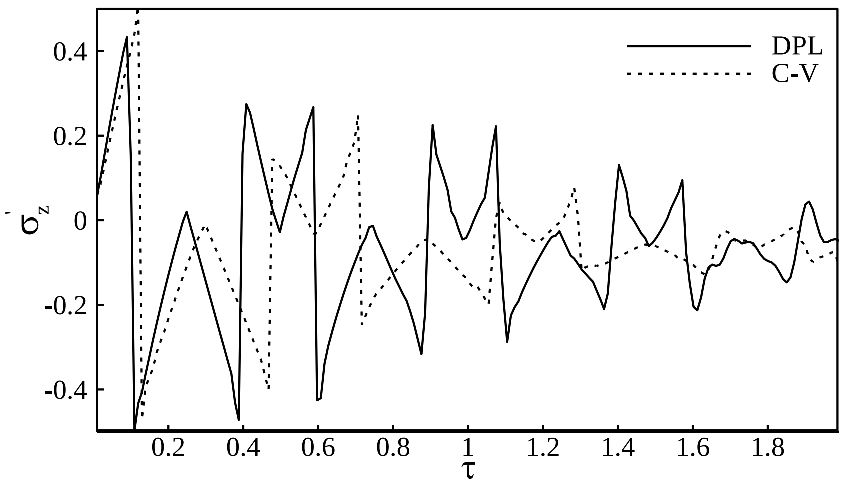
در شکل (۴-۸)، توزیع تنش در زمان‌های مختلف برای مدل تأخیر فاز دوگانه و کاتانو-ورنات مقایسه شده است. سرعت محدود موج تنش در هر دو مدل مشهود است. در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی، نقاط بین دیواره داخلی و پیشانی موج تنش، دارای تنش کششی و نقاط بین پیشانی موج تنش و دیواره خارجی تنش فشاری را تجربه می‌کنند. با توجه به صفر بودن بار مکانیکی، سطح زیر نمودار تنش روی ضخامت استوانه در یک زمان مشخص، صفر خواهد بود.



شکل ۴-۸ توزیع تنش محوری مدل‌های کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه برحسب شعاع

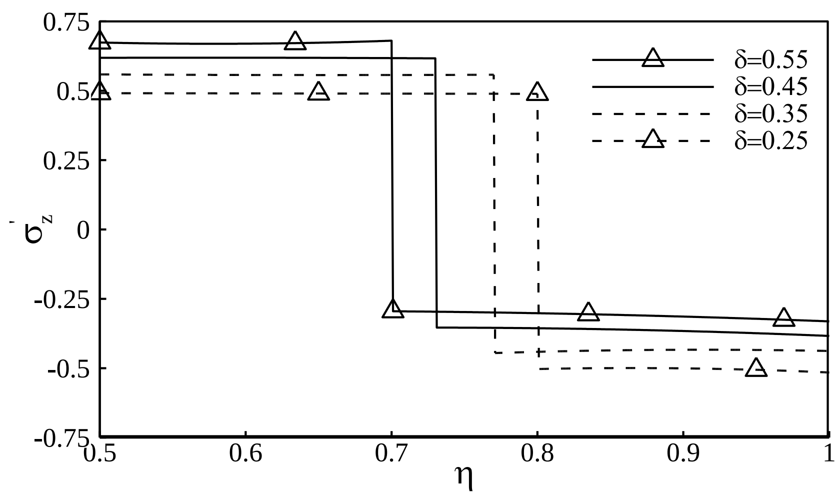
در شکل (۴-۹)، توزیع تنش محوری برحسب زمان برای دو مدل تأخیر فاز دوگانه و کاتانو-ورنات در η=0.8 مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که همانند توزیع دما، سرعت موج حاصل از مدل هدایت

گرمایی تأخیر فاز دوگانه از مدل کاتانو-ورنات بیشتر است. اثر سرعت محدود موج تنش در نمودارها مشهود است. در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی جهت حفظ تعادل نیرویی، تنش کششی در دیواره داخلی تا موقعیت پیشانی موج تنش به‌وجود می‌آید و در قسمتی از بخش دیگر دیواره تنش طولی فشاری است.



شکل ۴-۹ توزیع تنش محوری مدل‌های کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه برحسب زمان

در شکل (۴-۱۰)، اثر زمان آسایش گرادیان دما بر توزیع تنش محوری در زمان بدون‌بعد $\tau = 0.1$ نشان داده شده است.

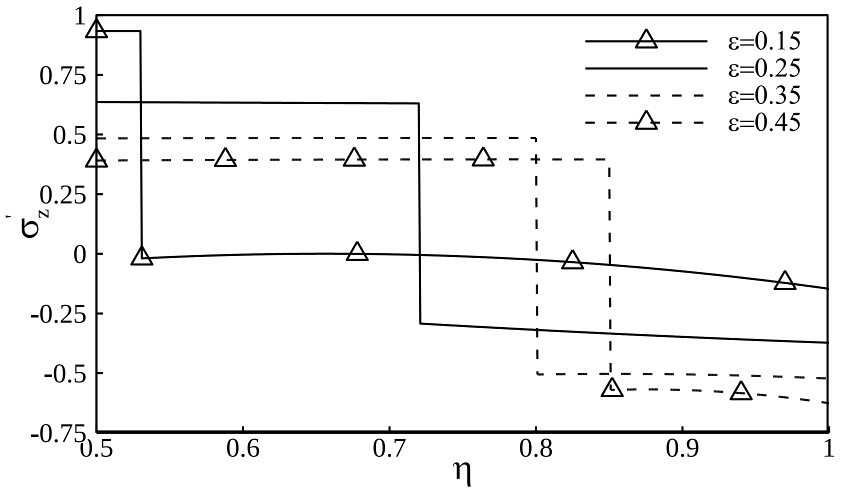


شکل ۴-۱۰ اثر زمان آسایش گرادیان دما بر توزیع تنش محوری مدل تأخیر فاز دوگانه در $\tau = 0.1$

با توجه به شکل، مشاهده می‌شود که با افزایش زمان آسایش گرادیان دما، سرعت موج گرمایی بیشتر

شده و بیشینه تنش محوری نیز افزایش می‌یابد. همچنین به‌علت فرض تنش صفحه‌ای در راستای محور استوانه، سطح زیر نمودار تنش محوری روی ضخامت استوانه به ازای تمام مقادیر زمان آسایش گرادیان دما صفر است.

در شکل (۴-۱۱)، اثر زمان آسایش شار گرمایی بر توزیع تنش محوری در زمان $\tau = 0.1$ نشان داده شده است. سرعت موج گرمایی با افزایش زمان آسایش شار گرمایی، کاهش می‌یابد. اما مشابه اثر زمان آسایش گرادیان دما، با افزایش سرعت موج گرمایی بیشینه تنش محوری نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۱۱ اثر زمان آسایش شار گرمایی بر توزیع تنش محوری مدل تأخیر فاز دوگانه در زمان $\tau = 0.1$

۴-۳-۲ میدان تنش محیطی

تنش محیطی در استوانه برحسب توزیع دما به‌صورت رابطه (۴-۲۶) به‌دست می‌آید [۶۲].

$$\sigma_\phi = \frac{E\alpha}{1-\nu}\left[\frac{1}{r_o^2 - r_i^2}\left(1+\frac{r_i^2}{r^2}\right)\int_{r_i}^{r_o} rTdr + \frac{1}{r^2}\int_{r_i}^{r} rTdr - T\right] \tag{۴-۲۶}$$

تنش محیطی ارائه شده در رابطه فوق با استفاده از رابطه (۴-۲۷) بی‌بعد می‌شود.

$$\sigma'_\phi = \frac{\sigma_\phi(1-\nu)}{E\alpha T_o} \tag{۴-۲۷}$$

رابطه تنش محیطی بدون‌بعد با قرار دادن رابطه (۴-۲۶) در (۴-۲۷) به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

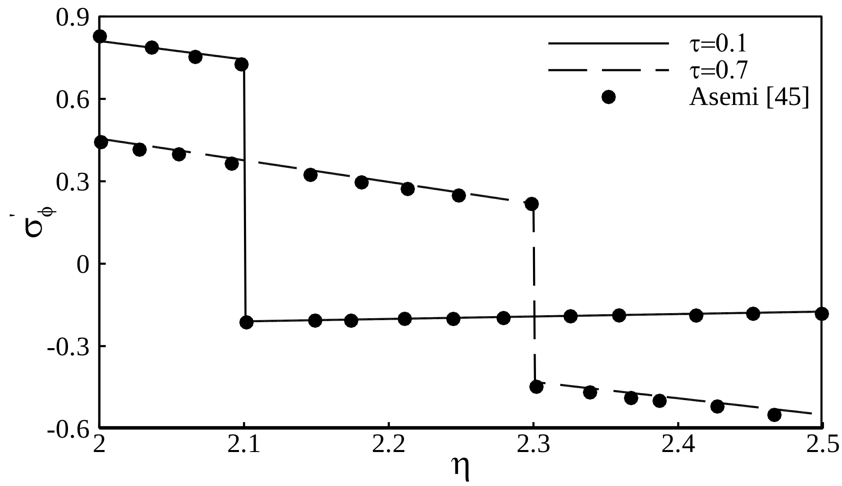
$$\sigma'_\phi(\eta, s) = \frac{1}{1-R_i^2}\left(1+\frac{R_i^2}{\eta^2}\right)\int_{R_i}^{1}\eta\theta d\eta + \frac{1}{\eta^2}\int_{R_i}^{\eta}\eta\theta d\eta - \theta \tag{۴-۲۸}$$

پس از جایگذاری رابطه (۴-۱۵) در رابطه (۴-۲۸) تنش محیطی بدون‌بعد در استوانه در حوزه لاپلاس

به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

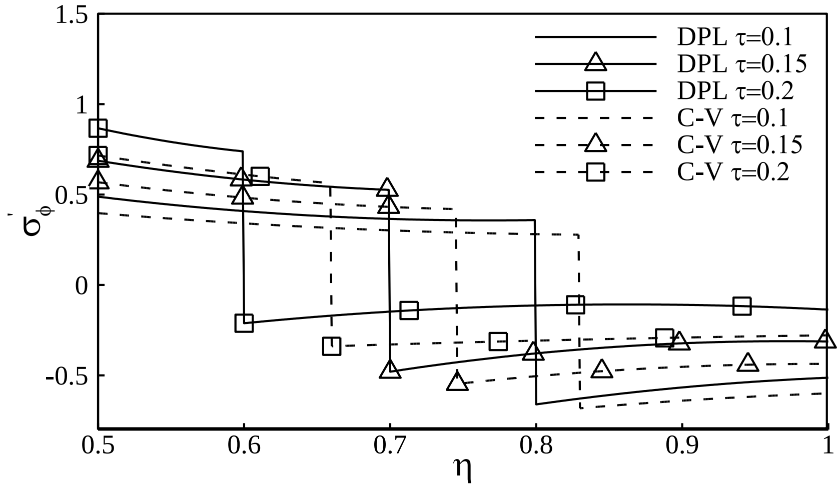
$$\begin{aligned}\sigma'_\phi(\eta,s) = &\frac{1}{\sqrt{E}(1-R_i^2)}\left(1+\frac{R_i^2}{\eta^2}\right)\left[A_1\left\{I_1\left(\sqrt{E}\right)-R_iI_1\left(\sqrt{E}R_i\right)\right\}\right.\\ &\left.+A_2\left\{R_iK_1\left(\sqrt{E}R_i\right)-K_1\left(\sqrt{E}\right)\right\}\right]\\ &+\frac{1}{\sqrt{E}\eta^2}\left[A_1\left\{\eta I_1\left(\sqrt{E}\eta\right)-R_iI_1\left(\sqrt{E}R_i\right)\right\}+A_2\left\{R_iK_1\left(\sqrt{E}R_i\right)-\eta K_1\left(\sqrt{E}\eta\right)\right\}\right]\\ &-\left(A_1I_0\left(\sqrt{E}\eta\right)+A_2K_0\left(\sqrt{E}\eta\right)\right)\end{aligned} \qquad (۲۹-۴)$$

میدان تنش محیطی در استوانه جدار ضخیم با استفاده از روش‌های عددی به حوزه زمان نگاشت می‌شود. در شکل (۴-۱۲)، تنش محیطی بدون‌بعد برای استوانه جدار ضخیم به شعاع داخلی $R_i = 2$ و شعاع خارجی $R_o = 2.5$ براساس مدل کاتانو-ورنات در دو زمان با مرجع [۴۵] مقایسه شده است.



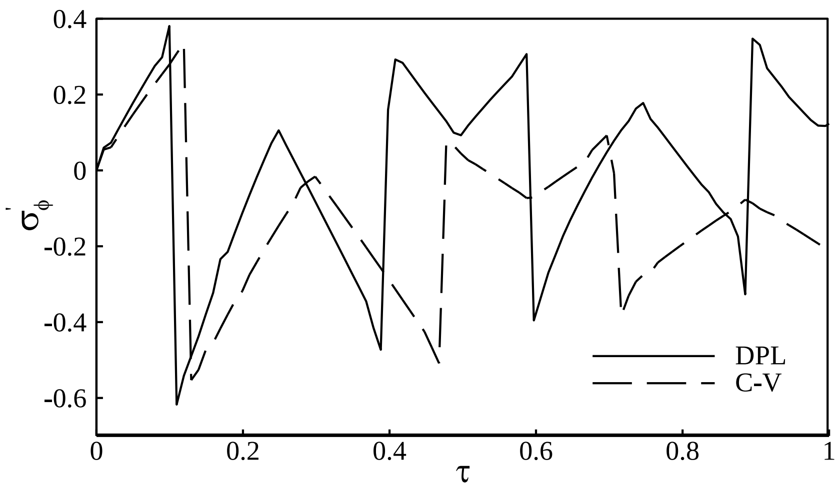
شکل ۴-۱۲ مقایسه تنش محیطی مدل کاتانو-ورنات با مرجع [۴۵]

در شکل (۴-۱۳)، توزیع تنش محیطی بدون‌بعد برحسب شعاع بدون‌بعد استوانه برای مدل‌های تأخیر فاز دوگانه و کاتانو-ورنات در زمان‌های مختلف نشان داده شده است. شعاع داخلی استوانه $R_i = 0.5$ و شعاع خارجی $R_o = 1$ در نظر گرفته شده است. نتایج سرعت بیشتر مدل تأخیر فاز دوگانه نسبت به مدل کاتانو-ورنات را نشان می‌دهد. همچنین با توجه به شکل، مشهود است که شکستگی در نمودار تنش محیطی، با نمودار دما متناظر است. همچنین در زمان‌های یکسان، بیشینه تنش محیطی حاصل از مدل تأخیر فاز دوگانه از مدل کاتانو-ورنات بیشتر است.



شکل ۴-۱۳ توزیع تنش محیطی مدل‌های کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه برحسب شعاع

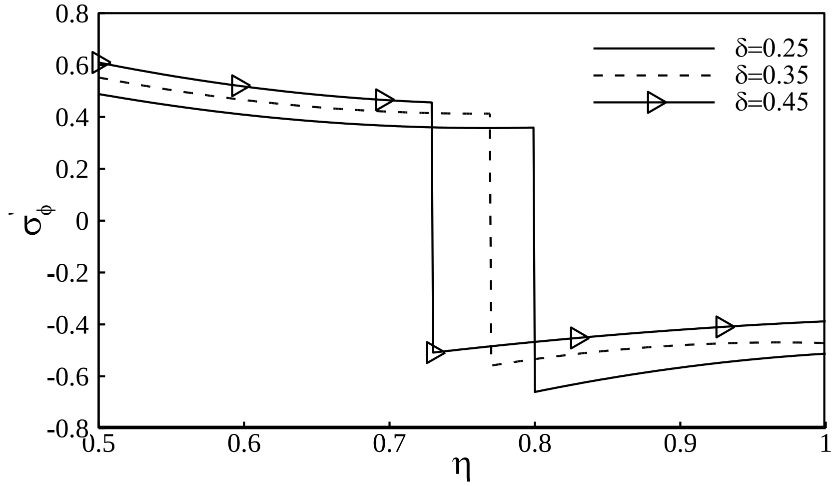
در شکل (۴-۱۴)، توزیع تنش محیطی نسبت به زمان در شعاع $\eta = 0.8$ برای دو مدل تأخیر فاز دوگانه و کاتانو-ورنات رسم شده است. باتوجه به اینکه استوانه تنها تحت شوک گرمایی بوده و فشار مکانیکی صفر است؛ مشاهده می‌شود نمودار تنش محیطی از صفر شروع می‌شود و با نوسان‌های متوالی در جسم تغییر می‌کند. با توجه به شکل، مشاهده می‌شود که دو مدل در زمان‌های ابتدایی تنش را با اختلاف کم پیش‌بینی می‌کنند. اما با گذشت زمان، نتایج از هم فاصله گرفته و با توجه به زمان آسایش گرادیان دما در مدل تأخیر فاز دوگانه، اندازه تنش حاصل از این مدل از مدل کاتانو-ورنات بیشتر است.



شکل ۴-۱۴ توزیع تنش محیطی مدل‌های کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه برحسب زمان

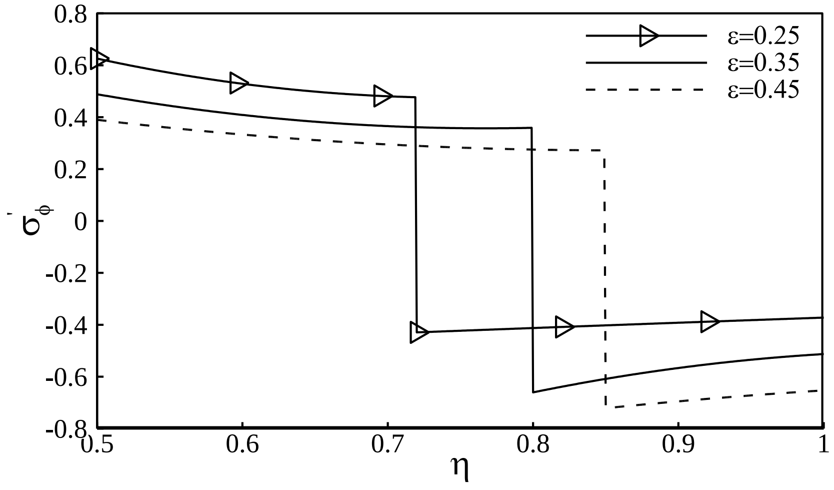
همچنین با توجه به قله‌های نمودار مشهود است که سرعت موج در مدل تأخیر فاز دوگانه از مدل

کاتانو-ورنات بیشتر است. در شکل (۴-۱۵)، اثر زمان آسایش گرادیان دما بر توزیع تنش در استوانه، برحسب شعاع نشان داده شده است. مشابه نتایج دما و تنش محوری، مقادیر بزرگتر δ موجب سرعت بیشتر موج تنش در مدل تأخیر فاز دوگانه می‌شود.



شکل ۴-۱۵ اثر زمان آسایش گرادیان دما بر توزیع تنش محیطی مدل تأخیر فاز دوگانه در زمان $\tau = 0.1$

در شکل (۴-۱۶)، اثر زمان آسایش شار گرمایی بر توزیع تنش محیطی در زمان $\tau = 0.1$ نشان داده شده است. مقادیر بزرگتر ε منجر به سرعت کمتر موج تنش می‌شوند. نقاطی که بین دیواره داخلی و پیشانی موج قرار دارند تنش کششی و نقاطی که بین پیشانی موج و دیواره خارجی قرار دارند، تنش فشاری را تجربه می‌کنند.



شکل ۴-۱۶ اثر زمان آسایش شار گرمایی بر توزیع تنش محیطی مدل تأخیر فاز دوگانه در زمان $\tau = 0.1$

۴-۴- تعیین ضرایب شدت تنش

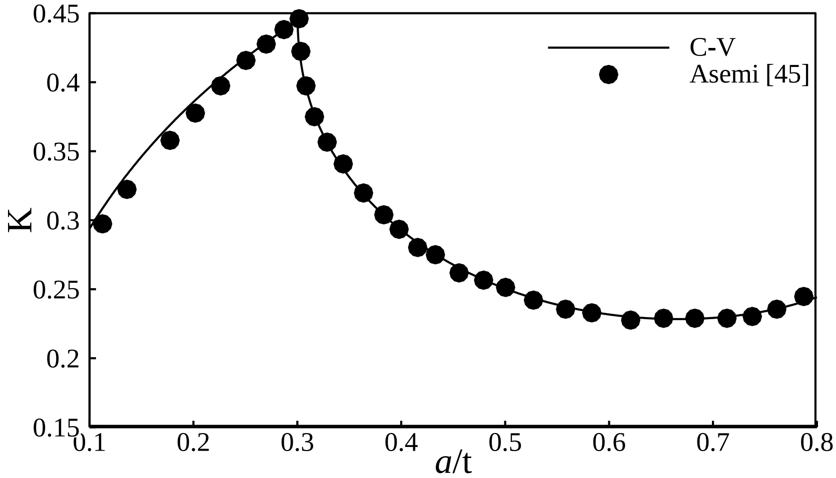
۴-۴-۱ تعیین ضریب شدت تنش ترک محیطی

انتگرال‌گیری از نتایج عددی تنش محوری در رابطه (۴-۲۵) منجر به نوسان نتایج می‌شود [۴۵]. برای حل این مشکل، از برازش دو منحنی چندجمله‌ای مرتبه دو بر عبارت تنش گرمایی در هر زمان استفاده شده است. این تقریب به‌خصوص در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی قابل قبول است. اگر موقعیت ناپیوستگی ρ باشد، توزیع تنش محوری در هر زمان، به دو بخش قبل و بعد از ناپیوستگی تقسیم می‌شود تا برازش منحنی دقیق‌تری صورت گیرد.

$$\sigma_{z1} = A_1 r^2 + B_1 r + C_1 \quad , \quad R_i \le r \le R_i + \rho \qquad \text{(۴-۳۰-الف)}$$

$$\sigma_{z2} = A_2 r^2 + B_2 r + C_2 \quad , \quad R_i + \rho \le r \le R_o \qquad \text{(۴-۳۰-ب)}$$

با استفاده از تابع وزنی بیان‌شده در بخش ۲-۲-۲ و با استفاده از رابطه (۲-۱)، ضریب شدت تنش ترک محیطی داخلی در زمان $\tau = 0.3$، براساس مدل کاتانو-ورنات به ازای $\varepsilon = 1$، با مرجع [۴۵] مقایسه شده است. با توجه به شکل (۴-۱۷)، نتایج از دقت کافی برخوردار هستند.

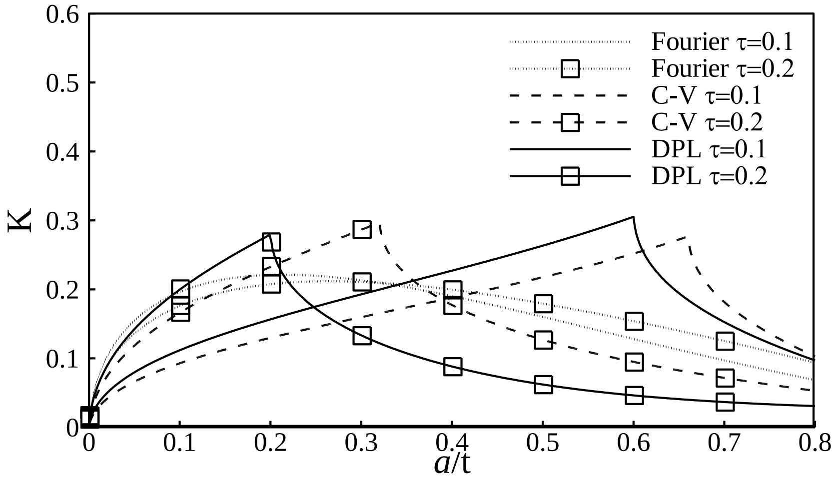


شکل ۴-۱۷ مقایسه ضریب شدت تنش مدل کاتانو-ورنات با مرجع [۴۵] در زمان $\tau = 0.3$

در شکل (۴-۱۸)، ضریب شدت تنش حاصل از مدل‌های فوریه، کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه در دو زمان مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود به‌علت سرعت بیشتر موج تنش –که از دیواره خارجی به سمت

دیواره داخلی حرکت می‌کند- در مدل تأخیر فاز دوگانه، شکستگی در نمودار ضریب شدت تنش برحسب عمق نسبی ترک به دیواره داخلی نزدیک‌تر است.

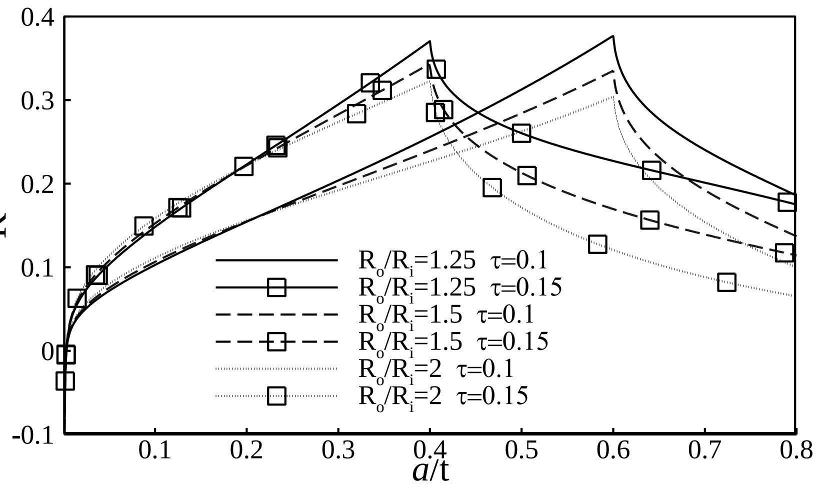
قانون فوریه، ضریب شدت تنش را به‌صورت یک تابع پیوسته پیش‌بینی می‌کند که مقدار بیشینه ضریب شدت تنش حاصل، از دو مدل کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه کمتر است.



شکل ۴-۱۸ ضریب شدت تنش ترک محیطی مدل‌های فوریه، کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه

در شکل (۴-۱۹)، اثر نسبت شعاع خارجی به داخلی بر ضریب شدت تنش حاصل از مدل تأخیر فاز دوگانه در استوانه‌های جدارضخیم برای سه نسبت، در دو زمان مختلف نشان داده شده است. در $R_o/R_i = 1.25$، شعاع داخلی استوانه $R_i = 2$ و شعاع خارجی $R_o = 2.5$، برای $R_o/R_i = 1.5$، شعاع داخلی $R_i = 1$ و شعاع خارجی $R_o = 1.5$ و برای نسبت شعاع $R_o/R_i = 2$، شعاع داخلی $R_i = 0.5$ و شعاع خارجی $R_o = 1$ در نظر گرفته شده است. شعاع‌های داخلی و خارجی به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که ضخامت استوانه‌ها، در هر سه حالت یکسان باشد. در این شکل، زمان‌های آسایش شار گرمایی و گرادیان دما به ترتیب $\varepsilon = 0.35$ و $\delta = 0.25$ می‌باشند که منجر به $C_{DPL} = 2.02$ می‌شوند. با توجه به شکل، مشهود است که ناپیوستگی‌ها در نمودار ضریب شدت تنش برحسب طول نسبی ترک به دلیل سرعت موج گرمایی و ضخامت برابر استوانه‌ها در نقاط یکسانی رخ می‌دهند. همچنین مشاهده می‌شود که ضریب شدت تنش در استوانه‌های نازک‌تر، بزرگ‌تر است و استوانه‌هایی که نسبت شعاع خارجی به

داخلی بزرگتری دارند، مقاومت بیشتری در برابر ترک دارند. برای ترک‌های کوتاه نیز ضریب شدت تنش برای هر سه نسبت قطر تقریباً برابر است و اختلاف بسیار کمی دارد.



شکل ۴-۱۹ اثر نسبت شعاع بر ضریب شدت تنش ترک محیطی در مدل تأخیر فاز دوگانه

۴-۴-۲ تعیین ضرایب شدت تنش ترک نیم‌بیضوی

با معلوم بودن تنش به‌صورت یک تابع پیوسته از r و تابع وزنی، می‌توان ضریب شدت تنش را تعیین کرد. ضریب شدت تنش عمق ترک با استفاده از تابع وزنی بیان شده برای عمق ترک و رابطه (۴-۳۱) تعیین می‌شود.

$$K_A = \int_0^a m_A(r, a)\sigma_\varphi(r)dr \qquad (۴-۳۱)$$

ضریب شدت تنش گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی داخلی با استفاده از رابطه (۴-۳۲) تعیین می‌شود.

$$K_B = \int_0^a m_B(r, a)\sigma_\varphi(r)dr \qquad (۴-۳۲)$$

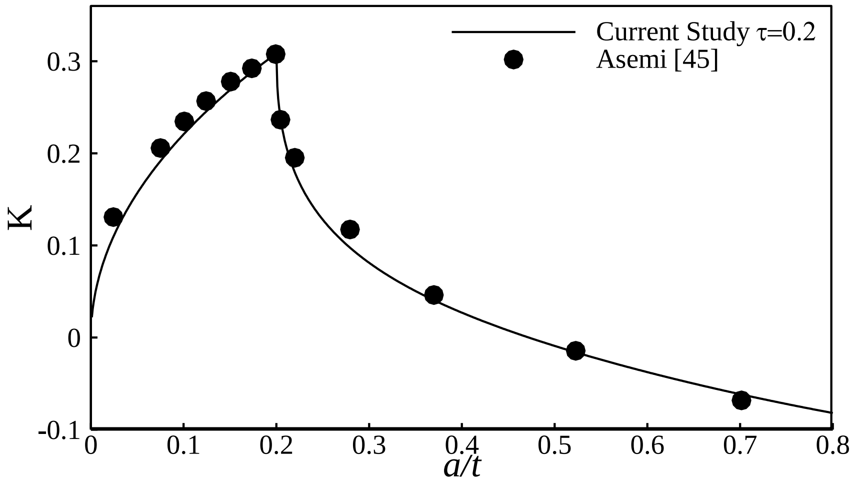
اگر موقعیت ناپیوستگی ρ باشد، توزیع تنش محیطی به دو بخش قبل و بعد از ناپیوستگی تقسیم می‌شود تا برازش منحنی دقیق‌تری صورت گیرد.

$$\sigma_{\varphi 1} = A_1r^2 + B_1r + C_1 \quad , \quad R_i \le r \le R_i + \rho \qquad (۴-۳۳\text{-الف})$$

$$\sigma_{\varphi 2} = A_2r^2 + B_2r + C_2 \quad , \quad R_i + \rho \le r \le R_o \qquad (۴-۳۳\text{-ب})$$

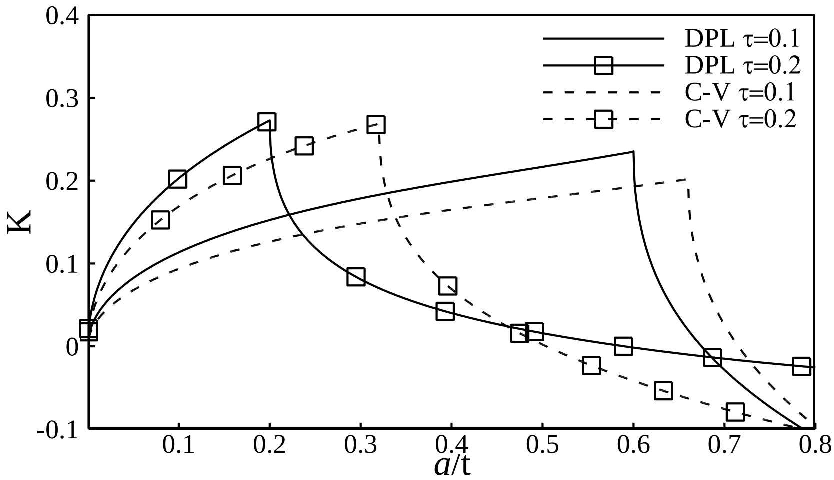
در شکل (۴-۲۰)، ضریب شدت تنش عمق ترک نیم‌بیضوی حاصل از مدل کاتانو-ورنات به ازای

نسبت منظر $a/c = 1$ با مرجع [۴۵]، مقایسه شده است. با توجه به شکل، مشاهده می‌شود که نتایج از دقت کافی برخوردارند.



شکل ۴-۲۰ مقایسه ضریب شدت تنش ترک نیم‌بیضوی براساس مدل کاتانو-ورنات با مرجع [۴۵]

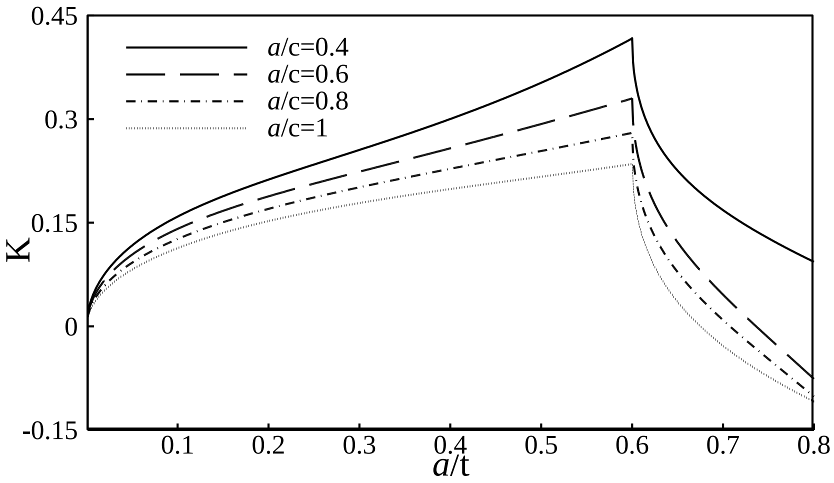
شکل (۴-۲۱)، مقایسه ضرایب شدت تنش حاصل از مدل کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که بیشینه ضریب شدت تنش حاصل از مدل تأخیر فاز دوگانه از مدل کاتانو-ورنات بیشتر است و در هر دو مدل، ضریب شدت تنش با افزایش طول نسبی ترک افزایش می‌یابد و پس از رسیدن به مقدار بیشینه، با افزایش طول ترک، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد ($a/c = 1$).



شکل ۴-۲۱ ضریب شدت تنش عمق ترک نیم‌بیضوی مدل‌های کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه

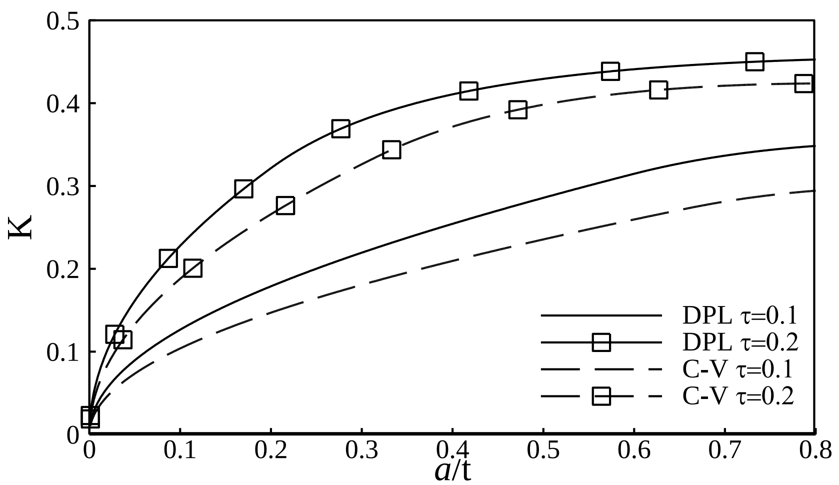
شکل (۴-۲۲)، اثر نسبت a/c، بر ضریب شدت تنش را در زمان $\tau = 0.1$ نشان می‌دهد. مشاهده

می‌شود که با افزایش این نسبت و نزدیک شدن هندسه ترک به دایره، ضریب شدت تنش در عمق ترک کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۲۲ اثر نسبت منظر (a/c) بر ضریب شدت تنش عمق ترک نیم‌بیضوی براساس مدل تأخیر فاز دوگانه

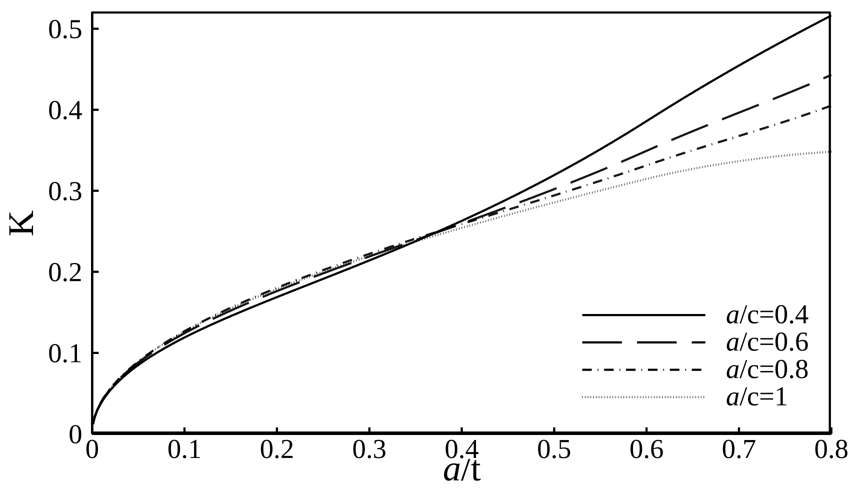
در شکل (۴-۲۳)، ضریب شدت تنش حاصل از مدل‌های کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه در گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی به ازای $a/c = 1$ مقایسه شده‌اند. در زمان‌های برابر، بیشینه ضریب شدت تنش حاصل از مدل تأخیر فاز دوگانه از مدل کاتانو-ورنات بیشتر است.



شکل ۴-۲۳ مقایسه ضریب شدت تنش گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی مدل‌های کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه (a/c=1)

شکل (۴-۲۴)، اثر نسبت منظر a/c را بر ضریب شدت تنش گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی نشان می‌دهد. با توجه به شکل، مشهود است که مشابه عمق ترک با افزایش a/c، بیشینه ضریب شدت تنش کاهش

می‌یابد و مشابه عمق ترک، ضریب شدت تنش ترک‌های دایروی از ترک‌هایی که به فرم بیضوی هستند کمتر است.



شکل ۴-۲۴ اثر نسبت a/c بر ضریب شدت تنش گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی مدل تأخیر فاز دوگانه

در این فصل، با توجه به مقادیر فرض شده برای زمان‌های آسایش گرادیان دما و شار گرمایی، سرعت موج در مدل تأخیر فاز دوگانه از مدل هدایت گرمایی هذلولوی بیشتر است. از نمودار دما برحسب زمان، رفتار متفاوت مدل‌های تأخیر فاز دوگانه و هذلولوی مشهود است. از مقایسه نمودارهای دما و تنش برحسب شعاع نیز مشاهده می‌شود که در نظر گرفتن زمان آسایش گرادیان دما در مدل تأخیر فاز دوگانه منجر به پیش‌بینی مقادیر بزرگتر نسبت به مدل هذلولوی می‌شود.

در استوانه جدار ضخیم دارای ترک محیطی داخلی، ضریب شدت تنش حاصل از مدل تأخیر فاز دوگانه از مدل فوریه به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر است. در مدل فوریه، ضریب شدت تنش به‌صورت یک تابع پیوسته است؛ در حالی‌که در مدل‌های هذلولوی و تأخیر فاز دوگانه ضریب شدت تنش با افزایش طول نسبی ترک ابتدا افزایش می‌یابد و سپس با افزایش طول ترک به‌علت فشاری بودن تنش بین پیشانی موج و دیواره خارجی، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد. در هر لحظه ضریب شدت تنش بیشینه برای ترکی اتفاق می‌افتد که در پیشانی موج تنش قرار دارد.

نتایج نشان می‌دهد که در استوانه دارای ترک نیم‌بیضوی داخلی، در زمان‌های برابر ضریب شدت تنش بیشینه حاصل از مدل تأخیر فاز دوگانه از مدل هذلولوی بزرگتر است. همچنین، مشاهده می‌شود

که با افزایش نسبت منظر ترک (a/c)، ضریب شدت بیشینه در عمق و گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی کاهش می‌یابد؛ به‌عبارت دیگر ضریب شدت تنش در ترک‌های نزدیک به فرم دایره‌ای از ترک‌های بیضوی کمتر است.

فصل ۵ تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد–شولمان

۵-۱- مقدمه

در این فصل، ضریب شدت تنش ترک محیطی و ترک نیم‌بیضوی در استوانه جدار ضخیم با استفاده از تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد-شولمان محاسبه می‌شود. از وجود نیروهای حجمی و منبع گرمایی داخلی صرف‌نظر می‌شود. پس از حل معادلات کوپل حاکم به‌صورت تحلیلی در فضای لاپلاس، نتایج با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی به حوزه زمان منتقل می‌شوند. نتایج دما، تنش محوری و تنش محیطی با مدل کاتانو-ورنات و تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته مقایسه می‌شوند. ضرایب شدت تنش نیز با استفاده از روش تابع وزنی تعیین و با مدل کاتانو-ورنات و تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته مقایسه می‌شوند.

۵-۲- معادلات حاکم در تئوری ترموالاستیسیته لرد-شولمان

در تئوری هدایت گرمایی لرد-شولمان معادلات ساختاری مورد استفاده برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر هدایت گرمایی مواد همگن و همسانگرد به‌صورت زیر هستند [۱۵].

رابطه ساختاری تنش در فرم تانسوری، به‌صورت رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{I}(\nabla . \mathbf{u}) + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \mathbf{I} \mathrm{T} \tag{۵-۱}$$

رابطه سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) به‌شکل رابطه (۵-۲) است.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{T}}] \tag{۵-۲}$$

معادله تعادل برای استوانه به‌صورت رابطه (۵-۳) است.

$$\nabla . \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \tag{۵-۳}$$

معادله ساختاری انتروپی، برحسب ثابت‌های لامه به‌شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\rho S = \frac{\rho c_v}{T_0} T + (3\lambda + 2\mu)\alpha(\nabla . \mathbf{u}) \tag{۵-۴}$$

رابطه ساختاری شار گرمایی، در تئوری لرد-شولمان مطابق رابطه (۵-۵) است.

$$\mathbf{q} + \tau_q \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -k\boldsymbol{\nabla}T \tag{۵-۵}$$

معادله بقای انرژی، برحسب نرخ تغییرات انتروپی به‌شکل زیر بیان می‌شود.

$$\nabla.\mathbf{q} = \rho(R - \dot{S}T_0) \tag{۵-۶}$$

استوانه به‌اندازه کافی بلند (فرض کرنش صفحه‌ای در راستای محور) و توخالی تحت بارگذاری متقارن محوری فرض می‌شود. در این حالت مؤلفه‌های غیرصفر جابه‌جایی و شار گرمایی تنها در جهت شعاعی قرار دارند و تنها تابع زمان و شعاع استوانه هستند. بنابراین در این حالت، روابط (۵-۱) تا (۵-۶) به‌شکل زیر کاهش می‌یابند.

روابط ساختاری تنش برحسب خواص ماده و تغییرات دمای استوانه، به‌شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_\phi\right) - \frac{E\alpha}{1-2\nu}T \tag{۵-۷-الف}$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_r + \frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_\phi\right) - \frac{E\alpha}{1-2\nu}T \tag{۵-۷-ب}$$

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_r + \varepsilon_\phi) - \frac{E\alpha}{1-2\nu}T \tag{۵-۷-ج}$$

معادلات سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) در حالت متقارن محوری با توجه به رابطه (۵-۲)، برای استوانه به‌شکل زیر بیان می‌شوند.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \tag{۵-۸-الف}$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \tag{۵-۸-ب}$$

معادله تعادل برحسب نیروی حجمی شعاعی، تنش‌ها و جابه‌جایی در استوانه تحت بارگذاری و شرایط مرزی متقارن محوری، به‌شکل زیر بیان می‌شود.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\phi}{r}+F_r=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{۵-۹}$$

معادله ساختاری انتروپی در حالت متقارن محوری به‌شکل رابطه (۵-۱۰) است.

$$\rho S=\frac{\rho c_v}{T_0}T+\frac{E\alpha}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right) \tag{۵-۱۰}$$

رابطه (۵-۱۱)، رابطه ساختاری شار گرمایی یک بعدی در جهت شعاعی را در استوانه بیان می‌کند.

$$q+\tau_q\frac{\partial q}{\partial t}=-k\nabla T \tag{۵-۱۱}$$

رابطه (۵-۱۲)، پایستگی انرژی در استوانه دارای منبع گرمایی داخلی را در مختصات استوانه‌ای بیان می‌کند.

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)q=\rho\left(R-\frac{\partial S}{\partial t}T_0\right) \tag{۵-۱۲}$$

با صرف‌نظر از نیروی حجمی F_r و حذف σ و ε در معادلات (۵-۸) و (۵-۹)، رابطه (۵-۱۳-الف) به‌دست می‌آید که معادله ناویر نامیده می‌شود. با صرف نظر از منبع گرمایی داخلی R و سپس حذف q و S از روابط (۵-۱۰) تا (۵-۱۲)، رابطه (۵-۱۳-ب) به‌دست می‌آید که معادله انرژی نامیده می‌شود [۱۵].

$$\frac{E}{1+\nu}\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)-\frac{E\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial r}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{۵-۱۳-الف}$$

$$\left(1+\tau_q\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{E\alpha T_0}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)\right]=k\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)T \tag{۵-۱۳-ب}$$

شرایط اولیه دما و جابه‌جایی برای استوانه به‌شکل رابطه (۵-۱۴) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} &T(0,r)=T_0\\ &\frac{\partial}{\partial t}T(0,r)=0\\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(0,r)=0\\ &u(0,r)=0\\ &\frac{\partial}{\partial t}u(0,r)=0 \end{aligned} \tag{۵-۱۴}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(0,r) = 0$$

شرایط مرزی دمایی و مکانیکی، به‌شکل رابطه (۵-۱۵) تعریف می‌شوند.

$$T(R_i,t) = 0$$
$$T(R_o,t) = 1 \qquad (۵\text{-}۱۵)$$
$$\sigma_r(R_i,t) = 0$$
$$\sigma_r(R_o,t) = 0$$

برای سادگی پارامترهای بی‌بعد زیر معرفی می‌شوند.

$$\tau = \frac{td}{R_o^2}$$
$$\varepsilon = \frac{\tau_q d}{R_o^2}$$
$$\eta = \frac{r}{R_o} \qquad (۵\text{-}۱۶)$$
$$\eta_i = \frac{R_i}{R_o}$$
$$\theta = \frac{T}{T_0}$$
$$u' = \frac{u}{R_o \alpha T_0}$$

که $d = k/\rho c$ است. با استفاده از پارامترهای بی‌بعد معرفی شده، روابط (۵-۱۳) به‌شکل رابطه (۵-۱۷) بازنویسی می‌شوند.

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left[\theta + \frac{E\alpha^2 dT_0}{k(1-2\nu)}\left(\frac{\partial u'}{\partial\eta} + \frac{u'}{\eta}\right)\right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\theta \qquad (۵\text{-}۱۷\text{-الف})$$

$$\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u'}{\partial\eta} - \frac{u'}{\eta^2}\right) - \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = \frac{\rho d^2}{ER_o^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial\tau^2} \qquad (۵\text{-}۱۷\text{-ب})$$

بیان روابط (۵-۱۷) در فضای لاپلاس با توجه به شرایط اولیه (۴-۱۵)، منجر به دو معادله دیفرانسیل خطی حاکم بر مسئله برحسب متغیر مستقل مکان و متغیرهای وابسته دما و جابه‌جایی می‌شود.

$$\lambda_1\left(\frac{\partial^2\tilde{u}'}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\tilde{u}'}{\partial\eta} - \frac{\tilde{u}'}{\eta^2}\right) - \lambda_2\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\eta} = \lambda_3 s^2\tilde{u}' \qquad (۵\text{-}۱۸\text{-الف})$$

$$\tilde{\theta}+\lambda_4\left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \eta}+\frac{\tilde{u}'}{\eta}\right)=\lambda_5\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\tilde{\theta}$$ (۵-۱۸-ب)

که در آن، ($\tilde{}$) تابع در فضای لاپلاس را نشان می‌دهد. ثابت‌های روابط (۵-۱۸) به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\lambda_1=\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$\lambda_2=\frac{1}{1-2\nu}$$
$$\lambda_3=\frac{\rho d^2}{ER_o^2}$$ (۵-۱۹)
$$\lambda_4=\frac{E\alpha^2 dT_0}{k(1-2\nu)}$$
$$\lambda_5=\frac{1}{s(1+\varepsilon s)}$$

که در روابط (۵-۱۸)، λ_3 اثر اینرسی گرمایی و λ_4 اثر کوپلینگ میدان‌های الاستیک و گرمایی را نشان می‌دهد.

برای حل معادلات حاکم، تابع پتانسیل جابه‌جایی به‌شکل رابطه (۵-۲۰) تعریف می‌شود [۱۵].

$$\tilde{u}'=\frac{\partial \psi}{\partial \eta}$$ (۵-۲۰)

معادلات دیفرانسیل کوپل حاکم (۵-۱۸) با استفاده از تابع پتانسیل جابه‌جایی، به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\lambda_1\nabla^2\psi-\lambda_3 s^2\psi=\lambda_2\tilde{\theta}$$ (۵-۲۱-الف)

$$\lambda_4\nabla^2\psi=\lambda_5\nabla^2\tilde{\theta}-\tilde{\theta}$$ (۵-۲۱-ب)

که در روابط فوق، $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ است. حذف $\tilde{\theta}$ از روابط (۵-۲۱)، منجر به معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت (۵-۲۲) می‌شود.

$$A\nabla^4\psi+B\nabla^2\psi+C\psi=0$$ (۵-۲۲)

ضرایب رابطه (۵-۲۲)، به‌شکل رابطه (۵-۲۳) بیان می‌شوند.

$$A = \frac{\lambda_1 \lambda_5}{\lambda_2}$$

$$B = -\frac{\lambda_3 \lambda_5 s^2}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \lambda_4 \qquad (۵-۲۳)$$

$$C = \frac{\lambda_3 s^2}{\lambda_2}$$

حل معادله دیفرانسیل معمولی خطی (۵-۲۲)، برحسب توابع بسل اصلاح شده به‌صورت زیر قابل بیان است.

$$\psi(\eta, s) = D_1 I_0(\xi_1 \eta) + D_2 K_0(\xi_1 \eta) + D_3 I_0(\xi_2 \eta) + D_4 K_0(\xi_2 \eta) \qquad (۵-۲۴)$$

توابع بسل اصلاح شده مرتبه صفر نوع اول I_0 و دوم K_0، پاسخ‌های مستقل معادله دیفرانسیل (۵-۲۲) هستند. در حل فوق ξ_1 و ξ_2، ریشه‌های معادله مشخصه مربوط به معادله دیفرانسیل (۵-۲۲) هستند که به‌صورت رابطه (۵-۲۵) بیان می‌شوند.

$$\xi_{1,2} = \left\{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (۵-۲۵)$$

جابه‌جایی بدون بعد در حوزه لاپلاس، از جاگذاری رابطه تابع پتانسیل جابه‌جایی (۵-۲۴) در (۵-۲۰)، تعیین می‌شود.

$$\tilde{u}'(\eta, s) = \xi_1[D_1 I_1(\xi_1 \eta) - D_2 K_1(\xi_1 \eta)] + \xi_2[D_3 I_1(\xi_2 \eta) - D_4 K_1(\xi_2 \eta)] \qquad (۵-۲۶)$$

میدان دمای بدون بعد در حوزه لاپلاس، از جاگذاری پتانسیل جابه‌جایی (۵-۲۴) در (۵-۲۱-الف)، به‌شکل زیر استخراج می‌شود.

$$\tilde{\theta}(\eta, s) = \gamma_1[D_1 I_0(\xi_1 \eta) + D_2 K_0(\xi_1 \eta)] + \gamma_2[D_3 I_0(\xi_2 \eta) + D_4 K_0(\xi_2 \eta)] \qquad (۵-۲۷)$$

که در رابطه (۵-۲۷)، ضرایب γ_1 و γ_2 به‌شکل رابطه (۵-۲۸) هستند.

$$\gamma_1 = \frac{\lambda_1 \xi_1^2 - \lambda_3 s^2}{\lambda_2}$$

$$\gamma_2 = \frac{\lambda_1 \xi_2^2 - \lambda_3 s^2}{\lambda_2} \qquad (۲۸-۵)$$

میدان تنش شعاعی (۵-۷-الف) با استفاده از رابطه زیر بی‌بعد می‌شود.

$$\tilde{\sigma}'_r = \frac{\tilde{\sigma}_r (1 - 2\nu)}{E\alpha T_o} \qquad (۲۹-۵)$$

با استفاده از روابط (۵-۸)، (۵-۷-الف)، (۵-۲۸) و رابطه (۵-۲۷)، میدان تنش شعاعی بی‌بعد استوانه در حوزه لاپلاس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}'_r(\eta, s) &= D_1 \left[\gamma_3 I_0(\xi_1\eta) - \frac{\gamma_5}{\eta} I_1(\xi_1\eta)\right] + D_2 \left[\gamma_3 K_0(\xi_1\eta) + \frac{\gamma_5}{\eta} K_1(\xi_1\eta)\right] \\ &\quad + D_3 \left[\gamma_4 I_0(\xi_2\eta) - \frac{\gamma_6}{\eta} I_1(\xi_2\eta)\right] + D_4 \left[\gamma_4 K_0(\xi_2\eta) + \frac{\gamma_6}{\eta} K_1(\xi_2\eta)\right] \end{aligned} \qquad (۳۰-۵)$$

که ضرایب میدان تنش شعاعی (۵-۳۰) در فضای لاپلاس، به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \frac{1-\nu}{1+\nu} \xi_1^2 - \gamma_1 \\ \gamma_4 &= \frac{1-\nu}{1+\nu} \xi_2^2 - \gamma_2 \\ \gamma_5 &= \frac{1-2\nu}{1+\nu} \xi_1 \\ \gamma_6 &= \frac{1-2\nu}{1+\nu} \xi_2 \end{aligned} \qquad (۳۱-۵)$$

شرایط مرزی (۵-۱۵)، در حوزه لاپلاس به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\eta_i, s) &= 0 \\ \tilde{\theta}(1, s) &= \frac{1}{s} \\ \tilde{\sigma}'_r(\eta_i, s) &= 0 \\ \tilde{\sigma}'_r(1, s) &= 0 \end{aligned} \qquad (۳۲-۵)$$

با اعمال شرایط مرزی (۵-۳۲)، میدان‌های جابه‌جایی، دما و تنش شعاعی به صورت کامل تعیین شده و با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی نتایج به حوزه زمان نگاشت می‌شوند.

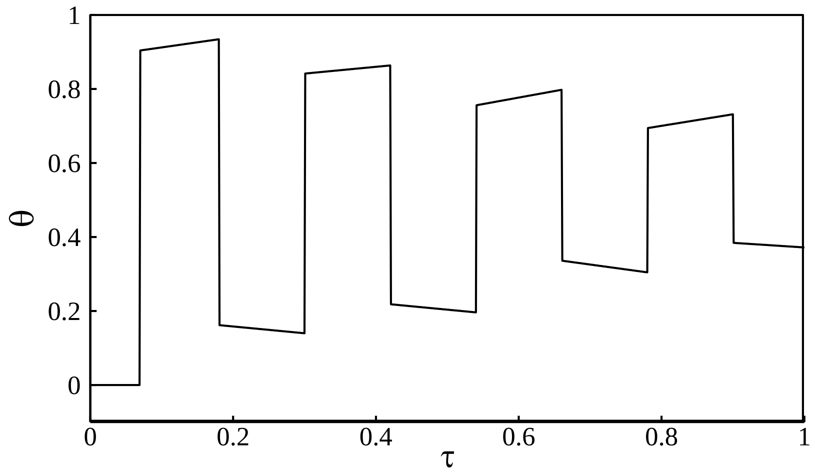
در این فصل، یک استوانه جدار ضخیم از جنس مس با شعاع‌های داخلی $R_i = 4\ \mathrm{mm}$ و خارجی $R_o =$

5 mm در نظر گرفته می‌شود. خواص مکانیکی و گرمایی مس، مورد استفاده برای تحلیل حاضر، در جدول ۵-۱ ارائه شده است [۱۵].

جدول ۵-۱ خواص مکانیکی و گرمایی مس [۱۵]

$\rho(\frac{g}{cm^3})$	$C_v(\frac{J}{Kg\,K})$	$\alpha(10^{-6}\frac{1}{K})$	$K(\frac{W}{m\,K})$	$E(GPa)$	ν
۸/۹۶	۳۸۵	۱۶/۵	۴۰۱	۱۱۷	۰/۳۶

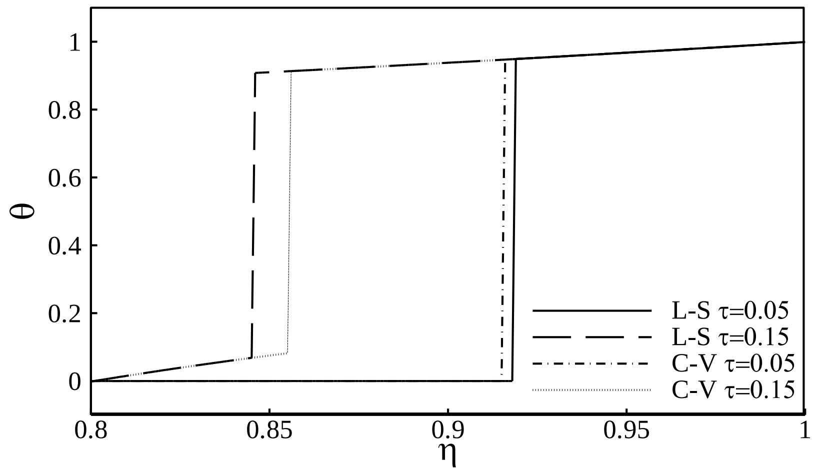
تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته لرد-شولمان برخلاف تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته سرعت محدود موج گرما را تأیید می‌کند. با توجه به شکل (۵-۱)، در این تئوری دما در جسم با نوسان‌های متوالی افزایش می‌یابد و اثر شوک گرمایی با گذشت زمان، به‌شکل موج در جسم منتشر می‌شود. شکل (۵-۱)، توزیع دما برحسب زمان را در شعاع میانی استوانه $\eta = 0.9$ نشان می‌دهد. این شکل، نشان می‌دهد که دما در تئوری لرد-شولمان با رسیدن موج از توزیع دمای پایا فاصله گرفته و پس از عبور موج گرمایی پرش دما منجر به نزدیک شدن دما به مقدار پایای آن می‌شود. چنین رفتاری مشابه مدل کاتانو-ورنات و عکس مدل تأخیر فاز دوگانه می‌باشد.



شکل ۵-۱ توزیع دمای تئوری لرد-شولمان برحسب زمان در $\eta = 0.9$

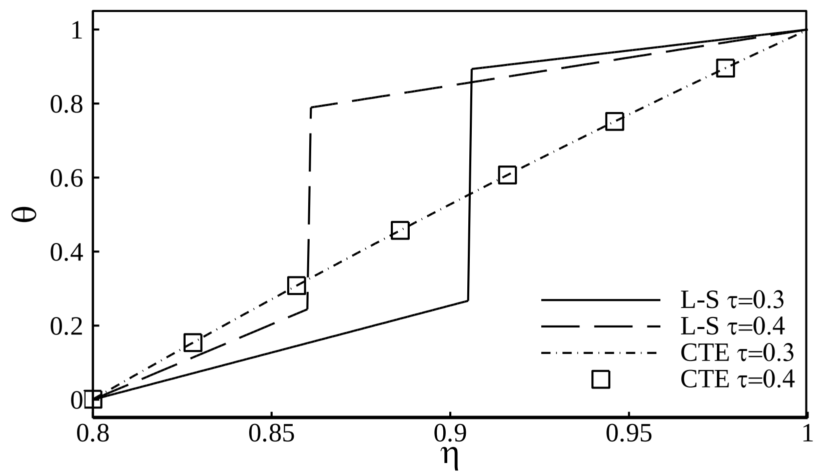
جهت بررسی اثر کوپلینگ معادلات تعادل و انرژی، در شکل (۵-۲) نتایج دمای تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات در زمان‌های مختلف مقایسه شده‌اند. معادلات حاکم مدل کاتانو-ورنات با صرف‌نظر

از اثر کوپل و قرار دادن $\lambda_4 = 0$ در روابط مربوط به تئوری لرد-شولمان به‌دست می‌آیند. مشاهده می‌شود که توزیع دمای کاتانو-ورنات دارای سرعت بیشتری نسبت به تئوری لرد-شولمان است که علت آن صرف‌نظر از کوپلینگ بین معادلات انرژی و تعادل می‌باشد. از آنجاکه این دو مدل روابط ساختاری شار گرمایی و گرادیان دمایی یکسانی دارند، توزیع دما را به‌صورت مشابه در جسم پیش‌بینی می‌کنند.



شکل ۵-۲ توزیع دمای تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات برحسب شعاع

جهت بررسی اثر زمان آسایش شار گرمایی در تئوری لرد-شولمان نسبت به تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته، شکل (۵-۳) توزیع دمای حاصل از این دو تئوری را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. میدان‌های دما و تنش تئوری لرد-شولمان با فرض زمان آسایش شار گرمایی $\varepsilon = 0$ به تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته منجر می‌شوند.



شکل ۵-۳ توزیع دمای تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک بر حسب شعاع

با توجه به شکل، مشاهده می‌شود که توزیع دمای تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته در جسم پیوسته بوده و در زمان‌های مختلف تغییر توزیع دما بسیار اندک است و توزیع دماهای پیش‌بینی شده حاصل از این تئوری، در دو زمان نشان داده شده برهم منطبق شده‌اند. اما در تئوری لرد-شولمان به‌علت خاصیت موج‌گونه معادلات حاکم، گرما به‌صورت موج در جسم منتشر می‌شود. هرچند پس از گذشت زمان، دما بر توزیع دمای تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته منطبق می‌شود.

۵-۳- میدان‌های تنش در استوانه بدون ترک

میدان‌های تنش محوری و محیطی ارائه شده در رابطه (۵-۷)، با استفاده از روابط (۵-۳۳) بی‌بعد می‌شوند.

$$\tilde{\sigma}'_{\phi} = \frac{\tilde{\sigma}_{\phi}(1-2\nu)}{E\alpha T_o} \qquad \text{(۵-۳۳-الف)}$$

$$\tilde{\sigma}'_{z} = \frac{\tilde{\sigma}_{z}(1-2\nu)}{E\alpha T_o} \qquad \text{(۵-۳۳-ب)}$$

به کمک روابط جابه‌جایی (۵-۸)، (۵-۷)، (۵-۲۶) و رابطه (۵-۲۷)، میدان‌های تنش بی‌بعد استوانه در حوزه لاپلاس به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}'_{\phi}(\eta,s) = {} & D_1\left[\gamma_7 I_0(\xi_1\eta) + \frac{\gamma_5}{\eta} I_1(\xi_1\eta)\right] + D_2\left[\gamma_7 K_0(\xi_1\eta) - \frac{\gamma_5}{\eta} K_1(\xi_1\eta)\right] \\ & + D_3\left[\gamma_8 I_0(\xi_2\eta) + \frac{\gamma_6}{\eta} I_1(\xi_2\eta)\right] + D_4\left[\gamma_8 K_0(\xi_2\eta) - \frac{\gamma_6}{\eta} K_1(\xi_2\eta)\right]\end{aligned} \qquad \text{(۵-۳۴-الف)}$$

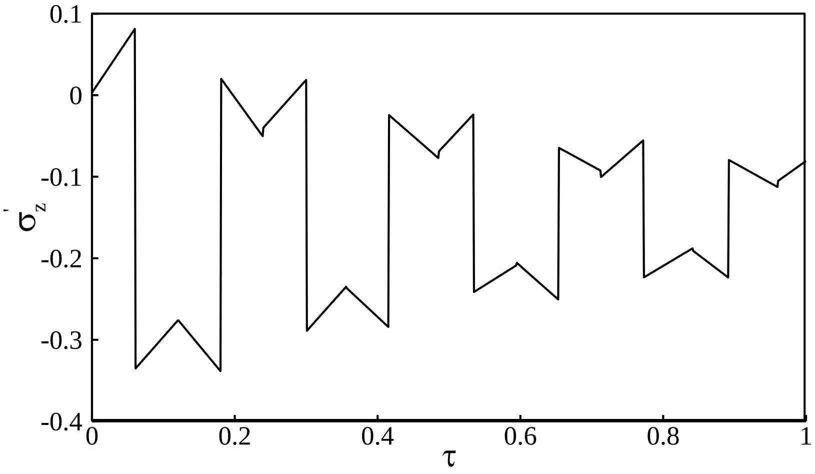
$$\tilde{\sigma}'_{z}(\eta,s) = D_1\gamma_7 I_0(\xi_1\eta) + D_2\gamma_7 K_0(\xi_1\eta) + D_3\gamma_8 I_0(\xi_2\eta) + D_4\gamma_8 K_0(\xi_2\eta) \qquad \text{(۵-۳۴-ب)}$$

که در روابط (۵-۳۴)، ضرایب γ_7 و γ_8 به‌شکل زیر بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned}\gamma_7 &= \frac{\nu}{1+\nu}\xi_1^2 - \gamma_1 \\ \gamma_8 &= \frac{\nu}{1+\nu}\xi_2^2 - \gamma_2\end{aligned} \qquad \text{(۵-۳۵)}$$

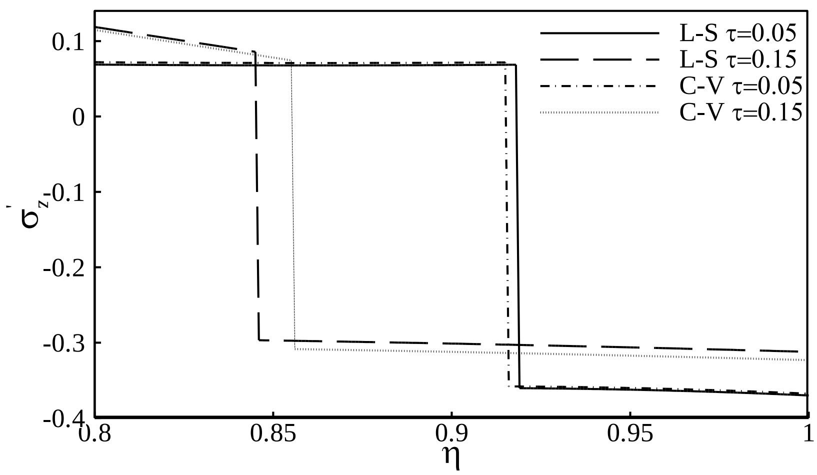
میدان تنش محوری (۵-۳۴-ب) و محیطی (۵-۳۴-الف) با استفاده از معکوس عددی [۵۸]، به حوزه زمان نگاشت می‌شوند. در ابتدا نمودار تنش محوری برحسب زمان ارائه شده و سپس نتایج با تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته و مدل کاتانو-ورنات مقایسه می‌شود.

شکل (۵-۴)، توزیع تنش محوری تئوری لرد-شولمان برحسب زمان را در شعاع میانی استوانه ($\eta = 0.9$) نشان می‌دهد.



شکل ۵-۴ توزیع تنش محوری براساس تئوری لرد-شولمان برحسب زمان در η=0.9

شکل (۵-۵)، توزیع تنش محوری تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد.



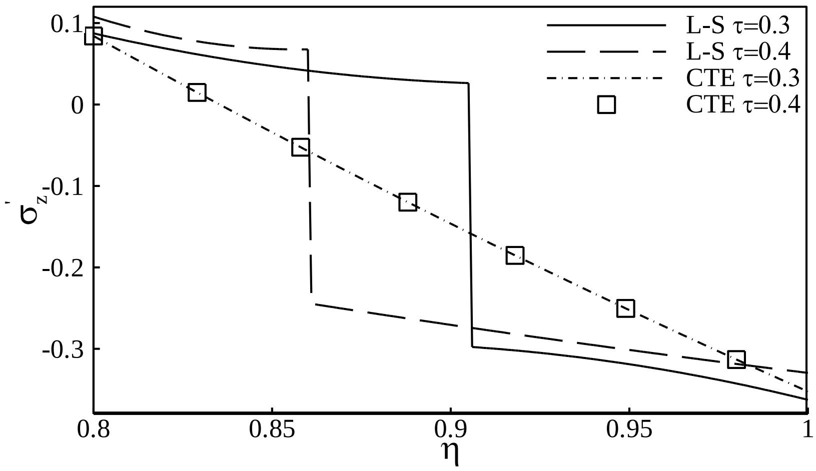
شکل ۵-۵ توزیع تنش محوری تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات برحسب شعاع

با توجه به شکل، سرعت موج گرمایی در مدل کاتانو-ورنات از لرد-شولمان بیشتر است و با توجه به

فرض کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده برای استوانه، انتگرال تنش محوری روی ضخامت در هر زمان مخالف صفر است. با توجه به رابطه (۵-۳۶)، انتگرال‌گیری از تنش روی ضخامت استوانه در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد که نیروی محوری تابعی از زمان است. همچنین مشاهده می‌شود که تنش در نقاطی که بعد از موج گرمایی، بین پیشانی موج و دیواره داخلی قرار دارند، تغییر کرده است که از شرط نیرویی (۵-۳۶) ناشی می‌شود [۶۲].

$$F_z = 2\pi \int_{R_i}^{R_o} r\, \sigma'_z dr \qquad (۵-۳۶)$$

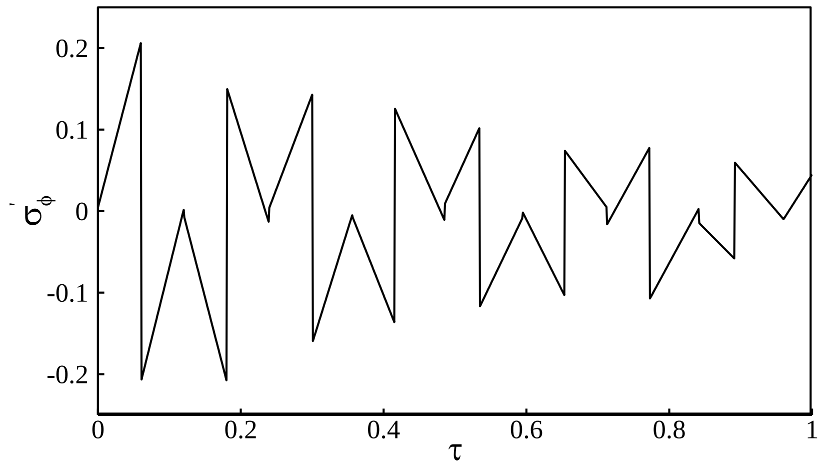
شکل (۵-۶)، توزیع تنش محوری تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک ترموالاستیسیته را نشان می-دهد. با توجه به شکل، مشهود است که تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته توزیع تنش محوری را مشابه دما، به‌صورت تابعی پیوسته پیش‌بینی می‌کند که با سرعت بی‌نهایت در جسم پخش می‌شود. اما تئوری لرد-شولمان توزیع تنش را به‌صورت تابعی ناپیوسته پیش‌بینی می‌کند که پس از گذشت زمان میرا شده و بر توزیع تنش پایای تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته منطبق می‌شود.



شکل ۵-۶ توزیع تنش محوری تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک برحسب شعاع

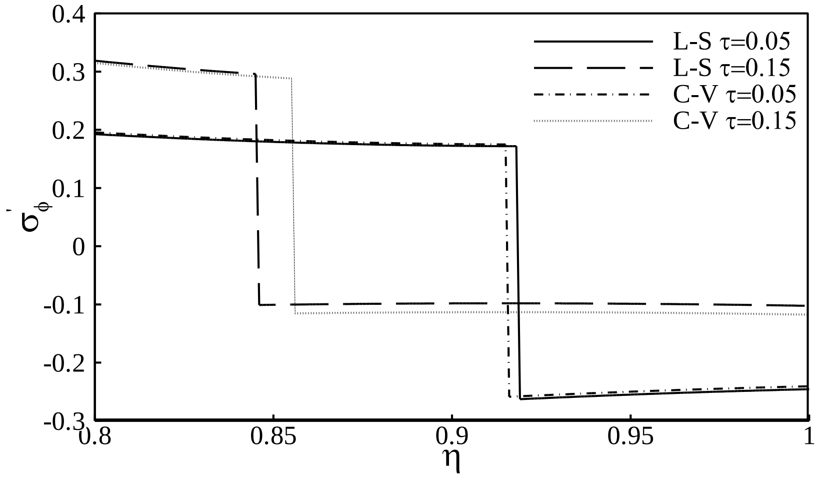
شکل (۵-۷)، توزیع تنش محیطی تئوری لرد-شولمان در شعاع میانی استوانه برحسب زمان را در $\eta = 0.9$ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در زمان صفر، تنش محیطی صفر است که از صفر بودن بارگذاری مکانیکی ناشی می‌شود. همچنین با گذشت زمان موج گرمایی میرا شده و بیشینه تنش

محیطی برحسب زمان کاهش می‌یابد.



شکل ۵-۷ توزیع تنش محیطی تئوری لرد-شولمان برحسب زمان در η = 0.9

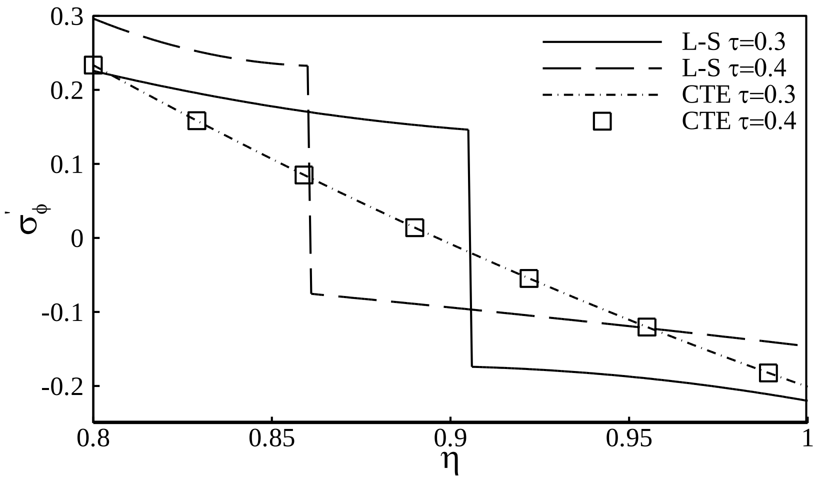
شکل (۵-۸)، توزیع تنش محیطی براساس تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که مشابه نمودارهای دما و تنش محوری، سرعت موج گرمایی در مدل کاتانو-ورنات از لرد-شولمان بیشتر است. ناپیوستگی در نمودار تنش محیطی با نمودارهای دما و تنش محوری متناظر است. همچنین، زمانی که موج گرما از دیواره خارجی به سمت دیواره داخلی حرکت می‌کند تنش در مدل کاتانو-ورنات از تئوری لرد-شولمان بزرگتر است و پس از رسیدن موج به دیواره داخلی و منعکس شدن به سمت دیواره خارجی، تنش در تئوری لرد-شولمان از کاتانو-ورنات بیشتر می‌شود.



شکل ۵-۸ توزیع تنش محیطی تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات برحسب شعاع

شکل (۵-۹)، توزیع تنش محیطی براساس تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک ترموالاستیسیته را

نشان می‌دهد. در تئوری لرد-شولمان در زمان‌های ابتدایی، پیشانی موج مقدار بزرگتری است و با گذشت زمان و با میرا شدن موج گرمایی، پیشانی موج گرمایی کاملاً مستهلک شده و بر توزیع تنش تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته منطبق می‌شود.



شکل ۵-۹ توزیع تنش محیطی تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک ترموالاستیسیته

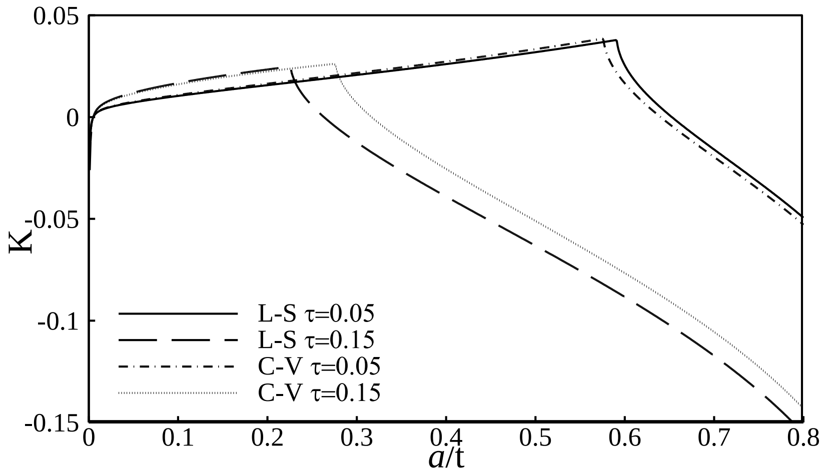
از مقایسه شکل‌های مربوط به دما برحسب زمان و شعاع استوانه، با نمودارهای متناظر مربوط به تنش‌های محوری و محیطی مشاهده می‌شود که در نقاطی که پیشانی موج در نمودار دما موجب افزایش دما می‌شود؛ در نقطه متناظر آن در نمودار تنش، پیشانی موج موجب کاهش تنش و تغییر علامت آن از کششی به فشاری می‌شود. در نقاطی که پیشانی موج باعث کاهش دما می‌شود، تنش از فشاری به کششی تغییر علامت می‌دهد؛ که از فرضیه پیوستگی جابه‌جایی در استوانه ناشی می‌شود. طبق فرضیه پیوستگی، در نقاطی که جسم منقبض می‌شود، تنش‌ها کششی و در نقاطی که جسم منبسط می‌شود، تنش در جسم فشاری می‌شود و بدین ترتیب پیوستگی ماده در جسم بدون ترک حفظ می‌شود [۱۵].

۵-۴- ضرایب شدت تنش

۵-۴-۱ ضریب شدت تنش ترک محیطی

شکل (۵-۱۰)، ضریب شدت تنش ترک محیطی تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات را در دو زمان نشان می‌دهد. موج گرمایی از دیواره خارجی به سمت دیواره داخلی حرکت می‌کند. نتایج نشان

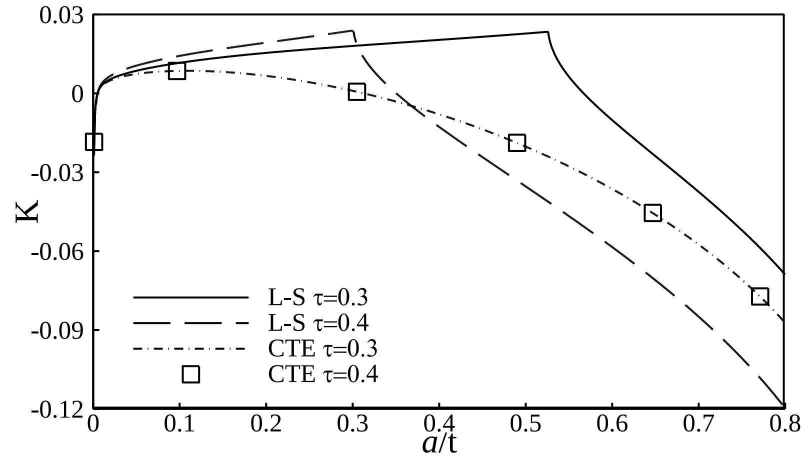
می‌دهد موج گرمایی در تئوری لرد-شولمان سرعت کمتری نسبت به مدل کاتانو-ورنات دارد.



شکل ۵-۱۰ ضریب شدت تنش ترک محیطی تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات

در زمان $\tau = 0.05$، موقعیت ناپیوستگی تنش تئوری لرد-شولمان به دیواره خارجی نزدیک‌تر است و با توجه به رابطه (۲-۲)، ضریب شدت تنش تئوری لرد-شولمان در این زمان از مدل کاتانو-ورنات بیشتر است. در زمان $\tau = 0.15$ پس از انعکاس موج گرمایی در برخورد با دیواره داخلی، موقعیت ناپیوستگی تنش در مدل کاتانو-ورنات به دیواره خارجی نزدیک‌تر است که در این حالت ضریب شدت تنش مدل کاتانو-ورنات از لرد-شولمان بزرگتر می‌شود.

شکل (۵-۱۱)، ضریب شدت تنش ترک محیطی براساس تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک ترموالاستیسیته را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۱۱ ضریب شدت تنش ترک محیطی تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک ترموالاستیسیته

با توجه به فرض کرنش صفحه‌ای، منفی شدن انتگرال تنش محوری روی ضخامت استوانه، نشان-دهنده نیروی محوری فشاری در استوانه است. درنتیجه نیروی محوری فشاری اعمالی، ضریب شدت تنش تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک ترموالاستیسیته تنها در طول ترک نسبی محدودی مثبت است.

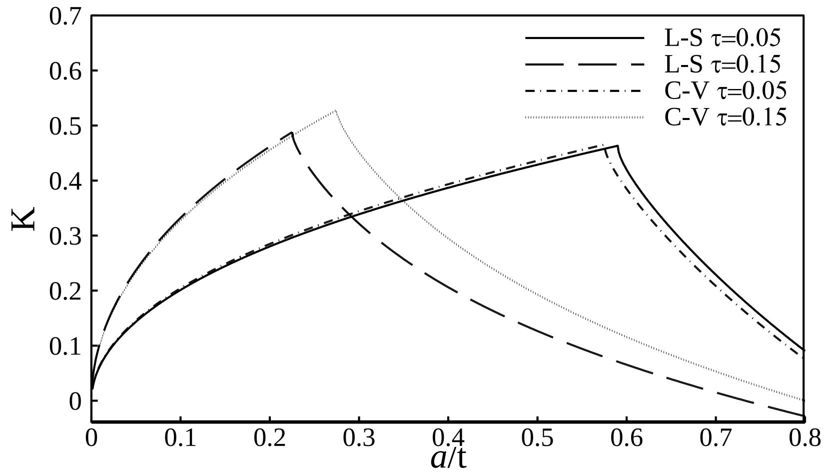
در جدول ۵-۲ ضریب شدت تنش ترک محیطی براساس تئوری‌های کلاسیک ترموالاستیسیته و لرد-شولمان در دو زمان مقایسه شده است. مطابق نتایج، بیشینه ضریب شدت تنش حاصل از تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته اختلاف قابل توجهی با تئوری لرد-شولمان دارد. از طرف دیگر، ضریب شدت پیش‌بینی شده توسط تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته در هر دو زمان مشابه است و این تئوری تغییرات ضریب شدت تنش در حالت گذرا در زمان‌های مختلف را نمی‌تواند به درستی بیان کند.

جدول ۵-۲ ضریب شدت تنش ترک محیطی

تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته در زمان $\tau = 0.4$	تئوری لرد-شولمان در زمان $\tau = 0.4$	تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته در زمان $\tau = 0.3$	تئوری لرد-شولمان در زمان $\tau = 0.3$	طول نسبی ترک $(\frac{a}{t})$
۰/۰۰۸۵	۰/۰۱۴۲	۰/۰۰۸۵	۰/۰۱۱۶	۰/۱
۰/۰۰۶۶	۰/۰۱۹۲	۰/۰۰۶۶	۰/۰۱۵۳	۰/۲
۰/۰۰۰۹	۰/۰۲۳۶	۰/۰۰۰۹	۰/۰۱۸	۰/۳
-۰/۰۰۷۹	-۰/۰۱۲۷	-۰/۰۰۷۹	۰/۰۲۰۳	۰/۴
-۰/۰۲۰۲	-۰/۰۳۵۳	-۰/۰۲۰۲	۰/۰۲۲۷	۰/۵
-۰/۰۳۶۲	-۰/۰۵۸۴	-۰/۰۳۶۳	-۰/۰۱۰۱	۰/۶
-۰/۰۵۷۴	-۰/۰۸۴۹	-۰/۰۵۷۵	-۰/۰۳۷۴	۰/۷
-۰/۰۸۷۱	-۰/۱۱۹۷	-۰/۰۸۷۲	-۰/۰۶۸۹	۰/۸

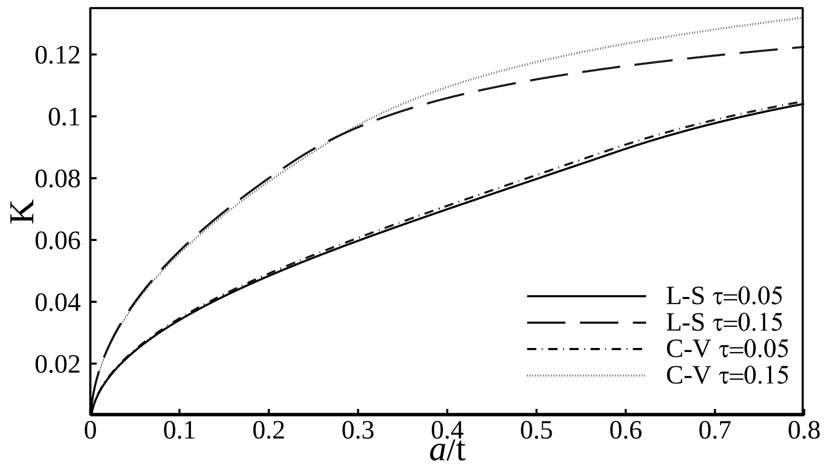
۵-۴-۲ ضرایب شدت تنش ترک نیم‌بیضوی

شکل (۵-۱۲)، ضریب شدت تنش عمق ترک نیم‌بیضوی تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات در استوانه دارای شرایط مرزی (۵-۱۵) را نشان می‌دهد. مطابق شکل، ضریب شدت تنش تئوری لرد-شولمان در زمان $\tau = 0.05$ از مدل کاتانو-ورنات بیشتر است و پس از برخورد موج به دیواره داخلی در زمان $\tau = 0.15$ ضریب شدت تنش مدل کاتانو-ورنات از لرد-شولمان بیشتر می‌شود.



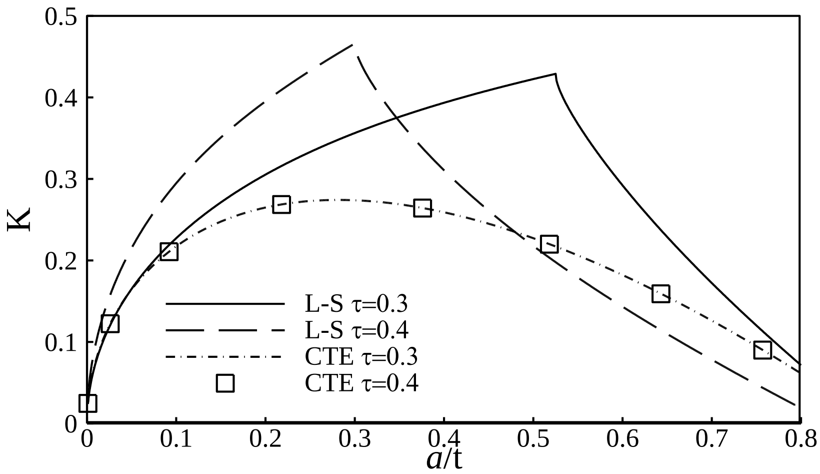
شکل ۵-۱۲ ضریب شدت تنش تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات در عمق ترک نیم‌بیضوی ($\frac{a}{c} = 1$)

شکل (۵-۱۳)، ضریب شدت تنش تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات را در گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی نشان می‌دهد. با توجه به شکل، ضریب شدت تنش گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی حاصل از تئوری لرد-شولمان در زمان‌های برابر از ضریب شدت تنش مدل کاتانو-ورنات کمتر است.



شکل ۵-۱۳ ضریب شدت تنش تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات در گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی

شکل (۵-۱۴)، ضریب شدت تنش تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک ترموالاستیسیته را در عمق ترک نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در هر دو زمان، ضریب شدت تنش عمق ترک نیم‌بیضوی حاصل از تئوری لرد-شولمان از تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته بزرگتر است.



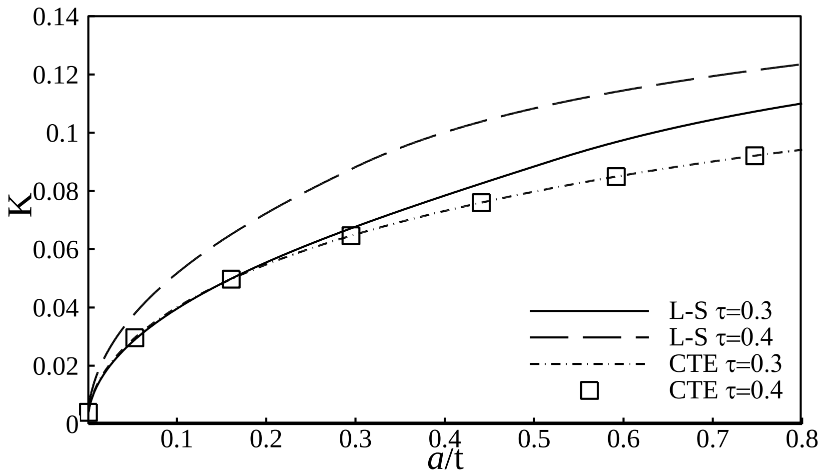
شکل ۵-۱۴ ضریب شدت تنش تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک در عمق ترک نیم‌بیضوی

در جدول ۵-۳ ضریب شدت تنش عمق ترک نیم‌بیضوی براساس تئوری‌های کلاسیک ترموالاستیسیته و لرد-شولمان در دو زمان مقایسه شده است. با توجه به نتایج ضریب شدت تنش ارائه شده در جدول، ضریب شدت بیشینه براساس تئوری لرد-شولمان در عمق ترک نیم بیضوی در هر دو زمان از تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته بیشتر است. ضریب شدت بیشینه حاصل از تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته در زمان $\tau = 0.3$، حدوداً ۶۵٪ و در زمان $\tau = 0.4$ حدوداً ۶۰٪ مقدار ضریب شدت بیشینه حاصل از تئوری لرد-شولمان در عمق ترک نیم‌بیضوی است.

شکل (۵-۱۵)، ضریب شدت تنش تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک ترموالاستیسیته را در گوشه-های ترک نیم‌بیضوی نشان می‌دهد. ضریب شدت تنش حاصل از تئوری لرد-شولمان در هر دو زمان از تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته بیشتر است. همچنین ضریب شدت تنش حاصل از تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته با گذشت زمان تغییرات زیادی ندارد و ضریب شدت تنش در هر دو زمان تقریباً بر هم منطبق شده‌اند.

جدول ۵-۳ مقایسه ضریب شدت تنش عمق ترک نیم‌بیضوی

طول نسبی ترک $(\frac{a}{t})$	تئوری لرد-شولمان در زمان $\tau = 0.3$	تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته در زمان $\tau = 0.3$	تئوری لرد-شولمان در زمان $\tau = 0.4$	تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته در زمان $\tau = 0.4$
۰/۱	۰/۲۲۷۳	۰/۲۱۷۳	۰/۲۹۴۷	۰/۲۱۷۲
۰/۲	۰/۳۰۵۳	۰/۲۶۴۹	۰/۳۹۵۲	۰/۲۶۴۸
۰/۳	۰/۳۵۶۲	۰/۲۷۳۸	۰/۴۵۹	۰/۲۷۳۷
۰/۴	۰/۳۹۳۴	۰/۲۵۹۱	۰/۳۱۰۶	۰/۲۵۹
۰/۵	۰/۴۲۲۵	۰/۲۲۷۲	۰/۲۱۷۸	۰/۲۲۷۲
۰/۶	۰/۲۹۲	۰/۱۸۲۱	۰/۱۴۳۲	۰/۱۸۲
۰/۷	۰/۱۷۲۲	۰/۱۲۶۱	۰/۰۷۸۱	۰/۱۲۶
۰/۸	۰/۰۷۱۴	۰/۰۶۱۲	۰/۰۱۸۷	۰/۰۶۱۱



شکل ۵-۱۵ ضریب شدت تنش تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک ترموالاستیسیته در گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی

در جدول ۵-۴، ضریب شدت تنش تئوری‌های کلاسیک ترموالاستیسیته و لرد-شولمان مقایسه شده

است. با توجه به مقادیر ضریب شدت تنش ارائه شده در جدول مشاهده می‌شود که در هر دو زمان بیشینه ضریب شدت تنش در گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی، حاصل از تئوری لرد-شولمان از تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته بزرگتر است. نتایج ضریب شدت تنش در عمق ترک نیم‌بیضوی ابتدا با افزایش طول ترک به مقدار بیشینه رسیده و سپس با افزایش طول نسبی ترک کاهش می‌یابد. درحالی‌که ضریب شدت تنش در گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی با افزایش طول ترک بیشتر می‌شود و مطابق نتایج ضریب شدت تنش بیشینه در طول نسبی ۰/۸ اتفاق می‌افتد.

جدول ۵-۴ ضریب شدت تنش گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی

تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته در زمان $\tau = 0.4$	تئوری لرد-شولمان در زمان $\tau = 0.4$	تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته در زمان $\tau = 0.3$	تئوری لرد-شولمان در زمان $\tau = 0.3$	عمق نسبی ترک ($\frac{a}{t}$)
۰/۰۴	۰/۰۵۱۷	۰/۰۴	۰/۰۳۹۵	۰/۱
۰/۰۵۴۷	۰/۰۷۲۳	۰/۰۵۴۷	۰/۰۵۵۴	۰/۲
۰/۰۶۵	۰/۰۸۸۲	۰/۰۶۵	۰/۰۶۷۷	۰/۳
۰/۰۷۳۱	۰/۱۰۰۱	۰/۰۷۳۱	۰/۰۷۸۴	۰/۴
۰/۰۷۹۷	۰/۱۰۸۳	۰/۰۷۹۷	۰/۰۸۸۴	۰/۵
۰/۰۸۵۳	۰/۱۱۴۴	۰/۰۸۵۳	۰/۰۹۷۴	۰/۶
۰/۰۹۰۱	۰/۱۱۹۴	۰/۰۹	۰/۱۰۴۴	۰/۷
۰/۰۹۴۱	۰/۱۲۳۵	۰/۰۹۴۱	۰/۱۱	۰/۸

در نتایج ارائه شده در این فصل، از مقایسه شکل‌های مربوط به تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات مشاهده می‌شود که این دو تئوری توزیع دما را در جسم مشابه پیش‌بینی می‌کنند و تنها موقعیت ناپیوستگی در تئوری لرد-شولمان از مدل کاتانو-ورنات عقب‌تر است که مربوط به اثر کوپلینگ است.

در نمودارهای تنش محوری و محیطی برحسب شعاع مشاهده می‌شود که در زمان $\tau = 0.05$، مدل کاتانو-ورنات تنش را بیشتر از تئوری لرد-شولمان پیش‌بینی می‌کند. همچنین انتگرال تنش محیطی روی دیواره استوانه به علت صفر بودن بارهای مکانیکی روی ضخامت استوانه صفر می‌شود و انتگرال تنش محوری روی ضخامت استوانه از شرط نیرویی (۵-۳۶) پیروی می‌کند.

با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته‌شده، تنش از دیواره داخلی تا پیشانی موج گرمایی کششی است. در حالی‌که تنش در نقاط بین پیشانی موج و دیواره خارجی منفی است. در نمودارهای ضریب شدت تنش مربوط به تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات، هرگاه موقعیت ناپیوستگی در یک مدل به دیواره خارجی نزدیک‌تر باشد؛ ضریب شدت تنش مدل مذکور بزرگ‌تر خواهد بود.

در نمودارهای مربوط به تئوری‌های لرد-شولمان و کلاسیک مشاهده می‌شود که تئوری کلاسیک توزیع‌های دما، تنش محوری، تنش محیطی و نیز ضریب شدت تنش را به‌صورت تابعی پیوسته پیش‌بینی می‌کند. در نمودارهای مربوط به این دو تئوری، مقادیر دما، تنش و ضریب شدت تنش مربوط به تئوری لرد-شولمان از تئوری کلاسیک بیشتر است که این مسئله از اثر زمان آسایش شار گرمایی در تئوری لرد-شولمان ناشی می‌شود.

فصل ۶ تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته چاندراساخاریا-تزو

۶-۱- مقدمه

در این فصل، ضریب شدت تنش ترک محیطی و ترک نیم‌بیضوی در استوانه جدار ضخیم براساس تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته چاندراساخاریا-تزو با استفاده از روش تابع وزنی محاسبه می‌شود. از وجود نیروهای حجمی و منبع گرمایی داخلی صرف‌نظر می‌شود. پس از حل معادلات کوپل حاکم به‌صورت تحلیلی در حوزه لاپلاس، با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی نتایج به حوزه زمان منتقل می‌شوند. نتایج دما، تنش محوری و محیطی و ضریب شدت تنش با مدل تأخیر فاز دوگانه و تئوری لرد-شولمان مقایسه می‌شوند.

۶-۲- معادلات حاکم در تئوری ترموالاستیسیته چاندراساخاریا-تزو

در تئوری ترموالاستیسیته چاندراساخاریا-تزو معادلات ساختاری مورد استفاده برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر هدایت گرمایی مواد همگن و همسانگرد به‌صورت زیر هستند [۱۵].

رابطه ساختاری تنش در فرم تانسوری، به‌صورت رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{I}(\nabla.\mathbf{u}) + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\mathbf{I}T \tag{۶-۱}$$

روابط سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) به‌شکل رابطه (۶-۲) است.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\nabla\otimes\mathbf{u} + (\nabla\otimes\mathbf{u})^{T}] \tag{۶-۲}$$

معادله تعادل برای استوانه به‌صورت رابطه (۶-۳) است.

$$\nabla.\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \tag{۶-۳}$$

معادله ساختاری انتروپی، برحسب ثابت‌های لامه به‌شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\rho S = \frac{\rho c_v}{T_0}\theta + (3\lambda + 2\mu)\alpha(\nabla.\mathbf{u}) \tag{۶-۴}$$

رابطه ساختاری شار گرمایی، در تئوری چاندراساخاریا-تزو مطابق رابطه (۶-۵) است.

$$\mathbf{q} + \tau_q \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau_q^2 \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2} = -k\left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla T \qquad (۶-۵)$$

معادله بقای انرژی، برحسب نرخ تغییرات انتروپی به‌شکل زیر بیان می‌شود.

$$\nabla.\mathbf{q} = \rho(R - \dot{S}T_0) \qquad (۶-۶)$$

استوانه به‌اندازه کافی بلند (فرض کرنش صفحه‌ای در راستای محور) و توخالی تحت بارگذاری متقارن محوری فرض می‌شود. در این حالت مؤلفه‌های غیر صفر جابه‌جایی و شار گرمایی تنها در جهت شعاعی قرار دارند و تنها تابع زمان و شعاع استوانه هستند. بنابراین در این حالت، روابط (۶-۱) تا (۶-۶) به‌شکل زیر کاهش می‌یابند.

روابط ساختاری تنش برحسب خواص ماده و تغییرات دمای استوانه، به‌شکل زیر تعریف می‌شوند [۱۵].

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_\phi\right) - \frac{E\alpha}{1-2\nu}T \qquad (\text{۶-۷-الف})$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_r + \frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_\phi\right) - \frac{E\alpha}{1-2\nu}T \qquad (\text{۶-۷-ب})$$

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_r + \varepsilon_\phi) - \frac{E\alpha}{1-2\nu}T \qquad (\text{۶-۷-ج})$$

معادلات سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) در حالت متقارن محوری با توجه به رابطه (۶-۲)، برای استوانه به‌شکل زیر بیان می‌شود.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad (\text{۶-۸-الف})$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \qquad (\text{۶-۸-ب})$$

معادله جابه‌جایی برحسب نیروی حجمی، تنش‌ها و جابه‌جایی در استوانه تحت بارگذاری و شرایط مرزی متقارن محوری، به‌شکل زیر بیان می‌شود.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + F_r = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (۶-۹)$$

معادله ساختاری انتروپی در حالت متقارن محوری به‌شکل رابطه (۶-۱۰) است.

$$\rho S = \frac{\rho c_v}{T_0}T + \frac{E\alpha}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) \qquad (۶-۱۰)$$

رابطه (۶-۱۱)، رابطه ساختاری شار گرمایی یک بعدی در جهت شعاعی را در استوانه بیان می‌کند.

$$q + \tau_q\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau_q^2\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -k\left(1 + \tau_T\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla T \qquad (۶-۱۱)$$

رابطه (۶-۱۲)، پایستگی انرژی در استوانه دارای منبع گرمایی داخلی را در مختصات استوانه‌ای بیان می‌کند.

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)q = \rho\left(R - \frac{\partial S}{\partial t}T_0\right) \qquad (۶-۱۲)$$

با صرف‌نظر از نیروهای حجمی F_r و حذف σ و ε در معادلات (۶-۸) و (۶-۹)، رابطه (۶-۱۳-الف) به‌دست می‌آید. با صرف‌نظر از منبع گرمایی داخلی R و سپس حذف q و S از روابط (۶-۱۰) تا (۶-۱۲)، رابطه (۶-۱۳-ب) به‌دست می‌آید. معادله (۶-۱۳-الف)، معادله ناویر و معادله (۶-۱۳-ب)، معادله انرژی نامیده می‌شود.

$$\frac{E}{1+\nu}\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) - \frac{E\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial r} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (۶-۱۳-الف)$$

$$\left(1 + \tau_q\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau_q^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right)\right] = k\left(1 + \tau_T\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)T \qquad (۶-۱۳-ب)$$

شرایط اولیه دما و جابه‌جایی برای استوانه به‌شکل رابطه (۶-۱۴) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} &T(0,r) = T_0 \\ &\frac{\partial}{\partial t}T(0,r) = 0 \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(0,r) = 0 \\ &u(0,r) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t}u(0,r) = 0 \end{aligned} \qquad (۶-۱۴)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(0,r)=0$$

شرایط مرزی دمایی و مکانیکی، به‌شکل رابطه (۶-۱۵) تعریف می‌شوند.

$$T(R_i,t)=0$$
$$T(R_o,t)=1$$
$$\sigma_r(R_i,t)=0$$
$$\sigma_r(R_o,t)=0 \qquad (۶\text{-}۱۵)$$

برای سادگی پارامترهای بی‌بعد زیر معرفی می‌شوند.

$$\tau=\frac{td}{R_o^2}$$
$$\varepsilon=\frac{\tau_q d}{R_o^2}$$
$$\delta=\frac{\tau_T d}{R_o^2}$$
$$\eta=\frac{r}{R_o}$$
$$\eta_i=\frac{R_i}{R_o}$$
$$\theta=\frac{T}{T_0}$$
$$u'=\frac{u}{R_o\alpha T_0} \qquad (۶\text{-}۱۶)$$

که $d=k/\rho c$ است. با استفاده از پارامترهای بی‌بعد معرفی شده، معادلات حرکت و انرژی برحسب جابه‌جایی و دما به‌شکل رابطه (۶-۱۷) بازنویسی می‌شوند [۱۵].

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^3}{\partial\tau^3}\right)\left[\theta+\frac{E\alpha^2dT_0}{k(1-2\nu)}\left(\frac{\partial u'}{\partial\eta}+\frac{u'}{\eta}\right)\right]=\left(1+\delta\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\theta \qquad (۶\text{-}۱۷\text{-الف})$$

$$\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial^2u'}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u'}{\partial\eta}-\frac{u'}{\eta^2}\right)-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=\frac{\rho d^2}{ER_o^2}\frac{\partial^2u'}{\partial\tau^2} \qquad (۶\text{-}۱۷\text{-ب})$$

بیان روابط (۶-۱۷) در فضای لاپلاس با توجه به شرایط اولیه (۶-۱۴)، منجر به دو معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر مسئله برحسب متغیر مستقل مکان می‌شود.

$$\lambda_1\left(\frac{\partial^2\tilde{u}'}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial\tilde{u}'}{\partial\eta}-\frac{\tilde{u}'}{\eta^2}\right)-\lambda_2\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\eta}=\lambda_3 s^2\tilde{u}' \qquad \text{(۶-۱۸-الف)}$$

$$\tilde{\theta}+\lambda_4\left(\frac{\partial\tilde{u}'}{\partial\eta}+\frac{\tilde{u}'}{\eta}\right)=\lambda_5\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\tilde{\theta} \qquad \text{(۶-۱۸-ب)}$$

که در آن، ($\tilde{}$) نشان‌دهنده تبدیل لاپلاس تابع مورد نظر است و ثابت‌های λ_i به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\lambda_1=\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\lambda_2=\frac{1}{1-2\nu}$$

$$\lambda_3=\frac{\rho d^2}{ER_o^2} \qquad \text{(۶-۱۹)}$$

$$\lambda_4=\frac{E\alpha^2 dT_0}{k(1-2\nu)}$$

$$\lambda_5=\frac{1+\delta s}{s\left(1+\varepsilon s+\frac{1}{2}\varepsilon^2 s^2\right)}$$

برای حل معادلات حاکم، تابع پتانسیل جابه‌جایی به‌شکل رابطه (۶-۲۰) تعریف می‌شود [۱۵].

$$\tilde{u}'=\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \qquad \text{(۶-۲۰)}$$

معادلات دیفرانسیل کوپل حاکم (۶-۱۸) با استفاده از تابع پتانسیل جابه‌جایی، به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\lambda_1\nabla^2\psi-\lambda_3 s^2\psi=\lambda_2\tilde{\theta} \qquad \text{(۶-۲۱-الف)}$$

$$\lambda_4\nabla^2\psi=\lambda_5\nabla^2\tilde{\theta}-\tilde{\theta} \qquad \text{(۶-۲۱-ب)}$$

حذف $\tilde{\theta}$ از روابط (۶-۲۱)، منجر به معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت (۶-۲۲) می‌شود [۱۵].

$$A\nabla^4\psi+B\nabla^2\psi+C\psi=0 \qquad \text{(۶-۲۲)}$$

که ضرایب رابطه (۶-۲۲)، به‌شکل رابطه (۶-۲۳) هستند.

$$A=\frac{\lambda_1\lambda_5}{\lambda_2}$$

$$B = -\frac{\lambda_3\lambda_5 s^2}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \lambda_4$$
(۶-۲۳)
$$C = \frac{\lambda_3 s^2}{\lambda_2}$$

حل معادله دیفرانسیل معمولی (۶-۲۲) برحسب توابع بسل اصلاح شده قابل بیان است.

$$\psi(\eta, s) = D_1 I_0(\xi_1\eta) + D_2 K_0(\xi_1\eta) + D_3 I_0(\xi_2\eta) + D_4 K_0(\xi_2\eta) \tag{۶-۲۴}$$

توابع بسل اصلاح شده مرتبه صفر نوع اول I_0 و دوم K_0، پاسخ‌های مستقل معادله دیفرانسیل (۶-۲۲) هستند. در حل فوق ξ_1 و ξ_2، ریشه‌های معادله (۶-۲۲) هستند که به‌صورت رابطه (۶-۲۵) بیان می‌شوند.

$$\xi_{1,2} = \left\{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{۶-۲۵}$$

جابه‌جایی بدون‌بعد در حوزه لاپلاس، از جاگذاری رابطه تابع پتانسیل جابه‌جایی (۶-۲۴) در (۶-۲۰)، تعیین می‌شود.

$$\tilde{u}'(\eta, s) = \xi_1[D_1 I_1(\xi_1\eta) - D_2 K_1(\xi_1\eta)] + \xi_2[D_3 I_1(\xi_2\eta) - D_4 K_1(\xi_2\eta)] \tag{۶-۲۶}$$

میدان دمای بدون‌بعد در حوزه لاپلاس، از جاگذاری تابع پتانسیل جابه‌جایی (۶-۲۴) در (۶-۲۱-الف)، به‌شکل زیر استخراج می‌شود.

$$\tilde{\theta}(\eta, s) = \gamma_1[D_1 I_0(\xi_1\eta) + D_2 K_0(\xi_1\eta)] + \gamma_2[D_3 I_0(\xi_2\eta) + D_4 K_0(\xi_2\eta)] \tag{۶-۲۷}$$

که در رابطه (۶-۲۷)، ضرایب γ_1 و γ_2 به‌شکل رابطه (۶-۲۸) هستند.

$$\gamma_1 = \frac{\lambda_1\xi_1^2 - \lambda_3 s^2}{\lambda_2}$$
(۶-۲۸)
$$\gamma_2 = \frac{\lambda_1\xi_2^2 - \lambda_3 s^2}{\lambda_2}$$

میدان تنش شعاعی (۶-۷-الف) با استفاده از رابطه زیر بی‌بعد می‌شود.

$$\tilde{\sigma}'_r = \frac{\tilde{\sigma}_r(1 - 2\nu)}{E\alpha T_0} \tag{۶-۲۹}$$

با استفاده از روابط (۶-۸)، (۶-۷-الف)، (۶-۲۶) و رابطه (۶-۲۷)، میدان تنش شعاعی بی‌بعد استوانه در

حوزه لاپلاس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\tilde{\sigma}'_r(\eta, s) = D_1\left[\gamma_3 I_0(\xi_1\eta) - \frac{\gamma_5}{\eta} I_1(\xi_1\eta)\right] + D_2\left[\gamma_3 K_0(\xi_1\eta) + \frac{\gamma_5}{\eta} K_1(\xi_1\eta)\right]$$
$$+D_3\left[\gamma_4 I_0(\xi_2\eta) - \frac{\gamma_6}{\eta} I_1(\xi_2\eta)\right] + D_4\left[\gamma_4 K_0(\xi_2\eta) + \frac{\gamma_6}{\eta} K_1(\xi_2\eta)\right] \quad (۳۰-۶)$$

که ضرایب میدان تنش شعاعی (۶-۳۰)، به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\gamma_3 = \frac{1-\nu}{1+\nu}\xi_1^2 - \gamma_1$$
$$\gamma_4 = \frac{1-\nu}{1+\nu}\xi_2^2 - \gamma_2$$
$$\gamma_5 = \frac{1-2\nu}{1+\nu}\xi_1 \quad (۳۱-۶)$$
$$\gamma_6 = \frac{1-2\nu}{1+\nu}\xi_2$$

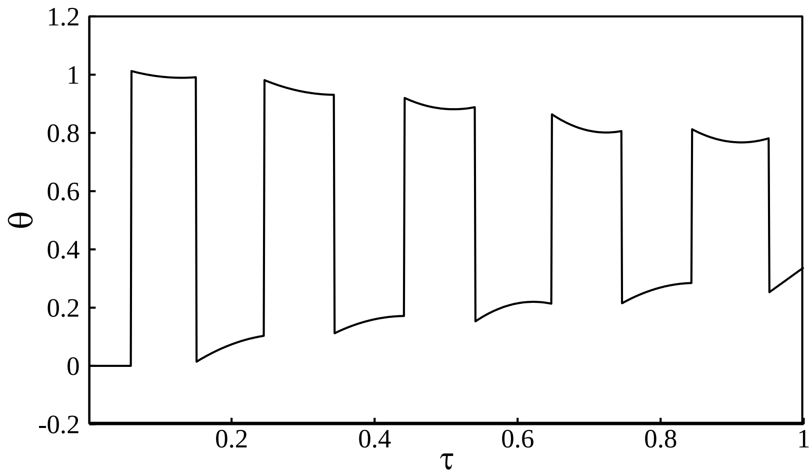
شرایط مرزی (۶-۱۵)، در حوزه لاپلاس به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\tilde{\theta}(\eta_i, s) = 0$$
$$\tilde{\theta}(1, s) = \frac{1}{s} \quad (۳۲-۶)$$
$$\tilde{\sigma}'_r(\eta_i, s) = 0$$
$$\tilde{\sigma}'_r(1, s) = 0$$

پس از تعیین میدان‌های جابه‌جایی، دما و تنش شعاعی در حوزه لاپلاس به‌صورت تحلیلی، با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی نتایج به حوزه زمان نگاشت می‌شوند.

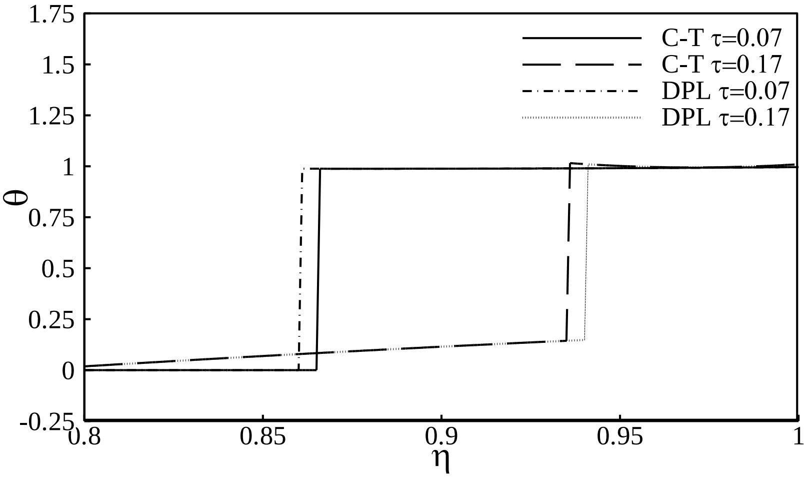
شکل (۶-۱)، توزیع دمای تئوری چاندراساخاریا-تزو برحسب زمان را در شعاع میانی استوانه نشان می‌دهد. با توجه به شکل، مشهود است که تا رسیدن موج گرمایی، دما تغییری نمی‌کند و سپس با رسیدن موج گرمایی دما با نوسان‌های متوالی در جسم افزایش می‌یابد. با گذشت زمان موج گرمایی مستهلک شده و بر توزیع دمای پایا منطبق می‌شود.

شکل (۶-۲)، توزیع دمای تئوری چاندراساخاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه را نشان می‌دهد.



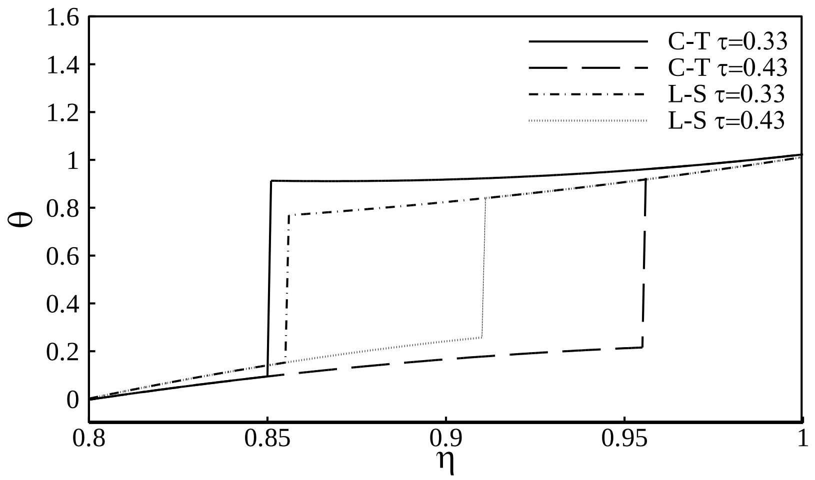
شکل ۶-۱ توزیع دمای تئوری چاندراساخاریا-تزو برحسب زمان در $\eta = 0.9$

اثر کوپلینگ معادلات انرژی و حرکت در تئوری چاندراساخاریا-تزو موجب کاهش سرعت موج گرمایی نسبت به مدل تأخیر فاز دوگانه -که اثر کوپلینگ را در نظر نمی‌گیرد- می‌شود.



شکل ۶-۲ توزیع دمای تئوری چاندراساخاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه برحسب شعاع

شکل (۶-۳)، توزیع دمای حاصل از تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان برحسب شعاع استوانه را نشان می‌دهد. از مقایسه این شکل با شکل (۶-۲)، مشاهده می‌شود که پیشانی موج گرمایی تئوری چاندراساخاریا-تزو کوتاه‌تر شده و به دمای پایا نزدیک شده است. همچنین اضافه شدن زمان آسایش گرادیان دما به تئوری لرد-شولمان که منجر به تئوری چاندراساخاریا-تزو شده است موجب سرعت موج گرمایی متفاوت نسبت به تئوری لرد-شولمان شده است.



شکل ۶-۳ توزیع دمای تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان برحسب شعاع

مشاهده می‌شود که اضافه‌شدن زمان آسایش گرادیان دما به معادلات حاکم تئوری لرد-شولمان و حصول معادلات حاکم چاندراساخاریا-تزو، مشابه اضافه‌شدن زمان آسایش شار حرارتی به معادلات حاکم تئوری کلاسیک و حصول معادلات حاکم تئوری لرد-شولمان، موجب پیش‌بینی مقادیر بزرگتر دما می‌شود.

۶-۳- میدان‌های تنش در استوانه بدون ترک

میدان‌های تنش محوری و محیطی ارائه شده در رابطه (۶-۷)، با استفاده از روابط (۶-۳۳) بی‌بعد می‌شوند.

$$\tilde{\sigma}'_{\phi} = \frac{\tilde{\sigma}_{\phi}(1-2\nu)}{E\alpha T_0} \qquad \text{(۶-۳۳-الف)}$$

$$\tilde{\sigma}'_{z} = \frac{\tilde{\sigma}_{z}(1-2\nu)}{E\alpha T_0} \qquad \text{(۶-۳۳-ب)}$$

به کمک روابط جابه‌جایی (۶-۸)، (۶-۷)، (۶-۲۶) و رابطه (۶-۲۷)، میدان‌های تنش بی‌بعد استوانه در حوزه لاپلاس به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}'_{\phi}(\eta,s) = {} & D_1\left[\gamma_7 I_0(\xi_1\eta) + \frac{\gamma_5}{\eta} I_1(\xi_1\eta)\right] + D_2\left[\gamma_7 K_0(\xi_1\eta) - \frac{\gamma_5}{\eta} K_1(\xi_1\eta)\right] \\ & + D_3\left[\gamma_8 I_0(\xi_2\eta) + \frac{\gamma_6}{\eta} I_1(\xi_2\eta)\right] + D_4\left[\gamma_8 K_0(\xi_2\eta) - \frac{\gamma_6}{\eta} K_1(\xi_2\eta)\right]\end{aligned} \qquad \text{(۶-۳۴-الف)}$$

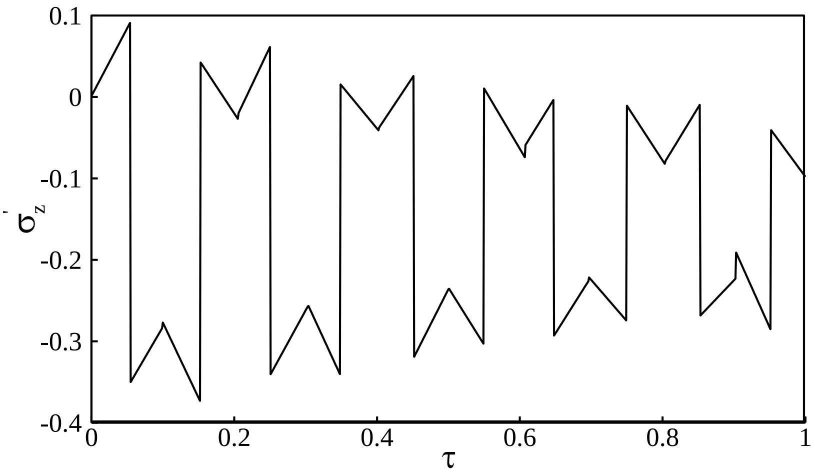
$$\tilde{\sigma}'_z(\eta, s) = D_1\gamma_7 I_0(\xi_1\eta) + D_2\gamma_7 K_0(\xi_1\eta) + D_3\gamma_8 I_0(\xi_2\eta) + D_4\gamma_8 K_0(\xi_2\eta) \quad (۶-۳۴-ب)$$

که در روابط (۶-۳۴)، ضرایب γ_7 و γ_8 به‌شکل زیر بیان می‌شوند.

$$\gamma_7 = \frac{\nu}{1+\nu}\xi_1^2 - \gamma_1$$
$$\gamma_8 = \frac{\nu}{1+\nu}\xi_2^2 - \gamma_2 \quad (۶-۳۵)$$

میدان تنش محوری (۶-۳۴-ب) و محیطی (۶-۳۴-الف) با استفاده از معکوس عددی [۵۸]، به حوزه زمان نگاشت می‌شوند.

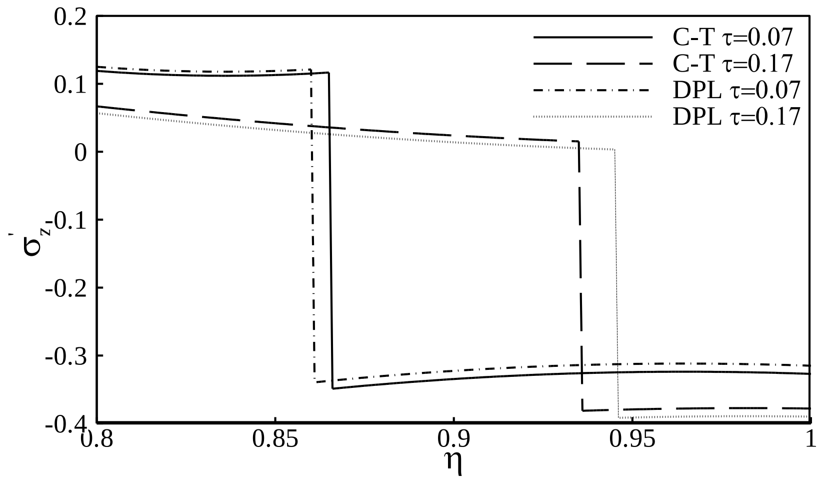
شکل (۶-۴)، توزیع تنش محوری براساس تئوری چاندراساخاریا-تزو برحسب زمان را در شعاع میانی استوانه ($\eta = 0.9$) نشان می‌دهد. تنش محوری تا قبل از رسیدن موج گرمایی صعودی است و با رسیدن موج گرما، پرش در نمودار تنش محوری ایجاد می‌شود و منجر به فشاری شدن آن می‌شود. از مقایسه شکل حاضر با شکل (۶-۱)، نتیجه می‌شود که ناپیوستگی هر دو شکل در نقاط مشابهی رخ می‌دهد.



شکل ۶-۴ توزیع تنش محوری تئوری چاندراساخاریا-تزو برحسب زمان در $\eta = 0.9$

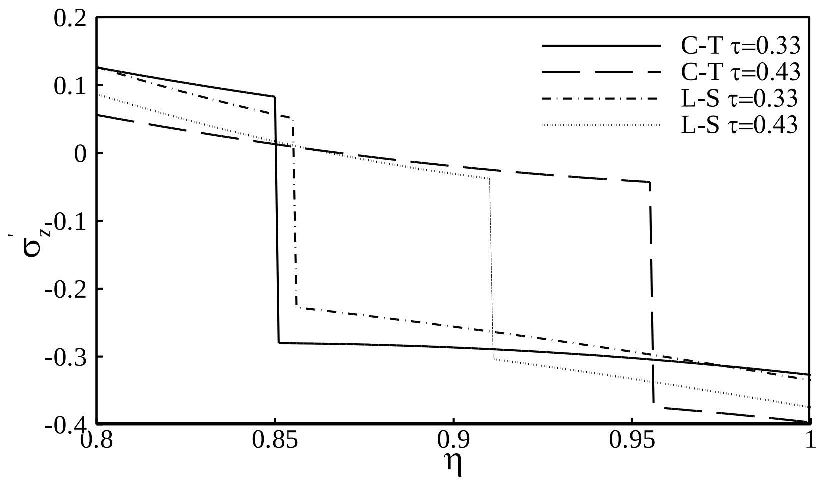
مطابق شکل (۶-۵)، مشاهده می‌شود برخلاف دما که تا رسیدن موج گرمایی بدون تغییر باقی می‌ماند؛ به محض تغییر تنش محوری در یک نقطه، تنش تمام نقاط دیگر نیز تغییر می‌کند که از ارضای شرط نیرویی در حالت کرنش صفحه‌ای (رابطه ۵-۳۶) ناشی می‌شود. با توجه به‌شکل، مشاهده می‌شود که در زمان $\tau = 0.07$ که موج از دیواره خارجی به سمت دیواره داخلی حرکت می‌کند تنش پیش‌بینی شده

توسط تئوری چاندراساخاریا-تزو از مدل تأخیر فاز دوگانه کمتر است و پس از منعکس شدن موج از دیواره داخلی در زمان $\tau = 0.17$، تنش حاصل از تئوری چاندراساخاریا-تزو از مدل تأخیر فاز دوگانه بیشتر می‌شود (شبیه نتایج تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات).



شکل ۶-۵ توزیع تنش محوری براساس تئوری چاندراساخاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه

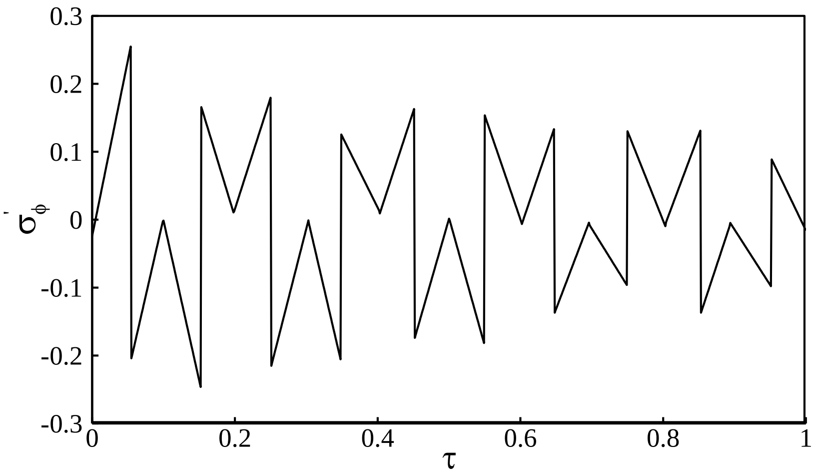
شکل (۶-۶)، توزیع تنش محوری تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان برحسب شعاع استوانه را نشان می‌دهد.



شکل ۶-۶ توزیع تنش محوری براساس تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان

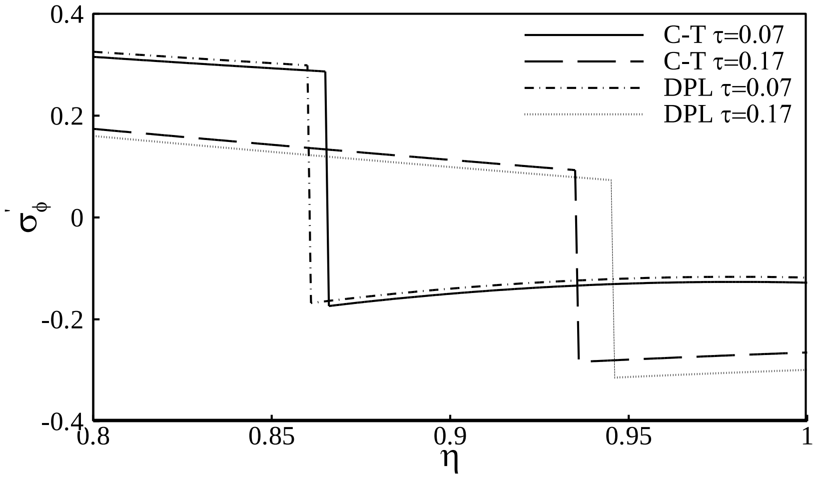
از مقایسه تنش‌های دو تئوری در زمان‌های برابر مشاهده می‌شود که با توجه به زمان آسایش گرادیان دما در تئوری چاندراساخاریا-تزو، تنش پیش‌بینی شده و پیشانی موج از تئوری لرد-شولمان بزرگتر است.

شکل (۶-۷)، توزیع تنش محیطی تئوری چاندراساخاریا-تزو را برحسب زمان نشان می‌دهد. مشابه تنش محوری، به علت صفر بودن بارگذاری مکانیکی، تنش محیطی نیز از صفر شروع شده و سپس با گذشت زمان نوسان‌های متوالی منجر به تغییر تنش محیطی در استوانه می‌شود.



شکل ۶-۷ توزیع تنش محیطی تئوری چاندراساخاریا-تزو برحسب زمان در $\eta = 0.9$

شکل (۶-۸)، توزیع تنش محیطی تئوری چاندراساخاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه را برحسب شعاع استوانه نشان می‌دهد. با توجه به شکل، مشهود است که در زمان $\tau = 0.07$، موقعیت ناپیوستگی مدل تأخیر فاز دوگانه از تئوری چاندراساخاریا-تزو جلوتر است و تنش حاصل از این مدل از تئوری چاندراساخاریا-تزو بیشتر است.

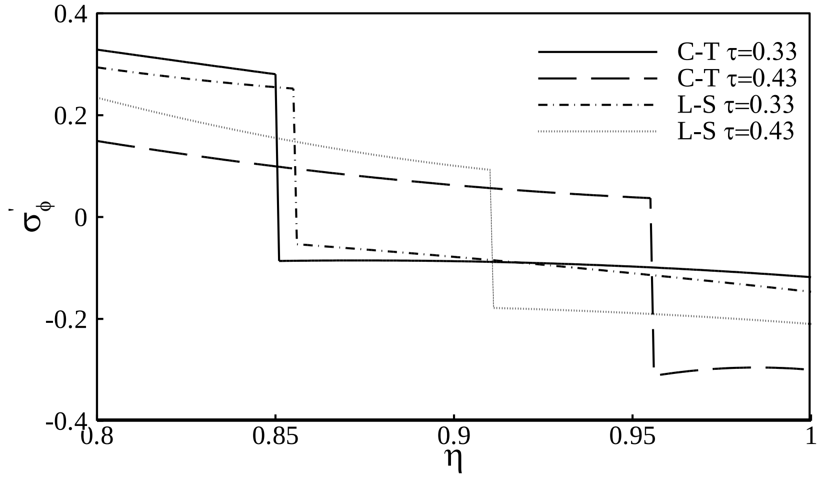


شکل ۶-۸ توزیع تنش محیطی براساس تئوری چاندراساخاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه

در زمان $\tau = 0.17$، موج گرمایی پس از برخورد با دیواره داخلی به‌سمت دیواره خارجی منعکس

می‌شود. در این زمان، موج گرمایی حاصل از مدل تأخیر فاز دوگانه به دیواره خارجی استوانه نزدیک‌تر است و با گذشت زمان فاصله موقعیت ناپیوستگی‌ها نسبت به زمان $\tau = 0.07$ بیشتر شده است. مشاهده می‌شود که برای ارضای شرط صفر شدن انتگرال تنش محیطی روی ضخامت استوانه، تنش محیطی حاصل از تئوری چاندراساخاریا-تزو از مدل تأخیر فاز دوگانه بیشتر است.

شکل (۶-۹)، توزیع تنش محیطی تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان را برحسب شعاع استوانه نشان می‌دهد. از مقایسه شکل (۶-۹) و (۶-۸)، مشاهده می‌شود که پس از گذشت زمان پیشانی موج گرمایی در تئوری چاندراساخاریا-تزو کوتاه‌تر شده و در تئوری لرد-شولمان نیز توزیع تنش در حال مستهلک شدن است و به توزیع تنش تئوری کلاسیک نزدیک شده‌است (در شکل نشان داده نشده است). در هر زمان نیز موقعیت ناپیوستگی با نمودارهای دما و تنش محوری متناظر است.



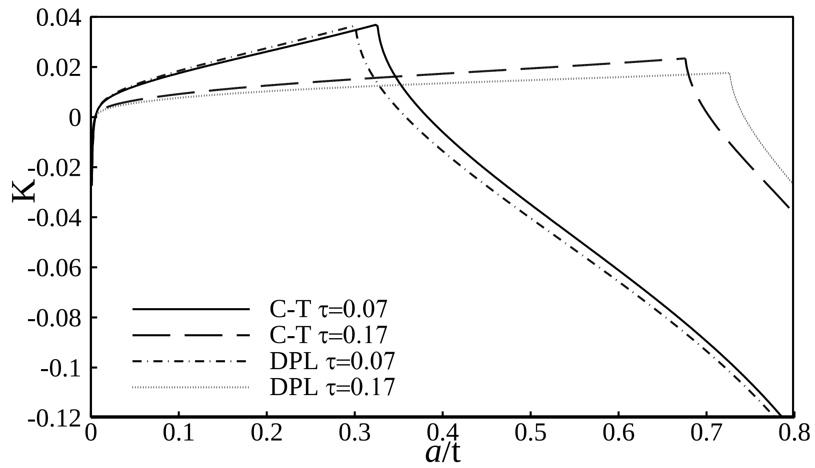
شکل ۶-۹ توزیع تنش محیطی براساس تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان

۶-۴- ضرایب شدت تنش

۶-۴-۱ ضریب شدت تنش ترک محیطی

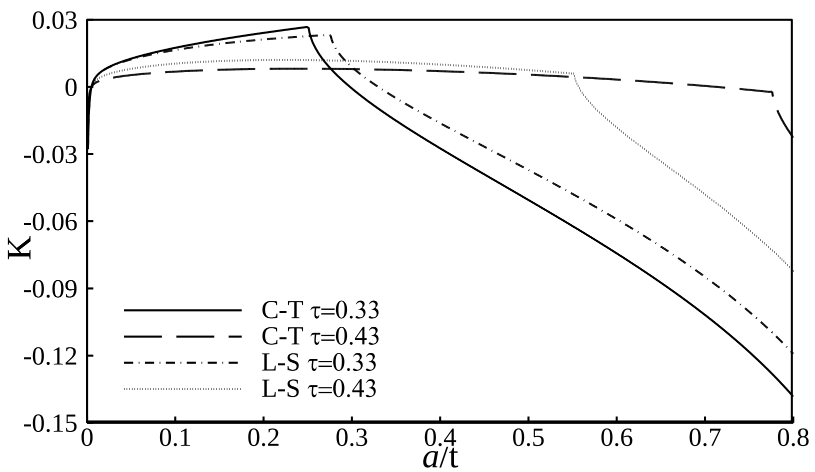
شکل (۶-۱۰)، ضریب شدت تنش ترک محیطی تئوری چاندراساخاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه را برحسب طول نسبی ترک نشان می‌دهد. مشابه مقایسه ضریب شدت تنش تئوری لرد-شولمان و مدل کاتانو-ورنات در فصل قبل، به‌علت سرعت بیشتر موج گرمایی در مدل‌های صلب هدایت گرمایی، موقعیت

ناپیوستگی‌ها بر هم منطبق نشده و در زمانی که موج از دیواره خارجی به‌سمت دیواره داخلی حرکت می‌کند ضریب شدت تنش تئوری چاندراساخاریا-تزو از مدل تأخیر فاز دوگانه بزرگتر است.



شکل ۶-۱۰ ضریب شدت تنش ترک محیطی تئوری چاندراساحاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه

شکل (۶-۱۱)، ضریب شدت تنش ترک محیطی برحسب طول نسبی ترک در زمان‌های مختلف را براساس تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان نشان می‌دهد. با توجه به شکل، ضریب شدت تنش در ابتدا با افزایش طول ترک به مقدار بیشینه خود رسیده و سپس با افزایش طول نسبی ترک، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد.

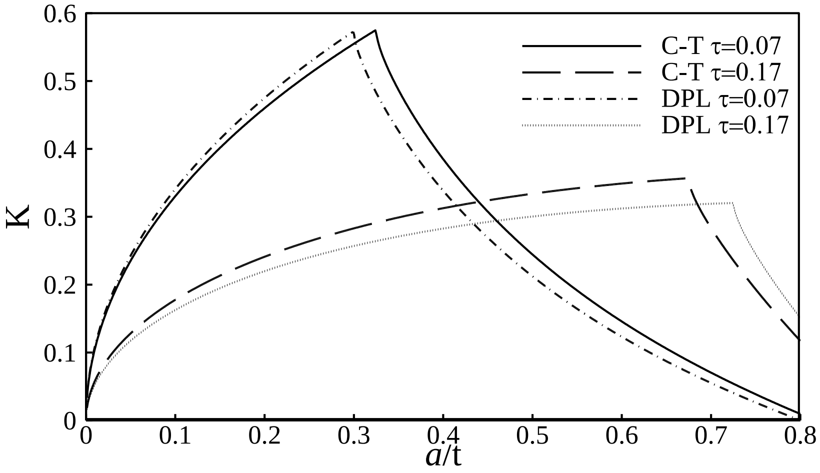


شکل ۶-۱۱ ضریب شدت تنش ترک محیطی تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان

۶-۴-۲ ضرایب شدت تنش ترک نیم‌بیضوی

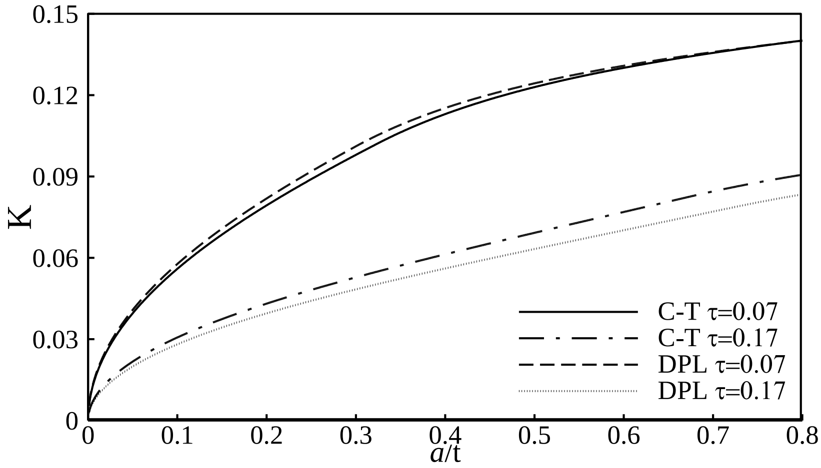
شکل (۶-۱۲)، ضریب شدت تنش تئوری چاندراساخاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه در عمق ترک

نیم‌بیضوی برحسب طول نسبی ترک با نسبت منظر $a/c = 1$ را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با نزدیک شدن موج به دیواره داخلی، بیشینه ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد.



شکل ۶-۱۲ ضریب شدت تنش تئوری چاندراساخاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه در عمق ترک نیم‌بیضوی

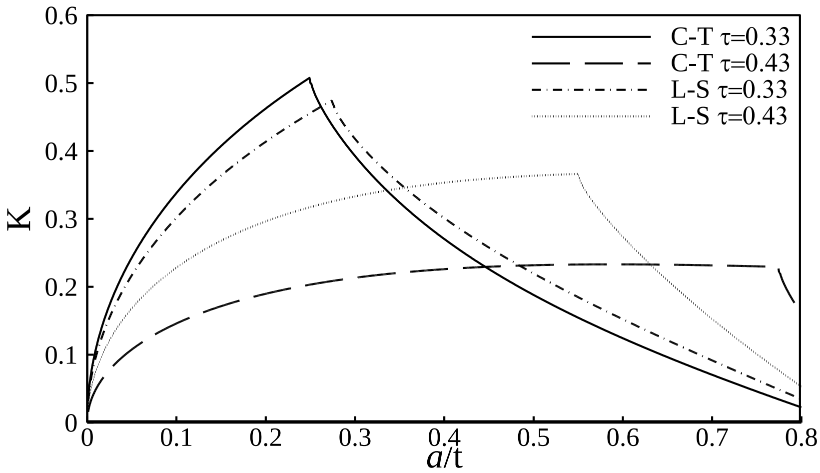
شکل (۶-۱۳)، ضریب شدت تنش تئوری چاندراساخاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه در گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی را برحسب طول نسبی ترک نشان می‌دهد. در هر دو زمان بیشینه ضریب شدت تنش حاصل از تئوری چاندراساخاریا-تزو از مدل تأخیر فاز دوگانه بیشتر است.



شکل ۶-۱۳ ضریب شدت تنش تئوری چاندراساخاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه در گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی

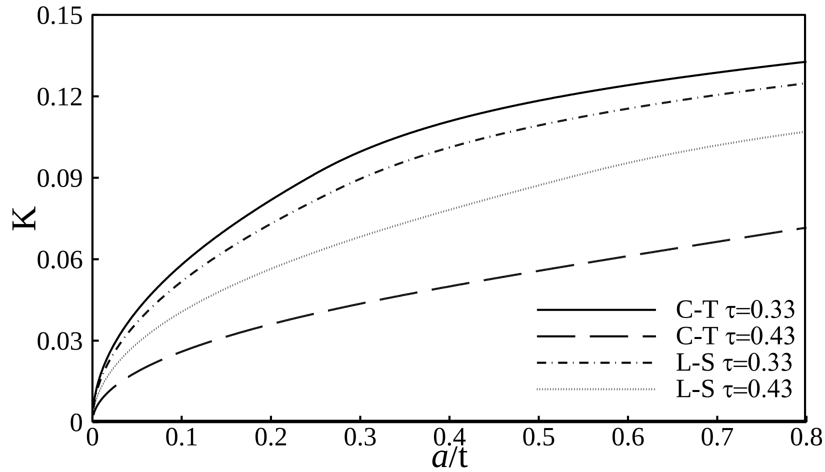
شکل (۶-۱۴)، ضریب شدت تنش تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان را برحسب طول نسبی ترک نیم‌بیضوی در عمق ترک نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با توجه به شکل (۶-۹)، مطابق انتظار در زمان $\tau = 0.33$، ضریب شدت تنش تئوری چاندراساخاریا-تزو از لرد-شولمان بزرگتر است و

در زمان $\tau = 0.43$، با توجه به تنش بزرگتر در تئوری لرد-شولمان، ضریب شدت تنش تئوری لرد-شولمان از چاندراساخاریا-تزو بیشتر است.



شکل ۶-۱۴ ضریب شدت تنش تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان در عمق ترک نیم‌بیضوی

شکل (۶-۱۵)، ضریب شدت تنش تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان در گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی را برحسب طول نسبی ترک نشان می‌دهد. با توجه به شکل، مشابه ضریب شدت تنش عمق ترک نیم‌بیضوی، در زمان $\tau = 0.33$، ضریب شدت تنش تئوری چاندراساخاریا-تزو و در زمان $\tau = 0.43$ ضریب شدت تنش تئوری لرد-شولمان بزرگتر است.



شکل ۶-۱۵ ضریب شدت تنش تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان در گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی

در این فصل، از مقایسه شکل‌های مربوط به تئوری چاندراساخاریا-تزو و مدل تأخیر فاز دوگانه مشاهده می‌شود که به‌علت روابط ساختاری مشابه، توزیع دما در استوانه را مشابه پیش‌بینی می‌کنند و

تنها به‌علت کوپلینگ موجود در روابط تئوری چاندراساخاریا-تزو موقعیت ناپیوستگی در نمودارها اختلاف دارد.

در نمودارهای تنش محوری و محیطی برحسب شعاع مشاهده می‌شود که هنگامی که موج تنش از دیواره خارجی به‌سمت دیواره داخلی حرکت می‌کند، تنش حاصل از مدل تأخیر فاز دوگانه از تئوری چاندراساخاریا-تزو بزرگتر است و پس از انعکاس موج به‌سمت دیواره خارجی، تنش حاصل از تئوری چاندراساخاریا-تزو از مدل تأخیر فازدوگانه بزرگتر است. با توجه به نمودارهای تنش محیطی برحسب شعاع سطح زیر نمودار به‌علت صفر بودن بارهای مکانیکی صفر است و سطح زیر نمودار تنش محوری برحسب شعاع نیز از شرط نیرویی (۵-۳۶) پیروی می‌کند.

با توجه به نمودار دما برحسب شعاع مربوط به تئوری‌های چاندراساخاریا-تزو و لرد-شولمان مشهود است که در زمان‌های برابر ناپیوستگی پیشانی موج در تئوری چاندراساخاریا-تزو از لرد-شولمان بزرگتر است و در این نقطه، دمای حاصل از تئوری چاندراساخاریا-تزو از تئوری لرد-شولمان بیشتر است.

در نمودارهای تنش محیطی و محوری برحسب شعاع در زمان $\tau = 0.33$، بیشینه تنش حاصل از تئوری چاندراساخاریا-تزو از تئوری لرد-شولمان بیشتر است. اما در زمان $\tau = 0.43$، بیشینه تنش حاصل از تئوری لرد-شولمان از تئوری چاندراساخاریا-تزو بیشتر است.

فصل ۷ نتیجه گیری و پیشنهادها

۷-۱- نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، ضریب شدت تنش مود I برای باریکه دارای ترک لبه‌ای و استوانه حاوی ترک نیم‌بیضوی داخلی یا ترک محیطی کامل تحت شوک حرارتی طبق مدل‌های هدایت گرمایی صلب و تئوری‌های تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته با استفاده از روش تابع وزنی تعیین شده است.

برخی نتایج حاضر به شرح زیر می‌باشد.

۱. افزایش زمان آسایش گرادیان دما و کاهش زمان آسایش شار گرمایی در مدل تأخیر فاز دوگانه، موجب کاهش بیشینه دما، افزایش بیشینه تنش محوری و محیطی برحسب شعاع در استوانه می‌شود.

۲. در مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه زمان آسایش گرادیان دمای در نظر گرفته شده در رابطه ساختاری شار گرمایی باعث پیش‌بینی مقادیر بیشینه بزرگتر دما و تنش نسبت به مدل هذلولوی می‌شود.

۳. در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی، ضریب شدت تنش در عمق ترک براساس تئوری‌های تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته برای ترک‌های با عمق کم، به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از مدل فوریه و تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته است. بیشینه ضریب شدت تنش در عمق زمانی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش به نوک ترک آن برسد.

۴. ضریب شدت تنش در عمق ترک ابتدا سریعا افزایش و سپس تا مقدار پایا به‌تدریج کاهش می‌یابد.

۵. ضریب شدت تنش گوشه ترک در تئوری‌های تعمیم‌یافته همیشه از مدل فوریه و تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته بزرگتر است. این موضوع در امکان رشد ناپایدار ترک قابل توجه است. رشد طولی ترک موجب کاهش نسبت قطرهای ترک و در نتیجه بیشتر شدن ضریب شدت تنش در عمق ترک می‌گردد.

۶. برای ترک‌های کوچک (کم‌عمق) نسبت قطرهای ترک اثر چندانی بر رفتار آن ندارد. اما با گذشت زمان یا عمیق‌تر شدن ترک، اثر نسبت قطر بر ضریب شدت تنش ترک محیطی بیشتر می‌شود.

به‌علاوه، در ترک‌های با عمق نسبی یکسان، ترک‌های باریک‌تر دارای ضریب شدت تنش بزرگتری می‌باشند.

۷. در مدل‌های صلب هدایت گرمایی و تئوری‌های تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته برای $0.1<a/t<0.8$ ضریب شدت تنش بیشینه در هر لحظه برای ترکی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش در موقعیت نوک آن قرار دارد.

۸. در استوانه‌های ضخیم‌تر ضریب شدت تنش ترک محیطی نسبت به استوانه‌های نازک‌تر، کمتر است. به‌عبارت دیگر، استوانه‌های نازک به وجود ترک حساسیت بیشتری دارند.

۹. زمان آسایش گرادیان دما در نظر گرفته شده در مدل تأخیر فاز دوگانه و تئوری چاندراساخاریا-تزو با توجه به دو عامل استهلاک و موقعیت پیشانی ترک می‌تواند منجر به ضریب شدت تنش کوچکتر یا بزرگتر نسبت به مدل کاتانو-ورنات و تئوری لرد-شولمان شود.

۷-۲- پیشنهادها

به منظور ادامه تحقیق حاضر، موارد زیر پیشنهاد می‌شود.

۱. استفاده از روش تبدیلات انتگرالی مثل تبدیل هنکل جهت محاسبه دما، تنش و ضریب شدت تنش به‌صورت تحلیلی

۲. استفاده از روش حل معادله انتگرالی برای محاسبه ضریب شدت تنش

۳. محاسبه ضرایب شدت تنش در استوانه با استفاده از تئوری گرین-لیندزی

۴. محاسبه ضریب شدت تنش در استوانه با استفاده از تئوری گرین-نقدی

۵. محاسبه ضریب شدت تنش در استوانه با استفاده از تئوری هتنارسکی-ایگناچاک

۶. بررسی اثر انواع شرایط مرزی بر دما، تنش‌ها و ضرایب شدت تنش در استوانه

منابع

[1] Tang D. W., Araki N., (1996), "Non-Fourier heat conduction in a finite medium under periodic surface thermal disturbance", *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 1585–1590.

[2] Zhang M. Y., Cheng G. J., (2011), "Pulsed laser coating of hydroxyapatite/titanium nanoparticles on Ti-6Al-4V substrate: Multiphysics simulation and experiments", *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on NanoBioscience*, Vol. 99, pp. 1-14.

[۳] قاجار ر.، عباس پور نیاسانی م.، سعیدی گوگرچین ح.، (۱۳۹۳)، " توابع صریح ضریب شدت تنش برای ترک‌های نیم‌بیضوی محیطی خارجی در استوانه تحت بارهای مکانیکی و حرارتی"، مهندسی مکانیک مدرس، شماره ۹، دوره ۱۴، ص‌ص ۹۰-۹۸.

[4] Bagri A., Eslami M. R., (2007), "A unified generalized thermoelasticity: solution for cylinders and spheres", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 49, pp. 1325–1335.

[5] Babaei M. H., Chen Z. T., (2010), "Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow cylinder", *Thermophys. Heat Transfer*, Vol. 24, No. 2, pp. 325-330.

[6] Maurer M. J., Thompson H. A., (1973), "Non-Fourier effects at high heat flux", *J. Heat Transfer*, Vol. 95, pp. 284–286.

[7] Kroner C., Bergmann H. W., (1998), "The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation", *Applied Physics*, Vol. 67, pp. 397-401.

[8] Godoy S., Garcia-Colin L. S., (1997), "Nonvalidity of the telegrapher’s diffusion equation in two and three dimensions for crystalline solids", *Physical Review*, Vol. 55, No. 3, pp. 2127–2131.

[9] Cattaneo C., (1958), "A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation", *Compt. Rend*, Vol. 247, pp. 247-431.

[10] Vernotte P., (1961), "Some possible complications in the phenomena of thermal conduction", *Compt Rend*, Vol. 252, pp. 2190-91.

[11] Tzou D. Y., (1995), "A unified field approach for heat conduction from macro- to microscale", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 117, pp. 8–16.

[12] Tzou D. Y., (1995), "The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 3231–3240.

[13] Akbarzadeh A. H., Chen Z. T., (2012), "Transient heat conduction in a functionally graded cylindrical panel based on the dual phase lag theory", *Int J Thermophys.*, Vol. 33, pp. 1100-1125.

[14] Tzou D.Y., (1995), "Experimental support for the lagging response in heat propagation", *J. Thermophys. Heat Transfer*, Vol. 9, pp. 686-693.

[15] Fu J.W., Chen Z.T., Qian L.F., (2015), "Coupled thermoelastic analysis of a multi-layered hollow cylinder based on the C–T theory and its application on functionally graded materials", *Composite Structures*, Vol. 131, pp. 139–150.

[16] Lord H. W., Shulman Y., (1967), "A generalized dynamical theory of thermoelasticity", *J Mech Phys Solids*, Vol. 15, pp. 299–309.

[17] Chandrasekharaiah D. S., (1998), "Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature", *Appl. Mech. Rev*, Vol. 51, No. 12, pp. 705-729.

[18] Tzou D. Y., (1995), "A unified field approach for heat conduction from macro-to microscales", *J Heat Trans-T Asme*, Vol. 117, pp. 8–16.

[19] Green A. E., Lindsay K. A., (1972), "Thermoelasticity", *J. Elast.*, Vol. 2, pp. 1–7.

[20] Green A. E., Naghdi P. M., (1993), "Thermoelasticity without energy dissipation", *J. Elast.*, Vol. 31, pp. 189–208.
[21] Jones I. S., Rothwell G., (2001), "Reference stress intensity factors with application to weight functions for internal circumferential cracks in cylinders", *J. Engng Fract Mechanics*, Vol. 8, pp. 435-454.
[22] Erdol R., Erdogan F., (1978), "A thick-walled cylinder with an axisymmetric internal or edge crack", *J Appl Mech-T ASME*, Vol. 45, p. 281.
[23] Aydin L., Artem H. S. A., (2008), "Axisymmetric crack problem of thick-walled cylinder with loadings on crack surfaces", *J. Engng Fract Mechanics*, Vol. 75, pp. 1294-309.
[24] Nied H. F., Erdogan F., (1983), "The elasticity problem for a thick-walled cylinder containing a circumferential crack", *Int J. Fract.*, Vol. 22, pp. 277-301.
[25] Wang Z. Q., (1995), "The calculation of dynamic stress intensity factors for a cracked thick walled cylinder", *Int J. Fract.*, Vol. 73, pp. 359-66.
[26] Grebner H., (1985), "Finite element calculation of stress intensity factors for complete circumferential surface cracks at the outer wall of a pipe", *International Journal of Fracture*, Vol. 27, pp. 99-102.
[27] Nabavi S.M., Ghajar R., (2010), "Analysis of thermal stress intensity factors for cracked cylinders using weight function method", *Int. J. of Eng. Science*, Vol. 48, pp. 1811–1823.
[28] Glinka G., Shen G., (1991), "Universal features of weight functions for cracks in mode I", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 40, pp. 1135-1146.
[29] Nabavi S. M., Ghajar R., (2010), "Closed-form thermal stress intensity factors for an internal circumferential crack in a thick-walled cylinder". *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, Vol. 33, pp. 504–512.
[30] Chang D. M., Wang B. L., "Transient thermal fracture and crack growth behavior in brittle media based on non-Fourier heat conduction", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 94, pp. 29–36.
[31] Hu K. Q., Chen Z. T., (2012), "Thermoelastic analysis of a partially insulated crack in a strip under thermal impact loading using the hyperbolic heat conduction theory", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 51, pp. 144-160.
[32] Chen Z. T., Hu K. Q., (2014), "Thermoelastic analysis of a cracked substrate bonded to a coating using the hyperbolic heat conduction theory", *J. Thermal Stresses*, Vol. 37, pp. 270-91.
[33] Chen Z. T., Hu K. Q., (2012), "Thermo-elastic analysis of a cracked half-plane under a thermal shock impact using the hyperbolic heat conduction theory", *J. Thermal Stresses*, Vol. 35, pp. 342-62.
[34] Wang B. L., (2013), "Transient thermal cracking associated with non-classical heat conduction in cylindrical coordinate system", *Acta. Mech. Sinica*, Vol. 29, pp. 211-8.
[35] Fu J. W., Chen Z. T., Qian L. F., Hu K. Q., (2014), "Transient thermoelastic analysis of a solid cylinder containing a circumferential crack using the C-V heat conduction model", *J. Thermal Stresses*, Vol. 37, pp. 1324-1345.
[36] Fu J. W., Chen Z. T., Qian L. F., Xu Y. D., (2014), "Non-Fourier thermoelastic behavior of a hollow cylinder with an embedded or edge circumferential crack", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 128, pp. 103-120.
[37] Hu K. Q., Chen Z. T., (2013), "Transient heat conduction analysis of a cracked half-plane using dual-phase-lag theory", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 62, pp. 445-451.

[38] Lin X. B., Smith R. A., (1997), "Numerical analysis of fatigue growth of external Surface cracks in pressurized cylinders", *International Journal of pressure vessels and piping*, Vol. 71, No. 3, pp. 293-300.
[39] Petroski H. J., Achenbach J. D., (1987), "Computation of the weight function from a stress intensity factor", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, No. 6, pp. 697-715.
[40] Shahani A. R., Nabavi S. M., (2006), "Closed-form stress intensity factors for a semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder under thermal stress", *International Journal of Fatigue*, Vol. 28, No. 9, pp. 26-32.
[41] Zheng X. J., Glinka G., Dubey R., (1995), "Calculation of stress intensity factors for semi-elliptical cracks in a thick-wall cylinder", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 62, No. 3, pp. 249–58.
[42] Zheng X. J., Kiciak A., Glinka G., (1997), "Weight function and stress intensity factors for internal surface crack semi-elliptical crack in thick-walled cylinder", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 69, No. 3, pp. 207-221.
[43 Lee H. Y., Kim Y. W., Yun I., (1996), "Stress intensity factor solution for radial and circumferential cracks in hollow cylinders using indirect boundary integral", *International Journal of Pressure Vessel and Piping*, Vol. 69, No. 1, pp. 45-52.
[44] Varfolomeyev I. V., Hodulak L., (1997), "Improved weight functions for infinitely long axial and circumferential cracks in a cylinder", *International Journal of Pressure Vessel and Piping*, Vol. 70, No. 2, pp. 103-109.
[۴۵] عاصمی ا.، (۱۳۹۴)، پایان‌نامه ارشد:" محاسبه ضریب شدت تنش مود I در صفحه و استوانه جدار ضخیم دارای ترک تحت شوک حرارتی غیرفوریه‌ای با استفاده از تابع وزنی"، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود.
[46] Zamani A., Eslami M. R., (2009), "Coupled dynamical thermoelasticity of a functionally graded cracked layer", *J. of Thermal Stresses*, Vol. 32, pp. 969–985.
[47] Chen H., Lin H., (1995), "Study of Transient Coupled Thermoelastic Problems with Relaxation Times", *Trans. ASME*, vol. 62, pp. 208–215.
[48] Shariati M., Rokhi M. M., (2012), "Study of Dynamic Fracture of Functionally Graded Materials under Thermo-mechanical Shocks", *Journal of solid and fluid mechanics*, Vol. 1, No. 3, pp. 1-16.
[49] Hosseini-Tehrani P., Eslami M.R., Shojaeefard M.H., (2003), "Generalized thermoelastic analysis of layer interface excited by pulsed laser heating", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 27, pp. 863–869.
[50] Zamani A., Hetnarski R. B., Eslami M. R., (2011), "Second sound in a cracked layer based on lord-shulman theory", *J. of Thermal Stresses*, Vol. 34, pp. 181–200.
[51] Hosseini-Tehrani P., Eslami M.R., (2000), "Boundary element analysis of green and lindsay theory under thermal and mechanical shock in a finite domain", *J. of Thermal Stresses*, Vol. 23, pp. 773-92.
[52] Bueckner H. F., (1970), "Principle for the computation of stress intensity factors", *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 50, pp. 129-146.
[53] Rice J. R., (1972), "Remarks on elastic crack-tip stress fields", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 8, pp. 751-758.
[54] Nabavi S. M., Shahani A. R., (2009), "Thermal stress intensity factors for a cracked cylinder under transient thermal loading", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, pp. 153–163.

[55] Lee K. Y., Sim K. B., (1990), "Thermal shock stress intensity factor by Bueckner's weight function method", *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 37, No. 4, pp. 779-804.

[56] Bueckner A.P., (1971), "Weight functions for the notched bar", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik,* Vol. 51, No. 2, pp. 97-109.

[57] Zheng X. J., Glinka G., (1995), "Weight functions and ftress intensity factors for longitudinal semi-elliptical cracks in thick-wall cylinders, Journal of pressure vessel technology", Vol. 117, pp. 383-389.

[58] Honig G., Hirdes U., (1984), "A method for the numerical inversion of Laplace transform", *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. 10, 113-132.

[59] Dubner H., Abate J., (1968), "Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform", *J. ACM* , Vol. 15, No. 1, pp. 115-123.

[60] Durbin F., (1973), "Numerical inversion of Laplace transforms: an effective improvement of Dubner and Abate's method", *Comput. J.*, Vol. 17, No.4, pp. 371-376.

[61] Bagri A., Taheri H., Eslami M. R., Fariborz S., (2006), "Generalized Coupled Thermoelasticity of a Layer", *J. of Thermal Stresses*, Vol. 29, No. 4, pp. 359-370;.

[62] Hetnarski R. B., Eslami M. R. (2009), "*Thermal Stresses: Advanced Theory and Applications*", Vol. 158, Springer.

Abstract

In this thesis, the stress intensity factor mode I for an edge-cracked layer or an internal semi-elliptical or circumferential crack in an isotropic homogeneous thick-walled cylinder subject to radial thermal shock based on different coupled and uncoupled theories is derived. In the case of uncoupled theories, governing equations are solved analutically in Laplace domain and then a numerical Laplace inversion techniqe is employed to transform the results into the time domain. Also the weight function method is implemented to obtain the stress intensity factor for the circumferential crack, deepest and surface points of the semi-elliptical crack in the cylinder and edge crack in the layer. In the case of coupled Chandrasekharaiah-Tzou and Lord-Shulman, governing equations are solved analytically by using Laplace transform and introducing displacement potential function. According to the results, the non-fourier results are different in comparison with Fourier ones. The coupling effect between the thermal and mechanical fields will reduce the thermal wave speed alittle which result in different temperature, stress and stress intensity factor results rather than uncoupled models. Maximum magnitude of temperature, axial and hoop stress based on the generalized theories are higher than the Fourier law and classic theory of thermoelasticity which result in higher stress intensity factor for circumferential, deepest point and surface points of the semi-elliptical cracks for the reason of the heat flux and temperature gradient time relaxations.

Keywords

Dual phase lag heat conduction, Chandrasekharaiah-Tzou theory, Hyperbolic heat conduction, Lord-Shulman theory, Green-Naghdi theory, Green-Lindsay theory, Laplace transform, Stress intensity factor, Thick-walled cylinder

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Calculation of stress intensity factor mode I in a thick-walled cracked layer/cylinder using weight function and considering generalized theories of thermoelasticity

Edris Farahinejad

Thesis
Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc)

Supervisor
Dr. Mohammad Bagher Nazari

May 2016