بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گرایش طراحی کاربردی

عنوان

تحلیل کمانش و ارتعاشات پوسته های مخروطی ناقص کامپوزیتی تحت بارهای حرارتی و مکانیکی به کمک روش اجزای محدود نیمه تحلیلی

نگارش

مسعود طاهری

استاد راهنما:

دکتر علیرضا شاطرزاده

بهمن ۱۳۹۴

تقدیم به:

پدر و مادر مهربان و بزرگوارم

تقدیر و تشکر

از خداوند متعال سپاسگزارم که توفیق کسب علم و دانش را به من عطا فرمود تا بتوانم این مرحله از علم‌آموزی را با موفقیت به پایان برسانم. از خانواده عزیزم به خاطر حمایت‌ها و محبت‌های بی‌دریغی که نسبت به من داشته و دارند، کمال تشکر و سپاس را دارم. از استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر علیرضا شاطرزاده به خاطر راهنمایی‌های ارزشمند و زحمات ایشان در کلیه مراحل انجام پایان‌نامه تقدیر و تشکر می‌نمایم.

در انتها از تمامی اساتید محترم دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود که توفیق شاگردیشان را داشتم، سپاس‌گزاری نموده و از خداوند منان آرزوی سلامت و توفیق روزافزون برایشان دارم.

تـعـهـد نـــامــه

اینجانب **مسعود طاهری** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **طراحی کاربردی** دانشکده **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **تحلیل کمانش و ارتعاشات پوسته های مخروطی ناقص کامپوزیتی تحت بارهای حرارتی و مکانیکی به کمک روش اجزای محدود نیمه تحلیلی** تحت راهنمایی **دکتر علیرضا شاطرزاده** متعهد می شوم :

- **تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .**
- **در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .**
- **مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .**
- **کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه شاهرود » و یا « Shahrood University» به چاپ خواهد رسید.**
- **حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایح اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.**
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مـالـکیت نـتـایـج و حق نـشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

*** متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .**

چکیده

با توجه به کاربرد وسیع پوسته‌های مخروطی در صنایع مختلف از جمله صنعت نفت، گاز، پتروشیمی، هوافضا، صنایع نظامی و ... تحلیل پوسته های مخروطی ناقص مرکب موضوعی مهم و کاربردی است که در این تحقیق به آن پرداخته شده است. در کار حاضر، از یک روش اجزای محدود نیمه تحلیلی برای مدل کردن پوسته‌های مخروطی ناقص بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول (FSDT) استفاده شده است. ماتریس سفتی هندسی با در نظر گرفتن تأثیرات تغییر دما در سرتاسر پوسته به واسطه‌ی اعمال بار حرارتی و اثرات بار مکانیکی محاسبه شده است. پوسته‌ی مورد مطالعه از نوع مواد مرکب می‌باشد. همچنین از انواع شرط مرزی در تحلیل استاتیکی و دینامیکی استفاده شده است.

در تحلیل دینامیکی به محاسبه‌ی فرکانس طبیعی و در تحلیل استاتیکی، به محاسبه کمانش حرارتی، مکانیکی و ترمومکانیکی بر اساس تئوری ساده‌شده‌ی سندرز با در نظر گرفتن شرایط هندسی مختلف پرداخته شده است. از مهمترین نتایج کار حاضر می‌توان به تاثیر مطلوب افزایش ضخامت بر ارتعاش آزاد و مقاومت پوسته‌ی مخروطی ناقص در برابر کمانش و در مقابل به تاثیر نامطلوب افزایش طول و زاویه‌ی راس مخروط بر مقاومت پوسته در برابر کمانش اشاره کرد.

کلمات کلیدی: پوسته‌ی مخروطی ناقص، مواد مرکب، ارتعاشات آزاد، کمانش ترمومکانیکی، روش اجزای محدود نیمه تحلیلی

فهرست مطالب

فصل ۴ نتایج

فهرست اشکال

فهرست جداول

فهرست علائم

مدول الاستیسیته در جهات اصلی	$\boldsymbol{E_i}$
مدول برشی	G
نسبت پواسون	v
چگالی	ρ
شعاع مخروط	r
شعاع کوچک مخروط	R_1
شعاع بزرگ مخروط	R_2
طول مخروط	L
جابه‌جایی‌های پوسته	U_1, U_2 و W
جابه‌جایی‌های یک نقطه روی سطح مبنا	u_0, v_0, w_0
شماره‌ی مد محیطی	m
شماره‌ی مد محوری	n
ماتریس سفتی کل	$[K]$
ماتریس سفتی المان	$[K_e]$
جابه‌جایی کل	$\{d\}$
جابه‌جایی المان	$\{d_e\}$
ماتریس سفتی هندسی	$[K_G]$
ماتریس کرنش‌جابه‌جایی	$[B]$
ماتریس کرنش جابه‌جایی غیر خطی	$[B_{NL}]$
ماتریس متشکله	$[D]$
ماتریس متشکله‌ی حرارتی	$[\bar{D}]$
ماتریس سفتی کششی	$[A_{ij}]$
ماتریس کوپل محوری و خمشی	$[B_{ij}]$
ماتریس سفتی خمشی	$[D_{ij}]$
بردار نیروی وارد بر المان	$\{F_e\}$
بردار نیروی حرارتی وارد بر المان	$\{F_e^{th}\}$
بردار نیروی مکانیکی وارد بر المان	$\{F_e^{m}\}$

بردار نیروی مکانیکی اولیه واحد	$\{F_{mech}^{0}\}$
بردار نیروی کل	$\{F\}$
ضریب تصحیح برشی	k_s
منتجه‌های نیرو	N_i
منتجه‌های ممان	M_i
منتجه‌های نیروی برشی	Q_i
ماتریس توابع شکل	$[C_i]$
انرژی پتانسیل	Π
انرژی کرنشی	U
کار پتانسیل	W_p
دیفرانسیل حجم	dv
نیروی حجمی	f
نیروی سطحی	T
نیروی متمرکز	P_i
انرژی جنبشی	KE
ممان‌های اینرسی	I_i
دیفرانسیل مساحت	dA
ماتریس جرم	$[M]$
تغییر دما	ΔT
بار محوری وارد شده	λ
ضخامت	h
تانسور کرنش	ε_{ij}
تانسور کرنش غیر خطی	ε_{ij}^{NL}
کرنش برشی	γ_{ij}
تانسور تنش	σ_{ij}
تغییر انحنا در پوسته	k_i
پیچش سطح مبنا	τ_i
ماتریس انتقال	$[T]$

مختصات راستای طولی، مماسی و شعاعی پوسته	(s, θ, z)
نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط	β
زاویه بین محور x با جهت اصلی یک	α
ضریب انبساط حرارتی در جهت اصلی یک	α_1
ضریب انبساط حرارتی در جهت اصلی دو	α_2
فرکانس طبیعی	ω_0
فرکانس طبیعی بی‌بعد شده	Ω
دمای بحرانی بی‌بعد شده	T_c
بار بحرانی بی‌بعد شده	N_c
دوران حول مماس بر سطح مبنا در امتداد x	ψ_s
دوران حول مماس بر سطح مبنا در امتداد $\boldsymbol{\theta}$	ψ_θ
ماتریس نرمی	$[S_{ij}]$
ماتریس سفتی	$[Q_{ij}]$
ماتریس سفتی انتقال یافته	$[\bar{Q}_{ij}]$

فصل ۱

پیشگفتار

۱-۱ مقدمه

تحلیل استاتیکی و دینامیکی پوسته‌ها همواره موضوع موردعلاقه‌ی محققین بسیاری در سراسر جهان می‌باشد. در سال‌های اخیر به دلیل نیاز به موادی که هم توانایی تحمل بارهای دمایی بالا و هم توانایی تحمل بارهای مکانیکی را داشته باشند مواد مرکب معرفی گردیدند. این مواد دارای ساختار لایه‌ای هستند و به دلیل خواص مطلوب مانند استحکام بالا, سختی بالا، نسبت وزن به استحکام پایین و همچنین مقاومت بالا در برابر خوردگی به‌طور گسترده در موارد صنعتی ازجمله صنایع پتروشیمی، صنایع خودروسازی و صنایع هوایی بسیار به کار می‌روند. در میان سازه‌های مهندسی پوسته‌ها، خصوصاً پوسته‌های مخروطی ناقص بسیار پر کاربرد می‌باشند. به عنوان مثال از پوسته‌های مخروطی در فضاپیماها، پیشرانه‌ی موشک‌ها و دیفیوزرها استفاده می‌شود. پوسته مخروطی ناقص یکی از اجزای اصلی در سیستم پیشرانه موشک می‌باشد. بنابراین تحلیل پوسته‌های مخروطی ناقص مرکب موضوعی مهم و کاربردی می‌باشد که در این تحقیق به آن پرداخته خواهد شد.

با بررسی مطالعات انجام شده بر روی سازه‌های مرکب می‌توان دریافت که تئوری‌های استفاده‌شده برای تحلیل این سازه‌ها به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند. دسته‌ی اول به نام تئوری کلاسیک CLT[۱] معروف می‌باشد و اساس آن بر فرضیه‌ی لاو[۲] استوار است. این فرضیه بیان می‌دارد که تمامی خطوط مستقیمی که عمود بر سطح میانی پوسته یا ورق می‌باشند، قبل و بعد از تغییر شکل نیز عمود بر آن باقی می‌مانند. به عبارت دیگر از تغییر شکل برشی عرضی صرف‌نظر می‌شود. در دسته دوم که اصلاحی بر فرضیه‌ی لاو می‌باشد اثرات تغییر شکل برشی عرضی در نظر گرفته می‌شود. البته در این دسته، تقسیم‌بندی‌های دیگری نیز وجود دارد که از جمله‌ی آنها می‌توان به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول FSDT[۳] و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا HSDT[۴] اشاره نمود.

---
[1] Classical Laminate Theory
[2] Lov
[3] First Order Shear Deformation Theory
[4] High Order Shear Deformation Theory

امروزه روش‌های مختلفی در آنالیز استاتیکی و دینامیکی سازه‌ها به کار گرفته می‌شود که به طور کلی می‌توان آنها را به سه دسته‌ی زیر تقسیم بندی کرد:

۱- روش حل تقریبی[1]

۲- روش حل عددی[2]

۳- روش حل دقیق[3]

از آنجایی که در بسیاری از مسائل مهندسی به دلیل پیچیدگی معادلات و یا شرایط مرزی امکان حل دقیق وجود ندارد در چنین مواردی به جای حل دقیق از روش‌های حل تقریبی یا حل عددی می‌توان بهره جست. شیوه‌ای که در این رساله به کار گرفته شده است یک روش حل عددی از نوع اجزای محدود است[۷].

۱-۲ مروری بر کارهای انجام شده

آری و همکارانش[۱] به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌ی مخروطی ناقص با ضخامت متغیر و با در نظر گرفتن نیم زاویه‌ی رأس مخروط پرداختند. آنها در بررسی خود برای استخراج معادلات از تئوری مرتبه‌ی اول برشی استفاده کردند.

سن و گلد[۲] و بیدا[۳] به مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد پوسته‌ی مخروطی با ضخامت متغیر به کمک روش نیمه‌تحلیلی پرداختند.

لکیس و همکارانش[۴] به بررسی دینامیکی پوسته مخروطی ناقص ناهمسانگرد که شامل جریان مایع بود پرداختند. آنها در بررسی خود پوسته‌ی یکنواخت و غیریکنواخت با هندسه‌ی متقارن محوری را در نظر گرفتند. آنها به محاسبه‌ی ارتعاش آزاد پوسته‌ی مخروطی برحسب مدهای ارتعاشی پرداختند.

بی‌هنگل و همکارانش[۵] بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با استفاده از روش

[1] Approximate Method
[2] Numerical Solution
[3] Exact Method

نیمه‌تحلیلی به مطالعه‌ی کمانش حرارتی و ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی ناقص FGM[1] در دماهای بالا پرداختند. آنها شرایط مرزی دو سربسته را در نظر گرفتند و فرض کردند که سطح داخلی و خارجی پوسته‌ی مخروطی با دمای بالا احاطه شده است.

تریپاسی و همکارانش[۶] به مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد خطی پوسته‌ی مخروطی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول پرداختند و در انتها نتایج به‌دست آمده از مطالعه‌ی خود را با یک روش نیمه‌تحلیلی مقایسه نمودند.

شاطرزاده[۷] به تحلیل استاتیکی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای شکل مرکب حاوی سیال داغ و سرد پرداخت.کربوآ و همکارانش[۸] به بررسی روشی برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی پوسته‌ی مخروطی ناهمسانگرد همراه با جریان مایع بر اساس تئوری مرتبه‌ی اول برشی با استفاده از یک روش نیمه‌تحلیلی پرداختند.

دی و کارماکار[۹] با یک روش نیمه‌تحلیلی به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌ی مخروطی پرداختند و معادلات تعادل دینامیکی مورد نیاز را از معادلات حرکت لاگرانژ استخراج کردند. آنها در مطالعه‌ی خود تأثیر شرایط مرزی بر ارتعاش آزاد این پوسته‌ها را تحقیق کردند.

مالک‌زاده و حیدرپور[۱۰] به مطالعه‌ی تأثیر کمیت‌های هندسی بر ارتعاشات آزاد پوسته‌ی مخروطی در شرایط مرزی مختلف پرداختند و در استخراج معادلات حرکت و ارتعاش آزاد از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استفاده کردند. آنها دریافتند که شرایط مرزی تأثیر قابل توجهی بر ارتعاش آزاد پوسته دارد ولی با این حال اثر شرایط مرزی بستگی به مد ارتعاشی و نیم زاویه‌ی رأس مخروط دارد.

ما و همکارانش[۱۱] به مطالعه‌ی ارتعاش آزاد و اجباری پوسته‌ی مخروطی و استوانه‌ای وصل شده با شرایط مرزی دلخواه بر مبنای روش ریتز پرداختند.

چانگ و لو[۱۲] به مطالعه‌ی رفتار پس‌کمانش پوسته‌ی مخروطی تحت توزیع دمای یکنواخت پرداختند. شرایط مطالعه‌ی آنها پوسته مخروطی ناقص با شرایط مرزی ساده بود و نتیجه گرفتند که

[1] Functionally graded materials

نسبت شعاع به ضخامت تأثیر زیادی در حداقل دمای کمانش دارد.

تانی[۱۳] به مطالعه‌ی کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی ناقص تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت، به روش تحلیلی و با استفاده از معادلات دانل[1] پرداخت. او به این نتیجه رسید که اثر تغییر شکل اولیه‌ی متقارن در کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی کاملاً قابل توجه است.

متئو و همکارانش[۱۴] به بررسی کمانش حرارتی ورق نامتقارن با شش درجه آزادی با استفاده از تئوری مرتبه‌ی اول برشی پرداختند. آنها به دنبال کمیت‌های مؤثر بر بار حرارتی و مکانیکی بحرانی بودند و متوجه شدند که کمیت‌های مؤثر بر کمانش با کاهش نسبت لاغری کاهش می‌یابد.

پاتل و همکارانش[۱۵] به مطالعه‌ی رفتار کمانش حرارتی پوسته‌ی استوانه‌ای با استفاده از تئوری مرتبه‌ی بالا به کمک روش نیمه تحلیلی پرداختند و مشاهده کردند مقدار دمای کمانش به نسبت ضخامت به طول و مد کمانش بستگی دارد. رادهاموهان و ونکاترامانا[۱۶] به مطالعه‌ی کمانش حرارتی پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده با فایبرگلاس با استفاده از تئوری غیرخطی سندرز تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت پرداختند. تانگاراتنام و همکارانش[۱۷] به بررسی کمانش حرارتی و مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی مرکب با شرایط مرزی و زاویه‌ی الیاف مختلف پرداختند.

اسلامی و شاه‌سیاه[۱۸] به مطالعه‌ی کمانش حرارتی پوسته‌ی استوانه‌ای با استفاده از معادلات دانل پرداختند. آنها فرض کردند که بار حرارتی به شکل یکنواخت و خطی در جهات شعاعی و طولی افزایش می‌یابد و شرایط مرزی ساده را در نظر گرفتند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش نسبت ضخامت به شعاع بار کمانش نیز افزایش می‌یابد.

درویزه و همکارانش[۱۹] به مطالعه‌ی نیمه‌تحلیلی پوسته‌ی مرکب استوانه‌ای ضخیم تحت بارگذاری حرارتی با استفاده از تئوری مرتبه‌ی اول برشی پرداختند و برای محاسبه‌ی ماتریس سفتی هندسی از تئوری ساده‌شده و ساده نشده‌ی سندرز استفاده کردند. آنها مشاهده کردند با افزایش زاویه‌ی الیاف دمای کمانش بحرانی افزایش می‌یابد و هم‌چنین به این نتیجه رسیدند که دمای کمانش بحرانی در

[1] Donnell

تئوری ساده‌شده‌ی سندرز کمتر از تئوری ساده نشده‌ی سندرز است.

وو و همکارانش[۲۰] با استفاده از معادلات دانل به مطالعه‌ی تأثیر زاویه‌ی الیاف و نسبت شعاع به ضخامت بر ارتعاشات آزاد و کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی ناقص پرداختند و به این نتیجه رسیدند که کمانش حرارتی و ارتعاشات آزاد این پوسته‌ها وابستگی بسیاری به کمیت‌های هندسی دارد.

توپال و اوزمن[۲۱] به بررسی بهینه‌سازی بار کمانش حرارتی پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت با استفاده از تئوری مرتبه‌ی اول برشی پرداختند. هدف آنها از این بررسی یافتن زاویه الیافی بود که حداکثر دمای ممکن را در کمانش داشته باشد و در نهایت تأثیر تعداد لایه‌ها، نسبت طول به شعاع و شرایط مرزی را جهت بهینه‌سازی مورد بررسی قرار دادند. آنها نتیجه گرفتند که لبه‌ی آزاد به پوسته اجازه می‌دهد دمای بالاتری را تحمل کند. هم‌چنین نتیجه گرفتند که در تعداد لایه‌های پایین زاویه‌ی الیاف تأثیر قابل ملاحظه‌ای در بهینه‌سازی دارد ولی با افزایش تعداد لایه‌ها این تأثیر کم می‌شود.

ژو و همکارانش[۲۲] به مطالعه‌ی کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای بر اساس معادلات دانل و اصل همیلتون پرداختند و بار کمانش را با استفاده از حل یک مسئله‌ی مقدار ویژه محاسبه کردند و نتیجه گرفتند که با افزایش طول دمای کمانش بحرانی کاهش می‌یابد و با افزایش ضخامت دمای کمانش بحرانی نیز افزایش می‌یابد.

اسمیتس و آناستاسیادیس[۲۳] با استفاده از تئوری مرتبه‌ی بالای برشی به تحلیل کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بارگذاری‌های فشار محوری، فشار عرضی و فشار خارجی پرداختند و بار بحرانی کمانش را در طول‌های مختلف و نسبت‌های مختلف شعاع به ضخامت و شعاع به طول محاسبه کردند و نتایج حاصل از مطالعه‌ی خود را با تئوری‌های مرتبه‌ی پایین‌تر مقایسه کردند. آنها نتیجه گرفتند که برای نسبت‌های شعاع به ضخامت بیشتر از ۳۰ تئوری کلاسیک و تئوری‌های برشی مقادیر یکسانی را پیش‌بینی می‌کنند ولی برای نسبت‌های شعاع به ضخامت کمتر از ۳۰ تئوری کلاسیک مقادیر بیشتری

از تئوری برشی مرتبه‌ی اول و تئوری برشی مرتبه‌ی اول نیز مقادیر بیشتری از تئوری مرتبه سوم پیش‌بینی می‌کند.

فریرا و باربوسا[۲۴] با یک مدل نیمه‌تحلیلی به تحلیل کمانش پوسته‌ها با هندسه‌ی غیرخطی پرداختند. جمال وهمکارانش[۲۵] به تجزیه و تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری با روش نیمه‌تحلیلی پرداختند. لی و باترا[۲۶] به مطالعه‌ی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای نازک تحت بارگذاری فشار محوری با شرایط مرزی ساده پرداختند. انگوین و همکارانش[۲۷] به مطالعه‌ی کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای با ضخامت متغیر تحت بارگذاری فشار خارجی با استفاده از روش گالرکین پرداختند و نتیجه گرفتند که تغییر ضخامت بر ظرفیت تحمل بار در پوسته‌ها مؤثر است.

سپیانی و همکارانش[۲۸] به مطالعه‌ی ارتعاشات و کمانش پوسته‌های استوانه‌ای FGM تحت بارگذاری استاتیکی و دینامیکی با استفاده از تئوری کلاسیک و تئوری مرتبه‌ی اول برشی پرداختند و دریافتند که کمیت‌های هندسی و ترکیب مواد، اثر قابل توجهی بر نیروی بحرانی کمانش دارد به طوری که حداقل بار بحرانی کمانش برای پوسته‌های کاملاً فلزی رخ می‌دهد و نیروی برشی اثر قابل توجهی بر ارتعاشات آزاد پوسته دارد.

شادمهری و همکارانش[۲۹] با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی و بر اساس تئوری مرتبه‌ی اول برشی به مطالعه‌ی کمانش پوسته‌ی مخروطی تحت فشار محوری پرداختند و مشاهده کردند برای پوسته‌های مخروطی نازک و کوتاه با افزایش زاویه‌ی رأس مخروط بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.

درویزه و همکارانش[۳۰] به مطالعه‌ی کمانش پوسته‌های مرکب استوانه‌ای تحت بارگذاری‌های مختلف بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی پرداختند و نتیجه گرفتندکه در بارگذاری محوری، مد محیطی کمیت مؤثری بر بار کمانش است.

در سری تحقیقات تنگ[۳۱-۳۳] با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی اثر نقص هندسی اولیه بر رفتار کمانشی پوسته‌ها بررسی شده است. پاتل[۳۴-۳۸] به کمک روش نیمه‌تحلیلی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی ناقص تحت بارگذاری‌های پیچشی، فشار جانبی و فشار محوری را مطالعه نمود و

مشاهده کرد با افزایش زاویه‌ی مخروط بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد و هم‌چنین رفتار کیفی پس‌کمانش در پوسته‌ها در معرض بار پیچشی، فشار خارجی، فشار محوری و بار حرارتی مشابه است.

در سری کارهای شین‌من[۳۹-۴۱] رفتار کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای توسط تئوری‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. قاسمی و همکارانش[۴۲] به بررسی کمانش پوسته‌های مرکب تقویت‌شده‌ی مخروطی تحت بار محوری با استفاده از روش ریتز پرداختند.

شاطرزاده و همکارانش[۴۳] به مطالعه‌ی کمانش حرارتی ورق کامپوزیتی با گشودگی دایروی با استفاده از روش اجزای محدود پرداختند. یزدانی و رحیمی[۴۴] به بررسی تجربی مقاومت در برابر کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری در شرایط تقویت‌شده و تقویت نشده پرداختند و دریافتند که اثر تقویت‌کننده‌های مارپیچ از تقویت‌کننده‌های محیطی در مقاوم کردن پوسته در برابر کمانش بیشتر است. گلد فلد و آربوکس[۴۵] به مطالعه‌ی کمانش پوسته‌های مخروطی تقویت‌شده پرداختند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش زاویه‌ی رأس مخروط بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابد. نارایانا و همکارانش[۴۶] به مطالعه‌ی کمانش خطی و غیر خطی پوسته‌ی استوانه‌ای مرکب تحت بارگذاری مکانیکی با استفاده از روش اجزای محدود پرداختند و تاثیر ضخامت و شعاع بر رفتار کمانشی پوسته را مورد بررسی قرار دادند. مالینوسکی و همکارانش[۴۷] به مطالعه‌ی رفتار کمانشی و پس‌کمانشی پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بارگذاری فشار خارجی با استفاده از روش اجزای محدود پرداختند و تاثیر کمیت‌ها هندسی بر رفتار پوسته را بررسی کردند. سوفیف[۴۸] رفتار کمانشی پوسته‌ی مخروطی FG تحت بارگذاری فشار خارجی با شرایط مرزی ساده را بر مبنای تئوری دانل مورد مطالعه قرار داد. جانسون و کارد[۴۹] به مطالعه‌ی تأثیر تقویت‌کننده و بار مکانیکی بر مقاومت در برابر کمانش حرارتی استوانه با تقویت‌کننده پرداختند. آرانی و همکارانش[۵۰] به مطالعه‌ی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مرکب پیزوالکتریک تحت بارگذاری الکترو-ترمو-مکانیکی پرداختند. جمیل و نصیف[۵۱] به بررسی تاثیر ضخامت و شرایط مرزی بر کمانش ترمومکانیکی ورق مرکب پرداختند.

میچالسکا و مانیا[۵۲] به مطالعه‌ی کمانش ترمومکانیکی ورق نازک تحت افزایش دمای یکنواخت با

شرایط مرزی ساده پرداختند. شاطرزاده[۵۳] به مطالعه‌ی کمانش ترمومکانیکی ورق FG با گشودگی دایروی بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی با استفاده از روش اجزای محدود پرداختند و تاثیر شرایط مرزی و شعاع گشودگی بر رفتار کمانشی ورق را بررسی کردند.

با توجه به موارد فوق کار ویژه‌ای بر روی تحلیل کمانش مکانیکی و ترمومکانیکی پوسته‌های مخروطی ناقص با استفاده از روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی انجام نگرفته است که در این پژوهش به آن پرداخته شده است.

۱-۳ معرفی پایان‌نامه حاضر

در این پایان‌نامه کمانش و ارتعاشات پوسته‌ی مخروطی ناقص مرکب تحت بارگذاری‌های حرارتی، مکانیکی و ترمومکانیکی مورد بررسی قرار گرفته است. مبنای کار بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول می‌باشد و از روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی برای به دست آوردن نتایج استفاده شده است. همچنین فرضیات استفاده شده در کار حاضر شامل موارد زیر است:

۱- ضخامت پوسته نازک فرض شده است.

۲- از تئوری الاستیسیته خطی در تحلیل روابط استفاده شده است.

۳- با توجه به خطی بودن تحلیل، اصل برهم نهی صادق است.

در فصل دوم؛ به استخراج معادلات کرنش- جابه‌جایی پوسته‌های مخروطی ناقص مرکب و بررسی رفتار مکانیکی آن پرداخته شده است.

در فصل سوم؛ با استفاده از روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی اقدام به مدل کردن پوسته‌های مخروطی مرکب شده است.

در فصل چهارم؛ نتایج حاصل از تحلیل پوسته‌ی مخروطی ناقص مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

فصل ۲

معادلات پوسته‌ی مخروطی مرکب

۲-۱ مقدمه

در حالت کلی یک ساختار پوسته‌ای سه ویژگی را دارا می‌باشد: ۱- سطح مبنا، ۲- ضخامت و ۳- لبه‌ها، که البته سطح مبنا اهمیت بیشتری دارد زیرا رفتار پوسته بر مبنای رفتار سطح مبنا مورد بررسی قرار می‌گیرد. تئوری‌های مربوط به پوسته از معادلات الاستیسیته استخراج می‌شوند. رفتار کرنش- جابه‌جایی پوسته‌ها از روابط کرنش- جابه‌جایی سه‌بعدی و سینماتیک که در مختصات منحنی‌الخط دلخواه بیان می‌گردد به دست می‌آید. در پوسته‌ی جدار نازک ضخامت در مقایسه با سایر ابعاد کوچک است و برای تحلیل از تئوری دوبعدی استفاده می‌شود[۷]. پوسته‌ی جدار نازک[1] به پوسته‌ای اطلاق می‌گردد که دارای شرط زیر باشد.

$$\left(\frac{h}{r}\right) \leq \frac{۱}{۲۰} \qquad (۲-۱)$$

در رابطه‌ی(۲-۱) ، h ضخامت پوسته وr شعاع انحنای سطح میانی می‌باشد[۶۰].

در جهان امروز مواد پیشرفته‌ی جدید عبارت‌اند از سرامیک‌ها، پلاستیک‌ها، مواد مرکب (کامپوزیت‌ها)، آلیاژها، الیاف نوری و مواد FG؛ به شکلی که تمام پیشرفت‌ها و تلاش‌هایی که در این زمینه و در جهت جستجو و یافتن کاربردهایی نوین و جدید انجام گرفته، با نگرش به این مواد صورت می‌پذیرد.

اصطلاح ماده‌ی کامپوزیت، به معنی ماده‌ی تشکیل شده از دو یا چند فاز یا قسمت مختلف است که معادل فارسی این واژه «ماده‌ی مرکب» است. در یک تعریف دیگر می‌گوییم که اگر فازهای تشکیل دهنده‌ی موجود هر کدام دارای خواص فیزیکی کاملا متفاوت از یکدیگر بوده اما ماده‌ی تشکیل شده از آنها دارای خواصی کاملا متفاوت از فازهای اولیه باشد، در آن صورت با آن ماده «ماده‌ی مرکب» می‌گوییم. امروزه استفاده از مواد مرکب در صنایع گوناگون مورد توجه فراوان قرار گرفته است. این کاربردها از صنایع بسیار پیشرفته و پیچیده گرفته تا ساخت لوازم و وسایل ساده را در بر می‌گیرد. در نظر گرفتن فاکتورها و عواملی چون صرفه جویی در مصرف انرژی و مواد، سبکی وزن وسایل نقلیه و

---

[1] Thin Shell

هواپیماها، مقاومت مناسب در برابر بسیاری از مواد شیمیایی، استحکام کششی بالا و... روز به روز اهمیت استفاده از مواد مرکب را بیشتر نشان می‌دهد[۷]. که در این بخش پوسته‌های جدار نازک مخروطی مرکب مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

۲-۲ مواد مرکب

مواد مرکب بر دو اساس تقسیم بندی می‌شوند، یکی شکل ماده‌ی تقویت کننده و دیگری چگونگی توزیع یا قرار گرفتن آنها در زمینه، لذا بر این اساس به دو گروه عمده تقسیم بندی می‌شوند:

۱- مواد مرکب ذره‌ای(تقویت شده با ذرات)

۲- مواد مرکب لیفی (تقویت شده با الیاف)

در مواد مرکب ذره‌ای، ذرات به خاطر این که نسبت به زمینه‌های پلیمری از سفتی بیشتری برخوردارند، لذا باعث جلوگیری از تغییر شکل الاستیک آن در اثر تنش می‌شوند. باید به این نکته توجه داشت که ذرات سفت چنانچه در یک زمینه‌ی شکننده قرار گیرند به خاطر ایجاد تنش در این زمینه، موجب کم شدن استحکام می‌شوند.

مواد مرکب لیفی، مهمترین مواد مرکب از نظر استحکام هستند. ویژگی‌های مهم الیاف، زیاد بودن نسبت طول به قطر آنها است که این خاصیت باعث استحکام بیشتر الیاف در جهت طولی می‌شود. وقتی که الیاف را درون یک زمینه‌ی پلیمری قرار می‌دهند، زمینه سبب اتصال الیاف به یکدیگر و انتقال بار وارد بر مجموعه و کل الیاف شده، الیاف را در برابر آسیب‌های ناشی از عوامل محیطی مختلف محافظت و مراقبت می‌کند. مواد مرکب تقویت شده با الیاف به دو دسته تقسیم می‌شوند[۷]:

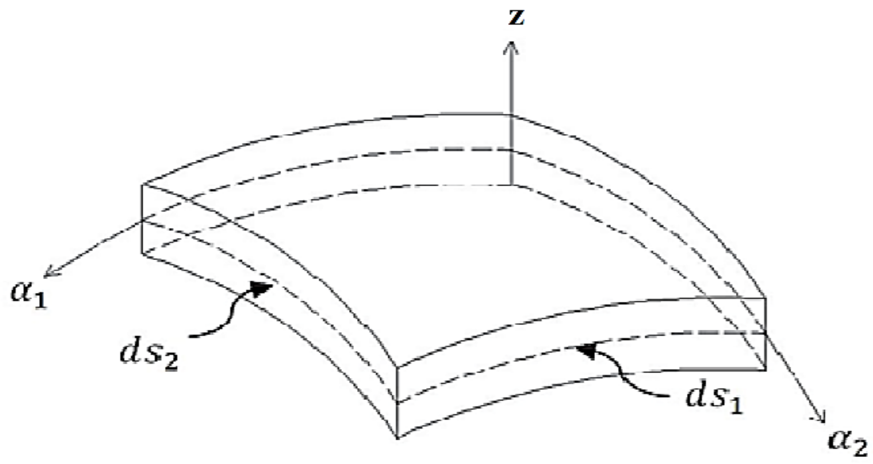
۱- پوسته‌ی تک‌لایه[1]

۲- پوسته‌ی چندلایه[2]

[1] Lamina
[2] Laminate

۲-۳ روابط کرنش- جابه‌جایی:

بردار جابه‌جایی در فضای پوسته را با توجه به شکل (۲-۱) به صورت زیر تعریف می‌کنیم[۵۴]:



شکل ۲-۱: نمایش جزء دیفرانسیلی یک پوسته[۵۴]

$$\vec{U}(\alpha_1,\alpha_2,z) = \bar{U}_1(\alpha_1,\alpha_2,z)\vec{t}_1 + \bar{U}_2(\alpha_1,\alpha_2,z)\vec{t}_2 + \bar{W}(\alpha_1,\alpha_2,z)\vec{n} \qquad (۲\text{-}۲)$$

که $\vec{t}_1$، $\vec{t}_2$ و $\vec{n}$ به ترتیب بردارهای یکه در امتداد α_1 و α_2 و عمود بر سطح مبنا هستند و $\bar{U}_1$، $\bar{U}_2$ و $\bar{W}$ مولفه‌های بردارهای جابه‌جایی منطبق با جهات سیستم مختصات متعامد می‌باشند. از تئوری الاستیسیته[۵۳] می‌دانیم در یک سیستم مختصات منحنی‌الخط متعامد مولفه‌های کرنش نرمال و برشی با مولفه‌های بردار جابه‌جایی به صورت زیر رابطه دارند:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(u_i/\sqrt{g_i}\right) + 1/2g_i\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial g_i}{\partial\alpha_k}\right)\left(u_k/\sqrt{g_k}\right) \quad , \quad i,j = 1,2,3$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}} \left[g_i\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(u_i/\sqrt{g_i}\right) + g_j\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(u_j/\sqrt{g_j}\right)\right] \quad , \quad i,j = 1,2,3 \quad , \quad i \neq j \qquad (۳\text{-}۲)$$

و برای پوسته داریم:

$$\alpha_1 = s \quad , \quad \alpha_2 = \theta \quad , \quad \alpha_3 = z$$

$$u_1 = u \quad , \quad u_2 = v \quad , \quad u_3 = w \qquad (۲-۴)$$

$$g_1 = A_1^2\ (1 + z/R_1)^2 \quad , \quad g_2 = A_2^2\ (1 + z/R_2)^2 \quad , \quad g_3 = 1$$

که g_1، g_2 و g_3 ضرایب لامه[1] هستند. همچنین A_1 و A_2 به ترتیب مماس بر منحنی‌های α_2 و α_1 و R_1 و R_2 به ترتیب شعاع انحنا و فاصله‌ی سطح از محور دوران هستند که در ادامه برای پوسته‌ی مخروطی شکل محاسبه می‌شوند.

با توجه به شرایط گوس-کودازی[2]، خواهیم داشت:

$$[A_1(1 + z/R_1)]_{,2} = (1 + z/R_2)A_{1,2}$$

$$[A_2(1 + z/R_2)]_{,1} = (1 + z/R_1)A_{2,1} \qquad (۲-۵)$$

با جای‌گذاری معادلات (۲-۴) در معادلات (۲-۳) و با توجه به معادلات (۲-۵) معادلات کرنش جابه‌جایی برای پوسته به شکل زیر خواهد شد:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{A_1(1 + z/R_1)}\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{A_1}{R_1}w\right)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{A_2(1 + z/R_2)}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial s} + \frac{A_2}{R_2}w\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

[1] Lame
[2] Gauss- Codazzi condition

$$\gamma_{sz} = A_1(1+z/R_1)\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{A_1(1+z/R_1)}\right) + \frac{1}{A_1(1+z/R_1)}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)$$

$$\gamma_{z\theta} = A_2(1+z/R_2)\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{A_2(1+z/R_2)}\right) + \frac{1}{A_2(1+z/R_2)}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)$$

$$\gamma_{s\theta} = \frac{A_1(1+z/R_1)}{A_2(1+z/R_2)}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u}{A_1(1+z/R_1)}\right) + \frac{A_2(1+z/R_2)}{A_1(1+z/R_1)}\ \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v}{A_2(1+z/R_2)}\right) \qquad (۶-۲)$$

مولفه‌های جابه‌جایی بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول (FSDT) در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر قابل بیان است:

$$u(s,\theta,z) = u_0(s,\theta) + z\psi_s(s,\theta)$$

$$v(s,\theta,z) = v_0(s,\theta) + z\psi_\theta(s,\theta) \qquad (۷-۲)$$

$$w(s,\theta,z) = w_0(s,\theta)$$

کمیت‌های u_0، v_0 و w_0 نشان دهنده‌ی مولفه‌های بردار جابه‌جایی یک نقطه روی سطح مبنا می‌باشند و ψ_s و ψ_θ به ترتیب بیانگر دوران‌های مماس به سطح مبنا در امتداد خطوط پارامترهای s و θ می‌باشند.

با جای‌گذاری معادلات (۲-۷) در معادلات (۲-۶) داریم:

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \gamma_{sz} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{(1+z/R_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{(1+z/R_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{(1+z/R_1)} & \frac{1}{(1+z/R_2)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1+z/R_1)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1+z/R_2)}
\end{bmatrix} \tag{۸-۲}
$$

$$
\times \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_s^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_s^0 \\ \gamma_\theta^0 \\ \mu_s^0 \\ \mu_\theta^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_s \\ k_\theta \\ \tau_s \\ \tau_\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right]
$$

که در رابطه‌ی فوق:

$$
\varepsilon_s^0 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{v_0}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{w_0}{R_1} \quad , \quad k_s = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \frac{\psi_\theta}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta}
$$

$$
\varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s} + \frac{w_0}{R_2} \quad , \quad k_\theta = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_s}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s}
$$

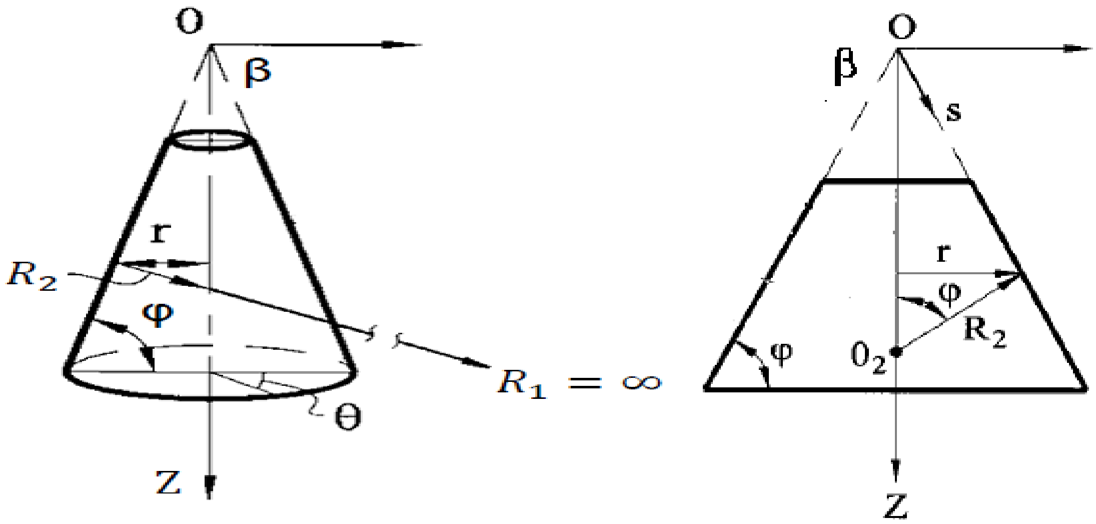
$$
\gamma_s^0 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_0}{\partial s} - \frac{u_0}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta} \quad , \quad \tau_s = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} - \frac{\psi_s}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta}
$$

$$
\gamma_\theta^0 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s} \quad , \quad \tau_\theta = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} - \frac{\psi_\theta}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial s}
$$

$$
\mu_s^0 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial w_0}{\partial s} - \frac{u_0}{R_1} + \psi_s \quad , \quad \mu_\theta^0 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial w_0}{\partial s} - \frac{v_0}{R_2} + \psi_\theta \tag{۹-۲}
$$

که ε_s^0، ε_θ^0، γ_s^0، γ_θ^0، k_s و k_θ به ترتیب کرنش‌های نرمال و برشی در صفحه و تغییر در انحنا و τ_s، τ_θ، μ_s^0 و μ_θ^0 پیچش سطح مبنا و مولفه‌های کرنش برشی هستند.

و A_1، A_2، R_1 و R_2 برای پوسته‌ی مخروطی با توجه به شکل زیر به دست می‌آید:



شکل ۲-۲: هندسه‌ی پوسته‌ی مخروطی[۵۴ و ۵۹]

$$\vec{r} = s\left(\sin\beta\cos\theta\,\vec{i} + \sin\beta\sin\theta\,\vec{j} + \cos\beta\,\vec{k}\right)$$

$$A_1{}^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 = (\sin\beta\cos\theta)^2 + (\sin\beta\sin\theta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1$$

$$A_1 = 1$$

$$A_2{}^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 = s^2[(\sin\beta\sin\theta)^2 + (\sin\beta\cos\theta)^2] = s^2(\sin\beta)^2$$

$$A_2 = s\sin\beta = r$$

$$R_1 = \infty$$

$$R_2 = \frac{r}{sin\,\varphi} = \frac{r}{\cos\beta} = \mathrm{s}\tan\beta \qquad (۱۰\text{-}۲)$$

در نتیجه به کمک روابط (۲-۱۰) و معادلات (۲-۹) داریم:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial s} &&, \quad k_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial s} \\
\varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{r}\left(u_0 \sin\beta + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \cos\beta\right) &&, \quad k_\theta = \frac{1}{r}\left(\psi_s \sin\beta + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right) \\
\gamma_s^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial s} &&, \quad \tau_s = \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} \qquad (۱۱\text{-}۲) \\
\gamma_\theta^0 &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} - v_0 \sin\beta\right) &&, \quad \tau_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} - \psi_\theta\ \sin\beta\right) \\
\mu_s^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial s} + \psi_s &&, \quad \mu_\theta^0 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \cos\beta\right) \\
&&& \qquad +\psi_\theta
\end{aligned}$$

از رابطه‌ی (۲-۸) داریم:

$$\gamma_{s\theta} = \frac{1}{(1+z/R_1)}(\gamma_s^0 + z\tau_s) + \frac{1}{(1+z/R_2)}\left(\gamma_\theta^0 + z\tau_\theta\right) \qquad (۱۲\text{-}۲)$$

یا

$$\gamma_{s\theta} = \frac{1}{(1+z/R_1)(1+z/R_2)}\begin{bmatrix} (1+z/R_2)(\gamma_s^0 + z\tau_s) \\ +(1+z/R_1)\left(\gamma_\theta^0 + z\tau_\theta\right) \end{bmatrix} \qquad (۱۳\text{-}۲)$$

با استفاده از تقریب $\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right) \cong 1\right)$ برای پوسته‌های نازک رابطه‌ی (۲-۱۳) به فرم زیر خواهد شد:

$$\gamma_{s\theta} = (\gamma_s^0 + z\tau_s) + \left(\gamma_\theta^0 + z\tau_\theta\right) = \left(\left(\gamma_s^0 + \gamma_\theta^0\right) + z(\tau_s + \tau_\theta)\right) = \left(\gamma_{s\theta}^0 + zk_{s\theta}\right) \qquad (۱۴\text{-}۲)$$

در نتیجه فرم نهایی معادلات کرنش جابه‌جایی برای پوسته‌های مخروطی نازک به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s^0 + zk_s = \frac{\partial u_0}{\partial s} + z\frac{\partial \psi_s}{\partial s}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + zk_\theta = \frac{1}{r}\left(u_0 \sin\beta + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \cos\beta\right) + z\frac{1}{r}\left(\psi_s \sin\beta + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\gamma_{s\theta} = \gamma_{s\theta}^0 + zk_{s\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin\beta}{r}\right)v_0$$

$$+z\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin\beta}{r}\right)\psi_\theta\right)$$

$$\gamma_{sz} = \mu_s^0 = \frac{\partial w_0}{\partial s} + \psi_s$$

$$\gamma_{z\theta} = \mu_\theta^0 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \cos\beta\right) + \psi_\theta \qquad (۱۵-۲)$$

۴-۲ رفتار مکانیکی اجسام تک لایه

در مطالعه‌ی یک لایه‌ی مرکب فرضیات زیر به‌کار می‌روند:

۱- تغییر شکل‌ها کوچک فرض می‌شوند زیرا اگر جابه‌جایی‌های بزرگ داشته باشیم باید از هندسه‌ی غیرخطی استفاده کنیم که در این‌جا مورد نظر ما نیست.

۲- لایه، رفتار الاستیک خطی دارد.

۳- در مقیاس ماکروسکوپی، مواد تشکیل دهنده‌ی لایه همگن هستند.

۴- در لایه حفره وجود ندارد.

۵- اتصال کامل بین الیاف و رزین وجود دارد.

رابطه‌ی تنش- کرنش بر اساس قانون هوک و در حالت کلی به شکل زیر بیان می‌شود[۵۵]:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \qquad , \qquad i,j = 1,\dots,6 \qquad (۱۶-۲)$$

در این رابطه σ_i مولفه‌های تنش، C_{ij} مولفه‌های ماتریس سفتی و ε_i مولفه‌های کرنش می‌باشند. ماتریس سفتی دارای ۳۶ ضریب می‌باشد که به علت تقارن به ۲۱ ثابت غیر وابسته کاهش می‌یابد.

از طرفی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j \qquad , \qquad i,j = 1,\dots,6 \tag{۱۷-۲}$$

که S_{ij} را ماتریس نرمی، می‌نامند که برای یک جسم ارتوتروپیک تعداد ثابت‌های مستقل آن به عدد ۹ کاهش می‌یابد و به صورت زیر نوشته می‌شود:

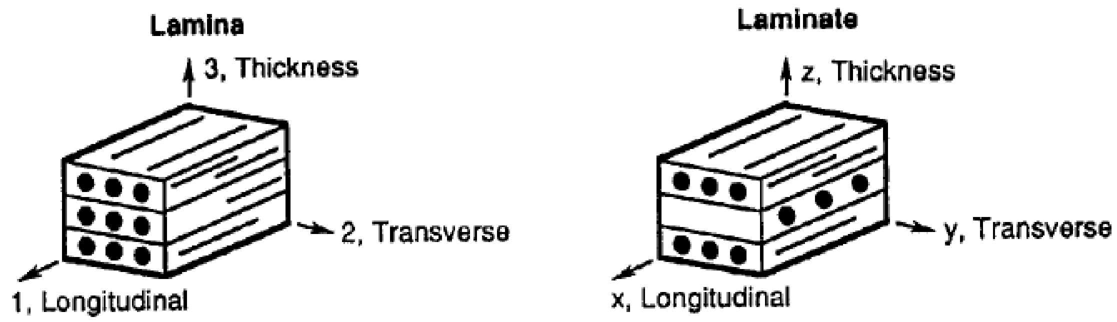
$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{v_{12}}{E_1} & -\frac{v_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{v_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{31}}{E_3} & -\frac{v_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{۱۸-۲}$$

در این ماتریس E_1، E_2 و E_3 به ترتیب مدول الاستیسیته در جهات یک، دو و سه می‌باشد، G_{ij} و v_{ij} نسبت پواسون برای کرنش عرضی در جهت j می‌باشد، وقتی تنش در جهت i اعمال می‌شود. هم‌چنین برای نسبت پواسون روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \tag{۱۹-۲}$$

$$\frac{v_{ij}}{E_i} = \frac{v_{ji}}{E_j} \tag{۲۰-۲}$$

برای لایه‌ای در صفحه‌ی (۲-۱) طبق شکل (۲-۳) می‌توان ارتباط تنش- کرنش را به صورت زیر بیان کرد:



شکل ۲-۳: نمای ساده‌ای از جهت الیاف و محورهای اصلی[۷]

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{13}\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&Q_{13}&0&0&0\\ Q_{21}&Q_{22}&Q_{23}&0&0&0\\ Q_{31}&Q_{32}&Q_{33}&0&0&0\\ 0&0&0&Q_{44}&0&0\\ 0&0&0&0&Q_{55}&0\\ 0&0&0&0&0&Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} \quad (۲-۲۱)$$

می‌توان Q_{ij} ها را بر حسب ضرایب مهندسی به صورت زیر به دست آورد [۵۸]:

$$Q_{11}=E_{11}\,(1-v_{23}v_{32})/\Delta$$

$$Q_{22}=E_{22}\,(1-v_{31}v_{13})/\Delta$$

$$Q_{33}=E_{33}\,(1-v_{12}v_{21})/\Delta$$

$$Q_{12}=(v_{21}+v_{31}v_{23})E_{11}/\Delta=(v_{12}+v_{32}v_{13})E_{22}/\Delta$$

$$Q_{13}=(v_{31}+v_{21}v_{32})E_{11}/\Delta=(v_{13}+v_{12}v_{23})E_{33}/\Delta$$

$$Q_{23}=(v_{32}+v_{12}v_{31})E_{22}/\Delta=(v_{23}+v_{21}v_{13})E_{33}/\Delta$$

$$Q_{44}=G_{23}$$

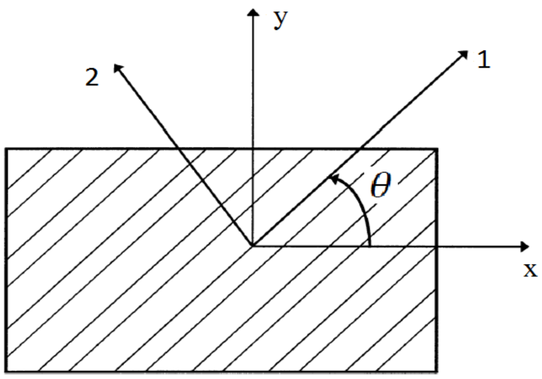
$Q_{55} = G_{31}$

$Q_{66} = G_{12}$

$$\Delta = 1 - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} - v_{31}v_{13} - 2v_{21}v_{32}v_{13} \qquad (۲-۲۲)$$

در عمل ما نیازمند بررسی لایه‌هایی هستیم که جهت‌های اصلی آن با جهت مبنا تفاوت دارد. برای بررسی یک صفحه که مختصات آن در صفحه‌ی (x-y) است و جهت اصلی آن در صفحه‌ی (۲-۱) می‌باشد، ارتباط تنش‌ها در این دو صفحه بر اساس ماتریس‌های انتقال به صورت زیر میسر می‌گردد.(شکل(۲-۴))

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (۲-۲۳)$$



شکل ۲-۴: جهت مثبت محورهای اصلی مثبت به محورهای انتخابی[۵۵]

به همین ترتیب می‌توان این ارتباط را برای کرنش‌ها نیز تعمیم داد:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \tag{۲-۲۴}$$

در این روابط ماتریس $[T]$، ماتریس انتقال و $[T]^{-1}$ معکوس آن می‌باشد.

ماتریس انتقال $[T]$ عبارت است از:

$$[T] = \begin{bmatrix} cos^2\alpha & sin^2\alpha & 0 & 0 & 0 & (2\sin\alpha\cos\alpha) \\ sin^2\alpha & cos^2\alpha & 0 & 0 & 0 & -(2\sin\alpha\cos\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -(\sin\alpha\cos\alpha) & (\sin\alpha\cos\alpha) & 0 & 0 & 0 & (cos^2\alpha - sin^2\alpha) \end{bmatrix} \tag{۲-۲۵}$$

در رابطه‌ی فوق زاویه‌ی α، زاویه بین محور x با جهت اصلی یک است.(شکل(۲-۴))

برای ساده کردن روابط ماتریس $[R]$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{۲-۲۶}$$

در نتیجه:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} \tag{۲-۲۷}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \tag{۲-۲۸}$$

و

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۲-۲۹}$$

با در نظر گرفتن $[R][T][R]^{-1} = [T]^{-T}$، می‌توان تعاریف زیر را انجام داد:

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]^{-T} \tag{۲-۳۰}$$

در نتیجه می‌توان رابطه‌ی (۲-۲۹) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{63} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (۳۱\text{-}۲)$$

در رابطه‌ی فوق $[\bar{Q}]$ ماتریس ضرایب رابطه‌ی تنش- کرنش برای محورهای (x-y) می‌باشد.

درایه‌های این ماتریس عبارتند از:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}cos^4\alpha + 2(Q_{12} + 2Q_{66})sin^2\alpha\, cos^2\alpha + Q_{22}sin^2\alpha$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})sin^2\alpha\, cos^2\alpha + Q_{12}(sin^2\alpha + cos^4\alpha)$$

$$\bar{Q}_{13} = Q_{13}cos^2\alpha + Q_{23}sin^2\alpha$$

$$\bar{Q}_{16} = -Q_{22}\cos\alpha\, sin^3\alpha + Q_{11}\sin\alpha\, cos^3\alpha$$

$$-(Q_{12} + 2Q_{66})(cos^2\alpha - sin^2\alpha)\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}sin^4\alpha + 2(Q_{12} + 2Q_{66})sin^2\alpha\, cos^2\alpha + Q_{22}cos^2\alpha$$

$$\bar{Q}_{23} = Q_{13}sin^2\alpha + Q_{23}cos^2\alpha$$

$$\bar{Q}_{26} = -Q_{22}\sin\alpha\, cos^3\alpha + Q_{11}\cos\alpha\, sin^3\alpha$$

$$+(Q_{12} + 2Q_{66})(cos^2\alpha - sin^2\alpha)\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\bar{Q}_{33} = Q_{33}$$

$$\bar{Q}_{36} = (Q_{13} - Q_{23})\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})sin^2\alpha\, cos^2\alpha + Q_{666}(cos^2\alpha - sin^2\alpha)^2$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}cos^2\alpha + Q_{55}sin^2\alpha$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44}) \cos\alpha \sin\alpha$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55}cos^2\alpha + Q_{44}sin^2\alpha \qquad (۳۲-۲)$$

۲-۵ رفتار مواد مرکب چند لایه

مواد مرکب چند لایه در سازه‌های مختلف کاربرد وسیعی پیدا کرده‌اند. با تغییر زاویه‌ی الیاف در هر لایه نسبت به محورهای مرجع چندلایه می‌توان به مقاومت و سفتی مطلوب در جهت مورد نظر دست یافت. بنابراین خواص منتجه‌ی یک چندلایه به مراتب می‌تواند از خواص هر لایه موثرتر باشد. تمام فرضیاتی که در مطالعه‌ی یک‌لایه وجود داشت برای چند لایه‌ها نیز برقرار است به علاوه فرضیات زیر اضافه می‌گردند:

۱- تمامی لایه‌ها از قانون هوک پیروی می‌کنند.

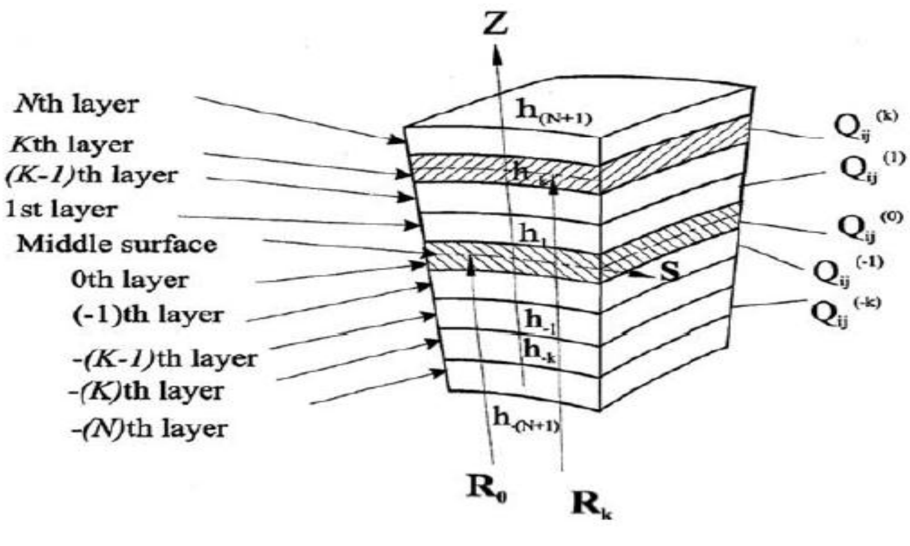
۲- هر لایه یک ماده‌ی ارتوتروپیک است ولی جهت الیاف می‌تواند از لایه‌ای به لایه‌ی دیگر تغییر کند.

۳- جابه‌جایی‌ها و تغییر شکل‌ها کوچک فرض می‌شوند.

۴- اتصال بین لایه‌های چند لایه کامل می‌باشد. به عبارت دیگر لایه‌ها روی هم نمی‌لغزند و جابه‌جایی‌ها و کرنش‌ها به طور پیوسته در مرز بین لایه‌ها تغییر می‌کند.

در مواد مرکب چند لایه اگر زاویه‌ی الیاف، خواص مواد و ضخامت لایه‌ها نسبت به سطح میانی پوسته قرینه باشد به آن، ماده مرکب متقارن می‌گویند و در غیر این صورت به آن ماده مرکب نامتقارن می‌گویند.

حال چندلایه‌ای را در نظر می‌گیریم که از تعدادی لایه با زاویه‌های مختلف نسبت به محورهای مرجع تشکیل شده است. مطابق شکل (۲-۵) محورهای (x-y) در صفحه‌ی چند لایه و محور z عمود بر صفحه‌ی چند لایه در نظر گرفته می‌شود.

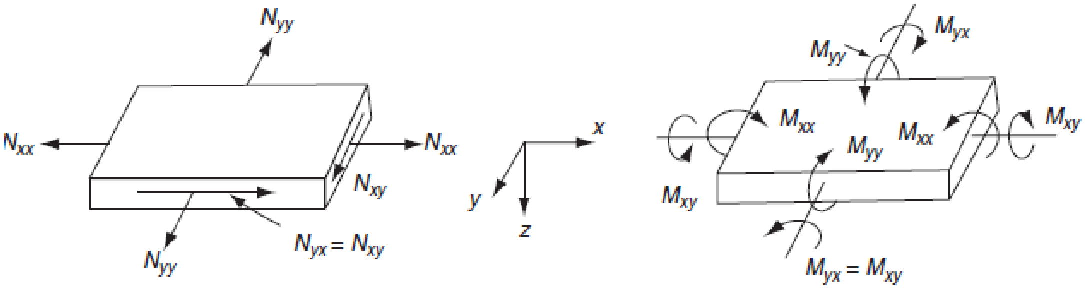


شکل ۲-۵: نمایش یک چندلایه [۷]

با توجه به جدار نازک بودن پوسته برای محاسبه‌ی نیروها و ممان‌های منتجه در لایه‌ی k ام از روابط زیر استفاده می‌کنیم[۵۵]: (شکل(۲-۶))

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ Q_x \\ M_x \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ z\sigma_x \\ z\tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \qquad , \qquad \begin{Bmatrix} N_y \\ N_{yx} \\ Q_y \\ M_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \int_z \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yz} \\ z\sigma_y \\ z\tau_{yx} \end{Bmatrix} dz \qquad (۲-۳۳)$$

که کمیت‌های $(N_{yx}, N_{xy}, N_y, N_x)$، $(M_{yx}, M_{xy}, M_y, M_x)$ و (Q_x, Q_y) به ترتیب تنش‌های منتجه در صفحه، ممان‌های منتجه‌ی تنش و منتجه‌های نیروی برشی می‌باشند. در رابطه‌ی (۲-۳۳) به دلیل تقارن تانسور تنش، $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ می‌باشد. اما الزاماً N_{xy} با N_{yx} و هم‌چنین M_{xy} با M_{yx} مساوی نیست. البته در پوسته‌های جدار نازک به دلیل این‌که از ضخامت در برابر شعاع صرف‌نظر می‌شود $N_{yx} = N_{xy}$ و $M_{yx} = M_{xy}$ می‌باشد. حال به بررسی ارتباط بین نیروها و ممان‌های منتجه با مؤلفه‌های کرنش می‌پردازیم.



شکل ۲-۶: جهت مثبت نیروها و ممان‌های منتجه در چندلایه[۵۵]

با تغییر مختصات عمومی (x-y-z) به سیستم مختصات استوانه‌ای (s- θ-z) برای یک چندلایه با فرض کرنش صفحه‌ای[1] $(\varepsilon_z = 0)$ اگر معادلات (۲-۸) و (۲-۳۱) را در معادلات (۲-۳۳) جای‌گذاری کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_{s\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{gathered} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^0 \\ \gamma_s^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_\theta^0 \end{Bmatrix} dz \\ + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} k_s \\ \tau_s \\ k_\theta z \\ \tau_\theta z \end{Bmatrix} dz \end{gathered} \right\} \qquad (۳۴\text{-}۲)$$

$$\begin{Bmatrix} N_\theta \\ N_{\theta s} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{gathered} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^0 \\ \gamma_s^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_\theta^0 \end{Bmatrix} dz \\ + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} k_s z \\ \tau_s z \\ k_\theta \\ \tau_\theta \end{Bmatrix} dz \end{gathered} \right\} \qquad (۳۵\text{-}۲)$$

---
[1] Plane strain

$$\begin{Bmatrix} M_s \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^0 \\ \gamma_s^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_\theta^0 \end{Bmatrix} zdz \\ + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} k_s \\ \tau_s \\ k_\theta z \\ \tau_\theta z \end{Bmatrix} z\,dz \end{array} \right\} \tag{۳۶-۲}$$

$$\begin{Bmatrix} M_\theta \\ M_{\theta s} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^0 \\ \gamma_s^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_\theta^0 \end{Bmatrix} z\,dz \\ + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} k_s z \\ \tau_s z \\ k_\theta \\ \tau_\theta \end{Bmatrix} z\,dz \end{array} \right\} \tag{۳۷-۲}$$

که N به تعداد لایه‌های ماده‌ی مرکب چندلایه اشاره دارد.

باید توجه داشت که کلیه‌ی مؤلفه‌های کرنش موجود در روابط فوق مربوط به سطح میانی هستند و هم‌چنین $\bar{Q}_{ij}$ مربوط به هر لایه می‌باشد بنابراین کلیه‌ی این مقادیر مستقل از z هستند.

با در نظر گرفتن موارد فوق و محاسبه‌ی انتگرال‌های روابط (۲-۳۴) تا (۲-۳۷) تعاریف زیر استنتاج می‌شوند:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \tag{۳۸-۲}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \qquad , \qquad i,j = 1,2,6$$

هم‌چنین برای منتجه‌های نیروی برشی خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} Q_s \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = k_s \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{54} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_s^0 \\ \mu_\theta^0 \end{Bmatrix} \qquad (۳۹-۲)$$

که

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k (h_k - h_{k-1}) \qquad , \qquad i,j = 4,5 \qquad (۴۰-۲)$$

در مواد مرکب تنش برشی عرضی در سرتاسر ضخامت لایه تغییر می‌کند. این اختلافات میان حالت حقیقی تنش و حالت ثابت تنش، در محاسبات مربوط به منتجه‌های نیروی برشی با ضرب یک کمیت به نام k_s در معادله‌ی (۲-۳۹) اصلاح می‌شود که به آن ضریب تصحیح برشی[1] می‌گویند.

هنوز تعیین ضریب تصحیح برشی برای سازه‌های مرکب چندلایه مسأله‌ای لاینحل است. این ضریب در حالت کلی به تعداد لایه‌ها، رشته‌های هر لایه، درجه‌ی ارتوتروپی و زاویه‌ی الیاف در هر لایه وابسته است. در این رساله $(k_s = 5/6)$[۱۴] در نظر گرفته شده است.

با ترکیب معادلات (۲-۳۴) تا (۲-۴۰) در نهایت رابطه‌ی میان نیروها و ممان‌های منتجه با کرنش‌ها به شکل زیر خواهد شد:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \\ Q_s \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{s\theta}^0 \\ k_s \\ k_\theta \\ k_{s\theta} \\ \mu_s^0 \\ \mu_\theta^0 \end{Bmatrix} \qquad (۴۱-۲)$$

ماتریس‌های ارتباط دهنده‌ی نیروها و ممان‌های منتجه‌ی با کرنش‌ها در رابطه‌ی (۲-۴۱) را با $[D]$ نشان می‌دهیم که به ماتریس متشکّله[2] معروف هستند.

---
[1] Shear correction factor
[2] Constitutive matrix

فصل ۳

روش اجزای محدود نیمه تحلیلی برای پوسته‌ی مخروطی شکل

۳-۱ مقدمه

توسعه‌ی سریع روش‌های عددی مختلف در تحلیل‌های مهندسی در سه دهه‌ی اخیر همراه با پیشرفت علوم کامپیوتر موفقیت‌های زیادی به همراه داشته است. با ظهور سوپر کامپیوترها مهندسان و محققان می‌توانند میلیون‌ها مجهول و مسائلی که به دلیل طبیعت پیچیده به صورت لاینحل مانده‌اند را به کمک روش‌های اجزای محدود با موفقیت حل کنند. گرچه هزینه‌ی حل مسائل به طور قابل ملاحظه‌ای بالا می‌باشد و در صورت نیاز به دقت بیشتر یا ابعاد بالاتر در تحلیل، هزینه بالاتر می‌رود اما هنوز مقرون به صرفه به حساب می‌آید. جدول ۳-۱ مقایسه‌ای بین روش اجزای محدود کامل و اجزای محدود نیمه تحلیلی را نشان می‌دهد.

جدول ۳-۱: مقایسه بین روش اجزای محدود کامل و روش اجزای محدود نیمه تحلیلی

روش اجزای محدود کامل	روش اجزای محدود نیمه تحلیلی
کاربرد برای هر شکل هندسی، شرایط مرزی و مواد مختلف	در تحلیل استاتیکی، اغلب برای سازه‌هایی با شرط مرزی ساده و در تحلیل دینامیکی، برای سازه‌هایی با هر نوع شرط مرزی به کار می‌رود و برای مسائل دارای تقارن قابل استفاده است.
معمولاً تعداد زیادی معادله و ماتریس و با پهنای نسبتاً بزرگ دارد که می‌تواند هزینه‌ی حل معادلات و زمان محاسبات بسیار بالا باشد.	معمولاً تعداد کمتری معادله و ماتریس با پهنای کوچکتری دارد، خصوصاً برای مسائلی با تکیه‌گاه ساده و در نتیجه زمان محاسبات بسیار کوتاه‌تر خواهد شد.
کمیت‌ها و اطلاعات ورودی حجیم هستند و امکان اشتباه زیاد است.	به دلیل کاهش در ابعاد مسأله، مقادیر و اطلاعات ورودی کوچک هستند.
به دلیل اینکه همه‌ی جابه‌جایی‌های گره‌ای و المان‌های تنش نشان داده می‌شوند خروجی‌ها بسیار حجیم هستند. هم‌چنین بسیاری از المان‌های مرتبه‌ی پایین مقادیر صحیح تنش در گره‌ها را نمی‌دهند و باید از روشهای درون‌یابی و یا تنش میانگین استفاده کرد.	خروجی‌ها کوچک‌تر هستند زیرا تنها مکان‌هایی که تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها مورد نیاز هستند را مشخص می‌کند و در نتیجه فقط خروجی‌های مطابق با آن‌ها را می‌دهد.

در بسیاری از مسائل به دلیل شکل هندسی مشخص و شرایط مرزی ساده استفاده از روش اجزای محدود کامل امری نامعقول و غیر ضروری به نظر می‌رسد و روش‌های دیگر می‌توانند با کاهش حجم محاسبات در زمان کوتاه‌تر به همان نتایج برسند. به عنوان مثال برای مسائل دارای تقارن به جای استفاده از روش اجزای محدود کامل می‌توان از روش اجزای محدد نیمه تحلیلی استفاده کرد.

۳-۲ روش اجزای محدود نیمه تحلیلی

انتخاب توابع درون‌یاب[1] مناسب، مهم‌ترین قسمت کار است. بنابراین در این مرحله از تحلیل باید دقت ویژه‌ای داشت. انتخاب اشتباه توابع درون‌یاب نه تنها ممکن است به طور واضح پاسخ‌هایی دور از انتظار بدهد بلکه ممکن است نتایج برای مش‌بندی صورت گرفته به پاسخی اشتباه همگرا شود.

در روش اجزای محدود نیمه تحلیلی دوبعدی می‌توان نوشت:

$$\delta = \sum_{m=1}^{r} f_m(x) Y_m(y) \tag{۳-۱}$$

که $f_m(x)$ چندجمله‌ای با ثوابت نامعلوم برای m امین قسمت می‌باشد و $Y_m(y)$ یک سری می‌باشد که شرایط انتهایی را در جهت y ارضا می‌کند.

برای اطمینان از همگرایی مسأله به نتایج صحیح، باید نکات زیر را رعایت کرد:

۱- قسمت سری توابع درون‌یاب ($Y_m(y)$) باید شرایط انتهایی را ارضا کند. (در مسائل ارتعاشی فقط شرایط جابه‌جایی باید ارضا شوند.) به عنوان مثال برای یک صفحه‌ی تحت خمش با تکیه‌گاه ساده تابع جابه‌جایی باید بتواند هم شرایط خیز (W) و هم صفر شدن انحنای نرمال($\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$) را در دو انتها ارضا کند.

[1] Interpolation functions

۲- قسمت چندجمله‌ای تابع درون‌یاب ($f_m(x)$) باید بتواند حالت ثابت بودن کرنش را در جهت عرضی یا صفحه‌ی (x-y) نشان دهد. در غیر این صورت هیچ تضمینی برای همگرایی جواب‌ها وجود ندارد.

۳- تابع درون‌یاب باید شرایط سازگاری را در امتداد مرز المان‌های مجاور ارضا کند و این بدان معناست که مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد. از دید تحلیل تنش می‌توان گفت که تابع جابه‌جایی را باید به صورتی انتخاب کرد که کرنش‌های موجود در فرمول‌های انرژی در سطوح بین المان‌های مجاور محدود باقی بمانند.

برای الاستیسیته‌ی صفحه‌ای کرنش‌های مورد بحث، مشتقات جزئی مرتبه اول می‌باشند و فقط لازم است تا جابه‌جایی‌ها پیوسته باشند[۷].

۳-۲-۱ قسمت سری توابع درون‌یاب

همان طور که قبلاً اشاره شد قسمت سری توابع درون‌یاب به شرایط مرزی وابسته است. با توجه به ماهیت مسأله سری‌های مختلفی ممکن است مورد استفاده قرار بگیرند که بعضی از آنها در این‌جا لیست شده است.

۱- توابع ویژه‌ی ارتعاشی[۱]

۲- توابع ویژه‌ی کمانشی[۲]

۳- توابع نمایی[۳]

۴- سری‌های توانی زوال یافته[۴]

برای مشاهده‌ی بیشتر در این زمینه به مرجع [۵۶] مراجعه شود.

[1] Vibration igenfunctions
[2] Buckling eigenfunctions
[3] Exponential functions
[4] Decaying power series

۳-۲-۲ قسمت چندجمله‌ای توابع درون‌یاب

قسمت چندجمله‌ای تابع درون‌یاب که به آن تابع شکل[1] نیز می‌گویند چندجمله‌ای مرتبط با کمیت‌های درون‌یابی گره‌ای می‌باشد. در حقیقت این گونه توابع شکل برای هر گره با اعمال جابه‌جایی واحد در آن گره و مقدار جابه‌جایی صفر برای سایر گره‌ها به دست می‌آید. به عنوان مثال تابع شکل برای یک المان سه گره‌ای (معادله ۳-۱) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$w = \sum_{m=1}^{r} [C_1 \quad C_2 \quad C_3] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \delta_1 \end{Bmatrix} Y_m = \sum_{m=1}^{r} [Y_m] \sum_{k=1}^{3} [C_k] \{\delta_k\}_m \tag{۳-۲}$$

که $\{\delta_m\}$ برداری است نشان دهنده‌ی mامین قسمت کمیت‌های جابه‌جایی گره‌ای (خیز) در گره‌های ۱، ۲ و ۳ و C_1، C_2 و C_3 به ترتیب توابع شکل مرتبط با δ_1، δ_2 و δ_3 می‌باشند. طبق تابع شکل باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} &at \quad x = 0 && [C_1 \quad C_2 \quad C_3] = [1 \quad 0 \quad 0] \\ &at \quad x = \frac{b}{2} && [C_1 \quad C_2 \quad C_3] = [0 \quad 1 \quad 0] \\ &at \quad x = b && [C_1 \quad C_2 \quad C_3] = [0 \quad 0 \quad 1] \end{aligned} \tag{۳-۳}$$

این سه رابطه نشان می‌دهد که توابع شکل باید چندجمله‌ای‌هایی از درجه‌ی دوم باشند. روش به دست آوردن توابع شکل در اکثر کتب اجزای محدود آمده است.

استفاده از توابع شکل به جای چندجمله‌ای‌های ساده با ضرایب نامعین دو هدف اصلی را دنبال می‌کند.

اول این که از فرآیند طولانی یافتن ارتباط بین ضرایب نامعین و جابه‌جایی‌های گره‌ای اجتناب شود و دوم اطمینان حاصل کردن از اینکه سازگاری میان جابه‌جایی‌ها در امتداد المان‌های مجاور وجود دارد.

---

[1] Shape Function

در مورد اول کاملاً واضح است و نیازی به توضیح ندارد. مورد دوم را می‌توان با توجه به این که جابه‌جایی‌ها در امتداد همه‌ی سطوح تماس المان‌های مجاور منحصراً با کمیت‌های جابه‌جایی در گره (یا گره‌ها) تعیین می‌شود بهتر توضیح داد، بدین ترتیب که با تعریف تابع شکل برای کمیت‌های جابه‌جایی، هر گره دیگر در سطح تماس یاد شده مقدار صفر دارد[۷].

۳-۳ فرمول‌بندی روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی برای پوسته‌های مخروطی ناقص

در فرمول‌بندی جهت مدل کردن رفتار پوسته‌ی مخروطی فرضیات زیر حاکم است:

۱-پوسته نازک

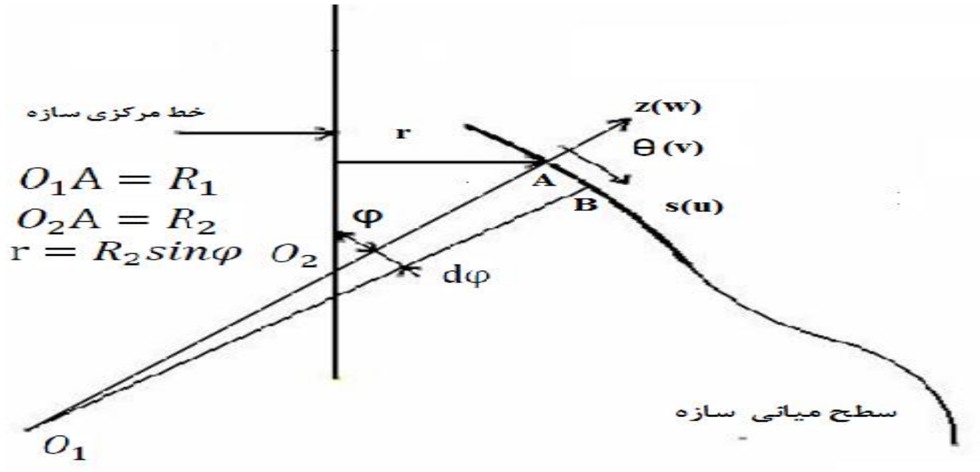
۲- تئوری FSDT

۳- تئوری ساده شده‌ی سندرز[1]

تئوری سندرز: معادلات تئوری سندرز بر اساس ساده سازی معادلات مکانیکی پوسته‌ها به دست می‌آید. این معادلات برای تغییر شکل‌های محدود با کرنش‌ها و دوران‌های کوچک مناسب است و در آنها از کرنش‌های برشی عرضی صرف نظر می‌شود[۶۱].

دستگاه مختصات (s,θ,z) برای پوسته‌های دورانی به صورت عمومی در شکل (۳-۱) نشان داده شده است.

[1] Simplify Sanders theory



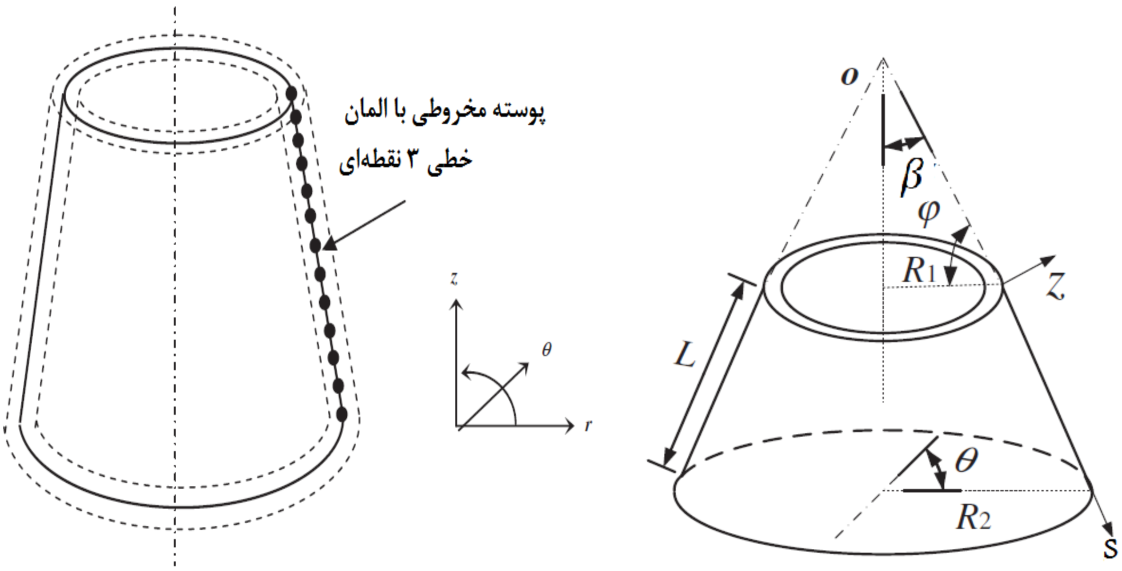
شکل ۳-۱: نمایش سیستم مختصات برای پوسته‌های دورانی

با توجه به فصل دوم هندسه‌ی پوسته‌ی مخروطی به صورت شکل (۳-۲) خواهد شد همچنین جابه‌جایی‌های سطح میانی با توجه به رابطه‌ی (۲-۷) در این‌جا بازنویسی شده است.

$$\mathrm{u}(s,\theta,z) = u_0(s,\theta) + z\psi_s(s,\theta)$$

$$v(s,\theta,z) = v_0(s,\theta) + z\psi_\theta(s,\theta)$$

$$w(s,\theta,z) = w_0(s,\theta) \quad (۳-۴)$$



شکل ۳-۲: نمای شماتیک پوسته‌ی مخروطی و المان سه‌گره‌ای مربوط به آن[۵]

در روش اجزای محدود نیمه تحلیلی برای مدل کردن پوسته‌ی مخروطی از المان‌های حلقوی استفاده می‌کنیم. تابع چندجمله‌ای یا تابع شکل در جهت محور پوسته (مختصه‌ی s) و سری مثلثاتی[1]در جهت دورانی پوسته (مختصه‌ی θ) در نظر رفته می‌شوند. یعنی فرض بر این است که میدانی جابه‌جایی به جهت دورانی وابسته است و بنابراین میدان جابه‌جایی در جهت θ با سری فوریه به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_s \\ \psi_\theta \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin n\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0n} \\ v_{0n} \\ w_{0n} \\ \psi_{sn} \\ \psi_{\theta n} \end{Bmatrix} \qquad (۵-۳)$$

که n شماره‌ی n امین مد محیطی[2] می‌باشد.

المان انتخاب شده برای پوسته، یک المان سه گره‌ای درجه دوم می‌باشد. شکل (۳-۲) پوسته‌ی مخروطی با این نوع المان را نشان می‌دهد. هر گره از این المان دارای پنج درجه آزادی شامل u_0،v_0، w_0، ψ_s و ψ_θ می‌باشد. در نتیجه هر المان پوسته دارای پانزده درجه آزادی خواهد بود. بنابراین بردار جابه‌جایی مرتبط با هر المان به صورت زیر خواهد شد:

$$\{d_e\}^T = \{u_{0i}, \quad v_{0i}, \quad w_{0i}, \quad \psi_{si}, \quad \psi_{\theta i}\} \qquad , \quad i = 1,2,3 \qquad (۶-۳)$$

اندیس ۱، ۲ و ۳ بیانگر شماره‌ی گره در هر المان می‌باشند. با توجه به المان انتخاب شده توابع شکل مناسب را به دست می‌آوریم. با توجه به نوع المان تابع جابه‌جایی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$C_i = a_1 + a_2 s + a_3 s^2 \qquad , \quad i = 1,2,3 \qquad (۷-۳)$$

یا

[1] Trigonometric series
[2] Circumferential mode

$$C_i = [1 \quad s \quad s^2]\{a_1, \quad a_2, \quad a_3\}^T \qquad , \quad i = 1,2,3 \tag{۸-۳}$$

مطابق شکل (۳-۳) برای المانی به طول $2l$ داریم:

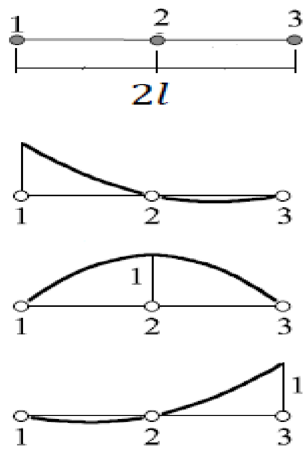
$$\begin{aligned} &\text{at} \qquad s=-1 \qquad [C_1 \quad C_2 \quad C_3] = [d_1 \quad 0 \quad 0] \\ &\text{at} \qquad s=0 \qquad [C_1 \quad C_2 \quad C_3] = [0 \quad d_2 \quad 0] \\ &\text{at} \qquad s=1 \qquad [C_1 \quad C_2 \quad C_3] = [0 \quad 0 \quad d_3] \end{aligned} \tag{۹-۳}$$

بنابراین در فرم ماتریسی خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{۱۰-۳}$$

که

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -l & l^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 \end{bmatrix} \tag{۱۱-۳}$$



شکل ۳-۳: نمایش جابه‌جایی‌های سه گره‌ای درجه‌ی دوم[۵۸]

با معکوس کردن رابطه‌ی (۳-۱۰) داریم:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \tag{۱۲-۳}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۳-۱۲) در رابطه‌ی (۳-۸) خواهیم داشت:

$$C_i = [1 \quad s \quad s^2][A]^{-1}\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \qquad (۱۳-۳)$$

یا

$$C_i = [C]\{d\} \qquad (۱۴-۳)$$

که در آن:

$$C = [1 \quad s \quad s^2][A]^{-1} = \left[\frac{s^2 - sl}{2l^2} \quad \frac{l^2 - s^2}{l^2} \quad \frac{s^2 + sl}{2l^2}\right] \qquad (۱۵-۳)$$

ماتریس $[C]$ تابع شکل این المان است.

با ترکیب تابع شکل و سری مثلثاتی درجات آزادی هر گره مطابق رابطه‌ی (۳-۲) به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned}
u_0 &= \sum_{n=1}^{r}[C]u_{0i}^{n}\Theta_n \\
v_0 &= \sum_{n=1}^{r}[C]v_{0i}^{n}\Theta_n \\
w_0 &= \sum_{n=1}^{r}[C]w_{0i}^{n}\Theta_n \\
\psi_s &= \sum_{n=1}^{r}[C]\psi_{si}^{n}\Theta_n \\
\psi_\theta &= \sum_{n=1}^{r}[C]\psi_{\theta i}^{n}\Theta_n
\end{aligned} \qquad (۱۶-۳)$$

در رابطه‌ی فوق u_{0i}^{n}، v_{0i}^{n}، w_{0i}^{n}، ψ_{si}^{n} و $\psi_{\theta i}^{n}$ دامنه‌ی جابه‌جایی مربوط به هر درجه‌ی آزادی و Θ_n سری مثلثاتی مربوط به جهت محیطی می‌باشد که برای هر درجه آزادی با توجه به رابطه‌ی (۳-۵) قابل توجه خواهد بود[۷].

۳-۳-۱ انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل یک جسم الاستیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Pi = U_1^* + U_2 - W_p \tag{۳-۱۷}$$

که برای مصالح الاستیک، W_p، کار پتانسیل، U_1^*، انرژی کرنشی واحد حجم و U_2، انرژی کرنشی تنش‌های اولیه ناشی از اعمال بارگذاری خارجی هستند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_1^* = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T\{\varepsilon_t\} \tag{۳-۱۸}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\int_v \{\varepsilon^{NL}\}^T \{\sigma^*\}dv \tag{۳-۱۹}$$

$$W_p = \int_v U^T f dv + \int_S U^T T ds + \sum U_i P_i \tag{۳-۲۰}$$

در روابط فوق f نیروی حجمی، T نیروی سطحی، P_i نیروی متمرکز، U بردار مکان، σ بردار تنش، ε_t بردار کرنش، $\{\varepsilon^{NL}\}$ بردار کرنش غیر خطی و $\{\sigma^*\}$ بردار تنش اولیه می‌باشند[۳۶].

۳-۳-۱-۱ محاسبه‌ی ماتریس سفتی[1] و بردار بار حرارتی[2] المان

بردار کرنش در حالت کلی برای یک جسم که در معرض حرارت، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{\varepsilon_m\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\} \tag{۳-۲۱}$$

که برای پوسته‌ها داریم:

[1] Stiffness matrix
[2] Thermal load vector

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_s^0, \quad \varepsilon_\theta^0, \quad \gamma_{s\theta}^0, \quad k_s, \quad k_\theta, \quad k_{s\theta}, \quad \mu_s^0, \quad \mu_\theta^0\} \qquad (۲۲-۳)$$

بردار کرنش $\{\varepsilon_0\}$ مربوط به حرارت می‌باشد و با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_s \\ \bar{\varepsilon}_\theta \\ \bar{\gamma}_{s\theta} \\ \bar{\gamma}_{\theta z} \\ \bar{\gamma}_{sz} \end{Bmatrix} = \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_s \\ \alpha_\theta \\ \alpha_{s\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۲۳-۳)$$

مؤلفه‌های بردار کرنش در رابطه‌ی (۳-۲۲) مطابق رابطه‌ی (۲-۱۵) می‌باشد و ΔT افزایش دما می‌باشد و فرض می‌شود افزایش دما به جهت محیطی وابسته است و بر حسب سری فوریه به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\Delta T = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta T_n \cos n\theta \qquad (۲۴-۳)$$

که α_s، α_θ و $\alpha_{s\theta}$ ضرایب انبساط حرارتی در مختصات پوسته برای تک لایه هستند و بر حسب مختصات اصلی به صورت زیر توصیف می‌شوند:

$$\alpha_s = \bar{\alpha}_1 cos^2\vartheta + \bar{\alpha}_2 sin^2\vartheta$$

$$\alpha_\theta = \bar{\alpha}_1 sin^2\vartheta + \bar{\alpha}_2 cos^2\vartheta \qquad (۲۵-۳)$$

$$\alpha_{s\theta} = 2(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2)\cos\vartheta \sin\vartheta$$

که ϑ زاویه‌ی مختصات محلی تک لایه با مختصات اصلی می‌باشد و $\bar{\alpha}_1$ و $\bar{\alpha}_2$ نیز ضرایب انبساطی حرارتی در جهت‌های اصلی ۱و۲ می‌باشند.

می‌دانیم روابط تنش و کرنش با در نظر گرفتن تأثیرات حرارتی برای kامین لایه از چند لایه به صورت زیر است:

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}_{ij}]\{\varepsilon - \varepsilon_0\} \qquad (۲۶-۳)$$

یا

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \tau_{s\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{sz} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_s \\ \alpha_\theta \\ \alpha_{s\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right\} \tag{۳-۲۷}
$$

که $\bar{Q}_{ij}$ مطابق رابطه‌ی (۲-۳۲) می‌باشند.

ارتباط میان نیروها و ممان‌های منتجه حرارتی با کرنش‌های حرارتی با رابطه‌ی (۳-۲۷) می‌توان عیناً مشابه روند صورت گرفته شده در فصل دوم به دست آورد. با انجام این عملیات برای پوسته‌ها داریم:

$$
\begin{Bmatrix} N_s^{th} \\ N_\theta^{th} \\ N_{s\theta}^{th} \\ M_s^{th} \\ M_\theta^{th} \\ M_{s\theta}^{th} \\ Q_s^{th} \\ Q_\theta^{th} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_s \\ \alpha_\theta \\ \alpha_{s\theta} \end{Bmatrix} \tag{۳-۲۸}
$$

کمیت‌های A_{ij} و B_{ij} پیش از این در رابطه‌ی (۲-۳۹) تعریف شده‌اند.

ماتریس‌های متشکّله در رابطه‌ی (۳-۲۸) را با $[\bar{D}]$ نشان می‌دهیم. از رابطه‌ی (۳-۱۸) و به کمک روابط (۳-۲۱) و (۳-۲۶) انرژی کرنشی U_1، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$
U_1 = \frac{1}{2}\int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon_m\} dv = \frac{1}{2}\int_v \left([\bar{Q}_{ij}]\{\varepsilon - \varepsilon_0\}\right)^T (\{\varepsilon - \varepsilon_0\}) dv \tag{۳-۲۹}
$$

رابطه‌ی فوق را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$
U_1 = \frac{1}{2}\int_v (\{\varepsilon\}^T [\bar{Q}_{ij}]\{\varepsilon\} - 2\{\varepsilon\}^T [\bar{Q}_{ij}]\{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_0\}^T [\bar{Q}_{ij}]\{\varepsilon_0\}) dv \tag{۳-۳۰}
$$

با در نظر گرفتن $dv = dAdz$ و با انجام انتگرال‌گیری‌های لازم، رابطه‌ی (۳-۳۰) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_A (\{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} - 2\{\varepsilon\}^T[\bar{D}]\{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_0\}^T[\bar{D}]\{\varepsilon_0\})dA \quad (۳-۳۱)$$

که dA سطح بی‌نهایت کوچک المان بر روی سطح میانی پوسته است. رابطه‌ی میان بردار کرنش و جابه‌جایی در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d_e\} \quad (۳-۳۲)$$

که در آن ماتریس $[B]$ ماتریس کرنش- جابه‌جایی[1] می‌باشد که مشتقات لازم بردار تغییر مکان المان $\{d_e\}$ به بردار کرنش $\{\varepsilon\}$ را دارا می‌باشد و پیوست آورده شده است. با جای‌گذاری رابطه‌ی (۳-۳۲) در معادله‌ی (۳-۳۱) داریم:

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_A (\{d_e\}^T[B]^T [D][B]\{d_e\} - 2\{d_e\}^T[B]^T[\bar{D}]\{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_0\}^T[\bar{D}]\{\varepsilon_0\})dA \quad (۳-۳۳)$$

با جای‌گذاری $rdsd\theta$ به جای dA داریم:

$$[K_e] = \int_A [B]^T[D][B]rdsd\theta \quad (۳-۳۴)$$

و

$$\{F_e^{th}\} = \int_A [B]^T [\bar{D}]\{\varepsilon_0\}rdsd\theta \quad (۳-۳۵)$$

رابطه‌ی (۳-۳۳) به فرم زیر خواهد شد:

$$U_1 = \frac{1}{2}(\{d_e\}^T[K_e]\{d_e\} - 2\{d_e\}^T\{F_e^{th}\} + \int_A \{\varepsilon_0\}^T [\bar{D}]\{\varepsilon_0\}dA) \quad (۳-۳۶)$$

[1] Strain-displacement matrix

که $[K_e]$ ماتریس سفتی المان منطبق با nامین مد محیطی، $\{F_e^{th}\}$ بردار نیروی حرارتی و $[B]$ ماتریس کرنش-جابه‌جایی پوسته در دمای بدون تنش T_0 می‌باشد.

با توجه به خواص تعامد، ماتریس سفتی برای هر مد محیطی n به صورت مجزا خواهد شد یعنی برای هر شماره‌ی مد محیطی، تنها یک جمله از سری فوریه باقی خواهد ماند و سایر جملات سری صفر می‌شود.

با این توضیحات می‌توان ماتریس سفتی یک المان را محاسبه کرد و با اعمال شرایط مرزی و مونتاژ کردن ماتریس سفتی المان برای کل پوسته، ماتریس سفتی کل را به دست آورد[۵۶].

۳-۱-۲-۳ محاسبه‌ی ماتریس سفتی هندسی[1] و بردار بار مکانیکی المان

کار محاسبه شده در رابطه‌ی (۳-۲۰) در غیاب نیروهای سطحی و حجمی و با وجود نیروهای متمرکز که در این بحث نیروی مکانیکی می‌باشد به شکل زیر خواهد شد:

$$W_p = \sum U_i P_i = \{F_e^m\}\{d\} \tag{۳-۳۷}$$

که $\{F_e^m\}$ بردار نیروی مکانیکی است و با توجه به نوع بارگذاری و المان انتخاب شده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\{F_e^m\}^T = \{\lambda,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad -\lambda,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\} \tag{۳-۳۸}$$

که λ بار مکانیکی وارد بر لبه‌ی پوسته است.

با صرف نظر از انرژی کرنشی حاصل از تنش‌های برشی عرضی اولیه، انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های به وجود آمده بر حسب مؤلفه‌های تنش-کرنش به صورت زیر قابل بیان است[۳۶]:

[1] Geometric stiffness matrix

$$U_2 = \int_v \{(\varepsilon_s^{NL})\,\sigma_s^* + (\varepsilon_\theta^{NL})\,\sigma_\theta^* + (\varepsilon_{s\theta}^{NL})\tau_{s\theta}^*\} dv \tag{۳-۳۹}$$

در رابطه‌ی (۳-۳۹) σ_s^*، σ_θ^* و $\tau_{s\theta}^*$ تنش‌های اولیه ناشی از اعمال بار است و مطابق آن‌ها عبارات کرنش‌های غیر خطی برای پوسته‌های مخروطی به صورت کامل بر مبنای تئوری غیر خطی الاستیسیته به شکل زیر قابل بیان هستند[۱۹]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s^{NL} &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\right) = \frac{1}{2}(e_{11}^2 + e_{21}^2 + e_{31}^2) \\
\varepsilon_\theta^{NL} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r(1+z/R)}\right)^2 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(e_{22}^2 + e_{12}^2 + e_{32}^2) \\
\gamma_{s\theta}^{NL} &= \left(\frac{1}{r(1+z/R)}\right)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right)\right) \\
&= (e_{11}e_{12} + e_{22}e_{21} + e_{31}e_{32})
\end{aligned} \tag{۳-۴۰}$$

با جای‌گذاری روابط (۳-۴) در روابط (۳-۴۰) برای پوسته‌ی مخروطی خواهیم داشت:

$$e_{11} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + z\frac{\partial \psi_s}{\partial s}\right) = \beta_3 + z\gamma_3$$

$$e_{21} = \left(\frac{\partial v_0}{\partial s} + z\frac{\partial \psi_\theta}{\partial s}\right) = \beta_2 + z\gamma_2$$

$$e_{31} = \frac{\partial w_0}{\partial s} = \beta_1 + z\gamma_1$$

$$\begin{aligned}
e_{22} &= \frac{1}{s\sin\beta}\left[\left(u_0\sin\beta + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w\sin\beta\right) + z\left(\psi_s\sin\beta + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right)\right] \\
&= \frac{1}{s\sin\beta}(\beta_5 + z\gamma_5)
\end{aligned}$$

$$e_{12} = \frac{1}{s\sin\beta}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} - v_0\sin\beta\right) + z\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial\theta} - \psi_\theta\sin\beta\right)\right. \tag{۴۱-۳}$$

$$= \frac{1}{s\sin\beta}(\beta_6 + z\gamma_6)$$

$$e_{32} = \frac{1}{s\sin\beta}\left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta} - v_0\cos\beta\right) + z(-\psi_\theta\cos\beta)\right] = \frac{1}{s\sin\beta}(\beta_4 + \gamma_4)$$

کرنش‌ها بر مبنای تئوری ساده شده‌ی سندرز عبارت‌اند از[۷]:

$$\varepsilon_s^{NL} = \frac{1}{2}e_{31}^2$$

$$\varepsilon_\theta^{NL} = \frac{1}{2}e_{32}^2 \tag{۴۲-۳}$$

$$\gamma_{s\theta}^{NL} = e_{31}e_{32}$$

ماتریس تنش‌های اولیه در رابطه‌ی (۳-۳۹) را به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$[\sigma^*] = [Z]^T[S][Z] \tag{۴۳-۳}$$

ماتریس‌های $[S]$ و $[Z]$ در پیوست آورده شده است.

به کمک رابطه‌ی (۳-۴۳) و برای پوسته‌ی مخروطی شکل، رابطه‌ی (۳-۳۹) به صورت زیر خواهد شد:

$$U_2 = \frac{1}{2}\int_v \{\varepsilon^{NL}\}^T[Z]^T\,[S][Z]\{\varepsilon^{NL}\}\,rdsd\theta dz \tag{۴۴-۳}$$

بردار $\{\varepsilon^{NL}\}$، بردار کرنش‌های غیر خطی می‌باشد و به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\{\varepsilon^{NL}\}^T = \{\beta_1, \quad \beta_4, \quad \gamma_1, \quad \gamma_4,\} \tag{۴۵-۳}$$

مشابه رابطه‌ی (۳-۳۲) برای بردار کرنش‌های غیر خطی داریم:

$$\{\varepsilon^{NL}\} = [B_{NL}]\{d_e\} \qquad (۴۶-۳)$$

که بردار $\{d_e\}$ مشابه قبل بردار تغییر مکان است.

با استفاده از رابطه‌ی (۳-۴۶) در رابطه‌ی (۳-۴۴) داریم:

$$U_2 = \frac{1}{2}\{d_e\}^T[K_{Ge}]\{d_e\} \qquad (۴۷-۴)$$

ماتریس $[B_{NL}]$ مشابه ماتریس $[B]$ بر حسب توابع شکل و مشتقات آن می‌باشد که در پیوست آمده است.

ماتریس $[K_{Ge}]$ ماتریس سفتی هندسی المان می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[K_{Ge}] = \int_v [B_{NL}]^T[Z]^T[S][Z][B_{NL}]\, rdsd\theta dz \qquad (۴۸-۳)$$

با تعریف:

$$[N] = \int_z [\sigma^*]\, dz \qquad (۴۹-۳)$$

رابطه‌ی (۳-۴۸) به فرم زیر خواهد شد:

$$[K_{Ge}] = \iint [B_{NL}]^T\,[N][B_{NL}]rdsd\theta \qquad (۵۰-۳)$$

ماتریس $[N]$ شامل نیروها و ممان‌های منتجه می‌باشد که در پیوست آمده است.

با توجه به روابط (۳-۲۵)، (۲-۴۱) و (۳-۲۸) رابطه بین نیروها و منتجه‌های مکانیکی و حرارتی با کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها به صورت زیر است:

$$\{N_s,\quad N_\theta,\quad N_{s\theta},\quad M_s,\quad M_\theta,\quad M_{s\theta},\quad Q_s,\quad Q_\theta\}^T = [D][B]\{d\} - [\bar{D}]\{\varepsilon_0\} \qquad (۵۱-۳)$$

که در بارگذاری مکانیکی قسمت دوم سمت راست معادله حذف می‌شود.

۳-۳-۲ اعمال اصل حداقل انرژی پتانسیل

حال می‌توان رابطه‌ی انرژی پتانسیل را که تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی است را به فرم زیر بیان نمود:

$$\Pi = U_1 + U_2 - W_p = \frac{1}{2}\{d_e\}^T[K_e]\{d_e\} + \frac{1}{2}\{d_e\}^T[K_{Ge}]\{d_e\} - \{d_e\}^T\{F_e\} \qquad (۵۲\text{-}۳)$$

که در این رابطه $\{F_e\}$ مجموع بار حرارتی و مکانیکی است. طبق قضیه‌ی انرژی پتانسیل حداقل، برای یک سیستم از میان تمام میدان‌های تغییر مکانی از نقطه نظر هندسی قابل قبول هستند، آن میدان تغییر مکانی شرایط تعادل را ارضا می‌کند که انرژی پتانسیل کل را اکسترمم کند و اگر شرایط حداقل بر قرار باشد تعادل پایدار خواهد بود. بر این اساس با مینیمم سازی Π نسبت به بردار جابه‌جایی $\{d_e\}$ معادله‌ی استاندارد مربوط به اجزای محدود به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[K_e]\{d_e\} + [K_{Ge}]\{d_e\} = \{F_e\} \qquad (۵۳\text{-}۳)$$

بعد از مونتاژ ماتریس سفتی، ماتریس سفتی هندسی و بردار نیرو برای کل پوسته در تحلیل خطی استاتیکی معادله به فرم زیر خواهد شد:

$$[K]\{d\} = \{F\} \qquad (۵۴\text{-}۳)$$

حال با حل معادله‌ی (۳-۵۴) برای به دست آوردن بردار تغییر مکان $\{d\}$، جای‌گذاری آن در معادلات (۳-۵۱) و در نتیجه محاسبه‌ی ماتریس $[N]$ از رابطه‌ی (۳-۴۹)، می‌توان ماتریس سفتی هندسی، $[K_G]$، را محاسبه کرد[۳۶].

و در تحلیل کمانشی معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$|[K] + \Delta T[K_G^*]_{th}|\{d\} = 0$$ کمانش حرارتی

$$|[K] + \lambda[K_G^*]_{mech}|\{d\} = 0$$ کمانش مکانیکی (۳-۵۵)

که ماترسی $[K_G^*]_{th}$ ماتریس سفتی هندسی کل بر اثر افزایش دمای واحد و $[K_G^*]_{mech}$ ماتریس سفتی هندسی کل بر اثر اعمال بار مکانیکی واحد می‌باشد.

۳-۳-۳ کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی

در تحلیل کمانش ترمومکانیکی فرض بر این است که بر روی پوسته بارگذاری اولیه وجود دارد. این بارگذاری اولیه می‌تواند بار مکانیکی در اثر بارهای اعمال شده بر پوسته و یا بار حرارتی در اثر افزایش دما باشد. در این صورت برای حالت اول هدف یافتن دمای کمانش و برای حالت دوم هدف یافتن بار کمانش است.

برای یک پوسته تحت بارگذاری مکانیکی در لبه‌ها با مقدار معلوم می‌توان دمای کمانش ترمومکانیکی را به دست آورد. بدین منظور از رابطه‌ی (۳-۵۳) برای یافتن جابه‌جایی‌های پیش کمانش[1] استفاده می‌شود.

در بارگذاری ترمومکانیکی بردار جابه‌جایی $\{d\}$ شامل دو قسمت است. قسمت اول ناشی از بارگذاری حرارتی در اثر افزایش دما واحد بوده و به صورت زیر قابل بیان است:

$$\{d_{th}\} = [K]^{-1}\{F_{th}\} \quad (۳-۵۶)$$

قسمت دوم بردار جابه‌جایی ناشی از بارگذاری مکانیکی در لبه‌ی پوسته است و به صورت زیر قابل بیان است:

$$\{d_{mech}\} = [K]^{-1}\lambda\{F_{mech}^0\} \quad (۳-۵۷)$$

[1] Pre-buckling displacements

که $\{F_{mech}^{0}\}$، بارگذاری مکانیکی اولیه واحد است. از آنجا که معادلات پیش کمانش حاکم خطی می‌باشد با اعمال اصل برهم‌نهی[1] داریم:

$$\{d\} = \Delta T\{d_{th}\} + \{d_{mech}\} \tag{۵۸-۳}$$

پس از محاسبه‌ی بردار جابه‌جایی‌های پیش کمانش می‌توان دمای بحرانی کمانش را به صورت زیر به دست آورد:

$$([K] + [K_G])\{d\} = 0 \tag{۵۹-۳}$$

چون ماتریس سفتی هندسی تابع بردار جابه‌جایی‌های پیش‌کمانشی می‌باشد می‌توان این ماتریس را مطابق رابطه‌ی زیر به دو قسمت تقسیم کرد:

$$([K] + [K_G]_{mech} + \Delta T[K_G^*]_{th})\{d\} = 0 \tag{۶۰-۳}$$

رابطه‌ی (۳-۶۰) زمانی جواب بدیهی غیر صفر دارد که دترمینان ماتریس ضرایب بردار جابه‌جایی برابر صفر باشد یعنی:

$$|[K'] + \Delta T[K_G^*]_{th}\ |\{d\} = 0 \tag{۶۱-۳}$$

که

$$[\mathrm{K}'] = [K] + [K_G]_{mech} \tag{۶۲-۳}$$

با حل مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی حاصل برای یک بارگذاری *مکانیکی* معلوم، مقدار دمای بحرانی کمانش به دست می‌آید. به روش مشابه می‌توان به ازای دمای مشخص پوسته، میزان بار بحرانی مکانیکی که منجر به کمانش می‌شود را تعیین نمود[۵۳].

[1] Superposition

۳-۳-۴ محاسبه‌ی ماتریس جرم

انرژی جنبشی یک پوسته‌ی پیوسته به صورت زیر قابل بیان است[۵].

$$KE = \frac{\rho}{2}\int_{v} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dv \tag{۳-۶۳}$$

با جای‌گذار رابطه‌ی (۳-۴) در رابطه‌ی (۳-۶۳) انرژی جنبشی پوسته به شکل زیر خواهد بود:

$$KE = \frac{1}{2}\int_{A} \left(\begin{pmatrix} I_1(\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2) + 2I_2(\dot{u}_0\dot{\psi}_s + \dot{v}_0\dot{\psi}_\theta) \\ +I_3(\dot{\psi}_s^2 + \dot{\psi}_\theta^2) \end{pmatrix} r \right) ds d\theta \tag{۳-۶۴}$$

در رابطه‌ی فوق I_1، I_2 و I_3 ممان‌های اینرسی می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند[۵۲]:

$$(I_1, I_2, I_3) = \sum_{k=1}^{N} \int \rho^{(k)} (1, z, z^2) dz \tag{۳-۶۵}$$

که N، شماره‌ی لایه‌ی چند لایه است.

از طرفی می‌دانیم:

$$\{d_e\} = [C]\{d_e^i\} \tag{۳-۶۶}$$

که $[C]$ ماتریس توابع شکل[۱۲]، $\{d_e^i\}$ بردار جابه‌جایی گره‌ای و $\{d\}$ بردار جابه‌جایی کل المان است.

رابطه‌ی (۳-۶۵) را در فرم ماتریسی به شکل زیر می‌توان نوشت[۵]:

$$KE = \frac{1}{2}\int_{A} \{\dot{d}_e\}^T [I] \{\dot{d}_e\} r ds d\theta \tag{۳-۶۷}$$

که $[I]$ ماتریس ممان‌های اینرسی است.

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۳-۶۶) در (۳-۶۷) داریم:

$$KE = \frac{1}{2}\{\dot{d}_e\}^T [M] \{\dot{d}_e\} \tag{۳-۶۸}$$

که در آن:

$$[M] = \iint [C]^T\, [I][C] r ds d\theta \qquad (۶۹\text{-}۳)$$

ماترسی جرم است.

با داشتن ماتریس جرم و ماتریس سفتی کل پوسته که شرایط مرزی مسأله نیز در آن لحاظ شده است، می‌توان فرکانس طبیعی پوسته را با حل مسئله‌ی مقدار ویژه به صورت زیر به دست آورد.

$$|[K] - \omega^2 [M]|\{d\} = \{0\} \qquad (۷۰\text{-}۳)$$

فصل ۴

نتایج

۴-۱ مقدمه

بعد از تکمیل فرمول‌بندی مسأله و نوشتن کدهای مربوطه توسط نرم افزار متلب ، در این فصل به بررسی نتایج حاصل از تحلیل پوسته‌ی مخروطی مرکب جدار نازک پرداخته شده است. لازم به توضیح است که یکی از مزیت‌های کد نوشته شده Run time بسیار مناسب آن است. با توجه به این که انتگرال‌گیری در کد نویسی با نرم افزار متلب، یکی از فرایندهای زمانبر محسوب می‌شود، در کد حاضر برای محاسبه‌ی تمامی انتگرال‌گیری‌ها، از روش عددی گاوس استفاده شده است. بنابراین کد نوشته شده زمانی برای محاسبه‌ی انتگرال‌ها صرف نمی‌کند. از دیگر مزیت‌های کد نوشته شده، همگرایی مناسب آن است که با تعداد المان کم همگرا می‌شود.

در جدول (۴-۱) خواص مکانیکی دو ماده آمده است و تمام نتایج بر مبنای ماده‌ی اول انجام شده مگر در نمودارهایی که خواص دو ماده مورد مقایسه قرار گرفته است. ماده‌ی در نظر گرفته شده در پژوهش حاضر یک ماده‌ی مرکب چهار لایه با زاویه‌ی الیاف (°۹۰/°۴۵-/°۴۵/°۹۰) است. همچنین در تحلیل کمانش حرارتی دمای محیط ۲۰ درجه‌ی سانتی‌گراد فرض شده است. لازم به ذکر است در بیان شرایط مرزی، نماد سمت چپ مربوط به سر کوچک پوسته‌ی مخروطی و نماد سمت راست مربوط به سر بزرگ پوسته‌ی مخروطی است.

جدول ۴-۱: خواص مکانیکی مواد[۱۹و۲۰]

خاصیت	ماده ۱	ماده ۲
مدول الاستیسیته در جهت ۱ (E_1)	۱۸۱ Gpa	۱۷۲/۲۵ Gpa
مدول الاستیسیته در جهات ۲و۳ (E_2, E_3)	۱۰/۳۴ Gpa	۶/۸۹ Gpa
مدول برشی (G)	۷/۲ Gpa	۳/۴۴ Gpa
نسبت پواسون (ν)	۰/۲۸	۰/۳
چگالی (ρ)	۱۳۸۳/۲۳$kg/m^۳$	۱۵۲۲$kg/m^۳$
ضریب انبساط حرارتی در جهت ۱ (α_1)	۱۱/۳۴× ۱۰$^{-۶}$(۱/°C)	۶/۳× ۱۰$^{-۶}$(۱/°C)
ضریب انبساط حرارتی در جهت ۲ (α_2)	۳۶/۹× ۱۰$^{-۶}$(۱/°C)	۱۸/۹× ۱۰$^{-۶}$(۱/°C)

۴-۲ تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی مرکب ناقص

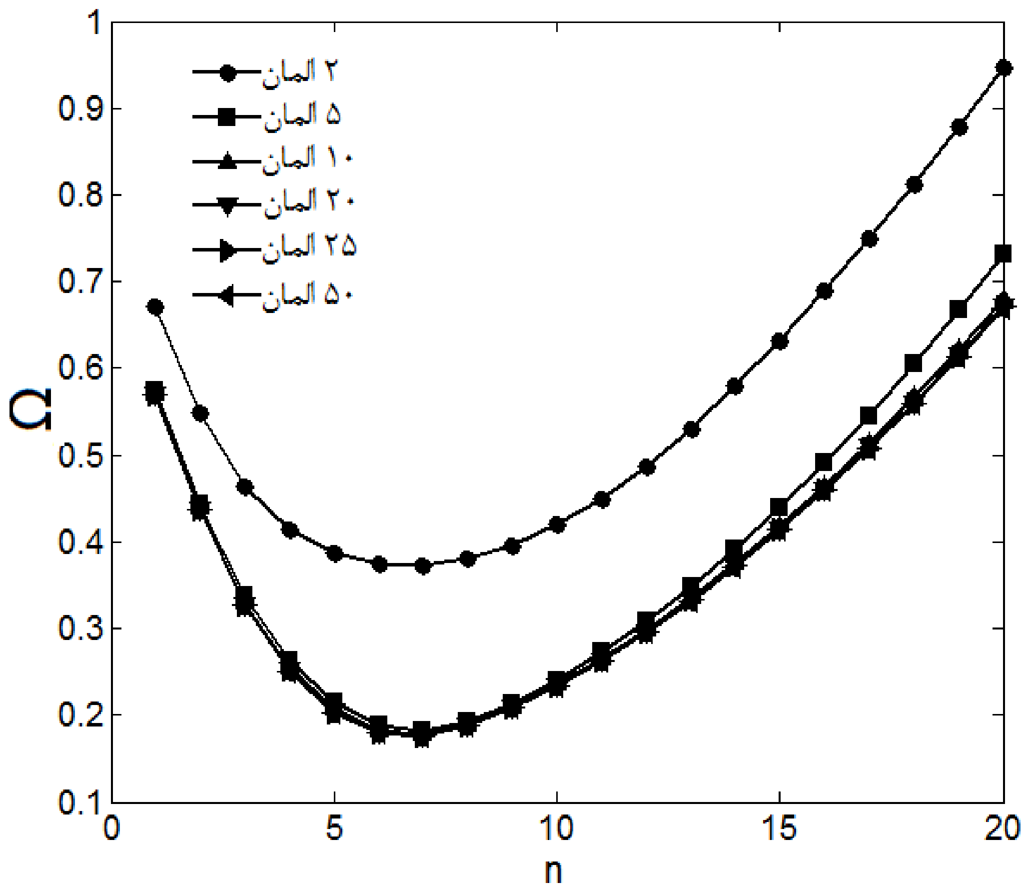
با داشتن ماتریس سفتی کل و ماتریس جرم کل و با استفاده از رابطه‌ی (۳-۷۰) می‌توان فرکانس طبیعی را به دست آورد. در جدول (۴-۲) جزئیات هندسی که در تحلیل ارتعاش آزاد در نظر گرفته شده آورده شده است. که C، بیانگر شرط مرزی گیردار است.

همچنین فرکانس طبیعی با رابطه‌ی $\Omega = \omega_0 R_2\sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E_1}}$ بی بعد شده است[۱] که ω_0 فرکانس طبیعی، R_2 شعاع بزرگ مخروط، ρ چگالی، ν نسبت پواسون و E_1 مدول الاستیسیته در جهت یک می‌باشد.

جدول ۴-۲: جزئیات هندسی پوسته‌ی مخروطی مرکب

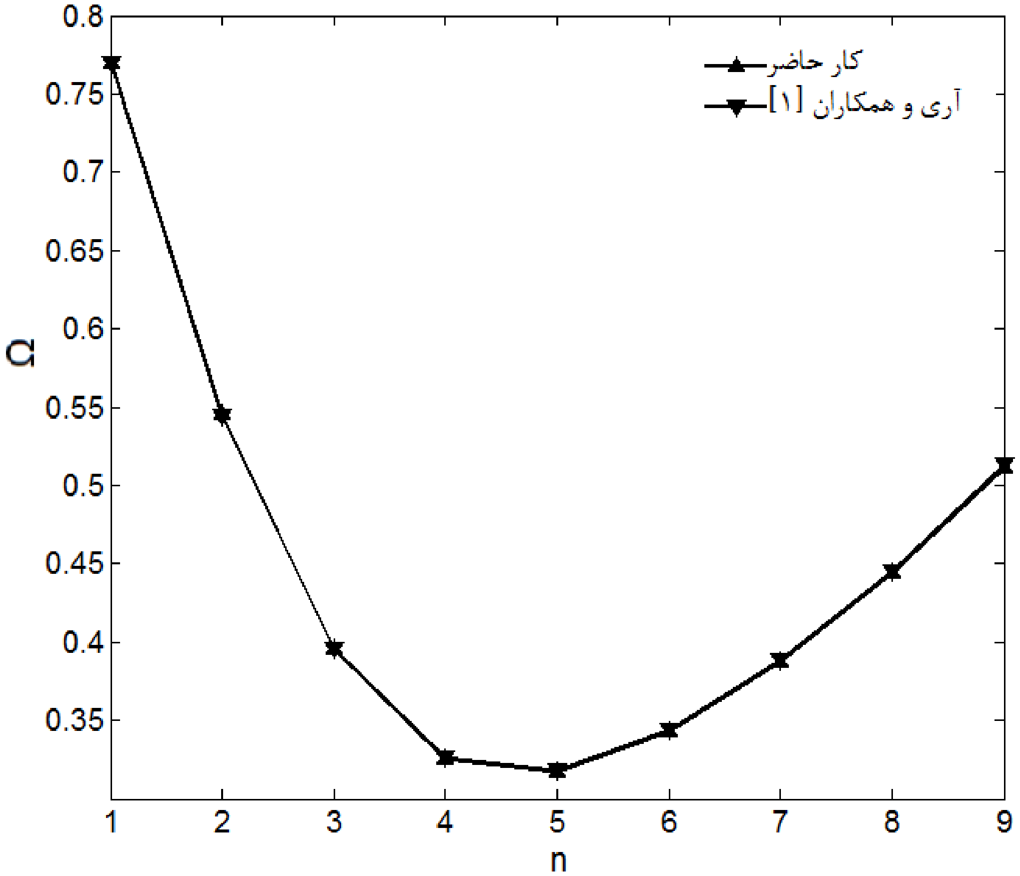
شعاع کوچک R_1 (m)	ضخامت h (m)	نسبت طول به شعاع ($\frac{L}{R_1}$)	شرایط مرزی
۰/۳	۰/۰۰۳	۱/۵	*C-C*

شکل (۴-۱) همگرایی نمودار ارتعاش آزاد بی‌بعد شده بر حسب مدهای محیطی برای تعداد المان‌های مختلف را نشان می‌دهد. با توجه به شکل کد مربوطه از همگرایی خوبی برخوردار است. همچنین با توجه به شکل مشاهده می‌شود کمترین مقدار فرکانس طبیعی که فرکانس پایه نامیده می‌شود در تعداد المان‌های مختلف در مد محیطی هفتم(m=۷) اتفاق می‌افتد. در ادامه به دلیل این‌که کار انجام شده دقت مطلوبی داشته باشد در تحلیل ارتعاش آزاد از تعداد المان ۲۰ استفاده می‌شود.



شکل ۴-۱: بررسی همگرایی نمودار فرکانس بر حسب مد محیطی

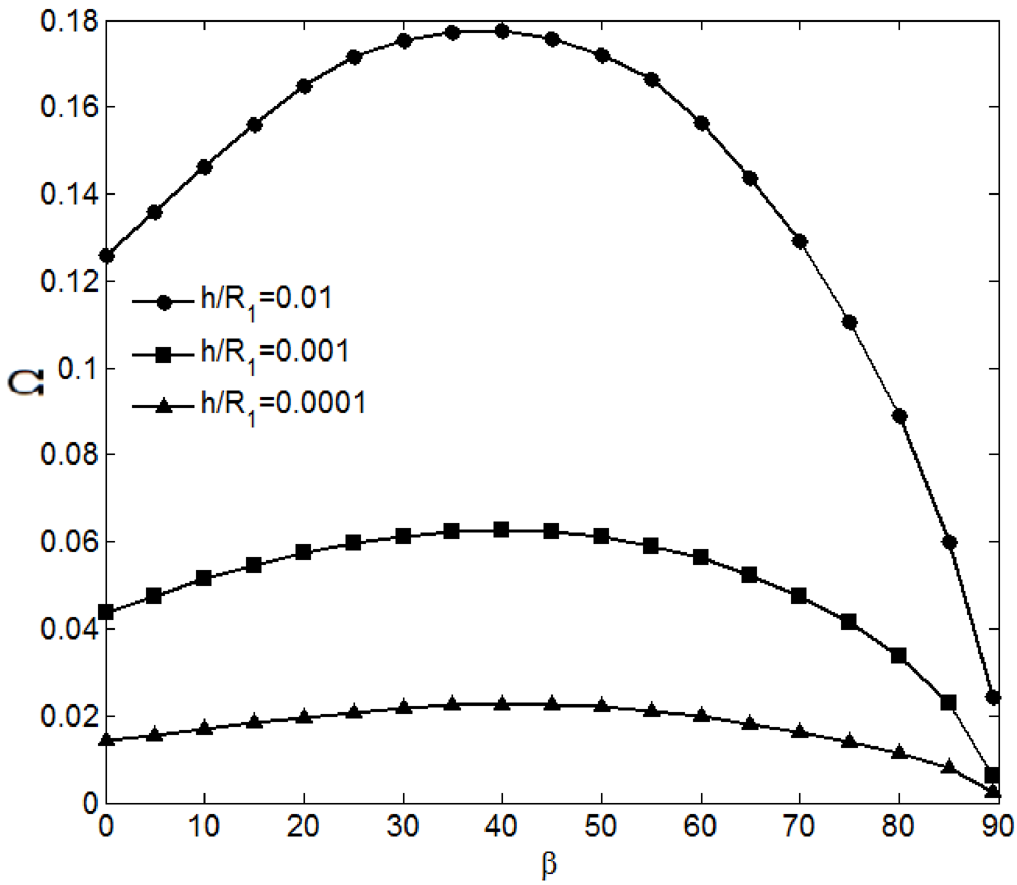
شکل (۴-۲) مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده در مطالعه‌ی حاضر و آری و همکارانش[۱] را نشان می‌دهد. در این شکل پوسته‌ی مخروطی با نیم‌زاویه راس مخروط ۴۵ درجه، $\nu = ۰/۳$ ، $\frac{h}{R_2} = ۰/۰۱$ و $\frac{L}{R_2\,\mathrm{s}\sin\beta} = ۰/۷۵$ در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود نتیجه‌ی حاصل از مطالعه‌ی حاضر مطابقت خوبی با مرجع[۱] دارد.



شکل ۴-۲: مقایسه‌ی نتیجه‌ی حاصل از مطالعه‌ی حاضر و نتیجه‌ی به دست آمده توسط آری و همکارانش[۱]

شکل (۴-۳) تأثیر زاویه‌ی رأس مخروط بر فرکانس طبیعی برای ضخامت‌های مختلف را نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ضخامت، به دلیل اینکه سفتی پوسته افزایش

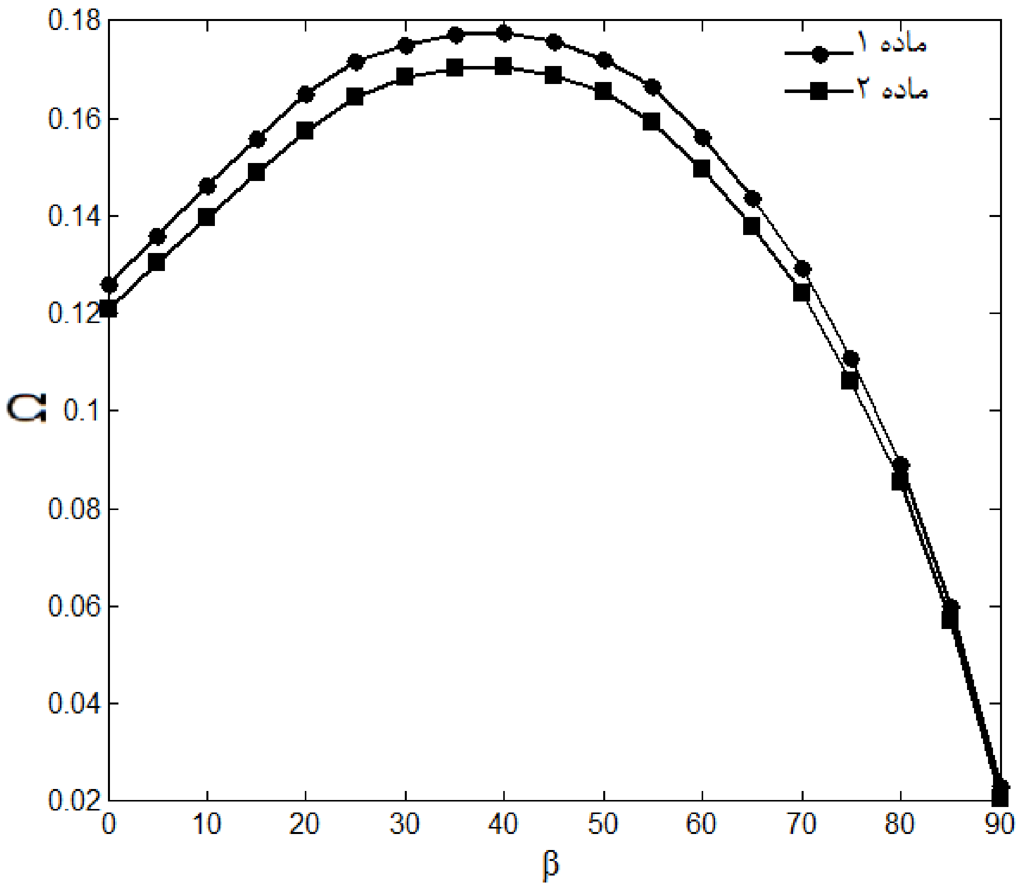
می‌یابد فرکانس طبیعی آن نیز افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط ابتدا تا زاویه‌ی ۴۰ درجه فرکانس طبیعی پوسته افزایش می‌یابد و سپس روندی نزولی را طی می‌کند.



شکل ۴-۳: تأثیر نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط و ضخامت بر فرکانس طبیعی پوسته‌ی مخروطی

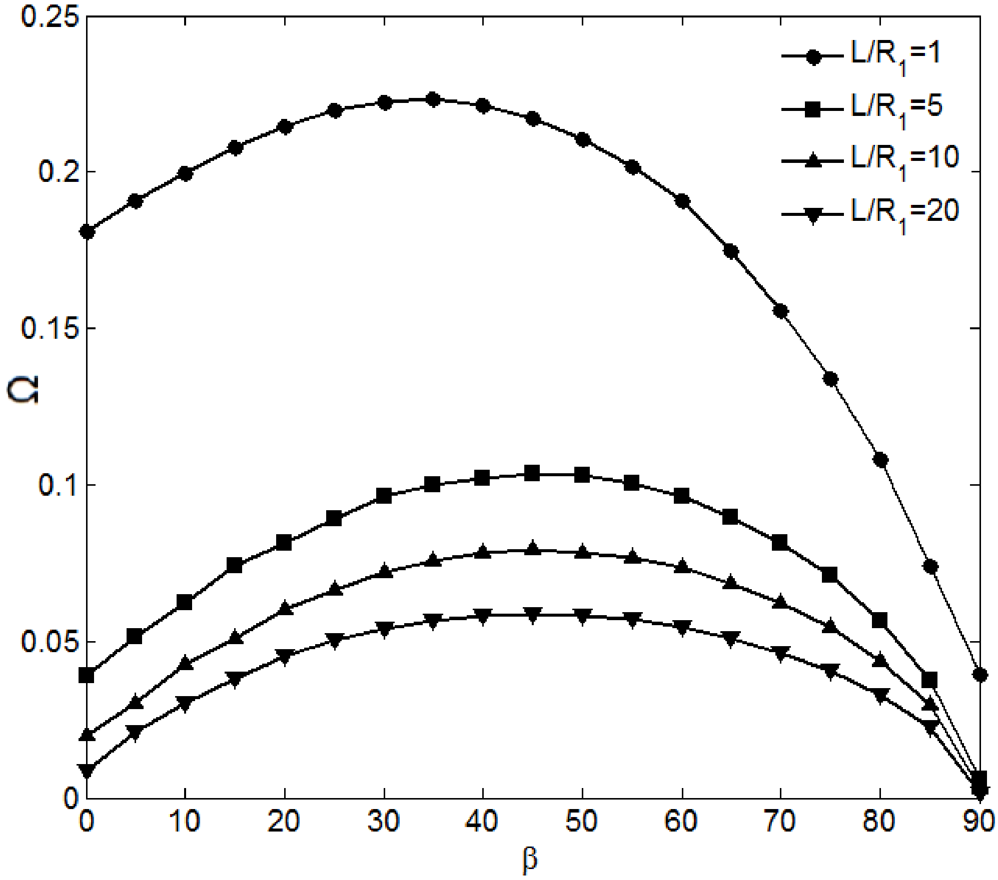
شکل (۴-۴) تأثیر زاویه‌ی رأس مخروط بر فرکانس طبیعی ماده ۱ و ماده ۲ را نشان می‌دهد. از آنجایی که تغییر در جنس ماده، باعث تفاوت در خواص مکانیکی پوسته می‌شود در نتیجه فرکانس طبیعی آن نیز تغییر می‌کند. همچنین با توجه به شکل مشاهده می‌شود که اثر جنس ماده بر رفتار

ارتعاشی پوسته‌ی مخروطی، وابسته به شکل هندسی سازه می‌باشد و هرچه هندسه‌ی پوسته به ورق نزدیکتر شود اثر جنس بر میزان فرکانس طبیعی کمتر می‌شود.



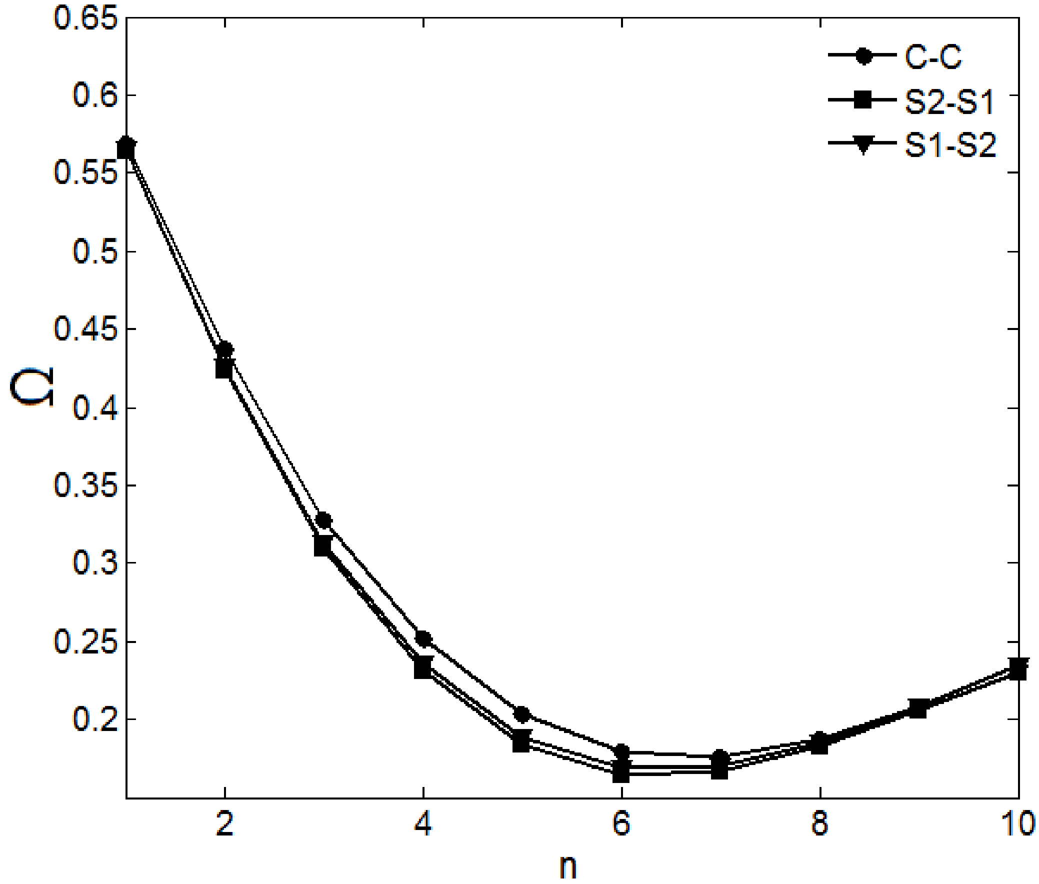
شکل ۴-۴: تأثیر نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط و جنس ماده بر فرکانس طبیعی پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۵) تأثیر زاویه‌ی رأس مخروط بر فرکانس طبیعی پوسته‌ی مخروطی با طول‌های مختلف را نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش طول، به دلیل اینکه سفتی پوسته کاهش می‌یابد فرکانس طبیعی آن نیز کمتر می‌شود. همچنین با افزایش نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط ابتدا ارتعاش آزاد پوسته افزایش می‌یابد و سپس روندی نزولی را طی می‌کند.



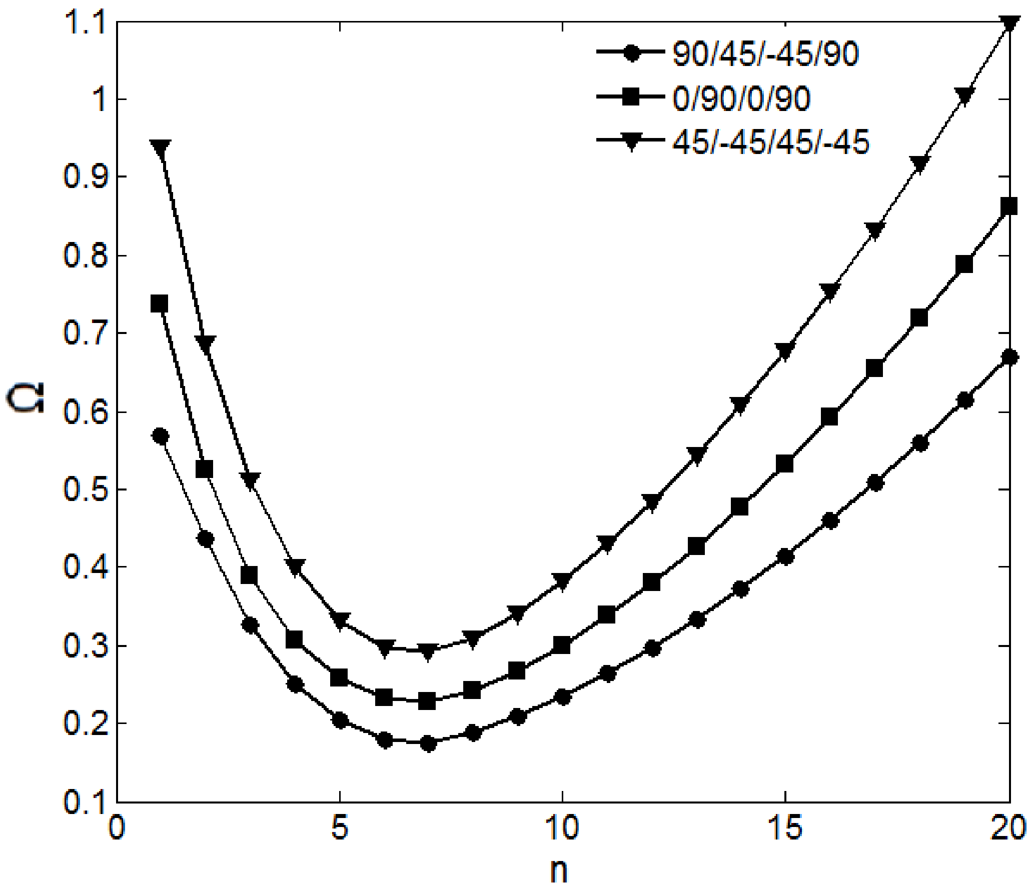
شکل ۴-۵: تأثیر نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط و نسبت طول به شعاع بر فرکانس طبیعی پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۶) تأثیر شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی پوسته‌ی مخروطی با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. که C، بیانگر شرط مرزی گیردار، S، بیانگر شرط مرزی ساده‌ای است که u در آن باز است و همچنین درشرط مرزی $S2$، u و ψ_s باز می‌باشد و در شرط مرزی $S1$، فقط ψ_s باز است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود هر چه آزادی لبه‌های پوسته‌ی مخروطی بیشتر باشد فرکانس طبیعی آن کمتر می‌شود.



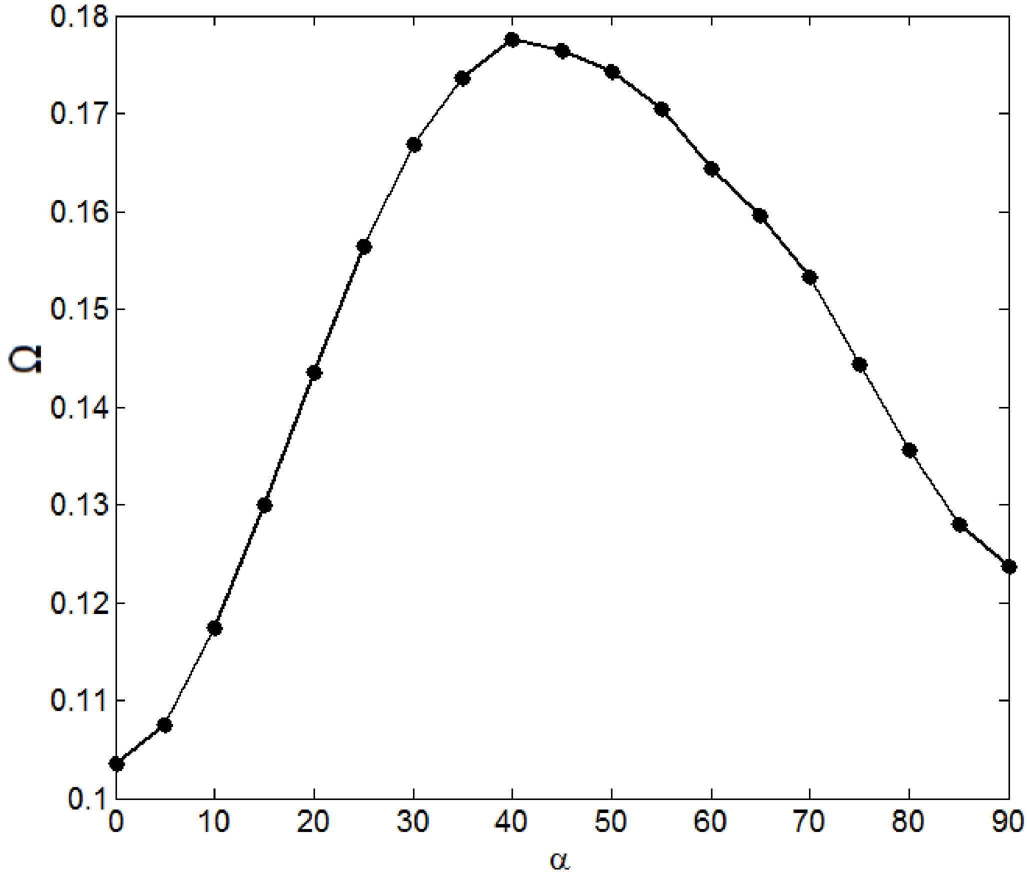
شکل ۴-۶: تأثیر شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۷) تأثیر چینش زاویه‌ی الیاف بر فرکانس طبیعی پوسته‌ی مخروطی مرکب ناقص با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود مد کمترین مقدار فرکانس طبیعی که فرکانس پایه نامیده می‌شود در پوسته‌ها با چینش الیاف مختلف تغییر نمی‌کند و در مد محیطی هفتم (m=۷) اتفاق می‌افتد.



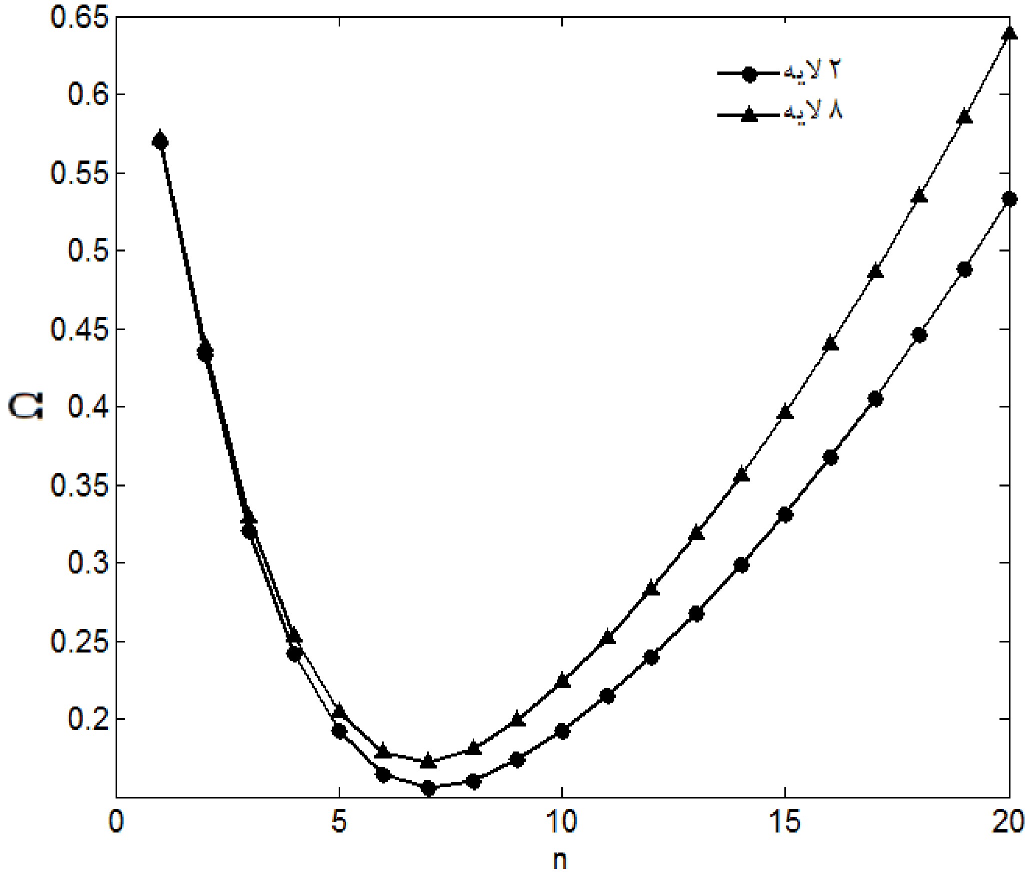
شکل ۴-۷: تأثیر چینش زاویه‌ی الیاف بر فرکانس طبیعی پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۸) تأثیر زاویه‌ی الیاف بر فرکانس طبیعی پوسته‌ی مخروطی ناقص تک‌لایه با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت با افزایش زاویه‌ی الیاف، ابتدا فرکانس طبیعی پوسته افزایش می‌یابد و سپس روندی نزولی را طی می‌کند. همچنین مشاهده می‌شود پوسته‌ی مخروطی با زاویه‌ی الیاف ۴۰ درجه بیشترین فرکانس طبیعی را دارد.



شکل ۴-۸: تأثیر زاویه‌ی الیاف بر ارتعاش آزاد پوسته‌ی مخروطی تک‌لایه

شکل (۴-۹) تأثیر تعداد لایه بر ارتعاش آزاد پوسته‌ی مخروطی ناقص مرکب با چینش $(90/45)_s$ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود با افزایش تعداد لایه‌ی پوسته‌ی مخروطی، به دلیل اینکه سفتی پوسته‌ی مخروطی افزایش می‌یابد فرکانس طبیعی آن نیز بیشتر می‌شود. همچنین با توجه به شکل مشاهده می‌شود مد کمترین مقدار فرکانس طبیعی که فرکانس پایه نامیده می‌شود با افزایش تعداد لایه‌ی پوسته‌ی مخروطی تغییر نمی‌کند و در مد محیطی هفتم (m=۷) اتفاق می‌افتد.



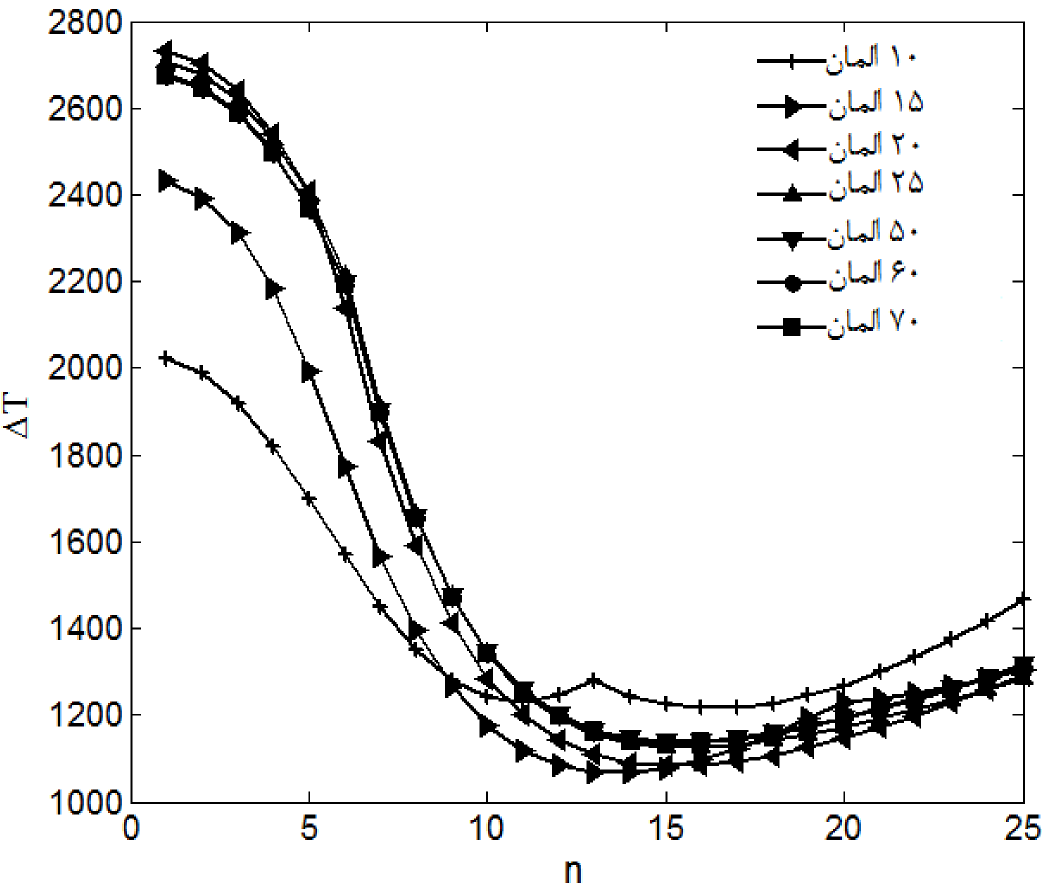
شکل ۴-۹: تأثیر تعداد لایه بر ارتعاش آزاد پوسته‌ی مخروطی

۴-۳ تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی مرکب ناقص

با داشتن ماتریس سفتی کل و ماتریس سفتی هندسی کل و با کمک بخش اول معادله‌ی (۳-۵۵) می‌توان دمای بحرانی کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی را به دست آورد. در تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی ناقص از مشخصات هندسی جدول (۴-۲) استفاده شده است با این تفاوت که شرط مرزی *S2-S1* بر لبه‌های پوسته اعمال شده است که درشرط مرزی S2، u و ψ_s باز می‌باشد و در شرط مرزی S1، فقط ψ_s باز است. همچنین دمای بحرانی با رابطه‌ی $T_c = \alpha_2 \times 10^3 \times \Delta T_{cr}$ بی‌بعد

شده است[۲۰] که ΔT_{cr} تغییرات دما است که منجر به کمانش می‌شود و α_2 ضریب انبساط حرارتی در جهت اصلی دو می‌باشد.

شکل (۴-۱۰) همگرایی نمودار دمای بحرانی کمانش بر حسب مد محیطی را برای تعداد المان‌های مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود کد مربوطه از همگرایی خوبی برخوردار است. در ادامه برای این‌که دقت کار انجام شده در حد مطلوبی باشد در تحلیل دمای بحرانی کمانش از تعداد المان ۲۵ استفاده می‌شود.



شکل ۴-۱۰: بررسی همگرایی دمای بحرانی کمانش بر حسب مد محیطی

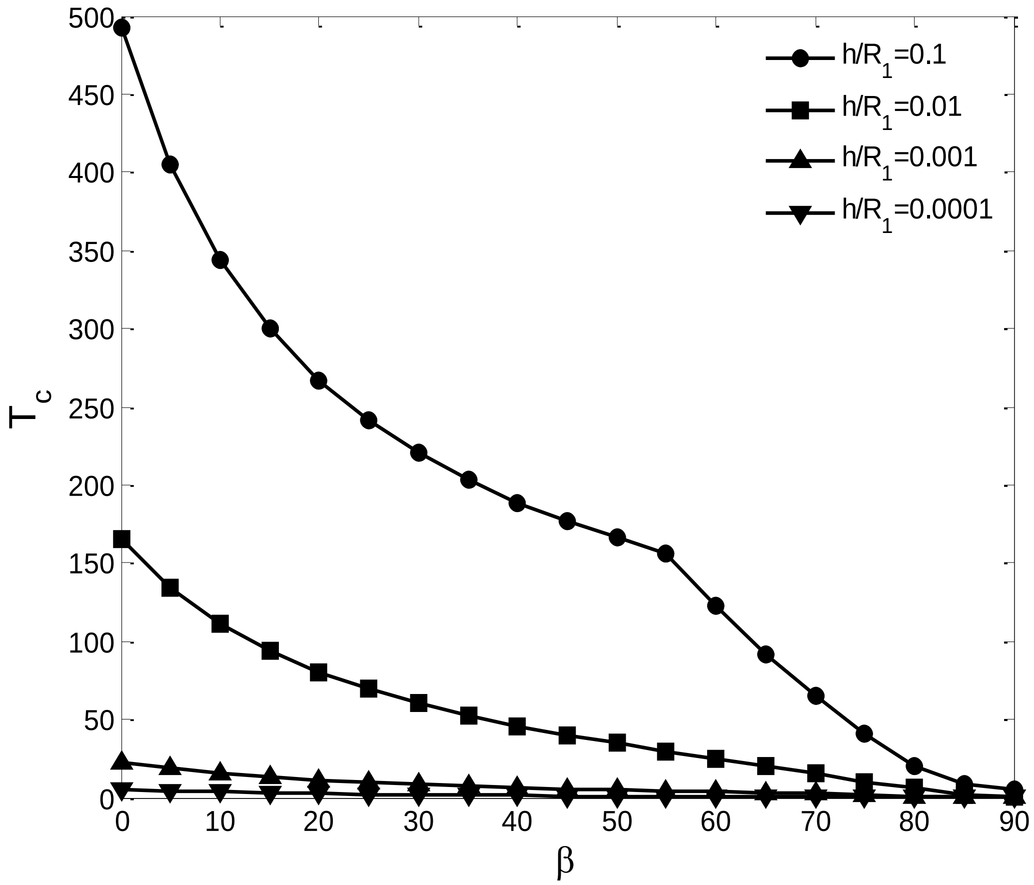
جدول (۴-۳) مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده در مطالعه‌ی حاضر و نتایج پاتل و همکارانش [۳۴] را نشان می‌دهد. دمای بحرانی با رابطه‌ی $T_c = \alpha_1 \times 10^2 \times \Delta T_{cr}$ بی‌بعد شده است و شرایط مرزی دوسر گیردار است. همچنین پوسته‌ی مخروطی مرکب با زاویه الیاف (0/90)، $\frac{R_1}{h} = ۱۰۰$ و $\frac{L}{R_1} = ۱$ در نظر گرفته شده است. با توجه به جدول مشاهده می‌شود نتایج حاصل از کار حاضر اختلاف اندکی با نتایج بررسی پاتل و همکارانش[۳۴] در تحلیل کمانش حرارتی دارد و این بدان معناست که دقت تحلیل انجام شده دارای اعتبار مطلوبی است.

جدول ۴-۳: مقایسه‌ی دمای بحرانی کمانش بی‌بعد شده

نیم‌زاویه‌ی رأس	پاتل و همکارانش[۳۴]	کار حاضر	خطا
۰°	۰/۱۰۳۴	۰/۱۰۱۸	٪ ۰/۴
۱۵°	۰/۰۸۹۰۴	۰/۰۸۹۱۷	٪ ۰/۱۴
۳۰°	۰/۰۷۴۹۶	۰/۰۷۴۵۸	٪ ۰/۶
۴۵°	۰/۰۵۹۵۱	۰/۰۵۹۷۷	٪ ۰/۵
۶۰°	۰/۰۴۴	۰/۰۴۳۸	٪ ۰/۳

شکل (۴-۱۱) تأثیر افزایش زاویه‌ی رأس مخروط بر کمانش حرارتی با ضخامت‌های متفاوت را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود در اثر افزایش زاویه‌ی رأس پوسته‌ی مخروطی با ضخامت‌های مختلف، دمای بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به شکل می‌توان مشاهده

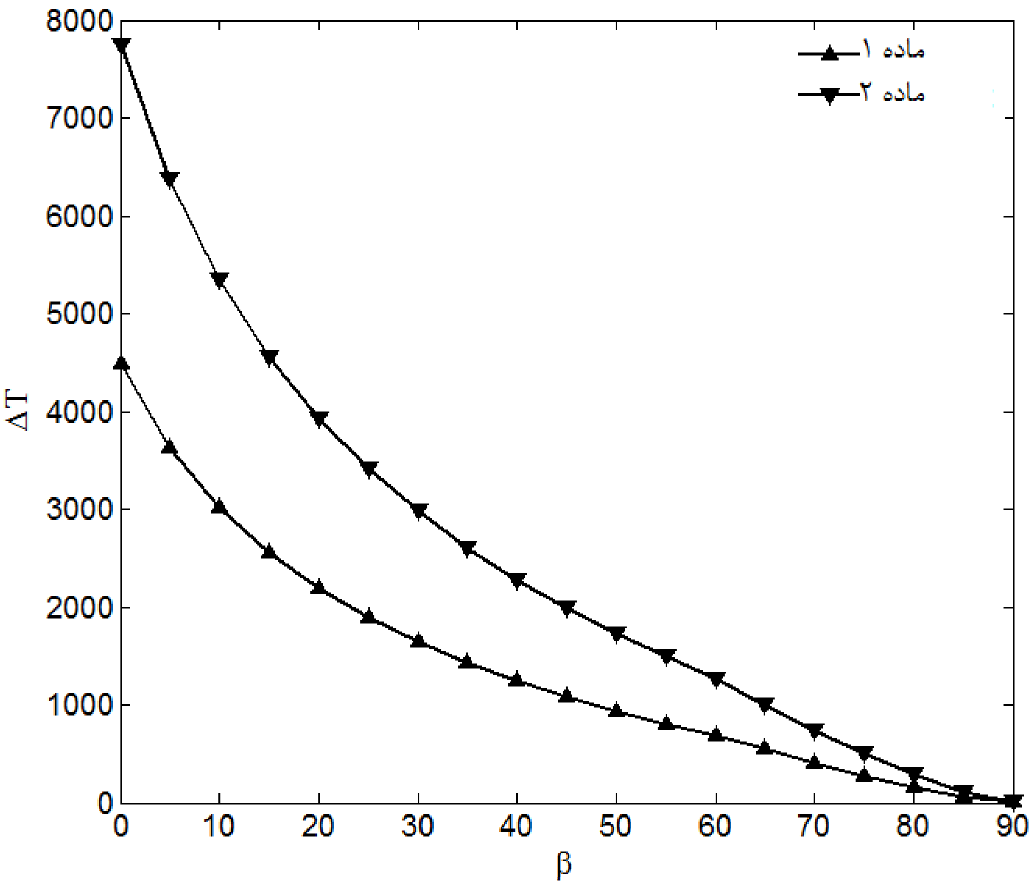
کرد با افزایش ضخامت پوسته، به دلیل اینکه سفتی پوسته‌ی مخروطی بیشتر می‌شود، مقاومت آن در برابر کمانش حرارتی افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۱۱: بررسی تأثیر نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط و ضخامت بر دمای بحرانی کمانش پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۱۲) تأثیر افزایش زاویه‌ی رأس مخروط بر دمای بحرانی کمانش ماده۱ و ماده ۲ را نشان می‌دهد. با توجه به اینکه ماده ۱ ضرایب انبساط حرارتی بالاتری دارد مشاهده می‌شود که این ماده

مقاومت کمتری در برابر کمانش حرارتی دارد. همچنین با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت با افزایش زاویه‌ی رأس مخروط تاثیر جنس ماده بر کمانش حرارتی کمتر می‌شود.

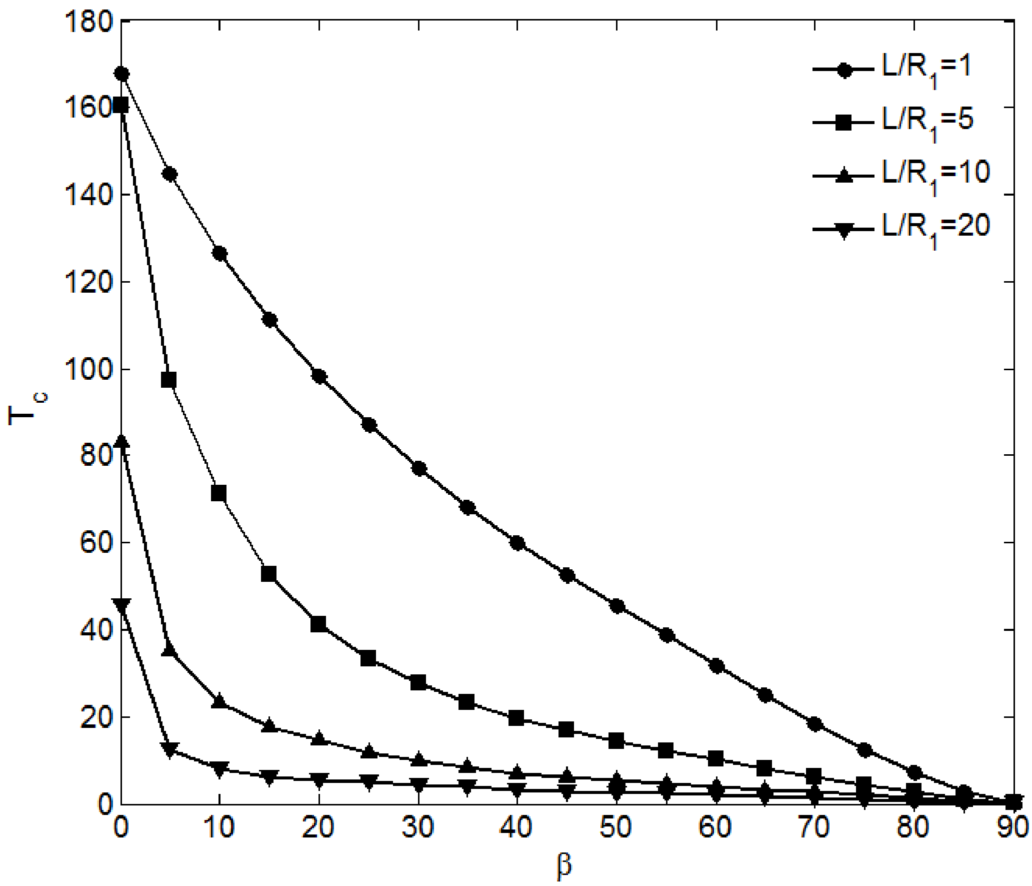


شکل ۴-۱۲: بررسی تأثیر نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط و جنس ماده بر دمای بحرانی کمانش پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۱۳) تأثیر زاویه‌ی رأس مخروط بر دمای بحرانی کمانش پوسته‌ی مخروطی با طول‌های مختلف را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود با افزایش طول پوسته، دمای بحرانی

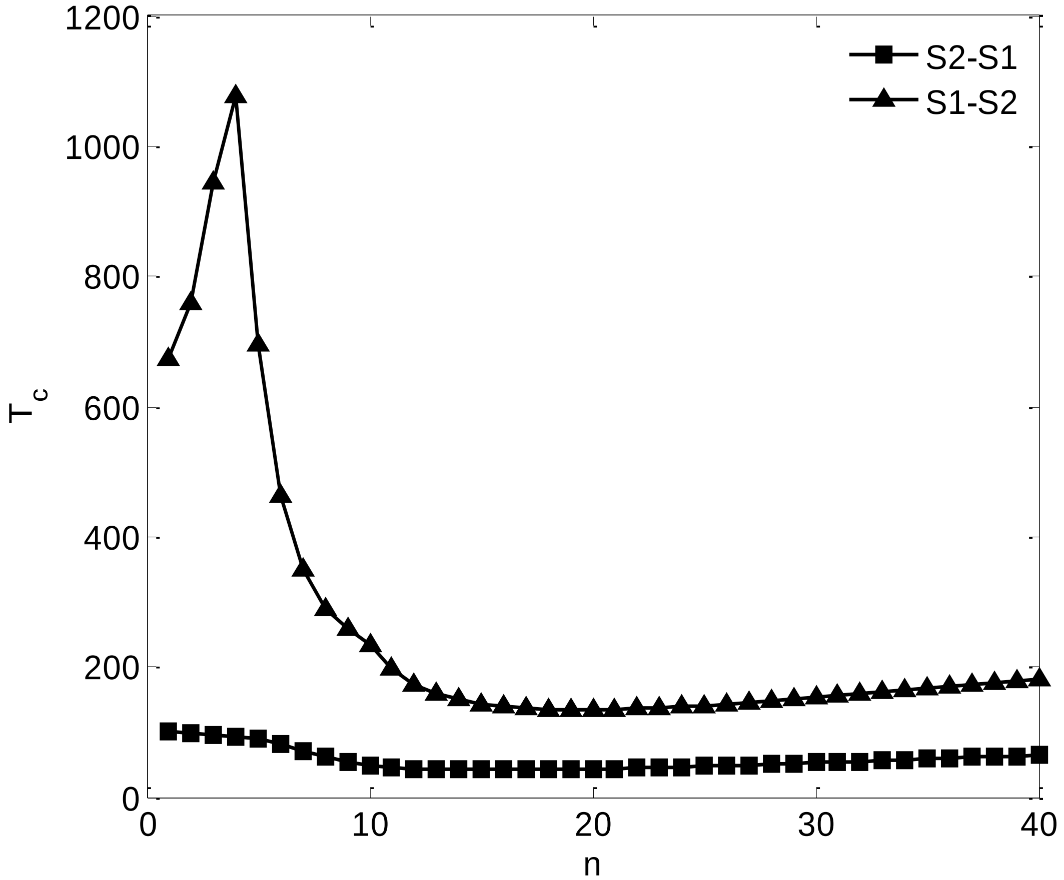
کمانش کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش طول پوسته دمای بحرانی کمانش، برای زوایای متفاوت مخروط به هم نزدیکتر می‌شود.

با توجه به سه شکل اخیر می‌توان نتیجه گرفت با افزایش نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط مقاومت به کمانش حرارتی کاهش می‌یابد یعنی پوسته‌ی مخروطی که به استوانه نزدیکتر است مقاومت بیشتری در برابر کمانش دارد و هرچه پوسته به ورق نزدیکتر می‌شود مقاومت آن در برابر کمانش حرارتی کمتر می‌شود.



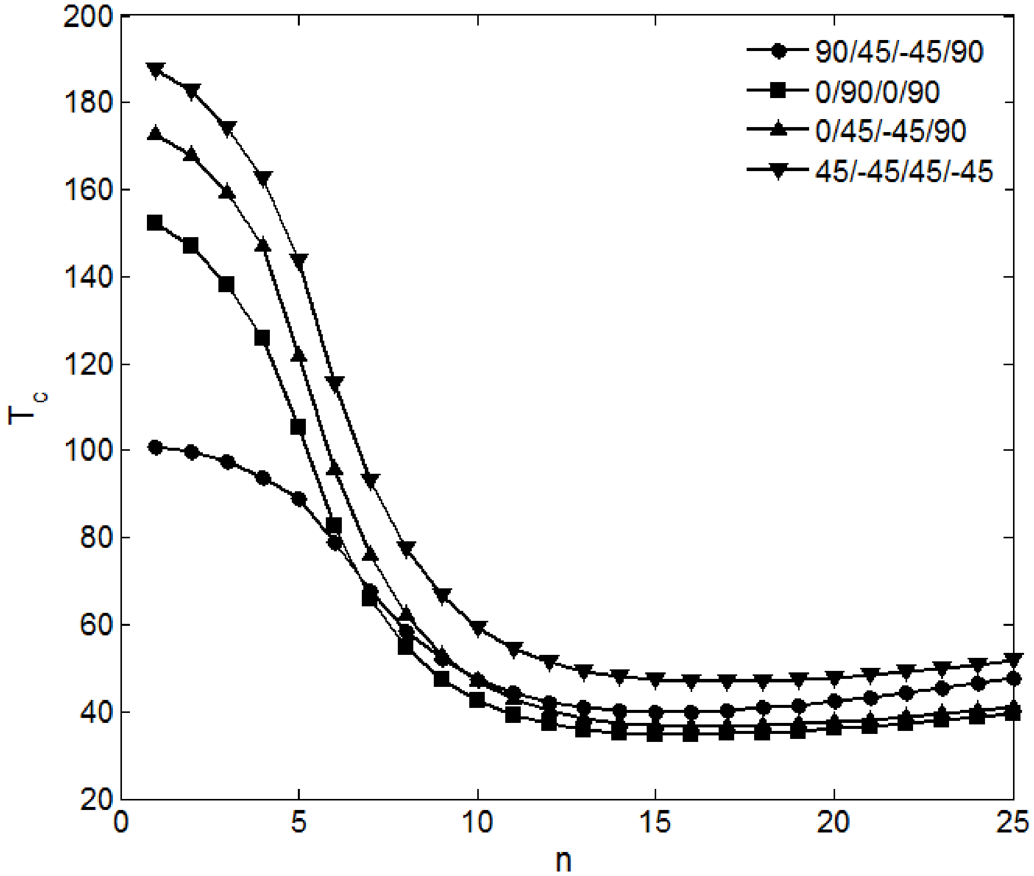
شکل ۴-۱۳: بررسی تأثیر نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط و نسبت طول به شعاع بر دمای بحرانی کمانش پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۱۴) تأثیر شرط مرزی دوسر ساده بر دمای بحرانی کمانش پوسته‌ی مخروطی را نشان می‌دهد. همان طور که در شکل مشاهده می‌شود اگر در بارگذاری حرارتی شرط مرزی S_2 به لبه شعاع بزرگ پوسته‌ی مخروطی اعمال شود مقاومت پوسته در برابر کمانش حرارتی به شدت بیشتر می‌شود و دمای بالاتری برای وقوع کمانش حرارتی مورد نیاز است.



شکل ۴-۱۴: تأثیر شرایط مرزی بر دمای بحرانی کمانش پوسته‌ی مخروطی

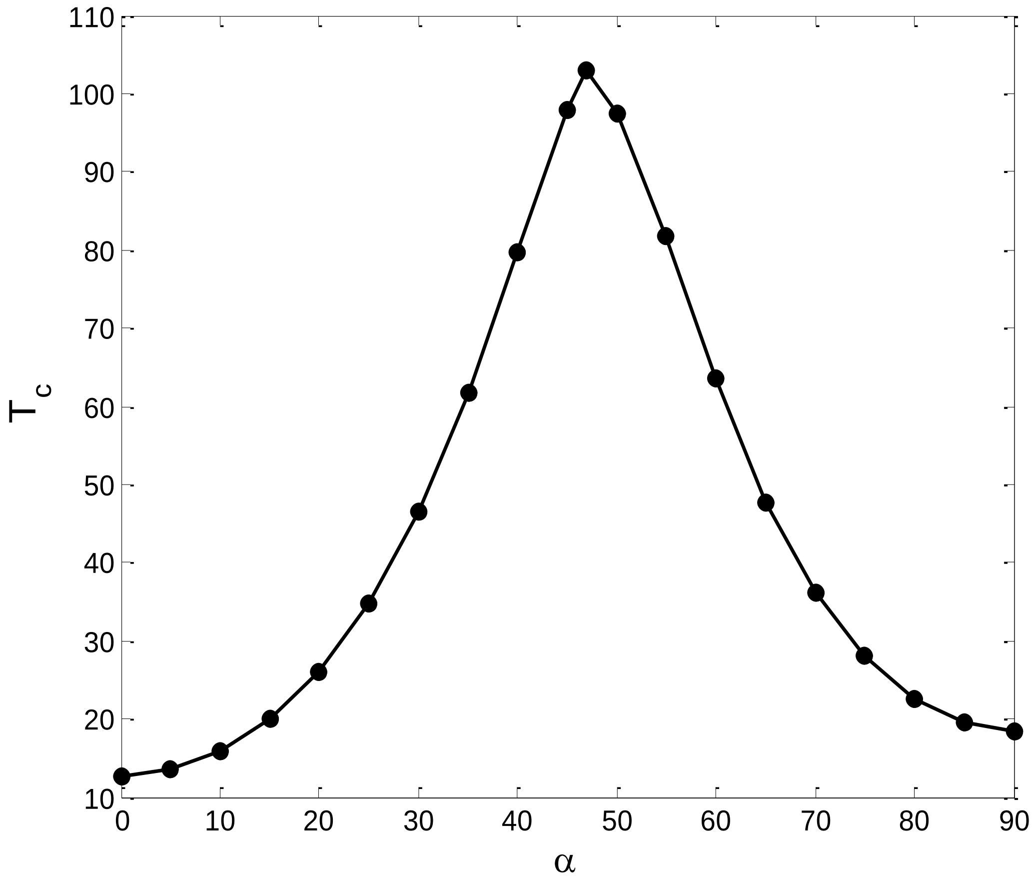
شکل (۴-۱۵) تأثیر چینش زاویه‌ی الیاف بر کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی مرکب ناقص با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود کمترین مقدار دمای کمانش حرارتی که دمای بحرانی کمانش نامیده می‌شود در پوسته‌ها با چینش الیاف مختلف در مدهای محیطی متفاوت اتفاق می‌افتد.



شکل ۴-۱۵: تأثیر چینش زاویه‌ی الیاف بر کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۱۶) تأثیر زاویه‌ی الیاف بر کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی ناقص تک‌لایه با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت با افزایش زاویه‌ی الیاف، ابتدا

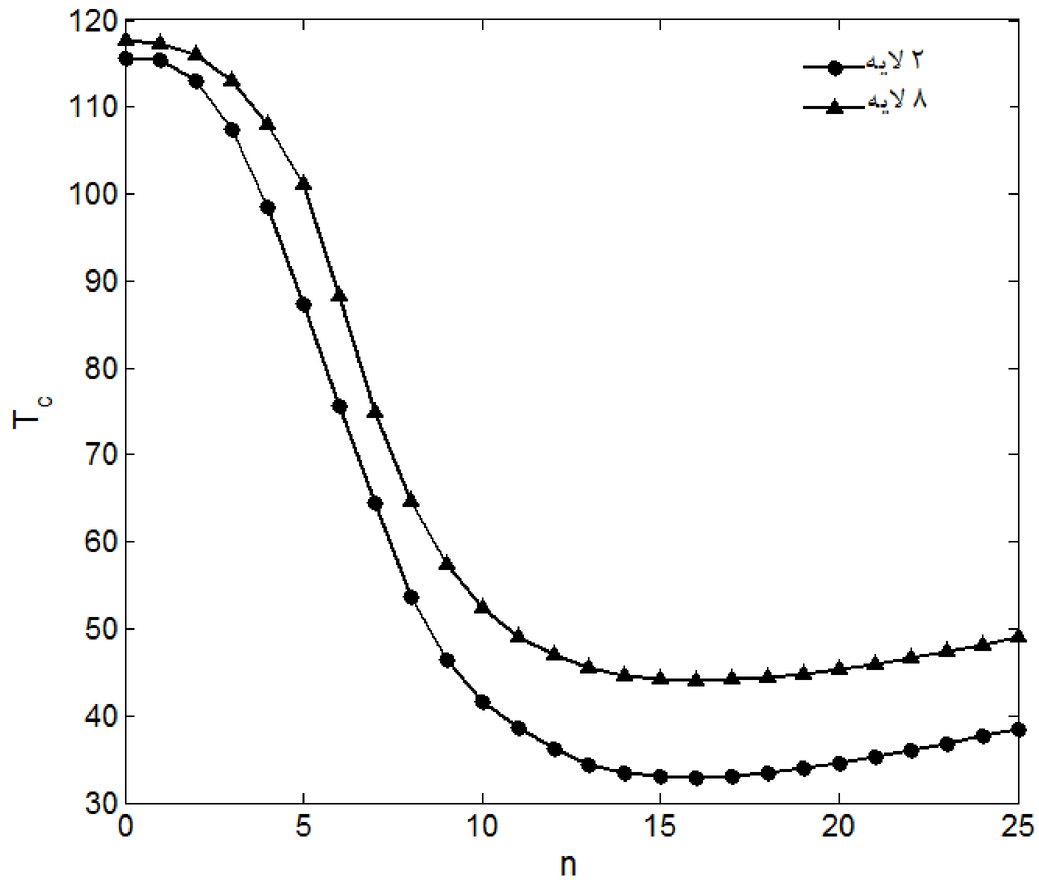
دمای بحرانی کمانش پوسته افزایش می‌یابد و سپس روندی نزولی را طی می‌کند. همچنین مشاهده می‌شود پوسته‌ی مخروطی با زاویه‌ی‌الیاف ۴۷ درجه بیشترین مقاومت را در برابر کمانش حرارتی دارد.



شکل ۴-۱۶: تأثیر زاویه‌ی الیاف بر کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی تک لایه

شکل (۴-۱۷) تأثیر تعداد لایه بر کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی ناقص مرکب با چینش $(90/45)_s$ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود با افزایش تعداد لایه‌ی پوسته‌ی مخروطی، به دلیل اینکه سفتی پوسته‌ی مخروطی افزایش می‌یابد دمای بحرانی کمانش آن نیز بیشتر می‌شود. همچنین با توجه به شکل مشاهده می‌شود مد کمترین مقدار دمای کمانش حرارتی که دمای

بحرانی کمانش نامیده می‌شود با افزایش تعداد لایه‌ی پوسته‌ی مخروطی تغییر نمی‌کند و در مد محیطی شانزدهم (m=۱۶) اتفاق می‌افتد.

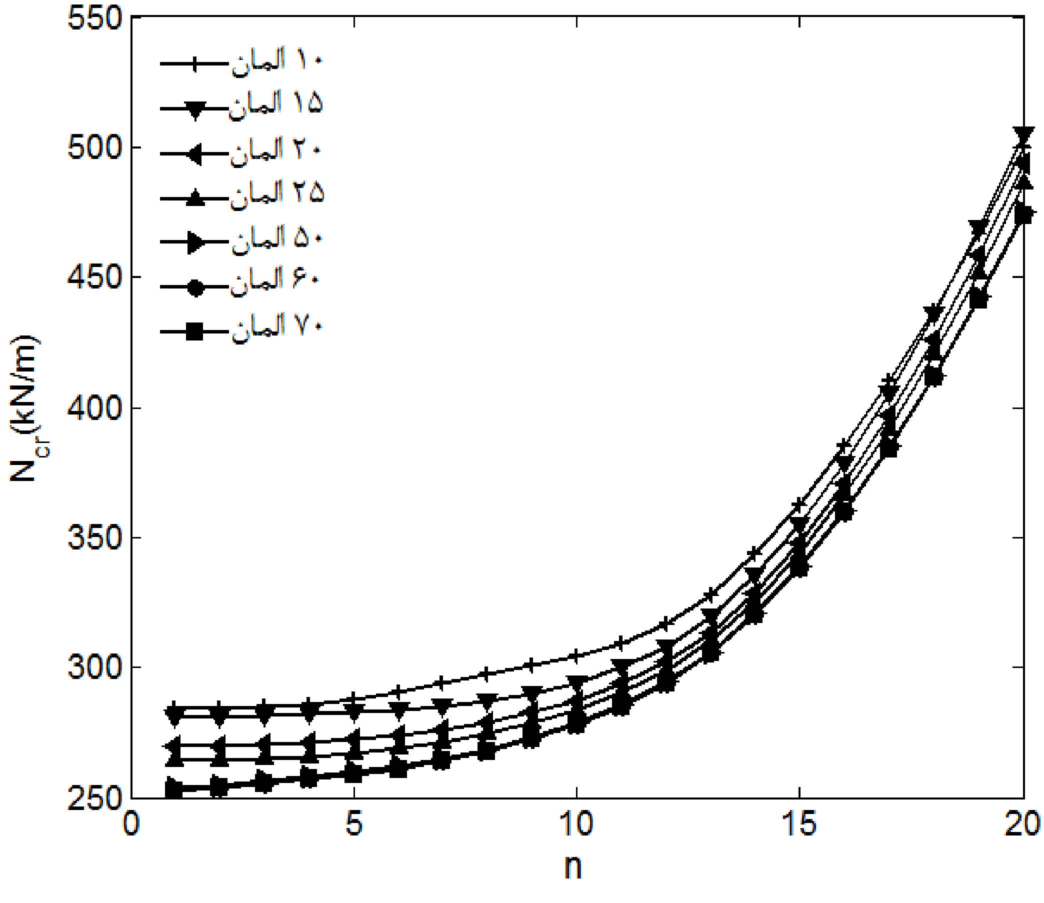


شکل ۴-۱۷: تأثیر تعداد لایه بر کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی

۴-۴ تحلیل کمانش مکانیکی پوسته‌های مخروطی مرکب ناقص

با داشتن ماتریس سفتی کل و ماتریس سفتی هندسی کل و با کمک بخش دوم معادله‌ی (۳-۵۵) می‌توان بار بحرانی کمانش مکانیکی را به دست آورد. در تحلیل کمانش مکانیکی پوسته‌ی مخروطی از مشخصات هندسی بخش ۴-۳ استفاده شده است. بار بحرانی با رابطه‌ی $N_c = \frac{N_{x,cr}(1-\nu_1^2)}{E_1 h}$ بی‌بعد شده است[۲۶].

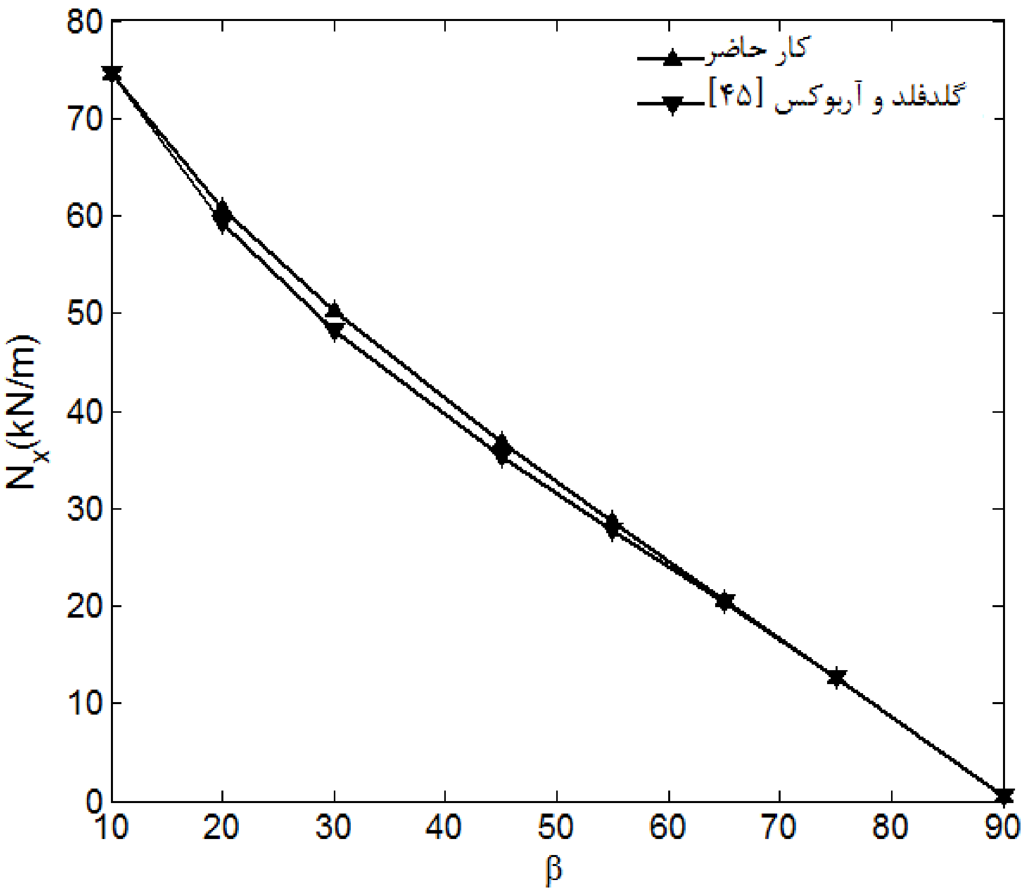
شکل (۴-۱۸) همگرایی نمودار بار بحرانی کمانش بر حسب مد محیطی را برای تعداد المان‌های مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود کد مربوطه از همگرایی خوبی برخوردار است. در ادامه برای این‌که دقت کار انجام شده در حد مطلوبی باشد در تحلیل کمانش مکانیکی از تعداد المان ۵۰ استفاده می‌شود.



شکل ۴-۱۸: بررسی همگرایی نمودار بار بحرانی کمانش بر حسب مد محیطی برای پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۱۹) مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده در مطالعه‌ی حاضر و نتایج گلدفلد و آربوکس[۴۵] را نشان می‌دهد. مشخصات هندسی پوسته مخروطی مورد مقایسه مطابق مشخصات هندسی بخش ۴-۳ استفاده شده است با این تفاوت که $\frac{R_1}{h} = ۱۱۴$ است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود نتایج

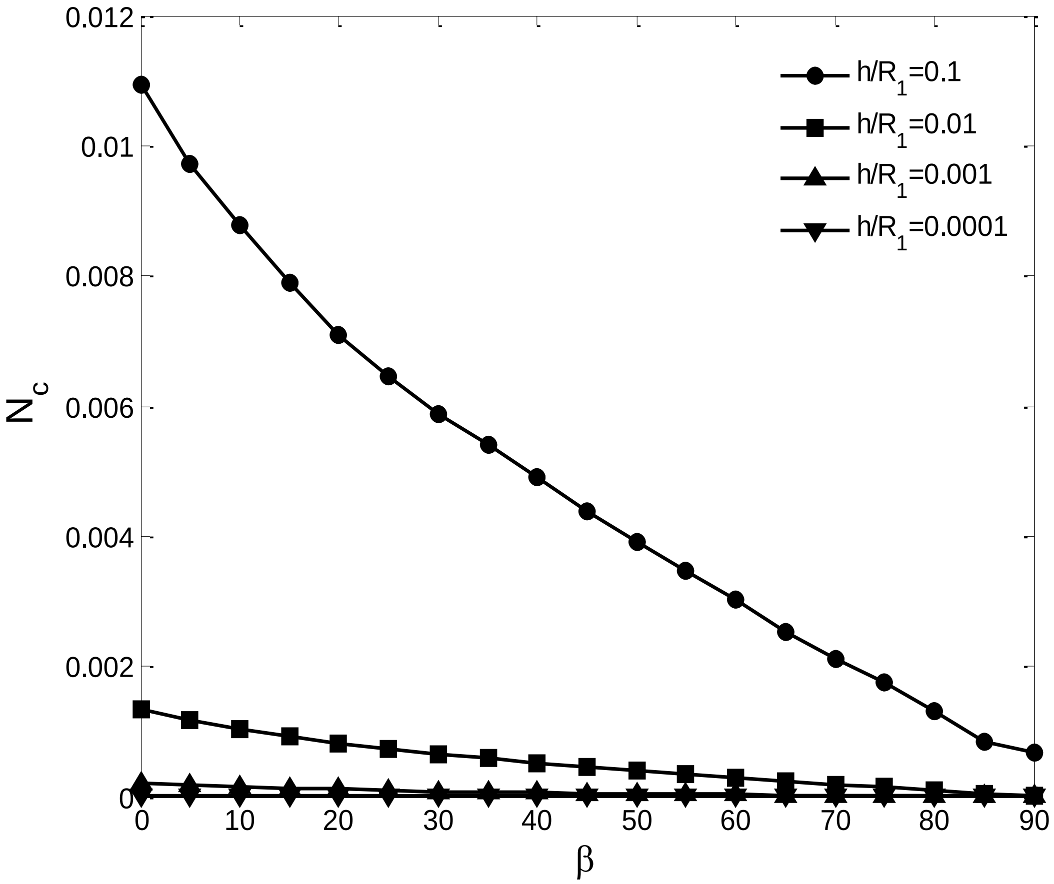
حاصل از کار حاضر اختلاف اندکی با نتایج بررسی گلدفلد و آربوکس در تحلیل کمانش مکانیکی دارد و این بدان معناست که دقت تحلیل انجام شده دارای اعتبار مطلوبی است.



شکل ۴-۱۹: مقایسه‌ی نتیجه‌ی حاصل از مطالعه‌ی حاضر و نتیجه‌ی به دست آمده توسط گلدفلد و آربوکس

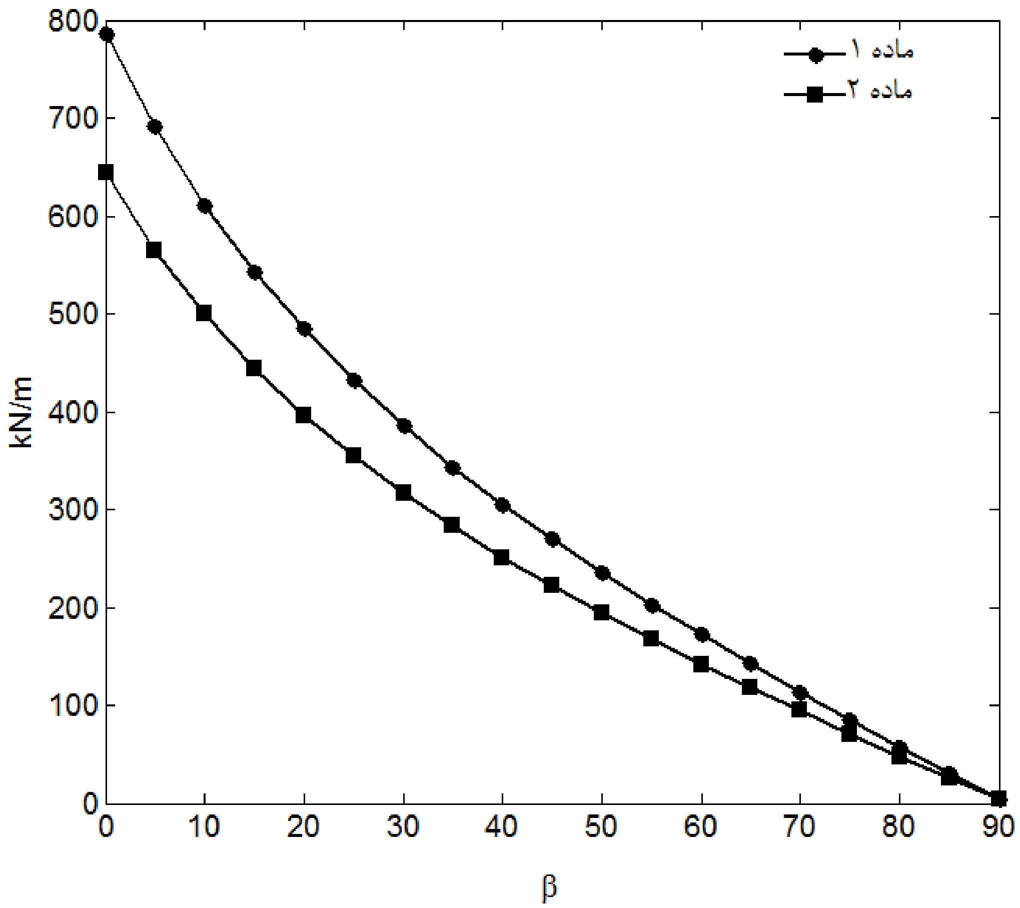
شکل (۴-۲۰) تأثیر افزایش زاویه‌ی رأس مخروط بر کمانش مکانیکی با ضخامت‌های متفاوت را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود با افزایش زاویه‌ی رأس پوسته‌ی مخروطی با ضخامت‌های مختلف، بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به شکل می‌توان مشاهده کرد با افزایش

ضخامت پوسته، به دلیل اینکه سفتی پوسته‌ی مخروطی بیشتر می‌شود، مقاومت آن نیز در برابر کمانش مکانیکی افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۲۰: بررسی تأثیر نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط و نسبت ضخامت به شعاع بر بار بحرانی کمانش پوسته‌ی مخروطی

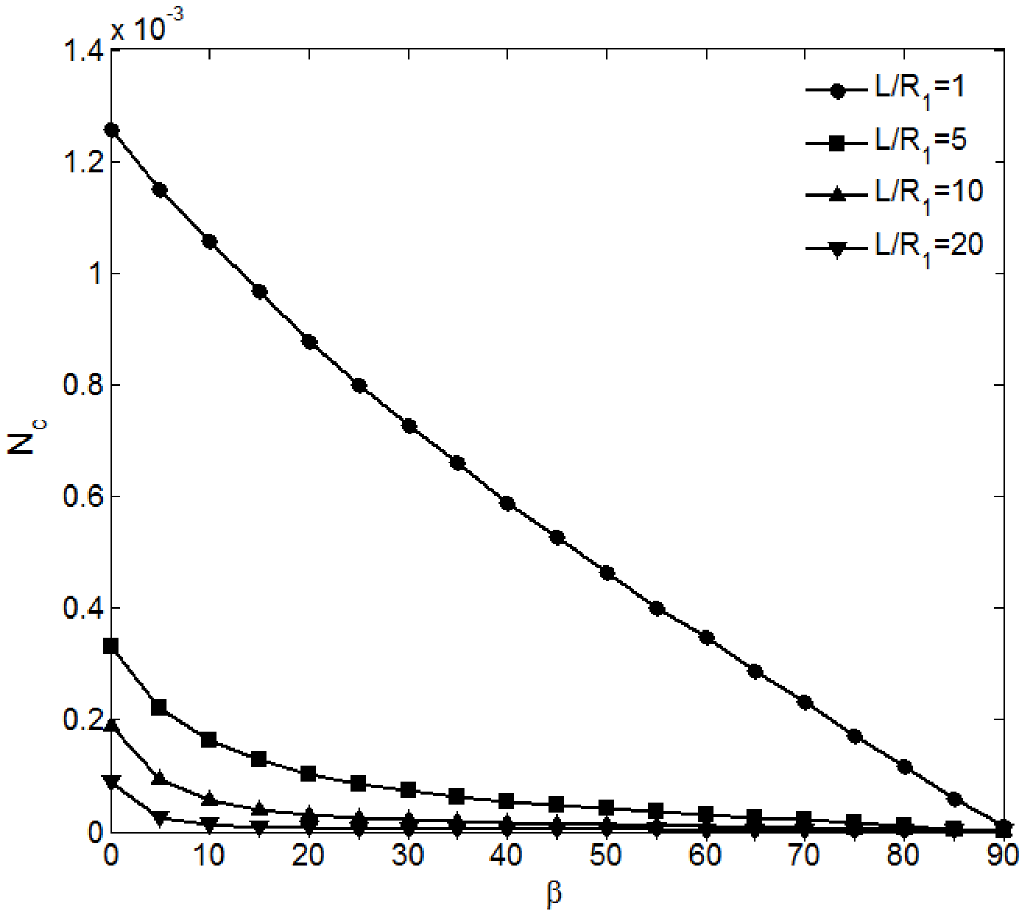
شکل(۴-۲۱) تأثیر افزایش زاویه‌ی رأس مخروط بر بار بحرانی کمانش را برای ماده ۱ و ماده ۲ نشان می‌دهد. با توجه به اینکه ماده ۱ دارای مدول الاستیسیته، مدول برشی و نسبت پواسون بالاتری است مقاومت بیشتری در برابر کمانش مکانیکی از خود نشان می‌دهد. همچنین مشاهده می‌شود هرچه شکل هندسی از استوانه به ورق نزدیکتر شود اثر جنس ماده بر رفتار کمانش مکانیکی کمتر می‌شود.



شکل ۴-۲۱: بررسی تأثیر نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط و جنس ماده بر بار بحرانی کمانش پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۲۲) تأثیر زاویه‌ی رأس پوسته‌ی مخروطی بر بار بحرانی کمانش با طول‌های مختلف را نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش طول، مقاومت پوسته در برابر کمانش مکانیکی کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش طول پوسته، بار بحرانی کمانش برای زوایای متفاوت مخروط به هم نزدیکتر می‌شود.

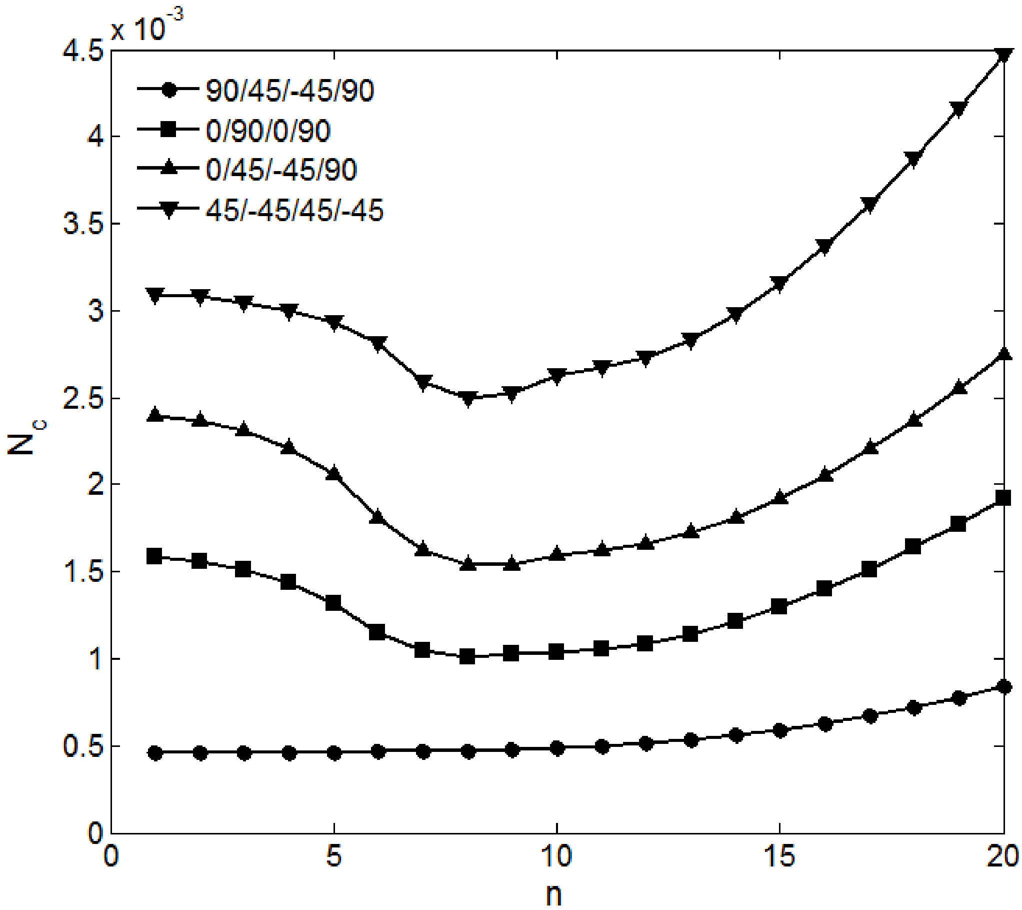
با توجه به سه شکل اخیر می‌توان نتیجه گرفت با افزایش نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط مقاومت به کمانش کاهش می‌یابد یعنی پوسته‌ی مخروطی که به استوانه نزدیکتر است مقاومت بیشتری در برابر کمانش دارد و هرچه پوسته به ورق نزدیکتر می‌شود مقاومت آن در برابر کمانش کمتر می‌شود.



شکل ۴-۲۲: بررسی تأثیر نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط و نسبت طول به شعاع بر بار بحرانی کمانش پوسته‌ی مخروطی

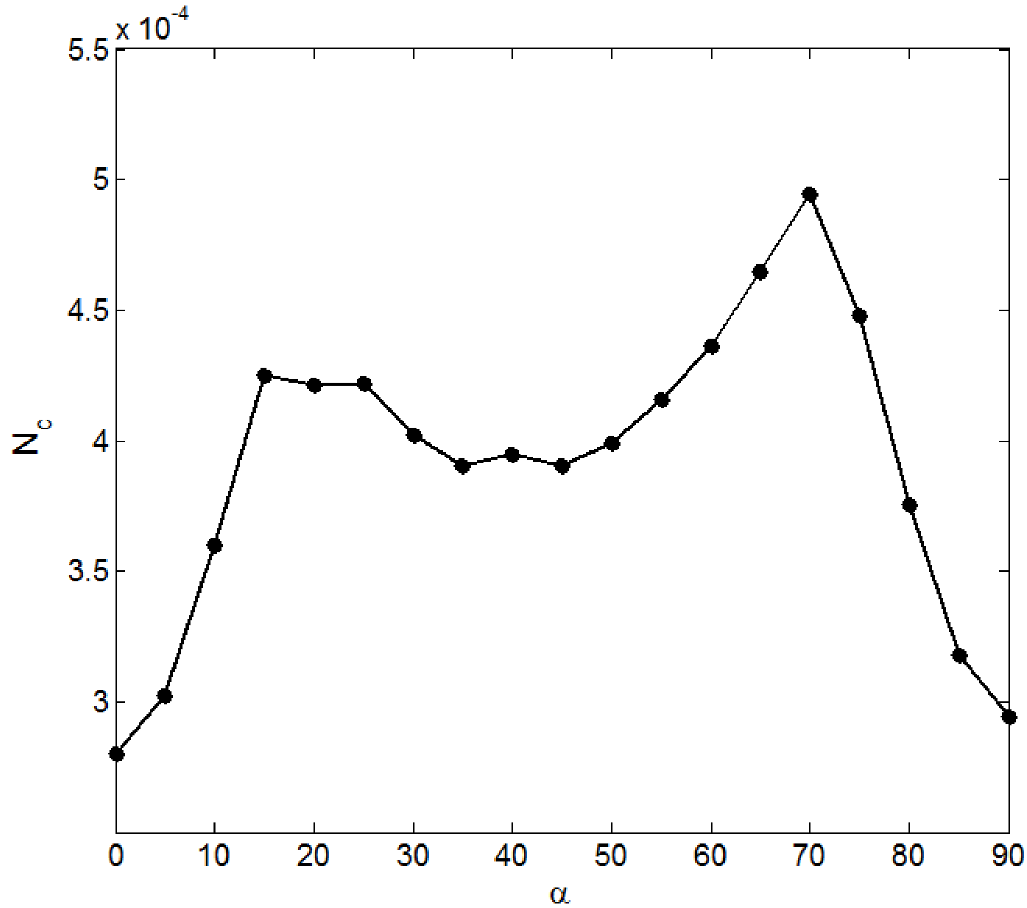
شکل (۴-۲۳) تأثیر چینش زاویه‌ی الیاف بر کمانش مکانیکی پوسته‌ی مخروطی مرکب ناقص با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود کمترین مقدار بار

کمانش مکانیکی که بار بحرانی کمانش نامیده می‌شود در پوسته‌ها با چینش الیاف مختلف در مدهای محیطی متفاوت اتفاق می‌افتد.



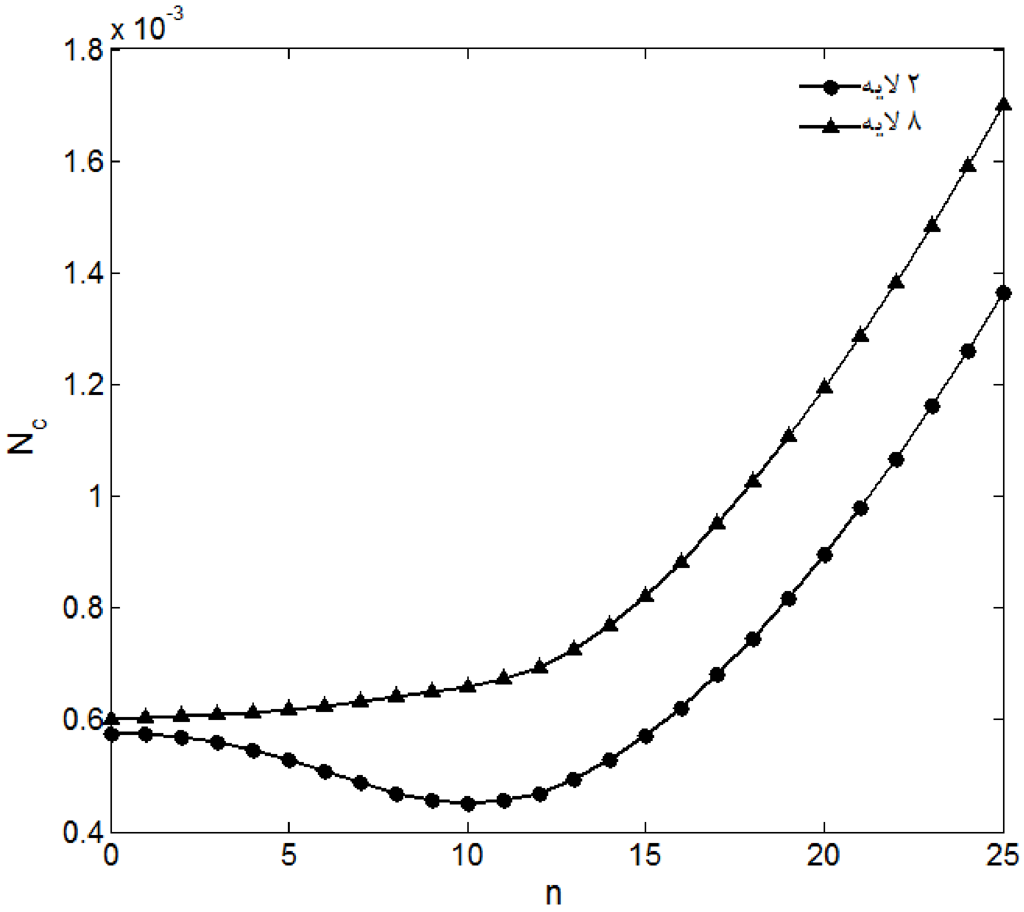
شکل ۴-۲۳: تأثیر چینش زاویه‌ی الیاف بر کمانش مکانیکی پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۲۴) تأثیر زاویه‌ی الیاف بر کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی ناقص تک‌لایه با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت پوسته‌ی مخروطی با زاویه‌ی الیاف صفر درجه کمترین مقاومت را در برابر کمانش مکانیکی دارد. همچنین مشاهده می‌شود پوسته‌ی مخروطی با زاویه‌ی الیاف ۷۰ درجه بیشترین مقاومت را در برابر کمانش مکانیکی دارد.



شکل ۴-۲۴: تأثیر زاویه‌ی الیاف بر کمانش مکانیکی پوسته‌ی مخروطی تک لایه

شکل (۴-۲۵) تأثیر تعداد لایه بر کمانش مکانیکی پوسته‌ی مخروطی ناقص مرکب با چینش $(90/45)_s$ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود با افزایش تعداد لایه‌ی پوسته‌ی مخروطی، به دلیل اینکه سفتی پوسته‌ی مخروطی افزایش می‌یابد بار بحرانی کمانش آن نیز بیشتر می‌شود.



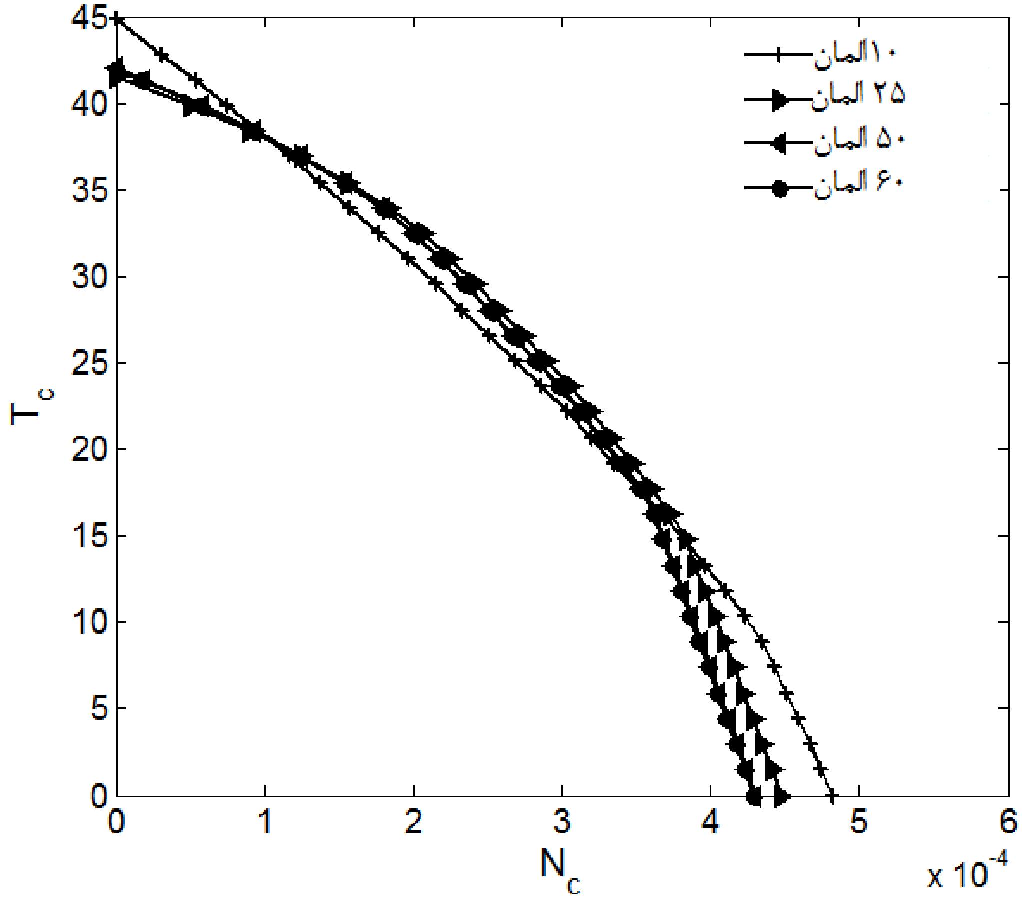
شکل ۴-۲۵: تأثیر تعداد لایه بر کمانش مکانیکی پوسته‌ی مخروطی

۴-۵ تحلیل کمانش ترمومکانیکی پوسته‌های مخروطی مرکب ناقص

با داشتن ماتریس سفتی کل و ماتریس سفتی هندسی کل و با کمک معادله‌ی (۳-۶۱) می‌توان کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی را تحلیل کرد. از مشخصات هندسی بخش ۴-۳ در تحلیل کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی استفاده شده است.

شکل (۴-۲۶) همگرایی نمودار بار بحرانی کمانش بر حسب مد محیطی را برای تعداد المان‌های مختلف نشان می‌دهد. . با توجه به شکل مشاهده می‌شود کد مربوطه از همگرایی خوبی برخوردار

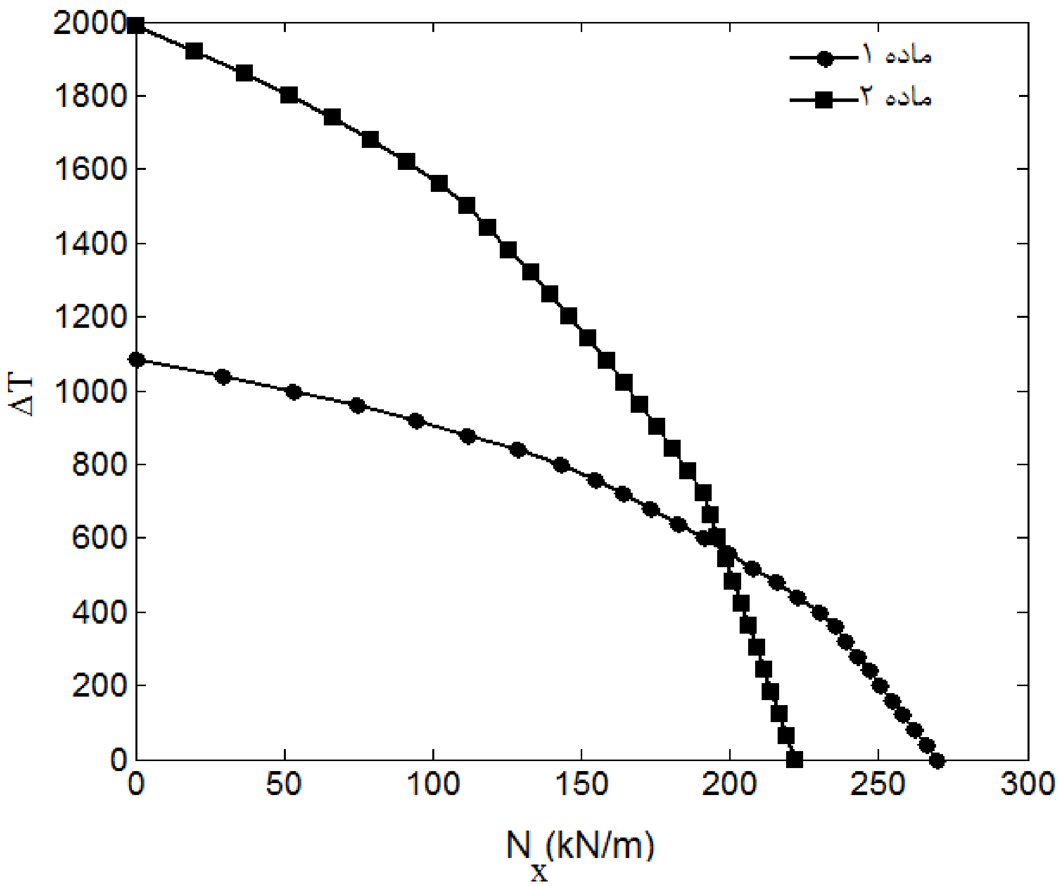
است. در ادامه برای این‌که دقت کار انجام شده در حد مطلوبی باشد در تحلیل کمانش ترمومکانیکی از تعداد المان ۵۰ استفاده می‌شود.



شکل ۴-۲۶: بررسی همگرایی نمودار کمانش ترمومکانیکی

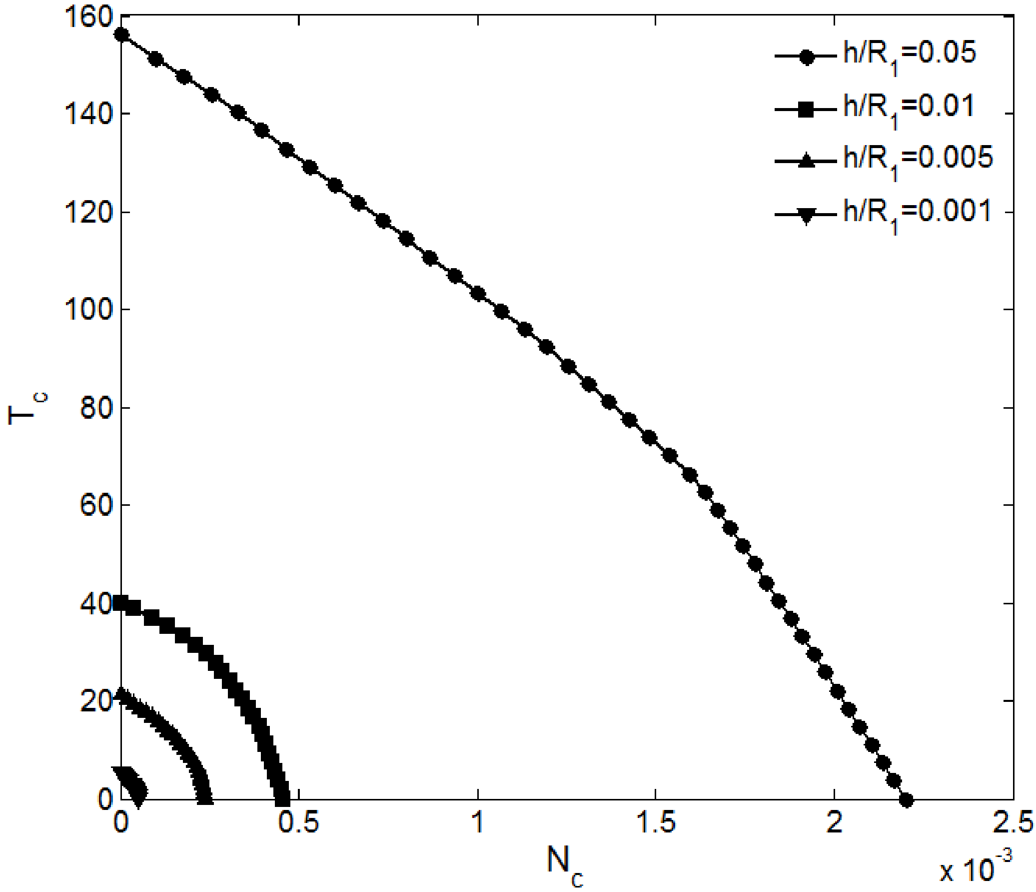
شکل(۴-۲۷) تأثیر جنس ماده بر کمانش ترمومکانیکی برای ماده ۱ و ماده ۲ را در پوسته‌های مخروطی با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه نشان می‌دهد. با توجه به شکل ماده‌ی اول به دلیل اینکه مدول الاستیسیته، مدول برشی و نسبت پواسون بالاتری دارد در دماهای کمتر، بار بحرانی کمانش آن بیشتر است همچنین با توجه به اینکه ضرایب انبساط حرارتی بالاتری نسبت به ماده‌ی دوم دارد در دماهای بالا بار بحرانی آن کمتر می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در بارگذاری مکانیکی خالص، ماده ۱

مقاومت به کمانش بهتری دارد ولی در بارگذاری حرارتی خالص ماده ۲ مقاومت بالاتری در برابر کمانش دارد.



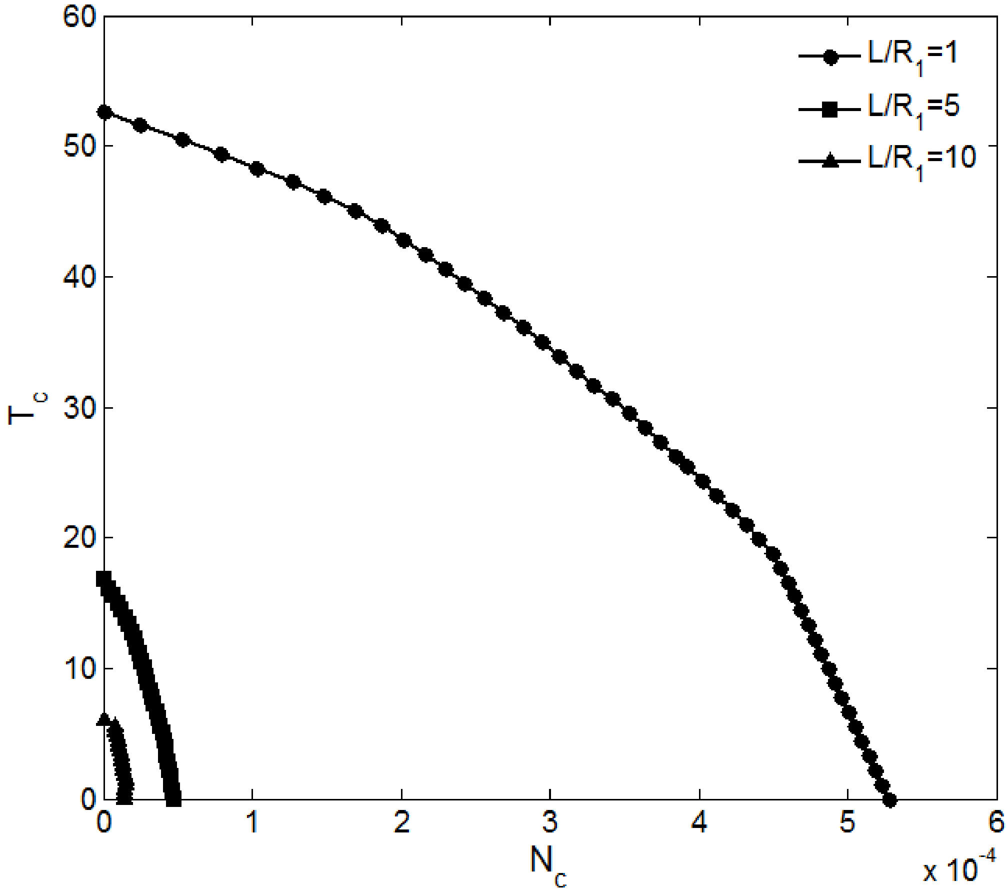
شکل ۴-۲۷: بررسی تأثیر جنس ماده بر نمودار کمانش ترمومکانیکی

شکل (۴-۲۸) تأثیر تغییرات ضخامت بر کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان مشاهده کرد با افزایش ضخامت پوسته، به دلیل اینکه سفتی پوسته‌ی مخروطی بیشتر می‌شود، مقاومت آن نیز در برابر کمانش ترمومکانیکی افزایش می‌یابد و ناحیه‌ی پایداری کمانش ترمومکانیکی پوسته به شدت بزرگتر می‌شود.



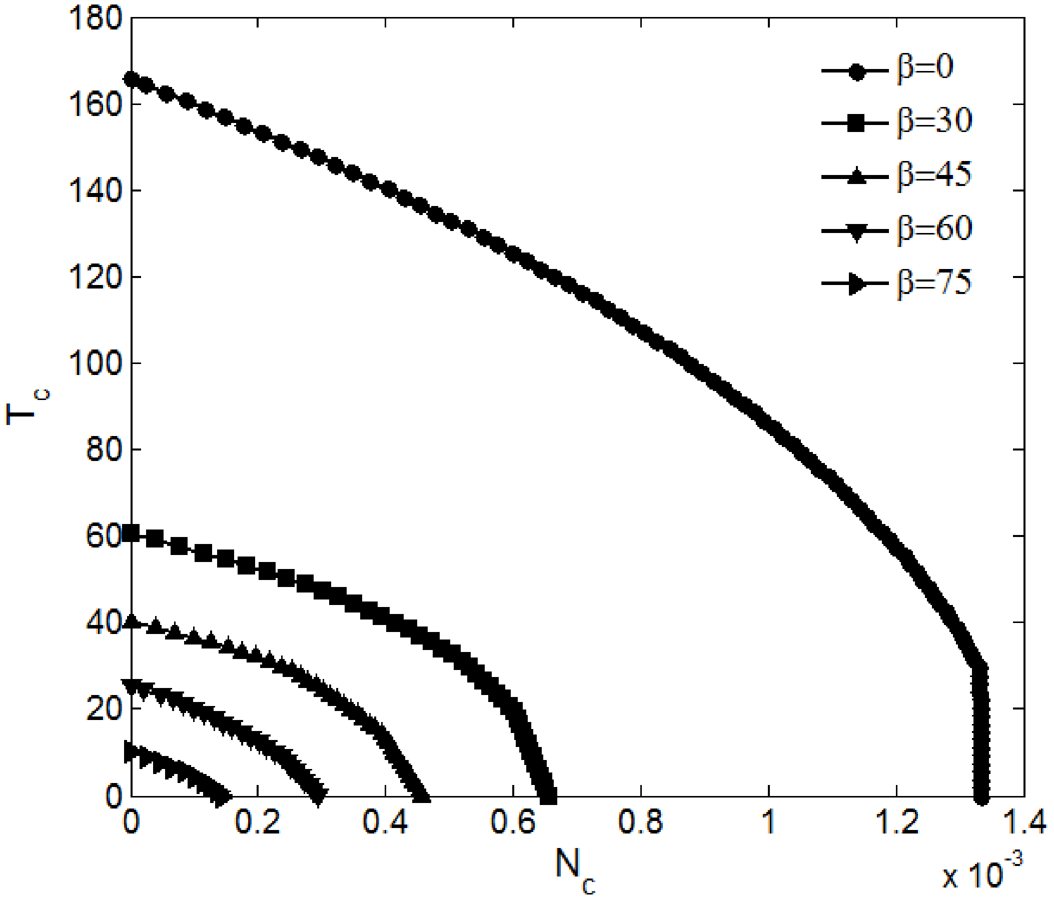
شکل ۴-۲۸: بررسی تأثیر ضخامت بر نمودار کمانش ترمومکانیکی

شکل (۴-۲۹) تأثیر تغییرات طول بر کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان مشاهده کرد با افزایش طول پوسته‌ی مخروطی، به دلیل اینکه سفتی پوسته‌ی مخروطی کمتر می‌شود، مقاومت آن نیز در برابر کمانش ترمومکانیکی کاهش می‌یابد و ناحیه‌ی پایداری کمانش ترمومکانیکی پوسته به شدت کوچکتر می‌شود.



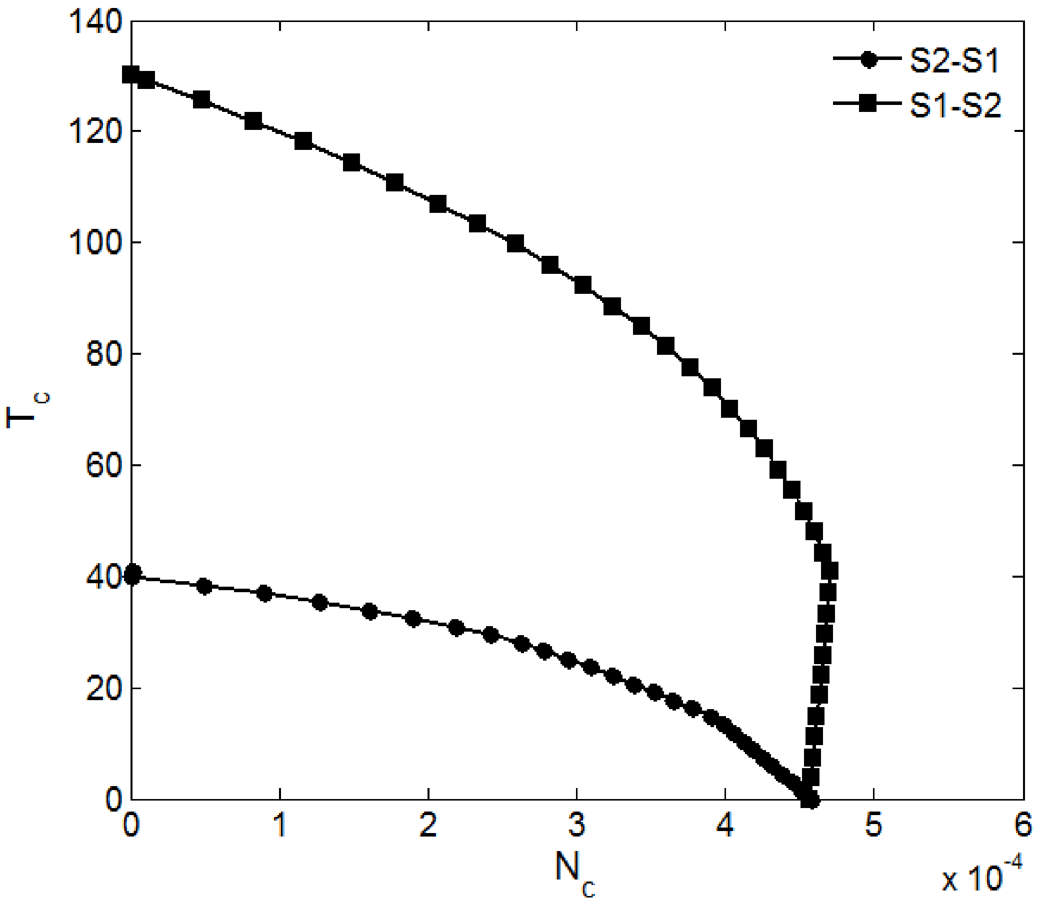
شکل ۴-۲۹: بررسی تأثیر طول بر نمودار کمانش ترمومکانیکی

شکل (۴-۳۰) تأثیر تغییرات نیم‌زاویه‌ی رأس بر کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود رفتار پوسته در کمانش ترمومکانیکی به شدت تحت تأثیر زاویه‌ی رأس است به نحوی که با افزایش نیم‌زاویه‌ی رأس پوسته‌ی مخروطی، ناحیه‌ی پایداری کمانش ترمومکانیکی پوسته کوچکتر می‌شود.



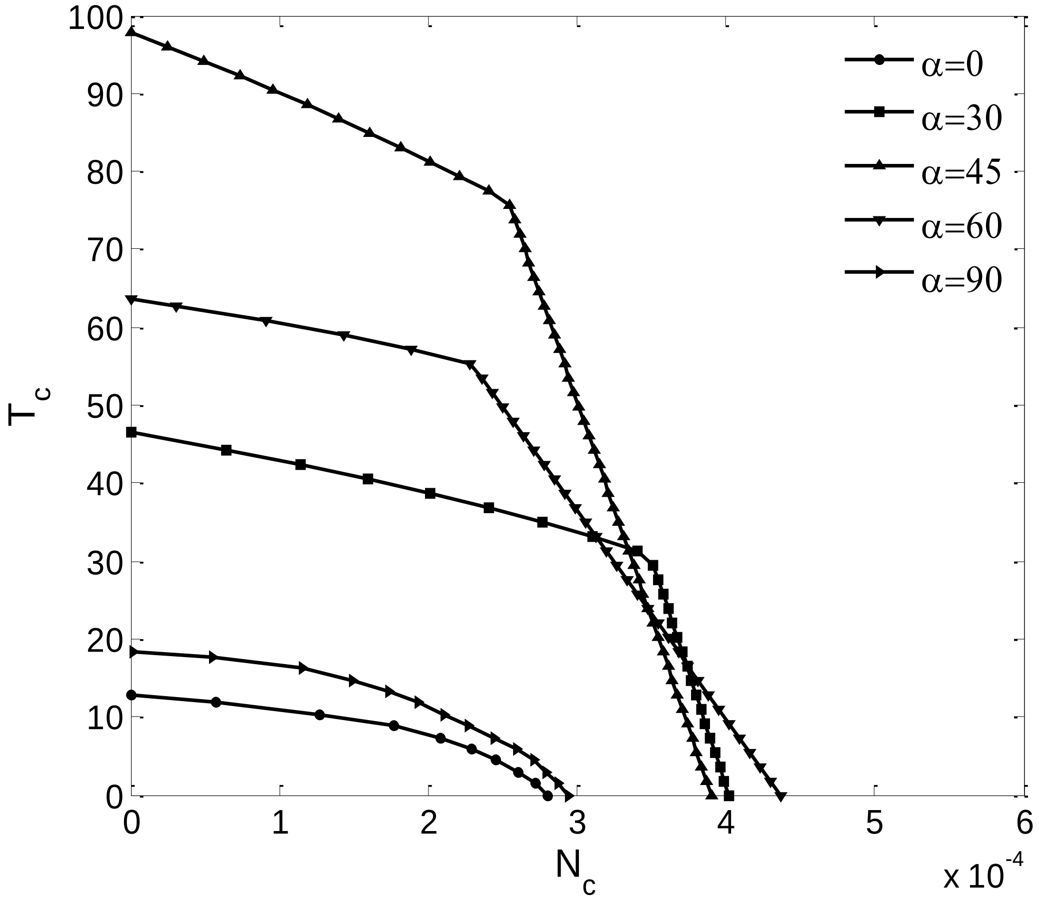
شکل ۴-۳۰: بررسی تأثیر نیم‌زاویه‌ی رأس مخروط بر نمودار کمانش ترمومکانیکی

شکل (۴-۳۱) تأثیر شرط مرزی دوسر ساده را بر کمانش ترمومکانیکی نشان می‌دهد. همان طور که در شکل مشاهده می‌شود اگر در بارگذاری ترمومکانیکی شرط مرزی S_2 به لبه شعاع بزرگ پوسته‌ی مخروطی اعمال شود ناحیه‌ی پایداری بزرگتری را نتیجه می‌دهد.



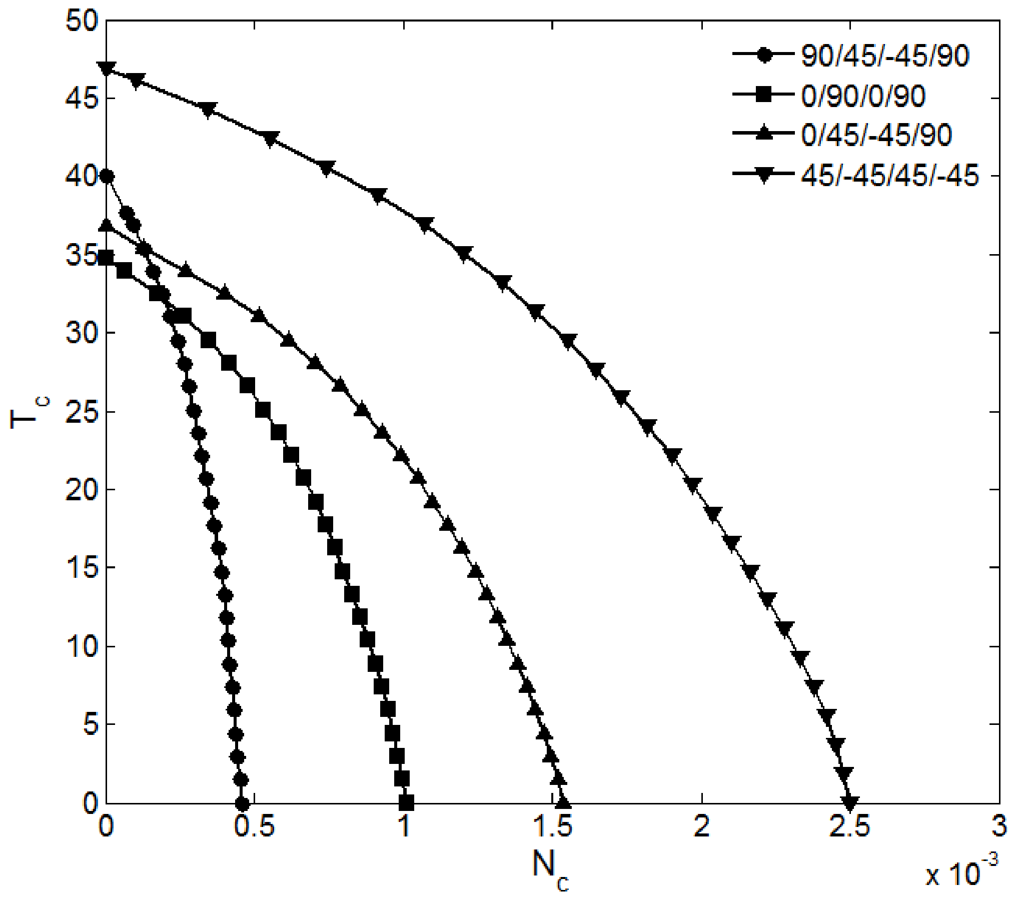
شکل ۴-۳۱: بررسی تأثیر شرایط مرزی بر نمودار کمانش ترمومکانیکی

شکل (۴-۳۲) تاثیر زاویه‌ی الیاف بر کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی ناقص تک‌لایه با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود در بارگذاری مکانیکی خالص، الیاف با زاویه‌ی ۶۰ درجه مقاومت بیشتری از خود نشان می‌دهد و در بارگذاری حرارتی خالص الیاف با زاویه‌ی ۴۵ درجه مقاومت بیشتری از خود نشان می‌دهد. همچنین مشاهده می‌شود در بارگذاری ترمومکانیکی الیاف با زاویه‌ی ۴۵ درجه ناحیه‌ی پایداری بزرگتری را نتیجه می‌دهد.



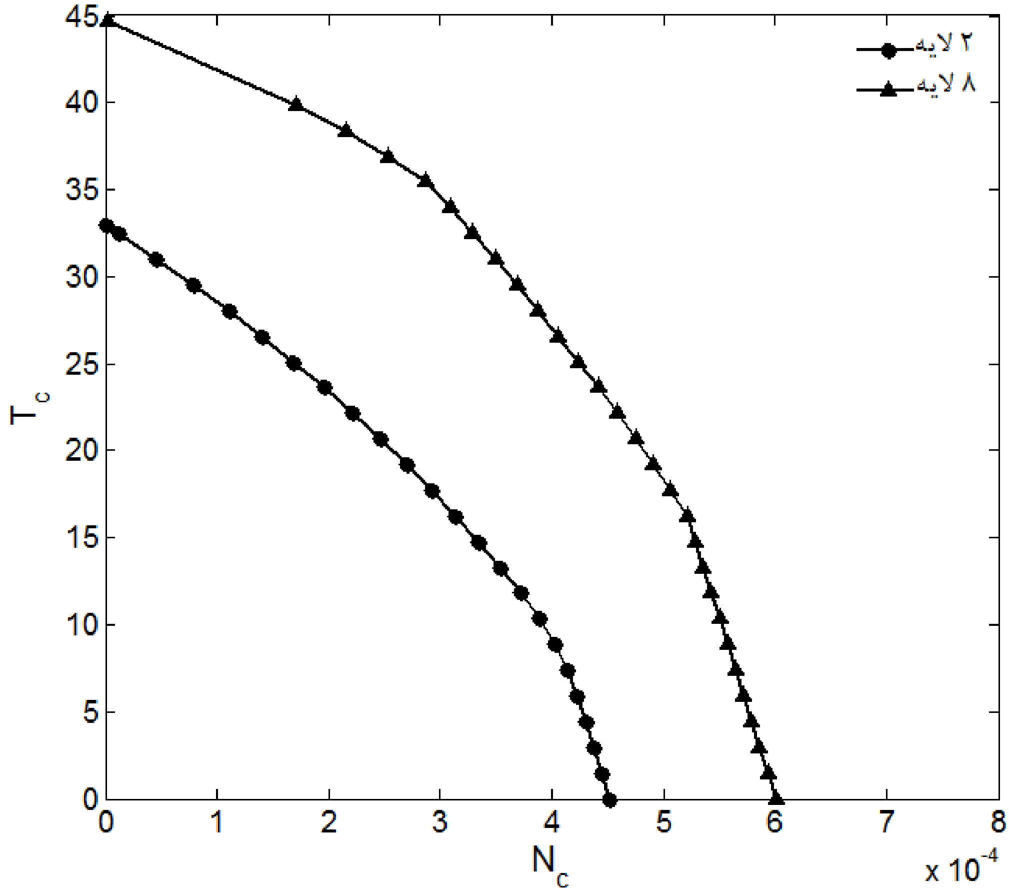
شکل ۴-۳۲: تاثیر زاویه‌ی الیاف بر کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۳۳) تأثیر چینش زاویه‌ی الیاف بر کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی مرکب ناقص با نیم‌زاویه‌ی رأس ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت با تغییر در چینش زاویه‌ی الیاف، مقاومت به کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی تغییر می‌کند.



شکل ۴-۳۳: تأثیر چینش زاویه‌ی الیاف بر کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی

شکل (۴-۳۴) تأثیر تعداد لایه بر کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی ناقص مرکب با چینش $(90/45)_s$ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود با افزایش تعداد لایه‌ی پوسته‌ی مخروطی، به دلیل اینکه سفتی پوسته‌ی مخروطی افزایش می‌یابد ناحیه‌ی پایداری کمانش ترمومکانیکی پوسته‌ی مخروطی بیشتر می‌شود.



شکل ۴-۳۴: تأثیر تعداد لایه بر کمانش حرارتی پوسته‌ی مخروطی

۴-۶ چکیده‌ی نتایج

در این پژوهش بر اساس تئوری مرتبه اول برشی و با استفاده از روش اجزای محدود، به تحلیل ارتعاشات آزاد و کمانش پوسته‌های مخروطی ناقص مرکب چندلایه پرداخته شده است و تاثیر کمیت‌های هندسی و خواص مکانیکی ماده بر رفتار این پوسته‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به نتایج ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت:

۱- با افزایش ضخامت، فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد.

۲- با افزایش طول، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

۳- با افزایش آزادی لبه‌های پوسته فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

۴- با افزایش طول، مقاومت پوسته در برابر کمانش حرارتی، مکانیکی و ترمومکانیکی کاهش می‌یابد.

۵- با افزایش ضخامت، مقاومت پوسته در برابر کمانش حرارتی، مکانیکی و ترمومکانیکی افزایش می‌یابد.

۶- با افزایش زاویه‌ی رأس مخروط که هندسه‌ی پوسته به ورق نزدیکتر می‌شود مقاومت پوسته در برابر کمانش حرارتی، مکانیکی و ترمومکانیکی کاهش می‌یابد.

۷- هرچه آزادی لبه‌های پوسته‌ی مخروطی بیشتر باشد دمای بحرانی کمانش نیز بیشتر می‌شود.

۸- ماده‌ای که ضریب انبساط حرارتی بیشتری دارد مقاومتش در برابر کمانش حرارتی خالص کمتر است و ماده‌ای که دارای مدول الاستیسیته، مدول برشی و نسبت پواسون بالاتری است مقاومت بیشتری در برابر کمانش مکانیکی خالص از خود نشان می‌دهد.

۹- با افزایش تعداد لایه‌های پوسته‌ی مخروطی مرکب با ضخامت یکسان، مقاومت آن در برابر ارتعاش آزاد و کمانش افزایش می‌یابد.

۴-۷ پیشنهادها

با توجه به اهمیت این بحث و کاربرد آن در صنایع مختلف از جمله صنعت نفت، گاز، پتروشیمی، هوافضا، صنایع نظامی و ... نیاز به کارهای بیشتر در این زمینه، امری ضروری به نظر می‌رسد. بنابراین موضوعات زیر برای ادامه‌ی کار پیشنهاد می‌گردند:

۱- تحلیل کمانش ترمومکانیکی پوسته‌های کروی

۲- تحلیل کمانش ترمومکانیکی پوسته‌های مخروطی با انواع گشودگی‌ها

۳- تحلیل غیر خطی کمانش ترمومکانیکی پوسته‌های مخروطی شکل مرکب ناقص

۴- استفاده از تئوری‌های مرتبه بالا به جای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

۵- استفاده از روش‌های حل تحلیلی به جای استفاده از روش حل عددی در تحلیل کمانش ترمومکانیکی و مقایسه‌ی نتایج حاصل با یکدیگر .

مراجع

[1] Irie T., Yamada G. and Tanaka K. (1984) "Natural frequencies of truncated conical shells" *Journal of sound and vibration*, 93, 3, pp 447-453.

[2] Sen S. K. and Gould P. L. (1978) "Free vibration of shells of revolution using FEM" *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 100, pp 283-303.

[3] Ueda T. (1979) "Non-linear free vibrations of conical shells" *Journal of Sound and vibration*, 64, pp 85-95.

[4] Lakis A. A., Dyke V. and Ouriche H. (1992) "Dynamic analysis of anisotropic fluid-filled conical shells" *Journal of fluids and Structures*, 6, pp 135-162.

[5] Bhangale R. K., Ganesan N. and Padmanabhan C. (2005) "Linear thermoelastic buckling and free vibration behavior of functionally graded truncated conical shells" *Journal of Sound and Vibration*, 292, pp 341-371.

[6] Tripathi V., Singh B. N. and Shukla K. K. (2006) "Free vibration of laminated composite shell with random material properties" *Composite Structures*, 81, pp 96-104.

[۷] شاطرزاده ع. ر، (۱۳۸۴)، پایان‌نامه‌ی ارشد:"تحلیل استاتیکی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای شکل مرکب حاوی سیال داغ یا سرد"، دانشکده‌ی فنی مهندسی، گروه مکانیک، دانشگاه گیلان.

[8] Kerboua Y., Lakis A. A. and Hmila M. (2010) "Vibration analysis of truncated conical shells subjected of flowing fluid" *Applied Mathematical Modelling*, 34, pp 791-809.

[9] Dey S. and Karmakar A. (2012) "Free vibration analysis of multiple delaminated angle-ply composite conical shells – A finite element approach" *Composite Structures*, 94, pp 2188-2196.

[10] Malekzadeh P. and Heydarpour Y. (2013) "Free vibration analysis of rotating functionally graded truncated conical shells" *Composite Structures*, pp 176-188.

[11] Ma X., Jin G., Xiong Y. and Liu Z. (2014) "Free and forced vibration analysis of coupled conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions" *International Journal of Mechanical Sciences*, 88, pp 122- 137.

[12] Chang L. K. and Lu S. Y. (1968) "Nonlinear thermal elastic buckling of conical shells" *Nuclear Engineering and Design*, 7, pp 159-169.

[13] Tani J. (1978) "Influence of axisymmetric initial deflections on the thermal buckling of truncated conical shells" *Nuclear Engineering and Design*, 48, pp 393-403.

[14] Mathew T. C., Singh G. and Rao G. V. (1992) “Thermal buckling of cross-ply composite laminates” *Camputers & Structures*, 42, 2, pp 281-287.

[15] Patel B. P., Shukla K. K. and Nath Y. (2004) “Thermal buckling of laminated cross-ply oval cylindrical shells” *Composite Structures*, 65, pp 217-229.

[16] Radhamohan S. K. and Venkatramana J. (1975) “Thermal buckling of orthotropic cylindrical shells” *AIAA Journal*, 13, 3, pp 397-399.

[17] Thangartnam R. K., Palaninathan R. and Ramachandram J. (1990) “Thermal buckling of laminated composite shells” *AIAA Journal*, 28, 5, pp 859-860.

[18] Eslami M. R. and Shahsiah R. (2006) “Themal buckling of imperfect cylindrical shells” *Journal of thermal buckling*, 24, 1, pp 71-89.

[19] Darvizeh M., Darvizeh A., Shaterzadeh A. R. and Ansari R. (2007) “Thermal buckling analysis of moderately thick composite cylindrical shells under axisymmetric thermal load” *Mech. & Aerospace Eng. Journal*, 3, 2, pp 99-107.

[20] Woo J. H., Rho J. H. and Lee I. (2007) “Thermal buckling characteristics of composite conical structures” *KSAS International Journal*, 8, 2, pp 82-88.

[21] Topal U. and Uzman U. (2009) “Thermal buckling load optimization of angle-ply laminated cylindrical shells” *Materials and Design*, 30, pp 532-536.

[22] Xu X., Chu H. and Lim C. (2010) “A symplectic hamilation approach for thermal buckling of cylindrical shells” *International Journal of Structure Stability and Dynamics*, 10, 2, pp 273-286.

[23] Simitses G. J. and Anastasiadis J. S. (1991) “Buckling of axially-loaded, moderately-thick, cylindrical laminated shells” *Composite Engineering*, 1, 6, pp 375-391.

[24] Ferreira A. J. M. and Barbosa J. T. (2000) “Buckling behavior of composite shells” *Composite Structure*, 50, pp 93-98.

[25] Jamal M., Lahlou L., Midani M., Zahrouni H., Limam A., Damil N. and Potier-Ferry M. (2003) “A semi-analytical buckling analysis of imperfect cylindrical shells under axial compression” *International Journal of Solids and Structure*, 40, pp 1311-1327.

[26] Li S. R. and Barta R. C. (2006) “Buckling of axial compressed thin cylindrical shells with functionally graded middle layer” *Thin-walled structures*, 44, pp 1039-1047.

[27] Nguyen H. L. T., Elishakoff I. and Nguyan V. T. (2009) “Buckling under the external pressure of cylindrical shells with variable thickness” *International Journal of Solids and Structures*, 46, pp 4163-4168.

[28] sepiani H. A., Rastgoo A., Ebrahimi F., and Ghorbanpour Arani A. (2010) “Vibration and buckling analysis of two-layered functionally graded cylindrical shell, considering the effects of transverse shear and rotary inertia” *Material and Design*, 31, pp 1063-1069.

[29] Shadmehri F., Hoa S. V. and Hojjati M. (2012) “Buckling of conical composite shells” *Composite Structures*, 94, pp 787-792.

[۳۰] درویزه م.، درویزه ا.، انصاری ر. و علی‌جانی ع. (۱۳۹۱) "تحلیل کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بارگذاری مکانیکی و گرمایی با استفاده از روش المان محدود نیمه تحلیلی" **مجله‌ی مهندسی مکانیک**، شماره‌ی ۲، صص ۳۳-۴۴.

[31] Hong T. and Teng J. G. (2002) “Non-linear analysis of Shells of Revolution under Arbitrary Loads” *Computer and Structures*, 80, pp 1547-1568.

[32] Teng J. G. and Hong T. (2006) “Postbuckling analysis of elastic shells of revolution considering mode switching and interaction” *International Journal of Solids and Structures*, 43, pp 551-568.

[33] Hong T. and Teng J. G. (2008) “Imperfection Sensitivity and Postbuckling Analysis of elastic shells of Revolution” *Thin_walled Structures*, 46, pp 1338-1350.

[34] Patel B. P., Shukla K. K. and Nath Y. (2005) “Thermal Postbuckling Analysis of Laminated Cross-ply Truncated Circular Conical Shells” *Composite Structures*, 71, pp 101-114.

[35] Patel B. P., Shukla K. K. and Nath Y. (2006) “Nonlinear Thermo-elastic Buckling Characteristics of Cross-ply Laminated Joined Conical-Cylindrical Shells” *International Journal of Solids and Structures*, 43. pp 4810-4829.

[36] Patel B. P., Singh S. and Nath Y. (2008) “Postbuckling Characteristics of Angle-ply Laminated Truncated Circular Conical Shells” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13, pp 1411-11430.

[37] Singh S., Patel B. P. and Nath Y. (2009) “Postbuckling of Angle-ply Laminated Cylindrical Shells with Meridional Curvature” *Thin-Walled Structures*, 47, pp 359-364.

[38] Patel B. P., Singh S. and Nath Y. (2006) “Stability and nonlinear dynamic behavior of cross-ply laminated heated cylindrical shells” *Latin American Journal of Solids and Structures*, 3, pp 245-261.

[39] Sheinman I. and Jabareen M. (2005) “Postbuckling of laminated Cylindrical Shells in Different Formulation” *AIAA Journal*, 43, 5, pp 1117-1123.

[40] Sheinman I., Shaw D. and Simitses G. J. (1983) “Nonlinear Analysis of Axially-Loaded Laminated Cylindrical Shells” *Composites & Structures*, 16, pp 131-137.

[41] Sheinman I. and Goldfeld Y. (2003) “Imperfection Sensitivity of Laminated Cylindrical Shells According to Different Shell Theories” *Journal of Engineering Mechanics*, 129, 9, pp 1048-1053.

[۴۲] قاسمی م. ا.، یزدانی م. و سلطان‌آبادی ا.، (۱۳۹۳) "بررسی رفتار کمانشی پوسته‌های کامپوزیتی تقویت شده‌ی مشبک مخروطی تحت بار محوری" **مجله‌ی مهندسی مکانیک مدرس**، شماره ۱۵، دوره ۱۴، صص ۱۷۰-۱۷۶.

[43] Shaterzadeh A. R. Abolghasemi S. and Rezaei R. (2014) “Finite element analysis of thermal buckling of rectangular laminated composite plates with circular cutout” *Journal of Thermal stressess*, 37, 5, pp 604-623.

[44] Yazdani M. and Rahimi G. H. (2010) “The effects of helical ribs number and grid types on the buckling of thin-walled GFRP-stiffened shells under axial loading” *Journal of Reinforced Plastics and composites*, 29, 17, pp 2568-2575.

[45] Goldfeld Y. and Arbocz J. (2004) “Buckling of Laminated Conical Shells Given the Variations of the Stiffness Coefficients” *AIAA Journal*, 42, 3, pp 642-649.

[46] Narayana Y. V., Reddy P. R. and Markandeya R. (2013) “Buckling Analysis of laminated Composite Cylindrical Shells subjected to Axial Compressive Load using Finite Element Method” *International Journal of Engineering Research & Technology*, 2, 1, pp 1-5.

[47] Malinowski M., Belica T. and Magnucki K. (2015) “Buckling and Post-buckling behavior of elastic seven-layered Cylindrical shells- FEM study” *Thin-Walled Structures*, 94, pp 478-486.

[48] Sofiyev A. H. (2015) “Buckling analysis of free-supported functionally graded truncated conical shells under external pressures” *Composite Structures*, 132, pp 746-758.

[49] Johnson T. F. and Card M. F. (2009) “Stiffening and Mechanical Load Effects on Thermal Buckling of Stiffened Cylindrical Shells” *Journal of Spacecraft and Rockets*, 46, 1, pp 203-209.

[50] Arani A. G., Shams S., Amir S. and Maboudi M. J. (2012) “Buckling of Piezoelectric Composite Cylindrical Shells under Electro-thermo-mechanical Loading” *Journal of Solid Mechanics*, 4, 3, pp 296-306.

[51] Jameel A. N. and Nasif H. I. (2013) “Buckling analysis of composite plate under Thermo-mechanical loading” *Journal of Al Rafidain University College*, 32, pp 1-31.

[52] Michalska K. K. and Mania R.I. (2013) “Static and Dynamic Thermomechanical Buckling Loads of Functionally Graded Plates” *Mechanics and Mechanical Engineering*, 17, 1, pp 99-112.

[۵۳] شاطرزاده ع. ل.، (۱۳۹۴) "تحلیل کمانش ترمومکانیکی ورق‌های ساخته شده از مواد تابعی با گشودگی دایروی در مرکز" مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، شماره ۲، دوره ۵، صص ۹۹-۱۰۹.

[54] Kraus H, (1967) “*Thin Elastic Shells*” New York, John Wiely.

[55] Kaw A. K. (2006) “*Mechanics of composite material*” 2nd ed, Taylor & Francis, CRC press.

[56] Cheng Y. K. and Tham L. G. (1998) “*Finite strip method*” Taylor & Francis, CRC press.

[57] Mallick P. K. (2007) “*Fiber-reinforced composite: materials, manufacturing, and Design*” 3rd ed, Taylor & Francis, CRC press.

[58] Harris B. (1999) “*Engineering composite materials*” The Institute of Materials, London.

[59] Ready J. N. (2003) “Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis” 2nd ed, Taylor & Francis, CRC press.

[60] Ugural A. C. (1981) “*Stresses in plates and shells*” New York, McGraw-Hill.

[61] Amabili M. (2008) “*Nonlinear Vibration and Stability of Shells and Plates*” Cambridge University Press, New York.

پیوست:

ماتریس کرنش-جابه‌جایی پوسته‌ی مخروطی ناقص:

$$[B]^T =$$

$$\begin{bmatrix}
N_1'c & \frac{N_1}{r}c\,sin\beta & -\frac{m}{r}N_1 s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{m}{R}N_1 c & N_1's-\frac{N_1}{r}s\,sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{N_1}{r}s\,cos\beta \\
0 & \frac{N_1}{r}c\,cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1'c & -\frac{m}{r}N_1 s \\
0 & 0 & 0 & N_1'c & \frac{N_1}{r}c\,sin\beta & -\frac{m}{r}N_1 s & N_1 c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m}{r}N_1 c & N_1's-\frac{N_1}{r}s\,sin\beta & 0 & N_1 s \\
N_2'c & \frac{N_2}{r}c\,sin\beta & -\frac{m}{r}N_2 s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{m}{r}N_2 c & N_2's-\frac{N_2}{r}s\,sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{N_2}{r}s\,cos\beta \\
0 & \frac{N_2}{r}c\,cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2'c & -\frac{m}{r}N_2 s \\
0 & 0 & 0 & N_2'c & \frac{N_2}{r}c\,sin\beta & -\frac{m}{r}N_2 s & N_2 c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m}{r}N_2 c & N_2's-\frac{N_2}{r}s\,sin\beta & 0 & N_2 s \\
N_3'c & \frac{N_3}{r}c\,sin\beta & -\frac{m}{r}N_2 s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{m}{r}N_3 c & N_2's-\frac{N_2}{r}s\,sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{N_3}{r}s\,cos\beta \\
0 & \frac{N_3}{r}c\,cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3'c & -\frac{m}{r}N_3 s \\
0 & 0 & 0 & N_3'c & \frac{N_3}{r}c\,sin\beta & -\frac{m}{r}N_3 s & N_3 c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m}{r}N_3 c & N_3's-\frac{N_3}{r}s\,sin\beta & 0 & N_3 s
\end{bmatrix}$$

در روابط فوق $c = \cos m\theta$ ، $s = \sin m\theta$، m شماره‌ی مد محیطی، N_1'، N_2' و N_3' به ترتیب مشتقات توابع شکل N_1، N_2 و N_3 نسبت به s هستند.

ماتریس $[S]$ برای تئوری ساده شده‌ی سندرز مربوط به پوسته:

$$[S]=\begin{bmatrix}\sigma_s & \tau_{s\theta}\\ \tau_{s\theta} & \sigma_\theta\end{bmatrix}$$

ماتریس $[Z]$ برای تئوری ساده شده‌ی سندرز مربوط به پوسته:

$$[Z]=\begin{bmatrix}1 & 0 & z & 0\\ 0 & 1 & 0 & z\end{bmatrix}$$

ماتریس کرنش-جابه‌جایی غیر خطی تئوری ساده شده‌ی سندرز مربوط به پوسته‌ی مخروطی:

$$[B_{NL}]^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{N_1}{r}s\,cos\beta & 0 & 0\\ N_1'c & -\frac{m}{r}N_1 s & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{N_1}{r}s\,cos\beta\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{N_2}{r}s\,cos\beta & 0 & 0\\ N_2'c & -\frac{m}{r}N_2 s & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{N_2}{r}s\,cos\beta\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{N_3}{r}s\,cos\beta & 0 & 0\\ N_3'c & -\frac{m}{r}N_3 s & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{N_3}{r}s\,cos\beta\end{bmatrix}$$

ماتریس $[N]$ برای تئوری ساده شده‌ی سندرز مربوط به پوسته:

$$[N]=\begin{bmatrix}N_s & N_{s\theta} & M_s & M_{s\theta}\\ N_{s\theta} & N_\theta & M_{s\theta} & M_\theta\\ M_s & M_{s\theta} & 0 & 0\\ M_{s\theta} & M_\theta & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Abstract

According to widely used in various industries including oil, gas, petrochemical, aerospace, military industry and etc. Analysis of composite truncated conical shells is an important and applied issue and it has been discussed in this study. In the current work, a semi-analytical finite element method for modeling truncated conical shells based on the first order shear deformation theory (FSDT) is used. Geometric stiffness matrix taking into account the effects of temperature change throughout the shell due to thermal load and the effects of mechanical load is calculated. Shell investigated is made of composite material. In addition a variety of boundary conditions is used in static and dynamic analysis. In dynamic analysis, the natural frequency and in static analysis, the thermal, mechanical and thermo-mechanical buckling based on the simplified Sander's theory by taking the different geometric conditions is computed. Some of the most important results of the current study can be noted below, including the desired effect of increasing the thickness on the free vibration and resistance to buckling and on the contrary, the adverse effect of increasing the length and vertex-angle of the cone against buckling.

Keywords: Truncated conical shell, Composite material, Free vibration, Thermomechanical buckling, Semi-finite element method

Shahrood University of technology

School of Mechanical Engineering

Buckling and Vibrations Analysis of Composite Conical Truncated Shells under Mechanical and Thermal Loading using Semi-analytical Finite Element Method

By: Masoud Taheri

Supervisor:

Dr. Alireza Shaterzadeh

January 2016