دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه مکانیک سیالات

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

عنوان

روش پیش‌شرط توانی در بهبود همگرایی شبیه‌سازی عددی جریان‌های ناپایای عبوری از هیدروفویل‌ها

نگارش:

سید معین درازگیسو

استاد راهنما

دکتر پوریا اکبرزاده

بهمن ۱۳۹۴

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

و تقدیم به خواهر عزیزم

به پاس تمام لحظاتی که با لبخند در کنارمان بودی و اینک . . .

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

تشکر و قدردانی...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.

به مصداق من "لم یشکر المخلوق من یشکر الخالق"، بسی شایسته است؛

از استاد صبور و خوش خلق جناب آقای دکتر پوریا اکبرزاده که زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند و در انجام مراحل این تحقیق صمیمانه وقت گرانبهای خود را در اختیارم گذاشتند، کمال قدردانی و امتنان را داشته باشم.

ایشان در کمال سعه ی صدر و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

سید معین درازگیسو

بهمن ۱۳۹۴

چکیده

مطالعه‌ی آیرودینامیک جریان‌های با اعداد رینولدز پایین به علت کاربردهای خاص نظیر وسایل بدون سرنشین، ربات‌ها و کاوشگرهای زیرسطحی در ابعاد بسیار کوچک مورد توجه می‌باشد. در پایان‌نامه حاضر، یک روش پیش‌شرط توسعه یافته به نام روش پیش‌شرط توانی، جهت تحلیل جریان‌های آرام ناپایا با زاویه‌ی حمله ثابت و همراه با نوسان تناوبی اجباری عبوری از هیدروفویل‌ها ارائه شده است. جریان‌های ناپایای نوسانی به طور گسترده در زمینه‌های مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است. مطالعات تجربی و عددی فراوانی پیرامون دینامیک گردابه‌ها، جزییات نیروی پیشرانه‌ی ماهی و پستانداران دریایی، استفاده از هیدروفویل‌های نوسانی در کنترل جریان و ... صورت گرفته است. در این روش معادلات دوبعدی ناویر_استوکس با تغییر جمله‌ی مشتق زمانی معادلات حاکم اصلاح می‌گردد. ماتریس پیش‌شرط از یک رابطه‌ی توانی و با استفاده از میدان سرعت تصحیح می‌گردد. معادلات حاکم به کمک روش عددی حجم محدود جیمسون از نوع مرکزیت_سلول انتگرال‌گیری می‌شوند و برای حل جریان‌های ناپایا از یک الگوریتم ضمنی دوزمانه استفاده می‌شود. پایداری حل به کمک جملات اتلافی مصنوعی مرتبه‌ی دوم و چهارم به دست آمده است. روش مورد استفاده برای همگرایی حل به سمت حالت دائم، روش انتگرال‌گیری زمانی رانج_کوتای صریح چهار مرحله‌ای می‌باشد. محاسبات جریان‌های ناپایای عبوری از هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در اعداد رینولدز و زوایای حمله‌ی مختلف ارائه شده است. نتایج ارائه شده در این پایان‌نامه شامل پروفیل‌های سرعت، ضرایب پسا و برا و تاثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی می‌باشد. نتایج حاصله به صورت رضایت‌بخشی با کارهای عددی محققان دیگر تطابق دارد و همچنین نتایج نشان می‌دهد که روش پیش‌شرط توانی سرعت همگرایی را تا حد زیادی افزایش و هزینه‌ی زمانی محاسبات را کاهش می‌دهد.

واژگان کلیدی: روش پیش‌شرط‌سازی توانی، حل دوزمانه، حجم محدود، جریان ناپایا، سرعت همگرایی، نوسان تناوبی اجباری

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست علائم و اختصارات

A	مساحت حجم کنترل	$\mathrm{m^2}$
A_p	سنسور فشار محلی	
A_u	سنسور سرعت محلی	
C_L	ضریب برا	
C_D	ضریب پسا	
CFL	عدد کورانت-فردریچ-لوی	
d	جملات اتلافی	
G	تابع شار جریان	
κ	عدد حالت	
L	طول	m
N	تعداد سلول‌های فضای محاسباتی	
p	فشار	$\mathrm{kgm^{-1}s^{-2}}$
p_∞	فشار جریان آزاد	$\mathrm{kgm^{-1}s^{-2}}$
Res	نرم خطا	
Re	عدد رینولدز	
t	زمان	s
U	سرعت جریان آزاد	$\mathrm{ms^{-1}}$
u	سرعت در راستای محور x	$\mathrm{ms^{-1}}$
u_∞	سرعت جریان آزاد در راستای محور x	$\mathrm{ms^{-1}}$
v	سرعت در راستای محور y	$\mathrm{ms^{-1}}$
v_∞	سرعت جریان آزاد در راستای محور y	$\mathrm{ms^{-1}}$
Δt	گام زمان حقیقی	s
$\Delta\tau$	گام زمان مجازی	s

علائم یونانی

μ	لزجت دینامیکی	$\mathrm{kgm^{-1}s^{-1}}$
ρ	چگالی	$\mathrm{kgm^{-3}}$
τ	تنش	$\mathrm{kgs^{-2}m^{-1}}$
λ	مقدار ویژه	
β	ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی	
σ	ضریب پیش‌شرط	
ε_2	ضریب لزجت مصنوعی	
ε_4	ضریب اتلاف مصنوعی	
Π^{-1}	ماتریس پیش‌شرط	

زیروندها

bc	سلول مرزی
diff	پخش
max	بیشینه
min	کمینه
∞	شرایط جریان آزاد

فصل ۱

مقدمه

۱ـ۱ مقدمه

شبیه‌سازی عددی جریان‌های تراکم‌ناپذیر[۱] یک زمینه‌ی مهم در دینامیک سیالات محاسباتی[۲] می‌باشد زیرا بسیاری از جریان‌های واقعی در هیدرودینامیک و آیرودینامیک با سرعت کم، نظیر جریان حول هیدروفویل و یا جریان حول بال هنگام فرود، در رده‌ی جریان‌های تراکم‌ناپذیر دسته‌بندی می‌شوند. از کاربردهای دیگر حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر می‌توان به طراحی مبدل‌های حرارتی، خنک‌کاری مجموعه‌های الکترونیک، سیستم‌های بیوـ پزشکی[۳] و ... اشاره کرد. حل میدان جریان تراکم‌ناپذیر دارای پیچیدگی‌های متعددی بوده و استفاده از الگوریتم‌های عددی که جهت حل میدان جریان تراکم‌پذیر موثرند، برای حل میدان جریان تراکم‌ناپذیر چندان موثر نیستند. این مشکل از آنجا ناشی می‌شود که در جریان‌های تراکم‌ناپذیر، مقدار چگالی تقریباً ثابت می‌ماند و تغییرات آن در مقایسه با دیگر پارامترهایی نظیر سرعت بسیار کم است. این ناهمگونی در تغییر مجهولات باعث بدرفتاری حل می‌شود و سرعت همگرایی را تحت تاثیر قرار می‌دهد ولی در جریان‌های تراکم‌پذیر به علت وجود مشتق چگالی نسبت به زمان در معادله پیوستگی، این مشکل وجود ندارد.

امروزه شبیه‌سازی پدیده‌های جریان ناپایا در علوم مختلف مهندسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار

---

[۱] Incompressible Flows
[۲] Computational Fluid Dynamic (CFD)
[۳] Bio-Medical Systems

است. از جمله می‌توان به برهم‌کنش قطعات ثابت و چرخان در توربوماشین‌ها، موتورهای پیستونی، آیرودینامیک هلیکوپتر، شبیه‌سازی گرداب بزرگ[۱] یا شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان‌های آشفته[۲]، انفجارها و ... اشاره نمود [۱]. اثرات ناپایا بودن جریان یا مربوط به حرکت جسم و یا ناشی از ایجاد نواحی جدایش جریان و ریزش گردابه‌ها به میدان حل است که روی مشخصات آیرودینامیکی‌ـ هیدرودینامیکی اجسام تاثیر می‌گذارد. بنابراین تعیین تغییرات این مشخصات نسبت به زمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

دو رهیافت اصلی برای حل معادلات ناویرـ استوکس تراکم‌ناپذیر، روش تابع چرخش جریان[۳] و روش متغیرهای اولیه[۴] می‌باشند. روش تابع چرخش جریان براساس تعریف تابع چرخش و تابع جریان که تنها به مولفه‌های سرعت بستگی دارند، می‌باشد. با جایگذاری تعریف این توابع در معادلات حاکم، معادله انتقال چرخش جایگزین معادلات ممنتوم و تابع جریان جایگزین متغیرهای معادله پیوستگی شده و به این ترتیب، فشار از مجهولات حذف و توابع چرخش و جریان جایگزین متغیرهای وابسته در دستگاه معادلات می‌شوند. با حل این معادلات و به دست آوردن تابع جریان، میدان سرعت و سپس فشار محاسبه می‌شوند. کاهش تعداد معادلات مورد نیاز برای حل جریان در این روش باعث کاهش زمان محاسبات می‌شود. از این روش می‌توان در حل جریان‌های پایا و ناپایا استفاده نمود. حل جریان‌های سه‌بعدی با روش تابع چرخش جریان بسیار پیچیده می‌باشد، زیرا در جریان‌های سه‌بعدی تابع جریان قابل تعریف نیست. برخلاف روش تابع چرخش جریان، روش متغیرهای اولیه، مستقیماً به حل میدان فشار و سرعت می‌پردازد. در این پایان‌نامه، معادلات ناویرـ استوکس تراکم‌ناپذیر ناپایا براساس روش متغیرهای اولیه حل می‌گردد.

۱ـ۲ پیشینه‌ی پژوهش

برای شبیه‌سازی عددی جریان ناپایا، الگوریتمی موسوم به شیوه‌ی دوزمانی[۵] پیشنهاد و بکار گرفته شده که شامل اضافه‌نمودن یک عبارت مشتق زمانی حقیقی، به صورت ضمنی، به سیستم معادلات

[۱] Large Eddy Simulations (LES)
[۲] Direct Numerical Simulations (DNS)
[۳] Vorticity-Stream Function
[۴] Primitive Variables
[۵] Dual-Time Method

حاکم می‌باشد. با افزودن این عبارت، در فرایند حل سیستم معادلات حاکم، دو حلقه‌ی تکرار خارجی (مربوط به زمان حقیقی) و داخلی (مربوط به زمان مجازی) موجود می‌باشد. با همگرایی حل در زمان مجازی، حل معادله در زمان حقیقی حاصل می‌شود. برای اولین بار جیمسون [۲] در سال ۱۹۹۱ از این روش استفاده نمود. مزیت اصلی این روش در انتخاب گام زمانی است که تنها بر اساس فیزیک و ماهیت جریان تعیین می‌گردد و برخلاف روش‌های معمول دیگر هیچ محدودیتی در انتخاب گام زمانی وجود ندارد. آرنون و همکاران [۳] نشان دادند هنگامی که گام زمان حقیقی هم‌مرتبه و یا کمتر از گام زمان مجازی باشد روش پیشنهادی، ناپایدار خواهد بود. سپس ملسون و همکاران [۴] با یافتن جمله به وجود آورنده‌ی ناپایداری، الگوریتم دو زمانی را به گونه‌ای بهبود دادند که با انتخاب هر گام زمانی، پایدار خواهد بود. بعد از ملسون، محققان دیگری مطالعاتی در زمینه بهبود و افزایش سرعت همگرایی این الگوریتم انجام دادند [۵]. هسو [۶] در سال ۲۰۰۴ در رساله‌ی دکتری خود یک مطالعه‌ی جامع روی روش‌های مختلف حل صریح و ضمنی جریان‌های ناپایا انجام داد و همچنین شاتالوو [۷] در سال ۲۰۰۶ در رساله‌ی دکتری خود به بررسی روش‌هایی همچون تفاضل پادبادسو با دقت مرتبه‌ی سه[۱] و روش تکراری فاکتورگیری تقریبی[۲] در بهبود سرعت همگرایی پرداخت. در سال ۲۰۰۷ [۸] حافظ و همکاران روش جدیدی را با استفاده از برهم‌کنش لزج‌ـغیرلزج[۳] و کوپل کردن تابع پتانسیل و محاسبات لایه مرزی ارائه دادند. آنها با استفاده از تجزیه سرعت از نوع هلموتز[۴] و قانون اصلاح شده‌ی برنولی[۵] برای جمله فشار به فرمول‌بندی جدیدی دست یافتند. آنها با استفاده از این روش، شبیه‌سازی عددی جریان‌های تراکم‌ناپذیر آرام پایا و ناپایا را انجام دادند. برخلاف روش تابع چرخش جریان، روش پیشنهادی آنها قابلیت توسعه جهت حل جریان‌های سه بعدی را نیز دارا می‌باشد.

جریان‌های ناپایای نوسانی نیز به طور گسترده در انواع زمینه‌های مربوط به آیرودینامیک و هیدرودینامیک کاربردی مورد مطالعه قرار گرفته است. مطالعات تجربی و عددی فراوانی پیرامون دینامیک گردابه‌ها، جزییات نیروی پیشرانه‌ی ماهی و پستانداران دریایی، استفاده از هیدروفویل و ایرفویل‌های نوسانی در کنترل جریان و ... صورت گرفته است [۹]. جریان ناپایای نوسانی در

[۱] Third Order Upwind Difference
[۲] Approximate Factorization (AF) Iterative Method
[۳] Viscous-Inviscid Interaction Procedure
[۴] Helmholtz-Type Velocity Decomposition
[۵] Modified Bernoulli's Law

زمینه‌هایی همچون آیرودینامیک هلیکوپتر، قطعات چرخان در توربوماشین‌ها، جریان پره‌های توربین و کمپرسور، وسایل نقلیه هوایی میکرو و موارد مشابه دیگر که ماهیتی نوسانی دارند (در نتیجه‌ی تغیرات تناوبی سرعت نسبی جریان یا اختلالات و آشفتگی‌های ایجاد شده در ردیف پره‌های پایین دست) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۱۰]. در سالیان اخیر وسایل نقلیه هوایی میکرو[۱] توجه زیادی را به دلیل پتانسیل بالای خود برای طیف گسترده‌ای از کاربردها در صنایع نظامی و غیر نظامی به خود جلب کرده است [۱۱، ۱۲، ۱۳]. این وسایل به دلیل اندازه و سرعت بسیار کمتر و قرار گرفتن در زمره‌ی جریان‌های با عدد رینولدز پایین، خصوصیات جریان کاملاً متفاوتی نسبت به جریان با اعداد رینولدر بالا از خود نشان می‌دهند. به منظور دستیابی به کارایی آیرودینامیکی بهتر و قدرت مانور بالا، برای طراحی وسایل نقلیه هوایی میکرو، تکنیک‌های مناسب و مختلفی از کنترل جریان مورد نیاز است که همگی نیاز به شبیه‌سازی عددی جریان‌های ناپایای نوسانی را بیش از پیش آشکار می‌سازد [۱۴].

امروزه در شبیه‌سازی و حل عددی جریان‌های تراکم‌پذیر، الگوریتم‌های پیمایش زمانی[۲] از جایگاه ویژه‌ای برخوردارند. مزیت اصلی این الگوریتم‌ها این است که می‌توان از آن‌ها در جریان‌های لزج و غیرلزج و با در نظر گرفتن هرگونه روش گسسته‌سازی مکانی استفاده کرد، به طوری که در دو سه دهه‌ی گذشته، یکی از انتخاب‌های اصلی محققان در حل جریان‌های گذرصوتی و فراصوتی بوده است. اما از آنجا که دستگاه معادلات جریان تراکم‌ناپذیر پایا، یک دستگاه هذلولوی کامل نبوده و فشار نیز در معادله پیوستگی حضور ندارد، روش‌های پیمایشی قابل استفاده نخواهند بود. همچنین در معادلات جریان تراکم‌ناپذیر ناپایا که دستگاه معادلات ماهیت سهموی پیدا می‌کنند (به دلیل حضور جملات وابسته به زمان)، با وجود قابل استفاده بودن روش‌های پیمایشی، از پایداری کمتری برخوردار خواهند بود. هنگامی که اندازه‌ی سرعت متوسط جریان در مقایسه با سرعت صوت در سیال خیلی کوچک باشد، جملات جابجایی[۳] معادلات وابسته به زمان لخت شده و به دلیل غالب بودن سرعت امواج صوتی و ضرورت استفاده از گام‌های زمانی بسیار کوچک، نرخ همگرایی روش‌های پیمایش زمانی به کندی صورت می‌پذیرد. این افزایش زمان همگرایی با حضور

[۱] Micro Air Vehicles
[۲] Time-Marching Algorithms
[۳] Convective Terms

جملات پخش[۱] در معادلات تشدید می‌شود. روش اصلاح این مسئله هنگامی که اثر جملات پخش ناچیز (مانند جملات اویلر)، کوچک (مانند جریان با اعداد رینولدز بالا) و غالب (مانند جریان با اعداد رینولدز کم) باشد، اساساً متفاوت خواهد بود. به همین منظور روش پیش‌شرط[۲] با هدف حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر یا تراکم‌پذیر با عدد ماخ خیلی کم به وسیله‌ی الگوریتم‌های پیمایش زمانی مورد استفاده در جریان‌های تراکم‌پذیر، توسعه و گسترش یافت.

جرقه پیدایش روش‌های پیش‌شرط را می‌توان برای اولین بار به روشی که کورین [۱۵] در سال ۱۹۶۷ برای حل معادلات تراکم‌ناپذیر استفاده کرد، نسبت داد. همانطور که می‌دانید در جریان‌های تراکم‌ناپذیر، جملات وابسته به زمان از معادله‌ی پیوستگی حذف خواهند شد و از آنجا که متغیر فشار هم در معادله‌ی پیوستگی ظاهر نمی‌شود، در عمل ارتباط این معادله و معادلات ممنتوم فقط از طریق متغیرهای سرعت برقرار خواهد بود. روش‌های سنتی حل چنین معادلاتی بر پایه حدس میدان فشار، حل میدان سرعت به کمک معادلات ممنتوم و سپس بررسی صحت میدان سرعت به دست آمده به وسیله‌ی معادلات پیوستگی استوار می‌باشد. این روش برای اولین بار توسط پتنکار [۱۶] در سال ۱۹۸۰ معرفی گردید و به‌نام روش فشارـ مبنا[۳] مصطلح شد. اما تجربه نشان داده‌است که این روش‌ها زمانبر و به لحاظ محاسباتی غیراقتصادی هستند.

از دیدگاه حل عددی، تفاوت اصلی معادلات جریان تراکم‌پذیر و جریان‌های تراکم‌ناپذیر در خاصیت ریاضی آن‌هاست. معادلات جریان تراکم‌پذیر از نوع معادلات هذلولوی می‌باشند و در نتیجه مشخصه‌های حقیقی دارند و لذا امواج فشاری با سرعت محدود و مشخص حرکت می‌کنند. درحالیکه معادلات جریان تراکم‌ناپذیر ترکیبی از خواص معادلات سهموی و بیضوی را دارند که این اختلاف فقط ناشی از عدم وجود جمله‌ی مشتق زمانی در معادله‌ی پیوستگی است. برای رفع این مشکل بنابر پیشنهاد کورین [۱۵] یک عبارت غیرفیزیکی وابسته به زمان به معادله‌ی پیوستگی اضافه شد که به‌همراه معادلات ممنتوم، یک دستگاه معادلات غیردائمی هذلولوی را تشکیل می‌داد. این عبارت غیرفیزیکی مشتق زمانی فشار است که با توان دوم سرعت صوت مجازی[۴] نرمال می‌شود. در حقیقت کورین یک رابطه‌ی مجازی بین فشار و چگالی سیال تراکم‌ناپذیر معرفی نمود و کمیت

[۱] Diffusion Terms
[۲] Preconditioning Methods
[۳] Pressure-Based
[۴] Pseudo-Acoustic Speed

چگالی در معادله‌ی پیوستگی را با عبارت مجازی مشتق زمانی فشار جایگزین کرد. در این روش مشاهده می‌شود جواب در راستای فرایند تکرار به سمت جواب دائمی همگرا می‌شود و عبارت اضافه شده صرفاً نقش یک کمیت کاذب را بازی می‌کند که با پیمایش زمان از بین می‌رود. این رویکرد به‌نام روش تراکم‌پذیری مصنوعی[۱] شناخته می‌شود.

وی‌ویاند [۱۷] جز اولین محققانی بود که یک بررسی کلی روی سیستم‌های غیردائمی مجازی[۲] برای محاسبات حالت پایدار انجام داد. با این وجود کار وی به معادلات انرژی ـ ثابت محدود می‌شد. در این خصوص می‌توان از کار بریلی و همکارانش [۱۸] نیز نام برد. در ادامه راه، ترکل [۱۹] در سال ۱۹۸۷ با اضافه کردن جملات مشتق زمانی مصنوعی به معادلات ممنتوم، با توسعه‌ی روش کورین، سرعت همگرایی حل را تا حد زیادی افزایش داد. این روش برای اولین بار به نام روش پیش‌شرط معرفی شد. بعدها لی [۲۰] در سال ۱۹۹۲ نشان داد که با انتخاب مناسب این دو جمله‌ی مشتق زمانی می‌توان لختی معادلات برای اعداد ماخ نزدیک به صفر را به طور کامل حذف نمود و عدد حالت[۳] بهینه را برای جریان‌های زیرصوتی به دست آورد. چوی و مرکل [۲۱] یک رابطه‌ی پیش‌شرط برای معادلات اویلر معرفی کردند که فقط برای اعداد ماخ کم معتبر بود. مطالعات مرکل [۲۲، ۲۳] و ویس و اسمیت [۲۴] منجر به یافتن ماتریس‌های پیش‌شرط ساده‌ای شد که برای تمام معادلات حالت و جریان‌های لزج قابل استفاده بود. ون لیر و همکارانش [۲۵] در سال ۱۹۹۱ یک پیش‌شرط بهینه برای معادلات اویلر در تمامی اعداد ماخ به دست آوردند. از مزایای این پیش‌شرط، قابلیت استفاده از روش‌های پیمایش زمانی است به گونه‌ای که قابلیت میرایی مدهای خطای فرکانس ـ بالا را نیز دارا می‌باشد. با این وجود ماتریس پیشنهادی آن‌ها در مقایسه با ماتریس ترکل به زاویه‌ی جریان حساسیت بیشتری نشان می‌داد. در جهت کاهش حساسیت به زاویه‌ی جریان، دویانگ لی [۲۶] در سال ۱۹۹۶، ماتریس پیش‌شرطی مستقل از زاویه‌ی جریان معرفی نمود که رفتار مناسبی در نواحی اطراف نقطه‌ی سکون نیز از خود نشان می‌داد. زاکانتی [۲۷] در رساله‌ی دکتری خود، یک مطالعه‌ی جامع روی روش‌های مختلف پیش‌شرط در معادلات

[۱] Artificial Compressibility
[۲] Pseudo-Unsteady
[۳] Condiotion number

اویلر انجام داد. وی معیارهای مختلفی نظیر کاهش لختی[۱]، هذلولوی بودن[۲]، تقارن‌پذیری[۳] و غیره را در طراحی و آنالیز ماتریس‌های پیش‌شرط مورد ارزیابی قرار داد. در سال ۲۰۰۲ مالان و همکارانش [۲۸] با ارائه یک ماتریس پیش‌شرط محلی و اصلاح ماتریس‌های پیش‌شرط پیشین که در آن‌ها از مقادیر ثابت برای ضریب پیش‌شرط استفاده می‌شد، سرعت همگرایی و دقت مسئله را به طور همزمان مورد توجه قرار دادند. در این روش، ضریب پیش‌شرط به صورت موضعی و با توجه به گرادیان میدان فشار (در هرگام زمانی) تغییر می‌کند. ذکر این نکته ضروری است که مالان روش خود را در مسائل جریان داخل حفره[۴]، جریان پله[۵]، جریان شناوری داخل حفره[۶] و گردابی ون کارمن[۷] اعمال کرد [۲۹].

لازم به ذکر است که در کشور ایران نیز هجران‌فر و همکارانش [۳۰] از روش پیش‌شرط در شبیه‌سازی جریان‌های غیرلزج و لزج استفاده کردند. همچنین اصفهانیان و اکبرزاده [۳۱] روش پیش‌شرط‌سازی استاندارد را برای حل جریان تراکم‌ناپذیر غیرلزج و لزج عبوری از سیلندر در جریان آزاد و جریان عبوری از مانع دايروي داخل کانال به کار گرفتند. آن‌ها همچنین در سال ۲۰۱۲ به تحلیل جریان کاویتاسیون با استفاده از روش پیش‌شرط‌سازی توانی[۸] پرداختند [۳۲]. در ادامه اکبرزاده و همکاران در سال ۲۰۱۴، تأثیر دمش و مکش بر ضرایب برآ و پساي جریان‌هاي کاویتاسیونی و تراکم‌ناپذیر لزج عبوري از هیدروفویل‌ها را با استفاده از روش پیش شرط توانی مورد بررسی قرار دادند [۳۳، ۳۴] .

بیشتر تحقیقات بالا، در اعداد رینولدز بالا انجام شده است اما به تازگی به آیرودینامیک هیدروفویل‌ها در اعداد رینولدز پایین نیز توجه خاصی شده است. این توجه به خاطر کاربردهای مختلف از جمله هواپیماهای نظامی خاص، وسایل هوایی و زیرسطحی بدون سرنشین[۹]، ربات‌ها و کاوشگرهای زیرسطحی می‌باشد، که به دلیل پیشرفت در دستگاه‌های مکانیکی‌ـالکتریکی بسیار کوچک میسر شده‌اند. وسایل زیرسطحی بدون سرنشین در صنایع مختلف از جمله صنایع نفت،

[۱] Stiffness
[۲] Hyperbolicity
[۳] Symmetrizability
[۴] Lid Driven Cavity
[۵] Backward Facing Step
[۶] Buoyancy-Driven Cavity
[۷] Von Karman Vortex
[۸] Power-Law Preconditioning Method
[۹] Unmanned Underwater Vehicles (UUV)

گاز و صنایع نظامی جهت اکتشاف و نقشه برداری در اعماق اقیانوس استفاده می‌شود. برای این تجهیزات کوچک که در سرعت‌های کم نیز حرکت می‌کنند عموماً عدد رینولدز در بازه‌ی ۴۰۰ الی ۶۰۰۰ می‌باشد. بنابراین با توجه به کمبود مطالعه‌اي جدي و جامع در چنین شرایطی، در این پایان‌نامه شبیه سازي جریان اطراف هیدروفویل در اعداد رینولدز پایین مدنظر قرار گرفته شده است.

۱ـ۳ اهداف پایان‌نامه

در این پایان‌نامه برای نخستین بار از روش پیش‌شرط توانی برای شبیه‌سازی عددی جریان‌های ناپایا استفاده شده است و تاثیر استفاده از این روش بر نرخ همگرایی مورد بررسی قرار گرفته است. در این رویکرد ترکیب ضرایب پیش‌شرط محلی (و اصلاح آن توسط سنسورهای محلی میدان سرعت[۱]) با جملات وابسته به زمان در معادلات ممنتوم، در قالب یک الگوریتم ضمنی دوزمانه پیش‌شرط شده برای اولین بار درنظر گرفته شده است. در این پایان‌نامه، شبیه‌سازی عددی جریان لزج تراکم‌ناپذیر ناپایا اطراف هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در محدوده اعداد رینولدز پایین مدنظر قرار گرفته است. در ابتدا معادلات پیش‌شرط‌شده حاکم ارائه می‌گردد و سپس روش پیش‌شرط توانی معرفی می‌شود. در این روش ضریب پیش‌شرط به صورت محلی و از میدان سرعت یا فشار و به کمک یک رابطه‌ی توانی محاسبه شده و در هر گام زمانی بر اساس سنسورهای محلی سرعت یا فشار تصحیح می‌گردد. در ادامه معادلات ناویرـاستوکس به کمک روش حجم‌محدود جیمسون[۲] و روش پیش‌شرط‌سازی توانی با اضافه کردن جملات ظاهری اتلافی[۳] و لزجت[۴] به ترتیب به شکل مشتقات مکانی مرتبه چهارم و دوم حل می‌شود. برای انتگرال‌گیری زمان از روش صریح رانجـکوتای چهار مرحله‌ای[۵] و برای حل جریان‌های ناپایا از یک الگوریتم ضمنی دوزمانه استفاده شده است. حل عددی ارائه شده با نتایج موجود مقایسه و ارزیابی شده است و تأثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

[۱] Local Velocity Flow-Field Sensor
[۲] Jameson's Finite Volume Method
[۳] Artificial Dissipation
[۴] Artificial Viscosity
[۵] Explicit Four-Stage Runge-kutta Scheme

۱ـ۳ـ۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه

این پایان‌نامه از یک فصل به‌عنوان مقدمه (فصل حاضر) و ۴ فصل اصلی و یک بخش جهت معرفی مراجع مورد استفاده تشکیل شده است. در فصل دوم روش‌های مختلف پیش‌شرط‌سازی و معادلات پیش‌شرط شده حاکم ارائه می‌گردد و سپس روش پیش‌شرط توانی معرفی می‌شود. در فصل سوم گسسته‌سازی عددی معادلات پیش‌شرط شده تراکم‌ناپذیر ناپایا ارائه می‌گردد. در فصل چهارم نتایج عددی حل جریان‌های دوبعدی تراکم‌ناپذیر لزج ناپایا و تاثیر روش پیش‌شرط توانی در افزایش سرعت همگرایی و دقت حل نمایش داده می‌شوند. فصل پنجم به معرفی نتایج این پایان‌نامه و ارائه پیشنهادها و توصیه‌هایی برای ارتقای سطح کیفی تحقیق حاضر و انجام مطالعه جامع‌تر در راستای موضوع این پایان‌نامه، می‌پردازد.

فصل ۲

پیش‌شرط‌سازی در جریان‌های تراکم‌ناپذیر

همانطور که گفته شد مشکل اصلی حل معادلات تراکم‌پذیر در اعداد ماخ کم، اختلاف زیاد بین سرعت امواج صوتی در سیال و سرعت جابجایی توده‌ی سیال است. در این شرایط، اعمال روش پیش‌شرط باعث تغییر مقادیر ویژه‌ی سیستم معادلات حاکم شده و اختلاف زیاد بین سرعت‌های مذکور را از بین می‌برد. در ادامه جهت روشن شدن این موضوع به معرفی مفهوم تراکم‌پذیری مصنوعی و توسعه‌ی آن به روش‌های پیش‌شرط ترکل و مالان می‌پردازیم.

۲ـ۱ تراکم‌پذیری مصنوعی

همانطور که می‌دانید در جریان‌های تراکم‌ناپذیر، جملات وابسته به زمان از معادله‌ی پیوستگی حذف خواهند شد و از آنجا که متغییر فشار هم در معادله‌ی پیوستگی ظاهر نمی‌شود، در عمل ارتباط این معادله و معادلات ممنتوم فقط از طریق متغیرهای سرعت برقرار خواهد شد. روش‌های سنتی حل چنین معادلاتی بر پایه حدس میدان فشار، حل میدان سرعت به کمک معادلات ممنتوم و سپس بررسی صحت میدان سرعت به دست آمده به وسیله‌ی معادله‌ی پیوستگی استوار می‌باشد که زمانبر و به لحاظ محاسباتی غیر اقتصادی هستند. معادلات جریان تراکم‌پذیر از نوع معادلات هذلولوی می‌باشند و در نتیجه مشخصه‌های حقیقی دارند و لذا امواج فشاری با سرعت محدود و مشخص حرکت می‌کنند. درحالیکه معادلات جریان تراکم‌ناپذیر ترکیبی از خواص معادلات سهموی و بیضوی

را دارند که این اختلاف فقط ناشی از عدم وجود جمله‌ی مشتق زمانی در معادله‌ی پیوستگی است. برای رفع این مشکل بنابر پیشنهاد کورین یک عبارت غیرفیزیکی وابسته به زمان به معادله‌ی پیوستگی اضافه شد که به همراه معادلات ممنتوم، یک دستگاه معادلات ناپایای هذلولوی (مجازی)، معادل مجموعه معادلات اول را تشکیل می‌داد. مشاهده می‌شود که جواب در راستای فرایند تکرار به سمت جواب دائمی همگرا می‌شود و عبارت اضافه شده صرفاً نقش یک کمیت کاذب را بازی می‌کند که با پیمایش زمانی از بین می‌رود. این رویکرد به نام تراکم‌پذیری مصنوعی شناخته می‌شود. در حقیقت در این روش یک رابطه‌ی مجازی بین فشار و چگالی سیال در زمان مجازی معرفی می‌شود که به معادله پیوستگی اعمال می‌شود. معادلات جریان تراکم‌ناپذیر ناپایای غیرلزج را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0
\end{aligned}
\tag{۲-۱}
$$

این معادله همان معادله‌ی اویلر برای چگالی ثابت می‌باشد که برخلاف معادله‌ی اویلر، یک معادله سهموی/بیضوی است. کورین با تعریف پارامتر تراکم‌پذیری مصنوعی و اضافه کردن یک جمله‌ی مشتق زمانی به معادله‌ی پیوستگی، ماهیت دستگاه معادلات جدید را هذلولوی کرد. معادله‌ی پیشنهادی کورین به شکل زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0
\end{aligned}
\tag{۲-۲}
$$

که β سرعت صوت مجازی می‌باشد و $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}$ در حالت کلی سرعت صوت در یک سیال تراکم‌پذیر از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند:

$$
c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}
\tag{۲-۳}
$$

روشن است که هرچه مقدار β بزرگتر باشد، جمله‌ی مشتق زمانی اضافه شده به معادله‌ی پیوستگی کوچکتر شده و معادلات جریان به معادلات اصلی تراکم‌ناپذیر نزدیک‌تر می شوند و در نتیجه لختی معادلات افزایش خواهد یافت. تامامیدیس و همکارانش [۳۵] در سال ۱۹۹۶ اعلام کردند که مقدار β تاثیر قابل‌توجهی روی پایداری و نرخ همگرایی معادلات دارد و این مقدار می‌بایست براساس شرایط جریان، هندسه جسم و تجربیات برنامه‌نویس انتخاب گردد که می‌تواند از ۰/۱ تا ۱۰ متغیر باشد. با ضرب کردن معادله‌ی اول دستگاه (۲ـ۲) در u و v و سپس جمع کردن آنها به ترتیب با معادلات دوم و سوم از دستگاه مذکور، شکل بقایی معادلات پیشنهادی کورین به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
&\frac{u}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=0\\
&\frac{v}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (v^2+p)}{\partial y}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}=0
\end{aligned}
\qquad (۲ـ۴)
$$

حال دستگاه معادلات اویلر را در نظر بگیرید. با استفاده از معادله‌ی (۲ـ۳) و رابطه‌ی $\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}$ و اعمال این عملگر روی جمله‌ی مشتق زمانی دستگاه معادلات خواهیم داشت:

$$
\frac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial \overrightarrow{Q}}\frac{\partial \overrightarrow{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial x}+\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial y}=0 \qquad (۲ـ۵)
$$

که در این رابطه:

$$
\frac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial \overrightarrow{Q}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial p} & 0 & 0\\ u\frac{\partial \rho}{\partial p} & \rho & 0\\ v\frac{\partial \rho}{\partial p} & 0 & \rho\end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{Q}=\begin{pmatrix}p\\ u\\ v\end{pmatrix} \qquad (۲ـ۶)
$$

که برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر ($\rho=1$)، معادله‌ی (۲ـ۵) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
&\frac{u}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=0\\
&\frac{v}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (v^2+p)}{\partial y}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}=0
\end{aligned}
\qquad (۲ـ۷)
$$

که همان رابطه‌ی (۲ـ۴) می‌باشد. در بخش بعدی خواهیم دید که این معادله، حالت خاصی از روش پیش‌شرط استاندارد ترکل می‌باشد.

۲ـ۲ روش پیش‌شرط ترکل

ترکل [۱۹] در سال ۱۹۸۷ با اضافه کردن مشتقات زمانی مصنوعی به معادلات ممنتوم، با توسعه روش کورین، سرعت همگرایی حل را تا حد زیادی افزایش داد. این روش به نام روش پیش‌شرط شناخته می‌شود. معادلات توسعه‌یافته‌ی پیشنهاد شده‌ی وی برای جریان تراکم‌ناپذیر غیرلزج با اضافه کردن جملات مشتق زمانی به دستگاه معادلات (۲ـ۲) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
&\frac{\alpha u}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
&\frac{\alpha v}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=0
\end{aligned} \tag{۲ـ۸}$$

شکل بقایی یا پایستار دستگاه معادلات (۲ـ۸) عبارت است از:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
&\frac{\alpha u}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=0\\
&\frac{\alpha v}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (v^2+p)}{\partial y}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}=0
\end{aligned} \tag{۲ـ۹}$$

همچنین دستگاه معادلات (۲ـ۹) را می‌توان به صورت برداری و به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\Gamma_p^{-1}\frac{\partial \overrightarrow{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial x}+\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial y}=0 \tag{۲ـ۱۰}$$

که داریم:

$$\Gamma_p^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\beta^2} & 0 & 0\\ \dfrac{\alpha u}{\beta^2} & 1 & 0\\ \dfrac{\alpha v}{\beta^2} & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{۲ـ۱۱}$$

با قرار دادن $\alpha = 0$، فرم استاندارد و اولیه روش تراکم‌پذیری مصنوعی مطابق آنچه توسط کورین پیشنهاد شده به دست می‌آید. با قرار دادن $\alpha = 1$، فرم ارائه شده در معادلات ۲ـ۷ به دست می‌آید. مقدار $\alpha = 2$ را ترکل به منظور افزایش نرخ همگرایی پیشنهاد نموده است. ماهیت پیش‌شرط‌های مختلف حاصل از سه مقدار متفاوت α در زیر به صورت خلاصه بیان شده است:

- $\alpha = 0$: با انتخاب این مقدار، معادلات فوق به همان شکل معادلات تراکم‌پذیری مصنوعی کورین تبدیل می‌شوند. در این حالت نرخ همگرایی جواب بسیار کند بوده ولی پایداری و انعطاف‌پذیری[۱] روش بسیار بالا خواهد بود.

- $\alpha = 1$: با این مقدار تراکم پذیری مصنوعی به منظور سازگاری دستگاه معادلات علاوه بر معادله پیوستگی در معادلات ممنتوم نیز اعمال می‌شود.

- $\alpha = 2$: این پیش‌شرط توسط ترکل پیشنهاد شده است و از نرخ همگرایی بسیار سریع برخوردار می‌باشد. با این وجود، با توجه به آزمایشات عددی انجام شده، پایداری و مقاومت کمتری از خود نشان می‌دهد. دلیل کارآمدی کمتر با وجود نرخ همگرایی بالاتر به ازای این مقدار به خوبی معلوم نبوده و بحث در مورد آن پیچیده است [۲۸].

۲ـ۳ روش پیش‌شرط مالان

در سال ۲۰۰۲ مالان و همکارانش [۲۸] با ارائه‌ی یک ماتریس پیش‌شرط تعمیم یافته‌ی محلی و اصلاح ماتریس‌های پیش‌شرط پیشین که در آنها از مقادیر ثابت برای ضریب α استفاده می‌شد، سرعت همگرایی و دقت حل مسئله را به طور همزمان مورد توجه قرار دادند. در این روش ضریب α به صورت موضعی و با توجه به گرادیان میدان فشار (در هر گام زمانی) تغییر می‌کند. ماتریس پیش‌شرط پیشنهادی مالان برای معادلات برداری (۲ـ۱۰) به شکل زیر می‌باشد:

$$\Gamma_p^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{\sigma u}{\beta^2} & 1 & 0 \\ \dfrac{\sigma v}{\beta^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۲ـ۱۲}$$

[۱] Robustness

که در این صورت داریم:

$$\Gamma_p = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ -\sigma u & 1 & 0 \\ -\sigma v & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۲\text{ـ}۱۳)$$

با نگاهی به ماتریس (۲ـ۱۳) ملاحظه می‌شود که $\sigma \neq 0$ باعث ورود جملاتی از معادله‌ی پیوستگی به سایر معادلات ممنتوم می‌شود. بنابراین نوسانات در معادله‌ی پیوستگی می‌تواند تاثیر مستقیم روی دیگر معادلات و پایداری آنها بگذارد. برای $\sigma = 0$ این تاثیر حذف و برای $\sigma = 2$ (پیشنهاد ترکل) این تاثیر شاخص‌تر خواهد بود. برای بهینه کردن این تاثیر، مالان و همکارانش از یک سنسور فشاری در هر گام زمانی مجازی استفاده کردند. پیشنهاد آنها بهره‌گیری از یک حسگر فشاری محلی[۱] و اعمال آن روی ضریب σ به صورت زیر بود:

$$A_p = \lim_{x \to x^{m+}} \frac{|\nabla p(x^m) - \nabla p(x)|}{|\nabla p(x^m)| - |\nabla p(x)|} \qquad (۲\text{ـ}۱۴)$$

که داریم:

$$\nabla p(x^m) = \lim_{x \to x^{m-}} \frac{p(x) - p(x^m)}{x - x^m} \qquad (۲\text{ـ}۱۵)$$

در این روابط $p(x^m)$ فشار در $x = x^m$ (نقطه‌ی mدر فضای محاسباتی) می‌باشد و ضریب پیش‌شرط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = 2(1 - A_p) \qquad (۲\text{ـ}۱۶)$$

در این حالت ضریب σ از مقدار ۲ در نواحی هموار تا $\sigma \to 0$ در نواحی با گرادیان شدید فشار تغییر می‌کند. بدین ترتیب ماتریس پیش‌شرط به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\Gamma_p^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{2(1-A_p)u}{\beta^2} & 1 & 0 \\ \dfrac{2(1-A_p)v}{\beta^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۲\text{ـ}۱۷)$$

[۱] Local Pressure Sensor

۲ـ۴ روش پیش‌شرط توانی

ماتریس پیش‌شرط مالان و ضریب پیش‌شرط موضعی آن را مجدداً در نظر بگیرید. نتایج عددی به دست آمده مرجع [۳۶] نشان می‌دهد که با جایگزینی حسگر فشاری A_pبا حسگر موضعی سرعت، A_u، می‌توان نرخ همگرایی حل عددی به ویژه برای جریان حول هیدروفویل را به میزان قابل توجهی اصلاح کرد. در نتیجه برای جریان‌های آرام و لزج، رابطه‌ی زیر را برای ضریب پیش‌شرط [۳۶] معرفی می‌کنیم:

$$\sigma = 2(1 - A_u) \tag{۲ـ۱۸}$$

که در این رابطه A_u (حسگر موضعی سرعت) از رابطه‌ی مشابه با حسگر فشاری محاسبه می‌شود:

$$A_u = \lim_{x \to x^{m+}} \frac{|\nabla u(x^m) - \nabla u(x)|}{|\nabla u(x^m)| - |\nabla u(x)|} \tag{۲ـ۱۹}$$

که داریم:

$$\nabla u(x^m) = \lim_{x \to x^{m-}} \frac{u(x) - u(x^m)}{x - x^m} \tag{۲ـ۲۰}$$

در این روابط $u(x^m)$ سرعت در $x = x^m$ (نقطه‌ی m در فضای محاسباتی) می‌باشد. ترکل [۱۹، ۳۷] نشان داد اگر چه $\sigma = 2$ به لحاظ تئوریک می‌بایست بهترین نرخ همگرایی را داشته باشد، اما توانمندی کمتری نسبت به حالت $\sigma = 0$ خواهد داشت. در نتیجه برای کوچک کردن ضریب معرفی شده در رابطه‌ی (۲ـ۱۸)، یک ضریب پیش‌شرط توانی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma = 2(1 - A_u)^m \tag{۲ـ۲۱}$$

که $(m \geq 2)$ یک عدد صحیح می‌باشد.

فصل ۳

گسسته‌سازی عددی جریان ناپایا به کمک روش پیش‌شرط توانی

۳ـ۱ مقدمه

در سال ۲۰۰۲ مالان و همکارانش [۲۸] با ارائه‌ی یک ماتریس پیش‌شرط محلی و اصلاح ماتریس‌های پیش‌شرط پیشین که در آنها از مقادیر ثابت برای ضریب پیش‌شرط استفاده می‌شد، سرعت همگرایی و دقت حل مسئله را به طور همزمان مورد توجه قرار دادند. در روش پیشنهادی آنها، ضریب پیش‌شرط به صورت موضعی و با توجه به گرادیان میدان فشار (در هر گام زمانی) تغییر می‌کند ($\sigma = 2(1 - A_p)$). لازم به ذکر است که مالان روش خود را در تحلیل مسائلی نظیر جریان داخل حفره، جریان عبوری از پله، جریان شناوری داخل حفره و گردابی ون‌ـ کارمن اعمال کرد [۲۹]. با این وجود، نتایج به دست آمده در مرجع [۳۶] نشان می‌دهد که با اعمال روش پیش‌شرط مالان برای جریان‌های لزج آرام حول هیدروفویل‌های ناکا[۱]، همگرایی در مرتبه‌ی بسیار پایینی رخ می‌دهد و اعمال آن روی جریان‌های غیرلزج منجر به واگرایی حل عددی می‌شود. از این رو در این فصل یک ضریب (یا ماتریس) پیش‌شرط جدید موضعی به نام ماتریس پیش‌شرط توانی برای حل این مشکل پیشنهاد می‌شود. این ضریب عملاً نمونه‌ی اصلاح شده‌ی روش ارائه شده توسط مالان و

[۱] NACA-Hydrofoils

همکارانش می‌باشد. نتایج حاصل از اجرای این روش در مرجع [۳۶] نشان می‌دهد که علاوه بر اصلاح روش مالان در جریان عبوری از هیدروفویل‌ها، نرخ همگرایی شبیه‌سازی عددی را تا حد بسیار زیادی کاهش می‌دهد. این کاهش در بعضی از مسائل به ۶۰ درصد نیز می‌رسد.

۳ـ۲ دستگاه معادلات پیش‌شرط

معادلات جریان بی‌بعد حاکم پیش‌شرط‌سازی شده در شکل برداری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Gamma\frac{\partial\overrightarrow{Q}}{\partial t}+\Pi\frac{\partial\overrightarrow{Q}}{\partial\tau}+\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial x}+\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial y}=0 \qquad (۳ـ۱)$$

که در آن، t و τ به ترتیب معرف زمان حقیقی و زمان مجازی هستند. ماتریس Γ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\rho&0\\0&0&\rho\end{pmatrix} \qquad (۳ـ۲)$$

که:

$$\overrightarrow{Q}=\begin{pmatrix}p\\u\\v\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}\rho u\\p+\rho u^2-\xi\tau_{xx}\\\rho uv-\xi\tau_{yx}\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{E}=\begin{pmatrix}\rho v\\\rho uv-\xi\tau_{xy}\\p+\rho v^2-\xi\tau_{yy}\end{pmatrix} \qquad (۳ـ۳)$$

Π^{-1} ماتریس پیش‌شرط بوده و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\Pi^{-1}=\begin{pmatrix}\beta^2&0&0\\\frac{-\sigma u}{\rho}&\frac{1}{\rho}&0\\\frac{-\sigma v}{\rho}&0&\frac{1}{\rho}\end{pmatrix} \qquad (۳ـ۴)$$

که در آن $u=\frac{\bar{u}}{U_\infty}$ و $v=\frac{\bar{v}}{U_\infty}$ به ترتیب سرعت در جهت x و y، $x=\frac{\bar{x}}{L}$ و $y=\frac{\bar{y}}{L}$ محورهای مختصات کارتزین می‌باشد. $p=\frac{\bar{p}}{\rho_\infty U_\infty^2}$ فشار استاتیکی و $\rho=\frac{\bar{\rho}}{\rho_\infty}$ چگالی نسبی و همچنین

$t = \frac{\bar{t}U_\infty}{L}$ زمان، L طول مرجع و U_∞ سرعت مرجع است. همچنین τ_{yy}، τ_{yx}، τ_{xy}، τ_{xx} مؤلفه‌های تانسور تنش هستند. ξ برای جریان غیرلزج برابر صفر و برای جریان لزج برابر یک می‌باشد.

همانگونه که در فصل پیش گفته شد، ضریب پیش‌شرط توانی، σ در رابطه‌ی فوق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = 2(1 - A_u)^m \tag{۳ـ۵}$$

که $(m \geq 2)$ یک عدد صحیح می‌باشد.

ترکل [۱۹] نشان داد که در جریان غیرلزج، ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی باید تا حد امکان به سرعت جابجایی جریان نزدیک باشد. در این حالت به آن ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی جابجایی[۱] می‌گوییم که از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\beta^2_{\text{conv}} = \begin{cases} \max\left[(3-\sigma)V^2, kV^2_{\max}\right] & \sigma < 2 \\ K\max\left[(\sigma-1)V^2, kV^2_{\max}\right] & \sigma \geq 2 \end{cases} \tag{۳ـ۶}$$

که $V^2_{\max} = (u^2 + v^2)_{max}$ و ضرایب k و K دو عدد ثابت دلخواه بوده و به ترتیب در محدوده‌ی (۰/۱۶-۱) و (۱/۱-۱) انتخاب می‌شوند [۳۸]. معادله‌ی (۳ـ۶) نشان می‌دهد که ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی تابعی از سرعت جریان بوده و مقدار آن در سراسر فضای محاسباتی متغیر می‌باشد. با این وجود، محاسبات عددی انجام شده در مراجعی نظیر [۳۱، ۳۹] نشان می‌دهد که استفاده از یک مقدار ثابت برای این ضریب (یعنی $\beta = \beta_0$) نتیجه بهتری در سرعت همگرایی خواهد داشت. لذا از رابطه‌ی زیر برای جریان‌های غیرلزج استفاده می‌شود:

$$\beta^2 = \min\left\{\beta^2_{\text{conv}}, \beta^2_0\right\} \tag{۳ـ۷}$$

برای جریان‌هایی با عدد رینولدز کم، به دلیل بالا بودن سرعت نفوذ موضوعی، مقدار ضریب تراکم‌پذیری ذاتاً عدد بزرگی است. در این شرایط اندازه‌ی ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی پخشی[۲] از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۲۸] :

$$\beta^2_{\text{diff}} = 0.25\left[\left(\frac{4\mu}{\rho Re L_{\min}} + \sigma v\right)^2 - (2-\sigma)^2 V^2\right] \tag{۳ـ۸}$$

[۱] Convective Artificial Compressibility
[۲] Diffusion Artificial Compressibility

که L_{min} کمترین طول وجوه یک المان محاسباتی می‌باشد. در این پایان‌نامه برای جریان‌های آرام ($Re \leq 10^4$)، ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی از معادله‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\beta^2 = \max\left\{\beta_{\text{diff}}^2, \beta_p^2\right\} \tag{۳ـ۹}$$

که:

$$\beta_p^2 = \begin{cases} 10^{-8} Re^2 V_{max}^2 & V \leq \dfrac{Re}{10000} V_{max} \\ \max\left(\beta_0^2, V^2\right) & V > \dfrac{Re}{10000} V_{max} \end{cases} \tag{۳ـ۱۰}$$

حال مجدداً به سراغ ماتریس و ضریب پیش‌شرط توانی یعنی رابطه‌ی (۳ـ۵) برمی‌گردیم. با در نظرگرفتن معادله‌ی (۳ـ۸) عدد حالت برای دستگاه معادلات پیش‌شرط شده برای ($m \geq 2$) برابر خواهد شد با:

$$\kappa(m) = \frac{1}{1 - \dfrac{2 - 2(1 - A_u)^m}{1 + \dfrac{X}{2V}}} \qquad m \geq 2 \tag{۳ـ۱۱}$$

که ($X = \dfrac{4\mu}{\rho Re L_{min}}$). براساس نتایج به دست آمده در مرجع [۳۶] مشخص گردید اگرچه نامساوی ($1 < \kappa(2) < \kappa(m > 2)$) به لحاظ تئوریک نشان می‌دهد که $m = 2$ می‌بایست بهترین نتیجه را در کاهش نرخ همگرایی داشته باشد، اما مقدار بهینه‌ی m می‌تواند بزرگتر از ۲ نیز باشد.

در معادله‌ی (۳ـ۵) چنانچه m برابر صفر باشد، σ عددی ثابت و غیر صفر خواهد شد که معادل روش پیش‌شرط ترکل خواهد بود (جهت سهولت روش ترکل را با SPM (روش پیش‌شرط استاندارد[۱]) نمایش می‌دهیم). با توجه به حسگرهای موضعی فشار و سرعت $0 < A_p < 1$ و $0 < A_u < 1$، چنانچه $m \to \infty$ آنگاه σ به سمت صفر میل خواهد کرد که معادل روش تراکم‌پذیری مصنوعی کورین خواهد شد (جهت سهولت این روش را با SAC (روش تراکم‌پذیری استاندارد[۲]) نمایش می‌دهیم). همچنین با انتخاب $m = 1$ در رابطه‌ی (۳ـ۵) ضریب پیش‌شرط مالان و همکارانش به دست خواهد آمد (جهت سهولت روش مالان را با MPM (روش پیش‌شرط مالان[۳]) نمایش می‌دهیم).

[۱] Standard Preconditioning Method
[۲] Standard Artifficial Compressibility
[۳] Malan's Preconditioning Method

۳ـ۳ روش حجم‌محدود جیمسون

در این بخش به معرفی یکی از روش‌ها و ابزارهای عددی در شبیه‌سازی جریان‌های غیرلزج و آرام که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته شده است می‌پردازیم. اساس این روش، گسسته‌سازی معادلات حاکم با رویکرد حجم محدود می‌باشد که توسط جیمسون [۴۰، ۴۱] معرفی شده است. لازم به ذکر است که دلگشا و همکارانش [۴۲، ۴۳] این روش را در شبیه‌سازی جریان کاویتاسیون در داخل یک کانال همگرا ـ واگرا مورد ارزیابی قرار دادند. این روش هم در جریان‌های پایا و هم در جریان‌های ناپایا قابل استفاده است.

۳ـ۳ـ۱ محاسبات مربوط به جریان ناپایا

استراتژی حل مورد نظر در جریان‌های ناپایا براساس الگوریتم پیمایش زمانی و الگوریتم دوزمانه و استفاده از گام‌های زمانی رانج ـ کوتا در نظر گرفته شده است. بنابراین از معادله‌ی پیش‌شرط شده‌ی (۳ـ۱) حول حجم کنترل Ω که با سطح $\partial\Omega$ محصور شده است انتگرال می‌گیریم. با در نظر گرفتن قضیه دیورژانس[۱] خواهیم داشت [۲۸، ۳۲، ۴۱] :

$$\Pi^{-1}\Gamma\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\overrightarrow{Q}dA+\frac{\partial}{\partial \tau}\int_{\Omega}\overrightarrow{Q}dA+\Pi^{-1}\int_{\partial\Omega}\left(\overrightarrow{F}dy-\overrightarrow{E}dx\right)=0 \qquad (۱۲ـ۳)$$

۳ـ۳ـ۲ گسسته‌سازی عددی معادلات حاکم

به طور کلی در روش حجم محدود، حجم کنترل‌ها را می‌توان به دو شکل سلول ـ مرکزی[۲] و گره ـ سلولی[۳] گسسته‌سازی کرد. در اینجا رویکرد سلول ـ مرکزی مدنظر می‌باشد. در روش حجم محدود، نخست با یکی از روش‌های جبری یا دیفرانسیلی فضای محاسباتی مورد نظر شبکه‌بندی شده و سپس معادلات مربوطه برای هر حجم کنترل بر حسب مختصات نقاط وسط حجم‌ها گسسته‌سازی می‌شوند. بدین ترتیب با تقریب زدن جمله‌ی $\frac{\partial\overrightarrow{Q}}{\partial t}$ و $\frac{\partial\overrightarrow{Q}}{\partial \tau}$ از معادله (۳ـ۱۲) با مقدار آن در وسط حجم کنترل و خارج کردن این جملات از داخل انتگرال و همچنین اضافه کردن جملات اتلافی

[۱] Divergence Theorem
[۲] Cell-Center
[۳] Cell-Vertex

جیمسون، گسسته شده‌ی معادله (۳ــ۱۲) به شکل زیر خواهد شد [۲۸، ۳۱، ۴۱]:

$$\Pi^{-1}\Gamma A_{i,j}\frac{\partial Q_{i,j,k}}{\partial t}+A_{i,j}\frac{\partial Q_{i,j,k}}{\partial \tau}=-G_{i,j,k}+D_{i,j,k} \qquad (۳\text{ــ}۱۳)$$

که (i,j) معرف شماره‌ی المان، $k=1,2,3$ اندیس مؤلفه‌های بردار و $A_{i,j}$ مساحت المان (i,j)ام می‌باشد. همچنین $G_{i,j,k}$ معرف شار عددی روی وجوه هر المان بوده که از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
G_{i,j,1}&=\beta^2\sum_{edges}\left(F_1dy-E_1dx\right)_{i,j}\\
G_{i,j,2}&=-\frac{\sigma u_{i,j}G_{i,j,1}}{\rho\beta^2}+\frac{1}{\rho}\sum_{edges}\left(F_2dy-E_2dx\right)_{i,j}\\
G_{i,j,3}&=-\frac{\sigma v_{i,j}G_{i,j,1}}{\rho\beta^2}+\frac{1}{\rho}\sum_{edges}\left(F_3dy-E_3dx\right)_{i,j}
\end{aligned} \qquad (۳\text{ــ}۱۴)$$

با همگرایی معادله (۳ــ۱۲) در زمان مجازی τ، $(\frac{\partial \overrightarrow{Q}}{\partial \tau}\to\infty)$ حل معادله در زمان حقیقی t، حاصل می‌شود. عبارت زمان حقیقی با استفاده از تفاضل پسروی سه‌نقطه‌ای و به صورت ضمنی گسسته‌سازی می‌شود [۲، ۲۸، ۴۴]:

$$\Pi^{-1}\Gamma A_{i,j}\frac{\partial Q_{i,j,k}}{\partial t}=\Pi^{-1}\Gamma A_{i,j}\frac{3Q^{n+1}_{i,j,k}-4Q^{n}_{i,j,k}+Q^{n-1}_{i,j,k}}{2\Delta t} \qquad (۳\text{ــ}۱۵)$$

که در آن n بیانگر زمان فیزیکی است.

به طور کلی یکی از مشکلات اصلی در روش گسسته‌سازی مرکزی این است که گره‌های زوج و فرد در شبکه‌ی محاسباتی از هم جدا بوده و شرایط ایجاد نوسان بین این گره‌ها فراهم خواهد بود. برای جلوگیری از ایجاد این نوسانات، براساس روش پیشنهادی جیمسون، معادلات گسسته‌سازی شده مذکور، با اضافه کردن جملات اتلافی مرتبه‌ی چهارم و دوم (یعنی $D_{i,j,k}$) اصلاح می‌شوند:

$$D_{i,j,k}=\left(d_{i+1/2,j}-d_{i-1/2,j}+d_{i,j+1/2}-d_{i,j-1/2}\right)_k \qquad (۳\text{ــ}۱۶)$$

که به عنوان مثال برای عبارت $d_{i=1/2,j}$ داریم:

$$d_{i+1/2,j}=\frac{A_{i+1/2,j}}{\Delta t}\left(\varepsilon_2^{i+1/2,j}\delta_2-\varepsilon_4^{i+1/2,j}\delta_4\right) \qquad (۳\text{ــ}۱۷)$$

$$\delta_2 = Q_{i+1,j,k} - Q_{i,j,k} \tag{۳ـ۱۸}$$

$$\delta_4 = Q_{i+2,j,k} - 3Q_{i+1,j,k} + 3Q_{i,j,k} - Q_{i-1,j,k} \tag{۳ـ۱۹}$$

$$A_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}\left(A_{i+1/2,j} + A_{i,j}\right) \tag{۳ـ۲۰}$$

که در این رابطه، ε_2 و ε_4 به‌ترتیب ضرایب لزجت مصنوعی و اتلاف مصنوعی نامیده می‌شود که از روش زیر محاسبه می‌شوند [۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۵]:

$$\varepsilon_2^{i+1/2,j} = k_2 \mathrm{Max}\left\{\upsilon_{i+1,j}, \upsilon_{i,j}\right\} + k_3 \mathrm{Max}\left\{\gamma_{i+1,j}, \gamma_{i,j}\right\} \tag{۳ـ۲۱}$$

$$\varepsilon_4^{i+1/2,j} = \mathrm{Max}\left\{0, \left[k_4 - \varepsilon_2^{i+1/2,j}\right]\right\} \tag{۳ـ۲۲}$$

در رابطه‌ی فوق، υ پارامتری است که در نواحی با گرادیان فشار شدید نظیر شوک‌ها فعال می‌شود و γ یک حسگر مکمل برای جریان‌های کاویتاسیونی است که از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\upsilon_{i,j} = \left|\frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}\right| \tag{۳ـ۲۳}$$

$$\gamma_{i,j} = \left|\frac{\rho_{i+1,j} - 2\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{\rho_{i+1,j} + 2\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}\right| \tag{۳ـ۲۴}$$

در معادلات (۳ـ ۲۱) و (۳ـ ۲۲) k_2، k_3 و k_4 سه ضریب دلخواه و ثابت هستند. از آنجا که در جریان‌های تراکم‌ناپذیر، از پدیده‌ی شوک فشاری یا گرادیان شدید در چگالی سیال خبری نیست، مقادیر υ و γ نزدیک صفر هستند و می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد. لذا در این شرایط می‌توان از روابط $\varepsilon_2 = 0$ و $\varepsilon_4 = k_4$ استفاده کرد.

به منظور گسسته‌سازی مشتق زمانی از روش رانج‌ـ کوتای اصلاح‌شده‌ی چهار مرحله‌ای استفاده شده است که برای شکل نیمه‌گسسته معادلات ناپایا به صورت زیر بیان می‌گردد [۴، ۲۸، ۳۲]:

$$Q_{i,j,k}^{(0)} = Q_{i,j,k}^{(N)}$$

$$Q_{i,j,k}^{(\kappa)} = Q_{i,j,k}^{(0)} - \alpha_k \frac{\Delta\tau_{i,j}}{A_{i,j}\left(I + \Pi^{-1}\Gamma\frac{3}{2}\frac{\Delta\tau_{i,j}}{\Delta t}\right)} \left[G\left(Q_{i,j,k}^{\kappa-1}\right) - D\left(Q_{i,j,k}^{0}\right) + A_{i,j}\Pi^{-1}\Gamma\left(\frac{-3Q_{i,j,k}^{n+1} + 4Q_{i,j,k}^{n} - Q_{i,j,k}^{n-1}}{2\Delta t}\right)\right] \tag{۳ـ۲۵}$$

$$Q_{i,j,k}^{(N+1)} = Q_{i,j,k}^{(4)}$$

که در رابطه‌ی فوق $\kappa = 1, 2, 3, 4$ و ضرایب α_k به ترتیب به صورت $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{2}$ و 1 انتخاب می‌شوند. همچنین n بیانگر زمان فیزیکی و N معرف زمان مجازی است.

با توجه به ماهیت ضمنی گسسته‌سازی جمله زمان حقیقی، محدودیتی از نظر اندازه گام زمان فیزیکی وجود نداشته و تنها قید موجود در انتخاب گام زمان حقیقی، دقت مورد نیاز در مساله است. همچنین در این پایان‌نامه از گام‌های زمانی محلی برای تسریع در همگرایی حل استفاده شده است:

$$\Delta\tau_{i,j} = \text{CFL} \times \frac{\Delta L_{i,j}^{min}}{\lambda_{i,j}^{max}} \qquad (۳\text{–}۲۶)$$

که $\Delta L_{i,j}^{min}$ کوچکترین طول وجه المان (i, j)ام و CFL عدد کورانت–فردریچ–لوی[۱] می‌باشد. همچنین $\lambda_{i,j}^{max}$ مقدار ویژه بیشینه[۲] برای هر المان خواهد بود. برای ارزیابی نرخ همگرایی از نرم خطای فشار موضعی به صورت زیر استفاده می‌شود [۳۲]:

$$\text{Res} = \log \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\Delta p_{i,j}/p_{i,j}\right)^2 / N} \qquad (۳\text{–}۲۷)$$

که N معرف تعداد المان‌های موجود در فضای محاسباتی می‌باشد.

۳–۳–۳ گسسته‌سازی حسگرهای فشاری و سرعت

به منظور تکمیل این بخش و تعیین مقدار σ در روابط (۳–۱۴)، لازم است که حسگرهای فشاری و سرعت در مراکز هر المان محاسبه شوند. برای گسسته‌سازی حسگرهای فشار و سرعت که در معادله‌ی (۲–۱۹) معرفی شده‌اند از رابطه‌ی پیشنهادی مالان و همکارانش [۲۸] مطابق رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود:

$$A_u^{i,j} = \frac{|4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}|}{|u_{i,j} - u_{i+1,j}| + |u_{i,j} - u_{i-1,j}| + |u_{i,j} - u_{i,j+1}| + |u_{i,j} - u_{i,j-1}|} \qquad (۳\text{–}۲۸)$$

[۱] Courant-Friedrichs-Lewy
[۲] Maximum Eigenvalue

همچنین برای مرزها (به عنوان مثال چنانچه وجه $(i, j-\frac{1}{2})$ مرز دیواره باشد)، حسگرها از معادله‌ی زیر محاسبه می‌شوند:

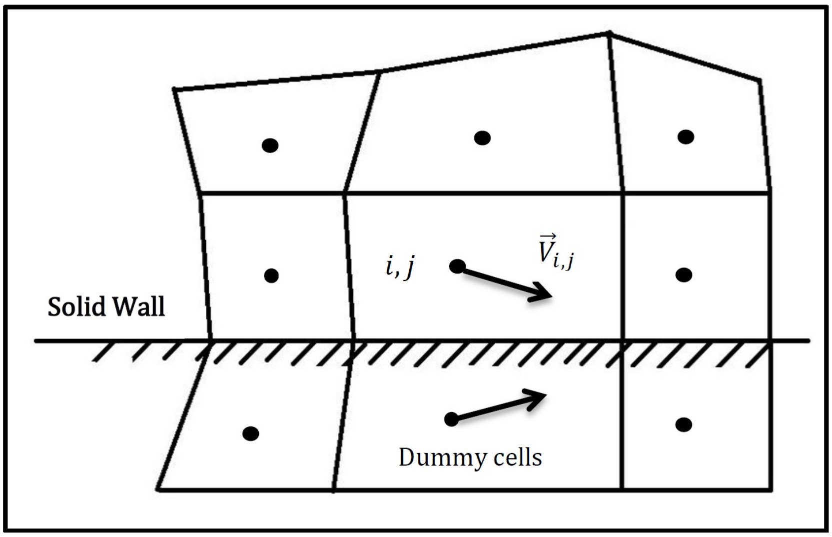
$$A_u^{i,j} = \frac{|5u_{i,j} - 2u_{i+1,j} - 2u_{i-1,j} - u_{i,j+1}|}{2|u_{i,j} - u_{i+1,j}| + 2|u_{i,j} - u_{i-1,j}| + |u_{i,j} - u_{i,j+1}|} \tag{۳ـ۲۹}$$

۳ـ۴ شرایط مرزی

برای جریان‌های غیرلزج، شرط مرزی سرعت روی دیواره به صورت $\overrightarrow{V_n} = 0$ در نظر گرفته می‌شود که $\overrightarrow{V_n}$ سرعت عمودی روی دیواره می‌باشد. برای اعمال این شرط مرزی، از تعریف سلول‌های مجازی[۱] و متقارن استفاده می‌شود به گونه‌ای که مطابق شکل ۳ـ۱، سرعت در مرکز المان مجازی تقارن آینه‌ای نسبت به المان مرزی خواهد داشت. برای جریان‌های لزج، شرط مرزی سرعت روی دیواره، شرط عدم لغزش یعنی $u = 0$ و $v = 0$ می‌باشد. شرط مرزی فشار روی دیواره به صورت $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ که n بردار عمود بر سطح دیواره می‌باشد. همچنین در این پایان‌نامه از یک شرط مرزی کلاسیک ورودی و خروجی مختص به جریان‌های تراکم‌ناپذیر استفاده می‌شود به این معنی که در مرز ورودی، اندازه‌ی مؤلفه‌های سرعت ثابت و برابر مقدار سرعت جریان آزاد قرار داده می‌شوند و فشار از داخل میدان جریان برون‌یابی می‌شود و در مرز خروجی، فشار برابر با فشار جریان آزاد و مؤلفه‌های سرعت با استفاده از برون‌یابی از داخل میدان تعیین می‌گردند. بدین ترتیب برای جریان ورودی و خروجی از فضای محاسباتی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \rho_i = \rho_\infty \\ u_i = U_\infty \cos\alpha \\ v_i = U_\infty \sin\alpha \\ p_i = 2p_1 - p_2 \end{cases} \tag{۳ـ۳۰}$$

[۱] Dummy Cells



شکل ۳ـ۱: روش المان مجازی برای شرط سرعت روی دیواره

$$\begin{cases} \rho_o = 2\rho_m - \rho_{m-1} \\ u_o = 2u_m - u_{m-1} \\ v_o = 2v_m - v_{m-1} \\ p_o = p_\infty \end{cases} \tag{۳ـ۳۱}$$

که زیرنویس‌های i و o به ترتیب مرز ورودی و خروجی، زیرنویس ∞ جریان آزاد، α زاویه‌ی حمله، زیرنویس‌های ۱ و ۲ معرف اولین و دومین المان مرز ورودی و زیرنویس‌های m و $m-1$ معرف اولین و دومین المان مرز خروجی می‌باشد.

فصل ۴

نتایج عددی

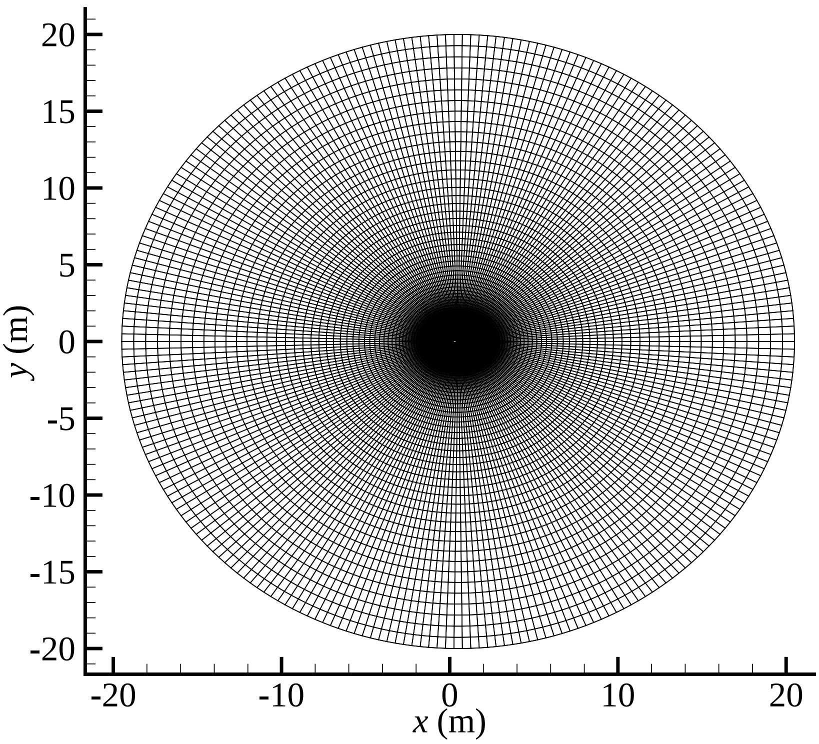
۴ـ۱ مقدمه

در این فصل نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی عددی ارائه خواهند شد. در این پایان‌نامه برای شبیه‌سازی انجام شده برنامه‌ای با زبان برنامه‌نویسی C++ و استفاده از قابلیت شی‌گرایی[۱] این زبان نوشته شده است. همانطور که در بخش‌های پیشین به تفصیل بیان گردید، در این برنامه عددی که الگوریتم آن بر اساس روش حجم محدود از نوع مرکزیت سلول پایه‌ریزی گشته، با استفاده از روش پیش‌شرط توانی بسط داده شده و به منظور بررسی جریان‌های ناپایا از شیوه‌ی حل دوزمانی استفاده شده است. در ابتدا به منظور اعتبارسنجی مطالعه‌ی انجام شده، نتایج شبیه‌سازی عددی جریان آرام ناپایا پیرامون هیدروفویل NACA۰۰۱۲ با نتایج عددی موجود مقایسه شده است. پس از بررسی صحت نتایج، تأثیر روش‌های مختلف پیش‌شرط بر روی نرخ همگرایی در زوایای حمله و اعداد رینولدز متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

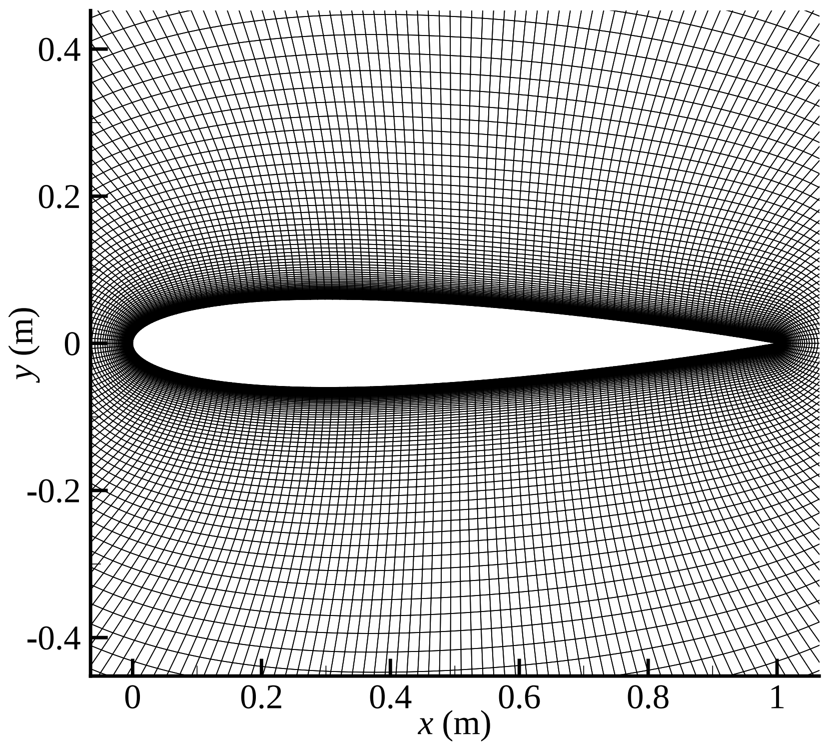
[۱] Object-Oriented

۴ـ۲ شبکه‌ی محاسباتی

شبکه محاسباتی مورد استفاده، شبکه‌ای با سازمان از نوع O بوده که دارای ۲۵۰ گره در راستای هیدروفویل و ۱۳۰ گره در جهت عمود بر آن می‌باشد. همچنین فاصله اولین گره محاسباتی تا دیواره هیدروفویل ۰/۰۰۰۳ـ ۰/۰۰۰۴ برابر طول وتر هیدروفویل انتخاب شده است. مرز خارجی به صورت دایره‌ای با شعاع ۲۰ برابر وتر هیدروفویل در نظر گرفته شده است. گام زمان حقیقی برابر با $\Delta t = 0.01$ در نظر گرفته شده و در هر گام زمانی حقیقی میدان حل تا 10^{-5} در زمان مجازی همگرا می‌شود. شکل‌های ۴ـ۱ و ۴ـ۲ دورنما و نمایی نزدیک از شبکه‌ی محاسباتی به کار گرفته شده را نمایش می‌دهند.



شکل ۴ـ۱: نمای دور از شبکه‌ی محاسباتی پیرامون هیدروفویل NACA۰۰۱۲



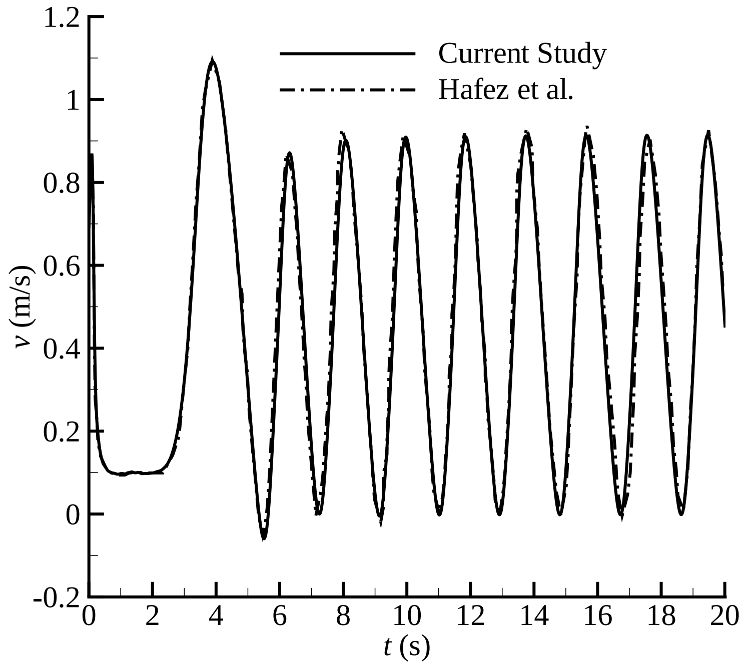
شکل ۴ـ۲: نمای نزدیک از شبکه‌ی محاسباتی پیرامون هیدروفویل NACA۰۰۱۲

۴ـ۳ جریان ناپایا با زاویه‌ی حمله ثابت

۴ـ۳ـ۱ نتایج عددی و اعتبارسنجی

برای مقایسه الگوریتم جریان آرام ناپایای تراکم‌ناپذیر از نتایج عددی حافظ و همکاران [۸] و همچنین شاتالوو [۷] استفاده شده است. به منظور بررسی صحت الگوریتم ناپایا، جریان آرام حول هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 800$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 20^\circ$ شبیه‌سازی شده است. در این شرایط، جریان وضعیتی ناپایا دارد و با ریزش متناوب گردابه‌هایی به داخل جریان همراه می‌باشد.

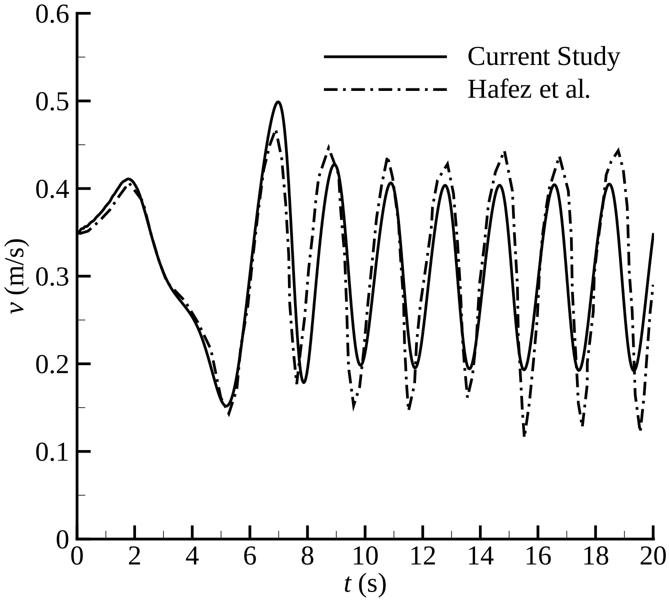
شکل‌های ۴ـ۳ و ۴ـ۴، تغییرات سرعت عمودی v را نسبت به زمان، به ترتیب در موقعیت پشت هیدروفویل $x = 1.1, y = 0$ و $x = 3, y = 0$ در مقایسه با نتایج گزارش شده در مرجع



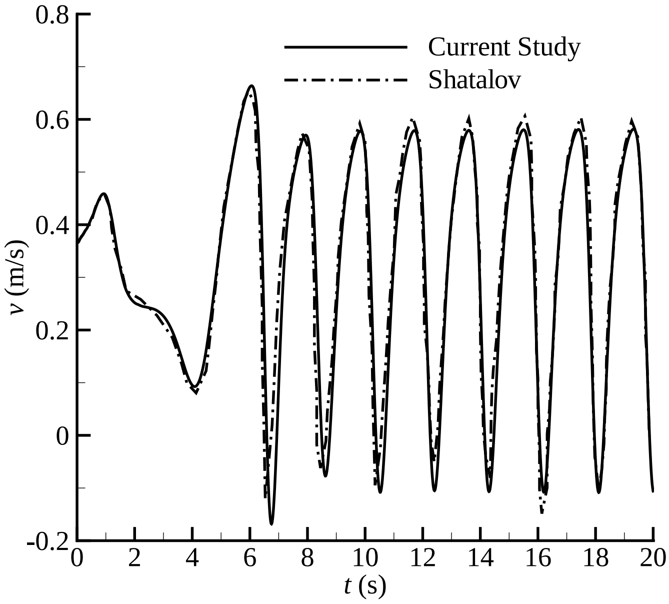
شکل ۴ـ۳: مقایسه تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20°$

[۸] نشان می‌دهند. همچنین در شکل ۴ـ۵ تغییرات سرعت عمودی v نسبت به زمان، در موقعیت $x = 2, y = 0$ در مقایسه با نتایج شاتالوو [۷] نشان داده شده است. مقدارهای به دست آمده برای سرعت عمودی در هر گام زمانی حقیقی و دوره‌های نوسان نسبت به زمان، همخوانی بسیار خوبی با نتایج مراجع یاد شده دارد.

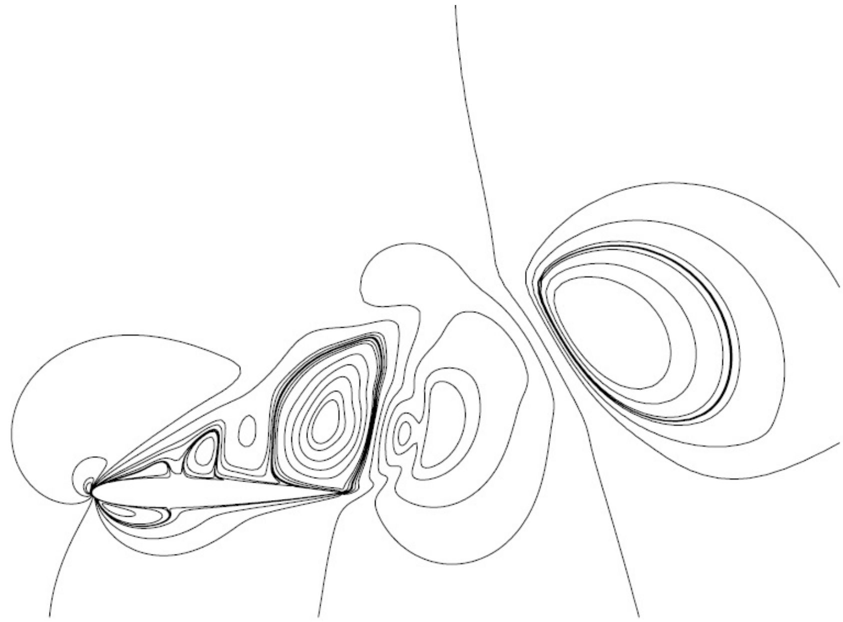
در شکل ۴ـ۶، مقایسه خطوط هم‌تراز سرعت عمودی v و در شکل ۴ـ۷، مقایسه خطوط هم‌تراز سرعت افقی u با نتایج حافظ و همکاران [۸] در زمان حقیقی $t = 5$، در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 800$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 20°$ نشان داده شده است. همچنین شکل‌های ۴ـ۸ تا ۴ـ۱۱، خطوط همتراز سرعت افقی u در بازه‌ی زمانی ۰ تا ۱۰ ثانیه و شکل‌های ۴ـ۱۲ تا ۴ـ۱۵، خطوط همتراز سرعت عمودی v در بازه‌ی زمانی ۰ تا ۱۰ ثانیه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل‌های ۴ـ۸ تا ۴ـ۱۵ که همگی در مقایسه با نتایج شاتالوو بیان شده است می‌توان نحوه‌ی تغییر شکل گردابه‌های تشکیل‌شده در ۱۰ ثانیه ابتدایی را مشاهده کرد. نتایج به دست آمده همخوانی خوبی را با نتایج عددی موجود نشان می‌دهد.



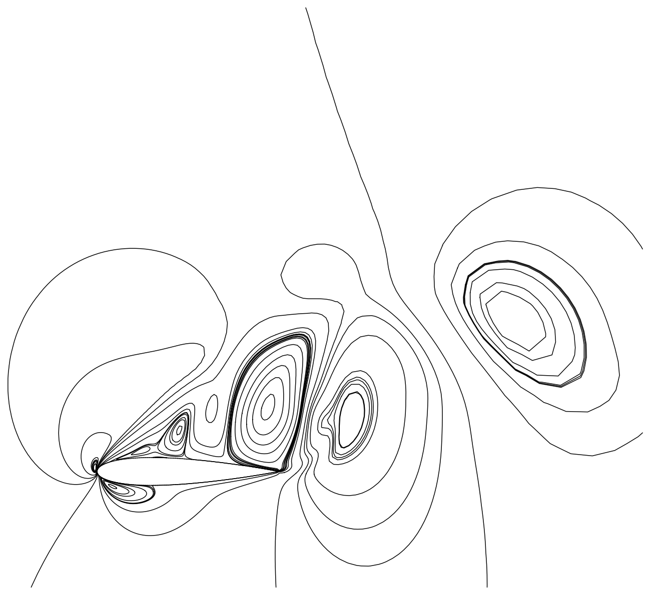
شکل ۴ـ۴: مقایسه تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 3.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20^\circ$



شکل ۴ـ۵: مقایسه تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 2.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20^\circ$

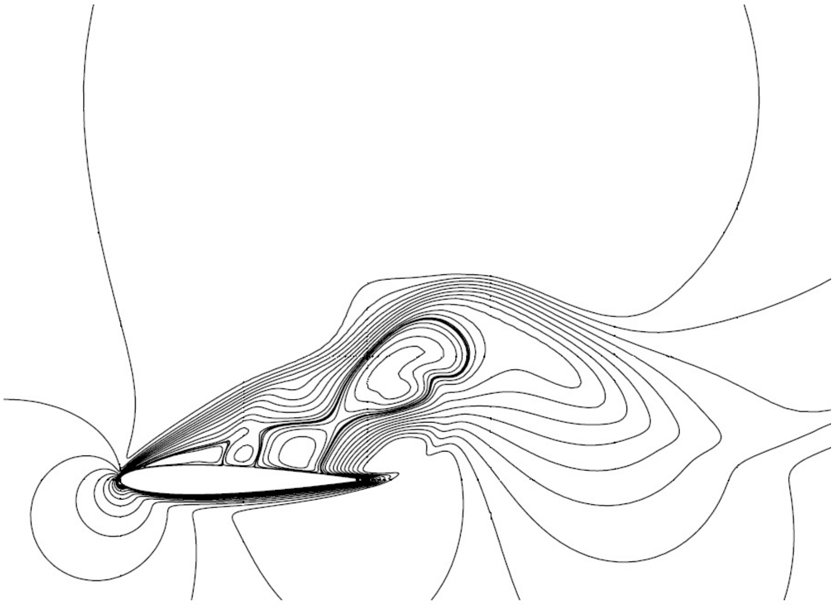


(آ) حافظ و همکاران [۸]

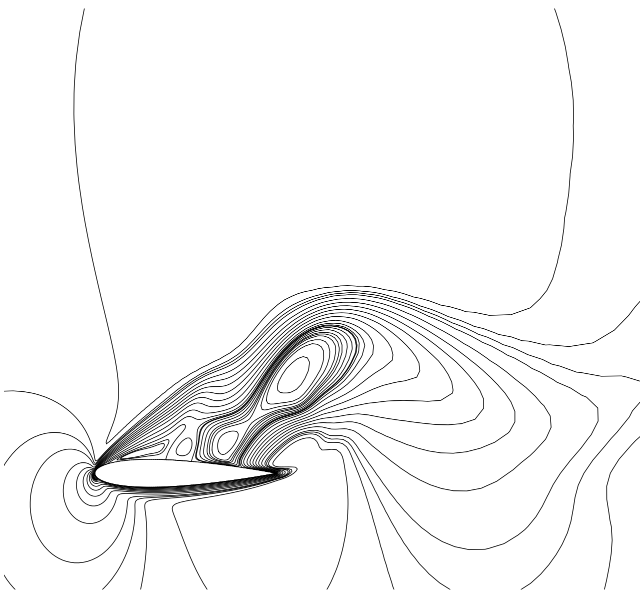


(ب) مطالعه‌ی حاضر

شکل ۴ـ۶: خطوط همتراز سرعت عمودی v هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در $\mathrm{Re} = 800$، $\alpha = 20^\circ$ در زمان $t = 5\ s$

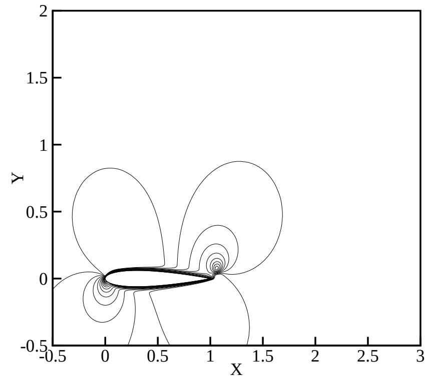


(آ) حافظ و همکاران [۸]

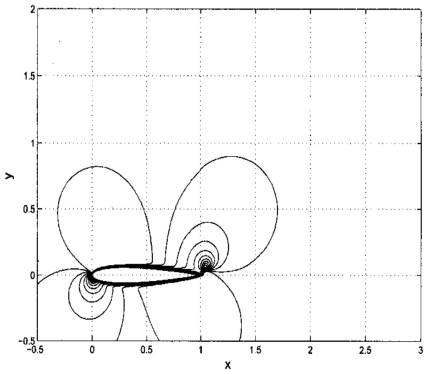


(ب) مطالعه‌ی حاضر

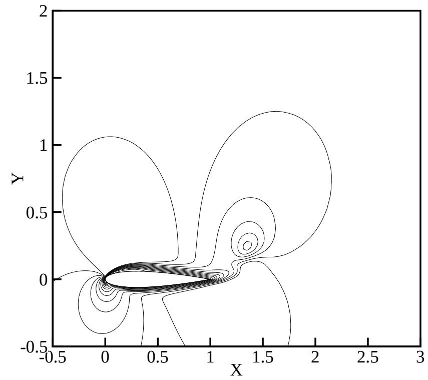
شکل ۴ـ۷: خطوط همتراز سرعت افقی u هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در $\mathrm{Re} = 800$، $\alpha = 20^\circ$ در زمان $t = 5\ s$



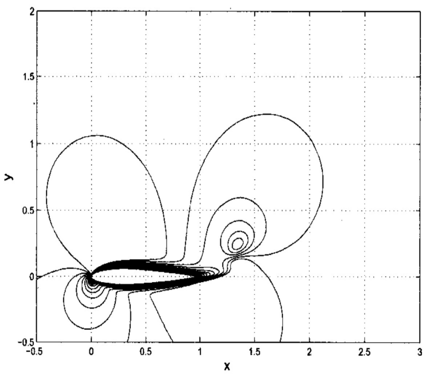
(آ) زمان $t = 0.1\ s$



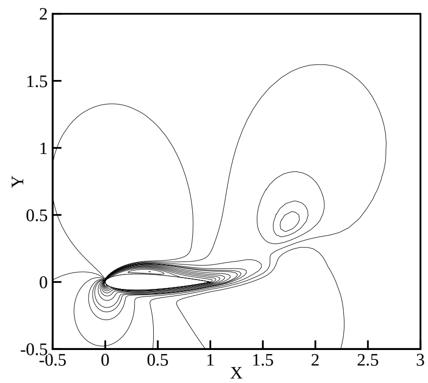
(ب) زمان $t = 0.1\ s$



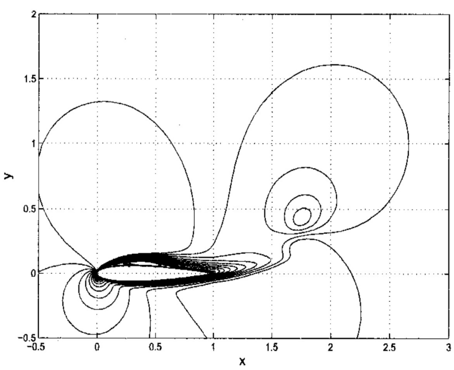
(ج) زمان $t = 0.5\ s$



(د) زمان $t = 0.5\ s$

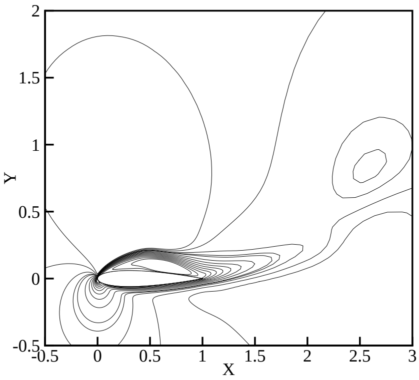


(ه) زمان $t = 1\ s$

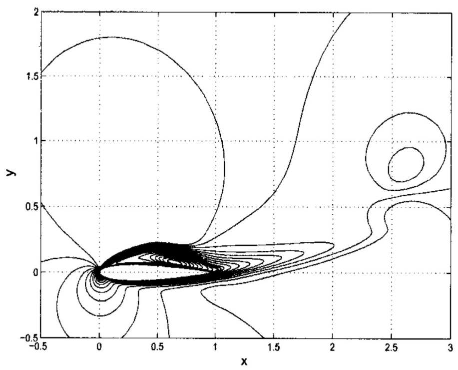


(و) زمان $t = 1\ s$

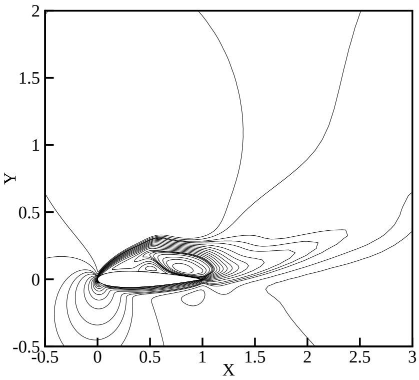
شکل ۴ـ۸: خطوط همتراز سرعت عمودی u در زمان‌های ۰/۱، ۰/۵ و ۱ ثانیه. سمت راست: مطالعه حاضر. سمت چپ: شاتالوو [۷]



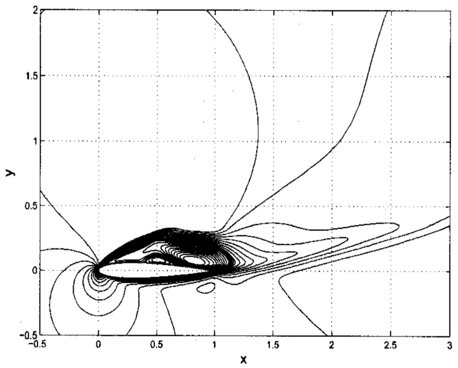
(آ) زمان $t = 2\ s$



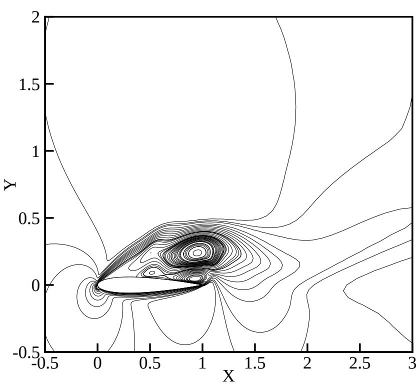
(ب) زمان $t = 2\ s$



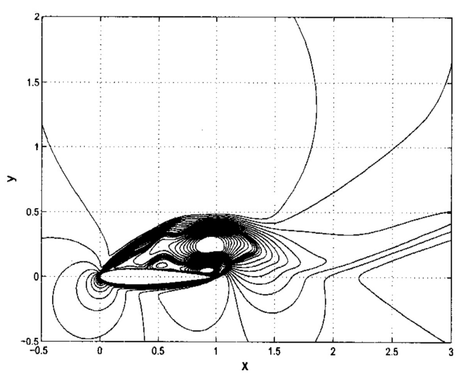
(ج) زمان $t = 3\ s$



(د) زمان $t = 3\ s$

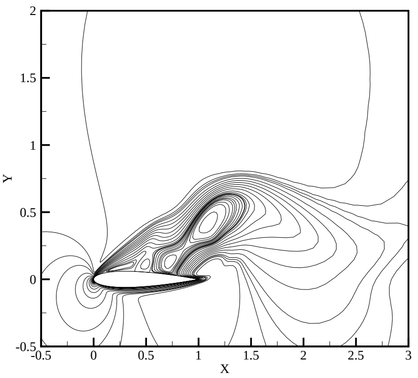


(ه) زمان $t = 4\ s$

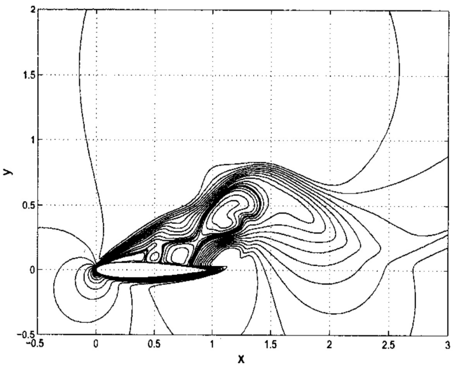


(و) زمان $t = 4\ s$

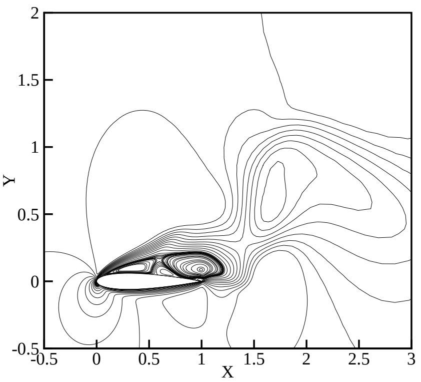
شکل ۴ـ۹: خطوط همتراز سرعت عمودی u در زمان‌های ۲، ۳ و ۴ ثانیه. سمت راست: مطالعه حاضر. سمت چپ: شاتالوو [۷]



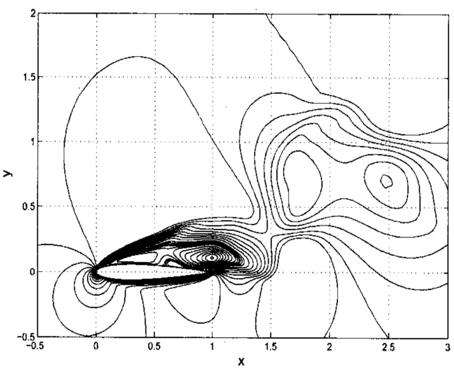
(آ) زمان $t = 5\ s$



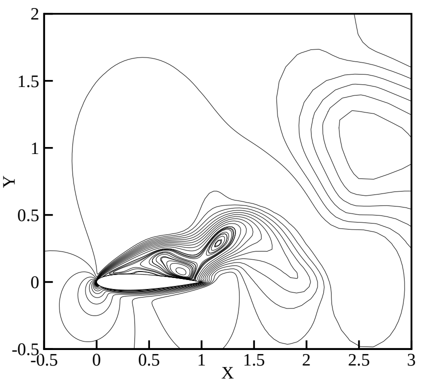
(ب) زمان $t = 5\ s$



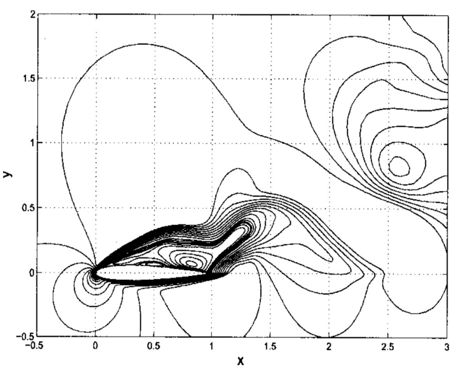
(ج) زمان $t = 6\ s$



(د) زمان $t = 6\ s$

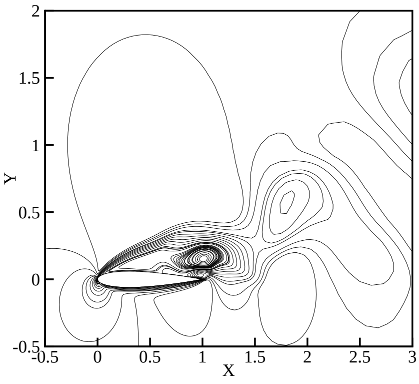


(ه) زمان $t = 7\ s$

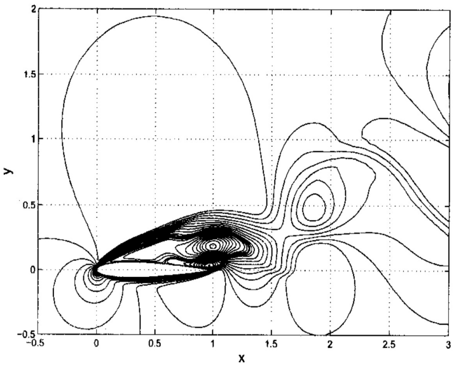


(و) زمان $t = 7\ s$

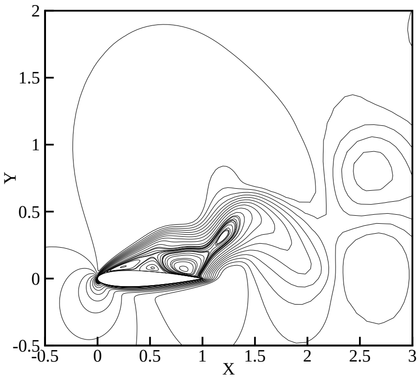
شکل ۴ـ۱۰: خطوط همتراز سرعت عمودی u در زمان‌های ۵، ۶ و ۷ ثانیه. سمت راست: مطالعه حاضر. سمت چپ: شاتالوو [۷]



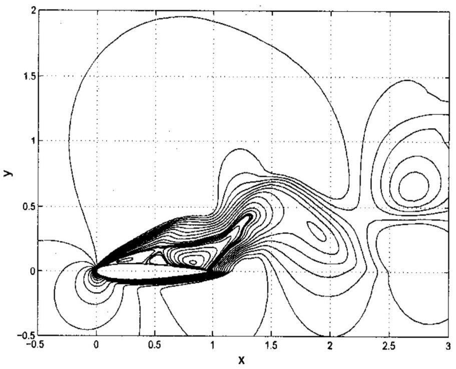
(آ) زمان $t = 8\ s$



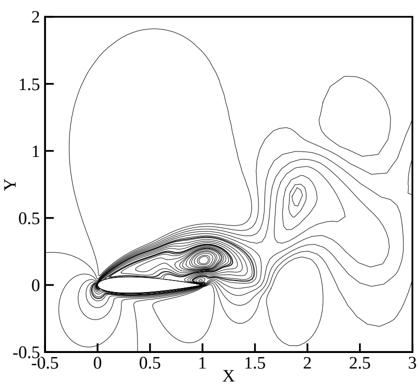
(ب) زمان $t = 8\ s$



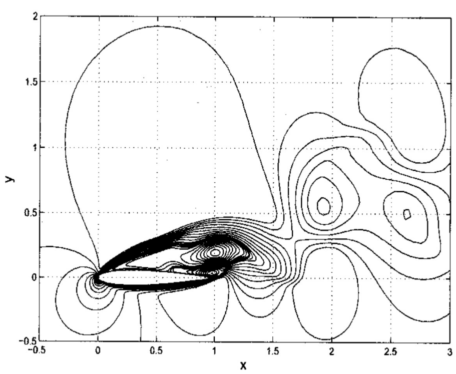
(ج) زمان $t = 9\ s$



(د) زمان $t = 9\ s$

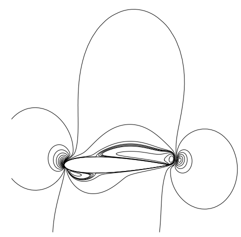


(ه) زمان $t = 10\ s$

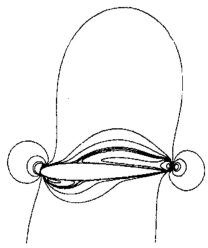


(و) زمان $t = 10\ s$

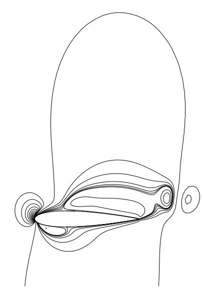
شکل ۴ـ۱۱: خطوط همتراز سرعت عمودی u در زمان‌های ۸، ۹ و ۱۰ ثانیه. سمت راست: مطالعه حاضر. سمت چپ: شاتالوو [۷]



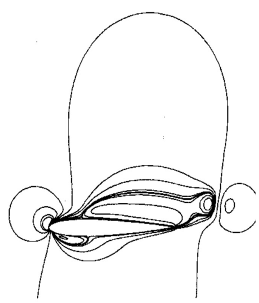
(آ) زمان $t = 0.1\ s$



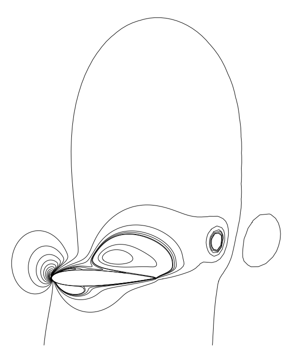
(ب) زمان $t = 0.1\ s$



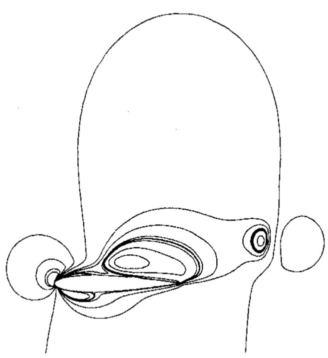
(ج) زمان $t = 0.5\ s$



(د) زمان $t = 0.5\ s$

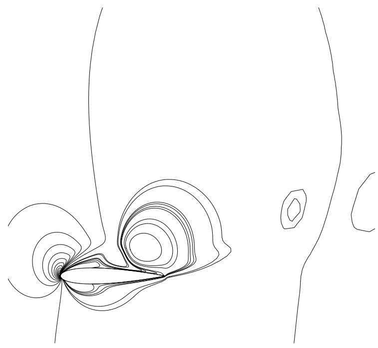


(ه) زمان $t = 1\ s$

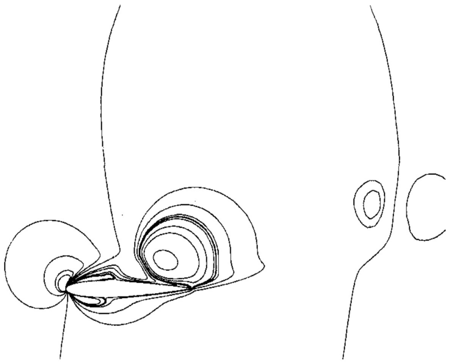


(و) زمان $t = 1\ s$

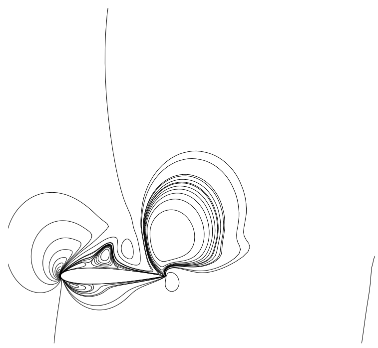
شکل ۴ـ۱۲: خطوط همتراز سرعت عمودی v در زمان‌های ۰/۱، ۰/۵ و ۱ ثانیه. سمت راست: مطالعه حاضر. سمت چپ: شاتالوو [۷]



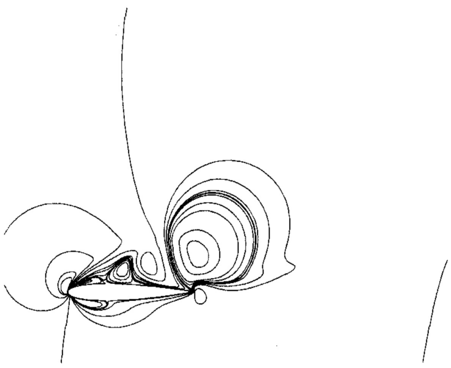
(آ) زمان $t = 2\ s$



(ب) زمان $t = 2\ s$

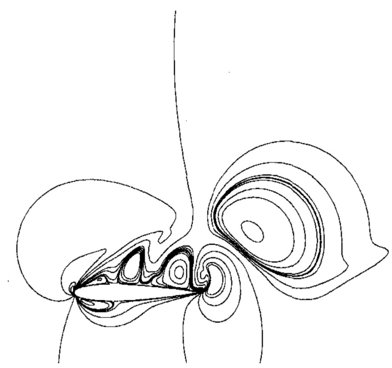


(ج) زمان $t = 3\ s$



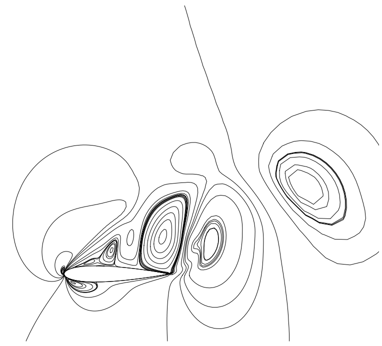
(د) زمان $t = 3\ s$

(ه) زمان $t = 4\ s$

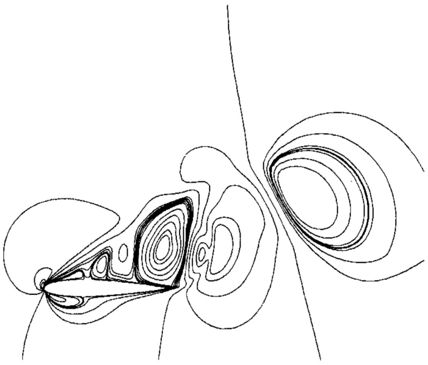


(و) زمان $t = 4\ s$

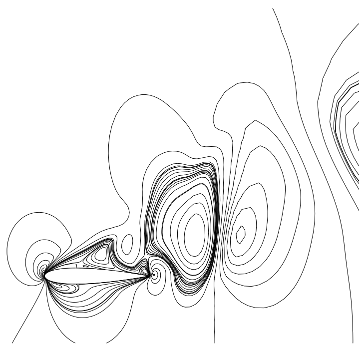
شکل ۴ـ۱۳: خطوط همتراز سرعت عمودی v در زمان‌های ۲، ۳ و ۴ ثانیه. سمت راست: مطالعه حاضر. سمت چپ: شاتالوو [۷]



(آ) زمان $t = 5\ s$

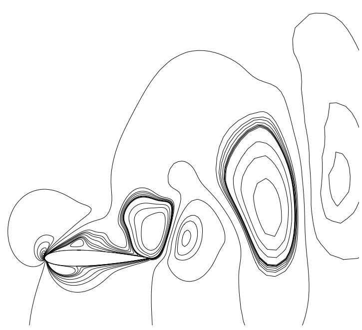


(ب) زمان $t = 5\ s$

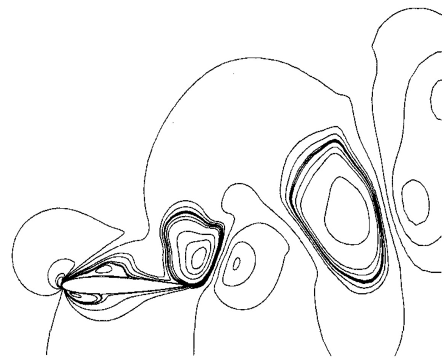


(ج) زمان $t = 6\ s$

(د) زمان $t = 6\ s$

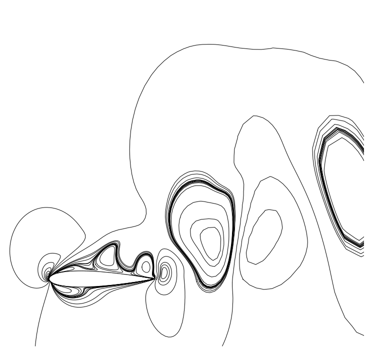


(ه) زمان $t = 7\ s$

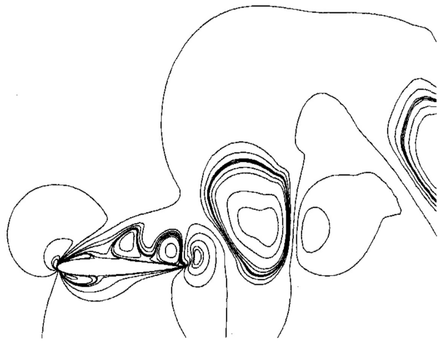


(و) زمان $t = 7\ s$

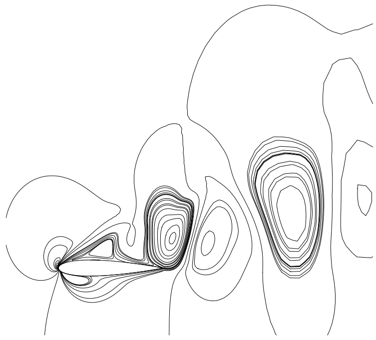
شکل ۴ـ۱۴: خطوط همتراز سرعت عمودی v در زمان‌های ۵، ۶ و ۷ ثانیه. سمت راست: مطالعه حاضر. سمت چپ: شاتالوو [۷]



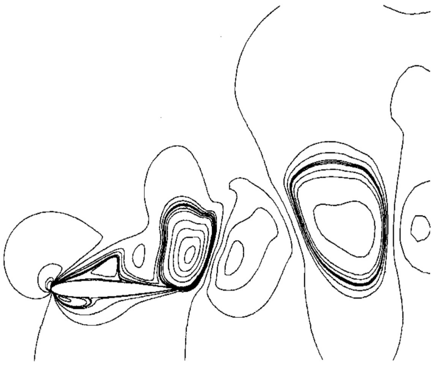
(آ) زمان $t = 8\ s$



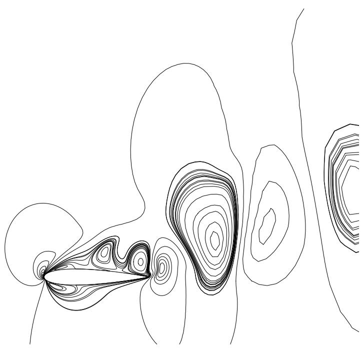
(ب) زمان $t = 8\ s$



(ج) زمان $t = 9\ s$



(د) زمان $t = 9\ s$



(ه) زمان $t = 10\ s$

(و) زمان $t = 10\ s$

شکل ۴ـ۱۵: خطوط همتراز سرعت عمودی v در زمان‌های ۸، ۹ و ۱۰ ثانیه. سمت راست: مطالعه حاضر. سمت چپ: شاتالوو [۷]

در شکل ۴ــ۱۶ نمودار توزیع ضریب برا ($C_L = \dfrac{2F_L}{\rho_\infty U_\infty^2 C}$ که F_L نیروی برا و C طول وتر هیدروفویل) برحسب زمان نشان داده شده است. نتایج مطالعه‌ی حاضر در شکل ۴ــ۱۶ در مقایسه با نتایج شاتالوو [۷] بیان شده است. همچنین شکل ۴ــ۱۷ نمودار ضریب پسا ($C_D = \dfrac{2F_D}{\rho_\infty U_\infty^2 C}$ که F_D نیروی پسا و C طول وتر هیدروفویل) نسبت به زمان را نشان می‌دهد. همان‌طور که در نمودارها نیز مشهود است پس از گذشت مدتی از شروع محاسبات، جریان شکل واقعی و نوسانی خود را پیدا می‌کند. با توجه به این مطلب، در شکل ۴ــ۱۶ پس از گذشت زمان ۷ ثانیه نتایج انطباق خوبی با نتایج مرجع یاد شده دارد.

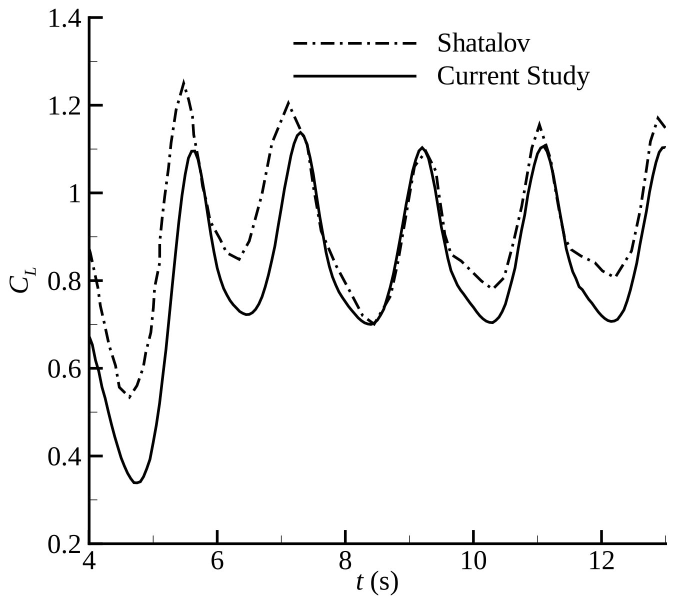
یکی از مسائل مورد توجه در حل جریان‌های ناپایا، نحوه تغییر شکل گردابه‌های تشکیل شده و تغییرات الگوی خطوط جریان در گذر زمان می‌باشد. بدین ترتیب در شکل ۴ــ۱۸ الگوی خطوط جریان و نحوه تغییرات شکل گردابه تشکیل‌شده، در یک دوره نوسانی در زمان‌های حقیقی $t = 6.0$، $t = 6.65$ و $t = 7.25$ تحت شرایط $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20°$ نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود دو گردابه تشکیل شده روی سطح فوقانی هیدروفویل با گذر زمان رشد کرده و ابعاد آنها افزایش می‌یابد و سپس در زمانی مشخص (که بستگی به زاویه حمله و عدد رینولدز دارد) تجزیه شده، ابعاد آن کاهش می‌یابد و به بالادست منتشر می‌گردد (پدیده انتشار گردابه[۱]) و این اتفاق به صورت نوسانی ادامه خواهد داشت. در حقیقت عامل اصلی نوسانی بودن ضرایب برآ و پسا، همین نوسانی بودن الگوی جریان و رفتار گردابه‌ها می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً نیز بیان شد با توجه به فرایند حل دستگاه معادلات حاکم و استفاده از الگوریتم دوزمانه، دو حلقه‌ی تکرار خارجی (مربوط به زمان حقیقی) و داخلی (مربوط به زمان مجازی) موجود می‌باشد که با همگرایی حل در زمان مجازی، حل معادله در زمان حقیقی حاصل می‌شود. در شکل‌های ۴ــ۱۹ و ۴ــ۲۰ به ترتیب، زمان محاسباتی پردازنده مرکزی[۲] برای اجرای یک حلقه داخلی و تعداد تکرار برای اجرای همان حلقه داخلی (محور عمودی شکل‌ها) در زمان‌های مختلف حقیقی (محور افقی شکل‌ها) برای جریان عبوری از هیدروفویل تحت شرایط $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20°$ نمایش داده شده است. شکل ۴ــ۱۹ نشان می‌دهد که انجام یک فرایند کامل حل جریان ناپایا (یعنی ۲۰ ثانیه که معادل ۲۰۰۰ اجرای حلقه خارجی با گام زمانی حقیقی $\Delta t = 0.01$

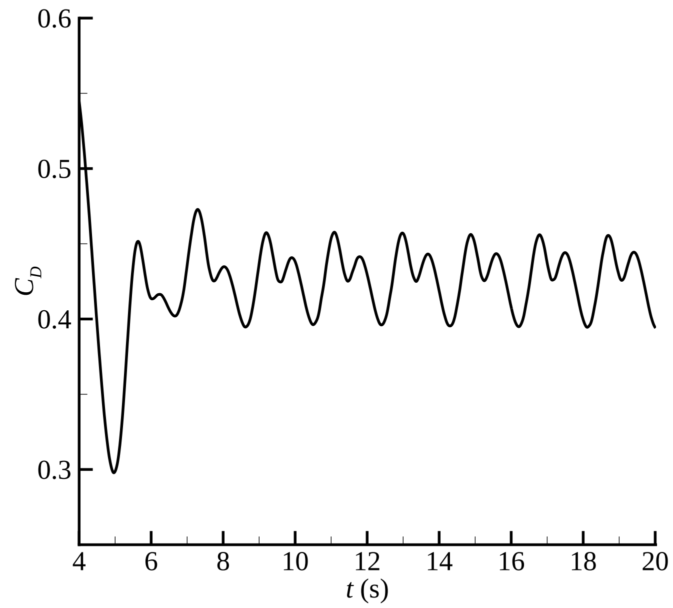
[۱] Vortex Shedding
[۲] CPU

می‌باشد)، به چه مقدار زمان نیاز دارد و شکل ۴ـ ۲۰ تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی در هر گام زمان مجازی را مشخص می‌کند (این دو شکل برای خطای محاسباتی 10^{-4} رسم گردیده است). لازم به توضیح است که شبیه‌سازی عددی با کامپیوتری با مشخصات GB Ram ۱۶ و پردازنده مرکزی با قدرت GH CPU ۳/۴ انجام گرفته است. با توجه به شکل‌های ۴ـ ۱۹و ۴ـ ۲۰، تعداد کل تکرار در ۲۰۰۰ اجرای حلقه خارجی برابر با ۱،۲۷۶،۱۴۰ تکرار و زمان محاسباتی کل پردازنده مرکزی، ۳۴۵،۱۲۴ ثانیه (برابر با ۳/۹۹ روز) می‌باشد.

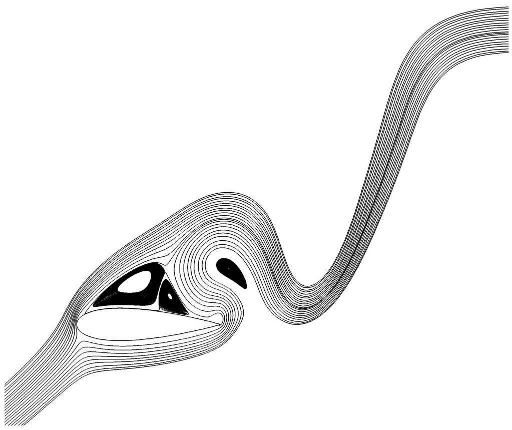
با توجه به نتایج به دست آمده، الگوریتم عددی حاضر قابلیت و دقت لازم برای حل جریان‌های ناپایا را در هندسه‌های مختلف داراست. پس از اعتبارسنجی و بررسی صحت نتایج شبیه‌سازی عددی، تأثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی در جریان‌های ناپایای عبوری از هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در اعداد رینولدز و زوایای حمله‌ی مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.



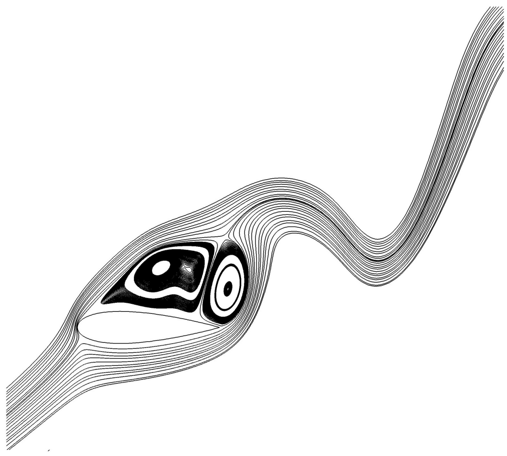
شکل ۴ـ۱۶: توزیع ضریب برا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20°$



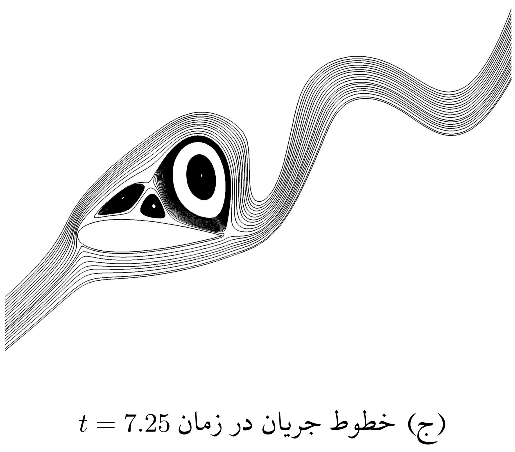
شکل ۴ـ۱۷: توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20°$



(آ) خطوط جریان در زمان $t = 6.0$

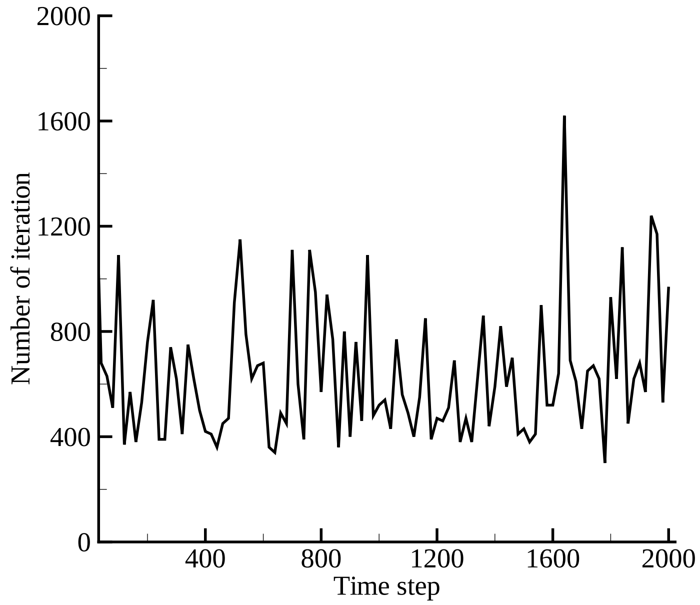


(ب) خطوط جریان در زمان $t = 6.65$

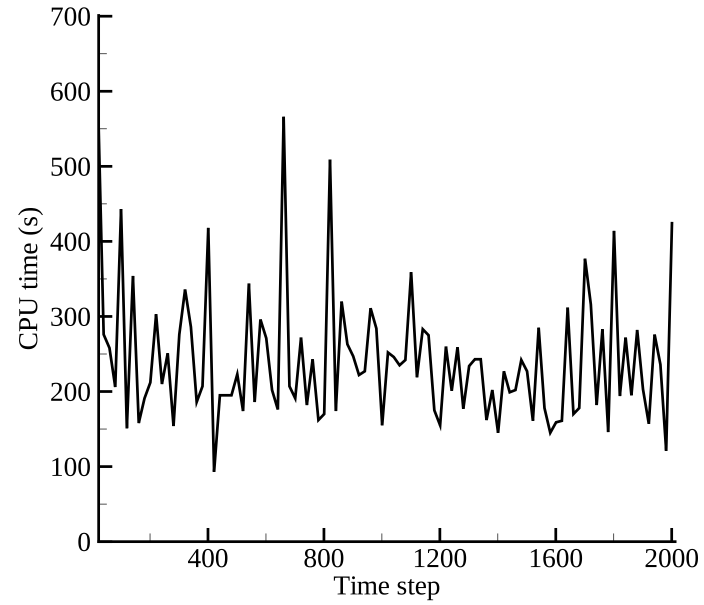


(ج) خطوط جریان در زمان $t = 7.25$

شکل ۴ـ۱۸: خطوط جریان روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20°$



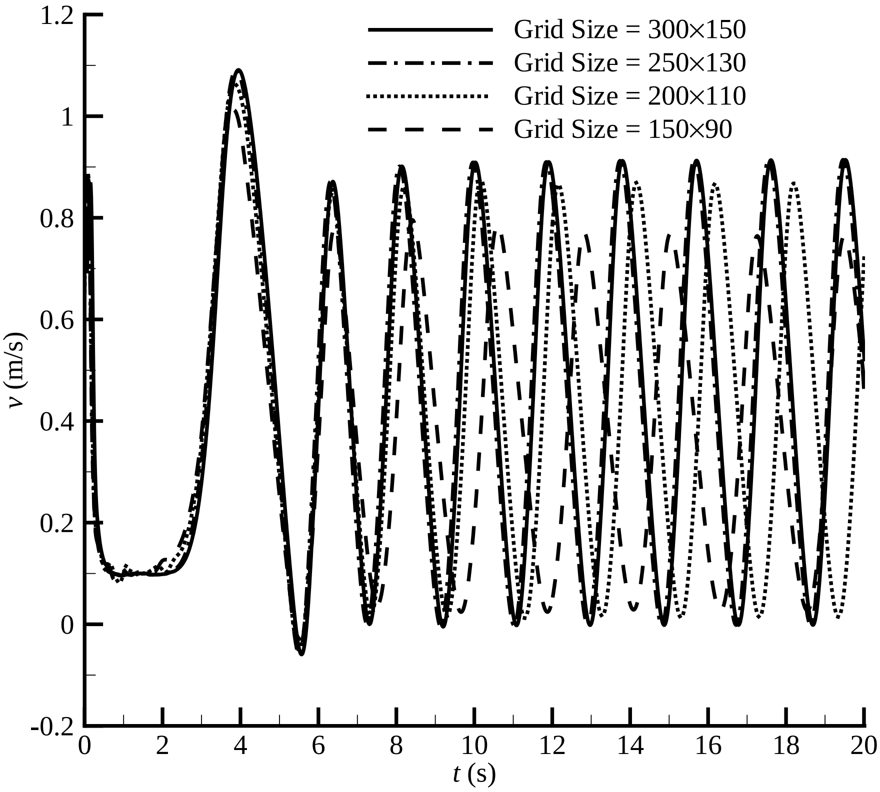
شکل ۴ـ ۱۹: زمان CPU در هر گام زمانی، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20^\circ$



شکل ۴ـ ۲۰: تعداد تکرارها در هر گام زمانی، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20^\circ$

۴ـ۳ـ۲ استقلال حل از شبکه

جهت مطالعه استقلال حل از شبکه محاسباتی، چهار شبکه با ابعاد مختلف ۹۰×۱۵۰، ۱۱۰×۲۰۰، ۱۳۰×۲۵۰ و ۱۵۰×۳۰۰ در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1$ و $y = 0.0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان تحت شرایط $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20^\circ$ در شکل ۴ـ۲۱ نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج مرتبط با شبکه با ابعاد ۱۳۰×۲۵۰ و ۱۵۰×۳۰۰ همپوشانی و انطباق نسبتاً خوبی در مقایسه با دو شبکه درشت‌تر دیگر دارند که با عنایت به اعتبارسنجی صورت گرفته در شکل‌های قبلی که جزئیات آن در مطالب پیشین ارائه شد دارای دقت کافی برای حل جریان‌های ناپایای عبوری از هیدروفویل هستند. لذا با توجه به نیاز به کاهش زمان محاسباتی، در این مطالعه و شبیه‌سازی‌های بعدی از شبکه‌بندی ۱۳۰×۲۵۰ استفاده شده است.



شکل ۴ـ۲۱: مطالعه استقلال حل از شبکه پیرامون هیدروفویل، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20^\circ$

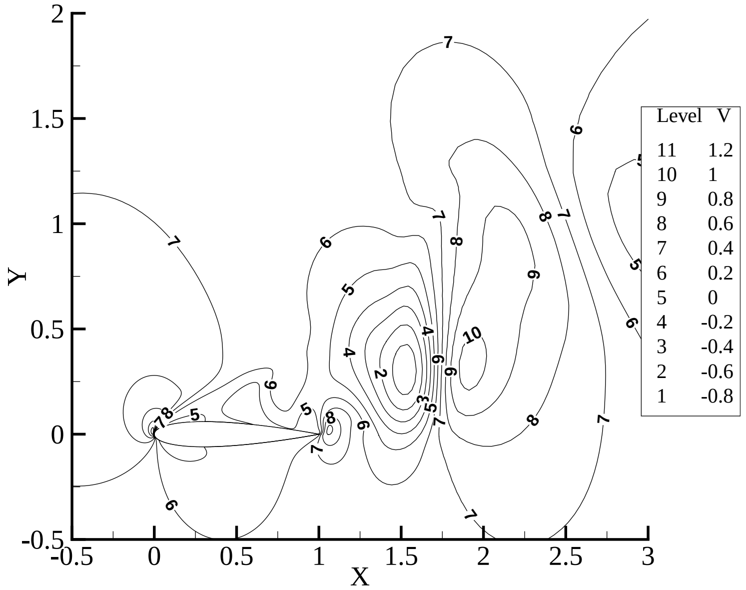
۴ـ۳ـ۳ استقلال حل از گام زمانی

همان‌طور که در فصل ۳ نیز به آن اشاره شد، باتوجه به ماهیت ضمنی گسسته‌سازی جمله زمان حقیقی، محدودیتی از نظر اندازه گام زمان فیزیکی وجود نداشته و تنها قید موجود در انتخاب گام زمان حقیقی، دقت مورد نیاز در مساله است.

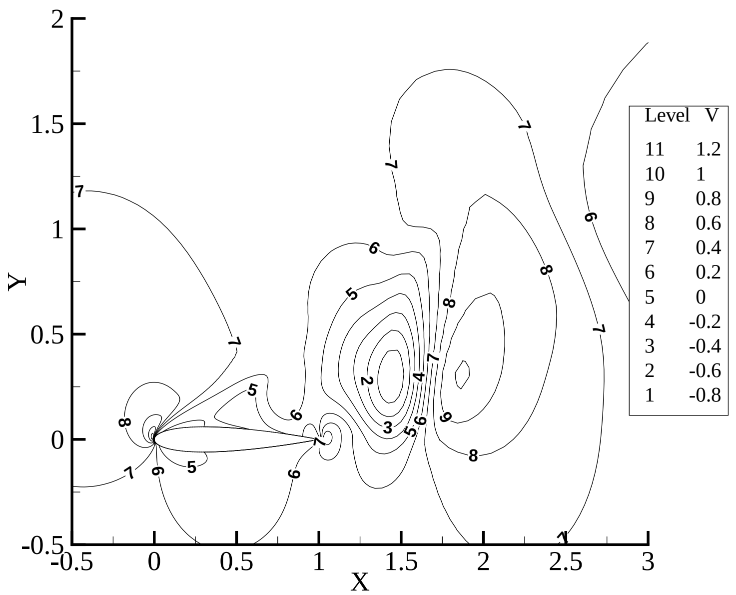
به منظور تایید مطلب گفته شده در بالا، مساله‌ی موجود با سه گام زمانی حقیقی مختلف یعنی $\Delta t = 0.01$، $\Delta t = 0.02$ و $\Delta t = 0.05$ حل شده است که با توجه نتایج به دست آمده مشاهده می‌گردد که هیچ تفاوتی در دقت جواب‌ها وجود ندارد. البته تنها موضوعی که شاید بتوان انتخاب گام زمانی را محدود نماید، خروجی اجرای برنامه در زمان دلخواه باشد. به عنوان مثال با انتخاب $\Delta t = 0.05$ تنها می‌توان نتایج را در زمان‌های ۵/۱۵، ۵/۲۰، ۵/۲۵ (ثانیه) و ... استخراج کرد و امکان ثبت نتایج در زمان‌های ۵/۱۱، ۵/۱۲، ۵/۱۳ (ثانیه) و ... میسر نخواهد بود.

بدیهی است که تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی در هر گام زمان مجازی، در گام‌های زمانی حقیقی کوچکتر نسبت به گام‌های زمانی حقیقی بزرگتر، کمتر خواهد بود. به عنوان مثال برای رسیدن به زمان ۲۰ ثانیه، به ۲۰۰۰ مرتبه اجرای برنامه با گام زمانی حقیقی $\Delta t = 0.01$ نیاز است و به طور میانگین تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی در هر گام زمان مجازی، حدود ۳۰۰ تکرار است (با توجه به شکل ۴ـ۲۰). درحالی که برای رسیدن به زمان ۲۰ ثانیه با گام زمانی حقیقی $\Delta t = 0.02$ به ۱۰۰۰ مرتبه اجرای برنامه نیاز است و در این حالت به طور میانگین تعداد تکرارها برای همگرایی در هر گام زمان مجازی، حدود ۶۰۰ تکرار خواهد بود.

در شکل‌های ۴ـ۲۲ و ۴ـ۲۳ خطوط همتراز سرعت عمودی v در زمان ۴ ثانیه به ترتیب با استفاده از گام‌های زمانی $\Delta t = 0.01$ و $\Delta t = 0.05$ نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌گردد، تفاوتی در جواب به دست آمده دیده نمی‌گردد.



شکل ۴ـ۲۲: خطوط همتراز سرعت عمودی v در زمان ۴ ثانیه با استفاده از گام زمانی $\Delta t = 0.01$



شکل ۴ـ۲۳: خطوط همتراز سرعت عمودی v در زمان ۴ ثانیه با استفاده از گام زمانی $\Delta t = 0.05$

۴ـ۳ـ۴ بررسی روش پیش‌شرط توانی در بهبود نرخ همگرایی

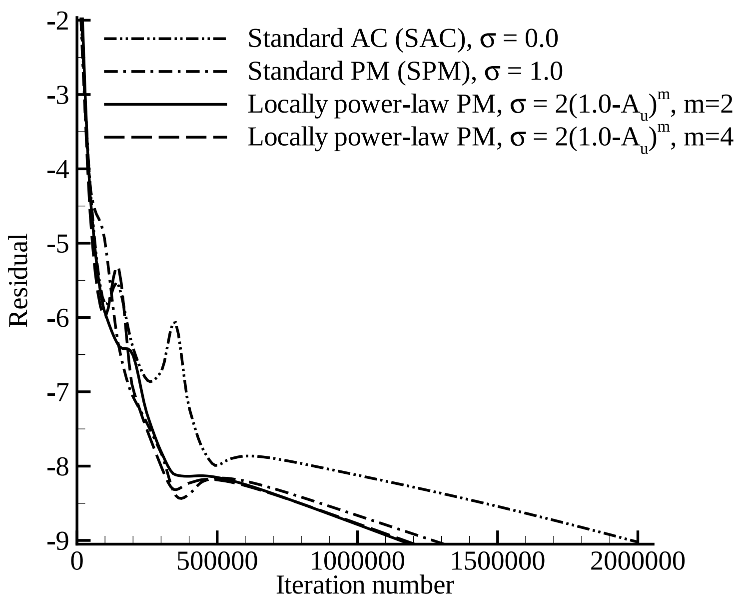
در این پایان‌نامه از شرط جریان یکنواخت $(P_\infty = 1.0, U_\infty = 1.0, \rho_\infty = 1.0)$ به عنوان شرط اولیه استفاده شده است . برای بررسی تاثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی از اولین گام زمانی استفاده شده است که دلایل آن عبارت است از: ۱. استفاده از شرط جریان یکنواخت به عنوان شرط اولیه. ۲. توجه به این نکته که در اولین گام زمانی حقیقی، بیشترین تکرار برای رسیدن به همگرایی اتفاق می‌افتد و پس از گذشت چند گام زمانی حقیقی اولیه، تعداد تکرارها در هر گام به صورت کاملاً محسوسی کاهش می‌یابد. ۳. زمانبر بودن حل عددی در یک دوره زمانی در خطای با دقت بالا.

حالت اول: هیدروفویل NACA۰۰۱۲، عدد رینولدز ۸۰۰ و زاویه‌ی حمله ۲۰ درجه

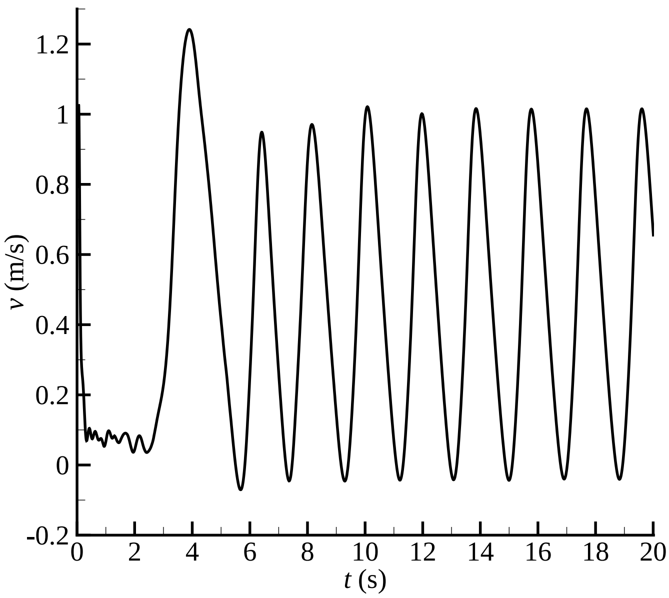
شکل ۴ـ۲۴ تاثیر روش پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 800$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 20^\circ$ را نشان می‌دهد. محاسبات عددی برای توان‌های مختلف $m = 2 - 7$ انجام گرفته و به جهت نمایش مطلوب‌تر و جلوگیری از سردرگمی در شکل، بهینه‌ترین توان‌ها نمایش داده شده است. باتوجه به شکل ۴ـ۲۴، روش پیش‌شرط توانی باعث کاهش چشمگیری در تعداد تکرارها نسبت به روش SAC و همچنین روش SPM شده است.

حالت دوم: هیدروفویل NACA۰۰۱۲، عدد رینولدز ۱۱۰۰ و زاویه‌ی حمله ۲۰ درجه

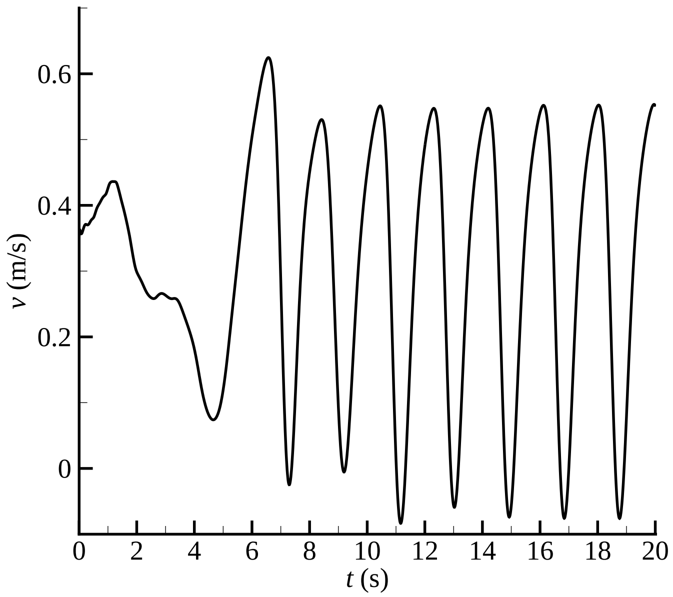
شکل‌های ۴ـ۲۵، ۴ـ۲۶ و ۴ـ۲۷ تغییرات سرعت عمودی v را نسبت به زمان، به ترتیب در موقعیت پشت هیدروفویل $x = 1.1, y = 0$، $x = 2, y = 0$ و $x = 3, y = 0$ نشان می‌دهند. در شکل ۴ـ۲۸ نمودار توزیع ضریب برا و در شکل ۴ـ۲۹ نمودار توزیع ضریب پسا برحسب زمان نشان داده شده است. شکل ۴ـ۳۰ تاثیر روش پیش‌شرط توانی در مقایسه با روش‌های SAC و SPM بر نرخ همگرایی در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 1100$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 20^\circ$ را نشان می‌دهد. روش پیش‌شرط توانی باعث کاهش در تعداد تکرارها نسبت به روش SAC و همچنین روش SPM شده است.



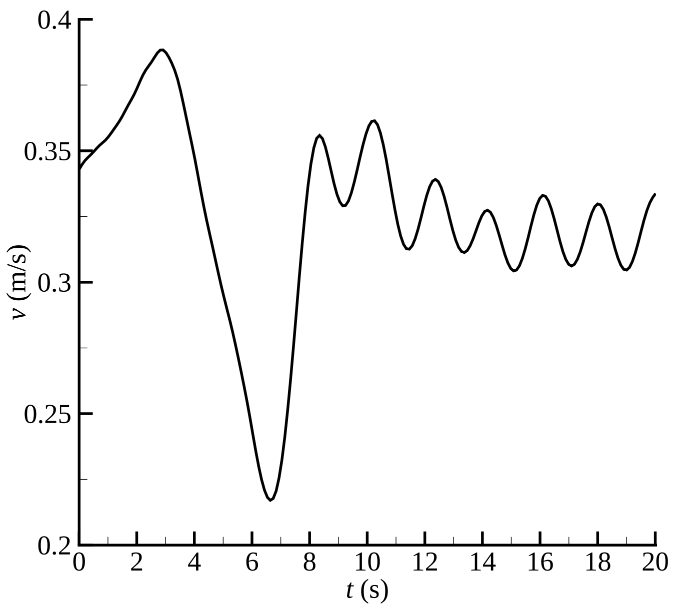
شکل ۴ـ۲۴: تاثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 20^\circ$



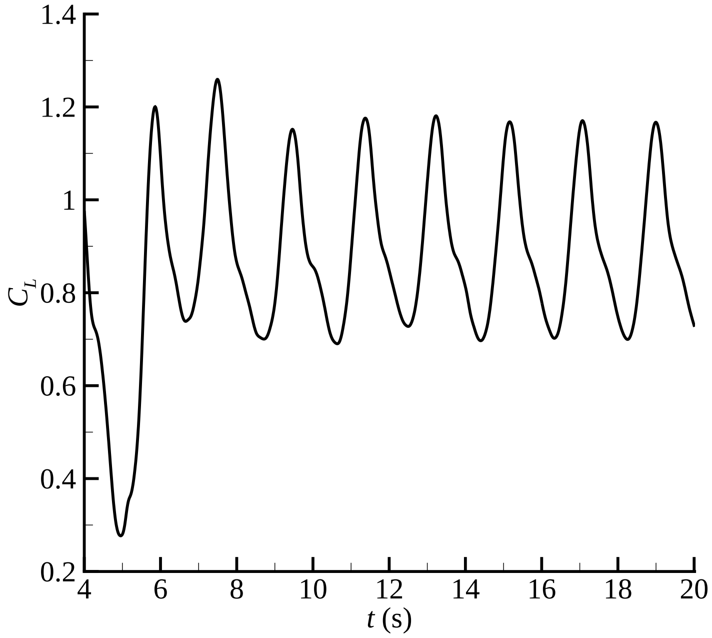
شکل ۴ـ۲۵: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 20^\circ$



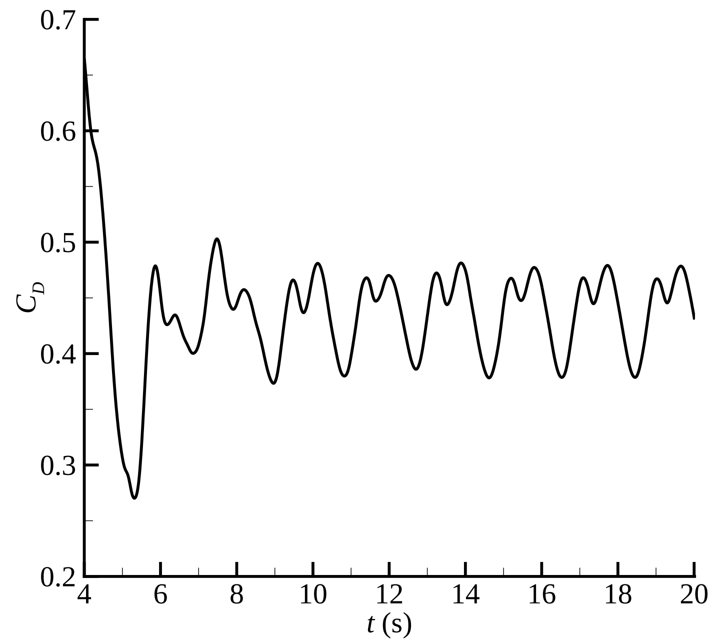
شکل ۴ـ۲۶: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 2.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 20°$



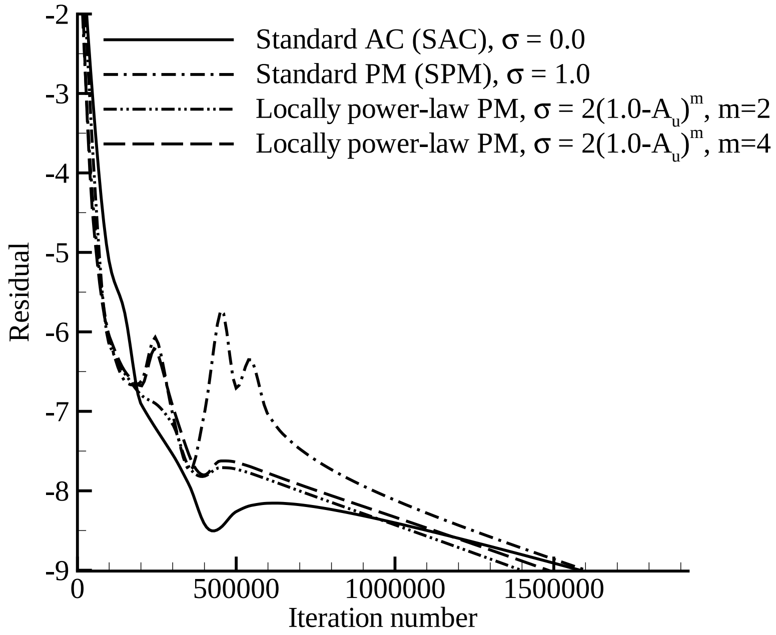
شکل ۴ـ۲۷: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 3.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 20°$



شکل ۴ـ۲۸: توزیع ضریب برا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 20^\circ$



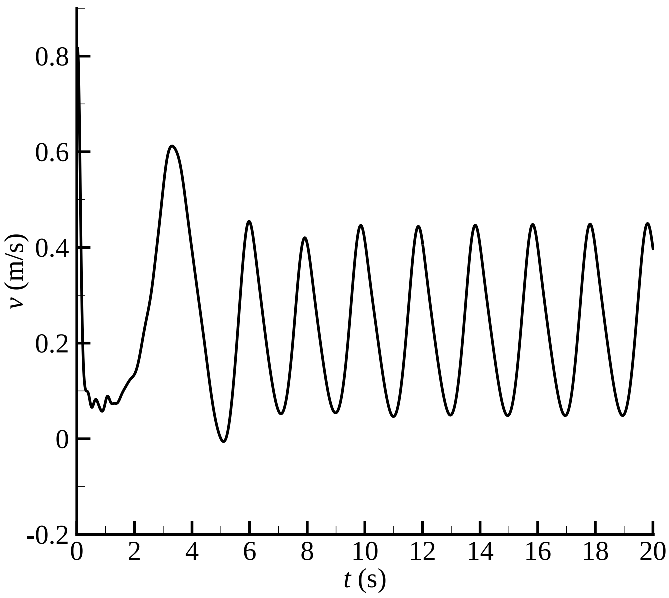
شکل ۴ـ۲۹: توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 20^\circ$



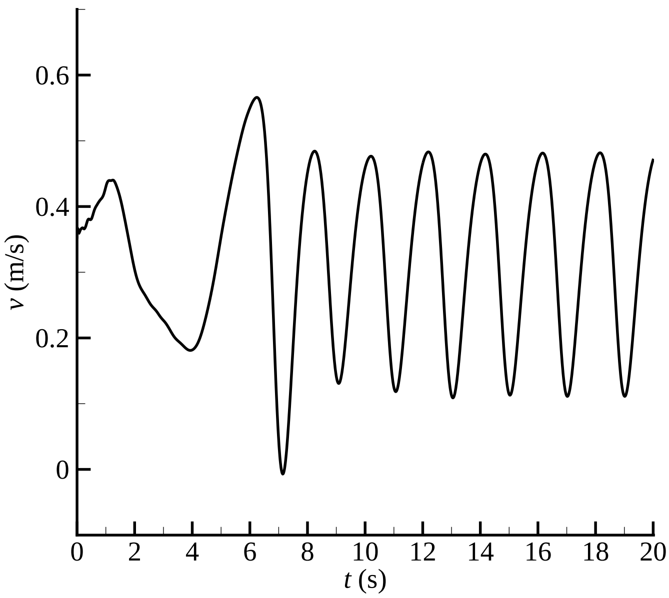
شکل ۴ـ۳۰: تاثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در $\mathrm{Re}=1100$ و $\alpha=20°$

حالت سوم: هیدروفویل NACA۰۰۱۲، عدد رینولدز ۵۰۰ و زاویه‌ی حمله ۲۰ درجه

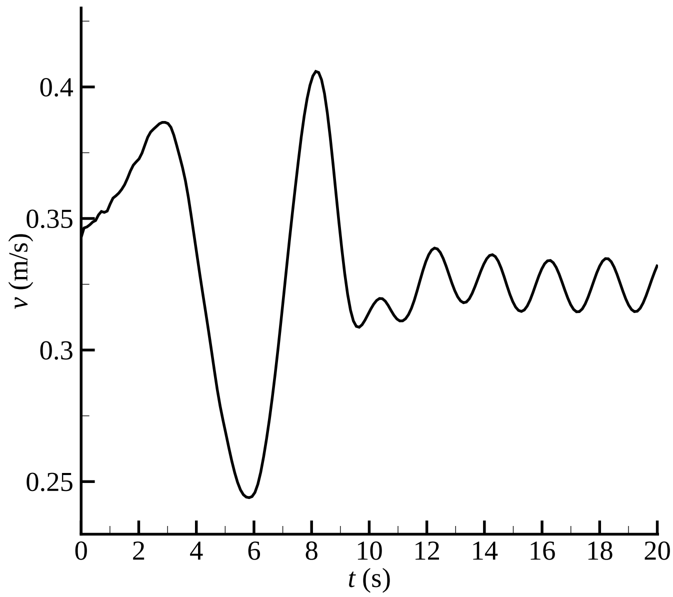
شکل‌های ۴ـ۳۱، ۴ـ۳۲ و ۴ـ۳۳ تغییرات سرعت عمودی v را نسبت به زمان، به ترتیب در موقعیت پشت هیدروفویل $x=1.1, y=0$، $x=2, y=0$ و $x=3, y=0$ نشان می‌دهند. در شکل ۴ـ۳۴ نمودار توزیع ضریب برا و در شکل ۴ـ۳۵ نمودار توزیع ضریب پسا برحسب زمان نشان داده شده است. شکل ۴ـ۳۶ تاثیر روش پیش‌شرط توانی در مقایسه با روش‌های SAC و SPM بر نرخ همگرایی در عدد رینولدز $\mathrm{Re}=500$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha=20°$ را نشان می‌دهد. روش پیش‌شرط توانی باعث کاهش در تعداد تکرارها نسبت به روش SAC و همچنین روش SPM شده است.



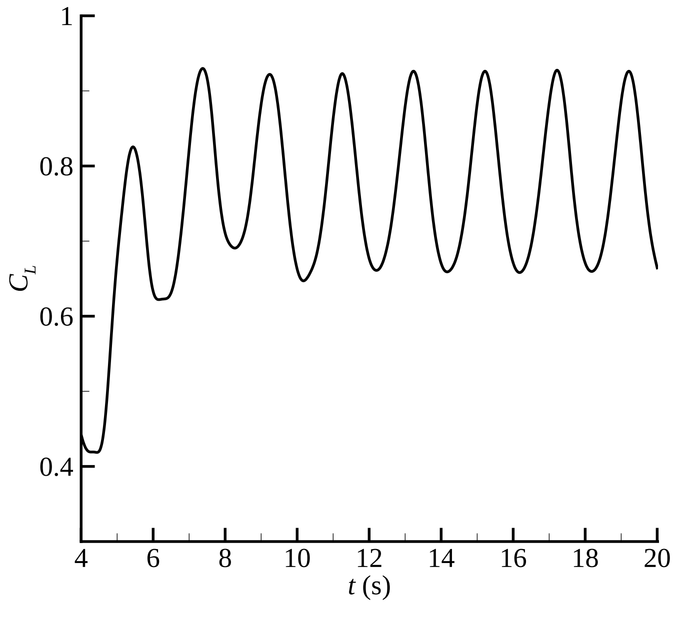
شکل ۴ـ۳۱: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 20^{\circ}$



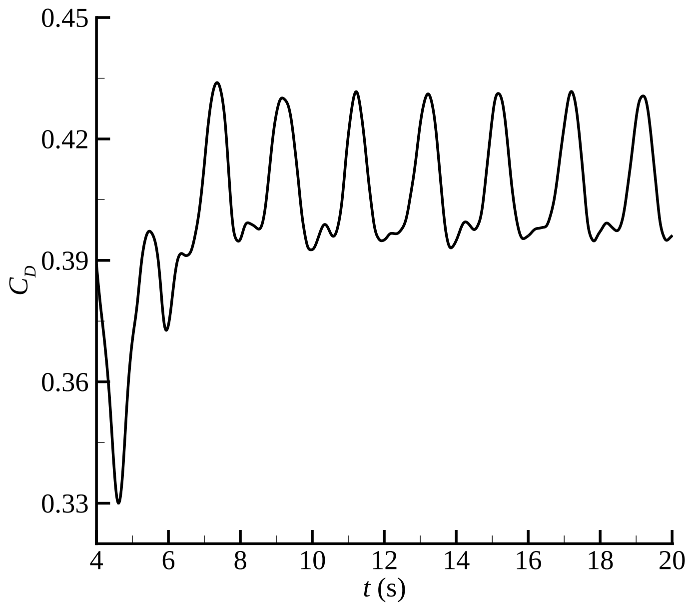
شکل ۴ـ۳۲: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 2.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 20^{\circ}$



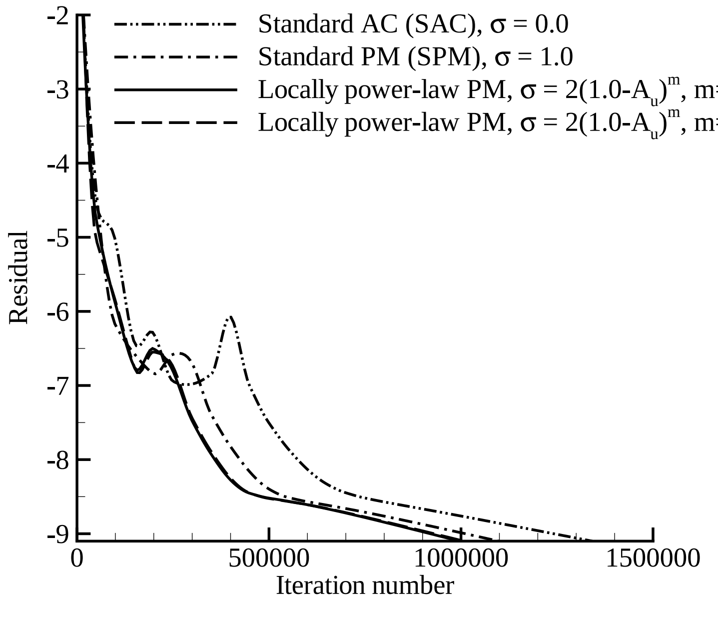
شکل ۴ـ۳۳: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 3.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 20°$



شکل ۴ـ۳۴: توزیع ضریب برا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 20°$



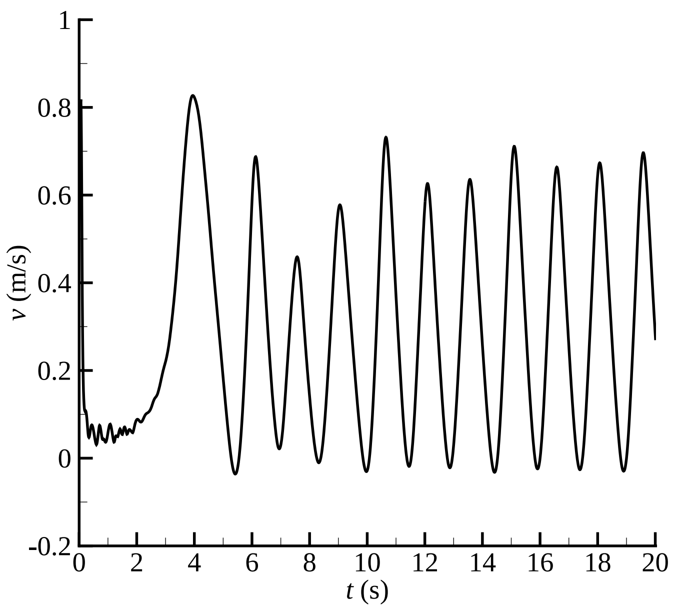
شکل ۴ـ۳۵: توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 20°$



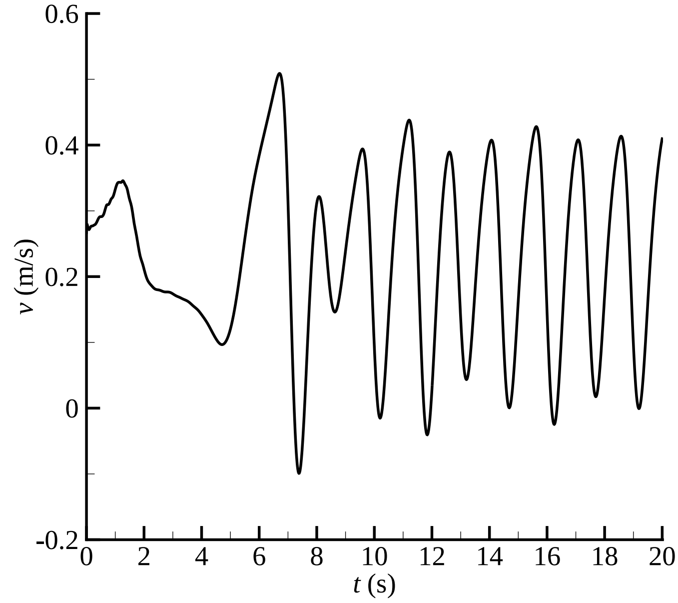
شکل ۴ـ۳۶: تاثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 20°$

حالت چهارم: هیدروفویل NACA۰۰۱۲، عدد رینولدز ۱۱۰۰ و زاویه‌ی حمله ۱۵ درجه

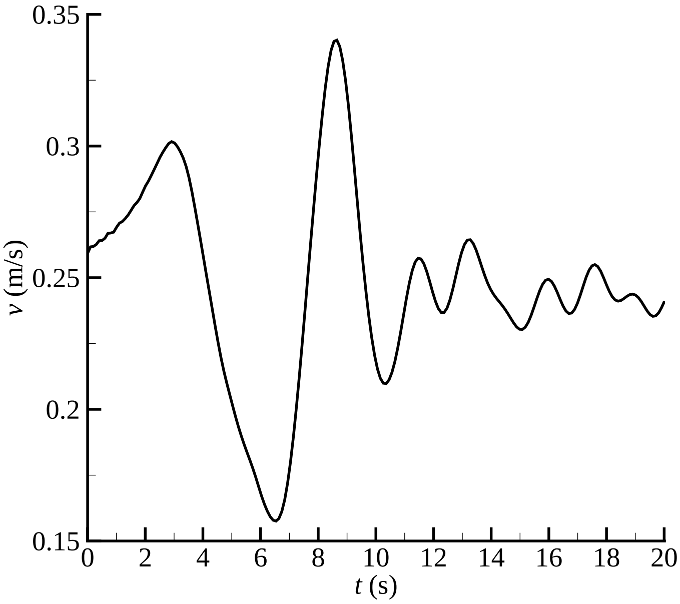
شکل‌های ۴ـ۳۷، ۴ـ۳۸ و ۴ـ۳۹ تغییرات سرعت عمودی v را نسبت به زمان، به ترتیب در موقعیت پشت هیدروفویل $x = 1.1, y = 0$، $x = 2, y = 0$ و $x = 3, y = 0$ نشان می‌دهند. در شکل ۴ـ۴۰ نمودار توزیع ضریب برا و در شکل ۴ـ۴۱ نمودار توزیع ضریب پسا برحسب زمان نشان داده شده است. شکل ۴ـ۴۲ تاثیر روش پیش‌شرط توانی در مقایسه با روش‌های SAC و SPM بر نرخ همگرایی در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 1100$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 15°$ را نشان می‌دهد. باتوجه به شکل ۴ـ۴۲، در روش SAC نرخ همگرایی بسیار کند صورت می‌پذیرد یا در واقع می‌توان به عدم همگرایی این روش در خطای با دقت بالا اشاره کرد. در این مورد نیز، روش پیش‌شرط توانی با افزایش سرعت همگرایی نسبت به دو روش دیگر همراه است.



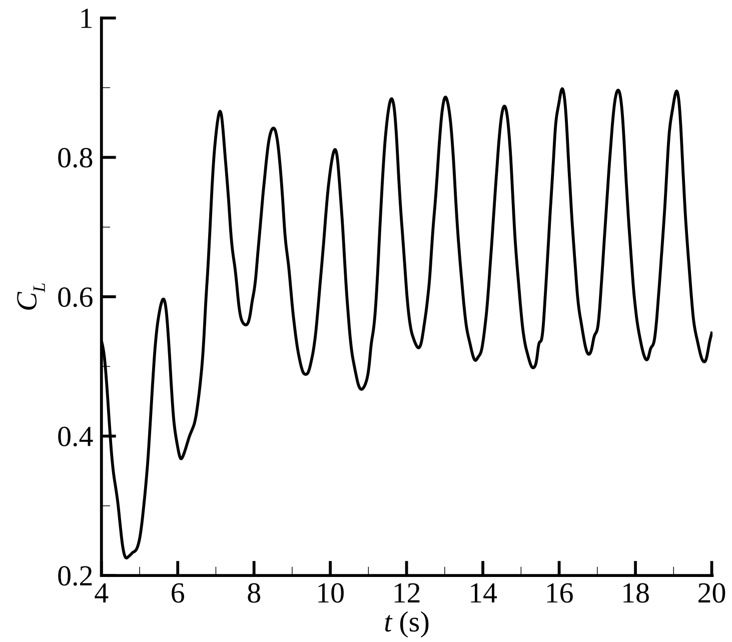
شکل ۴ـ۳۷: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 15°$



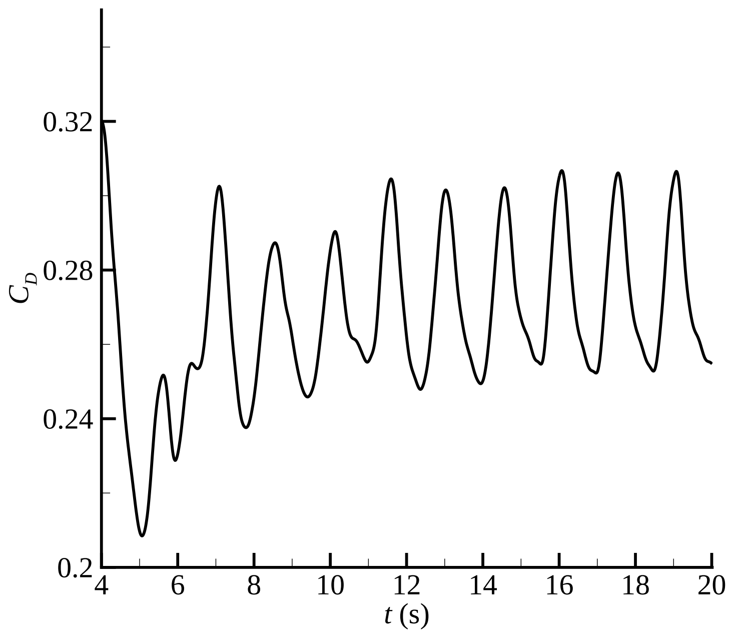
شکل ۴ـ۳۸: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 2.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 15^\circ$



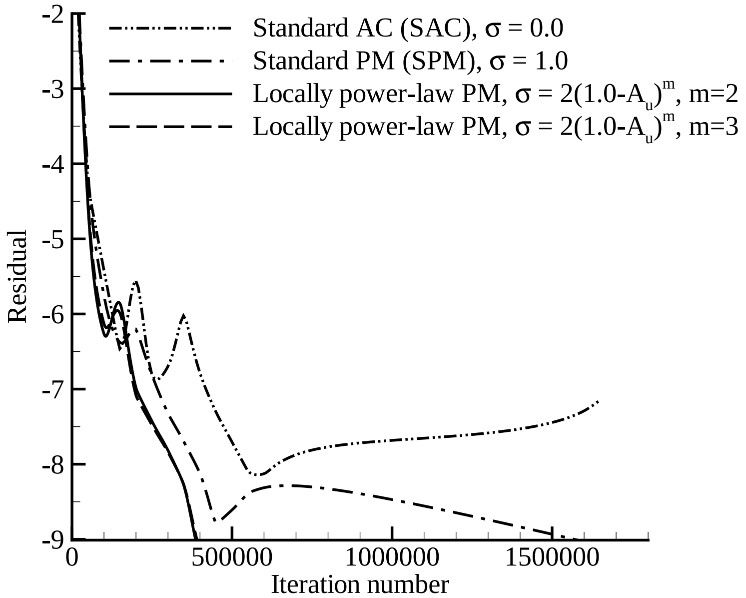
شکل ۴ـ۳۹: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 3.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 15^\circ$



شکل ۴ـ ۴۰: توزیع ضریب برا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 15°$



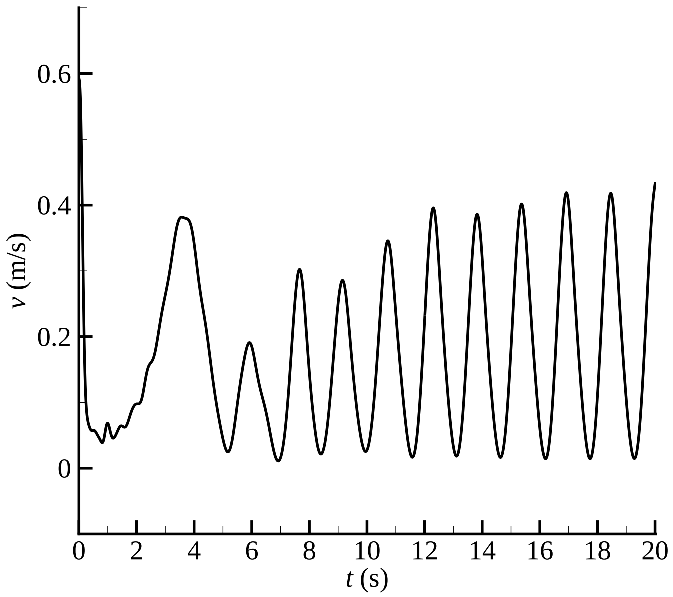
شکل ۴ـ ۴۱: توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 15°$



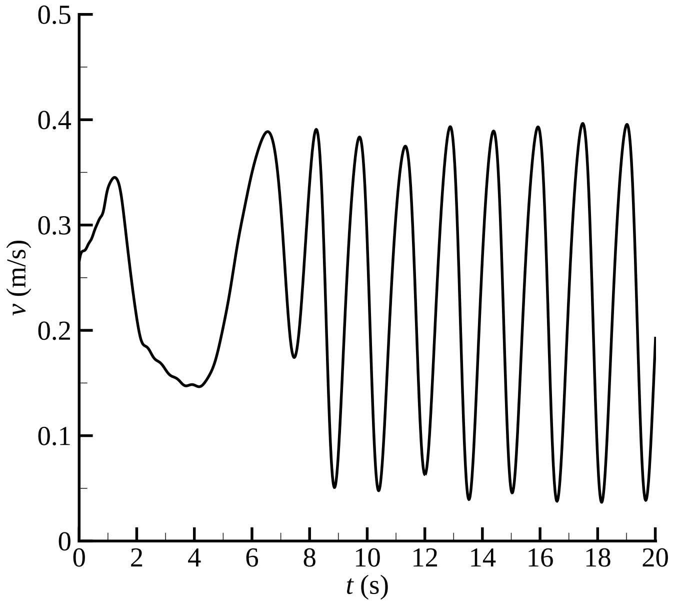
شکل ۴ـ۴۲: تاثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 15^\circ$

حالت پنجم: هیدروفویل NACA۰۰۱۲، عدد رینولدز ۸۰۰ و زاویه‌ی حمله ۱۵ درجه

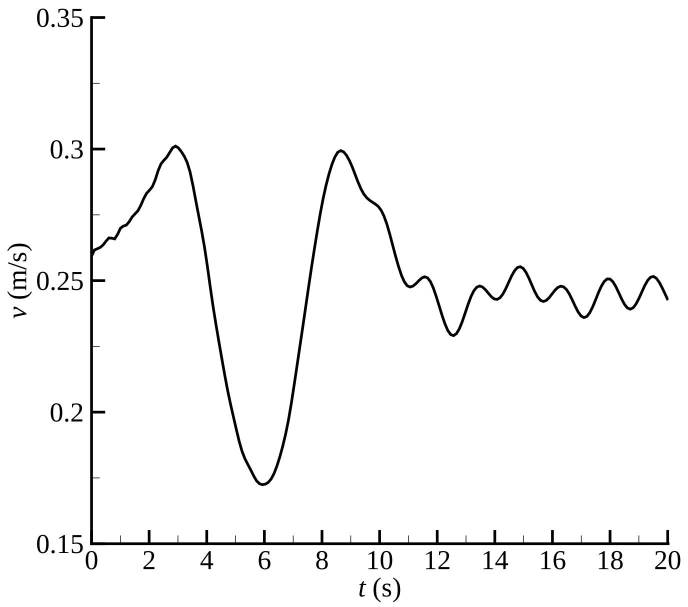
شکل‌های ۴ـ۴۳، ۴ـ۴۴ و ۴ـ۴۵ تغییرات سرعت عمودی v را نسبت به زمان، به ترتیب در موقعیت پشت هیدروفویل $x = 1.1, y = 0$، $x = 2, y = 0$ و $x = 3, y = 0$ نشان می‌دهند. در شکل ۴ـ۴۶ نمودار توزیع ضریب برا و در شکل ۴ـ۴۷ نمودار توزیع ضریب پسا برحسب زمان نشان داده شده است. شکل ۴ـ۴۸ تاثیر روش پیش‌شرط توانی در مقایسه با روش‌های SAC و SPM بر نرخ همگرایی در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 800$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 15^\circ$ را نشان می‌دهد. در این مورد نیز، باتوجه به شکل ۴ـ۴۸، روش پیش‌شرط توانی با افزایش قابل ملاحظه‌ای در سرعت همگرایی و کاهش نرخ همگرایی نسبت به دو روش دیگر همراه است.



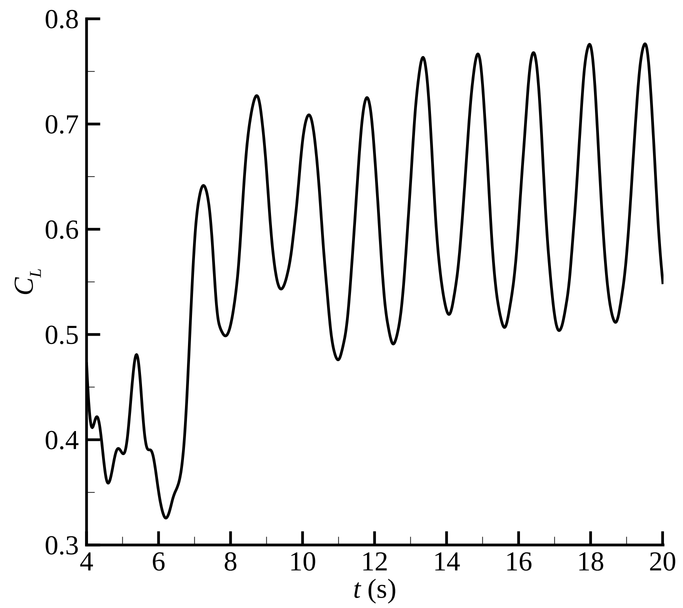
شکل ۴ـ۴۳: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 15^\circ$



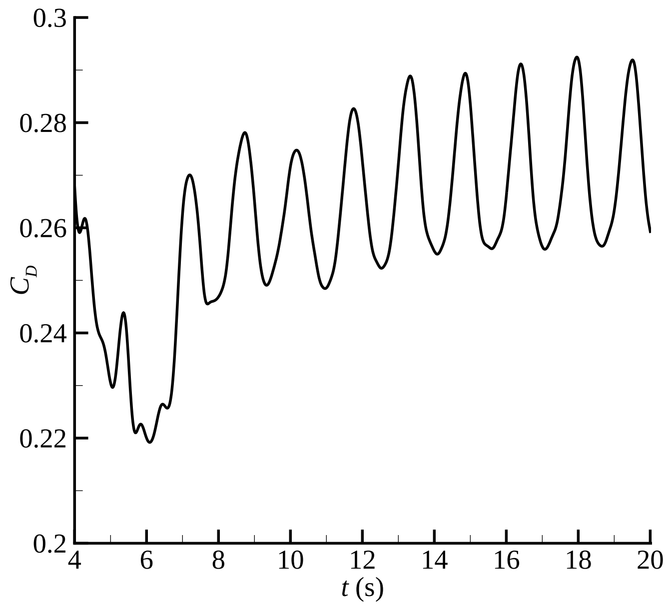
شکل ۴ـ۴۴: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 2.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 15^\circ$



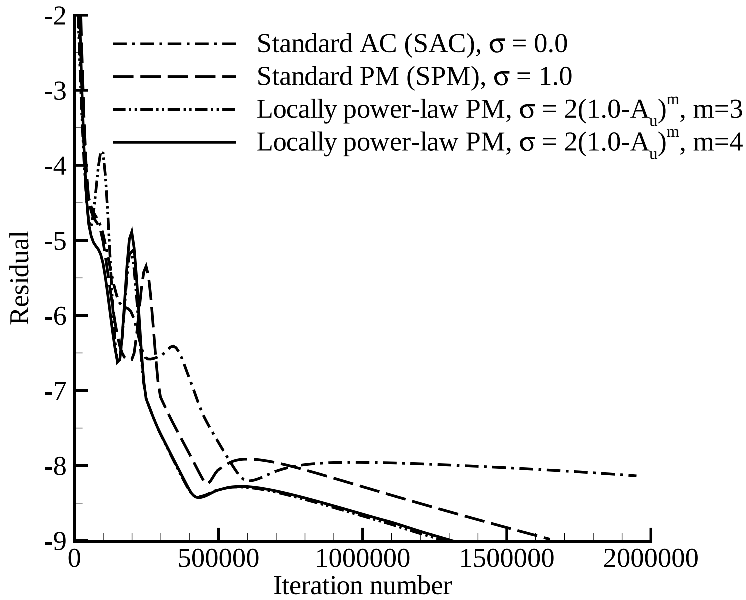
شکل ۴ـ۴۵: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 3.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 15^\circ$



شکل ۴ـ۴۶: توزیع ضریب برا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 15^\circ$



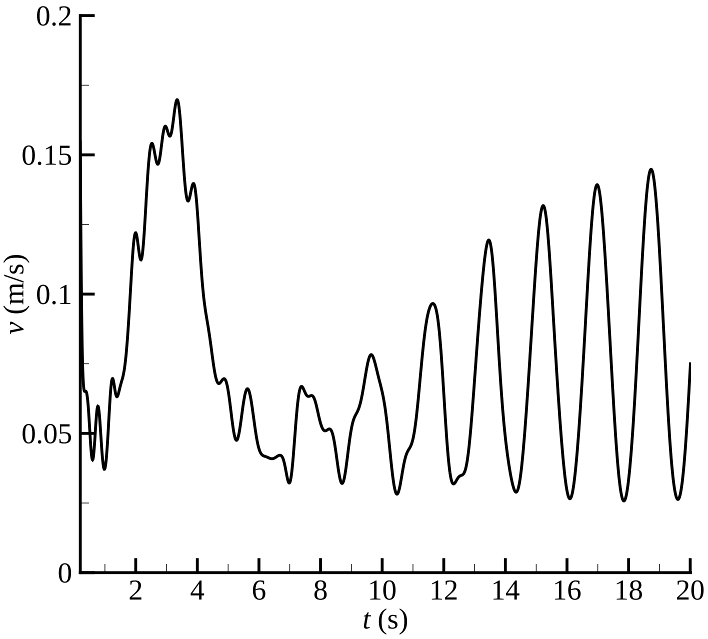
شکل ۴ـ۴۷: توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 15°$



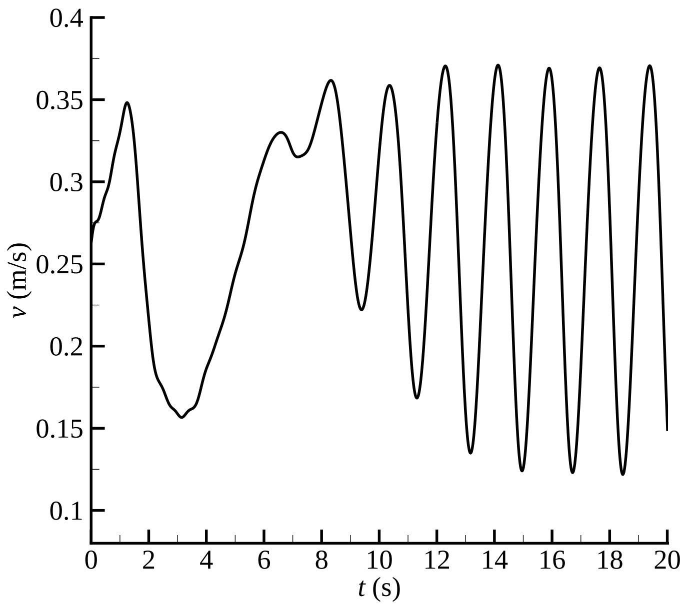
شکل ۴ـ۴۸: تاثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 15°$

حالت ششم: هیدروفویل NACA۰۰۱۲، عدد رینولدز ۵۰۰ و زاویه‌ی حمله ۱۵ درجه

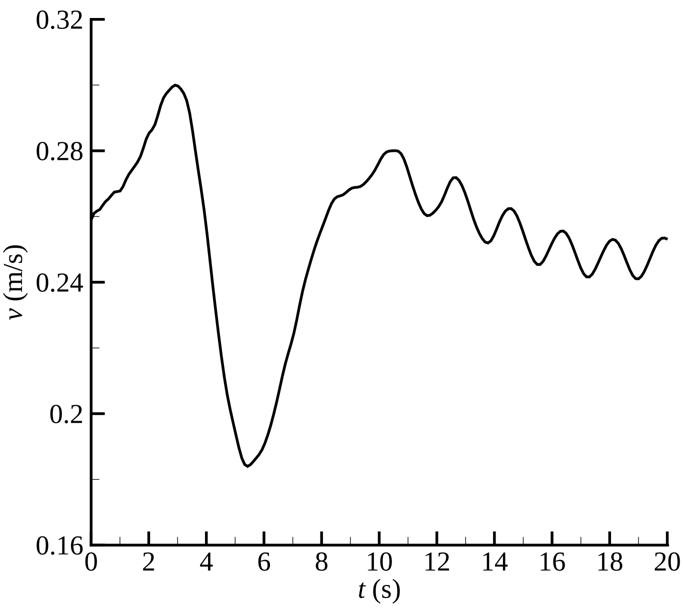
شکل‌های ۴ـ۴۹، ۴ـ۵۰ و ۴ـ۵۱ تغییرات سرعت عمودی v را نسبت به زمان، به ترتیب در موقعیت پشت هیدروفویل $x = 1.1, y = 0$ ، $x = 2, y = 0$ و $x = 3, y = 0$ نشان می‌دهند. در شکل ۴ـ۵۲ نمودار توزیع ضریب برا و در شکل ۴ـ۵۳ نمودار توزیع ضریب پسا برحسب زمان نشان داده شده است. شکل ۴ـ۵۴ تاثیر روش پیش‌شرط توانی در مقایسه با روش‌های SAC و SPM بر نرخ همگرایی در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 500$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 15°$ را نشان می‌دهد. روش پیش‌شرط توانی باعث کاهش در تعداد تکرارها نسبت به روش‌های SAC و SPM شده است.



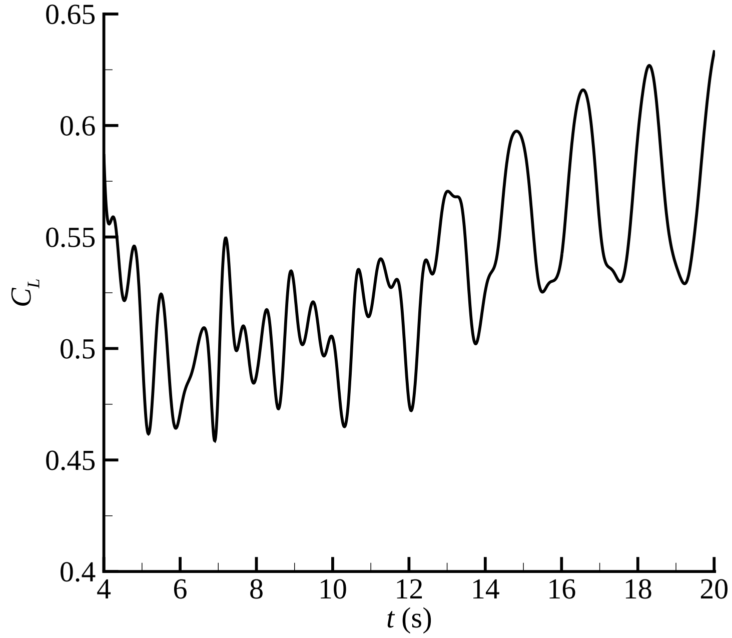
شکل ۴ـ۴۹: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 15°$



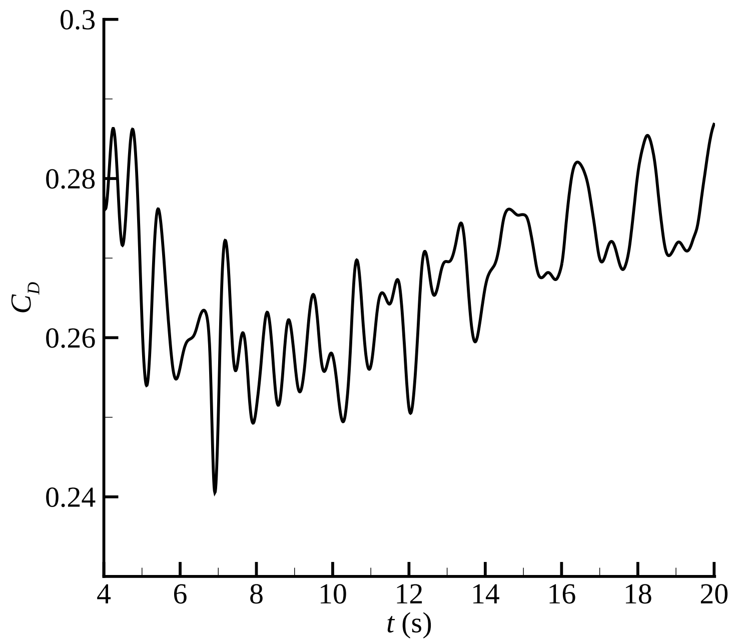
شکل ۴ـ ۵۰: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 2.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 15^{\circ}$



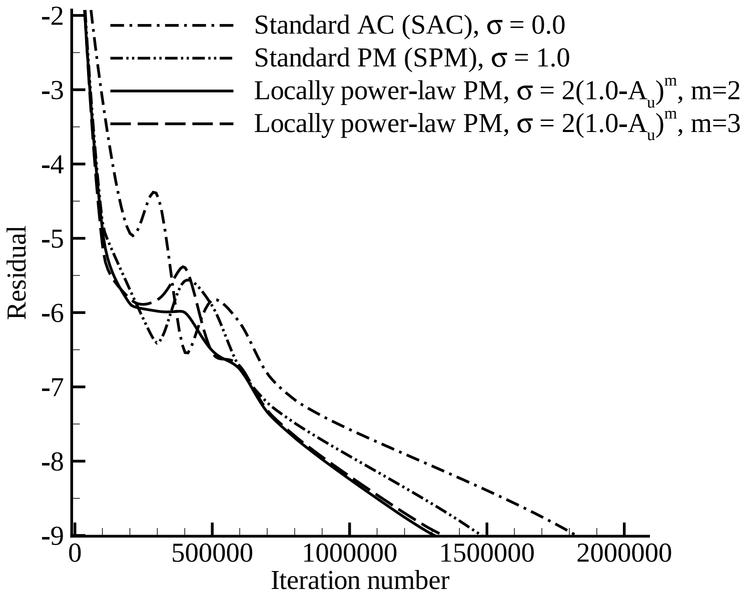
شکل ۴ـ ۵۱: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 3.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 15^{\circ}$



شکل ۴ـ۵۲: توزیع ضریب برا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 15^\circ$



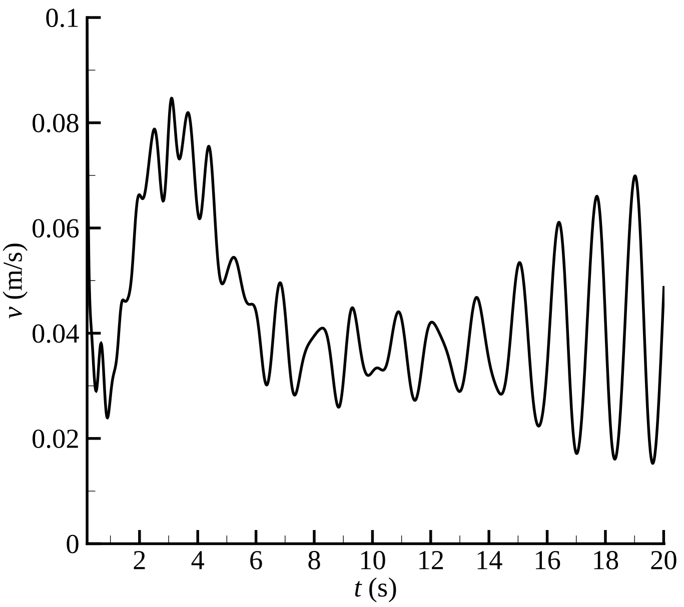
شکل ۴ـ۵۳: توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 15^\circ$



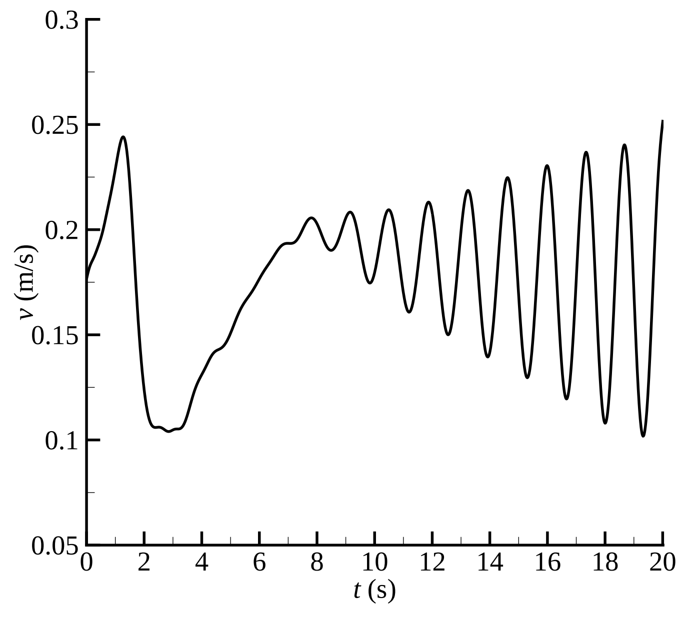
شکل ۴ـ۵۴: تاثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در $\text{Re} = 500$ و $\alpha = 15°$

حالت هفتم: هیدروفویل NACA۰۰۱۲، عدد رینولدز ۸۰۰ و زاویه‌ی حمله ۱۰ درجه

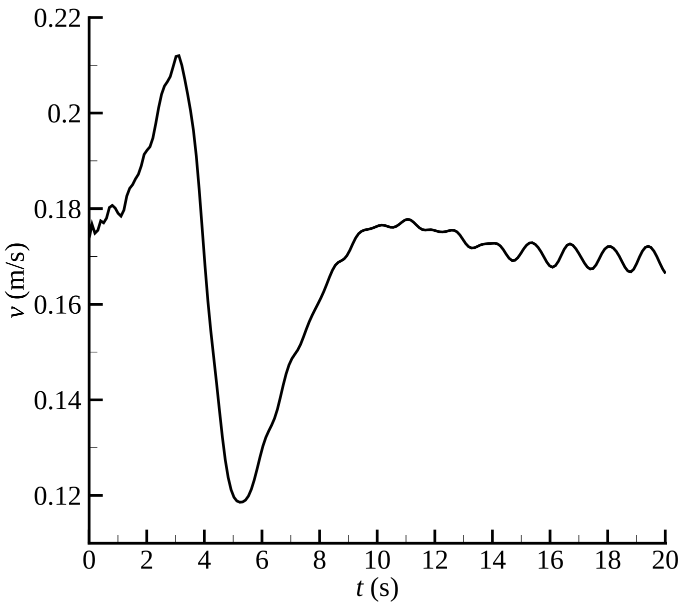
شکل‌های ۴ـ۵۵، ۴ـ۵۶ و ۴ـ۵۷ تغییرات سرعت عمودی v را نسبت به زمان، به ترتیب در موقعیت پشت هیدروفویل $x = 1.1, y = 0$، $x = 2, y = 0$ و $x = 3, y = 0$ نشان می‌دهند. در شکل ۴ـ۵۸ نمودار توزیع ضریب برا و در شکل ۴ـ۵۹ نمودار توزیع ضریب پسا برحسب زمان نشان داده شده است. شکل ۴ـ۶۰ تاثیر روش پیش‌شرط توانی در مقایسه با روش‌های SAC و SPM بر نرخ همگرایی در عدد رینولدز $\text{Re} = 800$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 10°$ را نشان می‌دهد. باتوجه به شکل ۴ـ۶۰، روش پیش‌شرط توانی باعث کاهش چشمگیری در تعداد تکرارها نسبت به روش SAC و همچنین روش SPM شده است.



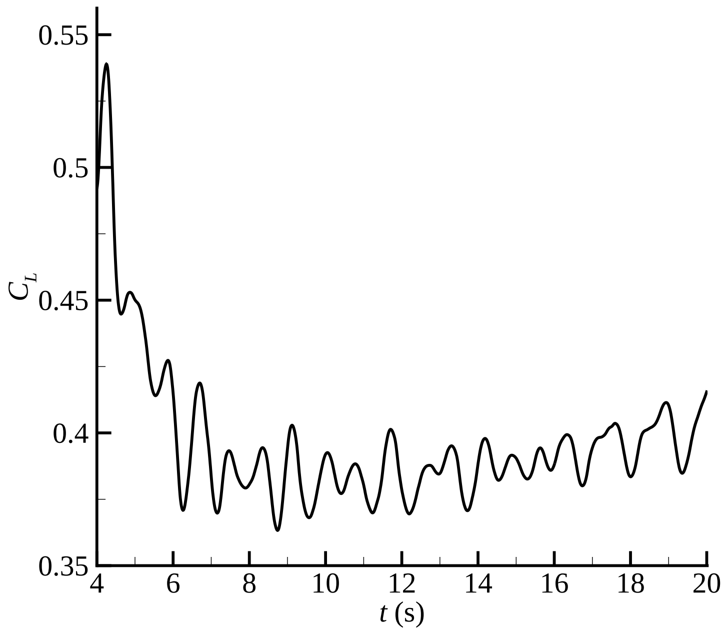
شکل ۴ـ۵۵: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 10^\circ$



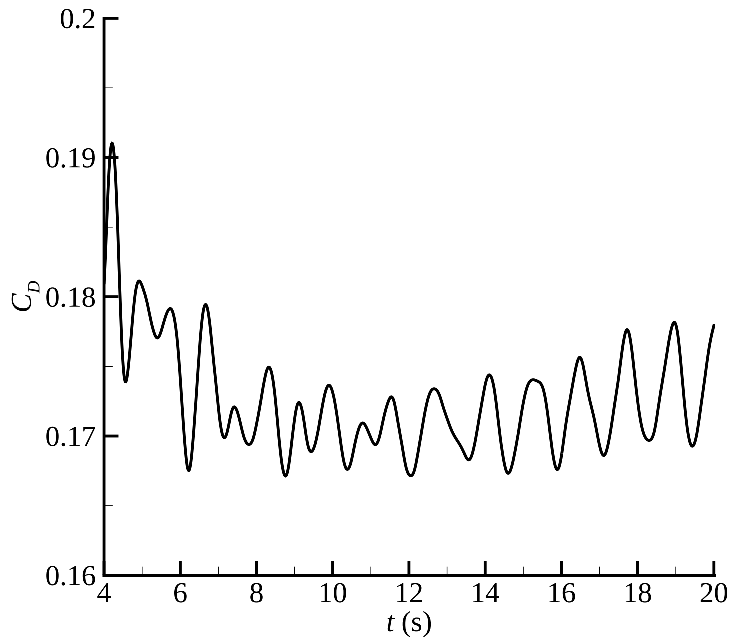
شکل ۴ـ۵۶: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 2.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 10^\circ$



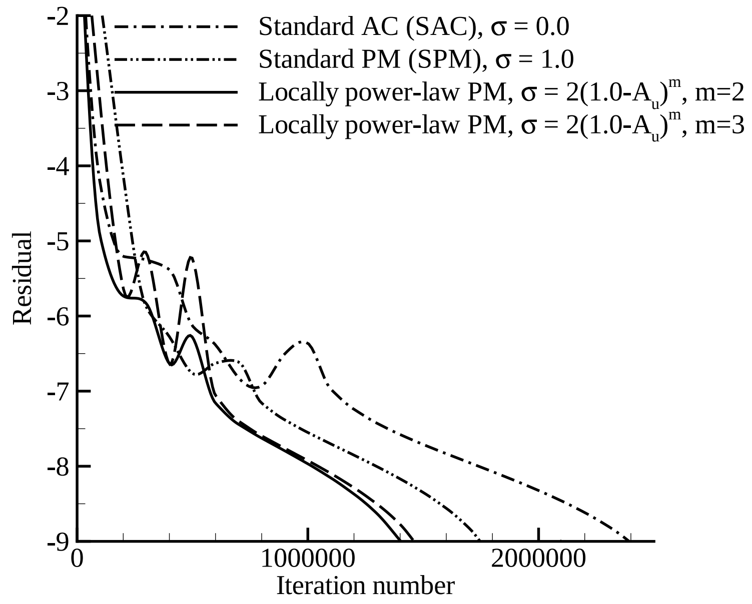
شکل ۴ــ۵۷: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 3.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 10^\circ$



شکل ۴ــ۵۸: توزیع ضریب برا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 10^\circ$



شکل ۴ـ۵۹: توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 10^\circ$



شکل ۴ـ۶۰: تاثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 10^\circ$

در جدول۴ـ ۱، مقدار درصد کاهش تعداد تکرارها نسبت به روش SAC و همچنین روش SPM به صورت تقریبی محاسبه و گردآوری شده است. جدول ۴ـ ۱ دربردارنده‌ی تمامی هفت حالت در نظر گرفته شده در اعداد رینولدز و زوایای حمله متفاوت می‌باشد. در هر حالت تعداد کل تکرارها با استفاده از هر سه روش محاسبه شده و درصد کاهش آن با استفاده از توان بهینه روش پیش‌شرط توانی محاسبه گردیده است. با توجه به نتایج خلاصه شده در جدول ۴ـ ۱، روش پیش‌شرط توانی در مقایسه با سایر روش‌های پیش‌شرط، ۱۰ تا ۷۵ درصد نرخ همگرایی را افزایش و هزینه‌ی زمانی محاسبات را کاهش می‌دهد.

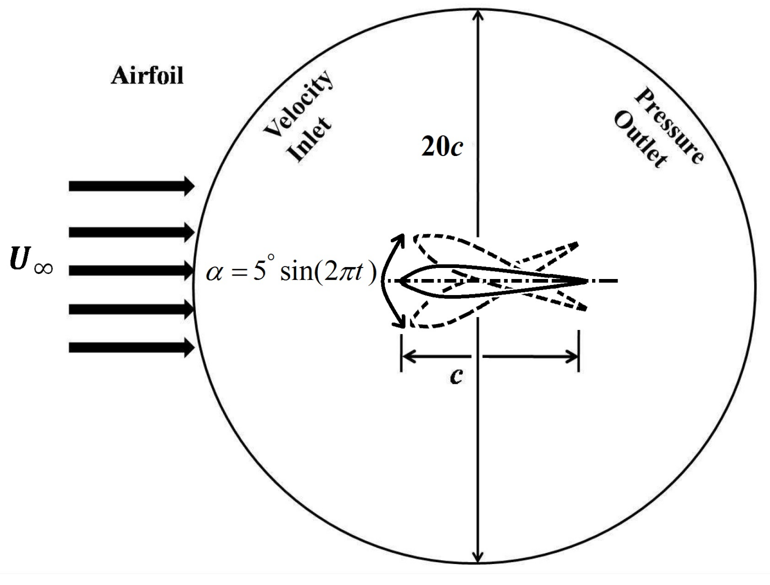
جدول ۴ـ ۱: تاثیر روش موضعی پیش‌شرط توانی بر نرخ همگرایی روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲

شماره حالت	زاویه‌ی حمله (°)	عدد رینولدز	کاهش تعداد تکرار نسبت به روش تراکم‌پذیری استاندارد (%)	کاهش تعداد تکرار نسبت به روش پیش‌شرط استاندارد (%)	توان بهینه
۱	۲۰	۸۰۰	$\sim$ ۴۳	$\sim$ ۱۰	۲
۲	۲۰	۱۱۰۰	$\sim$ ۱۰	$\sim$ ۱۳	۲
۳	۲۰	۵۰۰	$\sim$ ۲۷	$\sim$ ۱۰	۲
۴	۱۵	۱۱۰۰	عدم همگرایی	$\sim$ ۷۵	۳
۵	۱۵	۸۰۰	$\sim$ ۷۵	$\sim$ ۲۴	۳
۶	۱۵	۵۰۰	$\sim$ ۲۹	$\sim$ ۱۲	۲
۷	۱۰	۸۰۰	$\sim$ ۴۱	$\sim$ ۲۰	۲

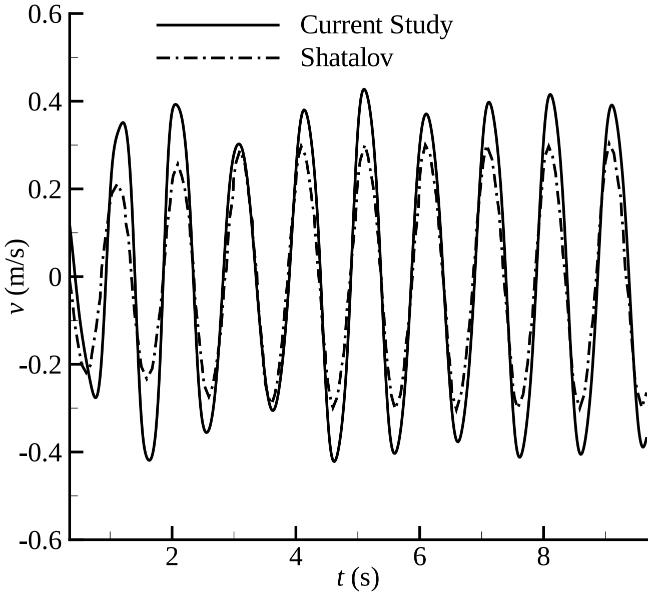
۴ـ۴ جریان ناپایا با زاویه‌ی حمله متغیر

۴ـ۴ـ۱ نتایج عددی و اعتبارسنجی

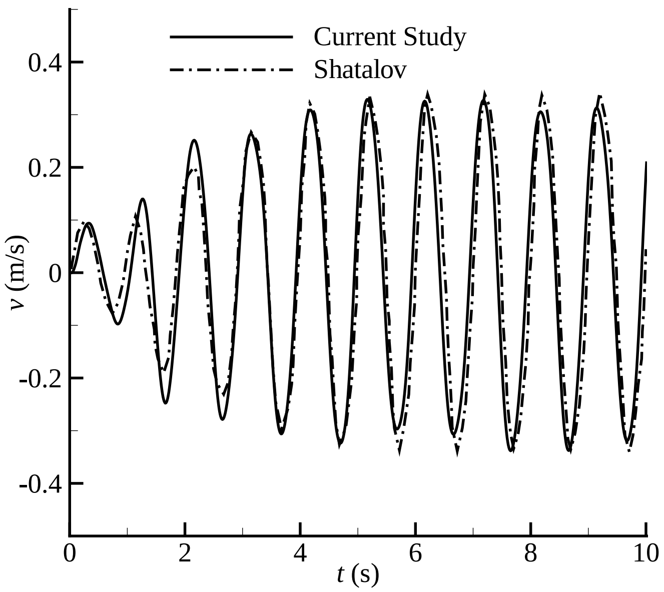
برای مقایسه الگوریتم جریان آرام ناپایا تراکم‌ناپذیر همراه با نوسان تناوبی اجباری از نتایج عددی شاتالوو [۷] استفاده شده است. مدلی از هندسه‌ی مسئله شبیه‌سازی شده در شکل ۴ـ۶۱ نشان داده شده است. همانند بخش پیشین، گام زمان حقیقی برابر با $\Delta t = 0.01$ در نظر گرفته شده و در هر گام زمانی حقیقی میدان حل تا 10^{-4} در زمان مجازی همگرا می‌شود. به منظور بررسی صحت الگوریتم ناپایا با نوسان تناوبی اجباری، جریان آرام حول هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 800$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$ شبیه‌سازی شده است. نوسان تناوبی اجباری در نظر گرفته شده با دامنه‌ی ۰ تا ۵ درجه و فرکانس 0 تا 2π تغییر می‌یابد. شکل‌های ۴ـ۶۲، ۴ـ۶۳ و ۴ـ۶۴، تغییرات سرعت عمودی v را نسبت به زمان، به ترتیب در موقعیت پشت هیدروفویل $x = 1.1, y = 0$، $x = 2, y = 0$ و $x = 3, y = 0$ و در مقایسه با نتایج شاتالوو [۷] نشان می‌دهند. مقدارهای به دست آمده برای سرعت عمودی در هر گام زمانی حقیقی و دوره‌های نوسان نسبت به زمان، همخوانی بسیار خوبی با نتایج مرجع یاد شده دارد.



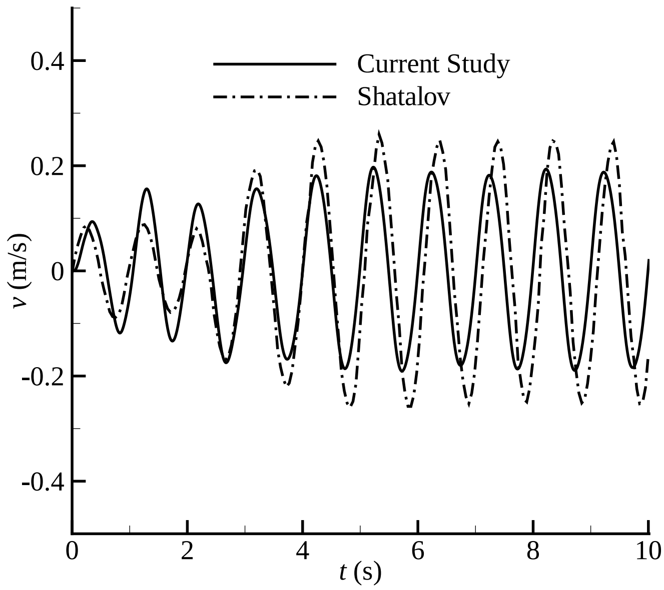
شکل ۴ـ۶۱: مدلی از هندسه‌ی شبیه‌سازی شده



شکل ۴ـ۶۲: مقایسه تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



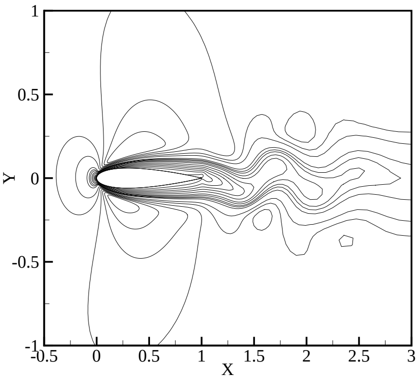
شکل ۴ـ۶۳: مقایسه تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 2.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



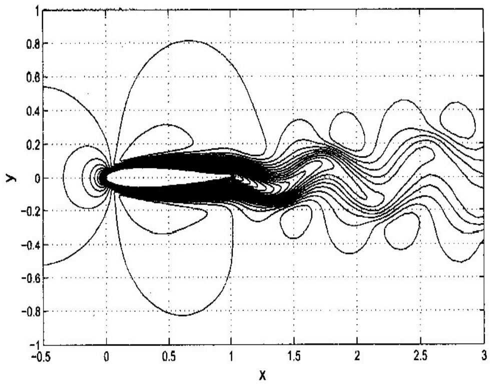
شکل ۴ـ۶۴: مقایسه تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 3.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$

با در نظر گرفتن فرکانس 2π، هر دوره نوسان کامل در بازه‌ی زمانی یک ثانیه رخ می‌دهد. همان طور که در شکل‌ها نیز مشخص است پس از گذشت از زمان ۴ ثانیه، جریان شکل واقعی و نوسانی خود را پیدا می‌کند. مقدار بیشینه سرعت در یک چهارم ابتدایی و مقدار کمینه سرعت در یک چهارم پایانی در هر دوره نوسان اتفاق می‌افتد. مقدار سرعت نوسانی در ابتدای بازه‌ی زمانی از هر دوره‌ی نوسان و همچنین در نقاط میانی و پایانی برابر صفر خواهد بود. در صورتی که فرکانس برابر $\frac{\pi}{2}$ انتخاب گردد، هر دوره‌ی نوسان کامل به چهار ثانیه افزایش می‌یابد و مقدار بیشینه سرعت در ثانیه یکم و مقدار کمینه سرعت در ثانیه سوم در هر دوره نوسان رخ خواهد دهد. همچنین تغییرات سرعت نسبت به زمان با دامنه‌ی نوسان یکسان ولی با شیب کمتری روی خواهد داد.

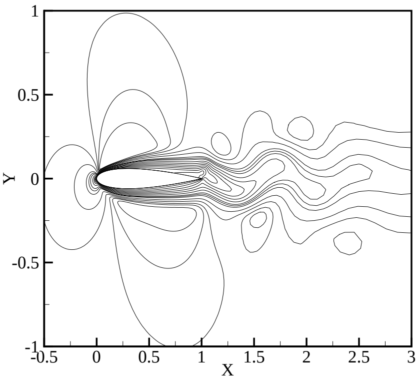
در شکل‌های ۴ـ۶۵ و ۴ـ۶۶، مقایسه خطوط همتراز سرعت عمودی u با نتایج شاتالوو [۷] به ترتیب در زمان‌های حقیقی $t = 6.0$، $t = 6.2$، $t = 6.4$ و $t = 6.6$ و در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 800$ و در زاویه‌ی حمله‌ی متغیر $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$ نشان داده شده است. نتایج به دست آمده همخوانی خوبی را با نتایج عددی موجود نشان می‌دهد.



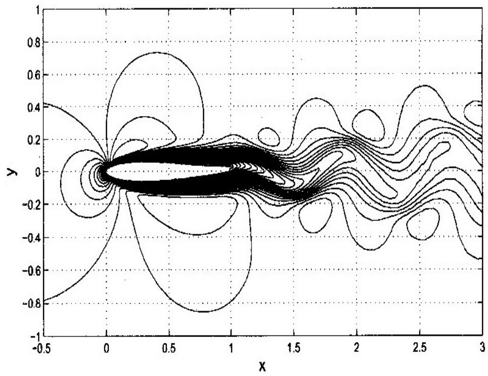
(آ) زمان $t = 6.0\ s$



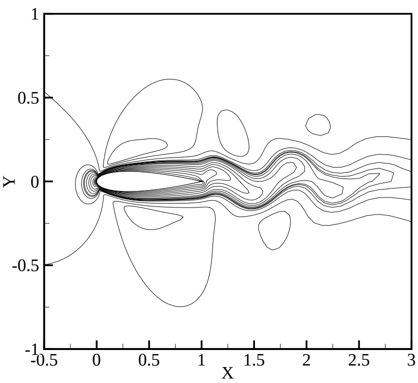
(ب) زمان $t = 6.0\ s$



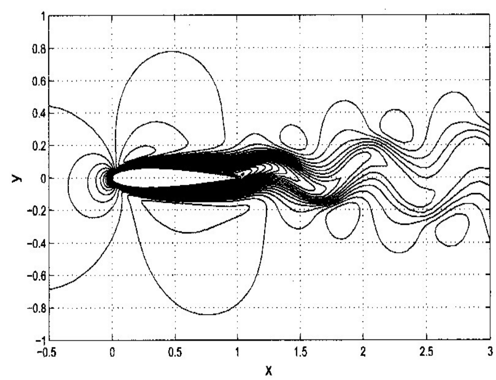
(ج) زمان $t = 6.2\ s$



(د) زمان $t = 6.2\ s$

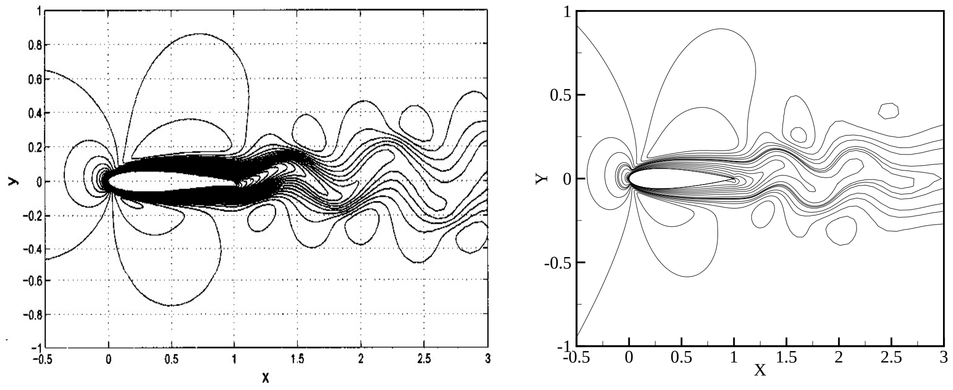


(ه) زمان $t = 6.4\ s$



(و) زمان $t = 6.4\ s$

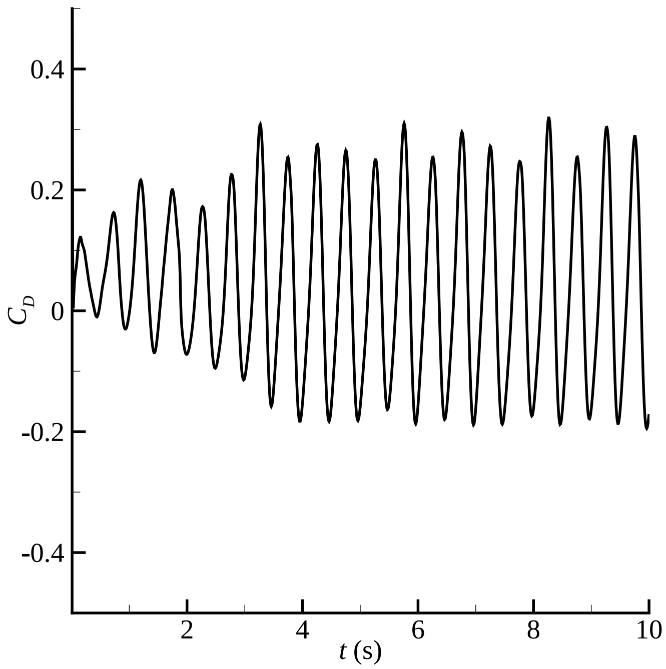
شکل ۴ـ۶۵: خطوط همتراز سرعت عمودی u در زمان‌های $t = 6$، $t = 6.2$ و $t = 6.4$ ثانیه. سمت راست: مطالعه حاضر. سمت چپ: شاتالو [۷]



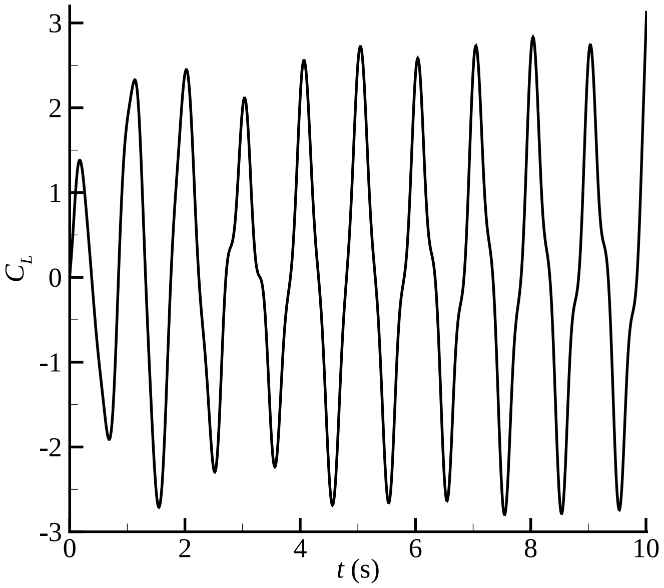
(آ) زمان $t = 6.6\ s$

(ب) زمان $t = 6.6\ s$

شکل ۴ـ۶۶: خطوط همتراز سرعت عمودی u در زمان $t = 6.6$ ثانیه. سمت راست: مطالعه حاضر. سمت چپ: شاتالوو [۷]



شکل ۴ـ۶۷: توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$

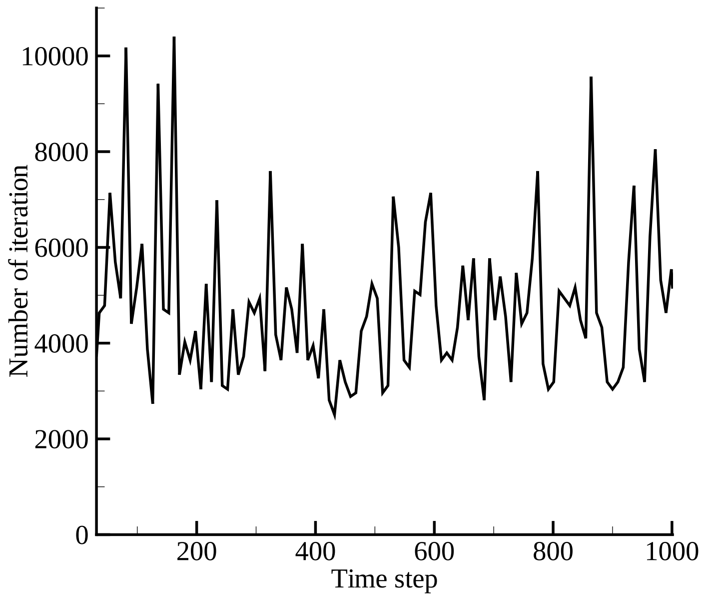


شکل ۴ـ۶۸: توزیع ضریب برا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$

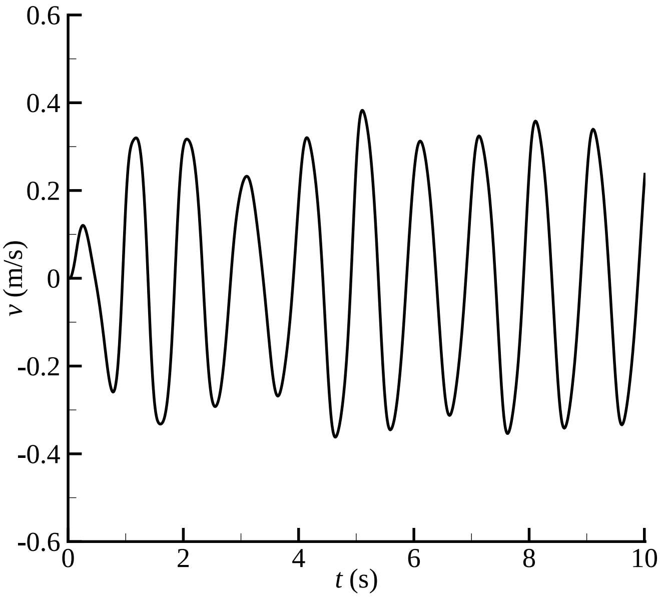
در شکل ۴ـ۶۷ نمودار توزیع ضریب پسا و در شکل ۴ـ۶۸ نمودار ضریب برا نسبت به زمان نشان داده شده است و در شکل ۴ـ۶۹، تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی در هر گام زمان مجازی برای جریان عبوری از هیدروفویل نمایش داده شده است (این شکل برای خطای محاسباتی 10^{-4} رسم گردیده است). با توجه به نتایج به دست آمده، الگوریتم عددی حاضر قابلیت و دقت لازم برای حل جریان‌های ناپایای نوسانی را در هندسه‌های مختلف داراست.

شکل‌های ۴ـ۷۰، ۴ـ۷۱ و ۴ـ۷۲، تغییرات سرعت عمودی v را نسبت به زمان، به ترتیب در موقعیت پشت هیدروفویل $x = 1.1, y = 0$، $x = 2, y = 0$ و $x = 3, y = 0$ در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 500$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$ نشان می‌دهند. در شکل ۴ـ۷۳ نمودار توزیع ضریب پسا و در شکل ۴ـ۷۴ نمودار ضریب برا نسبت به زمان نشان داده شده است.

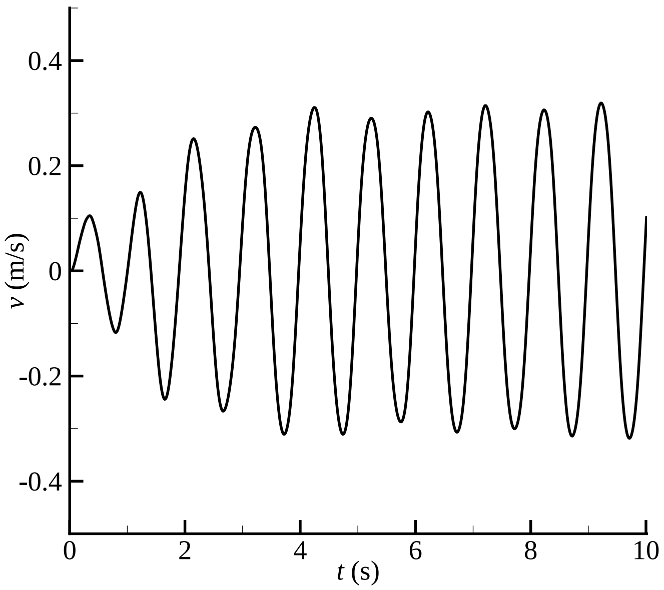
شکل‌های ۴ـ۷۵، ۴ـ۷۶ و ۴ـ۷۷، تغییرات سرعت عمودی v را نسبت به زمان، به ترتیب در موقعیت پشت هیدروفویل $x = 1.1, y = 0$، $x = 2, y = 0$ و $x = 3, y = 0$ در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 1100$ و در زاویه‌ی حمله $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$ نشان می‌دهند. در شکل ۴ـ۷۸ نمودار توزیع ضریب پسا و در شکل ۴ـ۷۹ نمودار ضریب برا نسبت به زمان نشان داده شده است.



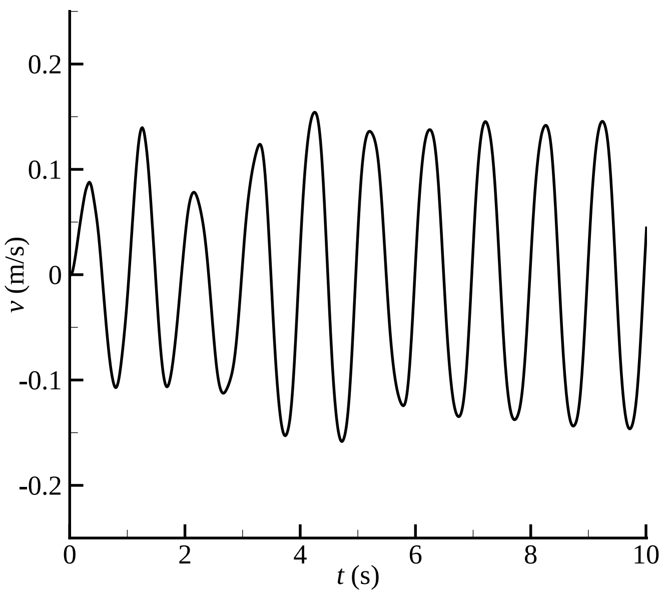
شکل ۴ـ ۶۹: تعداد تکرارها در هر گام زمانی، $\mathrm{Re} = 800$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



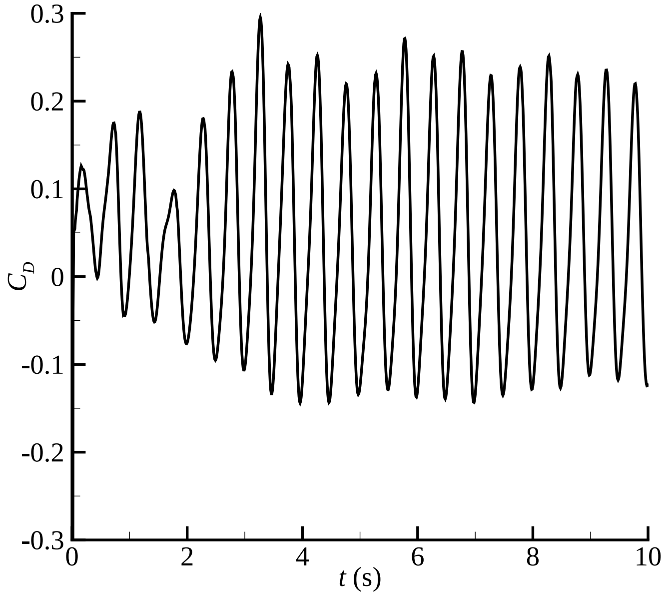
شکل ۴ـ ۷۰: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



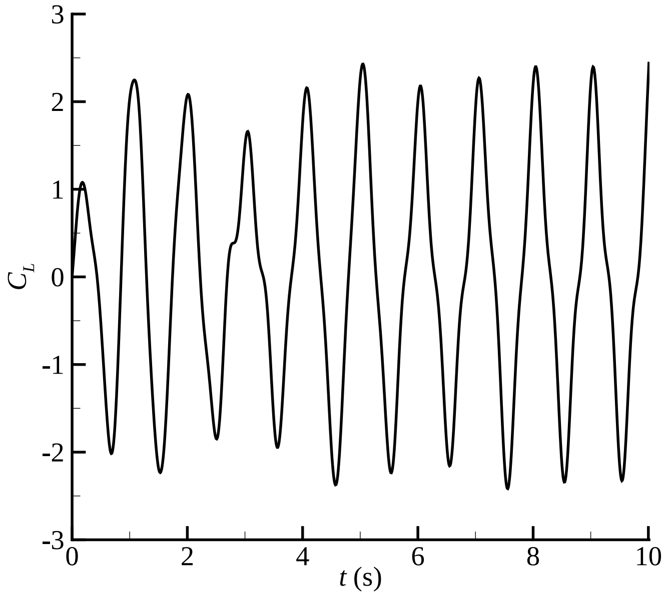
شکل ۴ـ ۷۱: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 2.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



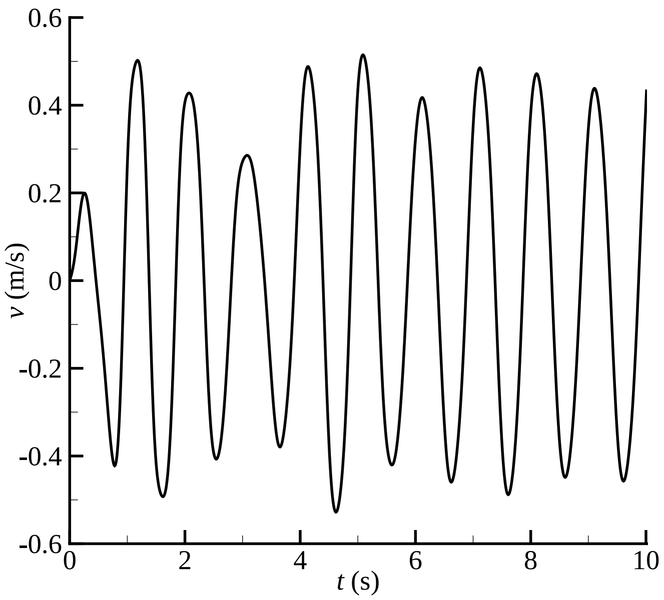
شکل ۴ـ ۷۲: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 3.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



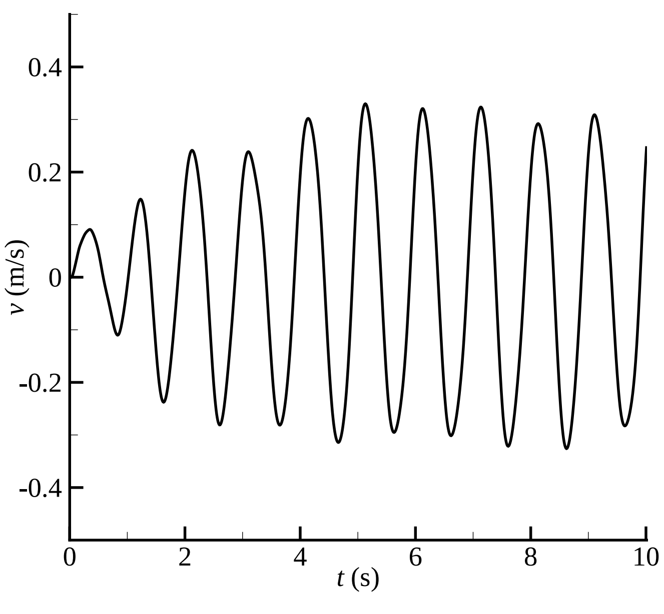
شکل ۴ـ۷۳: توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



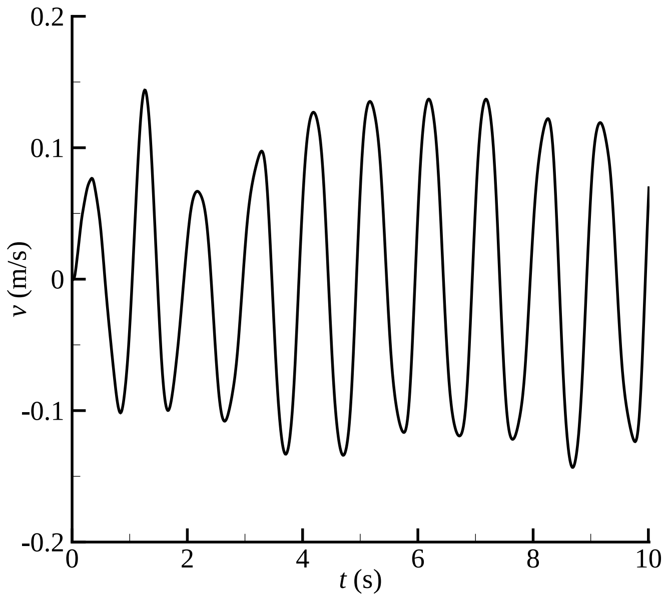
شکل ۴ـ۷۴: توزیع ضریب برا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 500$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



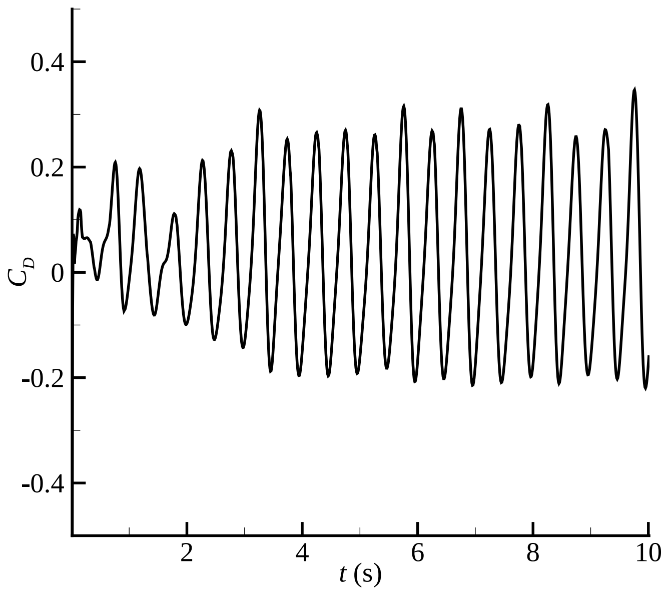
شکل ۴ـ۷۵: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 1.1, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



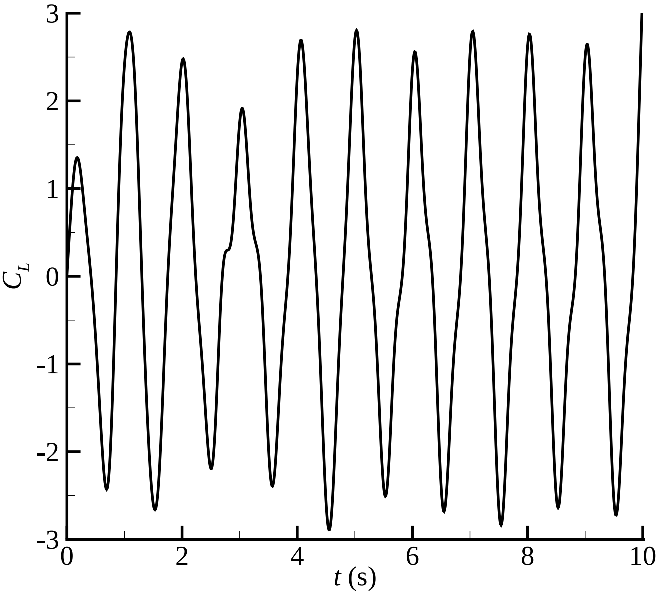
شکل ۴ـ۷۶: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 2.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



شکل ۴ـ۷۷: تغییرات سرعت عمودی v در موقعیت $x = 3.0, y = 0$ پشت هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



شکل ۴ـ۷۸: توزیع ضریب پسا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$



شکل ۴ـ۷۹: توزیع ضریب برا روی هیدروفویل NACA۰۰۱۲ بر حسب زمان، $\mathrm{Re} = 1100$ و $\alpha = 5^\circ \sin(2\pi t)$

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این فصل خلاصه‌ای از نتایج و دستاوردهای به دست آمده از مطالعات انجام گرفته در این پایان‌نامه ارائه می‌گردد. همچنین برای ارتقای کیفیت مطالب و تعریف موضوعاتی جدید و مکمل در راستای موضوع پایان‌نامه، پیشنهاداتی نیز مطرح خواهد شد.

۵ـ۱ بحث و نتیجه‌گیری

علوم مختلف مهندسی اخیراً علاقه فراوانی به شبیه‌سازی غیردایم جریان‌های تراکم‌ناپذیر در مواردی که شامل اجسام متحرک می‌باشد، از خود نشان داده است. این شبیه‌سازی‌ها کاربرد فراوانی در زمینه‌های مختلف آیرودینامیک و هیدرودینامیک کاربردی دارد که می‌توان به تحلیل آیرودینامیک اجسام پرنده، تحلیل آیرودینامیک ایرفویل‌های نوسانی (پره هلیکوپتر, وسایل هوایی میکرو و ..)، شبیه‌سازی جریان‌های آشفته، انفجارها و ... اشاره نمود.

در این پایان‌نامه، الگوریتمی جهت شبیه‌سازی عددی جریان‌های ناپایا لزج با استفاده از روش تراکم‌پذیری مصنوعی ارائه گردید. از آنجا که یکی از مباحث مطرح در روش تراکم‌پذیری مصنوعی، نحوه‌ی انتخاب ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی می‌باشد، نحوه‌ی انتخاب این ضریب به صورت محلی و بر اساس رژیم جریان ارائه شد. انتخاب محلی این ضریب، باعث پایداری و کاهش نرخ همگرایی نتایج حاصل در حل جریان‌های ناپایای تراکم‌ناپذیر می‌گردد.

اختلاف زیاد میان مقادیر ویژه‌ی دستگاه معادلات در جریان‌های تراکم‌ناپذیر، سختی دستگاه را موجب می‌شود. برای رفع این نقیصه در پایان‌نامه حاضر، از استراتژی پیش‌شرطی به منظور همسان‌سازی مقادیر ویژه جهت کاهش سختی معادلات و افزایش کارایی روش حل، استفاده شده است. انتخاب پیش‌شرط مناسب که بهترین نرخ همگرایی و در عین حال کارآمدی روش را به همراه داشته باشد، خود به عنوان مقوله‌ای مفصل در روش‌های پیش‌شرطی مطرح می‌باشد. در این پایان‌نامه یک روش پیش‌شرط جدید موضعی به نام روش پیش‌شرط توانی ارائه می‌گردد. با ارائه‌ی یک ماتریس پیش‌شرط محلی و اصلاح ماتریس‌های پیش‌شرط پیشین که در آنها از مقادیر ثابت برای ضریب پیش‌شرط استفاده می‌شد، سرعت همگرایی و دقت حل مسئله به طور همزمان مورد توجه قرار می‌گیرد. در روش پیش‌شرط توانی، ضریب پیش‌شرط به صورت محلی و با توجه به سنسورهای محلی میدان سرعت (در هر گام زمانی) و به کمک یک رابطه‌ی توانی محاسبه می‌گردد. قابل ذکر است که در این پایان‌نامه برای نخستین بار از روش پیش‌شرط توانی برای شبیه‌سازی عددی جریان‌های ناپایا استفاده شده است و تاثیر استفاده از این روش بر نرخ همگرایی مورد بررسی قرار گرفته است.

الگوریتم عددی به کار گرفته شده جهت حل معادلات حاکم، روشی حجم محدود از نوع مرکزیت سلول بوده که به منظور حذف نوسانات ایجاد شده به دلیل استفاده از روش تفاضل مرکزی در محاسبه‌ی شارها، از عبارت میرایی عددی معرفی شده توسط جیمسون استفاده شده است. در این روش معادلات دوبعدی ناویرـاستوکس با تغییر جمله‌ی مشتق زمانی معادلات حاکم اصلاح می‌گردد و برای حل جریان‌های ناپایا از یک الگوریتم ضمنی دوزمانه استفاده می‌شود. روش مورد استفاده برای همگرایی حل به سمت حالت دائم، روش انتگرال‌گیری زمانی اصلاح شده‌ی رانج‌ـکوتای صریح چهار مرحله‌ای می‌باشد. در این پایان‌نامه، شبیه‌سازی عددی جریان لزج تراکم‌ناپذیر ناپایا اطراف هیدروفویل NACA۰۰۱۲ در اعداد رینولدز متفاوت و زوایای حمله‌ی ثابت و متغیر (همراه با نوسان تناوبی اجباری) مورد بررسی قرار گرفته است.

مقایسه نتایج به دست آمده از حل حاضر با داده‌های عددی موجود نشان می‌دهند که الگوریتم عددی حاضر با استفاده از روش تراکم‌پذیری مصنوعی و استراتژی پیش‌شرطی در حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر، قابلیت حل جریان‌های ناپایا را با دقت خوبی داراست. نتایج به دست آمده همخوانی

بسیار خوبی با نتایج عددی محققان دیگر دارد. با اعمال این روش در این تحقیق مشاهده شد که روش پیش‌شرط توانی، در مقایسه با دیگر روش ها نظیر SPM و SAC تعداد گام‌های تکرار عددی را کاهش و سرعت همگرایی حل را افزایش می‌دهد. نتایج این پایان‌نامه نشان می‌دهد با انتخاب توان بهینه ضریب پیش‌شرط ($m = 2$) در روش پیش‌شرط توانی، می‌توان ۱۰ تا ۷۵ درصد در مقایسه با سایر روش‌های پیش‌شرط (روش تراکم‌پذیری مصنوعی استاندارد و روش پیش‌شرط استاندارد) تعداد گام‌های تکرار حل مسأله را کاهش داد. در نهایت باید یادآور شد که مقدار بهینه‌ی m ثابت نبوده و در محدوده‌ی $2 \leq m \leq 4$ تغییر می‌کند.

۵ـ۲ پیشنهادها

به منظور ارتقای سطح کیفی تحقیق حاضر و انجام مطالعه‌ی جامع‌تر در راستای موضوع این پایان‌نامه، پیشنهادها و توصیه‌هایی به شرح زیر مطرح می‌گردد:

- استفاده از روش‌های عددی مرتبه‌ی بالاتر و ترکیب آن با روش پیش‌شرط سازی توانی در حل جریان‌های ناپایا
- استفاده از شبکه‌ی با سازمان از نوع C[۱] در شبکه‌ی محاسباتی مورد استفاده در برنامه عددی
- توسعه برنامه محاسباتی به منظور حل جریان‌های ناپایای کاویتاسیونی
- تعمیم برنامه محاسباتی عددی به منظور حل جریان‌های ناپایای آشفته
- حل جریان‌های ناپایا با در نظر گرفتن دمش و مکش سیال از سطح هیدروفویل به عنوان روشی برای کنترل لایه‌ی مرزی و بهبود ضرایب برا و پسا
- استفاده از روش‌های چندشبکه‌ای[۲] وترکیب آن با روش پیش‌شرط سازی توانی به منظور افزایش سرعت همگرایی در حل جریان‌های ناپایا
- تعمیم برنامه محاسباتی به منظور حل جریان‌های ناپایا سه بعدی

[۱] C-Grid
[۲] Multigrid Methods

- حل جریان‌های ناپایا با در نظر گرفتن نوسان موضعی[1] روی سطح هیدروفویل به عنوان روشی برای کنترل جریان و بهبود ضرایب برا و پسا
- حل جریان‌های ناپایا با استفاده از هیدروفویل‌های انعطاف‌پذیر[2] و بررسی اثرات متقابل جریان و ساختار انعطاف‌پذیر هیدروفویل بر یکدیگر به دلیل استفاده وسیع در وسایل نقلیه هوایی میکرو و کاربردهای گسترده نظامی و غیر نظامی این وسایل

[1] Local Oscillation
[2] Flexible Hydrofoils

مراجع

[1] J. Blazek, *Chapter 6 - Temporal Discretization in Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications (Third Edition)*, pp. 167-211, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2015.

[2] A. Jameson, Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings, *10th Computational Fluid Dynamics Conference*, Honolulu, HI, U.S.A., 1991.

[3] A. Arnone, MS. Liou, L. Povinelli, Multigrid time-accurate integration of Navier-Stokes equations, *11th Computational Fluid Dynamics Conference*, Orlando, FL, U.S.A., 1993.

[4] N. D. Melson, M. D. Sanetrik, H. L. Atkins, Time-Accurate Navier-Stokes calculations with multigrid acceleration, *Proceeding of The 6th Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, Colorado, U.S.A.: NASA Conference Publication, pp. 423-439, 1993.

[5] V. Venkatakrishnan, D. J. Mavriplis, Implicit Method for the Computation of Unsteady Flows on Unstructured Grids, *Journal of Computational Physics*, Vol. 127, No. 2, pp. 380-397, 1996.

[6] J. M.J. Hsu, *An implicit-explicit flow solver for complex unsteady flows*, PhD Thesis, Stanford University, California, 2004.

[7] A. V. Shatalov, *Numerical simulations of incompressible laminar flows using viscous-inviscid interaction procedures*, PhD Thesis, The University of California Davis, California, 2006.

[8] M. Hafez, A. Shatalov, M. Nakajima, Improved numerical simulations of incompressible flows based on viscous/inviscid interaction procedures, *Computers & Fluids*, Vol. 36, No. 10, pp. 1588-1591, 2007.

[9] J. Young, J. C. S. Lai, *A Computational Study of the Wake Structure of a Plunging Airfoil: Computational Fluid Dynamics 2000*, pp. 151-156, Springer Berlin Heidelberg, 2001.

[10] A. Szumowski, G. Meier, Forced oscillations of airfoil flows, *Experiments in fluids*, Vol. 21, No. 6, pp. 457-464, 1996.

[11] D. J. Pines, F. Bohorquez, Challenges Facing Future Micro-Air-Vehicle Development, *Journal of Aircraft*, Vol. 43, No. 2, pp. 290-305, 2006.

[12] W. Shyy, Y. Lian, J. Tang, D. Viieru, H. Liu, *Aerodynamics of low Reynolds number flyers*, Cambridge University Press, 2007.

[13] W. Shyy, H. Aono, S. K. Chimakurthi, P. Trizila, C. K. Kang, C. E. S. Cesnik, H. Liu, Recent progress in flapping wing aerodynamics and aeroelasticity, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 46, No. 7, pp. 284-327, 2010.

[14] W. Kang, P. Lei, J. Zhang, M. Xu, Effects of local oscillation of airfoil surface on lift enhancement at low Reynolds number, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 57, pp. 49-65, 2015.

[15] A. J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *Journal of computational physics*, Vol. 2, No. 1, pp. 12-26, 1967.

[16] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1980.

[17] H. Viviand, Pseudo-unsteady systems for steady inviscid flow calculations, *Numerical methods for the Euler equations of fluid dynamics*, Vol. 213, pp. 214, 1985.

[18] W. Briley, H. McDonald, S. Shamroth, A low Mach number Euler formulation and application to time-iterative LBI schemes, *AIAA journal*, Vol. 21, No. 10, pp. 1467-1469, 1983.

[19] E. Turkel, Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations, *Journal of computational physics*, Vol. 72, No. 2, pp. 277-298, 1987.

[20] W. T. Lee, Local preconditioning of the Euler equations, *Ann Arbor*, Vol. 1001, pp. 48109-2140, 1992.

[21] Y. H. Choi, C. L. Merkle, The application of preconditioning in viscous flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 105, No. 2, pp. 207-223, 1993.

[22] C. L. Merkle, Preconditioning methods for viscous flow calculations, *Computational fluid dynamics review*, pp. 419-436, 1995.

[23] C. L. Merkle, J. Y. Sullivan, P. E. O. Buelow, S. Venkateswaran, Computation of flows with arbitrary equations of state, *AIAA journal*, Vol. 36, No. 4, pp. 515-521, 1998.

[24] J. M. Weiss, W. A. Smith, Preconditioning applied to variable and constant density flows, *AIAA journal*, Vol. 33, No. 11, pp. 2050-2057, 1995.

[25] B. Van-Leer, W. T. Lee, P. Roe, Characteristic time-stepping or local preconditioning of the Euler equations, *10th Computational Fluid Dynamics Conference*, Honolulu, HI , U.S.A., 1991.

[26] D. Lee, *Local preconditioning of the Euler and Navier-Stokes equations*, PhD Thesis, University Of Michigan, Michigan, 1996.

[27] M. R. Zaccanti, *Analysis and Design of Preconditioning Methods for Euler Equations*, PhD Thesis, College of Engineering Mississippi State, Mississippi, 1999.

[28] A. Malan, R. Lewis, P. Nithiarasu, An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: Part I. Theory and implementation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, No. 5, pp. 695-714, 2002.

[29] A. G. Malan, R. W. Lewis, P. Nithiarasu, An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: Part II. Application, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, No. 5, pp. 715-729, 2002.

[۳۰] ک. هجران‌فر، ک. فتاح حصاری، ا. عزت نشان، الگوریتم پیش‌شرطی جهت تسریع همگرایی حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر غیرلزج/لزج، *هفدهمین کنفرانس سالانه بین المللی مهندسی مکانیک*، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۸۸.

[31] V. Esfahanian, P. Akbarzadeh, The Jameson's numerical method for solving the incompressible viscous and inviscid flows by means of artificial compressibility and preconditioning method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 206, No. 2, pp. 651-661, 2008.

[32] V. Esfahanian, P. Akbarzadeh, K. Hejranfar, An improved progressive preconditioning method for steady non-cavitating and sheet-cavitating flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 68, No. 2, pp. 210-232, 2012.

[33] P. Akbarzadeh, I. Mirzaee, M.H. Kayhani, E. Akbarzadeh, Blowing and suction effect on drag and lift coefficients for viscous incompressible flows over hydrofoils by power-law preconditioning method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 129-140, 2014.

[34] P. Akbarzadeh, E. Akbarzadeh, Numerical investigation of blowing effect on hydrodynamic behavior of cavitating flows over hydrofoilsusing power law preconditioning method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 8, pp. 59-67, 2014.

[35] P. Tamamidis, G. Zhang, D. N. Assanis, Comparison of Pressure-Based and Artificial Compressibility Methods for Solving 3D Steady Incompressible Viscous Flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 124, No. 1, pp. 1-13, 1996.

[۳۶] پ. اکبرزاده، *روش‌های پیش‌شرط در شبیه‌سازی عددی جریان‌های کاویتاسیون*، رساله دکتری، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۸۹.

[37] E. Turkel, Review of preconditioning methods for fluid dynamics, *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 12, No. 1, pp. 257-284, 1993.

[38] E. Turkel, V. Vasta, R. Radespiel, *Preconditioning Methods for Low-Speed Flows*, NASA Report 201605, ICASE Report 96-57, Virginia, 1996.

[39] E. Turkel, A. Filterman, B. Van Leer, *Preconditioning and the limit to the incompressible flow equations*, NASA Report 191500, ICASE Report 93-42, Virginia, 1993.

[40] A. Jameson, Steady state solution of the Euler equations for transonic flow, *Proceeding of Transonic, Shock and Multidimensional Flows*, New York, U.S.: Academic Press, pp. 37-69, 1982.

[41] A. Jameson, W. Schmidt, E. Turkel, Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes, *AIAA paper*, Vol. 1259, pp. 1-15, 1981.

[42] O. Coutier-Delgosha, R. Fortes-Patella, J.L. Reboud, N. Hakimi, C. Hirsch, Numerical simulation of cavitating flow in 2D and 3D inducer geometries, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 48, No. 2, pp. 135-167, 2005.

[43] O. Coutier-Delgosha, R. Fortes-Patella, J.L. Reboud, N. Hakimi, C. Hirsch, Stability of preconditioned Navier–Stokes equations associated with a cavitation model, *Computers and fluids*, Vol. 34, No. 3, pp. 319-349, 2005.

[44] A. Belov, L. Martinelli, A. Jameson, A new implicit algorithm with multigrid for unsteady incompressible flow calculations, *AIAA paper*, Vol. 95, pp. 49-68, 1995.

[45] O. Coutier-Delgosha, J. Reboud, Y. Delannoy, Numerical simulation of the unsteady behaviour of cavitating flows, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 42, No. 5, pp. 527-548, 2003.

Abstract

Aerodynamic study of flows at low Reynolds for special applications such as micro unmanned underwater vehicles, underwater robots and explorers are interested. In this thesis, an improved progressive preconditioning method named power-law preconditioning method, for analyzing unsteady laminar flows with constant angle of attack and with forced periodical oscillations around hydrofoils is presented. Oscillating unsteady flows have been extensively studied in a variety of contexts. Experimental and numerical studies have explored the dynamics of the wake, details of fish and marine mammal propulsion, the use of oscillating hydrofoils in flow control and ... . In this method, the 2D Navier-Stokes equations modifies by altering the time derivative terms of the governing equations. The preconditioning matrix is adapted from the velocity flow-field by a power-law relation. The governing equation is integrated with a numerical resolution derived from the cell-centered Jameson's finite volume algorithm and a dual-time implicit procedure is applied for solution of unsteady flows. The stabilization is achieved via the second- and fourth-order artificial dissipation scheme. Explicit four-step Runge–Kutta time integration is applied to achieve the steady-state condition. The computations are presented for unsteady laminar flows around NACA0012 hydrofoil at various angles of attack and Reynolds number. Results presented in the thesis focus on the velocity profiles, lift and drag coefficient and effect of the power-law preconditioning method on convergence speed. The results show satisfactory agreement with numerical works of others and also indicate that using the power-law preconditioner improves the convergence speed and decreases the computational cost, significantly.

Keywords: Power-law preconditioning method, Dual-time solution, Finite volume, Unsteady flow, Convergence speed, Forced periodical oscillation

Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Mechanical Engineering

Power-Law Preconditioning Method To Improve The Convergence Of The Numerical Simulation Of Unsteady Flows Around Hydrofoils

Supervisor
Dr. Pooria Akbarzadeh

by
Seyed Moein Derazgisoo

February 2016