بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مکانیک

گرایش طراحی کاربردی

بررسی ارتعاشات تیر میکروسکوپ نیرو اتمی

دانشجو: محمد عباسی

استاد راهنما :

دکتر اردشیرکرمی محمدی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

خرداد ۸۸

To all the people who made me the man I am

تشکر و قدرداني:

شایسته است از زحمات خالصانه استاد محترم **جناب آقاي دکتر اردشير کرمي محمدي** که در طول تحقیق و تدوین پایان‌نامه، اینجانب را حمایت و راهنمایی کردند و همچنین از کمک‌ها و مشاوره‌های دوست عزیزم **جناب آقاي دکتر پژمان افشار** دانشجوی دوره دکترای دانشگاه سیدنی استرالیا کمال قدردانی و تشکر را نمایم.

بررسی ارتعاشات تیر میکروسکوپ نیرو اتمی

محمد عباسی

دانشگاه صنعتی شاهرود، خرداد ۸۸

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

استاد راهنما: دکتر اردشیر کرمی محمدی

چکیده

دستگاه میکروسکوپ نیرو اتمی به عنوان یکی از ابزار آلات مهم در تولید، تحلیل و تهیه تصاویر از سطوح نانو کاربرد گسترده ای دارد. تمرکز عمده این پایان‌نامه بر روی رفتار ارتعاشاتی خطی و غیرخطی تیر یک سر درگیر مستطیل شکل در میکروسکوپ نیرو اتمی می‌باشد. بدلیل مشکلات تولید ناشی از مقیاس پایین مواد، اتصال نوک دقیقا در انتهای تیر یک سر درگیر در حین تولید کاری دشتوار و عملا غیرممکن می‌باشد. در ابتدا حل دقیق معادله مشخصه خمشی و پیچشی در حوزه رفتارهای خطی، برای تیر یک سر درگیر مستطیل شکل با مکان تماس متفاوت بدست آمده است. در نتیجه رفتار فرکانسی سیستم در مکان‌های تماس متفاوت و برای سختی‌های تماسی متفاوت مورد تحلیل قرار گرفته که در این تحلیل، تاثیر برخی از خصوصیات نوک مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین کامل‌ترین مدل

موجود برای تیر یک سر درگیر مستطیل شکل میکروسکوپ نیرو اتمی پیشنهاد شده است. در این مدل پارامترهایی که پیشتر صرفنظر می‌شدند مورد بررسی قرار گرفته‌اند. زاویه تیر یک سر درگیر، ممان اینرسی نوک، مکان تماس و میرایی از جمله پارامترهایی می‌باشند که در این مدل مورد بررسی قرار گرفته اند. میرایی تماسی نیز در این پایان نامه مورد بررسی قرار گرفته است. مدلی برای تماس مماسی بدست آمده است که با توجه به این مدل می‌توان دریافت سختی تماسی مماسی به شدت به اصطکاک وابسته بوده و همیشه کمتر از سختی تماسی عمودی می‌باشد. در نهایت رفتار غیرخطی تیر یک سر درگیر مستطیل شکل بوسیله مدل هرتزین مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. با استفاده از روش سختی تماس می‌توان ارتعاشات غیرخطی را مشابه مسائل خطی مورد بررسی قرار داد.

کلمات کلیدی: میکروسکوپ نیرو اتمی، تیر یک سر درگیر، فرکانس، مکان تماس، میرایی تماسی، سختی تماسی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:

- Effect of Contact Position and Tip properties on the Torsional Vibration Responses of Atomic Force Microscope Cantilever (International Review of Mechanical Engineering (IREME), Vol. 2, No. 6, November 2008)
- Effect of Contact Position and Tip Properties on the Flexural Vibration Responses of Atomic Force Microscope Cantilevers (International Review of Mechanical Engineering (IREME), Vol. 3, No. 2, March 2009)
- Effect of Actuator Placement on Dynamic Response of a Smart Beam (16^{th} annual international conference- ISME 2008)
- Effect of Contact Position and Tip Properties on the Torsional Vibration Responses of Atomic Force Microscope Cantilevers (16^{th} annual international conference- ISME 2008)

فهرست مطالب

لیست شکل ها و نمودارها

فصل اول

مقدمه

۱-۱ پیشینه تحقیق

میکروسکوپ نیرو اتمی (AFM) [1] به صورت یک تیر یک سر درگیر [2] و نوک [3] متصل شده در انتها، برای اولین بار بوسیله کوئت و گربر [4] در سال ۱۹۸۶ برای ایجاد تصاویر با دقت بالا از سطوح اجسام، ساخته شد [۱]. این دستگاه در زمینه نانوتکنولوژی برای شناخت خصوصیات اجسام مانند توپوگرافی، سختی و چسبندگی سطح و خصوصیات ویسکوالاستیسیته، استفاده فراوان دارد. نوک متصل شده در یک انتهای تیر، برای تماس با نمونه و یافتن خصوصیات آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. چون اندازه شعاع تماس چند نانومتر، یا حتی چند صد انگستروم می باشد و بار تماسی نیز بیشتر از چند نانومتر نمی‌باشد، آسیب چندانی به سطح نمونه وارد نمی‌شود. همچنین این روش جدید، تقریبا در اکثر علوم تحقیقاتی

---

[1] Atomic Force Microscope
[2] Cantilever
[3] Tip
[4] Quate and Gerber

مواد، از جمله کامپوزیت‌ها، شیمی، بیوشیمی، فیزیک و بیولوژی کاربرد فراوان یافته است. به طور معمول، توپوگرافی سطح با استفاده از حرکت نسبی بین حساسه[۵] AFM و سطح نمونه در هنگام روبش[۶] سطح توسط حساسه، اندازه گیری می‌شود. تغییر مکان حساسه AFM، ناشی از برهم‌کنش بین حساسه و سطح نمونه، به صورت تابعی از موقعیت سطح برای تولید تصاویری با دقت بالا از سطح نمونه استفاده می‌شود. چهار شکل مرسوم برای تیرهای میکروسکوپ نیرو اتمی موجود می‌باشند که بیشترین استفاده را دارند: مستطیلی، خنجر شکل، مثلثی و V- شکل. هر کدام از این شکل‌ها برای هدف خاصی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

پیشرفت‌های اخیر در میکروسکوپ نیرو اتمی، اغلب در زمینه خصوصیات دینامیکی این دستگاه بوده است. این پیشرفت‌ها، میکروسکوپ نیرو اتمی را قادر ساخته است تا به صورت گسترده‌ای در زمینه تعیین خصوصیات مواد، مورد استفاده قرار گیرد. همچنین با انجام تغییرات در سیستم کلی میکروسکوپ، دستگاه‌های جدیدی بوجود آمده‌اند که از این قبیل می‌توان به میکروسکوپ اکوستیک نیرو اتمی (AFAM)[۷]، میکروسکوپ روبشی انحرافات میکرو (SMM)[۸] و میکروسکوپ نیرویی فرا

[5] Probe
[6] Scanning
[7] Atomic Force Acoustic Microscopy
[8] Scanning micro-deformation microscopy

صوتی (UFM)[9] اشاره نمود. از این روش‌های جدید می‌توان برای اندازه‌گیری سختی سطح نمونه و مدول موضعی سطح مواد استفاده نمود.

بنابراین نقش برهم کنش بین نوک و نمونه در دستگاه اندازه‌گیری AFM در ارزیابی خصوصیات نمونه بسیار آشکار می‌باشد. تحقیقات تئوری و آزمایشگاهی انجام شده، نشان می‌دهد که این برهم‌کنش‌ها پیچیده و غیر خطی می‌باشند. در حال حاصر چندین تئوری برای مدل نمودن این برهم‌کنش‌ها وجود دارد که از آن جمله می‌توان به تئوری تماسی JKR، DMT، BCP، هرتزین و ماگیس[10] اشاره نمود.

در عمل همیشه یک بار اولیه به نوک وارد می‌شود که باعث بوجود آمدن انحراف اولیه در تیر می‌شود. اگر انحراف اولیه به اندازه کافی بزرگ و دامنه به اندازه کافی کوچک باشد، مدل تماسی را می‌توان به صورت خطی مدل نمود. اساسی‌ترین و ساده‌ترین مدل برای تیر میکروسکوپ نیرو اتمی، یک فنر خطی بوده که مهم ترین تئوری برای ارزیابی خصوصیات مواد می‌باشد. در نتیجه اکثر تئوری های در نظر گرفته شده برای تحلیل AFM/AFAM بر مبنای مدل تماسی خطی می‌باشند.

چون اندازه طولی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی به کوچکی μm ۴۰۰-۱۰۰ می‌باشد، اتصال نوک دقیقا در انتهای تیر در حین تولید کاری دشتوار و عملا غیر ممکن می‌باشد. از اینرو اطلاعات گرفته شده از تولید کنندگان در زمینه خصوصیات تیر میکروسکوپ نیرو اتمی از جمله مکان، طول و جرم نوک و ضخامت

---

[9] Ultrasonic Force Microscopy
[10] Hertzian and Maugis

تیر صحیح نمی‌باشند. تحقیقات تئوری انجام گرفته نشان می‌دهند که این پارامترها در پاسخ های دینامیکی بسیار تاثیرگذار می باشند.

۲-۱ تحلیل ارتعاشات تیر یک سر درگیر میکروسکوپ نیرو اتمی

تحلیل رفتار دینامیکی تیر یک سر در گیر میکروسکوپ نیرو اتمی برای بسیاری از روش‌های این نوع میکروسکوپ بسیار اساسی می‌نماید. بررسی ارتعاشات خمشی خطی تیر مستطیل شکل و موازی سطح نمونه با شرایط تماس خطی یک مسئله مرسوم بوده و حل دقیق آن در بسیاری از مراجع آمده است [۲]، [۳]، [۴]، [۵] و [۶]. از اینرو تحلیل‌های دینامیکی سیستم خطی تا حد بسیاری پیشرفت کرده است. اما به علت عدم انطباق بین پیش‌بینی‌های تئوری با اندازه‌گیری های عملی برای برخی تحلیل‌ها، هنوز مسائل حل نشده مهمی وجود دارند. رابه[11] حل عمومی برای حالتی که تیر موازی سطح بوده و نوک دقیقا در انتها واقع باشد، با صرفنظر از برخی پارامترها نظیر جرم و ارتفاع نوک، در سال ۱۹۹۶ بدست آورد [۶] و [۷]. محل تماس تاثیر بسزایی بر فرکانس تیر دارد [۶]. چانگ[12] نیز معادله مشخصه سیستم را برای حالتی که تیر موازی سطح نبوده، اما نوک دقیقا در انتهای تیر قرار داشته باشد مورد بررسی قرار داده است [۸]. هر چند او در تحلیل‌های خود از ممان بوجود آمده در نوک، اثر ضخامت تیر و ارتفاع نوک صرفنظر نموده است. در این پایان‌نامه ما نشان خواهیم داد که این ممان مهم بوده و نمی-

---
[11] Rabe
[12] Chang

توان از آن صرفنظر نمود. هنگامی که تیر موازی سطح نبوده و نوک دقیقا در انتها قرار نگیرد و با وجود تماس میرایی، رفتار دینامیکی سیستم روشن نمی‌باشد. در این پایان‌نامه همچنین سعی شده است، کامل‌ترین مدل تیر میکروسکوپ نیرو اتمی مورد بررسی قرار گیرد و معادلات حاکم حاصل شوند. برای تیرهای ناهمسان، حل دقیق تنها برای موارد خاص در دسترس می‌باشند [۹]، [۱۰] و [۱۱].

مطالعات بسیاری بر روی تماس میرایی در میکروسکوپ نیرو اتمی صورت گرفته است [۶]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۴] و [۱۵]، [۱۶]، [۱۷]، [۱۸] و [۱۹]. تماس میرایی بوسیله چسبندگی، اصطکاک و تغییر شکل حجمی ماده ویسکوالاستیک در منطقه تماس بوجود می‌آید [۲۰]، [۲۱] و [۲۲]. میندلین و درسیویچ[13] مطالعاتی بر روی اتلاف انرژی در تماس الاستیک برای مواد همسان تحت بارهای مماسی نوسانی برای حالت‌های مختلف بارگذاری و باربرداری عمودی انجام داده‌اند [۲۳]. برای مواد ناهمسان در تماس که تنها تحت بار عمودی قرار دارند، در منطقه تماس یک لغزش جزئی وجود دارد [۲۴]. سابوت[14] با استفاده از مدل هرتزین، میرایی را برای حالت تماس صفحه و کره، بدون چسبندگی و تحت بار نرمال هارمونیک مورد بررسی قرار داد [۲۵]. او دریافت که میرایی لزج با مساحت تماس، سختی تماس و شعاع کره متناسب می‌باشد. سابوت همچنین میرایی سیال را با آزمایش چندین سیال لزج در منطقه تماس مورد بررسی قرار داد. آزمایشات نشان داد که میرایی تماسی به آرامی افزایش یافته و با

[13] Mindlin and Deresiewicz
[14] Sabot

ویسکوزیته دینامیکی سیال متناسب می‌باشد. اما او رابطه ای برای نرخ بین بار و میرایی بیان نکرد و نتایج را برای محدوده کوچکی از فرکانس بدست آورد. کندال[15] نشان داد که اتلاف انرژی در تغییر شکل حجمی جسم‌های ویسکو الاستیک چندین مرتبه از کار چسبندگی بیشتر می‌باشد [۲۶]. اما او رابطه ای بین اتلاف انرژی و تغییر شکل جحمی ارائه ننمود. اخیرا نیز فابرونی[16] میرایی را در یک شیشه نیم کروی و در تماس با فیلم لاستیکی نازک به ضخامت تقریبی μm ۱۰۰، با استفاده از اتلاف انرژی در سیکل باربرداری-بارگذاری به صورت عملی مورد بررسی قرار داد [۲۷]. اگر چه هیچ رابطه مشخصی را ارائه نداد. اسچپری[17] مدلی دو بعدی برای مواد ویسکوالاستیک ارائه نمود [۲۸]. جانسون[18] نیز مدل اسچپری را بسط داده و یک مدل تماسی جدید برای مواد ویسکوالاستیک دوبعدی ارائه نمود [۲۰]. متاسفانه این مدل تنها برای نرخ پایین باربرداری-بارگذاری معتبر می‌باشد. در این پایان‌نامه نتایج میندلین برای بار مماسی متناوب و نامتقارن بسط داده شده است و مدلی برای میرایی تماسی الاستیک بدست آمده است. معادله ای برای سختی مماسی نیز ارائه شده است که برای تحلیل ارتعاشات پیچشی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی و ارزیابی خصوصیات مواد مفید می‌باشد.

---

15 Kendall
16 Fabbroni
17 Schapery
18 Jahnson

هنگامی که دامنه ارتعاشات به اندازه کافی کوچک نباشد، شرایط تماس خطی دیگر با ارزش نمی‌باشند. تماس غیرخطی یکی از مهمترین قسمت‌های ارتعاشات میکروسکوپ نیرو اتمی می باشد و تحقیقات بسیاری، هم در زمینه عملی و هم تئوری انجام گرفته است. نایفه[۱۹] تحقیقات بسیاری در زمینه تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر انجام داد [۲۹]. رابه [۳۰]، داینلی [۳۱]، بیوسگارد [۱۲]، کیوبرس [۳۲] و لی[۲۰] [۳۳] رفتارهای غیر خطی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی را به صورت عملی مورد بررسی قرار دادند. بیوسگارد اتلاف غیرخطی ناشی از برهم‌کنش‌های جذبی را مورد مطالعه قرار داد [۱۲]. موراوکا[۲۱] پاسخ‌های غیر خطی را اندازه گیری نمود و روشی تقریبی برای بررسی رفتارهای غیرخطی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی با تماس در انتها، معرفی نمود [۳۴]. وی[۲۲] رفتارهای غیر خطی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی با تماس هرتزین در انتهای تیر را بوسیله حل هارمونیک تقریبی مورد بررسی قرار داد [۳۵]. اخیرا نیز، تورنر[۲۳] از روش چند مقیاسی پرتوربیشن[۲۴] برای حل مسئله‌ای مشابه وی استفاده نمود و رفتارهای نرمی، برای تمام فرکانس های AFM را نشان داد [۳۶]. اگر چه از محل تماس در این تحلیل‌ها صرفنظر شد. در این پایان‌نامه رفتار فرکانسی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی، برای

---

[19] Nayfeh
[20] Rabeh, Dinelli, Biosgard, Cuberes and Lee
[21] Muraoka
[22] Wei
[23] Turner
[24] Multi-Scale Perturbation Method

حالت تماس نزدیک انتها، مورد بررسی قرار گرفته است و یک معادله مشخصه غیرخطی بدست آمده است.

۱-۳ هدف

اولین هدف این تحقیق، ارائه روش تحلیلی کلی، که شامل اکثر و یا حتی تمامی پارامترهایی که بر روی رفتار دینامیکی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی تاثیر گذار هستند (ارتفاع، جرم و ممان اینرسی نوک، زاویه تیر و میرایی) می باشد. معادله مشخصه، که اطلاعاتی در زمینه رفتار دینامیکی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی فراهم می‌سازد، با مکان تماس و زوایای متفاوت و با وجود میرایی، مورد بررسی قرار گرفته است.

هدف دوم مطالعه مدل تماسی الاستیک و میرایی تماسی بین نوک AFM و نمونه می باشد. بر اساس مدل تماسی میندلین، مدل‌های مکانیکی تماس در هر دو جهت مماسی و عمودی سطح تماس بدست آمده است. سختی تماس در جهت مماسی با استفاده از مکانیک تماس کلاسیک نیز بدست آمده است. همچنین یک مدل میرایی تماس برای بار عمودی ثابت و مماسی نامتقارن ارائه شده است. بخاطر بار مماسی نامتقارن، میرایی تماسی هنگامی که با مدل تماسی میندلین مقایسه می شود، افزایش می یابد.

و هدف آخر از این تحقیق بررسی رفتار غیرخطی سیستم می‌باشد. مدل هرتزین و مدل میرایی که پیشتر بدست آمده بود، برای نشان دادن رفتار غیرخطی تیر در نقاط مختلف تماس مورد استفاده قرار

گرفته است. از روش سختی موثر در تحلیل‌های غیرخطی استفاده کرده‌ایم تا بتوانیم رفتار دینامیکی غیرخطی سیستم را تحلیل نماییم.

در فصل دوم، کلیاتی از میکروسکوپ نیرو اتمی آورده شده است. ارتعاشات خطی تیر مستطیل شکل به صورت کامل، شامل مکان و زوایای تماس متفاوت و با وجود میرایی در فصل سوم مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل چهارم مدل‌های تماس میرایی و الاستیک مورد مطالعه قرار گرفته است. رفتارهای دینامیکی غیرخطی سیستم با استفاده از روش سختی موثر در فصل پنجم بررسی شده است. در نهایت در فصل ششم به نتیجه‌گیری و معرفی مطالعاتی که در آینده می‌توان انجام داد پرداخته‌ایم.

فصل دوم

کلیات میکروسکوپ نیرو اتمی

۲-۱ مقدمه

به طور یقین احتیاجی به تاکید اهمیت نقش عکس‌برداری توسط میکروسکوپ‌ها در علوم طبیعی، پزشکی و علوم مختلف مهندسی نمی‌باشد. با توجه به تناوب اختصاص جوایز نوبلی که در چند دهه گذشته به مخترعان و محققانی که در این زمینه فعالیت می‌کردند، می‌توان به اهمیت این دستگاه پی‌برد. امروزه به علت نیازهای گسترده به شناخت تکنولوژیهای کلیدی، اشتیاق بسیاری برای پیشرفت‌های بیشتر در این فیلد دیده می‌شود به طوری که این فیلد محققان بسیاری را به خود جذب نموده است. به حتم، یکی از این تکنولوژی‌های کلیدی، میکروالکترونیکها می‌باشند که بدلیل کاهش در ابعاد، این دستگاهها باعث پیشرفت در روش‌هایی که به بالا بردن دقت کمک می‌کنند، می‌شوند. متعاقبا پیشرفت در قابلیت‌های روش‌های میکروسکوپی باعث پیشرفت در مواد عملی جدید و شناخت

خصوصیات مواد در عملکردهای متفاوت و بالا بردن سطح دقت می‌شود که تاثیر آن، شناخت ساختارها، میکروساختارها و عیوب هندسی بوده که به اندازه ترکیب‌های شیمیایی و توزیع فضایی، در تعیین رفتار مواد و کاربردهای عملی مهم می‌باشند.

میکروسکوپ های پراب روبشی[۲۵] دارای حوزه عملکرد گسترده می‌باشند که در آنها از یک حساسه تیز جهت روبش استفاده شده است تا بتواند خصوصیات سطح، نظیر توپوگرافی، نیرو، سختی و رسانایی ماده را اندازه گیری کند. میکروسکوپ‌های پراب روبشی یکی از ضروری‌ترین دستگاه‌ها برای سنس کردن و ساخت مواد در مقیاس‌هایی از چند میکرون تا کمتر از یک نانومتر می‌باشند. این دستگاه‌ها در رشد و پیشرفت علم نانو و مهندسی سهم بسزایی داشته‌اند و پیش بینی می‌شود که به علت حساسیت بی سابقه آنها در سنس نمودن نیروهایی به کوچکی 10^{-18} نیوتن، این دستگاه‌ها به عنوان ابزارهایی برای تصویربرداری سه بعدی از ساختار مولکولها به کار روند [سوتر ۲۰۰۴، سیدلز ۱۹۹۱].

در سال ۸۱-۱۹۸۰ در حالی که بینینگ و رهرر[۲۶] [۳۷] در لابراتور تحقیقاتی زوریخ با نام IBM مشغول تحقیق بودند، موفق به اختراع اولین نوع میکروسکوپ پراب روبشی شدند و آن را میکروسکوپ جریان روبشی (STM)[۲۷] نامیدند که مدتی بعد، در سال ۱۹۸۶ جایزه نوبل را برای آنها به ارمغان آورد. دستگاه جدید که قابلیت تصویربرداری از سطوح جامد با دقت اتمی را دارا بود، انقلابی بی سابقه در

---

[25] Scanning Probe Microscopes
[26] G. Binning and H. Rohrer
[27] Scanning Tunneling Microscope

فیلد میکروسکوپ ها و آنالیزهای سطحی در ۲۵ سال گذشته بوجود آورد. با نگاهی به گذشته، مشهود است که موفقیت بی سابقه STM تنها مربوط به دقت بالایی که توسط این روش بدست آمده، نیست. تحولی که STM در فیلد میکروسکوپ ها بوجود آورد و روش پراب روبشی (SPM)[۲۸] را بنیان نهاد، اگر پراهمیت‌تر از پیشرفت در دقت میکروسکوپ‌ها نباشد، کم اهمیت‌تر نیست. STM، تنها می‌تواند بر روی سطوح رسانا عمل کند و از این جهت دارای محدودیت می باشد. در سال ۱۹۹۶، بینیگ و گربر [۱] توانستند با اتصال یک حساسه خیلی کوچک به انتهای یک تیر یک سر درگیر[۲۹]، برای سنس کردن بر روی اجسام چه رسانا و چه غیر رسانا، عضو جدیدی از میکروسکوپ‌های پراب روبشی را اختراع کنند که آن را میکروسکوپ نیرواتمی (AFM)[۳۰] نامیدند. میکروسکوپ نیرواتمی، مهمترین عضو خانواده میکروسکوپ‌های پراب روبشی می‌باشد. امروزه STM و AFM به عنوان مجموعه ای از میکروسکوپ‌ها که می توانند در کاربردهای متفاوت به کار روند، مورد استفاده قرار می‌گیرند تا بتوانند خصوصیات مختلف شیمیایی و فیزیکی مواد را بدست آورند.

توضیحات در این فیلد بسیار زیاد می‌باشد. هدف از این فصل، ارائه مقدمه‌ای مختصر و کلی در مورد میکروسکوپ‌های پراب روبشی اما به صورت ویژه در مورد میکروسکوپ نیرو اتمی و کاربردهای آن در علم مواد می‌باشد.

---

[28] Scanning Probe Methods
[29] Cantilever
[30] Atomic Force Microscope

۲-۲ تکنولوژی پراب روبشی: مفاهیم بنیادی

تمامی روش‌هایی که در زمره روشهای پراب روبشی قرار می‌گیرند، باید دو شرط اساسی را داشته باشند: روبش و عملکرد حساسه[۳۱] در نزدیکی میدان.

عملکرد حساسه در نزدیکی میدان به این معناست که حساسه روبش کننده به اندازه کافی نزدیک به سطح نمونه حرکت کند. برای تصویر برداری از سطح نمونه، ابتدا حساسه در راستای عرضی سطح نمونه روبش می‌کند تا نقشه محلی سطح یعنی نقشه دو بعدی سطح نمونه حاصل گردد. با قرار دادن نقشه محلی در برابر موقعیت عرضی نوک در هر لحظه، نقشه توپوگرافی سطح بدست می‌آید.

هنگامی که نوک[۳۲]، سطح را روبش می‌کند، یک بر هم کنش دینامیکی متغیر بین سطح و نمونه بوجود می‌آید. اگر فاصله حساسه و سطح در حد چند نانومتر باشد، نیرو های وان در والسی بین حساسه و سطح ایجاد می‌شود. اگر علاوه بر این یک اختلاف پتانسیل الکتریکی به صورت خارجی اعمال شود، برهم‌کنش الکترواستاتیکی اتفاق می‌افتد. اگر جنس حساسه و نمونه هر دو از مواد فرومغناطیس باشد سپس نیروهای مگنواستاتیکی ایجاد خواهد شد. اگر فاصله نوک و نمونه به حدود یک نانومتر کاهش یابد یک جریان محلی بین نمونه و سطح پیدا خواهد شد. البته این در صورتی می‌باشد که هردوی آنها رسانا یا نیمه رسانا باشند. مواردی که گفته شد اصولی بود که STM بر مبنای آنها کار می‌کرد. اگر

---

[31] Probe
[32] Tip

حساسه قادر به جمع یا انتشار اشعه در مقیاس پایینتر از طول موج باشد، سطح نمونه را می‌توان پایینتر از محدوده انتشار (پراش) تصویربرداری نمود. از این اصل در SNOM[۳۳] استفاده می‌شود. همچنین می‌توان حساسه‌های مناسب را در تماس مکانیکی مستقیم با سطح نمونه قرار داد تا بتوان اطلاعاتی از توپوگرافی سطح و برهمکنش‌های سطحی و نیز پاسخ‌های الاستیکی و غیرالاستیکی سطح را بدست آورد. برهمکنش‌های دیگری نیز بین حساسه و سطح وجود دارد که شامل اکوستیک میدان نزدیک، انتقال یون یا حرارت می‌باشند. صرفنظر از نوع پیکربندی حساسه و سطح از پارامترهای اعمالی خارجی، برهم کنش‌های بوجود آمده بین حساسه و سطح می‌توانند تحت تاثیر شرایط محیطی، چه محیط‌های گازی و چه مایع قرار گیرند.

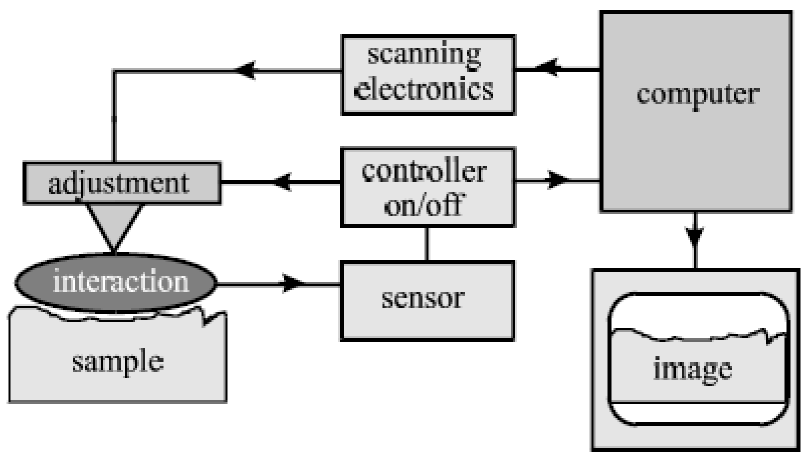
عملکرد میدان نزدیک، پیش‌نیازی جهت بدست آوردن دقت بالای سه بعدی بوسیله شکستن محدوده پراش می‌باشد. اگر چه عملا برای بدست آوردن وضوح بالا، باید از پتانسیلی جهت ثابت نگاه داشتن حساسه در منطقه میدان نزدیک در برابر موقعیت عمودی آن استفاده کرد و جایگیری عرضی نوک باید به حد کافی دقیق باشد. دقت اتمی یا حتی زیر اتمی در جایگیری با بکار گیری محرک پیزوالکتریک بدست خواهد آمد. با استفاده از اثر پیزوالکتریک، ولتاژی بر الکترودهای محرک اعمال می‌شود که می‌تواند مستقیما باعث انقباض یا انبساط المان‌های پیزو شود. برای اولین بار بینیگ و روهرر در سال

---

[33] Scanning Near-Field Optical Microscopy

۱۹۸۲ توانستند بوسیله یک آرایش منظم لوله های پیزوالکتریک به صورت یک سه پایه به موقعیت یابی سه‌بعدی دست یابند.

همانطور که پیشتر گفته شد، ضروری است که همواره حساسه در میدان نزدیک برهم کنش بین نوک با نمونه نگاه داشته شود. (شکل ۲-۱)



شکل ۲-۱ اجزای یک دستگاه پراب روبشی [۷۵]

در STM این برهم‌کنش با ایجاد یک جریان که بسیار وابسته به فاصله بین حساسه و نمونه می‌باشد، خود را نشان می‌دهد که تغییرات درفاصله به اندازه قطر اتم، بزرگی جریان را به اندازه یک مرتبه تغییر می‌دهد. بنابراین کنترل فاصله بین حساسه و نمونه بوسیله یک مکانیزم فیدبک که برهم‌کنش ایجاد شده را همواره ثابت نگاه دارد ضروری است.

۲-۲-۱ عملکرد میکروسکوپ نیرو اتمی

اصولی که میکروسکوپ نیرو اتمی بر مبنای آنها کار می‌کند، بسیار ساده می‌باشند. یک نوک تیز با مکانیزم فیدبک، سطح را اسکن می‌کند. در این حالت اسکنر پیزو الکتریک بسته به خروجی مطلوب به دو روش می تواند عمل می‌کند، در صورتی که خروجی مطلوب، اطلاعات ارتفاع باشد، نیروی ما بین نوک و سطح را ثابت داشته و در صورتی که خروجی مطلوب نیروی ما بین نوک و سطح باشد، ارتفاع را ثابت نگاه می‌دارد. میکروسکوپ نیرو اتمی از یک سیستم آشکار ساز نوری استفاده می‌کند، در این سیستم نوک در زیر یک تیر که قسمت فوقانی آن انعکاسی می‌باشد، قرار می‌گیرد. بوسیله دیود نوری، بر پشت تیر تابیده می‌شود. همانطور که نوک سطح را اسکن می‌کند و با پستی بلندی‌های سطح بالا و پایین می‌رود، اشعه تابیده شده بر روی یک فوتو دیود دو المانی بارتاب می‌شود. فوتو دیود تغییرات در بزرگی بازتاب بین دو المان بالا و پایین را اندازه گیری کرده و اختلاف را به ولتاژ تبدیل می‌کند. با فیدبک کردن اختلاف سیگنال فوتو دیود در هر لحظه بوسیله یک نرم افزار کنترلی و اعمال آن بر روی اسکنر پیزوالکتریک، نوک این امکان را می‌یابد که نیرو یا ارتفاع خود را در بالای سطح ثابت نگاه دارد.

در حالت نیرو ثابت، مبدل پیزوالکتریک در هر لحظه تغییرات ارتفاع را مانیتور می‌کند و در حالت ارتفاع ثابت، تغییرات نیرو را ثبت می‌کند. نوعی از این میکروسکوپ ها قادرند قرص‌هایی تا حدود mm ۲۰۰

را اسکن کنند. هدف اصلی این دستگاه اندازه‌گیری برجستگی‌های سطح به طور کمی با دقت افقی نامی ۵ nm و عمودی nm ۰.۱ برای انواع نمونه‌ها می‌باشد.

ابتدا میکروسکوپ ارتفاع موضعی را اندازه گیری می‌کند. با نقشه کردن ارتفاع موضعی در مقابل موقعیت افقی نوک، نقشه توپو گرافی سه بعدی سطح حاصل می‌شود.

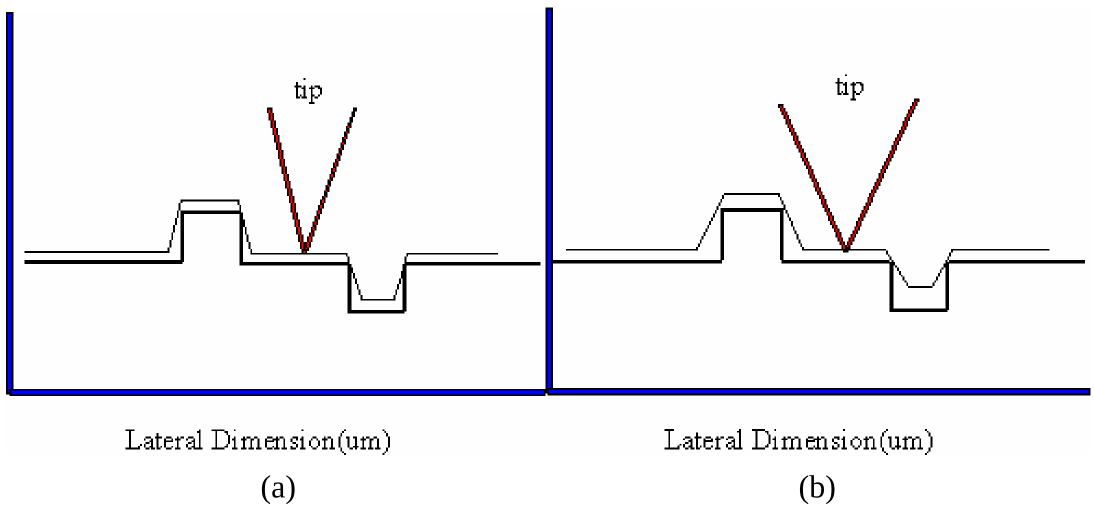
۲-۲-۲ دقت میکروسکوپ نیرو اتمی

به طور کلی دقت به تمایز بین دو نقطه متفاوت گفته می‌شود. عموماً این تمایز با دقت افقی سنجیده می‌شود. مفهوم دقت در میکروسکوپ نیرو اتمی با میکروسکوهای نوری متفاوت می‌باشد، زیرا روش عکس برداری در میکروسکوپ نیرو اتمی روش سه‌بعدی می‌باشد.

معمولاً برای بررسی دقت، عرض مولکول DNA را که ۲ nm می‌باشد، معیار قرار می‌دهند که بهترین تصاویر گرفته شده با AFM از DNA این مقدار را ۳ nm نشان می‌دهد. اما متاسفانه این تعریف از دقت کمی غلط انداز می‌باشد زیرا که ارتفاع نمونه تاثیر بسزایی در این مقدار دارد.

عوامل متفاوتی در دقت میکروسکوپ نیرو اتمی نقش دارند که یکی از مهمترین آنها شعاع انحنا نوک می‌باشد. تصاویر گرفته شده از DNA با نوک تیز تر افزایش بسزایی در دقت عرض مولکول را نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که هر چقدر نوک تیز تر باشد، بر دقت تصویر افزوده می‌شود. با مقایسه دو

شکل زیر دیده می‌شود که هنگامی که نوک تیز تر می‌باشد، در بر خورد با نا صافی های سطح، محدوده بیشتری از این ناصافی ها را تحت پویش قرار می‌دهد.



شکل۲-۲ تاثیر تیزی نوک بر دقت سطح

۲-۲-۳ مدهای معمول میکروسکوپ نیرواتمی

۲-۲-۳-۱ مد تماسی

در پویش سطح، هنگامی که نوک نزدیک سطح حرکت می‌کند، به طور معمول در میکروسکوپ نیرو اتمی از مد تماسی استفاده می‌کند. در این حالت نیرویی از نوع دافعه با حداقل مقدار $10^{-9}N$ بر نوک اعمال می‌شود که این نیرو با فشار دادن تیر به سمت سطح نمونه به کمک المان پیزوالکتریک ثابت

می‌ماند. به طور خلاصه روش کار میکروسکوپ در حالت تماسی بدین شرح می‌باشد؛ ابتدا تیر با یک انحنا اولیه بر سطح نمونه قرار می‌گیرد (سنس می‌شود). این انحنا در یک فیدبک امپلی فایر مقایسه شده و در مقدار مطلوب قرار می‌گیرد. در هنگام روبش، این انحنا در هر لحظه اندازه گیری می‌شود. اگر انحنای اندازه‌گیری شده با انحنای مطلوب متفاوت باشد، امپلی فایر ولتاژی بر پیزو اعمال می‌کند تا نمونه را به بالا یا پایین حرکت دهد و انحنا را در مقدار مطلوب قرار دهد. بدین ترتیب بوسیله ولتاژ اعمال شده توسط امپلی فایر تغییر مکان‌های اعمال شده بر روی نمونه در طول اسکن بدست می‌آید و سیمای سطح نمونه حاصل می‌شود که به صورت تابعی از مکان افقی نمونه نمایش داده می‌شود تا نقشه سه بعدی سطح بدست آید. به جز تعدادی از میکروسکوپ ها که در شرایط ولتاژ بالا (UHV) کار می-کنند، اکثر آنها در شرایط اتمسفر یا داخل مایع کار می‌کنند. در شرایط محیط سطوح نمونه به وسیله لایه‌ای از گازهای جاذب که عمدتاً شامل ۳۰-۱۰ تک لایه مولکولی از بخار آب و نیتروژن می‌باشند، اشباع می‌شود. هنگامی که حساسه با این لایه آلاینده در تماس قرار می‌گیرد، این گازها بر روی سطح به شکل هلالی در آمده و تیر به وسیله کشش سطحی بوجود آمده به سمت سطح کشیده می‌شود. بزرگی این نیرو به شکل هندسی سطح بستگی دارد، اما معمولاً در حدود ۱۰۰ nm می‌باشد.

۲-۲-۳-۲ مد غیرتماسی

از مد غیرتماسی هنگامی استفاده می شود که سطح نمونه حساس بوده و احتمال صدمه نوک به سطح وجود داشته باشد. در این حالت نوک ۵۰ تا ۱۵۰ انگستروم بالاتر از سطح قرار می‌گیرد و نیروهای بین نوک و سطح نمونه، نیروهای وان در والسی جذبی می‌باشند. تصاویر توپوگرافیک بوسیله اسکن نوک در بالای سطح نمونه بدست می‌آید. متاسفانه نیروهای جاذبه که از طرف سطح اعمال می‌شوند اساسا نسبت به نیروهای استفاده شده در مد تماسی ضعیف می‌باشند. در نتیجه باید به نوک نوسان کوچکی داده شود تا بتوان روش آشکارساز AC را برای اندازه گیری نیروهای کوچک بین نوک و نمونه بوسیله اندازه‌گیری تغییرات دامنه، فاز یا فرکانس نوسانات تیر در پاسخ به گرادیان نیرو از سطح، بکار برد.

برای وضوح بیشتر لازم است گرادیان نیروهای وان‌دروالسی که ممکن است در طول سطح تنها چند نانومتر تفاوت کنند، اندازه‌گیری شود.

۲-۲-۳-۳ مد متناوب

از مد متناوب می‌توان به عنوان یک پیشرفت مهم در AFM نام برد. این روش قوی، این امکان را فراهم می‌سازد تا بتوان تصاویر سه‌بعدی با وضوح بالا از سطح نمونه‌هایی که به راحتی با اسکن صدمه می‌بینند، از لحاظ شیمیایی ناپایدارند یا با روش های دیگر میکروسکوپ نیرو اتمی نمی‌توان اسکن کرد،

تهیه نمود. مد متناوب با قرار دادن متناوب نوک در تماس با سطح برای بالا بردن وضوح و سپس بالا بردن نوک از سطح برای جلوگیری از آسیب به سطح، قادر است بر مشکلات ناشی از اصطکاک، چسبندگی، نیروهای الکتریکی و نارساهایی که در یک میکروسکوپ نیرو اتمی معمولی پدیدار می‌شوند، غلبه کند. مد تماسی در شرایط محیط، با نوسان دادن اهرم در یا نزدیک فرکانس تشدید اهرم با استفاده از یک کریستال پیزوالکتریک انجام می‌پذیرد. حرکت پیزو باعث می‌شود تا اهرم هنگامی که نوک در تماس با سطح نیست، با دامنه بالا (معمولا بیشتر از ۲۰nm) نوسان کند. سپس نوک نوسان کننده به سمت سطح حرکت می‌کند تا لحظه ای که تماس محدودی با سطح پیدا کند یا ضربه آهسته-ای به سطح بزند. در مدت اسکن، نوک نوسان کننده به صورت مداوم معمولا با فرکانس ۵۰،۰۰۰ تا ۵۰۰،۰۰۰ سیکل بر ثانیه در تماس با سطح قرار می‌گیرد و بالا می‌رود. هنگامی که اهرم در آغاز تماس به صورت غیرمداوم با سطح قرار می‌گیرد، نوسان سطح لزوما به علت افت انرژی ناشی از تماس نوک با سطح، کاهش می‌یابد. به طور معمول از کاهش در دامنه نوسان، برای معین کردن و اندازه‌گیری سیمای سطح استفاده می‌شود. در طی اسکن با مد متناوب، دامنه نوسان تیر بوسیله یک حلقه فیدبک ثابت نگاه داشته می‌شود. انتخاب فرکانس نوسان بهینه با کمک نرم افزار مناسب انجام می‌پذیرد و نیروی وارد شده بر نمونه به طور اتوماتیک تنظیم شده و در حداقل مقدار خود قرار می‌گیرد. وقتی که نوک از روی برآمدگی عبور می‌کند، تیر فضای کمی برای نوسان پیدا می‌کند و دامنه نوسان کاهش می‌یابد. و به

عکس هنگامی که نوک از روی یک فرورفتگی عبور می‌کند، ناگهان فضای نوسان تیر افزایش می‌یابد و متعاقبا دامنه نوسان افزایش می‌یابد (نهایتا به حداکثر دامنه ممکن در فضای آزاد می‌رسد). دامنه نوسان بوسیله یک آشکارساز (فوتو دیود)، اندازه‌گیری می‌شود و سپس با استفاده از یک حلقه فیدبک دیجیتال، فاصله نوک و نمونه تنظیم می‌شود تا دامنه نوسان و نیرو ثابت گردد. مد متناوب به طور ذاتی از چسبندگی به سطح و صدمه به سطح در مدت اسکن جلوگیری می‌کند. بر خلاف مد تماسی و غیرتماسی، در مد متناوب، هنگامی که نوک با سطح در تماس قرار می‌گیرد، دامنه نوسان به اندازه‌ای می‌باشد که بر نیروهای چسبندگی سطح غلبه کند. همچنین در این دو مد نمونه بوسیله نیروهای برشی به اطراف کشیده می‌شود، اما در مد متناوب چون نیروهای اعمال شده بر جسم همیشه عمودی می‌باشند، این اتفاق نمی‌افتد. مزیت دیگر مد متناوب بازه عملکرد خطی و وسیع آن می‌باشد که باعث می‌شود سیستم فیدبک از پایداری بالایی برخوردار باشد.

به طور خلاصه

در مد تماسی، نیروهای کشش سطحی و نیروهای الکترواستاتیک ناشی از لایه گازهای جذب شده باعث کشیده شدن نوک به طرف سطح می‌شود. که می‌تواند باعث صدمه به نمونه شود. بنابراین تصاویری که

در مد تماسی بدست می‌آیند نسبت به تصاویر تهیه شده در مد غیرتماسی و متناوب ، به شدت تحت تاثیر نیروهای اصطکاک و چسبندگی قرار دارند.

در مد غیرتماسی تصاویر از وضوح پایینی برخوردارند و همچنین ممکن است به وسیله لایه‌های آلاینده که نوسان را مختل می‌کنند، از بین بروند.

مد متناوب به عنوان روشی که تصاویر در آن از وضوح بالایی برخوردارند و چه در هوا و چه در سیال تحت تاثیر نیروهای اصطکاک قرار ندارد، بسیار پیشرفت کرده است. با استفاده از روش مد متناوب نمونه‌های بسیار ترد و نرم می‌توانند با موفقیت تصویربرداری شوند.

اگر چه در سال‌های اخیر افزایش چشمگیری در دقت AFM در مد متناوب صورت گرفته است، اما هنوز تصویر برداری در مد تماسی از دقت بالاتری برخوردار می‌باشد.

۲-۲-۴ کاربردهای میکروسکوپ نیرو اتمی

همانطور که گفته شد میکروسکوپ نیرو اتمی قادر به گرفتن تصاویر توپولوژی سه‌بعدی و با وضوح بالا از سطوح تمام نمونه‌ها، چه رسانا و چه عایق، می‌باشد. این عمل با استفاده از روش تقطیع[۳۴] رساناها و عایق‌ها در مقیاس اتمی صورت می‌گیرد. به علاوه، AFM برای حکاکی در مقیاس نانو بر روی سیستم-

[34] Scanning Method

های میکرو و نانو الکترومکانیکی (MEMS/NEMS)[35] کاربرد دارد. از نوک AFM برای برش مواد در مقیاس نانو نیز استفاده می‌شود [۶]، [۳۰]، [۳۸]، [۳۹]، [۴۰]، [۴۱]، [۴۲].

کاربردهایی که پیشتر گفته شد تنها مختص به میکروسکوپ نیرو اتمی نیست و مشترک بین میکروسکوپ‌های پراب پویشی می‌باشد. برای طراحی قابل اعتماد MEMS/NEMS داشتن اطلاعات از خصوصیات مواد در مقیاس نانو، آن هم در حالی که بیشتر خصوصیات مواد وابسته به اندازه قطعه می‌باشند، ضروری می‌نماید. ویژگی که AFM را نسبت به سایر این میکروسکوپ‌ها متمایز می‌کند، ساخت سازه‌ها در مقیاس نانو و انجام آزمایش‌هایی برای تعیین خصوصیات مکانیکی آنها می‌باشد؛ از جمله تست خمش، تعیین مدول الاستیکی و مقاومت خمشی، تخمین عمر شکست و آزمایشات خستگی بر روی مواد در مقیاس نانو.

۲-۳ تیر های مرسوم در میکروسکوپ نیرو اتمی

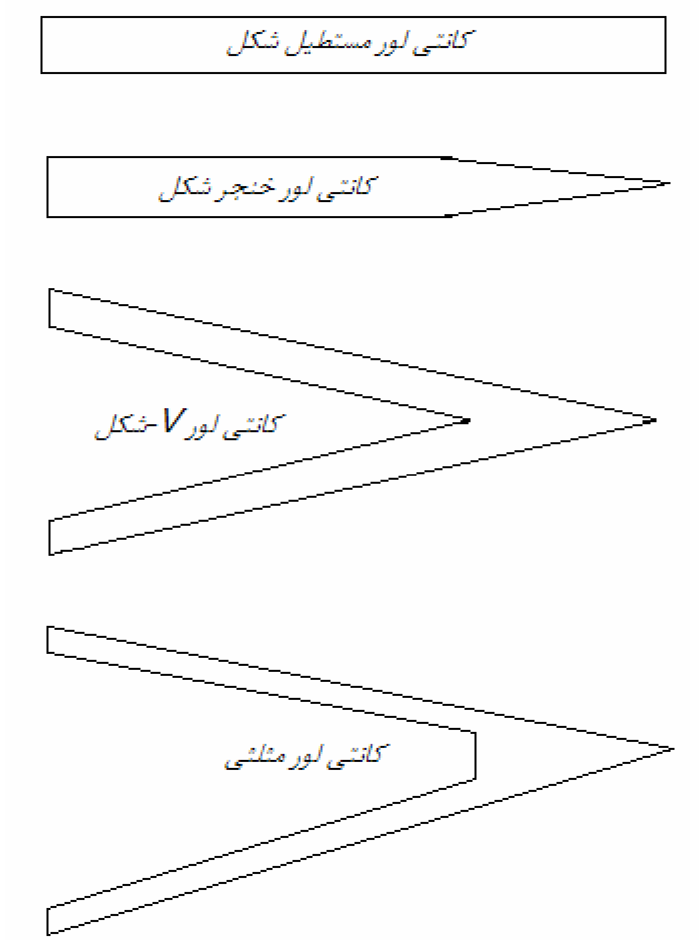
مرسوم‌ترین تیرهای میکروسکوپ نیرو اتمی عبارتند از: مستطیلی، خنجر شکل، V –شکل و مثلثی (شکل ۲-۳) که هر نوع از آنها برای عملکردهای متفاوتی طراحی شده‌اند. تیرهای V-شکل و مثلثی می‌توانند چرخش جانبی را کاهش دهند و از حساسیت کمتری در برابر چرخش نسبت به نوع مستطیلی و خنجر شکل برخوردار می‌باشند. اگرچه تحلیل و بدست آوردن پاسخ‌های ارتعاشاتی تیر

[35] Micro Electro Mechanical System/Nano Electro Mechanical System

مستطیلی راحت‌تر می‌باشد. اکثر تیرها از مواد Si، SiO_4 و Si_3N_4 تشکیل شده‌اند و با استفاده از فرایندهای میکرولیتوگرافی[36] شاخته می‌شوند [۴۳]. نوک تیر که نزدیک به قسمت انتهایی تیر قرار می‌گیرد، نقشی مهم در کیفیت تصویر بازی می‌کند که بسته به عملکردهای مشخص، نوک‌های متفاوتی انتخاب می‌شوند. نوک‌های خیلی تیز در تهیه تصاویر سه‌بعدی از سطوحی که دارای زبری بالایی می-باشند، استفاده می‌شوند و به همین ترتیب، نوک های کندتر برای سطوح دارای صافی سطح بالاتر استفاده می‌شوند [۴۴]. طراحی نوک کاری بسیار پیچیده می‌باشد. اغلب نوک‌های تیز، هرمی، مخروطی یا چهارضلعی می‌باشند و در بیشتر اوقات قسمت فوقانی نوک در محاسبات به صورت بخشی از یک کره در نظر گرفته می‌شود. ساخت نوک شامل فرایندهایی نظیر قرار دادن فیلم‌های SiO_2 یا Si_3N_4 در زیر لایه Si و سپس لایه برداری از Si می‌باشد [۴۵].

---

[36] Microlithography Processes



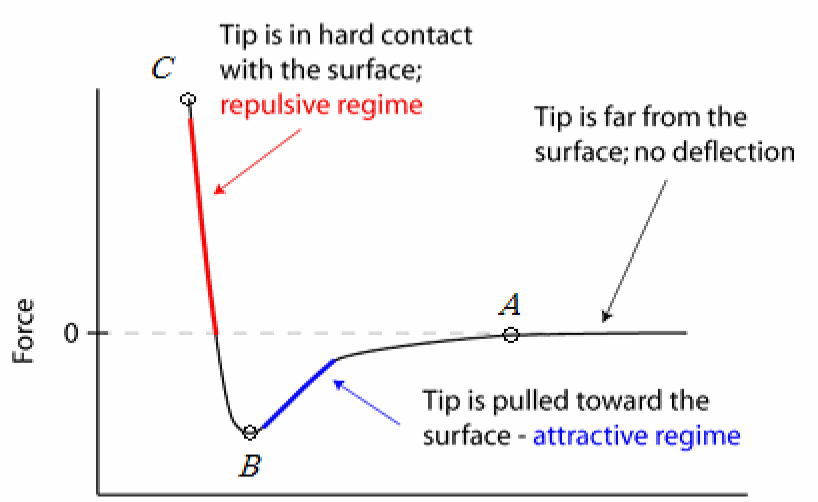
شکل۲-۳ نمایی از تیرهای مرسوم در میکروسکوپ نیرو اتمی

شعاع در انتهای تیر نیز بسته به عملکرد مورد نظر متفاوت می‌باشد.. معمولا شعاع نوک قبل از استفاده حدود ۴۰nm می‌باشد که در طول کارکرد تا ۲۵۰nm افزایش می‌یابد. در نتیجه، دقت تصویر با کند شدن نوک کاهش می‌یابد.

۲-۴ نیروهای برهم‌کنش بین نوک و نمونه

تحلیل دقیق برهم‌کنش‌های بین نوک و نمونه بسیار پیچیده می‌باشد زیرا که نیروهای بسیار زیادی در این برهم‌کنش‌ها شرکت دارند، از قبیل نیروهای وان‌دروالسی، چسبندگی، اصطکاکی، خازنی، الکترواستاتیکی و مغناطیسی. کل این نیروها را می‌توان به صورت نیروهای دافعه یا جاذبه و نیروهای رنج کوتاه یا بلند طبقه‌بندی کرد. این نیروها به شدت تابع فاصله بین نوک و نمونه می‌باشند (شکل ۲-۴). با توجه به شکل ۲-۴، نیروهای بین نوک و نمونه در ناحیه تماسی و غیر تماسی متفاوت می‌باشند. در ناحیه تماسی، فاصله بین نوک و سطح نمونه کمتر از چند انگستروم می‌باشد و با کاهش فاصله بین نوک و سطح، برهم کنش به صورت چشمگیری افزایش می‌یابد. هنگامی که این فاصله بین ۲تا ۳ انگستروم می‌باشد، نیروها از نوع دافعه و در رنج کوتاه می‌باشند [۴۲] و [۴۶].

همانطور که شکل ۲-۴ نشان داده است با نزدیک شدن فاصله به صفر نیروها به شدت افزایش می‌یابند. در حالت غیرتماسی نیروها بین ۰ تا 10^{-12} نیوتن تغییر می‌کنند. معمولا اندازه‌گیری نیروهایی با این مقیاس کوچک مشکل می‌باشد. در ابتدای ناحیه غیرتماسی مقدار کل نیروهای جاذبه به سرعت افزایش می‌یابد. در نقطه B این نیروها به حداکثر مقدار خود می‌رسند و سپس با جدایش بین نوک و نمونه این نیروها ضعیف و ضعیف تر می‌شوند.



شکل ۲-۴ نمودار مرسوم برای نیرو در برابر فاصله برای نوک و نمونه در میکروسکوپ نیرو اتمی [۷۵]

۲-۴-۱ نیروهای وان‌دروالسی

نیروهای وان‌دروالسی در محدوده نیروهای رنج بالا که در جدایش‌های عظیم بوجود می‌آیند، قرار می‌گیرند [۴۷]، [۴۸]، [۴۹]. این نوع نیروها بین تمام اتمها و مولکول‌ها وجود داشته و از نیروهای جاذبه به علت توزیع بارهای ارتعاشاتی و کاهش دوقطبی‌ها بوجود می‌آیند. نیروهای دوقطبی-دوقطبی که مهمترین بخش نیروهای وان در والسی می‌باشند، بین مولکولهای قطبی دیده می‌شوند. این مولکولها دارای دوقطبی‌های دائمی هستند و تمایل به قرار گرفتن در راستای میدان الکتریکی دارند. پایدارترین حالت زمانی است که قطب مثبت یک مولکول تا حد امکان به قطب منفی مولکول مجاور نزدیک باشد. در این شرایط بین مولکول‌های مجاور یک نیروی جاذبه الکتروستاتیکی به نام نیروی دوقطبی بوجود

می‌آید. تاثیر نیروهای وان در والسی در محدوده بین چند ده تا چند صد انگستروم می‌باشد و بزرگی این نیروها بین ۱nm تا ۲۰nm می‌باشد.

۲-۴-۲ نیروهای موئینگی

وجود فیلم نازک مایع بر روی نمونه و چگالش بخار آب، هنگامی که فاصله بین نوک و نمونه کوچک می‌شود، باعث بوجود آمدن نیروهایی با نام نیروهای موئینگی می‌شود. نیروهای موئینگی از نوع نیروهای جاذبه بوده و از نیروهای وان در والسی بزرگ‌تر می‌باشند، به طوری که بزرگی این نیروها در بازه بین ۱۰nm-۱۰۰nm قرار می‌گیرد و این نیروها در محدوده بین چند انگستروم تا چند صد انگستروم عمل می‌کنند.

۳-۴-۲ نیروهای چسبندگی

نیروهای چسبندگی بین نوک و نمونه و به علت پدیده‌ای با نام کشش سطحی بوجود می‌آیند. اصل نیروهای چسبندگی بین حساسه و جسم جامد، بر هم کنش مولکولی الکترواستاتیک می‌باشد. چسبندگی یک فرایند غیرپایستار بوده و نیروهای چسبندگی متناسب با مساحت تماس و کار مورد نیاز برای جدایش نوک از سطح نمونه می‌باشند.

۲-۴-۴ نیروهای الکترواستاتیک

نیروهای الکترواستاتیک بین بارهای محلی بر روی نوک و نمونه اثر می‌کنند [۵۰]، به طوری که مقاومت و فاصله عمل این نیروها از قانون کلمپ پیروی می‌کند. نیروهای الکترواستاتیک با اعمال ولتاژی بین نوک و سطح نمونه اندازه‌گیری می‌شوند.

۲-۴-۵ نیروهای مغناطیسی

نیروهایی که بر دوقطبی‌های مغناطیسی واقع شده در میدان‌های مغناطیسی عمل می‌کنند، نیروهای مغناطیسی نامیده می‌شوند [۵۰]. در عملکردهای میکروسکوپ نیرویی، دوقطبی‌های مغناطیسی معمولا در مواد فرومغناطیس موجود بر روی نوک قرار می‌گیرند و میدان مغناطیسی بوسیله نمونه فرومغناطیس یا یک جریان توزیع شده نزدیک به نوک بوجود می‌آید و بزرگی این نیروها در حدود چند صد نانومتر می‌باشد.

۲-۴-۶ نیروهای اصطکاکی

در هنگام روبش نوک بر روی سطح نمونه، نیروهای اصطکاکی یا بارهای مماسی در سطح تماس بوجود می‌آیند. همچنین نیروهای اصطکاکی در مساحت تماس به علت چرخش نوک و بر هم‌کنش مواد

ناهمسان نوک و نمونه بوجود می‌آیند. رابطه بین بارهای نرمال و اصطکاکی پیچیده و معمولا غیرخطی می‌باشد.

۲-۵ تماس بین نوک و نمونه در میکروسکوپ نیرو اتمی

مفهوم تماس در AFM بسیار پیچیده می‌باشد و همانطور که در شکل ۲-۴ دیده می‌شود، رابطه بین نیرو و جابجایی به شدت غیرخطی بوده و به علت نامشخص بودن شکل دقیق نوک در محل تماس، مدل کردن مکانیک تماس دشوار می‌باشد. به همین علت برای ساده کردن مسئله، قسمت فوقانی نوک و سطح تماس محلی به صورت کروی فرض و مدل می‌شوند. بار عمودی در تماس، بار اصلی می‌باشد و بار مماسی ناچیز بوده و معمولا صرفنظر می‌شود. به همین خاطر از مدل تماس الاستیک هرتزین به عنوان پایه اکثر مدل‌های AFM استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن چسبندگی در مساحت تماس، پیشرفت‌هایی در چندین مدل دیگر نیز صورت گرفته است.

۲-۵-۱ مدل تماسی هرتزین[۳۷]

تاثیرات هندسی بر روی ویژگی‌های تغییر شکل الاستیک موضعی از ابتدای سال۱۸۸۰ با عنوان تئوری تغییر شکل‌های الاستیکی هرتزین مورد توجه قرار گرفت. این تئوری مساحت تماس دایروی یک کره با

---

[37] Hertzian Contact model

یک صفحه (یا به طور کلی تر بین دو کره) را به ویژگی‌های تغییر شکل الاستیکی مواد مربوط می‌سازد. در این تئوری از تمام بر هم‌کنش‌های سطحی نظیر برهم‌کنش‌های وان‌دروالس سطحی یا چسبندگی سطحی صرفنظر می‌شود. هرتز تماس‌های بدون اصطکاک دو کره الاستیک به علت بارهای عمودی را مورد مطالعه قرار داد (شکل ۲-۵). اندازه تماس در مقایسه با شعاع کره بسیار کوچک تر فرض شده است و رابطه بین بار N و پارامترهای سیستم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$N = \frac{4}{3} E^{*} \frac{a^{3}}{R} \qquad \qquad 1/R = 1/R_1 + 1/R_2 \tag{۱-۲}$$

که در آن a شعاع مساحت تماس، R_1 و R_2 به ترتیب شعاع‌های نوک و نمونه می‌باشند و

$$1/E^{*} = (1-\nu_1^{2})/E_1 + (1-\nu_2^{2})/E_2 \tag{۲-۲}$$

که E_1 و E_2 به ترتیب مدول‌های یانگ نوک و سطح نمونه می‌باشند و به همین ترتیب ν_1 و ν_2 به عنوان نسبت پواسان نوک و نمونه در نظر گرفته می‌شوند.

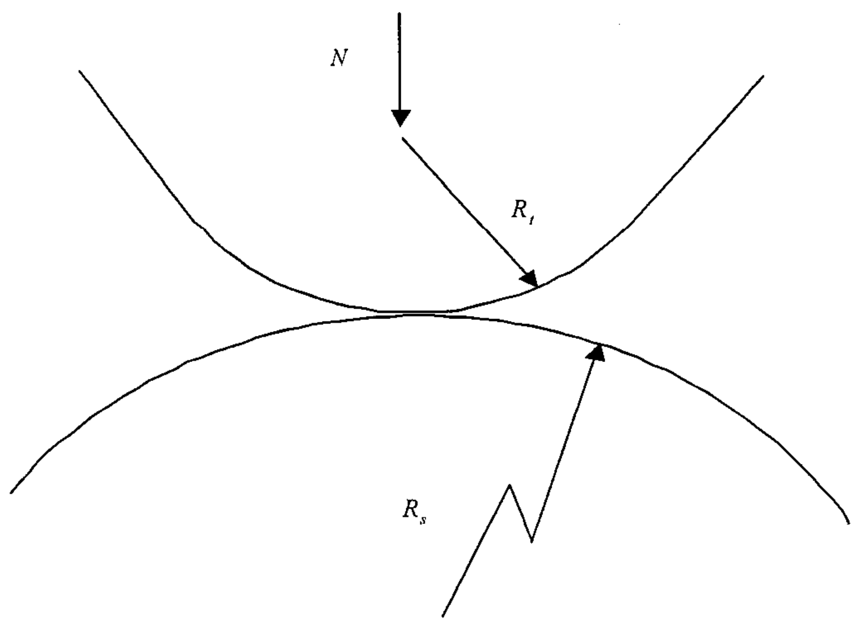
تغییر مکان‌های عمودی δ به صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$\delta = \frac{a^{2}}{R} = \left(\frac{gL^{2}}{16RE^{*}}\right)^{1/3} \tag{۳-۲}$$

بنابراین رابطه بین بار نرمال N و جابجایی عمودی δ به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$N = K\delta^{\frac{3}{2}} \qquad (۴-۲)$$

که $K = \frac{4}{3}E^{*}\sqrt{R}$ می‌باشد.



شکل ۲-۵ مدل تماسی برای تماس بین نوک و نمونه

فشار ماکزیمم نیز به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$P_0 = \frac{3L}{2\pi a^2} = \frac{3}{2}P_m = \left[\frac{6LE^{*2}}{\pi^3 R^2}\right]^{1/3} \qquad (۵-۲)$$

و در آن p_m فشار مینیمم می‌باشد.

۲-۵-۲ مدل تماس JKR

جانسون و گروهش توانستند پیشرفت‌هایی در تئوری هرتزین بوجود آورند و تئوری جدیدی با نام تئوری JKR(Johnson, Kendall, Roberts) را معرفی نمایند [۵۱]. در تئوری JKR تماس به صورت چسبنده در نظر گرفته می‌شود. از اینرو این تئوری مساحت تماس را به ویژگی‌های الاستیک مواد و مقاومت برهم کنش بین سطوح مرتبط می‌سازد. به علت تماس چسبندگی، بر طبق شکل ۲-۴، تماس-ها را می توان در سیکل بدون بار و نیز در ناحیه بار منفی (فشار) یافت. بمانند تئوری هرتزین، حل تئوری JKR نیز به تماس بین دو کره الاستیک محدود می‌شود. هنگامی که دو کره تماسی با هم ندارند، چسبندگی وجود ندارد. اما به محض برقراری تماس، چسبندگی بوجود می‌آید و بر ناحیه تماس اعمال می‌شود. تئوری JKR، مسئله تماس را به عنوان یک پدیده بخصوص در مکانیک شکست در نظر می‌گیرد و از اصل تساوی انرژی چسبندگی با انرژی ترک برای تحلیل این تئوری استفاده می‌کند. رابطه بین بار N و شعاع مساحت تماس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a^3 = \frac{4R}{2E^*}(L + 3\pi\zeta R + \sqrt{6\pi R\zeta L + (3\pi R\zeta)^2}) \qquad (۶-۲)$$

که در آن ζ انرژی سطح بر واحد مساحت می‌باشد. تغییر مکان عمودی نیز برابر است با:

$$\delta = \frac{a^2}{R} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi\zeta a}{2E^*}} \qquad (۷-۲)$$

هنگامی که $\zeta = 0$، مدل JKR به مدل هرتزین تبدیل می‌شود.

۲-۵-۳ مدل تماسی DMT

تئوری DMT، نسبت به دو تئوری قبلی کمی پیشرفته می‌باشد. این تئوری بر هم‌کنش‌های وان‌دروالس خارج ناحیه تماس الاستیک را نیز که به یک بار اضافی ختم می‌شود، در نظر می‌گیرد.

مدل DMT در سال ۱۹۷۵ توسط درژاگوین، مولر و توپوروف معرفی شد [۵۲]. این تئوری بر روی نوک صلب و سطح نمونه با چسبندگی پایین اعمال می‌شود. این تئوری برای نیروهای جاذبه در رنج بالا در پیرامون مساحت تماس با هندسه ای مشابه تئوری هرتزین مورد محاسبه قرار می‌گیرد. در این تئوری هیچگونه انرژی تلف شده بین حالت بارگذاری و بار برداری وجود ندارد. معادله این تئوری برای بار اعمال شده و شعاع تماس به صورت زیر بدست می‌آید:

$$N = \frac{Ka^3}{R} - 2\pi R\zeta \qquad (۸-۲)$$

رابطه بین تغییر مکان عمودی و شعاع R به صورت زیر داده می‌شود:

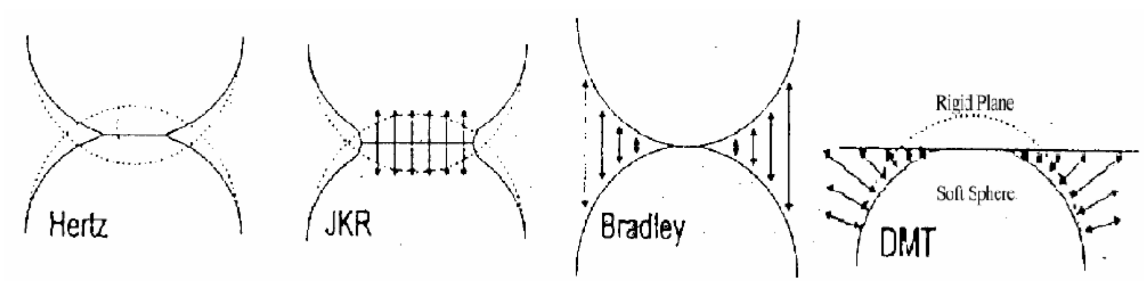
$$\delta = \frac{a}{R^2} \tag{۹-۲}$$

با توجه به روابط بالا فهمیده می‌شود که اگر $\zeta = 0$ آن وقت مدل DMT به مدل هرتزین تبدیل می-شود.

اگر دو سطح جدا از یکدیگر قرار گیرند، این تئوری به مدل وان در والس بردلی[۳۸] کاهش می یابد.

در مدل بردلی تمام تغییر مکان‌های مواد الاستیک به علت اثر نیروهای برهم‌کنش جاذبه صرفنظر می-شوند.

شکل ۲-۶، شماتیکی از مدل‌های هرتزین، JKR، بردلی و DMT را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۶ شماتیکی از مدل های تماسی [۵۳]:

- هرتز مدل کاملا الاستیک
- JKR مدل کاملا الاستیک شامل چسبندگی در منطقه تماس
- بردلی مدل واندر والس خالص با کره‌های صلب
- DMT مدل کاملا الاستیک، چسبنده و وان‌دروالسی

[38] Bradley's Van Der Waals Model

۲-۵-۴ مدل تماسی BCP

مدل BCP (Burnham, Colton, Pollock) در سال ۱۹۹۱ بر اساس آزمایشات انجام شده توسط این دانشمندان پایه ریزی شد. این مدل برای ترکیب‌های مختلفی از مواد تشکیل دهنده نوک و نمونه قابل ارائه می‌باشد. در این مدل رابطه بین مساحت تماس-بار و مساحت تماس-جابجایی به صورت زیر داده می‌شود:

$$N = \frac{Ka^3}{R} - \sqrt{\frac{3\pi\zeta Ka^3}{2}} - \pi R\zeta \tag{۲-۱۰}$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} - \left(\frac{\pi^2 R\zeta^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{۲-۱۱}$$

بنابراین همانطور که از روابط بالا دیده می‌شود، هنگامی که $\zeta = 0$ مدل BCP به مدل هرتزین کاهش می‌یابد.

۲-۵-۵ مدل تماس موگیس

مدل موگیس[۳۹]، مدلی قابل درک‌تر و دقیق‌تر می‌باشد که در سال ۱۹۹۲ با استفاده از یک مدل پیچیده برای مکانیک تماس بین نوک و نمونه بسط داده شد [۵۲]. در این مدل با شبیه سازی منطقه پلاستیک

[39] Maugis Contact Model

برای یک نوک شکاف‌دار، چسبندگی اعمال شده بر روی یک منطقه حلقوی دورتا دور مساحت تماس ثابت فرض می‌شود.

با معرفی پارامتر m که نشان دهنده نسبت عرض منطقه حلقوی به شعاع مساحت تماس می‌باشد، معادلات مدل موگیس به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$N = \frac{4}{3}E^{*}\frac{a^{3}}{R} - \lambda a^{2}\left[\frac{16\pi\zeta E^{*2}}{9R}\right]\left[\sqrt{m^{2}-1} + m^{2}tg^{-1}\sqrt{m^{2}-1}\right] \quad (۱۲-۲)$$

$$\delta = \frac{a^{2}}{R} - \frac{4\lambda a}{3}\left[\frac{3\pi\zeta}{4E^{*}R}\right]^{\frac{1}{3}}\sqrt{m^{2}-1} \quad (۱۳-۲)$$

$$\chi = \frac{\lambda a^{2}}{2}\left[\frac{4E^{*}}{3\pi R^{2}\zeta}\right]^{\frac{1}{3}}\left[\sqrt{m^{2}-1} + (m^{2}-2)tg^{-1}\sqrt{m^{2}-1}\right] + \frac{4\lambda a^{2}}{3}\left[\frac{4E^{*}}{3\pi R^{2}\zeta}\right]\left[1 - m + \sqrt{m^{2}-1}\,tg^{-1}\sqrt{m^{2}-1}\right] \quad (۱۴-۲)$$

که در آن $\lambda = \frac{2.06}{\varepsilon_0}\left(\frac{16R\zeta^{2}E^{*2}}{9\pi}\right)$ و ε_0 یک پارامتر ثابت می‌باشد. λ نیز معرف طیف‌های ممکن مواد می‌باشد. λ بزرگ معرف ترکیب با قدرت چسبندگی و تسلیم شوندگی بالاتر بوده و بالعکس λ کوچک معرف ترکیب‌هایی با قدرت چسبندگی و تسلیم شوندگی پایین‌تر می‌باشد.

۲-۵-۶ مقایسه مدل‌های تماس

بین تمامی مدل‌های معرفی شده در این بخش، مدل موگیس به عنوان دقیق‌ترین مدل، با فهم راحت‌تر در نظر گرفته می‌شود. برای ساده‌سازی هر کدام از تئوری ها، پارامترهای نرمالیزه شده زیر معرفی می-شوند:

- شعاع تماس نرمالیز شده $\overline{R} = a\left(\frac{4E^*}{3\pi R^2\zeta}\right)$
- بار عمودی نرمالیز شده $\overline{N} = N\left(\frac{1}{\pi R\zeta}\right)$
- تغییر مکان نرمالیز شده $\overline{\Delta} = \delta\left(\frac{16E^{*2}}{9\pi R\zeta^2}\right)^{\frac{1}{3}}$
- پارامتر چسبندگی نرمالیز شده $\overline{\lambda} = 2\sigma_0\left(\frac{9R}{16\pi\zeta E^*}\right)^{\frac{1}{3}}$

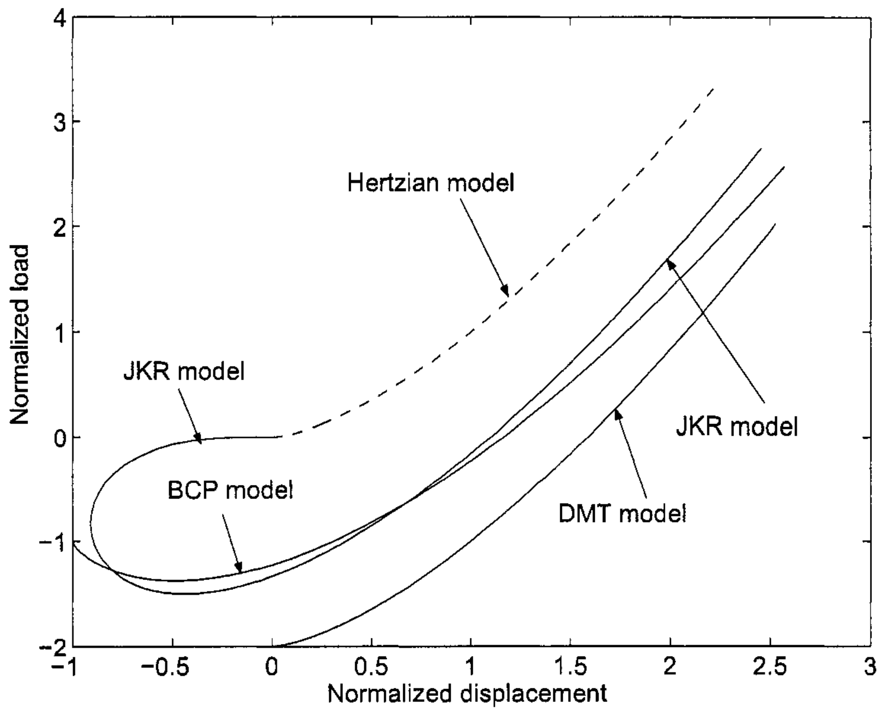
لازم به ذکر است تمام این مدل‌ها در تماس استاتیک قابل قبول می‌باشد. شکل ۲-۷ مقایسه‌ای بین مدل‌های هرتزین، DMT، BCP و JKR را نشان می‌دهد. مدل موگیس دارای پارامتری می‌باشد که مدل کردن تغییرات در ترکیب نوک و نمونه را همانطور که در شکل ۲-۸ نشان داده شده است، قادر می-سازد. همان طور که دیده می‌شود، مدل موگیس نواحی عمل مدل‌های JKR تا DMT را تحت پوشش

قرار می‌دهد. هنگامی که $\lambda \to \infty$ ($m \to 1$) مدل موگیس به مدل JKR کاهش می‌یابد و هنگامی که $\lambda \to 0$ این مدل به مدل DMT کاهش می‌یابد.

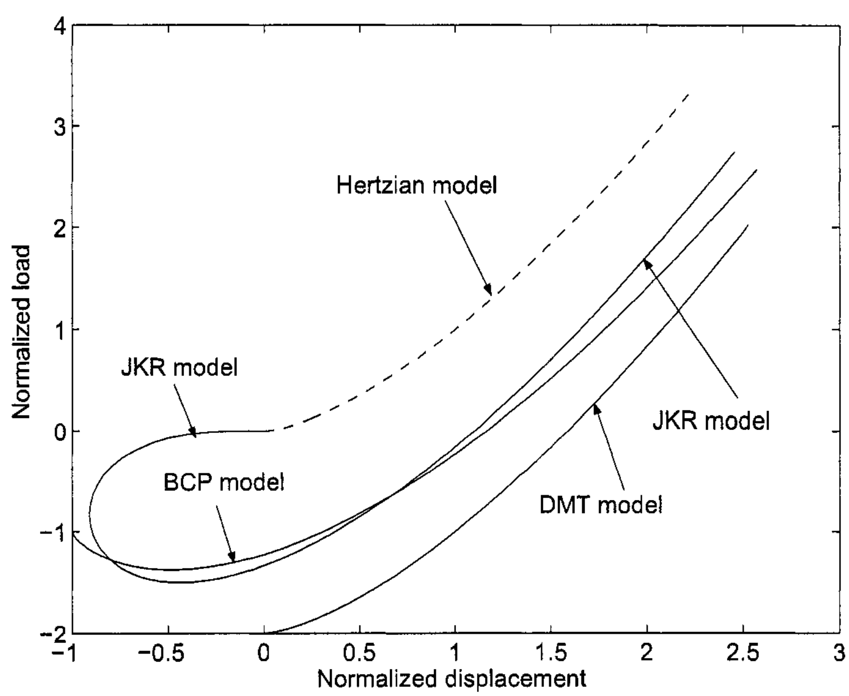
۲-۵-۷ مدل میرایی

مدل میرایی نوک و نمونه نیز بسیار مشکل می‌باشد. اگر چه تلاشهای بیشماری در هر دو زمینه آزمایشگاهی و تئوری انجام شده است [۳۰]، [۲۷]، [۵۴]، [۵۵]، [۵۶]، [۵۷]، [۵۸]، [۵۹] و [۶۰] ، اما هنوز یک مدل میرایی مناسب برای میکروسکوپ نیرو اتمی معرفی نشده است.

مدل میرایی را می‌توان بوسیله پاسخ‌های سیستم میکروسکوپ نیرو اتمی اندازه گیری نمود. در مدل تماسی، اگر بار اولیه بین نوک و نمونه به اندازه کافی بزرگ و دامنه ارتعاشاتی به اندازه کافی کوچک باشد، تماس میرایی به طور اساسی بوسیله بارهای مماسی ایجاد می‌شوند. در نتیجه، تماس میرایی را می‌توان بوسیله کار بارهای مماسی Q در یک دوره بدست آورد. در فصل چهارم به طور مفصل به آنالیز این مدل می‌پردازیم.



شکل ۲-۷ مقایسه مدل‌های تماسی هرتزین، JKR، BCP و DMT [۵۳]



شکل۲-۸ مدل تماسی ماگیس برای مقادیر مختلف λ [۵۲]

فصل سوم

ارتعاشات خطی تیرهای میکروسکوپ نیرو اتمی

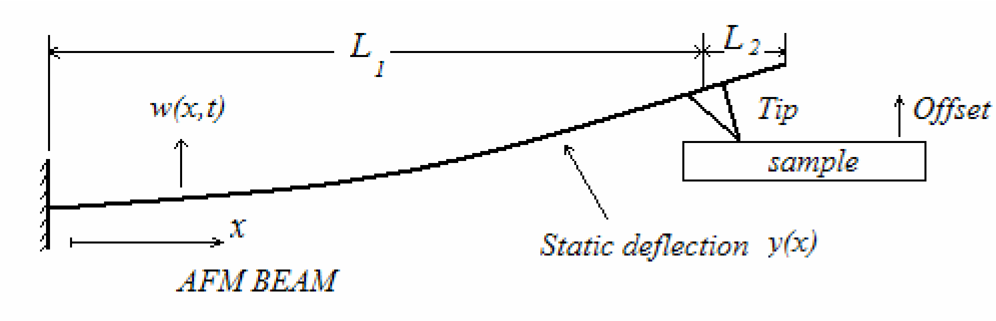
در این بخش ارتعاشات سیستم‌های مختلف تیر میکروسکوپ نیرو اتمی به صورت یک تیر با تماس مدل شده است. معادلات حاکم، شرایط مرزی و شرایط پیوستگی بدست آمده است. معادلات مشخصه برای تیر با محل‌های تماس و زوایای مختلف بین تیر با سطح نمونه، حاصل شده است. با استفاده از معادلات مشخصه، تاثیر عوامل مختلف نظیر محل تماس، ارتفاع نوک، زاویه، ممان اینرسی نوک و میرایی بر فرکانس بررسی شده و نتایج جالبی بدست آمده و گزارش شده است.

در بخش نخست ابتدا ارتعاشات کلی تیر با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی مورد بررسی قرار گرفته و معادلات حاکم بدست آمده است. در بخش دوم این ارتعاشات را برای تیر مستطیل شکل با محل‌های تماس مختلف بررسی می‌کنیم و سپس در بخش آخر کامل‌ترین حالت تیر یعنی تیری با زوایای مختلف، محل‌های تماس متفاوت و حالت کامل تماس مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳-۱ مدل ارتعاشاتی کلی برای تیر یک سر درگیر میکروسکوپ نیرو اتمی

چهار نوع ارتعاشات متفاوت برای تیر میکروسکوپ نیرو اتمی وجود دارد؛ خمشی، پیچشی، کششی و فشاری. اما آزمایشات نشان می دهد که موثرترین مدهای ارتعاشات تیر ناشی از ارتعاشات خمشی با جابجایی عمود بر سطح نمونه می‌باشد. این ارتعاشات ناشی از لرزش‌های عمودی سطح نمونه در هنگام تماس با نوک میکروسکوپ می‌باشد. ارتعاشات پیچشی تیر نیز از نیروهای برشی ناشی می‌شوند. به طور معمول، فرکانس مدهای ارتعاشاتی پیچشی بالاتر از فرکانس چند مد اول ارتعاشات خمشی می‌باشند. اما در اکثر تیرهای میکروسکوپ نیرو اتمی، مدهای کششی و فشاری را نمی‌توان به طور مستقیم بدست آورد. زیرا که فرکانس های تشدید مدهای کششی و فشاری بسیار بالاتر از فرکانس‌های تشدید مدهای خمشی و پیچشی می‌باشند و به همین خاطر از مدهای کششی و فشاری در تحلیل ارتعاشات تیر میکروسکوپ نیرو اتمی صرفنظر می‌شود. بنابراین تحلیل ما به پاسخ‌های ارتعاشات خمشی و پیچشی تیر محدود می‌شود. تیرهای میکروسکوپ نیرو اتمی را می‌توان به صورت تیرهای همگن مدل نمود. یک نوک با شعاع کوچک نزدیک قسمت انتهایی تیر متصل شده است. در مد تماسی، هنگامی که دامنه ارتعاشات به اندازه کافی کوچک می‌باشد، نیروهای برهم‌کنش بین نوک و سطح نمونه را می‌توان

خطی‌سازی نمود. در نتیجه می‌توان از مدل خطی برای توصیف برهم‌کنش‌های بین نوک و نمونه استفاده نمود. شکل ۳-۱ شماتیکی از تیر میکروسکوپ نیرو اتمی و نوک ضمیمه شده را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱ شماتیکی از ارتعاشات خمشی تیر یک سر درگیر میکروسکوپ نیرو اتمی. نوک در طول روبش در تماس با سطح نمونه می‌باشد. انحراف استاتیکی نمونه، Z_0، باعث انحراف اولیه $y(x)$ می‌شود. برهم‌کنش‌های غیرخطی بین نوک و نمونه را می‌توان با تئوری‌های تماس متفاوت از قبیل مدل هرتزین، تقریب زد. حرکت دینامیکی تیر یک سر درگیر، $w(x,t)$ انحراف نسبت به انحراف اولیه می‌باشد.

۳-۱-۱ تئوری بنیادی برای ارتعاشات خمشی و پیچشی تیر یک سر درگیر میکروسکوپ نیرو اتمی

به علت اینکه ضخامت تیر میکروسکوپ‌های نیرو اتمی در مقایسه با طول آن کوچک می‌باشد، ارتعاشات سیستم را می‌توان به صورت دینامیک یک تیر تحلیل نمود. تیر و نوک، ایزوتروپ فرض شده‌اند و همان طور که پشتر اشاره شد، تئوری بنیادی برای تحلیل ارتعاشات، تئوری کلاسیک تیر اویلر برنولی می‌باشد که در آن پیچش المان در مقایسه با جابجایی آن صرفنظر می‌شود و همچنین تغییر شکل زاویه‌ای به

علت برش در مقایسه با تغییر شکل خمشی کوچک فرض می‌شود. بنابراین، تئوری اویلر برنولی اثر اینرسی پیچشی و تغییر شکل برشی را نادیده می‌پندارد.

فرض می‌شود تیر در معرض نیروی توزیع شده $f(x,t)$ که معلوم می‌باشد، قرار گیرد. تیر تحت تاثیر نیروی محوری $P(x)$ قرار دارد. در عمل، به علت کوچک بودن ابعاد و سختی مونتاژ، امکان قرار گرفتن نوک در انتهای تیر میکروسکوپ های نیرو اتمی وجود ندارد. از اینرو، تیر به صورت دو تیر مدل شده است. معادلات ارتعاشاتی سیستم نیز با این فرض بدست می‌آیند. با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حاکم، شرایط مرزی و شرایط جابجایی بدست می‌آیند.

$$\int_{t_1}^{t_3} \delta(T(t) - V(t) + W_{nc}(t))dt = 0 \qquad \delta w(x,t_1) = \delta w(x,t_2) = 0 \qquad (۱-۳)$$

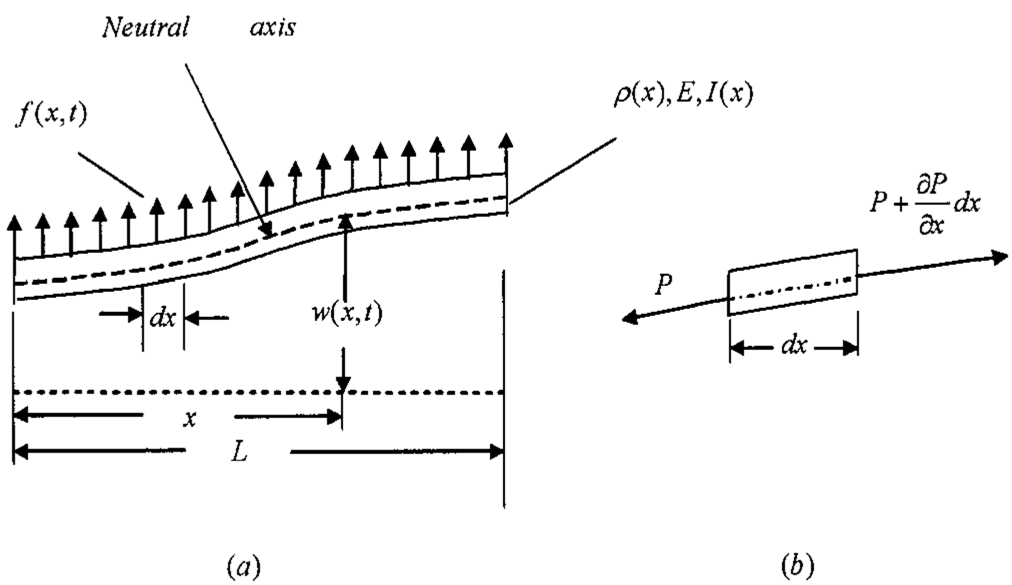
که $T(t)$ و $V(t)$ به ترتیب انرژی جنبشی و پتانسیل، $W_{nc}(t)$ کار نیروهای غیر پایستار اعمال شده بر سیستم و $w(x,t)$ جابجایی معکوس تیر وابسته به تغییر مکان اولیه $y(x)$ می‌باشد.

معنای فیزیکی اصل همیلتون، حرکت حقیقی سیستم به ازای یک تغییر مکان مجازی دلخواه (انحراف) می‌باشد و بیان می‌دارد که انتگرال تغییرات مجموع انرژی سیستم (جنبشی و پتانسیل) و کار غیرپایستار ناشی از نیروهای غیرپایستار سیستم بر بازه زمانی $t_1 \le t \le t_2$ به اعضای تغییر مکان مجازی دلخواه (انحراف) برابر صفر می‌باشد.

انرژی جنبشی ناشی از ازتعاشات خمشی و پیچشی برابر است با:

$$T(t)=\frac{1}{2}\int_{-L_0}^{L_1}\left[\rho A(x)\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right)^2+\rho J(x)\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2\right]dx+\frac{1}{2}m_t\left[\left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial t}\right)^2+c^2\left(\left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial t}\right)^2\right)\right]$$
(۲-۳)

که در آن ρ چگالی جرمی تیر، $A(x)$مساحت سطح مقطع تیر، $J(x)$ ممان اینرسی قطبی و ϕ زاویه چرخش می‌باشد. در این معادله L_1 و L_2 به ترتیب طول های تیر در قسمت چپ و راست نوک می‌باشند. و همانطور که قبلا گفته شد $L=L_1+L_2$ طول کل تیر و m_t جرم نوک می‌باشند. اگر تیر مستطیلی با نوک مخروط شکل باشد، آنگاه $c=\frac{t}{2}+\frac{h}{3}$.



شکل ۳-۲ a) شماتیکی از یک تیر در معرض بارهای توزیع شده $f(x,t)$ عمود بر محور تیر

b) بارهای محوری اعمال شده بر محور تیر

انرژی پتانسیل سیستم شامل سه بخش می‌باشد: بخش اول ناشی از خمش خالص، بخش دوم به علت پیچش و بخش سوم به علت تغییر شکلهای تماسی و محوری می‌باشد. با تعریف انحراف از مکان تعادل، به شرط اینکه سیستم به صورت خطی در نظر گرفته شود، آنگاه انرژی پتانسیل تولید شده توسط نیروهای جاذبه را می‌توان صرفنظر کرد. در نتیجه چگالی انرژی پتانسیل ناشی از خمش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_b = \frac{1}{2} M\theta \tag{۳-۳}$$

که در آن M ممان خمشی و θ تغییر مکان چرخشی المان یا تغییر مکان زاویه‌ای کلی می‌باشد.

از مقاومت مصالح به یاد داریم که رابطه بین ممان، M و تغییر مکان زاویه‌ای کلی، θ به صورت زیر می‌باشد [۶۹] :

$$M = EI(x)\theta \tag{۴-۳}$$

که در آن E مدول یانگ تیر و $I(x)$ ممان اینرسی سطح مقطع حول تار خنثی تیر می‌باشد.

از سینماتیک نیز می‌دانیم که رابطه بین زاویه θ و شعاع انحنا تیر تغییر شکل یافته r به صورت زیر می‌باشد:

$$\theta = \frac{1}{r} = \frac{\dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{۵-۳}$$

برای انحراف بسیار کوچک $w(x,t)$، معادله فوق را می‌توان به صورت ذیل ساده‌سازی نمود:

$$\theta = \frac{\dfrac{\partial^2 (x,t)}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \tag{۶-۳}$$

با جایگذاری معادلات ۳-۴ و ۳-۶ در ۳-۳، انرژی پتانسیل ناشی از خمش به صورت زیر داده می‌شود:

$$V_b = \frac{1}{2}\int_{-L_1}^{L_2} EI(x)\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 \tag{۷-۳}$$

کار انجام شده توسط بار محوری یا انرژی پتانسیل برابر با:

$$V_a = \int_{-L_1}^{L_2} P(x)(ds-dx) \tag{۸-۳}$$

که در آن ds طول المان تغییر شکل یافته می باشد که برابر است با:

$$ds = \left[dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \approx \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] dx \tag{۹-۳}$$

با جایگذاری معادله ۳-۹ در معادله ۳-۸، انرژی پتانسیل V_a به صورت زیر به دست می آید:

$$V_a = \frac{1}{2}\int_{-L_1}^{L_2} P(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (۱۰-۳)$$

انرژی پتانسیل ناشی از فنر نیز برابر است با:

$$V_p = \frac{1}{2}k_n w^2(0,t) \qquad (۱۱-۳)$$

در نتیجه انرژی پتانسیل کل سیستم ناشی از ارتعاشات خمشی، کار بار محوری و کار بار تماسی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$V_1(t) = V_a + V_b + V_p = \frac{1}{2}\int_{-L_1}^{L_2}\left[EI(x)\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 + P(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dx + \frac{1}{2}k_n w^2(0,t) \qquad (۱۲-۳)$$

به طور مشابه، انرژی پتانسیل ناشی از ارتعاشات پیچشی برابر است با:

$$V_2(t) = \frac{1}{2}\int_{-L_1}^{L_2} GC_T\left(\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}k_l h^2\phi^2(0,t) \qquad (۱۳-۳)$$

که در آن C_T سختی پیچشی تیر می‌باشد که برای تیر با مقطع مستطیل شکل برابر است با [۲]:

$$C_T = \frac{1}{3}BT^3\left[1 - \frac{192}{\pi^5}\frac{T}{B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}tgh\frac{(2n+1)\pi b}{2T}\right] \qquad (۱۴-۳)$$

بنابراین انرژی پتانسیل کل سیستم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{2}\int_{-L_1}^{L_2}\left[EI(x)\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right)+GC_T\left(\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right)^2+P(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dx$$
$$+\frac{1}{2}k_l h^2\phi^2(0,t)+\frac{1}{2}k_n w^2(0,t) \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

کار مجازی ناشی از نیروهای غیرپایستار، به ازای تمامی انحراف‌های مجازی برابر است با:

$$\delta W_{nc}(t)=\int_{-L_1}^{0}f(x,t)\delta w(x,t)dx+\int_{0}^{L_2}f(x,t)\delta w(x,t)dx \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

با توجه به اصل همیلتون، فرض می‌کنیم که تغییرات و دیفرانسیل قابلیت جایگزینی داشته باشند. با استفاده از معادله ۳-۲ تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر داده می شود:

$$\delta T=\frac{1}{2}\int_{-L_0}^{L_1}\rho A(x)\delta\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right)^2+\rho J(x)\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2dx+\frac{1}{2}m_t\delta\left[\left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial t}\right)^2+c^2\left(\left(\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial t}\right)^2\right)\right]$$
$$=\int_{-L_1}^{L_2}\left[\rho A(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\delta w(x,t)}{\partial t}+\rho J(x)\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\delta\phi(x,t)}{\partial t}\right]dx$$
$$+m_t\left[\frac{\partial w(0,t)}{\partial t}\frac{\partial\delta w(0,t)}{\partial t}+c^2\left(\frac{\partial\phi(0,t)}{\partial t}\frac{\partial\delta\phi(0,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial t}\frac{\partial\delta w(0,t)}{\partial t}\right)\right)\right] \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

با جایگذاری معادله ۳-۱۷ بر بازه زمانی $t_1\le t\le t_2$ و استفاده از شرایط مرزی $\delta w=0$ بر $t=t_1,t_2$، داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_{-L_1}^{L_2}\left[\rho A(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial t}+\rho J(x)\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta\phi(x,t)}{\partial t}\right]dxdt+$$

$$m_t\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial w(0,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta w(0,t)}{\partial t}+c^2\left(\frac{\partial \phi(0,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta\phi(0,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta w(0,t)}{\partial t}\right)\right)\right]dt$$

$$=\int_{-L_1}^{L_2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\rho A(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial t}dtdx\right]dtdx-\int_{t_1}^{t_2}m_t\left(\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2}\right)\right)\delta w(0,t)dt$$

$$+\int_{-L_1}^{L_2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\rho J(x)\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta\phi(x,t)}{\partial t}\right]dtdx-\int_{t_1}^{t_2}m_t c^2\frac{\partial^2 \phi(0,t)}{\partial t^2}\delta\phi(0,t)dt$$

$$=\int_{-L_1}^{L_2}\rho A(x)\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\Big|_{t_1}^{t_2}dx-\int_{-L_1}^{L_2}\int_{t_1}^{t_2}\rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dtdx-\int_{t_1}^{t_2}m_t\left(\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2}\right)\right)\delta w(0,t)dt$$

$$+\int_{-L_1}^{L_2}\rho J(x)\frac{\partial \phi}{\partial t}\delta\phi\Big|_{t_1}^{t_2}dx-\int_{-L_1}^{L_2}\int_{t_1}^{t_2}\rho J(x)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\delta\phi dtdx-\int_{t_1}^{t_2}m_t c^2\frac{\partial^2 \phi(0,t)}{\partial t^2}\delta\phi(0,t)dt$$

$$=-\int_{-L_1}^{0^-}\int_{t_1}^{t_2}\rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dtdx-\int_{0^+}^{L_2}\int_{t_1}^{t_2}\rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dtdx-\int_{t_1}^{t_2}m_t\left(\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2}\right)\right)\delta w(0,t)dt$$

$$-\int_{-L_1}^{0^-}\int_{t_1}^{t_2}\rho J(x)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\delta\phi dtdx-\int_{0^+}^{L_2}\int_{t_1}^{t_2}\rho J(x)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\delta\phi dtdx-\int_{t_1}^{t_2}m_t c^2\frac{\partial^2 \phi(0,t)}{\partial t^2}\delta\phi(0,t)dt \quad (۱۸-۳)$$

تغییرات انرژی پتانسیل خمشی ناشی از کار بار محوری و بار تماسی داده شده در معادله ۳-۱۲، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\delta V_1(t)=\int_{-L_1}^{L_2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right)+P(x)\frac{\partial w}{\partial x}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]dx+k_n w(x,t)\delta w(x,t)\Big|_{x=0}$$

$$=\int_{-L_1}^{L_2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w(x,t)}{\partial x^2}+P(x)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\right]dx+k_n w(x,t)\delta w(x,t)\Big|_{x=0}$$

$$EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}\delta x\Big|_{-L_1}^{0^-}+EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}\delta w\Big|_{0^+}^{L_2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w\Big|_{-L_1}^{0^-}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})\delta w\Big|_{0^+}^{L_2}+P\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\Big|_{-L_1}^{0^-}+P\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\Big|_{0^+}^{L_2}+k_n w(x,t)\delta w(x,t)\Big|_{x=0} \quad (۱۹-۳)$$

$$\int_{-L_1}^{0}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\delta w dx+\int_{0}^{L_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\delta w dx$$

برای ارتعاشات پیچشی، شرایط مرزی $\delta\phi(-L_1,t)=0$ باید ارضا شود. با بدست آوردن تغییرات انرژی پتانسیل خمشی در معادله ۳-۱۳ و انتگرال گیری با روش جز به جز داریم:

$$\begin{aligned}
\delta V_2(t) &= \frac{1}{2}\int_{-L_1}^{L_2} GC_T\left(\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}k_l h^2 \partial\delta\phi^2(0,t) = GC_T\,\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\,\delta\phi\Big|_{-L_1}^{0^-} + GC_T\,\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\,\delta\phi\Big|_{0^+}^{L_2} \\
&- \int_{-L_1}^{0^-}\frac{\partial}{\partial x}\left(GC_T\,\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right)\delta\phi dx - \int_{0^+}^{L_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(GC_T\,\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right)\delta\phi dx + k_l h^2\phi(0,t)\delta\phi(0,t) \\
&= GC_T\left(\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0^-} - \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0^+}\right)\delta\phi(0,t) + GC_T\,\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L_2}\delta\phi(L_2,t) \\
&- \int_{-L_1}^{0^-}\frac{\partial}{\partial x}\left(GC_T\,\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right)\delta\phi dx - \int_{0^+}^{L_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(GC_T\,\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right)\delta\phi dx + k_l h^2\phi(0,t)\delta\phi(0,t)
\end{aligned} \tag{۲۰-۳}$$

در نهایت با جایگذاری معادلات ۳-۱۶،۳-۱۸، ۳-۱۹ و ۳-۲۰ در معادله ۳-۱ و مرتب کردن معادلات در فرم صحیح آنها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\delta w\Big|_{-L_1}^{0^-} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\delta w\Big|_{0^+}^{L_2}\right\}dt \\
&- \int_{t_1}^{t_2} m_t\left(\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2}\right)\right)\delta w(0,t)dt - \int_{t_1}^{t_2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{-L_1}^{0^-} + EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{0^+}^{L_2}\right]dt \\
&- \int_{t_1}^{t_2} k_n w(x,t)\delta w(x,t)\big|_{x=0}\,dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{-L_1}^{0^-}\left[\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right) - f\right]\delta w dx dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t_1}^{t_2}\int_{0^+}^{L_2}\left[\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)-f\right]\delta w dxdt \\
&-\int_{-L_1}^{0^-}\int_{t_1}^{t_2}\left[\rho J(x)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(GC_T\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}\right)\right]d\phi dxdt+\int_{0^+}^{L_2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\rho J(x)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(GC_T\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}\right)\right]d\phi dxdt \\
&\int_{t_1}^{t_2}\left[GC_T\left(\left.\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0^-}-\left.\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0^+}\right)+k_l h^2\phi(0,t)\right]\delta\phi(0,t)dt-\int_{t_1}^{t_2}c^2 m_t\frac{\partial^2 \phi(0,t)}{\partial t^2}\delta\phi(0,t)dt \\
&-\int_{t_1}^{t_2}GC_T\left.\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L_2}\delta\phi(L_2,t)dt
\end{aligned}
\tag{۳-۲۱}
$$

چون δw یک انحراف یا تغییر مکان اختیاری می‌باشد که باید تمام شرایط مرزی را ارضا نماید، در نتیجه:

$$\delta w\big|_{x=-L_1}=0 \qquad\qquad \delta\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=-L_1}=0$$

با جایگذاری این شرایط مرزی در معادله ۳-۲۱ و اعمال شرایط مرزی پیوستگی $w(0^-,t)=w(0^+,t)$، معادله ۳-۲۱ را می‌توان ساده‌سازی نمود. در نتیجه معادلات حاکم سیستم برای ارتعاشات خمشی برای دو قسمت چپ و راست نوک یکی می‌باشند:

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)-f=0 \qquad -L_1\le x\le 0 \quad \text{و} \quad 0\le x\le L_2 \tag{۳-۲۲}$$

با شرایط مرزی پیوستگی:

$$w\big|_{x=0^-}=w\big|_{x=0^+} \qquad\qquad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0^-}=\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0^+} \tag{۳-۲۳}$$

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{x=0^-} - EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{x=0^+} + m_t c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2}\right) = 0 \quad (۲۴-۳)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\bigg|_{x=0^-} - \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\bigg|_{x=0^+} - k_n w\big|_{x=0} = 0 \quad (۲۵-۳)$$

$$-m_t \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2} + \left(P(0^+) - P(0^-)\right)\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0 \quad (۲۶-۳)$$

و شرایط مرزی

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{x=L_2} = 0 \qquad EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{x=L_2} = 0 \quad (۲۷-۳)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\bigg|_{x=L_2} - P\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=L_2} = 0 \quad (۲۸-۳)$$

همچنین معادلات سیستم برای ارتعاشات پیچشی نیز در دو قسمت چپ و راست نوک برابر می‌باشند:

$$\rho J(x)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(GC_T \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}\right) = 0 \quad (۲۹-۳)$$

با شرایط پیوستگی

$$\phi(0^-,t) = \phi(0^+,t) \quad (۳۰-۳)$$

$$GC_T\left(\left.\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0^-}-\left.\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0^+}\right)+k_l h^2\phi(0,t)+c^2 m_t\frac{\partial^2\phi(0,t)}{\partial t^2}=0 \qquad (۳-۳۱)$$

و شرایط مرزی

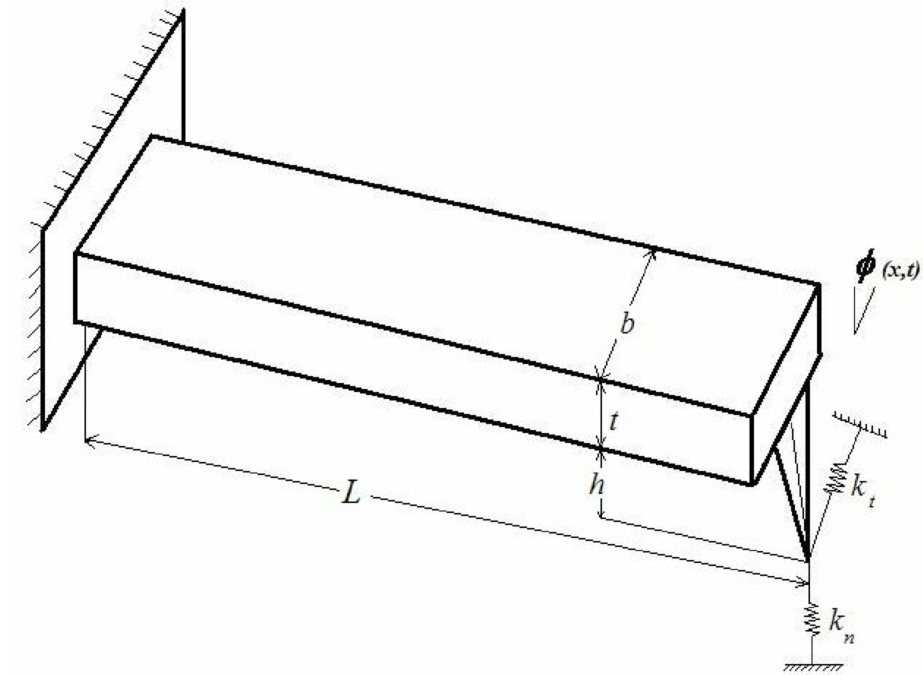
$$GC_T\left.\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L_2}=0 \qquad \phi(-L_1,t)=0 \qquad (۳-۳۲)$$

به روشنی پیداست که معادلات حاکم برای ارتعاشات پیچشی و خمشی مستقل از یکدیگر می‌باشند، اما حل عمومی معادلات حاکم برای شکل‌های دلخواه تیر امکان‌پذیر نمی‌باشد. خوشبختانه حل عمومی برای چند شکل مهم تیر امکان پذیر می‌باشد.

۳-۲ تیرهای مستطیل شکل

تیر مستطیل شکل، اولین تیری می‌باشد که در AFM مورد استفاده قرار گرفت. تحقیقات بسیاری بر روی پاسخ‌های ارتعاشات خمشی و پیچشی این نوع تیر با تماس خطی در انتها، انجام گرفته و پیشرفت‌هایی نیز حاصل شده است. اگر چه با تحلیل‌هایی که در آینده توسط تئوری‌های کلاسیک انجام گرفت، نشان داده شد که فرکانس‌های بدست آمده از روش‌های تئوری با فرکانس‌های بدست آمده از روش‌های آزمایشگاهی همیشه انطباق ندارند [۶۱]، [۶۲] و [۶۳]. در نتیجه، پیدا کردن یک مدل ارتعاشاتی با دقت بالاتر ضروری می‌نماید.

در عمل، معمولا تیر میکروسکوپ نیرو اتمی موازی سطح قرار نمی‌گیرد و روبش با یک زاویه اولیه نسبت به سطح، معمولا حدود ۱۲ تا ۱۵ درجه انجام می‌گیرد [۶۴]. به علاوه به علت کوچک بودن مقیاس کارکرد، مونتاژ نوک دقیقا در قسمت انتهایی تیر عملی نمی‌باشد و فاصله‌ای بین انتهای نوک و تار خنثی تیر وجود دارد. اگر چه تحقیقات بسیاری بر روی پاسخ‌های ارتعاشات خمشی و پیچشی میکروسکوپ نیرو اتمی با تیر مستطیلی انجام گرفته است، اما در اکثر موارد توجهی به زاویه بین تیر و سطح نمونه و مخصوصا محل تماس نشده است. در این بخش، ابتدا تاثیر محل تماس، جرم نوک، ارتفاع نوک و سختی تماس را بر روی پاسخ‌های ارتعاشاتی مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس در بخش بعد به تحلیل کامل‌ترین حالت شکل تیر با مقطع مستطیلی می‌پردازیم. در این نوع تیر، اثر زاویه اولیه، ممان اینرسی نوک و تماس میرایی بر روی پاسخ‌های ارتعاشاتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۳-۳ شماتیکی از تیر میکروسکوپ نیرو اتمی در تماس با سطح نمونه

۳-۲-۱ معادلات حاکم

همانطور که پیشتر گفتیم، نوک همیشه در انتهای تیر قرار نمی‌گیرد. همچنین موازی نگاه داشتن تیر با سطح هنگام عمل بسیار مشکل می‌باشد. چندین نوع مهم تیر مستطیل شکل با محل‌های تماس و ویژگی‌های دینامیکی متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است و هر نوع را به طور جداگانه بررسی نموده-ایم. تیر میکروسکوپ نیرو اتمی نشان داده شده در شکل ۳-۱، یک تیر درگیر الاستیک کوچک با عرض b، ضخامت t و طول L می‌باشد. نوک دارای طول h و جرم m_t می‌باشد و فاصله بین نقطه میانی ضخامت تیر و مرکز سطح مقطع نوک، c می‌باشد که $c=h/4$. برهم‌کنش‌های عمودی نوک با سطح نمونه، توسط یک فنر خطی با ثابت k_n و برهم‌کنش‌های جانبی نوک با سطح نمونه، توسط یک فنر

خطی با ثابت k_t مدل شده است. این مدل ساده‌ترین مدل برای تحلیل ارتعاشات تیر یک سر در گیر AFM می‌باشد.

۳-۲-۱-۱ تماس در انتها

تیرهای مستطیل شکل با نوک در انتها یک مدل ارتعاشاتی مرسوم می‌باشد که معمولا در آزمایشات و تحقیقات انجام گرفته برروی AFM/AFAM مورد استفاده قرار می‌گیرد. با این فرضیه و همچنین اگر سطح مقطع ثابت فرض شود، معادلات حاکم و شرایط مرزی ساده می‌شوند. در اغلب تحلیل‌های کلاسیک ارتعاشات خمشی میکروسکوپ نیرو اتمی، از طول نوک و ضخامت تیر صرفنظر شده است. اگر از بارهای محوری صرفنظر کنیم، می‌توانیم معادلات حاکم را به صورت زیر بنویسیم:

$$\rho A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad -L_1 \le x \le 0 \qquad (۳۳\text{-}۳)$$

که در آنها A_0 و I_0 به ترتیب مساحت و ممان اینرسی سطح مقطع می‌باشند. شرایط مرزی نیز به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$w(-L_1,t) = \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=-L_1} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0 \qquad (۳۴\text{-}۳)$$

$$EI_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\bigg|_{x=0} = k_n w(0,t) + m_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{x=0} \qquad (۳۵-۳)$$

با تغییر متغیر $x \to x + L_1$ می توانیم مسئله را ساده‌تر نماییم:

$$\rho A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad 0 \le x \le L_1 \qquad (۳۶-۳)$$

با شرایط مرزی

$$w(0,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=L_1} = 0 \qquad (۳۷-۳)$$

$$EI_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\bigg|_{x=L_1} = k_n w(L_1,t) + m_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{x=L_1} \qquad (۳۸-۳)$$

۳-۲-۱-۲ تماس نزدیک انتها

همانطور که پیشتر گفته شد، در عمل در تیرهای AFM/AFAM نوک دقیقا در انتها قرار نمی‌گیرد. در این حالت اگر سطح مقطع، ثابت در نظر گرفته شود و از بار محوری صرفنظر شود، معادلات حاکم به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\rho A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad -L_1 \le x \le 0 \quad \text{و} \quad 0 \le x \le L_2 \qquad (۳۹-۳)$$

و شرایط مرزی و پیوستگی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$w(x,t)\big|_{x=0^-} = w(x,t)\big|_{x=0^+} \qquad \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0^-} = \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0^+} \tag{۳-۴۰}$$

$$EI_0 \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0^-} - EI_0 \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0^+} + m_t c^2 \ddot{w}'(x,t)\big|_{x=0} = 0 \tag{۳-۴۱}$$

$$EI_0 \left.\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=0^-} - EI_0 \left.\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=0^+} - k_n w(x,t)\big|_{x=0} - m_t \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=0} = 0 \tag{۳-۴۲}$$

$$w(-L_1,t) = 0 \qquad \frac{\partial w(-L_1,t)}{\partial x} = 0 \tag{۳-۴۳}$$

$$EI\,\frac{\partial^2 w(L_2,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad EI\,\frac{\partial^3 w(L_2,t)}{\partial x^3} = 0 \tag{۳-۴۴}$$

اگر انحراف در قسمت چپ نوک را با y و در قسمت راست آن را با z نشان دهیم، می‌توانیم معادلات ۳-۳۹ تا ۳-۴۴ را به صورت زیر ساده نماییم:

$$\rho A_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI_0 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \qquad -L_1 \le x \le 0 \tag{۳-۴۵}$$

$$\rho A_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + EI_0 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \qquad 0 \le x \le L_2 \tag{۳-۴۶}$$

همچنین شرایط مرزی و پیوستگی نیز به صورت زیر باز نویسی می‌شوند:

$$y(x,t)\big|_{x=0} = z(x,t)\big|_{x=0} \qquad \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial z(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{۳-۴۷}$$

$$EI_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} - EI_0 \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=} + m_t c^2 \ddot{y}'(x,t)\big|_{x=0} = 0 \qquad (۴۸-۳)$$

$$EI_0 \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3}\bigg|_{x=0} - EI_0 \frac{\partial^3 z(x,t)}{\partial x^3}\bigg|_{x=0} - k_n y(x,t)\big|_{x=0} - m_t \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\bigg|_{x=0} = 0 \qquad (۴۹-۳)$$

$$y(-L_1,t) = 0 \qquad \frac{\partial y(-L_1,t)}{\partial x} = 0 \qquad (۵۰-۳)$$

$$EI \frac{\partial^2 z(L_2,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad EI \frac{\partial^3 z(L_2,t)}{\partial x^3} = 0 \qquad (۵۱-۳)$$

۳-۲-۱-۳ معادلات حاکم بر ارتعاشات پیچشی

اگر سطح مقطع تیر را ثابت فرض نماییم آنگاه ممان اینرسی قطبی J، سختی پیچشی C_T ثابت می‌باشند. بنابراین معادلات ۳-۲۹ تا ۳-۳۲ را می‌توان به صورت زیر ساده‌سازی نمود:

$$\rho J(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(GC_T \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right) \qquad (۵۲-۳)$$

با شرایط پیوستگی:

$$\phi(0^-,t) = \phi(0^+,t) \qquad (۵۳-۳)$$

$$GC_T\left(\left.\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0^-}-\left.\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0^+}\right)+k_l h^2\phi(0,t)+c^2 m_t\,\frac{\partial^2\phi(0,t)}{\partial t^2}=0 \qquad (۵۴-۳)$$

و شرایط مرزی:

$$\left.\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L_2}=0 \qquad \phi(-L_1,t)=0 \qquad (۵۵-۳)$$

۳-۲-۲ بدست آوردن معادله مشخصه و تحلیل سیستم

۳-۲-۲-۱ ارتعاشات خمشی با تماس نزدیک انتها

برای بررسی ارتعاشات تیر نشان داده شده در شکل ۳-۳ از پاسخ‌های هارمونیک استفاده می نماییم. در نتیجه با فرض حلی با فرم $y=Y(x)e^{i\omega t}$ و $z=Z(x)e^{i\omega t}$ به ترتیب برای سمت چپ و راست نوک و جایگذاری در معادلات ۳-۴۵ تا ۳-۴۶ معادلات حاکم زیر داده می‌شوند:

$$\frac{d^4Y}{dx^4}-\beta^4Y(x)=0 \qquad -L_1\le x\le 0 \qquad (۵۶-۳)$$

$$\frac{d^4Z}{dx^4}-\beta^4Z(x)=0 \qquad 0\le x\le L_2 \qquad (۵۷-۳)$$

که در آن $k^4=\frac{\rho A}{EI}\omega^2$ می‌باشد.

سپس شرایط مرزی و پیوستگی نیز به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$Y(0)=Z(0) \qquad \left.\frac{dY}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{dZ}{dx}\right|_{x=0} \tag{۵۸-۳}$$

$$EI\left.\frac{dY^2}{dx^2}\right|_{x=0}=EI\left.\frac{d^2Z}{dx^2}\right|_{x=0}+\tfrac{1}{16}m_{tip}h^2\omega^2\left.\frac{dY}{dx}\right|_{x=0} \tag{۵۹-۳}$$

$$EI\,\frac{d^3Y(0)}{dx^3}-EI\,\frac{d^3Z(0)}{dx^3}=(k_n-m_{tip}\omega^2)Y(0) \tag{۶۰-۳}$$

$$Y(-L_1,t)=0 \qquad \frac{d}{dx}Y(-L_1)=0 \tag{۶۱-۳}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}Z(L_2)=0 \qquad \frac{d^3}{dx^3}Z(L_2)=0 \tag{۶۲-۳}$$

حل عمومی معادلات ۳-۵۶ و ۳-۵۷ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}Y(x)&=C_1\sin\beta x+C_2\sinh\beta x+C_3\cos\beta x+C_4\cosh\beta x\\ Z(x)&=D_1\sin\beta x+D_2\sinh\beta x+D_3\cos\beta x+D_4\cosh\beta x\end{aligned} \tag{۶۳-۳}$$

با جایگذاری شرایط مرزی معادله ۳-۵۸ در ۳-۶۲ داریم:

$$C_2+C_4=D_2+D_4 \qquad C_1+C_3=D_1+D_3 \tag{۶۴-۳}$$

با جایگذاری معادلات ۳-۵۹ و ۳-۶۰ در ۳-۶۳ و با توجه به معادلات ۳-۶۴ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} D_1 = C_1 + \frac{1}{2} S(C_2 + C_4) & (I) \\ D_2 = C_2 + \frac{1}{2} R(C_1 + C_3) & (II) \end{cases} \qquad \begin{cases} D_3 = C_3 - \frac{1}{2} S(C_2 + C_4) & (III) \\ D_4 = C_4 - \frac{1}{2} R(C_1 + C_3) & (IV) \end{cases}$$

که در آنها $R = \frac{m_t c^2 \omega^2}{EI\beta}$ و $S = \frac{k_n - m\omega^2}{EI\beta^3}$ می‌باشد.

همچنین با جایگذاری شرایط مرزی معادلات ۳-۶۲ در ۳-۶۳ و با توجه به معادلات (I)، (II)، (III) و (IV) خواهیم داشت:

$$\chi_1 C_1 + \chi_2 C_2 + \chi_3 C_3 + \chi_4 C_4 = 0 \tag{۳-۶۵}$$

$$\kappa_1 C_1 + \kappa_2 C_2 + \kappa_3 C_3 + \kappa_4 C_4 = 0 \tag{۳-۶۶}$$

که در آنها:

$$\begin{cases} \chi_1 = \sin(\beta L_2) + \frac{R}{2}(\cos(\beta L_2) + \cosh(\beta L_2)) \\ \chi_2 = \cos(\beta L_2) + \frac{S}{2}(\sin(\beta L_2) + \sinh(\beta L_2)) \\ \chi_3 = -\sinh(\beta L_2) + \frac{R}{2}(\cos(\beta L_2) + \cosh(\beta L_2)) \\ \chi_2 = -\cosh(\beta L_2) + \frac{S}{2}(\sin(\beta L_2) + \sinh(\beta L_2)) \end{cases} \qquad \begin{cases} \kappa_1 = -\cos(\beta L_2) + \frac{R}{2}(\sin(\beta L_2) - \sinh(\beta L_2)) \\ \kappa_2 = \sin(\beta L_2) - \frac{S}{2}(\cos(\beta L_2) + \cosh(\beta L_2)) \\ \kappa_3 = \cosh(\beta L_2) + \frac{R}{2}(\sin(\beta L_2) - \sinh(\beta L_2)) \\ \kappa_2 = \sinh(\beta L_2) - \frac{S}{2}(\cos(\beta L_2) + \cosh(\beta L_2)) \end{cases}$$

با جایگذاری معادلات ۳-۶۱ در معادلات ۳-۶۳ خواهیم داشت:

$$-C_1 \sin(\beta L_1) + C_2 \cos(\beta L_1) - C_3 \sinh(\beta L_1) + C_4 \cosh(\beta L_1) = 0 \tag{۳-۶۷}$$

$$C_1 \cos(\beta L_1) + C_2 \sin(\beta L_1) + C_3 \cosh(\beta L_1) - C_4 \sinh(\beta L_1) = 0 \tag{۳-۶۸}$$

در نهایت معادله مشخصه سیستم با توجه به معادلات ۳-۶۵ تا ۳-۶۸ برابر می‌شود با:

$$\begin{vmatrix} -\sin(\beta L_1) & \cos(\beta L_1) & -\sinh(\beta L_1) & \cosh(\beta L_1) \\ \cos(\beta L_1) & \sin(\beta L_1) & \cosh(\beta L_1) & -\sinh(\beta L_1) \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 & \chi_4 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (۶۹-۳)$$

با در نظر گرفتن اینکه $L = L_1 + L_2$ و همچنین با معرفی پارامترهای مکان تماس $C_p = \frac{L_2}{L_1}$، سختی تماس نرمال $k_f = \frac{k_n}{EI/L^3}$، جرم موثر $m_f = \frac{m_t}{\rho AL}$ و عدد موج خمشی نرمالیز شده $\gamma = kL$، می‌توانیم معادله مشخصه ۳-۶۹ را به فرم زیر بازنویسی نماییم:

$$pq[1-\cos\gamma\frac{1}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{1}{1+C_p}+\cos\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{C_p}{1+C_p}-\cos\gamma\frac{1}{1+C_p}\cos\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{1}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{C_p}{1+C_p}]$$

$$+(p+q)[\cos\gamma\frac{1}{1+C_p}\sinh\gamma\frac{1}{1+C_p}-\cos\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\sinh\gamma\frac{C_p}{1+C_p}+\cos\gamma\frac{1}{1+C_p}\cos\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\sinh\gamma] \qquad (۷۰-۳)$$

$$+(p-q)[\sin\gamma\frac{1}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{1}{1+C_p}-\sin\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{C_p}{1+C_p}+\cosh\gamma\frac{1}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\sin\gamma] = 2(1+\cos\gamma\cosh\gamma)$$

که p و q در معادله ۳-۷۰ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$p = \frac{m_f h^2 \gamma^3}{16L^2}(\frac{1}{1+L_c}) \qquad q = \frac{3k_f}{\gamma^3\left(\frac{1}{1+L_c}\right)^3}\left[1-\frac{m_f\gamma^4}{3k_f}\left(\frac{1}{1+L_c}\right)^4\right]$$

بنابراین رابطه بین فرکانس و عدد موج به صورت زیر بدست می‌آید:

$$f = \frac{\gamma^2}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad (۷۱-۳)$$

با توجه به معادله مشخصه ۳-۷۰ می توان دریافت که عدد موج βL با مکان نوک $\frac{L_2}{L_1}$ تغییر می‌نماید.

اگر $L_1 \succ\succ L_2$، می‌توانیم انحراف الاستیک تیر در سمت راست نوک را صرفنظر نماییم. با این فرض می‌توان از یک جرم متمرکز $m_2 = \rho A L_2$ به جای طول L_2 استفاده نمود. در این صورت معادله مشخصه ۳-۷۰ به صورت زیر تقلیل می‌یابد:

$$\begin{aligned}&2p'q'[1-1\cos\beta L_1\cosh\beta L_1]+(p'+q')[\cos\beta L_1\sinh\beta L_1+\cos\gamma\beta L_1\cos\gamma\beta L_1\sinh\beta L_1]\\&+(p'-q')[\sin\beta L_1\cosh\beta L_1+\cosh\beta L_1\cosh\beta L_1\sin\beta L_1]=2(1+\cos\beta L_1\cosh\beta L_1)\end{aligned} \quad (۷۲-۳)$$

$$p' = \frac{m_f' h^2 (\beta L_1)^3}{16 L_1^2} \qquad q' = \frac{3k_f}{(\beta L_1)^3}\left[1-\frac{m_f'(\beta L_1)^4}{3k_f}\right] \qquad m_f = \frac{m_t + m_2}{\rho A L}$$

در ادامه به بررسی حالت‌های ویژه‌ایی از AFM برای $L_2 = 0$، که در عمل کاربرد فراوانی دارند، می‌پردازیم:

حالت اول (حالت آزاد)- سختی تماس $k_f = ۰$ باشد. در این حالت معادله مشخصه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\cos\beta L_1\sinh\beta L_1-\sin\beta L_1\cosh\beta L_1=\frac{3}{m_f(\beta L_1)^4}\left(1+1\cos\beta L_1\cosh\beta L_1\right) \quad (۷۳-۳)$$

برای این حالت اگر از جرم نوک نیز صرفنظر شود، معادله مشخصه به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\left(1+1\cos\beta L_1 \cosh\beta L_1\right)=0 \qquad (۷۴-۳)$$

حالت دوم (حالت پین شده)- در این حالت $k_f \rightarrow \infty$، معادله مشخصه به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\cos\beta L_1 \sinh\beta L_1 - \sin\beta L_1 \cosh\beta L_1 = 0 \qquad (۷۵-۳)$$

در این حالت سختی تیر و جرم موثر تاثیری بر فرکانس سیستم نخواهد داشت.

حالت سوم (نوک بدون جرم)- در این حالت برای معادله مشخصه داریم:

$$-\left(\cos\beta L_1 \sinh\beta L_1 - \sin\beta L_1 \cosh\beta L_1\right)=\frac{k_f\left(\beta L_1\right)^3}{3}\left(1+1\cos\beta L_1 \cosh\beta L_1\right) \qquad (۷۶-۳)$$

برای این حالت فرکانس تنها به سختی تماس نرمال وابسته می‌باشد.

در بخش بعد برای بررسی اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس تشدید، پارامترهای مواد و هندسه تیر را مطابق پارامترهای ذکر شده در جدول ۳-۱ در نظر می‌گیریم.

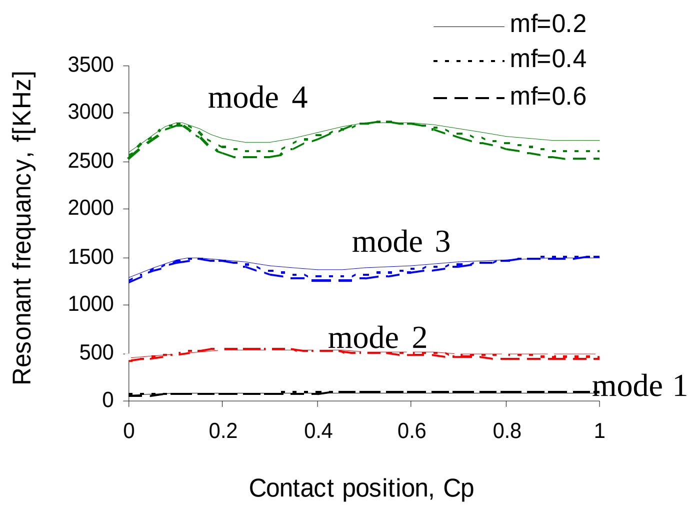
جدول ۳-۱

پارامترهای مختلف میکروسکوپ نیرو اتمی

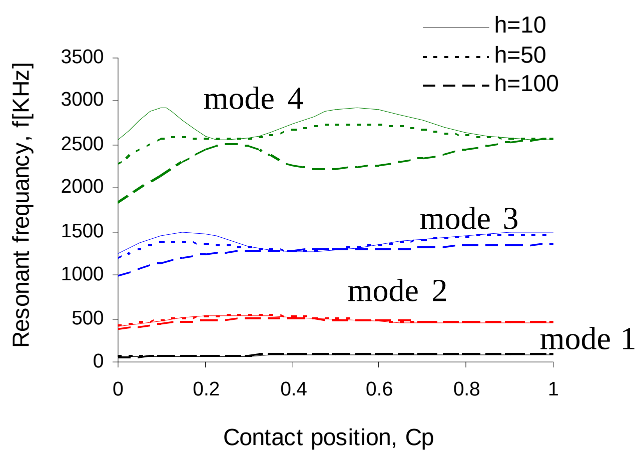
مدول الاستسیته $E\ (GPa)$	۱۷۰
چگالی جرمی $\rho (kg/m^3)$	۲۳۳۰
طول $L\,(\mu m)$	۳۰۰
ضخامت $t\,(\mu m)$	۲
عرض $b\,(\mu m)$	۵۰

شکل ۳-۴، تاثیر جرم موثر بر فرکانس را به صورت تابعی از مکان تماس برای چهار مد اول نشان می-دهد.

نتایج برای نوک با طول ۲۰ میکرومتر بدست آمده‌اند. همانطور که از شکل ۳-۴ پیداست اثر جرم موثر بر فرکانس برای مدهای پایین‌تر، کمتر می‌باشد و هر چه درجه مد افزایش می‌یابد، اثر جرم موثر آشکارتر می‌شود. تاثیر طول نوک، h بر فرکانس، به صورت تابعی از مکان تماس برای چهار مد اول نیز در شکل ۳-۵ بررسی شده است. این نتایج برای $m_f = ۰/۵$ بدست آمده‌اند. همانطور که دیده می‌شود نتایج بدست آمده از شکل ۳-۵، تایید کننده نتایج بدست آمده از شکل ۳-۴ می‌باشد. در هر دو شکل $k_f = ۰/۵$ در نظر گرفته شده است.



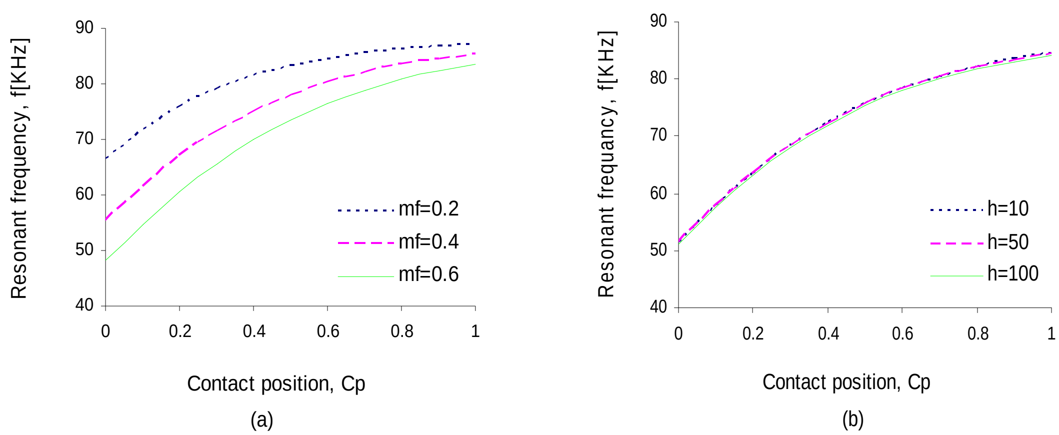
شکل ۳-۴ تاثیر جرم موثر بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای چهار مد اول



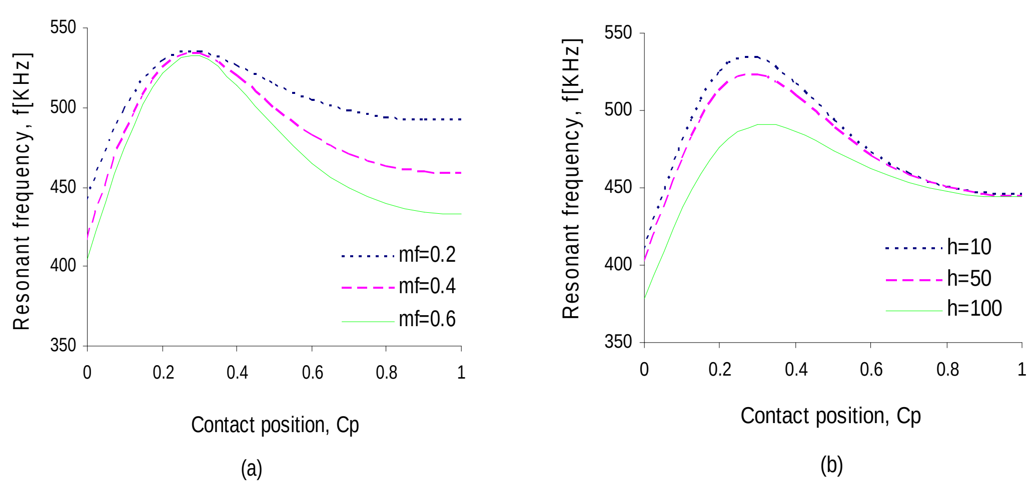
شکل ۳-۵ تاثیر ارتفاع نوک بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای چهار مد اول

با مقایسه دو شکل، فهمیده می‌شود که تعداد نقاط افت و خیز یک واحد از درجه مد پایین‌تر می‌باشد.

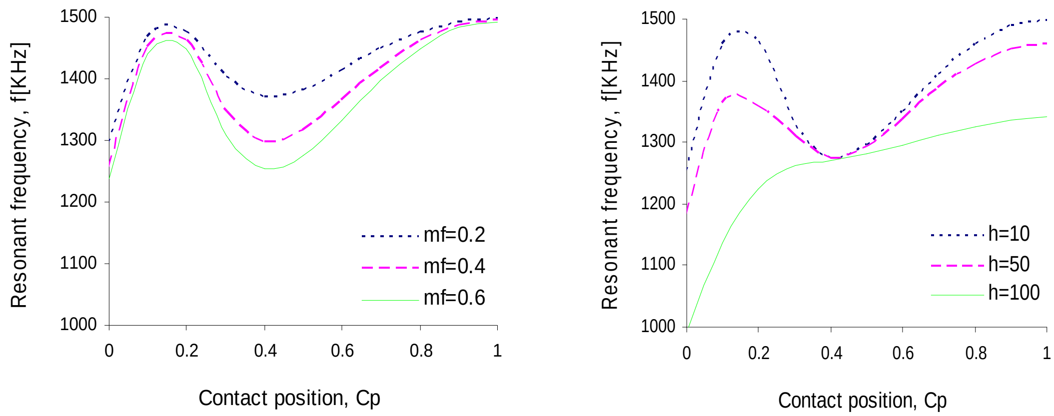
شکل‌های ۳-۶ تا ۳-۹ تاثیر جرم موثر و ارتفاع را بر فرکانس برای هر مد به طور جداگانه مقایسه می‌نماید.



شکل ۳-۶ a) تاثیر جرم موثر بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد اول؛
b) تاثیر ارتفاع نوک بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد اول

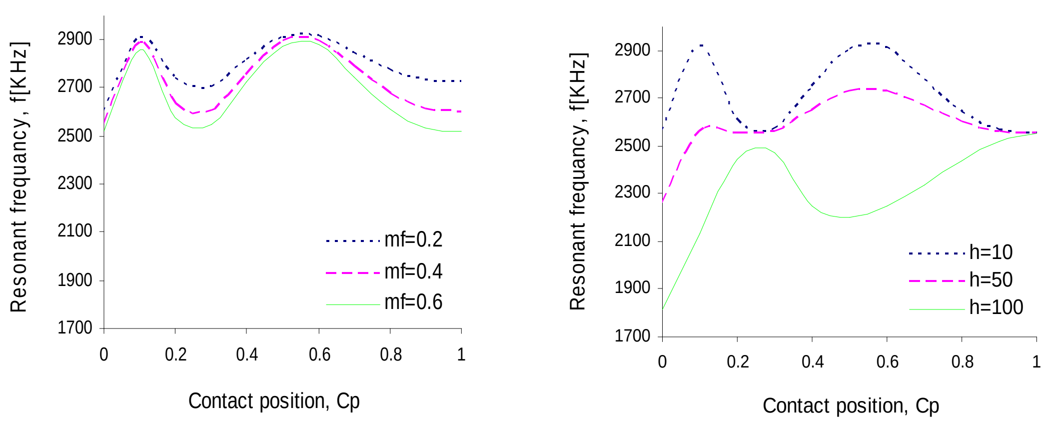


شکل ۳-۷ a) تاثیر جرم موثر بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد دوم؛
b) تاثیر ارتفاع نوک بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد دوم



(a) (b)

شکل ۳-۸ a) تاثیر جرم موثر بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد سوم؛
b) تاثیر ارتفاع نوک بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد سوم



(a) (b)

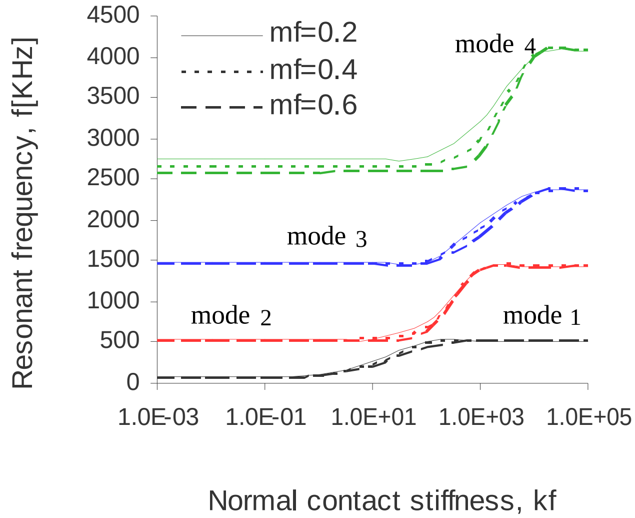
شکل ۳-۹ a) تاثیر جرم موثر بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد چهارم؛
b) تاثیر ارتفاع نوک بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد چهارم

نکته جالب دیگر که می‌توان از شکل های ۳-۶ تا ۳-۹ نتیجه گرفت این است که تاثیر جرم موثر و ارتفاع نوک در یک نقطه معین از نوک عکس یکدیگر می‌باشد. به عبارت دیگر در هر نقطه که تاثیر جرم موثر بر فرکانس کم می‌باشد، تاثیر ارتفاع زیاد بوده و بالعکس، در هر نقطه که تاثیر جرم موثر بر فرکانس، زیاد می‌باشد، تاثیر ارتفاع کم می‌باشد.

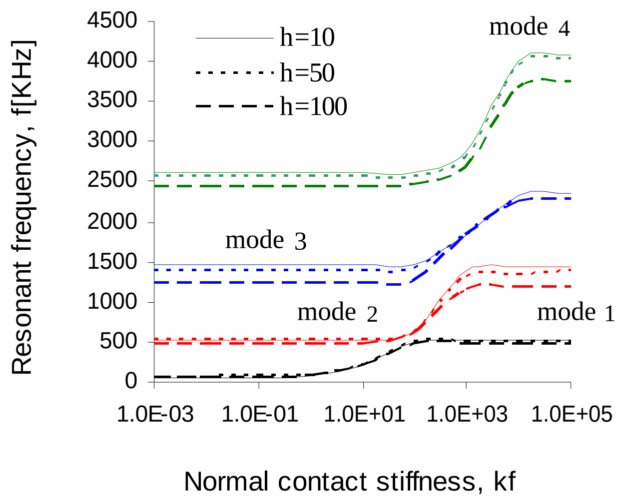
شکل‌های ۳-۱۰ و ۳-۱۱ به ترتیب تاثیر مقادیر مختلف جرم موثر، m_f و ارتفاع نوک، h را بر فرکانس تشدید به صورت تابعی از سختی تماس نرمال، k_f برای چهار مد اول نشان می‌دهند. با توجه به هر دو شکل، می‌توان فهمید که حساسیت فرکانس برای مقادیر پایین k_f ناچیز می‌باشد. به تدریج که k_f افزایش می‌یابد، فرکانس نیز به سرعت افزایش یافته تا در مقادیر خیلی بالای k_f به یک مقدار ثابت برسد.

همچنین فهمیده می‌شود که افزایش m_f و h باعث کاهش فرکانس تشدید می‌شود.

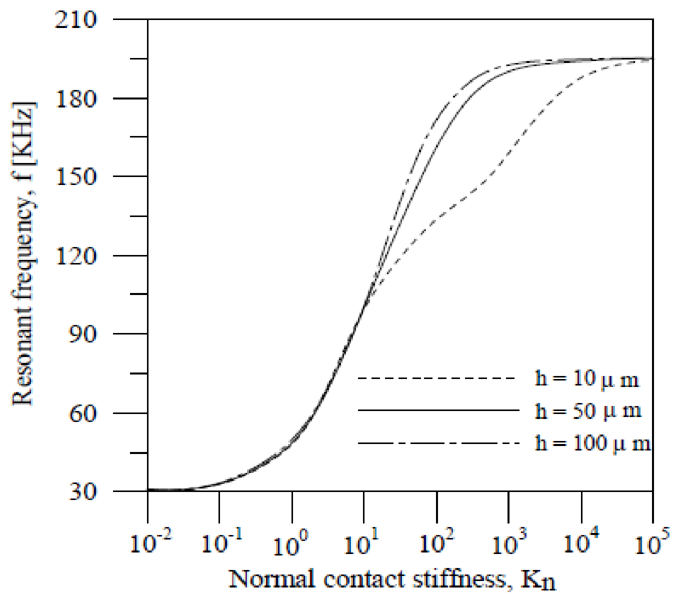
نتیجه گرفته شده اول، با نتیجه گرفته شده توسط چانگ [۶۵] یکی بوده، اما نتیجه دوم مغایر با نتایج چانگ می‌باشد. شکل ۳-۱۲ نتایج گرفته شده توسط چانگ را برای تاثیر ارتفاع بر فرکانس تشدید به صورت تابعی از سختی تماسی برای مد اول نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱۰ اثر جرم موثر m_f بر فرکانس ارتعاشات خمشی به صورت تابعی از سختی تماس نرمال برای چهار مد اول

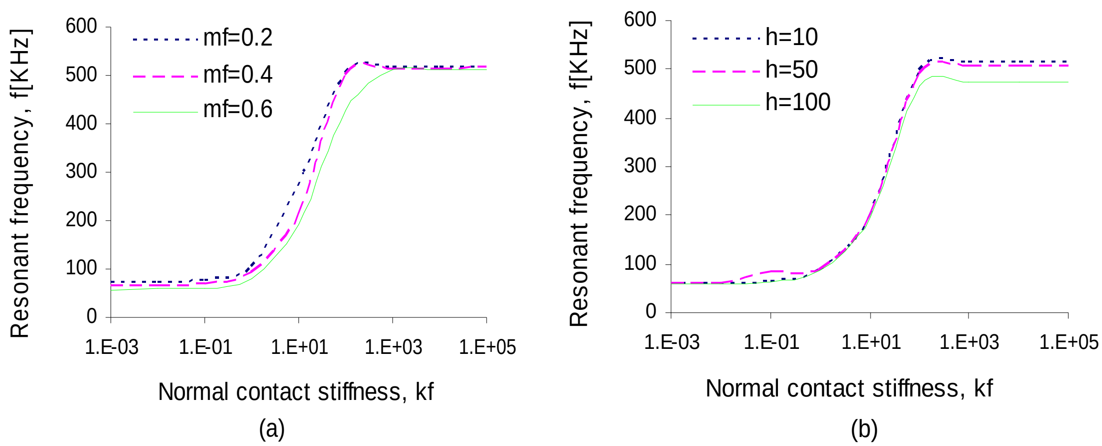


شکل ۳-۱۱ اثر ارتفاع نوک h بر فرکانس ارتعاشات خمشی به صورت تابعی از سختی تماس نرمال برای چهار مد اول



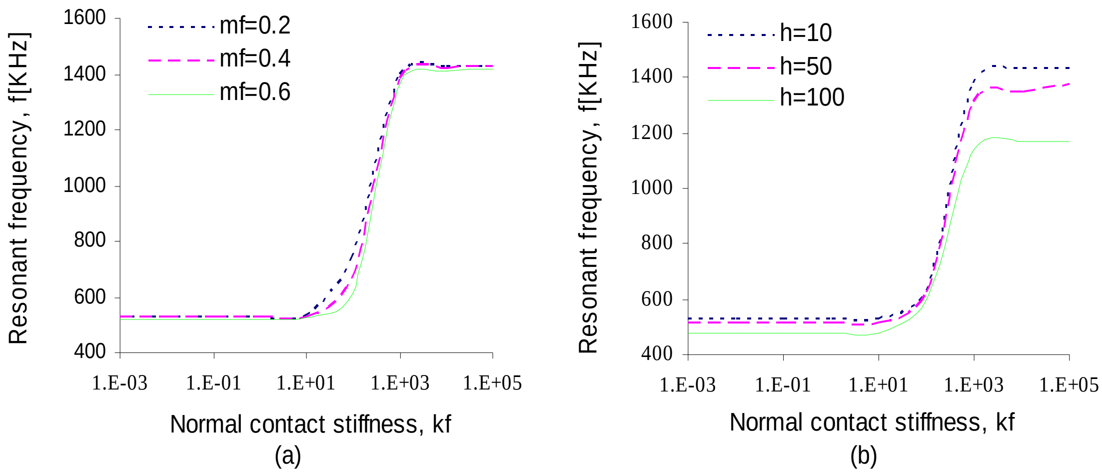
شکل ۳-۱۲ اثر ارتفاع نوک h بر فرکانس ارتعاشات خمشی به صورت تابعی از سختی تماس نرمال برای مد اول [۶۵]

شکل‌های ۳-۱۳ تا ۳-۱۶ تاثیر جرم موثر و ارتفاع نوک بر فرکانس را به صورت تابعی از سختی تماس نرمال k_f برای هر مد به طور جداگانه مقایسه می‌نماید.

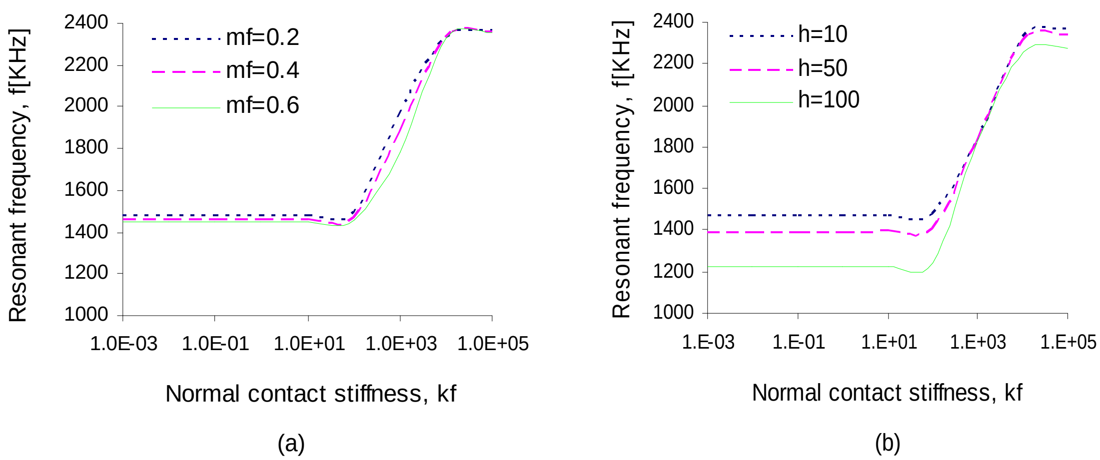


شکل ۳-۱۳ a) تاثیر جرم موثر بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد اول؛

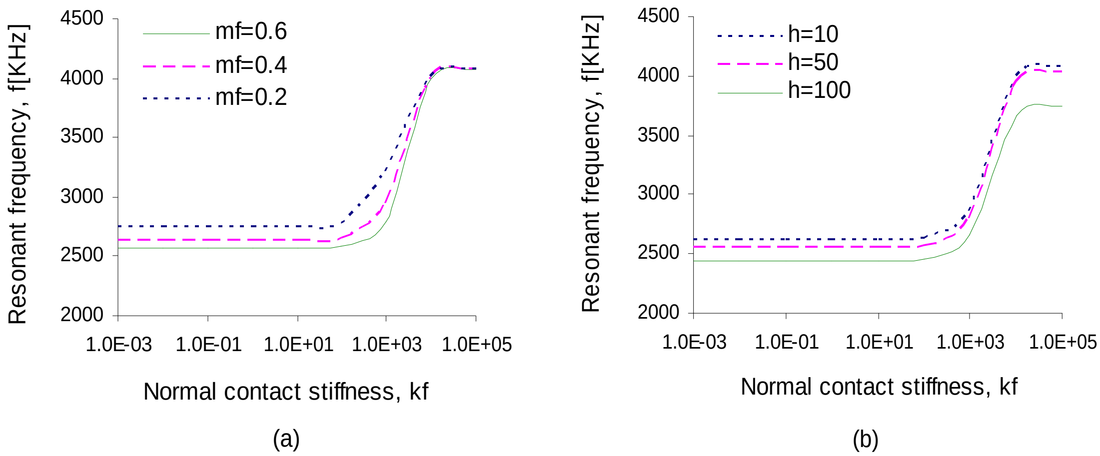
b) تاثیر ارتفاع نوک بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد اول



شکل ۳-۱۴ a) تاثیر جرم موثر بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد دوم؛
تاثیر ارتفاع نوک بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد دوم



شکل ۳-۱۵ a) تاثیر جرم موثر بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد سوم؛
b) تاثیر ارتفاع نوک بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد سوم



شکل ۳-۱۶ a) تاثیر جرم موثر بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد چهارم؛
b) تاثیر ارتفاع نوک بر فرکانس ارتعاشات خمشی برای مد چهارم

با مقایسه شکل‌های ۳-۱۳ تا ۳-۱۶ می‌توان نتیجه گرفت که هر چه درجه مد ها افزایش می‌یابد، تا مقادیر بالاتری از k_f، فرکانس فاقد حساسیت می‌باشد. به عنوان مثال در مد اول برای $k_f \leq ۲۰$ فرکانس تقریبا فاقد حساسیت می‌باشد. در حالی که این مقدار در مد دوم حدود ۸۰ می‌باشد.

۳-۲-۲-۲ ارتعاشات پیچشی با تماس نزدیک انتها

با فرض حلی با فرم $\phi(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$ و $\phi(x,t) = Z(x)e^{i\omega t}$ به ترتیب برای سمت چپ و راست نوک و جایگذاری در معادلات ۳-۵۲ تا ۳-۵۵ معادلات حاکم زیر داده می‌شوند:

$$\frac{d^2W(x)}{dx^2} + p^2W(x) = 0 \qquad (۳-۷۷)$$

$$\frac{d^2Z(x)}{dx^2} + p^2Z(x) = 0 \qquad (۳-۷۸)$$

که $p^2 = \frac{\rho J}{G\xi}\omega^2$

شرایط مرزی و پیوستگی به طورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$W'(0) - Z'(0) = \left(\frac{c^2 m_t \omega^2}{G\xi} - \frac{k_t h^2}{G\xi}\right) W(0) \tag{۷۹-۳}$$

$$W(-L_1) = 0 \qquad W(0) = Z(0) \qquad \left.\frac{dZ}{dx}\right|_{x=L_2} = 0 \tag{۸۰-۳}$$

حل عمومی برای معادلات ۳-۷۷ و ۳-۷۸ به صورت زیر داده می‌شود:

$$W(x) = A_1 \sin px + A_2 \cos px \tag{۸۱-۳}$$

$$Z(x) = B_1 \sin px + B_2 \cos px \tag{۸۲-۳}$$

با توجه به معادلات بالا، معادله مشخصه سیستم به صورت زیر داده می‌شود:

$$\frac{\gamma}{1+c_p}\tan\left(\frac{\gamma c_p}{1+c_p}\right) - k_t + \frac{3c^2 m_f}{t^2}\left(\frac{\gamma}{1+c_p}\right) - \frac{\gamma}{1+c_p}\cot\left(\frac{\gamma}{1+c_p}\right) = 0 \tag{۸۳-۳}$$

که در آن $k_t = \frac{k_t h^2}{G\xi / L}$ سختی تماس جانبی می‌باشد.

در نتیجه رابطه بین فرکانس و عدد موج به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f = \frac{\gamma}{2\pi L}\sqrt{\frac{\rho J}{G\xi}} \qquad (۸۴-۳)$$

با در نظر گرفتن معادلات بالا، معادله ۳-۸۱ و ۳-۸۲ به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$W(x) = \sin px + \tan pL_1 \cos px \qquad (۸۵-۳)$$

$$Z(x) = \tan pL_1 (\tan pL_2 \sin px + \cos px) \qquad (۸۶-۳)$$

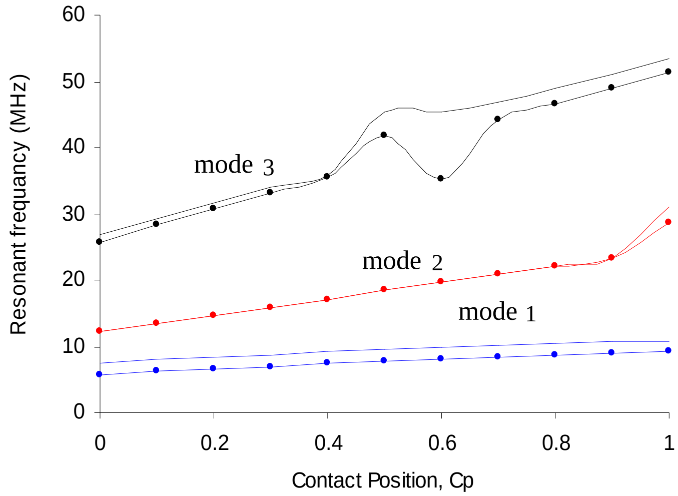
اگر از جرم نوک صرفنظر شود، معادله ۳-۸۳ به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\frac{\gamma}{1+c_p}\tan(\frac{\gamma c_p}{1+c_p}) - k_t - \frac{\gamma}{1+c_p}\cot(\frac{\gamma}{1+c_p}) = 0 \qquad (۸۷-۳)$$

به راحتی فهمیده می‌شود که هنگامی که از جرم نوک صرفنظر می‌شود، معادله مشخصه مستقل از ضخامت تیر، t و فاصله بین مرکز تیر تا مرکز جرم نوک، c می‌باشد.

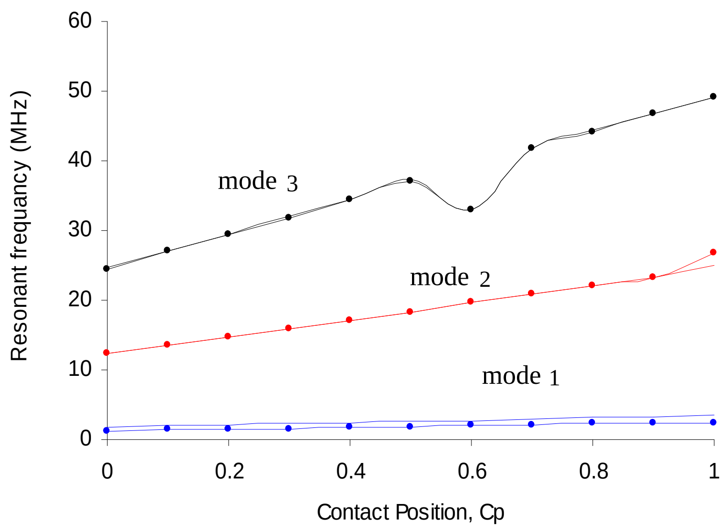
در این بخش با استفاده پارامترهای داده شده در جدول ۳-۱، ارتعاشات پیچشی تیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

شکل‌های ۳-۱۷، ۳-۱۸ و ۳-۱۹، تغییرات فرکانس ارتعاشات پیچشی در سه مد اول را به صورت تابعی از مکان تماس برای مقادیر مختلف جرم موثر و طول نوک نشان می‌دهد. نتایج برای $k_t = ۰/۲$ بدست آمده است. نتایج بدست آمده در سه شکل یکسان می‌باشند.



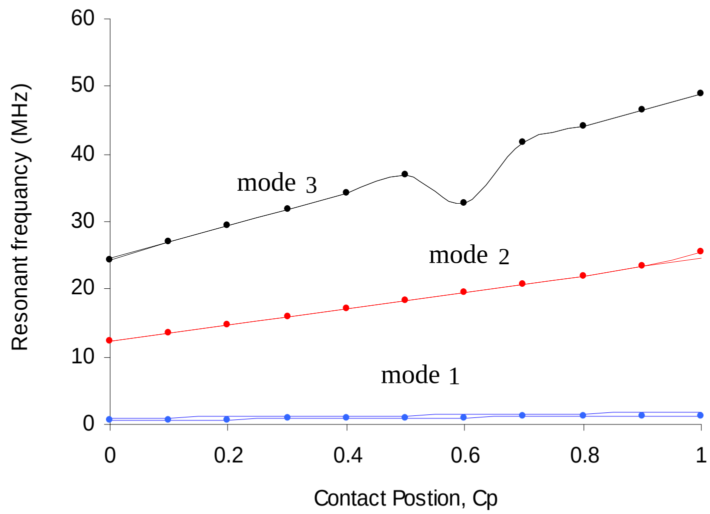
شکل ۳-۱۷ فرکانس ارتعاشات پیچشی به صورت تابعی از مکان تماس برای سه مد اول و $h = ۱۰ \ \mu m$

______ : $m_f = ۰/۲$;--•-•-•-: $m_f = ۰/۴$



شکل ۳-۱۸ فرکانس ارتعاشات پیچشی به صورت تابعی از مکان تماس برای سه مد اول و $h = ۵۰ \ \mu m$

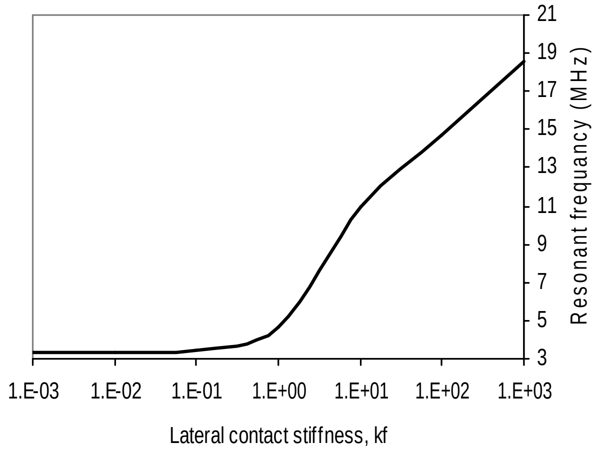
______ : $m_f = ۰/۲$;--•-•-•-: $m_f = ۰/۴$



شکل ۳-۱۹ فرکانس ارتعاشات پیچشی به صورت تابعی از مکان تماس برای سه مد اول و $h = ۱۰۰\ \mu m$

______ : $m_f = ۰/۲$;--•-•-•-: $m_f = ۰/۴$

با توجه شکل‌های فوق فهمیده می‌شود که تغییرات مکان تماس، تاثیر چندانی بر مد اول ندارد، اما این تاثیر با افزایش درجه مدها افزایش می‌یابد و به راحتی قابل درک می‌باشد. اگر چه در حالت کلی افزایش مکان تماس، فرکانس تشدید را افزایش می‌یابد. همچنین می‌توان دریافت که گرچه افزایش طول نوک بیشترین تاثیر را در مد اول دارد اما در حالت کلی باعث کاهش جزئی در فرکانس می‌شود. علاوه بر این، افزایش طول نوک باعث کاهش اثر جرم موثر می‌شود، به طوری که برای $h \geq ۱۰۰\ \mu m$ عملا تغییرات طول نوک بر فرکانس بی‌تاثیر می‌باشد. در هر سه شکل، فرکانس کمترین مقدار خود را در قسمت انتهایی تیر دارد ($C_p = ۰$).

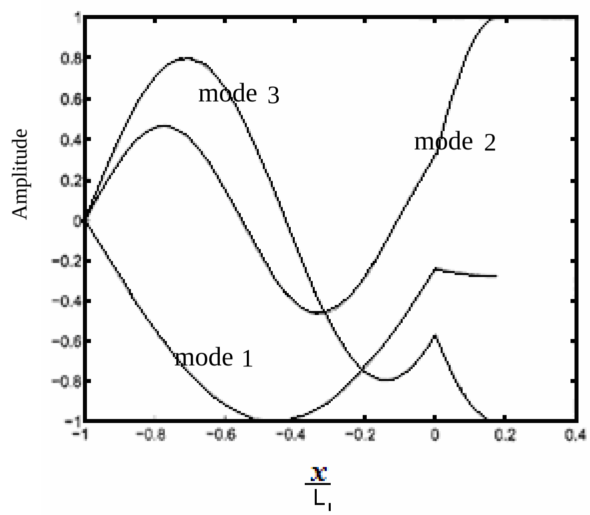


شکل ۳-۲۰ فرکانس تشدید-سختی تماس جانبی برای مد اول ($h = ۲۰\ \mu m$ و $m_f = ۰/۴$)

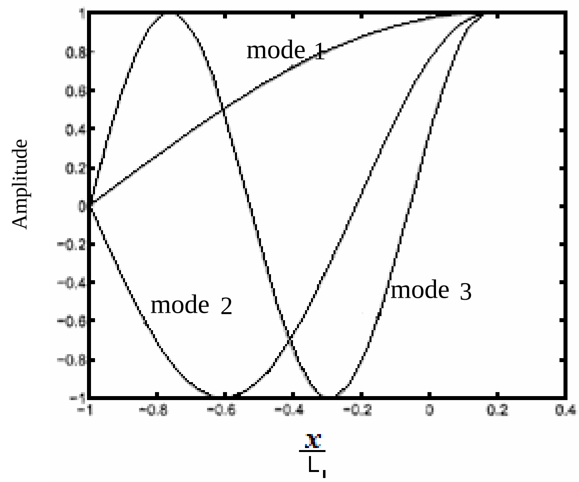
شکل ۳-۲۰، فرکانس را به صورت تابعی از سختی تماس جانبی برای مد اول نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد، هنگامی که k_t از ۱ بیشتر می‌شود، فرکانس تشدید به شدت افزایش می‌یابد و برای مقادیر خیلی بالای k_t، به یک مقدار ثابت می‌رسد. افزایش فرکانس باعث افزایش سختی سیستم می‌شود. با توجه به شکل ۳-۲۰ می‌توان دریافت که حساسیت فرکانس نسبت به سختی سیستم برای $k_t \leq 10^3$، ناچیز می‌باشد.

شکل‌های ۳-۲۱ و ۳-۲۲ دامنه را به صورت تابعی از x/L_1 بررسی می‌نمایند. با توج به شکل ۳-۲۱ نتایج نشان می‌دهد که تغییرات مد اول نسبت به یک k_t یکسان، نسبت به مدهای با درجه بالاتر، متفاوت می‌باشد. برای مد اول، دامنه به ازای تمام مقادیر x/L_1 در منطقه منفی قرار می‌گیرد. تغییرات دامنه برای مدهای دوم و سوم تقریبا یکنواخت می‌باشد. در مکان تماس دامنه برای هر سه مد تغییرات

ناگهانی را نشان می‌دهد. اما نتایج در شکل ۳-۲۲ متفاوت می‌باشند. در این شکل از سختی تماس صرفنظر شده است. با توجه به این شکل می‌توان دریافت هنگامی که از سختی تماس صرفنظر می‌شود، تغییرات ناگهانی در دامنه سیستم روی نخواهد داد. در این حالت، دامنه برای هر سه مد در قسمت انتهایی تیر بیشترین مقدار خود را دارا می‌باشد.



شکل ۳-۲۱ مدهای ارتعاشاتی برای سه مد اول، $k_t = ۰/۲$

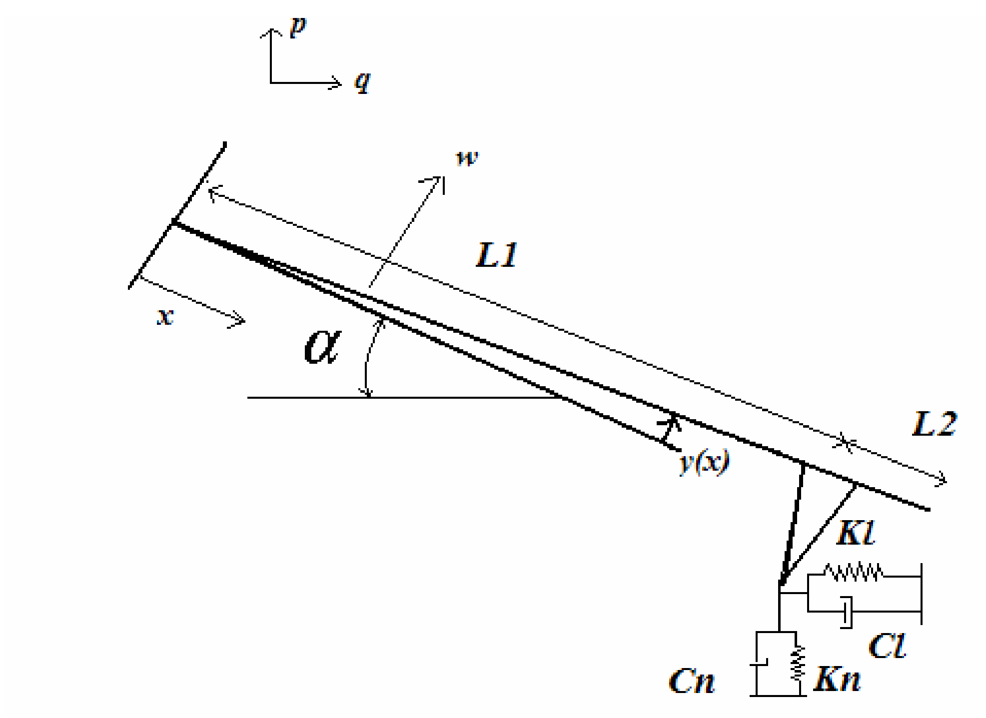


شکل ۳-۲۲ مدهای ارتعاشاتی برای سه مد اول، $k_t = ۰$

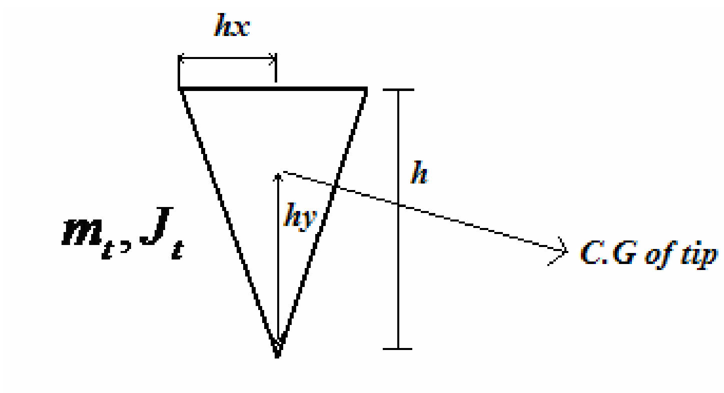
۳-۳ کامل‌ترین مدل پیشنهادی برای تیر مستطیل شکل

شکل ۳-۲۳ کامل‌ترین مدل تیر AFM را نشان می‌دهد. در این مدل سعی شده است تمامی پارمترهایی که پیشتر صرفنظر شده‌اند، در نظر گرفته شوند. یکی از پارامترهایی که در اغلب تحلیل‌ها صرفنظر شده است، زاویه موجود بین تیر و سطح نمونه می‌باشد. همانطور که پیشتر اشاره شد، در عمل نمی‌توان تیر را موازی سطح نمونه قرار داد و زاویه‌ای بین تیر و سطح نمونه بوجود خواهد آمد. این زاویه بر رفتار دینامیکی سیستم تاثیر گذار می‌باشد. چانگ برای اولین بار حساسیت فرکانس بر این زاویه را برای تماس در انتها مورد بررسی قرار داد [۱۰]. اما او از ضخامت تیر و مکان تماس صرفنظر کرد. بنابراین بررسی سیستمی با زوایای مختلف برای تخمین بهتر خواص مواد ضروری می‌نماید.

پارامتر دیگری که در سایر مطالعات مورد توجه قرار نگرفته است، تماس با میرایی می‌باشد. در این بخش ما با استفاده از ترکیب مجموعه ای از یک فنر و دمپر در جهات عمودی و جانبی، نیروهای برهم کنش بین نوک و نمونه را مدل نموده‌ایم . این بار نیز چانگ برای نخستین بار تاثیر میرایی را بوسیله مجموعه‌ای از یک فنر و دمپر، اما در جهات عمودی مورد مطالعه قرار داد [۶۶]. او در تحلیل های خود از مکان تماس، ممان اینرسی نوک و میرایی جانبی صرفنظر نمود. همچنین در این مدل تاثیر ممان اینرسی نوک بر رفتار دینامیکی سیستم نیز مورد بررسی قرار گرفته است (شکل ۳-۲۴).



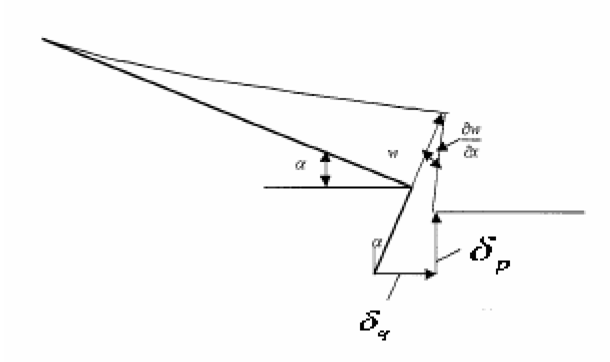
شکل ۳-۲۳ مدلی کامل برای تیر یک سر درگیر میکروسکوپ نیرو اتمی



شکل ۳-۲۴ مدلی کامل از یک نوک میکروسکوپ نیرو اتمی

مطابق شکل ۳-۲۳ فرض شده است دستگاه مختصات q و p به ترتیب در راستای موازی و عمود صفحه بوده و محورهای مختصات x و y نیز به ترتیب در راستای محور تیر و عمود بر آن باشند. در این صورت تغییر مکان نوک در راستای محور مختصات q و p، مطابق شکل ۳-۲۵ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{cases} \delta_p = w\cos\alpha - (h + t/2)\dfrac{\partial w}{\partial x}\sin\alpha \\ \delta_q = w\sin\alpha + (h + t/2)\dfrac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha \end{cases} \tag{۸۸-۳}$$



شکل ۳-۲۵ تغییر مکان نوک

و به همین صورت نیروهای برهم کنش بین نوک و نمونه در جهات q و p به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{cases} Fp = k_n \delta_p + c_n \dfrac{d\delta_p}{dt} \\ Fq = k_l \delta_q + c_l \dfrac{d\delta_q}{dt} \end{cases} \qquad (۳-۸۹)$$

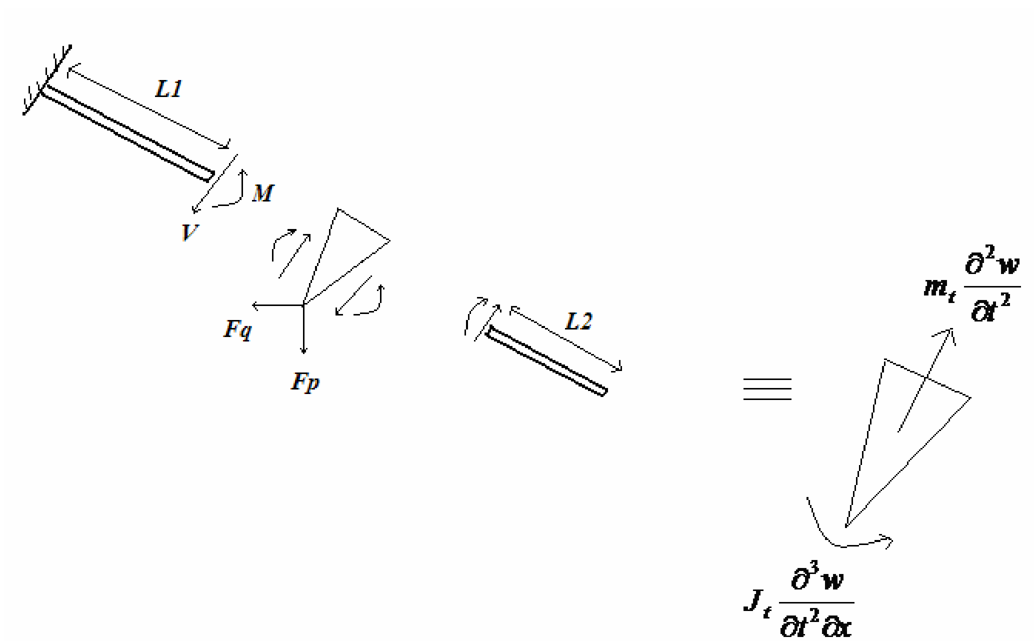
چون انحراف اولیه $y(x)$ تاثیری بر معادلات حاکم ندارد، با صرفنظر از بار محوری، معادله حاکم بر سیستم همانند معادله ۳-۳۹ می‌باشد:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad -L_1 \le x \le 0 \quad \text{و} \quad 0 \le x \le L_2 \qquad (۳-۹۰)$$

با شرایط مرزی :

$$w(-L_1,t)=\frac{\partial w}{\partial x}(x,t)\bigg|_{x=-L_1}=0 \qquad (۹۱-۳)$$

$$EI\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=L_2}=EI\,\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\bigg|_{x=L_2}=0 \qquad (۹۲-۳)$$



شکل ۳-۲۶ نمودار آزاد تیر میکروسکوپ نیرو اتمی

با در نظر گرفتن نمودار آزاد تیر یک سر درگیر به صورت شکل ۳-۲۶، شرایط پیوستگی به صورت زیر داده می‌شود:

$$w(0^-)=w(0^+) \qquad \frac{\partial w(x)}{\partial x}\bigg|_{x=0^-}=\frac{\partial w(x)}{\partial x}\bigg|_{x=0^+} \qquad (۹۳-۳)$$

$$M^{-}-M^{+}=-(V^{+}h_x+V^{-}h_x)+(F_p\sin\alpha-F_q\cos\alpha)h_y-J_t\frac{\partial w^3}{\partial t^2\partial x}$$
$$V^{-}-V^{+}=F_q\sin\alpha+F_p\cos\alpha+m_t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۹۴\text{-}۳)$$

که در آن:

$$M=EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$V=EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \qquad (۹۵\text{-}۳)$$

با جایگذاری معادله ۳-۹۵ در ۳-۹۴ داریم:

$$EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0^-}-EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0^+}=-(EI\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0^+}+EI\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0^-})hx$$
$$+(F_p\sin\alpha-F_q\cos\alpha)h_y-J_t\frac{\partial w^3}{\partial t^2\partial x} \qquad (۹۶\text{-}۳)$$
$$EI\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\bigg|_{x=0^-}-EI\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\bigg|_{x=0^+}=F_q\sin\alpha+F_p\cos\alpha+m_t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۹۷\text{-}۳)$$

و از معادلات ۳-۹۶ و ۳-۹۷ داریم:

$$EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0^-}-EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=0^+}=-2EIhx\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\bigg|_{x=0^-}+F_p(h_y\sin\alpha+h_x\cos\alpha)$$
$$+F_q(h_x\sin\alpha-h_y\cos\alpha)+m_th_x\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}-J_t\frac{\partial w^3}{\partial t^2\partial x} \qquad (۹۸\text{-}۳)$$

با فرض حلی با فرم $y = Y(x)e^{i\omega t}$ و $z = Z(x)e^{i\omega t}$، به ترتیب برای سمت چپ و راست نوک و جایگذاری در معادله ۳-۹۰ معادلات حاکم به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\frac{d^4Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0 \qquad -L_1 \le x \le 0$$

$$\beta^4 = \frac{\rho A}{EI}\omega^2 \qquad (۳-۹۹)$$

$$\frac{d^4Z(x)}{dx^4} - \beta^4 Z(x) = 0 \qquad 0 \le x \le L_2$$

بنابراین شرایط مرزی و پیوستگی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$Y(-L_1) = \left.\frac{dY}{dx}\right|_{x=-L_1} = 0 \qquad (۳-۱۰۰) \qquad\qquad \frac{d^2}{dx^2}Z(L_2) = \frac{d^3}{dx^3}Z(L_2) = 0 \qquad (۳-۱۰۱)$$

$$Y(0) = Z(0) \qquad (۳-۱۰۲) \qquad\qquad \left.\frac{dY(x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dZ(x)}{dx}\right|_{x=0} \qquad (۳-۱۰۳)$$

$$\begin{cases} \delta_p = \left(Y(0)\cos\alpha - (h+t/2)\left.\frac{dY(x)}{dx}\right|_{x=0}\sin\alpha\right)e^{iw} \\ \delta_q = \left(Y(0)\sin\alpha + (h+t/2)\left.\frac{dY(x)}{dx}\right|_{x=0}\cos\alpha\right)e^{iw} \end{cases} \qquad (۳-۱۰۴)$$

$$\begin{cases} \frac{d\delta_p}{dt} = iw\left(Y(0)\cos\alpha - (h+t/2)\left.\frac{dY(x)}{dx}\right|_{x=0}\sin\alpha\right)e^{iwt} \\ \frac{d\delta_q}{dt} = iw\left(Y(0)\sin\alpha + (h+t/2)\left.\frac{dY(x)}{dx}\right|_{x=0}\cos\alpha\right)e^{iwt} \end{cases} \qquad (۳-۱۰۵)$$

$$\begin{cases} Fp = k_n\delta_p + c_n\frac{d\delta_p}{dt} = \delta_p\left(k_n + i\omega C_n\right) = \delta_p\eta_n \\ Fq = k_l\delta_q + c_l\frac{d\delta_q}{dt} = \delta_q\left(k_l + i\omega C_l\right) = \delta_q\eta_l \end{cases} \qquad (۳-۱۰۶)$$

$$\eta_n = k_n + iwc_n \qquad\qquad \eta_l = k_l + iwc_l \qquad (۳-۱۰۷)$$

با توجه به روابط ۳-۱۰۴ تا ۳-۱۰۷، شرایط پیوستگی ۳-۹۷ و ۳-۹۸ به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$EI\left.\frac{d^3Y(x)}{\partial x^3}\right|_{x=0} - EI\left.\frac{d^3Z(x)}{\partial x^3}\right|_{x=0} - (F_q \sin\alpha + F_p \cos\alpha) + m_t w^2 Y(0) = 0 \qquad (۱۰۸-۳)$$

به صورتی که

$$F_q \sin\alpha + F_p \cos\alpha = (\eta_l \sin^2\alpha + \eta_n \cos^2\alpha)Y(0) + \frac{H}{2}(\eta_l - \eta_n)\sin 2\alpha \left.\frac{dY(x)}{dx}\right|_{x=0}$$

$$EI\left.\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right|_{x=0} - EI\left.\frac{d^2Z(x)}{dx^2}\right|_{x=0} + 2EIhx\left.\frac{d^3Y(x)}{dx^3}\right|_{x=0} + vF_q + uF_p - J_t w^2 \left.\frac{dY(x)}{dx}\right|_{x=0} + m_t h_x w^2 Y(0) = 0 \qquad (۱۰۹-۳)$$

که در آن

$$u = h_x \cos\alpha + h_y \sin\alpha \qquad\qquad v = h_x \sin\alpha - h_y \cos\alpha$$

و

$$vF_q + uF_p = r_1 Y(0) + r_2 \left.\frac{dY}{dx}\right|_{x=0}$$

$$r_1 = -\frac{h_y \sin 2\alpha}{2}(\eta_l - \eta_n) + h_x(\eta_l \sin^2\alpha + \eta_n \cos^2\alpha)$$
$$r_2 = \frac{h_x H \sin 2\alpha}{2}(\eta_l - \eta_n) - Hh_y(\eta_l \cos^2\alpha + \eta_n \sin^2\alpha)$$

حل عمومی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} Y(x) &= C_1 \sin\beta x + C_2 \sinh\beta x + C_3 \cos\beta x + C_4 \cosh\beta x \\ Z(x) &= D_1 \sin\beta x + D_2 \sinh\beta x + D_3 \cos\beta x + D_4 \cosh\beta x \end{aligned} \qquad (۱۱۰-۳)$$

با جایگذاری شرایط مرزی ۳-۱۰۰ و ۳-۱۰۱ در معادله ۳-۱۱۰، حل عمومی به صورت زیر ساده‌سازی

می‌شود:

$$\begin{aligned} Y(x) &= C_1[\sin\beta(x+L_1)-\sinh\beta(x+L_1)]+C_2[\cos\beta(x+L_1)-\cosh\beta(x+L_1)] \\ Z(x) &= D_1[\sin\beta(x-L_2)+\sinh\beta(x-L_2)]+D_2[\cos\beta(x-L_2)+\cosh\beta(x-L_2)] \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۱۱۱)$$

از شرایط پیوستگی ۳-۱۰۲ و ۳-۱۰۳ و معادله ۳-۱۱۱ خواهیم داشت:

$$C_1 = F_1D_1 + F_2D_2 \qquad (۳\text{-}۱۱۲) \qquad C_2 = G_1D_1 + G_2D_2 \qquad (۳\text{-}۱۱۳)$$

به صورتی که

$$F_1 = (\cos\gamma - \cos\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{1}{1+C_p} + \cos\gamma\frac{1}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{C_p}{1+C_p} - \cosh\gamma - \sin\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\sinh\gamma\frac{1}{1+C_p} - \sin\gamma\frac{1}{1+C_p}\sinh\gamma\frac{C_p}{1+C_p})/2(1-\cos\gamma\frac{1}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{1}{1+C_p})$$

$$F_2 = (\sin\gamma - \cos\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\sinh\gamma\frac{1}{1+C_p} + \sin\gamma\frac{1}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{C_p}{1+C_p} + \sinh\gamma - \sin\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{1}{1+C_p} - \cos\gamma\frac{1}{1+C_p}\sinh\gamma\frac{C_p}{1+C_p})/2(1-\cos\gamma\frac{1}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{1}{1+C_p})$$

$$G_1 = (-\sin\gamma + \sin\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{1}{1+C_p} - \cos\gamma\frac{1}{1+C_p}\sinh\gamma\frac{C_p}{1+C_p} + \sinh\gamma - \sin\gamma\frac{1}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{C_p}{1+C_p} + \cos\gamma\frac{C_p}{1+C_p}\sinh\gamma\frac{1}{1+C_p})/2(1-\cos\gamma\frac{1}{1+C_p}\cosh\gamma\frac{1}{1+C_p})$$

$$G_2 = (\cos\gamma - \cos\gamma \frac{C_p}{1+C_p} \cosh\gamma \frac{1}{1+C_p} + \cos\gamma \frac{1}{1+C_p} \cosh\gamma \frac{C_p}{1+C_p} - \cosh\gamma + \sin\gamma \frac{1}{1+C_p} \sinh\gamma \frac{C_p}{1+C_p}$$
$$+ \sin\gamma \frac{C_p}{1+C_p} \sinh\gamma \frac{1}{1+C_p}) / 2(1 - \cos\gamma \frac{1}{1+C_p} \cosh\gamma \frac{1}{1+C_p})$$

و همچنین با جایگذاری شرایط پیوستگی ۳-۱۰۸ و ۳-۱۰۹ در معادله ۳-۱۱۱ خواهیم داشت:

$$h_1 C_1 + h_2 C_2 + h_3 D_1 + h_4 D_2 = 0 \qquad (۱۱۴\text{-}۳)$$

$$k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 D_1 + k_4 D_2 = 0 \qquad (۱۱۵\text{-}۳)$$

$$h_1 L_1^2 = -\gamma^2 \frac{1}{(1+L_c)^2} (\sin\gamma \frac{1}{1+L_c} + \sinh\gamma \frac{1}{1+L_c}) - \frac{2\gamma^3 h_x}{L(1+L_c)^2} (\cos\gamma \frac{1}{1+L_c} + \cosh\gamma \frac{1}{1+L_c})$$
$$+ \frac{1}{L/_{1+L_c}} (r_1' + m_f h_x \gamma^4 \frac{1}{(1+L_c)^3})(\sin\gamma \frac{1}{1+L_c} - \sinh\gamma \frac{1}{1+L_c})$$
$$+ \frac{\gamma}{L^2/_{1+L_c}} (r_2' - J_f \gamma^4 \frac{1}{(1+L_c)^3})(\cos\gamma \frac{1}{1+L_c} - \cosh\gamma \frac{1}{1+L_c})$$
$$h_2 L_1^2 = -\gamma^2 \frac{1}{(1+L_c)^2} (\cos\gamma \frac{1}{1+L_c} + \cosh\gamma \frac{1}{1+L_c}) + \frac{2\gamma^3 h_x}{L(1+L_c)^2} (\sin\gamma \frac{1}{1+L_c} - \sinh\gamma \frac{1}{1+L_c})$$
$$+ \frac{1}{L/_{1+L_c}} (r_1' + m_f h_x \gamma^4 \frac{1}{(1+L_c)^3})(\cos\gamma \frac{1}{1+L_c} - \cosh\gamma \frac{1}{1+L_c})$$
$$- \frac{\gamma}{L^2/_{1+L_c}} (r_2' - J_f \gamma^4 \frac{1}{(1+L_c)^3})(\sin\gamma \frac{1}{1+L_c} + \sinh\gamma \frac{1}{1+L_c})$$
$$h_3 L_1^2 = -\gamma^2 \frac{1}{(1+L_c)^2} (\sin\gamma \frac{L_c}{1+L_c} - \sinh\gamma \frac{L_c}{1+L_c})$$
$$h_4 L_1^2 = -\gamma^2 \frac{1}{(1+L_c)^2} (-\cos\gamma \frac{L_c}{1+L_c} + \cosh\gamma \frac{L_c}{1+L_c})$$
$$h_4 L_1^2 = -\gamma^2 \frac{1}{(1+L_c)^2} (-\cos\gamma \frac{L_c}{1+L_c} + \cosh\gamma \frac{L_c}{1+L_c})$$
$$k_2 L_1^3 = \gamma^3 \frac{1}{(1+L_c)^3} (\sin\gamma \frac{1}{1+L_c} - \sinh\gamma \frac{1}{1+L_c}) + (m_f \gamma^4 \frac{1}{(1+L_c)^3} - \eta_n' \cos^2\alpha - \eta_l' \sin^2\alpha)$$
$$(\cos\gamma \frac{1}{1+L_c} - \cosh\gamma \frac{1}{1+L_c}) - \frac{H\gamma}{2L} (\eta_n' - \eta_l') \sin 2\alpha (\sin\gamma \frac{1}{1+L_c} + \sinh\gamma \frac{1}{1+L_c})$$

$$k_3 L_1^3 = \gamma^3 \frac{1}{(1+L_c)^3}\left(\cos \gamma \frac{L_c}{1+L_c} - \cosh \gamma \frac{L_c}{1+L_c}\right)$$
$$k_4 L_1^3 = \gamma^3 \frac{1}{(1+L_c)^3}\left(\sin \gamma \frac{L_c}{1+L_c} + \sinh \gamma \frac{L_c}{1+L_c}\right)$$
$$r_1' = -\frac{h_y \sin 2\alpha}{2}(\eta_l' - \eta_n') + h_x(\eta_l' \sin^2 \alpha + \eta_n' \cos^2 \alpha)$$
$$r_2' = \frac{h_x H \sin 2\alpha}{2}(\eta_l' - \eta_n') - H h_y(\eta_l' \cos^2 \alpha + \eta_n' \sin^2 \alpha)$$

$$\eta_n' = \beta_n + i\gamma^2 \sqrt{\frac{1}{\rho AEI}} \frac{L}{(1+L_c)^3} c_n \qquad \eta_l' = \beta_l + i\gamma^2 \sqrt{\frac{1}{\rho AEI}} \frac{L}{(1+L_c)^3} c_l$$

$$\beta_n = \frac{k_n}{EI/L_1^3} \qquad \beta_l = \frac{k_l}{EI/L_1^3} \qquad m_f = \frac{m_t}{\rho AL} \qquad J_f = \frac{J_t}{\rho AL}$$

و در نهایت با استفاده از روابط ۳-۱۱۲ تا ۳-۱۱۵، معادله مشخصه سیستم به صورت زیر بدست می‌آید:

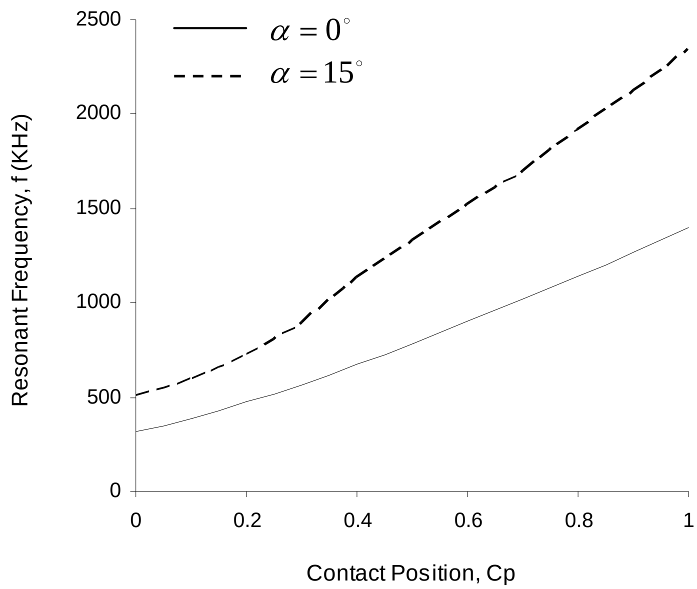
$$U_1 U_4 - U_2 U_3 = 0 \qquad (۱۱۶\text{-}۳)$$

$$U_1 = h_1 F_1 - h_2 G_1 + h_3 \qquad U_2 = h_1 F_2 - h_2 G_2 + h_4$$
$$U_3 = k_1 F_1 - k_2 G_1 + k_3 \qquad U_4 = k_1 F_2 - k_2 G_2 + k_4$$

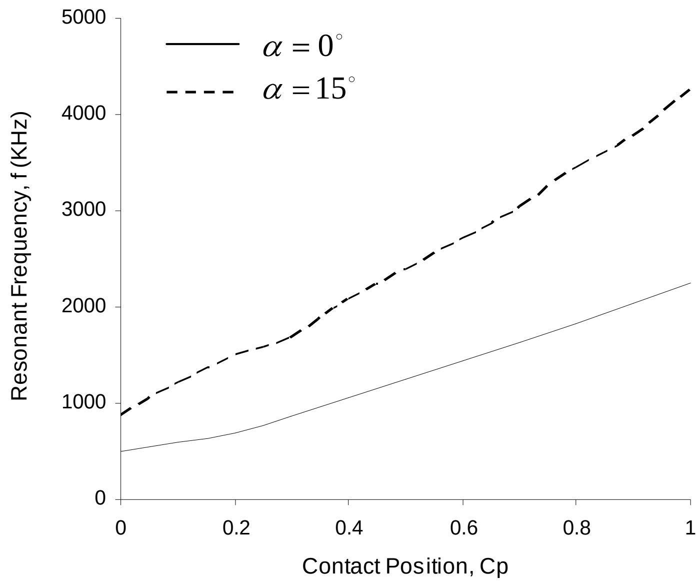
برای بررسی تغییرات فرکانس ناشی از زاویه، مکان تماس، میرایی و ممان اینرسی نوک، چند مثال آورده شده است. برای راحتی، رابطه ای برای شیفت عدد موج به صورت زیر تعریف کرده و در تحلیل‌ها از آن استفاده می نماییم:

$$E_n = \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_1} \times 100\% \qquad (۱۱۷\text{-}۳)$$

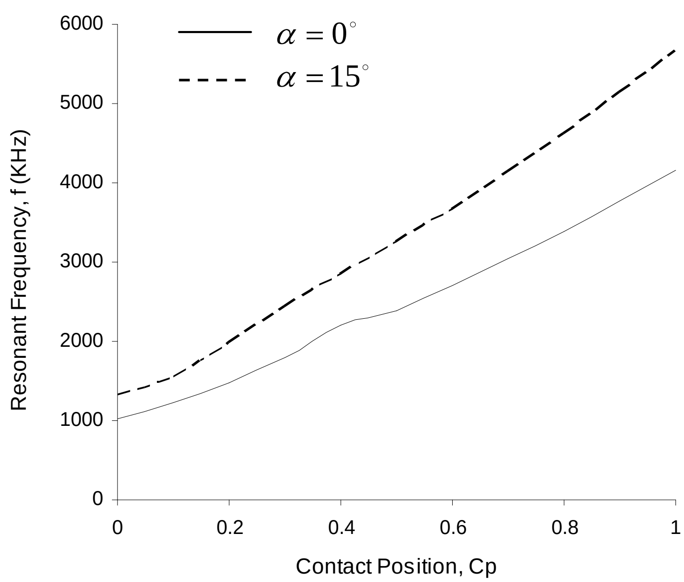
ابتدا تاثیر زاویه بر فرکانس را بررسی می‌نماییم. شکل های ۳-۲۷، ۳-۲۸ و ۳-۲۹، تاثیر زاویه را برای سه مد اول به صورت تابعی از مکان تماس بر روی فرکانس نشان داده‌اند.



شکل ۳-۲۷ تاثیر زاویه بر فرکانس به صورت تابعی از مکان تماس برای مد اول

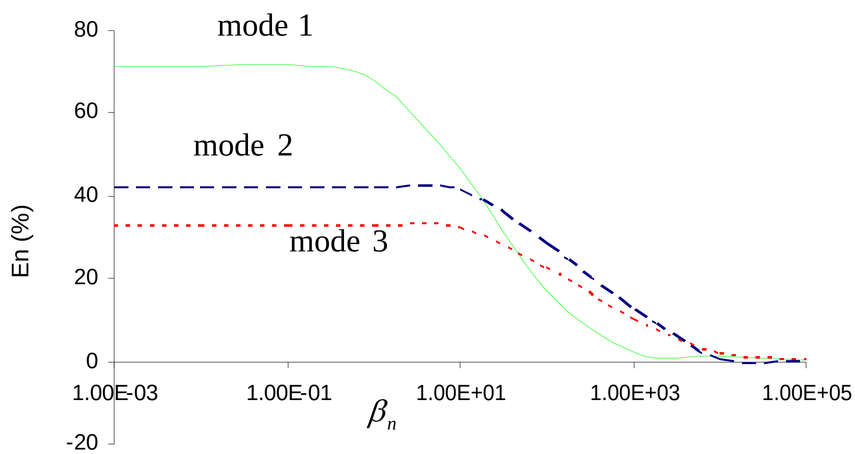


شکل ۳-۲۸ تاثیر زاویه بر فرکانس به صورت تابعی از مکان تماس برای مد دوم



شکل ۳-۲۹ تاثیر زاویه بر فرکانس به صورت تابعی از مکان تماس برای مد سوم

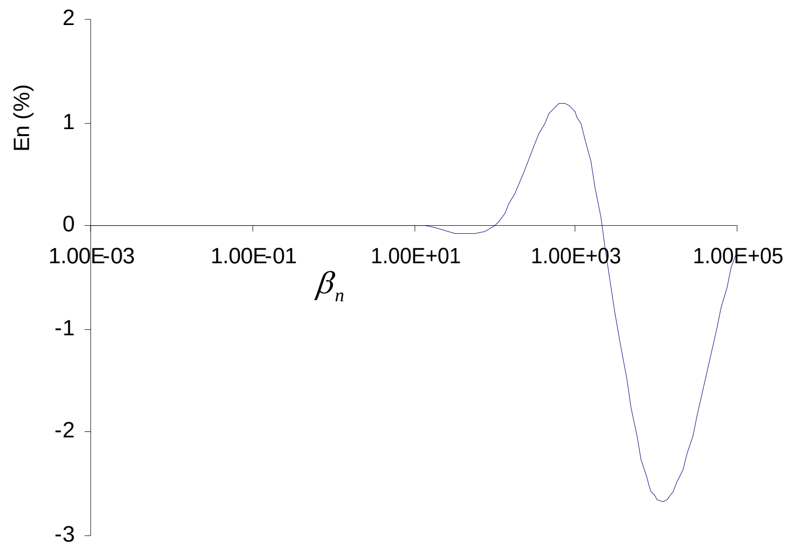
همانطور که از شکل های ۳-۲۷، ۳-۲۸ و ۳-۲۹ پیداست، افزایش زاویه می‌تواند موجب افزایش فرکانس شود. همچنین با افزایش زاویه، شیب تغییرات فرکانس نسبت به مکان تماس نیز افزایش می‌یابد.



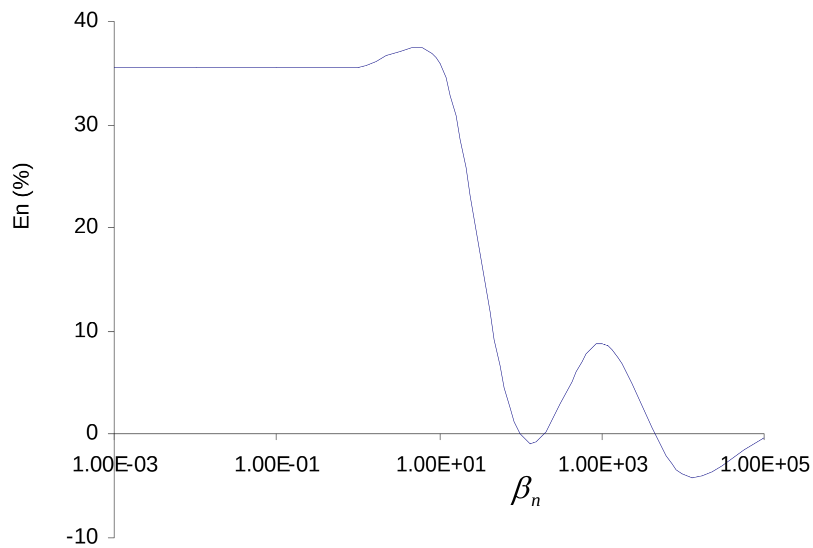
شکل ۳-۳۰ شیفت نسبی عدد موج برای سه مد اول (۱) $C_n = 1e-6$ و $C_l = 1e-7$؛ (۲) $C_n = 0$ و $C_l = 0$

شکل ۳-۳۰ تاثیر میرایی را بر فرکانس برای $\beta_l / \beta_n = 0/5$ ، $\alpha = 0$، $C_p = 0/2$ و (۱) $C_n = 1e-6$ و $C_l = 1e-7$؛ (۲) $C_n = 0$ و $C_l = 0$ مورد بررسی قرار می‌دهد. نکته جالبی که با توجه به شکل ۳-۳۰ فهمیده می‌شود این است که حداکثر حساسیت میرایی بر فرکانس در حالتی می‌باشد که سختی نرمال سیستم پایین می‌باشد. یعنی درست در هنگامی که تاثیر سختی بر فرکانس پایین می‌باشد. به تدریج با افزایش سختی سیستم تاثیر میرایی کاهش یافته به طوری که برای مقادیر بالای سختی نرمال، حدودا $k \succ 100$، می‌توان از میرایی سیستم صرفنظر نمود.

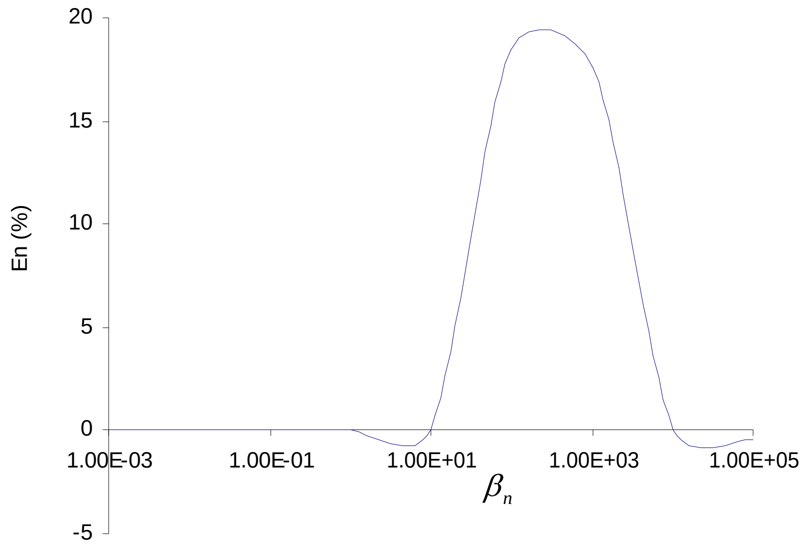
تاثیر ممان اینرسی نوک بر روی فرکانس برای $\beta_l/\beta_n = ۰/۵$ ، $\alpha = ۰$، $C_p = ۰/۲$ و (۱) $J_f = ۱/۳۵e\text{-}۲$؛ (۲) $J_f = ۰$ در شکل‌های ۳-۳۱ تا ۳-۳۴ برای مد اول تا چهارم مورد بررسی قرار گرفته است. از شکل-های ۳-۳۱ تا ۳-۳۴ می‌توان فهمید که تغییرات مد های فرد و زوج به طور جداگانه، روند مشابهی با یکدیگر دارند. با توجه به این نمودارها می‌توان دریافت که در مدهای فرد، برای مقادیر پایین سختی تماس، فرکانس نسبت به ممان اینرسی نوک فاقد حساسیت می‌باشد. اما به تدریج با افزایش سختی تماس سیستم، حدودا $k \succ ۱۰$، این حساسیت افزایش می‌یابد. اما این روند در مدهای زوج از شباهت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این مدها، بر عکس مدهای فرد، فرکانس نسبت به ممان اینرسی نوک، برای مقادیر پایین سختی تماس از حساسیت بالایی برخوردار می‌باشد. اگر چه این حساسیت، برای مقادیر بالای سختی تماس خیلی کمتر می‌شود، اما هیچ وقت از بین نمی‌رود. یعنی به ازای تمام مقادیر سختی تماس، فرکانس نسبت به ممان اینرسی نوک، برای مدهای زوج دارای حساسیت می‌باشد و این حساسیت در مقادیر پایین سختی تماس ناچیز می‌باشد.



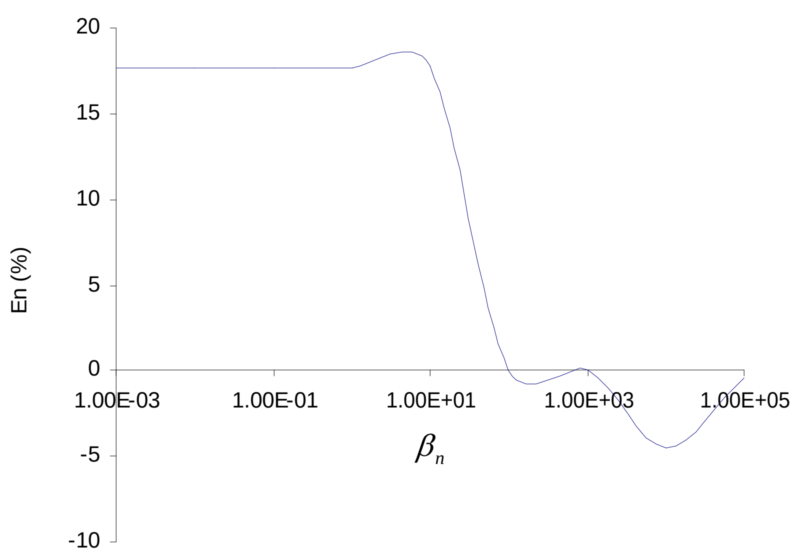
شکل ۳-۳۱ تاثیر ممان اینرسی جرمی بر فرکانس برای مد اول



شکل ۳-۳۲ تاثیر ممان اینرسی جرمی بر فرکانس برای مد دوم



شکل ۳-۳۳ تاثیر ممان اینرسی جرمی بر فرکانس برای مد سوم



شکل ۳-۳۴ تاثیر ممان اینرسی جرمی بر فرکانس برای مد چهارم

فصل چهارم

تماس میرایی

مدل‌های تماسی و تماس میرایی، برای سنجش ویژگیهای مواد با استفاده از میکروسکوپ نیرو اتمی بسیار مهم می‌باشند. تحقیقات بسیاری [۲۸]، [۳۰]، [۳۷]، [۳۸]، [۳۹]، [۵۰]، [۷۲] بر روی میرایی بین نوک و نمونه انجام شده است. دروبک[40] یکی از نخستین محققانی بود که آزمایشاتی را بر روی سختی برشی در تماس میکروسکوپ نیرو اتمی انجام داد [۶۸]. تمامی این تحقیقات به نوعی نشان می‌دهند که میرایی بسیار بالایی بین نوک و نمونه در هنگام روبش به وجود می‌آید. اما متاسفانه هنوز مدل میرایی مناسبی برای تماس بین نوک و نمونه پیشنهاد نشده است. برای ساده سازی مدل تماسی بین نوک و نمونه، شکل نوک نزدیک ناحیه تماس و سطح تماس موضعی نمونه به صورت کروی فرض می‌شوند. همچنین اگر از اصطکاک در سطح تماسی و بارهای مماسی صرفنظر شود، آنگاه مدل تماسی

[40] Drobek

بین نوک و نمونه به صورت مدل تماسی JKR یا ماگیس[۴۱] ساده می‌شود. هنگامی که بار نرمال عمودی خیلی بزرگ فرض شود، اثر چسبندگی نیز نادیده گرفته می‌شود. از اینرو برای میکروسکوپ نیرو اتمی با اصطکاک تماسی پایین، از مدل تماسی هرتزین[۴۲] استفاده می‌شود. چون مدل‌های تماسی هرتزین، JKR و ماگیس، مدل‌های بدون تماس اصطکاکی فرض می‌شوند، تنها تنش اعمال شده در این مدل‌ها، تنش عمودی می‌باشد. تحقیقات نشان می‌دهد که این مدل‌ها همیشه معتبر نیستند و نمی‌توانند وجود میرایی بسیار بالا برای تماس در مقیاس نانو در میکروسکوپ نیرو اتمی را توجیه کنند. بنابراین، چون اصطکاک می‌تواند یکی از عوامل مهم در وجود میرایی در این ناحیه باشد، بررسی اصطکاک در مساحت تماس بسیار ضروری می‌باشد. اگر از چسبندگی بین نوک و نمونه صرفنظر کنیم، معادلات عمومی تماس استاتیکی حاکم بر سیستم، شامل دو معادله وابسته (کوپل شده) با چند شرط اضافی در ناحیه چسبندگی و لغزندگی خواهند شد. حل دقیق برای کره با اصطکاک و با وجود بارهای مماسی و نرمال در سطح تماس هنوز یافت نشده است، اما خوشبختانه ترم‌های کوپل شده در هر دوی معادلات انتگرالی در مقایسه با سایر ترم ها بسیار کوچک می‌باشند [۴۴]، [۶۱]. بنابراین تنش‌های نرمال و همچنین تنش های برشی مماسی به صورت مستقل فرض می‌شوند. حل‌های تنش بدست آمده با فرض ارائه شده

[41] Maugis
[42] Hertzian

برای اکثر مسائل مهندسی قانع کننده و به اندازه کافی دقیق می‌باشند [۴۴]. حل‌های ارائه شده با استفاده از مدل‌های هرتزین، JKR و ماگیس نوعی از این حل ها می‌باشند.

کاتانئو[43] در سال ۱۹۸۳ برای اولین بار مسائل تماسی دو بعدی را برای مواد همگن با بارهای مماسی و نرمال مورد بررسی قرار داد. سپس میندلین[44] به طور مستقل مطالعاتی بر روی این مسائل انجام داد [۶۳]. اخیرا نیز باربر[45] پیشرفت‌هایی را در مکانیک تماسی بدست آورده است [۷۰]. میندلین نیز برای اولین بار اتلاف انرژی در چند کره با مواد یکسان و در تماس، با بارهای مماسی نوسانی را بررسی نمود [۴۳]. او در مطالعات خود بارهای اولیه را صفر فرض نمود. جانسون[46] مطالعات گسترده ای در خطاهای موجود در تنش‌های مماسی میندلین برای کره‌های ناهمسان در تماس انجام داد [۴۴]. گودمن[47] از حل هرتزین به عنوان اولین روش پرتوربیشن[48] برای مسائل تنش عمودی کوپل شده استفاده نمود و دریافت که حل هرتزین بهترین روش برای مسائل کوپل شده می‌باشد، اگر چه به علت انحراف اولیه تیر و وجود زاویه بین تیر و نمونه، نمی‌توان وجود بارهای مماسی را نادیده گرفت و نوسانات مماسی غیر متقارن می‌باشند. اما حل تنش و اتلاف انرژی در مساحت تماسی بسیار پیچیده تر از مدل میندلین می‌باشد. در این فصل با مدل نمودن تماس نوک-نمونه میکروسکوپ نیرو اتمی با وجود همزمانِ بارهای مماسی و

---

43 Cattaneo
44 Mindlin
45 Barber
46 Jahnson
47 Goodman
48 Perturbation

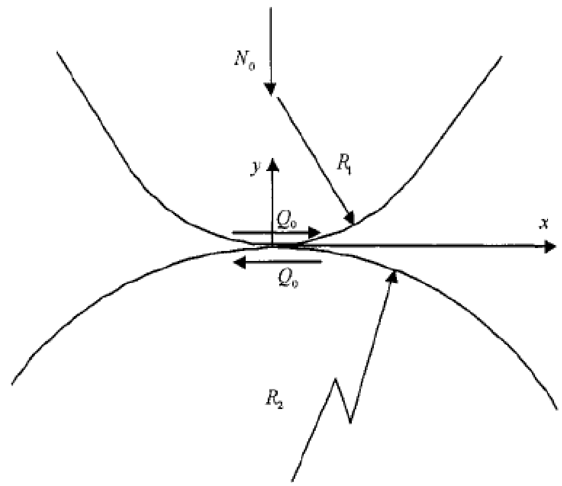
نرمال، به تحلیل تماس میرایی می‌پردازیم. در این مدل برای حل مسائل مستقل، یک سختی تماس مماسی، برای تماس نوک-نمونه میکروسکوپ نیرو اتمی فرض کرده‌ایم.

تماس نوک-نمونه و تماس میرایی در میکروسکوپ نیرو اتمی با در نظر گرفتن بارهای مماسی و عمودی مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش اول به معرفی مفهوم بنیادی مکانیک تماس پرداخته‌ایم. لغزش جزئی برای کره‌ها در تماس، زیر بار عمودی ثابت، در بخش دوم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش سوم مدلی را برای اتلاف انرژی تحت بارهای عمودی و مماسی معرفی می‌کنیم. درآخر نیز به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

۴-۱ مفاهیم بنیادی مکانیک تماس

۴-۱-۱ مدل هرتزین

شماتیک مدل هرتزین در شکل ۴-۱ نشان داده شده است. همانطور که در فصل دوم گفته شد، در این مدل فرض می کنیم که دو کره بدون اصطکاک در تماس باشند و اندازه تماس بسیار کوچکتر از شعاع کره‌ها فرض می‌شود. در نتیجه جسم‌های تحت تماس به صورت دو جسم الاستیک بی نهایت در نظر گرفته می‌شوند. اگر بار عمودی با N_0 نشان داده شود و بار مماسی $Q_0 = 0$، مدل ما همان مدل هرتزین می‌باشد.



شکل ۴-۱ مدل هرتزین- تماس الاستیک بین نوک و نمونه با وجود بارهای عمودی و مماسی

مساحت تماس یک دایره بوده و شعاع تماس a_0 به صورت ذیل داده می شود:

$$a_0 = \left(K_1 R N_0\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (۱-۴)$$

که در آن $K_1 = \frac{3}{4E^*}$، $1/E^* = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$ و $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$، E مدول یانگ اجسام تحت تماس، ν نسبت پواسان و R_1 و R_2 به ترتیب شعاع دو جسم در تماس می‌باشند.

تنش عمودی σ برای بار N_0 متناظر با σ_0 می باشد که برابر است با:

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{3N_0}{2\pi a_0^2}(a_0^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (۲-۴)$$

رابطه بین بار نرمال N_0 و جابجایی نرمال δ_y به صورت زیر داده می‌شوند:

$$N_0 = \frac{4}{3}\frac{R}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} - \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}\delta_y^{\frac{3}{2}} \qquad (۳-۴)$$

بنابراین سختی تماس عمودی k_n برابر می‌شود با:

$$k_n = \frac{dN_0}{d\delta_y} = \frac{2R^{\frac{1}{2}}}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} - \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}\delta_y^{\frac{3}{2}} = \frac{2a_0}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} - \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} = (6N_0R)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} - \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-\frac{2}{3}} \qquad (۴-۴)$$

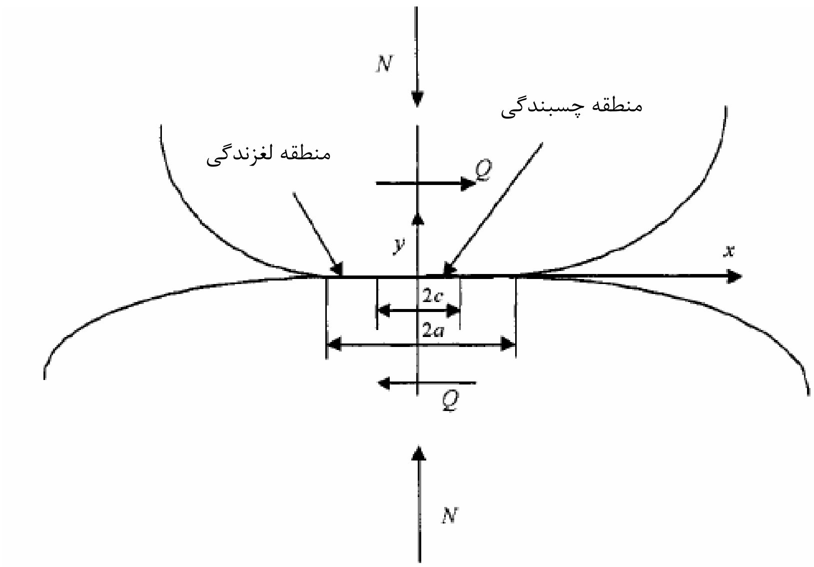
۴-۱-۲ تماس های لغزشی و بارهای مماسی

برای تماس بدون اصطکاک هرتزین، حرکت لغزشی تاثیری بر تنش تماسی نرمال نخواهد داشت. اگر چه حرکت لغزشی باعث بوجود آمدن بار مماسی Q_0 در جهت مخالف حرکت می‌شود. هنگامی که $Q_0 \prec \mu N_0$، حرکت لغزشی نسبی بین اجسام وجود نخواهد داشت. اگر چه یک حرکت لغزشی جزئی بین اجسام در تماس وجود دارد. تحقیقات تئوری نشان می‌دهد که تنش‌های مماسی و برشی به صورت خیلی جزئی، با یکدیگر کوپل می‌باشند [۶۹]، [۷۱]. در نتیجه اثر کوپل شدگی را می‌توان نادیده گرفت. می‌توان نشان داد که منطقه تماسی شامل دو قسمت می‌باشد: منطقه چسبندگی و منطقه لغزندگی (شکل۴-۲). در منطقه چسبندگی حرکت نسبی بین دو جسم وجود ندارد و تنش برشی باید کمتر از قدر مطلق اصطکاک باشد. یا به عبارتی دیگر:

$$s_x = u_{x_1} - u_{x_2} = const \qquad (۵-۴)$$

$$s_y = u_{y_1} - u_{y_2} = const \qquad (۶-۴)$$

$$|\tau| \le \mu|\sigma| \qquad (۷-۴)$$



شکل ۴-۲ مناطق چسبندگی و لغزندگی در بارهای عمودی و مماسی

که در آن μ ضریب اصطکاک جنبشی و u معرف جابجایی می‌باشد. در ناحیه لغزندگی تنش برشی τ باید با قدر مطلق اصطکاک برابر و جهت آن متفاوت باشد. در نتیجه:

$$|\tau| = \mu|\sigma| \tag{۴-۸}$$

$$\frac{\tau}{|\tau|} = -\frac{s}{|s|} \tag{۴-۹}$$

۴-۲ لغزش نسبی برای دو کره در تماس

۴-۲-۱ بار عمودی ثابت، بار مماسی در حال افزایش

در سطح بار $\left[N_0, Q_0 = 0\right]$، تنش با استفاده از رابطه ۴-۲ بدست می‌آید. از این حالت اولیه، بار مماسی به صورت یکنواخت از صفر تا Q_0 افزایش می‌یابد تا به سطح بار $\left[N_0, Q_0\right]$ برسد. اگر لغزش نسبی در منطقه تماس وجود نداشته باشد، تنش برشی نشان داده شده در شکل 4-3 در سطح تماس، بوسیله رابطه زیر داده می‌شود:

$$\tau(r) = \frac{Q_0}{2\pi a_0}\left(a_0^2 - r^2\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (۴-۱۰)$$

که با توجه با رابطه فوق، هنگامی که $r \to a_0$ آنگاه تنش برشی به بی نهایت میل می‌کند. بنابراین مقداری لغزش در گوشه تماس وجود خواهد داشت. از اینرو می‌توانیم لغزش را در ناحیه $c \le r \le a_0$ فرض نماییم و در نتیجه تنش را می‌توان برای نواحی مختلف تحلیل نمود. در ناحیه لغزندگی، تنش برشی در سطح تماسی، نشان داده شده در شکل ۴-۴ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\tau_0(r) = \mu\sigma = \frac{3N_0\mu}{2\pi a_0^2}\left(a_0^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad c \le r \le a_0 \qquad (۴-۱۱)$$

و به همین صورت در ناحیه چسبندگی، تنش برشی نشان داده شده در شکل ۴-۴ به صورت زیر فرمول بندی می‌شود:

$$\tau_0(r) = \frac{3N_0\mu}{2\pi a_0^2}\left[\left(a_0^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(c^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad r \le c \qquad (۴-۱۲)$$

انتگرال تنش برشی در منطقه تماسی با بار مماسی کل Q_0 برابر خواهد شد:

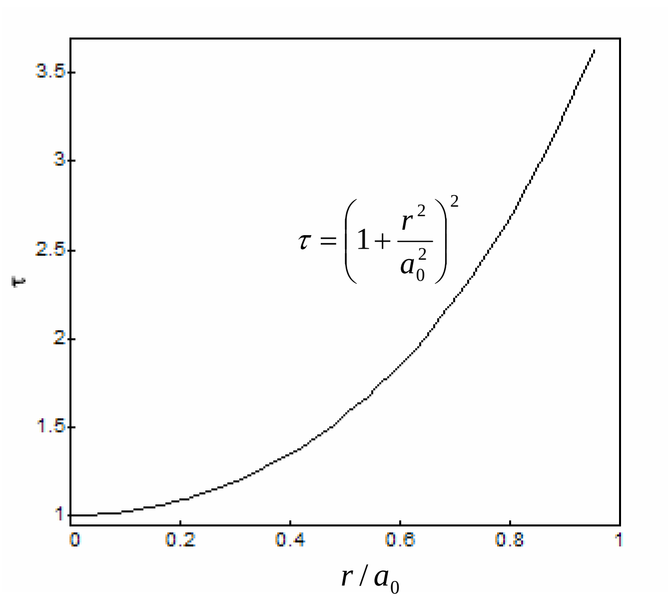
$$Q_0 = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\tau_0(r)rdrd\theta \tag{۱۳-۴}$$

با جایگذاری معادلات ۴-۱۱ و ۴-۱۲ در ۴-۱۳، اندازه ناحیه تماسی به صورت زیر داده می‌شود:

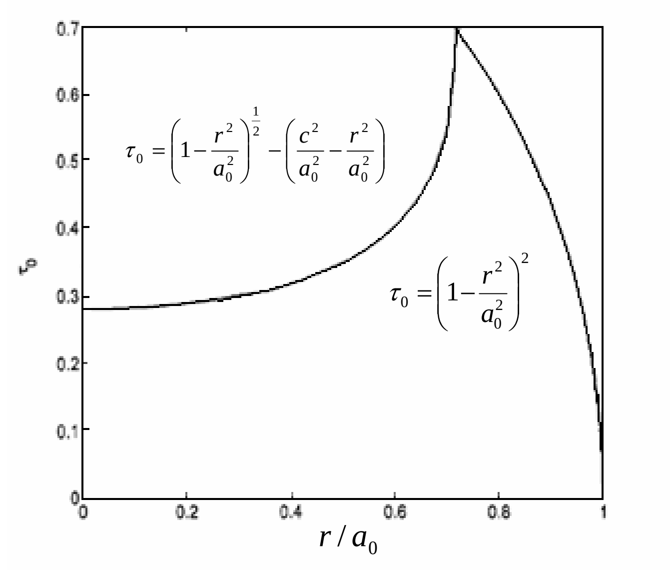
$$\frac{c}{a_0} = \left(1-\frac{Q}{\mu N_0}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{۱۴-۴}$$

چون جابجایی مماسی تنها بوسیله جابجایی در منطقه چسبندگی کنترل می‌شود، جابجایی ثابت در منطقه چسبندگی به صورت زیر داده می‌شود [۲۴]:

$$\delta_{xi_0} = \frac{3\mu N_0}{16}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1}-\frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\frac{a_0^2-c^2}{a_0^3} = \frac{3\mu N_0}{16a_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1}-\frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\left[1-\left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}}\right] \tag{۱۵-۴}$$



شکل ۴-۳ تنش برشی در سطح تماس بدون لغزش



شکل ۴-۴ توزیع تنش برشی در سطح تماس در نواحی لغزندگی و چسبندگی سطح تماس

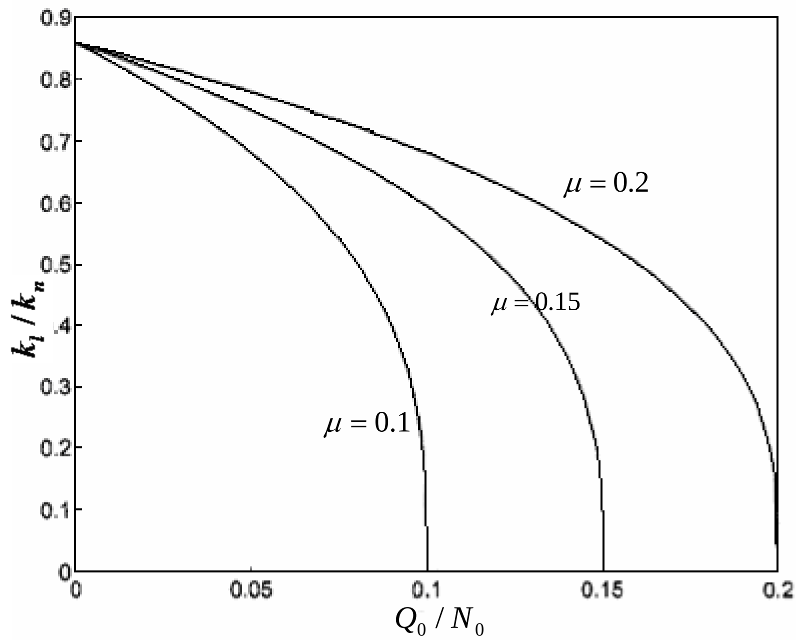
اگر بار مماسی به صورت پیوسته با ΔQ افزایش یابد، جابجایی ثابت در منطقه چسبندگی به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\delta_{xi_0} = \frac{3\mu N_0}{16a_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1}-\frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\left[1-\left(1-\frac{Q_0+\Delta Q}{\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}}\right] \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

بنابراین سختی تماسی جانبی در جهت مماسی را می توان به صورت زیر بدست آورد:

$$k_l = \frac{dQ_0}{d\delta_{xi_0}} = \frac{8a_0}{\frac{2-\nu_1}{G_1}-\frac{2-\nu_2}{G_2}}\left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)^{\frac{1}{3}} = 4\left(RN_0\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\left(\frac{1-\nu_1}{G_1}-\frac{1-\nu_2}{G_2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{2-\nu_1}{G_1}-\frac{2-\nu_2}{G_2}}\left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 8\left(R\delta_y\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\frac{2-\nu_1}{G_1}-\frac{2-\nu_2}{G_2}}\left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (۱۷\text{-}۴)$$



شکل ۴-۵ رابطه بین k_f و سطح بار برای مقادیر مختلف μ

سپس رابطه بین سختی تماس نرمال و مماسی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{k_l}{k_n} = 2\frac{G_2(1-\nu_1)+G_1(1-\nu_2)}{G_2(2-\nu_1)+G_1(2-\nu_2)}\left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\frac{G_2^2(4G_1-E_1)+G_1^2(4G_2-E_2)}{G_2^2(6G_1-E_1)+G_1^2(6G_2-E_2)}\left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$
(۴-۱۸)

برای $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$، رابطه بین $\frac{k_l}{k_n}$ و $\frac{Q_0}{N_0}$ مطابق شکل ۴-۵ بدست می‌آید. اگر ν_1 به ν_2 خیلی نزدیک شود، آنگاه k_f مستقل از مدول های برشی G_1 و G_2 خواهد بود. پیداست که k_f در بازه بزرگی از نسبت های مختلف بار $\frac{Q_0}{N_0}$ تغییر خواهد نمود.

همچنین اگر $Q_0 \prec\prec \mu N_0$ و $\nu_1 = \nu_2$، معادله ۴-۱۸ به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\frac{k_l}{k_n} = 2\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2} \qquad (۴-۱۹)$$

در این حالت اگر ν_1 بین ۰/۲ تا ۰/۵ تغییر نماید آنگاه k_f بین ۰/۸۸۹ تا ۰/۶۶۷ تغییر می‌نماید.

۴-۲-۲ بار عمودی ثابت، بار مماسی در حال کاهش

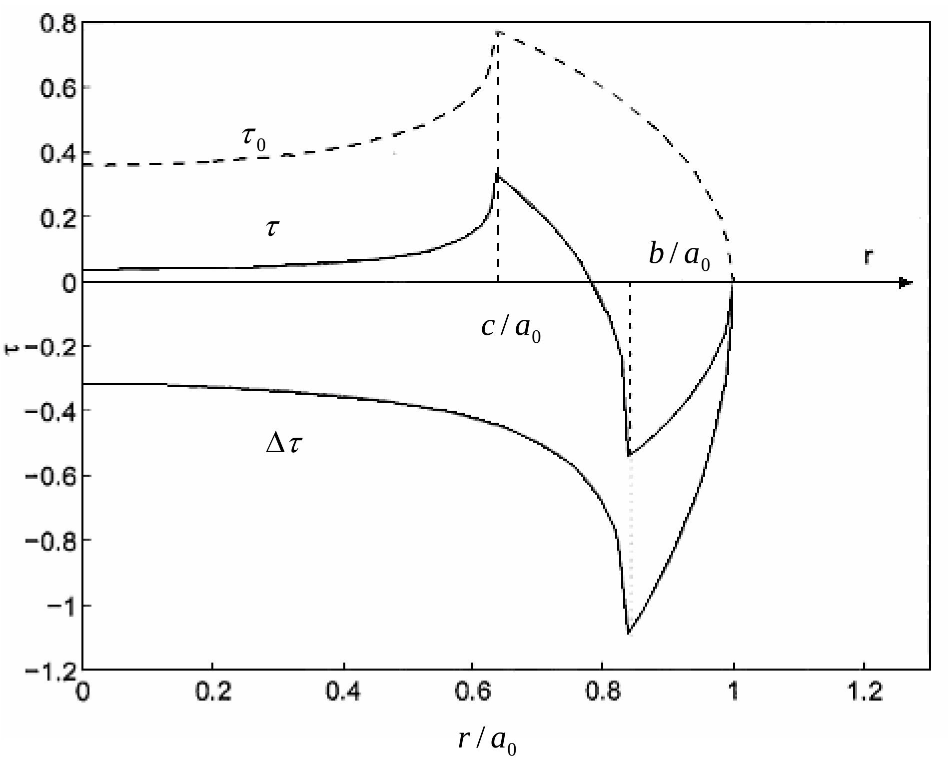
حالا حالتی را در نظر بگیرید که در آن بار عمودی در N_0 ثابت و بار مماسی از $Q_0(\prec \mu N_0)$ تا $Q = Q_0 - \Delta Q$ در حال کاهش باشد. در اینجا به خاطر کاهش ΔQ، لغزش در جهت مخالف با لغزش اولیه می‌باشد. فرض می‌کنیم که از $r = a_0$ شروع شود و به شعاع b نفوذ یابد به طوری که $c \le b \le a_0$ و بار کششی در منطقه $b \prec r \prec a_0$، $-2\mu\sigma_0$ باشد. در نتیجه تنش برشی افزایشی ناشی از بار افزایشی $-\Delta Q$ برابر است با:

$$\Delta\tau = -\frac{3\mu N_0}{\pi a_0^3}\left(a_0^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad b \prec r \le a_0 \qquad (۴\text{-}۲۰)$$

$$\Delta\tau = -\frac{3\mu N_0}{\pi a_0^3}\left[\left(a_0^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(b^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad r \le b \qquad (۴\text{-}۲۱)$$

کشش برایند که با کاهش ΔQ همراه می‌باشد، با جمع کشش اولیه τ_0 (در معادلات ۴-۱۱، ۴-۱۲ و معادلات ۴-۱۹، ۴-۲۰) و تنش برشی (نشان داده شده در شکل ۴-۶) بدست می‌آید:

$$\tau = \tau_0 + \Delta\tau = \begin{cases} -\dfrac{3\mu N_0}{2\pi a_0}\left(a_0^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} & b \prec r \le a_0 \\ -\dfrac{3\mu N_0}{2\pi a_0}\left[\left(a_0^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} - 2\left(b^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] & c \prec r \le b \\ -\dfrac{3\mu N_0}{2\pi a_0}\left[\left(a_0^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} - 2\left(b^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(c^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] & r \le c \end{cases} \qquad (۴\text{-}۲۲)$$



شکل ۴-۶ تنش مماسی در سطح تماسی برای فرایند باربرداری

با استفاده از شرایط تعادل و معادله ۴-۲۰ داریم:

$$Q = Q_0 - \Delta Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{a_0} \tau r dr d\theta \qquad (۲۳\text{-}۴)$$

در نتیجه:

$$Q = Q_0 - \Delta Q = \frac{\mu N_0}{a^3}\left(a_0^3 - c^3\right) - \frac{2\mu N_0}{a_0^3}\left(a_0^3 - b^3\right) = Q_0 - \frac{2\mu N_0}{a_0^3}\left(a_0^3 - b^3\right) \qquad (۲۴\text{-}۴)$$

معادله ۴-۲۴ را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$b = a_0\left(1 - \frac{Q_0 - Q}{2\mu N_0}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۵\text{-}۴)$$

با اعمال معادلات ۴-۱۴، ۴-۲۲ و ۴-۲۵، جابجایی ثابت درجهت بار مماسی درمنطقه چسبندگی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\delta_{xd} = \frac{3\mu N_0}{16}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1} - \frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\frac{2b^2 - a_0^2 - c^2}{a_0^3}$$

$$= \frac{3\mu N_0}{16a_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1} - \frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\left[2\left(1-\frac{Q_0 - Q}{2\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right] \qquad (۲۶\text{-}۴)$$

$$= \frac{3\mu N_0}{16a_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1} - \frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\left[2\left(1-\frac{\Delta Q}{2\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(1-\frac{Q_0}{2\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]$$

و در نهایت جابجایی ثابت در منطقه چسبندگی نسبت به سطح بار $[N_0, Q_0]$ به صورت زیر داده می-شود:

$$\Delta\delta_{xd} = \frac{3\mu N_0}{8}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1} - \frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\left[\left(1-\frac{\Delta Q}{2\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right] \qquad (۲۷\text{-}۴)$$

۴-۳ اتلاف انرژی در تماس

۴-۳-۱ بار عمودی ثابت و بار مماسی نوسانی

اگر بار عمودی اولیه به اندازه کافی بزرگ و دامنه ارتعاشات به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه بار عمودی در محدوده بسیار کوچکی تغییر خواهد نمود. بنابراین تغییرات بار عمودی در مقایسه با مقدار اولیه آن کوچک می‌باشد، اگر چه نمی‌توان به طور همزمان از تغییرات بار مماسی صرفنظر نمود. در نتیجه مدل ریاضیاتی برای این مسئله به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$N = N_0 \qquad (۲۸\text{-}۴)$$

$$\Delta Q \leq Q_0 \qquad (۲۹-۴)$$

$$Q = Q_0 + \Delta Q \cos wt$$

با استفاده از معادله ۴-۲۶، برای فرایند باربرداری از حالت اولیه $[N_0, Q_0 + \Delta Q]$، جابجایی ثابت در منطقه چسبندگی برابر می‌شود با:

$$\delta_{xd} = \frac{3\mu N_0}{16a_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1} - \frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\left[2\left(1-\frac{Q_0+\Delta Q - Q}{2\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(1-\frac{Q_0+\Delta Q}{\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right] \qquad (۳۰-۴)$$

هنگامی که Q به $Q_0 - 2\Delta Q$ میل می‌کند، فرایند باربرداری به انتها می‌رسد و فرایند بار گذاری شروع می‌شود. جابجایی در منطقه چسبندگی در فرایند بارگذاری به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\delta_{xi} = -\delta_{xd}(-Q) = \frac{3\mu N_0}{16a_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1} - \frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\left[-2\left(1-\frac{Q_0+\Delta Q + Q}{2\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1-\frac{Q_0+\Delta Q}{2\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}} + 1\right] \qquad (۳۱-۴)$$

در نتیجه کار انجام شده توسط Q در سیکل بار گذاری-باربرداری به صورت زیر می‌باشد:

$$Work = \int_{Q_0-\Delta Q}^{Q_0+\Delta Q} (\delta_{xd} - \delta_{xi})\, d(Q) = \frac{9(\mu N_0)^2}{20a_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1} - \frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\times$$
$$\left\{1-\left(1-\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^{\frac{5}{3}} + \left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)^{\frac{5}{3}} - \left(1-\frac{Q_0+\Delta Q}{\mu N_0}\right)^{\frac{5}{3}} - \frac{5\Delta Q}{3\mu N_0}\left[1+\left(1-\frac{Q_0+\Delta Q}{\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\} \qquad (۳۲-۴)$$

هنگامی که $Q_0 = 0$ می باشد، معادله فوق با معادله بدست آمده توسط میندلین [۴۳] برابر می‌شود:

$$Work = \frac{9(\mu N_0)^2}{20a_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1}-\frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\times\left\{2-2\left(1-\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^{\frac{5}{3}}-\frac{5\Delta Q}{3\mu N_0}\left[1+\left(1-\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\} \quad (۴-۳۳)$$

برای بررسی تفاوت‌ها بین معادلات ۴-۳۲ و ۴-۳۳، در نظر گرفتن نقش بار مماسی ضروری می‌نماید.

فرض می‌کنیم $Q_0 \prec\prec \mu N_0$ و $\Delta Q \prec\prec Q_0$، آنگاه معادله ۴-۳۲ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

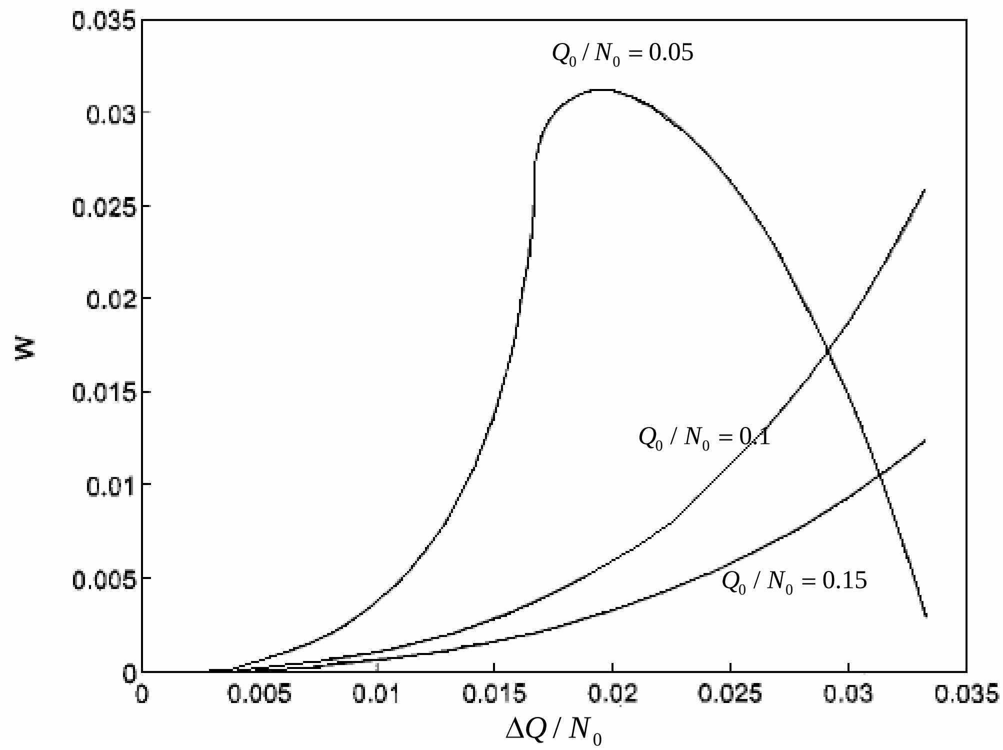
$$Work \approx \frac{(\mu N_0)^2}{4a_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1}-\frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\times\left\{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)}}-1\right)\left(\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^2+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)}^{4}}-1\right)\left(\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^3\right\} \quad (۴-۳۴)$$

$$= \frac{(\mu N_0)^2}{4a_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1}-\frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\times\left\{\left[\left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]\left(\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^2+\frac{1}{9}\left[2\left(1-\frac{Q_0}{\mu N_0}\right)^{-\frac{4}{3}}-1\right]\left(\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^3\right\}$$

بنابراین رابطه بین اتلاف انرژی و بار مماسی را می‌توان توسط معادله ۴-۳۲ تحلیل نمود. برای بار مماسی اولیه و ثابت Q_0 و تغییرات ثابت آن در یک بازه کوچک، هرچقدر بار نرمال N_0 بزرگتر باشد، اتلاف انرژی کم‌تر بوده و در نتیجه میرایی کوچک‌تر می‌باشد. شکل ۴-۷ اتلاف انرژی را برای $\mu = 0.1$ نشان می‌دهد. با یک افزایش در بار مماسی، به عنوان مثال $N_0 = 4, \Delta Q \succ 0.234$، ویژگی‌های میرایی برای بارهای نرمال متفاوت تغییر می‌نماید.

رابطه پیچیده معادله ۴-۳۲ را می‌توان بوسیله تحلیل صحیح معادله ۴-۳۴ ساده نمود. رسیدن به این نکته که اتلاف انرژی به طور عمده تابع بار مماسی اولیه می‌باشد، سخت نیست. برای حالتی که بار

مماسی اولیه صفر باشد، اتلاف انرژی با $\left(\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^3$ متناسب خواهد شد. اگر چه برای حالت غیر صفر، اتلاف انرژی با $\left(\frac{\Delta Q}{\mu N}\right)^2$ متناسب می‌باشد.



شکل ۴-۷ رابطه بین میرایی و دامنه بار برشی $\mu = 0.1$

۴-۳-۲ بار نرمال و مماسی در حالت متقارن

در عمل برای حالت تماس در میکروسکوپ نیرو اتمی، جفت بارهای مماسی و عمودی با ارتعاشات تغییر خواهد نمود. در نتیجه مدل ریاضیاتی این حالت به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$N = N_0 + \Delta N \cos wt \qquad \Delta N \prec N \qquad (۳۵-۴)$$

$$Q = \Delta Q \cos wt$$ (۳۶-۴)

a) $\frac{dQ}{dN} = \tilde{\beta} \le \mu$

چون لغزش اضافی در فرایند بارگذاری/باربرداری وجود ندارد، اتلاف انرژی در سیکل بارگذاری/باربرداری صفر می‌باشد [۲۳].

b) $\frac{dQ}{dN} = \tilde{\beta} \ge \mu$

میدلین مواد مشابه برای این حالت را مورد قرار داده است [۲۳]. برای مواد غیر مشابه، کار انجام شده بوسیله بارهای مماسی نوسانی به صورت زیر تقریب زده شده است [۲۴]:

$$Work \approx \frac{9(\mu N_0)^2}{80a_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1}-\frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\times$$
$$\left[\frac{1}{\theta}\left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)\left(1-\theta\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^{\frac{5}{3}}-\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)\left(1+\theta\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^{\frac{5}{3}}-\frac{4}{1-\theta^2}\left(1-\frac{1+5\theta^2}{6}\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)\left(1-\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$$
(۳۷-۴)

که در آن $\theta = \mu / \tilde{\beta}$ و $\beta = \frac{\Delta Q}{\Delta N}$.

برای مقادیر کوچک $\frac{\Delta Q}{\mu N_0}$، معادله فوق به صورت زیر ساده سازی می‌شود:

$$Work = \frac{1}{72a_0\mu N_0}\left(\frac{2-\nu_1}{G_1}-\frac{2-\nu_2}{G_2}\right)(1-\theta^2)(\Delta Q)^3$$ (۳۸-۴)

برای بار عمودی ثابت $\theta = 0$، یعنی حالتی که $N = \text{constant}$ می‌باشد، معادله ۴-۳۷ به معادله ۴-۳۳ کاهش می‌یابد.

۴-۴ نتیجه گیری

در این فصل، سختی تماسی در جهت مماسی را که به شدت غیر خطی بود، بدست آوردیم. با توجه به تحلیل های انجام شده، دریافتیم که سختی تماسی کوچکتر از سختی نرمال می‌باشد. در این فصل مدلی را برای اتلاف انرژی در حالت تماس بین نوک و نمونه میکروسکوپ نیرو اتمی ناشی از بارهای مماسی نوسانی پیشنهاد داده و تحلیل نمودیم. به علت بارهای مماسی اولیه، اتلاف انرژی بسیار بزرگ تر از مقدار پیش بینی شده از روش میندلین بدست آمد. چون بارهای مماسی در تماس AFM کوچک می‌باشد، مدل را می توان ساده‌تر نمود. همچنین اگر بار عمودی ثابت بوده و بار مماسی موجود باشد، آنگاه اتلاف انرژی ناشی از بارهای مماسی کوچک و نوسانی با $\left(\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^2$ متناسب می‌باشد. از طرف دیگر اگر بار مماسی صفر باشد، اتلاف انرژی برای مقادیر کوچک بارمماسی با $\left(\frac{\Delta Q}{\mu N_0}\right)^3$ متناسب خواهد شد. با استفاده از مدل اتلاف انرژی می‌توان به نتیجه ای مهم دست یافت و آن اینکه هر چقدر بارهای عمودی بزرگ‌تر باشد، میرایی کوچک‌تر خواهد بود.

فصل پنجم

رفتار ارتعاشات غیر خطی میکروسکوپ نیرو اتمی

اگرچه رفتار دینامیکی خطی تیرهای AFM به طور گسترده برای ارزیابی رفتارهای مواد در مقیاس نانو استفاده می‌شود، اما هنوز پیشرفت زیادی در بررسی رفتار غیر خطی تیرهای AFM صورت نگرفته است. تحقیقات آزمایشگاهی انجام شده بر روی AFM، نشان دهنده وجود رفتارهای به شدت غیر خطی می‌باشند [۱۴]، [۲۸] و [۷۱]. در نتیجه تحلیل‌های غیرخطی برای درک بهتر برهم کنش‌های موجود بین نوک و نمونه ضروری می‌نماید.

تعدادی از محققان ارتعاشات غیر خطی تیرهای میکروسکوپ نیرو اتمی با تماس در انتها را مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۶]، [۲۸]، [۲۹]، [۳۰] و [۳۲]. اما همانطور که پیشتر اشاره شد، به علت مشکلات موجود در تولید، همیشه نوک در انتهای تیر قرار نمی‌گیرد [۱۴] و بعضی اوقات نمی‌توان از این خطا صرفنظر نمود. بررسی موقعیت نوک برای تحلیل رفتارهای دینامیکی تیرهای مستطیلی، V- شکل و

مثلثی بسیار ضروری می‌نماید [۱۴]. همانطور که در فصل سوم نشان داده شد، برای $k_f \succ 20$، حساسیت فرکانس بر سختی تماس به آرامی افزایش می‌یابد. تحقیقات انجام شده بر روی ارتعاشات خطی تیرهای میکروسکوپ نیرو اتمی، چه در حوزه تئوری و چه در حوزه آزمایشگاهی، نشان دهنده حساسیت بالای تمامی فرکانس ها نسبت به موقعیت نوک می‌باشند [۸]. در نتیجه می‌توان انتظار داشت که مکان نوک تاثیر بسزایی بر پاسخ‌های غیر خطی نیز داشته باشد. متاسفانه رفتار دینامیکی AFM در زمینه غیر خطی کاملا قابل درک نمی‌باشد و تقریبا اکثر مطالعات انجام شده در زمینه غیر خطی بر روی تیرهایی با تماس در انتها متمرکز می‌باشند. اما این مطالعات هنگامی معتبر می‌باشند که مکان نوک را نیز در تحلیل ها در نظر گرفته باشند.

در این فصل به آنالیز ارتعاشات غیر خطی تیر یک سر درگیر AFM با استفاده از روش سختی موثر[۴۹] می‌پردازیم. در این تحلیل، فرض نموده‌ایم مکان تماس، نزدیک انتهای تیر باشد. همچنین از انحراف اولیه تیر صرفنظر نموده‌ایم.

۵-۱ روش سختی موثر

در این بخش رفتار دینامیکی غیر خطی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی با تماس نزدیک بخش انتهایی را با استفاده از روش سختی تماس بررسی می‌نماییم. فرض می‌کنیم یک انتهای تیر، درگیر و انتهای دیگر

---
[49] Effective Stiffness Method

در طول ارتعاشات به علت بار اولیه اعمالی بر سطح تماس، همواره در تماس با نمونه قرار داشته باشد. در این تحلیل، تماس میرایی نادیده گرفته شده و از مدل هرتزین برای مدل نمودن تماس بین نوک و نمونه استفاده شده است. با استفاده از جداسازی متغیر ها، شکل مد سیستم بدست آمده است. سختی تماس و معادله مشخصه بدست آمده و نشان می‌دهد که هر دوی آنها به صورت تناوبی با اعمال شکل مد تغییر می‌کنند. بر اساس روش انرژی، یک معادله مشخصه تقریبی بسط داده شده است.

روش سختی تماس در مقایسه با سایر روش‌های مشابه، نظیر روش پرتوربیشین یا روش تعادل هارمونیک[50]، بسیار ساده‌تر می باشد. این روش این امکان را فراهم می‌سازد تا ارتعاشات غیر خطی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی را به وسیله یک مدل خطی بررسی نماییم. تنها تفاوت موجود، جایگزینی یک سختی موثر به جای سختی تماسی می‌باشد.

در بخش نخست ابتدا مدل ارتعاشاتی غیر خطی را معرفی می‌کنیم. سپس در بخش دوم مدل مورد نظر را با استفاده از روش سختی موثر بررسی می‌نماییم. روش سختی میانگین در بخش سوم بدست آمده است. در نهایت در بخش چهارم مثال‌های عددی و نتیجه گیری از تحلیل آورده شده است.

---

[50] Harmonic Balance Method

۵-۱-۱ مدل ارتعاشاتی غیرخطی

تیر میکروسکوپ نیرو اتمی، معمولا به صورت تیر اویلر برنولی مدل می‌شود. تیر مورد نظر به صورت یکنواخت و همگن با سطح مقطع ثابت فرض می‌شود. همان طور که پیشتر اشاره شد، یک انتهای تیر درگیر می‌باشد و نوکی با شعاع کوچک نزدیک قسمت انتهایی دیگر تیر متصل شده است. اگر جرم نوک را صرفنظر نماییم و طول L_2 در مقایسه با L_1 به اندازه کافی کوچک باشد، می‌توانیم به جای طول سمت راست نوک از یک جرم متمرکز، m_2 استفاده نماییم. مسئله غیر خطی مقدار مرزی، دارای معادلات حاکم به صورت زیر می‌باشد [۵]، [۶] و [۳۲]:

$$EI_0 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A_0 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (۱-۵)$$

با صرفنظر از انحراف الاستیک تیر در بخش راست نوک، شرایط مرزی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$w(x,t)\big|_{x=0} = 0 \qquad w'(x,t)\big|_{x=0} = 0 \qquad (۲-۵)$$

$$EI_0\, w''(x,t)\big|_{x=L_1} = -\frac{1}{2} m_2 L_2 \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=L_0} \approx 0 \qquad (۳-۵)$$

$$EI_0\, w'''(x,t)\big|_{x=L_1} = \Delta N + m_2 \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=L_0} \qquad (۴-۵)$$

در معادلات ۵-۱ تا ۵-۴، E مدول الاستیک تیر، I_0 ممان اینرسی سطح مقطع، A_0 مساحت سطح مقطع، ρ چگالی جرمی، w انحراف نسبت به انحراف استاتیکی، ΔN بار تماسی بین نوک و نمونه

نسبت مقدار اولیه، L_1 و L_2 به ترتیب طول تیر در سمت چپ و راست نوک و m_2 جرم تیر در قسمت راست نوک می‌باشند.

همانطور که در فصل ۴ اشاره شد، بار تماسی نسبت به حالت اولیه با توجه به مدل تماسی هرتزین برابراست با:

$$\Delta N = k_c y(L_1) - K_0\left(Z_0 - y(L_1) - w\right)^{\frac{3}{2}} = N_0 - K_0\left(\delta_0 - w\right)^{\frac{3}{2}} = k(w)w \qquad (۵-۵)$$

که در آن $K_0 = K_1 R^{\frac{1}{2}}$، $\frac{1}{K_1} = \frac{4}{3}\left(\frac{1-\nu_t^2}{E_t} - \frac{1-\nu_s^2}{E_s}\right)$ ، $k(w) = \frac{N_0 - K_0(\delta_0 - w)^{\frac{3}{2}}}{w}$ می‌باشند. همچنین Z_0 انحراف کامل اولیه تیر در $x = L_1$ در هنگامی که هردوی نوک و نمونه به صورت دو جسم صلب فرض می‌شوند، می‌باشد. انحراف اولیه به صورت زیر داده می‌شود:

$$y(x) = \frac{3y(L_1)}{2L^3}\left(3L_1x^2 - x^3\right) \qquad (۶-۵)$$

که $y(L_1)$ انحراف اولیه تیر در محل نوک می‌باشد. N_0 بار تعادلی اولیه در نقطه $x = L_1$ و ν نسبت پواسان می‌باشد. E_t و E_s به ترتیب مدول‌های الاستیسیته نوک و سطح نمونه می‌باشند. همچنین $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_t}$ که در آن R_t و R_s به ترتیب شعاع‌های نوک و سطح نمونه می‌باشند. معمولا $R_s \succ\succ R_t$ به طوری که $R \approx R_t$.

۵-۲ روش سختی موثر (روش انرژی)

فرض می‌کنیم $w = B(x)\cos wt$ حل عمومی معادله ۵-۱ با شرایط مرزی نشان داده شده در معادله ۵-۲ باشد. با اعمال شرایط مرز ی در معادله ۵-۲ و ۵-۳، تابع مد $B(x)$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$B(x) = B_0\left[\cos\beta x - \cosh\beta x - \frac{\cos\beta L_1 + \cosh\beta L_1}{\sin\beta L_1 + \sinh\beta L_1}(\sin\beta x - \sinh\beta x)\right] = B_0\alpha_1(x) \qquad (۵\text{-}۷)$$

که در آن $\beta = \left(\frac{\rho A}{EI}\omega^2\right)^{\frac{1}{4}}$ می‌باشد. با جایگذاری معادله ۵-۷ در شرط مرزی معادله ۵-۴، معادله مشخصه به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$EI_0 B'''(L_1)\cos\omega t = N_0 - K_0\left[\delta_0 - B(L_1)\cos\omega t\right]^{\frac{3}{2}} - m_2\omega^2 B_0\alpha_1(L_1)\cos\omega t \qquad (۵\text{-}۸)$$

به راحتی می‌توان دریافت که معادله مشخصه فوق یک تابع تناوبی نسبت به t می‌باشد. اگر عدد موج کنترل شده توسط معادله ۵-۸، ثابت باشد، آنگاه این معادله به ازای یک زمان فرضی t ارضا نمی‌شود. زیرا که تابع مد منحصر به فرد نمی‌باشد و سیستم دارای رفتار غیر خطی می‌باشد. به طور کلی معنای فیزیکی معادله ۵-۸ موازنه بارهای برشی در نقطه تماس می‌باشد. در نتیجه نیروی نامتوازن ΔN_{ub} در محل تماس ناشی از یک مد فرضی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Delta N_{ub} = EI_0 B'''(L_1)\cos\omega t - N_0 + K_0\left[\delta_0 - \omega(L_1,t)\right]^{\frac{3}{2}} + m_2\beta^4\frac{EI_0}{\rho A_0}B_0\alpha_1(L_1)\cos\omega t \qquad (۵\text{-}۹)$$

برای یک تقریب هر چه دقیق‌تر، باید کار مجازی نیروی غیرمتوازن برابر با نیرویی باشد که در یک سیکل حرکت، صفر می‌شود:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ EI_0 B_0 \alpha_1'''(L_1)\cos\omega t - N_0 - K_0\left[\delta_0 - B_0\alpha_1(L_1)\cos\omega t\right]^{\frac{3}{2}} + m_2\beta^4 \frac{EI_0}{\rho A_0} B_0\alpha_1(L_1)\cos\omega t \right\} \times \delta\omega(L_1,t)\,dt = 0 \qquad (۱۰\text{-}۵)$$

با جایگذاری معادله ۵-۷ در معادله ۵-۱۰ و انتگرال گیری از معادله ۵-۱۰ داریم:

$$EI_0 B_0 \frac{\alpha_1'''(L_1)}{\delta_0} = \left(K_n - \frac{k_c m_2}{M_0}(\beta L_0)^4 \right)\frac{B_0\alpha_1(L_1)}{\delta_0} - \frac{k_n}{32}\left(\frac{B_0\alpha_1(L_1)}{\delta_0}\right)^3 - \frac{5k_n}{1024}\left(\frac{B_0\alpha_1(L_0)}{\delta_0}\right)^5 + O\left[\left(\frac{B_0\alpha_1(L_1)}{\delta_0}\right)^7\right] \qquad (۱۱\text{-}۵)$$

که درآن $k_n = \frac{3}{2}K_0\delta_0^{\frac{1}{2}}$ و $k_c = \frac{EI}{L^3}$. با اعمال دامنه نرمالیز شده $\tilde{B} = \frac{B_0\alpha_1(L_1)}{\delta_0} \le 1$، معادله ۵-۱۱ را می‌توان به فرم زیر بازنویسی نمود:

$$EI_0 B_0 \frac{\alpha_1'''(L_1)}{\alpha_1(L_1)} = K_n - \frac{1}{32}K_n\tilde{B}^2 - \frac{5}{1024}K_n\tilde{B}^4 - \frac{k_c m_2}{M_0}(\beta L_1)^4$$

$$= K_n\left(1 - \frac{1}{32}\tilde{B}^2 - \frac{5}{1024}\tilde{B}^4 - \frac{k_c m_2}{M_0 K_n}(\beta L_1)^4\right) \qquad (۱۲\text{-}۵)$$

به راحتی می‌توان دریافت که با صفر شدن $\tilde{B}$، معادله فوق به یک معدله مشخصه خطی کاهش می‌یابد:

$$EI_0\alpha_1'''(L_1) = k_n\alpha_1(L_1) \qquad (۱۳\text{-}۵)$$

با تعریف سختی موثر $k_{eff} = K_n\left(1-\frac{1}{32}\tilde{B}^2-\frac{5}{1024}\tilde{B}^4-\frac{k_c m_2}{M_0 K_n}(\beta L_1)^4\right)$، می‌توانیم رفتار دینامیکی غیر خطی سیستم را بوسیله معادله مشخصه داده شده در معادله ۵-۱۲ بررسی نماییم.

به روشنی پیداست که افزایش در دامنه، $\tilde{B}$ باعث کاهش سختی موثر می‌شود. بنابراین فرکانس سیستم غیر خطی با افزایش دامنه در تماس هرتزین کاهش می‌یابد، که این پدیده را در اصطلاح نرم شدگی می‌نامند.

چون $0 \le \tilde{B} \le 1$، بازه تغییرات سختی موثر، k_{eff} به صورت زیر خواهد بود:

$$0.9639-\frac{k_c m_2}{k_n M_0}(\beta L_1)^4 \le \frac{k_{eff}}{k_n} \le 1-\frac{k_c m_2}{k_n M_0}(\beta L_1)^4 \qquad (۱۴\text{-}۵)$$

با اعمال تابع مد در معادله ۵-۷ و سختی تماس، معادله مشخصه غیر خطی داده شده در معادله ۵-۱۲ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$(\sinh\beta L_1\cos\beta L_1-\cosh\beta L_1\sin\beta L_1)=\frac{k_c}{k_{eff}}(\beta L_1)^3(1+\cos\beta L_1\cosh\beta L_1) \qquad (۱۵\text{-}۵)$$

همانطور که در آنالیزهای خطی اثبات نمودیم، حساسیت فرکانس بر سختی تماس در مقادیر کوچکتر k_f کمتر و بالعکس برای مقادیر بزرگتر k_f بیشتر می‌باشد. در نتیجه، برای ارتعاشات غیر خطی نیز، رفتار غیر خطی برای مقادیر بزرگتر سختی تماس از حساسیت بالاتری برخوردار می‌باشد. اگر چه بازه حساسیت برای سختی تماس k_n، به علت کاهش در سختی موثر به آرامی افزایش می‌یابد.

۳-۵ روش سختی میانگین

می‌توانیم شرایط مرزی غیر خطی معادله ۵-۴ را به صورت زیر باز نویسی کنیم:

$$EI_0 w'''(x,t)\big|_{x=L_1} = \frac{N_0 - K_0\left[\delta_0 - w(L_1,t)\right]^{\frac{3}{2}} + m_2 \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=L_1}}{w(L_1,t)} w(L_1,t) \qquad (۱۶\text{-}۵)$$

با مقایسه معادله بالا با شرط مرزی خطی متوجه خواهیم شد که عبارت $\frac{N_0 - K_0\left[\delta_0 - w(L_1,t)\right]^{\frac{3}{2}} + m_2 \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=L_1}}{w(L_1,t)}$ می‌تواند به عنوان سختی غیر خطی k_{NL} محسوب شود. چون انحراف در مکان تماس $w(L_1,t)$، تابع متناوب نسبت به زمان می‌باشد، سختی تماس نیز نسبت به زمان یک تابع متناوب می‌باشد و به صورت زیر باز نویسی می‌شود:

$$k_{NL} = \frac{EI_0 w'''(x,t)\big|_{x=L_1}}{w(L_1,t)} \qquad (۱۷\text{-}۵)$$

با جایگذاری تابع مد، معادله ۵-۷ در معادله ۵-۱۷، و انتگرال گیری دو طرف معادله ۵-۱۷ بر یک تناوب واحد، داریم:

$$\frac{EI_0 \alpha_1'''(x)\big|_{x=L_1}}{\alpha(L_1)} \approx k_n\left[1 - \frac{1}{48}\tilde{B}^2 - \frac{3}{1024}\tilde{B}^4 - \frac{k_c m_2}{M_0 K_n}(\beta L_1)^4\right] + O\left(\tilde{B}^6\right) \qquad (۱۸\text{-}۵)$$

به راحتی می‌توان در یافت که $k_n\left[1 - \frac{1}{48}\tilde{B}^2 - \frac{3}{1024}\tilde{B}^4 - \frac{k_c m_2}{M_0 K_n}(\beta L_1)^4\right]$ سختی میانگین می‌باشد.

چون $0 \le \tilde{B} \le 1$، بازه k_{avg} به صورت زیر می‌باشد:

$$0.9762 - \frac{k_c m_2}{k_n M_0}(\beta L_1)^4 \le \frac{k_{eff}}{k_n} \le 1 - \frac{k_c m_2}{k_n M_0}(\beta L_1)^4 \qquad (۱۹\text{-}۵)$$

در نتیجه می‌توان نتیجه گرفت که سختی میانگین، کمی بیشتر از سختی موثر بدست آمده از روش سختی موثر می‌باشد. اگر از جرم تیر بعد از نوک صرفنظر می‌شود، $m_2 = 0$، خطای ماکزیمم نسبی بین سختی موثر و سختی میانگین کمتر از ٪۱/۲۷۶ خواهد بود.

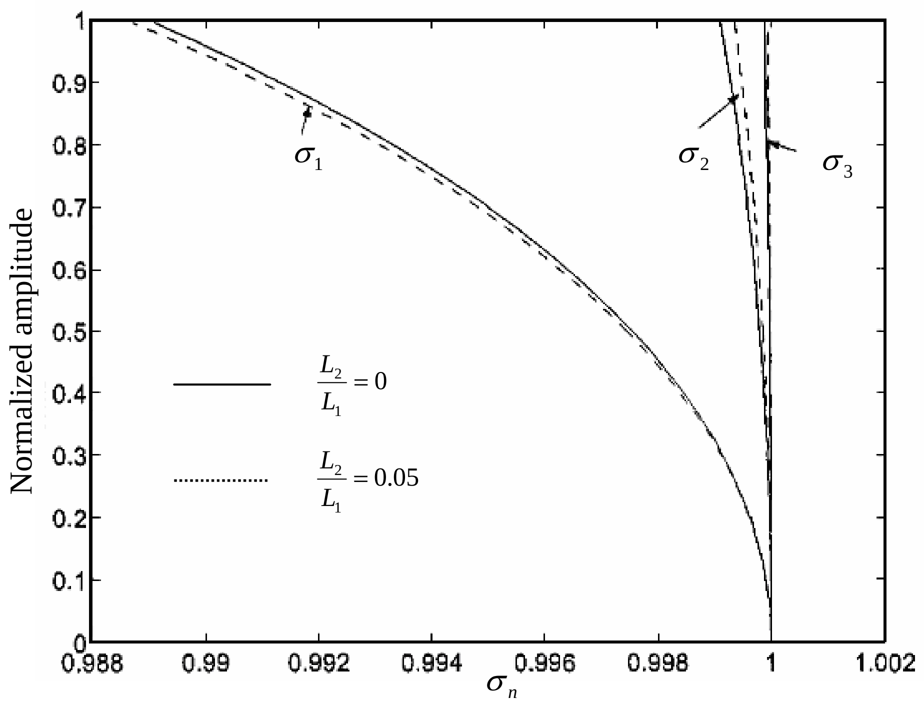
۵-۴ نتایج عددی و نتیجه گیری

برای اینکه رفتار غیر خطی سیستم را نشان دهیم، چند مثال را با استفاده از روش سختی تماس آزمایش نمودیم. در شکل‌های ۵-۱، ۵-۲ و ۵-۳ شیفت سه فرکانس اول را برای مقادیر دلخواه k_f محاسبه و نشان داده شده است. با توجه به شکل‌های نشان داده شده، دیده می‌شود که تمامی فرکانس-ها با افزایش در دامنه کاهش می‌یابند.

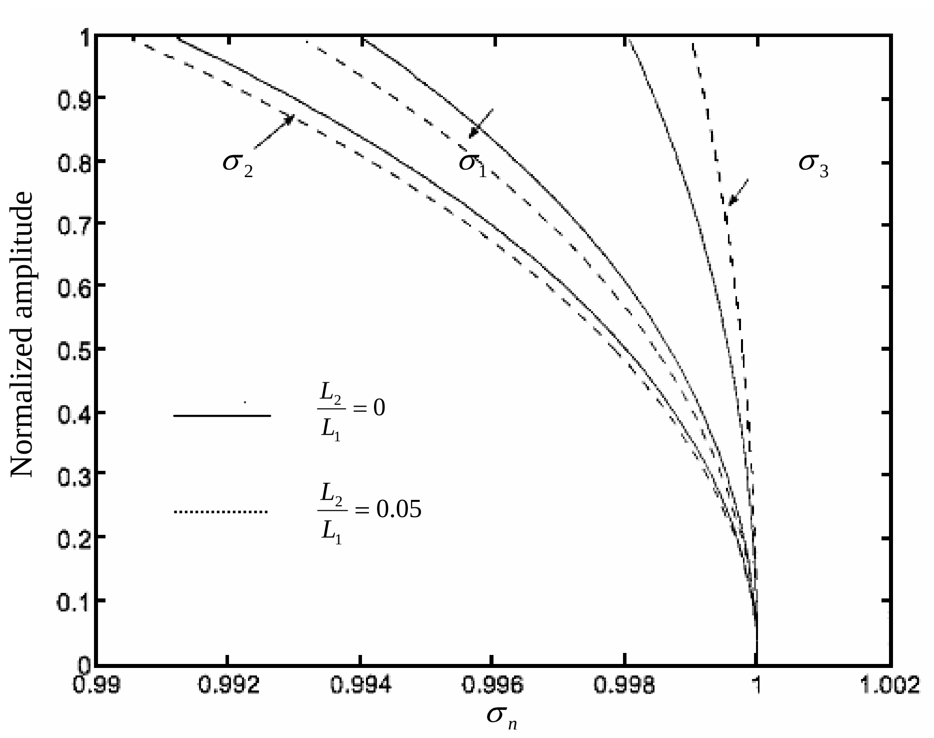
σ_n نشان دهنده نسبت ارتعاشات غیر خطی سیستم به ارتعاشات خطی آن می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_n = \frac{(\omega_n)_{NL}}{(\omega_n)_L} = \left(\frac{(\beta_n L)_{NL}}{(\beta_n L)_L} \right)^2 \qquad (۵-۲۰)$$

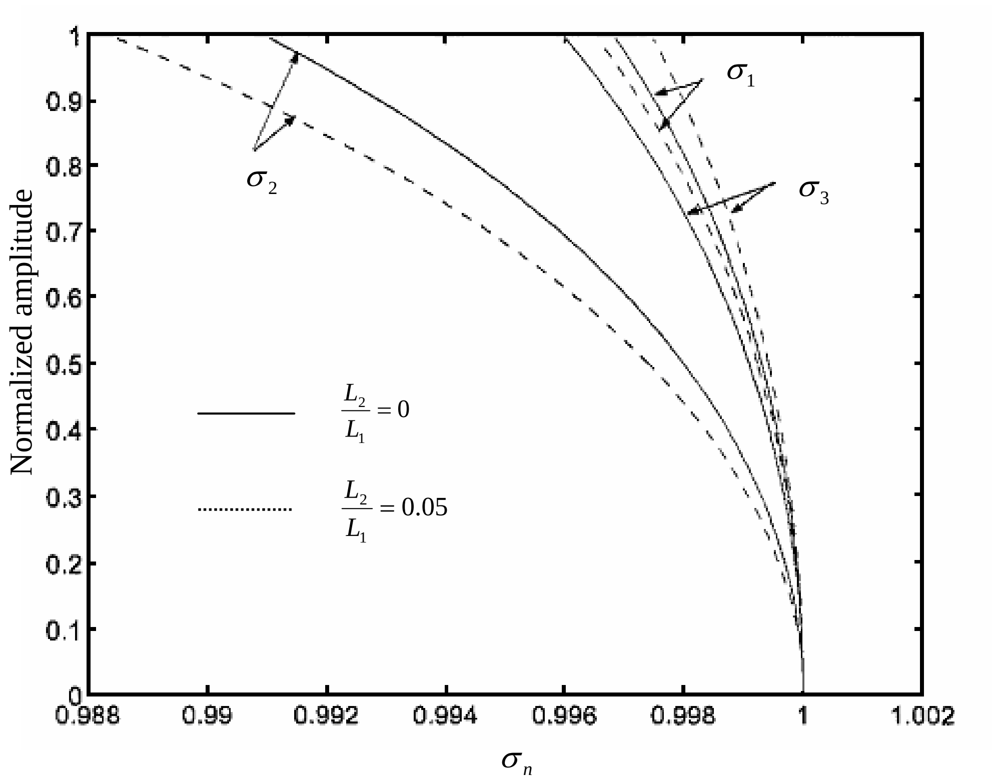
همانطور که پیشتر گفته شد، هر چه هرچه دامنه بزرگ‌تر باشد، شیفت فرکانس بزرگ‌تر خواهد بود. برای حالت تماس در نزدیک انتهای تیر، فرکانس نیز با افزایش دامنه کاهش خواهد یافت. اگر چه این نتایج تنها برای زمانی با ارزش می‌باشند که نوک بسیار نزدیک به انتهای تیر باشد.



شکل ۵-۱ شیفت فرکانس ارتعاشات غیرخطی برای $k_f = 0.2$



شکل ۵-۲ شیفت فرکانس ارتعاشات غیرخطی برای $k_f = 30$



شکل ۵-۳ شیفت فرکانس ارتعاشات غیرخطی برای $k_f = 60$

فصل ششم

نتیجه گیری و پیشنهادات برای مطالعات آینده

۶-۱ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، دینامیک تیر یک سر درگیر مستطیل شکل برای ارتعاشات خمشی و پیچشی مدل شدند. چون تیر همگن در نظر گرفته شد و همچنین نوک در خط وسط تیر فرض شد، معادلات ارتعاشاتی و خمشی مستقل از یکدیگر بدست آمدند. رفتار خطی و غیر خطی تیر مستطیل شکل با زوایا و مکان‌های تماس متفاوت مورد بررسی قرار گرفت. همچنین یک مدل میرایی و یک مدل سختی مماسی برای تماس بین نوک و نمونه AFM بدست آمد.

حل دقیق معادله مشخصه خمشی و پیچشی برای تیر مستطیل شکل با مکان تماس متفاوت حاصل گردید. در نتیجه رفتار فرکانسی سیستم در مکان‌های تماس متفاوت و برای سختی‌های تماسی متفاوت

مورد تحلیل قرار گرفت که در این تحلیل تاثیر برخی از خصوصیات نوک مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج نشان می‌دادند که ارتفاع و جرم نوک به طور عکس بر فرکانس نوک، برای نقاط تماس و سختی‌های متفاوت، تاثیر گذار هستند. همچنین حساسیت فرکانس برای مقادیر پایین سختی تماس ناچیز بوده و این تاثیر با افزایش آن بیشتر شده تا اینکه سرانجام به یک مقدار ثابت میل می‌کند. این نکته نیز فهمیده شد که افزایش جرم موثر و ارتفاع نوک باعث کاهش فرکانس تشدید می‌شود. در بخش پیچشی، دریافتیم که مد اول پایین‌ترین حساسیت را نسبت به تغییرات محل تماس دارد اگر چه در حالت کلی افزایش مکان تماس، فرکانس تشدید را افزایش می‌یابد. همچنین هنگامی که k_t از ۱ بیشتر می‌شود، فرکانس تشدید به شدت افزایش می‌یابد و برای مقادیر خیلی بالای k_t، به یک مقدار ثابت می‌رسد.

هنگامی تیر به صورت کامل تر مدل می‌شود و پارامترهایی از جمله شیب تیر، میرایی و ممان اینرسی در نظر گرفته می‌شوند، شرایط پیوستگی در محل تماس متفاوت می‌باشند. معادله مشخصه این نوع تیر نیز حاصل شد. اگر چه حجم معادلات بسیار بالا و محاسبات پیچیده بود، اما نتایج بسیار جالبی برای این حالت بدست آمد. در حالت اول نتایج نشان داد که افزایش زاویه در حالت کلی فرکانس را افزایش می‌دهد. همچنین با افزایش زاویه، شیب تغییرات فرکانس نسبت به مکان تماس نیز افزایش می‌یابد. نکته جالب دیگری که فهمیده شد، این بود که حداکثر حساسیت میرایی بر فرکانس در حالتی می‌باشد

که سختی نرمال سیستم پایین می‌باشد. یعنی درست در هنگامی که تاثیر سختی بر فرکانس پایین می‌باشد. به تدریج با افزایش سختی سیستم تاثیر میرایی کاهش یافته به طوری که برای مقادیر بالای سختی نرمال، حدودا $k \succ ۱۰۰$، می توان از میرایی سیستم صرفنظر نمود.

با بررسی تاثیر ممان اینرسی نوک فهمیده شد که تغییرات مدهای فرد و زوج به طور جداگانه، روند مشابهی با یکدیگر دارند. در مدهای فرد، برای مقادیر پایین سختی تماس، فرکانس نسبت به ممان اینرسی نوک فاقد حساسیت می‌باشد. اما به تدریج با افزایش سختی تماس سیستم، حدودا $k \succ ۱۰$، این حساسیت افزایش می‌یابد. اما این روند در مدهای زوج از شباهت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این مدها، بر عکس مدهای فرد، فرکانس نسبت به ممان اینرسی جرمی، برای مقادیر پایین سختی تماس از حساسیت بالایی برخوردار می‌باشد.

مدل خطی تا هنگامی معتبر می‌باشد که دامنه ارتعاشات به اندازه کافی کوچک باشد. در نتیجه بررسی رفتار ارتعاشات غیرخطی ضروری می‌نماید. با استفاده از روش سختی موثر رفتار غیر خطی سیستم را ارزیابی نمودیم. نتایج عددی بیانگر این موضوع بود که با در نظر گرفتن مکان تماس، شیفت فرکانس‌ها بسیار پیچیده می‌شود.

در نهایت یک مدل میرایی برای تماس بین نوک و نمونه در میکروسکوپ نیرو اتمی پیشنهاد نمودیم. نتایج نشان داد که افزایش بار مماسی یا کاهش بار عمودی باعث افزایش میرایی می‌شود.

۶-۲ مطالعات آینده

تمرکز عمده این پایان‌نامه بر روی رفتار ارتعاشاتی خطی و غیر خطی تیر مستطیل شکل در میکروسکوپ نیرو اتمی بود. ماده تشکیل دهنده تیر و سطح نمونه هر دو الاستیک خطی فرض شده‌اند. اندازه تماس بسیار کوچکتر از شعاع نوک و نمونه فرض شده بود. هنگامی که تیر همگن نباشد یا خصوصیات ماده تماس، کاملا الاستیک نباشد، تحلیل انجام گرفته معتبر نبوده یا به طور نسبی معتبر می‌باشد. بنابراین تحلیل باید کلی‌تر باشد تا بتواند این فاکتورها را نیز در بر داشته باشد. در قسمت های بعدی برخی پیشنهادات برای کارهای آینده بیان شده است.

۶-۲-۱ تماس ویسکوالاستیک و مدل‌های تماس میرایی

برای مواد پلیمری، ویسکوالاستیسیتی یک رفتار بسیار مهم می‌باشد. برای ارزیابی خصوصیات مواد، ارائه یک مدل تماسی جدید برای این نوع بخصوص از مواد ضروری می‌نماید. وانگ[۵۱] مدل تماسی الاستیک هرتزین را برای تماس ویسکوالاستیک خطی و بدون چسبندگی بسط داد [۱۵]. اخیرا نیز جانسون یک مدل برای مواد تماسی ویسکوالاستیک پیشنهاد کرد [۴۰]. اگر چه بانی[۵۲] دریافت که تئوری جانسون در عمل تنها برای نرخ خیلی پایین بار معتبر می‌باشد و خطا در فرایند برگشتی خمش قابل ملاحظه

---
[51] Wang
[52] Banney

می‌باشد [۷۳]. برای ارائه یک مدل دارای چسبندگی، بسط مدل های JKR و جانسون الزامی می‌باشد. برای مدل JKR می‌توان با استفاده از مفهوم مکانیک شکست خطی، مدل تماسی میکروسکوپ نیرو اتمی با چسبندگی را برای تماس ویسکوالاستیک بسط داد.

مدل‌های تماس میرایی، مباحث پیچیده‌ای در تحلیل‌های میکروسکوپ نیرو اتمی می‌باشد. این پایان‌نامه بر روی تماس میرایی الاستیک و بدون چسبندگی محدود شده است. هنگامی که مسئله چسبندگی نیز افزوده شود، تئوری تماسی JKR ممکن است بتواند برای بسط این مدل استفاده شود. برای مواد ویسکوالاستیک، مدل میرایی بسیار پیچیده‌تر می‌باشد. از اینرو ارائه یک مدل تماسی مناسب برای بررسی‌های تماس میرایی در آینده بسیار اساسی و مهم می‌باشد. همچنین چون چسبندگی پارامتری بسیار پیچیده بوده و به نرخ بارگذاری-باربرداری مربوط می‌باشد، میرایی دینامیکی بسیار پیچیده می‌باشد. تحقیقات عملی نیز برای توسعه این نوع مدل بسیار مهم می‌باشد.

۶-۲-۲ تحلیل‌های سه‌بعدی

تیرهای میکروسکوپ نیرو اتمی معمولا به صورت تیر یک سر گیردار مدل می‌شوند. اما در واقع شرایط مرزی سر گیردار یک قید الاستیک می‌باشد. بنابراین ارائه یک مدل سه بعدی که در آن سیستم به صورت الاستیک در نظر گرفته شود، می‌تواند دقت تحلیل ها را افزایش دهد. دوپاس[۵۳] از یک تکیه‌گاه

---

[53] Dupas

الاستیک برای مدل نمودن شرایط مرزی درگیر استفاده نمود [۷۳]. یک گروه تحقیقاتی آلمانی نیز مطالعات بسیاری بر روی این نوع مدل انجام داده‌اند [۷۰].

۶-۲-۳ رفتار دینامیکی تیرهای عیب‌دار

درعمل تیرهای میکروسکوپ نیرواتمی نمی‌توانند بی‌عیب باشند. برای مثال تیر نمی‌تواند سطح مقطع ذوزنقه‌ای کامل داشته باشد. در نتیجه سطح مقطع تیر، نامتقارن می‌باشد. همچنین ممکن است نوک دقیقا در خط مرکز تیر قرار نگرفته و اندکی با فاصله قرار گیرد. بنابراین هم ارتعاشات خمشی و هم پیچشی کوپل خواهند شد. ارتعاشات می تواند بصورت سه معادله دیفرانسیل جزئی کوپل شده مدل شود.

اگر یک تغییر شکل پیچشی اولیه در تیر وجود داشته باشد، ارتعاشات بسیار پیچیده خواهد شد و می توان از یک مدل سه بعدی برای ارزیابی رفتار دینامیکی تیر یک سر درگیر استفاده نمود. لیزا[۵۴] از یک چند جمله‌ای جبری به عنوان تابع تست عملکرد استفاده نمود و روش ریتز را برای تحلیل ارتعاشات تیر سه‌بعدی با پیچش اولیه بکار برد [۷۴]. او دریافت هنگامی که زاویه اولیه کوچک می‌باشد، فرکانس تیر به آرامی افزایش می‌یابد.

ممکن است بتوان با استفاده از روش‌های عددی به تحلیل‌های دقیق‌تری دست یافت.

---

[54] Leissa

مراجع و منابع

[1] Binning, G., Quate, C. F., and Gerber, C., "Atomic Force Microscope," Physical Review Letters, Vol. 56, 1986, pp. 930-833.

[2] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., Theory of Elasticity, McGraw 11131, New York, 1951.

[3] Meirovich, L., Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, New York, 1986.

[4] Rao, J. S., Advanced Theory of Vibration, John Wiley and Sons, New York, 1992.

[5] Turner, J. A. and Wiehn, J. S., "Sensitivity of Flexural and Torsional Vibration Modes of Atomic Force Microscope Cantilevers to Surface Stiffness Variation," Nanotechnology, Vol. 12, 2001, pp. 322-330.

[6] Rabe, U., Janser, K., and Arnold, W., "Vibrations of Free and Surface-Coupled Atomic Force Microscope Cantilevers: Theory and Experiment," Review of Scientific Instruments, Vol. 67, 1996, pp. 3281-3293.

[7] Karnovsky, I. A., Non-Classical Vibrations of Arches and Beams, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 2003.

[8] Chang, W., "Sensitivity of Vibration Modes of Atomic Force Microscope Cantilevers in Continuous Surface Contact," Nanotechnology, Vol. 13, 2002, pp. 510-514.

[9] Wang, H. C., "Generalized Hyper geometric Function Solutions on the Transverse Vibration of a class of Non uniform Beams," Journal of Applied Mechanics, Vol. 34, 1967, pp. 702-708.

[10] Lee, S. Y. and Lin, S. M., "Exact Vibration Solutions for None uniform Timoshenko Beams with Attachments," AIAA Journal, Vol. 30, 1992, pp. 2930-2934.

[11] Auciello, N. M., "Transverse Vibrations of a Lineraly Tapered Cantilever Beam with Tip Mass of Rotatory Inertia and Eccentricity," Journal of Sound and Vibration, Vol. 194, 1996, pp. 25-34.

[12] Boisgard, R., Michel, D., and Aim6, J. P., "Hysteresis Generated by Attractive Interaction; Oscillating Behavior of a Vibrating Tip-Micro lever System Near a Surface,"Surface Science, Vol. 401, 2000, pp. L179-L187.

[13] Leng, Y. and Jiang, S., "Dissipative Process in Atomic Force Microscopy," Physical Review B: , Condensed Matter and Materials Physics, Vol. 64, 2001, pp. 115415/1-6.

[14] Crozier, K. B., Yaralioglu, G. Q., Degertekin, F. L., Adams, J. D., Minne, S. C., and Quate, C. F., "Thin Film Characterization by Atomic Force Microscopy at Ultrasonic Frequencies," Applied Physics Letters, Vol. 78, 2000, pp. 1980-1952.

[15] Wang, L., 'The Role of Damping in Phase Imaging in Tapping Mode Atomic Force Microscopy," Surface Science, Vol. 429, 1999, pp. 178-185.

[16] Tamayo, J., "Energy Dissipation in Tapping-Mode Scanning Microscopy with Low Quality Factors," Applied Physics Letters, Vol. 75, 1999, pp. 3569-3571.

[17] Anczykowski, B., Gotsmann, B., Fuchs, H., Cleveland, J. P., and Elings, V. B., "How to Measure Energy Dissipation in the Dynamic Mode Atomic Force Microscopy," Applied Surface Science, Vol. 140, 1999, pp. 376-382.

[18] Cuberes, M. T., Assender, H. E., Briggs, G. A. D., and Kolosov, O. V., "Heterodyne Force Microscopy of PMMA/rubber Nan composites; Nan mapping of Viscoelastic Response at Ultrasonic Frequencies," Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 33,2000, pp. 2347-2355.

[19] Bar, G., Brandsch, R., Bruch, M., Delineau, L., and Whangbo, M, H., "Examination of the Relationship Between Phase Shift and Energy Dissipation in Tapping Mode Atomic Force Microscopy by Frequency-Sweep and Force-Probe Measurements," Surface Science, Vol. 444, 2000, pp. LII-L16.

[20] Johnson, K. L., In Microstructure and Microtribology of Polymer Surfaces, American Chemical Society, Washington, 2000.

[21] Nony, L., Boisgard, R., and Aim6, J. P., "Nonlinear Dynamical Properties of an Oscillating Tip-Cantilever System in the Tapping Mode," Journal of Chemical Physics,Vol. Ill, 1999, pp. 1615-1627.

[22] Cleveland, J. P., Anczykowski, B., Schmid, A. E., and Elings, V. B., "Energy Dissipation in Tapping-mode Atomic Force Microscopy," Applied Physics Letters, Vol. 72 1998, pp. 2613-2615.

[23] Mindlin, R. D. and Deresciewicz, H., "Elastic Spheres in Contact under Varying Oblique Forces," Journal of Applied Mechanics, Vol. 75, 1953, pp. 327-344.

[24] Johnson, K. L., Contact Mechanics, Cambridge University Press, 1985,

[25] Sabot, J., Krempf, P., and Janolin, C., "Nonlinear Vibration of a Sphere-plane Contact Excited by a Normal Load," Journal of Sound and Vibration. Vol. 214, 1996, pp. 359-375.

[26] Kendall, K., "The Adhesion and Surface Energy of Elastic Solids," Journal of Physics, D: Applied Physics, Vol. 4, 1971, pp. 1186-1195.

[27] Fabbroni, E. F., Shull, K. R., and Hersam, M. C., "Adhesive and Mechanical Properties of Soft Nan composites: Model Studies with Blended Latex Films," Journal of Polymer Science. Part B: Polymer Physics, Vol. 39, 2001, pp. 3090-3102.

[28] Schapery, R. A., "On the Mechanics of Crack closing and bonding in Linear Viscoelastic Media," International Journal of Fracture, Vol. 39, 1989, pp. 163-189.

[29] Nayfeh, A. H. and Pai, P. F., Linear and Nonlinear Structural Mechanics, John Wiley and Sons, Inc., Canada, 2004.

[30] Rabe, U., Kester, E., and Arnold, W., "Probing Linear and Noll-Linear Tip-Sample Interaction Forces by Atomic Force Acoustic Microscopy," Surface and Interface Analysis, Vol. 27, 1999, pp. 386-391.

[31] Dinelli, F., Castell, M. R., Ritchie, D. A., Mason, N. J., Briggs, G. A. D., and Kolosov,O. V., "Mapping Surface Elastic Properties of Stiff and Compliant Materials on the Nanoscale Using Ultrasonic Force Microscopy," Philosophical Magazine A, Vol. 80,2000, pp. 2299-2323.

[32] Cuberes, M. T., Briggs, G. D., and Kolosov, O., "Nonlinear Detection of Ultrasonic Vibration of AFM Cantilevers in and out Contact with Sample," Nanotechnology, Vol. 12, 2001, pp. 53-59.

[33] Lee, S. I., Howell, S. W., Raman, A., and Reifenberger, R., "Nonlinear Dynamics of Micro cantilevers in Tapping Mode Atomic Force Microscopy: A comparison between theory and experiment," Physical Renew B, Vol. 66, 2002, pp. 1-10.

[34] Muraoka, M. and Arnold, W., "a Method Evaluating Local Elasticity and Adhesion Energy from the Nonlinear Response of AFM Cantilever Vibration," JSME International Journal Series A-Solid Mechanics and Material Engineering, Vol. 44, 2001,pp. 396-405.

[35] Wei, B., Vibration of AFM Cantilevers with a Contact Boundary Condition, Master's thesis, University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, 2001.

[36] Turner, J. A., “Nonlinear Vibration of a Beam with Cantilever- Hertzian Contact Boundary Conditions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 275, 2004, pp. 177-191.

[37] Binnig, G., and Rohrer, H. (1982) Helv. Acta Phys. Vol. 55, 726.

[38] D. Rugar, P. Hansma, (October) (1990) Phys. Today 23

[39] B. Bhushan, 1999, Handbook of Micro/Nanotribology, second ed., CRC, Boca Raton, FL.

[40] K. Holmberg, A. Matthews, 1994, Coatings Tribology: Properties, Techniques and Applications in Surface Engineering, Elsevier, New York.

[41] O. Nakabeppu, M. Chandrachood, Y. Wu, J. Lia, A. Majumdar, (1995), Appl. Phys. Lett. 66 (6) 694.

[42] Burnham, N. A., Colton; R. J., and Pollock, H. M., “interpretation of Force Curves in Force Microscopy," Nanotechnology, Vol. 4, 1993, pp. 64-80.

[43] Albrecht, T. R., Akamine, S., Carver, T. E., and Quate, C. F., "Micro fabrication of Cantilever Styli for the Atomic Force Microscope," Journal of Vacuum Science Technology A, Vol. 8, 1990, pp. 3386-3396.

[44] Weihs, T. P., Nawaz, Z., Jarvis, S. P., and Pethica, J. B., "Limits of Imaging Resolution for Atomic Force Microscopy of Molecules," Applied Physics Letters, Vol. 59, 1991, pp. 3536-3538.

[45] Folch, A., Wrighton, M. S., and Schmidt, M. A., "Micro fabrication of Oxidation-Sharpened Silicon Tips on Silicon Nitride Cantilevers for Atomic Force Microscopy," Journal of Micromechanical Systems, Vol. 6, 1997, pp. 303-306.

[46] Butt, H. J. and Jaschke, M., “Calculation of Thermal Noise in Atomic Force Microscopy," Nanotechnology, Vol. 6, 1995, pp. 1-7.

[47] Ciraci, S., Tekman, E., Baratoff, A., and Batra, 1. P., "Theoretical Study of Short- and Long-Range Forces and Atom Transfer in Scanning Force Microscopy," Physical Renew B, Vol. 46, 1992, pp. 10411-10422.

[48] Lange, D., Brand, O., and Baltes, H., CMOS Cantilever Sensor Systems, Springer, New York, 2002.

[49] Morris, V. J., Kirby, A. R., and Gunning, A. P., Atomic Force Microscopy for Biologists, Imperial College Press, UK, 1999.

[50] Meyer, E., Hug, H. J., and Bennewitz, R., Scanning Probe Microscopy, Springer, New York, 2004.

[51] Johnson, K. L., Kendall, K., and Roberts, A. D., "Surface Energy and the Contact of Elastic Solids," Proceedings of the Royal Society of London, A., Vol. 324, 1971, pp. 301-313.

[52] Maugis, D., "Adhesion of Spheres; The JKRDMT Transition Using a Dugdale Model", Journal of Colloid and Interface Science. Vol.4 150, 1992, pp. 243-269.

[53] J.A. Greenwood, "Adhesion of Elastic Spheres",. Proc. R. Soc. Lond. A (1997) 453, 1277-1297

[54] Giri, M., Bousfield, D., and Unertl, W., "Dynamic Contact on Viscoelastic Films: Work of Adhesion," Langmuir, Vol. 17, 2001, pp. 2973-2981.

[55] Mindlin, R. D., "Compliance of Elastic Bodies in Contact," Journal of Applied Mechanics, Vol. 16, 1949, pp. 259-268.

[56] Sabot, J., Krempf, P., and Janolin, C., "Non-Linear Vibration of a Sphere-Plane Contact Excited by a Normal Load," Journal of Sound and Vibration, Vol. 214, 1998, pp. 359-375.

[57] Hui, C. Y. And Baney, J. M., "Contact Mechanics and Adhesion of Viscoelastic Spheres," Langmuir, Vol. 14, 1998, pp. 6S70-6578.

[58] Lin, Y. Y., Hui, C. Y., and Baney, J. M., "Viscoelastic Contact, Work of Adhesion and the JKR Technique," Journal of Physics, D: Applied Physics, Vol. 32, 1999, pp. 2250-2260.

[59] Dinelli, F., Biswas, S. K., Briggs, G. A. D., and Kolosov, O. V., "Measurements of Stiff-Material Compliance on the Nanoscale Using Ultrasonic Force Microscopy," Physical Review B, Vol. 61, 2000, pp. 13995-14006.

[60] Sader, J. E., “Frequency Response of Cantilever Beams Immersed in Viscous Fluids with Applications to the Atomic Force Microscope," Journal of Applied Physics,Vol. 84, 1998, pp. 64-76

[61] Hurley, D. G., Shen, K., Jennett, N. M., and Turner, J. A., "Atomic Force Acoustic Microscopy Methods to Determine Thin-film Elastic Properties," Journal of Applied Physics, Vol. 94, 2003, pp. 2347-2354.

[62] Shen, K. and Turner, J. A., "Finite Element Simulations of Nonlinear Vibrations of Atomic Force Microscope Cantilevers," Proceedings of the SPIE-The International Society for Optical Engineering, Vol. 4703, 2002, pp. 93-102.

[63] Rabe, U., Amelio, S., Kopycinska, M., Hirsekorn, S., Kempt, M., Goken, M., and Arnold, W., "Imaging and Measurement of Local Mechanical Material Properties by Atomic Force Acoustic Microscopy," Surface and Interface Analysis, Vol. 33, 2002,pp. 65-70.

[64] K. J. Van Vliet, B. K. Oommen, “Effects of nanosclae film thikness on apparent stiffness of and cell-mediated strains in polymers,” Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, September 2006, 20

[65] T. S. Wu, W. J. Chang,, J. C. Hsu, 2004, Effect of Tip Length and Normal and Lateral Contact Stiffness on the Flexural Vibration Responses of Atomic Force Microscope Cantilever, Microelectronic Engineering 71 (2004) 15-20.

[66] Win-Jin Chang, Te-Hua Fang, Huann-Ming Chou "Effect of interactive damping on sensitivity of vibration modes of rectangular AFM cantilevers" *Physics Letters A, Vol. 312, 2003, Pages 158-165*

[67] Yamanaka, K., Maruyama, Y., Tsuji, T., and Nakamoto, K., "Resonance Frequency and Q Factor Mapping by Ultrasonic Atomic Force Microscopy," Applied Physics Letters, Vol. 78, 2001, pp. 1939-1941.

[68] Drobek, T., Stark, R., and Heckl, W., "Determination of Shear Stiffness based on Thermal Noise Analysis in AFM Passive Overtone Microscopy," Physical Renew B,Vol. 64, 2001, pp. 045401-1-5.

[69] Goodman, L., "Contact Stress Analysis of Normal Loaded Rough Spheres," Journal of Applied Mechanics, Vol. 29, 1962, pp. 515-522.

[70] Barber, J, R. and Ciavarella, M., "Contact Mechanics," International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, 2000, pp. 29-43.

[71] Hills, D. A., Nowell, D., and Sack field, A., Mechanics of Elastic Contacts, Butterworth-Heinemann, Oxford, Oxford, 1993.

[72] de Water, W. V. and Molenaar, J., "Dynamics of Vibrating Atomic Force Microscopy," Nanotechnology, Vol. II, 2000, pp. 192-199.

[73] Banney, J. M, and Hui, C. Y., "Experimental Investigations of a Stress Intensity Factor Based Description of the Adhesion of Viscoelastic materials," Langmuir, Vol. 17, 2001, pp. 681-687.

[74] Leisaa, A. and Jacob, K. I., "Three-dimensional Vibrations of Twisted Cantilevered Parallelepiped," Transaction of ASME, Applied Mechanics, Vol. 53, 1986, pp. 614-618.

[75] Nanoscience Education, http://www.nanoscience.com/education/AFM.html

Investigation of Vibration of Atomic force Microscope Cantilever

Mohammad Abbasi

Shahrood University of Technology, June 2009

Requirements for the degree of Master of Science in Mechanical Engineering

Advisor: Dr. Ardeshir Karami Mohammadi

Abstract

Atomic force microscope (AFM) has a wide range of application as an important instrument in manufacturing, analysis and imagining of nano surfaces. The main purpose of this thesis is to investigate the linear and nonlinear vibration behavior of rectangular cantilever of AFM. Because the size of AFM cantilever is as small as 100-400 μm in length, it is very hard to control the exact size during manufacturing. Firstly, the exact solution of torsional and flexural characteristic equation for a rectangular cantilever with different contact position is derived. Consequently, the frequency behavior of system in different contact position and different contact stiffness are analyzed. In this analysis, the influences of some tip properties are investigated. Also a complete model for rectangular cantilever is proposed. In this model the parameters that were neglected before, are investigated. The angle of cantilever with the surface, tip moment of inertia and damping are some parameters that are investigated in this model. The contact damping is discussed in this thesis as well. Secondly, a tangential contact model is derived, by which the tangential contact stiffness is demonstrated to be strongly related to the friction factor and always less than the normal contact stiffness. Finally, the nonlinear behavior of the rectangular cantilever with Hertzian contact is investigated. The nonlinear vibration can be analyzed in a ways similar to the nonlinear problem by using the effective stiffness method proposed.

Keywords: Atomic Force Microscope, Cantilever, Frequency, Contact Position, Contact Damping, Contact Stiffness