





دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه جامدات

تحلیل کمانش و ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای FGM به کمک تئوری تغییر شکل
برشی مرتبه بالا تحت بارگذاری محوری استاتیکی

دانشجو: سجاد اسدی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا شاطرزاده

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

دی‌ماه ۱۳۹۴



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سجاد اسدی

به شماره دانشجویی: ۹۲۰۱۹۸۴

تحت عنوان: تحلیل کمانش و ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای FGM به کمک تئوری تغییر شکل

برشی مرتبه بالا تحت بارگذاری محوری استاتیکی

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم نامہ:

پاس از دو وجود مقدس

آنان کہ ناتوان شدند تا بہ توانایی برسم

مویشان سپید گشت تا رؤسید شوم

وحاشانہ سو تھند تا کرمانخش وجود و رؤسکر را ہم باشند

تقدیم بہ پدر و مادر مہربانم

شکر و قدردانی:

تحت سپاس به درگاه خداوند متعال دارم که هر چه هست از اوست.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم که از زحمات استاد ارجمند جناب آقای دکتر علیرضا شاطرزاده که در تمام

مراحل انجام پایان نامه، بنده را از راه‌نمایی ارزنده‌شان بی‌نصیب ننمودند، کمال شکر و قدردانی را

به جای آورم.

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوار که در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاور بی‌چشم داشت برای

من بودند نهایت تقدیر و شکر را دارم.

سجاد اسدی

تعهد نامه

اینجانب سجاد اسدی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل کمانش و ارتعاشات پوسته های استوانه ای FGM به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا تحت بارگذاری محوری استاتیکی تحت راهنمایی دکتر علیرضا شاطرزاده متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط این جانب انجام شده است و از صحت و اصال بر خوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آن ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد.
- این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد.

چکیده

هدف از مطالعه‌ی حاضر، تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی تحت بار محوری استاتیکی می‌باشد. خواص مواد پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی، وابسته به حرارت فرض شده و تغییرات در جهت ضخامت بر اساس کسر حجمی قانون توانی است. مطالعه، بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی و استخراج معادلات بر اساس اصل همیلتون انجام شده است. بعد از به‌دست آوردن معادلات حرکت، با استفاده از روابط کرنش- تغییر مکان بر مبنای تقریب اول لوو و جایگزینی آن‌ها در روابط منته‌های تنش- کرنش، معادلات برحسب مؤلفه‌های تغییر مکان به‌دست آمده‌اند. شرایط مرزی پوسته، در دو سر تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. با احتساب شرایط مرزی پوسته‌ی استوانه‌ای، یک میدان جابه‌جایی که شرایط مرزی را ارضا کند برای حل معادلات حرکت فرض شده است. در پایان بار کمانش و فرکانس‌های طبیعی استخراج شده و اثرات تغییر در پارامترهای هندسی، خصوصیات مواد، بار محوری و حرارت بر روی بار کمانش و فرکانس‌های طبیعی سازه، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. از مقایسه‌ی نتایج به‌دست آمده با مراجع، صحت روش حل و افزایش دقت تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم مورد تأیید واقع شده است.

کلیدواژگان: کمانش، ارتعاشات آزاد، پوسته‌ی استوانه‌ای، مواد متغیر تابعی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا، بار محوری.

فهرست مطالب

فصل ۱: مقدمه

۱-۱	مقدمه	۲
۲-۱	تعریف پوسته‌ها	۲
۳-۱	دسته‌بندی پوسته‌ها	۳
۴-۱	تئوری پوسته‌های نازک	۵
۱-۴-۱	تئوری غشایی	۷
۲-۴-۱	تئوری خمشی	۷
۵-۱	کمانش	۸
۱-۵-۱	اهمیت کمانش و عوامل ایجاد آن در پوسته‌ها	۱۰
۲-۵-۱	بررسی روش‌های مختلف حل مسئله‌ی کمانش پوسته‌ها	۱۱
۶-۱	مقدمه‌ای بر مواد متغیر تابعی	۱۲
۷-۱	مروری بر پژوهش‌های انجام‌شده	۱۳
۸-۱	معرفی پایان‌نامه‌ی حاضر	۱۹

فصل ۲: مواد متغیر تابعی

۲-۱	مقدمه	۲۲
۲-۲	تاریخچه مواد متغیر تابعی	۲۳
۳-۲	روش‌های تولید مواد متغیر تابعی	۲۶
۱-۳-۲	روش متالوژی پودر	۲۶
۲-۳-۲	روش پوشش‌دهی	۲۸
۴-۲	مدل‌های مواد متغیر تابعی	۳۰
۱-۴-۲	مدل ردی	۳۰
۲-۴-۲	مدل اردوگان	۳۲

۳۲ مدل تانیگاوا ۳-۴-۲

۳۳ مدل نودا ۴-۴-۲

فصل ۳: معادلات حاکم بر تحلیل کمانش و ارتعاشات ۳۵

۳۶ ۱-۳ مقدمه

۳۶ ۲-۳ تئوری حاکم بر پوسته‌ها

۳۶ ۱-۲-۳ تئوری کلاسیک

۳۷ ۲-۲-۳ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

۳۷ ۳-۲-۳ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم

۳۸ ۳-۳ هندسه و خواص پوسته‌ی استوانه‌ای

۳۹ ۱-۳-۳ خواص پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی

۳۹ ۲-۳-۳ خواص وابسته به دما

۴۰ ۴-۳ استخراج معادلات حرکت پوسته‌ی استوانه‌ای

۴۰ ۱-۴-۳ میدان جابه‌جایی

۴۱ ۲-۴-۳ روابط تنش- کرنش

۴۲ ۳-۴-۳ روابط کرنش- تغییر مکان

۴۳ ۴-۴-۳ نتیجه‌های تنش

۴۴ ۵-۴-۳ اصل همیلتون

۴۵ ۶-۴-۳ انرژی کرنشی

۴۶ ۷-۴-۳ انرژی جنبشی

۴۸ ۸-۴-۳ کار انجام شده

۴۸ ۹-۴-۳ معادلات حرکت

۵۰ ۵-۳ رابطه‌ی نتیجه‌های تنش- کرنش

۵۵ ۶-۳ شرایط مرزی

۵۶	۷-۳ تحلیل کمانش
۵۸	۸-۳ تحلیل ارتعاشات آزاد
۶۱	فصل ۴: تحلیل و بررسی نتایج
۶۲	۱-۴ مقدمه
۶۲	۲-۴ خواص وابسته به دما
۶۳	۳-۴ مقایسه‌ی نتایج با تحقیقات گذشته
۶۳	۱-۳-۴ بررسی کمانش
۶۴	۲-۳-۴ بررسی ارتعاشات آزاد
۶۶	۴-۴ ارائه و بررسی نتایج
۶۶	۱-۴-۴ نتایج کمانش
۷۷	۲-۴-۴ نتایج ارتعاشات آزاد
۸۵	۵-۴ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری
۸۷	۶-۴ پیشنهادها
۸۹	پیوست الف
۹۵	پیوست ب
۹۹	پیوست ج
۱۰۷	مراجع

فهرست شکل ها و نمودارها

- شکل (۱-۱) مشخصات هندسی پوسته [۱] ۳
- شکل (۱-۲) تغییرات کسر حجمی اجزای تشکیل دهنده یک ماده‌ی متغیر تابعی در یک جهت مشخص [۳۳] ۲۵
- شکل (۲-۲) تصویر مفهومی از روش پاشش پلاسما [۳۵] ۲۹
- شکل (۱-۳) تغییر شکل راستای عمود بر صفحه میانی در تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه سوم [۳۸] ۳۸
- شکل (۲-۳) پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی تحت بار محوری ۳۸
- شکل (۱-۴) فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار محوری ۶۵
- شکل (۲-۴) بار کمانش بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای تئوری‌های مختلف ۶۷
- شکل (۳-۴) بار کمانش بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای شاخص‌های مختلف ماده ۶۸
- شکل (۴-۴) بار کمانش بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای دماهای مختلف ۶۹
- شکل (۵-۴) بار کمانش بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای ضخامت‌های مختلف ۷۰
- شکل (۶-۴) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب نسبت ضخامت به شعاع ۷۱
- شکل (۷-۴) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب شاخص ماده ۷۲
- شکل (۸-۴) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب ضریب لاغری برای تئوری‌های مختلف ۷۳
- شکل (۹-۴) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب ضریب لاغری برای ضخامت‌های مختلف ۷۴
- شکل (۱۰-۴) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب ضریب لاغری برای شاخص‌های مختلف ماده ۷۵
- شکل (۱۱-۴) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب دما برای شاخص‌های مختلف ماده ۷۶
- شکل (۱۲-۴) فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت

۷۷	بار محوری فشاری و کششی در شاخص‌های مختلف ماده
شکل (۴-۱۳)	فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب شماره مدهای محیطی برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت
۷۸	بارهای محوری فشاری و کششی مختلف
شکل (۴-۱۴)	فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب شماره مدهای محیطی برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت
۷۹	بار محوری در ضخامت‌های مختلف
شکل (۴-۱۵)	فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب شماره مدهای محیطی برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت
۸۰	بار محوری برای طول‌های مختلف
شکل (۴-۱۶)	فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب شماره مدهای محیطی برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت
۸۱	بار محوری فشاری و کششی در دماهای مختلف
شکل (۴-۱۷)	فرکانس پایه بی‌بعد برحسب نسبت ضخامت به شعاع برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار
۸۲	محوری
شکل (۴-۱۸)	فرکانس پایه بی‌بعد برحسب نسبت طول به شعاع برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار
۸۳	محوری فشاری
شکل (۴-۱۹)	فرکانس پایه بی‌بعد برحسب دماهای مختلف برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار محوری
۸۴	فشاری

فهرست جداول

جدول (۱-۴) ضرایب خواص وابسته به دما برای دو ماده‌ی نیکل و سیلیکون نیتريد. ۶۳

جدول (۲-۴) مقایسه‌ی بار بحرانی کمانش (MN) برای پوسته‌ی همسانگرد ساخته شده از آلومینا ۶۴

فهرست علائم و اختصارات

R	شعاع صفحه میانی پوسته
h	ضخامت پوسته
L	طول پوسته
E_{eff}, E_c, E_m	مدول الاستیسیته‌ی فلز، سرامیک و مؤثر
V_{eff}, V_c, V_m	ضریب پوآسون فلز، سرامیک و مؤثر
$\rho_{eff}, \rho_c, \rho_m$	چگالی فلز، سرامیک و مؤثر
V_m	کسر حجمی فلز
V_c	کسر حجمی سرامیک
g	شاخص ماده (تابع توانی)
T	دما بر حسب کلوین
α	ضریب انبساط حرارتی
x	مختصات در جهت طولی استوانه
θ	مختصات در جهت محیطی استوانه
z	مختصات در جهت شعاعی استوانه
w, v, u	مؤلفه‌های جابه‌جایی محوری، محیطی، شعاعی
$\varphi_x, \varphi_\theta$	چرخش‌ها
σ_θ, σ_x	تنش محوری، تنش محیطی
$\varepsilon_\theta, \varepsilon_x$	کرنش محوری، کرنش محیطی
$\sigma_{x\theta}, \sigma_{xz}, \sigma_{\theta z}$	تنش برشی
$\gamma_{x\theta}, \gamma_{xz}, \gamma_{\theta z}$	کرنش برشی

$N_x, N_\theta, N_{x\theta}$	منتجه‌ی تنش (نیرو)
$M_x, M_\theta, M_{x\theta}$	منتجه‌ی تنش (لنگر)
Q_x, Q_θ	منتجه‌ی تنش (نیروی برشی)
$P_x, P_\theta, P_{x\theta}, R_x, R_\theta$	منتجه‌های تنش مرتبه بالا
U	انرژی کرنشی
V_{N_a}	کار حاصل از نیروی محوری
K	انرژی جنبشی
N_a	بار محوری
N_{cr}	بار بحرانی
t	زمان
ω	فرکانس طبیعی
Ω	فرکانس بی‌بعد
n	شماره مد محیطی
m	شماره مد محوری
I_i	اینرسی جرمی
[Q]	ماتریس سفتی کاهش یافته
$\bar{A}_{mn}, \bar{B}_{mn}, \bar{C}_{mn}, \bar{H}_{mn}, \bar{K}_{mn}$	شکل مدها
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, J_{ij}, H_{ij}, L_{ij}$	سفتی‌ها

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ مقدمه

پوسته‌ها^۱ به‌طور کلی، سازه‌هایی خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به تناسب مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آن‌ها نیز حائز اهمیت می‌باشد. روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. پژوهشگران، پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش و در صورت امکان، وزن آن‌ها را کاهش دهند.

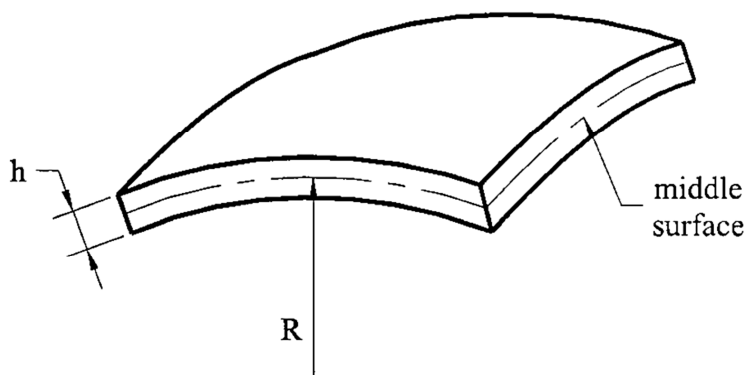
پوسته‌های استوانه‌ای از مهم‌ترین سازه‌های مورد استفاده در صنایع مختلف هستند. این سازه‌ها به جهت داشتن تناسب قابل قبول میان میزان وزن و مقاومت مکانیکی، از پرکاربردترین سازه‌های مهندسی هستند. به همین دلیل شاخه‌های مختلف مهندسی مانند مکانیک، هوافضا، الکترونیک، معدن، هسته‌ای و ... از این سازه برای تأمین نیازهای خود بهره برده‌اند. محدوده‌ی استفاده‌ی آن‌ها، از ساختارهای بزرگ مکانیکی و عمرانی تا تجهیزات کوچک الکترونیکی را شامل می‌شود.

۲-۱ تعریف پوسته‌ها

پوسته به جسمی گفته می‌شود که توسط دو سطح انحنا دار محدود شده و فاصله‌ی این دو سطح در مقایسه با سایر ابعاد جسم کوچک است (شکل (۱-۱)). مکان هندسی نقاطی که در فاصله‌ی

^۱ Shells

مساوی از دو سطح انحنا دار قرار می گیرند، سطح میانی^۱ نامیده می شود. فاصله ی عمودی بین دو سطح، ضخامت پوسته نام دارد. هندسه ی پوسته با مشخص شدن شکل سطح میانی و ضخامت پوسته در هر نقطه تعیین می گردد. پوسته ها از نظر انحنا به پوسته های استوانه ای، مخروطی، کروی، بیضوی، سهموی و هذلولوی سهموی و ... تقسیم بندی می شوند [۱].



شکل (۱-۱) مشخصات هندسی پوسته [۱]

۳-۱ دسته بندی پوسته ها

در این بخش، پوسته ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته بندی می شوند.

الف - دیدگاه هندسی:

پوسته ی حاصل از انتقال^۲: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه ی قوس، حاصل می شود.

پوسته ی حاصل از دوران^۳: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه ی قوس، حاصل می شود.

¹ Midsurface

² Shell of Translation

³ Shell of Revolution

پوسته‌ی جدار نازک^۱: پوسته‌ی نازک به پوسته‌ای اطلاق می‌گردد که دارای شرط زیر باشد.

$$\max\left(\frac{h}{R}\right) \leq \frac{1}{20} \quad (۱-۱)$$

در رابطه‌ی (۱-۱)، h ضخامت پوسته و R شعاع انحنای سطح میانی می‌باشد. برای بسیاری از کاربردهای عملی ضخامت پوسته‌های نازک در محدوده‌ی زیر قرار می‌گیرند.

$$\frac{1}{1000} \leq \frac{h}{R} \leq \frac{1}{20} \quad (۲-۱)$$

پوسته‌ی جدار ضخیم^۲: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع آن از رابطه‌ی (۳-۱) پیروی کند پوسته‌ی ضخیم نامیده می‌شود [۲، ۱].

$$\frac{h}{R} \geq \frac{1}{20} \quad (۳-۱)$$

ب- دیدگاه مادی:

پوسته‌ی همگن^۳: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

پوسته‌ی ناهمگن^۴: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

پوسته‌ی همسانگرد^۵: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان است.

¹ Thin Shell

² Thick Shell

³ Homogeneous Shell

⁴ Inhomogeneous Shell

⁵ Isotropic Shell

پوسته‌ی ناهمسانگرد^۱: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان نیست [۲].

ج - دیدگاه رفتاری:

پوسته با تغییر شکل‌های کوچک^۲: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ^۳: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک نیست (رفتار غیرخطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان^۴: تغییر شکل‌ها بازگشت پذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند (رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان^۵: تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیرخطی از نظر مادی) [۲].

۴-۱ تئوری پوسته‌های نازک

تئوری این دسته از پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به طور کلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته‌ی سه‌بعدی استفاده نمی‌شود، بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی- تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک به‌دست می‌آورند. دقت نتایج تئوری‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد. اولین فرضیات را کیرشهف^۶ (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته‌ها به کار

¹ Anisotropic shell

² Small Deflection

³ Large Deflection

⁴ Elastic Behavior

⁵ Plastic Behavior

⁶ Kirchhof

گرفته شد. آرون^۱ (۱۸۷۴) تئوری پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لوو^۲ (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به‌عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری لوو - کیرشهف معروف است. رایسنر^۳ (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لوو تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری^۴ را ارائه نمود. فلوگه^۵ (۱۹۳۲) اولین کسی است که تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به‌عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشد. با ساده‌سازی آن‌ها تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه یک و صفر به‌دست می‌آیند. نظریات فلوگه توسط بیرنه^۶ (۱۹۴۴) تکمیل شد. نقدی^۷ (۱۹۵۷) تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که به‌کارگیری آن‌ها مشکل می‌باشد. سندرز^۸ (۱۹۵۹) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلِف^۹ (۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادلات به شکل فشرده‌تری نوشته شدند [۲].

تئوری عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به‌این گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱- تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی)^{۱۰}

۲- تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)^{۱۱}

۳- تئوری با تقریب مرتبه‌ی دو (تئوری فلوگه)^[۳].

¹ Aron

² Love

³ Reissner

⁴ Axisymmetric Shell of Revolution

⁵ Flugge

⁶ Byrne

⁷ Naghdi

⁸ Sanders

⁹ Novozhilov

¹⁰ Membrane Theory

¹¹ Bending Theory

۱-۴-۱ تئوری غشایی

غشاء^۱ از دیدگاه مکانیکی، یک تار^۲ دوبعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری کششی را تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی^۳ آن‌ها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، به‌طور عمده از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در تئوری غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسائل در حالت تنش صفحه‌ای^۴ و کرنش صفحه‌ای^۵ با چشم‌پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی و هم‌چنین تنش‌ها و کرنش‌های برشی تحلیل می‌شود.

۱-۴-۲ تئوری خمشی

ورق^۶ از دیدگاه مکانیکی، یک تیر^۷ دوبعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آن‌ها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناویر^۸ ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لوو با همین فرضیات، تئوری خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلی، معادلات تعادل به تنهایی برای به‌دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به‌عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در تئوری خمشی نیز، جابه‌جایی پوسته با

¹ Membrane

² String

³ Bending Stiffness

⁴ Plane Stresses

⁵ Plane Strain

⁶ Plate

⁷ Beam

⁸ Navier

جابه‌جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لوو - کیرشهف می‌نامند که عبارتند از [۳]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلفه‌های تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم‌پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ها کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شود (کرنش صفحه‌ای).

۵-۱ کمانش

پدیده‌ی کمانش از حدود یک قرن پیش مورد توجه دانشمندان و پژوهشگران بوده است. از آن زمان تا به حال پژوهش‌های بسیاری در این زمینه بر روی ورق‌ها و پوسته‌ها انجام شده است.

چنانچه سازه‌ای در معرض بار محوری فشاری قرار گیرد، برای بارهای کوچک، سازه به‌سختی تغییر شکل می‌دهد. چنانچه مقدار بار اعمالی افزایش یابد برای مقدار خاصی از بار که مقدار بحرانی^۱ نامیده می‌شود، سازه نمی‌تواند نیروی اعمالی را تحمل کند و از این نقطه به بعد، سازه وارد تغییر شکل بزرگ می‌شود. هنگامی که سفتی یک سازه تحت تأثیر بار کاهش می‌یابد و سازه متحمل جابه‌جایی‌های عرضی بزرگ و قابل مشاهده می‌شود، از عبارت کمانش استفاده می‌شود. برای بارهای کوچک فرآیند کمانش الاستیک خواهد بود، چون پس از برداشتن بار جابه‌جایی‌ها ناپدید می‌شوند. اگر

^۱ Critical load

جابه‌جایی ناشی از کمانش، بیش از حد بزرگ شود سازه گسیخته خواهد شد. در طراحی سازه‌ها اگر یک عضو یا بخشی از آن تحت کمانش قرار گیرد، در تحلیل آن می‌بایست هر دو مبحث ایمنی مقاومتی و ایمنی کمانشی بررسی شود که دلیل لزوم مطالعه‌ی مبحث کمانش نیز همین امر است.

با پیشرفت‌های به دست آمده در زمینه‌ی تولید مواد با مقاومت زیاد، سازه‌ها احتیاج به میزان ماده کمتری برای تحمل بار دارند. بدین مفهوم که با داشتن مواد دارای مقاومت مکانیکی بالا، به طور کلی ضخامت و سطح مقطع مورد نیاز سازه‌ها جهت تحمل بارهای وارده کم شده و در نتیجه سازه‌ها لاغرتر و کمانش‌پذیرتر شده‌اند. تعداد زیادی از نمونه‌های تاریخی که شکست سازه‌ای را به کمانش نسبت می‌دهند موجود است: مانند فروپاشی سیلوها، پل‌های در حال ساخت، سکوهای نفتی و شکست سازه‌های هواپیما پیش از رسیدن به بار نهایی طراحی.

تمام تلاش مهندسان و طراحان بر این است که تا حدّ امکان به جای استفاده از سازه‌های توپر، سنگین و جدار ضخیم^۱ از سازه‌های سبک و جدار نازک^۲ استفاده کنند. سازه‌های جدار نازک سازه‌هایی هستند که دارای ضخامت بسیار کم نسبت به سایر ابعاد سازه می‌باشند. این تعریف شامل گروه بزرگی از سازه‌ها می‌باشد که کاربرد فراوانی در صنایع مختلف اعم از صنایع هوافضا، خودروسازی، سازه‌های عمرانی، سازه‌های دریایی و مخازن دارند. نکته‌ی مهم در طراحی این نوع سازه‌ها معیار طراحی است که باید بر اساس معیار کمانش صورت گیرد؛ زیرا سازه‌های جدار نازک به علت کم بودن ضخامتشان به شدّت نسبت به پدیده‌ی کمانش حساس هستند و ممکن است در اثر بارگذاری‌هایی با شدّت بسیار کم دچار مشکل شوند. از آنجا که پدیده‌ی کمانش یک پدیده‌ی ناپایدار کننده در سازه می‌باشد و ممکن است به شکست سازه بیانجامد، شناخت این پدیده جهت طراحی سازه، امری ضروری محسوب می‌شود. در طراحی سازه‌های هوایی با توجه به محدودیت وزنی این امر بسیار حساس‌تر می‌باشد؛ زیرا اگر طراح ضخامت صفحات، پوسته‌ها و سایر اجزای سازه را بیشتر از حدّ نیاز

^۱ Heavy and Thick Structures

^۲ Light and Thin Structures

در نظر گیرد با توجه به افزایش وزن سازه، طرح بهینه نمی‌باشد و خطا در طراحی محسوب می‌شود. از طرفی با کاهش ضخامت صفحات و پوسته‌ها پدیده‌ی کمانش ممکن است رخ دهد و در نتیجه طراحی این نوع سازه‌ها ملزم به یک روند تکرار و سعی و خطا می‌باشد تا نقطه‌ی بهینه‌ی طراحی مشخص شود [۴].

۱-۵-۱ اهمیت کمانش و عوامل ایجاد آن در پوسته‌ها

پوسته‌ها اجسامی سه‌بعدی هستند که توسط دو سطح منحنی محدود شده‌اند و فاصله‌ی بین این دو سطح در مقایسه با سایر ابعاد کوچک است. کاربرد این اجسام در زمینه‌های مختلف زیاد است؛ از دلایل این امر می‌توان به نسبت مقاومت به وزن زیاد و نیز سفتی زیاد پوسته اشاره کرد.

از میان پوسته‌ها با اشکال هندسی مختلف، پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل سهولت ساخت و نیز مناسب بودن این شکل هندسی برای برخی کاربردها در صنعت استفاده‌ی وسیعی دارند. استفاده فراوان از پوسته‌های استوانه‌ای به‌خصوص در صنایع حساس، از جمله در ذخیره‌ی مایعات که گاه می‌توانند مشتعل شوند و یا سمی باشند، هواپیما، زیردریایی و راکتورهای اتمی؛ اهمیت بررسی پدیده‌های مکانیکی مربوط به آن‌ها از جمله کمانش را چند برابر کرده است. فرض کنید که بدنه‌ی یک هواپیما در هنگام پرواز و یا نشستن، در اثر نیروهای وارد شده بر آن دچار کمانش شود و یا یک زیردریایی هنگامی که در اعماق آب است در اثر فشار هیدرو استاتیک آب دچار کمانش شود، فکر کردن به عواقب این دست مسائل به خوبی اهمیت بررسی کمانش را پدیدار می‌سازد. می‌توان دریافت که وقوع این پدیده چه هزینه‌هایی اعم از مالی و جانی را می‌تواند تحمیل کند، لذا لازم است در هنگام طراحی به این مسئله توجه کافی شود و این امر فقط از طریق شناخت مکانیزم کمانش و بررسی در این زمینه قابل دستیابی است. ذکر این نکته در اینجا ضروری است که به طور کلی کمانش به صورت ناگهانی رخ می‌دهد و همین امر اهمیت بررسی آن را بیشتر می‌کند. کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ممکن است تحت اثر موارد زیر رخ دهد [۴]:

۱- نیروی محوری

۲- فشار خارجی

۳- پیچش

۴- ترکیب موارد فوق

۱-۵-۲ بررسی روش‌های مختلف حل مسئله‌ی کمانش پوسته‌ها

استفاده‌ی بسیار وسیع از ورق‌ها و پوسته‌ها به‌عنوان المان‌های سازه‌ای باعث شده است که تحقیقات دیرینه و بسیار وسیعی پیرامون آن‌ها انجام شود. تحقیقات به یکی از سه روش زیر استوار است:

۱- بررسی تحلیلی سازه‌ها

۲- بررسی عددی سازه‌ها

۳- بررسی تجربی سازه‌ها

امروزه سه روش فوق رایج بوده و گاهی از هر سه روش برای انجام یک تحقیق استفاده می‌شود. حل تحلیلی سازه‌ها، روشی است که بر یک یا چند اصل فیزیکی استوار است؛ که توسط روش‌های ریاضی توسعه داده شده‌اند. این روش حل بیشتر برای مسائل و سازه‌هایی با هندسه‌ی ساده و بارگذاری‌ها و شرایط مرزی متقارن جواب‌های دقیقی ارائه می‌دهد و حل بسیاری از مسائل ساده در کتاب‌های منتشر شده موجود است. از روش‌های تحلیل سازه‌ها می‌توان به تحلیل تنش یک مخزن استوانه‌ای تحت فشار داخلی یا خارجی و یا یک ورق تحت کشش که یک سوراخ در آن ایجاد شده است اشاره نمود. در روش تحلیلی اگر اندکی مسئله از لحاظ هندسه، بارگذاری یا شرایط مرزی پیچیده شود دست یافتن به جواب دقیق بسیار دشوار و حتی غیرممکن می‌گردد. در مواردی نیز جواب‌های تقریبی برای حل تحلیلی سازه‌ها به‌دست می‌آید. شاید دلیل تقریبی بودن این حل، فرض‌های ساده‌کننده‌ی است که برای حل معادلات به کار رفته‌اند. عدم توانایی در حل معادلات

دیفرانسیلی که از حل‌های تحلیلی حاصل می‌شود، از مهم‌ترین مشکلات حل تحلیلی است.

حل عددی سازه‌ها نیز روش دیگری است که امروزه توسط برنامه‌های قدرتمند المان محدود به بازار صنعت آمده است. این روش بسیار ارزان قیمت و مقرون به صرفه است و همواره می‌توان از آن بهره برد. زمانی که استفاده از روش‌های تجربی و آزمایشگاهی گران قیمت یا غیرممکن باشد، استفاده از حل عددی می‌تواند کمک زیادی به حل مسئله کند.

رایج‌ترین روش عددی که امروزه مورد استفاده‌ی مهندسين و محققين قرار می‌گیرد، روش المان محدود می‌باشد که به وسیله‌ی آن یک سازه‌ی پیوسته تبدیل به تعداد زیادی المان سازه‌ای می‌شود. در این زمینه کتاب‌های بسیار زیادی تألیف و منتشر شده است که بیانگر اهمیت و قابلیت این روش در حل مسائل سازه‌ای می‌باشد.

آخرین روش برای حل مسائل سازه‌ای روش آزمایشی یا روش تجربی می‌باشد. این روش همواره جواب نهایی مسئله می‌باشد. هیچ‌گاه نمی‌توان جواب‌های تحلیلی یا عددی را بر جواب‌های تجربی ترجیح داد. در بسیاری از مسائل روابط تحلیلی وجود دارند که توسط نتایج آزمایش بهینه شده‌اند. بنابراین اولین معیار مقایسه برای صحت نتایج عددی یا تحلیلی مقایسه با نتایج تجربی می‌باشد. به دست آوردن نتایج تجربی می‌تواند به قیمت بسیار بالایی تمام شود؛ بنابراین استفاده از آن مستلزم محدودیت در مسائل اقتصادی می‌باشد [۵].

۶-۱ مقدمه‌ای بر مواد متغیر تابعی

نظریه‌ی ساخت مواد متغیر تابعی^۱ برای نخستین بار در سال ۱۹۸۴ توسط دانشمندان علم مواد ژاپن معرفی شد [۶]. این مواد برای استفاده در دمای بالا و شرایطی که یک قطعه بایستی خواص متفاوتی در قسمت‌های مختلف داشته باشد، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این شرایط استفاده از

^۱ Functionally graded material

مواد با خواص ثابت کارایی لازم را نداشته و این باعث ایجاد موادی شده که دارای خواص متغیر به صورت تابعی هستند. به خاطر تغییرات تدریجی در میکرو ساختارهای این مواد، تغییرات خواص به صورت تدریجی بوده و مشکل عدم تطابق در سطوح تماس در دو ماده مختلف که در بارگذاری‌های مختلف و در تغییرات دمایی در ماده نقش منفی خود را در استحکام و طول عمر نشان می‌دهند، از بین خواهد رفت. در طی سه دهه‌ی گذشته، مطالعات متعددی بر روی مواد متغیر تابعی صورت گرفته است. این مواد کاربردهای مفیدی در اجزای موتور موشک، بدنه‌ی فضاپیماها، اجزای راکتورهای اتمی، تیغه‌های توربین و کاربردهای فنی و مهندسی دیگر دارند.

استفاده از پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد متغیر تابعی، به دلیل تحمل بارهای فشاری و همچنین مقاومت در دمای حرارتی بالا، کاربردهای فراوانی در صنایع هوا و فضا، صنایع شیمیایی و راکتورهای هسته‌ای دارند. در اکثر این کاربردها، پوسته تحت بارگذاری فشاری قرار دارد و ممکن است دچار کمانش شود. به عنوان مثال، یافتن بار بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی در طراحی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از طرفی بایستی فرکانس‌های طبیعی پوسته شناخته شوند تا از پدیده‌ی تشدید و اختلال در کار آیی اجزای متصل به پوسته جلوگیری شود. از این رو تحلیل کمانش و ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی نیز در سال‌های گذشته مورد توجه بسیاری از پژوهشگران بوده است.

۷-۱ مروری بر پژوهش‌های انجام شده

رادوان^۱ و جنین^۲ [۷] در پژوهشی ناپایداری پوسته‌های استوانه‌ای را تحت شرایط مرزی ساده بررسی کردند. لوی^۳ و همکاران [۸] با استفاده از تئوری کلاسیک و به روش مربعات دیفرانسیلی^۱

^۱ Radwan

^۲ Genin

^۳ Loy

دیفرانسیلی^۱ به بررسی ارتعاشات یک پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مرزی ساده و گیردار پرداختند، هم‌چنین لوی و همکاران [۹] ارتعاشات پوسته‌ی متغیر تابعی را با استفاده از تئوری پوسته لوو و به روش رایلی-ریتز^۲ تحلیل کردند. پرادهان^۳ و همکاران [۱۰] به مطالعه بر روی ارتعاشات آزاد پوسته-های استوانه‌ای متغیر تابعی تحت شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش رایلی پرداختند. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی پوسته را برای شرایط مرزی مختلف به دست آوردند و آن را با هم مقایسه کردند. درنهایت به این نتیجه رسیدند که فرکانس‌های طبیعی پوسته برای هر شرط مرزی، با افزایش شماره مد محیطی، در ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. آن‌ها در مقاله‌ی خود به این نکته اشاره کردند که با افزایش شاخص ماده در رابطه‌ی توانی، سفتی‌های کششی و خمشی کاهش می‌یابد؛ این در حالی است که سفتی پیچشی در ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد هم‌چنین بیشترین مقدار سفتی پیچشی نیز هنگامی رخ می‌دهد که شاخص ماده برابر یک باشد.

فریرا^۴ و همکاران [۱۱] به مطالعه‌ی استاتیکی ورق‌های متغیر تابعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا پرداختند. کادولی^۵ و گانسان^۶ [۱۲] کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی در معرض حرارت را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و به روش المان محدود^۷ نیمه‌تحلیلی مطالعه کردند. آن‌ها چند مواد متغیر تابعی مختلف را تحت شرایط مرزی گیردار بررسی کردند. قربان‌پور آرانی و همکاران [۱۳] به بررسی پایداری پوسته‌های استوانه‌ای با هسته‌ی الاستیک تحت فشار محوری با شرایط مرزی ساده پرداختند. آن‌ها با استفاده از روابط غیرخطی کرنش-جابه‌جایی سندرز^۸ و به روش انرژی معادلات پایداری و سازگاری را به دست آوردند و

¹ Differential Quadrature Method (DQM)

² Rayleigh-Ritz

³ Pradhan

⁴ Ferreira

⁵ Kadoli

⁶ Ganesan

⁷ Finite Element Method (FEM)

⁸ Sanders

برای تحلیل کمانش از روش گالرکین^۱ استفاده کردند. لی^۲ و باترا^۳ [۱۴] به مطالعه‌ی کمانش یک پوسته‌ی استوانه‌ای سه‌لایه تحت بار محوری پرداختند و اثر پارامترهای هندسی و تغییر خواص مواد را بر روی بار بحرانی کمانش بررسی کردند. شنگ^۴ و وانگ^۵ [۱۵] به تأثیرات بار حرارتی و بار مکانیکی بر روی ارتعاشات، کمانش و پایداری دینامیکی پوسته استوانه‌ای متغیر تابعی احاطه شده به‌وسیله‌ی یک بستر الاستیک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند.

آدرازا و همکاران [۱۶] نیز به انجام پژوهشی بر روی کمانش و ارتعاشات پوسته‌ی استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه با استفاده از سه روش کلاسیک، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و روش نرم‌افزاری پرداختند. آن‌ها بعد از به دست آوردن معادلات حرکت، با استفاده از روابط کرنش-جابجایی بر مبنای تقریب اول لوی و جایگزینی آن‌ها در روابط تنش-کرنش در نهایت معادلات حرکت بر حسب مؤلفه‌های تغییر مکان را به دست آوردند و تحت شرایط مرزی یکسر آزاد و یکسر گیردار، مؤلفه‌های تغییر مکان را به‌صورت سری‌های فوریه دوگانه در نظر گرفتند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که با افزایش بار محوری فشاری، فرکانس‌های طبیعی پوسته کاهش می‌یابند.

حدادپور و همکاران [۱۷] مطالعه‌ای را بر روی کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای متغیر تابعی با تکیه‌گاه ساده، تحت اثر دما انجام دادند. آن‌ها خواص مواد را وابسته به دما و در جهت ضخامت بر اساس رابطه توزیع توانی فرض کردند. معادلات حاکم بر اساس تئوری لوی و روابط غیرخطی دانیل-کارمن^۶ استخراج و برای حل معادلات حرکت از روش گالرکین استفاده شد.

ژاو^۷ و همکاران [۱۸] پاسخ استاتیکی و ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی را با

^۱ Galerkin

^۲ Li

^۳ Batra

^۴ Sheng

^۵ Wang

^۶ Donnell-Karman

^۷ Zhao

فرض تغییرات خواص به‌طور پیوسته در راستای عمق، از روش کاپی-ریتز^۱ و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای پوسته به‌دست آورده‌اند. در این مطالعه تأثیر عواملی مانند کسر حجمی، خواص مواد، شرایط مرزی، نسبت طول به ضخامت پوسته، برای ارتعاشات آزاد مورد بررسی قرار گرفته است. همگرایی حل با تغییر تعداد گره‌ها برای معتبر سازی حل مورد بررسی قرار گرفته است.

ابراهیمی و سپیانی [۱۹] به تحقیق بر روی تأثیرات برش عرضی و اینرسی چرخشی بر روی ارتعاشات و کمانش پوسته استوانه‌ای متغیر تابعی که تحت بار محوری قرار دارد، پرداختند. سپیانی و همکاران [۲۰] پژوهشی را بر روی کمانش و ارتعاشات پوسته استوانه‌ای متغیر تابعی، احاطه شده به‌وسیله‌ی یک لایه‌ی الاستیک ایزوتروپیک^۲، با در نظر گرفتن برش عرضی و اینرسی چرخشی انجام دادند. در پژوهش آن‌ها خواص مواد وابسته به دما و استوانه تحت بار محوری فشاری قرار داشت.

ردی^۳ و لیو^۴ [۲۱] تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا^۵ را برای پوسته‌های الاستیک به کار بردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا به دلیل این‌که میدان جابه‌جایی بر اساس تغییرات سهموی تخمین زده می‌شود، نیازی به ضریب تصحیح برشی نیست.

صادقی‌فر و همکاران [۲۲] به بررسی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای چندلایه دارای تقویت‌کننده با خارج از مرکزی غیریکنواخت پرداختند. آن‌ها تأثیر خارج از مرکزی غیریکنواخت استرینگرها^۶ را بر روی بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای با شرط مرزی ساده بررسی کردند. هم‌چنین بار بحرانی کمانش را با استفاده از روابط کرنش-جابه‌جایی لوو و بر اساس تئوری مرتبه‌ی اول برشی و به کمک روش رایلی-ریتز به‌دست آوردند. سپس به بررسی تأثیرات نسبت طول به شعاع، نسبت ضخامت به شعاع، تعداد استرینگرها و نسبت عمق به عرض استرینگرها بر روی بار کمانش پرداختند.

¹ Kp-Ritz

² Isotropic

³ Reddy

⁴ Liu

⁵ High Order Shear Deformation Theory (HSDT)

⁶ Stringers

فونگ^۱ و بک^۲ [۲۳] به بررسی کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی تقویت شده، تحت بار محوری فشاری، فشار خارجی و بار پیچشی پرداختند. پوسته‌ی مورد مطالعه‌ی آن‌ها دارای رینگ^۳ و استرینگر در سطح داخلی و خارجی بود. آن‌ها معادلات حاکم را با استفاده از تئوری کلاسیک به دست آوردند و به‌وسیله‌ی روش گالرکین آن را حل کردند.

محمدزاده و همکاران [۲۴] نیز به بررسی کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی دوبعدی^۴ (تغییرات در دو جهت شعاعی و محوری) تحت بارهای ترکیبی محوری و فشار خارجی بر اساس تئوری کلاسیک پرداختند. آن‌ها با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، بار بحرانی کمانش برای پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی دوبعدی را به‌دست آوردند و آن را با بار بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای متغیر تابعی یک‌بعدی مقایسه کردند. درنهایت به این نتیجه بار بحرانی کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای دوبعدی بیشتر از بار بحرانی کمانش در پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی یک‌بعدی است و این مسئله اثر قابل توجهی بر بار بحرانی کمانش دارد.

ابراهیمی و نجفی‌زاده [۲۵] ارتعاشات آزاد یک پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی دوبعدی را بررسی کردند. آن‌ها معادلات را بر اساس روابط کرنش-جابه‌جایی لویو و با استفاده از تئوری کلاسیک به دست آوردند و برای حل آن‌ها از روش مربعات دیفرانسیلی استفاده کردند.

فراهانی و همکاران [۲۶] کمانش مکانیکی پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی، تقویت‌شده^۵ در جهت شعاعی و محوری، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم^۶ را مطالعه کردند. ژانگ-لانگ^۷ و همکاران [۲۷] تحلیل کمانش و ارتعاشات پوسته‌ی استوانه‌ای مگنوالکترو ترموالاستیک^۸ با

¹ Phoung

² Bich

³ Ring

⁴ Two-dimensional functionally graded material

⁵ Stiffend

⁶ Third order shear deformation theory

⁷ Zhang Lang

⁸ Magneto-electro-thermo-elastic

استفاده از تئوری مرتبه بالا را بررسی کردند. هم‌چنین هوای‌وی هانگ^۱ و همکاران [۲۸] با استفاده از روش ریتز و روش المان محدود رفتار کمانشی پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی را تحت بارگذاری‌های محوری، جانبی و پیچشی بررسی کردند.

سوفی‌یوو^۲ و کروغلو^۳ [۲۹] در مقاله‌ای با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی به بررسی کمانش و ارتعاشات یک پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی تحت فشار خارجی پرداختند. آن‌ها معادلات حاکم را بر اساس تئوری پوسته دائل به‌دست آوردند و برای حل معادلات از روش گالرکین استفاده کردند.

سوفی‌یوو [۳۰] هم‌چنین به بررسی پایداری یک پوسته‌ی مخروطی متغیر تابعی تحت بار محوری فشاری پرداخت. معادلات با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و بر مبنای تئوری پوسته دائل به دست آمد و حل آن‌ها با استفاده از روش گالرکین صورت گرفت.

در اکثر مطالعات انجام شده، تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای با استفاده از تئوری کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول انجام شده است. در تئوری کلاسیک از کرنش‌های برشی عرضی صرف‌نظر می‌شود و در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول نیز نیاز به یک ضریب تصحیح برش^۴ است تا خطا در آن زیاد نشود؛ بنابراین تحلیل کمانش و ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا که در آن کرنش‌های برشی عرضی لحاظ می‌شود و نیازی به ضریب تصحیح برشی نیز ندارد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. هم‌چنین در بیشتر این مطالعات، خواص مواد متغیر تابعی مستقل از دما در نظر گرفته شده است؛ در حالی که در اکثر کاربردها، مواد متغیر تابعی در محیط‌هایی با دماهای بسیار بالا استفاده می‌شوند و تغییر دما بر

¹ Huaiwei Huang

² Sofiyev

³ Kuruoglu

⁴ Shear correction factor

روی خواص مواد متغیر تابعی تأثیر می‌گذارد. در پژوهش‌های فوق کار ویژه‌ای بر روی کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی که تحت بار محوری استاتیکی قرار دارد، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم انجام نگرفته است. با توجه به کاربرد وسیع پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی به‌خصوص در صنایع حساسی مانند: صنایع هسته‌ای، هوافضا و ... که در اکثر کاربردها نیز در معرض کمانش و یا ارتعاشات قرار دارند، بررسی کمانش و ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم که جواب‌های دقیق‌تری نسبت به تئوری کلاسیک و تئوری مرتبه اول می‌دهد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

۸-۱ معرفی پایان‌نامه‌ی حاضر

در این پژوهش به بررسی کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی تحت بار محوری پرداخته شده است. مبنای کار بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم می‌باشد.

در فصل دوم؛ به معرفی مواد متغیر تابعی و روش‌های ساخت این مواد و همچنین به مدل‌سازی ریاضی این مواد پرداخته شده است.

در فصل سوم؛ با مقدمه‌ای بر تئوری‌های حاکم بر جابه‌جایی پوسته‌ها به تشریح کامل هندسه‌ی پوسته پرداخته شده است. سپس معادلات حرکت به‌دست آمده و این معادلات حل شده است.

در فصل چهارم؛ نتایج حاصل از تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته مورد بحث و بررسی قرار گرفته و درنهایت پیشنهادهایی برای ادامه‌ی کار ارائه شده است.

فصل ۲

مواد متغیّر تابعی

۲-۱ مقدمه

مواد متغیر تابعی (FGM)^۱ گروه جدیدی از مواد هستند که برای استفاده در محیط‌هایی با دمای بالا و شرایطی که یک قطعه بایستی خواص متفاوتی در قسمت‌های مختلف داشته باشد، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این شرایط استفاده از مواد با خواص ثابت کار آیی لازم را نداشته و این باعث ایجاد موادی شده که دارای خواصی متغیر به صورت تابعی هستند. به دلیل تغییرات تدریجی در میکرو ساختارهای این مواد، تغییرات خواص آن نیز به صورت تدریجی است. مشکل عدم تطابق در سطوح تماس دو ماده‌ی مختلف، که در بارگذاری‌ها و در تغییرات دمایی، نقش منفی خود را در استحکام و طول عمر نشان می‌دهد، از بین خواهد رفت.

بسیاری از مواد با خواص تابعی متغیر، ترکیبی از سرامیک و فلز هستند. می‌توان این مواد را به گونه‌ای ساخت که در قسمت‌هایی که نیاز به قابلیت تحمل دماهای بالا و مقاومت به سایش است؛ درصد سرامیک بالا بوده و خواص ماده به خواص سرامیک نزدیک باشد و از طرف دیگر در قسمت‌هایی که نیاز به استحکام زیاد است درصد فلز بیشتر و خواص ماده به خواص فلز شباهت داشته باشد. این مواد به خاطر خواص ذکر شده در بالا دارای کاربردهای فراوانی در صنایع مربوط به مهندسی مکانیک، هوافضا و عمران هستند و به خاطر خواص دمایی و مکانیکی مناسب، دارای پتانسیل بالایی برای استفاده در بسیاری از زمینه‌ها هستند. در صنایعی که سازه در مجاورت دماهای بسیار بالا قرار دارد، استفاده از مواد همگن که خواص‌های طراح را برآورده کند بسیار مشکل است. در حرارت‌های زیاد، فلزات و آلیاژهای فلزی به شدت در معرض اکسیداسیون قرار می‌گیرند و این در حالی است که استفاده‌ی تنها از مواد سرامیکی، بسیاری از خواص مورد نظر در طراحی مانند چقرمگی و استحکام بالا را برآورده نمی‌سازد. برای رفع این مشکل از فلزات یا مواد مرکب با پوشش عایق حرارتی استفاده می‌شود ولی تغییر ناگهانی خواص ترمودینامیکی از لایه‌ای به لایه دیگر در مواد مرکب، موجب افزایش

^۱ Functionally Graded Materials

تنش‌های حرارتی و ایجاد ترک در سطوح مشترک و گسیختگی سازه در تغییرات دمایی بالا می‌شود. از این‌رو در سال‌های گذشته، دستیابی به موادی که دارای تغییرات یکنواخت خواص مکانیکی و حرارتی در راستای ضخامت باشد، مورد توجه محققان قرار گرفته است. مواد متغیر تابعی در زمره‌ی مواد همسانگرد و غیر همگن قرار دارند که خصوصیات آن‌ها به‌طور پیوسته از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. در بیشتر آن‌ها، ماده‌ی سرامیکی به عنوان پوشش محافظ در برابر حرارت روی سازه فلزی که دارای چقرمگی و استحکام و دیگر خواص مطلوب طراحی است، قرار می‌گیرد. تغییرات تدریجی و پیوسته‌ی نسبت حجمی مواد سازنده‌ی متغیر تابعی‌ها، موجب جلوگیری از تغییر ناگهانی خواص ترمودینامیکی بین پوشش سرامیکی و فلز شده و باعث کاهش تنش‌های حرارتی و تنش‌های پس‌ماند در سطح تمامی پوشش و فلز می‌شوند. یک مثال از این مواد در شکل (۱-۲) نشان داده شده است. متداول‌ترین کاربرد مواد متغیر تابعی در فضاپیماها، توربین‌های گازی، پوشش مقاوم در برابر سایش و خوردگی در ابزار برش، چرخ‌دنده‌ها، بلبرینگ‌ها و ... است. راکتورهای هسته‌ای، خطوط تخلیه موتور، سطوح سازه‌های هوایی و فضایی، کوره‌ها و صنعت الکترونیک از دیگر موارد کاربرد مواد متغیر تابعی هستند.

۲-۲ تاریخچه مواد متغیر تابعی

نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالا و قابلیت تحمل گرادیان شدید حرارتی، به انگیزه‌ای برای تولید مواد متغیر تابعی تبدیل شد. به‌عنوان مثال سطوح سازه‌های فضایی به هنگام ورود به جو زمین می‌بایست اختلاف دمایی در حدود ۱۶۰۰ کلوین را تحمل کنند. به این علت دانشمندان علم مواد در ژاپن در سال ۱۹۸۴ در مرکز تحقیقات هوافضا در شهر سندایی^۱ تصمیم گرفتند ماده‌ای طراحی کنند تا گرادیان شدید دما را تحمل کند [۳۱]. در سال ۱۹۸۷، سه سال بعد از اولین ایده‌های ساخت مواد متغیر تابعی، یک پروژه‌ی عظیم برای رسیدن به فن‌آوری اولیه ساخت این مواد تعریف شد که

^۱Sendai

مؤسسات پژوهشی هفده کشور و چندین دانشگاه و شرکت در آن همکاری کردند [۳۲].

برای نخستین بار در سال ۱۹۷۲ بور^۱ و دووژ^۲ [۳۱] ایده‌ی ترکیب دو فاز مختلف را با تغییر در نحوه‌ی آرایش و ترتیب هر کدام از فازها در هر لایه به‌منظور بهبود خواص مکانیکی مطرح کردند. ایده‌ی آن‌ها از نتایج تحقیقات گسترده‌ای که گتزل^۳ [۳۱] در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ روی مواد مرکب انجام داده بود نشأت می‌گرفت. در اواسط دهه‌ی ۱۹۸۰ برای نخستین بار در کشور ژاپن نام علمی FGM به مواد متغیر تابعی داده شد و عصر جدیدی برای تحقیقات گسترده روی این مواد گشود. سه تن از دانشمندان به نام‌های نینو^۴، کویزومی^۵ و هیرای^۶ [۳۲] تحقیقات خود را بر روی پروژه‌ی فضاپیما آغاز کردند. تحقیقات این سه تن نشان می‌دهد که با توجه به اینکه اجزای سازه‌های به کار رفته در بدنه فضاپیما تحت بارهای بسیار شدید قرار می‌گیرند، در ترکیب تغییر ریزساختارهای سازه‌های بدنه، بایستی به دو مورد توجه گردد. نخست، از اجزای سازه‌ای موجود و در دسترس ساخته شوند و دوم اینکه از تمرکز تنش در اجزای سازه‌های فضایی به دلیل به وجود آمدن سطوح نوک‌تیز پرهیز گردد. نتیجه‌ی این یافته‌ها باعث شد که در سال ۱۹۸۷ در کشور ژاپن سازمانی متشکل از دانشمندان مختلف تأسیس شده و بودجه‌ی بسیار زیادی به‌منظور تحقیق گسترده در ارتباط با مواد متغیر تابعی تخصیص یابد. این سازمان تحقیقات خود را بر روی اجزایی که یک وجه آن سرد شده‌اند و وجه دیگرشان در محیط بسیار داغ نگهداری می‌شوند، معطوف نمود. کمیته‌ی علمی این سازمان مأمور طراحی و ارزیابی مواد مرکب معدنی شد که درنهایت به سمت فلزات و سرامیک‌ها هدایت شدند. برای سطح داغ، دما حدود ۲۰۰۰ کلوین در محیطی اکسیدکننده در نظر گرفته شد و آزمایش‌ها سرامیک را ماده‌ی مناسبی برای سطح داغ نشان داد. سطح سرد در دمای ۱۰۰۰ کلوین قرار داشت و

¹ Bever

² Douwez

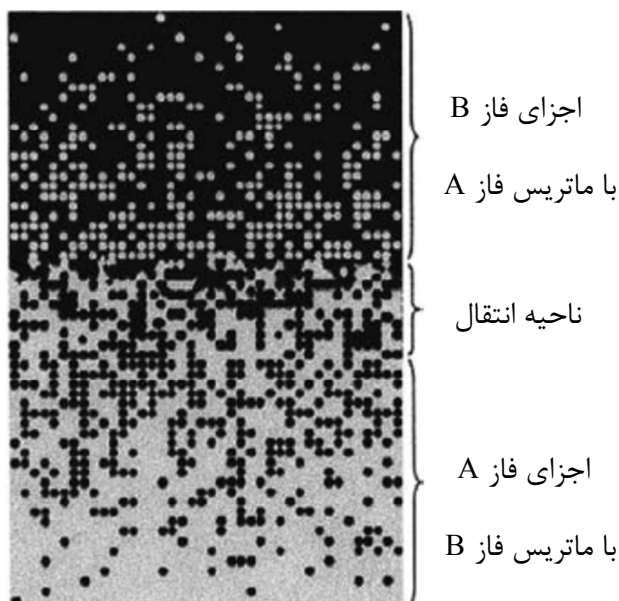
³ Gotzel

⁴ Nino

⁵ Koizumi

⁶ Herai

به این شکل خصوصياتی مانند مقاومت، سختی و هدایت حرارتی مواد، مدّ نظر قرار گرفت. بین دو سطح داغ و سرد را با مخلوطی از سرامیک و فلز با درصدی مشخص پر کردند که این عمل توسط متالوژی پودر صورت گرفت. در سال ۱۹۹۳، کویزومی، میاموتو^۱، نینو و ساساکی^۲ [۳۱] توجه خود را بر روی سیستم‌های بقای انرژی معطوف کردند. هدف این برنامه‌ی تحقیقاتی استفاده از مواد متغیر تابعی برای بهینه کردن تبدیل انرژی حرارتی به الکتریسیته بود که در مواد ترموالکتریک استفاده می‌شود. اهمیت ویژه‌ی این پروژه در زمینه‌ی بازدهی بالا در بقای انرژی در محدوده‌ی وسیعی از تغییرات درجه حرارت بود. در خارج از کشور ژاپن در بین سال‌های ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۰ و در چند کشور از جمله آلمان، ایالات متحده آمریکا، چین و روسیه تحقیقاتی روی مواد متغیر تابعی صورت گرفت. هرچند تلاش‌های بسیار زیادی به‌منظور ساخت و کاربرد مواد متغیر تابعی در محیط‌های پژوهشی و آزمایشگاه‌های تحقیقاتی در سال‌های گذشته صورت گرفته است؛ ولی رشد و شکوفایی بیشتر این مواد در صنعت، در دهه‌های آینده بیش از پیش عیان می‌گردد.



شکل (۱-۲) تغییرات کسر حجمی اجزای تشکیل‌دهنده‌ی یک ماده‌ی متغیر تابعی در یک جهت مشخص [۳۳]

^۱ Miyamoto

^۲ Sasaki

۲-۳ روش‌های تولید مواد متغیر تابعی

تا به امروز روش‌های متعددی برای تولید مواد متغیر تابعی توسعه داده شده است که به‌طور کلی در سه گروه روش‌های ترکیب کردنی^۱، روش‌های همگن‌سازی^۲ و روش‌های مجزا سازی^۳ دسته‌بندی می‌شوند [۳۴].

۱- روش ترکیب کردنی: در روش‌های ترکیب کردنی، ماده‌ی متغیر تابعی به‌طور لایه به لایه و با در نظر گرفتن توزیعی مناسب برای اجزای سازنده، ساخته می‌شود. در این روش، تغییرات تدریجی ماده، با کامپیوتر قابل کنترل است و امکان ایجاد هر گونه تغییر تدریجی وجود دارد. پیشرفت‌های صورت گرفته در زمینه‌ی فن‌آوری اتوماسیون در دهه‌های گذشته، استفاده از این روش را از لحاظ فنی و اقتصادی ممکن ساخته است.

۲- روش همگن‌سازی: در این روش، تغییرات ناگهانی در سطح مشترک بین دو ماده‌ی مختلف، از طریق انتقال مواد با تغییرات به‌صورت تدریجی ایجاد می‌شود.

۳- روش مجزاسازی: ماده‌ای که به‌طور ماکروسکوپی همگن است از طریق انتقال ماده به‌وسیله میدانی خارجی مانند میدان الکتریکی یا میدان گرانش تبدیل به ماده‌ی متغیر تابعی می‌شود. در این دو روش آخر، برخلاف روش ترکیب کردنی، امکان ایجاد هرگونه تغییر تدریجی در خواص وجود ندارد. در ادامه تعدادی از روش‌های ترکیب کردنی معرفی می‌شوند.

۲-۳-۱ روش متالورژی پودر

روش متالورژی پودر که برای تولید مواد متغیر تابعی به کار می‌رود، به‌طور کلی شامل تشکیل ساختاری از پودر با تغییرات تدریجی مورد نظر در درصد حجمی اجزا و سپس استفاده از روش‌های

¹ Constitutive

² Homogenizing

³ Segregating

جامد سازی مانند پرس سرد، لخت‌سازی^۱ بدون فشار و پرس گرم در قالب بسته، جهت تراکم آن هستند. این روش را می‌توان یکی از متداول‌ترین روش‌های تولید مواد متغیّر تابعی دانست؛ زیرا با استفاده از روش‌هایی که در طول دهه‌های گذشته در زمینه متالوژی پودر و سرامیک توسعه یافته‌اند، امکان تولید پودر بسیاری از فلزات و آلیاژها و مواد سرامیکی وجود دارد و همچنین تبدیل ماده‌ای به ذرات بسیار کوچک، شرایط مناسبی را برای ایجاد تغییرات تدریجی دلخواه فراهم می‌نماید. شایان ذکر است که در این روش امکان نفوذ هم‌زمان فازهای تشکیل‌دهنده در صورت کوتاه بودن زمان نفوذ^۲ از زمان تولید، می‌تواند مشکل‌ساز شود مگر آنکه ماده‌ی متغیّر تابعی بسیار نازک باشد [۳۴].

از چالش‌های اصلی در تولید مواد متغیّر تابعی با استفاده از روش متالوژی پودر، چگونگی ایجاد تغییرات تدریجی در ساختار اولیه تشکیل شده از پودر است. روش‌های متنوعی در این زمینه ارائه شده است که شامل روش‌های دستی تا روش‌های نیازمند سیستم‌های با فن‌آوری بالا است. در زمینه‌ی مواد متغیّر تابعی تک‌جهته که خواص آن‌ها تنها در یک جهت تغییر می‌کند، روش‌های دستی متعدّدی برای ایجاد خواص تدریجی ارائه شده که از پرکاربردترین این روش‌ها، تهیه لایه‌های جداگانه با ترکیب یکنواخت و سپس انباشتن این لایه‌ها بر روی یکدیگر است. برای تولید مواد متغیّر تابعی تک‌جهته، چندین روش اتوماتیک نیز توسعه یافته است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش گریز از مرکز برای تراکم پودر اشاره کرد که برای ساخت اجسام استوانه‌ای شکل به کار می‌رود. در این روش پودرها از سه مخزن با سرعت‌هایی که توسط کامپیوتر کنترل می‌شود به داخل مخلوط‌کن عمودی تغذیه می‌شوند و از آنجا پودرهای مخلوط شده به مرکز قالبی دوّار پاشیده می‌شوند. در این روش تأکید بر اختلاط سریع پودرها به منظور ایجاد اطمینان از سرعت عملکرد بالای دستگاه می‌باشد؛ قبل از توقف چرخش، موم تزریق می‌گردد تا پودرها را در جای خود نگه دارد.

^۱ Sintering

^۲ Diffusion Time

۲-۳-۲ روش پوشش دهی

در بسیاری از کاربردها، لایه‌های مواد متغیر تابعی می‌توانند نقش ماده واسط بهینه‌ای را بین جزء توده‌ای و پوشش خارجی که از سایر اجزا در مقابل شرایط نامناسب دمایی، خوردگی و فرسایش محافظت می‌کند، ایفا کنند. روش‌های متعددی از پوشش دهی برای تولید مواد متغیر تابعی ارائه شده که در تعدادی از آن‌ها امکان تولید سازه با ضخامت‌های زیاد وجود دارد؛ اما این روش‌ها با توجه به هزینه‌های بالا و حفره‌های زیادی که باقی می‌ماند، چندان کاربرد ندارند. روش‌های پوشش دهی در واقع جزء روش‌های ترکیب کردنی هستند که در آن‌ها امکان کنترل تغییرات تدریجی ترکیبات، به وسیله‌ی دستگاه‌های تغذیه گاز، مایع و یا پودر، که با کامپیوتر کنترل می‌شوند، وجود دارد. همانند روش متالوژی پودر، پدیده‌ی نفوذ نباید باعث برهم زدن تغییرات تدریجی اولیه ایجاد شده شوند. در روش‌های معمول پوشش دهی از قبیل پاشش پلاسما^۱، الکتروفرمینگ^۲ و رسوب گذاری با بخار^۳، زمان تولید به اندازه‌ی کافی کوتاه بوده و در نتیجه، پدیده‌ی نفوذ اتفاق نمی‌افتد. در ادامه تعدادی از روش‌های تولید مواد متغیر تابعی با روش پوشش دهی معرفی می‌شوند.

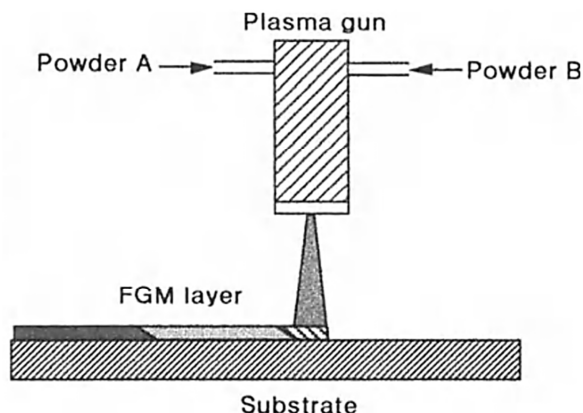
۲-۳-۲-۱ روش پاشش پلاسما

در این روش فلز و مواد دیرگداز به وسیله‌ی تفنگ پلاسما تبدیل به ذرات پودر با دما و سرعت بالا شده، سپس با نسبت‌های از قبل تعیین شده از طریق کنترل سرعت تغذیه، مواد پودر شده به هم می‌چسبند. در این روش سرعت بالای ذرات، موجب صاف شدن قابل توجه ذرات پودر ذوب شده در اثر فشار بر روی زیر لایه‌ی جامد می‌شود؛ که این ویژگی موجب کاهش حفره‌های باقی مانده در پوشش تهنشین شده نهایی می‌شود [۳۵].

¹ Plasma spray

² Electroforming

³ Vapor Deposition



شکل (۲-۲) تصویر مفهومی از روش پاشش پلاسما [۳۵]

۲-۲-۳-۲ روش الکتروفرمینگ

در این روش از پدیده‌ی الکتروشمیایی برای تولید مواد متغیّر تابعی استفاده می‌شود؛ بدین صورت که فلز به‌عنوان آند انتخاب و ذرات سرامیک به محلول الکترولیت اضافه می‌شوند. از طریق تغییر چگالی جریان الکتریکی و یا تغییر نسبت‌های حجمی در سوسپانسیون، پوشش بر روی کاتد ته‌نشین می‌شود. از این روش برای تولید مواد متغیّر تابعی فلز-فلز و فلز-سرامیک استفاده می‌شود. عیب این روش مدت زمان زیاد مورد نیاز برای تولید ماده با ضخامت زیاد است. این زمان برای تولید پوششی با ضخامت ۸ میکرومتر تا ۳۰ روز می‌رسد.

۳-۲-۳-۲ رسوب‌گذاری با بخار

این روش شامل رسوب‌گذاری چند فلز بخار شده و با اعمال هم‌زمان اتم‌های کربن یا نیتروژن در فاز گازی است. واکنش بین اتم‌های فلزی و اتم‌های کربن یا نیتروژن، باعث تشکیل مخلوط کنترل شده از فلز و نیتريد یا کاربید مربوط به آن می‌شود. با تغییر تراکم گازهای واکنش‌پذیر در طول زمان، سازه با تغییرات تدریجی خواص تولید می‌شود. مزیت اصلی این روش امکان تولید لایه‌های بسیار نازک با شیب تغییرات زیاد ترکیبات است، هر چند که دماهای بسیار بالا در این روش موجب کاهش پایداری مواد متغیّر تابعی می‌شود [۳۴].

۲-۴ مدل‌های مواد متغیر تابعی

خواص مکانیکی مواد متغیر تابعی در یک، دو و یا سه راستا به صورت پیوسته تغییر می‌کند. مدل‌های ریاضی گوناگونی برای بیان خواص مواد متغیر تابعی به صورت ریاضی پیشنهاد شده است. در اغلب موارد، ماده‌ی متغیر تابعی از دو جزء سرامیک و فلز تشکیل شده است. چنانچه V_m و V_c به ترتیب به عنوان حجم فلز و سرامیک در نظر گرفته شوند؛ کسر حجمی هر یک از دو جزء به صورت زیر خواهد بود.

$$V_m = \frac{v_m}{v_m + v_c}, \quad V_c = \frac{v_c}{v_m + v_c} \quad (1-2)$$

در رابطه‌ی بالا V_c و V_m به ترتیب معرف کسر حجمی جزء فلزی و سرامیکی می‌باشند و همواره از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کنند.

$$V_m + V_c = 1 \quad (2-2)$$

با استفاده از توابع نسبت حجمی، خواص مکانیکی ماده‌ی متغیر تابعی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (3-2)$$

در رابطه‌ی بالا P ، P_m و P_c به ترتیب بیان گر خاصیت ماده‌ی متغیر تابعی، خاصیت جزء فلزی و خاصیت جزء سرامیکی است. در ادامه چند مدل مهم برای توزیع خواص مکانیکی ماده‌ی متغیر تابعی معرفی خواهند شد.

۲-۴-۱ مدل ردی^۱

در این مدل، به طور کلی خواص مکانیکی ماده‌ی متغیر تابعی به صورت غیرخطی، تابعی از درجه حرارت و مختصات که خواص در آن تغییر می‌کند، بیان می‌شوند. با این فرض که تغییرات

^۱ Reddy

خواص ماده‌ی متغیر تابعی در راستای z باشد می‌توان رابطه را به صورت زیر نوشت:

$$P(z, T) = P_{0m} \left(\frac{P_{-1m}}{T} + 1 + P_{1m}T + P_{2m}T^2 + P_{3m}T^3 \right) V_m(z) + P_{0c} \left(\frac{P_{-1c}}{T} + 1 + P_{1c}T + P_{2c}T^2 + P_{3c}T^3 \right) V_c(z) \\ = P_m(T) V_m(z) + P_c(T) V_c(z) \quad (۴-۲)$$

در رابطه‌ی بالا از زیرنویس c و m برای بیان خواص مربوط به سرامیک و فلز استفاده شده است. T معرف درجه حرارت در درون جسم و ضرایب P_i ، ضرایبی هستند که برای هر ماده‌ی تشکیل دهنده به صورت یکتا تعیین می‌شوند.

چنانچه خواص مواد ثابت فرض شوند فرمول ردی برای توزیع خواص به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$P(z) = P_{0m} V_m(z) + P_{0c} V_c(z) \quad (۵-۲)$$

ردی کسر حجمی به کاررفته در رابطه‌ی بالا را با تابع توانی به صورت زیر مدل کرده است [۳۱].

$$V_m(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^g \quad (۶-۲)$$

در رابطه‌ی بالا h ، معرف محدوده‌ای است که خواص در آن تغییر می‌کند. به عنوان مثال برای یک پوسته‌ی ساخته شده از مواد متغیر تابعی که تغییر خواص آن در راستای ضخامت است، h معرف ضخامت پوسته و ثابت به کار رفته g ، شاخص توانی^۱ ماده‌ی متغیر تابعی نامیده می‌شود که مقادیر نامنفی را اختیار می‌کند. مقدار این توان بیانگر شدت تغییرات خواص ماده است. هم‌چنین z از میانه‌ی ضخامت اندازه‌گیری می‌شود. در تحقیق حاضر برای مدل‌سازی مواد متغیر تابعی از این مدل استفاده شده است.

^۱ Power Low Index

۲-۴-۲ مدل اردوگان^۱

اردوگان، تغییرات خواص یک ماده‌ی متغیر تابعی را به صورت زیر مدل می‌کند [۳۱].

$$P(z) = P_0 e^{\delta z} \quad (۷-۲)$$

در این مدل δ و P_0 ثابت هستند که به خواص تشکیل‌دهنده ماده‌ی متغیر تابعی بستگی دارد. در این مدل معمولاً مختصات z از یکی از دو لبه راستایی که خواص در آن تغییر می‌کند، اندازه‌گیری می‌شود. به عنوان مثال، برای استوانه‌ای که تغییرات خواص در جهت شعاعی با مدل اردوگان است، مبدأ اندازه‌گیری z شعاع خارجی و یا شعاع داخلی استوانه است.

۳-۴-۲ مدل تانیگاوا^۲

بر مبنای مدل تانیگاوا هر یک از خواص مواد متغیر تابعی مطابق با توزیع مخصوص به خود فرمول‌بندی می‌شوند. برای دو خاصیت مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی، تانیگاوا روابط زیر را ارائه کرد [۳۶].

$$E(z) = \frac{2z+6}{z+2} E_0 \left(1 + \frac{z}{L}\right)^n \quad (۸-۲)$$

$$\alpha(z) = \alpha_0 \left(1 + \frac{z}{L}\right)^p \quad (۹-۲)$$

در رابطه‌ی بالا L ثابتی است که برای نرمالیزه کردن به کار می‌رود و دارای بعد طول است. ثابت‌های دیگر که به صورت ضریب و توان به کار رفته‌اند، در هر ماده‌ی متغیر تابعی بسته به نوع اجزای سرامیک و فلزی‌اش به طور یکتا تعیین می‌شوند. لازم به ذکر است تانیگاوا ضریب پواسون^۳ را در سراسر ماده یکسان در نظر می‌گیرد.

^۱ Ordogan

^۲ Tanigawa

^۳ Poisson's Ratio

۴-۴-۲ مدل نودا^۱

ندا مدل غیرخطی زیر را که بر پایه‌ی توزیع نمایی استوار است، برای بیان توزیع کلیه‌ی خواص مواد متغیر تابعی ارائه کرده است [۳۱].

$$P(z) = P_m e^{\left[\frac{z}{h} \ln \frac{P_c}{P_m} + \ln \left(\frac{P_c}{P_m} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \quad (۱۰-۲)$$

در رابطه‌ی بالا، z از میانه برای تغییرات خواص محاسبه می‌شود و h محدوده‌ای است که خواص در آن به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند $(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2})$.

^۱ Noda

فصل ۳

معادلات حاکم بر تحلیل کمانش و ارتعاشات

۳-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا به معرفی تئوری‌های مورد استفاده در پوسته و بررسی هندسه و خواص پوسته‌ای استوانه‌ای پرداخته می‌شود. همچنین روابط تنش- کرنش، کرنش- جابه‌جایی و منته‌های تنش، آمده است. در ادامه انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار انجام‌شده توسط نیروی محوری، محاسبه می‌شوند. پس از آن به کمک اصل همپلتون، معادلات حرکت پوسته‌ای استوانه‌ای تحت بار محوری به‌دست می‌آیند. در نهایت به محاسبه‌ی بار کمانش و فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ای استوانه‌ای متغیر تابعی پرداخته می‌شود.

۳-۲ تئوری حاکم بر پوسته‌ها

در اینجا برخی از تئوری‌های استفاده شده در تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای معرفی می‌شوند.

۳-۲-۱ تئوری کلاسیک

تئوری کلاسیک بیان می‌دارد که تمامی خطوط مستقیمی که عمود بر سطح میانی پوسته می‌باشند، قبل و بعد از تغییر شکل نیز مستقیم و عمود بر آن باقی می‌مانند، به عبارت دیگر از کرنش برشی عرضی^۱ و کرنش نرمال عرضی صرف‌نظر می‌گردد. از آنجا که این تئوری، تغییر شکل‌های برشی را در نظر نمی‌گیرد، استفاده از آن خطای زیادی را در پیش‌بینی خیز عرضی، بارهای کمانش و فرکانس‌های طبیعی به‌خصوص برای پوسته‌های جدار ضخیم وارد می‌کند. برخی از فرض‌های تئوری کلاسیک که به فرض‌های لوو- کیرشهف معروف هستند، در زیر آمده است [۳۷].

۱- پوسته نازک است.

۲- جابه‌جایی‌ها و دوران‌ها کوچک هستند.

۳- مقاطع مسطح و عمود بر سطح میانی پس از تغییر شکل نیز مسطح و عمود باقی

¹Transvers shear strain

می‌مانند.

۴- تنش‌های عمود بر صفحه میانی در مقایسه با مؤلفه‌های دیگر تنش کوچک هستند و

می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

۳-۲-۲ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، خطوط راست و عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر

شکل راست باقی می‌مانند اما عمود نیستند و اثرات تغییر شکل برشی عرضی در نظر گرفته می‌شود.

در این تئوری، کرنش برشی در راستای ضخامت ثابت فرض می‌شود بنابراین از ضریب تصحیح برشی^۱

استفاده می‌شود [۳۷].

۳-۲-۳ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم

تئوری‌های برشی مرتبه بالا (سوم)، از چند جمله‌ای‌های مرتبه بالا برای تخمین میدان

جابجایی در راستای ضخامت بهره برده و در نتیجه نیازی به استفاده از ضریب تصحیح برشی در این

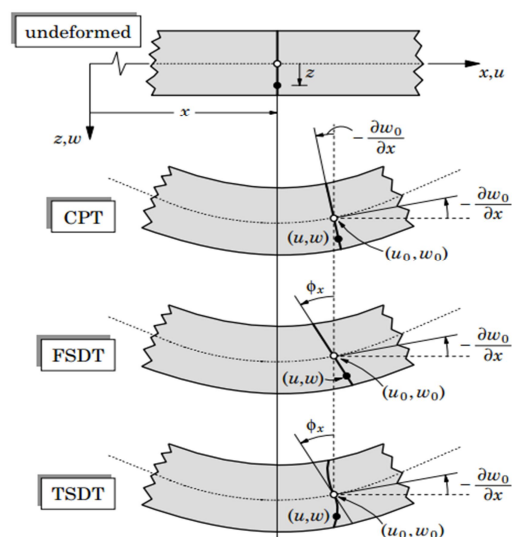
تئوری نخواهد بود. تئوری‌های مرتبه بالا (سوم) نسبت به تئوری مرتبه اول دقت محاسبات را افزایش

می‌دهند، اما در مقابل حجم محاسبات نیز افزایش می‌یابد [۳۷]. در این پژوهش از تئوری مرتبه سوم

برشی برای استخراج معادلات استفاده شده است. شکل (۳-۱) سینماتیک تغییر شکل یک برش، عمود

بر لبه‌ی $y=0$ را نشان می‌دهد.

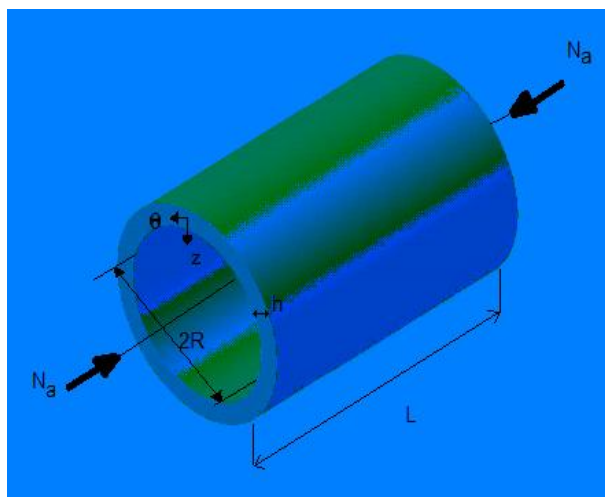
¹Shear correction factor



شکل (۱-۳) تغییر شکل راستای عمود بر صفحه میانی در تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه سوم [۳۸]

۳-۳ هندسه و خواص پوسته‌ای استوانه‌ای

یک پوسته‌ای استوانه‌ای ساخته شده از مواد متغیر تابعی به طول L ، ضخامت h و شعاع متوسط R مفروض است. سطح میانی استوانه به دستگاه مختصات استوانه‌ای x, θ, z ارجاع داده شده که فاصله از سطح میانی با مختصات z اندازه‌گیری می‌شود؛ هم‌چنین پوسته تحت بار محوری فشاری N_a است (شکل (۲-۳)).



شکل (۲-۳) پوسته‌ای استوانه‌ای متغیر تابعی تحت بار محوری

۳-۳-۱ خواص پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی

برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای با ضخامت یکنواخت h و مختصات مرجع در صفحه میانی آن، توصیف اجزای سازنده‌ی ماده‌ی متغیر تابعی با استفاده از رابطه‌ی توانی، برای کسر حجمی فلز، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V_m(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^g \quad (۱-۳)$$

که در رابطه‌ی بالا z فاصله از صفحه میانی پوسته و g شاخص توانی ماده است که مقادیر نامنفی را اختیار می‌کند. با توجه به اینکه مجموع کسر حجمی مواد سازنده برابر با یک است، کسر حجمی سرامیک طبق رابطه‌ی زیر بیان خواهد شد:

$$V_c(z) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^g \quad (۲-۳)$$

در رابطه‌ی (۱-۳) مقدار g برابر صفر، بیانگر فلز خالص ($V_m=1$) و اگر g به سمت بی‌نهایت میل کند نشان دهنده‌ی سرامیک خالص است ($V_m=0$).

۳-۳-۲ خواص وابسته به دما

معمولاً مواد متغیر تابعی در محیط‌های با دمای بالا به کار می‌روند که در این صورت تغییرات قابل توجهی در خواص آن بوجود می‌آید. ضروری است برای دقت در پیش‌بینی خواص مواد، آن‌ها وابسته به دما در نظر گرفته شوند. طبق قانون ویت^۱ هر خاصیت مکانیکی در پوسته مانند P را می‌توان بر حسب خواص اصلی مطابق رابطه‌ی زیر بیان کرد [۳۹].

$$P_{eff}(z, T) = (P_{out}(T) - P_{in}(T)) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^g + P_{in}(T) \quad (۳-۳)$$

که P_{in} و P_{out} به ترتیب بیانگر خواص سطح خارجی و سطح داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای می‌باشد. در

^۱Voigt

رابطه‌ی (۳-۳) خواص مکانیکی مانند مدول الاستیسیته وابسته به دما فرض شده و می‌توان با یک تابع غیرخطی از دما آن را نشان داد [۳۹].

در این پژوهش جز در موارد ذکر شده سطح داخلی پوسته، سرامیک و سطح خارجی، فلز در نظر گرفته شده است.

$$P(T) = P_0 \left(\frac{P-1}{T} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (۴-۳)$$

در رابطه‌ی (۴-۳)، P_i ($i = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ضرایب دمایی وابسته به ثابت‌های مواد تشکیل دهنده است که در جدول (۴-۱) آمده است.

مدول الاستیسیته، چگالی جرمی و ضریب پواسون ماده‌ی متغیر تابعی به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$E_{eff}(T, z) = (E_m(T) - E_c(T)) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + E_c(T) \quad (۵-۳-الف)$$

$$\rho_{eff}(T, z) = (\rho_m(T) - \rho_c(T)) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + \rho_c(T) \quad (۵-۳-ب)$$

$$\nu_{eff}(T, z) = (\nu_m(T) - \nu_c(T)) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g + \nu_c(T) \quad (۵-۳-پ)$$

۴-۳ استخراج معادلات حرکت پوسته‌ی استوانه‌ای

در این پژوهش معادلات حرکت پوسته‌ی استوانه‌ای بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی ردی و روابط کرنش-جابجایی لویو استخراج شده‌اند.

۴-۳-۱ میدان جابه‌جایی

بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی ردی مؤلفه‌های تغییر مکان u ، v و w در

جهت‌های x, θ, z را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد [۳۷, ۳۸].

$$u(x, \theta, z, t) = u_0(x, \theta, t) + z \varphi_x - z^3 \frac{4}{3h^2} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (۳-۶-الف)$$

$$v(x, \theta, z, t) = v_0(x, \theta, t) + z \varphi_\theta - z^3 \frac{4}{3h^2} \left(\varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \quad (۳-۶-ب)$$

$$w(x, \theta, z, t) = w_0(x, \theta, t) \quad (۳-۶-پ)$$

در روابط بالا (u_0, v_0, w_0) جابه‌جایی‌های صفحه میانی و φ_x و φ_θ چرخش‌های عمود بر صفحه میانی حول محورهای θ و x هستند [۳۸, ۴۰].

مختصه‌ی x در راستای طولی، θ محیطی و z در جهت (شعاعی) ضخامت پوسته به سمت داخل استوانه و بر روی لایه میانی است (شکل (۳-۲)).

۳-۴-۲ روابط تنش - کرنش

برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای با فرض شرایط تنش صفحه‌ای، روابط کلی تنش - کرنش برای یک ماده‌ی همسانگرد به صورت زیر خواهد بود [۳۷].

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} \quad (۷-۳)$$

در رابطه‌ی (۷-۳)، σ_x تنش در جهت (طول) x ، σ_θ تنش در جهت (محیطی) θ ، $\sigma_{x\theta}$ تنش برشی در صفحه‌ی $x-\theta$ ، σ_{xz} تنش برشی در صفحه‌ی $x-z$ و $\sigma_{\theta z}$ تنش برشی در صفحه‌ی $\theta-z$ است. برای کرنش‌ها نیز به همین صورت خواهد بود. در رابطه‌ی (۷-۳)، $[Q]$ ماتریس سفتی کاهش یافته است. که به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۰].

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E_{eff}}{1 - \nu_{eff}^2} \quad Q_{44} = \frac{E_{eff}}{2(1 + \nu_{eff})} \quad A = 1 + \frac{z}{R}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{eff} E_{eff}}{A(1 - \nu_{eff}^2)} \quad Q_{55} = Q_{66} = \frac{E_{eff}}{2A(1 + \nu_{eff})} \quad (۸-۳)$$

۳-۴-۳ روابط کرنش - تغییر مکان

رابطه‌ی کرنش - تغییر مکان بر اساس تئوری لویو به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۱].

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (۹-۳)$$

با جایگذاری روابط (۶-۳) در روابط (۹-۳) کرنش‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(0)} + z \varepsilon_x^{(1)} + z^3 \varepsilon_x^{(3)}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^{(0)} + z \varepsilon_\theta^{(1)} + z^3 \varepsilon_\theta^{(3)}$$

$$\gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta}^{(0)} + z \gamma_{x\theta}^{(1)} + z^3 \gamma_{x\theta}^{(3)}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz}^{(0)} + z^2 \gamma_{xz}^{(2)}$$

$$\gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}^{(0)} + z^2 \gamma_{\theta z}^{(2)} \quad (۱۰-۳)$$

در روابط (۱۰-۳)، $\varepsilon_x^{(0)}$ ، $\varepsilon_\theta^{(0)}$ ، $\gamma_{x\theta}^{(0)}$ کرنش‌های سطح میانی، γ_{xz} و $\gamma_{\theta z}$ کرنش‌های برشی عرضی،

$\varepsilon_x^{(1,3)}$ ، $\varepsilon_\theta^{(1,3)}$ و $\gamma_{x\theta}^{(1,3)}$ انحناها می‌باشند.

$$\varepsilon_x^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_x^{(3)} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)$$

$$\varepsilon_\theta^{(0)} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right)$$

$$\varepsilon_\theta^{(1)} = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_\theta^{(3)} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\gamma_{x\theta}^{(0)} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{x\theta}^{(1)} = \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{x\theta}^{(3)} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} \right)$$

$$\gamma_{xz}^{(0)} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz}^{(2)} = -\frac{4}{h^2} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{\theta z}^{(0)} = \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R}$$

$$\gamma_{\theta z}^{(2)} = -\frac{4}{h^2} \left(\varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) \quad (۱۱-۳)$$

۳-۴-۴ نتیجه‌های تنش

برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای، نتیجه‌های تنش به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۳۸، ۳۷].

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} dz \quad (۱۲-۳-الف)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} z dz \quad (۱۲-۳-ب)$$

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_\theta \\ P_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} z^3 dz \quad (۱۲-۳-پ)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} dz \quad (۱۲-۳-ت)$$

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_\theta \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} z^2 dz \quad (۱۲-۳-ث)$$

۳-۴-۵ اصل همیلتون

معادلات حرکت برای پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی تحت بار محوری را می‌توان با استفاده

از اصل همیلتون استخراج کرد [۳۷].

$$\int_0^T (\delta U + \delta V_{N_a} - \delta K) dt = 0 \quad (۱۳-۳)$$

که δU و ریشنال انرژی کرنشی، δV_{N_a} و ریشنال کار انجام شده به وسیله‌ی نیروهای خارجی (محوری) و

δK و ریشنال انرژی جنبشی می‌باشد. اکنون باید انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار انجام شده را

به دست آورده و با قرار دادن آن‌ها در اصل همیلتون معادلات حرکت پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی

تحت بار محوری را استخراج کنیم.

۳-۴-۶ انرژی کرنشی

انرژی کرنشی به صورت رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود [۴۲].

$$\delta U = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{ (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z}) dz \} dA \quad (۱۴-۳)$$

با در نظر گرفتن تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی، یعنی با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۱۰) در رابطه‌ی (۱۴-۳) انرژی کرنشی به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{aligned} \delta U = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{ & [\sigma_x \left(\delta \varepsilon_x^{(0)} + z \delta \varepsilon_x^{(1)} - \frac{4}{3h^2} z^3 \delta \varepsilon_x^{(3)} \right) + \sigma_\theta \left(\delta \varepsilon_\theta^{(0)} + z \delta \varepsilon_\theta^{(1)} - \frac{4}{3h^2} z^3 \delta \varepsilon_\theta^{(3)} \right) \\ & + \sigma_{x\theta} \left(\delta \gamma_{x\theta}^{(0)} + z \delta \gamma_{x\theta}^{(1)} - \frac{4}{3h^2} z^3 \delta \gamma_{x\theta}^{(3)} \right) + \sigma_{xz} \left(\delta \gamma_{xz}^{(0)} - \frac{4}{h^2} z^2 \delta \gamma_{xz}^{(2)} \right) \\ & + \sigma_{\theta z} \left(\delta \gamma_{\theta z}^{(0)} - \frac{4}{h^2} z^2 \delta \gamma_{\theta z}^{(2)} \right)] dz \} dA \end{aligned} \quad (۱۵-۳)$$

همچنین با در نظر گرفتن روابط (۳-۱۲)، انرژی کرنشی بر حسب منته‌های تنش به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \delta U = \int_A [& N_x \delta \varepsilon_x^{(0)} + M_x \delta \varepsilon_x^{(1)} - \frac{4}{3h^2} P_x \delta \varepsilon_x^{(3)} + N_\theta \delta \varepsilon_\theta^{(0)} + M_\theta \delta \varepsilon_\theta^{(1)} - \frac{4}{3h^2} P_\theta \delta \varepsilon_\theta^{(3)} \\ & + N_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta}^{(0)} + M_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta}^{(1)} - \frac{4}{3h^2} P_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta}^{(3)} + Q_x \delta \gamma_{xz}^{(0)} - \frac{4}{h^2} R_x \delta \gamma_{xz}^{(2)} + Q_\theta \delta \gamma_{\theta z}^{(0)} - \frac{4}{h^2} R_\theta \delta \gamma_{\theta z}^{(2)}] dA \end{aligned} \quad (۱۶-۳)$$

که با جایگذاری روابط (۳-۱۱) در رابطه‌ی (۱۶-۳) و با انتگرال‌گیری جزء به جزء، انرژی کرنشی بر حسب منته‌های تنش و جابه‌جایی‌ها به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\delta U = \int_A & \left(-\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 - \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \varphi_x + \frac{4}{3h^2} \frac{\partial P_x}{\partial x} \delta \varphi_x + \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} \delta w_0 - \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} \delta v_0 \right. \\
& + \frac{N_\theta}{R} \delta w_0 - \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \delta \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{4}{3h^2} \frac{\partial P_\theta}{\partial \theta} \delta \varphi_\theta + \frac{1}{R^2} \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 P_\theta}{\partial \theta^2} \delta w_0 - \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} \delta v_0 \\
& - \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} \delta u_0 - \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} \delta \varphi_\theta - \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} \delta \varphi_x + \frac{4}{3h^2} \frac{\partial P_{x\theta}}{\partial x} \delta \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{4}{3h^2} \frac{\partial P_{x\theta}}{\partial x} \delta \varphi_x \\
& - \frac{2}{R^2} \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2 P_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} \delta w_0 + Q_x \delta \varphi_x - \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w_0 - \frac{4}{h^2} R_x \delta \varphi_x + \frac{4}{h^2} \frac{\partial R_x}{\partial x} \delta w_0 + Q_\theta \delta \varphi_\theta \\
& \left. - \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \delta w_0 - \frac{Q_\theta}{R} \delta v_0 - \frac{4}{h^2} R_\theta \delta \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{4}{h^2} \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} \delta w_0 + \frac{1}{R} \frac{4}{h^2} R_\theta \delta v_0 \right] dA
\end{aligned}
\tag{۱۷-۳}$$

۷-۴-۳ انرژی جنبشی

انرژی جنبشی به صورت رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود [۳۷].

$$\delta K = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz dA
\tag{۱۸-۳}$$

با در نظر گرفتن تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی، با جایگذاری روابط (۳-۶) در رابطه‌ی (۱۸-۳)

انرژی جنبشی به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{aligned}
\delta K = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_{eff} & \left[(\dot{u}_0 + z \dot{\varphi}_x - \frac{4}{3h^2} z^3 (\dot{\varphi}_x + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x})) (\delta \dot{u}_0 + z \delta \dot{\varphi}_x - \frac{4}{3h^2} z^3 (\delta \dot{\varphi}_x + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x})) \right. \\
& + (\dot{v}_0 + z \dot{\varphi}_\theta - \frac{4}{3h^2} z^3 (\dot{\varphi}_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \theta})) (\delta \dot{v}_0 + z \delta \dot{\varphi}_\theta - \frac{4}{3h^2} z^3 (\delta \dot{\varphi}_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial \theta})) \\
& \left. + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dA
\end{aligned}
\tag{۱۹-۳}$$

با مرتب‌سازی روابط بر حسب z رابطه‌ی (۱۹-۳) به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{aligned}
\delta K = \int_A^{\frac{h}{2}} \rho_{eff} [& (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) + z(\dot{u}_0 \delta \dot{\phi}_x + \dot{\phi}_x \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{\phi}_\theta + \dot{\phi}_\theta \delta \dot{v}_0) \\
& + z^2 (\dot{\phi}_x \delta \dot{\phi}_x + \dot{\phi}_\theta \delta \dot{\phi}_\theta) - \frac{4}{3h^2} z^3 (\dot{u}_0 \delta \dot{\phi}_x + \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \dot{\phi}_x \delta \dot{u}_0 \\
& + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{\phi}_\theta + \dot{v}_0 \frac{1}{R} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial \theta} + \dot{\phi}_\theta \delta \dot{v}_0 + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \theta} \delta \dot{v}_0) \\
& - \frac{4}{3h^2} z^4 (\dot{\phi}_x \delta \dot{\phi}_x + \dot{\phi}_x \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \dot{\phi}_x \delta \dot{\phi}_x + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{\phi}_x + \dot{\phi}_\theta \delta \dot{\phi}_\theta \\
& + \dot{\phi}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial \theta} + \dot{\phi}_\theta \delta \dot{\phi}_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \theta} \delta \dot{\phi}_\theta) + (\frac{4}{3h^2})^2 z^6 (\dot{\phi}_x \delta \dot{\phi}_x + \dot{\phi}_x \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \\
& + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{\phi}_x + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \dot{\phi}_\theta \delta \dot{\phi}_\theta + \dot{\phi}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \theta} \delta \dot{\phi}_\theta \\
& + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial \theta})] dz dA
\end{aligned} \tag{۲۰-۳}$$

با تعریف اینرسی جرمی به صورت رابطه‌ی زیر [۳۷]

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_6) = \int_A^{\frac{h}{2}} \rho_{eff} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \tag{۲۱-۳}$$

که در آن ρ_{eff} چگالی جرمی مؤثر ماده‌ی متغیّر تابعی است، در نهایت رابطه‌ی انرژی جنبشی به

صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{aligned}
\delta K = \int_A [& (-I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \ddot{\phi}_x + \frac{4}{3h^2} I_3 \ddot{\phi}_x + \frac{4}{3h^2} I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x}) \delta u_0 + (-I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \ddot{\phi}_\theta + \frac{4}{3h^2} I_3 \ddot{\phi}_\theta \\
& + \frac{4}{3h^2} I_3 \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial \theta}) \delta v_0 + (-I_0 \ddot{w}_0 - \frac{4}{3h^2} I_3 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - \frac{4}{3h^2} I_3 \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial \theta} \\
& - \frac{4}{3h^2} I_4 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} - \frac{4}{3h^2} I_4 \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{\phi}_\theta}{\partial \theta} + (\frac{4}{3h^2})^2 I_6 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + (\frac{4}{3h^2})^2 I_6 \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{\phi}_\theta}{\partial \theta} \\
& + (\frac{4}{3h^2})^2 I_6 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial \theta^2} + (\frac{4}{3h^2})^2 I_6 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x}) \delta w_0 + (-I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \ddot{\phi}_x + \frac{4}{3h^2} I_3 \ddot{u}_0 \\
& + \frac{4}{3h^2} I_4 \ddot{\phi}_x + \frac{4}{3h^2} I_4 \ddot{\phi}_x + \frac{4}{3h^2} I_4 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - (\frac{4}{3h^2})^2 I_6 \ddot{\phi}_x - (\frac{4}{3h^2})^2 I_6 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x}) \delta \phi_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-I_1\ddot{v}_0 - I_2\ddot{\phi}_\theta + \frac{4}{3h^2}I_3\ddot{v}_0 + \frac{4}{3h^2}I_4\ddot{\phi}_\theta + \frac{4}{3h^2}I_4\ddot{\phi}_\theta + \frac{4}{3h^2}I_4\frac{1}{R}\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial\theta} \\
& -(\frac{4}{3h^2})^2I_6\ddot{\phi}_\theta - (\frac{4}{3h^2})^2I_6\frac{1}{R}\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial\theta})\delta\phi_\theta]dA
\end{aligned}
\tag{۲۲-۳}$$

۳-۴-۸ کار انجام شده

کار انجام شده (پتانسیل)، ناشی از نیروی محوری (N_a) به صورت رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود [۴۳].

$$V_{N_a} = \frac{N_a}{2} \int_A [(\frac{\partial v_0}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w_0}{\partial x})^2] dA \tag{۲۳-۳}$$

اکنون با وریشن^۱ گیری از رابطه‌ی (۲۳-۳) کار انجام شده به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\delta V_{N_a} &= \frac{N_a}{2} \int_A [\delta(\frac{\partial v_0}{\partial x})^2 + \delta(\frac{\partial w_0}{\partial x})^2] dA = \frac{N_a}{2} \int_A [2(\frac{\partial v_0}{\partial x})(\frac{\partial \delta v_0}{\partial x}) + 2(\frac{\partial w_0}{\partial x})(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x})] dA \\
&= \int_A [N_a(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2})\delta v_0 + N_a(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})\delta w_0] dA
\end{aligned}
\tag{۲۴-۳}$$

۳-۴-۹ معادلات حرکت

با جایگذاری روابط انرژی کرنشی (رابطه‌ی (۳-۱۷))، انرژی جنبشی (رابطه (۳-۲۲)) و کار انجام شده (رابطه‌ی (۳-۲۴)) در اصل همیلتون (رابطه‌ی (۳-۱۳)) معادلات حرکت پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی تحت بار محوری به دست می‌آید.

^۱Variation

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} = I_0 \ddot{u}_0 + (I_1 - C_2 I_3) \ddot{\phi}_x - C_2 I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \quad (۳-۲۵-الف)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} - C_1 \frac{R_\theta}{R} + N_a \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = I_0 \ddot{v}_0 + (I_1 - C_2 I_3) \ddot{\phi}_\theta - C_2 I_3 \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial \theta} \quad (۳-۲۵-ب)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & \frac{\partial Q_x}{\partial x} - C_1 \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - C_2 \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} \right) + C_1 \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 P_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 P_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} \right) - \frac{N_\theta}{R} \\ & + N_a \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = I_0 \ddot{w}_0 - C_2^2 I_6 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial \theta^2} \right) + C_2 \{ I_3 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial \theta} \right) \\ & + (I_4 - C_1 I_6) \left(\frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{\phi}_\theta}{\partial \theta} \right) \} \quad (۳-۲۵-پ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_x : & \frac{\partial M_x}{\partial x} - C_2 \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - C_2 \frac{\partial P_{x\theta}}{\partial \theta} \right) - (Q_x - C_1 R_x) \\ & = (I_1 - C_2 I_3) \ddot{u}_0 + (I_2 - 2C_2 I_4 + C_2^2 I_6) \ddot{\phi}_x - C_2 (I_4 - C_2 I_6) \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \quad (۳-۲۵-ت) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_\theta : & \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - C_2 \frac{\partial P_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - C_2 \frac{\partial P_\theta}{\partial \theta} \right) - (Q_\theta - C_1 R_\theta) \\ & = (I_1 - C_2 I_3) \ddot{v}_0 + (I_2 - 2C_2 I_4 + C_2^2 I_6) \ddot{\phi}_\theta - C_2 (I_4 - C_2 I_6) \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial \theta} \quad (۳-۲۵-ث) \end{aligned}$$

که در آن $C_1 = 3C_2$ و $C_2 = \frac{4}{3h^2}$ می باشد.

پس از به دست آوردن معادلات حرکت، برای حل آن‌ها باید معادلات حرکت بر حسب جابه‌جایی‌ها محاسبه شوند؛ برای این کار باید روابط بین منته‌های تنش و کرنش تعریف شوند.

۳-۵ رابطه‌ی منته‌های تنش - کرنش

رابطه‌ی بین منته‌های تنش و کرنش به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \\ P_x \\ P_\theta \\ P_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & E_{11} & E_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & B_{21} & B_{22} & 0 & E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & E_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 & F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & F_{66} \\ E_{11} & E_{12} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 & H_{11} & H_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 & F_{21} & F_{22} & 0 & H_{21} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} & 0 & 0 & F_{66} & 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_\theta^{(0)} \\ \gamma_{x\theta}^{(0)} \\ \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_\theta^{(1)} \\ \gamma_{x\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_x^{(3)} \\ \varepsilon_\theta^{(3)} \\ \gamma_{x\theta}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \\ R_x \\ R_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 & J_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} & 0 & J_{44} \\ J_{55} & 0 & L_{55} & 0 \\ 0 & J_{44} & 0 & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{\theta z}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{\theta z}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (۳-۲۶)$$

که در آن A_{ij} سفتی‌های کششی، B_{ij} سفتی‌های کوپله خمشی-کششی، D_{ij} سفتی‌های خمشی و E_{ij} ، F_{ij} ، H_{ij} و L_{ij} سفتی‌ها مرتبه بالا هستند؛ که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$(A_{ij}, J_{ij}, L_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(1, z^2, z^4) dz \quad i, j = 4, 5 \quad (۳-۲۷)$$

اکنون با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۱۱) در روابط (۳-۲۶) منته‌های تنش بر حسب جابه‌جایی‌ها به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
N_x = & A_{11}(\frac{\partial u_0}{\partial x}) + A_{12}(\frac{1}{R}(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0)) + B_{11}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + B_{12}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta}) + E_{11}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})) \\
& + E_{12}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}))
\end{aligned}
\quad (\text{الف} - ٢٨-٣)$$

$$\begin{aligned}
N_\theta = & A_{21}(\frac{\partial u_0}{\partial x}) + A_{22}(\frac{1}{R}(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0)) + B_{21}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + B_{22}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta}) + E_{21}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})) \\
& + E_{22}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}))
\end{aligned}
\quad (\text{ب} - ٢٨-٣)$$

$$\begin{aligned}
N_{x\theta} = & A_{66}(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}) + B_{66}(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta}) + E_{66}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta})) \\
& (\text{پ} - ٢٨-٣)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x = & B_{11}(\frac{\partial u_0}{\partial x}) + B_{12}(\frac{1}{R}(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0)) + D_{11}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + D_{12}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta}) + F_{11}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})) \\
& + F_{12}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}))
\end{aligned}
\quad (\text{ت} - ٢٨-٣)$$

$$\begin{aligned}
M_\theta = & B_{21}(\frac{\partial u_0}{\partial x}) + B_{22}(\frac{1}{R}(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0)) + D_{21}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + D_{22}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta}) + F_{21}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})) \\
& + F_{22}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}))
\end{aligned}
\quad (\text{ث} - ٢٨-٣)$$

$$\begin{aligned}
M_{x\theta} = & B_{66}(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}) + D_{66}(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta}) + F_{66}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta})) \\
& (\text{ج} - ٢٨-٣)
\end{aligned}$$

$$P_x = E_{11}(\frac{\partial u_0}{\partial x}) + E_{12}(\frac{1}{R}(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0)) + F_{11}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + F_{12}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta}) + H_{11}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}))$$

$$+ H_{12}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2})) \quad (\text{ج} - ۲۸ - ۳)$$

$$P_\theta = E_{21}(\frac{\partial u_0}{\partial x}) + E_{22}(\frac{1}{R}(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0)) + F_{21}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + F_{22}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta}) + H_{21}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}))$$

$$+ H_{22}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2})) \quad (\text{ح} - ۲۸ - ۳)$$

$$P_{x\theta} = E_{66}(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}) + F_{66}(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta}) + H_{66}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta}))$$

$$\quad (\text{خ} - ۲۸ - ۳)$$

$$Q_x = A_{55}(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) + J_{55}(-\frac{4}{h^2}(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x})) \quad (\text{د} - ۲۸ - ۳)$$

$$Q_\theta = A_{44}(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) + J_{44}(-\frac{4}{h^2}(\varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R})) \quad (\text{ذ} - ۲۸ - ۳)$$

$$R_x = J_{55}(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) + L_{55}(-\frac{4}{h^2}(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x})) \quad (\text{ر} - ۲۸ - ۳)$$

$$R_\theta = J_{44}(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) + L_{44}(-\frac{4}{h^2}(\varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R})) \quad (\text{ز} - ۲۸ - ۳)$$

با قرار دادن روابط (۲۸-۳) در روابط (۲۵-۳) معادلات حرکت بر حسب جابه‌جایی‌ها به دست می‌آید.

$$A_{11}(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}) + A_{12}(\frac{1}{R}(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w_0}{\partial x})) + B_{11}(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2}) + B_{12}(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta}) + E_{11}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3})) + E_{12}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial \theta^2})) + A_{66}(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2})$$

$$+ B_{66}(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2}) + E_{66}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial \theta^2}))$$

$$= I_0 \ddot{u}_0 + (I_1 - C_2 I_3) \ddot{\varphi}_x - C_2 I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \quad (\text{الف} - ۲۹ - ۳)$$

$$\begin{aligned}
& A_{66}(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta}) + B_{66}(\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta}) + E_{66}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \\
& + \frac{2}{R} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta})) + A_{21}(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta}) + A_{22}(\frac{1}{R^2}(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w_0}{\partial \theta})) + B_{21}(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta}) \\
& + B_{22}(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2}) + E_{21}(-\frac{4}{3h^2} \frac{1}{R}(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta})) + E_{22}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta^3})) \\
& + \frac{1}{R} \left(A_{44}(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) + J_{44}(-\frac{4}{h^2}(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x})) \right) - \frac{1}{R} C_1 \left(J_{44}(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) + L_{44}(-\frac{4}{h^2}(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x})) \right) \\
& + N_a \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = I_0 \ddot{v}_0 + (I_1 - C_2 I_3) \ddot{\varphi}_\theta - C_2 I_3 \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial \theta} \quad (\text{بـ } 29-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{55}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}) + J_{55}(-\frac{4}{h^2}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})) - C_1 \left(J_{55}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}) + L_{55}(-\frac{4}{h^2}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})) \right) \\
& + \frac{1}{R} \left(A_{44}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta}) + J_{44}(-\frac{4}{h^2}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta})) \right) - C_2 \frac{1}{R} \left(J_{44}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta}) + L_{44}(-\frac{4}{h^2}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta})) \right) \\
& + C_1 \{ E_{11}(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}) + E_{12}(\frac{1}{R}(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})) + F_{11}(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3}) + F_{12}(\frac{1}{R} \frac{\partial^3 \varphi_\theta}{\partial x^2 \partial \theta}) \\
& + H_{11}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4})) + H_{12}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R} \frac{\partial^3 \varphi_\theta}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2})) \\
& + E_{21}(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial \theta^2}) + E_{22}(\frac{1}{R^3}(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2})) + F_{21}(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial \theta^2}) + F_{22}(\frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \varphi_\theta}{\partial \theta^3}) \\
& + H_{21}(-\frac{4}{3h^2} \frac{1}{R^2}(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2})) + H_{22}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 \varphi_\theta}{\partial \theta^3} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \theta^4})) \\
& + E_{66} \frac{2}{R}(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u_0}{\partial \theta^2 \partial x}) + F_{66} \frac{2}{R}(\frac{\partial^3 \varphi_\theta}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial \theta^2 \partial x}) + H_{66} \frac{2}{R}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{\partial^3 \varphi_\theta}{\partial x^2 \partial \theta} \\
& + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial \theta^2 \partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \theta^2})) \} - A_{21}(\frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x}) - A_{22}(\frac{1}{R^2}(\frac{\partial v_0}{\partial x} + w_0)) - B_{21}(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) \\
& - B_{22}(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta}) - E_{21}(-\frac{4}{3h^2} \frac{1}{R}(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2})) - E_{22}(-\frac{4}{3h^2}(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+N_a \frac{\partial^2 \dot{w}_0}{\partial x^2} &= I_0 \ddot{w}_0 - C_2^2 I_6 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial \theta^2} \right) + C_2 \{ I_3 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial \theta} \right) \\
&+ (I_4 - C_1 I_6) \left(\frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{\phi}_\theta}{\partial \theta} \right) \} \quad (\text{ب} - \text{٢٩} - \text{٣})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + B_{12} \left(\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right) + D_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + D_{12} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial x \partial \theta} \right) + F_{11} \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \right) + F_{12} \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial \theta^2} \right) \right) - C_2 [E_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + E_{12} \left(\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right) \\
&+ F_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + F_{12} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial x \partial \theta} \right) + H_{11} \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \right) + H_{12} \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial \theta^2} \right) \right)] \\
&+ B_{66} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} \right) + D_{66} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \theta^2} \right) + F_{66} \frac{1}{R} \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial x \partial \theta} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial \theta^2} \right) \right) - C_2 [E_{66} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} \right) + F_{66} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \theta^2} \right) \\
&+ H_{66} \frac{1}{R} \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial \theta^2} \right) \right)] - A_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - J_{55} \left(-\frac{4}{h^2} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right) \\
&+ C_1 \{ J_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + L_{55} \left(-\frac{4}{h^2} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right) \} = (I_1 - C_2 I_3) \ddot{u}_0 + (I_2 - 2C_2 I_4 + C_2^2 I_6) \ddot{\phi}_x \\
&- C_2 (I_4 - C_2 I_6) \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \quad (\text{ت} - \text{٢٩} - \text{٣})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) + F_{66} \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \theta \partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right. \\
& \left. - C_2 \left(E_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} \right) + F_{66} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) + H_{66} \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right) \right. \right. \\
& \left. + \{ B_{21} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} \right) + B_{22} \left(\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \right) + D_{21} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) + D_{22} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} \right) \right. \right. \\
& \left. + F_{21} \left(-\frac{4}{3h^2} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right) + F_{22} \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta^3} \right) \right) \right. \\
& \left. - C_2 [E_{21} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \theta} \right) + E_{22} \left(\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \right) + F_{21} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} \right) + F_{22} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} \right) \right. \right. \\
& \left. + H_{21} \left(-\frac{4}{3h^2} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right) + H_{22} \left(-\frac{4}{3h^2} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \theta^3} \right) \right)] \right\} \\
& - \left(A_{44} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + J_{44} \left(-\frac{4}{h^2} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right) - C_1 J_{44} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + L_{44} \left(-\frac{4}{h^2} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right) \right) \\
& = (I_1 - C_2 I_3) \ddot{v}_0 + (I_2 - 2C_2 I_4 + C_2^2 I_6) \ddot{\varphi}_\theta - C_2 (I_4 - C_2 I_6) \frac{1}{R} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial \theta} \quad (3-29 \text{ ث})
\end{aligned}$$

۳-۶ شرایط مرزی

شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای پوسته‌ی استوانه‌ای در این مطالعه، دو سر تکیه‌گاه

ساده است. با در نظر گرفتن این شرایط تکیه‌گاهی لازم است که در $x=0$ و $x=L$ شرایط زیر برقرار باشد.

شرایط مرزی هندسی

$$v = 0, w = 0, \varphi_\theta = 0 \quad (3-30)$$

شرایط مرزی طبیعی

$$N_x = 0, M_x = 0, P_x = 0 \quad (3-31)$$

یک حل برای معادلات حرکت پوسته‌ی استوانه‌ای (روابط (3-29)) با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را

می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت [20, 19].

$$\begin{aligned}
u_{mn} &= \bar{A}_{mn} e^{i\alpha} \cos \lambda_m x \cos n\theta \\
v_{mn} &= \bar{B}_{mn} e^{i\alpha} \sin \lambda_m x \sin n\theta \\
w_{mn} &= \bar{C}_{mn} e^{i\alpha} \sin \lambda_m x \cos n\theta \\
\varphi_{xmn} &= \bar{H}_{mn} e^{i\alpha} \cos \lambda_m x \cos n\theta \\
\varphi_{\theta mn} &= \bar{K}_{mn} e^{i\alpha} \sin \lambda_m x \sin n\theta
\end{aligned} \tag{۳۲-۳}$$

میدان جابه‌جایی فوق شرایط مرزی را ارضا می‌کند. در این رابطه، $\bar{A}_{mn}, \bar{B}_{mn}, \bar{C}_{mn}, \bar{H}_{mn}, \bar{K}_{mn}$ ضرایب شکل مدها هستند، $\lambda_m = \frac{m\pi}{L}$ ، n شماره مد محیطی، m شماره مد محوری، ω فرکانس طبیعی و t زمان می‌باشد.

۷-۳ تحلیل کماتش

برای به‌دست آوردن بار کماتش بایستی حل استاتیکی انجام شود (عبارت‌های زمانی در رابطه‌ی (۳۲-۳) در نظر گرفته نمی‌شود). با جایگذاری روابط (۳۲-۳) در روابط (۲۹-۳) به یک دستگاه معادلات می‌رسیم که در پیوست «الف» آمده است. با فاکتورگیری از عبارت‌های سینوسی و کسینوسی از معادلات پیوست «الف»، به روابطی به صورت زیر می‌رسیم.

$$(\cos \lambda_m x \cos n\theta) L(m, n, R, \dots) = 0 \tag{۳۳-۳-الف}$$

$$(\sin \lambda_m x \sin n\theta) L(m, n, R, \dots) = 0 \tag{۳۳-۳-ب}$$

$$(\sin \lambda_m x \cos n\theta) L(m, n, R, \dots) = 0 \tag{۳۳-۳-پ}$$

$$(\cos \lambda_m x \cos n\theta) L(m, n, R, \dots) = 0 \tag{۳۳-۳-ت}$$

$$(\sin \lambda_m x \sin n\theta) L(m, n, R, \dots) = 0 \tag{۳۳-۳-ث}$$

که $L(m, n, R, \dots)$ ضرایب سینوس و کسینوس بوده و تابعی از پارامترهای هندسی، سفتی‌ها، شکل و شماره مدها می‌باشد. برای حل معادلات (۳۳-۳) یا عبارت‌های سینوسی و کسینوسی و یا ضرایب

آن‌ها باید برابر صفر باشند. از آن‌جا که در این پنج معادله عبارت‌های سینوس و کسینوس باید همزمان برقرار باشند، پس هیچ گاه به ازای یک مقدار ثابت سینوس و کسینوس برابر صفر نخواهند بود. از این رو با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب آن‌ها، مجهولات را می‌یابیم.

با حذف سینوس و کسینوس‌ها از معادلات پیوست «الف» و با قرار دادن N_{cr} به جای N_a در حالت بحرانی به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم.

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} \\ T_{21} & T_{22} + \lambda_m^2 N_{cr} & T_{23} & T_{24} & T_{25} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} + \lambda_m^2 N_{cr} & T_{34} & T_{35} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{mn} \\ \bar{B}_{mn} \\ \bar{C}_{mn} \\ \bar{H}_{mn} \\ \bar{K}_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

که مقادیر T_{ij} در پیوست «ب» آمده است. اکنون برای به‌دست آوردن جواب غیربدهی، با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} \\ T_{21} & T_{22} + \lambda_m^2 N_{cr} & T_{23} & T_{24} & T_{25} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} + \lambda_m^2 N_{cr} & T_{34} & T_{35} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} \end{vmatrix} = 0 \quad (3-35)$$

درنهایت با ساده سازی رابطه‌ی (۳-۳۵)، معادله‌ی بار کمانش استاتیکی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$a(L, m, n) N_{cr}^2 + b(L, m, n) N_{cr} + c(L, m, n) = 0$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (3-36)$$

که a ، b و c ضرایب و N_{cr} بار کمانش می‌باشد. با حل این معادله، بار کمانش پوخته، برای m و n مختلف به‌دست می‌آید و کمترین مقدار آن، بار بحرانی کمانش می‌باشد. با داشتن پارامترهای هندسی

و خواص مواد، می‌توان از رابطه‌ی (۳۶-۳) بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای متغیّر تابعی را محاسبه نمود.

۳-۸ تحلیل ارتعاشات آزاد

برای تحلیل ارتعاشات آزاد نیز با قرار دادن رابطه‌ی (۳۲-۳) در روابط (۲۹-۳) به دستگاه

معادلاتی که در پیوست «ج» آمده است می‌رسیم. با در نظر گرفتن بار محوری (N_a) برابر کسری از بار بحرانی کمانش حل را انجام می‌دهیم. در تحلیل ارتعاشات آزاد نیز تمامی مراحل تحلیل کمانش را انجام داده با این تفاوت که با در نظر گرفتن عبارت‌های زمانی، اینرسی جرمی نیز وارد معادلات می‌شود. اکنون با حذف سینوس و کسینوس‌ها از معادلاتی که در پیوست «ج» آمده است به دستگاه

معادلات زیر می‌رسیم.

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} \\ T_{21} & T_{22} + \lambda_m^2 N_a & T_{23} & T_{24} & T_{25} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} + \lambda_m^2 N_a & T_{34} & T_{35} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_0 & 0 & -C_2 I_3 \lambda_m & I_1 - C_2 I_3 & 0 \\ 0 & I_0 & C_2 I_3 \frac{n}{R} & 0 & I_1 - C_2 I_3 \\ -\omega^2 \begin{bmatrix} -C_2 I_3 \lambda_m & C_2 I_3 \frac{n}{R} & I_0 + C_2^2 I_6 \left(\lambda_m^2 + \frac{n^2}{R^2} \right) & -C_2 (I_4 - C_2 I_6) \lambda_m & C_2 (I_4 - C_2 I_6) \frac{n}{R} \\ I_1 - C_2 I_3 & 0 & -C_2 (I_4 - C_2 I_6) \lambda_m & I_2 - 2C_2 I_4 + C_2^2 I_6 & 0 \\ 0 & I_1 - C_2 I_3 & C_2 (I_4 - C_2 I_6) \frac{n}{R} & 0 & I_2 - 2C_2 I_4 + C_2^2 I_6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{mn} \\ \bar{B}_{mn} \\ \bar{C}_{mn} \\ \bar{H}_{mn} \\ \bar{K}_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37-3)$$

که در آن $C_2 = \frac{4}{3h^2}$ و مقادیر T_{ij} در پیوست «ب» آمده است.

حل غیربديهی مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی (۳-۳۷)، فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی تحت بار محوری را می‌دهد.

فصل ۴

تحليل و بررسی نتایج

۱-۴ مقدمه

در این پژوهش به بررسی کمانش و ارتعاشات پوسته‌ای متغیر تابعی با تغییرات خواص یک‌بعدی در راستای ضخامت پرداخته و با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و روابط کرنش-جاب‌جایی لوه، فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش ارائه شده است. در این فصل نتایج به‌دست آمده از تحلیل کمانش و ارتعاشات با مراجع دیگر مقایسه می‌شوند و درستی نتایج، نشان داده می‌شود. سپس نتایج به‌دست آمده را مورد بحث و بررسی قرار داده و پیشنهادهایی جهت ادامه‌ی مطالعات در زمینه‌های مرتبط ارائه می‌شود.

۲-۴ خواص وابسته به دما

برای به‌دست آوردن نتایج حاصل از تحقیق حاضر، از ماده‌ی ترکیبی سیلیکون نیتريد^۱ و نیکل^۲ استفاده شده است. به‌منظور مدل کردن تأثیر خواص مواد متغیر تابعی، خواص باید وابسته به دما باشد. مدول الاستیسیته، چگالی جرمی و ضریب پواسون برای هر یک از مواد در دمای T به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۳۳].

$$P_i = P_0 \left(P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (1-4)$$

که i می‌تواند سیلیکون نیتريد یا نیکل باشد و P می‌تواند هر یک از خواص در دمای T باشد. خواص مواد در دمای ۳۰۰ کلوین در جدول (۱-۴) آمده است. با جایگذاری رابطه‌ی (۱-۴) در روابط (۳-۵) مدول الاستیسیته، چگالی جرمی و ضریب پواسون مؤثر، برای ماده‌ی متغیر تابعی به‌دست می‌آید.

¹Silicon Nitride

²Nickel

جدول (۱-۴) ضرایب خواص وابسته به دما برای دو ماده‌ی نیکل و سیلیکون نیتريد [۳۳].

سیلیکون نیتريد		نیکل		
	E(Nm ⁻²)	ν	E(N.m ⁻²)	ν
P ₋₁	.	.	.	.
P ₋	۳۴۸/۴۳×۱۰. ^۹	۰/۲۴	۲۲۳/۹۵×۱۰. ^۹	۰/۳۱
P _۱	-۳/۰.۷۰×۱۰. ^{-۴}	.	-۲/۷۹۴×۱۰. ^{-۴}	.
P _۲	۲/۱۶۰×۱۰. ^{-۷}	.	-۳/۹۹۸×۱۰. ^{-۹}	.
P _۳	-۸/۹۴۶×۱۰. ^{-۱۱}	.	.	.
ρ	۲۳۷۰.(kgm ⁻³)		۸۹۰۰.(kg.m ⁻³)	

۳-۴ مقایسه‌ی نتایج با تحقیقات گذشته

برای نشان دادن درستی محاسبات انجام شده در این پژوهش، نتایج حاصل از تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد، با تحقیقات انجام گرفته در گذشته مقایسه شده است.

۱-۳-۴ بررسی کمانش

برای نشان دادن درستی نتایج به‌دست آمده در این حالت، مقادیر بار بحرانی کمانش برای پوسته‌ی استوانه‌ای همسانگرد با مقدار آن در مرجع [۴۴] مقایسه شده است. با توجه به جدول (۲-۴) مشاهده می‌شود بین نتایج به‌دست آمده از کار حاضر و مطالعات گزارش شده توسط براس^۱ و المروث^۲ [۴۴] اختلافی کمتر از ۲/۴ درصد وجود دارد. در این مقایسه از ماده‌ی سرامیکی آلومینا^۳ استفاده شده است.

¹ Brush
² Almroth
³ Alomina

جدول (۲-۴) مقایسه‌ی بار بحرانی کمانش (MN) برای پوسته‌ی همسانگرد ساخته شده از آلومینا با مرجع [۴۴]

$$R=0.3m \text{ و } L/R=1$$

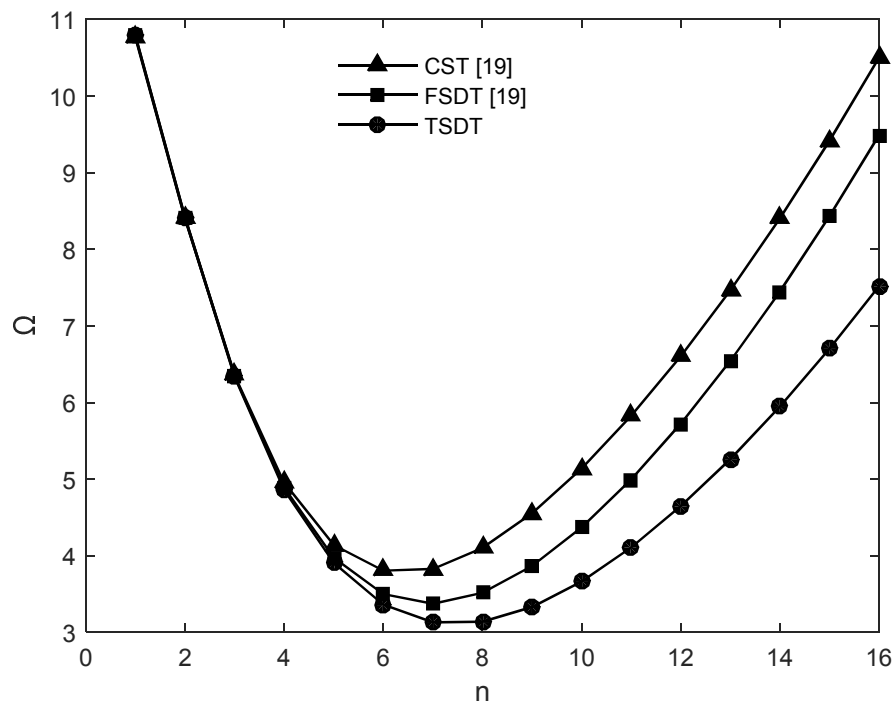
$\frac{h}{R}$	براش و المروث [۴۴]	حل حاضر	اختلاف (%)
$\frac{1}{30}$	۲۶/۲۳۹۰	۲۵/۶۱۶۷	۲/۳۷
$\frac{1}{50}$	۹/۴۴۶۰	۹/۳۰۹۱	۱/۴۵
$\frac{1}{100}$	۲/۳۶۱۵	۲/۳۹۵۵	۱/۴۲
$\frac{1}{200}$	۰/۵۹۴۰	۰/۵۹۵۱	۰/۱۸
$\frac{1}{300}$	۰/۲۶۲۳	۰/۲۶۲۶	۰/۱۱

۲-۳-۴ بررسی ارتعاشات آزاد

شکل (۱-۴) نتایج فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد $\Omega = 2\omega * 2\pi R \sqrt{I_1/A_{11}}$ برای پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی ساخته شده از سیلیکون نیتريد- نیکل، با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را با استفاده از تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه سوم برشی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که فرکانس‌های طبیعی به دست آمده بر اساس تئوری مرتبه سوم توافق خوبی (اختلاف کمتر از ۵ درصد) به‌خصوص در مدهای پایین با نتایج ارائه شده بر اساس تئوری کلاسیک و مرتبه اول که در مرجع [۱۹] آمده است دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج تئوری حاضر، در شماره مدهای بالا مقادیر پایین‌تری نسبت به مرجع مذکور به‌دست می‌دهد. دلیل این امر را می‌توان استفاده از تئوری مرتبه سوم به‌جای تئوری‌های مرتبه اول و کلاسیک پوسته‌ها و همچنین کامل‌تر بودن روابط

سینماتیک به کار گرفته شده برای پوسته‌ها در این تئوری دانست.

در شکل (۱-۴) با افزایش شماره مد محیطی فرکانس‌های طبیعی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابند. کمترین مقدار فرکانس طبیعی که فرکانس پایه نامیده می‌شود، برای تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و سوم در شماره مد محیطی هفتم ($n=7$) اتفاق می‌افتد این در حالی است که برای تئوری کلاسیک، فرکانس پایه در شماره مد محیطی ششم ($n=6$) اتفاق می‌افتد.



شکل (۱-۴) فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار محوری

۴-۴ ارائه و بررسی نتایج

در این بخش، نتایج به دست آمده از کار حاضر برای کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی ارائه شده است. همچنین تأثیر پارامترهایی از جمله اثرات بار محوری، خصوصیات مواد، نسبت ضخامت به شعاع، نسبت طول به شعاع و دما بر روی بار کمانش، فرکانس‌های طبیعی و فرکانس پایه‌ی پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی مورد مطالعه قرار گرفته است. لازم به ذکر است که در تحلیل حاضر، نتایج برای مد محوری اول ($m=1$)، $\frac{h}{R}=0.01$ ، $\frac{L}{R}=1$ ، $g=5$ و $T=300K$ آمده است.

۴-۴-۱ نتایج کمانش

بار کمانش ارائه شده در نتایج، به صورت بی‌بعد آمده است که برای بی‌بعد کردن بار کمانش از رابطه‌ی زیر استفاده شده است [۴۴].

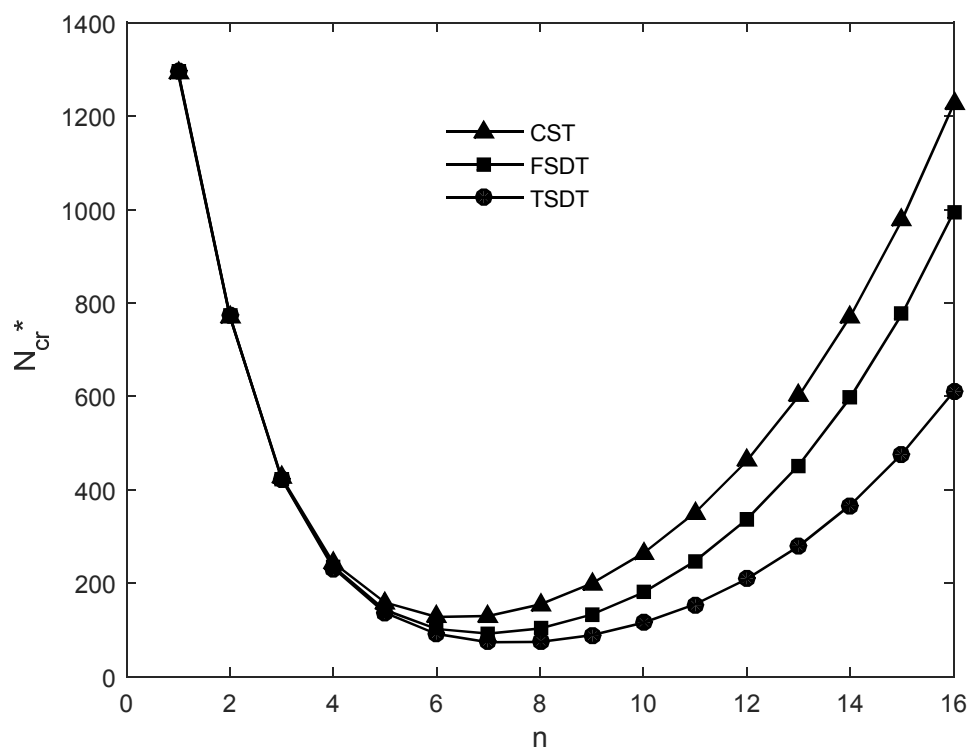
$$N_{cr}^* = \frac{N_{cr} L^2}{\pi^2 D_m} \quad (۲-۴)$$

N_{cr}^* بار کمانش بی‌بعد، N_{cr} بار کمانش، L طول پوسته‌ی استوانه‌ای و D_m سفتی خمشی پوسته‌ی استوانه‌ای تمام فلزی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D_m = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu_m^2)} \quad (۳-۴)$$

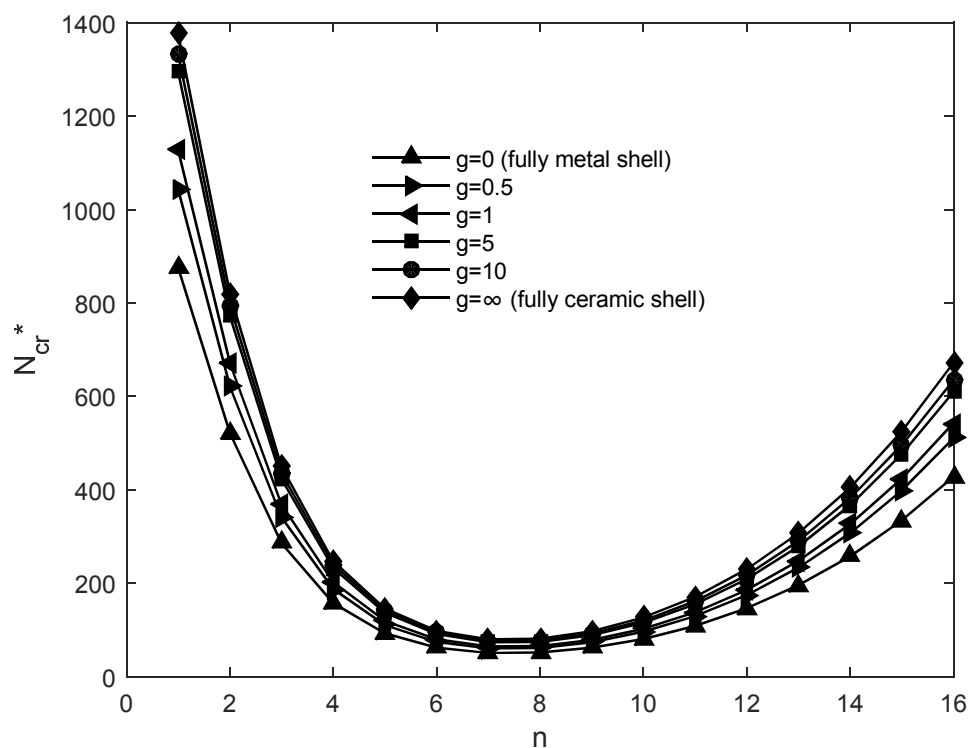
E_m مدول الاستیسیته، ν_m ضریب پواسون و h ضخامت پوسته‌ی استوانه‌ای تمام فلزی است.

در شکل (۲-۴) با افزایش شماره مدهای محیطی بار کمانش ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. بار کمانش به‌دست آمده با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی، مقادیر کمتری نسبت به دو تئوری دیگر می‌دهد. کمترین مقدار بار کمانش که بار بحرانی کمانش نامیده می‌شود برای تئوری کلاسیک در مد محیطی ششم ($n=6$) و در تئوری‌های مرتبه اول و سوم برشی در مد محیطی هفتم ($n=7$) اتفاق می‌افتد.



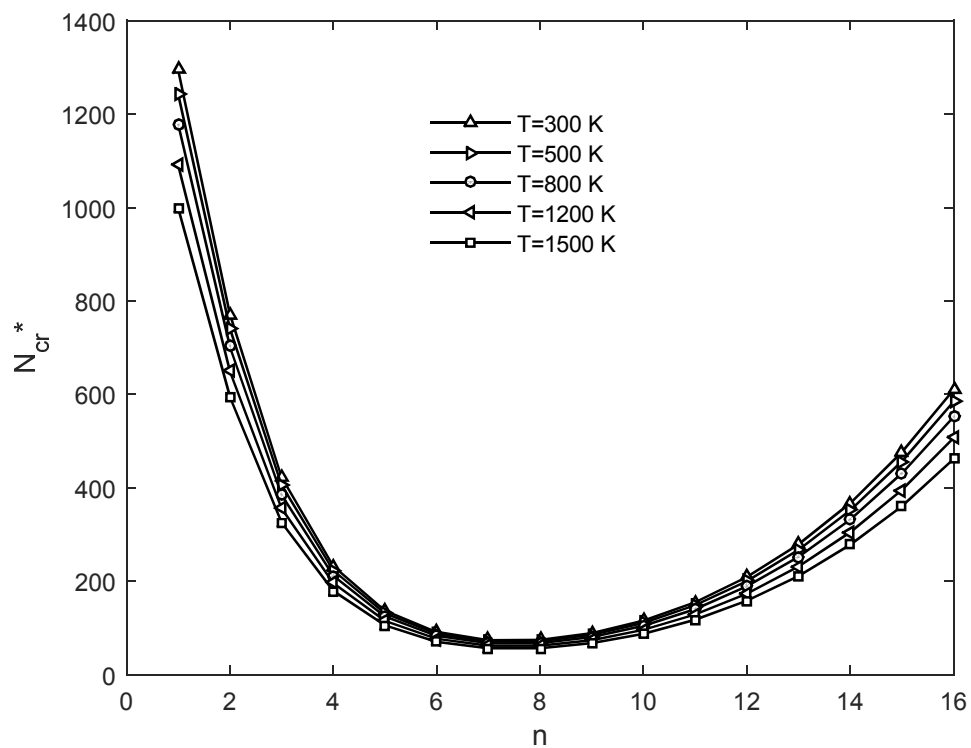
شکل (۲-۴) بار کمانش بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای تئوری‌های مختلف

شکل (۳-۴) بار کمانش بی بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای شاخص‌های مختلف ماده را نشان می‌دهد. با افزایش شاخص ماده، بار کمانش نیز افزایش می‌یابد. دلیل اصلی این افزایش تبدیل پوسته‌ی تمام فلزی به پوسته‌ی تمام سرامیکی می‌باشد. در نتیجه‌ی این تغییر جنس پوسته، از آنجا که مدول الاستیسیته سرامیک بیشتر از فلز است بار کمانش نیز افزایش می‌یابد. شاخص ماده تأثیری بر شماره مد بار بحرانی کمانش ندارد و بار بحرانی کمانش در مد محیطی هفتم اتفاق می‌افتد.



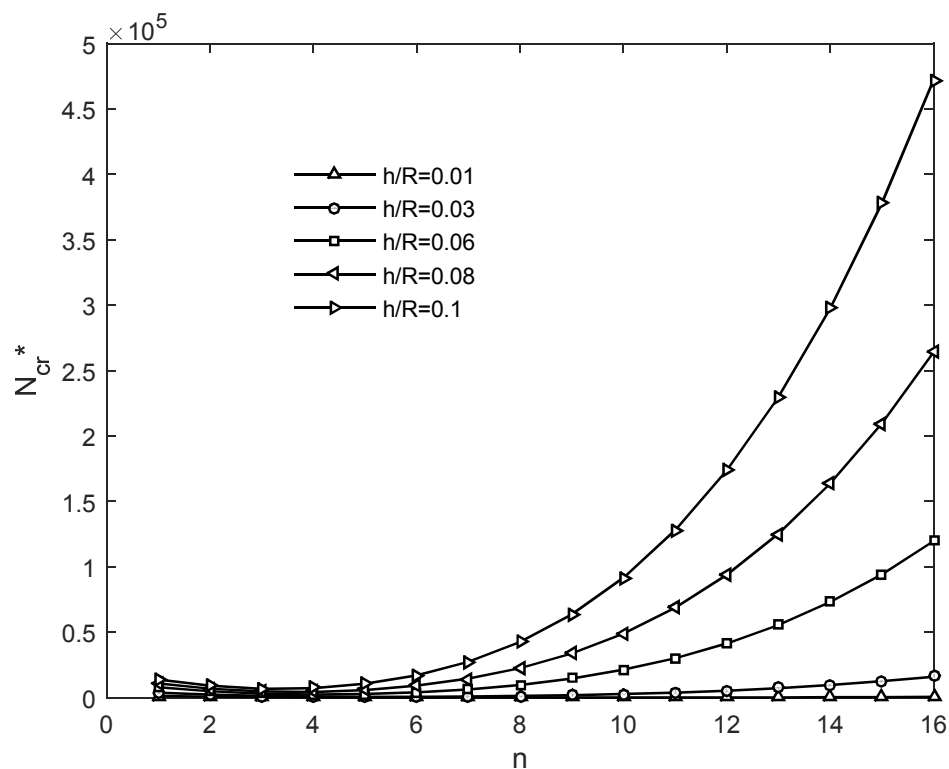
شکل (۳-۴) بار کمانش بی بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای شاخص‌های مختلف ماده

شکل (۴-۴) بار کمانش بی بعد بر حسب شماره مدهای محیطی در دماهای مختلف را نشان می دهد. با افزایش دما به علت کاهش مدول الاستیسیته، بار کمانش کاهش می یابد. اختلاف بار کمانش به دست آمده در دماهای مختلف در شماره مد محیطی هفتم کمترین و در شماره مد محیطی اول بیشترین مقدار است. دما نیز تأثیری بر شماره مد، بار بحرانی ندارد و بار بحرانی کمانش در مد محیطی هفتم اتفاق می افتد.



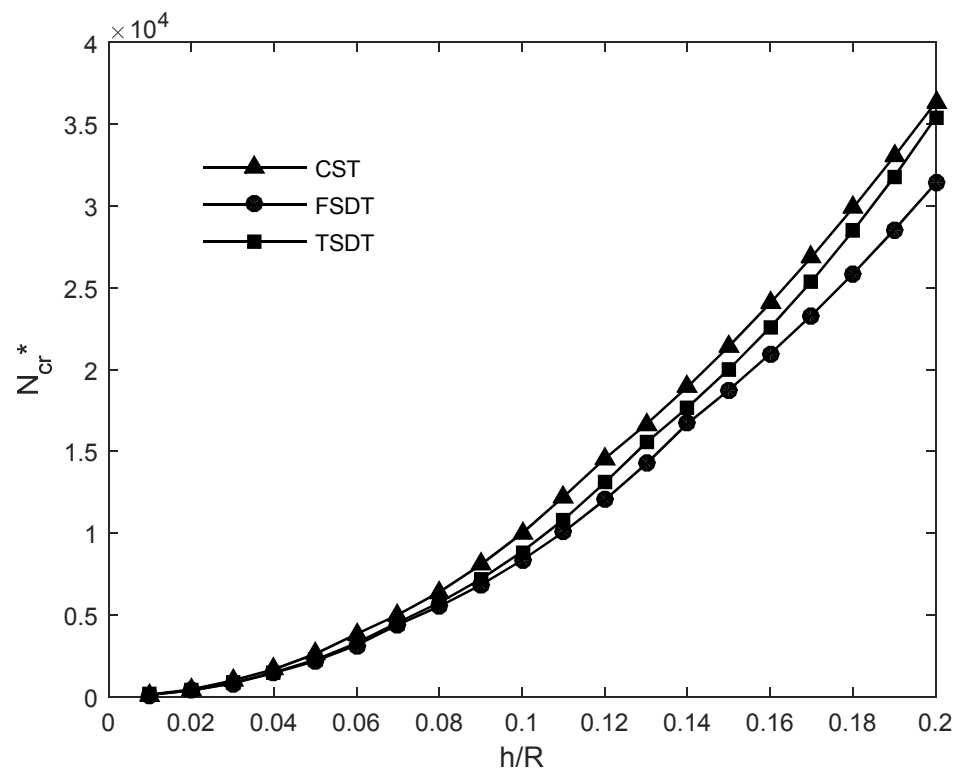
شکل (۴-۴) بار کمانش بی بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای دماهای مختلف

شکل (۴-۵) بار کمانش بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای ضخامت‌های مختلف را نشان می‌دهد. با افزایش ضخامت بار کمانش نیز افزایش می‌یابد. در شماره مدهای محیطی بالا اختلاف بار کمانش به‌دست آمده در ضخامت‌های مختلف، نسبت به شماره مدهای محیطی پایین، بیشتر است. نسبت ضخامت به شعاع بر شماره مد، بار بحرانی تأثیر می‌گذارد و با افزایش نسبت ضخامت به شعاع شماره مد، بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.



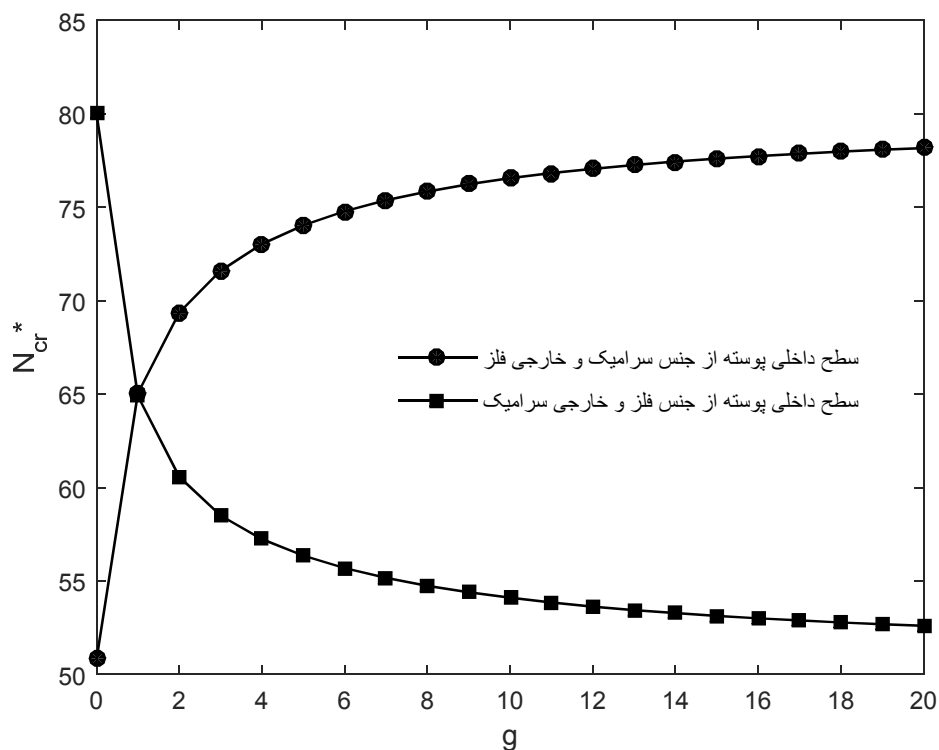
شکل (۴-۵) بار کمانش بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای ضخامت‌های مختلف

شکل (۴-۶) بار بحرانی کمانش بر حسب نسبت ضخامت به شعاع بر اساس سه تئوری مختلف را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد. دلیل آن افزایش سفتی پوسته می‌باشد. در ضخامت‌های کم، نتایج سه تئوری تطابق خوبی با هم دارند اما با افزایش ضخامت نتایج حاصل از تئوری مرتبه سوم اختلاف بیشتری نسبت به دو تئوری دیگر دارد.



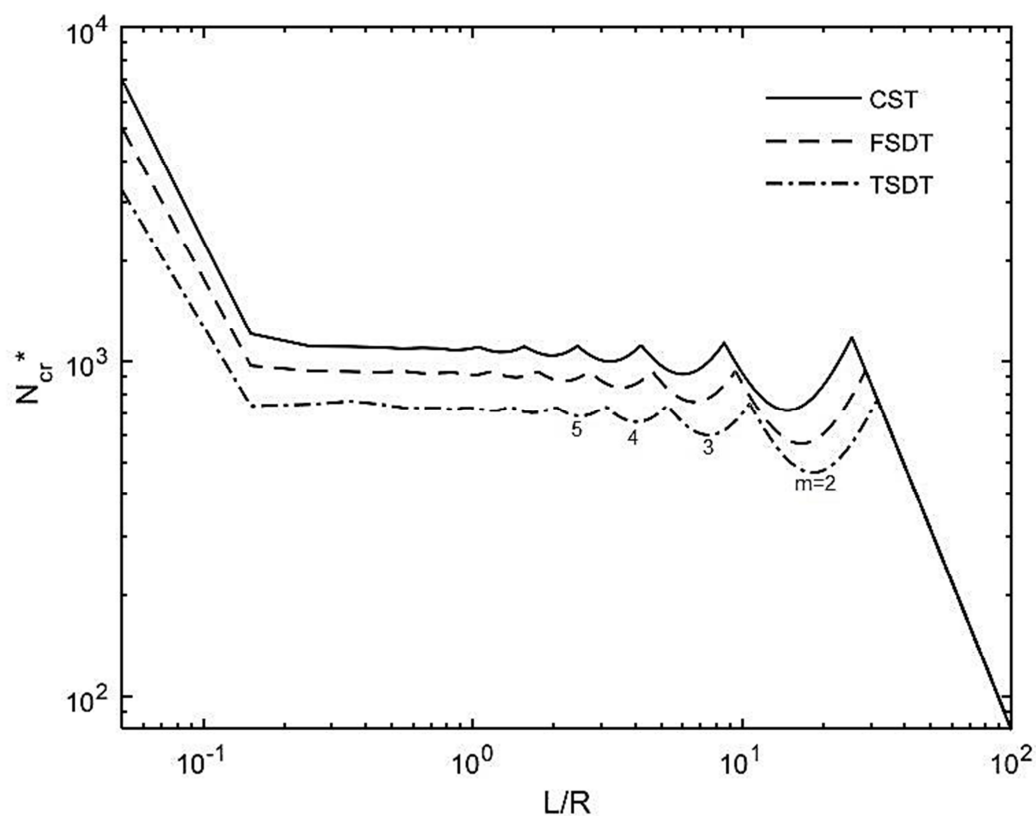
شکل (۴-۶) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب نسبت ضخامت به شعاع

شکل (۷-۴) بار بحرانی کمانش بر حسب شاخص ماده برای دو نوع پوسته‌ی استوانه‌ای را نشان می‌دهد. پوسته‌ی استوانه‌ای نوع اول سطح داخلی آن از جنس سرامیک و سطح خارجی آن از جنس فلز است اما پوسته‌ی نوع دوم سطح داخلی آن فلزی و سطح خارجی آن سرامیکی می‌باشد. برای پوسته‌ی نوع اول با افزایش شاخص ماده، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. دلیل اصلی این افزایش، این است که برای مقادیر بزرگ g در پوسته‌ی نوع اول، ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی پوسته، غنی از جزء سرامیکی خواهد شد که معمولاً دارای سفتی بیشتری نسبت به مواد فلزی هستند. اما در پوسته‌ی نوع دوم با افزایش شاخص ماده، بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. در این پوسته با افزایش g ، ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی پوسته غنی از جز فلزی خواهد شد که سفتی کمتری نسبت به سرامیک دارد.



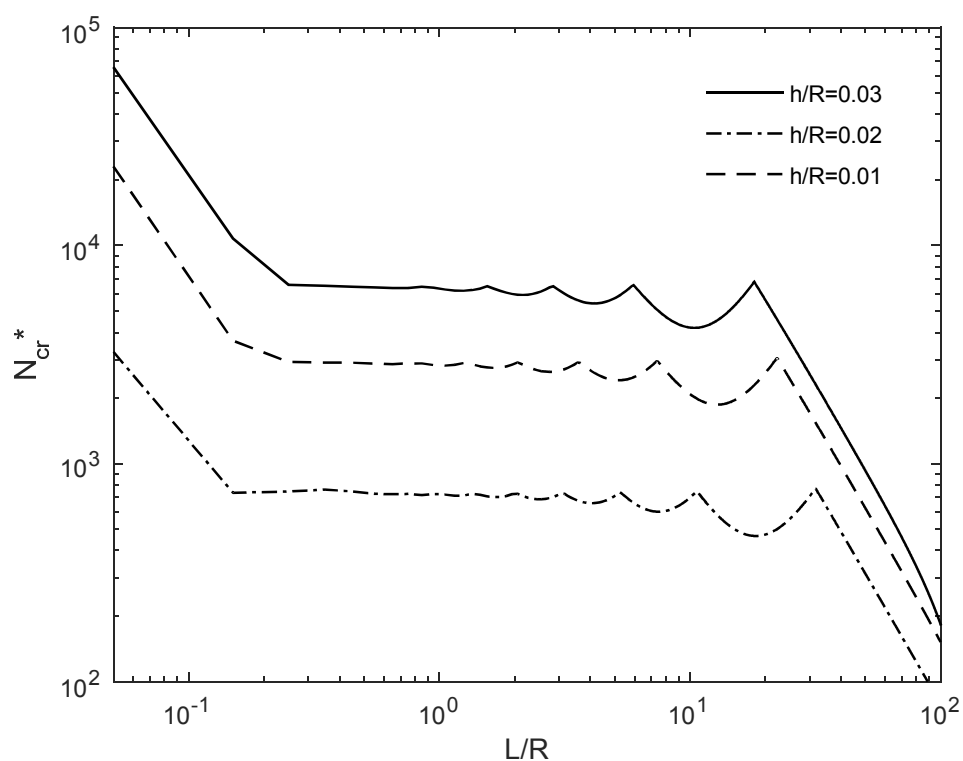
شکل (۷-۴) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب شاخص ماده

شکل (۸-۴) نمودار لگاریتمی تأثیر ضریب لاغری بر روی بار بحرانی کمانش برای تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه سوم تغییر شکل برشی را نشان می‌دهد. با افزایش ضریب لاغری شماره مد بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. مشاهده می‌شود در ابتدای نمودار بار بحرانی کمانش کاهش قابل توجهی دارد پس از آن بار بحرانی کمانش ثابت است و تغییرات چندانی نخواهد داشت. روند نمودار در ادامه، دارای تغییرات نوسانی است، پس از آن و از ضریب لاغری ۳۲ به بعد بار بحرانی کمانش کاهش قابل توجهی دارد.



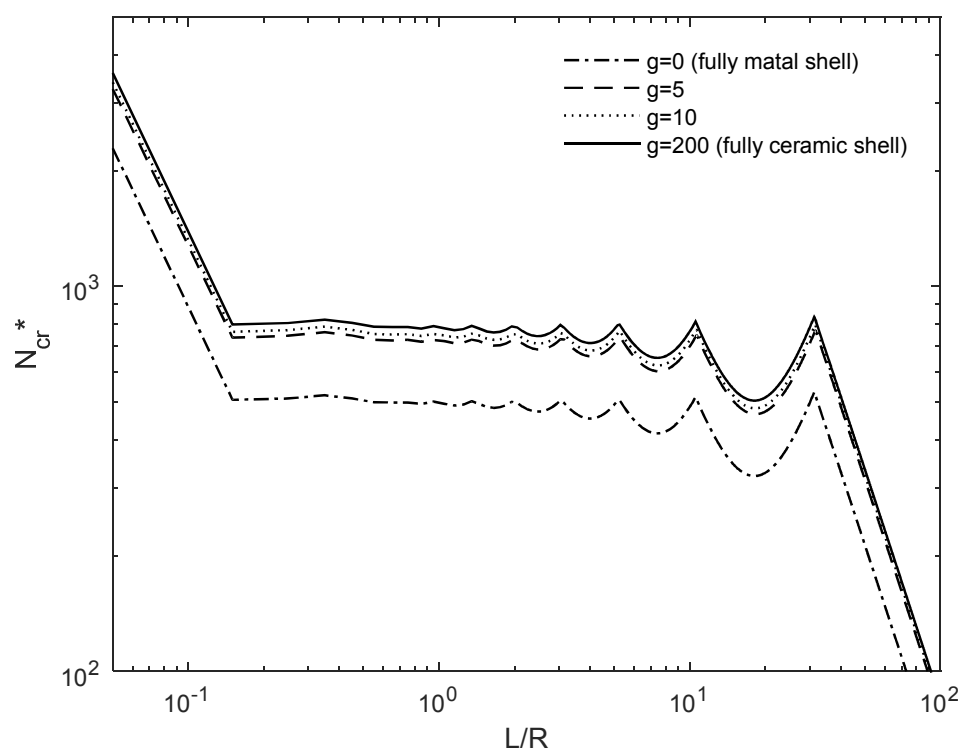
شکل (۸-۴) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب ضریب لاغری برای تئوری‌های مختلف

شکل (۹-۴) نمودار لگاریتمی بار بحرانی کمانش بر حسب ضریب لاغری در نسبت ضخامت به شعاع‌های مختلف را نشان می‌دهد. با افزایش ضخامت بدلیل افزایش سفتی پوسته بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد.



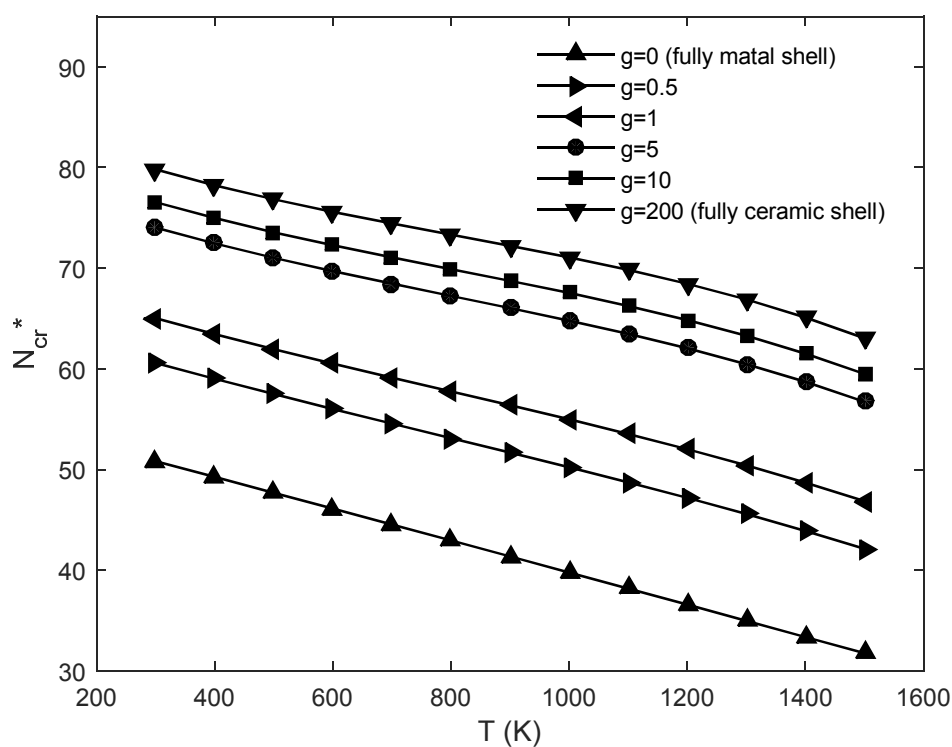
شکل (۹-۴) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب ضریب لاغری برای ضخامت‌های مختلف

شکل (۱۰-۴) نمودار لگاریتمی بار بحرانی کمانش بر حسب ضریب لاغری برای شاخص‌های مختلف ماده را نشان می‌دهد. با افزایش شاخص ماده به دلیل تبدیل پوسته‌ی تمام فلزی به پوسته‌ی سرامیکی و با توجه به اینکه مدول الاستیسیته سرامیک بیشتر از فلز است، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.



شکل (۱۰-۴) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب ضریب لاغری برای شاخص‌های مختلف ماده

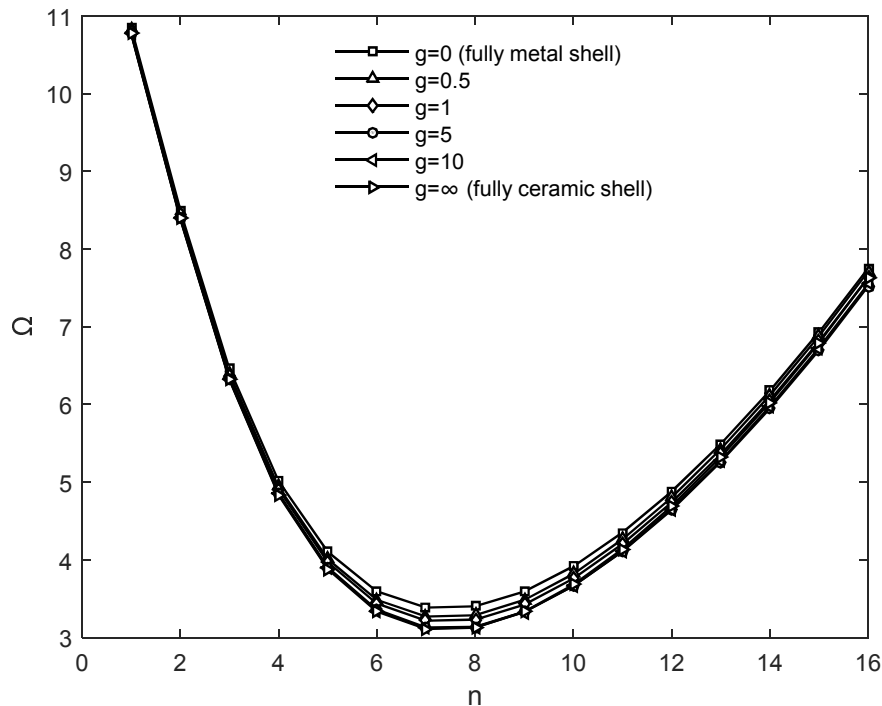
شکل (۱۱-۴) تأثیر دما بر بار بحرانی کمانش برای شاخص‌های مختلف ماده را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است با افزایش دما به علت کاهش مدول الاستیسیته، بار بحرانی کاهش می‌یابد. دلیل این امر تأثیر دما بر خواص مواد متغیر تابعی است. افزایش دما باعث کاهش نیروی بین مولکولی ذرات ماده و در نتیجه کاهش مدول الاستیسیته شده و مقاومت پوسته در برابر کمانش را کاهش می‌دهد.



شکل (۱۱-۴) بار بحرانی کمانش بی‌بعد بر حسب دما برای شاخص‌های مختلف ماده

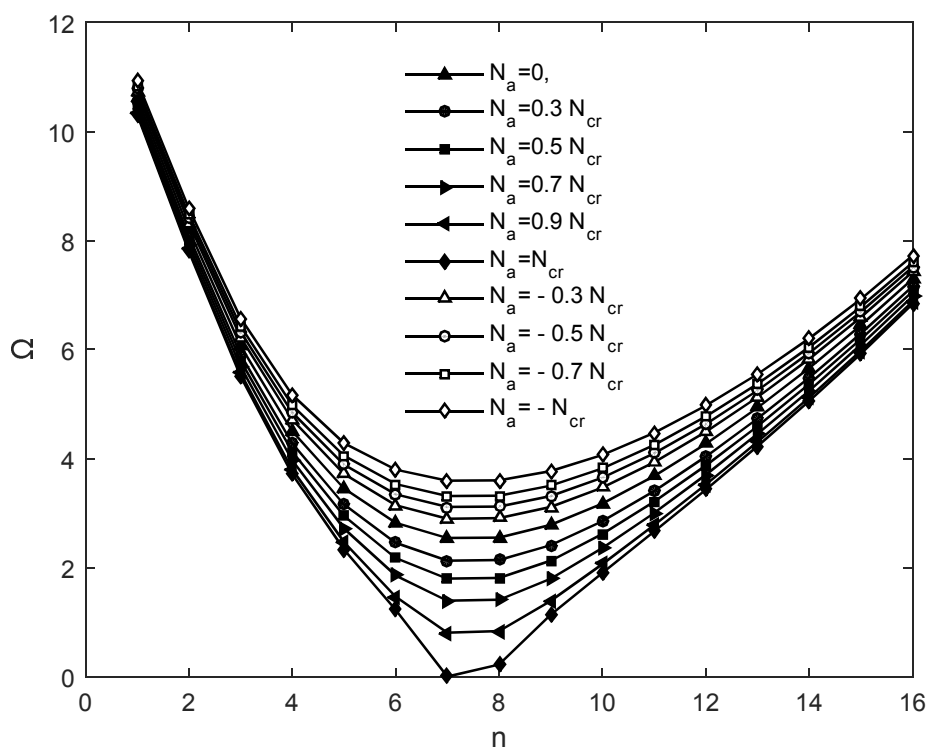
۴-۴-۲ نتایج ارتعاشات آزاد

در تحلیل ارتعاشات آزاد $N_a = 0.5N_{cr}$ در نظر گرفته شده است. در شکل (۴-۱۲) منحنی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برحسب شماره مدهای محیطی به ازای مقادیر مختلف شاخص ماده، نشان داده شده است. منحنی‌های مربوط به مقادیر مختلف g بین دو محدوده‌ی فلز خالص و سرامیک خالص قرار گرفته‌اند. این امر به دلیل تغییر خواص مکانیکی پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی، از پوسته‌ی تمام فلزی به پوسته‌ی تمام سرامیکی می‌باشد. مشاهده می‌شود که فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ی استوانه‌ای تمام فلزی بیشتر از پوسته‌ی استوانه‌ای تمام سرامیکی می‌باشد؛ دلیل را می‌توان در تفاوت مدول الاستیسیته‌ی سرامیک و فلز یافت. مدول الاستیسیته و در نتیجه سفتی سرامیک بیشتر از فلز می‌باشد، پس با افزایش مدول الاستیسیته، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند.



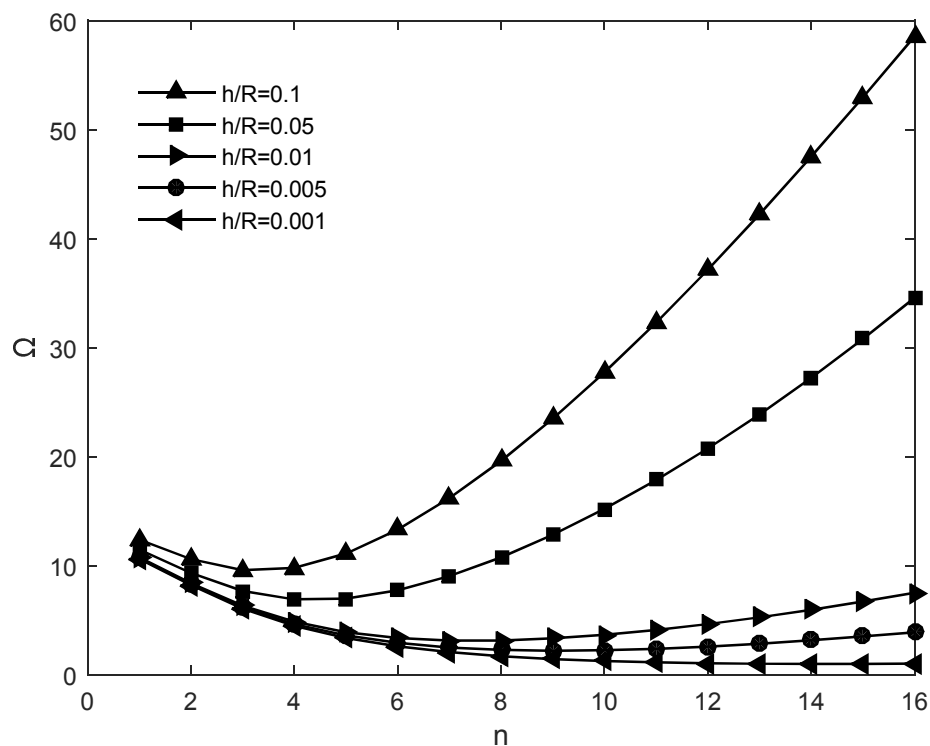
شکل (۴-۱۲) فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب شماره مدهای محیطی برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار محوری فشاری و کششی در شاخص‌های مختلف ماده

در شکل (۴-۱۳) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برحسب شماره مدهای محیطی به ازای مقادیر مختلف بار محوری را نشان می‌دهد. این شکل تأثیر بار محوری بر روی فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ای استوانه‌ای را نشان می‌دهد. با افزایش بار محوری فشاری در پوسته‌های استوانه‌ای فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند. اثر بار محوری بر روی کمترین مقدار فرکانس طبیعی که فرکانس پایه نامیده می‌شود، بیشتر است. بار محوری تأثیری بر شماره مد محیطی فرکانس پایه ندارد و فرکانس پایه در مد محیطی هفتم اتفاق می‌افتد. مقدار فرکانس پایه در بار بحرانی کمانش صفر است.



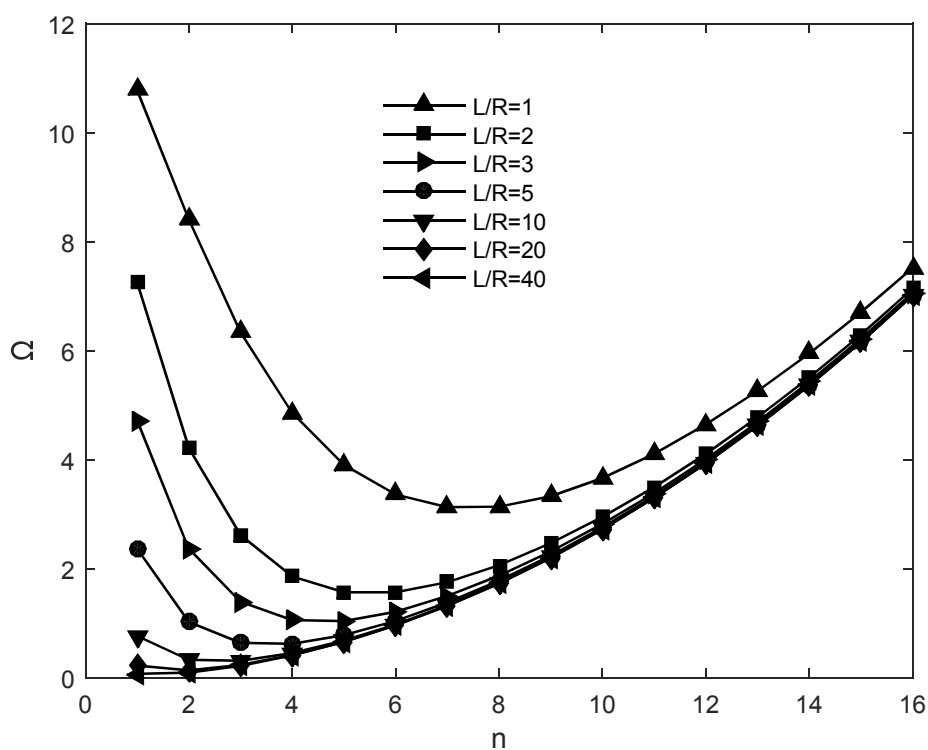
شکل (۴-۱۳) فرکانس طبیعی بی‌بعد برحسب شماره مدهای محیطی برای پوسته‌ای استوانه‌ای تحت بارهای محوری فشاری و کششی مختلف

شکل (۴-۱۴) فرکانس طبیعی بی بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای ضخامت‌های مختلف را نشان می‌دهد. اختلاف فرکانس‌های به دست آمده در ضخامت‌های مختلف در شماره مد محیطی اول کمترین مقدار است که با افزایش شماره مدهای محیطی این اختلاف نیز بیشتر می‌شود. در ضخامت‌های کم اختلاف فرکانس‌های به دست آمده کم است. با کاهش نسبت ضخامت به شعاع شماره مد محیطی فرکانس پایه افزایش می‌یابد.



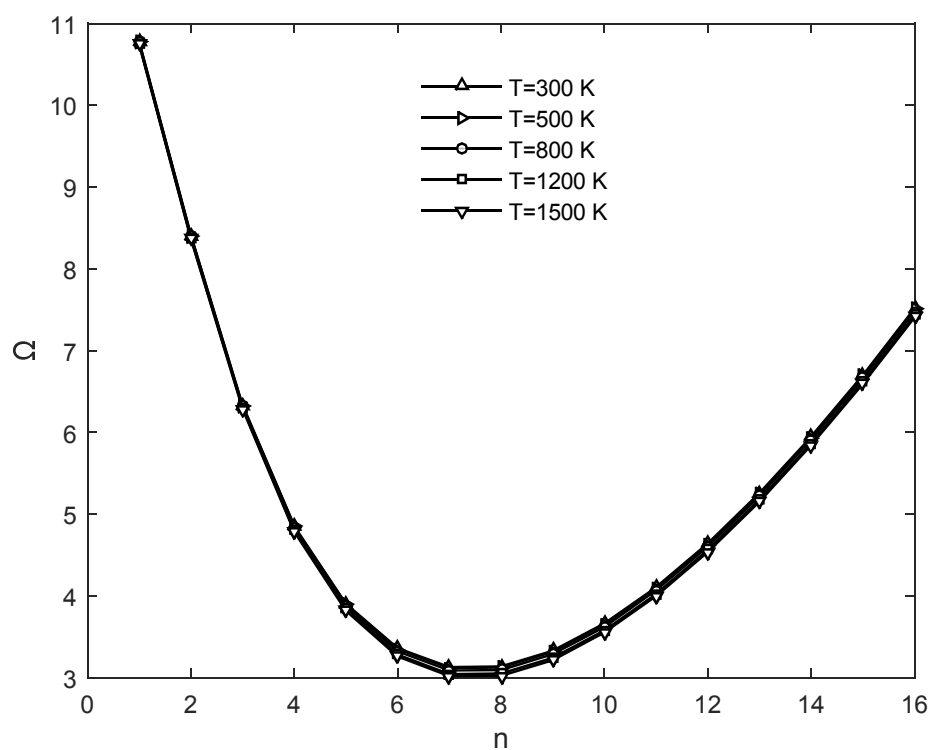
شکل (۴-۱۴) فرکانس طبیعی بی بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای پوسته‌ای استوانه‌ای تحت بار محوری در ضخامت‌های مختلف

شکل (۴-۱۵) فرکانس طبیعی بی بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای ضرایب لاغری مختلف را نشان می دهد. مشاهده می شود که در شماره مد محیطی اول اختلاف فرکانس های طبیعی به دست آمده برای طول های مختلف زیاد است اما در مدهای بالا این اختلاف کم است. با افزایش ضریب لاغری، شماره مد محیطی فرکانس پایه کاهش می یابد.



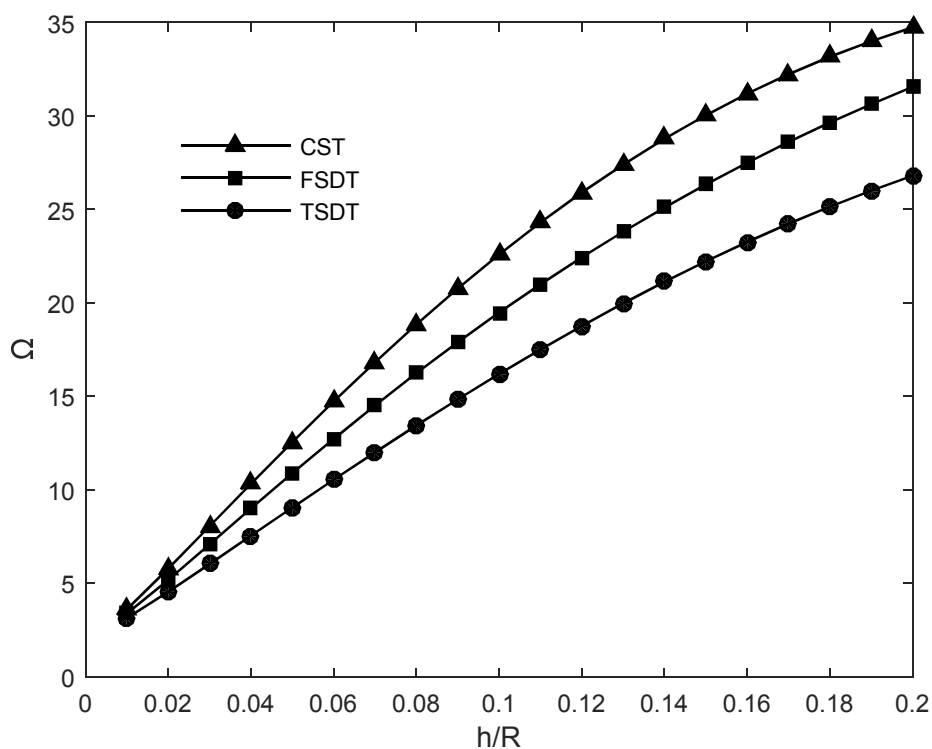
شکل (۴-۱۵) فرکانس طبیعی بی بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای پوسته ای استوانه ای تحت بار محوری برای طول های مختلف

شکل (۴-۱۶) فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی در دماهای مختلف را نشان می‌دهد. افزایش دما باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود این کاهش در شماره مد محیطی هفتم که کمترین مقدار فرکانس طبیعی است بیشتر از سایر مدها می‌باشد. دما نیز مانند بار محوری تأثیری بر شماره مد محیطی فرکانس پایه ندارد و فرکانس پایه در مد محیطی هفتم اتفاق می‌افتد.



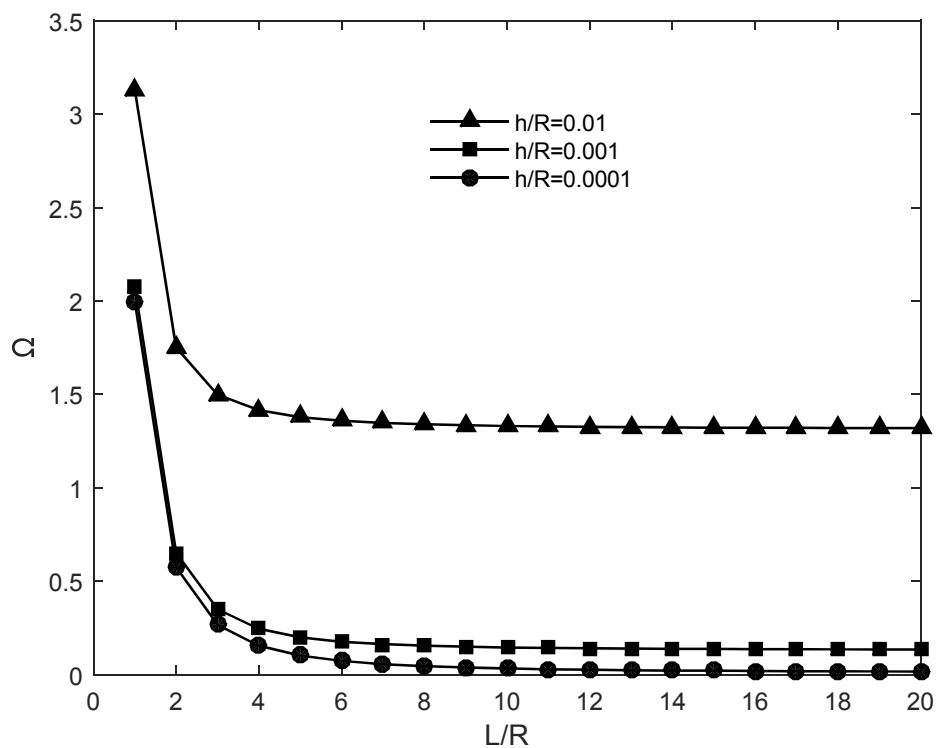
شکل (۴-۱۶) فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب شماره مدهای محیطی برای پوسته‌ای استوانه‌ای تحت بار محوری فشاری و کششی در دماهای مختلف

شکل (۱۷-۴) نتایج فرکانس‌های پایه بی‌بعد، بر اساس تئوری کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه سوم تغییر شکل برشی برحسب نسبت ضخامت به شعاع پوسته را نشان می‌دهد. با افزایش ضخامت، فرکانس‌های پایه‌ی به‌دست آمده بر اساس سه تئوری، اختلاف بیشتری نسبت به هم پیدا می‌کنند؛ بنابراین با ضخیم شدن پوسته، تأثیر برش عرضی و اینرسی چرخشی در تئوری مرتبه اول نسبت به تئوری کلاسیک، هم‌چنین تأثیر جمله‌های مرتبه بالا در تئوری مرتبه سوم نسبت به تئوری مرتبه اول روی فرکانس‌های پایه‌ی پوسته نیز بیشتر می‌شود.



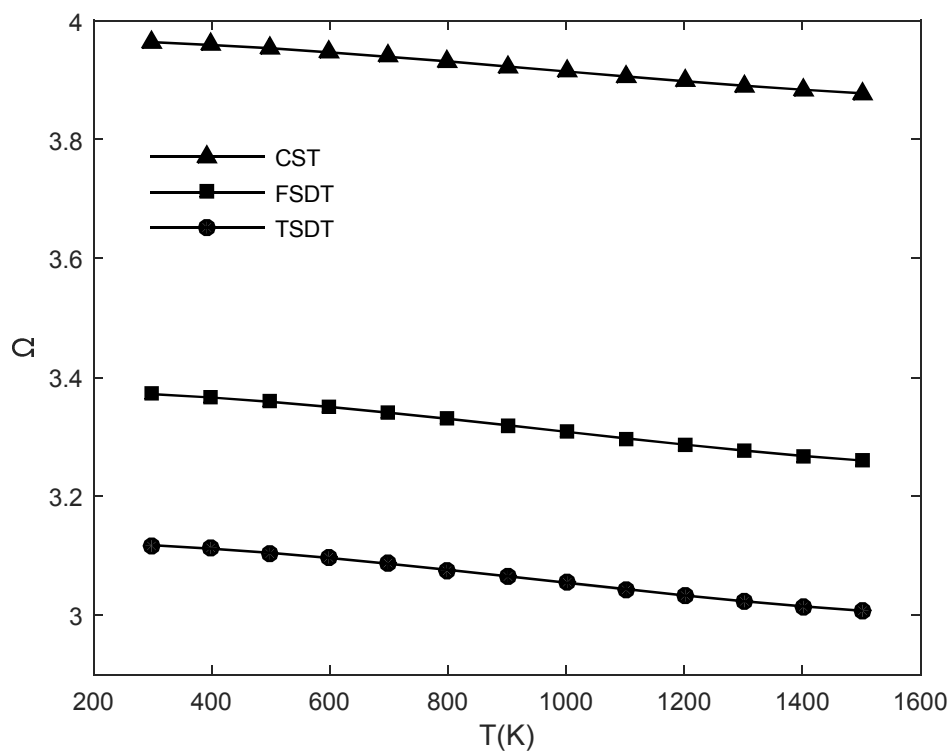
شکل (۱۷-۴) فرکانس پایه بی‌بعد برحسب نسبت ضخامت به شعاع برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار محوری

شکل (۴-۱۸) فرکانس‌های پایه‌ی بی‌بعد برحسب ضریب لاغری (L/R) برای ضخامت‌های مختلف را نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب لاغری، فرکانس‌های پایه کاهش می‌یابند. این کاهش فرکانس از ضریب لاغری ۴ به بعد تغییرات نامحسوسی دارد. از این شکل می‌توان دریافت که پوسته‌های استوانه‌ای بلند فرکانس‌های پایه‌ی کوچکتری نسبت به پوسته‌های استوانه‌ای کوتاه دارند.



شکل (۴-۱۸) فرکانس پایه بی‌بعد برحسب نسبت طول به شعاع برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار محوری فشاری

شکل (۱۹-۴) فرکانس‌های پایه بی‌بعد بر حسب دماهای مختلف برای تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه سوم تغییر شکل برشی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش دما فرکانس‌های پایه کاهش نامحسوسی می‌یابند. افزایش دما باعث کاهش نیروی بین مولکولی و در نتیجه کاهش مدول الاستیسیته می‌شود؛ در نتیجه با کاهش مدول الاستیسیته فرکانس‌های پایه کاهش نامحسوسی می‌یابند.



شکل (۱۹-۴) فرکانس پایه بی‌بعد بر حسب دماهای مختلف برای پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار محوری فشاری

۴-۵ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، به محاسبه‌ی بار کمانش و فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی تحت بار محوری استاتیکی پرداخته شد. برای به‌دست آوردن معادلات حاکم، از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و روابط کرنش - جابه‌جایی لوو استفاده شد. همچنین خواص مواد طبق رابطه‌ی تابع توانی تغییر می‌کند و وابسته به ضخامت و دما است. برخی نتایج حاصل از کار حاضر به شرح زیر می‌باشد.

۱- با افزایش شماره مدهای محیطی بار کمانش ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. کمترین مقدار بار کمانش برای تئوری کلاسیک در شماره مد محیطی ششم و برای تئوری مرتبه اول و سوم برشی در مد محیطی هفتم اتفاق می‌افتد.

۲- مقدار بار کمانش به‌دست آمده با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم کمتر از مقادیر آن با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری کلاسیک است.

۳- با افزایش ضخامت پوسته‌ی استوانه‌ای، بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد.

۴- با افزایش شاخص ماده و با تبدیل پوسته‌ی تمام فلزی به پوسته‌ی تمام سرامیکی به دلیل سفتی بیشتر پوسته‌ی سرامیکی نسبت به فلزی، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

۵- با افزایش ضریب لاغری پوسته‌ی استوانه‌ای، بار کمانش کاهش می‌یابد.

۶- با افزایش دما به علت کاهش مدول الاستیسیته، بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.

۷- فرکانس‌های پوسته‌ی استوانه‌ای به مدهای محیطی وابسته است؛ با افزایش مدهای محیطی، روند کلی تغییرات فرکانسی ابتدا کاهش سپس افزایش می‌یابد.

۸- مقدار فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم کمتر از مقادیر آن، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری کلاسیک است.

۹- با افزایش ضخامت پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی، فرکانس‌ها نیز افزایش می‌یابند.

اختلاف فرکانس‌های به‌دست آمده با استفاده از سه تئوری در این حالت، برای پوسته‌های

نازک کم است اما با ضخیم شدن پوسته اختلاف فرکانس‌ها نیز افزایش می‌یابند.

۱۰- با افزایش ضریب لاغری پوسته‌ای استوانه‌ای، فرکانس‌های طبیعی و پایه کاهش می‌یابند.

برای استوانه‌های بلند فرکانس‌ها اختلاف نامحسوسی با هم دارند.

۱۱- شاخص ماده بر فرکانس‌های طبیعی تأثیر می‌گذارد بدین ترتیب که با افزایش شاخص

ماده و با تبدیل پوسته‌ی تمام فلزی به پوسته‌ی تمام سرامیکی، فرکانس‌های طبیعی و

فرکانس‌های پایه کاهش می‌یابند.

۱۲- با افزایش بار محوری در پوسته‌های استوانه‌ای فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند. اثر

بار محوری بر روی فرکانس‌های پایه بیشتر است. مقدار فرکانس پایه در بار بحرانی

کمانش صفر است.

۱۳- از آنجا که خواص مواد متغیر تابعی وابسته به حرارت در نظر گرفته شده است، با افزایش

دما، مدول الاستیسته کاهش می‌یابد در نتیجه فرکانس‌ها نیز کاهش می‌یابند.

۱۴- شاخص ماده، بار محوری و دما تأثیری بر شماره مد محیطی فرکانس پایه ندارند. شماره

مد محیطی فرکانس پایه با تغییر این پارامترها تغییری نمی‌کند و برای تئوری مرتبه سوم

تغییر شکل برشی در مد محیطی هفتم اتفاق می‌افتد.

۱۵- ضریب لاغری و نسبت ضخامت به شعاع بر شماره مد محیطی فرکانس پایه اثر

می‌گذارند و آن را تغییر می‌دهند بدین ترتیب که با افزایش این پارامترها شماره مد

محیطی فرکانس پایه کاهش می‌یابد.

۶-۴ پیشنهادها

با توجه به اهمیت این بحث و کاربرد آن در صنایع مختلف از جمله در صنعت هسته‌ای، صنعت هوافضا و ... نیاز به مطالعات بیشتری در این زمینه امری ضروری به نظر می‌رسد. بنابراین موضوعات زیر برای ادامه‌ی کار پیشنهاد می‌گردد:

۱- تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی دوبعدی تحت بار

حرارتی و مکانیکی

۲- تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی تحت بار محوری

متناوب

۳- بررسی کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی متغیر تابعی تحت بار محوری ثابت

و متناوب

۴- بررسی کمانش و ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی دوبعدی با رینگ

تقویت‌شده تحت فشار خارجی

۵- تحلیل پایداری پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی با استفاده از تئوری مرتبه سوم تغییر

شکل برشی به روش المان محدود نیمه‌تحلیلی

پیوست الف

دستگاه معادلات حاکم بر تحلیل کمانش که با جایگذاری میدان جابه‌جایی فرض شده (روابط (۳۲-۳ بدون ترم‌های زمانی) در معادلات حرکت بر حسب جابه‌جایی‌ها (روابط (۳۹-۳)) به‌دست آمده‌اند.

معادله‌ی اول (ضرایب (δu_0) :

$$\begin{aligned} & -A_{11}A_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) + \frac{1}{R}(A_{12}B_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)n) \\ & + \frac{1}{R}(A_{12}C_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)) - B_{11}H_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) \\ & + \frac{1}{R}(B_{12}K_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)n) + E_{11}C_2H_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) \\ & + E_{11}C_2C_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m^3 \cos(n\theta) - \frac{1}{R}(E_{12}K_{mn}C_2 \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)n) \\ & + \frac{1}{R^2}(E_{12}C_2C_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)n^2) + \frac{1}{R}(A_{66}B_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)n) \\ & - \frac{1}{R^2}(A_{66}A_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta)n^2) + \frac{1}{R}(B_{66}K_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)n) \\ & - \frac{1}{R^2}(B_{66}H_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta)n^2) - \frac{1}{R}(C_2E_{66}K_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)n) \\ & + \frac{1}{R^2}(E_{66}C_2H_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta)n^2) + \frac{1}{R^2}(2C_2E_{66}C_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)n^2) = 0 \end{aligned}$$

معادله‌ی دوم (ضرایب (δv_0) :

$$\begin{aligned} & -A_{66}B_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) + \frac{1}{R}(A_{66}A_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta)n) \\ & - B_{66}K_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) + \frac{1}{R}(B_{66}H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta)n) \\ & + \frac{4}{3h^2}E_{66}K_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) - \frac{1}{R} \frac{4}{3h^2}(E_{66}H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta)n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{R} \frac{4}{3h^2} (E_{66} 2C_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) n) + \frac{1}{R} (A_{21} A_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) \\
& -\frac{1}{R^2} (A_{22} B_{mn} \sin(\lambda_m x) n^2 \sin(n\theta)) - \frac{1}{R^2} (A_{22} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) \\
& + \frac{1}{R} (B_{21} H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) - \frac{1}{R^2} (B_{22} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^2) \\
& -\frac{1}{R} (E_{21} C_2 H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) - \frac{1}{R} (E_{21} C_{mn} C_2 \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) n) \\
& + \frac{1}{R^2} (E_{22} C_2 K_{mn} \sin(\lambda_m x) n^2 \sin(n\theta)) - \frac{1}{R^3} (E_{22} C_2 C_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^3) \\
& + \frac{1}{R} (A_{44} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) - \frac{1}{R^2} (A_{44} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) \\
& -\frac{1}{R^2} (A_{44} B_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) - \frac{1}{R} \frac{4}{h^2} (J_{44} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) \\
& + \frac{1}{R^2} (J_{44} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) - \frac{1}{R^2} (J_{44} B_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) \\
& -\frac{1}{R} (C_1 J_{44} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) + \frac{1}{R^2} (C_1 J_{44} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) \\
& -\frac{1}{R^2} (C_1 J_{44} B_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) + \frac{1}{R} \frac{4}{h^2} (C_1 L_{44} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) \\
& + \frac{1}{R^2} \frac{4}{h^2} (C_1 L_{44} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) + \frac{1}{R^2} (C_1 L_{44} B_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) \\
& -N_{cr} B_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) = 0
\end{aligned}$$

معادله‌ی سوم (ضرایب δW_0):

$$\begin{aligned}
& -A_{55} H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) - A_{55} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) \\
& + \frac{4}{h^2} J_{55} H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) + J_{55} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) \\
& + J_{55} C_1 H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) + J_{55} C_{mn} C_1 \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) \\
& + \frac{4}{h^2} L_{55} C_1 H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) + L_{55} C_1 C_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) \\
& + \frac{1}{R} (A_{44} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \cos(n\theta) n) - \frac{1}{R^2} (A_{44} C_{mn} \sin(\lambda_m x) n^2 \cos(n\theta))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{R^2}(A_{44}B_{mn}\sin(\lambda_m x)n\cos(n\theta))-\frac{1}{R}\frac{4}{h^2}(J_{44}K_{mn}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n) \\
& +\frac{1}{R^2}(J_{44}C_{mn}\sin(\lambda_m x)n^2\cos(n\theta))+\frac{1}{R^2}(J_{44}B_{mn}\sin(\lambda_m x)n\cos(n\theta)) \\
& -\frac{1}{R}(J_{44}C_1K_{mn}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n)+\frac{1}{R^2}(J_{44}C_{mn}C_1\sin(\lambda_m x)n^2\cos(n\theta)) \\
& +\frac{1}{R^2}(J_{44}B_{mn}C_1\sin(\lambda_m x)n\cos(n\theta))-\frac{1}{R}C_1(L_{44}C_1K_{mn}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R^2}(L_{44}C_{mn}C_1\sin(\lambda_m x)n^2\cos(n\theta))-\frac{1}{R^2}(L_{44}B_{mn}C_1^2\sin(\lambda_m x)n\cos(n\theta)) \\
& +C_2E_{11}A_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^3\cos(n\theta)-\frac{1}{R}(C_2E_{12}B_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R}(E_{12}C_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta))+C_1F_{11}H_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^3\cos(n\theta) \\
& -\frac{1}{R}(C_1F_{12}K_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n)-C_1C_2H_{11}H_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^3\cos(n\theta) \\
& -C_2H_{11}C_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^4\cos(n\theta)+\frac{1}{R}(C_1C_2H_{12}K_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R^2}(C_2H_{12}C_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n^2)+\frac{1}{R^2}(C_2E_{21}A_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2) \\
& -\frac{1}{R^3}(C_2E_{22}B_{mn}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^3)-\frac{1}{R^3}(E_{22}C_{mn}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^2) \\
& +\frac{1}{R^2}(C_1F_{21}H_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2)-\frac{1}{R^3}(C_1F_{22}K_{mn}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^3) \\
& -\frac{1}{R^2}(C_1C_2H_{21}H_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2)-\frac{1}{R^2}(C_2H_{21}C_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n^2) \\
& -\frac{1}{R^3}(C_1C_2H_{22}K_{mn}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^3)+\frac{1}{R^4}(C_2H_{22}C_{mn}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^4) \\
& -\frac{2}{R}(C_2E_{66}B_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n)+\frac{2}{R^2}(C_2E_{66}A_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2) \\
& -\frac{2}{R}(C_1F_{66}K_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n)+\frac{2}{R^2}(C_1F_{66}H_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2) \\
& +\frac{2}{R}\frac{4}{3h^2}(C_1H_{66}K_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n)-\frac{2}{R^2}\frac{4}{3h^2}(C_1H_{66}H_{mn}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{R^2} (C_2 H_{66} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) n^2) + \frac{1}{R} (A_{21} A_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)) \\
& - \frac{1}{R^2} (A_{22} B_{mn} \sin(\lambda_m x) \cos(n\theta) n) - \frac{1}{R^2} (A_{22} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \cos(n\theta)) \\
& + \frac{1}{R} (B_{21} H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)) - \frac{1}{R^2} (B_{22} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \cos(n\theta) n) \\
& - \frac{1}{R} (E_{21} H_{mn} C_2 \sin(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)) - \frac{1}{R} (E_{21} C_{mn} C_2 \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta)) \\
& + \frac{1}{R^2} (E_{22} K_{mn} C_2 \sin(\lambda_m x) n \cos(n\theta)) - \frac{1}{R^3} (E_{22} C_{mn} C_2 \sin(\lambda_m x) n^2 \cos(n\theta)) \\
& - N_{cr} C_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) = 0
\end{aligned}$$

معادله ی چهارم (ضرایب $\delta\varphi_x$):

$$\begin{aligned}
& -B_{11} A_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) + \frac{1}{R} (B_{12} B_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) \\
& + \frac{1}{R} (B_{12} C_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)) - D_{11} H_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) \\
& + \frac{1}{R} (D_{12} K_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) + F_{11} H_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) \\
& - F_{11} C_{mn} C_1 \cos(\lambda_m x) \lambda_m^3 \cos(n\theta) - \frac{1}{R} (F_{12} K_{mn} C_2 \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) \\
& + \frac{1}{R^2} (F_{12} C_{mn} C_1 \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n^2) + C_2 E_{11} A_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) \\
& - \frac{1}{R} (C_2 E_{12} B_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) + \frac{1}{R} (C_2 E_{21} C_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)) \\
& - C_1 F_{11} H_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) + \frac{1}{R} (C_2 F_{12} K_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) \\
& - C_1 H_{11} H_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m^2 \cos(n\theta) - C_2 H_{11} C_{mn} C_1 \cos(\lambda_m x) \lambda_m^3 \cos(n\theta) \\
& + \frac{1}{R} (C_2 H_{12} K_{mn} C_2 \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) - \frac{1}{R^2} C_2 (C_2 H_{12} C_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n^2) \\
& + \frac{1}{R} (B_{66} B_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) - \frac{1}{R^2} (B_{66} A_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) n^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{R} (D_{66} K_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) - \frac{1}{R^2} (D_{66} H_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) n^2) \\
& - \frac{1}{R} \frac{4}{3h^2} (F_{66} K_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) + \frac{1}{R^2} \frac{4}{h^2} (F_{66} H_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) n^2) \\
& + \frac{2}{R^2} C_1 (F_{66} C_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n^2) - \frac{1}{R} (C_2 E_{66} B_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) \\
& + \frac{1}{R^2} (C_2 E_{66} A_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) n^2) - \frac{1}{R} (F_{66} K_{mn} C_2 \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) \\
& - \frac{1}{R^2} (F_{66} H_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) n^2) - \frac{1}{R} \frac{4}{3h^2} (H_{66} K_{mn} C_2 \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n) \\
& + \frac{1}{R^2} \frac{4}{h^2} (H_{66} H_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) n^2) + \frac{2}{R^2} \frac{4}{3h^2} (H_{66} C_{mn} C_1 \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta) n^2) \\
& - A_{55} H_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) + A_{55} C_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)) \\
& - J_{55} H_{mn} C_2 \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) + J_{55} C_{mn} C_1 \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)) \\
& - J_{55} H_{mn} \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) + C_1 J_{55} C_{mn} \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)) \\
& - L_{55} H_{mn} C_2 \cos(\lambda_m x) \cos(n\theta) + L_{55} C_1 C_{mn} C_1 \cos(\lambda_m x) \lambda_m \cos(n\theta)) = 0
\end{aligned}$$

معادله ی پنجم (ضرایب $\delta\varphi_\theta$):

$$\begin{aligned}
& -B_{66} B_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) + \frac{1}{R} (B_{66} A_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) \\
& -D_{66} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) + \frac{1}{R} (D_{66} H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) \\
& + F_{66} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) - \frac{1}{R} \frac{4}{3h^2} (F_{66} H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) \\
& - \frac{2}{R} C_1 (F_{66} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) n) + E_{66} C_2 B_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) \\
& - \frac{1}{R} (E_{66} C_2 A_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) + F_{66} C_1 K_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) \\
& - \frac{1}{R} (F_{66} C_2 H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) + H_{66} C_1 K_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) \\
& - \frac{1}{R} (H_{66} C_2 H_{mn} C_2 \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) - \frac{2}{R} (H_{66} C_2 C_{mn} C_1 \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{R} (B_{21} A_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) - \frac{1}{R^2} (B_{22} B_{mn} \sin(\lambda_m x) n^2 \sin(n\theta)) \\
& - \frac{1}{R^2} (B_{22} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) + \frac{1}{R} (D_{21} H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) \\
& - \frac{1}{R^2} (D_{22} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^2) - \frac{1}{R} (F_{21} H_{mn} C_2 \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) \\
& + \frac{1}{R} (F_{21} C_{mn} C_1 \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) n) - \frac{1}{R^2} (F_{22} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^2) \\
& + \frac{1}{R^3} (F_{22} C_{mn} C_1 \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^3) - \frac{1}{R} (E_{21} C_2 A_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) \\
& - \frac{1}{R^2} (E_{22} C_2 B_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^2) + \frac{1}{R^2} (E_{22} C_2 C_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) \\
& - \frac{1}{R} (F_{21} C_2 H_{mn} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) + \frac{1}{R^2} (F_{22} C_1 K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^2) \\
& - \frac{1}{R} (H_{21} C_2 H_{mn} C_2 \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) + \frac{1}{R} (H_{21} C_2 C_{mn} C_1 \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) n) \\
& + \frac{1}{R^2} (H_{22} K_{mn} C_1 \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^2) + \frac{1}{R^3} (H_{22} C_2 C_{mn} C_2 \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^3) \\
& - A_{44} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) - \frac{1}{R} (A_{44} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) \\
& + \frac{1}{R} (A_{44} B_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) + J_{44} K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) \\
& + \frac{1}{R} \frac{4}{h^2} (J_{44} C_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) + \frac{1}{R} (J_{44} B_{mn} C_1 \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) \\
& + J_{44} C_2 K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) - \frac{1}{R} (J_{44} C_1 C_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) \\
& - \frac{1}{R} C_2 (J_{44} B_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) - A_{44} C_2 K_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) \\
& + \frac{1}{R} (L_{44} C_1 C_{mn} C_1 e^{i\alpha x} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) + \frac{1}{R} (L_{44} B_{mn} C_1^2 e^{i\alpha x} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) = 0
\end{aligned}$$

پیوست ب

درایه‌های ماتریس معادلات فرکانسی و ارتعاشی (روابط (۳-۳۴)، (۳-۳۵)، (۳-۳۷) برای شرایط مرزی

تکیه‌گاه ساده که در آن $C_1 = \frac{4}{h^2}$ و $C_2 = \frac{4}{3h^2}$ می‌باشد.

$$T_{11} = A_{11}\lambda_m^2 + A_{66} \frac{n^2}{R^2}$$

$$T_{12} = -(A_{12} + A_{66}) \frac{n\lambda_m}{R}$$

$$T_{13} = -C_2 \left((E_{21} + 2E_{66})\lambda_m \frac{n^2}{R^2} + E_{11}\lambda_m^3 \right) - A_{21} \frac{\lambda_m}{R}$$

$$T_{14} = (-C_2 E_{11} + B_{11})\lambda_m^2 + (B_{66} - C_2 E_{66}) \frac{n^2}{R^2}$$

$$T_{15} = (-B_{12} - B_{66} + C_2 E_{66} + C_2 E_{12}) \frac{n\lambda_m}{R}$$

$$T_{21} = -(A_{12} + A_{66}) \frac{n\lambda_m}{R}$$

$$T_{22} = A_{66}\lambda_m^2 + A_{22} \frac{n^2}{R^2} - C_1 \left(\frac{J_{44}}{R^2} + \frac{L_{44}}{R^2} \right) + \left(\frac{A_{44}}{R^2} + \frac{J_{44}}{R^2} \right)$$

$$T_{23} = -C_2 \left((-E_{21} - 2E_{66})\lambda_m^2 \frac{n}{R} - E_{22} \frac{n^3}{R^3} \right) + \left(\frac{A_{44}n}{R^2} + \frac{J_{44}n}{R^2} \right) - C_1 \left(\frac{J_{44}n}{R^2} + \frac{L_{44}nC_1}{R^2} \right) + A_{22} \frac{n}{R^2}$$

$$T_{24} = (E_{21}C_2 - B_{21} + E_{66}C_2 - B_{66}) \frac{n\lambda_m}{R}$$

$$T_{25} = (B_{66} - E_{66}C_2)\lambda_m^2 - (B_{22} + E_{22}C_2) \frac{n^2}{R^2} + C_1 \left(\frac{J_{44}}{R} - \frac{L_{44}C_1}{R} \right) - \left(\frac{A_{44}}{R} + \frac{J_{44}C_1}{R} \right)$$

$$T_{31} = -C_2 \left((E_{21} + 2E_{66})\lambda_m \frac{n^2}{R^2} + E_{11}\lambda_m^3 \right) - A_{21} \frac{\lambda_m}{R}$$

$$T_{32} = -C_2 \left((-E_{21} - 2E_{66}) \lambda_m^2 \frac{n}{R} - E_{22} \frac{n^3}{R^3} \right) + \left(\frac{A_{44}n}{R^2} + \frac{J_{44}n}{R^2} \right) - C_1 \left(\frac{J_{44}n}{R^2} + \frac{L_{44}nC_1}{R^2} \right) + A_{22} \frac{n}{R^2}$$

$$T_{33} = ((A_{55} + J_{55}) - C_1 (J_{55} + L_{55})) \lambda_m^2 + (A_{44} + J_{44} - C_1 (J_{44} + L_{44})) \frac{n^2}{R^2} + \frac{A_{22}}{R^2} - E_{21} \frac{\lambda_m^2}{R} - E_{22} \frac{n^2}{R^3} \\ - C_2 \left(-E_{21} \frac{\lambda_m^2}{R} + (4H_{66} + 2H_{12}) \frac{\lambda_m^2 n^2}{R^2} + H_{11} \lambda_m^4 - E_{22} \frac{n^2}{R^3} + \frac{H_{22}n^4}{R^4} \right)$$

$$T_{34} = (-J_{55}C_1 + A_{55} - C_1 (J_{55} + L_{55}C_1)) \lambda_m + (E_{21}C_2 - B_{21}) \frac{\lambda_m}{R} - C_1 ((2F_{66} + 2H_{66}C_2$$

$$-H_{12}C_2 + F_{12}) \lambda_m \frac{n^2}{R^2} + (-H_{11}C_2 + F_{11}) \lambda_m^3)$$

$$T_{35} = (-E_{22}C_2 + B_{22}) \frac{n}{R^2} - C_1 \left((-F_{12} - 2F_{66} - 2H_{66}C_2 + H_{12}C_2) \frac{\lambda_m^2 n}{R} + (H_{22}C_2 + F_{22}) \frac{n^3}{R^3} \right) - \frac{A_{44}n}{R} - \frac{J_{44}C_1n}{R} \\ + C_1 \left(\frac{J_{44}n}{R} + \frac{L_{44}C_1n}{R} \right)$$

$$T_{41} = (-C_2E_{11} + B_{11}) \lambda_m^2 + (B_{66} - C_2E_{66}) \frac{n^2}{R^2}$$

$$T_{42} = (E_{21}C_2 - B_{21} + E_{66}C_2 - B_{66}) \frac{n\lambda_m}{R}$$

$$T_{43} = (-J_{55}C_1 + A_{55} - C_1 (J_{55} + L_{55}C_1)) \lambda_m + (E_{21}C_2 - B_{21}) \frac{\lambda_m}{R}$$

$$-C_1 \left((2F_{66} + 2H_{66}C_2 - H_{12}C_2 + F_{12}) \lambda_m \frac{n^2}{R^2} + (-H_{11}C_2 + F_{11}) \lambda_m^3 \right)$$

$$T_{44} = (F_{11} + D_{11}) \lambda_m^2 + A_{55} + J_{55} - C_2 (J_{55} + L_{55}) + \left((D_{66} + F_{66}) \frac{n^2}{R^2} \right) - C_1 \left((F_{66} + H_{66}) \frac{n^2}{R^2} \right) \\ - C_1 (H_{11} + F_{11}) \lambda_m^2$$

$$T_{45} = C_2 (-H_{12}C_2 + 2F_{12} + 2F_{66} - H_{66}C_2) \frac{n\lambda_m}{R} - (D_{12} + D_{66}) \frac{n\lambda_m}{R}$$

$$T_{51} = (-B_{12} - B_{66} + C_2 E_{66} + C_2 E_{12}) \frac{n \lambda_m}{R}$$

$$T_{52} = (B_{66} - E_{66} C_2) \lambda_m^2 - (B_{22} + E_{22} C_2) \frac{n^2}{R^2} + C_1 \left(\frac{J_{44}}{R} - \frac{L_{44} C_1}{R} \right) - \left(\frac{A_{44}}{R} + \frac{J_{44} C_1}{R} \right)$$

$$T_{53} = (-E_{22} C_2 + B_{22}) \frac{n}{R^2} - C_1 \left((-F_{12} - 2F_{66} - 2H_{66} C_2 + H_{12} C_2) \frac{\lambda_m^2 n}{R} + (H_{22} C_2 + F_{22}) \frac{n^3}{R^3} \right) - \frac{A_{44} n}{R} - \frac{J_{44} C_1 n}{R}$$

$$+ C_1 \left(\frac{J_{44} n}{R} + \frac{L_{44} C_1 n}{R} \right)$$

$$T_{54} = C_2 (-H_{12} C_2 + 2F_{12} + 2F_{66} - H_{66} C_2) \frac{n \lambda_m}{R} - (D_{12} + D_{66}) \frac{n \lambda_m}{R}$$

$$T_{55} = J_{44} + A_{44} - C_2 (J_{44} + A_{44}) + ((D_{66} + F_{66}) - C_1 (F_{66} + H_{66})) \lambda_m^2 + ((F_{22} + D_{22}) - C_1 (H_{22} + F_{22})) \frac{n^2}{R^2}$$

پیوست ج

دستگاه معادلات حاکم بر تحلیل ارتعاشات آزاد که با جایگذاری میدان جابه‌جایی فرض شده (روابط)

(۳۲-۳) در معادلات حرکت بر حسب جابه‌جایی‌ها (روابط (۳-۲۹)) به دست آمده‌اند.

معادله‌ی اول (ضرایب δu_0):

$$\begin{aligned}
 & -A_{11}A_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)+\frac{1}{R}(A_{12}B_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n) \\
 & +\frac{1}{R}(A_{12}C_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta))-B_{11}H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta) \\
 & +\frac{1}{R}(B_{12}K_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n)+E_{11}C_2H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta) \\
 & +E_{11}C_2C_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^3\cos(n\theta)-\frac{1}{R}(E_{12}K_{mn}C_2e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n) \\
 & +\frac{1}{R^2}(E_{12}C_2C_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2)+\frac{1}{R}(A_{66}B_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n) \\
 & -\frac{1}{R^2}(A_{66}A_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^2)+\frac{1}{R}(B_{66}K_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n) \\
 & -\frac{1}{R^2}(B_{66}H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^2)-\frac{1}{R}(C_2E_{66}K_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n) \\
 & +\frac{1}{R^2}(E_{66}C_2H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^2)+\frac{1}{R^2}(2C_2E_{66}C_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2) \\
 & -I_0A_{mn}e^{i\alpha x}i^2\omega^2\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta)-(I_1-C_2I_3)H_{mn}e^{i\alpha x}i^2\omega^2\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta) \\
 & +C_2I_3C_{mn}e^{i\alpha x}i^2\omega^2\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)=0
 \end{aligned}$$

معادله ی دوم (ضرایب δv_0):

$$\begin{aligned}
& -A_{66}B_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\sin(n\theta)+\frac{1}{R}(A_{66}A_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\sin(n\theta)n) \\
& -B_{66}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\sin(n\theta)+\frac{1}{R}(B_{66}H_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\sin(n\theta)n) \\
& +\frac{4}{3h^2}E_{66}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\sin(n\theta)-\frac{1}{R}\frac{4}{3h^2}(E_{66}H_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\sin(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R}\frac{4}{3h^2}(E_{66}2C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\sin(n\theta)n)+\frac{1}{R}(A_{21}A_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\sin(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R^2}(A_{22}B_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)n^2\sin(n\theta))-\frac{1}{R^2}(A_{22}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)n) \\
& +\frac{1}{R}(B_{21}H_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\sin(n\theta)n)-\frac{1}{R^2}(B_{22}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)n^2) \\
& -\frac{1}{R}(E_{21}C_2H_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\sin(n\theta)n)-\frac{1}{R}(E_{21}C_{mn}C_2e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\sin(n\theta)n) \\
& +\frac{1}{R^2}(E_{22}C_2K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)n^2\sin(n\theta))-\frac{1}{R^3}(E_{22}C_2C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)n^3) \\
& +\frac{1}{R}(A_{44}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta))-\frac{1}{R^2}(A_{44}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R^2}(A_{44}B_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta))-\frac{1}{R}\frac{4}{h^2}(J_{44}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)) \\
& +\frac{1}{R^2}(J_{44}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)n)-\frac{1}{R^2}(J_{44}B_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)) \\
& -\frac{1}{R}(C_1J_{44}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta))+\frac{1}{R^2}(C_1J_{44}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R^2}(C_1J_{44}B_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta))+\frac{1}{R}\frac{4}{h^2}(C_1L_{44}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)) \\
& +\frac{1}{R^2}\frac{4}{h^2}(C_1L_{44}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)n)+\frac{1}{R^2}(C_1L_{44}B_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)) \\
& -N_aB_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\sin(n\theta)-I_0B_{mn}e^{i\omega t}i^2\omega^2\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta) \\
& -(I_1-C_2I_3)K_{mn}e^{i\omega t}i^2\omega^2\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)-\frac{1}{R}(C_2I_3C_{mn}e^{i\omega t}i^2\omega^2\sin(\lambda_m x)\sin(n\theta)n)=0
\end{aligned}$$

معادله ی سوم (ضرایب δw_0):

$$\begin{aligned}
& -A_{55}H_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)-A_{55}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta) \\
& +\frac{4}{h^2}J_{55}H_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)+J_{55}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta) \\
& +J_{55}C_1H_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)+J_{55}C_{mn}C_1e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta) \\
& +\frac{4}{h^2}L_{55}C_1H_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)+L_{55}C_1C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta) \\
& +\frac{1}{R}(A_{44}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n)-\frac{1}{R^2}(A_{44}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)n^2\cos(n\theta)) \\
& -\frac{1}{R^2}(A_{44}B_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)n\cos(n\theta))-\frac{1}{R}\frac{4}{h^2}(J_{44}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n) \\
& +\frac{1}{R^2}(J_{44}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)n^2\cos(n\theta))+\frac{1}{R^2}(J_{44}B_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)n\cos(n\theta)) \\
& -\frac{1}{R}(J_{44}C_1K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n)+\frac{1}{R^2}(J_{44}C_{mn}C_1e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)n^2\cos(n\theta)) \\
& +\frac{1}{R^2}(J_{44}B_{mn}C_1e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)n\cos(n\theta))-\frac{1}{R}C_1(L_{44}C_1K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R^2}(L_{44}C_{mn}C_1e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)n^2\cos(n\theta))-\frac{1}{R^2}(L_{44}B_{mn}C_1C_1e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)n\cos(n\theta)) \\
& +C_2E_{11}A_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^3\cos(n\theta)-\frac{1}{R}(C_2E_{12}B_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R}(E_{12}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta))+C_1F_{11}H_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^3\cos(n\theta) \\
& -\frac{1}{R}(C_1F_{12}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n)-C_1C_2H_{11}H_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^3\cos(n\theta) \\
& -C_2H_{11}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^4\cos(n\theta)+\frac{1}{R}(C_1C_2H_{12}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R^2}(C_2H_{12}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)n^2)+\frac{1}{R^2}(C_2E_{21}A_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2) \\
& -\frac{1}{R^3}(C_2E_{22}B_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^3)-\frac{1}{R^3}(E_{22}C_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^2) \\
& +\frac{1}{R^2}(C_1F_{21}H_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2)-\frac{1}{R^3}(C_1F_{22}K_{mn}e^{i\omega t}\sin(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{R^2}(C_1C_2H_{21}H_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta)n^2)-\frac{1}{R^2}(C_2H_{21}C_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\cos(n\theta)n^2) \\
& -\frac{1}{R^3}(C_1C_2H_{22}K_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\cos(n\theta)n^3)+\frac{1}{R^4}(C_2H_{22}C_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\cos(n\theta)n^4) \\
& -\frac{2}{R}(C_2E_{66}B_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\cos(n\theta)n)+\frac{2}{R^2}(C_2E_{66}A_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta)n^2) \\
& -\frac{2}{R}(C_1F_{66}K_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\cos(n\theta)n)+\frac{2}{R^2}(C_1F_{66}H_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta)n^2) \\
& +\frac{2}{R}\frac{4}{3h^2}(C_1H_{66}K_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\cos(n\theta)n)-\frac{2}{R^2}\frac{4}{3h^2}(C_1H_{66}H_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta)n^2) \\
& +\frac{4}{R^2}(C_2H_{66}C_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\cos(n\theta)n^2)+\frac{1}{R}(A_{21}A_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta)) \\
& -\frac{1}{R^2}(A_{22}B_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\cos(n\theta)n)-\frac{1}{R^2}(A_{22}C_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\cos(n\theta)) \\
& +\frac{1}{R}(B_{21}H_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta))-\frac{1}{R^2}(B_{22}K_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\cos(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R}(E_{21}H_{mn}C_2e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta))-\frac{1}{R}(E_{21}C_{mn}C_2e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\cos(n\theta)) \\
& +\frac{1}{R^2}(E_{22}K_{mn}C_2e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)n\cos(n\theta))-\frac{1}{R^3}(E_{22}C_{mn}C_2e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)n^2\cos(n\theta)) \\
& -N_aC_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\cos(n\theta))-I_0C_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}i^2\omega^2\sin(\lambda_mx)\cos(n\theta) \\
& -C_2^2I_6C_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}i^2\omega^2\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\cos(n\theta))-\frac{1}{R^2}(C_2^2I_6C_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}i^2\omega^2\sin(\lambda_mx)\cos(n\theta)n^2) \\
& +C_2I_3A_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}i^2\omega^2\sin(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta))-\frac{1}{R}(C_2I_3B_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}i^2\omega^2\sin(\lambda_mx)\cos(n\theta)n) \\
& (I_4-C_2I_6)(C_2H_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}i^2\omega^2\sin(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta)) \\
& (I_4-C_2I_6)(-\frac{1}{R}C_2K_{mn}e^{i\alpha\mathfrak{x}}i^2\omega^2\sin(\lambda_mx)\cos(n\theta)n))=0
\end{aligned}$$

معادله ی چهارم (ضرایب $\delta\varphi_x$):

$$\begin{aligned}
& -B_{11}A_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)+\frac{1}{R}(B_{12}B_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n) \\
& +\frac{1}{R}(B_{12}C_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta))-D_{11}H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta) \\
& +\frac{1}{R}(D_{12}K_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n)+F_{11}H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta) \\
& -F_{11}C_{mn}C_1e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^3\cos(n\theta)-\frac{1}{R}(F_{12}K_{mn}C_2e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n) \\
& +\frac{1}{R^2}(F_{12}C_{mn}C_1e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2)+C_2E_{11}A_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta) \\
& -\frac{1}{R}(C_2E_{12}B_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n)+\frac{1}{R}(C_2E_{21}C_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)) \\
& -C_1F_{11}H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)+\frac{1}{R}(C_2F_{12}K_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n) \\
& -C_1H_{11}H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^2\cos(n\theta)-C_2H_{11}C_{mn}C_1e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m^3\cos(n\theta) \\
& +\frac{1}{R}(C_2H_{12}K_{mn}C_2e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n)-\frac{1}{R^2}C_2(C_2H_{12}C_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2) \\
& +\frac{1}{R}(B_{66}B_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n)-\frac{1}{R^2}(B_{66}A_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^2) \\
& +\frac{1}{R}(D_{66}K_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n)-\frac{1}{R^2}(D_{66}H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^2) \\
& -\frac{1}{R}\frac{4}{3h^2}(F_{66}K_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n)+\frac{1}{R^2}\frac{4}{h^2}(F_{66}H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^2) \\
& +\frac{2}{R^2}C_1(F_{66}C_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2)-\frac{1}{R}(C_2E_{66}B_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n) \\
& +\frac{1}{R^2}(C_2E_{66}A_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^2)-\frac{1}{R}(F_{66}K_{mn}C_2e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R^2}(F_{66}H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^2)-\frac{1}{R}\frac{4}{3h^2}(H_{66}K_{mn}C_2e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n) \\
& +\frac{1}{R^2}\frac{4}{h^2}(H_{66}H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta)n^2)+\frac{2}{R^2}\frac{4}{3h^2}(H_{66}C_{mn}C_1e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta)n^2) \\
& -A_{55}H_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\cos(n\theta)+A_{55}C_{mn}e^{i\alpha x}\cos(\lambda_m x)\lambda_m\cos(n\theta))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -J_{55}H_{mn}C_2e^{i\omega x}\cos(\lambda_mx)\cos(n\theta)+J_{55}C_{mn}C_1e^{i\omega x}\cos(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta)) \\
& -J_{55}H_{mn}e^{i\omega x}\cos(\lambda_mx)\cos(n\theta)+C_1J_{55}C_{mn}e^{i\omega x}\cos(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta)) \\
& -L_{55}H_{mn}C_2e^{i\omega x}\cos(\lambda_mx)\cos(n\theta)+L_{55}C_1C_{mn}C_1e^{i\omega x}\cos(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta)) \\
& -(I_2-2C_2I_4+C_2^2I_6)H_{mn}e^{i\omega x}i^2\omega^2\cos(\lambda_mx)\cos(n\theta) \\
& -(I_1-C_2I_3)A_{mn}e^{i\omega x}i^2\omega^2\cos(\lambda_mx)\cos(n\theta) \\
& +C_2(I_4-C_2I_6)C_{mn}e^{i\omega x}i^2\omega^2\cos(\lambda_mx)\lambda_m\cos(n\theta))=0
\end{aligned}$$

معادله ی پنجم (ضرایب $\delta\varphi_\theta$):

$$\begin{aligned}
& -B_{66}B_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\sin(n\theta)+\frac{1}{R}(B_{66}A_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\sin(n\theta)n) \\
& -D_{66}K_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\sin(n\theta)+\frac{1}{R}(D_{66}H_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\sin(n\theta)n) \\
& +F_{66}K_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\sin(n\theta)-\frac{1}{R}\frac{4}{3h^2}(F_{66}H_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\sin(n\theta)n) \\
& -\frac{2}{R}C_1(F_{66}C_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\sin(n\theta)n)+E_{66}C_2B_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\sin(n\theta) \\
& -\frac{1}{R}(E_{66}C_2A_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\sin(n\theta)n)+F_{66}C_1K_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\sin(n\theta) \\
& -\frac{1}{R}(F_{66}C_2H_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\sin(n\theta)n)+H_{66}C_1K_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\sin(n\theta) \\
& -\frac{1}{R}(H_{66}C_2H_{mn}C_2e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\sin(n\theta)n)-\frac{2}{R}(H_{66}C_2C_{mn}C_1e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\sin(n\theta)) \\
& +\frac{1}{R}(B_{21}A_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\sin(n\theta)n)-\frac{1}{R^2}(B_{22}B_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)n^2\sin(n\theta)) \\
& -\frac{1}{R^2}(B_{22}C_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\sin(n\theta)n)+\frac{1}{R}(D_{21}H_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\sin(n\theta)n) \\
& -\frac{1}{R^2}(D_{22}K_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\sin(n\theta)n^2)-\frac{1}{R}(F_{21}H_{mn}C_2e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m\sin(n\theta)n) \\
& +\frac{1}{R}(F_{21}C_{mn}C_1e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\lambda_m^2\sin(n\theta)n)-\frac{1}{R^2}(F_{22}K_{mn}e^{i\omega x}\sin(\lambda_mx)\sin(n\theta)n^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{R^3} (F_{22} C_{mn} C_1 e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^3) - \frac{1}{R} (E_{21} C_2 A_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) \\
& - \frac{1}{R^2} (E_{22} C_2 B_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^2) + \frac{1}{R^2} (E_{22} C_2 C_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) \\
& - \frac{1}{R} (F_{21} C_2 H_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) + \frac{1}{R^2} (F_{22} C_1 K_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^2) \\
& - \frac{1}{R} (H_{21} C_2 H_{mn} C_2 e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \lambda_m \sin(n\theta) n) + \frac{1}{R} (H_{21} C_2 C_{mn} C_1 e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \lambda_m^2 \sin(n\theta) n) \\
& + \frac{1}{R^2} (H_{22} K_{mn} C_1 e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^2) + \frac{1}{R^3} (H_{22} C_2 C_{mn} C_2 e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n^3) \\
& - A_{44} K_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) - \frac{1}{R} (A_{44} C_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) \\
& + \frac{1}{R} (A_{44} B_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) + J_{44} K_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) \\
& + \frac{1}{R} \frac{4}{h^2} (J_{44} C_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) + \frac{1}{R} (J_{44} B_{mn} C_1 e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) \\
& + J_{44} C_2 K_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) - \frac{1}{R} (J_{44} C_1 C_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) \\
& - \frac{1}{R} C_2 (J_{44} B_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) - A_{44} C_2 K_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) \\
& + \frac{1}{R} (L_{44} C_1 C_{mn} C_1 e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) + \frac{1}{R} (L_{44} B_{mn} C_1^2 e^{i\omega t} \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta)) \\
& - (I_1 - C_2 I_3) B_{mn} e^{i\omega t} i^2 \omega^2 \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) - (I_2 - 2 C_2 I_4 + C_2^2 I_6) K_{mn} e^{i\omega t} \\
& i^2 \omega^2 \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) - \frac{1}{R} (C_2 (I_4 - C_2 I_6) C_{mn} e^{i\omega t} i^2 \omega^2 \sin(\lambda_m x) \sin(n\theta) n) = 0
\end{aligned}$$

مراجع

- [1] Ventsel E., Krauthammer T.; (2001), "**Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications**", CRC Press, New York.
- [۲] قارونی ح.، (۱۳۹۰)، "تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی مدول الاستیسیته به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود.
- [۳] یوگورال ای.سی.، (۱۳۷۵)، "تنش در ورق‌ها و پوسته‌ها"، ترجمه‌ی غلامحسین رحیمی، چ. اول، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، تهران.
- [۴] نوروزی ح.، (۱۳۹۰)، "بررسی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی به روش رینگ محدود"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز.
- [۵] میرباقری ح.، (۱۳۹۲)، "تحلیل کمانش پوسته استوانه‌ای تحت بار محوری و فشار خارجی یکنواخت با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود.
- [6] Koizumi M.; (1993), "The Concept of FGM", *Journal of Ceramic Transactions*, Vol. 34, No. 1, pp. 3-10.
- [7] Radwan H.R., Genin J.; (1978), "Dynamic Instability in Cylindrical Shells", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56, No. 3, pp. 373-382.
- [8] Loy C.T., Lam K.Y., Shu C.; (1997), "Analysis of Cylindrical Shells Using Generalized Differential Quadrature", *Journal of Shock and Vibration*, Vol. 4, No. 3, pp. 193-198.
- [9] Loy C.T., Lam K. Y., Reddy J. N.; (1999), "Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells", *Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, No. 1, pp. 309-324.
- [10] Pradhan S.C., Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N.; (2000), "Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells under Various

- Boundary Conditions”, *Journal of Applied Acoustics*, Vol. 61, No. 1, pp. 111-129.
- [11] Ferreira A.J.M., Batra R.C., Roque C.M.C., Qian L.F., Martins P.A.L.S.; (2005), “Static Analysis of Functionally Graded Plates Using Third-order Shear Deformation Theory and a Meshless Method”, *Journal of Composite Structures*, Vol. 69, No. 9, pp. 449-457.
- [12] Kadoli R., Ganesan N.; (2006), “Buckling and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells Subjected to a Temperature-Specified Boundary Condition”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, No. 3, pp. 450-480.
- [13] Ghorbanpour Arani A., Golabi S., Loghman A., Daneshi H.; (2007), “Investigating Elastic Stability of Cylindrical Shell with an Elastic Core Under Axial Compression by Energy Method”, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 21, No. 7, pp. 983-996.
- [14] Li S.R., Batra R.C.; (2006), “Buckling of Axially Compressed Thin Cylindrical Shells with Functionally Graded Middle Layer”, *Journal of Thin-Walled structures*, Vol. 44, No. 10, pp. 1039-1047.
- [15] Sheng G.G., Wang X.; (2007), “Thermal Vibration, Buckling and Dynamic Stability of Functionally Graded Cylindrical Shells Embedded in an Elastic Medium”, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 27, No. 1, pp. 117-134.
- [۱۶] آذرافزا ر., داور ع., جعفری ع.ا., خلیلی م.ح.; (۱۳۸۵), بررسی کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چند لایه, چهاردهمین همایش سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک, دانشگاه صنعتی اصفهان, اصفهان, ۲۰-۲۲ اردیبهشت.
- [۱۷] حدادپور ح., محمودخانی س., محمدنوازی ح.; (۱۳۸۶), تحلیل کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای با خواص هدمند تحت اثر دما برای شرایط مرزی متفاوت, پانزدهمین همایش سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک, دانشگاه صنعتی امیرکبیر, تهران, ۲۵-۲۷ اردیبهشت.
- [18] Zhao X., Lee Y.Y., Liew K.M.; (2009), “Thermoelastic and Vibration

- Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells”, *Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 51, No. 10, pp. 694-707.
- [19] Ebrahimi F., Sepiani H.A.; (2010), “An Investigation on the Influence of Transverse Shear and Rotary Inertia on Vibration and Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shells”, *Journal of Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 17, No. 3, pp. 176-182.
- [20] Sepiani H.A., Rastgoo A., Ebrahimi F., Ghorbanpour Arani A.; (2010), “Vibration and Buckling Analysis of Two-layered Functionally Graded Cylindrical Shell, Considering the Effects of Transverse Shear and Rotary Inertia”, *Journal of Materials & Design*, Vol. 31, No. 3, pp. 1063_1069.
- [21] Reddy J.N., Liu C.F.; (1985), “A Higher Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells”, *Journal of Engineering Science*, Vol. 23, No. 3, pp. 319_330.
- [22] Sadeghifar M., Bagheri M., Jafari A.A.; (2010), “Buckling Analysis of Stringer-stiffened Laminated Cylindrical Shells with Nonuniform Eccentricity”, *Journal of Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81. No. 7, pp. 875-886.
- [23] Phuong N.T., Bich D.H.; (2013), “Buckling Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Circular Cylindrical Thin Shells Under Mechanical Load”, *Journal of Mathematics – Physics*, Vol. 29. No. 2, pp. 55-72.
- [24] Mohammadzadeh R., Najafizadeh M.M., Nejati M.; (2013), “Buckling of 2D-FG Cylindrical Shells Under Combined External Pressure and Axial Compression”, *Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 5. No. 3, pp. 391-406.
- [25] Ebrahimi M.J., Najafizadeh M.M.; (2014), “Free Vibration Analysis of Two-Dimensional Functionally Graded Cylindrical Shells”, *Journal of Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, No. 1, pp. 308-324.
- [26] Farahani H., Azarafza R., Barati F.; (2014), “Mechanical Buckling of a Functionally Graded Cylindrical Shell with Axial and Circumferential Stiffeners Using the Third-Order Shear Deformation Theory”, *Journal of Comptes Rendus Mecanique*, Vol. 342, No. 9, pp. 501_512.
- [27] Zhang Lang, Li Xuewu; (2012), “Buckling and Vibration Analysis of

- Functionally Graded Magneto-electro-thermo-elastic Circular Cylindrical Shells”, *Journal of Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 4, pp. 2279_2292.
- [28] Huaiwei H., Qiang H., Nengwen F., Xuejun F.; (2011), “Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shells Under Combined Loads”, *Journal of Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 18, No. 5, pp.337_346.
- [29] Sofiyev A.H., Kuruoglu N.; (2014), “Buckling and Vibration of Shear Deformable Functionally Graded Orthotropic Cylindrical Shells Under External Pressures”, *Journal of Thin-Walled Structures*, Vol. 78, No. 1, pp. 121_130.
- [30] Sofiyev A.H.; (2015), “On the Vibration and Stability of Shear Deformable FGM Truncated Conical Shells Subjected to An Axial Load”, *Journal of Composites Part B: Engineering*, Vol. 80. No. 1, pp. 53-62.
- [۳۱] شهابی ا.، (۱۳۹۳)، "تحلیل کماتش ترمومکانیکی ورق حلقوی نازک FGM تحت بار فشاری شعاعی یکنواخت و حرارت"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود.
- [32] Koizumi M., (1997), “FGM Activities in Japan”, *Journal of Composites Part B: Engineering*, Vol. 28, No. 1, pp. 1-4.
- [33] Hui-shen, S.; (2009), “**Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells**”, First Edition, CRC Press, Boca Raton.
- [۳۴] میر شفیع ب.، (۱۳۹۰)، "بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد با خواص تابعی (FGM) با در نظر گرفتن جابه‌جایی اولیه، اثرات حرارتی و فشاری"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [35] Ichikawa K., (2001), “**Functionally Graded Materials in the 21st Century: a Workshop on Trends and Forecasts**”, First Edition, Springer Science LLC, New York.
- [36] Tanigawa Y., Morishita H., Ogaki S.; (1999), “Derivation of Systems of Fundamental Equations for a Three-Dimensional Thermoelastic Field with Nonhomogeneous Material Properties and its Application to A Semi-

- infinite Body”, *Journal of Thermal stress*, Vol. 22, No. 7, pp. 689-711.
- [37] Reddy J.N.; (2004), “**Mechanics of Laminated Composite Plates and Shell: Theory and Analysis**”, Second Edition, CRC Press, Boca Raton.
 - [38] Reddy J.N., (2007), “**Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells**”, second edition, CRC Press, Boca Raton.
 - [39] Touloukian Y.S.; (1967), “**Thermo Physical Properties of High Temperature Solid Materials**”, First Edition, McMillan, New York.
 - [40] Reddy J.N., Khdeir A.A.; (1989), “Dynamic Response of Cross-ply Laminated Shallow Shells According to A Refined Shear Deformation Theory”, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 85, No. 6, pp. 2423-2431.
 - [41] Jafari A.A., Khalili S.M.R., Azarafza R.; (2005), “Transient Dynamic Response of Composite Circular Cylindrical Shells Under Radial Impulse Load and Axial Compressive Loads”, *Journal of Thin-Walled Structures*, Vol. 43, No. 11, pp. 1763-1786.
 - [42] Reddy J.N.; (2002), “**Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics**”, Second Edition, John Wiley & Sons, New Jersey.
 - [43] Lim C.Y., Ma Y.F., Kitipornchai S., Wang C.M., Yuen R.K.K.; (2003), “Buckling of Vertical Cylindrical Shells Under Combined End Pressure and Body Force”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 129, No. 8, pp. 876-884.
 - [44] Brush, D.O., Almroth, B.O.; (1975), “**Buckling of Bars, Plates and Shell**”, McGraw-Hill, New York.

Abstract

The purpose of this study is free vibration and buckling analysis of functionally graded cylindrical shell, subjected to static axial load. Material properties of functionally graded cylindrical shell are considered as temperature dependent and graded in the thickness direction according to a power-law distribution. The study is based on third-order shear deformation theory and the obtain equations is conducted on the principle of Hamilton. After obtaining the equations of motion using strain-displacement relations based on first approximation love and replacing them in stress-strain relations, eventually equations of motion is written in terms of displacement components. Boundary conditions of the shell are considered simply supported at both ends. Taking into account the boundary conditions of shell, a displacement field which satisfies the boundary conditions for solving the equations of motion is assumed. Finally, buckling load and natural frequencies are extracted and effects of changes in geometry parameters, material properties, and axial load on buckling load and natural frequency on the structure were discussed. By comparing the results with the references, accuracy of solutions has been validated as well as the increased precision of third-order shear deformation theory.

Keywords: Buckling, Free Vibration, Cylindrical Shell, Functionally Graded Materials, High-order Shear Deformation Theory, Axial Load.



Shahrood University of Technology

School of mechanical Engineering

Vibration and Buckling Analysis of FGM Cylindrical Shell Using Higher-order Shear Deformation Theory under Static Axial Load

By: Sajjad Asadi

Supervisor:

Dr. Alireza Shaterzadeh

M.Sc. Thesis

December 2015